GOVERNMENT OF TAMILNADU

حساب

MATHEMATICS

برائے دسویں جماعت

STANDARD TEN

(URDU MEDIUM)

Department of School Education

Untouchability is Inhuman and a Crime

Government of Tamil Nadu

First Edition - 2019

Revised Edition - 2020, 2021, 2022, 2023

Reprint - 2024

(Published under new syllabus)

Content Creation

State Council of Educational
Research and Training

© SCERT 2019

Printing & Publishing

Tamil NaduTextbook and Educational
Services Corporation

www.textbooksonline.tn.nic.in

10th maths 1. relations and functions
Sunday, February 16, 2020 5:36:48 PM

SYMBOLS علامتیں

$=$	مساوی ہے
$\neq$	غیر مساوی ہے
$<$	کم ہے
$\leq$	کم ہے یا مساوی ہے
$>$	زیادہ ہے
$\geq$	زیادہ ہے یا مساوی ہے
$\approx$	معادل ہے
$\cup$	یونین یا اتحاد
$\cap$	انٹرسکشن یا تقاطع
$\mathbb{U}$	ہمہ گیر مجموعہ یا عظیم مجموعہ
$\in$	اس سے تعلق رکھتا ہے
$\notin$	اس سے تعلق نہیں رکھتا
$\subset$	موزوں تحتی مجموعہ ہے
$\subseteq$	اس کا تحتی مجموعہ ہے یا اس کے اندر ہے
$\not\subseteq$	اس کا تحتی مجموعہ نہیں ہے یا اس کے اندر نہیں ہے
$A' \text{ (or) } A^c$	A کا متمم
$\phi \text{ (or) } \{\ \}$	خالی مجموعہ یا معدوم مجموعہ
$n(A)$	مجموعہ A کے عناصر کی تعداد
$\|\|\|ly$	اسی طرح
$P(A)$	A کا قوتی مجموعہ
$\mathrm{P}(A)$	موقع A کا امکان

Δ	متشاکل فرق
$\mathbb{N}$	طبعی اعداد
$\mathbb{R}$	حقیقی اعداد
$\mathbb{W}$	صحیح اعداد
$\mathbb{Z}$	سالم اعداد
$\triangle$	مثلث
$\angle$	زاویہ
$\perp$	عمودی ہے
$\parallel$	متوازی ہے
$\Longrightarrow$	ظاہر کرتا ہے
$\therefore$	چنانچہ
$\because$	کیوں کہ
$\lvert\ \rvert$	حقیقی قیمت
$\simeq$	تقریباً مساوی ہے
$\mid \text{(or)} :$	اس طرح کہ
$\equiv \text{ (or) } \cong$	متماثل
$\equiv$	متماثل
π	پئی
$\pm$	جمع یا تفریق
$\blacksquare$	ثبوت ختم ہوا

10th maths 1. relations and functions
Sunday, February 16, 2020 5:36:48 PM

اس کتاب میں استعمال کئے گئے تصویری خاکے

எண்ணென்ப ஏனை எழுத்தென்ப இவ்விரண்டும்
கண்ணென்ப வாழும் உயிர்க்கு – குறள் 392

Numbers and letters, they are known as eyes to humans, they are. Kural 392

اعداد اور الفاظ انسان کو اس کے دو آنکھوں کی طرح ہیں۔ تروکرل : 392



10th maths 1. relations and functions
Sunday, February 16, 2020 5:36:49 PM

CONTENTS فہرست

	1-35	**Relations and Functions**	**تعلقات اور تفاعلات**	**1**
جون	1	Introduction	تعارف	1.1
	2	Ordered Pair	ترتیب وار جوڑی	1.2
	2	Cartesian Product	کارتیسی حاصل ضرب	1.3
	6	Relations	تعلقات	1.4
	10	Functions	تفاعلات	1.5
	15	Representation of Functions	تفاعلات کی نمائندگی	1.6
	17	Types of functions	تفاعلات کے اقسام	1.7
	22	Special cases of Functions	تفاعلات کی مخصوص صورتیں	1.8
	26	Composition of Functions	تفاعلات کی ترکیب	1.9
	29	Identifying the graphs of Linear, Quadratic, Cubic and Reciprocal functions	خطی، دودرجی، مکعبی اور مقلوبی تفاعلات کے ترسیموں کی شناخت کرنا	1.10
	36-84	**Numbers and Sequences**	**اعداد اور تواتر**	**2**
جون	37	Introduction	تعارف	2.1
	37	Euclids Division Lemma	اقلیدس کی تقسیم کا تحتی مسئلہ	2.2
	39	Euclids Division Algorithm	اقلیدس کی تقسیم کا مسئلہ	2.3
	43	Fundamental Theorem of Arithmetic	ریاضیات کے بنیادی مسئلے	2.4
	46	Modular Arithmetic	ماڈولر ریاضیات	2.5
	52	Sequences	تواتر	2.6
جولائی	55	Arithmetic Progression	حسابی سلسلے	2.7
	62	Sum to n terms of Arithmetic Progression	حسابی سلسلے کے n رقموں کا حاصل جمع	2.8
	67	Geometric Progression	ہندسی سلسلے	2.9
	73	Sum to n terms of Geometric Progression	ہندسی سلسلے کے n رقموں کا حاصل جمع	2.10
	76	Special Series	خصوصی سلسلے	2.11
	85-160	**Algebra**	**الجبرا**	**3**
جولائی	85	Introduction	تعارف	3.1
	87	Simultaneous Linear Equations in three variables	تین متغیرات والے ہمزاد خطی مساوات	3.2
	93	GCD and LCM of polynomials	کثیر رقمیات کے GCD اور LCM	3.3
اگست	98	Rational expressions	ناطق جملے	3.4
	103	Square root of polynomials	کثیر رقمیات کے جذر المربع	3.5
	106	Quadratic equations	دودرجی مساوات	3.6
اکتوبر	123	Graph of Variations	متغیرات کے لئے ترسیمات	3.7
	130	Quadratic Graphs	دودرجی ترسیمات	3.8
	137	Matrices	میٹریسس	3.9

10th maths 1. relations and functions
Sunday, February 16, 2020 5:36:50 PM

	161-202	**Geometry**	علم ہندسہ	4
جولائی	161	Introduction	تعارف	4.1
	162	Similarity	مشابہت	4.2
اگست	171	Thales Theorem and Angle Bisector Theorem	تھیلس کا مسئلہ اور زاویائی ناصف کا مسئلہ	4.3
	183	Pythagoras Theorem	فیثاغورث کا مسئلہ	4.4
اکتوبر	188	Circles and Tangents	دائرے اور مماس	4.5
	195	Concurrency Theorems	تراکز کا مسئلہ	4.6
	203-238	**Coordinate Geometry**	محددی علم ہندسہ	5
	203	Introduction	تعارف	5.1
	205	Area of a Triangle	ایک مثلث کا رقبہ	5.2
اگست	207	Area of a Quadrilateral	ایک چار ضلعی کا رقبہ	5.3
	212	Inclination of a Line	ایک خط کا میلان	5.4
	221	Straight Line	خطِ مستقیم	5.5
	230	General form of a Straight Line	ایک خطِ مستقیم کی عام شکل	5.6
	239-268	**Trigonometry**	علم مثلث	6
ستمبر	239	Introduction	تعارف	6.1
	242	Trigonometric Identities	علم مثلث کے تماثلات	6.2
نومبر	250	Heights and Distances	بلندیاں اور فاصلے	6.3
	269-300	**Mensuration**	مساحت	7
	269	Introduction	تعارف	7.1
	270	Surface Area	سطحی رقبہ	7.2
	282	Volume	حجم	7.3
نومبر	290	Volume and Surface Area of combined solids	ٹھوس مربوط اجسام کا حجم اور سطحی رقبہ	7.4
	295	Conversion of solids from one shape to another with no change in volume	حجم کی تبدیلی کے بغیر ٹھوس اشیاء کا ایک شکل سے دوسری شکل میں تبدیل کرنا	7.5
	301-334	**Statistics and Probability**	شماریات اور امکان	8
	301	Introduction	تعارف	8.1
	303	Measures of Dispersion	انتشار کی پیمائش	8.2
دسمبر	314	Coefficient of Variation	اختلاف کا ضریب	8.3
	316	Probability	امکان	8.4
	324	Algebra of Events	مواقع کا الجبرا	8.5
	326	Addition Theorem of Probability	امکان میں جمع کا مسئلہ	8.6
	335-343	**Answers**	جوابات	
	344	**Mathematical Terms**	حسابی اصطلاحات	

7P6Y0

E-book

3VJ8B

Evaluation

10th maths 1. relations and functions
Sunday, February 16, 2020 5:36:50 PM

1

تعلقات اور تفاعلات
(RELATIONS AND FUNCTIONS)

Mathematicians do not study objects, but relations between objects . . . Content to them is irrelevant: they are interested in form only Henri Poincare



Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646 1716)

گاٹ فریڈ ولھلم لیبنز (Gott fried wilhelm laibniz) (وون لیبنیز کے نام سے بھی جانے جاتے ہیں) جرمن کے ایک نامور ریاضی دان، فلاسفر، ماہر طبیعات اور ایک موجد بھی تھا۔ وہ 26 موضوعات پر وسیع طور پر ارضیات، علم طب، حیاتیات، علم وبائی امراض، قدیم زندگی کا علم، نفسیات، انجینئرنگ، فلسفہ، معاشرتی، اخلاقیات، تاریخ، سیاست، قانون اور موسیقی کے اُصول پر کتابیں لکھیں۔

ایک قلمی نسخہ میں لیبنیز منحنی خط پر دو نقاط کے درمیان مقدار کی تبدیلی کو ظاہر کرنے کے لئے لفظ ''تفاعل'' کا استعمال کیا ہے۔ لیبنیز نے حسبِ ضابطہ دلائل اور بولین الجبرا کے لئے بنیاد فراہم کیا جو جدید کمپیوٹر کی جان ہے۔ مختلف شعبوں میں اس کے تمام انکشافات نمایاں حصے ادا کئے جانے کی وجہ سے اس کو عملی سائنس کا بانی کہا جاتا ہے۔

Learning Outcomes — سیکھنے کے مقاصد

- مجموعوں کے کارتیسی حاصلِ ضرب کی تعریف اور اس کو معلوم کرنا۔
- تعلقات Relation کی تعریف مجموعوں کے کارتیسی حاصلِ ضرب کے تحتی مجموعہ کے طور پر کرنا۔
- تفاعل کی خصوصیت کو تعلق کے طور پر سمجھنا۔
- تفاعل کے نمائندگی پیکانی نقشہ، (تیر کا خاکہ) ترتیب وار جوڑی کے مجموعے، جدول، اصول یا ترسیم کے ذریعہ کرنا۔
- تفاعلات کو ایک-ایک، کئی-ایک، بروں تفاعل (onto)، دروں تفاعل (into)، دوہرا تفاعل (Bijective Function) میں درجہ بندی کرنا۔
- تفاعل کے اتحاد کو ترکیبی عمل کے ذریعہ سمجھنا۔
- خطی دو درجی، مکعبی اور معکوسی تفاعل کو سمجھنا۔

C5SFE

تعارف : (Introduction)

مجموعہ کا تصور ریاضی کے اعلیٰ نظریہ کو سمجھنے میں ہمیں ابھارتا ہے، اچھی طرح واضح شدہ قابلِ شناخت اشیاء کا مجموعہ سیٹ (Set) کہلاتا ہے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ سیٹ صرف ان اشیاء کا مجموعہ ہے جن کو ہم پہچان سکیں، اس باب میں سیٹ کی اور شکلیں، تعلقات اور تفاعلات کے نظریہ میں اضافہ کرنے کی کوشش کریں گے۔ اس کو سمجھنے کے لئے ہمیں پہلے دو غیر معدوم مجموعوں کے درمیان کارتیسی حاصلِ ضرب کے بارے میں جاننا ضروری ہے۔

یہ بالکل دلچسپی کی بات ہے کہ روزمرہ کے کئی حالات کو ریاضی کے طریقہ سے تعلقات یا تفاعلات کے ذریعہ نمائندگی کر سکتے ہیں۔ مثلاً کسی سواری کے ایک مقررہ وقت میں طے کردہ فاصلہ کو تفاعلات کے طور پر نمائندگی کر سکتے ہیں۔ کسی شئے کی قیمت کو اس کی مانگ کے لحاظ سے تفاعل کے ذریعہ ظاہر کر سکتے ہیں۔ کثیر الاضلاع کا رقبہ، عام شکلوں کا حجم جیسے دائرہ، قائم مدوّر مخروط، قائم مدور استوانہ، کرّہ کو ایک یا دو متغیرات رکھنے

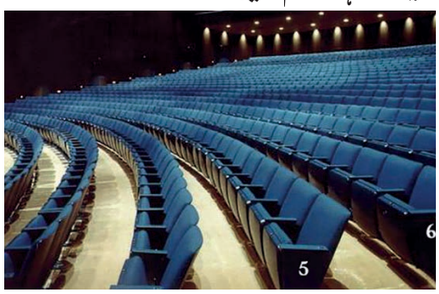
100 95 75 25 5 0

10th maths 1. relations and functions
Sunday, February 16, 2020 5:36:51 PM

والے تفاعل کے طور پر ظاہر کر سکتے ہیں۔

ہم نویں جماعت میں سیٹ کے نظریہ کے بارے میں پڑھ چکے ہیں۔ہم بھی جان چکے ہیں کہ ہم کس طرح اتحاد، تقاطع اور متمم عمل کے ذریعہ نئے سیٹ بنا سکتے ہیں۔

اب ہم ایک نیا سٹ جو کارتیسی حاصلِ ضرب کہلاتا ہے۔جو دو سٹ A اور B کے ذریعہ بنتا ہے، معلوم کریں گے۔



1.2 ترتیب وار جوڑی (ordered Pair)

ایک عوامی ہال (Auditorium) میں بیٹھنے کے ترتیب (خاکہ 1.1) پر غور کرو۔اپنی اپنی نشستوں (seats) پر ترتیب سے بیٹھنے کے لئے $(1,5),(7,16),(3,4),(10,12)$ وغیرہ ٹوکن دئے گئے ہیں۔

جو شخص $(4,10)$ حاصل کرتا ہے، وہ صف 4 میں 10 ویں نشست پر بیٹھے گا۔اس طرح پہلا عدد صف اور دوسرا عدد نشست کو ظاہر کرتا ہے۔ٹوکن $(5,9)$ رکھنے والا تماشائی کونسے نشست پر بیٹھے گا؟ کیا وہ نویں صف پر واقع 5 ویں نشست پر بیٹھے گا؟ کیا $(9,5)$ اور $(5,9)$ ایک ہی مقام کی نشاندہی کرتے ہیں؟ یقیناً نہیں۔ $(2,3),(6,3)$ اور $(10,3)$ ٹوکن کے بارے میں آپ کیا کہتے ہیں؟

اس طرح ایک جوڑی اعداد جو ایک متعین ترتیب میں لکھے ہوتے ہیں صاف طور پر ایک مقام کی نشاندہی کرتے ہیں۔اس طرح کے جوڑی اعداد، ترتیب وار جوڑی اعداد کہتے ہیں۔یہ نظریہ، تعلقات کے تصور کو نہایت مہارت سے ریاضیاتی بنایا گیا ہے۔

1.3 کارتیسی حاصلِ ضرب : (Cartesian Product)

تشریح

اب ہم ذیل کے دو مجموعوں پر غور کرتے ہیں، A 3 ترکاریوں کا مجموعہ ہے اور B 4 پھلوں کا مجموعہ ہے یعنی

$A =$ { گاجر، بیگن، بھنڈی } اور $B =$ {سیب، سنترہ، انگور، اسٹرابیری}

ایک ترکاری اور ایک پھل کو انتخاب کرنے کے کتنے ممکن طریقے ہیں؟ (نقشہ 1.2)

B پھل	A ترکاریاں
سیب (a)	گاجر (c)
سنترہ (o)	بیگن (b)
انگور (g)	بھنڈی (l)
اسٹرابیری (s)	

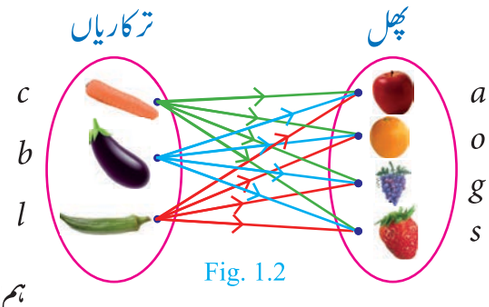


Fig. 1.2

ہم ان کو حسب ذیل 12 واضح جوڑیوں کے طور پر منتخب کر سکتے ہیں۔

$(c, a), (c, o), (c, g), (c, s), (b, a), (b, o), (b, g), (b, s), (l, a), (l, o), (l,g), (l, s)$

یہ ذخیرہ، ترکاریوں کے مجموعہ اور پھلوں کے مجموعہ کے کارتیسی حاصل ضرب کو ظاہر کرتا ہے۔

تعریف : (Definition) اگر A اور B دو غیر معدوم مجموعے ہوں، تو تمام ترتیب وار جوڑی (a,b) کا مجموعہ، اس طرح کہ $a \in A,\ b \in B$، A اور B کا کارتیسی حاصلِ ضرب کہلاتا ہے۔اور اس کو $A \times B$ سے ظاہر کرتے ہیں،

اس طرح $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$. (اسے A کراس B کہیں گے)

10th maths 1. relations and functions
Sunday, February 16, 2020 5:36:52 PM

غور کیجئے

- $A \times B$ ایک مجموعہ ہے جو A اور B کے تمام ممکن ترتیب وار جوڑیوں سے بنا ہے اس طرح کہ پہلا محدد (Coordinate) A کا عنصر ہے اور دوسرا محدّد B کا عنصر ہے۔
- $B \times A$ ایک مجموعہ ہے جو A اور B کے تمام ممکن ترتیب وار جوڑیوں سے بنا ہے اس طرح کہ پہلا محدّد B کا عنصر ہے اور دوسرا محدّد A کا عنصر ہے۔
- عام طور پر $(a,b) \neq (b,a)$ اور خاص طور پر اگر $a = b$ ہوتو $(a,b) = (b,a)$
- کارتیسی حاصل ضرب کو کراس حاصل ضرب بھی کہا جاتا ہے۔

تشریح 2 : فرض کرو $A = \{1,2,3\}$، $B = \{a,b\}$ ہوتو $A \times B$ اور $B \times A$ لکھئے۔ (جیسا کہ خاکہ 1.3 میں دکھایا گیا ہے)

$A \times B = \{1,2,3\} \times \{a,b\} = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$ (جیسا کہ خاکہ 1.3 میں دکھایا گیا ہے)

$B \times A = \{a,b\} \times \{1,2,3\} = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$ (جیسا کہ خاکہ 1.3 میں دکھایا گیا ہے)

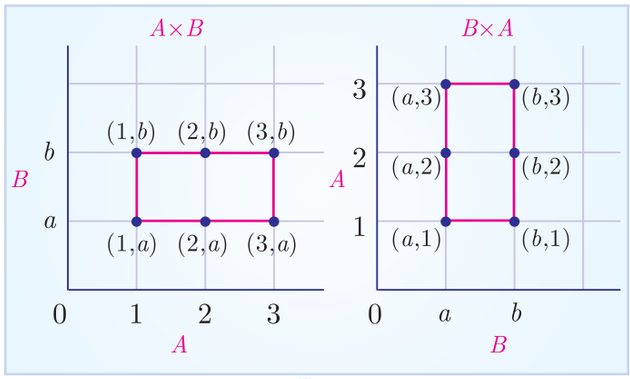


Fig. 1.3

ذرا سوچئے

کب $A \times B$ اور $B \times A$ مساوی ہوگا؟

غور کیجئے

(i) عام طور پر $A \times B \neq B \times A$ لیکن $n(A \times B) = n(B \times A)$

(ii) اگر صرف اور صرف $A = \phi$ یا $B = \phi$ اگر $A \times B = \phi$

(iii) اگر $n(A) = p$ اور $n(B) = q$ ہوتو $n(A \times B) = pq$

لامحدود معیاری مجموعوں کی یاددہانی (Recall of Standard Infinite sets)

طبعی اعداد $\mathbb{N} = \{1,2,3,4, \ldots\}$; صحیح اعداد $\mathbb{W} = \{0,1,2,3, \ldots\}$

سالم اعداد $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$; ناطق اعداد $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \mid p,q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$

حقیقی اعداد $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$; جہاں $\mathbb{Q}'$ تمام غیر ناطق اعداد کا مجموعہ

تشریح 3 مثال کے طور پر فرض کرو، مجموعہ A وقفہ $[3,5]$ کے تمام اعداد ہیں اور مجموعہ B وقفہ $[2,3]$ کے تمام اعداد ہیں۔ تو کارتیسی حاصلِ ضرب $A \times B$ مستطیلی علاقہ کی نشاندہی کرتا ہے۔ جو (خاکہ 1.4) میں بتلایا گیا ہے، اس علاقے میں (x,y) کے تمام نقاط موجود ہیں۔

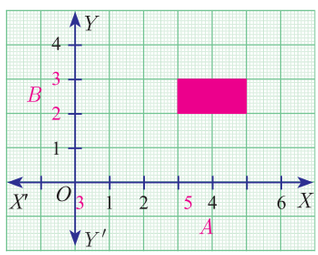


Fig. 1.4

Progress Check اپنی پیش رفت کی جانچ

1۔ کوئی دو غیر معدوم مجموعے A اور B کے لئے $A \times B$ کو ..... کہتے ہیں۔

2۔ اگر $n(A \times B) = 20$ اور $n(A) = 5$ ہوتو $n(B) =$ .....

3۔ اگر $A = \{-1,1\}$ اور $B = \{-1,1\}$ ہوتو $A \times B$ کے نقاط کے مجموعے کو بذریعہ علم ہندسہ (Geometrically) واضح کرو۔

4۔ اگر A, B قطاع خط ہیں جن کے وقفے بالترتیب $(-4,3)$ اور $(-2,3)$ ہوں تو A اور B کے کارتیسی حاصلِ ضرب کی نشاندہی کرو۔

10th maths 1. relations and functions
Sunday, February 16, 2020 5:36:52 PM

غور کیجئے

کارتیسی سطح پر موجود تمام نقطوں کو تمام ترتیب دار جوڑیاں (x,y) کے طور پر مشاہدہ کیا جا سکتا ہے، جہاں x اور y حقیقی اعداد ہیں۔
حقیقت میں $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ تمام نقاط کا مجموعہ ہے جسے ہم کارتیسی سطح کہتے ہیں۔

Activity 1 کارروائی 1

فرض کرو $A=\{x \mid x\in\mathbb{N}, x\leq 4\}$، $B=\{y \mid y\in\mathbb{N}, y<3\}$ ہوتو $A\times B$ اور $B\times A$ کو ترسیمی کاغذ پر ظاہر کیجئے۔
کیا تم $A\times B$ اور $B\times A$ کے درمیان میں کوئی فرق دیکھتے ہو؟

مثال 1.1 اگر $A=\{1,3,5\}$، $B=\{2,3\}$ ہوتو (i) $A\times B$ اور $B\times A$ معلوم کیجئے؟ (ii) کیا $A\times B=B\times A$ ہے ؟ اگر نہیں تو کیوں؟ ثابت کیجئے کہ $n(A\times B)=n(B\times A)=n(A)\times n(B)$ ہے۔

حل : دیا گیا ہے کہ، $A=\{1,3,5\}$ and $B=\{2,3\}$

(i) $A\times B=\{1,3,5\}\times\{2,3\}=\{(1,2),(1,3),(3,2),(3,3),(5,2),(5,3)\}$ ...(1)

$B\times A=\{2,3\}\times\{1,3,5\}=\{(2,1),(2,3),(2,5),(3,1),(3,3),(3,5)\}$ ...(2)

(ii) (1) اور (2) سے ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ $A\times B\neq B\times A$ کیوں کہ $(1,2)\neq(2,1)$ اور $(1,3)\neq(3,1)$ وغیرہ۔

(iii) $n(A)=3$, $n(B)=2$

(1) اور (2) سے ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ، $n(A\times B)=n(B\times A)=6$

اور $n(A)\times n(B)=3\times 2=6$

لہذا، $n(A\times B)=n(B\times A)=n(A)\times n(B)=6$

اس لئے $n(A\times B)=n(B\times A)=n(A)\times n(B)$

مثال 1.2 اگر $A\times B=\{(3,2),(3,4),(5,2),(5,4)\}$ ہوتو A اور B معلوم کرو۔

حل : $A\times B=\{(3,2),(3,4),(5,2),(5,4)\}$

A لہذا، $\{A\times B$ کے تمام عناصر کے پہلے محدودوں کا مجموعہ$\}=\{3,5\}$

B لہذا، $\{A\times B$ کے تمام عناصر کے دوسرے محدودوں کا مجموعہ$\}=\{2,4\}$

اس طرح $A=\{3,5\}$ اور $B=\{2,4\}$

مثال 1.3 فرض کرو $A=\{x\in\mathbb{N} \mid 1<x<4\}$، $B=\{x\in\mathbb{W} \mid 0\leq x<2\}$ اور $C=\{x\in\mathbb{N} \mid x<3\}$ ہوتو
ذیل کی تصدیق کیجئے۔ (i) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$ (ii) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

حل :

$A=\{x\in\mathbb{N} \mid \ <x<\ \}=\{2,3\}$, $B=\{x\in\mathbb{W} \mid 0\leq x<2\}=\{0,1\}$,
$C=\{x\in\mathbb{N} \mid x<3\}=\{1,2\}$

(i) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

$B\cup C=\{0,1\}\cup\{1,2\}=\{0,1,2\}$

$A\times(B\cup C)=\{2,3\}\times\{0,1,2\}=\{(2,0),(2,1),(2,2),(3,0),(3,1),(3,2)\}$ ... (1)

$A\times B=\{2,3\}\times\{0,1\}=\{(2,0),(2,1),(3,0),(3,1)\}$

$A\times C=\{2,3\}\times\{1,2\}=\{(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$

10th maths 1. relations and functions
Sunday, February 16, 2020 5:36:53 PM

$$(A\times B)\cup(A\times C) = \{(2,0),(2,1),(3,0),(3,1)\}\cup\{(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$$
$$= \{(2,0),(2,1),(2,2),(3,0),(3,1),(3,2)\} \quad \ldots(2)$$

(1) اور (2) سے $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$ کی تصدیق ہوتی ہے۔

(ii) $A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$

$$B\cap C = \{0,1\}\cap\{1,2\} = \{1\}$$
$$A\times(B\cap C) = \{2,3\}\times\{1\} = \{(2,1),(3,1)\} \quad \ldots(3)$$
$$A\times B = \{2,3\}\times\{0,1\} = \{(2,0),(2,1),(3,0),(3,1)\}$$
$$A\times C = \{2,3\}\times\{1,2\} = \{(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$$
$$(A\times B)\cap(A\times C) = \{(2,0),(2,1),(3,0),(3,1)\}\cap\{(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$$
$$= \{(2,1),(3,1)\} \quad \ldots(4)$$

(3) اور (4) سے $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$ کی تصدیق ہوتی ہے۔

غور کیجئے

مندرجہ بالا دو تصدیق شدہ خاصیتوں کو بالترتیب اتحاد اور تقاطع پر کارتیسی حاصلِ ضرب کی تقسیمی خاصیت کہلاتی ہے۔ حقیقت میں کسی A، B اور C تین مجموعوں کے لئے

(i) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$ (ii) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$.

1.3.1 تین مجموعوں کا کارتیسی حاصلِ ضرب (Castesian Product of three Sets)

اگر A، B اور C تین غیر معدوم مجموعے ہوں تو تین مجموعوں کا کارتیسی حاصلِ ضرب، تمام ممکن ترتیب وار جوڑیوں کا ثلاثہ (Triplet) ہے جیسا کہ ذیل میں درج ہے۔

$$A\times B\times C = \{(a,b,c) \text{ تمام کے لئے } a\in A, b\in B, c\in C\}$$

دو اور تین مجموعوں کے کارتیسی حاصلِ ضرب کو علمِ ہندسہ کے طور پر سمجھنے کے لئے تشریح

فرض کرو $A=\{0,1\},\ B=\{0,1\},\ C=\{0,1\}$

$$A\times B = \{0,1\}\times\{0,1\} = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$$

$A\times B$ کو مسطح xy پر نشاندہی کرنے سے ہمیں 1.5 کا خاکہ حاصل ہوتا ہے۔

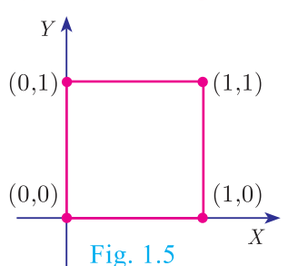


Fig. 1.5

$$(A\times B)\times C = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}\times\{0,1\}$$
$$= \{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1)(1,1,0),(1,1,1)\}$$

$A\times B\times C$ کو مسطح XYZ پر نشاندہی کرنے سے ہمیں خاکہ 1.6 حاصل ہوتا ہے۔

اس طرح $A\times B$ دو ابعاد (Two dimensions) مربع کے راسوں کو ظاہر کرتا ہے اور $A\times B\times C$ تین ابعاد میں ایک مکعب کے راسوں کو ظاہر کرتا ہے۔

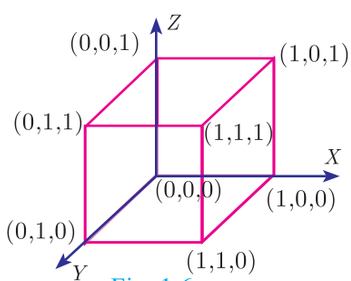


Fig. 1.6

غور کیجئے

- عام طور پر دو غیر معدوم مجموعوں کا کارتیسی حاصلِ ضرب دو ابعاد میں ایک شکل کو ظاہر کرتا ہے اور تین غیر معدوم مجموعوں کا کارتیسی حاصلِ ضرب تین ابعاد میں ایک شئے کو ظاہر کرتا ہے۔

10th maths 1. relations and functions
Sunday, February 16, 2020 5:36:53 PM

مشق 1.1

1۔ $A \times B$، $A \times A$ اور $B \times A$ معلوم کرو (i) $A = \{2,-2,3\}$ اور $B = \{1,-4\}$ (ii) $A = B = \{p,q\}$

(iii) $A = \{m,n\}$; $B = \phi$

2۔ فرض کرو $A = \{1,2,3\}$ اور $\{ x \mid x$ ، 10 سے کم اعداد اولیٰ ہے$\}$ ہوتو B اور $A \times B$ اور $B \times A$ معلوم کرو۔

3۔ اگر $B \times A = \{(-2,3),(-2,4),(0,3),(0,4),(3,3),(3,4)\}$ ہوتو A اور B معلوم کرو۔

4۔ اگر $A = \{5,6\}$، $B = \{4,5,6\}$، $C = \{5,6,7\}$ ہوتو ثابت کیجئے کہ $A \times A = (B \times B) \cap (C \times C)$ ہے۔

5۔ دیا گیا ہے $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,5\}$, $C = \{3,4\}$, $D = \{1,3,5\}$ ہوتو تصدیق کرو۔

$(A \cap C) \times (B \cap D) = (A \times B) \cap (C \times D)$ کیا صحیح ہے؟

6۔ فرض کرو $A = \{x \in \mathbb{W} \mid x<2\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x \leq 4\}$, $C = \{3,5\}$ ہوتو تصدیق کرو کہ

(i) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ (ii) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

(iii) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

7۔ فرض کرو کہ، 8 کم تمام طبعی اعداد کا مجموعہ ہے $= A$, 8 سے کم اعداد اولیٰ کا مجموعہ ہے $= B$, جفت اعدادِ اولیٰ کا مجموعہ ہے $= C$

ہوتو تصدیق کرو کہ (i) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$ (ii) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

1.4 تعلقات (Relations)

کئی روزمرہ پیش آنے والے واقعات میں ایک دوسرے سے مطابقت رکھنے والے دو اشیاء کا تعلق کسی اصول کے تحت ہوتا ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ وہ دو اشیاء کسی خاص اُصول (Rule) کے تحت ایک دوسرے سے تعلق رکھتے ہیں۔ ہم ان کی کس طرح نمائندگی کر سکتے ہیں؟ یہاں چند مثالیں ہیں۔

ترتیب وار جوڑی کے طور پر ظاہر کرنا	علامت $\mathbb{R}$ کے ذریعہ ظاہر کرنا	تعلق
(نئی دہلی، ہندوستان)	نئی دہلی $\mathbb{R}$ ہندوستان	نئی دہلی ہندوستان کا پایہ تخت ہے۔
(خط AB، خط XY)	خط AB ، $\mathbb{R}$ ، خط XY	خط AB، خط XY کے عمودی ہے۔
$(-1,-5)$	-1 $\mathbb{R}$ -5	-1 بڑا ہے -5 سے
(ℓ ,ΔPQR)	ℓ $\mathbb{R}$ ΔPQR	ΔPQR کا خط تشاکل ℓ ہے۔

نئی دہلی کس طرح ہندوستان سے تعلق رکھتا ہے۔ ہم اس جواب کو توقع رکھ سکتے ہیں۔" نئی دہلی ہندوستان کا صدر مقام ہے۔ "لیکن کئی لحاظ سے 'نئی دہلی' کا تعلق 'ہندوستان' سے ہے۔ چند ممکن جوابات یہ ہیں۔

- نئی دہلی ہندوستان کا صدر مقام ہے۔
- نئی دہلی ہندوستان کے شمالی حصہ میں ہے۔
- نئی دہلی ہندوستان کے بڑے شہروں میں سے ایک شہر ہے۔

اس لئے ہم کسی خاص تعلق کو متعین کرتے ہیں تا کہ صرف ایک ترتیب وار جوڑی حاصل ہو۔

100 95 75 25 5 0

10th maths 1. relations and functions
Sunday, February 16, 2020 5:36:54 PM

(ہندوستان، نئی دہلی) عملی طور پر مددگار ثابت نہیں ہوسکتا۔ اگر ہم ذیل کے ترتیب وار جوڑیوں کے مجموعہ کے طور پر تعلق کے بارے میں سوال کریں (نیپال، کھٹمنڈو)، (UK، لندن)، (چین، بیجنگ)، (USA، واشنگٹن)، (ہندوستان، دہلی) تو تعلق کا تعین کرنا آسان ہوجاتا ہے۔

Progress Check — اپنی پیش رفت کی جانچ

فرض کیجئے کہ $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{a,b,c\}$

1. ذیل کا کونسا تعلق A سے B کی جانب ہے	2. ذیل کا کونسا تعلق B سے A کی جانب ہے۔
(i) { (1, b), (1, c), (3, a), (4, b) }	(i) { (c, a), (c, b), (c, 1) }
(ii) { (1, a), (b, 4), (c, 3) }	(ii) { (c, 1), (c, 2), (c, 3), (c, 4) }
(iii) { (1, a), (a, 1), (2, b), (b, 2) }	(iii) { (a, 4), (b, 3), (c, 2) }

تشریح 4 :

اونچائیاں (فیٹ میں)	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}
ایک جماعت کے طلباء	4.5	5.2	5	4.5	5	5.1	5.2	5	4.7	4.9

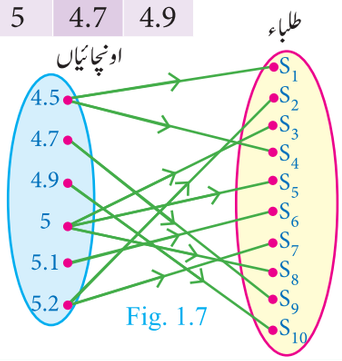


Fig. 1.7

اب ہم اونچائیوں سے مطابقت رکھنے والے طلباء کے درمیانی تعلق کی وضاحت (Define) کریں گے۔

$R = \{$طلباء، اونچائیاں$\}$

$$R = \{(4.5, S_1),\ (4.5, S_4),\ (4.7, S_9),\ (4.9, S_{10}),\ (5, S_3),\ (5, S_5),\ (5, S_8),\ (5.1, S_6),\ (5.2, S_2),\ (5.2, S_7)\}$$

تعریف فرض کرو A اور B دو غیر معدوم مجموعے ہیں۔ A سے B کی جانب **تعلق** $\mathbb{R}$، $A \times B$ کا تحتی مجموعہ ہے۔ جو چند مخصوص شرائط کو پورا کرتا ہے۔ اگر $x \in A$ تعلق $\mathbb{R}$ کے ذریعہ $y \in B$ سے تعلق رکھتا ہے۔ تو ہم اس کو $x\ \mathbb{R}\ y$ کے طور پر لکھتے ہیں۔

$x\ \mathbb{R}\ y$ اگر صرف اور صرف $(x, y) \in \mathbb{R}$ ہو۔

تعلق $\mathbb{R}$ = $\mathbb{R} = \{x \in A \mid x\mathbb{R}y,$ کسی $y \in B\}$ کا علاقہ (Domain)

تعلق $\mathbb{R}$ کا معاون علاقہ (Co.domain) B ہے۔

تعلق $\mathbb{R}$ کی وسعت = $\mathbb{R} = \{y \in B \mid x\mathbb{R}y,$ کسی $x \in A\}$

ان تمام توضیعات (Definition) سے ہم یہ نوٹ کرتے ہیں کہ $R < A$ کا علاقہ، $\mathbb{R}=B$ کا معاون علاقہ اور $\mathbb{R}\subseteq B$ کی وسعت (Range) ہے۔

علاقہ (Domain) $\mathbb{R} = \{x \in A \mid (x, y) \in \mathbb{R}$ کسی $x \in A, y \in B\}$

وسعت (Range) $\mathbb{R} = \{y \in B \mid (x, y) \in \mathbb{R}$ کسی $x \in A, y \in B\}$

تشریح 5 : فرض کرو $A = \{1,2,3,4,5\}$ اور $B =$ {خان، احمد، یونس} مندرجہ بالا دو مجموعے A اور B کے درمیان تعلق $\mathbb{R}$ کو تیر کے خاکہ (خاکہ 1.8) سے ظاہر کرسکتے ہیں۔

$\mathbb{R} = \{1,2,3,4,5\}$ کا علاقہ

$\mathbb{R}$ کا معاون علاقہ = {خان، احمد، یونس}

$\mathbb{R}$ کی وسعت

غور کیجئے کہ $\mathbb{R}$ کا علاقہ A کا موزوں تحتی مجموعہ ہے۔

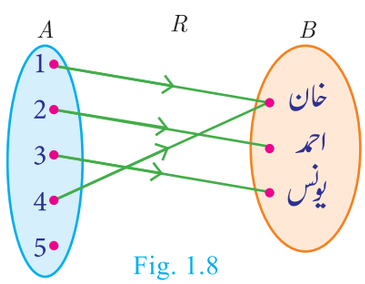


Fig. 1.8

10th maths 1. relations and functions
Sunday, February 16, 2020 5:36:55 PM

Activity 2 کارروائی 2

فرض کرو کہ مسطح xy- پر A اور B خطوط کے مجموعے ہیں اسی طرح کہ X,A محور کے متوازی خطوط رکھتا ہے۔
$x \in A$, $y \in B$ کے لئے فرض کرو تعلق $\mathbb{R}$ ، A سے B کی جانب اس طرح وضاحت کی گئی ہے کہ $x\mathbb{R}y$ اگر x عمودی ہے y کے، ترسیمی کاغذ استعمال کرتے ہوئے B کے عناصر معلوم کرو۔

تشریح 6 : فرض کرو کہ $A = \{1,3,5,7\}$ اور $B = \{4,8\}$ ہے۔ اگر $\mathbb{R}$ ایک تعلق ہے جس کی وضاحت A سے B کی جانب چھوٹا ہے سے کئی گئی ہو تو $1\mathbb{R}4$ (کیوں کہ '1' چھوٹا ہے 4 سے) آپ غور کر سکتے ہیں کہ $1\mathbb{R}8,\ 3\mathbb{R}4,\ 3\mathbb{R}8,\ 5\mathbb{R}8,\ 7\mathbb{R}8$
معادل طور سے $\mathbb{R}=\{(1,4), (1,8), (3,4), (3,8), (5,8), (7,8)\}$

غور کیجئے

اوپر کی تشریح سے $A\times B = \{(1,4), (1,8), (3,4), (3,8), (5,4), (5,8), (7,4),(7,8)\}$
$\mathbb{R} = \{(1,4), (1,8), (3,4), (3,8), (5,8), (7,8)\}$ ہمیں معلوم ہوتا ہے $\mathbb{R}$ ، $A \times B$ کا تحتی مجموعہ ہے۔

تشریح 7 : کسی شہر کے ایک مخصوص علاقے میں دس خاندان I,H,G,F,E,D,C,B,A اور J دو بچے رکھتے ہیں۔ ان خاندانوں میں I,F,B دو لڑکیاں رکھتے ہیں۔ D,G,J ایک لڑکے اور ایک لڑکی رکھتے ہیں اور باقی خاندانوں میں دو لڑکے ہیں۔ اب ہم ایک تعلق $\mathbb{R}$ کی توضیح اس طرح کریں کہ $x\mathbb{R}y$ جہاں x لڑکوں کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے، اور y خاندان کو ظاہر کرتا ہے، جو x لڑکے رکھتے ہیں اس صورتِ حال کو ترتیب وار جوڑی تیر کے خانے کے طور پر اس تعلق کا اظہار کرتے ہیں۔

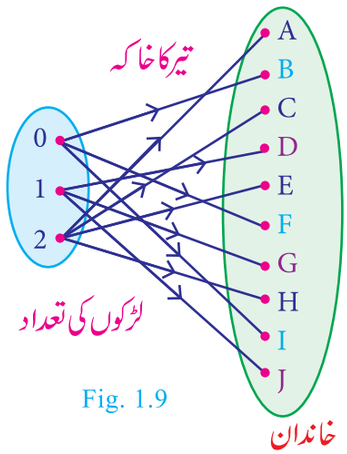


Fig. 1.9

چونکہ تعلق $\mathbb{R}$ کا علاقہ لڑکوں کی تعداد سے وابستہ ہے اور ہم دو بچے رکھنے والے خاندان کے بارے جانچ کر رہے ہیں $\mathbb{R}$ کا علاقہ تین عناصر $\{0,1,2\}$ پر مشتمل ہوگا۔ جہاں 1,0 اور 2 لڑکوں کی تعداد یعنی بالترتیب، کوئی لڑکا نہیں، 1 لڑکا اور 2 لڑکوں کو ظاہر کرتا ہے۔
غور کریں کہ 2 لڑکیوں کے خاندان میں کوئی لڑکا نہیں ہے۔ لہذا، تعلق $\mathbb{R}$ کی توضیح اس طرح ہے۔

$$\mathbb{R}=\{(0,B),(0,F),(0,I),(1,D),(1,G),(1,J),(2,A),(2,C),(2,E),(2,H)\}$$

اس تعلق کو تیر کا خاکہ سے واضح کیا گیا ہے۔ (خاکہ 1.9)

مثال 1.4 فرض کرو کہ $A = \{3,4,7,8\}$ اور $B = \{1,7,10\}$ ہیں۔ ذیل کے کونسے مجموعے A سے B کی جانب تعلقات ہیں؟

(i) $\mathbb{R}_1=\{(3,7), (4,7), (7,10), (8,1)\}$ (ii) $\mathbb{R}_2 = \{(3,1), (4,12)\}$

(iii) $\mathbb{R}_3= \{(3,7), (4,10), (7,7), (7,8), (8,11), (8,7), (8,10)\}$

$\{(3,1), (3,7), (3,10), (4,1), (4,7), (4,10), (7,1),\ (7,7), (7,10), (8,1), (8,7), (8,10)\}$

حل : $A\times B = \{(3,1), (3,7), (3,10), (4,1), (4,7), (4,10), (7,1),\ (7,7), (7,10), (8,1), (8,7), (8,10)\}$

(i) ہم مشاہدہ کیا کہ $\mathbb{R}_1 \subseteq A \times B$ ہے۔ لہذا، $\mathbb{R}_1$ ، A سے B کی جانب تعلق ہے۔

(ii) یہاں $(4,12) \in \mathbb{R}_2$ لیکن $(4,12) \notin A \times B$ اس لئے $\mathbb{R}_2$ ، A سے B کی جانب تعلق نہیں ہے۔

(iii) یہاں $(7,8) \in \mathbb{R}_3$ لیکن $(7,8) \notin A \times B$ اس لئے $\mathbb{R}_3$ ، A سے B کی جانب تعلق نہیں ہے۔

10th maths 1. relations and functions
Sunday, February 16, 2020 5:36:55 PM

غور کیجئے

3۔ ایک تعلق کو الجبریائی طور پر روسٹر طریقے (Roster Method) یا سیٹ بلڈر کا طریقہ (Set Builder Method) کے طور پر ظاہر کرتے ہیں۔

4۔ ایک تیر کا خاکہ تعلق کا بصری نمائندگی (Visual Representation) ہے۔

مثال 1.5 تیر کا خاکہ (خاکہ 1.10) مجموعے P اور Q کے درمیان کے تعلق کو ظاہر کرتا ہے، اس تعلق کو (i) سیٹ بلڈر کی شکل (ii) روسٹر شکل (iii) $\mathbb{R}$ کا علاقہ اور وسعت کیا ہے؟

حل : (i) سیٹ بلڈر کی شکل $\mathbb{R} = \{(x, y) \mid y = x - 2,\ x \in P, y \in Q\}$

(ii) کی روسٹر شکل $\mathbb{R} = \{(5,3),(6,4),(7,5)\}$

(iii) کا علاقہ $\mathbb{R} = \{5,6,7\}$ اور کی وسعت $\mathbb{R} = \{3,4,5\}$

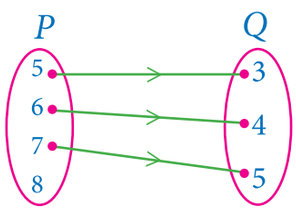


Fig. 1.10

معدوم تعلق (Null Relation)

ہم ذیل کے مثال پر غور کرتے ہیں۔ فرض کرو کہ $A = \{-3,-2,-1\}$ اور $B = \{1,2,3,4\}$ سیٹ ہیں۔ ایک تعلق A سے B کی جانب اس طرح تشریح کی گئی ہے کہ $a - b = 8$ ہے۔ یعنی، اس طرح کی کوئی جوڑی (a,b) نہیں ہے۔ جو $a - b = 8$ ہو۔ اس طرح $\mathbb{R}$ کوئی عنصر نہیں رکھتا ہے اس لئے $\mathbb{R} = \phi$ ہے۔ ایک رشتہ جو کوئی عنصر نہیں رکھتا ہے **معدوم تعلق** کہلاتا ہے۔

کیا تم جانتے ہو؟

اگر $n(A) = p$ ، $n(B) = q$ ہو تو A سے B کی کل تعلق کی تعداد 2^{pq} ہے۔

مشق 1.2

1۔ فرض کرو کہ $A = \{1,2,3,7\}$ اور $B = \{3,0,-1,7\}$ ہو تو A سے B کی جانب ذیل کے کونسے تعلق (Relation) ہیں؟

(i) $\mathbb{R}_1 = \{(2,1), (7,1)\}$ (ii) $\mathbb{R}_2 = \{(-1,1)\}$

(iii) $\mathbb{R}_3 = \{(2,-1), (7,7), (1,3)\}$ (iv) $\mathbb{R}_4 = \{(7,-1), (0,3), (3,3), (0,7)\}$

2۔ اگر $A = \{1,2,3,4,...,45\}$ اور A ہر تعلق کی تشریح "کسی عدد کا مربع" ہے سے کی گئی ہے۔ $\mathbb{R}$ کو $A \times A$ کے تحتی مجموعہ کے طور پر لکھو۔ $\mathbb{R}$ کا علاقہ (Domain) اور وسعت (Range) معلوم کرو۔

3۔ ایک تعلق $\mathbb{R}$ مجموعہ سے دیا گیا ہے، $\{(x, y) / y = x + 3,\ x \in \{0,1,2,3,4,5\}\}$ اس کا علاقہ اور وسعت معلوم کرو۔

4۔ سیٹ بلڈر کی شکل کے ذریعہ دئے گئے ذیل کے تعلقات پر غور کرو۔ ہر ایک کو ذیل کی صورتوں میں ظاہر کرو (a) تیر کا خاکہ (b) ترسیم (c) روسٹر شکل کی سیٹ (مجموعہ) میں، جہاں کہیں ممکن ہو۔

(i) $\{(x,y) \mid x = 2y,\ x \in \{2,3,4,5\},\ y \in \{1,2,3,4\}$

(ii) $\{(x,y) \mid y = x+3,\ x, y$ طبعی اعداد $< 10\}$

5۔ ایک کارخانے میں چار قسم کے ملازمین ہیں۔ جن میں اسٹینٹ (A)، کلرک (C)، مینیجر (M) اور ایکزیکیٹیو افسر (E) ہیں۔ اگر کمپنی انہیں ₹10,000, ₹25,000، ₹50,000 اور ₹1,00,000 بالترتیب A, C, M اور E کو تنخواہ مہیا کرتی ہے۔ اگر

10th maths 1. relations and functions
Sunday, February 16, 2020 5:36:56 PM

A_1, A_2, A_3, A_4 اور A_5 اسٹنٹ ہوں، C_1, C_2, C_3 اور C_4 کلرک ہوں، M_1, M_2 اور M_3 مینیجر ہوں اور E_1, E_2 ایگزیکٹیو افسر ہوں، اگر تعلق $\mathbb{R}$ کی تشریح $x\,\mathbb{R}\,y$ سے کی جاتے جہاں تنخواہ x اور فرد y کو دی جائے تو تعلق $\mathbb{R}$ کو ترتیب وار جوڑی اور تیر کے خاکہ سے واضح کرو۔

1.5 تفاعلات (Functions)

دو غیر معدوم مجموعوں کے درمیان موجود تعلقات میں سے چند اہم مخصوص تعلقات کے بارے میں مزید تحقیق کریں گے۔ ایسے تعلقات کو ''تفاعلات'' کہتے ہیں۔

تشریح 8 : کسی کارخانہ میں 5 ملازمین مختلف شعبوں میں کام کرتے ہیں۔ اگر ان کے ایک ماہ کی تنخواہ کی تقسیم تیر کے خاکہ (خاکہ 1.11) کے مطابق کی جاتی ہو تو ہم دیکھتے ہیں کہ ہر ایک ملازم کا تعلق ایک ہی تنخواہ سے ہوتا ہے۔

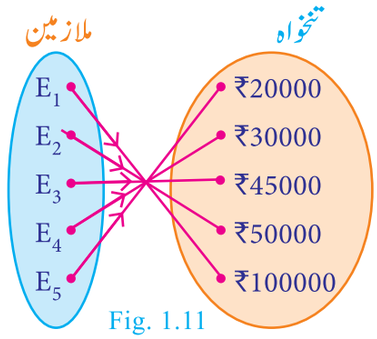


Fig. 1.11

یہاں ہم زندگی کے حقیقی حالات میں چند مخصوص تعلقات کے بارے میں غور کریں گے۔

1۔ فرض کرو A تمام ہم جماعت طلباء کا مجموعہ ہے۔ ہر ایک طالب علم کی مخصوص عمر ہوگی۔

2۔ تم کسی دکان کو ایک کتاب خریدنے جاتے ہو۔ اگر تم کسی کتاب کو لیتے ہو تو اس کی صرف ایک قیمت ہوگی۔ ایک کتاب کی دو قیمتیں نہیں ہوسکتیں (اس طرح کی کئی کتابوں کی ایک قیمت ہوسکتی ہے)

3۔ تم بائل کا کلیہ (Boyle's Law) کے بارے میں جانتے ہو۔ ہر ایک دباؤ (Pressure) P کے لئے حجم V کی صرف قیمت ہوتی ہے۔

4۔ معاشیات (Economics) میں مقدار کی مانگ کو $Q = 360 - 4P$ کے طور پر ظاہر کیا جاتا ہے جہاں P اشیاء کی قیمت ہے۔ ظاہر ہے کہ ہر ایک P کی قیمت کے لئے Q کی صرف ایک قیمت ہوگی۔ لہذا مقدار کی مانگ Q اشیاء کی قیمت P پر منحصر ہے۔

ہم چند ایسے تعلقات کا سامنا کرتے ہیں۔ جس میں مجموعہ A کے ہر عنصر کے لئے مجموعہ B میں صرف نظیری عنصر (Corresponding element) ہوگا ایسے تعلقات کو تفاعلات کہتے ہیں۔ ہم عام طور تفاعلاتی تعلق کو علامت 'f' سے ظاہر کرتے ہیں۔

تعریف : دو غیر معدوم مجموعے X اور Y کے درمیان تعلق f کو x سے y کی جانب تفاعل اس وقت کہتے ہیں۔ جب کہ ہر ایک $x \in X$ کے لئے صرف ایک $y \in Y$ موجود ہو، اس طرح کہ

$(x,y) \in f$ یعنی، $x \in X, y \in Y$ تمام کے لئے $f = \{(x,y)\}$

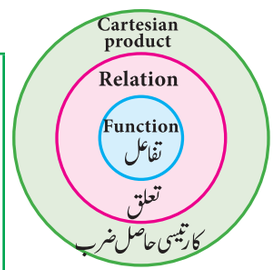


Fig. 1.12(a)

X سے Y کی جانب تفاعل f کو اس طرح لکھتے ہیں۔ $f : X \to Y$

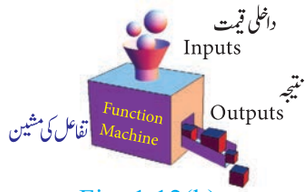


Fig. 1.12(b)

تعلق اور تفاعل کے تعریفوں کا موازنہ کرتے ہیں تو ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ ہر تفاعل ایک تعلق ہے۔ اس طرح تفاعلات، تعلقات کے تحتی مجموعے ہیں اور تعلقات کارتیسی حاصلِ ضرب کا تحتی مجموعے ہیں

10th maths 1. relations and functions
Sunday, February 16, 2020 5:36:56 PM

تفاعل کو ایک آلہ کے طور پر تصور کیا جاسکتا ہے (خاکہ 1.12(a))
جو ہر ایک داخلی x (Input) کے لئے مخصوص نتیجہ
$f(x)$ (Unique Output) دیتا ہے۔

کیا تم جانتے ہو؟

تفاعل کو میپنگ (mapping) یا ٹرانسفرمیشن (Transformation) بھی کہا جاتا ہے۔

غور کیجئے

- اگر $f : X \to Y$ ایک تفاعل ہو تو،
  سیٹ X کو تفاعل f کا علاقہ ہیں اور سیٹ Y کو تفاعل f کا معاون علاقہ کہتے ہیں۔
- اگر $f(a) = b$ ہو تو f کے تحت b کو a کا **خیال** (image) کہتے ہیں اور a کو b کا **پیش خیال** (Pre-image) کہتے ہیں۔
- f کے تحت X کے تمام خیال کا مجموعہ وسعت (Range) کہلاتا ہے۔
- $f : X \to Y$ ایک تفاعل ہے اگر صرف
  (i) علاقہ f کا ہر ایک عنصر ایک خیال رکھتا ہو۔
  (ii) خیال ایک ہی ہو (یکتا)
- اگر A اور B محدود مجموعے ہوں۔ اس طرح کہ $n(A) = p$ ، $n(B) = q$ ہو تو A سے B کے تفاعلات کی تعداد q^p ہوگی۔
- اس باب میں f کو ہمیشہ حقیقی قیمتوں کے تفاعل کے طور پر لیں گے۔
- ایک تفاعل کے علاقہ کی تشریح کرتے ہوئے۔

(i) فرض کرو $f(x) = \frac{1}{x+1}$ ۔ اگر $x = -1$ ہو تو $f(-1)$ کی قیمت غیر واضح ہے۔ لہذا، f کے لئے تمام حقیقی اعداد، سوائے $x = -1$ کے واضح کیا گیا ہے اس لئے f کا علاقہ $\mathbb{R} - \{-1\}$ ہے۔

(ii) فرض کرو $f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$ ۔ اگر $x = 2,3$ ہو تو $f(2)$ اور $f(3)$ غیر واضح ہیں۔ اس لئے f کو x کے تمام حقیقی اعداد سوائے $x = 2,3$ کے واضح کیا گیا ہے۔ لہذا، f کا علاقہ $\mathbb{R} - \{2,3\}$ ہے۔

Progress Check — اپنی پیش رفت کی جانچ

(1) تعلقات ..... کے تحتی مجموعے ہیں تفاعلات ..... کے تحتی مجموعے ہیں۔

(2) صحیح یا غلط بتاؤ : ایک تعلق کے تمام عناصر کے خیالات ہونا ضروری ہے۔

(3) صحیح یا غلط بتاؤ : ایک تفاعل کے تمام عناصر کا خیالات ہونا ضروری ہے۔

(4) صحیح یا غلط بتاؤ : اگر $\mathbb{R}: A \to B$ ایک تعلق ہو تو، علاقہ $A = \mathbb{R}$ ہے۔

(5) اگر $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ کی وضاحت $f(x) = x^2$ سے کئی گئی ہو تو 1 اور 2 کے خیالات ..... اور ..... ہیں۔

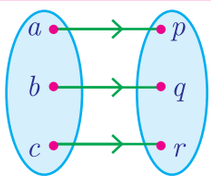
(6) تعلق اور تفاعل کا درمیانی فرق ..... ہے۔

(7) فرض کرو A اور B دو غیر معدوم محدود مجموعے ہو تو ذیل میں کونسے دو ذخیرے (collection) بڑے ہیں؟
(i) A اور B کے درمیان کے تعلقات کی تعداد۔ (ii) A اور B کے درمیان کے تفاعلات کی تعداد۔

10th maths 1. relations and functions
Sunday, February 16, 2020 5:36:57 PM

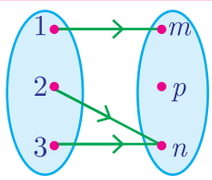
تشریح 9 : تفاعلات کی جانچ (Testing of Function)

تیر کے خاکے کے ذریعہ پیش کرنا۔ Representation by Arrow diagram



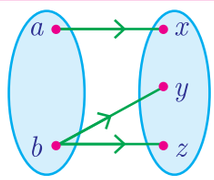
یہ تفاعل کی نمائندگی کرتا ہے ہر ایک داخلی قیمت کا صرف ایک نتیجہ ہے۔

Fig. 1.13(a)



یہ تفاعل کی نمائندگی کرتا ہے ہر ایک داخلی قیمت (Input) کا صرف ایک نتیجہ (output) ہے

Fig. 1.13(b)



یہ تفاعل نہیں ہے۔ ایک داخلی قیمت b کا تعلق دو نتیجہ سے ہے۔

Fig. 1.13(c)

غور کیجئے

ایک تفاعل کی وسعت اس کے معاون علاقہ کا تحتی مجموعہ ہوتا ہے۔

ریاضی کے اعلیٰ نظریوں کو سمجھنے کے لئے تفاعلات نہایت اہم رول ادا کرتے ہیں۔ تفاعلات ایک شکل سے دوسری شکل میں تبدیل کرنے کے لئے یہ بنیادی اوزار ہیں۔ اس لئے تفاعل انجینئرنگ سائنس میں وسیع پیمانے پر استعمال ہوتے ہیں۔

مثال 1.6 فرض کرو $X = \{1,2,3,4\}$ اور $Y = \{2,4,6,8,10\}$ ہیں۔ $R = \{(1,2),(2,4),(3,6),(4,8)\}$ ثابت کرو کہ R ایک تفاعل ہے۔ اس کا علاقہ، معاون علاقہ اور وسعت معلوم کرو۔

حل : R کی تصویری نمائندگی خاکہ 1.14 میں دی گئی ہے۔ خاکہ سے معلوم ہوتا ہے کہ ہر ایک $x \in X$ کا وابستہ صرف ایک $y \in Y$ سے ہے۔ اس طرح X کے تمام عناصر Y میں صرف ایک خیال رکھتے ہیں۔

اس لئے R ایک تفاعل ہے۔ $X = \{1,2,3,4\}$ علاقہ (Domain)

$Y = \{2,4,6,8,10\}$ معاون علاقہ (Co-domain) $f = \{2,4,6,8\}$ کی وسعت

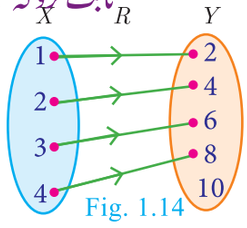


Fig. 1.14

مثال 1.7 ایک تفاعل $f : X \to Y$ کی تشریح $f(x) = x^2 - 2$ سے کی گئی ہے۔ جہاں $x = \{-2,-1,0,3\}$ اور $Y = R$

(i) f کے عناصر کی فہرست بناؤ۔ (ii) کیا f ایک تفاعل ہے؟

حل : (i) $f(x) = x^2 - 2$ ہے۔ جہاں $x = \{-2,-1,0,3\}$

(i) $f(-2) = (-2)^2 - 2 = 2$; $f(-1) = (-1)^2 - 2 = -1$

$f(0) = (0)^2 - 2 = -2$; $f(3) = (3)^2 - 2 = 7$

لہذا، $f = \{(-2,2),(-1,-1),(0,-2),(3,7)\}$

(ii) نوٹ کریں کہ f کے علاقے کا ہر ایک عنصر کا خیال یکتا ہے۔ اس لئے f ایک تفاعل ہے۔

Thinking Corner ذرا سوچئے

کیا سیاروں اور ان سے وابستہ چاندوں کا تعلق ایک تفاعل کی نمائندگی کرتا ہے؟

مثال 1.8 اگر $X = \{-5,1,3,4\}$ اور $Y = \{a,b,c\}$ تو ذیل کونسے تعلقات X سے Y کی جانب تفاعلات ہیں؟

10th maths 1. relations and functions
Sunday, February 16, 2020 5:36:57 PM

(i) $\mathbb{R}_1 = \{(-5, a), (1, a), (3, b)\}$ (ii) $\mathbb{R}_2 = \{(-5, b), (1, b), (3, a), (4, c)\}$

(iii) $\mathbb{R}_3 = \{(-5, a), (1, a), (3, b), (4, c), (1, b)\}$

حل :

(i) $\mathbb{R}_1 = \{(-5, a), (1, a), (3, b)\}$

(i) ہم تعلق $\mathbb{R}_1$ کو تیر کا خاکہ (خاکہ 1.15(a)) سے واضح کریں گے۔ $\mathbb{R}_1$ ایک تفاعل نہیں ہے۔ کیونکہ $4 \in X$ کوئی خیال نہیں رکھتا۔

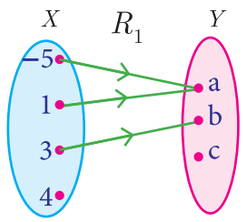


Fig. 1.15(a)

(ii) (ii) $\mathbb{R}_2 = \{(-5, b), (1, b), (3, a), (4, c)\}$

(ii) $\mathbb{R}_2$ کا تیر کا خاکہ (خاکہ 1.15(b)) سے ظاہر کیا گیا ہے۔

$\mathbb{R}_2$ ایک تفاعل ہے۔ کیونکہ X کا ہر ایک تعلق Y کے واحد عنصر سے ہے۔

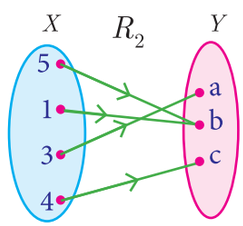


Fig. 1.15(b)

(iii) $\mathbb{R}_3 = \{(5, a), (1, a), (3, b), (4, c), (1, b)\}$

(iii) $\mathbb{R}_3$ کو تیر کا خاکہ (خاکہ 1.15(c)) سے ظاہر کیا گیا ہے۔

$\mathbb{R}_3$ ایک تفاعل نہیں ہے۔ کیونکہ $1 \in X$ کے دو خیالات $a \in Y$ اور $b \in Y$ ہیں۔

غور کریں کے ہر ایک عنصر کا صرف ایک خیال ہو۔

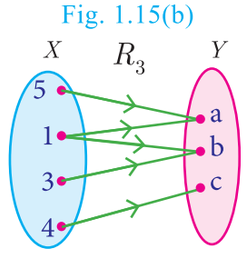


Fig. 1.15(c)

مثال 1.9 $f(x) = 2x - x^2$ دیا گیا ہو تو معلوم کرو۔

(i) $f(1)$ (ii) $f(x+1)$ (iii) $f(x) + f(1)$

حل : (i) x کی جگہ 1 لکھنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$f(1) = 2(1) - (1)^2 = 2 - 1 = 1$$

(ii) x کی جگہ $x + 1$ لکھنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$f(x+1) = 2(x+1) - (x+1)^2 = 2x + 2 - (x^2 + 2x + 1) = -x^2 + 1$$

(iii) $f(x) + f(1) = (2x - x^2) + 1 = -x^2 + 2x + 1$

[غور کریں کہ $f(x) + f(1) \neq f(x+1)$ عام طور پر $f(a+b)$ مساوی نہیں ہے $f(a) + f(b)$ کے۔]

مشق 1.3

1۔ فرض کرو $f = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N} \text{ اور } y = 2x\}$, N پر ایک تعلق رکھتا ہے۔ تو اس کا علاقہ، معاون علاقہ اور وسعت معلوم کرو۔ کیا یہ تعلق ایک تفاعل ہے؟

2۔ فرض کرو $X = \{3,4,6,8\}$ ہے تو تصدیق کرو کہ کیا تعلق $\mathbb{R} = \{(x, f(x)) \mid x \in X, f(x) = x^2 + 1\}$, X سے $\mathbb{N}$ کی جانب ایک تفاعل ہے؟

10th maths 1. relations and functions
Sunday, February 16, 2020 5:36:58 PM

3۔ دیئے گئے اس تفاعل $f : x \rightarrow x^2 - 5x + 6$ کو جانچیے۔

(i) $f(-1)$ (ii) $f(2a)$

(iii) $f(2)$ (iv) $f(x-1)$

4۔ ایک ترسیم جو تفاعل $f(x)$ کی نمائندگی کرتی ہے۔(خاکہ 1.16) میں دی گئی ہے۔

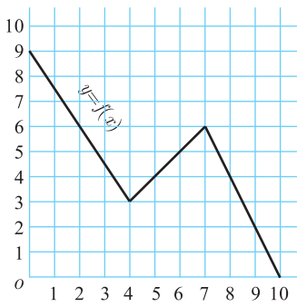


Fig. 1.16

یہ واضح ہے کہ $f(9) = 2$ ہے۔

(i) ذیل کے تفاعل کی قیمتیں معلوم کرو۔

(a) $f(0)$ (b) $f(7)$ (c) $f(2)$ (d) $f(10)$

(ii) x کی کونسی قیمت کے لئے $f(x) = 1$ ہوگی؟

(iii) درجہ ذیل کی وضاحت کیجئے۔ (i) علاقہ (ii) وسعت

(iv) f کے تحت 6 کا خیال کیا ہے؟

5۔ فرض کرو $f(x) = 2x + 5$ ہے۔ اگر $x \neq 0$ ہو تو $\dfrac{f(x+2) - f(2)}{x}$ معلوم کرو۔

6۔ ایک تفاعل f کو $f(x) = 2x - 3$ سے واضح کیا گیا ہو تو

(i) $\dfrac{f(0) + f(1)}{2}$ معلوم کرو۔

(ii) x معلوم کرو اس طرح کہ $f(x) = 0$

(iii) x معلوم کرو اس طرح کہ $f(x) = x$ ہو۔

(iv) x معلوم کرو اس طرح کہ $f(x) = f(1-x)$ ہو۔

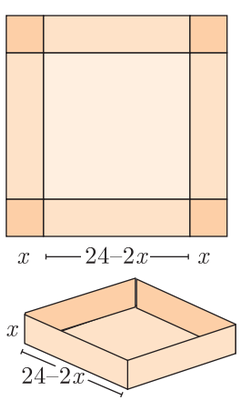


Fig. 1.17

7۔ ایک مربع نما شیٔ (Material) کے کونوں سے مساوی مربع کاٹ دیے جاتے ہیں اور ضلعوں کو اوپر کی جانب موڑ کر 24 سم ضلع کا ایک کھلا ڈبہ بنایا جاتا ہے۔جیسا کہ خاکہ 1.17 میں دکھلایا گیا ہے، صندوق کے حجم V کو تفاعل x میں ظاہر کرو۔

8۔ ایک تفاعل f کی تشریح $f(x) = 3 - 2x$ سے کی گئی ہے۔ x معلوم کرو اس طرح کہ $f(x^2) = (f(x))^2$ ہو۔

9۔ ایک ہوائی جہاز فی گھنٹہ 500 km کی رفتار سے اڑ رہا ہے۔اس کے طے شدہ فاصلہ d کو وقت کے تفاعل t میں گھنٹوں میں ظاہر کرو۔

10۔ متصلہ جدول میں لوگوں کے ہاتھ کے اگلے بازوں کی لمبائی اور ان کے نظیری (Corresponding) اونچائیاں دی گئی ہیں۔ان معلومات کی بنیاد پر ایک طالبِ علم، اونچائی (y) اور ہاتھ کے اگلے بازو کی لمبائی (x) میں ایک تعلق $y = ax + b$ کا پتہ لگاتا ہے، جہاں a، b مستقلات رقم ہیں

ہاتھ کے اگلے حصے کی لمبائی 'x' (سنٹی میٹر)	اونچائی 'y' (انچ میں)
35	56
45	65
50	69.5
55	74

(i) اگر یہ تعلق ایک تفاعل ہو تو جانچیے۔

(ii) a اور b معلوم کرو۔

10th maths 1. relations and functions
Sunday, February 16, 2020 5:36:58 PM

(iii) ایک شخص کی اونچائی معلوم کرو جس کے ہاتھ کے اگلے بازو کی لمبائی 48 سمر ہے۔

(iv) ایک شخص کے ہاتھ کے اگلے بازو کی لمبائی معلوم کرو جس کی اونچائی 60.54 انچ ہے۔

1.6 تفاعل کی نمائندگی (Representation of Functions)

ایک تعامل کی نمائندگی ذیل کے طریقوں پر کی جاسکتی ہے۔ (a) ترتیب وار جوڑیوں کا مجموعہ (b) جدول کی شکل (c) تیر کا خاکہ (d) ترسیمی شکل

فرض کرو $f : A \to B$ ایک تفاعل ہے۔

(a) ترتیب وار جوڑیوں کا مجموعہ (Set of ordered Pairs)

مجموعہ $f = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in A\}$ کے تمام ترتیب وار جوڑیوں کا مجموعہ ایک تفاعل کو ظاہر کرتا ہے۔

(b) جدولی شکل (Tabular Form)

f کے تحت x کی قیمتیں اور بالترتیب ان کے خیالات کو جدولی شکل میں ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

(c) تیر کا خاکہ (Arrow Diagram)

تیر کے خاکہ میں f کے علاقہ کے عناصر اور ان کے بالترتیب خیالات کو تیر کے نشان سے واضح کیا جاتا ہے۔

(d) ترسیم (Graph)

ترتیب وار جوڑیوں کا مجموعہ $f = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in A\}$ کو xy مسطح پر نقطوں کی شکل میں مرتسم کرتے ہیں۔ f کی ترسیم ان تمام نقطوں کا مجموعہ ہے۔

ہر ایک تفاعل کو ترسیم میں ایک منحنی خط کی شکل میں ظاہر کر سکتے ہیں۔ لیکن ترسیم پر کھینچے گئی ہر ایک منحنی خط ایک تفاعل کی نشاندہی نہیں کریں گی۔

ذیل کی جانچ سے ہمیں مدد ملتی ہے کہ ایک دیا ہوا قوس ایک تفاعل ہے یا نہیں۔

1.6.1 عمودی خط کی جانچ (Vertical line Test)

ترسیمی کاغذ پر کھینچا ہوا ایک منحنی خط ایک تفاعل کی نمائندگی کرتی ہے۔ اگر ہر ایک عمودی خط ترسیم کو زیادہ سے زیادہ ایک نقطہ پر قطع کرے تو ترسیم تفاعل کی نمائندگی کرتی ہے۔

مثال 1.10 عمودی خط کی جانچ کو استعمال کرتے ہوئے معلوم کرو کہ ذیل کے ان خاکوں میں کونسے منحنی خطوط ایک تفاعل کی نمائندگی کرتے ہیں؟

(خاکہ 1.18(a),1.18(b),1.18(c),1.18(d))

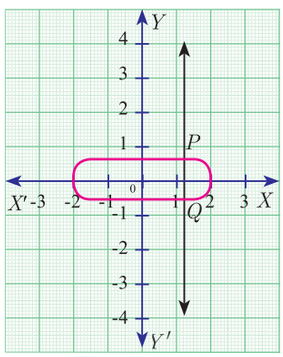


Fig. 1.18(a)

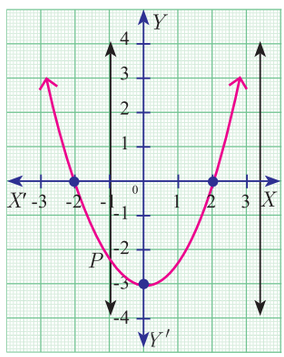


Fig. 1.18(b)

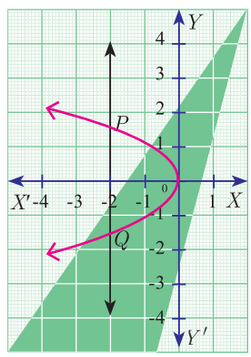


Fig. 1.18(c)

10th maths 1. relations and functions
Sunday, February 16, 2020 5:36:59 PM

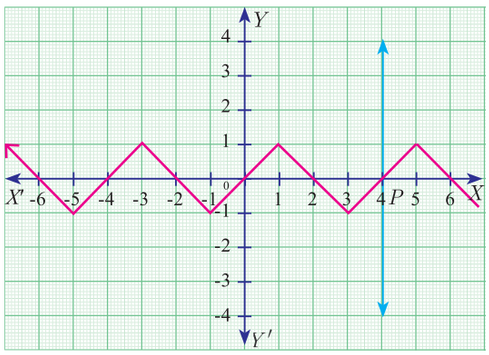


Fig. 1.18(d)

حل : خاکے 1.18 (a) اور 1.18 (c) میں منحنی خطوط تفاعل کی نمائندگی نہیں کرتے ہیں کیونکہ عمودی خطوط، منحنی خط کو دو نقاط P اور Q پر قطع کرتے ہیں۔ خاکے 1.18 (b) اور 1.18 (d) میں منحنی خطوط تفاعل کی نمائندگی کرتے ہیں، کیونکہ عمودی خطوط صرف ایک نقطہ پر قطع کرتے ہیں۔

غور کیجئے

کوئی بھی مساوات جو ترسیم میں ظاہر کرتے ہیں عموماً 'منحنی خطوط' کہلاتی ہے۔

مثال 1.11 فرض کرو $A = \{1,2,3,4\}$ اور $B = \{2,5,8,11,14\}$ دو مجموعے ہیں۔ فرض کرو $f : A \to B$ ایک تفاعل ہے۔ جس کی تشریح $f(x) = 3x - 1$ ہے۔ اس تفاعل کی نمائندگی کرو۔ (i) تیر کا خاکہ (ii) جدولی شکل (iii) ترتیب وار جوڑیوں کا مجموعہ (iv) ترسیمی شکل

حل :

$A = \{1,2,3,4\}$; $B = \{2,5,8,11,14\}$; $f(x) = 3x - 1$

$f(1) = 3(1) - 1 = 3 - 1 = 2$; $f(2) = 3(2) - 1 = 6 - 1 = 5$

$f(3) = 3(3) - 1 = 9 - 1 = 8$; $f(4) = 4(3) - 1 = 12 - 1 = 11$

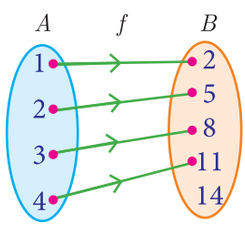


Fig. 1.19

(i) تیر کا خاکہ Arrow diagram

تفاعل $f : A \to B$ کو تیر کے خاکہ سے ظاہر کریں گے۔ (خاکہ 1.19)

(ii) جدولی شکل Table form

دی ہوئی تفاعل f کو ذیل کے طریقے پر جدولی شکل میں ظاہر کر سکتے ہیں۔

x	1	2	3	4
$f(x)$	2	5	8	11

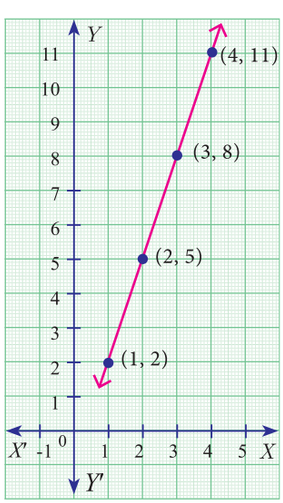


Fig. 1.20

(iii) ترتیب وار جوڑیوں کا مجموعہ Set of ordered pairs

تفاعل f کو ترتیب وار جوڑیوں کے طور پر اس طرح ظاہر کر سکتے ہیں۔

$f = \{(1,2),(2,5),(3,8),(4,11)\}$

(iv) ترسیمی شکل Graphical form

متصل خاکہ میں xy مسطح پر، نقاط $(1,2)(2,5),(3,8),(4,11)$ مرتسم کئے گئے ہیں۔ (خاکہ 1.20)

10th maths 1. relations and functions
Sunday, February 16, 2020 5:37:01 PM

1.7 تفاعل کی قسمیں (Types of Function)

اس حصہ میں ہم تفاعل کے مختلف اقسام کے بارے میں بحث کریں گے۔ (i) ایک-ایک (ii) کئی-ایک

(iii) بروں (onto) (iv) دروں (into)

1.7.1 ایک-ایک تفاعل (one-one Function)

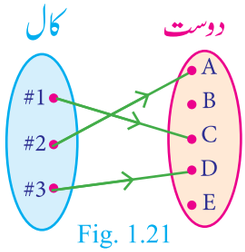


Fig. 1.21

فرض کرو ہمارے پاس ایک سیل فون ہے جو ٹھیک کام کر رہا ہے۔ اگر تمہیں کسی دوست کو کال کرنا ہو تو ایک وقت میں صرف ایک کال کر سکتے ہو۔ (خاکہ 1.21)۔ اگر ہم کال کرنے کے عمل کو ایک تفاعل سے تعبیر کریں تو یہ ایک-ایک تفاعل ہوگا۔

ایک تفاعل $f : A \to B$ کو **ایک-ایک تفاعل** کہتے ہیں، اگر A کا ایک واضح عنصر B میں ایک واضح خیال رکھتا ہو۔

ایک-ایک تفاعل کو انجکشن (injection) بھی کہا جاتا ہے۔

اگر تمام $a_1, a_2 \in A$ کے لئے $f(a_1) = f(a_2)$ کا مفہوم (imples) $a_1 = a_2$ ہو تو f کو ایک-ایک تفاعل کہتے ہیں۔

تشریح 10 :

$A = \{1,2,3,4\}$ اور $B = \{a,b,c,d,e\}$

(i) فرض کرو $f = \{(1,a),(2,b),(3,d),(4,c)$

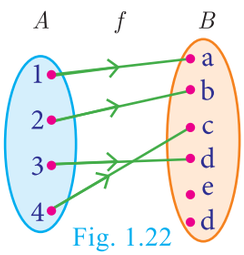


Fig. 1.22

خاکہ 1.22 میں A کے مختلف عناصر، B میں مختلف خیالات رکھتے ہیں۔ اس لئے f ایک-ایک تفاعل ہے۔

(ii) فرض کرو $g = \{(1,b),(2,b),(3,c),(4,e)$ ، g ایک تفاعل ہے، A سے B کی جانب

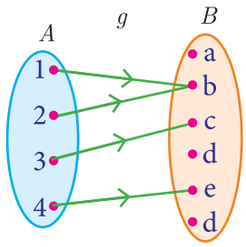


Fig. 1.23

اس طرح کہ $g(1) = g(2) = b$ لیکن $1 \neq 2$ ہے۔ خاکہ 1.23

اس طرح (خاکہ 1.23 میں) پہلا مجموعہ A کے دو واضح عناصر 1 اور 2 دوسرے مجموعہ B میں ایک ہی خیال رکھتے ہیں۔ لہذا، g ایک-ایک تفاعل نہیں ہے۔

1.7.2 کئی-ایک تفاعل (Many - one Function)

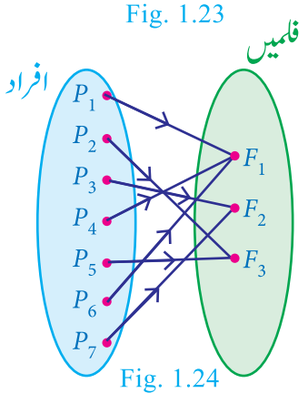


Fig. 1.24

ایک تھیٹر (Theater) کے احاطہ میں تین فلمیں F_1, F_2 اور F_3 تین فلمیں دکھائی جاتی ہیں۔ سات افراد (P_1 سے P_7) تھیٹر پہنچتے ہیں۔ اور ٹکیٹس خریدتے ہیں جیسا کہ (خاکہ 1.24) میں دکھایا گیا ہے۔

اگر فلموں کے انتخاب کو ایک-ایک تعلق سے تعبیر کریں تو یہ کئی-ایک تفاعل ہے۔ کیونکہ ایک سے زیادہ افراد ایک ہی فلم کو دیکھنے کا انتخاب کر سکتے ہیں۔

10th maths 1. relations and functions
Sunday, February 16, 2020 5:37:01 PM

ایک تفاعل $f : A \to B$ کوئی-ایک تفاعل کہتے ہیں۔ اگر A کے دو یا دو سے زیادہ عناصر B میں ایک ہی خیال رکھتے ہوں۔

دوسرے الفاظ میں ایک تفاعل $f : A \to B$ کوئی-ایک تفاعل کہتے ہیں۔ اگر f ایک-ایک تفاعل نہ ہو۔

تشریح 11 :

فرض کرو $A = \{1,2,3,4\}$ اور $B=\{a,b,c\}$ فرض کرو $f = \{(1,a),(2,a),(3,b),(4,c)$ ہوتو A سے B کی جانب f ایک تفاعل ہے۔ جس میں A کے مختلف عناصر 1 اور 2، B میں ایک ہی خیال a رکھتے ہیں۔ لہذا، f ،کئی-ایک تفاعل ہے۔

1.7.3 بروں تفاعل (Onto Function)

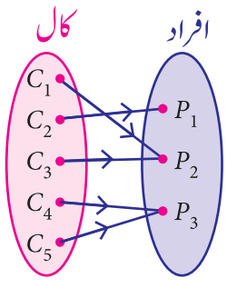


Fig. 1.25

فرض کرو کہ ایک موبائل فون میں تین افراد رابطہ (Contact) میں ہیں۔ اگر رابطے میں موجود ہر ایک فرد ایک کال حاصل (Receive) کرتا ہے۔تو تفاعل جو کالس کال کرنے کے عمل ہے، بروں تفاعل ہے۔

ایک تفاعل $f : A \to B$ بروں تفاعل کہلاتا ہے۔اگر f کی وسعت (Range) اور f معاون علاقہ مساوی ہو۔

دوسرے الفاظ میں دوسرے مجموعہ B کا ہر ایک عنصر پہلے مجموعہ A میں ایک پیش خیال رکھتا ہو ۔بروں تفاعل کو سرجکشن (Surjection) بھی کہا جاتا ہے۔

غور کیجئے

ایک بروں تفاعل ہوتو $f : A \to B$ $f = B$ کی وسعت ہے

تشریح 12 :

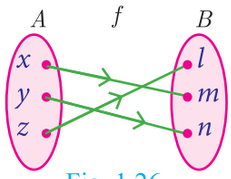


Fig. 1.26

فرض کرو $B = \{l,m,n\}, A = \{x,y,z\}$

$f = \{l,m,n\} = B$ (خاکہ 1.26) کی وسعت

لہذا، f ایک بروں تفاعل ہے۔

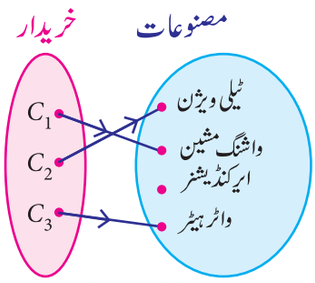


Fig. 1.27

دروں تفاعل (Into Function)

کسی گھریلو استعمال کے اشیاء کی نمائش گاہ (Show Room) میں ٹیلی ویژن، ایرکنڈیشنر، واشنگ مشین، واٹر ہیٹر کو نئے سال کے موقع پر 20% کی رعایت پر دی جاتی ہے۔

مندرجہ بالا اشیاء کو خریدار C_1, C_2 اور C_3 کے منتخب کرنے کے عمل کو تفاعل کے طور پر لیا جائے تو متصلہ (خاکہ 1.27) دروں تفاعل کی نشاندہی کرتا ہے۔

عام طور پر موسم سرما میں خریدار، ایرکنڈیشنر کو خریدنے کو ترجیح نہیں دیتے ۔لیکن کوئی بھی خریدار ایرکنڈیشنر کا انتخاب نہیں کرتا ہے تو یہ ایک دروں تفاعل کی ایک مثال ہے۔

10th maths 1. relations and functions
Sunday, February 16, 2020 5:37:01 PM

ایک $f : A \to B$ تفاعل کو اس وقت **دروں تفاعل** کہتے ہیں۔ جب B میں کم از کم ایک عنصر ایسا ہو جو A کے عنصر کا خیال نہ ہو۔

تشریح 13 :

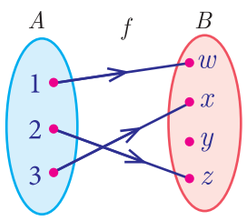


Fig. 1.28

فرض کرو $A = \{1,2,3\}$ اور $B = \{w,x,y,z\}$; $f = \{(1,w),(2,z),(3,x)\}$

$f = \{w, z, x\} \subset B$ (خاکہ 1.28) کی وسعت ، یہاں

لہذا، f ایک دروں تفاعل ہے۔

غور کرو کہ، $A, y \in B$ کے کسی بھی عنصر کا خیال نہیں ہے۔

1.7.5 دوہراپن (Bijection)

دائرے پر غور کرو جہاں انگریزی حروفِ تہجی کا ہر ایک حرف اندرونی حصے سے بیرون حصہ میں تبدیل ہوتا ہے۔



Cipher Circle
Fig. 1.29

اس طرح $A \to D$, $B \to E$, $C \to F$, $Z \to C$

اس دائرے کو صفر دائرہ (خاکہ 1.29) کہتے ہیں۔ اس طریقہ سے اگر ہم لفظ 'Hello' کو تبدیل کریں تو یہ 'KHOOR' بن جائے گا۔ اب اسی دائرہ کو اگر بیرون حروف کا اندرونی حروف سے تبدیل (Substitute) کریں تو ہمیں دوبارہ وہی لفظ HELLO حاصل ہوگا۔ اس طرح ایک شکل سے دوسری شکل میں تبدیل کرنے کا عمل اور مطلوبہ معلومات کو دوبارہ حاصل کرنا bijection کہلاتا ہے۔ یہ عمل وسیع پیمانے پر خفیہ کوڈ (اشارہ) کو پڑھنے میں استعمال کیا جاتا ہے۔ جس کو رمزی یا پراسرار تحریر (Cryptography) کہا جاتا ہے۔

اگر ایک تفاعل $f : A \to B$ ایک-ایک اور بروں دونوں ہو تو f کو A سے B کی جانب دوہرا تفاعل کہا جاتا ہے۔

تشریح 14 :

ایک-ایک اور بروں تفاعل دوہراپن (bijection)

A کے واضح عناصر B میں واضح خیال رکھتے ہیں اور B کا ہر عنصر A میں ایک پیش خیال رکھتا ہے۔

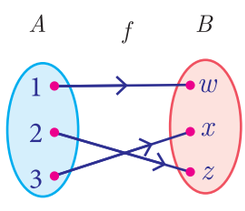
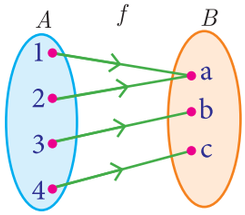
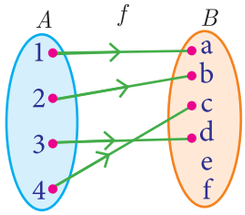


Fig. 1.30

10th maths 1. relations and functions
Sunday, February 16, 2020 5:37:02 PM

تشریح 15 :

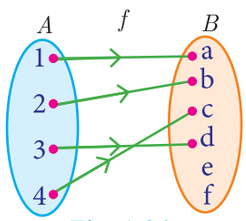
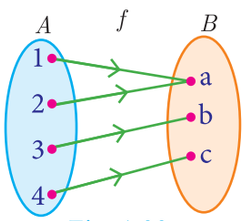
کئی تا ایک	ایک تا ایک
 Fig. 1.32	 Fig. 1.31
A کے دو یا دو سے زیادہ عناصر B میں وہی خیال رکھتے ہیں۔	A کے مختلف عناصر B میں مختلف خیال رکھتے ہیں۔

غور کیجئے

ایک-ایک اور بروں تفاعل کو ایک-ایک مطابقت (one-one correspondance) بھی کہتے ہیں۔

ذرا سوچئے

کیا ایک- کئی تفاعل ہوسکتا ہے؟

دروں	بروں
 Fig. 1.34	 Fig. 1.33
f کا وسعت معاون علاقہ کا موزوں تحتی مجموعہ ہے۔ (B میں کم از کم ایک عنصر ایسا ہو A کے کسی بھی عنصر کا خیال نہ ہو۔)	معاون علاقہ $= f$ کی وسعت (B کا ہر ایک عنصر A میں پیش خیال رکھتا ہے۔)

یہ جاننے کے لئے دیا ہوا تفاعل ایک-ایک ہے یا نہیں ذیل کی جانچ سے ہمیں مدد ملتی ہے۔

1.7.6 افقی خطی جانچ (Horizontal Line Test)

اس سے پہلے ہم عمودی خطی جانچ دیکھ چکے ہیں اب ہم افقی خطی جانچ دیکھیں گے۔ ترسیم کے ذریعہ تفاعل کی نمائندگی ایک-ایک تفاعل کو ظاہر کرتی ہے اگر ہر ایک افقی خط زیادہ سے زیادہ ایک نقطہ پر منحنی خط کو قطع کرے۔

مثال 1.12 افقی خطی جانچ کو استعمال کرتے ہوئے (خاکہ 1.35(a)، خاکہ 1.35(b)، خاکہ 1.35(c)) کا پتا لگاؤ کہ ذیل میں کونسے تفاعلات ایک-ایک ہیں۔

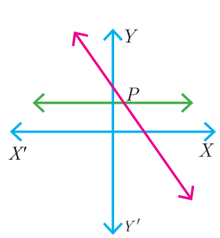


Fig. 1.35(a)

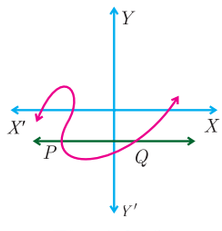


Fig. 1.35(b)

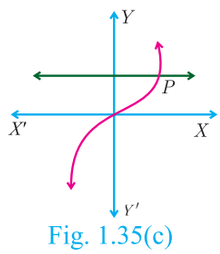


Fig. 1.35(c)

حل : خاکہ 1.35(a) اور خاکہ 1.35(c) کے منحنی خطوط ایک-ایک تفاعل کی نشاندہی کرتے ہیں اس لئے کہ افقی خطوط منحنی خطوط کو صرف ایک نقطہ P پر ملتا ہے۔

خاکہ 1.35(b) کا منحنی خط ایک-ایک تفاعل نہیں ہے۔ کیونکہ افقی خط منحنی خط سے دو نقاط P اور Q پر قطع کرتا ہے۔

10th maths 1. relations and functions
Sunday, February 16, 2020 5:37:02 PM

مثال 1.13 فرض کرو $A = \{1,2,4\}, B = \{4,5,6,7\}$ اور $f = \{(1,4),(2,5),(3,6)\}$ ایک تفاعل A سے B کی جانب ہے۔ ثابت کروکہ f ایک-ایک تفاعل ہے۔مگر بروں تفاعل نہیں ہے۔

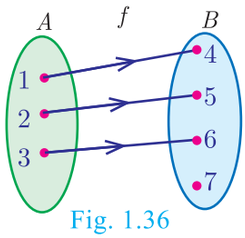


Fig. 1.36

حل : $A = \{1,2,3\}, B = \{4,5,6,7\}, f = \{(1,4),(2,5),(3,6)\}$ ہے۔ A سے B کی جانب f ایک تفاعل ہے۔ اس لئے کہ A کے مختلف عناصر کے لئے B میں الگ الگ خیالات ہیں۔ لہذا، f ایک-ایک تفاعل ہے۔ نوٹ کروکہ معاون علاقہ میں 7 کا پیش خیال علاقہ میں نہیں ہے۔ اس لئے f بروں تفاعل نہیں ہے۔(خاکہ 1.36) لہذا، f ایک-ایک تفاعل ہے۔مگر بروں تفاعل نہیں ہے۔

مثال 1.14 اگر $A = \{-2,-1,0,1,2\}$ اور $f: A \to B$ ایک بروں تفاعل ہے۔ جس کو $f(x) = x^2 + x + 1$ سے واضح کیا گیا ہوتو B معلوم کرو۔

حل : دیا گیا ہے کہ، $A = \{-2,-1,0,1,2\}$ اور $f(x) = x^2 + x + 1$

$$f(-2) = (2)^2 + (-2) + 1 = 3; \quad f(-1) = (-1)^2 + (-1) + 1 = 1$$

$$f(0) = 0^2 + 0 + 1 = 1; \quad f(1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$$

$$f(2) = 2^2 + 2 + 1 = 7$$

چونکہ، f ایک بروں تفاعل ہے۔ f کا معاون علاقہ $= B = f$ کی وسعت

لہذا، $B = \{1,3,7\}$

مثال 1.15 فرض کروکہ f ایک تفاعل $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ہے۔جس کی وضاحت $f(x) = 3x + 2, x \in \mathbb{N}$ سے کی گئی ہوتو۔

(i) 1,2,3 کے خیالات معلوم کرو۔ (ii) 29,53 کے پیش خیالات معلوم کرو۔ (iii) تفاعل کی قسم کو پہچانئے۔

حل : تفاعل $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ کی تشریح $f(x) = 3x + 2$ ہے۔

(i) اگر $x = 1$، $f(1) = 3(1) + 2 = 5$

اگر $x = 2$، $f(2) = 3(2) + 2 = 8$

اگر $x = 3$، $f(3) = 3(3) + 2 = 11$

3,2,1 کے خیالات بالترتیب 8,5 اور 11 ہیں۔

(ii) اگر 29 کا پیش خیال x ہوتو $f(x) = 29$ لہذا، $3x + 2 = 29$

$$3x = 27 \Rightarrow x = 9.$$

اسی طرح،اگر 53 کا پیش خیال x ہوتو، $f(x) = 53$ $3x + 2 = 53$

لہذا، $3x = 51 \Rightarrow x = 17.$

اس طرح، 29 اور 53 کے پیش خیالات بالترتیب 9 اور 17 ہیں۔

(iii) چونکہ $\mathbb{N}$ کے مختلف عناصر، معاون علاقہ میں مختلف خیالات رکھتے ہیں۔ یہ تفاعل ایک-ایک تفاعل ہے۔

f کا معاون علاقہ $\mathbb{N}$ ہے۔

لیکن $f = \{5,8,11,14,17,\ldots\}$ کا وسعت، $\mathbb{N}$ کا تحتی مجموعہ ہے۔

لہذا، f ایک بروں تفاعل نہیں ہے۔ یعنی f ایک دروں تفاعل ہے۔

اس طرح f ایک-ایک اور دروں تفاعل ہے۔

10th maths 1. relations and functions
Sunday, February 16, 2020 5:37:03 PM

مثال 1.16 تفتیش جرم کے سائنسدان (Forensic Scientists) کسی شخص کی اونچائی کا پتہ ان کے ران کے ہڈی کی لمبائی کی بنیاد پر لگاتے ہیں۔ وہ عام طور پر، تفاعل $h(b) = 2.47b + 54.10$ کا استعمال کرتے ہیں۔ جہاں b ران کے ہڈی کی لمبائی ہے۔

(i) جانچ کرو کہ کیا تفاعل h ایک-ایک ہے یا نہیں۔

(ii) مزید اُس شخص کی اونچائی معلوم کرو جس کے ران کی ہڈی کا طول 50 سم ہے۔

(iii) ران کی ہڈی کی لمبائی معلوم کرو اگر اس شخص کی اونچائی 147.96 سم ہے۔

حل: (i) یہ جانچنے کے لئے کیا h ایک-ایک تفاعل ہے، ہم یہ قیاس کرتے ہیں کہ، $h(b_1) = h(b_2)$ ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$2 \cdot 47b_1 + 54 \cdot 10 = 2 \cdot 47b_2 + 54 \cdot 10$$

$$2 \cdot 47b_1 = 2 \cdot 47b_2 \Rightarrow b_1 = b_2$$

$h(b_1) = h(b_2) \Rightarrow b_1 = b_2$، اس لئے تفاعل h ایک-ایک ہے۔

(ii) اگر ران کی ہڈی کی لمبائی $b = 50$ ہو تو اونچائی

$$h(50) = (2 \cdot 47 \times 50) + 54 \cdot 10 = 177 \cdot 6 \text{ cms.}$$

(iii) اگر ایک شخص کی اونچائی 147.96 cm ہو تو $h(b) = 147.96$ اور اس لئے ران کی ہڈی کی لمبائی

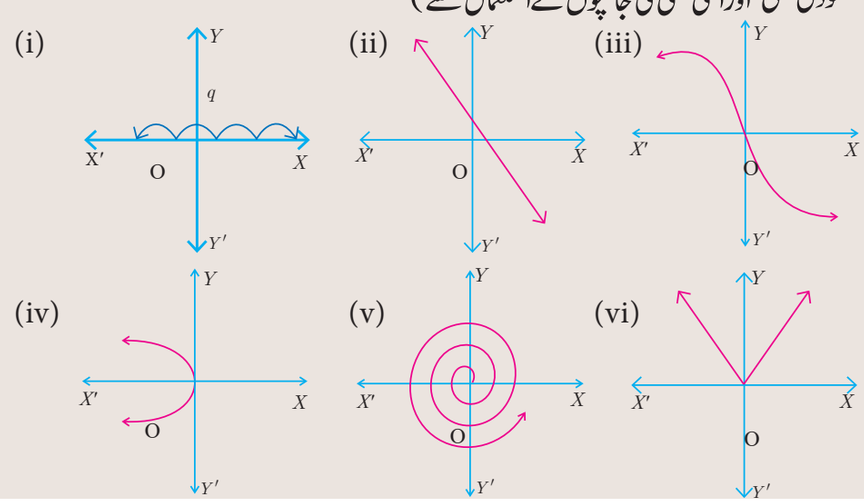
$2.47b + 54.10 = 147.96$ سے دی گئی ہے۔

$b = \dfrac{93 \cdot 86}{2 \cdot 47} = 38$ لہذا، ران کی ہڈی کی لمبائی کی 38cm ہے۔

Activity 3 **کارروائی 3 :**

جانچ کرو کہ کیا ذیل کے منحنی خطوط تفاعل کی نمائندگی کرتے ہیں۔ اگر وہ تفاعل ہوں تو جانچ کرو کیا وہ ایک-ایک ہیں؟

(اشارہ : عمودی خطی اور افقی خطی کی جانچوں کے استعمال سے)



1.8 تفاعل کی مخصوص صورتیں (Special Cases of Function)

تفاعل کی چند مخصوص صورتیں ہیں۔ جو بہت کارآمد ثابت ہوں گی۔ ان میں سے چند کے بارے میں ہم بحث کریں گے

(i) مستقل تفاعل (ii) متماثل تفاعل (iii) حقیقی قیمتوں پر مبنی تفاعل

10th maths 1. relations and functions
Sunday, February 16, 2020 5:37:03 PM

(i) مستقل تفاعل (Constant Function) ایک تفاعل $f : A \to B$ مستقل تفاعل کہلاتا ہے۔ اگر f کی وسعت میں صرف ایک عنصر موجود ہو یعنی $f(x) = c$ تمام $x \in A$ کے لئے، اور بعض مقرر کردہ $c \in B$ کے لئے۔

تشریح 16: خاکہ 1.37 سے، $A = \{a,b,c,d\}$ اور $B = \{1,2,3\}$ اور $f = \{(a,3),(b,3)(c,3),(d,3)\}$ ہے۔ چونکہ، ہر ایک $x \in A$ کے لئے $f(x) = 3$ ہے۔ $f = \{3\}$ کی وسعت ہے، اس لئے f کو ایک مستقل تفاعل ہے۔

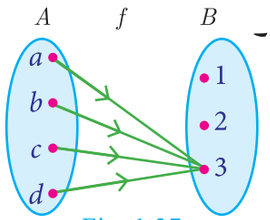


Fig. 1.37

(ii) متماثل تفاعل (Identity Function)

فرض کرو کہ A ایک غیر معدوم مجموعہ ہو تو، تفاعل $f : A \to A$ جس کی تشریح تمام $x \in A$ کے لئے $f(x) = x$ کو A پر **متماثل تفاعل** کہتے ہیں۔ اور اس کو I_A سے ظاہر کرتے ہیں۔

تشریح 17 :

اگر $A = \{a,b,c\}$ ہو تو $f = I_A = \{(a,a),(b,b),(c,c)\}$، A پر متماثل تفاعل ہے۔

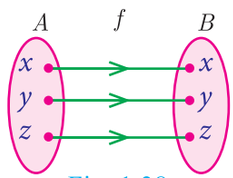


Fig. 1.38

(iii) حقیقی قیمتوں پر مبنی تفاعل (Real Valued Function)

ایک تفاعل $f : A \to B$ کو **حقیقی قیمتوں کا تفاعل** کہتے ہیں۔ اگر f کی وسعت تمام حقیقی اعداد $\mathbb{R}$ کا تحتی مجموعہ ہو۔ یعنی، تمام $a \in A$ کے لئے $f(a) \subseteq \mathbb{R}$ ہے۔

ذرا سوچئے

کیا متماثل تفاعل ایک-ایک تفاعل ہے؟

اپنی پیش رفت کی جانچ

صحیح ہے یا غلط بتاؤ

1۔ تمام ایک-ایک تفاعل بروں تفاعل ہیں۔

2۔ A سے B کی جانب کوئی ایک-ایک تفاعل نہیں ہے۔ اگر $n(A) = 4$ اور $n(B) = 3$ ہو۔

3۔ تمام بروں تفاعل ایک-ایک تفاعل ہیں۔

4۔ A سے B کی جانب کوئی بروں تفاعل نہیں ہوگا۔ جب $n(A) = 4$ اور $n(B) = 5$ ہو۔

5۔ اگر f دوہرا تفاعل (bijection) A سے B کی جانب ہو تو $n(A) = n(B)$ ہوگا۔

6۔ اگر $n(A) = n(B)$ ہو تو f، A سے B کی جانب ایک دوہرا تفاعل ہے۔

7۔ تمام مستقل تفاعلات دوہرے تفاعل (bijection) ہیں۔

مثال 1.17 فرض کرو $\mathbb{R}$ سے $\mathbb{R}$ کی جانب f ایک تفاعل ہے۔ جس کی وضاحت $f(x) = 3x - 5$ سے کی گئی ہے۔ a اور b کی قیمتیں معلوم کرو۔ دیا گیا ہے کہ $(a,4)$ اور $(1,b)$ کا تعلق f سے ہے۔

حل : $f(x) = 3x - 5$ کو $f = \{(x, 3x - 5 \mid x \in \mathbb{R})$ اس طرح لکھ سکتے ہیں $(a,4)$ کا مطلب ہے کہ a کا خیال 4 ہے۔

یعنی، $f(a) = 4$

$3a - 5 = 4 \quad \Rightarrow a = 3$

$(1,b)$ کا مطلب ہے 1 کا خیال b ہے۔ یعنی، $f(1) = b$

$3(1) - 5 = \quad b \Rightarrow b = -2$

10th maths 1. relations and functions
Sunday, February 16, 2020 5:37:04 PM

مثال 1.18 اگر تفاعل $f : R \to R$ کی وضاحت $f(x) = \begin{cases} 2x+7, x < -2 \\ x^2 - 2, -2 \le x < 3 \\ 3x-2, x \ge 3 \end{cases}$ ہو تو ذیل کی قیمتیں معلوم کرو۔

(i) $f(4)$ (ii) $f(-2)$ (iii) $f(4) + 2f(1)$ (iv) $\dfrac{f(1) - 3f(4)}{f(-3)}$

حل : تفاعل f کو تین قیمتوں سے وقفے I، II اور III سے وضاحت کیا گیا ہے کہ جیسا کہ خاکہ میں دیکھایا گیا ہے۔ دی گئی قیمت $x = a$ کے لئے

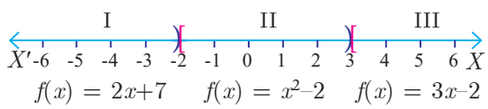


Fig. 1.39

وقفہ (interval) معلوم کرو جہاں نقطہ a واقع ہے۔ پھر اس وقفہ میں وضاحت کی گئی قیمت استعمال کر کے $f(a)$ معلوم کرو۔

(i) پہلے ہم نے دیکھا ہے کہ $x = 4$ تیسرے وقفہ میں ہے۔ چنانچہ،

$$f(x) = 3x - 2\,;\ f(4) = 3(4) - 2 = 10$$

(ii) $x = -2$ تیسرے وقفے میں ہے۔ چنانچہ،

$$f(x) = x^2 - 2\,;\ f(-2) = (-2)^2 - 2 = 2$$

(iii) $f(4) = 10$ سے، (i)

$f(1)$ معلوم کرنے کے لئے صاف ظاہر ہے کہ $x = 1$ دوسرے وقفہ میں ہے۔

$$f(x) = x^2 - 2 \Rightarrow f(1) = 1^2 - 2 = -1$$

لہذا، $f(4) + 2f(1) = 10 + 2(-1) = 8$

(iv) ہمیں معلوم ہے کہ $f(1) = -1$ اور $f(4) = 8$ ہے۔

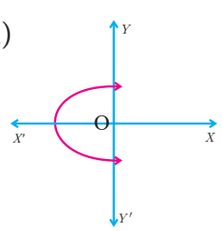
$f(-3)$ معلوم کرنے کے لئے ہم نے دیکھا کہ $x = -3$ پہلے وقفہ میں ہے۔

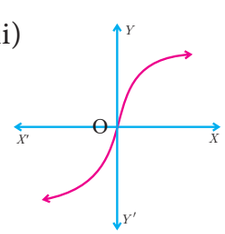
چنانچہ، $f(x) = 2x + 7$ اس طرح $f(-3) = 2(-3) + 7 = 1$

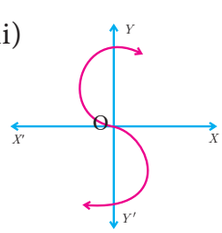
لہذا، $\dfrac{f(1) - 3f(4)}{f(-3)} = \dfrac{-1 - 3(10)}{1} = -31$

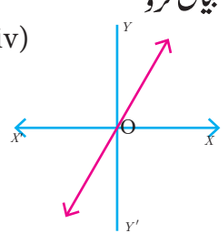
مشق 1.4

1۔ معلوم کرو کیا ذیل میں دیے گئے ترسیم، تفاعل کی نمائندگی کرتے ہیں۔ ہر ایک ترسیم کے لحاظ سے اپنے جوابات کے لئے وجوہات بیان کرو

(i) 

(ii) 

(iii) 

(iv) 

10th maths 1. relations and functions
Sunday, February 16, 2020 5:37:04 PM

2۔ فرض کرو $f : A \to B$ ایک تفاعل ہے جس کی وضاحت $f(x) = \frac{x}{2} - 1,$ سے کی گئی ہے۔ جس میں $A = \{2,4,6,10,12\}$; $B = \{0,1,2,4,5,9\}$ ہے۔ f کو ظاہر کرو۔
(i) ترتیب وار جوڑیوں کا مجموعہ سے (ii) ایک جدول (iii) تیر کا خاکہ (iv) ترسیم

3۔ تفاعل $f = \{(1,2),(2,2),(3,2),(4,3),(5,4)\}$ کو ظاہر کرو بذریعہ (i) تیر کا خاکہ (ii) جدولی شکل (iii) ترسیم

4۔ بتلاؤ کہ تفاعل $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ جس کی وضاحت $f(x) = 2x - 1$ سے کی گئی ہے یہ ایک-ایک تفاعل ہے مگر بروں نہیں۔

5۔ بتلاؤ کہ تفاعل $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ جس کی وضاحت $f(m) = m^2 + m + 3$ سے کی گئی ہے یہ ایک-ایک تفاعل ہے۔

6۔ فرض کرو کہ $A = \{1,2,3,4\}$ اور $B = \mathbb{N}$ فرض کرو $f : A \to B$ جس کی وضاحت $f(x) = x^3$ سے کی گئی ہو تو
(i) f کی وسعت معلوم کرو۔ (ii) تفاعل کی قسم کیا ہے؟

7۔ مندرجہ صورتوں (Cases) میں یہ معلوم کرو کہ تفاعل دوہرا (Bijective) ہے یا نہیں۔ جواب کے لئے دلیل پیش کرو۔
(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ جس کی وضاحت $f(x) = 2x + 1$ سے کی گئی ہے۔ (ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ جس کی وضاحت $f(x) = 3 - 4x^2$ سے کی گئی ہے۔

8۔ فرض کرو $A = \{-1,1\}$ اور $B = \{0,2\}$ ہے۔ کیا تفاعل $f : A \to B$ کی وضاحت $f(x) = ax + b$ سے کی گئی ہو تو کیا بروں تفاعل ہے؟ a اور b معلوم کرو۔

9۔ اگر تفاعل f کی وضاحت $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{اگر } x > 1 \\ 2 & \text{اگر } -1 \le x \le 1 \\ x-1 & \text{اگر } -3 < x < -1 \end{cases}$ سے کی گئی ہو تو معلوم کرو۔

(i) $f(3)$ (ii) $f(0)$ (iii) $f(-1 \cdot 5)$ (iv) $f(2) + f(-2)$

10۔ ایک تفاعل $f : [-5,9] \to \mathbb{R}$ کی وضاحت اس طرح کی گئی ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} 6x+1 & \text{if } -5 \le x < 2 \\ 5x^2 - 1 & \text{if } 2 \le x < 6 \\ 3x - 4 & \text{if } 6 \le x \le 9 \end{cases}$$

معلوم کرو۔ (i) $f(-3) + f(2)$ (ii) $f(7) - f(1)$ (iii) $2f(4) + f(8)$ (iv) $\frac{2f(-2) - f(6)}{f(4) + f(-2)}$

11۔ ایک شئے کششِ ثقل (قوتِ جاذبہ) کے زیرِ اثر، وقت t سکنڈ میں فاصلہ S طے کرتی ہے۔ جس کو $S(t) = \frac{1}{2}gt^2 + at + b$ سے ظاہر کیا گیا ہے۔ جہاں (g، اسراع باوجہ جاذبہ ہے۔) a اور b مستقل رقم ہے۔ جانچ کرو کیا تفاعل $S(t)$ ایک-ایک ہے یا نہیں؟

12۔ تفاعل 't' جو تپش سلشیس (C) کو تپش فارن ہائیٹ (F) میں ڈھالتا (maps) ہے۔ جس کی وضاحت $t(C) = f$، جہاں $F = \frac{9}{5}C + 32$ ہے تو معلوم کرو۔

(i) $t(0)$ (ii) $t(28)$ (iii) $t(-10)$ (iv) $t(C) = 212$ کی C کی قیمت معلوم کرو جب کہ
(v) تپش معلوم کرو جب کہ سلشیس کی قیمت اور فارن ہائیٹ کی قیمت مساوی ہو۔

10th maths 1. relations and functions
Sunday, February 16, 2020 5:37:05 PM

1.9 تفاعلات کی ترکیب (Composition of Functions)

جب کار ڈرائیور اسراع (Accelerator) کے پیڈل پر دباؤ ڈالتا ہے۔تو پیٹرول کے بہاؤ پر کنٹرول حاصل ہوتا ہے۔ جس کے سبب کار کی رفتار پر اثر پڑتا ہے۔اس طرح دو تفاعلات کی ترکیب ایک ''سلسلہ وار ردعمل''(Chain Reaction)جہاں تفاعلات ایک کے بعد دوسرا عمل کرتا ہے۔ خاکہ 1.40 ہم اس نظریہ کی مزید وضاحت کر سکتے ہیں کہ تفاعل ایک 'ترکیب عمل' (Process) ہے۔اگر f اور g دو تفاعلات ہوں تو ان کی ترکیب $g(f(x))$ (خاکہ 1.41) دو مرحلوں میں بنتا ہے۔

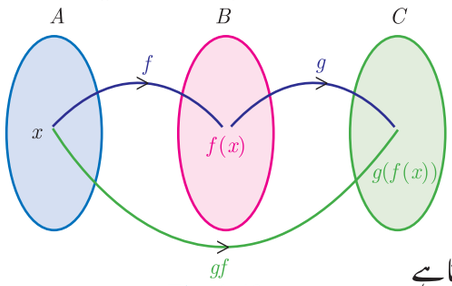


Fig. 1.40

(i) ایک داخلی قیمت (INPUT) f میں درج کریں (x فرض کریں)۔

(ii) نتیجہ (OUTPUT) $f(x)$ کو g میں درج کرنے پر $g(f(x))$ حاصل ہوتا ہے اور اس کو $gf(x)$ کہتے ہیں۔

تشریح Illustration فرض کرو A تمام طلباء کا مجموعہ ہے جو دسویں جماعت کے بورڈ امتحان مارچ 2020 میں حاضر ہوئے امتحان میں حاضر ہونے والے ہر ایک طالب علم کو ایک رول نمبر دیا گیا۔اس پوشیدگی (confidentiality) کو برقرار رکھنے کے لئے رول نمبر کو مٹا کر ہر ایک طالب علم کو ایک کوڈ (code) نمبر مہیا کیا گیا۔

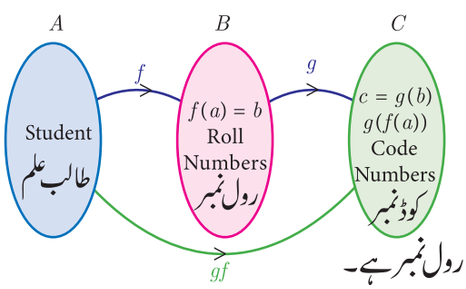


Fig. 1.41

فرض کرو A تمام طلباء کا مجموعہ ہے۔جو بورڈ امتحان میں ظاہر ہوئے۔ $B \subseteq \mathbb{N}$ تمام رول نمبروں کا مجموعہ ہے۔اور $C \subseteq \mathbb{N}$ تمام کوڈ اعداد کا مجموعہ ہے۔

(خاکہ 1.41)اس سے دو تفاعلات ظہور میں آتے ہیں $f : A \to B$ اور $g : B \to C$ جس میں $b = f(a)$ دیا گیا ہے جو ایک طالب علم a کو دیا ہوا رول نمبر ہے۔

فرض کرو $c = g(b)$ کوڈ نمبر ہے جس کا تعلق رول نمبر b ہے۔ جہاں $a \in A$, $b \in B$ اور $c \in C$ ہے۔ ہم اس طرح دیکھ سکتے ہیں۔

اس طرح دو تفاعلات کے مرکب سے ہر ایک طالب علم آخری کار ایک کوڈ نمبر سے منسلک ہو جاتا ہے۔اس تصور سے ذیل کی تعریف (Definition)حاصل ہوتی ہے۔

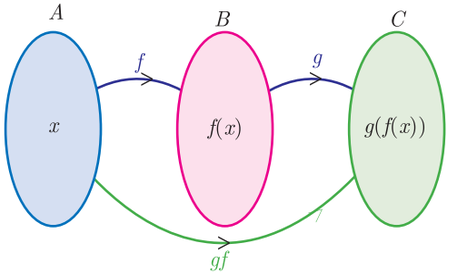


Fig. 1.42

تعریف : فرض کرو $f : A \to B$ اور $g : B \to C$ دو تفاعلات ہیں۔ (خاکہ 1.42) تو f اور g کی ترکیب $g \circ f$ سے ظاہر جاتا ہے،اس تفاعل کی تعریف $g \circ f(x) = g(f(x))$ ہے۔جو تمام $x \in A$ کے لئے ہے۔

مثال 1.19 $f \circ g$ اور $g \circ f$ معلوم کرو۔ اگر $f(x) = 2x + 1$ اور $g(x) = x^2 - 2$ ہیں۔

حل :

$$f(x) = 2x + 1 \ , \ g(x) = x^2 - 2$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 2) = 2(x^2 - 2) + 1 = 2x^2 - 3$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = (2x + 1)^2 - 2 = 4x^2 + 4x - 1$$

$$f \circ g = 2x^2 - 3, \ g \circ f = 4x^2 + 4x - 1$$

اوپر کی مثال سے معلوم ہوتا ہے کہ $f \circ g \neq g \circ f$ ہے۔

ذرا سوچئے

اگر $f(x) = x^m$ اور $g(x) = x^n$ ہو تو کیا $f \circ g = g \circ f$?

10th maths 1. relations and functions
Sunday, February 16, 2020 5:37:05 PM

غور کیجئے

عام طور پر کوئی دو تفاعلات f اور g کے لئے $f \circ g \neq g \circ f$ لہذا، تفاعلات کی ترکیب متبادلت(Commutative)نہیں ہے۔

مثال 1.20 تفاعل $f(x)=\sqrt{2x^2-5x+3}$ کودو تفاعلات کی ترکیب کے طور پر ظاہر کرو۔

حل : $f_2(x)=2x^2-5x+3$ اور $f_1(x)=\sqrt{x}$ تو متعین کریں

$$f(x) = \sqrt{2x^2-5x+3} = \sqrt{f_2(x)}$$ تو

$$= f_1\left[f_2(x)\right] = f_1 f_2(x)$$

مثال 1.21 اگر $f(x) = 3x - 2$ اور $g(x) = 2x + k$ اور $f \circ g = g \circ f$ ہوتو k کی قیمت معلوم کرو۔

حل : $f(x) = 3x - 2,\ g(x) = 2x + k$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(2x + k) = 3(2x + k) - 2 = 6x + 3k - 2$$

لہذا $f \circ g(x) = 6x + 3k - 2.$

$g \circ f(x) = g(3x - 2) = 2(3x - 2) + k$

اس طرح $g \circ f(x) = 6x - 4 + k.$

دیا گیا ہے $f \circ g = g \circ f$

لہذا $6x + 3k - 2 = 6x - 4 + k$

$6x - 6x + 3k - k = -4 + 2 \Rightarrow k = -1$

کیا تم جانتے ہو؟

$g \circ f(x)$ کی ترکیب تبھی واقع ہوگا جب f کی حد g کے تحتی سٹ کے حدود میں ہوگا۔

مثال 1.22 اگر $f \circ f(k) = 5$ جس میں $f(k) = 2k - 1k$ کے معلوم کرو۔

حل :

$$f \circ f(k) = f(f(k))$$
$$= 2(2k - 1) - 1 = 4k - 3.$$

لہذا $f \circ f(k) = 4k - 3$

لیکن دیا گیا ہے کہ $f \circ f(k) = 5$

لہذا، $4k - 3 = 5 \Rightarrow k = 2.$

1.9.1 تین تفاعلات کی ترکیب Composition of Three Functions

فرض کرو A, B, C اور D چار مجموعے ہیں۔ فرض کرو

$f : A \to B$, $g : B \to C$ اور $h : C \to D$

تین تفاعلات ہیں (خاکہ 1.43)مخلوط تفاعلات $f \circ g$ اور $g \circ h$ کواستعمال کرتے ہوئے ہمیں دو نئے تفاعلات $(f \circ g) \circ h$ اور $f \circ (g \circ h)$ حاصل ہوتے ہیں۔

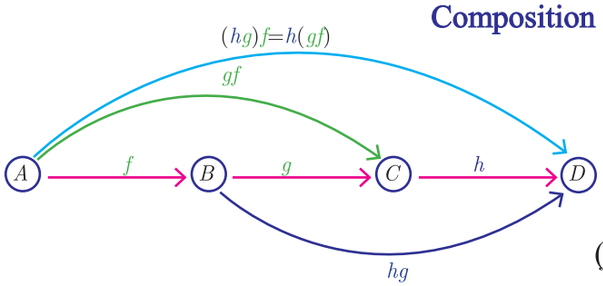


Fig. 1.43

غور کریں کہ تفاعلات کی ترکیب متبادلت نہیں ہے۔ یہاں سوال ان کے مربوطی خاصیت کے بارے میں ہے۔

غور کیجئے

تین تفاعلات کی ترکیب ہمیشہ مربوطی(Associative) ہے۔یعنی، $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ ہے۔

10th maths 1. relations and functions
Sunday, February 16, 2020 5:37:06 PM

مثال 1.23 اگر $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = 1 - 2x$ اور $h(x) = 3x$ ہوتو ثابت کروکہ $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$

حل :

$$f(x) = 2x + 3,\ g(x) = 1 - 2x,\ h(x) = 3x$$

ہوتو

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1-2x) = 2(1-2x) + 3 = 5 - 4x$$

$$(f \circ g) \circ h(x) = (f \circ g)(h(x)) = (f \circ g)(3x) = 5 - 4(3x) = 5 - 12x \quad \ldots.(1)$$

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(3x) = 1 - 2(3x) = 1 - 6x$$

لہذا، $f \circ (g \circ h)(x) = f(1-6x) = 2(1-6x) + 3 = 5 - 12x$ ....(2)

(1) اور (2) سے، ہمیں حاصل ہوا۔ $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

مثال 1.24 اگر $gff(x) = fgg(x)$ ہو ، دیا گیا ہے $f(x) = 3x + 1$ اور $g(x) = x + 3$ تو x معلوم کرو۔

حل :

$gff(x) = g\,[f\{f(x)\}]$ (اس کے معنی $(g \text{ of } f \text{ of } f \text{ of } x)$)

$$= g\,[f(3x+1)] = g\,[3(3x+1)+1] = g(9x+4)$$

$$g(9x+4) = [(9x+4) + 3] = 9x + 7$$

$fgg(x) = f\,[g\{g(x)\}]$ (اس کے معنی $(f \text{ of } g \text{ of } g \text{ of } x)$)

$$= f\,[g(x+3)] = f\,[(x+3) + 3] = f(x+6)$$

$$f(x+6) = [3(x+6) + 1] = 3x + 19$$

یہ دونوں مقداریں مساوی ہونے کے سبب سے ہمیں $9x + 7 = 3x + 19$ حاصل ہوتا ہے۔ یہ مساوات کو حل کرنے سے ہمیں $x = 2$ حاصل ہوتا ہے۔

Progress Check اپنی پیش رفت کی جانچ

ذیل کے سوالات کے صحیح جواب کا انتخاب کر کے اپنا جواب لکھو۔

1۔ تفاعلات کی ترکیب متبادلت پذیر (Commutative) ہے۔(a) ہمیشہ درست ہیں۔ (b) کبھی درست نہیں ہیں۔
(c) بعض اوقات درست ہیں۔

2۔ تفاعلات کی ترکیب مربوطی (associative) ہے۔(a) ہمیشہ درست ہیں۔ (b) لیکن درست نہیں ہیں۔(c) بعض اوقات درست ہیں۔

Activity 4 کارروائی 4

دیا گیا ہے۔ $h(x) = f \circ g\,(x)$, $h(x)$ کے لئے جدول پُر کرو۔

x	$f(x)$
1	2
2	3
3	1
4	4

x	$g(x)$
1	2
2	4
3	3
4	1

x	$h(x)$
1	3
2	-
3	-
4	-

$h(1)$ کو کیسے معلوم کریں؟

$$h(x) = f \circ g(x)$$

$$h(1) = f \circ g(1)$$

$$= f(2) = 3$$

لہذا، $h(1) = 3$

10th maths 1. relations and functions
Sunday, February 16, 2020 5:37:06 PM

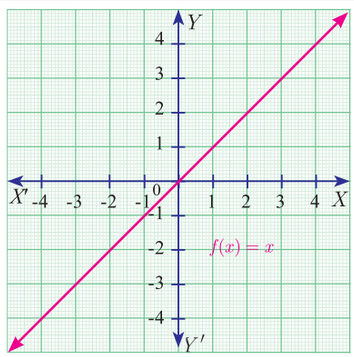
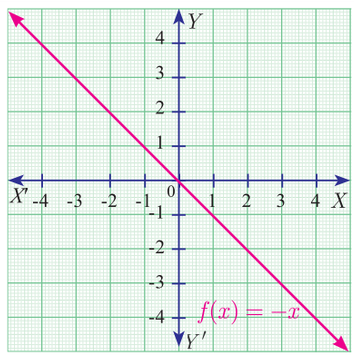
1.10 خطی، دودرجی، مکعبی اور مقلوبی تفاعلات کے ترسیمات کو پہچاننا

Identifying the graphs of Linear,Quadratic,Cubic and Reciprocal Functions

منحنی خطوط اور تفاعلات کو ترسیم کے ذریعہ لکھنا کا موقع مہیا کرتے ہیں۔اس طرح ترسیمات ان نظریات کو بہترین طور پر سمجھنے میں مدد کرتے ہیں ۔اس حصہ میں چند تفاعلات کی نمائندگی کی ترسیم کے ذریعہ کرنے کے بارے میں بحث کریں گے،خصوصی طور پر خطی دودو جی، مکعبی اور مقلوبی تفاعلات کی ترسیم کے بارے میں بحث کریں گے۔

1.10.1 خطی تفاعلات Linear Function

ایک تفاعل $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ جس کی تشریح $f(x) = mx + c,\ m \neq 0$ سے کی گئی ہے۔یہ **خطی تفاعل** کہلاتا ہے ۔ ہندسی طور (Geometrically) پر ترسیم میں یہ خط مستقیم کو ظاہر کرتا ہے۔چند مخصوص خطی تفاعلات اوران کی ترسیم ذیل میں درج ہے۔

شمار عدد	تفاعل	علاقہ اور تعریف	ترسیم
1	The Identity Function متماثل تفاعل	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ کی وضاحت $f(x) = x$ سے کی گئی ہے۔	 Fig. 1.44
2	Additive inverse function جمعی معکوس تفاعل	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ کی وضاحت $f(x) = -x$ سے کی گئی ہے۔	 Fig. 1.45

1.10.2 مطلق قیمت کی تفاعل

Modulus or Absolute Valued Function

$f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ کی وضاحت $f(x) = |x|$ سے کی گئی ہے۔

$$= \begin{cases} x; & x \geq 0 \\ -x; & x < 0 \end{cases}$$

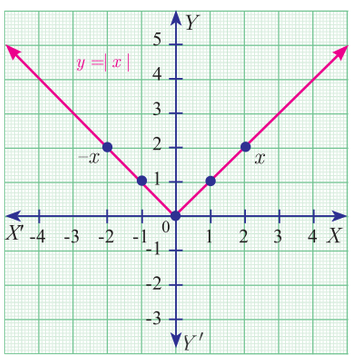


Fig. 1.46

10th maths 1. relations and functions
Sunday, February 16, 2020 5:37:07 PM

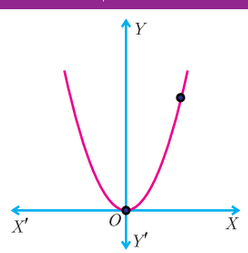
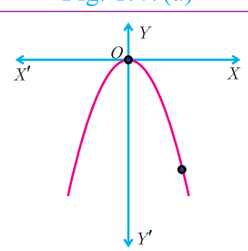
غور کیجئے

1۔ مطلق تفاعل ایک خطی تفاعل نہیں ہے۔ بلکہ دو خطی مساوات x اور $-x$ پر مشتمل ہے۔

2۔ خطی تفاعل ہمیشہ ایک-ایک تفاعل ہے جس کا استعمال رمزنویسی (خفیہ علامت میں لکھنے کا فن)(Cryptography)اور سائنس اور ٹیکنولوجی کے مختلف شعبوں میں ہوتا ہے۔

1.10.3 دودرجی تفاعل (Quadratic Function)

ایک تفاعل $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ جس کی وضاحت $f(x) = ax^2 + bx + c \ , (a \neq 0)$ سے کی گئی ہے۔اس کو **دودرجی تفاعل** کہتے ہیں۔
چند مخصوص دودرجی تفاعلات اوران کے ترسیمات یہ ہیں۔

ترسیم	تفاعل، علاقہ، وسعت اور تعریف
 Fig. 1.47(a)	تفاعل کی وضاحت $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}.\ \ f(x) \in [0, \infty)$ سے کی گئی ہے۔
 Fig. 1.47(b)	تفاعل کی وضاحت $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = -x^2, x \in \mathbb{R}.\ \ f(x) \in (-\infty, 0]$ سے کی گئی ہے۔

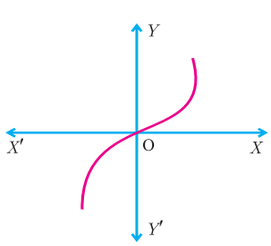


Fig. 1.48

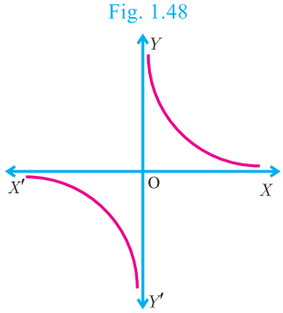


Fig. 1.49

1.10.4 مکعبی تفاعل (Cubic Function)

ایک تفاعل $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ جس کی وضاحت $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \ , (a \neq 0)$ سے کی گئی ہے۔جو ایک **مکعبی تفاعل** کہلاتا ہے۔
$f(x) = x^3$ کی ترسیم (خاکہ 1.48) میں دکھایا گیا ہے۔

1.10.5 مقلوبی تفاعل (Reciprocal Function)

ایک تفاعل $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ جس کی وضاحت $f(x) = \frac{1}{x}$ سے کی گئی ہے۔
جو ایک **مقلوبی تفاعل** کہلاتا ہے۔ (خاکہ 1.49)

10th maths 1. relations and functions
Sunday, February 16, 2020 5:37:08 PM

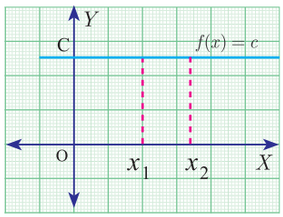


Fig. 1.50

1.10.6 مستقل (Constant Function)

ایک تفاعل $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ جس کی وضاحت $f(x) = c$ (تمام $x \in \mathbb{R}$ کے لئے) ایک **مستقل تفاعل** کہلاتا ہے۔ (خاکہ 1.50)

Progress Check — اپنی پیش رفت کی جانچ

1۔ کیا ایک مستقل تفاعل، ایک خطی تفاعل ہے؟
2۔ کیا دو درجی تفاعل، ایک-ایک تفاعل ہے؟
3۔ کیا مکعبی تفاعل، ایک-ایک تفاع ہے؟
4۔ کیا مقلوبی تفاعل، ایک دوہرا تفاعل (bijection) ہے؟
5۔ اگر $f : A \to B$ ایک مستقل تفاعل ہو تو f کی وسعت میں.....عناصر ہوں گے۔

مشق 1.5

1۔ ذیل میں دئے گئے تفاعلات f اور g کو استعمال کرکے $f \circ g$ اور $g \circ f$ معلوم کرو جانچئے کہ کیا $f \circ g = g \circ f$ ہے؟

(i) $f(x) = x - 6,\ g(x) = x^2$
(ii) $f(x) = \frac{2}{x},\ g(x) = 2x^2 - 1$
(iii) $f(x) = \frac{x+6}{3},\ g(x) = 3 - x$
(iv) $f(x) = 3 + x,\ g(x) = x - 4$
(v) $f(x) = 4x^2 - 1,\ g(x) = 1 + x$

2۔ k کی قیمت معلوم کرو اس طرح کہ $f \circ g = g \circ f$

(i) $f(x) = 3x + 2,\ g(x) = 6x - k$
(ii) $f(x) = 2x - k,\ g(x) = 4x + 5$

3۔ اگر $f(x) = 2x - 1,\ g(x) = \frac{x+1}{2}$ ہو تو ثابت کرو کہ $f \circ g = g \circ f = x$ ہے۔

4۔ اگر $f(x) = x^2 - 1,\ g(x) = x - 2$ ہو تو a معلوم کرو۔ اگر $g \circ f(a) = 1$

5۔ فرض کرو $A, B, C \subseteq \mathbb{N}$ اور تفاعل $f : A \to B$ جس کی وضاحت $f(x) = 2x + 1$ سے کی گئی ہے اور $g : B \to C$ جس کی وضاحت $g(x) = x^2$ ہے۔ $f \circ g$ اور $g \circ f$ کی وسعت معلوم کرو۔

6۔ اگر $f(x) = x^2 - 1$ ہو تو معلوم کرو۔ (i) $f \circ f$ (ii) $f \circ f \circ f$

7۔ اگر $f(x) = x^5$ اور $g(x) = x^4$ ہو تو تصدیق کرو کہ کیا f اور g ایک-ایک تفاعل ہے اور $f \circ g$ ایک-ایک تفاعل ہے؟

10th maths 1. relations and functions
Sunday, February 16, 2020 5:37:08 PM

8۔ ذیل میں دیے گئے تفاعلات $f(x), g(x)$ اور $h(x)$ پر غور کیجئے۔ ہر ایک صورت کے لئے ثابت کیجئے۔ $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

(i) $f(x) = x - 1,\ g(x) = 3x + 1$ اور $h(x) = x^2$

(ii) $f(x) = x^2,\ g(x) = 2x$ اور $h(x) = x + 4$

(iii) $f(x) = x - 4,\ g(x) = x^2$ اور $h(x) = 3x - 5$

9۔ فرض کرو $f = \{(-1,3),(0,-1),(2,-9)\}$، $\mathbb{Z}$ سے $\mathbb{Z}$ کی جانب ایک خطی تفاعل ہے۔ $f(x)$ معلوم کرو۔

10۔ ایک برقی دور (Electrical Circiut) کے نظریہ کے اصول کے مطابق برقی دور $C(t)$ کو خطّی دور کہا جاتا ہے۔ اگر وہ اعلیٰ مقام (Super Position) کے اصول کو پورا کرتا ہے۔ جس کی وضاحت $C(at_1 + bt_2) = aC(t_1) + bC(t_2)$ جہاں a اور b مستقل رقم ہے ثابت کرو کہ دور (Circiut)، $C(t) = 3t$ خطّی (Linear) ہے۔

مشق 1.6

کثیر انتخابی سوالات (Multiple Choice Questions)

1۔ اگر $n(A \times B) = 6$ اور $n(A) = \{1,3\}$ ہو تو $n(B)$ ہے۔

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 6

2۔ اگر $A = \{a,b,p\}$; $B = \{2,3\}$ $C = \{p,q,r,s\}$ ہو تو $n[(A \cup C) \times B]$ ہے۔

(1) 8 (2) 20 (3) 12 (4) 16

3۔ اگر $A = \{1,2\}$، $B = \{1,2,3,4\}$ $C = \{5,6\}$ اور $D = \{5,6,7,8\}$ ذیل کا کونسا بیان درست ہے۔

(1) $(A \times C) \subset (B \times D)$ (2) $(B \times D) \subset (A \times C)$

(3) $(A \times B) \subset (A \times D)$ (4) $(D \times A) \subset (B \times A)$

4۔ اگر مجموعہ $A = \{1,2,3,4,5\}$ سے مجموعہ B کی جانب تعلقات کی تعداد 1024 ہو تو B میں عناصر کی تعداد

(1) 3 (2) 2 (3) 4 (4) 8

5۔ $\{x, 13\}$ سے کم اعدادِ اوّلی ہے $R = \{(x, x^2) \mid x$ کا وسعت تعلق ہے۔

(1) {2,3,5,7} (2) {2,3,5,7,11}

(3) {4,9,25,49,121} (4) {1,4,9,25,49,121}

6۔ اگر ترتیب وار جوڑیاں $(a + 2,4)$ اور $(5,2a + b)$ مساوی ہوں تو (a,b) ہے۔

(1) (2,−2) (2) (5,1) (3) (2,3) (4) (3,−2)

7۔ فرض کرو $n(A) = m$ اور $n(B) = n$ تو A سے B کو تشریح کی جانے والی غیر معدوم تعلقات کی کل تعداد

(1) m^n (2) n^m (3) $2^{mn} - 1$ (4) 2^{mn}

8۔ اگر $\{(a,8),(6,b)\}$ ایک متماثل تفاعل کی نمائندگی کرتا ہے تو a اور b کی قیمتیں بالترتیب

(1) (8,6) (2) (8,8) (3) (6,8) (4) (6,6)

10th maths 1. relations and functions
Sunday, February 16, 2020 5:37:09 PM

9۔ فرض کرو $A = \{1,2,3,4\}$ اور $B = \{4,8,9,10\}$ ، $f : A \to B$ جس کی وضاحت $f = \{(1,4),(2,8),(3,9),(4,10)\}$ سے کی گئی ہے۔

(1) کئی-ایک تفاعل (2) متماثل تفاعل

(3) ایک تا ایک تفاعل (4) دروں تفاعل

10۔ اگر $f(x) = 2x^2$ اور $g(x) = \frac{1}{3x}$ ہوتو $f \circ g$

(1) $\frac{3}{2x^2}$ (2) $\frac{2}{3x^2}$ (3) $\frac{2}{9x^2}$ (4) $\frac{1}{6x^2}$

11۔ اگر $f : A \to B$ ایک دوہرا تفاعل ہو اور $n(B) = 7$ ہوتو $n(A)$ مساوی ہے۔

(1) 7 (2) 49 (3) 1 (4) 14

12۔ فرض کرو f اور g دو تفاعلات ہیں۔

$$f = \{(0,1),(2,0),(3,-4),(4,2),(5,7)\}$$

$g = \{(0,2),(1,0),(2,4),(-4,2),(7,0)\}$ ہوتو $f \circ g$ کی وسعت

(1) $\{0,2,3,4,5\}$ (2) $\{-4,1,0,2,7\}$ (3) $\{1,2,3,4,5\}$ (4) $\{0,1,2\}$

13۔ فرض کرو $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ ہوتو

(1) $f(xy) = f(x).f(y)$ (2) $f(xy) \geq f(x).f(y)$

(3) $f(xy) \leq f(x).f(y)$ (4) ان میں سے کوئی نہیں

14۔ اگر $g = \{(1,1),(2,3),(3,5),(4,7)\}$ ایک تفاعل ہے۔ جس کی تشریح $g(x) = x\alpha + \beta$ ہوتو α اور β کی قیمتیں

(1) $(-1,2)$ (2) $(2,-1)$ (3) $(-1,-2)$ (4) $(1,2)$

15۔ $f(x) = (x+1)^3 - (x-1)^3$ ایک تفاعل کی نمائندگی کرتا ہے جو

(1) خطّی (2) مکعبی (3) مقلوبی (4) دودرجی

Unit Exercise - 1 اکائی کی مشق - 1

1۔ اگر ترتیب وار جوڑی $(x^2 - 3x\ ,\ y^2 + 4y)$ اور $(-2,5)$ مساوی ہوں تو x اور y معلوم کرو۔

2۔ کارتیسی حاصلِ ضرب $A \times A$ میں 9 عناصر موجود ہیں۔ جن میں $(-1,0)$ اور $(0,1)$ معلوم ہوں تو مجموعہ A اور $A \times A$ کے باقی عناصر معلوم کرو۔

3۔ دیا گیا ہے۔ $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & x \geq 1 \\ 4 & x < 1 \end{cases}$ ہوتو معلوم کرو۔

(i) $f(0)$ (ii) $f(3)$ (iii) $f(a+1)$ $(a < 0$ دیا گیا ہے$)$ کو a کی شکل میں لکھئے۔

4۔ فرض کرو $A = \{9,10,11,12,13,14,15,16,17\}$ اور $f : A \to N$ جس کی تشریح $n \in A$,

$f(n) =$ n کی اعلیٰ ترین مفرد جزوِ ضربی کی گئی ہے۔ f کو ترتیب وار جوڑیاں کے مجموعہ کے طور پر ظاہر کرو اور f کی وسعت معلوم کرو۔

10th maths 1. relations and functions
Sunday, February 16, 2020 5:37:10 PM

5۔ تفاعل $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}$ کا علاقہ معلوم کرو۔

6۔ اگر $f(x) = x^2$ ، $g(x) = 3x$ اور $h(x) = x - 2$ ہوتو ثابت کروکہ $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

7۔ اگر $A = \{1,2\}$, $B = \{1,2,3,4\}$, $C = \{5,6\}$ اور $D = \{5,6,7,8\}$ ہوتو تصدیق کروکیا $B \times D$ کا تحتی مجموعہ $A \times C$، ہے؟

8۔ اگر $x \neq -1$, $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ ہوتو ثابت کروکہ $f(f(x)) = -\frac{1}{x}$ جب کہ $x \neq 0$ ہے۔

9۔ تفاعل f اور g کی تشریح $f(x) = 6x + 8$ ، $g(x) = \frac{x-2}{3}$ ہوتو

(i) محسوب کرو۔ $gg\left(\frac{1}{2}\right)$

(ii) $gf(x)$ کو مختصر ترین شکل میں ظاہر کرو۔

10۔ ذیل کے حقیقی تفاعلات کے علاقے لکھو۔

(i) $f(x) = \frac{2x+1}{x-9}$ (ii) $p(x) = \frac{-5}{4x^2+1}$ (iii) $g(x) = \sqrt{x-2}$ (iv) $h(x) = x + 6$

Points to Remember — یاد رکھنے کے نکات

☆ A اور B کے کارتیسی حاصلِ ضرب کی تشریح $A \times B = \{(a,b) | \text{تمام } a \in A , b \in B\}$

☆ A سے B کا تعلق $\mathbb{R}$ ہمیشہ $A \times B$ کا تحتی مجموعہ ہوتا ہے۔یعنی، $R \subseteq A \times B$

☆ تعلق $\mathbb{R}$ ایک تفاعل ہے۔ اگر ہر $x \in X$ ، جس میں صرف ایک $y \in Y$ ہوگا۔

☆ کسی تفاعل کی نمائندگی ذیل کے طریقوں پر کی جاتی ہے۔

(i) تیر کا خاکہ

(ii) جدولی طریقہ

(iii) ترتیب وار جوڑیوں کا مجموعہ

(iv) ترسیمی شکل

☆ چند تفاعلات کے اقسام

(i) ایک-ایک تفاعل

(ii) بروں تفاعل

(iii) کئی-ایک تفاعل

(iv) دروں تفاعل

☆ متماثل تفاعل $f(x) = x$ ہے۔

☆ مقلوبی تفاعل $f(x) = \frac{1}{x}$ ہے۔

10th maths 1. relations and functions
Sunday, February 16, 2020 5:37:10 PM

☆ مستقل تفاعل $f(x) = c$ ہے۔

☆ خطی تفاعل $f(x) = ax + b\ ,\ a \neq 0$ ہے۔

☆ دودرجی تفاعل $f(x) = ax^2 + bx + c\ ,\ a \neq 0$ ہے۔

☆ مکعبی تفاعل $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\ ,\ a \neq 0$ ہے۔

☆ تین غیر معدوم مجموعے A، B اور C کے لئے اگر $f : A \to B$ اور $g : B \to C$ دوتفاعل ہوتو f اور g کی ترکیب تفاعل $g \circ f : A \to C$ کی تشریح اس طرح ہوگی۔ تمام $x \in A$, $g \circ f(x) = g(f(x))$

☆ اگر f اور g دوتفاعلات ہوں تو عام طور پر $f \circ g \neq g \circ f$ ہوگا۔

☆ اگر f, g اور h کوئی تین تفاعلات ہوں تو $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ ہوگا۔

ICT CORNER

ICT 1.1

مرحلہ 1 : ذیل میں دیئے ہوئے بروزر Browser قسم کے URL لنک کو کھولو (یا) QR کوڈ کو اسکین کرو Geo Gebra مشق کی کتاب (work Book) میں ''Relations and Functions'' کھلے گا۔ work Book کے بائیں جانب متاحب سے تعلق رکھتے ہوئے کئی عملی کام دکھائی دے گا۔ ''Functions Identification'' کے عملی ورق کا انتخاب کرو۔

مرحلہ 2 : دیئے ہوئے عملی ورق (work sheet) پر دائیں جانب ہر ایک تفاعل سے تعلق رکھنے والے Check Boxes پر کلک کرو، دائیں جانب پر ایک تفاعل کی ترسیم بالترتیب دکھائی دے گی ہر ایک ترسیم کا بغور جائزہ لو اور ''New Functions'' پر کلک کرو یہ عمل جاری رکھو جب تک تم اچھی طرح سمجھ نہ جاؤ۔

Step 1 | Step 2 | Expected results



ICT 1.2

مرحلہ 1 : ذیل میں دیئے ہوئے Browser قسم کے URL لنک کھولو (یا) QR کوڈ کو اسکین کرو GeoGebra مشق کی کتاب (work Book) میں ''Relation and Functions'' کھولے گا۔ work Book کے بائیں جانب مساحت سے تعلق رکھتے ہوئے کئی عملی کام دکھائی دے گا ''Composition of Functions'' کے عملی ورق کا انتخاب کرو۔

مرحلہ 2 : دیئے ہوئے عملی ورق پر دائیں جانب ہر ایک تفاعل سے Check Boxes پر کلک کرو۔ دائیں جانب ہر ایک تفاعل کی ترسیم بالترتیب دکھائی دے گی۔ ہر ایک ترسیم کا بغور جائزہ لو اور ''New Funcitons'' پر کلک کرو اور عمل جاری رکھو جب تک تم اچھی طرح سمجھ نہ

Step 1 | Step 2 | Expected results



You can repeat the same steps for another activities

https://www.geogebra.org/m/jfr2zzgy#chapter/356191

or Scan the QR Code.

10th maths 1. relations and functions
Sunday, February 16, 2020 5:37:11 PM

2

اعداد اور سلسلے

NUMBERS AND SEQUENCES

I know numbers are beautiful, if they arent beautiful, nothing is
- Paul Erdos



Srinivasa Ramanujan
(1887-1920)

سری نیواسا رامانجن (Srinivasa Ramanujan) ہندوستان کے علم ریاضی کا غیر معمولی ذہین شخص (Mathematical Genius) ایروڈ کے ایک غریب گھرانے میں پیدا ہوا۔ یہ غیر معمولی ذہانت والا بچہ حسابات کو بجلی کی رفتاری سے حل کرتا تھا۔اس نے ہزاروں فارمولے دریافت کئے اور انہیں تین نوٹ بکوں میں قلم بند کیا جو آج بھی مدراس یونیورسٹی میں محفوظ ہے۔کئی نامور اشخاص کی تائید سے مدراس یونیورسٹی کے علم ریاضی کے شعبہ میں وہ پہلے ریسرچ اسکالر بنے۔آخر کار انہوں نے انگلینڈ کا سفر کیا اور G.H ہارڈی کے ساتھ مل کر 1914ء سے 1919ء تک کام کیا۔

وہ اعداد کے نمونے (Pattern of numbers) پر گہری دلچسپی رکھتے تھے۔انہوں نے تجزیاتی عددی تھیوری میں کئی نتائج کی تخلیق کی۔ اس کی ریاضی صلاحیت کو ماضی کے دو عظیم ریاضی دان آئلر اور جیکو بی (Euler and Jacobi) سے موازنہ کیا جاتا ہے۔رامانجن نے تیس اہم ریسرچ پیپرس لکھے۔32 سال کے مختصر وقفہ کے دوران انہوں نے 3972 ضابطے اور مسئلوں کو پیش کیا۔کیمبرج یونیورسٹی نے ان کو 1916ء میں بی اے کی ڈگری سے نوازا جو اس زمانے کی Ph.D. ڈگری کے مترادف تھا۔عددی مسئلہ میں اپنا حصہ ادا کرنے کا اعتراف (Number Theory) کرتے ہوئے ان کو رائل سوسائٹی کا فیلو ((Fellow of Royal Society (F.R.S)) بنایا گیا۔

ان کی عملی سرگرمی سے دنیا کے ریاضی دان آج بھی محظوظ ہوتے آرہے ہیں۔ان کی زندگی کے آخری چند سال میں کئے ہوئے کاموں کا حیرت انگیز مناسبت پیدا کی ہے۔جس کو انہوں نے ایک سو سال پہلے کیا تھا۔

TOHGM

سیکھنے کے نتائج

- اقلیدس (Euclid) کے تقسیمی مفروضہ (Division Lemma) کے نظریہ کو سمجھنا۔
- اقلیدس کے تقسیمی الگورتھم (ریاضی قواعد) کو سمجھنا۔
- اقلیدس کے تقسیمی الگورتھم کے استعمال سے L.C.M (ذو اضعاف اقل) اور G.C.D (مقسوم علیہ اعظم) محسوب کرنا۔
- حساب کے بنیادی مسئلہ کو سمجھنا۔
- مماثل ماڈولو 'n' جمعی ماڈولو 'n' اور ضربی ماڈولو 'n' کو سمجھنا۔
- تواتر کی تعریف اور تواتر کے تفاعل کے طور پر سمجھنا۔
- حسابی سلسلہ (A.P) اور ہندسی سلسلہ (G.P) کی تعریف۔
- A.P کی n ویں رقم اور اس کے n رقموں کا مجموعہ معلوم کرنا۔
- G.P کی n ویں رقم اور اس کے 'n' رقموں کا حاصل جمع معلوم کرنا۔
- چند محدود سلسلوں کا حاصل جمع معلوم کرنا جیسے Sn اور $\Sigma n^3, Sn^2$ ۔

10 math unit 2A
Saturday, February 15, 2020 1:41:45 PM

2.1 تعارف

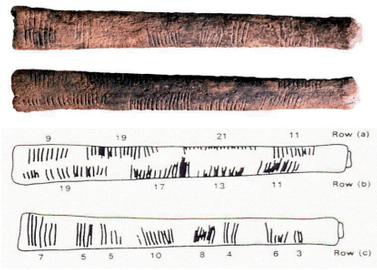


Fig.2.1
Ishango کے ہڈیوں پر لکھے گئے اعداد

اعداد کے مطالعہ نے انسانوں کو کئی ہزاروں سال سے دلچسپی پیدا کی ہے۔Lebombo اور Ishango کی ہڈیوں کی دریافت جو25000 سال پہلے موجود تھیں، اس حقیقت کو مستحکم کرتی ہیں کہ انسان روزمرہ کی ضرورتوں کو پورا کرنے کے لئے گنتی کے عمل کو اختیار کیا۔ وہ ہڈیوں میں دندانے یا شگاف بنائے جس کی مدد سے وہ گنتی کے عمل کو مہارت سے انجام دیتے تھے۔ اکثر لوگوں کا خیال ہے کہ وہ ان ہڈیوں کو قمری کیلنڈر کے طور پر استعمال کرتے تھے۔ تاکہ وہ چاند کی مختلف شکلوں کو معلوم کرسکیں جس سے ان کو موسم کے بارے میں معلومات حاصل ہوں۔ اسی طرح یہ ہڈیاں گنتی کے عمل کا قدیم اوزار سمجھا جاتا تھا۔ ہم اس قدیم گنتی کے عمل کے طریقہ سے ایک طویل سفر کرکے آگے نکل چکے ہیں۔

یہ سچ ہے کہ اعداد کی ترتیب پیشہ وارانہ ریاضی دان کو فیثا غورث (Pythagoras) کے زمانے سے آج تک دلچسپی کا باعث بنا ہوا ہے۔ اب ہم اقلیدس کی مہیا کردہ اہم نظریہ کے بارے میں بحث کریں گے اور ماڈولر حساب اور تواتر اور محدود سلسلے کے بارے میں غور کرتے ہوئے آگے کا سفر کریں گے۔

2.2 اقلیدس کا تقسیمی مفروضہ (Euclid's Division Lemma)

علم ریاضی کے اہم ریاضی دانوں میں سے ایک ریاضی دان اقلیدس نے ایک اہم کتاب جس کا عنوان 'عناصر' (Elements) تھا، 13 جلدوں میں قلم بند کیا۔ اس نے پہلے چھ جلد جیومٹری کے لئے وقف کیا جس کی وجہ سے اس کو جیومٹری کا بانی (Father of Geometry) کہا جاتا ہے۔ لیکن بعد کی چند جلدوں میں اعداد کی خاصیتوں کو سمجھنے کے بارے میں بنیادی حصہ ادا کیا۔ ان میں ایک ''یوکلیڈ کا تقسیمی مفروضہ'' ہے۔ تم جو پچھلی جماعتوں میں اعداد کی تقسیم کے لئے طویل تقسیمی طریقہ اختیار کرتے تھے اس کا یہ مختصر کردہ شکل ہے۔

آیئے اب ہم اقلیدس کے مفروضہ اور اس کے استعمال کو بذریعہ حساب (الگورتھم) کریں جس کو اقلیدس کا تقسیمی الگورتھم (Euclid's Division Algorithm) کہا جاتا ہے۔

Lemma (تحتی مسئلہ) ایک تحتی نتیجہ ہے جو ایک اہم مسئلہ (Theorem) کو ثابت کرنے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔ اس کو ہم ایک چھوٹا مسئلہ (Mini Theorem) بھی کہہ سکتے ہیں۔

مسئلہ 1 : اقلیدس کا تقسیمی مفروضہ (Euclid's Division Lemma)

فرض کرو a اور b $(a > b)$ دو مثبت سالم اعداد ہیں تو دو ایسے خاص اعداد q اور r موجود ہوتے ہیں اس طرح کہ

$$a = bq + r,\ 0 \leq r < b$$

غور کیجئے

- بچت ہمیشہ مقسوم علیہ Divisor سے کم ہوتا ہے
- اگر r=0 ہو تو a=bq اس لئے a کو b تقسیم کرتا ہے۔
- اس کے برخلاف اگر a کو b تقسیم کرتا ہے تو a=bq

10 math unit 2A
Saturday, February 15, 2020 1:41:46 PM

مثال 2.1 ہمارے پاس 34 کیک ہیں۔ ہر ایک ڈبہ میں 5 کیک سما سکتے ہیں۔ ان کو پیک کرنے کے لئے کتنے ڈبوں کی ضرورت ہے۔ کتنے کیک بغیر پیک کئے رہ جائیں گے؟

حل : ہمیں معلوم ہے کہ 30 کیک کو پیک کرنے کے لئے 6 ڈبوں کی ضرورت ہے اور 4 کیک باقی رہ جائیں گے۔ کیک کی تقسیم کو ذیل کے طریقہ پر سمجھ سکتے ہیں۔

34	=	5	×	6	+	4
کیک کی کل تعداد	=	ہر ایک ڈبہ میں کیک کی تعداد	×	ڈبوں کی تعداد	+	باقی کیک کی تعداد
↓		↓		↓		↓
مقسوم a	=	مقسوم علیہ b	×	خارج قسمت q	+	بچت r

غور کیجئے

1۔ اوپر کا تحتی مسئلہ (Lemma) تقسیم کا توسیع شدہ طریقہ کے سوائے کچھ نہیں ہے۔ سالم اعداد q اور r بالترتیب خارج قسمت اور باقی ہیں۔

2۔ ایک مثبت سالم عدد کو 2 سے تقسیم کرنے پر باقی 0 یا 1 ہوگا۔ لہذا کوئی بھی مثبت سالم عدد $2k, 2k+1$ کی شکل میں ہوگا جہاں k کوئی سالم عدد (integer) ہے۔

اقلیدس کی تقسیمی مفروضہ کی عام شکل Generalised Form of Euclid's division (Lemma)

اگر a اور b کوئی دو سالم اعداد ہوں تو خاص سالم اعداد (Unique Integers) q اور r ایسے موجود ہوتے ہیں کہ

$a=bq+r$ جہاں $0 \le r < |b|$

مثال 2.2 : خارج قسمت اور بچت معلوم کرو، اگر ذیل کی صورتوں میں a کو b سے تقسیم کیا جائے۔

(i) $a=-12, b=5$ (ii) $a=17, b=-3$ (iii) $a=-19, b=-4$

حل : (i) $a=-12, b=5$

اقلیدس تقسیمی مفروضہ کے تحت $a=bq+r$ جہاں $0 \le r < |b|$

$-12 = 5\times(-3)+3,\ 0 \le r < |5|$

لہذا خارج قسمت $q=-3$, بچت $r=3$

ذرا سوچئے

اگر ایک مثبت سالم عدد 3 سے تقسیم کیا جائے تو

1۔ ممکن باقی کیا ہیں؟

2۔ اس کی شکل (Form) میں لکھ سکتے ہیں؟

(ii) $a=17 \quad b=-3$

اقلیدس تقسیمی مفروضہ کے تحت $a=bq+r$ جہاں $0 \le r < |b|$

$17 = (-3)\times(-5)+2,\ 0 \le r < |-3|$

لہذا خارج قسمت $q=-5$

بچت $r=2$

(iii) $a=-19, b=-4$

اقلیدس تقسیمی مفروضہ کے تحت $a=bq+r$ جہاں $0 \le r < |b|$

$-19 = (-4)\times(5)+1 \quad 0 \le r < |-4|$

لہذا $q=5$ خارج قسمت $r=1$ بچت

اپنی پیش رفت کی جانچ

Find q and r for the following pairs of integers a and b satisfying $a=bq+r$.

1. $a=13,\ b=3$
2. $a=18,\ b=4$
3. $a=21,\ b=4$
4. $a=32,\ b=12$
5. $a=31,\ b=7$

10 math unit 2A
Saturday, February 15, 2020 1:41:46 PM

مثال 2.3 ثابت کروکہ ایک سالم طاق عدد کا مربع $4q+1$ کی شکل میں ہوتا ہے کسی q سالم عدد کے لئے

حل : فرض کرو x کوئی طاق سالم عدد ہے چونکہ کوئی بھی طاق سالم عدد ایک جفت سالم عدد سے زیادہ ہوتا ہے اس طرح $x = 2k + 1$ جہاں k کوئی سالم عدد ہے

$$\begin{aligned} x^2 &= (2k+1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 4k(k+1) + 1 \\ &= 4q + 1 \end{aligned}$$

جہاں $q = k(k+1)$ کسی سالم کے لئے

2.3 اقلیدس کا تقسیمی الگورتھم

پچھلے حصے میں ہم اقلیدس کے تقسیمی مفروضہ کے بارے میں پڑھ چکے ہیں۔اب ہم اس کے تقسیمی الگورتھم کے بارے میں پڑھیں گے۔ لفظ الگورتھم 9ویں صدی کے فارسی ریاضی دان الخوارزمی (Alkhwarizmi) کے نام سے لیا گیا ہے۔الگورتھم کا مطلب یہ ہے کہ پچھلے مرحلوں حاصل شدہ نتائج کو استعمال کرتے ہوئے سلسلہ وار اصول کے تحت بتدریج جاری رکھا جاتا ہے جب تک کہ مطلوبہ جواب حاصل نہ ہو جائے۔

اقلیدس تقسیمی طریقہ سے ہم دیئے ہوئے دو مثبت سالم اعدادی مقسوم علیہ اعظم (Highest Comman factor) یعنی H.C.F آسانی سے معلوم کر سکتے ہیں۔ آیئے ہم ذیل کے مسئلہ کو ثابت کرتے ہیں۔

مسئلہ 2

اگر a اور b دو مثبت اعداد ہوں اس طرح کے $a=bq+r1$ اب a اور b کا ہر مشترک مقسوم علیہ b اور r کا مشترک مقسوم علیہ ہوگا اور اس کے برعکس

اقلیدس کا تقسیمی الگورتھم (Euclid's Division Algorithm)

دو مثبت سالم اعداد a اور b کا مقسوم علیہ اعظم دریافت کرنا جہاں $a > b$

مرحلہ 1 : اقلیدس کا تقسیمی مفروضہ کے استعمال سے $a = bq + r\ ;\ 0 \le r < b$ جہاں q خارج قسمت، r بچت ہے۔

اگر $r=0$ ہو تو a اور b مشترک جزوِ ضربی (Common Factor) b ہیں۔

مرحلہ 2 : اگر نتیجہ اس کے برخلاف ہو تو دوبارہ اقلیدس تقسیمی مفروضہ کو استعمال کرتے ہوئے b کو r سے تقسیم کرنے پر $b = rq_1 + r_1$, $0 \le r_1 < r$ ہے۔

مرحلہ 3 : اگر $r1=0$ ہو تو a اور b کا مقسوم علیہ اعظم r ہے۔

مرحلہ 4 : اگر نتیجہ برخلاف ہو تو پھر اقلیدس تقسیمی مفروضہ کے استعمال کو جاری رکھا جائے گا جب تک کہ ہمیں بچت صفر حاصل نہ ہو جائے اس صورت میں نظیری مقسوم علیہ (Corrresponding Division) a اور b کا مقسوم علیہ اعظم H.C.F ہوگا۔

غور کیجئے

- مندرجہ بالا الگورتھم سے کسی نہ کسی مرحلے میں بچت صفر حاصل ہوگا۔ اس طرح الگورتھم کا اختتام پذیر (terminate) ہوتا ہے .
- اقلیدس کا تقسیمی الگورتھم، تقسیمی مفروضہ کو مسلسل استعمال کرنے کا عمل ہے جب تک کہ ہمیں صفر حاصل نہ ہو جائے۔
- دو مثبت اعداد کا اعلیٰ ترین مشترک جزوِ ضربی (H.C.F) کو (a,b) سے ظاہر کرتے ہیں۔
- اعلیٰ ترین مشترک جزوضربی (H.C.F) کو مشترک مقسوم علیہ اعظم (G.C.D) کہا جاتا ہے۔

10 math unit 2A
Saturday, February 15, 2020 1:41:47 PM

اپنی پیش رفت کی جانچ

1۔ اقلیدس کا تقسیمی الگورتھم تقسیمی مفروضہ (Division Lemma) کو مسلسل استعمال کرنے کا طریقہ ہے جب تک ہمیں بچت.....حاصل ہوتا ہے۔

2۔ دو مساوی مثبت سالم اعداد کا H.C.F k ہو تو k _____ ہے .

تشریح 1

اوپر کے الگورتھم کو استعمال کرتے ہوئے دیئے ہوئے دو مثبت سالم اعداد کا H.C.F معلوم کریں گے۔ فرض کرو $a=273$ اور $b=119$ دیئے ہوئے دو مثبت سالم اعداد ہیں اس طرح کہ $a>b$ ہے۔ اقلیدس کے تقسیمی مفروضہ (Lemma) کو استعمال کرتے ہوئے ہم 273 کو 119 سے تقسیم کرتے ہوئے آغاز کرتے ہیں۔

$$273 = 119 \times 2 + 35 \quad \ldots\ldots (1)$$

باقی $35 \neq 0$.

اس لئے اقلیدس کا تقسیم الگورتھم مقسوم علیہ 119 اور بچت 35 پر استعمال کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$119 = 35 \times 3 + 14 \quad \ldots\ldots (2)$$

باقی $14 \neq 0$.

اقلیدس کا تخنی میں الگورتھم مقسوم علیہ 35 اور بچت 14 پر استعمال کرنے پر

$$35 = 14 \times 2 + 7 \quad \ldots\ldots (3)$$

باقی $7 \text{ is} \neq 0$.

اقلیدس کا تقسیمی الگورتھم مقسوم علیہ 14 اور بچت 7 پر استعمال کرنے پر

$$14 = 7 \times 2 + 0 \quad \ldots\ldots (4)$$

اس مرحلے میں بچت $= 0$.

اس مرحلے میں مقسوم علیہ، $= 7$.

273,119 کا مشترک عادِ اعظم $= 7$

مثال 2.4

اگر 210 اور 55 کے مشترک عادِ اعظم کو $5x-325$ کی شکل میں ظاہر کیا جائے تو x معلوم کرو۔

حل : اقلیدس کے تقسیمی الگارتھم کو استعمال کرتے ہوئے ہم دیے ہوئے دو اعداد کا HCF معلوم کریں گے۔

$$210 = 55 \times 3 + 45$$
$$55 = 45 \times 1 + 10$$
$$45 = 10 \times 4 + 5$$
$$10 = 5 \times 2 + 0$$

بچت صفر ہے۔

اس لیے آخر کار مقسوم علیہ 5 ، 210 اور 55 کا مشترک عادِ اعظم (HCF) ہے۔

چونکہ H.C.F کو ذیل کی شکل میں ظاہر کر سکتے ہیں۔ $55x - 325 = 5$

$$55x = 330$$

لہذا $x = 6$

10 math unit 2A
Saturday, February 15, 2020 1:41:47 PM

مثال 2.5 اعلیٰ ترین عدد معلوم کرو جو 445 اور 572 کو اس طرح تقسیم کرے کہ بالترتیب باقی 4 اور 5 حاصل ہو .

حل : چونکہ باقی بالترتیب 4 اور 5 ہیں۔

$445-4=441,\ 572-5=567$.

اس لیے ہم 441 اور 567 کا H.C.F معلوم کریں گے۔

اب اقلیدس کا تقسیمی الگورتھم کو استعمال کرنے پر

$$567 = 441\times1+126$$

$$441 = 126\times3+63$$

$$126 = 63\times2+0$$

441, 567 کا H.C.F اس لیے مطلوبہ عدد 63 ہے۔

لہذا 63 =



کارروائی 1

اس کارروائی سے دو مثبت اعداد کا H.C.F معلوم کرنے پر معاون ثابت ہوگی۔ ہم پہلے ذیل کی ہدایات پر غور کرتے ہیں۔

i۔ ایک مستطیل کی تصنیف کرو جس کی لمبائی اور چوڑائی دیئے ہوئے دو اعداد ہیں۔

ii۔ اس مستطیل کو چھوٹے مربع سے پُر کرنے کی کوشش کرو۔

iii۔ اگر 1x1 مربع .سے کوشش کرو۔ 2x2 مربع سے کوشش کرو۔ 3x3 مربع سے کوشش کرو۔

iv۔ سب سے بڑے مربعے کا ضلع جو اس مستطیل کو بغیر خالی جگہ کے پوری طرح بھرتی کرتا ہے، ان دیے ہوئے اعداد کا H.C.F ہوگا۔

(a) 12,20 , (b) 16,24 , (c) 11,9

V۔ H.C.F معلوم کرو۔

مسئلہ 3

اگر a اور b دو مثبت سالم اعداد ہوں اور $a>b$ ہو تو (a,b) = G.C.D of $(a-b,b)$ کا G.C.D



کارروائی 2

H.C.F کو معلوم کرنے کا یہ دوسری کارروائی ہے۔

i) دیے ہوئے دو اعداد میں , چھوٹے عدد کو بڑے عدد سے تفریق کرو۔

ii) بچے ہوئے اعداد میں پھر چھوٹے عدد کو بڑے عدد سے تفریق کرو۔

iii) بڑے عدد سے چھوٹے عدد کو تفریق کرنے کے عمل کو جاری رکھو۔

iv) اگر دو اعداد مساوی ہو جائیں تو اس عمل کو روک دو۔

v) مرحلہ iv حاصل ہونے والے مساوی اعداد دیے ہوئے اعداد کا H.C.F ہوگا۔

اس کارروائی کو استعمال کرتے ہوئے H.C.F معلوم کرو۔

(i) 90,15 (ii) 80,25 (iii) 40,16 (iv) 23,12 (v) 93,13

10 math unit 2A
Saturday, February 15, 2020 1:41:48 PM

تین اعداد کا مشترک عادِ اعظم Highest Common Factor of three numbers

اقلیدس کے تقسیمی الگورتھم کو دو مرتبہ استعمال کر کے تین مثبت سالم اعداد کا اعلیٰ ترین مشترک عادِ اعظم (H.C.F) ذیل کے طریقے سے معلوم کر سکتے ہیں۔

فرض کرو a,b اور c دیے ہوئے مثبت سالم اعداد ہیں۔

(i) a,b کا H.C.F معلوم معلوم کرو . اس کو d کہہ لو۔ $d=(a, b)$

(ii) d اور c کا H.C.F معلوم کرو .

یہ تین دیے ہوئے اعداد a,b,c کا H.C.F. ہوگا۔

مثال 2.6 : 504,396 اور 636 کا H.C.F. معلوم کرو۔

حل : دیئے ہوئے تین اعداد کا H.C.F معلوم کرنے کے لیے ہمیں پہلے دو اعداد کا H.C.F. معلوم کرنا ہوگا۔

396 اور 504 کا H.C.F معلوم کرنا۔

یوکلیڈ کا تقسیمی الگورتھم استعمال کرنے پر $504 = 396 \times 1 + 108$

باقی $108 \neq 0$ ہے۔

دوبارہ یوکلیڈ کا تقسیم الگورتھم استعمال کرنے پر $396 = 108 \times 3 + 72$

باقی $72 \neq 0,$ ہے۔

پھر یوکلیڈ کا تقسیم الگورتھم استعمال کرنے پر $108 = 72 \times 1 + 36$

باقی $36 \neq 0,$ ہے۔

پھر یوکلیڈ کا تقسیم الگورتھم استعمال کرنے پر $72 = 36 \times 2 + 0$

یہاں صفر باقی ہے۔ لہٰذا 396,504 کا H.C.F = 36 اب 636 اور 36 کا H.C.F معلوم کرنا ہے۔

یوکلیڈ کا تقسیم الگورتھم استعمال کرنے پر $636 = 36 \times 17 + 24$

باقی $24 \neq 0$ ہے۔

دوبار یوکلیڈ کا تقسیم الگورتھم استعمال کرنے پر $36 = 24 \times 1 + 12$

باقی $12 \neq 0$ ہے۔

پھر یوکلیڈ کا تقسیم الگورتھم استعمال کرنے پر $24 = 12 \times 2 + 0$

یہاں بچت صفر ہے، لہٰذا 636, 36 کا H.C.F 12 ہے۔

لہٰذا 504, 396 اور 636 کا مشترک عاد اعظم = 12



دو مثبت سالم اعداد اضافی مفرد یا باہم مفرد اعداد کہلاتے ہیں۔ اگر کا اعلیٰ تین جزو ضربی (H.C.F) 1 ہو۔

مشق 2.1

1۔ تمام مثبت سالم اعداد معلوم کرو جو کہ 3 سے تقسیم کرنے پر باقی 2 حاصل ہوتا ہے۔

2۔ کسی شخص کے پاس پاس 532 پھول کے گملے موجود ہیں۔ وہ ان کو صف میں ترتیب سے رکھنا چاہتا ہے۔ اس طرح کے ہر ایک صف میں 21 پھول کے گملے ہوں، بتاؤ کتنے مکمل صف ہوں گے اور کتنے پھول کے گملے باقی رہ جائیں گے؟

10 math unit 2A
Saturday, February 15, 2020 1:41:48 PM

3۔ ثابت کرو کہ دومتواتر مثبت سالم اعداد کا حاصل ضرب 2 سے تقسیم پذیر ہوتا ہے۔

4۔ اگر تین مثبت سالم اعداد a,b اور c کو 13 سے تقسیم کرنے پر بالترتیب بچت 7,9 اور 10 حاصل ہو تو بتلاؤ کہ $a+b+c$ کو 13 سے تقسیم پذیر ہوتا ہے۔

5۔ ثابت کرو کہ کسی بھی سالم اعداد کے مربع کو 4 سے تقسیم کرنے پر باقی 0 یا 1 حاصل ہوتا ہے۔

6۔ اقلیدس کے تقسیمی الگارتھم کو استعمال کرتے ذیل کا اعلیٰ ترین مشترک جزوضربی (H.C.F) معلوم کرو۔

(i) 340 and 412 (ii) 867 and 255 (iii)10224 and 9648 (iv) 84, 90 and 120

7۔ سب سے بڑا عدد معلوم کرو جس سے 1230 اور 1926 کو تقسیم کرنے پر ہر ایک میں بچت 12 چھوڑتا ہے۔

8۔ اگر 32 اور 60 کا مشترک عاد اعظم d ہو تو x اور y معلوم کرو جو $d=32x+60y$ کو پورا کرتا ہے۔

9۔ ایک مثبت سالم عدد کو 88 سے تقسیم کرنے پر بچت 61 حاصل ہوتا ہے۔ اس عدد کو 11 سے تقسیم کرنے پر کیا بچت حاصل ہوگا؟

10۔ ثابت کرو کہ دومتواتر سالم اعداد ہمیشہ ہمیشہ باہم مفرد ہوتے ہیں۔

2. ریاضی کا بنیادی مسئلہ (Fundamental Theory of Arithmatic)

آیئے ایک استاد اور شاگرد کے مکالموں پر غور کرتے ہیں۔

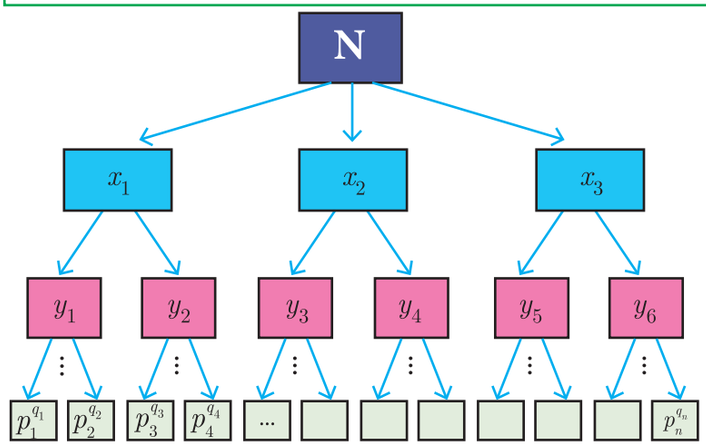
استاد : 240 کا اجزعربی معلوم کرو۔
انیس : 24×10
مبین : 8×30
ریان : 12×20
دانش : 15×16
انیس : اس کا جواب درست ہے؟
استاد : تمام جوابات صحیح ہیں۔
مبین : وہ کیسے حضرت؟
استاد : ارے کا زائد ربی کو مفرد اعداد کے حاصل ضرب کے طور پر الگ کرو۔
انیس : $2\times2\times2\times3\times2\times5$
مبین : $2\times2\times2\times2\times3\times5$
ریان : $2\times2\times3\times2\times2\times5$
دانش : $3\times5\times2\times2\times2\times2$
استاد : شاباش ! اب 3,2 اور 5 کی تعداد کو شمار کرو۔
انیس : مجھے چار 2 ایک 3 اور ایک 5 حاصل ہوتے ہیں
مبین : مجھے چار ,2 یہ ایک ,3 اور یہ 5 حاصل ہوتے
ریان : مجھے بھی وہی عادات حاصل ہوئے
دانش : مجھے بھی سر
انیس : ہم سب کو چار ,2 ایک 5 حاصل ہوئے ہم سب کے لیے تعجب کی بات ہے .
استاد : ہاں ,ہونا بھی چاہیے۔ کسی بھی عدد کو اس کے مفرد اجزائے ضربی کے طور پر ظاہر کیا جائے تو ہر ایک کو مفرد اعداد کا وہی مجموعہ حاصل ہوگا۔

اس نظریہ سے ہمیں ایک اہم مسئلہ کی طرف رہنمائی کرتا ہے۔

10 math unit 2A
Saturday, February 15, 2020 1:41:49 PM

مسئلہ 4 (علم حساب کا بنیادی مسئلہ) (بغیر ثبوت کے)

سوائے 1 کہ ہر ایک طبعی عدد کو مفرد اجزائے ضربی میں ظاہر کیا جاسکتا ہے اور یہ اجزائے ضربی یکتا (unique) ہے سوائے اس کے کہ مفرد اجزائے ضربی کے لکھنے کی ترتیب الگ ہوسکتی ہے



خاکہ 2.2

بنیادی مسئلہ حتمی طور پر کہتا ہے کہ ہر مرکب عدد (Composite number) کو مفر تعداد کے عزیز ربی کے طور پر الگ کر سکتے ہیں اور یہ تحلیل یکتا (unique) ہے۔ یعنی مطلب یہ کہ اس تحلیل (Decompoisition) کا اظہار بطور مفرد اجزائے ضربی کا صرف یہی طریقہ ہے۔

عام طور پر ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں, دیئے ہوئے مرکب عدد N صرف ایک طریقہ سے ذیل میں درج شدہ شکل میں الگ کر سکتے ہیں۔

$N = p_1^{q_1} \times p_2^{q_2} \times p_3^{q_3} \times \cdots \times p_n^{q_n}$ جہاں $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ مفرد آزاد ہیں اور $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$ طبعی اعداد ہیں۔

پہلے ہم N کے اجزائے ضربی میں ظاہر کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔ اگر تمام اجزاء ضربی میں مفرد ہو تو ہم رک سکتے ہیں ورنہ غیر مفرد اعداد کو مزید اجزاء میں الگ کرتے ہیں اس عمل کو جاری رکھیں تا کہ ہمیں صرف اوپر اعزاز حاصل ہو جائیں۔

ذرا سوچئے

کیا 1 ایک مفرد عدد ہے؟

تشریح :

مثال کے طور پر اگر ہم 32760 کا اجزائے ضربی نکالیں تو ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$32760 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13$$
$$= 2^3 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^1 \times 13^1$$

اس طرح ہم کسی بھی طریقہ سے 32760 کا اجزائے ضربی نکالیں تو آخر کار ہمیں تین 2s، دو 3s، ایک 5، ایک 7 اور ایک 13 حاصل ہوتے ہیں۔

اپنی پیش رفت کی جانچ

1۔ ہر ایک طبعی عدد سوائے ..... کے بطور ظاہر کر سکتے ہیں۔

2۔ ایک مرکب عدد کو مفرد اعداد کے قوت حاصل ضرب کے طور پر کتنے طریقوں سے ظاہر کر سکتے ہیں۔

3۔ کسی بھی مفرد عدد کا مقسوم علیہ ..... ہے۔

حقیقت یہ ہے کہ "ہر ایک مرکب سود کو صرف ایک طریقہ سے مفرد اعداد کے خود کے حاصل ضرب کے طور پر لکھ سکتے ہیں" جو علم حساب کا بنیادی مسئلہ کہلاتا ہے۔

2.4.1 حساب کے بنیادی مسئلے کی اہمیت Signifcance of Fundamental Theorem of Arithmatic

طبعی اعداد سوائے 'I' کہ تعلق سے بنیادی مسئلہ جو ہم اوپر بیان کر چکے ہیں، اس کا استعمال ریاضی میں اور دوسرے شعبوں میں ہوتا ہے . یہ مسئلہ ریاضی کا بہت اہم مسئلہ ہے چونکہ یہ اس حقیقت کو اجاگر کرتا ہے کہ وہ مفرد اعداد تمام مثبت سالم اعداد کا تعمیری بلاک (Building Block) ہے۔

اس طرح مفرد اعداد کو جوہر (Atoms) سے موازانہ کر سکتے ہیں جو سالمہ Molecule سے بنتا ہے۔

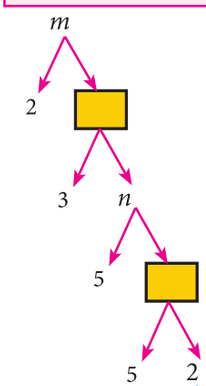
10 math unit 2A
Saturday, February 15, 2020 1:41:49 PM

کیا تم جانتے ہو؟

1۔ اگر ایک مفرد عدد p ، ab کو تقسیم کرتا ہے تو p ، a کو تقسیم کرتا ہے یا p، b کو تقسیم کرتا ہے یعنی P دونوں میں سے کم از کم ایک کو تقسیم کرتا ہے

2۔ اگر یہ ایک مرکب ab, n کو تقسیم کرتا ہے تو n نہ a کو تقسیم کرتا ہے اور نہ b کو . مثال کے طور پر 6، 3×4 کو تقسیم کرتا ہے لیکن 6 نہ 4 کو تقسیم کرتا ہے اور نہ 3 کو

مثال 2.7 دیے ہوئے جزوضربی میں اعداد m اور n معلوم کرو۔



خاکہ 2.3

حل : نچلے حصے سے پہلے خانہ کی قیمت =5x2=10

n کی قیمت n=5x10=50

نچلے حصے سے دوسرے خانہ کی قیمت n = 3x50=150

m کی قیمت m = 2x150=300

اس طرح مطلوبہ اعداد $n = 50,\ m = 300$

مثال 2.8 کیا عدد 6^n جہاں n ایک طبعی عدد ہے ہندسہ 5 پر ختم ہوسکتا ہے؟ اپنے جواب کے لئے وجہ بیان کرو۔

حل : چونکہ

$6^n = (2\times 3)^n = 2^n \times 3^n$ کا ایک جزوضربی 2 ہے . اس لیے

6^n ہمیشہ جفت ہے لیکن کوئی بھی طاق ہوتا ہے جس کا آخری ہندسہ 5 ہو۔

لہذا 6^n ہندسہ 5 پر ختم نہیں ہوگا

مثال 2.9 :

کیا $3\times 5\times 7+3\times 2$ ایک مخلوط عدد ہے؟ جواب کیلئے دلیل پیش کرو۔

حل : ہاں، دیا ہوا عدد مخلوط عدد ہے کیونکہ

$$7\times 5\times 3\times 2+3 = 3\times(7\times 5\times 2)+1 = 3\times 71$$

چونکہ یہ ہوئے عدد کو دو مفرد اعداد کے طور پر اجزائے ضربی نکالا جاسکتا ہے، یہ مخلوط عدد ہے

مثال 2.10 : a اور b دو مثبت سالم اعداد ہیں اس طرح کہ $a^b \times b^a = 800$ ہے۔ a اور b معلوم کرو۔

حل : 800 کے اجزائے ضربی ذیل کے طریقہ پر نکال سکتے ہیں۔

$$800 = 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 5\times 5 = 2^5\times 5^2$$

لہذا $a^b \times b^a = 2^5 \times 5^2$

اس سے ثابت ہوتا ہے کہ a=2 and b=5 (یا) a=5 and b=2

اپنی پیش رفت کی جانچ

1۔ فرض کرو n کو m تقسیم کرتا ہے تو n,m کا G.C.D اور L.C.M ..... اور ..... ہے

2۔ 2^m اور 3^m کی شکل کے اعداد کا H.C.F ____ ہے

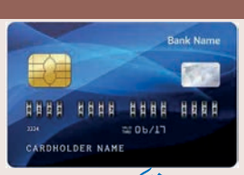
ذرا سوچئے

کیا تم دو مثبت سالم اعداد سوچ سکتے ہو اس طرح کہ $a^b = b^a$ ؟

عملی کام 3

کیا تم ایک ATM کارڈ کا 4 ہندی PIN عدد $pqrs$ معلوم کرسکتے ہو،

اس طرح کہ $p^2 \times q^1 \times r^4 \times s^3 = 3,15,000$ ؟



خاکہ 2.4

10 math unit 2A
Saturday, February 15, 2020 1:41:50 PM

مشق 2.2

1۔ n کی کونسی قیمت کے لیے 4^n ہندسہ 6 پر ختم ہوگا؟

2۔ اگر m اور n طبعی اعداد ہو تو m کہ کونسی قیمت کے لئے $2^n \times 5^m$ ہندسہ 5 پر ختم ہوگا؟

3۔ 252525 اور 363636 کا H.C.F معلوم کرو۔

4۔ اگر $13824 = 2^a \times 3^b$ ہو تو a اور b معلوم کرو۔

5۔ اگر $113400 = p_1^{x_1} \times p_2^{x_2} \times p_3^{x_3} \times p_4^{x_4}$ جہاں p_1, p_2, p_3, p_4 سعودی ترتیب میں اعدادِ اولیٰ ہیں اور x_1, x_2, x_3, x_4 سالم اعداد ہیں تو p_1, p_2, p_3, p_4 اور x_1, x_2, x_3, x_4 کی قیمت معلوم کرو۔

6۔ ریاضی کے بنیادی مسئلے کو استعمال کرتے ہوئے 408 اور 170 کا L.C.M اور H.C.F معلوم کرو۔

7۔ 6 ہندسوں پر مشتمل اعلیٰ ترین عدد معلوم کرو جو 24,15,36 سے پوری طرح تقسیم ہو سکے۔

8۔ وہ کونسا کمترین عدد ہے جو 35, 56 اور 91 کو تقسیم کرنے پر ایک میں بچت 7 حاصل ہوتا ہے؟

9۔ وہ کونسا مختصر ترین عدد (Least number) ہے جو ابتدائی دس طبعی اعداد سے تقسیم پذیر ہے؟

2.5 ماڈولر ریاضی (ModularArithmetic)



خاکہ 2.5

ایک گھڑی میں ہم 1 تا 12 اعداد کو 24 گھنٹوں کے وقفے کی نمائندگی کیلئے استعمال کرتے ہیں۔ ایک دن کے 24 گھنٹوں کو 12 گھنٹوں کے ترتیب (format) سے ظاہر کرنا کیسے ممکن ہے؟

ہم 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12 استعمال کرتے ہیں۔ 12 کے بعد ہم 13 کی بجائے 1 اور 14 کی بجائے 2 وغیرہ استعمال کرتے ہیں۔ یعنی 12 کے بعد ہم دوبارہ 1,2,3,..... استعمال کرتے ہیں۔ اس نظام میں 1 سے 12 کے اطراف گردش کرتے ہیں۔ کسی مخصوص قیمت سے تصادم کے بعد اس طرح کی حرکت کو **ماڈولر ریاضی** کہتے ہیں۔

حساب میں ماڈولر ریاضی سالم اعداد کا ایک نظام ہے جہاں اعداد ایک خاص قیمت کے اطراف گردش کرتے ہیں۔ عام ریاضی کے برخلاف ماڈولر ریاضی مدورانہ طور پر عمل پذیر ہوتا ہے۔ ماڈولر ریاضی مدورانہ طور پر عمل پذیر ہوتا ہے۔ ماڈولر ریاضی کے نظریہ کو جرمن کے نامور ریاضی دان **کارل فرائیڈ رچ گاز** (Cart Friedrrich Gauss) نے پروان چڑھایا جس کو حساب کا شہزادہ کے طور پر سراہا جاتا ہے۔

مثالیں :

1۔ دن اور رات لگاتار بدلتے ہیں۔

2۔ ایک ہفتہ کے دن اتوار سے ہفتہ تک مدورانہ طور پر رونما ہوتے ہیں۔

3۔ پودوں کا دورِ حیات

4۔ ایک سال کا موسم متدائرانہ طور پر تبدیل ہوتا ہے۔ (گرما, خزاں, سرمہ, بہار)

5۔ ریلوے اور ہوائی جہاز کے اوقات بھی متدائرنہ طور پر کام کرتے ہیں۔ ریلوے کا وقت 00.00 سے شروع ہوتا ہے 23:59 پر پہنچنے کے بعد دوسرے منٹ کو وہ 24:00 میں تبدیل ہونے کی بجائے 00.00 ہو جائے گا۔



خاکہ 2.6

10 math unit 2A
Saturday, February 15, 2020 1:41:51 PM

2.5.1 مماثل ماڈولو (Congruence Modulo)

دوسالم اعداد a اور b تماثل ماڈولو n ہیں اگر ان کا فرق ایک سالم عدد جو 'n' کا ضعف (Multiple) ہو۔ یعنی $a-b=kn$، کسی سالم عدد k کے لیے۔ اس کو $a \equiv b \pmod{n}$ بھی لکھا جاتا ہے۔ یہاں عدد 'n' کو modulus کہا جاتا ہے۔ دوسرے لفظوں میں $a \equiv b \pmod{n}$ کا مطلب ہے کہ a-b، n سے تقسیم پذیر ہے۔ مثال کے طور پر $61 \equiv 5 \pmod{7}$ کیوں کہ $61-5=56$ 7 سے تقسیم پذیر ہے۔

نوٹ

- جب ایک مثبت عدد کو n سے تقسیم کیا جائے تو ممکن بچت $0,1,2,\ldots\ldots n-1$ ہے۔
- اس طرح جب ہم modulo n کے ساتھ عمل کرتے ہیں تاہم تمام اعداد کو n سے تقسیم کر کے ان کے بچت سے بدل دیتے ہیں۔ ان کے بچت $0,1,2,3,\ldots\ldots$ ہیں۔

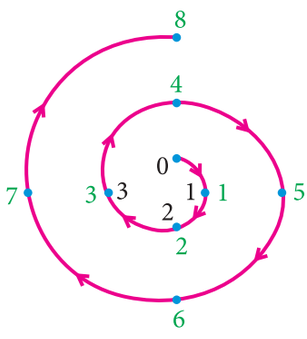
ماڈولو کے اصول کو واضح طور پر سمجھنے کے لئے دو تشریحات مہیا کئے گئے ہیں۔

تشریح 1

$8 \pmod 4$ معلوم کرنا۔

4 کے modulus کے ساتھ (چونکہ ممکن بچت $0,1,2,3$) ہم گھڑی (Clock) کے مانند اعداد $0,1,2,3$ کے ساتھ ایک خاکہ کھینچتے ہیں۔ ہم 0 سے آغاز کرتے ہوئے 8 اعداد تک ساعت دار (clockwise) تواتر $1,2,3,0,1,2,3,0$ میں آگے بڑھتے ہیں۔ اس طرح سے متدائر طور پر کام کرنے سے '0' پر اختتام ہوتا ہے۔

لہذا $8 \pmod 4 = 0$



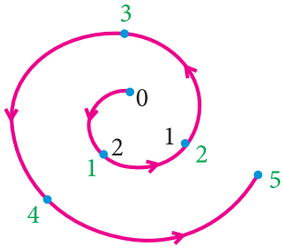
خاکہ 2.7

تشریح 2 :

$-5 \pmod 3$ معلوم کرنا

3 کے modulus کے ساتھ (چونکہ ممکن بچت $(0,1,2)$ ہم گھڑی جیسا اعداد $(0,1,2)$ کے ساتھ ایک خاکہ کھینچتے ہیں۔ ہم 0 سے آغاز کرتے ہوئے 5 اعداد تک غیر ساعت دار Anti - clockwise تواتر $2,1,0,2,1$ میں آگے بڑھتے ہیں۔ اس طرح کرنے کے بعد متدائرانہ طور پر 1 اختتام ہوتا ہے۔

لہذا $-5 = 1 \pmod 3$



خاکہ 2.8

2.5.2 ماڈولر ریاضی میں رابطہ پیدا کرنا Connecting Euclid's Division Lemma and Modular Arithmetic

فرض کرو m اور n سالم اعداد ہیں جہاں m مثبت عدد ہے۔ اقلیدس کے تقسیمی مفروضہ کے تحت ہم $n=mq+r$ کے طور پر لکھ سکتے ہیں۔ جہاں $0 \le r < m$ اور q ایک سالم عدد ہے۔ $n = mq + r$ لکھنے کے بجائے ہم تماثلی علامت کو ذیل کے طور پر استعمال کرتے ہیں۔

ہم کہہ سکتے ہیں کہ n, r modulur کہ تماثل ہے

اگر $n = mq + r$ کسی سالم عدد q کے لیے

$$\begin{aligned} n &= mq + r \\ n-r &= mq \\ n-r &\equiv 0 \pmod m \\ n &\equiv r \pmod m \end{aligned}$$

اس طرح مساوات $n=mq+r$ کو اقلیدس تقسیمی مفروضہ کے تحت $n=r \pmod m$ کے طور پر لکھ سکتے ہیں۔

اپنی پیش رفت کی جانچ

1۔ دوسالم اعداد a اور b تماثل n modulo ہیں اگر _____

2۔ تمام مثبت سالم اعداد کا مجموعہ جو 7 سے تقسیم کرنے پر بچت 5 حاصل ہوتا ہے _____

10 math unit 2A
Saturday, February 15, 2020 1:41:51 PM

غور کیجئے

دوسالم اعداد a اور b congruent module m ہیں۔ جیسا کہ لکھا جاتا ہے $a \equiv b \pmod{m}$ اگر ان کو m سے تقسیم کرنے پر مساوی بچت حاصل ہو۔



ذرا سوچئے

بتاؤ سالم اعداد کی تعداد کیا ہے
جن کو 3 سے تقسیم کرنے پر باقی 2 حاصل ہوتا ہے؟

2.5.3 ماڈولو کا عمل (modulo operation)

ریاضی کے بنیادی اعمال جیسے جمع، تفریق ضرب اعداد پر کیا جاتا ہے۔ اس طرح کا عمل ماڈلوں ریاضی میں کیا جاسکتا ہے۔ ذیل کا مسئلہ اس عمل کو کرنے میں معلومات فراہم کرتا ہے۔

مسئلہ 5 (Theorem 5)

c, b, a اور d سالم اعداد ہیں اور m ایک مثبت سالم عدد ہے اس طرح کہ $a \equiv b \pmod{m}$ اور $c \equiv d \pmod{m}$ ہو تو

(i) $(a+c) \equiv (b+d) \pmod{m}$ (ii) $(a-c) \equiv (b-d) \pmod{m}$

(iii) $(a \times c) \equiv (b \times d) \pmod{m}$

تشریح 3 :

اگر $17 \equiv 4 \pmod{13}$ اور $42 \equiv 3 \pmod{13}$ ہو تو مسئلہ 5 کے تحت

(i) $17 + 42 \equiv 4 + 3 \pmod{13}$

$59 \equiv 7 \pmod{13}$

(ii) $17 - 42 \equiv 4 - 3 \pmod{13}$

$-25 \equiv 1 \pmod{13}$

(iii) $17 \times 42 \equiv 4 \times 3 \pmod{13}$

$714 \equiv 12 \pmod{13}$

مسئلہ 6 (Theorem 6)

اگر $a \equiv b \pmod{m}$ ہو تو

(i) $ac \equiv bc \pmod{m}$ (ii) $a \pm c \equiv b \pm c \pmod{m}$ کوئی سالم عدد c کیلئے

اپنی پیش رفت کی جانچ

1۔ $(k-3) \equiv 5 \pmod{11}$ کے لیے k کی مثبت قیمتیں ..... ہیں۔

2۔ اگر $46 \equiv 4 \pmod{7}$, $59 \equiv 3 \pmod{7}$ ہو تو $105 \equiv$ _____ $\pmod{7}$

$13 \equiv$ _____ $\pmod{7}$, $413 \equiv$ _____ $\pmod{7}$, $368 \equiv$ _____ $\pmod{7}$.

3۔ $7 \times 13 \times 19 \times 23 \times 29 \times 31$ کو 6 سے تقسیم کرنے پر باقی _____ ہے۔

10 math unit 2A
Saturday, February 15, 2020 1:41:51 PM

مثال 2.11 70004 اور 778 کو 7 سے تقسیم کرنے پر بچت معلوم کرو۔

حل : 70000 کو 7 سے تقسیم کرنے پر

$$70000 \equiv 0 \pmod 7$$

$$70000+4 \equiv 0+4 \pmod 7$$

$$70004 \equiv 4 \pmod 7$$

لہذا 70004 کو 7 سے تقسیم کرنے پر بچت 4 ہے۔

چونکہ 777 میں 7 تقسیم پذیر ہے۔

$$777 \equiv 0 \pmod 7$$

$$777+1 \equiv 0+1 \pmod 7$$

$$778 \equiv 1 \pmod 7$$

چنانچہ جب 778 کو 7 سے تقسیم کیا جاتا ہے تو بچت 1 ہے۔

مثال 2.12 "d" کی قیمت معلوم کرو اس طرح کے $15 \equiv 3 \pmod d$

حل : $15 \equiv 3 \pmod d$ کا مطلب ہے $15-3=kd$ جہاں k. سالم عدد ہے

$$12 = kd.$$

سے واضح ہے کہ d, 12 کو تقسیم کرتا ہے۔ بچت

12 کہ مقسوم علیہ 1,2,3,4,6,12 ہیں۔ لیکن 3 سے بڑا d ہو۔ اس لیے d کی ممکن قیمتیں 4,6,12 ہیں۔

مثال 2.13 : x کی کم ترین قیمت معلوم کرو اس طرح کہ

(i) $67+x \equiv 1 \pmod 4$ (ii) $98 \equiv (x+)4 \pmod 5$

حل :

(i) $67+x \equiv 1 \pmod 4$

$67+x-1 = 4n$, n ایک سالم عدد ہے

$66+x = 4n$

$66+x$ 4 کا ایک ضعف ہے۔

لہذا x کی کم ترین ممکن مثبت قیمت 2 ہے . چونکہ 4, 68 کا قریب ترین ضعف ہے جو 66 سے زیادہ ہے۔

(ii) $98 \equiv (x+4) \pmod 5$

$98-(x+4) = 5n$, n ایک سالم عدد ہے

$94-x = 5n$

$94-x$ کا ضعف 5 ہے

لہذا x کی کم ترین ممکن مثبت قیمت 4 ہے۔

چونکہ 94-4=90 کا قریب ترین 5 کا ضعف ہے جو 94 سے کم ہے۔

10 math unit 2A
Saturday, February 15, 2020 1:41:52 PM

غور کیجئے

- تمام خطی مساوات کو حل کرنے پر ہمیں لاتعداد حل حاصل ہوتے ہیں برخلاف اس کے جب ہم الجبرا میں کثیر رقم مساوات کو حاصل کرنے پر ہمیں محدود تعداد (Finite number) میں حل حاصل ہوتے ہیں۔

مثال 2.14 : حل کرو $8x \equiv 1 \pmod{11}$

حل : $8x \equiv 1 \pmod{11}$ کو اس طرح لکھ سکتے ہیں $8x - 1 = 11k$ k ایک سالم عدد ہے

$$x = \frac{11k+1}{8}$$

جب ہم $k=5,12,13,21,29.....$ اندراج کریں تو $11k+1$ 8 سے تقسیم پذیر ہے۔

$$x = \frac{11\times 5+1}{8} = 7$$

$$x = \frac{11\times 13+1}{8} = 18$$

لہذا $7,18,29,40.....$ حل ہیں۔

مثال 2.15 x محسوب کرو اس طرح کہ $10^4 \equiv x \pmod{19}$

حل :

$$10^2 = 100 \equiv 5 \pmod{19}$$

$$10^4 = (10^2)^2 \equiv 5^2 \pmod{19}$$

$$10^4 \equiv 25 \pmod{19}$$

$$10^4 \equiv 6 \pmod{19} \qquad (\text{چونکہ } 25 \equiv 6 \pmod{19})$$

اس لیے $x = 6.$

مثال 2.16 $3x \equiv 1 \pmod{15}$ سالم اعداد کے حلوں کی تعداد معلوم کرو۔

حل :

$3x \equiv 1 \pmod{15}$ کو اس طرح لکھا جاتا ہے۔

$3x - 1 = 15k$ k ایک سالم میں عدد ہے۔

$$3x = 15k + 1$$

$$x = \frac{15k+1}{3}$$

$$x = 5k + \frac{1}{3}$$

چونکہ $5k$ ایک سالم عدد ہے، $5k + \frac{1}{3}$ ایک سالم عدد نہیں ہوسکتا، اس لئے سالم عدد میں حل نہیں ہے۔

مثال 2.17 : ایک شخص ریل کے ذریعے چنئی سے دہلی کا سفر شروع کرتا ہے۔ وہ بروز چہارشنبہ 22.30 کو روانہ ہوتا ہے۔ اگر سفر کا وقفہ 32 گھنٹے ہو تو - یہ فرض کرتے ہوئے کہ ریل میں تاخیر (late) نہیں ہے، وہ دہلی کب پہنچے گا؟

10 math unit 2A
Saturday, February 15, 2020 1:41:52 PM

حل : روانگی کا وقت 22.30 ہے، سفر کا وقت 32 گھنٹے ہیں۔ یہاں ہم ماڈولو 24 استعمال کرتے ہیں۔

پہنچنے کا وقت یہ ہے۔

$$22.30+32 \pmod{24} \equiv 54.30 \pmod{24}$$

$$\equiv 6.30 \pmod{24}$$

(چونکہ $32 = (1\times24) + 8$

(جمعرات جمعہ

اس طرح وہ جمعہ کے دن 6.30 دہلی پہنچے گا۔

مثال 2.18

کلا اور وانی سہلیاں ہیں۔ کلا کہتی ہے ''آج میرا پیدائشی دن ہے'' اور وہ وانی سے سوال کرتی ہے ''تم کب اپنا پیدائش دن مناؤں گی؟'' وانی جواب دیتی ہے ''آج پیر ہے۔ میں اپنا پیدائشی دن 75 دن پہلے منا چکی ہو'' معلوم کرو کس دن منا چکی ہوگی۔

حل : آیئے ہم اعداد 0,1,2,3,4,5,6 کا رابطہ ایک ہفتہ (week) کے دن اتوار سے ہفتہ 4 سے تک بالترتیب کریں۔

وانی کہتی آج پیر ہے۔ پیر کے لیے عدد 1 ہے۔ چونکہ وانی کا پیدائش دن 75 پہلے تھا، اس لئے ہمیں 1 سے 75 کو تفریق کرنا ہوگا اور ماڈولو 7 کا استعمال کریں، چونکہ ایک ہفتہ کے 7 دن ہوتے ہیں۔

$$-74 \pmod{7} \equiv -4 \pmod{7} \equiv 7 \quad 4 \pmod{7} \equiv 3 \pmod{7}$$

(چونکہ $-74-3=-77$ ، 7 سے تقسیم پذیر ہیں)

اس طرح $1-75 \equiv 3 \pmod{7}$

عدد 3 کے لیے دن چہار شنبہ ہے

لہذا وانی کا پیدائشی دن چہار شنبہ ہونا چاہیے۔

مشق 2.3

1۔ x کی کم ترین مثبت قیمت معلوم کرو اس طرح کہ

(i) $71 \equiv x \pmod{8}$ (ii) $78 + x \equiv 3 \pmod{5}$ (iii) $89 \equiv (x+3) \pmod{4}$

(iv) $96 \equiv \frac{x}{7} \pmod{5}$ (v) $5x \equiv 4 \pmod{6}$

2۔ اگر x مماثل ہے (congrument to) 13 ماڈولو 17 ہو تو $7x-3$ مماثل ہے کس عدد ماڈولو 17 کے؟

3۔ حل کرو: $5x \equiv 4 \pmod{6}$

4۔ حل کرو : $3x - 2 \equiv 0 \pmod{11}$

5۔ 7a.m. کے 100 گھنٹوں کے بعد کونسا وقت ہوگا؟

6۔ 11p.m. کے 15 گھنٹے پہلے کونسا وقت ہوگا؟

7۔ آج منگل ہے۔ میرے چچا 45 دن بعد آئیں گے۔ کس دن میرے چچا آئیں گے؟

8۔ ثابت کرو کہ $2^n + 6 \times 9^n$ ہمیشہ 7 سے تقسیم پذیر ہے کسی بھی مثبت سالم n کے لیے

9۔ 2^{81} کو 17 سے تقسیم کیا جائے تو بچت معلوم کرو۔

10 math unit 2A
Saturday, February 15, 2020 1:41:53 PM

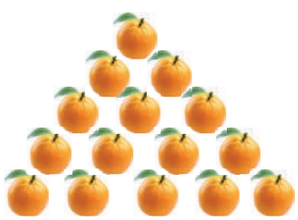
10۔ برٹش طیارے کے ذریعے چینی سے لندن کے سفر کا وقفہ تقریباً 11 گھنٹے ہے۔ ہوائی جہاز اتوار کے دن 22:30 گھنٹے کو روانہ ہوتا ہے۔ اگر چینی میں وقت لندن کے وقت سے 4½ آگے ہو تو طیارہ لندن ہوائی اڈے پر کس وقت اترے گا؟

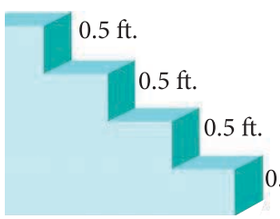
2.6 تواتر Sequence

ذیل کے خاکوں پر غور کرو۔ ان خاکوں میں کچھ ترتیب یا نظم پایا جاتا ہے۔

پہلے خاکے کے پہلی صف میں ایک سیب ہے۔ دوسری صف میں دو سے اور تیسری صف میں تین سے موجود ہیں وغیرہ۔

ہر ایک صف میں سیبوں کی تعداد 1,2,3. . . . .







0.5

خاکہ 2.9

دوسرے خاکے کے ہر ایک سیڑھی کی اونچائی 0.5 فیٹ ہے۔ قاعدے سے سیڑھیوں کی کل اونچائی 0.5 فیٹ، 1 فیٹ، 1.5 فیٹ

تیسرے میں ایک مربع، 3 مربع، 5 مربع ..... مربعے

یہ اعداد "تواتر" نامی زمرے سے تعلق رکھتے ہیں۔

تعریف Definition

حقیقی قیمتوں کا تواتر ایک تفاعل ہے جو طبعی اعداد پر تعین کردہ ہے اور حقیقی اعداد پر منحصر ہے۔

تواتر کے ہر ایک عنصر کو رقم term پہلے مقام پر جو عنصر ہوتا ہے اس کو تواتر کی پہلی رقم کہتے ہیں۔

دوسرے مقام پر جو عنصر ہوتا ہے اس کو دوسری رقم وغیرہ۔

اگر n ویں رقم کو a_n سے نشاندہی کی جائے تو پہلی رقم a_1 دوسری رقم a_2 وغیرہ۔ ایک تواتر کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے

a1, a2, a3..... an,..... an

تشریح (Illustration)

1۔ 1,3,5,7..... ایک تواتر ہے جس کی عام رقم $a_n = 2n-1$ ہے, جب n=1,2,3..... درج کرنے پر ہمیں $a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_3 = 5,\ a_4 = 7,\ldots$ حاصل ہوتا ہے۔

2۔ $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\ldots$ ایک تواتر ہے جس کی عام رقم $\frac{1}{n+1}$ ہے۔ جب ہم n=1,2,3.... درج کریں تو ہمیں $a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = \frac{1}{3},\ a_3 = \frac{1}{4},\ a_4 = \frac{1}{5},\ldots$ حاصل ہوتا ہے۔

اگر کسی تواتر کے عناصر محدود ہو تو اس کو محدود تواتر کہتے ہیں۔ اگر کسی تواتر کے عناصر کی تعداد لامحدود ہو تو اس کو لامحدود تواتر کہتے ہیں۔

10 math unit 2A
Saturday, February 15, 2020 1:41:53 PM

تواتر بطور تفاعل : Sequence as a function

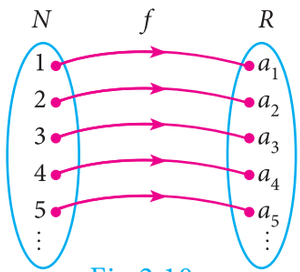


Fig 2.10

ایک تواتر کو تفاعل کے طور پر قیاس کیا جاسکتا ہے جو طبعی اعداد کے مجموعہ N تعین کیا گیا ہو۔

خاص طور پر تواتر ایک تفاعل ہے۔ $f : N \to R$ جہاں R تمام حقیقی اعداد کا مجموعہ ہے۔

اگر تواتر کی شکل $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ہو تو ہم تفاعل کو تواتر رابطہ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ by $f(k) = a_k,\ k = 1,2,3,\ldots$ سے پیدا کر سکتے ہیں۔

اپنی پیش رفت کی جانچ

1۔ ذیل کے تواتروں کے لئے خانہ پر کرو۔

(i) 7, 13, 19, _____ , ... (ii) 2, _____, 10, 17, 26, (iii) 1000, 100, 10, 1, _____, ...

2۔ ایک تواتر تفاعل ہے جو مجموعہ _____ پر تعین کردہ ہے۔

3۔ تواتر ..... 0, 2, 6, 12, 20, کی n ویں رقم کو _____ کے طور پر ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

4۔ صحیح ہے یا غلط بتاؤ۔

i۔ تمام تواتر تفاعل ہیں۔ ii۔ تمام تفاعل تواتر ہیں۔

مثال 2.19 ذیل کے تواتر میں بعد کی تین رقمیں لکھو۔

(i) $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{14}, \ldots.$ (ii) $5,\ 2, -1, -4, \ldots.$ (iii) $1, 0.1, 0.01, \ldots$

حل :

(i) $\frac{1}{2}, \underset{+4}{\rightarrow} \frac{1}{6}, \underset{+4}{\rightarrow} \frac{1}{10}, \underset{+4}{\rightarrow} \frac{1}{14}, \ \ldots$

اوپر کے تواتر میں شمار کنندہ Numerators مساوی ہیں۔ نسب نما denominator میں 4 کا اضافہ کیا گیا ہے۔

اس لیے بعد کی تین رقمیں

$$a_5 = \frac{1}{14+4} = \frac{1}{18}$$

$$a_6 = \frac{1}{18+4} = \frac{1}{22}$$

$$a_7 = \frac{1}{22+4} = \frac{1}{26}$$

غور کیجئے

حالانکہ تمام تواتر تفاعلات ہیں
مگر تمام تفاعلات تواتر نہیں ہیں۔

(ii) $5, \underset{-3}{\rightarrow} 2, \underset{-3}{\rightarrow} -1, \underset{-3}{\rightarrow} -4, \ldots$

یہاں رقم یہاں ہر ایک رقم 3 سے کم کی گئی ہے اس لئے بعد کی تین رقمیں $-7,\ -10,\ -13$. ہیں۔

(iii) $1, \underset{\div 10}{\rightarrow} 0.1, \underset{\div 10}{\rightarrow} 0.01, \ldots$

10 math unit 2A
Saturday, February 15, 2020 1:41:54 PM

یہاں پر ایک رقم کو 10 تقسیم کیا گیا ہے .لہذا بعد کی تین رقمیں

$$a_4 = \frac{0.01}{10} = 0.001$$

$$a_5 = \frac{0.001}{10} = 0.0001$$

$$a_6 = \frac{0.0001}{10} = 0.00001$$

مثال 2.20 ذیل کے تواتر کی عام رقم معلوم کرو۔

(i) $3,6,9,\ldots$ (ii) $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\ldots$ (iii) $5,-25,125,\ldots$

حل : (i) $3,6,9,\ldots$

یہاں رقمیں 3 کے اضعاف ہیں۔ اس لیے عام رقم

$$a_n = 3n,$$

(ii) $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\ldots$

$$a_1 = \frac{1}{2};\ a_2 = \frac{2}{3};\ a_3 = \frac{3}{4}$$

یہ صاف ظاہر ہے کہ شمار کنندہ کی n ویں رقم n ہے .اور نسب نما ,شمار کنندہ سے ایک زیادہ ہے۔

$$\text{لہذا}\quad a_n = \frac{n}{n+1}, n \in N$$

(iii) $5,-25,125,\ldots$

اس تواتر کے رخ میں باری باری سے + اور − نشان رکھتی ہیں اور وہ 5 کی قوت میں ہیں۔

$$\text{لہذا}\quad a_n = (-1)^{n+1}5^n, n \in N \quad \text{عام رقم ,}$$

مثال 2.21 ایک تواتر کی عام رقم کی تشریح ذیل میں دی گئی ہے۔

$$a_n = \begin{cases} n(n+3); n \in N & \text{طاق ہے} \\ n^2+1 \quad ; n \in N & \text{جفت ہے} \end{cases}$$

گیارویں اور اٹھارہویں رقم معلوم کرو۔

حل : a_{11} معلوم کرنا۔ چونکہ 11 طاق ہے ہم n=11 میں $a_n = n(n+3)$ درج کرتے ہیں۔

$a_{11} = 11(11+3) = 154$. گیارویں رقم ,اس طرح

a_{18} معلوم کرنا، چونکہ 18 جفت ہے ہم n=18 میں $a_n = n^2+1$ اندراج کرتے ہیں۔

$a_{18} = 18^2+1 = 325$. اٹھارہویں رقم ,اس طرح

مثال 2.22 ذیل کے تواتر کی ابتدائی پانچ رقمیں معلوم کرو۔

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1, a_n = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}+3};\ n \geq 3,\ n \in N$$

حل : اس تواتر کی پہلی دو رقمیں دی گئی ہیں یعنی $a_1 = 1,\ a_2 = 1$ تیسری رقم a_3 پہلی اور دوسری رقموں پر منحصر ہے۔

10 math unit 2A
Saturday, February 15, 2020 1:41:54 PM

$$a_3 = \frac{a_{3-1}}{a_{3-2}+3} = \frac{a_2}{a_1+3} = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}$$

اسی طرح چوتھی رقم a_4 کا انحصار a_2 اور a_3 پر ہے۔

$$a_4 = \frac{a_{4-1}}{a_{4-2}+3} = \frac{a_3}{a_2+3} = \frac{\frac{1}{4}}{1+3} = \frac{\frac{1}{4}}{4} = \frac{1}{4}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

اسی طرح، پانچویں رقم a_5 محسوب کیا جاسکتا ہے۔

$$a_5 = \frac{a_{5-1}}{a_{5-2}+3} = \frac{a_4}{a_3+3} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{4}+3} = \frac{1}{16}\times\frac{4}{13} = \frac{1}{52}$$

لہذا تواتر کی ابتدائی پانچ رقمیں $1, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{52}$

مشق 2.4



1۔ ذیل کے تواتر کی بعد کی تین رقم معلوم کرو۔

(i) $8, 24, 72,$ (ii) $5, 1, -3,$ (iii) $\frac{1}{4}, \frac{2}{9}, \frac{3}{16},$

2۔ تواتر کی ابتدائی چار رقمیں معلوم کرو جن کی n ویں رقم دی گئی ہیں۔

(i) $a_n = n^3 - 2$ (ii) $a_n = (-1)^{n+1} n(n+1)$ (iii) $a_n = 2n^2 - 6$

3۔ ذیل کے تواتر کی n ویں رقم معلوم کرو۔

(i) $2,5,10,17,\ldots$ (ii) $0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\ldots$ (iii) $3,8,13,18,\ldots$

4۔ ذیل کہ تواتر کی مطلوبہ رقمیں معلوم کرو۔ جن کی n ویں رقمیں دی گئی ہیں۔

(i) $a_n = \frac{5n}{n+2}$; a_6 اور a_{13} (ii) $a_n = -(n^2-4)$; a_4 a اور a_{11}

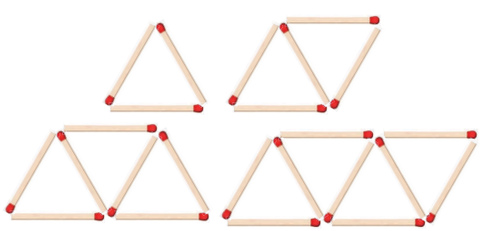
5۔ a_8 اور a_{15} معلوم کرو جن کی n ویں رقم

$$a_n = \begin{cases} \frac{n^2-1}{n+3} & ; \text{ جفت ہے } n, n \in N \\ \frac{n^2}{2n+1} & ; \text{ طاق ہے } n, n \in N \end{cases}$$

6۔ اگر $a_1 = 1,\ a_2 = 1$ اور $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2},\ n \geq 3,\ n \in \mathbb{N}$ ہو تو تواتر کی ابتدائی چھ رقمیں معلوم کرو۔

2.7 حسابی سلسلہ : (Arithmetic Progression)

آیئے ہم دو تشریحات سے آغاز کرتے ہیں۔



خاکہ 2.11

تشریح 1

i۔ دیاسلائی کی تیلیوں سے متصل شکلیں بناؤ ہر ایک شکل کے لیے کتنی دیاسلائی کی تیلیوں کی ضرورت ہے؟ 3,5,7 اور 9

ii۔ کیا ہم دو متواتر اعداد کا فرق معلوم کر سکتے ہیں؟

$5-3 = 7-5 = 9-7 = 2$

لہذا متواتر اعداد کا فرق 2 ہمیشہ ہوتا ہے۔

10 math unit 2A
Saturday, February 15, 2020 1:41:55 PM

تشریح 2 :

ایک شخص کونوکری ملی جس کی ابتدائی ماہانہ تنخواہ ₹ 10,000 مقرر کی گئی سالانہ اضافہ ₹ 2000 ہے اس کی تنخواہ پہلے دوسرے اور تیسرے سال کے دوران بالترتیب ₹10000 , ₹ 12000 اور ₹ 14000 ہوگی۔

اگر ہم دومتواتر سال کی تنخواہ کا فرق معلوم تو ہمیں $12000 - 10000 = 2000;\ \ 14000 - 12000 = 2000$

اس طرح ہر متواتر سال کی تنخواہ کا فرق ہمیشہ 2000 ہوگا۔

کیا تم نے ان دو تشریحات کے مشترک خاصیت کو نوٹ کیا ہے؟ ان دو مثالوں میں متواتر کا فرق ہمیشہ مستقل ہے مزید ایک مستقل عدد جمع کرنے پر ہمیں ایک رقم حاصل ہوتی ہے سوائے پہلی رقم کے، یہ مستقل عدد جو متواتر رقبہ کا فرق ہوتا ہے، مشترک فرق (common differeence) کہلاتا ہے۔

تعریف Definition

فرض کرو a اور d حقیقی اعداد ہیں تو $a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ a+4d,\ \ldots$

کی ترتیب کے اعداد حساب سلسلہ بناتے ہیں۔ جس کو A.P سے ظاہر کیا جاتا ہے عدد a کو پہلی رقم اور d کو مشترک فرق کہتے ہیں۔

مختصر پر حسابی سلسلہ ایک تواتر ہے جس کی متواتر رقموں کا فرق ایک مستقل عدد ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر جفت مثبت سالم اعداد کا مجموعہ .....2,4,6,8,10,12 ایک A.P ہے جس کی پہلی رقم $a=2$ اور مشترک فرق $d=2$

کیوں کہ $4-2=2,\quad 6-4=2,\quad 8-6=2,$

اکثر حقیقی زندگی کے حالات سے A.P رونما ہوتے ہیں۔

غور کیجئے

1۔ A.P کے کوئی دو متواتر رقموں کا فرق ہمیشہ مستقل ہوتا ہے اس مستطیل قیمت کو مشترک فرق کہتے ہیں۔

2۔ اگر کسی A.P میں رقموں کی تعداد محدود ہو تو اس کو محدود حصہ بھی سلسلہ کہتے ہیں . اگر کسی A.P رقموں کی تعداد لامحدود ہو تو اس کو لامحدود حساب سلسلہ کہا جاتا ہے۔

2.7.1 کسی A.P کی رقمیں اور مشترک فرق :

1۔ A.P رقموں کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔

$$t_1 = a = a + (1-1)d,\qquad t_2 = a + d = a + (2-1)d,\qquad t_3 = a + 2d = a + (3-1)d,$$

$$t_4 = a + 3d = a + (4-1)d \quad , \ldots$$

عام طور پر n ویں رقم جس کو t_n سے ظاہر کرتے ہیں اس طرح لکھتے ہیں $t_n = a + (n-1)d$

2۔ عام طور پر ایک A.P کی مشترک فرق معلوم کرنے کے لیے ہمیں دوسری رقم سے پہلی رقم تفریق کرنا ہوگا، تیسری رقم سے دوسری رقم کو تفریق کرنا ہوگا وغیرہ۔

ایک A.P. میں n ویں رقم $t_n = a + (n-1)d$ ہے، یہاں پر a پہلی رقم اور d عام فرق ہے۔

10 math unit 2A
Saturday, February 15, 2020 1:41:55 PM

مثال کے طور پر $t_1 = a,\ t_2 = a + d$

لہذا $t_2 - t_1 = (a + d) - a = d$

اسی طرح $t_2 = a + d,\ t_3 = a + 2d, \ldots$

لہذا $t_3 - t_2 = (a + 2d) - (a + d) = d$

عام طور پر $d = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = t_4 - t_3 = \ldots.$

اس لیے $d = t_n - t_{n-1}$ جہاں $n = 2, 3, 4, \ldots$

اپنی پیش رفت کی جانچ

1۔ کسی A.P کے دو متواتر رقموں کا فرق ___ ہے۔

2۔ اگر a اور d کسی پہلی رقم اور مشترک فرق ہو تو 8 ویں رقم ___ ہے۔

3۔ اگر کسی A.P کی n ویں رقم t_n ہو تو $t_{2n} - t_n$ ___

کیا تم جانتے ہو؟

ایک A.P کا مشترک فرق مثبت، منفی یا صفر ہو سکتا ہے۔

آیئے ہم ذیل کے A.P کا مشترک فرق معلوم کریں۔

(i) $1, 4, 7, 10, \ldots$

$d = 4 - 1 = 7 - 4 = 10 - 7 = \ldots = 3$

(ii) $6, 2, -2, -6, \ldots$

$d = 2 - 6 = -2 - 2 = -6 - (-2) = \ldots = -4$

ذرا سوچئے

اگر کسی A.P کی n ویں رقم t_n ہو تو $t_{n+1} - t_{n-1}$ _____ ہے

مثال 2.23 جانچئے کہ کیا ذیل کے تواتر A.P ہیں یا نہیں؟

(i) $x + 2,\ 2x + 3,\ 3x + 4, \ldots$ (ii) $2, 4, 8, 16, \ldots$ (iii) $3\sqrt{2},\ 5\sqrt{2}, 7\sqrt{2}, 9\sqrt{2}, \ldots$

حل : دیے ہوئے تواتر A.P ہونے کے لیے صرف یہ کافی ہے کہ معلوم کریں کہ دو متواتر رقموں کا فرق مساوی ہے یا نہیں؟

(i) $t_2 - t_1 = (2x + 3) - (x + 2) = x + 1$

$t_3 - t_2 = (3x + 4) - (2x + 3) = x + 1$

$t_2 - t_1 = t_3 - t_2$

اس طرح متواتر دو رقموں کا فرق مساوی ہے

لہذا تواتر $x + 2,\ 2x + 3,\ 3x + 4, \ldots$ A.P میں ہے .

(ii) $t_2 - t_1 = 4 - 2 = 2$

$t_3 - t_2 = 8 - 4 = 4$

$t_2 - t_1 \neq t_3 - t_2$

اس طرح دو متواتر رقموں کا فرق مساوی نہیں ہے لہذا تواتر $2, 4, 8, 16, \ldots$ A.P میں نہیں ہے

10 math unit 2A
Saturday, February 15, 2020 1:41:56 PM

(iii) $t_2 - t_1 = 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

$t_3 - t_2 = 7\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

$t_4 - t_3 = 9\sqrt{2} - 7\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

اس طرح متواتر رقموں کا فرق مساوی ہے۔

لہذا تواتر کی رقمیں $3\sqrt{2}, 5\sqrt{2}, 7\sqrt{2}, 9\sqrt{2}, \ldots$ A.P میں ہیں۔

مثال 2.24 : A.P لکھو جس کی پہلی رقم 20 اور مشترک فرق 8 ہے۔

حل : $a=20$ پہلی رقم $d=8$ مشترک فرق

حسابی سلسلہ $a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d, \ldots$ ہے

اس سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $20,\ 20+8,\ 20+2(8),\ 20+3(8),.$

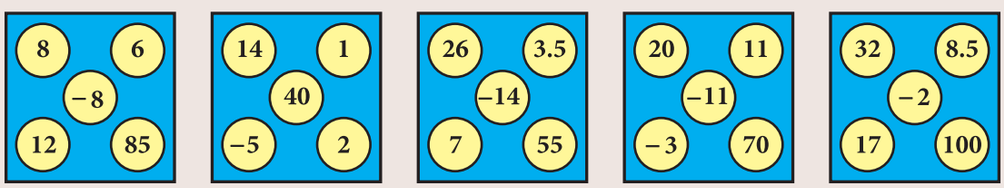
لہذا مطلوبہ A.P $20, 28, 36, 44,$

نوٹ

- ایک حسابی سلسلہ جس کا مشترک فرق صفر ہوتا ہے اس کو مستقل حسابی سلسلہ کہتے ہیں۔

کارروائی 5

یہاں چار صندوق ہیں ہر ایک صندوق میں سے تمہیں ایک عدد منتخب کرنا ہے اور پانچ حسابی سلسلے بنانا ہے۔



مثال 2.25 دی ہوئی A.P $3,15,27,39 \ldots\ldots$ کی 15ویں اور 24 ویں رقم اور n ویں رقم (عام رقم) $3,\ 15,\ 27,\ 39,$ معلوم کرو۔

حل : ہمارے پاس پہلی رقم $a=3$ اور مشترک فرق $d = 15 - 3 = 12$

ہم جانتے ہیں کہ A.P کی n ویں رقم جس کی پہلے رقم a اور مشترک d ہو، n ویں رقم $t_n = a + (n-1)d$ فرق d کو یہاں بتایا گیا ہے۔

$t_{15} = a + (15-1)d = a + 14d = 3 + 14(12) = 171$

اس طرح $(d = 12$ اور $a = 3)$

$t_{24} = a + (24-1)d = a + 23d = 3 + 23(12) = 279$

n ویں رقم (عام رقم) $t_n = a + (n-1)d$

اس طرح $t_n = 3 + (n-1)12$

$t_n = 12n - 9$

10 math unit 2A
Saturday, February 15, 2020 1:41:56 PM

غور کیجئے

- ایک محدود A.P میں جس کی پہلی رقم a آخری رقم l ہوتو A.P کی رقموں کی تعداد $l = a + (n-1)d$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔
  جس سے حاصل ہوتا ہے $n = \left(\frac{l-a}{d}\right) + 1$

مثال 2.26 A.P 36,9,12,.....111 رقموں کی تعداد معلوم کرو۔

حل :

پہلی رقم a=3 ، مشترک فرق $d = 6 - 3 = 3$

آخری رقم l=111

$$n = \left(\frac{l-a}{d}\right) + 1$$

$$n = \left(\frac{111-3}{3}\right) + 1 = 37$$

اس طرح A.P 37 رقم رکھتا ہے

اپنی پیش رفت کی جانچ

1۔ مستقل A.P کا مشترک فرق _____ ہے .

2۔ اگر a اور l A.P کی پہلی رقم اور آخری رقم ہوتو رقموں کی تعداد _____ ہے۔

مثال 2.27 A.P کی عام رقم معلوم کرو جس کی 7 ویں رقم -1 ہے اور 16 ویں رقم 17 ہے۔

حل : فرض کرو $t_1, t_2, t_3, t_4, \ldots$ ایک A.P ہے۔

دیا گیا ہے کہ $t_7 = -1$ اور $t_{16} = 17$

$a + (16-1)d = 17$ اور $a + (7-1)d = -1$

$$a + 6d = -1 \quad \ldots(1)$$

$$a + 15d = 17 \quad \ldots(2)$$

مساوات (1) مساوات (2) سے تفریق کرنے پر $9d$=18 جس سے d=2 حاصل ہوتا ہے

d=2 مساوات (1) میں اندراج کرنے پر $a + 12 = -1$ لہذا $a = -13$

لہذا عام رقم $t_n = a + (n-1)d$

$$= -13 + (n-1) \times 2 = 2n - 15$$

مثال 2.28 اگر کسی A.P کی 1 ویں، m ویں n ویں رقمیں بالترتیب x, y اور z ہوتو ثابت کرو کہ

(i) $x(m-n) + y(n-l) + z(l-m) = 0$ (ii) $(x-y)n + (y-z)l + (z-x)m = 0$

حل : (i) فرض کرو پہلی رقم a اور مشترک فرق d ہے . دیا گیا ہے کہ

$t_l = x, t_m = y, t_n = z$

عام رقم کا ضابطہ استعمال کرتے ہوئے

$$a + (l-1)d = x \quad \ldots(1)$$

$$a + (m-1)d = y \quad \ldots(2)$$

$$a + (n-1)d = z \quad \ldots(3)$$

10 math unit 2A
Saturday, February 15, 2020 1:41:56 PM

ہمارے پاس ہے $x(m-n)+y(n-l)+z(l-m)$

$$a[(m-n)+(n-l)+(l-m)]+\mathrm{d}[(m-n)(l-1)+(n-l)(m-1)+(l-m)(n-1)]$$
$$=a[0]+d[lm-ln-m+n+mn-lm-n+l+ln-mn-l+m]$$
$$=a(0)+\mathrm{d}(0)=0$$

ii) مساوات (2) کو (1) سے تفریق کرنے پر، مساوات (3) کو (2) سے اور (3) کو (1) سے تفریق کرنے پر،

$$x-y=(l-m)d$$
$$y-z=(m-n)d$$
$$z-x=(n-l)d$$
$$(x-y)n+(y-z)l+(z-x)m=[(l-m)n+(m-n)l+(n-l)m]d$$
$$=\left[ln-mn+lm-nl+nm-lm\right]d=0$$

غور کیجئے

- اگر ہر ایک رقم کے ساتھ ایک مستقل رقم جمع یا تفریق کرنے پر حاصل ہونے والا تواتر بھی A.P میں ہوتا ہے۔
- اگر ایک ہر رقم کو ایک غیر صفر مستقل رقم سے ضرب یا تقسیم کرنے پر حاصل ہونے والا تواتر بھی A.P میں ہوتا ہے۔
- اگر کسی A.P کی تین متواتر رقموں کا مجموعہ دیا گیا ہو تو ان کو $a-d$، a اور $a+d$ کے طور پر لیا جاسکتا ہے . یہاں مشترک فرق d ہے۔
- اگر کسی A.P کی چار متواتر رقموں کا حاصل جمع دیا گیا ہو تو ان کو $a-3d$, $a-d$, $a+d$ اور $a+3d$ کے طور پر لیا جاسکتا ہے، یہاں مشترک فرق $2d$ ہے۔

مثال 2.29 کسی A.P میں چار متواتر رقموں کا حاصل جمع 28 اور ان کے مربعوں کا حاصل جمع 276 ہے . چار اعداد معلوم کرو۔

حل : فرض کرو چار رقمیں $(a-3d), (a-d), (a+d)$ اور $(a+3d)$ ہیں . چونکہ چار رقموں کا حاصل جمع 28 ہے

$$a-3d+a-d+a+d+a+3d=28$$
$$4a=28 \quad \text{ہمیں حاصل ہوتا ہے} \quad a=7$$

اسی طرح ان کے مربوں کا حاصل جمع 276 ہے .

$$(a-3d)^2+(a-d)^2+(a+d)^2+(a+3d)^2=276.$$
$$a^2-6ad+9d^2+a^2-2ad+d^2+a^2+2ad+d^2+a^2+6ad+9d^2=276$$
$$4a^2+20d^2=276 \Rightarrow 4(7)^2+20d^2=276.$$
$$d^2=4 \ , \ d=\pm\sqrt{4} \ , \ d=\pm 2$$

اگر $d=2$ ہو تو چار اعداد یہ ہیں $7-3(2),\ 7-2,\ 7+2,\ 7+3(2)$

لہذا چار اعداد $1, 5, 9, 13$ ہیں۔

10 math unit 2A
Saturday, February 15, 2020 1:41:57 PM

اگر $a=7$ ، $d=-2$ ہو تو چاراعداد 5, 9, 13 اور 1 ہیں۔
اور لہذا A.P کی چارمتواتر رقموں 9,5,1 اور 13 ہیں۔

3 اعداد A.P میں ہونے کے لئے شرط

اگر a,b,c ایک A.P. میں ہو تو $b=a+d,\ c=a+2d$

$$a+c = 2a+2d$$ اس لیے
$$2(a+d) = 2b$$ اسی طرح
$$\boxed{2b=a+c}$$ اس لیے

اسی طرح اگر $2b=a+c,$ ہوتو $b-a=c-b$ اس لیے $a,\ b,\ c$ A.P. میں ہیں
اس طرح تین غیرصفراعداد $a,\ b,\ c$ A.P. میں ہوتے ہیں اگرصرف اورصرف $\boxed{2b=a+c}$ ہو

مثال 2.30 ایک ماں ₹ 207 کو تین حصوں میں اس طرح تقسیم کرتی ہے کہ وہ رقم A.P میں ہیں اور تین بچوں کو دیتی ہے کم ترین رقم کا حاصل ضرب 4623 ₹ ہوتو ہر بچہ کو کتنی رقم حاصل ہوئی۔

حل : دیا گیا ہے تین بچوں کا حاصل کردہ رقم A.P میں ہے فرض کرو رقمیں $a-d,\ a,\ a+d$ ہیں چونکہ ان کا مجموعہ ₹ 207 ہے۔

دیا گیا ہے کہ $(a-d)+a+(a+d)=207$

$3a=\ 207\ \text{gives}\ a=69$

دیا گیا ہے کہ 4623= دو کم ترین رقموں کا حاصل ضرب

$$(a-d)a=4623$$
$$(69-d)69=4623$$
$$d=2$$

لہذا بچوں کو دی ہوئی تین رقمیں

₹67, ₹69 اور ₹71. یعنی ₹(69−2), ₹69, ₹(69+2).

اپنی پیش رفت کی جانچ

1۔ اگر A.P کے ہر ایک رقم کو 3 سے ضرب دی جائے تو نئی A.P کا مشترک فرق ____ ہے ۔

2۔ تین اعداد a,b اور c میں ہوتے ہیں اگرصرف اورصرف ____

مشق 2.5

1۔ پتہ لگاؤ کیا ذیل کے تواتر A.P میں ہیں۔

(i) $a-3,\ a-5,\ a-7,\ldots$ (ii) $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\ldots$ (iii) 9, 13, 17, 21, 25,...

(iv) $\frac{-1}{3},0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},\ldots$ (v) $1,-1,1,-1,1,-1,\ldots$

2۔ ذیل میں پہلی رقم a اور مشترک فرق d دیا گیا ہے A.P معلوم کرو۔

10 math unit 2 63to
Saturday, February 15, 2020 8:44:02 PM

(i) a=5 , d=6 (ii) a=7 , $d=-5$ (iii) $a=\frac{3}{4}$, $d=\frac{1}{2}$

3۔ ذیل کے حسابی سلسلہ کی پہلی رقم اور مشترک فرق معلوم کرو جن کی n ویں رقم دی گئی ہیں

(i) $t_n=-3+2n$ (ii) $t_n=4-7n$

4۔ $-11,-15,-19,\ldots$ کی 19 ویں رقم معلوم کرو۔

5۔ $16, 11, 6, 1,\ldots$ کی کونسی رقم -54 ہے؟

6۔ $9, 15, 21, 27,\ldots, 183$ کی درمیانی رقم (رقمیں) معلوم کرو۔

7۔ کسی A.P کی نویں رقم کا نو گنا، پندرہویں رقم کا پندرہ گنا کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ چوبیسویں رقم کا گنا صفر ہے۔

8۔ اگر $3+k, 18-k, 5k+1$ ایک A.P میں ہو تو k معلوم کرو۔

9۔ $x, 10, y, 24, z$ A.P میں ہیں۔ y,x اور z معلوم کرو دیا گیا ہے کہ

10۔ کسی تھیٹر میں پہلی صف میں 20 نشستیں ہیں اور صفوں کی کل تعداد 30 ہے۔ ہر متواتر صف میں دو نشستیں زیادہ ہیں۔ آخری صف میں کتنی نشستیں ہیں؟

11۔ کسی A.P کہ تین متواتر رقموں کا حاصل جمع 27 ہے اور ان کا حاصل ضرب 288 ہے۔ تین رقم معلوم کرو۔

12۔ کسی A.P کے 6 ویں اور 8 ویں رقموں کی نسبت 7:9 ہو تو 9 ویں اور 13 ویں رقموں میں نسبت معلوم کرو۔

13۔ ایک موسم سرما میں اوٹی میں پیر سے جمعہ تک کی تپش کا حاصل جمع 0°C ہے، چہارشنبہ سے جمعہ تک کی تپش کا حاصل جمع 18°C ہے۔ پانچ دنوں کا تپش الگ الگ معلوم کرو۔

14۔ فاطمہ پہلے ماہ ₹ 15000 تنخواہ حاصل کرتی ہے اس کے بعد ہر سال تنخواہ میں ₹1500 کا اضافہ ہوتا ہے۔ پہلے سال اس کا خرچ ₹ 13000 ہے ہر سال اس کے خرچ میں 900 روپیوں کا اضافہ ہوتا ہے۔ کتنی مدت میں وہ ماہانہ ₹ 20,000 بچا پائے گی؟

2.8 سلسلے

تواتر کے رقموں کا حاصل جمع **سلسلہ** کہلاتا ہے۔ فرض کرو کے $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ ایک تواتر کے حق سے اعداد ہیں۔ تو حقیقی اعداد $a_1+a_2+a_3+\cdots$ کی تشریح حقیقی اعداد کے سلسلے کے طور پر کی جاتی ہے۔

کسی سلسلے میں محدود رقمیں ہو تو اس کو **محدود سلسلہ** کرتے ہیں۔ اگر کسی سلسلے میں لامحدود رقمیں موجود ہو تو اس کو **لامحدود سلسلہ** کہتے ہیں۔ آیئے اب ہم صرف ہماری توجہ کو محدود سلسلہ کے مطالعہ پر مرکوز کریں۔

10 math unit 2 63to
Saturday, February 15, 2020 8:44:02 PM

2.8.1 A.P کے n رقموں کا حاصل جمع

اگر کسی سلسلہ کے رقمیں حسابی ارتقاء میں ہوں تو اس سلسلے کو **حسابی سلسلہ** کہتے ہیں۔

فرض کرو $a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots$ A.P. ہے .

حسابی سلسلہ کی ابتدائی n رقموں کے حاصل جمع کو Sn سے ظاہر کیا جاتا ہے .

$$S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + (a+(n-1)d) \quad \ldots(1)$$

مندرجہ بالا کو الٹی ترتیب سے لکھنے پر

$$S_n = (a+(n-1)d) + (a+(n-2)d) + \cdots + (a+d) + a \quad \ldots(2)$$

(1) اور (2) کو جمع کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$2S_n = [a+a+(n-1)d] + [a+d+a+(n-2)d] + \cdots + [a+(n-2)d+(a+d)] + [a+(n-1)d+a]$$

$$= [2a+(n-1)d] + [2a+(n-1)d + \cdots + [2a+(n-1)d] \quad (n \text{ ویں رقم})$$

$$2S_n = n \times [2a+(n-1)d] \quad \Rightarrow \quad S_n = \frac{n}{2}\left[2a+\left(n-1\right)d\right]$$

غور کیجئے

اگر پہلی رقم a اور آخر رقم l (n ویں رقم) دی گئی ہو تو

چونکہ $l = a+\left(n-1\right)d$ ہمارے پاس ہے۔

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a+\left(n-1\right)d\right] = \frac{n}{2}\left[a+a+\left(n-1\right)d\right]$$

$$S_n = \frac{n}{2}[a+l].$$

اپنی پیش رفت کی جانچ

1۔ ایک تواتر کے رقموں کا حاصل جمع _____ کہلاتا ہے۔

2۔ اگر ایک سلسلے میں رقموں کی تعداد محدود ہو تو اس کو _____ کہتے ہیں۔

3۔ ایک سلسلہ جس کی رقم _____ میں ہوں، حسابی سلسلہ کہلاتا ہے۔

4۔ اگر ایک A.P کی پہلی اور آخری دی گئی ہو تو اس کا حاصل جمع معلوم کرنے کا ضابطہ _____ ہے۔

مثال 2.31 A. P. $8, 7\frac{1}{4}, 6\frac{1}{2}, 5\frac{3}{4}, \ldots$ کی ابتدائی 15 رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

حل : یہاں پہلی رقم $a=8$ مشترک فرق $d = 7\frac{1}{4} - 8 = -\frac{3}{4}$,

A.P کے ابتدائی رقموں کا حاصل جمع $S_n = \frac{n}{2}\left[2a+(n-1)d\right]$

$$S_{15} = \frac{15}{2}\left[2\times 8 + (15-1)(-\frac{3}{4})\right]$$

$$S_{15} = \frac{15}{2}\left[16 - \frac{21}{2}\right] = \frac{165}{4}$$

10 math unit 2 63to
Saturday, February 15, 2020 8:44:03 PM

مثال 2.32 حاصل جمع معلوم کرو۔ $0.40 + 0.43 + 0.46 + \cdots + 1$

حل : یہاں n کی قیمت نہیں دی گئی ہے لیکن آخری رقم دی گئی ہے اس سے ہم n کی قیمت معلوم کر سکتے ہیں۔

دیا گیا ہے : $a = 0.40$ and $l = 1$, we find $d = 0.43 - 0.40 = 0.03$.

لہذا $n = \left(\frac{l-a}{d}\right) + 1$

$= \left(\frac{1-0.40}{0.03}\right) + 1 = 21$

A.P. کے پہلے n رقموں کا حاصل جمع $S_n = \frac{n}{2}[a + l]$

یہاں $n=21$ لہذا $S_{21} = \frac{21}{2}[0.40 + 1] = 14.7$

دیے ہوئے سلسلے کی 21ویں رقموں کا حاصل جمع 14.7 ہے

مثال 2.33 سلسلہ $1+5+9+ \ldots\ldots\ldots$ کی کتنی رقموں کو جمع کرنے پر ان کا حاصل جمع 190 ہوگا۔

حل : یہاں ہمیں n کی قیمت معلوم کرنا چاہیے اس طرح کے $Sn=190$

پہلی رقم $a=1$، مشترک فرق $d=5-1=4$

A.P کی ابتدائی n رقموں کا حاصل جمع ہے۔

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = 190$

$\frac{n}{2}[2 \times 1 + (n-1) \times 4] = 190$

$n[4n - 2] = 380$

$2n^2 - n - 190 = 0$

$(n - 10)(2n + 19) = 0$

لیکن $n=10$ $n = -\frac{19}{2}$ ناممکن ہے۔ لہذا $n=10$

ذرا سوچئے

n کی قیمت مثبت ہونا چاہیے کیوں؟

اپنی پیش رفت کی جانچ

صحیح ہے یا غلط بتاؤ تصدیق کرو۔

1۔ کسی A.P کی n ویں رقم کی شکل $pn+q$ ہے جہاں p اور q مستقل رقم ہیں۔

2۔ کسی A.P کی n رقموں کا حاصل جمع کی شکل $pn^2+qn + r$ ہے جہاں p,q,r مستقل رقم ہیں۔

مثال 2.34 کسی A.P کی 13ویں رقم 3 ہے اور ابتدائی رقم 13 رقموں کا حاصل جمع 234 ہے، مشترک فرق اور پہلے 21 رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

حل : دیا گیا ہے کہ 13 ویں رقم $= 3$ اس لیے $t_{13} = a + 12d = 3$ ... (1)

10 math unit 2 63to
Saturday, February 15, 2020 8:44:03 PM

پہلے 13 رقموں کا حاصل جمع $= 234$ دیتا ہے $S_{13} = \frac{13}{2}[2a + 12d] = 234$

$$2a + 12d = 36 \quad \ldots(2)$$

(1) اور (2) کو حل کرنے سے ہمیں $a=33$ اور $d = \frac{-5}{2}$ حاصل ہوتا ہے $a=33, \quad d = \frac{-5}{2}$

لہذا مشترک فرق $\frac{-5}{2}$ ہے

پہلے 21 رقموں کا حاصل جمع $S_{21} = \frac{21}{2}\left[2 \times 33 + (21-1) \times \left(-\frac{5}{2}\right)\right] = \frac{21}{2}[66 - 50] = 168$

مثال 2.35 ایک A.P میں پہلے n رقموں کا حاصل جمع $\frac{5n^2}{2} + \frac{3n}{2}$ ہے۔ 17 ویں رقم معلوم کرو۔

حل : 17 ویں رقم حاصل کرنے کے لئے پہلے 17 رقموں کا حاصل جمع سے پہلے 16 رقموں کا حاصل جمع کو تفریق کرنا ہوگا۔

$$S_{17} = \frac{5 \times (17)^2}{2} + \frac{3 \times 17}{2} = \frac{1445}{2} + \frac{51}{2} = 748$$

$$S_{16} = \frac{5 \times (16)^2}{2} + \frac{3 \times 16}{2} = \frac{1280}{2} + \frac{48}{2} = 664$$

$$t_{17} = S_{17} - S_{16} = 748 - 664 = 84$$

مثال 2.36 300 اور 600 کے درمیان تمام طبعی اعداد (natural numbers) کا حاصل جمع معلوم کرو جو 7 سے تقسیم پذیر ہیں۔

حل : 300 اور 600 کے درمیان 7 سے تقسیم ہونے والے طبعی اعداد یہ ہیں $301, 308, 315, \ldots 595$.

ان کا حاصل جمع یہ ہے $301 + 308 + 315 + \cdots + 595$.

اوپر کے سلسلہ کی رقمیں A.P میں ہیں

پہلی رقم $a=301$، مشترک فرق $d=7$ آخری رقم $l=595$

$$n = \left(\frac{l-a}{d}\right) + 1 = \left(\frac{595 - 301}{7}\right) + 1 = 43$$

چونکہ $S_n = \frac{n}{2}[a + l]$ اس لئے $S_{43} = \frac{43}{2}[301 + 595] = 19264.$

مثال 2.37 ایک موسائک کو مثلث مساوی الاضلاع کی شکل میں ڈیزائن کیا گیا ہے جس کا ہر ضلع 12 فیٹ ہے موسائک کا ہر ٹائل 12 اِنچ ضلع کا مثلث مساوی الاضلاع ہے جیسے خاکے میں بتلایا ہے۔ ٹائلس کا رنگ باری باری بدلتا ہے۔ رنگ کے ٹکڑوں کی تعداد اور موسائک میں موجود ہر ایک رنگ ٹائلس کی تعداد اور کل ٹائلس کی تعداد معلوم کرو۔

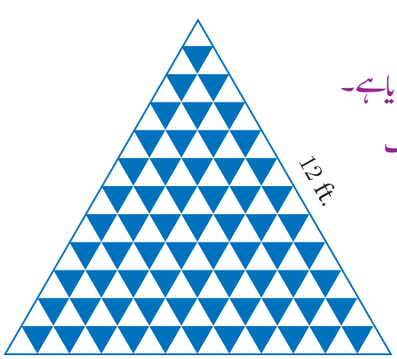


Fig.2.12

حل : چونکہ موسائک، 12 فٹ کے مثلث مساوی الاضلاع کی شکل میں ہے۔ اور ٹائل کی شکل 12 انچ (ایک فٹ)، ہو تو موسائک میں 12 صف ہوں گے۔

10 math unit 2 63to
Saturday, February 15, 2020 8:44:04 PM

نقشہ کے مطابق، یہ صاف ظاہر ہے کہ ایک صف میں سفید ٹائلس کی تعداد 1.2.3,4,. . . . . 12 جو واضح طور پر ایک حسابی سلسلہ بناتے ہیں۔

اس طرح ہر صف میں نیلے ٹائلس کی تعداد 0, 1, 2, 3, ..., 11 ہیں جو حسابی سلسلہ میں ہیں۔

$$\text{سفید ٹائلس کی تعداد} = 1+2+3+\cdots+12 = \frac{12}{2}[1+12] = 78$$

$$\text{نیلے ٹائلس کی تعداد} = 0+1+2+3+\cdots+11 = \frac{12}{2}[0+11] = 66$$

$$\text{موزیک میں کل کی تعداد} = 78 + 66 = 144$$

مثال 2.38 کسی گلی کے گھروں کو 1 تا 49 نمبر دیے گئے ہیں۔ رحمان کے گھر کو ایسا نمبر دیا گیا ہے کہ اس کے گھر سے پہلے گھروں کے نمبروں کا حاصل جمع اور اس کے گھر کے بعد کے گھروں کے نمبروں کا حاصل جمع مساوی ہے۔ رحمٰن کے گھر کا نمبر معلوم کرو۔

حل : فرض کرو رحمان کے گھر کا نمبر x ہے

دیا گیا ہے کہ $1+2+3+\cdots+(x-1) = (x+1)+(x+2)+\cdots+49$

$$1+2+3+\cdots+(x-1) = \left[1+2+3+\cdots+49\right]-\left[1+2+3+\cdots+x\right]$$

$$\frac{x-1}{2}\left[1+(x-1)\right] = \frac{49}{2}\left[1+49\right]-\frac{x}{2}\left[1+x\right]$$

$$\frac{x(x-1)}{2} = \frac{49\times 50}{2}-\frac{x(x+1)}{2}$$

$$x^2-x = 2450-x^2-x \Rightarrow 2x^2 = 2450$$

$$x^2 = 1225 \implies x = 35$$

لہذا رحمان کے گھر کا نمبر 35 ہے .

مثال 2.39 ایک A.P پہلے n, $2n$ اور $3n$ رقموں کا حاصل جمع بالترتیب S_1, S_2 اور S_3 ہے تو ثابت کرو کہ $S_3 = 3\,(S_2 - S_1)$

حل : کسی A.P n, $2n$ اور $3n$ کا حاصل جمع بالترتیب S_1, S_2 اور S_3 ہو تو

$$S_1 = \frac{n}{2}\left[2a+(n-1)d\right],\quad S_2 = \frac{2n}{2}\left[2a+(2n-1)d\right],\quad S_3 = \frac{3n}{2}\left[2a+(3n-1)d\right]$$

فرض کرو کہ $S_2 - S_1 = \frac{2n}{2}\left[2a+(2n-1)d\right]-\frac{n}{2}\left[2a+(n-1)d\right]$

$$= \frac{n}{2}\left[\left[4a+2(2n-1)d\right]-\left[2a+(n-1)d\right]\right]$$

$$S_2 - S_1 = \frac{n}{2}\times\left[2a+(3n-1)d\right]$$

$$3(S_2-S_1) = \frac{3n}{2}\left[2a+(3n-1)d\right]$$

$$3(S_2-S_1) = S_3$$

ذرا سوچیے

1۔ پہلے n طاق طبعی اعداد کا حاصل جمع کیا ہے؟

2۔ پہلے n جفت طبعی اعداد کا حاصل جمع کیا ہے؟

10 math unit 2 63to
Saturday, February 15, 2020 8:44:04 PM

مشق 2.6

1۔ ذیل کا حاصل جمع معلوم کرو۔

(i) $3,7,11,\ldots,$ 40 رقموں تک (ii) $102,97,92,\ldots,$ 27 رقموں تک

(iii) $6+13+20+\cdots+97$

2۔ 5 سے شروع کرتے ہوئے کتنے متواتر طاق سالم اعداد کو جمع کرنے پر حاصل جمع 480 حاصل ہوگا۔

3۔ A.P کے پہلے 28 رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو جس کی n ویں رقم $4n-3$ ہے۔

4۔ کسی سلسلے کے پہلے n رقموں کا حاصل جمع $2n^2-3n$ ہے .بتاؤ کہ یہی حسابی سلسلہ ہے .

5۔ کسی A.P کی 104 ویں رقم اور 4 ویں رقم 125 اور 0 ہیں۔ اس کے پہلے 35 رقموں کا مجموعہ معلوم کرو۔

6۔ 450 سے کم تمام مثبت طاق سالم کا اعداد کا حاصل جمع معلوم کرو۔

7۔ 602 اور 902 کے درمیان کے تمام طبعی اعداد کا حاصل جمع معلوم کرو جو 4 سے تقسیم نہیں ہوتے۔

8۔ ابرار ایک لیپ ٹاپ کمپیوٹر خریدنا چاہتا ہے وہ نقد رقم ₹ 40000 ادا کر کے اس کو خرید سکتا ہے یا 10 قسطوں میں ادا کرتے ہوئے اس طرح کے پہلے ماہ میں ₹4800 وغیرہ اگر وہ اس طرح سے رقم ادا کرتا ہے تو معلوم کرو کہ دوسرے ماہ ₹4700 اور اسی طرح

i) 10 قسطوں میں ادا کی ہوئی رقم

ii) اس کی اصل قیمت سے کتنی زائد رقم اس کو ادا کرنی ہوگی؟

9۔ قرض لی ہوئی رقم ₹ 65000 کو ایک شخص ہر ماہ میں ₹400 واپس ادا کرتا ہے اور ہر ماہ ادائیگی کی رقم میں ₹ 300 کا اضافہ کرتا ہے قرض سے بری ہونے کے لیے اس کو کتنی مدت لگے گی؟

10۔ اینٹ سے بنی ایک سیڑھی میں کل 30 قدم ہیں۔ نچلے ختم کے لئے 100 اینٹوں کی ضرورت ہے۔ ہر متواتر قدم کے لیے پچھلی ختم کے مقابل دو اینٹیں کم ہوتی ہیں۔

i) سب سے اونچے قدم کے لیے کتنی سیٹیں درکار ہیں۔

ii) سیڑھی کو بنانے کے لیے کل کتنے اینٹوں کی ضرورت ہے۔

11۔ m ، n کے A.P رقموں کا حاصل جمع $S_1,S_2,S_3,\ldots,S_m$ ہو جن کی پہلی رقمیں $1,2,3,\ldots..m$ اور مشترک فرق بالترتیب $1,3,5,\ldots,(2m-1)$ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$S_1+S_2+S_3+\cdots+S_m=\frac{1}{2}mn\,(mn+1)$$

12۔ حاصل جمع معلوم کرو۔ $\left[\frac{a-b}{a+b}+\frac{3a-2b}{a+b}+\frac{5a-3b}{a+b}+\cdots\right.$ 12 رقموں تک $\left.\right]$

2.9 ہندسی سلسلہ

خاکہ 2.13 میں دی ہوئی شکل میں ΔABC کے اضلاع BC,AB کے درمیانی نقطوں کو ملا کر ΔDEF بنایا گیا ہے۔ ΔDEF کی جسامت ٹھیک ΔABC کا ایک چوتھائی ہے۔ اسی طرح ΔDEF , ΔGHI کا ایک چوتھائی ہے۔ عام طور پر ہر مثلث کا رقبہ پچھلے مثلث کے رقبے کا ایک چوتھائی ہوتا ہے۔

10 math unit 2 63to
Saturday, February 15, 2020 8:44:05 PM

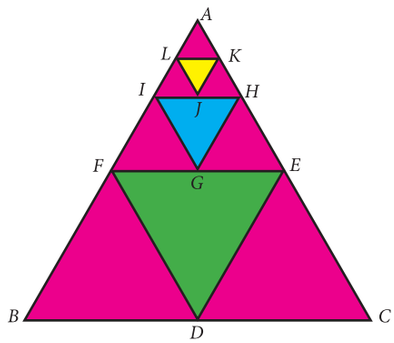


Fig.2.13

ان مثلثوں کے رقبے

$$\Delta ABC,\ \frac{1}{4}\ \Delta\ \text{ABC},\ \frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\ \Delta\ ABC,\ldots$$

یعنی $$\Delta\ ABC,\ \frac{1}{4}\ \Delta\ ABC,\ \frac{1}{16}\ \Delta\ ABC,\ldots$$

اس مثال میں ہم دیکھتے ہیں کہ ΔABC سے آغاز کرتے ہوئے پے در پے بننے والے مثلث اس طرح ہیں ان کا رقبہ پچھلے مثلث کے رقبہ کا ایک چوتھائی ہوتا ہے اس طرح ہر ایک رقم کو پچھلے رقم $\frac{1}{4}$ سے ضرب دینے سے حاصل ہوتا ہے۔

دوسری مثال میں 1 آیئے ہم خیال کرتے ہیں کہ ایک وائرس کی بیماری اس طرح پھیلتی ہے کہ ہر مرحلے میں ایک آدمی دوسرے دو آدمیوں کو بیماری سے متاثر کرتا ہے پہلے مرحلے میں ایک آدمی متاثر ہوتا ہے دوسرے مرحلے میں دو اشخاص متاثر ہوتے ہیں بعد میں متاثر ہوتے ہیں وغیرہ ہر مرحلے میں متاثر شدہ افراد کی تعداد 1,2.4,8 جہاں سوائے پہلے رقم کے ہر رحم پچھلے کئی دگنی ہے اوپر کی مثال سے یہ صاف ظاہر ہے کہ ہر رحم پچھلے رقم کوئی ایک مستقل عدد سے ضرب دینے پر حاصل ہوتی ہے۔

یہ تصور ہندی سلسلے کے نظریے کو جنم دیتا ہے۔

$\frac{1}{4}$

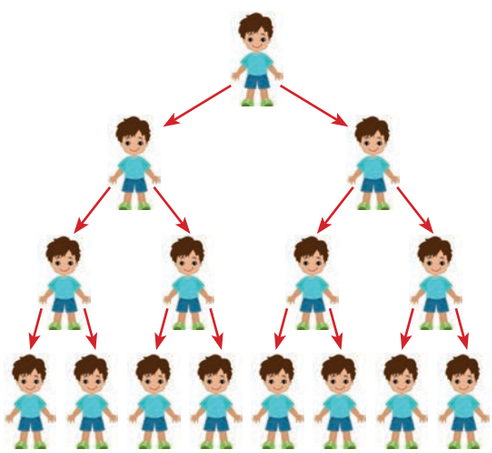


Fig.2.14

تعریف

ہندی سلسلہ ایک تواتر ہے جس پر سوائے پہلی رقم کے، ہر رقم، پچھلی رقم کو غیر صفر مستقل رقم سے ذرا دینے پر حاصل ہوتی ہے۔ اس مستقل رقم کو مشترک نسبت کہتے ہیں۔ مشترک نسبت کو عام طور پر r سے ظاہر کرتے ہیں۔

2.9.1 ہندسی سلسلے کی عام مشکل

فرض a اور $r \neq 0$ حقیقی اعداد ہیں تو $a, ar, ar^2, \ldots ar^{n-1}\ldots$ شکل کے اعداد کو ہندسی سلسلہ کہا جاتا ہے۔ a کو پہلی رقم اور r کو نسبت کہا جاتا ہے

نوٹ کریں کہ پہلی رقم a سے شروع کرنے پر ہر ایک رقم کو مشترک نسبت r ضرب دینے پر دوسری رقم حاصل ہوتی ہے $ar, ar^2, ar^3, \ldots$

2.9.2 اسی سلسلے کی عام رقم

ہم ہندسی سلسلہ کی عام رقم یا n ہوئی رقم کا ضابطہ معلوم کرنے کی کوشش کریں گے۔ جن کے رخ میں مشترک نسبت ہیں۔

اس طرح G.P کی عام رقم یا t_n ویں رقم $a, ar, ar^2, \ldots, ar^{n-1}, \ldots$ ہے۔

10 math unit 2 63to
Saturday, February 15, 2020 8:44:05 PM

جہاں a پہلی رقم اور r مشترک نسبت ہے . فرض کرو G.P کی n ویں رقم tn ہے۔

ہوتو

$$t_1 = a = a \times r^0 = a \times r^{1-1}$$
$$t_2 = t_1 \times r = a \times r = a \times r^{2-1}$$
$$t_3 = t_2 \times r = ar \times r = ar^2 = ar^{3-1}$$
$$\vdots \quad \vdots$$
$$t_n = t_{n-1} \times r = ar^{n-2} \times r = ar^{n-2+1} = ar^{n-1}$$

چنانچہ ایک G.P. کی عام رقم یا n ویں رقم $t_n = ar^{n-1}$ ہے۔

غور کیجئے

اگر ہم G.P کی مسلسل رقموں کے نسبتوں پر غور کریں تو

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{ar}{a} = r\,,\ \frac{t_3}{t_2} = \frac{ar^2}{ar} = r\,,\ \frac{t_4}{t_3} = \frac{ar^3}{ar^2} = r\,,\ \frac{t_5}{t_4} = \frac{ar^4}{ar^3} = r\,,$$

اس طرح ہندسی سلسلے کے کوئی دو متواتر رقموں کی نسبت ہمیشہ مستقل (Constant) ہوتی ہے اور یہ مستقل رقم دیے ہوئے سلسلے کی مشترک نسبت کہلاتی ہے۔

اپنی پیش رفت کی جانچ

1۔ پچھلی رقم کو ___ سے ضرب دینے پر ایک G.P حاصل ہوتا ہے۔

2۔ G.P کے کسی بھی دو متواتر رقموں کا مشترک نسبت ___ ہے اور یہ ___ کہلاتا ہے۔

3۔ ذیل کے G.P میں خانہ پوری کرو۔

(i) $\frac{1}{8}, \frac{3}{4}, \frac{9}{2}, ___$ (ii) $7, \frac{7}{2}, ___$ (iii) $___, 2\sqrt{2}, 4\,,$

مثال 2.40 ذیل کے کونسے تواتر ہندسی سلسلہ بناتے ہیں

(i) 7, 14, 21, 28, (ii) $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, ... (iii) 5, 25, 50, 75,

حل : چونکہ دو متواتر رقموں کی نسبت مساوی نہیں ہے اس لئے تواتر ہندی سلسلہ نہیں ہے

(i) 7, 14, 21, 28,

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{14}{7} = 2\,; \qquad \frac{t_3}{t_2} = \frac{21}{14} = \frac{3}{2}\,; \qquad \frac{t_4}{t_3} = \frac{28}{21} = \frac{4}{3}$$

چونکہ دو متواتر رقموں کی نسبت مساوی نہیں ہے اس لیے تواتر 7, 14, 21, 28 ہندسی سلسلہ نہیں ہے۔

(ii) $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, ...

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2\,; \qquad \frac{t_3}{t_2} = \frac{2}{1} = 2\,; \qquad \frac{t_4}{t_3} = \frac{4}{2} = 2$$

10 math unit 2 63to
Saturday, February 15, 2020 8:44:06 PM

یہاں دومتواتر رقموں کی نسبت مساوی ہے۔ لہذا تواتر $\frac{1}{2}, 1, 2, 4, \ldots$ ایک ہندسی سلسلہ ہے جس کی مشترک نسبت r=2 ہے۔



ذرا سوچئے

کیا یہ G.P. $2, 2^2, 2^{2^2}, 2^{2^{2^2}}, \ldots$ میں ہے؟

(iii) $5, 25, 50, 75, \ldots$

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{25}{5} = 5\,; \qquad \frac{t_3}{t_2} = \frac{50}{25} = 2\,; \qquad \frac{t_4}{t_3} = \frac{75}{50} = \frac{3}{2}$$

چونکہ دومتواتر رقموں کی نسبت مساوی نہیں ہے اس لئے تواتر $5,25,50,75\ldots\ldots$ ہندسی سلسلہ نہیں ہے۔

مثال 2.41 ہندسی سلسلہ معلوم کرو جس کی پہلی رقم اور مشترک نسبت دی گئی ہے

(i) $a = -7$, $r=6$ (ii) $a = 256$, $r = 0.5$

حل : (i) ہندسی سلسلے کی عام شکل یہ ہے۔ $a,\ ar,\ ar^2, \ldots$

$$a = -7\,,\ \ ar = -7 \times 6 = -42\,,\ \ ar^2 = -7 \times 6^2 = -252$$

لہذا مطلوبہ ہندسی سلسلہ یہ ہے $-7, -42, -252, \ldots$

ii) ہندسی سلسلے کی عام شکل یہ ہے $a,\ ar,\ ar^2, \ldots$

$$a=256\ \ , ar = 256 \times 0.5 = 128\,,\ \ ar^2 = 256 \times (0.5)^2 = 64$$

لہذا مطلوبہ ہندسی سلسلہ یہ ہے $256,128, 64, \ldots$



اپنی پیش رفت کی جانچ

1۔ اگر پہلی رقم $a=$ اور مشترک فرق $r=$ ہو تو t_9 اور t_{27} معلوم کرو۔

2۔ کسی G.P میں اگر $t_1 = \frac{1}{5}$ اور $t_2 = \frac{1}{25}$ ہوں تو مشترک نسبت ____ ہے

مثال 2.42 G.P $9,3,1, \ldots\ldots$ کی 8ویں رقم معلوم کرو۔

حل : 8 رقم کو معلوم کرنے کے لیے ہمیں nویں رقم کا ضابطہ $t_n = ar^{n-1}$ استعمال کرنا ہوگا۔

پہلی رقم $a=9$ مشترک نسبت $r = \frac{t_2}{t_1} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$$t_8 = 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{8-1} = 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^7 = \frac{1}{243}$$

لہذا G.P کی 8ویں رقم $\frac{1}{243}$ ہے

مثال 2.43 ایک ہندسی سلسلے کی 4ویں رقم $\frac{8}{9}$ اور 7ویں رقم $\frac{64}{243}$ ہے۔ ہندسی سلسلہ معلوم کرو۔

حل :

4 ویں رقم $t_4 = \frac{8}{9} \quad \Rightarrow \quad ar^3 = \frac{8}{9}$ (1)

7 ویں رقم $t_7 = \frac{64}{243} \quad \Rightarrow \quad ar^6 = \frac{64}{243}$ (2)

10 math unit 2 63to
Saturday, February 15, 2020 8:44:06 PM

$$\frac{ar^6}{ar^3} = \frac{\frac{64}{243}}{\frac{8}{9}} \qquad (2) \text{ کو } (1) \text{ سے تقسیم کرنے پر}$$

$$r^3 = \frac{8}{27} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{2}{3}$$

$$a \times \left[\frac{2}{3}\right]^3 = \frac{8}{9} \Rightarrow a = 3 \qquad r \text{ کی قیمت } (1) \text{ میں اندراج کرنے پر}$$

لہذا ہندسی سلسلہ $a,\ ar,\ ar^2,\ \ldots$ یعنی $3,\ 2,\ \frac{4}{3},\ \ldots$

غور کیجئے

1۔ اگر کسی G.P کی تین متواتر رقموں کا حاصل ضرب دیا گیا ہو تو ان تین رقموں کو $\frac{a}{r},\ a,\ ar$ کہ طور پر لیں گے۔

2۔ اگر کسی G.P کی چار متواتر رقموں کا حاصل ضرب دیا گیا ہو تو ان چار رقموں کو $\frac{a}{r^3},\ \frac{a}{r},\ ar,\ ar^3$ کے طور پر لیں گے۔

3۔ اگر ہندسی سلسلے کی ہر قم کو غیر صفر مستقل رقم سے ضرب یا تقسیم کیا جائے تو حاصل ہونے والا تواتر بھی ایک ہندسی سلسلہ ہوتا ہے۔

مثال 2.44 ایک ہندسی سلسلے کی تین متواتر رقموں کا حاصل ضرب 343 اور ان کا حاصل ہے جمع $\frac{91}{3}$ ہے . تین رقم معلوم کرو۔

حل : چونکہ 3 متواتر رقموں کا حاصل ضرب دیا گیا ہے

فرض کرو تین رقمیں $\frac{a}{r},\ a,\ ar$ ہیں

رقموں کا حاصل ضرب $= 343$

$$\frac{a}{r} \times a \times ar = 343$$

$$a^3 = 7^3 \quad \Rightarrow \quad a = 7$$

رقموں کا حاصل جمع $= \frac{91}{3}$

لہذا $a\left(\frac{1}{r} + 1 + r\right) = \frac{91}{3} \quad \Rightarrow \quad 7\left(\frac{1 + r + r^2}{r}\right) = \frac{91}{3}$

$$3 + 3r + 3r^2 = 13r \quad \Rightarrow \quad 3r^2 - 10r + 3 = 0$$

$$(3r - 1)(r - 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 3 \text{ or } r = \frac{1}{3}$$

اگر $a=7$، $r=3$ ہو تو تین رقمیں $\frac{7}{3},\ 7,\ 21$ ہیں۔

اگر $a=7$، $r = \frac{1}{3}$ ہو تو تین رقمیں $21,\ 7,\ \frac{7}{3}$ ہیں۔

ذرا سوچئے

1۔ 64 کو تین حصوں میں اس طرح الگ کرو کہ وہ اعداد G.P میں ہوں

2۔ اگر $a,\ b,\ c\ \ldots\ldots$ G.P میں ہوں تو $2a,\ 2b,\ 2c,\ \ldots\ldots$ میں ہیں۔

3۔ اگر GP $3,\ x,\ 675$ میں ہو تو x ___ ہے۔

اپنی پیش رفت کی جانچ

تین غیر صفر اعداد a,b,c G.P میں ہوتے ہیں اگر صرف اور صرف _____

تین اعداد کا G.P میں ہونے کے لئے شرط

اگر a,b,c ایک G.P ہوں تو $b = ar,\ c = ar^2$ اس لیے $ac = a \times ar^2 = (ar)^2 = b^2$ لہذا $b^2 = ac$

اسی طرح اگر $b^2 = ac$ ہو تو $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$ اس لیے a,b,c ایک G.P میں ہیں۔

لہذا تین غیر صفر اعداد a,b,c ایک G.P میں ہوتے ہیں۔ اگر صرف اور صرف $b^2 = ac$ ہو۔

10 math unit 2 63to
Saturday, February 15, 2020 8:44:06 PM

مثال 2.45 ایک مشین کی موجودہ قیمت 40000 ₹ ہے اور اسکی قیمت ہر سال 10% گھٹتی ہے۔ 6 ویں سال اس مشین کی قیاس شدہ قیمت (estimated Value) معلوم کرو۔

حل : مشین کی موجودہ قیمت 40000 ₹ ہے چونکہ مشین کی قیمت 10% شرح سے کم ہوتی ہے، ایک سال بعد مشین کی قیمت ابتدائی قیمت کا 90% ہوگی۔

یعنی مشین کی قیمت پہلے سال کے اختتام کا $40,000 \times \frac{90}{100}$ ہوگا۔

دو سال بعد مشین کی قیمت پہلے سال کی قیمت کا 90% ہوگا۔ دوسرے سال کے آخر میں مشین کی قیمت $40,000\times\left(\frac{90}{100}\right)^2$

اس طریقے سے جاری رکھتے ہوئے مشین کی قیمت ذیل کے طریقے پر گھٹتی ہے۔

$$40000,\ 40000\times\frac{90}{100},\ 40000\times\left(\frac{90}{100}\right)^2 \ldots$$

یہ تواتر ایک G.P کی شکل میں ہے جس کی پہلے رقم 40000 ₹ اور مشترک نسبت $\frac{90}{100}$ ہے مشین کی قیمت 5 سال کے اختتام پر معلوم کرنے کے لیے یعنی (6 ویں سال) ہمیں G.P کی چھٹی رقم معلوم کرنے کی ضرورت ہے

اس طرح $n=6,\ a=40,000,\ r=\frac{90}{100}$

ہمارے پاس ہے۔ $t_n = ar^{n-1}$, $t_6 = 40000\times\left(\frac{90}{100}\right)^{6-1} = 40000\times\left(\frac{90}{100}\right)^5$ کو استعمال کرتے ہوئے

$$t_6 = 40000\times\frac{9}{10}\times\frac{9}{10}\times\frac{9}{10}\times\frac{9}{10}\times\frac{9}{10} = 236196$$

لہذا مشین کی قیمت 6 ویں سال = ₹23619.60

مشق 2.7

1۔ ذیل کے کون سے تواتر G.P میں ہیں؟

(i) 3,9,27,81, (ii) 4,44,444,4444,... (iii) 0.5,0.05,0.005,

(iv) $\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{12},\ldots$ (v) $1,-5,25,-125,\ldots$ (vi) 120,60,30,18, (vii) $16,4,1,\frac{1}{4},\ldots$

2۔ G.P کی پہلی تین رقمیں معلوم کرو جن کی پہلی رقم اور مشترک نسبت دی گئی ہیں۔

(i) $a=6,\ r=3$ (ii) $a=\sqrt{2},\ r=\sqrt{2}$ (iii) $a=1000,\ r=\frac{2}{5}$

3۔ G.P $729, 243, 81, \ldots\ldots$ میں t_7 معلوم کرو۔

4۔ x معلوم کرو اس طرح کہ $x+6, x+12$ اور $x+15$ ہندسی سلسلہ کی متواتر رقمیں ہیں۔

5۔ ذیل کے G.P میں رقموں کی تعداد معلوم کرو۔

(i) 4,8,16,, 8192? (ii) $\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{27},\ldots,\frac{1}{2187}$

10 math unit 2 63to
Saturday, February 15, 2020 8:44:07 PM

6۔کسی G.P میں 9 ویں رقم 32805 اور 6ویں رقم 1215 ہے۔ 12 ویں رقم معلوم کرو۔

7۔ ایک G.P کی 10 ویں رقم معلوم کرو۔جس کی 8ویں رقم 768 اور مشترک فرق 2 ہے۔

8۔ اگر a,b,c A.P میں ہوں تو ثابت کرو کہ $3^a, 3^b, 3^c$ G.P میں ہیں۔

9۔کسی G.P میں تین متواتر رقموں کا حاصل ضرب 27 ہے ۔ان اعداد کے جوڑیوں کے حاصل ضرب کا حاصل جمع ، بیک وقت دو رقموں کو لیتے ہوئے $\frac{57}{2}$ ، ہے تین رقمیں معلوم کرو۔

10۔ایک شخص کسی کمپنی میں بطورِ اسسٹنٹ مینیجر کے شامل ہوتا ہے۔کمپنی اس کو ابتدائی تنخواہ 60000 ₹ ادا کرتی ہے اور سالانہ 5٪ کا اضافہ کرتی ہے۔ 5 سال کے بعد اس کی تنخواہ کیا ہوگی؟

11۔ ریحان ایک کمپنی میں نوکری کے سلسلہ میں انٹرویو کے لئے حاضر ہوتا ہے۔کمپنی اس کو دو پیش کش کرتی ہے۔

پیشکش A (Offer A) : ابتدائی تنخواہ 20,000 ₹ یقینی سالانہ اضافہ 6% کے ساتھ پچھلے 5 سال کے لئے

پیش کش B : ابتدائی تنخواہ 22000 ₹ ، یقینی سالانہ اضافہ 3% کے ساتھ پہلے 5 سال کے لئے

پیشکش A اور B کے تحت اس کی تنخواہ 4ویں سال کی ہوگی؟

12۔ اگر a,b,c تین متواتر رقمیں A.P کے ہوں اور x,y,z تین متواتر رقمیں G.P کے ہوں تو ثابت کرو کہ $x^{b-c} \times y^{c-a} \times z^{a-b} = 1$

2.10 G.P کے n رقموں کا حاصل جمع

ایک تواتر جس کی رقمیں ہندسی تواتر **ہندسی سلسلہ** کہلاتا ہے۔

جیسا کہ $a,\ ar,\ ar^2, \ldots ar^{n-1}, \ldots$ ایک ہندسی تواتر ہے ۔

ہندسی سلسلہ کی ابتدائی n رقموں کا حاصل جمع

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \quad \ldots (1)$$

دونوں جانب r سے ضرب دینے پر $rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \quad (2)$

$(2)-(1) \Rightarrow rS_n - S_n = ar^n - a$

$$S_n(r-1) = a(r^n - 1)$$

n رقموں کا حاصل جمع $S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1},\ r \neq 1$.

غور کیجئے

G.P کے n رقموں کے حاصلِ جمع کا ضابطہ استعمال نہیں کیا جاسکتا اگر r=1 ہو

اگر r=1 ہوتو

$S_n = a + a + a + \cdots + a = na$

اپنی پیش رفت کی جانچ

1۔ایک سلسلہ جو ہندسی ارتقاء میں ہوتا ہے.....کہلاتا ہے۔

2۔ اگر $r=1$ ہوتو G.P کے n رقموں کے حاصل جمع معلوم کرنے کا ضابطہ.....ہے۔

3۔اگر $r \neq 1$ ہوتو G.P کے رقموں کے حاصل جمع معلوم کرنے کا ضابطہ.....ہے۔

10 math unit 2 63to
Saturday, February 15, 2020 8:44:08 PM

2.10.1 G.P کے لامحدود رقموں کا مجموعہ

G.P کے لامحدود رقموں کا حاصل جمع $S_\infty = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots = \frac{a}{1-r}, -1 < r < 1$

مثال 2.46 G.P 1,-3,9,-27,..... کے 18 رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

حل : یہاں پہلی رقم a=1، مشترک نسبت $r = \frac{-3}{1} = -3 < 1$ ، یہاں $n = 8$

اگر $r \neq 1$ ، G.P. $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ کے n رقموں کا حاصل جمع

لہذا $S_8 = \frac{1\left((-3)^8\right) - 1}{(-3) - 1} = \frac{6561 - 1}{-4} = -1640$

مثال 2.47 G.P کی پہلی رقم معلوم کرو۔جس میں $S_6 = 4095$ اور $r=4$

حل : $r=4>1$ مشترک نسبت، $S_6=4095$ پہلے 6 رقموں کا حاصل جمع

لہذا $S_6 = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = 4095$

$r=4$, $\frac{a(4^6 - 1)}{4 - 1} = 4095 \quad \Rightarrow \quad a \times \frac{4095}{3} = 4095$

$a=3$ پہلی رقم

مثال 2.48 1+4+16+..... سلسلے کی کتنی رقموں کا حاصل جمع 1365 ہے؟

حل : فرض کرو رقموں کی تعداد n ہے جن کے جمع کرنے پر حاصل جمع 1365 حاصل ہوتا ہے۔

$a=1$, $r = \frac{4}{1} = 4 > 1$

$S_n = 1365 \quad \Rightarrow \quad \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = 1365$

$\frac{1(4^n - 1)}{4 - 1} = 1365 \Rightarrow (4^n - 1) = 4095$

$4^n = 4096 \quad \Rightarrow \quad 4^n = 4^6$

$n = 6$

مثال 2.49 : حاصل جمع معلوم کرو۔ $3 + 1 + \frac{1}{3} + \ldots\infty$

حل : یہاں $a=3$, $r = \frac{t_2}{t_1} = \frac{1}{3}$

لامحدود رقموں کا حاصل جمع $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{3}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{9}{2}$

مثال 2.50 0.6666..... کی ناطق شکل (Rational Form) معلوم کرو۔

حل : 0.6666..... کو ذیل کی شکل میں ظاہر کر سکتے ہیں۔

$0.6666\ldots = 0.6 + 0.06 + 0.006 + 00006 + \cdots$

ہم دیکھتے ہیں کہ اعداد $0.6, 0.06, 0.006, \ldots$ ایک G.P بناتے ہیں۔جس کی پہلی رقم $a=0.6$ ہے اور مشترک نسبت $r = \frac{0.06}{0.6} = 0.1$

نیز $-1 < r = 0.1 < 1$

G.P کے لامحدود رقموں کے ضابطہ کو استعمال کرنے پر $0.6666\ldots = 0.6 + 0.06 + 0.006 + 00006 + \cdots = \frac{0.6}{1 - 0.1} = \frac{06}{09} = \frac{2}{3}$

اس طرح 0.6666..... کے مساوی ناطق عدد $\frac{2}{3}$ ہے۔

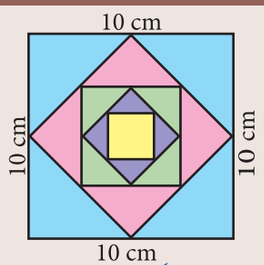
اپنی پیش رفت کی جانچ

1۔ G.P کے لامحدود رقموں کا مجموعہ ..... ہے

2۔ r کی کسی قیمت کے لئے G.P کا ضابطہ درست ہوتا ہے۔

10 math unit 2 63to
Saturday, February 15, 2020 8:44:08 PM

کارروائی 6



خاکہ 2.15

دیئے ہوئے مربع کا ضلع 10 سم ہے۔اس کے ضلع کے وسطی نقطوں کو ملانے سے ایک اور مربع حاصل ہوتا ہے۔اس عمل کو لامحدود تعداد میں جاری رکھا جاتا ہے۔اس عمل کے ذریعہ حاصل ہونے والے مربعوں کے رقبوں کا حاصل جمع اور احاطوں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

مثال 2.51 .....+555+55+5 سلسلہ کی n رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

حل : دیا ہوا سلسلہ نہ حسابی سلسلہ ہے اور نہ ہندسی سلسلہ۔اس لئے اس کو دو سلسلوں سے الگ کرنے کے بعد ان کو جمع کیا جاسکتا ہے۔

$$5+55+555+\cdots+n \text{ terms} = 5\left[1+11+111+\cdots+n \text{ رقمیں}\right]$$

$$= \frac{5}{9}\left[9+99+999+\cdots+n \text{ t رقمیں}\right]$$

$$= \frac{5}{9}\left[(10-1)+(100-1)+(1000-1)+\cdots+n \text{ رقمیں}\right]$$

$$= \frac{5}{9}\left[(10+100+1000+\cdots+n \text{ رقمیں})-n\right]$$

$$= \frac{5}{9}\left[\frac{10(10^n-1)}{(10-1)}-n\right] = \frac{50(10^n-1)}{81}-\frac{5n}{9}$$

اپنی پیش رفت کی جانچ

1۔ کیا سلسلہ $3+33+333+\ldots$ ایک ہندسی سلسلہ ہے؟

2۔ اگر $1+r+r^2+r^3\ldots = \frac{3}{4}$ ہو تو r کی قیمت ..... ہے۔

مثال 2.52 کم ترین مثبت سالم عدد n کی قیمت معلوم کرو۔اس طرح کہ $1+6+6^2+\cdots+6^n > 5000$

حل : ہمیں رقموں کی کم سے کم تعداد معلوم کرنا ہے جن کا مجموعہ 5000 سے زیادہ ہو۔

یعنی n کی کم ترین قیمت معلوم کرنا ہے اس طرح $S_n > 5000$

اس طرح $S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1} = \frac{1(6^n-1)}{6-1} = \frac{6^n-1}{5}$

$S_n > 5000 \Rightarrow \frac{6^n-1}{5} > 5000$

$6^n - 1 > 25000 \Rightarrow 6^n > 25001$

لہذا $6^6 = 46656$ اور $6^5 = 7776$

کیوں کہ n کی قیمت کم ترین مثبت قیمت 6 ہے اس طرح $1+6+6^2+\cdots+6^n > 5000$

مثال 2.53 ایک شخص ہر سال، پچھلے سال کی نسبت آدھی رقم بچاتا ہے اگر وہ 6 سال میں کل 7875 بچاتا ہے تو بتاؤ کہ پہلے سال کتنی رقم بچایا؟

حل : 6 سال میں بچائی ہوئی کل رقم $S_6 = 7875$

چونکہ وہ ہر سال ، پچھلی رقم کا آدھا حصہ بچاتا ہے۔

10 math unit 2 63to
Saturday, February 15, 2020 8:44:08 PM

اس لئے $r = \frac{1}{2} < 1$

$$\frac{a\left(1-r^n\right)}{1-r} = \frac{a\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right)}{1-\frac{1}{2}} = 7875$$

$$\frac{a\left(1-\frac{1}{64}\right)}{\frac{1}{2}} = 7875 \quad \Rightarrow \quad a \times \frac{63}{32} = 7875$$

$$a = \frac{7875 \times 32}{63} \quad , \quad a = 4000$$

پہلے سال کی بچائی ہوئی رقم ₹ 4000 ہے

مشق 2.8

1۔ G.P کی پہلی n رقموں کا حاصل جمع (ii) $256,64,16,\ldots$ $5,-3,\frac{9}{5},-\frac{27}{25},\ldots$

2۔ G.P $5,15,45,\ldots\ldots\ldots$ کی چھ رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

3۔ G.P کی پہلی رقم معلوم کرو۔ جس کا مشترک نسبت 5 اور پہلی 6 رقموں کا حاصل جمع 46872 ہے۔

4۔ لامحدود رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔ (i) $9+3+1+\cdots$ (ii) $21+14+\frac{28}{3}+\cdots$

5۔ اگر ایک لامحدود G.P کی پہلی رقم 8 اور لامحدود کا $\frac{32}{3}$ ہو تو مشترک نسبت معلوم کرو۔

6۔ ذیل کے سلسلوں کے n رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

(i) $0.4+0.44+0.444+\cdots$ n رقموں تک (ii) $3+33+333+\cdots$ n رقموں تک

7۔ ہندسی سلسلہ $3+6+12+\ldots\ldots\ldots\ldots+1536$ کا حاصل جمع معلوم کرو۔

8۔ کمار اپنے چار دوستوں کا خط لکھتا ہے وہ ہر ایک سے کہتا ہے کہ اس خط کو نقل کر کے چار مختلف اشخاص کو پوسٹ کرنے کو کہتا ہے۔ قیاس کیا جائے کہ یہ سلسلہ جاری ہے اور ایک خط کو پوسٹ کرنے کا خرچ 2 ہے۔ 8 ویں مجموعہ کے خطوط کو پوسٹ کرنے کیلئے کتنی رقم خرچ کی گئی؟

9۔ $0.\overline{123}$ عدد کا ناطق شکل معلوم کرو۔

10۔ اگر رقمیں $S_n = (x+y)+(x^2+xy+y^2)+(x^3+x^2y+xy^2+y^3)+\cdots n$ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$(x-y)S_n = \left[\frac{x^2(x^n-1)}{x-1} - \frac{y^2(y^n-1)}{y-1}\right]$$

2.11 مخصوص سلسلے (Special Series)

چند ایسے سلسلے ہیں جن کے حاصل جمع کو وضاحتی ضابطوں (Explicit formulae) سے ظاہر کیا جاتا ہے ایسے سلسلوں کو مخصوص سلسلے کہا جاتا ہے۔

10 math unit 2 63to
Saturday, February 15, 2020 8:44:09 PM

یہاں پر ہم چند عام مخصوص سلسلوں کے بارے میں پڑھیں گے۔

i) پہلے 'n' طبعی اعداد کا حاصل جمع
ii) پہلے 'n' طبعی طاق اعداد کا حاصل جمع
iii) پہلے 'n' طبعی اعداد کا مربعوں کا حاصل جمع
iv) پہلے 'n' طبعی اعداد کے مکعبوں کا حاصل جمع

عبارت $(x+1)^{k+1}-x^{k+1}$ کو استعمال کر کے حاصل جمع n طبعی اعداد کے کسی بھی قوت کے لئے ضابطہ اخذ کر سکتے ہیں۔

یعنی $1^k+2^k+3^k+\ldots+n^k$ کی قیمت معلوم کرنے کے لئے ہم عبارت $(x+1)^{k+1}-x^{k+1}$ استعمال کر سکتے ہیں۔

2.11.1 پہلے n طبعی اعداد کا حاصل جمع (Sum of first n natural numbers)

$1+2+3+\cdots+n$ محسوب کرنے کے لئے، آیئے ہم تماثل $(x+1)^2-x^2=2x+1$ کا استعمال کرتے ہیں۔

جب $x=1$, $2^2-1^2=2(1)+1$

جب $x=2$, $3^2-2^2=2(2)+1$

جب $x=3$, $4^2-3^2=2(3)+1$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

جب $x=n-1$, $n^2-(n-1)^2=2(n-1)+1$

جب $x=n$, $(n+1)^2-n^2=2(n)+1$

ان تمام مساوات کو جمع کرتے ہوئے اور دائیں ہاتھ کی جانب کے رقموں کو خارج کرنے پر ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned}(n+1)^2-1^2 &= 2(1+2+3+\cdots+n)+n\\ n^2+2n &= 2(1+2+3+\cdots+n)+n\\ 2(1+2+3+\cdots+n) &= n^2+n=n(n+1)\\ 1+2+3+\cdots+n &= \frac{n(n+1)}{2}\end{aligned}$$

2.11.2 پہلے n طاق طبعی اعداد کا حاصل جمع (Sum of first n odd natural numbers)

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)$$

ایک A.P جس میں $d=2$, $a=1$ اور $l=2n-1$ ہے۔

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{n}{2}[a+l]\\ &= \frac{n}{2}[1+2n-1]\\ S_n &= \frac{n}{2}\times 2n = n^2\end{aligned}$$

2.11.3 پہلے n طبعی اعداد کے مربعوں کا حاصل جمع (Sum of squares of first n naturla numbers)

$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ محسوب کرنے کے لئے تماثل $(x+1)^3-x^3=3x^2+3x+1$ تماثل کو استعمال کریں۔

جب $x=1$, $2^3-1^3=3(1)^2+3(1)+1$

جب $x=2$, $3^3-2^3=3(2)^2+3(2)+1$

جب $x=3$, $4^3-3^3=3(3)^2+3(3)+1$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

جب $x=n-1$, $n^3-(n-1)^3=3(n-1)^2+3(n-1)+1$

جب $x=n$, $(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1$

10 math unit 2 63to
Saturday, February 15, 2020 8:44:10 PM

ان تمام مساوات کو جمع کرتے ہوئے اور دائیں ہاتھ کی جانب سے رقموں کو خارج کرنے پر ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے۔

$$(n+1)^3 - 1^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) + 3(1 + 2 + 3 + \cdots + n) + n$$

$$n^3 + 3n^2 + 3n = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) + \frac{3n(n+1)}{2} + n$$

$$3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) = n^3 + 3n^2 + 2n - \frac{3n(n+1)}{2} = \frac{2n^3 + 6n^2 + 4n - 3n^2 - 3n}{2}$$

$$3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2} = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2.11.4 پہلے n حسابی اعداد کے مکعبوں کا حاصل جمع (Sum of cubes of first n natural numbers)

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$ معلوم کرنے کے لئے، آیئے تماثل $(x+1)^4 - x^4 = 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$ کا استعمال کریں

جب $x=1$, $2^4 - 1^4 = 4(1)^3 + 6(1)^2 + 4(1) + 1$

جب $x=2$, $3^4 - 2^4 = 4(2)^3 + 6(2)^2 + 4(2) + 1$

جب $x=3$, $4^4 - 3^4 = 4(3)^3 + 6(3)^2 + 4(3) + 1$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

جب $x = n-1$, $n^4 - (n-1)^4 = 4(n-1)^3 + 4(n-1) + 1$

جب $x = n$, $(n+1)^4 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$

ان تمام مساوات کو جمع کرنے اور دائیں ہاتھ کی جانب کے رقموں کو خارج کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$(n+1)^4 - 1^4 = 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3) + 6(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) + 4(1 + 2 + 3 + \cdots + n) + n$$

$$n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n = 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3) + 6 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4 \times \frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3) = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n - 2n^3 - n^2 - 2n^2 - n - 2n^2 - 2n - n$$

$$4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3) = n^4 + 2n^3 + n^2 = n^2(n^2 + 2n + 1) = n^2(n+1)^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

کیا تم جانتے ہو؟

معیاری رفاقت (Ideal Friendship)

220 کے مقسوم علیہ کا حاصل جمع (220 خارج کرکے) = 1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284

284 کے مقسوم علیہ کا حاصل جمع (284 خارج کرکے) =1+2+4+71+142=220.

اس طرح ایک عدد کے مقسوم علیہ کا حاصل جمع، خود اس کو خارج کرنے سے دوسرا عدد حاصل ہوتا ہے۔

اس طرح کے جوڑی دار اعداد کو دوستانہ اعداد (Amicable or Friendly numbers) کہتے ہیں۔

220 اور 284 کم ترین جوڑی دار دوستانہ اعداد ہیں۔ ان کو فیثا غورث (phthagores) نے کھوج لگایا۔ اسی طرح جوڑی دار دوستانہ اعداد 12 ملین سے بھی زیادہ ہیں

10 math unit 2 63to
Saturday, February 15, 2020 8:44:10 PM

کارروائی 7

اس طرح کا ایک دوسرا مثلث بناؤ۔

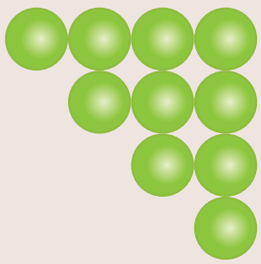


Fig.2.17 $(4+3+2+1)$

اس طرح کا ایک مثلث لو



Fig.2.16 $(1+2+3+4)$

اس طرح 1+2+3+4 کی دو نقطوں سے 4x5 سائز کا ایک مستطیل حاصل ہوتا ہے۔
ہم ان تصویروں کے ساتھ جو کیا ہے اس کو اعداد میں لکھ سکتے ہیں

$$(4+3+2+1)+(1+2+3+4)=4\times5$$
$$2(1+2+3+4)=4\times5$$

لہذا $1+2+3+4=\frac{4\times5}{2}=10$

اسی طرز پر ابتدائی 5 طبعی اعداد کا مجموعہ معلوم کرو۔
کیا تم ان جوابات کا رابطہ کسی مانوس ضابطہ سے کر سکتے ہو؟

پہلے دوسرے مثلث کو پہلے مثلث

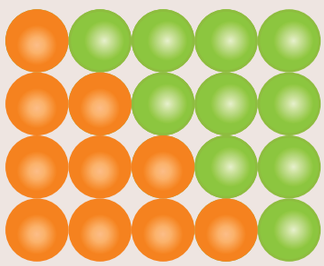


Fig.2.18

کیا تم جانتے ہو؟

1۔ پہلے 'n' طبعی اعداد کے حاصل جمع کو **مثلثی اعداد** (Triangular Numbers) بھی کہتے ہیں کیوں کہ یہ مثلثوں کی شکل بناتے ہیں۔
2۔ پہلے n طبعی اعداد کے مربعوں کے حاصل جمع کو **مربع مخروطی اعداد** (Square Pyramidal Numbers) کہتے ہیں کیوں کہ یہ اہرام یا مخروط بناتے ہیں۔ جس قاعدے مربع نما ہوتا ہے۔

ذرا سوچئے

1۔ ایک معیاری شطرنج کی تختی (Chess board) میں کتنے مربع ہوتے ہیں؟
2۔ ایک معیاری شطرنج کی تختی میں کتنے مستطیل ہوتے ہیں؟

ہم نے جن کارآمد مجموعوں کے ضابطوں کے بارے میں بحث کی ہے اس کا خلاصہ یہ ہے ان مناسبوں کے استعمال سے محدود رقم پر مشتمل حاصل جمع کے مسئلوں کو حل کر سکتے ہیں۔

$$\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+\cdots+n \quad =\frac{n(n+1)}{2}$$
$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=1+2+3+\cdots+(2n-1) \quad =n^{2}$$
$$\sum_{k=1}^{n}k^{2}=1^{2}+2^{2}+3^{2}+\cdots+n^{2} \quad =\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$\sum_{k=1}^{n}k^{3}=1^{3}+2^{3}+3^{3}+\cdots+n^{3} \quad =\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^{2}$$

10 math unit 2 63to
Saturday, February 15, 2020 8:44:11 PM

مثال 2.54 قیمت معلوم کرو۔ (i) $1+2+3+...+50$ (ii) $16+17+18+...+75$

حل :

(i) $1+2+3+\cdots+50$

$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ کو استعمال کر کے

$1+2+3+\cdots+50 = \frac{50\times(50+1)}{2} = 1275$

(ii) $16+17+18+\cdots+75 = (1+2+3+\cdots+75)-(1+2+3+\cdots+15)$

$= \frac{75(75+1)}{2} - \frac{15(15+1)}{2}$

$= 2850 - 120 = 2730$

اپنی پیش رفت کی جانچ

1۔ پہلے n طبعی اعداد کے مکعبوں کا حاصل جمع، پہلے n طبعی اعداد کا ..... ہے۔

2۔ پہلے 100 طبعی اعداد کا اوسط..... ہے

مثال 2.55 حاصل جمع معلوم کرو۔

(i) $1+3+5+\cdots$ 40 رقموں تک

(ii) $2+4+6+\cdots+80$ (iii) $1+3+5+\cdots+55$

حل :

(i) $1+3+5+\cdots$ 40 رقم $= 40^2 = 1600$

(ii) $2+4+6+\cdots+80 = 2(1+2+3+\cdots+40) = 2\times\frac{40\times(40+1)}{2} = 1640$

(iii) $1+3+5+\cdots+55$

یہاں رقموں کے تعداد نہیں دی گئی ہے۔اس لئے ہمیں ضابطہ استعمال کر کے رقموں کی تعداد معلوم کرنا ہوگا۔

$n = \frac{(l-a)}{d}+1 \Rightarrow n = \frac{(55-1)}{2}+1 = 28$

لہذا $1+3+5+\cdots+55 = (28)^2 = 784$

مثال 2.56 حاصل جمع معلوم کرو۔ (i) $1^2+2^2+\cdots+19^2$

(ii) $5^2+10^2+15^2+\cdots+105^2$ (iii) $15^2+16^2+17^2+\cdots+28^2$

حل :

(i) $1^2+2^2+\cdots+19^2 = \frac{19\times(19+1)(2\times19+1)}{6} = \frac{19\times20\times39}{6} = 2470$

(ii) $5^2+10^2+15^2+\cdots+105^2 = 5^2(1^2+2^2+3^2+\cdots+21^2)$

$= 25\times\frac{21\times(21+1)(2\times21+1)}{6}$

$= \frac{25\times21\times22\times43}{6} = 82775$

(iii) $15^2+16^2+17^2+\cdots+28^2 = (1^2+2^2+3^2+\cdots+28^2)-(1^2+2^2+3^2+\cdots+14^2)$

$= \frac{28\times29\times57}{6} - \frac{14\times15\times29}{6} = 7714-1015 = 6699$

100 95 75 25 5 0

10 math unit 2 63to
Saturday, February 15, 2020 8:44:11 PM

مثال 2.57 حاصل جمع معلوم کرو۔ (i) $1^3+2^3+3^3+\cdots+16^3$ (ii) $9^3+10^3+\cdots+21^3$

حل :

$$\text{(i)}\ 1^3+2^3+3^3+\cdots+16^3=\left[\frac{16\times(16+1)}{2}\right]^2=(136)^2=18496$$

$$\text{(ii)}\ 9^3+10^3+\cdots+21^3=(1^3+2^3+3^3+\cdots+21^3)-(1^3+2^3+3^3+\cdots+8^3)$$

$$=\left[\frac{21\times(21+1)}{2}\right]^2-\left[\frac{8\times(8+1)}{2}\right]^2=(231)^2-(36)^2=52065$$

مثال 2.58 : اگر $1+2+3+\cdots+n=666$ ہوتو n معلوم کرو۔

حل : $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, اس لئے $\frac{n(n+1)}{2}=666$

$$n^2+n-1332=0 \quad\Rightarrow\quad (n+37)(n-36)=0$$

$$n=-37 \text{ or } n=36$$

لیکن $n\neq -37$ چونکہ $n=36$ طبعی عدد ہے ؛ $n=36$

اپنی پیش رفت کی جانچ

صحیح ہے یا غلط بتاؤ۔ جواز پیش کرو۔

1۔ پہلے n طاق طبعی اعداد کا حاصل جمع ہمیشہ ایک طاق عدد ہوتا ہے۔

2۔ متواتر جفت اعداد کا حاصل جمع ہمیشہ ایک جفت عدد ہوتا ہے۔

3۔ پہلے n طبعی اعداد کے مربعوں کے حاصل جمع اور پہلے n طبعی اعداد کے حاصل جمع کا فرق ہمیشہ 2 سے تقسیم پذیر ہوتا ہے۔

4۔ پہلے n طبعی اعداد مکعبوں کا حاصل جمع ہمیشہ ایک مربع عدد ہوتا ہے۔

مشق 2.9

1۔ ذیل کے سلسلوں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

(i) $1+2+3+\cdots+60$ (ii) $3+6+9+\cdots+96$ (iii) $51+52+53+\cdots+92$

(iv) $1+4+9+16+\cdots+225$ (v) $6^2+7^2+8^2+\cdots+21^2$

(vi) $10^3+11^3+12^3+\cdots+20^3$ (vii) $1+3+5+\cdots+71$

2۔ اگر $1+2+3+\cdots+k=325$ ہوتو $1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3$ معلوم کرو۔

3۔ اگر $1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=44100$ ہوتو $1+2+3+\cdots+k$ معلوم کرو۔

4۔ $1^3+2^3+3^3+\cdots$ سلسلے کی کتنے رقموں کو جمع کرنے پر حاصل جمع 14400 ہوگا؟

5۔ n طبعی اعداد کے مکعبوں کا حاصل جمع 2025 ہے۔ n کی قیمت معلوم کرو۔

6۔ سمیہ کے پاس 15 مربع رنگین کاغذات (Colour papers) ہیں جن کے سائز 10cm, 11cm, 12cm, ... 24cm ہیں۔ ان رنگین کاغذات سے کتنے رقبہ کو مزین کیا جاسکتا ہے؟

7۔ ذیل کے سلسلے کا حاصل جمع معلوم کرو۔ $(2^3-1)^3+(4^3-3^3)+(6^3-15^3)+\cdots$

i) n رقموں تک ii) 8 رقموں تک

10 math unit 2 63to
Saturday, February 15, 2020 8:44:12 PM

مشق 2.10

متعدد انتخابات کے سوالات

1۔ یوکلیڈ کا تقسیمی مفروضہ (Lemma) بیان کرتا ہے کہ دو مثبت سالم عدد a اور b کے لئے واحد (Unique) کے سالم اعداد q اور r ایسے ہوتے ہیں کہ $a=bq+r$ جہاں r اس شرط کا پورا کرتا ہے۔

(1) $1 < r < b$ (2) $0 < r < b$ (3) $0 \leq r < b$ (4) $0 < r \leq b$

2۔ یوکلیڈ کا تقسیمی (Lemma) کو استعمال کرتے ہوئے اگر کسی مثبت سالم عدد کے مکعب کو 9 سے تقسیم پذیر ہو تو ممکن باقی

(1) 0, 1, 8 (2) 1, 4, 8 (3) 0, 1, 3 (4) 1, 3, 5

3۔ اگر 65 اور 117 کے H.C.F کو 65m-117 کی شکل میں ظاہر کیا کی شکل میں ظاہر کیا جا سکتا ہے تو n کی قیمت

(1) 4 (2) 2 (3) 1 (4) 3

لہذا

4۔ 1729 کے مفرد اجزائے ضربی میں مفرد اجزائے ضربی کے قوت نماؤں (expenses) کا مجموعہ

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

5۔ ایک تا 10 تمام اعداد (دونوں شامل) سے تقسیم ہونے والا کم ترین عدد (least number)

(1) 2025 (2) 5220 (3) 5025 (4) 2520

6۔ اگر $7^{4k} \equiv$ _____ (mod 100)

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

7۔ دیا گیا ہے $F_1 = 1,\ F_2 = 3$ اور $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ ہو تو F_5

(1)3 (2)5 (3)8 (4)11

8۔ کسی حسابی سلسلہ کی پہلی رقم ایک (unity) ہو اور مشترک فرق 4 ہو تو ذیل کی کونسی رقم اس A.P کی ہے۔

(1) 4551 (2) 10091 (3) 7881 (4) 13531

9۔ کسی A.P کے 6 ویں رقم کا 6 گُنا، 7 ویں رقم کا 7 گُنا کے مساوی ہو تو A.P کی 13 ویں رقم

(1) 0 (2) 6 (3) 7 (4) 13

10۔ کسی AP میں 31 رقمیں موجود ہیں۔ اگر 16 ویں رقم m ہو تو A.P کی تمام رقموں کا حاصل جمع

(1) 16 m (2) 62 m (3) 31 m (4) $\frac{31}{2}$ m

11۔ کسی A.P کی پہلی رقم 1 اور مشترک فرق 4 ہے۔ A.P کے کتنے رقموں کو لینے سے حاصل جمع 120 کے مساوی ہوگا؟

12۔ اگر $A=2^{65}$ اور $2^0 + \ldots + 2^{62} + 2^{63} + 2^{64} =B$ تو ذیل کا کونسا درست ہے؟

i) A اور B مساوی ہیں ii) B، A سے 2^{64} زیادہ ہے

iii) A، B سے 1 سے زیادہ ہے iv) B، A سے 1 زیادہ ہے

10 math unit 2 63to
Saturday, February 15, 2020 8:44:12 PM

13۔ تواتر کے بعد کی رقم $\frac{3}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}, \frac{1}{18}, \cdots$

(1) $\frac{1}{24}$ (2) $\frac{1}{27}$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{1}{81}$

14۔ اگر تواتر $t_6, t_{12}, t_{18}, \ldots$ ایک A.P میں ہو تو تواتر $t_1, t_2, t_3, \ldots$ میں ہے۔

(1) ایک ہندسی سلسلہ (2) ایک حسابی سلسلہ

(3) نہ حسابی سلسلہ ہے اور نہ ہندسی سلسلہ (4) ایک مستقل تواتر

15۔ $(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 15^3) - (1 + 2 + 3 + \cdots + 15)$ کی قیمت ہے

(1) 14400 (2) 14200 (3) 14280 (4) 14520

Unit Exercise - 2

1۔ ہر ایک مثبت سالم عدد n کے لئے ثابت کرو کہ $n^2 - n$، 2 سے تقسیم پذیر ہے۔

2۔ ایک شخص کے پاس 175 لیٹر گائے کا دودھ ہے اور 105 لیٹر کا بھینس کا دودھ ہے وہ ان دو قسم کے دودھ کو مساوی گنجائش (capacity) رکھنے والے برتنوں میں بھرتی کر کے فروخت کرنا چاہتا ہے تو ذیل کو محسوب کرو۔

i) ایک برتن کی گنجائش ii) گائے کے دودھ کے برتن کی تعداد

iii) بھینس کے دودھ کے برتن کی تعداد

3۔ اگر مثبت سالم اعداد a, b اور c کو 13 تقسیم کرنے پر بالترتیب بچت 7,9 اور 10 حاصل ہوتے ہیں۔ $a+2b+3c$ کو 13 سے تقسیم کرنے پر بچت معلوم کرو۔

4۔ بتلاؤ کہ 107 کی شکل $4q+3$ ہے، کسی سالم عدد q کے لئے

5۔ کسی A.P کی $(m+1)$ ویں رقم، $(n+1)$ ویں رقم کی دُگنی ہو تو ثابت کرو کہ $(3m+1)$ ویں رقم $(n+n+a)$ ویں رقم کی دُگنی ہے۔

6۔ -100 ..... -6, -4, -2 A.P کی آخری رقم سے 12 ویں رقم معلوم کرو۔

7۔ دو A.P مساوی مشترک فرق رکھتے ہیں۔ ایک A.P کی پہلی رقم 2 اور دوسرے کا 7 ہے۔ بتلاؤ ان کے 10 ویں رقموں کا فرق اور 21 رقموں کا فرق مساوی ہے۔ دو نظیری رقموں (Corresponding terms) کے فرق میں کیا مساوی ہے؟

8۔ ایک شخص دس سال میں 16500 بچاتا ہے۔ پہلے سال کے بعد ہر سال پچھلے سال کی بہ نسبت 100 زیادہ بچاتا ہے۔ بتاؤ پہلے سال اس نے کتنا بچایا؟

9۔ G.P معلوم کرو۔ جس کی 2 ویں رقم $\sqrt{6}$ اور 6 ویں رقم $9\sqrt{6}$ ہے۔

10۔ ایک موٹر سائیکل کی قیمت ہر سال 15% کی شرح سے گھٹتی ہے۔ موٹر سائیکل کی قیمت 3 سال بعد کیا ہوگی جو اب ₹45000 میں خریدی گئی ہے۔

Points to Remember — یاد رکھنے کے نکات

- **یوکلیڈ کا تقسیمی مفروضہ**

  اگر a اور b دو مثبت سالم اعداد ہوں تو واحد سالم اعداد q اور r اس طرح ہوتے ہیں کہ $a = bq + r,\ 0 \le r < |b|$

- **علم حساب کا بنیادی مسئلہ**

  ہر ایک مرکب عدد کو مفرد اعداد کے حاصل ضرب کے طور پر ظاہر کیا جا سکتا ہے اور یہ اجزائے ضربی یکتا (Unique) ہے۔ سوائے اس کے کہ مفرد اجزائے ضربی کی ترتیب الگ ہو۔

10 math unit 2 63to
Saturday, February 15, 2020 8:44:13 PM

- **حسابی سلسلہ**

(i) $a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ldots.$ ایک حساب سلسلہ ہے۔جس کی n ویں رقم $t_n(=a+\ n-1)d$ ہے۔

(ii) $S_n=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$ کے ابتدائی n رقموں کا مجموعہ

(iii) اگر آخری رقم l دی گئی ہوتو $S_n=\frac{n}{2}[a+l\ ]$ n رقموں کا مجموعہ

- **ہندسی سلسلہ**

ایک ہندسی سلسلہ $a,\ ar,\ ar^2,\ldots,ar^{n-1}$ ہے جس کی n ویں رقم $t_n=ar^{n-1}$ ہے۔

اگر $S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$ G.P کے ابتدائی n رقموں کا مجموعہ $r\neq1$

اگر $a+ar+ar^2+\cdots$ ہوتو $S=\frac{a}{1-r}$ G.P کے لاتعداد رقموں کا مجموعہ $-1<r<1$

- **مخصوص سلسلے**

(i) ابتدائی n طبعی اعداد کا مجموعہ $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

(ii) ابتدائی n طبعی اعداد کے مربعوں کا مجموعہ $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(iii) ابتدائی n طبعی اعداد کے مکعبوں کا مجموعہ $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

(iv) ابتدائی n طاق طبعی اعداد کا مجموعہ $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

ICT CORNER

ICT 2.1 مرحلہ 1 : براؤزر کھولئے،دئے گئے URL کے لنک کو ٹائپ کیجئے یا دئے گئے QR کوڈ کو اسکین کیجئے۔ Numbers and Sequences نامی جیوجبرا ورک شیٹ کھلے گا۔ ورک بک کے بائیں جانب کئی کارروائیں موجود ہیں۔ ان میں سے Euclid's Lemma Division نامی ورک شیٹ کا انتخاب کیجئے۔

مرحلہ 2 : دئے گئے ورک شیٹ میں Drag me جہاں لکھا ہوا ہے اسے کھینچئے اور نقاط کے نئے سیٹ لیجئے۔ تم نے کتاب سے جو تقسیمی الگارتم سیکھا تھا اُس کے ساتھ ان کا موازنہ کیجئے۔







ICT 2.2 : مرحلہ 1: براؤزر کھولئے،دئے گئے URL کے لنک کو ٹائپ کیجئے یا دئے گئے QR کوڈ کو اسکین کیجئے۔ Numbers and Sequences نامی جیوجبرا ورک شیٹ کھلے گا۔ ورک بک کے بائیں جانب کئی کارروائیں موجود ہیں۔ ان میں سے Bouncing ball problem نامی ورک شیٹ کا انتخاب کیجئے۔

مرحلہ 2 : دئے گئے ورک شیٹ میں نئی قیمتوں کو ٹائپ کرکے تم Bounce اور Debounce ratio کو تبدیل کرسکتے ہو۔ اس کے بعد Get ball کلک کیجئے اور Drop کو کلک کیجئے۔ آپ کی درج کردہ قیمت کے مطابق Ball اچھلنے لگے گا۔ سلسلے کے حاصل جمع کو سیکھنے کے لئے دائیں جانب مشاہدہ کیجئے۔







You can repeat the same steps for another activities

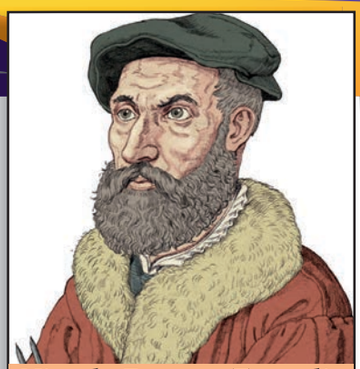
https://www.geogebra.org/m/jfr2zzgy#chapter/356192
or Scan the QR Code.

10 math unit 2 63to
Saturday, February 15, 2020 8:44:13 PM

3

ALGEBRA الجبرا

A person who can, within a year, solve $x^2 - 92y^2 = 1$ is a mathematician
- Brahmagupta



Niccolo Fontana Tartaglia
1499/1500 1557 AD(CE)

نکولو فونٹانا ٹارٹاگ لیا ایک اطالوی (Italian) ریاضی دان، انجینئر، (Surveyor) اور وینس کی جمہوریت (موجودہ اٹلی) کے بعد سے وہ کتب فروش بنے۔ انہوں نے بہت سی کتابیں شائع کیں، جس میں اقلیدس اور ارشمیدس کے پہلے اٹلی ترجمے اور علم ریاضی کی ساری تصانیف شامل ہیں۔ ٹارٹیگلیا نے سب سے پہلے توپ گولہ کی راہ کی تحقیقات پر علم ریاضی کو استعمال کیا، انہوں نے آگے چل کر گیلیلیو کی آزادانہ گرنے والے اجسام سے متعلق کام کیا۔

کارڈانو (Cardano) کے ساتھ ٹارٹیگلیا مکعبی مساوات کہلانے والے تیسرے درجے والے کثیر قمیات کو حل کرنے کے طریقوں کو معلوم کرنے کے لئے دونوں کو قابل عزت قرار دی گئی۔ انہوں نے کوئی بھی چوکھا مجسمہ (Tetrahedron) کو ان کے چار راسوں کے جوڑیوں کے درمیانی فاصلہ کو استعمال کر کے حجم معلوم کرنے کے لئے ایک بہترین ضابطہ فراہم کیا۔

Learning Outcomes سیکھنے کے مقاصد

- اخراج کے طریقے سے تین متغیرات والے خطی مساواتوں کے نظام کو حل کرنا۔
- کثیر رقمیات کے GCD اور LCM کو معلوم کرنا۔
- کثیر رقمیات کے جذر المربع کو سمجھنا اور معلوم کرنا۔
- دو درجی مساواتوں کے بارے میں سیکھنا۔
- دو درجی ترسیمات کھینچنا۔
- میٹرکس، ان کے اقسام اور میٹریس پر اعمال کے بارے میں سیکھنا۔

DCRBL

3.1 تعارف Indroduction

الجبراء کو اعداد کے مطالعہ کے آگے کی سطح کی طرح سے تصور کر سکتے ہیں، اگر کسی مخصوص حالات سے مشروط کوئی بھی شئے کو معلوم کرنا ہو تو ہمیں الجبراء کی ضرورت ہے۔ اس لحاظ سے الجبراء کے مطالعہ کو ''نامعلوم دریافت کرنے والا سائنس'' کی طرح سمجھا جا سکتا ہے۔ تیسری صدی AD (CE) کے دوران اسکندریہ کے ڈیوفینٹس نے ''ارتھ میٹکا'' (Arithmatica) نامی ایک یادگار کتاب تیرہ جلدوں میں لکھا جس میں صرف چھ کی نسل جاری ہے، یہ کتاب سب سے پہلا ذریعہ ہے جس میں مسئلوں کے شرائط کو مساوات سے بیان کیا گیا اور آخر میں انہیں حل کیا گیا۔ ڈیوفینٹس نے یہ محسوس کیا کہ بہت سے حقیقی زندگی کے حالات سے متعلق مسئلوں کے لئے متغیرات عموماً مثبت سالم اعداد ہوتے ہیں۔

100 95 75 25 5 0
10th maths 3. algebra 1-35
Wednesday, February 19, 2020 7:28:03 PM

اصطلاح ''الجبراء'' 9 ویں صدی AD (CE) کے فارسی ریاضی دان الخوارزمی کی لکھی گئی الکتاب المختصر فی حساب الجبر والمختصر (توازن اور تکمیل کے ذریعے حساب پر جامع کتاب) نامی ایک اہم کتاب سے لفظ ''الجبر'' (Al-Jabr) کی ہجوں کی غلطی سے سُلجھایا گیا۔ چونکہ الخوارزمی کی الجبر کتاب مساواتوں کو حل کرنے کے مناسب طریقے فراہم کرتی ہے۔ انہیں ''الجبراء کا باپ'' کے نام سے بھی یاد کیا جاتا ہے۔

پچھلی جماعتوں میں، ہم الجبراء میں بہت سے اہم نظریات سیکھ چکے ہیں، اس کلاس میں ہم اپنے سفر کو آگے بڑھاتے ہوئے دوسرے اہم نظریات کو سمجھتے ہیں جو زیادہ دسترس والے مسئلوں کو حل کرنے کے لئے بہت مددگار ہوتے ہیں۔ مستقبل کی کلاسوں میں اعلیٰ ریاضیات کو سیکھنے میں تصورات کی صحیح سمجھ بہت زیادہ کارآمد ثابت ہوگی۔

دو متغیرات والے ہمزاد خطی مساوات Simuthaneous Linear Equations in Two Variables

آیئے ہم دو متغیرات والے خطی مساوات کی ایک جوڑی کو حل کرنے کا اعادہ کریں۔

تعریف دو متغیرات والی خطی مساوات

دو متغیرات x اور y رکھنے والے کوئی بھی پہلے درجے کی مساوات دو متغیرات والے خطی مساوات کہلاتے ہیں، دو متغیرات x اور y والے خطی مساوات کی عام شکل $ax + by + c = 0$ ہے جہاں a اور b میں سے کم از کم ایک غیر صفری عدد ہے اور c, b, a حقیقی اعداد ہیں غور کریں کہ خطی مساوات دئے گئے متغیرات میں پہلے درجے کے مساوات ہیں۔

غور کیجئے

(i) $xy - 7 = 3$، دو متغیرات والی خطی مساوات نہیں ہے کیونکہ رقم xy کا درجہ 2 ہے۔

(ii) دو متغیرات والی ایک خطی مساوات xy سطح پر ایک خط مستقیم کو ظاہر کرتی ہے۔

مثال 3.1 باپ کی عمر اپنے بیٹے کی عمر کا چھ گنا ہے۔ چھ سال بعد باپ کی عمر اپنے بیٹے کی عمر کا چار گنا ہوگا۔ باپ اور بیٹے کی موجودہ عمریں (سالوں میں) معلوم کیجئے۔

حل : فرض کیجئے کہ باپ کی موجودہ عمر x سال ہے اور بیٹے کے موجودہ عمر y سال ہے۔

دیا گیا ہے،

$$x = 6y \quad (1)$$

$$x + 6 = 4(y + 6) \quad (2)$$

(2) میں (1) بھرتی کرنے پر $6y + 6 = 4(y + 6)$

سے $6y + 6 = 4y + 24$ $y = 9$ حاصل ہوتا ہے۔

لہذا بیٹے کی عمر $= 9$ سال اور باپ کی عمر $= 54$ سال ہے۔

مثال 3.2 حل کیجئے۔ $2x - 3y = 6$, $x + y = 1$

حل :

$$2x - 3y = 6 \quad (1)$$

$$x + y = 1 \quad (2)$$

10th maths 3. algebra 1-35
Wednesday, February 19, 2020 7:28:04 PM

$$2x - 3y = 6 \quad \text{سے} \quad (1) \times 1$$
$$2x + 2y = 2 \quad \text{سے} \quad (2) \times 2$$
$$y = \frac{-4}{5} \quad \text{سے} \quad -5y = 4$$

$y = \frac{-4}{5}$ کو (2) میں بھرتی کرنے پر $x - \frac{4}{5} = 1$ ہمیں حاصل ہوا $x = \frac{9}{5}$

لہذا، $x = \frac{9}{5}, y = \frac{-4}{5}$.

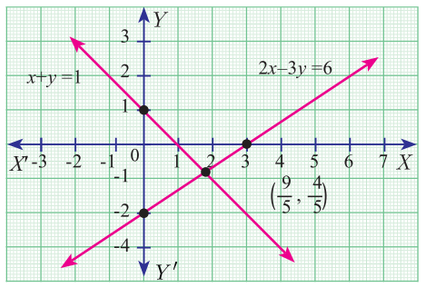


Fig. 3.1

3.2 تین متغیرات والے ہمزاد خطی مساوات (Simultaneous Linear Equations in Three Varialdes)


Fig. 3.2

سوپر مارکٹ میں مختلف اشیاء پر اخراجات معلوم کرنے کی بنیادی ضروریات سے لے کر مخصوص شرائط پر آدمی کی عمر معلوم کرنے سے لے کر، جب کوئی شئے اوپر کسی زاویے پر پھینکا جائے کو اس شئے کی راہ معلوم کرنے سے لے کر الجبراء ہمارے روزمرہ کی زندگی میں ایک اہم رول ادا کرتا ہے۔

خلاء میں کسی بھی نقطہ کو اس کے طول البلد، ارض البلد اور ارتفاع کے ذریعے واحد طریقے سے دریافت کیا جاسکتا ہے۔ لہذا، زمین پر ایک مخصوص جگہ پر واقع کسی شئے کے مقام کو دریافت کرنے کے لئے، تین مصنوعی سیاروں کو مقررہ کرتے ہوئے تین مساوات حاصل کرتے ہیں، ان تینوں مساواتوں سے ہمیں دو خطی مساواتیں اور ایک دو درجی مساوات حاصل ہوتے ہیں۔ لہذا، مقررہ وقت کے نقطے پر کسی شئے کے مقام کو واحد طریقے سے مقرر کرنے کے لئے متغیرات طول البلد، ارض البلد اور ارتفاع کو حل کرسکتے ہیں۔ یہ جغرافیائی۔ مقامی نظام Geo-positioning system (GPS) کی بنیاد ہے۔ لہذا GPS نظام میں تین متغیرات والے خطی مساوات کے تصور کو استعمال کیا جاتا ہے۔

3.2.1 تین متغیرات والے خطی مساواتوں کا نظام System of Linear Equations in Three Variables

اگلے کلاسوں میں ہم دو متغیرات والے ہمزاد خطی مساواتوں کو مختلف طریقوں سے حل کرنا سیکھ چکے ہیں۔ یہاں ہم تین متغیرات مثلاً x، y اور z والے خطی مساواتوں کے نظام کو حل کرنا سیکھیں گے۔ تین متغیرات والے خطی مساوات کی عام شکل $ax + by + cz + d = 0$ ہے جہاں a، b، c، d حقیقی اعداد ہیں اور a، b، c میں سے کم از کم ایک غیر صفری ہو۔

غور کیجئے

$ax + by + cz + d = 0$ عام شکل کی تین متغیرات والے خطی مساوات، ایک سطح کو ظاہر کرتی ہے۔

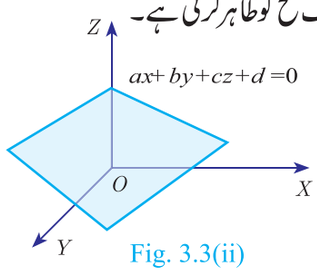


Fig. 3.3(ii)

$ax + by + c = 0$ عام شکل کی دو متغیرات والے خطی مساوات، ایک خط مستقیم کو ظاہر کرتی ہے۔

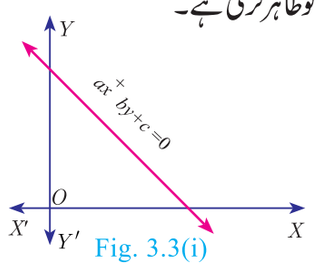


Fig. 3.3(i)

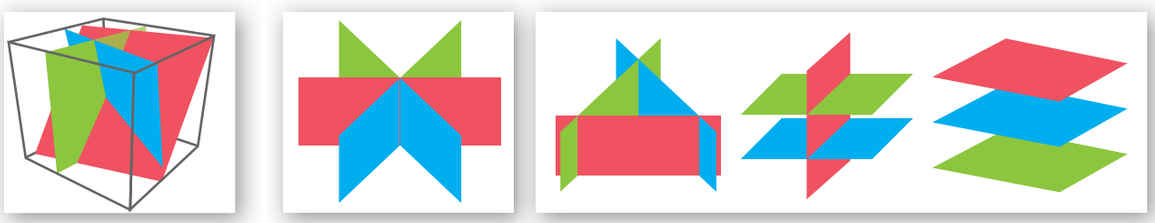
10th maths 3. algebra 1-35
Wednesday, February 19, 2020 7:28:05 PM

عام شکل General Form : تین متغیرات x ، y ، z والے خطی مساواتوں کی نظام کی عام شکل

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$
$$a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0$$

اس نظام میں ہر ایک مساوات سطح میں تین جہتی جگہ (Three Dimensional Sapce) کو ظاہر کرتی ہے اور مساواتوں کے نظام کا حل، مختصراً اس نظام کے تین خطی مساواتوں سے دئے گئے تین سطحوں کا نقطہ تقاطع ہے۔

نیچے پیش کئے گئے خاکے ہر ایک ممکن ترتیب کی توضیح کرتی ہیں۔



صرف ایک حل　　لامحدود کئی حل　　حل نہیں

Fig. 3.4

تین متغیرات والے خطی مساواتوں کے نظام کو حل کرنے کا طریقہ

Procedure for solving system of linear equations in three variables

مرحلہ 1 : دئے گئے تین مساواتوں میں سے کوئی دو مساواتیں لے کر، سب سے پہلے ایک متغیر (x یا y یا z) کے سر اعداد کو کسی مناسب غیر صفری مستقل سے ضرب دے کر انہیں عددی طور پر مساوی بنائیں۔

مرحلہ 2 : مساواتوں سے متغیرات میں سے ایک کو خارج کر دیں جن کے سر اعداد عددی طور پر مساوی ہیں۔

مرحلہ 3 : مساواتوں کے دوسرے جوڑی سے بھی اس متغیر کو خارج کر دیں۔

مرحلہ 4 : اب ہمیں دو متغیرات والے دو مساواتیں حاصل ہوتے ہیں۔

مرحلہ 5 : پچھلے کلاسوں میں سیکھے ہوئے کوئی ایک طریقے سے انہیں حل کریں۔

مرحلہ 6 : پھر باقی متغیر کی قیمت دئے گئے مساواتوں میں سے کسی ایک میں درج کر کے حاصل کیا جاتا ہے۔

غور کیجئے

(i) اگر کسی بھی مرحلہ میں، اگر تمہیں ایک غلط مساوات حاصل ہو جیسا کہ $1 = 0$، تب اس نظام کا حل نہیں ہوتا۔

(ii) اگر تمہیں ایک غلط حل حاصل نہ ہو لیکن ایک متماثل حاصل ہو اس طرح کہ $0 = 0$ تب اس نظام کے لامحدود حل ہوتے ہیں۔

مثال 3.3 ذیل کے تین متغیرات والے خطی مساواتوں کے نظام کو حل کیجئے۔

$3x - 2y + z = 2$, $2x + 3y - z = 5$, $x + y + z = 6$.

حل : $3x - 2y + z = 2$ (1)　　$2x + 3y - z = 5$ (2)　　$x + y + z = 6$ (3)

10th maths 3. algebra 1-35
Wednesday, February 19, 2020 7:28:05 PM

(1) اور (2) کو جمع کرنے پر،

$$\begin{array}{rr} 3x-2y+z &= 2 \\ 2x+3y-z &= 5 \\ \hline 5x+y &= 7 \end{array} \quad (+) \qquad \ldots (4)$$

(2) اور (3) کو جمع کرنے پر،

$$\begin{array}{rr} 2x+3y-z &= 5 \\ x+y+z &= 6 \\ \hline 3x+4y &= 11 \end{array} \quad (+) \qquad \ldots (5)$$

$4 \times (4) - (5)$

$$\begin{array}{rr} 20x+4y &= 28 \\ 3x+4y &= 11 \\ \hline 17x &= 17 \end{array} \quad (-)$$

سے $x=1$

$x=1$ کو (4) میں بھرتی کرنے پر $5+y=7$ ہمیں حاصل ہوتا ہے $y=2$

$x=1$, $y=2$ کو (3) میں بھرتی کرنے پر $1+2+z=6$ ہمیں حاصل ہوتا ہے $z=3$

لہذا، $x=1,\ y=2\ ,\ z=3$

مثال 3.4

انٹراسکول کھلاڑیوں کے ایک جوڑ (Meet) میں جملہ 24 انفرادی انعامات میں، کل 56 پوئنٹ حاصل کرتے ہیں۔ پہلے مقام والے 5 پوئنٹ حاصل کرتے ہیں، دوسرے مقام والے 3 پوئنٹ حاصل کرتے ہیں اور تیسرے مقام والے 1 پوئنٹ حاصل کرتے ہیں۔ تیسرے مقام کے ختم شدہ کھلاڑیوں کی تعداد پہلے اور دوسرے مقام کے ختم شدہ کھلاڑیوں کی تعداد کے برابر ہے، ہر ایک مقام پر کھلاڑیوں کی تعداد معلوم کیجئے۔

حل : فرض کیجئے کہ I ، II اور III مقام کے ختم شدہ کھلاڑیوں کی تعداد بالترتیب x , y اور z ہیں۔

کل مقابلوں کی تعداد $= 24$ کل پوئنٹ کی تعداد $= 56$

چنانچہ، تین متغیرات والے خطی مساواتیں

$x+y+z=24 \quad \ldots (1)$ $\qquad 5x+3y+z=56 \quad \ldots (2)$ $\qquad x+y=z \quad \ldots (3)$

(1) میں (3) بھرتی کرنے پر $z+z=24$ حاصل ہوتا ہے، جس سے $z=12$ حاصل ہوتا ہے۔

لہذا، مساوات (3) $x+y=12$ ہوگا۔

(2) is $\quad 5x+3y=44$

$3\times$(3) is $\quad 3x+3y=36$ $\quad (-)$

$$2x = 8$$

ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $x=4$

(3) میں $x=4$, $z=12$ بھرتی کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $y=12-4=8$

پہلے مقام کے ختم شدہ کھلاڑیوں کی تعداد $= 4$

دوسرے مقام کے ختم شدہ کھلاڑیوں کی تعداد $= 8$

تیسرے مقام کے ختم شدہ کھلاڑیوں کی تعداد $= 12$

مثال 3.5

حل کیجئے۔ $x+2y-z=5\,;\ x-y+z=-2\,;\ -5x-4y+z=-11$

حل : $x+2y-z=5 \quad \ldots (1)$ $\qquad x-y+z=2 \quad \ldots (2)$ $\qquad -5x-4y+z=-11 \quad \ldots (3)$

(1) اور (2) کو جمع کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\begin{array}{rr} x+2y-z &= 5 \\ x-y+z &= 2 \\ \hline 2x+y &= 3 \end{array} \quad (+) \qquad \ldots (4)$$

10th maths 3. algebra 1-35
Wednesday, February 19, 2020 7:28:06 PM

(2) سے (3) کوتفریق کرنے پر،

$$\begin{array}{rl} x - y + z &= -2 \\ -5x - 4y + z &= -11 \quad (-) \\ \hline 6x + 3y &= 9 \\ \hline \end{array}$$

3 سے تقسیم کرنے پر،

$$2x + y = 3 \qquad (5)$$

(4) سے (5) کوتفریق کرنے پر،

$$\begin{array}{rl} 2x + y &= 3 \\ 2x + y &= 3 \\ \hline 0 &= 0 \\ \hline \end{array}$$

ہم یہ دیکھتے ہیں کہ، اس نظام کے لامحدود حل ہیں۔

مثال 3.6 حل کیجئے۔ $3x + y - 3z = 1;\ -2x - y + 2z = 1;\ -x - y + z = 2$.

حل :

$3x + y - 3z = 1$ (1) $\quad -2x - y + 2z = 1$ (2) $\quad -x - y + z = 2$ (3)

(1) اور (2) کوجمع کرنے پر،

$$\begin{array}{rl} 3x + y - 3z &= 1 \\ -2x - y + 2z &= 1 \quad (+) \\ \hline x - z &= 2 \\ \hline \end{array}$$

$$x - z = 2 \qquad (4)$$

(1) اور (3) کوجمع کرنے پر،

$$\begin{array}{rl} 3x + y - 3z &= 1 \\ -x - y + z &= 2 \quad (+) \\ \hline 2x - 2z &= 3 \\ \hline \end{array}$$

$$2x - 2z = 3 \qquad (5)$$

اب، (4) × 2 − (5) ہمیں حاصل ہوتا ہے،

$$\begin{array}{rl} 2x - 2z &= 3 \\ 2x - 2z &= 4 \quad (-) \\ \hline 0 &= -1 \\ \hline \end{array}$$

یہاں ہم ایک تضاد (Contradiction) پر پہنچتے ہیں کیونکہ، $0 \neq -1$

اس کا مطلب یہ کہ یہ نظام غیر موافق ہے اور اس کا کوئی حل نہیں ہے۔

مثال 3.7 حل کیجئے۔ $\frac{x}{2} - 1 = \frac{y}{6} + 1 = \frac{z}{7} + 2;\ \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 13$

حل : غور کریں کہ، $\frac{x}{2} - 1 = \frac{y}{6} + 1$

$\frac{x}{2} - \frac{y}{6} = 1 + 1$ سے $\frac{6x - 2y}{12} = 2$ ہمیں حاصل ہوتا ہے، $3x - y = 12$ (1)

غور کریں کہ، $\frac{x}{2} - 1 = \frac{z}{7} + 2$

$\frac{x}{2} - \frac{z}{7} = 1 + 2$ سے $\frac{7x - 2z}{14} = 3$ ہمیں حاصل ہوتا ہے، $7x - 2z = 42$ (2)

$\frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 13$ سے $\frac{2y + 3z}{6} = 13$ ہمیں حاصل ہوتا ہے، $2y + 3z = 78$ (3)

10th maths 3. algebra 1-35
Wednesday, February 19, 2020 7:28:06 PM

(2) اور (3) سے z کو خارج کرنے پر،

(2) سے × 3 $\quad 21x - 6z = 126$

$\quad\quad\quad 4y + 6z = 156 \quad (+)$

(3) سے × 2 $\quad 21x + 4y = 282$

(1) سے × 4 $\quad 12x - 4y = 48 \quad (+)$

$33x = 330 \quad$ so, $x = 10$

(1) میں $x = 10$ بھرتی کرنے پر، $30 - y = 12$ سے ہمیں حاصل ہوتا ہے، $y = 18$

(2) میں $x = 10$ بھرتی کرنے پر، $70 - 2z = 42$ پھر $z = 14$

لہذا، $x=10 \ , \ y=18 \ , \ z=14$

مثال 3.8 حل کیجئے کہ، $\frac{1}{2x} + \frac{1}{4y} - \frac{1}{3z} = \frac{1}{4} \ ; \ \frac{1}{x} = \frac{1}{3y}; \ \frac{1}{x} - \frac{1}{5y} + \frac{4}{z} = 2\frac{2}{15}$

حل : فرض کیجئے کہ، $\frac{1}{x} = p \ , \ \frac{1}{y} = q \ , \ \frac{1}{z} = r$

دیے گئے مساواتوں کو اس طرح لکھتے ہیں۔

$$\frac{p}{2} + \frac{q}{4} - \frac{r}{3} = \frac{1}{4}$$
$$p = \frac{q}{3}$$
$$p - \frac{q}{5} + 4r = 2\frac{2}{15} = \frac{32}{15}$$

مختصر کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$6p + 3q - 4r = 3 \quad (1)$$
$$3p = q \quad (2)$$
$$15p - 3q + 60r = 32 \quad (3)$$

(2) کو (1) اور (3) میں بھرتی کرنے پر،

$$15p - 4r = 3 \quad (4)$$

کو مختصر کرنے پر، $6p + 60r = 32 \quad \Rightarrow \quad 3p + 30r = 16 \quad (5)$

(4) اور (5) کو حل کرنے پر،

$15p - 4r = 3$

$15p + 150r = 80 \quad (-)$

$-154r = -77 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{2}$ ہمیں حاصل ہوتا ہے،

$r = \frac{1}{2}$ کو (4) بھرتی کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے $\quad 15p - 2 = 3 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{1}{3}$

(2) سے، $q = 3p \quad \Rightarrow \quad q = 1$

لہذا، $x = \frac{1}{p} = 3, \quad y = \frac{1}{q} = 1, \quad z = \frac{1}{r} = 2 \quad \Rightarrow \quad$ یعنی $x = 3, y = 1, z=2$

10th maths 3. algebra 1-35
Wednesday, February 19, 2020 7:28:07 PM

مثال 3.9 پہلے عدد کے تگنا، دوسرے عدد اور تیسرے عدد کے دُگنا کا حاصل جمع 5 ہے۔ اگر دوسرے عدد کے تگنا کو پہلے عدد اور تیسرے عدد کے تِگنا کے حاصل جمع سے تفریق کرنے پر 2 حاصل ہوتا ہے۔ اگر تیسرے عدد کو پہلے عدد کے دُگنا اور دوسرے عدد کے تِگنا کے حاصل جمع سے تفریق کرنے پر 1 حاصل ہوتا ہے۔ اعداد معلوم کیجئے۔

حل : فرض کیجئے کہ تین اعداد x, y, z ہیں۔ دئے گئے معطیات سے ہم درج ذیل مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$3x + y + 2z = 5$ (1) $\quad x + 3z - 3y = 2$ (2) $\quad 2x + 3y - z = 1$ (3)

(1) × 1 سے $\quad 3x + y + 2z = 5$

(2) × 3 سے $\quad 3x - 9y + 9z = 6$

(−)

$10y - 7z = -1$ (4)

(1) × 2 سے $\quad 6x + 2y + 4z = 10$

(3) ×3 سے $\quad 6x + 9y - 3z = 3$

(−)

$-7y + 7z = 7$ (5)

(4) اور (5) کو جمع کرنے پر

$10y - 7z = 1$

$-7y + 7z = 7$

$3y = 6 \Rightarrow y = 2$

(5) میں $y = 2$ بھرتی کرنے پر،

$-14 + 7z = 7 \Rightarrow z = 3$

(1) میں $y = 2$ اور $z = 3$ بھرتی کرنے پر،

$3x + 2 + 6 = 5 \Rightarrow x = -1$

لہذا، $x = 1, y = 2, z = 3.$

ذرا سوچئے

(1) جب تین متغیرات والے مساواتوں کے نظام کو حل کرنے پر ممکن حلوں کی تعداد ..... ہیں۔

(2) اگر تین سطحے متوازی ہیں ممکن نقطہ (نقاط) تقاطع کی تعداد..... ہے/ ہیں۔

اپنی پیش رفت کی جانچ Progress Check

1۔ تین متغیرات والے خطی مساواتوں کے نظام کے لئے ایک الگ حل کے حاصل ہونے کے لئے کم از کم مساواتوں کی تعداد..... ہے

2۔ ..... والے نظام متماثل کو گھٹتا ہے۔

3۔ ..... والے نظام نہ معقول (غلط) مساوات فراہم کرتا ہے۔

مشق 3.1

1۔ ذیل کے تین متغیرات والے خطی مساوات کے نظام کو حل کیجئے۔

(i) $x + y + z = 5$; $2x - y + z = 9$; $x - 2y + 3z = 16$

(ii) $\frac{1}{x} - \frac{2}{y} + 4 = 0$; $\frac{1}{y} - \frac{1}{z} + 1 = 0$; $\frac{2}{z} + \frac{3}{x} = 14$

(iii) $x + 20 = \frac{3y}{2} + 10 = 2z + 5 = 110 - (y + z)$

10th maths 3. algebra 1-35
Wednesday, February 19, 2020 7:28:08 PM

2۔ ذیل کی مساواتوں کے نظام کے حلوں کی نوعیت پر بحث کیجئے۔

(i) $x+2y-z=6\,;\ -3x-2y+5z=-12\,;\ x-2z=3$

(ii) $2y+z=3(-x+1)\,;\ -x+3y-z=-4\,;\ 3x+2y+z=-\frac{1}{2}$

(iii) $\frac{y+z}{4}=\frac{z+x}{3}=\frac{x+y}{2}\,;\ x+y+z=27$

3۔ واجدہ، ان کے ابّا اور ان کے دادا کی اوسط عمر 53 ہے، ان کے دادا کی عمر کا آدھا جمع ان کے ابّا کی عمر کا ایک تہائی جمع واجدہ کی عمر کا ایک چوتھائی 65 ہے۔ اگر 4 سال کے پہلے واجدہ کے دادا کی عمر واجدہ کی عمر کا چار گُنا ہو تو ہر ایک کی موجودہ عمر معلوم کیجئے۔

4۔ ایک تین ہندسی عدد کے ہندسوں کا حاصل جمع 11 ہے، اگر ہندسوں کو اُلٹ (Reverse) نے سے نیا عدد، پرانے عدد کے پانچ گُنا سے 46 بڑھ جاتا ہے، اگر سو کا ہندسہ جمع دہائی ہندسے کا دُگنا اکائی ہندسہ کے برابر ہو تو اصل تین ہندسی عدد معلوم کیجئے۔

5۔ 12 عدد پانچ، دس اور بیس روپیوں کے نوٹ (Currencies) ہیں جن کی کل قیمت 105 مگر ان کے اعداد میں 2 کی ترتیب ردوبدل کرنے پر اس کی قیمت 20 اضافہ ہو جاتی ہے۔ ہر ترتیب میں نوٹوں کی تعداد معلوم کیجئے۔

3.3 کثیر رقمیات کے G.C.D اور L.C.M
GCD and LCM of Polynomials

3.3.1 کثیر رقمیات کے مشترک مقسوم علیہ اعظم (GCD) یا مشترک جزو اعظم (HCF)

پچھلی کلاسوں میں ہم اجزائے ضربی کے طریقے سے دو درجے اور تین درجے والے جملوں کے GCD (HCF) معلوم کرنا سیکھ چکے ہیں، آیئے اب ہم سیکھیں گے کہ کس طرح سے ترکیبی تقسیم کے استعمال سے دئے گئے کثیر رقمیات کے GCD معلوم کر ہیں ۔

اقلیدسی الگارتم کے استعمال سے دو مثبت سالم اعداد کے GCD معلوم کرنے کے بارے میں فصل 2، اعداد اور تواتر میں بحث کر چکے ہیں ، اس طرح کے تکنیک دئے گئے دو کثیر رقمیات کے لئے بھی استعمال کر سکتے ہیں۔

ذیل کے عمل سے دئے گئے دو کثیر رقمیات کے مشترک مقسوم علیہ اعظم معلوم کرنے کا ایک منتظم طریقہ حاصل ہوتا ہے۔

مرحلہ 1 : پہلے $f(x)$ کو $g(x)$ سے تقسیم کریں تو ہمیں $f(x)=g(x)q(x)+r(x)$ حاصل ہوتا ہے جہاں $q(x)$ خارج قسمت ہے اور $r(x)$ بچت ہے، اس لئے $\deg[r(x)] < \deg[g(x)]$

مرحلہ 2 : اگر $r(x)$ غیر صفر ہے $g(x)$ کو $r(x)$ سے تقسیم کریں تو ہمیں $g(x)=r(x)q(x)+r_1(x)$ حاصل ہوتا ہے یہاں $r_1(x)$ نیا باقی ہے۔ اس لئے $\deg[r_1(x)] < \deg[r(x)]$ ہے اگر بچت $r_1(x)$ صفر ہے تو $r(x)$ مطلوبہ GCD ہے۔

مرحلہ 3 : اگر $r_1(x)$ غیر صفر ہے، تو اسی طرح تقسیم کو جاری رکھیں جب تک باقی صفر حاصل ہو۔ آخری منزل کے پہلے جو باقی حاصل ہوگا وہ $f(x)$ اور $g(x)$ کا مطلوبہ GCD ہے۔ ہم $f(x)$ اور $g(x)$ کے کثیر رقمیات کے GCD کو $\text{GCD}\,[f(x),g(x)]$ کے طور پر ظاہر کرتے ہیں۔

غور کیجئے

اگر $f(x)$ اور $g(x)$ دونوں یکساں درجے والے کثیر رقمیات ہوں تو بڑے سر عدد والے کثیر رقمی کو مقسوم لیتے ہیں۔ اگر دونوں کے سر اعداد یکساں ہوں تو پھر دوسرے کم سر عدد کے درجے کو موازنہ کرتے ہوئے تقسیم کو اسی طرح جاری رکھیں۔

10th maths 3. algebra 1-35
Wednesday, February 19, 2020 7:28:09 PM

Progress Check — اپنی پیش رفت کی جانچ

1۔ جب یکساں درجے والے دو کثیر رقمیات کو تقسیم کرنا ہو تو مقسوم اور مقسوم علیہ کو مقرر کرنے کے لئے ..... کو لینا چاہئے۔

2۔ اگر $r(x) = 0$، $f(x)$ کو $g(x)$ سے تقسیم کیا جائے تو کثیر رقمی $g(x)$ ..... کہلاتا ہے۔

3۔ اگر $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$، $f(x)$ کو $g(x)$ سے مکمل طور پر تقسیم پذیر بنانے کے لئے $f(x)$ کے ساتھ ..... کو جمع کرنا چاہئے۔

4۔ اگر $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ ، $f(x)$ کو $g(x)$ سے مکمل طور پر تقسیم پذیر بنانے کے لئے $f(x)$ سے ..... تفریق کرنا چاہئے۔

مثال 3.10 کثیر رقمیات $x^3 + x^2 - x + 2$ اور $2x^3 - 5x^2 + 5x - 3$ کا GCD معلوم کیجئے۔

حل : فرض کیجئے کہ،

$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 5x - 3$ اور $g(x) = x^3 + x^2 - x + 2$

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline x^3 + x^2 - x + 2 & 2x^3 - 5x^2 + 5x - 3 \\ & 2x^3 + 2x^2 - 2x + 4 \quad (-) \\ \hline & -7x^2 + 7x - 7 \end{array}$$

$$= -7(x^2 - x + 1)$$

غور کریں کہ $g(x)$ کا مقسوم علیہ $-7(x^2 - x + 1) \neq 0$، نہیں ہے۔

اب، $g(x) = x^3 + x^2 - x + 2$ کو نئے بچت $x^2 - x + 1$ (مستقل جذر کو چھوڑ کر) سے تقسیم کرنے پر ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{array}{r|l} & x + 2 \\ \hline x^2 - x + 1 & x^3 + x^2 - x + 2 \\ & x^3 - x^2 + x \quad (-) \\ \hline & 2x^2 - 2x + 2 \\ & 2x^2 - 2x + 2 \quad (-) \\ \hline & 0 \end{array}$$

یہاں، ہمیں بچت صفر حاصل ہوتا ہے،

لہذا، $\text{GCD}(2x^3 - 5x^2 + 5x - 3,\ x^3 + x^2 - x + 2) = x^2 - x + 1$

مثال 3.11 $6x^3 - 30x^2 + 60x - 48$ اور $3x^3 - 12x^2 + 21x - 18$ کا GCD معلوم کیجئے۔

حل : فرض کیجئے کہ، $f(x) = 6x^3 - 30x^2 + 60x - 48 = 6(x^3 - 5x^2 + 10x - 8)$ اور

$g(x) = 3x^3 - 12x^2 + 21x - 18 = 3(x^3 - 4x^2 + 7x - 6)$

10th maths 3. algebra 1-35
Wednesday, February 19, 2020 7:28:09 PM

اب ہم، $x^3 - 5x^2 + 10x - 8$ اور $x^3 - 4x^2 + 7x - 6$ کا GCD معلوم کریں گے۔

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1 \\
\hline
x^3 - 5x^2 + 10x - 8 & x^3 - 4x^2 + 7x - 6 \\
 & x^3 - 5x^2 + 10x - 8 \quad (-) \\
\hline
 & x^2 - 3x + 2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x - 2 \\
\hline
x^2 - 3x + 2 & x^3 - 5x^2 + 10x - 8 \\
 & x^3 - 3x^2 + 2x \quad (-) \\
\hline
 & -2x^2 + 8x - 8 \\
 & -2x^2 + 6x - 4 \quad (-) \\
\hline
 & 2x - 4 \\
 & \text{implies } = 2(x-2)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x - 1 \\
\hline
x - 2 & x^2 - 3x + 2 \\
 & x^2 - 2x \quad (-) \\
\hline
 & -x + 2 \\
 & -x + 2 \quad (-) \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

غرض، یہاں، بچت صفر حاصل ہوتا ہے۔

آگے آنے والے سراعداد 3 اور 6 کا GCD 3 ہے۔

GCD کا $\left[(6x^3 - 30x^2 + 60x - 48,\ 3x^3 - 12x^2 + 21x - 18)\right] = 3(x-2)$.

3.3.2 کثیر رقمیات کے ذواضعاف اقل (L.C.M)

Least Common Multiple (LCM) of Polynomials

دو یا دو سے زیادہ الجبریائی جملوں کا **ذواضعاف اقل** سب سے اعلیٰ درجے کا جملہ ہے جو ہر ایک عدد سے بغیر باقی کے تقسیم ہوتا ہے۔

ذیل کے سادہ جملوں پر غور کریں a^3b^2 , a^2b^3

ان جملوں کے LCM کے لئے $= a^2b^3$

اجزائے ضربی کے طریقے سے LCM معلوم کرنا۔

(i) ہر جملے کے پہلے ان کے اجزائے ضربی میں تحلیل (resolve) کیا جاتا ہے۔

(ii) زیادہ قوت والے مشترک اجزائے ضربی LCM ہوتا ہے۔

(iii) اگر جملوں میں عددی سراعداد ہوں تو ان کا LCM معلوم کریں۔

(iv) اجزائے ضربی کا LCM اور سر عدد کا حاصل ضرب مطلوبہ LCM ہے۔

مثال 3.12 ذیل کے LCM معلوم کیجئے۔

(i) $8x^4y^2,\ 48x^2y^4$

(ii) $5x - 10,\ 5x^2 - 20$

(iii) $x^4 - 1,\ x^2 - 2x + 1$

(iv) $x^3 - 27,\ (x-3)^2,\ x^2 - 9$

10th maths 3. algebra 1-35
Wednesday, February 19, 2020 7:28:09 PM

حل :

(i) $8x^4y^2,\ 48x^2y^4$

پہلے ہم عددی سر اعداد کا LCM معلوم کریں۔

یعنی $\text{LCM}\ (8,48) = 2\times2\times2\times6 = 48$

پھر متغیرات والے اصطلاحات کا LCM معلوم کریں۔

$\text{LCM}\ (x^4y^2, x^2y^4) = x^4y^4$

ہم یہ اخذ کرتے ہیں کہ دئے گئے جملے کا LCM، عددی سر عدد کا LCM اور متغیرات والے اصطلاحات کے LCM کے حاصل ضرب کے برابر ہے۔

لہذا، $(8x^4y^2, 48x^2y^4) = 48\ x^4y^4$

(ii) $(5x-10), (5x^2-20)$

$5x-10 = 5(x-2)$

$5x^2-20 = 5(x^2-4) = 5(x+2)(x-2)$

لہذا، $\text{LCM}\ [(5x-10),(5x^2-20)] = 5(x+2)(x-2)$

(iii) $(x^4-1),\ x^2-2x+1$

$x^4-1 = (x^2)^2-1 = (x^2+1)(x^2-1) = (x^2+1)(x+1)(x-1)$

$x^2-2x+1 = (x-1)^2$

لہذا، $\text{LCM}\ [(x^4-1),(x^2-2x+1)] = (x^2+1)(x+1)(x-1)^2$

(iv) $x^3-27, (x-3)^2, x^2-9$

$x^3-27 = (x-3)(x^2+3x+9)$; $(x-3)^2 = (x-3)^2$; $(x^2-9) = (x+3)(x-3)$

لہذا، $\text{LCM}\ [(x^3-27),(x-3)^2,(x^2-9)] = (x-3)^2(x+3)(x^2+3x+9)$

Thinking Corner ذرا سوچئے

دئے گئے کثیر رقمیات $f(x)$ اور $g(x)$ کے لئے شجر جزئے ضربی مکمل کیجئے، لہذا، ان کا GCD اور LCM معلوم کیجئے۔

$f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 32x - 21$

$2x+3$ | | $x+1$

$g(x) = 2x^3 - 7x^2 - 43x - 42$

| | | $x+2$

GCD $[f(x)$ اور $g(x)]$ = _____

LCM $[f(x)$ اور $g(x)]$ = _____

مشق 3.2

1۔ دئے گئے کثیر رقمیات کے GCD معلوم کیجئے۔

(i) $x^4+3x^3-x-3,\ x^3+x^2-5x+3$

(ii) $x^4-1,\ x^3-11x^2+x-11$

(iii) $3x^4+6x^3-12x^2-24x,\ 4x^4+14x^3+8x^2-8x$

(iv) $3x^3+3x^2+3x+3,\ 6x^3+12x^2+6x+12$

100 95 75 25 5 0

10th maths 3. algebra 1-35
Wednesday, February 19, 2020 7:28:10 PM

2۔ دیے گئے کثیر رقمیات کے LCM معلوم کیجئے۔

(i) $4x^2y,\ 8x^3y^2$ (ii) $9a^3b^2,\ 12a^2b^2c$ (iii) $16m,\ 12m^2n^2,\ 8n^2$

(iv) $p^2-3p+2,\ p^2-4$ (v) $2x^2-5x-3,\ 4x^2-36$

(vi) $(2x^2-3xy)^2, (4x-6y)^3, 8x^3-27y^3$

3.3.3 LCM اور GCD کا درمیانی تعلق Relationship between LCM & GCD

چلئے کوئی دو اعداد 12 اور 18 لیتے ہیں۔

ہم یہ غور کرتے ہیں کہ، $\text{LCM}\ (12,18)=36, \text{GCD}\ (12,18)=6$.

غرض LCM × GCD دیے گئے دو اعداد کے حاصل ضرب کے مساوی ہوگا۔

$$f(x)\times g(x)=LCM[f(x),g(x)]\times GCD[f(x),g(x)]$$

اسی طرح، دو کثیر رقمیات کا حاصل ضرب ان کے LCM اور GCD کے حاصل ضرب کے برابر ہوتا ہے۔ یعنی

تشریح (وضاحت) Illustration

فرض کیجئے کہ، $f(x) = 12(x^2-y^2)$ and $g(x)=8(x^3-y^3)$

اب، $f(x) = 12(x^2-y^2) = 2^2\times 3\times(x+y)(x-y)$ ...(1)

اور $g(x) = 8(x^3-y^3) = 2^3\times(x-y)(x^2+xy+y^2)$... (2)

(1) اور (2) سے ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned}\text{LCM}[f(x),\ g(x)] &= 2^3\times 3\times(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)\\ &= 24\times(x^2-y^2)(x^2+xy+y^2)\\ GCD\left[f(x),g(x)\right] &= 2^2\times(x-y)=4\ (x-y)\\ LCM\times GCD &= 24\times 4\times(x^2-y^2)\times(x^2-xy+y^2)\times(x-y)\\ LCM\times GCD &= 96(x^3-y^3)(x^2-y^2) \quad ...(3)\end{aligned}$$

$f(x)$ اور $g(x)$ کا حاصل ضرب $f(x) = 12(x^2-y^2)\times 8(x^3-y^3)$

$$= 96(x^2-y^2)(x^3-y^3) \quad ...(4)$$

(3) اور (4) سے ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے۔ $\text{LCM}\times\text{GCD} = f(x)\times g(x)$

Thinking Corner ذرا سوچئے

کیا $f(x)\times g(x)\times r(x)=\text{LCM}\ [f(x),g(x),r(x)]\times\text{GCD}\ [f(x),g(x),r(x)]$ ؟

مشق 3.3

1۔ ذیل کے لئے LCM اور GCD معلوم کیجئے اور تصدیق کیجئے کہ $f(x)\times g(x)=LCM\times GCD$

(i) $21x^2y,\ 35xy^2$ (ii) $(x^3-1)(x+1),\ (x^3+1)$ (iii) $(x^2y+xy^2),\ (x^2+xy)$

2۔ ذیل کے کثیر رقمیات کے ہر ایک جوڑی کے LCM معلوم کیجئے۔

(i) $a^2+4a-12,\ a^2-5a+6$ جس کا GCD $a-2$ ہے۔

(ii) $x^4-27a^3x, (x-3a)^2$ جس کا GCD $(x-3a)$ ہے۔

10th maths 3. algebra 1-35
Wednesday, February 19, 2020 7:28:11 PM

3۔ ذیل کے کثیر رقمیات کے ہر ایک جوڑی کے GCD معلوم کیجئے۔

(i) $8(x^4-3x^3+2x^2),\ 12(x^4-x^3)$ جس کا LCM $24x^3(x-1)(x-2)$ ہے۔

(ii) $(x^3+y^3),(x^4+x^2y^2+y^4)$ جس کا LCM $(x^3+y^3)(x^2+xy+y^2)$ ہے۔

4۔ دو کثیر رقمیات $p(x)$ اور $q(x)$ کا LCM اور GCD دیئے گئے ہیں، ذیل کے جدول میں نامعلوم کثیر رقمی معلوم کیجئے۔

S.No.	LCM	GCD	$p(x)$	$q(x)$
(i)	$a^3-10a^2+11a+70$	$a-7$	$a^2-12a+35$	
(ii)	$(x^4+y^4)(x^4+x^2y^2+y^4)$	(x^2-y^2)		$(x^4-y^4)(x^2+y^2-xy)$

3.4 ناطق جملے Rational Expressions

تعریف : وہ جملہ **ناطق جملہ** کہلاتا ہے اگر اسے $\frac{p(x)}{q(x)}$ کی شکل میں لکھ سکتے ہیں جہاں $p(x)$ اور $q(x)$ کثیر رقمیات ہیں اور $q(x)\neq 0$ دو کثیر رقمیات کی نسبت ہی ناطق جملہ ہے۔

ذیل میں ناطق جملوں کی مثالیں دیئے گئے ہیں۔

$$\frac{9}{x},\ \frac{2y+1}{y^2-4y+9},\ \frac{z^3+5}{z-4},\ \frac{a}{a+10}.$$

ناطق جملے فاصلہ۔وقت کی وضاحت کرنے کثیر عملی (multitasking) مسئلوں کے نمونہ بنانے، مزدوروں یا مشینوں کو کام کے جدول کے مکمل کرنے اور جوڑنے کے لئے استعمال کئے جاتے ہیں، لیکن ناطق جملوں کے استعمالات لامحدود ہیں۔

3.4.1 ناطق جملے کی تخفیف Reduction of Rational Expression

ناطق جملہ $\frac{p(x)}{q(x)}$ اس طرح $\text{GCD}\left(p(x),q(x)\right)=1$ ہو تو ہم کہیں گے کہ یہ مختصر ترین ناطق جملہ ہے۔

ایک ناطق جملے اس کے مختصر ترین صورت میں تخفیف کرنے کے لئے دیئے گئے ذیل کے مرحلوں کو اختیار کرنا چاہئے۔

(i) شمار کنندہ اور نسب نما کے اجزائے ضربی معلوم کرنا۔

(ii) اگر شمار کنندہ اور نسب نما میں مشترک جز وضربی ہوں تو انہیں منسوخ (Cancel) کردیں۔

(iii) حاصل ہونے والا جملہ مختصر ترین ناطق جملہ ہوگا۔

مثال 3.13 ناطق جملوں کو ان کے مختصر ترین صورت میں تخفیف کیجئے۔

(i) $\frac{x-3}{x^2-9}$ (ii) $\frac{x^2-16}{x^2+8x+16}$

حل :

(i) $\frac{x-3}{x^2-9}=\frac{x-3}{(x+3)(x-3)}=\frac{1}{x+3}$

(ii) $\frac{x^2-16}{x^2+8x+16}=\frac{(x+4)(x-4)}{(x+4)^2}=\frac{x-4}{x+4}$

3.4.2 خارجی قیمت : Excluded Value

وہ قیمت جو (مختصر ترین) ناطق جملے کو غیر واضح بناتی ہے **خارجی قیمت** کہلاتی ہے۔

10th maths 3. algebra 1-35
Wednesday, February 19, 2020 7:28:11 PM

دیے گئے مختصر ترین ناطق جملہ مثلاً $\frac{p(x)}{q(x)}$ کی خارجی قیمت معلوم کرنے کے لئے نسب نما $q(x) = 0$ لیں۔

مثال کے طور پر، ناطق جملہ $\frac{5}{x-10}$ غیر واضح ہے جب $x = 10$ ہو، اس لئے $\frac{5}{x-10}$ کے لئے خارجی قیمت 10 ہے۔

مثال 3.14 ذیل کے جملوں کی خارجی قیمت معلوم کیجئے۔ (اگر ہو تو)

(i) $\frac{x+10}{8x}$ (ii) $\frac{7p+2}{8p^2+13p+5}$ (iii) $\frac{x}{x^2+1}$

حل :

(i) $\frac{x+10}{8x}$

یہ جملہ $\frac{x+10}{8x}$ غیر واضح ہے جب $8x = 0$ یا $x = 0$ لہٰذا، خارجی قیمت 0 ہے۔

(ii) $\frac{7p+2}{8p^2+13p+5}$

یہ جملہ $\frac{7p+2}{8p^2+13p+5}$ غیر واضح ہے جب $8p^2+13p+5 = 0$ یعنی $(8p+5)(p+1) = 0$

$p = -1, p = \frac{-5}{8}$، خارجی قیمتیں $\frac{-5}{8}$ اور -1 ہیں۔

(iii) $\frac{x}{x^2+1}$

یہاں تمام x کے لئے، $x^2 \geq 0$، لہٰذا، $x^2+1 \geq 0+1 = 1$

چنانچہ، کوئی ایک x کے لئے $x^2+1 \neq 0$

لہٰذا، دیے گئے ناطق جملہ $\frac{x}{x^2+1}$ کے لئے کوئی حقیقی خارجی قیمت نہیں ہو سکتی۔



Thinking Corner ذرا سوچئے

1۔ کیا x^2-1 اور $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ناطق جملے ہیں؟

2۔ $\frac{x^3+x^2-10x+8}{x^4+8x^2-9}$ کے خارجی قیمتوں کی تعداد..... ہے۔

مشق 3.4



1۔ ذیل کے ہر ایک ناطق جملے کو ان کے مختصر ترین صورت میں تخفیف کیجئے۔

(i) $\frac{x^2-1}{x^2+x}$ (ii) $\frac{x^2-11x+18}{x^2-4x+4}$ (iii) $\frac{9x^2+81x}{x^3+8x^2-9x}$ (iv) $\frac{p^2-3p-40}{2p^3-24p^2+64p}$

2۔ خارجی قیمت معلوم کیجئے، اگر ذیل کے جملے میں ہو تو

(i) $\frac{y}{y^2-25}$ (ii) $\frac{t}{t^2-5t+6}$ (iii) $\frac{x^2+6x+8}{x^2+x-2}$ (iv) $\frac{x^3-27}{x^3+x^2-6x}$

10th maths 3. algebra 1-35
Wednesday, February 19, 2020 7:28:12 PM

3.4.3 ناطق جملوں کے اعمال Operations of Ratoinal Expressions

تم اپنے پچھلے کلاسوں میں ناطق اعداد کے جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم کے تصورات سیکھ چکے ہو۔ چلئے مذکورہ بالا تصورات کو ناطق جملوں کے لئے بھی عام نتیجہ دریافت کریں۔

ناطق جملوں کی ضرب Multiplication of Rational Expressions

اگر $\frac{p(x)}{q(x)}$ اور $\frac{r(x)}{s(x)}$ دو ناطق جملے ہیں جہاں $q(x) \neq 0$ اور $s(x) \neq 0$ تب ان کا حاصل ضرب $\frac{p(x)}{q(x)} \times \frac{r(x)}{s(x)} = \frac{p(x) \times r(x)}{q(x) \times s(x)}$

دوسرے الفاظ میں، دو ناطق جملوں کا حاصل ضرب ان کے شمار کنندہ کے حاصل ضرب کو ان کے نسب نما کے حاصل ضرب سے تقسیم ہے اور حاصل ہونے والے جملے کو پھر مختصر ترین صورت میں تخفیف کیا جاتا ہے۔

ناطق جملوں کی تقسیم Division of Rational Expressions

اگر $\frac{p(x)}{q(x)}$ اور $\frac{r(x)}{s(x)}$ دو ناطق جملے ہیں جہاں $q(x), s(x) \neq 0$ تو $\frac{p(x)}{q(x)} \div \frac{r(x)}{s(x)} = \frac{p(x)}{q(x)} \times \frac{s(x)}{r(x)} = \frac{p(x) \times s(x)}{q(x) \times r(x)}$

غرض ایک ناطق جملے کو دوسرے سے تقسیم پہلے ناطق جملہ اور دوسرے ناطق جملے کے معکوس کا حاصل ضرب کے معادل (برابر) ہے، اگر حاصل ہونے والا جملہ مختصر ترین صورت میں نہ ہو تو پھر اسے مختصر ترین صورت میں تخفیف کیا جاتا ہے۔

Progress Check اپنی پیش رفت کی جانچ

ذیل کے خاکے میں نامعلوم جملے معلوم کیجئے

1.

رقبہ $= \frac{(x-4)(x+3)}{3x-12} km^2$

چوڑائی $= ?$

لمبائی $= \frac{x-3}{3}$ km

Fig. 3.5

2.

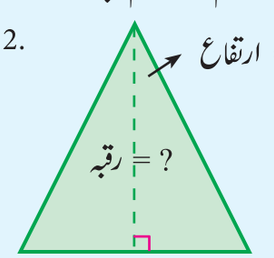


Fig. 3.6

مثال 3.15 (i) $\frac{x^3}{9y^2}$ کو $\frac{27y}{x^5}$ سے ضرب دیجئے۔ (ii) $\frac{x^4b^2}{x-1}$ کو $\frac{x^2-1}{a^4b^3}$ سے ضرب دیجئے۔

حل: (i) $\frac{x^3}{9y^2} \times \frac{27y}{x^5} = \frac{3}{x^2y}$ (ii) $\frac{x^4b^2}{x-1} \times \frac{x^2-1}{a^4b^3} = \frac{x^4 \times b^2}{x-1} \times \frac{(x+1)(x-1)}{a^4 \times b^3} = \frac{x^4(x-1)}{a^4b}$

مثال 3.16 تقسیم کیجئے۔

(i) $\frac{14x^4}{y} \div \frac{7x}{3y^4}$ (ii) $\frac{x^2-16}{x+4} \div \frac{x-4}{x+4}$ (ii) $\frac{16x^2-2x-3}{3x^2-2x-1} \div \frac{8x^2+11x+3}{3x^2-11x-4}$

10th maths 3. algebra 1-35
Wednesday, February 19, 2020 7:28:13 PM

حل :

(i) $\frac{14x^4}{y} \div \frac{7x}{3y^4} = \frac{14x^4}{y} \times \frac{3y^4}{7x} = 6\,x^3y^3$

(ii) $\frac{x^2-16}{x+4} \div \frac{x-4}{x+4} = \frac{(x+4)(x-4)}{(x+4)} \times \left(\frac{x+4}{x-4}\right) = x+4$

(iii) $\frac{16x^2-2x-3}{3x^2-2x-1} \div \frac{8x^2+11x+3}{3x^2-11x-4} = \frac{16x^2-2x-3}{3x^2-2x-1} \times \frac{3x^2-11x-4}{8x^2+11x+3}$

$= \frac{(8x+3)(2x-1)}{(3x+1)(x-1)} \times \frac{(3x+1)(x-4)}{(8x+3)(x+1)} = \frac{(2x-1)(x-4)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x^2-9x+4}{x^2-1}$

مشق 3.5

1۔ مختصر کیجئے۔

(i) $\frac{4x^2y}{2z^2} \times \frac{6xz^3}{20y^4}$ (ii) $\frac{p^2-10p+21}{p-7} \times \frac{p^2+p-12}{(p-3)^2}$ (iii) $\frac{5t^3}{4t-8} \times \frac{6t-12}{10t}$

2۔ مختصر کیجئے۔

(i) $\frac{x+4}{3x+4y} \times \frac{9x^2-16y^2}{2x^2+3x-20}$ (ii) $\frac{x^3-y^3}{3x^2+9xy+6y^2} \times \frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}$

3۔ مختصر کیجئے۔

(i) $\frac{2a^2+5a+3}{2a^2+7a+6} \div \frac{a^2+6a+5}{-5a^2-35a-50}$ (ii) $\frac{b^2+3b-28}{b^2+4b+4} \div \frac{b^2-49}{b^2-5b-14}$

(iii) $\frac{x+2}{4y} \div \frac{x^2-x-6}{12y^2}$ (iv) $\frac{12t^2-22t+8}{3t} \div \frac{3t^2+2t-8}{2t^2+4t}$

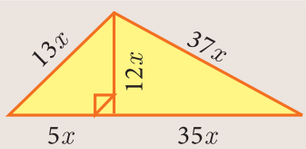
4۔ اگر $x = \frac{a^2+3a-4}{3a^2-3}$ اور $y = \frac{a^2+2a-8}{2a^2-2a-4}$ ہوتو x^2y^{-2} کی قیمت معلوم کرو۔

5۔ اگرایک کثیر رقمی $p(x) = x^3 - 5x - 14$ کو دوسرے کثیر رقمی $q(x)$ سے تقسیم کریں تو ہمیں $\frac{x-7}{x+2}$ حاصل ہوتا ہے $q(x)$ معلوم کیجئے

Activity 1 کارروائی 1



(i) ایک مستطیلی باغ کی لمبائی ایک عدد اور اس کے معکوس کا حاصل جمع ہے۔
اس کی چوڑائی اسی عدد کے مربع اور اسے معکوس کا فرق ہے ۔
مستطیل کی لمبائی، چوڑائی اور لمبائی سے چوڑائی کی نسبت معلوم کیجئے۔



(ii) دئے گئے مثلث کے احاطہ سے رقبہ کی نسبت معلوم کیجئے۔

10th maths 3. algebra 1-35
Wednesday, February 19, 2020 7:28:13 PM

ناطق جملوں کی جمع اور تفریق Additions &Subtraction of Rational Expressions

یکساں نسب نما والے ناطق جملوں کی جمع اور تفریق

Addition & Sbubtraction of Rational Expressions with Like Denominators

(i) شمار کنندہ کو جمع یا تفریق کریں۔

(ii) مرحلہ (i) میں حاصل شدہ شمار کنندہ کے حاصل جمع یا فرق کو مشترک نسب نما کے اوپر لکھیں۔

(iii) حاصل ہونے والے ناطق جملے کو مختصر ترین صورت میں تخفیف کریں۔

مثال 3.17 معلوم کیجئے۔ $\frac{x^2+20x+36}{x^2-3x-28} - \frac{x^2+12x+4}{x^2-3x-28}$

حل :

$$\frac{x^2+20x+36}{x^2-3x-28} - \frac{x^2+12x+4}{x^2-3x-28} = \frac{(x^2+20x+36)-(x^2+12x+4)}{x^2-3x-28}$$

$$= \frac{8x+32}{x^2-3x-28} = \frac{8(x+4)}{(x-7)(x+4)} = \frac{8}{x-7}$$

غیر یکساں نسب نما والے ناطق جملوں کی جمع اور تفریق

Addition and Subtraction of Rational Expressions with unlike Denominators

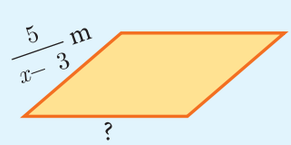
(i) نسب نما کے ذواضعاف اقل دریافت کیجئے۔ (ii) مرحلہ (i) میں حاصل شدہ LCM سے ہر ایک کسر کو دوبارہ معادل کسر میں لکھیں۔

ہر ایک جملے کے شمار کنندہ اور نسب نما دونوں کو کسی جز سے اس طرح ضرب کریں کہ LCM حاصل ہو۔

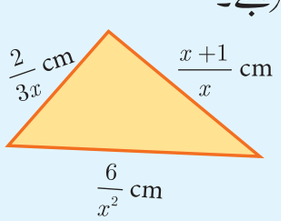
(iii) یکساں نسب نما والے ناطق جملوں کی جمع یا تفریق کرنے کے لئے ایسی مرحلے کو اختیار کریں۔

Progress Check — اپنی پیش رفت کی جانچ

2۔ دئے گئے متوازی الاضلاع کا قاعدہ معلوم کیجئے جس کا احاطہ $\frac{4x^2+10x-50}{(x-3)(x+5)}$ ہے



1۔ خاکے کے احاطہ کو ظاہر کرنے کے لئے جملہ لکھئے اور اسے مختصر کیجئے۔



مثال 3.18 مختصر کیجئے۔ $\frac{1}{x^2-5x+6} + \frac{1}{x^2-3x+2} - \frac{1}{x^2-8x+15}$

حل :

$$\frac{1}{x^2-5x+6} + \frac{1}{x^2-3x+2} - \frac{1}{x^2-8x+15}$$

$$= \frac{1}{(x-2)(x-3)} + \frac{1}{(x-2)(x-1)} - \frac{1}{(x-5)(x-3)}$$

$$= \frac{(x-1)(x-5)+(x-3)(x-5)-(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)}$$

$$= \frac{(x^2-6x+5)+(x^2-8x+15)-(x^2-3x+2)}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)}$$

ذرا سوچئے

صحیح یا غلط بتائیے

1۔ دو ناطق جملوں کا حاصل جمع ہمیشہ ایک ناطق جملہ ہے۔

2۔ دو ناطق جملوں کا حاصل ضرب ہمیشہ ایک ناطق جملہ ہے۔

10th maths 3. algebra 1-35
Wednesday, February 19, 2020 7:28:14 PM

$$= \frac{x^2 - 11x + 18}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)} = \frac{(x-9)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)}$$

$$= \frac{(x-9)}{(x-1)(x-3)(x-5)}$$

مشق 3.6



1۔ مختصر کیجئے۔ (i) $\frac{x(x+1)}{x-2} + \frac{x(1-x)}{x-2}$ (ii) $\frac{x+2}{x+3} + \frac{x-1}{x-2}$ (iii) $\frac{x^3}{x-y} + \frac{y^3}{y-x}$

2۔ مختصر کیجئے۔ (i) $\frac{(2x+1)(x-2)}{x-4} - \frac{(2x^2-5x+2)}{x-4}$ (ii) $\frac{4x}{x^2-1} - \frac{x+1}{x-1}$

3۔ $\frac{2x^3+x^2+3}{(x^2+2)^2}$ سے $\frac{1}{x^2+2}$ تفریق کیجئے۔

4۔ $\frac{x^2+6x+8}{x^3+8}$ سے کونسا ناطق جملہ تفریق کرنے پر $\frac{3}{x^2-2x+4}$ حاصل ہوگا؟

5۔ اگر $A = \frac{2x+1}{2x-1}$, $B = \frac{2x-1}{2x+1}$ ہوتو $\frac{1}{A-B} - \frac{2B}{A^2-B^2}$ معلوم کیجئے۔

6۔ اگر $A = \frac{x}{x+1}$, $B = \frac{1}{x+1}$ ہوتو ثابت کروکہ، $\frac{(A+B)^2 + (A-B)^2}{A \div B} = \frac{2(x^2+1)}{x(x+1)^2}$

7۔ پرویز کسی کام کو 4 گھنٹوں میں مکمل کرتا ہے۔اس کا دوست یونس اسی کام کو 6 گھنٹوں میں مکمل کرتا ہے۔دونوں ایک ساتھ اس کام کو کتنے گھنٹوں میں مکمل کریں گے؟

8۔ عالیہ 50 kg کے پھل سیب اور کیلے خریدتی ہے، وہ ہر kg پر کیلے کی قیمت کا دُگنا سیب کی قیمت کے لئے ادا کرتی ہے۔

3.5 کثیر رقمیات کا جذرالمربع (Square Root of Polynomials)

دئے گئے مثبت حقیقی عدد کا **جذرالمربع** ایک دوسرا عدد ہے اس طرح کہ جب اس عدد کو اسی عدد کے ساتھ ضرب دینے پر دیا گیا عدد حاصل ہوتا ہے

اسی طرح دئے گئے جملے $p(x)$ کا جذرالمربع ایک دوسرا جملہ $q(x)$ ہے اس طرح کہ جب اس جملے کو اسی جملے کے ساتھ ضرب دینے پر $p(x)$ حاصل ہوتا ہے، یعنی $q(x) \cdot q(x) = p(x)$

اس لئے $|q(x)| = \sqrt{p(x)}$ جہاں $|q(x)|$ کی ٹھیک قیمت $q(x)$ ہے۔

ذیل کے دو طریقوں کے استعمال سے دئے گئے جملے کا جذرالمربع معلوم کیا جاتا ہے۔

(i) اجزائے ضربی کا طریقہ (ii) تقسیمی طریقہ

Progress Check — اپنی پیش رفت کی جانچ

1) کیا $x^2 + 4x + 4$ ایک کامل مربع ہے ؟

2) $3\sqrt{x} = 9$ میں x کی قیمت کیا ہے؟

3) $361\, x^4\, y^2$ کا جذرالمربع ..... ہے۔

4) $\sqrt{a^2x^2 + 2abx + b^2}$ = _____.

5) اگر ایک کثیر رقمی کامل مربع ہے تو، اس کے جز وضربی ..... (جفت/ طاق) مرتبہ (Repeated) دوہرائیں گے۔

10th maths 3. algebra 1-35
Wednesday, February 19, 2020 7:28:15 PM

3.5.1 اجزائے ضربی کے طریقے سے جذرالمربع معلوم کرنا Find the Square Root by Factorization Method

مثال 3.19

ذیل کے جملوں کا جذرالمربع معلوم کیجئے۔

(i) $256(x-a)^8(x-b)^4(x-c)^{16}(x-d)^{20}$ (ii) $\dfrac{144\ a^8\ b^{12}\ c^{16}}{81\ f^{12} g^4\ h^{14}}$

حل :

(i) $\sqrt{256(x-a)^8(x-b)^4(x-c)^{16}(x-d)^{20}} = 16\left|(x-a)^4(x-b)^2(x-c)^8(x-d)^{10}\right|$

(ii) $\sqrt{\dfrac{144a^8b^{12}c^{16}}{81f^{12}g^4h^{14}}} = \dfrac{4}{3}\left|\dfrac{a^4b^6c^8}{f^6g^2h^7}\right|$

مثال 3.20 درج ذیل جملوں کے جذرالمربع معلوم کیجئے۔

(i) $16x^2+9y^2-24xy+24x-18y+9$ (ii) $(6x^2+x-1)(3x^2+2x-1)(2x^2+3x+1)$

(iii) $\left[\sqrt{15}x^2+\left(\sqrt{3}+\sqrt{10}\right)x+\sqrt{2}\right]\left[\sqrt{5}x^2+\left(2\sqrt{5}+1\right)x+2\right]\left[\sqrt{3}x^2+\left(\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)x+2\sqrt{2}\right]$

حل :

(i) $\sqrt{16x^2+9y^2-24xy+24x-18y+9}$

$= \sqrt{(4x)^2+(-3y)^2+(3)^2+2(4x)(-3y)+2(-3y)(3)+2(4x)(3)}$

$= \sqrt{(4x-3y+3)^2} = \left|4x-3y+3\right|$

(ii) $\sqrt{(6x^2+x-1)(3x^2+2x-1)(2x^2+3x+1)}$

$= \sqrt{(3x-1)(2x+1)(3x-1)(x+1)(2x+1)(x+1)} = \left|(3x-1)(2x+1)(x+1)\right|$

(iii) آیئے پہلے کثیر رقمیات کے اجزائے ضربی معلوم کریں۔

$\sqrt{15}x^2+\left(\sqrt{3}+\sqrt{10}\right)x+\sqrt{2} = \sqrt{15}x^2+\sqrt{3}x+\sqrt{10}x+\sqrt{2}$

$= \sqrt{3}x\left(\sqrt{5}x+1\right)+\sqrt{2}\left(\sqrt{5}x+1\right)$

$= \left(\sqrt{5}x+1\right)\times\left(\sqrt{3}x+\sqrt{2}\right)$

$\sqrt{5}x^2+\left(2\sqrt{5}+1\right)x+2 = \sqrt{5}x^2+2\sqrt{5}x+x+2$

$= \sqrt{5}x(x+2)+1(x)+2 = \left(\sqrt{5}x+1\right)(x+2)$

$\sqrt{3}x^2+\left(\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)x+2\sqrt{2} = \sqrt{3}x^2+\sqrt{2}x+2\sqrt{3}x+2\sqrt{2}$

$= x\left(\sqrt{3}x+\sqrt{2}\right)+2\left(\sqrt{3}x+\sqrt{2}\right) = (x+2)\left(\sqrt{3}x+\sqrt{2}\right)$

چنانچہ

$\sqrt{\left[\sqrt{15}x^2+\left(\sqrt{3}+\sqrt{10}\right)x+\sqrt{2}\right]\left[\sqrt{5}x^2+\left(2\sqrt{5}+1\right)x+2\right]\left[\sqrt{3}x^2+\left(\sqrt{2}+2\sqrt{3}\ \ x\right)+2\sqrt{2}\right]}$

$= \sqrt{\left(\sqrt{5}x+1\right)\left(\sqrt{3}x+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}x+1\right)(x+2)\left(\sqrt{3}x+\sqrt{2}\right)(x+2)} = \left|\left(\sqrt{5}x+1\right)\left(\sqrt{3}x+\sqrt{2}\right)(x+2)\right|$

مشق 3.7

1۔ ذیل کے ناطق جملوں کا جذرالمربع معلوم کیجئے۔

(i) $\dfrac{400x^4y^{12}z^{16}}{100x^8y^4z^4}$ (ii) $\dfrac{7x^2+2\sqrt{14}x+2}{x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}}$ (iii) $\dfrac{121(a+b)^8(x+y)^8(b-c)^8}{81(b-c)^4(a-b)^{12}(b-c)^4}$

10th maths 3. algebra 1-35
Wednesday, February 19, 2020 7:28:15 PM

2۔ ذیل کے جذرالمربع معلوم کیجئے۔

(i) $4x^2+20x+25$ (ii) $9x^2-24xy+30xz-40yz+25z^2+16y^2$

(iii) $(4x^2-9x+2)\,(7x^2-13x-2)\,(28x^2-3x-1)$

(iv) $\left(2x^2+\frac{17}{6}x+1\right)\left(\frac{3}{2}x^2+4x+2\right)\left(\frac{4}{3}x^2+\frac{11}{3}x+2\right)$

3.5.2 تقسیمی طریقے سے کثیر رقمی کا جذرالمربع معلوم کرنا۔

Finding the Square Root of a Polynomial by Division Method

ترکیبی تقسیمی طریقہ سے کثیر رقمی کا جذرالمربع معلوم کرنا کارآمد ہے، جب اس کثیر رقمی کا درجہ اعلیٰ ہو۔

مثال 3.21 $64x^4-16x^3+17x^2-2x+1$ کا جذرالمربع معلوم کیجئے۔

حل :

$$\begin{array}{r|l} & 8x^2-x+1 \\ \hline 8x^2 & 64x^4-16x^3+17x^2-2x+1 \\ & 64x^4 \qquad\qquad (-) \\ \hline 16x^2-x & \quad -16x^3+17x^2 \\ & \quad -16x^3+x^2 \qquad (-) \\ \hline 16x^2-2x+1 & \qquad\quad 16x^2-2x+1 \\ & \qquad\quad 16x^2-2x+1 \qquad (-) \\ \hline & \qquad\qquad 0 \end{array}$$

لہذا،

$$\sqrt{64x^4-16x^3+17x^2-2x+1}=\left|8x^2-x+1\right|$$

غور کیجئے

کثیر رقمی کا جذرالمربع معلوم کرنے سے پہلے اس کا لحاظ رکھیں کہ متغیرات کے درجے نزولی یا صعودی ترتیب میں ہوں۔

مثال 3.22 اگر $9x^4+12x^3+28x^2+ax+b$ ایک کامل مربع ہو تو a اور b کی قیمتیں معلوم کیجئے۔

حل :

$$\begin{array}{r|l} & 3x^2+2x+4 \\ \hline 3x^2 & 9x^4+12x^3+28x^2+ax+b \\ & 9x^4 \qquad\qquad\quad (-) \\ \hline 6x^2+2x & \quad 12x^3+28x^2 \\ & \quad 12x^3+4x^2 \qquad (-) \\ \hline 6x^2+4x+4 & \qquad\quad 24x^2+ax+b \\ & \qquad\quad 24x^2+16x+16 \qquad (-) \\ \hline & \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

کیونکہ دی گئی کثیر رقمی ایک کامل مربع ہے۔ $a-16=0\,,\,b-16=0$ لہذا، $a=16\,,\,b=16$

10th maths 3. algebra 1-35
Wednesday, February 19, 2020 7:28:16 PM

مشق 3.8

1۔ تقسیمی طریقے سے ذیل کے کثیر رقمیات کا جذر المربع معلوم کیجئے۔

(i) $x^4 - 12x^3 + 42x^2 - 36x + 9$ (ii) $37x^2 - 28x^3 + 4x^4 + 42x + 9$

(iii) $16x^4 + 8x^2 + 1$ (iv) $121x^4 - 198x^3 - 183x^2 + 216x + 144$

2۔ a اور b کی قیمتیں معلوم کیجئے اگر ذیل کے کثیر رقمیات کامل مربع ہیں۔

3۔ (i) $4x^4 - 12x^3 + 37x^2 + bx + a$ (ii) $ax^4 + bx^3 + 361x^2 + 220x + 100$

4۔ m اور n کی قیمتیں معلوم کیجئے اگر ذیل کے کثیر رقمیات کامل مربع ہیں۔

(i) $36x^4 - 60x^3 + 61x^2 + mx + n$ (ii) $x^4 - 8x^3 + mx^2 + nx + 16$

3.6 دودرجی مساوات Quardratic Equations

تعارف : عربی ریاضی دان ابراہیم بن حیی الناسی Abraham bar hiyya Ha-Nasi اکثر لاطینی نام ساواسودا Savasoda سے پہچانا جاتا ہے۔ وہ اپنی 1145AD(CE) قم، میں کتاب 'لیبرامباڈورم' Liber Embadorum کے لئے مشہور ہیں جو یورپ میں شائع کی گئی پہلی کتاب ہے جس میں دودرجی مساوات کا مکمل حل ملتا ہے۔

قدیم بیبی لونین سے موجودہ دور تک تقریباً تین سو سال کی مدد سے، انسانیت کو یہ معلوم ہوا کہ کس طرح سے عام دودرجی مساوات ان کے سر اعداد کے لحاظ سے چار حسابی اعمال اور جذر کو معلوم کرتے ہوئے حل کیا جاتا ہے۔ یہ طریقہ ''قوت کے ذریعے سے حل'' کہلاتا ہے مختلف قسم کے مساواتوں کو حل کرنے کے لئے آج تک بہت سارے تحقیقات کر چکے ہیں۔

دودرجی جملے Quadratic Expression

متغیر x کا n درجے والا ایک جملہ $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ جہاں $a \neq 0$ اور $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ حقیقی اعداد ہیں۔ اس جملے کے سر اعداد کہلاتے ہیں۔

خاص طور پر 2 درجے والا جملہ **دودرجی جملہ** کہلاتا ہے۔ جیسے $p(x) = ax^2 + bx + c$ سے ظاہر کیا جاتا ہے، یہاں $a = 0$ اور a, b, c حقیقی اعداد ہیں۔

3.6.1 دودرجی کثیر رقمی کے صفر Zeroes of a Quadratic Polynomial

فرض کیجئے کہ $p(x)$ ایک کثیر رقمی ہے۔ $x=a$ کو $p(x)$ کا صفر کہا جائے گا اگر $p(a) = 0$ ہو۔

مثال کے طور پر اگر $p(x) = x^2 - 2x - 8$ ہو تو $p(-2) = 4+4-8 = 0$ ہے اور $p(4) = 16-8-8 = 0$ ہے۔

چنانچہ -2 اور 4 کثیر رقمی $p(x) = x^2 - 2x - 8$ کے صفر ہیں۔

10th maths 3. algebra 1-35
Wednesday, February 19, 2020 7:28:17 PM

3.6.2 دودرجی مساواتوں کے جذور Roots of Quadratic Equations

فرض کیجئے کہ، $ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0)$ ایک دودرجی مساوات ہے۔ x کی وہ قیمتیں جس سے جملہ $ax^2 + bx + c$ کی قیمت صفر ہوجاتی ہے، دودرجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے جذریں کہلاتے ہیں۔

ہمارے پاس $ax^2 + bx + c = 0$

$$a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad \left(\text{چونکہ } a \neq 0\right)$$

$$x^2 + \frac{b}{2a}(2x) + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + (2x)\left(\frac{b}{2a}\right) + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

یعنی $$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

لہذا، جذریں یہ ہیں، $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ اور $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

3.6.3 دودرجی مساوات کی تشکیل : Formation of a Quadratic Equation

اگر α اور β ایک دودرجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے جذریں ہیں۔

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{اور} \quad \beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

$$\alpha + \beta = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b}{a}$$

اور $$\alpha\beta = \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \times \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = \frac{c}{a}$$

چونکہ، $(x - \alpha)$ اور $(x - \beta)$ مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے جزوِضربی ہیں۔

ہمیں حاصل ہوا $(x - \alpha)(x - \beta) = 0$

لہذا، $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

یعنی، $x^2 -$ (جذروں کا حاصل جمع) $x +$ (جذروں کا حاصل ضرب)

یہ دودرجی مساوات کے عام شکل ہے جب جذریں دئے گئے ہوں۔

غور کیجئے

$ax^2 + bx + c = 0$ کو

معادلاً اس طرح ظاہر کرسکتے ہیں

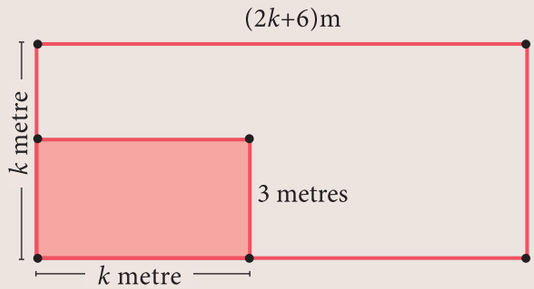
$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

چونکہ، $a \neq 0$

10th maths 3. algebra 1-35
Wednesday, February 19, 2020 7:28:17 PM

Activity 2 کارروائی 2

گھر کے سامنے ایک مستطیلی باغ پر غور کیجئے، جس کے ابعاد $(2k + 6)$ میٹر اور k میٹر ہیں۔ k میٹر اور 3 میٹر ابعاد والے باغ کے ایک چھوٹے مستطیلی حصے کو ہموار کیا جاتا ہے۔ باغ کا رقبہ معلوم کیجئے مگر ہموار کیا ہوا حصے کا نہیں۔



مثال 3.23 دو درجی مساوات $x^2 + 8x + 12$ کے صفریں معلوم کیجئے۔

حل :

$$x^2 + 8x + 12 = (x + 2)(x + 6)$$

اس لئے $x^2 + 8x + 12$ کی قیمت صفر ہے۔ جب، $x + 2 = 0$ یا $x + 6 = 0$

یعنی، جب $x = -2$ اور $x = -6$

لہذا، $x^2 + 8x + 12$ کے صفریں -2 اور -6 ہیں۔

مثال 3.24 دئے گئے جذروں کے حاصل جمع اور حاصلِ ضرب کے لئے دو درجی مساوات کی عام شکل لکھئے۔

(i) 9, 14 (ii) $-\frac{7}{2}, \frac{5}{2}$ (iii) $-\frac{3}{5}, -\frac{1}{2}$

حل : (i) جب جذریں دئے گئے ہوں تو دو درجی مساوات کی عام شکل یہ ہے۔

$$x^2 - (\text{جذروں کا حاصل جمع})\, x + (\text{جذروں کا حاصل ضرب}) = 0$$

$$x^2 - 9x + 14 = 0$$

(ii) $$x^2 - \left(-\frac{7}{2}\right)x + \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow 2x^2 + 7x + 5 = 0$$

(iii) $$x^2 - \left(-\frac{3}{5}\right)x + \left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{10x^2 + 6x - 5}{10} = 0$$

لہذا، $10x^2 + 6x - 5 = 0$.

مثال 3.25 ذیل کے دو درجی مساوتوں میں سے ہر ایک کے لئے جذروں کا حاصل جمع اور حاصل ضرب معلوم کیجئے۔

(i) $x^2 + 8x - 65 = 0$ (ii) $2x^2 + 5x + 7 = 0$

(iii) $kx^2 - k^2x - 2k^3 = 0$

حل : فرض کرو کہ α اور β دئے گئے دو درجی مساوات کے جذریں ہیں۔

(i) $x^2 + 8x - 65 = 0$

$a = 1, \quad b = 8, \quad c = -65$

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -8 \quad \text{اور} \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} = -65$$

$$\alpha + \beta = -8; \quad \alpha\beta = -65$$

10th maths 3. algebra 1-35
Wednesday, February 19, 2020 7:28:18 PM

(ii) $2x^2 + 5x + 7 = 0$

$a = 2, \quad b = 5, \quad c = 7$

$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{-5}{2}$ اور $\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{7}{2}$

$\alpha + \beta = -\frac{5}{2}; \ \alpha\beta = \frac{7}{2}$

(iii) $ax^2 - a^2x - 2a^3 = 0$

$a = k, \quad b = -k^2, \quad c = -2k^3$

$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{-(-k^2)}{k} = k$ اور $\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-2k^3}{k} = 2k^2$

مشق 3.9

1۔ دودرجی مساواتوں کی تشکیل کیجئے، جن کے جذروں کا حاصل جمع اور حاصل ضرب یہ ہیں۔

(i) $-9, \ 20$ (ii) $\frac{5}{3}, \ 4$ (iii) $\frac{-3}{2}, \ -1$ (iv) $-(2-a)^2, (a+5)^2$

2۔ ذیل کے ہر ایک دودرجی مساوات کے لئے جذروں کا حاصل جمع اور حاصل ضرب معلوم کیجئے

(i) $x^2 + 3x - 28 = 0$ (ii) $x^2 + 3x = 0$ (iii) $3 + \frac{1}{a} = \frac{10}{a^2}$ (iv) $3y^2 - y - 4 = 0$

3.6.4 دودرجی مساوات کے حل کرنا Solving a Quadratic Equations

ہم پہلے ہی سیکھ چکے ہیں کہ کس طرح سے ایک، دو اور تین متغیرات والے خطّی مساواتوں کو حل کرتے ہیں۔ یاد کریں کہ متغیرات کی قیمت جو دئے گئے مساوات کی شرط پورا کرتے ہیں مساوات کے **حل** کہلاتے ہیں۔ اس باب میں، ہم دودرجی مساوات کو حل کرنے کے تین طریقے سیکھیں گے۔ جن کے نام یہ ہیں اجزائے ضربی طریقہ، کامل مربع طریقہ اور ضابطہ کے استعمال سے۔

اجزائے ضربی کے طریقے سے دودرجی مساوات کا حل
Solving a quadratic equation by factorisation method.

ہم نیچے دئے گئے مرحلوں کو اختیار کرتے ہوئے دودرجی مساوات کو اجزائے ضربی کے طریقے سے حل کرتے ہیں۔

مرحلہ 1 : مساوات کی عام شکل $ax^2 + bx + c = 0$ میں لکھیں۔

مرحلہ 2 : درمیانی رقم کو توڑ کر دئے گئے مساوات کے اجزائے ضربی نکالیں۔

مرحلہ 3 : اجزائے ضربی نکالنے کے بعد دئے گئے دودرجی مساوات کو دو خطی اجزاء کے حاصل ضرب میں لکھ سکتے ہیں۔

مرحلہ 4 : ہر ایک خطی اجزاء کو صفر کے برابر کرتے ہوئے x کو حل کریں۔ x کی یہ قیمتیوں سے مساوات جذریں ملتے ہیں۔

10th maths 3. algebra 1-35
Wednesday, February 19, 2020 7:28:18 PM

مثال 3.26 حل کیجئے۔ $2x^2 - 2\sqrt{6}\,x + 3 = 0$

حل : $2x^2 - 2\sqrt{6}\,x + 3 = 2x^2 - \sqrt{6}\,x - \sqrt{6}x + 3$ (درمیانی رقم کوتوڑ کر)

$$= \sqrt{2}x\left(\sqrt{2}x - \sqrt{3}\right) - \sqrt{3}\left(\sqrt{2}x - \sqrt{3}\right) = \left(\sqrt{2}\,x - \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}x - \sqrt{3}\right)$$

اب اجزاء کو صفر کے برابر کرنے پر ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\left(\sqrt{2}x - \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}x - \sqrt{3}\right) = 0$$

$$\sqrt{2}x - \sqrt{3} = 0 \quad \text{or} \quad \sqrt{2}x - \sqrt{3} = 0$$

$$\sqrt{2}x = \sqrt{3} \quad \text{or} \quad \sqrt{2}\,x = \sqrt{3}$$

لہذا، حل یہ ہے $x = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

مثال 3.27 حل کیجئے۔ $2m^2 + 19m + 30 = 0$

حل : $2m^2 + 19m + 30 = 2m^2 + 4m + 15m + 30$ $= 2m\,(m+2) + 15(m+2)$

$$= (m + 2)(2m + 15)$$

اب اجزاء کو صفر کے برابر کرنے پر ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے،

$$(m + 2)(2m + 15) = 0$$

$m + 2 = 0$ سے $m = -2$ یا $2m + 15$ سے $m = \dfrac{-15}{2}$ ملتا ہے۔

لہذا، جذریں -2 , $\dfrac{-15}{2}$ ہیں۔

چند مساواتیں جو دو درجی نہیں ہیں انہیں مناسب اندراج (Substitutions) کے ذریعے دو درجی مساوات میں تخفیف کیا جاسکتا ہے۔ اس طرح کی مثالیں نیچے تشریح کئے گئے ہیں۔

مثال 3.28 حل کیجئے۔ $x^4 - 13x^2 + 42 = 0$

حل : فرض کرو کہ $x^2 = a$ تب، $(x^2)^2 - 13x^2 + 42 = a^2 - 13a + 42 = (a - 7)(a - 6)$

دیا گیا ہے، $(a - 7)(a - 6) = 0$، ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے $a = 7$ یا 6

چونکہ، $a = x^2$, $x^2 = 7$ تب، $x = \pm\sqrt{7}$ یا $x^2 = 6$ ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے۔ $x = \pm\sqrt{6}$

لہذا، $x = \pm\sqrt{7}$, $\pm\sqrt{6}$ جذریں ہیں۔

مثال 3.29 حل کیجئے۔ $\dfrac{x}{x-1} + \dfrac{x-1}{x} = 2\dfrac{1}{2}$

حل : فرض کرو کہ $y = \dfrac{x}{x-1}$ تب، $\dfrac{1}{y} = \dfrac{x-1}{x}$

لہذا، $\dfrac{x}{x-1} + \dfrac{x-1}{x} = 2\dfrac{1}{2}$ سے $y + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{2}$ بنتا ہے۔

$$2y^2 - 5y + 2 = 0 \quad \text{تب} \quad y = \frac{1}{2},\ 2$$

10th maths 3. algebra 1-35
Wednesday, February 19, 2020 7:28:19 PM

$\frac{x}{x-1} = \frac{1}{2}$ ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے، $2x = x - 1$ مفہوم $x = -1$

$\frac{x}{x-1} = 2$ ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے، $x = 2x - 2$ مفہوم $x = 2$

لہذا، $x = -1, 2$ جذریں ہیں۔

مشق 3.10



1۔ اجزائے ضربی کے طریقے سے ذیل کے دودرجی مساواتوں کو حل کیجئے۔

(i) $4x^2 - 7x - 2 = 0$ (ii) $3(p^2 - 6) = p(p + 7)3$ (iii) $\sqrt{a(a-7)} = 3\sqrt{2}$

(iv) $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$ (v) $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$

2۔ n ٹیموں کے ایک جوڑ (League) میں والی بال کے کھیلوں کی تعداد کی جدول $G(n) = \frac{n^2 - n}{2}$ سے دیا گیا ہے، جس میں ہر ایک ٹیم کو دوسرے تمام ٹیموں سے ٹھیک ایک مرتبہ کھیلتے ہیں۔ ایک جوڑ کی جدول بندی میں 15 گیم کھیلتے ہیں تو اس جوڑ میں کتنے ٹیم ہیں؟

کامل مربع کے طریقے سے مساوات کا حل

Solving a Quadratic Equation by Completing the Square Method

دودرجی مساوات کے جذر کے لئے ضابطے کی تشکیل کے دوران ہم کامل مربع کے طریقہ کا استعمال کرتے ہیں اسی تکنیک کو ذیل کے مرحلوں کے ذریعے کسی بھی دئے گئے دودرجی مساوات کو حل کرنے کے لئے استعمال کر سکتے ہیں۔

مرحلہ 1 : دودرجی مساوات کی عام شکل $ax^2 + bx + c = 0$ میں لکھیں۔

مرحلہ 2 : مساوات کے دونوں جانب x^2 کے سرعدد سے تقسیم کریں اگر سرعدد 1 نہیں ہے۔

مرحلہ 3 : مستقل عدد کو دائیں طرف منتقل کرتے ہیں۔

مرحلہ 4 : x کے سرعدد کا آدھا معلوم کر کے اسے مربع کرنے کے بعد مساوات کے دونوں طرف جمع کرتے ہیں۔

مرحلہ 5 : بائیں طرف کامل مربع بنائیں اور دائیں طرف مختصر کرتے ہیں۔

مرحلہ 6 : دونوں طرف جذر المربع اٹھائیں اور x کو حل کرتے ہیں۔

مثال 3.30 حل کیجئے۔ $x^2 - 3x - 2 = 0$

حل :

$x^2 - 3x - 2 = 0$

$x^2 - 3x = 2$ مستقل کو RHS کو منتقل کرنے پر

$x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$ (دونوں جانب $\left[\frac{1}{2}\left((x \text{ کے سرعدد})\right)\right]^2$ جمع کرنے پر)

$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{17}{4}$ (LHS کو کامل مربع سے لکھنے پر)

10th maths 3. algebra 1-35
Wednesday, February 19, 2020 7:28:19 PM

$$x - \frac{3}{2} = \pm\frac{\sqrt{17}}{2}$$ (دونوں جانب جذرالمربع اٹھانے پر)

$$x = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2} \text{ or } x = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}$$

لہذا، $x = \frac{3+\sqrt{17}}{2}, \frac{3-\sqrt{17}}{2}$

مثال 3.31 حل کیجئے۔ $2x^2 - x - 1 = 0$

حل :

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = 0$$ (x^2 کے سرعدد کو 2 ÷ کرنے پر 1 بنتا ہے)

$$x^2 - \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x^2 - \frac{x}{2} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} = \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$x - \frac{1}{4} = \pm\frac{3}{4} \Rightarrow x = 1, -\frac{1}{2}$$

ضابطہ کے طریقے سے دودرجی مساوات کا حل : Solving a Quadratic Equation by Formula Method

دودرجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ (سکشن 3.6.2 میں ضابطے بنا چکے ہیں) کے جذریں معلوم کرنے کا ضابطہ

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ ہے۔

دودرجی مساوات کے جذریں معلوم کرنے کا ضابطہ قدیم اہل بابل (Babylonians) جانتے تھے، حالانکہ ہمارے بنائے ہوئے شکل میں نہیں۔ مصرع (verse) جیسے مرحلے بنا کر جذور معلوم کرتے تھے، جو اس دور کی عام عادت تھی۔ اہل بابل اپنے کاشتکاری کے زمینوں کے ابعاد کا انتخاب کرنے کے لئے دودرجی مساوات استعمال کرتے تھے۔

مثال 3.32 ضابطے کے طریقے سے حل کیجئے۔ $x^2 + 2x - 2 = 0$

حل : $x^2 + 2x - 2$ کو عام شکل $ax^2 + bx + c = 0$ سے موازنہ کیجئے۔

$$a = 1, b = 2, c = -2$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

a, b, c کی قیمتوں کو ضابطے میں بھرتی کریں، تو ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے۔

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$$

لہذا، $x = -1 + \sqrt{3}, -1 - \sqrt{3}$

10th maths 3. algebra 1-35
Wednesday, February 19, 2020 7:28:20 PM

مثال 3.33 ضابطے کے طریقے سے حل کیجئے۔ $2x^2 - 3x - 3 = 0$

حل : $2x^2 - 3x - 3 = 0$ کو عام شکل $ax^2 + bx + c = 0$ سے موازنہ کیجئے۔

$$a = 2,\ b = -3,\ c = -3$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

a, b, c کی قیمتوں کو ضابطے میں بھرتی کریں، تو ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے۔

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)} = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{4}$$

لہذا، $x = \frac{3 + \sqrt{33}}{4}$, $x = \frac{3 - \sqrt{33}}{4}$

مثال 3.34 ضابطے کے طریقے سے حل کیجئے۔ $3p^2 + 2\sqrt{5}p - 5 = 0$

حل : $3p^2 + 2\sqrt{5}p - 5 = 0$ کو عام شکل $ax^2 + bx + c = 0$ سے موازنہ کیجئے۔

$$a = 3,\ b = 2\sqrt{5},\ c = -5.$$

$$p = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

a, b, c کی قیمتوں کو ضابطے میں بھرتی کریں، تو ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے۔

$$p = \frac{-2\sqrt{5} \pm \sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2 - 4(3)(-5)}}{2(3)} = \frac{-2\sqrt{5} \pm \sqrt{80}}{6} = \frac{-\sqrt{5} \pm 2\sqrt{5}}{3}$$

لہذا، $x = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $-\sqrt{5}$

مثال 3.35 حل کیجئے۔ $pqx^2 - (p+q)^2 x + (p+q)^2 = 0$

حل : دئے گئے مساوات کے سر اعداد کو عام شکل $ax^2 + bx + c = 0$ سے موازنہ کیجئے۔

$$a = pq,\ b = -(p+q)^2,\ c = (p+q)^2$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

a, b, c کی قیمتوں کو ضابطے میں بھرتی کریں، تو ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے۔

$$x = \frac{-\left[-(p+q)^2\right] \pm \sqrt{\left[-(p+q)^2\right]^2 - 4(pq)(p+q)^2}}{2pq}$$

$$= \frac{(p+q)^2 \pm \sqrt{(p+q)^4 - 4(pq)(p+q)^2}}{2pq}$$

10th maths 3. algebra 1-35
Wednesday, February 19, 2020 7:28:20 PM

$$= \frac{(p+q)^2 \pm \sqrt{(p+q)^2\left[(p+q)^2 - 4pq\right]}}{2pq}$$

$$= \frac{(p+q)^2 \pm \sqrt{(p+q)^2(p^2+q^2+2pq-4pq)}}{2pq}$$

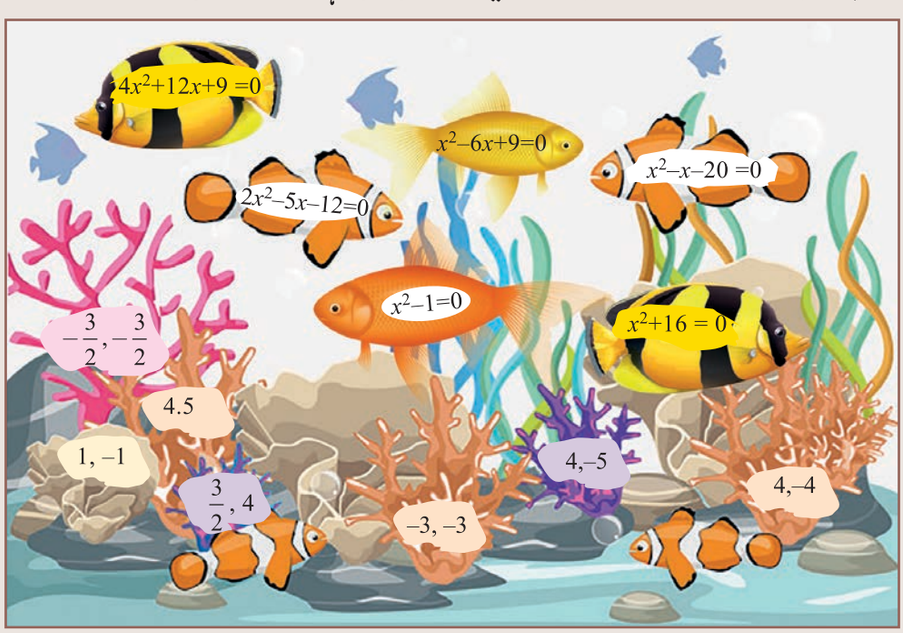
$$= \frac{(p+q)^2 \pm \sqrt{(p+q)^2(p-q)^2}}{2pq}$$

$$= \frac{(p+q)^2 \pm (p+q)(p-q)}{2pq} = \frac{(p+q)\{(p+q) \pm (p-q)\}}{2pq}$$

لہذا، $x = \frac{p+q}{2pq} \times 2p\,,\ \frac{p+q}{2pq} \times 2q$ $\qquad$ $x = \frac{p+q}{q}\,,\ \frac{p+q}{p}$

Activity 3 کارروائی 3

مناسب غذا (جذروں) سے مچھلیوں (مساواتوں) کو کھلایئے ۔ وہ کونسی مچھلی ہے، جسے غذا نہیں ملی ؟



مشق 3.11

1۔ کامل مربع کے طریقے سے ذیل کے دودرجی مساواتوں کو حل کیجئے۔

(i) $9x^2 - 12x + 4 = 0$ $\qquad$ (ii) $\frac{5x+7}{x-1} = 3x + 2$

2۔ ضابطے کے طریقے سے ذیل کے دودرجی مساواتوں کو حل کیجئے۔

(i) $2x^2 - 5x + 2 = 0$ $\qquad$ (ii) $\sqrt{2}f^2 - 6f + 3\sqrt{2} = 0$ $\qquad$ (iii) $3y^2 - 20y - 23 = 0$

(iv) $36y^2 - 12ay + (a^2 - b^2) = 0$

3۔ ایک ڈھلوان سے ایک گیند لڑھکتا ہے اور t سکنڈوں میں فاصلہ $d = t^2 - 0.75t$ قدم سفر کرتا ہے، وقت معلوم کیجئے جب گیند نے 11.25 قدم فاصلے سفر کیا ۔

10th maths 3. algebra 1-35
Wednesday, February 19, 2020 7:28:21 PM

3.6.5 دودرجی مساوات پیش آنے والے مسئلوں کا حل Solving Problems Involving Quadratic Equations

مسئلے کو حل کرنے کے مرحلے :

مرحلہ 1 : لفظی مسئلے کو دودرجی مساوات کی شکل میں تبدیل کرتے ہیں۔

مرحلہ 2 : اوپر کے تین طریقوں میں سے کوئی ایک طریقے سے حاصل شدہ دودرجی مساوات کو حل کرتے ہیں۔

مرحلہ 3 : حاصل شدہ حسابی حل کو سوال میں پوچھے گئے جملہ سے تعلق جوڑتے ہیں۔

مثال 3.36 دوسال پہلے کمال کی عمر (سالوں میں) اور آج سے چار سال بعد کی عمر کا حاصل ضرب موجودہ عمر کے دُگنا سے ایک سال زیادہ ہے۔ موجودہ عمر معلوم کیجئے

حل : فرض کرو کہ کمال کی موجودہ عمر x سال ہے۔

دوسال پہلے، اس کی عمر $= (x-2)$ سال

آج سے چار سال بعد اس کی عمر $= (x+4)$ سال

دیا گیا ہے، $(x-2)(x+4) = 1+2x$

$x^2+2x-8 = 1+2x$ سے $(x-3)(x+3)$ حاصل ہوتا ہے تو $x = \pm 3$

لہذا، $x = 3$ (-3 کو رد کرتے ہیں کیونکہ عمر منفی نہیں ہوسکتی ہے)

کمال کی موجودہ عمر 3 سال ہے۔

مثال 3.37 17 قدم (feet) لمبائی والی سیڑھی ایک دیوار پر جُھکائی گئی ہے۔ اگر سیڑھی، عمودی دیوار اور زمین جو دیوار کے قدم سے سیڑھی تک ایک مثلث قائمۃ الزاویہ بناتی ہے، دیوار کے قدم سے سیڑھی کے قدم کے درمیان کا فاصلہ، دیوار کی اونچائی سے 7 قدم کم ہے؟

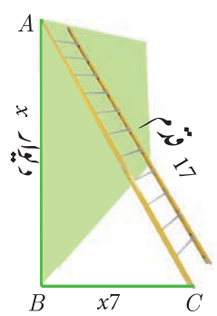


Fig. 3.7

حل : فرض کرو کہ دیوار کی اونچائی $AB = x$ قدم

دئے گئے معطیات کے تحت $BC = (x-7)$ قدم

مثلث قائمۃ الزاویہ ABC میں، $AC = 17$ قدم $BC = (x-7)$ قدم

مسئلہ فیثاغورث سے، $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$(17)^2 = x^2 + (x-7)^2$; $289 = x^2 + x^2 - 14x + 49$

$x^2 - 7x - 120 = 0$ ، لہذا، $(x-15)(x+8) = 0$ تب، -8 (یا) $x = 15$

لہذا، دیوار کی اونچائی $AB = 15$ قدم (-8 کو رد کرتے ہیں کیونکہ اونچائی منفی نہیں ہوسکتی ہے۔)

مثال 3.38 ہنسوں کے ایک جھنڈ میں x^2 پرندے تھے۔ جیسے ہی بادل گھیرنے لگے، $10x$ پرندے جھیل کو چلے گئے۔ ایک آٹھویں پرندے باغ کی طرف چلے گئے۔ باقی تین جوڑیاں پانی میں کھیلنے لگے۔ کل کتنے ہنس تھے؟

حل : x^2 ہنس تھے۔

دئے گئے معطیات کے تحت $x^2 - 10x - \frac{1}{8}x^2 = 6$ سے ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے۔ $7x^2 - 80x - 48 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{80 \pm \sqrt{6400 - 4(7)(-48)}}{14} = \frac{80 \pm 88}{14}$$

10th maths 3. algebra 1-35
Wednesday, February 19, 2020 7:28:22 PM

لہذا، $x = 12, -\frac{4}{7}$.

یہاں، $x = -\frac{4}{7}$ ممکن نہیں ہے کیونکہ ہنس کی تعداد منفی نہیں ہوسکتی۔ غرض $x = 12$

لہذا، کل ہنس کی تعداد $x^2 = 144$ ہے۔

مثال 3.39 ایک پیسنجر ٹرین چنّی سے ویرودا چلم کو 240 km کے فاصلے کا طئے کرنے کے لئے یکسپرس ٹرین سے 1 گھنٹہ زیادہ ہوتا ہے پیسنجر ٹرین کی رفتار یکسپرس ٹرین سے 20 km فی گھنٹہ کم ہے۔ دونوں ٹرینوں کی اوسط رفتار معلوم کیجئے۔

حل : فرض کرو کہ پیسنجر ٹرین کی اوسط رفتار x km/hr. ہے۔

تو یکسپرس ٹرین کی اوسط رفتار $(x + 20)$km/hr ہوگا۔

240 km کے فاصلے کو طے کرنے کے لئے پیسنجر ٹرین کے سفر کا وقت $240 \text{ km} = \frac{240}{x}$ hr

240 km کے فاصلے کو طئے کرنے کے لئے یکسپرس ٹرین کے سفر کا وقت دیا گیا ہے، $\frac{240}{x} = \frac{240}{x+20} + 1$

$240\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+20}\right] = 1$ سے $240\left[\frac{x+20-x}{x(x+20)}\right] = 1$ ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے، $4800 = (x^2 + 20x)$

$x^2 + 20x - 4800$ سے ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے، $(x + 80)(x - 60) = 0$ $x = -80$ یا 60.

لہذا، $x = 60$ (-80 کو رد کرتے ہیں کیونکہ رفتار منفی نہیں ہوسکتی) پیسنجر ٹرین کی اوسط رفتار 60 km/hr ہے۔

یکسپرس ٹرین کی اوسط رفتار 80 km/hr

مشق 3.12

1۔ اگر ایک عدد اور اس کے معکوس کے درمیان کا فرق $\frac{24}{5}$ ہو تو عدد معلوم کیجئے۔

2۔ 12 m کو 16 m کے ایک باغ کے اطراف ’w‘ میٹر چوڑا پیدل چلنے کے لئے راستہ بنایا جاتا ہے۔ اس طرح کل رقبہ 285 m² کو بڑھ جاتا ہے۔ راستے کی چوڑائی w معلوم کیجئے۔

3۔ ایک بس 90 km کا فاصلہ یکساں رفتار سے سفر کرتی ہے۔ اگر رفتار 15 km/hr زیادہ ہوتا تو سفر کے وقت میں 30 منٹ کی کمی ہوتی ہے ۔ بس کی اصل رفتار معلوم کیجئے۔

4۔ ایک لڑکی کی عمر اس کے بہن کی عمر کی دُگنی ہے پانچ سال بعد، ان کے عمروں کا حاصل ضرب (سالوں میں) 375 ہوگا۔ موجودہ عمریں دریافت کیجئے۔

5۔ 20 m قطر والے ایک دائری میدان کے احاطے کے ایک نقطہ پر ایک کھمبا کھڑا کیا جاتا ہے اس طرح کہ اس نقطہ سے احاطہ پر قطر کے دو مخالف نقاط p اور q پر لگائے گئے گیٹوں کے درمیان کے فاصلوں کا فرق $4m$ ہے۔ کیا اس طرح ممکن ہے؟ اگر جواب ہاں ہو تو دونوں گیٹوں سے کتنے فاصلہ پر کھمبا لگایا جائے۔

6۔ $2x^2$ کی کالے مکھیوں کی جماعت ہے، اس جماعت کے آدھے کا جذر المربع ایک درخت کو گئے، پھر آٹھ نواں اسی درخت کو گئے باقی دو ایک خوشبودار کنول سے چمٹ گئیں۔ کل کتنی مکھیاں تھیں ؟

10th maths 3. algebra 1-35
Wednesday, February 19, 2020 7:28:22 PM

7۔ چند آدمیوں کے گروہ (Group) دو مخالف (گیلری) نگار خانے میں موسیقی جائے جارہے ہیں۔ پہلے گیلری میں 4 گلوکار (گانے والے) گانا گارہے ہیں اور دوسرے گیلری میں 9 گلوکار گارہے ہیں، دونوں گیلری ایک دوسرے سے $70\,m$ کے فاصلہ سے دوری پر ہیں۔ گانے والوں کی آواز کو یکساں شدت سے سننے کے لئے ایک آدمی کو کہاں کھڑے ہونا چاہئے۔ (اشارہ : آواز کی شدت کی نسبت ان کے نظیری فاصلوں کے نسبتوں کے مربع کے مساوی ہے۔)

8۔ ایک مربعی کھیت جس کا ضلع $10\,m$ ہے۔ اس کے مرکز میں ایک مربعی پھولوں کا باغیچہ بنایا جاتا ہے جس کے اطراف ایک ریتیلی راستہ چھوڑا جاتا ہے پھولوں کے تخت اور ریتیلی راستے کا کل خرچ بالترتیب ₹ 3 اور ₹ 4 فی مربع میٹر پر ₹ 364 ہے۔ ریتیلی راستے کی چوڑائی معلوم کیجئے۔

9۔ ایک مثلث قائمۃ الزاویہ کا وتر 25 سم اور اس کا احاطہ 56 سم ہے۔ سب سے چھوٹے ضلع کی لمبائی معلوم کیجئے۔

3.6.6 ایک دودرجی مساوات کے جذروں کی نوعیت Nature of Roots of a Quadratic Equation

دودرجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ ، $a \neq 0$ کے جذریں دودرجی ضابطہ $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ استعمال کرکے معلوم کیا جاتا ہے، یہاں $b^2 - 4ac$ کو دودرجی مساوات کی **امتیازی خصوصیت** (Δ سے ظاہر کیا جاتا ہے) کہا جاتا ہے۔ ذیل میں جذروں کی نوعیت کا فیصلہ ہوتا ہے۔

امتیازی خصوصیت کی قیمت $\Delta = b^2 - 4ac$	جذروں کی نوعیت
$\Delta > 0$	حقیقی اور غیر مساوی
$\Delta = 0$	حقیقی اور مساوی
$\Delta < 0$	حقیقی جذر نہیں ہوتے (مجازی جذر)

مثال 3.40 ذیل کے دودرجی مساواتوں کے جذروں کی نوعیت معلوم کیجئے۔

(i) $x^2 - x - 20 = 0$ (ii) $9x^2 - 24x + 16 = 0$ (iii) $2x^2 - 2x + 9 = 0$

حل :

(i) $x^2 - x - 20 = 0$

یہاں $a = 1$, $b = -1$, $c = -20$

اب $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-20) = 81$

یہاں $\Delta = 81 > 0$ ، اس لئے دی گئی مساوات کے جذر حقیقی اور غیر مساوی ہیں۔

10th maths 3. algebra 1-35
Wednesday, February 19, 2020 7:28:23 PM

(ii) $9x^2 - 24x + 16 = 0$

یہاں $a=9 \ , b = -24 \ , c=16$

اب $\Delta = b^2 - 4ac = \left(-24\right)^2 - 4\left(9\right)\left(16\right) = 0$

یہاں، $\Delta = 0$ اس لئے دی گئی مساوات کے جذر حقیقی اور مساوی۔

(iii) $2x^2 - 2x + 9 = 0$

یہاں $a=2 \ , b = -2 \ , c=9$

اب $\Delta = b^2 - 4ac = \left(-2\right)^2 - 4\left(2\right)\left(9\right) = -68$

یہاں $\Delta = -68 < 0$ مساوات کے جذر حقیقی نہیں ہیں

مثال 3.41 (i) k کی قیمت دریافت کیجئے جب کہ دودرجی مساوات $kx^2 - (8k + 4)x + 81 = 0$ کے جذر حقیقی اور مساوی ہیں؟

(ii) k کی قیمت معلوم کیجئے جب کہ دی گئی مساوات $(k + 9)x^2 + (k + 1)x + 1 = 0$ کے جذر حقیقی نہیں ہیں؟

حل :

(i) $kx^2 - (8k + 4)x + 81 = 0$

چونکہ، مساوات کے جذر حقیقی اور مساوی ہیں $\Delta = 0$

یعنی $b^2 - 4ac = 0$

یہاں $a = k \ , b = -(8k + 4), \ c=81$

یعنی $\left[-(8k + 4)\right]^2 - 4(k)(81) = 0$

$64k^2 + 64k + 16 - 324k = 0$

$64k^2 - 260k + 16 = 0$

4 سے تقسیم کرنے پر ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے۔ $16k^2 - 65k + 4 = 0$

پھر $(16k - 1)(k - 4) = 0$ یا $k=\frac{1}{16}$ $k=4$

(ii) $(k + 9)x^2 + (k + 1)x + 1 = 0$

(ii) چونکہ، مساوات کے جذر حقیقی نہیں ہیں $\Delta < 0$

یعنی $b^2 - 4ac < 0$

یہاں $a = k + 9, \ b = k + 1, \ c=1$

یعنی $(k + 1)^2 - 4(k + 9)(1) < 0$

$k^2 + 2k + 1 - 4k - 36 < 0$

$k^2 - 2k - 35 < 0$

$(k + 5)(k - 7) < 0$

لہذا، $-5 < k < 7$ {اگر $\alpha < \beta$ اور اگر $(x - \alpha)(x - \beta) < 0$ ہوتو $\alpha < x < \beta$}

مثال 3.42 ثابت کروکہ مساوات $x^2(p^2 + q^2) + 2x(pr + qs) + r^2 + s^2 = 0$ کے جذر حقیقی نہیں ہیں۔

اگر $ps = qr$ ہوتو ثابت کروکہ جذر حقیقی اور مساوی ہیں۔

10th maths 3. algebra 1-35
Wednesday, February 19, 2020 7:28:23 PM

حل : دی گئی دودرجی مساوات $x^2(p^2+q^2)+2x(pr+qs)+r^2+s^2=0$

یہاں $a=p^2+q^2,\ b=2(pr+qs),\ c=r^2+s^2$

اب $\Delta = b^2-4ac = \left[2(pr+qs)\right]^2-4(p^2+q^2)(r^2+s^2)$

$$= 4\left[p^2r^2+2pqrs+q^2s^2-p^2r^2-p^2s^2-q^2r^2-q^2s^2\right]$$

$$= 4\left[-p^2s^2+2pqrs-q^2r^2\right] = -4\left[(ps-qr)^2\right] < 0 \qquad \ldots(1)$$

لہذا، جذر حقیقی نہیں ہیں۔ $\Delta = b^2-4ac < 0$

اگر $ps=qr$ ہوتو $\Delta = -4\left[ps-qr\right] = -4\left[qr-qr\right] = 0$ (1) استعمال کرکے)

غرض $\Delta = 0$ اگر $ps=qr$ اوراس لئے جذر حقیقی اورمساوی ہیں۔

مشق 3.13

1۔ مندرجہ ذیل کے دودرجی مساوات کے جذروں کی نوعیت دریافت کیجئے۔

(i) $15x^2+11x+2=0$ (ii) $x^2-x-1=0$ (iii) $\sqrt{2}t^2-3t+3\sqrt{2}=0$

(iv) $9y^2-6\sqrt{2}y+2=0$ (v) $9a^2b^2x^2-24abcdx+16c^2d^2=0,\ a\neq0\ ,\ b\neq0$

2۔ k کی قیمت (قیمتیں) معلوم کیجئے جب کہ ذیل کے مساواتوں کے جذر حقیقی اورمساوی ہیں۔

(i) $(5k-6)x^2+2kx+1=0$ (ii) $kx^2+(6k+2)x+16=0$

3۔ اگر $(a-b)x^2+(b-c)x+(c-a)=0$ کے جذر حقیقی اورمساوی ہوں تو ثابت کروکہ c,b,a حسابی سلسلہ میں ہیں۔

4۔ اگر b,a حقیقی ہیں تو ثابت کروکہ مساوات $(a-b)x^2-6(a+b)x-9(a-b)=0$ کے جذر حقیقی اورغیر مساوی ہیں۔

5۔ مساوات $(c^2-ab)x^2-2(a^2-bc)x+b^2-ac=0$ کے جذر حقیقی اورمساوی ہیں تو ثابت کیجئے کہ $a=0$ یا $a^3+b^3+c^3=3abc$

ذرا سوچئے

دئے گئے ہرایک جملہ میں خالی ڈبوں کو پر کیجئے، اس طرح کہ دودرجی کثیر رقمی ایک کامل مربع بنتا ہے۔

(i) x^2+14x+ ☐ (ii) x^2-24x+ ☐ (iii) p^2+2qp+ ☐

3.6.7 دودرجی مساوات کے جذروں اورسراعداد کا درمیانی تعلق

The Relation between Roots and Coefficients of a Quadratic Equation

فرض کروکہ α اور β مساوات $ax^2+bx+c=0$ کے جذریں ہیں تو

$$\alpha = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \beta = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\alpha+\beta = \frac{-b}{a} = \frac{x \text{ کا ضریب}}{x^2 \text{ کا ضریب}}$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{\text{مستقل رقم}}{x^2 \text{ کا ضریب}}$$

10th maths 3. algebra 1-35
Wednesday, February 19, 2020 7:28:24 PM

Progress Check — اپنی پیش رفت کی جانچ

دودرجی مساوات	دودرجی مساوات کے جذر α اور β	x^2, x اور مستقل کے سراعداد	جذروں کا حاصل جمع $\alpha+\beta$	جذروں کا حاصل ضرب $(\alpha\beta)$	$-\frac{b}{a}$	$\frac{c}{a}$	نتیجہ
$4x^2-9x+2=0$							
$\left(x-\frac{4}{5}\right)^2=0$							
$2x^2-15x-27=0$							

مثال 3.43 اگر مساوات $4x^2-13x+k=0$ کے جذروں کے درمیان کا فرق 17 ہو تو k معلوم کیجئے۔

حل : $x^2-13x+k=0$ یہاں $a=1, b=-13, c=k$

فرض کرو کہ α، β مساوات کے جذریں ہیں۔

$$\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{-(-13)}{1}=13 \quad ...(1) \qquad \alpha-\beta=17 \quad ...(2)$$

(1) + (2) سے ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے، $2\alpha=30$ سے $\alpha=15$

لہذا، $15+\beta=13$ (1) سے $\beta=-2$ ملتا ہے۔

مگر $\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{k}{1}$ سے $15x(-2)=k$ ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے۔ $k=-30$

ذرا سوچئے

اگر $ax^2+bx+c=0$ کا مستقل رقم صفر ہو تو جذور کا حاصل جمع اور حاصل ضرب بالترتیب.....اور ..... ہے۔

مثال 3.44 اگر α اور β، $x^2+7x+10=0$ کے جذریں ہیں تو ذیل کی قیمتیں معلوم کیجئے۔

(i) $(\alpha-\beta)$ (ii) $\alpha^2+\beta^2$ (iii) $\alpha^3-\beta^3$ (iv) $\alpha^4+\beta^4$ (v) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$ (vi) $\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}$

حل :

$x^2+7x+10=0$ یہاں $a=1$, $b=7$, $c=10$

اگر α اور β، مساوات کے جذریں ہیں تو

$$\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{-7}{1}=-7\,;\ \alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{10}{1}=10$$

(i) $\alpha-\beta=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{(-7)^2-4\times10}=\sqrt{9}=3$

(ii) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-7)^2-2\times10=29$

(iii) $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha)-\beta=(3)^3+3(10)(3)=117$

(iv) $\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2=29^2-2\times(10)^2=641$ (چونکہ (ii) سے $\alpha^2+\beta^2=29$)

(v) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{49-20}{10}=\frac{29}{10}$

10th maths 3. algebra 36-71
Monday, February 24, 2020 11:31:41 AM

(vi) $\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha} = \frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}$

$= \frac{(-343)-3\left(10\times(-7)\right)}{10} = \frac{-343+210}{10} = \frac{-133}{10}$

مثال 3.45 اگر α اور β ، مساوات $3x^2+7x-2=0$ کے جذریں ہیں تو ذیل کی قیمتیں معلوم کیجئے۔

(i) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$ (ii) $\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}$

حل : $3x^2+7x-2=0$ یہاں $a=3$, $b=7$, $c=-2$

چونکہ، α,β مساوات کے جذریں ہیں

(i) $\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{-7}{3}$; $\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{-2}{3}$

$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{\left(\frac{-7}{3}\right)^2-2\left(\frac{-2}{3}\right)}{\frac{-2}{3}} = \frac{-61}{6}$

(ii) $\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha} = \frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta} = \frac{\left(-\frac{7}{3}\right)^3-3\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{7}{3}\right)}{-\frac{2}{3}} = \frac{469}{18}$

مثال 3.46 اگر α اور β مساوات $2x^2-x-1=0$ کے جذریں ہیں تو مساوات بنائیے جن کے جذریں دئے گئے ہیں۔

(i) $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta}$ (ii) $\alpha^2\beta,\ \beta^2\alpha$ (iii) $2\alpha+\beta,\ 2\beta+\alpha$

حل : $2x^2-x-1=0$ یہاں $a=2, b=-1, c=-1$

$\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{-(-1)}{2}=\frac{1}{2}$; $\alpha\beta=\frac{c}{a}=-\frac{1}{2}$

(i) دئے گئے جذور $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta}$

جذروں کا حاصل جمع $= \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}=-1$

جذروں کا حاصلِ ضرب $= \frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{-\frac{1}{2}}=-2$

x^2- (جذروں کا حاصل جمع) $x+$ (جذروں کا حاصل ضرب) $=0$ درکار مساوات ہے۔

$x^2-(-1)x-2=0$ سے ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے $x^2+x-2=0$

(ii) دئے گئے جذور $\alpha^2\beta,\ \beta^2\alpha$

جذروں کا حاصل جمع $\alpha^2\beta+\beta^2\alpha=\alpha\beta(\alpha+\beta)=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$

10th maths 3. algebra 36-71
Monday, February 24, 2020 11:31:42 AM

جذروں کا حاصل ضرب $(\alpha^2\beta)\times(\beta^2\alpha)=\alpha^3\beta^3=(\alpha\beta)^3=\left(-\frac{1}{2}\right)^3=-\frac{1}{8}$

x^2- (جذروں کا حاصل جمع) $x+$ (جذروں کا حاصل ضرب) $=0$ درکار مساوات ہے۔

$x^2-\left(-\frac{1}{4}\right)x-\frac{1}{8}=0$ سے ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے $8x^2+2x-1=0$

(iii) $2\alpha+\beta,\ 2\beta+\alpha$

جذروں کا حاصل جمع $=2\alpha+\beta+2\beta+\alpha=3(\alpha+\beta)=3\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$

جذروں کا حاصل ضرب $=(2\alpha+\beta)(2\beta+\alpha)=4\alpha\beta+2\alpha^2+2\beta^2+\alpha\beta$

$=5\alpha\beta+2(\alpha^2+\beta^2)=5\alpha\beta+2\left[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\right]$

$=5\left(-\frac{1}{2}\right)+2\left[\frac{1}{4}-2\times-\frac{1}{2}\right]=0$

x^2- (جذروں کا حاصل جمع) $x+$ (جذروں کا حاصل ضرب) $=0$ درکار مساوات ہے۔

$x^2-\frac{3}{2}x+0=0$ سے ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے $2x^2-3x=0$

مشق 3.14

1۔ ذیل کے ہر ایک جملہ کو $\alpha\beta$ اور $\alpha+\beta$ کے لحاظ سے لکھئے۔

(i) $\frac{\alpha}{3\beta}+\frac{\beta}{3\alpha}$ (ii) $\frac{1}{\alpha^2\beta}+\frac{1}{\beta^2\alpha}$ (iii) $(3\alpha-1)(3\beta-1)$ (iv) $\frac{\alpha+3}{\beta}+\frac{\beta+3}{\alpha}$

2۔ مساوات $2x^2-7x+5=0$ کے جذریں α اور β ہیں۔ ذیل کی قیمت معلوم کیجئے۔(مساوات کو حل کئے بغیر)

(i) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ (ii) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$ (iii) $\frac{\alpha+2}{\beta+2}+\frac{\beta+2}{\alpha+2}$

3۔ مساوات $x^2+6x-4=0$ کے جذریں α اور β ہیں دو درجی مساوات معلوم کیجئے جن کے جذریں یہ ہیں

(i) α^2 اور β^2 (ii) $\frac{2}{\alpha}$ اور $\frac{2}{\beta}$ (iii) $\alpha^2\beta$ اور $\beta^2\alpha$

4۔ اگر $7x^2+ax+2=0$ کے جذریں α,β ہیں اور اگر $\beta-\alpha=\frac{-13}{7}$ ہے تو a کی قیمت معلوم کیجئے۔

5۔ اگر مساوات $2y^2-ay+64=0$ کا ایک جذر دوسرے جذر کا دُگنا ہے تو a کی قیمت معلوم کیجئے۔

6۔ اگر مساوات $3x^2+kx+81=0$ (حقیقی جذریں رکھنے والے) کا ایک جذر دوسرے جذر کا مربع ہے تو k کی قیمت معلوم کیجئے۔

100 95 75 25 5 0
10th maths 3. algebra 36-71
Monday, February 24, 2020 11:31:42 AM

3.7 متغیرات کی ترسیمات Graph of Variations

متغیرات Variables: طہورہ روزانہ اپنے اسکول پہنچنے کے لئے گھر سے سائیکل میں یکساں رفتار سے سفر کرتی ہے۔ حسابی طور پر آپ اسے ایک مساوات $d = rt$ سے اظہار کر سکتے ہیں جس میں فاصلہ کے لئے d، وقت کے لئے t اور رفتار کی شرح کے لئے r ہے۔



فرض کیجئے کہ آپ کو یہ فاصلہ معلوم کرنا ہے کہ اس نے 15 منٹوں میں 20 کلومیٹر فی گھنٹہ کی شرح سے فاصلہ طے کیا ہے۔ $r = 20$ اور $t = ¼$ (کیسے؟) اور اگر ہمیں d معلوم کرنا ہے تو $rt = 20 \times ¼ = 5\ km$

یہاں پر ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ d ایک انحصار والا متغیر (Dependent variable) ہے، r اور t آزاد متغیرات (Independent Variable) ہیں۔ d سے طے کردہ فاصلہ اس کی شرح r اور لئے گئے وقت t پر منحصر ہے۔

لہٰذا، ایک آزاد متغیر ایک مقدار کو ظاہر کرتی ہے، جو ایک دی گئی صورت حال میں ہوتی ہے۔ جب کہ انحصار والا متغیر ایک مقدار ہے جس کی قیمت آزاد متغیر کو کیسے برتا جائے، اس پر منحصر ہے۔



وہ مساوات جو کسی جملہ میں دو متغیرات کے درمیان کے تعلق کی وضاحت کرتا ہے، یہ ان متغیرات کو ظاہر کرتے ہیں۔

فرض کیجئے کہ رفیق نامی ایک شخص جو ایک ہوٹل میں ملازم ہے، اسے 50 ₹ فی گھنٹہ کے حساب سے مزدوری دی جاتی ہے۔ یہاں پر دو متغیرات ہیں۔ ایک اس کی ماہانہ تنخواہ اور دوسرا اس کے کام کرنے کے گھنٹے۔ ان میں سے کونسا انحصار والا متغیر ہے؟

مستقل (Constants) :

ایک دائرہ کا نصف قطر دیا گیا ہے تو آپ اس کا رقبہ کیسے معلوم کریں گے۔ اگر رقبہ A ہو اور نصف قطر r ہو تو اس کا ضابطہ $A = \pi r^2$ ہے۔ یہاں پر رقبہ A، اس کے نصف قطر r پر منحصر ہے۔ چنانچہ A ایک انحصار والا متغیر اور نصف قطر r، آزاد متغیر ہے۔ مگر یہاں پر ہم π کو کیا کہیں گے؟ یہ ایک ایسی قیمت ہے جو پوری صورت حال میں یکساں رہتی ہے۔ یہ مستقل کہلاتی ہے۔

مستقل ایک مقدار ہے جو کسی مخصوص حسابی عمل کے دوران ایک متعین قیمت رکھتی ہے۔

متغیر کی دو قسمیں

جب دو اشیاء ایک تناسب میں ہوتے ہیں تو ان دونوں کے درمیان ایک تعلق پایا جاتا ہے، جس کی وجہ سے اگر ایک کی قیمت میں تبدیلی آتی ہے تو دوسرے کی قیمت میں بھی تبدیلی آئے گی۔

ہم یہاں پر دو قسم کے متغیرات کو دیکھتے ہیں۔

i) راست متغیر (Direct Variation)

ii) بلا راست متغیر (Indirect Variation)

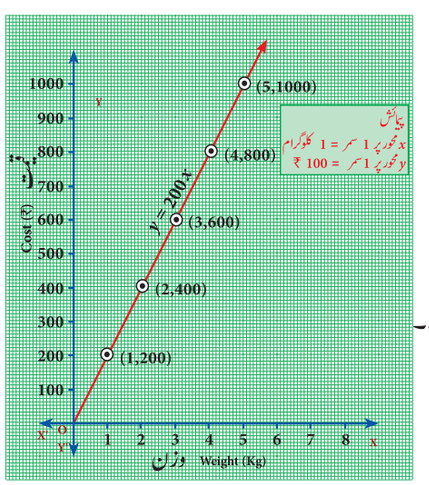


Fig. 3.8

(I) راست متغیر

جب آپ بازار سے زیادہ مقدار میں سیب خریدنے جاتے ہو تو تم کو زیادہ رقم خرچ کرنی پڑتی ہے۔ اگر ایک کلو سیب کی قیمت 200 ₹ ہو تو تم اسے اس طرح ادا کرو گے۔

وزن (Kg)	1	2	3	4	5
قیمت (₹)	200	400	600	800	1000

10th maths 3. algebra 36-71
Monday, February 24, 2020 11:31:44 AM

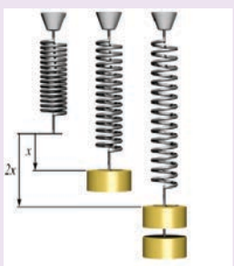
ہم دیکھتے ہیں کہ $\frac{1}{200} = \frac{2}{400} = \frac{3}{600} = \frac{4}{800} = \frac{5}{1000} = \ldots$

اس قسم کے تناسب کے متغیرات کو **راست متغیر** کہا جاتا ہے۔ یہاں پر رقم کو معلوم کرنے کے لئے وزن کو مستقل 200 سے ضرب دیا جاتا ہے۔

اگر ہم متغیر وزن کو x سے اظہار کریں اور متغیر قیمت کو y سے اظہار کریں تو ہم اسے الجبرائی طور پر $y = 200x$ سے ظاہر کریں گے۔ یہاں پر مستقل کا ضریب 200 ہے۔

اگر $\frac{y}{x} = k$ ہو جو جس میں k ایک مثبت عدد (ایک مستقل) ہو تو یہ کہا جائے گا کہ x اور y راست طور پر تغیر پاتے ہیں۔ یہاں پر k کو تناسب کا مستقلہ کہا جائے گا۔

کیا تم جانتے ہو؟



حقیقی زندگی میں علم ریاضی: یہ خاکہ اس بات کو ظاہر کرتا ہے کہ اگر قوت کو دوگنا کیا جائے تو فاصلہ بھی دوگنا ہوگا۔ اس کو ''ہوک کا کلیہ'' بھی کہا جاتا ہے۔ جس کا بیان اس طرح سے ہے $F = kx$، جس میں F وہ درکار قوت ہے، جو کمانی (اسپرنگ) کو اس کے مقام سے x فاصلہ کو ہٹائے۔ ہٹاؤ کو دوگنا کرنے کے لئے ہمیں کمانی (اسپرنگ) کی قوت کو دوگنا کرنا ہوگا۔ تناسبیت کا مستقلہ k ، اسپرنگ کے تناؤ (سختی) پر منحصر ہے۔ چنانچہ یہ راست تناسب کی ایک مثال ہے۔

راست تناسب کا مشاہدہ کرنا

راست تناسب کی شناخت کرنے کے لئے ہمیں یہ دیکھنا ہوگا کہ یہ مساوات $y = kx$ کی شکل میں ہے یا نہیں۔ جس میں k تناسبیت کا مستقلہ ہو۔ لہٰذا، ایک مساوات جیسے $y = 5x$، متغیرات میں ہمیشہ راست تناسب ظاہر کرے گا۔

ذرا سوچئے

اگر متغیرات x اور y کو مساوات $3y - 7x = 0$ سے جوڑا جائے تو تم اسے کیا کہو گے؟ یہ بھی راست تناسب کو ظاہر کرتا ہے۔ کیسے ؟ اس کے بارے میں سوچئے۔ ایسی صورت میں تناسبیت کا مستقلہ کیا ہوگا؟

ترسیم پر غور کیجئے

طے کیا گیا فاصلہ اور لیا گیا وقت تناسب میں ہے، مگر یہ ہمیں کیسے پتہ چلے گا؟ غور کیجئے کہ

i) ترسیم ایک خط مستقیم ہوگی۔

ii) خط مبدا سے گزرے گی۔ جب یہ دونوں خصوصیات ایک ترسیم میں پائی جائیں تو ہم یہ کہیں گے کہ دونوں مقداریں راست تناسب میں ہیں۔

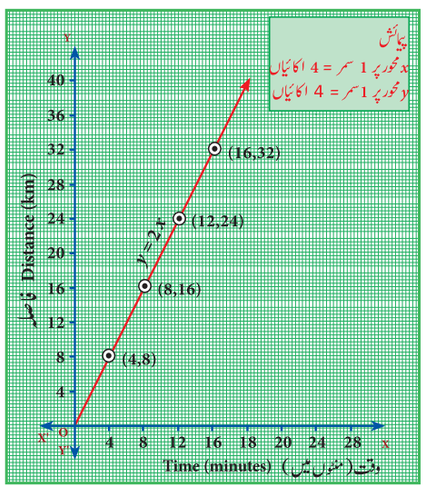


Fig. 3.9

کیا تم اسے اس ترسیم میں دیکھ سکتے ہو؟

وقت (منٹوں میں)	4	8	12	16
فاصلہ (کلومیٹر میں)	8	16	24	32

اگر ایک متغیر دوگنا ہوتا ہے تو دوسرا متغیر بھی دوگنا ہو جائے گا۔ اس سے ہم اس تعلق $d = rt$ کو پہچان سکتے ہیں اور آسانی کے ساتھ تناسبیت کے مستقلہ کو معلوم کر سکتے ہیں۔

100 95 75 25 5 0

10th maths 3. algebra 36-71
Monday, February 24, 2020 11:31:44 AM

مثال 3.47 طہورہ نے مختلف جسامت والے 6 دائرے بنائے۔ ہر دائرے کے قطر اور احاطہ کے درمیان تعلق کے لئے ترسیم بنایئے جیسا کہ جدول میں بتایا گیا ہے اور انہیں استعمال کر کے دائرے کا احاطہ معلوم کیجئے، جب قطر 6 سمر ہو۔

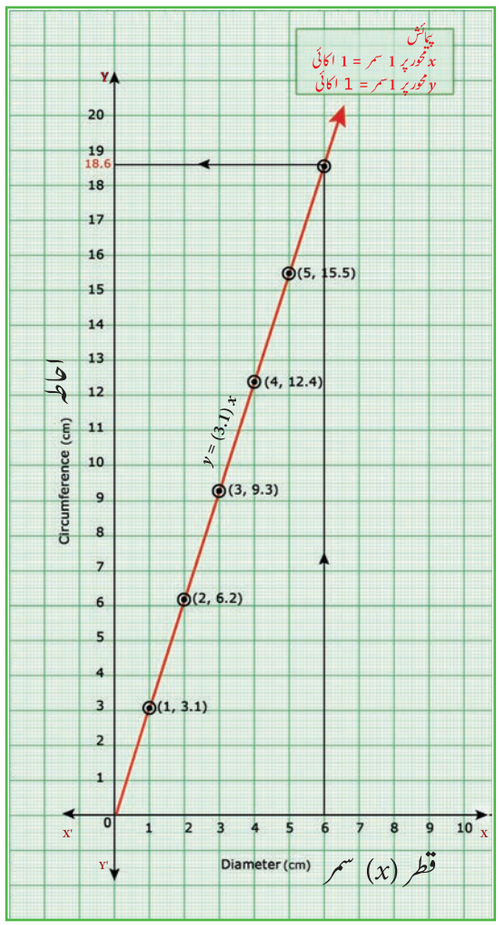


Fig. 3.10

قطر (x) سمر	1	2	3	4	5
احاطہ (y) سمر	3.1	6.2	9.3	12.4	15.5

حل :

جدول سے ہم دیکھتے ہیں کہ جیسے جیسے x بڑھتا ہے، y بھی ویسے ویسے بڑھتا ہے۔ چنانچہ یہ **راست متغیر** ہے۔

فرض کیجئے کہ $y = kx$ ہے جس میں k تناسبیت کا مستقلہ ہے۔

دی گئی قیمتوں سے ہمیں یہ حاصل ہوا

$$k = \frac{3.1}{1} = \frac{6.2}{2} = \frac{9.3}{3} = \frac{12.4}{4} = \ldots = 3.1$$

جب تم ان نقاط (1,3.1),(2, 6.2), (3,9.3),(4,12.4)، (5,15.5) کو مرتسم کروگے تو تمہیں $y=3.1x$ کی مساوات سے ایک خط مستقیم حاصل ہوگا۔

ترسیم سے پتہ چلتا ہے کہ جب قطر 6 سمر ہو تو دائرے کا احاطہ 18.6 سمر ہوگا۔

مثال 3.48 ایک بس یکساں رفتار سے 50 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے حرکت کر رہی ہے۔ فاصلہ-وقت کی ترسیم کھینچئے اور درج ذیل معلوم کیجئے۔

(i) متغیر کا مستقلہ (ii) 1½ گھنٹے میں وہ کتنا فاصلہ طے کرے گی۔

(iii) ترسیم کی مدد سے 300 کلومیٹر کا فاصلہ طے کرنے کے لئے درکار وقت معلوم کیجئے۔

حل :

فرض کیجئے کہ لیا گیا وقت x منٹوں میں ہے اور طے کیا گیا فاصلہ y کلومیٹر میں ہے۔

لیا گیا وقت x (منٹوں میں)	60	120	180	240
فاصلہ y (کلومیٹر میں)	50	100	150	200

(i) غور کیجئے کہ جیسے جیسے وقت بڑھتا ہے، فاصلہ بھی بڑھنے لگتا ہے۔ چنانچہ یہ متغیر، راست متغیر ہے۔ یہ $y = kx$ کی شکل میں ہے۔

متغیر کا مستقلہ

$$k = \frac{y}{x} = \frac{50}{60} = \frac{100}{120} = \frac{150}{180} = \frac{200}{240} = \frac{5}{6}$$

10th maths 3. algebra 36-71
Monday, February 24, 2020 11:31:47 AM

لہٰذا تعلق کو اس طرح ظاہر کیا جاسکتا ہے

$$y = kx \quad \Rightarrow \quad y = \frac{5}{6}x$$

(ii) ترسیم سے $y = \frac{5x}{6}$، اگر $x=90$ تو

$$y = \frac{5}{6} \times 90 = 75 \text{ km}$$

1½ گھنٹوں (یعنی 90 منٹوں) میں طے کردہ فاصلہ 75 کلومیٹر ہے۔

(iii) ترسیم سے $y = \frac{5x}{6}$، اگر $y = 300$ تو

$x = \frac{6}{5} = \frac{6}{5} \times 300 = 360$ منٹ یا 6 گھنٹے

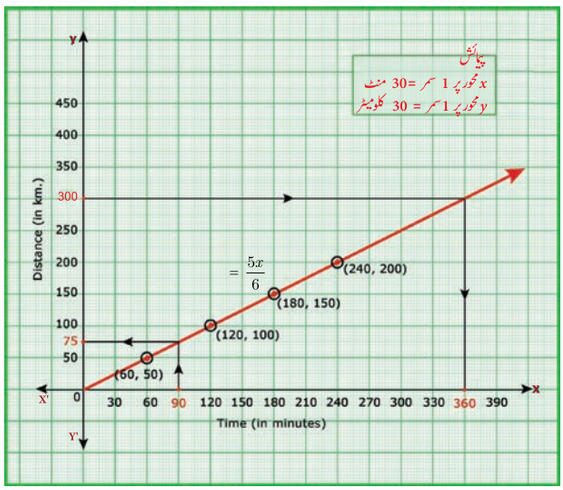


Fig. 3.11

(ii) بلاراست متغیر (Indirect Variation)

چنئی اور مدورئی کے درمیان کا فاصلہ تقریباً 480 کلومیٹر ہے۔ فرض کیجئے کہ ایک ٹرین چنئی سے شروع ہوکر مدورئی کی طرف دوڑتی ہے۔ جیسے جیسے ٹرین اپنی رفتار بڑھاتی ہے، اس کے سفر کے وقت میں کمی ہوتی جاتی ہے۔ درج ذیل جدول میں رفتار v کو کلومیٹر فی گھنٹہ میں اور وقت t کو گھنٹوں میں دیا گیا ہے۔

رفتار (v) کلومیٹر فی گھنٹہ	30	40	60	80
وقت (t) گھنٹے	16	12	8	6

جدول سے یہ واضح ہوجاتا ہے کہ اگر ٹرین کم رفتار سے دوڑتی ہے تو وقت بڑھنے لگتا ہے اور اگر ٹرین کی رفتار بڑھنے لگتی ہے تو وقت میں کمی واقع ہوتی ہے۔ تم دیکھوگے کہ $30\times16=40\times12=60\times8=80\times6$ ہے، جس سے یہ پتہ چلتا ہے کہ vt ایک مستقلہ ہے۔ یہاں پر $vt = 480$ ہے۔

ایسی صورت میں ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ متغیرات v اور t معکوس تناسب میں ہے۔

مساوات $vt = 480$ کی ترسیم ایک خط مستقیم نہیں ہوگی۔ معکوس متغیر میں ایک متغیر بڑھتا ہے تو دوسرا متغیر گھٹنے لگتا ہے۔

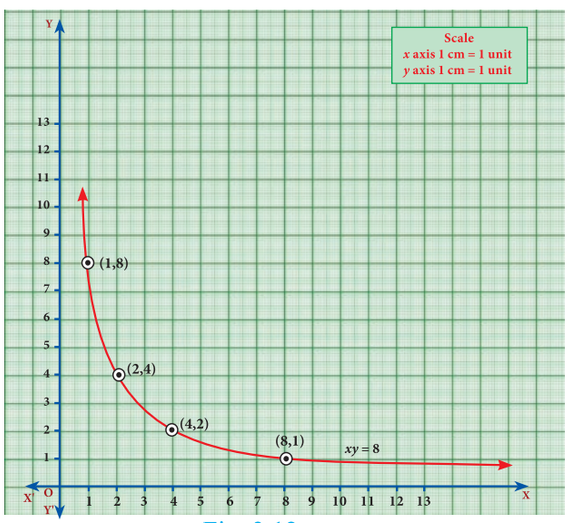


Fig. 3.12

بلاراست متغیر پر غور کرنا

درج ذیل ترسیم پر غور کیجئے۔ یہ مساوات $xy = 8$ کی ترسیم ہے۔

ہم نے x اور y کی صرف مثبت قیمتوں کو لیا ہے۔

ان قیمتوں کی جدول اس طرح ہے۔

x	1	2	4	8
$y = \frac{8}{x}$	8	4	2	1

10th maths 3. algebra 36-71
Monday, February 24, 2020 11:31:49 AM

یہ معکوس متغیر یا بلاراست متغیر کی ایک مثال ہے۔ یہ ترسیم ایک مستطیلی ہذلولی (Rectangular Hyperbola) کی ایک مثال ہے۔

مثال 3.49 ایک کمپنی نے کسی کام کو 150 دنوں کے اندر مکمل کرنے کے لئے 40 مزدوروں کو کام پر مقرر کیا۔ اس کے بعد کام کو تیزی سے ختم کرنے کے لئے مزید مزدوروں کو کام پر مقرر کیا گیا جیسا کہ جدول میں دکھایا گیا ہے۔

مزدوروں کی تعداد (x)	40	50	60	75
دنوں کی تعداد (y)	150	120	100	80

(i) اوپر کی معطیات سے ترسیم بنایئے اور تغیر کی قسم کی شناخت کیجئے۔

(ii) ترسیم کی مدد سے یہ معلوم کیجئے کہ اگر کمپنی 120 مزدوروں کو کام پر مقرر کرتی ہے تو کام کتنے دنوں میں مکمل ہوگا؟

(iii) اگر کام کو 30 دنوں میں مکمل کرنا ہو تو کتنے مزدور درکار ہیں؟

(i)

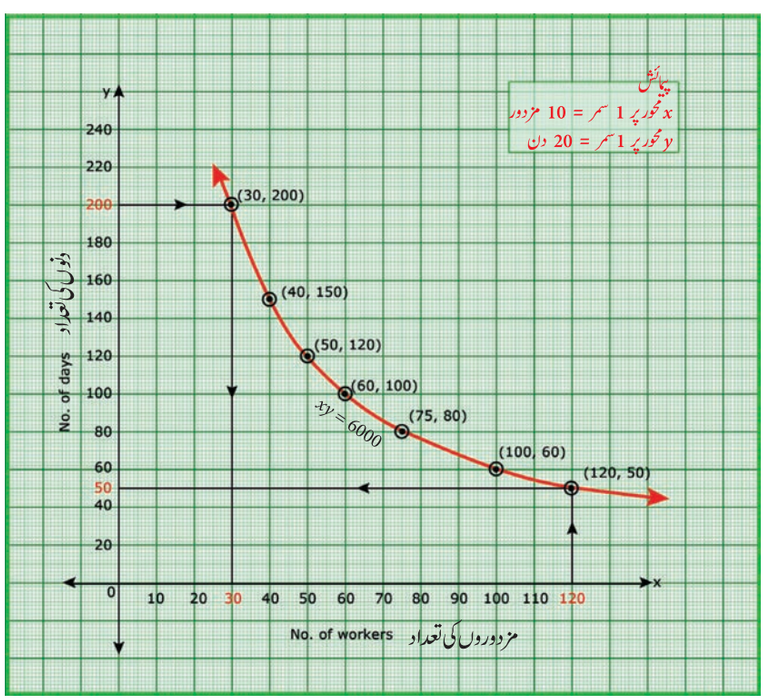


Fig. 3.13

(i) دی گئی جدول سے ہم یہ مشاہدہ کرتے ہیں کہ جیسے جیسے x میں اضافہ ہوتا ہے، y میں اسی طرح کی کمی واقع ہوتی ہے۔

لہٰذا یہ تغیر معکوس متغیر ہے۔

فرض کیجئے کہ $y = \frac{k}{x}$

$xy = k, k > 0$ کو متغیر کا مستقلہ کہا جاتا ہے۔

جدول سے $k = 40 \times 150 = 50 \times 120 = \ldots = 75 \times 80 = 6000$

چنانچہ $xy = 6000$

نقاط (40,150)، (50,120)، (60,100)، (75,80) کو مرتسم کیجئے اور انہیں ملا کر ایک نفیس خط منحنی (مستطیلی ہذلولی شکل) حاصل کیجئے۔

10th maths 3. algebra 36-71
Monday, February 24, 2020 11:31:51 AM

(ii) ترسیم سے کام کوختم کرنے کے لئے درکار مزدوروں کی تعداد معلوم کیجئے جب کمپنی 120 مزدوروں کومقرر کرکے 50 دنوں میں مکمل کرنا چاہتی ہے

اسی طرح $xy=6000$ سے اگر $x = 120$ ہوتو $y = \frac{6000}{120} = 50$ ہوگا۔

(iii) ترسیم سے، اگر کام کو 30 دنوں میں مکمل کرنا ہوتو، درکار مزدوروں کی تعداد 200 ہے۔

اسی طرح $xy=6000$ سے اگر $y=30$ ہوتو $x = \frac{6000}{30} = 200$

مثال 3.50 :

ماراتھان دوڑ میں اُسید نے 12 کلومیٹر دوڑ کر جیت حاصل کی تھی۔ 12 کلومیٹر فی گھنٹہ کی یکساں رفتار سے دوڑ کر ایک گھنٹہ کے اندر وہ اپنی منزل تک پہنچا۔ اس کے بعد وثیق، انیق، طہورہ، سدید اور فاطمہ نے بالترتیب 6 کلومیٹر فی گھنٹہ، 4 کلومیٹر فی گھنٹہ، 3 کلومیٹر فی گھنٹہ اور 2 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے دوڑا۔ انہوں نے اس فاصلہ کو طے کرنے کے لئے بالترتیب 2 گھنٹے، 3 گھنٹے، 4 گھنٹے اور 6 گھنٹے لئے۔

رفتار-وقت کی ترسیم بنایئے اور اس کو استعمال کرکے فاطمہ سے دوڑ میں لیا گیا وقت معلوم کیجئے، اگر وہ 2.4 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے دوڑتی ہے

حل: آیئے دی گئی تفصیلات کی مدد سے ایک جدول تیار کریں۔

رفتار x (کلومیٹر فی گھنٹہ)	12	6	4	3	2
وقت y (گھنٹے)	1	2	3	4	6

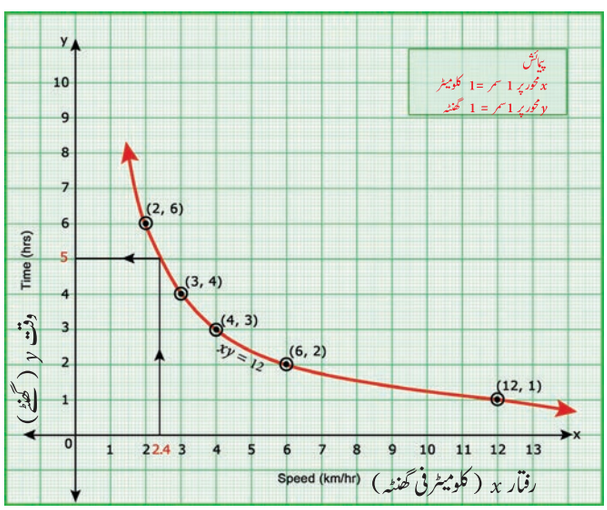


Fig. 3.14

جدول سے ہم یہ مشاہدہ کرتے ہیں کہ جیسے جیسے x کم ہوتا جاتا ہے، y بڑھتے جاتا ہے۔ لہٰذا یہ معکوس متغیر ہے۔

فرض کیجئے کہ $y = \frac{k}{x}$ ہے۔

$\Rightarrow xy = k,\ k > 0$ کو متغیر کا مستقلہ کہا جاتا ہے۔

جدول سے

$$k = 12 \times 1 = 6 \times 2 = \ldots$$
$$= 2 \times 6 = 12$$

چنانچہ $xy = 12$

نقاط (12,1)، (6,2)، (4,3)، (3,4) اور (2,6) مرتسم کیجئے۔ ان نقاط کو ملا کر ایک نفیس خط حاصل کیجئے (مستطیلی ہذلولی شکل)

ترسیم سے ہم یہ مشاہدہ کرتے ہیں کہ فاطمہ کو 2.4 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے فاصلہ طے کرنے میں 5 گھنٹے لگے۔

غور کیجئے

ہم پہلے ہی سیکھ چکے ہیں کہ ایک خط مستقیم کی خطی مساوات $y=mx+c$ ہے، جس میں m خط مستقیم کا میلان اور c اس کا y-مقطوعہ ہے۔ اسی طرح جب یہ مساوات مبدا سے گزرتی ہے تو وہ $y = mx$ کی طرح مختصر ہوجاتی ہے۔ جیسا کہ راست تناسب کی ترسیم ایک خط مستقیم ہوتی ہے اور اس کی عام شکل $y = kx$ ہوتی ہے، ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ تناسب کا مستقلہ کچھ اور نہیں بلکہ خط مستقیم کا میلان ہے۔

10th maths 3. algebra 36-71
Monday, February 24, 2020 11:31:54 AM

مشق 3.15

1۔ ایک کپڑے کی دوکان اپنے گاہکوں کے لئے تمام کپڑوں پر 50% کی رعایت کا اعلان کرتی ہے۔ نشان کردہ قیمت اور رعایت کے لئے ایک ترسیم بنایئے اور یہ بھی معلوم کیجئے کہ

(i) جب رعایت کی رقم ₹3250 ہو (ترسیم کے ذریعے) تو اس کی نشان کردہ قیمت کیا ہوگی۔

(ii) جب نشان کردہ قیمت ₹2500 ہو تو اس کی رعایتی قیمت کیا ہوگی۔

2۔ $xy=24,\ x,y>0$ کے لئے ایک ترسیم بنایئے اور ترسیم کے استعمال سے معلوم کیجئے

(i) اگر $x=3$ ہو تو y معلوم کیجئے اور (ii) اگر $y=6$ ہو تو x معلوم کیجئے۔

3۔ درج ذیل خطی تفاعل $y = \frac{1}{2}x$ کی ترسیم بنایئے۔ اس کے متغیر کے مستقلہ کی شناخت کیجئے اور اس کو ترسیم کے ساتھ تصدیق کیجئے۔

مزید معلوم کیجئے (i) اگر $x = 9$ ہو تو y اور (ii) اگر $y = 7.5$ ہو تو x

4۔ درج ذیل جدول پائپوں کی تعداد اور ایک ٹینک کو بھرنے کے لئے لئے گئے وقت کی معطیات کو ظاہر کرتی ہے۔

پائپوں کی تعداد (x)	2	3	6	9
لیا گیا وقت (منٹوں میں) (y)	45	30	15	10

اوپر دئے گئے معطیات کے لئے ترسیم بنایئے اور اس کی مدد سے

(i) جب پانچوں پائپوں کو استعمال کیا جائے تو ٹینک کو بھرنے کے لئے درکار وقت معلوم کیجئے۔

(ii) 9 منٹوں میں ٹینک بھرنے کے لئے درکار پائپوں کی تعداد محسوب کیجئے۔

5۔ ایک اسکول کے مقابلے میں تمام شریک ہونے والوں کے لئے مساوی طور پر انعامی رقم طے کی گئی ہے۔

شریک ہونے والوں کی تعداد (x)	2	4	6	8	10
ہر شریک کے لئے رقم (₹) (y) (y)	180	90	60	45	36

(i) متغیر کا مستقلہ معلوم کیجئے۔

(ii) اوپر کی معطیات کی ترسیم بنایئے اور یہ معلوم کیجئے کہ اگر شریک ہونے والوں کی تعداد 12 ہو تو ہر ایک کو کتنی رقم ملے گی۔

6۔ ایک دو پہیہ والی گاڑیوں کے اسٹانڈ میں گاڑیاں کھڑی کرنے کے لئے رقم اس طرح مقرر کی گئی ہے۔

وقت (گھنٹوں میں) (x)	4	8	12	24
رقم ₹ (y)	60	120	180	360

جانچئے کہ جو رقم مقرر کی گئی ہے وہ وقت کے لحاظ سے راست متغیر ہے یا معکوس متغیر۔ معطیات کی ترسیم بنایئے۔ مزید معلوم کیجئے کہ

(i) جب گاڑی کھڑا کرنے کا وقت 6 گھنٹے ہو تو رقم کتنی ادا کرنی پڑے گی؟

(ii) اگر ادا کردہ رقم 150 روپئے ہو تو گاڑی کھڑا کرنے کا وقت معلوم کیجئے۔

10th maths 3. algebra 36-71
Monday, February 24, 2020 11:31:55 AM

3.8 دودرجی ترسیمات Quadratic Graphs



Fig. 3.15

تعارف : Introduction

ایک شئے کا اختیار کردہ راہ (مثلاً، گیند) جب اس کو اوپر کی جانب کسی زاویہ پر پھینکا جائے تو ایک خطِ منحنی (Curve) حاصل ہوتا ہے مکافی شکل (Parabola) کہلاتا ہے۔ ایک پانی کا فوارہ یا گیند کے اچھلنے کے نتیجے میں **مکافی راہ** حاصل ہوتا ہے۔

ایک دودرجی تفاعل کی عام شکل $f(x) = ax^2 + bx + c$ ہے جہاں c,b,a مستقل ہیں اور $a \neq 0$ بہت سے دودرجی تفاعلات کو آسانی کے ساتھ مکافی شکل $y = x^2$ کو پھیلانے سکڑانے اور تبدیلی کے تکنیک سے مرتسم کیا جاسکتا ہے۔ ہم قیمتوں کی جدول تیار کرتے ہوئے اور ترتیب وار جوڑیوں کو مرتسم کرکے آسانی کے ساتھ خطِ منحنی $y = x^2$ کا خاکہ کھینچ سکتے ہیں۔

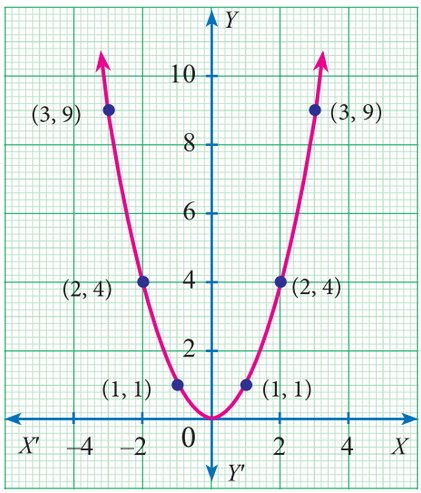


Fig. 3.16

''بنیادی'' مکافی شکل $y = x^2$، (خاکہ 3.9) کی طرح ہوتی ہے۔

عام مساوات میں سرعدد a مکافی شکل کے اوپر کی جانب یا نیچے کی جانب کھلے ہونا اور چوڑائی میں مختلف ہونا (چوڑا یا پتلا) اسی پر مشتمل ہے مگر یہ تمام یکساں بنیادی 'U' شکل رکھتے ہیں۔

جیسے جیسے دودرجی کا سرعدد بڑھتا ہے، مکافی شکل تنگ ہوتی ہے۔ جیسے جیسے دودرجی کا سرعدد گھٹتا ہے، مکافی شکل چوڑی ہوتی ہے

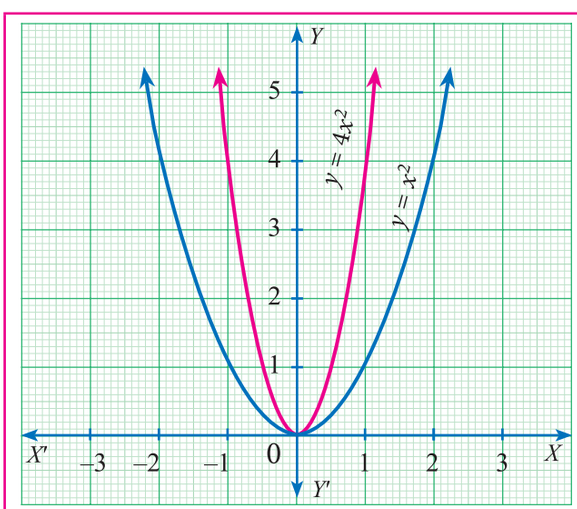


Fig. 3.17

$y = x^2$ کی ترسیم $y = 4x^2$ سے چوڑی ہے۔

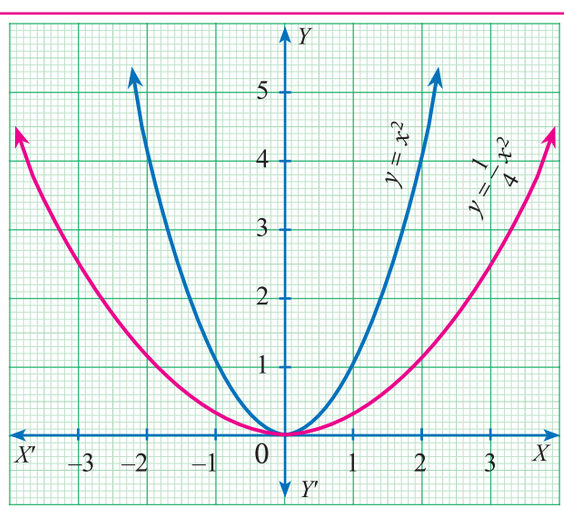


Fig. 3.18

$y = x^2$ کی ترسیم $y = \frac{1}{4}x^2$ کی ترسیم سے تنگ ہے۔

10th maths 3. algebra 36-71
Monday, February 24, 2020 11:31:55 AM

ایک مکافی شکل ایک خط کے لئے لحاظ سے متشاکل ہوتو اسے **محورِتشاکل** کہتے ہیں۔مکافی شکل کا نقطہ تقاطع اور **محورِتشاکل** مکافی شکل کا **راس** کہلاتا ہے کسی بھی دودرجہ والے کثیر رقمی کے ترسیم سے حاصل ہونے والا خط منحنی مکافی شکل (Parabola) کہلاتا ہے۔

اشارہ : ایک دودرجی مساوات کے لئے محور $x = \frac{-b}{2a}$ سے دیا جاتا ہے اور راس $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ سے دیا جاتا ہے
جہاں $\Delta = b^2 - 4ac$ دودرجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کی امتیازی خصوصیت ہے، جس میں $a \neq 0$ ہے۔

ہم پہلے ہی دودرجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے جذریں معلوم کرنے سیکھ چکے ہیں جہاں مسئلہ کے تحت $a, b, c \in \mathbb{R}$ اور $a \neq 0$ ہے۔اس باب میں دودرجی مساوات کو حل کرنے اور ترسیم کے ذریعے اس کے جذر معلوم کرنا سیکھیں گے۔

3.8.1 ترسیم کے ذریعے دودرجی مساوات کے حل کی نوعیت :

Finding the Nature of Solution of Quadratic Equations Graphically

ترسیم کے ذریعے دودرجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے جذر معلوم کرنے کے لئے، پہلے ہم $y = ax^2 + bx + c$ کی ترسیم کھینچتے ہیں۔ دودرجی مساوات حل کا X محور سے خطِ منحنی کے نقاطِ تقاطع کے x محدودیں ہیں۔

ایک دودرجی مساوات کے حل کی نوعیت معلوم کرنے کے لئے، ہم ذیل کے طریقے کو استعمال کرتے ہیں۔

(i) اگر دی گئی دودرجی مساوات کی ترسیم X محور کو دو مختلف نقاط پر قطع کرتی ہے تو دی گئی مساوات کے **دو حقیقی اور غیر مساوی جذور** ہوتے ہیں۔

(ii) اگر دی گئی مساوات کی ترسیم X محور پر صرف ایک ہی نقطہ پر مَس کرتی ہے تو دی گئی مساوات کے صرف ایک ہی جذر ہوتا ہے جسے ہم **دو حقیقی اور مساوی جذور** کہتے ہیں۔

(iii) اگر دی گئی مساوات کی ترسیم X محور کے کسی نقطہ پر قطع نہیں کرتی ہے تو دی گئی مساوات کے کوئی **حقیقی جذر نہیں ہوتے۔**

مثال 3.51

ذیل کے دودرجی مساواتوں کے حل کی نوعیت پر بحث کیجئے۔

(i) $x^2 + x - 12 = 0$ (ii) $x^2 - 8x + 16 = 0$ (iii) $x^2 + 2x + 5 = 0$

حل :

(i) $x^2 + x - 12 = 0$

مرحلہ 1 : مساوات $y = x^2 + x - 12$ کے لئے قیمتوں کی جدول تیار کرتے ہیں۔

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	8	0	-6	-10	-12	-12	-10	-6	0	8

10th maths 3. algebra 36-71
Monday, February 24, 2020 11:31:56 AM

مرحلہ 2 : مناسب پیمائش استعمال کرکے ترسیم پر اوپر کے ترتیب وار جوڑیوں (x,y) کے نقاط مرتسم کیجئے۔

مرحلہ3 : مکافی شکل کھینچئے اور X محور پر قطع کرنے والے مکافی شکل کے محدودوں کو نشان کیجئے۔

مرحلہ4 : مساوات کے جذر X محور سے مکافی شکل کے تقاطع نقاط $(-4,0)$ اور $(3,0)$ کے محددیں ہیں۔

چونکہ X محور سے دو نقاط پر قطع کرتے ہیں دو درجی مساوات $x^2 + x - 12 = 0$ کے **حقیقی اور غیر مساوی جذور** ہیں۔

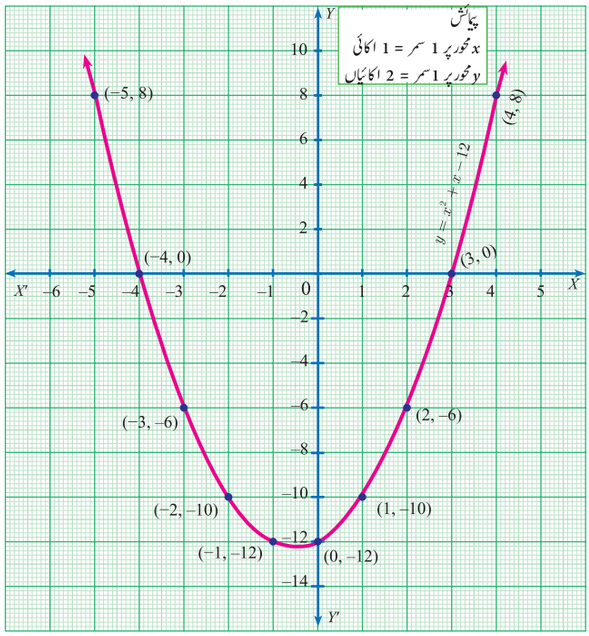


Fig. 3.12

(ii) $x^2 - 8x + 16 = 0$

مرحلہ 1: مساوات $y = x^2 - 8x + 16$ کے لئے قیمتوں کی جدول تیار کرتے ہیں۔

x	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16

مرحلہ2 : مناسب پیمائش استعمال کرکے ترسیم پر اوپر کے ترتیب وار جوڑیوں (x,y) کے نقاط مرتسم کیجئے۔

مرحلہ3 : مکافی شکل کھینچئے اور X محور پر قطع کرنے والے مکافی شکل کے محدودوں کو نشان کیجئے۔

مرحلہ4 : X محور سے مکافی شکل کے نقاط تقاطع $(4,0)$ جو 4 مساوات کے جذر ہیں۔

چونکہ، X محور سے صرف ایک ہی نقطہ ہے پر قطع کرتا ہے، دو درجی مساوات $x^2 - 8x + 16 = 0$ کے **حقیقی اور مساوی جذریں** ہیں۔

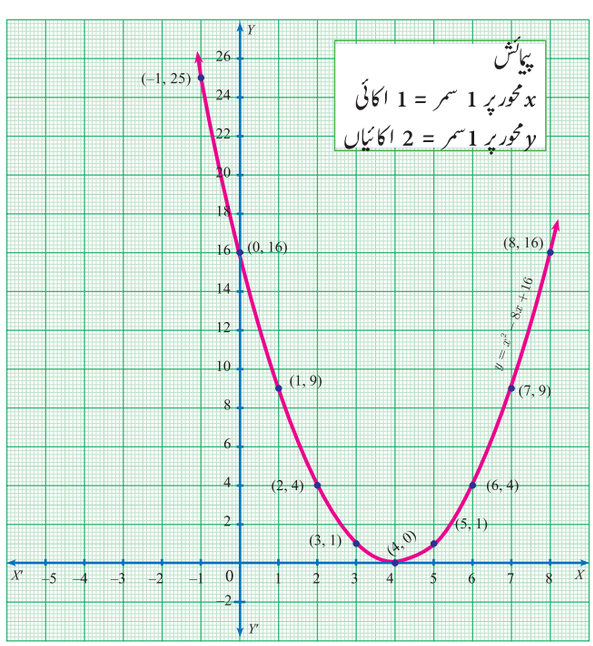


Fig. 3.13

(iii) $x^2 + 2x + 5 = 0$

فرض کیجئے کہ، $y = x^2 + 2x + 5$

مرحلہ1 : مساوات $y = x^2 + 2x + 5$ کے لئے قیمتوں کی جدول تیار کرتے ہیں۔

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	8	5	4	5	8	13	20

10th maths 3. algebra 36-71
Monday, February 24, 2020 11:31:57 AM

مرحلہ 2 : مناسب پیمائش کو استعمال کر کے ترسیم پر اوپر کے ترتیب وار جوڑیوں (x,y) کے نقاط مرتسم کیجئے۔

مرحلہ 3 : ایک صاف خطِ منحنی سے نقاط کو ملاتے ہیں یہ صاف خط منحنی $y = x^2 + 2x + 5$ کی ترسیم ہے۔

مرحلہ 4 : دئے گئے دو درجی مساوات کے حل X محور سے مکافی شکل کے نقاط تقاطع کے x محددیں ہیں۔

یہاں یہ مکافی شکل X محور کو قطع یا مس نہیں کرتا،

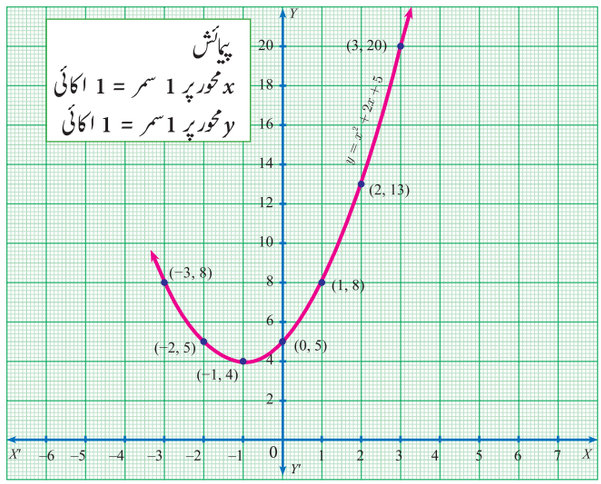
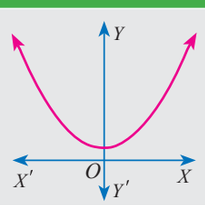
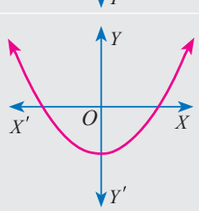
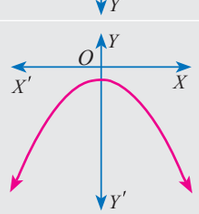
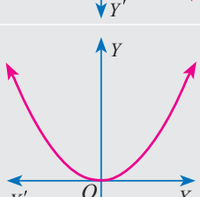


Fig. 3.21

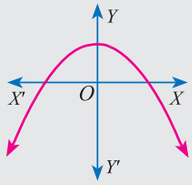
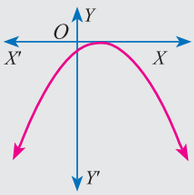
اس لئے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ دئے گئے دو درجی مساوات کے کوئی حقیقی جذر نہیں ہیں۔

Progress Check — اپنی پیش رفت کی جانچ

ترسمات کو X محور کے بالترتیب نقاط تقاطع کی تعداد اور ان کے حل کی نظیری نوعیت سے جوڑیں جو ذیل کے جدول میں دیا گیا ہے۔

شمار عدد	ترسیمات	X محور کے نقاط تقاطع کی تعداد	حل کی نوعیت
1.		2	Real and equal roots حقیقی اور مساوی جذر
2.		1	No real roots حقیقی جذر نہیں ہوتے
3.		2	No real roots حقیقی جذر نہیں ہوتے
4.		0	Real and equal roots حقیقی اور مساوی جذر

10th maths 3. algebra 36-71
Monday, February 24, 2020 11:31:57 AM

5.		0	Real and unequal roots حقیقی اور غیر مساوی جذر
6.		1	Real and unequal roots حقیقی اور غیر مساوی جذر

3.8.2 خطوط کے تقاطع کے ذریعے دودرجی مساوات کا حل

Solving quadratic equations through intersection of lines

مناسب مکافی شکل کو انتخاب کر کے اور اسے ایک مخصوص خطِ مستقیم سے قطع کرتے ہوئے دودرجی مساوات کے جذروں کو ہم ترسیماً معلوم کر سکتے ہیں۔

(i) اگر خطِ مستقیم مکافی شکل کو دو مختلف نقاط پر قطع کرتا ہے تو ان نقاط کے x محدد دیے گئے دودرجی مساوات کے جذر ہوتے ہیں۔

(ii) اگر خط مستقیم مکافی شکل کو صرف ایک ہی نقطہ پر مَس کرتا ہے تو اس یکساں نقطے کا x محدد اس دودرجی مساوات کا واحد جذر ہوگا۔

(iii) اگر خط مستقیم مکافی شکل سے قطع نہیں کرتا ہے تو دودرجی مساوات کے کوئی جذر نہیں ہوتے۔

مثال 3.52 $y = 2x^2$ کی ترسیم کھینچیے اور چنانچہ $2x^2 - x - 6 = 0$ کو حل کیجیے۔

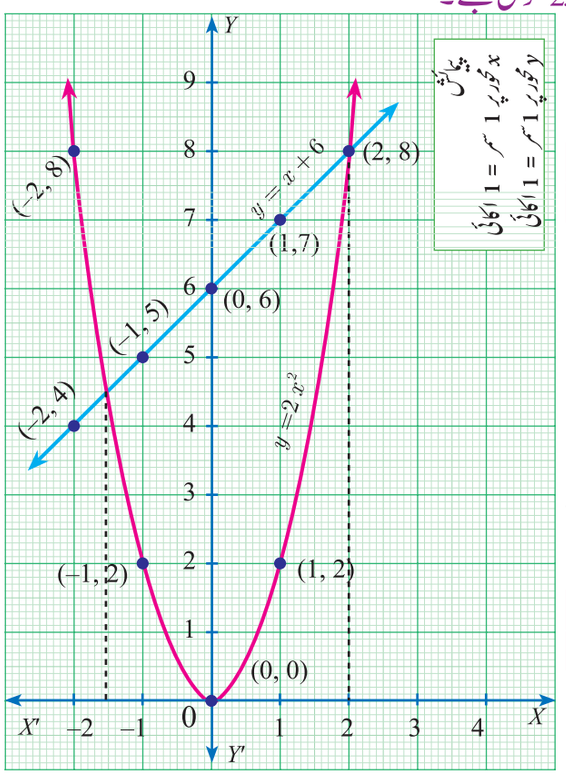


Fig. 3.22

حل : مرحلہ 1 : نیچے بتائے گئے قیمتوں کی جدول تیار کرتے ہوئے $y = 2x^2$ کی ترسیم کھینچیے۔

x	–2	–1	0	1	2
y	8	2	0	2	8

مرحلہ 2 : $2x^2 - x - 6 = 0$ کو حل کرنے کے لئے

$2x^2 - x - 6 = 0$ کو $y = 2x^2$ سے تفریق کرتے ہیں،

یعنی
$$\begin{array}{rl} & y = 2x^2 \\ (-) & 0 = 2x^2 - x - 6 \\ \hline & y = x + 6 \end{array}$$

مساوات $y = x + 6$ ایک خط مستقیم کی نمائندگی کرتی ہے۔ نیچے بتائے گئے قیمتوں کی جدول تیار کرتے ہوئے $y = x + 6$ کی ترسیم کھینچیے۔

x	–2	–1	0	1	2
y	4	5	6	7	8

مرحلہ 3 : $y = 2x^2$ اور $y = x + 6$ خطوطِ منحنی کے نقاط تقاطع نشان کیجیے یعنی $(-1.5, 4.5)$ اور $(2, 8)$

10th maths 3. algebra 36-71
Monday, February 24, 2020 11:31:58 AM

مرحلہ 4 : بالترتیب نقاط کے x محددیں $2x^2 - x - 6 = 0$ کے لئے حل کا مجموعہ $(-1.5, 2)$ بناتا ہے۔

مثال 3.53 $y = x^2 + 4x + 3$ کی ترسیم کھینچئے اور $x^2 + x + 1 = 0$ کے جذر معلوم کیجئے۔

حل : مرحلہ 1 : نیچے بتائے گئے قیمتوں کی جدول تیار کرتے ہوئے $y = x^2 + 4x + 3$ کی ترسیم کھینچئے۔

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y	3	0	1	0	3	8	15

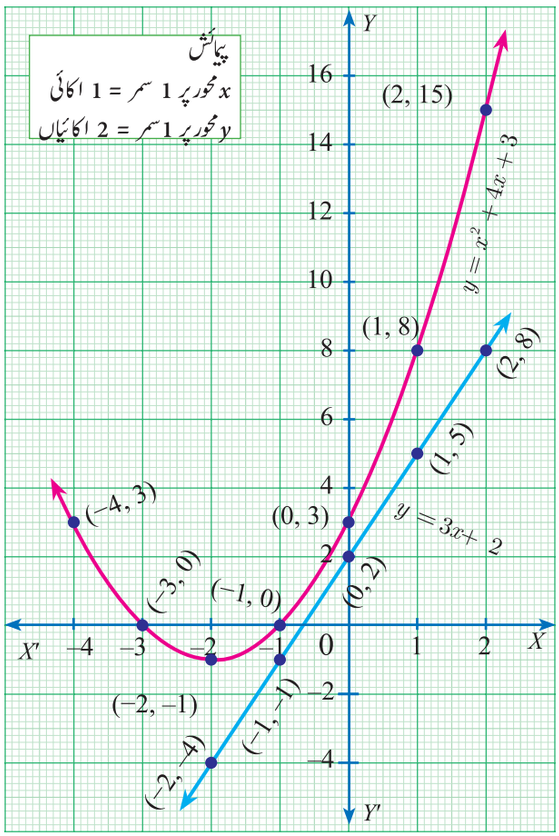


Fig. 3.23

مرحلہ 2 : $x^2 + x + 1 = 0$ کو حل کرنے کے لئے، $y = x^2 + 4x + 3$ کو $x^2 + x + 1 = 0$ سے تفریق کرتے ہیں

$$\begin{array}{rrrr} \text{یعنی} & y = & x^2 + 4x + 3 & \\ & 0 = & x^2 + x + 1 & (-) \\ \hline & y = & 3x + 2 & \end{array}$$

یہ مساوات خطِ مستقیم کو ظاہر کرتی ہے، نیچے بتائے گئے قیمتوں کی جدول تیار کرتے ہوئے $y = 3x + 2$ کی ترسیم کھینچئے۔

x	-2	-1	0	1	2
y	-4	-1	2	5	8

مرحلہ 3 : غور کریں کہ $y = 3x + 2$ کی ترسیم مکافی شکل $y = x^2 + 4x + 3$ کی ترسیم کو قطع یا مس نہیں کرتی۔ غرض $x^2 + x + 1 = 0$ کے حقیقی جذر نہیں ہیں۔

مثال 3.54 $y = x^2 + x - 2 = 0$ کی ترسیم کھینچئے اور چنانچہ $x^2 + x - 2 = 0$ کو حل کیجئے۔

حل :

مرحلہ 1 : نیچے بتائے گئے قیمتوں کی جدول تیار کرتے ہوئے $y = x^2 + x - 2$ کی ترسیم کھینچئے۔

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	4	0	-2	-2	0	4

مرحلہ 2 : $x^2 + x - 2 = 0$ کو حل کرنے کے لئے $x^2 + x - 2 = 0$ کو $y = x^2 + x - 2$ سے تفریق کرتے ہیں۔

10th maths 3. algebra 36-71
Monday, February 24, 2020 11:31:58 AM

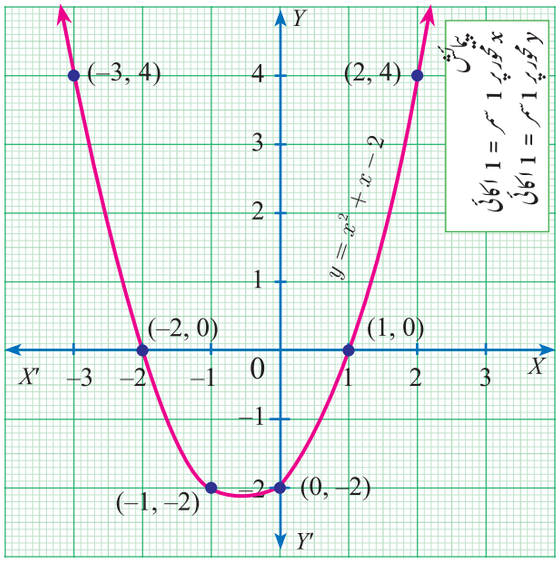


Fig. 3.24

یعنی
$$\begin{array}{rl} y = & x^2 + x - 2 \\ 0 = & x^2 + x - 2 \\ \hline y = & 0 \end{array} \quad (-)$$

مساوات $y = 0$ ، X محور کی نمائندگی کرتی ہے۔

مرحلہ 3 : X محور سے خط منحنی $y = x^2 + x - 2$ کے نقطہ تقاطع نشان کیجئے، یعنی $(-2,0)$ اور $(1,0)$

مرحلہ 4 : بالترتیب نقاط کے x محددیں $x^2 + x - 2 = 0$ کے لئے حل کا مجموعہ $\{-2,1\}$ بناتا ہے۔

مثال 3.55 $y = x^2 - 4x + 3$ کی ترسیم کھینچئے اور اس کو استعمال کرکے $x^2 - 6x + 9 = 0$ کو حل کیجئے۔

حل : **مرحلہ 1** : نیچے بتائے گئے قیمتوں کی جدول تیار کرتے ہوئے $y = x^2 - 4x + 3$ کی ترسیم کیجئے۔

x	–2	1	0	1	2	3	4
y	15	8	3	0	–1	0	3

مرحلہ 2: $x^2 - 6x + 9 = 0$ کو حل کرنے کے لئے $x^2 - 6x + 9 = 0$ کو $y = x^2 - 4x + 3$ سے تفریق کرتے ہیں۔

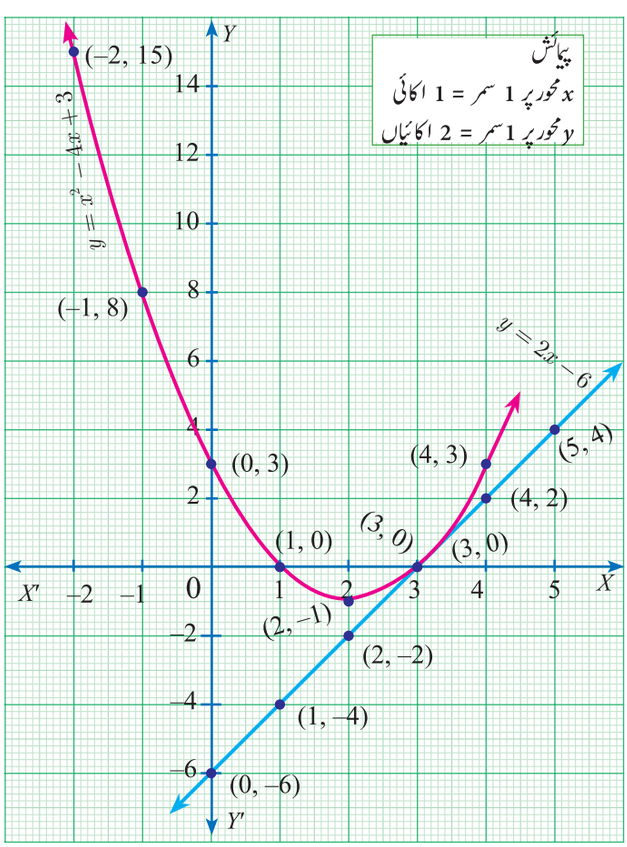


Fig. 3.25

یعنی
$$\begin{array}{rl} y = & x^2 - 4x + 3 \\ 0 = & x^2 - 6x + 9 \\ \hline y = & 2x - 6 \end{array} \quad (-)$$

مساوات $y = 2x - 6$ ایک خطِ مستقیم کی نمائندگی کرتی ہے نیچے بتائے گئے قیمتوں کی جدول تیار کرتے ہوئے $y = 2x - 6$ کی ترسیم کھینچئے۔

x	0	1	2	3	4	5
y	–6	–4	–2	0	2	4

خط مستقیم $y = 2x - 6$ ، $y = x^2 - 4x + 3$ کو صرف ایک نقطے پر قطع کرتی ہے۔

مرحلہ 3 : خطوط منحنی $y = x^2 - 4x + 3$ اور $y = 2x - 6$ کے نقطہ تقاطع نشان کیجئے یعنی $(3,0)$

لہذا، x محدد 3 ، مساوات $x^2 - 6x + 9 = 0$ کا صرف ایک ہی حل ہے۔

10th maths 3. algebra 36-71
Monday, February 24, 2020 11:31:59 AM

مشق 3.16

1۔ ذیل کے دودرجی مساواتوں کی ترسیم کھینچئے اوران کے حل کی نوعیت بیان کیجئے۔

(i) $x^2 - 9x + 20 = 0$ (ii) $x^2 - 4x + 4 = 0$ (iii) $x^2 + x + 7 = 0$

(iv) $x^2 - 9 = 0$ (v) $x^2 - 6x + 9 = 0$ (vi) $(2x - 3)(x + 2) = 0$

2۔ $y = x^2 - 4$ کی ترسیم کھینچئے اور چنانچہ $x^2 - x - 12 = 0$ کو حل کیجئے۔

3۔ $y = x^2 + x$ کی ترسیم کھینچئے اور چنانچہ $x^2 + 1 = 0$ کو حل کیجئے۔

4۔ $y = x^2 + 3x + 2$ کی ترسیم کھینچئے اور چنانچہ اس کو استعمال کرکے $x^2 + 2x + 1 = 0$ کو حل کیجئے۔

5۔ $y = x^2 + 3x - 4$ کی ترسیم کھینچئے اور چنانچہ اس کو استعمال کرکے $x^2 + 3x - 4 = 0$ کو حل کیجئے۔

6۔ $y = x^2 - 5x - 6$ کی ترسیم کھینچئے اور چنانچہ $x^2 - 5x - 14 = 0$ کو حل کیجئے۔

7۔ $y = 2x^2 - 3x - 5$ کی ترسیم کھینچئے اور چنانچہ $2x^2 - 4x - 6 = 0$ کو حل کیجئے۔

8۔ $y = (x - 1)(x + 3)$ کی ترسیم کھینچئے اور چنانچہ $x^2 - x - 6 = 0$ کو حل کیجئے۔

3.9 میٹریسس Matrices

تعارف Introduction

آیئے ذیل کے اطلاعات پرغور کریں،نسیمہ کے پاس 12 کہانی کی کتابیں، 20 نوٹ بکس اور 4 پنسل ہیں۔ ریشمہ کے پاس 27 کہانی کی کتابیں، 17 نوٹ بکس اور 6 پنسل ہیں،غوث کے پاس 7 کہانی کی کتابیں،11 نوٹ بکس اور 4 پنسل ہیں،رشیدہ کے پاس 10 کہانی کی کتابیں، 12 نوٹ بکس اور 5 پنسل ہیں۔

تفصیلات	کہانی کی کتابیں	نوٹ بکس	پنسل
نسیمہ	12	20	4
ریشمہ	27	17	6
غوث	7	11	4
رشیدہ	10	12	5

اب ہم ان اطلاعات کو ذیل میں اس طرح جدولی شکل میں مرتب کرتے ہیں،

$$\begin{matrix} \text{پہلی صف} \\ \text{دوسرصف} \\ \text{تیسری صف} \\ \text{چوتھی صف} \end{matrix} \begin{pmatrix} 12 & 20 & 4 \\ 27 & 17 & 6 \\ 7 & 11 & 4 \\ 10 & 12 & 5 \end{pmatrix}$$

پہلی قطار دوسری قطار تیسری قطار

یہاں چار آدمیوں کے اشیاء کو ایک مستطیلی ترتیب جس میں چار افقی اور تین عمودی اعداد کی ترتیب ہیں۔افقی ترتیب صف (Row) کہلاتا ہے اورعمودی ترتیب ''قطار'' (Columm) کہلاتا ہے۔عام طور پر یہ مکمل مستطیلی ترتیب ''میٹرکس'' (Matrix) کہلاتا ہے۔عام طور پر اگر ہم اشیاء کو مستطیلی ترتیب میں مرتب کریں تو ہم اسے میٹرکس کہتے ہیں۔

بہت سے سائنسی میدانوں میں میٹریس کے استعمالات پائے جاتے ہیں۔طبیعات میں،بیٹری کے قوت کا ماحصول (Battery Power Output Resistor)، برقی توانائی سے دوسری توانائی میں ریسسٹر کی تبدیلی کے حساب کرنے میں میٹریس استعمال کئے جاتے

10th maths 3. algebra 36-71
Monday, February 24, 2020 11:31:59 AM

ہیں، کمپیوٹر کی بنیاد پر ایپلی کیشنز میں، تین جہتی (Three Dimonsional) تصویر کو دو جہتی (Three Dimonsional) پردے میں تصویر کھینچنے میں میٹریس کا اہم رول ہے جس سے بظاہر ایک حقیقی حرکت لگتی ہے۔ گرافکس کے سافٹ ویر میں، خطی تبدیلیاں کو تصویر دینے کے لئے میٹرکس الجبراء استعمال کیا جاتا ہے۔ میٹریس کے استعمالات میں سے ایک اہم ترین استعمال پیغام کے ضابطے (Massage code) کے خفیہ کاری (encryption) ہے۔ خفیہ کاری (encryption &decryption) کے طریقے میں میٹرکس کے ضرب اور معکوس کے عمل کے ذریعے کیا جاتا ہے۔ اگر پیغام لمبی ہو تو میٹریس کے تصور کو ضابطوں کے ترسیل (Transmission of codes) کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔ ارضیات (Geology) میں، زلزلے کے جائزہ لینے کے لئے استعمال ہوتا ہے۔ روبوٹکس (Robotics) میں مشینی آدمی (Robot) کے حرکات کو پہنچاننے کے لئے استعمال کئے جاتے ہیں۔

تعریف Definition عناصر کی مستطیلی ترتیب **میٹرکس** کہلاتی ہے۔ **افقی ترتیب** صف اور **عمودی ترتیب** قطار کہلاتی ہے۔

مثال کے طور پر $\begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 1 & 9 & -2 \end{pmatrix}$ ایک میٹرکس ہے۔

عام طور پر میٹرکس کو تنہا حروف تہجی سے ظاہر کیا جاتا ہے جیسے $A,\ B,\ C,\ X,\ Y$ وغیرہ اور چھوٹے حروف تہجی جیسے $a,\ b,\ c,\ l,\ m,\ n,\ a_{12},\ a_{13},\ \ldots$ میٹریس کے عناصر کی اندراج کو ظاہر کرتی ہے۔

ذیل میں میٹریس کی چند مثالیں ہیں،

(i) $\begin{pmatrix} 8 & 4 & -1 \\ \frac{1}{2} & 5 & 4 \\ 9 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 1+x & x^3 & \sin x \\ \cos x & 2 & \tan x \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} 3+1 & \sqrt{2} & -1 \\ 1.5 & 8 & 9 \\ \frac{1}{3} & 13 & \frac{-7}{9} \end{pmatrix}$

3.9.1 میٹرکس کا درجہ Order of a Matrix

اگر میٹرکس A میں m صفیں اور n قطار ہوں تو میٹرکس A کا درجہ (قطاروں کی تعداد) × (صفوں کی تعداد) ہے۔ یعنی $m \times n$ ہے۔ $m \times n$ کو m cross n یا m by n پڑھتے ہیں۔ غور کریں کہ $m \times n$، m اور n کا حاصل ضرب نہیں ہے۔

m صفیں اور n قطاریں رکھنے والے ایک میٹرکس A، کی عام شکل اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

جہاں $a_{11}, a_{12}, \ldots$ میٹرکس کے اندراج کو ظاہر کرتے ہیں۔

a_{11} پہلی صف، پہلی قطار کا عنصر ہے، a_{12} پہلی صف، دوسری قطار کا عنصر ہے اور اسی طرح جاری رہتا ہے۔

اپنی پیش رفت کی جانچ

1) میٹرکس کے دوسرے صف اور تیسرے قطار میں عنصر کیا ہے

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

2) میٹرکس کا درجہ کیا ہے؟

$$\begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \\ \tan\theta \end{pmatrix}$$

3) میٹرکس میں $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}$ ظاہر کئے گئے اندراج لکھئے۔

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 9 & -4 & \sqrt{7} \\ 3 & \frac{5}{2} & 8 & 9 \\ 7 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

10th maths 3. algebra 36-71
Monday, February 24, 2020 11:32:00 AM

عام طور پر a_{ij}، i ویں صف اور j ویں قطار کا عنصر ہے اور اسے (i,j) ویں عنصر کہا جاتا ہے۔

اس رقم سے، میٹرکس A کو اس طرح لکھ سکتے ہیں، $A = (a_{ij})_{m\times n}$ جہاں، $i = 1,2,3,...m$ اور $j = 1,2,3,...n$

$A = (a_{ij})_{m\times n}$ میٹرکس میں کل عناصر کے تعداد mn ہے۔

غور کیجئے

ایک میٹرکس کا درجہ بتاتے وقت، پہلے ہمیشہ صفوں کی تعداد کو ظاہر کیا جاتا ہے اور اس کے بعد قطاروں کی تعداد کو ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر

شمار عدد	میٹریس	میٹرکس کے عناصر کی تعداد	میٹرکس کا درجہ
1.	$\begin{pmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}$	$a_{11} = \sin\theta$, $a_{12} = -\cos\theta$, $a_{21} = -\cos\theta$, $a_{22} = \sin\theta$	2×2
2.	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \sqrt{2} & 5 \\ \frac{1}{2} & -4 \end{pmatrix}$	$a_{11} = 1$, $a_{12} = 3$, $a_{21} = \sqrt{2}$, $a_{22} = 5$, $a_{31} = \frac{1}{2}$, $a_{32} = -4$	3×2

کارروائی 4 :



(i) کسی مخصوص سال کے ایک مخصوص مہینے کے کیلنڈر شیٹ (Calendar Sheet) لیجئے۔

(ii) کیلینڈر شیٹ کے تاریخوں کی میٹرکس تیار کیجئے۔

(iii) $2 \times 2, 3 \times 2, 2 \times 3, 3 \times 3, 4 \times 3$ وغیرہ درجہ والے ممکن میٹرکس کی تعداد لکھئے۔

(iv) بڑے سے بڑے درجے والا میٹرکس معلوم کیجئے جو تم دئے گئے کیلینڈر شیٹ سے تیار کر سکتے ہو۔

(v) روزمرہ کی زندگی کے اطلاعات کو منظّم (organize) کرنے کے لئے میٹریس کے استعمالات بیان کیجئے۔

3.9.2 میٹریس کے اقسام Types of Matrices

اس باب میں، ہم میٹریس کے چند اقسام کی وضاحت کریں گے۔

1۔ صف میٹرکس Row Matrix ایک میٹرکس کو صف میٹرکس کہا جاتا ہے اگر وہ صرف ایک ہی صف اور کئی قطاریں رکھتا ہے۔

ایک صف میٹرکس کو صف وکٹار (Vector) بھی کہا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر $A = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ بالترتیب 1×4 اور 1×3 درجہ والے صف میٹریس ہیں۔

عام طور پر $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$ کے صف میٹرکس کا درجہ $1\times n$ ہے۔

2۔ قطار میٹرکس Column Matrix ایک میٹرکس کو قطار میٹرکس کہا جاتا ہے اگر وہ صرف ایک ہی قطار اور کئی صفیں رکھتا ہے۔

ایک قطار میٹرکس کو قطار وکٹار (Vector) بھی کہا جاتا ہے۔

10th maths 3. algebra 36-71
Monday, February 24, 2020 11:32:01 AM

مثال کے طور پر، $A = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \\ 1 \end{pmatrix}$ ، $B = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 7 \end{pmatrix}$ اور $C = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 23 \\ 17 \end{pmatrix}$ بالترتیب $3\times1, 2\times1$ اور 4×1 درجہ کے قطار میٹریس ہیں۔

عام طور پر $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ ، $m \times 1$ درجہ کا قطار میٹرکس ہے۔

3۔ مربع میٹرکس (Square Matrix)

ایک میٹرکس جس میں صفوں اور قطاروں کی تعداد مساوی ہو مربع میٹرکس کہلاتا ہے، غرض میٹرکس $A = (a_{ij})_{m\times n}$ ایک مربع میٹرکس ہوگا اگر $m = n$ ہو۔

مثال کے طور پر $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}_{2\times2}$ ، $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 8 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}_{3\times3}$ مربع میٹریس ہیں۔

عام طور پر $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}_{2\times2}$ ، $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}_{3\times3}$ بالترتیب 2×2 اور 3×3 درجہ کے مربع میٹریس ہیں۔

$A = (a_{ij})_{m\times m}$، m درجہ کا ایک مربع میٹرکس ہے۔

تعریف : ایک مربع میٹرکس میں a_{ii} (i.e) $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots$ میں موجود عناصر، بنیادی وتر یا اولین وتر کے عناصر کہلاتے ہیں،
مثال کے طور پر میٹرکس $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ میں 1 اور 5 اولین وتر کے عناصر ہیں۔

4۔ وتر میٹرکس Diagonal Matrix

ایک مربع میٹرکس جس میں اولین وتر کے اوپر اور نیچے کے تمام عناصر صفر ہوں تو وہ وتر میٹرکس کہلاتا ہے، یعنی ایک مربع میٹرکس $A = (a_{ij})$ وتر میٹرکس کہلاتا ہے۔ اگر $a_{ij} = 0$ ، $i \neq j$ کے لئے، غور کریں کہ اولین وتر کے چند عناصر صفر ہو سکتے ہیں مگر تمام عناصر نہیں۔

مثال کے طور پر $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ وتر میٹریس ہیں۔

5۔ اسکیلر میٹرکس (Scalar Matrix)

ایک وتر میٹرکس جس میں اولین وتر کے عناصر مساوی ہوں اسکیلر میٹرکس کہلاتا ہے۔

10th maths 3. algebra 36-71
Monday, February 24, 2020 11:32:01 AM

غرض $\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}k&0&0\\0&k&0\\0&0&k\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{pmatrix}$

عام طور پر $A=(a_{ij})_{m\times m}$ اسکیلر میٹرکس کہلاتا ہے اگر

$$\left.\begin{matrix} i\neq j & \text{جب } 0 \\ i=j & \text{جب } k \end{matrix}\right\} = a_{ij} \quad \text{جہاں } k \text{ ایک مستقل ہے}$$

6۔ تماثل یا اکائی میٹرکس Identity (or)Unit Matrix

ایک مربع میٹرکس جس میں تمام اولین وتر کے عناصر 1 ہیں اور باقیہ تمام عناصر صفر ہوں تو وہ **تماثل میٹرکس یا اکائی میٹرکس** کہلاتا ہے۔

$$\left.\begin{matrix} i=j & \text{اگر } 1 \\ i\neq j & \text{اگر } 0 \end{matrix}\right\} = a_{ij}$$ غرض ایک مربع میٹرکس $A=(a_{ij})$ ایک تماثل میٹرکس ہے

n درجہ کا ایک اکائی میٹرکس کو I_n لکھا جاتا ہے۔

$I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ بالترتیب درجہ 3 اور 2 کے تماثل میٹریس ہیں۔

7۔ صفر میٹرکس یا معدوم میٹرکس Zero Matrix or Null Matrix

ایک میٹرکس **صفر میٹرکس یا معدوم میٹرکس** کہلاتا ہے۔ اگر اس کے تمام عناصر '0' صفر ہیں۔

$(0), \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

مثال کے طور پر $3\times 3, 2\times 2$ اور 1×1 درجہ کے صفر میٹریس ہیں مگر درجہ مختلف ہیں $n\times n$ درجہ کے صفر میٹرکس کو 0_n سے ظاہر کرتے ہیں۔

$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 2×3 درجے کا ایک صفر میٹرکس ہے۔

8 میٹرکس کا متبدل یا ٹرانسپوز میٹرکس : Transpose of a Matrix

میٹرکس A کا **متبدل میٹرکس**، A کے صفوں اور قطاروں کے ردوّبدل سے حاصل ہوتا ہے اور اس کو A ٹرانسپوز یا A^T متبدل (کی طرح پڑھتے ہیں) سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

(a) اگر $A=\begin{pmatrix}5&3&-1\\2&8&9\\-4&7&5\end{pmatrix}_{3\times 3}$ ہو تو $A^T=\begin{pmatrix}5&2&-4\\3&8&7\\-1&9&5\end{pmatrix}_{3\times 3}$

(b) اگر $B=\begin{pmatrix}1&5\\8&9\\4&3\end{pmatrix}_{3\times 2}$ ہو تو $B^T=\begin{pmatrix}1&8&4\\5&9&3\end{pmatrix}_{2\times 3}$

اگر A کا درجہ $m\times n$ ہو تو A^T کا درجہ $n\times m$ ہے۔ غور کریں کہ، $(A^T)^T=A$

10th maths 3. algebra 36-71
Monday, February 24, 2020 11:32:02 AM

9۔ مثلث نما میٹرکس : Triangular Matrix

ایک مربع میٹرکس جس میں اولین وتر کے تمام اندراج صفر ہوں تو وہ **نچلی مثلث نما میٹرکس** کہلاتا ہے۔
اگر اولین وتر کے نیچے کے تمام اندراج صفر ہوں تو وہ **اوپری مثلث نما میٹرکس** کہلاتا ہے۔

تعریف : ایک مربع میٹرکس $A = (a_{ij})\ n \times n$ اوپری مثلث نما میٹرکس کہلاتا ہے۔ اگر $i < j$ کے لئے $a_{ij} = 0$ اور اوپری مثلث نما میٹرکس کہلاتا ہے۔ اگر $i < j$ کے لئے $a_{ij} = 0$ ہوں تو نچلی مثلث نما میٹرکس کہلاتا ہے۔

مثال کے طور پر $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ ایک اوپری مثلث نما میٹرکس ہے۔اور $B = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ -11 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ایک نچلی مثلث نما میٹرکس ہے۔

مساوی میٹریسس Equal Matrices

دو میٹریسس A اور B مساوی کہلاتے ہیں۔اگر صرف اور صرف دونوں مساوی درجہ رکھتے ہوں اور میٹرکس A کے ہر عنصر میٹرکس B کے نظیری عنصر کے مساوی ہوں یعنی تمام i,j کے لئے $a_{ij} = b_{ij}$

مثال کے طور پر، اگر $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 1^2 + 2^2 & \sin^2\theta + \cos^2\theta \\ 1 + \frac{3}{2} - \frac{5}{2} & 2 + \sec^2\theta - \tan^2\theta \end{pmatrix}$

ہو تو ہم غور کرتے ہیں کہ A اور B یکساں درجہ رکھتے ہوں اور تمام i,j کے لئے $a_{ij} = b_{ij}$ لہذا، A اور B مساوی میٹریسس ہیں۔

اپنی پیش رفت کی جانچ

1۔ ایک قطار میٹرکس میں قطار (قطاروں) کی تعداد..... ہے۔
2۔ ایک صف میٹرکس میں صف (صفوں) کی تعداد..... ہے۔
3۔ کسی اکائی میٹرکس میں غیر وتری عناصر ..... ہیں۔
4۔ کیا 32 عناصر سے مربع میٹرکس وجود میں آسکتا ہے؟

میٹرکس کا منفی : Negative of a Matrix

ایک میٹرکس $A_{m\times n}$ کے ہر عنصر کو ان کے جمعی معکوس سے ردوبدل کرنے سے میٹرکس A کا منفی حاصل ہوتا ہے اور اسے $A_{m\times n}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔
عنصر k کا جمعی معکوس $-k$ ہے۔ یعنی، $-A$ کا ہر عنصر A کے نظیری عنصر کا منفی ہے۔مثال کے طور پر،

اگر $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 9 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix}_{2\times 3}$ ہو تو $-A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -9 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 3}$

مثال 3.56 ذیل کے اطلاعات پر غور کیجئے جس میں تین کارخانوں (Factories) I,II اور III کے مرد اور عورت مزدوروں کے بارے میں دیا گیا ہے

کارخانہ	مرد	عورتیں
I	23	18
II	47	36
III	15	16

ان اطلاعات کو میٹرکس کی شکل میں ظاہر کیجئے۔ دوسری صف اور پہلی قطار کا اندراج کیا ظاہر کرتا ہے؟

10th maths 3. algebra 36-71
Monday, February 24, 2020 11:32:03 AM

حل : ان اطلاعات کو 2×3 میٹرکس کی شکل میں اس طرح ظاہر کیا گیا ہے۔

$$A=\begin{pmatrix}23 & 18\\ 47 & 36\\ 15 & 16\end{pmatrix}$$

دوسری صف اور پہلی قطار کا اندراج فیکٹری II کے 47 مرد مزدوروں کو ظاہر کرتا ہے۔

مثال 3.57 اگر ایک میٹرکس کے 16 عناصر ہیں، اس کے ممکن درجے کیا ہو سکتے ہیں؟

حل : ہمیں معلوم ہے کہ، اگر میٹرکس کا درجہ $m \times n$ ہو تو اس کے mn عناصر ہوتے ہیں، غرض 16 عناصر کے میٹرکس کا ممکن درجہ معلوم کرنے کے لئے، ہم طبعی اعداد کے تمام ترتیب وار جوڑیاں معلوم کرتے ہیں جن کا حاصل ضرب 16 ہے۔

اس طرح کے ترتیب وار جوڑیاں یہ ہیں ۔ $(1,16), (16,1), (4,4), (8,2), (2,8)$

لہذا، میٹرکس کے ممکن درجے یہ ہیں۔ $1\times16,\ 16\times1,\ 4\times4,\ 2\times8,\ 8\times2$

Activity 5 کارروائی 5

شمار عدد	عناصر	ممکن درجے	ممکن درجوں کی تعداد
1.	4		3
2.		$1\times9,\ 9\times1,\ 3\times3$	
3.	20		
4.	8		4
5.	1		
6.	100		
7.		$1\times10,\ 10\times1,\ 2\times5,\ 5\times2$	

کیا تم عناصر کی تعداد (دوسری قطار) اور ممکن درجوں کی تعداد (چوتھی قطار) کے درمیان کوئی تعلق معلوم کرتے ہو؟ اگر اس طرح ہے، تو وہ کیا تعلق ہے؟

مثال 3.58 3×3 میٹرکس ترتیب دیجئے، جس کے عناصر $a_{ij} = i^2j^2$ ہیں۔

حل : عام 3×3 میٹرکس اس طرح دیا جاتا ہے۔ $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$ $\qquad a_{ij} = i^2 j^2$

$a_{11} = 1^2 \times 1^2 = 1\times1 = 1;$ $\quad a_{12} = 1^2 \times 2^2 = 1\times4 = 4;$ $\quad a_{13} = 1^2 \times 3^2 = 1\times9 = 9;$

$a_{21} = 2^2 \times 1^2 = 4\times1 = 4;$ $\quad a_{22} = 2^2 \times 2^2 = 4\times4 = 16;$ $\quad a_{23} = 2^2 \times 3^2 = 4\times9 = 36$

$a_{31} = 3^2 \times 1^2 = 9\times1 = 9;$ $\quad a_{32} = 3^2 \times 2^2 = 9\times4 = 36;$ $\quad a_{33} = 3^2 \times 3^2 = 9\times9 = 81$

لہذا، درکار میٹرکس $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 9\\ 4 & 16 & 36\\ 9 & 36 & 81\end{pmatrix}$

مثال 3.59 مساوات $\begin{pmatrix}a-b & 2a+c\\ 2a-b & 3c+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ سے a,b,c,d کی قیمت معلوم کیجئے۔

حل : دئے گئے میٹریسس مساوی ہیں، غرض تمام نظیری عناصر مساوی ہیں۔

10th maths 3. algebra 36-71
Monday, February 24, 2020 11:32:03 AM

لہذا،

$$a - b = 1 \quad (1)$$
$$2a + c = 5 \quad (2)$$
$$2a - b = 0 \quad (3)$$
$$3c + d = 2 \quad (4)$$

(3) سے

$$2a - b = 0$$
$$2a = b \quad (5)$$

$2a = b$ مساوات (1) میں بھرتی کرنے پر، $a - 2a = 1$ سے $a = -1$ حاصل ہوتا ہے۔

مساوات (5) میں $a = -1$ بھرتی کرنے پر، $b = 2(-1)$ سے $b = -2$ حاصل ہوتا ہے۔

مساوات (2) میں $a = -1$ بھرتی کرنے پر، $2(-1) + c = 5$ سے $c = 7$ حاصل ہوتا ہے۔

مساوات (4) میں $c = 7$ بھرتی کرنے پر، $3(7) + d = 2$ سے $d = -19$ حاصل ہوتا ہے۔

لہذا، $a = -1, b = -2, c = 7, d = -19$

مشق 3.17

1۔ میٹرکس $A = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 4 & 3 \\ -1 & \sqrt{7} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 68 & & -11 & 1 \end{pmatrix}$ میں (i) عناصر کی تعداد (ii) میٹرکس کا درجہ لکھئے۔

(iii) عناصر $a_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{34}, a_{43}, a_{44}$ لکھئے۔

2۔ اگر ایک میٹرکس میں 18 عناصر ہوں تو اس میٹرکس کے ممکن درجے کیا ہو سکتے ہیں؟ اگر 6 عناصر ہوں تو درجے کیا ہو سکتے ہیں؟

3۔ 3×3 درجہ کا ایک میٹرکس ترتیب دیجئے۔ جس کے عناصر اس طرح دئے گئے ہیں۔

(i) $a_{ij} = |i - 2j|$ (ii) $a_{ij} = \frac{(i+j)^3}{3}$

4۔ اگر $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 1 & -7 & 9 \\ 3 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ ہو تو A کا متبدل معلوم کیجئے۔

5۔ اگر $A = \begin{pmatrix} \sqrt{7} & -3 \\ -\sqrt{5} & 2 \\ \sqrt{3} & -5 \end{pmatrix}$ ہو تو $-A$ کا متبدل معلوم کیجئے۔

6۔ اگر $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -\sqrt{17} & 0.7 & \frac{5}{2} \\ 8 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ہو تو $(A^T)^T = A$ کی تصدیق کیجئے۔

7۔ ذیل کے مساواتوں سے x, y اور z کی قیمتیں معلوم کیجئے۔

(i) $\begin{pmatrix} 12 & 3 \\ x & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & z \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} x+y & 2 \\ 5+z & xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} x+y+z \\ x+z \\ y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

10th maths 3. algebra 36-71
Monday, February 24, 2020 11:32:04 AM

3.8.3 میٹریسس پر اعمال Operations on Matrices

اس باب میں، ہم میٹریسس کے جمع اور تفریق، ایک اسکیلر (عددیہ) سے میٹرکس کی ضرب اور میٹریسس کے ضرب کے بارے میں بحث کریں گے

میٹریسس کی جمع اور تفریق Addition & Subtraction of Matrices

دو میٹریسس کو جمع یا تفریق کر سکتے ہیں اگر وہ یکساں درجہ کے میٹریسس ہوں۔ دو میٹریسس کو جمع یا تفریق کرنے کے لئے، ان کے نظیری عناصر کو فقط جمع یا تفریق کرتے ہیں۔

مثال کے طور پر
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g & h & i \\ j & k & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+g & b+h & ci+ \\ d+j & e+k & f+l \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{pmatrix}$$

اگر $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, $i=1,2,\ldots m$ $j=1,2,\ldots n$ جہاں $C=A+B$ ہوتو اس طرح کہ $C(c_{ij})$ تمام $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ اور $i=1,2,\ldots m$ $j=1,2,\ldots n$

مثال 3.60 اگر $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ ، $B=\begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ ہوتو $A+B$ معلوم کیجئے۔

حل :
$$A+B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+1 & 2+7 & 3+0 \\ 4+1 & 5+3 & 6+1 \\ 7+2 & 8+4 & 9+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 9 & 3 \\ 5 & 8 & 7 \\ 9 & 12 & 9 \end{pmatrix}$$

مثال 3.61 طلباء کے تین گروہوں (Groups) جن کے نام گروپ 1، گروپ 2، گروپ 3، کے لئے دو امتحانات رکھے گئے اور میٹریسس A اور B کی شکل میں ان کے اسباق ٹمل، انگریزی، سائنس اور حساب کے مارکس کے اوسط کے معطیات دئے گئے ہیں۔ تینوں گروہ کے لئے دونوں امتحانات کے کل مارکس معلوم کیجئے۔

$$A=\begin{array}{c} \\ \text{گروپ 1} \\ \text{گروپ 2} \\ \text{گروپ 3} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{ٹمل} & \text{انگریزی} & \text{سائنس} & \text{حساب} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 22 & 15 & 14 & 23 \\ 50 & 62 & 21 & 30 \\ 53 & 80 & 32 & 40 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$B=\begin{array}{c} \\ \text{گروپ 1} \\ \text{گروپ 2} \\ \text{گروپ 3} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{ٹمل} & \text{انگریزی} & \text{سائنس} & \text{حساب} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 20 & 38 & 15 & 40 \\ 18 & 12 & 17 & 80 \\ 81 & 47 & 52 & 18 \end{pmatrix} \end{array}$$

حل : تینوں گروہ کے لئے دونوں امتحانات کے کل مارکس دئے گئے میٹریس کا حاصل جمع ہے۔

$$A+B=\begin{pmatrix} 22+20 & 15+38 & 14+15 & 23+40 \\ 50+18 & 62+12 & 21+17 & 30+80 \\ 53+81 & 80+47 & 32+52 & 40+18 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 42 & 53 & 29 & 63 \\ 68 & 74 & 38 & 110 \\ 134 & 127 & 84 & 58 \end{pmatrix}$$

10th maths 3. algebra 36-71
Monday, February 24, 2020 11:32:04 AM

مثال 3.62 اگر $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ 5 & -4 & 6\\ -3 & 2 & 9\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 8\\ 3 & 4\\ 9 & 6\end{pmatrix}$ ہو تو ، $A+B$ معلوم کیجئے۔

حل : A اور B کا جمع ممکن نہیں ہے کیونکہ ان کے درجے مختلف ہیں۔

اسکیلر (عددیہ) سے میٹرکس کا ضرب Multiplication of Matrix by Scalar

دئے گئے میٹرکس A کے عناصر کو ایک غیر صفری عدد k سے ضرب دینے پر ایک نیا میٹرکس kA حاصل ہوتا ہے۔ جس کے عناصر k سے ضرب دئے گئے ہیں۔ kA میٹرکس کو A کا اسکیلر ضرب کہتے ہیں۔

غرض، اگر $A=(a_{ij})_{m\times n}$ ہو تو تمام $i=1,2,...,m$ اور تمام $j=1,2,...,n$ کے لئے $kA=(ka_{ij})_{m\times n}$

مثال 3.63 اگر $A=\begin{pmatrix}7 & 8 & 6\\ 1 & 3 & 9\\ -4 & 3 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 11 & -3\\ -1 & 2 & 4\\ 7 & 5 & 0\end{pmatrix}$ ہو تو ، $2A+B$

حل : چونکہ A اور B یکساں درجہ 3×3 کے ہیں، $2A+B$ واضح ہے۔

ہمارے پاس
$$2A+B = 2\begin{pmatrix}7 & 8 & 6\\ 1 & 3 & 9\\ -4 & 3 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 11 & -3\\ -1 & 2 & 4\\ 7 & 5 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & 16 & 12\\ 2 & 6 & 18\\ -8 & 6 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 11 & -3\\ -1 & 2 & 4\\ 7 & 5 & 0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}18 & 27 & 9\\ 1 & 8 & 22\\ -1 & 11 & -2\end{pmatrix}$$

مثال 3.64 اگر $A=\begin{pmatrix}5 & 4 & -2\\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \sqrt{2}\\ 1 & 9 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-7 & 4 & -3\\ \frac{1}{4} & \frac{7}{2} & 3\\ 5 & -6 & 9\end{pmatrix}$ ہو تو $4A-3B$. معلوم کیجئے۔

حل: چونکہ A اور B یکساں درجہ 3×3 کے ہیں، $4A$ اور $3B$ کا تفریق واضح ہے۔

$$4A-3B = 4\begin{pmatrix}5 & 4 & -2\\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \sqrt{2}\\ 1 & 9 & 4\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}-7 & 4 & -3\\ \frac{1}{4} & \frac{7}{2} & 3\\ 5 & -6 & 9\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}20 & 16 & -8\\ 2 & 3 & 4\sqrt{2}\\ 4 & 36 & 16\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}21 & -12 & 9\\ -\frac{3}{4} & -\frac{21}{2} & -9\\ -15 & 18 & -27\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}41 & 4 & 1\\ \frac{5}{4} & -\frac{15}{2} & 4\sqrt{2}-9\\ -11 & 54 & -11\end{pmatrix}$$

100 95 75 25 5 0

10th maths 3. algebra 36-71
Monday, February 24, 2020 11:32:05 AM

میٹرکس کے جمع اور اسکیلر ضرب کی خصوصیات Properties of Matrix Addition and Scalar Multiplication

فرض کیجئے کہ، $m \times n$ درجہ کے میٹریسس ہیں اور p اور q دو غیر صفری اسکیلر (اعداد) ہیں تو ہمارے پاس ذیل کے خصوصیات ہیں

(i) $A + B = B + A$ (میٹرکس کے جمع کی متبادلی خصوصیت)

(ii) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (میٹرکس کے جمع کی مربوطی خصوصیت)

(iii) $(pq)A = p(qA)$ (اسکیلر ضرب کی مربوطی خصوصیت)

(iv) $IA = A$ (اسکیلر تماثلی خصوصیت جہاں I ایک کائی میٹرکس)

(v) $p(A + B) = pA + pB$ (اسکیلر اور دو میٹریس کی تقسیمی خصوصیت)

(vi) $(p + q)A = pA + qA$ (دو اسکیلر کے ایک میٹرکس کی تقسیمی خصوصیت)

جمعی تماثل Additive Identity

معدود میٹرکس، میٹرکس کے جمع کے لئے **تماثل** ہے۔

فرض کیجئے کہ، A ایک میٹرکس ہے،

تب $A + 0 = 0 + A = A$ جہاں 0 معدوم میٹرکس یا صفر میٹرکس ہے۔ جس کا درجہ A کے درجے کے برابر ہے۔

جمعی معکوس Addition Inverse

اگر A دیا گیا میٹرکس ہے تو A کا **جمعی معکوس** $-A$ ہے۔

حقیقت میں ہمارے پاس $A + (-A) = (-A) + A = 0$

مثال 3.65 ذیل کے میٹرکس مساوات سے a,b,c,d کی قیمت معلوم کیجئے۔

حل :

$$\begin{pmatrix} d & 8 \\ 3b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & a \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2a \\ b & 4c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$$

پہلے، ہم دو میٹرکس کے بائیں اور دائیں طرف جمع کرنے پر ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{pmatrix} d+3 & 8+a \\ 3b-2 & a-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2a+1 \\ b-5 & 4c \end{pmatrix}$$

دونوں میٹریسس کے نظیری عناصر کو مساوی کرنے پر، ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے۔

$d + 3 = 2$ سے $d = -1$

$8 + a = 2a + 1$ سے $a = 7$

$3b - 2 = b - 5$ سے $b = \frac{-3}{2}$

$a - 4 = 4c$ میں $a = 7$ بھرتی کرنے پر $c = \frac{3}{4}$ حاصل ہوتا ہے۔

لہذا، $a = 7,\ b = -\frac{3}{2},\ c = \frac{3}{4},\ d = -1.$

10th maths 3. algebra 36-71
Monday, February 24, 2020 11:32:05 AM

مثال 3.66

اگر $A=\begin{pmatrix}1&8&3\\3&5&0\\8&7&6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}8&-6&-4\\2&11&-3\\0&1&5\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}5&3&0\\-1&-7&2\\1&4&3\end{pmatrix}$

ہوتو مندرجہ ذیل معلوم کیجئے۔ (i) $3A+2B-C$ (ii) $\frac{1}{2}A-\frac{3}{2}B$

حل :

(i) $3A+2B-C=3\begin{pmatrix}1&8&3\\3&5&0\\8&7&6\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}8&-6&-4\\2&11&-3\\0&1&5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5&3&0\\-1&-7&2\\1&4&3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}3&24&9\\91&5&0\\24&21&18\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}16&-12&-8\\4&22&-6\\0&2&10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-5&-3&0\\1&7&-2\\-1&-4&-3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}14&9&1\\14&44&-8\\23&19&25\end{pmatrix}$

(ii) $\frac{1}{2}A-\frac{3}{2}B=\frac{1}{2}(A-3B)$

$=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1&8&3\\3&5&0\\8&7&6\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}8&-6&-4\\2&11&-3\\0&1&5\end{pmatrix}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1&8&3\\3&5&0\\8&7&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-24&18&12\\-6&-33&9\\0&-3&-15\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-23&26&15\\-3&-28&9\\8&4&-9\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-\frac{23}{2}&13&\frac{15}{2}\\-\frac{3}{2}&-14&\frac{9}{2}\\4&2&-\frac{9}{2}\end{pmatrix}$

مشق 3.18

1۔ اگر $A=\begin{pmatrix}1&9\\3&4\\8&-3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5&7\\3&3\\1&0\end{pmatrix}$ ہوتو تصدیق کیجئے۔

(i) $A+B=B+A$ (ii) $A+(-A)=(-A)+A=0.$

2۔ اگر $A=\begin{pmatrix}4&3&1\\2&3&-8\\1&0&-4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&3&4\\1&9&2\\-7&1&-1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}8&3&4\\1&-2&3\\2&4&-1\end{pmatrix}$ ہوتو تصدیق کیجئے۔

$A+(B+C)=(A+B)+C.$

10th maths 3. algebra 36-71
Monday, February 24, 2020 11:32:06 AM

3۔ x اور y معلوم کیجئے۔ اگر $X+Y=\begin{pmatrix}7 & 0\\ 3 & 5\end{pmatrix}$ اور $X-Y=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$

4۔ اگر $A=\begin{pmatrix}0 & 4 & 9\\ 8 & 3 & 7\end{pmatrix}$ اور $B=\begin{pmatrix}7 & 3 & 8\\ 1 & 4 & 9\end{pmatrix}$ ہوتو قیمت معلوم کیجئے۔ (i) $B-5A$ (ii) $3A-9B$

5۔ x,y,z کی قیمتیں معلوم کیجئے۔ اگر (i) $\begin{pmatrix}x-3 & 3x-z\\ x+y+7 & x+y+z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 6\end{pmatrix}$

(ii) $(x \quad y-z \quad z+3)+(y \quad 4 \quad 3)=(4 \quad 8 \quad 16)$

6۔ x اور y معلوم کیجئے۔ اگر $x\begin{pmatrix}4\\ -3\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 6\end{pmatrix}$

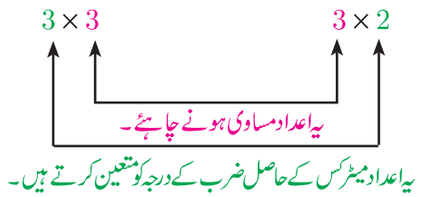
7۔ x کی غیر صفری قیمتیں معلوم کیجئے۔ جو میٹرکس مساوات کے شرط کو پوری کرے

$$x\begin{pmatrix}2x & 2\\ 3 & x\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}8 & 5x\\ 4 & 4x\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x^2+8 & 24\\ 10 & 6x\end{pmatrix}$$

8۔ x,y کے لئے حل کیجئے۔

$$\begin{pmatrix}x^2\\ y^2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-2x\\ -y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ 8\end{pmatrix}$$

میٹریس کی ضرب Multiplication of Matrices



دو میٹریس کو ضرب کرنے کے لئے، پہلے میٹرکس کے قطاروں کی تعداد دوسرے میٹرکس کے صفوں کی تعداد مساوی ہوں۔ 3×3 اور 2×3 درجے کے میٹریس کا ضرب لیجئے۔

حاصل ضرب میٹرکس کا درجہ $\rightarrow$ (دائیں طرف کے میٹرکس کا درجہ) $\times$ (بائیں طرف کے میٹرکس کا درجہ)

(3×3) (3×2) $\rightarrow$ (3×2)

پہلے میٹرکس کے صف کے عناصر کو دوسرے میٹرکس کے قطار کے عناصر سے بالترتیب ضرب دیتے ہیں اور پھر جمع کرتے ہیں اس طرح میٹریس کو ضرب دیتے ہیں۔

مثال کے طور پر، میٹریس کا حاصل ضرب $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\\ e & f\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}g & h & i\\ k & l & m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ag+bk & ah+bl & ai+bm\\ cg+dk & ch+dl & ci+dm\\ eg+fk & eh+fl & ei+fm\end{pmatrix}$

میٹریس کا حاصل ضرب AB معلوم کیا جاسکتا ہے۔ اگر میٹرکس A کے قطاروں کی تعداد، میٹرکس B کے صفوں کی تعداد کے مساوی ہوں۔ اگر میٹرکس A کا درجہ $m\times n$ ہو اور B کا درجہ $n\times p$ ہوتو میٹرکس BA کا درجہ $m\times p$

میٹرکس کے ضرب کی خصوصیات Properties of Multiplication of Matrix

(a) عام طور پر میٹرکس کی ضرب متبادلہ نہیں ہے۔

اگر میٹرکس A کا درجہ $m\times n$ ہو اور B کا درجہ $n\times p$ ہوتو AB واضح ہے مگر BA واضح نہیں ہے پھر بھی اگر AB اور BA دونوں واضح ہوں تو یہ ضروری نہیں کہ وہ دونوں مساوی ہوں۔ عام طور پر، $AB\neq BA$

10th maths 3. algebra 36-71
Monday, February 24, 2020 11:32:07 AM

(b) میٹرکس کی ضرب جمع پر تقسیمی ہے۔

(i) اگر B,A اور C بالترتیب $m \times n$,$n \times p$ اور $n \times p$ درجہ کے میٹریسس ہیں تو $A(B+C) = AB + AC$
(دائیں تقسیمی خاصیت)

(ii) اگر B,A اور C بالترتیب $m \times n$,$m \times n$ اور $n \times p$ درجہ کے میٹریسس ہیں تو $(A+B)\,C = AC + BC$
(بائیں تقسیمی خاصیت)

(c) میٹرکس کی ضرب ہمیشہ مربوطی ہے۔ اگر B,A اور C بالترتیب $m \times n$,$n \times p$ اور $n \times p$ درجہ کے میٹریسس ہیں تو
$(AB)C = A(BC)$

(d) میٹرکس کی ضرب اکائی میٹرکس کے ساتھ

اگر A ایک $n \times n$ درجہ کا مربع میٹرکس ہے اور I اسی درجے کا ایک اکائی میٹرکس ہے تو $AI = IA = A$

غور کیجئے

اگر x اور y دو حقیقی اعداد ہیں اس طرح کہ $xy = 0$ ہو تو کسی ایک $x = 0$ یا $y = 0$ ہے مگر یہ شرط میٹریس کے لحاظ سے صحیح نہیں ہوسکتا۔ $AB = 0$ کا مفہوم $A = 0$ یا $B = 0$ یا دونوں $A,B = 0$ ضروری نہیں ہے۔

تشریح :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{اور} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$\text{مگر} \quad AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & 1-1 \\ -1+1 & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

غرض $A \neq 0,\ B \neq 0$ مگر $AB = 0$

مثال 3.67 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, اور $B = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ہو تو AB معلوم کیجئے۔

حل : ہم یہ معائنہ کرتے ہیں کہ، A ، 2×3 درجے کا میٹرکس ہے اور B ، 3×3 درجے کا میٹرکس ہے، چنانچہ، AB واضح ہے اور اس کا درجہ 2×3 ہوگا۔

دیا گیا ہے۔ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}_{2\times3}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}_{3\times3}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (8+4+0) & (3+8+0) & (1+2+0) \\ (24+2+25) & (9+4+15) & (3+1+5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 11 & 3 \\ 51 & 28 & 9 \end{pmatrix}$$

100 95 75 25 5 0

10th maths 3. algebra 36-71
Monday, February 24, 2020 11:32:07 AM

مثال 3.68 اگر $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ ہوتو AB، BA اور معلوم کیجئے۔ جانچ کیجئے۔ اگر $AB=BA$

حل : ہم یہ معائنہ کرتے ہیں کہ A، 2×2 درجے کا میٹرکس ہے اور B 2×2 درجے کا میٹرکس ہے،

لہذا، AB واضح ہے اور اس کا درجہ 2×2 ہوگا۔

$$AB=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+1 & 0+3\\ 2+3 & 0+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 5 & 9\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}21 & \\ 13 & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+0 & 2+0\\ 2+3 & 1+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 5 & 10\end{pmatrix}$$

لہذا، $AB\neq BA$

مثال 3.69 اگر $A=\begin{pmatrix}2 & -2\sqrt{2}\\ \sqrt{2} & 2\end{pmatrix}$ اور $B=\begin{pmatrix}2 & 2\sqrt{2}\\ -\sqrt{2} & 2\end{pmatrix}$ ہوتو ثابت کیجئے کہ میٹرکس کی ضرب کے لحاظ سے A اور B متبادلیتی خاصیت کی شرط پوری کرتے ہیں۔

حل : ہم کو ثابت کرنا ہے کہ $AB=BA$ ۔

LHS $AB=\begin{pmatrix}2 & -2\sqrt{2}\\ \sqrt{2} & 2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2 & 2\sqrt{2}\\ -\sqrt{2} & 2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}4+4 & 4\sqrt{2}-4\sqrt{2}\\ 2\sqrt{2}-2\sqrt{2} & 4+4\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}8 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix}$

RHS $BA=\begin{pmatrix}2 & 2\sqrt{2}\\ -\sqrt{2} & 2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2 & -2\sqrt{2}\\ \sqrt{2} & 2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}4+4 & -4\sqrt{2}+4\sqrt{2}\\ -2\sqrt{2}+2\sqrt{2} & 4+4\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}8 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix}$

چنانچہ، LHS = RHS (ie) $AB=BA$

غور کیجئے

- اگر A اور B کوئی دو غیر صفری میٹریس ہیں تو $(A+B)^2\neq A^2+2AB+B^2$.
- پھر بھی اگر $AB=BA$ ہوتو $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

مثال 3.70 $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 5\end{pmatrix}$

حل : $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}_{2\times 2}\times\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}_{2\times 1}=\begin{pmatrix}4\\ 5\end{pmatrix}$

میٹرکس کے ضرب سے $\begin{pmatrix}2x+y\\ x+2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 5\end{pmatrix}$

$2x+y=4$ ...(1)

$x+2y=5$ ...(2)

دوبارہ لکھنے پر

(1) $-2\times$ (2) سے

$2x+\ y=\ 4$

$2x+4y=10$ (−)

$-3y=-6 \quad\Rightarrow\quad y=2$

10th maths 3. algebra 36-71
Monday, February 24, 2020 11:32:07 AM

(1) میں $y=2$ بھرتی کرنے پر، $x=1$ سے $2x+2=4$

لہذا، $x=1,\ y=2$

مثال 3.71 اگر $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\end{pmatrix}$ ، $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ اور $C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ ہوتو ثابت کیجئے کہ، $(AB)C=A(BC)$

حل :

LHS $(AB)C$

$$AB=(1\quad -1\quad 2)_{1\times 3}\times\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}_{3\times 2}=(1-2+2\quad -1-1+6)=(1\quad 4)$$

$$(AB)C=(1\quad 4)_{1\times 2}\times\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}_{2\times 2}=(1+8\quad 2-4)=[9\quad -2]\qquad (1)$$

RHS $A(BC)$

$$BC=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}_{3\times 2}\times\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}_{2\times 2}=\begin{pmatrix}1-2 & 2+1\\ 2+2 & 4-1\\ 1+6 & 2-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 4 & 3\\ 7 & -1\end{pmatrix}$$

$$A(BC)=(1\quad -1\quad 2)_{1\times 3}\times\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 4 & 3\\ 7 & -1\end{pmatrix}_{3\times 2}$$

$$A(BC)=\big((-1-4+14)\quad (3-3-2)\big)=(9\quad -2)\qquad (2)$$

$(AB)C=A(BC)$. (1) اور (2) سے

مثال 3.72 اگر $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -4 & 2\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}-7 & 6\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ تصدیق کیجئے کہ $A\big(B+C\big)=AB+AC.$

حل :

LHS $A(B+C)$

$$B+C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -4 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-7 & 6\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & 8\\ -1 & 4\end{pmatrix}$$

$$A(B+C)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-6 & 8\\ -1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6-1 & 8+4\\ 6-3 & -8+12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & 12\\ 3 & 4\end{pmatrix}\qquad (1)$$

RHS $AB+AC$

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 2\\ -4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-4 & 2+2\\ -1-12 & -2+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -13 & 4\end{pmatrix}$$

$$AC=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-7 & 6\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7+3 & 6+2\\ 7+9 & -6+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 8\\ 16 & 0\end{pmatrix}$$

10th maths 3. algebra 36-71
Monday, February 24, 2020 11:32:08 AM

$$AB + AC = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -13 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 16 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 12 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (2)$$

لہذا،

(1) اور (2) سے $A(B+C) = AB + AC$ چنانچہ، ثابت ہوتا ہے۔

مثال 3.73 اگر $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ اور $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ہوتو ثابت کیجئے کہ $(AB)^T = B^T A^T$

حل :

LHS $(AB)^T$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 3} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

$$= \begin{pmatrix} 2-2+0 & -1+8+2 \\ 4+1+0 & -2-4+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 9 & -4 \end{pmatrix} \quad (1)$$

RHS ($B^T A^T$)

$$B^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix},\ A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^T A^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 3} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

$$= \begin{pmatrix} 2-2+0 & 4+1+0 \\ -1+8+2 & -2-4+2 \end{pmatrix}$$

$$B^T A^T = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 9 & -4 \end{pmatrix} \quad (2)$$

(1) اور (2) سے $(AB)^T = B^T A^T$. چنانچہ، ثابت ہوتا ہے۔

مشق 3.19

1۔ اگر A کا درجہ $p \times q$ اور B کا درجہ $q \times r$ ہوتو AB اور BA کا درجہ کیا ہے؟

2۔ A کے ’a‘ صفیں اور ’$a+3$‘ قطاریں ہیں۔ B کے ’b‘ صفیں اور ’$17-b$‘ قطاریں ہیں اور اگر دونوں حاصلِ ضرب AB اور BA واضح ہیں تو a, b معلوم کیجئے۔

3۔ حاصل ضرب میٹرکس AB کا درجہ معلوم کیجئے۔

	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)
A کے درجے	3×3	4×3	4×2	4×5	1×1
B کے درجے	3×3	3×2	2×2	5×1	1×3

4۔ اگر $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ ہوتو AB اور BA معلوم کیجئے اور جانچ کیجئے۔ اگر $AB = BA$ ؟

5۔ دیا گیا ہے کہ $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

تصدیق کیجئے کہ $A(B+C) = AB + AC$.

10th maths 3. algebra 36-71
Monday, February 24, 2020 11:32:08 AM

6۔ ثابت کیجئے کہ میٹریسس $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$ متبادلتی خاصیت $AB=BA$ شرط پوری کرتے ہیں۔

7۔ فرض کیجئے کہ $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 1 & 5\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ ثابت کیجئے کہ

(i) $A(BC)=(AB)C$ (ii) $(A-B)C=AC-BC$ (iii) $(A-B)^T=A^T-B^T$

8۔ اگر $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & 0\\ 0 & \cos\theta\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}\sin\theta & 0\\ 0 & \sin\theta\end{pmatrix}$ ہوتو ثابت کیجئے $A^2+B^2=I$

9۔ اگر $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ ہوتو ثابت کیجئے کہ $AA^T=I$

10۔ اگر $A=\begin{pmatrix}5 & -4\\ 6 & -5\end{pmatrix}$ ہوتو تصدیق کیجئے کہ $A^2=I$

11۔ اگر $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ ہوتو ثابت کیجئے کہ $A^2-(a+d)A=(bc-ad)I_2$

12۔ اگر $A=\begin{pmatrix}5 & 2 & 9\\ 1 & 2 & 8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 7\\ 1 & 2\\ 5 & -1\end{pmatrix}$ ہوتو تصدیق کیجئے کہ $(AB)^T=B^TA^T$

13۔ اگر $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ ہوتو ثابت کیجئے کہ $A^2-5A+7I_2=0$

6ZM3R

مشق 3.20

معروضی سوالات Multiple choice questions

1۔ تین متغیرات والے تین خطّی مساواتوں کا نظام موافق ہے اگر ان کے سطحیں

(1) صرف ایک نقطہ پر قطع کرتے ہیں۔ (2) خط پر قطع کرتے ہیں۔ (3) ایک دوسرے کے منطبق ہیں۔ (4) قطع نہیں کرتے۔

2۔ مساوات کے نظام کا حل $x+y-3z=-6$, $-7y+7z=7$, $3z=9$

(1) $x=1, y=2, z=3$ (2) $x=-1, y=2, z=3$

(3) $x=-1, y=-2, z=3$ (4) $x=1, y=-2, z=3$

3۔ اگر $x^2-2x-24$ اور x^2-kx-6 کا HCF $(x-6)$ ہے تو k کی قیمت یہ ہے۔

(1) 3 (2) 5 (3) 6 (4) 8

4۔ $\frac{3y-3}{y}\div\frac{7y-7}{3y^2}$ ہے۔

(1) $\frac{9y}{7}$ (2) $\frac{9y^3}{(21y-21)}$ (3) $\frac{21y^2-42y+21}{3y^3}$ (4) $\frac{7(y^2-2y+1)}{y^2}$

100 95 75 25 5 0

10th maths 3. algebra 36-71
Monday, February 24, 2020 11:32:09 AM

5۔ $y^2 + \frac{1}{y^2}$ اس کے مساوی نہیں ہے۔

(1) $\frac{y^4+1}{y^2}$ (2) $\left(y+\frac{1}{y}\right)^2$ (3) $\left(y-\frac{1}{y}\right)^2+2$ (4) $\left(y+\frac{1}{y}\right)^2-2$

6۔ $\frac{x}{x^2-25} - \frac{8}{x^2+6x+5}$ کا حل

(1) $\frac{x^2-7x+40}{(x-5)(x+5)}$ (2) $\frac{x^2+7x+40}{(x-5)(x+5)(x+1)}$

(3) $\frac{x^2-7x+40}{(x^2-25)(x+1)}$ (4) $\frac{x^2+10}{(x^2-25)(x+1)}$

7۔ $\frac{256x^8y^4z^{10}}{25x^6y^6z^6}$ کا جذرالمربع اس کے مساوی ہے۔

(1) $\left(\frac{16x^2z^4}{5y^2}\right)$ (2) $\left(\frac{16y^2}{x^2z^4}\right)$ (3) $\left(\frac{16y}{5xz^2}\right)$ (4) $\left(\frac{16xz^2}{5y}\right)$

8۔ $x^4 + 64$ کو کامل مربع بنانے کے لئے ذیل کے کونسی رقم کو جمع کرنا چاہئے؟

(1) $4x^2$ (2) $16x^2$ (3) $8x^2$ (4) $-8x^2$

9۔ $(2x-1)^2 = 9$ کا حل اس کے مساوی ہے۔

(1) -1 (2) 2 (3) $-1, 2$ (4) کوئی بھی نہیں

10۔ اگر $4x^4 - 24x^3 + 76x^2 + ax + b$ ایک کامل ہے تو a اور b کی قیمتیں یہ ہیں ۔

(1) 100,120 (2) 10,12 (3) -120,100 (4) 12,10

11۔ اگر مساوات $q^2x^2 + p^2x + r^2 = 0$ کے جذریں $qx^2 + px + r = 0$ کے جذروں کے مربع ہیں تو q,p,r یہ ہیں۔

(1) A.p (2) G.p (3) A.P اور G.P دونوں (4) کوئی بھی نہیں

12۔ خطی مساوات کی ترسیم ——

(1) خط مستقیم (2) دائرہ (3) مکافی (4) ہذلولی (hyperbola)

13۔ X محور سے دو درجی کثیر رقمی $x^2 + 4x + 4$ کے نقاط تقاطع کی تعداد

(1) 0 (2) 1 (3) 0 or 1 (4) 2

14۔ دئے گئے میٹرکس $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 9 & 11 & 13 & 15 \end{pmatrix}$ کے لئے میٹرکس A کا درجہ یہ ہے۔

(1) 2×3 (2) 3×2 (3) 3×4 (4) 4×3

15۔ اگر میٹرکس A کا درجہ 2×3 ہے اور میٹرکس B کا درجہ 3×4 ، AB میٹرکس کے قطاروں کی تعداد

(1) 3 (2) 4 (3) 2 (4) 5

10th maths 3. algebra 36-71
Monday, February 24, 2020 11:32:10 AM

16۔ اگر ایک میٹرکس کے قطاروں اور صفوں کے تعداد مساوی نہیں ہے تو میٹرکس کو..... کہا جاتا ہے۔

معدوم میٹرکس(4)　　مربع میٹرکس(3)　　مستطیلی میٹرکس(2)　　وتر میٹرکس(1)

17۔ قطار میٹرکس کا ٹرانسپوز

صف میٹرکس(4)　　قطار میٹرکس(3)　　وتر میٹرکس(2)　　اکائی میٹرکس(1)

18۔ میٹرکس X معلوم کیجئے اگر $2X+\begin{pmatrix}1 & 3\\5 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 7\\9 & 5\end{pmatrix}$

(1) $\begin{pmatrix}-2 & -2\\2 & -1\end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix}2 & 2\\2 & -1\end{pmatrix}$　　(3) $\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 2\end{pmatrix}$　　(4) $\begin{pmatrix}2 & 1\\2 & 2\end{pmatrix}$

19۔ دئے گئے میٹریس سے ذیل کے کونسے میٹرکس ترتیب دے سکتے ہیں۔

$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\\5 & 6\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{pmatrix}$, (i) A^2 (ii) B^2 (iii) AB (iv) BA

(1) صرف (i) اور (ii)　　(2) صرف (ii) اور (iii)　　(3) صرف (ii) اور (iv)　　(4) یہ تمام

20۔ اگر $C=\begin{pmatrix}0 & 1\\-2 & 5\end{pmatrix}$ اور $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & -1\\0 & 2\end{pmatrix}$ ہو تو ذیل کے کونسے جملے صحیح ہیں؟

(i) $AB+C=\begin{pmatrix}5 & 5\\5 & 5\end{pmatrix}$　　(ii) $BC=\begin{pmatrix}0 & 1\\2 & -3\\-4 & 10\end{pmatrix}$

(iii) $BA+C=\begin{pmatrix}2 & 5\\3 & 0\end{pmatrix}$　　(iv) $ABC=\begin{pmatrix}-8 & 20\\-8 & 13\end{pmatrix}$

(1) صرف (i) اور (ii)　　(2) صرف (ii) اور (iii)　　(3) صرف (iii) اور (iv)　　(4) یہ تمام

Unit Exercise - 3　　اکائی کی مشق - 3



1۔ حل کیجئے۔ $\frac{1}{3}(x+y-5)=y-z=2x-11=9-(x+2z)$

2۔ ایک سو پچاس طلباء کو اسکول میں داخلہ کئے گئے، انہیں تین شکشنوں A، B اور C میں تقسیم کئے گئے۔ اگر 6 طلباء کو سکشن A سے سکشن C میں تبدیل کرتے ہیں تو دونوں سکشنوں میں طلباء کی تعداد مساوی ہوگا۔ اگر سکشن C کے طلباء کا 4 گُنا لینے پر سکشن A کے طلباء کی تعداد سکشن B کے طلباء کی تعداد کی بقدر زیادہ ہو جاتا ہے تو تینوں سکشنوں کے طلباء کی تعداد معلوم کیجئے۔

10th maths 3. algebra 36-71
Monday, February 24, 2020 11:32:10 AM

3۔ ایک تین ہندسی عدد میں، جب دہائی اور سو کے ہندسہ کو ردوبدل کرنے پر حاصل ہونے والا نیا عدد اصلی عدد کے تگنا سے 54 زیادہ ہوگا۔ اگر اس عدد کے ساتھ 198 جمع کرنے پر ہندسے الٹ (Reversed) جاتے ہیں دہائی ہندسہ سو کے ہندسے سے دُگنا زیادہ ہے جب کہ دہائی کا ہندسہ اکائی ہندسہ زیادہ ہوتا ہے۔ اصلی عدد معلوم کیجئے۔

4۔ $xy(k^2+1)+k(x^2+y^2)$ and $xy(k^2-1)+k(x^2-y^2)$ کے ذواضعاف اقل معلوم کیجئے۔

5۔ تقسیمی الگارتم سے ذیل کے GCD معلوم کیجئے۔

$$2x^4+13x^3+27x^2+23x+7,\ x^3+3x^2+3x+1,\ x^2+2x+1$$

6۔ دئے گئے ناطق جملوں کو مختصر ترین شکل میں تخفیف کیجئے۔

(i) $\dfrac{x^{3a}-8}{x^{2a}+2x^a+4}$ (ii) $\dfrac{10x^3-25x^2+4x-10}{-4-10x^2}$

7۔ مختصر کیجئے۔ $\dfrac{\frac{1}{p}+\frac{1}{q+r}}{\frac{1}{p}-\frac{1}{q+r}}\times\left(1+\dfrac{q^2+r^2-p^2}{2qr}\right)$

8۔ عادل، راشد اور راحیل 6 گھنٹوں میں ایک اسٹور کی صفائی کر سکتے ہیں تنہا کام کرنے پر، راشد اسٹور کی صفائی کے لئے عادل سے دُگنا وقت لیتا ہے، راحیل عادل سے تگنا وقت لیتا ہے۔ ہر ایک کے لئے کتنا وقت لگے گا اگر وہ تنہا کام کرتے ہیں؟

9۔ جذر المربع معلوم کیجئے۔ $289x^4-612x^3+970x^2-684x+361$.

10۔ حل کیجئے۔ $\sqrt{y+1}+\sqrt{2y-5}=3$

11۔ ایک کشتی پانی کے بہاؤ کی مخالف سمت میں 36 kms کی سفر کے لئے واپسی وقت سے 1.6 گھنٹہ زیادہ لیتی ہے۔ اگر پانی کے بہاؤ کی رفتار 4 km فی گھنٹہ ہے، ساکن پانی میں کشتی کی رفتار کیا ہوگی؟

12۔ کیا 320 m احاطہ اور 4800 m² والا ایک مستطیلی باغ بنانا ممکن ہے؟ اگر اس طرح ہے تو اس کی لمبائی اور چوڑائی معلوم کیجئے۔

13۔ 2 pm بج کر t منٹ پر 3 pm بجنے کے لئے $\frac{t^2}{4}$ سے 3 منٹ کم ضرورت ہے تو t معلوم کیجئے۔

14۔ ایک صف میں سیٹوں کی تعداد ایک ہال میں کل صفوں کی تعداد کے مساوی ہے۔ اس ہال میں کل سیٹوں کی تعداد 375 زیادہ ہوتا ہے اگر صفوں کی تعداد دُگنا اور ہر صف میں سیٹوں کی تعداد 5 گھٹا دیا جائے شروع میں ہال کے صفوں کی تعداد معلوم کیجئے۔

15۔ اگر کثیر رقمی $f(x)=x^2-2x+3$ کی صفریں α اور β ہیں، کثیر رقمی معلوم کیجئے۔ جس کے جذریں

(i) $\alpha+2,\ \beta+2$ (ii) $\dfrac{\alpha-1}{\alpha+1},\ \dfrac{\beta-1}{\beta+1}$.

16۔ اگر مساوات $x^2+px-4=0$ کا ایک جذر -4 ہے اور مساوات $x^2+px+q=0$ کے مساوی جذریں ہیں، p اور q کی قیمتیں معلوم کیجئے

17۔ دو کسان ساجد اور سدید تین قسم کے اناج جیسے چاول گیہوں اور راگی کی کاشتکاری کرتے ہیں۔ اگر اپریل کے مہینے میں دونوں کسان کے اناجوں کے تینوں قسموں کی فروخت (میں) ایک میٹرکس کے ذریعہ دئے گئے ہیں ۔

10th maths 3. algebra 36-71
Monday, February 24, 2020 11:32:11 AM

اپریل میں فروخت ₹ میں

$$A = \begin{matrix} \\ \text{ساجد} \\ \text{سدید} \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} \text{چاول} & \text{گیہوں} & \text{راگی} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 500 & 1000 & 1500 \\ 2500 & 1500 & 500 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

اور مئی کے مہینے میں فروخت (₹ میں) ہر قسم کے اناج کے لئے ٹھیک اپریل کے مہینے کا دُگنا ہے

(i) اپریل اور مئی کے مہینوں کی اوسط فروخت کیا ہے؟

(ii) اگر اسی طریقے سے متواتر مہینوں میں فروخت اضافہ ہوتی ہے تو آگست کے مہینے میں فروخت کیا ہوگی؟

18۔ اگر $\cos\theta \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} + \sin\theta \begin{pmatrix} x & -\cos\theta \\ \cos\theta & x \end{pmatrix} = I_2$ ہوتو x معلوم کیجئے۔

19۔ دیا گیا ہے $A = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ اور $BA = C^2$ ہوتو p اور q کی قیمت معلوم کیجئے۔

20۔ میٹرکس $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ D معلوم کیجئے اس طرح کہ $CD - AB = 0$ ہو۔

Points to Remember — یاد رکھنے کے نکات

☆ تین متغیرات کے خطی مساواتوں کا نظام ذیل کے کسی ایک صورتِ حال کے مطابق ہوگا۔ (i) ایک واحد حل (ii) لامحدود کئی حل (iii) حل نہیں

☆ دو یا دو سے زیادہ الجبریائی جملوں کا ذو اضعاف اقل سب سے کم درجے یا (قوت) کا جملہ ہے اس طرح کہ وہ جملے مکمل طور پر اس جملہ کو تقسیم کریں۔

☆ متغیر x میں دو درجے والا کثیر رقمی، x میں دو درجی کثیر رقمی کہلاتا ہے ہر دو درجی کثیر رقمی کے زیادہ سے زیادہ 2 صفریں ہوتے ہیں اس کے علاوہ دو درجی کثیر رقمی کے صفریں X محور سے قطع کرتے ہیں۔

☆ دو درجی مساوات $(a \neq 0)$ $ax^2 + bx + c = 0$ کے جذریں $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ سے دئے جاتے ہیں۔

☆ دو درجی مساوات $a \neq 0$ ، $ax^2 + bx + c = 0$ کے لئے

جذروں کا حاصل جمع $\alpha + \beta = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-x \text{ کا ضریب}}{x^2 \text{ کا ضریب}}$

جذروں کا حاصل ضرب $\alpha\beta = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\text{مستقل رقم}}{x^2 \text{ کا ضریب}}$

10th maths 3. algebra 36-71
Monday, February 24, 2020 11:32:11 AM

☆ اگر ایک دودرجی مساوات کے جذر α اور β ہیں تو مساوات $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$ سے دیا جاتا ہے۔

☆ امتیازی خصوصیت ($\Delta = b^2 - 4ac$) کی قیمت ذیل کی طرح سے جذروں کی نوعیت طے کرتی ہے۔

(i) جب $\Delta > 0$ ، جذریں حقیقی اور غیر مساوی ہیں۔

(ii) جب $\Delta = 0$ جذریں حقیقی اور مساوی ہیں۔

(iii) جب $\Delta < 0$ ، جذریں حقیقی نہیں ہیں، مجازی ہیں۔

☆ دودرجی مساوات کو ترسیماً حل کرنا۔

☆ عناصر کی مستطیلی ترتیب جو صفوں اور قطاروں سے دئے گئے ہیں میٹرکس کہلاتی ہے۔ اگر ایک میٹرکس کے m صفیں اور n قطاریں ہوں تو میٹرکس کا درجہ $m \times n$ ہے۔

☆ میٹرکس کا درجہ

اگر میٹرکس A میں m صفیں اور n قطاریں ہوں تو میٹرکس کا درجہ (قطاروں کی تعداد) × (صفوں کی تعداد) ہے، یعنی $m \times n$ ہے ، $m \times n$ کو m cross n پڑھتے ہیں۔ غور کریں کہ $m \times n$، m اور n کا حاصل ضرب نہیں ہے۔

☆ میٹریس کی قسمیں

(i) ایک میٹرکس کو صف میٹرکس کہا جاتا ہے اگر وہ صرف ایک ہی صف اور کئی قطاریں رکھتا ہے۔ ایک صف میٹرکس کو صف وکٹار بھی کہا جاتا ہے

(ii) ایک میٹرکس کو قطار میٹرکس کہا جاتا ہے اگر وہ صرف ایک ہی قطار اور کئی صفیں رکھتا ہے ایک قطار میٹرکس کو قطار وکٹار بھی کہا جاتا ہے۔

(iii) ایک میٹرکس جس میں صفوں اور قطاروں کی تعداد مساوی ہو مربع میٹرکس کہلاتا ہے۔

(iv) ایک مربع میٹرکس جس میں اولین وتر کے اوپر اور نیچے کے تمام عناصر صفر ہوں تو وہ وتر میٹرکس کہلاتا ہے۔

(v) ایک وتر میٹرکس جس میں اولین وتر کے عناصر مساوی ہوں اسکیلر میٹرس کہلاتا ہے۔

(vi) ایک مربع میٹرکس جس میں تمام اولین وتر کے عناصر ''1'' اور باقیہ تمام عناصر صفر ہوں تو وہ متماثل میٹرکس یا اکائی میٹرکس کہلاتا ہے۔

(vii) ایک میٹرکس صفر میٹرکس یا معدوم میٹرکس کہلاتا ہے، اگر اس کے تمام عناصر صفر ہوں۔

(viii) اگر A ایک میٹرکس ہے، A کے صفوں اور قطاروں کے ردوبدل سے حاصل ہونے والا میٹرکس A کا متبدل اور اسے A^T سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

(ix) ایک مربع میٹرکس جس میں اولین وتر کے اوپر کے تمام اندراج صفر ہوں تو وہ نچلی مثلث نما میٹرکس کہلاتا ہے۔

(x) دو میٹرکس A اور B مساوی کہلاتے ہیں اگر صرف اور صرف دونوں مساوی درجہ رکھتے ہوں اور میٹرکس A کے ہر عنصر میٹرکس B کے نظیری عنصر کے مساوی ہوں یعنی تمام i,j کے لئے $a_{ij} = b_{ij}$

10th maths 3. algebra 36-71
Monday, February 24, 2020 11:32:12 AM

(xi) میٹرکس $A_{m\times n}$ کا منفی میٹرکس ، $-A_{m\times n}$ کے ہر عنصر کو ان کے جمعی معکوس سے ردوبدل کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

☆ میٹریس کی جمع اور تفریق

دو میٹریس کو جمع یا تفریق کر سکتے ہیں اگر وہ یکساں درجہ کے میٹریس ہوں، دو میٹریس کو جمع یا تفریق کرنے کے لئے، ان کے نظیری عناصر کو فقط جمع یا تفریق کرنے کے لئے ۔

☆اسکیلر سے میٹرکس کا ضرب :

دئے گئے میٹرکس A کے عناصر کو ایک غیر صفری عدد k سے ضرب دینے پر ایک نیا میٹرکس kA حاصل ہوتا ہے جس کے عناصر k سے ضرب دئے گئے ہیں۔ kA میٹرکس کو A کا اسکیلر ضرب کہتے ہیں۔

غرض اگر $A = (a_{ij})_{m\times n}$ ہو تو $kA = (ka_{ij})_{m\times n}$ تمام $i = 1,2,...m$ اور $j = 1,2,...n$

ICT CORNER — ICT کارنر

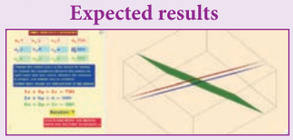
ICT 5.1

مرحلہ1 : بروز رکھولئے اور نیچے دئے گئے URL لنک ٹیپ کیجئے (یا) QR کوڈ اسکین کیجئے ۔ 'Algebra' نامی باب کھلے گا ہمزاد مساواتیں ورک شیٹ کا انتخاب کیجئے۔

مرحلہ2 : دئے گئے ورک شیٹ میں تین خطی مساواتیں نظر آئیں گے اور ہر ایک مساوات کے لئے a,b,c کی نئے قیمتوں ٹائپ کر کے مساواتوں کو تبدیل کریں غور کرنے کے لئے 3-D ترسیم کو حرکت دے سکتے ہو۔ مساواتوں کو تبدیل کر کے حل کی نوعیت کا معائنہ کیجئے۔

Step 1 | Step 2 | Expected results





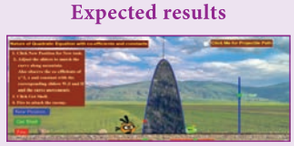
ICT 5.2

مرحلہ1 : بروز رکھولئے اور نیچے دئے گئے URL لنک کو ٹیپ کیجئے یا QR کوڈ اسکین کیجئے "ALGEBRA" نامی Geo Gebra ورک بک کھلے گا۔ "دو درجی مساوات کی نوعیت " نامی ورک شیٹ پر کلک کیجئے۔

مرحلہ2 : دئے گئے سلائڈر کو گھوما کر سر عدد کو تبدیل کر سکتے ہیں "New Position" (نئے مقام) پر کلک کریں اور سلائڈر کو گھوما کر گولے (Shall) کو اچھالنے کے لئے احاطہ مقرر کریں۔ پھر "Get Ball" (گیند حاصل کرنا) پر کلک کریں اور "Fire" (پھینکنا) کلک کر کے نشان لگائیں، یہاں سر عداد کو تبدیل کرنے پر خطِ مخنی کی تبدیلی کو سیکھ سکتے ہیں۔

Step 1 | Step 2 | Expected results





You can repeat the same steps for another activities

https://www.geogebra.org/m/jfr2zzgy#chapter/356193
or Scan the QR Code.

BCK57

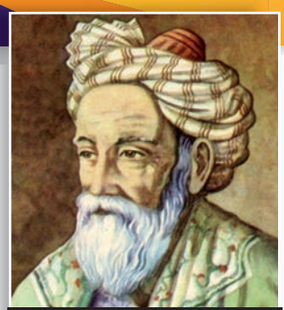
10th maths 3. algebra 36-71
Monday, February 24, 2020 11:32:13 AM

4

GEOMETRY علم ہندسہ

The knowledge of which geometry aims is the knowledge of eternal

Plato



Omar Khayyam
(18.5.1048 4.12.1131)

عمر خیام

عمر خیام ایک فارسی (ایرانی) ریاضی دان کے ساتھ ساتھ ایک ماہر فلکیات اور بھی شاعر تھے۔ شاعر کی حیثیت سے انکی اعلیٰ ترین تصنیف ''رباعیات'' کو عالمی شہرت ملی تھی۔

خیام نے الجبراء اور علم ہندسہ کو متحد کرنے کی جدوجہد کی۔ خیام کی تصنیف مکعبی مساواتوں کو حل کرنے کا پہلا منظّم مطالعہ اور پہلا ٹھیک طریقہ مانا جاتا ہے۔ علم ہندسہ کے استعمال سے انہوں نے اس کام کو انجام دیا۔ اقلیدس کے فراہم کردہ علم ہندسہ کے اصولوں کو عام کرنے کی اس جدوجہد کی وجہ سے کئی یوروپی ریاضی دان ان سے متاثر ہوکر آخر کار غیر اقلیدسی علم ہندسہ کو دریافت کیا۔ خیام ایک نمایاں سائنسدان اور عظیم شاعر کی کامل مثالی شخصیت تھے، اس طرح کہ کارنامے ہر کوئی حاصل نہیں کرسکتا۔

G04WE

سیکھنے کے مقاصد

- ☆ متماثل مثلثوں کو اعادہ کرنا اور متشابہ مثلثوں کی تعریف کو سمجھنا۔
- ☆ متشابہ مثلثوں کی تصنیف اور خصوصیات کو سمجھنا اور انہیں مسئلوں کو حل کرنے میں استعمال کرنا۔
- ☆ بنیادی تناسبیت کا مسئلہ، زاویہ کے ناصف کا مسئلہ کو ثابت کرنا اور انکے استعمالات کا مطالعہ کرنا اور دئے گئے شرائط کے تحت مثلثوں کی تصنیف کا مطالعہ کرنا۔
- ☆ مسئلہ فیثاغورث کو حل کرنا اور اسکے استعمالات کا مطالعہ کرنا۔
- ☆ دائرے کے مماس کی تصور کو سمجھنا اور دائرہ پر مماس کی تصنیف کا مطالعہ کرنا۔
- ☆ نقطہ تراکز کے مسئلے کو سمجھنا اور اسکو استعمال کرنا۔

4.1 تعارف (Introduction)

علم ہندسہ کا مطالعہ (علم) مختلف نمونوں اور ساختوں کے خصوصیات کی معلومات سے تعلق رکھتا ہے۔ علم حساب (Arithmatic) اور علم ہندسہ دو قدیم ترین علم ریاضی کی شاخیں مانے جاتے ہیں۔ یونانوں نے علم ہندسہ کو اعلیٰ مرتبہ دے رکھا تھا اور علم ہندسہ کی خصوصیات کو مختلف سائنسی اصولوں پر بحث کرتے تھے ان اصولوں کے بحث کے بغیر یہ جاننا ناممکن ہوجاتا تھا۔ یراٹوس تھینس زمین کا محیط، زمین سے چاند اور سورج کا فاصلہ کافی درستگی سے معلوم کرنے کے لئے دائروں کی متشابہت کا استعمال کیا۔ ان سب کارناموں کے علاوہ دریاؤں کی چوڑائی، درختوں کی بلندی وغیرہ کو معلوم کرنے کے لئے متشابہت استعمال کیا جاتا ہے۔ اس باب میں ہم ان اصولوں پر بحث کررہے ہیں جو خاص طور پر پچھلے کلاسوں

10th maths 4. geometry
Sunday, February 16, 2020 10:27:42 AM

کے تسلسل سے آرہے ہیں اور اہم ترین اصول جیسے متشابہ مثلثیں، بنیادی تناسبیت کا مسئلہ، زاویہ کے ناصف کا مسئلہ، نمایاں ترین اور وسیع پیمانے میں تسلیم شدہ فیثا غورث کا مسئلہ اور بہت کچھ۔ کیوا(Ceva) کے مسئلہ اور مینیلس کے مسئلہ کا تعارف پہلی مرتبہ کیا گیا۔ یہ دو نئے مسئلے تمام مترا کز مسئلوں کو عام تصور دیتے ہیں۔ مجموعی طور پر علم ہندسہ کے مطالعہ سے ہمارے اطراف واکناف کے اشیاء کی گہرائی کے ساتھ سمجھنے میں دلچسپی پیدا ہوگی۔

سائنس، انجینئرنگ اور فن تعمیر (Architecture) کے میدان میں علم ہندسہ کا اہم رول ہے۔ ہم بہت سارے قدرتی علم ہندسوی نمونے دیکھتے ہیں۔ پچھلے جماعتوں سے مثلثیں اور انکے بہت سے خصوصیات سے ہم واقف ہیں۔




4.2 متشابہت Similarity

دو نقشے متشابہ کہلاتے ہیں اگر ہر اعتبار سے ایک نقشہ دوسرے کے متناسب ہوں۔ مثال کے طور پر



Fig. 4.1

مذکورہ بالا گھر دیکھنے میں ایک ہی جیسے نظر آتے ہیں مگر جسامت میں مختلف ہیں۔ دونوں موبائل ایک جیسے ہیں مگر انکے جسامت مختلف ہیں۔ لہذا ریاضی کے اعتبار سے ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ دو اشیاء متشابہ ہیں اگر انکے ساخت یکساں ہوں مگر یہ ضروری نہیں کہ انکے جسامت یکساں ہوں۔

دو متشابہ اشیاء کے نظیری پیمائشوں کی نسبت متناسب ہونا چاہئے۔

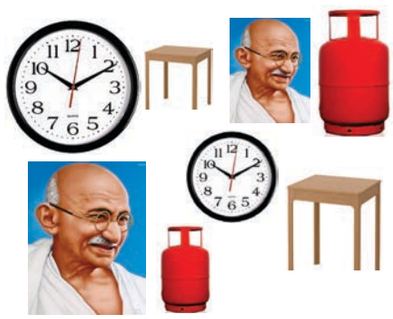


Fig. 4.2

یہاں علم ہندسوی ساختوں کے جدول دی گئی ہے۔ متشابہ اشیاء کو انتخاب کر کے فہرست بنائیے۔

اس باب میں ہم خاص طور سے متشابہ مثلثوں کے استعمال کے بارے میں بحث کریں گے جو کافی ضروری ہے جہاں اگر سادہ پیمائش آلے سے فاصلہ اور بلندی جسمانی طور پر پیمائش کرنا ہمارے پہنچ سے باہر ہو۔ متشابہت کی تصور انجینئرنگ، فن تعمیرات کے میدانوں میں وسیع طور پر استعمال کیا جاتا ہے۔

مشابہت کے بعض استعمالات یہ ہیں۔

i) اشیاء اپنا سایہ بنانے سے ایک مثلث نما شکل بنتی ہے، جس سے شئے کی اصلی بلندی معلوم کر سکتے ہیں۔

ii) آسمانی تصویر نگاری سے اوپر سے زمین کے بعض مخصوص مقامات تک کی بلندی معلوم کی جاسکتی ہے۔

iii) معماری میں اپنے فن کے ڈیزائن کے لئے بھی استعمال کیا جاتا ہے۔

4.2.1 متشابہ مثلثیں (Similar Triangles)

گزشتہ سال نویں جماعت میں ہم نے مثلثوں کی مماثلت کے بارے میں پڑھا ۔ ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ دو ہندسی شکلیں اگر ایک دوسرے پر منطبق ہوں تو انہیں مماثل مثلثیں کہا جاتا ہے۔ اگر ان کی شکل اور جسامت ایک ہی ہو۔ مگر یہاں پر ہم ہندسی شکلوں کے بارے میں جانکاری حاصل کریں گے جو شکل میں یکساں ہیں، مگر ان کی جسامت تناسب میں ہے۔ ایسی شکلوں کو ہم متشابہ کہیں گے۔

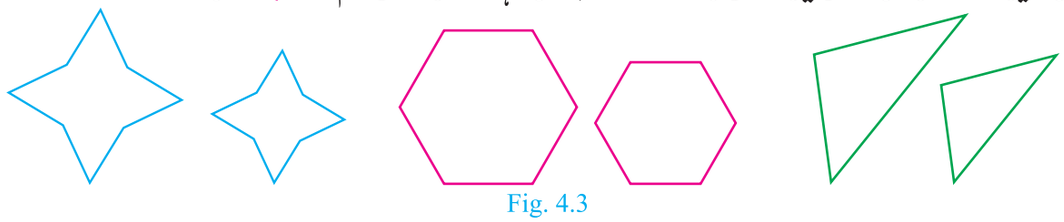


Fig. 4.3

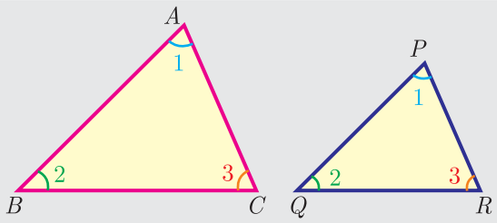
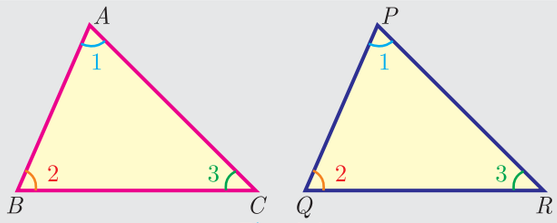
10th maths 4. geometry
Sunday, February 16, 2020 10:27:44 AM

مثلثوں کے متماثلیت اور متشابہت Congruency and Similarity of Triangles

غور کیجئے

مثلثیں ABC اور PQR متشابہ ہیں
انہیں اس طرح لکھ سکتے ہیں۔
$\Delta ABC \sim \Delta PQR$

متماثلیت متشابہت کی ایک خاص صورت ہے۔ان دونوں صورتوں میں، مثلث کے تینوں زاوئے دوسرے مثلث کے نظیری زاویوں کے مساوی ہوتے ہیں۔
متماثل مثلثوں میں، نظیری اضلاع مساوی ہوتے ہیں۔جبکہ متشابہ مثلثوں میں نظیری اضلاع متناسب ہوتے ہیں۔

متشابہ مثلثیں	متماثل مثلثیں
 Fig. 4.5	 Fig. 4.4
$\Delta ABC \sim \Delta PQR$	$\Delta ABC \cong \Delta PQR$
$\angle A = \angle P, \angle B = \angle Q, \angle C = \angle R$	$\angle A = \angle P, \angle B = \angle Q, \angle C = \angle R$.
$AB \neq PQ, BC \neq QR, CA \neq RP$	$AB = PQ, BC = QR, CA = RP$
but $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP} > 1 \text{ or } < 1$	$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP} = 1$
ایک ہی شکل مگر مختلف جسامت	ایک ہی شکل اور جسامت

ذرا سوچئے **Thinking Corner**

1۔ کیا مربع اور معین متشابہ یا متماثل ہیں۔بحث کیجئے۔
2۔ کیا مستطیل اور متوازی الاضلاع متشابہ ہیں۔بحث کیجئے۔

4.2.2 متشابہت کے اصول Criteria of Similarity

ذیل کے اصول دو مثلثیوں کی متشابہت کو ثابت کرنے کے لئے کافی ہیں۔

AA متشابہت کا اصول AA Criteria of Similarity

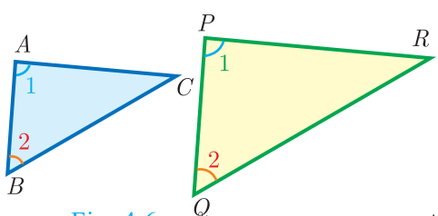


Fig. 4.6

اگر ایک مثلث کے دو زاویئے بالترتیب دوسرے مثلث کے دو زاویوں کے مساوی ہوں تو دونوں مثلثیں متشابہ ہیں، کیونکہ دونوں مثلثوں میں تیسرا زاویہ ضرور مساوی ہوگا۔ لہذا، AA متشابہت کا اصول AAA متشابہت کے اصول کے برابر ہے۔

اس لئے اگر $\angle A = \angle P = 1$ اور $\angle B = \angle Q = 2$ ہو تو $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

SAS متشابہت کا اصول SAS Criterion of Similarity

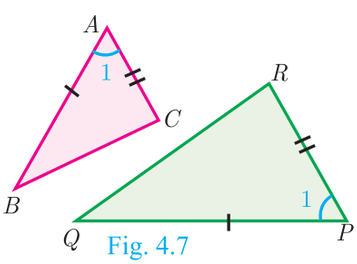


Fig. 4.7

اگر ایک مثلث کا ایک زاویہ دوسرے مثلث کے ایک زاویہ کے مساوی ہو اور ان زاویوں کو بنانے والے نظیری اضلاع متناسب ہوں تو یہ دونوں مثلث متشابہ ہوتے ہیں۔

غرض اگر $\angle A = \angle P = 1$ اور $\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR}$ تب $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

10th maths 4. geometry
Sunday, February 16, 2020 10:27:44 AM

SSS متشابہت کا اصول — SSS Criterion of Similarity

اگر ایک مثلث کے تینوں اضلاع، دوسرے مثلث کے نظیری اضلاع کے متناسب ہوں تو دونوں مثلثیں متشابہ ہوتے ہیں۔

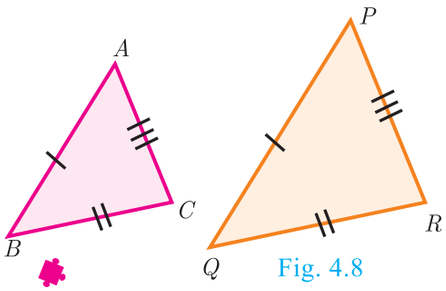


Fig. 4.8

اس لئے اگر $\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR}$ ہو تو $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

Thinking Corner — ذرا سوچئے

کیا دو مثلثِ قائمۃ الزاویہ متشابہ ہیں؟ کیوں؟

متشابہ مثلثوں کے چند اہم نتائج — Some useful results on similiar traingles

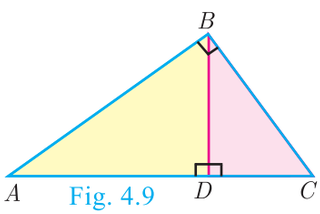


Fig. 4.9

1۔ اگر ایک مثلث قائمۃ الزاویہ کے راس سے اس کے وتر پر ایک عمود ڈالا جائے تو عمود کے دونوں جانب بننے والے مثلث پورے مثلث کے متشابہ ہوتے ہیں۔

$\Delta ADB \sim \Delta BDC,\ \Delta ABC \sim \Delta ADB,\ \Delta ABC \sim \Delta BDC$

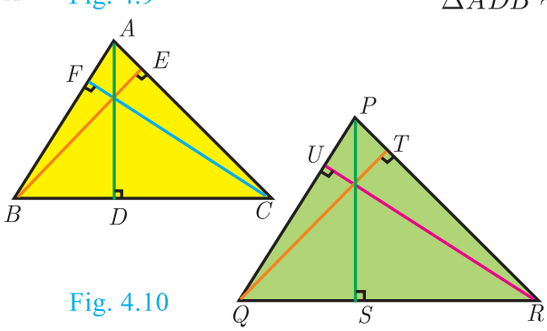


Fig. 4.10

2۔ اگر دو مثلث متشابہ ہوں تو ان کے اضلاع کی نسبت اور ان کے نظیری ارتفاعوں میں مساوی نسبت پائی جاتی ہے۔

اگر $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ ہو تو

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{PR} = \frac{AD}{PS} = \frac{BE}{QT} = \frac{CF}{RU}$$

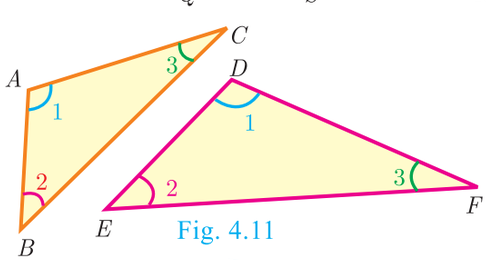


Fig. 4.11

3۔ اگر دو مثلث متشابہ ہوں تو ان کے نظیری اضلاع کی نسبت ان کے نظیری احاطہ کے مساوی ہوتے ہیں۔

اگر $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ ہو تو

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} = \frac{AB + BC + CA}{DE + EF + FD}$$

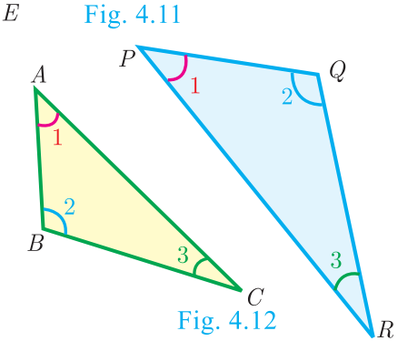


Fig. 4.12

4۔ دو متشابہ مثلثوں کے رقبوں کی نسبت ان کے نظیری اضلاع کے مربعوں کی نسبت کے مساوی ہوتی ہے۔

$$\frac{\text{رقبہ } (\Delta ABC)}{\text{رقبہ } (\Delta PQR)} = \frac{AB^2}{PQ^2} = \frac{BC^2}{QR^2} = \frac{AC^2}{PR^2}$$

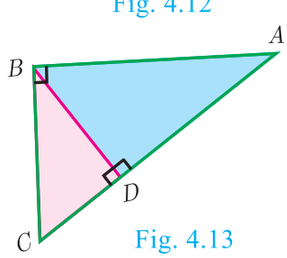


Fig. 4.13

5۔ اگر دو مثلثیں مشترک راس رکھتے ہوں اور انکے قاعدے ایک ہی خطِ مستقیم پر ہوں، انکے رقبوں کے درمیان کی نسبت انکے قاعدے کی لمبائی کی نسبت کے مساوی ہوتے ہیں۔

یہاں $\frac{\text{رقبہ } (\Delta ABD)}{\text{رقبہ } (\Delta BDC)} = \frac{AD}{DC}$

10th maths 4. geometry
Sunday, February 16, 2020 10:27:45 AM

تعریف 1 : دو مثلثیں متشابہ کہلاتے ہیں اگر انکے نظیری اضلاع متناسب ہوں۔

تعریف 2 : مثلثیں مساوی الزاویے کہلاتے ہیں اگر انکے نظیری زاویے مساوی ہوں۔

تشریح دو مثلثیں ΔXYZ اور ΔLMN متشابہ ہیں کیونکہ نظیری زاویے مساوی ہیں۔

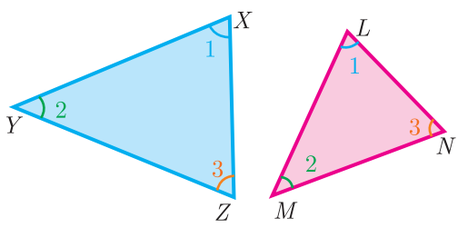


Fig. 4.14

غور کیجئے

i) مثلثِ مساوی الزاویے کی جوڑی متشابہ ہوتے ہیں۔

ii) اگر دو مثلثیں متشابہ ہوں تو وہ مساوی الزاویے ہوتے ہیں۔

(i) $\angle X = \angle L, \angle Y = \angle M, \angle Z = \angle N$ (زاویوں سے) (ii) $\frac{XY}{LM} = \frac{YZ}{MN} = \frac{XZ}{LN}$ (ضلعوں سے)

یہاں راسیں X,Y,Z کے بالترتیب نظیری راسیں L,M,N ہیں۔غرض علامتی طور پر $\Delta XYZ \sim \Delta LMN$

مثال 4.1 ثابت کیجئے کہ $\Delta PST \sim \Delta PQR$

(i)

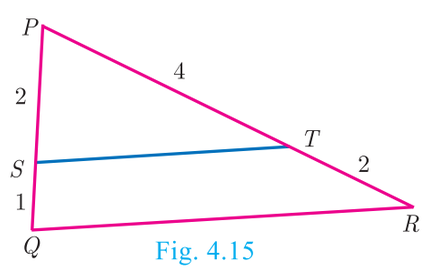


Fig. 4.15

(ii)

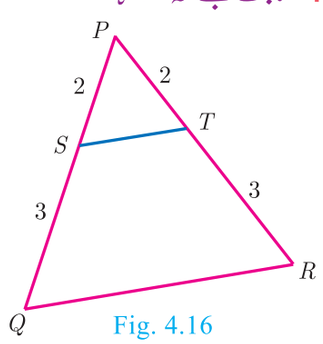


Fig. 4.16

حل :

(i) ΔPST اور ΔPQR میں

$\frac{PS}{PQ} = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}, \frac{PT}{PR} = \frac{4}{4+2} = \frac{2}{3}$

غرض $\frac{PS}{PQ} = \frac{PT}{PR}$ اور $\angle P$ مشترک ہے

لہذا، SAS تشابہت سے

$\Delta PST \sim \Delta PQR$

(ii) ΔPST اور ΔPQR میں

$\frac{PS}{PQ} = \frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}, \frac{PT}{PR} = \frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}$

غرض $\frac{PS}{PQ} = \frac{PT}{PR}$ اور $\angle P$ مشترک ہے

لہذا، SAS تشابہت سے

$\Delta PST \sim \Delta PQR$

مثال 4.2 کیا $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ ؟

حل : ΔABC اور ΔPQR میں

$\frac{PQ}{AB} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}; \frac{QR}{BC} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

چونکہ $\frac{1}{2} \neq \frac{2}{5}, \frac{PQ}{AB} \neq \frac{QR}{BC}$

نظیری اضلاع متناسب نہیں ہیں۔

لہذا، ΔABC متشابہ نہیں ہے ΔPQR کا۔

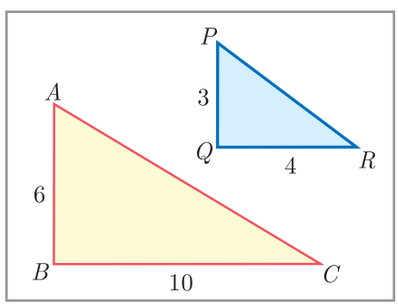


Fig. 4.17

10th maths 4. geometry
Sunday, February 16, 2020 10:27:45 AM

غور کیجئے

اگر دئے گئے چار لمبائیوں میں ٹھیک ایک تبدیل کریں تو ان مثلثوں کو ہم متشابہ بنا سکتے ہیں۔

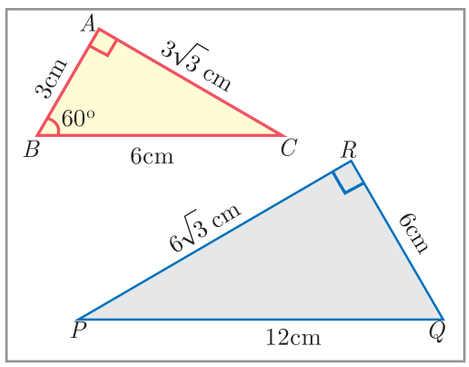


Fig. 4.18

مثال 4.3 خاکہ 4.18 پر غور کیجئے اور ∠P معلوم کیجئے۔

حل : ΔABC اور ΔPQR میں ; $\frac{AB}{RQ}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

$$\frac{BC}{QP}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2};\ \frac{CA}{PR}=\frac{3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$$

لہذا، $\frac{AB}{RQ}=\frac{BC}{QP}=\frac{CA}{PR}$

SSS متشابہت سے ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے۔ $\Delta BAC\sim\Delta QRP$

(چونکہ یہ متشابہ مثلث کے نظیری حصّے ہیں) $\angle P=\angle C$

$$\angle P=\angle C=180^\circ-(\angle A+\angle B)=180^\circ-(90^\circ+60^\circ)$$

$$\angle P=180^\circ-150^\circ=30^\circ$$

مثال 4.4 ایک لڑکے کی اونچائی 90 سمر ہے (Lamp post) برقی کھمبے کے قدم سے 1.2 m / sec کی رفتار سے دور جا رہا ہے۔ اگر برقی کھمبا زمین سے میٹر 3.6 اوپر ہے، 4 سکنڈ کے بعد اسکے سایے کی لمبائی معلوم کیجئے۔

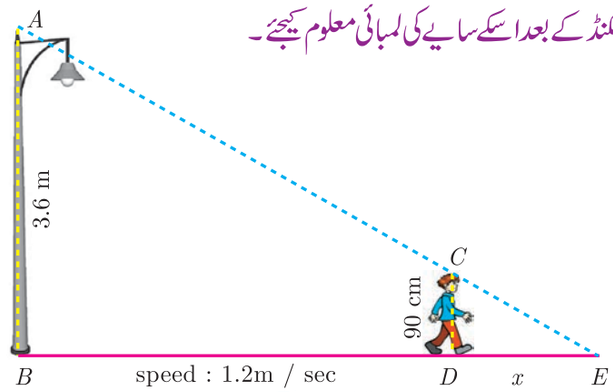


Fig. 4.19

حل : دیا گیا ہے، رفتار = 1.2 m/s,

وقت = 4 seconds

فاصلہ = رفتار × وقت

$= 1.2\times4 = 4.8$ m

فرض کیجئے کہ 4 سکنڈ کے بعد سایے کی لمبائی x ہے۔

چونکہ $\Delta ABE\sim\Delta CDE$, $\frac{BE}{DE}=\frac{AB}{CD}$ سے

(چونکہ 90 cm = 0.9 m) $\frac{4.8+x}{x}=\frac{3.6}{0.9}=4$

$4.8+x=4x$ سے $3x=4.8$ اس لئے $x=1.6$ m

اسکے سایہ کی لمبائی $DE = 1.6$ m

مثال 4.5 خاکہ 4.20 میں $\angle A=\angle CED$ ہو تو ثابت کیجئے کہ $\Delta CAB\sim\Delta CED$

مزید x کی قیمت معلوم کیجئے۔

حل : ΔCAB اور ΔCED میں، C مشترک ہے، $\angle A=\angle CED$

لہذا، $\Delta CAB\sim\Delta CED$ (AA متشابہت سے)

$$\frac{CA}{CE}=\frac{AB}{DE}=\frac{CB}{CD}$$

چنانچہ، $\frac{AB}{DE}=\frac{CB}{CD}$ سے $\frac{9}{x}=\frac{10+2}{8}$ لہذا، $x=\frac{8\times9}{12}=6$ cm.

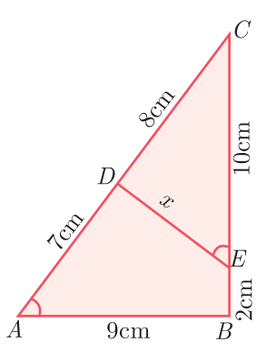


Fig. 4.20

10th maths 4. geometry
Sunday, February 16, 2020 10:27:46 AM

مثال 4.6 خاکہ 4.21 میں QA اور PB، AB کے عمود ہیں۔ اگر $AO = 10$ cm، $BO = 6$ cm اور $PB = 9$ cm ہوتو AQ معلوم کیجئے۔

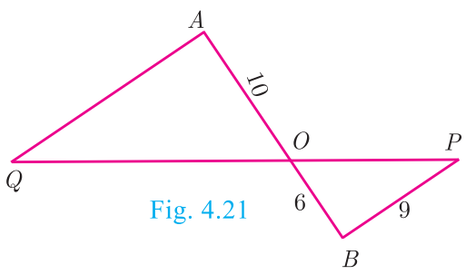


Fig. 4.21

حل : ΔAOQ اور ΔBOP میں، $\angle OAQ = \angle OBP = 90°$

$\angle AOQ = \angle BOP$ (مخالف عمودی زوایے)

لہذا، AA متشابہت کے اصول سے $\Delta AOQ \sim \Delta BOP$

$$\frac{AO}{BO} = \frac{OQ}{OP} = \frac{AQ}{BP}$$

$$\frac{10}{6} = \frac{AQ}{9} \text{ سے } AQ = \frac{10 \times 9}{6} = 15 \text{ cm}$$

مثال 4.7 دومتشابہ مثلثوں ABC اور PQR کے احاطے بالترتیب 36 cm اور 24 cm ہیں۔اگر $PQ = 10$ cm ہوتو AB معلوم کیجئے۔

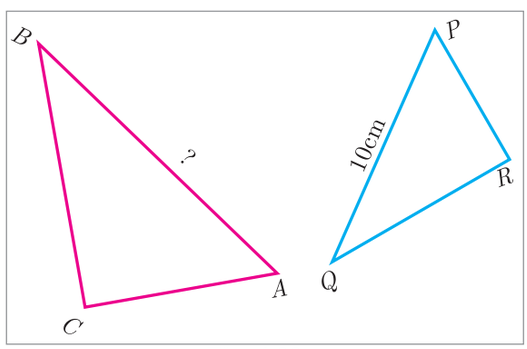


Fig. 4.22

حل: چونکہ دومتشابہ مثلثوں کے نظیری ضلعوں کی نسبت ان کے احاطوں کی نسبت کے مساوی ہے

$\Delta ABC \sim \Delta PQR$,

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR} = \frac{36}{24}$$

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{36}{24} \text{ gives } \frac{AB}{10} = \frac{36}{24}$$

$$AB = \frac{36 \times 10}{24} = 15 \text{ cm}$$

مثال 4.8 اگر ΔABC مثلث ΔDEF کے متشابہ ہے۔اس طرح کہ $BC = 3$ cm، $EF = 4$ cm اور ΔABC کا رقبہ 54 cm^2 ہے۔مثلث ΔDEF کا رقبہ معلوم کیجئے۔

حل : چونکہ دومتشابہ مثلثوں کے رقبوں کی نسبت کوئی دونظیری اضلاع کے مربعوں کی نسبت کے مساوی ہے تو ہمارے پاس

$$\frac{\text{رقبہ } (\Delta ABC)}{\text{رقبہ } (\Delta DEF)} = \frac{BC^2}{EF^2} \text{ gives } \frac{54}{\text{رقبہ } (\Delta DEF)} = \frac{3^2}{4^2}$$

$$\text{رقبہ } (\Delta DEF) = \frac{16 \times 54}{9} = 96 \text{ cm}^2$$

مثال 4.9 دوکھمبوں کی اونچائی 'a' میٹراور 'b' میٹر ہیں جوایک دوسرے سے 'p' میٹردوری پر ہیں۔ثابت کیجئے کہ ہرایک کھمبے کے قدم سے مخالف کھمبے کی چوٹی کوملانے والے خطوط کے نقطۂ تقاطع کی اونچائی $\frac{ab}{a+b}$ میٹر سے دی جاتی ہے۔

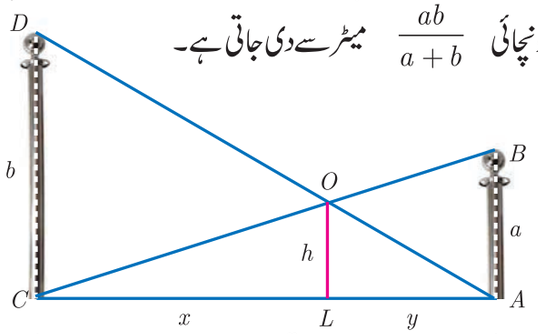


Fig. 4.23

حل : فرض کیجئے کہ AB اور CD دوکھمبے ہیں جن کی اونچائی بالترتیب 'a' میٹراور 'b' میٹر ہیں۔اس طرح کہ وہ 'p' میٹر کی دوری پر ہیں،

یعنی میٹر $AC = p$ ، فرض کیجئے کہ AD اور BC، O پر ملتے ہیں، اس طرح کہ میٹر $OL = h$

10th maths 4. geometry
Sunday, February 16, 2020 10:27:46 AM

فرض کیجئے کہ $CL = x$ اور $LA = y$ تو $x + y = p$

ہمارے پاس ΔABC اور ΔLOC میں،

$\angle CAB = \angle CLO$ (ہر ایک 90° کے مساوی ہے)

$\angle C = \angle C$ (C مشترک ہے)

$\Delta CAB \sim \Delta CLO$ (AA تشابہت سے)

$$\frac{p}{x} = \frac{a}{h} \rightarrow \frac{CA}{CL} = \frac{AB}{LO}$$

$$x = \frac{ph}{a} \quad (1) \quad \text{اس لئے}$$

ΔALO اور ΔACD میں، ہمارے پاس

$\angle ALO = \angle ACD$ (ہر ایک 90° کے مساوی ہے)

$\angle A = \angle A$ (A مشترک ہے)

$\Delta ALO \sim \Delta ACD$ (AA تشابہت سے)

ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{AL}{AC} = \frac{OL}{DC} \Rightarrow \frac{y}{p} = \frac{h}{b} \Rightarrow y = \frac{ph}{b} \quad (2)$$

$$(1)+(2) \Rightarrow x + y = \frac{ph}{a} + \frac{ph}{b}$$

$$p = ph\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \quad (\text{چونکہ } x + y = p)$$

$$1 = h\left(\frac{a+b}{ab}\right)$$

$$\text{لہذا،} \quad h = \frac{ab}{a+b}$$

چنانچہ، ہر ایک کھمبے کے قدم سے مخالف کھمبے کے چوٹی کو ملانے والے خطوط کے نقطۂ تقاطع کی اونچائی $\frac{ab}{a+b}$ میٹر ہے۔

Progress Check اپنی پیش رفت کی جانچ

1۔ تمام دائرے ..... (متماثل/متشابہ) ہیں۔

2۔ تمام مربع ..... (متشابہ/متماثل) ہیں۔

3۔ دو مثلثیں متشابہ ہیں اگر انکے نظیری زاویے .....

اور انکے نظیری اضلاع ..... ہیں۔

4۔ (a) تمام متشابہ مثلثیں متماثل ہیں۔ (صحیح یا غلط)

(b) تمام متماثل مثلثیں متشابہ ہیں۔ (صحیح یا غلط)

5۔ غیر متشابہ شکلوں کے جوڑی کی دو مختلف مثالیں پیش کیجئے۔

Activity 1 کارروائی 1

آیئے $\sqrt{2}$ لمبائی والے قطاع خط کی تصنیف کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔

اس کے لئے، ہم ذیل کے مرحلوں کو فرض کریں۔

مرحلہ 1 : 3 اکائیاں لمبائی والا ایک قطاع خط لیجئے۔ اسکو AB نام دیجئے۔

مرحلہ 2 : AB پر ایک نقطہ C لیجئے اس طرح کہ $AC = 2$، $CB = 1$

مرحلہ 3 : AB کو قطر مانکر ایک نصف دائرہ کھینچئے جیسا کہ شکل میں بتایا گیا ہے۔

مرحلہ 4 : نصف دائرے پر ایک نقطہ P لیجئے اس طرح کہ AB کا عمود CP ہو۔

مرحلہ 5 : P کو A اور B سے ملایئے۔ ہمیں دو قائم مثلث ACP اور BCP حاصل ہوتے ہیں۔

مرحلہ 6 : تصدیق کیجئے کہ مثلثیں ACP اور BCP متشابہ ہیں۔

مرحلہ 7 : فرض کیجئے کہ $CP = h$ مشترک ارتفاع ہے۔ متشابہت کو استعمال کرکے h معلوم کیجئے۔

مرحلہ 8 : h معلوم کرنے پر تم کو کیا حاصل ہوتا ہے؟

اسی طریقے کو دوبارہ دہرایئے، کیا تم $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{8}$ لمبائیوں والے قطاع خط کی تصنیف کر سکتے ہو؟

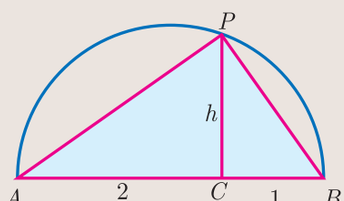
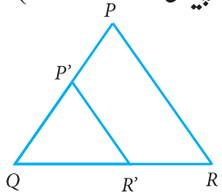


Fig. 4.24

10th maths 4. geometry
Sunday, February 16, 2020 10:27:47 AM

4.2.3 متشابہ مثلثوں کی تصنیف Construction of similar triangles

اب تک متشابہ مثلثیں اور انکے خصوصیات کے نظری طریقے (Theoretical Approach) پر بحث کر چکے ہیں۔ اب دئے گئے مثلث کے متشابہ مثلث کی علم ہندسوی تصنیف پر بحث کریں گے۔ اس طرح کہ مثلث کے اضلاع دیئے گئے مثلث کے نظیری اضلاع کی نسبت میں ہوتے ہیں اس تصنیف میں دو صورت حال شامل ہیں۔ ایک صورت یہ ہے کہ دئے گئے مثلث سے تصنیف کیا جانے والا مثلث چھوٹا ہوتا ہے۔ اور دوسری صورت یہ ہے کہ دئے گئے مثلث سے تصنیف کیا جانے والا مثلث بڑا ہوتا ہے۔ اس لئے ہم ذیل کی اصطلاح '' پیمائشی جز '' (Scale Factor) کی تعریف کرتے ہیں جو دئے گئے مثلث کے نظیری اضلاع سے تصنیف کیا جانے والا مثلث کے اضلاع کی نسبت کی پیمائش ہے۔ ہم ذیل کے مثالوں پر غور کرتے ہیں۔ جن میں دو صورت حال شامل ہیں۔



کچا خاکہ (خام خاکہ)

مثال 4.10 دئے گئے مثلث PQR کے متشابہ مثلث تصنیف کیجئے جس کے اضلاع مثلث PQR کے نظیری اضلاع کے $\frac{3}{5}$ کے مساوی ہیں۔ ($\frac{3}{5} < 1$ پیمائشی جز)

حل : مثلث PQR دیا گیا ہے ہمیں ایک اور مثلث کی تصنیف کی ضرورت ہے۔
جس کے اضلاع مثلث PQR کے نظیری اضلاع کے $\frac{3}{5}$ ہیں۔

تصنیف کے مرحلے Steps of Construction

1۔ کسی بھی پیمائش سے ΔPQR تصنیف کیجئے۔
2۔ راس P کے مقابل کے ضلع پر QR سے زاویہ حادہ بنانے والا شعاع QX کھینچئے۔
3۔ QX پر 5 ($\frac{3}{5}$ میں 3 اور 5 کا بڑا عدد) نقاط کے مقام Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 اور Q_5 معلوم کیجئے اس طرح کہ $QQ_1 = Q_1Q_2 = Q_2Q_3 = Q_3Q_4 = Q_4Q_5$
4۔ Q_5R کو ملایئے اور Q_3 سے ایک خط کھینچئے (یہ تیسرا نقطہ، $\frac{3}{5}$ میں 3 اور 5 کا سب سے چھوٹا عدد 3 ہے) جو Q_5R کے متوازی ہے اور QR کو R' پر قطع کرتا ہے۔
5۔ R' پر RP کے متوازی خط کھینچئے جو QP کو P' پر قطع کرتا ہے تو $\Delta P'QR'$ درکار مثلث ہے جس کے ہر اضلاع مثلث ΔPQR کے نظیری اضلاع کے تین پانچوں حصّہ ہے۔

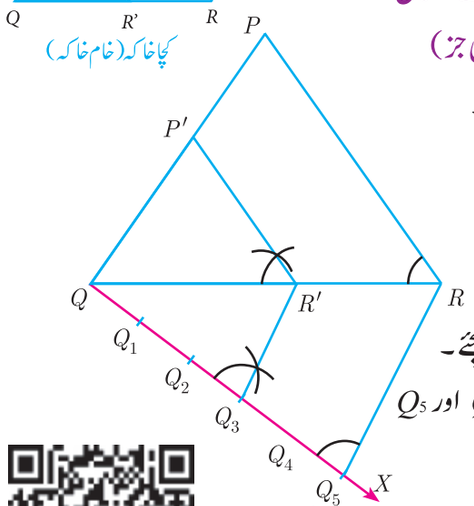


Fig. 4.25

مثال 4.11 دئے گئے مثلث PQR کے متشابہ ایک مثلث تصنیف کیجئے جس کے اضلاع مثلث PQR کے نظیری اضلاع کے $\frac{7}{4}$ کے مساوی ہیں۔ ($\frac{7}{4} > 1$ پیمائشی جز)

حل : مثلث PQR دیا گیا ہے۔ ہمیں ایک اور مثلث تصنیف کرنے کی ضرورت ہے
جس کے اضلاع مثلث PQR کے نظیری اضلاع کے سات چارواں ہیں۔

تصنیف کے مرحلے :

1۔ کسی بھی پیمائش سے ΔPQR تصنیف کیجئے۔
2۔ راس P کے مقابل کے ضلع پر QR سے زاویہ حادہ بنانے والا شعاع QX کھینچئے۔

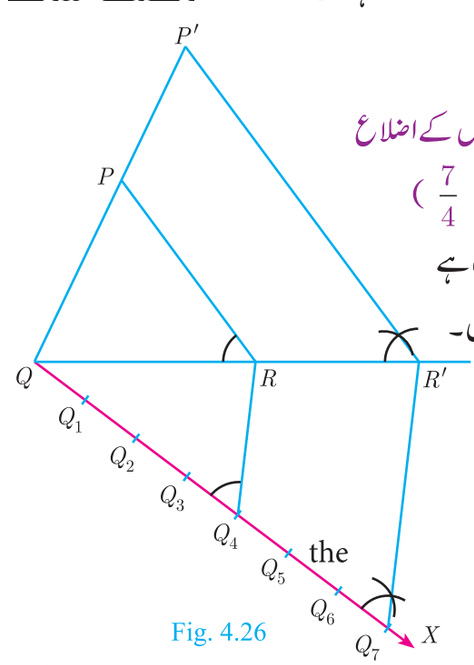
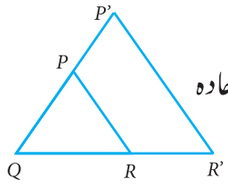


Fig. 4.26



کچا خاکہ (خام خاکہ)

10th maths 4. geometry
Sunday, February 16, 2020 10:27:48 AM

3۔ QX پر 7 نقاط ($\frac{7}{4}$ میں 4 اور 7 کا بڑا عدد) کے مقام $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$ اور Q_7 معلوم کیجئے اس طرح کہ

$$QQ_1 = Q_1Q_2 = Q_2Q_3 = Q_3Q_4 = Q_4Q_5 = Q_5Q_6 = Q_6Q_7$$

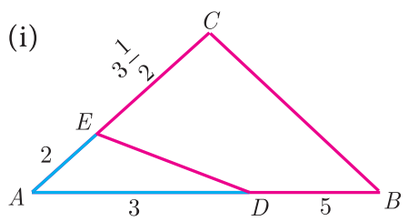
4۔ Q_4 (چوتھا نقطہ، $\frac{7}{4}$ میں 4 اور 7 کا سب سے چھوٹا عدد 4 ہے) سے R کو ملائیے اور Q_7 پر Q_4R کے متوازی ایک خط کھینچئے۔ اس طرح کہ دراز کردہ قطاع خط QR کو R' پر قطع کرتا ہے۔

5۔ R' پر RP کے متوازی خط کھینچئے جو دراز کردہ قطاع خط QP کو P' پر قطع کرتا ہے تو $\Delta P'Q'R$ درکار مثلث ہے جس کے ہر اضلاع ΔPQR کے نظیری اضلاع کا سات چوتھائی ہیں۔

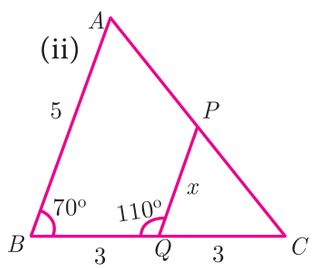
مشق 4.1

1۔ جانچ کیجئے کہ ذیل کے مثلثیں متشابہ ہیں اور x کی قیمت معلوم کیجئے۔

(i)



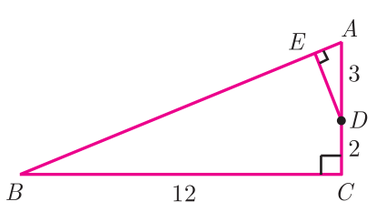
(ii)



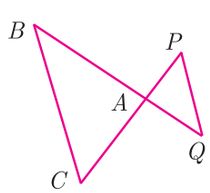
2۔ ایک لڑکی آئینہ میں ایک برقی کھمبے کے چوٹی کے انعکاس کو دیکھتی ہے جو برقی کھمبے کے قدم سے 6.6 میٹر دور رکھی گئی ہے۔ لڑکی جس کی اونچائی 1·25 میٹر ہے۔ آئینہ سے 2·5 میٹر دور ہے آئینہ کو زمین پر اور اسکے رُخ کو اوپر آسمان اور لڑکی کے جانب، آئینہ اور برقی کھمبا ایک ہی خط مستقیم پر اخذ کرتے ہوئے برقی کھمبے کی اونچائی معلوم کیجئے۔

3۔ 6 میٹر لمبی عمودی لکڑی کا سایہ زمین پر 400 سم پڑتا ہے۔ اسی وقت ایک مینار کے سایہ کی لمبائی 28 میٹر ہے۔ تشابہت کے استعمال سے، مینار کی بلندی معلوم کیجئے۔

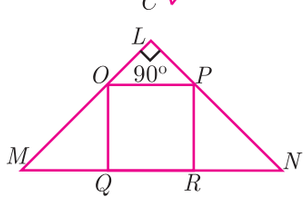
4۔ دو مثلثیں QPR اور QSR بالترتیب زاویہ قائمہ P اور S پر ہیں یکساں قاعدہ QR اور QR کے یکساں ضلع پر کھینچا گیا ہے۔ اگر PR اور SQ، T پر قطع کرتے ہیں تو ثابت کیجئے کہ $PT \times TR = ST \times TQ$



5۔ متصلہ خاکے میں، ΔABC، C پر قائمۃ الزاویہ ہے اور $DE \perp AB$ ، ثابت کیجئے کہ $\Delta ABC \sim \Delta ADE$ اور چنانچہ، AE اور DE کی لمبائیاں معلوم کیجئے۔



6۔ متصلہ خاکے میں، $\Delta ACB \sim \Delta APQ$ اگر $BC = 8$ cm، $PQ = 4$ cm، $BA = 6.5$ cm اور $AP = 2.8$ cm ہیں تو CA اور AQ معلوم کیجئے۔



7۔ خاکے میں $OPRQ$ ایک مربع ہے اور $\angle MLN = 90°$ ثابت کیجئے کہ

(i) $\Delta LOP \sim \Delta QMO$

(ii) $\Delta LOP \sim \Delta RPN$

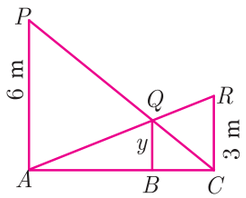
(iii) $\Delta QMO \sim \Delta RPN$

(iv) $QR^2 = MQ \times RN$

10th maths 4. geometry
Sunday, February 16, 2020 10:27:49 AM

8۔ اگر $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ اس طرح کہ ΔABC کا رقبہ $9\ cm^2$ ہے اور ΔDEF کا رقبہ $16\ cm^2$ اور $BC = 2.1\ cm$ ہے۔ EF کی لمبائی معلوم کیجئے۔

9۔ دو عمودی کھمبے ایک افقی میدان AC پر کھڑے کئے جاتے ہیں جن کی اونچائیاں $6\ m$ اور $3\ m$ ہیں۔ y کی قیمت معلوم کیجئے۔



10۔ دئے گئے مثلث PQR کے متشابہ ایک مثلث تصنیف کیجئے۔ جس کے اضلاع مثلث PQR کے نظیری اضلاع کے $\frac{2}{3}$ کے مساوی ہیں۔ (پیمائشی جز $\frac{2}{3} < 1$)

11۔ دئے گئے مثلث LMN کے متشابہ ایک مثلث تصنیف کیجئے جس کے اضلاع مثلث LMN کے نظیری اضلاع کے $\frac{4}{5}$ کے مساوی ہیں۔ (پیمائشی جز $\frac{4}{5} < 1$)

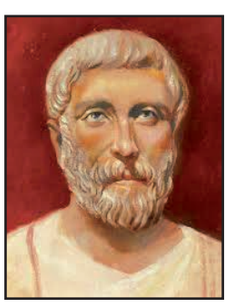
12۔ دئے گئے مثلث ABC کے متشابہ ایک مثلث تصنیف کیجئے۔ جس کے اضلاع مثلث ABC کے نظیری اضلاع کے $\frac{6}{5}$ کے مساوی ہیں۔ (پیمائشی جز $\frac{6}{5} > 1$)

13۔ دئے گئے مثلث PQR کے متشابہ ایک مثلث تصنیف کیجئے۔ جس کے اختلاع مثلث PQR کے نظیری اضلاع کے $\frac{7}{3}$ کے مساوی ہیں۔ (پیمائشی جز $\frac{7}{3} > 1$)

4.3 تھیلس کا مسئلہ اور زاویائی ناصف کا مسئلہ

Thales Theorem and Angle Bisector Theorem

4.3.1 تعارف Introduction



Thales
(640 - 540 BC (BCE))

تھیلس، ((640 - 540 BC(BCE)) ساتھوں صدی BC(BCE) کے دوران ایک معروف ترین یونانی ریاضی دان اور فلسفی گذرے ہیں۔ انہیں اس حد تک معلومات حاصل تھا کہ وہ یونان کے سات حکیموں میں پہلے حکیم بنے تھیلس وہ پہلے شخص تھے جنہوں نے یہ اعلان کیا کہ کسی بھی ابھرتے ہوئے تصور کو سائنسی طریقے سے جانچ کرنے کے بعد اسے تسلیم کیا جائے۔ اس لحاظ سے انہوں نے علم ریاضی اور علم فلکیات میں عظیم تحقیقات کئے اور بہت سے تصورات دریافت کئے۔ علم ریاضی میں پہلا ثبوت فراہم کرنے والے انہیں کو تسلیم کرتے ہیں۔ جو آج بنیادی تناسبیت کے مسئلہ سے جانا جاتا ہے۔

تھیلس کے مسئلے کی دریافت خود ایک دلچسپ کہانی ہے۔ جب تھیلس نے مصر کا سفر کیا۔ مصریوں نے انہیں للکارا کہ وہ کئی عظیم الشان منشوروں میں سے کسی ایک کی بلندی معلوم کرے جسے وہ تعمیر کئے تھے۔ انہوں نے اس شرط کو قبول کرلیا اور کامیابی کے ساتھ انہوں نے مثلثوں کے متشابہت کو استعمال کر کے دریافت کیا جو علم ہندسہ کا دوسرا فاتحانہ استعمال تھا۔ چونکہ، X_1, X_0 اور H_0 معلوم ہیں۔ منشور کی بلندی H_1 معلوم کر سکتے ہیں۔

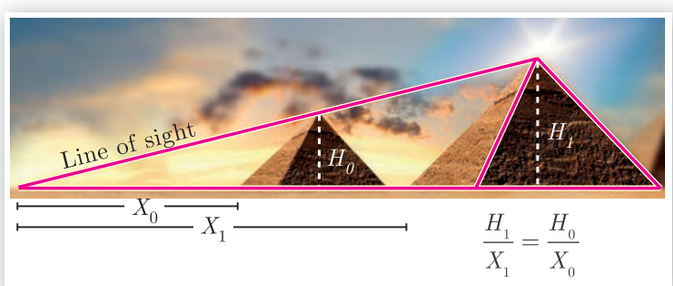


Fig. 4.27

بنیادی تناسبیت کے مسئلے یا تھیلس کے مسئلے کو سمجھنے کے لئے ہم ذیل کے کارروائی کو حل کرتے ہیں۔

10th maths 4. geometry
Sunday, February 16, 2020 10:27:50 AM

Activity 2 کارروائی 2

خط دار کاغذ (Ruled paper) لیجئے اور کسی ایک لکیر کو قاعدہ لے کر ABC مثلث کھینچئے۔ بہت سی متوازی لکیریں اس ABC مثلث کو کاٹیں گے۔

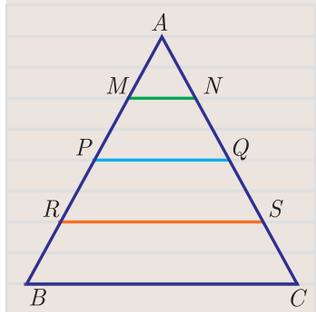


Fig. 4.28

ان میں سے کسی ایک لکیر کو منتخب کر کے نقاط جہاں یہ اضلاع AB اور AC سے ملتا ہے P اور Q کی طرح نام دیجئے۔

کیا ہم $\frac{AP}{PB}$ اور $\frac{AQ}{QC}$ کی نسبت معلوم کر سکتے ہیں۔ پٹری کے ذریعے AP، PB، AQ اور QC پیمائش کر کے، تصدیق کیجئے کہ یہ نسبتیں مساوی ہیں یا نہیں؟

مختلف متوازی لکیروں کے لئے کوشش کیجئے، جیسے MN اور RS۔

اب نسبتیں $\frac{AM}{MB}, \frac{AN}{NC}$ اور $\frac{AR}{RB}, \frac{AS}{SC}$ معلوم کیجئے۔

جانچ کیجئے کہ اگر یہ مساوی ہیں؟ اس کا نتیجہ ہمیں علم ہندسہ کے ایک اہم ترین مسئلے کی طرف رہبری کرے گا۔

مسئلہ 1 : بنیادی تناسبیت کا مسئلہ یا تھیلس کا مسئلہ

Basic Proportionality Theorem (BPT) or Thales theorem

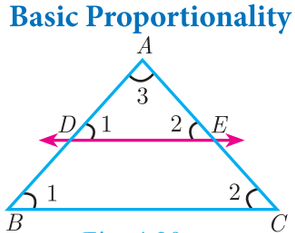


Fig. 4.29

بیان : اگر ایک خط مستقیم ایک مثلث کے ایک ضلع کے متوازی کھینچی جائے جو دوسرے دو اضلاع کو قطع کرے تو وہ دو اضلاع کو مساوی نسبت میں تقسیم کرتی ہے۔

ثبوت : دیا گیا ہے، ΔABC میں، AB پر ایک نقطہ D اور AC پر ایک نقطہ E ہے۔

ثابت کرنا ہے $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

تصنیف : ایک خط $DE \| BC$ کھینچئے۔

عدد	جملہ	وجہ
1.	$\angle ABC = \angle ADE = \angle 1$	$DE \parallel BC$ کیونکہ نظیری زاویے مساوی ہیں
2.	$\angle ACB = \angle AED = \angle 2$	$DE \parallel BC$ کیونکہ نظیری زاویے مساوی ہیں
3.	$\angle DAE = \angle BAC = \angle 3$	دونوں مثلثیں مشترک زاویہ رکھتے ہیں۔
4.	$\Delta ABC \sim \Delta ADE$	AAA تشابہت سے
	$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$	نظیری اضلاع متناسب ہیں
	$\frac{AD + DB}{AD} = \frac{AE + EC}{AE}$	نقاط D اور E کو استعمال کر کے AB اور AC کو تقسیم کیجئے۔
	$1 + \frac{DB}{AD} = 1 + \frac{EC}{AE}$	مختصر کرنے پر
	$\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$	دونوں جانب 1 کو منسوخ کرنے پر
	$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$	معکوس لینے پر
	لہذا، ثابت ہوا۔	

10th maths 4. geometry
Sunday, February 16, 2020 10:27:50 AM

منطقی نتیجہ Corollary اگر ΔABC میں، BC کے متوازی ایک خط مستقیم DE، جو AB کو D پر اور AC کو E پر قطع کرتا ہے تو

(i) $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ (ii) $\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$.

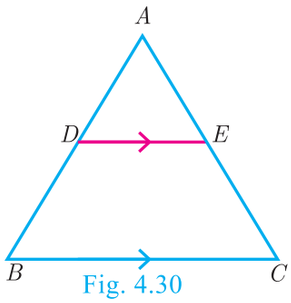


Fig. 4.30

ثبوت اگر ΔABC میں، $DE \parallel BC$,

لہذا، (بنیادی تناسبیت کے مسئلہ سے) $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

i) معکوس لینے پر $\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$ حاصل ہوتا ہے۔

دونوں جانب 1 کو جمع کریں $\frac{DB}{AD} + 1 = \frac{EC}{AE} + 1$

$\frac{DB + AD}{AD} = \frac{EC + AE}{AE} \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$

ii) دونوں جانب 1 کو جمع کریں

$\frac{AD}{DB} + 1 = \frac{AE}{EC} + 1$

لہذا، $\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$

کیا بنیادی تناسبیت کے مسئلہ کا برعکس بھی صحیح ہے؟ یہ جانچ کرنے کے لئے ذیل کے تشریح کو حل کریں۔

تشریح نوٹ بک پر زاویہ XAY کھینچئے جیسا کہ (خاکہ 4.31) میں بتایا گیا اور شعاع AX پر، نقاط B_1, B_2, B_3, B_4 اور B نشان کیجئے۔ اس طرح کہ $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B = 1\,\text{cm}$.

اسی طرح شعاع AY پر، نقاط C_1, C_2, C_3, C_4 اور C نشان کیجئے اس طرح کہ

$AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = C_4C = 2\,\text{cm}$, ۔ B,C اور BC کو ملایئے۔

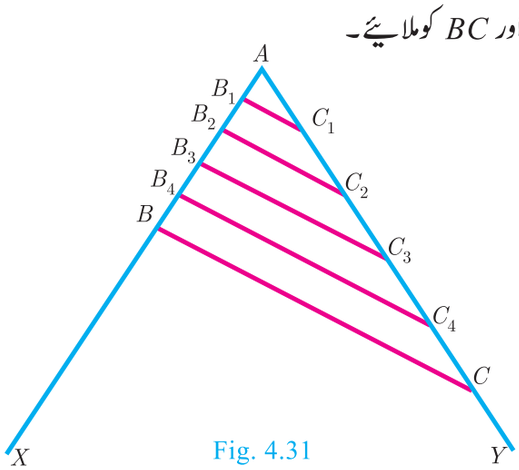


Fig. 4.31

غور کیجئے کہ $B_1C_1 \parallel BC$ اور $\frac{AB_1}{B_1B} = \frac{AC_1}{C_1C} = \frac{1}{4}$

اسی طرح B_2C_2، B_3C_3 اور B_4C_4 کو ملایئے تم دیکھتے ہو کہ

$\frac{AB_2}{B_2B} = \frac{AC_2}{C_2C} = \frac{2}{3}$ اور $B_2C_2 \parallel BC$

$\frac{AB_3}{B_3B} = \frac{AC_3}{C_3C} = \frac{3}{2}$ اور $B_3C_3 \parallel BC$

$\frac{AB_4}{B_4B} = \frac{AC_4}{C_4C} = \frac{4}{1}$ اور $B_4C_4 \parallel BC$

اس سے ہم یہ غور کر سکتے ہیں کہ اگر ایک خط مستقیم کسی مثلث کے کوئی ضلع کو مساوی نسبت میں تقسیم کرتا ہے تو وہ خط تیسرے ضلع کے متوازی ہوگا۔
لہذا، ہمیں ذیل کا مسئلہ حاصل ہوتا ہے جو تھیلس کے مسئلے کا برعکس کہلاتا ہے۔

مسئلہ 2 : بنیادی تناسبیت کے مسئلے کا برعکس Converse of Basic Propotionality Theorem

بیان : اگر ایک خطِ مستقیم کسی مثلث کے کوئی دو اضلاع کو مساوی نسبت میں تقسیم کرتا ہے تو وہ خط تیسرے ضلع کے متوازی ہوگا۔

10th maths 4. geometry
Sunday, February 16, 2020 10:27:51 AM

ثبوت :

دیا گیا ہے، ΔABC میں، $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$,

ثابت کرنا ہے، $DE \parallel BC$

تصنیف : فرض کیجئے کہ DE, BC کے متوازی نہیں ہے،
اس طرح کہ $DF \parallel BC$ کھینچئے۔

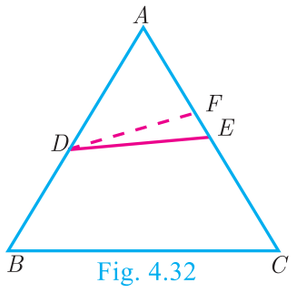


Fig. 4.32

عدد	جملہ	وجہ
1.	$DF \parallel BE$، میں ΔABC	تصنیف
2.	$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ (1)	تھیلس کا مسئلہ (ΔABC میں AB پر D اور AC پر E لینے پر)
3.	$\frac{AD}{DB} = \frac{AF}{FC}$ (2)	تھیلس کا مسئلہ (ΔABC میں AC پر F لینے پر)
4.	$\frac{AE}{EC} = \frac{AF}{FC}$ $\frac{AE}{EC} + 1 = \frac{AF}{FC} + 1$ $\frac{AE + EC}{EC} = \frac{AF + FC}{FC}$ $\frac{AC}{EC} = \frac{AC}{FC}$ $EC = FC$ چنانچہ، $E = F$ غرض $DE \parallel BC$	(1) اور (2) سے دونوں جانب 1 جمع کریں۔ دونوں جانب AC کو منسوخ کرنا۔ چنانچہ ہمارا قیاس BC, DE کے متوازی ہونا غلط ہے چنانچہ، ثابت ہوا۔

مسئلہ 3 : زاویہ کے ناصف کا مسئلہ Angle Bisector Theorem:

بیان : ایک مثلث کے اندرونی زاویہ کا زاویائی ناصف مقابل کے ضلع کو اس زاویہ کے نظیری اضلاع کی نسبت میں (اندرونی) جانب تقسیم کرتا ہے۔

ثبوت : دیا گیا ہے، ΔABC میں AD اندرونی ناصف ہے۔

ثابت کرنا ہے، $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$

تصنیف : AB کے متوازی C پر ایک خط کھینچئے۔ AD کو اس طرح دراز کیجئے کہ وہ C سے گذرنے والے خط کو E پر ملے۔

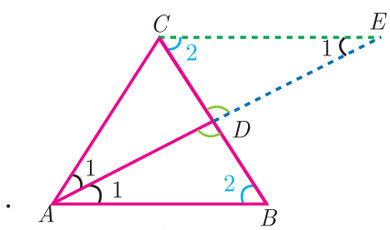


Fig. 4.33

10th maths 4. geometry
Sunday, February 16, 2020 10:27:51 AM

عدد	بیان	وجہ
1.	$\angle AEC = \angle BAE = \angle 1$ $\angle ABD = \angle ECD = \angle 2$	دومتوازی خطوط قاطع کے ذریعے قطع کرتے ہیں اور متبادلہ زاویے مساوی بناتے ہیں
2.	ΔACE مساوی الساقین ہے AC = CE (1)	$\angle CAE = \angle CEA$، میں ΔACE
3.	$\Delta ABD \sim \Delta ECD$ $\frac{AB}{CE} = \frac{BD}{CD}$	AA مشابہت سے
4.	$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$	(1) سے $AC = CE$ چنانچہ، ثابت ہوا۔

Activity 3 کارروائی 3 :

مرحلہ 1 : ایک چارٹ لیجئے اور مثلث کی طرح کاٹئے جیسا کہ نقشے 4.34(a) میں بتایا گیا۔

مرحلہ 2 : پھر متشاکل خط AD پر تہہ کیجئے۔ پھر C اور B ایک دوسرے پر ہوں گے۔

مرحلہ 3 : اسی طرح سے CE پر تہہ کیجئے پھر A اور B ایک دوسرے پر ہوں گے۔

مرحلہ 4 : اسی طرح سے BF پر تہہ کیجئے۔ پھر A اور C ایک دوسرے پر ہوں گے۔

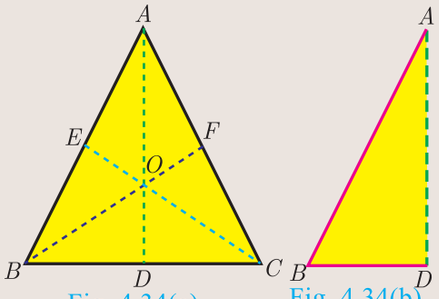


Fig. 4.34(a)

Fig. 4.34(b)

اسکیل کو استعمال کرکے AB، AC، BD، DC معلوم کیجئے۔ $\frac{AB}{AC}, \frac{BD}{DC}$ معلوم کیجئے اور جانچ کیجئے کہ یہ مساوی ہیں ؟

ان تینوں صورتوں میں، مثلث کے زاویہ کا زاویائی ناصف مقابل کے ضلع کو اس زاویہ کے نظیری اضلاع کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

اس کارروائی سے تم کیا نتیجہ اخذ کرتے ہو؟

مسئلہ 4 : زاویہ کے ناصف کے مسئلہ کا برعکس۔ Converse of Angle Bisector Theorem

بیان : اگر کسی مثلث کے ایک راس سے گذرنے والا خط مستقیم، مقابل کے ضلع کو اندرونی جانب سے دوسرے دو اضلاع کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔ تو وہ خطِ مستقیم اندرونی طور پر اس پر زاویہ کا ناصف ہوتا ہے۔

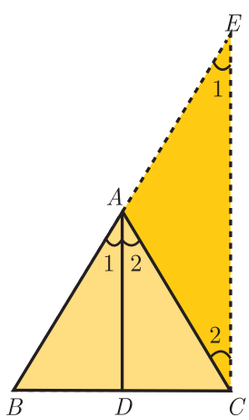


Fig. 4.35

ثبوت :

دیا گیا ہے، ΔABC ایک مثلث ہے۔ خط AD مقابل کے ضلع BC کو اندروز جانب اس کے نظیری اضلاع کی نسبت میں قطع کرتا ہے اور BC کو D پر ملتا ہے۔

یعنی $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$ (1)

ثابت کرنا ہے : $\angle A$ کا اندرونی ناصف AD ہے۔ یعنی $\angle 1 = \angle 2$

تصنیف : $CE \parallel DA$ کھینچئے۔ BA کو دراز کیجئے۔ اس طرح کہ یہ E پر ملے۔

10th maths 4. geometry
Sunday, February 16, 2020 10:27:52 AM

عدد	جملہ	وجہ
1.	Let $\angle BAD = \angle 1$ and $\angle DAC = \angle 2$	قیاس کرنے سے
2.	$\angle BAD = \angle AEC = \angle 1$	چونکہ، $CE \parallel DA$ اور AC قاطع ہے۔نظیری زاویے مساوی ہوتے ہیں
3.	$\angle DAC = \angle ACE = \angle 2$	چونکہ، $CE \parallel DA$ اور AC قاطع ہے، متبادلہ زاویے مساوی ہوتے ہیں
4.	$\frac{BA}{AE} = \frac{BD}{DC}$ (2)	ΔBCE میں، تھیلس کے مسئلہ سے
5.	$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$	(1) سے
6.	$\frac{AB}{AC} = \frac{BA}{AE}$	(1) اور (2) سے
7.	AC = AE (3)	AB کو منسوخ کرنے پر
8.	$\angle 1 = \angle 2$	(3) سے ΔACE ایک مساوی الساقین مثلث ہے۔
9.	$\angle A$ کو AD دو حصوں میں قطع کرتا ہے۔	چنانچہ، ثابت ہوا۔ $\angle 1 = \angle BAD = \angle 2 = \angle DAC$

مثال 4.12 ΔABC میں، اگر $DE \parallel BC$ ، $AD = x$ ، $DB = x - 2$ ، $AE = x+2$ اور $EC = x - 1$ ہو تو اضلاع AB اور AC کی لمبائیاں معلوم کیجئے۔

حل : ΔABC میں ہمارے پاس $DE \parallel BC$ تھیلس کے مسئلہ سے، ہمیں $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

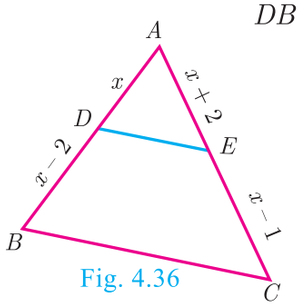


Fig. 4.36

$\frac{x}{x-2} = \frac{x+2}{x-1}$ سے $x(x-1) = (x-2)(x+2)$

چنانچہ، $x^2 - x = x^2 - 4$ اس لئے $x = 4$

جب $x = 4$ ہو تو

$AD = 4$, $DB = x - 2 = 2$, $AE = x + 2 = 6$, $EC = x - 1 = 3$.

چنانچہ، $AB = AD + DB = 4 + 2 = 6$, $AC = AE + EC = 6 + 3 = 9$.

لہذا، $AB = 6$, $AC = 9$.

مثال 4.13 ایک مثلث ΔABC کے اضلاع AB اور AC پر بالترتیب نقاط D اور E اس طرح ہیں کہ $AB = 5.6$ cm ، $AD = 1.4$ cm ، $AC = 7.2$ cm اور $AE = 1.8$ cm ہو تو ثابت کیجئے کہ $DE \parallel BC$

حل : ہمیں دیا گیا ہے، $AB = 5.6$ cm, $AD = 1.4$ cm, $AC = 7.2$ cm and $AE = 1.8$ cm.

$BD = AB - AD = 5.6 - 1.4 = 4.2$ cm

اور $EC = AC - AE = 7.2 - 1.8 = 5.4$ cm.

$\frac{AD}{DB} = \frac{1.4}{42} = \frac{1}{3}$ اور $\frac{AE}{EC} = \frac{1.8}{54} = \frac{1}{3}$

$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

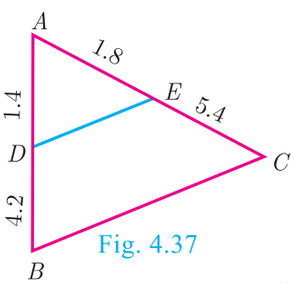


Fig. 4.37

لہذا، بنیادی تناسبیت کے مسئلے کے برعکس سے، ہمیں BC کے متوازی DE حاصل ہوتا ہے۔ چنانچہ، ثابت ہوا۔

10th maths 4. geometry
Sunday, February 16, 2020 10:27:52 AM

مثال 4.14 خاکہ 4.38 میں، $DE \| AC$ اور $DC \| AP$ ہوتو ثابت کیجئے کہ $\frac{BE}{EC} = \frac{BC}{CP}$

حل : ΔBPA میں، $DC \| AP$ ہے۔بنیادی تناسبیت کے مسئلہ سے

$\frac{BC}{CP} = \frac{BD}{DA}$ (1) ہمارے پاس ہے۔

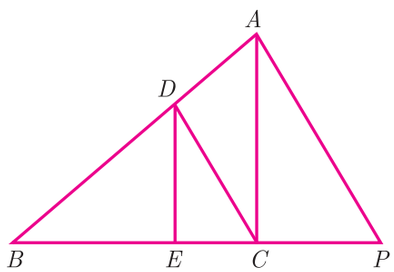


Fig. 4.38

ΔBCA میں $DE \| AC$ ہے۔بنیادی تناسبیت کے مسئلہ سے

$\frac{BE}{EC} = \frac{BD}{DA}$ (2)

(1)اور(2)سے ہمیں $\frac{BE}{EC} = \frac{BC}{CP}$ حاصل ہوتا ہے۔

چنانچہ،ثابت ہوا۔

مثال 4.15 خاکہ 4.39 میں $\angle A$ کا زاویائی ناصف AD ہے۔ اگر $BD = 4$ cm، $DC = 3$ cm اور $AB = 6$ cm ہوتو AC معلوم کیجئے۔

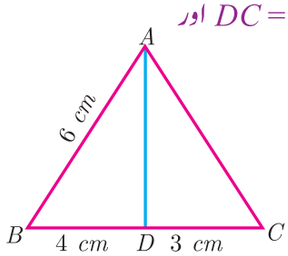


Fig. 4.39

حل : ΔABC میں، $\angle A$ کا زاویائی ناصف AD

لہذا،زاویائی ناصف کے مسئلہ سے

$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$

$\frac{4}{3} = \frac{6}{AC}$ سے ہمیں $4AC = 18$ حاصل ہوتا ہے۔

چنانچہ، $AC = \frac{9}{2} = 4.5$ cm

مثال 4.16 خاکہ 4.40 میں ، $\angle BAC$ کا زاویائی ناصف AD ہے۔اگر $AB = 10$ cm، $AC = 14$ cm اور $BC = 6$ cm ہوتو BD اور DC معلوم کیجئے۔

حل : فرض کیجئے کہ $BD = x$ cm ہوتو $DC = (6 - x)$ cm

$\angle A$ کا زاویائی ناصف AD ہے۔ لہذا،زاویائی ناصف کے مسئلہ سے

$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$

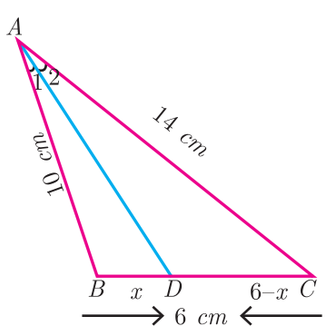


Fig. 4.40

$\frac{10}{14} = \frac{x}{6-x}$ سے $\frac{5}{7} = \frac{x}{6-x}$ حاصل ہوتا ہے۔

اس لئے $12x = 30$ سے ہمیں $x = \frac{30}{12} = 2.5$ cm حاصل ہوتا ہے۔

لہذا، $BD = 2.5$ cm, $DC = 6 - x = 6 - 2.5 = 3.5$ cm

Progress Check اپنی پیش رفت کی جانچ

1۔ ایک خط مستقیم ایک مثلث کے ایک ضلع کے ..... کھینچی جائے تو وہ دوسرے دو اضلاع کو متناسبیت میں تقسیم کرتی ہے۔

2۔ بنیادی تناسبیت کے مسئلہ کو ..... بھی کہا جاتا ہے۔

10th maths 4. geometry
Sunday, February 16, 2020 10:27:53 AM

3۔ فرض کیجئے کہ ΔABC ایک مثلث مساوی الاضلاع ہے۔ اگر BCD پر ایک نقطہ ہے اور $\angle A$ کا اندرونی ناصف AD ہے۔
زاویائی ناصف کے مسئلہ سے $\frac{BD}{DC}$ ..... ہے۔

4۔ ایک مثلث کے اندرونی زاویہ کا ..... مقابل کے ضلع کو اس زاویہ کے نظیری اضلاع کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

5۔ اگر ایک مثلث ΔABC کے ضلع BC کا وسطی خط AD زاویہ $\angle A$ کا زاویائی ناصف بھی ہے تو $\frac{AB}{AC}$ ..... ہے۔

4.3.2 مثلث کی تصنیف Construction

ہم پہلے ہی پچھلی جماعتوں میں دیئے گئے اضلاع اور زاویوں کو استعمال کر کے مثلثوں کی تصنیف کے بارے میں پڑھ چکے ہیں۔
اس باب میں مثلث کی تصنیف پر غور کریں جب کہ ذیل کے معطیات دئے گئے ہوں۔

i) قاعدہ، عمودی زاویہ اور قاعدہ کا وسطی خط (Median)

ii) قاعدہ، عمودی زاویہ اور قاعدہ کا ارتفاع

iii) قاعدہ، عمودی زاویہ اور قاعدہ کا وہ نقطہ جہاں عمودی زاویہ کا زاویائی ناصف قاعدے سے ملتا ہو۔

پہلے ہم ذیل کی تصنیف پر غور کرتے ہیں۔

دئے گئے ایک قطاع خط جس میں ایک زاویہ θ ہو تو اس سے قطاع دائرے کی تصنیف :

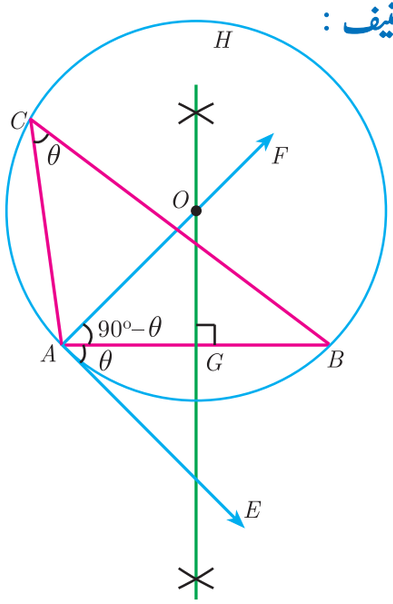


Fig. 4.41

تصنیف Construction

مرحلہ 1 : ایک قطاع خط $\overline{AB}$ کھینچئے۔

مرحلہ 2 : A پر زاویہ $\angle BAE = \theta$ لیجئے، AE کھینچئے۔

مرحلہ 3 : $AF \perp AE$ کھینچئے۔

مرحلہ 4 : AB کا عمودی ناصف کھینچئے جو AF کو O پر قطع کرے۔

مرحلہ 5 : O کو مرکز مان کر OA کو نصف قطر لے کر ایک دائرہ ABH بنایئے۔

مرحلہ 6 : دائرے پر کہیں بھی ایک نقطہ C لیجئے۔ متبادل قطاع کے مسئلہ سے، قوس کبیر ACB ہی مطلوبہ قطاع دائرہ ہے جس پر زاویہ θ واقع ہے۔

غور کیجئے

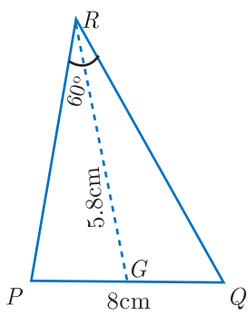
- اگر $C_1, C_2, C_3, \ldots$ دائرے کے نقاط ہیں تو تمام مثلثوں $\Delta BAC_1, \Delta BAC_2, \Delta BAC_3, \ldots$ کے قاعدے اور عمودی زاویے مساوی ہوں گے۔

10th maths 4. geometry
Sunday, February 16, 2020 10:27:53 AM

قاعدہ، عمودی زاویہ اور اسکے قاعدے کے راس سے خط وسطی دیئے گئے ہوں تو اس سے مثلث کی تصنیف

Construction of a triangle when its base, the vertical angle and the median from the vertex of the base are given.

مثال 4.17 ΔPQR کی تصنیف کیجئے جس میں $PQ = 8$ cm، $\angle R = 60^\circ$ اور R سے PQ کا خط وسطی RG ہے 5.8 cm۔ R سے PQ کے ارتفاع کی لمبائی معلوم کیجئے۔



خام خاکہ

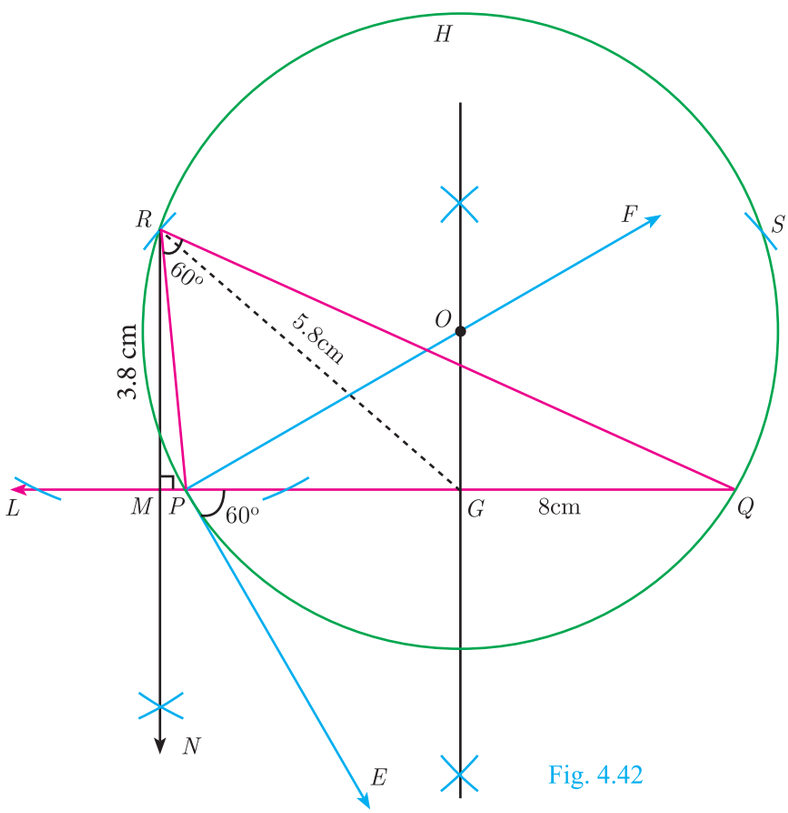


Fig. 4.42

تصنیف :

مرحلہ 1 : ایک قطاع خط $PQ = 8$ cm کھینچئے۔

مرحلہ 2 : P پر، PE اس طرح کھینچئے کہ $\angle QPE = 60^\circ$ ہو۔

مرحلہ 3 : P پر PF اس طرح کھینچئے کہ $\angle EPF = 90^\circ$ ہو۔

مرحلہ 4 : PQ کا عمودی ناصف کھینچئے جو PF کو O پر اور PQ کو G پر قطع کرے۔

مرحلہ 5 : O کو مرکز مان کر OP نصف قطر لے کر ایک دائرہ بنایئے۔

مرحلہ 6 : G سے دائرے پر 5.8 cm نصف قطر کے قوسیں نشان کیجئے۔ انہیں R اور S نشان کیجئے۔

مرحلہ 7 : PR اور RQ کو ملایئے پھر ΔPQR مطلوبہ مثلث ہے۔

مرحلہ 8 : R سے LQ کے عمودی ایک خط RN کھینچئے۔ LQ، RN سے M پر ملتا ہے۔

مرحلہ 9 : ارتفاع کی لمبائی $RM = 3.8$ cm ہے۔

غور کیجئے

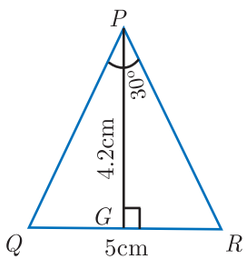
- دیئے گئے پیمائشوں سے ہم کو ایک اور مثلث ΔPQS حاصل ہوسکتا ہے۔

10th maths 4. geometry
Sunday, February 16, 2020 10:27:54 AM

قاعدہ، عمودی زاویہ اور راس سے قاعدہ کے ارتفاع سے دیئے گئے ہوں تو مثلث کی تصنیف :

Construct a triangle when its base, the vertical angle and the altitude from the vertex to the base are given.

مثال 4.18 ایک مثلث ΔPQR اس طرح تصنیف کیجئے کہ $QR = 5$ cm، $\angle P = 30^\circ$ اور P سے QR کے ارتفاع کی لمبائی 4.2 cm ہے۔



خام خاکہ

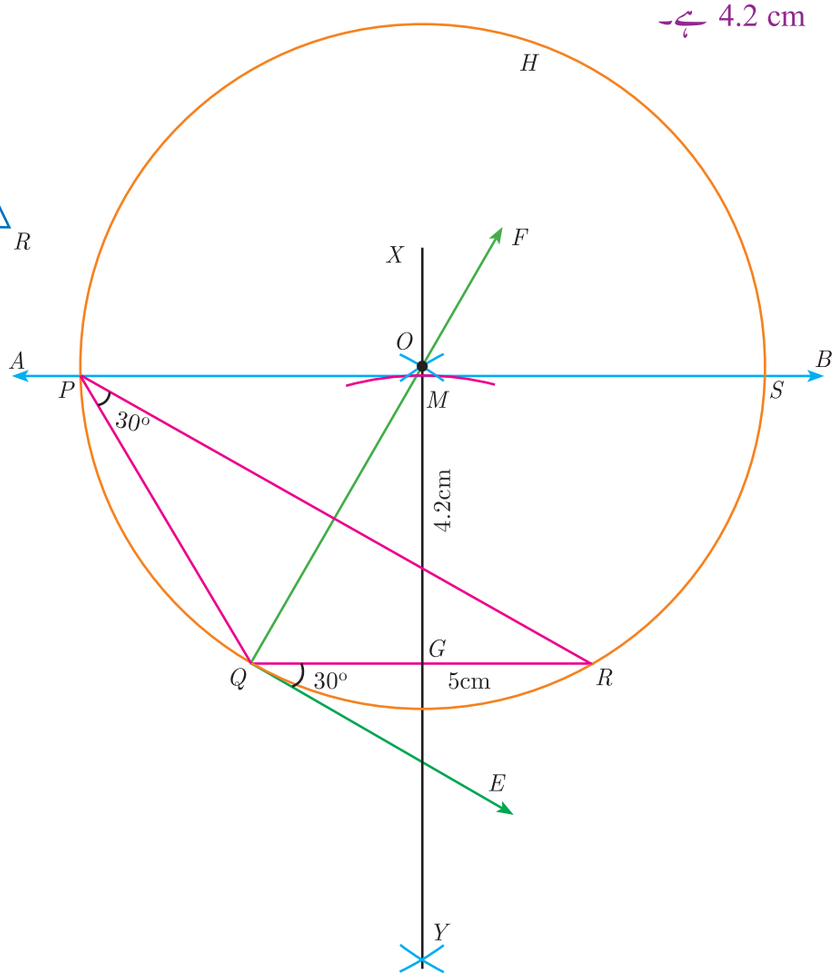


Fig. 4.43

تصنیف :

مرحلہ 1 : قطاع خط $QR = 5$ cm کھینچئے۔

مرحلہ 2 : Q پر خط QE اس طرح کھینچئے کہ $\angle RQE = 30^\circ$ ہو۔

مرحلہ 3 : Q پر خط QF اس طرح کھینچئے کہ $\angle EQF = 90^\circ$ ہو۔

مرحلہ 4 : QR کا عمودی ناصف XY کھینچئے جو QF کو O پر اور QR کو G پر قطع کرے۔

مرحلہ 5 : O کو مرکز مان کر OQ نصف قطر لے کر ایک دائرہ کھینچئے۔

مرحلہ 6 : G سے خط XY میں ایک قوس G پر نشان کیجئے اس طرح کہ $GM = 4.2$ cm

مرحلہ 7 : M سے خط AB کھینچئے جو QR کے متوازی ہو۔

مرحلہ 8 : AB دائرے کو P اور S پر ملتا ہے۔

مرحلہ 9 : QP اور RP کو ملایئے پھر ΔPQR مطلوبہ مثلث ہے۔

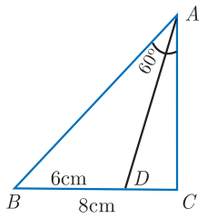
غور کیجئے

- دیئے گئے پیمائشوں کے لئے ΔSQR دوسرا مطلوبہ مثلث ہے۔

10th maths 4. geometry
Sunday, February 16, 2020 10:27:54 AM

قاعدہ، عمودی زاویہ اور قاعدہ پر وہ نقطہ جہاں عمودی زاویے کا زاویائی ناصف قاعدے سے ملتا ہے دیئے گئے ہوں تو مثلث کی تصنیف

Construct of a triangle when its base, the vertical angle and the point on the base where the bisector of the vertical angle meets the base



خام خاکہ

مثال 4.19 ایک مثلث ABC بنایئے جس میں $BC = 8$ cm، $\angle A = 60^\circ$ اور A کا زاویائی ناصف BC کو D پر اس طرح ملتا ہے۔ $BD = 6$ cm

تصنیف :

مرحلہ 1 : قطاع خط $BC = 8$ cm کھینچئے۔

مرحلہ 2 : B پر خط BE اس طرح کھینچئے کہ $\angle CBE = 60^\circ$

مرحلہ 3 : B پر خط BF اس طرح کھینچئے کہ $\angle EBF = 90^\circ$

مرحلہ 4 : BC کا عمودی ناصف کھینچئے جو BF کو O پر اور BC کو G پر قطع کرے۔

مرحلہ 5 : O کو مرکز مان کر OB نصف قطر لے کر ایک دائرہ کھینچئے۔

مرحلہ 6 : B سے، BC پر 6 cm نصف قطر کا ایک قوس D پر نشان کیجئے۔

مرحلہ 7 : عمودی ناصف دائرے کو I پر قطع کرتا ہے۔ ID کو ملایئے۔

مرحلہ 8 : ID کو اس طرح دراز کیجئے کہ وہ دائرے کو A پر ملے۔

اب AB اور AC کو ملایئے۔ پھر ΔABC مطلوبہ مثلث ہے۔

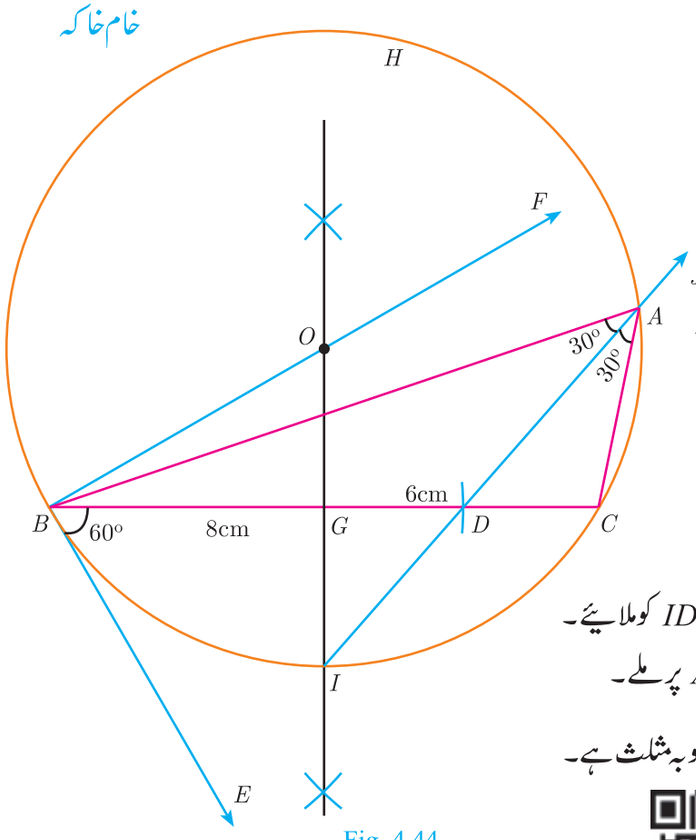


Fig. 4.44

4E9FR

مشق 4.2

1۔ ΔABC میں، اضلاع AB اور AC پر بالترتیب نقاط D اور E اس طرح ہیں کہ $DE \parallel BC$

i) اگر $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{4}$ اور $AC = 15$ cm ہو تو AE معلوم کیجئے۔

ii) اگر $AE = 4x - 3$، $DB = 5x - 3$، $AD = 8x - 7$ اور $EC = 3x - 1$ ہو تو x کی قیمت معلوم کیجئے۔

10th maths 4. geometry
Sunday, February 16, 2020 10:27:55 AM

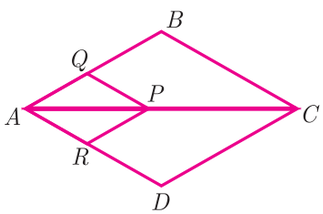
2۔ $ABCD$ ایک منحرف ہے جس میں $AB \| DC$ اور P , Q بالترتیب AD اور BC پر نقاط ہیں اس طرح کہ $PQ \| DC$ اگر $PD = 18$ cm، $BQ = 35$ cm اور $QC = 15$ cm ہوتو AD معلوم کیجئے۔

3۔ ΔABC میں، D اور E بالترتیب اضلاع AB اور AC پر نقاط ہیں ۔ذیل کے ہر ایک صورتوں کے لئے ثابت کیجئے کہ $DE \| BC$

(i) $AB = 12$ cm, $AD = 8$ cm, $AE = 12$ cm اور $AC = 18$ cm.

(ii) $AB = 5.6$ cm, $AD = 1.4$ cm, $AC = 7.2$ cm اور $AE = 1.8$ cm.

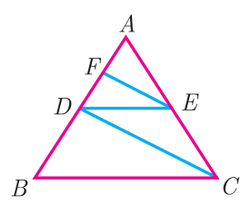
4۔ خاکہ میں، اگر $PQ \| BC$ اور $PR \| CD$ ہوتو ثابت کیجئے کہ



(i) $\frac{AR}{AD} = \frac{AQ}{AB}$ (ii) $\frac{QB}{AQ} = \frac{DR}{AR}$.

5۔ ΔABC میں معین $PQRB$ اس طرح نشان کیا گیا ہے کہ اس کا ایک زاویہ $\angle B$ ہے۔ P , Q اور R بالترتیب AB، AC اور BC پر واقع ہیں۔ اگر $AB = 12$ cm اور $BC = 6$ cm ہوتو معین کے اضلاع PQ، RB معلوم کیجئے۔

6۔ منحرف $ABCD$ میں $AB \| DC$، نقاط E اور F بالترتیب غیر متوازی اضلاع AD اور BC پر ہیں اس طرح کہ $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$. ثابت کیجئے کہ $EF \| AB$



7۔ خاکہ میں $DE \| BC$ اور $CD \| EF$ ۔

ثابت کیجئے کہ $AD^2 = AB \times AF$

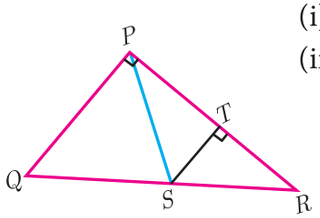
8۔ مندرجۂ ذیل ہر ایک میں جانچ کیجئے کہ ΔABC کا زاویہ A کا زاویائی ناصف AD ہے۔

(i) AB ; 5 cm, AC ; 10 cm, BD;. 1 5 cm اور CD; 3 5 cm.

(ii) AB ; 4 cm, $AC = 6$ cm, BD ; 1.6 cm اور CD; 2 4 cm.

9۔ خاکہ میں $\angle QPR = 90^\circ$، اس کا زاویائی ناصف PS ہے۔

اگر $ST \perp PR$ ہوتو ثابت کیجئے کہ $ST \times (PQ + PR) = PQ \times PR$.



10۔ $ABCD$ ایک چار ضلعی ہے جس میں $AB = AD$ ہے، $\angle BAC$ اور $\angle CAD$ کا زاویائی ناصف بالترتیب اضلاع BC اور CD کو E اور F پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کیجئے کہ $EF \| BD$

11۔ ΔPQR تصنیف کیجئے جس میں قاعدہ $PQ = 4.5$ cm، $\angle R = 35^\circ$ اور R سے RG کا خط وسطی 6 cm ہے۔

12۔ ΔPQR تصنیف کیجئے جس میں $QR = 5$ cm، $\angle P = 40^\circ$ اور P سے QR کا خط وسطی $PG = 4.4$ cm ہے۔ P سے QR کا ارتفاع کی لمبائی معلوم کیجئے۔

13۔ ΔPQR تصنیف کیجئے اس طرح کہ $QR = 6.5$ cm، $\angle P = 60^\circ$ اور P سے QR کا ارتفاع کی لمبائی 4.5 cm ہے۔

14۔ ΔABC تصنیف کیجئے اس طرح کہ $AB = 5.5$ cm، $\angle C = 25^\circ$ اور C سے AB کا ارتفاع 4 cm ہے۔

100 95 75 25 5 0

10th maths 4. geometry
Sunday, February 16, 2020 10:27:55 AM

15۔ مثلث ABC کھینچئے جس میں $BC = 5.6$ cm، $\angle A = 40^\circ$ اور $\angle A$ کا زاویائی ناصف BC کو D پر ملتا ہے اس طرح کہ $CD = 4$ cm ہو۔

16۔ ΔPQR کھینچئے اس طرح کہ $PQ = 6.8$ cm، عمودی زاویہ 50° اور عمودی زاویے کا زاویائی ناصف قاعدہ کو D پر ملتا ہے جہاں $PD = 5.2$ cm

4.4 مسئلہ فیثاغورث Pythagoras Theorem

علم ریاضی میں تمام موجودہ مسئلوں میں سے مسئلہ فیثاغورث کو اہم ترین مسئلہ قرار دیا جاتا ہے کیونکہ اسکے کئی ثبوتیں ہیں ۔مسئلہ فیثاغورث کو 350 سے بھی زیادہ راستے سے مختلف طریقوں کے ذریعے ثبوت فرائم کیا جاسکتا ہے۔ان میں سے ہر ایک ثبوتوں کو ممتاز ریاضی دانیں، علماء انجینیر اور ریاضی کے خواہش منداں جن میں 20 ویں امریکی صدر جیمز گارفیلڈ (Jame Garfield) بھی شامل ہیں۔

ایلیشا اسکاٹ لومس (Elisha Scott Loomis) کی لکھی گئی ''فیثاغورثی تجویز (The Pythagorean Proposition)'' نامی کتاب امریکہ میں علم ریاضی کے سکھانے کی قومی کونسل (National Council of Teaching of Mathematics(NCTM) میں شائع کی گئی جس میں فیثاغورث کے مسئلہ کے 367 ثبوتیں موجود ہیں۔

تین اعداد (a,b,c) فیثاغورثی تہرا (Pythagorean Triplet) کہلاتے ہیں اگر وہ مثلث قائمۃ الزاویہ کے اضلاع بناتے ہیں۔غرض (a,b,c) ایک فیثاغورثی تہرا اگر صرف اور صرف $c^2 = a^2 + b^2$ ہو۔

اب ہم اس مشہور ترین اور اہم مسئلہ کا مطالعہ کرنے کے قریب ہو چکے ہیں جو صرف علم ہندسہ ہی میں نہیں بلکہ کل علم ریاضی میں مشہور ہے۔

Activity 4 کارروائی 4 :

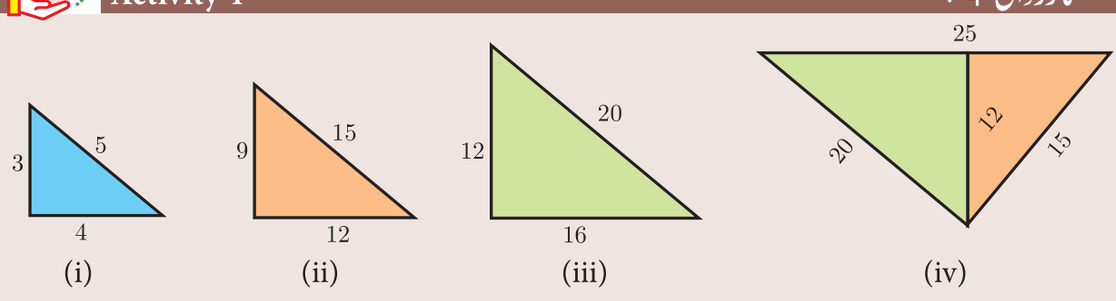


Fig. 4.45

مرحلہ 1 : ایک چارٹ کا کاغذ لیجئے۔مثلث 1 میں دئے گئے پیمائش کا ایک مثلث قائمۃ الزاویہ کاٹئے۔

مرحلہ 2 : تین مختلف رنگ کے چارٹ کے کاغذات لے کر تین مثلثیں کاٹئے اس طرح کہ مثلث (ii) کے اضلاع مثلث (i) کا تین گنا ہے، مثلث (iii) کے اضلاع مثلث (i) کا چار گنا ہے، مثلث (iv) کے اضلاع مثلث (i) کا پانچ گنا ہے۔

10th maths 4. geometry
Sunday, February 16, 2020 10:27:56 AM

مرحلہ 3 : اب مشترک ضلع کی لمبائی 12 لیکر مثلث (ii) اور (iii) کو مثلث (iv) پر رکھئے اس طرح کہ ان دو مثلثوں [(ii) اور (iii)] کے اضلاع مثلث (iv) سے منطبق ہوتے ہیں۔

وتر کے ضلع کا معائنہ کیجئے اور مساوات لکھئے۔ تم کیا نتیجہ اخذ کروگے؟

غور کیجئے

- ایک مثلث قائمۃ الزاویہ میں، 90° (زاویہ قائمہ) کے مقابل کا ضلع وتر کہلاتا ہے۔
- دوسرے دو اضلاع مثلث قائمۃ الزاویہ کے پیر کہلاتے ہیں۔
- وتر مثلث کا سب سے بڑا ضلع ہوگا۔

مسئلہ 5 : مسئلہ فیثاغورث Pythagoras Theorem

بیان : ایک مثلث قائمۃ الزاویہ میں وتر کا مربع اس کے دوسرے دو اضلاع کے مربعوں کے حاصلِ جمع کے مساوی ہوتا ہے۔

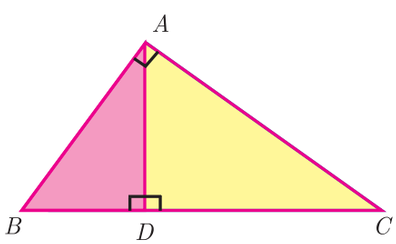


Fig. 4.46

ثبوت :

دیا گیا ہے : ΔABC میں، $\angle A = 90^{\circ}$

ثابت کرنا ہے : $AB^2 + AC^2 = BC^2$

تصنیف : $AD \perp BC$ کھینچئے۔

عدد	جملہ	وجہ
1.	ΔABC اور ΔDBA کا موازنہ کیجئے $\angle B$ مشترک ہے۔ $\angle BAC = \angle BDA = 90^{\circ}$ لہذا، $\Delta ABC \sim \Delta DBA$ $\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{AB}$ $AB^2 = BC \times BD$ (1)	دیا گیا ہے، $\angle BAC = 90^{\circ}$ اور $\angle BDA = 90^{\circ}$ تصنیف سے AA تشابہت سے دیا گیا ہے $\angle BAC = 90^{\circ}$ اور تصنیف $\angle CDA = 90^{\circ}$
2.	ΔABC اور ΔDAC کا موازنہ کیجئے $\angle C$ مشترک ہے $\angle BAC = \angle ADC = 90^{\circ}$ لہذا، $\Delta ABC \sim \Delta DAC$ $\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC}$ $AC^2 = BC \times DC$ (2)	AA تشابہت سے

10th maths 4. geometry
Sunday, February 16, 2020 10:27:56 AM

(1) اور (2) کو جمع کرنے پر، ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے،

$$AB^2 + AC^2 = BC \times BD + BC \times DC$$
$$= BC(BD + DC) = BC \times BC$$
$$AB^2 + AC^2 = BC^2.$$

چنانچہ، مسئلہ ثابت ہوا۔

کیا تم جانتے ہو؟

انڈیا میں مسئلہ فیثاغورث کو ''بودھ یانا کا مسئلہ'' Baudhayana Theorem سے بھی یاد کیا جاتا ہے۔

Thinking Corner ذرا سوچئے

1۔ کوئی پانچ فیثاغورثی تہرے لکھئے۔

2۔ ایک مثلث قائمۃ الزاویہ کے دوسرے دو زاویوں کا حاصل جمع ..... ہے۔

مسئلہ فیثاغورث کا برعکس :

بیان : اگر ایک مثلث کے طویل ترین ضلع کا مربع، دوسرے دو اضلاع کے مربعوں کے حاصل جمع کے مساوی ہے تو وہ مثلث، مثلث قائمۃ الزاویہ ہوگا۔

ذرا سوچئے

کیا ایک مثلث قائمۃ الزاویہ کے تمام تینوں اضلاع طاق اعداد ہو سکتے ہیں؟ کیوں؟

Activity 5 کارروائی 5

(i) دو متواتر طاق اعداد لیجئے۔

(ii) اوپر کے اعداد کے معکوس لیجئے اور انہیں جمع کیجئے۔ تمہیں $\frac{p}{q}$ کی شکل کا ایک عدد حاصل ہوگا۔

(iii) $\frac{p}{q}$ کے نسب نما کے ساتھ 2 جمع کیجئے اس طرح کہ $q + 2$ حاصل ہو۔

(iv) اب اعداد $p, q, q + 2$ لیجئے۔ ان تینوں اعداد کے درمیان تمہیں کیا تعلق حاصل ہوتا ہے؟ ان تین متواتر طاق اعداد کے جوڑیوں کے لئے بھی کوشش کیجئے۔ اور اپنے جواب کا نتیجہ معلوم کیجئے۔

مثال 4.20

ایک کیڑا 6m بلندی والے برقی کھمبے کے قدم سے ابتداء میں 8m دوری پر ہے، رینگتے ہوئے اس کھمبے کی طرف کچھ فاصلہ طئے کرتا ہے۔ اگر اس برقی کھمبے کی چوٹی سے اس کا فاصلہ، اس کے طئے کردہ فاصلہ سے مساوی ہو تو وہ کیڑا برقی کھمبے کے قدم سے کتنی دوری پر ہوگا؟

حل : کیڑے اور برقی کھمبے کے قدم کا درمیانی فاصلہ، $AB = 6$ m، x m کے فاصلے کے حرکت کے بعد، فرض کیجئے کہ کیڑا C پر ہے

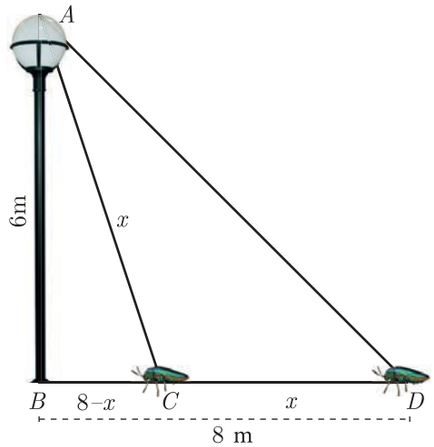


Fig. 4.47

فرض کیجئے کہ، $AC = CD = x$ تو $BC = BD - CD = 8 - x$

ΔABC میں $\angle B = 90^\circ$

$AC^2 = AB^2 + BC^2$ سے $x^2 = 6^2 + (8 - x)^2$

$$x^2 = 36 + 64 - 16x + x^2$$

$16x = 100$ تو $x = 6.25$

$$BC = 8 - x = 8 - 6.25 = 1.75 \text{ m}$$

لہذا، کیڑا برقی کھمبے کے قدم سے 1.75 m دوری پر ہے۔

10th maths 4. geometry
Sunday, February 16, 2020 10:27:57 AM

مثال 4.21 ΔABC کے الاضلاع CA اور CB کے وسطی نقاط بالترتیب P اور Q ہیں، زاویہ قائمہ C پر ہے۔ ثابت کیجئے کہ

$$4(AQ^2 + BP^2) = 5AB^2$$

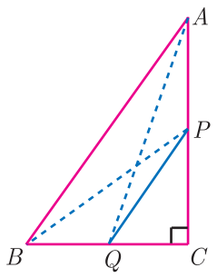


Fig. 4.48

حل : چونکہ، ΔAQC، C پر قائم مثلث ہے $AQ^2 = AC^2 + QC^2$ (1)

اور ΔBPC، C پر قائم مثلث ہے $BP^2 = BC^2 + CP^2$ (2)

ΔABC، C پر قائم مثلث ہے $AB^2 = AC^2 + BC^2$ (3)

(1) اور (2) سے $AQ^2 + BP^2 = AC^2 + QC^2 + BC^2 + CP^2$

$$4(AQ^2 + BP^2) = 4AC^2 + 4QC^2 + 4BC^2 + 4CP^2$$
$$= 4AC^2 + (2QC)^2 + 4BC^2 + (2CP)^2$$
$$= 4AC^2 + BC^2 + 4BC^2 + AC^2 \quad \text{(چونکہ، } P \text{ اور } Q \text{ وسطی نقاط ہیں)}$$
$$= 5(AC^2 + BC^2)$$

$4(AQ^2 + BP^2) = 5AB^2$ (مسئلہ فیثاغورث سے)

مثال 4.22 ایک دیوار پر 7 قدم کے اونچائی پر پہنچنے کے لئے سیڑھی کی لمبائی کیا ہوگی جب کہ دیوار سے سیڑھی کے قدم کا فاصلہ 4 قدم ہے؟ اپنے جواب بعد کے دس کے مقام کے قریب لائیے۔

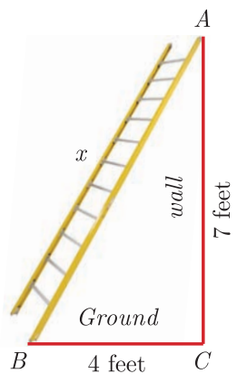


Fig. 4.49

حل : فرض کیجئے کہ سیڑھی کی لمبائی x ہے۔ $BC = 4$ ft, $AC = 7$ ft.

مسئلہ فیثاغورث سے، $AB^2 = AC^2 + BC^2$

$x^2 = 7^2 + 4^2$ سے $x^2 = 49 + 16$

چنانچہ $x^2 = 65$ $x = \sqrt{65}$

یہ عدد $\sqrt{65}$، 8 اور 8.1 کے درمیان ہے۔

$$8^2 = 64 < 65 < 65.61 = 8.1^2$$

لہذا، سیڑھی کی لمبائی تقریباً 8.1 قدم ہے۔

مثال 4.23 ایک ہوائی جہاز ہوائی اڈّے سے نکل کر شمال کی جانب 1000km/hr کی رفتار سے اڑتا ہے۔ اسی وقت ایک اور ہوائی جہاز اسی ہوائی اڈّے سے نکل کر مغرب کی جانب 1200km/hr کی رفتار سے اڑتا ہے۔ 1½ گھنٹے کے بعد وہ ہوائی جہازیں ایک دوسرے سے کتنی دوری پر ہوں گے؟

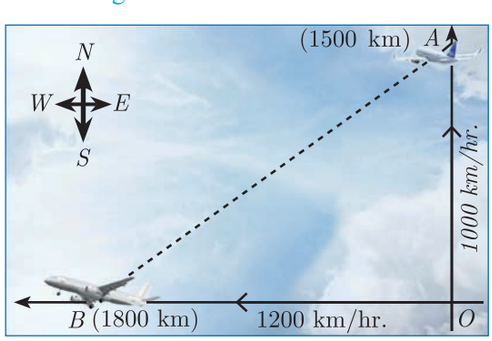


Fig. 4.50

حل : فرض کیجئے کہ پہلا ہوائی جہاز O سے نکل کر شمال کی جانب A پر پہنچتا ہے۔

(فاصلہ = وقت × رفتار)

جہاں $OA = \left(1000 \times \frac{3}{2}\right)\text{km} = 1500 \text{ km}$

فرض کیجئے کہ دوسرا ہوائی جہاز O سے نکل کر مغرب کی جانب B پر پہنچتا ہے۔

جہاں $OB = \left(1200 \times \frac{3}{2}\right) = 1800 \text{ km}$

مطلوبہ فاصلہ BA ہے۔

مثلث قائمۃ الزاویہ AOB میں، $AB^2 = OA^2 + OB^2$

10th maths 4. geometry
Sunday, February 16, 2020 10:27:58 AM

$$AB^2 = (1500)^2 + (1800)^2 = 100^2\ (15^2+18^2)$$
$$= 100^2 \times 549 = 100^2 \times 9 \times 61$$
$$AB = 100 \times 3 \times \sqrt{61} = 300\sqrt{61} \text{ kms.}$$

Progress Check — اپنی پیش رفت کی جانچ

1۔ مثلث قائمۃ الزاویہ کا سب سے بڑا ضلع ..... ہے۔

2۔ علم ریاضی میں پہلا مسئلہ ..... ہے۔

3۔ اگر ایک مثلث کے سب سے بڑے ضلع کا مربع دوسرے دو اضلاع کے مربعوں کے حاصل جمع کے مساوی ہے تو وہ مثلث ..... ہے

4۔ صحیح یا غلط بیان کیجئے۔ اور انہیں تصدیق کیجئے۔

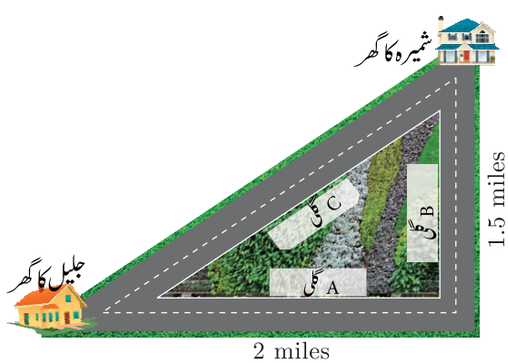
i) مسئلہ فیثاغورث تمام مثلثوں کے لئے قابل استعمال ہے۔

ii) ایک مثلث قایمۃ الزاویہ کا ایک ضلع ہمیشہ 4 کا ضریب ہونا ضروری ہے۔

مشق 4.3

1۔ ایک آدمی مشرق کی طرف 8 m اور پھر شمال کی طرف 24 m جاتا ہے۔ ابتدائی مقام سے موجودہ مقام کا فاصلہ معلوم کیجئے۔

2۔ شمیرہ کے گھر سے جلیل کے گھر کو جانے کے لئے دو راستے ہیں۔ پہلا راستہ گلی C سے اور دوسرا راستہ گلی B اور پھر گلی A سے جاتا ہے۔ سیدھے راستے گلی C سے ہوتے ہوئے جانے پر کتنا فاصلہ کم ہوگا؟ (خاکہ کے استعمال سے)



3۔ نقطہ A سے نقطہ B پر پہنچنے کے لئے تمہیں ایک جھیل پر چلنے سے پرہیز کرنا چاہئے۔ تم کو جنوب کی طرف 34 m اور مشرق کی طرف 41 m چلنا چاہئے۔ کم ترین فاصلہ کے لئے، اگر جھیل پر سے گذرنا ممکن ہوتا تو کتنے میٹر کم ہوتے ہیں؟

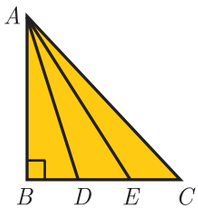


4۔ ایک مستطیل $WXYZ$ میں، $XY + YZ = 17$ cm اور $XZ + YW = 26$ cm ہے۔ مستطیل کی لمبائی اور چوڑائی معلوم کیجئے

5۔ ایک قائم مثلث کا وتر اسکے کم ترین ضلع کے دُگنے سے 6 m زیادہ ہے۔ اگر تیسرا ضلع وتر سے 2 m کم ہے، مثلث کے اضلاع معلوم کیجئے۔

6۔ 5 m لمبی سیڑھی ایک عمودی دیوار پر جھکائی گئی ہے۔ اس طرح کہ وہ 4 m بلند ایک نقطے پر دیوار تک پہنچتی ہے۔ اگر سیڑھی کا قدم 1.6 m دیوار کی طرف ہٹایا جاتا ہے تو سیڑھی کی چوٹی دیوار پر اوپر کی طرف کتنا فاصلہ پھسلے (Slide) گا؟

10th maths 4. geometry
Sunday, February 16, 2020 10:27:59 AM



7۔ ΔPQR کے قاعدے QR پر عمود PS، QR کو S پر قطع کرتا ہے اس طرح کہ $QS = 3SR$ ۔
ثابت کیجئے کہ $2PQ^2 = 2PR^2 + QR^2$

8۔ متبادلہ خاکے میں، ABC ایک مثلث قائمۃ الزاویہ ہے جس میں B پر زاویہ قائمہ ہے اور نقاط D اور E، BC پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کیجئے کہ $8AE^2 = 3AC^2 + 5AD^2$

4.5 دائرے اور مماسیں Circles and Tangents

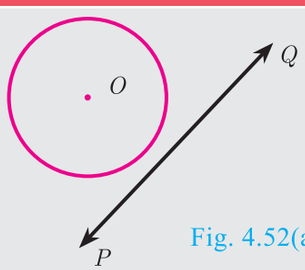
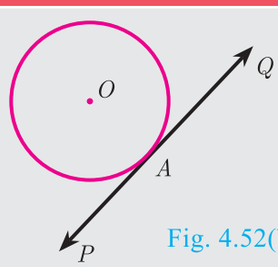
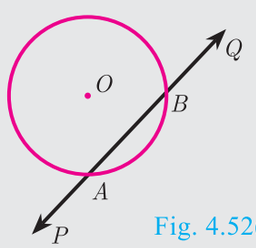


Fig. 4.51

ہم اپنے روزمرہ زندگی کے حالات میں ہم یہ دیکھتے ہیں کہ ایک سطح میں دو خطوط ایک نقطہ پر قطع کرتے ہیں یا کبھی قطع نہیں کرتے۔ مثال کے طور پر، ریل کی پٹری میں دو متوازی خطوط قطع نہیں کرتے۔ جبکہ کھڑکی میں جالیاں قطع کرتے ہیں۔ اسی طرح سے ایک سطح میں ایک خط یا ایک منحنی خط دیا گیا ہو تو کیا ہوتا ہے؟

اسی طرح سے جب ہم ایک خط اور ایک دائرے کا تقاطع لیں تو کیا ہوتا ہے؟

ہمیں تین صورتیں حاصل ہوتے ہیں جیسا کہ ذیل کے نقشے میں دیا گیا ہے۔

خاکہ 1	خاکہ 2	خاکہ 3
 Fig. 4.52(a)	 Fig. 4.52(b)	 Fig. 4.52(c)
i) خط مستقیم PQ دائرے کو مس نہیں کرتا ہے	i) خط مستقیم دائرے کو ایک مشترک نقطہ A پر مَس کرتا ہے۔	i) خط مستقیم PQ دائرے کو دو نقاط A اور B پر مَس کرتا ہے۔
ii) خط مستقیم اور دائرہ کے درمیان کوئی مشترک نقطہ نہیں ہے۔	ii) PQ، A پر دائرہ کا مماس کہلاتا ہے۔	ii) خط PQ دائرہ کا قاطع کہلاتا ہے۔
iii) غرض خط اور دائرہ کے نقاطِ تقاطع کی تعداد صفر ہے۔	iii) غرض خط اور دائرہ کے نقاط تقاطع کی تعداد ایک ہے۔	iii) غرض خط اور دائرہ کے نقاطِ تقاطع کی تعداد دو ہے۔

کیا تم جانتے ہو؟

لفظ ''ٹینجنٹ'' (Tangent) لاطینی لفظ ''ٹینجیری'' (Tangere) سے لیا گیا ہے۔ جس کے معنی ''چھونا'' (To Touch) اور اس کا تعارف ڈن مارک کے ریاضی دان تھامس فینیکو (Thomas Fineko) نے 1583 میں کی۔

غور کیجئے

خاکہ 4.52(c) میں قطاع خط AB دائرہ میں نشان کیا جاتا ہے، **دائرہ کا وتر** کہلاتا ہے۔ غرض وتر ایک قاطع کا تحتی سطح ہے۔

10th maths 4. geometry
Sunday, February 16, 2020 10:28:00 AM

تعریف : اگر ایک خط دئے گئے دائرہ پر صرف ایک ہی نقطہ پر مَس کرتا ہے۔ تو **دائرہ کا مماس** کہلاتا ہے۔

حقیقی زندگی میں دائرے پر مماسوں کی مثالیں
Real Life Examples of Tangents to Circles


Fig. 4.53(a)

i) جب ایک سائیکل سڑک پر چلتی ہے تو ہر ایک نقطہ پر سڑک مماس بنتا ہے جب پہیہ اس پر چکر لگاتا ہے۔

ii) جب دھاگہ کے ایک سرے پر ایک پتھر کو باندھ کر اسکے دوسرے سرے سے اسے گردش کیا جاتا ہے تو پتھر ایک دائرہ کی وضاحت کرتا ہے۔ اگر ہم اچانک اس حرکت کو روکتے ہیں تو پتھر اس دائری حرکت کا مماس کے سمت میں جاتا ہے۔

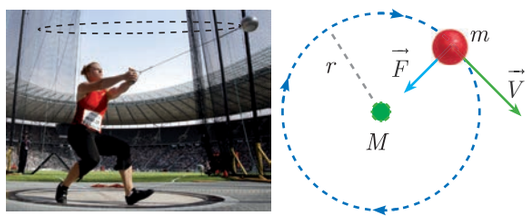


Fig. 4.53(b)

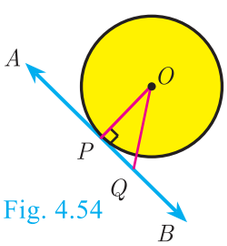


Fig. 4.54

دائرے اور مماسوں پر چند نتائج
Some Result on Circles of Tangents

1۔ دائرے پر کسی بھی ایک نقطہ پر مماس اور اس نقطہ پر نصف قطر ایک دوسرے کے عمودی ہوتے ہیں۔

(c) دائرے کے کسی بھی بیرون نقطہ سے دو مماسیں کھینچ سکتے ہیں ۔

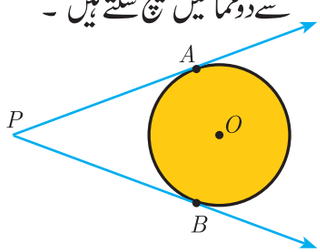


Fig. 4.55(c)

(b) دائرہ پر کسی بھی نقطہ سے صرف ایک مماس کھینچ سکتے ہیں ۔

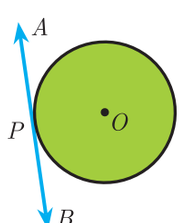


Fig. 4.55(b)

2۔ (a) دائرہ کے اندرونی نقطہ سے مماس نہیں کھینچ سکتے ۔

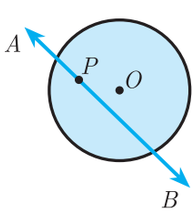


Fig. 4.55(a)

3۔ دائرہ کے ایک بیرونی نقطہ سے کھینچے گئے دو مماسوں کی لمبائیاں مساوی ہوتے ہیں۔

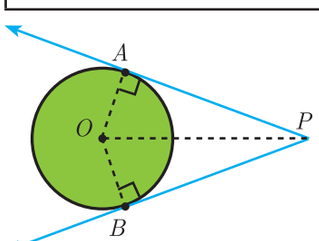


Fig. 4.56

ثبوت : 1 سے $OB \perp PB$ ، $OA \perp PA$

اور نصف قطر $OA = OB =$ ، OP مشترک ضلع ہے۔ $\angle AOP = \angle BOP$

اصول SAS کے تحت

لہذا، $\Delta OAP \cong \Delta OBP$ $PA = PB$

4۔ اگر دو دائرے بیرونی جانب مَس کرتے ہیں تو انکے مراکز کے درمیان کا فاصلہ انکے نصف قطروں کے حاصلِ جمع کے مساوی ہوتا ہے۔ $OP = r_1 + r_2$

ثبوت : فرض کیجئے کہ O اور P پر مراکز والے دو دائرے ایک دوسرے کو Q پر مَس کرتے ہیں۔ فرض کرو کہ $OQ = r_1$ اور $PQ = r_2$ اور فرض کرو کہ $r_1 > r_2$

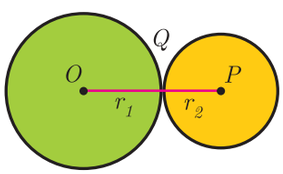


Fig. 4.57

10th maths 4. geometry
Sunday, February 16, 2020 10:28:00 AM

انکے مراکز کے درمیان کا فاصلہ $OP = d$، خاکہ 4.57 سے یہ واضح ہے کہ جب یہ دائرے بیرونی جانب مَس کرتے ہیں تو

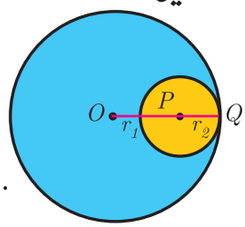


Fig. 4.58

$$OP = d = OQ + PQ = r_1 + r_2$$

5۔ اگر دو دائرے اندرونی جانب مس کرتے ہیں، تو انکے مراکز کے درمیان کا فاصلہ انکے نصف قطروں کے فرق کے مساوی ہوتا ہے۔ یعنی $OP = r_1 - r_2$

ثبوت : فرض کیجئے کہ O اور P پر مراکز والے دو دائرے ایک دوسرے کو Q پر مَس کرتے ہیں۔

فرض کیجئے کہ $OQ = r_1$ اور $PQ = r_2$ اور $r_1 > r_2$

انکے مراکز کے درمیان کا فاصلہ $OP = d$ ، خاکہ 4.58 سے یہ واضح ہے کہ

جب یہ دائرے اندرونی جانب مَس کرتے ہیں تو

$$OP = d = OQ - PQ = r_1 - r_2$$

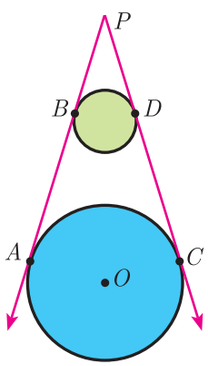


Fig. 4.59

6۔ دائروں پر کھینچے گئے دو بالراست مماسوں کی لمبائی مساوی ہوتے ہیں۔یعنی $AB = CD$

ثبوت : P سے دو دائروں پر کھینچے گئے مماسوں کی لمبائی مساوی ہوتے ہیں۔

لہذا، $PA = PC$ اور $PB = PD$ سے ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے۔

$$PA - PB = PC - PD$$

$$AB = CD$$

Thinking Corner ذرا سوچئے

1۔ کیا ایک دائرہ پر ایک دوسرے کے متوازی دو مماسیں کھینچے جاسکتے ہیں؟

2۔ کیا ایک دائرہ پر ایک دوسرے کے عمودی دو مماسیں کھینچے جاسکتے ہیں؟

دوسرا قاطع : Alternate segment

خاکہ 4.60 میں، وتر PQ دائرہ کو دو قطاعوں میں تقسیم کرتا ہے۔ مماس AB اس طرح کھینچا جاتا ہے کہ یہ دائرہ کو P پر مَس کرتا ہے۔

$\angle 1$ ($\angle QPB$) کے لئے دوسرے قطاع میں زاویہ $\angle 1$ ($\angle QSP$) ہے اور

$\angle 2$ ($\angle QPA$) کے لئے $\angle 2$ ($\angle PTQ$) ہے۔

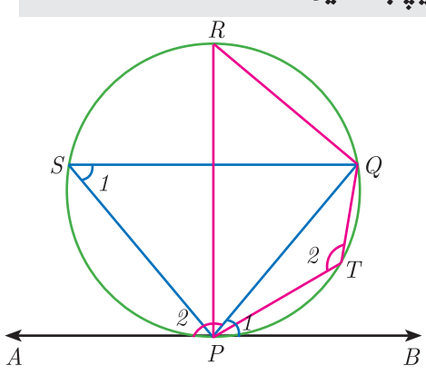


Fig. 4.60

مسئلہ 6 : دوسرے قطاع کا مسئلہ Alternate Segment Theorem

بیان : اگر ایک خط ایک دائرہ کو مَس کرتا ہے اور اس نقطۂ مس پر ایک وتر کھینچا جاتا ہے۔ تو مماس اور وتر کے درمیانی زاویہ بالترتیب دوسرے نظیری قطاع میں زاویوں کے مساوی ہوتا ہے۔

ثبوت :

دیا گیا ہے : O پر مرکز والا ایک دائرہ ہے، مماس AB دائرے کو P پر مَس کرتا ہے۔اور PQ ایک وتر ہے۔ وتر PQ کے مقابل اضلاع میں دائرہ پر دو نقاط S اور T ہیں۔

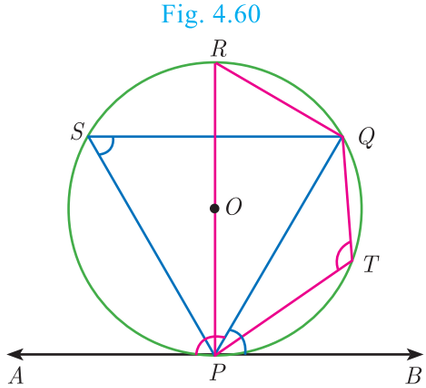


Fig. 4.61

10th maths 4. geometry
Sunday, February 16, 2020 10:28:01 AM

ثابت کرنا ہے (i) $\angle QPB = \angle PSQ$ اور (ii) $\angle QPA = \angle PTQ$

تصنیف : قطر POR کھینچئے اور QR ، QS اور PS کھینچئے۔

عدد	جملہ	وجہ
1.	$\angle RPB = 90°$ اب $\angle RPQ + \angle QPB = 90°$ ...(1)	قطر RP مماس AB کے عمودی ہے
2.	ΔRPQ میں $\angle PQR = 90°$ ... (2)	نصف دائرے میں زاویہ 90° ہے
3.	$\angle QRP + \angle RPQ = 90°$ ...(3)	مثلث قائمۃ الزاویہ میں، دو زاویے حادہ کا حاصل جمع 90° ہے
4.	$\angle RPQ + \angle QPB = \angle QRP + \angle RPQ$ $\angle QPB = \angle QRP$ ...(4)	(1) اور (3) سے
5.	$\angle QRP = \angle PSQ$ ...(5)	یکساں قطاعوں میں زاویے مساوی ہوتے ہیں
6.	$\angle QPB = \angle PSQ$ ...(6)	(4) اور (5) سے چنانچہ (i) ثابت ہوتا ہے
7.	$\angle QPB + \angle QPA = 180°$ ...(7)	زاویوں کی خطی جوڑی
8.	$\angle PSQ + \angle PTQ = 180°$ ...(8)	مدوّر چار ضلعی کے مقابل کے زاویوں کا حاصل جمع 180° ہے
9.	$\angle QPB + \angle QPA = \angle PSQ + \angle PTQ$	(7) اور (8) سے
10.	$\angle QPB + \angle QPA = \angle QPB + \angle PTQ$	$\angle QPB = \angle PSQ$ سے (6)
11.	$\angle QPA = \angle PTQ$	چنانچہ، (ii) ثابت ہوتا ہے۔اس سے ثبوت مکمل ہوتا ہے

مثال 4.24 دائرے کے مرکز سے 5 cm کے فاصلے پر ایک نقطہ سے کھینچے گئے مماس کی لمبائی معلوم کیجئے اور دائرہ کا نصف قطر 3 cm ہے۔

حل : دیا گیا ہے، $OP = 5$ cm، نصف قطر $r = 3$ cm

مماس PT کی لمبائی معلوم کرنے کے لئے

قائم مثلث ΔOTP میں

(مسئلہ فیثاغورث سے) $OP^2 = OT^2 + PT^2$

$5^2 = 3^2 + PT^2$ سے $PT^2 = 25 - 9 = 16$

مماس PT کی لمبائی $= 4$ cm

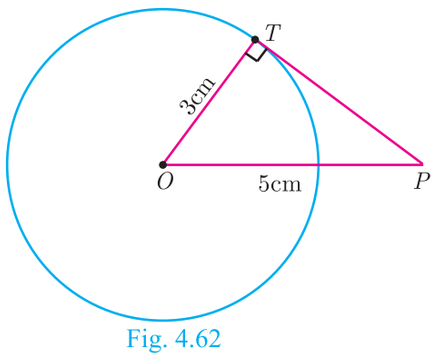


Fig. 4.62

مثال 4.25 5 cm نصف قطر والے ایک دائرہ کے ایک وتر PQ کی لمبائی 8 cm ہے۔ P اور Q پر مماسیں نقطہ T پر قطع کرتے ہیں۔ مماس TP کی لمبائی معلوم کیجئے۔

10th maths 4. geometry
Sunday, February 16, 2020 10:28:01 AM

حل : فرض کیجئے کہ $TR = y$، چونکہ OT، PQ کا عمودی ناصف ہے۔

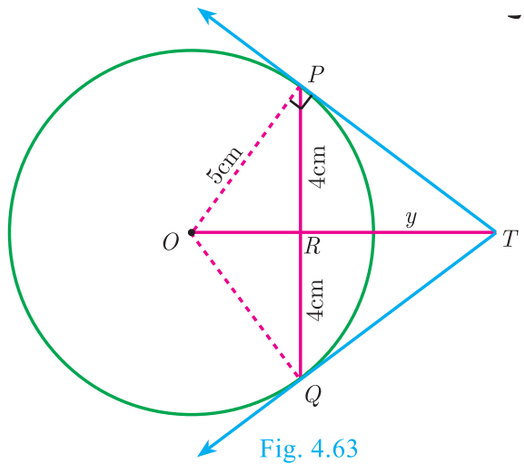


Fig. 4.63

$$PR = QR = 4 \text{ cm}$$

ΔORP میں $OP^2 = OR^2 + PR^2$

$$OR^2 = OP^2 - PR^2$$

$$OR^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow OR = 3 \text{ cm}$$

$$OT = OR + RT = 3 + y \quad \ldots (1)$$

ΔPRT میں $TP^2 = TR^2 + PR^2$ (2)

اور ΔOPT سے ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے۔ $OT^2 = TP^2 + OP^2$

(2) سے TP^2 کے لئے بھرتی کرنے پر $OT^2 = (TR^2 + PR^2) + OP^2$

(1) سے OT کے لئے بھرتی کرنے پر $(3 + y)^2 = y^2 + 4^2 + 5^2$

لہذا، $9 + 6y + y^2 = y^2 + 16 + 25$

$$y = TR = \frac{16}{3}$$

$$6y = 41 - 9 \Rightarrow y = \frac{16}{3}$$

(2) سے $TP^2 = TR^2 + PR^2$

لہذا، $TP^2 = \left(\frac{16}{3}\right)^2 + 4^2 = \frac{256}{9} + 16 = \frac{400}{9}$

$$TP = \frac{20}{3} \text{ cm}$$

مثال 4.26 خاکہ 4.64 میں، O دائرہ کا مرکز ہے۔ PQ ایک وتر ہے اور P پر مماس PR، PQ سے زاویہ 50° بناتا ہے۔ $\angle POQ$ معلوم کیجئے۔

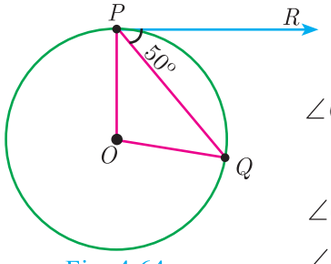


Fig. 4.64

حل : (نصف قطر اور مماس کے درمیان کا زاویہ 90° ہے۔)

$$\angle OPQ = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$$

(دائرہ کے نصف قطریں مساوی ہیں۔) $OP = OQ$

(ΔOPQ مساوی الساقین ہے۔) $\angle OPQ = \angle OQP = 40^\circ$

$$\angle POQ = 180^\circ - \angle OPQ - \angle OQP$$

$$\angle POQ = 180^\circ - 40^\circ - 40^\circ = 100^\circ$$

مثال 4.27 خاکہ 4.65 میں، ΔABC ایک دائرہ کے احاطے پر بنایا گیا ہے (Circumscribing) BC کی لمبائی معلوم کیجئے۔

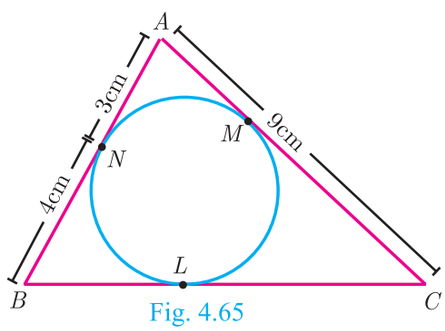


Fig. 4.65

حل : $AN = AM = 3$ cm (کسی بھی بیرونی نقطہ سے کھینچے گئے مماسیں مساوی ہوتے ہیں) خاکہ 4.65 سے ہمیں حاصل ہوتا ہے،

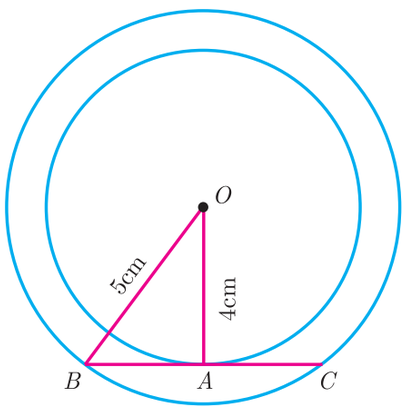
$$BN = BL = 4 \text{ cm}$$

$$CL = CM = AC - AM = 9 - 3 = 6 \text{ cm}$$

$BC = BL + CL = 4 + 6 = 10$ cm حاصل ہوتا ہے،

10th maths 4. geometry
Sunday, February 16, 2020 10:28:02 AM

مثال 4.28 اگر دو ہم مرکز دائرے کے نصف قطریں 4 cm اور 5 cm ہیں تو ایک دائرہ کے وتر کی لمبائی معلوم کیجئے جو دوسرے دائرہ کے لئے ایک مماس ہے۔



خاکہ 4.66

حل : $OA = 4$ cm, OB $= 5$ cm; also $OA \perp BC$.

$$OB^2 = OA^2 + AB^2$$

$AB^2 = 9$ سے $5^2 = 4^2 + AB^2$

لہذا، $AB = 3$ cm

چنانچہ، $BC = 2AB$ $BC = 2 \times 3 = 6$ cm

4.5.1 تصنیف Construction

ایک دائرے پر مماسوں کی تصنیف Construction of tangents to a circle

اب ہم ذیل کی تصنیف پر بحث کریں گے

i) دائرہ کے مرکز کو استعمال کر کے دائرہ پر ایک مماس کی تصنیف

ii) دوسرے قطاع کا مسئلہ کو استعمال کر کے دائرہ پر ایک مماس کی تصنیف

iii) بیرونی نقطہ سے مماسوں کے جوڑی کی تصنیف۔

کسی دائرے پر ایک مماس کی تصنیف (مرکز کو استعمال کر کے)

مثال 4.29

3 cm نصف قطر کا ایک دائرہ بنایئے۔اس دائرے پر ایک نقطہ P لیجئے اور P پر ایک مماس کھینچئے۔

حل : دیا گیا ہے، نصف قطر $r = 3$ cm

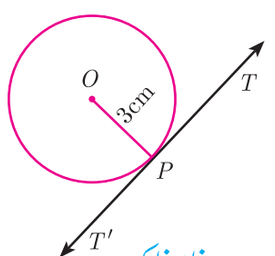
تصنیف :

مرحلہ 1 : 3 cm نصف قطر کا مرکز O پر ایک دائرہ کھینچئے۔

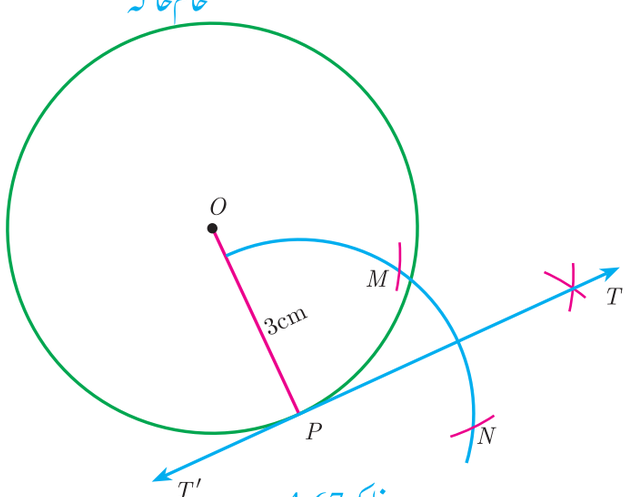
مرحلہ 2 : دائرہ پر ایک نقطہ P لیجئے اور OP کو ملایئے۔

مرحلہ 3 : OP کا عمودی خط TT' کھینچئے جو P سے گذرے۔

مرحلہ 4 : TT' مطلوبہ مماس ہے۔



خام خاکہ



خاکہ 4.67

کسی دائرے پر ایک مماس کی تصنیف (دوسرے قطاع کے مسئلہ کو استعمال کر کے)

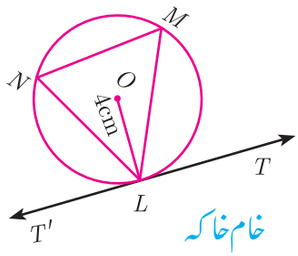
Construction of a tangent to a circle (Using alternate segment theorem)

مثال 4.30

4 cm نصف قطر کا ایک دائرہ بنایئے۔اس پر ایک نقطہ L پر دائرے کو ایک مماس کھینچئے (دوسرے قطاع کو استعمال کر کے)

10th maths 4. geometry
Sunday, February 16, 2020 10:28:02 AM

حل : دیا گیا ہے، نصف قطر = 4 سم



خام خاکہ

تصنیف :

مرحلہ 1 : O کو مرکز لے کر 4 cm نصف قطر کا ایک دائرہ کھینچئے۔

مرحلہ 2 : دائرہ پر ایک نقطہ L لیجئے۔ L سے کوئی وتر LM کھینچئے۔

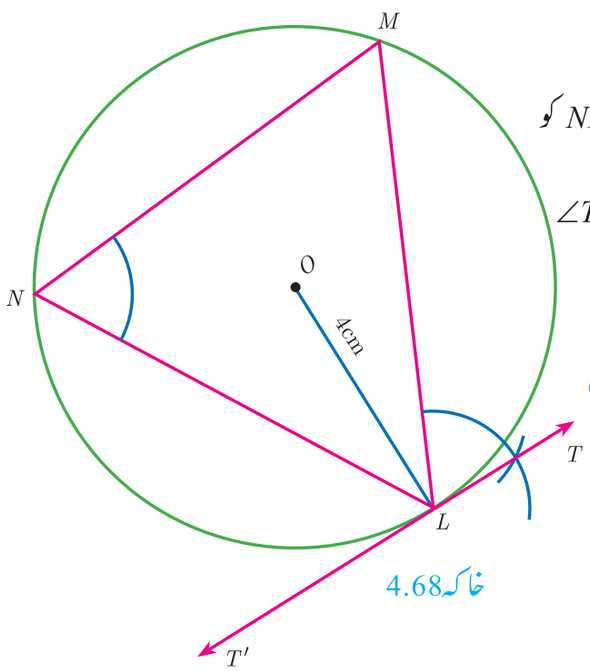
مرحلہ 3 : L کے علاوہ دائرے پر نقاط M اور N لیجئے اس طرح کہ L، M، N گھڑی کے مخالف سمت پر ہوں۔ LN اور NM کو کو ملائیے۔

مرحلہ 4 : L سے مماس TT' اس طرح کھینچئے کہ $\angle TLM = \angle MNL$

مرحلہ 5 : TT' مطلوبہ مماس ہے۔

دائرے کے ایک بیرونی نقطہ P سے مماسوں کی جوڑی کی تصنیف

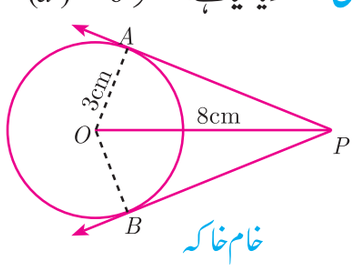
Construction of pair of tangents to a circle from an external point P.



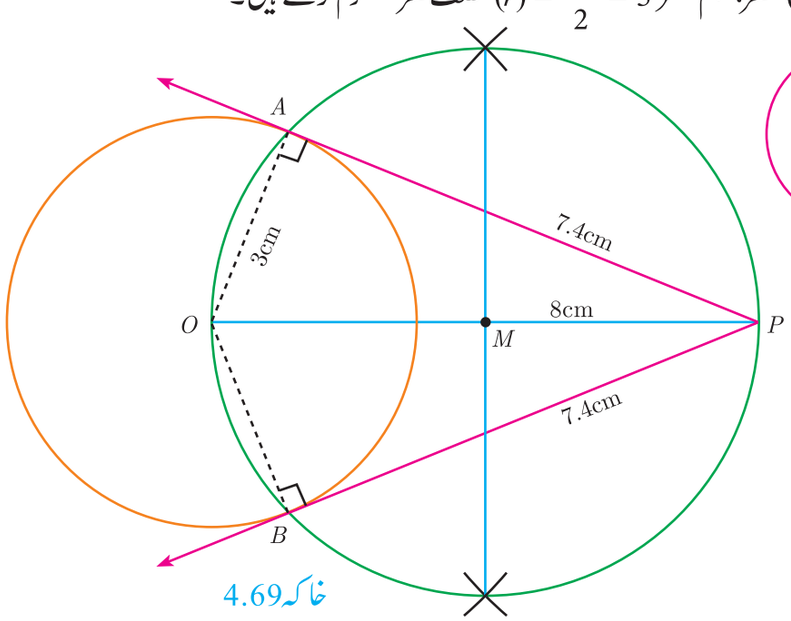
خاکہ 4.68

مثال 4.31 8 cm کے فاصلے پر ایک نقطہ P سے 6 cm کے قطر والے ایک دائرہ کے مرکز سے دائرے کو دو مماسیں PA اور PB کھینچئے اور ان کے طول کی پیمائش کیجئے۔

حل : دیا گیا ہے، سم $(d) = 6$ قطر، ہم سم $(r) = \frac{6}{2} = 3$ نصف قطر معلوم کرتے ہیں۔



خام خاکہ



خاکہ 4.69

10th maths 4. geometry
Sunday, February 16, 2020 10:28:03 AM

تصنیف :

مرحلہ 1 : O مرکز لے کر، 3 سم نصف قطر کا ایک دائرہ کھینچئے۔

مرحلہ 2 : 8 سم لمبائی والا ایک خط OP کھینچئے۔

مرحلہ 3 : OP کا عمودی ناصف کھینچئے جو OP کو M پر قطع کرتا ہے۔

مرحلہ 4 : M کو مرکز مان کر اور MO کو نصف قطر لیکر ایک دائرہ کھینچئے۔ جو پہلے کے دائرے کو A اور B پر قطع کرتا ہے۔

مرحلہ 5 : AP اور BP کو ملائیے۔ AP اور BP مطلوبہ مماسیں ہیں۔ غرض مماسوں کا طول $PA = PB = 7.4$ cm

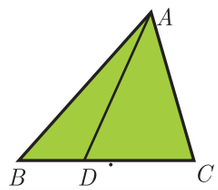
تصدیق : مثلث قائمۃ الزاویہ $\angle OAP$ میں، OAP , $PA^2 = OP^2 - OA^2 = 8^2 - 3^2 = 64 - 9 = 55$

$PA = \sqrt{55} = 7.4$ cm (approximately) .

4.6 مسئلہ نقطہ تراکز Concurrency Theorem

تعریف Definition

سیوین (Cevian) ایک قطاع خط ہے جو مثلث کے ایک راس سے مقابل کے ضلع کو دراز کیا جاتا ہے۔



نقشے میں AD، A سے سیوین ہے۔

خصوصی سیوین (Special Cevians)

i) ایک وسطی خط ایک سیوین ہے جو مقابل کے ضلع کو دو متماثل (مساوی) لمبائیوں میں تقسیم کرتا ہے۔

ii) ایک ارتفاع ایک سیوین ہے جو مقابل کے ضلع کے عمودی ہوتا ہے۔

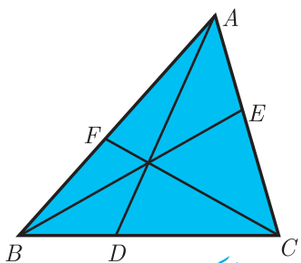
iii) ایک زاویائی ناصف ایک سیوین ہے۔ جو نظیری زاویہ کو نصف کرتا ہے۔

کیا تم جانتے ہو؟

اصطلاح سیوین اٹلی کے انجنیر جیوانّی سیوا (Giovanni Ceva) کے نام سے لیا گیا ہے۔ جنہوں نے سیوین کے بارے میں ایک مشہور مسئلہ ثابت کیا۔

سیوا کا مسئلہ (Ceva's theorem) (بغیر ثبوت کے)

بیان : فرض کیجئے کہ ABC ایک مثلث ہے اور فرض کیجئے کہ E, D, F بالترتیب خطوط BC، CA، AB پر نقاط ہیں تو سیوین AD، BE، CF متراکز ہیں اگر صرف اور صرف $\frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} \times \frac{AF}{FB} = 1$ جہاں لمبائیاں منظّم کیا گیا ہے۔ یہ ہر ایک نسبتوں کے معکوس کے لئے بھی کارآمد ہے۔ چونکہ، 1 کا معکوس 1 ہے۔



خاکہ 4.70

کیا تم جانتے ہو؟

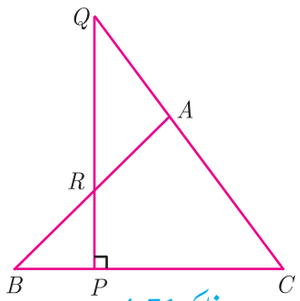
جیوانی سیوا (Giovanni Ceva) (7 دسمبر 1647-15 جون، 1734) 1686 میں، سیوا منٹوا کے یونیورسٹی (University of Mantua) کے ریاضی کے پروفیسر کے حیثیت سے مقرر ہوئے تھے اور باقی زندگی اسی خدمت میں گزاردی۔ 1678 میں، انہوں نے مثلث کے لئے ترکیبی علم ہندسہ پر ایک اہم مسئلہ شائع کیا۔ جو سیوا کا مسئلہ کہلاتا ہے۔ سیوا نے 1692 میں دوبارہ دریافت کرکے اسے روزنامہ (Journal) آپسکو لا میتھے میٹکا (Opuscula Mathematica) اور جیومٹریا موٹس (Geometria Motus) میں شائع کیا۔ ان تصورات کو انہوں نے میکانکس (Mechanics) اور ہائیڈرولک (Hydraulics) میں استعمال کیا۔

غور کیجئے :

سیوین ایک مثلث کے اندر ہونا ضروری نہیں ہے۔ حالانکہ نقشہ میں اس طرح ہوتے ہیں۔

10th maths 4. geometry
Sunday, February 16, 2020 10:28:03 AM

مینیلس کا مسئلہ Menelaus Theorem (بغیر ثبوت کے)



خاکہ 4.71

بیان : ایک مثلث ABC میں تین نقاط R, Q, P جو بالترتیب اضلاع $AB، CA، BC$ (یا انکے دراز کردہ خطوط) پر ہوں تو ہم خطی نقاط ہونے کے ضروری اور کافی شرط یہ ہے کہ $\frac{BP}{PC} \times \frac{CQ}{QA} \times \frac{AR}{RB} = -1$ جہاں ضابطے میں تمام قطاع منظّم قطاع ہیں۔

کیا تم جانتے ہو؟

مینیلس ایک یونانی ریاضی دان تھے جو پہلی صدی (CE) کے رومی حکومت کے دو حکمران اسکندریہ اور روم کے دور میں زندگی گذاری۔ کرّوں کے علم ہندسہ پر بہت زیادہ تحریر تھی۔
انکی کتاب، اسپیریکا (Sphaerica) میں پہلے مینیلس کے مسئلہ کو بحث کیا گیا اور بعد میں انکی تحریر المیگست (Almegest) میں ٹولیمی (Ptolemy) کے ذریعے ذکر کیا گیا۔
مینیلس کا مسئلہ ثابت کرتا ہے کہ کرّے کروی مثلثوں سے بنتے ہیں۔

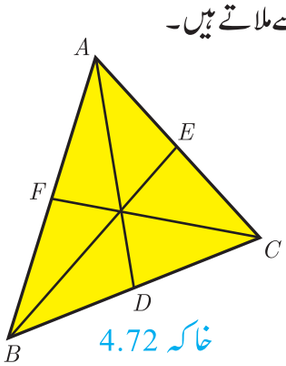
غور کیجئے :

1۔ مینیلس کا مسئلہ اس طرح بھی دیا جاسکتا ہے۔ $BP \times CQ \times AR = -PC \times QA \times RB$

2۔ اگر BP کو PB سے یا CQ کو QC یا AR کو RA سے بدل دیا جائے یا اگر چھ منظّم (Directed) قطاع خطوط $PC، BP$، $RB، AR، QA، CQ$ کو ردوبدل کیا جائے تو حاصل ضرب 1 ہوگا۔

مثال 4.32 ثابت کیجئے کہ ایک مثلث میں، وسطی خطوط متراکز ہوتے ہیں۔

حل : وسطی خطوط وہ قطاع خطوط ہیں جو ہر ایک راس سے اسکے نظیری مقابل کے اضلاع کے وسطی نقطہ سے ملاتے ہیں۔
غرض وسطی خطوط وہ سیوین ہیں جہاں F,E,D بالترتیب $CA، BC$ اور AB کے وسطی نقاط ہیں۔



خاکہ 4.72

(1) $BD = DC \Rightarrow \frac{BD}{DC} = 1$ چونکہ، BC کا وسطی نقطہ D ہے،

(2) $CE = EA \Rightarrow \frac{CE}{EA} = 1$ چونکہ، CA کا وسطی نقطہ E ہے،

(3) $AF = FB \Rightarrow \frac{AF}{FB} = 1$ چونکہ، AB کا وسطی نقطہ F ہے،

غرض (1)، (2) اور (3) کو ضرب دینے پر ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} \times \frac{AF}{FB} = 1 \times 1 \times 1 = 1$$

اور اس لئے، سیوا کے مسئلہ کی شرط پوری ہوتی ہے۔
چنانچہ، وسطی خطوط متراکز ہیں۔

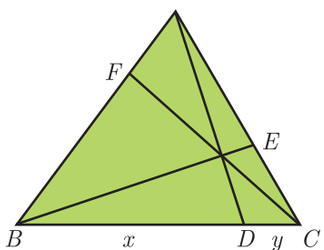
کیا تم جانتے ہو؟

ایک مثلث کے وسطی خطوط کا نقطہ متراکز اس مثلث کا ہندسی مرکز ہے

10th maths 4. geometry
Sunday, February 16, 2020 10:28:04 AM

مثال 4.33 فرض کیجئے کہ AB، AC اور BC کی لمبائیاں بالترتیب 13، 14 اور 15 ہیں۔ اگر $\frac{AF}{FB}=\frac{2}{5}$ اور $\frac{CE}{EA}=\frac{5}{8}$ ہے تو BD اور DC معلوم کیجئے۔

حل : دیا گیا ہے، $AB=13$، $AC=14$ اور $BC=15$ فرض کیجئے کہ $BD=x$ اور $DC=y$



خاکہ 4.74

سیوا کے مسئلہ کے استعمال سے ہمیں، یہ حاصل ہوتا ہے۔ $\frac{BD}{DC}\times\frac{CE}{EA}\times\frac{AF}{FB}=1$ (1)

(1) میں $\frac{AF}{FB}$ اور $\frac{CE}{EA}$ کی قیمتیں بھرتی کرنے پر

ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے، $\frac{BD}{DC}\times\frac{5}{8}\times\frac{2}{5}=1$

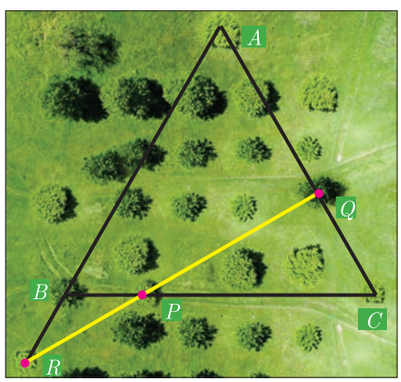
$\frac{x}{y}\times\frac{1}{4}=1$ سے ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے۔ $\frac{x}{y}\times\frac{10}{40}=1$ ، چنانچہ، $x=4y$ (2)

$BC=BD+DC=15$ اس لئے $x+y=15$ (3)

(2) سے، $x=4y$ (3) میں استعمال کرنے پر ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے۔ $4y+y=15$ سے $=15$

(3) میں $y=3$ بھرتی کرنے پر $x=12$ حاصل ہوتا ہے۔ چنانچہ، $BD=12$، $DC=3$

مثال 4.34 ایک باغ میں بہت سارے درخت ہیں تین مخصوص درختوں کے مقام ذیل کے طریقے سے ہیں۔ $BP=2$ m، $CQ=3$ m، $QA=5$ m، $RA=10$ m، $PC=6$ m، جہاں A، B، C نقاط اس طرح ہیں کہ P، BC پر واقع ہے۔ Q، AC پر واقع ہے اور R، AB پر واقع ہے۔ جانچ کیجئے کہ درختیں P، Q، R ایک ہی خط مستقیم پر واقع ہیں۔



خاکہ 4.75

حل : مینیلس کے مسئلہ سے، درختیں P، Q، R ہم خط ہوں گے (ایک ہی خط پر واقع ہوں گے) اگر $\frac{BP}{PC}\times\frac{CQ}{QA}\times\frac{RA}{RB}=1$ (1)

دیا گیا ہے، $BP=2$ m, $CQ=3$ m, $RA=10$ m, $PC=6$ m,
$RB=2$ m اور $QA=5$

(1) میں ان قیمتوں کو بھرتی کرنے پر، ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے۔ $\frac{BP}{PC}\times\frac{CQ}{QA}\times\frac{RA}{RB}=\frac{2}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{10}{2}=\frac{60}{60}=1$

چنانچہ، درختیں P، Q، R ایک ہی خط مستقیم پر واقع ہیں۔

اپنی پیش رفت کی جانچ : Progress Check

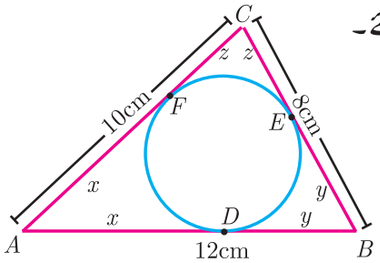
1۔ ایک خط مستقیم جو ایک دائرہ کو ایک مشترک نقطہ پر مَس کرتا ہے ..... کہلاتا ہے۔
2۔ وتر ..... کا تحتی سطح (Subsection) ہے۔
3۔ دائرے کے ایک ..... نقطہ سے کھینچے جانے والے دو مماسوں کی لمبائیاں مساوی ہوتے ہیں۔
4۔ دائرے کے ..... سے مماس کھینچ نہیں سکتے۔
5۔ ..... ایک سیوین ہے جو زاویہ کو دو مساوی نصف حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔

10th maths 4. geometry
Sunday, February 16, 2020 10:28:05 AM

مشق 4.4

1۔ ایک نقطہ جو ایک دائرہ کے مرکز سے 25 cm کے فاصلہ پر ہے اس نقطے سے دائرے کے مماس کی لمبائی 24 cm ہے تو دائرے کا نصف قطر کیا ہے؟

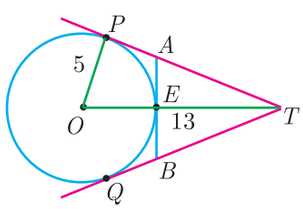
2۔ ΔLMN ایک مثلث قائمۃ الزاویہ ہے جس میں $\angle L = 90^\circ$۔ اس میں ایک دائرہ (Inscribe) نشان کیا جاتا ہے۔ قائم زاویئے سے بننے والے اضلاع کی لمبائیاں 6 cm اور 8 cm ہیں۔ دائرہ کا نصف قطر معلوم کیجئے۔



3۔ 8 cm، 10 cm اور 12 cm اضلاع والے مثلث ΔABC میں ایک دائرہ نشان کیا جاتا ہے۔ جیسا کہ خاکہ میں دکھایا گیا ہے۔ AD، BE اور CF معلوم کیجئے۔

4۔ ایک نقطہ P سے مرکز O والے ایک دائرے پر ایک مماس PQ کھینچا گیا ہے اور دائرے کا قطر QOR اس طرح ہے کہ $\angle POR = 120^\circ$، $\angle OPQ$ معلوم کیجئے۔

5۔ ایک مماس ST جو ایک دائرہ کو B پر مس کرتا ہے۔ AB ایک وتر ہے اس طرح کہ $\angle ABT = 65^\circ$ تو $\angle AOB$ معلوم کیجئے۔ جہاں "O" دائرہ کا مرکز ہے۔



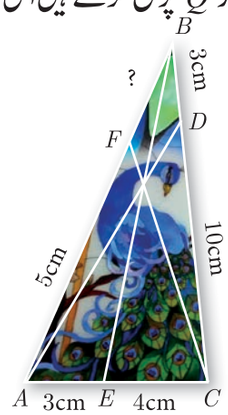
6۔ خاکہ میں، O دائرہ کا مرکز ہے جس کا نصف قطر 5 cm ہے۔ T ایک نقطہ ہے اس طرح کہ $OT = 13$ cm اور OT دائرہ کو E پر قطع کرتا ہے۔ اگر AB، E پر دائرہ کا مماس ہے۔ تو AB کی لمبائی معلوم کیجئے۔

7۔ دو ہم مرکز دائروں میں، بڑے دائرے کے 16 cm لمبائی والے وتر چھوٹے دائرہ کا مماس بنتا ہے جس کا نصف قطر 6 cm ہے۔ بڑے دائرے کا نصف قطر معلوم کیجئے۔

8۔ دو دائرے جن کے مراکز بالترتیب O اور O' اور نصف قطریں 3 cm اور 4 cm ہیں جو دو نقاط P اور Q پر قطع کرتے ہیں اس طرح کہ OP اور $O'P$ دو دائروں کے مماسیں ہیں۔ مشترک وتر PQ کی لمبائی معلوم کیجئے۔

9۔ ثابت کیجئے کہ ایک مثلث کے زاویائی ناصف متراکز ہیں۔

10۔ ایک کاریگر مثلثی کھڑکی کا رنگین شیشہ (Stained Glass) بناتا ہے۔ جس میں ایک چھوٹی لمبائی والی پٹی کھڑکی کو مکمل کرنے سے پہلے چھوڑ دیا جاتا ہے۔ وہ دوسرے اضلاع کی لمبائیوں کے بنیاد پر چھوٹے ہوئے حصّے کی لمبائی معلوم کرنا چاہتا ہے۔ جیسا کہ میں بتایا گیا۔



11۔ مرکز P اور 3.4 سم نصف قطر والے دائرے پر کسی بھی ایک نقطہ R پر ایک مماس کھینچئے۔

12۔ 4.5 cm نصف قطر والا ایک دائرہ کھینچئے۔ دائرے پر ایک نقطہ لیجئے۔ دوسرا قطاع کے مسئلہ سے اس پر ایک مماس کھینچئے۔

13۔ 5 cm نصف قطر والے ایک دائرے کے مرکز سے 10 cm کے فاصلے پر ایک نقطہ سے دو مماسیں کھینچئے۔ مزید، مماسوں کی طول کی پیمائش کیجئے۔

14۔ 4 cm نصف قطر والے دائرے کے مرکز سے 11 cm کے فاصلے پر ایک نقطہ لیجئے اور اس نقطے سے دائرے کو دو مماسیں کھینچئے۔

15۔ ایک نقطہ سے دو مماسیں کھینچئے جو 6 cm قطر کے دائرے کے مرکز 5 cm کے فاصلے پر ہے۔ مزید، مماسوں کا طول ناپئے۔

10th maths 4. geometry
Sunday, February 16, 2020 10:28:06 AM

ISY2K

مشق 4.5

1۔ اگر مثلث ABC اور EDF میں، $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{FD}$ ہوتو وہ متشابہ ہوں گے جب

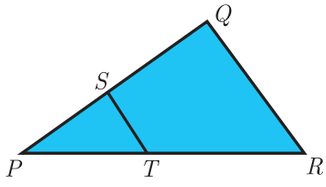
2۔ ΔLMN میں، $\angle L = 60^\circ$، $\angle M = 50^\circ$ اگر $\Delta LMN \approx \Delta PQR$ ہوتو $\angle R$ کی قیمت یہ ہے۔

(1) 40° (2) 70° (3) 30° (4) 110°

3۔ اگر ΔABC ایک مثلث مساوی الساقین ہے جس میں $\angle C = 90^\circ$ اور $AC = 5$ cm ہوتو AB ہے۔

(1) 2.5 cm (2) 5 cm (3) 10 cm (4) $5\sqrt{2}$ cm

4۔ دیئے گئے خاکے میں $ST \parallel QR$، $PS = 2$ cm اور $SQ = 3$ cm ہوتو ΔPST کے رقبہ کو ΔPQR کے رقبہ کی نسبت یہ ہے



(1) 25 : 4 (2) 25 : 7

(3) 25 : 11 (4) 25 : 13

5۔ ΔABC اور ΔPQR دو متشابہ مثلثوں کے احاطے بالترتیب 36 cm اور 24 cm ہیں۔ اگر $PQ = 10$ cm ہوتو AB کی لمبائی یہ ہے۔

(1) $6\frac{2}{3}$ cm (2) $\frac{10\sqrt{6}}{3}$ cm (3) $66\frac{2}{3}$ cm (4) 15 cm

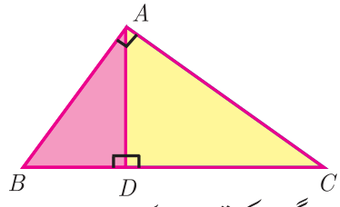
6۔ اگر ΔABC میں، $DE \parallel BC$، $AB = 3.6$ cm، $AC = 2.4$ cm اور $AD = 2.1$ cm ہوتو AE کی لمبائی ہے۔

(1) 1.4 cm (2) 1.8 cm (3) 1.2 cm (4) 1.05 cm

7۔ ΔABC میں، $\angle BAC$ کا زوایائی ناصف AD ہے۔ اگر $AB = 8$ cm، $BD = 6$ cm اور $DC = 3$ cm ضلع AC کی لمبائی یہ ہے۔

(1) 6 cm (2) 4 cm (3) 3 cm (4) 8 cm

8۔ متبادلہ خاکہ میں $\angle BAC = 90^\circ$ اور $AD \perp BC$ ہوتو



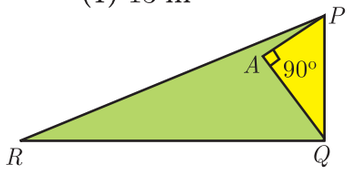
(1) $BD \cdot CD = BC^2$ (2) $ABAC = BC^2$

(3) $BD \cdot CD = AD^2$ (4) $AB \cdot AC = AD^2$

9۔ 6 m اور 11 m اونچائی والے دو کھمبے ایک ہموار میدان پر عمودی کھڑے گئے ہیں۔ اگر انکے قدموں کے درمیان کا فاصلہ 12 m ہے، تو انکے چوٹی کے درمیان کا فاصلہ کیا ہے؟

(1) 13 m (2) 14 m (3) 15 m (4) 12.8 m

10۔ دیئے گئے خاکہ میں $PR = 26$ cm، $QR = 24$ cm، $\angle PAQ = 90^\circ$، $PA = 6$ cm اور $QA = 8$ cm، $\angle PQR$ معلوم کیجئے۔



(1) 80° (2) 85° (3) 75° (4) 90°

11۔ ایک مماس ..... پر نصف قطر کے عمودی ہوتا ہے۔

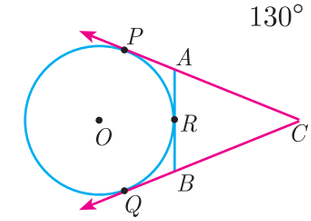
1) مرکز 2) نقطۂ مَس 3) لامتناہی 4) وتر

12۔ ایک بیرونی نقطہ سے دائرے کو کتنے مماسیں کھینچ سکتے ہیں؟

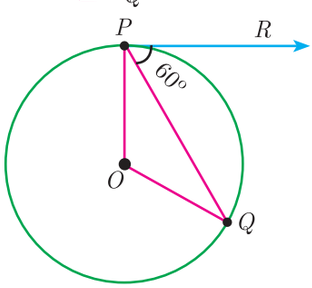
1) ایک 2) دو 3) لامتناہی 4) صفر

13۔ مرکز O والے ایک دائرے کو ایک بیرونی نقطہ P سے دو مماسیں PA اور PB کھینچے گئے ہیں۔ اگر $\angle APB = 70°$ ہو تو $\angle AOB$ کی قیمت یہ ہے۔

130° (4) 120° (3) 110° (2) 100° (1)



14۔ خاکے میں مرکز O والے ایک دائرے کے دو مماسیں CP اور CQ ہیں۔ ARB ایک دوسرا مماس دائرے کو R پر مَس کرتا ہے۔ اگر $CP = 11$ cm اور $BC = 7$ cm ہو تو BR کی لمبائی یہ ہے۔



5 cm (2) 6 cm (1)

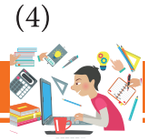
4 cm (4) 8 cm (3)

15۔ خاکہ میں اگر P پر دائرہ کو ایک مماس PR ہے اور O دائرہ کا مرکز ہے تو $\angle POQ$ یہ ہے۔

100° (2) 120° (1)

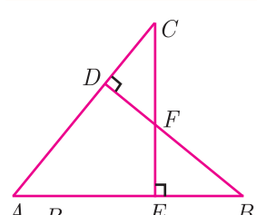
90° (4) 110° (3)

Unit Exercise - 4 اکائی مشق - 4

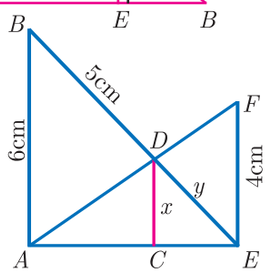


1۔ خاکہ میں، اگر $BD \perp AC$ اور $CE \perp AB$ ہو تو ثابت کیجئے کہ

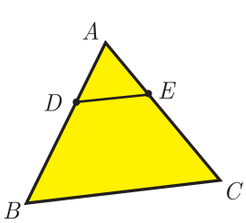
(i) $\Delta AEC \sim \Delta ADB$ (ii) $\frac{CA}{AB} = \frac{CE}{DB}$



2۔ دیئے گئے خاکہ میں $AB \parallel CD \parallel EF$ ، اگر $AB = 6$ cm، $CD = x$ cm، $EF = 4$ cm، $BD = 5$ cm اور $DE = y$ cm ہو تو x اور y معلوم کیجئے۔



3۔ مثلث ABC کے اندر O کوئی ایک نقطہ ہے۔ $\angle AOB$، $\angle BOC$ اور $\angle COA$ کا ناصف بالترتیب اضلاع AB، BC اور CA کو D، E اور F پر ملتے ہیں۔ ثابت کیجئے کہ $AD \times BE \times CF = DB \times EC \times FA$



4۔ خاکہ میں ABC ایک مثلث ہے جس میں $AB = AC$ نقاط D اور E بالترتیب اضلاع AB اور AC پر ہیں اس طرح کہ $AD = AE$ ثابت کیجئے کہ نقاط B، C، E اور D ایک ہی دائرہ پر واقع ہیں۔

5۔ دو ٹرینیں ریلوے اسٹیشن سے ایک ہی وقت پر نکلتے ہیں۔ پہلی ٹرین مغرب کی طرف اور دوسری ٹرین شمال کی طرف نکلتی ہے۔

10th maths 4. geometry
Sunday, February 16, 2020 10:28:07 AM

پہلی ٹرین 20 کلومیٹر فی گھنٹہ اور دوسری ٹرین 30 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے سفر کرتی ہیں۔ 2 گھنٹوں کے بعد انکے درمیان کا فاصلہ کیا ہوگا؟

6۔ ضلع BC کا وسطی نقطہ D ہے اور $AE \perp BC$، اگر $BC = a$، $AC = 6$، $AB = c$، $ED = x$، $AD = p$، $AE = h$ ہو تو ثابت کیجئے کہ

(i) $b^2 = p^2 + ax + \frac{a^2}{4}$ (ii) $c^2 = p^2 - ax + \frac{a^2}{4}$ (iii) $b^2 + c^2 = 2p^2 + \frac{a^2}{2}$

7۔ ایک آدمی ایک درخت کی اونچائی دریافت کرنا چاہتا ہے جس کی آنکھ کی سطح، زمین سے 2 m اوپر ہے۔ وہ درخت سے 20 m کے فاصلے پر زمین پر ایک آئینہ افقی طور پر رکھتا ہے اور وہ یہ معلوم کرتا ہے کہ اگر وہ نقطہ C پر کھڑا ہوتا ہے جو آئینہ B سے 4 m کے فاصلے پر ہے۔ تو وہ آئینہ میں اس درخت کے اوپری حصے کا انعکاس دیکھتا ہے۔ وہ درخت کتنا بلند ہوگا؟

8۔ ایک شترمرغ (emu) جس کی اونچائی 8 فٹ ہے۔ ایک مینار کے قدم پر کھڑا ہے جو 30 فٹ اونچا ہے۔ وہ مینار سے دور جاتا ہے۔ اس شترمرغ کا سایہ اس کے پیچھے پڑتا ہے۔ شترمرغ کے سایہ کی لمبائی اور شترمرغ سے مینار تک کے فاصلے کے درمیان تعلق کیا ہے؟

9۔ دو دائرے A اور B پر قطع کرتے ہیں۔ کسی ایک دائرے پر ایک نقطہ P سے خطوط PAC اور PBD کھینچے جاتے ہیں جو دوسرے دائرے کو C اور D پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کیجئے کہ CD، نقطہ P پر مماس کے متوازی ہے۔

10۔ فرض کیجئے کہ ABC ایک مثلث ہے اور نقاط D, E, F بالترتیب اضلاع AB, BC, AC (یا انکے دراز کردہ خطوط) پر ہیں۔ فرض کیجئے کہ $AD : DB = 5:3$، $BE : EC = 3:2$ اور $AC = 21$ ہے تو قطاع خط CF کی لمبائی معلوم کیجئے۔

Points to Remember — یاد رکھنے کے نقاط

☆ دو مثلثیں متشابہ ہیں اگر

i) انکے نظیری زاویے مساوی ہیں۔

ii) انکے نظیری اضلاع یکساں نسبت میں یا متناسب ہیں۔

☆ متماثل مثلثیں متشابہ ہیں مگر اسکا برعکس صحیح نہیں ہے۔

☆ AA متشابہت کا اصول AAA متشابہت کے اصول کے برابر ہے۔

☆ اگر ایک مثلث کا ایک زاویہ دوسرے مثلث کے ایک زاویہ کے مساوی ہو اور ان زاویوں سے بنے والے اضلاع یکساں نسبت میں ہو تو یہ مثلثیں متشابہ ہیں۔ (SAS)

☆ اگر ایک مثلث کے تینوں اضلاع، دوسرے مثلث کے نظیری اضلاع کے متناسب ہوں تو دونوں مثلثیں متشابہ ہوتے ہیں۔(SSS)

☆ اگر دو مثلثیں متشابہ ہیں تو انکے نظیری اضلاع کی نسبت انکے نظیری احاطوں کے نسبت کے مساوی ہوتا ہے۔

☆ دو متشابہ مثلثوں کے رقبوں کی نسبت انکے نظیری اضلاع کے مربعوں کی نسبت کے مساوی ہوتا ہے۔

☆ دائرہ کا ایک مماس اسکے نقطۂ مَس پر نصف قطر کے عمودی ہوگا۔

☆ دائرے کے کسی بیرونی نقطہ سے دو مماسیں کھینچے جا سکتے ہیں۔

☆ دائرہ کے ایک بیرونی نقطہ سے کھینچے جانے والے دو مماسوں کی لمبائیاں مساوی ہوتے ہیں۔

☆ دو دائروں پر کھینچے گئے دو بالراست مماسوں کی لمبائی مساوی ہوتے ہیں۔

10th maths 4. geometry
Sunday, February 16, 2020 10:28:08 AM

مطلوبہ نتیجہ

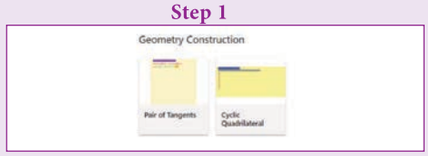


ICT 4.1

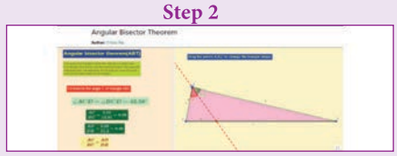
مرحلہ 1 : براؤزر کھولئے، دئے گئے URL کے لنک کو ٹائپ کیجئے یا دئے گئے QR کوڈ کو اسکین کیجئے۔ دسویں جماعت کے حساب کا باب Geometry نامی جیوجبرا ورک شیٹ کھلے گا۔ اس میں سے Angular Bisector Theorem نامی ورک شیٹ کا انتخاب کیجئے۔

مرحلہ 2 : دئے گئے ورک شیٹ میں تم ایک مثلث ABC اور اس کے زاویائی ناصف CD کو دیکھو گے۔ مثلث کے راسوں کو کھینچ کر تم اس کی شکل کو تبدیل کر سکتے ہو۔ بائیں جانب دی گئی نسبتوں کو دیکھئے اور مسئلہ کو سیکھئے۔

Step 1



Step 2



مطلوبہ نتیجہ



ICT 4.2

مرحلہ 1 : براؤزر کھولئے، دئے گئے URL کے لنک کو ٹائپ کیجئے یا دئے گئے QR کوڈ کو اسکین کیجئے۔ دسویں جماعت کے حساب کا باب Geometry نامی جیوجبرا ورک شیٹ کھلے گا۔ اس میں سے Pair of Tangents نامی ورک شیٹ کا انتخاب کیجئے۔

مرحلہ 2 : بائیں جانب دئے گئے سلائڈر کی مدد تم نصف قطر اور فاصلے کو تبدیل کر سکتے ہو۔ تصنیف کے لئے سلائڈر کو درمیان سے حرکت دیجئے۔

Step 1



Step 2



You can repeat the same steps for another activities

https://www.geogebra.org/m/jfr2zzgy#chapter/356194

or Scan the QR Code.

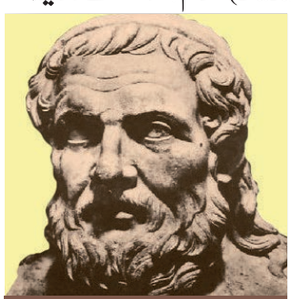
10th maths 4. geometry
Sunday, February 16, 2020 10:28:08 AM

5

محددی علم ہندسہ

(COORDINATE GEOMETRY)

خط ایک چوڑائی کے بغیر والا طول ہے۔ اقلیدس



Apollonius
262 - 190 BC (BCE)

اپولونیوس (Apollonius)، پرگہ مقام (Perga) میں پیدا ہوئے۔ جو جدید دور میں ترکی کہلاتا ہے۔ اِن کی سب سے بڑی تصنیف "Conics" (علم مخروط) ہے۔ جس میں انہوں نے منحنی خطوط جیسے دائرہ، پیرابولا (مکافی) (Parabola) کو علم ہندسہ کے ذریعہ تعارف کیا۔ انہوں نے چھ اور کتابیں لکھیں۔ جو جدید دور کے بنیادی محددی علم ہندسہ سے تعلق رکھتی ہیں۔ اُن کے نظریات (Ideas) کو سیاروی نظریہ (Planetary Theory) کے مطالعہ میں استعمال کر کے عملی حسابات کو حل کیا گیا۔ انہوں نے دھوپ گھڑی کا انکشاف کیا۔ اُن کے غیر معمولی علم ہندسہ کے ہنر کو استعمال کر کے سائنس کے دوسرے شعبوں کا بھی تعاون کیا۔ اس بناء پر اپولونیوس کو عظیم ہندسہ دان مانا جاتا ہے۔

OFPEZ

سیکھنے کے مقاصد

- دئے گئے تین نقاط سے بنے مثلث کا رقبہ معلوم کرنا۔
- دئے گئے چار نقاط سے بنے چار ضلعی کا رقبہ معلوم کرنا۔
- ایک خط مستقیم کا میلان معلوم کرنا۔
- خط مستقیم کی مساوات کو مختلف صورتوں میں دریافت کرنا۔
- ایک خط کی مساوات کو دریافت کرنا جو خط $a x + b y + c = 0$ کے متوازی ہوں۔
- ایک خط کی مساوات کو دریافت کرنا جو خط $a x + b y + c = 0$ کے عمودی ہوں۔

5.1 تعارف (Introduction)

محددی علم ہندسہ کو تحلیلی علم ہندسہ بھی کہا جاتا ہے۔ یہ علم ریاضی کی ایک شاخ ہے جس میں ایک مسطح میں منحنی خطوط کو الجبرائی مساوات میں ظاہر کیا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر مساوات $x^2 + y^2 = 1$ ، جو مسطح میں اکائی نصف قطر والے دائرہ کی وضاحت کرتا ہے۔ اس طرح محددی علم ریاضی کی ایک شاخ کے طور پر دیکھا جاتا ہے۔ جو الجبرا ئی اور علم ہندسہ کو ایک دوسرے سے جوڑتا ہے۔ جس میں الجبرائی مساوات کو علم ہندسہ کے منحنی خطوط سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ ان تعلقات سے علم ہندسہ کے سوالات کو الجبرائی سوالات میں اور اس کے برعکس بھی تشکیل نو دینا ممکن ہوا۔ چنانچہ محددی علم ہندسہ میں، الجبرائی مساوات کو بصری طور پر پیش کرنے سے بہتر انداز سے سمجھ سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر دو متغیرات والے ایک درجی مساوات $a x + b y + c = 0$ کو مسطح میں ایک خط مستقیم پر ظاہر کرتا ہے۔ مجموعی طور پر، محددی علمِ ہندسہ ایک آلہ ہے۔ اصولوں کو بصری طور پر سمجھنے کے لئے اور اس سے جدید دور میں علم ریاضی کا ایک نئی شاخیں پیدا ہوئی ہیں۔

100 95 75 25 5 0

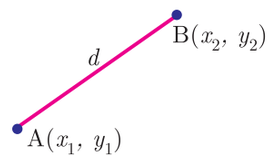
10th maths 5. co-ord geo
Sunday, February 16, 2020 2:04:24 PM

پچھلی جماعتوں میں، ہم نے محدودی علم ہندسہ کے مطالعہ کا آغاز کیا جس میں ہم نے محددوں کے محور ، محددی مسطح، مسطح پر نقاط کو مرتسم کرنا، دونقاط کا درمیانی فاصلہ، حصّہ کا ضابطہ وغیرہ کو سیکھا تھا۔ یہ تمام اصول محددی علم ہندسہ کی بنیاد بناتے ہیں۔ چلئے ہم اب چند بنیادی ضابطوں کا اعادہ کریں گے۔

اعادہ

دونقاط کے درمیانی فاصلہ

$A\ (x_1, y_1)$ اور $B\ (x_2, y_2)$ دونقاط کا درمیانی فاصلہ

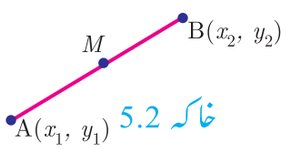


خاکہ 5.1

$$|AB| = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$

قطاع خط کا وسطی نقطہ

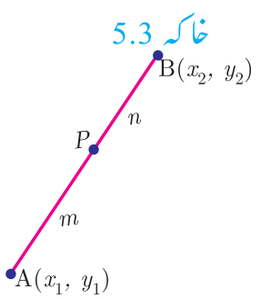
نقاط $A\ (x_1, y_1)$ اور $B\ (x_2, y_2)$ کو ملانے والی قطاع خط کا وسطی نقطہ M ہے۔



خاکہ 5.2

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

حصّہ کا ضابطہ Section Formula



خاکہ 5.3

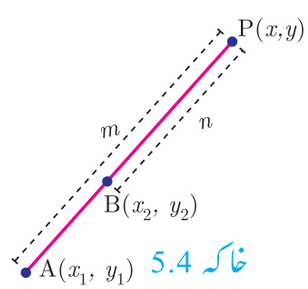
اندرونی جانب کی تقسیم

فرض کرو $A(x_1,y_1)$ اور $B(x_2,y_2)$ دو مختلف نقاط ہیں۔ اس طرح کہ نقطہ $p(x,y)$ ، AB کو اندرونی جانب $m:n$ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔ تو P کے محددوں کو اس طرح دیا گیا ہے۔

$$\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right).$$

بیرونی جانب کی تقسیم

فرض کرو $A(x_1,y_1)$ اور $B(x_2,y_2)$ دو مختلف نقاط ہیں اس طرح کہ نقطہ $p(x,y)$ ، AB کو بیرونی جانب $m:n$ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے تو P کے محددوں کو اس طرح دیا گیا ہے۔

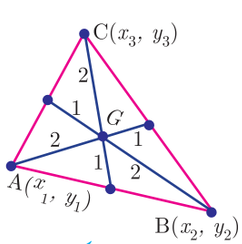


خاکہ 5.4

$$\left(\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \frac{my_2 - ny_1}{m-n}\right).$$

ایک مثلث کا ہندسی مرکز (Centroid of Triangle)

ایک مثلث کا ہندسی مرکز G کے محددیں جس کے راسیں $A(x_1,y_1)$، $B(x_2,y_2)$ اور $C(x_3,y_3)$ اس طرح دئے گئے ہیں۔



خاکہ 5.5

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right).$$

10th maths 5. co-ord geo
Sunday, February 16, 2020 2:04:24 PM

Progress Check — اپنی پیش رفت کی جانچ

1۔ ذیل کی جدول کو مکمل کیجئے :

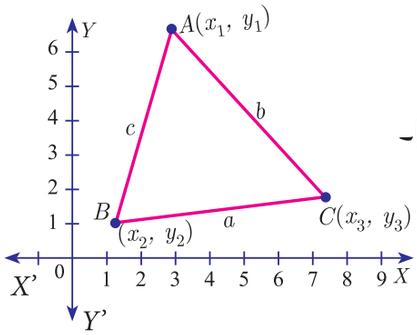
شمار عدد	نقاط	فاصلہ	وسطی نقطہ	اندرونی		بیرونی	
				نقطہ	نسبت	نقطہ	نسبت
(i)	(3, 4), (5, 5)	---	---	---	2:3	---	2:3
(ii)	(−7,13),(−3,1)	---	---	$\left(-\frac{13}{3},5\right)$	---	(−13, 15)	---

2۔ $A(0,5)$، $B(5,0)$ اور $C(-4,-7)$ ایک مثلث کے راسیں ہو تو اس کا ہندسی مرکز ..... ہوگا۔

5.2 مثلث کا رقبہ (Area of a Triangle)

تم نے اپنی ابتدائی جماعتوں میں سیکھا کہ کس طرح ایک مثلث کا رقبہ معلوم کیا جاتا ہے۔
جب اس کا قاعدہ اور نظیری اونچائی (ارتفاع) دئے گئے ہوں۔ تم نے اس ضابطہ کو استعمال کیا۔

مربع اکائیاں اونچائی × قاعدہ × $\frac{1}{2}$ = مثلث کا رقبہ



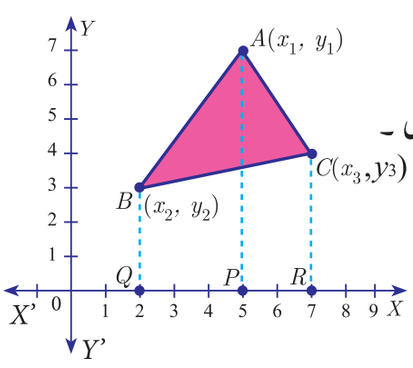
خاکہ 5.6

ہم ایک مسطح پر کوئی بھی غیر ہم خط نقاط $A(x_1,y_1)$، $B(x_2,y_2)$ اور $C(x_3,y_3)$ سے ایک مثلث ABC بنا سکتے ہیں۔

دو نقاط کے درمیانی فاصلہ کے ضابطہ کو استعمال کر کے ہم اس کو محسوب کر سکتے ہیں۔

مثلث ABC کے ضلعوں کے لمبائیوں کو $AB = c$ ، $BC = a$ ، $CA = b$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

$2s = a + b + c$ کو استعمال کر کے، ہم مثلث ABC کا رقبہ کو ہرون کا ضابطہ استعمال کر کے $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ دریافت کر سکتے ہیں۔ لیکن اس طریقہ کار میں ΔABC کے اضلاع کے لمبائیوں کو معلوم کر کے اس کا رقبہ دریافت کرنا ایک مشکل طرز عمل ہے۔



خاکہ 5.7

ایک شائستہ طریقہ سے مثلث کے رقبہ کو راسوں کے محددوں کو استعمال کر کے محسوب کر سکتے ہیں ۔
اس طرح کے ایک طریقہ کو ذیل میں ہم تبادلہ خیال کریں گے۔

فرض کیجئے کہ ABC ایک مثلث ہے جس کے راسیں $A(x_1,y_1)$، $B(x_2,y_2)$ اور $C(x_3,y_3)$ ہیں۔

A، B اور C سے بالترتیب x محور پر عمودیں AP، BQ اور CR کھینچئے۔

واضح طور پر $ABQP$، $APRC$ اور $BQRC$ تمام منحرف ہیں۔

10th maths 5. co-ord geo
Sunday, February 16, 2020 2:04:25 PM

اب خاکہ 5.7 سے یہ صاف ظاہر ہے کہ

ΔABC کا رقبہ = منحرف $ABQP$ کا رقبہ + منحرف $APRC$ کا رقبہ − منحرف $BQRC$ کا رقبہ

تم یہ بھی جانتے ہو کہ منحرف کا رقبہ

$= \frac{1}{2} \times$ (متوازی ضلعوں کا حاصل جمع) × (متوازی ضلعوں کے درمیان کا عمودی فاصلہ مربع اکائیاں)

چنانچہ،

$$\Delta ABC \text{ کا رقبہ} = \frac{1}{2}(BQ + AP)QP + \frac{1}{2}(AP + CR)PR - \frac{1}{2}(BQ + CR)QR$$

$$= \frac{1}{2}(y_2 + y_1)(x_1 - x_2) + \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) - \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_3 - x_2)$$

$$= \frac{1}{2}\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}$$

اس طرح، ΔABC کا رقبہ جملہ کا مُطلق قیمت (Absolute Value) ہے۔

$$= \frac{1}{2}\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\} \text{ مربع اکائیاں}$$

$A(x_1,y_1)$، $B(x_2,y_2)$ اور $C(x_3,y_3)$، ΔABC کے راسیں کو ترتیب سے لیا گیا ہے۔ (Taken in order) اس وقت کہتے ہیں۔

جب A ، B ، C کو گھڑی کی مخالف سمت (Counter Clock Wise) لیا گیا ہوں۔ اگر ہم اس طرح کرتے ہیں تو ΔABC کا رقبہ کبھی منفی میں نہیں ہوگا۔

Note غور کیجئے

مثلث کا رقبہ کبھی منفی نہیں ہوسکتا ہے۔ رقبہ منفی حاصل ہونے کی صورت میں ہمیں مطلق قیمت (مثبت) کو لینا چاہئے۔

دوسری شکل

ذیل کے تصویری اظہار کے ذریعہ مندرجہ بالا ضابطہ کا لکھنا بہت آسان ہوجاتا ہے۔

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_{12} & y & y_3 & y_1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta ABC \text{ کا رقبہ} = \frac{1}{2}\{(x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1) - (x_2 y_1 + x_3 y_2 + x_1 y_3)\} \text{ مربع اکائیاں}$$

Progress Check اپنی پیش رفت کی جانچ

$P(0,-4)$، $Q(3,1)$ اور $R(-8,1)$، ΔPQR کے راسیں ہیں۔

1۔ ΔPQR کو ترسیمی کاغذ پر بنائیں۔

2۔ جانچئے کہ ΔPQR ایک مساوی الاضلاع ہے۔

3۔ ΔPQR کا رقبہ معلوم کیجئے۔

4۔ QP کا وسطی نقطہ M کے محدد دریافت کیجئے۔

5۔ QR کا وسطی نقطہ N کے محدد دریافت کیجئے۔

6۔ ΔMPN کا رقبہ معلوم کیجئے۔

7۔ ΔMPN اور ΔPQR کے رقبوں کی درمیانی نسبت کیا ہے؟

10th maths 5. co-ord geo
Sunday, February 16, 2020 2:04:25 PM

5.2.1 تین نقاط کا ہم خط ہونا Collinearity of three points

اگر تین مختلف نقاط $A(x_1, y_1)$، $B(x_2,y_2)$اور $C(x_3 , y_3)$ ہم خط ہیں تو ہم مثلث نہیں بنا سکتے ہیں۔ کیونکہ اس طرح کے مثلث میں ارتفاع (اونچائی) نہیں ہوگا۔ چنانچہ، اگر $\Delta ABC = 0$ کا رقبہ، ہو تو تین نقاط $A(x_1,y_1)$، $B(x_2,y_2)$ اور $C(x_3,y_3)$ ہم خط ہوں گے۔

اسی طرح، اگر ΔABC کا رقبہ صفر ہو تو تینوں نقاط ایک ہی خطِ مستقیم واقع ہیں۔

چنانچہ تین مختلف نقاط $A(x_1,y_1)$، $B(x_2,y_2)$ اور $C(x_3,y_3)$ ہم خط ہیں اگر صرف اور صرف ΔABC کا رقبہ صفر ہو۔

Note غور کیجئے

ہم خط ہونے کے لئے دوسری شرط :

اگر $A(x_1,y_1)$، $B(x_2,y_2)$ اور $C(x_3,y_3)$ ہم خط نقاط ہیں تو

$$x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+ x_3(y_1-y_2) = 0$$

(یا) $x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 = x_1y_3 + x_2y_1 + x_3y_2$.

5.3 چار ضلعی کا رقبہ Area of a Quadrilateral

اگر $ABCD$ ایک چار ضلعی ہو تو وتر AC کو فرض کرتے ہوئے ہم $ABCD$ چار ضلعی کو دو مثلثوں ABC اور ACD میں تقسیم کر سکتے ہیں

دئے گئے راسوں کے ذریعہ مثلث کا رقبہ کا ضابطہ استعمال کر کے ہم مثلث ABC اور ACD کے رقبوں کو محسوب کر سکتے ہیں۔

چار ضلعی کا رقبہ $ABCD$ = مثلث ABC کا رقبہ + مثلث ACD کا رقبہ

ہم ان معلومات کو استعمال کر کے چار ضلعی کا رقبہ دریافت کر سکتے ہیں جب ان کے راسیں دئے گئے ہوں۔

فرض کیجئے $A(x_1,y_1)$، $B(x_2,y_2)$، $C(x_3,y_3)$ اور $D(x_4,y_4)$ چار ضلعی $ABCD$ کے راسیں ہیں۔

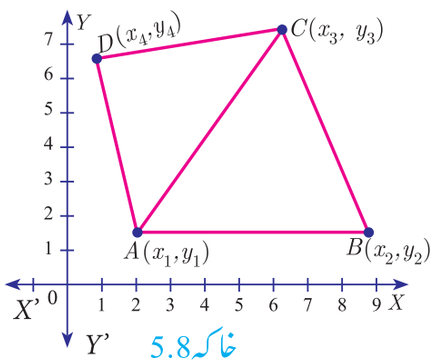
چار ضلعی $ABCD$ کا رقبہ = ΔABD کا رقبہ + ΔBCD کا رقبہ

$$= \frac{1}{2}\left\{(x_1y_2 + x_2y_4 + x_4y_1) - (x_2y_1 + x_4y_2 + x_1y_4)\right\}$$
$$+ \frac{1}{2}\left\{(x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_2) - (x_3y_2 + x_4y_3 + x_2y_4)\right\}$$

لہذا $ABCD$ چار ضلعی کا رقبہ،

$$= \frac{1}{2}\left\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_4y_3 + x_1y_4)\right\}$$

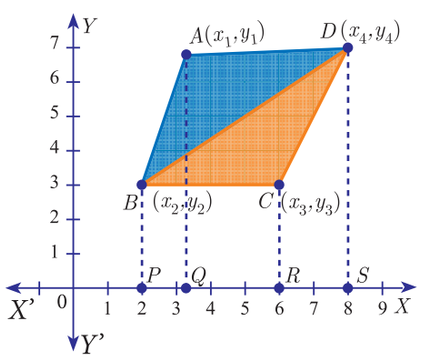
چار ضلعی کا رقبہ $= \frac{1}{2}\left\{(x_1 - x_3)(y_2 - y_4) - (x_2 - x_4)(y_1 - y_3)\right\}$ مربع اکائیاں



خاکہ 5.8

ذرا سوچئے!

کتنے مثلث وجود میں آتے ہیں، جن کا رقبہ صفر ہے؟



خاکہ 5.9

ذیل کے تصویری اظہار سے ہمیں مندرجہ بالا ضابطہ کو لکھنے میں بہت آسانی ہو جاتی ہے۔ راسیں $A(x_1,y_1)$، $B(x_2,y_2)$، $C(x_3,y_3)$ اور $D(x_4,y_4)$ کو گھڑی کی مخالف سمت لیتے ہوئے ذیل کے بتلائے ہوئے طریقے پر قطار وار لکھیں جیسا کہ ہم نے مثلث کا رقبہ معلوم کرتے وقت لکھا تھا۔

10th maths 5. co-ord geo
Sunday, February 16, 2020 2:04:26 PM

$$= \left\{ \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_1 \end{matrix} \right\}$$

چنانچہ $ABCD$ چار ضلعی کا رقبہ،

مربع اکائیاں $= \frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_4y_3 + x_1y_4)\}$

غور کیجئے

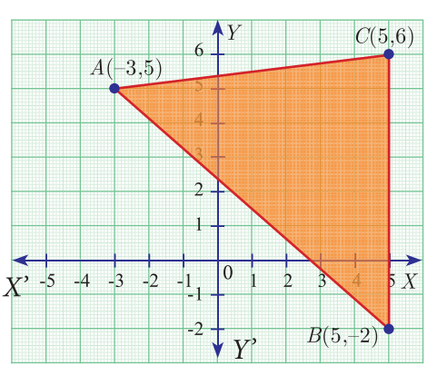
i) ایک چار ضلعی کا رقبہ معلوم کرنے کے لئے، ہم اس کو مثلث نما حصّوں تقسیم کرتے ہیں۔ جس میں کوئی رقبہ مشترک نہ ہوں تو ان حصّوں کے رقبوں کو جمع کیجئے ii) چار ضلعی کا رقبہ کبھی منفی نہیں ہوتا ہے۔ یعنی ہمیں ہمیشہ چار ضلعی کے رقبہ مثبت کے طور پر لینا ہوگا۔

Thinking Corner ذرا سوچئے

1. اگر نقاط (a,a)، $(-a,a)$، $(-a,-a)$، $(a,-a)$ سے چار ضلعی بنا ہوا ہے۔ جس کا رقبہ 64 مربع اکائیاں ہیں۔ جس میں $a \neq 0$ ہو تو (i) پہچانئے کہ کس قسم کا چار ضلعی ہے؟
2. 'a' کی تمام ممکن قیمتیں معلوم کیجئے۔

مثال 5.1 مثلث کا رقبہ معلوم کیجئے جس کے راسیں $(-3,5)$، $(5,6)$ اور $(5,-2)$ ہیں۔

حل : خام خاکہ میں نقاط کو مرتسم کریں اور راسوں کو گھڑی کی مخالف سمت میں ترتیب وار طریقہ سے لکھیں۔



خاکہ 5.10

فرض کرو کہ راسیں $A(-3,5)$، $B(5,-2)$، $C(5,6)$

(x_1,y_1) (x_2,y_2) (x_3,y_3)

ΔABC کا رقبہ $= \frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\}$

$= \frac{1}{2}\{(6 + 30 + 25) - (25 - 10 - 18)\}$

$= \frac{1}{2}\{61 + 3\}$

$= \frac{1}{2}(64) = 32$ مربع اکائیاں

مثال 5.2 ثابت کیجئے کہ نقاط $P(-1.5,3)$، $Q(6,-2)$ اور $R(-3,4)$ ہم خط ہیں۔

حل : نقاط $P(-15,3)$، $Q(6,-2)$ اور $R(-3,4)$ ہیں۔

ΔPQR کا رقبہ $= \frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\}$

$= \frac{1}{2}\{(3 + 24 - 9) - (18 + 6 - 6)\} = \frac{1}{2}\{18 - 18\} = 0$ مربع اکائیاں

لہذا دئے گئے نقاط ہم خط ہیں۔

مثال 5.3 اگر مثلث کا رقبہ 22 مربع اکائیاں ہوں اور اس کے راسیں $A(-1,2)$، $B(k,-2)$ اور $C(7,4)$ ترتیب وار ہوں تو k کی قیمت معلوم کیجئے۔

10th maths 5. co-ord geo
Sunday, February 16, 2020 2:04:27 PM

حل : راسیں $A(-1,2)$، $B(k,-2)$ اور $C(7,4)$

مثلث ABC کا رقبہ 22 مربع اکائیاں ہیں۔

$$\frac{1}{2}\left\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\right\} \quad 22$$

$$\frac{1}{2}\left\{(2 + 4k + 14) - (2k - 14 - 4)\right\} = 22$$

$$2k + 34 = 44 \Rightarrow 2k = 10 \qquad k = 5$$

مثال 5.4 اگر نقاط $P(-1,-4)$، $Q(b,c)$ اور $R(5,-1)$ ہم خط ہیں اور $2b + c = 4$ ہو تو b اور c کی قیمتیں معلوم کیجئے۔

حل : چونکہ تین نقاط $P(-1,-4)$، $Q(b,c)$ اور $R(5,-1)$ ہم خط ہیں۔

مثلث PQR کا رقبہ $= 0$

$$\frac{1}{2}\left\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\right\} = 0$$

$$\frac{1}{2}\left\{(-c - b - 20) - (-4b + 5c + 1)\right\} = 0$$

$$-c - b - 20 + 4b - 5c - 1 = 0$$

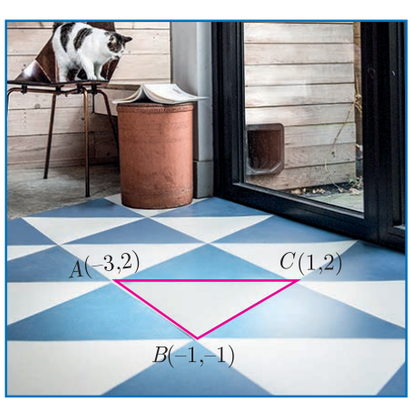
$$b - 2c = 7 \qquad (1)$$

$$2b + c = 4 \qquad (2) \quad \text{(دیے گئے اطلاعات سے)}$$

(1) اور (2) کو حل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $c = -2, b = 3$

مثال 5.5 ایک حال کا فرش مثلث نما مماثل ٹائلس (Tiles) سے سجا ہوا ہے۔ ان میں سے ہر ایک مثلث کے راسیں $(-3,2)$، $(-1,-1)$ اور $(1,2)$ کی طرح ہیں۔ اگر اس حال کا فرش 110 ٹائلس سے مکمل طور پر سجا ہوا ہے تو فرش کا رقبہ معلوم کیجئے۔

حل : ایک مثلث نما ٹائل کی راسیں $(-3,2)$، $(-1,-1)$ اور $(1,2)$ ہیں۔



خاکہ 5.11

اس ٹائل کا رقبہ $= \frac{1}{2}\left\{(3 - 2 + 2) - (-2 - 1 - 6)\right\}$ مربع اکائیاں

$= \frac{1}{2}(12) = 6$ مربع اکائیاں

چونکہ ، فرش 110 مثلث نما مماثل ٹائلس سے سجا ہوا ہے۔

فرش کا رقبہ $= 110 \times 6 = 660$ مربع اکائیاں

مثال 5.6 نقاط $(8,6)$، $(5,11)$، $(-5,12)$ اور $(-4,3)$ سے بننے والے چار ضلعی کا رقبہ معلوم کیجئے۔

حل : چار ضلعی کا رقبہ معلوم کرنے سے پہلے ان راسوں کو ترسیمی کاغذ پر مرتسم کیجئے۔

فرض کیجئے کہ راسیں $A(8,6)$، $B(5,11)$، $C(-5,12)$ اور $D(-4,3)$ ہیں۔

لہذا، چار ضلعی $ABCD$ کا رقبہ

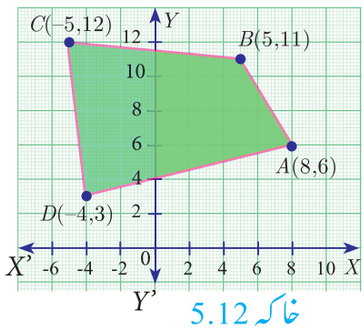
10th maths 5. co-ord geo
Sunday, February 16, 2020 2:04:27 PM

$$= \frac{1}{2}\left\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_4y_3 + x_1y_4)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{(88 + 60 - 15 - 24) - (30 - 55 - 48 + 24)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\{109 + 49\}$$

$$= \frac{1}{2}\{158\} = 79 \text{ مربع اکائیاں}$$



خاکہ 5.12

Progress Check — اپنی پیش رفت کی جانچ

دئے گئے $ABCD$ چار ضلعی کے راسیں $A(-3,-8)$، $B(6,-6)$، $C(4,2)$ اور $D(-8,2)$ ہیں۔

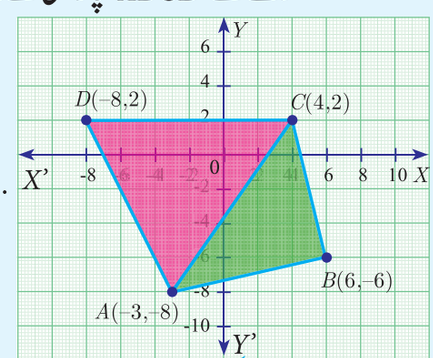
1۔ ΔABC کا رقبہ معلوم کیجئے۔

2۔ ΔACD کا رقبہ معلوم کیجئے

3۔ ΔABC کا رقبہ + ΔACD کا رقبہ محسوب کیجئے۔

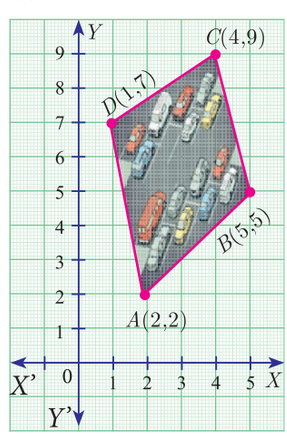
4۔ $ABCD$ چار ضلعی کا رقبہ معلوم کیجئے۔

5۔ (3) اور (4) کے جوابات کا موازنہ کیجئے۔



خاکہ 5.13

مثال 5.7 کیمپس (Campus) میں ایک نیا پارکنگ (Parking) کا تعمیری منصوبہ کا خاکہ دیا گیا ہے۔ تعمیر کی تخمینی قیمت 1300 ₹ فی مربع فٹ (قدم) ہے۔ پارکنگ بنانے کا کل خرچ کیا ہوگا۔



خاکہ 5.14

حل : نئے پارکنگ کا خاکہ چار ضلعی ہے جس کے راسیں $A(2,2)$، $B(5,5)$، $C(4,9)$ اور $D(1,7)$ ہیں

$$\text{پارکنگ کا رقبہ} = \frac{1}{2}\left\{\begin{matrix}2 & 5 & 4 & 1 & 2\\ 2 & 5 & 9 & 7 & 2\end{matrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{(10 + 45 + 28 + 2) - (10 + 20 + 9 + 14)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\{85 - 53\}$$

$$= \frac{1}{2}(32) = 16 \quad \text{مربع اکائیاں}$$

پارکنگ کا رقبہ = 16 مربع فٹ

تعمیری شرح فی مربع فٹ = ₹1300

پارکنگ بنانے کا کل خرچ = 16 × 1300 = ₹20800

Activity 1 — کارروائی 1

i) ایک ترسیمی کاغذ لیں۔

ii) فرض کیجئے کہ نقاط $(0,0)$ اور $(6,0)$ کو ملانے والا خط مثلث کا قاعدہ ہے۔

10th maths 5. co-ord geo
Sunday, February 16, 2020 2:04:29 PM

مثلث کا رقبہ	تیسرا راس
$A_1 =$	(1,1)
$A_2 =$	(2,2)
$A_3 =$	(3,3)
$A_4 =$	(4,4)
$A_5 =$	(5,5)

iii) ہر ایک کو تیسرے راس کے طور پر لیں (1,1)، (2,2)، (3,3)، (4,4)، (5,5) اور ان کے رقبے کیجئے۔ خالی جگہ میں دئے گئے تفصیلات پر کیجئے۔

iv) A_1، A_2، A_3، A_4، A_5 میں تم کوئی نمونہ (Pattern) دیکھتے ہو تو اس کا تذکرہ کرو۔

مثلث کا رقبہ	تیسرا راس
$A_1 =$	(1,2)
$A_2 =$	(2,4)
$A_3 =$	(3,8)
$A_4 =$	(4,16)
$A_5 =$	(5,32)

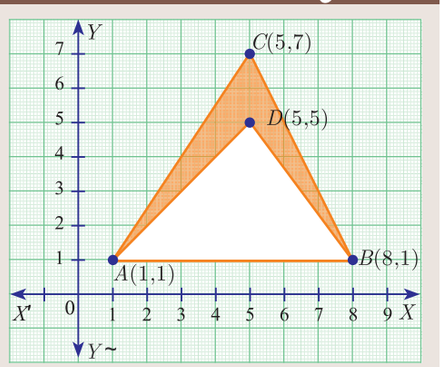
v) مرحلہ (iii) میں اِن راستوں کو تیسرے راس کے طور پر لیکر اُسی عمل کو دہرائے۔ (5,32), (4,16), (3,8), (2,4), (1,2)

vi) نئے راسوں سے جدول کو پر کیجئے۔

vii) A_1، A_2، A_3، A_4، A_5 میں اب کس طرح کے نمونہ کو تم مشاہدہ کرتے ہو؟

Activity 2 کارروائی 2

سیاہ کردہ حصّہ کا رقبہ معلوم کیجئے۔



خاکہ 5.15

کیا تم جانتے ہو؟

دو فرانسیسی ریاضی دان رینے ڈسکارٹے (Rene Descartes) اور پیری ڈی فرمٹ (Pierre De Fermat) نے سب سے پہلے جدید محددی علم ہندسہ کے خیال کو 1630 میں پیش کیا۔

مشق 5.1

1۔ ذیل کے نقاط سے بننے والے مثلث کا رقبہ محسوب کیجئے۔

(I) (1,–1), (–4, 6) اور (–3, –5) (ii) (–10, –4), (–8, –1) اور (–3, –5)

2۔ معلوم کیجئے کہ کس مجموعے (Sets) کے نقاط ہم خط ہیں۔

(i) $\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$ اور (–5, 6), (–8, 8) (ii) (a, b+c) , (b, c+a) اور (c, a+b)

3۔ مثلث کے راسیں ترتیب وار ہیں اور ان کے رقبے دئے گئے ہیں۔ ہر ایک میں 'p' کی قیمت معلوم کیجئے۔

شمار عدد	راسیں	رقبہ (مربع اکائیاں)
(i)	(0, 0), (p, 8), (6, 2)	20
(ii)	(p, p), (5, 6), (5, –2)	32

10th maths 5. co-ord geo
Sunday, February 16, 2020 2:04:29 PM

4۔ ذیل کے نقاط ہم خط ہیں۔ ' a ' کی قیمت معلوم کیجئے۔

(i) $(2, 3)$, $(4, a)$ اور $(6, 3)$ (ii) $(a, 2-2a)$, $(-a+1, 2a)$ اور $(-4-a, 6-2a)$

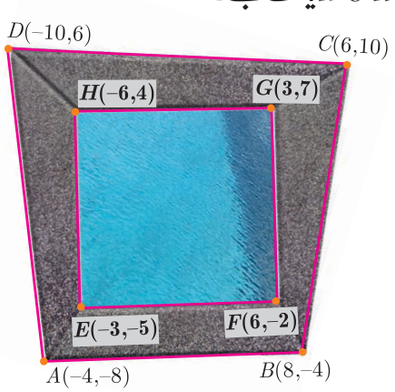
5۔ چار ضلعی کا رقبہ معلوم کیجئے جن کے راسیں درجہ ذیل ہیں۔

(i) $(-9, -2)$, $(-8, -4)$, $(2, 2)$ اور $(1, -3)$ (ii) $(-9, 0)$, $(-8, 6)$, $(-1, -2)$ اور $(-6, -3)$

6۔ اگر ایک چار ضلعی کا رقبہ 28 مربع اکائیاں ہے جس کے راسیں $(-2,-4)$، $(-3,k)$، $(3,-2)$ اور $(2,3)$ ہو تو ' k ' کی قیمت معلوم کیجئے۔

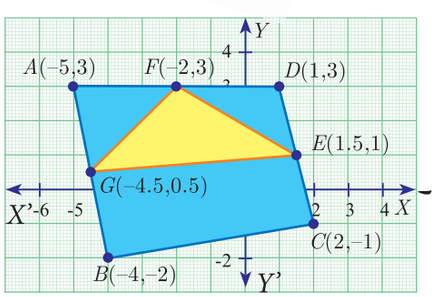
7۔ اگر نقاط $A(-3,9)$، $B(a,b)$ اور $C(4,-5)$ ہم خط ہیں اور $a+b=1$ ہو تو a اور b دریافت کیجئے۔

8۔ فرض کیجئے کہ ΔABC کے اضلاع AB، BC اور AC کے وسطی نقاط بالترتیب $P(11,7)$ ، $Q(13.5,4)$ اور $R(9.5,4)$ ہیں۔ A، B اور C کے راسوں کے محدد معلوم کیجئے۔ ΔABC کے رقبہ کو محسوب کر کے ΔPQR کے رقبہ سے موازنہ کیجئے۔



9۔ دئے گئے خاکہ میں تیرا کی تالاب (سوئمنگ پول) کے اطراف کنکریٹ کا صحن ہے۔ صحن کا رقبہ معلوم کیجئے۔

10۔ ایک مثلث نما شیشہ کی رنگ سازی کرنا ہوگا اِس مثلث کے راسیں $A(-5,-4)$ ، $B(1,6)$ اور $C(7,-4)$ ہیں۔ اگر ایک رنگ کے ڈبے سے 6 مربع فٹ رنگ سازی کر سکتے ہیں۔ تو اُس شیشہ کو مکمل طور پر رنگ کرنے کے لئے کتنے رنگ کے ڈبے درکار ہوں گئے اگر صرف ایک کوٹ (Coat) ہی رنگ سازی کرتے ہیں۔



11۔ دئے گئے خاکہ سے ، (i) مثلث AGF (ii) مثلث FED (iii) چار ضلعی $BCEG$ کے رقبہ معلوم کیجئے۔

5.4 خط کا میلان (Inclination of a Line)

ایک **خط کا میلان** یا ایک خط کا زاویہ کو کہتے ہیں۔ جو ایک خط مستقیم پر مثبت سمت کے X محور میں گھڑی کے مخالف سمت پیائش کیا جاتا ہے۔ جو X محور کے اوپر کے حصّہ میں ہوتا ہے۔ خط کا میلان عموماً θ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

غور کیجئے

- X محور کا میلان اور ہر خط جو X محور سے متوازی ہو تو $0°$ ہے۔
- Y محور کا میلان اور ہر خط جو Y محور سے متوازی ہو تو $90°$ ہے۔

5.4.1 خط مستقیم کا میلان (Slope of a Straight)

سڑک بچھانے کے دوران یہ جاننا ضروری ہے کہ یہ سڑک کتنی ڈھلوان ہے۔ اسی طرح، جب ایک سیڑھی (زینہ) تعمیر کرتے ہیں تو ہمیں اس کی ڈھلوان کا خیال رکھنا چاہئے۔ اسی سبب کے بناپر، ہر کوئی جو پہاڑ یا پل پر سفر کرتا ہے۔ ہموار سڑک پر سفر کرنے کے مقابلے میں دشواری محسوس کرتا ہے۔

10th maths 5. co-ord geo
Sunday, February 16, 2020 2:04:30 PM



خاکہ 5.16

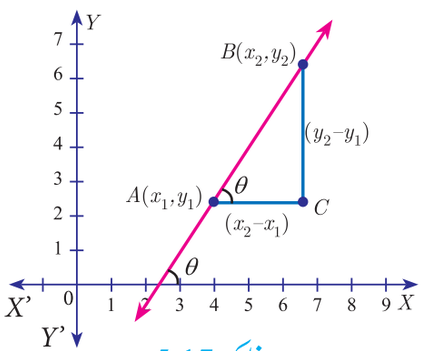
یہ تمام مثالیں ایک اہم پہلو کی وضاحت کرتے ہیں جس کو ڈھلوان کی پیمائش کو **میلان (Slope) یا ڈھلوان (Gradient)** کہتے ہیں۔
میلان کا اصول بہت اہمیت کا حامل ہے۔ اقتصادیات میں کیونکہ میلان کی استعمال سے کسی دئے گئے مخصوص وقت کے دوران مصنوعات کی مانگ کی شرح کی پیمائش اس کی قیمت کی بنیاد پر تبدیل ہوتی ہے۔ میلان دو اہم اجزاء **ڈھلوان** اور سمت پر مشتمل ہے۔

تعارف Definition

ایک غیر عمودی خطِ مستقیم کا زاویہ میلان اگر θ ہو تو $\tan\theta$ کو میلان یا **ڈھلوان** کہتے ہیں اور اس کو m سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

چنانچہ ایک خط مستقیم کا میلان $m = \tan\theta\ ,\ 0 \le \theta \le 180^\circ\ ,\ \theta \ne 90^\circ$

ایک خطِ مستقیم کا میلان معلوم کرنا جب دو نقاط دئے گئے ہوں
To find the slope of a straight line when two points are given



خاکہ 5.17

میلان $m = \tan\theta$

$= \dfrac{\text{مقابل ضلع}}{\text{متصل ضلع}}$

$= \dfrac{BC}{AC}$

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

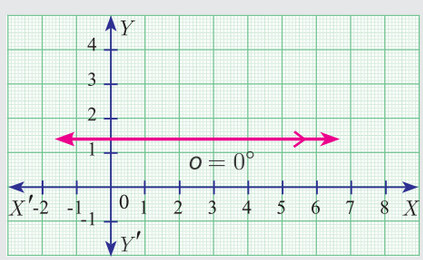
غور کیجئے

ایک عمودی خط کا میلان غیر واضح ہے۔

میلان $m = \dfrac{y \text{ محدد میں فرق}}{x \text{ محدد میں فرق}}$

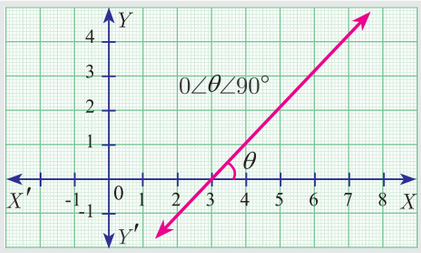
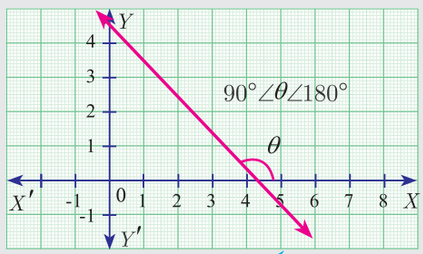
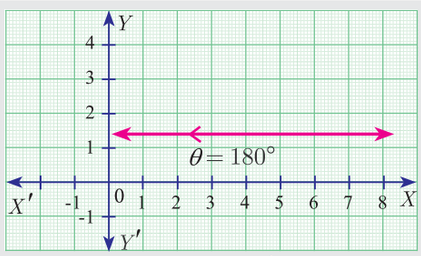
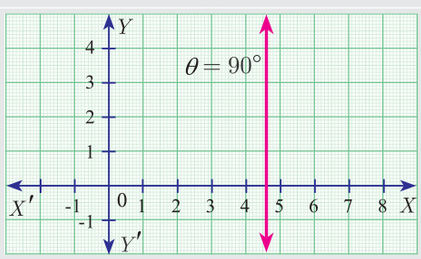
نقاط (x_1,y_1) اور (x_2,y_2) کو ملانے والی خطِ مستقیم کا میلان $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ ہے جس میں $x_1 \ne x_2$ ہے۔

میلان کی قیمتیں Values of Slopes

شمار عدد	شرط	میلان	خاکہ
(i)	$\theta = 0^\circ$	خط جو X محور کے مثبت سمت کے متوازی ہو	

خاکہ 5.18 (a)

10th maths 5. co-ord geo
Sunday, February 16, 2020 2:04:31 PM

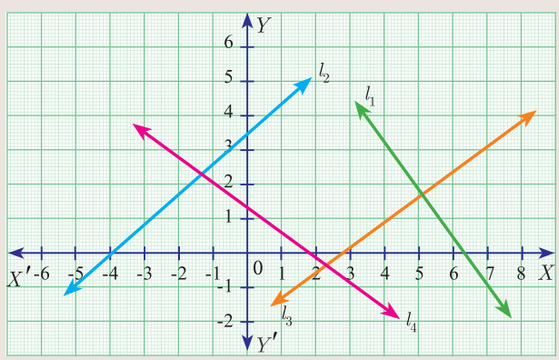
(ii)	$0 < \theta < 90°$	خط جس کا میلان مثبت ہو (مثبت میلان رکھنے والی خط بائیں سے دائیں جانب چڑھتی ہے)	 خاکہ 5.18 (b)
(iii)	$90° < \theta < 180°$	خط جس کا میلان منفی ہو (منفی میلان رکھنے والی خط بائیں سے دائیں جانب اُترتی ہے)	 خاکہ 5.18 (c)
(iv)	$\theta = 180°$	خط جو X محور کے منفی سمت کے متوازی ہو	 خاکہ 5.18 (d)
(v)	$\theta = 90°$	میلان غیر واضح ہے	 خاکہ 5.18 (e)

Activity 3 کارروائی 3

اس خاکہ میں چار خطوط l_1 ، l_2 ، l_3 اور l_4 ہیں۔

i) کونسے خطوط مثبت میلان رکھتے ہیں؟

ii) کونسے خطوط منفی میلان رکھتے ہیں؟

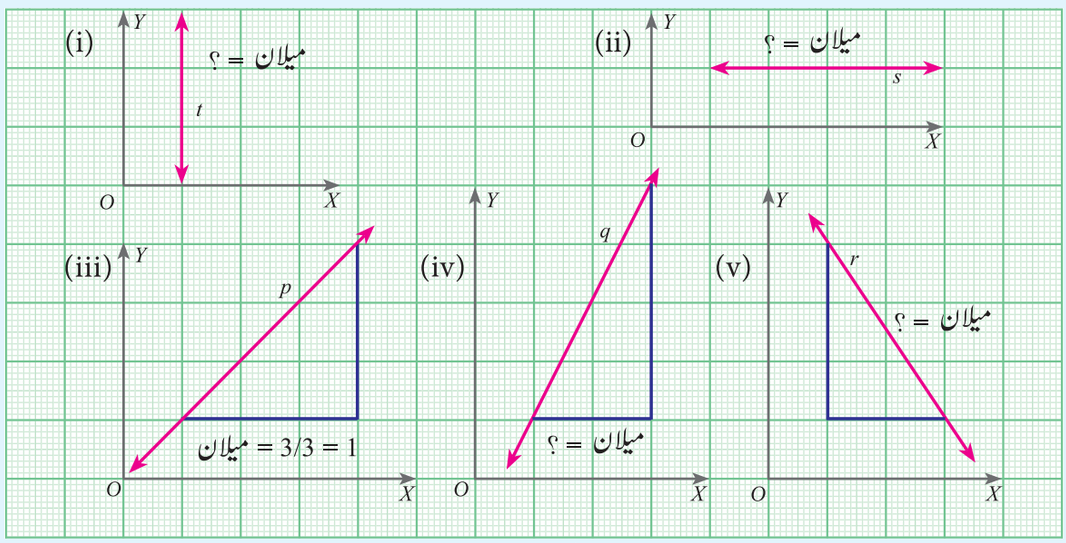


(خاکہ 5.19)

10th maths 5. co-ord geo
Sunday, February 16, 2020 2:04:33 PM

Progress Check — اپنی پیش رفت کی جانچ

ذیل میں دیے گئے ہر ایک خط کا میلان معلوم کیجئے۔ تمہارے لئے ایک میلان حل کیا گیا ہے۔



(خاکہ 5.20)

حل

(iii) خط کا میلان $= \frac{y \text{ محدد میں تبدیلی}}{x \text{ محدد میں تبدیلی}} = \frac{3}{3} = 1$

5.4.2 متوازی خطوط کے میلان
Slopes of Parallel Lines

دو غیر عمودی خط **متوازی** ہیں۔ اگر صرف اور صرف ان کے **میلان مساوی** ہوں۔

فرض کیجئے کہ l_1 اور l_2 دو غیر عمودی خطوط ہیں ان کے میلان بالترتیب m_1 اور m_2 ہیں۔

فرض کرو کہ خط کا زاویہ میلان X محور کے مثبت سمت کی طرف بالترتیب θ_1 اور θ_2 ہے۔

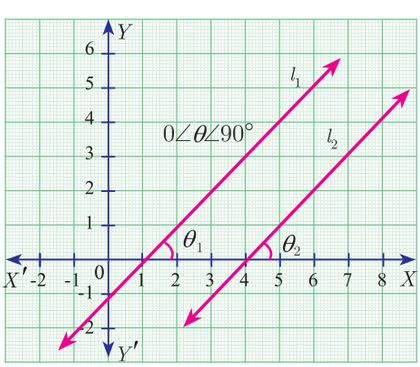


Fig. 5.21

قیاس کریں کہ l_1 اور l_2 متوازی ہیں۔

$\theta_1 = \theta_2$ (چونکہ θ_1 اور θ_2 نظیری زاویے ہیں)

$$\tan\theta_1 = \tan\theta_2$$

$$m_1 = m_2$$

لہذا، میلان مساوی ہیں۔

غیر عمودی متوازی خطوط مساوی میلان رکھتے ہیں۔

اس کے برعکس (Conversely)

فرض کریں کہ میلان مساوی ہیں تو

$$m_1 = m_2$$

$$\tan\theta_1 = \tan\theta_2$$

$\theta_1 = \theta_2$ (چونکہ $0 \le \theta_1 \le 180°$, $0 \le \theta_2 \le 180°$)

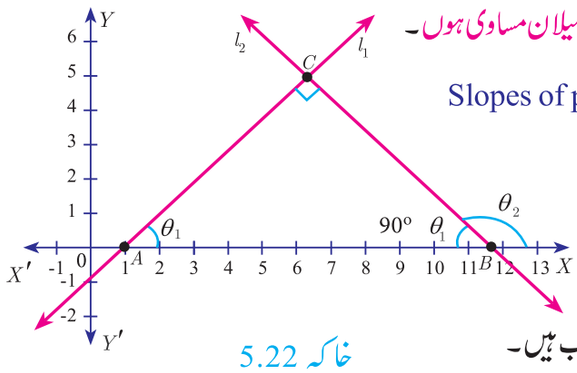
10th maths 5. co-ord geo
Sunday, February 16, 2020 2:04:34 PM

یعنی نظیری زاویئے مساوی ہوتے ہیں۔

l_1 اور l_2 متوازی ہیں۔

اس طرح، غیر عمودی خطوط (Non Vertical Lines) جو مساوی میلان رکھتے ہیں متوازی ہوتے ہیں۔

لہذا، **غیر عمودی خطوط**، متوازی ہوتے ہیں اگر صرف اور صرف اُن کے **میلان مساوی ہوں**۔



خاکہ 5.22

5.4.3 عمودی خطوط کے میلان Slopes of perpendicular Lines

دو غیر عمودی خطوط جن کا میلان m_1 اور m_2 ایک دوسرے کے **عمودی** ہیں اگر صرف اور صرف $m_1m_2 = -1$ ہوں۔

فرض کیجئے l_1 اور l_2 دو غیر عمودی خطوط ہیں ان کے میلان بالترتیب m_1 اور m_2 ہیں۔ فرض کرو کہ ان کے زاویہ میلان θ_1 اور θ_2 بالترتیب ہیں۔

ہوتو $m_1 = \tan\theta_1$ اور $m_2 = \tan\theta_2$

پہلے ہم قیاس کریں کہ l_1 اور l_2 ایک دوسرے کے عمودی ہیں۔

اس طرح (ΔABC کے زاویوں کا حاصل جمع $180°$ ہے) $\angle ABC = 90° - \theta_1$

اب l_2 کے میلان کی پیمائش زاویئے θ_2 اور $90° - \theta_1$ کے ذریعہ کریں گے۔ جو ایک دوسرے کے مقابل ہیں۔ ہمیں حاصل ہوا۔

$$\tan(\theta_2) = -\tan(90° - \theta_1)$$

$$= \frac{-\sin(90° - \theta_1)}{\cos(90° - \theta_1)} = \frac{-\cos\theta_1}{\sin\theta_1} = -\cot\theta_1 \quad \Rightarrow \quad \tan\theta_2 = -\frac{1}{\tan\theta_1}$$

$$\tan\theta_1 . \tan\theta_2 = -1$$

$$m_1 . m_2 = -1 .$$

اس طرح، جب خط l_1 اور l_2 ایک دوسرے کے عمودی ہو تو $m_1m_2 = -1$

اس کے برعکس

فرض کیجئے کہ $l1$ اور $l2$ دو غیر عمودی خطوط ہیں جن کے میلان بالترتیب $m1$ اور $m2$ ہیں، اس طرح سے کہ $m_1m_2 = -1$

چونکہ $m_1 = \tan\theta_1$; $m_2 = \tan\theta_2$

ہم جانتے ہیں

$$\tan\theta_1 \tan\theta_2 = -1$$

$$\tan\theta_1 = -\frac{1}{\tan\theta_2}$$

$$\tan\theta_1 = -\cot\theta_2$$

$$\tan\theta_1 = -\tan(90° - \theta_2)$$

$$\tan\theta_1 = \tan\left(-(90° - \theta_2)\right) = \tan(\theta_2 - 90°)$$

$$\theta_1 = \theta_2 - 90° \qquad (0 \le \theta_1 \le 180° , 0 \le \theta_2 \le 180° \text{ چونکہ})$$

10th maths 5. co-ord geo
Sunday, February 16, 2020 2:04:34 PM

$\theta_2 = 90° + \theta_1$

لیکن ΔABC میں، $\theta_2 = \angle C + \theta_1$

چنانچہ $\angle C = 90°$

کیا تم جانتے ہو؟

کسی مثلث میں ایک خارجی زاویہ، دو داخلی مقابل کے زاویوں کے حاصل جمع کے مساوی ہوتا ہے۔

غور کیجئے

فرض کیجئے l_1 اور l_2 دو خطوط ہیں جن کے واضح میلان m_1 اور m_2 بالترتیب ہوں تو،

i) l_1 متوازی ہے l_2 سے اگر صرف اور صرف $m_1 = m_2$

ii) l_1 اور l_2 ایک دوسرے کے عمودی ہو اگر صرف اور صرف $m_1 m_2 = -1$

مثال 5.8 i) ایک خط کا میلان معلوم کیجئے جس کا زاویہ میلان $30°$ ہے۔

ii) ایک خط کا زاویہ میلان معلوم کیجئے جس کا میلان $\sqrt{3}$ ہے۔

ذرا سوچئے

خطوط مستقیم X محور اور Y محور ایک دوسرے کے عمودی ہیں۔

کیا یہ شرط $m_1 m_2 = -1$ کے لئے صحیح ہے؟

حل : (i) یہاں $\theta = 30°$

میلان $m = \tan\theta$

لہذا، میلان $m = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

ii) دیا گیا ہے $m = \sqrt{3}$ ، فرض کیجئے کہ θ خط کا زاویہ میلان ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\tan\theta = \sqrt{3}$$

$$\theta = 60°$$

مثال 5.9 دئے گئے نقاط کو ملانے والے خط کا میلان دریافت کیجئے۔

(i) $(-6,1)$ اور $(-3,2)$ (ii) $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$ اور $\left(\frac{2}{7},\frac{3}{7}\right)$ (iii) $(14,10)$ اور $(14,-6)$

حل :

(i) $(-6,1)$ اور $(-3,2)$

$$\text{میلان} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-1}{-3+6} = \frac{1}{3}.$$

(ii) $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$ اور $\left(\frac{2}{7},\frac{3}{7}\right)$

$$\text{میلان} = \frac{\frac{3}{7} - \frac{1}{2}}{\frac{2}{7} + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{6-7}{14}}{\frac{6+7}{21}}$$

$$= -\frac{1}{14} \times \frac{21}{13} = -\frac{3}{26}.$$

(iii) $(14,10)$ اور $(14,-6)$

$$\text{میلان} = \frac{-6-10}{14-14} = \frac{-16}{0}.$$

میلان غیر واضح ہے۔

اپنی پیش رفت کی جانچ Progress Check

شمار عدد	نقاط	میلان
1	$A(-a, b)$, $B(3a,-b)$	__
2	$A(2, 3)$, $B(_,_)$	2
3	___	0
4	___	غیر واضح

10th maths 5. co-ord geo
Sunday, February 16, 2020 2:04:35 PM

مثال 5.10 خط ' r ' نقاط $(-2,2)$اور $(5,8)$ سے گزرتے ہیں اور خط ' s ' نقاط $(-8,7)$اور $(-2,0)$ سے گزرتے ہیں۔
کیا r اور s ایک دوسرے کے عمودی ہیں؟

حل :

$$\text{خط } r \text{ کا میلان } m_1 = \frac{8-2}{5+2} = \frac{6}{7}$$

$$\text{خط } s \text{ کا میلان } m_2 = \frac{0-7}{-2+8} = \frac{-7}{6}$$

$$\text{میلانوں کا حاصل ضرب} = \frac{6}{7} \times \frac{-7}{6} = -1$$

$$\text{یعنی} \quad m_1 m_2 = -1$$

لہذا، خط r اور s ایک دوسرے کے عمودی ہیں۔

مثال 5.11 خط ' p ' نقاط $(3,-2)$اور $(12,4)$ سے گزرتے ہیں اور خط ' q ' نقاط $(6,-2)$اور $(12,2)$ سے گزرتے ہیں۔
کیا p متوازی ہے q سے؟

حل :

$$\text{خط } p \text{ کا میلان } m_1 = \frac{4+2}{12-3} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

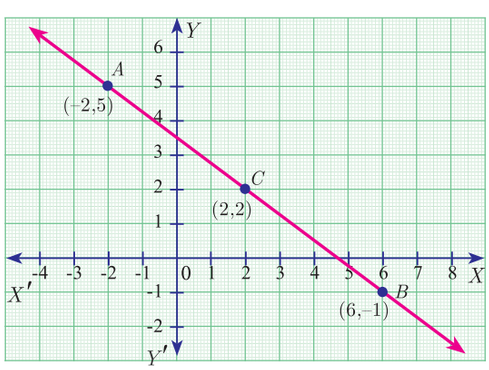
$$\text{خط } q \text{ کا میلان } m_2 = \frac{2+2}{12-6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

اس طرح، خط q کا میلان = خط p کا میلان

لہذا، خط p متوازی ہے خط q سے۔

مثال 5.12 ثابت کیجئے کہ نقاط $(-2,5)$ ، $(6,-1)$ اور $(2,2)$ ہم خط ہیں۔

حل : $A(-2,5)$ ، $B(6,-1)$ اور $C(2,2)$ راسیں ہیں۔



خاکہ 5.23

$$AB \text{ کا میلان} = \frac{-1-5}{6+2} = \frac{-6}{8} = \frac{-3}{4}$$

$$BC \text{ کا میلان} = \frac{2+1}{2-6} = \frac{3}{-4} = \frac{-3}{4}$$

ہمیں حاصل ہوتا ہے

BC کا میلان $= AB$ کا میلان

چنانچہ نقاط A، Bاور C تمام ایک خط مستقیم پر واقع ہیں۔

لہذا، نقاط A، Bاور C ہم خط ہیں۔

مثال 5.13 چار نقاط $A(1,-2)$، $B(6,-2)$، $C(5,1)$اور $D(2,1)$ ہیں۔

i) قطاع خط کا میلان معلوم کیجئے۔ a) AB ، b) CD

ii) قطاع خط کا میلان معلوم کیجئے۔ a) BC ، b) AD

iii) تمہارے جوابات سے تم نے کیا نتیجہ حاصل کیا۔

حل :

(i) (a) AB کا میلان $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2+2}{6-1} = 0$

(b) CD کا میلان $= \frac{1-1}{2-5} = \frac{0}{-3} = 0$

کیا تم جانتے ہو؟

اگر دونوں مقابل کے اضلاع کے جوڑیوں کے میلان مساوی ہوں تو ایک چار ضلعی، ایک متوازی الاضلاع ہو جاتا ہے۔

10th maths 5. co-ord geo
Sunday, February 16, 2020 2:04:36 PM

(ii) (a) AD کا میلان $= \frac{1+2}{2-1} = \frac{3}{1} = 3$

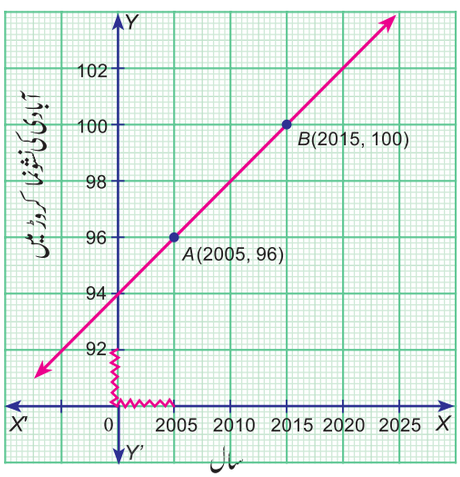
(b) BC کا میلان $= \frac{1+2}{5-6} = \frac{3}{-1} = -3$

(iii) AB اور CD کے میلان مساوی ہیں اس وجہ وہ متوازی ہیں۔

اسی طرح، خطوط AD اور BC متوازی نہیں ہیں۔ چونکہ، ان کے میلان مساوی نہیں ہیں۔

اس طرح ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ چار ضلعی $ABCD$ ایک منحرف ہے۔

مثال 5.14 دئے گئے آبادی کی نشونما کی ترسیم پر غور کیجئے۔ خط AB کا میلان معلوم کیجئے۔ اور سال 2030 میں آبادی کا تخمینہ لگائے۔



خاکہ 5.24

حل : نقاط $A(2005,96)$ اور $B(2015,100)$، خط AB پر ہیں۔

AB کا میلان $= \frac{100-96}{2015-2005} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

فرض کیجئے کہ 2030 میں آبادی کی نشونما 'k' کروڑ ہوگی۔

قیاس کریں کہ نقاط $C(2030,k)$، خط AB پر ہے۔

AB کا میلان $= AC$ کا میلان

$\frac{k-96}{2030-2005} = \frac{2}{5}$ حاصل ہوا $\frac{k-96}{25} = \frac{2}{5}$

$k - 96 = 10$

$k = 106$

لہذا، 2030 میں آبادی کا تخمینہ 106 کروڑ ہے۔

مثال 5.15

مسئلہ فیثاغورث کے استعمال کے بغیر، ثابت کیجئے کہ راسیں $(1,-4)$، $(2,-3)$ اور $(4,-7)$ سے ایک مثلث قائمۃ الزاویہ بنتا ہے۔

حل : راسیں $A(1,-4)$، $B(2,-3)$ اور $C(4,-7)$

AB کا میلان $= \frac{-3+4}{2-1} = \frac{1}{1} = 1$

BC کا میلان $= \frac{-7+3}{4-2} = \frac{-4}{2} = -2$

AC کا میلان $= \frac{-7+4}{4-1} = \frac{-3}{3} = -1$

AB کا میلان $\times$ AC کا میلان $= (1)(-1) = -1$

یعنی، جب میلان کا حاصل ضرب -1 ہے۔

AB عمودہ AC پر $\angle A = 90°$

لہذا، ΔABC ایک مثلث قائمۃ الزاویہ ہے۔

ذرا سوچئے

حقیقی زندگی کے حالات سے کوئی تین مثالیں پیش کریں جن میں میلان کا اصول استعمال ہوتا ہے۔

10th maths 5. co-ord geo
Sunday, February 16, 2020 2:04:36 PM

مثال 5.16 تحلیلی طور پر ثابت کیجئے کہ مثلث کے دو اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے والا قطاع خط تیسرے ضلع کے متوازی ہوتا ہے اور اس کی لمبائی تیسرے ضلع کے آدھی لمبائی کے برابر ہوگا۔

حل : فرض کیجئے $P(a,b)$، $Q(c,d)$ اور $R(e,f)$ مثلث کے راسیں ہیں۔

فرض کیجئے PQ کا وسطی نقطہ S ہے اور PR کا وسطی نقطہ T ہے۔

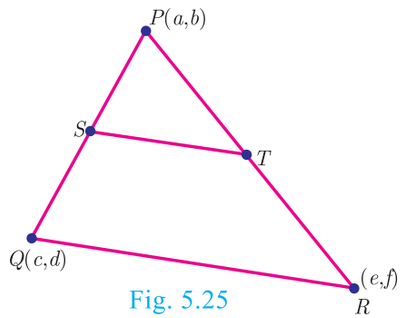


Fig. 5.25

چنانچہ $S = \left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$ اور $T = \left(\frac{a+e}{2}, \frac{b+f}{2}\right)$

ST کا میلان $= \dfrac{\frac{b+f}{2} - \frac{b+d}{2}}{\frac{a+e}{2} - \frac{a+c}{2}} = \dfrac{f-d}{e-c}$

اور

QR کا میلان $= \dfrac{f-d}{e-c}$

چنانچہ، ST متوازی ہے QR کے (چونکہ ان کے میلان مساوی ہیں)

غور کیجئے

یہ ایک مثال ہے کہ، کس طرح ایک علمِ ہندسہ کے نتیجہ کو محددی علمِ ہندسہ کو استعمال کر کے ثابت کر سکتے ہیں۔

Also
$$ST = \sqrt{\left(\frac{a+e}{2} - \frac{a+c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b+f}{2} - \frac{b+d}{2}\right)^2}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{(e-c)^2 + (f-d)^2}$$
$$ST = \frac{1}{2}QR$$

اس طرح ST متوازی ہے QR سے اور اس کا آدھا بھی ہے۔

مشق 5.2

1۔ ایک خط کا میلان کیا ہے جس کا زاویہ میلان X محور کے مثبت سمت میں ہے۔ (i) $90°$ (ii) $0°$

2۔ ایک خط کا زاویہ میلان معلوم کیجئے جس کا میلان ہے۔ (ı) 0 (ii) 1

3۔ نقاط کو ملانے والے خط کا میلان دریافت کیجئے۔

(i) مبداء سے $\left(5, \sqrt{5}\right)$ (ii) $(\sin\theta, -\cos\theta)$ اور $(-\sin\theta, \cos\theta)$

4۔ نقاط $A(5,1)$ اور P کو ملانے والا خط عمودی ہے جس میں نقاط $(4,2)$ اور $(-6,4)$ کو ملانے والا قطاع خط کا وسطی نقطہ P ہے۔ خط کا میلان معلوم کیجئے۔

5۔ ثابت کیجئے کہ نقاط $(-3,-4)$، $(7,2)$ اور $(12,5)$ ہم خط ہیں۔

6۔ اگر تین نقاط $(3,-1)$، $(a, 3)$ اور $(1,-3)$ ہم خط ہو تو ' a ' کی قیمت محسوب کیجئے۔

7۔ نقاط $(-2,a)$ اور $(9,3)$ خط سے گزرتے ہیں جس کا میلان $-\frac{1}{2}$ ہے۔ ' a ' کی قیمت محسوب کیجئے۔

8۔ نقاط $(-2,6)$ اور $(4,8)$ خط سے گزرے ہیں نقاط $(8,12)$ اور $(24, 2)$ خط سے گزرتے ہیں۔ x کی قیمت محسوب کیجئے۔

9۔ ثابت کیجئے کہ دئے گئے راسیں سے مثلث قائمۃ الزاویہ بنتا ہے اور جانچئے کہ کیا یہ مسئلہ فیثا غورث کو مطمئن کرتا ہے۔ (توقع پوری کرتا ہے)

(i) $A(1,-4)$, $B(2,-3)$ اور $C(4,-7)$ (ii) $L(0,5)$, $M(9,12)$ اور $N(3,14)$

10th maths 5. co-ord geo
Sunday, February 16, 2020 2:04:37 PM

10۔ ثابت کیجئے کہ دئے گئے نقاط سے متوازی الاضلاع بنتا ہے۔ $A(2.5,3.5)$, $B(10, -4)$, $C(2.5, -2.5)$ اور $D(-5,5)$

11۔ اگر نقاط $A(2,2)$، $B(-2,-3)$، $C(1,-3)$اور $D(x,y)$ ایک متوازی اضلاع بناتے ہیں تو x اور y قیمت محسوب کیجئے۔

12۔ فرض کیجئے $A(3,-4)$، $B(9,-4)$، $C(5,-7)$اور $D(7,-7)$ ہیں۔ ثابت کیجئے کہ $ABCD$ ایک منحرف ہے۔

13۔ ایک چار ضلعی کے راسیں $A(-4,-2)$، $B(5,-1)$، $C(6,5)$اور $D(-7,6)$ ہیں۔ ثابت کیجئے کہ ان کے اضلاع کے وسطی نقطہ سے ایک متوازی الاضلاع بن سکتا ہے۔

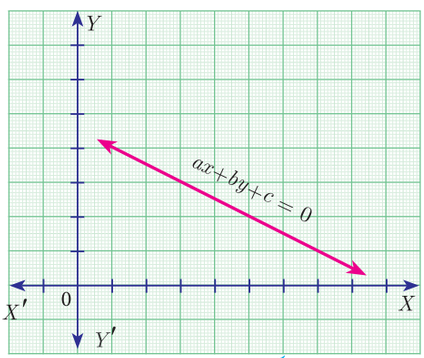
5.5 خط مستقیم (Straight Line)

کسی پہلے درجہ کی مساوات میں دو متغیرات x اور y سے یہ شکل

$ax + by + c = 0$ ....(1) جس میں a ، b ، c حقیقی اعداد ہیں۔

a , b میں کم از کم ایک غیر صفری (non-zero) ہے۔

اس کو XY مسطح کا خط مستقیم کہتے ہیں۔

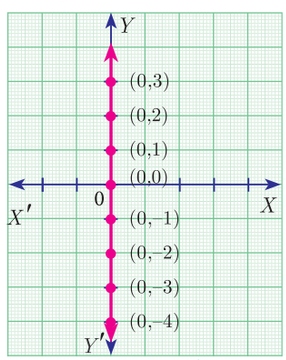


خاکہ 5.26

5.5.1 محدّد محورات کی مساوات Equation of Coordinate axis

X محور اور Y محور دونوں کو ملا کر محدد محورات کہتے ہیں۔ x محدد کا ہر نقطہ OY (Y محور) پر صفر ہے۔

لہذا OY (Y محور) کی مساوات میں $x = 0$ ہے۔ (خاکہ 5.28)

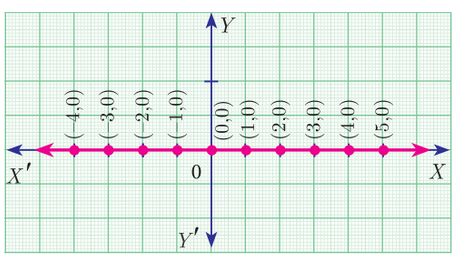


خاکہ 5.27

y محدد کا ہر نقطہ OX (X محور) پر صفر ہے۔

لہذا OX (X محور) کی مساوات میں

$y = 0$ ہے۔ (خاکہ 5.27)



خاکہ 5.29

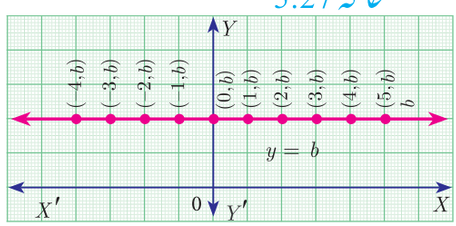
5.5.2 خط مستقیم کی مساوات X محور سے متوازی

Equation of Straight Line Parallel to X-axis

فرض کیجئے AB خط مستقیم X محور سے متوازی ہے جو ' b ' فاصلہ پر ہو تو

y محدد کا ہر نقطہ AB پر ' b ' ہے۔

لہذا، مساوات AB میں $y = b$ ہے۔



خاکہ 5.28

غور کیجئے

- اگر $b > 0$ ہو تو خط $y = b$ ، X محور کے اوپر واقع ہوتی ہے۔
- اگر $b < 0$ ہو تو خط $y = b$ ، X محور کے نیچے واقع ہوتی ہے۔
- اگر $b = 0$ ہو تو خط $y = b$ ، X محور ہی ہوگا۔

10th maths 5. co-ord geo
Sunday, February 16, 2020 2:04:38 PM

5.5.3 خطِ مستقیم کی مساوات Y محور سے متوازی

Equation of Straight Line Pareallel to Y-axis

فرض کیجئے CD خط مستقیم Y محور سے متوازی ہے۔ جو 'c' فاصلہ پر ہو تو x محدّد کا ہر نقطہ CD پر 'c' ہے۔ مساوات CD میں $x = c$ ہے۔

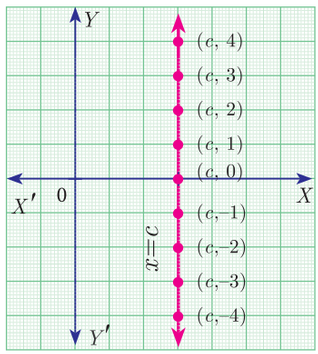


Fig. 5.30

غور کیجئے

- اگر $c > 0$ ہو تو خط $x = c$، Y محور کے دائیں جانب واقع ہوتی ہے۔
- اگر $c < 0$ ہو تو خط $x = c$، Y محور کے بائیں جانب واقع ہوتی ہے۔
- اگر $c = 0$ ہو تو خط $x = c$، Y محور ہی ہوگا۔

مثال 5.17 خط مستقیم کی مساوات معلوم کیجئے جو $(5,7)$ گزرتی ہے اور یہ (i) X محور کے متوازی ہے۔ (ii) Y محور کے متوازی ہے۔

حل : i) کسی خط مستقیم کی مساوات X محور کے متوازی ہو تو $y = b$ ہے۔

چونکہ یہ $(5,7)$ سے گزرتی ہے، $b = 7$ لہذا، مطلوبہ خط کی مساوات $y = 7$ ہے۔

ii) کسی بھی خط بھی مستقیم کی مساوات Y محور کے متوازی ہو تو $x = c$ ہے۔

چونکہ یہ $(5,7)$ سے گذرتی ہے $c = 5$ لہذا، مطلوبہ خط کی مساوات $x = 5$ ہے۔

5.5.4 میلان۔مقطوعہ کی شکل Slope-Intercept Form

ہر خط مستقیم جو عمودی (vertical) نہیں ہے۔ Y محور کے ایک نقطہ پر قطع کرے گی۔ اس نقطہ کا y محدّد کو خط کا y مقطوعہ کہتے ہیں۔

ایک خط کا میلان m اور y مقطوعہ 'c' کو $y = mx + c$ مساوات کے ذریعہ ظاہر کر سکتے ہیں۔

ہم اس مساوات کو میلان ۔ مقطوعہ کی شکل میں خطِ مستقیم کی مساوات ہے۔

کیا تم جانتے ہو؟

- اگر میلان m رکھنے والی ایک خط x مقطوعہ d بناتی ہے۔ اس خط مستقیم کی مساوات $x = my + d$ ہے۔
- $y = mx$ خطِ مستقیم کی مساوات مبداء (Origin) سے گزرتی ہے۔

مثال 5.18 خط مستقیم کی مساوات معلوم کیجئے۔ جس کا

i) میلان 5 اور y مقطوعہ -9 ہے۔ ii) زاویہ میلان $45°$ اور y مقطوعہ 11 ہے۔

حل : i) دیا گیا ہے میلان $= 5$، y مقطوعہ $c = -9$

چنانچہ، خط مستقیم کی مساوات $y = mx + c$

$$y = 5x - 9 \Rightarrow 5x - y - 9 = 0$$

ii) دیا گیا ہے زاویہ میلان $\theta = 45°$، y مقطوعہ $c = 11$،

میلان $m = \tan\theta = \tan 45° = 1$

چنانچہ، خط مستقیم کی مساوات $y = mx + c$

لہذا، ہمیں حاصل ہوتا ہے $y = x + 11 \Rightarrow x - y + 11 = 0$

10th maths 5. co-ord geo
Sunday, February 16, 2020 2:04:39 PM

مثال 5.19 $8x - 7y + 6 = 0$ خط مستقیم کی مساوات میں میلان اور y مقطوعہ محسوب کیجئے۔

حل : دئے گئے خطِ مستقیم کی مساوات $8x - 7y + 6 = 0$ ہے۔

$7y = 8x + 6$ (اس کو $y = mx + c$ کی شکل میں لائیں)

(1) کو $y = mx + c$ سے موازنہ کریں۔

میلان $m = \frac{8}{7}$ ، مقطوعہ اور y , $c = \frac{6}{7}$

کیا تم جانتے ہو؟

مسطح xy میں نقطہ (x,y) ہے۔
x محدّد کو "حدف" (abscissae)
اور y محدّد کو "معین" (Ordinate)
کہتے ہیں۔

مثال 5.20 ترسیم ، y درجہ حرارت (فارن ہیٹ درجہ میں (ڈگری) کو ، x درجہ حرارت (سیلسیس درجہ میں) بیان کرتا ہے۔

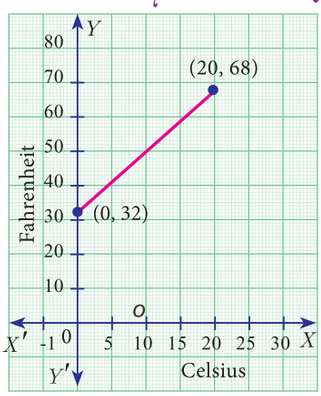
(a) میلان اور y مقطوعہ معلوم کیجئے۔ b) خط کی مساوات لکھئے۔

c) زمین کی اوسطِ درجہ حرارت فارن ہیٹ درجہ میں کیا ہوگی اگر سیلسیس میں اوسطِ درجہ حرارت $25°$ ہے ؟

حل : (a) خاکہ سے $\text{میلان} = \frac{y \text{ محدّد میں تبدیلی}}{x \text{ محدّد میں تبدیلی}} = \frac{68 - 32}{20 - 0} = \frac{36}{20} = \frac{9}{5} = 1.8$

Y محور پر خط $(0,32)$ پر کاٹتی ہے۔

میلان $\frac{9}{5}$ ہے اور y مقطوعہ 32 ہے۔



خاکہ 5.31

b) میلان اور y مقطوعہ کو استعمال کر کے مساوات لکھے ۔

مساوات $y = \frac{9}{5}x + 32$ ہے۔

c) سیلسیس میں، زمین کی اوسطِ درجہ حرارت $25°$ ہے۔

اوسطِ درجہ حرارت فارن ہیٹ میں معلوم کرنے کے لئے ہم y کی قیمت معلوم کرتے ہیں۔ $x = 25$ ہو۔

$$y = \frac{9}{5}x + 32$$

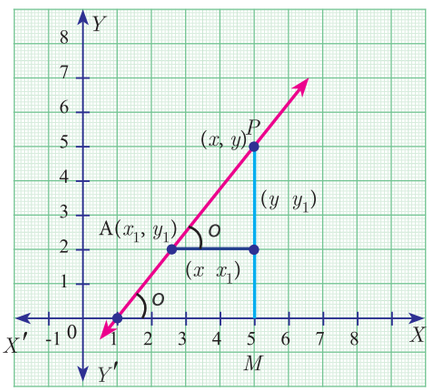
$$y = \frac{9}{5}(25) + 32$$

$$y = 77$$

لہذا زمین کی اوسطِ درجہ حرارت $77°F$ ہے۔

غور کیجئے

سیلسیس سے فارن ہیٹ میں تبدیل کرنے کا ضابطہ $F = \frac{9}{5}C + 32$ دیا گیا ہے جو ایک خطی مساوات، خطِ مستقیم کو ظاہر کرتا ہے۔ اس کو مثال سے اخذ کیا گیا ہے۔



خاکہ 5.32

5.5.5 میلان۔نقطہ کی شکل (Point-Slope Form)

ہم خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کریں گے جس کا میلان m ہو اور دئے گئے نقطہ $A(x_1,y_1)$ سے گزرتا ہے۔ فرض کیجئے کہ دئے گئے خط میں A کو چھوڑ کر $P(x,y)$ کوئی ایک نقطہ ہے۔ $A(x_1, y_1)$ اور $P(x,y)$ کو ملانے والے خط کا میلان اس طرح دیا گیا ہے۔

$$m = \tan\theta = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

10th maths 5. co-ord geo
Sunday, February 16, 2020 2:04:40 PM

لہذا، مطلوبہ خط کی مساوات $y - y_1 = m(x - x_1)$ ہے۔ (میلان۔نقطہ کی شکل)

مثال 5.21 خط کی مساوات معلوم کیجئے۔ جو نقطہ $(3, -4)$ سے گذرتی ہے اور جس کا میلان $\frac{-5}{7}$ ہے۔

حل : دیا گیا ہے $(x_1, y_1) = (3, -4)$ اور $m = \frac{-5}{7}$

میلان ، نقطہ کی شکل میں خط مستقیم کی مساوات $y - y_1 = m(x - x_1)$ ہے۔

ہم اس طرح لکھتے ہیں۔

$$y + 4 = -\frac{5}{7}(x - 3)$$

ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $5x + 7y + 13 = 0$

ذرا سوچئے

کیا ایک خطِ مستقیم کی مساوات کو میلان۔مقطوعہ کی شکل میں ظاہر کرنا ممکن ہے، جب یہ خط Y محور سے متوازی ہے۔

مثال 5.22 خط کی مساوات معلوم کیجئے جو نقطہ $A(1,4)$ سے گذرتی ہے اور نقاط $(2,5)$ اور $(4,7)$ کو ملانے والے خط کے عمود پر ہیں۔

حل : فرض کیجئے کہ دئے گئے نقاط $A(1,4)$ ، $B(2,5)$ اور $C(4,7)$ ہیں۔

$$BC \text{ کا میلان } = \frac{7-5}{4-2} = \frac{2}{2} = 1$$

فرض کیجئے کہ مطلوبہ خط کا میلان m ہے۔ چونکہ مطلوبہ خط BC کے عمودی ہے۔

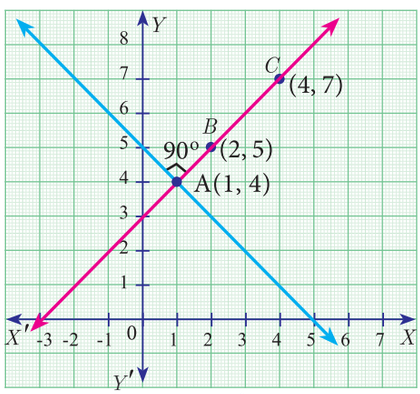
$$m \times 1 = -1$$
$$m = -1$$

مطلوبہ خط نقطہ $A(1,4)$ سے بھی گذرتی ہے۔

مطلوبہ خط مستقیم کی مساوات $y - y_1 = m(x - x_1)$ ہے۔

$$y - 4 = -1(x - 1)$$
$$y - 4 = -x + 1$$

ہمیں حاصل ہوا۔ $x + y - 5 = 0$



خاکہ 5.33

5.5.6 دو نقاط کی شکل (Two Points Form)

فرض کیجئے کہ $A(x_1, y_1)$ اور $B(x_2, y_2)$ دئے گئے جو مختلف نقاط ہیں۔ خط مستقیم کا میلا جو ان نقاط سے گذرتے ہیں۔

انہیں اس طرح دیا گیا ہے۔ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = (x_2 \neq x_1)$

خط مستقیم کی مساوات میں میلان، نقطہ کی شکل سے حاصل ہوتا ہے۔

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

لہذا، $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ (خط کی مساوات دو نقاط کی شکل میں ہے)

مثال 5.23 نقاط $(-3, 5)$ اور $(-4, 7)$ سے گزرنے والی خط مستقیم کی مساوات معلوم کیجئے۔

حل : دو نقاط (x_1, y_1) اور (x_2, y_2) سے گزرنے والی خط مستقیم کی مساوات ہے۔

10th maths 5. co-ord geo
Sunday, February 16, 2020 2:04:41 PM

کیا تم جانتے ہو؟

عظیم ریاضی طبعیات دان جیسے گیلیلیو اور نیوٹن مسطح اور خلاء میں شئے کی حرکات کی خصوصیات کے لئے محددی علم ہندسہ کا استعمال کیا۔

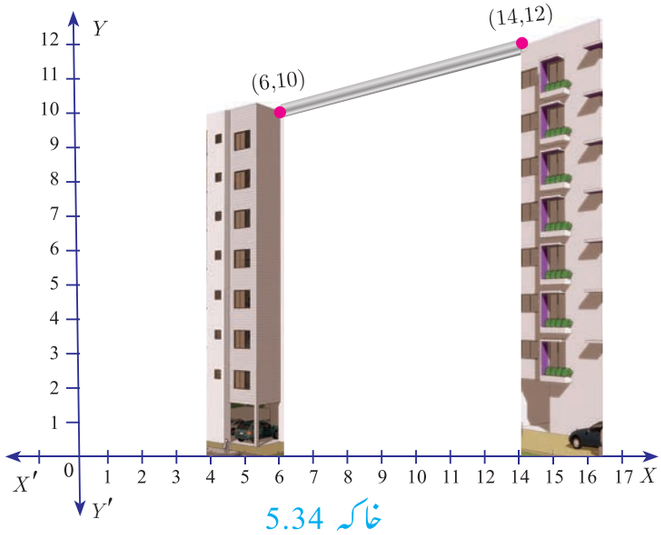
$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

نقاط کو درج کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{y+3}{-4+3} = \frac{x-5}{7-5}$$

$$2y+6 = -x+5$$

لہذا، $x+2y+1 = 0$



خاکہ 5.34

مثال 5.24 دو مختلف بلندیوں والے عمارتیں ایک دوسرے کے مقابل واقع ہیں۔ اگر ایک سخت سلاخ سے عمارتوں کی چھتوں کو $(6,10)$ سے $(14,12)$ ملایا گیا ہے۔ عمارتوں کو ملانے والے سلاخ کی مساوات کو معلوم کیجئے۔

حل : فرض کیجئے نقاط $A(6,10)$ اور $B(14,12)$ عمارتوں کے چھت کو ظاہر کرتے ہیں۔

سلاخ کی مساوات ہی خط مستقیم کی مساوات ہے جو $A(6,10)$ اور $B(14,12)$ سے گزرتے ہیں۔

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \quad \text{gives} \quad \frac{y-10}{12-10} = \frac{x-6}{14-6}$$

$$\frac{y-10}{2} = \frac{x-6}{8}$$

چنانچہ، $x-4y+34 = 0$

لہذا، سلاخ کی مساوات $x-4y+34=0$ ہے

5.5.7 مقطوعہ کی شکل (Intercept Form)

ہم خط کے مساوات معلوم کریں گے جس کے محدّد محورات کے مقطوعات بالترتیب a اور b ہیں۔

فرض کیجئے خط PQ، X محور پر A اور Y محور پر B کے مقام ملتے ہیں۔

فرض کیجئے $OA = a$، $OB = b$ ہو تو A اور B کے محدّد دیں بالترتیب $(a,0)$ اور $(0,b)$ ہیں۔ لہذا، A اور B کو ملانے والے خط کی مساوات ہے۔

$$\frac{y-0}{b-0} = \frac{x-a}{0-a}$$

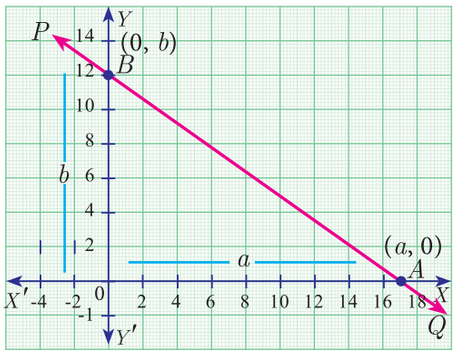


Fig. 5.35

ہمیں حاصل ہوتا ہے $\frac{y}{b} = \frac{x-a}{-a}$ gives $\frac{y}{b} = \frac{-x}{a}+1$

لہذا $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ (خط کی مقطوعہ شکل)

10th maths 5. co-ord geo
Sunday, February 16, 2020 2:04:42 PM

Progress Check — اپنی پیش رفت کی جانچ

نام	کب استعمال کریں؟	شکل
---	m = میلان ، c = مقطوعہ ، دئے گئے ہیں	$y = mx + c$
---	---	$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$
مقطوعہ شکل	مقطوعات دئے گئے ہیں۔	---

مثال 5.25 خط کی مساوات معلوم کیجئے جو $(5,7)$ سے گزرتی ہے اور جن کے محوروں پر مقطوعات مقدار میں یکساں ہیں اور علامت (Sign) میں مختلف ہیں۔

حل : فرض کیجئے x مقطوعہ a اور y مقطوعہ $-a$ ہیں۔ مقطوعات کی شکل میں خط کی مساوات $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ہے۔

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{-a} = 1 \quad (\text{یہاں } b = -a)$$

چنانچہ

$$x - y = a \quad \ldots (1)$$

چونکہ (1) ، $(5,7)$ سے گزرتی ہے۔

چنانچہ $5 - 7 = a \quad \Rightarrow \quad a = -2$

اس طرح مطلوبہ خط مستقیم کی مساوات $x - y = -2$ یا $x - y + 2 = 0$ ہے۔

مثال 5.26 محدّ محورات پر خط $4x - 9y + 36 = 0$ سے بننے والے مقطوعات معلوم کیجئے۔

حل : دئے گئے خط کی مساوات $4x - 9y + 36 = 0$ ہے۔

(معیاری شکل میں لایا گیا) $4x - 9y = -36$ ہم اِس کو اس طرح لکھتے ہیں

-36 سے تقسیم کرنے پر ہمیں حاصل ہوا۔

$$\frac{x}{-9} + \frac{y}{4} = 1 \ldots (1)$$

(1) کو مقطوعہ شکل سے موازنہ کرنے پر ، ہمیں x کا مقطوعہ $a = -9$ ، y مقطوعہ $b = 4$ حاصل ہوتا ہے۔

مثال 5.27 ایک موبائل فون کا استعمال اُس وقت کیا گیا جب اُس کی بیٹری کی قوت (Battery) 100% تھی۔ فون کو x گھنٹے استعمال کرنے کے بعد ، بیٹری کی قوت y فیصد باقی ہے۔ قیاس کریں کہ $y = -0.25x + 1$ ہے۔



خاکہ 5.36

i) اگر بیٹری کی قوت 40% ہو تو فون کتنے گھنٹے استعمال ہو چکا ہے۔

ii) بیٹری کی قوت مکمل طور پر ختم ہونے کے لئے کتنا وقت لگتا ہے۔

حل : i) جب بیٹری 40% ہو تو وقت کو معلوم کرنا، ہمیں $y = 0.40$ لینا ہوگا۔

$0.40 = -0.25x + 1$ سے ہمیں حاصل ہوتا ہے $0.25x = 0.60$

$x = \frac{0.60}{0.25} = 2.4$ گھنٹے ہمیں حاصل ہوتا ہے $x = 2.4$ گھنٹے

ii) اگر بیٹری کی قوت صفر ہو تو $y = 0$

چنانچہ، $0 = -0.25x + 1 \Leftarrow -0.25x = 1 \Leftarrow x = 4$ گھنٹے

اس طرح 4 گھنٹے کے بعد موبائل فون میں بیٹری کی قوت نہیں رہے گی۔

10th maths 5. co-ord geo
Sunday, February 16, 2020 2:04:42 PM

مثال 5.28 ایک خط محدّد محورات پر مثبت مقطوعات بناتی ہے۔ جس کا حاصل جمع 7 ہے اور یہ $(-3,8)$ سے گزرتی ہے۔ اس کی مساوات معلوم کیجئے۔

حل : اگر a اور b مقطوعات ہو تو $a+b=7$ (یا) $b=7-a$

مقطوعات کی شکل سے، $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ... (1)

ہم رکھتے ہیں $\frac{x}{a}+\frac{y}{7-a}=1$

نقطہ $(-3,8)$ اس خط سے گزرتی ہے تو ،

ہمیں حاصل ہوتا ہے $\frac{-3}{a}+\frac{8}{7-a}=1$

$$-3(7-a)+8a=a(7-a)$$

$$-21+3a+8a=7a-a^2$$

$$a^2+4a-21=0$$

اس مساوات کو حل کرنے پر $(a-3)(a+7)=0$

$a=3$ یا $a=-7$

چونکہ a مثبت ہے، ہم $a=3$ اور $b=7-a=7-3=4$.

لہذا $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$

چنانچہ ، $4x+3y-12=0$ مطلوبہ مساوات ہے۔

مثال 5.29 ایک دائرہ نما باغ (پارک) مشرقی اقبال سڑک اور ٹیپو سلطان ترچھی روڈ سے گھیرا ہوا ہے۔ شمال سڑک ، ٹیپو سلطان ترچھی سڑک کو D پر اور مشرقی اقبال سڑک کو E پر قطع کرتا ہے۔ AD نقطہ $A(3,10)$ پر دائرہ نما باغ کا مماس ہے۔ خاکہ کو استعمال کرکے **a)** ان کے مساوات معلوم کیجئے۔

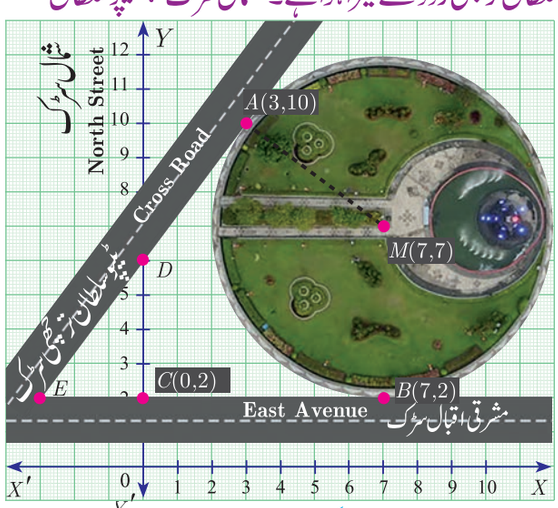
i) مشرقی اقبال سڑک

ii) شمال سڑک

iii) ٹیپو سلطان ترچھی سڑک

b) ٹیپو سلطان ترچھی سڑک کس مقام پر قطع کرتی ہے۔

i) شمال سڑک؟ ii) مشرقی اقبال سڑک؟



خاکہ 5.37

حل : a) i) نقاط $C(0,2)$ اور $B(7,2)$ ملانے والی خط مستقیم مشرقی اقبال سڑک ہے۔ اس طرح مشرقی اقبال سڑک کی مساوات کو دو نقاط شکل کو استعمال کرکے حاصل کرتے ہیں۔ جو یہ ہے

$$\frac{y-2}{2-2}=\frac{x-0}{7-0}$$

ہمیں حاصل ہوتا ہے $\frac{y-2}{0}=\frac{x}{7}$ $y=2$

10th maths 5. co-ord geo
Sunday, February 16, 2020 2:04:44 PM

ii) چونکہ نقطہ D عمودی طور پر نقطہ $C(0,2)$ اور واقع ہے۔ D کا محدّد 0 ہے۔ چونکہ شمالی سڑک پر کوئی بھی نقطہ x محدّد کی قیمت 0 ہے۔ چنانچہ شمالی سڑک کی مساوات $x = 0$ ہے۔

iii) ٹیپو سلطان ترچھی سڑک کی مساوات معلوم کرنا۔ دائرہ نما باغ کا مرکز $M(7,7)$ ، $A(3,10)$ ہے۔

پہلے ہم MA کا میلان دریافت کریں گے جس کو ہم m_1 نام دیں گے۔

اس طرح، $$m_1 = \frac{10-7}{3-7} = \frac{-3}{4}$$

چونکہ ٹیپو سلطان ترچھی سڑک، MA کے عمودی ہے۔ اگر m_2 ترچھی سڑک کا میلان ہو تو

ترچھی سڑک کا میلان $$m_1 m_2 = -1 \Rightarrow \frac{-3}{4} m_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad m_2 = \frac{4}{3}$$

اور جو نقطہ $A(3,10)$ سے گزرتی ہے۔

ترچھی سڑک کی مساوات $$y - 10 = \frac{4}{3}(x-3)$$

$$= \quad 3y - 30 = 4x - 12$$

لہذا، $$4x - 3y + 18 = 0$$

(b) اگر $D(0,k)$ ہو تو ترچھی سڑک پر ایک نقطہ D ہے۔ چنانچہ ، $x = 0$ ،

$y = k$ کو ترچھی سڑک کے مساوات میں درج کرنے پر،

$$0 - 3k + 18 = 0$$

ہمیں حاصل ہوا $$k = 6$$

چنانچہ $D(0,6)$ ہے۔

(ii) E معلوم کرنے کے لئے ، فرض کیجئے $E(q,2)$ ہے۔

$y = 2$ کو ترچھی سڑک کے مساوات میں درج کریں۔

ہمیں حاصل ہوا۔ $$4q - 6 + 18 = 0$$

$$4q = -12 \quad \Rightarrow \quad q = -3$$

چنانچہ ، نقطہ $E(-3,2)$ ہے۔

اس طرح ترچھی سڑک شمال سڑک $D(0,6)$ پر اور مشرقی اقبال سڑک $E(-3,2)$ پر ملتے ہیں۔

Progress Check اپنی پیش رفت کی جانچ

شمار عدد	مساوات	میلان	x مقطوعہ	y مقطوعہ
1	$3x - 4y + 2 = 0$	---	---	---
2	$y = 14x$	---	---	0
3	---	---	2	-3

10th maths 5. co-ord geo
Sunday, February 16, 2020 2:04:44 PM

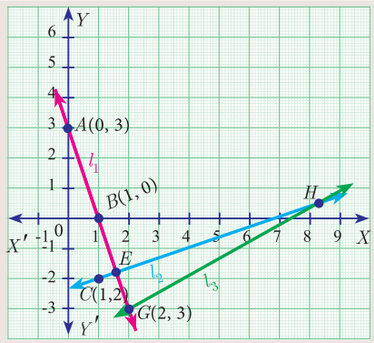
Activity 4 — کارروائی 4

اگر خط l_1 عمودی ہے خط l_1 سے اور خط l_3 کا میلان 3 ہو تو

i) خط l_1 کی مساوات معلوم کیجئے۔

ii) خط l_2 کی مساوات معلوم کیجئے۔

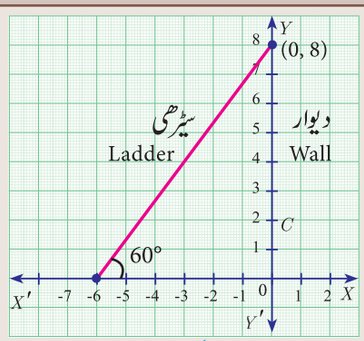
iii) خط l_3 کی مساوات معلوم کیجئے۔



خاکہ 5.38

Activity 5 — کارروائی 5

ایک سیڑھی کی عمودی دیوار پر جھکائی گئی ہے۔ سیڑھی کا قدم افقی فرش کو چھوتا ہے۔ سیڑھی کی مساوات کو ذیل کے شرائط کے ذریعہ معلوم کیجئے۔

شمار عدد	شرط	تصویر	سیڑھی کی مساوات
(i)	سیڑھی فرش سے $60°$ پر جھکی ہوئی ہے اور دیوار کو $(0,8)$ پر مس کرتی ہے		ـــــ
(ii)	سیڑھی کے اوپری اور نچلے نقاط $(2,4)$ اور $(5,1)$ ہیں	ـــــ	ـــــ

خاکہ 5.39

مشق 5.3

1۔ خط مستقیم کی مساوات معلوم کیجئے جو نقاط $(5, -1)$ اور $(4,2)$ کو ملانے والے قطاع خط کا وسطی نقطہ سے گزرتی ہے اور متوازی ہے

(i) X محور کے (ii) Y محور کے

2۔ $2(x - y) + 5 = 0$ خطِ مستقیم کی مساوات ہے اس کا میلان، زاویہ میلان اور Y محور پر مقطوعہ معلوم کیجئے۔

3۔ خط کی مساوات معلوم کیجئے جس کا زاویہ میلان $30°$ ہے اور Y محور پر مقطوعہ -3 ہے۔

4۔ $\sqrt{3}x + (1 - \sqrt{3})y = 3$ کا میلان اور y مقطوعہ معلوم کیجئے۔

5۔ 'a' کی قیمت معلوم کیجئے اگر خط $(-2,3)$ اور $(8,5)$ سے گزرتی ہے وہ $y = ax + 2$ سے عمودی ہے۔

10th maths 5. co-ord geo
Sunday, February 16, 2020 2:04:45 PM

6۔ پہاڑ مثلث کی شکل میں ہے جس کا قدم $(19,3)$ ہے۔ پہاڑ سے زمین کا زاویہ میلان $45°$ ہے۔ پہاڑ کے قدم اور چوٹی کو ملانے والے خط کی مساوات معلوم کیجئے۔

7۔ خط کی مساوات معلوم کیجئے جو ذیل کے دئے گئے نقطوں سے گزرتی ہے۔

(i) $\left(2,\frac{2}{3}\right)$ اور $\left(\frac{-1}{2},-2\right)$ (ii) $(2,3)$ اور $(-7,-1)$

8۔ xy مسطح پر نقطہ $(-6,-4)$ پر ایک بلّی بیٹھی ہوئی ہے۔ ایک دودھ کا بوبل $(5,11)$ پر رکھا ہوا ہے۔ بلّی سب سے مختصر ترین فاصلہ سے گزر کر دودھ پینا چاہتی ہے۔ دودھ حاصل کرنے کے لئے راستہ کی مساوات معلوم کیجئے۔

9۔ ایک ΔABC کے راسیں $A(6,2)$ ، $B(-5,-1)$ اور $C(1,9)$ ہیں۔ راس A سے گزرنے والے (i) خط وسطی اور (ii) ارتفاع کی مساوات معلوم کیجئے۔

10۔ خط مستقیم کی مساوات معلوم کیجئے۔ جو نقاط $(-1,2)$ سے گزرتی ہے جس کا میلان $\frac{-5}{4}$ ہے۔

11۔ ایک گانے کو تم ڈاؤن لوڈ کر رہے ہو۔ y فیصد (عشری شکل میں) (Mega bytes) میگا بیٹس ڈاؤن لوڈ ہونا باقی ہے۔ x سکنڈ میں $y = 0.1x + 1$ دیا گیا ہے۔ دریافت کیجئے۔

i) گانے کا کل MB ii) 75% گانا کتنے سکنڈوں میں ڈاؤن لوڈ ہوگا۔ iii) کتنے سکنڈوں کے بعد گانا مکمل ڈاؤن لوڈ ہوگا؟

12۔ خط کی مساوات معلوم کیجئے۔ جن کے محوروں پر x اور y مقطوعات ذیل میں دئے گئے ہیں۔ **(i)** $4, -6$ **(ii)** $-5, \frac{3}{4}$

13۔ ذیل میں دئے گئے خطوط پر محدّد محورات کے مقطوعات معلوم کیجئے۔ (i) $3x - 2y - 6 = 0$ (ii) $4x + 3y + 12 = 0$

14۔ خط مستقیم کے مساوات معلوم کیجئے ۔

i) جو نقطہ $(-4,-1)$ سے گزرتی ہے اور اس کے مقطوعات کی نسبت $2:5$ ہے۔

ii) جو نقطہ $(-8,4)$ سے گزرتی ہے۔ اور محدّد محورات پر مساوی مقطوعات بناتے ہیں۔

5.6 خط مستقیم کی عام شکل General form of a Straight line

خطی مساوات (پہلے درجے کی کثیر رقمی میں دو متغیرات x اور y ہیں) $a x + b y + c = 0$ (جس میں a ، b ، c حقیقی ہیں۔ اس طرح a , b میں کم از کم ایک غیر صفری (non zero) ہے) ہمیشہ خط مستقیم کو ظاہر کرتے ہیں۔ یہ خط مستقیم کی عام شکل ہے۔ آیئے اب ہم، ذیل کی صورتوں میں خط مستقیم کے مساوات معلوم کریں گے۔

(i) $a x + b y + c = 0$ سے متوازی ہے۔
(ii) $a x + b y + c = 0$ عمودی ہے۔

5.6.1 خط $a x + b y + c = 0$ کے متوازی خط کی مساوات

Equation of a line parallel to the line $a x + b y + c = 0$

خط $a x + b y + c = 0$ کے تمام متوازی خطوط کی مساوات شکل k کی مختلف قیمتوں کے لئے $a x + b y + k = 0$ ہے۔

5.6.2 خط $a x + b y + c = 0$ کے عمودی خط کی مساوات

Equation of a perpendicular to the line $a x + b y + c = 0$

خط $a x + b y + c = 0$ کے تمام عمودی خطوط کی مساوات کی شکل k کی مختلف قیمتوں کے لئے $b x - a y + k = 0$ ہے۔

10th maths 5. co-ord geo
Sunday, February 16, 2020 2:04:46 PM

دوخطوطِ مستقیم $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ اور $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ جہاں ضریب صفر نہیں ہیں۔

i) متوازی ہوتے ہیں اگر صرف اور صرف $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ ، یعنی $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ ہمیں حاصل ہوتا ہے $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$

ii) عمودی ہوتے ہیں اگر صرف اور صرف $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$

Progress Check اپنی پیش رفت کی جانچ

شمارعدد	مساوات	متوازی یا عمودی	شمارعدد	مساوات	متوازی یا عمودی
1	$5x + 2y + 5 = 0$ $5x + 2y - 3 = 0$		3	$8x - 10y + 11 = 0$ $4x - 5y + 16 = 0$	
2	$3x - 7y - 6 = 0$ $7x + 3y + 8 = 0$		4	$2y - 9x - 7 = 0$ $27y + 6x - 21 = 0$	

5.6.3 خط مستقیم کا میلان Slope of a straight line

خط مستقیم کی مساوات کی عام مشکل $ax + by + c = 0$ ہے۔ (a ، b میں کم از کم ایک غیر صفری ہو)

$x = a$ کا ضریب ، $y = b$ کا ضریب ، c = مستقل رقم

اوپر کی مساوات کو $by = -ax - c$ کی طرح لکھا جاسکتا ہے۔

اگر $b \neq 0$ $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ (1)

(1) کو $y = mx + l$ کی شکل سے موازنہ کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

میلان $m = -\frac{a}{b}$

میلان $m = \frac{-\ x \text{ کا ضریب}}{y \text{ کا ضریب}}$

y مقطوعہ $l = -\frac{c}{b}$

y مقطوعہ $= \frac{-\ \text{مستقل رقم}}{y \text{ کا ضریب}}$

ذرا سوچئے

میلان 1 میں تم کتنے خطوط مستقیم رکھتے ہو؟

مثال 5.30 خط مستقیم $6x + 8y + 7 = 0$ کا میلان معلوم کیجئے

حل : دیا گیا ہے $6x + 8y + 7 = 0$

میلان $m = \frac{-\ x \text{ کا ضریب}}{y \text{ کا ضریب}} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$

چنانچہ ، خط مستقیم کا میلان $-\frac{3}{4}$ ہے

مثال 5.31 خط کا میلان معلوم کیجئے جو i) $3x - 7y = 11$ کے متوازی ہے ii) $2x - 3y + 8 = 0$ کے عمودی ہے

10th maths 5. co-ord geo
Sunday, February 16, 2020 2:04:46 PM

حل : دیئے گئے مستقیم خط $3x - 7y = 11$

$$3x - 7y - 11 = 0$$

$$\text{میلان } m = \frac{-3}{-7} = \frac{3}{7}$$

چونکہ ، متوازی خط ایک یکساں میلان رکھتے ہیں، کوئی بھی خط $3x - 7y = 11$ سے متوازی ہو تو میلان $\frac{3}{7}$ ہے۔

ii) دیئے گئے خطِ مستقیم $2x - 3y + 8 = 0$ ہے

$$\text{میلان } m = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

چونکہ ، عمودی خطوط کے لئے میلان کا حاصل ضرب -1 ہے، کوئی بھی خط $2x - 3y + 8 = 0$ ہو تو میلان $\frac{-1}{\frac{2}{3}} = \frac{-3}{2}$ ہے۔

مثال 5.32 ثابت کیجئے کہ خطوطِ مستقیم $2x + 3y - 8 = 0$ اور $4x + 6y + 18 = 0$ متوازی ہیں۔

حل : خط مستقیم $2x + 3y - 8 = 0$ کا میلان

$$\text{میلان } m_1 = \frac{x \text{ کا ضریب}}{y \text{ کا ضریب}}$$

$$m_1 = \frac{-2}{3}$$

خط مستقیم $4x + 6y + 18 = 0$ کا میلان

$$m_2 = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3}$$

یہاں $m_1 = m_2$ ہے

یعنی میلان مساوی ہیں۔ لہذا دو خطوطِ مستقیم متوازی ہیں۔

دوسرا طریقہ

$a_1 = 2, b_1 = 3$

$a_2 = 4, b_2 = 6$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

چنانچہ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$

لہذا، خطوط متوازی ہیں۔

مثال 5.33 ثابت کیجئے کہ خطوطِ مستقیم $x - 2y + 3 = 0$ اور $6x + 3y + 8 = 0$ عمودی ہیں۔

حل : مستقیم $x - 2y + 3 = 0$ کا میلان

$$m_1 = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

خط مستقیم $6x + 3y + 8 = 0$ کا میلان

$$m_2 = \frac{-6}{3} = -2$$

$$m_1 \times m_2 = \frac{1}{2} \times (-2) = -1$$

لہذا ، دو خطوط مستقیم عمودی ہیں۔

دوسرا طریقہ

$a_1 = 1, b_1 = -2;$

$a_2 = 6, b_2 = 3$

$a_1a_2 + b_1b_2 = 6 - 6 = 0$

خطوط عمودی ہیں

مثال 5.34 خط مستقیم کی مساوات معلوم کیجئے۔ جو $3x - 7y = 12$ کے متوازی ہے اور نقطہ $(6,4)$ سے گزرتی ہے۔

حل : $3x - 7y - 12 = 0$ خط مستقیم کے متوازی خط کی مساوات $3x - 7y + k = 0$ چونکہ یہ نقطہ $(6,4)$ سے گزرتی ہے۔

10th maths 5. co-ord geo
Sunday, February 16, 2020 2:04:47 PM

$3(6) - 7(4) + k = 0 \qquad k = 28 - 18 = 10$

چنانچہ ، مطلوبہ خطِ مستقیم کی مساوات $3x - 7y + 10 = 0$ ہے۔

مثال 5.35 خط مستقیم کی مساوات معلوم کیجئے جو $y = \frac{4}{3}x - 7$ کے عمودی ہے اور نقطہ $(7,-1)$ سے گزرتی ہے۔

حل : $y = \frac{4}{3}x - 7$ مساوات کو اس طرح $4x - 3y - 21 = 0$ لکھ سکتے ہیں۔ $4x - 3y - 21 = 0$ خط مستقیم کے عمودی خط کی مساوات $3x + 4y + k = 0$ چونکہ یہ نقطہ $(7,-1)$ سے گزرتی ہے۔

$21 - 4 + k = 0 \quad$ ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $\quad k = -17$

چنانچہ ، مطلوبہ مستقیم کی مساوات $3x + 4y - 17 = 0$ ہے۔

مثال 5.36 خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کیجئے جو Y محور کے متوازی ہے اور جو خطوط $4x + 5y = 13$ اور $x - 8y + 9 = 0$ کے نقطۂ تقاطع گزرتی ہے۔

حل : دیئے گئے خطوط

$4x + 5y - 13 = 0 \ldots (1)$

$x - 8y + 9 = 0 \ldots (2)$

نقطۂ تقاطع معلوم کرنے کے لئے مساوات (1) اور (2) کو حل کریں

$$\begin{array}{ccccc} x & & y & & 1 \\ 5 & \times & -13 & \times & 4 \\ -8 & & 9 & & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \times \\ \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{c} 5 \\ \\ -8 \end{array}$$

$$\frac{x}{45 - 104} = \frac{y}{-13 - 36} = \frac{1}{-32 - 5}$$

$$\frac{x}{-59} = \frac{y}{-49} = \frac{1}{-37}$$

$$x = \frac{59}{37}, \quad y = \frac{49}{37}$$

چنانچہ ، نقطۂ تقاطع $(x, y) = \left(\frac{59}{37}, \frac{49}{37}\right)$

خط کی مساوات جو Y محور کے متوازی $x = c$ ہے۔

چنانچہ $c = \frac{59}{37}$. $\qquad$ $\left(\frac{59}{37}, \frac{49}{37}\right)$ سے گزرتی ہے۔

خط کی مساوات $x = \frac{59}{37}$ سے حاصل ہوا $37x - 59 = 0$ ہے۔

مثال 5.37 نقاط $A(0,5)$ اور $B(4,1)$ سے گزرنے والی خط، دائرہ کا مماس ہے جس کا مرکز C ، نقطہ $(4,4)$ ہے۔

i) خط AB کی مساوات معلوم کیجئے۔

ii) C سے گزرنے والی خط کی مساوات معلوم کیجئے جو خط AB کے عمودی ہے۔

iii) دائرہ کو مس کرنے والے خط AB کا نقطہ کے محدّدیں معلوم کیجئے۔

10th maths 5. co-ord geo
Sunday, February 16, 2020 2:04:47 PM

حل : i) خط AB کی مساوات $A(0,5)$ اور $B(4,1)$

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y-5}{1-5} = \frac{x-0}{4-0}$$

$4(y-5) = -4x$ سے حاصل ہوا $y-5 = -x$

$$x + y - 5 = 0$$

ii) خط کی مساوات جو خط AB کے عمودی ہے۔

$x + y - 5 = 0$ $\qquad$ $x - y + k = 0$ ہے۔

چونکہ ، نقطہ $(4,4)$ سے گزرتی ہے۔

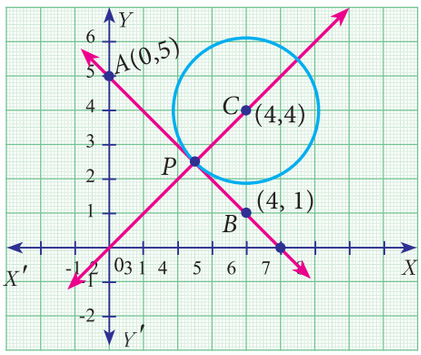
C سے گزرنے والی خط کی مساوات جو خط AB کے عمودی $x - y = 0$ ..... (2)

iii) دائرہ کو مس کرنے والے خطِ AB کا نقطہ P کے محدّد یں جو خط کا نقطۂ تقاطع ہے۔

$x + y - 5 = 0$ اور $x - y = 0$

حل کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $x = \frac{5}{2}$ اور $y = \frac{5}{2}$

چنانچہ ، مس کرنے والے نقطہ کا محدّد $P\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ ہے۔



خاکہ 5.40



ذرا سوچئے

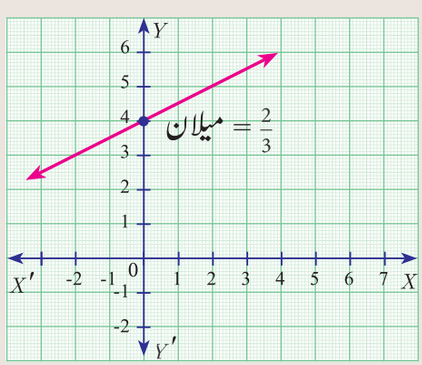
1۔ دو خطوط مستقیم میں نقطۂ تقاطع کی تعداد معلوم کیجئے۔

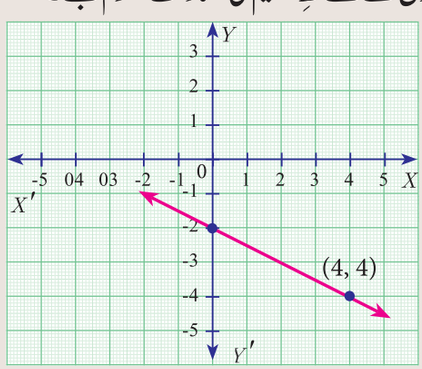
2۔ $2x - 3y + 6 = 0$ خط کے عمودی خطوط مستقیم کی تعداد معلوم کیجئے۔

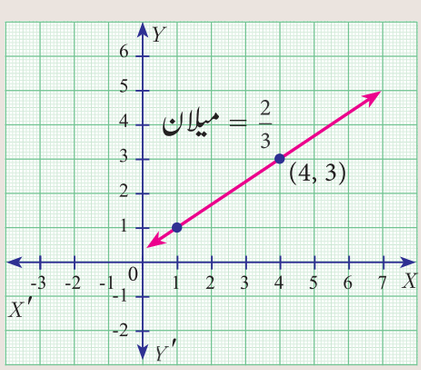


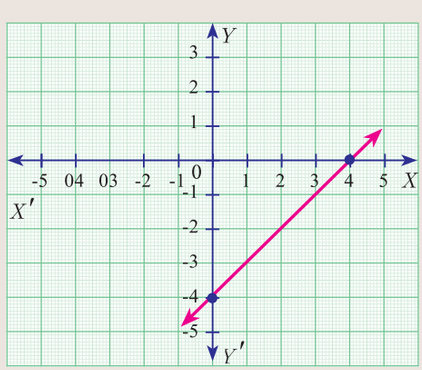
Activity 6 کارروائی 6

دئے گئے خاکوں کے لئے خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کیجئے۔









خاکہ 5.41

10th maths 5. co-ord geo
Sunday, February 16, 2020 2:04:49 PM

مشق 5.4

1۔ ذیل کے خطوطِ مستقیم کے لئے میلان معلوم کیجئے۔ (ii) $7x - \frac{3}{17} = 0$ $5y - 3 = 0$

2۔ خط کا میلان معلوم کیجئے جو (i $y = 0.7x - 11$ کے متوازی ہے (ii $x = -11$ خط کے عمودی ہے

3۔ جانچئے کہ دئے گئے خطوط متوازی یا عمودی ہیں۔ (i) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{1}{7} = 0$ اور $\frac{2x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{1}{10} = 0$

(ii) $5x + 23y + 14 = 0$ اور $23x - 5y + 9 = 0$

4۔ 'p' کی قیمت معلوم کیجئے جب کہ خطوطِ مستقیم $12y = -(p + 3)x + 12$ اور $12x - 7y = 16$ عمودی ہیں۔

5۔ نقطہ $P(-5,2)$ سے گزرنے والی خط مستقیم کی مساوات معلوم کیجئے اور نقاط $Q(3,-2)$ اور $R(-5,4)$ کو ملانے والے خط کے متوازی ہے۔

6۔ نقطہ $(6,-2)$ سے گزرنے والی خط کی مساوات معلوم کیجئے۔ اور نقاط $(6,7)$ اور $(2,-3)$ کو ملانے والے خط کے عمودی ہے۔

7۔ ΔABC کے راسیں $A(-3,0)$ ، $B(10,-2)$ اور $C(12,3)$ ہیں۔ A اور B سے گزرنے والے ارتفاع کے خط کی مساوات معلوم کیجئے۔

8۔ $A(-4,2)$ اور $B(6,-4)$ نقاط کو ملانے والی خطِ مستقیم کے عمودی ناصف کی مساوات معلوم کیجئے۔

9۔ خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کیجئے جو خطوطِ مستقیم $7x + 3y = 10$ ، $5x - 4y = 1$ کے نقطۂ تقاطع سے گزرتی ہے اور خط $13x + 5y + 12 = 0$ کے متوازی ہے۔

10۔ خط مستقیم کی مساوات معلوم کیجئے جو خطوطِ مستقیم $5x - 6y = 2$ ، $3x + 2y = 10$ کے نقطۂ تقاطع سے گذرتی ہے۔ اور خط $4x - 7y + 13 = 0$ کے عمودی ہے۔

11۔ خط مستقیم کی مساوات معلوم کیجئے جو خطوط $3x + y + 2 = 0$ اور $x - 2y - 4 = 0$ کے نقطۂ تقاطع اور خطوط $7x - 3y = -12$ اور $2y = x + 3$ نقطۂ تقاطع کو ملاتی ہے۔

12۔ خط مستقیم کی مساوات معلوم کیجئے۔ جو خطوط $8x + 3y = 18$ ، $4x + 5y = 9$ کے نقطۂ تقاطع اور نقاط $(5,-4)$ اور $(-7,6)$ کو ملانے والے قطاع خط کو تنصیف کرتا ہے۔

GF86M

مشق 5.5

کثیر انتخابی سوالات Multiple choice questions

1۔ نقاط $(-5,0)$ ، $(0,-5)$ اور $(5,0)$ سے بنے ہوئے مثلث کا رقبہ ہے۔

1) 0 مربع اکائیاں (2) 25 مربع اکائیاں (3) 5 مربع اکائیاں 4) ان میں سے کوئی بھی نہیں

2۔ ایک شخص دیوار کے قریب اس طرح چل رہا کہ اس کے اور دیوار کے درمیانی فاصلہ 10 اکائیاں ہے۔ فرض کیجئے کہ دیوار Y محور ہے۔ اس شخص سے طے کردہ فاصلہ

(1) $x = 10$ (2) $y = 10$ (3) $x = 0$ (4) $y = 0$

3۔ دی گئی مساوات $x = 11$ ، خط مستقیم کے

a) X محور کے متوازی b) Y محور کے متوازی c) مبداء سے گزرتی ہے d) $(0,11)$ سے گزرتی ہے

10th maths 5. co-ord geo
Sunday, February 16, 2020 2:04:50 PM

4۔ اگر $(5,7)$ ، $(3,p)$ اور $(6,6)$ نقاط ہم خط ہوتو ' p ' قیمت ہے۔

(1) 3 (2) 6 (3) 9 (4) 12

5۔ $3x-y$ 4 اور $x+y=8$ کا نقطہ تقاطع ہے۔

(1) $(5,3)$ (2) $(2,4)$ (3) $(3,5)$ (4) $(4,4)$

6۔ نقاط $(12,3)$ ، $(4,a)$ کو ملانے والے خط کا میلان $\frac{1}{8}$ ہے تو ' a ' قیمت ..... ہے۔

(1) 1 (2) 4 (3) -5 (4) 2

7۔ خط کا میلان جو نقاط $(0,0)$ اور $(-8,8)$ کو ملانے والے خط کے عمودی ہے۔

(1) -1 (2) 1 (3) $\frac{1}{3}$ (4) -8

8۔ اگر PQ خط کا میلان $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ہوتو PQ عمودی ناصف کا میلان ہے۔

(1) $\sqrt{3}$ (2) $-\sqrt{3}$ (3) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (4) 0

9۔ اگر نقطہ A ، Y محور پر ہے جس کا نقطہ معین (Ordinate) 8 ہے اور نقطہ B ، X محور پر ہے جس کا نقطہ حدف (abscissa) 5 ہوتو خط AB کی مساوات ہوگی۔

(1) $8x+5y=40$ (2) $8x-5y=40$ (3) $x=8$ (4) $y=5$

10۔ ایک خط کی مساوات مبداء سے گذرتی ہے اور خط $7x-3y+4=0$ کے عمودی ہے۔

(1) $7x-3y+4=0$ (2) $3x-7y+4=0$ (3) $3x+7y=0$ (4) $7x-3y=0$

11۔ فرض کریں چار خطوطِ مستقیم،

(i) l_1 ; $3y=4x+5$ (ii) l_2 ; $4y=3x-1$ (iii) l_3 ; $4y+3x=7$ (iv) l_4 ; $4x+3y=2$

ذیل میں کونسا بیان صحیح نہیں ہے۔

1) l_1 اور l_3 عمودی ہیں 2) l_1 اور l_4 متوازی نہیں ہیں 3) l_2 اور l_4 عمودی نہیں ہیں 4) l_2 اور l_3 متوازی نہیں ہیں

12۔ خط مستقیم کی مساوات $8y=4x+21$ ہے ذیل میں کونسا صحیح ہے۔

1) میلان 0.5 ہے اور y مقطوعہ 2.6 ہے۔
2) میلان 5 ہے اور y مقطوعہ 1.6 ہے۔
3) میلان 0.5 ہے اور y مقطوعہ 1.6 ہے۔
4) میلان 5 ہے اور y مقطوعہ 2.6 ہے۔

13۔ جب ایک چار ضلعی کو منحرف ثابت کرتے ہیں تو یہ دیکھنا لازمی ہے کہ

1) دو خطوط متوازی ہیں
2) دو متوازی اور دو غیر متوازی اضلاع ہیں۔
3) مقابل کے اضلاع متوازی ہیں۔
4) تمام اضلاع مساوی طول رکھتے ہیں۔

14۔ جب ایک چار ضلعی کو متوازی الاضلاع ثابت کرنے کے لئے میلان کا استعمال کرتے ہیں۔ تمہیں معلوم کرنا ہوگا۔

1۔ چاروں اضلاع کے تمام میلان
2۔ مقابل اضلاع کوئی ایک جوڑی کا میلان
3۔ چاروں اضلاع کے طول
4۔ چاروں اضلاع کے طول اور میلان دونوں

15۔ دو خطوط کا نقطہ تقاطع $(2,1)$ ہے۔

(1) $x-y-3=0;\ 3x-y-7=0$
(2) $x+y=3;\ 3x+y=7$
(3) $3x+y=3;\ x+y=7$
(4) $x+3y-3=0;\ x-y-7=0$

10th maths 5. co-ord geo
Sunday, February 16, 2020 2:04:51 PM



Unit Exercise - 5 اکائی مشق 5

1۔ نقاط $P(-1,-1)$ ، $Q(-1,4)$ ، $R(5,4)$ اور $S(5,-1)$ کو ملانے سے ایک مستطیل $PQRS$ بنتا ہے۔ A ، B ، C اور D بالترتیب PQ ، QR ، RS اور SP کے وسطی نقاط ہیں۔ کیا $ABCD$ چارضلعی ، مربع یا مستطیل یا معین ہے ؟ تمہارے جواب کی تصدیق کیجئے۔

2۔ مثلث کا رقبہ 5 ہے اس کے دو راسیں $(2,1)$ اور $(3,-2)$ ہیں تیسرا راس (x,y) ہے جس میں $y = x + 3$ ہے تیسرے راس کے محدّدیں معلوم کیجئے۔

3۔ خطوط $3x + y - 2 = 0$ ، $5x + 2y - 3 = 0$ اور $2x - y - 3 = 0$ سے بنے ہوئے مثلث کا رقبہ معلوم کیجئے۔

4۔ اگر چار ضلعی راسیں $A(-5,7)$ ، $B(-4,k)$ ، $C(-1,-6)$ اور $D(4,5)$ ہیں اور اس کا رقبہ 72 مربع اکائیاں ہے۔ k کی قیمت معلوم کیجئے۔

5۔ فاصلے کے ضابطہ کو استعمال کئے بغیر ثابت کیجئے کہ نقاط $(-1,-2)$، $(4,0)$، $(3,3)$ اور $(-3,2)$ ایک متوازی الاضلاع کے راسیں ہیں۔

6۔ خطوط کی مساوات معلوم کیجئے جن کے مقطوعات کا حاصل جمع اور حاصل ضرب بالترتیب 1 اور -6 ہیں۔

7۔ دودھ کے دوکان کا مالک یہ معلوم کرتا ہے کہ ہر ہفتے ₹14 فی لیٹر سے 980 لیٹر دودھ فروخت کرسکتا ہے اور ₹16 فی لیٹر سے 1220 لیٹر دودھ ہر ہفتہ فروخت کرتا ہے۔ قیاس کریں کہ قیمت فروخت اور مانگ کے درمیان خطی تعلق ہے۔ ہفتے میں ₹ 17 فی لیٹر سے کتنے لیٹر فروخت کرے گا۔

8۔ نقطہ $(3,8)$ کے لحاظ سے خط $x + 3y = 7$ کا خیال (Image) معلوم کیجئے۔ قیاس کریں کہ خط مستوی آئینہ ہے۔

9۔ ایک خط مساوات معلوم کیجئے جو خطوط $4x + 7y - 3 = 0$ اور $2x - 3y + 1 = 0$ کے نقطۂ تقاطع سے گزرتی ہے وہ محورات پر مساوی مقطوعات رکھتا ہے۔

10۔ ایک شخص دو مستقیم سڑکوں کے سنگم (Junction) پر کھڑا ہوا ہے۔ جس کے مساوات $2x - 3 + 4 = 0$ اور $3x + 4y - 5 = 0$ ہیں۔ کم وقفہ پر پہنچنے کے لئے مساوات $6x - 7y + 8 = 0$ ہے۔ سڑک کی مساوات معلوم کیجئے۔ جس کو اپنانا چاہئے۔



یاد رکھنے کے نکات

☆ نقاط (x_1,y_1)، (x_2,y_2) اور (x_3,y_3) سے بننے والے مثلث کا رقبہ ،
$\frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\}$ مربع اکائیاں ہے

☆ تین نقاط (x_1,y_1)، (x_2,y_2) اور (x_3,y_3) ہم خط ہیں اگر صرف اور صرف

i) $\Delta ABC = 0$ کا رقبہ (یا) $x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 = x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3$

ii) $AB = AC$ کا میلان (یا) BC کا میلان

☆ نقاط (x_1,y_1)، (x_2,y_2)، (x_3,y_3) اور (x_4,y_4) سے بننے والے چارضلعی کا رقبہ ،
$\frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_4y_3 + x_1y_4)\}$ مربع اکائیاں ہے۔

☆ ایک خط X محور کے مثبت سمت میں زاویہ بناتا ہے تو اس کا میلان $m = \tan\theta$ ہے۔

☆ اگر $A(x_1,y_1)$، $B(x_2,y_2)$ دو مختلف نقاط ہو تو AB کا میلان $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ ہے۔

☆ خط $ax + by + c = 0$ کا میلان ، $m = \frac{-a}{b}$ ہے۔

10th maths 5. co-ord geo
Sunday, February 16, 2020 2:04:51 PM

Equation of straight line in various forms

مختلف شکلوں میں خط مستقیم کی مساوات

نام	شکل	نام	شکل
$ax + by + c = 0$	معیاری شکل	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$	مقطوعہ شکل
$y - y_1 = m(x - x_1)$	میلان۔نقطہ کی شکل	$x = c$	Y محور کے متوازی
$y = mx + c$	میلان مقطوعہ کی شکل	$y = b$	X محور کے متوازی
$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$	دونقاط کی شکل		

☆ دوخطوط مستقیم متوازی ہیں اگر صرف اور صرف ان کے میلان مساوی ہوں۔

☆ دوخطوط مستقیم جس کے واضح میلان m_1 اور m_2 ایک دوسرے کے عمودی ہیں اگر صرف اور صرف $m_1m_2 = -1$ ہوں۔

ICT CORNER — ICT کارنر

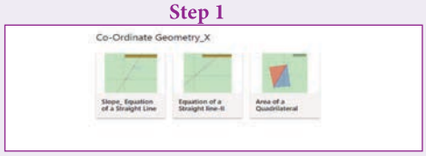
ICT 5.1

مرحلہ 1 : براؤزر کھولئے اور دئے گئے URL کو ٹائپ کیجئے یا QR کوڈ کو اسکین کیجئے۔GeoGebra نامی Corodinate Geometry کھلے گا۔ ورک بک کے بائیں جانب بہت ساری مساحت سبق سے تعلق رکھنے والے کارروائیاں ہونگے۔ ان میں Area of Quadrilateral ورک شیٹ کو Select کریں۔

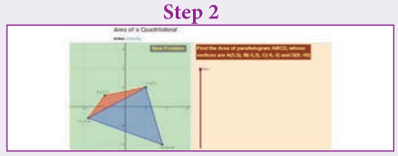
مرحلہ 2 : دئے گئے ورک شیٹ میں سوالات کو تبدیل کرنے کے لئے "New Problem" پر Click کریں۔

سلائڈر کو حرکت دے کر مرحلوں کو دیکھیں۔ ہر سوال کو حل کر کے تمہارے جواب کی تصدیق کیجئے۔

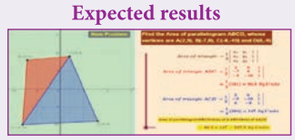
Step 1



Step 2



Expected results

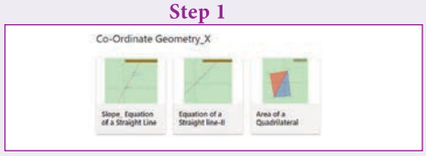


ICT 5.2

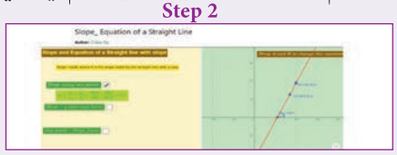
مرحلہ 1 : براؤزر کھولئے اور دئے گئے URL کو ٹائپ کیجئے یا QR کوڈ کو اسکین کیجئے۔GeoGebra نامی Co-Ordinate Geometry کھلے گا۔ ورک بک کے بائیں جانب بہت ساری مساحب سبق سے تعلق رکھنے والے کارروائیاں ہونگے۔ان میں Slope-Equation of a Straight Line ورک شیٹ کو Select کریں۔

مرحلہ2 : دئے گئے ورک شیٹ میں تم خط کو ترسیم پر نقاط A اور B کو کھینچ کر تبدیل کر سکتے ہیں۔ بائیں جانب Check Box پر Click کرنے سے تم بہت سارے مختلف شکلوں کے یکساں خط مستقیم دیکھ سکتے ہیں۔

Step 1



Step 2



Expected results



You can repeat the same steps for another activities

https://www.geogebra.org/m/jfr2zzgy#chapter/356195

or Scan the QR Code.

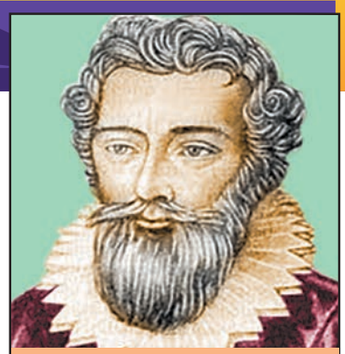
10th maths 5. co-ord geo
Sunday, February 16, 2020 2:04:52 PM

6

علم مثلث

(TRIGONOMETRY)

The deep study of nature is the most fruitful source of mathematical discoveries - Joseph Fourier.



Francois Viete
(1540–1603 AD(CE))

فرانسیسی ریاضی دان فرینکوئس ویٹی (Francois Viete) نے علم مثلث کو الجبرا کے مطالعہ (Study) میں استعمال کر کے بعض مساوات کو حل کرنے کے لئے مناسب علم مثلث کے اندراج کو عمل میں لایا۔ اس کے مشہور ضابطہ π کو علم مثلث کی نسبتوں کو بار بار دہرا کر اخذ کیا جاسکتا ہے۔ اس کی ایک مشہور تالیف جس کا عنوان ''کینن میتھما ٹیکوس'' Canon Mathematicus علم مثلث کا احاطہ کرتا ہے، اس میں علم مثلث کے جدولیں موجود ہیں ،اور اس میں علم مثلث کے جدول کی تفصلات بھی دی گئی ہیں ۔ اس میں مسطح اور کرّہ نما مثلثوں دونوں کو حل کرنے کی تفصلات دی گئی ہیں۔ اس نے تقریباً چھ درجے کے مساوات کا حل اور اس کے جذروں کو معلوم کرنے کے تدابیر بھی مہیا کئے ۔ ویٹی (Viete) نے علم ریاضی میں ضریب (Coefficient) کا تعارف کیا۔ اس نے مساوات کے جذروں کو اس کے ضریب سے تعلق کے ذریعے ایک آسان ضابطہ کو پیش کیا۔ اس نے علم ہندسہ کے طریقوں سے مکعب کو دگنا کرنے اور زاویہ کو تثلیث کرنے (تین مساوی حصوں میں تقسیم کرنا) کے حسابات کو حل کرنے کے طریقوں کو بھی پیش کیا۔ وہ رمز کشائی (Deciphering Codes) میں بھی شامل تھے۔

سیکھنے کے مقاصد

CIXVK

- علم مثلث کی نسبتوں کا اعادہ کرنا۔
- زاویہ اور علم مثلث کی نسبتوں کے درمیان کے بنیادی تعلقات کا اعادہ کرنا۔
- متمم زاویوں کے علمِ مثلث کی نسبتوں کا اعادہ کرنا۔
- علم مثلث کے تماثلات کو سمجھنا۔
- مختلف کے اشیاء کے بلندیوں اور فاصلوں سے تعلق رکھنے والے حسابات کو حل کرنے کے طریقوں کو جاننا۔

6.1 تعارف (Introduction)

قدیم دور میں اراضی کا معائنہ کرنے والے، جہاز رانی (Navigators) اور ماہر فلکیات نے مثلثوں کو استعمال کر کے ان کے فاصلوں کو دریافت کیا جن کی پیائش براہ راست نہیں کی جاسکتی تھی۔ اس کی وجہ سے علمِ ریاضی میں ایک نئی شاخ پیدا ہوئی جس کو اب ہم ''علم مثلث'' کہتے ہیں۔

روڈز کے ہپارکس (Hipparchus of Rhodes) تقریباً 200 قبل مسیح میں، اس نے دائرے کے محیط، اکائیاں $21600 = 60 \times 360$، وتروں (Chords) کی لمبائیوں کے لئے جدول کو تصنیف کیا جو محیط کی ایک اکائی کا تعلق ہر منٹ کے قوش سے رکھتا ہے۔ اس کارنامہ کے لئے ہپارکس کو ''علم مثلث کا باپ'' مانا جاتا ہے۔ چونکہ یہ مزید ترقی کے لئے بنیاد ہے۔

10th maths 6. trigometry
Monday, February 17, 2020 9:02:22 PM

پانچویں صدی میں ہندوستانی محققین (اسکالرس) نے محسوس کے کیا کہ آدھے وتریں (Half Chords) کے لئے آدھے زاوئے پر کام کرنے سے وتر کا نظریہ (Theory of chords) کو مختصر کیا جائے گا اور اس کا استعمال فلکیات میں کیا جائے گا۔ ریاضی دان جیسے آریہ بھٹا اور دوباسکر اس اور کئی دوسروں نے مل کر آدھا وتر (Jya) کی قیمتوں کو دریافت کرنے کا بہترین تکنیک کا انکشاف کیا۔

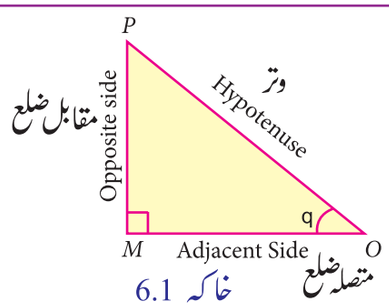
بغداد کے ریاضی دان ابوالوفا (Abu Al-wafa) کو مماس کے تفاعل (Tangent function) دریافت کیا جس کو انہوں نے سایہ (Shadow) نام دیا تھا۔ عرب کے اسکالرس لفظ Jya کا ترجمہ کرنا نہیں جاتے تھے۔ ان کی تحریروں میں اس کو Jiba لکھا جو ایک تقریباً قریبی لفظ ہے۔

عربی لفظ Jiba کا غلط معنی 'Cove' کوں یا Bay خلیج سے کیا گیا۔ ترجمہ کرنے والوں نے عربی لفظ (Jiba) جبا کو لاطینی زبان Sinus کے طور پر لکھا جو آدھا وتر کو ظاہر کرتا ہے۔ آج جو ہم Sine استعمال کر رہے ہیں۔ وہ اسی سے لیا گیا ہے۔ لفظ علم مثلث (Trigonometry) کو یونانی ریاضی دان بارتھولوماس پٹس کس نے 17 ویں صدی کے شروع میں دریافت کیا۔

اعادہ Recall

علم مثلث کی نسبتیں Trigonometrio Ratios

فرض کیجئے کہ $0° < \theta < 90°$



خاکہ 6.1

چلئے ہم OMP مثلث قائمۃ الزاویہ کو لیتے ہیں۔

$$\sin\theta = \frac{\text{opposite side}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{\text{مقابل ضلع}}{\text{وتر}} = \frac{MP}{OP}$$

$$\cos\theta = \frac{Adjacent\ side}{Hypotenuse} = \frac{\text{متصلہ ضلع}}{\text{وتر}} = \frac{OM}{OP}$$

مندرجہ بالا دو نسبتوں سے ہم دوسرے چار علم مثلث کی نسبتوں کو حاصل کر سکتے ہیں۔ وہ اس طرح ہیں۔

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\text{cosec}\,\theta = \frac{1}{\sin\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

غور کیجئے

تمام قائمۃ الزاویہ والے مثلثوں میں ایک زاویہ θ یکساں ہوتا ہے۔ لہذا علم مثلث کی نسبتیں کی وضاحت اس طرح کے قائمۃ الزاویہ والے مثلثوں سے کی جاسکتی ہے۔ ان کے علاوہ کسی بھی دوسرے مثلثوں کا انتخاب کیا نہ جائے گا۔

متمم زاویہ کے علم مثلث کی نسبتیں Trigonometric ratios of Complementary angle

$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$	$\cos(90° - \theta) = \sin\theta$	$\tan(90° - \theta) = \cot\theta$
$\text{cosec}(90° - \theta) = \sec\theta$	$\sec(90° - \theta) = \text{cosec}\,\theta$	$\cot(90° - \theta) = \tan\theta$

علم مثلث کا متمم زاویہ کا بصری ثبوت : Visual proof of Trigonometric complementary angle

فرض کیجئے کہ ایک نصف دائرہ جس کا نصف قطر 1 ہوں جیسے کہ خاکہ میں دکھایا گیا ہے۔

اگر $\angle QOP = \theta$

ہو تو $\angle QOR = 90° - \theta$ ہوگا۔ اس طرح OPQR ایک مستطیل بنتا ہے۔

مثلث OPQ سے، $\frac{OP}{OQ} = \cos\theta$

10th maths 6. trigometry
Monday, February 17, 2020 9:02:23 PM

لیکن OQ = نصف قطر = 1

چنانچہ، $OP = OQ$ $\quad \cos\theta = \cos\theta$

اسی طرح، $\dfrac{PQ}{OQ} = \sin\theta$

چونکہ $OQ = 1$) حاصل ہوتا ہے $PQ = OQ\sin\theta = \sin\theta$

$OP = \cos\theta, PQ = \sin\theta$ ..... (1)

اب، مثلث QOR سے ہمیں

لہذا $\dfrac{OR}{OQ} = \cos(90° - \theta)$

اسی طرح $OR = OQ\cos(90° - \theta)$

$OR = \cos(90° - \theta)$

اسی طرح $\dfrac{RQ}{OQ} = \sin(90° - \theta)$

ہوتو $RQ = \sin(90° - \theta)$

$OR = \cos(90° - \theta), RQ = \sin(90° - \theta)$ (2)

چونکہ $OPQR$ ایک مستطیل ہے

لہذا، (1) اور (2) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

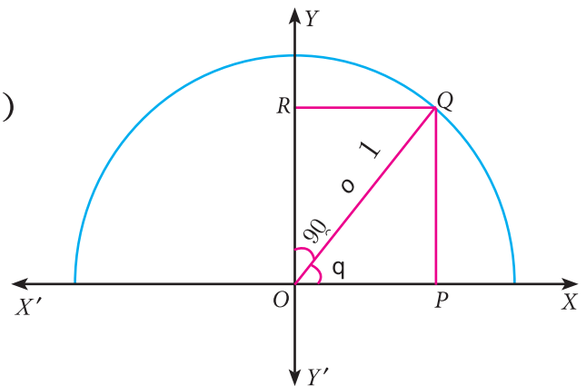


Fig. 6.2

$\cos(90° - \theta) = \sin\theta$ اور $\sin(90° - \theta) = \cos\theta$

غور کیجئے

$(\sin\theta)^2 = \sin^2\theta$	$(\text{cosec}\,\theta)^2 = \text{cosec}^2\theta$
$(\cos\theta)^2 = \cos^2\theta$	$(\sec\theta)^2 = \sec^2\theta$
$(\tan\theta)^2 = \tan^2\theta$	$(\cot\theta)^2 = \cot^2\theta$

0°، 30°، 45°، 60°، 90° کے لئے علم مثلث کی نسبتوں کی جدول

علم مثلث کی نسبت / θ	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	غیر واضح
$\text{cosec}\,\theta$	غیر واضح	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
$\sec\theta$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	غیر واضح
$\cot\theta$	غیر واضح	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

10th maths 6. trigometry
Monday, February 17, 2020 9:02:23 PM

Thinking Corner ذرا سوچئے

1۔ کب $\sin\theta$ اور $\cos\theta$ کی قیمتیں مساوی ہوں گی؟

2۔ θ کی کس قیمت پر، $\sin\theta = 2$ ہوگا؟

3۔ علم مثلث کی چھ نسبتوں کی مقداروں میں زاویہ θ کی قیمت 0° سے 90° بڑھتی ہے۔ تو علم مثلث کی چھ مقداروں میں کن قیمتوں پر غیر واضح قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

4۔ کیا آٹھ علم مثلث کی نسبتیں ممکن ہیں؟

5۔ فرض کیجئے $0^\circ \le \theta \le 90^\circ$ ہے۔ θ کی کونسی قیمتیں ذیل کو حل کرتے ہیں۔

(i) $\sin\theta > \cos\theta$ (ii) $\cos\theta > \sin\theta$ (iii) $\sec\theta = 2\tan\theta$ (iv) $\operatorname{cosec}\theta = 2\cot\theta$

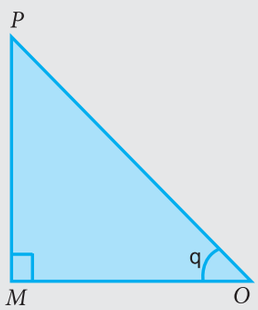
6.2 علم مثلث کے تماثلات Trigonometric identities

θ کے تمام حقیقی قیمتوں کے لئے ہمیں ذیل کے تین تماثلات ہیں۔

(i) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ (ii) $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ (iii) $1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$

ان تماثلات کو علم مثلث کے تین بنیادی تماثلات کے طور پر موسوم کیا جاتا ہے۔

اب ہم انہیں ذیل میں ثابت کریں گے۔

تصویر	تماثل	ثبوت
 Fig. 6.3	$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$	مثلث قائمۃ الزاویہ OMP سے ہم اخذ کرتے ہیں۔ $\frac{OM}{OP} = \cos\theta, \quad \frac{PM}{OP} = \sin\theta \ldots(1)$ مسئلہ فیثاغورث کے تحت، $MP^2 + OM^2 = OP^2 \ldots(2)$ (2) کے دونوں جانب کے ہر ایک رقم کو OP^2 تقسیم کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ (جبکہ $OP \neq 0$) $\frac{MP^2}{OP^2} + \frac{OM^2}{OP^2} = \frac{OP^2}{OP^2}$ $\left(\frac{MP}{OP}\right)^2 + \left(\frac{OM}{OP}\right)^2 = \left(\frac{OP}{OP}\right)^2$ $(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1^2$ ، (1) سے، لہذا $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

10th maths 6. trigometry
Monday, February 17, 2020 9:02:23 PM

	$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$	مثلث قائمۃ الزاویہ OMP سے ہم اخذ کرتے ہیں۔ $\frac{MP}{OM}=\tan\theta,\quad \frac{OP}{OM}=\sec\theta \quad ...(3)$ From (2), $MP^2+OM^2=OP^2$ (2) کے دونوں جانب کے ہر ایک رقم کو OM^2 تقسیم کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ (جبکہ $OM\neq 0$) $\frac{MP^2}{OM^2}+\frac{OM^2}{OM^2}=\frac{OP^2}{OM^2}$ Gives, $\left(\frac{MP}{OM}\right)^2+\left(\frac{OM}{OM}\right)^2=\left(\frac{OP}{OM}\right)^2$ سے (3), $(\tan\theta)\ +1\ =(\sec\theta)^2$ لہذا $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$.
	$1+\cot^2\theta\ =\text{cosec}^2\theta$	مثلث قائمۃ الزاویہ OMP سے ہم اخذ کرتے ہیں۔ $\frac{OM}{MP}=\cot\theta,\quad \frac{OP}{MP}=\text{cosec}\,\theta \quad ...(4)$ سے (2), $MP^2+OM^2=OP^2$ (2) کے دونوں جانب کے ہر ایک رقم کو OM^2 تقسیم کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ (جبکہ $MP\neq 0$) $\frac{MP^2}{MP^2}+\frac{OM^2}{MP^2}=\frac{OP^2}{MP^2}$ Gives, $\left(\frac{MP}{MP}\right)^2+\left(\frac{OM}{MP}\right)^2=\left(\frac{OP}{MP}\right)^2$ سے (4), $1^2+(\cot\theta)^2=(\text{cosec}\theta)^2$ لہذا $1+\cot^2\theta=\text{cosec}^2\theta$

ان تماثلات کو تبدیل شدہ شکل میں ذیل کی طرح بھی لکھا جاسکتا ہے۔

تماثل	مساوی شکلیں
$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$	$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$ (or) $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$
$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$	$\tan^2\theta=\sec^2\theta-1$ (or) $\sec^2\theta-\tan^2\theta=1$
$1+\cot^2\theta=\text{cosec}^2\theta$	$\cot^2\theta=\text{cosec}^2\theta-1$ (or) $\text{cosec}^2\theta-\cot^2\theta=1$

غور کیجئے

جبکہ اوپر کے تماثلات میں کسی بھی زاویہ θ کے لئے صحیح ہوسکتا ہے۔ یہاں ہم صرف $0^\circ<\theta<90^\circ$ کے لئے علم مثلث کی چھ نسبتوں پر غور کریں گے۔

10th maths 6. trigometry
Monday, February 17, 2020 9:02:24 PM

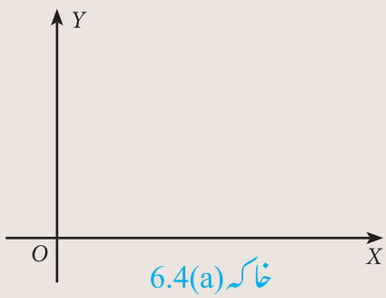
Activity 1 کارروائی 1

ایک سفید کاغذ کا شیٹ لیں، دو عمودی خطوط OX، OY تصنیف کریں جو O پر ملتے ہیں۔ جیسا کہ خاکہ 6.4(a) میں دکھایا گیا ہے۔

OX کو X محور اور OY کو Y محور کے طور پر قیاس کریں۔

ہم بعض زاویے θ کے لئے $\sin\theta$ اور $\cos\theta$ کے قیمتوں کو تصدیق کریں گے۔

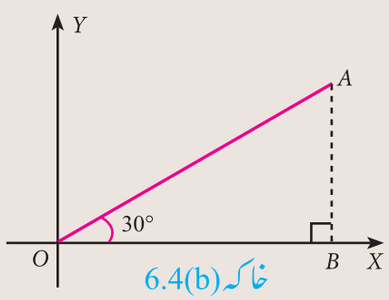
فرض کرو $\theta = 30^\circ$ ہے۔



خاکہ 6.4(a)

کسی بھی طول کی ایک قطاع خط OA اس طرح تصنیف کریں کہ $\angle AOX = 30^\circ$ ہو۔
جیسا کہ خاکہ 6.4(b) میں دکھایا گیا ہے۔

A سے ایک عمودی OX پر کھینچئے۔ جو B پر ملتا ہو۔



خاکہ 6.4(b)

اب اسکیل کے استعمال سے AB، OB اور OA لمبائیوں کی پیائش کریں۔

$\frac{AB}{OA}$ ، $\frac{OB}{OA}$ اور $\frac{AB}{OB}$ کی نسبتیں معلوم کیجئے۔

تمہیں کیا حاصل ہوا؟ کیا تم اِن قیمتوں کو علم مثلث کے جدول سے موازنہ کر سکتے ہو؟

تمہارا نتیجہ کیا ہے؟ اسی طرز عمل کو $\theta = 45^\circ$ اور $\theta = 60^\circ$ پر اپنائے۔ تمہارے نتائج کیا ہیں؟

مثال 6.1 ثابت کیجئے کہ $\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta \sin^2\theta$

حل :

$$\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta - \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}.\cos^2\theta$$
$$= \tan^2\theta(1-\cos^2\theta) = \tan^2\theta\sin^2\theta$$

مثال 6.2 ثابت کیجئے کہ $\frac{\sin A}{1+\cos A} = \frac{1-\cos A}{\sin A}$

حل : (نسب نما اور شمار کنندہ کو $1+\cos A$ کے زوجی معکوس (Conjugate) سے ضرب کریں)

$$\frac{\sin A}{1+\cos A} = \frac{\sin A}{1+\cos A}\times\frac{1-\cos A}{1-\cos A}$$
$$= \frac{\sin A(1-\cos A)}{(1+\cos A)(1-\cos A)} = \frac{\sin A(1-\cos A)}{1-\cos^2 A}$$
$$= \frac{\sin A(1-\cos A)}{\sin^2 A} = \frac{1-\cos A}{\sin A}$$

مثال 6.3 ثابت کیجئے کہ $1+\frac{\cot^2\theta}{1+\operatorname{cosec}\theta} = \operatorname{cosec}\theta$

حل :

$$1+\frac{\cot^2\theta}{1+\operatorname{cosec}\theta} = 1+\frac{\operatorname{cosec}^2\theta-1}{\operatorname{cosec}\theta+1} \quad \left[\text{اس لئے کہ } \operatorname{cosec}^2\theta-1=\cot^2\theta\right]$$
$$= 1+\frac{(\operatorname{cosec}\theta+1)(\operatorname{cosec}\theta-1)}{\operatorname{cosec}\theta+1}$$
$$= 1+(\operatorname{cosec}\theta-1) = \operatorname{cosec}\theta$$

10th maths 6. trigometry
Monday, February 17, 2020 9:02:24 PM

مثال 6.4 ثابت کیجئے کہ $\sec\theta - \cos\theta = \tan\theta \sin\theta$

حل :

$$\sec\theta - \cos\theta = \frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta = \frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \qquad \left[\text{اس لئے کہ } 1-\cos^2\theta = \sin^2\theta\right]$$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \times \sin\theta = \tan\theta\sin\theta$$

مثال 6.5 ثابت کیجئے کہ $\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$

$$\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} \times \frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

($1-\cos\theta$ کو نسب نما اور شمار کنندہ کو نسب نما کے زوجی معکوس سے ضرب دیں)

$$= \sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}} = \frac{1+\cos\theta}{\sqrt{\sin^2\theta}} \qquad \left[\text{اس لئے کہ } \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1\right]$$

$$= \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$$

مثال 6.6 ثابت کیجئے کہ $\frac{\sec\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \cot\theta$

حل :

$$\frac{\sec\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{1}{\cos\theta}}{\sin\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \cot\theta$$

مثال 6.7 ثابت کیجئے کہ $\sin^2 A\cos^2 B + \cos^2 A\sin^2 B + \cos^2 A\cos^2 B + \sin^2 A\sin^2 B = 1$

حل :

$$\sin^2 A\cos^2 B + \cos^2 A\sin^2 B + \cos^2 A\cos^2 B + \sin^2 A\sin^2 B$$

$$= \sin^2 A\cos^2 B + \sin^2 A\sin^2 B + \cos^2 A\sin^2 B + \cos^2 A\cos^2 B$$

$$= \sin^2 A(\cos^2 B + \sin^2 B) + \cos^2 A(\sin^2 B + \cos^2 B)$$

$$= \sin^2 A(1) + \cos^2 A(1) \qquad (\text{since } \sin^2 B + \cos^2 B = 1)$$

$$= \sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

مثال 6.8 اگر $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta$ ہو تو ثابت کرو کہ $\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin\theta$

حل :

$\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta$. یہاں پر

دونوں جانب کے رقموں کو مربع کریں

$$(\cos\theta + \sin\theta)^2 = (\sqrt{2}\cos\theta)^2$$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta = 2\cos^2\theta$$

10th maths 6. trigometry
Monday, February 17, 2020 9:02:24 PM

$$2\cos^2\theta - \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$(\cos\theta + \sin\theta)(\cos\theta - \sin\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos\theta - \sin\theta = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta + \sin\theta} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{2}\cos\theta} \quad [\text{اس لئے کہ } \cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta]$$

$$= \sqrt{2}\sin\theta$$

چنانچہ $\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin\theta$.

مثال 6.9 ثابت کیجئے کہ $(\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta)(\sec\theta - \cos\theta)(\tan\theta + \cot\theta) = 1$

حل :

$$(\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta)(\sec\theta - \cos\theta)(\tan\theta + \cot\theta)$$

$$= \left(\frac{1}{\sin\theta} - \sin\theta\right)\left(\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right)\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

$$= \frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta} \times \frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta} \times \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{\cos^2\theta\sin^2\theta \times 1}{\sin^2\theta\cos^2\theta} = 1$$

مثال 6.10 ثابت کیجئے کہ $\dfrac{\sin A}{1+\cos A} + \dfrac{\sin A}{1-\cos A} = 2\operatorname{cosec} A.$

حل :

$$\frac{\sin A}{1+\cos A} + \frac{\sin A}{1-\cos A}$$

$$= \frac{\sin A(1-\cos A) + \sin A(1+\cos A)}{(1+\cos A)(1-\cos A)}$$

$$= \frac{\sin A - \sin A\cos A + \sin A + \sin A\cos A}{1-\cos^2 A}$$

$$= \frac{2\sin A}{1-\cos^2 A} = \frac{2\sin A}{\sin^2 A} = 2\operatorname{cosec} A$$

مثال 6.11 اگر $\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = P$ ہو تو ثابت کیجئے کہ $\cos\theta = \dfrac{P^2-1}{P^2+1}$ ہے۔

حل :

$\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = P$ ... (1) دیا گیا ہے۔

$\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$ (identity) (تماثل)

$$\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta}$$

$$\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta = \frac{1}{P} \quad \ldots (2)$$

(1) اور (2) کو جمع کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $2\operatorname{cosec}\theta = P + \dfrac{1}{P}$

$$2\operatorname{cosec}\theta = \frac{P^2+1}{P} \quad \ldots (3)$$

(1) سے (2) کو تفریق کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $2\cot\theta = P - \dfrac{1}{P}$

10th maths 6. trigometry
Monday, February 17, 2020 9:02:25 PM

$$2\cot\theta = \frac{P^2-1}{P} \qquad \ldots(4)$$

(4) کو (3) سے تقسیم کرنے پر؛ ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $\frac{2\cot\theta}{2\,\mathrm{cosec}\,\theta} = \frac{P^2-1}{P} \times \frac{P}{P^2+1} \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{P^2-1}{P^2+1}$

مثال 6.12 ثابت کیجئے کہ $\tan^2 A - \tan^2 B = \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\cos^2 A \cos^2 B}$

حل :

$$\tan^2 A - \tan^2 B = \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} - \frac{\sin^2 B}{\cos^2 B}$$

$$= \frac{\sin^2 A \cos^2 B - \sin^2 B \cos^2 A}{\cos^2 A \ \cos^2 B}$$

$$= \frac{\sin^2 A(1-\sin^2 B) - \sin^2 B(1-\sin^2 A)}{\cos^2 A \ \cos^2 B}$$

$$= \frac{\sin^2 A - \sin^2 A \sin^2 B - \sin^2 B + \sin^2 A \sin^2 B}{\cos^2 A \cos^2 B} = \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\cos^2 A \cos^2 B}$$

مثال 6.13 ثابت کیجئے کہ $\left(\frac{\cos^3 A - \sin^3 A}{\cos A - \sin A}\right) - \left(\frac{\cos^3 A + \sin^3 A}{\cos A + \sin A}\right) = 2\sin A \cos A$

حل :

$$\left(\frac{\cos^3 A - \sin^3 A}{\cos A - \sin A}\right) - \left(\frac{\cos^3 A + \sin^3 A}{\cos A + \sin A}\right)$$

$$= \left(\frac{(\cos A - \sin A)(\cos^2 A + \sin^2 A + \cos A \sin A)}{\cos A - \sin A}\right) \quad \left[\begin{array}{r}\text{since } a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+b^2+ab) \\ a^3 + b^3 = (a+b)(a^2+b^2-ab)\end{array}\right]$$

$$- \left(\frac{(\cos A + \sin A)(\cos^2 A + \sin^2 A - \cos A \sin A)}{\cos A + \sin A}\right)$$

$$= (1 + \cos A \sin A) - (1 - \cos A \sin A)$$

$$= 2\ \cos A \sin A$$

مثال 6.14 ثابت کیجئے کہ $\frac{\sin A}{\sec A + \tan A - 1} + \frac{\cos A}{\mathrm{cosec A} + \cot A - 1} = 1$

حل :

$$\frac{\sin A}{\sec A + \tan A - 1} + \frac{\cos A}{\mathrm{cosec A} + \cot A - 1}$$

$$= \frac{\sin A(\mathrm{cosec}\, A + \cot A - 1) + \cos A(\sec A + \tan A - 1)}{(\sec A + \tan A - 1)(\mathrm{cosec}\, A + \cot A - 1)}$$

$$= \frac{\sin A \,\mathrm{cosec}\, A + \sin A \cot A - \sin A + \cos A \sec A + \cos A \tan A - \cos A}{(\sec A + \tan A - 1)(\mathrm{cosec}\, A + \cot A - 1)}$$

$$= \frac{1 + \cos A - \sin A + 1 + \sin A - \cos A}{\left(\frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A} - 1\right)\left(\frac{1}{\sin A} + \frac{\cos A}{\sin A} - 1\right)}$$

10th maths 6. trigometry
Monday, February 17, 2020 9:02:25 PM

$$= \frac{2}{\left(\frac{1+\sin A-\cos A}{\cos A}\right)\left(\frac{1+\cos A-\sin A}{\sin A}\right)}$$

$$= \frac{2\sin A\cos A}{(1+\sin A-\cos A)(1+\cos A-\sin A)}$$

$$= \frac{2\sin A\cos A}{[1+(\sin A-\cos A)][1-(\sin A-\cos A)]} = \frac{2\sin A\cos A}{1-(\sin A-\cos A)^2}$$

$$= \frac{2\sin A\cos A}{1-(\sin^2 A+\cos^2 A-2\sin A\cos A)} \qquad = \frac{2\sin A\cos A}{1-(1-2\sin A\cos A)}$$

$$= \frac{2\sin A\cos A}{1-1+2\sin A\cos A} = \frac{2\sin A\cos A}{2\sin A\cos A} = 1.$$

مثال 6.15 ثابت کیجئے کہ $\left(\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}\right) = \left(\frac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2$

حل :

LHS

$$\left(\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}\right) = \frac{1+\tan^2 A}{1+\frac{1}{\tan^2 A}}$$

$$= \frac{1+\tan^2 A}{\frac{\tan^2 A+1}{\tan^2 A}} = \tan^2 A \quad \ldots (1)$$

RHS

$$\left(\frac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2 = \left(\frac{1-\tan A}{1-\frac{1}{\tan A}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1-\tan A}{\frac{\tan A-1}{\tan A}}\right)^2 = (-\tan A)^2 = \tan^2 A \ldots (2)$$

(1) اور (2) سے ثابت ہوا کہ $\left(\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}\right) = \left(\frac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2$

مثال 6.16 ثابت کیجئے کہ $\frac{(1+\cot A+\tan A)(\sin A-\cos A)}{\sec^3 A-\operatorname{cosec}^3 A} = \sin^2 A\cos^2 A$

حل :

$$\frac{(1+\cot A+\tan A)(\sin A-\cos A)}{\sec^3 A-\operatorname{cosec}^3 A}$$

$$= \frac{\left(1+\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\sin A}{\cos A}\right)(\sin A-\cos A)}{(\sec A-\operatorname{cosec} A)(\sec^2 A+\sec A\operatorname{cosec} A+\operatorname{cosec}^2 A)}$$

$$= \frac{\frac{(\sin A\cos A+\cos^2 A+\sin^2 A)(\sin A-\cos A)}{\sin A\cos A}}{(\sec A-\operatorname{cosec} A)\left(\frac{1}{\cos^2 A}+\frac{1}{\cos A\sin A}+\frac{1}{\sin^2 A}\right)}$$

10th maths 6. trigometry
Monday, February 17, 2020 9:02:26 PM

$$= \frac{(\sin A\cos A+1)\left(\frac{\sin A}{\sin A\cos A}-\frac{\cos A}{\sin A\cos A}\right)}{(\sec A-\operatorname{cosec} A)\left(\frac{\sin^2 A+\sin A\cos A+\cos^2 A}{\sin^2 A\cos^2 A}\right)}$$

$$= \frac{(\sin A\cos A+1)(\sec A-\cos ecA)}{(\sec A-\cos ecA)(1+\sin A\cos A)} \times \sin^2 A\cos^2 A = \sin^2 A\cos^2 A$$

مثال 6.17 اگر $\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}=p$ اور $\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}=q$ ہوتو ثابت کیجئے کہ $p^2q^2(p^2+q^2+3)=1$

حل : ہم رکھتے ہیں $\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}=p$ ...(1) اور $\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}=q$ ...(2)

$$p^2q^2(p^2+q^2+3) = \left(\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\right)^2\left(\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right)^2 \times\left[\left(\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\right)^2+\left(\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right)^2+3\right] \quad [(1) \text{ اور } (2) \text{ سے}]$$

$$= \left(\frac{\cos^4\theta}{\sin^2\theta}\right)\left(\frac{\sin^4\theta}{\cos^2\theta}\right)\times\left[\frac{\cos^4\theta}{\sin^2\theta}+\frac{\sin^4\theta}{\cos^2\theta}+3\right]$$

$$= (\cos^2\theta\times\sin^2\theta)\times\left[\left(\frac{\cos^6\theta+\sin^6\theta+3\sin^2\theta\cos^2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}\right)\right]$$

$$= \cos^6\theta+\sin^6\theta+3\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$= (\cos^2\theta)^3+(\sin^2\theta)^3+3\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$= [(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^3-3\cos^2\theta\sin^2\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta)]+3\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$= 1-3\cos^2\theta\sin^2\theta(1)+3\cos^2\theta\ \sin^2\theta \quad =1$$

Progress Check — اپنی پیش رفت کی جانچ

1۔ علم مثلث کی نسبتوں کی تعداد ..... ہے۔

2۔ $1-\cos^2\theta$ کی قیمت _____ ہے۔

3۔ $(\sec\theta+\tan\theta)(\sec\theta-\tan\theta)$ کی قیمت _____ ہے۔

4۔ $(\cot\theta+\operatorname{cosec}\theta)(\cot\theta-\operatorname{cosec}\theta)$ کی قیمت _____ ہے۔

5۔ $\cos 60^\circ\sin 30^\circ+\cos 30^\circ\sin 60^\circ$ کی قیمت _____ ہے۔

6۔ $\tan 60^\circ\cos 60^\circ+\cot 60^\circ\sin 60^\circ$ کی قیمت _____ ہے۔

7۔ $(\tan 45^\circ+\cot 45^\circ)+(\sec 45^\circ\ \operatorname{cosec}45^\circ)$ کی قیمت _____ ہے۔

8۔ (i) اگر $\sec\theta=\cos\theta$ ہوتو θ کی قیمت _____ ہے۔ (ii) اگر $\cot\theta=\tan\theta$ ہوتو θ کی قیمت _____ ہے۔

مشق 6.1

1۔ درجِ ذیل کے تماثلات کو ثابت کیجئے۔

(i) $\cot\theta+\tan\theta=\sec\theta\operatorname{cosec}\theta$ (ii) $\tan^4\theta+\tan^2\theta=\sec^4\theta-\sec^2\theta$

2۔ درجِ ذیل کے تماثلات کو ثابت کیجئے۔

(i) $\frac{1-\tan^2\theta}{\cot^2\theta-1}=\tan^2\theta$ (ii) $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}=\sec\theta-\tan\theta$

10th maths 6. trigometry
Monday, February 17, 2020 9:02:26 PM

3۔ درجِ ذیل کے تماثلات کو ثابت کیجئے۔

(i) $\sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}} = \sec\theta + \tan\theta$ (ii) $\sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}} + \sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = 2\sec\theta$

4۔ درجِ ذیل کے تماثلات کو ثابت کیجئے۔

(i) $\sec^6\theta = \tan^6\theta + 3\tan^2\theta\sec^2\theta + 1$

(ii) $(\sin\theta + \sec\theta)^2 + (\cos\theta + \operatorname{cosec}\theta)^2 = 1 + (\sec\theta + \operatorname{cosec}\theta)^2$

5۔ درجِ ذیل کے تماثلات کو ثابت کیجئے۔

(i) $\sec^4\theta(1-\sin^4\theta) - 2\tan^2\theta = 1$ (ii) $\frac{\cot\theta - \cos\theta}{\cot\theta + \cos\theta} = \frac{\operatorname{cosec}\theta - 1}{\operatorname{cosec}\theta + 1}$

6۔ درجِ ذیل کے تماثلات کو ثابت کیجئے۔

(i) $\frac{\sin A - \sin B}{\cos A + \cos B} + \frac{\cos A - \cos B}{\sin A + \sin B} = 0$ (ii) $\frac{\sin^3 A + \cos^3 A}{\sin A + \cos A} + \frac{\sin^3 A - \cos^3 A}{\sin A - \cos A} = 2$

7۔ i) اگر $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{3}$ ہوتو ثابت کیجئے کہ $\tan\theta + \cot\theta = 1$ ہے۔

ii) اگر $\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta = 0$ ، ہوتو ثابت کیجئے کہ $\tan 3\theta = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}$

8۔ i) اگر $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = m$ اور $\frac{\cos\alpha}{\sin\beta} = n$ ہوتو ثابت کیجئے کہ $(m^2+n^2)\cos^2\beta = n^2$

ii) اگر $\cot\theta + \tan\theta = x$ اور $\sec\theta - \cos\theta = y$ ہوتو ثابت کیجئے کہ $(x^2y)^{\frac{2}{3}} - (xy^2)^{\frac{2}{3}} = 1$

9۔ i) اگر $\sin\theta + \cos\theta = p$ اور $\sec\theta + \operatorname{cosec}\theta = q$ ہوتو ثابت کیجئے کہ $q(p^2-1) = 2p$

ii) اگر $\sin\theta(1+\sin^2\theta) = \cos^2\theta$ ہوتو ثابت کیجئے کہ $\cos^6\theta - 4\cos^4\theta + 8\cos^2\theta = 4$

10۔ اگر $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = \frac{1}{a}$ ہوتو ثابت کیجئے کہ $\frac{a^2-1}{a^2+1} = \sin\theta$

H3RU9

6.3 بلندیاں اور فاصلے (Height and Distances)

اس حصّے میں ہم دیکھیں گے کہ کس طرح علم مثلث کو استعمال کر کے مختلف اشیاء کے بلندیوں اور فاصلوں کو بغیر حقیقی طور پر پیائش کئے دریافت کر سکتے ہیں۔

علم مثلث کے علم کو استعمال کر کے ہم ایک مینار کی بلندی، پہاڑ، عمارت یا درخت کی بلندی، روشنی کا مینار (Light House) سے جہاز تک کا فاصلہ، ایک ندی کی چوڑائی وغیرہ معلوم کر سکتے ہیں۔

حقیقی زندگی کے حالات میں علم مثلث کو استعمال کر کے **بلندیاں اور فاصلے** معلوم کئے جا سکتے ہیں۔ ہم ان استعمالات کو چند مثالوں کے ذریعے وضاحت کریں گے۔ بلندیاں اور فاصلوں کو دریافت کرنے کے طریقے کو جاننے سے پہلے ہمیں چند بنیادی وضاحتوں (Definitions) کو جاننا چاہئے۔

خط بصارت (Line of Sight)

خط بصارت اس خط کو کہتے ہیں۔ جو مشاہدہ کرنے والے کی آنکھ سے شئے پر دیکھے جانے والے نقطہ کے درمیان کھینچی جاتی ہے۔



Fig. 6.5

10th maths 6. trigometry
Monday, February 17, 2020 9:02:27 PM

زاویہ پیما دوربین (Theodolite)



خاکہ 6.6

زاویہ پیما دوربین ایک آلہ ہے جو طویل فاصلہ پر موجود اجسام اور مشاہدہ کرنے والے کی آنکھ کے درمیان کے زاویہ کی پیمائش کرتا ہے۔ زاویہ پیما دوربین آلہ میں دو درجہ دار پہیے ہوتے ہیں جو ایک دوسرے کے زاویہ قائمۃ پر ہیں اور اس میں ایک دوربین بھی ہے۔ یہ دو پہیے اُفقی اور عمودی زاویوں کی پیمائش کے لئے استعمال ہوتے ہیں۔ فاصلہ ناپے جانے والے مقام پر دوربین کو مرکوز کر کے اس میں موجود ایک دوربینی اسکیل کی مدد سے زاویہ کی پیمائش کی جاسکتی ہے

زاویہ فراز (Angle of Elevation)

خط بصارت، افقی خط سے اوپر کی جانب شئے کو دیکھے جانے والے نقطے اور افقی سطح کے درمیان میں بننے والے زاویہ کو زاویہ فراز کہتے ہیں۔ یعنی اس صورت میں ہمیں اپنا سر اُٹھا کر شئے کو دیکھنا پڑتا ہے۔ (خاکہ 6.7 دیکھیں)

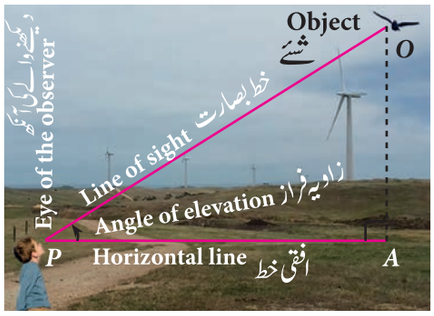


Fig. 6.7

زاویہ نشیب (Angle of depression)

خط بصارت، افقی خط سے نیچے کی جانب شئے کو دیکھے جانے والے نقطے اور افقی سطح کے درمیان میں بننے والا زاویہ کو زاویہ نشیب کہتے ہیں یعنی اس صورت میں ہمیں اپنے سر کو جھکا کر شئے کو دیکھنا پڑتا ہے۔ (خاکہ 6.8 دیکھیں)



Fig. 6.8

زاویہ پیما (Clinometer)

زاویہ فراز اور زاویہ نشیب کی پیمائش عموماً ایک آلہ سے کی جاتی ہے جس کو زاویہ پیما کہتے ہیں۔

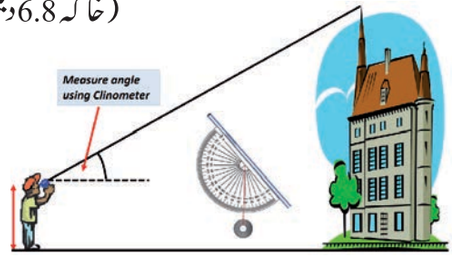
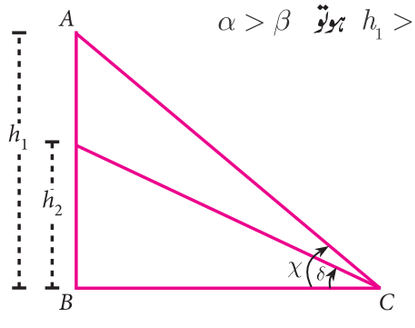


Fig. 6.9

غور کیجئے

i) دئے گئے نقطے سے، جب شئے کی بلندی میں اضافہ ہوتا ہے تو زاویہ فراز میں بھی اضافہ ہوتا ہے۔

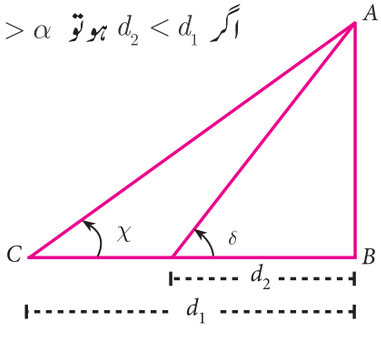
اگر $h_1 > h_2$ ہو تو $\alpha > \beta$



خاکہ 6.10 (a)

ii) جوں ہی ہم عمودی شئے جیسے مینار یا عمارت کے قدم کے قریب حرکت کرتے ہیں تو زاویہ فراز میں اضافہ ہوتا ہے۔

اگر $d_2 < d_1$ ہو تو $\beta > \alpha$

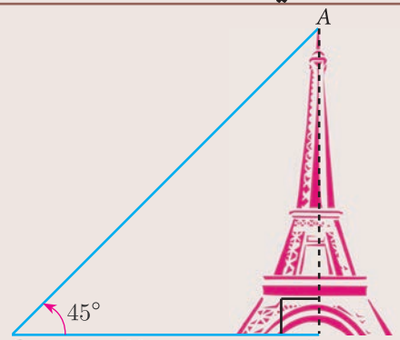


خاکہ 6.10 (b)

10th maths 6. trigometry
Monday, February 17, 2020 9:02:28 PM

Activity 2 کارروائی 2

صورت حال کو قائمۃ الزاویے والے مثلثوں کے ذریعے اظہار کیجئے۔ صورت حال کو وضاحت کرنے کے لئے ایک خاکہ بنائے۔

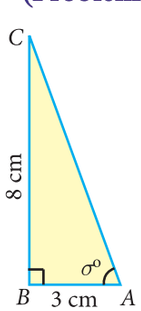
صورتِ حال	ایک خاکہ بنائے
1۔ ایک مینار زمین کی سطح پر عمودی طور پر کھڑا ہوا ہے۔ زمین پر ایک نقطہ جو مینار کے قدم سے 20 میٹر فاصلہ پر ہے، مینار کے اوپری حصّے کا زاویہ فراز 45° ہے۔	 Fig. 6.11
2۔ ایک مشاہدہ کرنے والے کی اونچائی 2.8 میٹر ہے جو چمنی سے 25.2 میٹر فاصلے پر ہے اس کی آنکھ سے چمنی کی اوپری حصّہ کا زاویہ فراز 45° ہے۔	.....
3۔ زمین سطح پر نقطہ P سے 20 میٹر بلندی والی عمارت کا زاویہ فراز 30° ہے۔ ایک جھنڈے کو عمارت کی چوٹی پر لہرایا گیا۔ نقطہ P سے جھنڈے کے مستول کے اوپری حصّے کا زاویہ فراز 55° ہے۔	.....
4۔ زمین کی سطح پر موجود ایک مینار کا سایہ 40 میٹر ہے۔ جب سورج کا ارتفاع 30° ہے تو کب 60° ہوگا۔	.....

6.3.1 زاویہ فراز سے تعلق رکھنے والے سوالات (Problems Involving Angle of Elevation)

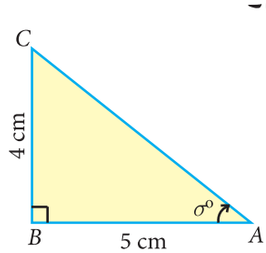
اس حصّے میں ہم سوالات کو حل کرنے کی کوشش کریں گے جب زاویہ دئے گئے ہوں۔

مثال 6.18 دئے گئے مثلث میں $\angle BAC$ کی پیمائش محسوب کیجئے۔

$(\tan 38.7^\circ = 0.8011, \tan 69.4^\circ = 2.6604)$



خاکہ 6.12 (b)



خاکہ 6.12 (a)

حل :

(i) ABC مثلث قائمۃ الزاویہ میں (خاکہ 6.12(a) دیکھیں)

$$\tan\theta = \frac{\text{مقابل ضلع}}{\text{متصل ضلع}} = \frac{4}{5}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) = \tan^{-1}(0.8)$$

$\theta = 38.7^\circ$ (اس لئے کہ $\tan 38.7^\circ = 0.8011$)

$\angle BAC = 38.7^\circ$

(ii) مثلث قائمۃ الزاویہ ABC میں (خاکہ 6.12(b) ملاحظہ کیجئے)

$$\tan\theta = \frac{8}{3}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{8}{3}\right) = \tan^{-1}(2.66)$$

$\theta = 69.4^\circ$ (اس لئے کہ $\tan 69.4^\circ = 2.6604$)

$\angle BAC = 69.4^\circ$

10th maths 6. trigometry
Monday, February 17, 2020 9:02:28 PM

مثال 6.19 ایک مینار زمین کی سطح پر عمودی طور پر کھڑا ہوا ہے۔ زمین پر ایک نقطہ جو مینار کے قدم سے 48 میٹر فاصلے پر واقع ہے۔ مینار کی اوپری حصّہ کا زاویہ فراز 30° ہے۔ مینار کی بلندی معلوم کیجئے۔

حل: فرض کیجئے کہ مینار کی بلندی PQ ہے۔

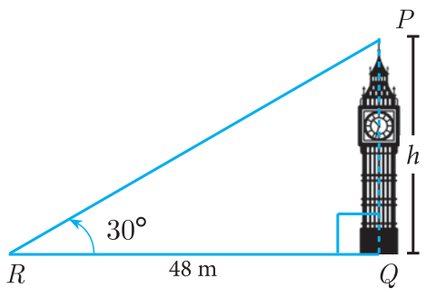
$h = PQ$ اور مینار اور نقطہ R کے درمیانی فاصلہ QR ہے۔

$\angle PQR = 30^\circ$ مثلث PQR قائمۃ الزاویہ میں

$$\tan\theta = \frac{PQ}{QR}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{h}{48}$$ حاصل ہوتا ہے، $$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{48}$$ اس طرح $h = 16\sqrt{3}$

چنانچہ، مینار کی بلندی $16\sqrt{3}$ میٹر ہے



خاکہ 6.13

مثال 6.20 ایک پتنگ زمین کی سطح سے 75m بلندی پر اُڑ رہی ہے۔ پتنگ کے دھاگے کو عارضی طور پر زمین کے کسی ایک نقطہ پر باندھا گیا ہے۔ زمین کی سطح سے دھاگے کا جھکاؤ 60° ہے۔ دھاگے کی لمبائی معلوم کیجئے۔ قیاس کیجئے کہ دھاگہ ڈھیلا ڈھالا نہیں ہے۔

حل : فرض کرو کہ AB زمین کی سطح سے پتنگ کی بلندی ہو تو $AB = 75$۔

فرض کرو کہ AC دھاگہ کی لمبائی کو ظاہر کرتا ہے۔

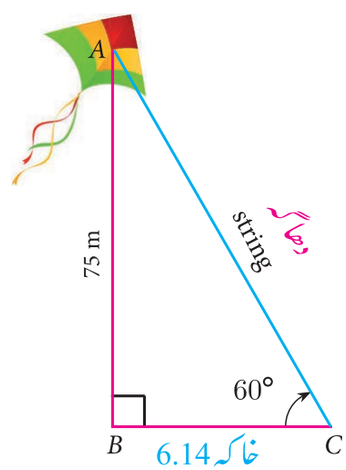
$\angle ACB = 60^\circ$ مثلث ABC قائمۃ الزاویہ میں

$$\sin\theta = \frac{AB}{AC}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{75}{AC}$$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{75}{AC}$ حاصل ہوتا ہے، $AC = \frac{150}{\sqrt{3}}$ ، $=50\sqrt{3}$ اس طرح

لہذا، دھاگہ کی لمبائی $50\sqrt{3}$ میٹر ہے۔



خاکہ 6.14

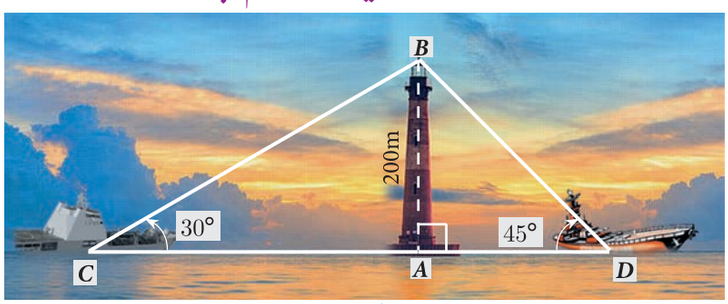
مثال 6.21

سمندر میں روشنی کے مینار کے دونوں جانب دو کشتیاں چل رہی ہیں۔ کشتیوں سے روشنی کے مینار کے اوپری حصّہ کو مشاہدہ کرنے پر زاویہ فراز بالترتیب 30° اور 45° ہیں۔ اگر روشنی کے مینار کی بلندی 200 میٹر ہو تو دونوں کشتیوں کے درمیانی فاصلہ معلوم کیجئے۔ ($\sqrt{3} = 1.732$)

حل : فرض کیجئے کہ AB روشنی کے مینار اور C اور D دو کشتیوں کے مقامات کو ظاہر کرتے ہیں

تو $AB = 200$ m.

$\angle ACB = 30^\circ$, $\angle ADB = 45^\circ$



خاکہ 6.15

10th maths 6. trigometry
Monday, February 17, 2020 9:02:29 PM

مثلث قائمۃ الزاویہ میں، $\tan 30^\circ = \frac{AB}{AC}$ BAC

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{200}{AC}$ حاصل ہوتا ہے ، $AC = 200\sqrt{3}$ ...(1)

مثلث قائمۃ الزاویہ میں، $\tan 45^\circ = \frac{AB}{AD}$ BAD

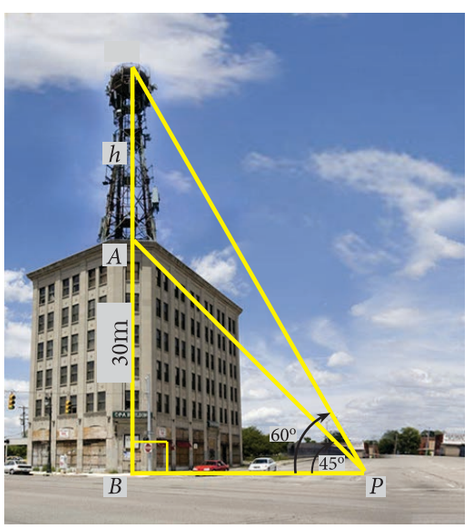
$1 = \frac{200}{AD}$ حاصل ہوتا ہے ، $AD = 200$ ...(2)

$CD = AC + AD = 200\sqrt{3} + 200$ ((1) اور (2) سے)

$CD = 200(\sqrt{3}+1) = 200 \times 2732 = 546.4$

دو کشتیوں کا درمیانی فاصلہ 546.4 میٹر ہے۔

مثال 6.22 زمین کی سطح پر ایک نقطہ سے، 30 میٹر بلندی والے عمارت کے اوپر ایک مینار نصب ہے۔ مینار کے نچلے حصّہ اور مینار کے اوپری حصّہ کا زاویہ فراز 45° اور 60° بالترتیب ہے۔ مینار کی بلندی معلوم کیجئے۔ $(\sqrt{3} = 1.732)$



خاکہ 6.16

حل : فرض کیجئے کہ AC مینار کی بلندی کو ظاہر کرتا ہے۔

فرض کیجئے کہ AB عمارت کی بلندی کو ظاہر کرتا ہے۔

تو $AB = 30$ میٹر، $AC = h$ میٹر

مثلث قائمۃ الزاویہ میں ، $\angle CPB = 60^\circ$ CBP

$\tan\theta = \frac{BC}{BP}$

$\tan 60^\circ = \frac{AB + AC}{BP}$ so, $\sqrt{3} = \frac{30+h}{BP}$ ...(1)

مثلث قائمۃ الزاویہ میں، $\angle APB = 45^\circ$ ABP

$\tan\theta = \frac{AB}{BP}$

$\tan 45^\circ = \frac{30}{BP}$ gives $BP = 30$ ...(2)

(1) میں (2) کو درج کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے،

$\sqrt{3} = \frac{30+h}{30}$

$h = 30(\sqrt{3}-1) = 30(1.732-1) = 30(0.732) = 21.96$

لہذا، مینار کی بلندی 21.96 میٹر ہے۔

مثال 6.23

ایک نہر کے کنارے ایک ٹی وی ٹاور (مینار) عمودی طور پر کھڑا ہوا ہے۔ نہر کے ٹھیک مقابل کے دوسرے جانب ایک نقطہ سے ٹاور کو دیکھا جاتا ہے۔ ٹاور کے اوپری حصّہ کا زاویہ فراز 58° ہے۔ اِس نقطہ سے 20 میٹر کے فاصلہ پر دوسرا نقطہ ہے۔ اِس نقطہ سے ٹاور کے قدم تک خط کو جوڑا گیا ہے۔ اور ٹاور کے اوپری حصّہ کا زاویہ فراز 30° ہے ٹاور کی بلندی اور نہر کی چوڑائی معلوم کیجئے۔ $(\tan 58^\circ = 1.6003)$

10th maths 6. trigometry
Monday, February 17, 2020 9:02:29 PM

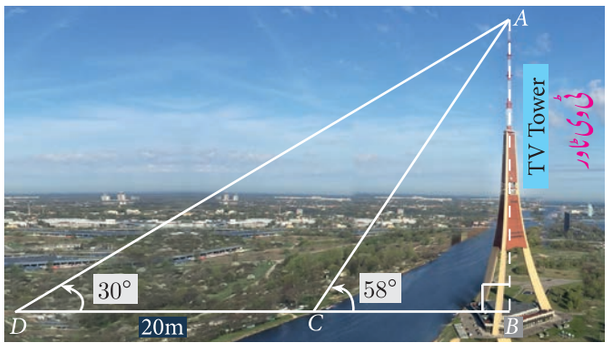


Fig. 6.17

حل : فرض کیجئے کہ AB ٹی وی ٹاور کی بلندی کو ظاہر کرتا ہے۔

$CD = 20$ میٹر

فرض کیجئے کہ BC نہر کی چوڑائی کو ظاہر کرتا ہے۔

مثلث قائمۃ الزاویہ ABC میں ،

$$\tan 58^\circ = \frac{AB}{BC}$$

$$1.6003 = \frac{AB}{BC} \qquad \ldots(1)$$

مثلث قائمۃ الزاویہ ABD میں، $\tan 30^\circ = \frac{AB}{BD} = \frac{AB}{BC + CD}$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AB}{BC + 20} \qquad \ldots(2)$$

(1) سے (2) کو تقسیم کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے $\frac{1.6003}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{BC + 20}{BC}$

$$BC = \frac{20}{1.7717} = 11.29 \text{ m} \qquad \ldots(3)$$

$$1.6003 = \frac{AB}{11.24} \qquad [(1) \text{اور} (3) \text{سے}]$$

$$AB = 18.07$$

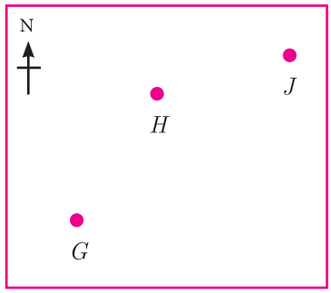
لہذا، ٹاور کی بلندی 18.07 میٹر اور نہر کی چوڑائی 11.29 میٹر ہے۔

مثال 6.24 ایک ہوائی جہاز G سے 24°، H کے سمت پرواز کرتا ہے جو 250 کلومیٹر کے فاصلہ پر ہے۔
H سے اپنا راستہ J کے جانب 55° سے تبدیل کرتا ہے اور اس کا فاصلہ 180 کلومیٹر دوری پر ہے۔

i) H سے شمال G کتنے فاصلہ پر ہے۔ ii) H سے مشرق G کتنے فاصلہ پر ہے۔

iii) J سے شمال H کتنے فاصلہ پر ہے۔ iv) J سے مشرق H کتنے فاصلہ پر ہے۔

$$\begin{pmatrix} \sin 24^\circ = 0.4067 & \sin 11^\circ = 0.1908 \\ \cos 24^\circ = 0.9135 & \cos 11^\circ = 0.9816 \end{pmatrix}$$



(خاکہ 6.18(a))

حل : (i) مثلث قائمۃ الزاویہ GOH میں $\cos 24^\circ = \frac{OG}{GH}$

$$0.9135 = \frac{OG}{250}; \quad OG = 228.38 \text{ km}$$

H سے شمال G کا فاصلہ 228.38 کلومیٹر

10th maths 6. trigometry
Monday, February 17, 2020 9:02:30 PM

(ii) مثلث قائمۃ الزاویہ GOH میں ،

$$\sin 24^\circ = \frac{OH}{GH}$$

$$0.4067 = \frac{OH}{250} \; ; \; OH = 101.68$$

H سے مشرق G کا فاصلہ

$$G = 101.68 \text{ km}$$

(iii) مثلث قائمۃ الزاویہ HIJ میں ،

$$\sin 11^\circ = \frac{IJ}{HJ}$$

$$0.1908 = \frac{IJ}{180} \; ; \; IJ = 34.34 \text{ km}$$

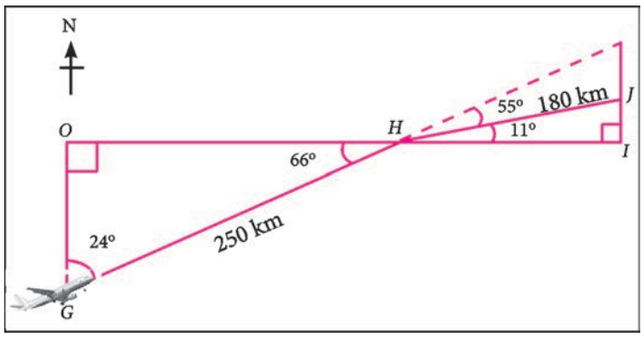
J سے شمال H کا فاصلہ $= 34.34$ کلومیٹر

(iv) مثلث قائمۃ الزاویہ HIJ میں

$$\cos 11^\circ = \frac{HI}{HJ}$$

$$0.9816 = \frac{HI}{180} \; ; \; HI = 176.69 \text{ km}$$

J سے مشرق H کا فاصلہ $= 176.69$ کلومیٹر



خاکہ 6.18(b)

مثال 6.25

ہموار زمین پر دو درخت کھڑے ہوئے ہیں۔ زمین پر نقطہ X سے دونوں درختوں کے اوپری حصّہ کا زاویہ فراز 40° ہے۔ اگر نقطہ X اور چھوٹے درخت کے درمیانی افقی فاصلہ 8 میٹر ہے۔ اور دونوں درختوں کے اوپری حصّے کا فاصلہ 20 میٹر ہے۔ محسوب کیجئے۔

i) چھوٹے درخت کے اوپری حصّہ اور نقطہ X کا درمیانی فاصلہ۔

ii) دونوں درختوں کے درمیانی افقی فاصلہ۔ $(\cos 40^\circ = 0.7660)$

حل : فرض کیجئے کہ AB بڑے درخت کی بلندی اور CD چھوٹے درخت کی بلندی اور زمین پر نقطہ X کو ظاہر کرتے ہیں۔

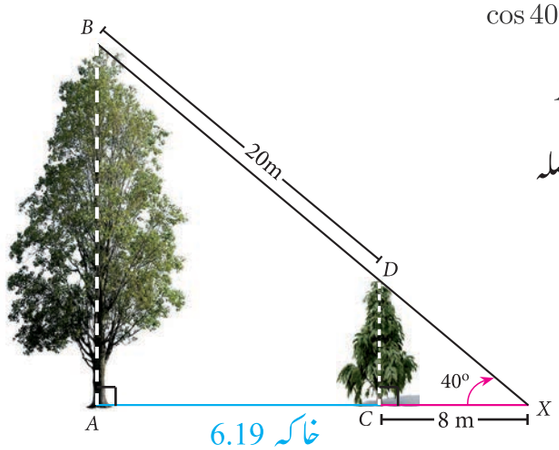
(i) مثلث قائمۃ الزاویہ XCD میں ،

$$\cos 40^\circ = \frac{CX}{XD}$$

$$XD = \frac{8}{0.7660} = 10.44 \text{ m}$$

لہذا، چھوٹے درخت کے اوپری حصّہ اور نقطہ X کا درمیانی فاصلہ

$= XD = 10.44$ میٹر



خاکہ 6.19

(ii) مثلث قائمۃ الزاویہ XAB میں،

$$\cos 40^\circ = \frac{AX}{BX} = \frac{AC + CX}{BD + DX}$$

10th maths 6. trigometry
Monday, February 17, 2020 9:02:31 PM

$$0.7660 = \frac{AC + 8}{20 + 10.44} \text{ gives } AC = 23.32 - 8 = 15.32 \text{ m}$$

لہذا، دونوں درختوں کے درمیانی افقی فاصلہ $= AC = 15.32$ میٹر

Thinking Corner ذرا سوچئے

1۔ بلندیوں اور فاصلوں کو محسوب کرنے کے لئے کس قسم کا مثلث استعمال کرنا ہوگا؟

2۔ جب عمارت کی بلندی اور عمارت کے قدم نقطہ کا فاصلہ دیا گیا ہو تو زاویہ فراز معلوم کرنے کے لئے کس علم مثلث کی نسبت کو استعمال کرنا ہوگا؟

3۔ اگر خط بصارت اور زاویہ فراز دیا گیا ہو تو کس علمِ مثلث کی نسبت کو استعمال کر کے

i) عمارت کی بلندی کو معلوم کرنا۔ ii) عمارت کے قدم سے نقطہ کا درمیانی فاصلہ معلوم کرنا۔

مشق 6.2

1۔ ایک مینار کے قدم سے نقطہ کا فاصلہ 30 میٹر دوری پر ہے اور مینار کی بلندی $10\sqrt{3}$ میٹر ہے تو زمین کی سطح سے مینار اوپری حصّہ کا زاویہ فراز معلوم کیجئے۔

2۔ ایک سڑک کے دونوں جانب مسلسل گھروں کی قطار بغیر کوئی جگہ چھوڑے ہوئے ہے جن کی بلندی $4\sqrt{3}$ میٹر ہے۔ ایک راہ گیر سڑک کے درمیان میں کھڑے ہو کر ایک گھر کی طرف دیکھ رہا ہے۔ راہ گیر سے گھر کے اوپری حصّہ کا زاویہ فراز 30° ہے۔ سڑک کی چوڑائی معلوم کیجئے۔

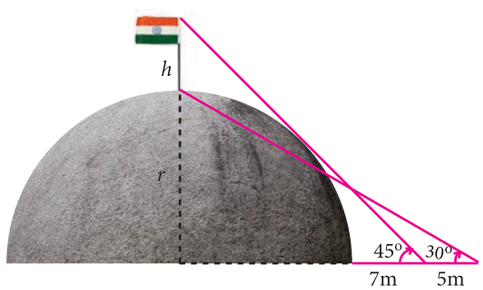
3۔ ایک شخص اپنے گھر کے باہر کھڑا ہوا ہے۔ کھڑکی کے اوپری اور نچلے حصّے کا زاویہ فراز بالترتیب 60° اور 45° ہے۔ اگر اس شخص کی اونچائی 180 سم ہے اور اگر وہ دیوار سے 5 میٹر کے فاصلہ پر کھڑا ہوا ہے تو کھڑکی کی بلندی معلوم کیجئے۔ $(\sqrt{3} = 1.732)$

4۔ ایک ستون کے اوپر لمبا مجسمہ نصب کیا ہوا۔ زمین پر ایک نقطہ سے مجسمہ کے اوپری حصّے کا زاویہ فراز 60° ہے۔ اسی نقطہ سے ستون کے اوپری حصّے کا زاویہ فراز 40° ہے۔ ستون کی بلندی معلوم کیجئے۔ $(\tan 40^\circ = 0.8391, \sqrt{3} = 1.732)$

5۔ ایک جھنڈے کا مستول (کھمبا) h میٹر اونچا ہے جس کو نصف کرہ نما گنبد کے اوپر نصب کیا ہوا ہے۔ گنبد کا نصف قطر r میٹر ہے۔ ایک شخص گنبد سے 7 میٹر فاصلہ کھڑا ہو کر مستول کے اوپری حصّہ کو 45° زاویہ فراز سے دیکھ رہا ہے۔ اور گنبد سے مزید 5 میٹر دوری سے مستول کے نچلے حصّے کو دیکھتا ہے۔ جس کا زاویہ فراز 30° ہے۔ معلوم کیجئے کہ

i) مستول کی بلندی کیا ہے۔

ii) گنبد کا نصف قطر کیا ہے۔ $(\sqrt{3} = 1.732)$



10th maths 6. trigometry
Monday, February 17, 2020 9:02:31 PM

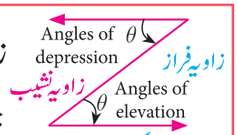
6۔ 15 میٹر بلندی والے ایک مینار کے اوپری حصّے بجلی کے مستول (کھمبا) کے نچلے حصّہ سے زاویہ فراز 60° بناتا ہے۔ کھمبا کے اوپری حصّہ سے زاویہ فراز 30° بناتا ہے۔ بجلی کے کھمبا کی بلندی معلوم کیجئے۔

6.3.2 زاویہ نشیب سے تعلق رکھنے والے سوالات Problems Involving Angle of Depression

اس حصّہ میں ان اہم سوالات کو حل کرنے کی کوشش کریں گے جن میں زاویہ نشیب دئے گئے ہوں۔

غور کیجئے

زاویہ نشیب اور زاویہ فراز مساوی ہوجاتے ہیں جب وہ متبادل زاویہ ہوتے ہیں۔



خاکہ 6.20

مثال 6.26 ایک کھلاڑی 20 میٹر بلندی والے عمارت کے اوپری (بالائی) حصّہ میں بیٹھ کر زمین پر پڑے گیند کا مشاہدہ کرتا ہے جس کا زاویہ نشیب 60° ہے۔ عمارت کے قدم سے گیند کا درمیانی فاصلہ معلوم کیجئے۔ $(\sqrt{3} = 1.732)$

حل : فرض کیجئے کہ BC عمارت کی بلندی اور A زمین پر پڑے گیند کا مقام کو ظاہر کرتا ہے تو

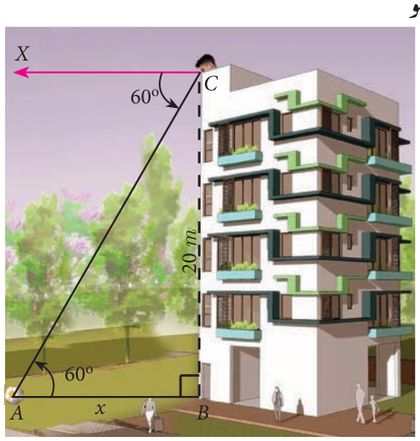


Fig. 6.21

$BC = 20$ میٹر اور $\angle XCA = 60^\circ = \angle CAB$

فرض کرو $AB = x$ میٹر

مثلث قائمۃ الزاویہ ABC میں

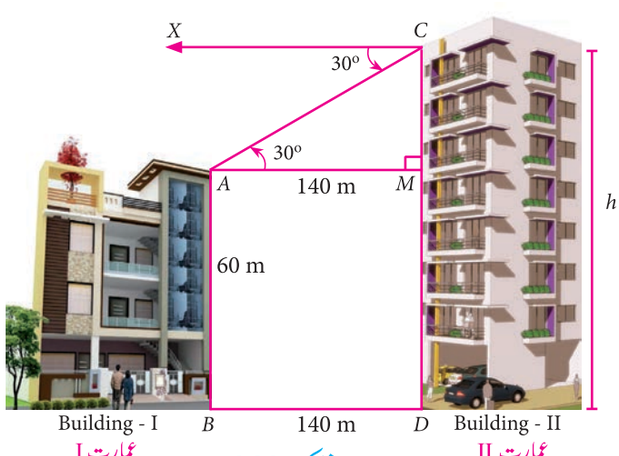
$$\tan 60^\circ = \frac{BC}{AB}$$

$$\sqrt{3} = \frac{20}{x}$$

$$x = \frac{20 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{20 \times 1.732}{3} = 11.55 \text{ m}$$

لہذا، عمارت کے قدم سے گیند کا درمیانی فاصلہ 11.55 میٹر ہے۔

مثال 6.27 دو عمارتوں کے درمیانی افقی فاصلہ 140 میٹر ہے۔ پہلی عمارت کے اوپری حصّہ دوسری عمارت کے اوپری حصّہ سے دیکھنے کا زاویہ نشیب 30° ہے۔ اگر پہلی عمارت کی بلندی 60 میٹر ہو تو دوسری عمارت کی بلندی معلوم کیجئے۔ $(\sqrt{3} = 1.732)$



خاکہ 6.22

حل : پہلی عمارت کی بلندی $AB = 60$ میٹر،

اس صورت میں $AB = MD = 60$ میٹر

فرض کیجئے کہ دوسری عمارت کی بلندی $CD = h$

$BD = 140$ m

$AM = BD = 140$ m

خاکہ سے $\angle XCA = 30^\circ = \angle CAM$

10th maths 6. trigometry
Monday, February 17, 2020 9:02:32 PM

مثلث قائمۃ الزاویہ AMC, میں

$$\tan 30^\circ = \frac{CM}{AM}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{CM}{140}$$

$$CM = \frac{140}{\sqrt{3}} = \frac{140\sqrt{3}}{3}$$

$$= \frac{140 \times 1.732}{3}$$

$$CM = 80.83$$

چنانچہ $h = CD = CM + MD = 80.83 + 60 = 140.83$

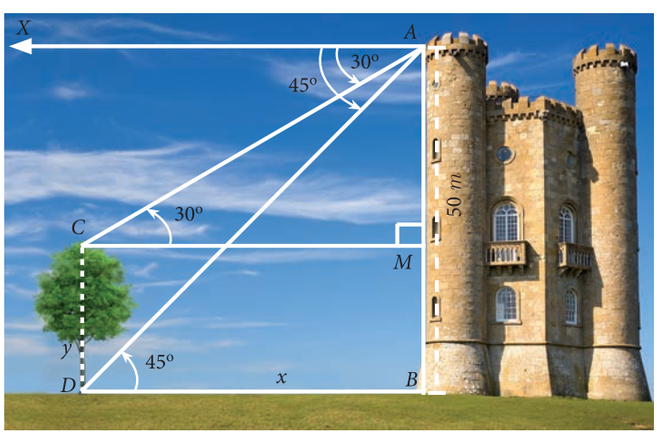
لہذا، دوسری عمارت کی بلندی 140.83 میٹر ہے۔

مثال 6.28 50 میٹر بلندی والے ایک مینار کے اوپری حصّہ سے درخت کے اوپری اور نچلے حصّہ کا مشاہدہ کرنے پر زاویہ نشیب بالترتیب 30° اور 45° ہے۔ درخت کی بلندی معلوم کیجئے۔ $(\sqrt{3} = 1.732)$

حل : فرض کیجئے کہ، مینار کی بلندی $AB = 50$ میٹر

درخت کی بلندی $CD = y$ اور $BD = x$

خاکہ سے، $\angle XAC = 30^\circ = \angle ACM$ اور $\angle XAD = 45^\circ = \angle ADB$



خاکہ 6.23

مثلث قائمۃ الزاویہ ABD میں،

$$\tan 45^\circ = \frac{AB}{BD}$$

حاصل ہوتا ہے $1 = \frac{50}{x}$ $x = 50$ m

مثلث قائمۃ الزاویہ AMC میں،

$$\tan 30^\circ = \frac{AM}{CM}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AM}{50} \quad [\text{اس لئے کہ } DB = CM]$$

$$AM = \frac{50}{\sqrt{3}} = \frac{50\sqrt{3}}{3} = \frac{50 \times 1.732}{3} = 28.87 \text{ m.}$$

لہذا، درخت کی بلندی $= CD = MB = AB - AM = 50 - 28.87 = 21.13$ m

10th maths 6. trigometry
Monday, February 17, 2020 9:02:33 PM

مثال 6.29 سمندر کی سطح سے 60 میٹر بلندی والے روشنی کے مینار کے اوپری حصّہ سے دو کشتیوں کو مشاہدہ کرنے پر زاویہ نشیب 28° اور 45° ہے۔ ایک کشتی دوسری کشتی کے ٹھیک پیچھے روشنی کے مینار کے ایک ہی جانب ہیں۔ دو کشتیوں کے درمیان فاصلہ معلوم کیجئے۔

$(\tan 28^\circ = 0.5317)$

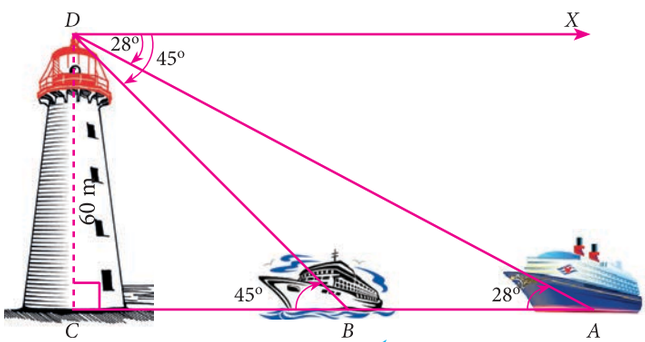
حل : فرض کیجئے کہ CD روشنی کے مینار پر D سے مشاہدہ کر رہا ہے۔

میٹر $CD = 60$ روشنی کے مینار کی بلندی

خاکہ سے،

$\angle XDA = 28^\circ = \angle DAC$ اور

$\angle XDB = 45^\circ = \angle DBC$



خاکہ 6.24

مثلث قائمۃ الزاویہ DCB میں $\tan 45^\circ = \frac{DC}{BC}$

حاصل ہوتا ہے۔ $1 = \frac{60}{BC}$

$BC = 60$ m

مثلث قائمۃ الزاویہ DCA میں $\tan 28^\circ = \frac{DC}{AC}$

حاصل ہوتا ہے۔ $0.5317 = \frac{60}{AC}$ $\quad AC = \frac{60}{0.5317} = 112.85$

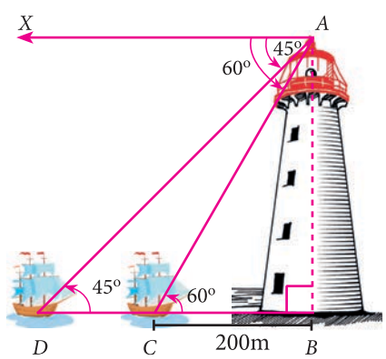
دونوں کشتیوں کا درمیانی فاصلہ $AB = AC - BC = 52.85$ میٹر

مثال 6.30

ایک شخص مینار کے اوپری حصّہ سے تیز رفتار سے جاتی ہوئی ایک جہاز (کشتی) کو دیکھ رہا ہے۔ اس شخص کے آنکھ سے کشتی پر بننے والا زاویہ نشیب 60° ہے۔ جب وہ مینار سے 200 میٹر کے فاصلہ پر ہوتی ہے۔ 10 سکنڈ کے بعد، زاویہ نشیب 45° ہو جاتا ہے۔ اس کشتی کی تقریبی (Approximate) رفتار (کلومیٹر فی گھنٹے) کیا ہوگی۔ قیاس کریں کہ کشتی ٹھہرے ہوئے پانی پر چل رہی ہے۔ $(\sqrt{3} = 1.732)$

حل : فرض کیجئے کہ AB مینار ہے۔

فرض کیجئے کہ C اور D کشتی کے دو مقامات کو ظاہر کرتے ہیں۔



خاکہ 6.25

خاکہ سے، $\angle XAC = 60^\circ = \angle ACB$ اور،

$\angle XAD = 45^\circ = \angle ADB$, $BC = 200$ میٹر

مثلث قائمۃ الزاویہ ABC میں، $\tan 60^\circ = \frac{AB}{BC}$

حاصل ہوتا ہے $\sqrt{3} = \frac{AB}{200}$

ہمیں حاصل ہوا $AB = 200\sqrt{3}$ ...(1)

10th maths 6. trigometry
Monday, February 17, 2020 9:02:33 PM

مثلث قائمۃ الزاویہ ABD میں، $\tan 45° = \frac{AB}{BD}$

$1 = \frac{200\sqrt{3}}{BD}$ (1) سے حاصل ہوتا ہے

$BD = 200\sqrt{3}$ ہمیں حاصل ہوا،

$CD = BD - BC$ اس صورت میں،

$CD = 200\sqrt{3} - 200 = 200(\sqrt{3} - 1) = 146.4$

10 سکنڈ میں طے کردہ (شدہ) فاصلہ CD دیا گیا ہے۔

یعنی 10 سکنڈ میں طے کردہ (شدہ) فاصلہ 146.4 میٹر ہے۔

لہذا، کشتی کی رفتار $= \frac{\text{فاصلہ}}{\text{وقت}}$

$= \frac{146.4}{10} = 14.64$ m/s gives $14.64 \times \frac{3600}{1000}$ km/hr $= 52.704$ km/hr

مشق 6.3

1۔ ایک $50\sqrt{3}$ میٹر بلندی والے چٹان کے بالائی حصّہ سے زمین پر موجود ایک کار (car) مشاہدہ کرنے پر بننے والا زاویہ نشیب $30°$ ہے۔ چٹان اور کار کے درمیانی فاصلہ معلوم کیجئے۔

2۔ دو عمارتوں کے درمیان افقی فاصلہ 70 میٹر ہے۔ پہلی عمارت کے اوپری حصّہ کو دوسری عمارت کو اوپری حصّہ سے دیکھنے کا زاویہ نشیب $45°$ ہے۔ اگر دوسری عمارت کی بلندی 120 میٹر ہو تو پہلی عمارت کی بلندی دریافت کیجئے۔

3۔ 60 میٹر بلندی والے ایک مینار کے اوپری حصّہ سے لیمپ پوسٹ (Lamp post) کے اوپری اور نچلے حصّہ کا مشاہدہ کرنے پر زاویہ نشیب بالترتیب $38°$ اور $60°$ ہے۔ لیمپ پوسٹ کی بلندی معلوم کیجئے۔ $(\tan 38° = 0.7813,\ \sqrt{3} = 1.732)$

4۔ ایک ہوائی جہاز 1800 میٹر بلندی سے اسی سمت میں چل رہے دو کشتیوں کو دیکھتا ہے۔ ہوائی جہاز سے دونوں کشتیوں کو مشاہدہ کرنے پر زاویہ نشیب بالترتیب $60°$ اور $30°$ ہے۔ دونوں کشتیوں کے درمیان فاصلہ معلوم کیجئے۔ $(\sqrt{3} = 1.732)$

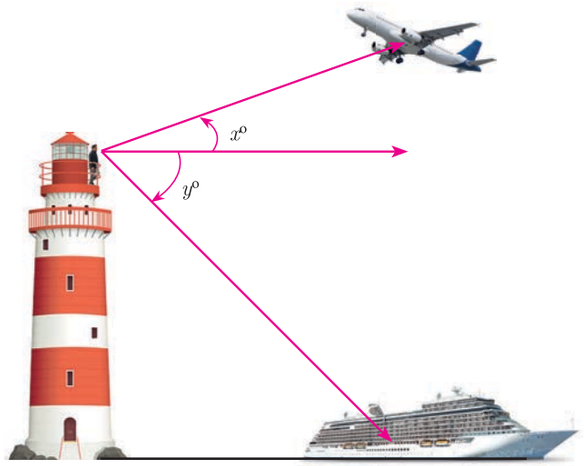
5۔ روشنی کے مینار کے اوپری حصّہ سے، دو کشتیوں کا مشاہدہ کیا گیا جو مخالف سمت ہیں جن کا نشیب $30°$ اور $60°$ ہے۔ اگر روشنی کے مینار کی بلندی h میٹر ہے اور کشتیوں کو ملانے والی خط روشنی کے مینار کے قدم سے گزرتی ہے۔ ثابت کیجئے کہ دو کشتیوں کے درمیانی فاصلہ $\frac{4h}{\sqrt{3}}$ میٹر ہے۔

6۔ 90 فٹ (Feet) بلندی والے ایک عمارت کی لفٹ (Lift) جو شفاف شیشہ سے بنی ہوئی ہے لفٹ بالائی حصّہ سے نیچے کی جانب اترتی ہے۔ عمارت کے اوپری حصّہ سے باغ میں موجود ایک فوارہ کا زاویہ نشیب $60°$ ہے۔ دو منٹ بعد، زاویہ نشیب گھٹ کر $30°$ ہوتا ہے۔ اگر فوارہ لفٹ کے دروازہ سے $30\sqrt{3}$ فٹ کے فاصلہ پر ہے۔ اترتی ہوئی لفٹ کی رفتار دریافت کیجئے۔

10th maths 6. trigometry
Monday, February 17, 2020 9:02:34 PM

6.3.3 زاویہ فراز اور نشیب سے تعلق رکھنے والے سوالات Problems Involving Angle of Elevation and Depression

ذیل کی صورت حال پر غور کیجئے :



خاکہ 6.26

ساحل سمندر پر واقع روشنی کے مینار کے اوپری حصّہ پر شخص کھڑے ہوکر سمندر کے اوپر اڑتا ہوا، ہوائی جہاز کو دیکھتا ہے اسی لمحہ سمندر میں چلتے ہوئے ایک کشتی کو دیکھتا ہے۔ جس زاویہ سے وہ ہوائی جہاز کو دیکھتا ہے وہ زاویہ فراز کے موافق ہوتا ہے اور جس زاویہ سے وہ کشتی کو دیکھتا ہے وہ زاویہ نشیب کے موافق ہوتا ہے۔ یہ ایک مثال ہے جس میں زاویہ فراز اور زاویہ نشیب دونوں کا مشاہدہ ہوتا ہے۔

خاکہ 6.26 میں x^o زاویہ فراز ہے اور y^o زاویہ نشیب ہے

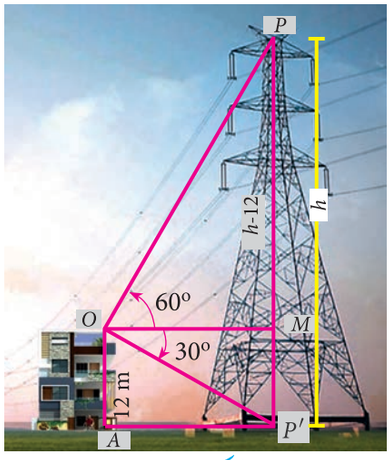
اس حصّہ میں ہم سوالات کو حل کرنے کی کوشش کریں گے جب زاویہ فراز اور زاویہ نشیب دئے گئے ہوں۔

مثال 6.31 12 میٹر بلندی والے ایک عمارت کے اوپری حصّہ سے کیبل ٹاور (Cable Tower) اوپری حصہ کا زاویہ فراز 60° ہے اور اس کے قدم کا زاویہ نشیب 30° ہے۔ ٹاور کی بلندی محسوب کیجئے۔

حل : خاکہ 6.27 میں دیکھایا گیا ہے، OA عمارت ہے، O مشاہدہ کرنے کا نقطہ (مقام) جو عمارت کے اوپری حصّہ OA میں ہے۔

$OA = 12$ میٹر

PP' کیبل ٹاور ہے جس میں P اوپری حصّہ اور P' نچلا حصّہ ہے ۔



خاکہ 6.27

$P = \angle MOP = 60^o$ کا زاویہ فراز

$P' = \angle MOP' = 30^o$ کا زاویہ نشیب

فرض کیجئے کہ، $PP' = h$ میٹر کیبل ٹاور کی بلندی

O سے $OM \perp PP'$ کھینچئے۔

$$MP = PP' - MP' = h - OA = h - 12$$

مثلث قائمۃ الزاویہ OMP میں، $\frac{MP}{OM} = \tan 60°$

حاصل ہوتا ہے $\frac{h-12}{OM} = \sqrt{3}$

$$OM = \frac{h-12}{\sqrt{3}} \quad \ldots (1)$$

مثلث قائمۃ الزاویہ OMP' میں، $\frac{MP'}{OM} = \tan 30°$

حاصل ہوتا ہے $\frac{12}{OM} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

10th maths 6. trigometry
Monday, February 17, 2020 9:02:35 PM

چنانچہ $OM = 12\sqrt{3}$ ... (2)

(1) اور (2) سے ہمیں معلوم ہوا $\frac{h-12}{\sqrt{3}} = 12\sqrt{3}$

دیتا ہے، $h - 12 = 12\sqrt{3} \times \sqrt{3}$

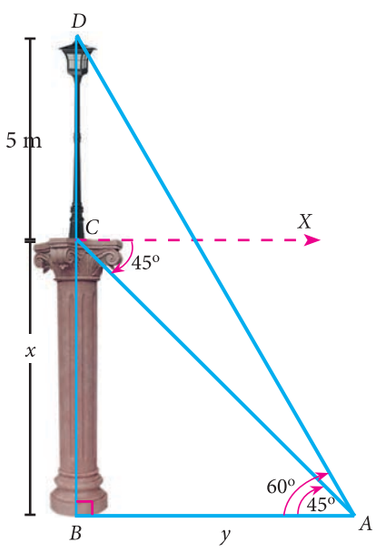
چنانچہ $h = 48$ حاصل ہوا

لہذا، کیبل ٹاور کی بلندی 48 میٹر ہے۔

مثال 6.32

ایک 5 میٹر بلندی والا مستول (Pole) ایک مینار کے بالائی حصّہ پر نصب کیا گیا ہے۔ زمین پر نقطہ 'A' سے مستول کے بالائی حصّہ کا زاویہ فراز 60° ہے۔ اور مینار کے اوپری حصّہ سے نقطہ 'A' کا زاویہ نشیب 45° ہے۔ مینار کی بلندی معلوم کیجئے۔ $(\sqrt{3} = 1.732)$

حل : فرض کیجئے کہ BC مینار کی بلندی کو اور CD مستول کی بلندی کو ظاہر کرتے ہیں۔



خاکہ 6.28

فرض کیجئے نقطہ A مشاہدہ کا مقام ہے۔

فرض کیجئے، $BC = x$ اور $AB = y$

خاکہ سے، $\angle XCA = 45' = \angle BAC$ اور $\angle BAD = 60^\circ$

مثلث قائمۃ الزاویہ ABC میں $\tan 45^\circ = \frac{BC}{AB}$

حاصل ہوا $1 = \frac{x}{y}$ so, $x = y$ ... (1)

مثلث قائمۃ الزاویہ ABD میں $\tan 60^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{BC + CD}{AB}$

حاصل ہوا $\sqrt{3} = \frac{x+5}{y}$ so, $\sqrt{3}\, y = x + 5$

$\sqrt{3}\, x = x + 5$ [(1) سے]

$$x = \frac{5}{\sqrt{3}-1} = \frac{5}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{5(1.732+1)}{2} = 6.83$$

لہذا، مینار کی بلندی 6.83 میٹر ہے۔

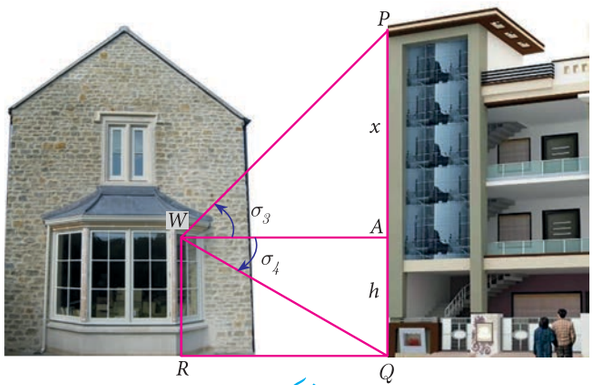
مثال 6.33

گلی میں ایک گھر کی کھڑکی (زمین سے h میٹر بلندی پر ہے) سے گلی کے مقابل گھر کے اوپری حصّہ اور قدم کا زاویہ فراز اور زاویہ نشیب بالترتیب θ_1 اور θ_2 ہے۔ ثابت کیجئے کہ مقابل گھر کی بلندی $h\left(1 + \frac{\cot\theta_2}{\cot\theta_1}\right)$ ہے۔

حل : فرض کیجئے کہ W کھڑکی کا ایک نقطہ ہے جس سے زاویہ فراز اور زاویہ نشیب کی پیمائش کی جاتی ہے۔ فرض کیجئے کہ PQ مقابل گھر ہے

تو WA گلی کی چوڑائی ہے

10th maths 6. trigometry
Monday, February 17, 2020 9:02:35 PM



خاکہ 6.29

کھڑکی کی بلندی $= h$ میٹر

$= AQ \ (WR = AQ)$

فرض کیجئے کہ $PA = x$ میٹر

مثلث قائمۃ الزاویہ PAW میں، $\tan\theta_1 = \frac{AP}{AW}$

حاصل ہوا، $\tan\theta_1 = \frac{x}{AW}$

اس لئے $AW = \frac{x}{\tan\theta_1}$

ہمیں حاصل ہوا $AW = x \cot\theta_1$ ... (1)

مثلث قائمۃ الزاویہ QAW میں، $\tan\theta_2 = \frac{AQ}{AW}$

$\tan\theta_2 = \frac{h}{AW}$

ہمیں حاصل ہوا $AW = h \cot\theta_2$ ... (2)

(1) اور (2) سے ہمیں حاصل ہوا، $x \cot\theta_1 = h \cot\theta_2$

حاصل ہوا، $x = h \frac{\cot\theta_2}{\cot\theta_1}$

مقابل کے گھر کی بلندی $= PA + AQ = x + h = h\frac{\cot\theta_2}{\cot\theta_1} + h = h\left(1 + \frac{\cot\theta_2}{\cot\theta_1}\right)$

لہذا، ثابت ہوا۔

ذرا سوچئے

بلندی یا فاصلہ یا زاویہ فراز معلوم کرنے کیلئے کم از کم کتنے پیمائشیں چاہئے؟

Progress Check اپنی پیش رفت کی جانچ

1۔ مشاہدہ کرنے والے کے آنکھ سے شئے پر دیکھے جانے والے نقطہ کے درمیان کھینچی جانے والی خط ..... ہے۔

2۔ شئے اور مشاہدہ کرنے والے کی آنکھ کے درمیان زاویہ کی پیمائش کرنے والا آلہ کونسا ہے؟

3۔ جب خطِ بصارت افقی سطح سے اوپر ہو تو جو زاویہ بنتا ہے وہ ..... ہے۔

4۔ جب ہم عمودی شئے (مینار) کے قدم کے قریب حرکت کرتے ہیں۔ تو زاویہ فراز میں ..... ہوتا ہے۔

5۔ جب خطِ بصارت، افقی سطح سے نیچے ہو تو جو زاویہ بنتا ہے وہ ..... ہے۔

مشق 6.4

1۔ 13 میٹر بلندی والے ایک درخت کے اوپری حصّہ سے دوسرے درخت کے اوپری حصّہ اور نچلے حصّہ کا زاویہ فراز اور زاویہ نشیب بالترتیب $45°$ اور $30°$ ہے۔ دوسرے درخت کی بلندی معلوم کیجئے۔ $(\sqrt{3} = 1.732)$

10th maths 6. trigometry
Monday, February 17, 2020 9:02:36 PM

2۔ ایک شخص کشتی کے بالائی حصّہ میں کھڑا ہوا ہے۔ جو پانی کے سطح سے 40 میٹر بلندی ہے۔ وہ ایک پہاڑ کا مشاہدہ کرتا ہے۔ پہاڑ کے اوپری حصّہ کا زاویہ فراز 60° اور پہاڑ کے قاعدہ کا زاویہ نشیب 30° ہے۔ کشتی سے پہاڑ کا فاصلہ اور پہاڑ کی بلندی محسوب کیجئے۔ $(\sqrt{3} = 1.732)$

3۔ اگر تالاب پر ایک نقطہ سے ایک بادل h میٹر کے بلندی ہے جس کا زاویہ فراز θ_1 ہے اور تالاب میں اس کا انعکاس کا زاویہ نشیب θ_2 ہے۔ ثابت کیجئے کہ (تالاب) سے بادل کے مقام کی بلندی $\frac{h(\tan\theta_1 + \tan\theta_2)}{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}$ ہے۔

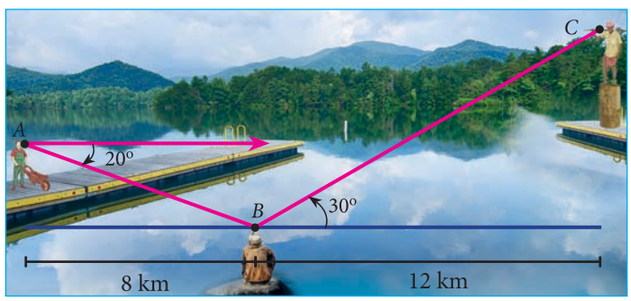
4۔ ایک اعلیٰ اپارٹمنٹ کے قدم سے موبائل فون ٹاور کے اوپری حصّہ کا زاویہ فراز 60° ہے اور اپارٹمنٹ کے اوپری حصّہ سے ٹاور کے قدم کا زاویہ نشیب 30° ہے۔ اگر اپارٹمنٹ کی بلندی 50 میٹر ہو تو موبائل فون ٹاور کی بلندی معلوم کیجئے۔ اشعاع کی احتیاطی تدابیر کے شرائط کے مطابق، موبائل فون ٹاور کی بلندی کم از کم 120 میٹر ہونی چاہئے۔ بیان کیجئے کہ کیا اوپر ذکر کئے گئے موبائل فون ٹاور کی بلندی اشعاع کی احتیاطی تدابیر کے شرائط کو پورا کرتی ہے؟

5۔ 66 میٹر بلندی والا اعلیٰ اپارٹمنٹ سے ایک لیمپ پوسٹ کے اوپری اور نچلے حصّہ کا زاویہ فراز اور زاویہ نشیب بالترتیب 60° اور 30° ہے۔ دریافت کیجئے۔

i) لیمپ پوسٹ کی بلندی۔ ii) اپارٹمنٹ اور لیمپ پوسٹ کے بلندی کا درمیانی فرق۔

iii) اپارٹمنٹ اور لیمپ پوسٹ کے درمیانی فاصلہ $(\sqrt{3} = 1.732)$

6۔ تین دیہاتی A، B اور C ایک وادی میں ایک دوسرے کو دوربینوں کے ذریعے دیکھ رہے ہیں۔ A اور B کے درمیانی افقی فاصلہ 8 کلومیٹر ہے اور B اور C کے درمیانی افقی فاصلہ 12 کلومیٹر ہے۔ A سے B کا زاویہ نشیب 20° ہے اور B سے C کا زاویہ فراز 30° ہے۔



محسوب کیجئے۔ i) A اور B کے درمیانی عمودی بلندی۔

ii) B اور C کے درمیانی عمودی بلندی۔

$(\tan 20^\circ = 03640\ ,\ \sqrt{3} = 1.732)$

مشق 6.5

کثیر انتخابی سوالات (Multiple Choice Questions)

1۔ $\sin^2\theta + \frac{1}{1+\tan^2\theta}$ کی قیمت اس کے مساوی ہے۔

(1) $\tan^2\theta$ (2) 1 (3) $\cot^2\theta$ (4) 0

2۔ $\tan\theta\operatorname{cosec}^2\theta - \tan\theta$ کی قیمت اس کے مساوی ہے۔

(1) $\sec\theta$ (2) $\cot^2\theta$ (3) $\sin\theta$ (4) $\cot\theta$

3۔ اگر $(\sin\alpha + \operatorname{cosec}\alpha)^2 + (\cos\alpha + \sec\alpha)^2 = k + \tan^2\alpha + \cot^2\alpha$ ہو تو k کی قیمت اس کے مساوی ہے۔

(1) 9 (2) 7 (3) 5 (4) 3

10th maths 6. trigometry
Monday, February 17, 2020 9:02:37 PM

4۔ اگر $\sin\theta + \cos\theta = a$ اور $\sec\theta + \text{cosec}\theta = b$ ہوتو $b(a^2 - 1)$ کی قیمت اس کے مساوی ہے۔

(1) $2a$ (2) $3a$ (3) 0 (4) $2ab$

5۔ اگر $5x = \sec\theta$ اور $\frac{5}{y} = \tan\theta$ ہوتو $x^2 - \frac{1}{y^2}$ کی قیمت اس کے مساوی ہے۔

(1) 25 (2) $\frac{1}{25}$ (3) 5 (4) 1

6۔ اگر $\sin\theta = \cos\theta$ ہوتو $2\tan^2\theta + \sin^2\theta - 1$ کی قیمت اس کے مساوی ہے۔

(1) $\frac{-3}{2}$ (2) $\frac{3}{2}$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{-2}{3}$

7۔ اگر $x = a\tan\theta$ اور $y = b\sec\theta$ ہوتو

(1) $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ (2) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (4) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$

8۔ $(1 + \tan\theta + \sec\theta)(1 + \cot\theta - \text{cosec}\theta)$ کی قیمت اس کے مساوی ہے۔

(1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) -1

9۔ اگر $a\cot\theta + b\,\text{cosec}\theta = p$ اور $b\cot\theta + a\,\text{cosec}\theta = q$ ہوتو $p^2 - q^2$ کی قیمت اس کے مساوی ہے۔

(1) $a^2 - b^2$ (2) $b^2 - a^2$ (3) $a^2 + b^2$ (4) $b - a$

10۔ اگر مینار کی بلندی اور سایہ کی لمبائی کی نسبت $\sqrt{3} : 1$ ہوتو سورج کا زاویہ فراز کی پیمائش

(1) $45°$ (2) $30°$ (3) $90°$ (4) $60°$

11۔ ایک بجلی کے مستول پر ایک نقطہ $30°$ زاویہ بناتا ہے۔ جو اس کے قدم کے یکساں سطح پر ہے۔ پہلے نقطہ کے اوپر دوسرا نقطہ b میٹر ہے۔ مستول کے قدم کا زاویہ نشیب $60°$ ہے۔ مستول کی بلندی (میٹر میں) مساوی ہے۔

(1) $\sqrt{3}b$ (2) $\frac{b}{3}$ (3) $\frac{b}{2}$ (4) $\frac{b}{\sqrt{3}}$

12۔ ایک مینار کی بلندی 60 میٹر ہے۔ جب سورج کا ارتفاع $30°$ سے $45°$ ہوتو اس کا سایہ x میٹر چھوٹا ہو جاتا ہے تو x مساوی ہے اس کے

(1) 41.92 m (2) 43.92 m (3) 43 m (4) 45.6 m

13۔ ایک کثیر منزلہ عمارت کے اوپری حصّے سے ایک 20 میٹر اونچی عمارت کا اوپری اور نچلے حصّے کا زاویہ نشیب بالترتیب $30°$ اور $60°$ ہے۔ کثیر منزلہ عمارت کی بلندی اور دونوں عمارتوں کا درمیانی فاصلہ (میٹر میں) ہے۔

(1) 20, $10\sqrt{3}$ (2) 30, $5\sqrt{3}$ (3) 20, 10 (4) 30, $10\sqrt{3}$

14۔ دو اشخاص ایک دوسرے سے x میٹر فاصلہ پر کھڑے ہوئے ہیں۔ پہلے شخص کی اونچائی دگنی ہے دوسرے شخص سے اگر درمیانی نقطہ سے ان کے قدموں کو ایک خط سے جوڑا جاتا ہے۔ ایک مشاہدہ کرنے والا دیکھتا ہے کہ ان کے اوپری حصّوں کا زاویہ فراز متمم ہے تو دوسرے شخص کی اونچائی (میٹر میں) ہے۔

(1) $\sqrt{2}\,x$ (2) $\frac{x}{2\sqrt{2}}$ (3) $\frac{x}{\sqrt{2}}$ (4) $2x$

10th maths 6. trigometry
Monday, February 17, 2020 9:02:37 PM

15۔ اگر تالاب پر ایک نقطہ سے ایک بادل h میٹر کے بلندی پر ہے۔جس کا زاویہ فراز β ہے اور تالاب میں اس کا انعکاس کا زاویہ نشیب $45°$ ہے۔ تالاب سے بادل کے مقام کی بلندی ہے۔

(1) $\frac{h(1+\tan\beta)}{1-\tan\beta}$ (2) $\frac{h(1-\tan\beta)}{1+\tan\beta}$ (3) $h\tan(45°-\beta)$ (4) اس میں سے کوئی بھی نہیں

Unit Exercise - 6 اکائی مشق - 6

1۔ ثابت کیجئے کہ (i) $\cot^2 A\left(\frac{\sec A-1}{1+\sin A}\right)+\sec^2 A\left(\frac{\sin A-1}{1+\sec A}\right)=0$ (ii) $\frac{\tan^2\theta-1}{\tan^2\theta+1}=1-2\cos^2\theta$

2۔ ثابت کیجئے کہ $\left(\frac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}\right)^2=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

3۔ اگر $x\sin^3\theta+y\cos^3\theta=\sin\theta\cos\theta$ اور $x\sin\theta=y\cos\theta$ ہو تو ثابت کیجئے $x^2+y^2=1$ ۔

4۔ اگر $a\cos\theta-b\sin\theta=c$ ہو تو ثابت کیجئے $(a\sin\theta+b\cos\theta)=\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}$

5۔ 80 میٹر بلندی والے درخت کے اوپری حصّہ پر ایک پرندہ بیٹھا ہوا ہے۔زمین کے ایک نقطہ سے پرندہ کا زاویہ فراز $45°$ ہے وہ پرندہ اس انداز میں افقی طور پر زمین سے مستقل بلندی پر پرواز کرتا ہے۔دو سکنڈ بعد، اُسی نقطہ سے اس کا زاویہ فراز $30°$ ہے۔پرندہ کی رفتار دریافت کیجئے۔ $(\sqrt{3}=1.732)$

6۔ ایک ہوائی جہاز زمین کی سطح سے متوازی طور پر پرواز کر رہا ہے۔جس کی رفتار 175 m/sec اور بلندی 600 میٹر ہے۔سطح زمین کے ایک نقطہ سے ہوا جہاز کا زاویہ فراز $37°$ ہے۔کتنے وقفے کے بعد زاویہ فراز بڑھکر $53°$ ہو جائے گا؟
$(\tan 53°=1.3270\ ,\ \tan 37°=0.7536)$

7۔ ایک پرندہ مقام A سے B کے جانب $35°$ زاویہ پر اُڑتا ہے۔ایک نقطہ A سے 30 کلومیٹر فاصلہ پر ہے۔مقام B سے اپنا رخ موڑ کر C کی جانب $48°$ زاویہ پر اُڑتا ہے۔اور کا فاصلہ 32 کلومیٹر دوری پر ہے۔

i) B سے شمال A کتنے فاصلہ پر ہے۔ ii) B سے مغرب A کتنے فاصلہ پر ہے۔

iii) C سے شمال B کتنے فاصلہ پر ہے۔ iv) C سے مشرقی B کتنے فاصلہ پر ہے۔

$(\sin 55°=08192\ ,\ \cos 55°=05736\ ,\ \sin 42°=0.6691,\ \cos 42°=0.7431)$

8۔ روشنی کے مینار کے دونوں جانب دو کشتیوں چل رہے ہیں۔روشنی کے مینار کے اوپری حصّہ سے دونوں کشتیوں کا زاویہ نشیب بالترتیب $60°$ اور $45°$ ہے۔اگر کشتیوں کا درمیانی فاصلہ $200\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}\right)$ میٹر ہے۔تو روشنی کے مینار کی بلندی دریافت کیجئے۔

9۔ کسی گلی میں ایک عمارت اور ایک مجسمہ (Statue) ایک دوسرے کے مقابل 35 میٹر فاصلہ پر ہیں۔عمارت کے چھت کے ایک نقطہ سے مجسمہ کے اوپری حصّہ کا زاویہ فراز $24°$ ہے اور مجسمہ کے قاعدہ کا زاویہ نشیب $34°$ ہے۔مجسمہ کی بلندی معلوم کیجئے۔
$(\tan 24°=04452\ ,\ \tan 34°=06745\ )$

10th maths 6. trigometry
Monday, February 17, 2020 9:02:38 PM

Points to Remember — یاد رکھنے کے نکات

☆ ایک مساوات میں علم مثلث نسبتیں کا ایک زاویہ شامل ہو تو اس کو علم مثلث کی تماثل کہتے ہیں۔ اگر یہ تمام زاویوں کی قیمتوں کے لئے صحیح ہو۔

☆ علمِ مثلث کی تماثلات

(i) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ (ii) $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ (iii) $1 + \cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta$

☆ خط بصارت اس خط کو کہتے ہیں جو مشاہدہ کرنے والے کی آنکھ سے شئے پر دیکھے جانے والے نقطہ کے درمیان کھینچی جاتی ہے۔

☆ خط بصارت، افقی خط سے اوپر کی جانب شئے کو دیکھے جانے والے نقطے اور افقی سطح کے درمیان میں بننے والا زاویہ کو زاویہ فراز کہتے ہیں۔

☆ خط بصارت، افقی خط سے نیچے کی جانب شئے کو دیکھے جانے والے نقطے اور افقی سطح کے درمیان میں بننے والا زاویہ کو زاویہ نشیب کہتے ہیں

☆ کسی شئے کی بلندی یا لمبائی یا دو مختلف اشیاء کا درمیانی فاصلہ علم مثلث کی نسبتوں کی مدد سے دریافت کر سکتے ہیں۔

ICT CORNER — ICT کارنر

ICT 6.1

مرحلہ 1 : براؤزر کھولئے اور دئے گئے لنک یا URL کو ٹائپ کیجئے یا QR کوڈ اسکین کیجئے "Trigonometry" نامی سبق کھلے گا۔
"Basic Identity" ورک شیٹ کو Select کیجئے۔

مرحلہ 2 : دئے گئے ورک شیٹ میں نقطہ B کو کھینچ کر مثلث کو تبدیل کر سکتے ہیں۔ اکائی دائرہ میں مثلث قائمۃ الزاویہ کے ہر زاویہ کے لئے تماثل کو جانچئے

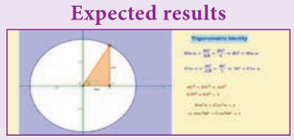
Step 1



Step 2



Expected results



ICT 6.2

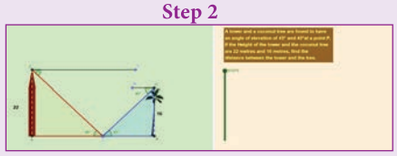
مرحلہ 1 : براؤزر کھولئے اور دئے گئے لنک یا URL کو ٹائپ کیجئے یا QR کوڈ کو اسکین کیجئے۔ "Trigonometry" نامی سبق کھلے گا۔
Heights and distance problem - I ورک شیٹ کو Select کیجئے۔

مرحلہ 2 : دئے گئے ورک شیٹ میں New Problem کو Click کر کے سوال کو تبدیل کر سکتے ہیں۔ Slider کو حرکت کرنے سے مرحلے کو دیکھ سکتے ہیں۔ سوالات کو حل کریں اور جوابات کی تصدیق کریں۔

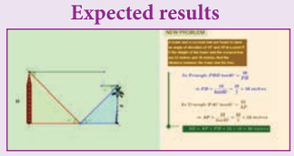
Step 1



Step 2



Expected results



You can repeat the same steps for another activities

https://www.geogebra.org/m/jfr2zzgy#chapter/356196
or Scan the QR Code.

10th maths 6. trigometry
Monday, February 17, 2020 9:02:39 PM

7

مساحت

MENSURATION

Nature is an infinite sphere of which the centre is everywhere and the circumference nowhere. - Blaise Pascal



Pappus
290 - 350 AD(CE)

پاپپوس (Pappus) اسکندریہ میں پیدا ہوئے ۔وہ مصر کے آخری یونانی عظیم ماہر علم ہندسہ دان تھے ،پاپپوس کا سب سے بڑی تصنیف Synagoge یا ریاضی ذخیرہ (Mathematical Collections) یہ ایک آٹھ جلدوں پر مشتمل ریاضی کا مجموعہ (ذخیرہ) ہے۔
انہوں نے بیرم (Levers) چرخی (Pulleys) پچّر (Wedges) گول ڈنڈی (axles) اور پیچ (Screws) کے اصولوں کی وضاحت کی، یہ اصول وسیع پیمانے میں طبیعات اور جدید انجینئری سائنس میں استعمال ہوتا ہے۔

سیکھنے کے مقاصد

- استوانہ، مخروط، کرّہ، نصف کرّہ اور مخروط کے مقطوعہ (Frustum) کا سطحی رقبہ اور حجم محسوب کرنا۔
- مربوط اجسام کا سطحی رقبہ اور حجم محسوب کرنا۔
- ٹھوس شکلوں کو بغیر حجم تبدیل کئے، دوسرے ٹھوس شکل میں تبدیل کے حسابات کو حل کرنا۔

FMR72

7.1 تعارف

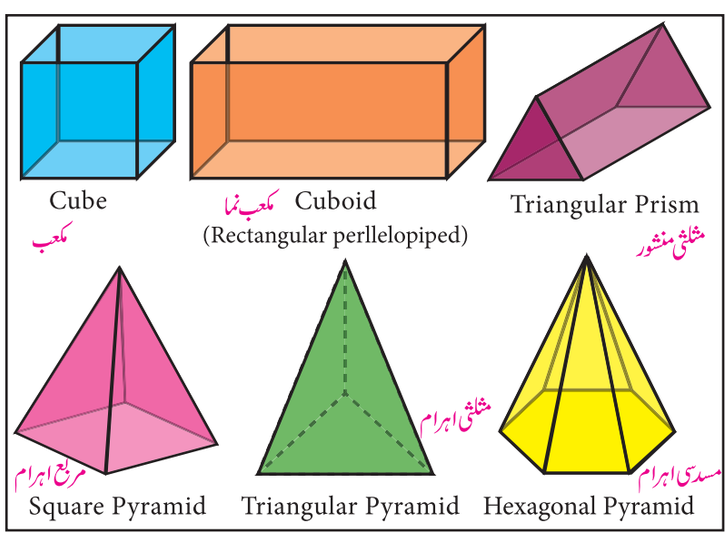


Fig. 7.1

دنیا کی تمام قدیم تہذیبوں میں اپنی روزمرّہ کی ضروریات کی پیمائش کے لئے ایک طریقہ دریافت کیا ہوا تھا، مثال کے طور پر دئے گئے خطہ میں کتنی مقدار کی فصل اُگے گی۔انہیں یہ جاننا ضروری تھا، ایک برتن میں کتنی مقدار کا مائع سما سکتا ہے وغیرہ۔ یہ سوالات زراعت اور تجارت میں فیصلہ لینے کے لئے بہت اہم تھے انہیں ایسا کرنے کے لئے موثر اور جامع طریقہ کی ضرورت تھی۔ان اسباب کے بناء پر ریاضی دانوں نے علم ہندسہ کو حقیقی زندگی کے حالات میں استعمال کر کے کارآمد نتائج اخذ کئے، اس طرح سے مساحت کی ابتداء ہوئی، چنانچہ مساحت کو علمی علمِ ہندسہ کے طور پر سکھایا جاسکتا ہے۔

10th maths 7. mensuration
Monday, February 17, 2020 8:43:05 PM

ہم پہلے سے ہی مسطح شکلیں جیسے مربع، مستطیل، مثلث دائرہ وغیرہ کے رقبے کے بارے میں جانتے ہیں، ان شکلوں کو دو ابعادی (2-dimensional) کہتے ہیں ان کو مسطح میں بنا سکتے ہیں، لیکن بہت ساری اشیاء جو ہماری روزمرہ زندگی میں سامنا ہوتا ہے ان کو مسطح میں ظاہر نہیں کیا جا سکتا ہے مثال کے طور پر ٹیوبس (Tubes)، پانی کی ٹینکی، اینٹ، آئس کریم کے مخروط، فٹ بال وغیرہ ان اشیاء کو ٹھوس شکلیں یا تین ابعادی شکلیں (3-dimensional) کہتے ہیں۔

ہم اکثر ٹھوس شکلیں جیسے مکعب، مکعب نما۔ منشور اور اہرام کو دیکھتے ہیں، تین ابعادی اشیاء کی پیمائشوں کے لئے سطحی رقبہ اور حجم موجود ہیں اس باب میں ہم سیکھیں گے کہ کس طرح ٹھوس شکلیں جیسے استوانہ، مخروط، کرّہ، نصف کرّہ اور مخروط کے مقطوعہ کا سطحی رقبہ اور حجم معلوم کیا جا سکتا ہے۔

7.2 سطحی رقبہ (Surface Area)

ٹھوس شئے کا بیرونی (سطحی) ظاہر شدہ رقبہ کو اس شئے کا سطحی رقبہ ہوگا۔

7.2.1 قائم مدوّر استوانہ (Right Circular cylinder)

خاکہ 7.2 میں دئے شکلوں پر غور کریں اور شکلوں کی شناخت کیجئے

یہ تمام اشیاء ایک استوانہ کی مشابہت رکھتے ہیں۔



Fig. 7.2

تعریف : اگر کسی مستطیل کو ایک پورے طور پر ایک مرتبہ گھمایا جائے تو اس سے بننے والی ٹھوس شئے قائم مدور استوانہ کہلاتی ہے۔

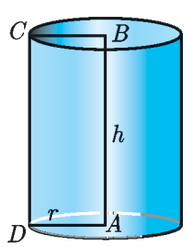


Fig. 7.3

اگر محور نصف قطر کے عمودی ہو تو استوانہ کو ایک قائم مدّ ور استوانہ کہتے ہیں۔ (خاکہ 7.3) میں $AB = h$ اونچائی کو ظاہر کرتا ہے اور $AD = r$ استوانہ کے نصف قطر کو ظاہر کرتا ہے۔

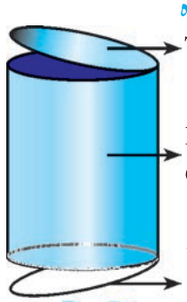


Fig. 7.4

ٹھوس استوانہ ایک ایسی شئے ہے جو دو مدّ ور مسطح سطح اور ایک منحنی سطح سے گھیری ہوئی ہے۔

دو مدّ ور قاعدوں کے درمیانی رقبہ کو طرفی رقبہ (L.S.A) یا منحنی سطحی رقبہ (C.S.A) کہتے ہیں

ایک قائم مدّ ور استوانہ کی تشکیل: توضیح
Formation of a Right circular cylinder - Demonstration

(i) لمبائی l چوڑائی b والے ایک مستطیلی کاغذ کا شیٹ لیجئے۔

(ii) کاغذ کو اس کے ایک ضلع پر گھومئے، ایک مکمل چکر کو b نام دیں۔ (بغیر منطبق ہوئے)

(iii) اس طرح بنی ہوئی شکل، ایک قائم مدّ ور استوانہ ہوگی جس کے قاعدہ کا محیط l ہے اور اونچائی b ہے۔

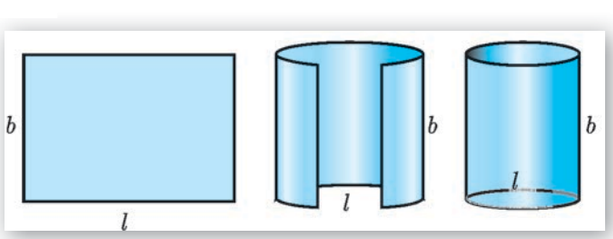


Fig. 7.5

10th maths 7. mensuration
Monday, February 17, 2020 8:43:06 PM

ایک قائم مدّ وراستوانہ کا سطح رقبہ (Surface Area of a Right circular cylinder)

(i) منحنی سطحی رقبہ (C.S.A) (Curved surface area)

ایک قائم مدوراستوانہ کا منحنی سطحی رقبہ = نظیری مستطیل کا رقبہ

$= l \times b$

$= 2\pi r \times h$ (چونکہ، l قاعدہ کا محیط، b اونچائی ہے) (خاکہ 7.5 دیکھیں)

ایک قائم مدوراستوانہ کا C.S.A = مربع اکائیاں $2\pi rh$

ایک قائم مدوراستوانہ کا C.S.A = مربع اکائیاں $2\pi rh$

(ii) کل سطحی رقبہ (T.S.A) (Total surface area)

کل سطحی رقبہ سے مراد منحنی سطحی رقبہ اور اوپری اور نچلی دو مدور خطوں کا حاصل جمع ہے۔

یعنی قائم مدّ وراستوانہ کا کل سطحی رقبہ (T.S.A) = C.S.A + اوپری مدّ ورخطّہ کا رقبہ + نچلے مدّ ورخطّہ کا رقبہ

$= 2\pi rh + \pi r^2 + \pi r^2$ (خاکہ 7.4 دیکھیں)

$= 2\pi rh + 2\pi r^2$

$= 2\pi r\left(h + r\right)$

ایک قائم مدّ وراستوانہ کا T.S.A $= 2\pi r(h + r)$ sq. units

غور کیجئے

- ہمیشہ ہم $\pi = \frac{22}{7}$ لیں گے، جب تک کہ قیمت بیان کی نہ جائے۔
- لفظ ''سطحی رقبہ'' سے مراد ''کل سطحی رقبہ'' ہے۔

مثال 7.1 ایک استوانہ نما ڈھول (Drum) کی اونچائی 20 سم اور قاعدہ 14 سم ہو تو منحنی سطح کا رقبہ اور کل سطح کا رقبہ معلوم کیجئے۔

حل : دیا گیا ہے $h = 20$ سم استوانہ کی اونچائی $r = 14$ سم نصف قطر

استوانہ کا منحنی سطح کا رقبہ (C.S.A) $= 2\pi rh$ sq. units

استوانہ کا C.S.A $= 2 \times \frac{22}{7} \times 14 \times 20 = 2 \times 22 \times 2 \times 20 = 1760$ cm^2

استوانہ کا کل سطح کا رقبہ (T.S.A) = مربع اکائیاں $2\pi r\left(h + r\right)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 14 \times \left(20 + 14\right) = 2 \times \frac{22}{7} \times 14 \times 34$

$= 2992$ cm^2

لہذا، مربع سم 1760 = C.S.A اور مربع سم 2992 = T.S.A

10th maths 7. mensuration
Monday, February 17, 2020 8:43:06 PM

مثال 7.2 ایک قائم مدّور استوانہ کا منحنی سطح کا رقبہ 88 مربع سمر ہے اس کی اونچائی 14 سمر ہو تو استوانہ کا قطر معلوم کیجئے۔

حل : دیا گیا ہے مربع سمر 88 = استوانہ کا منحنی سطح کا رقبہ (C.S.A)

$$2\pi rh = 88$$

$$2 \times \frac{22}{7} \times r \times 14 = 88 \qquad (\text{سمر } h = 14 \text{ دیا گیا ہے})$$

$$2r = \frac{88 \times 7}{22 \times 14} = 2$$

چنانچہ قطر = 2 سمر

مثال 7.3 ایک باغ کا رولر (Garden Roller) جس کی لمبائی 3 میٹر طویل ہے اور اس کا قطر 2.8 میٹر ہے اس سے باغ کو ہموار کیا جاتا ہے۔ 8 گردشوں میں یہ کتنا رقبہ طے ہوگا۔



Fig. 7.6

حل : دیا گیا ہے میٹر 2.8 = d قطر اور میٹر 3 = h اونچائی

میٹر 1.4 = r نصف قطر

ایک گردش میں طے شدہ رقبہ = استوانہ کا منحنی سطح کا رقبہ

= مربع اکائیاں $2\pi rh$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 1.4 \times 3 = 26.4$$

ایک گردش میں طے شدہ رقبہ = 26.4 m^2

8 گردشوں میں طے شدہ رقبہ $= 8 \times 26.4 = 211.2$

چنانچہ، طے شدہ رقبہ $211.2\ m^2$ ہے۔

Thinking Corner ذرا سوچئے

1) جب ' h ' سکّے ہر ایک کا نصف قطر ' r ' اکائیاں اور موٹائی (جسامت) (Thickness) 1 اکائی ہے ان سکّوں کو ایک دوسرے پر جوڑتے ہیں تو تمہیں کونسی ٹھوس شکل حاصل ہوگی؟ اس کا C.S.A بھی معلوم کرو۔

2) جب ایک استوانہ کا نصف قطر، اس کی اونچائی سے دوگنا ہے، تو اس کا C.S.A اور قاعدہ کا رقبہ کے درمیانی تعلق معلوم کیجئے۔

3) دو مدّور استوانے کو دو مستطیلی ایلومینیم شیٹ (Aluminum Sheet) ہر ایک شیٹ کے ابعاد لمبائی 12 میٹر اور چوڑائی 5 میٹر ہے ان کو گھما کر بنایا جائے۔ ایک شیٹ کو اس کے لمبائی سے گھمایا جائے اور دوسرے کو اس کے چوڑائی سے گھمایا جائے، ان کی منحنی سطحی رقبوں کی نسبت معلوم کیجئے۔

7.2.2 کھوکھلا استوانہ (Hollow Cylinder)

ایک شئے دو ہم محوری (Co-axial) استوانوں سے گھیری ہوئی ہے جس کی اونچائی یکساں ہے اور نصف قطروں مختلف ہو تو ان کو کھوکھلا استوانہ کہتے ہیں۔

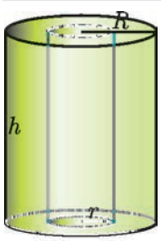


Fig. 7.7

فرض کیجئے R اور r استوانہ کے بیرونی اور اندرونی نصف قطریں ہیں، فرض کیجئے h اس کی اونچائی ہے۔

کھوکھلا استوانہ کا منحنی سطح کا رقبہ = استوانہ کا بیرونی C.S.A + استوانہ کا اندرونی C.S.A

$$= 2\pi Rh + 2\pi rh$$

کھوکھلا استوانہ کا C.S.A $= 2\pi(R + r)h$ sq. units

10th maths 7. mensuration
Monday, February 17, 2020 8:43:07 PM

کھوکھلا استوانہ کا T.S.A = C.S.A + اوپری اور نچلی حلقوں (قاعدوں) کا رقبہ

$= 2\pi(R + r)h \quad + 2\pi(R^2 - r^2)$

مربع اکائیاں $2\pi(R + r)(R - r + h)$ = کھوکھلا استوانہ کا کل سطحی رقبہ (T.S.A)

مثال 7.4 اگر ایک لیٹر رنگ (Paint) 10 مربع میٹر احاطہ کرتا ہے، ایک استوانہ نما سُرنگ (Tunnal) کے اندرونی اور بیرونی سطحی رقبوں کو رنگ کرنے کے لئے کتنے لیٹر رنگ درکار ہوگا؟ جس کی موٹائی 2 میٹر، اندورنی نصف قطر 6 میٹر اور اونچائی 25 میٹر ہے۔

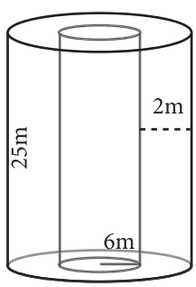


Fig. 7.8

حل : دیا گیا ہے موٹائی = 2 میٹر ، اونچائی $h = 25$ میٹر

اندورنی نصف قطر $r = 6$ میٹر

بیرونی نصف قطر $R = 6 + 2 = 8$ میٹر

کھوکھلا استوانہ کا C.S.A = استوانہ نما سُرنگ کا C.S.A

کھوکھلا استوانہ کا C.S.A = مربع اکائیاں $2\pi(R + r)h$

$= 2 \times \frac{22}{7}(8 + 6) \times 25$

لہذا، استوانہ نما سُرنگ کا C.S.A $= 2200 \text{ m}^2$

1 لیٹر رنگ سے گھیرا ہوا رقبہ $= 10 \text{ m}^2$

سُرنگ کو رنگ کرنے کے لئے درکار لیٹر کی تعداد $= \frac{2200}{10} = 220.$

چنانچہ، سُرنگ کو رنگ کرنے کے لئے 220 لیٹر رنگ کی ضرورت ہے۔

Progress Check اپنی پیش رفت کی جانچ

1۔ ٹھوس قائم مدّور استوانہ کو گردش کرنے سے ..... پر ..... حاصل ہوتا ہے۔

2۔ ایک قائم مدّور استوانہ میں محور سے ..... قطر ہے۔

3۔ قائم مدّور استوانہ کے T.S.A اور C.S.A کا درمیانی فرق ..... ہے۔

4۔ قائم مدّور استوانہ کا C.S.A اونچائی اور نصف قطر مساوی ہو تو اس کے قاعدہ کا رقبہ ..... ہے۔

7.2.3 قائم مدّور مخروط (Right Circular Cone)

خاکہ 7.9 میں دئے گئے شکلوں پر غور کیجئے اور کونسے ٹھوس شکل کو ظاہر کرتے ہیں شناخت کیجئے؟

یہ تمام اشیاء ایک مخروط کی مشابہت رکھتے ہیں۔



کرسمس کا پیڑ برتھ ڈے کی ٹوپی آئس کریم کا کون گھومتا ہوا لٹو

Fig. 7.9

10th maths 7. mensuration
Monday, February 17, 2020 8:43:08 PM

تعریف: اگر کسی مثلث قائمۃ الزاویہ کے ایک ضلع جو زاویہ قائم پر پورے طور پر ایک مرتبہ گھمایا جائے تو اس سے بننے والی ٹھوس شئے قائم مدّور مخروط کہلاتی ہے۔

ایک قائم مدّور مخروط کی تشکیل: توضیح Formation of Right Circular Cone-Demonstration

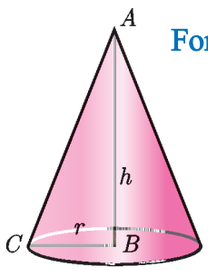


Fig. 7.10

خاکہ 7.10، میں اگر مثلث قائمۃ الزاویہ میں محور کی طور پر AB گردش کرتا ہے تو وتر AC سے مخروط کا منحنی سطح کا رقبہ بنتا ہے۔ جیسا کہ خاکہ میں ظاہر کیا گیا ہے۔ مخروط کی اونچائی، AB محور کی لمبائی ہی ہے اور وتر AC کا طول ترچھی بلندی (Slant Hight) ہے۔

ایک قائم مدّور مخروط کا سطحی رقبہ (Surface area of a right circular cone)

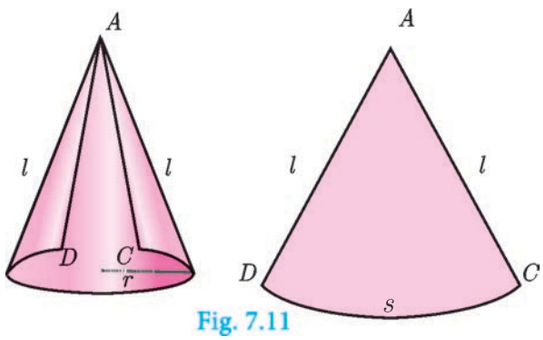


Fig. 7.11

فرض کیجئے کہ مخروط کا منحنی سطح کا رقبہ کو اس کے وتر AC کے ہمراہ کاٹا جائے اور اس کو ایک مسطح پر کھولا (Unrolled) جائے تو منحنی سطح کا رقبہ ایک قطاع دائرے ACD کی شکل بنے گا۔ جس میں AC اور CD بالترتیب ترچھی بلندی اور مخروط کے قاعدہ کا محیط ہوگا۔

یہاں قطاع دائرے کا نصف قطر 'l' اور قوس کی لمبائی 's' جو ایک دائرہ کے نصف قطر 'l' جیسا ہی ہوگا۔

(i) منحنی سطح کا رقبہ

$$\frac{\text{قطاع دائرے کا رقبہ}}{\text{دائرے کا رقبہ}} = \frac{\text{قطاع دائرے کی قوس کی لمبائی}}{\text{دائرے کا محیط}}$$ ، چنانچہ

$$\text{قطاع دائرے کا رقبہ} = \frac{\text{قطاع دائرے کی قوس کی لمبائی}}{\text{دائرے کا محیط}} \times \text{دائرے کا رقبہ}$$

$$= \frac{s}{2\pi l} \times \pi l^2 = \frac{s}{2} \times l = \frac{2\pi r}{2} \times l \quad (\text{چونکہ، } s = 2\pi r)$$

$$\text{مخروط کے منحنی سطح کا رقبہ} = \text{قطاع دائرے کا رقبہ} = \text{مربع اکائیاں } \pi rl$$

$$\text{ایک قائم مدّور مخروط کا C.S.A} = \text{مربع اکائیاں } \pi rl$$

Thinking Corner ذرا سوچئے

1) ٹھوس مخروط کی عملی مثال دیجئے۔
2) ایک مخروط کا سطحی رقبہ کو اس کے نصف قطر کی شکل معلوم کیجئے، جب اونچائی، نصف قطر کے مساوی ہوں۔
3) اوپر کے سطحی رقبہ کو مخروط کے قاعدہ کے رقبہ سے موازنہ کیجئے۔

Activity 1 کارروائی 1

- ایک نصف دائرہ نما کاغذ لیجئے جس کا نصف قطر 7 سمر ہوں اور اس سے ایک مخروط بنائے اور اس مخروط کا C.S.A معلوم کیجئے۔
- ایک ربع دائرہ نما کاغذ لیجئے جس کا نصف قطر 3.5 سمر ہوں۔ اور اس سے ایک مخروط بنائے اور اُس مخروط کا C.S.A معلوم کیجئے۔

10th maths 7. mensuration
Monday, February 17, 2020 8:43:08 PM

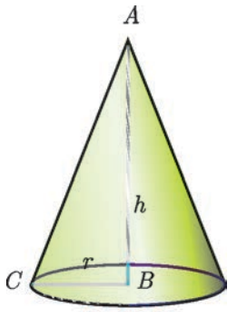


Fig. 7.12

ترچھی بلندی 'l' کو اخذ کرنا (Derivation of Slant height 'l')

ABC ایک مثلث قائمۃ الزاویہ ہے۔ B پر زاویہ قائمہ ہے۔ مثلث کا وتر، قاعدہ اور اونچائی بالترتیب l, r اور h سے ظاہر کیا گیا اب ΔABC میں مسئلہ فیثاغورث کو استعمال کر کے

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$l^2 = h^2 + r^2$$
$$l = \sqrt{h^2 + r^2} \quad \text{اکائیاں}$$

(ii) کل سطحی رقبہ (Total Surface Area)

ایک مخروط کا کل سطحی رقبہ = C.S.A + مخروط کے قاعدہ کا رقبہ

$= \pi rl + \pi r^2$ (چونکہ، قاعدہ ہی دائرہ ہے)

ایک قائم مدّور مخروط کا T. S A = $\pi r(l + r)$ مربع اکائیاں

مثال 7.5 ایک مخروطی شکل خیمہ (Tent) جس کا نصف قطر 7 میٹر اور اونچائی 24 میٹر ہے، اگر مستطیلی کینوس کی چوڑائی (Width) 4 میٹر ہو تو، خیمہ بنانے کے لئے استعمال ہونے والے کینوس (Canvas) کی طول معلوم کیجئے؟

حل : فرض کیجئے کہ r اور h بالترتیب مخروط کے نصف قطر اور اونچائی ہیں۔

دیا گیا ہے $r =$ 7 میٹر نصف قطر اور $h = 24$ میٹر اونچائی

$$\text{Hence, } l = \sqrt{r^2 + h^2}$$
$$= \sqrt{49 + 576}$$
$$l = \sqrt{625} = 25 \text{ m} \quad \text{لہذا،}$$

مخروطی شکل خیمہ کا C.S.A = πrl مربع اکائیاں

$$\text{کینوس کا رقبہ} = \frac{22}{7} \times 7 \times 25 = 550 \text{ m}^2$$

$$\text{کینوس کی لمبائی} = \frac{\text{کینوس کا رقبہ}}{\text{چوڑائی}} = \frac{550}{4} = 137.5 \text{ میٹر}$$

لہذا، کینوس کی لمبائی (طول) 137.5 میٹر ہے۔

مثال 7.6 اگر ایک مخروط کا کل سطحی رقبہ 704 مربع سم اور نصف قطر 7 سم ہو تو اس کی ترچھی بلندی معلوم کیجئے۔

حل : دیا گیا ہے،

$r =$ نصف قطر 7 سم

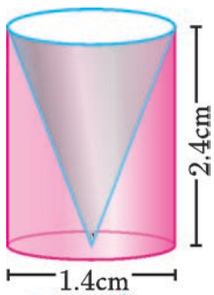
مخروط کا کل سطحی رقبہ = $\pi r(l + r)$ مربع اکائیاں

T.S.A = 704 مربع سم

$$704 = \frac{22}{7} \times 7(l + 7)$$
$$32 = l + 7 \quad \Rightarrow \quad l = 25 \text{ سم}$$

چنانچہ، مخروط کی ترچھی بلندی 25 سم ہے۔

10th maths 7. mensuration
Monday, February 17, 2020 8:43:09 PM



خاکہ 7.13

مثال 7.7 ایک ٹھوس استوانہ کی اونچائی 2.4 سم اور قطر 1.4 سم ہے، اس سے ایک مخروطی حصہ (Conical Cavity) کو کھوکھلا کیا گیا، (خاکہ 7.13) جس کی اونچائی اور قاعدہ وہی ہے باقی ٹھوس شکل کا کل سطحی رقبہ معلوم کیجئے۔

حل : فرض کیجئے کہ مخروط اور استوانہ کی اونچائی اور نصف قطر h اور r ہیں۔

فرض کیجئے کہ مخروط کی ترچھی بلندی l ہے۔

دیا گیا ہے $h = 2.4$ cm اور $d = 1.4$ cm, $r = 0.7$ cm

یہاں باقی ٹھوس شکل کا کل سطحی رقبہ = استوانہ کا C.S.A + مخروط کا C.S.A + قاعدہ کا رقبہ

$$= 2\pi rh + \pi rl + \pi r^2 \text{ sq. units}$$

$$l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{0.49 + 5.76} = \sqrt{6.25} = 2.5 \text{ cm}$$

$$l = 2.5 \text{ cm}$$

باقی ٹھوس شکل کا کل سطحی رقبہ $= 2\pi rh + \pi rl + \pi r^2$ sq. units

$$= \pi r\left(2h + l + r\right)$$

$$= \frac{22}{7} \times 0.7 \times \left[\left(2 \times 2.4\right) + 2.5 + 0.7\right]$$

$$= 17.6 \quad \text{مربع اکائیاں}$$

چنانچہ، باقی ٹھوس شکل کا کل سطحی رقبہ 17.6 مربع میٹر ہے۔

Progress Check اپنی پیش رفت کی جانچ

1۔ ٹھوس قائم مدّور مخروط کو گردش کرنے سے..... پر ..... حاصل ہوتا ہے۔

2۔ قائم مدّور مخروط میں محور سے..... قطر ہے۔

3۔ قائم مدّور مخروط کے T.S.A اور C.S.A کا درمیانی فرق ..... ہے۔

4۔ جب ایک قطاع دائرہ کو مخروط کی شکل میں تبدیل کیا جاتا ہے تو قطاع دائرہ اور مخروط کے درمیان درج ذیل تبدیلیاں کو جوڑ ملائیں۔

Sector قطاع دائرہ		Cone مخروط	
Radius	نصف قطر	Circumference of the base	قاعدہ کا محیط
Area	رقبہ	Slant height	ترچھی بلندی
Arc length	قوس کی لمبائی	Curved surface area	منحنی سطح کا رقبہ

7.2.4 کرّہ (Sphere)

تعریف : ایک نصف دائرہ کو اس کے قطر پر گھمایا جائے تو اس سے حاصل ہونے والی ٹھوس شکل کو کرّہ کہتے ہیں۔

10th maths 7. mensuration
Monday, February 17, 2020 8:43:09 PM

کرّہ کا ہر ایک مسطح ایک دائرہ ہے۔ کرّہ کے خط کا حصہ ایک کرّہ کے مرکز سے ایک مسطح گذرتی ہے تو اس کو عظیم دائرہ (Great Circle) مسطح کے دوسرے تمام حصہ کو چھوٹے دائرے (Small Circles) کہتے ہیں۔

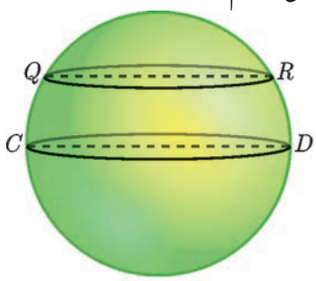


Fig. 7.14

جیسے کہ خاکہ میں دیکھایا گیا ہے، دائرہ جس کا قطر CD ہے، وہ عظیم دائرہ ہے، جب کہ دائرہ جس کا قطر QR ہے وہ چھوٹا دائرہ ہے۔

کرّہ کا سطحی رقبہ (Surface Area of a Sphere)

ارشمیدس کا ثبوت (Archimeder Proof)

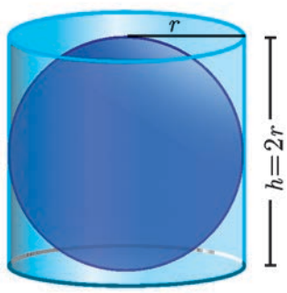


Fig. 7.15

مساوی قطر اور اونچائی والے ایک قائم مدّور استوانہ کے اندر ایک کرّہ کو رکھتے ہیں تو استوانہ کی اونچائی ہی کرّہ کا قطر ہوگا اس صورت میں، ارشمیدس اصول یہ ثابت کرتا ہے کہ کرّہ کا بیرونی رقبہ، استوانہ کا منحنی سطحی رقبہ یکساں ہے۔ یعنی

استوانہ کا منحنی سطحی رقبہ = کرّہ کا سطحی رقبہ

$$=2\pi rh \ = 2\pi r\left(2r\right)$$

مربع اکائیاں $4\pi r^2$ = **کرّہ کا سطح رقبہ**

Activity 2 کارروائی 2

- ☆ r نصف قطر کا ایک کرّہ لیجئے۔
- ☆ ایک استوانہ لیجئے جس کے قاعدہ کا قطر اور اونچائی، کرّہ کے قطر سے مساوی ہوں۔
- ☆ دھاگہ کو کرّہ اور استوانہ کے سطح پر اس طرح لپیٹو کہ دھاگہ ایک دوسرے پر منطبق نہ ہو اور دھاگے کے درمیان کوئی خالی جگہ نہ رہے۔
- ☆ اب دونوں دھاگوں کی لمبائیاں کا موازنہ کریں۔
- ☆ ان معلومات کو استعمال کر کے کرّہ کا سطحی رقبہ محسوب کیجئے۔

7.2.5 نصف کرّہ (Hemisphere)

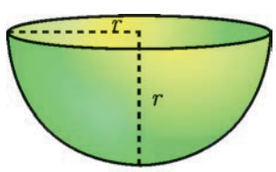


Fig. 7.16

ایک کرّہ کے کسی بھی عظیم دائرہ سے ایک مسطح گذاری جائے تو وہ تقسیم شدہ حصہ نصف کرّہ کہلاتا ہے، اس طرح کرنے سے ہم نے غور کیا کہ نصف کرّہ ٹھیک کرّہ کا آدھا حصہ ہے۔

$$\text{نصف کرّہ کا منحنی سطح کا رقبہ} = \frac{\text{کرّہ کا C.S.A}}{2} = \frac{4\pi r^2}{2}$$

نصف کرّہ کا C.S.A $= 2\pi r^2$ **مربع اکائیاں**

$$\text{نصف کرّہ کا کل سطحی رقبہ} = \text{C.S.A.} + \text{اوپر کے مدور سطح کا رقبہ}$$

$$= 2\pi r^2 + \pi r^2$$

نصف کرّہ کا T.S.A. $= 3\ \pi r^2$ **مربع اکائیاں**

10th maths 7. mensuration
Monday, February 17, 2020 8:43:10 PM

7.2.6 کھوکھلا نصف کرّہ (Hollow Hemisphere)

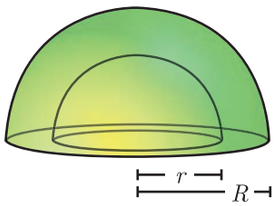


Fig. 7.17

فرض کرو کہ اندرونی نصف قطر r اور بیرونی نصف قطر R ہو تو

موٹائی (thickness) $= R - r$

کھوکھلا نصف کرّہ کا C.S.A = اندرونی نصف کرّہ کا رقبہ + بیرونی نصف کرّہ کا رقبہ

$= 2\pi R^2 + 2\pi r^2$

کھوکھلا نصف کرّہ کا C.S.A. $= 2\pi(R^2 + r^2)$ مربع اکائیاں

T.S.A. = C.S.A. + قاعدہ کا رقبہ

$= 2\pi(R^2 + r^2) + \pi(R^2 - r^2)$

$= \pi\left[2R^2 + 2r^2 + R^2 - r^2\right]$

کھوکھلا نصف کرّہ کا T.S.A $= \pi(3R^2 + r^2)$ مربع اکائیاں

مثال 7.8 ایک کرّہ کا سطحی رقبہ 154 مربع میٹر ہے، اس کا قطر معلوم کیجئے۔

حل : فرض کیجئے کہ کرّہ کا نصف قطر r ہے۔

دیا گیا ہے مربع میٹر 154 = کرّہ کا سطحی رقبہ حاصل ہوا

$$4\pi r^2 = 154$$

$$4 \times \frac{22}{7} \times r^2 = 154$$

ہمیں حاصل ہوتا ہے $r^2 = 154 \times \frac{1}{4} \times \frac{7}{22}$

لہذا $r^2 = \frac{49}{4} \Rightarrow r = \frac{7}{2}$

چنانچہ قطر 7 میٹر ہے۔

Activity 3 کارروائی 3

گلوب کو استعمال کر کے شمالی اور جنوبی نصف کرّہ میں کوئی دو ممالک کے نام لکھئے

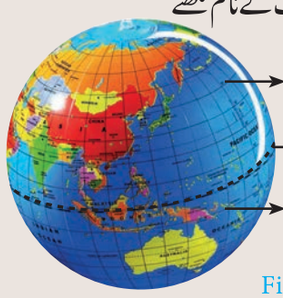


Fig. 7.18

مثال 7.9 ایک کرّہ نما غبارہ (Balloon) میں ہوا بھونکنے سے نصف قطر 12 سم سے بڑھ کر 16 سم بن جاتا ہے، دونوں صورتوں میں غباروں کا سطحی رقبوں کی نسبت معلوم کیجئے۔

حل : فرض کیجئے کہ r_1 اور r_2 غباروں کے نصف قطروں کو ظاہر کرتے ہیں

دیا گیا ہے کہ $\frac{r_1}{r_2} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

غباروں کے C.S.A کی نسبت $= \frac{4\pi r_1^2}{4\pi r_2^2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$

لہذا، غباروں کے C.S.A کی نسبت 9:16 ہے۔

Thinking Corner ذرا سوچئے

1) ایک کرّہ کا نصف قطر کی قیمت معلوم کیجئے جس کا سطحی رقبہ 36π مربع اکائیاں ہے۔
2) ایک کرّہ کتنے عظیم دائرے رکھ سکتا ہے؟
3) زمین سطحی رقبہ معلوم کیجئے جس کا قطر 12756 کلومیٹر ہے۔

10th maths 7. mensuration
Monday, February 17, 2020 8:43:10 PM

Progress Check — اپنی پیش رفت کی جانچ

1۔ کرّہ کا ہر حصہ ایک مسطح پر ..... ہے۔
2۔ عظیم دائرہ کا مرکز کرّہ کے ..... پر ہوتا ہے۔
3۔ نصف کرّہ کا C.S.A اور T.S.A کے درمیانی فرق ..... ہے۔
4۔ کرّہ کا سطحی رقبہ اور نصف کرّہ کا C.S.A کی نسبت ..... ہے۔
5۔ ایک کرّہ کے کسی بھی عظیم دائرہ سے ایک مسطح گذاری جائے تو وہ تقسیم شدہ حصہ ..... ہے۔

مثال 7.10 اگر ٹھوس نصف کرّہ کا قاعدہ کا رقبہ 1386 مربع میٹر ہو تو اس کا کل سطحی رقبہ معلوم کیجئے۔

حل : فرض کیجئے r نصف کرّہ کا نصف قطر ہے۔

دیا گیا ہے قاعدہ کا رقبہ $=\pi r^2 = 1386$ مربع میٹر

T.S.A. $= 3\pi r^2$ مربع میٹر

$= 3 \times 1386 \quad = 4158$

چنانچہ ٹھوس نصف کرّہ کا T.S.A 4158 مربع میٹر ہے۔

Thinking Corner — ذرا سوچئے

1۔ کیا جب ایک کرّہ کو اس کے چھوٹے دائرہ کے ہمراہ کاٹا جائے تو ہمیں نصف کرّہ حاصل ہوگا؟
2۔ نصف کرّہ کا T.S.A اس کے قاعدہ کا رقبہ سے کتنے گنا پر مساوی ہوگا؟
3۔ دئے گئے کرّہ سے کتنے نصف کرّے حاصل کر سکتے ہیں؟

مثال 7.11 کھوکھلا نصف کرّہ نما ساخت کے اندرونی اور بیرونی نصف قطریں بالترتیب 3 میٹر اور 5 میٹر ہیں، ساخت کا T.S.A اور C.S.A معلوم کیجئے۔

حل : فرض کیجئے کھوکھلا نصف کرّہ نما ساخت کے اندرونی اور بیرونی نصف قطریں بالترتیب r اور R ہیں۔

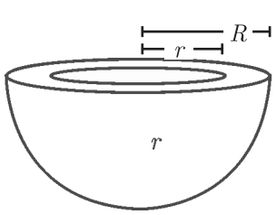


Fig. 7.19

دیا گیا ہے کہ $r = 3$ میٹر ، $R = 5$ میٹر

C.S.A ساخت کا $= 2\pi(R^2 + r^2)$ sq. units

$= 2 \times \frac{22}{7} \times (25 + 9) = 213.71$

T.S.A ساخت کا $= \pi(3R^2 + r^2)$ sq. units

$= \frac{22}{7}(75 + 9) \quad = 264$

چنانچہ C.S.A. $= 213.71 m^2$ اور T.S.A. $= 264$ m^2. ہیں۔

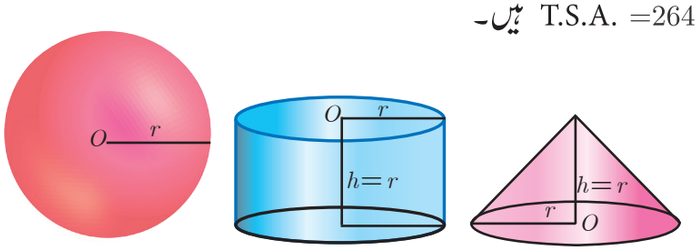


Fig. 7.20

مثال 7.12 ایک کرّہ ایک استوانہ اور ایک مخروط کے نصف قطر یکساں ہیں (خاکہ 7.20) جب کہ مخروط اور استوانہ کی اونچائی یکساں ہیں، ان کے منحنی سطحی رقبوں کی نسبت معلوم کیجئے۔ (خاکہ 7.20)

10th maths 7. mensuration
Monday, February 17, 2020 8:43:11 PM

حل : مخروط کا C.S.A : استوانہ کا C.S.A : کرّہ کا C.S.A = مطلوبہ نسبت

$= 4\pi r^2 : 2\pi rh : \pi rl \qquad (l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{2r^2} = \sqrt{2}r)$

$= 4\pi r^2 : 2\pi\, r^2 : \pi r\sqrt{2}r$

$= 4\pi r^2 : 2\pi r^2 : \sqrt{2}\pi r^2$

$= 4 : 2 : \sqrt{2} = 2\sqrt{2} : \sqrt{2} : 1$



Fig. 7.21(a) Fig. 7.21(b) Fig. 7.21(c)

7.2.7 ایک قائم مدّور مخروط کا مقطوعہ

Frustum of a right circular cone :

قدیم دور میں مخروط نما بالٹی (خاکہ 7.21(a)) میں ریت/ پانی بھر کر رکھا جاتا تھا؟ آگ کے حادثوں کے دوران اس کو استعمال کر کے آگ بجھائی جاتی تھی۔ بعد میں اس کے قاعدہ کو گول شکل دی گئی (خاکہ 7.21(b)) تاکہ اس کے حجم کو بڑھایا جائے۔ خاکہ 7.21(c) کی شکل الٹنے سے جو شکل بنتی ہے وہ مخروط کا مقطوعہ کہلاتا ہے۔

اشیاء جن کو ہم روزمرہ کی زندگی میں استعمال کرتے ہیں جیسے گلاس، بالٹی، سڑک مخروط (Street Cone) وغیرہ، مخروط کا مقطوعہ کے چند مثالیں ہیں۔



Bucket Street Cone Glass

Fig. 7.22

تعریف : جب مخروط ABC کو اس کے قاعدہ کے متوازی ایک مسطح سے کاٹا جائے، مخروط کا حصہ DECB قاعدہ اور کاٹے ہوئے مسطح کے درمیانی حصہ کو مخروط کا مقطوعہ کہتے ہیں۔

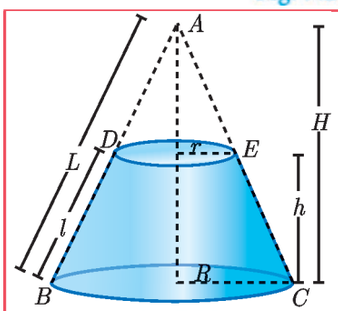


Fig. 7.23

مقطوعہ کا سطحی رقبہ Surface area of a frustum

فرض کیجئے مقطوعہ DECB کے قاعدہ اور اوپری حصہ کے نصف قطریں بالترتیب R اور r ہیں، h اونچائی اور l ترچھی بلندی ہے۔

چنانچہ C.S.A = $\frac{1}{2}$ (اوپری حصہ اور قاعدہ کے احاطوں کا حاصل جمع) × ترچھی بلندی

$= \frac{1}{2}(2\pi R + 2\pi r)l$

مربع اکائیاں $\text{C.S.A}_{\text{مقطوعہ کا}} = \pi(R + r)l$ جس میں $l = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$

مدّور اوپری حصہ کا رقبہ + مدّور قاعدہ کے حصہ کا رقبہ + C.S.A = T.S.A

مربع اکائیاں $\text{T.S.A}_{\text{مقطوعہ کا}} = \pi(R + r)l + \pi R^2 + \pi r^2$ جس میں $l = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$

10th maths 7. mensuration
Monday, February 17, 2020 8:43:11 PM

مثال 7.13 مخروط کے مقطوعہ کی ترچھی بلندی 5 سمراوردونوں کناروں کے نصف قطریں 4 سم اور 1 سم ہیں،اس کا منحنی سطحی رقبہ معلوم کیجئے۔

حل : فرض کیجئے کہ مقطوعہ کے ترچھی بلندی، بالائی نصف قطراور قاعدہ کا نصف قطر l، R اور r ہیں۔

مربع اکائیاں $\quad$ مخروط کے مقطوعہ کا C.S.A $= \pi(R+r)l$

$$= \frac{22}{7} \times (4+1) \times 5$$

$$= \frac{550}{7}$$

چنانچہ، $\quad$ C.S.A. $= 78.57 \text{ cm}^2$

ذرا سوچئے

- مخروط کے مقطوعہ کے لئے حقیقی زندگی میں کوئی دو مثالیں پیش کریں۔
- کیا ایک نصف کرّہ کو ایک کرّہ کا مقطوعہ سمجھا جاسکتا ہے۔

مثال 7.14 ایک قائم مدّور مخروط کا مقطوعہ کے شکل کی صنعتی دھاتی بالٹی ہے جس کے بالائی اور قاعدہ کے قطریں 10 میٹراور 4 میٹر ہیں اوراس کی اونچائی 4 میٹر ہے بالٹی کے منحنی سطحی رقبہ اور کل سطحی رقبہ دریافت کیجئے۔



Fig. 7.24

حل : فرض کیجئے کہ مقطوعہ کی اونچائی، ترچھی بلندی، بیرونی نصف قطراور اندرونی نصف قطر R, l, h اور r ہیں دیا گیا ہے۔

بالائی حصہ کا نصف قطر $R = 5$ میٹر ؛ بالائی حصہ کا قطر $= 10$ میٹر

اونچائی $h = 4$ میٹر ؛ قاعدہ کا نصف قطر $r = 2$ میٹر ؛ قاعدہ کا قطر $= 4$ میٹر

$$l = \sqrt{h^2 + (R-r)^2}$$

$$= \sqrt{4^2 + (5-2)^2}$$

$$l = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 \text{ میٹر}$$

مربع اکائیاں $\quad$ C.S.A $= \pi(R+r)l$

$$= \frac{22}{7}(5+2) \times 5 = 110 \ m^2$$

مربع اکائیاں $\quad$ T.S.A. $= \pi(R+r)l + \pi R^2 + \pi r^2$

$$= \frac{22}{7}\left[(5+2)5 + 25 + 4\right] = \frac{1408}{7} = 201.14$$

لہذا، $\quad$ C.S.A $= 110 \text{ m}^2$ $\quad$ اور $\quad$ T.S.A $= 201.14 \text{ m}^2$

Progress Check اپنی پیش رفت کی جانچ

1) قائم مدّور مخروط کو دو متوازی مسطحوں کے درمیان قطع کرتے ہیں تو وہ حصہ..... ہے۔

2) قائم مدّور مخروط میں کتنے مقطوعہ ہو سکتے ہیں؟

10th maths 7. mensuration
Monday, February 17, 2020 8:43:12 PM

مشق 7.1

1۔ استوانہ کا نصف قطر اور اونچائی کی نسبت 5:7 ہے، اور اس کا منحنی سطحی رقبہ 5500 مربع سم ہو تو نصف قطر اور اونچائی معلوم کیجئے۔

2۔ ایک ٹھوس لوہے کا استوانہ کا کل سطحی رقبہ 1848 مربع سم ہے، اس کے منحنی سطحی رقبہ، اس کے کل سطحی رقبہ کے چھ میں کا پانچواں حصہ ہے، لوہے کا استوانہ کا نصف قطر اور اونچائی معلوم کیجئے۔

3۔ ایک کھوکھلا لکڑی کا کندہ کے بیرونی نصف قطر اور لمبائی بالترتیب 16 سم اور 13 سم ہیں، اگر اس کی موٹائی 4 سم ہو تو اس کا T.S.A معلوم کیجئے۔

4۔ ایک PQR مثلث قائمۃ الزاویہ جس میں $\angle Q = 90°$ کو QR اور PQ پر گھمایا جاتا ہے اگر سم $QR = 16$ اور سم $PR = 20$ ہو تو مثلث کے ذریعہ بنا ہوا قائم مدّ ور مخروطوں کے منحنی سطح کے رقبوں کا موازنہ کیجئے۔

5۔ چار اشخاص مخروطی خیمہ میں رہتے ہیں جس کی ترچھی بلندی 19 میٹر ہے اگر ہر شخص کے لئے 22 مربع میٹر زمین کا رقبہ درکار ہو تو خیمہ کی اونچائی معلوم کیجئے۔

6۔ ایک لڑکی اپنی سالگرہ کا جشن کے لئے یوم پیدائش کی ٹوپیاں (Birthday Caps) ایک قائم مدّ ور مخروط کی شکل میں بنانا چاہتی ہے۔ 5720 مربع سم کاغذ کا شیٹ استعمال کر کے کتنی ٹوپیاں بنا سکتی ہے جس کا نصف قطر 5 سم اور اونچائی 12 سم ہیں۔

7۔ یکساں اونچائی رکھنے والے دو قائم مدّ ور مخروطوں کے نصف قطریں (radii) کی نسبت 1:3 ہے، ان کے منحنی سطح کے رقبوں کی نسبت معلوم کیجئے جب ہر مخروط کی اونچائی چھوٹے مخروط کے نصف قطر کے 3 گنا ہوں۔

8۔ ایک کرّہ کا نصف قطر 25% اضافہ ہوتا ہے، اس کے سطحی رقبہ میں کتنے فیصد کا اضافہ ہوا معلوم کیجئے۔

9۔ ایک کھوکھلا نصف کرّہ نما برتن جس کے اندرونی اور بیرونی قطریں بالترتیب 20 سم اور 28 سم ہیں، اس برتن کو ₹ 0.14 فی مربع سم کی شرح سے تمام حصے پر رنگ کرنے کا کل خرچ معلوم کیجئے۔



10۔ مقطوعہ شکل کا ایک ٹیبل لیمپ (Table Lamp) کے بیرونی حصے کو رنگ کیا گیا ہے اوپری حصہ کے ساتھ، لیمپ کو ₹ 2 فی مربع سم کی شرح سے رنگ کرنے کا کل خرچ معلوم کیجئے۔

7.3 حجم Volume

استوانہ، مخروط، کرّہ، نصف کرّہ اور مقطوعہ کے بارے میں بحث کر چکے ہیں، اب ہم ان ٹھوس اجسام کے حجم کے بارے میں بحث کریں گے۔

حجم سے مراد ایک شئے سے گھیری جانے والی جگہ کی مقدار ہے۔ حجم کی پیمائش مکعب اکائیوں سے کی جاتی ہے۔

7.3.1 ایک ٹھوس قائم مدّ ور استوانہ کا حجم Volume of a Solid right circular cylinder

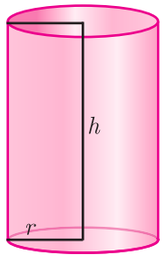


Fig. 7.25

ایک قائم مدّ ور استوانہ کا حجم اس کا قاعدہ کے رقبہ اور اونچائی کا حاصل ضرب ہے۔

$$V = (\text{قاعدہ کا رقبہ}) \times (\text{اونچائی}) = \pi r^2 \times h = \pi r^2 h$$

چنانچہ،

ایک استوانہ کا حجم = $\pi r^2 h$ مکعب اکائیاں

10th maths 7. mensuration
Monday, February 17, 2020 8:43:13 PM

7.3.2 ایک کھوکھلا استوانہ کا حجم (استعمال شدہ شئے کا حجم)

Volume of a hollow cylinder (Volume of the material used)

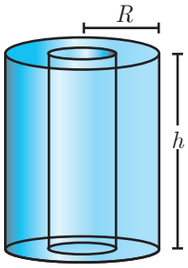


Fig. 7.26

کھوکھلا استوانہ کے بیرونی اور اندورنی نصف قطریں بالترتیب R اور r اکائیاں ہیں
اگر استوانہ کی اونچائی h اکائیاں ہو تو

حجم V = (اندرونی استوانہ کا حجم) − (بیرونی استوانہ کا حجم)

$$V = \pi R^2 h - \pi r^2 h = \pi(R^2 - r^2)h$$

کھوکھلا استوانہ کا حجم = مکعب اکائیاں $\pi(R^2 - r^2)h$

مثال 7.15 استوانہ کا حجم معلوم کیجئے جس کی اونچائی 2 میٹر اور قاعدہ کا رقبہ 250 مربع میٹر ہے۔

حل : فرض کیجئے استوانہ کا نصف قطر اور اونچائی بالترتیب r اور h ہے۔

دیا گیا ہے کہ، میٹر $h = 2$ اونچائی ، مربع میٹر 250 = قاعدہ کا رقبہ

استوانہ کا حجم = مکعب اکائیاں $\pi r^2 h$

$$= \text{قاعدہ کا رقبہ} \times h$$

$$= 250 \times 2 = 500 \text{ m}^3$$

لہذا استوانہ کا حجم $= 500 \text{ m}^3$

Thinking Corner ذرا سوچئے

1۔ اگر اونچائی اس کے نصف قطر کے مربع کا معکوس تناسب میں ہو تو استوانہ کا حجم ..... ہے۔

2۔ استوانہ کا نصف قطر r اور اونچائی h ہو تو اس کا حجم کیا ہوگا جب اس کا (a) نصف قطر آدھا ہو۔ (b) اونچائی آدھی ہو۔

مثال 7.16 استوانہ نما پانی کی ٹینکی کا حجم 1.078×10^6 لیٹر ہے، اگر ٹینکی کا قطر 7 میٹر ہو تو اس کی اونچائی معلوم کیجئے۔

حل : استوانہ کا نصف قطر اور اونچائی بالترتیب r اور h ہے۔

دیا گیا ہے،

ٹینکی کا حجم $= 1078 \times 10^6 = 1078000$ لیٹر

$= 1078 \text{ m}^3$ (چنانچہ، $1l = \frac{1}{1000} \text{ m}^3$ since)

قطر $= 7m$ $\Rightarrow$ نصف قطر $= \frac{7}{2}$ m

ٹینکی کا حجم = مکعب اکائیاں $\pi r^2 h$

$$1078 = \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times h$$

لہذا ٹینکی کی اونچائی 28 میٹر ہے۔

10th maths 7. mensuration
Monday, February 17, 2020 8:43:13 PM

مثال 7.17 کھوکھلا استوانہ بنانے کے لئے استعمال ہونے والا لوہے کا حجم معلوم کیجئے اس کی اونچائی 9 سم اور اس کے اندرونی اور بیرونی نصف قطریں بالترتیب 21 سم اور 28 سم ہیں۔

حل : کھوکھلا استوانہ کی اندرونی نصف قطر، بیرونی نصف قطر اور اونچائی بالترتیب r، R اور h ہے۔

دیا گیا ہے، $r = 21\text{cm},\ R = 28\text{ cm},\ h = 9\text{ cm}$

مکعب اکائیاں کھوکھلے استوانہ کا حجم $= \pi(R^2 - r^2)h$

$$= \frac{22}{7}(28^2 - 21^2)\times 9$$

کھوکھلے استوانہ کا حجم $= \frac{22}{7}(784 - 441)\times 9 = 9702$

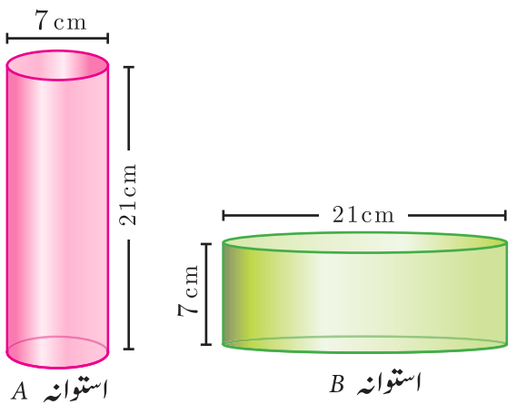
لہذا، استعمال شدہ لوہے کا حجم $= 9702\text{ cm}^3$

مثال 7.18 استوانے A اور B کے لئے (خاکہ 7.27) معلوم کیجئے۔

(i) کونسے استوانہ کا حجم زیادہ ہے۔ (ii) استوانہ جس کا حجم زیادہ ہے وہ کل سطحی رقبہ بھی زیادہ ہوگا۔ تصدیق کیجئے۔

(iii) A اور B استوانوں کے حجموں کی نسبت معلوم کیجئے۔

حل :



خاکہ 7.27

(i) مکعب اکائیاں استوانہ کا حجم $= \pi r^2 h$

استوانہ A کا حجم $= \frac{22}{7}\times\frac{7}{2}\times\frac{7}{2}\times 21$

$= 808.5\text{ cm}^3$

استوانہ B کا حجم $= \frac{22}{7}\times\frac{21}{2}\times\frac{21}{2}\times 7$

$= 2425.5\text{ cm}^3$

لہذا استوانہ A سے، استوانہ B کا حجم زیادہ ہے۔

(ii) استوانہ کا T.S.A $= 2\pi r(h + r)$ sq. units

استوانہ A کا T.S.A $= 2\times\frac{22}{7}\times\frac{7}{2}\times(21 + 3.5) = 539\text{ cm}^2$

استوانہ B کا T.S.A $= 2\times\frac{22}{7}\times\frac{21}{2}\times(7 + 10.5) = 1155\text{ cm}^2$

لہذا، یہ تصدیق کیا گیا کہ استوانہ B کا حجم زیادہ ہے اس کا کل سطحی رقبہ بھی زیادہ ہے۔

(iii) $\frac{\text{استوانہ A کا حجم}}{\text{استوانہ B کا حجم}} = \frac{8085}{24255} = \frac{1}{3}$

لہذا، A اور B استوانے کے حجموں کی نسبت 1:3 ہے۔

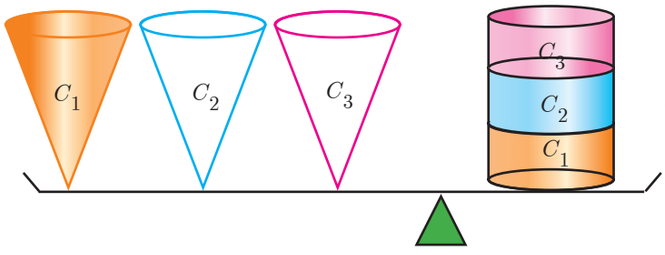
10th maths 7. mensuration
Monday, February 17, 2020 8:43:13 PM

7.3.3 قائم مدّ ورمخروط کا حجم Volume of a right circular cone

فرض کیجئے مخروط کا نصف قطر اور اونچائی r اور h ہو تو اس کا حجم

مکعب اکائیاں $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

توضیح:



- فرض کیجئے کہ ایک قائم مدّ وراستوانہ اور تین قائم مدّ ور مخروطیں اس کے قاعدہ کا نصف قطر اور اونچائی مساوی ہو جیسا کہ استوانہ کا ہے
- تین مخروطوں کے اجزاء ٹھیک مکمل طور پر استوانہ میں سما جاتے ہیں۔

خاکہ 7.28

خاکہ 7.28 سے، ہم نے دیکھا کہ

استوانہ کا حجم = (ایک مخروط کا حجم) × 3

$=\pi r^2 h$ مکعب اکائیاں

$$\text{مخروط کا حجم} = \frac{1}{3}\pi r^2 h \text{ مکعب اکائیاں}$$

مثال 7.19 ٹھوس قائم مدّ ورمخروط کا حجم 11088 مکعب سمر ہے اگر اس کی اونچائی 24 سمر ہو تو مخروط کا نصف قطر معلوم کیجئے۔

حل : دیا گیا ہے۔ فرض کیجئے کہ مخروط کا نصف قطر اور اونچائی بالترتیب r اور h ہیں۔

$$\text{مخروط کا حجم} = 11088 \text{ cm}^3$$

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h = 11088$$

$$\frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times r^2 \times 24 = 11088$$

$$r^2 = 441$$

$$r = 21 \text{ cm}$$ مخروط کا نصف قطر، چنانچہ

Thinking Corner ذرا سوچئے

(1) کیا یہ معلوم کرنا ممکن ہے ایک قائم مدّ ورمخروط اس کے مساوی ہے۔

(a) اونچائی اور ترچھی بلندی (b) نصف قطر اور ترچھی بلندی (c) اونچائی اور نصف قطر۔

(2) دو مخروطیں جن کے حجم مساوی ہیں، ان کے نصف قطر اور اونچائی کی نسبت کیا ہوگی۔

مثال 7.20 دو مخروطوں کے حجموں کی نسبت 2:3 ہے ان کے نصف قطروں کی نسبت معلوم کیجئے اگر دوسرے مخروط کی اونچائی دگنی ہے پہلے مخروط کی اونچائی سے۔

10th maths 7. mensuration
Monday, February 17, 2020 8:43:14 PM

حل : فرض کیجئے مخروط I کا نصف قطر اور اونچائی r_1 اور h_1 ہیں، اور فرض کیجئے مخروط II کا نصف قطر اور اونچائی r_2 اور h_2 ہیں۔

دیا گیا ہے کہ

$$\frac{\text{مخروط I کا حجم}}{\text{مخروط II کا حجم}} = \frac{2}{3} \quad \text{اور} \quad h_2 = 2h_1$$

$$\frac{\frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1}{\frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{r_1^2}{r_2^2} \times \frac{h_1}{2h_1} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{r_1}{r_2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

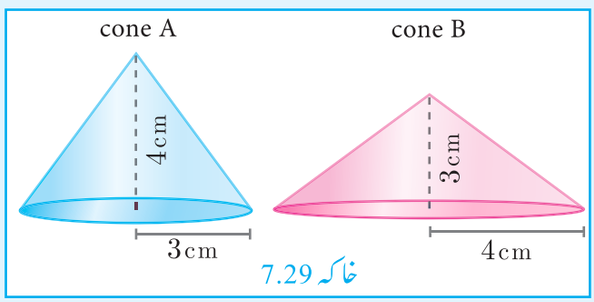
لہذا، نصف قطروں کی نسبت $= 2 : \sqrt{3}$

Progress Check اپنی پیش رفت کی جانچ

1۔ ایک مخروط کا حجم اس کے قاعدہ کا رقبہ اور ..... کا حاصل ضرب ہے۔

2۔ اگر مخروط کا نصف قطر دگنا ہو تو نیا حجم، اصلی حجم سے..... گنا ہوگا۔

3۔ خاکہ 7.29 دئے گئے مخروطوں پر غور کیجئے۔



خاکہ 7.29

(i) بغیر حل کئے معلوم کیجئے کہ کس کا حجم زیادہ ہے؟

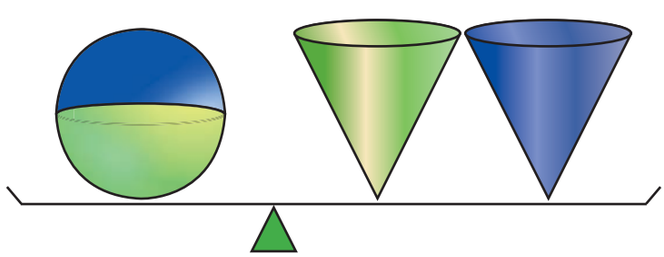
(ii) تصدیق کیجئے کہ مخروط جس کا حجم زیادہ ہو تو کیا سطحی رقبہ بھی زیادہ ہوگا۔

(iii) مخروط A کا حجم : مخروط B کا حجم = ?

7.3.4 کرّہ کا حجم Volume of Sphere

فرض کیجئے کہ کرّہ کا نصف قطر r ہو تو اس کا حجم دیا گیا مکعب اکائیاں $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ہیں۔

توضیح



- فرض کیجئے ایک کرّہ اور دو قائم مدّور مخروطیں جس کے قاعدے کے نصف قطریں اور اونچائیاں یکساں ہیں اس طرح ہے کہ کرّہ کا دگنا نصف قطر، مخروطوں کے اونچائی کے مساوی ہے۔
- اس طرح ہم نے یہ غور کیا کہ دو مخروطوں کے اجزاء ٹھیک مکمل طور پر کرّہ میں سمایا جاتے ہیں۔

خاکہ 7.30

10th maths 7. mensuration
Monday, February 17, 2020 8:43:14 PM

خاکہ 7.30 سے ہم نے دیکھا کہ

(ایک مخروط کا حجم) $\times$ 2 = کرّہ کا حجم

جس میں کرّہ کا قطر اور مخروط کی اونچائی مساوی ہے۔

$$= 2\left(\frac{1}{3}\pi r^2 h\right)$$

$$= \frac{2}{3}\pi r^2 (2r) \qquad (\text{چونکہ } h = 2r)$$

مکعب اکائیاں $\quad$ کرّہ کا حجم $= \frac{4}{3}\pi r^3$

7.3.5 کھوکھلا کرّہ / کرّہ نما ساخت کا حجم (استعمال شدہ شئے کا حجم)

Volume of a hollow sphere / spherical shell (volume of the material used)

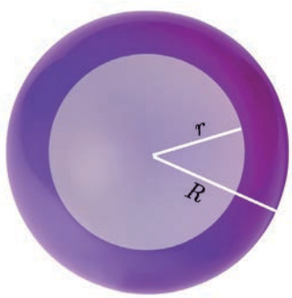


Fig. 7.31

فرض کیجئے کہ کھوکھلا کرّہ کا اندرونی اور بیرونی نصف قطر r اور R ہیں۔

بیرونی اور اندرونی کرّوں کے درمیانی گھیرے ہوئے حصہ کا حجم

$$= \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$$

مکعب اکائیاں $\quad$ کھوکھلے کرّہ کا حجم $= \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)$

7.3.6 ٹھوس نصف کرّہ کا حجم

Volume of solid hemisphere

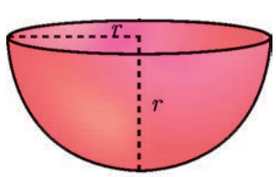


Fig. 7.32

فرض کیجئے کہ ٹھوس نصف کرّہ کا نصف r ہے۔

ٹھوس نصف کرّہ کا حجم $= \frac{1}{2}$ (کرّہ کا حجم)

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}\pi r^3\right]$$

مکعب اکائیاں $\quad$ ٹھوس نصف کرّہ کا حجم $= \frac{2}{3}\pi r^3$

7.3.7 کھوکھلا نصف کرّہ کا حجم استعمال شدہ شئے کا حجم

Volume of hollow hemisphere (Volume of the material used)

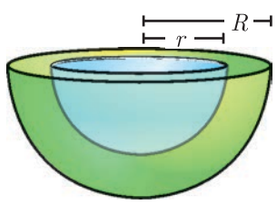


Fig. 7.33

فرض کیجئے کہ کھوکھلا نصف کرّہ کا اندرونی اور بیرونی نصف قطر r اور R ہیں۔

کھوکھلا نصف کرّہ کا حجم = [بیرونی نصف کرّہ کا حجم] $-$ [اندرونی نصف کرّہ کا حجم]

$$= \frac{2}{3}\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi r^3$$

مکعب اکائیاں $\quad$ کھوکھلے نصف کرّہ کا حجم $= \frac{2}{3}\pi(R^3 - r^3)$

Thinking Corner ذرا سوچئے

ایک مخروط، ایک نصف کرّہ اور ایک استوانہ کے قاعدے مساوی ہیں مخروط اور استوانہ کی اونچائی اور ان کے مشترک نصف قطر بھی مساوی ہیں کیا ان کے حجم مساوی ہیں؟

10th maths 7. mensuration
Monday, February 17, 2020 8:43:15 PM

مثال 7.21 ایک ٹھوس نصف کرّہ کا حجم 29106 مکعب سم ہے دوسرا نصف کرّہ کا حجم پہلے حجم کے دو تہائی حصہ نکلنے سے حاصل ہوتا ہے، نیا نصف کرّہ کا نصف قطر معلوم کیجئے۔

حل : فرض کیجئے کہ نصف کرّہ کا نصف قطر r ہے

دیا گیا ہے۔ نصف کرّہ کا حجم = مکعب سم 29106

نیا نصف کرّہ کا حجم = $\frac{2}{3}$ (اصلی کرّہ کا حجم)

$= \frac{2}{3} \times 29106$

نیا نصف کرّہ کا حجم $= 19404 \text{ cm}^3$

$\frac{2}{3}\pi r^3 = 19404$

$r^3 = \frac{19404 \times 3 \times 7}{2 \times 22} = 9261$

$r = \sqrt[3]{9261} = 21 \text{ cm}$

چنانچہ، $r = 21 \text{ cm}$



Thinking Corner ذرا سوچئے

1۔ کرّہ اور نصف کرّہ کے لئے حقیقی زندگی میں کوئی دو مثالیں پیش کریں۔

2۔ ایک کرّہ کے عظیم دائرہ سے ایک مسطح گذاری جائے تو وہ کرّہ ..... حصوں میں تقسیم ہوتے ہیں۔

3۔ اگر ایک کرّہ کا حجم اور سطحی رقبہ عددی طور پر مساوی ہو تو کرّہ کا نصف قطر ..... ہے۔

مثال 7.22 کھوکھلے پیتل (Brass) کے کرّہ کا وزن محسوب کیجئے اگر اس کی اندرونی قطر 14 سم اور موٹائی 1 ملی میٹر ہے اور جس کی کثافت 17.3g/cm^3 ہے۔

حل : کھوکھلا کرّہ کا اندرونی اور بیرونی نصف قطریں r اور R ہیں.

دیا گیا ہے کہ، سم $d = 14$ اندورنی قطر سم $r = 7$ اندرونی نصف قطر ملی میٹر 1 = موٹائی

بیرونی نصف قطر $R = 7 + \frac{1}{10} = \frac{71}{10} = 7.1 \text{ cm}$

کھوکھلے کرّہ کا حجم $= \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3) \text{ cu. cm}$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7}(35791 - 343) = 62.48 \text{ cm}^3$

لیکن 1 مکعب سم پیتل کا وزن = 17.3 گرام

کل وزن $= 17.3 \times 62.48 = 1080.90$ گرام

لہذا، کل وزن 1080.90 گرام ہے۔

10th maths 7. mensuration
Monday, February 17, 2020 8:43:15 PM

Progress Check — اپنی پیش رفت کی جانچ

1۔ کرّہ کا حجم سے سطحی رقبہ کی نسبت کیا ہے؟

2۔ نصف کرّہ کی اونچائی اور نصف قطر کے درمیانی تعلق..... ہے۔

3۔ ایک کرّہ حجم اس کے سطحی رقبہ اور..... کا حاصل ضرب ہے۔

7.3.8 مخروط کے مقطوعہ کا حجم (Volume of frustum of cone)

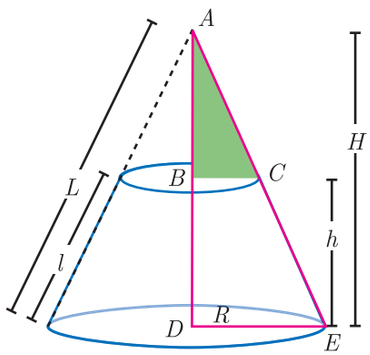


Fig. 7.34

فرض کیجئے کہ مخروط اور مقطوعہ کی اونچائی بالترتیب H اور h ہیں، ان کے ترچھی بلندی L اور l ہیں، اگر مقطوعہ کے مدّ ور قاعدوں کے نصف قطریں R اور r ہو تو مخروط کے مقطوعہ کا حجم دونوں مخروطوں کے حجموں کا فرق ہے،

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H - \frac{1}{3}\pi r^2 (H-h)$$

چونکہ، مثلثیں ABC اور ADE یکساں ہیں، ان کے نظیری ضلعے کی نسبت معکوس ہیں۔

چنانچہ $\frac{H-h}{H} = \frac{r}{R} \Rightarrow H = \frac{hR}{R-r}$ (1)

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi R^2 H - \frac{1}{3}\pi r^2 (H-h) \\ &= \frac{\pi}{3} H(R^2 - r^2) + \frac{1}{3}\pi r^2 h \\ &= \frac{\pi}{3}\frac{hR}{R-r}(R^2 - r^2) + \frac{\pi}{3} r^2 h \quad [(1) \text{کو استعمال کرکے}] \\ &= \frac{\pi}{3} hR(R+r) + \frac{\pi}{3} r^2 h \end{aligned}$$

مقطوعہ کا حجم $= \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$ مکعب اکائیاں

ذرا سوچئے

جب مقطوعہ حجم معلوم ہو تو کیا مکمل مخروط کا حجم دریافت کرنا ممکن ہوگا؟

مثال 7.23 اگر ایک مقطوعہ کے مدّ ور کناروں کے نصف قطریں 28 سمر اور 7 سمر ہیں اس کی اونچائی 45 سمر ہو تو مقطوعہ کا حجم معلوم کیجئے

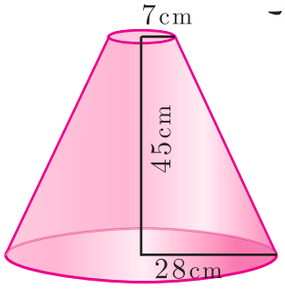


Fig. 7.35

حل : فرض کیجئے کہ مقطوعہ کی اونچائی، بالائی اور قاعدہ کے نصف قطریں بالترتیب h, R اور r ہیں۔

دیا گیا ہے کہ $h = 45\,\text{cm},\ R = 28\ \text{cm},\ r = 7\ \text{cm}$

$$\begin{aligned} \text{مکعب اکائیاں میں حجم} &= \frac{1}{3}\pi\left[R^2 + Rr + r^2\right]h \\ &= \frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times\left[28^2 + (28\times 7) + 7^2\right]\times 45 \\ &= \frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times 1029\times 45 = 48510 \end{aligned}$$

چنانچہ، مقطوعہ کا حجم 48510 مکعب سمر ہے۔

10th maths 7. mensuration
Monday, February 17, 2020 8:43:15 PM

کیا آپ جانتے ہو؟

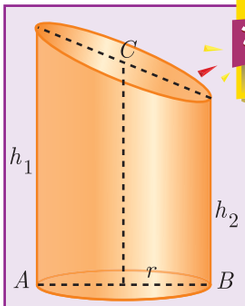


Fig. 7.36

متصل خاکہ، ایک استوانہ کا ٹیڑھا مقطوعہ (Oblique frustum) کو ظاہر کرتا ہے فرض کیجئے کہ اس ٹھوس شکل کو ایک مسطح کے ذریعے C سے کاٹا جائے AB قاعدہ کے متوازی کاٹا نہ جائے تو

مربع اکائیاں $CSA = 2\pi r \times \frac{h_1 + h_2}{2}$

جس میں h_1 اور h_2 مقطوعہ کی سب سے بڑی اور سب سے چھوٹی اونچائی کو ظاہر کرتے ہیں تو

مکعب اکائیاں $\text{اس کا حجم} = \pi r^2 \times \frac{h_1 + h_2}{2}$

مشق 7.2

1۔ 14 میٹر گہرائی والا کنواں کھودا جاتا ہے جس کا اندرونی قطر 10 میٹر ہے اس نکالی گئی مٹی سے کنواں کے اطراف یکساں طور پر 5 میٹر چوڑائی والا ایک بند (Embankment) بنایا جاتا ہے تو اس کی اونچائی معلوم کیجئے۔

2۔ ایک استوانہ نما گلاس کا قطر 20 سمر ہے اس میں موجود پانی کی اونچائی 9 سمر ہے، ایک چھوٹا استوانہ نما دھات جس کا نصف قطر 5 سمر اور اونچائی 4 سمر ہے اگر وہ پانی میں مکمل طور پر ڈوب جاتا ہے تو گلاس میں بڑھی ہوئی پانی کی سطح محسوب کیجئے۔

3۔ اگر ایک مخروط نما لکڑی کا ٹکڑا جس کا محیط 484 سمر ہو تو اس کا حجم دریافت کیجئے جبکہ اس کی اونچائی 105 سمر ہے۔

4۔ ایک مخروطی برتن پٹرول سے بھرا ہوا ہے اس کا نصف قطر 10 میٹر اور اونچائی 15 میٹر ہے اگر پٹرول برتن کے قاعدہ کے حصہ سے خارج کرتے ہیں تو اس کی شرح 25 مکعب میٹر فی منٹ ہے کتنے منٹوں میں برتن مکمل طور پر خالی ہوگا، تمہارے جواب کو قریب ترین منٹ میں لکھئے۔

5۔ مثلث قائمۃ الزاویہ جس کے اضلاع 6 سمر، 8 سمر اور 10 سمر ہیں جس میں زاویہ قائمہ کے دوسرے اضلاع کو دو طریقوں سے گھمایا جاتا ہے تو اس سے بننے والے ٹھوس کے حجموں کا فرق معلوم کیجئے۔

6۔ یکساں نصف قطر رکھنے والے دو مخروطوں کا حجم 3600 مکعب سمر اور 5040 مکعب سمر ہیں، ان کے اونچائیوں کی نسبت معلوم کیجئے۔

7۔ اگر دو کرّوں کے نصف قطروں کی نسبت 4:7 ہے ان کے حجموں کی نسبت معلوم کیجئے۔

8۔ ایک ٹھوس کرّہ اور ایک ٹھوس نصف کرّہ مساوی کل سطحی رقبہ رکھتے ہیں۔ ثابت کیجئے کہ ان کے حجموں کی نسبت $3\sqrt{3} : 4$ ہے۔

9۔ کرّہ نما تانبا (Copper) کی ساخت (گولہ) کا بیرونی اور اندرونی سطحی رقبے 576π مربع سمر اور 324π مربع سمر بالترتیب ہیں۔ اس گولے کو بنانے کے لئے مطلوبہ اشیاء کا حجم معلوم کیجئے۔

10۔ ایک ڈبہ کا اوپری حصہ کو کھوکھلا جائے تو وہ مخروط کا مقطوعہ کی شکل بنتی ہے جس کی اونچائی 16 سمر اور اس کی نچلی اور اوپری کناروں کے نصف قطریں بالترتیب 8 سمر اور 20 سمر ہیں ڈبہ میں مکمل طور پر دودھ سمایا جائے تو ₹40 فی لیٹر دودھ کے حساب سے کل قیمت معلوم کیجئے؟

7.4 ٹھوس مربوط اجسام کا حجم اور سطحی رقبہ (Volume and surface area of combined solids)

خاکہ 7.37 میں دئے گئے شکلوں پر غور کیجئے۔

یہ شکلیں، درجہ ذیل ٹھوس مربوط شکلوں کی تعریف کی طرف رہنمائی کرتے ہیں۔

10th maths 7. mensuration
Monday, February 17, 2020 8:43:16 PM

ٹھوس مربوط شکل اس کو کہتے ہیں جو دو یا دو سے زیادہ ٹھوس اجسام سے مل کر بنتے ہیں۔

مربوط ٹھوس اشیاء کا اصول کھلونے بنانے، عمارتوں کی تعمیر، بڑھئی کا کام وغیرہ شعبوں میں استعمال ہوتے ہیں۔

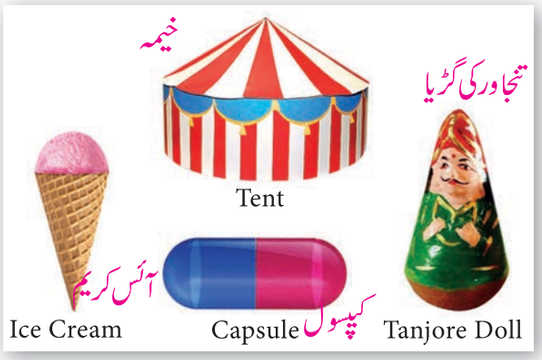


Fig. 7.37

مربوط شکل کا سطحی رقبہ معلوم کرنے کے لئے ہمیں صرف نظر آنے والے رقبوں کو معلوم کرنا چاہئے، مثال کے طور پر اگر ایک مخروط کے اوپر نصف کرّہ ہے ہمیں چاہئے کہ نصف کرّہ کا C.S.A اور مخروط کا C.S.A علٰحیدہ طور پر معلوم کر کے ان دونوں کو جمع کریں، غور کریں کہ ہم دونوں نصف کرّہ اور مخروط کے قاعدہ کے رقبوں کو چھوڑ دیتے ہیں۔ کیونکہ دونوں قاعدے ایک دوسرے سے ملے ہوئے ہیں اور وہ نظر نہیں آتے ہیں۔

لیکن، دو بنیادی ٹھوس اجسام کو ملانے سے بننے والے ٹھوس کا حجم، ان دونوں کے انفرادی حجموں کا حاصل جمع ہے۔

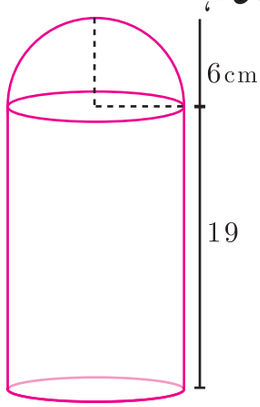


Fig. 7.38

مثال 7.24 ایک کھلونا استوانہ کی شکل کا ہے جس کے اوپر ایک نصف کرّہ رکھا گیا ہے اس کھلونے کی اونچائی 25 سمر ہے اس کا مشترک قطر 12 سمر ہے تو کھلونے کا کل سطحی رقبہ معلوم کیجئے۔

حل : استوانہ کا نصف قطر اور اونچائی بالترتیب r اور h ہے۔

دیا گیا ہے کہ، سمر $6 = r$ نصف قطر ؛ سمر $12 = d$ قطر

کھلونے کی کل اونچائی 25 سمر ہے۔

چنانچہ، استوانہ نما شکل کی اونچائی $= 25 - 6 = 19$

استوانہ کے قاعدہ کا رقبہ + نصف کرّہ کا C.S.A + استوانہ کا C.S.A = کھلونے کا T.S.A

$$= 2\pi rh + 2\pi r^2 + \pi r^2$$

$$= \pi r(2h + 3r) \text{ sq. units}$$

$$= \frac{22}{7} \times 6 \times (38 + 18)$$

$$= \frac{22}{7} \times 6 \times 56 = 1056$$

لہذا، کھلونے کا T.S.A 1056 مربع سمر ہے۔

مثال 7.25 ایک زیورات کا ڈبہ (خاکہ 7.39) مکعب نما شکل میں ہے جس کے ابعاد سمر 10 × سمر 15 × سمر 30 ہیں اس کے اوپر استوانہ کا آدھا حصہ خاکہ میں دیکھایا گیا ہے، اس ڈبہ کا حجم معلوم کیجئے۔

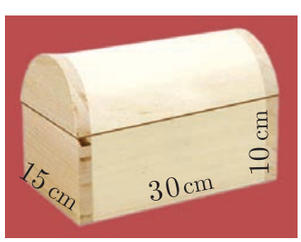


Fig. 7.39

حل : فرض کیجئے کہ مکعب نما شکل کی لمبائی، چوڑائی اور اونچائی l, b اور h_1 ہیں، اور اسی طرح فرض کیجئے کہ استوانہ کا نصف قطر r اور اونچائی h_2 ہیں۔

10th maths 7. mensuration
Monday, February 17, 2020 8:43:17 PM

ڈبہ کا حجم = مکعب نما کا حجم + $\frac{1}{2}$ (استوانہ کا حجم)

مکعب کا ئیاں $= (l \times b \times h_1) + \frac{1}{2}(\pi r^2 h_2)$

$= \left(30 \times 15 \times 10\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{22}{7} \times \frac{15}{2} \times \frac{15}{2} \times 30\right)$

$= 4500 + 2651.79 = 7151.79$

ڈبہ کا حجم $= 7151.79 \text{ cm}^3$

مثال 7.26 یونس کو اپنے خاندان کی تقریب (Function) کے لئے 150 افراد کے رہنے کا بندوبست کرنا ہوگا اس مقصد کے لئے وہ ایک خیمہ کا منصوبہ بناتا ہے۔ جو استوانہ کی شکل کے اوپر مخروط کو رکھا گیا ہوا، ہر فرد کے رہنے کے لئے 4 مربع میٹر جگہ اور سانس لینے کے لئے 40 مکعب میٹر ہوا درکار ہوگی۔ اگر استوانہ نما حصہ کی اونچائی 8 میٹر ہو تو مخروط کی اونچائی کیا ہوگی؟

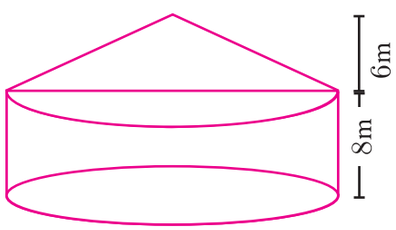


Fig. 7.40

حل : فرض کیجئے کہ استوانہ اور مخروط کی اونچائی بالترتیب h_1 اور h_2 ہیں۔

ایک فرد کا رقبہ = 4 مربع میٹر

کل افراد کی تعداد = 150

کل قاعدہ کا رقبہ = 150×4

$\pi r^2 = 600 \quad \ldots (1)$

$r^2 = 600 \times \frac{7}{22} = \frac{2100}{11}$

1 فرد کے لئے درکار ہوا کا حجم $= 40 \text{ m}^3$

150 افراد کے لئے درکار ہوا کا کل حجم $= 150 \times 40 = 6000 \text{ m}^3$

$\pi r^2 h_1 + \frac{1}{3}\pi r^2 h_2 = 6000$

$\pi r^2 \left(h_1 + \frac{1}{3}h_2\right) = 6000$

$600 \left(8 + \frac{1}{3}h_2\right) = 6000 \qquad [\text{using } (1)]$

$8 + \frac{1}{3}h_2 = \frac{6000}{600}$

$\frac{1}{3}h_2 = 10 - 8 = 2$

لہذا مخروطی خیمہ کی اونچائی h_2 ، 6 میٹر ہے۔

مثال 7.27 قیف (Funnel) پر مشتمل مخروط کا مقطوعہ کے قاعدہ سے 12 سم لمبائی والے استوانہ نما حصہ کو لگایا گیا ہے، اگر کل اونچائی 20 سم ہے استوانہ نما حصہ کا قطر 12 سم اور قیف کی بالائی حصہ کا قطر 24 سم ہو تو قیف کا سطحی رقبہ معلوم کیجئے۔

10th maths 7. mensuration
Monday, February 17, 2020 8:43:17 PM

حل : مقطوعہ کے بالائی اور قاعدہ کے قطریں r، R ہیں۔ مقطوعہ اور استوانہ کی اونچائیاں بالترتیب h_1 اور h_2 ہیں۔

دیا گیا ہے۔ $R=12\text{cm}, \quad r=6\text{cm} \quad , h_2 = 12 \text{ cm}$

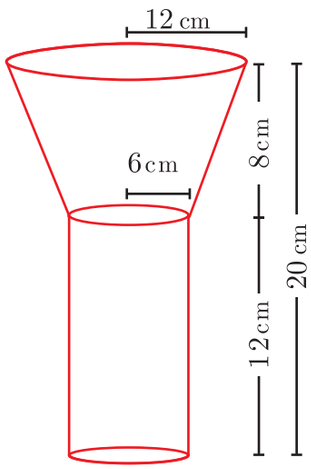


Fig. 7.41

$h_1 = 20 - 12 = 8 \text{ cm}$

مقطوعہ کی ترچھی بلندی $l = \sqrt{(R-)r^{\,2} + h_1^2}$ units

$= \sqrt{36 + 64}$

$l = 10 \text{ cm}$

مربع اکائیاں بیرونی سطحی رقبہ $= 2\pi r h_2 + \pi(R + r)\, l$

$= \pi\left[2\, r h_2 + (R + r)\, l\right]$

$= \pi\left[(2 \times 6 \times 12) + (18 \times 10)\right]$

$= \pi\left[144 + 180\right]$

$= \frac{22}{7} \times 324 = 1018.28$

لہذا، قیف کا بیرونی سطحی رقبہ 1018.28 مربع سم ہے۔

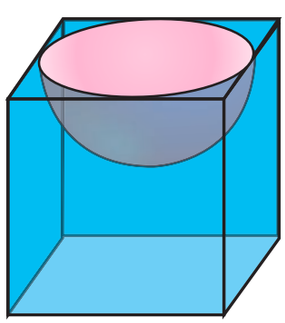


Fig. 7.42

مثال 7.28 مکعب کی شکل کا ڈبہ (block) کے ایک چہرے سے ایک نصف کرّہ نما حصہ کاٹ کر اس طرح نکالا گیا ہے (خاکہ 7.42) کہ نصف کرّہ کا قطر l مکعب کے ضلع کی لمبائی سے مساوی ہے، باقی ٹھوس شکل کا سطحی رقبہ دریافت کیجئے۔ (خاکہ 7.42)

حل : فرض کیجئے کہ نصف کرّہ کا نصف قطر r ہے۔

دیا گیا ہے، l = مکعب کا ضلع = نصف کرّہ کا قطر

نصف کرّہ کا نصف قطر $= \frac{l}{2}$

باقی ٹھوس شکل کا T.S.A = C.S.A نصف کرّہ نما حصہ کا − مکعبی حصہ کا سطحی رقبہ + نصف کرّہ نما حصہ کے قاعدہ کا رقبہ

$= 6 \times (Edge \text{ کنارا})^2 + 2\pi r^2 - \pi r^2$

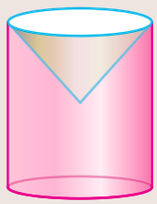
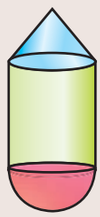
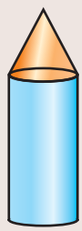
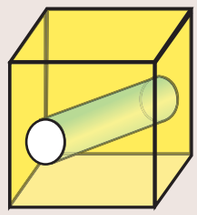
$= 6 \times (\text{ کنارا})^2 + \pi r^2$

$= 6 \times (l)^2 + \pi\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(24 + \pi)\, l^2$

باقی ٹھوس شکل کا کل سطحی رقبہ $= \frac{1}{4}(24 + \pi)\, l^2$ sq. units

10th maths 7. mensuration
Monday, February 17, 2020 8:43:18 PM

Activity 4 کارروائی 4

ٹھوس مربوط اجسام				
ہر ٹھوس مربوط اجسام میں موجود ٹھوس اجسام کی فہرست بنائیں۔				
ٹھوس مربوط اجسام کا کل سطحی رقبہ				

مشق 7.3

1) ایک برتن جس کی شکل نصف کرّہ نما پیالہ (bowl) کو ایک کھوکھلا استوانہ کے اوپر رکھا گیا ہے، برتن کا قطر 14 سمر اور اونچائی 13 سمر ہے ، برتن کی گنجائش معلوم کیجئے۔

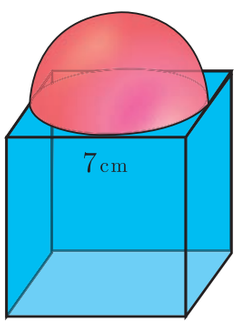
2) انس ایک انجینئرنگ کا طالب علم ہے، اس کو سانچہ (Model) کے مطابق ایک شکل بنانے کے لئے کہا گیا۔ جو ایک استوانہ کے دونوں کناروں پر دو مخروطوں سے بنتی ہے۔ اس سانچہ کا قطر 3 سمر اور اس کی لمبائی 12 سمر ہے اگر ہر مخروط کی اونچائی 2 سمر ہو تو انس سے بنایا گیا سانچہ کا حجم دریافت کیجئے۔

3) ایک ٹھوس استوانہ جس کی اونچائی 2.4 سمر اور قطر 1.4 سمر ہے اُس سے ایک مخروط نکالا جائے جس کی اونچائی اور قطر استوانہ کے مساوی ہے باقی ٹھوس شکل کا حجم کو قریب ترین مکعب سمر (cm^3) میں معلوم کیجئے۔

4) ایک ٹھوس شکل میں قائم مدّور مخروط جس کی اونچائی 12 سمر اور نصف قطر 6 سمر ہے جو ایک نصف کرّہ کے اوپر رکھا گیا ہے جس کا نصف قطر 6 سمر ہے اس ٹھوس شکل کو قائم مدّور استوانہ جو پانی سے بھرا ہوا ہے اس کے اندر رکھا گیا ہے اس طرح کہ قاعدہ کو مس کرتا ہے، استوانہ سے باہر نکلے ہوئے پانی کا حجم معلوم کیجئے اگر استوانہ کا نصف قطر 6 سمر اور اونچائی 18 سمر ہے۔



5) ایک کیپسول جو استوانہ کی شکل کا ہے جس کے کنارے پر دو نصف کرّے جوڑے ہوئے ہیں اگر کیپسول کی کل لمبائی 12 ملی میٹر ہے اور کیپسول کا قطر 3 ملی میٹر ہے اس میں کتنی دوا سما سکتی ہے۔



6) جیسے کہ خاکہ میں دیکھایا گیا ہے کہ ایک مکعبی ڈبہ جس کا ضلع 7 سمر ہے، جس پر ایک نصف کرّہ رکھا گیا ہے ٹھوس شکل کا سطحی رقبہ معلوم کیجئے۔

7) ایک قائم مدّور استوانہ، ایک کرّہ سے لگا ہوا ہے جس کا نصف قطر r اکائیاں ہیں، محسوب کیجئے۔

(i) کرّہ کا سطحی رقبہ۔

(ii) استوانہ کا منحنی سطحی رقبہ۔ (iii) (i) اور (ii) حاصل شدہ رقبوں کی نسبت۔

10th maths 7. mensuration
Monday, February 17, 2020 8:43:18 PM

7.5 ٹھوس شکلوں کو بغیر حجم تبدیل کئے دوسرے ٹھوس شکل میں تبدیل کرنا۔

Conversion of solids from one shape to another with no change in volume

تبدیلیاں کرنا یا منتقل کرنا یہ ہماری روزمرہ زندگی کا ایک اہم حصہ ہے، مثال کے طور پر، ایک سونار سونے کے بار (bar) کو پگھلا کر زیور میں تبدیل کرتا ہے، ایک بچہ چکنی مٹی سے مختلف کھلونے بناتا ہے۔ بڑھئی لکڑی کو استعمال کر کے مختلف گھریلو اشیاء (فرنیچر) بناتا ہے۔ اسی طرح ٹھوس شکلوں کو ایک شکل سے دوسری شکل میں مختلف مقاصد کے لئے تبدیل کرتے ہیں۔

اس حصّے میں ہم، ٹھوس شکلوں کو بغیر حجم تبدیل کئے دوسرے ٹھوس شکل میں تبدیل کے حسابات کو حل کریں گے۔

مثال 7.29 ایک دھاتی کرّہ جس کا نصف قطر 16 سمر ہے اس کو پگھلا کر چھوٹے کرّوں میں تبدیل کیا جاتا ہے ہر ایک چھوٹے کرہ کا نصف قطر 2 سمر ہے کتنے چھوٹے کرّے حاصل ہو سکتے ہیں۔

حل : فرض کیجئے حاصل ہونے والے چھوٹے کرّوں کی تعداد n ہے، فرض کیجئے ہر چھوٹے کرّے کا نصف قطر r اور دھاتی کرّہ کا نصف قطر R ہے۔ $R = 16$ cm, $r = 2$ cm

بڑے دھاتی کرّہ کا حجم = $n \times$ (چھوٹے کرّہ کا حجم)

$$n\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$n\left(\frac{4}{3}\pi \times 2^3\right) = \frac{4}{3}\pi \times 16^3$$

$$8n = 4096 \quad \Rightarrow \quad n = 512$$

لہذا، 512 چھوٹے کرّے حاصل ہوتے ہیں۔

مثال 7.30 چکنی مٹی کے سانچہ (Modeling clay) سے بنا ہوا ایک مخروط، جس کی اونچائی 24 سمر اور نصف قطر 6 سمر ہے۔ ایک بچہ اس کو استوانہ کی شکل میں تبدیل کرتا ہے جس کا نصف قطر، مخروط کے نصف قطر کے برابر ہے، استوانہ کی اونچائی معلوم کیجئے۔

حل : فرض کیجئے کہ مخروط اور استوانہ کی اونچائی بالترتیب h_1 اور h_2 ہیں، اسی طرح سے فرض کیجئے کہ مخروط کا نصف قطر r ہے

دیا گیا ہے، مخروط کی اونچائی $h_1 = 24$ سمر مخروط اور استوانہ کا نصف قطر = 6 سمر

استوانہ کا حجم = مخروط کا حجم

$$\pi r^2 h_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 h_1$$

$$h_2 = \frac{1}{3} \times h_1 \quad \text{gives } h_2 = \frac{1}{3} \times 24 = 8$$

لہذا، استوانہ کی اونچائی 8 سمر ہے۔

مثال 7.31 آئس کریم سے بھرا ہوا قائم مدّور استوانہ نما برتن کا قاعدہ کا نصف قطر 6 سمر اور اونچائی 15 سمر ہے، 9 سمر اونچائی اور 3 سمر نصف قطر والے مخروطوں میں آئس کریم بھرا جائے جس پر نصف کرّہ نما ایک ٹوپی (Cap) رکھی جائے، برتن کو خالی کرنے کے لئے مخروطوں کی تعداد معلوم کیجئے

حل : فرض کرو کہ استوانہ کی اونچائی اور نصف قطر بالترتیب h اور r ہیں۔

دیا گیا ہے کہ، $h = 15$ cm, $r = 6$ cm

10th maths 7. mensuration
Monday, February 17, 2020 8:43:19 PM

برتن کا حجم $V = \pi r^2 h$ مکعب اکائیاں

$$= \frac{22}{7} \times 6 \times 6 \times 15$$

فرض کرو کہ مخروط کا نصف قطر اور اونچائی سمر $r_1 = 3$، سمر $h_1 = 9$ ہیں

اسی طرح نصف کرّہ نما ٹوپی کا نصف قطر سمر $r_1 = 3$ ہے۔

ایک آئس کریم مخروط کا حجم = (نصف کرّہ نما ٹوپی کا حجم + مخروط کا حجم)

$$= \frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1 + \frac{2}{3}\pi r_1^3$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 3 \times 3 \times 9 + \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 3 \times 3 \times 3$$

$$= \frac{22}{7} \times 9(3+2) = \frac{22}{7} \times 45$$

$$\text{مخروطوں کی تعداد} = \frac{\text{استوانہ کا حجم}}{\text{ایک آئس کریم مخروط کا حجم}}$$

$$\text{درکار آئس کریم کے مخروطوں کی تعداد} = \frac{\frac{22}{7} \times 6 \times 6 \times 15}{\frac{22}{7} \times 45} = 12$$

استوانہ نما برتن کو خالی کرنے کے لئے 12 آئس کریم کے مخروطوں کی ضرورت ہے۔

Activity 5 کارروائی 5

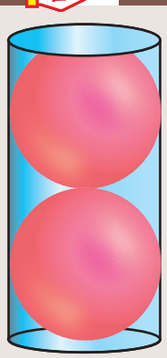


Fig. 7.43

متصل خاکہ میں ایک استوانہ نما صراحی (can) میں دو گیندیں ہیں اس صراحی کے اندر دونوں گیندیں ٹھیک سمائے ہوئے ہیں اس کا اوپری حصہ ڈھکا ہوا ہے، ہر ٹینس گیند کا نصف قطر 3 سمر ہے درجہ ذیل کو محسوب کیجئے۔

(i) استوانہ کی اونچائی۔
(ii) استوانہ کا نصف قطر۔
(iii) استوانہ کا حجم۔
(iv) دو گیندوں کا حجم۔
(v) استوانہ کا حجم جو گیندوں سے گھیرا نہ ہو۔
(vi) گیندوں سے گھیرا ہوا حجم کا فیصد۔

مشق 7.4

1) کرّہ نما ایلومینیم (Aluminium) جس کا نصف قطر 12 سمر ہے پگھلا کر 8 سمر نصف قطر والا ایک استوانہ میں ڈھالا جاتا ہے، استوانہ کی اونچائی معلوم کیجئے۔

2) 14 سمر قطر والا ایک پائپ کے ذریعہ 15 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے پانی بہتا ہے یہ پانی 50 میٹر لمبے اور 44 میٹر چوڑے ایک استوانہ نما ٹینک میں گرتا ہے، کتنے گھنٹوں میں ٹینک کی سطح میں 21 سمر کا اضافہ ہوگا؟

3) ایک مخروطی فلاسک جس کا قاعدہ کا نصف قطر r اور اونچائی h اکائیاں ہیں پانی سے بھرا ہوا ہے اس پانی کو استوانہ نما فلاسک ڈالا جاتا ہے جس کا قاعدہ کا نصف قطر xr اکائیاں ہے، استوانہ نما فلاسک میں پانی کے سطح کی بلندی معلوم کیجئے۔

10th maths 7. mensuration
Monday, February 17, 2020 8:43:20 PM

4) ایک ٹھوس قائم مدّ ورمخروط جس کا قطر 14 سمراور اونچائی 8 سمر ہے پگھلا کر کرّہ بنایا جاتا ہے اگر کرّہ کا بیرونی قطر 10 سمر ہوتو اندرونی قطر دریافت کیجئے۔

5) ابرار کے گھر کے بالائی حصہ میں استوانہ کی شکل کا پانی کا ٹینک رکھا ہوا ہے، اس ٹینک کو بھرنے کے لئے زیرِ زمین ٹینک (Under ground tank) سے پانی چڑھایا جاتا ہے جو مکعب نما کی شکل کا ہے زیرِ زمین ٹینک کے ابعاد 2 میٹر×1.5 میٹر×1 میٹر ہے، بالائی ٹینک کا نصف قطر 60 سمراور اونچائی 105 سمر ہے زیرِ زمین ٹینک میں باقی پانی کا حجم معلوم کرو جب کہ بالائی ٹینک مکمل طور پر پانی سے بھرا جائے، پہلے سے زیرِ زمین ٹینک مکمل طور پر بھرا ہوا تھا۔

6) کھوکھلا نصف کرّہ نما ساخت کی اندرونی اور بیرونی قطریں بالترتیب 6 سمراور 10 سمر ہیں، اگر اس کو پگھلا کر ایک ٹھوس استوانہ میں تبدیل کیا جاتا ہے جس کا قطر 14 سمر ہوتو استوانہ کی اونچائی معلوم کیجئے۔

7) ایک ٹھوس کرّہ جس کا نصف قطر 6 سمر ہے اس کو پگھلا کر ایک یکساں موٹائی والا کھوکھلا استوانہ میں تبدیل کیا جائے، اگر استوانہ کے قاعدہ کا بیرونی نصف قطر 5 سمراور اس کی اونچائی 32 سمر ہوتو استوانہ کی موٹائی معلوم کیجئے؟

8) ایک نصف کرّہ نما پیالہ میں جوس کناروں تک بھرا ہوا ہے، اس جوس کو استوانہ نما برتن میں ڈالا جائے جس نصف قطر اس کی اونچائی سے 50% زیادہ ہے اگر پیالہ اور برتن دونوں کا قطر یکساں ہوتو پیالہ سے برتن میں منتقل شدہ جوس کی فیصد معلوم کیجئے؟

TIN9V

مشق 7.5

Multiple choice questions کثیر انتخابی سوالات

1) ایک قائم مدّ ورمخروط کی اونچائی 15 سمراور قاعدہ کا قطر 16 سمر ہوتو اس کا منحنی سطح کا رقبہ ہے۔

(1) 60π cm^2 (2) 68π cm^2 (3) 120π cm^2 (4) 136π cm^2

2) اگر دو ٹھوس نصف کرّے جو یکساں قاعدہ کا نصف قطر r اکائیاں رکھتے ہیں، ان کے قاعدوں سے جوڑا گیا ہوتو اس نئے ٹھوس کا منحنی سطح کا رقبہ ہے

(1) $4\pi r^2$ sq. units (2) $6\pi r^2$ sq. units (3) $3\pi r^2$ sq. units (4) $8\pi r^2$ sq. units

3) ایک قائم مدّ ورمخروط کا نصف قطر 5 سمراور ترچھی بلندی 13 سمر ہے تو اس کی اونچائی کیا ہوگی۔

(1) 12 cm (2) 10 cm (3) 13 cm (4) 5 cm

4) اگر ایک قائم مدّ وراستوانہ کا قاعدہ کا نصف قطر کو آدھا کر کے اُسی اونچائی کو رکھتے ہیں تو حاصل ہونے والے استوانہ کے حجم سے اصلی استوانہ کے حجم کی نسبت ..... ہے۔

(1) 1:2 (2) 1:4 (3) 1:6 (4) 1:8

5) ایک استوانہ کا کل سطح کا رقبہ معلوم کرو جس کا نصف قطر اونچائی سے $\frac{1}{3}$ حصّہ ہے۔

(1) $\frac{9\pi h^2}{8}$ sq.units (2) $24\pi h^2$ sq.units

(3) $\frac{8\pi h^2}{9}$ sq.units (4) $\frac{56\pi h^2}{9}$ sq.units

6) ایک کھوکھلا استوانہ میں، بیرونی اور اندرونی نصف قطروں کا حاصل جمع 14 سمر ہے اور چوڑائی 4 سمر ہے اگر اس کی اونچائی 20 سمر ہوتو اس میں سمانے والی شئے کا حجم ..... ہے۔

(1) 5600π cm^3 (2) 11200π cm^3 (3) 56π cm^3 (4) 3600π cm^3

10th maths 7. mensuration
Monday, February 17, 2020 8:43:21 PM

7) اگر ایک مخروط کے قاعدہ کا نصف قطر تہرا (تگنا) اور اس کی اونچائی دگنی ہو تو اس کا حجم

(1) 6 گنا سے بنا ہے (2) 18 گنا سے بنا ہے (3) 12 گنا سے بنا ہے (4) کوئی تبدیلی نہیں

8) نصف کرّہ کا کل سطحی رقبہ اس کے نصف قطر کے مربع کا کتنے گنا ہے۔

(1) π (2) 4π (3) 3π (4) 2π

9) ایک ٹھوس کرّہ جس کا نصف قطر x سم ہے اس کو پگھلا کر اُسی نصف قطر کا ایک ٹھوس مخروط بنایا جاتا ہے تو مخروط کی اونچائی ..... ہے۔

(1) $3x$ cm (2) x cm (3) $4x$ cm (4) $2x$ cm

10) قائم مدّور مخروط کا مقطوعہ کی اونچائی 16 سم اور کناروں کا نصف قطر 8 سم اور 20 سم ہو تو مقطوعہ کا حجم ..... ہے۔

(1) 3328π cm^3 (2) 3228π cm^3 (3) 3240π cm^3 (4) 3340π cm^3

11) شٹل کارک جو بیڈمنٹن کھیلنے کے لئے استعمال ہوتا ہے اس کی شکل کن شکلوں سے بنی ہوئی ہے۔

(i) ایک استوانہ اور ایک کرّہ (ii) ایک نصف کرّہ اور ایک مخروط

(iii) ایک کرّہ اور ایک مخروط (iv) ایک مخروط کا مقطوعہ اور ایک نصف کرّہ

12) r_1 اکائیاں نصف قطر رکھنے والا ایک کرّہ نما گیند کو پگھلا کر 8 نئے مماثل گیندیں بنایا جائے جس کا ہر ایک نصف قطر r_2 اکائیاں ہو تو $r_1 : r_2$ ..... ہے۔

(1) 2:1 (2) 1:2 (3) 4:1 (4) 1:4

13) ایک استوانہ نما لکڑی کے کندہ جس کا قاعدہ کا نصف قطر 1 سم اور اونچائی 5 سم ہے اس سے ایک عظیم کرّہ کا ٹکر نکالا جائے تو اس کا حجم (مکعب سم میں) ہے۔

(1) $\frac{4}{3}\pi$ (2) $\frac{10}{3}\pi$ (3) 5π (4) $\frac{20}{3}\pi$

14) ایک مخروط کی اونچائی اور نصف قطر بالترتیب h_1 اکائیاں اور r_1 اکائیاں ہیں اس کا ایک حصہ مقطوعہ ہے، مقطوعہ کی اونچائی h_2 اکائیاں اور چھوٹے قاعدہ کا نصف قطر r_2 ہے، اگر $h_2 : h_1 = 1:2$ ہو تو $r_2 : r_1$ ..... ہے۔

(1) 1 : 3 (2) 1 : 2 (3) (4) 3 : 1

15) ایک استوانہ، ایک مخروط اور ایک کرّہ کے حجموں کی نسبت ..... ہے اگر ہر ایک کا قطر مساوی اور اونچائی مساوی ہے۔

(1) 1:2:3 (2) 2:1:3 (3) 1:3:2 (4) 3:1:2

Unit Exercise - 7 اکائی مشق - 7



1) استوانہ نما فاؤنٹین پین (Fountain pen) سیاہی بھرا ہوا ہے جس کی اونچائی 7 سم اور قطر 5 ملی میٹر ہے سیاہی سے بھرا ایک پین سے 330 حروف اوسطاً لکھ سکتے ہیں۔ ایک سیاہی کی بوتل میں لیٹر کا پانچواں حصّہ سے کتنے حروف لکھ سکتے ہیں۔

2) ایک نصف کرّہ نما ٹینک پانی سے بھرا ہوا ہے جس کا نصف قطر 1.75 میٹر ہے اس کو ایک پائپ سے جوڑا گیا ہے جو ٹینک کو 7 لیٹر فی سکنڈ کی شرح سے پانی خالی کرتا ہے ٹینک کو مکمل طور پر خالی کرنے کے لئے کتنا وقت لگے گا۔

3) ٹھوس نصف کرّہ جس کا نصف قطر r اکائیاں ہے اس سے ایک مخروط نکالا جائے جس کا زیادہ سے زیادہ حجم کیا ہوگا۔

4) ٹین کا شیٹ سے بنا ہوا ایک تیل کا قیف (Funnel) ہے جس کا استوانہ نما حصہ 10 سم لمبا ہے جو ایک مخروط کا مقطوعہ سے جوڑا ہوا ہے اگر کُل اونچائی 22 سم ہے، استوانہ نما حصہ کا قطر 8 سم ہو اور قیف کے اوپری حصہ کا قطر 18 سم ہو تو قیف بنانے کے لئے کتنے ٹین شیٹ کی ضرورت ہوگی۔

10th maths 7. mensuration
Monday, February 17, 2020 8:43:21 PM

5) ایک سکّہ کا قطر 1.5 سمر اور موٹائی 2 ملی میٹر ہے، اس طرح کے کتنے سکّوں کو پگھلا کر 10 سمر اونچائی اور 4.5 سمر قطر والا ایک قائم مدّ ور استوانہ بنایا جا سکتا ہے۔

6) ایک کھوکھلا دھاتی استوانہ جس کا بیرونی نصف قطر 4.3 سمر اور اندرونی نصف قطر 1.1 سمر ہے اور لمبائی 4 سمر ہے اس کو پگھلا کر 12 سمر لمبائی والا ایک ٹھوس استوانہ بنایا جاتا ہے، ٹھوس استوانہ کا قطر معلوم کیجئے۔

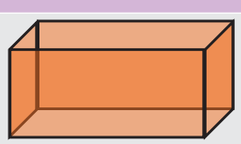
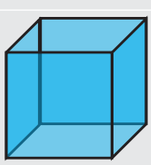
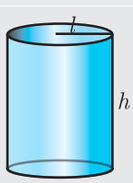
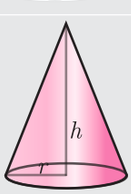
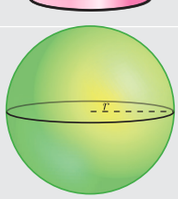
7) ایک مخروط کے مقطوعہ کی ترچھی بلندی 4 میٹر ہے مدّ ور کناروں کا احاطے 18 میٹر اور 16 میٹر ہیں، منحنی سطح رقبہ کو ₹ 100 فی مربع میٹر سے رنگ کرنے کا کل خرچ معلوم کیجئے؟

8) ایک کھوکھلا نصف کرّہ نما برتن کے اشیاء کا حجم $\frac{436\pi}{3}$ مکعب سمر رکھتا ہے۔ اس کا بیرونی قطر 14 سمر ہے۔ اس کی موٹائی معلوم کیجئے۔

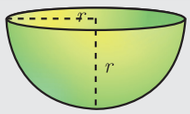
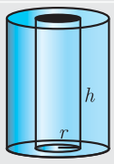
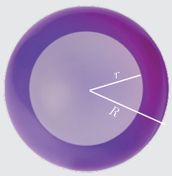
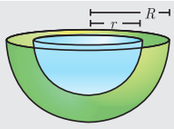
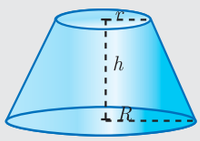
9) ایک مخروط کا حجم $1005\frac{5}{7}$ مکعب سمر ہے اُس کے قاعدہ کا رقبہ $201\frac{1}{7}$ مربع سمر ہے، مخروط کی ترچھی بلندی معلوم کیجئے۔

10) ایک دھاتی ورق (شیٹ) قطاع دائرے کی شکل میں ہے اس کا نصف قطر 21 سمر اور مرکزی زاویہ $216°$ ہے، قطاع دائرے کے نصف قطروں کو ملا کر ایک کرّہ بنایا جائے، بنے ہوئے کرّہ کا حجم معلوم کیجئے۔

Points to Remember — یاد رکھنے کے نکات

ٹھوس	خاکہ	منحنی سطح کا رقبہ / طرفی کا رقبہ (مربع اکائیاں میں)	کل سطحی رقبہ (مربع اکائیاں میں)	حجم (مکعب اکائیاں میں)
مکعب نما		$2h(l+b)$	$2(lb+bh+lh)$	$l\times b\times h$
مکعب		$4a^2$	$6a^2$	a^3
قائم مدّ ور استوانہ		$2\pi rh$	$2\pi r(h+r)$	πr^2h
قائم مدّ ور مخروط		πrl $l=\sqrt{r^2+h^2}$ $l=$ slant height	$\pi rl+\pi r^2$ $=\pi r(l+r)$	$\frac{1}{3}\pi r^2h$
کرّہ		$4\pi r^2$	$4\pi r^2$	$\frac{4}{3}\pi r^3$

10 Maths UM 23-24 305
Tuesday, March 14, 2023 1:24:39 PM

نصف کرّہ		$2\pi r^2$	$3\pi r^2$	$\frac{2}{3}\pi r^3$
کھوکھلا استوانہ		$2\pi\left(R+r\right)h$	$2\pi(R+r)$ $(R-r+h)$	$\pi\left(R^2-r^2\right)h$
کھوکھلا کرّہ		$4\pi R^2 >$ بیرونی سطح کا رقبہ	$4\pi\left(R^2+r^2\right)$	$\frac{4}{3}\pi\left(R^3-r^3\right)$
کھوکھلا نصف کرّہ		$2\pi\left(R^2+r^2\right)$	$\pi\left(3R^2+r^2\right)$	$\frac{2}{3}\pi\left(R^3-r^3\right)$
قائم مدّور مخروط کا مقطوعہ		$\pi l\left(R+r\right)$ where $l=\sqrt{h^2+\left(R-r\right)^2}$	$\pi\left(R+r\right)l+\pi R^2$ $+\pi r^2$	$\frac{1}{3}\pi h\left[R^2+r^2+Rr\right]$

ICT CORNER — ICT کارنر

ICT 7.1

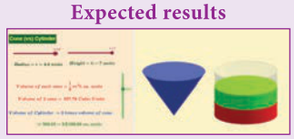
مرحلہ 1 : براؤزر کھولئے اور دئے گئے URL کو ٹائپ کیجئے یا QR کوڈ کو اسکین کیجئے۔ GeoGebra نامی ورک بک "Mensuration X" کھلے گا۔ ان میں Cone - Cylinder relation ورک شیٹ کو Select کریں۔

مرحلہ 2 : دئے گئے ورک شیٹ میں مخروط-استوانہ کے نصف قطر اور اونچائی کو تم تبدیل کر سکتے ہو، بائیں جانب سلائڈر کو حرکت دیں۔ عمودی سلائڈر کو حرکت دے کر، مخروط کے ذریعہ بھرے ہوئے استوانہ کو دیکھیں اور اس سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ ایک استوانہ کا حجم، مخروط کے تین گنا برابر ہے۔ جب کہ یکساں نصف قطر اور یکساں اونچائی ہو۔

Step 1 | Step 2 | Expected results





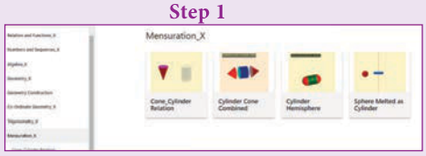


ICT 7.2

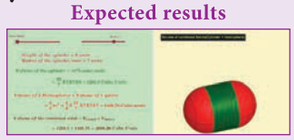
مرحلہ 1 : براؤزر کھولئے اور دئے گئے URL کو ٹائپ کیجئے یا QR کوڈ کو اسکین کیجئے۔ GeoGebra نامی ورک بک "Mensuration_X" کھلے گا۔ ان میں Cylinder Hemisphere ورک شیٹ کو Select کریں۔

مرحلہ2 : دئے گئے ورک شیٹ میں Cylinder Hemisphere کے نصف قطر کو تم تبدیل کر سکتے ہو، بائیں جانب سلائڈر کو حرکت دیں۔ سلائڈر کو حرکت دے کر جوڑ کر / جدا کر کے دیکھیں کہ کس طرح کی مربوط شکل بنتی ہے۔ تم 3-D تصویر کو گھما کر اس کے چہرے دیکھ سکتے ہو، بائیں جانب طریقے کار دیا گیا ہے۔ حل کر کے تمہارے جوابات کی تصدیق کیجئے۔

Step 1 | Step 2 | Expected results







You can repeat the same steps for another activities

https://www.geogebra.org/m/jfr2zzgy#chapter/356197

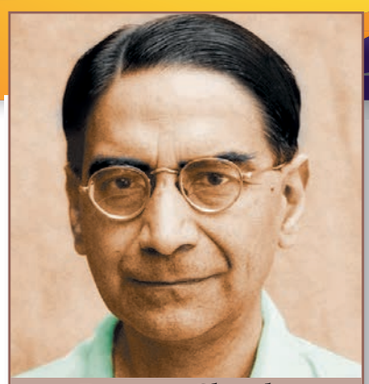
or Scan the QR Code.

10 Maths UM 23-24 306
Tuesday, March 14, 2023 1:55:11 PM

شماریات اور امکان
(STATISTICS AND PROBABILITY)

Life is a School of Probability - Walter Bagehot

8



Prasanta Chandra Mahalanobis

پراسنت چندر مہالانوباس کولکتہ میں پیدا ہوئے۔ یہ ایک ہندوستانی شماریات دان تھے جنہوں نے دو معطیات کے مجموعے (سٹ) کے درمیان موازنہ کرنے کی پیمائش کو واضح کیا۔ انہوں نے جدید اسلوب کے ذریعہ نمونے کا سروے (نظیری سروی) اور رقبے کو محسوب کرنے (Acreages) اور فصل کو اگانے کے لئے کثیر پیمانے پر سریعی نمونے کے طریقے کو استعمال کیا۔ اس بڑے کارنامے کے لئے انہیں 1968 میں ہندوستان کے سب سے بڑے اعزاز پدم وبھوشن سے نوازا گیا۔ اور ان کو ہندوستانی شماریات کا باپ کہا گیا۔ ہندوستانی حکومت نے ہر سال 29 جون کو قومی شماریات دن "National Statistics Day" مقرر کیا جو اتفاقاً ان کی یومِ پیدائش کا دن بھی ہے۔

75YIX

سیکھنے کے مقاصد

- مرکزی رجحان کی پیمائش کا اعادہ کرنا۔
- غیر گروہی اور گروہی معطیات کے لئے اوسط کا اعادہ کرنا۔
- انتشار کے نظریہ کو سمجھنا۔
- وسعت، معیاری انحراف، اختلاف اور اختلاف کا ضریب سمجھنا اور حل کرنا۔
- سریعی تجربات، نظیری عرصہ اور شجری خاکہ کا استعمال کو سمجھنا۔
- موقع، باہم اخراجی، اتمامی، یقینی اور ناممکن مواقع کی توضیح اور وضاحت کرنا۔
- امکان میں جمع کے مسئلہ کو سمجھنا اور اس کے استعمال سے چند آسان مسئلوں کو حل کرنا۔

8.1 تمہید (Introduction)

''شماریات'' STATISTICS لاطینی لفظ 'Status' سے اخذ کیا گیا ہے۔ جس کے معنی سیاسی ریاست کے ہیں۔ جدید دور میں شماریات ہر ایک فرد کی زندگی کا ایک جز بن چکا ہے۔ ہمارے مستقبل کا منصوبہ بنانے کے لئے، تجارت کرنے کے لئے خرید و فروخت کی تفتیش کرنے کے لئے یا اقتصادی رپورٹ تیار کرنے کے لئے شماریات بہت اہم ہے۔ شماریات کا استعمال وسیع پیمانے پر انتخابی نتائج کے رائے (Opinion polls) اعلیٰ تحقیقات (ریسرچ) میں بھی استعمال ہوتا ہے۔ شماریات میں یہ تمام مرحلے شامل ہیں جیسے سائنسی طریقوں سے معطیات کو جمع کرنا، ترتیب دینے، پیش کرنے تجزیہ اور کارآمد فیصلے لینے میں مددگار ثابت ہوتا ہے۔ ابتدائی جماعتوں تم نے معطیات کو جمع کرنے اور ان معطیات کو جدول کی شکل میں ظاہر کرنا، ترسیمی شکل اور مرکزی رجحان کی پیمائش کو محسوب کرنا کے بارے میں پڑھ چکے ہیں۔ اب، اس جماعت میں انتشار کی پیمائش کے بارے میں پڑھیں گے۔

100 95 75 25 5 0

10th maths 8. statistics 1
Wednesday, February 19, 2020 1:44:53 PM

اعادہ Recall

مرکزی رجحان کی پیمائش (Measures of Central Tendency)

شماریات کا اہم مقصد، تمام معطیات کے نچوڑ کو ایک عدد میں ظاہر کرنا ہے۔ اس طرح کے عدد کو مرکزی رجحان کی پیمائش کہتے ہیں۔

مرکزی رجحان کی پیمائش عموماً معطیات کے درمیانی قیمت کے قریب ہوگی۔

ایک دئے گئے معطیات کے لئے مختلف اقسام کے مرکزی رجحانات ہوتے ہیں۔ ان میں سے سب سے عام اقسام یہ ہیں۔

❖ حسابی اوسط ❖ وسطانیہ ❖ طرز

ذرا سوچئے

i) کیا ایک دئے گئے معطیات کے لئے اوسط، وسطانیہ اور طرز ایک ہی ہوگا؟

ii) حسابی اوسط اور اوسط میں کیا فرق ہے؟

غور کیجئے

معطیات : حقائق (Facts) کو عددی شکل میں ظاہر کرنے کو معطیات کہتے ہیں۔

مشاہدہ : معطیات کا ہر ایک اندراج (Entry) مشاہدہ کہلاتا ہے۔

متغیر : ایک سروے (Survey) میں جن مقداروں پر معائنہ کیا جاتا ہے۔ انہیں متغیرات کہتے ہیں۔ متغیرات کو عام طور پر x_i ، $i = 1,2,3, \ldots ,n$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

تعددیں : دیئے گئے ایک معطیات میں ایک متغیر جتنے مرتبہ دہرایا جاتا ہے۔ وہی اُس متغیر کا تعدد کہلاتا ہے۔ عموماً تعددیں f_i ، $i = 1,2,3, \ldots n$ سے ظاہر کئے جاتے ہیں۔

اِس کلاس میں ہمیں حسابی اوسط کا اعادہ کرنا چاہئے۔

حسابی اوسط (Arithmetic Mean)

مشاہدات کے قیمتوں کے حاصل جمع کو مشاہدات کی کل تعداد سے تقسیم کئے جانے پر حاصل ہونے والی قیمت کو حسابی اوسط یا اوسط کہتے ہیں۔

اِس کو $\bar{x}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ (اس کو x بار (bar) پڑھا جاتا ہے)

$$\bar{x} = \frac{\text{تمام مشاہدات کا حاصل جمع}}{\text{مشاہدات کی تعداد}}$$

ذرا سوچئے

n مشاہدات کا اوسط $\bar{x}$ ہے۔ اگر پہلی رقم میں 1 کا اضافہ، دوسری رقم میں 2 کا رقم میں 1 کا اضافہ، دوسری رقم میں 2 کا اضافہ اور اسی طرح کا اضافہ ہوتا ہے تو نیا اوسط کیا ہوگا؟

اوسط معلوم کرنے کے طریقے

- **غیر گروہی معطیات**
  - **راست طریقہ**
    $$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$
- **گروہی معطیات**
  - **راست طریقہ**
    $$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$
  - **مفروضی اوسط کا طریقہ**
    $$\bar{X} = A + \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i d_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$
    جس میں $d_i = x_i - A$
  - **مرحلاتی انحراف کا طریقہ**
    $$\bar{X} = A + C \times \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i d_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$
    جس میں $d_i = \frac{x_i - A}{c}$

حسابات میں دئے گئے معطیات کے مطابق ہم ضابطوں کو استعمال کریں گے۔

10th maths 8. statistics 1
Wednesday, February 19, 2020 1:44:54 PM

Progress Check — اپنی پیش رفت کی جانچ

1۔ تمام مشاہدات کا حاصل جمع کو مشاہدات کی تعداد سے تقسیم کرنا پر ..... حاصل ہوتا ہے۔

2۔ اگر 10 قیمتوں کا حاصل جمع 256 ہوتو ان کا اوسط ..... ہے۔

3۔ اگر ایک معطیات کا حاصل جمع اور اوسط بالترتیب 407 اور 11 ہوتو معطیات میں مشاہدات کی تعداد ..... ہے۔

8.2 انتشار کی پیمائش (Measures of Disperssion)

درج ذیل میں دو بلّے بازوں سے 10 میچوں میں بنائے گئے رن دئے گئے ہیں۔

بلّے باز A : 25, 20, 45, 93, 8, 14, 32, 87, 72, 4

بلّے باز B : 33, 50, 47, 38, 45, 40, 36, 48, 37, 26

$$\text{بلے باز } A \text{ کا اوسط} = \frac{25+20+45+93+8+14+32+87+72+4}{10} = 40$$

$$\text{بلے باز } B \text{ کا اوسط} = \frac{33+50+47+38+45+40+36+48+37+26}{10} = 40$$

دونوں معطیات کا اوسط یکساں 40 ہے۔لیکن معنی میں مختلف ہیں۔



Fig. 8.1(a)

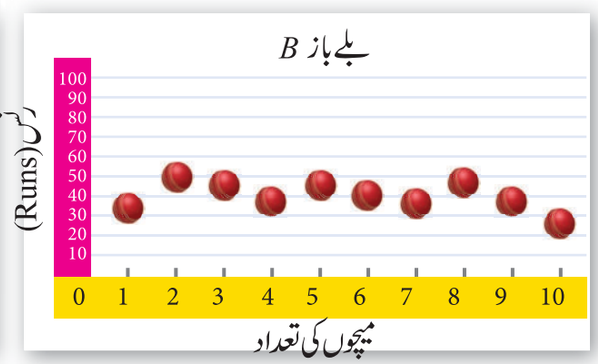


Fig. 8.1(b)

اوپر کے خاکوں میں بلے باز B کے رنس (Runs) گروہی ہیں اور اوسط کے قریب ہیں۔ لیکن بلے باز A کے رنس 0 سے 100 تک بکھرے ہوئے ہیں۔

اس طرح ہمیں بعض مزید شماریاتی معلومات کی ضرورت ہوسکتی ہے۔جس سے معلوم کیا جاسکتا ہے کہ معطیات میں کس طرح قیمتیں پھیلے (منتشر) ہوئے ہیں۔اس کے لئے ہمیں انتشار کی پیمائش کے بارے میں بحث کرنا چاہیے۔

انتشار ایک پیمائش ہے جس میں معطیات کے قیمتوں کے پھیلاؤ کے بارے میں ایک خیال ملتا ہے۔

انتشار کی پیمائش (یا) ایک معطیات کے مشاہدات کس طرح پھیلے ہوئے ہیں۔ (یا) پورے معطیات میں منتشر ہیں۔

انتشار کے مختلف پیمائشیں یہ ہیں۔

1) وسعت 2) اوسط کا انحراف 3) کورٹیل انحراف (Quartile deviation)

4) معیاری انحراف 5) اختلاف 6) اختلاف کا ضریب

10th maths 8. statistics 1
Wednesday, February 19, 2020 1:44:55 PM

8.2.1 وسعت Range

سب سے بڑی قیمت اور سب سے چھوٹی قیمت کا درمیانی فرق وسعت کہلاتا ہے۔

$$\text{وسعت } R = L - S$$

$$\text{وسعت کا ضریب} = \frac{L-S}{L+S}$$

جس میں، سب سے بڑی قیمت - L ، سب سے چھوٹی قیمت - S ۔

اپنی پیش رفت کی جانچ

پہلے دس اعداد اوّل کی وسعت ..... ہے۔

مثال 8.1 درجۂ ذیل معطیات 25، 67، 48، 53، 18، 39، 44 کی وسعت اور وسعت کا ضریب معلوم کیجئے۔

حل : $L = 67$ سب سے بڑی قیمت $S = 18$ سب سے چھوٹی قیمت

$$\text{وسعت } R = L - S = 67 - 18 = 49$$

$$\text{وسعت کا ضریب} = \frac{L-S}{L+S}$$

$$\text{وسعت کا ضریب} = \frac{67-18}{67+18} = \frac{49}{85} = 0.576$$

مثال 8.2 ذیل کی جدول کے لئے وسعت معلوم کیجئے

عمر (سالوں میں)	16-18	18-20	20-22	22-24	24-26	26-28
طلباء کی تعداد	0	4	6	8	2	2

حل : یہاں، $L = 28$ سب سے بڑی قیمت

$S = 18$ سب سے چھوٹی قیمت

$R = L - S$ وسعت

$R = 28 - 18 = 10$ سال

غور کیجئے

اگر کسی درجہ کی ابتدائی تعداد صفر ہو تو وسعت حل کرنے کے لئے اس بعد کے درجہ کو لینا ہوگا۔

مثال 8.3 معطیات کے ایک سٹ (Set) کی وسعت 13.67 ہے اور سب سے بڑی قیمت 70.08 ہو تو سب سے چھوٹی قیمت معلوم کیجئے۔

حل :

$R = 13.67$ وسعت

$L = 70.08$ سب سے بڑی قیمت

$R = L - S$ وسعت

$13.67 = 70.08 - S$

$S = 70.08 - 13.67 = 56.41$

لہذا، سب سے چھوٹی قیمت 56.41 ہے۔

غور کیجئے

معطیات کے ایک سٹ (Set) کی وسعت، مرکزی رجحان کی پیمائش سے معطیات کتنا منتشر ہے۔ اس کے بارے میں کوئی واضح خیال نہیں ملتا ہے۔ اس کے لئے ہمیں ایک ایسی پیمائش کی ضرورت ہے جو مرکزی رجحان سے انحراف پر منحصر ہے۔

8.2.2 اوسط سے انحراف Deviations from the mean

دیئے گئے ایک معطیات کے n مشاہدات $x_1, x_2, \ldots x_n$ ہیں۔ اوسط سے انحراف $\bar{x}$ یہ ہیں۔ $x_1 - \bar{x}, \; x_2 - \bar{x} \ldots \; x_n - \bar{x}$

8.2.3 اوسط سے انحراف کے مربعے Squares of Deviations from the mean

مشاہدات $x_1, x_2, \ldots, x_n$ کے اوسط سے انحراف کے مربعے $\bar{x}$ ہیں۔ $(x_1 - \bar{x})^2, (x_2 - \bar{x})^2, \ldots, (x_n - \bar{x})^2$ یا $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$

10th maths 8. statistics 1
Wednesday, February 19, 2020 1:44:55 PM

غور کیجئے

ہم نے غور کیا کہ تمام مشاہدات کے لئے $\left(x_i - \bar{x}\right) \geq 0$ ہے۔ $x_i,\ i = 1,2,3,\ldots, n.$ اگر اوسط سے انحراف $\left(x_i - \bar{x}\right)$ چھوٹے ہو تو انحراف کے مربعے بہت چھوٹے ہوں گے۔

8.2.4 اختلاف Variance

اوسط سے اوسط کے انحرافوں کے مربعوں کو **اختلاف** کہتے ہیں۔ اس کو σ^2 (Sigma Square) سے ظاہر کیا جاتا ہے سگما کی قوت دو پڑھا جاتا ہے)۔

ذرا سوچئے

کیا اختلاف منفی ہو سکتا ہے؟

اختلاف = اوسط کے انحرافوں کے مربعے

$$= \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

$$\text{اختلاف } \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}$$

8.2.5 معیاری انحراف (Standard Devaition)

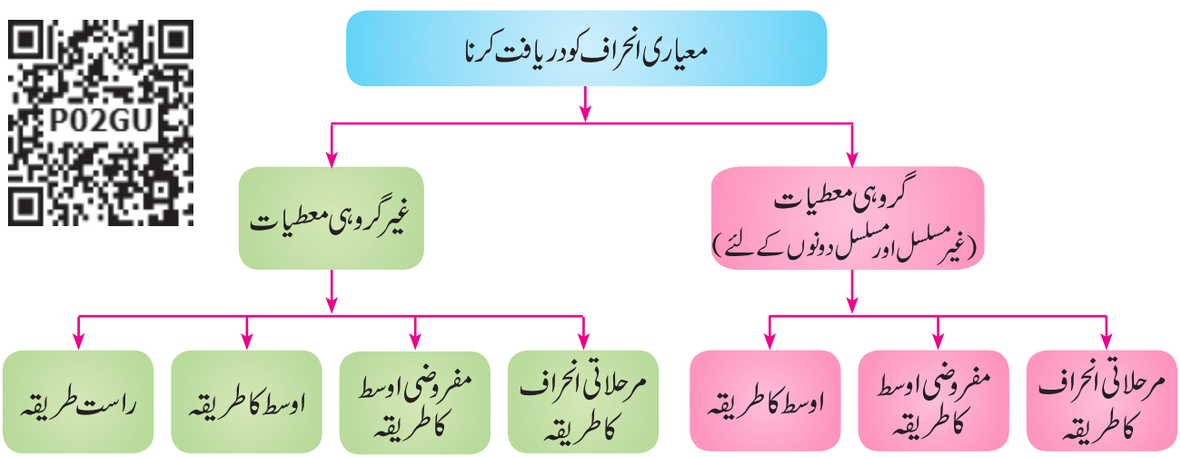
اختلاف کے مثبت جذر المربع کو **معیاری انحراف** کہتے ہیں۔ یعنی دئے گئے قیمتوں کے اوسط، اوسط کے انحرافوں کے مربعوں کے مثبت جذر المربع کو معیاری انحراف کہتے ہیں۔

معیاری انحراف ایک واضح خیال ظاہر کرتا ہے۔ جس میں قیمتیں کتنے دور تک پھیلے ہوئے ہیں یا اوسط سے انحراف ہیں۔

کیا تم جانتے ہو؟

کارل پیرسن پہلا شخص تھا جس نے لفظ معیاری انحراف کو استعمال کیا۔ جرمن کے ریاضی دان گاس نے لفظ، غلط اوسط (Mean error) کو استعمال کیا تھا۔

$$\text{معیاری انحراف } \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}}$$



غیر گروہی معطیات کے لئے معیاری انحراف دریافت کرنا

Calculation of Standard Deviation for ungrouped data

i) بالراست طریقہ (Direct Method)

غور کیجئے

دیئے گئے معطیات میں معیاری انحراف اور اوسط یکساں اکائیاں رکھتے ہیں۔

$$\text{معیاری انحراف } \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)}{n}}$$

10th maths 8. statistics 1
Wednesday, February 19, 2020 1:44:56 PM

$$= \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - 2\overline{x}\,\frac{\Sigma x_i}{n} + \frac{\overline{x}^2}{n} \times \left(1 + 1 + \ldots.\ to\right) \text{n مرتبہ}}$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - 2\overline{x} \times \overline{x} + \frac{\overline{x}^2}{n} \times n} = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - 2\overline{x}^2 + \overline{x}^2} = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \overline{x}^2}$$

معیاری انحراف $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2}$

غور کیجئے

- معیاری انحراف کو حل کرتے وقت معطیات کو بڑھتی ہوئی ترتیب میں لکھنا لازمی نہیں ہے۔
- اگر معطیات کی قیمتیں براہ راست دیئے گئے ہو تو معیاری انحراف معلوم کرنے کے لئے ہم

  اِس ضابطہ کو استعمال کر سکتے ہیں۔ $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2}$
- اگر معطیات کی قیمتیں براہ راست نہ دیئے گئے ہوں لیکن ہر ایک مشاہدہ کے اوسط سے معیاری انحرافوں کا مربعے دیئے گئے ہوں تو

  معیاری انحراف معلوم کرنے کے لئے ہم اس ضابطہ کو استعمال کر سکتے ہیں۔ $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n}}$.

مثال 8.4 کسی ہفتہ کے ہر دن میں فروخت شدہ ٹیلی ویژنوں کی تعداد 13، 8، 4، 9، 7، 12، 10 ہیں۔ ان کا معیاری انحراف معلوم کیجئے۔

حل : معیاری انحراف

x_i	x_i^2
13	169
8	64
4	16
9	81
7	49
12	144
10	100
$\Sigma x_i = 63$	$\Sigma x_i^2 = 623$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{623}{7} - \left(\frac{63}{7}\right)^2}$$

$$= \sqrt{89 - 81} = \sqrt{8}$$

$\sigma \simeq 2.83$ حاصل ہوتا ہے،

ذرا سوچیئے

کیا معیاری انحراف، اختلاف سے زیادہ ہے؟

اپنی پیش رفت کی جانچ

اگر اختلاف 0.49 ہو تو معیاری انحراف ..... ہے۔

ii) اوسط کا طریقہ (Mean Method)

ایک اور آسان طریقہ سے معیاری انحراف کو درجہ ذیل کے ضابطہ کو استعمال کر کے دریافت کر سکتے ہیں۔

$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \overline{x})^2}{n}}$ (بالراست طریقہ سے) معیاری انحراف

اگر $d_i = x_i - \overline{x}$ انحرافیں ہو تو $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d_i^2}{n}}$

مثال 8.5 ایک مخصوص موسم میں 6 دنوں میں ہوئی بارش کی مقدار اس طرح دی گئی ہے۔ 17.8 سمر، 19.2 سمر، 16.3 سمر، 12.5 سمر، 12.8 سمر اور 11.4 سمر ہیں۔ اس کا معیاری انحراف معلوم کیجئے۔

حل : ان اعداد کو بڑھتی ہوئی ترتیب سے لکھنے پر ہمیں 11.4، 12.5، 12.8، 16.3، 17.8، 19.2 اس طرح کی ترتیب حاصل ہوتی ہے۔

مشاہدات کی تعداد $n = 6$

اوسط $= \frac{11.4 + 12.5 + 12.8 + 16.3 + 17.8 + 19.2}{6} = \frac{90}{6} = 15$

10th maths 8. statistics 1
Wednesday, February 19, 2020 1:44:57 PM

x_i	$d_i = x_i - \bar{x}$ $= x - 15$	d_i^2
11.4	− 3.6	12.96
12.5	− 2.5	6.25
12.8	− 2.2	4.84
16.3	1.3	1.69
17.8	2.8	7.84
19.2	4.2	17.64
		$\Sigma d_i^2 = 5122$

معیاری انحراف $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d_i^2}{n}}$

$= \sqrt{\frac{5122}{6}} = \sqrt{8.53}$

لہذا $\sigma \simeq 2.9$

iii) مفروضی اوسط کا طریقہ (Assumed Mean Method)

جب دئے گئے معطیات کا اوسط ایک سالم عدد نہیں ہو (چونکہ، عشری شکل میں حل کرنا ایک مشکل کام ہے) تو معیاری انحراف معلوم کرنے کے لئے مفروضی اوسط کا طریقہ استعمال کرنا بہتر ثابت ہوگا۔

فرض کیجئے دئے گئے معطیات کی قیمتیں $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ ہیں۔ اور فرض کیجئے۔ ان کا اوسط $\bar{x}$ ہے۔

فرض کیجئے، A مفروضی اوسط سے x_i کا انحراف d_i ہے۔ جو دئے گئے معطیات کا درمیان ترین قیمت ہے۔

$$d_i = x_i - A \quad \Rightarrow \quad x_i = d_i + A \quad \ldots (1)$$

$$\Sigma d_i = \Sigma(x_i - A)$$

$$= \Sigma x_i - (A + A + A + \ldots \text{ مرتبہ } n)$$

$$\Sigma d_i = \Sigma x_i - A \times n$$

$$\frac{\Sigma d_i}{n} = \frac{\Sigma x_i}{n} - A$$

$$\bar{d} = \bar{x} - A \text{ (or) } \bar{x} = \bar{d} + A \quad \ldots (2)$$

معیاری انحراف $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\Sigma(d_i + A - \bar{d} - A)^2}{n}}$ (1) اور (2) کے استعمال سے

$= \sqrt{\frac{\Sigma(d_i - \bar{d})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\Sigma(d_i^2 - 2d_i \times \bar{d} + \bar{d}^2)}{n}}$

$= \sqrt{\frac{\Sigma d_i^2}{n} - 2\bar{d}\frac{\Sigma d_i}{n} + \frac{\bar{d}^2}{n}(1 + 1 + 1 + \ldots \text{ مرتبہ تک } n)}$

(چونکہ، d ایک مستقل ہے) $= \sqrt{\frac{\Sigma d_i^2}{n} - 2\bar{d} \times \bar{d} + \frac{\bar{d}^2}{n} \times n}$

$= \sqrt{\frac{\Sigma d_i^2}{n} - \bar{d}^2}$

معیاری انحراف $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d_i}{n}\right)^2}$

ذرا سوچئے

کسی بھی n قیمتوں کے مجموعے کے لئے،
کیا تم ان کی قیمتیں معلوم کر سکتے ہو۔

(i) $\Sigma(x_i - \bar{x})$ (ii) $(\Sigma x_i) - \bar{x}$

مثال 8.6 ایک کلاس ٹسٹ میں 10 طلباء سے حاصل کردہ مارکس 25، 29، 30، 33، 35، 37، 38، 40، 44، 48 ہیں۔
ان کا معیاری انحراف معلوم کیجئے۔

10th maths 8. statistics 1
Wednesday, February 19, 2020 1:44:57 PM

حل : مارکس کا اوسط 35.9 ہے۔ جو ایک سالم عدد نہیں ہے۔ لہذا، ہم مفروضی اوسط سے حل کریں گے۔ $A=35,\ n=10$

x_i	$d_i = x_i - A$ $d_i = x_i - 35$	d_i^2
25	− 10	100
29	− 6	36
30	− 5	25
33	− 2	4
35	0	0
37	2	4
38	3	9
40	5	25
44	9	81
48	13	169
	$\Sigma d_i = 9$	$\Sigma d_i^2 = 453$

معیاری انحراف

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d_i}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{453}{10} - \left(\frac{9}{10}\right)^2}$$

$$= \sqrt{45.3 - 0.81}$$

$$= \sqrt{4449}$$

$$\sigma \simeq 6.67$$

ii) مرحلاتی انحراف کا طریقہ :

فرض کیجئے دئے گئے معطیات $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ ہیں۔ فرض کیجئے A مفروضی اوسط ہے۔

فرض کیجئے $x_i - A$ کا مشترک مقسوم علیہ C ہے۔

فرض کیجئے $d_i = \frac{x_i - A}{c}$

ہوتو $x_i = d_i c + A \quad \cdots (1)$

$\Sigma x_i = \Sigma(d_i c +) A = c\Sigma d_i + A \times n$

$\frac{\Sigma x_i}{n} = c\frac{\Sigma d_i}{n} + A$

$\bar{x} = c\bar{d} + A \quad \cdots (2)$

$x_i - \bar{x} = cd_i + A - c\bar{d} - A = c(d_i - \bar{d})$ ((1) اور (2) کو استعمال کرکے)

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\Sigma(c(d_i - \bar{d}))^2}{n}} = \sqrt{\frac{c^2\Sigma(d_i - \bar{d})^2}{n}}$$

$$\sigma = c \times \sqrt{\frac{\Sigma d_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d_i}{n}\right)^2}$$

غور کیجئے

معیاری انحراف معلوم کرنے کے لئے اوپر کے کسی بھی طریقہ کو استعمال کر سکتے ہیں۔

Activity 1 **کارروائی 1**

تمہارے سہ ماہی امتحان میں تمام پانچ اسباق میں حاصل کردہ مارکس اور مڈٹارم ٹسٹ (Mid term test) کے مارکس کے لئے علیحدہ معیاری انحراف معلوم کیجئے۔ تمہارے نتائج سے تم نے کے غور کیا۔

مثال 8.7 اسکول کے ایک دن کے دورہ میں بچوں نے چند کھانے کے اشیاء پر خرچ کردہ رقم 5، 10، 15، 20، 25، 30، 35، 40 ہیں۔ مرحلاتی انحراف کے طریقہ کو استعمال کر کے صرف کردہ رقم کا معیاری انحراف معلوم کیجئے۔

10th maths 8. statistics 1
Wednesday, February 19, 2020 1:44:57 PM

حل : ہم نے غور کیا کہ تمام مشاہدات 5 سے تقسیم پذیر ہیں۔ لہذا، ہم مرحلاتی انحراف کا طریقہ استعمال کر سکتے ہیں۔

فرض کیجئے کہ، $A = 28$ مفروضی اوسط، $n = 8$

x_i	$d_i = x_i - A$ $d_i = x_i - 20$	$d_i = \frac{x_i - A}{c}$ $c = 5$	d_i^2
5	−15	− 3	9
10	−10	− 2	4
15	− 5	− 1	1
20	0	0	0
25	5	1	1
30	10	2	4
35	15	3	9
40	20	4	16
		Σd_i =4	$\Sigma d_i^2 = 44$

معیاری انحراف

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d_i}{n}\right)^2} \times c$$

$$= \sqrt{\frac{44}{8} - \left(\frac{4}{8}\right)^2} \times 5 = \sqrt{\frac{11}{2} - \frac{1}{4}} \times 5$$

$$= \sqrt{5.5 - 0.25} \times 5 \ = 2.29 \times 5$$

$$\sigma \simeq 11.45$$

مثال 8.8 7، 4، 8، 10، 11 معطیات کا معیاری انحراف معلوم کیجئے۔ ہر ایک معطیہ کے ساتھ 3 جمع کیجئے اور نئی قیمتوں کے لئے معیاری انحراف معلوم کیجئے۔

حل : قیمتوں کو بڑھتی ہوئی ترتیب میں ترتیب دینے پر ہمیں 7، 4، 8، 10، 11 حاصل ہوتے ہیں اور $n = 5$

x_i	x_i^2
4	16
7	49
8	64
10	100
11	121
Σx_i =40	$\Sigma x_i^2 = 350$

معیاری انحراف

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{350}{5} - \left(\frac{40}{5}\right)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{6} \simeq 2.45$$

جب ہم تمام قیمتوں کے ساتھ 3 جمع کرتے ہیں تو ہم نئی قیمتیں اس طرح حاصل ہوتی ہیں 14, 13, 11, 10, 7

x_i	x_i^2
7	9
10	100
11	121
13	169
14	196
Σx_i =55	$\Sigma x_i^2 = 635$

معیاری انحراف

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{635}{5} - \left(\frac{55}{5}\right)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{6} \simeq 2.45$$

ہم نے دیکھا کہ جب ہم ہر قیمت کے ساتھ ایک مستقل قیمت جمع کرتے ہیں۔ تو معیاری انحراف میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی ہے۔

مثال 8.9 2، 3، 5، 7، 8 معطیات کا معیاری انحراف معلوم کیجئے۔ ہر معطیہ کو 4 سے ضرب دیں نئی قیمتوں کے لئے معیاری انحراف معلوم کیجئے۔

10th maths 8. statistics 1
Wednesday, February 19, 2020 1:44:58 PM

دیا گیا ہے، $n = 5$

x_i	x_i^2
2	49
3	9
5	25
7	49
8	64
$\Sigma x_i = 25$	$\Sigma x_i^2 = 151$

معیاری انحراف

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{151}{5} - \left(\frac{25}{5}\right)^2} = \sqrt{30.2 - 25} = \sqrt{5.2} \simeq 2.28$$

جب ہم 4 کو ہر ایک معطیہ سے ضرب دیتے ہیں تو ہمیں نئی قیمتیں 8، 12، 20، 28، 32 کی طرح حاصل ہوتے ہیں۔

x_i	x_i^2
8	64
12	144
20	400
28	784
32	1024
$\Sigma x_i = 100$	$\Sigma x_i^2 = 2416$

معیاری انحراف

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{2416}{5} - \left(\frac{100}{5}\right)^2} = \sqrt{4832 - 400} = \sqrt{83.2}$$

$$\sigma = \sqrt{16 \times 5.2} = 4\sqrt{5.2} \simeq 9.12$$

جب ہر ایک قیمت کو k سے ضرب دیا گیا تو معیاری انحراف بھی k سے ضرب ہو جائے گا۔

مثال 8.10 پہلے 'n' طبعی اعداد کے لئے اوسط اور اختلاف معلوم کیجئے۔

حل :

اوسط $\bar{x} = \dfrac{\text{مشاہدات کا حاصل جمع}}{\text{مشاہدات کی تعداد}}$

$$= \frac{\Sigma x_i}{n} = \frac{1 + 2 + 3 + \ldots + n}{n} = \frac{n(n+1)}{2 \times n}$$

اوسط $\bar{x} = \dfrac{n+1}{2}$

اختلاف $\sigma^2 = \dfrac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\dfrac{\Sigma x_i}{n}\right)^2 \quad \left[\Sigma x_i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2,\ (\Sigma x_i)^2 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2\right]$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6 \times n} - \left[\frac{n(n+1)}{2 \times n}\right]^2$$

$$= \frac{2n^2 + 3n + 1}{6} - \frac{n^2 + 2n + 1}{4}$$

اختلاف $\sigma^2 = \dfrac{4n^2 + 6n + 2 - 3n^2 - 6n - 3}{12} = \dfrac{n^2 - 1}{12}.$

گروہی معطیات کے لئے معیاری انحراف دریافت کرنا Calculation of Standard Deviation for Grouped

i) اوسط کا طریقہ

معیاری انحراف $\sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma f_i (x_i - \bar{x})^2}{N}}$

فرض کیجئے، $d_i = x_i - \bar{x}$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_i d_i^2}{N}} \qquad \text{جہاں } N = \sum_{i=1}^{n} f_i$$

(f_i کے تعدی قیمتوں کے نظیری معطیات کے نقاط x_i ہیں۔)

10th maths 8. statistics 1
Wednesday, February 19, 2020 1:44:58 PM

مثال 8.11 طلباء سے پوچھا گیا کہ وہ ایک ہفتہ میں کل کتنے گھنٹے ٹیلی ویژن دیکھنے میں صرف کرتے ہیں اس کو لکھیں۔ ان معلومات کے ذریعہ، ٹیلی ویژن دیکھنے میں صرف ہوئے وقت کا معیاری انحراف دریافت کیجئے۔

x	6	7	8	9	10	11	12
f	3	6	9	13	8	5	4

حل :

x_i	f_i	$x_i f_i$	$d_i = x_i - \bar{x}$	d_i^2	$f_i d_i^2$
6	3	18	−3	9	27
7	6	42	−2	4	24
8	9	72	−1	1	9
9	13	117	0	0	0
10	8	80	1	1	8
11	5	55	2	4	20
12	4	48	3	9	36
	$N = 48$	$\Sigma x_i f_i = 432$	$\Sigma d_i = 0$		$\Sigma f_i d_i^2 = 124$

چونکہ $N = \Sigma f_i$

اوسط

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i f_i}{N} = \frac{432}{48} = 9$$

معیاری انحراف

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_i d_i^2}{N}} = \sqrt{\frac{124}{48}} = \sqrt{2.58}$$

$$\sigma \simeq 1.6$$

ii) مفروضی اوسط کا طریقہ (Assumed Mean Method)

فرض کیجئے کہ $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ دیے گئے معطیات کے تعدد یں بالترتیب $f_1, f_2, f_3, \ldots f_n$ ہیں۔ فرض کرو کہ $\bar{x}$ ان کا اوسط اور A مفروضی اوسط ہے۔

$$d_i = x_i - A$$

معیاری انحراف $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_i d_i^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_i d_i}{N}\right)^2}$

مثال 8.12 ایک سلیپ ٹسٹ (Slip test) میں طلباء سے حاصل شدہ مارکس درجہ ذیل ہیں۔

x	4	6	8	10	12
f	7	3	5	9	5

ان کے مارکس کا معیاری انحراف معلوم کیجئے۔

حل : فرض کیجئے کہ مفروضی اوسط $A = 8$

x_i	f_i	$d_i = x_i - A$	$f_i d_i$	$f_i d_i^2$
4	7	−4	−28	112
6	3	−2	−6	12
8	5	0	0	0
10	9	2	18	36
12	5	4	20	80
	$N = 29$		$\Sigma f_i d_i = 4$	$\Sigma f_i d_i^2 = 240$

معیاری انحراف

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_i d_i^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_i d_i}{N}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{240}{29} - \left(\frac{4}{29}\right)^2} = \sqrt{\frac{240 \times 29 - 16}{29 \times 29}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{6944}{29 \times 29}} \; ; \quad \sigma \simeq 2.87$$

مسلسل تعددی تقسیم کے لئے معیاری انحراف دریافت کرنا
Calculation of Standard Deviation for Continuous Frequency Distribution

i) اوسط کا طریقہ (Mean Method)

معیاری انحراف $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_i (x_i - \bar{x})^2}{N}}$

x_i = i ویں درجہ کی درمیانی قیمت

f_i = i ویں درجہ کی تعداد

10th maths 8. statistics 1
Wednesday, February 19, 2020 1:44:59 PM

(ii) مختصر طریقہ (یا) مرحلاتی انحراف کا طریقہ (Shortcut Method (or) Step Deviation Method)

آسانی سے حل کرنے کے لئے ہم نے ذیل کا ضابطہ مہیا گیا ہے۔فرض کرو کہ A مفروضی اوسط ہے۔ i ویں درجہ کی درمیانی قیمت x_i ہے۔ اور c درجاتی وقفہ کی چوڑائی ہے۔

فرض کیجئے $d_i = \frac{x_i - A}{c}$

$$\sigma = c \times \sqrt{\frac{\Sigma f_i d_i^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_i d_i}{N}\right)^2}$$

مثال 8.13 ایک جماعت کے ایک مخصوص سبق میں طلباء کے مارکس درجہ ذیل ہیں۔

مارکس	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
طلباء کی تعداد	8	12	17	14	9	7	4

اس کا معیاری انحراف معلوم کیجئے

حل : فرض کیجئے مفروضی اوسط، $A = 35$، $C = 10$

مارکس	درمیانی قیمت (x_i)	f_i	$d_i = x_i - A$	$d_i = \frac{x_i - A}{c}$	$f_i d_i$	$f_i d_i^2$
0-10	5	8	–30	– 3	– 24	72
10-20	15	12	–20	– 2	– 24	48
20-30	25	17	–10	– 1	– 17	17
30-40	35	14	0	0	0	0
40-50	45	9	10	1	9	9
50-60	55	7	20	2	14	28
60-70	65	4	30	3	12	36
		$N = 71$			$\Sigma f_i d_i = -30$	$\Sigma f_i d_i^2 = 210$

معیاری انحراف $\sigma = c \times \sqrt{\frac{\Sigma f_i d_i^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_i d_i}{N}\right)^2}$

$$\sigma = 10 \times \sqrt{\frac{210}{71} - \left(-\frac{30}{71}\right)^2} = 10 \times \sqrt{\frac{210}{71} - \frac{900}{5041}}$$

$$= 10 \times \sqrt{2779} \quad ; \quad \sigma \simeq 16.67$$

Thinking Corner ذرا سوچئے

1۔ معطیات کا معیاری انحراف 2.8 ہے۔ اگر ہر معطیہ کے ساتھ 5 جمع کریں تو نیا معیاری انحراف ..... ہے۔

2۔ اگر p، q، r قیمتوں کا معیاری انحراف S ہو تو $p-3$، $q-3$، $r-3$ کا معیاری انحراف ..... ہے۔

مثال 8.14 15 مشاہدات کا اوسط اور معیاری انحراف بالترتیب 10 اور 5 ہے۔دوبارہ جانچ کرنے پر پتہ چلا کہ ایک مشاہدہ 23 کو غلطی سے 8 لکھا گیا ہے۔ درست اوسط اور معیاری انحراف دریافت کیجئے۔

حل : $n=15$, $\bar{x}=10$, $\sigma=5$; $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$; $\Sigma x = 15 \times 10 = 150$

مشاہدہ کی درست قیمت $= 23$ مشاہدہ کی غلط قیمت $= 8$

$$= 150 - 8 + 23 = 165$$

10th maths 8. statistics 1
Wednesday, February 19, 2020 1:44:59 PM

درست اوسط $\bar{x} = \frac{165}{15} = 11$

معیاری انحراف $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2}$

کی غلط قیمت $\sigma = 5 = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{15} - (10)^2}$

$25 = \frac{\Sigma x^2}{15} - 100 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Sigma x^2}{15} = 125$

کی غلط قیمت $\Sigma x^2 = 1875$

کی درست قیمت $\Sigma x^2 = 1875 - 8^2 + 23^2 = 2340$

درست معیاری انحراف $\sigma = \sqrt{\frac{2340}{15} - (11)^2}$

$\sigma = \sqrt{156 - 121} = \sqrt{35} \quad \sigma \simeq 5.9$

مشق 8.1

1۔ ذیل کے معطیات کے لئے وسعت اور وسعت کا ضریب معلوم کیجئے۔

(i) 63, 89, 98, 125, 79, 108, 117, 68

(ii) 43.5, 13.6, 18.9, 38.4, 61.4, 29.8

2۔ اگر وسعت اور معطیات کے مجموعہ کی سب سے چھوٹی قیمت بالترتیب 36.8 اور 13.4 ہو تو سب سے بڑی قیمت دریافت کیجئے۔

3۔ ذیل کے معطیات کے لئے وسعت کیجئے۔

آمدنی	400-450	450-500	500-550	550-600	600-650
مزدوروں کی تعداد	8	12	30	21	6

4۔ ایک استاد نے طلباء سے 60 صفحات کے رکاڈ نوٹ بک کو مکمل کرنے کے لئے کہا۔ آٹھ طلباء نے صرف 32، 35، 37، 30، 33، 36، 35 اور 37 صفحات مکمل کئے ہیں۔ مکمل شدہ صفحات کا معیاری انحراف معلوم کیجئے۔

5۔ ذیل میں دئے گئے 9 مزدوروں کی اُجرتوں کا اختلاف اور معیاری انحراف معلوم کیجئے۔

₹310, ₹290, ₹320, ₹280, ₹300, ₹290, ₹320, ₹310, ₹280.

6۔ ایک دیوار کی گھڑی 1 بجے 1 مرتبہ، 2 بجے 2 مرتبہ، 3 بجے 3 مرتبہ اور اسی طرح گھنٹی بجتی ہے۔ ایک دن میں گھڑی کتنے مرتبہ گھنٹی بجتی ہے اس کا معیاری انحراف معلوم کیجئے۔

7۔ پہلے 21 طبعی اعداد کا معیاری انحراف معلوم کیجئے۔

8۔ معطیات کا معیاری انحراف 4.5 ہے اور ہر معطیہ سے 5 کم کیا جاتا ہے تو نیا معیاری انحراف دریافت کیجئے۔

9۔ معطیات کا معیاری انحراف 3.6 ہے اور ہر معطیہ کی قیمت سے 3 تقسیم کیا جاتا ہے تو نیا معیاری انحراف دریافت کیجئے۔

10۔ درجہ ذیل میں ایک ہفتہ میں پانچ ضلعوں کے مختلف مقامات پر ہوئی بارش کی مقدار کو درج کیا گیا ہے۔

بارش کی مقدار (mm)	45	50	55	60	65	70
مقامات کی تعداد	5	13	4	9	5	4

معیاری انحراف دریافت کیجئے۔

10th maths 8. statistics 1
Wednesday, February 19, 2020 1:45:00 PM

11۔ ایک گاؤں میں زہریلی بخار(Viral fever) سے متاثر لوگوں کی تعداد اس طرح دی گئی ہے۔ ان کا معیاری انحراف دریافت کیجئے۔

عمر سالوں میں	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
متاثر لوگوں کی تعداد	3	5	16	18	12	7	4

12۔ ایک فیکٹری میں برتنیں (Plates) تیار ہوتے ہیں۔ ان کے قطروں کی پیمائش (سم میں) ذیل میں دی گئی ہے ان کا معیاری انحراف دریافت کیجئے۔

قطر (سم میں)	21-24	25-28	29-32	33-36	37-40	41-44
برتنوں کی تعداد	15	18	20	16	8	7

13۔ 100 میٹر کی دوڑ کے مقابلے میں 50 طلباء سے لیا گیا وقت ذیل میں دیا گیا ہے ان کا معیاری انحراف معلوم کیجئے۔

لیا گیا وقت (سکنڈ)	8.5-9.5	9.5-10.5	10.5-11.5	11.5-12.5	12.5-13.5
طلباء کی تعداد	6	8	17	10	9

14۔ 100 افراد کی جماعت کے مارکس کا اوسط اور معیاری انحراف بالترتیب 60 اور 15 ہے۔ چھان بین کے دوران یہ پتہ چلا کہ مارکس 45 اور 72 کو غلطی سے 40 اور 27 درج کیا گیا تھا۔ درست اوسط اور درست معیاری انحراف محسوب کیجئے۔

15۔ سات مشاہدات کا اوسط اور اختلاف بالترتیب 8 اور 16 ہیں۔ اگر پانچ مشاہدات 2، 4، 10، 12 اور 14 ہوں تو باقی کے دو مشاہدات معلوم کیجئے۔

8.3 اختلاف کا ضریب (Coefficient of Variation)

دو معطیات کا موازنہ مرکزی رجحانات اور انتشار کی پیمائش بعض صورتوں میں معنی خیز نہیں ہوتے کیونکہ معطیات کے متغیرات یکساں اکائیوں کی پیمائش نہیں رکھتے ہیں۔

مثال کے طور پر، ان دو معطیات پر غور کیجئے۔

	وزن	قیمت
اوسط	8 kg	₹ 85
معیاری انحراف	1.5 kg	₹ 21.60

یہاں 1.5 کلوگرام اور ₹21.60 کا ہم معیاری انحراف کا موازنہ نہیں کر سکتے۔ دو یا مزید معطیات کے معیاری انحراف کے نظیری پیمائشوں کی تبدیلی کا موازنہ کرنے کو **اختلاف کا ضریب** کہتے ہیں۔

ایک معطیات کے معیاری انحراف کو حسابی اوسط سے تقسیم کرنے پر اختلاف کا ضریب حاصل ہوتا ہے۔ اس کو عموماً فیصد کی شکل میں ظاہر کیا جاتا ہے۔ یہ نظریہ ایک مشہور و معروف **شماریات دان کارل پیرسن** نے پیش کیا۔

$$\text{اس طرح، پہلے معطیات کا اختلاف کا ضریب } (C.V_1) = \frac{\sigma_1}{\bar{x}_1} \times 100\%$$

$$\text{دوسرے معطیات کا اختلاف کا ضریب } (C.V_2) = \frac{\sigma_2}{\bar{x}_2} \times 100\%$$

معطیات جس کا اختلاف کا ضریب چھوٹا ہو تو زیادہ مستقل یا ساکن ہوگا دوسرے معطیات سے۔

دو معطیات پر غور کیجئے۔

A	500	900	800	900	700	400
B	300	540	480	540	420	240

ان سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

	اوسط	معیاری انحراف
A	700	191.5
B	420	114.9

اگر ہم دونوں معطیات کا اوسط اور معیاری انحراف کا موازنہ کرتے ہیں۔ ہم یہ سوچتے ہیں کہ دونوں معطیات مکمل طور پر مختلف ہیں۔ لیکن B کا اوسط اور معیاری انحراف A کا 60% ہے۔ کیونکہ چھوٹی اوسط، چھوٹی معیاری انحراف، غلط تعبیر کی طرف رہنمائی کرتی ہے۔

10th maths 8. statistics 1
Wednesday, February 19, 2020 1:45:01 PM

دومعطیات کے انتشار کا موازنہ کرنے پر اختلاف کا ضریب $= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\%$

A کا اختلاف کا ضریب $= \frac{191.5}{700} \times 100\% = 27.4\%$

B کا اختلاف ضریب $= \frac{114.9}{420} \times 100\% = 27.4\%$

جبکہ دونوں معطیات مساوی اختلاف کا ضریب رکھتے ہیں۔ چونکہ معطیات کے اختلاف کے ضریب کی قیمتیں مساوی رکھتے ہیں۔ ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ ایک معطیات دوسرے معطیات پر منحصر ہے۔ لیکن معطیات B کی قیمت ٹھیک 60% ہے۔ مقابل معطیات A سے۔ اس طرح دونوں زیادہ تعلق رکھتے ہیں۔ یوں ہم ایک کشمش حالت میں آ گئے ہیں۔

دئے گئے معطیات کا ایک واضح صورت کرنے کے لئے ہم ان کے اختلاف کا ضریب معلوم کر سکتے ہیں۔ اس لئے ہمیں اختلاف کا ضریب معلوم کرنا ضروری ہے۔

اپنی پیش رفت کی جانچ — Progress Check

1۔ اختلاف کا ضریب ..... پیمائش سے تعلق رکھتا ہے۔

2۔ جب معیاری انحراف کو اوسط سے تقسیم کیا جائے تو ہمیں ..... حاصل ہوتا ہے۔

3۔ اختلاف کا ضریب ..... اور ..... پر منحصر ہے۔

4۔ اگر معطیات کا اوسط اور معیاری انحراف بالترتیب 8 اور 2 ہو تو اختلاف کا ضریب ..... ہے۔

5۔ جب دو معطیات کا موازنہ کرتے ہیں معطیات جو ..... اختلاف کا ضریب رکھتا ہے وہ غیر مستقل ہے۔

مثال 8.15 معطیات کا اوسط 25.6 ہے اور اس کا اختلاف کا ضریب 18.75 ہے معیاری انحراف دریافت کیجئے۔

حل : اختلاف کا ضریب، C.V. = 18.75 , اوسط $\bar{x} = 25.6$

اختلاف کا ضریب $\text{C.V.} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\%$

$18.75 = \frac{\sigma}{25.6} \times 100$; $\sigma = 4.8$

مثال 8.16 ذیل کے جدول میں ایک اسکول کے دسویں جماعت کے طلباء کی اونچائیاں اور وزن کا اوسط اور اختلاف دیا گیا ہے۔

	اونچائی	وزن
اوسط	155 cm	46.50 kg
اختلاف	72.25 cm^2	28.09 kg

ایک دوسرے کے مقابلے میں کونسا زیادہ تبدیل ہوتا ہے۔

حل : دو معطیات کا موازنہ کرنے کے لئے پہلا ہم ان کے اختلاف کا ضریب معلوم کریں گے۔

اوسط $\bar{x}_1 = 155\text{cm}$, اختلاف $\sigma_1^2 = 72.25\ cm^2$

چنانچہ، معیاری انحراف $\sigma_1 = 8.5$

$C.V_1 = \frac{\sigma_1}{\bar{x}_1} \times 100\%$

اختلاف کا ضریب $C.V_1 = \frac{8.5}{155} \times 100\% = 5.48\%$ (اونچائی کے لئے)

اوسط $\bar{x}_2 = 46.50\ \text{kg}$, اختلاف، $\sigma_2^2 = 28.09\ \text{kg}^2$

10th maths 8. statistics 1
Wednesday, February 19, 2020 1:45:01 PM

معیاری انحراف $\sigma_2 = 5.3kg$

$C.V_2 = \frac{\sigma_2}{\bar{x}_2} \times 100\%$

اختلاف کا ضریب $C.V_2 = \frac{5.3}{46.50} \times 100\% = 11.40\%$ (وزن کے لئے)

$C.V_1 = 5.48\%$ اور $C.V_2 = 11.40\%$

اونچائی زیادہ مستقل ہے۔

مشق 8.2

1۔ معطیات کا معیاری انحراف اور اوسط بالترتیب 6.5 اور 12.5 ہیں۔ اختلاف کا ضریب معلوم کیجئے۔

2۔ معطیات کا معیاری انحراف اور اختلاف کا ضریب بالترتیب 1.2 اور 25.6 ہے۔ اوسط کی قیمت معلوم کیجئے۔

3۔ اگر ایک معطیات کی اوسط اور اختلاف کا ضریب بالترتیب 15 اور 48 ہوں تو معیاری انحراف کی قیمت معلوم کیجئے۔

4۔ اگر $n = 5$ ، $\bar{x} = 6$، $\sum x^2 = 765$ ہو تو اختلاف کا ضریب دریافت کیجئے۔

5۔ 24، 26، 33، 37، 29، 31 کا اختلاف کا ضریب معلوم کیجئے۔

6۔ درجہ ذیل میں آٹھ طلباء سے گھریلو مشق کو مکمل کرنے کا وقفہ (منٹ میں) 38، 40، 47، 44، 46، 43، 49، 53 ہیں۔ اختلاف کا ضریب معلوم کیجئے۔

7۔ دو طالبات نافعہ اور کلثوم کے 5 اسباق کل مارکس 460 اور 480 ہیں۔ جن کا معیاری انحراف بالترتیب 4.6 اور 2.4 ہے۔ کس کی کارکردگی زیادہ مستقل ہے؟

8۔ ایک جماعت کے 40 طلباء سے تین اسباق حساب سائنس اور سماجی سائنس میں حاصل شدہ مارکس کے اوسط اور معیاری انحراف ذیل میں دئے گئے ہیں۔ ان تین اسباق کے مارکس میں سے کون سے زیادہ مستقل ہیں اور کون سے کم مستقل ہیں؟

اسباق	اوسط	SD
حساب	56	12
سائنس	65	14
سماجی سائنس	60	10

8.4 امکان Probability


Blaise Pascal

چند صدیوں پہلے، جُوا اور قمار بازی (Gambling) کرنا شان تصور کیا جاتا تھا اور یہ بہت زیادہ مردوں میں مشہور تھا۔ جیسے جیسے کھیل بہت زیادہ دشوار ہوتا گیا کھلاڑیوں نے دئے گئے ایک مخصوص میں کھیل کی جیت یا ہار کے امکان کو معلوم کرنے میں زیادہ دلچسپی لینے لگے۔ 1654ء میں ایک فرانسی جواری شوالیرڈ ے میرے (Chevalier de Mere) نے ایک تنازعہ کھڑا کر کے اس کا حل ڈھونڈ نکالنے کی غرض سے مشہور ریاضی دان بلاس پاسکل (Blasie Pascal) کو خط سے رابطہ قائم کیا۔ جوا کے کھیل میں ایک کھلاڑی کتنا حصّہ منافع حاصل کرے گا۔ پاسکل نے اس مسئلہ کو حسابی طور پر حل کیا لیکن اسی مسئلہ کو اپنے دوست پیری ڈی فرمیٹ (Pierre de fermat) جو ایک ریاضی دان تھا۔ اس مسئلہ کو وہ کس طرح حل کر سکتا تھا وہ دیکھنا چاہتا تھا۔ جس کی وجہ سے امکان، ریاضی کی ایک شاخ کی طور پر وجود میں آیا۔

سریعی تجربہ (Random Experiment)

سریعی تجربہ ایک ایسا تجربہ ہے جس میں (i) مجموعہ کے تمام ممکن نتائج کو ہم اچھی طرح جانتے ہیں۔ ii) ٹھیک نتیجہ نہیں جانتے ہیں۔

مثال : 1) ایک سکّہ کو اچھالنا۔ 2) ایک پانسہ کو لڑھکانا۔

10th maths 8. statistics 1
Wednesday, February 19, 2020 1:45:02 PM

نظیری عرصہ (Sample Space)



Fig. 8.2

ایک سریعی تجربہ کے تمام ممکن نتائج کے مجموعہ کو نظیری عرصہ کہتے ہیں۔اس کو عموماً 'S' سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثال : جب ہم ایک پانسہ کو لڑھکاتے ہیں تو ممکن نتائج کے اعداد جو پانسہ کے چہروں پر نظر آتے ہیں وہ یہ ہیں 1، 2، 3، 4، 5، 6 ۔ چنانچہ نظیری عرصہ $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ ہے۔

نظیری نقطہ (Sample Point) نظیری عرصہ کا ہر ایک عنصر کو نظیری نقطہ کہتے ہیں۔

8.4.1 شجری خاکہ (Tree Diagram)

شجری خاکہ ہمیں ایک تجربہ کے تمام ممکن نتائج کو بصری طور پر دیکھنے کے قابل بناتا ہے۔شجری خاکہ کے ہر شاخ ایک ممکن نتیجہ کو ظاہر کرتی ہے۔

وضاحت Illustration

i) جب ہم ایک پانسہ کو لڑھکاتے ہیں تو شجری خاکہ (خاکہ 8.3) سے نظیری عرصہ اس طرح لکھ سکتے ہیں۔$S = \{1,2,3,4,5,6\}$

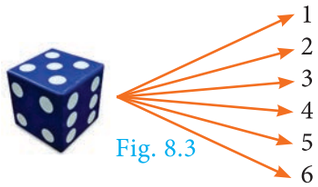


Fig. 8.3

ii) جب دو سکّے اچھالے جاتے ہیں تو شجری خاکہ (خاکہ 8.4) سے نظیری عرصہ اس طرح لکھ سکتے ہیں۔ $S=\{HH, HT, TH, TT\}$

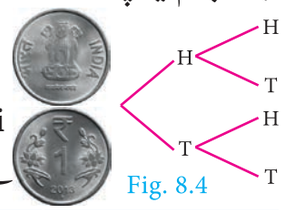


Fig. 8.4

Progress Check اپنی پیش رفت کی جانچ

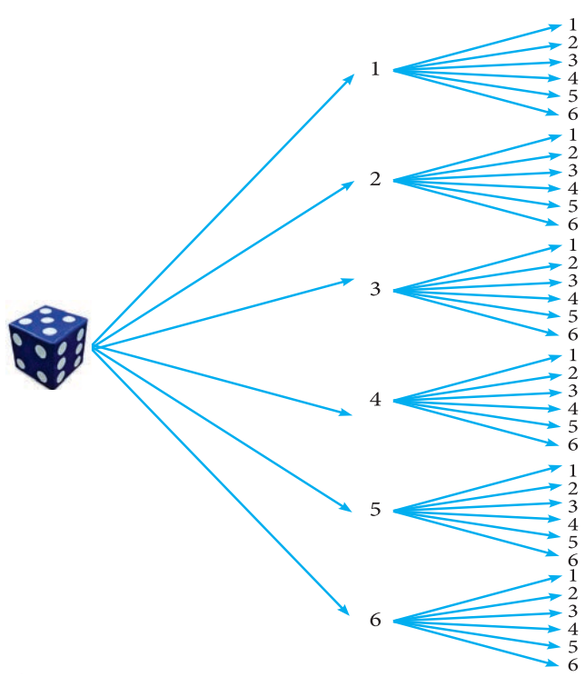
1۔ ایک تجربہ جس میں ایک مخصوص نتیجہ کی پیشین گوئی نہیں کر سکتے اس کو ..... کہتے ہیں۔

2۔ مجموعہ کے تمام ممکن نتائج کو ..... کہتے ہیں۔

مثال 8.17 دو پانسوں کو لڑھکایا جانے پر اس کا نظیری عرصہ کو شجری خاکہ کے استعمال سے ظاہر کیجئے۔

حل : جب دو پانسے لڑھکائے جائے، چونکہ ہر پانسہ کے 6 چہروں پر 1، 2، 3، 4، 5، 6 اعداد نشان کئے ہوتے ہیں تو شجری خاکہ اس طرح نظر آئے گا۔

لہذا، نظیری عرصہ کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔



$S= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)$

$(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)$

$(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)$

$(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)$

$(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)$

$(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$

10th maths 8. statistics 1
Wednesday, February 19, 2020 1:45:03 PM

موقع Event ایک سریعی تجربہ میں ہر ممکن نتیجہ **موقع** کہلاتا ہے۔اس طرح نظیری عرصہ کا تحتی مجموعہ موقع ہوگا۔

مثال : جب دو سکّے اچھالے جاتے ہیں تو دو سر حاصل ہونے کا ایک موقع ہے۔

آزمائش (Trial) جب ایک تجربہ کو ایک مرتبہ انجام دیتے ہیں اس کو **آزمائش** کہتے ہیں۔

مثال : جب ایک سکّے کو ہم تین مرتبہ اچھالتے ہیں تو ہر مرتبہ ایک سکّہ کو اچھالنا آزمائش ہے۔

مواقع	وضاحت	مثال
مساوی وقوع پزیری مواقع Equally Likely Event	دو یا دو سے زیادہ مواقع **مساوی وقوع پزیری** مواقع کہلاتے ہیں اگر ان کے حاصل ہونے کا امکان مساوی ہو۔	ایک سکہ کو اچھالنے پر چہرہ یا پشت کا حاصل ہونا، مساوی وقوع پذیری مواقع ہیں۔
یقینی مواقع Certain Events (Sure Events)	ایک تجربہ میں، اُس موقع کا واقع ہونا یقینی ہو۔	جب ایک پانسہ کو لڑھکایا جائے طبعی اعداد میں ایک سے چھ تک کسی ایک کا حاصل ہونا یقینی موقع ہے۔
ناممکن مواقع Impossible Event	اگر کوئی موقع کسی بھی طرح واقع نہ ہوسکتا ہو تو اس کو **ناممکن موقع** کہتے ہیں۔	جب ہم دو سکے اچھالتے ہیں ۔تو تین سر حاصل ہونے موقع ایک ناممکن موقع ہے۔
باہم اخراج کرنے والے مواقع Mutually Exclusive Events	دو یا دو سے زیادہ مواقع باہم اخراج کرنے والے کہلاتے ہیں اگر وہ **مشترک نظیری نقاط** نہیں رکھتے ہوں ۔یعنی مواقع A اور B کو باہم اخراج کرنے والے مواقع کہتے ہیں۔ اگر $A \cap B = \phi$ ہوں۔	جب ایک پانسہ کو لڑھکایا جاتا ہے تو حاصل ہونے والے مواقع طاق اعداد یا جفت اعد باہم اخراج کرنے والے مواقع ہیں۔
مکمل مواقع Exhaustive Events	مواقع کا مجموعہ جس کا اتحاد (Union) مکمل نظیری عرصہ کو **مکمل مواقع** کہلاتا ہے۔	جب ہم ایک سکّے کو دو مرتبہ اچھالتے ہیں تو دو سر، ٹھیک ایک سر، کوئی سر نہیں حاصل ہونے کے مواقع مکمل مواقع ہیں۔
متمم مواقع Complementary Events	ایک متمم موقع A ایک ایسا موقع کو ظاہر کرتا ہے جس میں مجموعہ کے نظیری نقاط A میں نہ ہوں۔ اس کو A' یا A^c یا $\bar{A}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ موقع A اور اس کا متمم موقع A' باہم اخراج کرنے والے اور مکمل مواقع ہیں۔	ایک پانسہ کو لڑھکایا جائے موقع 5 یا 6 حاصل ہونا اور موقع 3،2،1 یا 4 حاصل ہونا متمم مواقع ہیں۔

غور کیجئے

عنصری موقع (Elementary Event) :
اگر ایک موقع E صرف ایک نتیجہ پر مشتمل ہو تو اس کو عنصری موقع کہتے ہیں۔

کیا تم جانتے ہو؟

1713 میں برنولی (Bernoulli) وہ پہلا شخص تھا جس نے امکان کو قمار بازی کے علاوہ کئی شعبوں میں وسیع پیمانے پر اس کے استعمالات کو واقف کرایا۔

10th maths 8. statistics 1
Wednesday, February 19, 2020 1:45:03 PM

8.4.2 ایک موقع کا امکان (Probability of an Event)

ایک سریعی تجربہ میں، فرض کیجئے کہ نظیری عرصہ S اور ECS ہے یعنی E ایک **موقع** ہے۔
E واقع ہونے کا امکان کو اس طرح تشریح کی جاتی ہے۔

$$P(E) = \frac{E \text{ واقع ہونے کے سازگار نتائج کی تعداد}}{\text{تمام ممکن نتائج کی تعداد}} = \frac{n(E)}{n(S)}$$

اِس طرح کے امکان اس وقت استعمال ہو سکتے ہیں۔ جب نظیری عرصے محدود ہوں۔ لہذا اس باب میں ہم صرف محدود نظیری عرصے سے تعلق رکھنے والے حسابات حل کریں گے۔

غور کیجئے

(i) $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$

(ii) $P(S) = \frac{n(S)}{n(S)} = 1$ یقینی موقع کا امکان 1 ہے۔

(iii) $P(\phi) = \frac{n(\phi)}{n(s)} = \frac{0}{n(s)} = 0$ ناممکن موقع کا امکان 0 ہے۔

(iv) چونکہ E ایک تحتی مجموعہ S کا اور ϕ ایک تحتی مجموعہ ہے کسی بھی مجموعہ کا۔

$$\phi \subseteq E \subseteq S$$
$$P(\phi) \le P(E) \le P(S)$$
$$0 \le P(E) \le 1$$

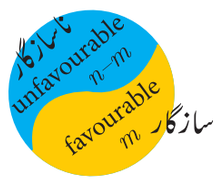
لہذا، امکان کی قیمت ہمیشہ 0 سے 1 کے درمیان واقع ہوتا ہے۔

(v) E کا متمم موقع $\bar{E}$ ہے۔

فرض کیجئے : $P(E) = \frac{m}{n}$ (جس میں E سازگار نتائج کی تعداد m اور تمام ممکن نتائج کی تعداد n ہے۔)

$$P(\bar{E}) = \frac{E \text{ واقع ہونے کے ناسازگار نتائج کی تعداد}}{\text{تمام ممکن نتائج کی تعداد}}$$

$$P(\bar{E}) = \frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n}$$
$$P(\bar{E}) = 1 - P(E)$$



(vi) $P(E) + P(\bar{E}) = 1$

Progress Check — اپنی پیش رفت کی جانچ

1۔ درجہ ذیل کی کونسی قیمتیں موقع کا امکان نہیں ہو سکتے ہیں؟

(a) 0.0001 (b) 0.5 (c) 1.001 (d) 1

(e) 20% (f) 0.253 (g) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (h) $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$

مثال 8.18 ایک تھیلی میں 5 نیلی گیندیں اور 4 ہری گیندیں ہیں۔ سریعی طور پر ایک گیند کو تھیلی سے نکالا جاتا ہے تو نکالے گئے گیند کا امکان معلوم کیجئے۔ i) نیلی ii) نیلی نہ ہو

10th maths 8. statistics 1
Wednesday, February 19, 2020 1:45:04 PM

حل : تمام ممکن نتائج کی تعداد $n(S) = 5 + 4 = 9$

i) فرض کیجئے کہ، نیلی گیند اٹھانے کا امکان A ہے۔

موقع A کے لئے سازگار نتائج کی تعداد $n(A) = 5$ چنانچہ

نیلی گیند اٹھانے کا امکان $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{9}$ چنانچہ،

ii) موقع $\bar{A}$ نیلی گیند نہ اٹھانے کا امکان ہوگا۔ $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$

مثال 8.19 دو پانسے لڑھکائے جاتے ہیں۔ ذیل کے نتائج کے حاصل جمع کا امکان معلوم کیجئے۔

i) 4 کے مساوی ہو ii) 10 سے زیادہ ہو iii) 13 سے کم

حل : جب ہم دو پانسے لڑھکاتے ہیں تو نظیری عرصہ اس طرح حاصل ہوتا ہے۔

$$S = \{ (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)$$
$$(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)$$
$$(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)$$
$$(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)$$
$$(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)$$
$$(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6) \}; \quad n(S) = 36$$

i) فرض کیجئے نتائج کا حاصل جمع 4 کے مساوی ہونے کا موقع A ہے۔ تو

$$A = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}; \ n(A) = 3 \ .$$

حاصل جمع 4 کے مساوی ہونے کا امکان $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

ii) فرض کیجئے نتائج کا حاصل جمع 10 سے زیادہ ہونے کا موقع B ہے۔ تو

$$B = \{(5,6),(6,5),(6,6)\}; \ n(B) = 3$$

حاصل جمع 10 سے زیادہ ہونے کا امکان $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

iii) فرض کیجئے نتائج کا حاصل جمع 13 سے کم ہونے کا موقع C ہے۔ تو یہاں تمام نتائج کا حاصل جمع 13 کم رکھتے ہیں۔ لہذا، $C = S$

$$n(C) = n(S) = 36$$

حاصل جمع 13 سے کم ہونے کا امکان $P(C)$ چونکہ، $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{36}{36} = 1 \ .$

مثال 8.20 بیک وقت دو سکّے اچھالے جاتے ہیں۔ سکّے پر مختلف چہرے حاصل ہونے کا امکان کیا ہے؟

حل : جب دو سکّے بیک وقت اچھالے جاتے ہیں تو ان کا نظیری عرصہ

$$S = \{HH, HT, TH, TT\} \ ; \quad n(S) = 4$$

فرض کیجئے سکّوں پر مختلف چہرے حاصل ہونے کا موقع A ہے۔

$$A = \{HT, TH\} \ ; \quad n(A) = 2$$

سکّوں پر مختلف چہرے حاصل ہونے کا امکان $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

10th maths 8. statistics 1
Wednesday, February 19, 2020 1:45:04 PM

مثال 8.21 سرعی طور پر منتخب شدہ لیپ سال میں 53 ہفتے (سنیچر) ہونے کا امکان کیا ہوگا۔ (اشارہ : $366 = 52 \times 7 + 2$)

حل : ایک لیپ سال میں 366 دن ہوتے ہیں۔ چنانچہ، اس میں 52 مکمل ہفتے اور 2 دن ہوتے ہیں۔ مکمل 52 ہفتوں میں 52 سنیچر ہوں گے۔ باقی کے دو دنوں کے لئے ممکن نظیری عرصہ یہ ہوگا۔

$S =$ {اتوار۔پیر، پیر۔منگل، منگل۔چہارشنبہ، چہارشنبہ۔جمعرات، جمعرات۔جمعہ، جمعہ۔ہفتہ (سنیچر)، ہفتہ۔اتوار}

$n(S) = 7$

Thinking Corner ذرا سوچئے

غیر لیپ سال میں 53 ہفتے (Saturdays) ہونے کا امکان کیا ہوگا؟

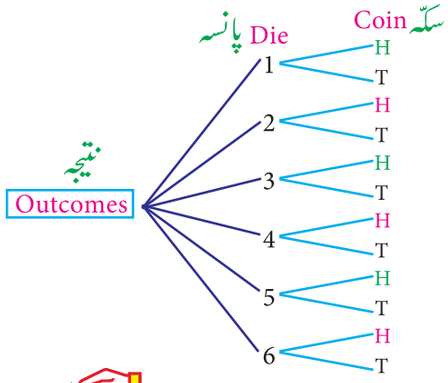
فرض کیجئے کہ 53 واں ہفتہ (سنیچر) حاصل ہونے کا موقع A ہے تو

$A =$ {ہفتہ۔اتوار، جمعہ۔ہفتہ}

ایک لیپ سال میں 53 ہفتہ (سنیچر) حاصل ہونے کا امکان $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{7}$

مثال 8.22 بیک وقت ایک پانسہ کو لڑھکایا اور ایک سکّہ کو اچھالا جاتا ہے۔ پانسہ میں طاق عدد اور سکّہ میں سر حاصل ہونے کا امکان معلوم کیجئے

حل : نظیری عرصہ



$S = \{1H, 1T, 2H, 2T, 3H, 3T, 4H, 4T, 5H, 5T, 6H, 6T\}$;

$n(S) = 12$

فرض کیجئے کہ طاق عدد اور سر حاصل ہونے کا موقع A ہے۔

$A = \{1H, 3H, 5H\}$; $n(A) = 3$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

کارروائی 3 Activity 3	کارروائی 4 Activity 4
فاطمہ کے گھر سے دفتر کو جانے کے لئے تین راستے R_1، R_2 اور R_3 ہیں۔ دفتر کی عمارت میں چار پارکنگ لاٹ (Parking Lot) P_1، P_2، P_3، P_4 اور تین داخلے B_1، B_2، B_3 ہیں۔ نچلی منزل میں دو لفٹ E_1 اور E_2 ہیں۔ سمجھائے کہ شجری خاکہ کو استعمال کر کے وہ کتنے طرح کے راستوں (طریقے) کو استعمال کر کے دفتر پہنچ سکتی ہے۔	معلومات کو جمع کریں اور امکانات محسوب کیجئے۔ i) تمہاری کلاس سے ایک لڑکا کا انتخاب کرنا۔ ii) تمہاری کلاس سے ایک لڑکی کا انتخاب کرنا۔ iii) دسویں کلاس سے ایک طالب علم کا انتخاب کرنا۔ iv) تمہارے اسکول کے دسویں کلاس سے ایک لڑکا کا انتخاب کرنا۔ v) تمہارے اسکول کے دسویں کلاس سے ایک لڑکی کا انتخاب کرنا۔

مثال 8.23 کسی تھیلی میں 6 ہری گیندیں، چند سیاہ اور سرخ گیندیں ہیں۔ سیاہ گیندوں کی تعداد سرخ گیندوں کی تعداد سے دگنی ہے۔ سرخ گیند اٹھانے کے امکان سے ہری گیند اٹھانے کا امکان تگنا ہے، تو معلوم کیجئے کہ۔ i) سیاہ گیندوں کی تعداد ii) کل گیندوں کی تعداد

حل : فرض کیجئے کہ

ہری گیندوں کی تعداد $n(G) = 6$

سرخ گیندوں کی تعداد $n(R) = x$

سیاہ گیندوں کی تعداد $n(B) = 2x$

کل گیندوں کی تعداد $n(S) = 6 + x + 2x = 6 + 3x$

یہ دیا گیا ہے کہ $P(G) = 3 \times P(R)$

10th maths 8. statistics 1
Wednesday, February 19, 2020 1:45:05 PM

$$\frac{6}{6+3x} = 3 \times \frac{x}{6+3x}$$

$$3x = 6 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

i) سیاہ گیندوں کی تعداد $= 2 \times 2 = 4$

ii) کل گیندوں کی تعداد $= 6 + (3 \times 2) = 12$

مثال 8.24 تیر آزمائی کے کھیل میں، چکری کے درمیان ایک تیر کو نصب کیا گیا ہے۔ جب چکری کو گھمائی جاتی ہے۔ چکری رکنے پر تیر کا نشان ان اعداد 1,2,3, ... ,12 میں کسی ایک عدد کی طرف اشارہ کرتا ہے۔ ذیل کے ان اعداد کی طرف اشارہ کرنے کا امکان کیا ہے۔

i) 7 ii) اعداد اوّلی iii) مخلوط اعداد

حل : نظیری عرصہ $S = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$; $n(S) = 12$

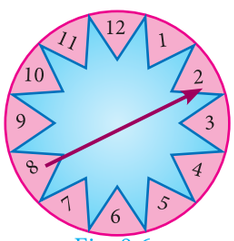


Fig. 8.6

i) فرض کیجئے کہ 7 پر رکنے کا موقع A ہے۔ $n(A) = 1$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{12}$$

ii) فرض کیجئے کہ تیر اعداد اوّلی پر رکنے کا موقع B ہے۔

$$B = \{2,3,5,7,11\}; \quad n(B) = 5$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{12}$$

iii) فرض کیجئے کہ تیر مخلوط اعداد پر رکنے کا موقع C ہے۔

$$C = \{4,6,8,9,10,12\}; \quad n(C) = 6$$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

ذرا سوچئے

ناممکن موقع کا متمم موقع کیا ہے؟

مشق 8.3

1۔ شجری خاکہ کو استعمال کرکے تین سکّوں اُچھالنے کا نظیری عرصہ لکھئے۔

2۔ ایک تھیلی میں 1 سے 6 اعداد رکھنے والی گیندوں ہیں۔ ان میں سے کوئی دو گیندوں کو انتخاب کرنے کا نظیری عرصہ لکھئے۔ (شجری خاکہ کے استعمال سے)

3۔ اگر ایک سریعی تجربہ کا موقع A ہے۔ اس طرح کہ $P(A) : P(\bar{A}) = 17:15$ اور $n(S) = 640$ ہو تو دریافت کیجئے۔ i) $P(\bar{A})$ ii) $n(A)$

4۔ ایک سکّے کو تین مرتبہ اُچھالا جاتا ہے تو دو متواتر پشت حاصل ہونے کا امکان معلوم کیجئے۔

5۔ ایک تہوار (Fete) میں، 1 تا 1000 اعداد رکھنے والے کارڈ ہیں، ہر ایک کارڈ پر ایک عدد لکھا ہوا ہے۔ انہیں ایک ڈبے میں رکھا گیا ہے۔ ہر ایک کھلاڑی کو سریعی طور پر ایک کارڈ انتخاب کرنا ہوگا۔ اور منتخب کردہ کارڈ کو دوبارہ اس ڈبے میں ڈالا نہیں جائے گا۔ اگر انتخاب شدہ کارڈ پر 500 سے بڑا کامل مربع عدد حاصل ہوتا ہے تو وہ کھلاڑی انعام حاصل کرے گا۔ ان کا امکان معلوم کیجئے کہ (i) پہلا کھلاڑی انعام حاصل کرتا ہے۔ (ii) دوسرا کھلاڑی انعام حاصل کرتا ہے اگر پہلا کھلاڑی انعام حاصل کیا ہوا ہو۔

6۔ ایک تھیلی میں 12 نیلی گیندیں اور x سرخ گیندیں ہیں۔ اگر سریعی طور پر ایک گیند اٹھائی جائے۔

i) سرخ گیند حاصل ہونے کا امکان کیا ہے۔ ii) اگر اس تھیلی میں 8 مزید سرخ گیندیں ڈال دی جائیں اور اگر ایک سرخ گیند کے حاصل ہونے کا امکان (i) کے امکان کا دگنا ہو جاتا ہے تو x معلوم کیجئے۔

7۔ دو غیر جانب دار پانسے بیک وقت ایک مرتبہ لڑھکایا جائے، ذیل کے حاصل ہونے کا امکان محسوب کیجئے۔

i) جڑواں عدد (دونوں پانسوں پر مساوی اعداد) ii) حاصل ضرب اعداد اوّلی ہو iii) حاصل جمع اعداد اوّلی ہو iv) حاصل جمع 1 ہو۔

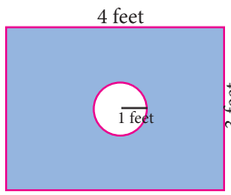
8۔ تین سکّوں کو بیک وقت اچھالے جائے۔ ذیل کے حاصل ہونے کا امکان محسوب کیجئے۔

i) تمام سر ii) کم از کم ایک پشت iii) زیادہ سے ایک سر ہو iv) زیادہ سے زیادہ دو پشت ہو

10th maths 8. statistics 1
Wednesday, February 19, 2020 1:45:05 PM

9۔ ایک تھیلی میں 5 سرخ گیندیں، 6 سفید گیندیں، 7 ہری گیندیں، 8 سیاہ گیندیں ہیں۔ایک گیند کو سریعی طور پر تھیلی سے نکالا جائے اس گیند کے نکالنے کا امکان معلوم کیجئے۔ i) سفید ii) سیاہ یا سرخ iii) سفید نہ ہو iv) نہ سفید نہ سیاہ

10۔ ایک ڈبے میں 20 غیر ناقص بلپ(Bulb)اور چند ناقص بلپ ہیں۔اگر سریعی طور پر ڈبے میں ایک بلب نکالا جائے تو ناقص ہونے کا امکان $\frac{3}{8}$ ہے۔ناقص بلپ کی تعداد معلوم کیجئے۔



11۔ چندلڑکے مل کر ایک کھیل، کھیل رہے ہیں۔اس کھیل میں ایک پتھر کو پھینک جائے جس کسی کا پتھر مدوّر حصّہ کے اندر گرتا ہے۔(خاکہ میں دیا گیا ہے) وہ فتح یاب تصور کیا جاتا ہے اور جس کا پتھر اس مدوّر کے باہر گرتا ہے۔ اس کو غیر فتح یاب تصور کیا جاتا ہے۔کھیل میں فتح ہونے کا امکان معلوم کیجئے۔

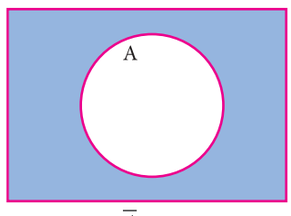
12۔ دوگاہک دانیہ اور یونس ایک مخصوص دُکان کو ایک ہی ہفتہ (Week) کے اندر جاتے ہیں۔ (پیر تا ہفتہ) ہر ایک برابر تعداد میں دکان کا دورہ کرتے ہیں۔کس دن دونوں کا دکان کا دورہ کرنے کا امکان معلوم کیجئے۔
i) اسی دن ii) مختلف دنوں میں iii) متواتر دنوں میں

13۔ ایک کھیل میں داخلہ کی فیس 150 روپئے ہے۔اس کھیل میں سکہ کو تین مرتبہ اچھالا جائے گا۔ کلثوم داخلہ کا ایک ٹکٹ خریدتی ہے۔اگر سکہ اچھالنے پر ایک یا دو سر دیکھائے تو داخلہ کی فیس اس کو واپس کردی جائے گی۔ اگر وہ تین سر لائے تو اس کو داخلہ کی فیس دگنی واپس ملے گی۔ورنہ وہ ہار جائے گی۔اُس کا امکان معلوم کیجئے کہ (i) دگنی داخلہ کی فیس حاصل کریں گی۔
(ii) صرف داخلہ کی فیس حاصل کرے گی۔ (iii) داخلہ کی فیس ہار دے گی۔

8.5 الجبرا کے مواقع Algebra of Events

ایک سریعی تجربہ میں، فرض کیجئے کہ 'S' نظیری عرصہ کو ظاہر کرتا ہے۔فرض کیجئے کہ $A \subseteq S$ اور $B \subseteq S$ ہو تو A اور B مواقع ہیں۔ ہم یہ کہتے ہیں کہ

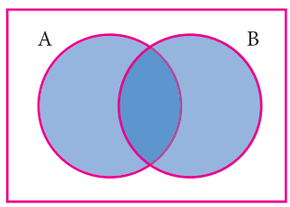
iii) $\bar{A}$ موقع واقع ہوتا ہے۔جب A واقع نہیں ہوتا ہوں۔ 8.7(c) خاکہ



$\bar{A}$

Fig. 8.7(c)

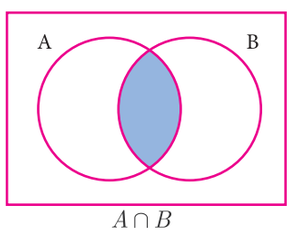
ii) $(A \cap B)$ موقع واقع ہوتا ہے۔صرف جب کم از کم ایک A یا B واقع ہوں۔8.7(b) خاکہ



$A \cup B$

Fig. 8.7(b)

i) $(A \cap B)$ موقع واقع ہوتا ہے صرف جب دونوں ایک A اور B واقع ہوں۔8.7(a) خاکہ



$A \cap B$

Fig. 8.7(a)

10th maths 8. statistics 1
Wednesday, February 19, 2020 1:45:06 PM

غور کیجئے

(i) $A \cap \bar{A} = \phi$ (ii) $A \cup \bar{A} = S$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(iii) اگر A، B باہم اخراج کرنے والے واقع ہوتو $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ہے۔

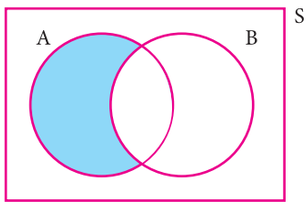
(iv) P (مواقع کا اتحاد) $= \sum$ (مواقع کا امکان)

مسئلہ 1 : Theorem 1

اگر A اور B دو مواقع ایک سریعی تجربہ سے تعلق رکھتے ہیں تو ثابت کیجئے کہ

(i) $P(A \cap \bar{B})$ = P(A صرف) $= P(A) - P(A \cap B)$

(ii) $P(\bar{A} \cap B)$ = P(B صرف) $= P(B) - P(A \cap B)$



$A \cap \bar{B}$
Fig. 8.8

ثبوت Proof i) مجموعوں کے تقسیمی خاصیت کے تحت

1. $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A \cap (B \cup \bar{B}) = A \cap S = A$
2. $(A \cap B) \cap (A \cap \bar{B}) = A \cap (B \cap \bar{B}) = A \cap \phi = \phi$

چنانچہ، مواقع $(A \cap B)$ اور $(A \cap \bar{B})$ باہم اخراج کروالے اوران کا اتحاد A ہے۔

$$P(A) = P\left[(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})\right]$$

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$$

چنانچہ $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

یعنی $P(A \cap \bar{B})$ = P(A صرف) $= P(A) - P(A \cap B)$

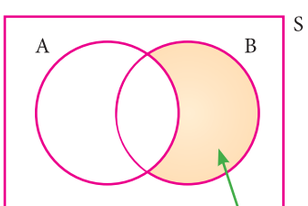


Fig. 8.9
$\bar{A} \cap B$

ii) مجموعوں کے تقسیمی خاصیت کے تحت

1. $(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B) = (A \cup \bar{A}) \cap B = S \cap B = B$
2. $(A \cap B) \cap (\bar{A} \cap B) = (A \cap \bar{A}) \cap B = \phi \cap B = \phi$

چنانچہ، مواقع $(A \cap B)$ اور $(\bar{A} \cap B)$ باہم اخراج کرنے والے اوران کا اتحاد B ہے۔

$$P(B) = P\left[(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)\right]$$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

چنانچہ $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

یعنی $P(\bar{A} \cap B) = P$(B صرف) $= P(B) - P(A \cap B)$

Progress Check اپنی پیش رفت کی جانچ

(1) P(A صرف) = ...

(2) $P(\bar{A} \cap B) =$ _____

(3) $(A \cap B)$ اور $(\bar{A} \cap B)$ ..... مواقع ہیں۔

(4) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) =$ _____

(5) اگر A اور B باہم اخراج کرنے والے مواقع ہوں تو $P(A \cap B)$ = ...

(6) اگر $P(A \cap B) = 0.3$، $P(\bar{A} \cap B) = 0.45$ ہوتو $P(B) =$ _____.

8.6 امکان میں جمع کا مسئلہ Addition Theorem of Probability

i) اگر A اور B کوئی دو غیر باہم اخراج کرنے والے مواقع ہوں تو

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

10th maths 8. statistics 1
Wednesday, February 19, 2020 1:45:07 PM

ii) اگر A، B اور C کوئی تین غیر باہم اخراج کرنے والے مواقع ہوں تو

$$P\left(A \cup B \cup C\right) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

ثبوت : i) فرض کیجئے کہ ایک سریعی تجربہ میں A اور B کوئی دو مواقع ہیں جن کا نظیری عرصہ S ہے۔

ون نقشہ سے، مواقع صرف A، $A \cap B$ اور صرف B باہم اخراج کرنے والے اور ان کا اتحاد $A \cup B$ ہے۔

چنانچہ، $P(A \cup B) = P\,[(A \text{ صرف}) \cup (A \cap B) \cup (B \text{ صرف})]$

$$= P\ (A \text{ صرف}) + P\ (A \cap B) + P\ (B \text{ صرف})$$

$$= [P(A) - P(A \cap B)] + P(A \cap B) + [P(B) - P(A \cap B)]$$

$$P(A \cup B) = [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]$$

ii) فرض کیجئے ایک سریعی تجربہ میں A، B اور C کوئی تین مواقع ہیں۔ جن کا نظیری عرصہ S ہے۔

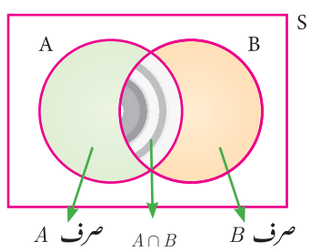


Fig 8.9

فرض کیجئے، $D = B \cup C$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup D)$$

$$= P(A) + P(D) - P(A \cap D)$$

$$= P(A) + P(B \cup C) - P[A \cap (B \cup C)]$$

$$= P(A) + P(\mathrm{B}) + P(C) - P(B \cap C) - P[(A \cap B) \cup (A \cap C)]$$

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P[(A \cap B) \cap (A \cap C)]$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$$

Activity 5 کارروائی 5

امکان میں جمع کے مسئلے کو ذیل کے طریقہ استعمال کر کے آسانی کے ساتھ لکھ سکتے ہیں۔ جس میں،

$$P(A \cup B) = S_1 - S_2$$

$$P(A \cup B \cup C) = S_1 - S_2 + S_3$$

$S_1 \leftarrow$ امکان کے مواقع کا حاصل جمع جو ایک وقت میں ایک لیا جائے۔

$S_2 \leftarrow$ امکان کے مواقع کا حاصل جمع جو ایک وقت میں دو لیا جائے۔

$S_3 \leftarrow$ امکان کے مواقع کا حاصل جمع جو ایک وقت میں تین لیا جائے۔

$$P(A \cup B) = \underbrace{P(A) + P(B)}_{S_1} \quad \underbrace{-P(A \cap B)}_{S_2}$$

$$P(A \cup B \cup C) = \underbrace{P(A) + P(B) + P(C)}_{S_1} \quad \underbrace{-(P(A \cap B) + P(B \cap C) + P(A \cap C))}_{S_2} \quad \underbrace{+P(A \cap B \cap C)}_{S_3}$$

اوپر کے طریقہ کو استعمال کر کے $P(A \cup B \cup C \cup D)$ کا امکان معلوم کیجئے۔ کیا تم ضابطہ میں رقموں کی تعداد کے لئے نمونہ معلوم کر سکتے ہو؟

10th maths 8. statistics 1
Wednesday, February 19, 2020 1:45:07 PM

مثال 8.25 اگر $P(\mathrm{A}) = 0.37\,,\ P(\mathrm{B}) = 0.42\,,\ P(A \cap B) = 0.09$ ہوتو $P(A \cup B)$ معلوم کیجئے۔

حل :

$$P(\mathrm{A}) = 0.37\,,\ P(\mathrm{B}) = 0.42\,,\ P(A \cap B) = 0.09$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = 0.37 + 0.42 - 0.09 = 0.7$$

مثال 8.26 دو پانسے بیک وقت لڑھکائے جائے، جڑواں عدد (Doublet) یا چہروں کا حاصل جمع 4 حاصل ہونے کا امکان معلوم کیجئے۔

حل : دو پانسے بیک وقت لڑھکائے جاتے ہیں تو اس کے $6 \times 6 = 36$ نتائج ہوتے ہیں۔ فرض کیجئے نظیری عرصہ S کو ظاہر کرتا ہوتو $n(S) = 36$

فرض کیجئے جڑواں عدد حاصل ہونے کا موقع A ہے اور چہروں کا حاصل جمع 4 حاصل ہونے کا موقع B ہوتو،

$$A = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$$

$$B = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$$

چنانچہ $A \cap B = \{(2,2)\}$

$$n(A) = 6\ ,\ n(B) = 3\ ,\ n(A \cap B) = 1\,.$$

ذرا سوچئے

$P(A \cup B) + P(A \cap B) =$ _____

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{36}$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{1}{36}$$

P (جڑواں ہوں یا حاصل جمع 4 ہوں) $= P(A \cup B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{6}{36} + \frac{3}{36} - \frac{1}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

لہذا، مطلوبہ امکان $\frac{2}{9}$ ہے

مثال 8.27 اگر A اور B دو مواقع ہوں اس طرح کہ $P(A) = \frac{1}{4}$، $P(B) = \frac{1}{2}$ اور $P(A$ اور $B) = \frac{1}{8}$، ہوتو معلوم کیجئے۔

(i) P (A یا B) (ii) P (A اور نہ B)

حل :

(i) P (A یا B) $= P(A \cup B)$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \text{ یا } B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

(ii) P (A اور نہ B) $= P(\bar{A} \cap \bar{B})$

$$= P\left(\overline{A \cup B}\right)$$

$$= 1 - P\left(A \cup B\right)$$

$$P(A \text{ اور نہ } B) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

10th maths 8. statistics 1
Wednesday, February 19, 2020 1:45:08 PM

مثال 8.28 ایک کلاس کے 50 طلباء میں 28 نے NCC کا انتخاب کیا، 30 نے NSS کا انتخاب کیا اور 18 طلباء نے دونوں NCC اور NSS کا انتخاب کیا۔ سریعی طور پر ایک طالب علم کو انتخاب کیا جائے تو، ان کا امکان معلوم کیجئے۔

i) طالب علم NCC کا انتخاب کیا ہے لیکن NSS کا نہیں کیا۔ ii) طالب علم NSS کا انتخاب کیا ہے لیکن NCC کا نہیں کیا۔

iii) طالب علم ان میں سے ٹھیک ایک کا انتخاب کیا۔

حل : $n(S) = 50$ کل طلباء کی تعداد

فرض کیجئے NCC اور NSS کا انتخاب کرنے کے مواقع بالترتیب A اور B ہیں۔

$$n(A) = 28 \ , \ n(B) = 30 \ , \ n(A \cap B) = 18$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{28}{50}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{30}{50}$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{18}{50}$$

i) NCC کا انتخاب کرنے والے طلباء لیکن NSS کا نہیں کرنے والے کا امکان

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{28}{50} - \frac{18}{50} = \frac{1}{5}$$

ii) NSS کا انتخاب کرنے والے طلباء لیکن NCC کا نہیں کرنے والے کا امکان

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{30}{50} - \frac{18}{50} = \frac{6}{25}$$

iii) ٹھیک ان میں ایک کا انتخاب کرنے والے طلباء کا امکان

$$= P[(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)]$$

$$= P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) = \frac{1}{5} + \frac{6}{25} = \frac{11}{25}$$

(غور کیجئے کہ $(A \cap \bar{B}), (\bar{A} \cap B)$ باہم اخراج کرنے والے مواقع ہیں)

مثال 8.29 IIT میں داخلہ کی درخواست کے لئے دو امیدوار A اور B ہیں، A اور B دو امیدوار IIT میں داخلہ کی درخواست دیتے ہیں۔ A انتخاب ہونے کا امکان 0.5 ہے اور A اور B دونوں انتخاب ہونے کا امکان 0.3 ہے۔ ثابت کیجئے کہ B کا انتخاب ہونے کا امکان زیادہ سے زیادہ (almost) 0.8 ہے۔

حل : ہم جانتے ہیں، $P(A) = 0.5, \ P(A \cap B) = 0.3$

$$P(A \cup B) \leq 1$$

$$P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) - P(A \cap B) \leq 1$$

$$0.5 + P(B) - 0.3 \leq 1$$

$$P(B) \leq 1 - 0.2$$

$$P(B) \leq 0.8$$

لہذا، B کا انتخاب ہونے کا زیادہ سے زیادہ امکان 0.8 ہے۔

10th maths 8. statistics 1
Wednesday, February 19, 2020 1:45:08 PM

مشق 8.4

1۔ اگر $P(A) = \frac{2}{3}$ ، $P(B) = \frac{2}{5}$ ، $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$ ہوتو $P(A \cap B)$ معلوم کیجئے۔

2۔ اگر A اور B دو مواقع ہوں اس طرح ہیں کہ $P(A) = 0.42, P(B) = 0.48$ اور $P(A \cap B) = 0.16$ ہوتو معلوم کیجئے

(i) P (نہ ہو A) (ii) P (نہ ہو B) (iii) P (A یا B)

3۔ اگر سریعی تجربہ میں A اور B باہم اخراج کرنے والے مواقع ہیں اور P (نہ ہو A) $= 0.45$، $P(A \cup B) = 0.65$ ہوتو $P(B)$ معلوم کیجئے۔

4۔ A اور B کم از کم ایک مرتبہ واقع ہونے کا امکان 0.6 ہے۔ اگر A اور B بیک وقت واقع ہونے کا امکان 0.2 ہوتو $P(\bar{A}) + P(\bar{B})$ معلوم کیجئے۔

5۔ موقع A واقع ہونے کا امکان 0.5 اور B کا 0.3 ہے۔ اگر A اور B باہم اخراج کرنے والے مواقع ہوں تو نہ A ، واقع ہونے کا امکان دریافت کیجئے۔

6۔ دو پانسہ ایک مرتبہ لڑھکایا جائے۔ پہلے پانسہ میں ایک جفت عدد یا چہروں کا حاصل جمع 8 حاصل ہونے کا امکان معلوم کیجئے۔

7۔ تین غیر جانب دار سکّے بیک وقت پھینکے جاتے ہیں۔ اس بات کا امکان معلوم کرو کہ زیادہ سے زیادہ 2 پشت یا کم از کم 2 سر حاصل ہوں

8۔ ایک شخص کو برق کاری کا معاہدہ (Electrification Contract) ملنے کا امکان $\frac{3}{5}$ ہے اور اُس شخص کو نل سازی کا معاہدہ (Plumbing Contract) نہ ملنے امکان $\frac{5}{8}$ ہے۔ کم از کم ایک معاہدہ ملنے کا امکان $\frac{5}{7}$ ہے۔ اس کو دونوں معاہدے ملنے کا امکان کیا ہے؟

9۔ ایک گاؤں میں 8000 افراد ہیں۔ اِن میں 50 سال سے زیادہ عمر والے 1300 افراد ہیں اور 3000 عورتیں ہیں۔ یہ بھی حقیقت ہے کہ 30% عورتیں 50 سال سے زیادہ عمر کی ہیں۔ اس بات کا کیا امکان ہے کہ اس گاؤں سے انتخاب ہونے والا انفرادی فرد ایک عورت یا 50 سال سے زیادہ عمر والا/والی ہے؟

10۔ تین سکّے بیک وقت اُچھالے جاتے ہیں۔ اِس بات کا کیا امکان ہے کہ ٹھیک دوسرے یا کم از کم ایک پشت یا لگاتار دو سر حاصل ہوں؟

11۔ اگر A, B, C کوئی تین مواقع اس طرح ہیں کہ B امکان دگنا ہے A کے امکان سے اور C کا امکان تگنا ہے A کے امکان سے اور $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$، $P(B \cap C) = \frac{1}{4}$، $P(A \cap C) = \frac{1}{8}$، $P(A \cup B \cup C) = \frac{9}{10}$ اور $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{15}$ ہوتو $P(A)$، $P(B)$ اور $P(C)$ معلوم کیجئے۔

12۔ ایک کلاس میں 1 تا 35 حاضری نمبر رکھنے والے 35 طلباء ہیں۔ لڑکے اور لڑکیوں کی نسبت 4:3 ہے۔ حاضری نمبر لڑکوں سے شروع ہوتے ہیں اور لڑکیوں پر ختم ہوتے ہیں۔ معلوم کیجئے کہ منتخب شدہ طالب علم، عدد اولی حاضری نمبر رکھنے والا لڑکا یا مخلوط حاضری نمبر رکھنے والی لڑکی یا جفت حاضری نمبر ہوں۔

10th maths 8. statistics 1
Wednesday, February 19, 2020 1:45:09 PM

S6ENC

مشق 8.5

کثیر انتخابی سوالات : Multiple choice questions

1۔ درجہ ذیل میں کونسا انتشار کی پیمائش نہیں ہے؟

1) وسعت 2) معیاری انحراف 3) حسابی اوسط 4) اختلاف

2۔ معطیات 8, ... ,8,8,8,8,8 کی وسعت ہے۔

(1) 0 (2) 1 (3) 8 (4) 3

3۔ معطیات کے تمام انحرافوں کا حاصل جمع اس کے اوسط سے ..... ہے۔

1) ہمیشہ مثبت 2) ہمیشہ منفی 3) صفر 4) غیر صفری سالم اعداد

4۔ 100 مشاہدات کا اوسط 40 ہے اور ان کا معیاری انحراف 3 ہے۔تمام انحرافوں کے مربعوں کا حاصل جمع ..... ہے۔

(1) 40000 (2) 160900 (3) 160000 (4) 30000

5۔ پہلے 20 طبعی اعداد کا اختلاف ہے۔

(1) 32.25 (2) 44.25 (3) 33.25 (4) 30

6۔ ایک معطیات کا معیاری انحراف 3 ہے۔اگر ہر قیمت سے 5 ضرب کیا جائے تو نیا اختلاف ..... ہے۔

(1) 3 (2) 15 (3) 5 (4) 225

7۔ اگر x، y، z کا معیاری انحراف P ہو تو $3x + 5$، $3y + 5$، $3z + 5$ کا معیاری انحراف ہے۔

(1) $3p+ 5$ (2) $3p$ (3) $p+5$ (4) $9p+ 15$

8۔ اگر ایک معطیات کا اوسط اور اختلاف کا ضرب 4 اور 87.5% ہو تو معیاری انحراف ..... ہے۔

(1) 3.5 (2) 3 (3) 4.5 (4) 2.5

9۔ ذیل میں کونسا غیر صحیح ہے؟

(1) $P(A) > 1$ (2) $0 \leq P(A) \leq 1$ (3) $P(\phi) = 0$ (4) $P(A) + P(\overline{A}) = 1$

10۔ ایک صراحی میں p سرخ، q نیلی اور r سبز گولیاں ہیں صراحی سے سریعی طور پر ایک سرخ گولی نکالنے کا امکان ہے۔

(1) $\frac{q}{p+q+r}$ (2) $\frac{p}{p+q+r}$ (3) $\frac{p+q}{p+q+r}$ (4) $\frac{p+r}{p+q+r}$

11۔ ایک کتاب سے سریعی طور پر ایک صفحہ انتخاب کیا جاتا ہے۔منتخب شدہ صفحہ پر موجود ہندسہ میں اکائی کے مقام پر 7 سے کم ہونے کا امکان کیا ہے؟

(1) $\frac{3}{10}$ (2) $\frac{7}{10}$ (3) $\frac{3}{9}$ (4) $\frac{7}{9}$

12۔ ایک شخص کو نوکری ملنے کا امکان $\frac{x}{3}$ ہے۔اگر نوکری نہ ملنے کا امکان $\frac{2}{3}$ ہو تو x کی قیمت ہے۔

(1) 2 (2) 1 (3) 3 (4) 1.5

10th maths 8. statistics 1
Wednesday, February 19, 2020 1:45:09 PM

13۔ کلام ایک قسمت کا کھیل (Lucky draw) میں حصّہ لینے جاتا ہے۔ اُس کھیل کے 135 ٹکٹ فروخت ہو چکے ہیں۔ اگر کلام کے جیت کا امکان $\frac{1}{9}$ ہو تو کلام نے کتنے ٹکٹ خریدے۔

(1) 5 (2) 10 (3) 15 (4) 20

14۔ اگر انگریزی کے حروف $\{a,b, \ldots ,z\}$ میں سے ایک حرف سریعی طور پر چنا جاتا ہے تو منتخب شدہ حرف x کے بعد کا حرف ہو تو امکان ..... ہے۔

(1) $\frac{12}{13}$ (2) $\frac{1}{13}$ (3) $\frac{23}{26}$ (4) $\frac{3}{26}$

15۔ ایک بٹوا (Purse) میں 2000 روپئے کے 10 نوٹ، 500 روپئے کے 15 نوٹ، 200 روپئے کے 25 نوٹ ہیں۔ ایک نوٹ سریعی طور پر نکالا جاتا ہے۔ اس بات کا امکان کیا ہوگا کہ نکالا جانے والا نوٹ 500 روپئے یا 200 روپئے کا نوٹ ہو؟

(1) $\frac{1}{5}$ (2) $\frac{3}{10}$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{4}{5}$

اکائی مشق - 8 Unit Exercise - 8



1۔ ذیل کی تعددی تقسیم کا اوسط 62.8 ہے۔ تمام تعددوں کا حاصل جمع 50 ہے نامعلوم تعددیں f_1 اور f_2 کو دریافت کیجئے۔

درجاتی وقفہ	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100	100-120
تعدد	5	f_1	10	f_2	7	8

2۔ ایک نقشہ میں کھینچے گئے دائرے کے قطر (ملی میٹر میں) ذیل میں دی گئی ہیں۔ معیاری انحراف معلوم کیجئے :

قطر	33-36	37-40	41-44	45-48	49-52
دائروں کی تعداد	15	17	21	22	25

3۔ ذیل میں تعددی تقسیم دی گئی ہے۔

x	k	$2\,k$	$3\,k$	$4\,k$	$5\,k$	$6\,k$
f	2	1	1	1	1	1

اِس جدول میں k ایک مثبت سالم عدد ہے۔ اس کا اختلاف 160 ہے۔ k کی قیمت معلوم کیجئے۔

4۔ بعض درجہ حرارت کے معطیات کا معیاری انحراف 5 ہے جس کو سینٹی گریڈ ($^{\circ}C$) میں دیا گیا ہے۔ اگر ان معطیات کو فارن ہائیٹ ($^{\circ}F$) میں تبدیل کئے جاتے ہیں تو اختلاف کیا ہوگا؟

5۔ اگر تقسیم کے لئے $\Sigma(x-5) = 3$ ، $\Sigma(x-5)^2 = 43$ اور مشاہدات کی کل تعداد 18 ہے تو اوسط اور معیاری انحراف دریافت کیجئے۔

6۔ دو شہروں کے مختلف مقامات پر مونگ پھلی کے پیکٹوں کی قیمتیں ذیل میں دی گئی ہیں۔ کونسے شہر میں قیمتیں زیادہ مستحکم ہیں؟

شہر A میں قیمتیں	20	22	19	23	16
شہر B میں قیمتیں	10	20	18	12	15

7۔ اگر معطیات کی وسعت اور وسعت کا ضریب بالترتیب 20 اور 0.2 ہو تو معطیات کی سب سے بڑی اور سب سے چھوٹی قیمتیں معلوم کیجئے۔

10th maths 8. statistics 1
Wednesday, February 19, 2020 1:45:10 PM

8۔ اگر دو پانسے لڑھکائے جاتے ہیں تو چہرے کے حاصل ضرب کی قیمت 6 یا چہرے کی قیمت کا فرق 5 ہونے کا امکان کیا ہے؟

9۔ دو بچوں والے ایک خاندان میں، امکان معلوم کیجئے کہ ایک خاندان میں ان میں کم از کم ایک لڑکی ہوں۔

10۔ ایک تھیلی میں 5 سفید اور چند سیاہ گیندیں ہیں۔ اگر اس تھیلی سے ایک سیاہ گیند کو نکالنے کا امکان دُگنا ہے ایک سفید گیند نکالنے کے امکان سے تو سیاہ گیندوں کی تعداد معلوم کیجئے۔

11۔ سالانہ امتحان میں ایک طالب علم انگریزی اور ٹمل میں پاس ہونے کا امکان 0.5 ہے۔ دونوں میں سے کسی ایک میں بھی پاس نہ ہونے کا امکان 0.1 ہے۔ اگر انگریزی امتحان میں پاس ہونے کا امکان 0.75 ہے۔ ٹمل امتحان میں پاس ہونے کا امکان کیا ہے؟

12۔ 52 تاش کے پتوں کی گڈّی سے پان کی ترتیب سے راجہ، رانی اور جیک کو نکال دیا جاتا ہے۔ باقی کے پتوں میں سے ایک پتہ کو انتخاب کرتے ہیں تو حاصل ہونے کا امکان معلوم کیجئے کہ وہ (i) ایک ڈائمنڈ (ii) ایک ران (iii) ایک پان

(iv) دل کا پتہ جو عدد 5 رکھتا ہے۔

Points to Remember — یاد رکھنے کے نکات

❖ وسعت $= L - S$ (L سب سے بڑی قیمت، S سب سے چھوٹی قیمت)

❖ اختلاف $\sigma^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}$; وسعت کا ضریب $= \dfrac{L-S}{L+S}$

❖ معیاری انحراف $\sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n}}$

❖ (غیر گروہی معطیات) معیاری انحراف

(i) بالراست طریقہ $\sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\dfrac{\Sigma x_i}{n}\right)^2}$ (ii) اوسط کا طریقہ $\sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma d_i^2}{n}}$

(iii) مفروضی اوسط کا طریقہ $\sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma d_i^2}{n} - \left(\dfrac{\Sigma d_i}{n}\right)^2}$

(iv) مرحلاتی انحراف کا طریقہ $\sigma = c \times \sqrt{\dfrac{\Sigma d_i^2}{n} - \left(\dfrac{\Sigma d_i}{n}\right)^2}$

❖ پہلے n طبعی اعداد کا معیاری انحراف $\sigma = \sqrt{\dfrac{n^2-1}{12}}$

❖ معیاری انحراف (گروہی معطیات)

(i) اوسط کا طریقہ $\sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma f_i d_i^2}{N}}$ (ii) مفروضی اوسط کا طریقہ $\sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma f_i d_i^2}{N} - \left(\dfrac{\Sigma f_i d_i}{N}\right)^2}$

(iii) مرحلاتی انحراف کا طریقہ $\sigma = C \times \sqrt{\dfrac{\Sigma f_i d_i^2}{N} - \left(\dfrac{\Sigma f_i d_i}{N}\right)^2}$

اختلاف کا ضریب $\text{C.V} = \dfrac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\%$

❖ اگر C.V کی قیمت کم ہے تو معطیات کے نظیری مشاہدات مستقل ہیں۔

❖ اگر C.V کی قیمت زیادہ تو معطیات کے نظیری مشاہدات غیر مستقل ہیں۔

10th maths 8. statistics 1
Wednesday, February 19, 2020 1:45:11 PM

❖ ایک سریعی تجربہ میں ہم مجموعہ کے تمام ممکن نتائج جانتے ہیں لیکن ٹھیک نتیجہ نہیں جانتے ہیں۔

❖ مجموعہ کے تمام ممکن نتائج کو نظیری عرصہ کہتے ہیں۔

❖ اگر $A \cap B = \phi$ ہوتو A، B کو باہم اخراج کرنے والے مواقع کہتے ہیں۔

❖ موقع E کا امکان $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$ ہے۔

یقینی موقع کا امکان 1 ہے اور غیر یقینی موقع کا امکان 0 ہے۔

(ii) $0 \leq P(E) \leq 1$; (iii) $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$

❖ اگر A اور B باہم اخراج کرنے والے مواقع ہوتو $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ کسی دو مواقع A, B کے لئے

(i) $P(A \cap \overline{B}) = P(\text{only } A) = P(A) - P(A \cap B)$

(ii) $P(\overline{A} \cap B) = P(\text{only } B) = P(B) - P(A \cap B)$ کسی تین مواقع C, B, A کے لئے

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$$

ICT CORNER — ICT کارنر

ICT 8.1

مرحلہ 1 : براؤزر کھولئے ذیل میں دئے گئے URL لنک کو لکھئے (یا) QR کوڈ کو اسکین کیجئے ۔ "Probability" نامی باب کھولئے گا۔ "Probability addition law" نامی ورک شیٹ کو انتخاب کریں۔

مرحلہ 2 : دئے گئے ورک شیٹ پر "New Problems" کو کلک کرکے تم سوال تبدیل کرسکتے ہو۔ Slider کو حرکت کرکے مرحلے دیکھ سکتے ہوں۔

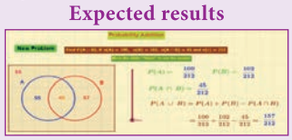
Step 1



Step 2



Expected results



ICT 8.2

مرحلہ 1 : براؤزر کھولئے ذیل میں دئے گئے URL لنک کو لکھئے (یا) QR کوڈ کو اسکین کیجئے ۔ "Probability" نامی باب کھولئے گا۔ "Addition Law Mutually Exclusive" نامی ورک شیٹ کو انتخاب کریں۔

مرحلہ 2 : دئے گئے ورک شیٹ پر "New Problems" کو کلک کرکے تم سوال تبدیل کرسکتے ہو۔ Check boxes پر کلک کرکے جواب دیکھیں

Step 1



Step 2



Expected results



You can repeat the same steps for another activities

https://www.geogebra.org/m/jfr2zzgy#chapter/359554

or Scan the QR Code.

10th maths 8. statistics 1
Wednesday, February 19, 2020 1:45:11 PM

ANSWERS جوابات

Exercise 1.1 مشق 1.1

1.(i) $A \times B = \{(2,1),(2,-4),(-2,1),(-2,-4),(3,1),(3,-4)\}$

$A \times A = \{(2,2),(2,-2),(2,3),(-2,2),(-2,-2),(-2,3),(3,2),(3,-2),(3,3)\}$

$B \times A = \{(1,2),(1,-2),(1,3),(-4,2),(-4,-2),(-4,3)\}$

(ii) $A \times B = \{(p,p)(p,q)(q,p)(q,q)\}$; $A \times A = \{(p,p),(p,q),(q,p),(q,q)\}$;

$B \times A = \{(p,p),(p,q),(q,p),(q,q)\}$

(iii) $A \times B = \{\ \}$; $A \times A = \{(m,m),(m,n),(n,m),(n,n)\}$; $B \times A = \{\ \}$

2. $A \times B = \{(1,2),(1,3),(1,5),(1,7),(2,2),(2,3),(2,5),(2,7),(3,2),(3,3),(3,5),(3,7)\}$

$B \times A = \{(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(5,1),(5,2),(5,3),(7,1),(7,2),(7,3)\}$

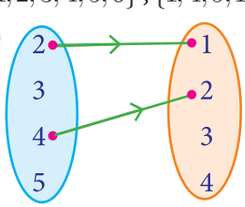
3. $A = \{3,4\}$ $B = \{-2,0,3\}$ 5. صحیح

Exercise 1.2 مشق 1.2

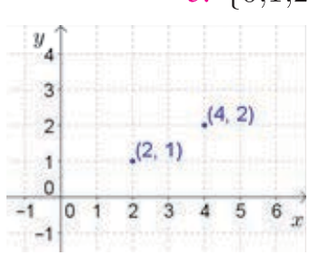
1.(i) تعلق نہیں ہے (ii) تعلق نہیں ہے (iii) تعلق ہے (iv) تعلق نہیں ہے

2. $\{1,2,3,4,5,6\}, \{1,4,9,16,25,36\}$ 3. $\{0,1,2,3,4,5\}, \{3,4,5,6,7,8\}$

4. (i) (a)

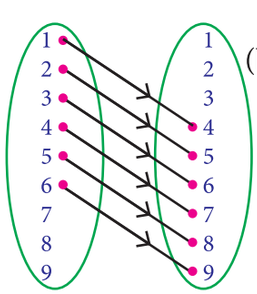


(b)

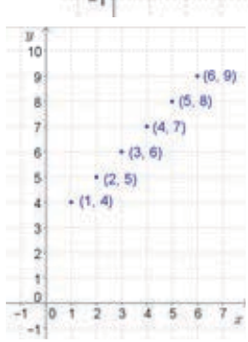


(c) $\{(2,1),(4,2)\}$

(ii) (a)

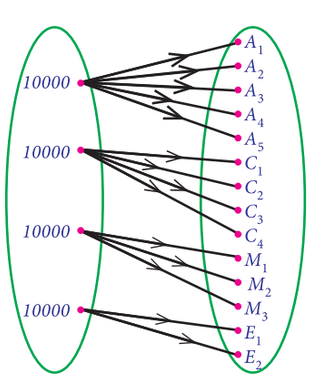


(b)



(c) $\{(1,4),(2,5),(3,6),(4,7),(5,8),(6,9)\}$

5. $\{(10000, A_1),(10000, A_2),(10000, A_3),(10000, A_4),$
$(10000, A_5),(25000, C_1),(25000, C_2),(25000, C_3),$
$(25000, C_4),(50000, M_1),(50000, M_2),(50000, M_3),$
$(100000, E_1),(100000, E_2)\}$



10th maths 8. statistics 1
Wednesday, February 19, 2020 1:45:12 PM

Exercise 1.3 مشق 1.3

1. $\{1,2,3,4,...\}$, $\{1,2,3,4\}$, $\{2,4,6,8,...\}$ ہاں 2. ہاں

3.(i) 12 (ii) $4a^2-10a+6$ (iii) 0 (iv) $x^2-7x+12$

4.(i) (a) 9 (b) 6 (c) 6 (d) 0

(ii) 9.5 (iii) (a) $\{x \mid 0 \le x \le 10, x \in R\}$ (b) $\{y \mid 0 \le y \le 9, y \circ R\}$

(iv) 5 5. 2 6.(i) -2 (ii) $\frac{3}{2}$ (iii) 3 (iv) $\frac{1}{2}$

7. $4x^3-96x^2+576x$ 8. 1 9. $500t$

10.(i) Yes (ii) 1,20 (iii) 68 inches (iv) 40.54 cm

Exercise 1.4 مشق 1.4

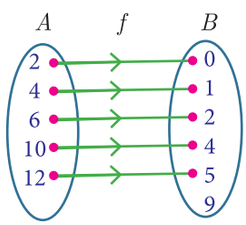
1.(i) تفاعل نہیں ہے (ii) تفاعل ہے (iii) تفاعل نہیں ہے (iv) تفاعل ہے

2.(i) $\{(2,0),(4,1),(6,2),(10,4),(12,5)\}$

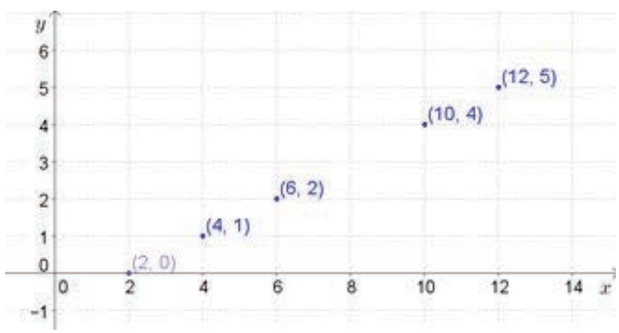
(ii)

x	2	4	6	10	12
$f(x)$	0	1	2	4	5

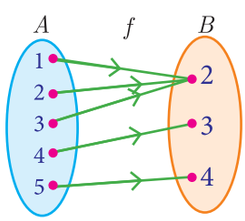
(iii)



(iv)



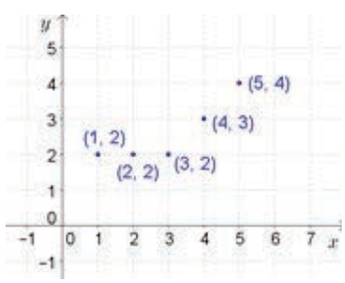
3.(i)



(ii)

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	2	2	2	3	4

(iii)



6.(i) $\{1,8,2764\}$ (ii) ایک۔ایک اوردروں تفاعل

7.(i) دوہرا تفاعل (ii) دوہرا تفاعل نہیں ہے 8. 1,1

9.(i) 5 (ii) 2 (iii) -2.5 (iv) 1

10.(i) 2 (ii) 10 (iii) 178 (iv) $\frac{-9}{17}$

11. ہاں 12.(i) $32°F$ (ii) $824\ °F$ (iii) $24°F$

(iv) $100°C$ (v) $-40°$

Exercise 1.5 مشق 1.5

1.(i) x^2-6, $(x-6)^2$ مساوی نہیں ہے (ii) $\frac{2}{2x^2-1}$, $\frac{8}{x^2}-1$ مساوی نہیں ہے

(iii) $\frac{9-x}{3}$, $\frac{3-x}{3}$ مساوی نہیں ہے (iv) $x-1$, $x-1$ مساوی ہے

(v) $4x^2+8x+3$, $4x^2$ مساوی نہیں ہے 2.(i) -5 (ii) $\frac{-5}{3}$ 4.(i) $a=\pm 2$

5. $\{y \mid y=2x^2+1, x \in \mathbb{N}\}$; $\{y \mid y=(2x+1)^2, x \in \mathbb{N}\}$ 6.(i) x^4-2x^2 (ii) $\left[x^4-2x^2\right]^2-1$

7. f ایک۔ایک ہے۔ g ایک۔ایک تفاعل ہے۔ , $f \circ g$ ایک۔ایک نہیں ہے 9. $-4x-1$

10th maths 8. statistics 1
Wednesday, February 19, 2020 1:45:12 PM

Exercise 1.6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
(3)	(3)	(1)	(2)	(3)	(4)	(4)	(1)	(3)	(3)	(1)	(4)	(3)	(2)	(4)

Unit exercise

1. 1,2 اور $-5,1$ 2. $\{-1,0,1\}$, $\{(-1,-1), (-1,1),(0,-1),(0,0),(1,-1),(1,0),(1,1)\}$

3.(i) 4 (ii) $\sqrt{2}$ (iii) $\sqrt{a}$

4. $\{(9,3),(10,5),(11,11),(12,3),(13,13),(14,7),(15,5),(16,2),(17,17)\}$, $\{2,3,5,7,11,13,17\}$

5. $-1 \leq x \leq 1$ 9.(i) $\frac{-5}{6}$ (ii) $2(x+1)$ 10.(i) $R-\{9\}$

(ii) R (iii) $[2,\infty)$ (iv) R

Exercise 2.1

1. 2, 5, 8, 11, 2. 25, 7 6.(i) 4 (ii) 51

(iii) 144 (iv) 6 7. 174 8. $2,-1$ 9. 6

Exercise 2.2

1. جفت عدد 2 کوئی قیمت نہیں 3. 10101 4. 9, 3

5. 2,3,5,7 اور 3,4,2,1 6. 2040, 34 7. 999720 8. 3647 9. 2520

Exercise 2.3

1.(i) 7 (ii) 5 (iii) 2 (iv) 7 (v) 2

2. 3 3. 2,8,14, 4. 8, 19, 30, 5. 11 a.m

6. 8 p.m 7. جمعہ 9. 2 10. 6 am, پیر

Exercise 2.4

1.(i) 216,648,1944 (ii) $-7,-11,-15$ (iii) $\frac{4}{25},\frac{5}{36},\frac{6}{49}$ 2.(i) $-1,6,25,62$

(ii) $2,-6,12,-20$ (iii) -4 , 2, 12, 26 3.(i) n^2+1 (ii) $\frac{n-1}{n}$

(iii) $5n-2$ 4.(i) $\frac{15}{4}$, $\frac{13}{3}$ (ii) -12, -117 5. $\frac{63}{11},\frac{225}{31}$ 6. 1,1,3,7,17,41

Exercise 2.5

1.(i) A.P (ii) ایک AP نہیں (iii) A.P (iv) A.P

(v) ایک AP نہیں 2.(i) 5, 11, 17, (ii) 7, 2, -3, (iii) $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{4}$,

3.(i) -1 , 2 (ii) $-3,-7$ 4. -83 5. 15

6. 93, 99 8. 4 9. 3,17,31 10. 78

11. 2,9,16 12. 5:7 13. $-3^\circ C, 0^\circ C, 3^\circ C, 6^\circ C, 9^\circ C$ 14. سال 31

Exercise 2.6

1.(i) 3240 (ii) 999 (iii) 721 2. 20 3. 1540

5. 612.5 6.50625 7. 168448 8.(i) ₹ 45750 (ii) ₹ 5750 9. مہینے 20

10.(i) 42 (ii) 2130 12. $\frac{6}{a+b}(24a-13b)$

Exercise 2.7

1.(i) G.P (ii) ایک G.P نہیں (iii) G.P (iv) G.P (v) G.P

(vi) ایک G.P نہیں (vii) G.P 2.(i) 6,18,54 (ii) $\sqrt{2},2,2\sqrt{2}$

10th maths 8. statistics 1
Wednesday, February 19, 2020 1:45:13 PM

(iii) 1000,400,160 3. 1 4. -18 5.(i) 12 (ii) 7 6. $5\times(3^{11})$

7. 3072 9. $\frac{9}{2}, 3, 2$ یا $2, 3, \frac{9}{2}$ 10. ₹ 76577 11. ₹ 23820, ₹ 24040

Exercise 2.8

1.(i) $\frac{25}{8}\left[1-\left(-\frac{3}{5}\right)^n\right]$ (ii) $\frac{1024}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$ 2. 1820 3. 12

4.(i) $\frac{27}{2}$ (ii) 63 5. $\frac{1}{4}$ 6.(i) $\frac{4}{9}n-\frac{4\left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right]}{81}$

(ii) $\frac{10(10^n-1)}{27}-\frac{n}{3}$ 7. 3069 8. ₹ 174760 9. $\frac{41}{333}$

Exercise 2.9

1.(i) 1830 (ii) 1584 (iii) 3003 (iv) 1240 (v) 3256

(vi) 42075 (vii) 1296 2. 105625 3. 210

4. 15 5. 9 6. 4615 cm^2 7.(i) $4n^3+3n^2$ (ii) 2240

Exercise 2.10

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
(3)	(1)	(2)	(3)	(4)	(1)	(4)	(3)	(1)	(3)	(3)	(4)	(2)	(2)	(3)

Unit exercise اکائی مشق

2.(i) لیٹر 35 (ii) 5 (iii) 3 3. 1 6. -78

8. ₹1200 9. $\sqrt{2}, \sqrt{6}, 3\sqrt{2},$ 10. ₹27636

Exercise 3.1

1.(i) $2, -1, 4$ (ii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ (iii) 35, 30, 25

2.(i) لامحدود بہت سارے حل (ii) حل نہیں (iii) ایک، الگ حل

3. 24 سال، 51 سال، 84 سال 4. 137 5. 7, 3, 2

Exercise 3.2

1.(i) x^2+2x-3 (ii) x^2+1 (iii) $x(x^2+4x+4)$ (iv) $3(x^2+1)$

2.(i) $8x^3y^2$ (ii) $-36a^3b^2c$ (iii) $-48m^2n^2$ (iv) $(p-1)(p-2)(p+2)$

(v) $4(x+3)(2x+1)\,(x-3\,)$ (vi) $2^3x^2(2x-3y)^3(4x^2+6xy+9y^2)$

Exercise 3.3

1.(i) $105x^2y^2, 7xy$ (ii) $(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1), (x+1\,)$

(iii) $xy(x+y), x(x+y)$ 2.(i) $(a+6\,)\,(a-2\,)\,(a-3\,)$ (ii) $x(x-3a)^2(x^2+3ax+9a^2)$

3.(i) $4x^2(x-1)$ (ii) x^2-xy+y^2 4. (i) $(a+2)(a-7)$ (ii) x^2+xy+y^2

Exercise 3.4

1.(i) $\frac{x-1}{x}$ (ii) $\frac{x-9}{x-2}$ (iii) $\frac{9}{x-1}$ (iv) $\frac{p+5}{2p(p-4)}$

2.(i) $-5, 5$ **(ii)** $2, 3$ **(iii)** 1 **(iv)** $0, -3, 2$

Exercise 3.5

10th maths 8. statistics 1
Wednesday, February 19, 2020 1:45:13 PM

1.(i) $\frac{3x^3z}{5y^3}$ (ii) $p+4$ (iii) $\frac{3t^2}{4}$ 2.(i) $\frac{3x-4y}{2x-5}$ (ii) $\frac{x^2+xy+y^2}{3(x+2y)}$

3.(i) -5 (ii) $\frac{b-4}{b+2}$ (iii) $\frac{3y}{x-3}$ (iv) $\frac{4(2t-1)}{3}$ 4. $\frac{4}{9}$ 5. x^2+4x+4

Exercise 3.6

1.(i) $\frac{2x}{x-2}$ (ii) $\frac{2x^2+2x-7}{(x+3)(x-2)}$ (iii) x^2+xy+y^2 2.(i) $\frac{2(x-2)}{x-4}$ (ii) $\frac{1-x}{1+x}$

3. $\frac{2x^3+1}{(x^2+2)^2}$ 4. $\frac{(x+1)}{x^2-2x+4}$ 5. $\frac{(4x^2-1)}{2(4x^2+1)}$ 7. 2 گھنٹے 24 منٹ 8. 30 kg, 20 kg

Exercise 3.7

1.(i) $2\left|\frac{y^4z^6}{x^2}\right|$ (ii) $4\left|\frac{\sqrt{7}x+\sqrt{2}}{4x-1}\right|$ (iii) $\frac{11}{9}\left|\frac{(a+b)^4(x+y)^4}{(a-b)^6}\right|$ 2.(i) $|2x+5|$

(ii) $|3x-4y+5z|$ (iii) $|(x-2)(7x+1)(4x-1)|$ (iv) $\frac{1}{6}|(4x+3)(3x+2)(x+2)|$

Exercise 3.8

1.(i) $|x^2-6x+3|$ **(ii)** $|2x^2-7x-3|$ **(iii)** $|4x^2+1|$ **(iv)** $|11x^2-9x-12|$

2. (i) 49, -42 (ii) 144, 264 4.(i) 24 , 9 (ii) 24, -32

Exercise 3.9

1.(i) $x^2+9x+20=0$ (ii) $3x^2-5x+12=0$ (iii) $2x^2+3x-2=0$

(iv) $x^2+(2-a)x+(a+5)^2=0$ 2.(i) $-3, -28$ (ii) $-3, 0$ (iii) $-\frac{1}{3}, -\frac{10}{3}$ (iv) $\frac{1}{3}, \frac{-4}{3}$

Exercise 3.10

1.(i) $-\frac{1}{4}, 2$ (ii) $\frac{-6}{7}$ (iii) $-2, 9$ (iv) $-\sqrt{2}, \frac{-5}{\sqrt{2}}$ (v) $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ 2. 6

Exercise 3.11

1.(i) $\frac{2}{3}, \frac{2}{3}$ (ii) $-1, 3$ 2.(i) $2, \frac{1}{2}$ (ii) $\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

(iii) $-1, \frac{23}{3}$ (iv) $\frac{a+b}{6}, \frac{a-b}{6}$ 3. سکنڈ 3.75

Exercise 3.12

1. **5, $-\frac{1}{5}$** **2.** **1.5 m** **3.** **45 km/hr** **4.** 20 سال , 10 سال

5. 12 m, 16 m ہاں 6. 72 7. 28 m, 42 m 8. 2 m 9. 10.7 cm

Exercise 3.13

1.(i) حقیقی اور غیر مساوی (ii) حقیقی اور غیر مساوی (iii) حقیقی نہیں

(iv) حقیقی اور مساوی (v) حقیقی اور مساوی 2.(i) 2, 3 (ii) 1, $\frac{1}{9}$

24 , 9

Exercise 3.14

1.(i) $\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{3\alpha\beta}$ (ii) $\frac{\alpha+\beta}{(\alpha\beta)^2}$ (iii) $9\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+1$

10th maths 8. statistics 1
Wednesday, February 19, 2020 1:45:14 PM

(iv) $\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+3(\alpha+\beta}{\alpha\beta}$ 2.(i) $\dfrac{7}{5}$ (ii) $\dfrac{29}{10}$ (iii) $\dfrac{-63}{8}$

3.(i) $x^2-44x+16=0$ (ii) $x^2-3x-1=0$ (iii) $x^2-24x-64=0$

4. -15, 15 5. -24 ,24 6. -36

Exercise 3.15

1.(i) حقیقی اور غیر مساوی جذر (ii) حقیقی اور مساوی جذر (iii) حقیقی جذر نہیں

(iv) حقیقی اور غیر مساوی جذر (v) حقیقی اور مساوی جذر (vi) حقیقی اور غیر مساوی جذر

2. 3, 4 3. حقیقی جذر نہیں 4. -1 5. -4 , 1 6. -2 ,7

7. 1, 3 8. 2, 3

Exercise 3.16

1.(i) 16 (ii) 4×4 (iii) $\sqrt{7}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 5, 0, -11 , 1

2. 1×18 , 2×9 , 3×6 , 6×3 , 9×2 , 18×1 اور 1×6 , 2×3 , 3×2 , 6×1

3.(i) $\begin{pmatrix}1&3&5\\0&2&4\\1&1&3\end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix}\frac{8}{3}&9&\frac{64}{3}\\9&\frac{64}{3}&\frac{125}{3}\\\frac{64}{3}&\frac{125}{3}&72\end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix}5&1&3\\4&-7&8\\3&9&2\end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix}-\sqrt{7}&\sqrt{5}&-\sqrt{3}\\3&-2&5\end{pmatrix}$ 7.(i) 3,12,3 (ii) 4,2,0 یا 2,4,0 (iii) 2,4,3

Exercise 3.17

3. $\begin{pmatrix}5&0\\\frac{3}{2}&\frac{9}{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&0\\\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ 4.(i) $\begin{pmatrix}7&-17&-37\\-39&-11&-26\end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix}-63&-15&-45\\15&-27&-60\end{pmatrix}$

5.(i) 4, -10, 12 (ii) -10, 14, 10 6. 4,6 7. 4 8. -1, 5 اور -2, 4

Exercise 3.18

1. 3×3 , 4×2 , 4×2 , 4×1 , 1×3 2. $P\times R$ غیر واضح 3. 7,10

4. $\begin{pmatrix}12&19\\10&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-10&-4\\24&25\end{pmatrix}$, $AB\neq BA$

Exercise 3.19

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
(4)	(1)	(2)	(1)	(2)	(3)	(4)	(2)	(3)	(3)	(2)	(1)	(2)	(3)	(2)	(2)	(4)	(2)	(3)	(1)

Unit exercise-3

1. 6,2,1 2. 42,78,30 3. 153 4. $(ky+x)(k^2x^2-y^2)$ 5. x^2+2x+1 6. (i) x^a-2

(ii) $-x+\dfrac{5}{2}$ 7. $\dfrac{(p+q+r)^2}{2qr}$ 8. 11 hrs, 22 hrs, 33 hrs 9. $\left|17x^2-18x+19\right|$ 10. 3,63

11. 14 km/hr 12. 120 m,40 m 13. 14 minutes 14. 25 15.(i) $x^2-6x+11=0$

(ii) $3x^2-2x+1=0$ 16. $3,\dfrac{9}{4}$ 17.(i) $\begin{pmatrix}750&1500&2250\\3750&250&750\end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix}8000&16000&24000\\40000&24000&8000\end{pmatrix}$

10th maths 8. statistics 1
Wednesday, February 19, 2020 1:45:14 PM

18. $\sin\theta$ 19. 8, 4 20. $\begin{pmatrix} 122 & 71 \\ -58 & -34 \end{pmatrix}$

Exercise 4.1

1.(i) متشابہ نہیں (ii) متشابہ ہے ,2.5 2. 3.3 m 3. 42 m

5. $\frac{15}{13}, \frac{36}{13}$ 6. 5.6 cm, 3.25 cm 8. 2.8 cm 9. 2 m

Exercise 4.2

1.(i) 6.43 cm (ii) 1 2. 60 cm 5. 4 cm, 4 cm
2.5 cm, 3.5 cm 9.(i) ناصف نہیں (ii) ناصف ہے 13. 2.1 cm

Exercise 4.3

1. 30 m 2. 1 میل، 3. 21.74 m 4. 12 cm, 5 cm
5. 10 m, 24 m, 26 m 6. 0.8 m

Exercise 4.4

1. 7 cm 2. 2 cm 3. 7 cm, 5 cm, 3 cm 4. $30°$ 5. $130°$
6. $\frac{20}{3}$ cm 7. 10 cm 8. 4.8 cm 10. 2 cm 13. 8.7 cm 14. 10.3 cm **15.** 4 cm **16.** 6.3 cm

Exercise 4.5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
(3)	(2)	(4)	(1)	(4)	(1)	(2)	(3)	(1)	(4)	(2)	(2)	(2)	(4)	(1)

Unit exercise

2. $\frac{12}{5}$ cm, $\frac{10}{3}$ cm 5. $20\sqrt{13}$ km 7. 10 m 8. سایہ $= \frac{4}{11} \times$ (فاصلہ) 10. 14 اکائیاں

Exercise 5.1

1.(i) 24 sq. units (ii) 11.5 sq. units 2.(i) ہم خط (ii) ہم خط

3.(i) 44 (ii) 13 4.(i) 0 (ii) $\frac{1}{2}$ or -1 5.(i) 35 sq. units (ii) 34 sq. units
6. -5 7. $2, -1$ 8. 24 sq. units, رقبہ $(\Delta ABC) = 4 \times$ رقبہ $\Delta PQR)$ 9. 122 sq.units
10. 10 cans 11.(i) 3.75 sq. units (ii) 3 sq. units (iii) 13.88 sq. units

Exercise 5.2

1.(i) غیر واضح (ii) 0 2.(i) $0°$ (ii) $45°$ 3.(i) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (ii) $-\cot\theta$

4. 3 6. 7 7. $\frac{17}{2}$ 8. 4 9.(i) ہاں (ii) ہاں 11. 5, 2 14. $\left(1, \frac{-3}{2}\right)$ یا $\left(3, \frac{-1}{2}\right)$

Exercise 5.3

1.(i) $2y + 3 = 0$ (ii) $2x - 5 = 0$ 2. $1, 45°, \frac{5}{2}$

3. $x - \sqrt{3y} - 3\sqrt{3} = 0$ 4. $\frac{\sqrt{3}+3}{2}, \frac{3+3\sqrt{3}}{-2}$ 5. -5 6. $x - y - 16 = 0$
7.(i) $16x - 15y - 22 = 0$ (ii) $4x - 9y + 19 = 0$ 8. $15x - 11y + 46 = 0$
9. $x + 4y - 14 = 0$, $3x + 5y - 28$ 10. $5x + 4y - 3 = 0$
11. (i) 1 (ii) سکنڈ 7.5 (iii) سکنڈ 10
12.(i) $3x - 2y - 12 = 0$ (ii) $3x - 20y + 15 = 0$ 13.(i) $2, -3$
(ii) $-3, -4$ 14.(i) $5x + 2y + 3 = 0$ (ii) $x + y + 4 = 0$

10th maths 8. statistics 1
Wednesday, February 19, 2020 1:45:15 PM

Exercise 5.4

1.(i) 0 (ii) غیر واضح 2.(i) 0.7 (ii) 0

3.(i) متوازی (ii) عمودی 4. 4 5. $3x + 4y + 7 = 0$

6. $2x + 5y - 2 = 0$ 7. $2x + 5y + 6 = 0$, $5x + y - 48 = 0$ 8. $5x - 3y - 8 = 0$

9. $13x + 5y - 18 = 0$ 10. $49x + 28y - 156 = 0$ 11. $31x + 15y + 30 = 0$

12. $4x + 13y - 9 = 0$

Exercise 5.5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
(2)	(1)	(2)	(3)	(3)	(4)	(2)	(2)	(1)	(3)	(3)	(1)	(2)	(2)	(2)

Unit exercise

1. معین 2. $\left(\frac{7}{2}, \frac{13}{2}\right)$ 3. 0 sq.units 4. -5 6. $2x - 3y - 6 = 0,\ 3x - 2y + 6 = 0$

7. 1340 litres 8. $(-1, -4)$ 9. $13x + 13y - 6 = 0$ 10. $119x + 102y - 115 = 0$

Exercise 6.2

1. $30°$ 2. 24 m 3. 3.66 m 4. 1.5 m 5.(i) 7 m (ii) 16.39 m

6. 10 m

Exercise 6.3

1. 150 m 2. 50 m 3. 32.93 m 4. 2078.4 m 6. 30 feet / m

Exercise 6.4

1. 35.52 m 2. 69.28 m, 160 m 4. 150 m, yes

5.(i) 264 m (ii) 198 m (iii) 114.31 m 6.(i) 2.91 km (ii) 6.93 km

Exercise 6.5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
(2)	(4)	(2)	(1)	(2)	(2)	(1)	(3)	(2)	(4)	(2)	(2)	(4)	(2)	(1)

Unit exercise

5. 29.28 m/s 6. 1.97 seconds (approx) 7.(i) 24.58 km(approx)

(ii) 17.21 km (approx) (iii) 21.41 km (approx) (iv) 23.78 km (approx)

8. 200 m 9. 39.19 m

Exercise 7.1

1. 25 cm, 35 cm 2. 7 cm, 35 cm 3. 2992 sq.cm

4. جب PQ پر گھمایا جاتا ہے تو مخروط کا CSA بڑا ہے۔ 5. 18.25 cm

6. ٹوپیاں 28 7. $\sqrt{5} : 9$ 8. 56.25% 9. ₹ 302.72 10. ₹ 1357.72

Exercise 7.2

1. 4.67 m 2. 1 cm 3. 652190 cm^3 4. 63 minutes (approx)

5. 100.58 6. 5:7 7. 64:343 9. 4186.29 cm^3 10. ₹ 418.36

Exercise 7.3

1. 1642.67 cm^3 2. 66 cm^3 3. 2.46 cm^3 4. 905.14 cm^3

5. 77.78 $m\,m^3$ 6. 332.5 cm^2 7.(i) $4\pi r^2$ sq. units

(ii) $4\pi r^2$ sq. units (iii) 1:1

100 95 75 25 5 0

10th maths 8. statistics 1
Wednesday, February 19, 2020 1:45:15 PM

Exercise 7.4

1. 36 cm 2. 2 hrs 3. $\frac{h}{3x^2}$ 4. 6 cm
5. 1812000 cm^3 / 1812 *Litres* 6. 1.33 cm 7. 1 cm 8. 100%

Exercise 7.5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
(4)	(1)	(1)	(2)	(3)	(2)	(2)	(3)	(3)	(1)	(4)	(1)	(1)	(2)	(4)

Unit exercise

1. الفاظ 48000 2. منٹ (تقریباً) 27 3. $\frac{1}{3}\pi r^3$ cu.units 4. 782.57 sq.cm
5. سکّے 450 6. 4.8 cm 7. ₹ 6800 8. 2 cm 9. 17 cm 10. 2794.18 cm^3

Exercise 8.1

1.(i) 62; 0.33 (ii) 47.8; 0.64 2. 50.2 3. 250 4. 2.34
5. 222.22, 14.91 6. 6.9 7. 6.05 8. 4.5 9. 1.2 ,1.44 10. 7.76 11. 14.6
12. 6 13. 1.24 14. 60.5, 14.61 15. 6 and 8

Exercise 8.2

1. 52% 2. 4.69 3. 7.2 4. 180.28% 5. 14.4%
6. 10.07% 7. کلثوم 8. سائنس، سماجی سائنس

Exercise 8.3

1. $\{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$
2. $\{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\ (3,1),(3,2),(3,4),(3,5),(3,6),$
$(4,1),(4,2),(4,3),(4,5),(4,6),\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5)\}$

3. (i) $\frac{15}{32}$ (ii) 340 4. $\frac{3}{8}$ 5. (i) $\frac{9}{1000}$ (ii) $\frac{8}{999}$ 6. (i) $\frac{1}{4}$ (ii) $x = 4$
7.(i) $\frac{1}{6}$ (ii) $\frac{1}{6}$ (iii) $\frac{5}{12}$ (iv) 0 8. (i) $\frac{1}{8}$ (ii) $\frac{7}{8}$ (iii) $\frac{1}{2}$ (iv) $\frac{7}{8}$
9.(i) $\frac{3}{13}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{10}{13}$ (iv) $\frac{6}{13}$
10. 12 11. $\frac{157}{600}$ 12. (i) $\frac{1}{6}$ (ii) $\frac{5}{6}$ (iii) $\frac{5}{18}$
13. (i) $\frac{1}{8}$ (ii) $\frac{3}{4}$ (iii) $\frac{1}{8}$

Exercise 8.4

1. $\frac{11}{15}$ 2. (i) 0.58 (ii) 0.52 (iii) 0.74 3. 0.1 4. 1.2 5. 0.2
6. $\frac{5}{9}$ 7. $\frac{13}{18}$ 8. $\frac{7}{8}$ 9. $\frac{73}{280}$ 10. $\frac{17}{40}$ 11. 1 12. $\frac{11}{48}, \frac{11}{24}, \frac{11}{16}$ 13. $\frac{29}{35}$

Exercise 8.5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
(C)	(A)	(C)	(B)	(C)	(D)	(B)	(A)	(A)	(B)	(B)	(B)	(C)	(C)	(D)

Unit exercise-8

1. 8,12 2. 5.55 3. 7 4. 81 5. 5.17, 1.53 6. City A 7. 60, 40
8. $\frac{1}{9}$ 9. $\frac{3}{4}$ 10. 10 11. $\frac{13}{20}$

10th maths 8. statistics 1
Wednesday, February 19, 2020 1:45:15 PM

MATHEMATICAL TERMS حسابی اصطلاحات

Algorithm	الگارتم (ضابطہ)	Decompose	بوسیدہ
Alternate segment	متبادل قطعہ	Diagonal matrix	وتری میٹرکس
Altitude	ارتفاع	Dimensions	ابعاد
Angle bisector	زاویائی ناصف	Discriminant	امتیازی خصوصیت
Angle of depression	زاویہ نشیب	Distributive property	تقسیمی خصوصیت
Angle of elevation	زاویہ فراز	Domain	علاقہ
Arithmetic progression	حسابی سلسلہ	Equal matrices	مساوی میٹرکس
Arrow diagram	تیر کا خاکہ	Equiangular	مساوی الزاویہ
Axis	محور	Event	موقع
Axis of symmetry	تشاکل کا محور	Frustum	مخروط کا مقطوعہ
Basic proportionality	بنیادی تناسبیت	Functions	تفاعلات
Bijection	دوہرا	Geometric progression	ہندسی سلسلہ
Cartesian product	کارتیسی حاصل ضرب	Geo-positioning system	جغرافیائی مقامی نظام
Circular motion	دائری حرکت	Graphical form	ترسیمی شکل
Clinometer	زاویہ پیما	Great circle	عظیم دائرہ
Co-domain	معاون علاقہ	Height and distance	اونچائی اور فاصلہ
Coefficient of range	وسعت کا ضریب	Hemisphere	نصف کرہ
Coefficient of variation	اختلاف کا ضریب	Hollow	کھوکھلا
Collinearity	ہم خطیت	Horizontal level	افقی سطح
Column matrix	قطاری میٹرکس	Horizontal line test	افقی خط کی جانچ
Combined solids	مربوط ٹھوس	Hyperbola	مکافی
Common difference	عام فرق	Identity function	اکائی تفاعل
Common ratio	عام نسبت	Image	خیال
Completing square method	کامل مربع کا طریقہ	Inclination	جھکاؤ
Composition of functions	تفاعل کی ترکیب	Inconsistent	غیر موافق
Concurrency theorem	نقطہ تراکز کا مسئلہ	Injection	دروں داخلہ
Concurrent	متراکز	Intercept	مقطوعہ
Concyclic	ہم دائرہ	Into function	دروں تفاعل
Congruence	متماثل	Kadhams (unit of distance)	فاصلہ کی اکائی (قدم)
Consistent	موافق	Latitude	عرض البلد
Constant function	مستقل تفاعل	Lemma	تحتی مسئلہ
Coordinate axes	محوروں کا محدد	Line of sight	خط بصارت
Counter-clock wise	غیر ساعت وار	Linear equations	خطی مساوات
Curved surface area	منحنی سطحی رقبہ	Linear function	خطی تفاعل

10th maths 8. statistics 1
Wednesday, February 19, 2020 1:45:16 PM

Longitude	طول البلد
Magnitude	قدر
Many-one function	کئی-ایک تفاعل
Matrix	میٹرکس
Measures of central tendency	مرکزی رجحان کی پیمائش
Measures of dispersion	انتشار کی پیمائش
Median	وسطانیہ
Modular	ماڈولر
Mutually exclusive events	باہم اخراج کرنے والے مواقع
Negative of a matrix	میٹرکس کا منفی
Non-vertical lines	غیر عمودی خطوط
Non-zero integer	غیر صفری سالم اعداد
Non-zero real number	غیر صفری حقیقی اعداد
Null matrix / Zero matrix	صفر میٹرکس / معدوم میٹرکس
Null relation	معدوم تعلق
Oblique cylinder	ٹیڑھا استوانہ
Oblique frustum	ٹیڑھا مقطوعہ
One-one function	ایک-ایک تفاعل
Onto function	بروں تفاعل
Ordered pair	ترتیب وار جوڑی
Outcomes	نتیجہ / حاصل
Parabola	ہذلولی
Parallel planes	متوازی سطحیں
Perpendicular bisector	عمودی ناصف
Point of contact	نقطہ تماس
Point of intersection	نقطہ تقاطع
Pre-image	پیش خیال
Quadratic equation	دو درجی مساوات
Quadratic function	دو درجی تفاعل
Quadratic polynomials	دو درجی کثیر رقمیات
Random experiment	سریعی تجربہ
Range	وسعت
Rational expression	ناطق جملہ
Real valued function	حقیقی قیمت والا تفاعل
Reciprocal function	مقلوب تفاعل

Relations	تعلقات
Revolutions	محوری گردش
Right circular cone	قائم مدور مخروط
Right circular cylinder	قائم مدور استوانہ
Row matrix	صف میٹرکس
Sample point	نظیری نقطہ
Sample space	نظیری عرصہ
Scalar matrix	اسکیلر میٹرکس
Secant	دائرے کا قاطع (قطعہ)
Sequence	تواتر
Series	سلسلہ
Similar triangle	مشابہ مثلث
Simultaneous linear equations	ہم زاد خطی مساوات
Slant height	ترچھی بلندی
Slope or gradient	میلان یا ڈھلوان
Solid	ٹھوس
Square matrix	مربع میٹرکس
Standard deviation	معیاری انحراف
Surface area	سطحی رقبہ
Table form	جدولی شکل
Tangents	مماس
Theodolite	زاویہ پیما
Tossed	سکہ اچھالنا
Total surface area	کل سطحی رقبہ
Transpose matrix	متبدل میٹرکس
Trial	آزمائش
Triangular matrix	مثلثی میٹرکس
Unbiased coins	غیر جانب دار سکے
Undefined	غیر واضح
Unique solution	ایک الگ حل
Uniqueness	عجیب (نادر پن)
Unit matrix / Identity matrix	اکائی میٹرکس
Variance	انحراف
Vertical angle	عمودی زاویہ
Vertical line test	عمودی خط کی جانچ
Zeros of polynomials	کثیر رقمیات کی صفر

10th maths 8. statistics 1
Wednesday, February 19, 2020 1:45:16 PM

Secondary Mathematics - Class 10
Translators and Reviewer (Urdu Medium)

Executive

Dr. P. Kumar
Joint Director,
SCERT, Chennai.

Reviewer

S.Abdul Rahman
B.T. Asst. (Retired)
Islamiah Boys' HSS,
Vaniyambadi-635751, Vellore District.

Translators

Mohamed Jaweed Akram,
B.T. Asst. Islamiah Boys' HSS,
Vaniyambadi-635751, Vellore District.

H. Hafeezur Rahman
B.T. Asst., Municipal Muslim Boys Urdu High School,
,Vaniyambadi, Vellore District.

Mohamed. Nasir M.
B.T. Asst. Mazharul Uloom HSS,
Ambur, Vellore District.

Sajjad Ahmed Y. K.
B.T. Asst. Muslim HSS.,
Chennai-600005.

Co-ordinator :
A. Palanivelraj
Asst. Professor,
SCERT, Chennai.

Art and Design Team
Layout Artist
Joy Graphics,
Chintadripet, Chennai - 02

Inhouse-QC
Jerald wilson, Rajesh Thangappan
Mathan raj, Adison Raj, Arun kamaraj

Cover Design
Kathir Arumugam

Coordination
Ramesh Munisamy

Urdu DTP and Layout
Mohamed Nusrath Sayeed
TAJ Printers, Vaniyambadi.

This book has been printed on 80 GSM
Elegant Maplitho paper
Printed by offset at :

100
95
75
25
5
0

10th maths 8. statistics 1
Wednesday, February 19, 2020 1:45:17 PM

Note

10th maths 8. statistics 1
Wednesday, February 19, 2020 1:45:18 PM

Note

10th maths 8. statistics 1
Wednesday, February 19, 2020 1:45:18 PM