GOVERNMENT OF TAMILNADU

# STANDARD TEN

# പത്താം തരം

# MATHEMATICS

# ഗണിതം

## MALAYALAM MEDIUM

Department of School Education

**Untouchability is Inhuman and a Crime**

Preliminary Malayalam_X_EM.indd 1 10/02/2023 11:36:51

**Government of Tamil Nadu**

First Edition - 2019

Revised Edition- 2020, 2021, 2022, 2023

Reprint - 2024

(Published under new syllabus)

**Content Creation**

State Council of Educational
Research and Training

© SCERT 2019

**Printing & Publishing**

Tamil NaduTextbook and Educational
Services Corporation

www.textbooksonline.tn.nic.in



Preliminary Malayalam_X_EM.indd 2 10/02/2023 11:36:51

# ചിഹ്നങ്ങൾ

| | |
|---|---|
| $=$ | സമം, തുല്യമാകുന്നു |
| $\neq$ | സമമല്ല |
| $<$ | ചെറുതാകുന്നു |
| $\leq$ | ചെറുത് അല്ലെങ്കിൽ സമയം |
| $>$ | വലുതാകുന്നു |
| $\geq$ | വലുത് അല്ലെങ്കിൽ സമം |
| $\approx$ | സമാനത |
| $\cup$ | യോഗം |
| $\cap$ | സംഗമം |
| $\mathbb{U}$ | സമസ്തഗണം |
| $\in$ | അംഗമാണ് |
| $\notin$ | അംഗമല്ല |
| $\subset$ | സംഗതോപഗണം |
| $\subseteq$ | ഉപഗണം |
| $\not\subset$ | സംഗതോപഗണമല്ല |
| $\not\subseteq$ | ഉപഗണമല്ല |
| $A'$ (or) $A^c$ | $A$ യുടെ പൂരകം |
| $\varnothing$ (or) $\{\ \}$ | ശൂന്യഗണം |
| $n(A)$ | $A$ എന്ന ഗണിതത്തിലെ എണ്ണം |
| $P(A)$ | $A$ യുടെ ഘാതഗണം |
| $\sum$ | കൂട്ടുതുക |

| | |
|---|---|
| $\|\|\|^{ly}$ | അതുപോലെ |
| $\Delta$ | പ്രതിസാമ്യതാവ്യത്യാസം |
| $\mathbb{N}$ | നിസ്സർഗ്ഗസംഖ്യകൾ |
| $\mathbb{W}$ | പൂർണ്ണസംഖ്യകൾ |
| $\mathbb{Z}$ | പൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾ |
| $\mathbb{R}$ | വാസ്തവിക സംഖ്യകൾ |
| $\triangle$ | ത്രികോണം |
| $\angle$ | കോൺ |
| $\perp$ | ലംബമാകുന്നു |
| $\parallel$ | സമാന്തരമാകുന്നു |
| $\Longrightarrow$ | സൂചിപ്പിക്കുന്നു |
| $\therefore$ | അതായത് |
| $\because$ | എന്തെന്നാൽ |
| $\lvert\ \rvert$ | കേവല മൂല്യം |
| $\simeq$ | ഏകദേശ തുല്യമാകുന്നു |
| $\mid$ (or) : | അങ്ങനെയാണത് |
| $\equiv$ (or) $\cong$ | സർവ്വസമം |
| $\equiv$ | അനന്യത |
| $\pi$ | പൈ |
| $\pm$ | കൂട്ടൽ അഥവാ കുറയ്ക്കൽ |

E-book

Evaluation



Preliminary Malayalam_X_EM.indd 3 10/02/2023 11:36:53

## Captions used in this Textbook

எண்ணென்ப ஏனை எழுத்தென்ப இவ்விரண்டும்
கண்ணென்ப வாழும் உயிர்க்கு – குறள் 392

Numbers and letters, they are known as
eyes to humans. - Kural 392

**Learning Outcomes**
To transform the class-room processes into learning centric with a set of bench marks

**Note**
Additional inputs on the content which require student to think and comprehend the concepts are given

**Thinking Croner**
To kindle the inquisitiveness of students in learning mathematics. To make the students to have a diverse thinking

**Progress Check**
Self evaluation of the learner's progress

**Activity**
To encourage students to involve in activities to learn mathematics

**Exercise**
To evaluate the learners' in understanding the content

**Multiple Choice Questions**
To provide additional assessment items on the content

**Unit Exercise**
Interlinking various concepts in each unit, problems are prescribed for the students to attempt and solve them

**Points to Remember**
To recall the points learnt in the topic

**ICT Corner**
To encourage learner's understanding of content through application of technology



Preliminary Malayalam_X_EM.indd 4 10/02/2023 11:36:54

# ഉള്ളടക്കം


| 1 | ബന്ധങ്ങളും ഫലനങ്ങളും | 1-35 | മാസം |
|---|---|---|---|
| 1.1 | ആമുഖം | 1 | |
| 1.2 | ക്രമ ജോഡികൾ | 2 | |
| 1.3 | കാർട്ടീഷ്യൻ ഗുണനഫലം | 2 | |
| 1.4 | ബന്ധങ്ങൾ | 6 | |
| 1.5 | ഫലനങ്ങൾ | 10 | |
| 1.6 | ഫലനങ്ങളുടെ പ്രതിനിധീകരണം | 15 | ജൂൺ |
| 1.7 | ഫലനങ്ങളുടെ തരങ്ങൾ | 17 | |
| 1.8 | പ്രത്യേക ഫലനങ്ങൾ | 22 | |
| 1.9 | ഫലനങ്ങളുടെ സമ്മിശ്രം അല്ലെങ്കിൽ കോമ്പോസിഷൻ | 26 | |
| 1.10 | രേഖീയ, ദ്വിഘാത, ത്രിതീയ കൂടാതെ വ്യുൽക്രമ ഫലനങ്ങളുടെ ഗ്രാഫുകളെ തിരിച്ചറിയുക | 29 | |
| **2** | **സംഖ്യകളും അനുക്രമങ്ങളും** | **36-84** | |
| 2.1 | ആമുഖം | 37 | |
| 2.2 | യൂക്ലിഡിന്റെ ഹരണ ഉപസിദ്ധാന്തം | 37 | |
| 2.3 | യൂക്ലിഡിന്റെ ഹരണ അൽഗോരിതം | 39 | ജൂൺ |
| 2.4 | അങ്കഗണിതത്തിന്റെ അടിസ്ഥാന സിദ്ധാന്തം | 43 | |
| 2.5 | മോഡുലാർ അരിത്തമറ്റിക് | 46 | |
| 2.6 | അനുക്രമങ്ങൾ | 52 | |
| 2.7 | കൂട്ടുസമാന്തരശ്രേണി | 55 | |
| 2.8 | ശ്രേണി | 62 | |
| 2.9 | ഗുണന ക്രമാനുപാതശ്രേണി | 67 | ജൂലൈ |
| 2.10 | ഒരു **G.P.** യുടെ **n**, പദങ്ങളുടെ കൂട്ടുതുക. | 73 | |
| 2.11 | പ്രത്യേക ശ്രേണികൾ | 76 | |
| **3** | **ബീജഗണിതം** | **85-160** | |
| 3.1 | ആമുഖം | 85 | |
| 3.2 | മൂന്ന് ചരങ്ങളുള്ള രേഖീയ സമീകരണങ്ങൾ | 87 | ജൂലൈ |
| 3.3 | ബഹുപദവ്യഞ്ജകങ്ങളുടെ ഉ.സാ.ഭ കൂടാതെ ല.സാ.ഗു | 93 | |
| 3.4 | പരിമേയ വ്യഞ്ജകങ്ങൾ | 98 | |
| 3.5 | ബഹുപദ വ്യഞ്ജകങ്ങളുടെ വർഗ്ഗമൂലം | 103 | ആഗസ്റ്റ് |
| 3.6 | ദ്വിഘാത സമീകരണങ്ങൾ | 106 | |
| 3.7 | വ്യതിയാനങ്ങളുടെ ഗ്രാഫ് | 123 | സെപ്റ്റംബർ |
| 3.8 | ദ്വിഘാത ഗ്രാഫുകൾ | 130 | ഒക്ടോബർ |
| 3.9 | മാട്രിക്സുകൾ | 137 | |




Preliminary Malayalam_X_EM.indd 5 10/02/2023 11:36:54

| | | | |
|---|---|---|---|
| **4** | **ജ്യാമിതി** | **161-202** | |
| 4.1 | ആമുഖം | 161 | **ജൂലൈ** |
| 4.2 | സദൃശ്യത | 162 | |
| 4.3 | തെയിൽസ് സിദ്ധാന്തവും കോണ ദ്വിഭാജക സിദ്ധാന്തവും | 171 | **ആഗസ്റ്റ്** |
| 4.4 | പൈതഗോറസ് സിദ്ധാന്തം | 183 | |
| 4.5 | വൃത്തങ്ങളും സ്പർശരേഖകളും | 188 | **ഒക്ടോബർ** |
| 4.6 | സംഗമ സിദ്ധാന്തം | 195 | |
| **5** | **നിർദ്ദേശാങ്കജ്യാമിതി** | **203-238** | |
| 5.1 | ആമുഖം | 203 | |
| 5.2 | ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം | 205 | |
| 5.3 | ചതുർഭുജത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം | 207 | **ആഗസ്റ്റ്** |
| 5.4 | ഒരു രേഖയുടെ ചായ്വ് | 212 | |
| 5.5 | നേർരേഖയുടെ സമീകരണം | 221 | |
| 5.6 | ഒരു നേർരേഖയുടെ പൊതു രൂപം | 230 | |
| **6** | **ത്രികോണമിതി** | **239-268** | |
| 6.1 | ആമുഖം | 239 | **സെപ്റ്റംബർ** |
| 6.2 | ത്രികോണമിതി സർവ്വസമ വാക്യങ്ങൾ | 242 | |
| 6.3 | ഉയരങ്ങളും ദൂരങ്ങളും | 250 | **നവംബർ** |
| **7** | **അളവുകൾ or വിസ്താരകലനം** | **269-300** | |
| 7.1 | ആമുഖം | 269 | |
| 7.2 | പ്രതലവിസ്തീർണ്ണം | 270 | |
| 7.3 | വ്യാപ്തം | 282 | |
| 7.4 | മിശ്രഘനരൂപങ്ങളുടെ വ്യാപ്തവും വക്രതല വിസ്തീർണ്ണവും | 290 | **നവംബർ** |
| 7.5 | വ്യാപ്തത്തിനു മാറ്റമൊന്നും സംഭവിക്കാത്ത ഒരു രൂപത്തിൽ നിന്ന് മറ്റൊന്നിലേക്ക് ഖരവസ്തുക്കളെ മാറ്റുന്ന വിധം | 295 | |
| **8** | **സാംഖ്യികവും, സംഭാവ്യതയും** | **301-334** | |
| 8.1 | ആമുഖം | 301 | |
| 8.2 | വ്യതിയാന വ്യാപ്തിയുടെ അളവുകൾ | 303 | |
| 8.3 | വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം | 314 | |
| 8.4 | സംഭാവ്യത | 316 | **ഡിസംബർ** |
| 8.5 | സംഭവങ്ങളുടെ ബീജഗണിതം | 324 | |
| 8.6 | സംഭാവ്യതയുടെ സങ്കലന സിദ്ധാന്തം | 326 | |
| | **ഉത്തരങ്ങൾ** | **335-343** | |
| | **ഗണിതപദങ്ങൾ** | **344-345** | |




Preliminary Malayalam_X_EM.indd 6 10/02/2023 11:36:54

# 1 ബന്ധങ്ങളും ഫലനങ്ങളും

"ഗണിതജ്ഞന്മാർ വസ്തുക്കളെക്കുറിച്ചല്ല പകരം വസ്തുക്കൾക്കിടയിലുള്ള ബന്ധത്തെക്കുറിച്ചാണ് പഠിക്കുന്നത്. ഗണിതജ്ഞരെ സംബന്ധിച്ച് ഉള്ളടക്കം എന്നത് അപ്രസക്തമാണ്. രൂപഘടനയിൽ മാത്രമാണ് അവർക്ക് താല്പര്യം. – ഹെൻറി പോയിൻകെയർ



**Gottfried Wilhelm Leibniz**
(1646 – 1716)

ഗോഡ്ഫ്രൈഡ്, വില്യം ലൈബ്നിസ് (വോൺ ലെയ്ബ്നിൻസ് എന്നും അറിയപ്പെടുന്നു) ഒരു പ്രമുഖ ജർമൻ ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞൻ, തത്വചിന്തകൻ, ഭൗതിക ശാസ്ത്രജ്ഞൻ കൂടാതെ കണ്ടുപിടിത്തക്കാരൻ എന്നീ നിലകളിൽ പ്രസിദ്ധനായ വ്യക്തി ആയിരുന്നു. അദ്ദേഹം ഭൂഗർഭശാസ്ത്രം, വൈദ്യശാസ്ത്രം, ജീവശാസ്ത്രം, സാംക്രമിക രോഗ ശാസ്ത്രം, ചരിത്രാന്വേഷകൻ, മന ശാസ്ത്രം, എഞ്ചിനീയറിങ്ങ്, ഭാഷാശാസ്ത്രം, സാമൂഹിക ശാസ്ത്രം, നീതിശാസ്ത്രം, ചരിത്രം, രാഷ്ട്രീയം, നിയമം കൂടാതെ സംഗീത സിദ്ധാന്തം എന്നീ വിഷയങ്ങളെ വിപുലീകരിച്ച് 26 തലക്കെട്ടുകളിലായി എഴുതി.

ലൈബ്നിസ് അദ്ദേഹത്തിന്റെ കൈയ്യെഴുത്തുപ്രതിയിൽ ഫലനം എന്ന തിന്റെ അർത്ഥം ഒരു വക്രരേഖയിൽ ഏതൊരു അളവും ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്നും മറ്റൊരു ബിന്ദുവിലേയ്ക്കു മാറപ്പെടുന്നു എന്ന് നിർവ്വചിച്ചിട്ടുണ്ട്. ലെബ്നിസ് ഫോർമൽ ലോജിക് കൂടാതെ ബൂളിയൻ ബീജഗണിതം എന്നിവയ്ക്ക് അടിസ്ഥാനം നൽകി. കമ്പ്യൂട്ടർ യുഗത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനവും ഇവ രണ്ടുമാണ്. ഇങ്ങനെ അദ്ദേഹത്തിന്റെ എല്ലാ ശ്രദ്ധേയമായ കണ്ടുപിടിത്തങ്ങളും, വിവിധ പ്രവർത്തന രംഗങ്ങളിൽ അദ്ദേഹം നൽകിയ സംഭാവനകളും ലൈബ്നിസിന് പ്രായോഗിക ശാസ്ത്രങ്ങളുടെ പിതാവ് എന്ന പേര് സമ്മാനിച്ചു.

## പഠന ലക്ഷ്യങ്ങൾ

C5SFE

- ഗണങ്ങളുടെ കാർട്ടീഷ്യൻ ഗുണനഫലത്തെ നിർവ്വചിക്കൽ കൂടാതെ നിർണ്ണയിക്കൽ.
- ഒരു ബന്ധത്തെ ഗണങ്ങളുടെ കാർട്ടീഷ്യൻ ഗുണനഫലത്തിന്റെ ഉപഗണമായി നിർവ്വചിക്കൽ.
- ഫലനത്തെ ഒരു പ്രത്യേക ബന്ധമായി മനസ്സിലാക്കൽ.
- ഫലനത്തെ അമ്പടയാളചിത്രം, ക്രമജോഡികളുടെ ഗണം, പട്ടികാരൂപം കൂടാതെ ഗ്രാഫ് എന്നീ രീതികളിൽ സൂചിപ്പിക്കൽ.
- ഫലനത്തെ, വൺ-വൺ, മെനി-വൺ, ഓൺടു, ഇൻടു കൂടാതെ ബൈജെക്ടീവ് എന്നിങ്ങനെ തരം തിരിയ്ക്കൽ.
- കോമ്പോസിഷൻ പ്രവർത്തനം ഉപയോഗിച്ച് ഫലനങ്ങളുടെ കൂടിച്ചേരലിനെക്കുറിച്ച് പഠിക്കൽ.
- രേഖീയ, ദ്വിതീയ, ത്രിതീയ കൂടാതെ വ്യുൽക്രമ ഫലനങ്ങളുടെ ഗ്രാഫുകളെക്കുറിച്ച് മനസ്സിലാക്കൽ.

## 1.1 മുഖവുരം

ഗണങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള അറിവ് ഗണിതത്തിലെ ഉയർന്ന ആശയങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള പഠനത്തിന് ഉത്തേജനം നൽകുന്നു. വ്യക്തമായ നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ട വസ്തുക്കളുടെ ഒരു കൂട്ടത്തെ ഗണം എന്ന് പറയുന്നു. അതായത് ഗണം എന്നത് തികച്ചും അംഗീകരിക്കാൻ സാധിക്കുന്ന വസ്തുക്കളുടെ ഒരു കൂട്ടമാണ്. ഈ പാഠഭാഗത്തിൽ നാം ഗണങ്ങളുടെ ആശയത്തെ ബന്ധങ്ങൾ കൂടാതെ ഫലനങ്ങൾ എന്നീ രണ്ടു രൂപങ്ങളിൽ വിപുലീകരിക്കാൻ ശ്രമിക്കുന്നു. അതിനായി നാം ആദ്യം ചെയ്യേണ്ടത് ശൂന്യമല്ലാത്ത രണ്ടു ഗണങ്ങളുടെ കാർട്ടീഷ്യൻ ഗുണനഫലത്തിന്റെ നിർവ്വചനത്തെക്കുറിച്ച് മനസ്സിലാക്കണം എന്നതാണ്.

നമ്മുടെ ദൈനംദിന സംഭവങ്ങൾ ഗണിതപരമായി ഒന്നുകിൽ ബന്ധം അല്ലെങ്കിൽ ഫലനം എന്നിവ വഴിയായി സൂചിപ്പിക്കാം എന്നത് തികച്ചും ശ്രദ്ധേയമായ ഒരു കാര്യമാണ്. ഉദാഹരണമായി തന്നിട്ടുള്ള സമയത്തിൽ ഒരു വാഹനം സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരത്തെ നമുക്ക് ഒരു ഫലനമായി സൂചിപ്പിക്കാവുന്നതാണ്.



1 Relation Malayalam.indd 1 20/01/2023 17:26:26

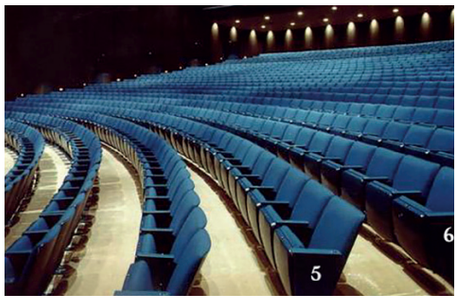
ഉല്പന്നങ്ങളുടെ വിലയെ അവയുടെ ആവശ്യകതയ്ക്കനുസരിച്ച് ഒരു ഫലനമായി സൂചിപ്പിക്കാവുന്നതാണ്. ബഹുഭുജങ്ങളുടെ വിസ്തീർണ്ണം കൂടാതെ വൃത്തം, സമവൃത്താകാര വൃത്ത സ്തൂപിക, സമവൃത്താകാര സിലിണ്ടർ, ഗോളം എന്നിവയുടെ വ്യാപ്തം തുടങ്ങിയവയെ ഒന്നോ അതിലധികമോ ചരങ്ങളുള്ള ഫലന മായി സൂചിപ്പിക്കാവുന്നതാണ്.

ഗണങ്ങളുടെ ആശയത്തെക്കുറിച്ച് വിശദമായി നാം 9-ാം ക്ലാസ്സിൽ പഠിച്ചുകഴിഞ്ഞു. മാത്രമല്ല തന്നിരി ക്കുന്ന ഗണങ്ങളിൽ നിന്നും യോഗം, സംഗമം, പൂരകം എന്നിവ ഉപയോഗിച്ച് പുതിയ ഗണങ്ങൾ എങ്ങനെ രൂപീകരിക്കാം എന്നതിനെക്കുറിച്ചും നാം കണ്ടുകഴിഞ്ഞു.

ഇപ്പോൾ നാം തന്നിട്ടുള്ള രണ്ടു ഗണങ്ങളുടെ കാർട്ടീഷ്യൻ ഗുണനഫലം ഉപയോഗിച്ച് പുതിയ ഗണ ത്തിന്റെ രൂപീകരണ ത്തെക്കുറിച്ച് പഠിക്കാൻ പോവുകയാണ്.

## 1.2 ക്രമ ജോഡി (Ordered Pair)

ഒരു മണ്ഡപത്തിൽ കാണുന്ന ഇരിപ്പിട സംവിധാനത്തെ ശ്രദ്ധിക്കുക. (ചിത്രം 1.1.) കൃത്യമായ ഇരിപ്പിടം ലഭിക്കുന്നതിന ായി (1,5), (7,16), (3,4), (10,12) തുടങ്ങിയവ, എന്നിങ്ങനെ സംഖ്യ കൾ അടങ്ങിയ ടോക്കണുകൾ നൽകും. (4,10) എന്ന ടോക്കൺ ലഭിക്കുന്ന വ്യക്തി 4-ാമത്തെ വരിയിലുള്ള 10-ാമത്തെ ഇരിപ്പിടത്തി ലാണ് ഇരിക്കേണ്ടത്. അതായത് ആദ്യത്തെ സംഖ്യ വരിയേയും രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യ ഇരിപ്പിടത്തേയുമാണ് പ്രതിനിധാനം ചെയ്യു ന്നത്. അങ്ങനെയാണെങ്കിൽ (5,9) എന്ന ടോക്കൺ കൈവശമുള്ള വ്യക്തിയുടെ ഇരിപ്പിട സ്ഥാനം ഏതാണ്? ആ വ്യക്തിക്ക് 9-ാമത്തെ വരിയിൽ 5-ാമത്ത ഇരിപ്പിടത്തിൽ ഇരിക്കാൻ സാധിക്കുമോ? (9,5) കൂടാതെ (5,9) എന്നീ ടോക്കണുകൾ ഒരേ ഇരിപ്പിടസ്ഥാനത്തേയാണോ പ്രതിനിധാനം ചെയ്യുന്നത്? തീർച്ച യായും അല്ല (2,3), (6,3) കൂടാതെ (10,3) എന്നീ ടോക്കണുകളെക്കുറിച്ച് നിങ്ങൾക്ക് എന്താണ് പറയാനുള്ളത്.



ചിത്രം. 1.1

കൃത്യമായ ഇരിപ്പിടത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യകളുടെ ജോഡിയ്ക്ക് ഇത് ഒരു ഉദാഹരണമാണ്. ഇത്തരത്തിലുള്ള സംഖ്യാജോഡികളെ സംഖ്യകളുടെ ക്രമജോഡി എന്നു പറയുന്നു. ഒരു ബന്ധം എന്ന സങ്കല്പത്തെ ഗണിതവൽക്കരിക്കാൻ ഈ ആശയം ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്നു

## 1.3 കാർട്ടീഷ്യൻ ഗുണനഫലം (Cartesian Product)

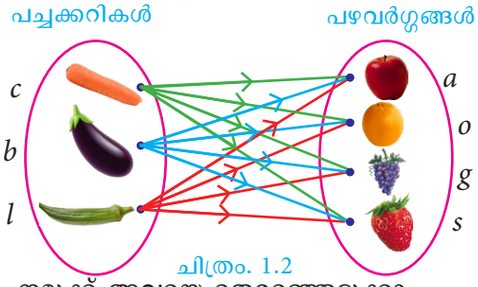
### വിശദീകരണം 1

തന്നിട്ടുള്ള രണ്ടുഗണങ്ങളെ പരിഗണിക്കുക.

$A$ എന്നത് 3 പച്ചക്കറികളുടെ ഗണം. കൂടാത $B$ എന്നത് 4 പഴവർഗ്ഗങ്ങളുടെ ഗണം എന്നിരിക്കട്ടെ. അതായത് $A$= {കാരറ്റ്, കത്തിരിയ്ക്ക, വെണ്ടയ്ക്ക} കൂടാതെ $B$ = {ആപ്പിൾ, ഓറഞ്ച്, മുന്തിരി, ഞാവൽപ്പഴം}

ഒരു പച്ചക്കറിയും ഒരു പഴവും തെരഞ്ഞെടുക്കാൻ സാധ്യമായ വഴികൾ ഏവ?

| പച്ചക്കറികൾ (A) | പഴവർഗ്ഗങ്ങൾ (B) |
|---|---|
| കാരറ്റ് ($c$) | ആപ്പിൾ($a$) |
| കത്തിരിയ്ക്ക ($b$) | ഓറഞ്ച് ($o$) |
| വെണ്ടയ്ക്ക ($l$) | മുന്തിരി ($g$) |
| | ഞാവൽപ്പഴം ($s$) |



ചിത്രം. 1.2

താഴെകൊടുത്തിരിക്കുന്ന 12 വ്യത്യസ്ത ജോഡികൾ മൂലം നമുക്ക് അവയെ തെരഞ്ഞെടുക്കാം.

$(c, a)$, $(c, o)$, $(c, g)$, $(c, s)$, $(b, a)$, $(b, o)$, $(b, g)$, $(b, s)$, $(l, a)$, $(l, o)$, $(l,g)$, $(l, s)$ ഈ ശേഖരണം പച്ചക്കറി കളുടെയും പഴങ്ങളുടെയും കാർട്ടീഷ്യൻ ഗുണനഫലത്തെ പ്രതിനിധാനം ചെയ്യുന്നു.

### നിർവ്വചനം

A കൂടാതെ B എന്നിവ ശൂന്യമല്ലാത്ത രണ്ടു ഗണങ്ങൾ ആണെങ്കിൽ എല്ലാ ക്രമജോഡികളുടെയും ഗണം $(a, b)$ , ഇവിടെ $a \in A$, കൂടാതെ $b \in B$ ആകുന്നു. ഇതിനെ A കൂടാതെ B എന്നിവയുടെ കാർട്ടീ ഷ്യൻ ഗുണനഫലം എന്ന് വിളിക്കാം. അതിനാൽ, $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$. ഇതിനെ A ക്രോസ് B എന്ന് വായിക്കണം. കൂടാതെ $A \times \phi = \phi$



1 Relation Malayalam.indd 2 20/01/2023 17:26:29

### കുറിപ്പ്

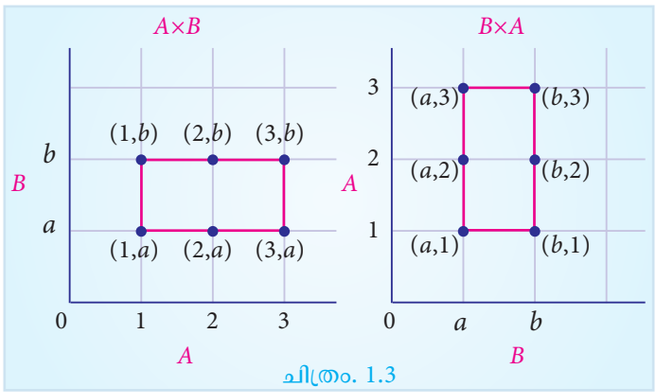
* $A$ -യിലെയും $B$ യിലെയും അംഗങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള സാധ്യമായ എല്ലാ ക്രമജോഡികളുടെയും ഗണമാണ് $A \times B$ എങ്കിൽ ആദ്യത്തെ നിർദ്ദേശാങ്കം $A$ യിലെ അംഗവും രണ്ടാമത്തെ നിർദ്ദേശാങ്കം $B$ യിലെ അംഗവും ആയിരിക്കും.
* $B \times A$ എന്നത് $A$ യിലെയും $B$ യിലെയും അംഗങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള സാധ്യമായ എല്ലാ ക്രമജോഡികളുടെയും ഗണമാണ്. ഇവിടെ ആദ്യത്തെ നിർദ്ദേശാങ്കം $B$ യിലെ അംഗവും, രണ്ടാമത്തെ നിർദ്ദേശാങ്കം $A$ യിലെ അംഗവും ആയിരിക്കും. പൊതുവായി $(a, b) \neq (b, a)$
* $a = b$, ആണെങ്കിൽ $(a, b) = (b, a)$ ആയിരിക്കും.
* കാർട്ടീഷ്യൻ ഗുണനഫലത്തെ ക്രോസ് ഗുണനഫലം (ക്രോസ് പ്രോഡക്ട്) എന്നും വിളിക്കപ്പെടുന്നു.

### വിശദീകരണം 2

A = {1, 2, 3}, B = {a, b}. എങ്കിൽ $A \times B$ കൂടാതെ $B \times A$ എഴുതുക?

$A \times B = \{1,2,3\} \times \{a,b\} = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$ (ചിത്രം 1.3 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു)

$B \times A = \{a,b\} \times \{1,2,3\} = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$ (ചിത്രം 1.3 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു)



ചിത്രം. 1.3

### ചിന്തിക്കുക

$A \times B$ കൂടാതെ $B \times A$ എന്നിവ തുല്യമാകുന്നത് എപ്പോൾ ആയിരിക്കും?

### കുറിപ്പ്

* പൊതുവായി $A \times B \neq B \times A$, പക്ഷേ $n(A \times B) = n(B \times A)$
* $A \times B = \phi$ എങ്കിൽ മാത്രം $A = \phi$ or $B = \phi$
* If $n(A) = p$ കൂടാതെ $n(B) = q$ ആണെങ്കിൽ $n(A \times B) = pq$

### സ്ഥിരതയുള്ള അനന്തഗണങ്ങളെക്കുറിച്ച് ഓർമ്മിക്കാം.

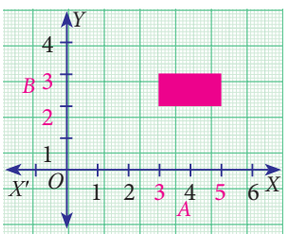
നിസർഗ്ഗസംഖ്യകൾ $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4 \ldots\}$; പൂർണ്ണസംഖ്യകൾ $\mathbb{W} = \{0,1,2,3, \ldots\}$;

പൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾ $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ ; പരിമേയ സംഖ്യകൾ $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$;

വാസ്തവിക സംഖ്യകൾ $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$, ഇവിടെ $\mathbb{Q}'$ എന്നത് എല്ലാ അവാസ്തവിക സംഖ്യകളുടേയും ഗണം.

### വിശദീകരണം 3

ഉദാഹരണമായി A എന്നത് [3,5] എന്ന ഇന്റർവെൽ (ഇടവേള)-ൽ ഉള്ള സംഖ്യകളുടെ ഗണം കൂടാതെ B എന്നത് [2,3] എന്ന ഇന്റർവെല്ലിൽ ഉള്ള സംഖ്യകളുടെ ഗണം. അങ്ങനെ ആയാൽ ചിത്രം 1.4-ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന ദീർഘചതുരാകൃതിയിലുള്ള ഭാഗം കാർട്ടീഷ്യൻ ഗുണനഫലം $A \times B$ യെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ആ ഭാഗത്തു വരുന്ന എല്ലാ ബിന്ദുക്കളും $(x, y)$ കാർട്ടീഷ്യൻ ഗുണനഫലം $A \times B$ യിൽ ഉൾപ്പെടുന്നു.



ചിത്രം. 1.4

### പുരോഗതി പരിശോധന

1. $A$ കൂടാതെ B എന്നിവ ഏതെങ്കിലും രണ്ട് ശൂന്യമല്ലാത്ത ഗണങ്ങൾ എങ്കിൽ $A \times B$ യെ ___ എന്ന് വിളിക്കാം.
2. $n(A \times B) = 20$ കൂടാതെ $n(A) = 5$ എങ്കിൽ $n(B) =$ _____.
3. $A = \{-1,1\}$ കൂടാതെ $B = \{-1,1\}$ ആണെങ്കിൽ $A \times B$ യിലെ ബിന്ദുക്കളുടെ ഗണത്തെ ജ്യാമിതീയ രീതിയിൽ വിവരിക്കുക.
4. A കൂടാതെ B എന്നിവ $[-4, 3]$ കൂടാതെ $[-2, 3]$ എന്നീ ഇന്റർവെല്ലുകളിൽ ഉള്ള രേഖാഖണ്ഡങ്ങൾ എങ്കിൽ A കൂടാതെ B എന്നിവയുടെ കാർട്ടീഷ്യൻ ഗുണനഫലത്തെ പ്രതിനിധാനം ചെയ്യുക.



1 Relation Malayalam.indd 3 20/01/2023 17:26:32

**കുറിപ്പ്**

* കാർട്ടീഷ്യൻ തലത്തിലെ എല്ലാ ബിന്ദുക്കളുടെയും ഗണത്തെ $(x, y)$ എന്ന ക്രമജോഡികളുടെ ഇവിടെ $(x, y)$ എന്നിവ വാസ്തവിക സംഖ്യകൾ) ഗണമായി കാണാൻ സാധിക്കും. വാസ്തവത്തിൽ $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ എന്ന ഗണത്തിലുള്ള എല്ലാ ബിന്ദുക്കളെയും നാം കാർട്ടീഷ്യൻ തലം എന്ന്പറയുന്നു.

**പ്രവർത്തി 1**

$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 4\}$, $B = \{y \mid y \in \mathbb{N}, y < 3\}$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$A \times B$, $B \times A$ എന്നിവയെ ഒരു ഗ്രാഫ് പേപ്പറിൽ പ്രതിനിധാനം ചെയ്യുക. നിങ്ങൾക്ക് $A \times B$, $B \times A$ എന്നിവയ്ക്കിടയിലുള്ള വ്യത്യാസം കാണാൻ കഴിയുന്നുണ്ടോ?

**ഉദാഹരണം 1.1** $A = \{1,3,5\}$ കൂടാതെ $B = \{2,3\}$ എങ്കിൽ (i) $A \times B$, $B \times A$. എന്നിവ കാണുക (ii) Is $A \times B = B \times A$ എന്നത് ശരിയാണോ? അല്ലെങ്കിൽ എന്തുകൊണ്ട്?

(iii) $n(A\times B) = n(B\times A) = n(A)\times n(B)$ എന്ന് തെളിയിക്കുക

**നിർദ്ധാരണം** തന്നിട്ടുള്ളവ $A = \{1,3,5\}$, $B = \{2,3\}$

(i) $A\times B = \{1,3,5\} \times \{2,3\} = \{(1,2), (1,3), (3,2), (3,3), (5,2), (5,3)\}$ ...(1)

$B \times A = \{2,3\} \times \{1,3,5\} = \{(2,1), (2,3), (2,5), (3,1), (3,3), (3,5)\}$ ...(2)

(ii) (1) ൽ നിന്നും (2) ൽ നിന്നും $A \times B \neq B \times A$ എന്ന് നമുക്ക് മനസ്സിലാക്കാം. കാരണം $(1,2) \neq (2,1)$ കൂടാതെ $(1,3) \neq)(3,1)$, etc.

(iii) $n(A)=3$; $n(B) = 2$.

(1) ൽ നിന്നും (2) ൽ നിന്നും, $n(A\times B) = n(B\times A) = 6$; എന്ന് നമുക്ക് കാണാൻ സാധിക്കും.

$n(A) \times n(B) = 3 \times 2 = 6$ കൂടാതെ $n(B) \times n(A) = 2\times 3 = 6$

അതുകൊണ്ട്, $n(A\times B) = n(B\times A) = n(A) \times n(B) = 6$.

അതായത്, $n(A\times B) = n(B\times A) = n(A) \times n(B)$.

**ഉദാഹരണം 1.2** $A\times B = \{(3,2), (3,4), (5,2), (5,4)\}$ എങ്കിൽ $A$ കൂടാതെ $B$ കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം** $A\times B = \{(3,2), (3,4), (5,2), (5,4)\}$

നമുക്കറിയാം $A = \{$ $A \times B$ യിലുള്ള ആദ്യത്തെ നിർദ്ദേശങ്ങളുടെ ഗണം $\}$. അതായത് , $A = \{3,5\}$

$B = \{$ $A \times B$ യിലുള്ള രണ്ടാമത്തെ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങളുടെ ഗണം$\}$. അതായത്, $B = \{2,4\}$

$A = \{3,5\}$ കൂടാത $B = \{2,4\}$.

**ഉദാഹരണം 1.3** $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1<x<4\}$, $B = \{x \in \mathbb{W} \mid 0 \leq x < 2\}$ കൂടാതെ $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x<3\}$ എങ്കിൽ (i) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ (ii) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ എന്നത് ശരിനോക്കുക

**നിർദ്ധാരണം** $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 4\} = \{2, 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{W} \mid 0 \leq x < 2\} = \{0,1\}$,

$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 3\} = \{1,2\}$

(i) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

$B \cup C = \{0,1\} \cup \{1,2\} = \{0,1,2\}$

$A \times (B \cup C) = \{2,3\} \times \{0,1,2\} = \{(2,0),(2,1),(2,2),(3,0),(3,1),(3,2)\}$ ...(1)

$A \times B = \{2,3\} \times \{0,1\} = \{(2,0),(2,1),(3,0),(3,1)\}$

$A \times C = \{2,3\} \times \{1,2\} = \{(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$



1 Relation Malayalam.indd 4 20/01/2023 17:26:37

$$(A\times B)\cup(A\times C) = \{(2,0),(2,1),(3,0),(3,1)\}\cup\{(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$$
$$= \{(2,0),(2,1),(2,2),(3,0),(3,1),(3,2)\} \quad \ldots(2)$$

(1) ൽ നിന്നും (2) ൽ നിന്നും, $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$ എന്നത് ശരിയാണെന്ന് തെളിയിച്ചു.

(ii) $A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$

$$B\cap C = \{0,1\}\cap\{1,2\} = \{1\}$$
$$A\times(B\cap C) = \{2,3\}\times\{1\} = \{(2,1),(3,1)\} \quad \ldots(3)$$
$$A\times B = \{2,3\}\times\{0,1\} = \{(2,0),(2,1),(3,0),(3,1)\}$$
$$A\times C = \{2,3\}\times\{1,2\} = \{(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$$
$$(A\times B)\cap(A\times C) = \{(2,0),(2,1),(3,0),(3,1)\}\cap\{(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$$
$$= \{(2,1),(3,1)\} \quad \ldots(4)$$

(3) ൽ നിന്നും (4) ൽ നിന്നും, $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$ എന്നത് ശരിയാണെന്ന് തെളിയിച്ചു.

**കുറിപ്പ്**

* മുകളിൽ തെളിയിക്കപ്പെട്ട രണ്ടു നിയമങ്ങളും കാർട്ടീഷ്യൻ ഗുണനഫലത്തിൻമേലുള്ള യോഗം സംഗമം എന്നിവയുടെ വിതരണ നിയമം ആകുന്നു. അതായത് $A, B, C$ എന്നീ മൂന്ന് ഗണങ്ങൾക്ക് (i) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$ (ii) $A\times(B\cap C)=(\mathrm{A}\times\mathrm{B})\cap(\mathrm{A}\times C)$.

### 1.3.1 മൂന്നു ഗണങ്ങളുടെ കാർട്ടീഷ്യൻ ഗുണനഫലം

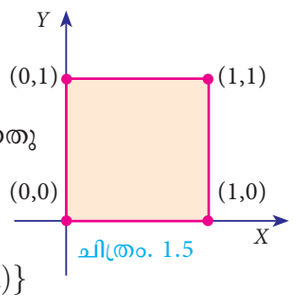
A, B, C എന്നിവ മൂന്ന് ശൂന്യമല്ലാത്ത ഗണങ്ങൾ ആണെങ്കിൽ, ആ മൂന്ന് ഗണങ്ങളുടെയും കാർട്ടീഷ്യൻ ഗുണനഫലം എന്നത് സാധ്യമായ, ക്രമീകരിക്കപ്പെട്ട ട്രിപ്പ്ലറ്റുകളുടെ ഗണമാകുന്നു. അതായത്

$A\times B\times C = \{(a,b,c)$ ഇവിടെ $a\in A, b\in B, c\in C\}$

**രണ്ട് കൂടാതെ മൂന്ന് ഗണങ്ങളുടെ കാർട്ടീഷ്യൻ ഗുണനഫലത്തിന്റെ ജ്യാമിതീയ വിശദീകരണം**

$$A=\{0,1\},\ B=\{0,1\},\ C=\{0,1\}$$
$$A\times B = \{0,1\}\times\{0,1\} = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$$

$A\times B$ യെ $xy$ - തലത്തിൽ പ്രതിനിധാനം ചെയ്താൽ ചിത്രം 1.5-ൽ കാണുന്നതു പോലെ ലഭിക്കുന്നു.



ചിത്രം. 1.5

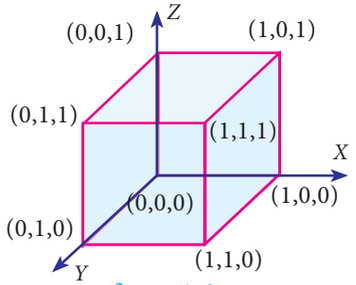
$$(A\times B)\times C = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}\times\{0,1\}$$
$$= \{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1)(1,1,0),(1,1,1)\}$$

$A\times B\times C$ യെ $xyz$ - തലത്തിൽ സൂചിപ്പിച്ചാൽ ചിത്രം 1.6 -ൽ കാണുന്നതുപോലെ ലഭിക്കുന്നു. അതായത് $A\times B$ എന്നത് ചതുരത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങളെ ദ്വിമാന അളവുകളിലും $A\times B\times C$ എന്നത് ഘനചതുരത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങളെ ത്രിമാന അളവുകളിലും പ്രതിനിധാനം ചെയ്യുന്നു.

**കുറിപ്പ്**

* പൊതുവായി ശൂന്യമല്ലാത്ത രണ്ടു ഗണങ്ങളുടെ കാർട്ടീഷ്യൻ ഗുണനഫലം ദ്വിമാന അളവുകളിലുള്ള രൂപത്തെയും, കൂടാതെ ശൂന്യമല്ലാത്ത മൂന്ന് ഗണങ്ങളുടെ കാർട്ടീഷ്യൻ ഗുണനഫലം ത്രിമാന അളവുകളിലുള്ള ഒരു വസ്തുവിനെയും നൽകുന്നു.

അഭ



ചിത്രം. 1.6



1 Relation Malayalam.indd 5 20/01/2023 17:26:40



**ചോദ്യം 1.1**

1. $A \times B$, $A \times A$ കൂടാതെ $B \times A$ കാണുക.

   (i) $A = \{2, -2, 3\}$ കൂടാതെ $B = \{1, -4\}$ (ii) $A = B = \{p, q\}$ (iii) $A = \{m, n\}$; $B = \phi$

2. $A = \{1,2,3\}$കൂടാതെ $B = \{x \mid x$ എന്നത് 10 നെക്കാൾ ചെറിയ അഭാജ്യസംഖ്യ$\}$. $A \times B$ കൂടാതെ $B \times A$ കാണുക.

3. $B \times A = \{(-2,3),(-2,4),(0,3),(0,4),(3,3),(3,4)\}$ എങ്കിൽ $A, B$ കാണുക.

4. $A = \{5,6\}$, $B = \{4,5,6\}$, $C = \{5,6,7\}$, എങ്കിൽ $A \times A = (B \times B) \cap (C \times C)$ എന്ന് തെളി യിക്കുക.

5. A$=\{1,2,3\}$, $B = \{2,3,5\}$, $C = \{3,4\}$ കൂടാതെ $D = \{1,3,5\}$, എങ്കിൽ $(A \cap C) \times (B \cap D) = (A \times B) \cap (C \times D)$ എന്നത് ശരിയാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക?

6. $A = \{x \in \mathbb{W} \mid x < 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x \leq 4\}$ കൂടാതെ $C = \{3,5\}$. എങ്കിൽ താഴെത്തന്നവ ശരിയാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക

   (i) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ (ii) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

   (iii) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

7. $A$ = 8 നെക്കാൾ ചെറിയ നിസർഗ്ഗസംഖ്യകളുടെ ഗണം, $B$ = 8 നെക്കാൾ ചെറിയ അഭാജ്യസംഖ്യക ളുടെ ഗണം, $C$ = ഇരട്ട അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ ഗണം. എങ്കിൽ താഴെത്തന്നവ ശരിയാണോ എന്ന് പ രിശോധിക്കുക.

   (i) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$ (ii) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

## 1.4 ബന്ധങ്ങൾ (Relations)

നമ്മുടെ ദൈനംദിന ജീവിതത്തിൽ ചില നിയമങ്ങൾക്കനുസരിച്ച് രണ്ട് വസ്തക്കൾ പരസ്പരം ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നത് നമുക്ക് കാണാൻ സാധിക്കും. രണ്ടു വസ്തുക്കളും ചില നിർദ്ദിഷ്ട നിയമത്തിന് അനുസരിച്ച് ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു എന്ന് നമുക്ക് പറയാം. നമുക്ക് ഇതിനെ എങ്ങനെ പ്രതിനിധാനം ചെയ്യാം? ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുണ്ട്

| ബന്ധം | ചിഹ്നം R ഉപയോഗിച്ച് സൂചിപ്പിക്കൽ | ക്രമജോഡിയായി പ്രതിനി ധീകരിക്കൽ |
|---|---|---|
| ന്യൂഡൽഹി ഇന്ത്യയുടെ തലസ്ഥാന മാണ് | ന്യൂഡൽഹി R ഇന്ത്യ | (ന്യൂഡൽഹി, ഇന്ത്യ) |
| $AB$ എന്ന രേഖ $XY$ എന്ന രേഖയ്ക്ക് ലംബമാണ് | രേഖ $AB$ R രേഖ XY | (രേഖ $AB$, രേഖ$XY$) |
| $-1$ എന്നത് $-5$ നെക്കാൾ വലുതാണ് | $-1$ R $-5$ | $(-1, -5)$ |
| $\ell$ എന്നത് $\Delta PQR$ ന്റെ പ്രതിസാമ്യതാ രേഖ ആണ് | $\ell$ R $\Delta PQR$ | ($\ell$, $\Delta PQR$) |

ന്യൂഡൽഹിയും ഇന്ത്യയും എങ്ങനെയാണ് ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നത്? ന്യൂഡൽഹി ഇന്ത്യയുടെ തലസ്ഥാനം എന്നായിരിക്കും പ്രതികരണം എന്ന് നമുക്ക് പ്രതീക്ഷിക്കാം. പക്ഷേ ന്യൂഡൽഹിയെയും ഇന്ത്യയെയും ബന്ധപ്പെടുത്തുന്നതിന് വേറെയും പല വഴികൾ ഉണ്ട്. സാധ്യമായ ചില ഉത്തരങ്ങൾ താഴെക്കാണാം.

- ന്യൂഡൽഹി ഇന്ത്യയുടെ തലസ്ഥാനം.
- ന്യൂഡൽഹി ഇന്ത്യയുടെ വടക്കൻ ഭാഗമാണ്.
- ന്യൂഡൽഹി ഇന്ത്യയിലെ ഏറ്റവും വലിയ നഗരങ്ങളിൽ ഒന്നാണ്.

അതുകൊണ്ട് തന്നിട്ടുള്ള ഒരേയൊരു ക്രമജോഡി (ന്യൂഡൽഹി, ഇന്ത്യ) ഉപയോഗിച്ച് പ്രത്യേക ബ ന്ധം വ്യക്തമാക്കണമെന്ന് നാം ആഗ്രഹിച്ചാൽ അത് പ്രായോഗികമായി സഹായകരമാകില്ല. പക്ഷേ താഴെ



1 Relation Malayalam.indd 6 20/01/2023 17:26:44

ത്തന്നിട്ടുള്ള ക്രമജോഡികൾ (ന്യൂഡൽഹി, ഇന്ത്യ), (വാഷിംഗ്ടൺ, യു.എസ്.എ) (ബെയ്ജിങ്ങ്, ചൈന) (ലണ്ടൻ, യു.കെ) (കാഠ്മണ്ഡു, നേപ്പാൾ) ഇവയുടെ ബന്ധം ഏതാണെന്ന് ചോദിച്ചാൽ ബന്ധം വ്യക്തമാക്കുന്നത് വളരെ എളുപ്പമാണ്.

## പുരോഗതി പരിശോധന

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ കൂടാതെ $B = \{a, b, c\}$.

| 1. താഴെക്കൊടുത്തിരിക്കുന്നവയിൽ ഏതൊക്കെയാണ് A യിൽ നിന്നും B യിലേക്കുള്ള ബന്ധത്തെ കാണിക്കുന്നത്. | 2. താഴെകൊടുത്തിരിക്കുന്നവയിൽ ഏതൊക്കെയാണ് $B$ യിൽ നിന്നും $A$ യിലേക്കുള്ള ബന്ധത്തെ കാണിക്കുന്നത് |
|---|---|
| (i) { (1, b), (1, c), (3, a), (4, b) } | (i) { (c, a), (c, b), (c, 1) } |
| (ii) { (1, a), (b, 4), ( c, 3) } | (ii) { (c, 1), (c, 2), (c, 3), (c, 4) } |
| (iii) { (1, a), (a, 1), (2, b), (b, 2) } | (iii) { (a, 4), (b, 3), (c, 2) } |

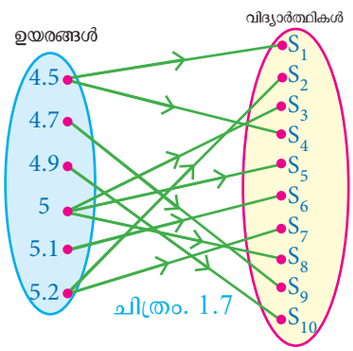
### സിദ്ധാന്തം 4

| ഒരു ക്ലാസ്സിലെ വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | $S_5$ | $S_6$ | $S_7$ | $S_8$ | $S_9$ | $S_{10}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ഉയരം | 4.5 | 5.2 | 5 | 4.5 | 5 | 5.1 | 5.2 | 5 | 4.7 | 4.9 |

അനുബന്ധ വിദ്യാർത്ഥികളുടെ ഉയരങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള ബന്ധത്തെക്കുറിച്ച് നിർവ്വചിക്കാം.

$R = \{(\text{ഉയരങ്ങൾ, വിദ്യാർത്ഥികൾ})\}$

$$R = \{(4.5, S_1),\ (4.5, S_4),\ (4.7, S_9),\ (4.9, S_{10}),\ (5, S_3),\ (5, S_5), (5, S_8), (5.1, S_6),\ (5.2, S_2),\ (5.2, S_7)\}$$



ചിത്രം. 1.7

### നിർവചനം

$A$ കൂടാതെ $B$ എന്നിവ ശൂന്യമല്ലാത്ത രണ്ടു ഗണങ്ങൾ ആണെങ്കിൽ $A$ യിൽ നിന്നും $B$ യിലേക്കുള്ള ബന്ധം R എന്നത് $A \times B$ യുടെ ചില നിബന്ധനകൾ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്ന ഉപഗണമാകുന്നു. $x \in A$ എന്നത് $y \in B$ യുമായി R മുഖേന ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നുവെങ്കിൽ നമുക്ക് $x\ Ry$ എന്ന് എഴുതാം.

R എന്ന ബന്ധത്തിന്റെ മണ്ഡലം $= \{x \in A \mid x\,R\,y, y \in B\}$

R എന്ന ബന്ധത്തിന്റെ സഹമണ്ഡലം $B$ ആകുന്നു

R എന്ന ബന്ധത്തിന്റെ രംഗം $= \{y \in B \mid xRy, x \in A\}$

ഈ നിർവ്വചനങ്ങളിൽ നിന്നും R ന്റെ മണ്ഡലം $\subseteq A$, R - ന്റെ സഹമണ്ഡലം = B, R ന്റെ രംഗം $\subseteq B$ എന്ന് കാണാം.

QK6V4

### സിദ്ധാന്തം 5

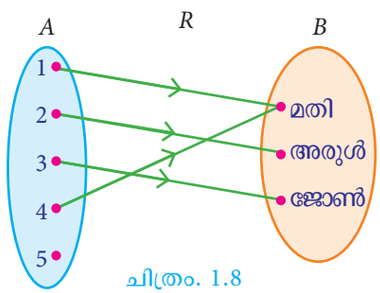
$A = \{1,2,3,4,5\}$ കൂടാതെ $B = \{$മതി, അരുൾ, ജോൺ$\}$ എന്നിരിക്കട്ടെ

മുകളിൽ കാണുന്ന ഗണങ്ങൾ A കൂടാതെ B എന്നിവയ്ക്കിടയിലുള്ള ബന്ധത്തെ ഒരു അമ്പടയാള ചിത്രം മുഖേന പ്രതിനിധീകരിക്കാം. (ചിത്രം 1.8)

ഇവിടെ,, R ന്റെ മണ്ഡലം = {1,2,3,4}

R ന്റെ രംഗം = {മതി, അരുൾ, ജോൺ} R ന്റെ സഹമണ്ഡലം.

R ന്റെ മണ്ഡലം A യുടെ സംഗതോപഗണം എന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക.



ചിത്രം. 1.8



1 Relation Malayalam.indd 7 20/01/2023 17:26:45

## പ്രവർത്തി 2

$A$ കൂടാതെ $B$ എന്നിവ $xy$ തലത്തിലുള്ള രേഖകളുടെ ഗണമാകുന്നു കൂടാതെ $X$ അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായുള്ള രേഖകൾ $A$ യിൽ അടങ്ങിയിരിക്കുന്നു. $x \in A$, $y \in B$ എന്നിരിക്കട്ടെ, $x$ എന്നത് $y$ യ്ക്ക് ലംബമാണെങ്കിൽ $R$ എന്നത് $A$ യിൽ നിന്നും $B$ യിലേക്കുള്ള ഒരു ബന്ധമാകുന്നു. ഇതിനെ $x\mathrm{R}y$ എന്ന് നിർവ്വചിക്കാം. ഗ്രാഫ് പേപ്പർ ഉപയോഗിച്ച് $B$ യിലെ അംഗങ്ങളെ കാണുക.

**വിശദീകരണം 6**

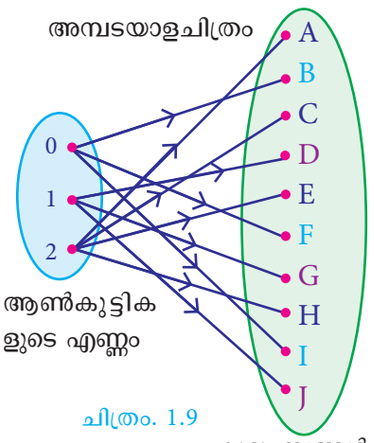
$A = \{1,3,5,7\}$ കൂടാതെ $B = \{4,8\}$ എന്നിരിക്കട്ടെ. A യിൽ നിന്നും B യിലേക്കുള്ള ബന്ധം R എന്നത് കുറവായിരിക്കും എന്ന് നിർവ്വചിച്ചിട്ടുണ്ട്. എങ്കിൽ 1R4 (കാരണം 1 എന്നത് 4 നെക്കാൾ കുറവാണ്) അതുപോലെ 1R8, , 3R4, 3R8, 5R8, 7R8 എന്ന് കാണാം.

**കുറിപ്പ്**

* മുകളിൽ പറഞ്ഞ ഉദാഹരണത്തിൽ നിന്നും $A \times B = \{(1,4), (1,8), (3,4), (3,8), (5,4), (5,8), (7,4),(7,8)\}$ $\mathrm{R} = \{(1,4), (1,8), (3,4), (3,8), (5,8), (7,8)\}$ R എന്നത് $A \times B$ യുടെ ഉപഗണമെന്ന് നമുക്ക് കാണാം.

**വിശദീകരണം 7**

ഒരു പട്ടണത്തിലെ പ്രത്യേക പ്രദേശത്തിലുള്ള 2 കുട്ടികൾ വീതമുള്ള 10 കുടുംബങ്ങൾ $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ കൂടാതെ $J$ പരിഗണിക്കുക. ഇവയിൽ $B, F, I$ എന്നീ കുടുംബങ്ങളിൽ രണ്ടു പെൺകുട്ടികൾ വീതവും; $D, G, J$ എന്നീ കുടുംബങ്ങളിൽ ഒരു ആൺകുട്ടിയും ഒരു പെൺകുട്ടിയും, ബാക്കി കുടുംബങ്ങളിൽ രണ്ട് ആൺകുട്ടികൾ വീതവും ഉണ്ട്. $x\mathrm{R}y$, ഉപയോഗിച്ച് R എന്ന ബന്ധത്തെ നിർവ്വചിക്കാം. ഇവിടെ $x$ എന്നത് ആൺകുട്ടികളുടെ എണ്ണത്തേയും, $y$ എന്നത് $x$ ലെ ആൺകുട്ടികളുടെ എണ്ണം ഉൾപ്പെടുന്ന കുടുംബങ്ങളെയും കുറിക്കുന്നു. ഈ ഒരു സാഹചര്യത്തെ ക്രമജോഡികളും അമ്പടയാളചിത്രവും മുഖേന ഒരു ബന്ധമായി പ്രതിനിധീകരിക്കുക.



ചിത്രം. 1.9

ഇവിടെ R എന്ന ബന്ധത്തിന്റെ മണ്ഡലം ആൺകുട്ടികളുടെ എണ്ണവുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നതിനാലും, നാം ഇവിടെ രണ്ട് കുട്ടികളുള്ള കുടുംബങ്ങളെ പരിഗണിച്ചിരിക്കുന്നതിനാലും R ന്റെ മണ്ഡലത്തിൽ $\{0,1,2\}$, എന്ന മൂന്ന് അംഗങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കും. ഇവിടെ 0, 1, 2 എന്നത് ആൺകുട്ടികൾ ഇല്ല, ഒന്ന്, രണ്ട് എന്നിങ്ങനെ ആൺകുട്ടികളുടെ എണ്ണത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. മാത്രമല്ല രണ്ട് പെൺകുട്ടികൾ ഉള്ള കുടുംബങ്ങളിൽ ആണ് ഒരു ആൺകുട്ടിയും ഇല്ലാത്തത് എന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക. R എന്ന ബന്ധം താഴെക്കാണുന്നതുപോലെ ആയിരിക്കും.

$$\mathrm{R} = \{(0,B),(0,F),(0,I),(1,D),(1,G),(1,J),(2,A),(2,C),(2,E),(2,H)\}$$

ഈ ബന്ധത്തെ അമ്പടയാള ചിത്രത്തിൽ കാണാം. (ചിത്രം 1. 9).

**ഉദാഹരണം 1.4** $A = \{3,4,7,8\}$ കൂടാതെ $B = \{1,7,10\}$. താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ളവയിൽ ഏതൊക്കെ ഗണങ്ങളാണ്. $A$ യിൽ നിന്നും $B$ യിലേക്കുള്ള ബന്ധം എന്ന് കാണുക.

(i) $\mathrm{R}_1 = \{(3,7), (4,7), (7,10), (8,1)\}$ (ii) $\mathrm{R}_2 = \{(3,1), (4,12)\}$

(iii) $\mathrm{R}_3 = \{(3,7), (4,10), (7,7), (7,8), (8,11), (8,7), (8,10)\}$

**നിർദ്ധാരണം** $A \times B = \{(3,1), (3,7), (3,10), (4,1), (4,7), (4,10), (7,1), (7,7), (7,10), (8,1), (8,7), (8,10)\}$

(i) ഇവിടെ, $\mathrm{R}_1 \subseteq A \times B$. അതുകൊണ്ട്, $\mathrm{R}_1$ എന്നത് $A$ യിൽ നിന്നും $B$ യിലേക്കുള്ള ഒരു ബന്ധമാണ്.

(ii) ഇവിടെ, $(4,12) \in \mathrm{R}_2$, പക്ഷേ $(4,12) \notin A \times B$. അതുകൊണ്ട് $\mathrm{R}_2$ എന്നത് $A$ യിൽ നിന്നും $B$ യിലേക്കുള്ള ഒരു ബന്ധമല്ല.

(iii) ഇവിടെ, $(7,8) \in \mathrm{R}_3$, പക്ഷേ $(7,8) \notin A \times B$. അതുകൊണ്ട്, $\mathrm{R}_3$ എന്നത് $A$ യിൽ നിന്നും $B$ യിലേക്കുള്ള ഒരു ബന്ധമല്ല.

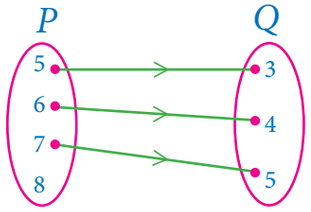


1 Relation Malayalam.indd 8 20/01/2023 17:26:47

**കുറിപ്പ്**

* ഒരു ബന്ധത്തെ നമുക്ക് ബീജഗണിതപരമായി ഒന്നുകിൽ പട്ടികാരീതി (Roster method) അല്ലെങ്കിൽ നിബന്ധനാരീതി (Set builder method) യിൽ പ്രതിനിധീകരിക്കാവുന്നതാണ്.
* അമ്പടയാളചിത്രം എന്നത് ബന്ധത്തിന്റെ ഒരു ചിത്രവൽക്കരണം ആണ്.

**ഉദാ 1.5 :** ചിത്രം (1.10) യിൽ കാണുന്ന അമ്പടയാള ചിത്രം $P$, $Q$ എന്നീ ഗണങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള ബന്ധത്തെ കാണിക്കുന്നു. ബന്ധത്തെ താഴെ കാണുന്ന രീതികളിൽ എഴുതുക. (i) നിബന്ധനാരീതി (ii) പട്ടികാ രീതി (iii) R ന്റെ മണ്ഡലം, രംഗം കാണുക.



ചിത്രം. 1.10

**നിർദ്ധാരണം**

(i) നിബന്ധനാരീതിയിൽ $R = \{(x, y) \mid y = x - 2,\ x \in P, y \in Q\}$

(ii) പട്ടികാരീതിയിൽ $R = \{(5,3),(6,4),(7,5)\}$

(iii) R ന്റെ മണ്ഡലം = {5,6,7} R ന്റെ രംഗം $= \{3,4,5\}$

**'ശൂന്യബന്ധം'**

താഴെക്കാണുന്ന ഉദാഹരണങ്ങൾ പരിഗണിക്കുക. $A = \{-3,-2,-1\}$ കൂടാതെ $B = \{1,2,3,4\}$. $A$ യിൽ നിന്നും $B$ യിലേക്കുള്ള ബന്ധത്തെ $a$-$b$=8, a∈A, b∈B എന്ന് നിർവ്വചിച്ചിരിക്കുന്നു. പക്ഷേ $a$-$b$=8 എന്ന് വരത്തക്കവിധം ഒരു ജോഡി $(a,b)$ യും ഇവിടെ സാധ്യമല്ല. അതായത് $R$ ൽ ഒരു അംഗവും ഇല്ല അതുകൊണ്ട് $R = \phi$.

ഒരു അംഗവും ഇല്ലാത്ത ഒരു ബന്ധത്തെ ശൂന്യബന്ധം എന്നു വിളിക്കുന്നു.

**നിങ്ങൾക്ക് അറിയാമോ**

$n(A) = p$, $n(B) = q$, എങ്കിൽ $A$ യിൽ നിന്നും $B$ യിലേയ്ക്കുള്ള ആകെ ബന്ധങ്ങളുടെ എണ്ണം $2^{pq}$ ആകുന്നു.

## അഭ്യാസം 1.2

1. $A = \{1,2,3,7\}$ കൂടാതെ $B = \{3,0,-1,7\}$, താഴെക്കൊടുത്തിട്ടുള്ളവയിൽ ഏതൊക്കെയാണ് $A$ യിൽ നിന്നും $B$ യിലേക്കുള്ള ബന്ധത്തെ കാണിക്കുന്നത്?

   (i) $R_1 = \{(2,1), (7,1)\}$ (ii) $R_2 = \{(-1,1)\}$

   (iii) $R_3 = \{(2,-1), (7,7), (1,3)\}$ (iv) $R_4 = \{(7,-1), (0,3), (3,3), (0,7)\}$

2. $A=\{1,2,3,4,...,45\}$ കൂടാതെ $R$ എന്നത് $A$ യിലുള്ള 'ഒരു സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗം' എന്ന് നിർവ്വചിച്ചിരിക്കുന്ന ബന്ധം. എങ്കിൽ $R$ നെ $A \times A$ യുടെ ഉപഗണമായി എഴുതുക. കൂടാതെ $R$ ന്റെ മണ്ഡലം, രംഗം എന്നിവ കാണുക.

3. $\{(x, y) / y = x + 3,\ x \in \{0,1,2,3,4,5\}\}$.എന്ന ഗണം $R$ എന്ന ബന്ധത്തെ കാണിക്കുന്നു. $R$ ന്റെ മണ്ഡലം, രംഗം എന്നിവ കാണുക.

4. താഴെകൊടുത്തിട്ടുള്ള ബന്ധങ്ങളെ, (a) അമ്പടയാളചിത്രം, (b) ഗ്രാഫ് (c) പട്ടികാരീതി ഇവയിൽ സാധ്യമായ രീതികളിൽ പ്രതിനിധീകരിക്കുക..

   (i) $\{(x,y) | x = 2y,\ x \in \{2,3,4,5\},\ y \in \{1,2,3,4\}\}$

   (ii) $\{(x,y) | y = x+3,\ x, y$ എന്നിവ നിസർഗ്ഗസംഖ്യകൾ $< 10\}$

5. ഒരു കമ്പനിയിൽ അസിസ്റ്റന്റ്സ്, ക്ലർക്കുകൾ, മാനേജർമാർ കൂടാതെ എക്സിക്യൂട്ടീവ് ഓഫീസർ എന്നിങ്ങനെ നാലു വിഭാഗത്തിലുള്ള ജീവനക്കാർ ഉണ്ട്. കമ്പനി $A, C, M$ കൂടാതെ $E$ എന്നീ വിഭാഗങ്ങളിൽ ജോലി ചെയ്യുന്നവർക്ക് ശമ്പളം യഥാക്രമം ₹10,000, ₹25,000, ₹50,000 കൂടാതെ ₹1,00,000 എന്നിങ്ങനെ നൽകുന്നുണ്ട്. $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ എന്നിവർ അസിസ്റ്റന്റുമാർ, $C_1, C_2, C_3, C_4$ എന്നിവർ



1 Relation Malayalam.indd 9 20/01/2023 17:26:48

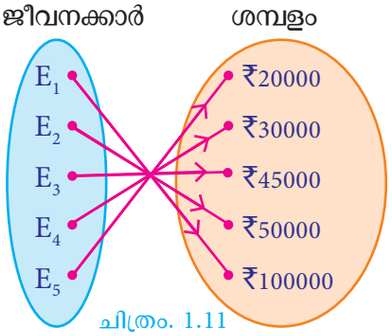
ക്ലർക്കുമാർ, $M_1, M_2, M_3$ എന്നിവർ മാനേജർമാർ, കൂടാതെ $E_1, E_2$ എന്നിവർ എക്സിക്യൂട്ടീവ് ഓഫീസർമാർ ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. ബന്ധം R നെ $xRy$ എന്ന് നിർവ്വചിക്കാം. ഇവിടെ $x$ എന്നത് $y$ എന്ന ജീവനക്കാരന് കൊടുക്കുന്ന ശമ്പളം ആകുന്നു. ക്രമജോഡികളും, അമ്പടയാള ചിത്രവും മുഖേന R എന്ന ബന്ധത്തെ പ്രതിനിധീകരിക്കുക..

## 1.5 ഫലനങ്ങൾ

രണ്ട് ശൂന്യമല്ലാത്ത ഗണങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള നിരവധി ബന്ധങ്ങളിൽ ചില പ്രത്യേക ബന്ധങ്ങൾ കൂടുതൽ പര്യവേഷണത്തിനായി (സൂക്ഷ്മ പരിശോധന) പ്രാധാന്യം അർഹിക്കുന്നവയാണ്. അത്തരം ബന്ധങ്ങളെ ഫലനങ്ങൾ എന്നു വിളിക്കുന്നു.

**വിശദീകരണം 8**

ഒരു കമ്പനിയിൽ വിവിധ വിഭാഗങ്ങളിലായി 5 ജീവനക്കാർ ഉണ്ട്. ചിത്രം 1.11 ലുള്ള അമ്പടയാള ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നതുപോലെ അവരുടെ ഒരു മാസത്തെ ശമ്പള വിതരണത്തെ പരിഗണിച്ചാൽ, കമ്പനിയുടെ ഓരോ ജീവനക്കാർക്കും ഓരോ ശമ്പളമാണ് ലഭിക്കുന്നതെന്ന് നമുക്ക് കാണാൻ സാധിക്കും.



ചിത്രം. 1.11

ചില പ്രത്യേക ബന്ധങ്ങളെ പ്രതിഫലിപ്പിക്കുന്ന വിവിധ യഥാർത്ഥ ജീവിത സാഹചര്യങ്ങൾ താഴെ കാണാം:

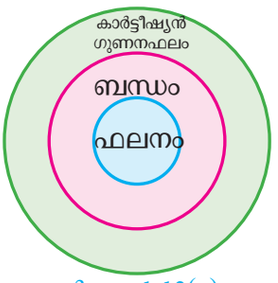
1. നിങ്ങളുടെ സഹപാഠികളുടെ ഗണം $A$ എന്ന് കരുതുക. ഓരോ വിദ്യാർത്ഥിയുടെയും പ്രായം സമമാണെന്ന് കാണാം.
2. നിങ്ങൾ ഒരു കടയിൽ പുസ്തകം വാങ്ങാൻ പോവുകയാണ്. നിങ്ങൾ ഒരു പുസ്തകം എടുത്താൽ അതിന് ഒരേ ഒരു വിലയേ കാണൂ. ആ പുസ്തകത്തിന് രണ്ടു വിലകളുമായി ബന്ധമുണ്ടാകില്ല. (തീർച്ചയായും, നിരവധി പുസ്തകങ്ങൾക്ക് ഒരേ വില ഉണ്ടാകും)
3. ബോയിൽസ് നിയമത്തെക്കുറിച്ച് നിങ്ങൾക്കറിയാം. മർദ്ദം $P$ യുടെ ഒരു മൂല്യത്തിനനുസൃതമായി വ്യാപ്തം $V$ യുടെ ഒരേയൊരു മൂല്യം മാത്രമേ ഉണ്ടാകാം.
4. സാമ്പത്തിക ശാസ്ത്രത്തിൽ ആവശ്യകതയുടെ അളവിനെ $Q = 360 - 4P$ എന്ന് പ്രകടിപ്പിക്കാൻ കഴിയും. ഇവിടെ $P$ എന്നത് ചരക്കുകളുടെ (ഉല്പന്നങ്ങൾ) വിലയാണ്. $P$ യുടെ ഓരോ മൂല്യത്തിനും അനുസരിച്ച് $Q$ വിനും ഒരേ ഒരു മൂല്യം മാത്രമേ ഉള്ളൂ എന്ന് നമുക്ക് കാണാം. അതുകൊണ്ട് ഉല്പന്നത്തിന്റെ വില $P$ യെ ആശ്രയിച്ചായിരിക്കും ആവശ്യകതയുടെ അളവ് $Q$.

നാം പലപ്പോഴും പല ബന്ധങ്ങളിലൂടെ കടന്നു പോകുന്നു. ഇതിൽ ഗണം $A$ യിലെ ഒരു അംഗത്തിന് ഗണം $B$ യിലെ ഒരേ ഒരു അംഗവുമായി മാത്രമേ ബന്ധമുണ്ടായിരിക്കുകയുള്ളൂ. അങ്ങനെയുള്ള ബന്ധങ്ങളെ ഫലനങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നു. ഫലനബന്ധത്തെ കുറിയ്ക്കുന്നതിനായി നാം സാധാരണയായി $f$ എന്ന ചിഹ്ന ഉപയോഗിക്കുന്നു.

**നിർവചനം**

രണ്ട് ശൂന്യമല്ലാത്ത ഗണങ്ങൾ $X$ നും $Y$ യ്ക്കും ഇടയിലുള്ള ബന്ധം $f$ നെ $X$ ൽ നിന്നും $Y$ യിലേയ്ക്കുള്ള ഫലനം എന്ന് പറയണമെങ്കിൽ, ഓരോ $x \in X$ നും ഒരേയൊരു $y \in Y$ മാത്രമേ ഉണ്ടാകാവൂ. അതായത് $(x, y) \in f$ എന്ന നിബന്ധന പൂർത്തീകരിക്കണം.

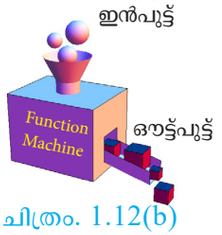
അതായത്, $f = \{(x,y) | \text{ എല്ലാ } x \in X, y \in Y\}$.



ചിത്രം. 1.12(a)

$X$ ൽ നിന്നും $Y$ ലേയ്ക്കുള്ള ഫലനത്തെ $f : X \to Y$ എന്ന് പറയാം.

ബന്ധത്തിന്റെയും ഫലനത്തിന്റെയും നിർവ്വചനത്തെ താരതമ്യം ചെയ്യുമ്പോൾ എല്ലാ ഫലനവും ഒരു ബന്ധമാണെന്ന് നമുക്ക് കാണാൻ സാധിക്കും. അതായത് ഫലനങ്ങൾ ബന്ധങ്ങളുടെ ഉപഗണവും, ബന്ധങ്ങൾ കാർട്ടീഷ്യൻ ഗുണനഫലത്തിന്റെ ഉപഗണവും ആകുന്നു.ചിത്രം (1.12)



ചിത്രം. 1.12(b)



1 Relation Malayalam.indd 10 20/01/2023 17:26:49

ഒരു ഫലനം $f$ നെ ഒരു യന്ത്രമായി കരുതിയാൽ ഓരോ നിക്ഷേപം $x$ നും ഒരേയൊരു ഫലം $f(x)$ ലഭിക്കുന്നു എന്ന് കാണാം. ചിത്രം (1.12 (b))

ഒരു ഫലനത്തെ മാപ്പിംഗ് അല്ലെങ്കിൽ രൂപാന്തരം (Transformation) എന്നും വിളിക്കുന്നു.




**കുറിപ്പ്**

$f : X \to Y$ എന്നത് ഒരു ഫലനം എങ്കിൽ

* $X$ എന്ന ഗണത്തെ ഫലനം $f$ ന്റെ മണ്ഡലം എന്നും $Y$ എന്ന ഗണത്തെ ഫലനം $f$ ന്റെ സഹമണ്ഡലം എന്നും പറയുന്നു.
* $f(a) = b$, എങ്കിൽ $f$ എന്ന ഫലനത്തിൽ $b$ യെ $a$ യുടെ പ്രതിബിംബം എന്നും $a$ യെ $b$ യുടെ ബിംബം എന്നും പറയുന്നു.
* $f : X \to Y$ എന്നത് ഒരു ഫലനം ആണെങ്കിൽ അത് താഴെക്കാണുന്ന നിബന്ധനകൾ പൂർത്തീകരിക്കണം
  (i) $f$ ന്റെ മണ്ഡലത്തിലെ ഓരോ അംഗത്തിനും ഒരു പ്രതിബിംബം ഉണ്ടായിരിക്കണം.
  (ii) ഒരേയൊരു പ്രതിബിംബം മാത്രമേ ഉണ്ടാകാൻ പാടുള്ളൂ.
* $A$ യും $B$ യും രണ്ട് പരിമിത ഗണങ്ങൾ, അതായത് $n(A) = p$, $n(B) = q$ എങ്കിൽ $A$ യിൽ നിന്നും $B$ യിലേയ്ക്കുള്ള ഫലനങ്ങളുടെ ആകെ എണ്ണം $q^p$ ആകുന്നു.
* ഈ പാഠഭാഗത്തിൽ നാം $f$ നെ വാസ്തവിക മൂല്യമുള്ള ഫലനം (അതായത് സഹമണ്ഡലം വാസ്തവിക സംഖ്യകൾ ആയിരിക്കും) എന്ന് പരിഗണിക്കുന്നു.

ഫലനത്തിന്റെ മണ്ഡലത്തെ വിവരിക്കൽ.

(i) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ . എന്നിരിക്കട്ടെ $x = (-1)$ ആണെങ്കിൽ $f(-1)$ നിർവ്വചിക്കാൻ സാധ്യമല്ല. അതുകൊണ്ട് $f$ നെ $x=-1$ ഒഴികെ ബാക്കിയുള്ള എല്ലാ വാസ്തവിക സംഖ്യകൾക്കും നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്. അതുകൊണ്ട് $f$ ന്റെ മണ്ഡലം $\mathbb{R} - \{-1\}$ ആകുന്നു.

(ii) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$ ; എന്നിരിക്കട്ടെ $x = 2, 3$ ആണെങ്കിൽ $f(2), f(3)$ എന്നിവ നിർവ്വചിക്കാൻ സാധ്യമല്ല. അതുകൊണ്ട് $x = 2, 3$ . എന്നിവ ഒഴിച്ച് ബാക്കി എല്ലാ വാസ്തവിക സംഖ്യകൾക്കും $f$ എന്ന ഫലനം നിർവ്വചിക്കാൻ സാധിച്ചിട്ടുണ്ട്. അതുകൊണ്ട് $f$ ന്റെ മണ്ഡലം $= \mathbb{R} - \{2, 3\}$.

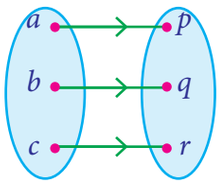
## പുരോഗതി പരിശോധന

1. ബന്ധങ്ങൾ _____ ന്റെ ഉപഗണങ്ങൾ ആണ്. ഫലനങ്ങൾ_____ ന്റെ ഉപഗണങ്ങൾ ആണ്.
2. ശരിയോ തെറ്റോ: ഒരു ബന്ധത്തിന്റെ എല്ലാ അംഗങ്ങൾക്കും പ്രതിബിംബങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കണം.
3. ശരിയോ തെറ്റോ: ഒരു ഫലനത്തിന്റെ എല്ലാ അംഗങ്ങൾക്കും പ്രതിബിംബങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കണം.
4. ശരിയോ തെറ്റോ: $\mathrm{R} : A \to B$ ഒരു ബന്ധമെങ്കിൽ $R$ ന്റെ മണ്ഡലം $A$.
5. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ നെ $f(x) = x^2$ എന്ന് നിർവ്വചിച്ചിട്ടുണ്ട്. എങ്കിൽ 1 കൂടാതെ 2 എന്നിവയുടെ ബിംബങ്ങൾ _____ കൂടാതെ _____ ആകുന്നു.
6. ബന്ധത്തിനും ഫലനത്തിനും ഇടയിലുള്ള വ്യത്യാസം _____ ആകുന്നു.
7. $A, B$ എന്നിവ ശൂന്യമല്ലാത്ത രണ്ട് ഗണങ്ങൾ എങ്കിൽ താഴെ കാണുന്ന രണ്ടു ശേഖരണങ്ങളിലും വലുത് ഏത്?
   (i) $A$ യ്ക്കും $B$ യ്ക്കും ഇടയിലുള്ള ബന്ധങ്ങളുടെ എണ്ണം.
   (ii) $A$,$B$ എന്നിവയ്ക്കിടയിലുള്ള ഫലനങ്ങളുടെ എണ്ണം.

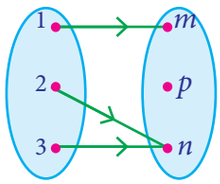


1 Relation Malayalam.indd 11 20/01/2023 17:26:50

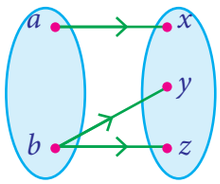
### വിശദീകരണം 9 - ഫലനങ്ങളാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കൽ
### അമ്പടയാള ചിത്രം മുഖേന പ്രതിനിധീകരിക്കൽ




ഇത് ഒരു ഫലനത്തെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. കാരണം ഓരോ നിക്ഷേപവും ഒരൊറ്റ ഫലവുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു.
ചിത്രം. 1.13(a)




ഇത് ഒരു ഫലനമാണ് കാരണം ഓരോ നിക്ഷേപവും ഒരൊറ്റ ഫലവുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു.
ചിത്രം. 1.13(b)




ഇത് ഒരു ഫലനമല്ല. കാരണം b എന്ന നിക്ഷേത്തിന് രണ്ട് ഫലനങ്ങൾ ഉണ്ട്.
ചിത്രം. 1.13(c)

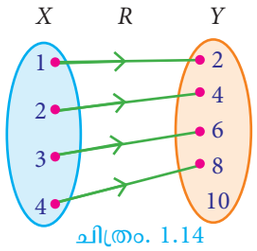
ഗണിതത്തിലെ ഉയർന്ന ആശയങ്ങളെക്കുറിച്ച് മനസ്സിലാക്കുന്നതിൽ ഫലനങ്ങൾ വളരെ പ്രാധാന്യമേറിയ പങ്ക് വഹിക്കുന്നു. ഇവയാണ് ഒരു രൂപത്തിൽ നിന്നും മറ്റൊരു രൂപത്തിലേക്ക് പരിവർത്തനം ചെയ്യുന്നതിനുള്ള അടിസ്ഥാന ഉപകരണങ്ങൾ. ഈ അർത്ഥത്തിൽ, ഫലനങ്ങൾ എഞ്ചിനീയറിംങ് സയൻസുകളിൽ വ്യാപകമായി ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്നു എന്ന് മനസ്സിലാക്കാൻ സാധിക്കും.

**കുറിപ്പ്**

* ഒരു ഫലനത്തിന്റെ രംഗം എന്നത് സഹമണ്ഡലത്തിന്റെ ഉപഗണമാകുന്നു.

**ഉദാ 1.6 :** $X = \{1,2,3,4\}$ കൂടാതെ $Y = \{2,4,6,8,10\}$, R = {(1,2),(2,4),(3,6),(4,8)}. R ഒരു ഫലനമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക കൂടാതെ R ന്റെ മണ്ഡലം, സഹമണ്ഡലം, രംഗം എന്നിവ കാണുക?

**നിർദ്ധാരണം** R ന്റെ ചിത്രീയ വിശദീകരണം ചിത്രം 1.14-ൽ കൊടുത്തിട്ടുണ്ട്. ചിത്രത്തിൽ നിന്നും ഓരോ $x \in X$ ഉം ഒരേയൊരു $y \in Y$ യുമായി മാത്രമേ ബന്ധപ്പെട്ടിട്ടുള്ളൂ എന്ന് കാണാം. അതായത് $X$ -ലെ എല്ലാ അംഗങ്ങൾക്കും $Y$ യിൽ ഒരേ ഒരു പ്രതിബിംബമാണ് ഉള്ളത്. അതുകൊണ്ട് $R$ ഒരു ഫലനമാണ്.



ചിത്രം. 1.14

മണ്ഡലം $X = \{1,2,3,4\}$; സഹമണ്ഡലം $Y = \{2,3,6,8,10\}$; R ന്റെ രംഗം = $\{2,4,6,8\}$.

**ഉദാ 1.7 :** ഒരു ബന്ധം $f: X \to Y$ നെ $f(x) = x^2 - 2$ എന്ന് നിർവ്വചിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഇവിടെ, $X = \{-2,-1,0,3\}$ കൂടാതെ $Y = R$. (i) $f$ ലെ അംഗങ്ങളെ പട്ടികയിലാക്കുക (ii) $f$ ഒരു ഫലനമാണോ?

**നിർദ്ധാരണം** $f(x) = x^2 - 2$ ഇവിടെ $X = \{-2,-1,0,3\}$

(i) $f(-2) = (-2)^2 - 2 = 2$; $f(-1) = (-1)^2 - 2 = -1$

$f(0) = (0)^2 - 2 = -2$; $f(3) = (3)^2 - 2 = 7$

അതുകൊണ്ട്, $f = \{(-2,2),(-1,-1),(0,-2),(3,7)\}$

*(ii)* $f$ ന്റെ മണ്ഡലത്തിലുള്ള ഓരോ അംഗത്തിനും ഒരേയൊരു പ്രതിബിംബം മാത്രമേ ഉള്ളൂ എന്ന് കാണാം. അതുകൊണ്ട് $f$ ഒരു ഫലനം ആണ്.

**ചിന്തിക്കുക**

ഗ്രഹങ്ങൾക്കും അവയുടെ ഉപഗ്രഹങ്ങൾക്കും ഇടയിലുള്ള ബന്ധം ഒരു ഫലനമാണോ?

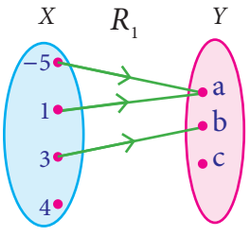
**ഉദാ 1.8 :** $X = \{-5,1,3,4\}$ കൂടാതെ Y = $\{a,b,c\}$, എങ്കിൽ താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ബന്ധങ്ങളിൽ ഏതൊക്കെയാണ് $X$ ൽ നിന്നും $Y$ ലേയ്ക്കുള്ള ഫലനം?



1 Relation Malayalam.indd 12 20/01/2023 17:26:52

(i) $\mathbb{R}_1 = \{(-5,a), (1,a), (3,b)\}$ (ii) $\mathbb{R}_2 = \{(-5,b), (1,b), (3,a),(4,c)\}$

(iii) $\mathbb{R}_3 = \{(-5,a), (1,a), (3,b),(4,c),(1,b)\}$



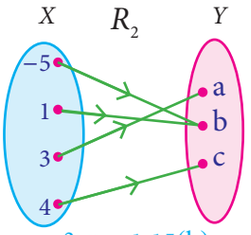
ചിത്രം. 1.15(a)

**നിർദ്ധാരണം**

(i) $\mathbb{R}_1 = \{(-5,a), (1,a), (3,b)\}$

ബന്ധം $\mathbb{R}_1$ നെ അമ്പടയാള ചിത്രം മുഖേന പ്രതിനിധീകരിക്കാം. (ചിത്രം 1.15 (a)).

(ii) (ii) $\mathbb{R}_2 = \{(-5,b), (1,b), (3,a),(4,c)\}$

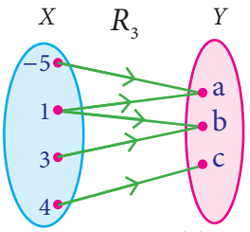


ചിത്രം. 1.15(b)

$\mathbb{R}_2$ ന്റെ അമ്പടയാള ചിത്രം, ചിത്രം 1.15 (b) യിൽ കാണാം.

$\mathbb{R}_2$ ഒരു ഫലനമാണ്. കാരണം $X$ ലെ ഓരോ അംഗത്തിനും $Y$-ൽ ഒരേയൊരു പ്രതിബിംബം മാത്രമേ കാണാൻ സാധിക്കുന്നുള്ളൂ.

(iii) $\mathbb{R}_3 = \{(-5,a), (1,a), (3,b),(4,c),(1,b)\}$



ചിത്രം. 1.15(c)

$\mathbb{R}_3$ യെ അമ്പടയാള ചിത്രത്തിൽ പ്രതിനിധീകരിക്കാം. ചിത്രം (1.15(c)).

$\mathbb{R}_3$ ഒരു ഫലനം അല്ല. കാരണം $1 \in X$ എന്ന അംഗത്തിന് $Y$ ൽ രണ്ട് പ്രതിബിംബങ്ങൾ $a \in Y$ , $b \in Y$ ഉണ്ട്.

ഒരു അംഗത്തിന് ഒരേ ഒരു പ്രതിബിംബം മാത്രമേ ഉണ്ടാകാവൂ എന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക.

**ഉദാ 1.9 :** $f(x) = 2x - x^2$ എന്നിരിക്കട്ടെ,
എങ്കിൽ (i)$f(1)$ (ii) $f(x+1)$ (iii) $f(x) + f(1)$ എന്നിവ കാണുക

**നിർദ്ധാരണം** (i) $x$=1എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ

$$f(1) = 2(1) - (1)^2 = 2 - 1 = 1 \text{ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.}$$

(ii) $x$ ന്റെ വിലയെ $x$+1, എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ

$$f(x+1) = 2(x+1) - (x+1)^2 = 2x + 2 - (x^2 + 2x + 1) = -x^2 + 1 \text{ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.}$$

(iii) $f(x) + f(1) = (2x - x^2) + 1 = -x^2 + 2x + 1$

[ $f(x) + f(1) \neq f(x+1)$ എന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക. പൊതുവായി $f(a+b)$ എന്നത് $f(a)$+$f(b)$ യ്ക്കു തുല്യമല്ല]

## അഭ്യാസം 1.3

1. $f = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N} \text{ and } y = 2x\}$ എന്നത് N ലെ ഒരു ബന്ധം എങ്കിൽ മണ്ഡലം, സഹമണ്ഡലം, രംഗം എന്നിവ കാണുക. ഈ ബന്ധം ഒരു ഫലനമാണോ?

2. $X$ = {3, 4, 6, 8}. എന്നിരിക്കട്ടെ. ബന്ധം $\mathbb{R} = \{(x, f(x)) \mid x \in X, f(x) = x^2 + 1\}$ എന്നത് $X$-ൽ നിന്നും $N$ ലേയ്ക്കുള്ള ഒരു ബന്ധം ഒരു ഫലനമാണോ എന്ന് നിർണ്ണയിക്കുക?



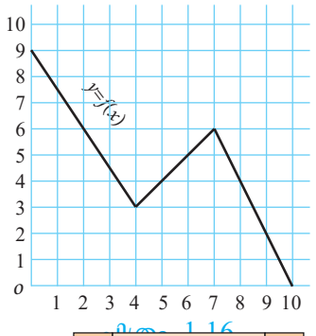
1 Relation Malayalam.indd 13 20/01/2023 17:26:54

3. ഫലനം $f : x \rightarrow x^2 - 5x + 6$ , എന്ന് തന്നിട്ടുണ്ട്. മൂല്യം കാണുക

(i) $f(-1)$ (ii) $f(2a)$

(iii) $f(2)$ (iv) $f(x-1)$

4. ഒരു ഫലനം $f(x)$ ന്റെ ഗ്രാഫ് മുഖേനയുള്ള പ്രതിനിധീകരണം ചിത്രം 1.16 ൽ കൊടുത്തിട്ടുണ്ട്. ഇതിൽ നിന്നും $f(9) = 2$ എന്നത് വ്യക്തമാണ്.




(i) ഫലനത്തിന്റെ താഴെ പറയുന്ന മൂല്യങ്ങൾ കാണുക

(a) $f(0)$ (b) $f(7)$ (c) $f(2)$ (d) $f(10)$

(ii) $x$ ന്റെ ഏത് മൂല്യത്തിനാണ് $f(x) = 1$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നത്?

(iii) വിവരിക്കുക (i) മണ്ഡലം (ii) രംഗം.

(iv) $f$ എന്ന ഫലനത്തിൽ 6 ന്റെ പ്രതിബിംബം എത്ര?

5. $f(x) = 2x+5,\ x \neq 0$ എങ്കിൽ $\dfrac{f(x+2)-f(2)}{x}$.

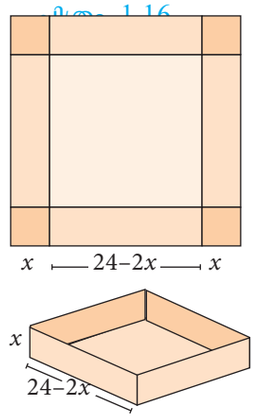
6. ഫലനം $f$ നെ $f(x) = 2x - 3$ എന്ന് നിർവ്വചിച്ചിട്ടുണ്ട്

(i) $\dfrac{f(0)+f(1)}{2}$. കാണുക

*(ii)* $f(x) = 0$ ആണെങ്കിൽ $x$ ന്റെ മൂല്യം കാണുക.

(iii) $f(x) = x$ ആണെങ്കിൽ $x$ ന്റെ വില കാണുക.

(iv) $f(x) = f(1-x)$ എന്ന് ആണെങ്കിൽ $x$ ന്റെ വില കാണുക.




ചിത്രം. 1.17

7. 24 സെ.മീ. വശമുള്ള ചതുരാകൃതിയിലുള്ള ഒരു വസ്തുവിന്റെ നാല് കോണുകളിൽ നിന്നും തുല്യ അളവിലുള്ള ചതുരങ്ങൾ മുറിച്ചുമാറ്റി, അതിന്റെ വശങ്ങളെ ചിത്രം 1.17-ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ മുകളിലേയ്ക്ക് തുറന്ന ഒരു പെട്ടി ഉണ്ടാകുന്നു. പെട്ടിയുടെ വ്യാപ്തം $V$ യെ $x$ ന്റെ ഒരു ഫലനമായി പ്രതിനിധീകരിക്കുക.

8. ഒരു ഫലനം $f$ നെ $f(x) = 3 - 2x$ . എന്ന് നിർവ്വചിച്ചിരിക്കുന്നു $f(x^2) = (f(x))^2$ എങ്കിൽ $x$ ന്റെ വില കാണുക.

9. ഒരു വിമാനം മണിക്കൂറിൽ 500 കി.മീ. എന്ന വേഗതയിൽ പറക്കുന്നു. വിമാനം സഞ്ചരിച്ച ദൂരം $d$ യെ സമയം $t$ (മണിക്കൂറിന്റെ) യുടെ ഫലനമായി പ്രകടിപ്പിക്കുക.

10. തൊട്ടടുത്ത് കാണുന്ന പട്ടികയിൽ ഒരു വ്യക്തിയുടെ കൈയ്യുടെ ആദ്യഭാഗത്തിന്റെ നീളവും അതിനനുസൃതമായ അവരുടെ ഉയരവും അടങ്ങിയിട്ടുണ്ട്. ഈ വിവരങ്ങളുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ ഒരു വിദ്യാർത്ഥിയുടെ ഉയരത്തിനും $(y)$ കൈയ്യുടെ ആദ്യഭാഗത്തിന്റെ നീളത്തിനും $(x)$ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം $y = ax + b$ , ഇവിടെ $a, b$ എന്നിവ സ്ഥിരാങ്കങ്ങൾ എന്ന് കണ്ടുപിടിച്ചു.

| കൈയ്യുടെ ആദ്യഭാഗ നീളം '$x$' (cm) | ഉയരം '$y$' (ഇഞ്ചുകൾ) |
|---|---|
| 35 | 56 |
| 45 | 65 |
| 50 | 69.5 |
| 55 | 74 |

(i) ഈ ബന്ധം ഒരു ഫനമാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

(ii) $a$ കൂടാതെ $b$ എന്നിവ കാണുക.



1 Relation Malayalam.indd 14 20/01/2023 17:26:56

(iii) കൈയ്യുടെ ആദ്യഭാഗ നീളം 40 സെ.മീ. ഉള്ള വ്യക്തിയുടെ ഉയരം കാണുക.

(iv) ഉയരം 53.3 ഇഞ്ചുകൾ ഉള്ള വ്യക്തിയുടെ കൈയ്യുടെ ആദ്യഭാഗ നീളം കാണുക.

## 1.6 ഫലനങ്ങളുടെ പ്രതിനിധീകരണം

ഒരു ഫലനത്തെ താഴെക്കാണുന്ന രീതികളിൽ പ്രതിനിധീകരിക്കാം

(a) ക്രമജോഡികളുടെ ഗണം (b) പട്ടികാരൂപം

(c) അമ്പടയാള ചിത്രം (d) ഗ്രാഫിക്കൽ രൂപം

$f : A \to B$ എന്നത് ഒരു ഫലനം

**(a) ക്രമജോഡികളുടെ ഗണം**

എല്ലാ ക്രമജോഡികളുടെയും ഗണം $f = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in A\}$ ഒരു ഫലനത്തെ പ്രതിനിധാനം ചെയ്യുന്നു.

**(b) പട്ടികാരൂപം**

$f$ എന്ന ഫലനത്തിള്ള $x$ ന്റെ മൂല്യങ്ങളെയും അവയുടെ പ്രതിബിംബങ്ങളേയും പട്ടികാ രൂപത്തിൽ രേഖപ്പെടുത്താം.

**(c) അമ്പടയാള ചിത്രം**

ഒരു അമ്പടയാള ചിത്രം $f$ ന്റെ മണ്ഡലത്തിലുള്ള അംഗങ്ങളെയും അവയുടെ പ്രതിബിംബങ്ങളെയും അമ്പടയാള ചിത്രം ഉപയോഗിച്ച് സൂചിപ്പിക്കാം.

**(d) ഗ്രാഫ്**

$f = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in A\}$ എന്ന ശേഖരണത്തിലെ ക്രമജോഡികളെ $xy$ തലത്തിലെ ബിന്ദുക്കളായി രേഖപ്പെടുത്തുന്നു. $f$ ന്റെ ഗ്രാഫ് എന്നത് എല്ലാ ബിന്ദുക്കളുടെയും സംയോജനമാണ്.

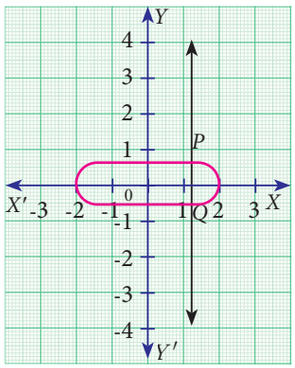
ഓരോ ഫലനത്തേയും ഗ്രാഫിലെ ഒരു വക്രരേഖ മുഖേന സൂചിപ്പിക്കാം. പക്ഷേ ഗ്രാഫിൽ വരയ്ക്കുന്ന എല്ലാ വക്രരേഖയും ഒരു ഫലനത്തെ പ്രതിനിധീകരിക്കില്ല.

തന്നിട്ടുള്ള വക്രരേഖ ഒരു ഫലനമാണോ അല്ലയോ എന്ന് നിർണ്ണയിക്കുന്നതിന് താഴെ തന്നിട്ടുള്ള പരീക്ഷണം വളരെ ഫലപ്രദമാണ്.

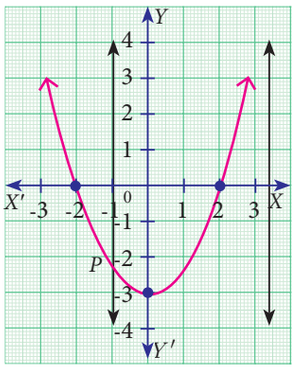
### 1.6.1 ലംബരേഖാ പരീക്ഷണം

ഒരു ഗ്രാഫിൽ വരയ്ക്കപ്പെട്ട വക്രരേഖയെ ഒരു ഫലനമെന്ന് സൂചിപ്പിക്കണമെങ്കിൽ ഓരോ ലംബരേഖയും ആ വക്രരേഖയെ ഒരേ ഒരു ബിന്ദു മാത്രമേ ഛേദിക്കാൻ പാടുള്ളൂ.

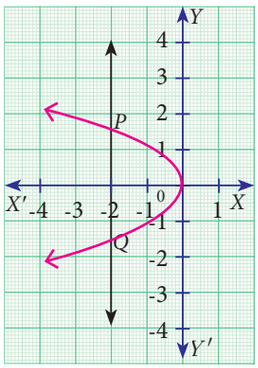
**ഉദാ 1.10 :** ലംബരേഖാ പരീക്ഷണം ഉപയോഗിച്ച് താഴെത്തന്നിരിക്കുന്നവയിൽ ഏതൊക്കെ വക്രരേഖകളാണ് ഒരു ഫലനത്തെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നത് എന്ന് നിർണ്ണയിക്കുക?



ചിത്രം. 1.18(a)



ചിത്രം. 1.18(b)



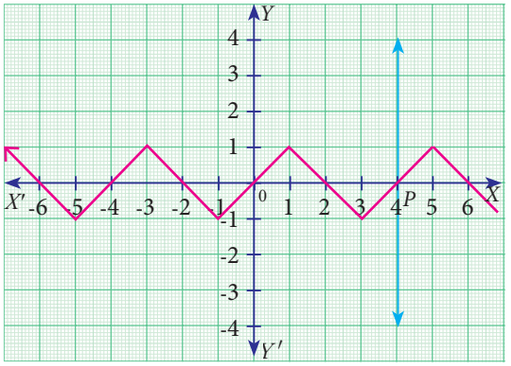
ചിത്രം. 1.18(c)



1 Relation Malayalam.indd 15 20/01/2023 17:26:57

**നിർദ്ധാരണം** ചിത്രം 1.18 (*a*) കൂടാതെ ചിത്രം 1.18 (*c*) എന്നിവ ഒരു ഫലനത്തെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നില്ല. കാരണം ലംബ രേഖകൾ, വക്രരേഖകളെ രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ എന്നിവയിൽ ഛേദിക്കുന്നു.

ചിത്രം 1.18 (b) കൂടാതെ ചിത്രം 1.18 (c) എന്നിവ ഒരു ഫലനത്തെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. കാരണം ലംബരേഖകൾ വക്രരേഖകളെ അധികപക്ഷം ഒരേ ഒരു ബിന്ദുവിൽ മാത്രമേ ഛേദിക്കുന്നുള്ളൂ.



ചിത്രം. 1.18(d)

**കുറിപ്പ്**

* ഗ്രാഫിൽ പ്രതിനിധാനം ചെയ്യുന്ന ഏതൊരു സമവാക്യത്തേയും സാധാരണയായി വക്രരേഖ എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

**ഉദാ 1.1 :** $A = \{1,2,3,4\}$ കൂടാതെ $B = \{2,5,8,11,14\}$ എന്നിവ രണ്ടു ഗണങ്ങൾ എന്നിരിക്കട്ടെ. $f : A \to B$ എന്നത് $f(x) = 3x - 1$ എന്ന് നിർവ്വചിച്ചിട്ടുള്ള ഒരു ഫലനം. ഈ ഫലനത്തെ താഴെത്തന്നിട്ടുള്ള രീതികളിൽ സൂചിപ്പിക്കുക.

(i) അമ്പടയാള ചിത്രം (ii) പട്ടികാരൂപം

(iii) ക്രമജോഡികളുടെ ഗണം (iv) ഗ്രാഫിക്കൽ രൂപം

**നിർദ്ധാരണം**

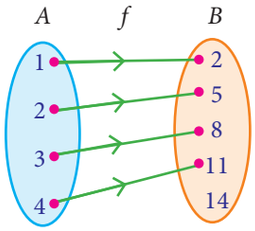
$A = \{1,2,3,4\}$ ; $B = \{2,5,8,11,14\}$ ; $f(x) = 3x - 1$

$f(1) = 3(1) - 1 = 3 - 1 = 2$ ; $f(2) = 3(2) - 1 = 6 - 1 = 5$

$f(3) = 3(3) - 1 = 9 - 1 = 8$ ; $f(4) = 4(3) - 1 = 12 - 1 = 11$

**(i) അമ്പടയാള ചിത്രം**

$f : A \to B$ എന്ന ഫലനത്തെ അമ്പടയാള ചിത്രം മുഖേന പ്രതിനിധീകരിക്കാം (ചിത്രം 1.19).



ചിത്രം. 1.19

**(ii) പട്ടികാരൂപം**

ഫലനം $f$ നെ പട്ടികാരീതിയിൽ താഴെത്തന്നിരിക്കുന്ന വിധം പ്രതിനിധീകരിക്കാം.

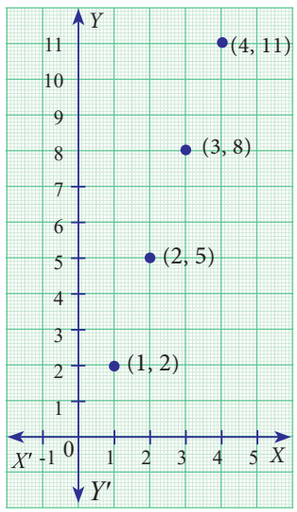
| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 2 | 5 | 8 | 11 |

**(iii) ക്രമജോഡികളുടെ ഗണം**

ഫലനം $f$ നെ ക്രമജോഡികളുടെ ഗണമായി $f = \{(1,2),(2,5),(3,8),(4,11)\}$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം

**(iv) ഗ്രാഫിക്കൽ രൂപം**

അടുത്ത് കാണുന്ന $xy$ തലത്തിൽ (1,2), (2,5), (3,8), (4,11) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ രേഖപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട്. ചിത്രം (1.20).



ചിത്രം. 1.20



1 Relation Malayalam.indd 16 20/01/2023 17:26:59

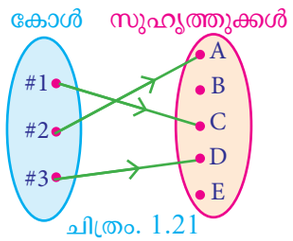
## 1.7 ഫലനങ്ങളുടെ തരങ്ങൾ

ഈ ഭാഗത്തിൽ നാം ഫലനങ്ങളുടെ താഴെപ്പറയുന്ന തരങ്ങളെക്കുറിച്ച് അനുയോജ്യമായ ഉദാഹരണ സഹിതം ചർച്ച ചെയ്യും.

(i) വൺ - വൺ (ii) മെനി - വൺ (iii) ഓൺടു (iv) ഇൻടു

### 1.7.1 വൺ-വൺ ഫലനം

നമ്മുടെ കൈയ്യിൽ ശരിയായ രീതിയിൽ പ്രവർത്തിക്കുന്ന ഒരു സെൽഫോൺ ഉണ്ടെന്ന് കരുതുക. നിങ്ങളുടെ സുഹൃത്തിന് ഒരു കോൾ ചെയ്യുകയാണെങ്കിൽ നിങ്ങൾക്ക് ഒരു സമയം ഒരു കോൾ മാത്രമേ ചെയ്യാൻ കഴിയൂ.



ചിത്രം. 1.21

കോളുകൾ ചെയ്യുന്നതിനെ ഒരു ഫലനമായി പരിഗണിച്ചാൽ അത് വൺ-വൺ ഫലനം ആയിരിക്കും.

ഒരു ഫലനം $f : A \to B$ എന്നതിനെ വൺ-വൺ ഫലനം എന്ന് പറയണമെങ്കിൽ $A$ യിലെ വ്യത്യസ്ത അംഗങ്ങൾക്ക് $B$ യിൽ വ്യത്യസ്ത പ്രതിബിംബങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കണം.

ഒരു വൺ-വൺ ഫലനം ഇൻജെക്ടീവ് ഫലനം എന്നു അറിയപ്പെടുന്നു.

തുല്യമായി,,

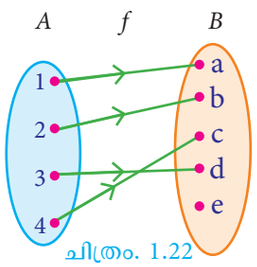
$f(a_1) = f(a_2)$ $a_1 = a_2$, ഇവിടെ $a_1, a_2 \in A$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നുവെങ്കിൽ $f$ നെ വൺ-വൺ ഫലനം എന്നു പറയാം.

**വിശദീകരണം 10**

$A = \{1,2,3,4\}$ കൂടാതെ $B = \{a,b,c,d,e\}$

(i) $f = \{(1,a), (2,b), (3,d), (4,c)\}$ എന്നിരിക്കട്ടെ

ചിത്രം 1.22 ൽ $A$ യിലെ വ്യത്യസ്ത അംഗങ്ങൾക്ക് $B$ യിൽ വ്യത്യസ്ത പ്രതിബിംബങ്ങളാണ് ഉള്ളത് എന്ന് മനസ്സിലാക്കാം.

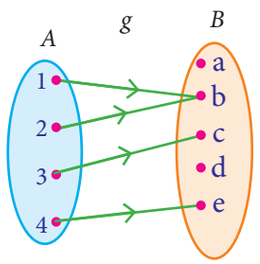


ചിത്രം. 1.22

അതുകൊണ്ട് $f$ ഒരു വൺ-വൺ ഫലനമാണ്.

(ii) $g = \{(1,b), (2,b), (3,c), (4,e)\}$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$g$ എന്നത് $A$ യിൽ നിന്നും $B$ യിലേക്കുള്ള ഒരു ഫലനമാണ്. ഇവിടെ $g(1) = g(2) = b$, പക്ഷേ $1 \neq 2$.



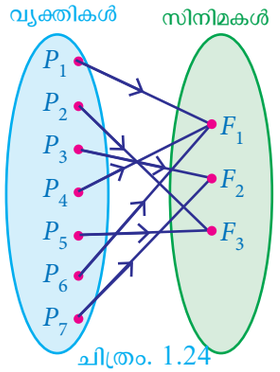
ചിത്രം. 1.23

അതായത് ആദ്യത്തെ ഗണം $A$ യിലുള്ള രണ്ട് വ്യത്യസ്ത അംഗങ്ങൾ 1 കൂടാതെ 2 എന്നിവയ്ക്ക് രണ്ടാമത്തെ ഗണം $B$ യിൽ ഒരേ പ്രതിബിംബം $b$ ആണ് ഉള്ളത് (ചിത്രം 1.23) ഉഅതുകൊണ്ട് $g$ ഒരു വൺ-വൺ ഫലനമല്ല.

### 1.7.2 മെനി-വൺ ഫലനം

ഒരു തിയറ്റർ കോംപ്ലക്സിൽ മൂന്ന് സിനിമകൾ $F_1, F_2, F$ എന്നിവ പ്രദർശിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു. ഏഴു വ്യക്തികൾ ($P_1$ മുതൽ $P_7$) വരെ തിയറ്ററിൽ എത്തി ചിത്രം 1.24 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ ടിക്കറ്റുകൾ വാങ്ങുന്നു.

ചിത്രത്തിന്റെ തെരഞ്ഞെടുപ്പിനെ ഒരു ബന്ധമായി പരിഗണിച്ചാൽ, ആ ബന്ധത്തെ മെനി-വൺ ഫലം എന്നു പറയാം. കാരണം ഒന്നിലധികം വ്യക്തികൾ ഒരേ ചിത്രം (same film) കാണാൻ തെരഞ്ഞെടുത്തേക്കാം.



ചിത്രം. 1.24



1 Relation Malayalam.indd 17 20/01/2023 17:27:00

ഒരു ഫലനം $f : A \to B$ യെ മെനി-വൺ ഫലനം എന്ന് പറയണമെങ്കിൽ $A$ യിലെ രണ്ടോ, അതിലധികമോ അംഗങ്ങൾക്ക് $B$ യിൽ ഒരേ പ്രതിബിംബം ഉണ്ടായിരിക്കണം.

വേറൊരു രീതിയിൽ പറഞ്ഞാൽ ഒരു ഫലനം $f : A \to B$ വൺ-വൺ ഫലനം അല്ലെങ്കിൽ ആ ഫലനത്തെ മെനി-വൺ ഫലനം എന്ന് പറയാം.

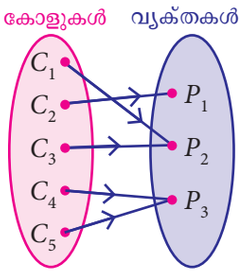
**വിശദീകരണം 11**

$A = \{1,2,3,4\}$ കൂടാതെ $B = \{a, b, c\}$, $f = \{(1,a), (2,a), (3,b), (4,c)\}$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$f$ എന്നത് $A$ യിൽ നിന്നും $B$ യിലേക്കുള്ള ഒരു ഫലനമാണ്. ഇവിടെ $A$ യിലെ വ്യത്യസ്ത അംഗങ്ങൾ 1 കൂടാതെ 2 എന്നിവയ്ക്ക് $B$ യിൽ ഒരേ പ്രതിബിംബം $'a'$ ആണ് ഉള്ളത്. അതുകൊണ്ട് $f$ നെ മെനി-വൺ ഫലനം എന്ന് വിളിക്കാം.

### 1.7.3 ഓൺ ടു ഫലം

ഒരു മൊബൈൽ ഫോണിന്റെ കോൺടാക്ടിൽ മൂന്നു വ്യക്തികളുടെ പേരാണ് ഉള്ളത്. കോൺടാക്റ്റിലെ ഓരോ വ്യക്തിയും കോളുകൾ സ്വീകരിക്കുകയാണെങ്കിൽ, ഫലനത്തെ ഓൺ ടു ഫലനം എന്ന് വിളിക്കാം.



ചിത്രം. 1.25

ഒരു ഫലനം $f : A \to B$ യെ ഓൺടു ഫലനം എന്ന് വിളിക്കണമെങ്കിൽ $f$ ന്റെ രംഗം എന്നത് $f$ ന്റെ സഹമണ്ഡലത്തിന് തുല്യമായിരിക്കും.

മറ്റു വാക്കുകളിൽ പറഞ്ഞാൽ, സഹമണ്ഡലം $B$ യിലുള്ള ഓരോ അംഗത്തിനും മണ്ഡലം $A$ യിൽ ഒരു ബിംബം ഉണ്ടായിരിക്കും.

ഓൺ ടു ഫലനത്തെ സർജക്ടീവ് ഫലനം എന്നും വിളിക്കുന്നു.

**കുറിപ്പ്**

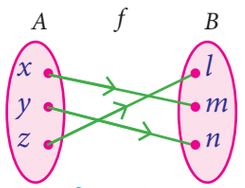
* $f : A \to B$ ഒരു ഓൺ ടു ഫലനം എങ്കിൽ $f$ ന്റെ രംഗം = $B$ ആയിരിക്കും.

**വിശദീകരണം 12**

$A = \{x, y, z\}, B = \{l, m, n\}$ എന്നിരിക്കട്ടെ;

$f$ ന്റെ രംഗം $= \{l, m, n\} = B$ (ചിത്രം 1.26)

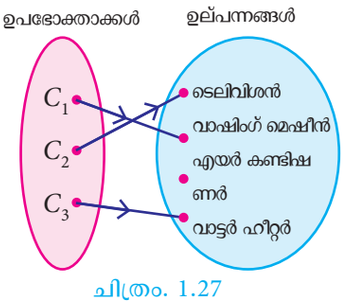
അതുകൊണ്ട് $f$ ഒരു ഓൺ ടു ഫലനം ആണ്.



ചിത്രം. 1.26

### 1.7.4 ഇൻടു ഫലനം

വീട്ടാവശ്യ സാധനങ്ങൾ വിൽക്കുന്ന ഒരു ഷോറൂമിൽ ടെലിവിഷൻ, എയർ കണ്ടിഷണർ, വാഷിംഗ് മെഷിൻ കൂടാതെ വാട്ടർ ഹീറ്റർ എന്നീ വസ്തുക്കൾക്ക് പുതുവർഷ വില്പന ഓഫറായി 20% ഡിസ്കൗണ്ട് നൽകുന്നുണ്ട്. $C_1$, $C_2$, $C_3$ എന്നീ മൂന്ന് ഉപഭോക്താക്കളുടെ മുകളിൽ പറഞ്ഞ വസ്തുക്കളുടെ തെരഞ്ഞെടുപ്പിനെ ഒരു ഫലനമായി പരിഗണിച്ചാൽ, അടുത്ത് കാണുന്ന ചിത്രം (ചിത്രം 1.27) ഒരു ഇൻടു ഫലനത്തെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു.



ചിത്രം. 1.27

ശൈത്യകാലത്ത് ആളുകൾ സാധാരണയായി എയർ കണ്ടിഷണർ വാങ്ങാൻ താല്പര്യപ്പെടില്ല. ഇവിടെ എയർ കണ്ടിഷണർ ഒരു ഉപഭോക്താവാലും തെരഞ്ഞെടുക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ല. ഇത് ഇൻടു ഫലനത്തിന് ഒരു ഉദാഹരണമാണ്.



1 Relation Malayalam.indd 18 20/01/2023 17:27:01

ഒരു ഫലനം $f : A \to B$ യെ ഒരു ഇൻടു ഫലനം എന്നു പറയണമെങ്കിൽ $A$ യിലെ ഒരു അംഗത്തിന്റെയും പ്രതിബിംബം ആകാത്ത, കുറഞ്ഞത് ഒരു അംഗമെങ്കിലും $B$ യിൽ ഉണ്ടായിരിക്കണം.

അതായത് $f$ ന്റെ രംഗം എന്നത് $f$ ന്റെ സഹമണ്ഡലത്തിന്റെ ഉചിതോപഗണം ആകുന്നു.

വേറൊരു രീതിയിൽ പറഞ്ഞാൽ, ഒരു ഫലനം $f : A \to B$ എന്നത് ഓൺടു ഫലനം അല്ലെങ്കിൽ ആ ഫലനത്തെ ഇൻടു ഫലനം എന്നു പറയാം.

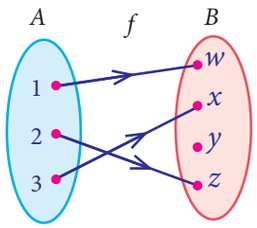
**വിശദീകരണം 13**

$A = \{1,2,3,\}$ കൂടാതെ $B = \{w, x, y, z\}$; $f = \{(1, w), (2, z), (3, x)\}$

ഇവിടെ $f$ ന്റെ രംഗം $f = \{w,\ x,\ z\} \subset B$ (ചിത്രം.1.28)

അതായത്, $f$ ഒരു ഇൻടു ഫലനം.

ശ്രദ്ധിക്കുക: $y \in B$ എന്നത് $A$ യിലെ ഒരംഗത്തിന്റെയും പ്രതിബിംബം അല്ല.



ചിത്രം. 1.28

### 1.7.5 ബൈജക്ഷൻ

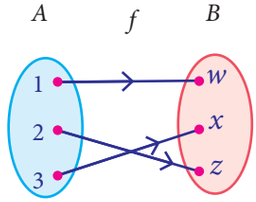
ഒരു വൃത്തം പരിഗണിക്കുക. വൃത്തത്തിലുള്ള ഇംഗ്ലീഷ് അക്ഷരമാലയിലെ ഓരോ അക്ഷരവും വൃത്തത്തിന്റെ ആന്തരഭാഗത്തു നിന്നും ബാഹ്യഭാഗത്തേയ്ക്ക് വരുമ്പോൾ മാറപ്പെടുന്നു. അതായത് $A \to D$, $B \to E$, $C \to F$, ... $Z \to C$. നാം ഈ വൃത്തത്തെ സൈഫർ വൃത്തം എന്ന് വിളിക്കുന്നു. (ചിത്രം 1.29). ഈ രീതിയിൽ നാം 'HELLO' എന്ന വാക്കിനെ മാറ്റാൻ ശ്രമിച്ചാൽ 'KHOOR' എന്ന് ലഭിക്കുന്നു. ഇപ്പോൾ നാം അതേ വൃത്തം ഉപയോഗിച്ച് ബാഹ്യഅക്ഷരങ്ങൾക്ക് പകരം ആന്തരിക അക്ഷരങ്ങൾ കൊടുത്താൻ 'HELLO'. എന്ന വാക്ക് നമുക്ക് തിരികെ ലഭിക്കുന്നു. ഇങ്ങനെ ഒരു രൂപത്തിൽ നിന്നും മറ്റൊരു രൂപത്തിലേക്ക് മാറ്റുന്നതും, ആവശ്യമുള്ള വിവരങ്ങൾ മടക്കി നൽകുന്നതുമായ ഈ പ്രക്രിയയെ ബൈജക്ഷൻ എന്ന് വിളിക്കുന്നു. ക്രിപ്റ്റോഗ്രാഫി എന്ന രഹസ്യകോഡുകളുടെ പഠനത്തിൽ ഈ പ്രക്രിയ വ്യാപകമായി ഉപയോഗിക്കുന്നു.



സൈഫർ വൃത്തം
ചിത്രം. 1.29

ഒരു ഫലനം $f : A \to B$ വൺ-വൺ ഉം, ഓൺ ടു വും ആണെങ്കിൽ $f$ നെ $A$ ൽ നിന്നും $B$ യിലേക്കുള്ള ബൈജക്ഷൻ എന്ന് പറയാം.

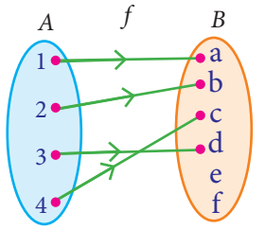
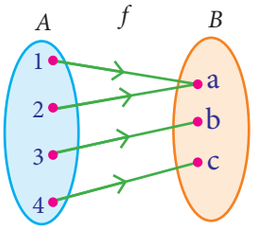
**വിശദീകരണം 14**

| വൺ-വൺ ഓൺടു ഫലനം (Bijection) | |
|---|---|
|  ചിത്രം. 1.30 | $A$ യിലെ വ്യത്യസ്ത അംഗങ്ങൾക്ക് $B$ യിൽ വ്യത്യസ്ത പ്രതിബിംബങ്ങൾ ഉണ്ട്. കൂടാതെ $B$ യിലെ ഓരോ അംഗത്തിനും $A$ യിൽ ബിംബങ്ങൾ ഉണ്ട്. |



1 Relation Malayalam.indd 19 20/01/2023 17:27:02

**വിശദീകരണം 15**

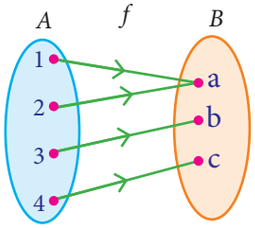
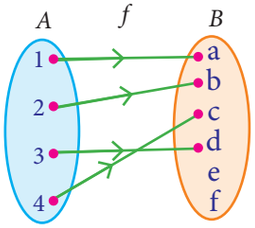
| വൺ-വൺ | മെനി വൺ |
|---|---|
|  ചിത്രം. 1.31 |  ചിത്രം. 1.32 |
| A യിലെ വ്യത്യസ്ത അംഗങ്ങൾക്ക് B യിൽ വ്യത്യസ്ത പ്രതിബിംബങ്ങൾ ഉണ്ട്. | A യിലെ രണ്ടോ അതിലധികമോ അംഗങ്ങൾക്ക് B യിൽ ഒരേ പ്രതിബിംബം ആണ് ഉള്ളത്. |

**കുറിപ്പ്**

* ഒരു വൺ-വൺ ഓൺടു ഫലനത്തെ ഒരു വൺ-വൺ സാദൃശ്യം എന്നും വിളിക്കുന്നു.

**ചിന്തിക്കുക**

വൺ ടു മെനി എന്ന ഫലനം സാധ്യമാണോ?

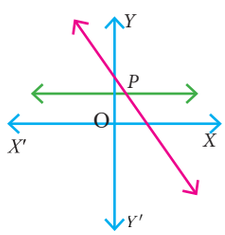
| ഓൺടു | ഇൻ ടു |
|---|---|
|  ചിത്രം. 1.33 |  ചിത്രം. 1.34 |
| $f$ ന്റെ രംഗം = സഹമണ്ഡലം ($B$ യിലെ ഓരോ അംഗത്തിനും $A$ യിൽ ബിംബം ഉണ്ട്) | $f$ ന്റെ രംഗം സഹമണ്ഡലത്തിന്റെ ഉചിതോപഗണം ആകുന്നു. ($A$ യിലെ ഒരംഗത്തിന്റെയും പ്രതിബിംബം ആകാത്ത കുറഞ്ഞത് ഒരു അംഗമെങ്കിലും $B$ യിൽ ഉണ്ടായിരിക്കണം.) |

തന്നിട്ടുള്ള ഫലനം വൺ-വൺ ആണോ അല്ലയോ എന്ന് കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് താഴെ തന്നിട്ടുള്ള തിരശ്ചീന രേഖാ പരീക്ഷണം ഉപയോഗപ്രദമായിരിക്കും.

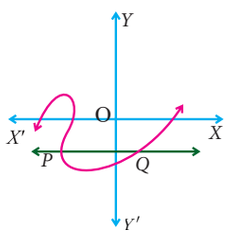
### 1.7.6 തിരശ്ചീന രേഖാ പരീക്ഷണം

ലംബ രേഖാ പരീക്ഷണത്തെപ്പറ്റി നാം മുൻപേ കണ്ടു കഴിഞ്ഞു. ഇപ്പോൾ നമുക്ക് തിരശ്ചീന രേഖാ പരീക്ഷണത്തെപ്പറ്റി നോക്കാം. ഒരു ഗ്രാഫിൽ പ്രതിനിധീകരിച്ചിരിക്കുന്ന ഫലനത്തെ വൺ-വൺ ഫലനം എന്നു പറയണമെങ്കിൽ, ഓരോ തിരശ്ചീന രേഖയും ഗ്രാഫിലെ വക്രരേഖയെ ഒരേയൊരു ബിന്ദുവിൽ മാത്രമേ ഛേദിക്കാവൂ.

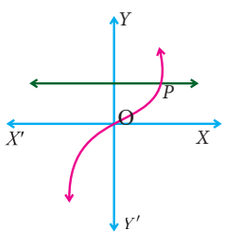
**ഉദാ 1.12 :** തിരശ്ചീന രേഖാ പരീക്ഷണം ഉപയോഗിച്ച് ((ചിത്രം .1.35(a), 1.35(b), 1.35(c)), താഴെ കാണുന്ന ഫലനങ്ങളിൽ വൺ-വൺ ഫലനം ഏതൊക്കെയാണെന്ന് നിർണ്ണയിക്കുക.



ചിത്രം. 1.35(a)



ചിത്രം. 1.35(b)



ചിത്രം. 1.35(c)

**നിർദ്ധാരണം** ചിത്രം.1.35(a) ചിത്രം.1.35(c) എന്നിവയിലെ വക്രരേഖകൾ ഒരു വൺ-വൺ ഫലനത്തെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. കാരണം തിരശ്ചീനരേഖ വക്രരേഖയെ ഒരേ ഒരു ബിന്ദു $P$ യിൽ മാത്രമേ ഛേദിക്കുന്നുള്ളൂ..

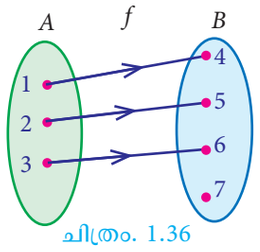
ചിത്രം.1.35(b) യിലെ വക്രരേഖ ഒരു വൺ-വൺ ഫലനത്തെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നില്ല. കാരണം തിരശ്ചീന രേഖ വക്രരേഖയെ $P$, $Q$ എന്നീ രണ്ട് ബിന്ദുക്കളിൽ ഛേദിക്കുന്നു.



1 Relation Malayalam.indd 20 20/01/2023 17:27:04

**ഉദാ 1.13 :** $A=\{1,2,3\}$, $B=\{4,5,6,7\}$ കൂടാതെ $f=\{(1,4),(2,5),(3,6)\}$ എന്നത് $A$ യിൽ നിന്നും $B$ യിലേക്കുള്ള ഒരു ഫലനം ആണ്. $f$ ഒരു വൺ വൺ ഫലനം പക്ഷേ ഓൺ ടു ഫലനം അല്ല എന്ന് തെളിയിക്കുക.

**നിർദ്ധാരണം** $A=\{1,2,3\}$, $B=\{4,5,6,7\}$; $f=\{(1,4),(2,5),(3,6)\}$



ചിത്രം. 1.36

$f$ എന്നത് $A$ യിൽ നിന്നും $B$ യിലേക്കുള്ള ഒരു ഫലനം ആണ്. മാത്രമല്ല $A$ യിലെ വ്യത്യസ്ത അംഗങ്ങൾക്ക് $B$ യിൽ വ്യത്യസ്ത പ്രതിബിംബങ്ങളാണ് ഉള്ളത്. അതുകൊണ്ട് $f$ എന്നത് ഒരു വൺ-വൺ ഫലനം ആണ്. സഹമണ്ഡലത്തിലെ 7 എന്ന അംഗത്തിന് മണ്ഡലത്തിൽ ഒരു ബിംബവും ഇല്ല എന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക. അതുകൊണ്ട് $f$ ഒരു ഓൺടു ഫലനം അല്ല.

അതായത് $f$ ഒരു വൺ-വൺ ഫലനം പക്ഷേ ഓൺടു ഫലനം അല്ല.

**ഉദാ 1.14 :** $A=\{-2,-1,0,1,2\}$ കൂടാതെ $f:A\to B$ ഒരു ഓൺ ടു ഫലനം. ഇതിനെ $f(x)=x^2+x+1$ എന്ന് നിർവ്വചിച്ചിട്ടുണ്ട്. എങ്കിൽ $B$ കാണുക..

**നിർദ്ധാരണം** തന്നിട്ടുള്ളത് $A=\{-2,-1,0,1,2\}$ കൂടാതെ $f(x)=x^2+x+1$.

$$f(-2)=(-2)^2+(-2)+1=3;\quad f(-1)=(-1)^2+(-1)+1=1$$
$$f(0)=0^2+0+1=1;\qquad f(1)=1^2+1+1=3$$
$$f(2)=2^2+2+1=7$$

അതുകൊണ്ട്, $B=\{1,\ 3,\ 7\}$.

**ഉദാ 1.15 :** $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ എന്നത് $f(x)=3x+2, x\in\mathbb{N}$ എന്ന് നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുള്ള ഒരു ഫലനം

(i) 1, 2, 3 എന്നിവയുടെ പ്രതിബിംബങ്ങൾ കാണുക (ii) 29, 53 എന്നിവയുടെ ബിംബങ്ങൾ കാണുക

(ii) ഫലനത്തിന്റെ തരം നിർമ്മിക്കുക

**നിർദ്ധാരണം** $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ എന്ന ഫലനത്തെ $f(x)=3x+2$ എന്ന് നിർവ്വചിച്ചിട്ടുണ്ട്.

(i) If $x=1$, $f(1)=3(1)+2=5$

If $x=2$, $f(2)=3(2)+2=8$

If $x=3$, $f(3)=3(3)+2=11$

1, 2, 3 എന്നിവയുടെ പ്രതിബിംബങ്ങൾ യഥാക്രമം 5, 8, 11 ആകുന്നു.

(ii) 29 ന്റെ ബിംബം $x$ ആണെങ്കിൽ, $f(x)=29$ ആയിരിക്കും. അതായത് $3x+2=29$

$3x=27\Rightarrow x=9$.

അതുപോലെ 53 ന്റെ ബിംബം $x$ ആണെങ്കിൽ $f(x)=53$. അതായത് $3x+2=53$

$3x=51\Rightarrow x=17$.

അതുകൊണ്ട് 29, 53 എന്നിവയുടെ ബിംബങ്ങൾ യഥാക്രമം 9, 17 ആകുന്നു.

(iii) $\mathbb{N}$ ലെ വ്യത്യസ്ത അംഗങ്ങൾക്ക് സഹമണ്ഡലത്തിൽ വ്യത്യസ്ത പ്രതിബിംബങ്ങളാണ് ഉള്ളത്. അതുകൊണ്ട് $f$ ഒരു വൺ-വൺ ഫലനമാണ്..

$f$ ന്റെ സഹമണ്ഡലം $N$ ആകുന്നു.

പക്ഷേ $f$ ന്റെ രംഗം = {5, 8, 11, 14, 17, ...} ഇത് $N$ ന്റെ ഉചിതോപഗണം ആകുന്നു.

അതുകൊണ്ട് $f$ ഒരു ഓൺടു ഫലനം അല്ല. അതായത് $f$ഒരു ഇൻടു ഫലനം ആണ്.

അതിനാൽ $f$ ഒരു വൺ-വൺ കൂടാതെ ഇൻടു ഫലനം.



1 Relation Malayalam.indd 21 20/01/2023 17:27:07

**ഉദാ 1.16 :** ഫോറൻസിക് ശാസ്ത്രജ്ഞർക്ക് ഒരു വ്യക്തിയുടെ തുടയെല്ലിന്റെ നീളത്തെ അടിസ്ഥാനമാക്കി അവരുടെ ഉയരം (സെ.മീ.) നിർണ്ണയിക്കാൻ കഴിയും. അതിന് അവർ സാധാരണയായി $h(b) = 2 \cdot 47b + 54 \cdot 10$, എന്ന ഫലനം ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഇവിടെ $b$ എന്നത് തുടയെല്ലിന്റെ നീളം ആകുന്നു. എങ്കിൽ.

(i) ഫലനം $h$ എന്നത് വൺ-വൺ ഫലനമാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക

(ii) തുടയെല്ലിന്റെ നീളം 50 സെ.മീറ്ററുകൾ ഉള്ള ഒരു വ്യക്തിയുടെ ഉയരം കാണുക.

(iii) ഉയരം $147 \cdot 96$ സെ.മീറ്ററുകൾ ഉള്ള ഒരു വ്യക്തിയുടെ തുടയെല്ലിന്റെ നീളം കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം** (i) $h$ ഒരു വൺ-വൺ ഫലനം ആണോ എന്ന് പരിശോധിക്കണമെങ്കിൽ, $h(b_1) = h(b_2)$ എന്ന് അനുമാനിക്കുക.

എങ്കിൽ , $2 \cdot 47b_1 + 54 \cdot 10 = 2 \cdot 47b_2 + 54 \cdot 10$

$$2 \cdot 47b_1 = 2 \cdot 47b_2 \Rightarrow b_1 = b_2$$

അതായത്, $h(b_1) = h(b_2) \Rightarrow b_1 = b_2$. അതുകൊണ്ട് $h$ ഒരു വൺ-വൺ ഫലനം ആണ്.

(ii) തുടയെല്ലിന്റെ നീളം $b = 50$ സെ.മീ. എങ്കിൽ ഉയരം
$h(50) = (2 \cdot 47 \times 50) + 54 \cdot 10 = 177 \cdot 6$ സെ.മീറ്ററുകൾ.

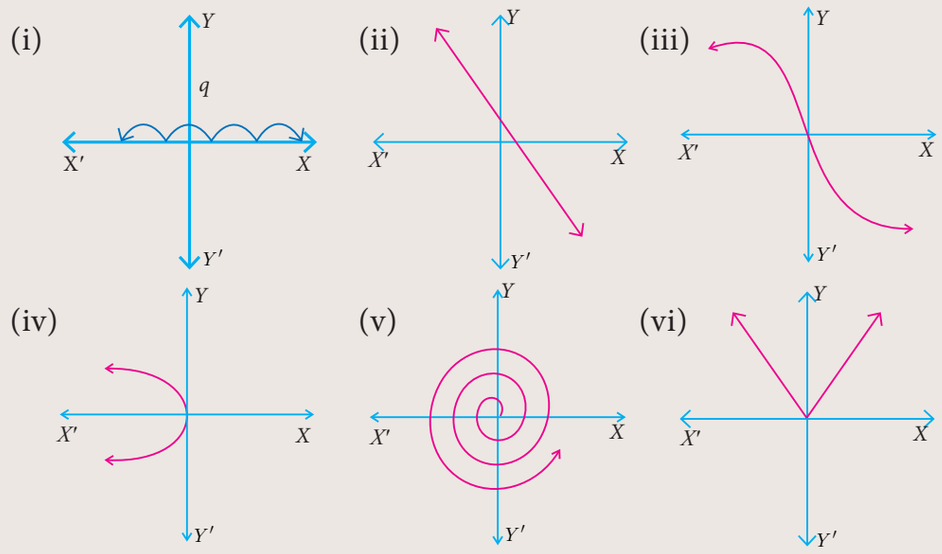
(iii) വ്യക്തിയുടെ ഉയരം $147 \cdot 96$ സെ.മീറ്ററുകൾ എങ്കിൽ $h(b) = 147 \cdot 96$, അതുകൊണ്ട് തുടയെല്ലിന്റെ നീളം $2 \cdot 47b + 54 \cdot 10 = 147 \cdot 96$.

$$b = \frac{93 \cdot 86}{2 \cdot 47} = 38$$

അതുകൊണ്ട്, തുടയെല്ലിന്റെ നീളം 38 സെ.മീറ്ററുകൾ.

### പ്രവർത്തി 3

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള വക്ര രേഖകൾ ഒരു ഫലനത്തെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നുണ്ടോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക. ഫലനമാണെങ്കിൽ അത് വൺ-വൺ ഫലനമാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.? (Hint: ലംബ രേഖ, തിരശ്ചീനരേഖാ പരീക്ഷണം ഉപയോഗിച്ച്)




## 1.8 ഫലനത്തിന്റെ പ്രത്യേക തരങ്ങൾ

ഫലനത്തിന്റെ ചില പ്രത്യേക തരങ്ങൾ വളരെ പ്രയോജനപ്രദമായവയാണ്. അവയിൽ ചിലത് താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. നമുക്ക് അവയെ പറ്റി ചർച്ച ചെയ്യാം.

(i) സ്ഥിര ഫലനം (ii) അനന്യത ഫലനം (iii) വാസ്തവിക മൂല്യ ഫലനം

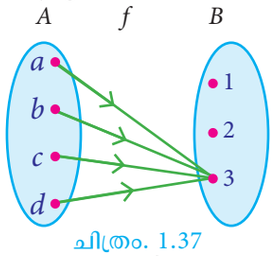


1 Relation Malayalam.indd 22 20/01/2023 17:27:10

**(i) സ്ഥിര ഫലനം**

ഫലനം $f : A \to B$ യെ ഒരു സ്ഥിര ഫലനം എന്നു പറയണമെങ്കിൽ, $f$ ന്റെ രംഗത്തിൽ ഒരേ ഒരു അംഗം മാത്രമേ ഉണ്ടാകാൻ പാടുള്ളൂ. അതായത് $f(x) = c$, എല്ലാ $x \in A$ കൂടാതെ ചില സ്ഥിര മൂല്യം $c \in B$.

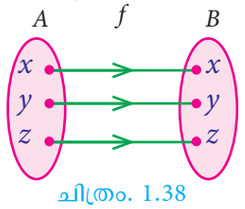
**വിശദീകരണം 16**



ചിത്രം. 1.37

ചിത്രം 1.37-ൽ നിന്നും, $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $f = \{(a, 3), (b, 3), (c, 3), (d, 3)\}$ ആകുന്നു. കൂടാതെ, $f(x) = 3$ ഓരോ $x \in A$, യ്ക്കും $f = \{3\}$, അതുകൊണ്ട് $f$ ഒരു സ്ഥിരഫലനം ആകുന്നു.

**(ii) അനന്യത ഫലനം**



ചിത്രം. 1.38

$A$ ശൂന്യമല്ലാത്ത ഒരു ഗണം എന്നിരിക്കട്ടെ. എങ്കിൽ എല്ലാ $x \in A$ യ്ക്കും $f(x) = x$ എന്ന് നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്ന ഫലനം $f : A \to A$ എന്നത് $A$ യിലുള്ള അനന്യത ഫലനം എന്ന് വിളിക്കപ്പെടുന്നു. ഇതിനെ $I_A$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം.

**വിശദീകരണം 17**

$A = \{a, b, c\}$ എങ്കിൽ $f = I_A = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$ എന്നത് $A$ യിലുള്ള ഒരു അനന്യത ഫലനം ആണ്.

**ചിന്തിക്കുക**

അനന്യത ഫലനം ഒരു വൺ -വൺ ഫലനമാണോ?

**(iii) വാസ്തവിക മൂല്യ ഫലനം**

ഒരു ഫലം $f : A \to B$ യെ ഒരു വാസ്തവിക മൂല്യഫലനം എന്ന് പറയണമെങ്കിൽ $f$ ന്റെ രംഗം $R$ എന്നത് വാസ്തവിക സംഖ്യകളുടെ ഉപഗണം ആയിരിക്കണം. അതായത് $f(a) \subseteq \mathbb{R}$, $\forall\, a \in A$.

**പുരോഗതി പരിശോധന**

**ശരിയോ തെറ്റോ എന്ന് പ്രസ്താവിക്കുക..**

1. എല്ലാ വൺ-വൺ ഫലനങ്ങളും ഓൺടു ഫലനങ്ങളാണ്.
2. $n(A) = 4$ കൂടാതെ, $n(B) = 3$ എങ്കിൽ A യിൽ നിന്നും B യിലേക്ക് ഒരു വൺ-വൺ ഫലനവും ഉണ്ടായിരിക്കില്ല.
3. എല്ലാ ഓൺ ടു ഫലനങ്ങളും വൺ - വൺ ഫലനങ്ങൾ ആണ്.
4. $n(A) = 4$, $n(B) = 5$ എങ്കിൽ A യിൽ നിന്നും B യിലേക്ക് ഒരു ഓൺ ടു ഫലനവും ഉണ്ടായിരിക്കില്ല.
5. $f$ എന്നത് $A$ യിൽ നിന്നും $B$, യിലേക്കുള്ള ബൈജക്ഷൻ ആണെങ്കിൽ $n(A) = n(B)$.
6. $n(A) = n(B)$, ആയാൽ $f$ എന്നത് $A$ യിൽ നിന്നും $B$ യിലേക്കുള്ള ബൈജക്ഷൻ ആകുന്നു.
7. എല്ലാ സ്ഥിര ഫലനങ്ങളും ബൈജക്ഷനുകൾ ആണ്.

**ഉദാഹരണം 1.17** $f$ എന്നത് $\mathbb{R}$ ൽ നിന്നും $\mathbb{R}$ ലേയ്ക്കുള്ള ഒരു ഫലനം. ഇതിനെ $f(x) = 3x - 5$ എന്ന് നിർവ്വചിച്ചിട്ടുണ്ട്. $(a, 4)$ കൂടാതെ $(1, b)$ എങ്കിൽ $a, b$ എന്നിവയുടെ മൂല്യം കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം** $f(x) = 3x - 5$ എന്നതിനെ $f = \{(x,\ 3x - 5) \mid x \in R\}$ എന്ന് എഴുതാം.

$(a, 4)$ എന്നതിന്റെ അർത്ഥം $a$ യുടെ പ്രതിബിംബം 4 എന്നാകുന്നു. അതായത്, $f(a) = 4$

$$3a - 5 = 4 \quad \Rightarrow a = 3$$



1 Relation Malayalam.indd 23 20/01/2023 17:27:13

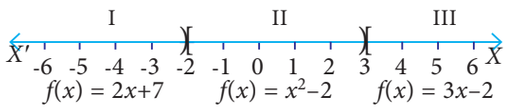
$(1, b)$ എന്നതിന്റെ അർത്ഥം 1 ന്റെ പ്രതിബിംബം $b$ ആകുന്നു. അതായത്, $f(1) = b \Rightarrow b = -2$

$3(1) - 5 = b \Rightarrow b = -2$

**ഉദാഹരണം 1.18** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ എന്ന ഫലനത്തെ $f(x) = \begin{cases} 2x + 7, x < -2 \\ x^2 - 2, -2 \leq x < 3 \\ 3x - 2, x \geq 3 \end{cases}$ എന്ന് നിർവ്വചിച്ചിരിക്കുന്നു. എങ്കിൽ, ഇവയുടെ മൂല്യം കാണുക

(i) $f(4)$ (ii) $f(-2)$ (iii) $f(4) + 2f(1)$ (iv) $\dfrac{f(1) - 3f(4)}{f(-3)}$

**നിർദ്ധാരണം**



ചിത്രം. 1.39

വശത്തു കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ ഇന്റർവെൽ (ഇട വേളകൾ) I, II, III ലെ മൂല്യങ്ങളാൽ ഫലനം $f$ നെ നിർവ്വചിച്ചിരിക്കുന്നു.

തന്നിട്ടുള്ള മൂല്യം $x = a$ യ്ക്ക്, $a$ എന്ന ബിന്ദു സ്ഥിതി ചെയ്യുന്ന ഇന്റർവെൽ കണ്ടുപിടിക്കുക. അതിനുശേഷം ആ ഇന്റർവെല്ലിൽ നിർവ്വചിച്ചിരിക്കുന്ന പ്രത്യേക മൂല്യം ഉപയോഗിച്ച് $f(a)$ കാണുക.

(i) ആദ്യം, $x = 4$ മൂന്നാമത്തെ ഇന്റർവെലിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു എന്ന് കാണാം.
അതുകൊണ്ട്, $f(x) = 3x - 2$; $f(4) = 3(4) - 2 = 10$

(ii) $x = -2$ എന്നത് രണ്ടാമത്തെ ഇന്റർവെലിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു.
അതുകൊണ്ട്, $f(x) = x^2 - 2$; $f(-2) = (-2)^2 - 2 = 2$

(iii) (i), ൽ നിന്നും, $f(4) = 10$.

$f(1)$, കാണുന്നതിന് ആദ്യം $x = 1$ രണ്ടാമത്തെ ഇന്റർവെലിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു എന്ന് നമുക്ക് കാണാം.

അതുകൊണ്ട്, $f(x) = x^2 - 2 \Rightarrow f(1) = 1^2 - 2 = -1$

അതുപോലെ, $f(4) + 2f(1) = 10 + 2(-1) = 8$

(iv) $f(1) = -1$ കൂടാതെ $f(4) = 10$ എന്നറിയാം.

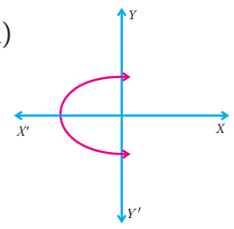
$f(-3)$, കാണുന്നതിന് $x = -3$, ആദ്യത്തെ ഇന്റർവെൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു എന്ന് കാണാം.

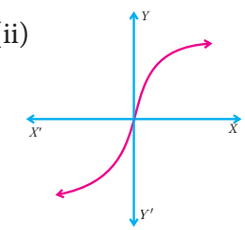
അതുകൊണ്ട്, $f(x) = 2x + 7$; അതിനാൽ, $f(-3) = 2(-3) + 7 = 1$

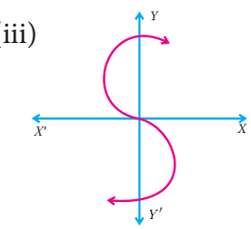
അതിനാൽ, $\dfrac{f(1) - 3f(4)}{f(-3)} = \dfrac{-1 - 3(10)}{1} = -31$

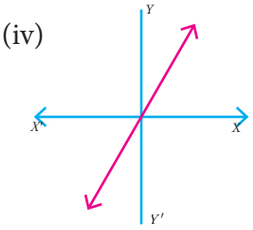
## അഭ്യാസം 1.4

1. താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഗ്രാഫുകൾ ഫലനങ്ങളെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നുണ്ടോ എന്ന് നിർണ്ണയിക്കുക. ഓരോ ഗ്രാഫിനെയും കുറിച്ചുള്ള നിങ്ങളുടെ ഉത്തരത്തിന്റെ കാരണം എഴുതുക.

(i)



(ii)



(iii)



(iv)





1 Relation Malayalam.indd 24 20/01/2023 17:27:17

2. $f : A \to B$ എന്നത് $f(x) = \frac{x}{2} - 1$, എന്ന് നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുള്ള ഒരു ഫലനം. ഇവിടെ $A = \{2,4,6,10,12\}$, $B = \{0,1,2,4,5,9\}$. നെ താഴെ പറയുന്ന വിധം സൂചിപ്പിക്കുക

(i) ക്രമ ജോഡികളുടെ ഗണം; (ii)പട്ടികാരൂപം; (iii) അമ്പടയാള ചിത്രം; (iv) ഗ്രാഫ്

3. ഫലനം $f = \{(1,2),(2,2),(3,2),(4,3),(5,4)\}$ എന്നതിനെ താഴെ കാണുന്ന രീതികളിൽ സൂചിപ്പിക്കുക.

(i) അമ്പടയാള ചിത്രം (ii) പട്ടികാരൂപം (iii) ഗ്രാഫ്

4. ഫലനം $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ എന്നത് $f(x) = 2x - 1$ എന്ന് നിർവ്വചിച്ചിട്ടുണ്ട്. $f$ ഒരു വൺ - വൺ ഫലനം പക്ഷേ ഓൺ ടു ഫലനം അല്ല എന്ന് തെളിയിക്കുക.

5. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ എന്ന ഫലനം $f(m) = m^2 + m + 3$ എന്ന് നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്. $f$ ഒരു വൺ-വൺ ഫലനമെന്ന് തെളിയിക്കുക.

6. $A = \{1,2,3,4\}$ കൂടാതെ $B = \mathbb{N}$. Let $f : A \to B$ എന്നത് $f(x) = x^3$ എന്ന് നിർവ്വചിച്ചിട്ടുണ്ട്. എങ്കിൽ, (i) $f$ ന്റെ രംഗം കാണുക(ii) ഫലനത്തിന്റെ തരം നിർണ്ണയിക്കുക

7. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള രണ്ട് നിർവ്വചനങ്ങളിലും ഫലനം $f$ ബൈജക്ടീവ് ആണോ അല്ലയോ എന്ന് പറയുക. നിങ്ങളുടെ ഉത്തരം വ്യക്തമാക്കുക.

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ എന്നത് $f(x) = 2x + 1$ എന്ന് നിർവ്വചിച്ചിട്ടുണ്ട്.

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ എന്നത് $f(x) = 3 - 4x^2$ എന്ന് നിർവ്വചിച്ചിട്ടുണ്ട്.

8. $A = \{-1,1\}$ കൂടാതെ $B = \{0,2\}$ എന്നിരിക്കട്ടെ. ഫലനം $f : A \to B$ യെ $f(x) = ax + b$ എന്ന് നിർവ്വചിച്ചിരിക്കുന്നു. ഇതൊരു ഓൺടു ഫലനമാണെങ്കിൽ $a$ കൂടാതെ $b$ കാണുക.

9. ഫലനം $f$ നെ $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{if } x > 1 \\ 2 & \text{if } -1 \le x \le 1 \\ x-1 & \text{if } -3 < x < -1 \end{cases}$ ; എന്ന് നിർവ്വചിച്ചിട്ടുണ്ട്. എങ്കിൽ താഴെ പറയുന്നവയുടെ മൂല്യം കാണുക

(i) $f(3)$ (ii) $f(0)$ (iii) $f(-1 \cdot 5)$ (iv) $f(2) + f(-2)$

10. ഫലനം $f : [-5,9] \to \mathbb{R}$ :

$f(x) = \begin{cases} 6x+1 & \text{if } -5 \le x < 2 \\ 5x^2 - 1 & \text{if } 2 \le x < 6 \\ 3x - 4 & \text{if } 6 \le x \le 9 \end{cases}$ എന്ന് നിർവ്വചിച്ചിട്ടുണ്ട്. എങ്കിൽ താഴെ പറയുന്നവയുടെ മൂല്യം കാണുക

(i) $f(-3) + f(2)$ (ii) $f(7) - f(1)$ (iii) $2f(4) + f(8)$ (iv) $\frac{2f(-2) - f(6)}{f(4) + f(-2)}$

11. ഗുരുത്വാകർഷണത്തിന്റെ സ്വാധീനത്തിൽ $t$ സെക്കന്റിൽ ഒരു വസ്തു സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരം s എന്നത് $S(t) = \frac{1}{2}gt^2 + at + b$ $a, b$ എന്നിവ സ്ഥിരാങ്കങ്ങൾ എന്ന് തന്നിട്ടുണ്ട്.ഇവിടെ ($g$ എന്നത് ഗുരുത്വാകർഷണത്താലുള്ള ത്വരണം (acceleration). ഫലനം $S(t)$ എന്നത് വൺ-വൺ ഫലനമാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

12. സെൽഷ്യസ് ($C$) മാത്രകളിലുള്ള താപനിലയെ ഫാരൻഹീറ്റിലേക്ക് ($F$) മാറ്റുന്ന ഫലം '$t$' യെ $t(C) = F$ ഇവിടെ $F = \frac{9}{5}C + 32$ എന്ന് നിർവ്വചിച്ചിരിക്കുന്നു. എങ്കിൽ താഴെ പറയുന്നവ കാണുക.,

(i) $t(0)$ (ii) $t(28)$ (iii) $t(-10)$

(iv) $t(C) = 212$ എങ്കിൽ $C$ യുടെ മൂല്യം കാണുക

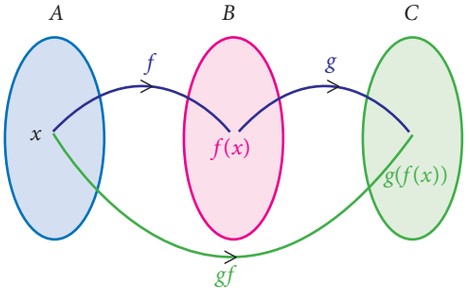
(v) സെൽഷ്യസ് മൂല്യവും ഫാറൻഹീറ്റ് മൂല്യവും തുല്യം എങ്കിൽ താപനില കാണുക.



1 Relation Malayalam.indd 25 20/01/2023 17:27:21

## 1.9 ഫലനങ്ങളുടെ സമ്മിശ്രം അല്ലെങ്കിൽ കോമ്പോസിഷൻ

ഒരു ഡ്രൈവർ കാറിന്റെ വേഗതയെ നിയന്ത്രിക്കുമ്പോൾ ഇന്ധനത്തിന്റെ ഒഴുക്ക് കുറഞ്ഞ് കാറിന്റെ വേഗതയിൽ മാറ്റം ഏർപ്പെടുന്നു. അതുപോലെ രണ്ടു ഫലനങ്ങളുടെ സമ്മിശ്രവും (കോമ്പോസിഷൻ) ഒരു ശൃംഖലാ പ്രതിപ്രവർത്തനം (ചെയിൻ റിയാക്ഷൻ) ആണ്. ഇവിടെ ഫലനങ്ങൾ ഒന്നിനുമേൽ മറ്റൊന്നായി പ്രവർത്തിക്കുന്നു. (ചിത്രം 1.40).



ചിത്രം. 1.40

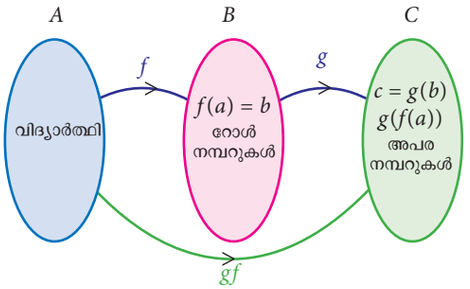
ഫലനം എന്നത് ഒരു പ്രക്രിയ എന്ന ആശയം ഉപയോഗിച്ച നമുക്കിതിനെ കൂടുതൽ വിശദീകരിക്കാം. $f$, $g$ എന്നിവ രണ്ടു ഫലനങ്ങൾ എങ്കിൽ ഫലനങ്ങളുടെ കോമ്പോസിഷൻ $g(f(x))$ (ചിത്രം 1.41) എന്നത് 2 ഘട്ടങ്ങളിലായി രൂപപ്പെടുന്നു.

(i) $f$ ലേക്ക് ഒരു നിക്ഷേപം നൽകുക;

(ii) $f(x)$ എന്ന $f$ ന്റെ ഫലനത്തെ $g$ യുടെ നിക്ഷേപമായി നൽകുക. ഫലനത്തെ $g(f(x))$ എന്ന് നിർവ്വചിക്കാം.

### വിശദീകരണം

പത്താം ക്ലാസ്സ് പൊതുപരീക്ഷ എഴുതിയ വിദ്യാർത്ഥികളുടെ ഗണത്തെ $A$ എന്നെടുക്കാം. പരീക്ഷ എഴുതുന്ന ഓരോ കുട്ടിക്കും ഒരു റോൾ നമ്പർ പരീക്ഷാബോർഡ് നിശ്ചയിച്ചിട്ടുണ്ട്. പരീക്ഷയുടെ രഹസ്യസ്വഭാവം സൂക്ഷിക്കുന്നതിനായി പരീക്ഷാബോർഡ് യഥാർത്ഥ റോൾ നമ്പറുകൾ മറച്ച് അപര നമ്പർ വിദ്യാർത്ഥികൾക്ക് നൽകുന്നു.



ചിത്രം. 1.41

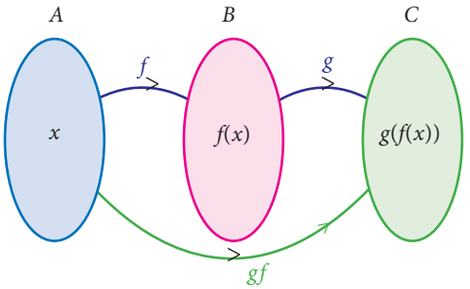
$A$ എന്നത് പൊതു പരീക്ഷ എഴുതുന്ന കുട്ടികളുടെ ഗണം. ഇവിടെ $B \subseteq \mathbb{N}$ എന്നത് യഥാർത്ഥ റോൾ നമ്പറുകളുടെ ഗണവും $C \subseteq \mathbb{N}$ എന്നത് അപര ക്രമനമ്പറുകളുടെ ഗണവും ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. ചിത്രം (1.41) ഇതിൽ നിന്നും $f : A \to B$ കൂടാതെ $g : B \to C$ എന്നീ രണ്ടു ഫലനങ്ങങ്ങൾ ലഭിക്കുന്നു. അതായത് $b = f(a)$ എന്നത് $a$, എന്ന കുട്ടിയുടെ യഥാർത്ഥ റോൾ നമ്പറും, $c = g(b)$ എന്നത് യഥാർത്ഥ റോൾ നമ്പറിന്റെ അപര നമ്പറും ആകുന്നു. ഇവിടെ $a \in A$, $b \in B$ കൂടാതെ $c \in C$.

$c = g(b) = g(f(a))$ എന്ന് നമുക്ക് എഴുതാം.

ഇപ്രകാരം, രണ്ട് ഫലനങ്ങളുടെ സമ്മിശ്രത്തിലൂടെ ഓരോ വിദ്യാർത്ഥിക്കും ഒരു അപര നമ്പർ എന്ന പ്രക്രിയ രൂപപ്പെടുന്നു. ഈ ആശയം താഴെ പറയുന്ന നിർവ്വചനത്തിലേക്ക് നയിക്കുന്നു.

**നിർവചനം**

$f : A \to B$ കൂടാതെ $g : B \to C$ എന്നിവ രണ്ട് ഫലനങ്ങൾ ആയാൽ (ചിത്രം. 1.42) $f$ ന്റെയും $g$ യുടെയും സമ്മിശ്രഫലനം $g \circ f$ നെ $g \circ f(x) = g(f(x))$ എല്ലാ $x \in A$ എന്ന് നിർവ്വചിക്കാം.



ചിത്രം. 1.42

**ഉദാ 1.19 :** $f(x) = 2x + 1$ കൂടാതെ $g(x) = x^2 - 2$ എങ്കിൽ $f \circ g$ കൂടാതെ $g \circ f$ എന്നിവ കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം** $f(x) = 2x + 1$ , $g(x) = x^2 - 2$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 2) = 2(x^2 - 2) + 1 = 2x^2 - 3$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = (2x + 1)^2 - 2 = 4x^2 + 4x - 1$$

അതായത് $f \circ g = 2x^2 - 3$, $g \circ f = 4x^2 + 4x - 1$. ഇതിൽ നിന്നും $f \circ g \neq g \circ f$ എന്ന് നമുക്ക് കാണാം.

**ചിന്തിക്കുക**

If $f(x) = x^m$ കൂടാതെ $g(x) = x^n$ എങ്കിൽ $f \circ g = g \circ f$ ആണോ?



1 Relation Malayalam.indd 26 20/01/2023 17:27:25

**കുറിപ്പ്**

* പൊതുവായി ഏതെങ്കിലും രണ്ട് ഫലനങ്ങൾ $f, g$ എന്നിവക്ക് $f \circ g \neq g \circ f$ ആയിരിക്കും. അതു കൊണ്ട് ഫലനങ്ങളുടെ കോമ്പോസിഷൻ (സമ്മിശ്രം) ക്രമവിനിമേയമല്ല.

**ഉദാ 1.20 :** $f(x)=\sqrt{2x^2-5x+3}$ എന്ന ഫലനത്തെ രണ്ട് ഫലനങ്ങളുടെ സമ്മിശ്രമായി പ്രതിനിധീ കരിക്കുക.

**നിർദ്ധാരണം** $f_2(x)=2x^2-5x+3$ കൂടാതെ $f_1(x)=\sqrt{x}$ എന്ന് എടുക്കുക

ഇപ്പോൾ, $f(x) = \sqrt{2x^2-5x+3} = \sqrt{f_2(x)}$

$= f_1\left[f_2(x)\right] = f_1 f_2(x)$

**ഉദാ 1.21 :** $f(x)=3x-2$, $g(x)=2x+k$ കൂടാതെ $f \circ g = g \circ f$, എങ്കിൽ $k$ യുടെ മൂല്യം കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം** $f(x)=3x-2$, $g(x)=2x+k$

$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(2x+k) = 3(2x+k)-2 = 6x+3k-2$

അതായത്, $f \circ g(x) = 6x+3k-2$.

$g \circ f(x) = g(3x-2) = 2(3x-2)+k$

അതായത്, $g \circ f(x) = 6x-4+k$.

$f \circ g = g \circ f$ എന്ന് തന്നിട്ടുണ്ട്.

അതുകൊണ്ട്, $6x+3k-2 = 6x-4+k$

$6x-6x+3k-k = -4+2 \Rightarrow k = -1$

**നിങ്ങൾക്ക് അറിയാമോ**

$f$ ന്റെ രംഗം $g$ യുടെ മണ്ഡലത്തിന്റെ ഉപഗണം ആണെങ്കിൽ മാത്രമേ $g \circ f(x)$ എന്ന സമ്മിശ്രം സാധ്യമാവുകയുള്ളൂ.

**ഉദാ 1.22 :** $f \circ f(k) = 5$ ഇവിടെ $f(k) = 2k-1$ എങ്കിൽ $k$ യുടെ മൂല്യം കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം** $f \circ f(k) = f(f(k))$

$= 2(2k-1)-1 = 4k-3$.

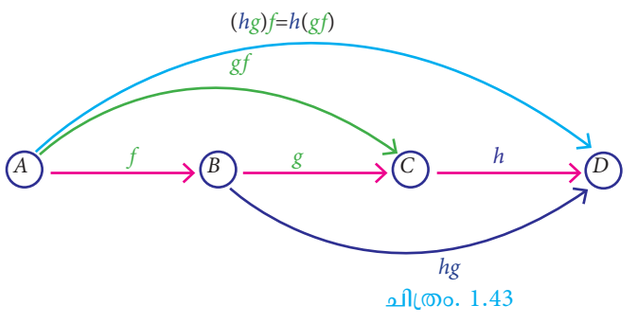
അതായത്, $f \circ f(k) = 4k-3$

പക്ഷേ $f \circ f(k) = 5$ എന്ന് തന്നിട്ടുണ്ട്.

അതുകൊണ്ട് $4k-3 = 5 \Rightarrow k = 2$.

### 1.9.2 മൂന്ന് ഫലനങ്ങളുടെ സമ്മിശ്രം

$A, B, C, D$ എന്നിവ നാല് ഗണങ്ങൾ എന്നിരിക്കട്ടെ. $f : A \to B$, $g : B \to C$ കൂടാതെ $h : C \to D$ എന്നിവ മൂന്ന് ഫലനങ്ങൾ (ചിത്രം 1.43). സമ്മിശ്ര ഫലനങ്ങൾ $f \circ g$ കൂടാതെ $g \circ h$, എന്നിവ ഉപയോഗിച്ച്, പുതിയ രണ്ട് ഫലനങ്ങൾ $(f \circ g) \circ h$ കൂടാതെ $f \circ (g \circ h)$.എന്നിവ നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നു.



ചിത്രം. 1.43

ഫലനങ്ങളുടെ സമ്മിശ്രം ക്രമവിനിമേയമല്ല എന്നത് നാം കണ്ടുകഴിഞ്ഞു. സ്വാഭാവികമായും അടുത്ത ചോദ്യം സംയോജനത്തെക്കുറിച്ചായിരിക്കും.

**കുറിപ്പ്**

* മൂന്ന് ഫലനങ്ങളുടെ സമ്മിശ്രം എപ്പോഴും സംജോയനമായിരിക്കും. അതായത്, $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$



1 Relation Malayalam.indd 27 20/01/2023 17:27:32

**ഉദാ 1.23:** $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = 1 - 2x$ കൂടാതെ $h(x) = 3x$. എങ്കിൽ $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ എന്ന് തെളിയിക്കുക

**നിർദ്ധാരണം** $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = 1 - 2x$, $h(x) = 3x$

ഇപ്പോൾ, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1 - 2x) = 2(1 - 2x) + 3 = 5 - 4x$

അടുത്തത് ,$(f \circ g) \circ h(x) = (f \circ g)(h(x)) = (f \circ g)(3x) = 5 - 12x$ ....(1)

$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(3x) = 1 - 2(3x) = 1 - 6x$

അതുകൊണ്ട് , $f \circ (g \circ h)(x) = f(1 - 6x) = 2(1 - 6x) + 3 = 5 - 12x$ ....(2)

(1) ൽ നിന്നും (2), ൽ നിന്നും $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ എന്ന് നമുക്ക് ലഭിച്ചു.

**ഉദാ 1.24 :** $f(x) = 3x + 1$ , $g(x) = x + 3$ .എന്നിരിക്കട്ടെ. $gff(x) = fgg(x)$, എങ്കിൽ $x$ ന്റെ മൂല്യം കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം** $gff(x) = g\,[f\,\{f\,(x)\}]$ (ഇതിനെ "$g$ of $f$ of $f$ of $x$" എന്ന് വായിക്കാം)

$= g\,[\,f\,(3x + 1)] = g\,[\,3(3x + 1) + 1] = g\,(9x + 4)$

$g\,(9x + 4) = [\,(9x + 4) + 3] = 9x + 7$

$fgg(x) = f\,[g\,\{g\,(x)\}]$ (ഇതിനെ "$f$ of $g$ of $g$ of $x$"എന്ന് വായിക്കാം)

$= f\,[\,g\,(x + 3)] = f\,[\,(x + 3) + 3] = f\,(x + 6)$

$f\,(x + 6) = [\,3(x + 6) + 1\,] = 3x + 19$

ഈ രണ്ട് അളവുകളും തുല്യമായതിനാൽ $9x + 7 = 3x + 19$. എന്ന് ലഭിക്കുന്നു. ഈ സമവാക്യത്തെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുമ്പോൾ $x = 2$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

### പുരോഗതി പരിശോധന

ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുത്തെഴുതുക.

1. ഫലനങ്ങളുടെ സമ്മിശ്രം ക്രമവിനിമേയമാണ്.
   (a) എല്ലായിപ്പോഴും ശരിയാണ് (b) ഒരിക്കലും ശരിയല്ല (c) ചിലപ്പോൾ ശരിയാണ്
2. ഫലനങ്ങളുടെ സമ്മിശ്രം സംയോജനമാണ്
   (a) എല്ലായിപ്പോഴും ശരിയാണ് (b) ഒരിക്കലും ശരിയല്ല (c) ചിലപ്പോൾ ശരിയാണ്

### പ്രവർത്തി 4

$h(x) = f \circ g(x)$, എന്ന് തന്നിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ $h(x)$ ന്റെ പട്ടിക പൂർത്തീകരിക്കുക

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 3 |
| 3 | 1 |
| 4 | 4 |

| $x$ | $g(x)$ |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |
| 3 | 3 |
| 4 | 1 |

| $x$ | $h(x)$ |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 2 | - |
| 3 | - |
| 4 | - |

$h(1)$ എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കാം?

$h(x) = f \circ g(x)$

$h(1) = f \circ g(1)$

$= f(2) = 3$

അതുകൊണ്ട്, $h(1) = 3$



1 Relation Malayalam.indd 28 20/01/2023 17:27:36

## 1.10 രേഖീയ, ദ്വിഘാത, ത്രിതീയ കൂടാതെ വ്യുൽക്രമ ഫലനങ്ങളുടെ ഗ്രാഫുകളെ തിരിച്ചറിയുക

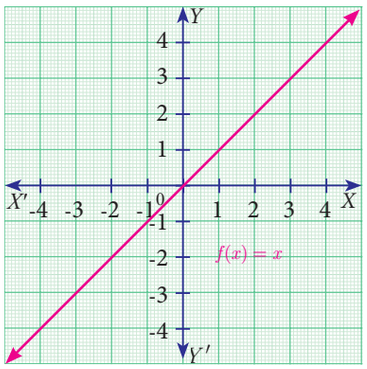
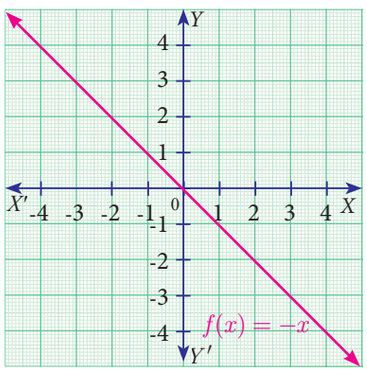
വക്രരേഖകൾ, ഫലനങ്ങൾ എന്നിവയെ ഗ്രാഫിൽ ദൃശ്യവൽക്കരിക്കാം. ആശയങ്ങൾ നല്ല രീതിയിൽ മനസ്സിലാക്കുന്നതിന് ഗ്രാഫുകൾ വളരെയധികം സഹായിക്കുന്നു.

ഈ ഭാഗത്തിൽ നാം ചില ഫലനങ്ങളെ അവയുടെ ഗ്രാഫുകൾ മുഖേന തിരിച്ചറിയുന്നതിനെ കുറിച്ച് ചർച്ച ചെയ്യും. പ്രത്യേകമായും, രേഖീയ, ദ്വിതീയ, ത്രിതീയ കൂടാതെ വ്യുൽക്രമ ഫലനങ്ങൾ എന്നീ ഫലനങ്ങളെ കുറിച്ച് നാം ചർച്ച ചെയ്യും.

### 1.10.1 രേഖീയ ഫലനം

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ എന്ന ഫലനത്തെ $f(x) = mx + c$, $m \neq 0$ എന്ന് നിർവ്വചിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഇതിനെ രേഖീയ ഫലനം എന്ന് പറയാം. ജ്യാമിതീയമായി ഇത് ഗ്രാഫിൽ ഒരു നേർരേഖയെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു.

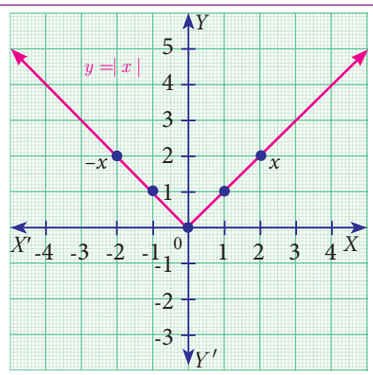
ചില പ്രത്യേക രേഖീയ ഫലനങ്ങളും അവയുടെ ഗ്രാഫുകളും താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

| എണ്ണം | ഫലനം | മണ്ഡലം കൂടാതെ നിർവചനം | ഗ്രാഫ് |
|---|---|---|---|
| 1 | അനന്യത ഫലനം | $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ എന്നതിനെ $f(x) = x$ എന്ന് നിർവ്വചിച്ചിരിക്കുന്നു |   ചിത്രം. 1.44 |
| 2 | സങ്കലന വിപരീത ഫലനം | $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ എന്നതിനെ $f(x) = -x$ എന്ന് നിർവ്വചിച്ചിരിക്കുന്നു |   ചിത്രം. 1.45 |

### 1.10.2 മോഡുലസ് അല്ലെങ്കിൽ കേവല മൂല്യ ഫലനം

$f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ എന്നതിനെ $f(x) = |x|$

$$= \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$ എന്ന് നിർവ്വചിച്ചിരിക്കുന്നു



ചിത്രം. 1.46



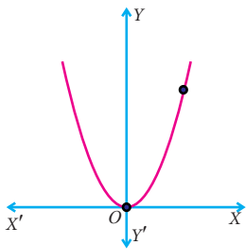
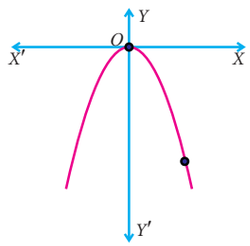
1 Relation Malayalam.indd 29 20/01/2023 17:27:38

**കുറിപ്പ്**

* മോഡുലസ് ഫലനം ഒരു രേഖീയ ഫലനം അല്ല. പക്ഷേ അത് രണ്ട് ഫലനങ്ങൾ $x$ കൂടാതെ $-x$ എന്നിവയുടെ സംയോജനത്തിലൂടെ രൂപപ്പെടുന്ന ഒരു ഫലനം ആണ്.
* രേഖീയ ഫലനങ്ങൾ എല്ലായിപ്പോഴും വൺ-വൺ ഫലനങ്ങളായിരിക്കും. ഇതിന്റെ പ്രയോഗങ്ങൾ ക്രിപ്റ്റോഗ്രാഫിയിലും കൂടാതെ ശാസ്ത്ര-സാങ്കേതിക വിദ്യയുടെ വിവിധ ശാഖകളിലും വ്യാപകമായി ഉപയോഗിക്കുന്നുണ്ട്.

### 1.10.3 ദ്വിഘാത ഫലനം

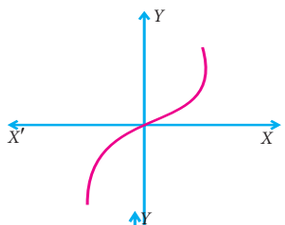
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ എന്ന ഫലനത്തെ $f(x) = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$ എന്ന് നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്. ഇതിനെ ദ്വിഘാത ഫലനം എന്ന് പറയുന്നു. ചില പ്രത്യേക ദ്വിഘാത ഫലനങ്ങളും അവയുടെ ഗ്രാഫുകളും.

| ഫലനം, മണ്ഡലം, രംഗം കൂടാതെ നിർവചനം | ഗ്രാഫ് |
|---|---|
| $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ നെ $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$. $f(x) \in [0, \infty)$ എന്ന് നിർവ്വചിച്ചിരിക്കുന്നു |  ചിത്രം. 1.47(a) |
| $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ നെ $f(x) = -x^2, x \in \mathbb{R}$. $f(x) \in (-\infty, 0]$ എന്ന് നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നു |  ചിത്രം. 1.47(b) |

### 1.10.4 ത്രിതീയ ഫലനം

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ എന്ന ഫലനത്തെ $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$ എന്ന് നിർവചിച്ചിരുന്നാൽ ആ ഫലനത്തെ ത്രിതീയ ഫലനം എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

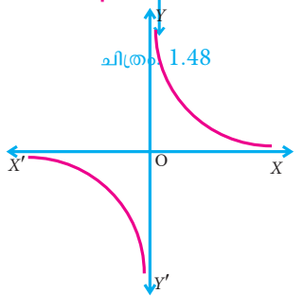
$f(x) = x^3$ ന്റെ ഗ്രാഫ് ചിത്രം.1.48 ൽ കാണാം.



ചിത്രം. 1.48

### 1.10.5 വ്യുൽക്രമഫലനം

ഫലനം $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ നെ $f(x) = \dfrac{1}{x}$ എന്ന് നിർവ്വചിച്ചിരുന്നാൽ ആ ഫലനത്തെ വ്യുൽക്രമഫലനം എന്ന് വിളിക്കുന്നു. (ചിത്രം .1.49).



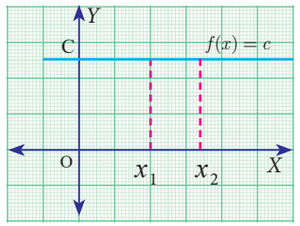
ചിത്രം. 1.49



1 Relation Malayalam.indd 30 20/01/2023 17:27:41

### 1.10.6 സ്ഥിരഫലനം

ഫലനം $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ നെ $f(x) = c$, എല്ലാ $x \in \mathbb{R}$ എന്ന് നിർവചിച്ചിരുന്നാൽ ആ ഫലനത്തെ സ്ഥിര ഫലനം എന്ന് പറയുന്നു. (ചിത്രം.1.50).



ചിത്രം. 1.50

#### പുരോഗതി പരിശോധന

1. സ്ഥിര ഫലനം എന്നത് ഒരു രേഖീയ ഫലനം ആണോ?
2. ദ്വിഘാത ഫലനം ഒരു വൺ-വൺ ഫലനം ആണോ?
3. ത്രിതീയ ഫലനം ഒരു വൺ-വൺ ഫലനമാണോ?
4. വ്യുൽക്രമ ഫലനത്തെ ബൈജക്ഷൻ എന്ന് പറയാൻ സാധിക്കുമോ?
5. $f : A \to B$ ഒരു സ്ഥിരഫലനം എങ്കിൽ $f$ ന്റെ രംഗത്തിൽ _____ അംഗങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കും.

## അഭ്യാസം 1.5

1. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ഫലനങ്ങൾ $f, g$,എന്നിവ ഉപയോഗിച്ച് $f \circ g$, $g \circ f$. എന്നിവ കാണുക. $f \circ g = g \circ f$. ആണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

   (i) $f(x) = x - 6,\ g(x) = x^2$

   (ii) $f(x) = \dfrac{2}{x},\ g(x) = 2x^2 - 1$

   (iii) $f(x) = \dfrac{x+6}{3},\ g(x) = 3 - x$

   (iv) $f(x) = 3 + x,\ g(x) = x - 4$

   (v) $f(x) = 4x^2 - 1,\ g(x) = 1 + x$

2. $f \circ g = g \circ f$ എങ്കിൽ $k$ യുടെ മൂല്യം കാണുക

   (i) $f(x) = 3x + 2,\ g(x) = 6x - k$

   (ii) $f(x) = 2x - k,\ g(x) = 4x + 5$

3. $f(x) = 2x - 1,\ g(x) = \dfrac{x+1}{2}$, എങ്കിൽ $f \circ g = g \circ f = x$ എന്ന് തെളിയിക്കുക

4. $f(x) = x^2 - 1,\ g(x) = x - 2$ കൂടാതെ $g \circ f(a) = 1$ എങ്കിൽ $a$ യുടെ മൂല്യം കാണുക.

5. $A, B, C \subseteq \mathbb{N}$ എന്നിരിക്കട്ടെ. ഫലനം $f : A \to B$ യെ $f(x) = 2x + 1$ കൂടാതെ $g : B \to C$ യെ $g(x) = x^2$ എന്ന് നിർവ്വചിച്ചിട്ടുണ്ട്. എങ്കിൽ $f \circ g$ കൂടാതെ $g \circ f$. എന്നിവയുടെ രംഗം കാണുക

6. $f(x) = x^2 - 1$. എങ്കിൽ (i) $f \circ f$ (ii) $f \circ f \circ f$ എന്നിവ കാണുക

7. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ കൂടാതെ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ എന്നീ ഫലനങ്ങളെ $f(x) = x^5$ കൂടാതെ $g(x) = x^4$ എന്ന് നിർവ്വചിച്ചിട്ടുണ്ട്. എങ്കിൽ $f, g, f \circ g$ എന്നിവ വൺ-വൺ ഫലനം, ആണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.



1 Relation Malayalam.indd 31 20/01/2023 17:27:45

8. $f(x),\ g(x),\ h(x)$ എന്നീ ഫലനങ്ങളെ താഴെ കാണുന്ന വിധം പരിഗണിക്കുക. ഇവിടെ $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

(i) $f(x) = x - 1,\ g(x) = 3x + 1$ കൂടാതെ $h(x) = x^2$

(ii) $f(x) = x^2,\ g(x) = 2x$ കൂടാതെ $h(x) = x + 4$

(iii) $f(x) = x - 4,\ g(x) = x^2$ കൂടാതെ $h(x) = 3x - 5$

9. $f = \{(-1,3),(0,-1),(2,-9)\}$ എന്നത് $\mathbb{Z}$ -ൽ നിന്നും $\mathbb{Z}$ ലേയ്ക്കുള്ള ഒരു രേഖീയ ഫലനം ആണെങ്കിൽ $f(x)$ ന്റെ മൂല്യം കാണുക.

10. വൈദ്യുത സർക്യൂട്ട് സിദ്ധാന്തം അനുസരിച്ച്, $C(t)$ യെ ഒരു രേഖീയ സർക്യൂട്ട് എന്ന് പറയണമെങ്കിൽ അത് $C(at_1 + bt_2) = aC(t_1) + bC(t_2)$, എന്ന സൂപ്പർ പൊസിഷൻ തത്വം തൃപ്തിപ്പെടുത്തണം. ഇവിടെ $a, b$ എന്നിവ സ്ഥിരാങ്കങ്ങൾ. സർക്യൂട്ട് $C(t) = 3t$ രേഖീയമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

## അഭ്യാസം 1.6

Z7JYT

### ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുത്തെഴുതുക

1. $n(A \times B) = 6$ കൂടാതെ $A = \{1,3\}$ എങ്കിൽ $n(B)$ എന്നത്.
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 6

2. $A = \{a,b,p\},\ B = \{2,3\},\ C = \{p,q,r,s\}$ എങ്കിൽ $n[(A \cup C) \times B]$ എന്നത്.
(A) 8 (B) 20 (C) 12 (D) 16

3. $A = \{1,2\}, B = \{1,2,3,4\}, C = \{5,6\}$ കൂടാതെ $D = \{5, 6, 7, 8\}$ എങ്കിൽ താഴെ പറയുന്ന പ്രസ്താവനകളിൽ ഏതാണ് ശരി.
(A) $(A \times C) \subset (B \times D)$ (B) $(B \times D) \subset (A \times C)$
(C) $(A \times B) \subset (A \times D)$ (D) $(D \times A) \subset (B \times A)$

4. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ എന്ന ഗണത്തിൽ നിന്നും $B$ എന്ന ഗണത്തിലേയ്ക്ക് 1024 ബന്ധങ്ങൾ ഉണ്ടെങ്കിൽ $B$ യിലെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം കാണുക.
(A) 3 (B) 2 (C) 4 (D) 8

5. $R = \{(x,x^2) \mid x$ എന്നത് 13 നെക്കാൾ ചെറിയ അഭാജ്യസംഖ്യ എന്ന ബന്ധത്തിന്റെ രംഗം
(A) {2,3,5,7} (B) {2,3,5,7,11}
(C) {4,9,25,49,121} (D) {1,4,9,25,49,121}

6. $(a + 2, 4)$ കൂടാതെ $(5, 2a + b)$ എന്നീ ക്രമജോഡികൾ തുല്യം എങ്കിൽ $(a, b)$ എന്നത്.
(A) (2, –2) (B) (5,1) (C) (2,3) (D) (3, –2)

7. $n(A) = m$ കൂടാതെ $n(B) = n$ എങ്കിൽ $A$ യിൽ നിന്ന് $B$ യിലേക്ക് നിർവചിക്കാവുന്ന ശൂന്യമല്ലാത്ത ബന്ധങ്ങളുടെ ആകെ എണ്ണം
(A) $m^n$ (B) $n^m$ (C) $2^{mn} - 1$ (D) $2^{mn}$

8. $\{(a,8),(6,b)\}$ എന്നത് ഒരു അനന്യത ഫലനത്തെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നുവെങ്കിൽ $a$, $b$ എന്നിവയുടെ മൂല്യം
(A) (8,6) (B) (8,8) (C) (6,8) (D) (6,6)



1 Relation Malayalam.indd 32 20/01/2023 17:27:51

9. $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{4,8,9,10\}$. എന്നിരിക്കട്ടെ $f : A \to B$ എന്ന ഫലനം $f = \{(1,4),(2,8),(3,9),(4,10)\}$ എങ്കിൽ $f$ ഒരു

(A) മെനി-വൺ ഫലനം (B) അനന്യത ഫലനം

(C) വൺ-ടു-വൺ ഫലനം (D) ഇൻടു ഫലനം

10. $f(x) = 2x^2$ കൂടാതെ $g(x) = \dfrac{1}{3x}$,എങ്കിൽ $f \circ g$ എന്നത്

(A) $\dfrac{3}{2x^2}$ (B) $\dfrac{2}{3x^2}$ (C) $\dfrac{2}{9x^2}$ (D) $\dfrac{1}{6x^2}$

11. $f : A \to B$ ഒരു ബൈജക്ടീവ് ഫലനം കൂടാതെ $n(B) = 7$,എങ്കിൽ $n(A)$ എന്നത്

(A) 7 (B) 49 (C) 1 (D) 14

12. $f, g$ എന്നിവ രണ്ടു ഫലനങ്ങൾ

$f = \{(0,1),(2,0),(3,-4),(4,2),(5,7)\}$

$g = \{(0,2),(1,0),(2,4),(-4,2),(7,0)\}$ എന്ന് തന്നിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ $f \circ g$ യുടെ രംഗം

(A) {0,2,3,4,5} (B) {−4,1,0,2,7} (C) {1,2,3,4,5} (D) {0,1,2}

13. $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ എങ്കിൽ

(A) $f(xy) = f(x).f(y)$ (B) $f(xy) \geq f(x).f(y)$

(C) $f(xy) \leq f(x).f(y)$ (D) ഇതിൽ ഒന്നുമല്ല.

14. If $g = \{(1,1),(2,3),(3,5),(4,7)\}$ എന്ന ഫലനം $g(x) = \alpha x + \beta$ എന്ന് നൽകിയാൽ $\alpha$, $\beta$ എന്നിവയുടെ മൂല്യം

(A) (−1,2) (B)(2, −1) (C) (−1, −2) (D) (1,2)

15. $f(x) = (x+1)^3 - (x-1)^3$ എന്നത് ഏതു തരം ഫലനത്തെയാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.

(A) രേഖീയ (B) ത്രിതീയ (C) വ്യുൽക്രമ (D) ദ്വീഘാത

## യൂണിറ്റ് അഭ്യാസം - 1



1. ക്രമജോഡികൾ $(x^2 - 3x,\ y^2 + 4y)$ കൂടാതെ $(-2,5)$ എന്നിവ തുല്യമെങ്കിൽ $x, y$ എന്നിവ കാണുക.

2. കാർട്ടീഷ്യൻ ഗുണനഫലം $A \times A$ യിൽ 9 അംഗങ്ങൾ ഉണ്ട്. ഇതിൽ $(-1, 0)$ കൂടാതെ $(0,1)$ എന്നിവ നമുക്കറിയാം. $A$ എന്ന ഗണം, കൂടാതെ $A \times A$ യിലെ ബാക്കിയുള്ള അംഗങ്ങൾ എന്നിവ കാണുക.

3. $f(x) = \begin{Bmatrix} \sqrt{x-1} & x \geq 1 \\ 4 & x < 1 \end{Bmatrix}$. എന്ന് തന്നിട്ടുണ്ട്. എങ്കിൽ

(i) $f(0)$ (ii) $f(3)$ (iii) $f(a+1)$ നെ $a$ യിൽ ( $a \geq 0$ എന്ന് തന്നിട്ടുണ്ട്)

4. $A = \{9,10,11,12,13,14,15,16,17\}$ കൂടാതെ $f : A \to N$ എന്നത് $f(n) = n$ ന്റ ഏറ്റവും വലിയ അഭാജ്യ ഘടകം n∈A എന്ന് നിർവ്വചിച്ചിട്ടുണ്ട്. എങ്കിൽ $f$ നെ ക്രമജോഡികളുടെ ഗണങ്ങളായി എഴുതുക. കൂടാതെ $f$ ന്റെ രംഗം കാണുക.



1 Relation Malayalam.indd 33 20/01/2023 17:27:56

5. $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}$ എന്ന ഫലനത്തിന്റെ മണ്ഡലം കാണുക.

6. $f(x) = x^2$, $g(x) = 3x$ കൂടാതെ $h(x) = x - 2$ എങ്കിൽ, $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

7. $A = \{1,2\}$ കൂടാതെ $B = \{1,2,3,4\}$, $C = \{5,6\}$ കൂടാതെ $D = \{5,6,7,8\}$. A×C എന്നത് B×D യുടെ ഉപഗണമാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക?

8. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, $x \neq -1$ എങ്കിൽ $f(f(x)) = -\dfrac{1}{x}$, ഇവിടെ $x \neq 0$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

9. $f$ കൂടാതെ $g$ എന്നീ ഫലനങ്ങളെ $f(x) = 6x + 8$; $g(x) = \dfrac{x-2}{3}$ എന്ന് നിർവ്വചിച്ചിട്ടുണ്ട്.

   (i) $gg\left(\dfrac{1}{2}\right)$ ന്റെ മൂല്യം കണ്ടുപിടിക്കുക

   (ii) $gf(x)$ നെ ലഘുരൂപത്തിൽ ആവിഷ്കരിക്കുക.

10. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള വാസ്തവിക ഫലനങ്ങളുടെ മണ്ഡലം എഴുതുക

    (i) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-9}$ (ii) $p(x) = \dfrac{-5}{4x^2+1}$ (iii) $g(x) = \sqrt{x-2}$ (iv) $h(x) = x + 6$



## ഓർമ്മിക്കേണ്ട വസ്തുതകൾ

- $A$ കൂടാതെ $B$ എന്നിവയുടെ കാർട്ടീഷ്യൻ ഗുണനഫലത്തെ $A \times B = \{(a,b) \mid \text{എല്ലാ } a \in A, b \in B\}$ എന്ന് നിർവ്വചിക്കാം
- A യിൽ നിന്നും B യിലേക്കുള്ള ബന്ധം R എല്ലായിപ്പോഴും $A \times B$ യുടെ ഉപഗണം ആയിരിക്കും. അതായത് $R \subseteq A \times B$
- $X$ ൽ നിന്നും $Y$ യിലേക്കുള്ള ബന്ധം $R$ നെ ഒരു ഫലനം എന്ന് പറയണമെങ്കിൽ ഓരോ $x \in X$ നും ഒരേയൊരു $y \in Y$ മാത്രമേ ഉണ്ടാകാവൂ.
- ഒരു ഫലനത്തെ താഴെ കാണുന്ന രീതികളിൽ പ്രതിനിധീകരിക്കാം.
  - (i) അമ്പടയാള ചിത്രം
  - (ii) പട്ടികാ രൂപം
  - (iii) ക്രമജോഡികളുടെ ഗണം
  - (iv) ഗ്രാഫിക്കൽ രൂപം
- ഫലനത്തിന്റെ വിവിധ തരങ്ങൾ
  - (i) വൺ-വൺ ഫലനം
  - (ii) ഓൺ ടു ഫലനം
  - (iii) മെനി-വൺ ഫലനം
  - (iv) ഇൻ ടു ഫലനം
- അനന്യത ഫലനം $f(x) = x$
- വ്യുൽക്രമ ഫലനം $f(x) = \dfrac{1}{x}$



1 Relation Malayalam.indd 34 20/01/2023 17:28:00

- സ്ഥിര ഫലനം $f(x) = c$
- രേഖീയ ഫലനം $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$
- ദ്വിതീയ ഫലനം $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$
- ത്രിതീയ ഫലനം $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$
- $A, B, C,$ എന്നിവ മൂന്ന് ശൂന്യമല്ലാത്ത ഗണങ്ങൾ എന്നിരിക്കട്ടെ. $f : A \to B$ കൂടാതെ $g : B \to C$ എന്നിവ രണ്ടു ഫലനങ്ങൾ എങ്കിൽ $f$ ന്റെയും g യുടെയും സമ്മിശ്ര ഫലനം (കോമ്പോസിഷൻ) ഒരു ഫലനം $g \circ f : A \to C$ എന്നതിനെ $g \circ f(x) = g(f(x))$ എല്ലാ $x \in A$. എന്ന് നിർവചിക്കാം.
- $f$ കൂടാതെ g എന്നിവ രണ്ടു ഫലനങ്ങൾ ആണെങ്കിൽ, പൊതുവായി, $f \circ g \neq g \circ f$
- $f, g$ കൂടാതെ $h$ എന്നിവ ഏതെങ്കിലും മൂന്ന് ഫലനങ്ങൾ ആണെങ്കിൽ $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$

## ICT CORNER

### ICT 1.1

ഘട്ടം 1 : Brower open ചെയ്ത് താഴെ കാണുന്ന URL Link type ചെയ്യുക. (അല്ലെങ്കിൽ) QR Code Scan ചെയ്യുക. GeoGebra യുടെ "RElations and Functions - X (ബന്ധങ്ങളും ഫലനങ്ങളും - X) എന്ന വർക്ക് ബുക്ക് ഭാഗം Open ആകും. വർക്ക് ബുക്കിന്റെ ഇടതുവശത്ത് ബന്ധങ്ങളും ഫലനങ്ങളും എന്ന പാഠഭാഗത്തെ ആസ്പദമാക്കി പല പ്രവർത്തനങ്ങളും കൊടുത്തിരിക്കും. "Functions Identification (ഫലനങ്ങളുടെ തരംതിരിക്കൽ) എന്ന വർക്ക് ഷീറ്റ് ഭാഗം സെലക്ട് ചെയ്യുക.

ഘട്ടം 2. : തന്നിട്ടുള്ള വർക്ക് ഷീറ്റിൽ, ഇടതുവശത്ത് കാണിച്ചിരിക്കുന്ന ഫലനങ്ങൾക്ക് യോജിച്ച Check box കളിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്യുക. ഫലനത്തിനനുസരിച്ചുള്ള ഗ്രാഫ് വലതു വശത്ത് കാണാൻ സാധിക്കും. ഓരോ ഗ്രാഫിനെയും നന്നായി മനസ്സിലാക്കിയ ശേഷം "New Functions (പുതിയ ഫലനങ്ങൾ) എന്ന Option Click ചെയ്യുക. നിങ്ങൾക്ക് മനസ്സിലാകുന്നതു വരെ ഈ പ്രവർത്തനം ചെയ്യുക.

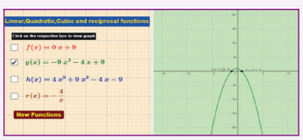
**Step 1**




**Step 2**




**Expected results**

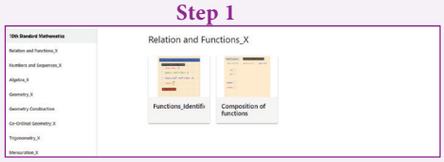



### ICT 1.2

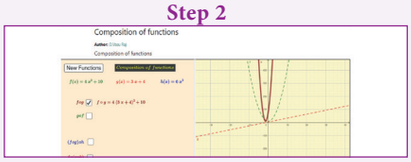
ഘട്ടം 1 : Brower open ചെയ്ത് താഴെ കാണുന്ന URL Link type ചെയ്യുക. (അല്ലെങ്കിൽ) QR Code Scan ചെയ്യുക. GeoGebra യുടെ "RElations and Functions - X (ബന്ധങ്ങളും ഫലനങ്ങളും - X) എന്ന വർക്ക് ബുക്ക് ഭാഗം Open ആകും. വർക്ക് ബുക്കിന്റെ ഇടതുവശത്ത് ബന്ധങ്ങളും ഫലനങ്ങളും എന്ന പാഠഭാഗത്തെ ആസ്പദമാക്കി പല പ്രവർത്തനങ്ങളും കൊടുത്തിരിക്കും. "Composition of Functions (ഫലനങ്ങളുടെ സമ്മിശ്രം) എന്ന വർക്ക് ഷീറ്റ് ഭാഗം സെലക്ട് ചെയ്യുക.

ഘട്ടം 2. : തന്നിട്ടുള്ള വർക്ക് ഷീറ്റിൽ, ഇടതുവശത്ത് കാണിച്ചിരിക്കുന്ന ഫലനങ്ങൾക്ക് യോജിച്ച Check box കളിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്യുക. ഫലനത്തിനനുസരിച്ചുള്ള ഗ്രാഫ് വലതു വശത്ത് കാണാൻ സാധിക്കും. ഓരോ ഗ്രാഫിനെയും നന്നായി മനസ്സിലാക്കിയ ശേഷം "New Functions (പുതിയ ഫലനങ്ങൾ) എന്ന Option Click ചെയ്യുക. നിങ്ങൾക്ക് മനസ്സിലാകുന്നതു വരെ ഈ പ്രവർത്തനം ചെയ്യുക.

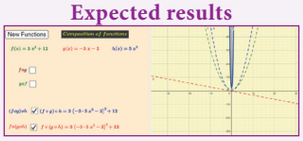
**Step 1**




**Step 2**




**Expected results**




*You can repeat the same steps for other activities*

https://www.geogebra.org/m/jfr2zzgy#chapter/356191

or Scan the QR Code.



1 Relation Malayalam.indd 35 20/01/2023 17:28:02

# 2 സംഖ്യകളും അനുക്രമങ്ങളും

*"I know numbers are beautiful, if they aren't beautiful, nothing is"*
*- Paul Erdos*


Srinivasa Ramanujan
(1887-1920)

ശ്രീനിവാസ രാമാനുജൻ ഇന്ത്യൻ ഗണിത ശാസ്ത്രത്തിലെ ശ്രേഷ്ഠനായ ഒരു വ്യക്തിയാണ്. അദ്ദേഹം ഈറോഡ് എന്ന സ്ഥലത്ത് ഒരു ദരിദ്ര കുടുംബത്തിലാണ് ജനിച്ചത്. മിന്നൽ വേഗത്തിലാണ് അദ്ദേഹം കണക്കുകൾ ചെയ്തിരുന്നത്. ആയിരക്കണക്കിന് അമൂല്യങ്ങളായ സൂത്രങ്ങൾ അദ്ദേഹം കണ്ടുപിടിച്ചിരുന്നു. തന്റെ മൂന്ന് നോട്ടുബുക്കുകളിൽ ഇവ രേഖപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട്. മദ്രാസ് സർവ്വകലാശാലയിൽ അവ ഇന്നും സംരക്ഷിക്കപ്പെടുന്നു. പ്രശസ്തരായ മറ്റു പല ആളുകളുടേയും സഹായത്താൽ മദ്രാസ് സർവകലാശാലയിലെ ഗണിത ശാസ്ത്ര വിഭാഗത്തിൽ ആദ്യത്തെ ഗവേഷക വിദ്യാർത്ഥിയായി. അതിനെ തുടർന്ന് ഇംഗ്ലണ്ടിൽ പോവുകയും അവിടെ ജി.എച്ച്. ഹാർഡിയോടൊപ്പം ചേർന്ന് 1914 മുതൽ 1919 വരെ അഞ്ചുവർഷം പ്രവർത്തിച്ചു.

സംഖ്യാരീതികളെ നിരീക്ഷിക്കുന്നതിൽ അദ്ദേഹത്തിന് പ്രത്യേക താൽപര്യമുണ്ടായിരുന്നു. അതുകൊണ്ടുതന്നെ വിശ്ലേഷക സംഖ്യാ സിദ്ധാന്തത്തിൽ ധാരാളം പുതിയ ഫലങ്ങൾ അദ്ദേഹം കണ്ടുപിടിച്ചു. ഗണിത ശാസ്ത്രത്തിലുള്ള അദ്ദേഹത്തിന്റെ മികവിനെ യൂളർ, ജക്കോബി എന്നീ ആദ്യകാല പ്രശസ്തരായ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞന്മാരോട് ഉപമിക്കാം. രാമാനുജൻ സ്വയം മുപ്പതോളം ഗവേഷണ പ്രബന്ധങ്ങൾ തയ്യാറാക്കിയിട്ടുണ്ട്. അതുകൂടാതെ ജി.എച്ച്. ഹാർഡിയുമായി ചേർന്ന് ഏഴ് ഗവേഷണ പ്രബന്ധങ്ങളും രചിച്ചിട്ടുണ്ട്. മുപ്പത്തി രണ്ട് വർഷങ്ങൾ അടങ്ങിയ ചുരുങ്ങിയ ജീവിത കാലത്തിനിടയിൽ അദ്ദേഹം 3972 സൂത്രങ്ങളും പ്രമേയങ്ങളും കണ്ടുപിടിച്ചു. 1916 ൽ കേംബ്രിഡ്ജ് സർവകലാശാല അദ്ദേഹത്തിന് ഗവേഷണത്തിനുള്ള ബി.എ. ഡിഗ്രി സമ്മാനിച്ചു. അത് ആധുനിക കാലത്തെ പി.എച്ച്. ഡി. ഡിഗ്രിയ്ക്ക് തുല്യമാണ്. സംഖ്യാ സിദ്ധാന്തത്തിലുള്ള അദ്ദേഹത്തിന്റെ സംഭാവനകളെ മാനിച്ച് 1918 -ൽ അദ്ദേഹത്തെ റോയൽ സൊസൈറ്റിയിൽ ചേർത്തു (എഫ്.ആർ.എസ്.)

അദ്ദേഹം ലോകമെമ്പാടുമുള്ള ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞന്മാർക്ക് ഇന്നും പ്രചോദനമേകുന്നു. അടുത്ത കാലത്ത് ഉണ്ടായിട്ടുള്ള പല ഗണിത പ്രവർത്തനങ്ങളിലും ഒരു നൂറ്റാണ്ടിനു മുമ്പുള്ള രാമാനുജന്റെ പ്രവർത്തനങ്ങളുമായി അത്ഭുതകരമായ ബന്ധങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്.

TOHGM

## പഠനഫലങ്ങൾ

- യൂക്ലിഡിന്റെ ഹരണ ഉപസിദ്ധാന്തത്തിന്റെ ആശയം മനസ്സിലാക്കൽ.
- യൂക്ലിഡിന്റെ അൽഗോരിതം മനസ്സിലാക്കൽ.
- യൂക്ലിഡിന്റെ അൽഗോരിതം ഉപയോഗിച്ച് ല.സാ.ഗു, ഉ.സാ.ഭാ കണ്ടുപിടിക്കൽ.
- അരിത്തമാറ്റിക്കിന്റെ അടിസ്ഥാന പ്രമേയത്തെ മനസ്സിലാക്കൽ.
- സർവസമ മോഡുലോ n, സങ്കലന മോഡുലോ n, ഗുണന മോഡുലോ n എന്നിവയെക്കുറിച്ച് മനസ്സിലാക്കൽ.
- അനുക്രമത്തെ നിർവചിക്കൽ, അനുക്രമത്തിന്റെ ഫലനത്തെ മനസ്സിലാക്കൽ.
- കൂട്ടുസമാന്തരശ്രേണി (A.P), ഗുണന ക്രമാനുപാതശ്രേണി (G.P) എന്നിവയെ നിർവ്വചിക്കൽ.
- A.P യുടെ n-ാം പദവും n പദത്തിന്റെ കൂട്ടു തുകയും കണ്ടുപിടിക്കൽ.
- G.P യുടെ n-ാം പദവും n പദത്തിന്റെ കൂട്ടു തുകയും കണ്ടുപിടിക്കൽ.
- $\sum n$ , $\sum n^2$ , $\sum n^3$ മുതലായ പരിമിത ശ്രേണികളുടെ കൂട്ടുതുക നിർണയിക്കൽ.



2 Numbers and Seq.indd 36 20/01/2023 17:32:23

## 2.1 ആമുഖം



ഇഷാംഗോ അസ്ഥിയിലെ നമ്പർ കൊത്തുപണികൾ

ചിത്രം.2.1

സംഖ്യാപഠനം ആയിരക്കണക്കിന് വർഷങ്ങളായി മനുഷ്യന് വിസ്മയമാണ്. ഏകദേശം 2500 വർഷങ്ങൾക്കു മുമ്പ് കാണപ്പെട്ട ലെബാംബോ ഇഷാങ്കോ എല്ലുകളുടെ കണ്ടു പിടിത്തം സാധൂകരിക്കുന്നത് പ്രാചീനകാലം മുതൽക്കു തന്നെ മനുഷ്യൻ അവരുടെ ദൈനംദിന ജീവിതാവശ്യങ്ങൾക്ക് എണ്ണൽ പ്രക്രിയ ഭാഗമാക്കിയിരുന്നു എന്നതാണ്. ഈ എല്ലുകളിൽ ചെറിയ കുഴികൾ ഉണ്ടാക്കി അവർ കൃത്യമായി അക്കാലത്ത് എണ്ണൽ പ്രക്രിയ നടത്തിയിരുന്നു. ഈ രീതി അക്കാലത്ത് ചന്ദ്രമാസ മാറ്റങ്ങളും അതിലൂടെ ഋതുഭേദങ്ങളും മനസ്സിലാക്കാൻ ഉപയോഗിച്ചിരുന്നതായി പലരും വിശ്വസിക്കുന്നു. ഇക്കാരണങ്ങളാൽ, ഈ എല്ലുകൾ പൗരാണിക കാലത്തെ എണ്ണൽ പ്രക്രിയയുടെ ഉപകരണങ്ങളായി കരുതപ്പെടുന്നു. പൗരാണികമായ എണ്ണൽ രീതിയിൽ നിന്നും നാം വളരെയേറെ പുരോഗമിച്ചിരിക്കുന്നു.

പൈഥഗോറസ് മുതൽ ആധുനിക ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞൻമാരെവരെ ഇത്തരത്തിലുള്ള സംഖ്യാക്രമങ്ങൾ ആകർഷിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞനായ യൂക്ലിഡിന്റെ പ്രാമുഖ്യമുള്ള ആശയങ്ങളെ വിശകലനം ചെയ്ത് കൊണ്ട്, നൂതന അങ്കഗണിതത്തിന്റെയും, അനുക്രമങ്ങളുടെയും, പരിമിത ശ്രേണിയെയും പറ്റിയുള്ള പഠനം നാം തുടരേണ്ടതാണ്. ഈ ആശയങ്ങൾ ആകണം നമ്മുടെ മുന്നോട്ടുള്ള ഗണിതശാസ്ത്ര പഠനത്തിന്റെ അടിസ്ഥാന തത്വങ്ങൾ. ഗണിതശാസ്ത്രത്തിന്റെ ഏറ്റവും വിസ്മയകരമായ സംഖ്യ പഠനത്തിലേയ്ക്കുള്ള യാത്ര നമുക്ക് ഇവിടെ തുടങ്ങാം.

## 2.2 യൂക്ലിഡിന്റെ ഹരണ ഉപസിദ്ധാന്തം

യൂക്ലിഡ് എന്ന പ്രമുഖനായ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞൻ എഴുതിയ വളരെ പ്രസിദ്ധമായ ഒരു ഗ്രന്ഥമാണ് "Elements". 13 വാല്യങ്ങളുള്ള ഈ ഗ്രന്ഥത്തിന്റെ ആദ്യത്തെ ആറു വാല്യങ്ങൾ ജ്യാമിതിക്കുവേണ്ടി സമർപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു. ഈ കാരണത്താൽ യൂക്ലിഡിനെ ജ്യാമിതിയുടെ പിതാവ് എന്നു വിളിക്കപ്പെടുന്നു. അടുത്ത കുറെ വാല്യങ്ങളിൽ അദ്ദേഹം സംഖ്യകളുടെ സ്വഭാവ പഠനത്തിനുവേണ്ടിയുള്ള അടിസ്ഥാന തത്വങ്ങൾ വിവരിച്ചിരിക്കുന്നു. അതിലൊന്നാണ് യൂക്ലിഡിന്റെ ഹരണ ഉപസിദ്ധാന്തം. ഈ ഹരണപ്രക്രിയ മുൻകാലത്ത്, സംഖ്യകളെ വിഭജിക്കാൻ ഉപകരിച്ചിരുന്ന ദീർഘഹരണ രീതിയുമായി താരതമ്യം ചെയ്യുമ്പോൾ വളരെ ലഘൂകരിക്കപ്പെട്ട രീതിയാണ്.

നമുക്ക് ഇനി യൂക്ലിഡിന്റെ ഹരണ ഉപസിദ്ധാന്തത്തെയും അതിന്റെ പ്രയോഗത്തേയും പറ്റി യൂക്ലിഡിന്റെ വിഭജന അൽഗൊരിതത്തിലൂടെ വിശകലനം ചെയ്യാം.

ഒരു പ്രധാന സിദ്ധാന്തത്തെ തെളിയിക്കാൻ ഉപകരിക്കുന്ന ഒരു സഹായക ഫലമാണ് ഉപസിദ്ധാന്തം. ഇതിനെ സാധാരണയായി ഒരു ലഘു സിദ്ധാന്തമായും കരുതപ്പെടുന്നു.

### സിദ്ധാന്തം 1 : യൂക്ലിഡിന്റെ ഹരണ ഉപസിദ്ധാന്തം

$a$, $b$ എന്നിവ രണ്ട് ധനപൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾ എന്നിരിക്കട്ടെഎങ്കിൽ $a = bq + r$, $0 \le r < b$. എന്ന പ്രകാരം $q$,$r$ എന്നിങ്ങനെ രണ്ട് പൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾ ഉണ്ട്.

**കുറിപ്പ്**

- ശിഷ്ടം എപ്പോഴും ഹാരകത്തെക്കാൾ കുറവായിരിക്കും.
- $r = 0$ ആണെങ്കിൽ $a = bq$ അങ്ങനെയെങ്കിൽ $b$,$a$ യെ വിഭജിക്കുന്നു.
- അതുപോലെ $b$,$a$ യെ വിഭജിക്കുമ്പോൾ $a = bq$



2 Numbers and Seq.indd 37 20/01/2023 17:32:23

**ഉദാഹരണം 2.1** നമ്മുടെ കയ്യിൽ 34 കേക്കുകൾ ഉണ്ട്. അത് പേക്ക് ചെയ്യാനുള്ള പെട്ടികൾ ഓരോന്നിലും 5 എണ്ണം വീതം നിറയ്ക്കാം. 34 കേക്കുകൾ നിറയ്ക്കാൻ ആവശ്യമായ പെട്ടികളുടെ എണ്ണം എത്ര? ബാക്കി വരുന്ന കേക്കുകളുടെ എണ്ണം എത്ര?

**നിർദ്ധാരണം** 6 പെട്ടികളിൽ 30 കേക്കുകൾ പേക്ക് ചെയ്യാൻ സാധിക്കും. 4 എണ്ണം ബാക്കിയുണ്ട്. ഈ കേക്കുകളുടെ പേക്കിംങ് താഴെ പറയുന്ന രീതിയിൽ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യാം :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 34 | = | 5 | × | 6 | + | 4 |
| ആകെ കേക്കുകളുടെ എണ്ണം | = | ഓരോ പെട്ടിയിലെയും കേക്കുകളുടെ എണ്ണം | × | പെട്ടികളുടെ എണ്ണം | + | ബാക്കി വന്ന കേക്കുകളുടെ എണ്ണം |
| ↓ | | ↓ | | ↓ | | ↓ |
| ഹാര്യം $a$ | = | ഹാരകം $b$ | × | ഹരണഫലം $q$ | + | ശിഷ്ടം $r$ |

**കുറിപ്പ്**

- മുകളിൽ പറഞ്ഞ രീതി ദീർഘഹരണ പ്രക്രിയയുടെ മറ്റൊരു നിർവ്വചനമാകുന്നു. പൂർണ്ണാങ്കങ്ങളായ $q$ ഹരണഫലവും $r$ ശിഷ്ടവുമായി മാറുന്നു.
- ധനപൂർണ്ണാങ്കങ്ങളെ 2 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ ശിഷ്ടം 0 അഥവാ 1 ആയിരിക്കും. അതിനാൽ ഏത് ധന പൂർണ്ണാങ്കങ്ങളും $2k$, $2k+1$ എന്ന രൂപത്തിലായിരിക്കും. ഇവിടെ $k$ എന്നത് പൂർണ്ണാങ്കമാകുന്നു.

യൂക്ലിഡിന്റെ ഹരണ ഉപസിദ്ധാന്തം ഏത് രണ്ട് പൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾക്കും പൊതുവായതാണ്

**യൂക്ലിഡിന്റെ ഹരണ ഉപസിദ്ധാന്തത്തിന്റെ പൊതുവായരൂപം.**

$a, b$ $(b \neq 0)$ എന്നിവ ഏതെങ്കിലും രണ്ട് പൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾ ആണെങ്കിൽ $q, r$ എന്നീ പൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾ താഴെ പറയുന്ന പ്രകാരം രൂപപ്പെടുന്നു. $a = bq + r$, ഇവിടെ $0 \leq r < |b|$ ആകുന്നു.

**ഉദാഹരണം 2.2 :** താഴെ പറയുന്ന ഉദാഹരണങ്ങളിൽ $a$ യെ $b$ കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ ഉണ്ടാകുന്ന ഹരണ ഫലവും ശിഷ്ടവും കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) $a = -12,\ b = 5$ (ii) $a = 17,\ b = -3$ (iii) $a = -19,\ b = -4$

**നിർദ്ധാരണം**

(i) $a = -12,\ b = 5$

യൂക്ലിഡിന്റെ ഹരണ ഉപസിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച്

$a = bq + r$, ഇവിടെ $0 \leq r < |b|$

$12 = 5 \times (-3) + 3 \quad 0 \leq r < |5|$ ആകുന്നു

അതുകൊണ്ട് ഹരണഫലം $q = -3$, ശിഷ്ടം $r = 3$ ആകുന്നു.

(ii) $a = 17 \quad b = -3$

യൂക്ലിഡിന്റെ ഹരണ ഉപസിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച്

$a = bq + r$, ഇവിടെ $0 \leq r < |b|$

$17 = (-3) \times (-5) + 2 \quad 0 \leq r < |-3|$

അതുകൊണ്ട് ഹരണഫലം $q = -5$,

ശിഷ്ടം $r = 2$ ആകുന്നു.

(iii) $a = -19,\ b = -4$

യൂക്ലിഡിന്റെ ഹരണ ഉപസിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച്

**ചിന്തിക്കുക**

ഒരു ധനപൂർണ്ണാങ്കത്തെ 3 കൊണ്ട് വിഭജിക്കുമ്പോൾ

1. സാധ്യമായ ശിഷ്ടങ്ങൾ ഏതൊക്കെ?
2. അതിനെ ഏതുരീതിയിലാണ് എഴുതേണ്ടത്.

**പുരോഗതി പരിശോധന**

താഴെ കാണുന്ന $a, b$ എന്നീ പൂർണ്ണാങ്ക ജോഡികളുടെ $q, r$ നെ $a = bq + r$ എന്ന രൂപത്തിൽ കണ്ടുപിടിക്കുക.

1. $a = 13,\ b = 3$
2. $a = 18,\ b = 4$
3. $a = 21,\ b = -4$
4. $a = -32,\ b = -12$
5. $a = -31,\ b = 7$



2 Numbers and Seq.indd 38 20/01/2023 17:32:26

$a = bq + r$, ഇവിടെ $0 \le r < |b|$

$-19 = (-4) \times (5) + 1 \quad 0 \le r < |-4|$

അതുകൊണ്ട് ഹരണഫലം $q = 5$, ശിഷ്ടം $r = 1$.

**ഉദാഹരണം 2.3 :** ഒരു ഒറ്റ പൂർണ്ണാങ്കത്തിന്റെ വർഗ്ഗം $4q + 1$, $q$ ഒരു പൂ ർണ്ണാങ്കം എന്ന രൂപത്തിൽ ആണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

**നിർദ്ധാരണം** $x$ എന്നത് ഒരു ഒറ്റ പൂർണ്ണാങ്കമാണെന്ന് കരുതുക. ഏതൊരു ഒറ്റ പൂർണ്ണാങ്കവും ഇരട്ട പൂർണ്ണാങ്കത്തേക്കാൾ കൂടുതലായതുകൊണ്ട് നമുക്ക് $x = 2k + 1$, $k$ഒരു പൂർണ്ണാങ്കം എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

$x^2 = (2k + 1)^2$

$\therefore 4k^2 + 4k + 1$

$\therefore 4k(k + 1) + 1$

$4q + 1$, ഇവിടെ $q = k(k + 1)$ പൂർണ്ണാങ്കമാകുന്നു.

## 2.3 യൂക്ലിഡിന്റെ ഹരണ അൽഗോരിതം

കഴിഞ്ഞ ഭാഗത്തിൽ നമ്മൾ യൂക്ലിഡിന്റെ ഹരണ ഉപസിദ്ധാന്തവും അതിന്റെ പ്രയോഗങ്ങളെ കുറിച്ചും പഠിച്ചു. ഇപ്പോൾ യൂക്ലിഡിന്റെ ഹരണ അൽഗോരിതത്തെക്കുറിച്ച് പഠിക്കാം. അൽഗോരിതം എന്ന വാക്ക്, 9-ാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ജീവിച്ചിരുന്ന പേർഷ്യൻ ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞനായ അൽ-ക്വാറിസ്മി എന്ന പേരിൽ നിന്നുമാണ് ഉണ്ടായത്. ശരിയായ ഉത്തരം ലഭിക്കുന്നതുവരെ നേരത്തേ ഉള്ള വഴികളുടെ ഫലങ്ങളെ പടിപടിയായി തിട്ടപ്പെടുത്തുന്ന പ്രക്രിയയാണ് അൽഗോരിതം എന്നു പറയുന്നത്.

യൂക്ലിഡിന്റെ ഹരണ അൽഗോരിഥം രണ്ട് ധനപൂർണ്ണാങ്കത്തിന്റെ H.C.F. (highest common Factor) എളുപ്പത്തിൽ കണ്ടുപിടിക്കാൻ സഹായിക്കുന്നു. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള സിദ്ധാന്തത്തെ തെളിയിക്കാൻ ശ്രമിക്കുക.

### സിദ്ധാന്തം2

$a$, $b$ എന്നത് $a = bq + r$, എന്ന രീതിയിലുള്ള ധനപൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾ ആണെങ്കിൽ $a$, $b$ യുടെ പൊതുഹാരകം $b,r$ ന്റെ പൊതു ഹാരകമാകുന്നു.ഇതുപോലെ തിരിച്ചും ആയിരിക്കും.

### യൂക്ലിഡിന്റെ ഹരണ അൽഗോരിതം

$a,b$ $(a > b)$ എന്ന രണ്ട് ധനപൂർണ്ണാങ്കങ്ങളുടെ HCF കണ്ടുപിടിക്കുക.

**വഴി 1:** യൂക്ലിഡിന്റെ ഹരണ ഉപസിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച് $a = bq + r$ ; $0 \le r < b$. ഇവിടെ $q$ ഹരണ ഫലവും, $r$ ശിഷ്ടവുമാകുന്നു. $r = 0$ ആണെങ്കിൽ $a,b$ യുടെ HCF $b$ ആകുന്നു.

**വഴി 2:** മറ്റൊരു രീതിയിൽ യൂക്ലിഡിന്റെ ഹരണ ഉപ സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച് $b$ നെ $r$ കൊണ്ട് ഹരിച്ച് $b = rq_1 + r_1$, $0 \le r_1 < r$ ലഭിക്കുന്നു.

**വഴി 3:** $r_1 = 0$ ആണെങ്കിൽ $a,b$ യുടെ HCF $r$ ആകുന്നു.

**വഴി 4:** അല്ലെങ്കിൽ ശിഷ്ടം 0 ലഭിക്കുന്നതുവരെ യൂക്ലിഡിന്റെ ഹരണ ഉപസിദ്ധാന്തം ആവർത്തിച്ച് ഉപയോഗിക്കുക. ശിഷ്ടം പൂജ്യം ലഭിക്കുമ്പോഴുള്ള ഹാരകമാണ് $a$, $b$ യുടെ HCF.

**കുറിപ്പ്**

- മേൽപ്പറഞ്ഞ അൽഗോരിതിന് ഒരു ഘട്ടത്തിൽ ശിഷ്ടം 0 ലഭിക്കുന്നു ആഘട്ടത്തിൽ .അൽഗോരിതം അവസാനിക്കുന്നു.
- യൂക്ലിഡിന്റെ ഹരണ ഉപസിദ്ധാന്തമെന്നത് ശിഷ്ടം 0 ലഭിക്കുന്നതുവരെ ഹരണ ഉപസിദ്ധാന്തത്തെ ആവർത്തിച്ച് പ്രയോഗിക്കുന്ന രീതിയാണ്.
- രണ്ട്ധന സംഖ്യകളുടെ HCF, (a,b) എന്ന് കുറിക്കുന്നു.
- HCF നെ GCD (ഉ.സ.ഭാ) എന്നും വിളിക്കാം.



2 Numbers and Seq.indd 39 20/01/2023 17:32:28

## പുരോഗതി പരിശോധന

1. യൂക്ലിഡിന്റെ ഹരണ അൽഗോരിതം എന്നത് _____ശിഷ്ടം ലഭിക്കുന്നതുവരെ ഹരണ ഉപസിദ്ധാന്തം ആവർത്തിച്ച് പ്രയോഗിക്കുന്ന രീതിയാണ്.
2. $k$,$k$എന്ന രണ്ട് തുല്യമായ ധനപൂർണ്ണാങ്കത്തിന്റെ HCF, _____ ആകുന്നു.

**വിശദീകരണം 1**

മേൽപ്പറഞ്ഞ അൽഗോരിതം ഉപയോഗിച്ച് തന്നിട്ടുള്ള രണ്ട് ധനപൂർണ്ണാങ്കത്തിന്റെ HCF കണ്ടുപിടിക്കാൻ ശ്രമിക്കാം. തന്നിട്ടുള്ള രണ്ടു ധന പൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾ $a = 273$ ,$b = 119$ $a > b$. എന്നിരിക്കട്ടെ യൂക്ലിഡിന്റെ ഹരണ ഉപസിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച് 273 നെ 119 കൊണ്ട് വിഭജിക്കുക,

നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നത് $273 = 119 \times 2 + 35$ ...(1)

ശിഷ്ടം $35 \neq 0$. ആകുന്നു.

അതുകൊണ്ട് ഹാരകം 119 ലും ശിഷ്ടം 35ലും യൂക്ലിഡിന്റെ ഹരണ അൽഗോരിതം ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ $119 = 35 \times 3 + 14$ ...(2) എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

ശിഷ്ടം $14 \neq 0$ ആകുന്നു.

ഹാരകം 35 ലും ശിഷ്ടം 14 ലും യൂക്ലിഡിന്റെ ഹരണ അൽഗോരിതം ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ.

$35 = 14 \times 2 + 7$ ...(3) എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

ശിഷ്ടം $7 \neq 0$. ആകുന്നു

ഹാരകം 14 ലും ശിഷ്ടം 7 ലും യൂക്ലിഡിന്റെ ഹരണ അൽഗോരിതം ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ

$14 = 7 \times 2 + 0$ ...(4) എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

ഈ ഘട്ടത്തിൽ ലഭിക്കുന്ന ശിഷ്ടം $= 0$.

ഈ ഘട്ടത്തിൽ ലഭിക്കുന്ന ഹാരകം $= 7$.

അതായത് 273, 119 ന്റെ HCF = 7

**ഉദാഹരണം 2.4 :** 210, 55 എന്നിവയുടെ HCF $55x - 325$ ആണെങ്കിൽ $x$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

**നിർദ്ധാരണം** തന്നിട്ടുള്ള സംഖ്യകളുടെ HCF യൂക്ലിഡിന്റെ ഹരണ അൽഗോരിതം ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കാം

$210 = 55 \times 3 + 45$

$55 = 45 \times 1 + 10$

$45 = 10 \times 4 + 5$

$10 = 5 \times 2 + 0$

ശിഷ്ടം 0 ആകുന്നു.

അതുകൊണ്ട് 210,55 ന്റെ HCF അവസാന ഹാരകം 5 ആകുന്നു.എന്നാൽ HCF $55x - 325 = 5$ എന്ന് തന്നിരിക്കുന്നു

$55x = 330$

അതുകൊണ്ട് $x = 6$



2 Numbers and Seq.indd 40 20/01/2023 17:32:29

**ഉദാഹരണം 2.5 :** 445 ന്റെയും 572 ന്റെയും ശിഷ്ടം യഥാക്രമം 4,5 വരത്തക്ക രീതിയിൽ വിഭജിക്കാവുന്ന ഏറ്റവും വലിയ സംഖ്യയെ കണ്ടുപിടിക്കുക.

**നിർദ്ധാരണം** ശിഷ്ട സംഖ്യ യഥാക്രമം 4 ഉം 5 ഉം ആയതുകൊണ്ട് ആവശ്യമുള്ള സംഖ്യ $445-4=441,\ 572-5=567$ എന്നിവയുടെ HCF ആകുന്നു. അതുകൊണ്ട്.

441 ന്റെയും 561 ന്റെയും HCF നെ നാം നിർണ്ണയിക്കണം. യൂക്ലിഡിന്റെ ഹരണ അൽഗോരിഥം ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നത്.

$$567 = 441\times1+126$$

$$441 = 126\times3+63$$

$$126 = 63\times2+0$$

അതുകൊണ്ട് $441, 567$ എന്നിവയുടെ HCF $= 63$ ആയതിനാൽ ആവശ്യമുള്ള സംഖ്യ 63 ആകുന്നു.

### പ്രവർത്തി 1

രണ്ടു ധന സംഖ്യകളുടെ HCF ഈ പ്രവർത്തി പരിചയത്തിന്റെ സഹായത്താൽ കണ്ടുപിടിക്കാം. ആദ്യം താഴെ പറയുന്ന നിർദ്ദേശങ്ങൾ നിരീക്ഷിക്കുക.

(i) നീളവും വീതിയും തന്നിട്ടുള്ള സംഖ്യകൾ ആകത്തക്കവിധം ഒരു ദീർഘ ചതുരം നിർമ്മിക്കുക.

(ii) ദീർഘചതുരത്തിനെ ചെറിയ സമചതുരങ്ങൾ കൊണ്ട് നിറക്കുക.

(iii) $1\times1$ സമചതുരങ്ങൾ $2\times2$ സമചതുരങ്ങൾ $3\times3$ സമചതുരങ്ങൾ എന്നിങ്ങനെ ശ്രമിക്കുക.

(iv) ഒരു വിടവും ഇല്ലാതെ ദീർഘചതുരത്തിനെ പൂർണ്ണമായും നിറയ്ക്കുന്ന ഏറ്റവും വലിയ സമചതുത്തിന്റെ വശം തന്നിട്ടുള്ള സംഖ്യകളുടെ HCF ആകുന്നു.

(v) (a) 12,20 (b) 16,24 (c) 11,9 എന്നിവയുടെ HCF കണ്ടുപിടിക്കുക

**സിദ്ധാന്തം 3**

$a>b$ ആയിട്ടുള്ള രണ്ട് ധനപൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾ $a$ യും $b$ യും എങ്കിൽ $(a,b)$ യുടെ ഉ.സാ.ഭ. $=(a-b,b)$. യുടെ ഉ.സാ.ഭ. ആകുന്നു.

### പ്രവർത്തി 2

രണ്ട് ധന പൂർണ്ണാങ്കങ്ങളുടെ HCF നിർണ്ണയിക്കാനുള്ള മറ്റൊരു പ്രവർത്തി പരിചയം ആണ് ഇത്.

(ശ) തന്നിട്ടുള്ള സംഖ്യകളിൽ വലിയ സംഖ്യയിൽ നിന്നും ചെറിയ സംഖ്യ കുറയ്ക്കുക.

(ii) ശിഷ്ട സംഖ്യകളിൽ വലുതിൽ നിന്നും ചെറുതിനെ കുറയ്ക്കുക.

(iii) വലിയ സംഖ്യയിൽ നിന്നും ചെറിയ സംഖ്യയെ കുറയ്ക്കുന്ന പ്രക്രിയ ആവർത്തിക്കുക.

(iv) സംഖ്യകൾ തുല്യമാകുമ്പോൾ ആ പ്രക്രിയ നിർത്തുക.

(v) നാലാമത്തെ പടിയിൽ കിട്ടുന്ന തുല്യസംഖ്യകൾ തന്നിട്ടുള്ള സംഖ്യകളുടെ HCF ആകുന്നു.

ഈ പ്രവർത്തി പരിചയം ഉപയോഗിച്ച് താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയുടെ HCF കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) 90,15 (ii) 80,25 (iii) 40,16 (iv) 23,12 (v) 93,13



2 Numbers and Seq.indd 41 20/01/2023 17:32:30

## മൂന്നു സംഖ്യകളുടെ HCF

താഴെ പറയുന്ന പ്രവർത്തി ഉപയോഗിച്ച് മൂന്ന് ധനപൂർണ്ണാങ്കത്തിന്റെ HCF കണ്ടുപിടിക്കാൻ യൂക്ലിഡിന്റെ ഹരണ അൽഗോരിതം രണ്ട് പ്രാവശ്യം നമുക്ക് പ്രയോഗിക്കാം.

$a, b, c$ എന്നിവ തന്നിട്ടുള്ള ധനപൂർണ്ണാങ്കങ്ങളാണെന്നിരിക്കട്ടെ.

(i) $a,b$ യുടെ HCF കണ്ടുപിടിക്കുക. ഇതിനെ $d$ എന്നു വിളിക്കുക

$d = (a,b)$

(ii) $d, c$ യുടെ HCF കണ്ടുപിടിക്കുക.

ഇത് തന്നിട്ടുള്ള $a, b, c$ എന്നീ സംഖ്യകളുടെ HCF ആകുന്നു

**ഉദാഹരണം 2.6 :** 396, 504, 636 എന്നിവയുടെ HCF കണ്ടുപിടിക്കുക.

**നിർദ്ധാരണം** തന്നിട്ടുള്ള മൂന്നു സംഖ്യകളുടെ HCF കണ്ടുപിടിക്കുവാൻ ആദ്യത്തെ രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ HCF കണ്ടുപിടിക്കണം. 396, 504 എന്നിവയുടെ HCF കണ്ടുപിടിക്കുക.

യൂക്ലിഡിന്റെ ഹരണ അൽഗോരിതം ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നത് $504 = 396 \times 1 + 108$

ശിഷ്ടം $108 \neq 0$ ആകുന്നു

വീണ്ടും യൂക്ലിഡിന്റെ ഹരണ അൽഗോരിതം ഉപയോഗിക്കുക $396 = 108 \times 3 + 72$

ശിഷ്ടം $72 \neq 0$, ആകുന്നു

വീണ്ടും യൂക്ലിഡിന്റെ ഹരണ അൽഗോരിതം ഉപയോഗിക്കുക ശിഷ്ടം $36 \neq 0$,

വീണ്ടും ഹരണ അൽഗോരിതം ഉപയോഗിക്കുക $72 = 36 \times 2 + 0$

ഇവിടെ ശിഷ്ടം 0 ആകുന്നു. അതുകൊണ്ട് 396, 504 എന്നിവയുടെ HCF $= 36$ ആകുന്നു. 636, 36 ന്റെയും HCF കണ്ടുപിടിക്കുക.

യൂക്ലിഡിന്റെ ഹരണ അൽഗോരിതം ഉപയോഗിച്ച് $636 = 36 \times 17 + 24$

നമുക്ക് ലഭിക്കുന്ന ശിഷ്ടം $24 \neq 0$

വീണ്ടും ഹരണ അൽഗോരിതം ഉപയോഗിക്കുക $36 = 24 \times 1 + 12$

ലഭിക്കുന്ന ശിഷ്ടം $12 \neq 0$

വീണ്ടും യൂക്ലിഡിന്റെ ഹരണ അൽഗോരിതം ഉപയോഗിക്കുക $24 = 12 \times 2 + 0$

ഇവിടെ ശിഷ്ടം 0 ആകുന്നു. അതുകൊണ്ട് 636,36 എന്നിവയുടെ HCF = 12 ആകുന്നു.

അതിനാൽ 396, 504, 636 എന്നീ സംഖ്യകളുടെ HCF 12 ആകുന്നു.




രണ്ട് ധനപൂർണ്ണാങ്ക സംഖ്യകളുടെ HCF 1 ആണെങ്കിൽ അവയെ സഹ അഭാജ്യ സംഖ്യകൾ അല്ലെങ്കിൽ ആപേക്ഷിക സഹ അഭാജ്യ സംഖ്യകൾ എന്നു പറയുന്നു.

### അഭ്യാസം 2.1

1. 3 കൊണ്ട് വിഭജിക്കുമ്പോൾ ശിഷ്ടഫലം 2 വരുന്ന എല്ലാ ധനപൂർണ്ണാങ്കങ്ങളെയും കണ്ടുപിടിക്കുക.
2. ഒരാളിന്റെ കൈവശം 532 പൂച്ചട്ടികൾ ഉണ്ട്. അവയെ 21 പൂച്ചട്ടികൾ വീതമുള്ള വരികളായി ക്രമീകരിച്ചു. എങ്കിൽ പൂർണ്ണമായും ക്രമീകരിക്കപ്പെട്ട വരികളുടെ എണ്ണത്തേയും, ബാക്കി വന്ന പൂച്ചെട്ടികളുടെ എണ്ണത്തേയും കണ്ടുപിടിക്കുക.



2 Numbers and Seq.indd 42 20/01/2023 17:32:32

3. തുടർച്ചയായ രണ്ട് ധനപൂർണ്ണാങ്കങ്ങളുടെ ഗുണനഫലത്തെ രണ്ടുകൊണ്ട് വിഭജിക്കാമെന്ന് തെളിയിക്കുക.
4. $a$, $b$, $c$ എന്ന ധനപൂർണ്ണാങ്കങ്ങളെ 13 കൊണ്ട് വിഭജിക്കുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ശിഷ്ട സംഖ്യകൾ 9,7,10 ആകുന്നു. $a+b+c$ യെ 13 കൊണ്ട് വിഭജിക്കാമെന്ന് തെളിയിക്കുക.
5. ഏതൊരു പൂർണ്ണാങ്കത്തിന്റെ വർഗ്ഗത്തെയും 4 കൊണ്ട് വിഭജിക്കുമ്പോൾ ശിഷ്ടം 0 അല്ലെങ്കിൽ 1 ആണ് എന്ന് തെളിയിക്കുക.
6. യൂക്ലിഡിന്റെ ഹരണ അൽഗോരിഥം ഉപയോഗിച്ച് താഴെ പറയുന്നവയുടെ HCF കണ്ടുപിടിക്കുക
(i) 340 കൂടാതെ 412 (ii) 867 കൂടാതെ 255
(iii) 10224 കൂടാതെ 9648 (iv) 84, 90 കൂടാതെ 120
7. ശിഷ്ട സംഖ്യ 12 വരത്തക്ക രീതിയിൽ 1230, 1926 നേയും വിഭജിക്കാവുന്ന ഏറ്റവും വലിയ സംഖ്യ കണ്ടുപിടിക്കുക.
8. 32 ന്റെയും 60 ന്റെയും HCF $d$ ആണെങ്കിൽ $d = 32x + 60y$ എന്ന രീതിയിൽ $x$ , $y$ നെ കണ്ടു പിടിക്കുക .
9. ഒരു ധനപൂർണ്ണാങ്കത്തിനെ 88 കൊണ്ട് വിഭജിക്കുമ്പോൾ 61 ശിഷ്ടഫലം ലഭിക്കുന്നു. അതേ സംഖ്യയെ 11 കൊണ്ട് വിഭജിക്കുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ശിഷ്ട സംഖ്യ എത്ര?
10. തുടർച്ചയായ രണ്ട് ധനപൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾ എപ്പോഴും സഹഅഭാജ്യ സംഖ്യകളാണെന്ന് കണ്ടുപിടിക്കുക.

## 2.4 അങ്കഗണിതത്തിന്റെ അടിസ്ഥാന സിദ്ധാന്തം

ഒരു അദ്ധ്യാപകനും വിദ്യാർത്ഥിയും തമ്മിലുള്ള സംഭാഷണം താഴെ തന്നിട്ടുള്ളത് ശ്രദ്ധിക്കുക.

അദ്ധ്യാപകൻ : 240 എന്ന സംഖ്യയെ ഘടകങ്ങളാക്കുക.
മലർ : 24 ×10
രഘു : 8×30
ഇനിയ : 12×20
കുമാർ : 15×16
മലർ : സർ, ആരുടെ ഉത്തരമാണ് ശരി.
അദ്ധ്യാപകൻ : എല്ലാപേരുടെയും ഉത്തരം ശരിയാണ്.
രഘു : എങ്ങനെയാണ്. സർ
അദ്ധ്യാപകൻ : ഓരോ ഘടകങ്ങളെയും അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലമായി തരം തിരിക്കുക.
മലർ : 2×2×2×3×2×5
രഘു : 2×2×2×2×3×5
ഇനിയ : 2×2×3×2×2×5
കുമാർ : 3×5×2×2×2×2
അദ്ധ്യാപകൻ : കൊള്ളാം, ഇപ്പോൾ 2 ന്റെയും, 3 ന്റെയും, 5 ന്റെയും സംഖ്യകളെ എണ്ണുക.
മലർ : എനിക്ക് നാല് 2 കളും ഒരു 3 ഉം ഒരു 5 ഉം ലഭിച്ചു.
രഘു : എനിക്ക് നാല് 2 കളും ഒരു 3 ഉം ഒരു 5 ഉം ലഭിച്ചു.
ഇനിയ : എനിക്കും അതേ സംഖ്യകൾ ലഭിച്ചു.
കുമാർ : എനിക്കും സർ.
മലർ : നമുക്ക് എല്ലാപേർക്കും നാല് 2 കളും ഒരു 3 ഉം ഒരു 5 ഉം ലഭിച്ചു. ഇത് നമുക്ക് അതിശയമായിരിക്കുന്നു.
അദ്ധ്യാപകൻ: അതെ അങ്ങനെ തന്നെ. ഏതെങ്കിലും ഒരു സംഖ്യയെ അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലമായി ഘടകമാക്കുമ്പോൾ ഓരോരുത്തർക്കും ഒരേ അഭാജ്യ സംഖ്യകൾ തന്നെ ലഭിക്കുന്നു.

ഈ ആശയം താഴെ സൂചിപ്പിച്ചിട്ടുള്ള വളരെ പ്രധാനപ്പെട്ട സിദ്ധാന്തത്തിനു രൂപം നല്കുന്നു.

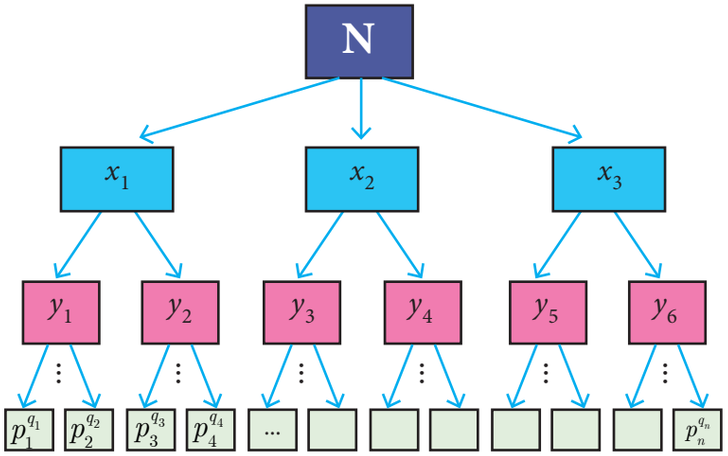


2 Numbers and Seq.indd 43 20/01/2023 17:32:33

### സിദ്ധാന്തം 4 അങ്കഗണിതത്തിന്റെ അടിസ്ഥാന സിദ്ധാന്തം

ഒന്ന് ഒഴികെ മറ്റെല്ലാ ധന പൂർണ്ണാങ്കങ്ങളെയും ഒന്നോ അതിലധികമോ അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലമായി ക്രമീകരിക്കാം. മാത്രമല്ല എല്ലാ ധനസംഖ്യകളേയും കൃത്യമായി ഒരു തരത്തിൽ പ്രതിനിധീരിക്കാം.

അടിസ്ഥാന സിദ്ധാന്തം വിവരിക്കുന്നത് ഓരോ ഭാജ്യ സംഖ്യയെയും അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലമായി വിഭജിക്കാമെന്നാണ്. ഈ വിഭജനം അതുല്യമാണ്. അതായത് ഈ ഘടകങ്ങളാക്കലിനെ അഭാജ്യ സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലമായി ഒരു രീതിയിൽ മാത്രമേ സൂചിപ്പിക്കാൻ സാധിക്കുകയുള്ളൂ. പൊതുവിൽ ഇങ്ങനെ ചുരുക്കി പറയാം. തന്നിട്ടുള്ള N എന്ന ഭാജ്യസംഖ്യയെ നമ്മൾ താഴെ പറയുന്ന രീതിയിൽ വിഭജിക്കുന്നു.



ചിത്രം.2.2

$N = p_1^{q_1} \times p_2^{q_2} \times p_3^{q_3} \times \cdots \times p_n^{q_n}$ ഇവിടെ $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ അഭാജ്യങ്ങളാകുന്നു. കൂടാതെ $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$ നിസർഗ്ഗ സംഖ്യകളാകുന്നു.

ആദ്യമായി N നെ അതിന്റെ ഘടകങ്ങളായി വിഭജിക്കാൻ ശ്രമിക്കാം. എല്ലാ ഘടകങ്ങളും അഭാജ്യസംഖ്യകൾ ആകുമ്പോൾ നമുക്ക് നിറുത്താം. അല്ലെങ്കിൽ അഭാജ്യമല്ലാത്ത സംഖ്യകളെ തുടർന്ന് ഘടകങ്ങളാക്കാൻ ശ്രമിക്കാം. അഭാജ്യസംഖ്യ ലഭിക്കുന്നതുവരെ ഈ പ്രക്രിയ തുടരാം.

**ചിന്തിക്കുക**

1 എന്ന സംഖ്യ അഭാജ്യമാണോ

#### വിശദീകരണം

ഉദാഹരണമായി 32760 നെ ഘടകങ്ങളാക്കൽ ശ്രമിക്കുമ്പോൾ നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നത്.

$$32760 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13$$

$$= 2^3 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^1 \times 13^1 \text{ എന്നാണ്}$$

അങ്ങനെ ഏതു രീതിയിലായാലും 32760 നെ ഘടകങ്ങളാക്കാൻ ശ്രമിക്കുമ്പോൾ നമുക്ക് 3 രണ്ടുകളും, 2 മൂന്നുകളും, 1 അഞ്ചും, 1 ഏഴും, 1 പതിമൂന്നും ലഭിക്കുന്നു.

**പുരോഗതി പരിശോധന**

1. _____ഒഴികെയുള്ള ഓരോ നിസർഗ്ഗ സംഖ്യയെയും _____ എന്ന രീതിയിൽ എഴുതാം.
2. ഒരു ഭാജ്യ സംഖ്യയെ ഏതൊക്കെ രീതിയിൽ അഭാജ്യങ്ങളുടെ ഘടകങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതാം?
3. ഏത് അഭാജ്യ സംഖ്യകളുടെയും ഭാജ്യങ്ങളുടെ എണ്ണം _____ ആകുന്നു.

സത്യമിതാണ്, ഓരോ ഭാജ്യ സംഖ്യയെയും അഭാജ്യസംഖ്യളുടെ ഗുണനഫലമായി അതുല്യമായി എഴുതുന്നു. ഇതിനെ അങ്കഗണിതത്തിന്റെ അടിസ്ഥാന സിദ്ധാന്തം എന്നു പറയുന്നു.

### 2.4.1 അങ്കഗണിതത്തിന്റെ അടിസ്ഥാന സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ പ്രാധാന്യം

1 ഒഴികെയുള്ള നിസ്സർഗ്ഗ സംഖ്യകളുടെ അടിസ്ഥാന സിദ്ധാന്തത്തിന് അനേകം പ്രയോഗങ്ങളുണ്ട്. ഇത് ഗണിത ശാസ്ത്രത്തിലും മറ്റു മേഖലകളിലും ഉപയോഗിക്കുന്നു. എല്ലാ ധനപൂർണ്ണാങ്കത്തിന്റെയും നിർമ്മാണ ഘടകങ്ങൾ അഭാജ്യ സംഖ്യകൾ ആണെന്നിരിക്കെ ഇതിന് ഗണിത ശാസ്ത്രത്തിൽ വളരെയധികം പ്രാധാന്യമുണ്ട്. അതുകൊണ്ട് തന്മാത്രകളുടെ ഘടകങ്ങളായ അണുക്കളുമായി അഭാജ്യസംഖ്യകളെ താരതമ്യം ചെയ്യാം.



2 Numbers and Seq.indd 44 20/01/2023 17:32:34

നിങ്ങൾക്ക് അറിയാമോ

1. $p$ എന്ന അഭാജ്യസംഖ്യ $ab$ യെ വിഭജിക്കുമ്പോൾ ഒന്നുകിൽ $p,a$ യെ വിഭജിക്കും അല്ലെങ്കിൽ$p,b$ യെ വിഭജിക്കും. അതായത് $p$ കുറഞ്ഞപക്ഷം ഏതെങ്കിലും ഒന്നിനെ വിഭജിക്കുന്നു.
2. $n$ എന്ന ഭാജ്യസംഖ്യ $ab$ യെ വിഭജിക്കുമ്പോൾ $n,a$ യെയോ $b$ യെയോ വിഭജിക്കുന്നില്ല. ഉദാ. 6 എന്ന സംഖ്യ 4×3 നെ വിഭജിക്കുന്നു. എന്നാൽ 6 ഒരിക്കലും 4 നെയും 3 നെയും വിഭജിക്കുന്നില്ല.

**ഉദാഹരണം 2.7 :** തന്നിട്ടുള്ള ഘടക ശാഖയിൽ നിന്നും $m$, $n$ എന്ന സംഖ്യകളെ കണ്ടുപിടിക്കുക.

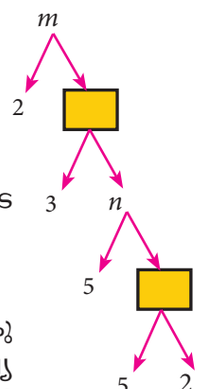
**നിർദ്ധാരണം**താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ആദ്യത്തെ കളത്തിന്റെ മൂല്യം $= 5 \times 2 = 10$

$n$ ന്റെ മൂല്യം $= 5 \times 10 = 50$

താഴെ നിന്നുമുള്ള രണ്ടാമത്തെ കളത്തിന്റെ മൂല്യം $= 3 \times 50 = 150$

$m$ ന്റെ മൂല്യം $= 2 \times 150 = 300$

അതിനാൽ ആവശ്യപ്പെട്ട സംഖ്യ $m = 300,\ n = 50$



ചിത്രം.2.3

**ഉദാഹരണം 2.8 :** $n$ ഒരു നിസർഗ്ഗസംഖ്യയാണെങ്കിൽ, $6^n$ എന്ന സംഖ്യയുടെ അവസാന അക്കം 5 ആകുമോ? കാരണ സഹിതം ഉത്തരം വിവരിക്കുക.

**നിർദ്ധാരണം** അതായത് $6^n = (2 \times 3)^n = 2^n \times 3^n$ ,

$6^n$ ന്റെ ഒരു ഘടകമാകുന്നു 2. അതിനാൽ $6^n$ ഒരു ഇരട്ട സംഖ്യമാകുന്നു. പക്ഷെ 5 അവസാന അക്കമായി വരുന്ന എല്ലാ സംഖ്യകളും ഒറ്റ സംഖ്യ ആയിരിക്കും. അതുകൊണ്ട്, $6^n$ എന്ന സംഖ്യയുടെ അവസാന അക്കം 5 ആയിരിക്കില്ല.

**ഉദാഹരണം 2.9 :** $7 \times 5 \times 3 \times 2 + 3$ ഒരു ഭാജ്യ സംഖ്യയാകുമോ? ഉത്തരം ന്യായീകരിക്കുക.

**നിർദ്ധാരണം** അതെ, തന്നിരിക്കുന്ന സംഖ്യ ഒരു ഭാജ്യ സംഖ്യയാകുന്നു. എന്തെന്നാൽ,

$7 \times 5 \times 3 \times 2 + 3 = 3 \times \left(7 \times 5 \times 2 + 1\right) = 3 \times 71$

മേൽപ്പറഞ്ഞ സംഖ്യ രണ്ട് അഭാജ്യ സംഖ്യകളാൽ ഘടകങ്ങളാക്കാവുന്നതിനാൽ, ഇത് ഒരു ഭാജ്യ സംഖ്യയാകുന്നു.

**ഉദാഹരണം 2.10 :** '$a$' യും '$b$' യും രണ്ട് ധനപൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾ ആകുന്നു. അതായത് $a^b \times b^a = 800$. '$a$', '$b$' കണ്ടുപിടിക്കുക.

**നിർദ്ധാരണം** 800 നെ ഘടകങ്ങളാക്കിയാൽ

$800 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 = 2^5 \times 5^2$

അതിനാൽ, $a^b \times b^a = 2^5 \times 5^2$

ഇതിൽ നിന്നും $a = 2$ , $b = 5$ (അല്ലെങ്കിൽ) $a = 5$ , $b = 2$ കിട്ടുന്നു.

### പുരോഗതി പരിശോധന

1. $n$ നെ $m$ കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ ല.സാ.ഗു., ഉ.സാ.ഭഎന്നിവ _____ യും _____ യും ആയിരിക്കും.
2. $2^m$ ന്റെയും $3^n$ ന്റെയും HCF _____ ആകുന്നു.

### ചിന്തിക്കുക

രണ്ട് ധനപൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾ $a$, $b$ ആകുന്നു. $a^b = b^a$ എന്ന് രീതിയിൽ രണ്ട് ധന പൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾ കണ്ടെത്താമോ.

### പ്രവർത്തി 3

ഒരു ATMകാർഡിന്റെ 4 അക്ക പിൻ നമ്പറായ '$pqrs$' അതായത് $p^2 \times q^1 \times r^4 \times s^3 = 3,15,000$ നിങ്ങൾക്ക് കണ്ടുപിടിക്കാമോ?



ചിത്രം.2.4



2 Numbers and Seq.indd 45 20/01/2023 17:32:36

## അഭ്യാസം 2.2

1. $n$ ഒരു നിസർഗ്ഗ സംഖ്യയാണെങ്കിൽ, $4^n$ എന്ന സംഖ്യയുടെ അവസാന അക്കം 6 ആകുന്ന $n$ ന്റെ മൂല്യങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുക?
2. $m$ ഉം $n$ ഉം രണ്ട് നിസർഗ്ഗസംഖ്യകളാണെങ്കിൽ, $m$ ന്റെ ഏതൊക്കെ മൂല്യങ്ങൾക്കാണ്, $2^n \times 5^m$. അവസാന അക്കം 5 ആകുന്നതെന്ന് കണ്ടുപിടിക്കുക?
3. 252525 ന്റെയും 363636 ന്റെയും HCF കണ്ടുപിടിക്കുക.
4. $13824 = 2^a \times 3^b$ എന്നാൽ $a$, $b$ മൂല്യം കാണുക.
5. $p_1^{x_1} \times p_2^{x_2} \times p_3^{x_3} \times p_4^{x_4} = 113400$ എന്നാൽ $p_1, p_2, p_3, p_4$ എന്നിവ ചെറുതിൽ നിന്നും വലുതിലേക്കുള്ള അഭാജ്യ സംഖ്യകളാണ്. കൂടാതെ $x_1, x_2, x_3, x_4$ പൂർണ്ണാങ്കങ്ങളുമാകുന്നു. അങ്ങനെയെങ്കിൽ $p_1, p_2, p_3, p_4$ ന്റെയും $x_1, x_2, x_3, x_4$ ന്റെയും മൂല്യങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.
6. അങ്കഗണിതത്തിലെ അടിസ്ഥാന സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച് 408, 170 എന്നിവയുടെ LCM ഉം HCF ഉം കാണുക?
7. 24, 15, 36 എന്നിവകൊണ്ട് പൂർണ്ണമായും ഹരിക്കാവുന്ന ഏറ്റവും വലിയ 6 അക്ക സംഖ്യ കാണുക?
8. 35, 56, 91 എന്നിവകൊണ്ട് ഹരിക്കാവുന്നതും ശിഷ്ടം 7 വരുന്നതുമായ ഏറ്റവും ചെറിയ സംഖ്യ കാണുക?
9. ആദ്യത്തെ പത്ത് നിസർഗ്ഗസംഖ്യകൾകൊണ്ട് ഹരിക്കാവുന്ന ഏറ്റവും ചെറിയ സംഖ്യ കാണുക?

## 2.5 മോഡുലാർ അരിത്തമറ്റിക്



ചിത്രം.2.5

ക്ലോക്കിൽ 24 മണിക്കൂറിനെ സൂചിപ്പിക്കാൻ 1 മുതൽ 12 വരെയുള്ള സംഖ്യകൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഒരു ദിവസത്തിലുള്ള 24 മണിക്കൂറിനെ 12 മണിക്കൂർ സംഖ്യാരീതിയിൽ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നതെങ്ങനെ? 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12 എന്നിങ്ങനെ ഉപയോഗിക്കുന്നു. 12 നു ശേഷം 13 ന്1 ഉം 14 ന് 2 ഉം അങ്ങനെ തുടർന്നും ഉപയോഗിക്കുന്നു. അതായത് 12 നുശേഷം 1,2,3,.... എന്ന് വീണ്ടും ആരംഭിക്കുന്നു. ഈ സമ്പ്രദായത്തിൽ 1 മുതൽ 12 വരെയുള്ള സംഖ്യകൾ ചുറ്റുന്നു. ഇത്തരത്തിൽ ചില മൂല്യങ്ങൾ ചുറ്റിക്കറങ്ങുന്നതിനെ മോഡുലാർ അരിത്തമറ്റിക് എന്നു പറയുന്നു.

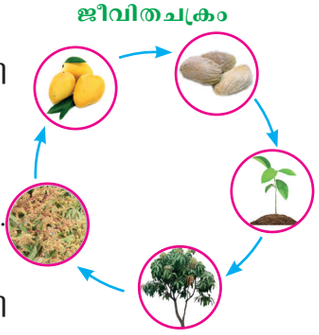
ഗണിതത്തിൽ, ഒരു നിശ്ചിത മൂല്യത്തെ ചുറ്റി വരുന്ന സംഖ്യകൾക്ക് മോഡുലാർ അരിത്തമറ്റിക് എന്ന് പറയുന്നു. സാധാരണ ഗണിതത്തിൽ നിന്ന് വ്യത്യസ്തമായി മോഡുലാർ അരിത്തമാറ്റിക് ചാക്രികമാണ്. മോഡുലാർ അരിതെമറ്റിക് എന്ന ആശയം വികസിപ്പിച്ചത് ജർമ്മൻ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനായ കാൾ ഫ്രെഡറിക്ക് ഗാസ് ആണ്. അദ്ദേഹത്തെ ഗണിതശാസ്ത്രത്തിന്റെ രാജാവ് എന്ന് വിശേഷിപ്പിക്കപ്പെടുന്നു.




സസ്യത്തിന്റെ ജീവിതചക്രം

**ഉദാഹരണം**

1. രാത്രിയും പകലും ആവർത്തിച്ച് വരുന്നു.
2. ഒരാഴ്ചയിലെ ദിവസങ്ങൾ ഞായർ മുതൽ ശനി വരെ ചാക്രികരീതിയിലാണ് വരുന്നത്.
3. ഒരു സസ്യത്തിന്റെ ജീവിതചക്രം.
4. ഒരു വർഷത്തിലെ ഋതുഭേദങ്ങൾ ചാക്രികരീതിയിൽ മാറി വരുന്നു. (വേനൽകാലം, ശൈത്യകാലം, ശിശിരകാലം, വസന്തകാലം)
5. റയിൽവേയുടെയും, വിമാനത്തിന്റെയും സമയങ്ങളും ചാക്രിക രീതിയിലാണ് പ്രവർത്തിക്കുന്നത്. റയിൽവെയുടെ സമയം 00:00 നിന്നും തുടങ്ങുകയും തുടരുകയും ചെയ്യുന്നു. 23:59-ൽ എത്തിച്ചേരുമ്പോൾ അടുത്ത മിനിറ്റ് 24:00 നു പകരം 00:00 ആകുന്നു.



ചിത്രം.2.6



2 Numbers and Seq.indd 46 20/01/2023 17:32:37

### 2.5.1 സർവ്വ സമ മോഡുലോ

$a, b$ എന്ന രണ്ടു പൂർണ്ണാങ്കങ്ങളും $n$ എന്ന പൂർണ്ണാങ്ക ഗുണിതങ്ങളാൽ വ്യത്യസ്തപ്പെട്ടിരുന്നാൽ അവയെ സർവ്വസമമോഡുലോ $n$ എന്നു പറയുന്നു. അതായത് പൂർണ്ണാങ്കം $k$ യ്ക്ക് $a - b = kn$ ആകുന്നു. ഇതിനെ $a \equiv b \pmod{n}$ എന്ന് എഴുതാം. ഇവിടെ $n$ എന്ന സംഖ്യയെ മോഡുലസ്സ് എന്നു വിളിക്കുന്നു. അതായത് $a \equiv b \pmod{n}$ എന്നതിന്റെ അർത്ഥം $n$ കൊണ്ട് $a - b$ യെ വിഭജിക്കാമെന്നാണ്. ഉദാഹരണമായി, $61 \equiv 5 \pmod{7}$ നെ $61 - 5 = 56$ നെ 7 കൊണ്ട് വിഭജിക്കാം

**കുറിപ്പ്**

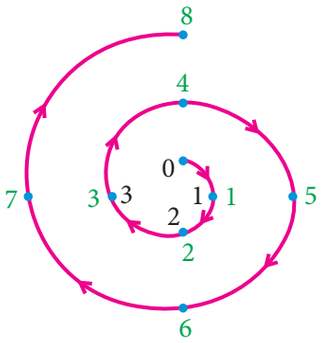
- ഒരു ധനപൂർണ്ണാങ്കത്തെ $n$ കൊണ്ട് വിഭജിക്കുമ്പോൾ ഉണ്ടാകുന്ന സാധ്യമായ വിശിഷ്ടങ്ങൾ $0,1,2,3,\ldots, n-1$ ആകുന്നു.
- അതായത്മോഡുലോ $n$ കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിനായി എല്ലാ സംഖ്യകളെയും $n$ കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോഴുള്ള ശിഷ്ടങ്ങളായ $0,1,2,3,\ldots, n-1$. എന്ന് രേഖപ്പെടുത്തണം,

മോഡുലോ ആശയത്തിനെ വ്യക്തമായി മനസ്സിലാക്കുവാൻ രണ്ടു വിശദീകരണങ്ങൾ തന്നിട്ടുണ്ട്

**വിശദീകരണം 1**

$8 \pmod{4}$ കണ്ടുപിടിക്കുക

4 ന്റെ മോഡുലസ്സ് ഉപയോഗിച്ച് (ഏറ്റവും സാധ്യമായ ശിഷ്ടങ്ങൾ 0, 1, 2, 3 ആയതുകൊണ്ട്) 0, 1, 2, 3 എന്നീ സംഖ്യകളടങ്ങിയ ഘടികാരം പോലുള്ള ചിത്രം വരയ്ക്കാം. 0 എന്ന് ആരംഭിച്ച് 8 സംഖ്യകളിലൂടെ ഘടികാര രീതിയിൽ 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 0 കടന്നുപോകുന്നു. ഇങ്ങനെ ഘടികാരരീതിയിൽ തുടർന്നതിനു ശേഷം 0 ത്തിൽ അവസാനിക്കുന്നു.



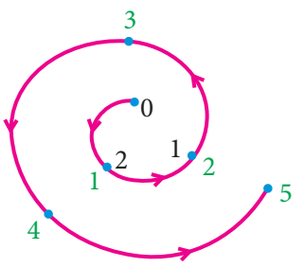
ചിത്രം.2.7

അതായത്, $8 \equiv 0 \pmod{4}$

**വിശദീകരണം 2**

$-5 \pmod{3}$ കണ്ടുപിടിക്കുക

3 എന്ന മോഡുലസ്സ് ഉപയോഗിച്ച് (പരമാവധി ശിഷ്ടങ്ങൾ 0, 1, 2,3 ആയതു കൊണ്ട്) 0, 1, 2 എന്നീ സംഖ്യകളുള്ള ഒരു ഘടികാരം പോലുള്ള ചിത്രം നാം വരയ്ക്കുന്നു. നമ്മൾ 0 ത്തിൽ നിന്നും ആരംഭിച്ച് 2, 1, 0, 2, 1 എന്നിങ്ങനെ എതിർ ഘടികാര രീതിയിൽ 5 എന്ന സംഖ്യയിലൂടെ കടന്നു പോകുന്നു. ഇപ്രകാരം ഘടികാര രീതിയിൽ തുടർന്നതിനു ശേഷം നമ്മൾ 1ൽ അവസാനിക്കുന്നു.



ചിത്രം.2.8

അതുകൊണ്ട്, $-5 \equiv 1 \pmod{3}$

### 2.5.2 യൂക്ലിഡിന്റെ ഹരണ ഉപസിദ്ധാന്തവും മാപാങ്കഗണിതവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം

$m$ ഉം $n$ ഉം പൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾ എന്നിരിക്കട്ടെ. ഇവിടെ $m$ ധനസംഖ്യയാണ് എങ്കിൽ യൂക്ലിഡിന്റെ ഹരണ ഉപസിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച് നമുക്ക് $n = mq + r$ എന്ന് എഴുതാം. ഇവിടെ $0 \leq r < m$ എന്നും $q$ പൂർണ്ണാങ്കവും ആകുന്നു. $n = mq + r$ എന്ന് എഴുതുന്നതിനു പകരം സർവ്വസമ ചിഹ്നത്തിൽ താഴെ പറയും രീതിയിൽ ഉപയോഗിക്കാം.

പൂർണ്ണാങ്കം $q$ വിന് $n = mq + r$ എന്നാണെങ്കിൽ $n$ എന്നത് $r$ മോഡുലോ $m$ ന് സർവ്വ സമമാണെന്നു പറയാം.

$$n = mq + r$$
$$n - r = mq$$
$$n - r \equiv 0 \pmod{m}$$
$$n \equiv r \pmod{m}$$

$n = mq + r$ എന്ന സമീകരണത്തെ യൂക്ലിഡിന്റെ ഹരണ ഉപസിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച് $n \equiv r \pmod{m}$ എന്നും എഴുതാം.

**പുരോഗതി പരിശോധന**

1. $a, b$ എന്ന രണ്ട് പൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾ $n$ ന്റെ സർവ സമ മോഡുലോ ആണ് എങ്കിൽ _____.
2. 7 കൊണ്ട് വിഭജിക്കുമ്പോൾ 5 ശിഷ്ടം ലഭിക്കുന്ന ഒരു എല്ലാ ധനപൂർണ്ണാങ്കങ്ങളുടേയും ഗണം _____ ആകുന്നു.



2 Numbers and Seq.indd 47 20/01/2023 17:32:39

**കുറിപ്പ്**

- $a$ , $b$ എന്നീ രണ്ട് പൂർണ്ണാങ്കങ്ങളെ $m$ കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ ഒരേ ശിഷ്ടം വരുകയാണെങ്കിൽ അവ സർവ്വ സമ മോഡുലോ $m$ ആകുന്നു. അതിനെ $a \equiv b \pmod{m}$ എന്നെഴുതാം.

**ചിന്തിക്കുക**

3 കൊണ്ട് വിഭജിക്കുമ്പോൾ 2 ശിഷ്ടം കിട്ടുന്ന എത്ര പൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾ ഉണ്ട്?

### 2.5.3 മോഡുലോ ക്രീയകൾ

സങ്കലനം, വ്യവകലനം, ഗുണനം പോലുള്ള അടിസ്ഥാന അങ്കഗണിത ക്രീയകൾ സംഖ്യകളിൻമേൽ പ്രയോഗിക്കുമ്പോൾ മോഡുലോ അങ്കഗണത്തിലും അതേ ക്രീയകളെ നമുക്കു പ്രയോഗിക്കാം. താഴെപറയുന്ന സിദ്ധാന്തങ്ങൾ ഇത് ചെയ്യാനുള്ള വിവരങ്ങൾ നല്കുന്നു.

**സിദ്ധാന്തം 5**

$a \equiv b \pmod{m}$, $c \equiv d \pmod{m}$ എന്നീ രൂപത്തിൽ $a$, $b$, $c$, $d$ എന്നിവ പൂർണ്ണാങ്കങ്ങളും, $m$ ധനപൂർണ്ണാങ്കവുമാണെങ്കിൽ

(i) $(a + c) \equiv (b + d) \pmod{m}$ (ii) $(a - c) \equiv (b - d) \pmod{m}$

(iii) $(a \times c) \equiv (b \times d) \pmod{m}$

**വിശദീകരണം 3**

$17 \equiv 4 \pmod{13}$, $42 \equiv 3 \pmod{13}$ ആണെങ്കിൽ സിദ്ധാന്തം 5 ൽ നിന്നും,

(i) $17 + 42 \equiv 4 + 3 \pmod{13}$

$59 \equiv 7 \pmod{13}$

(ii) $17 - 42 \equiv 4 - 3 \pmod{13}$

$-25 \equiv 1 \pmod{13}$

(iii) $17 \times 42 \equiv 4 \times 3 \pmod{13}$

$714 \equiv 12 \pmod{13}$

**സിദ്ധാന്തം 6**

If $a \equiv b \pmod{m}$ ആണെങ്കിൽ

(i) $ac \equiv bc \pmod{m}$ (ii) $a \pm c \equiv b \pm c \pmod{m}$,$c$ പൂർണ്ണാങ്കം.

**പുരോഗതി പരിശോധന**

1. $(k-3) \equiv 5 \pmod{11}$ എന്ന രീതിയിൽ $k$ യുടെ ധനമൂല്യങ്ങൾ _____ ആകുന്നു.

2. $59 \equiv 3 \pmod{7}$, $46 \equiv 4 \pmod{7}$ ആണെങ്കിൽ $105 \equiv$ _____ $\pmod{7}$,
   $13 \equiv$ _____ $\pmod{7}$, $413 \equiv$ _____ $\pmod{7}$, $368 \equiv$ _____ $\pmod{7}$.

3. $7 \times 13 \times 19 \times 23 \times 29 \times 31$ എന്നിവയെ 6 കൊണ്ട് വിഭജിക്കുമ്പോൾ ശിഷ്ടം _____.



2 Numbers and Seq.indd 48 20/01/2023 17:32:43

**ഉദാഹരണം 2.11 :** 70004, 778 നെ 7 കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ ഉണ്ടാകുന്ന ശിഷ്ടഫലങ്ങളെ കണ്ടു പിടിക്കുക.

**നിർദ്ധാരണം** 70000 നെ 7 കൊണ്ട് ഹരിക്കാവുന്നതു കൊണ്ട്.

$$70000 \equiv 0 \pmod 7$$

$$70000 + 4 \equiv 0 + 4 \pmod 7$$

$$70004 \equiv 4 \pmod 7$$

അതുകൊണ്ട് 70004 നെ 7 കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ ശിഷ്ടം 4 ആകുന്നു

777 നെ 7 കൊണ്ട് ഹരിക്കാവുന്നതുകൊണ്ട്

$$777 \equiv 0 \pmod 7$$

$$777 + 1 \equiv 0 + 1 \pmod 7$$

$$778 \equiv 1 \pmod 7$$

അതായത് 778 നെ 7 കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ ശിഷ്ടം 1 ആകുന്നു.

**ഉദാഹരണം 2.12 :** $d$ ന്റെ മൂല്യത്തെ നിർണ്ണയിക്കുക. $15 \equiv 3 \pmod d$.

**നിർദ്ധാരണം** $15 \equiv 3 \pmod d$ എന്നത് $15 - 3 = kd$, $k$ പൂർണ്ണമാകുന്നു..

$$12 = kd.$$

12 നെ $d$ കൊണ്ട് വിഭജിക്കാം.

12 ന്റെ ഹാരകങ്ങൾ 1,2,3,4,6,12. എന്നാൽ 3 നെക്കാൾ വലുതായിരിക്കണം $d$. അതുകൊണ്ട് $d$ യുടെ സാധ്യമായ മൂല്യങ്ങൾ 4,6,12.

**ഉദാഹരണം 2.13 :** $x$ ന്റെ ചെറിയ ധനമൂല്യത്തെ കണ്ടുപിടിക്കുക

(i) $67 + x \equiv 1 \pmod 4$ (ii) $98 \equiv \left(x + 4\right) \pmod 5$

**നിർദ്ധാരണം** (i) $67 + x \equiv 1 \pmod 4$

$67 + x - 1 = 4n$, $n$ പൂർണ്ണാങ്കം .

$66 + x = 4n$

$66 + x$ 4 ന്റെ ഗുണിതങ്ങൾ.

66 നെക്കാൾ വലുതായ 4 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളുടെ ഏറ്റവും അടുത്ത സംഖ്യ 68 ആയതു കൊണ്ട് $x$ ന്റെ ചെറിയ ധനമൂല്യം 2 ആകുന്നു.

(ii) $98 \equiv (x + 4) \pmod 5$

$98 - (x + 4) = 5n$, $n$ പൂർണ്ണാങ്കം.

$94 - x = 5n$

$94 - x$ 5 ന്റെ ഗുണിതങ്ങൾ.

$x$ ന്റെ ചെറിയ ധനമൂല്യം 4 ആകുന്നു. കാരണം 94 നേക്കാൾ ചെറുതായ 5 ന്റെ ഗുണിതം $94 - 4 = 90$ ആകുന്നു.



2 Numbers and Seq.indd 49 20/01/2023 17:32:45

**കുറിപ്പ്**

- സർവ്വസമ സമീകരണങ്ങളെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുമ്പോൾ നമുക്ക് അനന്തമായ നിർദ്ധാരണങ്ങൾ ലഭിക്കുന്നു. ഇവയെ ബീജഗണിതത്തിലെ ബഹുപദവ്യംജക സമീകരണങ്ങൾക്കുള്ള പരിമിത നിർദ്ധാരണങ്ങളുമായി താരതമ്യം ചെയ്യാം.

**ഉദാഹരണം 2.14 :** $8x \equiv 1 \pmod{11}$ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക.

**നിർദ്ധാരണം** $8x \equiv 1 \pmod{11}$ നെ $8x - 1 = 11k$, യായി എഴുതാം, $k$ പൂർണ്ണാങ്കം.

$$x = \frac{11k + 1}{8}$$

പൂർണ്ണാങ്കം $k$ = 5, 13, 21, 29,...എന്നാണെങ്കിൽ $11k$+1നെ 8 കൊണ്ട് വിഭജിക്കാം.

$$x = \frac{11 \times 5 + 1}{8} = 7$$

$$x = \frac{11 \times 13 + 1}{8} = 18$$

അതുകൊണ്ട് നിർദ്ധാരണങ്ങൾ 7,18,29,40, ... ആകുന്നു

**ഉദാഹരണം 2.15 :** $10^4 \equiv x \pmod{19}$ എന്ന രീതിയിൽ $x$ നെ കണക്കാക്കുക

**നിർദ്ധാരണം**

$$10^2 = 100 \equiv 5 \pmod{19}$$

$$10^4 = (10^2)^2 \equiv 5^2 \pmod{19}$$

$$10^4 \equiv 25 \pmod{19}$$

$10^4 \equiv 6 \pmod{19}$ ($25 \equiv 6 \pmod{19}$ ആയതുകൊണ്ട്)

അതുകൊണ്ട്, $x$ = 6.

**ഉദാഹരണം 2.16 :** $3x \equiv 1 \pmod{15}$ ന്റെ പൂർണ്ണാങ്ക നിർദ്ധാരണം കണ്ടുപിടിക്കുക.

**നിർദ്ധാരണം** $3x \equiv 1 \pmod{15}$

$3x - 1 = 15k$ $k$ പൂർണ്ണാങ്കം എന്നും എഴുതാം

$$3x = 15k + 1$$

$$x = \frac{15k + 1}{3}$$

$$x = 5k + \frac{1}{3}$$

$5k$ എന്നത് പൂർണ്ണാങ്കമായതുകൊണ്ട്, $5k + \frac{1}{3}$ ഒരു പൂർണ്ണാങ്കമല്ല. അതുകൊണ്ട് ഇവിടെ പൂർണ്ണാങ്ക നിർദ്ധാരണം ഇല്ല.

**ഉദാഹരണം 2.17 :** ഒരു മനുഷ്യൻ ചെന്നൈയിൽ നിന്നും ഡൽഹിവരെ യാത്ര ചെയ്യുന്നു. അദ്ദേഹം യാത്ര തിരിക്കുന്നത് ബുധനാഴ്ച 22.30 മണിക്കാണ്. യാത്ര ചെയ്യാൻ എടുത്ത സമയം 32 മണിക്കൂർ ആണ്. ട്രയിൻ കൃത്യസമയം പാലിക്കുകയുമാണെങ്കിൽ അയാൾ ഡൽഹിയിൽ എത്ര മണിക്ക് എത്തിച്ചേരും?



2 Numbers and Seq.indd 50 20/01/2023 17:32:47

**നിർദ്ധാരണം** യാത്ര പുറപ്പെടുന്ന സമയം 22.30, യാത്രാ സമയം 32 മണിക്കൂർ. ഇവിടെ നമുക്ക് മോഡുലോ 24 ഉപയോഗിക്കാം.

എത്തിച്ചേരുന്ന സമയം

$$22.30+32 \pmod{24} \equiv 54.30 \pmod{24}$$
$$\equiv 6.30 \pmod{24} \quad (\text{കാരണം } 32 = (1\times24) + 8$$

അതുകൊണ്ട് വെള്ളിയാഴ്ച 6.30 മണിക്ക് അയാൾ ഡൽഹിയിൽ എത്തിച്ചേരും.

**ഉദാഹരണം 2.18 :** കലയും വാണിയും കൂട്ടുകാരികളാണ്. കല പറയുന്നു ഇന്ന് എന്റെ ജന്മദിനമാകുന്നു. അവൾ വാണിയോട് ചോദിച്ചു എപ്പോഴാണ് നീ നിന്റെ ജന്മദിനം ആഘോഷിക്കുന്നത്? വാണിയുടെ മറുപടി, ഇന്ന് തിങ്കളാഴ്ച ആണ്. ഞാനെന്റെ ജന്മദിനം ആഘോഷിച്ചത് 75 ദിവസങ്ങൾക്കു മുൻപാണ്. വാണി ജന്മദിനം ആഘോഷിച്ച ദിവസം കണ്ടുപിടിക്കുക.

**നിർദ്ധാരണം** ഞായറാഴ്ച മുതൽ ശനിയാഴ്ച വരെയുള്ള ദിവസങ്ങളെ ക്രമത്തിൽ നമുക്ക് 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 എന്ന് രേഖപ്പെടുത്താം.

വാണി പറഞ്ഞത് ഇന്ന് തിങ്കളാഴ്ച ആണ് എന്നാണ്. അതുകൊണ്ട് തിങ്കളാഴ്ചയെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യ 1 ആണ്.75 ദിവസങ്ങൾക്ക് മുൻപാണ് വാണിയുടെ ജന്മദിനം. അതുകൊണ്ട് മോഡുലോ 7 എന്ന പ്രകാരം 1 ൽ നിന്നും 75 നെ കുറയ്ക്കുമ്പോൾ (ഒരാഴ്ചയിൽ 7 ദിവസങ്ങൾ ഉള്ളതുകൊണ്ട് മോഡുലോ 7 പ്രകാരം).

$$-74 \pmod 7 \equiv -4 \pmod 7 \equiv 7-4 \pmod 7 \equiv 3 \pmod 7$$
$$(-74 - 3 = -77 \text{ നെ } 7 \text{ കൊണ്ട് വിഭജിക്കാം.})$$

അങ്ങനെയെങ്കിൽ, $1 - 75 \equiv 3 \pmod 7$

3 എന്ന സംഖ്യയുടെ ദിവസം ബുധനാണ്. അതുകൊണ്ട് വാണിയുടെ ജന്മദിനം ബുധനാഴ്ചയാണ്.



## അഭ്യാസം 2.3

1. താഴെ തന്ന പ്രകാരം $x$ ന്റെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ധനമൂല്യത്തെ കണ്ടുപിടിക്കുക

   (i) $71 \equiv x \pmod 8$ (ii) $78 + x \equiv 3 \pmod 5$ (iii) $89 \equiv (x + 3) \pmod 4$

   (iv) $96 \equiv \frac{x}{7} \pmod 5$ (v) $5x \equiv 4 \pmod 6$

2. മോഡുലോ 17 പ്രകാരം $x$, 13 ന് സർവ്വനാമമാണെങ്കിൽ $7x - 3$ എന്നത് മോഡുലോ 17 ന്റെ ഏതു സംഖ്യയ്ക്കു സർവ്വസമമാണ്?
3. $5x \equiv 4 \pmod 6$ നെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക
4. $3x - 2 \equiv 0 \pmod{11}$ നെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക
5. 7 a.m നു ശേഷമുള്ള 100-ാം മണിക്കൂറിന്റെ സമയമേതാണ്?
6. 11 p.m ന് മുൻപുള്ള 15-ാം മണിക്കൂറിന്റെ സമയമേതാണ്?
7. ഇന്ന് ചൊവ്വാഴ്ചയാണ്. 45 ദിവസങ്ങൾക്കു ശേഷം എന്റെ അമ്മാവൻ വരുന്ന ദിവസം ഏതാണ്?
8. എല്ലാ ധനപൂർണ്ണാങ്കം $n$ നും $2^n + 6 \times 9^n$ നെ 7 കൊണ്ട് വിഭജിക്കാമെന്ന് തെളിയിക്കുക.
9. $2^{81}$ നെ 17 കൊണ്ട് വിഭജിക്കുമ്പോൾ ഉണ്ടാകുന്ന ശിഷ്ടത്തെ കണ്ടുപിടിക്കുക.
10. ബ്രിട്ടീഷ് എയർലൈൻ കമ്പനിയുടെ വിമാനത്തിൽ ചെന്നൈ മുതൽ ലണ്ടൻ വരെ യാത്ര ചെയ്യാനുള്ള സമയം ഏകദേശം 11 മണിക്കൂറാണ്. ഞായറാഴ്ച 23:30 മണിക്ക് വിമാനം യാത്ര ആരം



2 Numbers and Seq.indd 51 20/01/2023 17:32:49

ഭിക്കുന്നു. ചെന്നൈയിലെ സമയം ലണ്ടൻ സമയത്തേക്കാൾ നാലര മണിക്കൂർ മുമ്പാണെങ്കിൽ വിമാനം ലണ്ടൻ വിമാനത്താവളത്തിൽ എത്തിച്ചേരുമ്പോഴുള്ള ലണ്ടൻ സമയത്തെ കണ്ടുപിടിക്കുക.

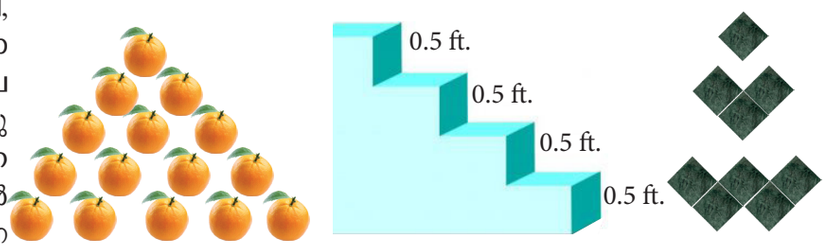
## 2.6 അനുക്രമങ്ങൾ

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ചിത്രങ്ങളെ നോക്കുക.

ഈ ചിത്രങ്ങളിൽ ഒരു പ്രത്യേകരീതിയിലുള്ള ക്രമീകരണം കാണാം. ഒന്നാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ

ഒന്നാമത്തെ വരിയിൽ ഒരാപ്പിളും, രണ്ടാമത്തെ വരിയിൽ രണ്ടാപ്പിളും, മൂന്നാമത്തെ വരിയിൽ മൂന്നാപ്പിളും, ഇപ്രകാരം തുടർന്നു പോകുന്നു. ഓരോ വരിയിലേയും ആപ്പിളിന്റെ എണ്ണം 1, 2, 3, ... ആകുന്നു.

രണ്ടാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ ഓരോ പടിക്കും 0.5 അടി ഉയരം കാണുന്നു. താഴെ നിന്നും പടികളുടെ ആകെ ഉയരം 0.5 അടി, 1 അടി, 1.5 അടി ..... ആകുന്നു. മൂന്നാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ ഒരു സമചതുരം, രണ്ടു സമചതുരം, മൂന്നു സമചതുരം ..... എന്നിങ്ങനെ കാണപ്പെടുന്നു. ഈ സംഖ്യകൾ അനുക്രമങ്ങൾ എന്ന വിഭാഗത്തിൽ പെടുന്നു.




ചിത്രം.2.9

**നിർവചനം**

വാസ്തവിക സംഖ്യകളുടെ അനുക്രമം എന്നത് നിസർഗ്ഗ സംഖ്യകളുടെ ഗണത്തിൻമേൽ നിർവ്വചിക്കപ്പെടുന്ന ഒരു വാസ്തവിക ഫലനമാണ്.

ശ്രേണിയിലെ ഓരോ അംഗത്തിനേയും അനുക്രമത്തിലെ പദങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നു. ആദ്യ സ്ഥാനത്തുള്ള അംഗത്തെ ആദ്യ പദമെന്നു പറയുന്നു. രണ്ടാമത്തെ സ്ഥാനത്തുള്ള അംഗത്തെ ശ്രേണിയുടെ രണ്ടാമത്തെ പദമെന്നു പറയുന്നു. അത് ഇപ്രകാരം തുടരുന്നു.

$n^{th}$ പദത്തിനെ $a_n$ എന്നു കുറിക്കുകയാണെങ്കിൽ ഒന്നാംപദം $a_1$ , രണ്ടാം പദം $a_2$ എന്നിങ്ങനെ കുറിക്കപ്പെടുന്നു. ഒരു ശ്രേണിയെ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ ..... എന്നെഴുതാം.

### വിശദീകരണം

1. 1,3,5,7,...എന്നത് ഒരു അനുക്രമമാകുന്നു. ഇതിൽ പൊതുപദം $a_n = 2n - 1$ അടങ്ങിയിരിക്കുന്നു. $n = 1, 2, 3, \ldots,$ എന്നാണെങ്കിൽ നമുക്ക് $a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_3 = 5,\ a_4 = 7, \ldots$ എന്നു കിട്ടും.

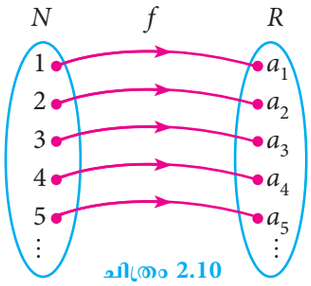
2. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ എന്നശ്രേണിയുടെ പൊതുപദം $\frac{1}{n+1}$ ആണ്. $n$ = 1,2,3,....എന്ന് കൊടുത്താൽ $a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = \frac{1}{3},\ a_3 = \frac{1}{4},\ a_4 = \frac{1}{5}, \ldots$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

ഒരു അനുക്രമത്തിൽ കാണപ്പെടുന്ന അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം പരിമിതമാണെങ്കിൽ അതിനെ പരിമിത അനുക്രമം എന്നു പറയുന്നു. ഒരു അനുക്രമത്തിലെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം അനന്തമാണെങ്കിൽ അതിനെ അനന്ത അനുക്രമം എന്നു പറയുന്നു



2 Numbers and Seq.indd 52 20/01/2023 17:32:51

### അനുക്രമങ്ങളെ ഫലനങ്ങളായി കാണൽ



ചിത്രം 2.10

ഒരു അനുക്രമം എന്നത് നിസർഗ്ഗ സംഖ്യകളുടെ $(N)$ ഗണത്തിന്മേൽ നിർവ്വചിക്കപ്പെടുന്ന ഫലനങ്ങളാണ്. പ്രത്യേകിച്ചും അനുക്രമം എന്നത് $f : N \to R$, എന്ന പ്രകാരമുള്ള ഫലനമാണ്. ഇവിടെ R എന്നത് വാസ്തവിക സംഖ്യകളുടെ ഗണമാണ്.

അനുക്രമങ്ങളുടെ രീതി $a_1, a_2, a_3, \ldots$ എന്നാണെങ്കിൽ നമുക്ക് ഫലനത്തെ അനുക്രമവുമായി ബന്ധപ്പെടുത്താം $a_1, a_2, a_3, \ldots$ by $f(k) = a_k$, $k = 1,2,3,\ldots$

### പുരോഗതി പരിശോധന

1. താഴെതന്നിട്ടുള്ള അനുക്രമത്തിൽ വിട്ടുപോയവ പൂരിപ്പിക്കുക
   (i) 7, 13, 19, _____ , ...  (ii) 2, _____, 10, 17, 26,...
   (iii) 1000, 100, 10, 1, _____, ...
2. ഒരു അനുക്രമം എന്നത് _____ഗണത്തിൻമേലുള്ള നിർവ്വചനത്തിന്റെ ഫലനമാണ്.
3. 0,2,6,12,20,... അനുക്രമത്തിലെ $n^{\text{th}}$ പദത്തിനെ _____ രീതിയിലും എഴുതാം.
4. ശരിയോ തെറ്റോ എന്നെഴുതുക
   (i) എല്ലാ അനുക്രമങ്ങളും ഫലനങ്ങളാണ് (ii) എല്ലാ ഫലനങ്ങളും അനുക്രമങ്ങളാണ്.

**ഉദാഹരണം 2.19 :** അനുക്രമത്തിലെ അടുത്ത മൂന്നു പദങ്ങളെ കണ്ടുപിടിക്കുക

(i) $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{14}, \ldots$. (ii) $5,\ 2, -1, -4, \ldots$.  (iii) $1, 0.1, 0.01, \ldots$

**നിർദ്ധാരണം** (i) $\frac{1}{2} \xrightarrow{+4} \frac{1}{6} \xrightarrow{+4} \frac{1}{10} \xrightarrow{+4} \frac{1}{14}, \ \cdots$

മുകളിൽ പറഞ്ഞ അനുക്രമത്തിൽ അംശങ്ങൾ ഒരുപോലുള്ളതും ഛേദങ്ങൾ 4 വെച്ച് കൂടുന്നവയുമാണ്.

അതുകൊണ്ട് അടുത്ത മൂന്നുപദങ്ങൾ $a_5 = \frac{1}{14+4} = \frac{1}{18}$

$$a_6 = \frac{1}{18+4} = \frac{1}{22}$$

$$a_7 = \frac{1}{22+4} = \frac{1}{26}$$

**കുറിപ്പ്**

- എല്ലാ അനുക്രമങ്ങളും ഫലനങ്ങളാണെങ്കിലും എല്ലാ ഫലനങ്ങളും അനുക്രമങ്ങളല്ല.

(ii) $5 \xrightarrow{-3} 2 \xrightarrow{-3} -1 \xrightarrow{-3} -4, \ \ldots$

ഇവിടെ ഓരോ പദത്തിലും 3 കുറഞ്ഞുകൊണ്ടിരിക്കുന്നു. അതുകൊണ്ട് അടുത്ത മൂന്നു പദങ്ങൾ $-7$, $-10$, $-13$.

(iii) $1 \xrightarrow{\sqrt{10}} 0.1 \xrightarrow{\sqrt{10}} 0.01, \ \ldots$



2 Numbers and Seq.indd 53 20/01/2023 17:32:53

ഇവിടെ ഓരോ പദത്തിനെയും 10 കൊണ്ട് വിഭജിച്ചിരിക്കുന്നു. അപ്പോൾ അടുത്ത മൂന്നു പദങ്ങൾ

$$a_4 = \frac{0.01}{10} = 0.001$$
$$a_5 = \frac{0.001}{10} = 0.0001$$
$$a_6 = \frac{0.0001}{10} = 0.00001$$

**ഉദാഹരണം 2.20 :** താഴെ തന്നിട്ടുള്ള അനുക്രമങ്ങളുടെ പൊതുപദങ്ങളെ കണ്ടുപിടിക്കുക

(i) $3, 6, 9, \ldots$ (ii) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$ (iii) $5, -25, 125, \ldots$

**നിർദ്ധാരണം** (i) $3, 6, 9, \ldots$

ഇവിടെ പദങ്ങൾ 3 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളാണ്. അതുകൊണ്ട് പൊതുപദം

$a_n = 3n,$ ആകുന്നു

(ii) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$

$a_1 = \frac{1}{2}$; $a_2 = \frac{2}{3}$; $a_3 = \frac{3}{4}$

$n^{\text{th}}$ പദത്തിന്റെ അംശം $n$ ആകുന്നു. ഛേദം അംശത്തിനേക്കാൾ 1 കൂടുതലാണ്. അതുകൊണ്ട്, $a_n = \frac{n}{n+1}, n \in N$

(iii) $5, -25, 125, \ldots$

അനുക്രമത്തിലെ പദങ്ങളിൽ +,- ചിഹ്നങ്ങൾ മാറി മാറി വരുന്നു. കൂടാതെ അവ 5 ന്റെ ഘാതങ്ങളുമാകുന്നു. അതുകൊണ്ട്.

പൊതുപദം $a_n = (-1)^{n+1}5^n, n \in N$

**ഉദാഹരണം 2.21 :** ഒരു അനുക്രമത്തിന്റെ പൊതുപദത്തെ ഇതുപോലെ നിർവ്വചിച്ചിരിക്കുന്നു

$$a_n = \begin{cases} n(n+3); & n \in N \text{ ഒറ്റസംഖ്യ} \\ n^2+1 \quad ; & n \in N \text{ ഇരട്ടസംഖ്യ} \end{cases}$$

11-ാം പദവും, 18-ാം പദവും കണ്ടുപിടിക്കുക.

**നിർദ്ധാരണം** 11 ഒറ്റസംഖ്യയായതുകൊണ്ട് $a_n = n(n+3)$

അതുകൊണ്ട് 11-ാം പദം $a_{11} = 11(11+3) = 154$.

18 ഇരട്ട സംഖ്യയായതുകൊണ്ട് $a_n = n^2 + 1$

അതുകൊണ്ട് 18-ാം പദം $a_{18} = 18^2 + 1 = 325$.

**ഉദാഹരണം 2.22 :** താഴെ തന്നിട്ടുള്ള അനുക്രമത്തിന്റെ ആദ്യത്തെ 5 പദങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുക..

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1, a_n = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}+3};\ n \geq 3,\ n \in N$$

**നിർദ്ധാരണം** ഈ അനുക്രമത്തിലെ ആദ്യത്തെ രണ്ടു പദങ്ങളും $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ എന്നാകുന്നു. $a_3$ എന്ന മൂന്നാംപദം ആദ്യത്തെയും രണ്ടാമത്തെയും പദത്തിനെ ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്നു.

$a_3 = \frac{a_{3-1}}{a_{3-2}+3} = \frac{a_2}{a_1+3} = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}$ അതുപോലെ $a_4$ എന്ന നാലാം പദം $a_2$, $a_3$ നെ ആശ്രയിച്ചിരി



2 Numbers and Seq.indd 54 20/01/2023 17:32:55

ക്കുന്നു. $a_4 = \frac{a_{4-1}}{a_{4-2}+3} = \frac{a_3}{a_2+3} = \frac{\frac{1}{4}}{1+3} = \frac{\frac{1}{4}}{4} = \frac{1}{4}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

ഇതുപോലെ $a_5$ എന്ന അഞ്ചാംപദം താഴെ കാണുന്ന രീതിയിൽ കണക്കാക്കാം

$$a_5 = \frac{a_{5-1}}{a_{5-2}+3} = \frac{a_4}{a_3+3} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{4}+3} = \frac{1}{16}\times\frac{4}{13} = \frac{1}{52}$$

അതുകൊണ്ട് അനുക്രമത്തിന്റെ ആദ്യത്തെ അഞ്ചു പദങ്ങൾ $1, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{52}$ ആകുന്നു.

## അഭ്യാസം 2.4

1. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള അനുക്രമത്തിന്റെ അടുത്ത മൂന്നു പദങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

   (i) 8, 24, 72, …  (ii) 5, 1, −3, …  (iii) $\frac{1}{4}, \frac{2}{9}, \frac{3}{16}, \ldots$

2. $n$-ാം പദങ്ങൾ താഴെ തന്നിട്ടുണ്ട്. അതുപയോഗിച്ച് അനുക്രമത്തിന്റെ ആദ്യത്തെ നാലുപദങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുക

   (i) $a_n = n^3 - 2$  (ii) $a_n = (-1)^{n+1} n(n+1)$  (iii) $a_n = 2n^2 - 6$

3. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള അനുക്രമങ്ങളുടെ $n^{\text{th}}$-ാം പദം കണ്ടുപിടിക്കുക

   (i) $2,5,10,17,\ldots$  (ii) $0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\ldots$  (iii) $3,8,13,18,\ldots$

4. $n^{th}$ പദങ്ങൾ താഴെ തന്നിട്ടുണ്ട്. അതുപയോഗിച്ച് അനുക്രമത്തിലെ സൂചിപ്പിച്ച പദങ്ങൾ കണ്ടു പിടിക്കുക

   (i) $a_n = \frac{5n}{n+2}$; $a_6$ , $a_{13}$  (ii) $a_n = -(n^2-4)$; $a_4$ and $a_{11}$

5. ഇവയുടെ $n$-ാം പദം $a_n = \begin{cases} \frac{n^2-1}{n+3} & ; n \text{ ഒറ്റസംഖ്യ}, n \in N \\ \frac{n^2}{2n+1} & ; n \text{ ഇരട്ടസംഖ്യ}, n \in N \end{cases}$ എങ്കിൽ $a_8$, $a_{15}$കണ്ടുപിടിക്കുക.

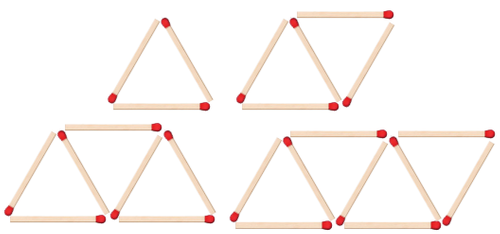
6. If $a_1 = 1,\ a_2 = 1$ , $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2},\ n \geq 3,\ n \in \mathbb{N}$ , ആണെങ്കിൽ, അനുക്രമത്തിന്റെ ആദ്യത്തെ ആറു പദങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

## 2.7 കൂട്ടുസമാന്തരശ്രേണി

കൂട്ടു സമാന്തര അനുക്രമം താഴെ തന്നിട്ടുള്ള രണ്ടു വിശദീകരണങ്ങളിലൂടെ നമുക്ക് തുടങ്ങാം.

### വിശദീകരണം1

തീപ്പെട്ടിക്കോലുകൾ ഉപയോഗിച്ച് താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ചിത്രം തയ്യാറാക്കുക



ചിത്രം.2.11

(i) ഓരോ ചിത്രത്തിനും ആവശ്യമായ തീപ്പെട്ടിക്കോലുകളുടെ എണ്ണം എത്ര? 3,5,7, 9.

(ii) അടുത്തടുത്ത സംഖ്യകൾക്കിടയിലുള്ള വ്യത്യാസം കണ്ടുപിടിക്കാൻ സാധിക്കുമോ?

$5 - 3 = 7 - 5 = 9 - 7 = 2$

അതുകൊണ്ട് അടുത്തടുത്ത സംഖ്യകൾക്കിടയിലുള്ള വ്യത്യാസം എപ്പോഴും 2 ആകുന്നു.



2 Numbers and Seq.indd 55 20/01/2023 17:32:58

**വിശദീകരണം 2**

ഒരാളിന് ലഭിച്ച ജോലിക്ക് ആദ്യമാസത്തെ ശമ്പളം ₹10,000 രൂപയും വാർഷിക വർദ്ധനവ് ₹2000. രൂപയും ആയിരുന്നു $1_{ാം}$, $2_{ാം}$, $3_{ാം}$ വർഷങ്ങളിൽ അയാളുടെ ശമ്പളം യഥാക്രമം ₹ 10000, ₹ 12000 , ₹ 14000 എന്നിങ്ങനെയായിരുന്നു.

അടുത്തടുത്ത വർഷങ്ങളിലെ ശമ്പള തുകയിലെ വ്യത്യാസത്തെ കണക്കാക്കുമ്പോൾ നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നത് $12000 - 10000 = 2000$; $14000 - 12000 = 2000$ ആകുന്നു. അതുകൊണ്ട് അടുത്തടുത്ത വർഷങ്ങളിലെ ശമ്പളത്തിന്റെ വ്യത്യാസം എപ്പോഴും 2000 രൂപ ആകുന്നു.

മേൽപ്പറഞ്ഞ ഈ രണ്ടു വിശദീകരണങ്ങൾക്കും പൊതുസ്വഭാവം നിങ്ങൾ നിരീക്ഷിച്ചോ? ഈ രണ്ടു ഉദാഹരണങ്ങളിലും അടുത്തടുത്ത പദങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം എപ്പോഴും സ്ഥിരാങ്കം ആയിരിക്കും. അതുകൂടാതെ ആദ്യപദം ഒഴികെ യുള്ള ഓരോ പദവും കിട്ടുന്നത് അതിന്റെ തൊട്ടുമുൻപുള്ള പദത്തിനോട് ഒരു സ്ഥിര സംഖ്യ ചേർത്താണ് ഓരോ പദങ്ങളും ഉണ്ടാകുന്നത്. (മുകളിൽ പറഞ്ഞ വിശദീകരണം ഒന്നിലും രണ്ടിലും യഥാക്രമം 2,2000 ആകുന്നു) അടുത്തടുത്ത പദങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള വ്യത്യാസമായ സ്ഥിരാങ്കത്തെ പൊതുവ്യത്യാസം എന്നു പറയുന്നു.

**നിർവചനം**

$a$, $d$ എന്നിവ രണ്ട് വാസ്തവിക സംഖ്യകളാണെന്നിരിക്കട്ടെ. ഈ സംഖ്യകൾ $a$, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$, $a+4d$, ... എന്ന രൂപത്തിലുള്ളസംഖ്യകൾ കൂട്ടുസമാന്തര അനുക്രമം അല്ലെങ്കിൽ കൂട്ടുസമാന്തര ശ്രേണിരൂപീകരിക്കുന്നു. ഇതിനെ A.P. എന്നു കുറിക്കുന്നു. സംഖ്യ '$a$' നെ ആദ്യപദമെന്നും സംഖ്യ '$d$' നെ പൊതുവ്യത്യാസം എന്നും പറയുന്നു.

ചുരുക്കത്തിൽ ഒരു സ്ഥിരാങ്കത്താൽ വ്യത്യാസപ്പെടുന്ന അടുത്തടുത്ത പദങ്ങൾ അടങ്ങിയ അനുക്രമത്തെയാണ് കൂട്ടുസമാന്തര ശ്രേണി എന്നു പറയുന്നത്. ഉദാഹരണമായി 2, 4, 6, 8, 10, 12,... എന്ന ഇരട്ട ധനപൂർണ്ണാങ്കങ്ങളുടെ ഗണം ഒരു A.P. ആകുന്നു. അതിന്റെ ആദ്യപദം $a = 2$ പൊതുവ്യത്യാസം $d = 2$ കാരണം $4 - 2 = 2$, $6 - 4 = 2$, $8 - 6 = 2$, ...

പൊതുവെയുള്ള ജീവിത സാഹചര്യങ്ങൾ കൂടുതലും A.P. യിലെ സംഖ്യകളായിരിക്കും

**കുറിപ്പ്**

- ഒരു A.P. യിലെ അടുത്തുള്ള രണ്ടു പദങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം എപ്പോഴും സ്ഥിരാങ്കമായിരിക്കും. ഈ സ്ഥിരാങ്ക മൂല്യത്തെ പൊതുവ്യത്യാസം എന്നു പറയുന്നു..
- ഒരു A.P.യിലെ പദങ്ങൾ പരിമിത സംഖ്യകളാണ് ഉള്ളതെങ്കിൽ അതിന്റെ പരിമിതകൂട്ടു സമാന്തര ശ്രേണി എന്നു പറയുന്നു. എന്നാൽ ഒരു A.P. യിൽ പദങ്ങളിൽ അനന്ത സംഖ്യകളാണ് ഉള്ളതെങ്കിൽ അതിനെ അനന്തകൂട്ടുസമാന്തരശ്രേണി എന്നു പറയുന്നു.

### 2.7.1 A.P. യുടെ പദവും പൊതുവ്യത്യാസവും

1. A.P. യുടെ പദങ്ങളെ താഴെ കാണുംവിധം എഴുതാം

$t_1 = a = a + (1-1)d$, $t_2 = a + d = a + (2-1)d$, $t_3 = a + 2d = a + (3-1)d$,

$t_4 = a + 3d = a + (4-1)d$, . . .

പൊതുവിൽ $n^{\text{th}}$ പദത്തിനെ $t_n$ എന്ന് കുറിക്കുന്നു. ഇതിനെ $t_n = a + (n-1)d$ എന്നും എഴുതാം.

ആദ്യപദം $a$ യും പൊതുവ്യത്യാസം $d$ യും ഉള്ള ഒരു A.P. യിലെ n-ാം പദം $t_n = a + (n-1)d$



2 Numbers and Seq.indd 56 20/01/2023 17:33:00

2. പൊതുവിൽ A.P.യുടെ പൊതുവ്യത്യാസം കണ്ടുപിടിക്കാൻ രണ്ടാമത്തെ പദത്തിൽ നിന്നും ആദ്യ പദത്തെയും, മൂന്നാമത്തെ പദത്തിൽ നിന്നും രണ്ടാമത്തെ പദത്തേയും തുടർന്ന് ഇങ്ങനെ കുറ യ്ക്കേണ്ടതാണ്.

ഉദാ., $t_1 = a,\ t_2 = a + d$

അതുകൊണ്ട്, $t_2 - t_1 = (a + d) - a = d$

അതുപോലെ, $t_2 = a + d,\ t_3 = a + 2d, \ldots$

അതുകൊണ്ട്, $t_3 - t_2 = (a + 2d) - (a + d) = d$

പൊതുവിൽ, $d = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = t_4 - t_3 = \ldots.$

അതുകൊണ്ട്, $d = t_n - t_{n-1}$ , $n = 2, 3, 4, \ldots$

## പുരോഗതി പരിശോധന

1. ഒരു A.P. യിലെ അടുത്തടുത്ത രണ്ടു പദങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം _____ ആകുന്നു.
2. ഒരു A.P. യുടെ ആദ്യപദം $a$ യും പൊതുവ്യത്യാസം $d$ യും ആണെങ്കിൽ. 8-ാം പദം _____ ആകുന്നു.
3. ഒരു A.P. യിലെ n-ാം പദം $t_n$ ആണെങ്കിൽ $t_{2n} - t_n$ _____ ആകുന്നു.

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള A.P. കളിലെ പൊതുവ്യത്യാസത്തെ കണ്ടുപിടിക്കുക

(i) $1, 4, 7, 10, \ldots$

$d = 4 - 1 = 7 - 4 = 10 - 7 = \ldots = 3$

(ii) $6, 2, -2, -6, \ldots$

$d = 2 - 6 = -2 - 2 = -6 - \big(-2\big) = \ldots = -4$

**നിങ്ങൾക്ക് അറിയാമോ**

ഒരു A.P. യുടെ പൊതുവ്യത്യാസം ധനമോ, ഋണമോ അല്ലെങ്കിൽ പൂജ്യമോ ആകുന്നു.

**ചിന്തിക്കുക**

ഒരു A.P. യുടെ n-ാം പദം $t_n$ ആണെങ്കിൽ $t_{n+1} - t_{n-1}$ മൂല്യം _____ ആകുന്നു.

**ഉദാഹരണം 2.23** താഴെ തന്നിട്ടുള്ള അനുക്രമങ്ങൾ A.P. യിലാണോ അല്ലയോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക?

(i) $x + 2,\ 2x + 3,\ 3x + 4, \ldots$ (ii) $2, 4, 8, 16, \ldots$ (iii) $3\sqrt{2}, 5\sqrt{2}, 7\sqrt{2}, 9\sqrt{2}, \ldots$

**നിർദ്ധാരണം** തന്നിട്ടുള്ള അനുക്രമം A.P., യിലാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കാൻ രണ്ട് അടുത്തടുത്ത പദങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം തുല്യമാണോ അല്ലയോ എന്ന് കണ്ടുപിടിച്ചാൽ മതിയാകും.

(i) $t_2 - t_1 = (2x + 3) - (x + 2) = x + 1$

$t_3 - t_2 = (3x + 4) - (2x + 3) = x + 1$

$t_2 - t_1 = t_3 - t_2$

അതായത് രണ്ട് അടുത്തടുത്ത രണ്ട് പദങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം തുല്യമായിരിക്കും.

അതുകൊണ്ട് ഈ അനുക്രമം $x + 2,\ 2x + 3,\ 3x + 4, \ldots$ A.P യിലാകുന്നു.

(ii) $t_2 - t_1 = 4 - 2 = 2$

$t_3 - t_2 = 8 - 4 = 4$

$t_2 - t_1 \neq t_3 - t_2$

അടുത്തടുത്ത പദങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള വ്യത്യാസം സമമല്ല. അതുകൊണ്ട് ഈ അനുക്രമം 2, 4, 8, 16, . . . A.P. യിൽ അല്ല.



2 Numbers and Seq.indd 57 20/01/2023 17:33:04

(iii) $t_2 - t_1 = 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

$t_3 - t_2 = 7\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

$t_4 - t_3 = 9\sqrt{2} - 7\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

അടുത്തടുത്ത പദങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള വ്യത്യാസം തുല്യമാണ്. അതിനാൽ $3\sqrt{2}, 5\sqrt{2}, 7\sqrt{2}, 9\sqrt{2}, \ldots$ അനുക്രമത്തിലെ പദങ്ങൾ A.P. യിലാകുന്നു

**ഉദാഹരണം 2.24** ആദ്യപദം 20, പൊതുവ്യത്യാസം 8 ഉള്ള ഒരു A.P. എഴുതുക.

**നിർദ്ധാരണം** ആദ്യപദം $= a = 20$ ; പൊതുവ്യത്യാസം = $d$= 8

കൂട്ടുസമാന്തരശ്രേണി $a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d, \ldots$ ആകുന്നു

ഇവിടെ $20,\ 20+8,\ 20+2(8),\ 20+3(8), \ldots$ ലഭിക്കുന്നു

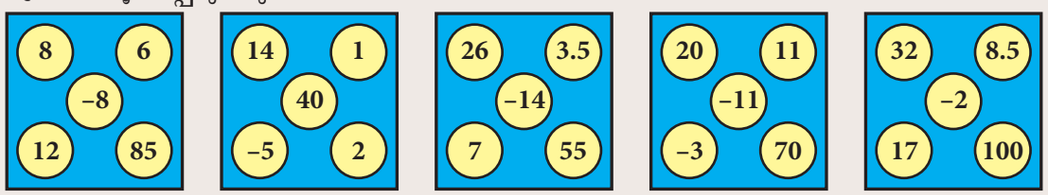
അതുകൊണ്ട് ആവശ്യപ്പെട്ട A.P. 20, 28, 36, 44, … ആകുന്നു

**കുറിപ്പ്**

- പൊതുവ്യത്യാസം പൂജ്യമായിട്ടുള്ള ഒരു കൂട്ടുസമാന്തര ശ്രേണിയെ സ്ഥിര കൂട്ടുസമാന്തര ശ്രേണി എന്നു പറയുന്നു.

**പ്രവർത്തി 4**

ഇവിടെ അഞ്ച് പെട്ടികളുണ്ട്. ഓരോ പെട്ടിയിൽ നിന്നും ഒരു സംഖ്യയെ എടുത്തുമാറ്റി അഞ്ച് കൂട്ടുസമാന്തരശ്രേണി രൂപപ്പെടുത്തുക.




**ഉദാഹരണം 2.25** 3, 15, 27, 39,… എന്ന A.P.യിലെ 15-ാം പദം, 24-ാം പദം, n-ാം പദം (പൊതുപദം) എന്നിവ കണ്ടുപിടിക്കുക

**നിർദ്ധാരണം** ആദ്യപദം $= a = 3$ പൊതുവ്യത്യാസം $= d = 15 - 3 = 12$ .

ആദ്യപദം $a$ യും പൊതുവ്യത്യാസം $d$ യും ഉള്ള ഒരു A.P. യിലെ n-ാം പദം $t_n = a + (n-1)d$

$t_{15} = a + (15-1)d = a + 14d = 3 + 14(12) = 171$

(ഇവിടെ $a = 3$, $d = 12$)

$t_{24} = a + (24-1)d = a + 23d = 3 + 23(12) = 279$

തന്നിട്ടുള്ള n-ാം പദം $t_n = a + (n-1)d$

$t_n = 3 + (n-1)12$

$t_n = 12n - 9$



2 Numbers and Seq.indd 58 20/01/2023 17:33:07

**കുറിപ്പ്**

- ആദ്യപദം $a$ യും അവസാനപദം $l$ ഉം ഉള്ള ഒരു പരിമിത A.P. യിലെ പദങ്ങളുടെ എണ്ണം $l = a + (n-1)d$ -ൽ നിന്നും $n = \left(\frac{l-a}{d}\right) + 1$ എന്നു ലഭിക്കുന്നു.

**ഉദാഹരണം 2.26** 3, 6, 9, 12,..., 111 ഉള്ള ഒരു A.P. യിലെ പദങ്ങളുടെ എണ്ണം കണ്ടുപിടിക്കുക .

**നിർദ്ധാരണം** ആദ്യപദം $a = 3$; പൊതുവ്യത്യാസം $d = 6 - 3 = 3$; അവസാന പദം $l = 111$

നമുക്കറിയാം, $n = \left(\frac{l-a}{d}\right) + 1$

$$n = \left(\frac{111-3}{3}\right) + 1 = 37$$

അതുകൊണ്ട് A.P. യിൽ 37 പദങ്ങളുണ്ട്.

**പുരോഗതി പരിശോധന**

1. ഒരു സ്ഥിര A.P. യുടെ പൊതുവ്യത്യാസം _____.
2. ഒരു A.P. യുടെ ആദ്യപദം a യും അവസാനപദം $l$ ഉം ആണെങ്കിൽ പദങ്ങളുടെ എണ്ണം _____ ആകുന്നു.

**ഉദാഹരണം 2.27** ഒരു A.P. യുടെ 7-ാം പദം $-1$, 16-ാം പദം 17 ആണെങ്കിൽ അതിന്റെ പൊതു പദം കണ്ടുപിടിക്കുക.

**നിർദ്ധാരണം** A.P. $t_1, t_2, t_3, t_4, \ldots$ ആകുന്നു

തന്നിട്ടുള്ളവ $t_7 = -1$, $t_{16} = 17$

$a + (7-1)d = -1$, $a + (16-1)d = 17$

$a + 6d = -1$ ...(1)

$a + 15d = 17$ ...(2)

സമീകരണം (2) ൽ നിന്നും (1) കുറച്ചാൽ $9d = 18$ $d = 2$

$d = 2$ നെ സമീകരണം (1), ൽ പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ $a + 12 = -1$ $a = -13$

പൊതുപദം $t_n = a + (n-1)d$

$= -13 + (n-1) \times 2 = 2n - 15$

**ഉദാഹരണം 2.28** ഒരു A.P. യിലെ $l^{th}$, $m^{th}$ , $n^{th}$ പദങ്ങൾ യഥാക്രമം $x, y, z$ എന്നാൽ
(i) $x(m-n) + y(n-l) + z(l-m) = 0$ (ii) $(x-y)n + (y-z)l + (z-x)m = 0$ തെളിയിക്കുക

**നിർദ്ധാരണം** (i) ആദ്യപദം $a$ പൊതുവ്യത്യാസം $d$ . ഇവിടെ

$t_l = x, t_m = y, t_n = z$

പൊതുപദം കാണുന്നതിനുള്ള സൂത്രം

$a + (l-1)d = x$ ...(1)

$a + (m-1)d = y$ ...(2)

$a + (n-1)d = z$ ...(3)



2 Numbers and Seq.indd 59 20/01/2023 17:33:10

നമുക്ക്, $x(m-n)+y(n-l)+z(l-m)$

$= a[(m-n)+(n-l)+(l-m)]+d[(m-n)(l-1)+(n-l)(m-1)+(l-m)(n-1)]$

$= a[0]+d[lm-ln-m+n+mn-lm-n+l+ln-mn-l+m]$

$= a(0)+d(0)=0$

(ii) സമീകരണം (1) ൽ നിന്നും സമീകരണം (2), നെ കുറച്ചാൽ, സമീകരണം (2) ൽ നിന്നും (3) നെ കുറച്ചാൽ , സമീകരണം (3) ൽ നിന്നും സമീകരണം (1)കുറച്ചാൽ നമുക്കു കിട്ടും

$$x-y=(l-m)d$$

$$y-z=(m-n)d$$

$$z-x=(n-l)d$$

$$(x-y)n+(y-z)l+(z-x)m = [(l-m)n+(m-n)l+(n-l)m]d$$

$$= \left[ln-mn+lm-nl+nm-lm\right]d=0$$

**കുറിപ്പ്**

ഒരു കൂട്ടുസമാന്തര ശ്രേണിയിൽ

- സ്ഥിരാങ്കത്തെ കൂട്ടുകയോ കുറയ്ക്കുകയോ ചെയ്താൽ ഉണ്ടാകുന്ന അനുക്രമം ഒരു A.P. ആയിരിക്കും
- പൂജ്യമല്ലാത്ത സംഖ്യകൾ കൊണ്ട് ഗുണിക്കുകയോ ഹരിക്കുകയോ ചെയ്താൽ ഉണ്ടാകുന്ന അനുക്രമം ഒരു A.P. ആയിരിക്കും
- ഒരു A.P. യുടെ തുടർച്ചയായ മൂന്നു പദങ്ങളുടെതുക തന്നിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ അവയെ $a-d$, $a$, $a+d$ . എന്നെഴുതാം. ഇവിടെ പൊതുവ്യത്യാസം $d$ ആകുന്നു.
- A.P. യുടെ തുടർച്ചയായ നാലു പദങ്ങളുടെതുക തന്നിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ അവയെ $a-3d$ , $a-d$ , $a+d$ , $a+3d$ . എന്നെഴുതാം. ഇവിടെ പൊതുവ്യത്യാസം $2d$ ആകുന്നു.

**ഉദാഹരണം 2.29** ഒരു A.P., യിൽ തുടർച്ചയായ നാലു പദങ്ങളുടെ തുക 28 വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുക 276 ഉം ആണ്. എന്നാൽ ആ നാലു പദങ്ങളും കണ്ടുപിടിക്കുക.

**നിർദ്ധാരണം** നാലു പദങ്ങളെയും $(a-3d), (a-d), (a+d)$ , $(a+3d)$ എന്ന രൂപത്തിൽ എഴുതുക.

നാലു പദങ്ങളുടെയും കൂട്ടുതുക 28, ആയതുകൊണ്ട്

$$a-3d+a-d+a+d+a+3d=28$$

$$4a=28 \quad , \quad a=7$$

അതുപോലെ അവയുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ കൂട്ടുതുക 276, ആയതുകൊണ്ട്

$$(a-3d)^2+(a-d)^2+(a+d)^2+(a+3d)^2=276.$$

$$a^2-6ad+9d^2+a^2-2ad+d^2+a^2+2ad+d^2+a^2+6ad+9d^2=276$$

$$4a^2+20d^2=276 \Rightarrow 4(7)^2+20d^2=276.$$

$$d^2=4 \ , \ d=\pm 2$$

$d=2$ ആണെങ്കിൽ നാലു സംഖ്യകളും $7-3(2)$, $7-2$, $7+2$, $7+3(2)$ ആകുന്നു.

അതായത് നാലു സംഖ്യകളും 1, 5, 9 , 13.



2 Numbers and Seq.indd 60 20/01/2023 17:33:14

$a = 7$, ഉം $d = -2$ ഉം ആണെങ്കിൽ നാലു സംഖ്യകളും 13, 9, 5 , 1 ആകുന്നു.

അതായത് A.P. യിലെ അടുത്തടുത്ത നാലുപദങ്ങൾ 1, 5, 9 , 13 ആകുന്നു.

### A.P. യിലെ മൂന്നു സംഖ്യകൾക്കുള്ള നിബന്ധനകൾ

$a, b, c$ എന്നിവ A.P. യിലാണെങ്കിൽ $b = a + d$, $c = a + 2d$

$$a + c = 2a + 2d$$
$$2(a + d) = 2b$$
$$\boxed{2b = a + c}$$

അതുപോലെ $2b = a + c$, ആണെങ്കിൽ $b - a = c - b$ ആകുന്നു. അതുകൊണ്ട് $a$, $b$, $c$ A.P യിലാകുന്നു.

$\boxed{2b = a + c}$ ആണെങ്കിൽ മാത്രമേ A.P. യിൽ $a$, $b$, $c$ എന്ന പൂജ്യമല്ലാത്ത മൂന്നു സംഖ്യകൾ കാണപ്പെടുകയുള്ളൂ

**ഉദാഹരണം 2.30** അമ്മ ₹207 നെ മൂന്നായി വിഭജിച്ച് മൂന്നു മക്കൾക്ക് കൊടുത്തു. ആ തുകകൾ A.P. യിലാണ്. കുട്ടികൾക്ക് ലഭിച്ച ഏറ്റവും ചെറിയ രണ്ടു തുകകളുടെ ഗുണനഫലം ₹4623. രൂപയാകുന്നു. ഓരോ കുട്ടിക്കും ലഭിച്ച തുക കണ്ടു പിടിക്കുക.

**നിർദ്ധാരണം** മൂന്നു കുട്ടികൾക്കും A.P. രൂപത്തിൽ ലഭിച്ച തുക $a - d$ , $a$, $a + d$ ആണെന്നിരിക്കട്ടെ

മൊത്തം കൂട്ടുതുക ₹207 ആയതുകൊണ്ട് നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നത് .

$$(a - d) + a + (a + d) = 207$$
$$3a = 207 \qquad a = 69$$

ഏറ്റവും ചെറിയ രണ്ടു തുകകളുടെ ഗുണനഫലം 4623 ആകുന്നു.

$$(a - d)a = 4623$$
$$(69 - d)69 = 4623$$
$$d = 2$$

അതുകൊണ്ട് അമ്മ മൂന്നു മക്കൾക്കും നല്കിയ തുക

₹(69−2), ₹69, ₹(69+2). അതായത് , ₹67, ₹69 , ₹71.

### പുരോഗതി പരിശോധന

1. ഒരു A.P. യുടെ ഓരോ പദത്തിനെയും 3 കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ പുതിയ A.P. യുടെ പൊതുവ്യത്യാസം _____ ആകുന്നു.
2. _____ ആണെങ്കിൽ മാത്രമെ $a$, $b$ , $c$ എന്ന മൂന്നു സംഖ്യകൾ A.P. യിൽ ഉണ്ടാവുകയുള്ളൂ.

### അഭ്യാസം 2.5

1. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള അനുക്രമങ്ങൾ A.P. യിലാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക

   (i) $a - 3, a - 5, a - 7, \ldots$ (ii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ (iii) 9, 13, 17, 21, 25,...

   (iv) $\frac{-1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \ldots$ (v) $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$

2. ആദ്യപദം $a$ യും പൊതുവ്യത്യാസം $d$ യും താഴെ തന്നിട്ടുണ്ട്. അവയുടെ A.P. കണ്ടുപിടിക്കുക.

   (i) $a = 5$ , $d = 6$ (ii) $a = 7$ , $d = -5$ (iii) $a = \frac{3}{4}$ , $d = \frac{1}{2}$



2 Numbers and Seq.indd 61 20/01/2023 17:33:17

3. കൂട്ടുസമാന്തര ശ്രേണിയിലെ $n^{\text{th}}$ പദം തന്നിരിക്കുന്നു. ആദ്യപദവും പൊതുവ്യത്യാസവും കണ്ടുപിടിക്കുക.
   (i) $t_n = -3 + 2n$ (ii) $t_n = 4 - 7n$

4. $-11, -15, -19, \ldots$ എന്ന A.P. യിലെ 19-ാം പദം കണ്ടുപിടിക്കുക

5. 16, 11, 6, 1,... എന്ന A.P. യിൽ $-54$ എന്നത് എത്രാം പദം?

6. 9, 15, 21, 27,...,183 എന്ന A.P. യിലെ മദ്ധ്യപദം കണ്ടുപിടിക്കുക.

7. 9-ാം പദത്തിന്റെ 9 മടങ്ങിന് സമമാണ് 15-ാം പദത്തിന്റെ 15 മടങ്ങ് എങ്കിൽ 24-ാം പദത്തിന്റെ 6 മടങ്ങ് പൂജ്യമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

8. $3 + k,\ 18 - k,\ 5k + 1$ എന്നിവ A.P. യിലാണെങ്കിൽ $k$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

9. $x$, 10, $y$, 24, $z$ എന്നീ സംഖ്യകൾ A.P. യിലാണെങ്കിൽ $x$, $y$ , $z$, കണ്ടുപിടിക്കുക

10. ഒരു സിനിമാ തീയേറ്ററിൽ മുൻവരിയിൽ 20 സീറ്റുകളുണ്ട്. മൊത്തം 30 വരികൾ അനുവദിച്ചിട്ടുണ്ട്. മുൻനിരയ്ക്കു പുറകിലുള്ള ഓരോ വരിയിലും അതിനേക്കാൾ രണ്ട് സീറ്റ് കൂടുതലുണ്ട്. എങ്കിൽ അവസാനത്തെ വരിയിൽ എത്ര സീറ്റുകൾ ഉണ്ടാകും?

11. ഒരു A.P. യിലെ തുടർച്ചയായ മൂന്നു പദങ്ങളുടെ തുക 27 അവയുടെ ഗുണനഫലം 288. ആകുന്നു. എങ്കിൽ അവയുടെ മൂന്നു പദങ്ങളും കണ്ടുപിടിക്കുക..

12. ഒരു A.P. യിലെ 6-ാമത്തെയും 8-ാമത്തെയുംപദങ്ങളുടെ അനുപാതം 7:9. ആകുന്നു. എങ്കിൽ $9^{th}$ , $13^{th}$ പദങ്ങളുടെ അനുപാതം കാണുക.

13. ഊട്ടിയിലെ ശൈത്യകാലത്തിലെ താപനിലയുടെ അളവ് തിങ്കൾ മുതൽ വെള്ളി വരെ A.P. യിൽ എടുക്കുന്നു. തിങ്കൾ മുതൽ ബുധൻ വരെയുള്ള താപനിലയുടെ കൂട്ടുതുക $0^\circ$ C ഉം ബുധൻ മുതൽ വെള്ളിവരെയുള്ള താപനിലയുടെ കൂട്ടുതുക $18^\circ$ C. ഉം ആകുന്നു. എങ്കിൽ ഓരോ ദിവസത്തിന്റെയും താപനില കണ്ടുപിടിക്കുക.

14. പ്രിയ ആദ്യ മാസത്തിൽ ₹15,000 സമ്പാദിച്ചു. അതിനുശേഷം ഓരോ വർഷത്തിലും ₹1500 വർദ്ധനവ് ഉണ്ടായി. ഒന്നാം വർഷത്തിൽ അവളുടെ ചെലവ് ₹13,000 രൂപയാകുന്നു. ഓരോ വർഷത്തിലും ചെലവ് ₹900 രൂപ വച്ച് കൂടുന്നു. ഒരുമാസം ₹20,000 രൂപ സമ്പാദിക്കാൻ അവൾക്ക് എത്ര കാലം വേണം?.

## 2.8 ശ്രേണി

അനുക്രമത്തിലെ പദങ്ങളുടെ കൂട്ടുതുകയെ ശ്രേണി എന്നുപറയുന്നു. $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ എന്നിവ വാസ്തവിക സംഖ്യകളുടെ അനുക്രമമാണെന്നിരിക്കട്ടെ. എങ്കിൽ $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ എന്നിവയെ വാസ്തവിക സംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി എന്ന് നിർവ്വചിക്കാം.

ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളിൽ പരിമിത സംഖ്യകളുണ്ടെങ്കിൽ അതിനെ പരിമിത ശ്രേണി എന്നും ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളിൽ അനന്ത സംഖ്യകളുണ്ടെങ്കിൽ അതിനെ അനന്തശ്രേണി എന്ന് പറയുന്നു. നമുക്ക് പരിമിത ശ്രേണിയെ കുറിച്ചുള്ള പഠനത്തിൽ ശ്രദ്ധ കേന്ദ്രീകരിക്കാം..



2 Numbers and Seq.indd 62 20/01/2023 17:33:18

### 2.8.1 A.P. യിലെ പദങ്ങളുടെ കൂട്ടുതുക $n$

കൂട്ടുസമാന്തര അനുക്രമത്തിലുള്ള പദങ്ങളുടെ ശ്രേണിയെ കൂട്ടുസമാന്തര ശ്രേണി എന്നു പറയുന്നു.

$a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots$ കൂട്ടുസമാന്തര അനുക്രമമെന്നിരിക്കട്ടെ.

അനുക്രമത്തിലെ ആദ്യത്തെ $n$ പദങ്ങളുടെ തുകയെ $S_n$ എന്നു കുറിക്കാം,

$S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + (a+(n-1)d)$ ...(1)

മേൽപ്പറഞ്ഞവയെ തിരിച്ചെഴുതിയാൽ

$S_n = (a+(n-1)d) + (a+(n-2)d) + \cdots + (a+d) + a$ ...(2)

സമീകരണം (1) , (2) കൂട്ടുക,

$2S_n = [a+a+(n-1)d] + [a+d+a+(n-2)d] + \cdots + [a+(n-2)d+(a+d)] + [a+(n-1)d+a]$

$= [2a+(n-1)d] + [2a+(n-1)d + \cdots + [2a+(n-1)d]$ ($n$ പദങ്ങൾ)

$2S_n = n \times [2a+(n-1)d]$ , $S_n = \frac{n}{2}\left[2a+\left(n-1\right)d\right]$

**കുറിപ്പ്**

- ആദ്യപദം $a$, യും അവസാന പദം $l$ ഉം ($n^{th}$ പദം) തന്നിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ
  $S_n = \frac{n}{2}\left[2a+\left(n-1\right)d\right] = \frac{n}{2}\left[a+a+\left(n-1\right)d\right]$ ഇവിടെ, $l = a+\left(n-1\right)d$ ആയതിനാൽ
  $S_n = \frac{n}{2}[a+l]$.

**പുരോഗതി പരിശോധന**

1. ഒരു ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളുടെ കൂട്ടുതുകയെ _____ എന്നു പറയുന്നു.
2. ഒരു ശ്രേണിയിൽ പരിമിത സംഖ്യകളുണ്ടെങ്കിൽ അതിനെ _____ എന്നു പറയുന്നു.
3. ഒരു ശ്രേണിയിൽ പദങ്ങൾ _____ ആണെങ്കിൽ അതിനെ കൂട്ടു സമാന്തര ശ്രേണി എന്നു പറയുന്നു.
4. ഒരു A.P. യിലെ ആദ്യത്തെയും അവസാനത്തെയും പദങ്ങൾ തന്നിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ, കൂട്ടു തുക കാണുന്നതിനുള്ള സൂത്രം _____ ആകുന്നു.

**ഉദാഹരണം 2.31** $8, 7\frac{1}{4}, 6\frac{1}{2}, 5\frac{3}{4}, \ldots$ എന്ന A. P. യിലെ ആദ്യത്തെ 15 പദങ്ങളുടെ തുക കണ്ടുപിടിക്കുക

**നിർദ്ധാരണം** ആദ്യപദം $a = 8$, പൊതുവ്യത്യാസം $d = 7\frac{1}{4} - 8 = -\frac{3}{4}$,

A.P. യുടെ $n$ പദങ്ങളുടെ തുക $S_n = \frac{n}{2}\left[2a+(n-1)d\right]$

$$S_{15} = \frac{15}{2}\left[2\times 8 + (15-1)(-\frac{3}{4})\right]$$

$$S_{15} = \frac{15}{2}\left[16 - \frac{21}{2}\right] = \frac{165}{4}$$



2 Numbers and Seq.indd 63 20/01/2023 17:33:21

**ഉദാഹരണം 2.32** $0.40 + 0.43 + 0.46 + \cdots + 1$ ഭാജ്യതുക കാണുക?.

**നിർദ്ധാരണം** ഇവിടെ $n$ ന്റെ മൂല്യം തന്നിട്ടില്ല. എന്നാൽ അവസാന പദം തന്നിട്ടുണ്ട്. ഇതിൽ നിന്നും $n$ മൂല്യം കണ്ടുപിടിക്കാം.

തന്നിട്ടുള്ളവ $a = 0.40$ , $l = 1$ , $d = 0.43 - 0.40 = 0.03$ .

$$\text{അതുകൊണ്ട്, } n = \left(\frac{l-a}{d}\right) + 1$$

$$= \left(\frac{1-0.40}{0.03}\right) + 1 = 21$$

A.P. യുടെ $n$ പദങ്ങളുടെ തുക $S_n = \frac{n}{2}\left[a + l\right]$

$n = 21$ . അതുകൊണ്ട്, $S_{21} = \frac{21}{2}\left[0.40 + 1\right] = 14.7$

അതുകൊണ്ട് തന്നിട്ടുള്ള ശ്രേണിയുടെ 21 പദങ്ങളുടെ കൂട്ടുതുക 14.7 ആകുന്നു.

**ഉദാഹരണം 2.33** $1 + 5 + 9 + \ldots$ എന്ന ശ്രേണിയിലെ എത്ര പദങ്ങളുടെ കൂട്ടുതുകയാണ് 190?

**നിർദ്ധാരണം** $S_n = 190$. ആകുമ്പോഴുള്ള $n$, ന്റെ മൂല്യം കണ്ടുപിടിക്കുക

ആദ്യപദം $a = 1$, പൊതുവ്യത്യാസം $d = 5 - 1 = 4$ .

A.P. യുടെ $n$ പദങ്ങളുടെ തുക

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = 190$$

$$\frac{n}{2}[2 \times 1 + (n-1) \times 4] = 190$$

$$n[4n - 2] = 380$$

$$2n^2 - n - 190 = 0$$

$$(n - 10)(2n + 19) = 0$$

എന്നാൽ $n = 10$ , $n = -\frac{19}{2}$ സാധ്യമല്ല. അതുകൊണ്ട്, $n = 10$ .

**ചിന്തിക്കുക**

$n$ ന്റെ മൂല്യം ധനസംഖ്യയായിരിക്കണം എന്തുകൊണ്ട്?

## പുരോഗതി പരിശോധന

ശരിയോ തെറ്റോ, കാരണ സഹിതം വിവരിക്കുക.

1. ഏതൊരു A.P. യുടെ $n^{\text{th}}$ -ാം പദം $pn+q$ എന്ന രീതിയിലാണ് $p$, $q$ സ്ഥിരാങ്കങ്ങളാണ്.
2. ഏതൊരു A.P. യുടെ $n^{\text{th}}$ -ാം പദത്തിന്റെ കൂട്ടുതുക $pn^2+qn + r$ എന്ന രൂപത്തിലാണ്, ഇവിടെ $p$, $q$, $r$ സ്ഥിരാങ്കങ്ങളാണ്.

**ഉദാഹരണം 2.34** ഒരു A.P. യുടെ $13^{th}$ -ാം പദം 3 ആകുന്നു. ആദ്യത്തെ 13 പദങ്ങളുടെ കൂട്ടുതുക 234. എന്നാൽ അതിന്റെ പൊതുവ്യത്യാസവും ആദ്യത്തെ 21 പദങ്ങളുടെ കൂട്ടുതുകയും കണ്ടുപിടിക്കുക.

**നിർദ്ധാരണം** തന്നിട്ടുള്ള 13-ാം പദം = 3, $t_{13} = a + 12d = 3$ ...(1)



2 Numbers and Seq.indd 64 20/01/2023 17:33:24

ആദ്യത്തെ 13 പദങ്ങളുടെ തുക = 234 $\quad S_{13} = \frac{13}{2}[2a + 12d] = 234$

$$2a + 12d = 36 \qquad \ldots(2)$$

സമീകരണം (1), (2) നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുമ്പോൾ, $a = 33,\ d = \frac{-5}{2}$

പൊതു വ്യത്യാസം $\frac{-5}{2}$.

ആദ്യത്തെ 21 പദങ്ങളുടെ തുക $S_{21} = \frac{21}{2}\left[2 \times 33 + (21-1) \times \left(-\frac{5}{2}\right)\right] = \frac{21}{2}[66 - 50] = 168.$

**ഉദാഹരണം 2.35** ഒരു A.P. യുടെ ആദ്യത്തെ $n$ പദങ്ങളുടെകൂട്ടുതുക $\frac{5n^2}{2} + \frac{3n}{2}$. 17-ാം പദം കണ്ടുപിടിക്കുക.

**നിർദ്ധാരണം** 17-ാം പദം കണ്ടുപിടിക്കാൻ ആദ്യത്തെ 17 പദങ്ങളുടെ കൂട്ടുതുകയിൽ നിന്നും ആദ്യത്തെ 16 പദങ്ങളുടെ കൂട്ടുതുകയെ കുറയ്ക്കുക.

$$S_{17} = \frac{5 \times (17)^2}{2} + \frac{3 \times 17}{2} = \frac{1445}{2} + \frac{51}{2} = 748$$

$$S_{16} = \frac{5 \times (16)^2}{2} + \frac{3 \times 16}{2} = \frac{1280}{2} + \frac{48}{2} = 664$$

ഇഷോൾ, $\quad t_{17} = S_{17} - S_{16} = 748 - 664 = 84$

**ഉദാഹരണം 2.36** 300 നും 600 നും ഇടയിൽ 7 കൊണ്ട് വിഭജിക്കാവുന്ന എല്ലാ നിസ്സർഗ്ഗ സംഖ്യകളുടെയും കൂട്ടുതുക കാണുക?

**നിർദ്ധാരണം** 300 നും 600 നും ഇടയിൽ 7 കൊണ്ട് നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാവുന്ന നിസർഗ്ഗ സംഖ്യകൾ 301, 308, 315, ..., 595.

300 നും 600 നും ഇടയിലുള്ള നിസർഗ്ഗസംഖ്യകളുടെ കൂട്ടുതുക $301 + 308 + 315 + \cdots + 595$.

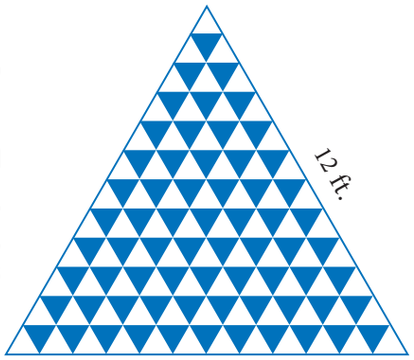
മുകളിൽ പറഞ്ഞ പദങ്ങൾ A.P. യിലാണ്

ആദ്യപദം $a = 301$; പൊതുവ്യത്യാസം $d = 7$; അവസാനപദം $l = 595$.

$$n = \left(\frac{l-a}{d}\right) + 1 = \left(\frac{595 - 301}{7}\right) + 1 = 43$$

$S_n = \frac{n}{2}[a + l]$, ആയതിനാൽ $S_{43} = \frac{43}{2}[301 + 595] = 19264.$

**ഉദാഹരണം 2.37** മൊസൈക്കിന്റെ ആകൃതി ഒരു സമഭുജത്രികോണാകൃതിയിലാണ് ഓരോ വശത്തിന്റെയും നീളം 12 അടിയാണ്. മൊസൈക്കിലെ ഓരോ ടൈലും 12 ഇഞ്ച് വശമുള്ള സമഭുജത്രികോണാകൃതിയാണ്. പടത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ ടൈലുകളുടെ (ഓടുകളുടെ) നിറം ഒന്നിടവിട്ടാണ്. ഓരോ നിറത്തിലുമുള്ള ഓടുകളുടെ എണ്ണവും മൊസൈക്കിലെ മൊത്ത ഓടുകളുടെ എണ്ണവും കണ്ടുപിടിക്കുക.



ചിത്രം.2.12



2 Numbers and Seq.indd 65 20/01/2023 17:33:26

**നിർദ്ധാരണം** മൊസൈക്ക് 12 അടി വശമുള്ള സമഭുജത്രികോണാകൃതിയിലായതുകൊണ്ട്, ഓടിന്റെ ആകൃതിയും 12 ഇഞ്ച് വശമുള്ള (1 അടി), സമഭുജത്രികോണാകൃതിയിലാണ്. മൊസൈക്കിൽ മൊത്തത്തിൽ 12 വരികൾ കാണപ്പെടുന്നു.

പടത്തിൽ നിന്നും ഓരോ വരിയിലുമുള്ള വെള്ള ഓടുകളുടെ എണ്ണം 1, 2, 3, 4, …, 12 കൂട്ടു സമാന്തര ശ്രേണിയെ രൂപപ്പെടുത്തുന്നു.

അതുപോലെ ഓരോ വരിയിലേയും നീല ഓടുകളുടെ എണ്ണം 0, 1, 2, 3, …, 11 കൂട്ടുസമാന്തര ശ്രേണിയിലാണ്.

$$\text{വെള്ള ഓടുകളുടെ എണ്ണം} = 1+2+3+\cdots+12 = \frac{12}{2}[1+12] \;= 78$$

$$\text{നീല ഓടുകളുടെ എണ്ണം} = 0+1+2+3+\cdots+11 = \frac{12}{2}[0+11] = 66$$

$$\text{മൊസൈക്കിലെ മൊത്ത ഓടുകളുടെ എണ്ണം} = \;78 + \;66 \;= 144$$

**ഉദാഹരണം 2.38** ഒരു തെരുവിലെ വീടുകളുടെ നമ്പർ 1 മുതൽ 49. വരെ ആകുന്നു. സെന്തിലിന്റെ വീടിന്റെ നമ്പർ അയാളുടെ വീടിന്റെ മുമ്പിലുള്ള എല്ലാ വീടുകളുടെ എണ്ണത്തിനും അയാളുടെ വീടിനു ശേഷമുള്ള വീടുകളുടെ എണ്ണത്തിനും സമമാണ്. എങ്കിൽ സെന്തിലിന്റെ വീടുനമ്പർ കണ്ടുപിടിക്കുക?

**നിർദ്ധാരണം** സെന്തിലിന്റെ വീട്ടുമ്പർ $x$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

$$1+2+3+\cdots+(x-1) = (x+1)+(x+2)+\cdots+49$$

$$1+2+3+\cdots+(x-1) = \big[1+2+3+\cdots+49\big]-\big[1+2+3+\cdots+x\big]$$

$$\frac{x-1}{2}\big[1+(x-1)\big] = \frac{49}{2}\big[1+49\big]-\frac{x}{2}\big[1+x\big]$$

$$\frac{x(x-1)}{2} = \frac{49\times 50}{2}-\frac{x(x+1)}{2}$$

$$x^2-x = 2450-x^2-x \Rightarrow 2x^2 = 2450$$

$$x^2 = 1225\ ,\ x = 35$$

സെന്തിലിന്റെ വീടു നമ്പർ 35 ആകുന്നു.

**ഉദാഹരണം 2.39** ഒരു A.P. യുടെ ആദ്യത്തെ $n$, $2n$, $3n$ പദങ്ങളുടെ തുക യഥാക്രമം $S_1, S_2, S_3$ എന്നിങ്ങനെയാണ്. $S_3 = 3(S_2 - S_1)$ തെളിയിക്കുക?

**നിർദ്ധാരണം** ഒരു A.P. യുടെ ആദ്യത്തെ $n$, $2n$, $3n$ പദങ്ങളുടെ തുക യഥാക്രമം $S_1, S_2, S_3$ ആണെങ്കിൽ

$$S_1 = \frac{n}{2}\big[2a+(n-1)d\big],\quad S_2 = \frac{2n}{2}\big[2a+(2n-1)d\big],\quad S_3 = \frac{3n}{2}\big[2a+(3n-1)d\big]$$

$$S_2 - S_1 = \frac{2n}{2}\big[2a+(2n-1)d\big]-\frac{n}{2}\big[2a+(n-1)d\big]$$

$$= \frac{n}{2}\big[[4a+2(2n-1)d]-[2a+(n-1)d]\big]$$

$$S_2 - S_1 = \frac{n}{2}\times\big[2a+(3n-1)d\big]$$

$$3(S_2 - S_1) = \frac{3n}{2}\big[2a+(3n-1)d\big]$$

$$3(S_2 - S_1) = S_3$$

**ചിന്തിക്കുക**

1. ആദ്യത്തെ $n$ ഒറ്റ നിസർഗ്ഗസംഖ്യകളുടെ കൂട്ടുതുക എത്ര?
2. ആദ്യത്തെ $n$ ഇരട്ട നിസർഗ്ഗ സംഖ്യകളുടെ കൂട്ടുതുക എത്ര?



2 Numbers and Seq.indd 66 20/01/2023 17:33:29

## അഭ്യാസം 2.6

1. താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയുടെ കൂട്ടുതുക കാണുക

   (i) 3,7,11,...40 പദങ്ങൾ വരെ. (ii) 102,97,92,... 27 പദങ്ങൾ വരെ.

   (iii) $6+13+20+\cdots+97$

2. 5 ൽ ആരംഭിക്കുന്ന തുടർച്ചയായുള്ള ഒറ്റ പൂർണ്ണാങ്കങ്ങളുടെ തുക 480 ആയാൽ സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം കാണുക?

3. $n^{\text{th}}$ പദം $4n-3$ ആയിട്ടുള്ള ഒരു A.P. യുടെ ആദ്യത്തെ 28 പദങ്ങളുടെ കൂട്ടുതുക കാണുക.

4. ചില ശ്രേണികളുടെ ആദ്യ $n$ പദങ്ങളുടെ കൂട്ടുതുക $2n^2-3n$ .ആകുന്നു. ഈ ശ്രേണി A.P. ആണെന്ന് തെളിയിക്കുക

5. ഒരു A.P. യുടെ 104-ാമത്തെ പദവും, 4-ാം പദവും യഥാക്രമം 125, 0. ആകുന്നു. ആദ്യത്തെ 35 പദങ്ങളുടെ കൂട്ടുതുക കണ്ടുപിടിക്കുക.

6. 450 ൽ കുറവായുള്ള എല്ലാ ഒറ്റധനപൂർണ്ണാങ്കത്തിന്റെയും കൂട്ടുതുക കാണുക?

7. 602 നും 902 നും ഇടയിലുള്ള 4 കൊണ്ട് വിഭജിക്കാൻ സാധിക്കാത്ത നിസ്സർഗ്ഗ സംഖ്യകളുടെ കൂട്ടുതുക കാണുക.

8. രഘു ഒരു ലാപ്ടോപ് വാങ്ങാൻ ആഗ്രഹിച്ചു. ₹40,000 മൊത്തമായോ അല്ലെങ്കിൽ ആദ്യമാസം ₹4800, രണ്ടാംമാസം ₹4750, മൂന്നാംമാസം ₹4700 എന്ന് തുടർന്ന് അങ്ങനെയുള്ള പത്തു തവണകളായും വാങ്ങാം. ഈ രീതിയിൽ ആണ് അയാൾ പണം നൽകുന്നതെങ്കിൽ താഴെപറയുന്നത് കണ്ടുപിടിക്കുക

   (i) 10 തവണകളിലൂടെ നൽകുന്ന മൊത്തം തുക?

   (ii) ലാപ്ടോപ്പിന്റെ യഥാർത്ഥ വിലയെക്കാൾ എത്ര കൂടുതൽ അടയ്ക്കേണ്ടി വരും?

9. 65,000 രൂപയുടെ ലോണിന്റെ തിരിച്ചടവിൽ, ഒരാൾ ആദ്യത്തെ മാസം ₹400 തുടർന്നുള്ള ഓരോ മാസവും ₹300 കൂടുതലായും തവണകളായി അടയ്ക്കാൻ തീരുമാനിച്ചു. ലോൺ മുഴുവൻ അടച്ചു തീരാൻ എത്ര കാലമെടുക്കും?

10. ഒരു ഇഷ്ടിക കൊണ്ടുള്ള കോവണിയിൽ 30 പടികൾ ഉണ്ട്. താഴത്തെ പടിയിൽ 100 ഇഷ്ടികകൾ ഉണ്ട്. തുടർന്നുള്ള ഓരോ പടിയിലും മുന്നിലുള്ള പടിയേക്കാൾ 2 ഇഷ്ടികകൾ കുറവായിട്ടാണ് കാണുന്നത്.

    (i) ഏറ്റവും മുകളിലുള്ള പടിയിൽ എത്ര ഇഷ്ടികകൾ കാണപ്പെടും?

    (ii) കോവണി നിർമ്മിക്കുവാൻ ആവശ്യമുള്ള മൊത്തം ഇഷ്ടികകൾ എത്ര?

11. $m$ A.P. യുടെ ആദ്യപദങ്ങൾ $1,2,3,\ldots,m$ പൊതുവ്യത്യാസങ്ങൾ $1,3,5,\ldots,(2m-1)$ ആയിരിക്കെ $n$ പദങ്ങളുടെ കൂട്ടുതുക $S_1,S_2,S_3,\ldots,S_m$ ആണെങ്കിൽ $S_1+S_2+S_3+\cdots+S_m=\frac{1}{2}mn(mn+1)$ ആണെന്ന് തെളിയികകുക.

12. കൂട്ടുതുക കാണുക $\left[\frac{a-b}{a+b}+\frac{3a-2b}{a+b}+\frac{5a-3b}{a+b}+\cdots 12 \text{ പദങ്ങൾ}\right]$.

## 2.9 ഗുണന ക്രമാനുപാതശ്രേണി

തന്നിട്ടുള്ള ചിത്രം .2.13 -ൽ $\Delta ABC$ യുടെ വശങ്ങളായ AB, $BC$, $CA$ എന്നിവയുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുമ്പോൾ $\Delta DEF$ ഉണ്ടാകുന്നു. $\Delta DEF$ ന്റെ അളവ് കൃത്യമായി $\Delta ABC$. യുടെ അളവിന്റെ നാലിൽ ഒരു ഭാഗമാകുന്നു. അതുപോലെ $\Delta GHI$ യും $\Delta DEF$ യുടെ നാലിൽ ഒരു ഭാഗമാകുന്നു. ഇങ്ങനെ തുടരുന്നു. പൊതുവിൽ, തുടർച്ചയായ ഭാഗങ്ങളുടെ വിസ്തീർണ്ണം മുന്നിൽ വരുന്ന ഭാഗങ്ങളുടെ വിസ്തീർണ്ണത്തിന്റെ നാലിലൊന്ന് ആയിരിക്കും.



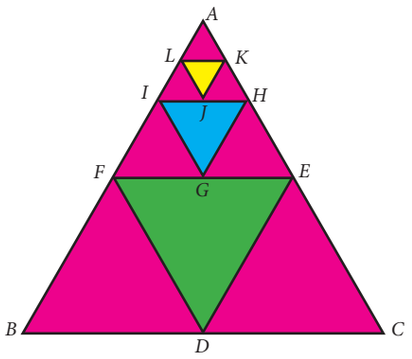
2 Numbers and Seq.indd 67 20/01/2023 17:33:31

ഈ ത്രികോണങ്ങളുടെ വിസ്തീർണ്ണം $\Delta ABC$ ആകുന്നു

$\frac{1}{4}\ \Delta$ ABC, $\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\ \Delta\ ABC$, ...

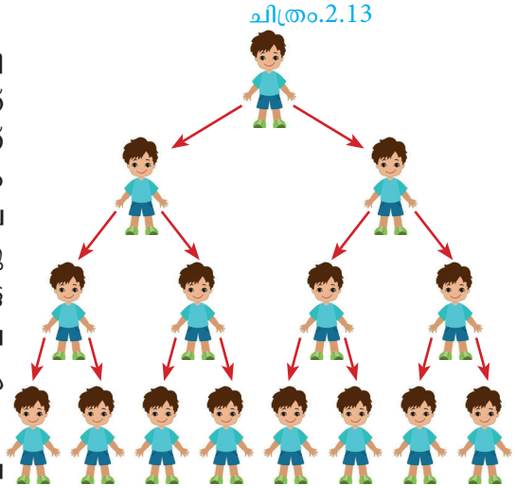
അതായത്, $\Delta\ ABC$, $\frac{1}{4}\ \Delta\ ABC$, $\frac{1}{16}\ \Delta\ ABC$,...

ഇവിടെ, $\Delta ABC$, യിൽ നിന്നും തുടങ്ങി തുടർച്ചയായി ത്രികോണങ്ങൾ രൂപപ്പെടുന്നു. ഇവയുടെ വിസ്തീർണ്ണം മുൻത്രികോണങ്ങളുടെ വിസ്തീർണ്ണത്തിന്റെ കൃത്യമായി നാലിലൊന്ന് ആയിരിക്കും. അതുകൊണ്ട് ഓരോ പദവും ലഭിക്കുന്നത് മുൻപദങ്ങളെ നാലിലൊന്ന് $\frac{1}{4}$ കൊണ്ട് ഗുണിക്കുമ്പോഴാണ.



ചിത്രം.2.13

മറ്റൊരു സാഹചര്യത്തിൽ ഒരു വൈറസ്സ് രോഗം ഇനി പറയുന്ന രീതിയിൽ പരക്കുന്നു എന്ന് കരുതുക. അതായത് ബാധിതനായ ഒരു വ്യക്തിയിൽ നിന്നും മറ്റുവ്യക്തികളിലേക്ക് പകരുന്നു. ഒന്നാം ഘട്ടത്തിൽ ഒരു വ്യക്തിയെ ബാധിക്കുകയും രണ്ടാം ഘട്ടത്തിൽ രണ്ടു വ്യക്തികളെ ബാധിക്കുകയും ഇപ്രകാരം 4 പേരിലേക്കും, തുടർന്നും ഇതേ രീതിയിൽ ബാധിക്കുന്നു. അങ്ങനെയാണെങ്കിൽ ഓരോ ഘട്ടത്തിലും ബാധിക്കപ്പെട്ട ആളുകളുടെ എണ്ണം 1, 2, 4, 8, ... എന്നാകുന്നു. ഇവിടെ ആദ്യപദം ഒഴികെ മറ്റുള്ള ഓരോ പദവും മുമ്പിലുള്ള പദത്തിന്റെ കൃത്യമായ രണ്ടു മടങ്ങുകളാകുന്നു.


ചിത്രം.2.14

മേൽപ്പറഞ്ഞ ഉദാഹരണത്തിൽ നിന്നും തുടർന്നുവരുന്ന സംഖ്യകളെ നിശ്ചിത സംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിക്കുമ്പോഴാണ് ഓരോപദവും ലഭിക്കുന്നതെന്ന് വ്യക്തമാണ്.

ഇത് ഗുണനക്രമാനുപാത ശ്രേണി എന്ന ആശയത്തിലേക്ക് നയിച്ചു.

**നിർവ്വചനം**

ആദ്യപദം ഒഴികെ തുടർന്നു വരുന്നപദങ്ങളെ പൂജ്യമല്ലാത്ത സംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിക്കുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ഓരോ പദങ്ങളുടേയും അനുക്രമത്തെയാണ് ഗുണന ക്രമാനുപാത ശ്രേണി എന്ന് പറയുന്നത്. നിശ്ചിത സംഖ്യയെ പൊതു അനുപാതം എന്നു പറയുന്നു. ഇതിനെ $r$ എന്ന് കുറിക്കുന്നു.

### 2.9.1 ഗുണനക്രമാനുപാതശ്രേണിയുടെ പൊതുരൂപം

$a$ യും $r \neq 0$ യും വാസ്തവിക സംഖ്യകളാണെന്നിരിക്കട്ടെ. എങ്കിൽ $a, ar, ar^2, \ldots ar^{n-1}\ldots$ എന്നീ സംഖ്യകളെ ഗുണന ക്രമാനുപാതശ്രേണി (Geometric Progression.) എന്നു പറയുന്നു '$a$' എന്ന സംഖ്യയെ ആദ്യപദമെന്നും '$r$' നെ പൊതു അനുപാതം എന്നും പറയുന്നു.

ആദ്യപദം $a$, യിൽ നിന്നും ആരംഭിച്ച് പൊതു അനുപാതം '$r$' കൊണ്ട് ഗുണിക്കുമ്പോൾ അടുത്ത പദങ്ങൾ ലഭിക്കുന്നു. അങ്ങനെ $ar, ar^2, ar^3, \ldots$ ലഭിക്കുന്നു.

### 2.9.2 ഗുണനക്രമാനുപാത ശ്രേണിയുടെ പൊതുപദം

G.P. യുടെ $n^{th}$ പദം അല്ലെങ്കിൽ പൊതുപദത്തിന് ഒരു സൂത്രവാക്യം കണ്ടുപിടിക്കാൻ നമുക്ക് ശ്രമിക്കാം. ഈ G.P. യുടെ പദങ്ങൾ പൊതു അനുപാതത്തിൽ കാണപ്പെടുന്നു



2 Numbers and Seq.indd 68 20/01/2023 17:33:33

$a, ar, ar^2, \ldots, ar^{n-1}, \ldots$ ഇവിടെ $a$ ആദ്യപദവും '$r$' പൊതു അനുപാതവുമാകുന്നു. G.P. യുടെ $n^{\text{th}}$ പദമാണ് $t_n$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

എങ്കിൽ $t_1 = a = a \times r^0 = a \times r^{1-1}$

$t_2 = t_1 \times r = a \times r = a \times r^{2-1}$

$t_3 = t_2 \times r = ar \times r = ar^2 = ar^{3-1}$

$t_n = t_{n-1} \times r = ar^{n-2} \times r = ar^{n-2+1} = ar^{n-1}$

അങ്ങനെ G.P. യുടെ പൊതുപദം അല്ലെങ്കിൽ $n^{th}$ പദം എന്നത് $t_n = ar^{n-1}$ ആകുന്നു.

**കുറിപ്പ്**

- G.P. യുടെ തുടർ പദങ്ങളുടെ അനുപാതത്തെ പരിഗണിക്കാമെങ്കിൽ നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നത്

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{ar}{a} = r, \quad \frac{t_3}{t_2} = \frac{ar^2}{ar} = r, \quad \frac{t_4}{t_3} = \frac{ar^3}{ar^2} = r, \quad \frac{t_5}{t_4} = \frac{ar^4}{ar^3} = r, \ldots \text{ ആകുന്നു}$$

ഒരു G.P യുടെ അടുത്തടുത്തുള്ള രണ്ടു പദങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള അനുപാതം എപ്പോഴും ഒരു സ്ഥിരാങ്കമായിരിക്കും. ഈ സ്ഥിരാങ്കം തന്നിട്ടുള്ള ശ്രേണിയുടെ പൊതുഅനുപാതവുമായിരിക്കും.

## പുരോഗതി പരിശോധന

1. G.P. ലഭിക്കുന്നതിന് മുന്നിലുള്ള പദത്തിനെ _____ കൊണ്ട് ഗുണിക്കണം .
2. G.P. യുടെ അടുത്തടുത്തുള്ള രണ്ടു പദങ്ങളുടെ അനുപാതം _____ ആണ്. ഇതിനെ _____ എന്നു പറയുന്നു .
3. താഴെ പറയുന്നവ G.P. യിലാണെങ്കിൽ വിട്ടുപോയ ഭാഗം പൂരിപ്പിക്കുക.

(i) $\frac{1}{8}, \frac{3}{4}, \frac{9}{2}, ___$ (ii) $7, \frac{7}{2}, ___$ (iii) $___, 2\sqrt{2}, 4, \ldots$

**ഉദാഹരണം 2.40** താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ഏത് അനുക്രമങ്ങളാണ് ഒരു G.P യെ രൂപപ്പെടുത്തുന്നത് ?

(i) 7, 14, 21, 28, … (ii) $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, … (iii) 5, 25, 50, 75, …

**നിർദ്ധാരണം** തന്നിട്ടുള്ള അനുക്രമം G.P. ആണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക. അടുത്തടുത്തുള്ള പദങ്ങൾ തമ്മിൽ ഉള്ള അനുപാതം തുല്യമായിരിക്കണം.

(i) 7, 14, 21, 28, …

$\frac{t_2}{t_1} = \frac{14}{7} = 2; \quad \frac{t_3}{t_2} = \frac{21}{14} = \frac{3}{2}; \quad \frac{t_4}{t_3} = \frac{28}{21} = \frac{4}{3}$

അടുത്തടുത്തുള്ള പദങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അനുപാതം തുല്യമല്ലാത്തതിനാൽ 7, 14, 21, 28, … എന്ന ശ്രേണി ഒരു G.P അല്ല.

(ii) $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, …

$\frac{t_2}{t_1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2; \quad \frac{t_3}{t_2} = \frac{2}{1} = 2; \quad \frac{t_4}{t_3} = \frac{4}{2} = 2$



2 Numbers and Seq.indd 69 20/01/2023 17:33:35

ഇവിടെ അടുത്തടുത്തുള്ള പദങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അനുപാതം തുല്യമാണ്. അതുകൊണ്ട് $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, ... എന്ന ശ്രേണി ഒരു G.P ആണ്. ഇതിന്റെ പൊതുഅനുപാതം $r = 2$ ആകുന്നു.

(iii) 5, 25, 50, 75,...

$\frac{t_2}{t_1} = \frac{25}{5} = 5$ ; $\frac{t_3}{t_2} = \frac{50}{25} = 2$ ; $\frac{t_4}{t_3} = \frac{75}{50} = \frac{3}{2}$

ഇവിടെ അടുത്തടുത്തുള്ള പദങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അനുപാതം തുല്യമല്ലാത്തതിനാൽ 5, 25, 50, 75,... എന്ന ശ്രേണി ഒരു G.P അല്ല.

**ചിന്തിക്കുക**

$2, 2^2, 2^{2^2}, 2^{2^{2^2}}, \ldots$

എന്ന അനുക്രമം G.P ആണോ?

**ഉദാഹരണം 2.41** ഒരു G.P യിലെ ആദ്യപദവും പൊതു അനുപാതവും താഴെ തന്നിട്ടുണ്ട് ഗുണന ക്രമാനുപാത ശ്രേണി കണ്ടുപിടിക്കുക. (i) $a = -7$ , $r = 6$ (ii) $a = 256$ , $r = 0.5$

**നിർദ്ധാരണം** (i) ഒരു G.P യുടെ പൊതുരൂപം $a$, $ar$, $ar^2$ ,...

$a = -7$ , $ar = -7 \times 6 = -42$ , $ar^2 = -7 \times 6^2 = -252$

അതുകൊണ്ട് ആവശ്യപ്പെട്ട G.P $-7, -42, -252,...$ ആകുന്നു

(ii) ഒരു G.P യുടെ പൊതു രൂപം $a$, $ar$, $ar^2$ ,...

$a = 256$ , $ar = 256 \times 0.5 = 128$ , $ar^2 = 256 \times (0.5)^2 = 64$

അതുകൊണ്ട് ആവശ്യപ്പെട്ട G.P 256,128, 64,....

**പുരോഗതി പരിശോധന**

1. ആദ്യപദം = $a$, പൊതു അനുപാതം = $r$, എന്നാൽ $t_9$ , $t_{27}$. കാണുക.
2. ഒരു G.P. യിൽ $t_1 = \frac{1}{5}$ , $t_2 = \frac{1}{25}$ പൊതു അനുപാതം _____ ആകുന്നു.

**ഉദാഹരണം 2.42** 9, 3, 1,... G.P. യുടെ 8 -ാം പദം കാണുക

**നിർദ്ധാരണം** 8 -ാം പദം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് G.P യുടെ $n^{th}$ -ാം പദം സൂത്രം ഉപയോഗിക്കാം $t_n = ar^{n-1}$

ആദ്യപദം $a = 9$ , പൊതു അനുപാതം $r = \frac{t_2}{t_1} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$$t_8 = 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{8-1} = 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^7 = \frac{1}{243}$$

അതുകൊണ്ട് G.P. യുടെ 8-ാം പദം $\frac{1}{243}$ ആകുന്നു.

**ഉദാഹരണം 2.43** ഒരു G.P യുടെ 4 -ാം പദം $\frac{8}{9}$ ഉം 7-ാം പദം $\frac{64}{243}$ . ഉം ആകുന്നു. ഗുണനക്രമാനുപാത ശ്രേണി കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം** 4 -ാം പദം, $t_4 = \frac{8}{9}$ $ar^3 = \frac{8}{9}$ ...(1)

7 -ാം പദം, $t_7 = \frac{64}{243}$ $ar^6 = \frac{64}{243}$ ...(2)



2 Numbers and Seq.indd 70 20/01/2023 17:33:38

സമീകരണം (2) നെ (1) കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ, $\frac{ar^6}{ar^3} = \frac{\frac{64}{243}}{\frac{8}{9}}$

$$r^3 = \frac{8}{27} \quad , r = \frac{2}{3}$$

$r$ ന്റെ മൂല്യം സമീകരണം (1) ൽ പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ $a \times \left[\frac{2}{3}\right]^3 = \frac{8}{9} \Rightarrow a = 3$

അതുകൊണ്ട് G.P എന്നത് $a, ar, ar^2, \ldots$ അതായത്, $3, 2, \frac{4}{3}, \ldots$ ആകുന്നു.

**കുറിപ്പ്**

- ഒരു G.P. യിലെ അടുത്തടുത്ത മൂന്നു പദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം തന്നിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ പദങ്ങൾ $\frac{a}{r}, a, ar$ എന്നെടുക്കാം
- ഒരു G.P. യിലെ അടുത്തടുത്ത നാല് പദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം തന്നിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ പദങ്ങൾ $\frac{a}{r^3}, \frac{a}{r}, ar, ar^3$ എന്നെടുക്കാം.
- ഒരു ഗുണനക്രമാനുപാത ശ്രേണിയിലെ ഓരോ പദത്തെയും ഒരു പൂജ്യമല്ലാത്ത സ്ഥിരാങ്കം കൊണ്ട് ഗുണിക്കുകയോ ഹരിക്കുകയോ ചെയ്യുമ്പോൾ ഉണ്ടാകുന്ന ശ്രേണിയും G.P ആണ്.

**ഉദാഹരണം 2.44** ഒരു G.P യുടെ മൂന്ന് അടുത്തടുത്ത പദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം 343 ഉം അതിന്റെ കൂട്ടുതുക $\frac{91}{3}$. ആകുന്നു. മൂന്നുപദങ്ങളെയും കണ്ടുപിടിക്കുക.

**നിർദ്ധാരണം** മൂന്ന് അടുത്തടുത്ത പദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം തന്നിട്ടുള്ളതിനാൽ.

നമുക്ക് അവയെ $\frac{a}{r}, a, ar$ എന്നെടുക്കാം.

പദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം = 343

$$\frac{a}{r} \times a \times ar = 343$$

$$a^3 = 7^3 \quad , a = 7$$

കൂട്ടുതുക $= \frac{91}{3}$

ആണെങ്കിൽ $7\left(\frac{1}{r} + 1 + r\right) = \frac{91}{3}$,

$7\left(\frac{1+r+r^2}{r}\right) = \frac{91}{3}$

$$3 + 3r + 3r^2 = 13r \quad , \; 3r^2 - 10r + 3 = 0$$

$$(3r-1)(r-3) = 0 \quad , \; r = 3 \text{ or } r = \frac{1}{3}$$

$a = 7, r = 3$ ആണെങ്കിൽ മൂന്നു പദങ്ങളും $\frac{7}{3}, 7, 21$ ആകുന്നു.

$a = 7 \, , \; r = \frac{1}{3}$ ആണെങ്കിൽ മൂന്നു പദങ്ങളും $21, 7, \frac{7}{3}$ ആകുന്നു.

**ചിന്തിക്കുക**

1. 64 നെ മൂന്നുഭാഗങ്ങളായി വിഭജിച്ച് അത് G.P യാക്കുക.
2. $a, b, c, \ldots$ G.P. യിലാണെങ്കിൽ $2a, 2b, 2c, \ldots$ _____ ആകുന്നു.
3. $3, x, 6.75$ എന്നിവ G.P. യിലാണെങ്കിൽ $x$ _____ ആകുന്നു

**പുരോഗതി പരിശോധന**

_____ ആണെങ്കിൽ മാത്രമേ $a,b,c$ എന്നീ മൂന്നു പൂജ്യമല്ലാത്ത സംഖ്യകൾ G.P. യിലാകുകയുള്ളൂ.

**മൂന്നു സംഖ്യകൾ G.P. യിലാകാനുള്ള നിബന്ധനകൾ**

$a, b, c$ എന്നീ സംഖ്യകൾ G.P. യിലാണെങ്കിൽ $b = ar \, , \; c = ar^2 \, . \; ac = a \times ar^2 = (ar)^2 = b^2 \, .$

അതുകൊണ്ട് $b^2 = ac$

അങ്ങനെ $b^2 = ac$, അതുപോലെ $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$. എങ്കിൽ $a, b, c$ എന്നിവ G.P.യിലാണ്

അതുകൊണ്ട് മൂന്നു പൂജ്യമല്ലാത്ത സംഖ്യകളായ $a, b, c$ എന്നിവ $b^2 = ac$. ആണെങ്കിൽ മാത്രം അവ G.P. യിലാണ്



2 Numbers and Seq.indd 71 20/01/2023 17:33:42

**ഉദാഹരണം 2.45** ഒരു മിഷ്യന്റെ ഇപ്പോഴത്തെ വില ₹40,000 രൂപയാണ്. ഓരോ വർഷത്തിലും അതിന്റെ വിലയിൽ 10%. കുറവു വരുന്നു. ആറാമത്തെ വർഷം അതിന്റെ വിലയെ കണ്ടുപിടിക്കുക.

**നിർദ്ധാരണം** മിഷ്യന്റെ ഇപ്പോഴത്തെ വില ₹40,000. ഒരു വർഷം കഴിയുമ്പോൾ 10% കുറവു വരുന്നതുകൊണ്ട് പ്രാഥമിക വിലയുടെ 90% അതായത്

1-ാം വർഷത്തിന്റെ അവസാനം യന്ത്രത്തിന്റെ വില. $40,000 \times \frac{90}{100}$

രണ്ടാമത്തെ വർഷം കഴിയുമ്പോൾ ഒന്നാമത്തെ വർഷത്തിന്റെ വിലയുടെ 90% ആയിരിക്കും.

അതായത് രണ്ടു വർഷാവസാനം മിഷ്യന്റെ വില $40,000 \times \left(\frac{90}{100}\right)^2$ ആകുന്നു

ഇങ്ങനെ തുടർന്ന് താഴെ പറയുന്ന രീതിയിൽ മിഷ്യന്റെ വില കുറയുന്നു

$$40000,\ 40000 \times \frac{90}{100},\ 40000 \times \left(\frac{90}{100}\right)^2 \ldots$$

ഈ അനുക്രമത്താൽ രൂപപ്പെടുന്ന G.P. യിൽ ആദ്യപദം 40,000 പൊതു അനുപാതം $\frac{90}{100}$ ആകുന്നു. അഞ്ചാംവർഷ അവസാനം മിഷ്യന്റെ വില കണ്ടുപിടിക്കാൻ (6-ാം വർഷം) നമുക്ക് G.P. യുടെ 6-ാം പദം കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടിയിരിക്കുന്നു.

അങ്ങനെ, $n$=6, $a$=40,000, $r = \frac{90}{100}$.

$t_n = ar^{n-1}$, നമുക്ക് $t_6 = 40,000 \times \left(\frac{90}{100}\right)^{6-1} = 40000 \times \left(\frac{90}{100}\right)^5$

$$t_6 = 40,000 \times \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} = 23619.6$$

6-ാം വർഷം മിഷ്യന്റെ വില = ₹23619.60



## അഭ്യാസം 2.7

1. താഴെതന്ന അനുക്രമത്തിൽ ഏതാണ് G.P. യിലുള്ളത് ?
   (i) 3,9,27,81,... (ii) 4,44,444,4444,... (iii) 0.5,0.05,0.005,...
   (iv) $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \ldots$ (v) $1, -5, 25, -125, \ldots$ (vi) 120,60,30,18,... (vii) $16, 4, 1, \frac{1}{4}, \ldots$
2. ഒരു G.P. യുടെ ആദ്യപദവും പൊതു അനുപാതവും തന്നിട്ടുണ്ട്. എങ്കിൽ അതിന്റെ ആദ്യത്തെ മൂന്നു പദങ്ങൾ എഴുതുക.. (i) $a = 6, r = 3$ (ii) $a = \sqrt{2}, r = \sqrt{2}$ (iii) $a = 1000, r = \frac{2}{5}$
3. ഒരു G.P. 729, 243, 81,... ആണെങ്കിൽ $t_7$ കണ്ടുപിടിക്കുക.
4. ഒരു G.P യിൽ അടുത്തടുത്തുള്ള പദങ്ങൾ $x + 6$, $x + 12$ , $x + 15$ ആണെങ്കിൽ $x$ നെ കണ്ടു പിടിക്കുക
5. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള G.P. യുടെ പദങ്ങളുടെ എണ്ണം കണ്ടുപിടിക്കുക.
   (i) 4,8,16,...,8192? (ii) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots, \frac{1}{2187}$
6. ഒരു G.P. യിൽ 9 -ാം പദം 32805, 6-ാം പദം 1215 ആണ്. 12-ാം പദം കണ്ടുപിടിക്കുക.
7. ഒരു G.P. യിൽ 8 -ാം പദം 768 ഉം പൊതു അനുപാതം 2 ഉം ആണ്. അതിന്റെ 10-ാം പദം കണ്ടു പിടിക്കുക.
8. $a, b, c$ A.P. യിൽ ആണെങ്കിൽ $3^a, 3^b, 3^c$ എന്നിവ G.P. യിൽ ആണ് എന്ന് തെളിയിക്കുക
9. ഒരു G.P. യിൽ തുടർച്ചയായ മൂന്നു പദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം 27 അവ ജോഡിയായി എടുത്തതിന്റെ



2 Numbers and Seq.indd 72 20/01/2023 17:33:44

ഗുണനഫലത്തിന്റെ ആകെ തുക $\frac{57}{2}$ എങ്കിൽ മൂന്നു പദങ്ങളും കാണുക.

10. ഒരാൾ കമ്പനിയിൽ അസിസ്റ്റന്റ് മാനേജരായി ചേർന്നു. കമ്പനി അയാൾക്ക് തുടക്ക ശമ്പളമായി ₹60,000 വർഷത്തിൽ 5% വർദ്ധനവ് എന്നിവ നല്കുന്നു. അഞ്ചു വർഷത്തിനുശേഷം അയാളുടെ ശമ്പളം എത്രയായിരിക്കും?

11. ശിവമണി ഒരു ജോലിക്കുവേണ്ടിയുള്ള ഇന്റർവ്യൂവിന് ഹാജരായി. കമ്പനി രണ്ട് ഉപാധികൾ വെച്ചു.

ഉപാധി A: ₹20,000 തുടക്ക ശമ്പളവും വാർഷിക വർദ്ധനവ് ആദ്യത്തെ 5 വർഷത്തേക്ക് 6%.

ഉപാധി B: തുടക്കശമ്പളം ₹22,000 വാർഷിക വർദ്ധനവ് ആദ്യത്തെ 5 വർഷം 3%.

നാലാമത്തെ വർഷം അയാളുടെ ശമ്പളം ഉപാധി $A$ യുടെയും $B$ യുടെയും അടിസ്ഥാനത്തിൽ എത്രയായിരിക്കും?

12. ഒരു A.P. യുടെ തുടർച്ചയായ മൂന്നു പദങ്ങൾ $a, b, c$ ഒരു G.P. യുടെ തുടർച്ചയായ മൂന്നു പദങ്ങൾ $x, y, z$ ആണെങ്കിൽ $x^{b-c} \times y^{c-a} \times z^{a-b} = 1$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

## 2.10 ഒരു G.P. യുടെ $n$ പദങ്ങളുടെ കൂട്ടുതുക.

ഒരു അനുക്രമത്തിലെ പദങ്ങൾ ഗുണനക്രമാനുപാത ശ്രേണിയിലാണെങ്കിൽ അതിനെ ഗുണനക്രമാനുപാത അനുക്രമം എന്നു പറയുന്നു.

$a, ar, ar^2, \ldots ar^{n-1}, \ldots$ എന്നത് G.P ആണെന്നിരിക്കട്ടെ.

G.P യുടെ ആദ്യ $n$ പദങ്ങളുടെ തുക

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \quad \text{ആകുന്നു} \qquad \ldots (1)$$

രണ്ടുവശങ്ങളേയും $r$, കൊണ്ട് ഗുണിക്കുമ്പോൾ $rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \quad \ldots (2)$

$(2)-(1)$ നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നു $rS_n - S_n = ar^n - a$

$$S_n(r-1) = a(r^n - 1)$$

n -ാം പദങ്ങളുടെ $S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}, \ r \neq 1$ ആകുന്നു.

### ഒരു G.P. യുടെ അനന്തതവരെയുള്ള പദങ്ങളുടെ കൂട്ടുതുക

ഒരു G.P. യുടെ അനന്തതവരെയുള്ള പദങ്ങളുടെ കൂട്ടുതുക

$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots = \frac{a}{1-r}, -1 < r < 1$ എന്ന് തന്നിട്ടുണ്ട്

**ഉദാഹരണം 2.46** $1, -3, 9, -27 \ldots$ ഉള്ള G.P. യുടെ 8 പദങ്ങളുടെ കൂട്ടുതുക കണ്ടുപിടിക്കുക.

**നിർദ്ധാരണം** ഇവിടെ ആദ്യപദം $a = 1$, പൊതുഅനുപാതം $r = \frac{-3}{1} = -3 < 1$, ഇവിടെ $n = 8$.

**കുറിപ്പ്**

- മുകളിലെ G.P. യുടെ ആദ്യ $n$ -ാം പദങ്ങളുടെ കൂട്ടുതുകയ്ക്കുള്ള സൂത്രവാക്യം $r = 1$ ന്

  പ്രായോഗികമല്ല $r = 1$, ആണെങ്കിൽ $S_n = a + a + a + \cdots + a = na$

**പുരോഗതി പരിശോധന**

1. G.P യിലുള്ള പദങ്ങളുടെ അനുക്രമത്തെ _____ എന്നു പറയുന്നു..
2. $r = 1$, ആണെങ്കിൽ G.P. യുടെ $n$ പദങ്ങളുടെ കൂട്ടുതുക കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള സൂത്രവാക്യം _____.
3. $r \neq 1$, ആണെങ്കിൽa G.P. യുടെ പദങ്ങളുടെ കൂട്ടുതുക കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള സൂത്രം _____ ആകുന്നു.



2 Numbers and Seq.indd 73 20/01/2023 17:33:46

G.P. യുടെ $n$ പദങ്ങളുടെ കൂട്ടുതുക $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ if $r \neq 1$

അതുകൊണ്ട് , $S_8 = \frac{1\left((-3)^8 - 1\right)}{(-3) - 1} = \frac{6561 - 1}{-4} = -1640$

**ഉദാഹരണം 2.47** $S_6 = 4095$ ഉം $r = 4$ ഉം ഉള്ള G.P യിലെ ആദ്യപദത്തെ കണ്ടുപിടിക്കുക.

**നിർദ്ധാരണം** പൊതുഅനുപാതം $= 4 > 1$, ആദ്യത്തെ 6 പദങ്ങളുടെ കൂട്ടുതുക $S_6 = 4095$

അതുകൊണ്ട്, $S_6 = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = 4095$

ആയതുകൊണ്ട്, $r = 4, \frac{a(4^6 - 1)}{4 - 1} = 4095$ ലഭിക്കുന്നു $a \times \frac{4095}{3} = 4095$

ആദ്യപദം $a = 3$.

**ഉദാഹരണം 2.48** $1 + 4 + 16 + \cdots$ എന്ന അനുക്രമത്തിൽ എത്ര പദങ്ങൾ ചേർന്നാൽ 1365 എന്ന തുക ലഭിക്കും?

**നിർദ്ധാരണം** 1365 എന്ന കൂട്ടുതുക ലഭിക്കാൻ ചേർക്കേണ്ട പദങ്ങളുടെ എണ്ണം $n$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

$a = 1,\ r = \frac{4}{1} = 4 > 1$

$S_n = 1365\ ,\ \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = 1365$

$\frac{1(4^n - 1)}{4 - 1} = 1365$ so, $(4^n - 1) = 4095$

$4^n = 4096\ ,\ 4^n = 4^6$

$n = 6$

**ഉദാഹരണം 2.49** കൂട്ടുതുക കാണുക $3 + 1 + \frac{1}{3} + \ldots\infty$

**നിർദ്ധാരണം** ഇവിടെ $a = 3$, $r = \frac{t_2}{t_1} = \frac{1}{3}$

അനന്തതവരെയുള്ള പദങ്ങളുടെ

കൂട്ടു തുക $S_n = \frac{a}{1 - r} = \frac{3}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{9}{2}$

**പുരോഗതി പരിശോധന**

1. ഒരു G.P. യിലെ അനന്തതവരെയുള്ള പദങ്ങളുടെ കൂട്ടുതുക ___.
2. ഒരു G.P. യുടെ അനന്തതവരെയുള്ള പദങ്ങളുടെ സൂത്രത്തിന് $r$ ന്റെ ഏതൊക്കെ മൂല്യത്തിനാണ് സാധ്യതയുള്ളത് ?

**ഉദാഹരണം 2.50** $0.6666\ldots$ എന്ന സംഖ്യയെ പരിമേയ രൂപത്തിലാക്കുക

**നിർദ്ധാരണം** $0.6666\ldots$ എന്ന സംഖ്യയെ താഴെ പറയുന്ന രീതിയിൽ നമുക്ക് എഴുതാം

$0.6666\ldots = 0.6 + 0.06 + 0.006 + 0.0006 + \cdots$

ഇപ്പോൾ $0.6, 0.06, 0.006\ldots$ എന്നീ സംഖ്യകൾ രൂപപ്പെടുത്തുന്ന G.P. യിൽ, ആദ്യപദം $a = 0.6$ പൊതു അനുപാതം $r = \frac{0.06}{0.6} = 0.1.\ ,\ -1 < r = 0.1 < 1$ ആകുന്നു.

അനന്തതവരെയുള്ള G.P. യുടെ സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച് നമുക്ക്

$0.6666\ldots = 0.6 + 0.06 + 0.006 + 0.0006 + \cdots = \frac{0.6}{1 - 0.1} = \frac{0.6}{0.9} = \frac{2}{3}$ ലഭിക്കുന്നു.

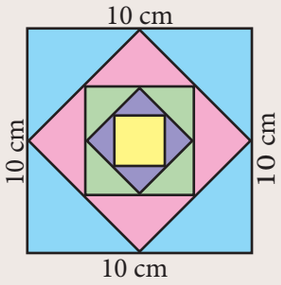
ഇപ്രകാരം $0.6666\ldots$ തുല്യമായ പരിമേയ സംഖ്യ $\frac{2}{3}$ ആകുന്നു.



2 Numbers and Seq.indd 74 20/01/2023 17:33:50

## പ്രവർത്തി 5

ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങൾ 10 cm ആണ്. അതിന്റെ വശങ്ങളുടെ മദ്ധ്യ ബിന്ദുക്കൾ ചേർത്ത് ഒരു പുതിയ സമചതുരം വരയ്ക്കുക. വീണ്ടും സമചതുരത്തിന്റെ മദ്ധ്യബിന്ദുക്കൾ ചേർത്ത് മറ്റൊരു സമചതുരം വരയ്ക്കുക. ഇങ്ങനെ ഈ പ്രക്രിയ തുടരുന്നു. ഈ പ്രക്രിയ വഴി രൂപം കൊള്ളുന്ന സമചതുരങ്ങളുടെ വിസ്തീർണ്ണങ്ങളുടെ കൂട്ടുതുകയും, ചുറ്റളവുകളുടെ തുകയും കണ്ടുപിടിക്കുക..



ചിത്രം.2.15

**ഉദാഹരണം 2.51** $5+55+555+\cdots$ എന്ന അനുക്രമത്തിന്റെ $n$ പദങ്ങളുടെ കൂട്ടുതുക കണ്ടുപിടിക്കുക.

**നിർദ്ധാരണം** ഈ അനുക്രമം G.P യോ A.P യോ അല്ല അതുകൊണ്ട് ഇതിനെ രണ്ടായി തിരിക്കാം .

$$\cdot 555+\cdots+n \text{ പദങ്ങൾ } =5[1+11+111+\cdots+n \text{ പദങ്ങൾ }]$$

$$=\frac{5}{9}[9+99+999+\cdots+n \text{ പദങ്ങൾ}$$

$$=\frac{5}{9}[(10-1)+(100-1)+(1000-1)+\cdots+n \text{ പദങ്ങൾ }]$$

$$=\frac{5}{9}[(10+100+1000+\cdots+n \text{ പദങ്ങൾ })-n]$$

$$=\frac{5}{9}\left[\frac{10(10^n-1)}{(10-1)}-n\right]=\frac{50(10^n-1)}{81}-\frac{5n}{9}$$

**പുരോഗതി പരിശോധന**

1. $3+33+333+\ldots$ ഒരു ഗുണനക്രമാനുപാത ശ്രേണി ആണോ??
2. ഇതിൽ $1+r+r^2+r^3\ldots=\frac{3}{4}$ $r$ ന്റെ വില എന്താകുന്നു.

**ഉദാഹരണം 2.52** $1+6+6^2+\cdots+6^n>5000$ എന്നതിൽ കുറഞ്ഞ ധനപൂർണ്ണാങ്കം $n$ നെ കണ്ടുപിടിക്കുക

**നിർദ്ധാരണം** തുക 5000 ൽ കൂടുതൽ ലഭിക്കാൻ കുറഞ്ഞത് എത്ര പദങ്ങൾ ആവശ്യമുണ്ട്.

$S_n>5000$ ആകുന്നത് $n$ ന്റെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ഏത് വിലയ്ക്കാണ് എന്ന്കാണണം

$$S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=\frac{1(6^n-1)}{6-1}=\frac{6^n-1}{5}$$

$$S_n>5000\ ,\ \frac{6^n-1}{5}>5000$$

$$6^n-1>25000\ ,\ 6^n>25001$$

$$6^5=7776\ ,\ 6^6=46656$$

$n$ ന്റെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ധനമൂല്യം 6. അതായത് $1+6+6^2+\cdots+6^n>5000$.

**ഉദാഹരണം 2.53** ഓരോ വർഷവും ഒരാൾ പണം സമ്പാദിച്ചു. മുൻവർഷം സമ്പാദിച്ചതിന്റെ പകുതി വീതം അടുത്തവർഷം സമ്പാദിച്ചു. ആറുവർഷം കൊണ്ട് ₹ 7875 സമ്പാദിച്ചെങ്കിൽ ഒന്നാം വർഷം അയാൾ സമ്പാദിച്ച രൂപ എത്ര?

**നിർദ്ധാരണം** 6 വർഷങ്ങൾ കൊണ്ട് സമ്പാദിച്ച ആകെ തുക $S_6=7875$

ഓരോ വർഷവും അയാൾ മുമ്പിലുള്ള വർഷത്തിന്റെ പകുതി വീതം പണം സമ്പാദിച്ചു,



2 Numbers and Seq.indd 75 20/01/2023 17:33:53

$r = \frac{1}{2} < 1$

$$\frac{a\left(1-r^n\right)}{1-r} = \frac{a\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right)}{1-\frac{1}{2}} = 7875$$

$$\frac{a\left(1-\frac{1}{64}\right)}{\frac{1}{2}} = 7875\ ,\ a \times \frac{63}{32} = 7875$$

$$a = \frac{7875 \times 32}{63}\ ,\ a = 4000$$

ആദ്യവർഷം അയാൾ സമ്പാദിച്ച തുക ₹ 4000.

## അഭ്യാസം 2.8

1. G.P. യുടെ ആദ്യത്തെ $n$ പദങ്ങളുടെ കൂട്ടുതുക കാണുക. (i) $5, -3, \frac{9}{5}, -\frac{27}{25}, \ldots$ (ii) 256,64,16,…
2. 5, 15, 45, … എന്ന G.P. യുടെ ആദ്യത്തെ 6 പദങ്ങളുടെ തുക കാണുക.
3. ഒരു G.P. യുടെ പൊതുഅനുപാതം 5. അതിന്റെ ആദ്യത്തെ 6 പദങ്ങളുടെ കൂട്ടുതുക 46872. ആണെങ്കിൽ ആ G.P. യുടെ ആദ്യപദം കണ്ടുപിടിക്കുക.
4. അനന്തത വരെയുള്ള പദങ്ങളുടെ തുക കാണുക (i) $9 + 3 + 1 + \cdots$ (ii) $21 + 14 + \frac{28}{3} + \cdots$
5. ഒരു G.P. യുടെ ആദ്യപദം 8 ഉം അനന്തതവരെയുള്ള കൂട്ടുതുക $\frac{32}{3}$ ഉം ആണെങ്കിൽ പൊതു അനുപാതം കാണുക.
6. $n$ പദങ്ങളുള്ള ശ്രേണിയുടെ കൂട്ടുതുക കാണുക.
   (i) $0.4 + 0.44 + 0.444 + \cdots$ $n$ പദങ്ങൾ (ii) $3 + 33 + 333 + \cdots$ $n$ പദങ്ങൾ
7. $3 + 6 + 12 + \cdots + 1536$ എന്ന G.P യുടെ തുക കാണുക..
8. കുമാർ അയാളുടെ നാലു കൂട്ടുകാർക്ക് കത്തുകൾ എഴുതുന്നു. ഓരോകത്തിന്റേയും കോപ്പികൾ നാലു പേർക്കു വീതം അയയ്ക്കാൻ ആവശ്യപ്പെടുന്നു. ഇതുപോലെ തുടർന്ന് ചെയ്യുന്നു. അങ്ങനെയാണെങ്കിൽ ഒരു കത്തിന് 2 രൂപാവീതം ചെലവുണ്ടെങ്കിൽ 8-ാമത്തെ തവണവരെയുള്ള കത്തുകൾക്കായി പോസ്റ്റേജിൽ ചെലവഴിച്ച തുക കണ്ടുപിടിക്കുക..
9. $0.\overline{123}$ എന്നതിനെ പരിമേയ സംഖ്യാരൂപത്തിൽ കാണുക.
10. If $S_n = (x + y) + (x^2 + xy + y^2) + (x^3 + x^2y + xy^2 + y^3) + \cdots n$ പദങ്ങൾ. എങ്കിൽ $(x - y)S_n = \left[\frac{x^2(x^n - 1)}{x - 1} - \frac{y^2(y^n - 1)}{y - 1}\right]$ തെളിയിക്കുക

## 2.11 പ്രത്യേക ശ്രേണികൾ

വ്യക്തമായ സൂത്രവാക്യങ്ങൾ ഉള്ള തെളിയിക്കപ്പെട്ട ചില ശ്രേണികളുണ്ട്. അവയെ പ്രത്യേക ശ്രേണികൾ എന്നു വിളിക്കപ്പെടുന്നു.

ഇവിടെ നമുക്ക് ചില പൊതുവായ പ്രത്യേക ശ്രേണികളെക്കുറിച്ച് പഠിക്കാം



2 Numbers and Seq.indd 76 20/01/2023 17:33:55

(i) ആദ്യത്തെ '$n$' നിസർഗ്ഗസംഖ്യകളുടെ തുക

(ii) ആദ്യത്തെ '$n$' ഒറ്റനിസർഗ്ഗസംഖ്യകളുടെ തുക.

(iii) ആദ്യത്തെ '$n$' നിസർഗ്ഗസംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുക.

(iv) ആദ്യത്തെ '$n$' നിസർഗ്ഗസംഖ്യകളുടെ ഘനങ്ങളുടെ തുക.

ആദ്യത്തെ $n$ നിസർഗ്ഗസംഖ്യകളുടെ (ഏതൊരു ഘാതങ്ങൾക്കും) തുക താഴെ പറയുന്ന സൂത്രവാക്യത്തിൽ തെളിയിക്കാം. $(x+1)^{k+1}-x^{k+1}$. $1^k+2^k+3^k+\ldots+n^k$ കണ്ടുപിടിക്കാൻ നമുക്ക് ഇനി പറയുന്ന പ്രയോഗം ഉപയോഗിക്കാം $(x+1)^{k+1}-x^{k+1}$.

### 2.11.1 ആദ്യത്തെ $n$ നിസർഗ്ഗ സംഖ്യകളുടെ തുക

$1+2+3+\cdots+n$, കണ്ടുപിടിക്കാൻ ഇനി പറയുന്ന പ്രയോഗം ഉപയോഗിക്കാം $(x+1)^2-x^2=2x+1$

$x=1$ എങ്കിൽ, $2^2-1^2=2(1)+1$

$x=2$ എങ്കിൽ, $3^2-2^2=2(2)+1$

$x=3$ എങ്കിൽ, $4^2-3^2=2(3)+1$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

$x=n-1$ എങ്കിൽ, $n^2-(n-1)^2=2(n-1)+1$

$x=n$ എങ്കിൽ, $(n+1)^2-n^2=2(n)+1$

മേൽപ്പറഞ്ഞ എല്ലാ സമീകരണങ്ങളെയും കൂട്ടുകയും ഇടതുവശത്തുള്ള പദങ്ങളെ ഒഴിവാക്കുകയും ചെയ്യുമ്പോൾ നമുക്ക്,

$$\begin{aligned}(n+1)^2-1^2 &= 2(1+2+3+\cdots+n)+n\\ n^2+2n &= 2(1+2+3+\cdots+n)+n\\ 2(1+2+3+\cdots+n) &= n^2+n=n(n+1)\\ 1+2+3+\cdots+n &= \frac{n(n+1)}{2}\end{aligned}$$ കിട്ടും.

### 2.11.2 ആദ്യത്തെ $n$ ഒറ്റ നിസർഗ്ഗസംഖ്യകളുടെ തുക

$1+3+5+\cdots+(2n-1)$

ഇതൊരു A.P. ആകുന്നു $a=1,\ d=2\ ,\ l=2n-1$

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{n}{2}\left[a+l\right]\\ &= \frac{n}{2}\left[1+2n-1\right]\\ S_n &= \frac{n}{2}\times 2n = n^2\end{aligned}$$

### 2.11.3 ആദ്യത്തെ $n$ നിസർഗ്ഗസംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുക

$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ കണ്ടുപിടിക്കാൻ ഇനി പറയുന്ന പ്രയോഗം ഉപയോഗിക്കാം. $(x+1)^3-x^3=3x^2+3x+1$

$x=1$ എങ്കിൽ, $2^3-1^3=3(1)^2+3(1)+1$

$x=2$ എങ്കിൽ, $3^3-2^3=3(2)^2+3(2)+1$

$x=3$ എങ്കിൽ, $4^3-3^3=3(3)^2+3(3)+1$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

$x=n-1$ എങ്കിൽ, $n^3-(n-1)^3=3(n-1)^2+3(n-1)+1$

$x=n$ എങ്കിൽ, $(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1$



2 Numbers and Seq.indd 77 20/01/2023 17:34:00

മേൽപ്പറഞ്ഞ സമീകരണങ്ങളെ കൂട്ടുകയും ഇടതുവശത്തുള്ള പദങ്ങളെ ഒഴിവാക്കുകയും ചെയ്യുമ്പോൾ നമുക്ക് ,

$$(n+1)^3 - 1^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) + 3(1 + 2 + 3 + \cdots + n) + n$$

$$n^3 + 3n^2 + 3n = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) + \frac{3n(n+1)}{2} + n$$

$$3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) = n^3 + 3n^2 + 2n - \frac{3n(n+1)}{2} = \frac{2n^3 + 6n^2 + 4n - 3n^2 - 3n}{2}$$

$$3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2} = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$ കിട്ടും

### 2.11.4 ആദ്യത്തെ *n* നിസർഗ്ഗ സംഖ്യകളുടെ ഘനങ്ങളുടെ തുക

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$, കണ്ടുപിടിക്കാൻ ഇനി പറയുന്ന പ്രയോഗം ഉപയോഗിക്കാം.

$(x+1)^4 - x^4 = 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$

$x = 1$ എങ്കിൽ, $2^4 - 1^4 = 4(1)^2 + 4(1) + 1$

$x = 2$ എങ്കിൽ, $3^4 - 2^4 = 4(2)^3 + 4(2) + 1$

$x = 3$ എങ്കിൽ, $4^4 - 3^4 = 4(3)^3 + 6(3) + 1$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

$x = n-1$ എങ്കിൽ, $n^4 - (n-1)^4 = 4(n-1)^3 + 4(n-1) + 1$

$x = n$ എങ്കിൽ, $(n+1)^4 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$

മേൽപ്പറഞ്ഞ എല്ലാ സമീകരണങ്ങളെയും കൂട്ടുകയും ഇടതുവശത്തുള്ള പദങ്ങളെ ഒഴിവാക്കുകയും ചെയ്യുമ്പോൾ നമുക്ക് കിട്ടും,

$(n+1)^4 - 1^4 = 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3) + 6(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) + 4(1 + 2 + 3 + \cdots + n) + n$

$$n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n = 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3) + 6 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4 \times \frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3) = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n - 2n^3 - n^2 - 2n^2 - n - 2n^2 - 2n - n$$

$$4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3) = n^4 + 2n^3 + n^2 = n^2(n^2 + 2n + 1) = n^2(n+1)^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$




**നല്ല സുഹൃത്ത് ബന്ധം**

220, 284 എന്നീ സംഖ്യകളെ പരിഗണിക്കുക.

220 ന്റെ ഭാജകങ്ങളുടെ തുക (220 ഒഴികെ) = 1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284

284 ന്റെ ഭാജകങ്ങളുടെ തുക (284 ഒഴികെ) =1+2+4+71+142=220.

ഇതിൽ നിന്നും 220 സംഖ്യ ഒഴികെ മറ്റെല്ലാ ഭാജകങ്ങളുടെയും തുക 284 ആണെന്നും, 284 സംഖ്യ ഒഴികെ മറ്റെല്ലാ ഭാജകങ്ങളുടെയും തുക 220 ആണെന്നും കാണാം. ഇത്തരം സംഖ്യകളെ അനുയോജ്യ സംഖ്യകൾ അല്ലെങ്കിൽ സൗഹൃദ സംഖ്യകൾ (amicable) എന്നു പറയുന്നു.

220, 284 എന്നീ സംഖ്യാ ജോഡികൾ ഏറ്റവും ചെറിയ സൗഹൃദ സംഖ്യകളാകുന്നു. പൈഥഗോറസ്സാണ് ഈ സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിച്ചത്. ഇന്ന് ഏകദേശം 12 മില്യണിൽ അധികം അനുയോജ്യസംഖ്യാജോഡികൾ ഉണ്ടെന്ന് പറയപ്പെടുന്നു.



2 Numbers and Seq.indd 78 20/01/2023 17:34:05

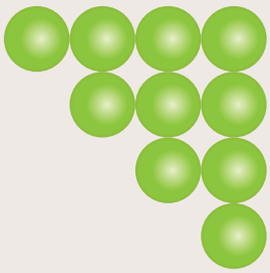
## പ്രവർത്തി 6

ഇതുപോലുള്ള ഒരു ത്രികോണം എടുക്കുക



ചിത്രം.2.16 $(1+2+3+4)$

ഇതുപോലുള്ള മറ്റൊരു ത്രികോണം ഉണ്ടാക്കുക.



ചിത്രം.2.17 $(4+3+2+1)$

രണ്ടാമത്തെ ത്രികോണത്തെ ആദ്യത്തെ ത്രികോണവുമായി യോജിപ്പിച്ചാൽ

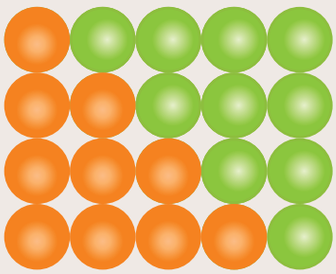


Fig.2.18

ഇപ്രകാരം $1+2+3+4$ ന്റെ രണ്ട് പകർപ്പുകൾ, ഒരു $4\times5$ വലുപ്പത്തിലുള്ള ദീർഘചതുരം നൽകുന്നു.

ഈ ചിത്രത്തിലൂടെ നമുക്ക് എഴുതാൻ കഴിയുന്ന സംഖ്യകൾ എഴുതാം.

$$(4+3+2+1)+(1+2+3+4)=4\times5$$

$$2(1+2+3+4)=4\times5$$

അതിനാൽ, $1+2+3+4=\dfrac{4\times5}{2}=10$

സമാനരീതിയിൽ ആദ്യത്തെ 5 നിസർഗ്ഗസംഖ്യകളുടെ കൂട്ടുതുക കാണാൻ ശ്രമിക്കുക. നിങ്ങൾക്ക് ഈ ഉത്തരങ്ങൾ ഏതെങ്കിലും അറിയപ്പെടുന്ന സൂത്രവാക്യങ്ങളുമായി ബന്ധപ്പെടുത്താനാകുമോ?

നിങ്ങൾക്ക് അറിയാമോ

1. ത്രികോണാകൃതിയിലുള്ള രൂപങ്ങൾ ആയതുകൊണ്ടാണ് ആദ്യ $n$ നിസർഗ്ഗസംഖ്യകളുടെ കൂട്ടുതുകയെ ത്രികോണസംഖ്യകൾ എന്നുവിളിക്കുന്നത്.
2. ചതുര ആധാരത്തോടുകൂടിയ പിരമിഡ് ആകൃതിയിലുള്ള രൂപങ്ങൾ ആയതുകൊണ്ടാണ് ആദ്യത്തെ $n$ നിസർഗ്ഗ സംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുകയെ പിരമിഡ് വർഗ്ഗസംഖ്യകളെന്ന് വിളിക്കുന്നത്..

## ചിന്തിയ്ക്കുക

1. സ്റ്റാന്റേർഡ് ചെസ്സ് ബോർഡിൽ എത്ര സമചതുരങ്ങളുണ്ട്?
2. സ്റ്റാന്റേർഡ് ചെസ്സ് ബോർഡിൽ എത്ര ദീർഘ ചതുരങ്ങളുണ്ട്?

നമ്മൾ ചർച്ച ചെയ്ത ചില ഉപയോഗപ്രദമായ ചില സൂത്രവാക്യങ്ങളാണ് ഇവിടെ പറയുന്നത്. ഈ സൂത്രവാക്യങ്ങൾ പരിമിതപദങ്ങളുടെ കൂട്ടുതുക കാണാൻ ഉപയോഗിക്കുന്നു..

$$\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+\cdots+n \quad =\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=1+2+3+\cdots+(2n-1) \quad =n^2$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 \quad =\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 \quad =\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$



2 Numbers and Seq.indd 79 20/01/2023 17:34:07

**ഉദാഹരണം 2.54** (i) $1+2+3+...+50$ (ii) $16+17+18+...+75$ ന്റെ മൂല്യം കണ്ടുപിടിക്കുക.

**നിർദ്ധാരണം** (i) $1+2+3+\cdots+50$

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1+2+3+\cdots+50 = \frac{50\times(50+1)}{2} = 1275$$

(ii) $16+17+18+\cdots+75 = (1+2+3+\cdots+75)-(1+2+3+\cdots+15)$

$$= \frac{75(75+1)}{2} - \frac{15(15+1)}{2}$$

$$= 2850 - 120 = 2730$$

## പുരോഗതി പരിശോധന

1. ആദ്യത്തെ $n$ നിസർഗ്ഗ സംഖ്യകളുടെ കൂട്ടുതുകയുടെ _____ ആദ്യത്തെ $n$ നിസർഗ്ഗ സംഖ്യകളുടെ ഘനങ്ങളുടെ കൂട്ടുതുകയ്ക്ക് തുല്ല്യമാണ്.
2. ആദ്യത്തെ 100 നിസർഗ്ഗസംഖ്യകളുടെ ശരാശരി _____ ആകുന്നു.

**ഉദാഹരണം 2.55** (i) $1+3+5+\cdots$ 40 പദങ്ങൾ

(ii) $2+4+6+\cdots+80$ (iii) $1+3+5+\cdots+55$ തുക കാണുക?

**നിർദ്ധാരണം** (i) $1+3+5+\cdots 40$ പദങ്ങൾ $= 40^2 = 1600$

(ii) $2+4+6+\cdots+80 = 2(1+2+3+\cdots+40) = 2\times\frac{40\times(40+1)}{2} = 1640$

(iii) $1+3+5+\cdots+55$

ഇവിടെ പദങ്ങളുടെ എണ്ണം തന്നിട്ടില്ല. അതുകൊണ്ട് പദങ്ങളുടെ എണ്ണം കണ്ടുപിടിക്കുക,

$n = \frac{(l-a)}{d}+1$ , $n = \frac{(55-1)}{2}+1 = 28$

ഈ സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിക്കുക, $1+3+5+\cdots+55 = (28)^2 = 784$

**ഉദാഹരണം 2.56** കൂട്ടുതുക കാണുക (i) $1^2+2^2+\cdots+19^2$

(ii) $5^2+10^2+15^2+\cdots+105^2$ (iii) $15^2+16^2+17^2+\cdots+28^2$

**നിർദ്ധാരണം** (i) $1^2+2^2+\cdots+19^2 = \frac{19\times(19+1)(2\times19+1)}{6} = \frac{19\times20\times39}{6} = 2470$

(ii) $5^2+10^2+15^2+\cdots+105^2 = 5^2(1^2+2^2+3^2+\cdots+21^2)$

$$= 25\times\frac{25\times(21+1)(2\times21+1)}{6}$$

$$= \frac{25\times21\times22\times43}{6} = 82775$$

(iii) $15^2+16^2+17^2+\cdots+28^2 = (1^2+2^2+3^2+\cdots+28^2)-(1^2+2^2+3^2+\cdots+14^2)$

$$= \frac{28\times29\times57}{6} - \frac{14\times15\times29}{6} = 7714-1015 = 6699$$



2 Numbers and Seq.indd 80 20/01/2023 17:34:11

**ഉദാഹരണം 2.57** കൂട്ടുതുക കാണുക? (i) $1^3+2^3+3^3+\cdots+16^3$ (ii) $9^3+10^3+\cdots+21^3$

**നിർദ്ധാരണം** (i) $1^3+2^3+3^3+\cdots+16^3=\left[\frac{16\times(16+1)}{2}\right]^2=(136)^2=18496$

(ii) $9^3+10^3+\cdots+21^3=(1^3+2^3+3^3+\cdots+21^3)-(1^3+2^3+3^3+\cdots+8^3)$

$$=\left[\frac{21\times(21+1)}{2}\right]^2-\left[\frac{8\times(8+1)}{2}\right]^2=(231)^2-(36)^2=52065$$

**ഉദാഹരണം 2.58** $1+2+3+\cdots+n=666$ ആണെങ്കിൽ $n$ ന്റെ മൂല്യം കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം** $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, എന്നാൽ $\frac{n(n+1)}{2}=666$

$n^2+n-1332=0 \qquad (n+37)(n-36)=0$

$n=-37$ or $n=36$

$n\neq -37$ (നിസർഗ്ഗസംഖ്യയാകുന്നു); അതുകൊണ്ട് $n=36$.

## പുരോഗതി പരിശോധന

ശരിയോ തെറ്റ് എന്ന് എഴുതുക, അവയുടെ കാരണം വിശദമാക്കുക.

1. ആദ്യത്തെ ഒറ്റ നിസർഗ്ഗസംഖ്യകളുടെ കൂട്ടുതുക എപ്പോഴും ഒറ്റ സംഖ്യയായിരിക്കും.
2. തുടർച്ചയായ ഇരട്ടസംഖ്യകളുടെ കൂട്ടുതുക എപ്പോഴും ഇരട്ടസംഖ്യയായിരിക്കും.
3. ആദ്യത്തെ $n$ നിസർഗ്ഗസംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ കൂട്ടുതുകയുടെയും ആദ്യത്തെ $n$ നിസർഗ്ഗസംഖ്യകളുടെ കൂട്ടുതുകയുടെയും വ്യത്യാസത്തിനെ എല്ലായ്പ്പോഴും 2 കൊണ്ട് വിഭജിക്കാം.
4. ആദ്യത്തെ $n$ നിസർഗ്ഗസംഖ്യകളുടെ ഘനങ്ങളുടെ കൂട്ടുതുക എല്ലായ്പ്പോഴും ഒരുവർഗ്ഗസംഖ്യയാകുന്നു..

## അഭ്യാസം 2.9

1. താഴെതന്നിട്ടുള്ള ശ്രേണിയുടെ കൂട്ടുതുക കണ്ടുപിടിക്കുക

   (i) $1+2+3+\cdots+60$ (ii) $3+6+9+\cdots+96$ (iii) $51+52+53+\cdots+92$

   (iv) $1+4+9+16+\cdots+225$ (v) $6^2+7^2+8^2+\cdots+21^2$

   (vi) $10^3+11^3+12^3+\cdots+20^3$ (vii) $1+3+5+\cdots+71$

2. $1+2+3+\cdots+k=325$, ആണെങ്കിൽ $1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3$ ന്റെ മൂല്യം കാണുക.

3. If $1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3$ =44100 ആണെങ്കിൽ $1+2+3+\cdots+k$ ന്റെ മൂല്യം കാണുക.

4. $1^3+2^3+3^3+\cdots$ എന്നീ ശ്രേണികളിൽ എത്ര പദങ്ങളുടെ എണ്ണം എടുത്താൽ കൂട്ടുതുക 14400 കിട്ടും?

5. ആദ്യത്തെ $n$ നിസർഗ്ഗസംഖ്യകളുടെ ഘനങ്ങളുടെ കൂട്ടുതുക 2025. ആണെങ്കിൽ $n$ ന്റെ മൂല്യം കണ്ടുപിടിക്കുക.

6. രേഖയുടെ കൈയ്യിൽ 10 cm, 11 cm, 12 cm,..., 24 cm അളവുകളിലുള്ള 15 സമചതുര കളർപേപ്പറുകൾ ഉണ്ട്. ഇവ ഉപയോഗിച്ച് അലങ്കരിക്കാൻ സാധിക്കുന്ന സ്ഥലത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക?

7. താഴെ തന്ന ശ്രേണിയുടെ കൂട്ടുതുക കാണുക $(2^3-1)+(4^3-3^3)+(6^3-5^3)+\ldots$

   (i) $n$ പദങ്ങൾ (ii) 8 പദങ്ങൾ



2 Numbers and Seq.indd 81 20/01/2023 17:34:15

## അഭ്യാസം 2.10

### തെരഞ്ഞെടുത്തെഴുതുക

1. യൂക്ലിഡിന്റെ ഹരണ ഉപസിദ്ധാന്തം നിർവ്വചിക്കുന്നത് $a$, $b$, എന്നീ ധനപൂർണ്ണാങ്കത്തിന് $q$, $r$ എന്ന അതുല്യ പൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾ $a = bq + r$, എന്നീ രീതിയിൽ ഉണ്ടായിരിക്കും ഇവിടെ $r$ എന്നത്.

   (A) $1 < r < b$ (B) $0 < r < b$ (C) $0 \leq r < b$ (D) $0 < r \leq b$

2. യൂക്ലിഡിന്റെ ഹരണ ഉപസിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച് ഏതെങ്കിലും ധനപൂർണ്ണാങ്കത്തിന്റെ ഘനത്തെ 9 കൊണ്ട് വിഭജിക്കുകയാണെങ്കിൽ സാധ്യമായ ശിഷ്ടങ്ങൾ

   (A) 0, 1, 8 (B) 1, 4, 8 (C) 0, 1, 3 (D) 1, 3, 5

3. 65, 117 എന്നിവയുടെ HCF നെ $65m - 117$, എന്ന രൂപത്തിൽ എഴുതുകയാണെങ്കിൽ $m$ ന്റെ മൂല്യം

   (A) 4 (B) **2** (C) **1** (D) **3**

4. 1729 ന്റെ അഭാജ്യഘടകക്രിയയിൽ അഭാജ്യഘടകങ്ങളുടെ, ഘാതങ്ങളുടെ കൂട്ടുതുക

   (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

5. 1 മുതൽ 10 വരെയുള്ള (രണ്ടും ഉൾപ്പെടെ) സംഖ്യകളാൽ ഹരിക്കാവുന്ന ഏറ്റവും ചെറിയ സംഖ്യ

   (A) 2025 (B) 5220 (C) 5025 (D) 2520

6. $7^{4k} \equiv$_____ (mod 100)

   (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

7. $F_1 = 1$, $F_2 = 3$ തന്നിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ $F_5$ എന്നത്

   (A)3 (B)5 (C)8 (D)11

8. ഒരു A.P യുടെ ആദ്യ പദം 1 ഉം പൊതുവ്യത്യാസം 4. ഉം ആകുന്നു. താഴെപറയുന്നവയിൽ ഏതായിരിക്കും ഈ A.P. യുടെ പദം?

   (A) 4551 (B) 10091 (C) 7881 (D) 13531

9. ഒരു A.P. യുടെ 6 -ാം പദത്തിന്റെ 6 മടങ്ങ്, 7 -ാം പദത്തിന്റെ 7 മടങ്ങിന് തുല്യമാണെങ്കിൽ A.P. യിലെ 13 -ാം പദം

   (A) 0 (B) 6 (C) 7 (D) 13

10. ഒരു A.P. യിൽ 31 പദങ്ങളുണ്ട്. അതിലെ 16 -ാം പദം $m$, ആണെങ്കിൽ ആ A.P. യിലെ എല്ലാ പദങ്ങളുടേയും കൂട്ടുതുക

    (A) 16 m (B) 62 m (C) 31 m (D) $\frac{31}{2}$ m

11. ഒരു A.P. യിൽ ആദ്യപദം 1 പൊതുവ്യത്യാസം 4. എങ്കിൽ A.P. യിലെ എത്ര പദങ്ങളുടെ കൂട്ടുതുക 120 ന് തുല്യമാകും?

    (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9

12. $A = 2^{65}$ , $B = 2^{64} + 2^{63} + 2^{62} + \quad + 2^0$ ആണെങ്കിൽ താഴെ പറയുന്നവയിൽ ഏതാണ് ശരി?

    (A) $B$ $A$ യെക്കാൾ $2^{64}$ കൂടുതൽ (B) $A$, $B$ തുല്യം

    (C) $B$ $A$ യെങ്കിൽ 1 കൂടുതൽ (D) $A$ $B$ യെക്കാൾ 1 വലുത്



2 Numbers and Seq.indd 82 20/01/2023 17:34:17

13. $\frac{3}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}, \frac{1}{18}, \cdots$ എന്ന അനുക്രമത്തിന്റെ അടുത്തപദം ..... ആകുന്നു

(A) $\frac{1}{24}$ (B) $\frac{1}{27}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{1}{81}$

14. ഒരു A.P. യിലെ അനുക്രമം $t_1, t_2, t_3, \ldots$ ആണെങ്കിൽ അനുക്രമം $t_6, t_{12}, t_{18}, \ldots$ എന്നത്

(A) G.P (B) A.P (C) A.P യുമല്ല G.P യുമല്ല (D) സ്ഥിരാങ്ക അനുക്രമം

15. $(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 15^3) - (1 + 2 + 3 + \cdots + 15)$ മൂല്യമാകുന്നു

(A) 14400 (B) 14200 (C) 14280 (D) 14520

## യൂണിറ്റ് അഭ്യാസം - 2



1. ഓരോ $n$ ധനപൂർണ്ണാങ്കത്തിനും $n^2 - n$ നെ 2 കൊണ്ട് വിഭജിക്കാമെന്ന് തെളിയിക്കുക.
2. ഒരു പാൽക്കാരന്റെ കൈയ്യിൽ 175 ലിറ്റർ പശുവിൻ പാലും 105 ലിറ്റർ എരുമപ്പാലുമുണ്ട്. രണ്ടുതരം പാലും തുല്യ അളവുള്ള ക്യാനുകളിൽ വിൽക്കാൻ അയാൾ വിചാരിച്ചു. എങ്കിൽ താഴെ പറയുന്നവയെ കണക്കാക്കുക? (i) ക്യാനിന്റെ അളവ് (ii) പശുവിൻ പാലുള്ള ക്യാനിന്റെ എണ്ണം (iii) എരുമപ്പാലുള്ള ക്യാനിന്റെ എണ്ണം?.
3. $a, b, c$ എന്നീ ധനപൂർണ്ണാങ്കത്തിനെ 13 കൊണ്ട് വിഭജിക്കുമ്പോൾ യഥാക്രമം 9, 7, 10 എന്നീ ശിഷ്ടഫലങ്ങൾ ഉണ്ടാകുന്നു. $a + 2b + 3c$ യെ 13 കൊണ്ട് വിഭജിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന ശിഷ്ടങ്ങളെ കണ്ടുപിടിക്കുക?
4. 107 നെ $4q + 3$ , $q$ പൂർണ്ണാങ്കം, രീതിയിൽ എഴുതാമെന്ന് തെളിയിക്കുക.
5. ഒരു A.P. യിൽ $(m+1)^{th}$ പദം $(n+1)^{th}$ ാം പദത്തിനെക്കാൾ ഇരട്ടിയാണെങ്കിൽ $(3m+1)^{\text{th}}$ ാം പദം $(m+n+1)^{th}$ പദത്തിനെക്കാൾ ഇരട്ടിയാണെന്ന് തെളിയിക്കുക?
6. $-2, -4, -6, \ldots -100$ എന്ന A. P. യിലെ അവസാന പദത്തിൽ നിന്നും 12-ാം പദം കണ്ടുപിടിക്കുക?
7. രണ്ട് A.Pകൾക്ക് ഒരേ പോലുള്ള പൊതുവ്യത്യാസം ഉണ്ട്. ഒരു A.P യുടെ ആദ്യപദം 2 ഉം മറ്റേതിന് 7 ഉം എന്നാൽ 10-ാം പദങ്ങളുടെ വ്യത്യാസവും, 21-ാം പദങ്ങളുടെ വ്യത്യാസവും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം സമമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക? ഇത് ഏതെങ്കിലും രണ്ട് അനുബന്ധ പദങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസത്തിന് തുല്യമായിരിക്കും.
8. ഒരാൾ 10 വർഷം കൊണ്ട് ₹16500 സമ്പാദിച്ചു. ആദ്യവർഷത്തിനുശേഷം തുടർന്നുള്ള ഓരോ വർഷത്തിലും മുന്നിലുള്ള വർഷത്തെക്കാൾ ₹100 കൂടുതൽ സമ്പാദിച്ചു. ആദ്യത്തെ വർഷത്തെ അയാളുടെ സമ്പാദ്യം എത്രയാണ് ?
9. രണ്ടാം പദം $\sqrt{6}$ 6-ാം പദം $9\sqrt{6}$ ഉള്ള G.P. യെ കണ്ടുപിടിക്കുക.
10. ഒരു മോട്ടോർ സൈക്കിളിന്റെ വില വർഷത്തിന് 15%വീതം കുറയുന്നു. ഇപ്പോൾ അതിന്റെ വില ₹ 45,000 ആണെങ്കിൽ മൂന്നുവർഷങ്ങൾക്കുശേഷം അതിന്റെ വില എത്രയാണ്?

## ഓർമ്മിക്കേണ്ടവ



- **യൂക്ലിഡിന്റെ ഹരണ ഉപസിദ്ധാന്തം**

  $a$, $b$ എന്നിവ രണ്ട് ധനപൂർണ്ണാങ്കങ്ങളാണ്, എന്നാൽ $q$, $r$ എന്ന രണ്ട് അതുല്യ പൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾ $a = bq + r$, $0 \le r < |b|$ എന്ന രീതിയിൽ ഉണ്ടായിരിക്കും.

- **അങ്കഗണിതത്തിന്റെ അടിസ്ഥാന സിദ്ധാന്തം**

  ഓരോ ഭാജ്യസംഖ്യയെയും, അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതാം. ഈ അഭാജ്യ ഘടകങ്ങളുടെ ക്രമം ഓരോ ഘടകങ്ങളാക്കലിലും വ്യത്യസ്തമായിരിക്കും.



2 Numbers and Seq.indd 83 20/01/2023 17:34:19

- **കൂട്ടുസമാന്തര ശ്രേണി**

  (i) ഒരു കൂട്ടുസമാന്തരശ്രേണിയുടെ പൊതുരൂപമായ $a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ldots.\ n^{th}$ പദം $t_n = a+(n-1)d$

  (ii) ഒരു A.P. യുടെ ആദ്യത്തെ $n$ പദങ്ങളുടെ കൂട്ടുതുക $S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$ ആകുന്നു

  (iii) അവസാനപദം $l$ ആണെങ്കിൽ ( $n^{th}$ ാം പദം തന്നിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ $S_n = \frac{n}{2}[a+1]$)

- **ഗുണനക്രമാനുപാതശ്രേണി**

  (i) ഒരു G.P യുടെ പൊതു രൂപമായ $a,\ ar,\ ar^2,\ldots,ar^{n-1}$. $n^{th}$ ാം പദം $t_n = ar^{n-1}$

  (ii) ഒരു G.P. യുടെ ആദ്യത്തെ $n$ പദങ്ങളുടെ കൂട്ടുതുക $S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$ if $r \neq 1$

  (iii) അതായത് $r=1$ എങ്കിൽ $S_n = na$

  (iv) ഒരു G.P. യുടെ അനന്തപദങ്ങളുടെ കൂട്ടുതുക $a+ar+ar^2+\cdots\ \ S = \frac{a}{1-r}$, ആകുന്നു. ഇവിടെ $-1<r<1$

- **പ്രത്യേക ശ്രേണികൾ**

  (i) ആദ്യത്തെ $n$ നിസർഗ്ഗസംഖ്യകളുടെ തുക $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

  (ii) ആദ്യത്തെ $n$ നിസർഗ്ഗസംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ കൂട്ടുതുക

  $$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

  (iii) ആദ്യത്തെ $n$ നിസർഗ്ഗസംഖ്യകളുടെ ഘനങ്ങളുടെ കൂട്ടുതുക

  $$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

  (iv) ആദ്യത്തെ $n$ ഒറ്റ നിസർഗ്ഗ സംഖ്യകളുടെ കൂട്ടുതുക $1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$

## ICT CORNER

### ICT 2.1

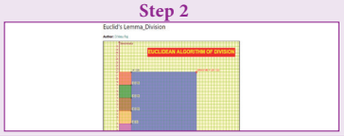
**ഘട്ടം 1:** Browser Open ചെയ്ത് താഴെ കാണുന്ന URL Link Type ചെയ്യുക. (അല്ലെങ്കിൽ) QR Code Scan ചെയ്യുക. Geo Gebra യുടെ സംഖ്യകളും അനുക്രമങ്ങളും **Numbers and Sequences** എന്ന വർക്ക് ഷീറ്റ് ഭാഗം തുറക്കും. ഈ വർക്ക് ഷീറ്റിൽ, ബുക്കിന്റെ ഇടത്തേ ഭാഗത്ത് വിസ്താരലന Chapter മായി ബന്ധപ്പെട്ട പ്രവർത്തികൾ ഉണ്ടാകും. **'Euclid division lemma'** യൂക്ലിഡിന്റെ ഹരണ ഉപസിദ്ധാന്തം എന്ന Worksheet select ചെയ്യുക.

**ഘട്ടം 2:** ആ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന **worksheet a drag me** എന്ന പേരിലുള്ള point വലിച്ചിടുമ്പോൾ പുതിയ ബിന്ദുക്കളുടെ **Set** കിട്ടും. നമ്മൾ പാഠ പുസ്തകത്തിൽ നിന്നു പഠിച്ച ഹരണ **algorith** ഇതുമായി താതമ്യപ്പെടുത്തുക..

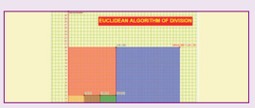
Step 1



Step 2



Expected results

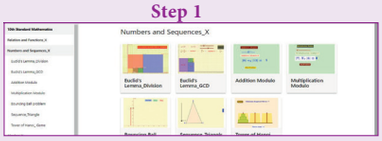


### ICT 2.2

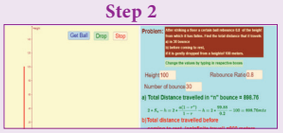
**ഘട്ടം 1: Browser open** ചെയ്ത് താഴെ കാണുന്ന **URL Link type** ചെയ്യുക. (അല്ലെങ്കിൽ) **QR Code Scan** ചെയ്യുക..

**ഘട്ടം 2: Geo Gebra** യുടെ സംഖ്യകളും അനുക്രമങ്ങളും എന്ന വർക്ക്ഷീറ്റ് ഭാഗം തുറക്കും. ഈ വർക്ക് ഷീറ്റിൽ ഇടത്തേ ഭാഗത്ത് വിസ്താരക ലനം **Chapter** മായി ബന്ധപ്പെട്ട പ്രവർത്തികൾ ഉണ്ടാകും. വർക്ക്ഷീറ്റ് **Select** ചെയ്യുക. അവിടെ **Bouncing ball problem** കാണും.

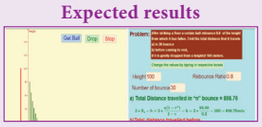
Step 1



Step 2



Expected results



*You can repeat the same steps for other activities*

https://www.geogebra.org/m/jfr2zzgy#chapter/356192

or Scan the QR Code.



2 Numbers and Seq.indd 84 20/01/2023 17:34:22

# 3 ബീജഗണിതം

"ഒരു വ്യക്തിക്ക് ഒരു വർഷത്തിനുള്ളിൽ $x^2 - 92y^2 = 1$ എന്ന സമീകരണത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണം കണ്ടുപിടിക്കാൻ സാധിച്ചാൽ അദ്ദേഹത്തെ ഗണിതജ്ഞൻ എന്ന് വിളിക്കാം."

- ബ്രഹ്മഗുപ്ത



നിക്കോളോ ഫോണ്ടാന ടാർട്ടാഗ്ലിയ
1499/1500 – 1557 AD(CE)

നിക്കോളോ ഫോണ്ടാന ടാർട്ടാഗ്ലിയ വെനീസിന്റെ (ഇപ്പോൾ ഇറ്റലി) ജനാധിപത്യഭരണം മുതൽക്കു തന്നെ ഇറ്റാലിയൻ ഗണിതജ്ഞൻ, എഞ്ചീനീയർ, സർവേയർ, ബുക്ക് കീപ്പർ (കണക്കപിള്ള) എന്നീ നിലകളിൽ പ്രസിദ്ധനായ വ്യക്തി ആയിരുന്നു. ആർക്കിമെഡിസീന്റെയും യൂക്ലീഡിന്റെയും ആദ്യകാല ഇറ്റാലിയൻ പരിവർത്തനങ്ങൾ, ഗണിതശാസ്ത്രത്തിന്റെ സമാഹൃതമായ സമാഹാരം എന്നിവ ഉൾപ്പെടെ നിരവധി ഗ്രന്ഥങ്ങൾ അദ്ദേഹം പ്രസിദ്ധീകരിച്ചു. പീരങ്കികളുടെ പാതകൾ അന്വേഷിക്കുന്നതിൽ ഗണിതശാസ്ത്രം പ്രയോഗിച്ച ആദ്യത്തെ ആളാണ് ടാർട്ടാഗ്ലിയ. മുകളിൽ നിന്നും താഴേയ്ക്ക് വീഴുന്ന വസ്തുക്കളെകുറിച്ചുള്ള അദ്ദേഹത്തിന്റെ നിരീക്ഷണം പിന്നീട് ഗലീലിയോ സാധൂകരിച്ചു.

മൂന്നാം കൃതി ബഹുപദവ്യഞ്ജകങ്ങൾ എന്ന് വിളിക്കപ്പെടുന്ന ത്രിഘാത സമീകരണങ്ങളെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നതിനുള്ള രീതികൾ കണ്ടുപിടിച്ചതിനുള്ള അംഗീകാരം ടാർട്ടാഗ്ലിയയും കാർഡനോയും ചേർന്ന് നേടിയിരുന്നു മാത്രമല്ല ഏതെങ്കിലുമൊരു ടെട്രാഹെഡ്രണിന്റെ വ്യാപ്തം അവയുടെ 4 ശീർഷ ജോഡികൾക്കിടയിലുള്ള ദൂരം ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിനുള്ള സൂത്രവും അദ്ദേഹത്തിന്റെ സംഭാവനയാണ്.

## പഠനഫലങ്ങൾ

- മൂന്ന് ചരങ്ങളുള്ള രേഖീയ സമീകരണങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണം ഒഴിവാക്കൽ രീതി ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടുപടിക്കൽ
- ബഹുപദവ്യഞ്ജകങ്ങളുടെ G.C.D കൂടാതെ L.C.M. കണ്ടുപിടിക്കൽ
- ബീജഗണിത പരിമേയ വ്യഞ്ജകങ്ങളുടെ ലഘൂകരണം
- ബഹുപദവ്യഞ്ജകങ്ങളുടെ വർഗ്ഗമൂല കണ്ടുപിടിക്കൽ, മനസ്സിലാക്കൽ
- ദ്വിഘാത സമീകരണങ്ങളെകുറിച്ച് അറിയൽ
- ദ്വിഘാത ഗ്രാഫുകൾ വരയൽ
- മാട്രിക്സ്, മാട്രിക്സുകളുടെ തരങ്ങൾ, ക്രിയകൾ എന്നിവയെകുറിച്ച് മനസ്സിലാക്കൽ

DCRBL

## 3.1 ആമുഖം

ബീജഗണിതത്തെ സംഖ്യകളുടെ പഠനത്തിന്റെ അടുത്ത ഘട്ടമായി കണക്കാക്കാം. ചില നിർദ്ദിഷ്ട വ്യവസ്ഥകൾക്ക് വിധേയമായി നമുക്കെന്തെങ്കിലും നിർണ്ണയിക്കണമെങ്കിൽ നമുക്ക് ബീജഗണിതം ആവശ്യമുണ്ട്. ആ അർത്ഥത്തിൽ ബീജഗണിതത്തിന്റെ പഠനം എന്നത് അറിയാത്തവ നിർണ്ണയിക്കുന്നതിനുള്ള ശാസ്ത്രം എന്ന് കണക്കാക്കുന്നു. എ.ഡി മൂന്നാം നൂറ്റാണ്ടിൽ അലക്സാണ്ട്രിയായിലെ ഗണിതജ്ഞനായ ഡയോഫാന്റ്സ് അരിത്മെറ്റിക് എന്ന പേരിൽ 13 വാല്യങ്ങളിലായി ഒരു സ്മാരക ഗ്രന്ഥം എഴുതി. ഇതിൽ ആറെണ്ണം നമുക്ക് ലഭിച്ചു. പ്രശ്നങ്ങളുടെ അവസ്ഥകളെ സമവാക്യങ്ങളായി വിശേഷിപ്പിക്കപ്പെടുന്നതിന്റെയും ഒടുവിൽ അവയുടെ പരിഹാരം കാണപ്പെടുന്നതിന്റെയും ആദ്യ ഉറവിടം ഈ പുസ്തകമാണ്. നിത്യജീവിതത്തിലെ വിവിധ ജീവിത സാഹചര്യങ്ങളിൽ എല്ലാം ചരങ്ങളെ ധനപൂർണ്ണാങ്കങ്ങളായിട്ടാണ് പരിഗണിച്ചിരിക്കുന്നതെന്ന് ഡയോഫാന്റസ് തിരിച്ചറിഞ്ഞു.



3 Algebra Malayalam .indd 85 10/02/2023 11:45:40

എ.ഡി ഒൻപതാം നൂറ്റാണ്ടിൽ പേർഷ്യൻ ഗണിതജ്ഞനായ അൻ-ഖാരിസ്മി രചിച്ച അൽ-കിത്താബ് അൽ-മുഖ്തസർ ഫി ഹിസാബ് അൽ-ജബർ വാ-മുഗബ്ല (The Compendious book on Calculation by Completion and Balancing) എന്ന പ്രധാന കൃതിയിലുള്ള അൽ - ജബർ എന്ന വാക്കിൽ നിന്നും രൂപപ്പെട്ടതാണ് അൽജിബ്ര (ബീജഗണിതം) എന്ന പദം. അൽ - ഖാരിസ്മിയുടെ അൽ - ജബർ എന്ന പുസ്തകം സമവാക്യങ്ങൾ പരിഹരിക്കുന്നതിനുള്ള ഏറ്റവും അനുയോജ്യമായ രീതികൾ നൽകിയതിനാൽ അദ്ദേഹം ബീജഗണിതത്തിന്റെ പിതാവ് എന്ന പേരിൽ അറിയപ്പെടുന്നു.

ബീജഗണിതത്തിന്റെ പ്രധാന ആശയങ്ങൾ പലതും നാം കഴിഞ്ഞ ക്ലാസ്സുകളിൽ പഠിച്ചു കഴിഞ്ഞു. കൂടുതൽ വ്യാപ്തിയുള്ള പ്രശ്നങ്ങൾ പരിഹരിക്കുന്നതിന് സഹായിക്കുന്ന മറ്റ് പ്രധാന ആശയങ്ങളെ മനസ്സിലാക്കാൻ വേണ്ടി ഈ ക്ലാസിൽ നാം യാത്ര തുടരും. ഭാവി ക്ലാസുകളിൽ ഉയർന്ന ഗണിത പഠനം പഠിക്കുന്നതിൽ ഈ ആശയങ്ങളെകുറിച്ചുള്ള യഥാർത്ഥ അറിവ് കൂടുതൽ പ്രയോജനകരമാണ്.

## രണ്ടു ചരങ്ങളുള്ള രേഖീയ സമീകരണങ്ങൾ

രണ്ടു ചരങ്ങളുള്ള രേഖീയ സമീകരണങ്ങൾ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നതിനെകുറിച്ച് നമുക്ക് ഓർമ്മിക്കാം

**നിർവചനം**

**രണ്ടു ചരങ്ങളുള്ള രേഖീയ സമീകരണം**

$x$, y എന്നീ രണ്ടു ചരങ്ങളുള്ള ഏതൊരു ഏകഘാത സമീകരണത്തെയും രണ്ടു ചരങ്ങളുള്ള രേഖീയ സമീകരണം എന്ന് പറയുന്നു. രണ്ടു ചരങ്ങൾ ഉള്ള രേഖീയ സമീകരണത്തിന്റെ പൊതുരൂപം $ax+by+c=0$, എന്നാകുന്നു. ഇവിടെ $a$, $b$ എന്നിവയുടെ ഏതെങ്കിലും ഒരു മൂല്യമെങ്കിലും പൂജ്യം അല്ലാതെയും $a$, $b$, $c$ എന്നിവ വാസ്തവിക സംഖ്യകളും ആയിരിക്കണം.

കുറിപ്പ്:രേഖീയ സമീകരണം എന്നത് തന്നിട്ടുള്ള ചരങ്ങളുള്ള ഏകഘാത സമീകരണം ആകുന്നു.

**കുറിപ്പ്**

- $xy - 7 = 3$ എന്നത് രണ്ട് ചരങ്ങളുള്ള രേഖീയ സമീകരണം അല്ല. കാരണം $xy$ എന്ന പദത്തിന്റെ കൃതി 2 ആകുന്നു.
- രണ്ടു ചരങ്ങളുള്ള ഒരു രേഖീയ സമീകരണം $xy$ തലത്തിൽ ഒരു നേർരേഖയെ പ്രതിനിധാനം ചെയ്യുന്നു.

**ഉദാഹരണം 3.1** അച്ഛന്റെ വയസ് മകന്റെ വയസ്സിന്റെ 6 മടങ്ങാണ് ആറു വർഷങ്ങൾക്ക് ശേഷം അച്ഛന്റെ വയസ് മകന്റെ വയസ്സിന്റെ നാല് മടങ്ങാകും. അച്ഛന്റെയും മകന്റെയും ഇപ്പോഴത്തെ വയസ് (വർഷത്തിൽ) കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം** അച്ഛന്റെ ഇപ്പോഴത്തെ വയസ് $x$ വർഷങ്ങൾ എന്നും മകന്റെ ഇപ്പോഴത്തെ വയസ് $y$ വർഷങ്ങൾ എന്നും കരുതുക.

തന്നിട്ടുള്ളത്, $x = 6y$ ... (1)

$x + 6 = 4(y + 6)$ ... (2)

(1) നെ (2) ൽ പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ, $6y + 6 = 4\left(y + 6\right)$

$6y + 6 = 4y + 24$ $y = 9$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

അതുകൊണ്ട്, മകന്റെ വയസ് $=$ 9 വർഷങ്ങൾ അച്ഛന്റെ വയസ്സ് $=$ 54 വർഷങ്ങൾ.

**ഉദാഹരണം 3.2** നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക $2x - 3y = 6$ , $x + y = 1$

**നിർദ്ധാരണം** $2x - 3y = 6$ ... (1)

$x + y = 1$ ... (2)



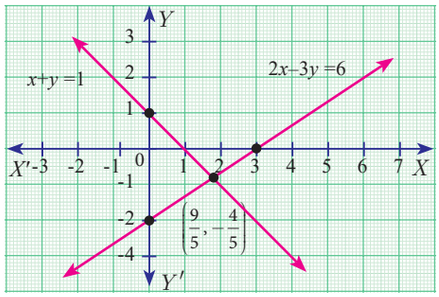
3 Algebra Malayalam .indd 86 10/02/2023 11:45:41

(1) × 1 => $2x - 3y = 6$

(2) × 2 => $2x + 2y = 2$

---

$-5y = 4$, $y = \frac{-4}{5}$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു



ചിത്രം. 3.1

$y = \frac{-4}{5}$ നെ (2) ൽ പ്രതിപാദിച്ചാൽ, $x - \frac{4}{5} = 1$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു., $x = \frac{9}{5}$

അതുകൊണ്ട്, $x = \frac{9}{5}$, $y = \frac{-4}{5}$.

## 3.2 മൂന്ന് ചരങ്ങളുള്ള രേഖീയ സമീകരണങ്ങൾ

ഒരു സൂപ്പർ മാർക്കറ്റിൽ വിവിധ ഇനങ്ങളിൽ സാധനങ്ങൾ വാങ്ങുമ്പോഴുള്ള ആകെ തുക കണക്കു കൂട്ടുന്നതിൽ തുടങ്ങി പ്രത്യേക സാഹചര്യങ്ങളിൽ ജനങ്ങളുടെ പ്രായപരിധി കണ്ടെത്തുന്നത്, ഒരു കോണിൽ മുകളിലേയ്ക്ക് എറിയുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ പാത കണ്ടെത്തുന്നതിൽ നിന്നും ദൈനംദിന ജീവിതത്തിൽ ബീജഗണിതം ഒരു പ്രധാന പങ്ക് വഹിക്കുന്നു എന്ന് നമുക്ക് മനസ്സിലാക്കാം.


ചിത്രം. 3.2

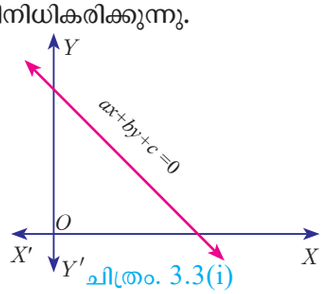
അന്തരീക്ഷത്തിലെ ഏതൊരു ബിന്ദുവിനെയും അതിന്റെ അക്ഷാംശം, രേഖാംശം, ഉയരം എന്നിവയെ കുറിച്ചുള്ള അറിവിലൂടെ ഏകകണ്ഠമായി നിർണയിക്കാവുന്നതാണ്. ഭൂമിയിലെ ഒരു പ്രത്യേക സ്ഥലത്ത് സ്ഥിതി ചെയ്യുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിനായി ഉപയോഗിക്കേണ്ട മൂന്ന് ചരങ്ങളുള്ള സമവാക്യങ്ങളെ (മേൽപറഞ്ഞവ) അറിയുന്നതിന് മൂന്ന് ഉപഗ്രഹങ്ങൾ യഥാസ്ഥാനത്ത് സ്ഥാപിച്ചിട്ടുണ്ട്. മുകളിൽ പറഞ്ഞ മൂന്ന് സമവാക്യങ്ങളിൽ നിന്നും നമുക്ക് രണ്ട് രേഖീയ സമവാക്യങ്ങളും ഒരു ദ്വിഘാത (കൃതി 2) സമവാക്യവും ലഭിക്കുന്നു. അതിനാൽ ഒരു നിശ്ചിത സമയത്ത് ഏതെങ്കിലും വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനം ഏകകണ്ഠമായി നിർണ്ണയിക്കുന്നതിന് ആവശ്യമായ ചരങ്ങൾ അക്ഷാംശം, രേഖാംശം, ഉയരം എന്നിവയെ സമവാക്യങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണത്തിലൂടെ കണ്ടുപിടിക്കാം. ഇത് ഗ്ലോബൽ-പൊസിഷനിംഗ് സിസ്റ്റത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനമാണ്. അതിനാൽ മൂന്ന് ചരങ്ങളുള്ള രേഖീയ സമീകരണത്തിന്റെ ആശയം GPS സമ്പ്രദായത്തിലും ഉപയോഗിച്ചിട്ടുണ്ട്. എന്ന് കാണാം.

### 3.2.1 മൂന്ന് ചരങ്ങളുള്ള രേഖീയ സമീകരണം സമ്പ്രദായം

കഴിഞ്ഞ ക്ലാസുകളിൽ നാം, രണ്ട് ചരങ്ങളുള്ള രേഖീയ സമവാക്യങ്ങളെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നതിനുള്ള വിവിധ രീതികളെകുറിച്ച് പഠിച്ചു കഴിഞ്ഞു. ഇവിടെ നാം $x$, $y$, $z$. എന്നീ മൂന്ന് ചരങ്ങളുള്ള രേഖീയ സമീകരണ സമ്പ്രദായത്തെ കുറിച്ച് പഠിക്കാൻ പോവുകയാണ്. $x$, $y$, $z$ എന്നീ ചരങ്ങളുള്ള രേഖീയ സമീകരണത്തിന്റെ പൊതുരൂപം $ax + by + cz + d = 0$ ഇവിടെ $a$, $b$, $c$, $d$ എന്നിവ വാസ്തവിക സംഖ്യകൾ കുറഞ്ഞത് ഒരു $a$, $b$, $c$ പൂജ്യമല്ലാതെ ഇരിക്കണം.

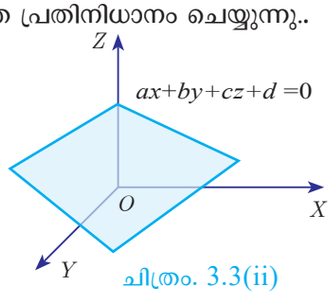
**കുറിപ്പ്**

- $ax + by + c = 0$, എന്ന രൂപത്തിലുള്ള രണ്ടു ചരങ്ങളുള്ള രേഖീയ സമീകരണം ഒരു നേർ രേഖയെ പ്രതിനിധികരിക്കുന്നു.



ചിത്രം. 3.3(i)

- $ax + by + cz + d = 0$, എന്ന രൂപത്തിലുള്ള മൂന്ന് ചരങ്ങളുള്ള രേഖീയ സമീകരണം ഒരു തലത്തെ പ്രതിനിധാനം ചെയ്യുന്നു..



ചിത്രം. 3.3(ii)



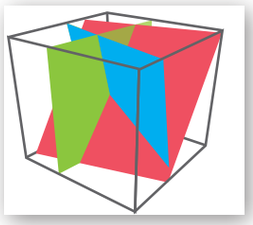
3 Algebra Malayalam .indd 87 10/02/2023 11:45:43

**പൊതുവായ രൂപം:** $x,\ y,\ z$ എന്നീ മൂന്ന് ചരങ്ങളുള്ള രേഖീയ സമീകരണ സമ്പ്രാദയത്തിന്റെ പൊതു രൂപം

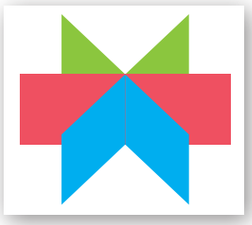
$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$
$$a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0$$

സമ്പ്രാദയത്തിലെ ഓരോ സമീകരണവും ത്രിമാന അളവിലുള്ള ഒരു തലത്തെ പ്രതിനിധികരിക്കുന്നു. കൂടാതെ സമീകരണസമ്പ്രാദയത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണം സമ്പ്രാദയത്തിലെ മൂന്ന് രേഖീയ സമീകരണങ്ങളും നിർവചിക്കുന്ന മൂന്ന് തലങ്ങളുടെ പ്രതിഛേദ ബിന്ദു ആകുന്നു. തലങ്ങൾ ഒന്നിനൊന്ന് പ്രതിഛേദിച്ചിരിക്കുന്ന തിനനുസരിച്ച് സമ്പ്രാദയത്തിന് ഒരേയൊരു നിർദ്ധാരണം അനന്തമായ നിർദ്ധാരണങ്ങൾ, നിർദ്ധാരണം ഇല്ല എന്നിങ്ങനെ സംഭവിക്കാം.

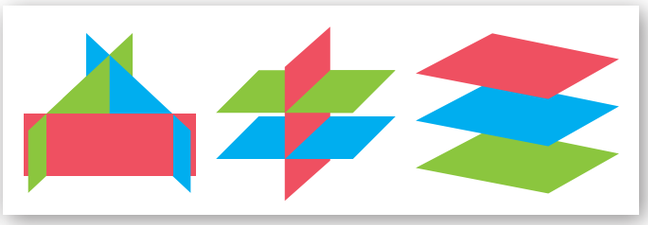
താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ചിത്രങ്ങൾ ഈ സാധ്യതകളെ വിശദീകരിച്ചിരിക്കുന്നു.



ഒരേയൊരു നിർദ്ധാരണം



അനന്തമായ നിർദ്ധാരണങ്ങൾ



നിർദ്ധാരണം ഇല്ല

ചിത്രം. 3.4

**മൂന്ന് ചരങ്ങളുള്ള രേഖീയ സമീകരണ സമ്പ്രാദയത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണം കണ്ട്പിടിക്കുന്നതിനുള്ള നടപടിക്രമങ്ങൾ**

**ഘട്ടം 1** തന്നിരിക്കുന്ന മൂന്ന് സമീകരണങ്ങളിൽ ഏതെങ്കിലും രണ്ടെണ്ണം എടുത്ത് ഏതെങ്കിലും ഒരു ചരത്തിന്റെ (ഒന്നുകിൽ $x$ അല്ലെങ്കിൽ $y$ അല്ലെങ്കിൽ $z$) ഗുണാങ്കത്തെ സംഖ്യാപരമായി തുല്യമാക്കുന്നതിന് യോജിച്ച രീതിയിലുള്ള ഒരു പൂജ്യമല്ലാത്ത സംഖ്യകൊണ്ട് ആദ്യം ഗുണിക്കണം..

**ഘട്ടം 2** സമീകരണങ്ങളിൽ നിന്നും ഗുണോത്തരം സംഖ്യാപരമായി തുല്യമായിരിക്കുന്ന ചരത്തെ ഒഴിവാക്കുക.

**ഘട്ടം 3** അതേ ചരത്തെ അടുത്ത ജോഡിയിൽ നിന്നും ഒഴിവാക്കുക.

**ഘട്ടം 4** ഇപ്പോൾ നമുക്ക് രണ്ട് ചരങ്ങളുള്ള രണ്ട് സമീകരണങ്ങൾ ലഭിക്കും.

**ഘട്ടം 5** കഴിഞ്ഞ ക്ലാസുകളിൽ പഠിച്ച ഏതെങ്കിലും ഒരു രീതി ഉപയോഗിച്ച് അവയുടെ നിർദ്ധാരണം കാണുക.

**ഘട്ടം 6** ഏതെങ്കിലും ഒരു സമീകരണത്തിൽ മൂല്യങ്ങളെ പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ ബാക്കിയുള്ള ചരത്തിന്റെ മൂല്യം നമുക്ക് കാണാൻ സാധിക്കും.

**കുറിപ്പ്**

- ഏതെങ്കിലും ഒരു ഘട്ടത്തിൽ നിങ്ങൾക്ക് ഒരു തെറ്റായ സമീകരണം അതായത് $0=1$, എന്ന് ലഭിച്ചാൽ സമ്പ്രാദയത്തിന് നിർദ്ധാരണം ഉണ്ടായിരിക്കുന്നതല്ല.
- നിങ്ങൾക്ക് ഒരു തെറ്റായ നിർദ്ധാരണം കിട്ടിയില്ല. പക്ഷേ ഒരു അനന്യത അതായത് $0=0$ ആണ് ലഭിച്ചതെങ്കിൽ സമ്പ്രാദയത്തിന് അനന്തമായ നിർദ്ധാരണങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കും.

**ഉദാഹരണം 3.3** താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന മൂന്ന് ചരങ്ങളുള്ള രേഖീയ സമ്പ്രാദയങ്ങളെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക

$3x - 2y + z = 2$, $2x + 3y - z = 5$, $x + y + z = 6$.

**നിർദ്ധാരണം** $3x - 2y + z = 2$ ...(1) $2x + 3y - z = 5$ ...(2) $x + y + z = 6$ ...(3)



3 Algebra Malayalam .indd 88 10/02/2023 11:45:44

(1) കൂടാതെ (2) എന്നിവ കൂട്ടുക

$$\begin{array}{rl} 3x-2y+z &= 2 \\ 2x+3y-z &= 5 \\ \hline 5x+y &= 7 \end{array} \quad (+) \qquad \ldots(4)$$

(2) ഉം (3) ഉം കൂട്ടിയാൽ

$$\begin{array}{rl} 2x+3y-z &= 5 \\ x+y+z &= 6 \\ \hline 3x+4y &= 11 \end{array} \quad (+) \qquad \ldots(5)$$

$4 \times (4) - (5)$

$$\begin{array}{rl} 20x+4y &= 28 \\ 3x+4y &= 11 \\ \hline 17x &= 17 \end{array} \quad (-)$$

$x = 1$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു

$x = 1$ നെ (4) ൽ പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ, $5 + y = 7$ $y = 2$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു

$x = 1$, $y = 2$ നെ (3) ൽ പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ, $1 + 2 + z = 6$ ലഭിക്കുന്നു $z = 3$

അതുകൊണ്ട്, $x = 1,\ y = 2,\ z = 3$

**ഉദാഹരണം 3.4** രണ്ടു ഇന്റർ സ്കൂൾ കായിക മേളയിൽ ആകെ 24 വ്യക്തിഗത സമ്മാനങ്ങൾ ഉണ്ട് ആകെ 56 പോയിന്റുകളിൽ, ഒന്നാം സ്ഥാനത്തിന് 5 പോയിന്റുകളും രണ്ടാം സ്ഥാനത്തിന് 3 പോയിന്റുകളും മൂന്നാം സ്ഥാനത്തിന് 1 പോയിന്റും ലഭിക്കും. മൂന്നാം സ്ഥാനം കൈവരിച്ചവരുടെ എണ്ണം ആദ്യ സ്ഥാനവും രണ്ടാമത്തെ സ്ഥാനവും കൈവരിച്ചവരുടെ എണ്ണത്തിന് തുല്യമാണ്. എങ്കിൽ, ഓരോ സ്ഥാനവും കൈവരിച്ചവരുടെ എണ്ണം കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം** I, II, III എന്നീ സ്ഥാനങ്ങൾ കൈവരിച്ചവരുടെ എണ്ണം $x$, $y$ കൂടാതെ $z$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

ആകെ ഇനങ്ങളുടെ എണ്ണം $= 24$; ആകെ പോയിന്റുകളുടെ എണ്ണം $= 56$.

അതിനാൽ മൂന്ന് ചരങ്ങളുള്ള രേഖീയ സമീകരണം

$x + y + z = 24$ ...(1) $\qquad 5x + 3y + z = 56$ ...(2) $\qquad x + y = z$ ...(3)

(3) നെ (1) ൽ പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ $z + z = 24$ , $z = 12$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

അതുകൊണ്ട് , (3) സമീകരണം, $x + y = 12$

$$\begin{array}{rl} (2) \text{ is} & 5x+3y = 44 \\ 3\times(3) \text{ is} & 3x+3y = 36 \\ \hline & 2x = 8 \end{array} \quad (-)$$

$x = 4$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

$x = 4$, $z = 12$ നെ (3) ൽ പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ $y = 12 - 4 = 8$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

അതുകൊണ്ട് ആദ്യസ്ഥാനം കൈവരിച്ചവരുടെ എണ്ണം 4 ആകുന്നു

രണ്ടാം സ്ഥാനം കൈവരിച്ചവരുടെ എണ്ണം 8 ആകുന്നു.

മൂന്നാം സ്ഥാനം കൈവരിച്ചവരുടെ എണ്ണം 12 ആകുന്നു.

**ഉദാഹരണം 3.5** നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക $x + 2y - z = 5$ ; $x - y + z = -2$ ; $-5x - 4y + z = -11$

**നിർദ്ധാരണം** $x + 2y - z = 5$ ...(1) $\quad x - y + z = -2$ ...(2) $\quad -5x - 4y + z = -11$ ...(3) എന്നിരിക്കട്ടെ

(1) ഉം (2) ഉം കൂട്ടിയാൽ,

$$\begin{array}{rl} x+2y-z &= 5 \\ x-y+z &= -2 \\ \hline 2x+y &= 3 \end{array} \quad (+) \qquad \ldots(4)$$



3 Algebra Malayalam .indd 89 10/02/2023 11:45:47

(2) ൽ നിന്ന് (3) നെ കുറച്ചാൽ, $x - y + z = -2$

$-5x - 4y + z = -11$ (−)

$6x + 3y = 9$

3 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ $2x + y = 3$ ...(5)

(4) ൽ നിന്ന് (5) നെ കുറച്ചാൽ, $2x + y = 3$

$2x + y = 3$

$0 = 0$

അനന്യത 0=0 എന്ന് നമുക്ക് ലഭിച്ചു.

അതുകൊണ്ട് ഈ സമ്പ്രാദയത്തിന് അനന്തമായ നിർദ്ധാരണങ്ങൾ ഉണ്ട്.

**ഉദാഹരണം 3.6** നിർദ്ധാരണം കാണുക $3x + y - 3z = 1$; $-2x - y + 2z = 1$; $-x - y + z = 2$.

**നിർദ്ധാരണം** $3x + y - 3z = 1$ ... (1) $-2x - y + 2z = 1$ ...(2) $-x - y + z = 2$ ...(3) എന്നിരിക്കട്ടെ

(1) ഉം (2) ഉം കൂട്ടിയാൽ, $3x + y - 3z = 1$

$-2x - y + 2z = 1$ (+)

$x - z = 2$ ... (4)

(1) ഉം (3) ഉം കൂട്ടിയാൽ, $3x + y - 3z = 1$

$-x - y + z = 2$ (+)

$2x - 2z = 3$ ... (5)

$2x - 2z = 3$

ഇപ്പോൾ, (5) −2×(4) $2x - 2z = 4$ (−)

$0 = -1$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു

ഇവിടെ നാം $0 \neq -1$ എന്ന വൈരുദ്ധ്യത്തിൽ എത്തിച്ചേർന്നു.

അതായത് സമ്പ്രാദയം അസ്ഥിരമാണ്. സമ്പ്രാദയത്തിന് നിർദ്ധാരണം ഇല്ല എന്ന് മനസ്സിലാക്കാം.

**ഉദാഹരണം 3.7** നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക $\frac{x}{2} - 1 = \frac{y}{6} + 1 = \frac{z}{7} + 2$; $\frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 13$

**നിർദ്ധാരണം** $\frac{x}{2} - 1 = \frac{y}{6} + 1$ എന്ന് പരിഗണിക്കുക

$\frac{x}{2} - \frac{y}{6} = 1 + 1$ എന്നത്, $\frac{6x - 2y}{12} = 2$ , $3x - y = 12$ ... (1) എന്ന് ലഭിക്കുന്നു

$\frac{x}{2} - 1 = \frac{z}{7} + 2$ എന്ന് പരിഗണിക്കുക

$\frac{x}{2} - \frac{z}{7} = 1 + 2$ , $\frac{7x - 2z}{14} = 3$ , $7x - 2z = 42$ ... (2) എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

അതുപോലെ $\frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 13$ $\frac{2y + 3z}{6} = 13$ , $2y + 3z = 78$ ... (3) എന്ന് ലഭിക്കുന്നു



3 Algebra Malayalam .indd 90 10/02/2023 11:45:51

(2) -ൽ നിന്നും (3) ൽ നുന്നും $z$ നെ ഒഴിവാക്കുക

$$\begin{array}{lrll} (2)\times 3 & 21x & -6z & = 126 \\ (3)\times 2 & & 4y+6z & = 156 \quad (+) \\ \hline & 21x+4y & & = 282 \\ (1)\times 4 & 12x-4y & & = 48 \quad (+) \\ \hline & 33x & & = 330 \quad x = 10 \end{array}$$

$x = 10$ നെ (1) ൽ പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ, $30 - y = 12$ , $y = 18$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

$x = 10$ നെ (2) ൽ പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ, $70 - 2z = 42$ , $z = 14$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

അതുകൊണ്ട്, $x = 10$, $y = 18$, $z = 14$.

**ഉദാഹരണം 3.8** നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക : $\frac{1}{2x}+\frac{1}{4y}-\frac{1}{3z}=\frac{1}{4}$ ; $\frac{1}{x}=\frac{1}{3y}$; $\frac{1}{x}-\frac{1}{5y}+\frac{4}{z}=2\frac{2}{15}$

**നിർദ്ധാരണം** $\frac{1}{x}=p$ , $\frac{1}{y}=q$ , $\frac{1}{z}=r$ എന്നിരിക്കട്ടെ

തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണങ്ങളെ ഇങ്ങനെ എഴുതാം

$$\begin{aligned} \frac{p}{2}+\frac{q}{4}-\frac{r}{3} &= \frac{1}{4} \\ p &= \frac{q}{3} \\ p-\frac{q}{5}+4r &= 2\frac{2}{15}=\frac{32}{15} \end{aligned}$$

ലഘൂകരിച്ചെഴുതിയാൽ,

$$6p+3q-4r = 3 \qquad \ldots(1)$$

$$3p = q \qquad \ldots(2)$$

$$15p-3q+60r = 32 \qquad \ldots(3)$$

(2) നെ (1) ലും (3) ലും പ്രതിപാദിച്ചാൽ,

$$15p-4r = 3 \qquad \ldots(4)$$

$$6p+60r = 32 \text{ ലഘുരൂപം } 3p+30r = 16 \qquad \ldots(5)$$

(4) നെയും (5) നെയും നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുമ്പോൾ,

$$\begin{array}{rrl} 15p-4r & = & 3 \\ 15p+150r & = & 80 \quad (-) \\ \hline -154r & = & -77 \end{array} \quad r=\frac{1}{2} \text{ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.}$$

$r = \frac{1}{2}$ നെ (4) ൽ പ്രതിപാദിച്ചാൽ, $15p - 2 = 3$ , $p = \frac{1}{3}$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു

(2) ൽ നിന്നും, $q = 3p$ , $q = 1$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

അതുകൊണ്ട്, $x = \frac{1}{p} = 3$, $y = \frac{1}{q} = 1$, $z = \frac{1}{r} = 2$. അതായത്, $x = 3, y = 1, z = 2$ ആകുന്നു



3 Algebra Malayalam .indd 91 10/02/2023 11:45:55

**ഉദാഹരണം 3.9** ആദ്യത്തെ സംഖ്യയുടെ മൂന്ന് മടങ്ങ്, രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യ, മൂന്നാമത്തെ സംഖ്യയുടെ രണ്ടുമടങ്ങ് എന്നിവയുടെ തുക 5 ആകുന്നു. ആദ്യത്തെ സംഖ്യകൂടാതെ മൂന്നാമത്തെ സംഖ്യയുടെ മൂന്ന് മടങ്ങിന്റെയും തുകയിൽ നിന്ന് രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യയുടെ മൂന്ന് മടങ്ങിനെ കുറച്ചാൽ 2 കിട്ടുന്നു. ആദ്യത്തെ സംഖ്യയുടെ രണ്ടു മടങ്ങിന്റെയും രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യയുടെ മൂന്ന് മടങ്ങിന്റെയും തുകയിൽ നിന്ന് മൂന്നാമത്തെ സംഖ്യയെ കുറച്ചാൽ 1 ലഭിക്കുന്നു. സംഖ്യകൾ കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം** മൂന്ന് സംഖ്യകൾ $x,\ y,\ z$ എന്നിരിക്കട്ടെ .

തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളിൽ നിന്നും താഴെ കാണുന്ന സമീകരണങ്ങൾ ലഭിക്കുന്നു,

$3x + y + 2z = 5$ ...(1) $\qquad x + 3z - 3y = 2$ ...(2) $\qquad 2x + 3y - z = 1$ ...(3)

$(1) \times 1$ ൽ നിന്നും, $3x + y + 2z = 5$

$(2) \times 3$ ൽ നിന്നും, $3x - 9y + 9z = 6$ (−)

$10y - 7z = -1$ ...(4)

$(1) \times 2$ ൽ നിന്നും, $6x + 2y + 4z = 10$

(3) ×3 ൽ നിന്നും, $6x + 9y - 3z = 3$ (−)

$-7y + 7z = 7$ ...(5)

(4) നെയും (5) നെയും കൂട്ടിയാൽ, $10y - 7z = -1$

$-7y + 7z = 7$

$3y = 6$ , $y = 2$ ലഭിക്കുന്നു

$y = 2$ നെ (5) ൽ പ്രതിപാദിച്ചാൽ, $-14 + 7z = 7, z = 3$ ലഭിക്കുന്നു

കൂടാതെ $y = 2$ നെ $z = 3$ (1) ൽ പ്രതിപാദിച്ചാൽ,

$3x + 2 + 6 = 5, \quad x = -1$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

അതുകൊണ്ട്, $x = -1,\ y = 2,\ z = 3.$

**ചിന്തിക്കുക**

1. മൂന്ന് ചരങ്ങളുള്ള രേഖീയ സമീകരണസമ്പ്രാദയത്തെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുമ്പോൾ സാധ്യമാകുന്ന നിർദ്ധാരണങ്ങളുടെ എണ്ണം _____.
2. മൂന്ന് തലങ്ങൾ സമാന്തരങ്ങളാണെങ്കിൽ സാധ്യമാകുന്ന പ്രതിഛേദ ബിന്ദു (ബിന്ദുക്കൾ) വിന്റെ എണ്ണം _____.

## പുരോഗതി പരിശോധന

1. മൂന്ന് ചരങ്ങളുള്ള രേഖീയ സമീകരണ സമ്പ്രാദയത്തിന് ഒരേയൊരു നിർദ്ധാരണം ലഭിക്കുന്നതിന് ആവശ്യമായ സമീകരണങ്ങളുടെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ എണ്ണം _____.
2. _____ ഒരു സമ്പ്രാദയത്തെ അനന്യതയിലേക്ക് നയിക്കുന്നു.
3. _____ എന്ന് വരുന്ന സമ്പ്രദായം ഒരു അർത്ഥശൂന്യ സമീകരണം നൽകുന്നു.

## അഭ്യാസം 3.1

1. മൂന്ന് ചരങ്ങളുള്ള രേഖീയ സമീകരണങ്ങളെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക

(i) $x + y + z = 5\,;\ 2x - y + z = 9\,;\ x - 2y + 3z = 16$

(ii) $\frac{1}{x} - \frac{2}{y} + 4 = 0;\quad \frac{1}{y} - \frac{1}{z} + 1 = 0;\quad \frac{2}{z} + \frac{3}{x} = 14$

(iii) $x + 20 = \frac{3y}{2} + 10 = 2z + 5 = 110 - (y + z)$



3 Algebra Malayalam .indd 92 10/02/2023 11:45:58

2. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണങ്ങളുടെ സ്വഭാവം ചർച്ച ചെയ്യുക

(i) $x+2y-z=6\,;\ -3x-2y+5z=-12\,;\ x-2z=3$

(ii) $2y+z=3\big(-x+1\big)\,;\ -x+3y-z=-4\,;\ 3x+2y+z=-\dfrac{1}{2}$

(iii) $\dfrac{y+z}{4}=\dfrac{z+x}{3}=\dfrac{x+y}{2}\,;\ \ x+y+z=27$

3. വാണി അവളുടെ അച്ഛൻ, മുത്തച്ഛൻ എന്നിവരുടെ ശരാശരി വയസ് 53 ആണ് അവളുടെ മുത്തച്ഛന്റെ വയസ്സിന്റെ രണ്ടിൽ ഒന്ന്, അച്ഛന്റെ വയസിന്റെ മൂന്നിൽ ഒന്ന്, വാണിയുടെ വയസ്സിന്റെ നാലിൽ ഒന്ന് എന്നിവയുടെ തുക 65 ആകുന്നു. നാല് വർഷങ്ങൾക്ക് മുമ്പ് വാണിയുടെ മുത്തച്ഛന്റെ വയസ് വാണിയുടെ വയസ്സിന്റെ നാല് മടങ്ങായിരുന്നു എങ്കിൽ മൂന്ന് പേരുടെയും ഇപ്പോഴത്തെ വയസ് കാണുക

4. ഒരു മൂന്നക്കസംഖ്യയിലെ അക്കങ്ങളുടെ തുക 11 ആകുന്നു. അക്കങ്ങളെ തിരിച്ചിട്ടാൽ കിട്ടുന്ന പുതിയ സംഖ്യ നേരത്തേയുള്ള സംഖ്യയുടെ അഞ്ച് മടങ്ങിനെക്കാൾ 46 കൂടുതലാണ്. നൂറിന്റെ സ്ഥാനത്തെ അക്കം കൂടാതെ പത്താം സ്ഥാനത്തെ അക്കത്തിന്റെ രണ്ട് മടങ്ങ് എന്നിവയുടെ തുക ഒന്നാം സ്ഥാനത്തെ അക്കത്തിന് തുല്യമാണെങ്കിൽ യഥാർത്ഥ മൂന്നക്ക സംഖ്യ ഏതെന്ന് കാണുക.

5. അഞ്ച് രൂപ പത്ത് രൂപ ഇരുപത് രൂപ എന്നിങ്ങനെ ആകെ 12 നാണയങ്ങൾ ഉണ്ട്. ഇവയുടെ ആകെത്തുക 105 ആകുന്നു. ആദ്യത്തെ 2 തരങ്ങളുടെയും എണ്ണത്തെ പരസ്പരം മാറ്റിയാൽ ഇതിന്റെ ആകെത്തുകയിൽ 20 രൂപ കൂടുന്നു. ഓരോ തരങ്ങളിലും ഉള്ള നാണയങ്ങളുടെ (നോട്ടുകളുടെ) എണ്ണം കാണുക.

## 3.3 ബഹുപദവ്യഞ്ജകങ്ങളുടെ ഉ.സാ.ഘ കൂടാതെ ല.സാ.ഗു

### 3.3.1 ഉത്തമ സാധാരണ ഭാജകം (GCD) അല്ലെങ്കിൽ ഉത്തമസാധാരണ ഘടകം (HCF)

ഘടകങ്ങളാക്കൽ രീതി ഉപയോഗിച്ച് ഏകാഘാത, ദ്വിഘാത ബഹുപദ വ്യഞ്ജകങ്ങളുടെ ഉസാഭാ **(GCD or HCF)** കണ്ടുപിടിക്കുന്നതെങ്ങനെ എന്ന് നാം കഴിഞ്ഞ ക്ലാസ്സുകളിൽ പഠിച്ചു കഴിഞ്ഞു. ദീർഘഹരണ രീതി ഉപയോഗിച്ച് ഉ.സ.ഭാ കാണുന്നത് എങ്ങനെയെന്ന് ഇപ്പോൾ നാം പഠിക്കാൻ പോവുകയാണ്.

പാഠം 2- ൽ (സംഖ്യകളും അനുക്രമങ്ങളും) ചർച്ച ചെയ്തിരിക്കുന്നതുപോലെ, രണ്ടു ധന പൂർണ്ണാങ്കങ്ങളുടെ ഉ.സാ.ഭ, ഡിവിഷൻ അൽഗോരിതം ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കുന്ന അതേ സമ്പ്രദായം തന്നെ രണ്ടു ബഹുപദവ്യഞ്ജകങ്ങളുടെ ഉ.സാ.ഭ കാണുന്നതിനും ഉപയോഗിക്കാം.

$f(x)$ , $g(x)$ എന്നീ ബഹുപദ വ്യഞ്ജകങ്ങളുടെ ഉ.സാ.ഭതാഴെ പറയുന്ന വഴികൾ ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കാം.

**ഘട്ടം 1** ആദ്യം $f(x)$ നെ $g(x)$ കൊണ്ട് ഹരിക്കുക. $f(x)=g(x)q(x)+r(x)$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു. ഇവിടെ $q(x)$ എന്നത് ഹരണഫലവും $r(x)$ എന്നത് ശിഷ്ടവും ആകുന്നു. എങ്കിൽ $r(x)$ ന്റെ കൃതി $<g(x)$ ന്റെ കൃതി $\deg\big[r(x)\big]<\deg\big[g(x)\big]$

**ഘട്ടം 2** ശിഷ്ടം $r(x)$ എന്നത് പൂജ്യം അല്ല എങ്കിൽ $g(x)$ നെ $r(x)$ കൊണ്ട് ഹരിക്കുക. $g(x)=r(x)q(x)+r_1(x)$ ആകുന്നു. ഇവിടെ $r_1(x)$ എന്നത് പുതിയ ശിഷ്ടം ആകുന്നു. എങ്കിൽ $r_1(x)$ ന്റെ കൃതി < $r(x)$ ന്റെ കൃതി $\deg\big[r_1(x)\big]<\deg\big[r(x)\big]$ . ശിഷടം $r_1(x)$ എന്നത് പൂജ്യം ആണെങ്കിൽ $r(x)$ ആണ് ആവശ്യപ്പെട്ട ഉ.സാ.ഭ.

**ഘട്ടം 3** $r_1(x)$ പൂജ്യം അല്ലെങ്കിൽ, ശിഷ്ടം പൂജ്യം കിട്ടുന്നതു വരെ ഈ പ്രവർത്തി തുടരുക.

$f(x), g(x)$. എന്നിവയുടെ ഉ.സാ.ഭാ. യെ $GCD\big[f(x), g(x)\big]$ എന്നെഴുതാം

**കുറിപ്പ്**

- $f(x)$, $g(x)$ എന്നിവ ഒരേ കൃതിയുള്ള രണ്ട് ബഹുപദ വ്യഞ്ജകങ്ങൾ ആണെങ്കിൽ ഏറ്റവും വലിയ ഗുണോത്തരം ഉള്ള ബഹുപദ വ്യഞ്ജകത്തെ ഹാര്യം ആയി പരിഗണിക്കണം. ചിലപ്പോൾ രണ്ടെണ്ണത്തിന്റെ ഗുണോത്തരവും തുല്യമെങ്കിൽ അടുത്ത കൃതിയുടെ ഗുണോത്തരങ്ങളെ താരതമ്യം ചെയ്ത് ഹരണം തുടരുക.



3 Algebra Malayalam .indd 93 10/02/2023 11:46:01

### പുരോഗതി പരിശോധന

1. ഒരേ കൃതിയുള്ള രണ്ടു ബഹുപദവ്യഞ്ജകങ്ങളെ ഹരിക്കുന്നതിൽ ഹാര്യത്തെയും, ഹാരകത്തെയും നിർണ്ണയിക്കുന്ന ഘടകം _____.

2. $f(x)$ നെ $g(x)$ കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ $r(x) = 0$ ആയാൽ $g(x)$ നെ ബഹുപദവ്യഞ്ജകങ്ങളുടെ _____ എന്ന് പറയുന്നു.

3. $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, ആണെങ്കിൽ $f(x)$ നെ $g(x)$ കൊണ്ട് പൂർണ്ണമായും ഹരിക്കണമെങ്കിൽ $f(x)$ നോട് _____ കൂട്ടണം.

4. $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, ആണെങ്കതിൽ $f(x)$നെ $g(x)$ കൊണ്ട് പൂർണ്ണമായും ഹരിക്കണമെങ്കിൽ $f(x)$ ൽ നിന്നും _____ നെ കുറയ്ക്കണം.

**ഉദാഹരണം 3.10** $x^3 + x^2 - x + 2$ കൂടാതെ $2x^3 - 5x^2 + 5x - 3$ എന്നീ ബഹുപദ വ്യഞ്ജകങ്ങളുടെ ഉ.സാ.ഭാ (GCD) കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം** $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 5x - 3$ കൂടാതെ $g(x) = x^3 + x^2 - x + 2$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2 \\
\hline
x^3 + x^2 - x + 2 & 2x^3 - 5x^2 + 5x - 3 \\
 & 2x^3 + 2x^2 - 2x + 4 \quad (-) \\
\hline
 & -7x^2 + 7x - 7
\end{array}
$$

$$= -7(x^2 - x + 1)$$

$-7(x^2 - x + 1) \neq 0$, $-7$ എന്നത് $g(x)$ ന്റെ ഹാരകം അല്ല എന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക.

ഇപ്പോൾ $g(x) = x^3 + x^2 - x + 2$ നെ പുതിയ ശിഷ്ടം $x^2 - x + 1$ (സ്ഥിരഘടകം ഒഴിച്ച്) കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ താഴെ കാണുന്നതുപോലെ ലഭിക്കുന്നു

$$
\begin{array}{r|l}
 & x + 2 \\
\hline
x^2 - x + 1 & x^3 + x^2 - x + 2 \\
 & x^3 - x^2 + x \quad (-) \\
\hline
 & 2x^2 - 2x + 2 \\
 & 2x^2 - 2x + 2 \quad (-) \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

ഇവിടെ നമുക്ക് ശിഷ്ടം പൂജ്യം എന്ന് ലഭിച്ചു.

അതുകൊണ്ട്, $\text{GCD}(2x^3 - 5x^2 + 5x - 3,\ x^3 + x^2 - x + 2) = x^2 - x + 1$

**ഉദാഹരണം 3.11** $6x^3 - 30x^2 + 60x - 48$ കൂടാതെ $3x^3 - 12x^2 + 21x - 18$ എന്നിവയുടെ GCD കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം** $f(x) = 6x^3 - 30x^2 + 60x - 48 = 6(x^3 - 5x^2 + 10x - 8)$ കൂടാതെ

$g(x) = 3x^3 - 12x^2 + 21x - 18 = 3(x^3 - 4x^2 + 7x - 6)$



3 Algebra Malayalam .indd 94 10/02/2023 11:46:05

ഇപ്പോൾ നമുക്ക് $x^3 - 5x^2 + 10x - 8$ കൂടാതെ $x^3 - 4x^2 + 7x - 6$ എന്നിവയുടെ GCD കാണാം.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1 \\
\hline
x^3 - 5x^2 + 10x - 8 & x^3 - 4x^2 + 7x - 6 \\
 & x^3 - 5x^2 + 10x - 8 \quad (-) \\
\hline
 & x^2 - 3x + 2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x - 2 \\
\hline
x^2 - 3x + 2 & x^3 - 5x^2 + 10x - 8 \\
 & x^3 - 3x^2 + 2x \quad (-) \\
\hline
 & -2x^2 + 8x - 8 \\
 & -2x^2 + 6x - 4 \quad (-) \\
\hline
 & 2x - 4 \\
 & = 2(x - 2)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x - 1 \\
\hline
x - 2 & x^2 - 3x + 2 \\
 & x^2 - 2x \quad (-) \\
\hline
 & -x + 2 \\
 & -x + 2 \quad (-) \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

ഇവിടെ ശിഷ്ടം പൂജ്യം എന്ന് ലഭിച്ചു.

മുൻപിലത്തെ ഗുണോത്തരങ്ങൾ 3, 6 എന്നിവയുടെ ഉ.സാ.ഭാ 3 ആകുന്നു.

അതിനാൽ ഉ.സാ.ഭ $\left[(6x^3 - 30x^2 + 60x - 48,\ 3x^3 - 12x^2 + 21x - 18)\right] = 3(x - 2)$ .

### 3.3.2 ബഹുപദവ്യഞ്ജകങ്ങളുടെ ലഘുതമ സാധാരണ ഗുണിതം (ല.സാ.ഗു (LCM))

രണ്ടോ അതിലധികമോ ബഹുപദവ്യഞ്ജകങ്ങളുടെ ലഘുതമ സാധാരണ ഗുണിതം എന്നത് അവയെ നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാവുന്ന ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ കൃതിയുള്ള (ഘാതമുള്ള) വ്യഞ്ജകമാണ്.

$a^3b^2$, $a^2b^3$. എന്നീ രണ്ട് ബഹുപദങ്ങളെ പരിഗണിക്കുക.

ഈ ബഹുപദങ്ങളുടെ ല.സാ.ഗു $LCM = a^3b^3$ .

ഘടകങ്ങളാക്കൽ രീതി ഉപയോഗിച്ച് ല.സാ.ഗു കാണൽ

(i) ഓരോ ബഹുപദ വ്യഞ്ജകത്തെയും ആദ്യം ഘടകങ്ങളാക്കുക.

(ii) ഏറ്റവും വലിയ കൃതിയുള്ള ഘടകമാണ് ല.സാ.ഗു.

(iii) ബഹുപദങ്ങൾക്ക് സംഖ്യാഗുണാങ്കം ഉണ്ടെങ്കിൽ അവയുടെ ല.സാ.ഗു കാണുക.

(iv) ഘടകങ്ങളുടെയും ഗുണാങ്കങ്ങളുടെയും ല.സാ.ഗുവിന്റെ ഗുണനഫലമാണ് ആവശ്യപ്പെട്ട ല.സാ.ഗു.

**ഉദാഹരണം 3.12** താഴെ തന്നവയുടെ ല.സാ.ഗു കാണുക

(i) $8x^4y^2$, $48x^2y^4$ (ii) $5x - 10$, $5x^2 - 20$

(iii) $x^4 - 1$, $x^2 - 2x + 1$ (iv) $x^3 - 27$, $(x - 3)^2$, $x^2 - 9$



3 Algebra Malayalam .indd 95 10/02/2023 11:46:07

**നിർദ്ധാരണം** (i) $8x^4y^2,\ 48x^2y^4$

നമുക്കാദ്യം സംഖ്യാഗുണാങ്കങ്ങളുടെ ല.സാ.ഗു കണ്ടുപിടിക്കാം.

അതായത് $\text{LCM}\ (8, 48) = 2\times2\times2\times6 = 48$

അടുത്ത് ചരങ്ങളുള്ള പദങ്ങളുടെ ല.സാ.ഗു കാണാം.

അതായത്, $\text{LCM}\ (x^4y^2, x^2y^4) = x^4y^4$

അവസാനം തന്നിരിക്കുന്ന വ്യഞ്ജകങ്ങളുടെ ല.സാ.ഗു കണ്ടുപിടിക്കാം.

നാം അവസാനം തന്നിട്ടുള്ള വ്യഞ്ജകത്തിന്റെ ല.സാഗു എന്നത് അവയുടെ സംഖ്യാഗുണാങ്കങ്ങളുടെ ല.സാ.ഗുവിന്റെയും ചരങ്ങളുള്ള പദങ്ങളുടെ ല.സാ.ഗുവിന്റെയും ഗുണനഫലം ആണ് എന്ന നിഗമനത്തിൽ എത്തിച്ചേരുന്നു.

അതുകൊണ്ട് ല.സാ.ഗു $(8x^4y^2, 48x^2y^4) = 48x^4y^4$

(ii) $(5x-10), (5x^2-20)$

$$5x-10 = 5(x-2)$$

$$5x^2-20 = 5(x^2-4) = 5(x+2)(x-2)$$

അതുകൊണ്ട് ല.സാ.ഗു $[(5x-10), (5x^2-20)] = 5(x+2)(x-2)$

(iii) $(x^4-1),\ x^2-2x+1$

$$x^4-1 = (x^2)^2-1 = (x^2+1)(x^2-1) = (x^2+1)(x+1)(x-1)$$

$$x^2-2x+1 = (x-1)^2$$

അതുകൊണ്ട് ല.സാ.ഗു $[(x^4-1), (x^2-2x+1)] = (x^2+1)(x+1)(x-1)^2$

(iv) $x^3-27, (x-3)^2, x^2-9$

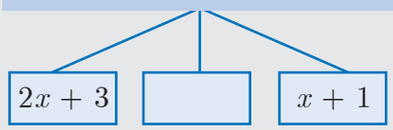
$x^3-27 = (x-3)(x^2+3x+9)$ ; $(x-3)^2 = (x-3)^2$; $(x^2-9) = (x+3)(x-3)$

അതുകൊണ്ട് ല.സാ.ഗു $[(x^3-27), (x-3)^2, (x^2-9)] = (x-3)^2(x+3)(x^2+3x+9)$

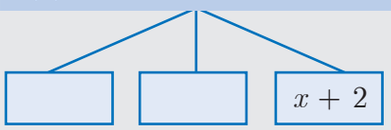
**ചിന്തിക്കുക**

$f(x)$ കൂടാതെ $g(x)$ എന്നീ ബഹുപദവ്യഞ്ജകങ്ങളുടെ ഘടകശാഖിയെ (factor tree) പൂർത്തീകരിക്കുക. കൂടാതെ അവയുടെ ഉ.സാഭാ (GCD) കൂടാതെ ല.സാ.ഗു (LCM) എന്നിവ കാണുക.

$f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 32x - 21$




$g(x) = 2x^3 - 7x^2 - 43x - 42$




ഉ.സാ.ഭാ $[f(x)\ ,\ g(x)]$ = _____ ല.സാ.ഗു $[f(x)\ ,\ g(x)]$ = _____

## അഭ്യാസം 3.2

1. തന്നിട്ടുള്ള ബഹുപദവ്യഞ്ജകങ്ങളുടെ ഉ.സാ.ഭാ കാണുക

(i) $x^4+3x^3-x-3,\ x^3+x^2-5x+3$ (ii) $x^4-1,\ x^3-11x^2+x-11$

(iii) $3x^4+6x^3-12x^2-24x,\ 4x^4+14x^3+8x^2-8x$

(iv) $3x^3+3x^2+3x+3,\ 6x^3+12x^2+6x+12$



3 Algebra Malayalam .indd 96 10/02/2023 11:46:12

2. തന്നിട്ടുള്ള വ്യഞ്ജകങ്ങളുടെ ല.സാ.ഗു കാണുക

(i) $4x^2y,\ 8x^3y^2$ (ii) $9a^3b^2,\ 12a^2b^2c$ (iii) $16m,\ 12m^2n^2,\ 8n^2$

(iv) $p^2-3p+2,\ p^2-4$ (v) $2x^2-5x-3,\ 4x^2-36$

(vi) $(2x^2-3xy)^2, (4x-6y)^3, 8x^3-27y^3$

### 3.3.3 ല.സാ.ഗു, ഉ.സാ.ഭാ എന്നിവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം

രണ്ടുസംഖ്യകൾ 12, 18 എന്നിവ പരിഗണിക്കുക.

ല.സാ.ഗു $(12,18)=36$, ഉ.സാ.ഭാ. $(12,18)=6$ .

ഇപ്പോൾ ല.സാ.ഗു $(12,18)\times$ ഉ.സാ.ഭാ $(12,18)=36\times6=216=12\times18$

അതായത് ല.സാ.ഗു × ഉ.സാ.ഭാ എന്നത് തന്നിട്ടുള്ള രണ്ട് സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലത്തിന് തുല്യമാണ്.

അതുപോലെ രണ്ടു ബഹുപദവ്യഞ്ജകങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം അവയുടെ ല.സാഗു, ഉ.സാഭാ എന്നിവയുടെ ഗുണനഫലത്തിന് തുല്യമാണ്, അതായത്, $f(x)\times g(x)=LCM[f(x),g(x)]\times GCD[f(x),g(x)]$

**വിശദീകരണം**

$f(x)=12(x^2-y^2)$ കൂടാതെ $g(x)=8(x^3-y^3)$ പരിഗണിക്കുക

ഇപ്പോൾ $f(x)=12(x^2-y^2)=2^2\times3\times(x+y)(x-y)$ ...(1)

കൂടാതെ $g(x)=8(x^3-y^3)=2^3\times(x-y)(x^2+xy+y^2)$ ...(2)

(1) ൽ നിന്നും (2) ൽ നിന്നും,

$$\begin{aligned}\text{LCM}[f(x),\ g(x)] &= 2^3\times3\times(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)\\ &= 24\times(x^2-y^2)(x^2+xy+y^2)\\ GCD\left[f(x),g(x)\right] &= 2^2\times(x-y)=4(x-y)\\ LCM\times GCD &= 24\times4\times(x^2-y^2)\times(x^2+xy+y^2)\times(x-y)\\ LCM\times GCD &= 96(x^3-y^3)(x^2-y^2)\ \text{എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.}\quad ...(3)\end{aligned}$$

$f(x),\ g(x)$ എന്നിവയുടെ ഗുണനഫലം $=12(x^2-y^2)\times8(x^3-y^3)$

$=96(x^2-y^2)(x^3-y^3)$ ...(4)

(3) ൽ നിന്നും (4)ൽ നിന്നും $\text{LCM}\times\text{GCD}=f(x)\times g(x)$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു

**ചിന്തിക്കുക**

$f(x)\times g(x)\times r(x)=\text{LCM}\ [f(x),g(x),r(x)]\times\text{GCD}\ [f(x),g(x),r(x)]$ എന്നത് ശരിയാണോ?

## അഭ്യാസം 3.3

1. താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയുടെ ല.സാ.ഗു കൂടാതെ ഉ.സാ.ഭാ എന്നിവ കാണുക. കൂടാതെ $f(x)\times g(x)=LCM\times GCD$ എന്നത് പരിശോധിക്കുക

(i) $21x^2y,\ 35xy^2$ (ii) $(x^3-1)(x+1),\ (x^3+1)$ (iii) $(x^2y+xy^2),\ (x^2+xy)$

2. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ഓരോ ജോഡി ബഹുപദ വ്യഞ്ജകങ്ങളുടെയും ല.സാ.ഗു കാണുക

(i) $a^2+4a-12,\ a^2-5a+6$ ഇവയുടെ ഉ.സാ.ഭാ $a$ - 2 ആകുന്നു

(ii) $x^4-27a^3x,\ (x-3a)^2$ ഇവയുടെ ഉ.സാ.ഭാ $(x-3a)$



3 Algebra Malayalam .indd 97 10/02/2023 11:46:17

3. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ഓരോ ജോഡി ബഹുപദവ്യഞ്ജകങ്ങളുടെയും ഉ.സാ.ഭാ. കാണുക

(i) $12(x^4 - x^3)$, $8(x^4 - 3x^3 + 2x^2)$ ഇവയുടെ ല.സാ.ഗു $24x^3(x-1)(x-2)$

(ii) $(x^3 + y^3)$, $(x^4 + x^2y^2 + y^4)$ ഇവയുടെ ല.സാ.ഗു $(x^3 + y^3)(x^2 + xy + y^2)$

4. $p(x)$, $q(x)$ രണ്ട് ബഹുപദവ്യഞ്ജകങ്ങൾ എന്നിവയുടെ LCM കൂടാതെ GCD എന്നിവ തന്നിട്ടുണ്ട്. തന്നിട്ടില്ലാത്ത ബഹുപദവ്യഞ്ജകം കാണുക.

| S.No. | LCM | GCD | $p(x)$ | $q(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| (i) | $a^3 - 10a^2 + 11a + 70$ | $a - 7$ | $a^2 - 12a + 35$ | |
| (ii) | $(x^2 + y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4)$ | $(x^2 - y^2)$ | | $(x^4 - y^4)(x^2 + y^2 - xy)$ |

## 3.4 പരിമേയ വ്യഞ്ജകങ്ങൾ

**നിർവചനം :** ഒരു വ്യഞ്ജകത്തെ പരിമേയ വ്യഞ്ജകം എന്ന് പറയണമെങ്കിൽ അതിനെ $\frac{p(x)}{q(x)}$ എന്ന രൂപത്തിൽ എഴുതാൻ കഴിയണം. ഇവിടെ $p(x)$ , $q(x)$ എന്നിവ ബഹുപദവ്യഞ്ജകങ്ങൾ കൂടാതെ $q(x) \neq 0$ . ഒരു പരിമേയ വ്യഞ്ജകം എന്നത് രണ്ട് ബഹുപദവ്യഞ്ജകങ്ങളുടെ അംശബന്ധമാണ്.

താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ളവ പരിമേയ വ്യഞ്ജകങ്ങൾക്ക് ഉദാഹരണങ്ങളാണ്.

$$\frac{9}{x},\ \frac{2y+1}{y^2-4y+9},\ \frac{z^3+5}{z-4},\ \frac{a}{a+10}.$$

ദൂര-സമയ കണക്കുകൾ വിശദീകരിക്കുന്നതിനും, വിവിധതര പ്രശ്നങ്ങൾ (മൾട്ടി ടാസ്ക് പ്രോബ്ലംസ്) കൈകാര്യം ചെയ്യുന്നതിനും, തൊഴിലാളികൾ, യന്ത്രങ്ങളെ സംയോജിപ്പിച്ച് ഒരു തൊഴിൽ പദ്ധതി പൂർത്തിയാക്കുന്നതിനും പരിമേയ വ്യഞ്ജകങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു.

### 3.4.1 പരിമേയ വ്യഞ്ജകങ്ങളുടെ ലഘൂകരണം (Reduction of rational Expressions)

$\frac{p(x)}{q(x)}$ എന്ന പരിമേയ വ്യഞ്ജകം ലഘുരൂപത്തിലാണെങ്കിൽ $p(x)$, $q(x)$ എന്നിവയുടെ ഉ.സാ.ഭു അതായത് $GCD\big(p(x), q(x)\big) = 1$ ആയിരിക്കും. ഒരു പരിമേയ വ്യഞ്ജകത്തെ ലഘുരൂപത്തിലാക്കുവാന്നതിന് താഴെ പറയുന്ന രീതികൾ സ്വീകാര്യമാണ്

(i) അംശത്തെയും ഛേദത്തെയും ഘടകങ്ങളാക്കുക.

(ii) അംശത്തിനും ഛേദത്തിനും പൊതുഘടകങ്ങൾ ഉണ്ടെങ്കിൽ അവയെ ഒഴിവാക്കുക.

(iii) ഇപ്പോൾ ലഭിച്ച വ്യഞ്ജകത്തെ ലഘുരൂപത്തിലുള്ള പരിമേയ വ്യഞ്ജകം എന്ന് പറയാം.

**ഉദാഹരണം 3.13** തന്നിട്ടുള്ള പരിമേയ വ്യഞ്ജകത്തെ ലഘുരൂപത്തിലാക്കുക

(i) $\frac{x-3}{x^2-9}$ (ii) $\frac{x^2-16}{x^2+8x+16}$




**നിർദ്ധാരണം** (i) $\frac{x-3}{x^2-9} = \frac{x-3}{(x+3)(x-3)} = \frac{1}{x+3}$

(ii) $\frac{x^2-16}{x^2+8x+16} = \frac{(x+4)(x-4)}{(x+4)^2} = \frac{x-4}{x+4}$

### 3.4.2 പരിത്യജിക്കപ്പെട്ട മൂല്യം (Excluded Value)

ഒരു വാസ്തവിക മൂല്യം ഒരു പരിമേയ വ്യഞ്ജകത്തെ (അതിന്റെ ലഘുരൂപത്തിൽ) നിർവചിക്കാൻ സാധ്യമല്ലാത്ത ഒരു പരിമേയ വ്യഞ്ജകമാക്കി മാറ്റുകയാണെങ്കിൽ ആ മൂല്യത്തെ പരിത്യജിക്കപ്പെട്ട മൂല്യം എന്ന് പറയുന്നു.



3 Algebra Malayalam .indd 98 10/02/2023 11:46:20

$\frac{p(x)}{q(x)}$ എന്ന ലഘുരൂപത്തിലുള്ള ഒരു പരിമേയ വ്യഞ്ജകത്തിന്റെ പരിത്യജിക്കപ്പെട്ട മൂല്യം കണ്ടു പിടിക്കണമെങ്കിൽ ഛേദം $q(x) = 0$ എന്ന് പരിഗണിക്കുക.

ഉദാഹരണമായി $\frac{5}{x-10}$ എന്ന പരിമേയ വ്യഞ്ജകത്തെ $x = 10$ ആയാൽ നിർവചിക്കാൻ സാധ്യമല്ല. അതുകൊണ്ട് $\frac{5}{x-10}$ ന്റെ പരിത്യജിക്കപ്പെട്ട മൂല്യം 10 ആകുന്നു.

**ഉദാഹരണം 3.14** താഴെ തന്നിട്ടുള്ള വ്യഞ്ജകങ്ങളുടെ പരിത്യജിക്കപ്പെട്ട മൂല്യം കാണുക.

(i) $\frac{x+10}{8x}$ (ii) $\frac{7p+2}{8p^2+13p+5}$ (iii) $\frac{x}{x^2+1}$

**നിർദ്ധാരണം**

(i) $\frac{x+10}{8x}$

$8x = 0$ അല്ലെങ്കിൽ $x = 0$ ആയാൽ $\frac{x+10}{8x}$ എന്ന വ്യഞ്ജകത്തെ നിർവചിക്കാൻ സാധിക്കില്ല. അതിനാൽ പരിത്യജിക്കപ്പെട്ട മൂല്യം പൂജ്യം ആകുന്നു.

(ii) $\frac{7p+2}{8p^2+13p+5}$

$8p^2+13p+5 = 0$ ആയാൽ $\frac{7p+2}{8p^2+13p+5}$ എന്ന വ്യഞ്ജകത്തെ നിർവചിക്കാൻ പറ്റില്ല

അതായത്, $(8p+5)(p+1) = 0$

$p = \frac{-5}{8}, p = -1$ .പരിത്യജിക്കപ്പെട്ട മൂല്യങ്ങൾ $\frac{-5}{8}$ കൂടാതെ $-1$ ആകുന്നു.

(iii) $\frac{x}{x^2+1}$

ഇവിടെ $x$ - ന്റെ എല്ലാ മൂല്യങ്ങൾക്കും $x^2 \geq 0$ ആകുന്നു. അതിനാൽ, $x^2+1 \geq 0+1 = 1$ . അതുകൊണ്ട്, $x$ -ന്റെ ഏതൊരു മൂല്യത്തിനും $x^2+1 \neq 0$ ആകുന്നു.

അതുകൊണ്ട് തന്നിട്ടുള്ള പരിമേയ വ്യഞ്ജകത്തിന് $\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$ വാസ്തവിക പരിത്യജിക്കപ്പെട്ട മൂല്യമില്ല $\frac{x}{x^2+1}$.

## ചിന്തിക്കുക

1. $x^2-1$ കൂടാതെ $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ എന്നിവ പരിമേയ വ്യഞ്ജകങ്ങളാണോ?
2. $\frac{x^3+x^2-10x+8}{x^4+8x^2-9}$ പരിമേയ വ്യഞ്ജകങ്ങളുടെ എണ്ണം _____ ആകുന്നു.

## അഭ്യാസം 3.4

1. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ഓരോ പരിമേയ വ്യഞ്കത്തെയും ലഘുരൂപത്തിലാക്കുക.

(i) $\frac{x^2-1}{x^2+x}$ (ii) $\frac{x^2-11x+18}{x^2-4x+4}$ (iii) $\frac{9x^2+81x}{x^3+8x^2-9x}$ (iv) $\frac{p^2-3p-40}{2p^3-24p^2+64p}$

2. തന്നിട്ടുള്ള വ്യഞ്ജകങ്ങൾക്ക് പരിത്യജിക്കപ്പെട്ട മൂല്യങ്ങൾ ഏതെങ്കിലും ഉണ്ടെങ്കിൽ അവ കാണുക.

(i) $\frac{y}{y^2-25}$ (ii) $\frac{t}{t^2-5t+6}$ (iii) $\frac{x^2+6x+8}{x^2+x-2}$ (iv) $\frac{x^3-27}{x^3+x^2-6x}$



3 Algebra Malayalam .indd 99 10/02/2023 11:46:23

### 3.4.3 പരിമേയ വ്യഞ്ജകങ്ങളുടെ ക്രിയകൾ (Operations of Rational Expressions)

പരിമേയ സംഖ്യകളുടെ സങ്കലനം, വ്യവകലനം, ഗുണനം, ഹരണം എന്നിവയെകുറിച്ച് കഴിഞ്ഞ ക്ലാസ്സുകളിൽ നാം പഠിച്ചു കഴിഞ്ഞു. ഇപ്പോൾ പരിമേയ വ്യഞ്ജകങ്ങൾക്കായി അവയെ നമുക്ക് പൊതുവൽക്കരിക്കാം.

#### പരിമേയ വ്യഞ്ജകങ്ങളുടെ ഗുണനം

$\frac{p(x)}{q(x)}$ കൂടാതെ $\frac{r(x)}{s(x)}$ എന്നിവ രണ്ട് പരിമേയ വ്യഞ്ജകങ്ങൾ $q(x) \neq 0,\ s(x) \neq 0$,

ഇവിടെ അവയുടെ ഗുണനഫലം $\frac{p(x)}{q(x)} \times \frac{r(x)}{s(x)} = \frac{p(x) \times r(x)}{q(x) \times s(x)}$ ആകുന്നു.

മറ്റൊരുവിധത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ രണ്ടുപരിമേയ വ്യഞ്ജകങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം എന്നത് അവയുടെ അംശങ്ങളുടെ ഗുണനഫലത്തെ അവയുടെ ഛേദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന പരിമേയ വ്യഞ്ജകമാകുന്നു. ഈ പരിമേയ വ്യഞ്ജകത്തെ വീണ്ടും ലഘുരൂപത്തിലെഴുതുക.

#### പരിമേയ വ്യഞ്ജകങ്ങളുടെ ഹരണം

$\frac{p(x)}{q(x)}$ , $\frac{r(x)}{s(x)}$ എന്നിവ രണ്ട് പരിമേയ വ്യഞ്ജകങ്ങൾ $q(r) \neq 0,\ s(x) \neq 0$

ഇവിടെ $\frac{p(x)}{q(x)} \div \frac{r(x)}{s(x)} = \frac{p(x)}{q(x)} \times \frac{s(x)}{r(x)} = \frac{p(x) \times s(x)}{q(x) \times r(x)}$ എങ്കിൽ

അതായത് ഒരു പരിമേയ വ്യഞ്ജകത്തെ മറ്റൊന്നുകൊണ്ട് ഹരിക്കുക എന്നത്,ആദ്യത്തെ പരിമേയ വ്യഞ്ജകത്തിന്റെയും രണ്ടാമത്തെ പരിമേയ വ്യഞ്ജകത്തിന്റെ വ്യുൽക്രമത്തിന്റെയും ഗുണനഫലത്തിന് തുല്യമാണ്. ഇതിന്റെ ഫലമായി കിട്ടുന്ന വ്യഞ്ജകം ലഘുരൂപത്തിൽ അല്ലെങ്കിൽ ഇതിനെ ലഘുരൂപത്തിൽ ആക്കുക.

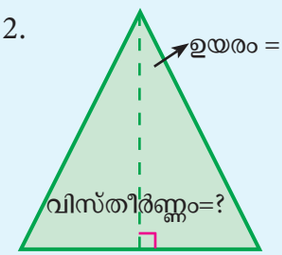
#### പുരോഗതി പരിശോധന

താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവയിൽ വിട്ടുപോയ വ്യഞ്ജകങ്ങൾ കാണുക.

1. വിസ്തീർണ്ണം = $\frac{(x-4)(x+3)}{3x-12}\ km^2$ വീതി = ?

നീളം = $\frac{x-3}{3}$ km

ചിത്രം. 3.5

2. 


ആധാരം = $(x+y)(x+y)m$

ചിത്രം. 3.6

**ഉദാഹരണം 3.15** (i) $\frac{x^3}{9y^2}$ നെ $\frac{27y}{x^5}$ കൊണ്ട് ഗുണിക്കുക (ii) $\frac{x^4b^2}{x-1}$ നെ $\frac{x^2-1}{a^4b^3}$ കൊണ്ട് ഗുണിക്കുക

**നിർദ്ധാരണം** (i) $\frac{x^3}{9y^2} \times \frac{27y}{x^5} = \frac{3}{x^2y}$ (ii) $\frac{x^4b^2}{x-1} \times \frac{x^2-1}{a^4b^3} = \frac{x^4 \times b^2}{x-1} \times \frac{(x+1)(x-1)}{a^4 \times b^3} = \frac{x^4(x+1)}{a^4b}$

**ഉദാഹരണം 3.16** താഴെത്തന്നവ കാണുക

(i) $\frac{14x^4}{y} \div \frac{7x}{3y^4}$ (ii) $\frac{x^2-16}{x+4} \div \frac{x-4}{x+4}$ (iii) $\frac{16x^2-2x-3}{3x^2-2x-1} \div \frac{8x^2+11x+3}{3x^2-11x-4}$



3 Algebra Malayalam .indd 100 10/02/2023 11:46:26

**നിർദ്ധാരണം :** (i) $\frac{14x^4}{y} \sqrt{\frac{7x}{3y^4}} = \frac{14x^4}{y} \times \frac{3y^4}{7x} = 6x^3y^3$

(ii) $\frac{x^2-16}{x+4} \div \frac{x-4}{x+4} = \frac{(x+4)(x-4)}{(x+4)} \times \left(\frac{x+4}{x-4}\right) = x+4$

(iii) $\frac{16x^2-2x-3}{3x^2-2x-1} \div \frac{8x^2+11x+3}{3x^2-11x-4} = \frac{16x^2-2x-3}{3x^2-2x-1} \times \frac{3x^2-11x-4}{8x^2+11x+3}$

$= \frac{(8x+3)(2x-1)}{(3x+1)(x-1)} \times \frac{(3x+1)(x-4)}{(8x+3)(x+1)} = \frac{(2x-1)(x-4)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x^2-9x+4}{x^2-1}$

## അഭ്യാസം 3.5

1. ലഘൂകരിക്കുക

(i) $\frac{4x^2y}{2z^2} \times \frac{6xz^3}{20y^4}$ (ii) $\frac{p^2-10p+21}{p-7} \times \frac{p^2+p-12}{(p-3)^2}$ (iii) $\frac{5t^3}{4t-8} \times \frac{6t-12}{10t}$

2. ലഘൂകരിക്കുക

(i) $\frac{x+4}{3x+4y} \times \frac{9x^2-16y^2}{2x^2+3x-20}$ (ii) $\frac{x^3-y^3}{3x^2+9xy+6y^2} \times \frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}$

3. ലഘൂകരിക്കുക

(i) $\frac{2a^2+5a+3}{2a^2+7a+6} \div \frac{a^2+6a+5}{-5a^2-35a-50}$ (ii) $\frac{b^2+3b-28}{b^2+4b+4} \div \frac{b^2-49}{b^2-5b-14}$

(iii) $\frac{x+2}{4y} \div \frac{x^2-x-6}{12y^2}$ (iv) $\frac{12t^2-22t+8}{3t} \div \frac{3t^2+2t-8}{2t^2+4t}$

4. $x = \frac{a^2+3a-4}{3a^2-3}$ കൂടാതെ $y = \frac{a^2+2a-8}{2a^2-2a-4}$ എങ്കിൽ $x^2y^{-2}$. ന്റെ മൂല്യം കാണുക

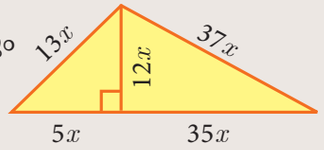
5. $p(x) = x^2-5x-14$ എന്ന ബഹുപദവ്യഞ്ജകത്തെ മറ്റൊരു ബഹുപദവ്യഞ്ജകം $q(x)$ കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ $\frac{x-7}{x+2}$, എന്ന് ലഭിക്കുന്നു. $q(x)$ കാണുക .

## പ്രവർത്തനം 1

(i) ദീർഘചതുരാകൃതിയിലുള്ള ഒരു പൂന്തോട്ടത്തിന്റെ നീളം ഒരു സംഖ്യയുടെയും അതിന്റെ വ്യുൽക്രമത്തിന്റെയും തുകയ്ക്ക് തുല്യമാണ്. അതിന്റെ വീതി അതേ സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗത്തിനും അതിന്റെ വ്യുൽക്രമത്തിനും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസമാണ്. ദീർഘചതുരത്തിന്റെ നീളം, വീതി, നീളവും വീതിയും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്നിവ കാണുക.



(ii) തന്നിരിക്കുന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവിനും വിസ്തീർണ്ണത്തിനും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം കാണുക.






3 Algebra Malayalam .indd 101 10/02/2023 11:46:29

## പരിമേയ വ്യഞ്ജകങ്ങളുടെ സങ്കലനവും വ്യവകലനവും

### സമാന ഛേദങ്ങളുള്ള പരിമേയ വ്യഞ്ജകങ്ങളുടെ സങ്കലനവും വ്യവകലനവും

(i) അംശങ്ങളെ കൂട്ടുക അല്ലെങ്കിൽ കുറയ്ക്കുക

(ii) ഘട്ടം (1) ൽ കാണുന്ന സങ്കലനം അല്ലെങ്കിൽ വ്യവകലനത്തെ പൊതു ഛേദത്തിനു മുകളിലായി എഴുതുക.

(iii) ഫലമായി കിട്ടുന്ന പരിമേയ വ്യഞ്ജകത്തെ ലഘുരൂപത്തിൽ ആക്കുക.

**ഉദാഹരണം 3.17** മൂല്യം കാണുക $\frac{x^2+20x+36}{x^2-3x-28}-\frac{x^2+12x+4}{x^2-3x-28}$

**നിർദ്ധാരണം**

$$\frac{x^2+20x+36}{x^2-3x-28}-\frac{x^2+12x+4}{x^2-3x-28}=\frac{(x^2+20x+36)-(x^2+12x+4)}{x^2-3x-28}$$

$$=\frac{8x+32}{x^2-3x-28}=\frac{8(x+4)}{(x-7)(x+4)}=\frac{8}{x-7}$$

### വ്യത്യസ്ത ഛേദങ്ങളുടെ പരിമേയ വ്യഞ്ജകങ്ങളുടെ സങ്കലനവും വ്യവകലനവും

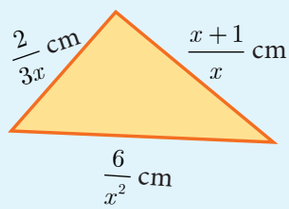
(i) ഛേദങ്ങളുടെ ല.സാ.ഗു കാണുക.

(ii) ഓരോ ഭിന്നത്തെയും ഘട്ടം (1) ൽ ലഭിച്ച ല.സാ.ഗു വിന് യോജിച്ച രീതിയിലുള്ള സമാന ഭിന്നം എഴുതുക. ല.സാ.ഗു ലഭിക്കുന്ന രീതിയിൽ ഓരോ വ്യഞ്ജകത്തിന്റെ അംശത്തെയും ഛേദത്തെയും അനുയോജ്യമായ ഒരു ഘടകം കൊണ്ട് ഗുണിക്കുക..

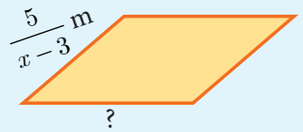
(iii) സമാന ഛേദങ്ങളുള്ള പരിമേയ വ്യഞ്ജകങ്ങളുടെ സങ്കലനവും വ്യവകലനവും കാണുന്നതിനുള്ള ഘട്ടങ്ങൾ ഇവിടെ ആവർത്തിക്കുക.

### പുരോഗതി പരിശോധന

1. ചിത്രത്തിന്റെ ചുറ്റളവിനെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്ന വ്യഞ്ജകത്തെ ലഘൂകരിച്ചെഴുതുക.




2. തന്നിട്ടുള്ള സാമാന്തരീകത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് $\frac{4x^2+10x-50}{(x-3)(x+5)}$ അതിന്റെ ആധാരം കാണുക




**ഉദാഹരണം 3.18** ലഘൂകരിക്കുക $\frac{1}{x^2-5x+6}+\frac{1}{x^2-3x+2}-\frac{1}{x^2-8x+15}$

**നിർദ്ധാരണം**

$$\frac{1}{x^2-5x+6}+\frac{1}{x^2-3x+2}-\frac{1}{x^2-8x+15}$$

$$=\frac{1}{(x-2)(x-3)}+\frac{1}{(x-2)(x-1)}-\frac{1}{(x-5)(x-3)}$$

$$=\frac{(x-1)(x-5)+(x-3)(x-5)-(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)}$$

$$=\frac{(x^2-6x+5)+(x^2-8x+15)-(x^2-3x+2)}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)}$$

### ചിന്തിക്കുക

**ശരിയോ തെറ്റോ**

1. രണ്ടു പരിമേയ വ്യഞ്ജകങ്ങളുടെ സങ്കലനം ഒരു പരിമേയ വ്യഞ്ജകം ആയിരിക്കും.
2. രണ്ടു പരിമേയ വ്യഞ്ജകങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം ഒരു പരിമേയ വ്യഞ്ജകം ആയിരിക്കും.



3 Algebra Malayalam .indd 102 10/02/2023 11:46:31

$$= \frac{x^2 - 11x + 18}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)} = \frac{(x-9)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)}$$

$$= \frac{x-9}{(x-1)(x-3)(x-5)}$$



### അഭ്യാസം 3.6

1. കൂട്ടുക (i) $\frac{x(x+1)}{x-2} + \frac{x(1-x)}{x-2}$ (ii) $\frac{x+2}{x+3} + \frac{x-1}{x-2}$ (iii) $\frac{x^3}{x-y} + \frac{y^3}{y-x}$
2. കുറയ്ക്കുക (i) $\frac{(2x+1)(x-2)}{x-4} - \frac{(2x^2-5x+2)}{x-4}$ (ii) $\frac{4x}{x^2-1} - \frac{x+1}{x-1}$
3. $\frac{2x^3+x^2+3}{(x^2+2)^2}$ ൽ നിന്നും $\frac{1}{x^2+2}$ നെ കുറയ്ക്കുക
4. $\frac{x^2+6x+8}{x^3+8}$ ൽ നിന്ന് ഏത് പരിമേയ വ്യഞ്ജകം കുറച്ചാൽ $\frac{3}{x^2-2x+4}$ ലഭിക്കും.
5. $A = \frac{2x+1}{2x-1}$, $B = \frac{2x-1}{2x+1}$ എങ്കിൽ $\frac{1}{A-B} - \frac{2B}{A^2-B^2}$ കാണുക
6. $A = \frac{x}{x+1}$, $B = \frac{1}{x+1}$, എങ്കിൽ $\frac{(A+B)^2 + (A-B)^2}{A \div B} = \frac{2(x^2+1)}{x(x+1)^2}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.
7. പാരിക്ക് ഒരു ജോലി പൂർത്തിയാക്കുന്നതിന് 4 മണിക്കൂറുകൾ ആവശ്യമുണ്ട്. അവന്റെ സുഹൃത്ത് യുവന് അതേ ജോലി പൂർത്തിയാക്കുന്നതിന് 6 മണിക്കൂറുകൾ ആവശ്യമുണ്ട്. എങ്കിൽ രണ്ടുപേരും ചേർന്ന് ആ ജോലി ചെയ്യുകയാണെങ്കിൽ ജോലി പൂർത്തിയാക്കാൻ എടുക്കുന്ന സമയം കാണുക.
8. ഇനിയ ആപ്പിൾ, നേന്ത്രപ്പഴം എന്നിവ അടങ്ങിയ 50 കിലോഗ്രാം പഴങ്ങൾ വാങ്ങി ഒരു കിലോഗ്രാം ആപ്പിൾ വാങ്ങുന്നതിന് ഒരു കിലോഗ്രാം നേന്ത്രപ്പഴം വാങ്ങാൻ ചെലവായ രൂപയുടെ രണ്ട് മടങ്ങ് അവൾക്ക് കൊടുക്കേണ്ടിവന്നു. ഇനിയ 1800 രൂപയ്ക്ക് ആപ്പിളും 600 രൂപയ്ക്ക് നേന്ത്രപ്പഴവും വാങ്ങിയെങ്കിൽ ഓരോ പഴവും എത്ര കിലോഗ്രാം വീതമാണ് അവൾ വാങ്ങിയത്.

## 3.5 ബഹുപദ വ്യഞ്ജകങ്ങളുടെ വർഗ്ഗമൂലം. (Square Root of Polyromials)

ഒരു സംഖ്യയെ അതേ സംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ തന്നിട്ടുള്ള സംഖ്യലഭിക്കുമെങ്കിൽ ആസംഖ്യയെ തന്നിട്ടുള്ള സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗമൂലം എന്ന് പറയാം.

അതുപോലെ തന്നിട്ടുള്ള വ്യഞ്ജകം $p(x)$ ന്റെ വർഗ്ഗമൂലം എന്നത് മറ്റൊരു വ്യഞ്ജകം $q(x)$നെ അതേ വ്യഞ്ജകം $q(x)$ കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ തന്നിട്ടുള്ള വ്യഞ്ജകം $p(x)$ ലഭിക്കുന്നതായിരിക്കണം, അതായത് $q(x)$. $q(x) = p(x)$,

അതുകൊണ്ട് $|q(x)| = \sqrt{p(x)}$ ഇവിടെ $|q(x)|$ എന്നത് $q(x)$ ന്റെ കേവലമൂല്യം ആകുന്നു.

തന്നിട്ടുള്ള വ്യഞ്ജകത്തിന്റെ വർഗ്ഗ മൂലം കാണുന്നതിന് താഴെ പറയുന്ന രണ്ട് രീതികൾ ഉപയോഗിക്കാം

(i) ഘടക രീതി (Factorization method) (ii) ഹരണ രീതി (Division Method)



### പുരോഗതി പരിശോധന

1. $x^2 + 4x + 4$ ഒരു പൂർണ്ണ വർഗ്ഗമാണോ?
2. $3\sqrt{x} = 9$ -ൽ $x$ ന്റെ മൂല്യം എന്ത്?
3. $361x^4y^2$ ന്റെ വർഗ്ഗമൂലം _____.
4. $\sqrt{a^2x^2 + 2abx + b^2}$ = _____.
5. തന്നിട്ടുള്ള ബഹുപദവ്യഞ്ജകം ഒരു പൂർണ്ണ വർഗ്ഗമാണെങ്കിൽ അതിന്റെ ഘടകങ്ങൾ ആവർത്തിക്കപ്പെടുന്നതിന്റെ എണ്ണം _____ (ഒറ്റ സംഖ്യ/ഇരട്ട സംഖ്യ).



3 Algebra Malayalam .indd 103 10/02/2023 11:46:34

### 3.5.1 ഘടകരീതിയിൽ വർഗ്ഗമൂലം (Square Root byFactorization Method)

**ഉദാഹരണം 3.19** താഴെ തന്നിരിക്കുന്നവയുടെ വർഗ്ഗമൂലം കാണുക

(i) $256(x-a)^8(x-b)^4(x-c)^{16}(x-d)^{20}$ (ii) $\dfrac{144\ a^8\ b^{12}\ c^{16}}{81\ f^{12} g^4\ h^{14}}$

**നിർദ്ധാരണം** (i) $\sqrt{256(x-a)^8(x-b)^4(x-c)^{16}(x-d)^{20}} = 16\left|(x-a)^4(x-b)^2(x-c)^8(x-d)^{10}\right|$

(ii) $\sqrt{\dfrac{144a^8b^{12}c^{16}}{81f^{12}g^4h^{14}}} = \dfrac{4}{3}\left|\dfrac{a^4b^6c^8}{f^6g^2h^7}\right|$

**ഉദാഹരണം 3.20** താഴെ തന്നിട്ടുള്ള വ്യഞ്ജകങ്ങളുടെ വർഗ്ഗമൂലം കണ്ടുപിടിക്കുക

(i) $16x^2+9y^2-24xy+24x-18y+9$ (ii) $(6x^2+x-1)(3x^2+2x-1)(2x^2+3x+1)$

(iii) $\left[\sqrt{15}x^2+\left(\sqrt{3}+\sqrt{10}\right)x+\sqrt{2}\right]\left[\sqrt{5}x^2+\left(2\sqrt{5}+1\right)x+2\right]\left[\sqrt{3}x^2+\left(\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)x+2\sqrt{2}\right]$

**നിർദ്ധാരണം** (i) $\sqrt{16x^2+9y^2-24xy+24x-18y+9}$

$= \sqrt{(4x)^2+(-3y)^2+(3)^2+2(4x)(-3y)+2(-3y)(3)+2(4x)(3)}$

$= \sqrt{(4x-3y+3)^2} = \left|4x-3y+3\right|$

(ii) $\sqrt{(6x^2+x-1)(3x^2+2x-1)(2x^2+3x+1)}$

$= \sqrt{(3x-1)(2x+1)(3x-1)(x+1)(2x+1)(x+1)} = \left|(3x-1)(2x+1)(x+1)\right|$

(iii) ആദ്യം ബഹുപദവ്യഞ്ജകങ്ങളെ ഘടകങ്ങളാക്കുക

$$\begin{aligned}
\sqrt{15}x^2+\left(\sqrt{3}+\sqrt{10}\right)x+\sqrt{2} &= \sqrt{15}x^2+\sqrt{3}x+\sqrt{10}x+\sqrt{2}\\
&= \sqrt{3}x\left(\sqrt{5}x+1\right)+\sqrt{2}\left(\sqrt{5}x+1\right)\\
&= \left(\sqrt{5}x+1\right)\times\left(\sqrt{3}x+\sqrt{2}\right)\\
\sqrt{5}x^2+\left(2\sqrt{5}+1\right)x+2 &= \sqrt{5}x^2+2\sqrt{5}x+x+2\\
&= \sqrt{5}x(x+2)+1(x+2) = \left(\sqrt{5}x+1\right)(x+2)\\
\sqrt{3}x^2+\left(\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)x+2\sqrt{2} &= \sqrt{3}x^2+\sqrt{2}x+2\sqrt{3}x+2\sqrt{2}\\
&= x\left(\sqrt{3}x+\sqrt{2}\right)+2\left(\sqrt{3}x+\sqrt{2}\right) = \left(x+2\right)\left(\sqrt{3}x+\sqrt{2}\right)
\end{aligned}$$

അതുകൊണ്ട്,

$$\sqrt{\left[\sqrt{15}x^2+\left(\sqrt{3}+\sqrt{10}\right)x+\sqrt{2}\right]\left[\sqrt{5}x^2+\left(2\sqrt{5}+1\right)x+2\right]\left[\sqrt{3}x^2+\left(\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)x+2\sqrt{2}\right]}$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{5}x+1\right)\left(\sqrt{3}x+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}x+1\right)(x+2)\left(\sqrt{3}x+\sqrt{2}\right)(x+2)} = \left|\left(\sqrt{5}x+1\right)\left(\sqrt{3}x+\sqrt{2}\right)(x+2)\right|$$



3 Algebra Malayalam .indd 104 10/02/2023 11:46:38

## അഭ്യാസം 3.7

1. താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന പരിമേയ വ്യഞ്ജകങ്ങളുടെ വർഗ്ഗമൂലം കാണുക.

(i) $\frac{400x^4y^{12}z^{16}}{100x^8y^4z^4}$ (ii) $\frac{7x^2+2\sqrt{14}x+2}{x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}}$ (iii) $\frac{121(a+b)^8(x+y)^8(b-c)^8}{81(b-c)^4(a-b)^{12}(b-c)^4}$

2. താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവയുടെ വർഗ്ഗമൂലം കാണുക

(i) $4x^2+20x+25$ (ii) $9x^2-24xy+30xz-40yz+25z^2+16y^2$

(iii) $(4x^2-9x+2)(7x^2-13x-2)(28x^2-3x-1)$

(v) $\left(2x^2+\frac{17}{6}x+1\right)\left(\frac{3}{2}x^2+4x+2\right)\left(\frac{4}{3}x^2+\frac{11}{3}x+2\right)$

### 3.5.2 ഹരണ രീതിയിൽ ഒരു ബഹുപദ വ്യഞ്ജകത്തിന്റെ വർഗ്ഗമൂലം (Finding the Square root of a Polynomial by Divison Method)

തന്നിട്ടുള്ള ബഹുപദ വ്യഞ്ജകത്തിന്റെ കൃതി വലുതാണെങ്കിൽ വർഗ്ഗമൂലം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് ദീർഘഹരണരീതി ഉപയോഗപ്രദമായിരിക്കും.

**ഉദാഹരണം 3.21** $64x^4-16x^3+17x^2-2x+1$ ന്റെ വർഗ്ഗമൂലം കണ്ടുപിടിക്കുക

**കുറിപ്പ്**

- ബഹുപദവ്യഞ്ജകത്തിന്റെ വർഗ്ഗമൂലം കണ്ടുപിടിക്കാൻ മുന്നോട്ടു പോകുന്നതിന് മുൻപ് ചരങ്ങളുടെ കൃതികൾ ആരോഹണക്രമം അല്ലെങ്കിൽ അവരോഹണക്രമത്തിലാണെന്ന് ഉറപ്പ് വരുത്തുക.

**നിർദ്ധാരണം**

$$
\begin{array}{r|l|l}
 & 8x^2-x+1 & \\
\hline
8x^2 & 64x^4-16x^3+17x^2-2x+1 & \\
 & 64x^4 & (-)\\
\hline
16x^2-x & -16x^3+17x^2 & \\
 & -16x^3+x^2 & (-)\\
\hline
16x^2-2x+1 & 16x^2-2x+1 & \\
 & 16x^2-2x+1 & (-)\\
\hline
 & 0 &
\end{array}
$$

അതുകൊണ്ട്, $\sqrt{64x^4-16x^3+17x^2-2x+1}=|8x^2-x+1|$

**ഉദാഹരണം 3.22** $9x^4+12x^3+28x^2+ax+b$ ഒരു പൂർണ്ണ വർഗ്ഗമാണെങ്കിൽ $a$, $b$ എന്നിവയുടെ മൂല്യം കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം**

$$
\begin{array}{r|l|l}
 & 3x^2+2x+4 & \\
\hline
3x^2 & 9x^4+12x^3+28x^2+ax+b & \\
 & 9x^4 & (-)\\
\hline
6x^2+2x & 12x^3+28x^2 & \\
 & 12x^3+4x^2 & (-)\\
\hline
6x^2+4x+4 & 24x^2+ax+b & \\
 & 24x^2+16x+16 & (-)\\
\hline
 & 0 &
\end{array}
$$



3 Algebra Malayalam .indd 105 10/02/2023 11:46:42

തന്നിട്ടുള്ള ബഹുപദ വ്യഞ്ജകം ഒരു പൂർണ്ണ വർഗ്ഗമായതിനാൽ $a-16=0$, $b-16=0$
അതുകൊണ്ട് $a=16$, $b=16$.



### അഭ്യാസം 3.8

1. ഹരണരീതി ഉപയോഗിച്ച് താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ബഹുപദവ്യഞ്ജകങ്ങളുടെ വർഗ്ഗമൂലം കണ്ടുപിടിക്കുക

   (i) $x^4-12x^3+42x^2-36x+9$ (ii) $37x^2-28x^3+4x^4+42x+9$

   (iii) $16x^4+8x^2+1$ (iv) $121x^4-198x^3-183x^2+216x+144$

2. തന്നിട്ടുള്ള ബഹുപദ വ്യഞ്ജകങ്ങൾ പൂർണ്ണവർഗ്ഗങ്ങളാണെങ്കിൽ $a$, $b$ എന്നിവയുടെ മൂല്യം കാണുക

   (i) $4x^4-12x^3+37x^2+bx+a$ (ii) $ax^4+bx^3+361x^2+220x+100$

3. തന്നിട്ടുള്ള വ്യഞ്ജകങ്ങൾ പൂർണ്ണവർഗ്ഗങ്ങളാണെങ്കിൽ $m$, $n$ എന്നിവയുടെ മൂല്യം കാണുക

   (i) $36x^4-60x^3+61x^2-mx+n$ (ii) $x^4-8x^3+mx^2+nx+16$

## 3.6 ദ്വിഘാത സമീകരണങ്ങൾ (Quadratic Equation)

### മുഖവുര

സാവസോർഡ എന്ന ലത്തീൻ നാമത്തിൽ അറിയപ്പെട്ടിരുന്ന അറബ് ഗണിതജ്ഞനായ എബ്രഹാം ബാർ ഹിയ ഹാ- നാസി 1145 AD (CE) ൽ പ്രസിദ്ധീകരിച്ച ഗ്രന്ഥമാണ് **ലിബർ എമ്പഡോറം** ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന് പൂർണ്ണ പരിഹാരം നൽകുന്നതിനായി യൂറോപ്പിൽ പ്രസിദ്ധീകരിച്ച ആദ്യ പുസ്തകമാണിത്.

ആധുനിക നാഗരികതയിൽ തുടങ്ങി വർത്തമാനകാലം വരെയുള്ള മൂവായിരം വർഷങ്ങൾക്കുമുമ്പുള്ള കാലഘട്ടം മുതൽക്കു തന്നെ മനുഷ്യർ ദ്വിഘാത സമീകരണങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണത്തെ ഗുണാങ്കങ്ങളുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ, നാല് അടിസ്ഥാന ക്രിയകളും കൂടാതെ മൂല സംഖ്യകളുടെ കണ്ടുപിടിത്തവും ഉപയോഗിച്ച് കണക്കാക്കുന്നത് എങ്ങനെയെന്ന് അറിഞ്ഞിരുന്നു. ഈ പ്രവൃത്തിയെ റാഡിക്കലുകൾ വഴിയുള്ള നിർദ്ധാരണം എന്ന് വിളിക്കുന്നു. വിവിധ തരത്തിലുള്ള സമീകരണങ്ങൾ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നതിനെ പറ്റിയുള്ള ഗവേഷണങ്ങൾ ഇന്നും നടന്നു കൊണ്ടിരിക്കുന്നു.

### ദ്വിഘാത വ്യഞ്ജകം

$n$ കൃതിയുള്ള $x$ എന്ന ചരത്താൽ രൂപീകൃതമായിരിക്കുന്ന ഒരു വ്യഞ്ജകത്തിന്റെ പൊതുരൂപം $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ ആകുന്നു. ഇവിടെ $a_0\neq 0$ കൂടാതെ $a_1, a_2, \ldots a_n$ എന്നിവ വാസ്തവിക സംഖ്യകൾ $a_0$, $a_1$, $a_2$, ... $a_n$ എന്നിവയെ വ്യഞ്ജകത്തിന്റെ ഗുണാങ്കങ്ങൾ എന്ന് പറയുന്നു.

വാസ്തവത്തിൽ കൃതി 2 ഉള്ള ഒരു വ്യഞ്ജകത്തെ ദ്വിഘാത വ്യഞ്ജകം എന്ന് പറയുന്നു. ഇതിനെ $p(x)=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം. ഇവിടെ $a$, $b$ കൂടാതെ $c$ എന്നിവ വാസ്തവിക സംഖ്യകൾ.

### 3.6.1 ദ്വിഘാത വ്യഞ്ജകത്തിന്റെ ശൂന്യങ്ങൾ (Zeroes of a Quadratic Polynomials)

$p(x)$ എന്നത് ഒരു ബഹുപദവ്യഞ്ജകം എന്നിരിക്കട്ടെ. $p(a)=0$ ആണെങ്കിൽ $x=a$ എന്നതിനെ $p(x)$ ന്റെ ശൂന്യം എന്ന് പറയാം

ഉദാഹരണമായി $p(x)=x^2-2x-8$ എങ്കിൽ $p(-2)=4+4-8=0$ കൂടാതെ $p(4)=16-8-8=0$

അതുകൊണ്ട് $-2$ കൂടാതെ 4 എന്നിവ $p(x)=x^2-2x-8$ എന്ന ബഹുപദ വ്യഞ്ജകത്തിന്റെ ശൂന്യങ്ങൾ ആകുന്നു.



3 Algebra Malayalam .indd 106 10/02/2023 11:46:44

### 3.6.2 ദ്വിഘാത സമീകരണങ്ങളുടെ മൂലസംഖ്യകൾ (Roots of Quadratic Equations)

$ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0)$ എന്നത് ഒരു ദ്വിഘാത സമീകരണം എന്നിരിക്കട്ടെ. $x$ന്റെ ഏതൊക്കെ മൂല്യങ്ങൾക്കാണോ $ax^2 + bx + c$ എന്ന വ്യഞ്ജകത്തിന്റെ മൂല്യം പൂജ്യമായി മാറുന്നത് ആ മൂല്യങ്ങളെ ദ്വിഘാത സമീകരണം $ax^2 + bx + c = 0$ യുടെ മൂലസംഖ്യകൾ (roots of the quadratic equation) എന്ന് വിളിക്കാം.

$ax^2 + bx + c = 0$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$$a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad \left(\text{since } a \neq 0\right)$$

$$x^2 + \frac{b}{2a}(2x) + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

അതായത്, $$x^2 + (2x)\left(\frac{b}{2a}\right) + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$




അതുകൊണ്ട് മൂലസംഖ്യകൾ $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ കൂടാതെ $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ആകുന്നു

### 3.6.3 ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന്റെ രൂപീകരണം (Formation of a Quadratic Equation)

$\alpha$ കൂടാതെ $\beta$ എന്നിവ $ax^2 + bx + c = 0$ എന്ന ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന്റെ മൂലസംഖ്യകൾ ആണെങ്കിൽ

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ കൂടാതെ } \beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

$$\alpha + \beta = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b}{a}$$

കൂടാതെ $$\alpha\beta = \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \times \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = \frac{c}{a}.$$

$(x - \alpha)$ കൂടാതെ $(x - \beta)$ എന്നിവ $ax^2 + bx + c = 0$ യുടെ ഘടകങ്ങൾ,

$$(x - \alpha)(x - \beta) = 0$$

അതിനാൽ, $$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

അതായത്, $x^2 -$ (മൂലസംഖ്യകളുടെ തുക) $x +$ മൂലസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം $= 0$ ആണ് മൂലസംഖ്യകൾ തന്നിരുന്നാൽ ദ്വിഘാത സമീകരണം കാണുന്നതിനുള്ള പൊതുരൂപം.

**കുറിപ്പ്**

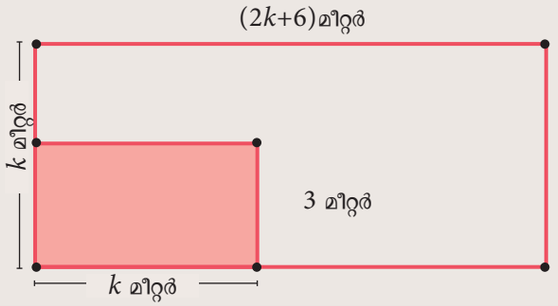
- $ax^2 + bx + c = 0$ എന്ന സമീകരണത്തെ $a \neq 0$ ആയതിനാൽ $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ എന്നും എഴുതാം.



3 Algebra Malayalam .indd 107 10/02/2023 11:46:48

## പ്രവർത്തനം 2

വീടിനു മുന്നിലുള്ള ദീർഘചതുരാകൃതിയിലുള്ള ഒരു പൂന്തോട്ടം പരിഗണിക്കുക. ഇതിന്റെ അളവുകൾ $(2k + 6)$ മീറ്റർ കൂടാതെ $k$ മീറ്റർ ആണ്. അളവുകൾ $k$ മീറ്റർ കൂടാതെ 3 മീറ്റർ എന്നിവയുള്ള ഒരു ചെറിയ ദീർഘചതുരാകൃതിയിലുള്ള ഭാഗം നിരപ്പാക്കിയിട്ടുണ്ട്. നിരപ്പാക്കാത്ത പൂന്തോട്ടഭാഗത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.




**ഉദാഹരണം 3.23** ദ്വിഘാത സമീകരണം $x^2 + 8x + 12$ ന്റെ ശൂന്യങ്ങൾ കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം** $p(x) = x^2 + 8x + 12 = (x+2)(x+6)$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

$p(-2) = 4 - 16 + 12 = 0$

$p(-6) = 36 - 48 + 12 = 0$

അതുകൊണ്ട് $x^2 + 8x + 12$ $p(x)$ ന്റെ ശൂന്യങ്ങൾ $-2$ കൂടാതെ $-6$ ആകുന്നു

**ഉദാഹരണം 3.24** തുകയും ഗുണനഫലവും താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന പ്രകാരം ഉള്ള ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന്റെ പൊതുരൂപം എഴുതുക.

(i) 9, 14 (ii) $-\frac{7}{2}, \frac{5}{2}$ (iii) $-\frac{3}{5}, -\frac{1}{2}$

**നിർദ്ധാരണം** (i) മൂലസംഖ്യകൾ തന്നിരുന്നാൽ ദ്വിഘാത സമീകരണം കാണുന്നതിനുള്ള പൊതുരൂപം

$x^2 - (\text{മൂലസംഖ്യകളുടെ തുക})\, x + \text{മൂലസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം} = 0$

$x^2 - 9x + 14 = 0$

(ii) $x^2 - \left(-\frac{7}{2}\right)x + \frac{5}{2} = 0$ അതിനാൽ $2x^2 + 7x + 5 = 0$

(iii) $x^2 - \left(-\frac{3}{5}\right)x + \left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{10x^2 + 6x - 5}{10} = 0$

അതുകൊണ്ട്, $10x^2 + 6x - 5 = 0$.

**ഉദാഹരണം 3.25** താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ദ്വിഘാത സമീകരണങ്ങളുടെ മൂലസംഖ്യകളുടെ തുകയും ഗുണന ഫലവും കാണുക : (i) $x^2 + 8x - 65 = 0$ (ii) $2x^2 + 5x + 7 = 0$

(iii) $kx^2 - k^2x - 2k^3 = 0$

**നിർദ്ധാരണം** $\alpha$ കൂടാതെ $\beta$ എന്നിവ ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന്റെ മൂലസംഖ്യകൾ ആകുന്നു.

(i) $x^2 + 8x - 65 = 0$

$a = 1, \quad b = 8, \quad c = -65$

$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -8$ കൂടാതെ $\alpha\beta = \frac{c}{a} = -65$

$\alpha + \beta = -8; \quad \alpha\beta = -65$



3 Algebra Malayalam .indd 108 10/02/2023 11:46:51

(ii) $2x^2 + 5x + 7 = 0$

$a = 2,\ \ b = 5,\ \ c = 7$

$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{-5}{2}$ കൂടാതെ $\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{7}{2}$

$\alpha + \beta = -\frac{5}{2};\ \alpha\beta = \frac{7}{2}$

(iii) $kx^2 - k^2x - 2k^3 = 0$

$a = k,\ \ b = -k^2,\ \ c = -2k^3$

$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{-(-k^2)}{k} = k$ കൂടാതെ $\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-2k^3}{k} = -2k^2$



## അഭ്യാസം 3.9

1. മൂലസംഖ്യകളുടെ തുകയും ഗുണനഫലവും താഴെ കൊടുത്തിട്ടുണ്ട്. ദ്വിഘാത സമീകരണം കണ്ടു പിടിക്കുക

   (i) $-9,\ 20$ (ii) $\frac{5}{3},\ 4$ (iii) $\frac{-3}{2},\ -1$ (iv) $-(2-a)^2,\ (a+5)^2$

2. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ദ്വിഘാത സമീകരണങ്ങളുടെമൂലസംഖ്യകളുടെ തുകയും ഗുണനഫലവും കാണുക

   (i) $x^2 + 3x - 28 = 0$ (ii) $x^2 + 3x = 0$ (iii) $3 + \frac{1}{a} = \frac{10}{a^2}$ (iv) $3y^2 - y - 4 = 0$

### 3.6.4 ദ്വിഘാത സമീകരണങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണം

ഒരു ചരം, രണ്ടു ചരങ്ങൾ, മൂന്ന് ചരങ്ങൾ എന്നിവയുള്ള രേഖീയ സമീകരണങ്ങളെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നത് എങ്ങനെ എന്ന് നാം നേരത്തെ പഠിച്ചുകഴിഞ്ഞു. ഈ ഭാഗത്തിൽ നാം ഘടകരീതി, വർഗ്ഗങ്ങളുടെ പൂർണ്ണ വർഗ്ഗമാക്കൽ രീതി, സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച് എന്നീ മൂന്ന് രീതികളിൽ ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതെങ്ങനെ എന്ന് പഠിക്കാൻ പോവുകയാണ്.

#### ഘടക രീതയിൽ ഒരു ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണം.

ഘടകരീതയിൽ നിർദ്ധാരണം കാണുന്നതിന് താഴെ പറയുന്ന വഴികൾ പിൻതുടരണം.

**വഴി 1** തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണത്തെ $ax^2 + bx + c = 0$ എന്ന പൊതു രൂപത്തിൽ എഴുതുക

**വഴി 2** മധ്യപദത്തെ പിരിച്ച് തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണത്തെ ഘടകങ്ങളാക്കുക.

**വഴി 3** ഘടകങ്ങളാക്കിയതിനുശേഷം, തന്നിട്ടുള്ള ദ്വിഘാത സമീകരണത്തെ രണ്ടു രേഖീയ ഘടകങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതുക.

**വഴി 4** ഓരോ രേഖീയ ഘടകത്തെയും പൂജ്യവുമായി താരതമ്യം ചെയ്ത് $x$ ന്റെ മൂല്യം കണ്ടുപിടിക്കുക. .

$x$ ന്റെ ഈ മൂല്യങ്ങൾ സമീകരണത്തിന്റെ മൂലസംഖ്യകൾ ആകുന്നു.



3 Algebra Malayalam .indd 109 10/02/2023 11:46:54

**ഉദാഹരണം 3.26** നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക $2x^2 - 2\sqrt{6}\,x + 3 = 0$

**നിർദ്ധാരണം** $2x^2 - 2\sqrt{6}\,x + 3 = 2x^2 - \sqrt{6}\,x - \sqrt{6}x + 3$ (മധ്യപദത്തെ പിരിച്ചെഴുതുക)

$= \sqrt{2}x\left(\sqrt{2}x - \sqrt{3}\right) - \sqrt{3}\left(\sqrt{2}x - \sqrt{3}\right) = \left(\sqrt{2}x - \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}x - \sqrt{3}\right)$

ഇപ്പോൾ ഘടകങ്ങളെ പൂജ്യവുമായി താരതമ്യം ചെയ്യുമ്പോൾ,

$\left(\sqrt{2}x - \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}x - \sqrt{3}\right) = 0$

$\sqrt{2}x - \sqrt{3} = 0$ or $\sqrt{2}x - \sqrt{3} = 0$

$\sqrt{2}x = \sqrt{3}$ or $\sqrt{2}x = \sqrt{3}$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു

അതുകൊണ്ട് നിർദ്ധാരണം $x = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ ആകുന്നു.

**ഉദാഹരണം 3.27** നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക $2m^2 + 19m + 30 = 0$

**നിർദ്ധാരണം** $2m^2 + 19m + 30 = 2m^2 + 4m + 15m + 30 = 2m(m+2) + 15(m+2)$

$= (m+2)(2m+15)$

ഘടകങ്ങളെ പൂജ്യവുമായി താരതമ്യം ചെയ്യുമ്പോൾ,

$(m+2)(2m+15) = 0$

$m + 2 = 0$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു, $m = -2$ or $2m + 15 = 0$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു $m = \dfrac{-15}{2}$

അതുകൊണ്ട് മൂലസംഖ്യകൾ $-2$, $\dfrac{-15}{2}$ ആകുന്നു.

ദ്വിഘാതം അല്ലാത്ത ചില സമീകരണങ്ങളെ അനുയോജ്യമായ പ്രതിസ്ഥാപനം മൂലം ദ്വിഘാതസമീകരണങ്ങളാക്കി മാറ്റി അവയെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യാവുന്നതാണ്. ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ താഴെ വിശദികരിച്ചിട്ടുണ്ട്.

**ഉദാഹരണം 3.28** നിർദ്ധാരണം കാണുക $x^4 - 13x^2 + 42 = 0$

**നിർദ്ധാരണം** $x^2 = a$, $(x^2)^2 - 13x^2 + 42 = a^2 - 13a + 42 = (a-7)(a-6)$ എന്നിരിക്കട്ടെ

തന്നിട്ടുള്ളതനുസരിച്ച്, $(a-7)(a-6) = 0$ ലഭിക്കുന്നു, $a = 7$ or $6$.

ആയതിനാൽ $a = x^2$, $x^2 = 7$ ഇപ്പോൾ, $x = \pm\sqrt{7}$ or $x^2 = 6$, $x = \pm\sqrt{6}$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു

അതുകൊണ്ട് മൂല്യസംഖ്യകൾ $x = \pm\sqrt{7}$, $\pm\sqrt{6}$ ആകുന്നു

**ഉദാഹരണം 3.29** നിർദ്ധാരണം കാണുക $\dfrac{x}{x-1} + \dfrac{x-1}{x} = 2\dfrac{1}{2}$

**നിർദ്ധാരണം** $y = \dfrac{x}{x-1}$, $\dfrac{1}{y} = \dfrac{x-1}{x}$ എന്നിരിക്കട്ടെ .

എങ്കിൽ, $\dfrac{x}{x-1} + \dfrac{x-1}{x} = 2\dfrac{1}{2}$ എന്നത് $y + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{2}$ ആകുന്നു

$2y^2 - 5y + 2 = 0$ എങ്കിൽ, $y = \dfrac{1}{2}$, $2$



3 Algebra Malayalam .indd 110 10/02/2023 11:46:58

$\frac{x}{x-1} = \frac{1}{2}$ എന്നത്, $2x = x-1$, $x = -1$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു

$\frac{x}{x-1} = 2$ എന്നത്, $x = 2x-2$, $x = 2$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു

അതുകൊണ്ട് മൂലസംഖ്യകൾ $x = -1, 2$ ആകുന്നു.



## അഭ്യാസം 3.10

1. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ദ്വിഘാത സമീകരണങ്ങളെ ഘടകരീതിയിൽ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക

   (i) $4x^2 - 7x - 2 = 0$ (ii) $3(p^2 - 6) = p(p+5)$ (iii) $\sqrt{a(a-7)} = 3\sqrt{2}$

   (iv) $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$ (v) $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$

2. $n$ ടീംസ് ഉള്ള ഒരു ലീഗിൽ പട്ടികയിട്ടിരിക്കുന്ന വോളിബോൾ കളികളുടെ എണ്ണം $G(n) = \frac{n^2 - n}{2}$ എന്ന് തന്നിട്ടുണ്ട്. ഇവിടെ ഓരോ ടീമും മറ്റുള്ള ഓരോ ടീമുമായി കൃത്യമായി ഒരേയൊരുപ്രാവശ്യം കളിക്കുന്നു. ഒരു ലീഗിൽ 15 കളികൾ പട്ടികയിട്ടിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ ലീഗിലുള്ള ആകെ ടീമുകളുടെ എണ്ണം കാണുക

### വർഗ്ഗങ്ങളുടെ പൂർണ്ണമാക്കൽ, രീതിയിൽ ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണം

ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന്റെ മൂലസംഖ്യകൾ കാണുന്നതിനുള്ള സൂത്രം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് വർഗ്ഗങ്ങളുടെ പൂർണ്ണവർഗ്ഗമാക്കൽ രീതി ഉപയോഗിച്ചിട്ടുണ്ട്. അതേ സമ്പ്രദായം ഉപയോഗിച്ച് താഴെ പറയുന്ന വഴികളിലൂടെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണം കാണാൻ സാധിക്കും.

**ഘട്ടം 1** ദ്വിഘാത സമീകരണത്തെ $ax^2 + bx + c = 0$ എന്ന പൊതുരൂപത്തിൽ എഴുതുക.

**ഘട്ടം 2** $x^2$ ന്റെ ഗുണോത്തരം 1 അല്ല എങ്കിൽ രണ്ട് വശത്തെയും ന്റെ ഗുണോത്തരം കൊണ്ട് ഹരിക്കുക.

**ഘട്ടം 3** സ്ഥിരപദത്തെ വലതുവശത്തേയ്ക്ക് മാറ്റുക.

**ഘട്ടം 4** $x$ ന്റെ ഗുണോത്തരത്തിന്റെ പകുതിയുടെ വർഗ്ഗത്തെ രണ്ടുവശത്തും കൂട്ടുക.

**ഘട്ടം 5** ഇടതുവശത്തെ ഒരു വർഗ്ഗമായി എഴുതി വലതുവശത്തെ ലഘൂകരിക്കുക.

**ഘട്ടം 6** രണ്ടുവശത്തും വർഗ്ഗമൂലം എടുത്ത് $x$ ന്റെ വില നിർദ്ധാരണത്തിലൂടെ കാണുക.

**ഉദാഹരണം 3.30** $x^2 - 3x - 2 = 0$ നിർദ്ധാരണം കാണുക

**നിർദ്ധാരണം** $x^2 - 3x - 2 = 0$

$x^2 - 3x = 2$ (സ്ഥിരപദത്തെ വലതുവശത്തേക്ക് മാറ്റുന്നു)

$x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$ (ഇരുവശത്തും $\left[\frac{1}{2}\left(\text{co-efficient of } x\right)\right]^2$ നെ കൂട്ടുക

$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{17}{4}$ (LHS നെ പൂർണ്ണവർഗ്ഗമായി എഴുതുന്നു)



3 Algebra Malayalam .indd 111 10/02/2023 11:47:00

$$x - \frac{3}{2} = \pm\frac{\sqrt{17}}{2} \qquad \text{(ഇരുവശത്തും വർഗ്ഗമൂലം എടുക്കുന്നു)}$$

$$x = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2} \text{ or } x = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}$$

അതുകൊണ്ട്, നിർദ്ധാരണം $x = \frac{3+\sqrt{17}}{2}, \frac{3-\sqrt{17}}{2}$ ആകുന്നു.

**ഉദാഹരണം 3.31** $2x^2 - x - 1 = 0$ ന്റെ നിർദ്ധാരണം കാണുക

**നിർദ്ധാരണം** $2x^2 - x - 1 = 0$

$$x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = 0 \quad (x^2 \text{ ന്റെ ഗുണാങ്കം ആക്കാൻ ഇരുവശത്തും 2 കൊണ്ട് ഹരിക്കുക})$$

$$x^2 - \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x^2 - \frac{x}{2} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} = \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$x - \frac{1}{4} = \pm\frac{3}{4} \Rightarrow x = 1, -\frac{1}{2}$$

## സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിച്ച് ദ്വിഘാത സമീകണത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണം (Solving a Quadratic Equation by Formula Method)

സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച് ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന്റെ മൂലസംഖ്യകളെ കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിനുള്ള സൂത്ര വാക്യമാണ് $ax^2 + bx + c = 0$ (രൂപീകരണം ഭാഗം 3.6.2 ൽ കൊടുത്തിട്ടുണ്ട്) $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

**നിങ്ങൾക്ക് അറിയാമോ**

സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച് ഒരു ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന്റെ മൂലസംഖ്യ കണ്ടുപിടിക്കുന്ന രീതിപുരാതന ബാബിലോണിയർക്ക് അറിയാമായിരുന്നു. പക്ഷേ നമ്മൾ സൂത്രം രൂപീകരിച്ചത്പോലെ ആയിരുന്നില്ല പകരം ഓരോ ഘട്ടങ്ങളെയും കവിതയായി രൂപീകരിച്ച് അവർ മൂലസംഖ്യ കണ്ടുപിടിച്ചിരുന്നു. അവരുടെകാലങ്ങളിൽ അതൊരു സാധാരണ രീതിയായിരുന്നു. കൃഷിചെയ്യുന്നതിനായി തങ്ങളുടെ ഭൂമിയുടെ അളവുകൾ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നതിന് അവർ ദ്വിഘാത സമീകരണങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചു.

**ഉദാഹരണം 3.32** സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച് $x^2 + 2x - 2 = 0$ യുടെ നിർദ്ധാരണം കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം** $x^2 + 2x - 2 = 0$ എന്നതിനെ സ്റ്റാൻഡേർഡ് രൂപം $ax^2 + bx + c = 0$ യുമായി താരതമ്യം ചെയ്യുക

$$a = 1,\ b = 2,\ c = -2$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$a$, $b$, $c$ എന്നിവയുടെ മൂല്യങ്ങളെ സൂത്രത്തിൽ പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ,

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = -1 \pm \sqrt{3} \text{ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.}$$

അതുകൊണ്ട്, $x = -1 + \sqrt{3}, \ -1 - \sqrt{3}$ ആകുന്നു



3 Algebra Malayalam .indd 112 10/02/2023 11:47:04

**ഉദാഹരണം 3.33** സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച് നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക $2x^2 - 3x - 3 = 0$.

**നിർദ്ധാരണം** $2x^2 - 3x - 3 = 0$ എന്നതിനെ സ്റ്റാൻഡേർഡ് രൂപം $ax^2 + bx + c = 0$ യുമായി താരതമ്യം ചെയ്യുക.

$$a = 2,\ b = -3,\ c = -3$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$a$, $b$, $c$ എന്നിവയുടെ മൂല്യങ്ങളെ സൂത്രത്തിൽ പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ,

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)} = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{4} \text{ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു}$$

അതുകൊണ്ട്, $x = \frac{3 + \sqrt{33}}{4}$ , $x = \frac{3 - \sqrt{33}}{4}$ ആകുന്നു

**ഉദാഹരണം 3.34** $3p^2 + 2\sqrt{5}p - 5 = 0$ എന്നതിനെ സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച് നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക.

**നിർദ്ധാരണം** $3p^2 + 2\sqrt{5}p - 5 = 0$ എന്നതിനെ സ്റ്റാൻഡേർഡ് രൂപം $ax^2 + bx + c = 0$ യുമായി താരതമ്യം ചെയ്യുക.

$$a = 3,\ b = 2\sqrt{5},\ c = -5.$$

$$p = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$a$, $b$, $c$ എന്നിവയുടെ മൂല്യങ്ങളെ സൂത്രത്തിൽ പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ,

$$p = \frac{-2\sqrt{5} \pm \sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2 - 4(3)(-5)}}{2(3)} = \frac{-2\sqrt{5} \pm \sqrt{80}}{6} = \frac{-\sqrt{5} \pm 2\sqrt{5}}{3} \text{ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു}$$

അതുകൊണ്ട് , $x = \frac{\sqrt{5}}{3}$ , $-\sqrt{5}$ ആകുന്നു

**ഉദാഹരണം 3.35** $pqx^2 - (p+q)^2 x + (p+q)^2 = 0$ എന്നതിനെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക

**നിർദ്ധാരണം** തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണത്തിന്റെ ഗുണാങ്കങ്ങളെ സ്റ്റാൻഡേർഡ് രൂപം $ax^2 + bx + c = 0$ യുമായി താരതമ്യം ചെയ്യുക.

$$a = pq,\ b = -(p+q)^2,\ c = (p+q)^2$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$a$, $b$ , $c$ എന്നിവയുടെ മൂല്യങ്ങളെ സൂത്രത്തിൽ പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ,

$$x = \frac{-\left[-(p+q)^2\right] \pm \sqrt{\left[-(p+q)^2\right]^2 - 4(pq)(p+q)^2}}{2pq}$$

$$= \frac{(p+q)^2 \pm \sqrt{(p+q)^4 - 4(pq)(p+q)^2}}{2pq}$$



3 Algebra Malayalam .indd 113 10/02/2023 11:47:08

$$= \frac{(p+q)^2 \pm \sqrt{(p+q)^2\left[(p+q)^2 - 4pq\right]}}{2pq}$$

$$= \frac{(p+q)^2 \pm \sqrt{(p+q)^2(p^2+q^2+2pq-4pq)}}{2pq}$$

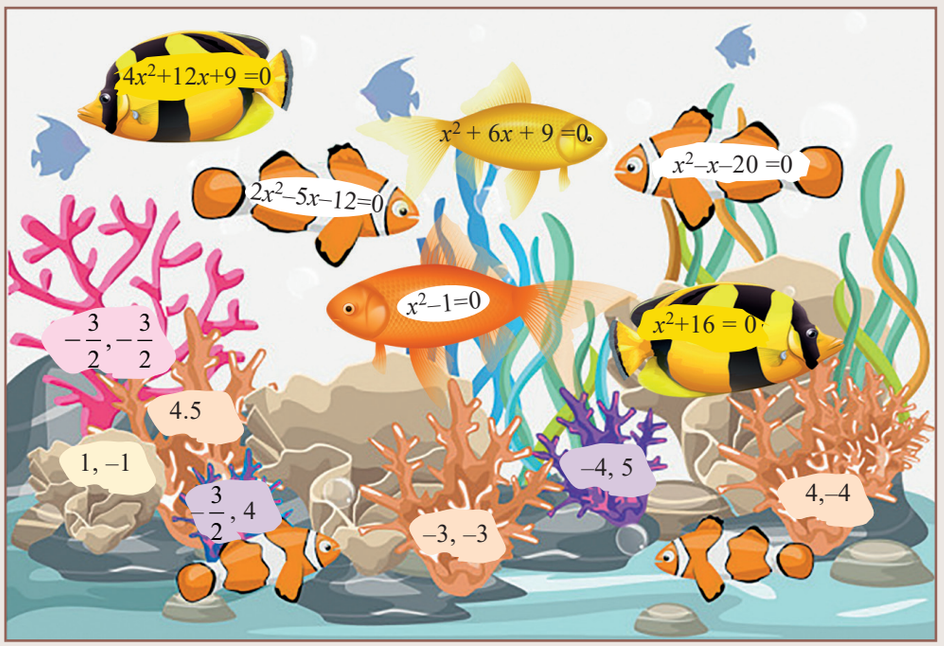
$$= \frac{(p+q)^2 \pm \sqrt{(p+q)^2(p-q)^2}}{2pq}$$

$$= \frac{(p+q)^2 \pm (p+q)(p-q)}{2pq} = \frac{(p+q)\{(p+q) \pm (p-q)\}}{2pq}$$

അതുകൊണ്ട്, $x = \frac{p+q}{2pq} \times 2p$ , $\frac{p+q}{2pq} \times 2q$ , അല്ലെങ്കിൽ $x = \frac{p+q}{q}$ , $\frac{p+q}{p}$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു

## പ്രവർത്തനം 3

മത്സ്യങ്ങളെ (സമീകരണങ്ങൾ) അവയ്ക്ക് അനുയോജ്യമായ ആഹാരത്താൽ (മൂലസംഖ്യകൾ) സേവിക്കുക. ആഹാരം സേവിക്കാത്തെ മത്സ്യം ഏതെന്ന് തിരിച്ചറിയുക




## അഭ്യാസം 3.11

1. വർഗ്ഗങ്ങളുടെ പൂർണ്ണമാക്കൽ രീതിയിൽ താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ദ്വിഘാതസമീകരണങ്ങളെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക

   (i) $9x^2 - 12x + 4 = 0$ (ii) $\frac{5x+7}{x-1} = 3x + 2$

2. സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച് തന്നിട്ടുള്ള ദ്വീഘാതസമീകരണങ്ങളെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക

   (i) $2x^2 - 5x + 2 = 0$ (ii) $\sqrt{2}f^2 - 6f + 3\sqrt{2} = 0$ (iii) $3y^2 - 20y - 23 = 0$

   (iv) $36y^2 - 12ay + (a^2 - b^2) = 0$

3. ചരിവുള്ള ഒരു പ്രതലത്തിലൂടെ ഒരു പന്തിനെ ഉരുട്ടി വിടുന്നു. $t$ സെക്കന്റിൽ അത് സഞ്ചരിച്ച ദൂരം $d = t^2 - 0.75t$ അടി (ഫീറ്റ്) ആകുന്നു. പന്തിന് 11.25 അടി ദൂരം സഞ്ചരിക്കാൻ ആവശ്യമായ സമയം കാണുക.



3 Algebra Malayalam .indd 114 10/02/2023 11:47:12

### 3.6.5 ദ്വിഘാത സമീകരണങ്ങൾ അടങ്ങിയ പ്രശ്നങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണം

**പ്രശ്നം നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നതിനുള്ള വഴികൾ**

**വഴി 1** വാചകരൂപത്തിലുള്ള പ്രശ്നങ്ങളെ ദ്വിഘാത സമീകരണ രൂപത്തിലേയ്ക്ക് മാറ്റുക

**വഴി 2** ലഭിച്ച ദ്വിഘാത സമീകരണത്തെ മുകളിൽ പറഞ്ഞ ഏതെങ്കിലും ഒരു രീതി ഉപയോഗിച്ച് നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക.

**വഴി 3** ലഭിച്ച ഗണിതപരമായ നിർദ്ധാരണത്തെ തന്നിട്ടുള്ള പ്രശ്നവുമായി ബന്ധപ്പെടുത്തുക.

**ഉദാഹരണം 3.36** കുമരന്റെ രണ്ടുവർഷങ്ങൾക്കുമുമ്പുള്ള വയസ്സിന്റെയും അയാളുടെ നാല് വർഷങ്ങൾക്ക് ശേഷമുള്ള വയസ്സിന്റെയും ഗുണനഫലം അയാളുടെ ഇപ്പോഴത്തെ വയസ്സിന്റെ രണ്ടുമടങ്ങിനെക്കാൾ ഒന്ന് കൂടുതലാണ്. അയാളുടെ ഇപ്പോഴത്തെ വയസ് കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം** കുമരന്റെ ഇപ്പോഴത്തെ വയസ് $x$ വർഷങ്ങൾ എന്നിരിക്കട്ടെ.

രണ്ട് വർഷങ്ങൾക്ക് മുമ്പ് അയാളുടെ വയസ് $= (x-2)$ വർഷങ്ങൾ.

നാല് വർഷങ്ങൾക്ക് ശേഷമുള്ള അയാളുടെ വയസ് $= (x+4)$ വർഷങ്ങൾ.

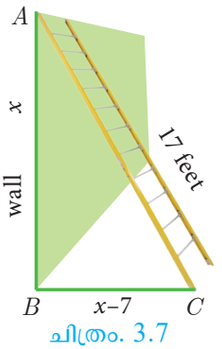
തന്നിട്ടുള്ള പ്രകാരം, $(x-2)(x+4) = 1 + 2x$

$x^2 + 2x - 8 = 1 + 2x$ ഇതിൽ നിന്നും $(x-3)(x+3) = 0$ എങ്കിൽ, $x = \pm 3$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

അതുകൊണ്ട്, $x = 3$ ( $-3$ യെ ഒഴിവാക്കുന്നു കാരണം വയസ് ഋണമാകാൻ സാധ്യതയില്ല)

കുമരന്റെ ഇപ്പോഴത്തെ വയസ് 3 വർഷങ്ങൾ ആകുന്നു.

**ഉദാഹരണം 3.37** 17 അടി നീളമുള്ള ഒരു ഏണി ചുമരിൽ ചാരി വച്ചിരിക്കുന്നു. ഏണി ലംബമായി സ്ഥിതി ചെയ്യുന്ന ചുമർ, ചുമരിന്റെ അടിവശത്തു നിന്നും ഏണിവരെയുള്ള തറഭാഗം എന്നിവ ഒരു സമകോണത്രികോണത്തെ രൂപീകരിക്കുന്നു. ചുമരിന്റെ അടിവശത്തു നിന്നും ഏണിയുടെ അടിവശം വരെയുള്ള ദൂരം ചുമരിന്റെ ഉയരത്തെക്കാൾ 7 അടി കുറവാണെങ്കിൽ ഏണിയുടെ മുകൾഭാഗം സംഗമിക്കുന്നതുവരെയുള്ള ചുമരിന്റെ ഉയരം കാണുക.



ചിത്രം. 3.7

**നിർദ്ധാരണം** ചുമരിന്റെ ഉയരം $AB = x$ അടി

തന്നിട്ടുള്ള പ്രകാരം $BC = (x–7)$ അടി

സമകോണത്രികോണം $ABC$ യിൽ $AC$ =17 അടി $BC = (x–7)$ അടി

പൈഥഗോറസ് സിദ്ധാന്തം അനുസരിച്ച്, $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$(17)^2 = x^2 + (x-7)^2$; $289 = x^2 + x^2 - 14x + 49$

$x^2 - 7x - 120 = 0$ അതിനാൽ, $(x-15)(x+8) = 0$ എങ്കിൽ, $x = 15$ (or) $-8$

അതുകൊണ്ട് ചുമരിന്റെ ഉയരം AB = 15 അടി ($-8$ നെ ഒഴിവാക്കുന്നു കാരണം ഉയരം ഋണമായിരിക്കാൻ സാധ്യതയില്ല)

**ഉദാഹരണം 3.38** ഒരു കൂട്ടം അരയന്നങ്ങളിൽ $x^2$ അംഗങ്ങൾ ഉണ്ട് മേഘങ്ങൾ കൂടിച്ചേർന്നപ്പോൾ $10x$ അംഗങ്ങൾ തടാകത്തിലേക്കും എട്ടിൽ ഒന്ന് ഭാഗം അംഗങ്ങൾ ഒരു ഉദ്യാനത്തിലേയ്ക്കും പറന്നു. ബാക്കിയുള്ള മൂന്ന് ജോഡികൾ വെള്ളത്തിൽ കളിച്ചു. എങ്കിൽ ആകെ അരയന്നങ്ങളുടെ എണ്ണം കാണുക

**നിർദ്ധാരണം** ആകെ അരയന്നങ്ങളുടെ എണ്ണം $x^2$ എന്ന് തന്നിട്ടുണ്ട്.

തന്നിട്ടുള്ള പ്രകാരം $x^2 - 10x - \frac{1}{8}x^2 = 6$ , $7x^2 - 80x - 48 = 0$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{80 \pm \sqrt{6400 - 4(7)(-48)}}{14} = \frac{80 \pm 88}{14}$$



3 Algebra Malayalam .indd 115 10/02/2023 11:47:14

അതുകൊണ്ട്, $x = 12, -\frac{4}{7}$.

ഇവിടെ $x = -\frac{4}{7}$ എന്നത് സാധ്യമല്ല.

അതിനാൽ, $x = 12$. അതുകൊണ്ട് ആകെ അരയന്നങ്ങളുടെ എണ്ണം $x^2 = 144$ ആകുന്നു.

**ഉദാഹരണം 3.39** ചെന്നൈയിൽ നിന്നും വിരുദാചലത്തിലേക്കുള്ള 240 കിലോമീറ്റർ ദൂരം സഞ്ചരിക്കുന്നതിന് ഒരു പാസഞ്ചർ ട്രെയിൻ ഒരു എക്സ്പ്രസ് ട്രെയിനിനെക്കാളും ഒരു മണിക്കൂർ സമയം അധികമെടുക്കുന്നു. എക്സ്പ്രസ് ട്രെയിനിന്റെ വേഗത പാസഞ്ചർ ട്രെയിനിന്റെ വേഗതയെക്കാൾ 20 കിലോമീറ്റർ/മണിക്കൂർ കൂടുതലാണ്. രണ്ടു ട്രെയിനുകളുടെയും ശരാശരി വേഗത കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം** പാസഞ്ചർ ട്രെയിനിന്റെ ശരാശരി വേഗത $x$ കി.മീ /മണിക്കൂർ എന്നിരിക്കട്ടെ.

അങ്ങനെ ആയാൽ എക്സ്പ്രസ് ട്രെയിനിന്റെ വേഗത $(x + 20)$ കി.മീ/മണിക്കൂർ ആകും

240 കി.മീ ദൂരം സഞ്ചരിക്കുന്നതിന് പാസഞ്ചർ ട്രെയിൻ എടുക്കുന്ന സമയം $= \frac{240}{x}$ മണിക്കൂർ

240 കിമീ ദൂരം സഞ്ചരിക്കാൻ എക്സ്പ്രസ് ട്രെയിൻ എടുക്കുന്ന സമയം $= \frac{240}{x+20}$ മണിക്കൂർ

തന്നിട്ടുള്ള പ്രകാരം, $\frac{240}{x} = \frac{240}{x+20} + 1$

$240\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+20}\right] = 1$ , $240\left[\frac{x+20-x}{x(x+20)}\right] = 1$ ഇതിൽ നിന്നും, $4800 = (x^2 + 20x)$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു

$x^2 + 20x - 4800 = 0$ $\quad (x + 80)(x - 60) = 0$ , $x = -80$ or $60$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

ഇതിൽ നിന്നും $x = 60$ ( $-80$ നെ ഒഴിവാക്കുന്നു. കാരണം വേഗത ഋണമാകില്ല)

പാസഞ്ചർ ട്രെയിനിന്റെ ശരാശരി വേഗത 60 കി.മീ/മണിക്കൂർ.

എക്സ്പ്രസ് ട്രെയിനിന്റെ ശരാശരി വേഗത 80- കീ.മീ /മണിക്കൂർ ആകുന്നു.



## അഭ്യാസം 3.12

1. ഒരു സംഖ്യയുടെയും അതിന്റെ വ്യുൽക്രമത്തിന്റെയും വ്യത്യാസം $\frac{24}{5}$ എങ്കിൽ ആ സംഖ്യ കാണുക.
2. 12മീ x 16മീ എന്നീ അളവുകളുള്ള ദീർഘ ചതുരാകൃയിലുള്ള ഒരു പൂന്തോട്ടത്തിനു ചുറ്റും '$w$' മീറ്റർ വീതിയിൽ ഒരു കാൽനടപ്പാത നിർമ്മിച്ചാൽ ആകെ വിസ്തീർണ്ണം 285 മീ$^2$ ആയി വർദ്ധിക്കുന്നു. നടപ്പാതയുടെ അകലം കാണുക
3. ഒരു ബസ് ഒരു സ്ഥിരമായ വേഗതയിൽ 90 കി.മീ ദൂരം സഞ്ചരിക്കുന്നു. വേഗത 15 കീ.മീ /മണിക്കൂർ ആയി വർദ്ധിപ്പിച്ചാൽ യാത്രസമയം 30 മിനിട്ട് കുറയും. എങ്കിൽ ബസിന്റെ യഥാർത്ഥ വേഗത കാണുക.
4. ഒരു പെൺകുട്ടിയുടെ വയസ് അവളുടെ സഹോദരിയുടെ വയസ്സിന്റെ രണ്ടുമടങ്ങാണ് അഞ്ചു വർഷങ്ങൾക്കുശേഷം അവരുടെ വയസ്സുകളുടെ (വർഷങ്ങളിൽ) ഗുണനഫലം 375 ആകുന്നു. അവരുടെ ഇപ്പോഴത്തെ വയസ് കാണുക.
5. 20 മീ വ്യാസമുള്ള വൃത്താകൃതിയിലുള്ള കളിസ്ഥലത്തിന്റെ അതിർത്തയിൽ ഒരു ദണ്ഡ് സ്ഥാപിക്കണം ഏതെങ്കിലും ഒരു വ്യാസത്തിന്റെ രണ്ട് അഗ്രങ്ങളിൽ സ്ഥാപിച്ചിരിക്കുന്ന ഗേറ്റുകൾ P കൂടാതെ Q എന്നിവയിൽ നിന്ന് ദണ്ഡ് വരെയുള്ള ദൂരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം 4 മീ വരത്തക്ക വിധമാണ് ദണ്ഡ് സ്ഥാപിക്കേണ്ടത്. ഇങ്ങനെ ചെയ്യാൻ സാധിക്കുമോ? ഉത്തരം സാധിക്കും എന്നാണെങ്കിൽ രണ്ട് ഗേറ്റുകളിൽ നിന്നും എത്ര ദൂരത്തിൽ ആയിരിക്കണം ദണ്ഡ് സ്ഥാപിക്കേണ്ടത്.
6. ആകെ $2x^2$ കറുത്ത തേനീച്ചകളുള്ള ഒരു ഗ്രൂപ്പിൽ നിന്നും ഗ്രൂപ്പിന്റെ പകുതിയുടെ വർഗ്ഗമൂലം എന്ന അളവിലുള്ള തേനിച്ചകൾ ഒരു മരത്തിലേക്ക് പറന്നുപോയി. ഒൻപതിൽ എട്ടുഭാഗം തേനീച്ചകൾ വീണ്ടും അതേ മരത്തിലേക്ക് തന്നെ പറന്നുപോയി. ബാക്കിയുള്ള രണ്ടെണ്ണം സുഗന്ധമുള്ള താമരയിൽ പിടിച്ചിരുന്നു. ആകെ എത്ര തേനീച്ചകൾ ഉണ്ടെന്ന് കണ്ടുപിടിക്കുക



3 Algebra Malayalam .indd 116 10/02/2023 11:47:16

7. 70 മീ അകലത്തിലുള്ള രണ്ട് സ്റ്റേജുകളിൽ ഗാനമേള നടക്കുന്നു. ആദ്യത്തെ സ്റ്റേജിൽ നാല് ഗായകരടങ്ങിയ സംഘം പാടുന്നു. രണ്ടാമത്തെ സ്റ്റേജിൽ 9 ഗായകർ പാടുന്നു. ഒരേ ശബ്ദ തീവ്രതയിൽ പാട്ട് കേൾക്കാൻ ആഗ്രഹിക്കുന്ന ഒരാൾ രണ്ട് സ്റ്റേജുകൾക്കും ഇടയിൽ എവിടെ നിൽക്കണം? (സൂചന: ശബ്ദ തീവ്രതയുടെ അനുപാതം അവയുടെ അനുബന്ധ ദൂരങ്ങളുടെ വർഗ്ഗത്തിന്റെ അനുപാതത്തിനു തുല്യമാണ്).

8. 10 മീ വശമുള്ള സമചതുരാകൃതിയിലുള്ള ഒരു നിലം. അതിന്റെ മധ്യത്തിലായി സമചതരാകൃതിയിൽ ഒരു പൂമെത്ത തയ്യാറാക്കിയിട്ടുണ്ട്. പൂമെത്തക്ക് ചുറ്റും ഒരു ചരൽ പാതയും നിർമ്മിച്ചിട്ടുണ്ട്. പൂമെത്തയും ചരൽപ്പാതയും നിർമ്മിക്കുന്നതിന് ഒരു ചതുരശ്രമീറ്ററിന് ₹ 3 കൂടാതെ ₹ 4 പ്രകാരം ആകെ 364 രൂപ ചെലവാകുന്നു എങ്കിൽ ചരൽപ്പാതയുടെ അകലം കാണുക.

9. ഒരു സമകോണത്രികോണത്തിന്റെ കർണ്ണത്തിന്റെ നീളം 25 സെ.മീറ്ററും ചുറ്റളവ് 56 സെ.മീറ്ററും ആകുന്നു എങ്കിൽ അതിന്റെ ഏറ്റവും ചെറിയ വശത്തിന്റെ നീളം കാണുക.

### 3.6.6 ഒരു ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന്റെ മൂലസംഖ്യകളുടെ സ്വഭാവം (Nature of Roots of a quadratic equation)

$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ എന്ന ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന്റെ മൂലസംഖ്യകൾ $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ എന്ന സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കാം ഇവിടെ $b^2 - 4ac$ യെ ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന്റെ വിവേചകം (ഡിസ്ക്രിമിനന്റ് $\Delta$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു) എന്ന് വളിക്കുന്നു. ഇത് മൂലസംഖ്യകളുടെ സ്വഭാവത്തെ താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന വിധം നിർണ്ണയിക്കുന്നു

| വിവേചകം $\Delta = b^2 - 4ac$ യുടെ മൂല്യം | മൂലസംഖ്യകളുടെ സ്വഭാവം |
|---|---|
| $\Delta > 0$ | മൂലസംഖ്യകൾ വാസ്തവികം കൂടാതെ വ്യത്യസ്തം |
| $\Delta = 0$ | മൂലസംഖ്യകൾ വാസ്തവികം, തുല്യം |
| $\Delta < 0$ | വാസ്തവിക മൂലസംഖ്യകൾ ഇല്ല |

**ഉദാഹരണം 3.40** താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ദ്വിഘാത സമീകരണങ്ങളുടെ മൂലസംഖ്യകളുടെ സ്വഭാവം നിർണ്ണയിക്കുക

(i) $x^2 - x - 20 = 0$ (ii) $9x^2 - 24x + 16 = 0$ (iii) $2x^2 - 2x + 9 = 0$

**നിർദ്ധാരണം** (i) $x^2 - x - 20 = 0$

ഇവിടെ, $a = 1, b = -1, c = -20$

ഇപ്പോൾ, $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-20) = 81$

ഇവിടെ, $\Delta = 81 > 0$. ആയതിനാൽ സമീകരണത്തിന്റെ മൂലസംഖ്യകൾ വാസ്തവികവും വ്യത്യസ്തവും ആയിരിക്കും

(ii) $9x^2 - 24x + 16 = 0$

ഇവിടെ, $a = 9, b = -24, c = 16$

ഇപ്പോൾ, $\Delta = b^2 - 4ac = \left(-24\right)^2 - 4\left(9\right)\left(16\right) = 0$

ഇവിടെ, $\Delta = 0$. ആയതിനാൽ സമീകരണത്തിന്റെ മൂലസംഖ്യകൾ വാസ്തവികവും തുല്യവും ആയിരിക്കും.



3 Algebra Malayalam .indd 117 10/02/2023 11:47:19

(iii) $2x^2 - 2x + 9 = 0$

ഇവിടെ, $a = 2\,,\ b = -2\,,\ c = 9$

ഇപ്പോൾ, $\Delta = b^2 - 4ac = \big(-2\big)^2 - 4\big(2\big)\big(9\big) = -68$

ഇവിടെ, $\Delta = -68 < 0$ . ആയതിനാൽ സമീകരണത്തിന് വാസ്തവിക മൂലസംഖ്യകൾ ഉണ്ടായിരിക്കില്ല.

**ഉദാഹരണം 3.41** (i) $kx^2 - (8k + 4)x + 81 = 0$ എന്ന ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന്റെ മൂലസംഖ്യകൾ വാസ്തവികവും തുല്യവും ആണെങ്കിൽ '$k$' യുടെ മൂല്യം കാണുക

(ii) $(k + 9)x^2 + (k + 1)x + 1 = 0$ എന്ന ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന് വാസ്തവിക മൂലസംഖ്യകൾ ഇല്ലെങ്കിൽ '$k$' യുടെ മൂല്യം കാണുക

**നിർദ്ധാരണം** (i) $kx^2 - (8k + 4)x + 81 = 0$

സമീകരണത്തിന്റെ മൂലസംഖ്യകൾ വാസ്തവികവും തുല്യവും ആയതിനാൽ, $\Delta = 0$ .

അതായത്, $b^2 - 4ac = 0$

ഇവിടെ, $a = k\,,\ b = -(8k + 4)\,,\ c = 81$

അതായത്, $\big[-(8k + 4)\big]^2 - 4(k)(81) = 0$

$$64k^2 + 64k + 16 - 324k = 0$$

$$64k^2 - 260k + 16 = 0$$

4 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ $16k^2 - 65k + 4 = 0$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു

$(16k - 1)(k - 4) = 0$ എങ്കിൽ, $k = \dfrac{1}{16}$ or $k = 4$

(ii) $(k + 9)x^2 + (k + 1)x + 1 = 0$

സമീകരണത്തിന് വാസ്തവിക മൂലസംഖ്യകൾ ഇല്ലാത്തതിനാൽ, $\Delta < 0$

അതായത്, $b^2 - 4ac < 0$

ഇവിടെ, $a = k + 9\,,\ b = k + 1\,,\ c = 1$

അതായത്, $(k + 1)^2 - 4(k + 9)(1) < 0$

$$k^2 + 2k + 1 - 4k - 36 < 0$$

$$k^2 - 2k - 35 < 0$$

$$(k + 5)(k - 7) < 0$$

അതുകൊണ്ട്, $-5 < k < 7$ . $\{\alpha < \beta$ കൂടാതെ $(x - \alpha)(x - \beta) < 0$ എങ്കിൽ, $\alpha < x < \beta\}$.

**ഉദാഹരണം 3.42** $x^2(p^2 + q^2) + 2x(pr + qs) + r^2 + s^2 = 0$ എന്ന സമീകരണത്തിന് വാസ്തവിക മൂല സംഖ്യകൾ ഇല്ല എന്ന് തെളിയിക്കുക $ps = qr$ ആണെങ്കിൽ മൂലസംഖ്യകൾ വാസ്തവികം കൂടാതെ തുല്യം എന്നും തെളിയിക്കുക.



3 Algebra Malayalam .indd 118 10/02/2023 11:47:23

**നിർദ്ധാരണം** തന്നിട്ടുള്ള ദ്വിഘാത സമീകരണം $x^2(p^2+q^2)+2x(pr+qs)+r^2+s^2=0$ ആകുന്നു

ഇവിടെ, $a=p^2+q^2$, $b=2(pr+qs)$, $c=r^2+s^2$

ഇപ്പോൾ, $\Delta=b^2-4ac$ $=\left[2(pr+qs)\right]^2-4(p^2+q^2)(r^2+s^2)$

$=4\left[p^2r^2+2pqrs+q^2s^2-p^2r^2-p^2s^2-q^2r^2-q^2s^2\right]$

$=4\left[-p^2s^2+2pqrs-q^2r^2\right]=-4\left[(ps-qr)^2\right]<0$ ...(1)

ആയതിനാൽ, $\Delta=b^2-4ac<0$, മൂലസംഖ്യകൾ വാസ്തവികമല്ല.

അതായത് $ps=qr$ ആണെങ്കിൽ $\Delta=-4\left[ps-qr\right]^2=-4\left[qr-qr\right]^2=0$ ((1) ഉപയോഗിച്ച്)

$\Delta=0$ അതിനാൽ $ps=qr$ ആയാൽ മൂലസംഖ്യകൾ വാസ്തവികം കൂടാതെ തുല്യം ആയിരിക്കും.

## അഭ്യാസം 3.13

1. തന്നിട്ടുള്ള ദ്വിഘാത സമീകരണങ്ങളുടെ മൂലസംഖ്യകളുടെ സ്വഭാവം നിർണ്ണയിക്കുക.

   (i) $15x^2+11x+2=0$ (ii) $x^2-x-1=0$ (iii) $\sqrt{2}t^2-3t+3\sqrt{2}=0$

   (iv) $9y^2-6\sqrt{2}y+2=0$ (v) $9a^2b^2x^2-24abcdx+16c^2d^2=0$, $a\neq0$, $b\neq0$

2. തന്നിട്ടുള്ള ദ്വിഘാത സമീകരണങ്ങളുടെ മൂലസംഖ്യകൾ വാസ്തവികവും തുല്യവും ആണെങ്കിൽ '$k$' യുടെ മൂല്യം കാണുക. (i) $(5k-6)x^2+2kx+1=0$ (ii) $kx^2+(6k+2)x+16=0$

3. $(a-b)x^2+(b-c)x+(c-a)=0$ യുടെ മൂലസംഖ്യകൾ വാസ്തവികവും തുല്യവും ആണെങ്കിൽ $b$, $a$, $c$ എന്നിവ കൂട്ടുസമാന്തര അനുക്രമത്തിലാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

4. $a$, $b$ എന്നിവ വാസ്തവികസംഖ്യകൾ ആണെങ്കിൽ $(a-b)x^2-6(a+b)x-9(a-b)=0$ എന്ന ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന്റെ മൂലസംഖ്യകൾ വാസ്തവികവും വ്യത്യസ്തവുമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

5. $(c^2-ab)x^2-2(a^2-bc)x+b^2-ac=0$ എന്ന ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന്റെ മൂലസംഖ്യകൾ വാസ്തവികവും തുല്യവുമെങ്കിൽ ഒന്നുകിൽ $a=0$ അല്ലെങ്കിൽ $a^3+b^3+c^3=3abc$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

**ചിന്തിക്കുക**

ഫലമായി ലഭിക്കുന്ന ദ്വിഘാത വ്യഞ്ജകങ്ങൾ ഒരു പൂർണ്ണ വർഗ്ഗമായിരിക്കുന്ന രീതിയിൽ തന്നിട്ടുള്ള ഓരോ വ്യഞ്ജകത്തിലും ഉള്ള ശൂന്യബോക്സുകളെ പൂർത്തീകരിക്കുക.

(i) $x^2+14x+\square$ (ii) $x^2-24x+\square$ (iii) $p^2+2qp+\square$

### 3.6.7 ഒരു ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന്റെ മൂലസംഖ്യകളും ഗുണാങ്കങ്ങളും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം (The Relation between roots and Co-effficants of a Quadratic equation)

$\alpha$ കൂടാതെ $\beta$ എന്നിവ $ax^2+bx+c=0$ എന്ന ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന്റെ മൂലസംഖ്യകൾ ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. എങ്കിൽ,

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad \beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

3.6.3 യിൽ നിന്നും ന്റെ ഗുണാങ്കം,

$$\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{-x\text{-ന്റെ ഗുണാങ്കം}}{x^2\text{-ന്റെ ഗുണാങ്കം}}$$

$$\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{\text{സ്ഥിരാങ്കം}}{x^2\text{-ന്റെ ഗുണാങ്കം}}$$



3 Algebra Malayalam .indd 119 10/02/2023 11:47:29

## പുരോഗതി പരിശോധന

| ദ്വിഘാത സമീകരണം | ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന്റെ മൂല സംഖ്യകൾ α കൂടാതെ β | $x^2$ , $x$ ന്റെ ഗുണാങ്കങ്ങൾ സ്ഥിരാങ്കം | മൂല സംഖ്യകളുടെ തുക $\alpha+\beta$ | മൂലസംഖ്യകളുടെ ഗുണന ഫലം $\alpha\beta$ | $-\frac{b}{a}$ | $\frac{c}{a}$ | നിഗമനം |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $4x^2-9x+2=0$ | | | | | | | |
| $\left(x-\frac{4}{5}\right)^2=0$ | | | | | | | |
| $2x^2-15x-27=0$ | | | | | | | |

**ഉദാഹരണം 3.43** $x^2-13x+k=0$ എന്ന ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന്റെ മൂലസംഖ്യകളുടെ വ്യത്യാസം 17 ആണെങ്കിൽ $k$ യുടെ മൂല്യം കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം** $x^2-13x+k=0$ ഇവിടെ, $a=1$, $b=-13$, $c=k$

$\alpha, \beta$ എന്നിവ സമീകരണത്തിന്റെ മൂലസംഖ്യകൾ എന്നിരിക്കട്ടെ

$$\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{-(-13)}{1}=13 \quad ...(1)\ , \quad \alpha-\beta=17 \quad ...(2)$$

$(1)+(2)$ , $2\alpha=30$ എങ്കിൽ $\alpha=15$

അതുപോലെ, $15+\beta=13$ ( $(1)$) ൽ നിന്നും $\beta=-2$ ലഭിക്കുന്നു

പക്ഷേ $\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{k}{1}$ , $15\times(-2)=k$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു, $k=-30$

**ചിന്തിക്കുക**

$ax^2+bx+c=0$ ന്റെ സ്ഥിരാങ്കം പൂജ്യമാണെങ്കിൽ മൂലസംഖ്യകളുടെ തുകയും ഗുണനഫലവും _____ കൂടാതെ _____ ആകുന്നു.

**ഉദാഹരണം 3.44** $\alpha$ കൂടാതെ $\beta$ എന്നിവ $x^2+7x+10=0$ ന്റെ മൂലസംഖ്യകൾ ആണെങ്കിൽ താഴെ തന്നവയുടെ മൂല്യം കാണുക

(i) $(\alpha-\beta)$ (ii) $\alpha^2+\beta^2$ (iii) $\alpha^3-\beta^3$ (iv) $\alpha^4+\beta^4$ (v) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$ (vi) $\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}$

**നിർദ്ധാരണം** $x^2+7x+10=0$ ഇവിടെ, $a=1$, $b=7$, $c=10$

$\alpha, \beta$ എന്നിവ സമീകരണത്തിന്റെ മൂലസംഖ്യകൾ ആണെന്നിരിക്കട്ടെ,

$$\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{-7}{1}=-7\,;\ \alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{10}{1}=10$$

(i) $\alpha-\beta=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{(-7)^2-4\times10}=\sqrt{9}=3$

(ii) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-7)^2-2\times10=29$

(iii) $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha-\beta)=(3)^3+3(10)(3)=117$

(iv) $\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2=29^2-2\times(10)^2=641$ (കാരണം (ii) - ൽ നിന്നും, $\alpha^2+\beta^2=29$ )

(v) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{49-20}{10}=\frac{29}{10}$



3 Algebra Malayalam .indd 120 10/02/2023 11:47:35

(vi) $\dfrac{\alpha^2}{\beta}+\dfrac{\beta^2}{\alpha} = \dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta} = \dfrac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}$

$= \dfrac{(-343)-3\big(10\times(-7)\big)}{10} = \dfrac{-343+210}{10} = \dfrac{-133}{10}$

**ഉദാഹരണം 3.45** $\alpha$ കൂടാതെ $\beta$ എന്നിവ $3x^2+7x-2=0$ എന്ന സമീകരണത്തിന്റെ മൂലസംഖ്യകൾ ആണെങ്കിൽ താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയുടെ മൂല്യം കാണുക

(i) $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}$ (ii) $\dfrac{\alpha^2}{\beta}+\dfrac{\beta^2}{\alpha}$

**നിർദ്ധാരണം** $3x^2+7x-2=0$ ഇവിടെ, $a=3$, $b=7$, $c=-2$

$\alpha, \beta$ എന്നിവ സമീകരണത്തിന്റെ മൂലസംഖ്യകൾ ആയതിനാൽ

(i) $\alpha+\beta = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-7}{3}$; $\alpha\beta = \dfrac{c}{a} = \dfrac{-2}{3}$

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{\left(-\frac{7}{3}\right)^3-3\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{7}{3}\right)}{\frac{-2}{3}} = \frac{-61}{6}$$

(ii) $$\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha} = \frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta} = \frac{\left(-\frac{7}{3}\right)^3-3\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{7}{3}\right)}{\frac{-2}{3}} = \frac{469}{18}$$

**ഉദാഹരണം 3.46** $\alpha, \beta$ എന്നിവ $2x^2-x-1=0$, എന്ന സമീകരണത്തിന്റെ മൂലസംഖ്യകൾ ആണെങ്കിൽ താഴെ തന്നിട്ടുള്ള മൂല സംഖ്യകൾ ഉള്ള ദ്വിഘാത സമീകരണം രൂപീകരിക്കുക (i) $\dfrac{1}{\alpha}, \dfrac{1}{\beta}$ (ii) $\alpha^2\beta$, $\beta^2\alpha$ (iii) $2\alpha+\beta$, $2\beta+\alpha$

**നിർദ്ധാരണം** $2x^2-x-1=0$ ഇവിടെ, $a=2$, $b=-1$, $c=-1$

$\alpha+\beta = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-(-1)}{2} = \dfrac{1}{2}$; $\alpha\beta = \dfrac{c}{a} = -\dfrac{1}{2}$

(ശ) തന്നിട്ടുള്ള മൂലസംഖ്യകൾ $\dfrac{1}{\alpha}, \dfrac{1}{\beta}$ എന്നിരിക്കട്ടെ

മൂലസംഖ്യകളുടെ തുക $= \dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta} = \dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \dfrac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = -1$

മൂലസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം $= \dfrac{1}{\alpha}\times\dfrac{1}{\beta} = \dfrac{1}{\alpha\beta} = \dfrac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$

ആവശ്യപ്പെട്ട സമീകരണം, $x^2$ –(മൂലസംഖ്യകളുടെ തുക)$x$ + (മൂലസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം)=0

$x^2-(-1)x-2=0$ ലഭിക്കുന്നു $x^2+x-2=0$

(ii) തന്നിട്ടുള്ള മൂലസംഖ്യകൾ $\alpha^2\beta$, $\beta^2\alpha$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

മൂലസംഖ്യകളുടെ തുക $\alpha^2\beta+\beta^2\alpha = \alpha\beta(\alpha+\beta) = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{4}$



3 Algebra Malayalam .indd 121 10/02/2023 11:47:40

മൂലസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം $(\alpha^2\beta)\times(\beta^2\alpha) = \alpha^3\beta^3 = (\alpha\beta)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$

ആവശ്യപ്പെട്ട സമീകരണം $x^2 -$ (മൂലസംഖ്യകളുടെ തുക)$x +$ (മൂലസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം)$=0$

$x^2 - \left(-\frac{1}{4}\right)x - \frac{1}{8} = 0$ ഇതിൽ നിന്നും $8x^2 + 2x - 1 = 0$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു

(iii) $2\alpha + \beta$, $2\beta + \alpha$

മൂലസംഖ്യകളുടെ തുക $2\alpha + \beta + 2\beta + \alpha = 3(\alpha + \beta) = 3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$

മൂലസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം $= (2\alpha + \beta)(2\beta + \alpha) = 4\alpha\beta + 2\alpha^2 + 2\beta^2 + \alpha\beta$

$= 5\alpha\beta + 2(\alpha^2 + \beta^2) = 5\alpha\beta + 2\left[(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta\right]$

$= 5\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\left[\frac{1}{4} - 2\times -\frac{1}{2}\right] = 0$

ആവശ്യപ്പെട്ട സമീകരണം $x^2 -$ (മൂലസംഖ്യകളുടെ തുക)$x +$ (മൂലസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം)$=0$

$x^2 - \frac{3}{2}x + 0 = 0$ ഇതിൽ നിന്നും $2x^2 - 3x = 0$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

## അഭ്യാസം 3.14

1. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ഓരോ വ്യഞ്ജകത്തെയും $\alpha + \beta$ , $\alpha\beta$ യിൽ എഴുതുക.

   (i) $\frac{\alpha}{3\beta} + \frac{\beta}{3\alpha}$ (ii) $\frac{1}{\alpha^2\beta} + \frac{1}{\beta^2\alpha}$ (iii) $(3\alpha - 1)(3\beta - 1)$ (iv) $\frac{\alpha + 3}{\beta} + \frac{\beta + 3}{\alpha}$

2. $2x^2 - 7x + 5 = 0$ എന്ന സമീകരണത്തിന്റെ മൂലസംഖ്യകൾ α കൂടാതെ βആകുന്നു. മൂലസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കാതെ താഴെ പറയുന്നവ കാണുക.

   (i) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ (ii) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$ (iii) $\frac{\alpha + 2}{\beta + 2} + \frac{\beta + 2}{\alpha + 2}$

3. $x^2 + 6x - 4 = 0$ എന്ന സമീകരണത്തിന്റെ മൂലസംഖ്യകൾ $\alpha$, $\beta$ ആകുന്നു. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള മൂലസംഖ്യകൾ ഉള്ള ദ്വിഘാത സമീകരണം കണ്ടുപിടിക്കുക

   (i) $\alpha^2$ കൂടാതെ $\beta^2$ (ii) $\frac{2}{\alpha}$ കൂടാതെ $\frac{2}{\beta}$ (iii) $\alpha^2\beta$ കൂടാതെ $\beta^2\alpha$

4. α, β എന്നിവ $7x^2 + ax + 2 = 0$ ന്റെ മൂലസംഖ്യകൾ ആകുന്നു. $\beta - \alpha = \frac{-13}{7}$ എങ്കിൽ $a$ യുടെ മൂല്യം കാണുക.

5. $2y^2 - ay + 64 = 0$ എന്ന സമീകരണത്തിന്റെ ഒരു മൂലസംഖ്യ മറ്റേതിന്റെ രണ്ടുമടങ്ങ് എങ്കിൽ $a$ യുടെ മൂല്യങ്ങൾ കാണുക.

6. $3x^2 + kx + 81 = 0$ (വാസ്തവിക മൂലസംഖ്യകൾ മാത്രം ഉൾക്കൊണ്ടിരിക്കുന്നു) എന്ന സമീകരണത്തിന്റെ ഒരു മൂലസംഖ്യ മറ്റേതിന്റെ വർഗ്ഗമാണെങ്കിൽ $k$ യുടെ മൂല്യം കാണുക.



3 Algebra Malayalam .indd 122 10/02/2023 11:47:46

## 3.7 വ്യതിയാനങ്ങളുടെ ഗ്രാഫ്

### ചരങ്ങൾ:



എല്ലാ ദിവസവും ഹരിണി വീട്ടിൽ നിന്ന് സൈക്കിൾ ചവിട്ടി സ്കൂളിൽ എത്തുന്നു. നിങ്ങൾക്ക് ഇത് ഗണിതശാസ്ത്രപരമായി $d = rt$ എന്ന ഒരു സമീകരണത്തിലൂടെ പ്രസ്താവിക്കാൻ കഴിയും, ഇവിടെ $d$ എന്നത് സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു, $t$ എന്ന സമയത്തിലുള്ള വേഗതയുടെ നിരക്കാണ് $r$.

അവൾ പതിനഞ്ച് മിനിറ്റ് സൈക്കിൾ ചവിട്ടിയാൽ മണിക്കൂറിൽ 20 കിലോമീറ്റർ വേഗതയിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരം കണ്ടെത്താൻ നിങ്ങൾ ആഗ്രഹിക്കുന്നുവെന്ന് കരുതുക.

$r = 20$ കൂടാതെ $t = \frac{1}{4}$ (എങ്ങനെ?) $rt = 20 \times \frac{1}{4} = 5$ കി.മീ. ആകത്തക്കരീതിയിൽ $d$ കാണുന്നു.

ഇവിടെ $d$ ഒരു സ്വതന്ത്രമല്ലാത്ത ചരവും $r$, $t$ ഇവ സ്വതന്ത്ര ചരങ്ങളും ആണ്. $d$ എന്ന ദൂരം നിരക്ക് $r$ നെയും സമയ $t$ യെയും ആശ്രയിക്കുന്നു.

അതിനാൽ സ്വതന്ത്ര ചരം ഒരു തന്നിട്ടുള്ള സാഹചര്യത്തിൽ കൈകാര്യം ചെയ്യുന്ന അളവും സ്വതന്ത്രമല്ലാത്ത ചരം കൈകാര്യം ചെയ്യപ്പെട്ട സ്വതന്ത്ര ചരത്തെ ആശ്രയിക്കുന്ന അളവും ആണ്.

ഒരു വാക്യത്തിലുള്ള ചരങ്ങളുടെ ബന്ധത്തെ വിവരിക്കുന്ന സമീകരണത്തെ ആചാരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വ്യതിയാനമായി പ്രകടിപ്പിക്കാം.



ഒരു ഹോട്ടലിൽ ജോലി ചെയ്യുന്ന സുരേഷിൻറെ മാസവരുമാനം മണിക്കൂറിന് ₹ 50 പ്രകാരം ആണെന്ന് വിചാരിക്കുക. ഇവിടെ രണ്ട് ചരമങ്ങൾ ഉണ്ട് ഒന്ന് മാസം വരുമാനവും മറ്റേത് ജോലിചെയ്യുന്ന സമയവുമാണ് ഇവ രണ്ടിൽ ഏതാണ് സ്വതന്ത്ര ചരം.

### സ്ഥിരാംഗങ്ങൾ

ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധത്തിന്റെ നീളം തന്നിരുന്നാൽ വിസ്തീർണം കണ്ടുപിടിക്കാൻ നിങ്ങൾക്ക് അറിയാം. ആവശ്യമുള്ള വിസ്തീർണ്ണം $A$ യും വ്യാസാർദ്ധം $r$ ഉം ആയാൽ സൂത്രവാക്യം $A = \pi r^2$ ഉത്തരം നൽകുന്നു. ഇവിടെ വിസ്തീർണ്ണം A വ്യാസാർദ്ധം $r$ നെ ആശ്രയിക്കുന്നു. അതിനാൽ സ്വന്തമല്ലാത്ത ചരമാണ് A കൂടാതെ $r$ സ്വതന്ത്രചരവും. $\pi$ യെ കുറിച്ച് എന്ത് പറയാം.

എല്ലാ സാഹചര്യത്തിലും ഇതിന്റെ മൂല്യം സ്ഥിരം ആയിരിക്കും അതായത് സ്ഥിരാംഗം ആണ്. ഒരു സ്ഥിരാംഗം എന്നത് ഗണിതപരമായി നിശ്ചിത മൂല്യമുള്ള അളവാണ്.

### രണ്ടു തരത്തിലുള്ള വ്യതിയാനങ്ങൾ

രണ്ടു കാര്യങ്ങൾ ആനുപാതികമായിരിക്കുമ്പോൾ അവയ്ക്കു തമ്മിൽ ഒരു ബന്ധമുണ്ടാകുന്നു. ആ ബന്ധം കാരണം ഒന്നിന്റെ മൂല്യം മാറുമ്പോൾ മറ്റേതിന്റെ മൂല്യവും മാറുന്നു.

ഇവിടെ നമുക്ക് രണ്ടു തരത്തിലുള്ള വ്യതിയാനങ്ങൾ കാണാം

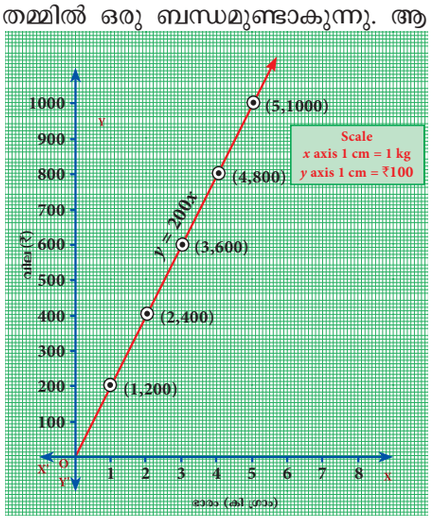
(i) നേർവ്യതിയാനം

(ii) പരോക്ഷവ്യതിയാനം

### (i) നേർവ്യതിയാനം

നിങ്ങൾ ചന്തയിൽ പോയി ധാരാളം ആപ്പിളുകൾ വാങ്ങുകയാണെങ്കിൽ കുടുതൽ രൂപചെലവാക്കേി വരും ഒരു കിലോ ആപ്പിളിന്റെ ചില 200 രൂപ ആണെങ്കിൽ താഴെപറയുന്ന പ്രകാരം നിങ്ങൾക്ക് രൂപ ചിലവാകും.

| ഭാരം (കി ഗ്രാം) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| വില (രൂപാ) | 200 | 400 | 600 | 800 | 1000 |




ചിത്രം. 3.8



3 Algebra Malayalam .indd 123 10/02/2023 11:47:48

$\frac{1}{200}=\frac{2}{400}=\frac{3}{600}=\frac{4}{800}=\frac{5}{1000}=\ldots$ നിങ്ങൾക്ക് കാണാം

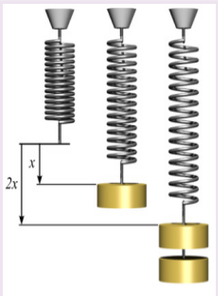
ഇത്തരത്തിലുള്ള ആനുപാതിക വ്യതിയാനങ്ങളെ **നേർവ്യതിയാനം** എന്നു പറയുന്നു. മൂല്യം കണ്ടുപിടിക്കാൻ ഭാരത്തെ 200 എന്ന സ്ഥിരാങ്കം കൊണ്ട് ഗുണിക്കുക.

ഭാരത്തെ കുറിക്കുന്ന ചരം $x$ വിലയുടെ ചരത്തെ $y$ എന്നും കുറിച്ചാൽ നമ്മുക്ക് $y = 200x$ എന്ന് എഴുതാം. ഇവിടെ ഗുണിക്കേണ്ട സ്ഥിരാങ്കം 200 ആണ്.

$\frac{y}{x}=k$, ഇവിടെ $k$ എന്നത് ഒരു **ധനസംഖ്യയാകുന്നു.** (സ്ഥിരാങ്കം) അതുകൊണ്ട് $x$, $y$ നേരിട്ട് വ്യത്യാസപ്പെടുന്നു. ഇവിടെ $k$ യെ ആനുപാതിക സ്ഥിരാങ്കം എന്നു പറയുന്നു.

നിങ്ങൾക്ക് അറിയാമോ

**യഥാർത്ഥ ജീവിതത്തിലെ ഗണിതം:** ഈ ചിത്രം സൂചിപ്പിക്കുന്നത് ബലത്തിന്റെ ഇരട്ടിക്കൽ വിസ്ഥാപനത്തിനെയും ഇരട്ടിപ്പിക്കുന്നു. ഇത് ഹൂക്ക്സ് നിയമത്തിന്റെ ആവിഷ്കാരമാണ്. $F = kx$ ൽ $x$ എന്ന സ്രോതസ്സിന്റെ സ്ഥാനത്തു നിന്നുള്ള വിസ്ഥാപന് ആവശ്യമായ ബലമാണ് $F$. വിസ്ഥപനത്തെ ഇരട്ടിപ്പിക്കുന്നതിന് ത്രാസത്തിന്റെ ബലത്തെയും ഇരട്ടിപ്പിക്കണം. ആനുപാതിക സ്ഥിരാങ്കം $K$ ത്രാസിന്റെ കാഠിന്യത്തെ ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്നു. അതുകൊണ്ട് ഇത് നേർഅനുപാതത്തിന് ഒരു ഉദാഹരണമാണ്.




### നേർവ്യതിയാനങ്ങളെ ദൃശ്യവൽക്കരിക്കൽ:

നേർവ്യതിയാനത്തെ കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് സമീകരണത്തെ നീരിക്ഷിച്ച് $y = kx$ ആണോ എന്ന് നിർണ്ണയിക്കുക. ഇവിടെ $k$ എന്നത് ആനുപാതികസ്ഥിരാങ്കം അതായത് $y = 5x$ പോലുള്ള സമീകരണങ്ങൾ ചരങ്ങളിലെ നേർഅനുപാതത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

**ചിന്തിക്കുക**

$3y - 7x = 0$ എന്ന സമീകരണ ത്തിൽ $x$, $y$ ഇവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തെക്കുറിച്ച് നിങ്ങൾക്ക് എന്ത് പറയാൻ സാധിക്കും. ഇത് നേർ വ്യതിയാന മാണ്. എങ്ങനെ? ചിന്തിക്കുക. ഈ സാഹച ര്യത്തിൽ ആനുപാതിക സ്ഥിരത ഏതാണ്.

**ഈ ഗ്രാഫിനെ നിരീക്ഷിക്കുക:**

സഞ്ചരിച്ച ദൂരവും എടുത്ത സമയവും ആനുപാതികമാണ് എന്നാൽ ഇത് എങ്ങനെ മനസ്സിലാക്കാൻ സാധിക്കും.

ശ്രദ്ധിക്കുക

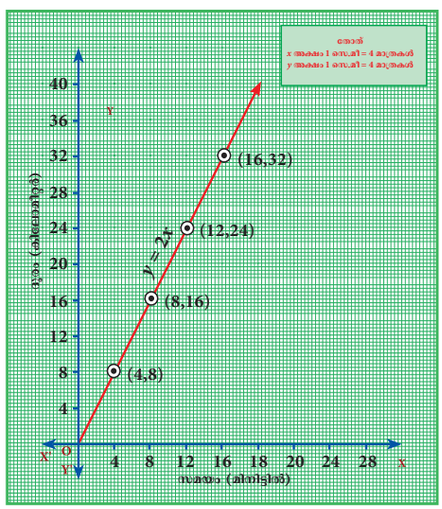
i) ഗ്രാഫ് ഒരു നേർരേഖയാകുന്നു.

ii) രേഖ മൂല്യ ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുചെല്ലുന്നു. ഈ രണ്ടു കാര്യങ്ങളും ഉള്ളപ്പോൾ ഗ്രാഫിലുള്ള രണ്ട് അളവുകളും നേർആനുപാതികമാകുന്നു.

നിങ്ങൾ ഗ്രാഫിൽ ഇത് കാണുന്നുണ്ടോ?

| സമയം (മിനിട്ടിൽ) | 4 | 8 | 12 | 16 |
|---|---|---|---|---|
| ദൂരം (കിലോമീറ്റർ) | 8 | 16 | 24 | 32 |

ഒരു ചരം ഇരട്ടിക്കുമ്പോൾ മറ്റെതും ഇരട്ടിക്കുന്നു. ഇതിൽ നിന്നും $d = rt$ എന്ന് മനസ്സിലാക്കാം. ആനുപാതിക സ്ഥിരാങ്ക ഊഹിക്കാനും എളുപ്പമാണ്.



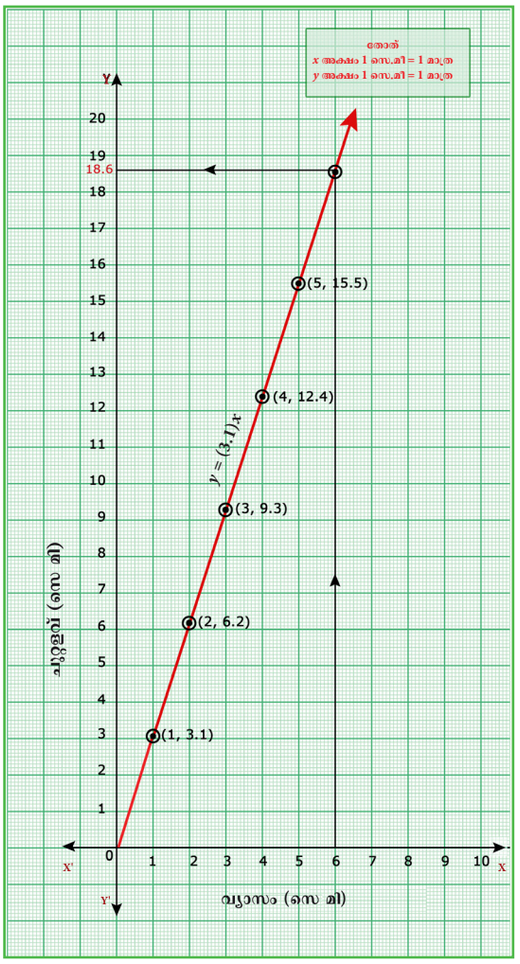

ചിത്രം. 3.9



3 Algebra Malayalam .indd 124 10/02/2023 11:47:49

**ഉദാഹരണം 3.47** വർഷിക വിവിധ അളവിലുള്ള 6 വ്യത്തങ്ങൾ വരച്ചു. പട്ടികയിൽ കാണിച്ചിട്ടുള്ളതുപോലെ ഓരോ വ്യത്തത്തിന്റെയും വ്യാസവും ചുറ്റളവും (ഏകദേശമായി) തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തെ കാണിക്കുന്ന ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക. ഇത് ഉപയോഗിച്ച് 6 സെ മി വ്യാസമുള്ള വ്യത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് കണ്ടുപിടിക്കുക.

| വ്യാസം (x) സെ മി | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| ചുറ്റളവ് (y) സെ മി | 3.1 | 6.2 | 9.3 | 12.4 | 15.5 |




ചിത്രം. 3.10

**നിർദ്ധാരണം:**

പട്ടികയിൽ നിന്ന് നമ്മുക്ക് $x$ ന്റെ മൂല്യം കൂടുമ്പോൾ $y$ ന്റെ മൂല്യം കൂടുന്നു എന്ന് മനസ്സിലാക്കാം. അതായത് ഇവിടെ നേർവ്യതിയാനമാകുന്നു

$y = kx$ എന്നിരിക്കട്ടെ ഇവിടെ $k$ ആനുപാതിക സ്ഥിരമാക്കുന്നു.

തന്നിട്ടുള്ള മൂല്യങ്ങളിൽ നിന്നും.

$k = \frac{3.1}{1} = \frac{6.2}{2} = \frac{9.3}{3} = \frac{12.4}{4} = \ldots = 3.1$ നമ്മുക്കറിയാം

നിങ്ങൾ (1, 3.1) (2, 6.2) (3, 9.3), (4, 12.4), (5, 15.5), ബിന്ദുക്കളെ അയൊളപ്പെടുത്തുമ്പോൾ $y = (3.1)x$ എന്ന നേർരേഖ ഗ്രാഫ് രൂപപ്പെടുന്നു.

ഗ്രാഫിൽ നിന്നും വ്യാസം 6 സെ മി ആണെങ്കിൽ ചുറ്റളവ് 18.6 സെ മി എന്ന് കിട്ടുന്നു.

**ഉദാഹരണം 3.48** ഒരു ബസ്സ് ഒരേ വേഗതയിൽ 50 കീ.മിറ്റർ/മണീക്കൂർ സഞ്ചരിക്കുന്നു. ദൂരത്തിന്റെയും സമയത്തിന്റെയും ഗ്രാഫ് വരച്ച് താഴെ പറയുന്നവ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) വ്യതിയാനത്തിന്റ സ്ഥിരാങ്കം

(ii) 90 മിനുട്ടിൽ ബസ്സ് എത്ര ദൂരം സഞ്ചരിക്കുന്നു.

(iii) ഗ്രാഫിൽ നിന്നും 300 കിലോമീറ്റർ ദൂരം സഞ്ചരിക്കാൻ ആവശ്യമായ സമയം എത്ര.

**നിർദ്ധാരണം**

$x$ എന്നത് മിനിട്ടിൽ ഉള്ള സമയവും $y$ എന്നത് സഞ്ചരിച്ച ദൂരം (കിലോമീറ്ററിൽ) ആകുന്നു.

| എടുത്ത സമയം (മിനിട്ടിൽ) x | 60 | 120 | 180 | 240 |
|---|---|---|---|---|
| ദൂരം (കിലോമീറ്ററിൽ) y | 50 | 100 | 150 | 200 |

(i) സമയം കൂടുമ്പോൾ സഞ്ചരിച്ച ദൂരം കൂടുന്നു അതിനാൽ ഇതൊരു നേർ വ്യതിയാനമാണ് ഇത് $y = kx$ എന്ന രൂപത്തിലാണ്.

അനുപാതിക സ്ഥിരത

$k = \frac{y}{x} = \frac{50}{60} = \frac{100}{120} = \frac{150}{180} = \frac{200}{240} = \frac{5}{6}$



3 Algebra Malayalam .indd 125 10/02/2023 11:47:51

അതിനാൽ ബന്ധത്തെ

$y = kx \quad \Rightarrow \quad y = \frac{5}{6}x$ എന്ന് തന്നിരിക്കാം

(ii) ഗ്രാഫിൽ നിന്നും, $y = \frac{5x}{6}$, $x = 90$, എങ്കിൽ

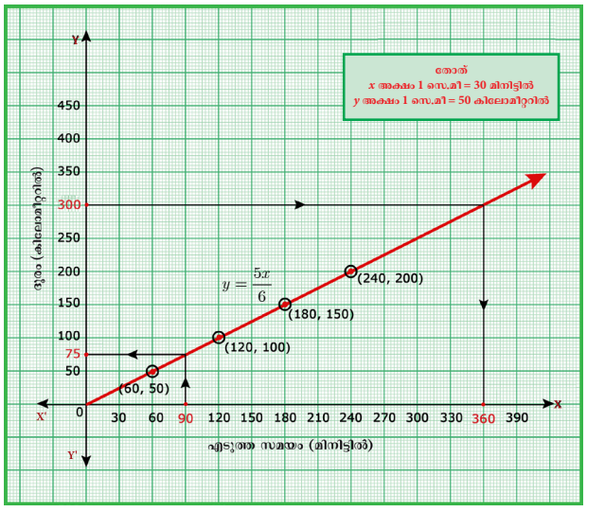
$y = \frac{5}{6} \times 90 = 75$ കി.മീ ആകുന്നു

90 മിനുട്ടിൽ സഞ്ചരിച്ച ദൂരം 75 കി.മീ ആകുന്നു.

(iii) ഗ്രാഫിൽ നിന്നും, $y = \frac{5x}{6}$, $y = 300$ എങ്കിൽ

$x = \frac{6y}{5} = \frac{6}{5} \times 300 = 360$ മിനിട്ടുകൾ (or)

6 മണിക്കൂറുകൾ.




ചിത്രം. 3.11

300 കിലോമീറ്റർ ദൂരം സഞ്ചരിക്കാൻ എടുത്ത സമയം 360 മിനിറ്റ് (ആറുമണിക്കൂർ)

### (ii) വിപരീതാനുപാത വിതര്യയാനം:

ചെന്നൈയ്ക്കും മധുരയ്ക്കും ഇടയിലുള്ള ദൂരം ഏകദേശം 480 കി.മീ ആകുന്നു. ചെന്നൈയിൽ നിന്നും മധുരയിലേയ്ക്ക് ഒരു ട്രെയിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നുവെന്ന് കരുതുക. ഇതിന്റെ വേഗത കൂടുന്തോറും അത് സഞ്ചരിക്കാനെടുക്കുന്ന സമയം കുറയുന്നതായി കാണാം. താഴെ കാണുന്ന പട്ടികയിൽ വേഗത $v$ ഒരു കിലോ മീറ്ററികളിലും സമയം $t$ യെ മണിക്കൂറുകളിലും തന്നിരിക്കുന്നു.

| **വേഗത (v) കി.മി / മണിക്കൂർ** | 30 | 40 | 60 | 80 |
|---|---|---|---|---|
| **സമയം (t) മണിക്കൂറുകൾ** | 16 | 12 | 8 | 6 |

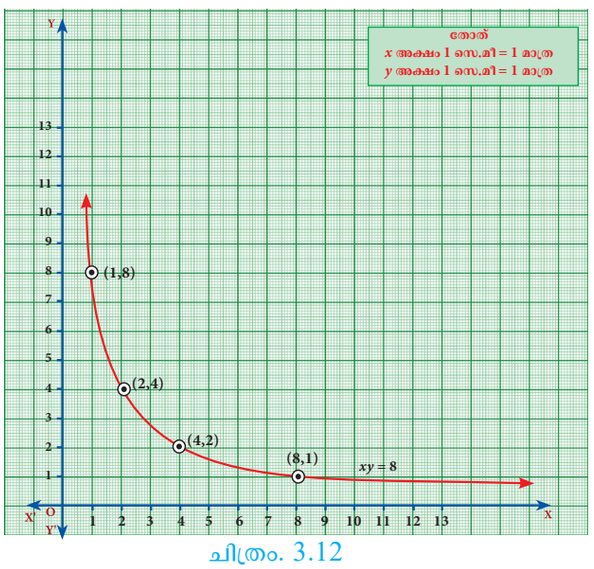
പട്ടികയിൽ നിന്നും ട്രെയിൻ കുറഞ്ഞ വേഗതയിൽ സഞ്ചരിക്കുമ്പോൾ സമയം കൂടുന്നതായും ട്രെയിൻ കൂടിയ വേഗതയിൽ സഞ്ചരിക്കുമ്പോൾ സമയം കുറയുന്നതായും കാണാം. ഇവിടെ $30 \times 16 = 40 \times 12 = 60 \times 8 = 80 \times 6$ എന്ന് നിങ്ങൾക്ക് കാണാം. ഇത് $vt$ ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യ എന്നതിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഇവിടെ $vt = 480$. ഒരു ഘട്ടത്തിൽ $v$ കൂടാതെ $t$ എന്നീ ചരങ്ങൾ വീപരിതാനുപാതത്തിലാണെന്ന് നമ്മുക്ക് പറയാം. $vt = 480$ എന്നീ രിതിയിലുള്ള സമീകരണത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് ഒരു നേർരേഖ അല്ല എന്ന് ശ്രദ്ധിക്കുക. വീപിരിതാനുപാത വ്യതിയാനം സൂചിക്കുന്നത് ഒരു ചതുരത്തിന്റെ മൂല്യം കൂട്ടുമ്പോൾ മറ്റൊരു ചതുരത്തിന്റെ മൂല്യം കുറയുന്നു എന്നാണ്.

### വിപരീതാനുപാത വ്യതിയാനത്തിന്റെ ദിശാവൽക്കരണം:

അടുത്ത് കാണുന്ന ഗ്രാഫ് ശ്രദ്ധിക്കുക. ഇത് $xy = 8$ എന്ന സമീകരണത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് ആകുന്നു. $x$, $y$ എന്നിവയുടെ ധനസംഖ്യകൾ മാത്രമെ ഇവിടെ പരിഗണിക്കുന്നുള്ളു.

മൂല്യങ്ങളുടെ പട്ടിക എന്നാകുന്നു:

| $x$ | 1 | 2 | 4 | 8 |
|---|---|---|---|---|
| $y = \frac{8}{x}$ | 8 | 4 | 2 | 1 |




ചിത്രം. 3.12



3 Algebra Malayalam .indd 126 10/02/2023 11:47:54

ഇത് വീപരീതാനുപാതമാറ്റത്തിന്റെ ഒരു വീശദികരണമാണ്. ഗ്രാഫ് ദീർഘചതുര ഹൈപ്പർ ബോള എന്ന വക്ര രേഖയുടെ ഒരു ഭാഗമാണ്.

**ഉദാഹരണം 3.49** തുടക്കത്തിൽ നാൽപ്പത് തൊഴിലാളികളോടു കൂടി ആരംഭിച്ച ഒരു കമ്പനിക്ക് ഒരു ജോലി പൂർത്തിയാക്കാൻ 150 ദിവസങ്ങൾ വേണ്ടി വന്നു. ശേഷം താഴെ കാണുന്ന വിധം തൊഴിലാളികളാട് എണ്ണം വർദ്ധിപ്പിച്ച് ജോലി വേഗത്തിൽ പൂർത്തിയാക്കാൻ കമ്പനി തീരുമാനിച്ചു.

| തൊഴിലാളികളുടെ എണ്ണം (x) | 40 | 50 | 60 | 75 |
|---|---|---|---|---|
| ദിവസങ്ങളുടെ എണ്ണം (y) | 150 | 120 | 100 | 80 |

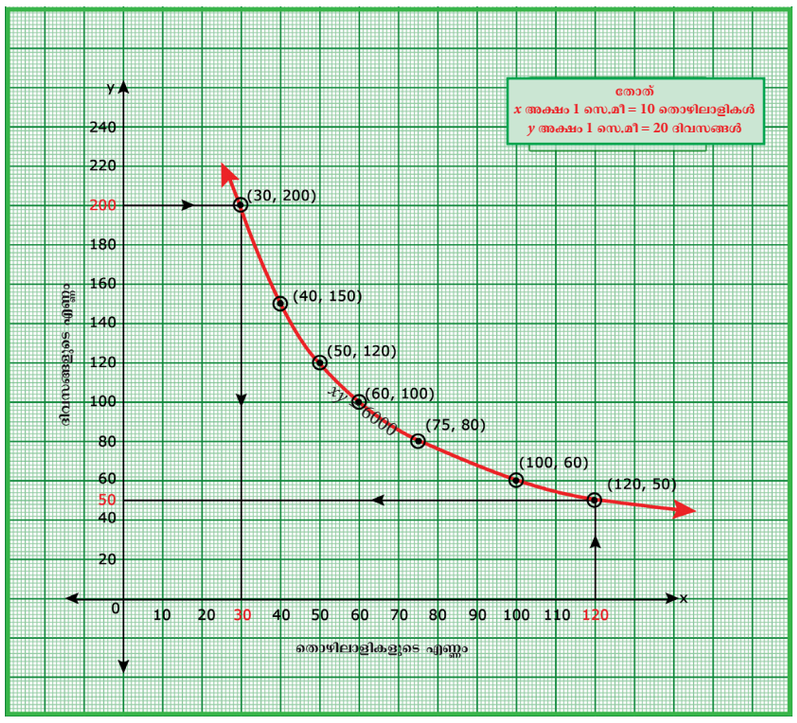
(i) മുകളിൽ കാണുന്ന വിവരങ്ങൾക്ക് ഗ്രാഫ് വരച്ച് ഏത് തരം വിത്യയാനമെന്ന് തിരിച്ചറിയുക.

(ii) ഗ്രാഫിൽ നിന്നും കമ്പനി 120 തൊഴിലാളികളെ നിയമിക്കാൻ തീരുമാനിക്കുകയാണെങ്കിൽ ജോലി പൂർത്തിയാക്കാൻ ആവശ്യമായ ദിവസങ്ങളുടെ എണ്ണം കാണുക.

(iii) 200 ദിവസങ്ങൾ കൊണ്ട് ജോലി പൂർത്തിയാക്കുന്നതിന് ആവശ്യമായ തൊഴിലാളികളുടെ എണ്ണം കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം**

(i)




ചിത്രം. 3.13

തന്നിട്ടുള്ള പട്ടികയിൽ നിന്നും $x$ കൂടുന്തോറും $y$ കുറയുന്നതായി കാണാം അതിനാൽ തന്നിട്ടുള്ള വ്യതിയാനം വിപരീതാനുപാത വ്യതിയാനമാണെന്ന് പറയാം

$y = \frac{k}{x}$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$\Rightarrow xy = k,\ k > 0$ വിത്യയാനത്തിന്റെ സ്ഥിരാങ്കം എന്ന് വിളിക്കുന്നു .

പട്ടികയിൽ നിന്നും, $k = 40 \times 150 = 50 \times 120 = \ldots = 75 \times 80 = 6000$

അതുകൊണ്ട് , $xy = 6000$

(40,150), (50,120), (60,100), (75,80) എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ അടയാളപ്പെടുത്തി ഒരു ഒഴുക്കാൻ വക്രമായി (ദീർഘചതുര ഹൈപ്പർബോള) യോജിപ്പിക്കുക.



3 Algebra Malayalam .indd 127 10/02/2023 11:47:55

(ii) ഗ്രാഫിൽ നിന്നും കമ്പനി 120 തൊഴിലാളികളെ നിയമിക്കാൻ തീരുമാനിക്കുകയാണെങ്കിൽ ജോലി പൂർത്തിയാക്കാനെടുക്കുന്ന ദിവസങ്ങളുടെ എണ്ണം 50 ദിവസങ്ങൾ ആകുന്നു.

കൂടാതെ, $xy = 6000$ ൽ നിന്നും $x = 120$, ആണെങ്കിൽ $y = \frac{6000}{120} = 50$ ആകുന്നു.

(iii) ഗ്രാഫിൽ നിന്നും 200 ദിവസങ്ങൾ കൊണ്ട് ജോലി പൂർത്തിയാക്കാൻ ആവശ്യമായ തൊഴിലാളികളുടെ എണ്ണം 30 ആകുന്നു.

കൂടാതെ, $xy = 6000$ ൽ നിന്നും $y = 200$, ആണെങ്കിൽ $x = \frac{6000}{200} = 30$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

**ഉദാഹരണം 3.50** 12 കീ.മി ദൂരമുള്ള മാരത്തോൺ ഓട്ടപ്പന്തയത്തിൽ നിഷാന്ത് ആണ് വിജയി. അവൻ 12 കീമി/ മണിക്കൂർ എന്ന നിശ്ചിത വേഗതയിൽ ഓടി കൃത്യം 1 മണിക്കൂറിൽ ലക്ഷ്യസ്ഥാന ത്തെത്തിച്ചേർന്നു. അവനു പിന്നാലെ ആരാധന, ജയന്ത്, സത്യ കൂടാതെ ശ്വേത എന്നിവർ യഥാക്രമം 6 കീ.മി / മണിക്കൂർ, 4 കീ.മി / മണിക്കൂർ, 3 കീ.മി / മണിക്കൂർ, കൂടാതെ 2 കീ.മി / മണിക്കൂർ, എന്നീ നിശ്ചിത വേഗതകളിൽ ഓടി. അവർ 2 മണിക്കൂറുകൾ, 3 മണിക്കൂറുകൾ, 4 മണിക്കൂറുകൾ, 6 മണിക്കൂറുകൾ, എന്നീ സമയങ്ങളിൽ ലക്ഷ്യസ്ഥാനത്തെത്തിച്ചേർന്നു.

വേഗത - സമയ ഗ്രാഫ് വരച്ച് ഇതുപയോഗിച്ച് കൗശിക് 2.4 കി.മീ / മണിക്കൂർ വേഗതയിൽ ഓടാൻ ആവശ്യമായ സമയം കണ്ടുപിടിക്കുക.

**നിർദ്ധാരണം:** തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങൾക്കനുസരിച്ച് ഒരു പട്ടിക തയ്യാറാക്കാം.

| **വേഗത x ( കി.മീ / മണിക്കൂർ)** | 12 | 6 | 4 | 3 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| **സമയം y (മണിക്കൂറുകൾ)** | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 |

പട്ടികയിൽ നിന്നും $x$ കുറയുന്തോറും $y$ കൂടുന്നതായി നമുക്ക് കാണാം അതിനാൽ ഇത് **വിപരിതാനുപാതവിതൃയാനത്തിലാണ്.**

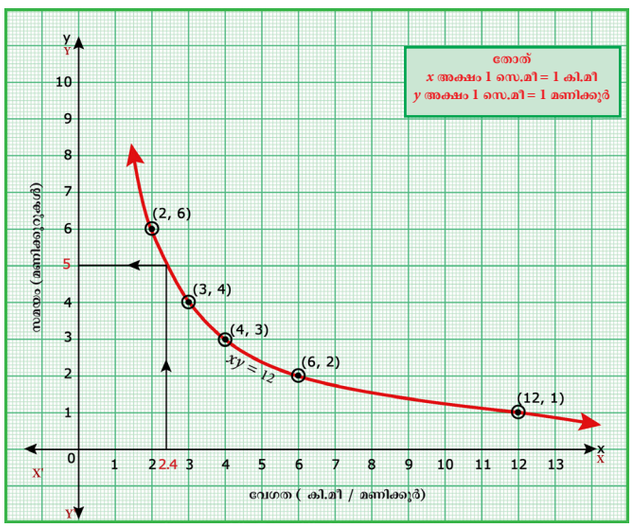
$y = \frac{k}{x}$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$\Rightarrow xy = k,\ k > 0$ യെ വ്യതിയാന സ്ഥിരാങ്കം എന്ന് വിളിക്കാം.

പട്ടികയിൽ നിന്നും $k = 12 \times 1 = 6 \times 2 = \ldots = 2 \times 6 = 12$

അതിനാൽ, $xy = 12$ ആകുന്നു.

(12,1), (6,2), (4,3), (3,4), (2,6) എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ അടയാളപ്പെടുത്തി ഒരു ഒഴുക്കൽ വക്രമായി (ദീർഘചതുര ഹൈപ്പർബോള) യോജിപ്പിക്കുക.




ചിത്രം. 3.14

ഗ്രാഫിൽ നിന്നും 2.4 കി.മീ/ മണിക്കൂർ വേഗതയിൽ ഓടിയാൽ ലക്ഷ്യസ്ഥാനം എത്തുന്നതിന് ആവശ്യമായ സമയം 5മണിക്കൂറുകൾ ആകുന്നു എന്ന് നമുക്ക് കാണാം.

**കുറിപ്പ്**

$y = mx+c$ നേർരേഖയുടെ രേഖീയ സമീകരണം ഇവിടെ $m$ എന്നത് നേർരേഖയുടെ ചായ്വും $c$ എന്നത് $y$ അന്തഃഖണ്ഡവും ആകുന്നു എന്നത് നാം നേരത്തേ പഠിച്ചു കഴിഞ്ഞു. നേർരേഖ മൂലബിന്ദുവിൽ കൂടി കടന്നു പോകുമ്പോൾ സമീകരണം $y = mx$ ആയി ചുരുങ്ങുന്നു. സമാനു പാതമാറ്റത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് ഒരു നേർരേഖയായതിനാലും അതിന്റെ പൊതുരൂപം $y = kx$ ആയതി നായും ആനുപാതിക സ്ഥിരാങ്കം എന്നത് ആ നേർരേഖയുടെ ചായ്വും ആകുന്നു എന്ന് നമുക്ക് നിർണ്ണയിക്കാൻ സാധിക്കും.



3 Algebra Malayalam .indd 128 10/02/2023 11:47:56

## അഭ്യാസം 3.15

1. ഒരു വസ്ത്ര വില്പനശാല അവരുടെ ഉപഭോക്താക്കൾക്കായി ഓരോ ഇനങ്ങളും വാങ്ങുമ്പോൾ 50% കിഴിവ് പ്രഖ്യാപിച്ചു. മുദ്രണം ചെയ്യപ്പെട്ട വിലയ്ക്കും കിഴിവിനും തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തിന് ഒരു ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക കൂടാതെ താഴെ പറയുന്നവ കാണുക.

   (i) ഉപഭോക്താവിന് തുക 3250 കിഴിവ് ലഭിക്കുകയാണെങ്കിൽ മുദ്രണം ചെയ്യപ്പെട്ട വില ( ഗ്രാഫ് ഉപയോഗിച്ച്)

   (ii) മുദ്രണം ചെയ്യപ്പെട്ട വില 2500 ആണെങ്കിൽ കിഴിവ്

2. $xy = 24$, $x, y > 0$ എന്നതിന്റെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക. ഗ്രാഫ് ഉപയോഗിച്ച് താഴെ പറയുന്നവ കാണുക,

   (i) $x = 3$ എങ്കിൽ $y$ കൂടാതെ (ii) $y = 6$ എങ്കിൽ $x$.

3. $y = \frac{1}{2}x$ . എന്ന രേഖീയ ഫലനത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക വ്യതിയാന സ്ഥിരാങ്കം കണ്ടുപിടിച്ച് അതിനെ ഗ്രാഫുമായി ശരി നോക്കുക കൂടാതെ (i) $x = 9$ എങ്കിൽ $y$ യുടെ മൂല്യം (ii) $y = 7.5$ എങ്കിൽ $x$ ന്റെ മൂല്യം എന്നിവ കാണുക.

4. ഓരോ തൊട്ടി നിറയ്ക്കുന്നതിനുള്ള പൈപ്പുകളുടെ എണ്ണവും അവയെടുക്കുന്ന സമയത്തിന്റെയും വിവരങ്ങൾ താഴെ കാണുന്ന പട്ടികയിൽ കൊടുത്തിട്ടുണ്ട്

| പൈപ്പുകളുടെ എണ്ണം (x) | 2 | 3 | 6 | 9 |
|---|---|---|---|---|
| ആവശ്യമായ സമയം ( മിനിട്ടിൽ) (y) | 45 | 30 | 15 | 10 |

   മുകളിൽ കാണുന്ന വിവരങ്ങൾക്ക് ഗ്രാഫ് വരച്ച് താഴെ പറയുന്നവ കാണുക

   (i) 5 പൈപ്പുകൾ ഉപയോഗിച്ച് തൊട്ടി നിറയ്ക്കാൻ ആവശ്യമായ സമയം

   (ii) 9 മിനിട്ടുകളിൽ തൊട്ടി നിറയ്ക്കാൻ ആവശ്യമായ പൈപ്പുകളുടെ എണ്ണം

5. ഒരു വിദ്യാലയത്തിൽ നടക്കുന്ന മത്സരത്തിൽ പങ്കെടുക്കുന്ന എല്ലാ മത്സരാർത്ഥികൾക്കും സമ്മാനത്തുക തുല്യമായി താഴെ കാണുന്ന വിധം നൽകുമെന്ന് ആ വിദ്യാലയം പ്രഖ്യാപിച്ചു.

| മത്സരാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം ($x$) | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| ഓരോ മത്സരാർത്ഥിക്കും ലഭിക്കുന്ന തുക ($y$) | 180 | 90 | 60 | 45 | 36 |

   (i) വ്യതിയാന സ്ഥിരാങ്കം കാണുക

   (ii) മുകളിൽ കാണുന്ന വിവരങ്ങൾക്ക് ഗ്രാഫ് വരച്ച് 12 മത്സരാർത്ഥികളാണ് പങ്കെടുക്കുന്നതെങ്കിൽ ഓരോ മത്സരാർത്ഥികൾക്കും ലഭിക്കുന്ന സമ്മാനത്തുക എത്രയാണെന്ന് കണ്ടുപിടിക്കുക

6. ബസ് സ്റ്റാൻഡിനു സമീപമുള്ള ഒരു ഇരുചക്രവാഹന പാർക്കിങ്ങ മേഖല താഴെ കാണുന്ന വിധം നിരക്കുകൾ ഈടുക്കുന്നു.

| സമയം ( മണിക്കൂറുകളിൽ) ($x$) | 4 | 8 | 12 | 24 |
|---|---|---|---|---|
| ചെലുത്തേണ്ട തുക ($y$) | 60 | 120 | 180 | 360 |

   പാർക്കിങ്ങ് സമയത്തിനനുസരിച്ച് ഈടാക്കുന്ന തുക സമാനുപാത വ്യതിയാനമാണോ അല്ലെങ്കിൽ വിപരീതാനുപാത വ്യതിയാനമാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക വിവരങ്ങളുടെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക കൂടാതെ (i)പാർക്കിങ്ങ് സമയം 6 മണിക്കൂറുകൾ ആണെങ്കിൽ ചെലുത്തേ തുക (ii) തുക150 ആണെങ്കിൽ പാർക്കിങ്ങ് സമയം എന്നിവ കാണുക.



3 Algebra Malayalam .indd 129 10/02/2023 11:47:57

## 3.8 ദ്വിഘാത ഗ്രാഫുകൾ



ചിത്രം. 3.8

### മുഖവുര

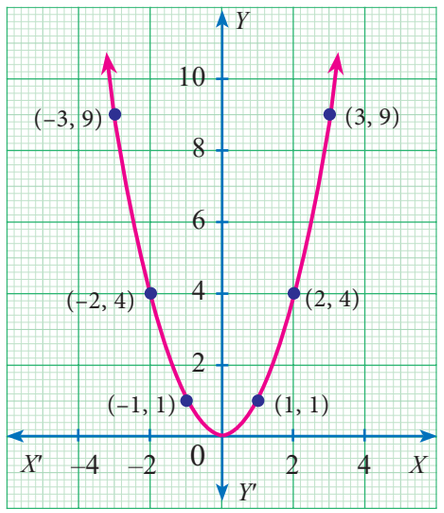
ഒരു കോണിൽ മുകളിലേക്ക് എറിയുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ (ഉദാഹരണം പന്ത്) സഞ്ചാരപഥം ഒരു വക്രം നൽകുന്നു. ഈ വക്രം പാരബോള എന്നറിയപ്പെടുന്നു. ഒരു ജലധാരയന്ത്രത്തിൽ നിന്നും പ്രവഹിക്കുന്ന ജലത്തിന്റെ സഞ്ചാരപഥം അല്ലെങ്കിൽ ബൗൺസിങ്ങ് പന്ത് എന്നിവയുടെ ഫലമായി ഒരു പാരബോളിക് പാത ഉണ്ടാകുന്നു. പാരബോള ഒരു ദ്വിഘാത ഫലനത്തെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു.

ഒരു ദ്വിഘാത ഫലനം $f(x) = ax^2 + bx + c$ ഇവിടെ $a,\ b,\ c$ എന്നിവ സ്ഥിരാങ്കങ്ങൾ കൂടാതെ $a \neq 0$ എന്ന രൂപത്തിലാണ്.

പല ദ്വിഘാത സമീകരണങ്ങളുടെയും ഗ്രാഫുകളെ നീട്ടി/ചുരുക്കി $y = x^2$ എന്ന സമ്പ്രാദയത്തിലൂടെ കൈകൊണ്ട് എളുപ്പത്തിൽ വരക്കാൻ സാധിക്കും. $y = x^2$ എന്ന വക്രരേഖയുടെ ഗ്രാഫ് മൂല്യങ്ങളെ പട്ടികയിട്ട് ക്രമജോഡികളെ കുറിക്കുന്നതിലൂടെ എളുപ്പത്തിൽ വരക്കാം.

$y = x^2$ എന്ന അടിസ്ഥാന പാരബോള ചിത്രം 3.9 ൽ കാണുന്നതുപോലെ ഇരിക്കും.

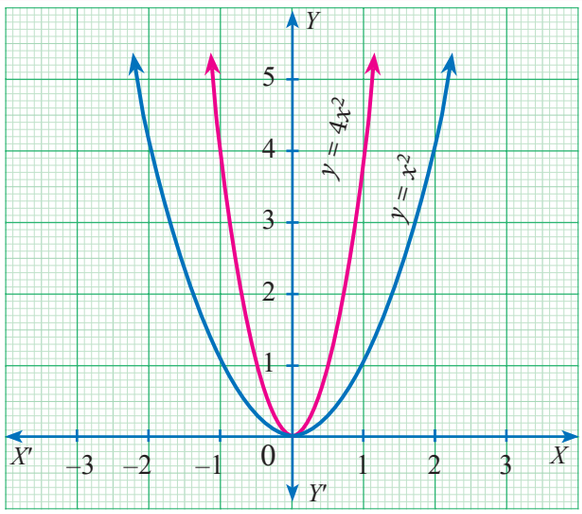
പൊതുസമവാക്യത്തിലുള്ള ഗുണാങ്കം $a$ ആണ് ഒരു പാരബോള മുകളിലേക്ക് തുറന്നിരിക്കുന്നതിനും കീഴോട്ട് തുറന്നിരിക്കുന്നതിനും അടിസ്ഥാനം. അവയുടെ അകലങ്ങളിൽ (വിശാലമായത്/ചുരുങ്ങിയത്) വ്യത്യാസമുണ്ടെങ്കിലും എല്ലാത്തിന്റെയും അടിസ്ഥാന രൂപം "∪" ആയിരിക്കും.




ചിത്രം. 3.9

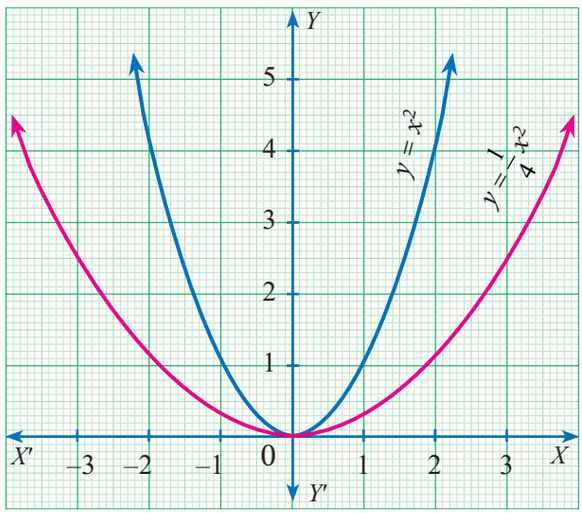
$x^2$ ന്റെ ദ്വിഘാത ഗുണാങ്കം വലുതാണെങ്കിൽ പാരബോള ചുരുങ്ങിയതായിരിക്കും.

$x^2$ ന്റെ ദ്വിഘാത ഗുണാങ്കം ചെറുതാണെങ്കിൽ പാരബോള വിസ്തൃതമായിരിക്കും.




ചിത്രം. 3.10

$y = 1x^2$ ന്റെ ഗ്രാഫ് $y = 4x^2$ ന്റെ ഗ്രാഫിനെക്കാൾ വിസ്തൃതമാണ്




ചിത്രം. 3.11

$y = 1x^2$ ന്റെ ഗ്രാഫ് $y = \frac{1}{4}x^2$ ന്റെ ഗ്രാഫിനെക്കാൾ ചുരുങ്ങിയതാണ്



3 Algebra Malayalam .indd 130 10/02/2023 11:48:00

പ്രതിസാമ്യതാ അക്ഷം എന്ന് അറിയപ്പെടുന്ന രേഖയ്ക്ക് അനുസ്യൂതമായി ഒരു പാരബോളയെ പ്രതിസാമ്യം എന്ന് പറയാം. പാരബോളയുടെയും പ്രതിസാമ്യതാഅക്ഷത്തിന്റെയും പ്രതിഛേദബിന്ദുവിനെ പാരബോളയുടെ ശീർഷം എന്ന് പറയാം. ഏതൊരു രണ്ടാം കൃതി ബഹുപദവ്യഞ്ജകത്തിന്റെയും ഗ്രാഫുകൾ പാരബോള എന്ന വക്രത്തെ നൽകുന്നു.

**കുറിപ്പ്:** ഒരു ദ്വിഘാത സമവാക്യത്തിന് അക്ഷം $x = \frac{-b}{2a}$ കൂടാതെ ശീർഷം $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ ആകുന്നു ഇവിടെ $\Delta = b^2 - 4ac$ യെ $ax^2 + bx + c = 0$ $a \neq 0$ എന്ന ദ്വിഘാത സമവാക്യത്തിന്റെ വിവേചനം എന്ന് പറയുന്നു.

$ax^2 + bx + c = 0$, ഇവിടെ $a, b, c \in \mathbb{R}$ കൂടാതെ $a \neq 0$ എന്ന ദ്വിഘാത സമവാക്യത്തിന്റെ മൂലസംഖ്യകൾ സൂത്രാത്മകമായി കണ്ടുപിടിക്കുന്നതെങ്ങനെ എന്ന് നാം മുമ്പ് പഠിച്ചു. നാം ഈ ഭാഗത്തിൽ ഗ്രാഫ് മുഖേന ദ്വിഘാത സമവാക്യത്തെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്ത് അതിന്റെ മൂലസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുന്നതെങ്ങനെ എന്ന് പഠിക്കും.

### 3.8.1 ഗ്രാഫ് മുഖേന ഒരു ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണത്തിന്റെ സ്വഭാവം കണ്ടു പിടിക്കൽ (Finding the Nature of Solution of Quadratic Equations Graphically)

ഗ്രാഫ് മുഖേന $ax^2 + bx + c = 0$ ഒരു ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന്റെ മൂലസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് നാം ആദ്യം $y = ax^2 + bx + c$ യുടെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കണം.

ദ്വീഘാത സമീകരണത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണങ്ങൾ എന്നത് വക്രരേഖ $X$ അക്ഷവുമായ സന്ധിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെ $x$ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങളാണ്.

ഒരു ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണങ്ങളുടെ സ്വഭാവം നിർണ്ണയിക്കുന്നതിന് താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ഘട്ടങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കാം.

(i) തന്നിട്ടുള്ള ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് $X$ അക്ഷത്തെ രണ്ട് വ്യത്യസ്ത ബിന്ദുക്കളിൽ ഛേദിക്കുകയാണെങ്കിൽ തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണത്തിന് രണ്ട് വ്യത്യസ്ത വാസ്തവിക മൂലസംഖ്യകൾ ഉണ്ടാകും.

(ii) തന്നിട്ടുള്ള ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് $X$ അക്ഷത്തെ ഒരേയൊരു ബിന്ദുവിൽ ഛേദിക്കുകയാണെങ്കിൽ തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണത്തിന് ഒരേയൊരു മൂലസംഖ്യ (ഇത് രണ്ട് വാസ്തവികം കൂടാതെ തുല്യ മൂലസംഖ്യകൾക്ക് സമമാണ്) മാത്രമേ ഉണ്ടായിരിക്കുകയുള്ളൂ.

(iii) തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് $X$ അക്ഷത്തെ ഒരു ബിന്ദുവിലും ഛേദിക്കുന്നില്ല എങ്കിൽ തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണത്തിന് ഒരു വാസ്തവിക മൂലസംഖ്യയും ഉണ്ടായിരിക്കില്ല.

**ഉദാഹരണം 3.51** താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ദ്വിഘാത സമീകരണങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണങ്ങളുടെ സ്വഭാവം ഗ്രാഫ് മുഖേന പരിശോധിക്കുക.

(i) $x^2 + x - 12 = 0$ (ii) $x^2 - 8x + 16 = 0$ (iii) $x^2 + 2x + 5 = 0$

**നിർദ്ധാരണം**

(i) $x^2 + x - 12 = 0$

**ഘട്ടം 1** $y = x^2 + x - 12$ എന്ന സമീകരണത്തിന്റെ മൂല്യങ്ങൾ പട്ടികയിടുക.

| $x$ | $-5$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $8$ | $0$ | $-6$ | $-10$ | $-12$ | $-12$ | $-10$ | $-6$ | $0$ | $8$ |

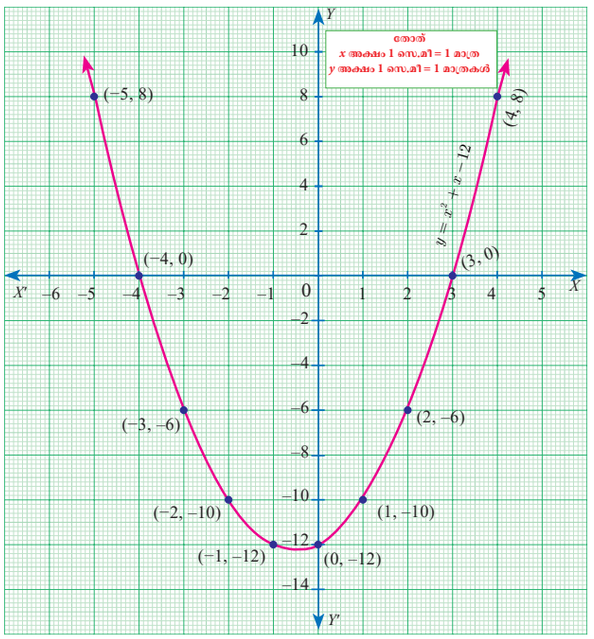


3 Algebra Malayalam .indd 131 10/02/2023 11:48:01

**ഘട്ടം 2** ഗ്രാഫിൽ അനുയോജ്യമായ സ്കെയിൽ (തോത്) തെരഞ്ഞെടുത്ത് മുകളിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന ക്രമജോഡികളിൽ $(x,\ y)$ ഉള്ള ബിന്ദുക്കളെ ഗ്രാഫിൽ കുറിക്കുക.

**ഘട്ടം 3** പാരബോള വരയുക കൂടാതെ പാരബോള X അക്ഷവുമായി സന്ധിക്കുന്ന നിർദേശാങ്കങ്ങളെ കുറിക്കുക.

**ഘട്ടം 4** പാരബോള X അക്ഷവുമായി സന്ധിക്കുന്ന പ്രതിഛേദബിന്ദുക്കൾ $(-4,\ 0)$, കൂടാതെ $(3,0)$ എന്നിവയുടെ $x$ നിർദേശാങ്കങ്ങളായ $-4$ കൂടാതെ 3 എന്നിവയാണ് സമീകരണത്തിന്റെ മൂലസംഖ്യകൾ.



ചിത്രം. 3.19

X അക്ഷത്തിൽ രണ്ട് പ്രതിഛേദബിന്ദുക്കൾ ഉള്ളതിനാൽ ദ്വിഘാത സമീകരണം $x^2 + x - 12 = 0$ യുടെ മൂലസംഖ്യകൾ വാസ്തവികവും വ്യത്യസ്തവും ആയിരിക്കും.

(ii) $x^2 - 8x + 16 = 0$

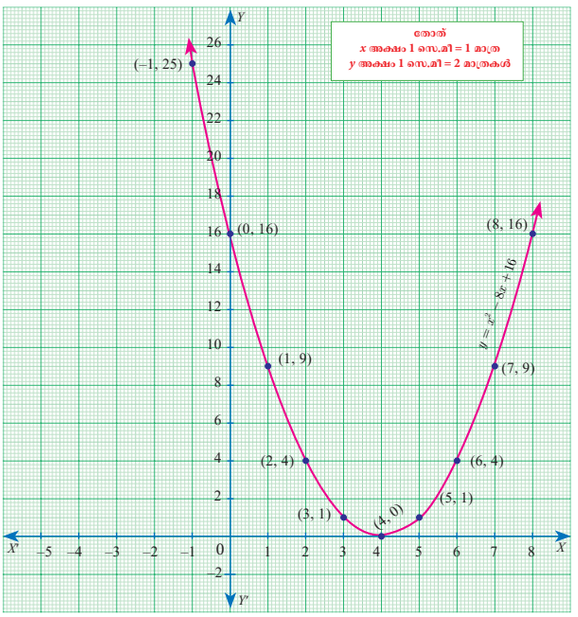
**ഘട്ടം 1** $y = x^2 - 8x + 16$ എന്ന സമവാക്യത്തിനുള്ള മൂല്യങ്ങളുടെ പട്ടിക തയ്യാറാക്കുക

| $x$ | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 25 | 16 | 9 | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 |

**ഘട്ടം 2** ഗ്രാഫിൽ അനുയോജ്യമായ സ്കെയിൽ തെരഞ്ഞെടുത്ത് മുകളിൽ കാണുന്ന ക്രമജോഡികളിൽ ഉള്ള $(x,\ y)$ ബിന്ദുക്കളെ ഗ്രാഫിൽ കുറിക്കുക .

**ഘട്ടം 3** പാരബോള വരഞ്ഞ് അത് $X$ അക്ഷത്തെ സന്ധിക്കുന്ന നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ കുറിക്കുക.

**ഘട്ടം 4** പാരബോള $X$ അക്ഷവുമായി സന്ധിക്കുന്ന പ്രതിഛേദ ബിന്ദു $(4,0)$ യുടെ $X$ നിർദേശാങ്കം 4 ആണ് തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണത്തിന്റെ മൂലസംഖ്യകൾ.



ചിത്രം. 3.20

$X$ അക്ഷത്തിൽ ഒരേയൊരു പ്രതിഛേദ ബിന്ദു മാത്രം ഉള്ളതിനാൽ $x^2 - 8x + 16 = 0$ എന്ന ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന് വാസ്തവികം കൂടാതെ തുല്യ മൂല സംഖ്യകൾ ആണുള്ളത്.

(iii) $x^2 + 2x + 5 = 0$

$y = x^2 + 2x + 5$ എന്നിരിക്കട്ടെ

**ഘട്ടം 1** $y = x^2 + 2x + 5$ എന്ന സമവാക്യത്തിനുള്ള മൂല്യങ്ങളെ പട്ടികയിടുക.

| $x$ | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 8 | 5 | 4 | 5 | 8 | 13 | 20 |

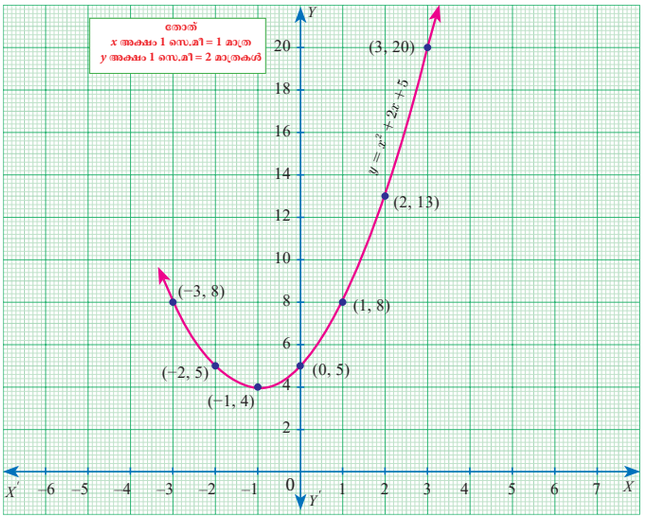


3 Algebra Malayalam .indd 132 10/02/2023 11:48:05

**ഘട്ടം 2** ഗ്രാഫിൽ അനുയോജ്യമായ സ്കെയിൽ തെരഞ്ഞെടുത്ത് മുകളിൽ കാണുന്ന ക്രമജോഡികളിലുള്ള $(x,\ y)$ ബിന്ദുക്കളെ ഗ്രാഫിൽ കുറിക്കുക.

**ഘട്ടം 3** ബിന്ദുക്കളെ ഒരു ഒഴുക്കൻ വക്രമായി വരയ്ക്കുക. ഇതാണ് $y = x^2 + 2x + 5$ ന്റെ ഗ്രാഫ്

**ഘട്ടം 4** പാരബോള $X$ അക്ഷവുമായി സന്ധിക്കുന്ന പ്രതിഛേദബിന്ദുക്കളിലെ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങളാണ് തന്നിട്ടുള്ള ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണങ്ങൾ.



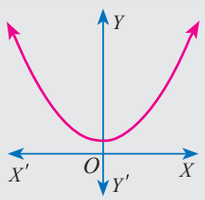
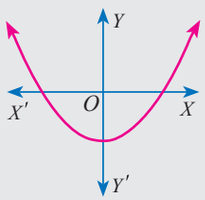
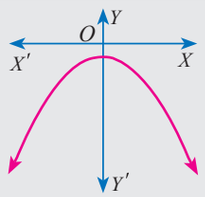
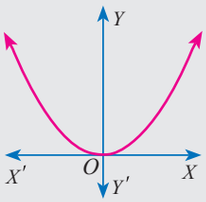
ചിത്രം. 3.21

ഇവിടെ പാരബോള $X$ അക്ഷത്തെ ഒരു ബിന്ദുവിലും സന്ധിക്കുന്നില്ല.

അതുകൊണ്ട് നാം തന്നിട്ടുള്ള ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന് ഒരു വാസ്തവിക മൂല്യങ്ങളും ഇല്ല എന്ന നിഗമനത്തിൽ എത്തിച്ചേരുന്നു.

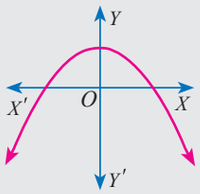
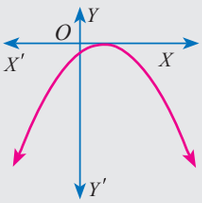
## പുരോഗതി പരിശോധന

തന്നിട്ടുള്ള ഗ്രാഫുകളെ അവയുടെ $X$ അക്ഷവുമായുള്ള പ്രതിഛേദ ബിന്ദുക്കളുടെ എണ്ണം,അതിനനുസൃതമായ നിർദ്ധാരണങ്ങളുടെ സ്വഭാവം എന്നിവയുമായി ബന്ധപ്പെടുത്തുക.

| നം. | ഗ്രാഫുകൾ | അക്ഷവുമായുള്ള പ്രതിഛേദ ബിന്ദുക്കളുടെ എണ്ണം | നിർദ്ധാരണങ്ങളുടെ സ്വഭാവം |
|---|---|---|---|
| 1. |  | 2 | മൂലസംഖ്യകൾ വാസ്തവികം കൂടാതെ തുല്യം |
| 2. |  | 1 | വാസ്തവിക മൂല സംഖ്യകൾ ഇല്ല |
| 3. |  | 2 | വാസ്തവിക മൂലസംഖ്യകൾ ഇല്ല |
| 4. |  | 0 | മൂലസംഖ്യകൾ വാസ്തവികം കൂടാതെ തുല്യം |



3 Algebra Malayalam .indd 133 10/02/2023 11:48:06

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5. |  | 0 | മൂലസംഖ്യകൾ വാസ്തവികം കൂടാതെ വ്യത്യസ്തം |
| 6. |  | 1 | മൂലസംഖ്യകൾ വാസ്തവികം കൂടാതെ വ്യത്യസ്തം |

### 3.8.2 രേഖകളുടെ പ്രതിഛേദബിന്ദു മുഖേന ദ്വിഘാത സമീകരണങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണം (Solving equations through intersection of lines)

തന്നിട്ടുള്ള പാരബോള നേർരേഖയുമായി പ്രതിഛേദിക്കുന്ന ഗ്രാഫ് മുഖേന നമുക്ക് ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന്റെ മൂലസംഖ്യകൾ നിർണ്ണയിക്കാം.

(i) $x$ നേർരേഖ പാരബോളയെ രണ്ട് വ്യത്യസ്ത ബിന്ദുക്കളിൽ പ്രതിഛേദിക്കുയാണെങ്കിൽ ആ പ്രതിഛേദ ബിന്ദുക്കളുടെ $x$ നിർദ്ദേശങ്കങ്ങൾ തന്നിട്ടുള്ള ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന്റെ മൂലസംഖ്യകൾ ആയിരിക്കും.

(ii) നേർരേഖ പാരബോളയെ ഒരേയൊരു ബിന്ദുവിൽ മാത്രം ഛേദിക്കുകയാണെങ്കിൽ ആ പൊതു ബിന്ദുവിന്റെ $x$ നിർദ്ദേശാങ്കം ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന്റെ ഒരേയൊരു മൂലസംഖ്യ ആയിരിക്കും.

(iii) നേർരേഖ പാരബോളയെ ഒരു ബിന്ദുവിലും ഛേദിക്കുന്നില്ല എങ്കിൽ ആ ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന് ഒരു വാസ്തവിക മൂലസംഖ്യയും ഉണ്ടായിരിക്കുന്നതല്ല.

**ഉദാഹരണം 3.52** $y = 2x^2$ ന്റെ ഗ്രാഫ് വരച്ച് $2x^2 - x - 6 = 0$ എന്ന സമീകരണം നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക

**നിർദ്ധാരണം** **ഘട്ടം 1** താഴെ കാണുന്ന പ്രകാരം മൂല്യങ്ങളുടെ പട്ടിക തയ്യാറാക്കി $y=2x^2$ എന്ന ഗ്രാഫ് വരക്കുക

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $8$ | $2$ | $0$ | $2$ | $8$ |

**ഘട്ടം 2** $2x^2 - x - 6 = 0$ യെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നതിന് $2x^2 - x - 6 = 0$ യെ $y = 2x^2$ ൽ നിന്നും കുറക്കുക

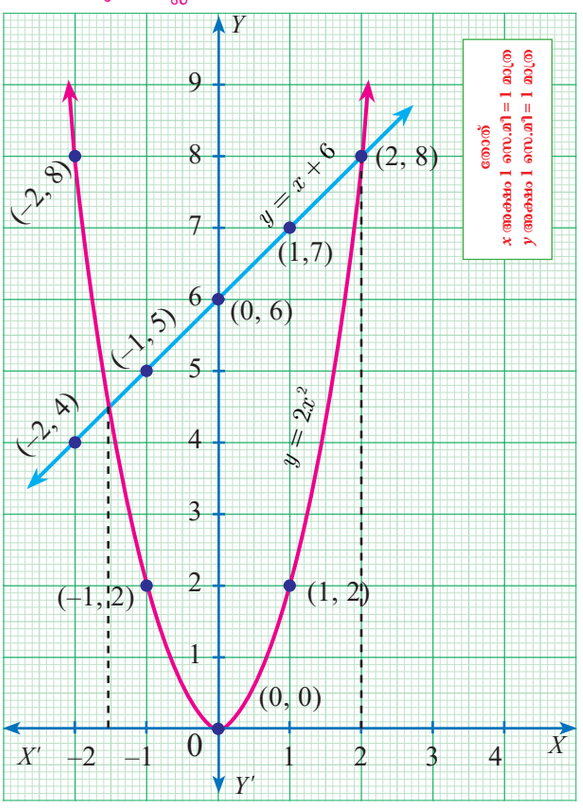
അതായത് $y = 2x^2$

$0 = 2x^2 - x - 6$ $(-)$

$y = x + 6$

$y = x + 6$ എന്ന സമീകരണം ഒരു നേർരേഖയെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. താഴെ കാണുന്നതുപോലെ മൂല്യങ്ങളുടെ പട്ടിക തയ്യാറാക്കി $y=x+6$ ന്റെ ഗ്രാഫ് വരക്കുക

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $4$ | $5$ | $6$ | $7$ | $8$ |




ചിത്രം. 3.22



3 Algebra Malayalam .indd 134 10/02/2023 11:48:09

**ഘട്ടം 3** $y = 2x^2$ എന്ന വക്രത്തിന്റെയും $y = x + 6$. എന്ന നേർരേഖയുടെയും പ്രതിഛേദ ബിന്ദുവിനെ അടയാളപ്പെടുത്തുക.അതായത് $(-1.5, 4.5)$ കൂടാതെ $(2,8)$

**ഘട്ടം 4** ആ ബിന്ദുക്കളുടെ $x$ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ $\{-1.5, 2\}$ ആകുന്നു. അതിനാൽ $2x^2 - x - 6 = 0$ എന്ന സമീകരണത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണം $-1.5$ കൂടാതെ $2$ ആകുന്നു.

**ഉദാഹരണം 3.53** $y = x^2 + 4x + 3$ ന്റെ ഗ്രാഫ് വരച്ച് $x^2 + x + 1 = 0$ എന്ന സമീകരണത്തിന്റെ മൂലസംഖ്യകൾ കാണുക

**നിർദ്ധാരണം**

**ഘട്ടം 1** താഴെ തന്നിട്ടുള്ള പ്രകാരം മൂല്യങ്ങളെ പട്ടികയിലാക്കി $y = x^2 + 4x + 3$ യുടെ ഗ്രാഫ് വരക്കുക

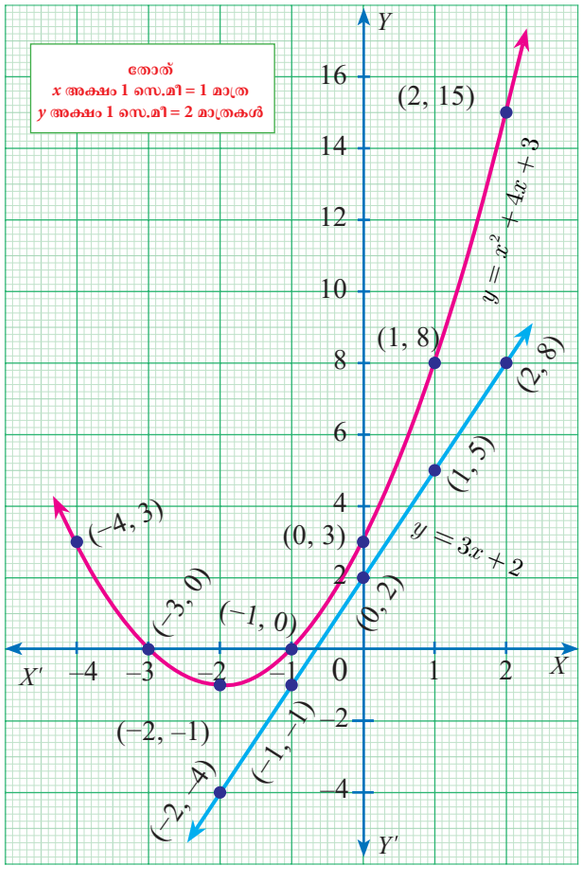
| $x$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $3$ | $0$ | $-1$ | $0$ | $3$ | $8$ | $15$ |

**ഘട്ടം 2** $x^2 + x + 1 = 0$ യെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നതിന് $x^2 + x + 1 = 0$ യെ $y = x^2 + 4x + 3$ ൽ നിന്നും കുറക്കുക.അതായത്

$$\begin{array}{rl} y = & x^2 + 4x + 3 \\ 0 = & x^2 + x + 1 \\ \hline y = & 3x+2 \end{array} \quad (-)$$

ഈ സമീകരണം ഒരു നേർരേഖയെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. താഴെ കാണുന്നതുപോലെ മൂല്യങ്ങളെ പട്ടികയിലാക്കി $y = 3x+2$ ന്റെ ഗ്രാഫ് വരക്കുക.

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-4$ | $-1$ | $2$ | $5$ | $8$ |




ചിത്രം. 3.16

**ഘട്ടം 3** $y = 3x+2$ എന്ന ഗ്രാഫ് $y = x^2 + 4x + 3$ എന്ന പാരബോളയുടെ ഗ്രാഫിനെ പ്രതിഛേദിച്ചില്ല എന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക

അതിനാൽ $x^2 + x + 1 = 0$ യ്ക്ക് വാസ്തവിക മൂലസംഖ്യകൾ ഇല്ല.

**ഉദാഹരണം 3.54** $y = x^2 + x - 2$ ന്റെ ഗ്രാഫ് വരച്ച് $x^2 + x - 2 = 0$ യുടെ നിർദ്ധാരണം കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം**

**ഘട്ടം 1** താഴെ തന്നതുപോലെ മൂല്യങ്ങളെ പട്ടികയിലാക്കി $y = x^2 + x - 2$ ന്റെ ഗ്രാഫ് വരക്കുക

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $4$ | $0$ | $-2$ | $-2$ | $0$ | $4$ |

**ഘട്ടം 2** $x^2 + x - 2 = 0$ നെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നതിന് $x^2 + x - 2 = 0$ യെ $y = x^2 + x - 2$ ൽ നിന്നും കുറക്കുക



3 Algebra Malayalam .indd 135 10/02/2023 11:48:13

അതായത്
$$\begin{array}{rl} y = & x^2 + x - 2 \\ 0 = & x^2 + x - 2 \\ \hline y = & 0 \end{array} \quad (-)$$

$y = 0$ എന്ന സമീകരണം $X$ അക്ഷത്തെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു.

**ഘട്ടം 3** പാരബോള $y = x^2 + x - 2$ ന്റെ X അക്ഷവുമായുള്ള പ്രതിഛേദബിന്ദുവിനെ കുറിക്കുക. അതായത് $(-2,0)$ കൂടാതെ $(1,0)$ എന്നിവയാകുന്നു

**ഘട്ടം 4** ആ ബിന്ദുക്കളുടെ $x$ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ $-2$ കൂടാതെ $1$ എന്നിവ തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണം $x^2 + x - 2 = 0$ യുടെ നിർദ്ധാരണഗണം $\{-2, 1\}$ രൂപീകരിക്കുന്നു

**ഉദാഹരണം 3.55** $y = x^2 - 4x + 3$ ന്റെ ഗ്രാഫ് വരക്കുക. ഇതുപയോഗിച്ച് $x^2 - 6x + 9 = 0$ യുടെ നിർദ്ധാരണം കാണുക

### നിർദ്ധാരണം

**ഘട്ടം 1** താഴെ തന്നവിധം മൂല്യങ്ങളെ പട്ടികയിട്ട് $y = x^2 - 4x + 3$ ന്റെ ഗ്രാഫ് വരക്കുക

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $15$ | $8$ | $3$ | $0$ | $-1$ | $0$ | $3$ |

**ഘട്ടം 2** $x^2 - 6x + 9 = 0$, യെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നതിന് $x^2 - 6x + 9 = 0$ യെ $y = x^2 - 4x + 3$ ൽ നിന്നും കുറക്കുക

അതായത് $y = x^2 - 4x + 3$
$$\begin{array}{rl} 0 = & x^2 - 6x + 9 \\ \hline y = & 2x - 6 \end{array} \quad (-)$$

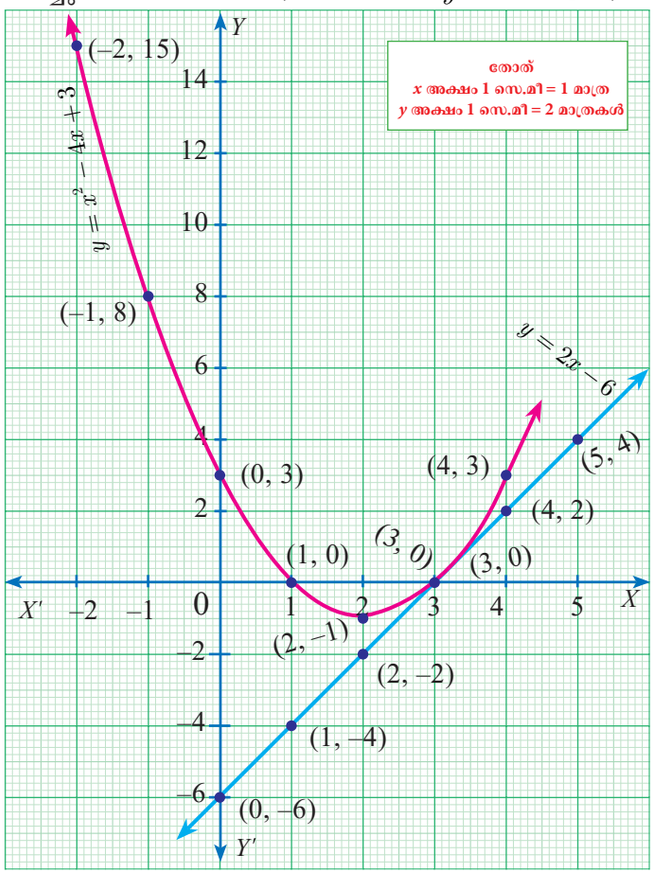
$y = 2x - 6$ എന്ന സമീകരണം ഒരു നേർരേഖയെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. താഴെ തന്നവിധം മൂല്യങ്ങളെ പട്ടികയിട്ട് $y = 2x - 6$ ന്റെ ഗ്രാഫ് വരക്കുക.

| $x$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-6$ | $-4$ | $-2$ | $0$ | $2$ | $4$ |

$y = 2x - 6$ എന്ന രേഖ $y = x^2 - 4x + 3$ നെ ഒരേ ഒരു ബിന്ദുവിൽ മാത്രം പ്രതിഛേദിക്കുന്നു.

**ഘട്ടം 3** $y = x^2 - 4x + 3$ കൂടാതെ $y = 2x - 6$ എന്നിവയുടെ പ്രതിഛേദബിന്ദു കുറിക്കുക. അത് $(3,0)$ ആകുന്നു.

അതിനാൽ തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണം $x^2 - 6x + 9 = 0$ യുടെ ഒരേയൊരു നിർദ്ധാരണം $x$ നിർദ്ദേശാങ്കം $3$ ആകുന്നു




ചിത്രം. 3.18



3 Algebra Malayalam .indd 136 10/02/2023 11:48:17

## അഭ്യാസം 3.16

1. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ദ്വിഘാത സമീകരണങ്ങളുടെ ഗ്രാഫ് വരച്ച് അവയുടെ നിർദ്ധാരണങ്ങളുടെ സ്വഭാവം നിർണ്ണയിക്കുക.

(i) $x^2 - 9x + 20 = 0$ (ii) $x^2 - 4x + 4 = 0$ (iii) $x^2 + x + 7 = 0$

(iv) $x^2 - 9 = 0$ (v) $x^2 - 6x + 9 = 0$ (vi) $(2x - 3)(x + 2) = 0$

2. $y = x^2 - 4$ ന്റെ ഗ്രാഫ് വരച്ച് $x^2 - x - 12 = 0$ യുടെ നിർദ്ധാരണം കാണുക
3. $y = x^2 + x$ ന്റെ ഗ്രാഫ് വരച്ച് $x^2 + 1 = 0$ യുടെ നിർദ്ധാരണം കാണുക
4. $y = x^2 + 3x + 2$ ന്റെ ഗ്രാഫ് വരച്ച് $x^2 + 2x + 1 = 0$ യുടെ നിർദ്ധാരണം കാണുക
5. $y = x^2 + 3x - 4$ ന്റെ ഗ്രാഫ് വരച്ച് $x^2 + 3x - 4 = 0$ യുടെ നിർദ്ധാരണം കാണുക
6. $y = x^2 - 5x - 6$ ന്റെ ഗ്രാഫ് വരച്ച് $x^2 - 5x - 14 = 0$ യുടെ നിർദ്ധാരണം കാണുക
7. $y = 2x^2 - 3x - 5$ ന്റെ ഗ്രാഫ് വരച്ച് $2x^2 - 4x - 6 = 0$ യുടെ നിർദ്ധാരണം കാണുക
8. $y = (x - 1)(x + 3)$ ന്റെ ഗ്രാഫ് വരച്ച് $x^2 - x - 6 = 0$ യുടെ നിർദ്ധാരണം കാണുക

## 3.9 മാട്രിക്സുകൾ

### മുഖവുര

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളെ പരിഗണിക്കുക. വനിതയുടെ കൈയ്യിൽ 12 കഥാപുസ്തകങ്ങളും 20 നോട്ട് ബുക്കുകളും 4 പെൻസിലുകളും ഉണ്ട് രാധയുടെ കൈയ്യിൽ 27 കഥാപുസ്തകങ്ങളും 17 നോട്ട് ബുക്കുകളും 6 പെൻസിലുകളും ഉണ്ട്. ഗോകുലിന്റെ കൈയ്യിൽ 7 കഥാപുസ്തകങ്ങളും 11 നോട്ട് ബുക്കുകളും 4 പെൻസിലുകളും ഉണ്ട്. ഗീതയുടെ കൈയ്യിൽ 10 കഥാപുസ്തകങ്ങളും 12 നോട്ട് ബുക്കുകളും 5 പെൻസിലുകളും ഉണ്ട്.

| വിവരങ്ങൾ | കഥാപുസ്തകങ്ങൾ | നോട്ട് ബുക്കുകൾ | പെൻസിലുകൾ |
|---|---|---|---|
| വനിത | 12 | 20 | 4 |
| രാധ | 27 | 17 | 6 |
| ഗോകുൽ | 7 | 11 | 4 |
| ഗീത | 10 | 12 | 5 |

തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളെ പട്ടികാരൂപത്തിൽ ക്രമീകരിക്കാം.

ആദ്യത്തെ വരി
രണ്ടാമത്തെ വരി
മൂന്നാമത്തെ വരി
നാലാമത്തെ വരി

$$\begin{pmatrix} 12 & 20 & 4 \\ 27 & 17 & 6 \\ 7 & 11 & 4 \\ 10 & 12 & 5 \end{pmatrix}$$

ആദ്യത്തെ നിര രണ്ടാമത്തെ നിര മൂന്നാമത്തെ നിര

ഇവിടെ നാല് വ്യക്തികളുടെയും കൈയ്യിലുള്ള വസ്തുക്കളെ 4 തിരശ്ചീന ക്രമീകരണങ്ങളും 3 ലംബ ക്രമീകരണങ്ങളും അടങ്ങിയ ദീർഘചതുരാകൃതിയിലുള്ള ശ്രേണിയായിട്ടാണ് അവതരിപ്പിച്ചിട്ടുള്ളത്. തിരശ്ചീന ക്രമീകരണങ്ങളെ വരികൾ എന്നും ലംബ ക്രമീകരണങ്ങളെ നിരകൾ എന്നും വിളിക്കുന്നു. ഈ ദീർഘചതുരാകൃതിയിലുള്ള ക്രമീകരണത്തെ മാട്രിക്സ് എന്ന് വിളിക്കുന്നു. പൊതുവായി നമ്മൾ വസ്തുക്കളെ ദീർഘചതുരാകൃതിയിൽ ക്രമീകരിച്ചാൽ ആ ക്രമീകരണത്തെ മാട്രിക്സ് എന്ന് വിളിക്കാം.

മാട്രിക്സുകളുടെ പ്രയോഗങ്ങൾ വിവിധ ശാസ്ത്ര ശാഖകളിൽ കാണാം. ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിൽ ബാറ്ററി പവർ ഔട്ട്പുട്ടുകളുടെ കണക്കുകൂട്ടലുകളിൽ വൈദ്യുതോർജ്ജത്തെ മറ്റ് ഊർജ്ജ രൂപങ്ങളിലേക്ക് മാറ്റുമ്പോഴുള്ള പ്രതിരോധ പരിവർത്തനങ്ങളിൽ എല്ലാം തന്നെ മാട്രിക്സുകളുടെ പ്രയോഗങ്ങൾ കാണാം. കമ്പ്യൂട്ടർ അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ള പ്രയോഗങ്ങളിൽ ത്രിമാന ചിത്രങ്ങളെ യഥാർത്ഥ്യചലനങ്ങളോടു കൂടിയ



3 Algebra Malayalam .indd 137 10/02/2023 11:48:20

ദ്വിമാന ചിത്രങ്ങളായി രൂപകൽപ്പന ചെയ്യുന്നതിൽ മാട്രിക്സുകൾ പ്രധാന പങ്ക് വഹിക്കുന്നുണ്ട്. ഗ്രാഫിക് സോഫ്റ്റ്വയറിൽ ചിത്രങ്ങളെ അവതരിപ്പിക്കുന്നതിന് ഉപയോഗിക്കുന്ന രേഖീയ പരിവർത്തനം (Liner Transformation) എന്ന പ്രക്രിയയിൽ മാട്രിക്സ് ബീജഗണിതം വളരെ വലിയ പങ്ക് വഹിക്കുന്നുണ്ട്. മാട്രിക്സുകളുടെ ഏറ്റവും പ്രധാനപ്പെട്ട ഉപയോഗം സന്ദേശ കോഡുകളുടെ നിർമ്മാണം ആണ്. ഗൂഢഭാഷ തയ്യാറുക്കുന്നതിനും (Encryption) ഗൂഢഭാഷ മാറ്റുന്നതിനും (Decryption) മാട്രിക്സ് ഗുണനവും വിപരീത പ്രവർത്തനങ്ങളും ഉപയോഗിക്കുന്നു. സന്ദേശങ്ങൾ വലുതാണെങ്കിൽ കോഡുകൾ സംപ്രേഷണം ചെയ്യാൻ മാട്രിക്സുകളുടെ ആശയം ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഭൂഗർഭ ശാസ്ത്രത്തിൽ ഭൂകമ്പങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള സർവേകളിൽ മാട്രിക്സ് ഉപയോഗിക്കുന്നു. റോബോട്ടിക്സിൽ റോബോട്ടുകളുടെ ചലനങ്ങളെ പറ്റി മനസ്സിലാക്കുന്നതിന് മാട്രിക്സുകൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു.

**നിർവചനം**

സംഖ്യകളുടെ ദീർഘചതുരാകൃതിയിലുള്ള ക്രമീകരണത്തെ മാട്രിക്സ് എന്നു പറയുന്നു. തിരശ്ചീന ക്രമീകരണങ്ങളെ വരികൾ എന്നും ലംബ ക്രമീകരണങ്ങളെ നിരകൾ എന്നും വിളിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണമായി, $\begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 1 & 9 & -2 \end{pmatrix}$ ഒരു മാട്രിക്സ് ആകുന്നു.

സാധാരണയായി മാട്രിക്സുകളെ സൂചിപ്പിക്കുന്നതിന് വലിയ അക്ഷരങ്ങളായ $A,\ B,\ C,\ X,\ Y,\ \ldots$ etc., എന്നിവയും മാട്രിക്സിലെ അംഗങ്ങളെ കുറിക്കുന്നതിന് ചെറിയ അക്ഷരങ്ങളായ $a,\ b,\ c,\ l,\ m,\ n,$ $a_{12},\ a_{13},\ \ldots$ എന്നിവയും ഉപയോഗിക്കുന്നു. .

മാട്രിക്സുകളുടെ ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ താഴെ തന്നിട്ടുണ്ട്

(i) $\begin{pmatrix} 8 & 4 & -1 \\ \frac{1}{2} & 5 & 4 \\ 9 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 1+x & x^3 & \sin x \\ \cos x & 2 & \tan x \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} 3+1 & \sqrt{2} & -1 \\ 1.5 & 8 & 9 \\ \frac{1}{3} & 13 & \frac{-7}{9} \end{pmatrix}$

### 3.9.1 മാട്രിക്സിന്റെ ക്രമം (Order of matrix)

$A$ എന്ന മാട്രിക്സിൽ $m$ വരികളും $n$ നിരകളും ഉണ്ടെങ്കിൽ $A$ എന്ന മാട്രിക്സിന്റെ ക്രമം എന്നത് (വരികളുടെ എണ്ണം) $\times$ (നിരകളുടെ എണ്ണം) അതായത് $m \times n$ ആകുന്നു. $m \times n$ എന്നതിനെ $m$ ക്രോസ് $n$ അല്ലെങ്കിൽ $m$ ബൈ $n$ എന്ന് വായിക്കാം. $m \times n$ എന്നത് $m$, $n$ ന്റെയും ഗുണന ഫലം അല്ല എന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക.

$m$ വരികളും $n$ നിരകളും ഉള്ള $A$ ഒരു മാട്രിക്സിന്റെ (ക്രമം $m \times n$ ) പൊതുരൂപം താഴെ കാണുന്ന വിധം എഴുതാം

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ഇവിടെ $a_{11}, a_{12}, \ldots$ എന്നിവ മാട്രിക്സിലെ അംഗങ്ങളെ കുറിക്കുന്നു. $a_{11}$ എന്നത് ഒന്നാമത്തെ വരിയിൽ ഒന്നാമത്തെ നിരയിലുള്ള അംഗമാണ്. $a_{12}$ എന്നത് ഒന്നാമത്തെ വരിയിൽ രണ്ടാമത്തെ നിരയിലുള്ള അംഗമാണ് തുടർച്ചയായി ഇങ്ങനെ എഴുതാം.

**പുരോഗതി പരിശോധന**

1. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ എന്ന മാട്രിക്സിലെ രണ്ടാമത്തെ വരിയിൽ മൂന്നാമത്തെ നിരയിലുള്ള അംഗം കാണുക
2. $\begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \\ \tan\theta \end{pmatrix}$ എന്ന മാട്രിക്സിന്റെ ക്രമം കാണുക
3. $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}$ എന്ന് സൂചിപ്പിച്ചിരിക്കുന്ന അംഗങ്ങൾ കാണുക

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 9 & -4 & \sqrt{7} \\ 3 & \frac{5}{2} & 8 & 9 \\ 7 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$



3 Algebra Malayalam .indd 138 10/02/2023 11:48:24

പൊതുവായി $a_{ij}$ എന്നത് $i$ എന്ന വരിയിലെ $j$ എന്ന നിരയിലെ അംഗമാണ്. ഇതിനെ $(i,j)$ അംഗം എന്നു പറയാം.

ഈ ചിഹ്നം ഉപയോഗിച്ച് $A$ എന്ന മാട്രിക്സിനെ $A=(a_{ij})_{m\times n}$ ഇവിടെ $i=1,2,....m$ കൂടാതെ $j=1,2,...n$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം.

$A=(a_{ij})_{m\times n}$ എന്ന മാട്രിക്സിലെ ആകെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം $mn$ ആകുന്നു.

**കുറിപ്പ്**

- ഒരു മാട്രിക്സിന്റെ ക്രമം എഴുതുമ്പോൾ എല്ലായിപ്പോഴും വരികളുടെ എണ്ണം ആദ്യവും നിരകളുടെ എണ്ണം രണ്ടാമതും എഴുതണം.

ഉദാഹരണമായി,

| എണ്ണം | മാട്രിക്സുകൾ | മാട്രിക്സിലെ അംഗങ്ങൾ | മാട്രിക്സിന്റെ ക്രമം |
|---|---|---|---|
| 1. | $\begin{pmatrix}\sin\theta & -\cos\theta\\ \cos\theta & \sin\theta\end{pmatrix}$ | $a_{11}=\sin\theta,\ a_{12}=-\cos\theta,$ $a_{21}=\cos\theta,\ a_{22}=\sin\theta$ | 2×2 |
| 2. | $\begin{pmatrix}1 & 3\\ \sqrt{2} & 5\\ \frac{1}{2} & -4\end{pmatrix}$ | $a_{11}=1,\ a_{12}=3,$ $a_{21}=\sqrt{2},\ a_{22}=5,$ $a_{31}=\frac{1}{2},\ a_{32}=-4$ | 3×2 |

### പ്രവർത്തനം 4

(i) ഒരു പ്രത്യേക വർഷത്തെ ഒരു പ്രത്യേക മാസത്തെ കലണ്ടർ ഷീറ്റ് എടുക്കുക.

(ii) കലണ്ടർ ഷീറ്റിലെ തീയതികളിൽ നിന്നും മാട്രിക്സുകൾ രൂപീകരിക്കുക.

(iii) $2\times2,\ 3\times2,\ 2\times3,\ 3\times3,\ 4\times3,$ എന്നിങ്ങനെ വിവിധ ക്രമങ്ങളുള്ള സാധ്യമായ എല്ലാ മാട്രിക്സുകളെയും എഴുതുക.

(iv) തന്നിരിക്കുന്ന കലണ്ടറിൽ നിന്ന് നിങ്ങൾക്ക് സൃഷ്ടിക്കാൻ കഴിയുന്ന ഏറ്റവും വലിയ ക്രമങ്ങളുള്ള മാട്രിക്സിനെ കണ്ടെത്തുക.

(v) ദിവസേനയുള്ള ജീവിത സാഹചര്യങ്ങളിൽ നിന്നും വിവരങ്ങൾ സംഘടിപ്പിക്കുന്നതിന് മാട്രിക്സിന്റെ ഉപയോഗം പരാമർശിക്കുക.




## 3.9.2 മാട്രിക്സുകളുടെ തരങ്ങൾ

വിവിധതരം മാട്രിക്സുകളെകുറിച്ച് നമുക്ക് പഠിക്കാം.

### 1. വരി മാട്രിക്സ് (Row Matrix)

ഒരു മാട്രിക്സിന്റെ നിരകളുടെ എണ്ണം എത്ര ആയാലും ഒരേയൊരു വരി മാത്രം ഉണ്ടായിരിക്കണം. അങ്ങനെയുള്ള മാട്രിക്സിനെ വരി മാട്രിക്സ് എന്ന് പറയുന്നു. വരി മാട്രിക്സിനെ വരി വെക്ടർ എന്നും വിളിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണമായി, $A=\begin{pmatrix}8 & 9 & 4 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$ എന്നിവ $1\times4$ കൂടാതെ $1\times3$ എന്നീ ക്രമങ്ങളുള്ള വരി മാട്രിക്സുകളാണ്.

പൊതുവായി $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n}\end{pmatrix}$ എന്നത് $1\times n$ കമം ഉള്ള ഒരു വരിമാട്രിക്സ് ആണ്.

### 2. നിര മാട്രിക്സ് (Column Matrix)

ഒരു മാട്രിക്സിൽ വരികളുടെ എണ്ണം എത്ര ആയാലും ഒരേ ഒരു നിര മാത്രം ഉണ്ടായിരുന്നാൽ ആ മാട്രി



3 Algebra Malayalam .indd 139 10/02/2023 11:48:27

ക്സിനെ നിര മാട്രിക്സ് എന്ന് വിളിക്കുന്നു. ഇതിനെ നിര വെക്ടൻ എന്നും പറയാം.

ഉദാഹരണമായി, $A=\begin{pmatrix}\sin x\\ \cos x\\ 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}\sqrt{5}\\ 7\end{pmatrix}$ കൂടാതെ $C=\begin{pmatrix}8\\ -3\\ 23\\ 17\end{pmatrix}$ എന്നിവ $3\times1$, $2\times1$ കൂടാതെ $4\times1$ എന്നീ ക്രമങ്ങളുള്ള നിര മാട്രിക്സുകളാണ്.

പൊതുവായി, $A=\begin{pmatrix}a_{11}\\ a_{21}\\ a_{31}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{pmatrix}$ എന്നത് ക്രമം $m\times1$ ഉള്ള ഒരു നിരമാട്രിക്സ് ആണ്.

## 3. സമചതുര മാട്രിക്സ് (Square Matrix)

ഒരു മാട്രിക്സിന്റെ വരികളുടെ എണ്ണവും നിരകളുടെ എണ്ണവും സമമായൽ അതിനെ സമചതുര മാട്രിക്സ് എന്നു പറയാം. അതായത് ഒരു മാട്രിക്സ് $A=(a_{ij})_{m\times n}$ എന്നതിനെ സമചതുര മാട്രിക്സ് എന്നു പറയണമെങ്കിൽ $m=n$ ആയിരിക്കണം.

ഉദാഹരണമായി, $\begin{pmatrix}1&3\\4&5\end{pmatrix}_{2\times2}$, $\begin{pmatrix}-1&0&2\\3&6&8\\2&3&5\end{pmatrix}_{3\times3}$ എന്നിവ സമചതുര മാട്രിക്സുകളാണ്.

പൊതുവായി, $\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}_{2\times2}$, $\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}$ എന്നിവ $2\times2$ , $3\times3$ എന്നീ ക്രമങ്ങളുള്ള സമചതുര മാട്രിക്സുകളാണ്.

$A=(a_{ij})_{m\times m}$ എന്നത് ക്രമം $m$ ഉള്ള ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സ് ആണ്.

**നിർവചനം :** ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സിൽ, $a_{11}$, $a_{22}$, $a_{33}$, . . . (i.e) $a_{ii}$ എന്നീ സ്ഥാനങ്ങളിൽ സ്ഥിതിത ചെയ്യുന്ന അംഗങ്ങളെ മാട്രിക്സിനെ നയിക്കുന്ന വികർണ്ണ അംഗങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നു. ഉദാഹരണമായി $\begin{pmatrix}1&3\\4&5\end{pmatrix}$, എന്ന മാട്രിക്സിൽ $1, 5$ എന്നിവ പ്രധാന വികർണ്ണാംഗങ്ങൾ ആണ്.

## 4. വികർണ്ണ മാട്രിക്സ് (Diagond Matrix)

ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സിലെ പ്രധാന വികർണ്ണത്തിലെ അംഗങ്ങൾ ഒഴികെ എല്ലാ അംഗങ്ങളും പൂജ്യം ആണെങ്കിൽ ആ സമചതുര മാട്രിക്സിനെ വികർണ്ണമാട്രിക്സ് എന്ന് പറയുന്നു.

(ie) അതായത് $A=(a_{ij})$ എന്നതിനെ ഒരു വികർണ്ണ മാട്രിക്സ് എന്നു പറയണമെങ്കിൽ $a_{ij}=0$, $i\neq j$. ആയിരിക്കണം. ഒരു വികർണ്ണമാട്രിക്സിലെ പ്രധാന വികർണ്ണങ്ങളിൽ ചിലത് പൂജ്യം ആകാം പക്ഷേ എല്ലാം പൂജ്യം ആകില്ല എന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക.

ഉദാഹരണമായി, $\begin{pmatrix}8&0&0\\0&-3&0\\0&0&11\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ എന്നിവ വികർണ്ണ മാട്രിക്സുകളാണ്.

## 5. അദിശ മാട്രിക്സ് (Scalar Matrix)

ഒരു വികർണ്ണ മാട്രിക്സിലെ പ്രധാന വികർണ്ണത്തിലെ അംഗങ്ങൾ എല്ലാം തുല്യമായിരുന്നാൽ ആ വികർണ്ണ മാട്രിക്സിനെ അദിശ മാട്രിക്സ് എന്ന് പറയാം.



3 Algebra Malayalam .indd 140 10/02/2023 11:48:31

അതായത് $\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}k & 0 & 0\\ 0 & k & 0\\ 0 & 0 & k\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$

പൊതുവായി, $A = (a_{ij})_{m\times m}$ എന്നതിനെ ഒരു അദിശ മാട്രിക്സ് എന്നു പറയണമെങ്കിൽ

ഇവിടെ $a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{ആണെങ്കിൽ } i \neq j \\ k & \text{ആണെങ്കിൽ } i = j \end{cases}$ ഇവിടെ $k$ ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യ.

## 6. അനന്യ മാട്രിക്സ് (or) യൂണിറ്റ് മാട്രിക്സ്

ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സിൽ പ്രധാന വികർണ്ണ അംഗങ്ങൾ എല്ലാം "1" ഉം ബാക്കിയുള്ളവ പൂജ്യവും ആയിരുന്നാൽ ആ മാട്രിക്സിനെ അനന്യമാട്രിക്സ് (or) യൂണിറ്റ് മാട്രിക്സ് എന്നു പറയാം.

അതായത്. ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സ് $A = (a_{ij})$ ഒരു അനന്യ മാട്രിക്സ് ആകണമെങ്കിൽ $a_{ij} = \begin{cases}1 & if\ i = j\\ 0 & if\ i \neq j\end{cases}$

ക്രമം $n$ ഉള്ള ഒരു യൂണിറ്റ് മാട്രിക്സിനെ $I_n$ എന്ന് എഴുതാം.

$I_2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ എന്നിവ ക്രമം 2, 3 എന്നിവയുള്ള അനന്യ മാട്രിക്സുകളാണ്.

## 7. ശൂന്യ മാട്രിക്സ് (or) പൂജ്യം മാട്രിക്സ് (Zero Matrix (or) Null Matrix)

ഒരു മാട്രിക്സിലെ എല്ലാം അംഗങ്ങളും പൂജ്യം ആയാൽ ആ മാട്രിക്സിനെ ശൂന്യമാട്രിക്സ് (or) പൂജ്യം മാട്രിക്സ് എന്ന് പറയുന്നു.

ഉദാഹരണമായി, $(0), \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ $1\times1$, $2\times2$ , $3\times3$ എന്നിവ വ്യത്യസ്ത ക്രമങ്ങളുള്ള ശൂന്യ മാട്രിക്സുകളാണ്. $n\times n$ ക്രമം ഉള്ള പൂജ്യ മാട്രിസിനെ $O_n$ എന്നും സൂചിപ്പിക്കാം.

$2\times3$ ക്രമം ഉള്ള ശൂന്യ മാട്രിക്സിനെ $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം.

## 8. മാട്രിക്സിന്റെ പരിവർത്തനം (Transpose of a Matrix)

തന്നിട്ടുള്ള മാട്രിക്സ് $A$ യിലെ വരികളെയും നിരകളെയും പരസ്പരം മാറ്റി എഴുതിയാൽ ലഭിക്കുന്ന മാട്രിക്സിനെ $A$ യുടെ പരിവർത്തനം എന്ന് വിളിക്കുന്നു. ഇതിനെ $A^T$ ( $A$ യുടെ പരിവർത്തനം) എന്ന് വായിക്കാം. ഉദാഹരണമായി,

(a) $A = \begin{pmatrix}5 & 3 & -1\\ 2 & 8 & 9\\ -4 & 7 & 5\end{pmatrix}_{3\times3}$ എങ്കിൽ $A^T = \begin{pmatrix}5 & 2 & -4\\ 3 & 8 & 7\\ -1 & 9 & 5\end{pmatrix}_{3\times3}$

(b) $B = \begin{pmatrix}1 & 5\\ 8 & 9\\ 4 & 3\end{pmatrix}_{3\times2}$ എങ്കിൽ $B^T = \begin{pmatrix}1 & 8 & 4\\ 5 & 9 & 3\end{pmatrix}_{2\times3}$

$A$യുടെ ക്രമം $m\times n$ ആണെങ്കിൽ $A^T$ ന്റെ ക്രമം $n\times m$ ആകുന്നു.

$(A^T)^T = A$ എന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക.



3 Algebra Malayalam .indd 141 10/02/2023 11:48:35

## 9. ത്രികോണ മാട്രിക്സ്

ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സിലെ പ്രധാന വികർണ്ണത്തിന് മുകളിലുള്ള അംഗങ്ങൾ എല്ലാം പൂജ്യം ആയിരുന്നാൽ ആ മാട്രിക്സിനെ കീഴ് ത്രികോണ മാട്രിക്സ് എന്നു വിളിക്കുന്നു.

പ്രധാന വികർണ്ണത്തിന് താഴെയുള്ള അംഗങ്ങൾഎല്ലാം പൂജ്യം ആണെങ്കിൽ ആ മാട്രിക്സിനെ മേൽ ത്രികോണ മാട്രിക്സ് എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

**നിർവചനം :** ഒരു സമചതുരമാട്രിക്സ് $A = (a_{ij})_{n\times n}$ നെ മേൽ ത്രികോണ മാട്രിക്സ് എന്നു വിളിക്കണമെങ്കിൽ എല്ലാ $i > j$ യ് $a_{ij} = 0$ ആയിരിക്കണം. കീഴ് ത്രികോണ മാട്രിക്സ് എന്നു വിളിക്കണമെങ്കിൽ എല്ലാ $a_{ij} = 0$ ആയിരിക്കും.

ഉദാഹരണമായി, $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ എന്നത് ഒരു മേൽ ത്രികോണ മാട്രിക്സും $B = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ -11 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ എന്നത് ഒരു കീഴ് ത്രികോണ മാട്രിക്സും ആകുന്നു.

### തുല്യമാട്രിക്സുകൾ (Equal Matrices)

$A$ കൂടാതെ $B$ എന്നീ രണ്ട് മാട്രിക്സുകളെ തുല്യ മാട്രിക്സുകൾ എന്ന് പറയണമെങ്കിൽ അവയുടെ ക്രമം തുല്യമായിരിക്കണം കൂടാതെ $A$ എന്ന മാട്രിക്സിലെ ഓരോ അംഗവും $B$ എന്ന മാട്രിക്സിലെ അനുബന്ധ അംഗത്തിന് തുല്യമായിരിക്കണം. അതായത് $a_{ij} = b_{ij}$ എല്ലാ $i, j$ യ്ക്കും.

ഉദാഹരണമായി, $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 1^2 + 2^2 & \sin^2\theta + \cos^2\theta \\ 1 + \frac{3}{2} - \frac{5}{2} & 2 + \sec^2\theta - \tan^2\theta \end{pmatrix}$ ഇവിടെ $A$ യുടെയും $B$ യുടെയും ക്രമം തുല്യം കൂടാതെ എല്ലാ $i, j$ ക്കും $a_{ij} = b_{ij}$ അതിനാൽ $A$ കൂടാതെ $B$ എന്നിവ തുല്യമാട്രിക്സുകളാണ്.

**പുരോഗതി പരിശോധന**

1. ഒരു നിര മാട്രിക്സിലെ നിരകളുടെ എണ്ണം _____ ആകുന്നു.
2. ഒരു വരി മാട്രിക്സിലെ വരികളുടെ എണ്ണം _____ ആകുന്നു.
3. ഒരു യൂണിറ്റ് മാട്രിക്സിലെ വികർണ്ണമല്ലാത്ത അംഗങ്ങൾ _____ .
4. ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സിന് 32 അംഗങ്ങൾ സാധ്യമാണോ?

### ഒരു മാട്രിക്സിന്റെ ഋണം (The Negative of a Matrix)

$A_{m\times n}$ എന്ന മാട്രിക്സിന്റെ ഋണം $-A_{m\times n}$ ആകുന്നു. $-A_{m\times n}$ എന്ന മാട്രിക്സിലെ ഓരോ അംഗവും $A_{m\times n}$ മാട്രിക്സിലുള്ള ഓരോ അംഗത്തിന്റെയും സങ്കലനവിപരീതം ആയിരിക്കും.

$k$ എന്ന അംഗത്തിന്റെ സങ്കലന വിപരീതം $-k$ ആകുന്നു. അതായത് $-A$ യിലെ ഓരോ അംഗവും $A$ എന്ന മാട്രിക്സിലെ അനുബന്ധ അംഗങ്ങളുടെ ഋണമാകുന്നു.

ഉദാഹരണമായി, $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 9 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix}_{2\times 3}$ എങ്കിൽ $-A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -9 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 3}$

**ഉദാഹരണം 3.56** I, II, III എന്നീ മൂന്ന് ഫാക്ടറികളിൽ ജോലി ചെയ്യുന്ന പുരുഷൻമാർ, സ്ത്രീകൾ എന്നിവരെ സംബന്ധിച്ച വിവരങ്ങളെ പരിഗണിക്കുക.

| ഫാക്ടറി | പുരുഷൻമാർ | സ്ത്രീകൾ |
|---|---|---|
| I | 23 | 18 |
| II | 47 | 36 |
| III | 15 | 16 |

തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളെ മാട്രിക്സ് രൂപത്തിൽ പ്രതിനിധീകരിക്കുക. രണ്ടാമത്തെ വരിയിൽ ആദ്യത്തെ നിരയിലുള്ള അംഗം സൂചിപ്പിക്കുന്നത് എന്ത്?



3 Algebra Malayalam .indd 142 10/02/2023 11:48:38

**നിർദ്ധാരണം** $3 \times 2$ തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളെ താഴെ കാണുന്ന വിധം ഒരു മാട്രിക്സ് ആയി രൂപീകരിക്കാം

$$A = \begin{pmatrix} 23 & 18 \\ 47 & 36 \\ 15 & 16 \end{pmatrix}$$

രണ്ടാമത്തെ വരിയിൽ ആദ്യത്തെ നിരയിലെ അംഗം സൂചിപ്പിക്കുന്നത് ഫാക്ടറി II വിൽ ആകെ 47 പുരുഷൻമാർ ചെയ്യുന്നു എന്നാണ്.

**ഉദാഹരണം 3.57** 16 അംഗങ്ങളുള്ള ഒരു മാട്രിക്സിന്റെ സാധ്യമായ ക്രമങ്ങൾ ഏവ?

**നിർദ്ധാരണം** $m \times n$ ക്രമം ഉള്ള ഒരു മാട്രിക്സിൽ $mn$ അംഗങ്ങൾ ഉണ്ടെന്ന് നമുക്കറിയാം. അതിനാൽ 16 അംഗങ്ങളുള്ള ഒരു മാട്രിക്സിന്റെ സാധ്യമായ ക്രമങ്ങൾ കണ്ടിപിടിക്കുന്നതിന് ഗുണനഫലം 16 ലഭിക്കുന്ന നിസർഗ്ഗസംഖ്യകളുടെ ക്രമജോഡികളെ കണ്ടാൽ മതിയാകും

അങ്ങനെയുള്ള ക്രമജോഡികൾ (1,16), (16,1), (4,4), (8,2), (2,8) എന്നിവയാണ്

അതിനാൽ സാധ്യമായ ക്രമങ്ങൾ $1 \times 16$, $16 \times 1$, $4 \times 4$, $2 \times 8$, $8 \times 2$ ആകുന്നു.

## പ്രവർത്തനം 5

| എണ്ണം. | അംഗങ്ങൾ | സാധ്യമായ ക്രമങ്ങൾ | സാധ്യമായ ക്രമങ്ങളുടെ എണ്ണം |
|---|---|---|---|
| 1. | 4 | | 3 |
| 2. | | $1\times9$, $9\times1$, $3\times3$ | |
| 3. | 20 | | |
| 4. | 8 | | 4 |
| 5. | 1 | | |
| 6. | 100 | | |
| 7. | | $1\times10$, $10\times1$, $2\times5$, $5\times2$ | |

അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിനും (രണ്ടാമത്തെ നിര) സാധ്യമായ ക്രമങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിനും (നാലാമത്തെ നിര) തമ്മിൽ എന്തെങ്കിലും ബന്ധം കാണുന്നുണ്ടോ ഉണ്ടെങ്കിൽ അതെന്താണ്?

**ഉദാഹരണം 3.58** അംഗങ്ങൾ $3 \times 3$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ള ക്രമം $a_{ij} = i^2 j^2$ ഉള്ള ഒരു മാട്രിക്സ് രൂപീകരിക്കുക

**നിർദ്ധാരണം** ഒരു 3×3 മാട്രിക്സിന്റെ പൊതുരൂപം $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ ആകുന്നു. $a_{ij} = i^2 j^2$

$a_{11} = 1^2 \times 1^2 = 1 \times 1 = 1$; $a_{12} = 1^2 \times 2^2 = 1 \times 4 = 4$; $a_{13} = 1^2 \times 3^2 = 1 \times 9 = 9$;

$a_{21} = 2^2 \times 1^2 = 4 \times 1 = 4$; $a_{22} = 2^2 \times 2^2 = 4 \times 4 = 16$; $a_{23} = 2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36$

$a_{31} = 3^2 \times 1^2 = 9 \times 1 = 9$; $a_{32} = 3^2 \times 2^2 = 9 \times 4 = 36$; $a_{33} = 3^2 \times 3^2 = 9 \times 9 = 81$

ആവശ്യപ്പെട്ട മാട്രിക്സ് $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 4 & 16 & 36 \\ 9 & 36 & 81 \end{pmatrix}$, ആകുന്നു

**ഉദാഹരണം 3.59** $\begin{pmatrix} a-b & 2a+c \\ 2a-b & 3c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ എന്ന സമവാക്യത്തിൽ നിന്നും $a$, $b$, $c$, $d$ എന്നിവയുടെ മൂല്യം കാണുക

**നിർദ്ധാരണം** തന്നിട്ടുള്ള മാട്രിക്സുകൾ തുല്യം ആയതിനാൽ അവയുടെ സമാന അംഗങ്ങളും തുല്യമാണ്.



3 Algebra Malayalam .indd 143 10/02/2023 11:48:41

അതുകൊണ്ട്, $a-b=1$ ...(1)

$2a+c=5$ ...(2)

$2a-b=0$ ...(3)

$3c+d=2$ ...(4)

(3) ൽ നിന്നും $2a-b=0$

$2a=b$ ...(5)

$2a=b$ നെ സമീകരണം (1) ൽ പ്രതിപാദിച്ചാൽ, $a-2a=1$, $a=-1$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു

$a=-1$ നെ സമീകരണം (5) ൽ പ്രതിപാദിച്ചാൽ, $2(-1)=b$, $b=-2$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു

$a=-1$ നെ സമീകരണം (2) ൽ പ്രതിപാദിച്ചാൽ, $2(-1)+c=5$, $c=7$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു

$c=7$ നെ സമീകരണം (4) ൽ പ്രതിപാദിച്ചാൽ, $3(7)+d=2$ , $d=-19$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു

അതുകൊണ്ട്, $a=-1, b=-2, c=7, d=-19$ ആകുന്നു.

## അഭ്യാസം 3.17

1. മാട്രിക്സ് $A=\begin{pmatrix} 8 & 9 & 4 & 3 \\ -1 & \sqrt{7} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 6 & 8 & -11 & 1 \end{pmatrix}$, യിൽ താഴെ പറയുന്നവ എഴുതുക.

(i) അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം (ii) മാട്രിക്സിന്റെ ക്രമം $a_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{34}, a_{43}, a_{44}$. എന്നീ അംഗങ്ങളെ കാണുക

2. 18 അംഗങ്ങളുള്ള ഒരു മാട്രിക്സിന്റെ സാധ്യമായ ക്രമങ്ങൾ കാണുക. 6 അംഗങ്ങളാണുള്ളതെങ്കിൽ ക്രമങ്ങൾ കാണുക.

3. $3\times 3$ അംഗങ്ങൾ താഴെത്തന്നവിധം ഉള്ള മാട്രിക്സ് രൂപീകരിക്കുക.

(i) $a_{ij}=\left|i-2j\right|$ (ii) $a_{ij}=\frac{(i+j)^3}{3}$

4. $A=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 1 & -7 & 9 \\ 3 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ എങ്കിൽ $A$ യുടെ പരിവർത്തനം കാണുക.

5. $A=\begin{pmatrix} \sqrt{7} & -3 \\ -\sqrt{5} & 2 \\ \sqrt{3} & -5 \end{pmatrix}$ എങ്കിൽ $-A$ എന്ന മാട്രിക്സിന്റെ പരിവർത്തനം കാണുക.

6. $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -\sqrt{17} & 0.7 & \frac{5}{2} \\ 8 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ എങ്കിൽ $(A^T)^T=A$ എന്നത് പരിശോധിക്കുക.

7. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണങ്ങളിൽ നിന്നും $x$, $y$ കൂടാതെ $z$ എന്നിവയുടെ മൂല്യം കാണുക.

(i) $\begin{pmatrix} 12 & 3 \\ x & \frac{3}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y & z \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} x+y & 2 \\ 5+z & xy \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} x+y+z \\ x+z \\ y+z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$



3 Algebra Malayalam .indd 144 10/02/2023 11:48:47

### 3.9.3 മാട്രിക്സുകളുടെ ക്രിയകൾ

ഈ ഭാഗത്തിൽ നാം മാട്രിക്സുകളുടെ സങ്കലനം, വ്യവകലനം കൂടാതെ മാട്രിക്സിനെ ഒരു അദിശം കൊണ്ടുള്ളഗുണനം, മാട്രിക്സുകളുടെ ഗുണനം എന്നിവയെപറ്റി വിശദമായി പഠിക്കും.

#### മാട്രിക്സുകളുടെ സങ്കലനം കൂടാതെ വ്യവകലനം

രണ്ടു മാട്രിക്സുകളുടെ ക്രമം തുല്യമാണെങ്കിൽ അവയെ കൂട്ടുന്നതിനുംകുറക്കുന്നതിനും സാധിക്കും. രണ്ട് മാട്രിക്സുകളെ കൂട്ടുന്നതിനോ അല്ലെങ്കിൽ കുറക്കുന്നതിനോ അവയുടെ സമാന അംഗങ്ങളെ കൂട്ടുകയോ അല്ലെങ്കിൽ കുറക്കുകയോ ചെയ്താൽ മതിയാകും.

ഉദാഹരണമായി, $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g & h & i \\ j & k & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d+j & e+k & f+l \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{pmatrix}$$

$A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $i = 1,2, \ldots m$, $j = 1,2, \ldots n$ എങ്കിൽ $C = A + B$ എങ്കിൽ $C = (c_{ij})$ ഇവിടെ $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ എല്ലാ $i = 1,2, \ldots m$ , $j = 1,2, \ldots n$ ആയിരിക്കും.

**ഉദാഹരണം 3.60** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, എങ്കിൽ $A+B$ കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം** $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 2+7 & 3+0 \\ 4+1 & 5+3 & 6+1 \\ 7+2 & 8+4 & 9+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 3 \\ 5 & 8 & 7 \\ 9 & 12 & 9 \end{pmatrix}$

**ഉദാഹരണം 3.61** സംഘം1, സംഘം 2, സംഘം 3 എന്നീ മൂന്ന് സംഘം വിദ്യാർത്ഥികൾക്ക് രണ്ട് പരീക്ഷകൾ നടത്തി. തമിഴ്, ഇംഗ്ലീഷ്, ശാസ്ത്രം, ഗണിതം എന്നീ വിഷയങ്ങൾക്ക് അവർ നേടിയ ശരാശരി മാർക്ക് മാട്രിക്സുകൾ $A$, $B$ എന്ന രൂപത്തിൽ താഴെ കൊടുത്തിട്ടുണ്ട്. മൂന്ന് സംഘങ്ങളും രണ്ട് പരീക്ഷകളിൽ നേടിയ ആകെ മാർക്ക് കാണുക.

| | തമിഴ് | ഇംഗ്ലീഷ് | ശാസ്ത്രം | ഗണിതം |
|---|---|---|---|---|
| സംഘം 1 | 22 | 15 | 14 | 23 |
| $A =$ സംഘം 2 | 50 | 62 | 21 | 30 |
| സംഘം 3 | 53 | 80 | 32 | 40 |

| | തമിഴ് | ഇംഗ്ലീഷ് | ശാസ്ത്രം | ഗണിതം |
|---|---|---|---|---|
| സംഘം 1 | 20 | 38 | 15 | 40 |
| $B =$ സംഘം 2 | 18 | 12 | 17 | 80 |
| സംഘം 3 | 81 | 47 | 52 | 18 |

**നിർദ്ധാരണം** മൂന്ന് സംഘങ്ങളും രണ്ട് പരീക്ഷകളിൽ നേടിയ ആകെ മാർക്ക് രണ്ട് മാട്രിക്സുകളുടെയും തുകക്ക് തുല്യമാണ്.

$$A + B = \begin{pmatrix} 22+20 & 15+38 & 14+15 & 23+40 \\ 50+18 & 62+12 & 21+17 & 30+80 \\ 53+81 & 80+47 & 32+52 & 40+18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 & 53 & 29 & 63 \\ 68 & 74 & 38 & 110 \\ 134 & 127 & 84 & 58 \end{pmatrix}$$



3 Algebra Malayalam .indd 145 10/02/2023 11:48:51

**ഉദാഹരണം 3.62** $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ 5 & -4 & 6\\ -3 & 2 & 9\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 8\\ 3 & 4\\ 9 & 6\end{pmatrix}$, എങ്കിൽ $A+B$ കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം** $A$ യുടെയും $B$ യുടെയും സങ്കലനം സാധ്യമല്ല കാരണം അവയുടെ ക്രമങ്ങൾ വ്യത്യസ്തമാണ്.

### മാട്രിക്സിനെ ഒരു അദിശം കൊണ്ടുള്ള ഗുണനം (Multiplication of a Matrix by a Scalar)

ഒരു പുതിയ മാട്രിക്സ് $kA$ കിട്ടുന്നതിനായി $A$ എന്ന മാട്രിക്സിനെ പൂജ്യമല്ലാത്ത ഒരു സംഖ്യ $k$ കൊണ്ട് ഗുണിക്കണമെങ്കിൽ $A$ യിലെ ഓരോ അംഗത്തെയും $k$ കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ മതിയാകും. $kA$ എന്ന മാട്രിക്സിനെ $A$ യുടെ അദിശ, ഗുണനം $kA$ എന്ന് പറയാം.

അതായത് $A=(a_{ij})_{m\times n}$ ആണെങ്കിൽ, $kA=(ka_{ij})_{m\times n}$ എല്ലാ മൂല്യങ്ങൾ $i=1,2,\ldots,m$ കൂടാതെ എല്ലാ മൂല്യങ്ങൾ $j=1,2,\ldots,n$.

**ഉദാഹരണം 3.63** $A=\begin{pmatrix}7 & 8 & 6\\ 1 & 3 & 9\\ -4 & 3 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 11 & -3\\ -1 & 2 & 4\\ 7 & 5 & 0\end{pmatrix}$ എങ്കിൽ $2A+B$ കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം** $A$, $B$ എന്നിവയുടെ ക്രമം തുല്യമായതിനാൽ $3\times 3$, $2A+B$ സാധ്യമാണ്.

$$2A+B = 2\begin{pmatrix}7 & 8 & 6\\ 1 & 3 & 9\\ -4 & 3 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 11 & -3\\ -1 & 2 & 4\\ 7 & 5 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & 16 & 12\\ 2 & 6 & 18\\ -8 & 6 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 11 & -3\\ -1 & 2 & 4\\ 7 & 5 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}18 & 27 & 9\\ 1 & 8 & 22\\ -1 & 11 & -2\end{pmatrix}$$

**ഉദാഹരണം 3.64** $A=\begin{pmatrix}5 & 4 & -2\\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \sqrt{2}\\ 1 & 9 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-7 & 4 & -3\\ \frac{1}{4} & \frac{7}{2} & 3\\ 5 & -6 & 9\end{pmatrix}$, എങ്കിൽ $4A-3B$ കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം** $A$, $B$ എന്നിവയുടെ ക്രമം $3\times 3$ തുല്യമായതിനാൽ $4A$, $3B$ എന്നിവയുടെ വ്യത്യാസം നിർണ്ണയിക്കാൻ സാധിക്കും.

$$4A-3B = 4\begin{pmatrix}5 & 4 & -2\\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \sqrt{2}\\ 1 & 9 & 4\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}-7 & 4 & -3\\ \frac{1}{4} & \frac{7}{2} & 3\\ 5 & -6 & 9\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}20 & 16 & -8\\ 2 & 3 & 4\sqrt{2}\\ 4 & 36 & 16\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}21 & -12 & 9\\ -\frac{3}{4} & -\frac{21}{2} & -9\\ -15 & 18 & -27\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}41 & 4 & 1\\ \frac{5}{4} & -\frac{15}{2} & 4\sqrt{2}-9\\ -11 & 54 & -11\end{pmatrix}$$



3 Algebra Malayalam .indd 146 10/02/2023 11:48:56

### മാട്രിക്സ് സങ്കലനം കൂടാതെ അദിശഗുണനം എന്നിവയുടെ സവിശേഷതകൾ (Properties of Matrix addition and Scalar Multiplication)

$A,\ B,\ C$ എന്നിവ $m \times n$ ക്രമം ഉള്ള മാട്രിക്സുകളും $p$ കൂടാതെ $q$ എന്നിവ രണ്ട് പൂജ്യമല്ലാത്ത അദിശങ്ങളും (സംഖ്യകൾ) ആണ്. എങ്കിൽ കാണുന്ന സവിശേഷതകൾ നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നു.

(i) $A + B = B + A$ [മാട്രിക്സ് സങ്കലനത്തിന്റെ ക്രമവിനിമേയ നിയമം]

(ii) $A + (B + C) = (A + B) + C$ [മാട്രിക്സ് സങ്കലനത്തിന്റെ സംയോജന നിയമം]

(iii) $(pq)A = p(qA)$ [അദിശ ഗുണനത്തിന്റെ സംയോജന നിയമം]

*(iv)* $IA=A$ [ഗുണനത്തിന്റെ അദിശ അനന്യത, ഇവിടെ I ഒരു യൂണിറ്റ് മാട്രിക്സ് ആകുന്നു]

(v) $p(A + B) = pA + pB$ [അദിശത്തിന്റെയും രണ്ട് മാട്രിക്സുകളുടെയും വിതരണ നിയമം]

(vi) $(p + q)A = pA + qA$ [രണ്ട് അദിശങ്ങളുടെയും ഒരു മാട്രിക്സിന്റെയും വിതരണ നിയമം]

### സങ്കലനത്തിന്റെ അനന്യത

ശൂന്യ മാട്രിക്സ് അല്ലെങ്കിൽ പൂജ്യം മാട്രിക്സിനെ മാട്രിക്സ് സങ്കലനത്തിന്റെ അനന്യത എന്ന് പറയാം.

$A$ ഒരു മാട്രിക്സ് എന്നിരിക്കട്ടെ.

എങ്കിൽ $A + O = O + A = A$ ഇവിടെ $O$ എന്നത് $A$ യുടെ അതേ ക്രമം ഉള്ള ശൂന്യ മാട്രിക്സ് അല്ലെങ്കിൽ പൂജ്യ മാട്രിക്സ് ആകുന്നു.

### സങ്കലന വിപരീതം

$A$ എന്നത് തന്നിരിക്കുന്ന ഒരു മാട്രിക്സ് എങ്കിൽ $-A$ എന്നത് $A$ യുടെ സങ്കലനവിപരീതം ആകുന്നു.

അതായത് $A + (-A) = (-A) + A = O$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

**ഉദാഹരണം 3.65** താഴെത്തന്നിട്ടുള്ള മാട്രിക്സ് സമവാക്യത്തിൽ നിന്നും $a,\ b,\ c,\ d$ എന്നിവയുടെ മൂല്യങ്ങൾ കാണുക.

$$\begin{pmatrix} d & 8 \\ 3b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & a \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2a \\ b & 4c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$$

**നിർദ്ധാരണം**

നാം ആദ്യം രണ്ടുവശത്തും തന്നിരിക്കുന്ന മാട്രിക്സുകളെ കൂട്ടുക

$$\begin{pmatrix} d+3 & 8+a \\ 3b-2 & a-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2a+1 \\ b-5 & 4c \end{pmatrix}$$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

രണ്ടു മാട്രിക്സുകളിലെയും സമാന അംഗങ്ങളെ താരതമ്യം ചെയ്യുക

$d + 3 = 2$ $\quad$ $d = -1$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു

$8 + a = 2a + 1$ $\quad$ $a = 7$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു

$3b - 2 = b - 5$ $\quad$ $b = \dfrac{-3}{2}$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു

$a = 7$ നെ $a - 4 = 4c$ യിൽ പ്രതിപാദിച്ചാൽ $c = \dfrac{3}{4}$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

അതുകൊണ്ട്, $a = 7,\ b = -\dfrac{3}{2},\ c = \dfrac{3}{4},\ d = -1$ ആകുന്നു.



3 Algebra Malayalam .indd 147 10/02/2023 11:48:59

**ഉദാഹരണം 3.66** $A=\begin{pmatrix}1&8&3\\3&5&0\\8&7&6\end{pmatrix}$ , $B=\begin{pmatrix}8&-6&-4\\2&11&-3\\0&1&5\end{pmatrix}$ , $C=\begin{pmatrix}5&3&0\\-1&-7&2\\1&4&3\end{pmatrix}$

താഴെത്തന്നവ കണ്ടുപിടിക്കുക : (i) $3A+2B-C$ (ii) $\frac{1}{2}A-\frac{3}{2}B$

**നിർദ്ധാരണം** (i) $3A+2B-C$ $=3\begin{pmatrix}1&8&3\\3&5&0\\8&7&6\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}8&-6&-4\\2&11&-3\\0&1&5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5&3&0\\-1&-7&2\\1&4&3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}3&24&9\\9&15&0\\24&21&18\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}16&-12&-8\\4&22&-6\\0&2&10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-5&-3&0\\1&7&-2\\-1&-4&-3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}14&9&1\\14&44&-8\\23&19&25\end{pmatrix}$

(ii) $\frac{1}{2}A-\frac{3}{2}B=\frac{1}{2}(A-3B)$

$=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1&8&3\\3&5&0\\8&7&6\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}8&-6&-4\\2&11&-3\\0&1&5\end{pmatrix}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1&8&3\\3&5&0\\8&7&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-24&18&12\\-6&-33&9\\0&-3&-15\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-23&26&15\\-3&-28&9\\8&4&-9\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-\frac{23}{2}&13&\frac{15}{2}\\-\frac{3}{2}&-14&\frac{9}{2}\\4&2&-\frac{9}{2}\end{pmatrix}$

## അഭ്യാസം 3.18

1. $A=\begin{pmatrix}1&9\\3&4\\8&-3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5&7\\3&3\\1&0\end{pmatrix}$ എങ്കിൽ താഴെത്തന്നവ പരിശോധിക്കുക

   (i) $A+B=B+A$ (ii) $A+(-A)=(-A)+A=O$.

2. $A=\begin{pmatrix}4&3&1\\2&3&-8\\1&0&-4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&3&4\\1&9&2\\-7&1&-1\end{pmatrix}$ , $C=\begin{pmatrix}8&3&4\\1&-2&3\\2&4&-1\end{pmatrix}$ എങ്കിൽ

   $A+(B+C)=(A+B)+C$. എന്നത് ശരിയാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക



3 Algebra Malayalam .indd 148 10/02/2023 11:49:07

3. $X+Y=\begin{pmatrix}7 & 0\\ 3 & 5\end{pmatrix}$ കൂടാതെ $X-Y=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ എങ്കിൽ $X,\ Y$ എന്നിവ കാണുക.

4. $A=\begin{pmatrix}0 & 4 & 9\\ 8 & 3 & 7\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}7 & 3 & 8\\ 1 & 4 & 9\end{pmatrix}$ എങ്കിൽ താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവയുടെ മൂല്യങ്ങൾ കാണുക

(i) $B-5A$ (ii) $3A-9B$

5. $x,\ y,\ z$ എന്നിവയുടെ മൂല്യങ്ങൾ കാണുക (i) $\begin{pmatrix}x-3 & 3x-z\\ x+y+7 & x+y+z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 6\end{pmatrix}$

(ii) $(x \quad y-z \quad z+3)+(y \quad 4 \quad 3)=(4 \quad 8 \quad 16)$

6. $x\begin{pmatrix}4\\ -3\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 6\end{pmatrix}$ എങ്കിൽ $x,\ y$ എന്നിവ കാണുക.

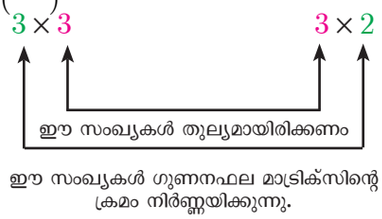
7. താഴെക്കൊടുത്തിരിക്കുന്ന മാട്രിക്സ് സമവാക്യത്തെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്ന $x$ ന്റെ പൂജ്യമല്ലാത്ത മൂല്യങ്ങൾ കാണുക.

$$x\begin{pmatrix}2x & 2\\ 3 & x\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}8 & 5x\\ 4 & 4x\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x^2+8 & 24\\ 10 & 6x\end{pmatrix}$$

8. നിർദ്ധാരണത്തിലൂടെ $x,\ y$ എന്നിവ കാണുക : $\begin{pmatrix}x^2\\ y^2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-2x\\ -y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\ 8\end{pmatrix}$

## മാട്രിക്സുകളുടെ ഗുണനം

രണ്ടു മാട്രിക്സുകളെ ഗുണിക്കുന്നതിന് ആദ്യത്തെ മാട്രിക്സിലുള്ള നിരകളുടെ എണ്ണം രണ്ടാമത്തെ മാട്രിക്സിലുള്ള വരികളുടെ എണ്ണത്തിന് തുല്യമായിരിക്കണം. 3×3 കൂടാതെ 3×2 എന്നീ മാട്രിക്സുകളുടെ ഗുണനത്തെ പരിഗണിക്കുക.



ഈ സംഖ്യകൾ ഗുണനഫല മാട്രിക്സിന്റെ ക്രമം നിർണ്ണയിക്കുന്നു.

(ഇടതുവശത്തെ മാട്രിക്സിന്റെ ക്രമം) × (വലതുവശത്തെ മാട്രിക്സിന്റെ ക്രമം) → (ഗുണനഫല മാട്രിക്സിന്റെ ക്രമം)

$(3\times 3)$ $(3\times 2)$ → $(3\times 2)$

മാട്രിക്സുകളുടെ ഗുണനം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് ആദ്യത്തെ മാട്രിക്സിന്റെ വരികളിലെ അംഗങ്ങളെ രണ്ടാമത്തെ മാട്രിക്സിന്റെ നിരകളിലെ അംഗങ്ങൾ കൊണ്ട് ഗുണിച്ചശേഷം ഇവയുടെ തുക കണ്ടുപിടിക്കുക.

ഉദാഹരണമായി രണ്ടു മാട്രിക്സുകളുടെ ഗുണനഫലം $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\\ e & f\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}g & h & i\\ k & l & m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ag+bk & ah+bl & ai+bm\\ cg+dk & ch+dl & ci+dm\\ eg+fk & eh+fl & ei+fm\end{pmatrix}$ ആകുന്നു

മാട്രിക്സ് $A$ യിലെ നിരകളുടെ എണ്ണം മാട്രിക്സ് $B$ യിലെ വരികളുടെ എണ്ണത്തിന് തുല്യമായിരുന്നാൽ ഗുണനഫലം $AB$ കണ്ടുപിടിക്കാൻ സാധിക്കും. $A$ എന്ന മാട്രിക്സിന്റെ ക്രമം $m\times n$ ഉം $B$ യുടെ ക്രമം $n\times p$ യും ആയാൽ $AB$ യുടെ ക്രമം $m\times p$ ആയിരിക്കും.

## മാട്രിക്സ് ഗുണനത്തിന്റെ സവിശേഷതകൾ (Properties of Multiplication of Matrix)

### (a) പൊതുവായി മാട്രിക്സ് ഗുണനം ക്രമവിനിമേയമല്ല

$A$ യുടെ ക്രമം $m\times n$ ഉം $B$ യുടെ ക്രമം $n\times p$ യും ആണെങ്കിൽ $AB$ നിർവ്വചിക്കാൻ സാധിക്കും പക്ഷെ $BA$ നിർവചിക്കാൻ സാധ്യമല്ല. ചിലപ്പോൾ $AB$ യും $BA$ യും നിർവചിക്കാൻ സാധിച്ചാലും രണ്ടും തുല്യമായിരിക്കണമെന്നില്ല. അതിനാൽ പൊതുവായി $AB\neq BA$.



3 Algebra Malayalam .indd 149 10/02/2023 11:49:12

**(b) മാട്രിക്സ് ഗുണനം സങ്കലനത്തിനുമേൽ വിതരണം ആകുന്നു**

(i) $A,\ B,\ C$ എന്നിവ കൂടാതെ $m\times n$, $n\times p$, $n\times p$ എന്നീ ക്രമങ്ങളുള്ള മാട്രിക്സുകളാണെങ്കിൽ $A(B+C)=AB+AC$ (വലത്തേ വിതരണ നിയമം)

(ii) $A,\ B,\ C$ എന്നിവ $m\times n$, $m\times n$, $n\times p$ മാട്രിക്സുകളാണെങ്കിൽ $\big(A+B\big)C=AC+BC$ (ഇടത്തേ വിതരണ നിയമം)

**(c) മാട്രിക്സിന്റെ ഗുണനം എല്ലായ്പ്പോഴും സംയോജനമാണ്**

$A,\ B,\ C$ എന്നിവ $m\times n$, $n\times p$ കൂടാതെ $p\times q$ മാട്രിക്സുകളാണെങ്കിൽ $(AB)C=A(BC)$ ആയിരിക്കും

**(d) യൂണിറ്റ് മാട്രിക്സുമായുള്ള ഒരു മാട്രിക്സിന്റെ ഗുണനം**

$A$ എന്നത് ക്രമം $n\times n$ ഉള്ള ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സ് ആണ് കൂടാതെ $I$ എന്നത് അതേ ക്രമം ഉള്ള യൂണിറ്റ് മാട്രിക്സ് ആകുന്നു. എങ്കിൽ $AI=IA=A$.

**കുറിപ്പ്**

- $x$, $y$ എന്നിവ രണ്ടു വാസ്തവിക സംഖ്യകൾ കൂടാതെ $xy=0$ എങ്കിൽ ഒന്നുകിൽ $x=0$ അല്ലെങ്കിൽ $y=0$ പക്ഷേ ഈ നിബന്ധന രണ്ടു മാട്രിക്സുകളുടെ കാര്യത്തിൽ സത്യമാകണമെന്നില്ല.
- $AB=0$ എങ്കിൽ $A=0$, അല്ലെങ്കിൽ $B=0$ ആയിരിക്കും രണ്ടും $A,B=0$ ആയിരിക്കണമെന്നില്ല

**വിശദീകരണം**

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\neq 0 \quad \text{കൂടാതെ} \quad B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\neq 0$$

പക്ഷേ $$AB=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-1 & 1-1\\ -1+1 & -1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=0$$

അതായത് $A\neq 0,\ B\neq 0$ പക്ഷേ $AB=0$.

**ഉദാഹരണം 3.67** $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 1 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}8 & 3 & 1\\ 2 & 4 & 1\\ 5 & 3 & 1\end{pmatrix}$ എങ്കിൽ, $AB$ കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം** $A$ ഒരു $2\times 3$ മാട്രിക്സും കൂടാതെ, $B$ ഒരു $3\times 3$ മാട്രിക്സും ആണെന്ന് കാണാം. അതിനാൽ $AB$ യെ നമുക്ക് നിർവചിക്കാൻ സാധിക്കും. അതിന്റെ ക്രമം $2\times 3$ ആകുന്നു.

തന്നിട്ടുള്ളത് $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 1 & 5\end{pmatrix}_{2\times 3}$, $B=\begin{pmatrix}8 & 3 & 1\\ 2 & 4 & 1\\ 5 & 3 & 1\end{pmatrix}_{3\times 3}$

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 1 & 5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}8 & 3 & 1\\ 2 & 4 & 1\\ 5 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}8+4+0 & 3+8+0 & 1+2+0\\ 24+2+25 & 9+4+15 & 3+1+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & 11 & 3\\ 51 & 28 & 9\end{pmatrix}$$



3 Algebra Malayalam .indd 150 10/02/2023 11:49:18

**ഉദാഹരണം 3.68** $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ എങ്കിൽ $AB$ കൂടാതെ $BA$ എന്നിവ കാണുക. $AB=BA$ പരിശോധിക്കുക .

**നിർദ്ധാരണം** $A$ ഒരു $2\times2$ മാട്രിക്സും, $B$ ഒരു $2\times2$ മാട്രിക്സും ആണെന്ന് കാണാം. അതിനാൽ $AB$ യെ നിർവചിക്കാൻ സാധിക്കും ഇതിന്റെ ക്രമം $2\times2$ ആയിരിക്കും.

$$AB=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+1 & 0+3\\ 2+3 & 0+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 5 & 9\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+0 & 2+0\\ 2+3 & 1+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 5 & 10\end{pmatrix}$$

അതുകൊണ്ട്, $AB\neq BA$ ആണ്.

**ഉദാഹരണം 3.69** $A=\begin{pmatrix}2 & -2\sqrt{2}\\ \sqrt{2} & 2\end{pmatrix}$ കൂടാതെ $B=\begin{pmatrix}2 & 2\sqrt{2}\\ -\sqrt{2} & 2\end{pmatrix}$ എങ്കിൽ

$A$, $B$ എന്നിവ മാട്രിക്സ് ഗുണനത്തിന്റെ ക്രമവിനിമയ നിയമം തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്നു എന്ന് തെളിയിക്കുക.

**നിർദ്ധാരണം** നമുക്ക് തെളിയിക്കേണ്ടത് $AB=BA$

LHS $AB=\begin{pmatrix}2 & -2\sqrt{2}\\ \sqrt{2} & 2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2 & 2\sqrt{2}\\ -\sqrt{2} & 2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}4+4 & 4\sqrt{2}-4\sqrt{2}\\ 2\sqrt{2}-2\sqrt{2} & 4+4\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}8 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix}$

RHS $BA=\begin{pmatrix}2 & 2\sqrt{2}\\ -\sqrt{2} & 2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2 & -2\sqrt{2}\\ \sqrt{2} & 2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}4+4 & -4\sqrt{2}+4\sqrt{2}\\ -2\sqrt{2}+2\sqrt{2} & 4+4\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}8 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix}$

അതിനാൽ LHS = RHS (ie) $AB=BA$ ആകുന്നു.

**കുറിപ്പ്**

- $A$ യും $B$ യും ഏതെങ്കിലും രണ്ട് പൂജ്യമല്ലാത്ത മാട്രിക്സുകളാണെങ്കിൽ $(A+B)^2\neq A^2+2AB+B^2$.
- എങ്ങനെയായാലും $AB=BA$ ആണെങ്കിൽ $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

**ഉദാഹരണം 3.70** നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 5\end{pmatrix}$

**നിർദ്ധാരണം**

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}_{2\times2}\times\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}_{2\times1}=\begin{pmatrix}4\\ 5\end{pmatrix}$$

മാട്രിക്സ് ഗുണനം അനുസരിച്ച് $\begin{pmatrix}2x+y\\ x+2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 5\end{pmatrix}$

$2x+y=4$ ...(1)

$x+2y=5$ ...(2)

(1) $-2\times$ (2) ലഭിക്കുന്നു

$$\begin{array}{rl} 2x+\ y=\ 4 & \\ 2x+4y=10 & (-)\\ \hline -3y=-6 & \end{array}$$

$y=2$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.



3 Algebra Malayalam .indd 151 10/02/2023 11:49:24

$y = 2$ നെ, (1) ൽ പ്രതിപാദിച്ചാൽ, $2x + 2 = 4$, $x = 1$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു

അതിനാൽ, $x = 1$, $y = 2$ ആകുന്നു.

**ഉദാഹരണം 3.71** $A = \begin{pmatrix}1 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ $(AB)C = A(BC)$ തെളിയിക്കുക.

**നിർദ്ധാരണം** LHS = $(AB)C$

$$AB = \begin{pmatrix}1 & -1 & 2\end{pmatrix}_{1\times 3} \times \begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}_{3\times 2} = (1-2+2 \quad -1-1+6) = (1 \quad 4)$$

$$(AB)C = (1 \quad 4)_{1\times 2} \times \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}_{2\times 2} = (1+8 \quad 2-4) = (9 \quad -2) \qquad \ldots(1)$$

RHS = $A(BC)$

$$BC = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}_{3\times 2} \times \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}_{2\times 2} = \begin{pmatrix}1-2 & 2+1\\ 2+2 & 4-1\\ 1+6 & 2-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 3\\ 4 & 3\\ 7 & -1\end{pmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{pmatrix}1 & -1 & 2\end{pmatrix}_{1\times 3} \times \begin{pmatrix}-1 & 3\\ 4 & 3\\ 7 & -1\end{pmatrix}_{3\times 2}$$

$$A(BC) = (-1-4+14 \quad 3-3-2) = (9 \quad -2) \qquad \ldots(2)$$

(1) ൽ നിന്നും (2) ൽ നിന്നും, $(AB)C = A(BC)$.

**ഉദാഹരണം 3.72** $A = \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}1 & 2\\ -4 & 2\end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix}-7 & 6\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ എങ്കിൽ $A\left(B + C\right) = AB + AC$.

എന്നത് പരിശോധിക്കുക

**നിർദ്ധാരണം** LHS $A(B + C)$

$$B + C = \begin{pmatrix}1 & 2\\ -4 & 2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-7 & 6\\ 3 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6 & 8\\ -1 & 4\end{pmatrix}$$

$$A(B + C) = \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-6 & 8\\ -1 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6-1 & 8+4\\ 6-3 & -8+12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7 & 12\\ 3 & 4\end{pmatrix} \qquad \ldots(1)$$

RHS $AB + AC$

$$AB = \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & 2\\ -4 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-4 & 2+2\\ -1-12 & -2+6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3 & 4\\ -13 & 4\end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-7 & 6\\ 3 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7+3 & 6+2\\ 7+9 & -6+6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4 & 8\\ 16 & 0\end{pmatrix}$$



3 Algebra Malayalam .indd 152 10/02/2023 11:49:34

അതുകൊണ്ട്, $AB+AC=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -13 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4 & 8\\ 16 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & 12\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ ...(2)

(1)ൽ നിന്നും (2) ൽ നിന്നും, $A(B+C)=AB+AC$ തെളിയിച്ചു.

**ഉദാഹരണം 3.73** $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$ കൂടാതെ $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 4\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ എങ്കിൽ $(AB)^T=B^TA^T$ തെളിയിക്കുക.

**നിർദ്ധാരണം**

LHS $(AB)^T$

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}_{2\times3}\times\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 4\\ 0 & 2\end{pmatrix}_{3\times2}$$

$$=\begin{pmatrix}2-2+0 & -1+8+2\\ 4+1+0 & -2-4+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 9\\ 5 & -4\end{pmatrix}$$

$$(AB)^T=\begin{pmatrix}0 & 9\\ 5 & -4\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}0 & 5\\ 9 & -4\end{pmatrix} \quad ...(1)$$

RHS ( $B^TA^T$ )

$$B^T=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 4 & 2\end{pmatrix},\ A^T=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$B^TA^T=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 4 & 2\end{pmatrix}_{2\times3}\times\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}_{3\times2}$$

$$=\begin{pmatrix}2-2+0 & 4+1+0\\ -1+8+2 & -2-4+2\end{pmatrix}$$

$$B^TA^T=\begin{pmatrix}0 & 5\\ 9 & -4\end{pmatrix} \quad ...(2)$$

(1) ൽ നിന്നും, (2) ൽ നിന്നും, $(AB)^T=B^TA^T$ തെളിയിച്ചു.

## അഭ്യാസം 3.19

1. ഗുണനഫല മാട്രിക്സ് $AB$ യുടെ ക്രമം കാണുക

| | (i) | (ii) | (iii) | (iv) | (v) |
|---|---|---|---|---|---|
| **A യുടെ ക്രമങ്ങൾ** | 3×3 | 4×3 | 4×2 | 4×5 | 1×1 |
| **B യുടെ ക്രമങ്ങൾ** | 3×3 | 3×2 | 2×2 | 5×1 | 1×3 |

2. $A$ യുടെ ക്രമം $p\times q$ വും $B$ യുടെ ക്രമം $q\times r$ ഉം ആണെങ്കിൽ $AB$, $BA$ എന്നിവയുടെ ക്രമം കാണുക?

3. $A$ യിൽ '$a$' വരികളും, '$a+3$' നിരകളും ആണുള്ളത്. $B$ യിൽ '$b$'വരികളും '$17-b$' നിരകളും ഉണ്ട്, $AB$ കൂടാതെ $BA$ എന്നീ രണ്ട് ഗുണനഫലങ്ങളും നിർവചിക്കാൻ സാധിക്കും എങ്കിൽ $a$, $b$ എന്നിവ കാണുക.

4. $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 4 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 5\end{pmatrix}$ എങ്കിൽ $AB$, $BA$ എന്നിവ കാണുക കൂടാതെ $AB=BA$ എന്നത് പരിശോധിക്കുക?

5. $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 5 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 5 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ -4 & 1 & 3\end{pmatrix}$ എന്ന് തന്നിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ $A(B+C)=AB+AC$ എന്നത് പരിശോധിക്കുക.



3 Algebra Malayalam .indd 153 10/02/2023 11:49:41

6. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$ എന്നീ രണ്ട് മാട്രിക്സുകൾ ക്രമവിനിമയ നിയമം $AB=BA$ തൃപ്തി പ്പെടുത്തുന്നു എന്ന് തെളിയിക്കുക

7. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 1 & 5\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ എങ്കിൽ (i) $A(BC)=(AB)C$ എന്ന് തെളിയിക്കുക
(ii) $(A-B)C=AC-BC$ (iii) $(A-B)^T=A^T-B^T$

8. $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & 0\\ 0 & \cos\theta\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}\sin\theta & 0\\ 0 & \sin\theta\end{pmatrix}$ എങ്കിൽ $A^2+B^2=I$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

9. $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ എങ്കിൽ $AA^T=I$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

10. $A^2=I$ എങ്കിൽ $A=\begin{pmatrix}5 & -4\\ 6 & -5\end{pmatrix}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക

11. $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ എങ്കിൽ $A^2-(a+d)A=(bc-ad)I_2$ എന്ന് തെളിയിക്കുക

12. $A=\begin{pmatrix}5 & 2 & 9\\ 1 & 2 & 8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 7\\ 1 & 2\\ 5 & -1\end{pmatrix}$ എങ്കിൽ $(AB)^T=B^TA^T$ എന്ന് തെളിയിക്കുക

13. $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ എങ്കിൽ $A^2-5A+7I_2=0$ എന്ന് തെളിയിക്കുക

6ZM3R

## അഭ്യാസം 3.20

### ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുത്തെഴുതുക

1. മൂന്ന് ചരങ്ങളുള്ള മൂന്ന് രേഖീയ സമീകരണ സമ്പ്രദായത്തെ അസ്ഥിരമെന്ന് പറയണമെങ്കിൽ അവയുടെ പ്രതലങ്ങൾ
(A) ഒരു ബിന്ദുവിൽ മാത്രം ഛേദിക്കണം (B) ഒരു രേഖയിൽ ഛേദിക്കുന്നു
(C) പരസ്പരം ഛേദിക്കുന്നു (D) ഛേദിക്കുന്നില്ല.

2. $x+y-3z=-6$, $-7y+7z=7$, $3z=9$ എന്ന സമ്പ്രദായത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണം
(A) $x=1, y=2, z=3$ (B) $x=-1, y=2, z=3$
(C) $x=-1, y=-2, z=3$ (D) $x=1, y=-2, z=3$

3. $x^2-2x-24$, $x^2-kx-6$ എന്നിവയുടെ ഉ.സാ.ഘ $(x-6)$ ആണെങ്കിൽ, $k$ യുടെ മൂല്യം
(A) 3 (B) 5 (C) 6 (D) 8

4. $\dfrac{3y-3}{y}\div\dfrac{7y-7}{3y^2}$ എന്നത്
(A) $\dfrac{9y}{7}$ (B) $\dfrac{9y^3}{(21y-21)}$ (C) $\dfrac{21y^2-42y+21}{3y^3}$ (D) $\dfrac{7(y^2-2y+1)}{y^2}$



3 Algebra Malayalam .indd 154 10/02/2023 11:49:48

5. $y^2 + \frac{1}{y^2}$ എന്നത് താഴെ തന്നവയിൽ ഏതിനാണ് തുല്യമല്ലാത്തത്

(A) $\frac{y^4+1}{y^2}$ (B) $\left(y+\frac{1}{y}\right)^2$ (C) $\left(y-\frac{1}{y}\right)^2+2$ (D) $\left(y+\frac{1}{y}\right)^2-2$

6. $\frac{x}{x^2-25} - \frac{8}{x^2+6x+5}$ എന്നതിന്റെ മൂല്യം

(A) $\frac{x^2-7x+40}{(x-5)(x+5)}$ (B) $\frac{x^2+7x+40}{(x-5)(x+5)(x+1)}$

(C) $\frac{x^2-7x+40}{(x^2-25)(x+1)}$ (D) $\frac{x^2+10}{(x^2-25)(x+1)}$

7. $\frac{256x^8y^4z^{10}}{25x^6y^6z^6}$ ന്റെ വർഗ്ഗമൂലം

(A) $\frac{16}{5}\left|\frac{x^2z^4}{y^2}\right|$ (B) $16\left|\frac{y^2}{x^2z^4}\right|$ (C) $\frac{16}{5}\left|\frac{y}{xz^2}\right|$ (D) $\frac{16}{5}\left|\frac{xz^2}{y}\right|$

8. $x^4+64$ നോട് താഴെത്തന്നിരിക്കുന്നവയിൽ ഏത് കൂട്ടിയാൽ അത് ഒരു പൂർണ്ണവർഗ്ഗമാകും.

(A) $4x^2$ (B) $16x^2$ (C) $8x^2$ (D) $-8x^2$

9. $\left(2x-1\right)^2 = 9$ ന്റെ നിർദ്ധാരണം

(A) $-1$ (B) 2 (C) $-1$, 2 (D) ഇതൊന്നുമല്ല

10. $4x^4-24x^3+76x^2+ax+b$ ഒരു പൂർണ്ണവർഗ്ഗമാണെങ്കിൽ $a$, $b$ എന്നിവയുടെ മൂല്യം

(A) 100,120 (B) 10,12 (C) $-120$,100 (D) 12,10

11. $q^2x^2+p^2x+r^2=0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ മൂലസംഖ്യകൾ $qx^2+px+r=0$, എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ മൂലസംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗത്തിനു തുല്യമെങ്കിൽ $q$, $p$, $r$ എന്നിവ ഒരു _____

(A) $A.P$ (B) $G.P$ (C) $A.P$ യും $G.P$ യും (D) ഇതിലൊന്നുമല്ല

12. ഒരു രേഖീയ സമീകരണത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് ഒരു

(A) നേർരേഖ (B) വൃത്തം (C) പാരബോള (D) ഹൈപ്പർബോള

13. $x^2+4x+4$ എന്ന ദ്വിഘാത ബഹുപദവ്യഞ്ജകം $X$ അക്ഷവുമായി ഛേദിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെ എണ്ണം

(A) 0 (B) 1 (C) 0 or 1 (D) 2

14. $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 9 & 11 & 13 & 15 \end{pmatrix}$ എങ്കിൽ $A^T$ എന്ന മാട്രിക്സിന്റെ ക്രമം

(A) $2\times3$ (B) $3\times2$ (C) $3\times4$ (D) $4\times3$

15. $A$ ഒരു $2\times3$ മാട്രിക്സും $B$ ഒരു $3\times4$ മാട്രിക്സും ആയാൽ $AB$ യിൽ എത്ര നിരകൾ ഉണ്ടാകും

(A) 3 (B) 4 (C) 2 (D) 5



3 Algebra Malayalam .indd 155 10/02/2023 11:49:53

16. ഒരു മാട്രിക്സിൽ നിരകളുടെ എണ്ണവും വരികളുടെ എണ്ണവും തുല്യം അല്ല എങ്കിൽ ആ മാട്രിക്സ് ഒരു

(A) വികർണ്ണ മാട്രിക്സ് (B) ദീർഘചതുര മാട്രിക്സ്

(C) സമചതുര മാട്രിക്സ് (D) അനന്യ മാട്രിക്സ്

17. ഒരു നിര മാട്രിക്സിന്റെ പരിപവർത്തനം എന്നത്

(A) യൂണിറ്റ് മാട്രിക്സ് (B) വികർണ്ണ മാട്രിക്സ്

(C) നിര മാട്രിക്സ് (D) വരി മാട്രിക്സ്

18. $2X+\begin{pmatrix}1 & 3\\5 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 7\\9 & 5\end{pmatrix}$ എങ്കിൽ മാട്രിക്സ് $X$ കാണുക

(A) $\begin{pmatrix}-2 & -2\\2 & -1\end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix}2 & 2\\2 & -1\end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 2\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}2 & 1\\2 & 2\end{pmatrix}$

19. തന്നിരിക്കുന്ന മാട്രിക്സുകൾ ഉപയോഗിച്ച് താഴെ തന്നിരിക്കുന്നവയിൽ ഏതിന്റെയൊക്കെ മൂല്യങ്ങൾ കാണാൻ സാധിക്കും

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\\5 & 6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{pmatrix},\quad \text{(i) } A^2 \quad \text{(ii) } B^2 \quad \text{(iii) } AB \quad \text{(iv) } BA$$

(A) (i) കൂടാതെ (ii) മാത്രം (B) (ii) കൂടാതെ (iii) മാത്രം

(C) (ii) കൂടാതെ (iv) മാത്രം (D) എല്ലാം

20. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 2 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & -1\\0 & 2\end{pmatrix}$ കൂടാതെ, $C=\begin{pmatrix}0 & 1\\-2 & 5\end{pmatrix}$. എങ്കിൽ താഴെ തന്നിരിക്കുന്നവയിൽ ഏതൊക്കെ പ്രസ്താവനകളാണ് ശരി (i) $AB+C=\begin{pmatrix}5 & 5\\5 & 5\end{pmatrix}$ (ii) $BC=\begin{pmatrix}0 & 1\\2 & -3\\-4 & 10\end{pmatrix}$

(iii) $BA+C=\begin{pmatrix}2 & 5\\3 & 0\end{pmatrix}$ (iv) $(AB)C=\begin{pmatrix}-8 & 20\\-8 & 13\end{pmatrix}$

(A) (i) കൂടാതെ (ii) മാത്രം (B) (ii) കൂടാതെ (iii) മാത്രം

(C) (iii) കൂടാതെ (iv) മാത്രം (D) എല്ലാം



1. നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക $\frac{1}{3}(x+y-5)=y-z=2x-11=9-(x+2z)$ .

2. ഒരു സ്കൂളിൽ 150 വിദ്യാർത്ഥികൾ പ്രവേശനം നേടിയിട്ടുണ്ട്. $A$, $B$, $C$ എന്നീ മൂന്ന് വിഭാഗങ്ങളിലായി അവരെ തരം തിരിച്ചിട്ടുണ്ട്. 6 വിദ്യാർത്ഥികളെ വിഭാഗം A യിൽ നിന്നും വിഭാഗം $C$ യിലേക്ക് മാറ്റിയാൽ ആ വിഭാഗങ്ങളിൽ തുല്യ എണ്ണം കുട്ടികൾ ഉണ്ടായിരിക്കും. വിഭാഗം $C$ യിലെ വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണത്തിന്റെ നാലുമടങ്ങ് കൂടാതെ വിഭാഗം A യിലെ വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം എന്നിവയുടെ വ്യത്യാസം വിഭാഗം $B$ യിലെ വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണത്തിന് തുല്യമെങ്കിൽ ആ മൂന്ന് വിഭാഗങ്ങളിലും ഉള്ള കുട്ടികളുടെ എണ്ണം കാണുക.



3 Algebra Malayalam .indd 156 10/02/2023 11:49:57

3. ഒരു മുന്നക്കസംഖ്യയുടെ പത്താം സ്ഥാനത്തെ അക്കത്തെയും നൂറാം സ്ഥാനത്തെ അക്കത്തെയും പരസ്പരം മാറ്റിയാൽ കിട്ടുന്ന പുതിയ സംഖ്യ യഥാർത്ഥ സംഖ്യയുടെ മൂന്നുമടങ്ങിനെക്കാൾ 54 കൂടുതലായിരിക്കും. തന്നിട്ടുള്ള സംഖ്യയോട് 198 കൂട്ടിയാൽ അക്കങ്ങൾ നേർവിപരീതമാകും (റിവേഴ്സ്). ഒന്നാം സ്ഥാനത്തെ അക്കത്തിനും അതിനെക്കാൾ വലുതായ പത്താം സ്ഥാനത്തെ അക്കത്തിനും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസത്തിന്റെ രണ്ട് മടങ്ങ്, നൂറാം സ്ഥാനത്തെ അക്കത്തിനും അതിനെക്കാൾ വലുതായ പത്താം സ്ഥാനത്തെ അക്കത്തിനും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസത്തിന് തുല്യമെങ്കിൽ ആ മുന്നക്ക സംഖ്യ കാണുക.

4. $xy(k^2+1)+k(x^2+y^2)$ കൂടാതെ $xy(k^2-1)+k(x^2-y^2)$ എന്നിവയുടെ ലഘുതമ സാധാരണ ഗുണിതം കാണുക

5. ഡിവിഷൻ അൽഗോരിതം ഉപയോഗിച്ച് ലഘുതമ സാധാരണ ഗുണിതം കാണുക
$2x^4+13x^3+27x^2+23x+7$ , $x^3+3x^2+3x+1$, $x^2+2x+1$

6. തന്നിട്ടുള്ള പരിമേയ വ്യഞ്ജകങ്ങളെ ലഘൂകരിക്കുക
(i) $\dfrac{x^{3a}-8}{x^{2a}+2x^a+4}$ (ii) $\dfrac{10x^3-25x^2+4x-10}{-4-10x^2}$

7. ലഘൂകരിക്കുക $\dfrac{\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q+r}}{\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q+r}}\times\left(1+\dfrac{q^2+r^2-p^2}{2qr}\right)$.

8. അരുൾ, രവി, രാം എന്നിവർ ചേർന്ന് ഒരു പീടിക വൃത്തിയാക്കുന്നതിന് 6 മണിക്കൂറുകൾ ആകും ഒറ്റയ്ക്ക് വൃത്തിയാക്കുകയാണെങ്കിൽ രവി എടുക്കുന്ന സമയം, അരുൾ പീടിക വൃത്തിയാക്കാനെടുക്കുന്ന സമയത്തിന്റെ രണ്ട് മടങ്ങാണ്. രാമിന് അരുൾ എടുക്കുന്ന സമയത്തിന്റെ മൂന്ന് മടങ്ങ് ആവശ്യമാണ് എങ്കിൽ. ഓരോരുത്തരും ഒറ്റയ്ക്ക് ജോലി ചെയ്യുന്നതിന് ആവശ്യമായ സമയം കണ്ടുപിടിക്കുക.

9. $289x^4-612x^3+970x^2-684x+361$ ന്റെ വർഗ്ഗമൂലം കാണുക.

10. നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക $\sqrt{y+1}+\sqrt{2y-5}=3$

11. ഒരു ബോട്ട് 36 കി.മീ ദൂരം നദിയുടെ ഒഴുക്കിനെതിരായ ദിശയിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നതിന് നദിയുടെ ഒഴുക്കിന്റെ ദിശയിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നതിനെക്കാൾ 1:6 മണിക്കൂർ കൂടുതൽ വേണ്ടിവരുന്നു. ജലത്തിന്റെ വേഗത 4 കി.മീ/ മണിക്കൂർ ആണെങ്കിൽ ഒഴുക്കില്ലാത്ത വെള്ളത്തിൽ ബോട്ടിന്റെ വേഗത കാണുക?

12. 320 മീ ചുറ്റളവും 4800 ചതുരശ്രമീറ്റർ വിസ്തീർണ്ണവും ഉള്ള ദീർഘചതുരാകൃതിയിലുള്ള ഒരു പാർക്ക് രൂപീകരിക്കാൻ സാധിക്കുമോ? സാധിക്കുമെങ്കിൽ അതിന്റെ നീളവും വീതിയും കാണുക.

13. ഒരു ഘടികാരം ഉച്ചയ്ക്ക് 2 മണി കഴിഞ്ഞ് $t$ മിനിട്ടിന് ശേഷം ഉച്ചയ്ക്ക് 3 മണിയിൽ എത്തുന്നതിന് ആവശ്യമായ സമയം $\dfrac{t^2}{4}$ നെക്കാൾ 3 മിനിട്ട് കുറവാകുന്നു എങ്കിൽ $t$ കാണുക.

14. ഒരു വരിയിലെ ഇരിപ്പിടങ്ങളുടെ എണ്ണം ആ ഹാളിലെ ആകെ വരികളുടെ എണ്ണത്തിന് തുല്യമാണ്. വരികളുടെ എണ്ണം 2 മടങ്ങും, ഓരോ വരിയിലും ഉള്ള ഇരിപ്പിടങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിൽ നിന്നും 5 കുറഞ്ഞാലും ആ ഹാളിലുള്ള ഇരിപ്പിടങ്ങളുടെ എണ്ണം ആദ്യത്തെക്കാൾ 375 വർദ്ധിക്കുന്നു. ഹാളിൽ ആദ്യമുണ്ടായിരുന്ന വരികളുടെ എണ്ണം കാണുക.

15. $\alpha$ , $\beta$ എന്നിവ $f(x)=x^2-2x+3$, എന്ന ബഹുപദവ്യഞ്ജകത്തിന്റെ മൂലസംഖ്യകൾ ആണെങ്കിൽ താഴെ തന്നിട്ടുള്ള മൂലസംഖ്യകൾ ഉള്ള ബഹുപദവ്യഞ്ജകങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുക (i) $\alpha+2$, $\beta+2$
(ii) $\dfrac{\alpha-1}{\alpha+1}$, $\dfrac{\beta-1}{\beta+1}$.

16. $-4$ എന്നത് $x^2+px-4=0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ മൂലസംഖ്യ കൂടാതെ $x^2+px+q=0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന് തുല്യ മൂലസംഖ്യകളാണ് ഉള്ളത് എങ്കിൽ $p$, $q$ എന്നിവയുടെ മൂല്യം കാണുക.

17. സെന്തിൽ, രവി എന്ന രണ്ടു കൃഷിക്കാർ, അരി, ഗോതമ്പ്, കൂവരക് എന്നീ മൂന്ന് വിവിധതരം ധാന്യങ്ങൾ



3 Algebra Malayalam .indd 157 10/02/2023 11:50:00

കൃഷി ചെയ്തു. ഏപ്രിൽ മാസത്തിൽ ഈ രണ്ടു കൃഷിക്കാരും വിറ്റ മൂന്ന് വിവിധതരം ധാന്യങ്ങൾ മാട്രിക്സ് രൂപത്തിൽ താഴെ തന്നിട്ടുണ്ട്.

ഏപ്രിൽ മാസത്തെ വില്പന വിവരം (₹ യിൽ)

$$A = \begin{matrix} \text{അരി} & \text{ഗോതമ്പ്} & \text{കുവരക്} \\ \begin{pmatrix} 500 & 1000 & 1500 \\ 2500 & 1500 & 500 \end{pmatrix} & & \begin{matrix} \text{സെന്തിൽ} \\ \text{രവി} \end{matrix} \end{matrix}$$

കൂടാതെ ഓരോതരം ധാന്യത്തിന്റെയും മെയ് മാസത്തിലെ വില്പന (രൂപയിൽ) ഏപ്രിൽ മാസത്തെ വില്പനയുടെ രണ്ട് മടങ്ങാണ് എങ്കിൽ.

(i) ഏപ്രിൽ, മെയ് എന്നീ മാസങ്ങളിലെ ശരാശരി വില്പനകൾ കാണുക.

(ii) വരുന്ന മാസങ്ങളിലെല്ലാം വില്പന ഇങ്ങനെ കൂടിക്കൊണ്ടേ പോവുകയാണെങ്കിൽ ആഗസ്റ്റ് മാസത്തെ വില്പനകൾ എത്രയായിരിക്കും?

18. $\cos\theta\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} + \sin\theta\begin{pmatrix}x & -\cos\theta\\ \cos\theta & x\end{pmatrix} = I_2$, എങ്കിൽ $x$ കാണുക.

19. $A=\begin{pmatrix}p & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -q\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ കൂടാതെ $BA = C^2$, എങ്കിൽ $p$, $q$ എന്നിവ കാണുക.

20. $A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 4 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 8 & 5\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ എങ്കിൽ, $CD-AB=0$ വരുന്നവിധം $D$ മാട്രിക്സ് കാണുക

## ഓർമ്മിക്കേണ്ട വസ്തുതകൾ

- മൂന്ന് ചരങ്ങളുള്ള രേഖീയ സമീകരണ സമ്പ്രദായം താഴെ പറയുന്നവയിൽ ഏതെങ്കിലും ഒരു രീതിയിൽ സംഭവിക്കും..

  (i) ഒരേയൊരു നിർദ്ധാരണം (ii) അനന്തമായ നിർദ്ധാരണങ്ങൾ (iii) നിർദ്ധാരണം ഇല്ല

- രണ്ടോ അതിലധികമോ ബീജഗണിത വ്യഞ്ജകങ്ങളുടെ ലഘുതമസാധാരണഗുണിതം എന്നത് അവയെ നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാവുന്ന ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ കൃതിയുള്ള (ഘാതം) വ്യഞ്ജകമാണ്.

- ഒരു ബഹുപദവ്യഞ്ജകത്തിന്റെ കൃതി 2 ആണെങ്കിൽ ആ ബഹുപദവ്യഞ്ജകത്തെ ദ്വിഘാത ബഹുപദവ്യഞ്ജകം എന്ന് പറയാം. ഓരോ ദ്വിഘാത ബഹുപദവ്യഞ്ജകത്തിനും രണ്ട് പൂജ്യങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കും. ദ്വിഘാത ബഹുപദവ്യഞ്ജകത്തിന്റെ പൂജ്യങ്ങൾ $x$- അക്ഷത്തെ ഛേദിക്കുന്നു.

- $ax^2 + bx + c = 0$, $(a \neq 0)$ എന്ന ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന്റെ മൂലസംഖ്യകൾ $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ആകുന്നു.

- എന്ന ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന് $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$

  മൂലസംഖ്യകളുടെ തുക $\alpha + \beta = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-x\text{-ന്റെ ഗുണാങ്കം}}{x^2\text{-ന്റെ ഗുണാങ്കം}}$

  മൂലസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം $\alpha\beta = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\text{സ്ഥിരാങ്കം}}{x^2\text{-ന്റെ ഗുണാങ്കം}}$



3 Algebra Malayalam .indd 158 10/02/2023 11:50:04

- ഒരു ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന്റെ മൂലസംഖ്യകൾ $\alpha$ കൂടാതെ $\beta$ എങ്കിൽ ആ സമീകരണം $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$ ആകുന്നു .
- വിവേചകത്തിന്റെ $(\Delta=b^2-4ac)$ മൂല്യം, മൂലസംഖ്യകളുടെ സ്വഭാവത്തെ താഴെത്തന്നവിധം നിർണ്ണയിക്കുന്നു
  (i) $\Delta>0$ , എങ്കിൽ, മൂലസംഖ്യകൾ വാസ്തവികം കൂടാതെ വ്യത്യസ്തം.
  (ii) $\Delta=0$ , എങ്കിൽ മൂലസംഖ്യകൾ വാസ്തവികം കൂടാതെ തുല്യം.
  (iii) $\Delta<0$ , എങ്കിൽ വാസ്തവിക മൂലസംഖ്യകൾ ഇല്ല.
- ദ്വിഘാത സമീകരണങ്ങളെ ഗ്രാഫ് മുഖേന നിർദ്ധാരണം ചെയ്യൽ.
- അംഗങ്ങളെ വരികളായും നിരകളായും എഴുതുന്ന ദീർഘചതുരാകൃതിയിലുള്ള ഒരു ക്രമീകരണമാണ് മാട്രിക്സ്.
- മാട്രിക്സിന്റെ ക്രമം

  $A$ എന്ന മാട്രിക്സിൽ $m$ വരികളും $n$ നിരകളും ഉണ്ടെങ്കിൽ $A$ എന്ന മാട്രിക്സിന്റെ ക്രമം(വരികളുടെ എണ്ണം) $\times$ (നിരകളുടെ എണ്ണം) അതായത് $m\times n$ ആകുന്നു. $m\times n$ എന്നതിനെ $m$ ക്രോസ് $n$ എന്ന് വായിക്കാം. കൂടാതെ $m\times n$ എന്നത് $m$, $n$ എന്നിവയുടെ ഗുണനഫലം അല്ല എന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക.
- മാട്രിക്സുകളുടെ തരങ്ങൾ
  (i) A എന്ന മാട്രിക്സിനെ ഒരു വരി മാട്രിക്സ് എന്ന് പറയണമെങ്കിൽ അതിലെ നിരകൾ എത്രയായാലും ഒരേയൊരു വരി മാത്രമേ ഉണ്ടാകാൻ പാടുള്ളൂ. ഒരു വരി മാട്രിക്സിനെ വരി വെക്ടർ എന്നും വിളിക്കുന്നു.
  (ii) A എന്ന മാട്രിക്സിനെ ഒരു നിരമാട്രിക്സ് എന്നു പറയണമെങ്കിൽ അതിലെ വരികൾ എത്രയായാലും ഒരേയൊരു നിര മാത്രമേ ഉണ്ടാകാൻ പാടുള്ളൂ. ഇതിനെ നിര വെക്ടർ എന്നും പറയാം.
  (iii) ഒരു മാട്രിക്സിലെ വരികളുടെ എണ്ണവും നിരകളുടെ എണ്ണവും സമമാണെങ്കിൽ ആ മാട്രിക്സിനെ സമചതുര മാട്രിക്സ് എന്നു പറയാം.
  (iv) ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സിലെ പ്രധാന വികർണ്ണത്തിലെ അംഗങ്ങൾ ഒഴികെ ബാക്കിയുള്ള അംഗങ്ങളെല്ലാം പൂജ്യം ആണെങ്കിൽ ആ മാട്രിക്സിനെ വികർണ്ണ മാട്രിക്സ് എന്നു വിളിക്കുന്നു.
  (v) ഒരു വികർണ്ണ മാട്രിക്സിലെ പ്രധാന വികർണ്ണത്തിലെ അംഗങ്ങൾ തുല്യമായിരുന്നാൽ അതിനെ അദിശ മാട്രിക്സ് എന്നു വിളിക്കാം.
  (vi) ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സിലെ പ്രധാന വികർണ്ണത്തിലെ അംഗങ്ങൾ "1" ഉം ബാക്കി അംഗങ്ങൾ പൂജ്യവും ആയിരുന്നാൽ ആ മാട്രിക്സിനെ അനന്യ മാട്രിക്സ് (or) യൂണിറ്റ് മാട്രിക്സ് എന്നു പറയാം.
  (vii) ഒരു മാട്രിക്സിലെ എല്ലാ അംഗങ്ങളും പൂജ്യം ആയിരുന്നാൽ ആ മാട്രിക്സിനെ ശൂന്യമാട്രിക്സ് (പൂജ്യ മാട്രിക്സ്) എന്നു പറയുന്നു.
  (viii) $A$ എന്ന മാട്രിക്സിലെ വരികളെയും നിരകളെയും പരസ്പരം മാറ്റുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന മാട്രിക്സിനെ $A$ യുടെ പരിവർത്തനം എന്നു പറയുന്നു. ഇതിനെ $A^T$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു .
  (ix) ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സിലെ പ്രധാന വികർണ്ണത്തിന് മുകളിലുള്ള അംഗങ്ങൾ എല്ലാം പൂജ്യം എങ്കിൽ ആ മാട്രിക്സിനെ കീഴ് ത്രികോണ മാട്രിക്സ് എന്നു പറയുന്നു. ഒരു മാട്രിക്സിലെ പ്രധാന വികർണ്ണത്തിന് താഴെയുള്ള അംഗങ്ങൾ എല്ലാം പൂജ്യം ആയിരുന്നാൽ ആ മാട്രിക്സിനെ മേൽ ത്രികോണ മാട്രിക്സ് എന്ന് പറയുന്നു.
  (x) $A$, $B$ എന്നീ രണ്ടു മാട്രിക്സുകൾ തുല്യ മാട്രിക്സ് എന്ന് പറയണമെങ്കിൽ അവയുടെ ക്രമം തുല്യമായിരിക്കണം. കൂടാതെ $A$ എന്ന മാട്രിക്സിലെ ഓരോ അംഗവും $B$ എന്ന മാട്രിക്സിലെ അനുബന്ധ അംഗത്തിന് തുല്യമായിരിക്കണം. അതായത് എല്ലാ $i$, $j$ യ്ക്കും $a_{ij}=b_{ij}$ ആയിരിക്കണം.



3 Algebra Malayalam .indd 159 10/02/2023 11:50:05

- $A_{m\times n}$ എന്ന മാട്രിക്സിലെ ഋണം $-A_{m\times n}$ ആകുന്നു. അതായത് $A_{m\times n}$ എന്ന മാട്രിക്സിലെ ഓരോ അംഗവും $A_{m\times n}$ എന്ന മാട്രിക്സിലെ ഓരോ അംഗത്തിന്റെയും സങ്കലന വിപരീതം ആയിരിക്കും.
- **മാട്രിക്സുകളുടെ സങ്കലനം കൂടാതെ വിപരീതം**

  രണ്ടു മാട്രിക്സുകളുടെ ക്രമം തുല്യമാണെങ്കിൽ അവയെ കൂട്ടുന്നതിനും കുറക്കുന്നതിനും സാധിക്കും. രണ്ട് മാട്രിക്സുകളെ കൂട്ടുന്നതിനോ അല്ലെങ്കിൽ കുറക്കുന്നതിനോ. അവയുടെ അനുബന്ധ അംഗങ്ങളെ തമ്മിൽ കൂട്ടുകയോ അല്ലെങ്കിൽ കുറക്കുകയോ ചെയ്താൽ മതിയാകും.

- **മാട്രിക്സിനെ ഒരു അദിശം കൊണ്ടുള്ള ഗുണനം**

  ഒരു പുതിയ മാട്രിക്സ് $kA$ കിട്ടുന്നതിനായി $A$ എന്ന മാട്രിക്സിനെ പൂജ്യമല്ലാത്ത ഒരു സംഖ്യ $k$ കൊണ്ട് ഗുണിക്കണമെങ്കിൽ $A$ യിലെ ഓരോ അംഗത്തേയും $k$ കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ മതിയാകും $kA$ എന്ന മാട്രിക്സിനെ $A$ യുടെ അദിശഗുണനം എന്നു പറയാം.

അതായത് $A=(a_{ij})_{m\times n}$ എങ്കിൽ, $kA=(ka_{ij})_{m\times n}$ എല്ലാ $i=1,2,\ldots,m$ ഉം, എല്ലാ $j=1,2,\ldots,n$ ഉം ആയിരിക്കും.

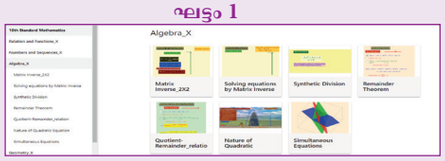
## ഐ.സി.ടി കോർണർ

**ഐ.സി.ടി 3.1**

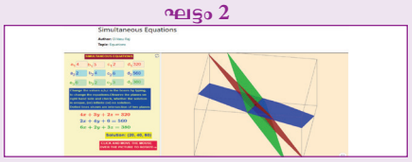
**ഘട്ടം 1:** Browser Open ചെയ്തു താഴെകൊടുത്തിട്ടുള്ള URL Link type ചെയ്യുക (അല്ലെങ്കിൽ) QR Code Scan ചെയ്യുക. **"Algebra"** (ബീജഗണിതം) എന്ന പാഠഭാഗം open ആകുന്നു.

**ഘട്ടം 2:** തന്നിട്ടുള്ള വർക്ക് ഷീറ്റിൽ മൂന്ന് രേഖിയ സമീകരണങ്ങൾ നിങ്ങൾക്ക് കാണാൻ സാധിക്കും. ഓരോ സമീകരണത്തിലും a, b, c എന്നിവക്ക് പുതിയ മൂല്യങ്ങൾ കൊടുത്താൽ നിങ്ങൾക്ക് തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണത്തെ മാറ്റാൻ സാധിക്കും അവയുടെ 3D ഗ്രാഫ് കാണാൻ സാധിക്കും. സമീകരണങ്ങളെ വ്യത്യസ്തപ്പെടുത്തി നിർദ്ധാരണത്തിന്റെ സ്വഭാവം കാണുക.

ഘട്ടം 1




ഘട്ടം 2




ഉദ്ദേശിക്കുന്ന ഫലങ്ങൾ



**ഐ.സി.ടി 3.2**

**ഘട്ടം – 1** Browser Open ചെയ്തു താഴെകൊടുത്തിട്ടുള്ള URL Link type ചെയ്യുക. അല്ലെങ്കിൽ QR Code Scan ചെയ്യുക. Geogebra യുടെ വർക്ക് ബുക്ക് ഭാഗം **"Algebra"** (ബീജഗണിതം) open ആകുന്നു. "Nature of Quadratic Equation" (ദ്വിഘാത സമീകരണങ്ങളുടെ സ്വഭാവം) എന്ന വർക്ക് ഷീറ്റ് ഭാഗം click ചെയ്ത് open ചെയ്യുക.

**ഘട്ടം - 2:** തന്നിരിക്കുന്ന വർക്ക്ഷീറ്റിൽ സ്ലൈഡറുകളെ ചലിപ്പിച്ച് ഗുണാങ്കത്തെ മാറ്റുക. ഷെൽ എറിയുന്നതിനുള്ള അതിർത്തി നിശ്ചയിക്കാൻ (പുതിയ സ്ഥാനം) ക്ലിക്ക് ചെയ്ത് സ്ലൈഡറുകൾ നീക്കുക. തുടർന്ന് ലക്ഷ്യത്തിൽ തറയ്ക്കുന്നതിനായി "Get Ball" ക്ലിക്ക് ചെയ്ത് "fire" ക്ലിക്ക് ചെയ്യുക. ഓരോ ഗുണാങ്കം വ്യത്യസ്തമാകുമ്പോഴും വക്രത്തിന് എന്ത് സംഭവിക്കുന്നു. എന്നതിനെക്കുറിച്ച് പഠിക്കുക.

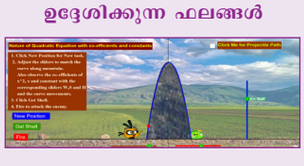
ഘട്ടം 1




ഘട്ടം 2




ഉദ്ദേശിക്കുന്ന ഫലങ്ങൾ




*You can repeat the same steps for other activities*

https://www.geogebra.org/m/jfr2zzgy#chapter/356193
or Scan the QR Code.

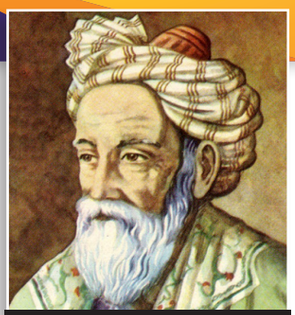
BCK57



3 Algebra Malayalam .indd 160 10/02/2023 11:50:07

# 4 ജ്യാമിതി

"The knowledge of which geometry aims is the knowledge of eternal"
– Plato



Omar Khayyam
(18.5.1048 – 4.12.1131)

ഒമർ ഖയ്യാം പേർഷ്യൻ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനും ജ്യോതിർശാസ്ത്രജ്ഞനും കവിയുമായിരുന്നു. കവി എന്ന നിലയിൽ അദ്ദേഹത്തിന്റെ ക്ലാസിക് കൃതിയായ റൂബ്യാത് ലോക പ്രശസ്തി നേടിയിരുന്നു.

ബീജഗണിതവും ജ്യാമിതിയും ഏകോപിക്കുന്നതിന് അദ്ദേഹം ശ്രമിച്ചു ഖയ്യാമിന്റെ പ്രവർത്തനം. അദ്ദേഹത്തിന്റെ പ്രവർത്തനത്തെ, ത്രിഘാത സമവാക്യങ്ങൾ (cubic equations) നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നതിനുള്ള ആദ്യത്തെ ചിട്ടയായ പഠനമായും കൃത്യമായ രീതിയായും പരിഗണിക്കാം. ജ്യാമിതി ഉപയോഗിച്ച് ഈ പ്രവർത്തനം അദ്ദേഹം പൂർത്തിയാക്കി. യൂക്ലിഡിന്റെ സംഭാവനയായ ജ്യാമിതീയ തത്വങ്ങൾ പൊതുവത്ക്കരിക്കാൻ ശ്രമിച്ച അദ്ദേഹത്തിന്റെ പരിശ്രമങ്ങൾ പല യൂറോപ്യൻ ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞരെയും നോൺ-യൂക്ലീഡിയൻ ജ്യാമിതിയുടെ കണ്ടുപിടിത്തത്തിന് പ്രേരകമാക്കി. പലരും സ്വന്തമാക്കിയിട്ടില്ലാത്ത നേട്ടം കൈവരിച്ച ഒരു ശ്രദ്ധേയനായ ശാസ്ത്രജ്ഞനും കവിയുമായ നല്ല മാതൃകയായിരുന്നു ഖയ്യാം.

G04WE

## പഠനഫലം

- സർവ്വസമത്രികോണങ്ങളുടെ ആശയം ഉപയോഗിച്ച് സദൃശത്രികോണങ്ങളുടെ നിർവചനം മനസ്സിലാക്കുക.
- സദൃശ ത്രികോണങ്ങളുടെ സവിശേഷതകളും നിർമ്മിതിയും മനസ്സിലാക്കുക. ഇതുപയോഗിച്ച് പ്രശ്നം നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക.
- അടിസ്ഥാന ആനുപാതിക സിദ്ധാന്തം, കോണ ദ്വിഭാജക സിദ്ധാന്തം ഇവ തെളിയിക്കാനും അവയുടെ പ്രയോഗങ്ങളും പഠിക്കുന്നതോടൊപ്പം കൊടുത്തിരിക്കുന്ന വ്യവസ്ഥകൾ പാലിച്ച് ത്രികോണങ്ങൾ നിർമ്മിക്കാനും പഠിക്കുക.
- പൈഥഗോറസ് സിദ്ധാന്തം തെളിയിക്കാനും അതിന്റെ പ്രയോഗങ്ങളും പഠിക്കുക.
- ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ സ്പർശരേഖ എന്ന ആശയം മനസ്സിലാക്കി വൃത്തത്തിന് സ്പർശരേഖ നിർമ്മിക്കാൻ പഠിക്കുക.
- സംഗമ സിദ്ധാന്തങ്ങൾ മനസ്സിലാക്കുകയും പ്രയോഗിക്കുകയും ചെയ്യുക.

## 4.1 ആമുഖം

ജ്യാമിതീയ പഠനം വിവിധ ആകൃതികളുടെയും ഘടനകളുടെയും സവിശേഷതകൾ അറിയുന്നതിനെ സംബന്ധിച്ചുള്ളതാണ്. ഗണിത ശാസ്ത്രത്തിന്റെ രണ്ട് പ്രാചീന ശാഖകളായി ജ്യാമിതിയും, അങ്കഗണിതവും കണക്കാക്കപ്പെടുന്നു. അസാധ്യമായ പല ശാസ്ത്രീയ തത്വങ്ങളും വിശകലനം ചെയ്യുന്നതിന് ഗ്രീക്കുകാർ ജ്യാമിതിക്ക് ഉന്നതസ്ഥാനം നൽകിയിരുന്നു. ഭൂമിയുടെ പരിധി, ഭൂമിയിൽ നിന്ന് സൂര്യനിലേക്കും ചന്ദ്രനിലേക്കും ഉള്ള ദൂരം ഇവ കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് വൃത്തങ്ങളുടെ സദൃശ്യത എന്ന ആശയം ഇറാസ്തോസ്തനീസ് ഉപയോഗിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഈ നേട്ടങ്ങൾ പുറമേ, നദികളുടെ വീതി, മരങ്ങളുടെ ഉയരം തുടങ്ങിയവ കണ്ടുപിടിക്കാൻ സദൃശ്യത എന്ന ആശയം ഉപയോഗിക്കുന്നു.

ഈ അധ്യായത്തിൽ നാം മുൻ ക്ലാസുകളിലെ തുടർച്ചയായ ആശയങ്ങൾ ചർച്ച ചെയ്യുന്നതിനൊപ്പം വളരെ പ്രധാന ആശയങ്ങളായ സദൃശത്രികോണങ്ങൾ, അടിസ്ഥാന ആനുപാതിക സിദ്ധാന്തം, കോണ ദ്വി



4 Geometry malayalam.indd 161 20/01/2023 17:47:30

ഭാജക സിദ്ധാന്തം ഏറ്റവും പ്രമുഖമായ പൈഥഗോറസ് സിദ്ധാന്തം എന്നിവയെ കുറിച്ചും പഠിക്കുന്നുണ്ട്. സീവയുടെ സിദ്ധാന്തവും, മെനിലാസിന്റെ സിദ്ധാന്തവും ആദ്യമായാണ് അവതരിപ്പിക്കുന്നത്. ഈ രണ്ട് പുതിയ സിദ്ധാന്തങ്ങളും നമുക്ക് അറിയാവുന്ന എല്ലാ സംഗമ സിദ്ധാന്തങ്ങളെയും പൊതുവൽക്കരിക്കുന്നു. ജ്യാമിതിയ പഠനം നമ്മെ ചുറ്റിയുള്ള വസ്തുക്കളെ ആഴത്തിൽ മനസ്സിലാക്കുന്നതിനുള്ള താല്പര്യം ജനിപ്പിക്കുന്നു. സയൻസിലും, എഞ്ചിനിയറിംഗിലും വാസ്തു വിദ്യയിലും, ജ്യാമിതി ഒരു പ്രധാന പങ്ക് വഹിക്കുന്നു. പ്രകൃതിയിൽ നമുക്ക് ധാരാളം ജ്യാമിതീയ ക്രമീകരണങ്ങൾ കാണാം. മുൻ ക്ലാസുകളിൽ ത്രികോണങ്ങളും അവയുടെ സവിശേഷതളും നമുക്ക് പരിചിതമാണ്.

## 4.2 സദൃശ്യത





ഒരു രൂപം മറ്റൊരു രൂപത്തിന് എല്ലാ തരത്തിലും ആനുപാതികമായാൽ, ആ രണ്ട് രൂപങ്ങളും സദൃശങ്ങളാണെന്ന് പറയാം. ഉദാഹരണമായി:

മുകളിലെ വീടുകൾ നോക്കിയാൽ ആകൃതി ഒരേ പോലെയും വലിപ്പം വ്യത്യാസവുമാണ്. രണ്ട് മൊബൈൽ ഫോണുകൾ ഒരു പോലെയാണ് എന്നാൽ അവയുടെ വലിപ്പങ്ങൾ വ്യത്യാസവുമാണ്. അതുകൊണ്ട് ഗണിതപരമായി പറഞ്ഞാൽ, രണ്ട് സദൃശ വസ്തുക്കളുടെ സമാന അളവുകളുടെ അംശബന്ധം ആനുപാതികമായിരിക്കണം.



ചിത്രം. 4.1

ഇവിടെ ജ്യാമിതീയ രൂപങ്ങൾ ഉള്ള ഒരു പെട്ടി ഉണ്ട്. ഇതിൽ നിന്ന് സദൃശ രൂപങ്ങൾ ശേഖരിച്ച് പട്ടിക തയ്യാറാക്കുക.



ചിത്രം. 4.2

ഈ അധ്യായത്തിൽ, ശാരീരികമായി നമുക്ക് എത്തിപ്പെടാൻ പറ്റുന്നതിലും അപ്പുറമുള്ള ദൂരവും ഉയരവും സാധാരണ അളവ് കോൽ ഉപയോഗിച്ച് കാണാൻ ഉതകും തരത്തിൽ വളരെ പ്രാധാന്യം അർഹിക്കുന്ന സദൃശ്യ ത്രികോണങ്ങളുടെ ആശയത്തെ ഊന്നൽ നൽകി ചർച്ച ചെയ്യുകയാണ്. നിർമ്മാണ മേഖലയിലും, എഞ്ചിനീയറിംഗിലും, വാസ്തുവിദ്യയിലും സദൃശ്യത എന്ന ആശയം വിപുലമായി ഉപയോഗിക്കുന്നു.

സദൃശ്യതയുടെ ചില പ്രയോഗങ്ങൾ ഇവിടെ കൊടുക്കുന്നു

(i) വസ്തുക്കളുടെ നിഴലുകൾ വിശകലനം ചെയ്ത് രൂപപ്പെടന്ന ത്രികോണം ഉപയോഗിച്ച് നമുക്ക് വസ്തുക്കളുടെ യഥാർത്ഥ ഉയരം നിർണ്ണയിക്കാൻ സാധിക്കും.

(ii) ആകാശത്ത് നിന്ന് തറയിലെ ഒരു പ്രത്യേക സ്ഥലത്തിന്റെ ദൂരം നിർണ്ണയിക്കുന്നതിന് ഏരിയൽ ഫോട്ടോഗ്രഫിയിൽ ഈ ആശയം ഉപയോഗിക്കുന്നു.

(iii) വാസ്തുവിദ്യയിൽ അവരുടെ ജോലികളിൽ ഡിസൈൻ പുഷ്ടിപ്പെടുത്താൻ ഉപയോഗിക്കുന്നു.

### 4.2.1 സദൃശ്യത്രികോണങ്ങൾ

സർവസമത്രികോണങ്ങളെക്കുറിച്ച് നമ്മൾ 9-ാം ക്ലാസിൽ പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഒരേ ആകൃതിയും വലിപ്പവുമുള്ള രണ്ട് ജ്യാമിതീയ രൂപങ്ങളെ നമുക്ക് സർവസമമെന്ന് പറയാം. എന്നാൽ നമ്മൾ ഇവിടെ പഠിക്കാൻ പോകുന്നത് ഒരേ ആകൃതിയും വ്യത്യസ്ത വലിപ്പമുള്ള ജ്യാമതീയ രൂപങ്ങളെക്കുറിച്ചാണ്. ഇവയെ സദൃശ്യങ്ങൾ എന്ന് പറയാം



ചിത്രം. 4.3



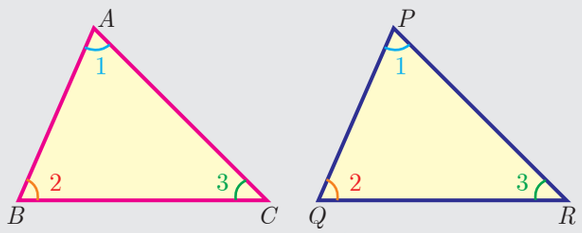
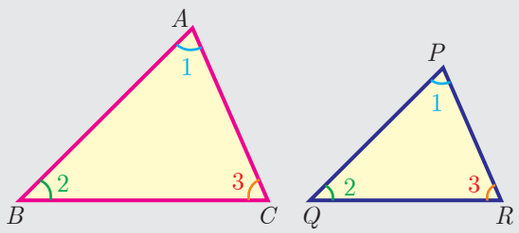
4 Geometry malayalam.indd 162 20/01/2023 17:47:31

## സർവ്വസമതയും, ത്രികോണങ്ങളുടെ സദൃശ്യതയും

സർവ്വസമമെന്നത് സദൃശ്യതയുടെ ഒരു ഭാഗമാണ്. ഇവ രണ്ടിലും, ഒരു ത്രികോണത്തിലെ മൂന്ന് കോണുകളും മറ്റേ ത്രികോണത്തിന്റെ സമാന കോണുകൾക്ക് തുല്യമായിരിക്കും. എന്നാൽ സർവ്വസമത്രികോണങ്ങളിൽ, സമാനവശങ്ങളും തുല്യമായിരിക്കും. സദൃശ്യത്രികോണങ്ങളിൽ, സമാനവശങ്ങൾ ആനുപാതികത്തിലായിരിക്കും.

**കുറിപ്പ്**

$ABC$, $PQR$ എന്നീ ത്രികോണങ്ങളുടെ സദൃശ്യതയെ $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ എന്നെഴുതാം.

| സർവ്വസമത്രികോണങ്ങൾ | സദൃശ്യത്രികോണങ്ങൾ |
|---|---|
|  |  |
| ചിത്രം 4.4 | ചിത്രം 4.5 |
| $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ | $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ |
| $\angle A = \angle P, \angle B = \angle Q, \angle C = \angle R$. | $\angle A = \angle P, \angle B = \angle Q, \angle C = \angle R$ |
| $AB = PQ, BC = QR, CA = RP$ | $AB \neq PQ, BC \neq QR, CA \neq RP$ |
| $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP} = 1$ | പക്ഷേ $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP} > 1 \text{ or } < 1$ |
| ഒരേ ആകൃതിയും ഒരേ വലിപ്പവും. | ഒരേ ആകൃതിയും വ്യത്യസ്ത വലിപ്പവും. |

**ചിന്തിക്കുക**

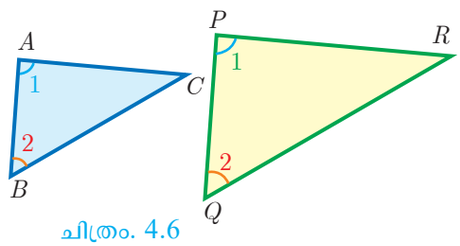
1. സമചതുരവും, സമചതുർഭുജവും സർവ്വസമമോ? സദൃശ്യമാണോ? ചർച്ചചെയ്യുക.
2. ദീർഘചതുരവും സാമാന്തരികവും സദൃശ്യമാണോ. ചർച്ചചെയ്യുക.

### 4.2.2 സദൃശ്യതയുടെ പ്രമാണം

താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള പ്രമാണങ്ങൾ രണ്ട് ത്രികോണങ്ങൾ സദൃശ്യങ്ങളാണ് എന്ന് തെളിയിക്കാൻ മതിയായതാണ്.

#### AA സദൃശ്യതാപ്രമാണം

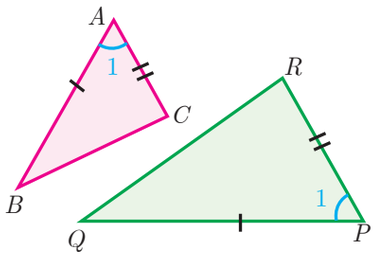
ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ട് കോണുകൾ മറ്റൊരു ത്രികോണത്തിന്റെ സമാന കോണുകൾക്ക് തുല്യമെങ്കിൽ അവ സദൃശ്യത്രികോണങ്ങളാണ്, കാരണം അവയുടെ മൂന്നാമത്തെ കോണുകളും തുല്യമായിരിക്കും. അതിനാൽ, AA സദൃശ പ്രമാണം AAA സദൃശ്യപ്രമാണത്തിന് തുല്യമാണ്.


ചിത്രം. 4.6

അതുകൊണ്ട് $\angle A = \angle P = 1$ കൂടാതെ
$\angle B = \angle Q = 2$ എങ്കിൽ $\Delta ABC \sim \Delta PQR$.

#### SAS സദൃശ്യതാപ്രമാണം

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു കോൺ മറ്റെ ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു കോണുമായി തുല്യമാവുകയും വശങ്ങൾ ആനുപാതികമാവുകയും ചെയ്താൽ രണ്ട് ത്രികോണങ്ങളും സദൃശ്യങ്ങളായിരിക്കും.


ചിത്രം. 4.7

അതിനാൽ $\angle A = \angle P = 1$ ഉം

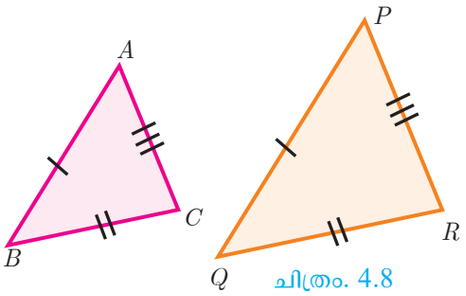
$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR}$ അതിനാൽ $\Delta ABC \sim \Delta PQR$



4 Geometry malayalam.indd 163 20/01/2023 17:47:33

## SSS സദൃശതാപ്രമാണം

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ 3 വശങ്ങൾ മറ്റേ ത്രികോണത്തിന്റെ സമാനവശങ്ങളുമായി ആനുപാതികമാണെങ്കിൽ ത്രികോണങ്ങൾ സദൃശങ്ങളാണ്.



ചിത്രം. 4.8

അതിനാൽ, $\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR}$ , $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

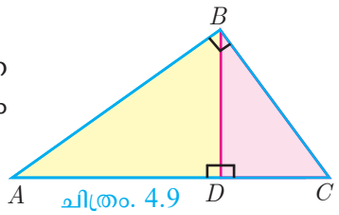
**ചിന്തിക്കുക**



രണ്ട് സമകോണ ത്രികോണങ്ങൾ സദൃശങ്ങളാണോ? ആണെങ്കിൽ എന്തുകൊണ്ട്?

## സദൃശത്രികോണളുടെ പ്രത്യേക ഫലങ്ങൾ

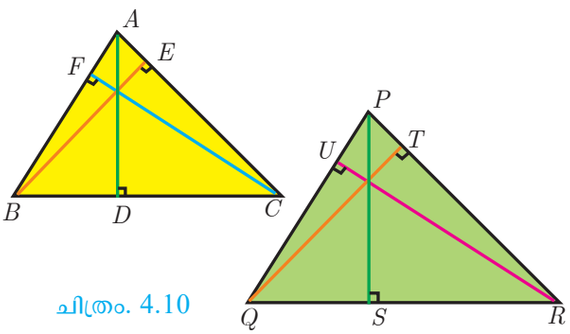
1. ഒരു സമകോണത്രികോണത്തിന്റെ സമകോണിൽ നിന്നും വരയ്ക്കുന്ന ലംബം ത്രികോണത്തെ രണ്ട് സദൃശ ത്രികോണങ്ങളായി വിഭജിക്കുകയും അവ ആദ്യ ത്രികോണത്തിന് സദൃശ്യവുമായിരിക്കും



ചിത്രം. 4.9

$\Delta ADB \sim \Delta BDC$, $\Delta ABC \sim \Delta ADB$, $\Delta ABC \sim \Delta BDC$

2. രണ്ട് ത്രികോണങ്ങൾ സദൃശങ്ങളാണെങ്കിൽ സമാന വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം അവയുടെ സമാന ഉന്നതികളുടെ അംശബന്ധത്തിന് തുല്യമായിരിക്കും.

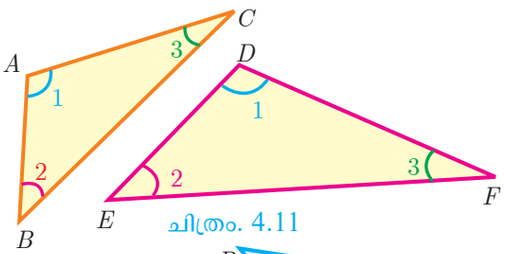


ചിത്രം. 4.10

അതായത് $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ എങ്കിൽ

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP} = \frac{AD}{PS} = \frac{BE}{QT} = \frac{CF}{RU}$$

3. രണ്ട് ത്രികോണങ്ങൾ സദൃശങ്ങളാണെങ്കിൽ സമാനവശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം സമാന ചുറ്റളവുകളുടെ അംശബന്ധത്തിന് തുല്യമായിരിക്കും.

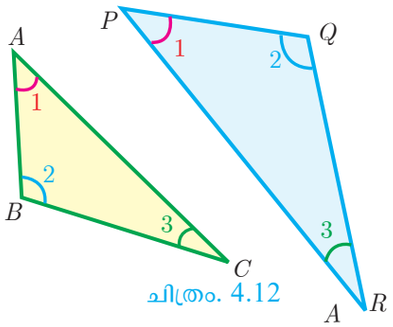


ചിത്രം. 4.11

$\Delta ABC \sim \Delta DEF$ എങ്കിൽ

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} = \frac{AB + BC + CA}{DE + EF + FD}$$

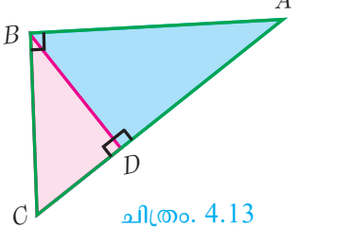
4. രണ്ട് സദൃശ ത്രികോണങ്ങളുടെ വിസ്തീർണ്ണങ്ങളുടെ അംശബന്ധം സമാന വശങ്ങളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ അംശബന്ധത്തിന് തുല്യമാണ്.



ചിത്രം. 4.12

$$\frac{(\Delta\ ABC)\text{യുടെ വിസ്തീർണ്ണം}}{(\Delta\ PQR)\text{യുടെ വിസ്തീർണ്ണം}} = \frac{AB^2}{PQ^2} = \frac{BC^2}{QR^2} = \frac{AC^2}{PR^2}$$

5. രണ്ട് സദൃശ ത്രികോണങ്ങൾക്ക് പൊതു ശീർഷവും അവയുടെ ആധാരങ്ങൾ ഒരേ നേർ രേഖയിലും ആയാൽ അവയുടെ വിസ്തീർണ്ണങ്ങളുടെ അംശബന്ധം ആധാരങ്ങളുടെ അംശബന്ധത്തിന് തുല്യമായിരിക്കും.



ചിത്രം. 4.13

ഇവിടെ, . $\frac{(\Delta\ ABD)\text{യുടെ വിസ്തീർണ്ണം}}{(\Delta\ BDC)\text{യുടെ വിസ്തീർണ്ണം}} = \frac{AD}{DC}$



4 Geometry malayalam.indd 164 20/01/2023 17:47:35

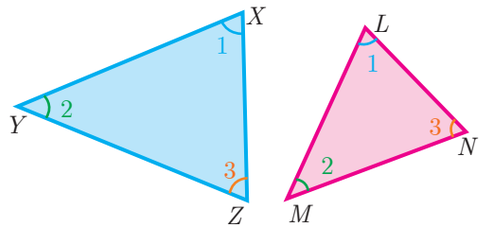
**നിർവചനം 1**

രണ്ട് ത്രികോണങ്ങൾ സദൃശ്യങ്ങളാണെങ്കിൽ അവയുടെ സമാനവശങ്ങൾ ആനുപാതികത്തിലായിരിക്കും.

**നിർവചനം 2**

രണ്ട് ത്രികോണങ്ങളുടെ സമാനകോണുകൾ തുല്യമായിരുന്നാൽ അവയെ സമകോണതികോണങ്ങൾ എന്ന് വിളിക്കാം.

**തെളിവ്** $\Delta XYZ$ , $\Delta LMN$ എന്നീ രണ്ട് ത്രികോണങ്ങൾ സദൃശ്യങ്ങളായാൽ അവയുടെ സമാന കോണുകൾ സമമായിരിക്കും.




ചിത്രം. 4.14

**കുറിപ്പ്**

(i) ഒരു ജോടി തുല്യ കോണുകളുള്ള ത്രികോണങ്ങൾ സദൃശ്യം.

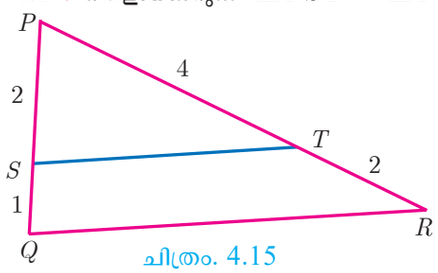
(ii) രണ്ട് ത്രികോണങ്ങൾ സദൃശ്യങ്ങളായാൽ അവ തുല്യ കോണുള്ളവ ആയിരിക്കും.

(i) $\angle X = \angle L, \angle Y = \angle M, \angle Z = \angle N$ (കോണുകളാൽ) (ii) $\frac{XY}{LM} = \frac{YZ}{MN} = \frac{XZ}{LN}$ (വശങ്ങളാൽ)

ഇവിടെ $X$, $Y$, $Z$ എന്നീ ശീർഷങ്ങളുടെസമാന ശീർഷങ്ങളാണ് യഥാക്രമം $L$, $M$, $N$ ഇതിനെ ചിഹ്നമുപയോഗിച്ച് $\Delta XYZ \sim \Delta LMN$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം

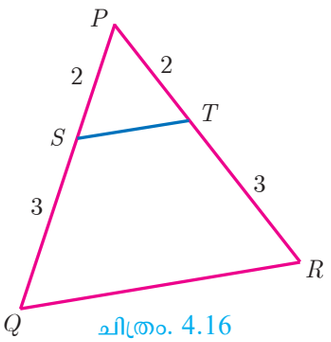
**ഉദാഹരണം 4.1 :** തെളിയിക്കുക $\Delta PST \sim \Delta PQR$

(i)




ചിത്രം. 4.15

(ii)




ചിത്രം. 4.16

**നിർദ്ധാരണം**

(i) $\Delta PST$ , $\Delta PQR$ ഇവയിൽ നിന്ന്

$$\frac{PS}{PQ} = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}, \frac{PT}{PR} = \frac{4}{4+2} = \frac{2}{3}$$

അതിനാൽ $\frac{PS}{PQ} = \frac{PT}{PR}$ , $\angle P$ പൊതുകോൺ

അതുകൊണ്ട് $SAS$ സദൃശ്യതാ പ്രമാണം അനുസരിച്ച് $\Delta PST \sim \Delta PQR$

(ii) $\Delta PST$ , $\Delta PQR$ ഇവയിൽ നിന്ന്

$$\frac{PS}{PQ} = \frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}, \frac{PT}{PR} = \frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}$$

അതിനാൽ $\frac{PS}{PQ} = \frac{PT}{PR}$ , $\angle P$ പൊതുകോൺ

അതുകൊണ്ട് SAS സദൃശ്യതാ പ്രമാണം അനുസരിച്ച്, $\Delta PST \sim \Delta PQR$

**ഉദാഹരണം 4.2** $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ ആണോ ?

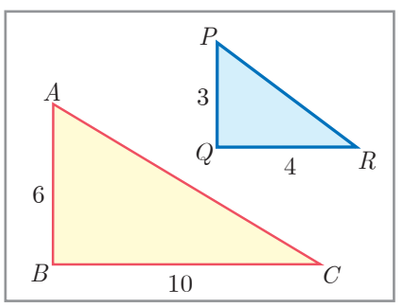
**നിർദ്ധാരണം** $\Delta ABC$ , $\Delta PQR$ ഇവയിൽ നിന്ന്,

$$\frac{PQ}{AB} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}; \frac{QR}{BC} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

അതുകൊണ്ട് $\frac{1}{2} \neq \frac{2}{5}$, $\frac{PQ}{AB} \neq \frac{QR}{BC}$.

സമാനവശങ്ങൾ അനുപാതികമല്ല..

അതുകൊണ്ട് $\Delta ABC$ $\Delta PQR$ ന്. സദൃശ്യമല്ല




ചിത്രം. 4.17

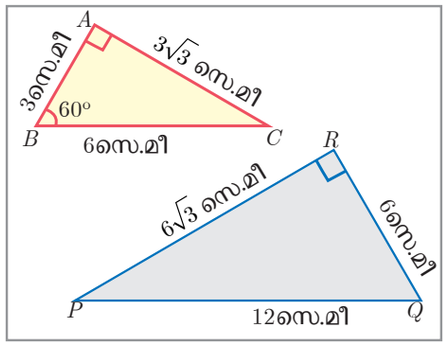


4 Geometry malayalam.indd 165 20/01/2023 17:47:39

**കുറിപ്പ്**

➢ കൊടുത്തിട്ടുള്ള നാല് നീളങ്ങളിൽ ഒന്ന് കൃത്യമായി മാറ്റിയാൽ, നമുക്ക് ത്രികോണങ്ങളെ സദൃശ്യങ്ങളാക്കാം.

**ഉദാഹരണം 4.3** ചിത്രം 4.18-ൽ നിന്ന് $\angle P$ കാണുക.



ചിത്രം. 4.18

**നിർദ്ധാരണം** $\Delta BAC$ , $\Delta PRQ$ ഇവയിൽ നിന്ന് $\frac{AB}{RQ}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$;

$$\frac{BC}{QP}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2};\ \frac{CA}{PR}=\frac{3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$$

അതുകൊണ്ട്. $\frac{AB}{RQ}=\frac{BC}{QP}=\frac{CA}{PR}$

$SSS$ സദൃശ്യപ്രമാണമനുസരിച്ച്, നമുക്ക് $\Delta BAC\sim\Delta QRP$

$\angle P=\angle C$ (സദൃശ്യത്രികോണങ്ങളുടെ സമാനഭാഗങ്ങൾ)

$\angle P=\angle C=180°-(\angle A+\angle B)=180°-(90°+60°)$

$\angle P=180°-150°=30°$

**ഉദാഹരണം 4.4** 90 സെ.മീ പൊക്കമുള്ള ഒരു ആൺകുട്ടി 1.2മീ/സെക്കന്റ് വേഗതയിൽ ഒരു വഴിവിളക്കിന്റെ ചുവട്ടിൽ നിന്നും നടന്നു നീങ്ങുകയാണ്. തറയിൽ നിന്നും വഴിവിളക്കിന്റെ ഉയരം 3.6മീ എങ്കിൽ 4 സെക്കന്റിന് ശേഷം അവന്റെ നിഴലിന്റെ നീളം കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം** തന്നിട്ടുള്ളത്,

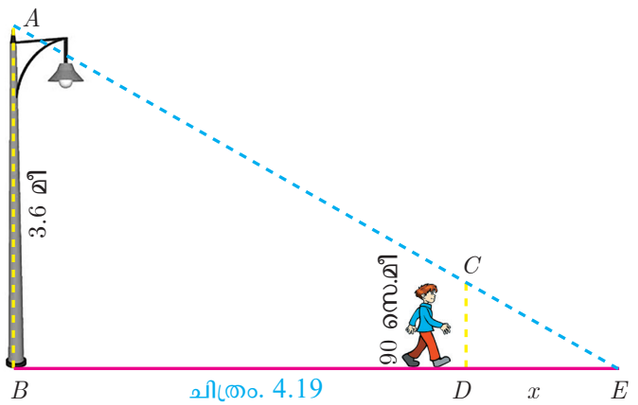
വേഗത= 1.2 മീ/സെക്കന്റ്,

സമയം = 4 സെക്കന്റ്

ദൂരം = വേഗത × സമയം

= 1.2×4 = 4.8 മീ

4 സെക്കന്റിന് ശേഷം നിഴലിന്റെ നീളം $x$ എന്നിരിക്കട്ടെ



ചിത്രം. 4.19

അതിനാൽ $\Delta ABE\sim\Delta CDE$, $\frac{BE}{DE}=\frac{AB}{CD}$, $\frac{4.8+x}{x}=\frac{3.6}{0.9}=4$ (എന്നാൽ 90 സെ.മീ = 0.9 മീ)

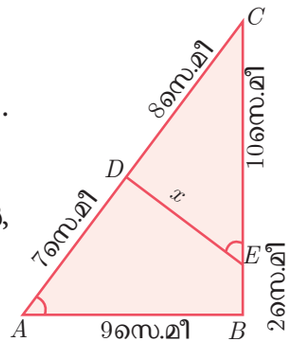
$4.8+x=4x$, $3x=4.8$ അതുകൊണ്ട്, $x=1.6$ മീ

നിഴലിന്റെ നീളം $DE=1.6$ മീ ആകുന്നു.

**ഉദാഹരണം 4.5 :** ചിത്രം 4.20 ൽ $\angle A=\angle CED$ എങ്കിൽ $\Delta CAB\sim\Delta CED$. എന്ന് തെളിയിക്കുക കൂടാതെ $x$ ന്റെ വിലയും കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം** $\Delta CAB$ , $\Delta CED$, ഇവയിൽ നിന്ന് $\angle C$ പൊതുകോൺ, $\angle A=\angle CED$

അതുകൊണ്ട് , $\Delta CAB\sim\Delta CED$ ($AA$ സദൃശ്യ പ്രമാണം അനുസരിച്ച്)



ചിത്രം. 4.20

അതിനാൽ, $\frac{CA}{CE}=\frac{AB}{DE}=\frac{CB}{CD}$

$\frac{AB}{DE}=\frac{CB}{CD}$ , $\frac{9}{x}=\frac{10+2}{8}$ അതുകൊണ്ട്, $x=\frac{8\times9}{12}=6$ സെ.മീ.



4 Geometry malayalam.indd 166 20/01/2023 17:47:43

**ഉദാഹരണം 4.6** ചിത്രം. 4.21, $QA$, $PB$ എന്നിവ $AB$. യിലേക്കുള്ള ലംബങ്ങളാണ്. $AO = 10$ സെ.മീ, $BO = 6$ സെ.മീ, $PB = 9$ സെ.മീ. എങ്കിൽ $AQ$. കാണുക?

**നിർദ്ധാരണം** $\Delta AOQ$, $\Delta BOP$ ഇവയിൽ നിന്ന്, $\angle OAQ = \angle OBP = 90°$

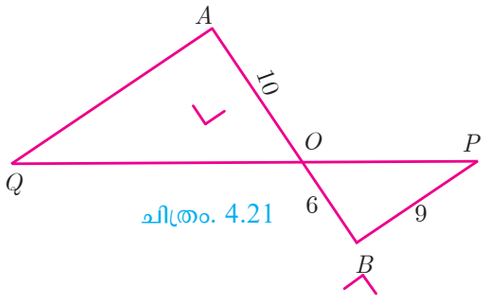
$\angle AOQ = \angle BOP$ (ശീർഷാഭിമുഖ കോണുകൾ)

അതുകൊണ്ട്, $AA$ സദൃശ്യ പ്രമാണമനുസരിച്ച്,

$\Delta AOQ \sim \Delta BOP$

$$\frac{AO}{BO} = \frac{OQ}{OP} = \frac{AQ}{BP}$$

$$\frac{10}{6} = \frac{AQ}{9} \quad , \quad AQ = \frac{10 \times 9}{6} = 15 \text{ സെ.മീ}$$



ചിത്രം. 4.21

**ഉദാഹരണം 4.7** $ABC$, $PQR$ എന്നീ സദൃശ്യ ത്രികോണങ്ങളുടെ ചുറ്റളവുകൾ യഥാക്രമം 36 സെ.മീ, 24 സെ.മീ. $PQ = 10$ സെ.മീ, എങ്കിൽ $AB$ കാണുക?

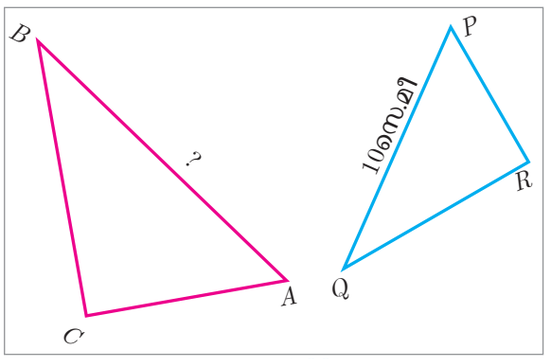
**നിർദ്ധാരണം** സദൃശ്യ ത്രികോണങ്ങളുടെ സമാനവശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം, സമാന ചുറ്റളവുകളുടെ അംശബന്ധത്തിന് തുല്യമാണ്.

$\Delta ABC \sim \Delta PQR$, ആയതിനാൽ

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR} = \frac{36}{24}$$

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{36}{24} \quad , \quad \frac{AB}{10} = \frac{36}{24}$$

$$AB = \frac{36 \times 10}{24} = 15 \text{ സെ.മീ}$$



ചിത്രം. 4.22

**ഉദാഹരണം 4.8** $\Delta ABC$ എന്നത് $\Delta DEF$ സദൃശ്യമാണ്, $BC = 3$ സെ.മീ, $EF = 4$ സെ.മീ, $\Delta ABC$ യുടെ വിസ്തീർണ്ണം $= 54$ സെ.മീ$^2$. എന്നാൽ $\Delta DEF$ ന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക?

**നിർദ്ധാരണം** രണ്ട് സദൃശ്യ ത്രികോണങ്ങളുടെ വിസ്തീർണ്ണങ്ങളുടെ അംശബന്ധം എതെങ്കിലും രണ്ട് സമാന വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധത്തിന് തുല്യമാണ്.

$$\frac{(\Delta ABC) \text{ യുടെ വിസ്തീർണ്ണം}}{(\Delta DEF) \text{ യുടെ വിസ്തീർണ്ണം}} = \frac{54}{(\Delta DEF) \text{ യുടെ വിസ്തീർണ്ണം}} = \frac{3^2}{4^2}$$

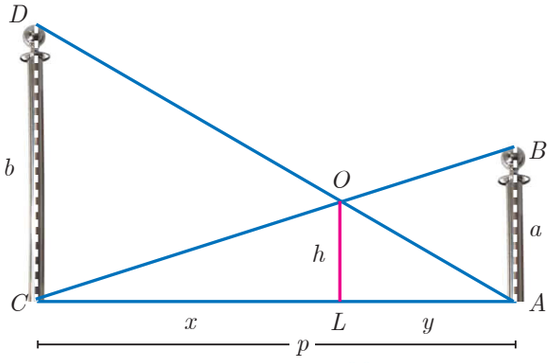
$$(\Delta DEF) \text{ യുടെ വിസ്തീർണ്ണം} = \frac{16 \cdot 54}{9} = 96 \text{ സെ.മീ}^2$$

**ഉദാഹരണം 4.9** രണ്ട് ദണ്ഡുകളുടെ ഉയരം '$a$' മീറ്ററും '$b$' മീറ്ററും അവയ്ക്കിടയിലുള്ള അകലം '$p$' മീറ്ററും ആണ്. ദണ്ഡുകളുടെ മുകളിൽ നിന്ന് എതിൽ ദണ്ഡുകളുടെ ചുവട്ടിലേക്ക് വരയ്ക്കുന്ന നേർരേഖകളുടെ സംഗമ ബിന്ദു (പ്രതിഛേദ ബിന്ദു) $\frac{ab}{a+b}$ മീറ്റർ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

**നിർദ്ധാരണം** '$a$' മീറ്റർ '$b$' മീറ്റർ എന്നീ ഉയരങ്ങളുള്ള രണ്ട് ദണ്ഡുകൾ യഥാക്രമം $AB$, $CD$ എന്നും അവയ്ക്കിടയിലുള്ള അകലം '$p$' മീറ്ററും എന്നിരിക്കട്ടെ. അതായത് $AC = p$ മീറ്റർ

$AD$, $BC$ എന്നീ രേഖകൾ $O$ യിൽ സന്ധിക്കുന്നു എന്ന് സങ്കല്പിക്കുക

അങ്ങനെ $OL = h$ മീറ്റർ



ചിത്രം. 4.23



4 Geometry malayalam.indd 167 20/01/2023 17:47:45

$CL = x$ , $LA = y$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

എങ്കിൽ $x + y = p$ ആകുന്നു

$\Delta ABC$ , $\Delta LOC$ , ഇവയിൽ, നമുക്ക് അറിയാം

$\angle CAB = \angle CLO$ [ഓരോ കോണും $90°$ ]

$\angle C = \angle C$ [$C$ പൊതു ശീർഷം]

$\Delta CAB \sim \Delta CLO$ [$AA$ സദൃശ്യ പ്രമാണം]

$\frac{CA}{CL} = \frac{AB}{LO}$, $\frac{p}{x} = \frac{a}{h}$

അതിനാൽ, $x = \frac{ph}{a}$ ...(1)

$\Delta ALO$ , $\Delta ACD$ , ഇവയിൽ നിന്ന്

$\angle ALO = \angle ACD$ [ഓരോ കോണും $90°$ ]

$\angle A = \angle A$ [A പൊതു ശീർഷം]

$\Delta ALO \sim \Delta ACD$ [AA സദൃശ്യ പ്രമാണം]

$\frac{AL}{AC} = \frac{OL}{DC}$ => $\frac{y}{p} = \frac{h}{b}$ , $y = \frac{ph}{b}$ ...(2) എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

(1)ഉം (2) ഉം കൂട്ടിയാൽ $x + y = \frac{ph}{a} + \frac{ph}{b}$

$p = ph\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ (എന്നാൽ $x + y = p$ )

$1 = h\left(\frac{a+b}{ab}\right)$

അതുകൊണ്ട് , $h = \frac{ab}{a+b}$

ഇതിൽ നിന്ന്, ദണ്ഡുകളുടെ മുകളിൽ നിന്ന് എതിർ ദണ്ഡുകളുടെ ചുവട്ടിലേക്ക് വരയ്ക്കുന്ന നേർ രേഖകളുടെ പ്രതിഛേദ ബിന്ദു $\frac{ab}{a+b}$ മീറ്റർ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

## പുരോഗതി പരിശോധന

1. എല്ലാ വൃത്തങ്ങളും _____ (സർവസമം / സദൃശ്യം).
2. എല്ലാ സമചതുരങ്ങളും _____ (സദൃശ്യം / സർവസമം).
3. രണ്ട് ത്രികോണങ്ങൾ സദൃശ്യമായാൽ, അവയുടെ സമാന കോണുകൾ _____ അവയുടെ സമാന വശങ്ങൾ _____.
4. (a) എല്ലാ സദൃശ്യ ത്രികോണങ്ങളും സർവസമം ശരി / തെറ്റ്

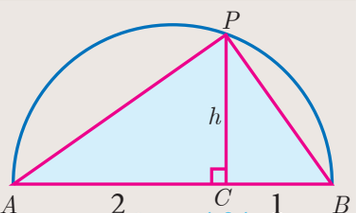
   (b) എല്ലാ സർവ സമത്രികോണങ്ങളും സദൃശ്യം (ശരി / തെറ്റ്).
5. ഒരു ജോടി സദൃശ്യമല്ലാത്ത രൂപങ്ങൾക്ക് രണ്ട് വ്യത്യസ്ത ഉദാഹരണങ്ങൾ നല്കുക?

## പ്രവർത്തി 1

$\sqrt{2}$ നീളമുള്ള ഒരു രേഖാഖണ്ഡം വരയ്ക്കാനായി ശ്രമിക്കുക.
ഇതിനായി താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന വഴികൾ പരിഗണിക്കുക.

ഘട്ടം 1 : 3 ാത്രകൾ ഉള്ള രേഖാഖണ്ഡം എടുക്കുക. അതിനെ AB എന്ന് വിളിക്കാം.

ഘട്ടം 2 : $AC=2$, $CB=1$ എന്ന വിധത്തിൽ $AB$ യിൽ $C$ എന്ന ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക.



ചിത്രം. 4.24

ഘട്ടം 3 : രേഖാ ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ AB വ്യാസമാക്കി ഒരു അർദ്ധവൃത്തം വരയ്ക്കുക

ഘട്ടം 4 :$CP$ ലംബം AB ആകത്തക്കവിധം അർദ്ധവൃത്തത്തിൽ '$P$' എന്ന ബിന്ദു എടുക്കുക.

ഘട്ടം 5 : $P$ യുമായി $A$ യും $B$ യും. യോജിപ്പിക്കുക. നമുക്ക് $ACP$, $BCP$ എന്നീ രണ്ട് സമകോണ ത്രികോണങ്ങൾ ലഭിക്കുന്നു.

ഘട്ടം 6 : $ACP$, $BCP$ എന്നീ ത്രികോണങ്ങൾ സദൃശ്യമാണോ എന്ന് ശരി നോക്കുക.

ഘട്ടം 7 : പൊതു ഉന്നതി $CP = h$ എന്നിരിക്കട്ടെ. സദൃശ്യ പ്രമാണം ഉപയോഗിച്ച് ഉന്നതി $h$ കാണുക.

ഘട്ടം 8 : $h$ കണ്ടുപിടിച്ചപ്പോൾ കിട്ടിയത് എന്താണ്?

നീ ഈ പ്രവർത്തനം ആവർത്തിച്ചാൽ $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$ എന്നീ നീളങ്ങളുള്ള രേഖാഖണ്ഡങ്ങൾ നിർമ്മിക്കാൻ സാധിക്കുമോ?.



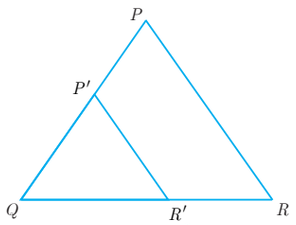
4 Geometry malayalam.indd 168 20/01/2023 17:47:49

### 4.2.3 സദൃശ്യ ത്രികോണങ്ങളുടെ നിർമ്മിതി

സദൃശ്യത്രികോണങ്ങളുടെ ആശയങ്ങളെക്കുറിച്ചും അവയുടെ സവിശേഷതകളെ കുറിച്ചും നാം ചർച്ച ചെയ്യുകയുണ്ടായി. തന്നിട്ടുള്ള ത്രികോണത്തിന് കൊടുത്തിട്ടുള്ള അംശബന്ധത്തിൽ സദൃശ്യമായ മറ്റൊരു ത്രികോണത്തിന്റെ ജ്യാമിതീയ നിർമ്മിതിയെ കുറിച്ച് നമുക്ക് പഠിക്കാം.

ഈ നിർമ്മിതിയിൽ രണ്ട് വ്യത്യസ്ത തരങ്ങൾ ഉൾക്കൊള്ളുന്നു. ഒന്നിൽ, ത്രികോണം കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ത്രികോണത്തെക്കാൾ ചെറുതായും,മറ്റേതിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ത്രികോണത്തെക്കാൾ വലുതായും ത്രികോണം നിർമ്മിക്കപ്പെടുന്നു.അതുകൊണ്ട് നമ്മൾ 'സ്കെയിൽ ഘടകം 'എന്ന പദം ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഇത് നിർമ്മിക്കേണ്ട ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾക്കും തന്നിട്ടുള്ള ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾക്കും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധത്തെ നിർണ്ണയിക്കുന്നു. രണ്ട് തരത്തിലുള്ള ഉദാഹരണങ്ങൾ നമുക്ക് താഴെ നോക്കാം:

**ഉദാഹരണം 4.10** ത്രികോണം $PQR$ ന്റെ സമാനവശങ്ങളുടെ അളവുകൾ $\frac{3}{5}$ വരത്തക്കവിധം ഉള്ള സദൃശത്രികോണം നിർമ്മിക്കുക (സ്കെയിൽ ഘടകം $\frac{3}{5} < 1$)

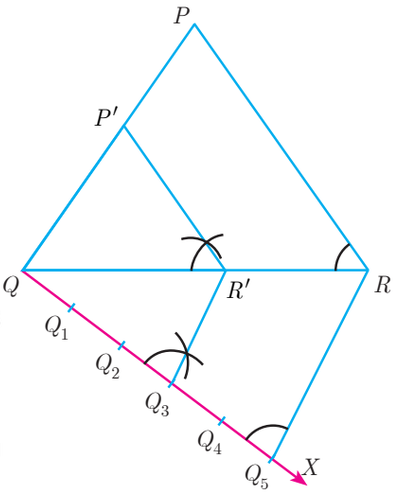


മാതൃകാ ചിത്രം.

**നിർദ്ധാരണം** തന്നിരിക്കുന്നത് ത്രികോണം $PQR$ ആകുന്നു. $PQR$ എന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾക്ക് $\frac{3}{5}$ എന്ന അനുപാതത്തിൽ ..സമാന വശങ്ങളോടു കൂടിയ മറ്റൊരു ത്രികോണം ആണ് നമുക്ക് നിർമ്മിക്കേണ്ടത്.

**നിർമ്മിതയ്ക്കുള്ള വഴികൾ**

1. ഏതെങ്കിലും അളവിൽ $\Delta PQR$ നിർമ്മിക്കുക.
2. P എന്ന ശീർഷത്തിന് എതിരെ $QR$ ൽ ഒരു ന്യൂനകോൺ വരത്തക്കവിധം $QX$ എന്ന രശ്മി വരയ്ക്കുക.
3. $QX$ ൽ $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5$ എന്നീ 5 ബിന്ദുക്കൾ ($\frac{3}{5}$ ൽ, 3 , 5 ഇവയിൽ വലുത്) അതിനാൽ $QQ_1 = Q_1Q_2 = Q_2Q_3 = Q_3Q_4 = Q_4Q_5$
4. $Q_5R$ യോജിപ്പിച്ച് $Q_3$ യിലൂടെ $Q_5R$ ന് സമാന്തരമായി ഒരു രേഖ വരയ്ക്കുന്നത് QR നെ $R'$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ സന്ധിക്കുന്നു ($\frac{3}{5}$ ൽ, 3 , 5 ഇവയിൽ ചെറുത്).
5. $RP$ യ്ക്ക് സമാന്തരമായി $R'$ ലൂടെ വരയ്ക്കുന്ന സമാന്തര രേഖ, QP യിൽ $P'$ ൽ സന്ധിക്കുന്നു. $\frac{3}{5}$ അംശബന്ധത്തിൽ ഉള്ള - $\Delta PQR$ ന് അനുസരിച്ച്, നമുക്ക് ആവശ്യമായ $\Delta P'QR'$ ലഭിക്കുന്നു.

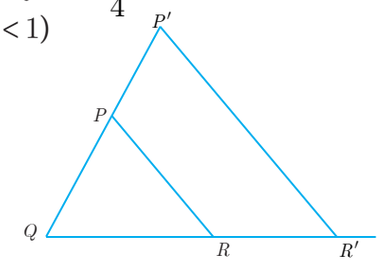


ചിത്രം. 4.25




**ഉദാഹരണം 4.11** ത്രികോണം $PQR$ ന്റെ സമാനവശങ്ങളുടെ അളവുകൾ $\frac{7}{4}$ വരത്തക്കവിധം ഉള്ള സദൃശത്രികോണം നിർമ്മിക്കുക (സ്കെയിൽ ഘടകം $\frac{7}{4} < 1$)

**നിർദ്ധാരണം** തന്നിരിക്കുന്ന ത്രികോണം $PQR$. $\frac{7}{4}$ അംശബന്ധത്തിൽ വശങ്ങളുള്ള $\Delta PQR$ ന് സമാനമായ മറ്റൊരു ത്രികോണമാണ് നമുക്ക് നിർമ്മിക്കേണ്ടത്.



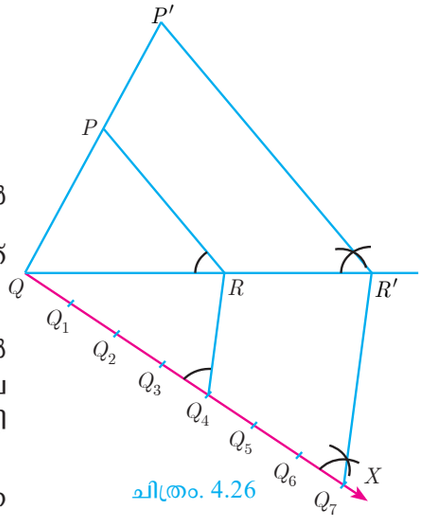
മാതൃകാ ചിത്രം.



4 Geometry malayalam.indd 169 20/01/2023 17:47:50

**നിർമ്മിതി**

1. ഏതെങ്കിലും അളവിൽ $\Delta PQR$ നിർമ്മിക്കുക.
2. $P$ എന്ന ശീർഷത്തിന് എതിരെ $QR$ ൽ ഒരു ന്യൂനകോൺ ഉണ്ടാകത്തക്കവിധം $QX$ എന്ന രശ്മി വരയ്ക്കുക.
3. $QX$ ൽ $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$, $Q_7$ എന്നീ 7 ബിന്ദുക്കൾ ( $\frac{7}{4}$ ൽ 7 4 ഇവയിൽ വലുത്) കണ്ടെത്തുക അതായത് $QQ_1 = Q_1Q_2 = Q_2Q_3 = Q_3Q_4 = Q_4Q_5 = Q_5Q_6 = Q_6Q_7$
4. $Q_4$ ൽ നിന്ന് $R$ വരെ നീട്ടി യോജിപ്പിക്കുക ($4$-ാം ബിന്ദു, $4,7$ ൽ ചെറുതാണ്).കൂടാതെ $Q_7$ നിലൂടെ $Q_4R$, ന് സമാന്തരമായി രേഖ വരയ്ക്കുക. അപ്പോൾ ഛേദിക്കുന്ന രേഖ $QR$ നെ $R'$ ലേക്ക് നീട്ടി വരയ്ക്കുക .
5. $RP$ യ്ക്ക് സമാന്തരമായി $R'$ ലൂടെ ഒരു രേഖ വരച്ച് നീട്ടിയതിനെ $QP$, $P'$ ൽ ഛേദിക്കുന്നു. അങ്ങനെ $\frac{7}{4}$ അംശബന്ധത്തിന് സമാനമായ വശങ്ങളോടു കൂടിയ $\Delta P'QR$ കിട്ടുന്നു.

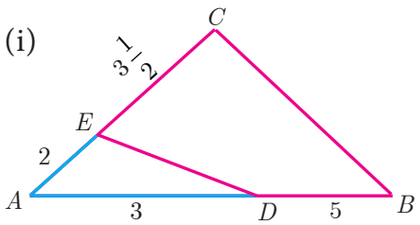


ചിത്രം. 4.26

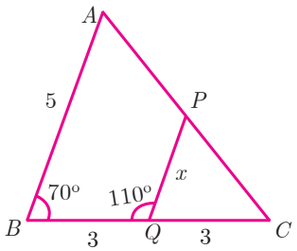
## അഭ്യാസം 4.1

1. താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവയിൽ ഏതാണ് സദൃശ്യത്രികോണമെന്ന് പരിശോധിക്കുക. കൂടാതെ $x$ ന്റെ മൂല്യം കാണുക?

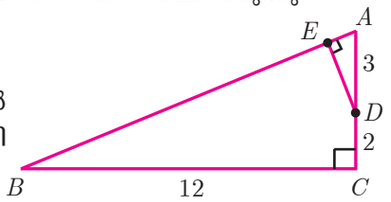
(i)



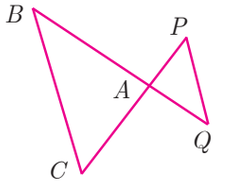

(ii)




2. ഒരു ദീപസ്തംഭത്തിന്റെ പാദത്തിൽ നിന്നും $6.6$ മീ അകലെയായി ദീപസ്തംഭത്തിന്റെ പ്രതിബിംബം കണ്ണാടിയിൽ ഒരു പെൺകുട്ടി നിരീക്ഷിക്കുന്നു. $1.25$ മീ ഉയരമുള്ള പെൺകുട്ടി കണ്ണാടിയിൽ നിന്ന് $2.5$ മീ അകലെയാണ് നിൽക്കുന്നത്. ആകാശത്തിനും പെൺകുട്ടിയ്ക്കും അഭിമുഖമായി കണ്ണാടി ക്രമീകരിച്ചിരിക്കുന്നു എന്ന് സങ്കല്പിക്കുക; കണ്ണാടിയും ദീപസ്തംഭവും ഒരേ രേഖയിലാണ് എങ്കിൽ ദീപസ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരം കാണുക?
3. $6$ മീ നീളമുള്ള ചെങ്കുത്തായി നിൽക്കുന്ന ദണ്ഡ് തറയുമായി 400 സെ.മീനീളത്തിൽ നിഴൽ ഉണ്ടാക്കുന്നു. അതേ സമയം ഒരു ഗോപുരവും $28$ മീനീളത്തിൽ നിഴൽ രൂപപ്പെടുത്തുന്നു. സദൃശ്യത എന്ന ആശയം ഉപയോഗിച്ച് ഗോപുരത്തിന്റെ ഉയരം കാണുക?.
4. $QR$ ആധാരമായും $QR$ ന്റെ ഒരേവശത്തിലുമുള്ള രണ്ട് ത്രികോണങ്ങളാണ് $QPR$, ഉം $QSR$ ഉം കൂടാതെ $P$യും $S$ ഉം സമകോണുകളാണ് $PR$, $SQ$ എന്നിവ $T$ യിൽ യിൽ ഛേദിക്കുന്നു എങ്കിൽ $PT \times TR = ST \times TQ$ എന്ന് തെളിയിക്കുക?
5. സമീപത്തെ ചിത്രത്തിൽ, C യിൽ സമകോണുള്ള $\Delta ABC$ യിൽ $DE \perp AB$ ആകുന്നു. എങ്കിൽ $\Delta ABC \sim \Delta ADE$ എന്ന് തെളിയിക്കുക? കൂടാതെ $AE$, $DE$ എന്നിവയുടെ നീളവും കാണുക?



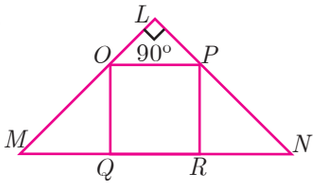

6. സമീപ ചിത്രത്തിൽ $\Delta ACB \sim \Delta APQ$. $BC = 8$ cm, $PQ = 4$ cm, $BA = 6.5$ cm , $AP = 2.8$ cm എങ്കിൽ $CA$, $AQ$ ഇവ കാണുക?





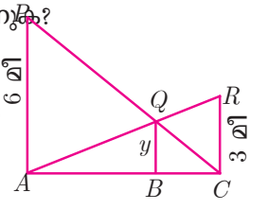

4 Geometry malayalam.indd 170 20/01/2023 17:47:53

7. ചിത്രത്തിൽ $OPRQ$ ഒരു സമചതുരം. കൂടാതെ $\angle MLN = 90^\circ$ ആയാൽ
(i) $\Delta LOP \sim \Delta QMO$ (ii) $\Delta LOP \sim \Delta RPN$
(iii) $\Delta QMO \sim \Delta RPN$ (iv) $QR^2 = MQ \times RN$ എന്ന് തെളിയിക്കുക?




8. $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, $\Delta ABC$ യുടെ വിസ്തീർണ്ണം 9 സെ.മീ$^2$ $\Delta DEF$ ന്റെ വിസ്തീർണ്ണം 16സെ.മീ$^2$, $BC = 2.1$ സെ.മീ ആയാൽ $EF$ ന്റെ നീളം കാണുക?

9. തിരശ്ചീനമായ പ്രതലം $AC$ യ്ക്ക് മുകളിലായി 6 മീ, 3 മീ ഉയരത്തിലുള്ള രണ്ട് ലംബ ദണ്ഡുകൾ ക്രമീകരിച്ചിട്ടുണ്ട്. എങ്കിൽ $y$ യുടെ വില കാണുക?




10. ത്രികോണം $PQR$ ന്റെ സമാനവശങ്ങളുടെ അളവുകൾ $\frac{2}{3}$ വരത്തക്കവിധം സദൃശത്രികോണം നിർമ്മിക്കുക (സ്കെയിൽ ഘടകം $\frac{2}{3}<1$).

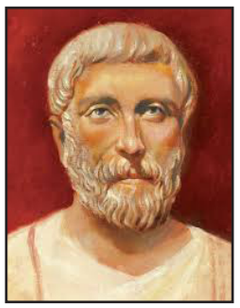
11. ത്രികോണം $LMN$ ന്റെ സമാനവശങ്ങളുടെ അളവുകൾ $\frac{4}{5}$ വരത്തക്കവിധം സദൃശത്രികോണം നിർമ്മിക്കുക (സ്കെയിൽ ഘടകം $\frac{4}{5}<1$).

12. ത്രികോണം $ABC$ ന്റെ സമാനവശങ്ങളുടെ അളവുകൾ $\frac{6}{5}$ വരത്തക്കവിധം സദൃശത്രികോണം നിർമ്മിക്കുക (സ്കെയിൽ ഘടകം $\frac{6}{5}>1$).

13. ത്രികോണം $PQR$ ന്റെ സമാനവശങ്ങളുടെ അളവുകൾ $\frac{7}{3}$ വരത്തക്കവിധം സദൃശത്രികോണം നിർമ്മിക്കുക (സ്കെയിൽ ഘടകം $\frac{7}{3}>1$).

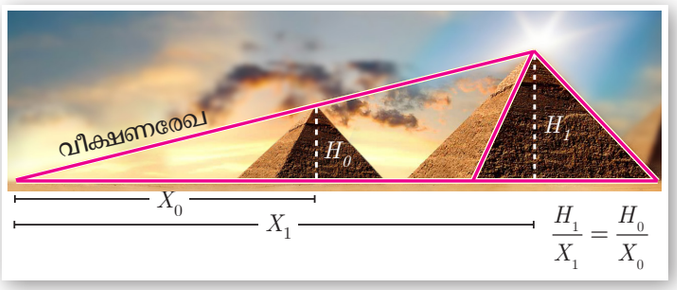
## 4.3 തെയിൽസ് സിദ്ധാന്തവും കോണ ദ്വിഭാജക സിദ്ധാന്തവും

### 4.3.1 മുഖവുര



Thales
(640 - 540 BC (BCE))

ഏകദേശം 7-ാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ജീവിച്ചിരുന്ന വളരെ പ്രമുഖനായ ഒരു ഗ്രീക്ക് ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞനും തത്വചിന്തകനും ആയിരുന്നു തെയിൽസ് (640 - 540) അറിവിൽ പ്രാവീണ്യം നേടിയ ഗ്രീസിലെ ഏഴ് പണ്ഡിതൻമാരിൽ ഒന്നാമനാണ് അദ്ദേഹം. ഉരുത്തിരിഞ്ഞ് വരുന്ന ഏത് ആശയവും സയൻസ് പരമായി പരിശോധിച്ച് അംഗീകരിക്കാൻ വിളിച്ചോതിയ ആദ്യ മനുഷ്യനായിരുന്നു തെയിൽസ്. ഈ രീതിയിൽ ഗണിത ശാസ്ത്രത്തിലും ജ്യോതി ശാസ്ത്രത്തിലും ഉന്നത അന്വേഷണങ്ങൾ നടത്തുകയും ധാരാളം ആശയങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുകയും ചെയ്തിട്ടുണ്ട്. ഗണിത ശാസ്ത്രത്തിൽ ആദ്യമായി ഒരു തെളിവ് നൽകിയതിനുള്ള ബഹുമതി അദ്ദേഹത്തിനാണ്, ഇന്ന് അതിനെ അടിസ്ഥാന ആനുപാതിക സിദ്ധാന്തം എന്ന് വിളിക്കപ്പെടുന്നു. കൂടാതെ അത് അദ്ദേഹത്തിന്റെ പേരിൽ തെയിൽ സിദ്ധാന്തം എന്നും അറിയപ്പെടുന്നു.




ചിത്രം. 4.27

തെയിൽ സിദ്ധാന്തം കണ്ടു പിടിച്ചതിന് പിന്നിൽ ഒരു രസകരമായ കഥയുണ്ട്. തെയിൽസ്, ഈജിപ്റ്റിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന വേളയിൽ, അവർ നിർമ്മിച്ച മനോഹരമായ ധാരാളം പിരമിഡുകളിൽ ഒന്നിന്റെ ഉയരം കണ്ടു പിടിക്കുന്നതിന് അദ്ദേഹത്തെ വെല്ലുവിളിക്കുക ഉണ്ടായി. അദ്ദേഹം ആ വെല്ലുവിളി സ്വീകരിക്കുകയും ത്രികോണങ്ങളുടെ സദൃശത ഉപയോഗിച്ച് വിജയകരമായി അത് നിർണ്ണയിക്കുകയുണ്ടായി, അത് ജ്യാമിതിയുടെ മറ്റൊരു വിജയകരമായ പ്രയോഗമായി. എന്നിവ അറിയാവുന്നതിനാൽ നമുക്ക് പിരമിഡിന്റെ ഉയരം നിർണ്ണയിക്കാം.



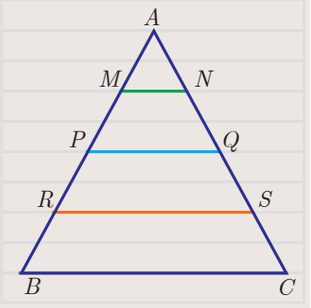
4 Geometry malayalam.indd 171 20/01/2023 17:47:55

അടിസ്ഥാന ആനുപാതിക സിദ്ധാന്തം അല്ലെങ്കിൽ തെയിൽസ് സിദ്ധാന്തം മനസ്സിലാക്കുന്നതിന്, നമുക്ക് താഴെയുള്ള പ്രവർത്തനം ചെയ്യാം.

## പ്രവർത്തി 2

വരയിട്ട പേപ്പർ എടുത്ത് ഒരു വര ആധാരമാക്കി $ABC$ എന്ന ത്രികോണം വരയ്ക്കുക. ധാരാളം സമാന്തര രേഖകളാൽ ത്രികോണം $ABC$ മുറിക്കപ്പെടുന്നു.

വരകളിൽ ഏതെങ്കിലും ഒന്ന് തെരഞ്ഞെടുത്ത്, വശങ്ങൾ $AB$ യിലും $AC$ യിലും സന്ധിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളെ $P, Q$ എന്ന പേര് നൽകുക.



ചിത്രം. 4.28

$\frac{AP}{PB}, \frac{AQ}{QC}$ എന്നീ അംശബന്ധങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കാൻ സാധിക്കുമോ?

സ്കെയിൽ ഉപയോഗിച്ച് $AP, PB, AQ. QC$ ഇവ അളന്ന്, ഈ അംശബന്ധങ്ങൾ തുല്യമാണോ, അല്ലയോ? 9 എന്ന് പരിശോധിക്കുക. $MN, RS$ എന്നീ വ്യത്യസ്ത സമാന്തര രേഖകളിൽ ശ്രമിക്കുക.

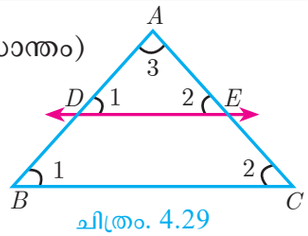
ഇപ്പോൾ $\frac{AM}{MB}, \frac{AN}{NC}$ and $\frac{AR}{RB}, \frac{AS}{SC}$ എന്നീ അംശബന്ധങ്ങൾ കാണുക.

പരിശോധിച്ച് അവ തുല്യമാണെങ്കിൽ, അതിന്റെ അവസാനം ജ്യാമിതിയിലെ വളരെ പ്രധാനപ്പെട്ട ഒരു സിദ്ധാന്തത്തിലേക്ക് നമ്മെ നയിക്കും. അത് നമുക്ക് താഴെ ചർച്ച ചെയ്യാം.

**സിദ്ധാന്തം 1:** അടിസ്ഥാന ആനുപാതിക സിദ്ധാന്തം (തെയിൽസ് സിദ്ധാന്തം)

**പ്രസ്താവന**

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന് സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന രേഖ. മറ്റ് രണ്ട് വശങ്ങളെ ഛേദിക്കുന്നു എങ്കിൽ ആ രേഖ രണ്ട് വശങ്ങളേയും ഒരേ അംശബന്ധത്തിൽ വിഭജിക്കുന്നു.



ചിത്രം. 4.29

**തെളിവ്**

സങ്കല്പം: $\Delta ABC$ യിൽ, $AB$ യിലെ ഒരു ബിന്ദു $D$ യും $AC$ യിലെ ഒരു ബിന്ദു $E$ യും ആണ്.

അനുമാനം: $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

നിർമ്മിതി : $BC$ യ്ക്ക് സമാന്തരമായി $DE$ എന്ന രേഖ വരയ്ക്കുക

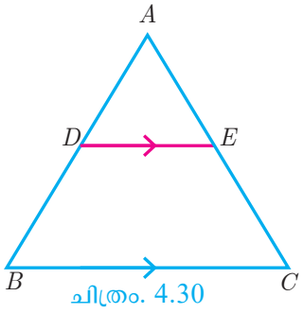
| നമ്പർ | പ്രസ്താവന | കാരണം |
|---|---|---|
| 1. | $\angle ABC = \angle ADE = \angle 1$ | $DE \parallel BC$ ആയതിനാൽ സമാന കോണുകൾ തുല്യം |
| 2. | $\angle ACB = \angle AED = \angle 2$ | $DE \parallel BC$ ആയതിനാൽ സമാന കോണുകൾ തുല്യം |
| 3. | $\angle DAE = \angle BAC = \angle 3$ | രണ്ട് ത്രികോണങ്ങൾക്കും ഒരു പൊതു കോൺ ഉണ്ട്. |
| 4. | $\Delta ABC \sim \Delta ADE$ | $AAA$ സദൃശ പ്രമാണം |
| | $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ | സമാന വശങ്ങൾ ആനുപാതികമാണ് |
| | $\frac{AD + DB}{AD} = \frac{AE + EC}{AE}$ | $D, E$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഉപയോഗിച്ച് $AB, AC$ ഇവ വിഭജിക്കുക. |
| | $1 + \frac{DB}{AD} = 1 + \frac{EC}{AE}$ | ലഘൂകരണത്തിലൂടെ |
| | $\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$ | ഇരുവശങ്ങളിൽ നിന്നും 1 ഒഴിവാക്കുക |
| | $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ | വ്യുൽക്രമം എടുക്കുക |
| | സിദ്ധാന്തം തെളിയിച്ചു | |



4 Geometry malayalam.indd 172 20/01/2023 17:47:57

### ഉപസിദ്ധാന്തം

$\Delta ABC$ യിൽ, $BC$ യ്ക്ക് സമാന്തരമായ നേർരേഖ $DE$, $AB$ യെ $D$ യിലും $AC$ യെ $E$, യിലും ഛേദിക്കുന്നു. എങ്കിൽ (i) $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ (ii) $\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$.



ചിത്രം. 4.30

**തെളിവ്**

$\Delta ABC,\ DE \parallel BC$,

അതുകൊണ്ട് , $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ (അടിസ്ഥാന ആനുപാതിക സിദ്ധാന്തം അനുസരിച്ച്)

(i) വ്യുൽക്രമം എടുക്കുമ്പോൾ നമുക്ക് കിട്ടുന്നു $\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$

ഇരുവശത്തും 1 കൂട്ടിയാൽ $\frac{DB}{AD} + 1 = \frac{EC}{AE} + 1$

$\frac{DB + AD}{AD} = \frac{EC + AE}{AE}$ അങ്ങനെ, $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$

(ii) ഇരുവശത്തും 1 കൂട്ടിയാൽ

$\frac{AD}{DB} + 1 = \frac{AE}{EC} + 1$

അതിനാൽ, $\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$

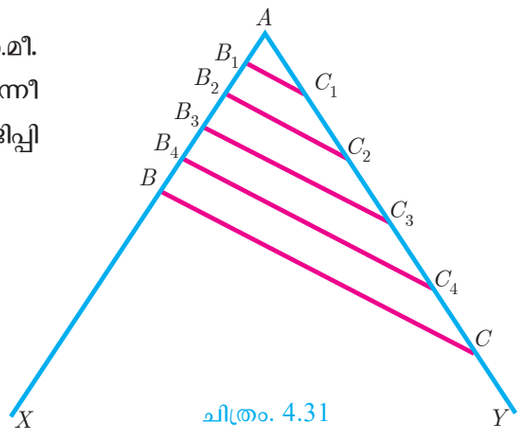
അടിസ്ഥാന ആനുപാതിക സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ വിപരീതവും ശരിയാണോ? ഇത് പരിശോധിക്കുന്നതിന് നമുക്ക് താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന പ്രവർത്തനം ചെയ്യാം.

### വിശദീകരണം

ചിത്രം 4.31 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ നിങ്ങളുടെ നോട്ട് ബുക്കിൽ $XAY$ കോൺ വരയ്ക്കുകയും $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B = 1$ സെ.മീ ആകത്തക്കവിധം രശ്മി $AX$ ൽ $B_1, B_2, B_3, B_4$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക.

അതുപോലെ $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = C_4C = 2$ സെ.മീ.

ആകത്തക്കവിധം രശ്മി $AY$, ൽ $C_1, C_2, C_3, C_4$ $C$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തി $BC$ യും $B_1C_1$ യും യോജിപ്പിക്കുക



ചിത്രം. 4.31

$\frac{AB_1}{B_1B} = \frac{AC_1}{C_1C} = \frac{1}{4}$ കൂടാതെ $B_1C_1 \parallel BC$

ഇതുപോലെ $B_2C_2$, $B_3C_3$, $B_4C_4$ യോജിപ്പിക്കുമ്പോൾ നമുക്ക്

$\frac{AB_2}{B_2B} = \frac{AC_2}{C_2C} = \frac{2}{3}$ കൂടാതെ $B_2C_2 \parallel BC$

$\frac{AB_3}{B_3B} = \frac{AC_3}{C_3C} = \frac{3}{2}$ കൂടാതെ $B_3C_3 \parallel BC$

$\frac{AB_4}{B_4B} = \frac{AC_4}{C_4C} = \frac{4}{1}$ കൂടാതെ $B_4C_4 \parallel BC$ കാണാം

ഇതിൽ നിന്ന് നമുക്ക് കാണാൻ സാധിക്കുന്നത് ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ട് വശങ്ങളെ ഒരേ അംശബന്ധത്തിൽ വിഭജിക്കുന്ന രേഖ മൂന്നാമത്തെ വശത്തിന് സമാന്തരമായിരിക്കും..

അതുകൊണ്ട് നമുക്ക് ലഭിച്ച സിദ്ധാന്തം തെയിൽസ്സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ വിപരീത സിദ്ധാന്തം എന്ന് വിളിക്കാം.

### സിദ്ധാന്തം 2: അടിസ്ഥാന ആനുപതിക സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ വിപരീതം

**പ്രസ്താവന**

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഏതെങ്കിലും രണ്ട് വശങ്ങളെ ഒരേ അംശബന്ധത്തിൽ വിഭജിക്കുന്ന നേർരേഖ മൂന്നാമത്തെ വശത്തിന് സമാന്തരമായിരിക്കും.



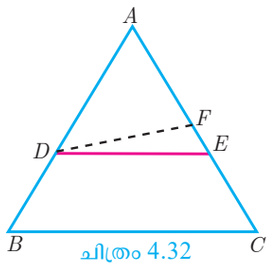
4 Geometry malayalam.indd 173 20/01/2023 17:47:59

**തെളിവ്**

സങ്കല്പം : $\Delta ABC, \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

അനുമാനം : $DE \parallel BC$

നിർമ്മിതി : BC യ്ക്ക് DE സമാന്തരമല്ലായിരുന്നാൽ, DF||BC വരയ്ക്കുക



ചിത്രം 4.32

| നമ്പർ | പ്രസ്താവന | കാരണം |
|---|---|---|
| 1. | $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ ...(1) | കൊടുത്തിട്ടുള്ളത് |
| 2. | $\Delta ABC$ യിൽ, DF||BC | നിർമ്മിതി |
| 3. | $\frac{AD}{DB} = \frac{AF}{FC}$ ... (2) | അടിസ്ഥാന ആനുപാതിക സിദ്ധാന്തം ($\Delta ABC$ യിൽ $AC$ യിൽ $F$ എടുക്കുക) |
| 4. | $\frac{AE}{EC} = \frac{AF}{FC}$ | (1), (2) ഇവയിൽ നിന്ന് |
| | $\frac{AE}{EC} + 1 = \frac{AF}{FC} + 1$ | ഇരുവശത്തും 1 കൂട്ടുക |
| | $\frac{AE + EC}{EC} = \frac{AF + FC}{FC}$ | |
| | $\frac{AC}{EC} = \frac{AC}{FC}$ | $AC$ ഇരുവശത്തും ഒഴിവാക്കുക |
| | EC = FC | BC യ്ക്ക് DE സമാന്തരമല്ലായിരുന്നാൽ എന്ന നമ്മുടെ നിഗമനം |
| | അതുകൊണ്ട്, $E = F$ | തെറ്റാണ് |
| | അങ്ങനെ $DE \parallel BC$ | തെളിയിച്ചു |

## സിദ്ധാന്തം 3: കോണദ്വിഭാജകസിദ്ധാന്തം

**പ്രസ്താവന**

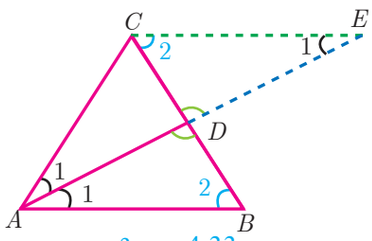
ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു കോണിന്റെ ആന്തരദ്വിഭാജകം എതിർ വശത്തെ സമീപ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധത്തിൽ ആന്തരമായി വിഭജിക്കുന്നു.

**തെളിവ്**

സങ്കല്പം : $\Delta$ ABC, യിൽ AD ആന്തരദ്വിഭാജകം

അനുമാനം : $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$

നിർമ്മിതി : $AB$ യ്ക്ക് സമാന്തരമായി $C$ യിലൂടെ ഒരു സമാന്തര രേഖ വരയ്ക്കുക. $AD$ നീട്ടിയതിനെ $E$ യിൽ സന്ധിക്കുന്നു.



ചിത്രം. 4.33



4 Geometry malayalam.indd 174 20/01/2023 17:48:01

| നമ്പർ | പ്രസ്താവന | കാരണം |
|---|---|---|
| 1. | $\angle AEC = \angle BAE = \angle 1$<br>$\angle ABD = \angle ECD = \angle 2$ | രണ്ട് സമാന്തരരേഖകളെ ഒരു ഛേദകം ഖണ്ഡിക്കുമ്പോഴുണ്ടാകുന്ന ഏകാന്തരകോണുകൾ തുല്യം. |
| 2. | $\Delta ACE$ എന്നത് ഒരു ദ്വിസമഭുജത്രികോണം<br>AC = CE ... (1) | $\Delta ACE, \angle CAE = \angle CEA$ യിൽ |
| 3. | $\Delta ABD \sim \Delta ECD$<br>$\frac{AB}{CE} = \frac{BD}{CD}$ | സദൃശ സിദ്ധാന്തം |
| 4. | $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$ | $AC = CE$ (1) ൽ നിന്നും സിദ്ധാന്തം തെളിയിച്ചു. |

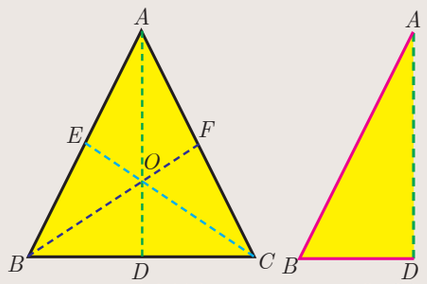
## പ്രവർത്തി 3

**വഴി 1:** ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതു പോലെ ഒരു ചാർട്ട് എടുത്ത് ത്രികോണം വെട്ടുക ചിത്രം.4.34(a).

**വഴി 2:** $AD$യിലൂടെ മടക്കുക അപ്പോൾ C യും B യും ഒന്നിനുമുകളിൽ ഒന്നായി ക്രമീകരിക്കപ്പെടും.

**വഴി 3:** അതുപോലെ, CE യിലൂടെ മടക്കുക. അപ്പോൾ $B$ യും $A$ യും ഒന്നിനു മുകളിൽ ഒന്നായി ക്രമീകരിക്കപ്പെടും..

**വഴി 4:** അതുപോലെ BE യിലൂടെ മടക്കുക. അപ്പോൾ A യും C യും ഒന്നിനുമുകളിൽ ഒന്നായി ക്രമീകരിക്കപ്പെടും.



ചിത്രം. 4.34(a) ചിത്രം. 4.34(b)

സ്കെയിലിന്റെ സഹായത്തോടെ $B$, $AC$, $BD$, $DC$ ഇവ കാണുക. $\frac{AB}{AC}, \frac{BD}{DC}$ ഇവ തുല്യമാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക?

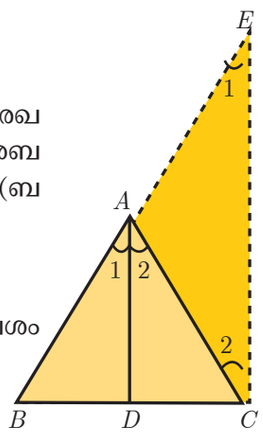
ഇവ മൂന്നിൽ നിന്നും ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു കോണിന്റെ ആന്തര ദ്വിഭാജകം എതിർവശത്തെ സമാനസമീപ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധത്തിൽ ആന്തരമായി വിഭജിക്കുന്നു.

ഈ പ്രവൃത്തിയിൽ നിന്നും നിങ്ങൾ എന്ത് നിഗമനത്തിലാണ് എത്തിച്ചേരുന്നത്?

### സിദ്ധാന്തം 4: കോണദ്വിഭാജക സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ വിപരീതം

**പ്രസ്താവന**

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു ശീർഷത്തിലൂടെ കടന്നു ചെല്ലുന്ന നേർരേഖ എതിർവശത്തെ ആന്തരമായോ (ബാഹ്യമായോ) മറ്റു രണ്ട് വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധത്തിൽ വിഭജിച്ചാൽ ആ രേഖ കോണിനെ ശീർഷത്തിൽ ആന്തരമായോ (ബാഹ്യമായോ) രണ്ട് സമഭാഗങ്ങളാക്കുന്നു.



ചിത്രം. 4.35

**തെളിവ്**

സങ്കൽപം : ABC യിൽ $\angle A$ യുടെ ദ്വിഭാജകം, $AD$ എന്ന രേഖ, എതിർ വശം $BC$ യെ ആന്തരമായി വിഭജിക്കുന്നു.

അതായത് $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$ ... (1)

അനുമാനം : $\angle A$ യുടെ ദ്വിഭാജകം AD $\angle 1 = \angle 2$

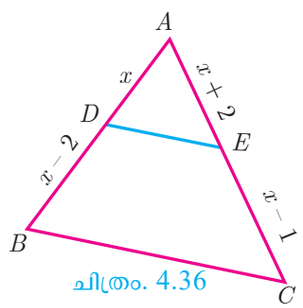
നിർമ്മിതി : $C$ യിലൂടെ $DA$ യ്ക്ക് സമാന്തരമായി ഒരു രേഖ വരയ്ക്കുക. അത് $BA$ നീട്ടിയതിനെ $E$ യിൽ ഛേദിക്കുന്നു അതിനാൽ $CE \parallel DA$.



4 Geometry malayalam.indd 175 20/01/2023 17:48:02

| No. | പ്രസ്താവന | കാരണം |
|---|---|---|
| 1. | $\angle BAD = \angle 1$ കൂടതെ $\angle DAC = \angle 2$ എന്നിരിക്കട്ടെ | സങ്കല്പം |
| 2. | $\angle BAD = \angle AEC = \angle 1$ | $DA \parallel CE$ , $AC$ ഒരു ഛേദകം (സമാന കോണുകൾ തുല്യം) |
| 3. | $\angle DAC = \angle ACE = \angle 2$ | $DA \parallel CE$ , $AC$ ഒരു ഛേദകം ഏകാന്തരകോണുകൾ തുല്യം |
| 4. | $\frac{BA}{AE} = \frac{BD}{DC}$ ... (2) | $\Delta BCE$ തെയിൽസ് സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച് |
| 5. | $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$ | (1) ൽ നിന്നും |
| 6. | $\frac{AB}{AC} = \frac{BA}{AE}$ | (1) , (2) ൽ നിന്നും |
| 7. | AC = AE ... (3) | $AB$ ഒഴിവാക്കുന്നു |
| 8. | $\angle 1 = \angle 2$ | (3) ൽനിന്നു $\Delta ACE$ ഒരു ദ്വിസമുജ്ജത്രികോണംഎന്ന് ലഭിച്ചു |
| 9. | $\angle A$ യെ AD വിഭജിക്കുന്നു. | അതുകൊണ്ട്, $\angle 1 = \angle BAD = \angle 2 = \angle DAC$ . സിദ്ധാന്തം തെളിയിച്ചു |

**ഉദാഹരണം 4.12 :** $\Delta ABC$ യിൽ $DE \parallel BC$ , $AD = x$, $DB = x - 2$, $AE = x + 2$ , $EC = x - 1$ ഉം ആയാൽ $AB$, $AC$ എന്നീ വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ കാണുക.



ചിത്രം. 4.36

**നിർദ്ധാരണം** $\Delta ABC$ യിൽ $DE \parallel BC$.

തെയിൽസ് സിദ്ധാന്തം അനുസരിച്ച് $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

$$\frac{x}{x-2} = \frac{x+2}{x-1} \quad , \; x(x-1) = (x-2)(x+2)$$

$$x^2 - x = x^2 - 4 \quad , \; x = 4$$

$x = 4$, $AD = 4$, $DB = x - 2 = 2$, $AE = x + 2 = 6$, $EC = x - 1 = 3$.

ആയതിനാൽ, $AB = AD + DB = 4 + 2 = 6$, $AC = AE + EC = 6 + 3 = 9$.

അതുകൊണ്ട്, $AB = 6$, $AC = 9$.

**ഉദാഹരണം 4.13 :** $\Delta ABC$ യിൽ$AB$, $AC$ എന്നീ വശങ്ങളിലുള്ള ബിന്ദുക്കൾ യഥാക്രമം $D$, $E$ ആകുന്നു. $AB$=5.6 **സെ.മീ, AD=1.4 സെ.മീ,** $AC$=**7.2 സെ.മീ** കൂടാതെ $AE$ = **1.8 സെ.മീ** എങ്കിൽ $DE \parallel BC$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

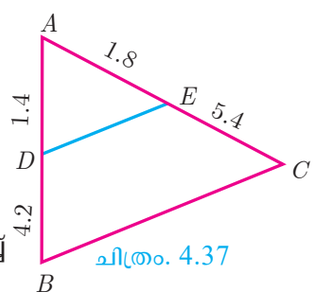
**നിർദ്ധാരണം** $AB = 5.6$ സെ.മീ, $AD = 1.4$ സെ.മീ, $AC = 7.2$ സെ.മീ കൂടാതെ $AE = 1.8$ സെ.മീ.

$BD = AB - AD = 5.6 - 1.4 = 4.2$ സെ.മീ

കൂടാതെ $EC = AC - AE = 7.2 - 1.8 = 5.4$ സെ.മീ.

$\frac{AD}{DB} = \frac{1.4}{4.2} = \frac{1}{3}$ കൂടാതെ $\frac{AE}{EC} = \frac{1.8}{5.4} = \frac{1}{3}$

$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$



ചിത്രം. 4.37

അതുകൊണ്ട്, അടിസ്ഥാന ആനുപാതിക സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ വിപരീതമനുസരിച്ച് $DE \parallel BC$ എന്ന് നമുക്ക് തെളിയിക്കാൻ കഴിയും.



4 Geometry malayalam.indd 176 20/01/2023 17:48:07

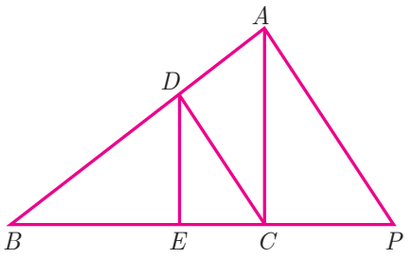
**ഉദാഹരണം 4.14 :** ചിത്രം.**4.38** ൽ, $DE \parallel AC$ , $DC \parallel AP$ .ആയാൽ $\frac{BE}{EC} = \frac{BC}{CP}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

**നിർദ്ധാരണം** $\Delta BPA$, യിൽ $DC \parallel AP$ . അടിസ്ഥാന ആനുപാതിക സിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച്,

അതുകൊണ്ട് $\frac{BC}{CP} = \frac{BD}{DA}$ ...(1)

$\Delta BCA$, യിൽ $DE \parallel AC$ . അടിസ്ഥാന ആനുപാതിക സിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച്

$\frac{BE}{EC} = \frac{BD}{DA}$ ...(2)



ചിത്രം. 4.38

(1) , (2) ഇവയിൽ നിന്നും, $\frac{BE}{EC} = \frac{BC}{CP}$ . എന്ന് തെളിയിക്കാൻ കഴിയും.

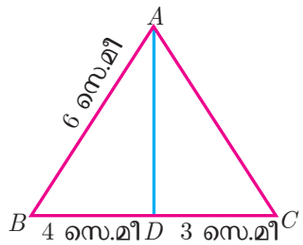
**ഉദാഹരണം 4.15 :** ചിത്രം.**4.39** ൽ, $\angle A$ യുടെ ദ്വിഭാജകം $AD$ ആകുന്നു. $BD =$ **4 സെ.മീ,** $DC =$ **3 സെ.മീ,** $AB =$ **6 സെ.മീ** ആയാൽ $AC$ കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം** $\Delta ABC$ യിൽ, $AD$ യുടെ ദ്വിഭാജകം $\angle A$ ആകുന്നു.

കോണ ദ്വിഭാജക സിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച്

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

$\frac{4}{3} = \frac{6}{AC}$ , $4AC = 18$ . അതുകൊണ്ട്, $AC = \frac{9}{2} = 4.5$ സെ.മീ



ചിത്രം. 4.39

**ഉദാഹരണം 4.16 :** ചിത്രം. **4.40** ൽ, $\angle BAC$ യുടെ ദ്വിഭാജകം $AD$ ആകുന്നു. $AB =$ **10 സെ.മീ,** $AC =$ **14 സെ.മീ, BC = 6 സെ.മീ** ആയാൽ $BD$, $DC$ ഇവ കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം** $BD = x$ സെ.മീ, എന്നും $DC = (6-x)$cm എന്നും എടുക്കുക

$\angle A$ യുടെ ദ്വിഭാജകം AD ആകുന്നു.

കോണദ്വിഭാജക സിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച്

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$

$$\frac{10}{14} = \frac{x}{6-x} \quad \text{gives} \quad \frac{5}{7} = \frac{x}{6-x}$$

അതുകൊണ്ട്, $12x = 30$ we get, $x = \frac{30}{12} = 2.5$ സെ.മീ

അതുകൊണ്ട്, $BD = 2.5$ സെ.മീ, $DC = 6 - x = 6 - 2.5 = 3.5$ സെ.മീ

## പുരോഗതി പരിശോധന

1. ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന് _____ ആയി വരയ്ക്കുന്ന രേഖ മറ്റു രണ്ട് വശങ്ങളേയും ഒരേ അംശബന്ധത്തിൽ വിഭജിക്കുന്നു.
2. അടിസ്ഥാന ആനുപാതിക സിദ്ധാന്തത്തെ _____ എന്നു പറയുന്നു.



4 Geometry malayalam.indd 177 20/01/2023 17:48:10

3. $\Delta ABC$ ഒരു സമഭുജത്രികോണമാകുന്നു. $BC$ യിലെ ഒരു ബിന്ദുവാണ് $D$. $\angle A$ യുടെ ആന്തരദ്വിഭാജകം $AD$ ആകുന്നു. എങ്കിൽ കോണ ദ്വിഭാജക സിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച് $\frac{BD}{DE}$ എന്നത് _____ ആയിരിക്കും

4. ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ _____ ലൂടെ കടന്നു ചെല്ലുന്ന നേർരേഖ എതിർവശത്തെ ആന്തരമായോ (ബാഹ്യമായോ) മറ്റുരണ്ടു വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധത്തിൽ വിഭജിച്ചാൽ ആ രേഖ കോണിനെ ശീർഷത്തിൽആന്തരമായോ (ബാഹ്യമായോ)രണ്ട് സമഭാഗങ്ങളാക്കുന്നു.

5. $\Delta ABC$ യിൽ $BC$ യിലേയ്ക്കുള്ള മധ്യമം $AD$, $\angle A$ യുടെ കോണദ്വിഭാജകം ആണ് എങ്കിൽ $\frac{AB}{AC}$ എന്നത് _____ ആണ്.

### 4.3.2 ത്രികോണങ്ങളുടെ നിർമ്മിതി

വശങ്ങളും കോണുകളും തന്നിരുന്നാൽ ത്രികോണങ്ങൾ വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്നു നാം മുമ്പ് പഠിച്ചു കഴിഞ്ഞു ഈ ഭാഗത്തിൽ താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന പ്രകാരം ത്രികോണം നിർമ്മിക്കാം :

(i) ആധാരം, ശീർഷകോൺ, ആധാരത്തിൻ മേലുള്ള ഉന്നതി

(ii) ആധാരം, ശീർഷകോൺ, ശീർഷത്തിൽ നിന്നും ആധാരത്തിൻമേലുള്ള മധ്യമം

(iii) ആധാരവും, ശീർഷകോണും, ശീർഷകോണിൽ നിന്നുള്ള ദ്വിഭാജകം ആധാരവുമായി യോജിക്കുന്ന ബിന്ദുവും തന്നിരുന്നാൽ.

ആദ്യമായി താഴെ തന്നിട്ടുള്ള നിർമ്മിതി പരിശോധിക്കാം, Z

**തന്നിട്ടുള്ള രേഖാഖണ്ഡത്തിനു $\theta$ മുകളിൽ കോണളവ് ഉൾക്കൊള്ളുന്ന വൃത്തഖണ്ഡത്തിന്റെ നിർമ്മിതി**

**നിർമ്മിതി**

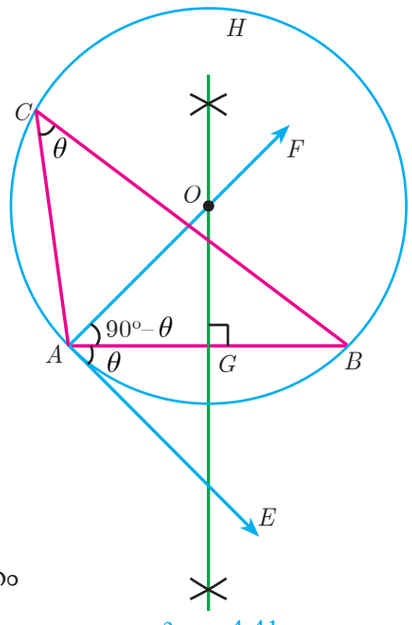
**വഴി 1:** ഒരു രേഖാഖണ്ഡം $\overline{AB}$ വരയ്ക്കുക.

**വഴി 2:** $A$ യിൽ $\angle BAE = \theta$ , $AE$ വരയ്ക്കുക.

**വഴി 3:** $AF \perp AE$ വരയ്ക്കുക.

**വഴി 4:** $AB$ യുടെ ലംബദ്വിഭാജകം വരയ്ക്കുക. അത് $AF$ നെ $O$ യിൽ ഛേദിക്കുന്നു.

**വഴി 5:** $O$ കേന്ദ്രമാക്കി $OA$ വ്യാസാർദ്ധമാക്കി ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക $ABH$.



ചിത്രം. 4.41

**വഴി 6:** വൃത്തത്തിൻമേൽ $C$ എന്ന ബിന്ദു കുറിക്കുക. സ്പർശ രേഖ ഞാൺ സിദ്ധാന്തം അനു സരിച്ച് ദീർഘചാപം $ACB$ ആണ് ആവശ്യപ്പെട്ട കോണളവ് $\theta$ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന വൃത്തഖണ്ഡം.

**കുറിപ്പ്**

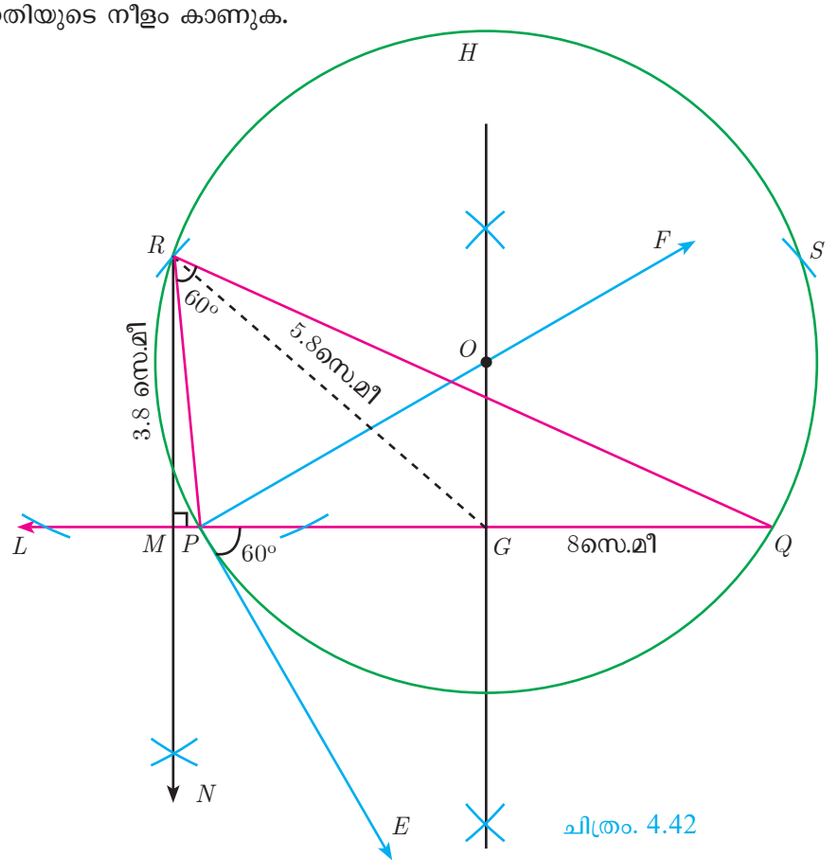
➢ ഒരു വൃത്തത്തിൻ മേലുള്ള ബിന്ദുക്കൾ $C_1, C_2, \ldots$ ആണെങ്കിൽ $\Delta BAC_1$, $\Delta BAC_2, \ldots$ എന്നീ ത്രികോണങ്ങൾ ഒരേ ആധാരവും ഒരേ ശീർഷകോണഅളവും ഉള്ള ത്രികോണങ്ങളാണ്.



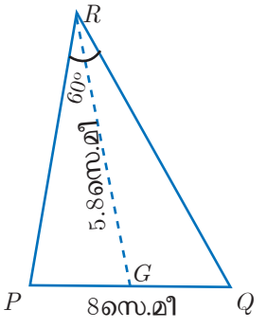
4 Geometry malayalam.indd 178 20/01/2023 17:48:12

### ആധാരം, ശീർഷകോൺ, ആധാരത്തിൻ മേലുള്ള മധ്യമം എന്നിവ തന്നിരുന്നാൽ ത്രികോണം നിർമ്മിക്കൽ.

**ഉദാഹരണം 4.17 :** ആധാരം $PQ = 8$ സെ.മീ, $\angle R = 60^\circ$ ശീർഷകോൺ $R$ ൽ നിന്നും $PQ$ വിലേയ്ക്ക്ള്ള മധ്യമം $RG = 5.8$ സെ.മീ എന്നീ അളവുകളുള്ള $\Delta PQR$ നിർമ്മിക്കുക. $R$ ൽ നിന്നും $PQ$ വിലേയ്ക്കുള്ള ഉന്നതിയുടെ നീളം കാണുക.




ചിത്രം. 4.42




ഏകദേശ ചിത്രം

**നിർമ്മിതി**

**വഴി 1:** $PQ = 8$സെ.മീ ഉള്ള ഒരു രേഖാഖണ്ഡം വരയ്ക്കുക.

**വഴി 2:** $\angle QPE = 60^\circ$ വരത്തക്കവണ്ണം $PE$ വരയ്ക്കുക.

**വഴി3:** $\angle EPF = 90^\circ$ വരത്തക്കവണ്ണം $PF$ വരയ്ക്കുക.

**വഴി 4:** $PQ$ വിന്റെ ലംബദ്വിഭാജകം വരയ്ക്കുക. അത് $PF$നെ $O$ യിലും $PQ$ വിനെ $G$ യിലും ഛേദിക്കുന്നു.

**വഴി 5:** $O$ കേന്ദ്രമാക്കി $OP$ വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

**വഴി 6:** $G$ കേന്ദ്രമാക്കി 5.8 cm വ്യാസാർദ്ധത്തൽ ഒരു വൃത്ത ചാപം വരയ്ക്കുക. അത് വൃത്തത്തെ $R$,S എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഛേദിക്കുന്നു.

**വഴി 7 :** $PR$, $RQ$ എന്നിവ യോജിപ്പിക്കുക. $\triangle PQR$ ആണ് ആവശ്യപ്പെട്ട ത്രികോണം.

**വഴി 8 :** $RN$, $LQ$. $LQ$, $RN$ നെ $M$ ൽ ഛേദിക്കുന്നു.

**വഴി 9:** ഉന്നതി $RM$ ന്റെ നീളം 3.8 സെ.മീ ആകുന്നു.

**കുറിപ്പ്**

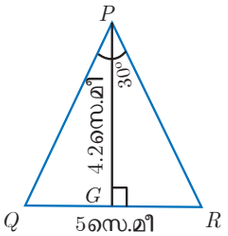
- $\Delta PQS$ എന്നത് ആവശ്യപ്പെട്ട മറ്റൊരു ത്രികോണം ആകുന്നു.



4 Geometry malayalam.indd 179 20/01/2023 17:48:13

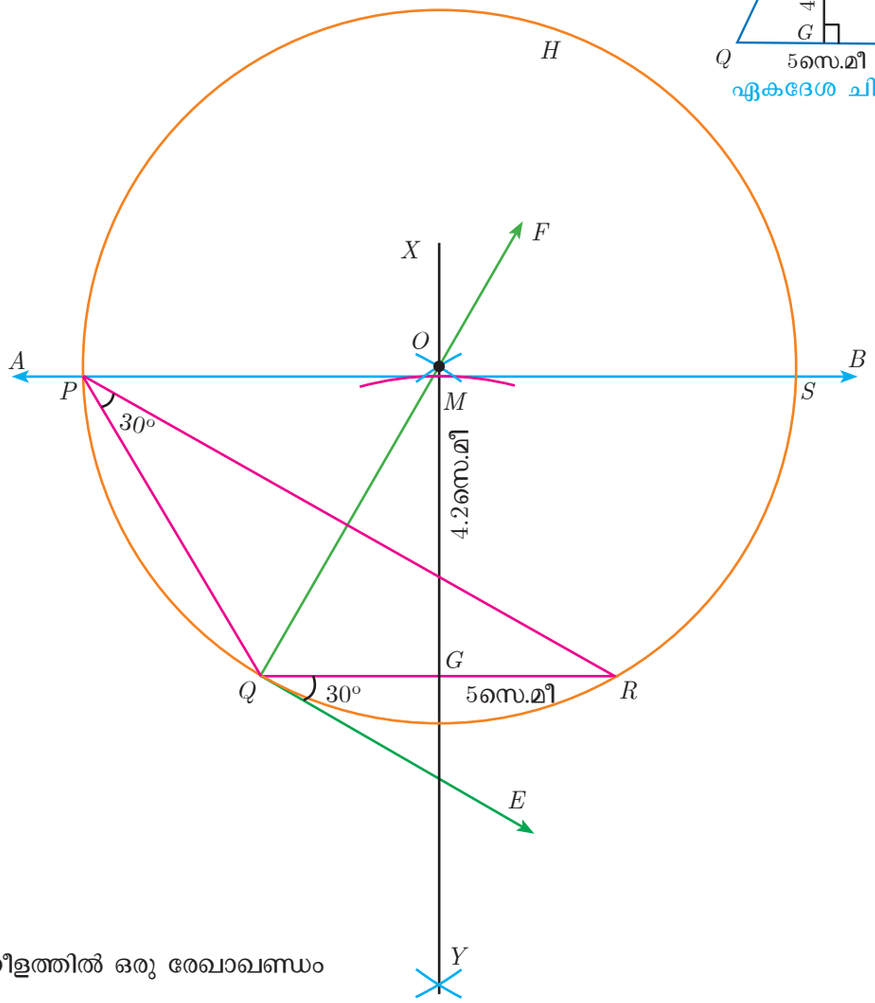
**ആധാരവും, ശീർഷകോണും, ആധാരത്തിൻ മേലുള്ള ഉന്നതിയും തന്നിരുന്നാൽ ത്രികോണം നിർമ്മിക്കുന്ന വിധം.**

**ഉദാഹരണം 4.18 :** $QR = 5$ സെ.മീ, $\angle P = 30°$ $\angle P$ -യിൽ നിന്നും $QR$ ലേയ്ക്കുള്ള ഉന്നതി 4.2 സെ.മീ ആയാൽ $\Delta PQR$ നിർമ്മിക്കുക.



ഏകദേശ ചിത്രം

**നിർദ്ധാരണം**



ചിത്രം. 4.43

**നിർമ്മിതി**

**വഴി 1 :** $QR = 5$ നീളത്തിൽ ഒരു രേഖാഖണ്ഡം വരയ്ക്കുക.

**വഴി 2 :** $\angle RQE = 30°$ വരത്തക്കവണ്ണം $Q$ യിലൂടെ $QE$ വരയ്ക്കുക.

**വഴി 3 :** $\angle EQF = 90°$ വരത്തക്കവണ്ണം $Q$ യിലൂടെ $QF$ വരയ്ക്കുക.

**വഴി 4 :** $QR$ ലൂടെ ലംബദ്വിഭാജകം $XY$ വരയ്ക്കുക. അത് $QF$ നെ $O$ യിലും $QR$ നെ $G$ യിലും ഛേദിക്കുന്നു.

**വഴി 5 :** $O$ കേന്ദ്രമാക്കി $OQ$ വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

**വഴി 6:** $G$ കേന്ദ്രമാക്കി രേഖാഖണ്ഡം $XY$ ൽ $M$ എന്ന ചാപം വരയ്ക്കുക. അത് $GM = 4.2$ ആണ്.

**വഴി 7 :** $M$ ൽ കൂടി $AB$ എന്ന രേഖാഖണ്ഡം $QR$ ന് സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുക.

**വഴി 8 :** $AB$ എന്ന് വൃത്തത്തിന്റെ $P, S$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഛേദിക്കുന്നു.

**വഴി 9 :** $QP$ യെയും $RP$ യെയും യോജിപ്പിക്കുക അപ്പോൾ ആവശ്യപ്പെട്ട $\triangle PQR$ കിട്ടുന്നു.

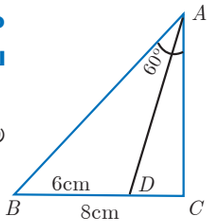
**കുറിപ്പ്**

- $\Delta SQR$ എന്നതും ആവശ്യപ്പെട്ട മറ്റൊരു ത്രികോണം ആകുന്നു.



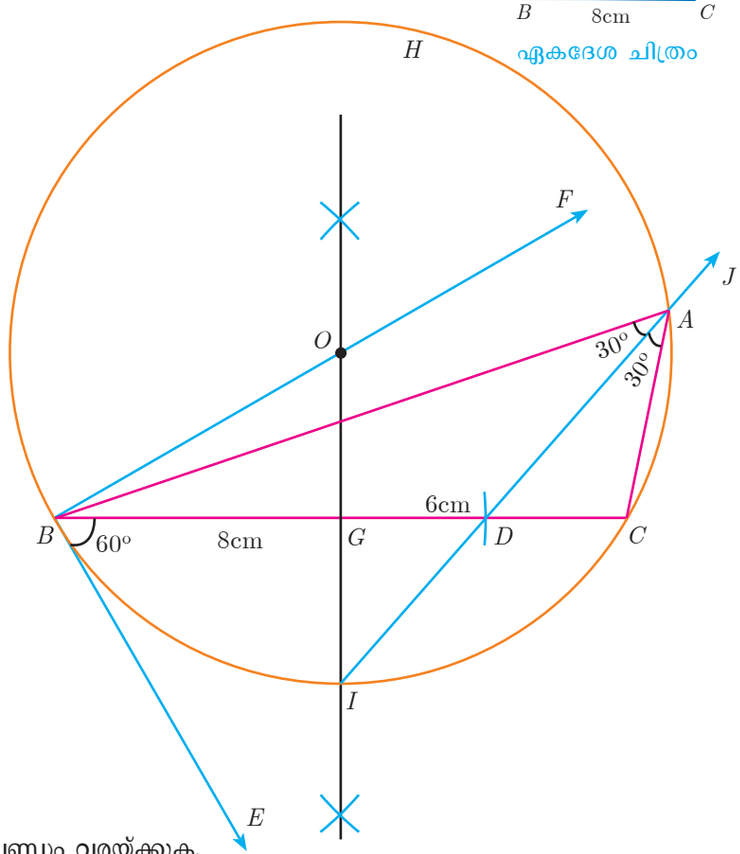
4 Geometry malayalam.indd 180 20/01/2023 17:48:15

### ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ആധാരം, ശീർഷകോൺ ആധാരവും ശീർഷകോണിലെ ദ്വിഭാജകവും സന്ധിക്കുമ്പോഴുണ്ടാകുന്ന ബിന്ദു ഇവ തന്നിരുന്നാൽ ത്രികോണം നിർമ്മിക്കുന്ന വിധം




**ഉദാഹരണം 4.19 :** ആധാരം $BC = 8$ , $\angle A = 60^\circ$ $\angle A$ =യുടെ ദ്വിഭാജകം $BC$യെ സന്ധിക്കുന്ന ബിന്ദു $D$ $BD = 6$ cm ഇവ തന്നിരുന്നാൽ ത്രികോണം നിർമ്മിക്കുക.

ഏകദേശ ചിത്രം




ചിത്രം. 4.44

**നിർദ്ധാരണം**

**നിർമ്മിതി**

**വഴി 1 :** $BC = 8$ cm ഉള്ള ഒരു രേഖാഖണ്ഡം വരയ്ക്കുക.

**വഴി 2 :** $B$ യിൽ $\angle CBE = 60^\circ$ നിന്നും വരത്തക്കവണ്ണം $BE$ വരയ്ക്കുക.

**വഴി 3 :** $B$ യിൽ നിന്നും $\angle EBF = 90^\circ$ വരത്തക്കവണ്ണം BF വരയ്ക്കുക.

**വഴി 4 :** $BC$ യുടെ ലംബദ്വിഭാജകം വരയ്ക്കുക. അത് $BF$ നെ $O$ യിലും $BC$ യെ $G$ യിലും ഛേദിക്കുന്നു.

**വഴി 5 :** $O$ കേന്ദ്രമാക്കി $OB$ വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

**വഴി 6 :** $B$ കേന്ദ്രമാക്കി 6cm അളവിൽ ഒരു ചാപം $BC$ യിൽ വരയ്ക്കുക അതിന് $D$ എന്ന് പേര് നൽകുക.

**വഴി 7 :** ലംബദ്വിഭാജകം വൃത്തത്തിൽ ചേരുന്ന ബിന്ദുവിന് I എന്ന് പേരു നൽകുക $ID$ യോജിപ്പിക്കുക.

**വഴി 8 :** $ID$ നീട്ടി വരച്ച് $A$ യുമായി ബന്ധിപ്പിക്കുക $AB, AC$ എന്നിവ യോജിപ്പിക്കുക അപ്പോൾ ആവശ്യപ്പെട്ട $\triangle ABC$ കിട്ടുന്നു.



### അഭ്യാസം 4.2

1. $\Delta ABC$, യിൽ $D, E$ എന്നിവ യഥാക്രമം $AB, AC$ എന്നീ വശങ്ങളിലുള്ള ബിന്ദുക്കൾ ആകുന്നു. കൂടാതെ $DE \parallel BC$ (i) $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{4}$ , $AC = 15$ cm എങ്കിൽ $AE$ കാണുക.

(ii) $AD = 8x - 7$ , $DB = 5x - 3$ , $AE = 4x - 3$ , $EC = 3x - 1$ , ആയാൽ $x$ ന്റെ വില കാണുക.



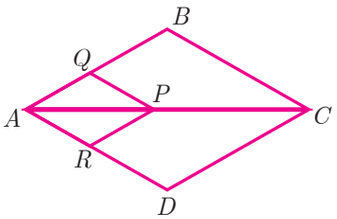
4 Geometry malayalam.indd 181 20/01/2023 17:48:16

2. ABCD ഒരു ലംബകം $AB \parallel DC$, $P, Q$ എന്നിവ $AD$, $BC$ എന്നിവയിലെ ബിന്ദുക്കൾ ആണ് $PQ \parallel DC$ യും $PD = 18$ സെ.മീ, $BQ = 35$ സെ.മീ, $QC = 15$ സെ.മീ ഉം ആകുന്നു. എന്നാൽ $AD$ കാണുക.

3. $\Delta ABC$, യിൽ $D, E$ എന്നിവ $AB$, $AC$ എന്നീ വശങ്ങളിലെ ബിന്ദുക്കൾ ആകുന്നു. $AB = 12$ സെ.മീ, $AD = 8$ സെ.മീ, $AE = 12$ സെ.മീ , $AC = 18$ സെ.മീ. എങ്കിൽ $DE \parallel BC$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

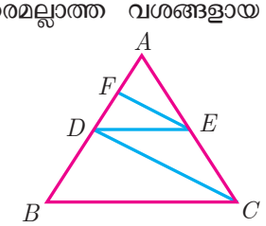
4. ചിത്രത്തിൽ $PQ \parallel BC$ ഉം $PR \parallel CD$ ഉം ആയാൽ

(i) $\frac{AR}{AD} = \frac{AQ}{AB}$ (ii) $\frac{QB}{AQ} = \frac{DR}{AR}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.




5. സമ ചതുർഭുജം PQRB യിൽ $\Delta ABC$ അന്തർലേഖനം ചെയ്തിരിക്കുന്നു. $\angle B$ ഒരു കോണും $P$, $Q$, $R$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ $AB$, $AC$, $BC$ എന്നീ വശങ്ങളിൽ ഉൾപ്പെട്ടിരിക്കുന്നവയും ആകുന്നു. എങ്കിൽ $AB = 12$ cm, $BC = 6$ cm, ആയാൽ $PQ$, $RB$ എന്നിവയുടെ നീളം കാണുക.

6. ലംബകം $ABCD$ യിൽ $AB \parallel DC$, $E$, $F$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ സമാന്തരമല്ലാത്ത വശങ്ങളായ $AD$, $BC$ എന്നിവയിൽ ഉൾപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. $EF \parallel AB$ ആകുന്നു. എങ്കിൽ $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$ എന്നു തെളിയിക്കുക .



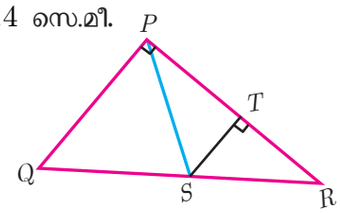

7. ചിത്രത്തിൽ $DE \parallel BC$ യും $CD \parallel EF$ ഉം ആകുന്നു. $AD^2 = AB \times AF$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

8. $\Delta ABC$ യിൽ താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ളവ ഓരോന്നിലും $\angle A$ യുടെ ദ്വിഭാജകം $AD$ ആണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക

(i) $AB = 5$ സെ.മീ, $AC = 10$ സെ.മീ, $BD = 1.5$ സെ.മീ , $CD = 3.5$ സെ.മീ.

(ii) $AB = 4$ സെ.മീ, $AC = 6$ സെ.മീ, $BD = 1.6$ സെ.മീ , $CD = 2.4$ സെ.മീ.

9. ചിത്രത്തിൽ $\angle QPR = 90°$ , PSഒരു ദ്വിഭാജകം $ST \perp PR$ , ആയാൽ $ST \times (PQ + PR) = PQ \times PR$. തെളിയിക്കുക.




10. ചതുർഭുജം $ABCD$ യിൽ $AB = AD$, ഇവ $\angle BAC$ , $\angle CAD$ എന്നിവയുടെ ദ്വിഭാജകം $BC$, $CD$ എന്നിവ $E$ യിൽ സംഗമിക്കുന്നു. $EF \parallel BD$ എന്ന് തെളിയിക്കുക?.

11. ആധാരം $PQ = 4.5$ സെ.മീ, $\angle R = 35°$ $R$ ൽ നിന്നും $PQ$ വിലേയ്ക്കുള്ള മധ്യമം $RG = 6$ സെ.മീ ഉള്ള ഒരു $\Delta PQR$ നിർമ്മിക്കുക.

12. $QR = 5$ സെ.മീ, $\angle P = 40°$ $\angle P$ യിൽ നിന്നും $QR$ ലേയ്ക്കുള്ള മധ്യമം $PG = 4.4$ സെ.മീ ആയാൽ $\Delta PQR$ നിർമ്മിക്കുക. $P$ യിൽ നിന്നും $QR$ ലേയ്ക്കുള്ള ഉന്നതിയുടെ നീളം അളന്നെഴുതുക?.

13. $QR = 6.5$ സെ.മീ, $\angle P = 60°$ $\angle P$ യിൽ നിന്നും $QR$ ലേയ്ക്കുള്ള ഉന്നതിയുടെ നീളം 4.5 സെ.മീ ആയാൽ $\Delta PQR$ നിർമ്മിക്കുക.

14. $AB = 5.5$ സെ.മീ, $\angle C = 25°$ $\angle C$ യിൽ നിന്നും $AB$ യിലേയ്ക്കുള്ള ഉന്നതി 4 സെ.മീ ഉം ആയാൽ $\Delta ABC$ നിർമ്മിക്കുക.



4 Geometry malayalam.indd 182 20/01/2023 17:48:21

15. ആധാരം $BC = 5.6$ സെ.മീ, $\angle A = 40^\circ$ $\angle A$ യുടെ ദ്വിഭാജകം $BC$ യെ $D$യിൽ ഛേദിക്കുന്നു. $CD = 4$ cm ആയാൽ $\Delta ABC$ നിർമ്മിക്കുക.

16. $PQ = 6.8$ സെ.മീ ശീർഷകോൺ $50^\circ$ ശീർഷകോണിന്റെ ദ്വിഭാജകം $D$ യിൽ ഛേദിക്കുന്നു. $PD = 5.2$ cm ആയാൽ $\Delta PQR$ വരയ്ക്കുക.

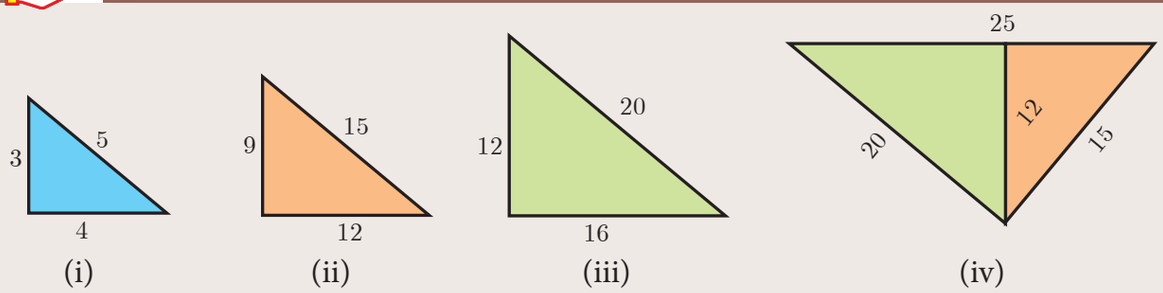
## 4.4 പൈതഗോറസ് സിദ്ധാന്തം

ഗണിത ശാസ്ത്രത്തിലെ എല്ലാ സിദ്ധാന്തങ്ങളെയും പൈതഗോറസ് സിദ്ധാന്തിന് മുഖ്യത്വം നൽകാൻ കാരണം അതിന് പരമാവധി തെളിവുകൾ ഉള്ളതിനാലാണ്. ഏതാണ്ട് 350 ൽ പരം വഴികളിൽ പൈതഗോറസ് സിദ്ധാന്തം പല രീതിയിലും തെളിയിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്. ഓരോ തെളിവുകളും പ്രശസ്തരായ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞരും, വൈജ്ഞാനികരും, എഞ്ചിനീയർമാരും, കൂടാതെ അമേരിക്കയുടെ ഇരുപതാമത്തെ പ്രസിസ്റ്റന്റായ ജെയിംഗ് ഗാർഫീൽഡ് ഉൾപ്പെടെയുള്ളവർ ഗണം കണ്ടെത്തിയിട്ടുണ്ട്. അമേരിക്കയിലെ നാഷണൽ കൗൺസിൽ ഓഫ് മാത്തമറ്റിക്സ് (NCTM) പുറത്തിറക്കിയ "ദി പൈതഗോറിയൽ പ്രൊപ്പോസിഷൻ" എന്ന പുസ്തകത്തിൽ ഏതാണ്ട് 367 തെളിവുകൾ പൈതഗോറസ് സിദ്ധാന്തത്തിനായിട്ടുണ്ട്. ഈ പുസ്തകം എഴുതിയത് എലിഷാ സ്കോർട്ട് ലൂയിസ് ആകുന്നു.

മൂന്ന് സംഖ്യകൾ $(a, b, c)$ ഇവയെ പൈതഗോറിയൽ ട്രിപ്ലറ്റ് എന്നാണ് പറയുന്നത്. ഇവ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളായി കരുതിയാൽ $c^2 = a^2 + b^2$ ആകുന്നു..

ഈ സിദ്ധാന്തം ജ്യാമിതിയിൽ മാത്രമല്ല ഗണിതത്തിലെ എല്ലാ മേഖലയിലും മുഖ്യ പങ്കുവഹിക്കുന്നു..

### പ്രവർത്തി 4




ചിത്രം. 4.45

**വഴി 1:** ചാർട്ട് പേപ്പർ എടുത്ത് ത്രികോണം (i) ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന അളവിലുള്ള ത്രികോണം വെട്ടുക .

**വഴി 2:** 3 വിവിധ തരത്തിലുള്ള ചാർട്ട് പേപ്പർ വെട്ടി 3 ത്രികോണങ്ങൾ രൂപപ്പെടുത്തുക. രണ്ടാമത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ വശം ത്രികോണം (i) ന്റെ മൂന്നു മടങ്ങും (iii) ാമത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ വശം ത്രികോണം (i) ന്റെ 4 മടങ്ങും (iv) ാമത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ വശം (i) ാമത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ 5 മടങ്ങും ആകുന്നു.

**വഴി 3:** പൊതുവായ വശം 12 വരുന്ന ത്രികോണം (ii), (iii), എന്നിവ (iv) ന്റെ മുകളിൽ വെയ്ക്കുന്നു കൂടാതെ ത്രികോണം [(ii), (iii) (iv)] ഇവ ത്രികോണം. (iv) ൽ സന്നിപതിക്കുന്നതായി കാണാൻ കഴിയും

കർണ്ണം ഉൾപ്പെടുന്ന വശം നിരീക്ഷിച്ച്, സമവാക്യവും എഴുതുക എന്താണ് നിരീക്ഷിക്കാൻ കഴിയുന്നത്?



4 Geometry malayalam.indd 183 20/01/2023 17:48:22

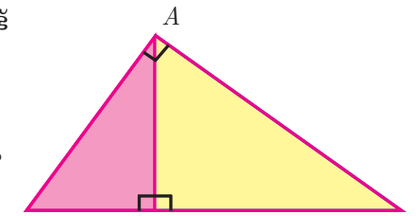
**കുറിപ്പ്**

- ഒരു സമകോണത്രികോണത്തിൽ, $= 90^\circ$ കോണത്തിന് എതിരായുള്ള വശമാണ് കർണ്ണം.
- മറ്റു രണ്ട് വശങ്ങളെയും സമകോണത്രികോണത്തിന്റെ പാദങ്ങളായി കരുതാം.
- ത്രികോണത്തിന്റെ ഏറ്റവും നീളം കൂടിയ വശം കർണ്ണമാകുന്നു..

## സിദ്ധാന്തം 5 : പൈതഗോറസ് സിദ്ധാന്തം

**പ്രസ്താവന**

ഒരു സമകോണത്രികോണത്തിൽ കർണ്ണത്തിന്റെ വർഗ്ഗം മറ്റു രണ്ട് വശങ്ങളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുകയ്ക്ക് തുല്യമായിരിക്കും..



ചിത്രം. 4.46

**തെളിവ്**

സങ്കല്പം : സമകോണത്രികോണം $\Delta ABC$, യിൽ $\angle A = 90^\circ$

അനുമാനം : $AB^2 + AC^2 = BC^2$

നിർമ്മിതി : $AD \perp BC$ വരയ്ക്കുക

| നമ്പർ | പ്രസ്താവന | കാരണം |
|---|---|---|
| 1. | $\Delta ABC$, $\Delta DBA$ എന്നിവയിൽ<br>$\angle B$ പൊതുവായ കോൺ<br>കൂടാതെ $\angle BAC = \angle BDA = 90^\circ$<br>അതുകൊണ്ട് , $\Delta ABC \sim \Delta DBA$<br>$\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{AB}$<br>$AB^2 = BC \times BD$ ... (1) | കാരണം $\angle BAC = 90^\circ$<br>$\angle BDA = 90^\circ$<br>AA പ്രമാണം |
| 2. | $\Delta ABC$, $\Delta DAC$ എന്നിവയിൽ<br>$\angle C$ പൊതുവായ കോൺ<br>$\angle BAC = \angle ADC = 90^\circ$<br>അതുകൊണ്ട്, $\Delta ABC \sim \Delta DAC$<br>$\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC}$<br>$AC^2 = BC \times DC$ ...(2) | കാരണം $\angle BAC = 90^\circ$<br>$\angle ADC = 90^\circ$<br>AA പ്രമാണം |

(1), (2) ഇവ കൂട്ടിയാൽ

$$AB^2 + AC^2 = BC \times BD + BC \times DC$$
$$= BC(BD + DC) = BC \times BC$$
$$AB^2 + AC^2 = BC^2.$$

സിദ്ധാന്തം തെളിയിച്ചു.

**നിങ്ങൾക്കറിയാമോ?**

പൈതഗോറസ് സിദ്ധാന്തത്തെ "ബന്തായൻ സിദ്ധാന്തം" എന്ന് ഇൻഡ്യക്കാർ വിളിക്കുന്നു.



4 Geometry malayalam.indd 184 20/01/2023 17:48:25

## ചിന്തിക്കുക

1. ഏതെങ്കിലും 5 പൈതഗോറിയൽ ട്രിപ്പ്ലെറ്റ് എഴുതുക?
2. ഒരു സമകോണ ത്രികോണത്തിൽ മറ്റു രണ്ട് കോണുകളുടെ തുക _____ ആയിരിക്കും.

### പൈതഗോറസ് സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ വിപരീതം

ഒരു ത്രികോണത്തിൽ ഒരു വശത്തിന്റെ വർഗ്ഗം മറ്റു രണ്ട് വശങ്ങളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുകയ്ക്ക് തുല്യമാണെങ്കിൽ ആദ്യത്തെ വശത്തിന് എതിരെയുള്ള കോൺ സമകോൺ ആയിരിക്കും.

## പ്രവർത്തി 5

(i) തുടർച്ചയായ രണ്ട് ഒറ്റസംഖ്യകളെ എടുക്കുക.

(ii) അവയുടെ വ്യുൽക്രമം എടുത്ത് കൂട്ടുക. അപ്പോൾ നിങ്ങൾക്ക് $\frac{p}{q}$ രൂപത്തിലുള്ള സംഖ്യ കിട്ടും.

(iii) $\frac{p}{q}$ വിന്റെ ഛേദത്തോട് 2 കൂട്ടിയാൽ $q+2$ കിട്ടും.

(iv) $p$, $q$, $q+2$ എന്നീ സംഖ്യകൾ എടുക്കുക. എന്ത് ബന്ധമാണ് ഈ മൂന്ന് സംഖ്യകൾക്കിടയിലുള്ളത്? അങ്ങനെ ഈ മൂന്ന് അടുത്തടുത്ത ഒറ്റസംഖ്യകൾ എടുക്കുമ്പോൾ എന്താണ് സംഭവിക്കുന്നതെന്ന് നിങ്ങൾ കണ്ടെത്തണം.

## ചിന്തിക്കുക

ഒരു സമകോണത്രികോണിന്റെ വശങ്ങൾ ഒറ്റസംഖ്യകളാകുമോ? എന്തുകൊണ്ട്

**ഉദാഹരണം 4.20 :** 6 മീ ഉയരമുള്ള ഒരു ദീപസ്തഭത്തിന്റെ ചുവട്ടിൽ നിന്നും 8 മീ അകലെയായി ഒരു പ്രാണി ഇരിയ്ക്കുന്നു. അത് അവിടെ നിന്നും ഇഴഞ്ഞു നീങ്ങുന്നു. അത് ഇഴഞ്ഞു നീങ്ങിയ ദൂരവും വിളക്കുമരത്തിന്റെ മുകളിലത്തെ ദൂരവും തുല്യമായാൽ ഈ പ്രാണിയും ദീപസ്തഭത്തിന്റെ ആധാരവും തമ്മിലുള്ള അകലം കാണുക?

**നിർദ്ധാരണം** പ്രാണിയും ദീപസ്തഭത്തിന്റെ പാദവും തമ്മിലുള്ള ദൂരം $BD = 8$ മീ

ദീപസ്തഭത്തിന്റെ ഉയരം, $AB = 6$ മീ

$x$ മീറ്റർ അകലത്തിൽ സഞ്ചരിച്ച് $C$ യിൽ എത്തിച്ചേരുന്നു.

$AC = CD = x$. എന്ന് എടുക്കുക $BC = BD - CD = 8 - x$

$\Delta ABC$, $\angle B = 90^\circ$

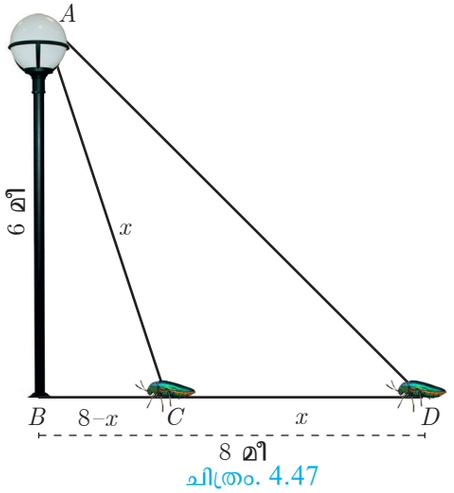
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \quad x^2 = 6^2 + (8-x)^2$$

$$x^2 = 36 + 64 - 16x + x^2$$

$$16x = 100 \quad x = 6.25$$

$$BC = 8 - x = 8 - 6.25 = 1.75 \text{ മീ}$$

അതുകൊണ്ട് പ്രാണി, ദീപസ്തഭത്തിന്റെ പാദത്തിൽ നിന്നും 1.75 മീ അകലത്തിലാണ്.



ചിത്രം. 4.47

**ഉദാഹരണം 4.21 :** $P$, $Q$ എന്നിവ $CA$, $CB$ എന്നീ വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദു ആകുന്നു. $\Delta ABC$, യിൽ $C$ ഒരു സമകോണമാകുന്നു. $4(AQ^2 + BP^2) = 5AB^2$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

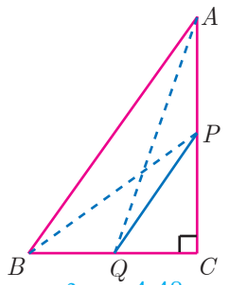
**നിർദ്ധാരണം** $\Delta AQC$ യിൽ C ഒരുസമകോൺ, $AQ^2 = AC^2 + QC^2$ ... (1)

കൂടാതെ, $\Delta BPC$ യിൽ C ഒരുസമകോൺ, $BP^2 = BC^2 + CP^2$ ... (2)



4 Geometry malayalam.indd 185 20/01/2023 17:48:27

കൂടാതെ, $\Delta ABC$ യിൽ C ഒരുസമകോൺ, $AB^2 = AC^2 + BC^2$ ... (3)



ചിത്രം. 4.48

(1), (2), ഇവ കൂട്ടിയാൽ $AQ^2 + BP^2 = AC^2 + QC^2 + BC^2 + CP^2$

$$4(AQ^2 + BP^2) = 4AC^2 + 4QC^2 + 4BC^2 + 4CP^2$$

$$= 4AC^2 + (2QC)^2 + 4BC^2 + (2CP)^2$$

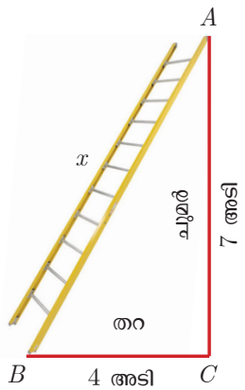
$$= 4AC^2 + BC^2 + 4BC^2 + AC^2$$

($P$, $Q$ എന്നിവ മധ്യ ബിന്ദുക്കൾ)

$$= 5(AC^2 + BC^2) \quad ((3) \text{ ഉപയോഗിച്ച്})$$

$$4(AQ^2 + BP^2) = 5AB^2 \qquad (\text{പൈതഗോറസ് സിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച്})$$

**ഉദാഹരണം 4.22 :** ഒരു ഏണിയുടെ പദവും ചുമരിന്റെ പാദവും തമ്മിലുള്ള അകലം 4 അടി ആകുന്നു. എങ്കിൽ 7 അടി ഉയരമുള്ള ചുമരിൽ ഏണിയെ എത്തിക്കണമെങ്കിൽ ഏണിയ്ക്ക് എത്ര നീളം ആവശ്യമാണ് ഉത്തരം രണ്ട് ദശാംശസ്ഥാനത്തിന് ശരിയായി എഴുതുക.



ചിത്രം. 4.49

**നിർദ്ധാരണം** $x$ എന്നത് ഏണിയുടെ നീളം. $BC = 4$ അടി, $AC = 7$ അടി.

എന്നിരിക്കട്ടെ, $AB^2 = AC^2 + BC^2$ പൈതഗോറസ് സിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച്

$$x^2 = 7^2 + 4^2 \ , \ x^2 = 49 + 16$$

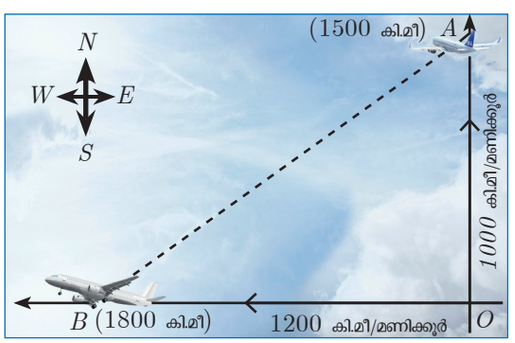
$x^2 = 65$ . അതുകൊണ്ട്, $x = \sqrt{65}$

$\sqrt{65}$ എന്നത് 8 നും 8.1നും ഇടയിൽ ഉൾപ്പെടും

$8^2 = 64 < 65 < 65.61 = 8.1^2$

അതുകൊണ്ട് ഏണി യുടെ നീളം ഏകദേശം 8.1 അടി ആകുന്നു.

**ഉദാഹരണം 4.23 :** ഒരു വിമാനം വിമാനത്താവളത്തിൽ നിന്ന് വടക്കോട്ട് 1000 കി.മീ/മണിക്കൂർ വേഗതയിൽ പറന്നുയർന്നു. അതേസമയം മറ്റൊരു വിമാനം പടിഞ്ഞാറോട്ട് മണിക്കൂറിൽ 1200 കി.മീ/മണിക്കൂർ വേഗതയിൽ പറന്നുയർന്നു. എങ്കിൽ 1½ മണിക്കൂറിനുശേഷം രണ്ട് വിമാനങ്ങളും തമ്മിലുള്ള അകലം എത്രയാണ് ?



ചിത്രം. 4.50

**നിർദ്ധാരണം** ആദ്യത്തെ വിമാനം $O$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് പറന്നുയർന്നു വടക്കോട്ട് $A$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ എത്തിച്ചേരുന്നു. (അകലം=വേഗത ×സമയം)

$$OA = \left(1000 \times \frac{3}{2}\right) \text{കി.മീ} = 1500 \text{ കി.മീ}$$

രണ്ടാമത്തെ വിമാനവും $O$ യിൽ നിന്ന് പറന്നുയർന്ന ലപ ടിഞ്ഞാറോട്ട് $B$ യിൽ എത്തിച്ചേരുന്നു. എന്നിരിക്കട്ടെ ,

$$OB = \left(1200 \times \frac{3}{2}\right) = 1800 \text{ കി.മീ}$$

കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടത് $BA$ ആകുന്നു.

സമകോണത്രികോണം $AOB$ യിൽ, $AB^2 = OA^2 + OB^2$



4 Geometry malayalam.indd 186 20/01/2023 17:48:30

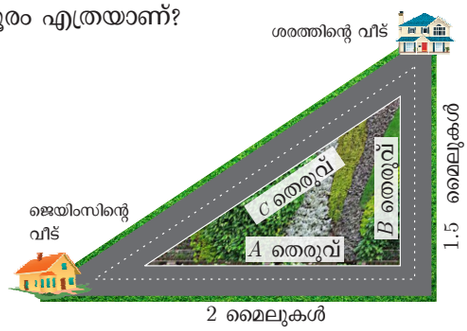
$$AB^2 = (1500)^2 + (1800)^2 = 100^2\ (15^2+18^2)$$
$$= 100^2 \times 549 = 100^2 \times 9 \times 61$$
$$\text{AB} = 100 \times 3 \times \sqrt{61} = 300\sqrt{61} \text{ കി.മീ.}$$

## പുരോഗതി പരിശോധന

1. ഒരു സമകോണത്രികോണത്തിന്റെ ഏറ്റവും നീളം കൂടിയ വശം_____ ആയിരിക്കും.
2. ഗണിതത്തിലെ ആദ്യത്തെ സിദ്ധാന്തം _____ ആകുന്നു.
3. ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഏറ്റവും നീളം കൂടിയ വശത്തിന്റെ വർഗ്ഗം എന്നത് മറ്റ രണ്ടു വശങ്ങളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുകയ്ക്ക് തുല്യമായാൽ അത്തരം ത്രികോണം ഒരു _____ ആയിരിക്കും.
4. ശരിയോ തെറ്റോ എന്ന് എഴുതുക.
   (i) പൈതഗോറസ് സിദ്ധാന്തം എല്ലാ ത്രികോണങ്ങൾക്കും ശരിയാകുന്നതാണോ?
   (ii) ഒരു സമകോണത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശം എന്നത് എല്ലായ്പ്പോഴും 4 ന്റെ ഗുണിതമായിരിക്കും.

## അഭ്യാസം 4.3

1. ഒരു വ്യക്തി 18 മീ കിഴക്കോട്ടും പിന്നീട് അയാൾ 24 മീ വടക്കോട്ടും സഞ്ചരിക്കുന്നു. ആരംഭ സ്ഥാനത്തിൽ നിന്നും ഇപ്പോൾ അദ്ദേഹം നിൽക്കുന്ന സ്ഥലം വരെയുള്ള ദൂരം എത്രയാണ്?
2. ഒരു വ്യക്തി ശരത്തിന്റെ വീട്ടിൽ നിന്നും ജെയിംസിന്റെ വീട്ടിലേയ്ക്ക് പോകുന്നതിന് രണ്ട് വഴികൾ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. ഒരു വഴി $C$ തെരുവിൽ കൂടിയും, മറ്റൊരു വഴി $B$ തെരുവിൽ കൂടിയും പിന്നീട് $A$ തെരുവിൽ കൂടിയുമാണ്. നേരായ വഴി $C$ യിൽ കൂടി സഞ്ചരിച്ചാൽ ദൂരം എത്ര കുറയും? .




3. $A$ യിൽ നിന്നും $B$ യിലേയ്ക്കുള്ള പോകുമ്പോൾ കുളത്തിലൂടെയുള്ള സഞ്ചാരം ഒഴിവാക്കുക. നിങ്ങൾ 41 മീ കിഴക്കും 33 മീ തെക്കും യാത്ര ചെയ്യുന്നു.ഏറ്റവും എളുപ്പവഴിയിൽ കുളത്തിലൂടെയുള്ള സഞ്ചാരം സാധിക്കുമെങ്കിൽ നിങ്ങൾക്ക് എത്ര മീറ്റർ ലാഭിക്കാം?
4. ഒരു ദീർഘചതുരം $WXYZ$, $XY+YZ$=17 സെ.മീ, $XZ+YW$=26 സെ.മീ ൽ ആയാൽ ദീർഘചതുരത്തിന്റെ നീളം,വീതി ഇവ കാണുക?



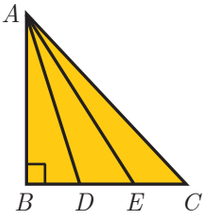

5. ഒരു സമകോണത്രികോണത്തിന്റെ കർണ്ണം എന്നത് അതിന്റെ ഏറ്റവും ചെറിയ വശത്തിന്റെ രണ്ട് മടങ്ങിനേക്കാൾ 6 മീ കൂടുതലാണ്. എന്നാൽ മൂന്നാമത്തെ വശംകർണ്ണത്തിൽ നിന്നും 2 മീ കുറവാണ്. ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ കാണുക.
6. 4 മീ ഉയരമുള്ള ഒരു ലംബമായ ചുമരിൽ 5 മീ നീളമുള്ള ഒരു ഏണി ചാരി വച്ചിരിക്കുന്നു. തറനിരപ്പിൽ നിന്നും ഏണി 1.6 മീ ചുമരിനടുത്തേക്ക് നീക്കിയാൽ തറനിരപ്പിൽ നിന്നും ഏണി ചാരിവയ്ക്കുന്ന ഉയരം കാണുക.



4 Geometry malayalam.indd 187 20/01/2023 17:48:31

7. $\Delta PQR$ ൽ, $QR$ ൽനിന്നുള്ള ലംബമാണ് $PS$ ഇത് $QR$ നെ $S$ ൽ ഛേദിക്കുന്നു $QS = 3\ SR$ എങ്കിൽ $2PQ^2 = 2PR^2 + QR^2$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

8. ഒരു സമകോണത്രികോണം $ABC$ യിൽ $B$ ഒരു സമകോൺ $BC$ യെ $3$ ഭാഗങ്ങളായി വിഭജിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ $D, E$ എന്നിവയാണ്. എങ്കിൽ $8AE^2 = 3AC^2 + 5AD^2$ എന്ന് തെളിയിക്കുക




## 4.5 വൃത്തങ്ങളും സ്പർശരേഖകളും

നമ്മുടെ നിത്യ ജീവിതത്തിൽ, നാം കാണാറുള്ളതാണ് ഒരു തലത്തിലുള്ള രണ്ട് രേഖകൾ ഒരു ബിന്ദുവിൽ ഛേദിക്കുന്നതും അവ പരസ്പരം ഛേദിക്കാത്തതും. ഉദാഹരണമായി റെയിൽ പാളത്തിലുള്ള രണ്ട് സമാന്തരരേഖകൾ പരസ്പരം ഛേദിക്കുന്നില്ല. എന്നാൽ ജനാലയിലുള്ള ഗ്രിൽസ് പരസ്പരം ഛേദിക്കുന്നു.

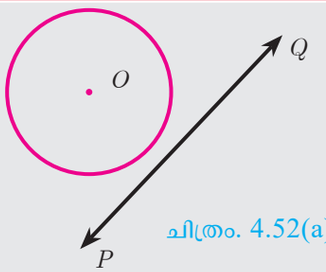
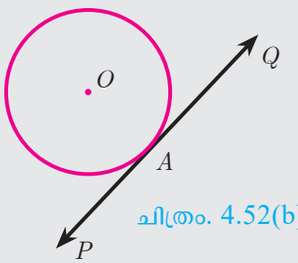
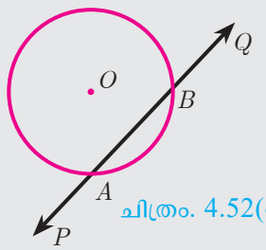


ചിത്രം. 4.51

സമാനമായി ഒരു തലത്തിൽ ഒരു വക്രരേഖയും, ഒരു രേഖയും തന്നിരുന്നാൽ എന്താണ് സംഭവിക്കുന്നത്? വക്രം ഒരു പാരബോളയായോ, വൃത്തമായോ ഒരു സാധാരണ വളയമായോ മാറാം.

അതുപോലെ ഒരു വൃത്തവും, ഒരു രേഖയും തമ്മിൽ ഛേദിക്കുമ്പോൾ എന്താണ് സംഭവിക്കുന്നതെന്ന് നിങ്ങൾക്കറിയാമോ?

**താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ചിത്രങ്ങൾ നോക്കിയാൽ മൂന്നു സാധ്യതകളാണ് കാണുന്നത്**

| ചിത്രം 1 | ചിത്രം 2 | ചിത്രം 3 |
|---|---|---|
|   ചിത്രം. 4.52(a) |   ചിത്രം. 4.52(b) |   ചിത്രം. 4.52(c) |
| (i) $PQ$ എന്ന നേർരേഖ വൃത്തത്തെ സ്പർശിക്കുന്നില്ല. | (i) നേർരേഖ $PQ$ വൃത്തത്തെ $A$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ സ്പർശിക്കുന്നു. | (i) നേർരേഖ $PQ$ വൃത്തത്തെ $A, B$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഛേദിക്കുന്നു. |
| (ii) നേർരേഖയ്ക്കും വൃത്തത്തിനും ഇടയിൽ ഒരു പൊതുവായ ബിന്ദു ഇല്ല. | (ii) $PQ$ എന്നത് $A$ യിലൂടെയുള്ള വൃത്തത്തിലെ സ്പർശരേഖ ആകുന്നു. | (ii) രേഖ $PQ$ എന്നത് വൃത്തത്തിലെ ഛേദ രേഖ ആകുന്നു. |
| (iii) രേഖയും, വൃത്തവും തമ്മിൽ ഛേദിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെ എണ്ണം $O$ ആകുന്നു. | (iii) രേഖയും, വൃത്തവും തമ്മിൽ ഛേദിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ എണ്ണം ഒന്ന് ആകുന്നു. | (iii) രേഖയും വൃത്തവും തമ്മിൽ ഛേദിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെ എണ്ണം രണ്ട് ആകുന്നു. |

**കുറിപ്പ്**

- വൃത്തത്തിനുള്ളിൽ $AB$ എന്ന രേഖാഖണ്ഡം (ചിത്രം 4.52(c)) വൃത്തത്തിന്റെ ഞാൺ ആകുന്നു..

**നിങ്ങൾക്കറിയാമോ?**

"tangent" എന്ന പദം "tangere" എന്ന ഗ്രീക്ക് പദത്തിൽ നിന്നും രൂപം കൊണ്ടതാണ്. "tangere" എന്നാൽ സ്പർശിക്കുക എന്നാണർത്ഥം ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞൻ Thomas Fineko (1583) ആണ് അവതരിപ്പിച്ചത്.



4 Geometry malayalam.indd 188 20/01/2023 17:48:33

**നിർവ്വചനം**

ഒരു രേഖ വൃത്തത്തിന്റെ ഒരേ ഒരു ബിന്ദുവിൽ സ്പർശിച്ചാൽ ആ രേഖയെ വൃത്തത്തിന്റെ സ്പർശരേഖ എന്നു പറയുന്നു.

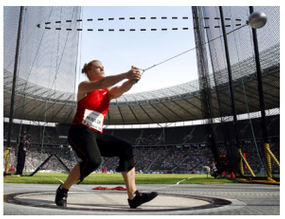
## യഥാർത്ഥ ജീവിതത്തിൽ കാണുന്ന വൃത്തത്തിന്റെ സ്പർശരേഖയ്ക്കുള്ള ഉദാഹരണങ്ങൾ

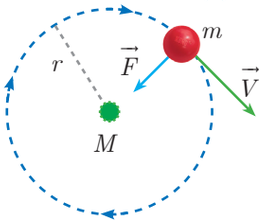


ചിത്രം. 4.53(a)

(i) ഒരു സൈക്കിൾ റോഡിലൂടെ നീങ്ങുമ്പോൾ ചക്രങ്ങൾ കറങ്ങുന്ന ഓരോ ബിന്ദുവിനും ആ റോഡ് സ്പർശ രേഖയാണ്.

(ii) ഒരു ചരടിന്റെ ഒരറ്റത്ത് ഒരു കല്ല് കെട്ടി കറക്കിയാൽ ആ കല്ല് ഒരു വൃത്തത്തെ ചിത്രീകരിക്കുന്നു. ചലനം പെട്ടെന്ന് നിറുത്തിയാൽ ആ കല്ല് വൃത്താകൃതിയിലുള്ള ചലനത്തിന് സ്പർശരേഖ ദിശയിലാണ്.

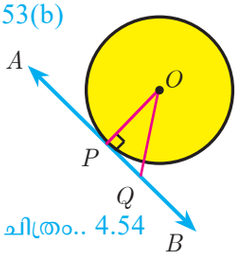





ചിത്രം. 4.53(b)

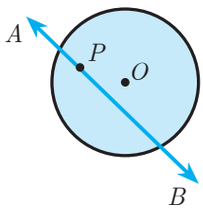
## വൃത്തങ്ങൾക്കും സ്പർശരേഖകൾക്കും ഉള്ള ചില ഫലങ്ങൾ

1. വൃത്തത്തിന്റെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവിലൂടെ ഉള്ള സ്പർശരേഖയും ആ ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള വ്യാസാർദ്ധവും പരസ്പരം ലംബമാണ്.



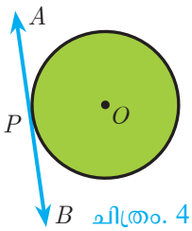

ചിത്രം.. 4.54

2. (a) വൃത്തത്തിനകത്തുള്ള ബിന്ദുവിലൂടെ സ്പർശരേഖ വരയ്ക്കാൻ സാധ്യമല്ല.



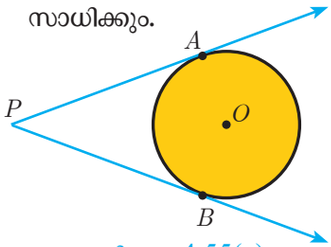

ചിത്രം. 4.55(a)

(b) വൃത്തത്തലൻമേലുള്ള ഏതെങ്കിലും ബിന്ദുവിലൂടെ ഒരേ ഒരു സ്പർശരേഖ വരയ്ക്കാൻ സാധിക്കും.



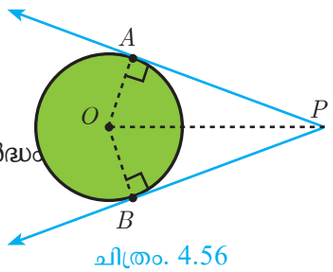

ചിത്രം. 4.55(b)

(c) വൃത്തത്തിന് വെളിയിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് രണ്ട് സ്പർശരേഖകൾ വരയ്ക്കാൻ സാധിക്കും.




ചിത്രം. 4.55(c)

3. വൃത്തത്തിന് പുറത്തുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്നുള്ള സ്പർശരേഖകളുടെ നീളം തുല്യമാണ്.,



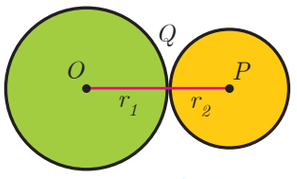

ചിത്രം. 4.56

**തെളിവ് :** 1. $OA \perp PA, OB \perp PB$ . കൂടാതെ $OA = OB =$ വ്യാസാർദ്ധം

$OP$ പൊതുവശം. $\angle AOP = \angle BOP$

അതിനാൽ, $\Delta OAP \cong \Delta OBP$ . അതുകൊണ്ട് $PA = PB$

4. രണ്ട് വൃത്തങ്ങൾ ബാഹ്യമായി സ്പർശിച്ചാൽ അവയുടെ കേന്ദ്രങ്ങൾക്കുള്ള അകലം വ്യാസാർദ്ധങ്ങളുടെ തുകയ്ക്ക് തുല്യമാണ്. $OP = r_1 + r_2$




ചിത്രം. 4.57

**തെളിവ് :** രണ്ട് വൃത്തങ്ങളുടെ കേന്ദ്രങ്ങൾ $O$ , $P$ എന്നിരിക്കട്ടെ വൃത്തങ്ങൾ $Q$ ൽ സ്പർശിക്കുന്നു.

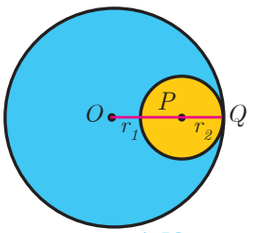
$OQ = r_1$ കൂടാതെ $PQ = r_2$ മാത്രമല്ല $r_1 > r_2$ .



4 Geometry malayalam.indd 189 20/01/2023 17:48:34

കേന്ദ്രങ്ങൾക്കുള്ള അകലം $OP = d$ . ചിത്രം. 4.57 ൽ നിന്നും വൃത്തങ്ങൾ ബാഹ്യമായി സ്പർശിക്കുന്നു എന്ന് വ്യക്തമാണ്. $OP = d = OQ + PQ = r_1 + r_2$ .

5. രണ്ട് വൃത്തങ്ങൾ ആന്തരികമായി സ്പർശിച്ചാൽ അവയുടെ കേന്ദ്രങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള അകലം വ്യാസാർദ്ധങ്ങളുടെ വ്യത്യാസമാണ്. അതായത് $OP = r_1 - r_2$ .



ചിത്രം. 4.58

**തെളിവ് :** $O, P$ എന്നീ കേന്ദ്രങ്ങളുള്ള വൃത്തങ്ങൾ $Q$ ൽ സ്പർശിക്കുന്നു..

കൂടാതെ $OQ = r_1$, $PQ = r_2$ നമുക്ക് $r_1 > r_2$ .

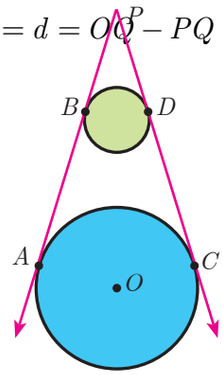
അവയുടെ കേന്ദ്രങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള ദൂരം $OP = d$ . ചിത്രം 4.58 ൽ നിന്നും വൃത്തങ്ങൾ ആന്തരമായി സ്പർശിക്കുന്നു എന്ന് വ്യക്തമാണ്. $OP = d = OQ - PQ$

$$OP = r_1 - r_2 .$$

6. വൃത്തത്തിലേയ്ക്ക് വരയ്ക്കുന്ന രണ്ട് സ്പർശരേഖകളും തുല്യ നീളമുള്ളവയാണ്. അതായത് $AB = CD$.

**തെളിവ് :**

$P$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്നും വൃത്തത്തിലേയ്ക്ക് വരയ്ക്കുന്ന രണ്ട് സ്പർശരേഖകളും തുല്യനീളമുള്ളവയാണ.



ചിത്രം. 4.59

അതുകൊണ്ട്, $PA = PC$ കൂടാതെ, $PB = PD$ .

$$PA - PB = PC - PD$$

$$AB = CD$$



**ചിന്തിക്കുക**

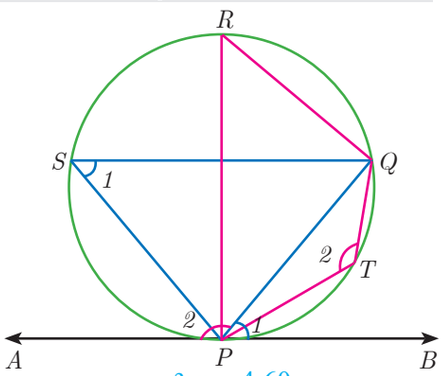
1. വൃത്തത്തിൽ പരസ്പരം സമാന്തരമായ രണ്ട് സ്പർശരേഖകൾ വരയ്ക്കാൻ സാധിക്കുമോ?
2. പരസ്പരം ലംബമായ രണ്ട് സ്പർശരേഖകൾ വരയ്ക്കാൻ സാധിക്കുമോ?

### ഏകാന്തരവൃത്തഖണ്ഡം

ചിത്രത്തിൽ, PQ എന്ന ചാപം വൃത്തത്തെ രണ്ട് ഖണ്ഡങ്ങളാക്കുന്നു. P ൽ സ്പർശിക്കത്തക്കവിധം AB എന്ന സ്പർശരേഖ വരയ്ക്കുന്നു.

$\angle QPB$ $(\angle 1)$ യുടെ ഏകാന്തര വൃത്തഖണ്ഡത്തിലെ കോൺ ആണ് $\angle QSP$ $(\angle 1)$ ആകുന്നു.

ഇതുപോലെ $\angle QPA$ $(\angle 2)$ യുടെ ഏകാന്തര വൃത്തഖണ്ഡത്തിലെ കോൺ $\angle PTQ$ $(\angle 2)$ ആകുന്നു.

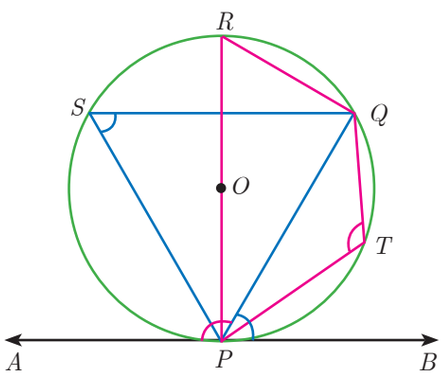


ചിത്രം. 4.60

### സിദ്ധാന്തം 6 : ഏകാന്തരവൃത്തഖണ്ഡ സിദ്ധാന്തം

**പ്രസ്താവന**

ഒരു നേർരേഖ ഒരു വൃത്തത്തെ സ്പർശിക്കുമ്പോൾ, സ്പർശബിന്ദുവിലൂടെ വരയ്ക്കുന്ന ഞാണിനും സ്പർശരേഖയ്ക്കും ഇടയിലുള്ള കോൺ അതിനെതിരെയുള്ള വൃത്തഖണ്ഡത്തിലെ കോണിന് തുല്യമായിരിക്കും.



ചിത്രം. 4.61

**തെളിവ്:**

സങ്കല്പം: $O$ കേന്ദ്രമായ വൃത്തത്തിൽ, $AB$ എന്ന സ്പർശരേഖ വൃത്തത്തെ $P$ ൽ ഛേദിക്കുന്നു. $PQ$ ഒരു ഞാൺ വൃത്തത്തിൽ $PQ$ ന് ഇരുവശങ്ങളിലുമുള്ള ബിന്ദുക്കളാണ് $S$ ഉം $T$ ഉം.



4 Geometry malayalam.indd 190 20/01/2023 17:48:37

**അനുമാനം** : (i) $\angle QPB = \angle PSQ$ കൂടാതെ (ii) $\angle QPA = \angle PTQ$

**നിർമ്മിതി** : വ്യാസം $POR$. വരയ്ക്കുക $QR$, $QS$ കൂടാതെ $PS$ വരയ്ക്കുക.

| നമ്പർ | പ്രസ്താവന | കാരണം |
|---|---|---|
| 1. | $\angle RPB = 90°$<br>Now, $\angle RPQ + \angle QPB = 90°$ ...(1) | വ്യാസം RP സ്പർശരേഖ AB യ്ക്ക് ലംബമാണ്. |
| 2. | In $\Delta RPQ$, $\angle PQR = 90°$ ...(2) | അർദ്ധവ്യാസത്തിലെ കോൺ 90° |
| 3. | $\angle QRP + \angle RPQ = 90°$ ...(3) | ഒരു സമകോണ ത്രികോണത്തിൽ രണ്ട് ന്യൂന കോണുകളുടെ തുക 90°. |
| 4. | $\angle RPQ + \angle QPB = \angle QRP + \angle RPQ$<br>$\angle QPB = \angle QRP$ ...(4) | (1), (3) ഇവയിൽ നിന്ന്,. |
| 5. | $\angle QRP = \angle PSQ$ ...(5) | ഒരേ വൃത്ത ഖണ്ഡത്തിലെ കോണുകൾ തുല്യം. |
| 6. | $\angle QPB = \angle PSQ$ ...(6) | (4) , (5)ൽ നിന്നും (i) തെളിയിച്ചു. |
| 7. | $\angle QPB + \angle QPA = 180°$ ...(7) | രേഖാകോൺ. |
| 8. | $\angle PSQ + \angle PTQ = 180°$ ...(8) | ഒരു ചക്രിയ ചതുർഭുജത്തിന്റെ എതിർകോണുകളുടെ തുക 180°. |
| 9. | $\angle QPB + \angle QPA = \angle PSQ + \angle PTQ$ | (7) , (8) ൽ നിന്ന്. |
| 10. | $\angle QPB + \angle QPA = \angle QPB + \angle PTQ$ | $\angle QPB = \angle PSQ$ (6) ൽ നിന്ന് |
| 11. | $\angle QPA = \angle PTQ$ | (ii)തെളിയിച്ചു.<br>സിദ്ധാന്തം തെളിയിച്ചു |

**ഉദാഹരണം 4.24** 3 സെ.മീ വ്യാസാർദ്ധമുള്ള വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിലിരുന്ന് 5 സെ.മീ അകലെയുള്ള ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള സ്പർശരേഖയുടെ നീളം കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം** തന്നിട്ടുള്ളത് OP = 5 സെ.മീ, ആരം $r$ = 3 സെ.മീ

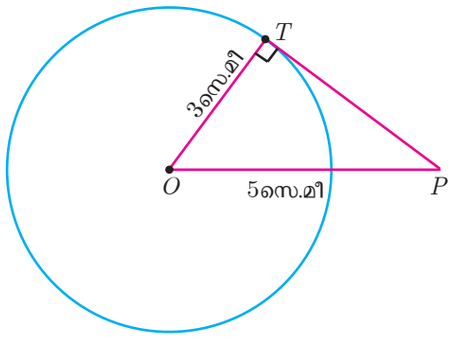
സ്പർശരേഖ $PT$ യുടെ നീളം കണ്ടുപിടിക്കുക.

സമകോണ $\Delta OTP$,

$OP^2 = OT^2 + PT^2$ (പൈതാഗോറസ് സിദ്ധാന്തം)

$5^2 = 3^2 + PT^2$ , $PT^2 = 25 - 9 = 16$

സ്പർശരേഖയുടെ നീളം $PT = 4$ സെ.മീ



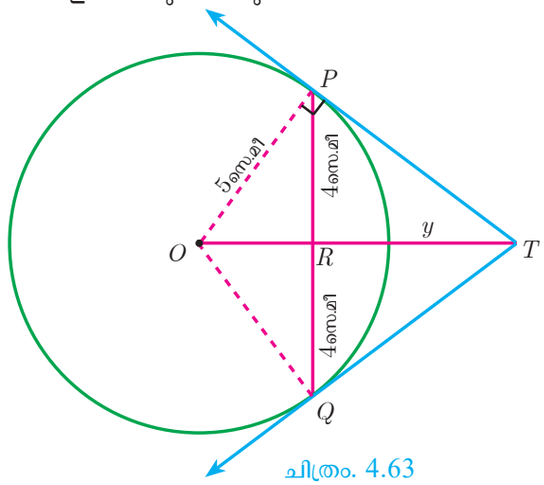
ചിത്രം. 4.62



4 Geometry malayalam.indd 191 20/01/2023 17:48:40

**ഉദാഹരണം 4.25** 5 സെ.മീ ആരമുള്ള വൃത്തത്തിലെ ഞാൺ PQ ന്റെ നീളം 8 സെ.മീ. PQ വിലൂടെയുള്ള സ്പർശരേഖകൾ T സംഗമിക്കുന്നു. സ്പർശരേഖ T P ൽ യുടെ നീളം കണ്ടുപിടിക്കുക.

**നിർദ്ധാരണം** $TR = y$ , PQ ന്റെ ലംബദ്വിഭാജകം OT. അതുകൊണ്ട് $PR = QR = 4$ സെ.മീ



ചിത്രം. 4.63

$\Delta ORP,\ OP^2 = OR^2 + PR^2$

$OR^2 = OP^2 - PR^2$

$OR^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow OR = 3$ സെ.മീ

$OT = OR + RT = 3 + y$ ... (1)

$\Delta PRT,\ TP^2 = TR^2 + PR^2$ ... (2)

$\Delta OPT,\ OT^2 = TP^2 + OP^2$

$OT^2 = (TR^2 + PR^2) + OP^2$ ( (2) ൽ നിന്ന് $TP^2$ നെ പ്രതിപാദിച്ചാൽ)

$(3 + y)^2 = y^2 + 4^2 + 5^2$ ( (1) ൽ നിന്ന് $OT$ യെ പ്രതിപാദിച്ചാൽ)

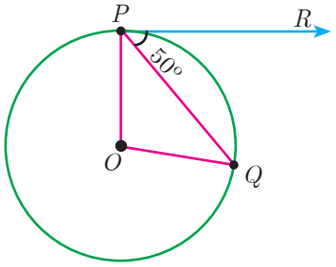
$9 + 6y + y^2 = y^2 + 16 + 25$

$6y = 41 - 9$ അതുകൊണ്ട് $y = \frac{16}{3}$

(2) ൽ നിന്ന്, $TP^2 = TR^2 + PR^2$

$TP^2 = \left(\frac{16}{3}\right)^2 + 4^2 = \frac{256}{9} + 16 = \frac{400}{9}$ so, $TP = \frac{20}{3}$ സെ.മീ

**ഉദാഹരണം 4.26** ചിത്രം 4.64 ൽ വൃത്തകേന്ദ്രം $O$. $P$ യിലൂടെയുള്ള സ്പർശരേഖ $PR$ നും ഞാൺ $PQ$ നും ഇടയിലുള്ള കോൺ $50°$ എങ്കിൽ. $\angle POQ$ ന്റെ അളവ് കാണുക.



ചിത്രം. 4.64

**നിർദ്ധാരണം** $\angle OPQ = 90° - 50° = 40°$ (ആരത്തിനും സ്പർശരേഖയ്ക്കും ഇടയിലുള്ള കോൺ $90°$ )

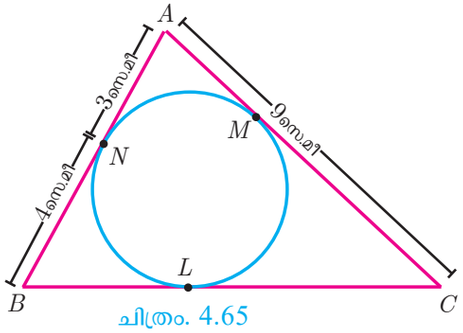
$OP = OQ$ (വൃത്തത്തിലെ ആരങ്ങൾ തുല്യം)

$\angle OPQ = \angle OQP = 40°$ ( $\triangle OPQ$ ദ്വിസമഭുജത്രികോണം)

$\angle POQ = 180° - \angle OPQ - \angle OQP$

$\angle POQ = 180° - 40° - 40° = 100°$

**ഉദാഹരണം 4.27** ചിത്രം.4.65 ൽ, $\Delta ABC$ ൽ അന്തർവൃത്തം ലേഖനം ചെയ്തിട്ടുണ്ട് $BC$ യുടെ നീളം കാണുക.



ചിത്രം. 4.65

**നിർദ്ധാരണം** $AN = AM = 3$ സെ.മീ (വൃത്തത്തിന് പുറത്തുള്ള ഒരേ ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള സ്പർശരേഖകൾ തുല്യം)

$BN = BL = 4$ സെ.മീ

$CL = CM = AC - AM = 9 - 3 = 6$ സെ.മീ

$BC = BL + CL = 4 + 6 = 10$ സെ.മീ



4 Geometry malayalam.indd 192 20/01/2023 17:48:45

**ഉദാഹരണം 4.28** രണ്ട് ഏകകേന്ദ്ര വൃത്തങ്ങളുടെ വ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ 4 സെ.മീ, 5 സെ.മീ. എങ്കിൽ ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ഞാൺ മറ്റൊരു വൃത്തത്തിന്റെ സ്പർശരേഖയാണ് അതിന്റെ നീളം കണ്ടുപിടിക്കുക.

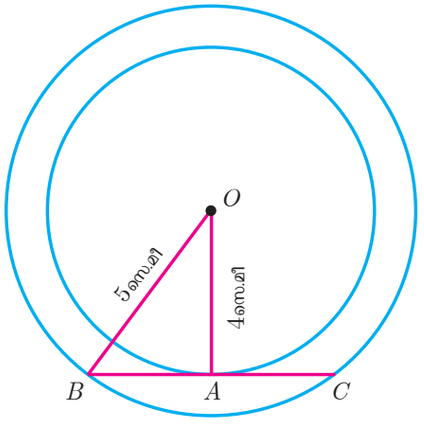
**നിർദ്ധാരണം** $OA = 4$ സെ.മീ, OB $= 5$ സെ.മീ; കൂടാതെ $OA \perp BC$ .

$$OB^2 = OA^2 + AB^2$$

$$5^2 = 4^2 + AB^2 \text{ gives } AB^2 = 9$$

അതുകൊണ്ട് $AB = 3$ സെ.മീ

$BC = 2$AB അതിനാൽ $BC = 2 \times 3 = 6$ സെ.മീ



ചിത്രം. 4.66

## 4.5.1 നിർമ്മിതി

**ഒരു വൃത്തത്തിന് സ്പർശരേഖകൾ നിർമ്മിക്കൽ**

ഇനി നമുക്ക് വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്ന് നോക്കാം

(i) കേന്ദ്രം ഉപയോഗിച്ചുള്ള സ്പർശരേഖ

(ii) ഏകാന്തര വൃത്തഖണ്ഡ സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ചുള്ള സ്പർശരേഖ

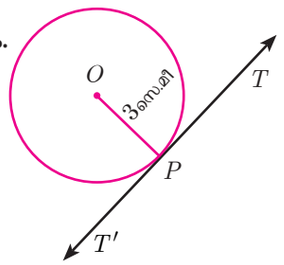
(iii) വൃത്തത്തിന് പുത്തുള്ള ബിന്ദുവിൽ നിന്നും രു ജോഡി സ്പർശരേഖകൾ

### വൃത്തത്തിന് സ്പർശരേഖ നിർമ്മിക്കൽ (കേന്ദ്രം ഉപയോഗിച്ച്)

**ഉദാഹരണം 4.29** 3 സെ.മീ വ്യാസാർദ്ധമുള്ള ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. വൃത്തത്തിൻമേൽ $P$ എന്ന ബിന്ദു കുറിച്ച് $P$ യിലൂടെ സ്പർശരേഖ വരയ്ക്കുക.

**നിർദ്ധാരണം** തന്നിട്ടുള്ളത്

വൃത്തത്തിന്റെ ആരം $r = 3$ സെ.മീ



ഏകദേശ ചിത്രം

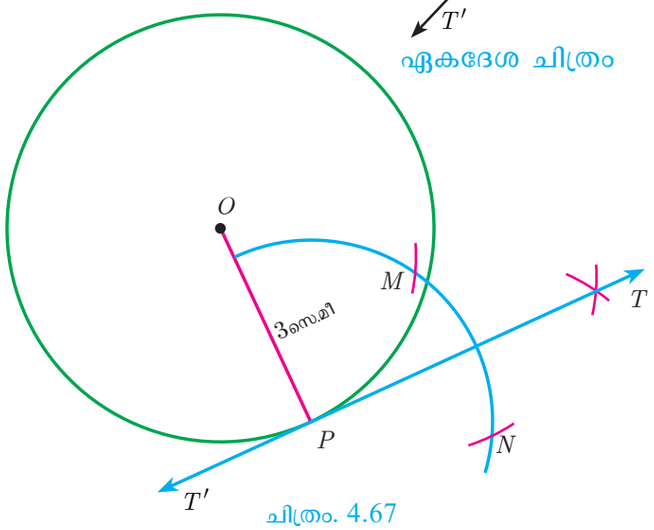
**നിർമ്മിതി**

വഴി 1: $O$ കേന്ദ്രമാക്കി 3 സെ.മീ ആരമുള്ള വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

വഴി 2: വൃത്തത്തിൻമേലുള്ള ഒരു ബിന്ദു $P$ $OP$ യോജിപ്പിക്കുക.

വഴി 3: $OP$ യ്ക്ക് ലംബമായി $P$ യിലൂടെ കടന്നു ചെല്ലുന്ന ലംബരേഖ $TT'$ വരയ്ക്കുക.

വഴി 4: $TT'$ ആണ് ആവശ്യമായ സ്പർശരേഖ.



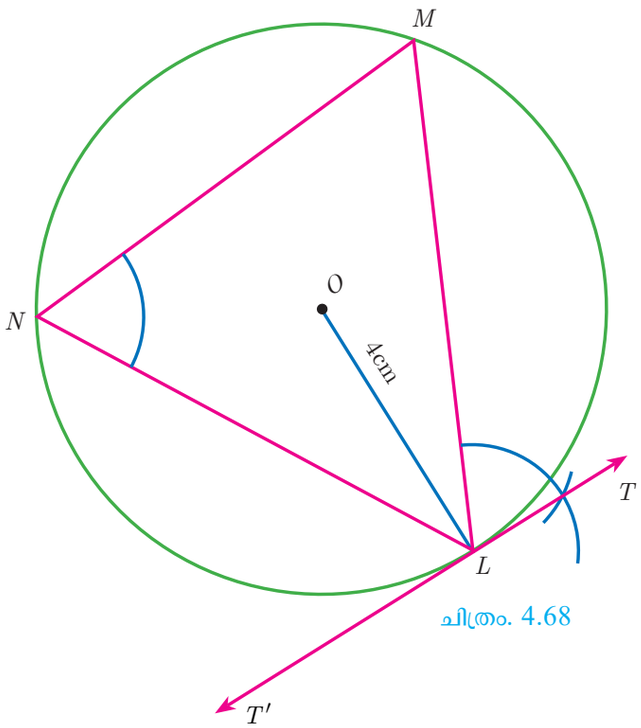
ചിത്രം. 4.67

### വൃത്തത്തിന് സ്പർശരേഖ നിർമ്മിക്കൽ( ഏകാന്തര വൃത്തഖണ്ഡ സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച്)

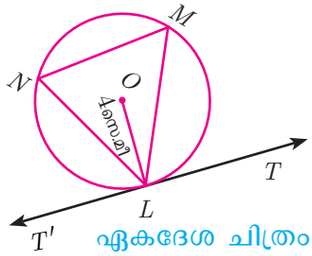


4 Geometry malayalam.indd 193 20/01/2023 17:48:46

**ഉദാഹരണം 4.30** 4 സെ.മീ വ്യാസാർദ്ധമുള്ള ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. ഏകാന്തര വൃത്തഖണ്ഡ സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച് വൃത്തത്തിൻമേലുള്ള $L$ എന്ന ബിന്ദു വഴി വൃത്തത്തിന് സ്പർശരേഖ വരയ്ക്കുക.



ചിത്രം. 4.68



ഏകദേശ ചിത്രം

**നിർമ്മിതി**

വഴി 1 : $O$ കേന്ദ്രമാക്കി, 4 സെ.മീ വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

വഴി 2 : വൃത്തത്തിൻമേൽ $L$ എന്ന ബിന്ദുകുറിച്ച് വഴിയായി ഞാൺ $LM$ വരയ്ക്കുക.

വഴി 3 : $L, N$ എന്നിവയിൽ നിന്ന് വ്യത്യസ്തമായി $M$ എന്ന ബിന്ദു കുറിക്കുക. $L$, $M$, $N$ എന്നിവ എതിർ ഘടികാര ദിശയിലാണ്.

വഴി 4 : $L$ വഴിയായുള്ള സ്പർശരേഖ $TT'$ എങ്ങനെയെന്നാൽ

$\angle TLM = \angle MNL$.

വഴി 5 : $TT'$ ആണ് ആവശ്യമായ സ്പർശരേഖ.

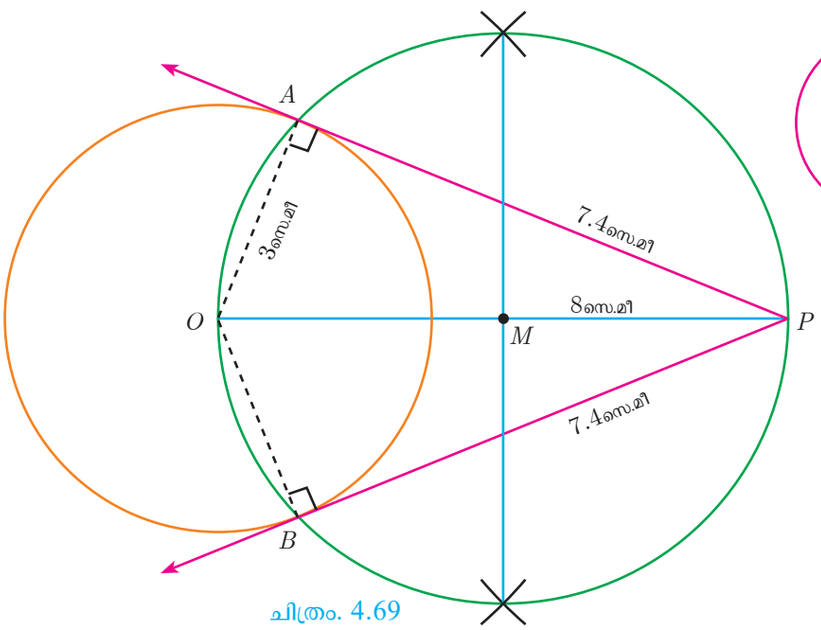
**നിർദ്ധാരണം**

തന്നിട്ടുള്ളത് വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം $=4$ സെ.മീ

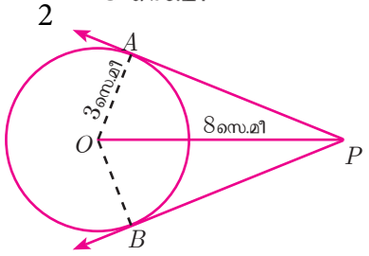
**വൃത്തത്തിന് പുറത്തുള്ള ബിന്ദു $P$ യിൽ നിന്നും ഒരു ജോഡി സ്പർശരേഖകൾ നിർമ്മിക്കൽ.**

**ഉദാഹരണം 4. 31** 6 സെ.മീ വ്യാസത്തിൽ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന് 8 സെ.മീ അകലെ $P$ എന്ന ബിന്ദു കുറിയ്ക്കുക. വൃത്തത്തിന് $PA$, $PB$ എന്നീ സ്പർശരേഖകൾ വരച്ച് നീളങ്ങൾ അളക്കുക.

**നിർദ്ധാരണം** തന്നിട്ടുള്ളത്, വ്യാസം $(d) = 6$ സെ.മീ, വ്യാസാർദ്ധം $(r) = \frac{6}{2} = 3$ സെ.മീ



ചിത്രം. 4.69



ഏകദേശ ചിത്രം



4 Geometry malayalam.indd 194 20/01/2023 17:48:48

**നിർമ്മിതി**

വഴി 1: $O$ കേന്ദ്രമാക്കി $3$ സെ.മീ ആരമുള്ള വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

വഴി 2: $8$ സെ.മീ നീളമുള്ള നേർരേഖ $OP$ വരയ്ക്കുക.

വഴി 3: $OP$ യുടെ ലംബദ്വിഭാജകം വരയ്ക്കുക. അത് $OP$ യെ $M$ ൽ ഛേദിക്കുന്നു..

വഴി 4: $M$ കേന്ദ്രമാക്കി, $MO$ ആരത്തിൽ വൃത്തം വരയ്ക്കുക. അത് മുമ്പേയുള്ള വൃത്തത്തെ ൽ $A, B$ ഛേദിക്കുന്നു.

വഴി 5: $AP$, $BP$ യോജിപ്പിക്കുക. ഇവയാണ് ആവശ്യപ്പെട്ട സ്പർശരേഖകൾ സ്പർശരേഖകളുടെ നീളം $PA = PB = 7.4$ സെ.മീ.

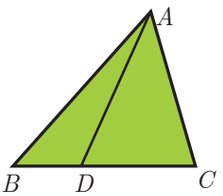
**തെളിയിക്കൽ :** സമകോണത്രികോണം $OAP$ , $PA^2 = OP^2 - OA^2 = 8^2 - 3^2 = 64 - 9 = 55$

$PA = \sqrt{55} = 7.4$ സെ.മീ. (ഏകദേശമായി) .

## 4.6 സംഗമ സിദ്ധാന്തം

**നിർവ്വചനം**

ഒരു ത്രികോണത്തിലെ ഒരു ശീർഷത്തിൽ നിന്ന് എതിർ വശത്തേയ്ക്കുള്ള രേഖാഖണ്ഡമാണ് സിവിയൻ. ചിത്രത്തിൽ A യിൽ നിന്നുള്ള സിവിയൻ AD.




**പ്രത്യേക സീവിയൻസ്**

(i) മധ്യമം ഒരു സിവിയനാണ് അത് എതിർവശത്തെ തുല്യ നീളമുള്ള രണ്ട് ഭാഗങ്ങളായി വിഭജിക്കുന്നു.

(ii) ഉന്നതി ഒരു സിവിയനാണ് അത് എതിർവശത്തിന് ലംബമാണ്.

(iii) കോണദ്വിഭാജകം ഒരു സിവിയനാണ് അത് സമാന കോണുകളെ വിഭജിക്കുന്നു.

നിങ്ങൾക്കറിയാമോ?

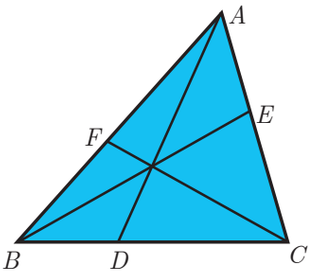
സിവിയൻ എന്ന പദം ഇറ്റലി ഇഞ്ചിനിയർ ജിയോവന്നി സിവയുടെ പേരിൽ നിന്നും ഉത്ഭവിച്ചതാണ്. അയാൾ സിവിയനെ കുറിച്ച് പ്രസിദ്ധമായ സിദ്ധാന്തങ്ങൾ തെളിയിച്ചിട്ടുണ്ട്.

### സീവയുടെ സിദ്ധാന്തം (തെളിവില്ല)

**പ്രസ്താവന**

ABC ഒരു ത്രികോണം $D, E, F$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യഥാക്രമം $BC$, $CA$, $AB$ എന്നീ നേർരേഖകളിൽ ഉള്ളതാണ്. എങ്കിൽ സിവിയൻസ് $AD$, $BE$, $CF$ എന്നിവ പരസ്പരം സംഗമിക്കുന്നുവെങ്കിൽ $\frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} \times \frac{AF}{FB} = 1$ ആയിരിക്കണം, ഇതുപോലെ തിരിച്ചും.

1 ന്റെ വിപരീതം 1ആയതുകൊണ്ട് ഇത് ഓരോ അംശബന്ധത്തിന്റെയും വ്യുൽക്രമത്തിനും ശരിയാകും.



ചിത്രം. 4.70

നിങ്ങൾക്കറിയാമോ?

**ജിയോവന്നി സീവ (Dec 7, 1647 – June 15, 1734)**

1686 ൽ സീവ മാങ്ങുവ സർവ്വകലാശാലയിൽ ഗണിതപ്രൊഫസറായി സ്ഥാനമേറ്റു. ബാക്കി കാലം അവിടെ ജോലി ചെയ്തു. 1678 ൽ ത്രികോണത്തിന്റെ സിന്തറ്റിക് ജ്യാമിതി ഒരു പ്രധാന സിദ്ധാന്തം പ്രസിദ്ധീകരിച്ചു. അതിനെ സിവയുടെ സിദ്ധാന്തം എന്ന് അറിയപ്പെട്ടു.

സിവ വീണ്ടും 1692 ൽ ഒപസ്കുല മാത്തമാറ്റിക്ക ആന്റ് ജിയോമെട്രിയ മോട്ടുസ് എന്ന യാത്രാ വിവരണം പ്രസിദ്ധീകരിച്ചു. അയാൾ ഈ ആശയങ്ങൾ മെക്കാനിക്സിലും ഹൈഡ്രോലിക്സിലും പ്രയോഗിച്ചു.

**കുറിപ്പ്**

- സിവിയൻസ്, ചിത്രത്തിലുള്ളതു പോലെ ത്രികോണത്തിനകത്ത് കാണപ്പെടേണ്ട ആവശ്യമില്ല.

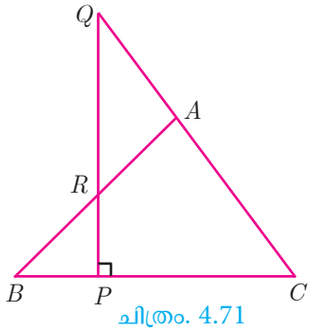


4 Geometry malayalam.indd 195 20/01/2023 17:48:49

## മെനലാസ് സിദ്ധാന്തം (തെളിവില്ല)

### പ്രസ്താവന

$\Delta ABC$ യിൽ BC, $CA$, $AB$ എന്നീ വശങ്ങളിലെ (അല്ലെങ്കിൽ അവ നീട്ടിയാൽ) ബിന്ദുക്കളാണ് യഥാക്രമം $P$, $Q$, $R$ എന്നിവ. ഇവ സമരേഖീയമാകണമെങ്കിൽ $\frac{BP}{PC}\times\frac{CQ}{QA}\times\frac{AR}{RB}=-1$ ആയിരിക്കണം. ഇവിടെ സൂത്രവാക്യത്തിലെ ഓരോ ഭാഗവും ദിശ അനുസരിച്ചായിരിക്കണം



ചിത്രം. 4.71

നിങ്ങൾക്കറിയാമോ?

**മെനലാസ്** മെനലാസ് ഒരു ഗ്രീക്ക് ശാസ്ത്രജ്ഞൻ ആണ്.അദ്ദേഹം ഒന്നാം നൂറ്റാണ്ടിൽ റോമാ സാമ്രാജ്യത്തിൽ അലക്സാണ്ട്രിയിലും റോമിലും ജീവിച്ചു. അയാളുടെ പ്രവർത്തനം മുഖ്യമായും ഗോളങ്ങളുടെ ജ്യാമിതിയെക്കുറിച്ചുള്ളതാണ്..

സ്ഫാരിക്ക എന്ന ഗ്രന്ഥത്തിൽ മെനലാസ് സിദ്ധാന്തത്തെ കുറിച്ച് ചർച്ച ചെയ്തിട്ടുണ്ട്. പിന്നീട് ടോലമി അദ്ദേഹത്തിന്റെ ഗ്രന്ഥം അൽമജെസ്റ്റിലും ഇതിനെ കുറിച്ച് പരാമർശിച്ചിട്ടുണ്ട്.

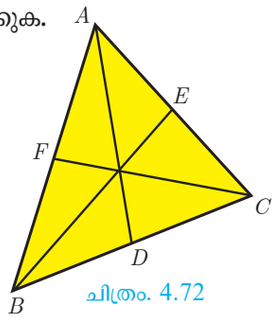
ഗോളിയ ത്രികോണങ്ങളിൽ നിന്നും ഗോളങ്ങൾ രൂപീകരിക്കുന്നു എന്ന് മെനലാസ് സിദ്ധാന്തം തെളിയിച്ചു.

**കുറിപ്പ്**

- മെനലാസ് സിദ്ധാന്തത്തെ $BP\times CQ\times AR=-PC\times QA\times RB$. എന്നും എഴുതാം
- BP യ്ക്ക് പകരം $PB.CQ$ ന് പകരം $QC$, $AR$ ന് പകരം $RA$ എന്നിങ്ങനെ ആറ് രേഖാഖണ്ഡങ്ങൾ $BP$, $PC$, $CQ$, $QA$, $AR$, $RB$ എന്നിവയിൽ ഏതെങ്കിലും ഒന്ന് മാറ്റിയാൽ ഗുണന ഫലം 1 ആയിരിക്കും.

**ഉദാഹരണം 4. 32** ഒരു ത്രികോണത്തിൽ മധ്യമങ്ങൾ സംഗമിക്കുന്നു എന്ന് തെളിയിക്കുക.

**നിർദ്ധാരണം** മധ്യമങ്ങൾ ഓരോ ശീർഷത്തിൽ നിന്നും അതിനെതിരെയുള്ള വശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവിനെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡമാണ്.



ചിത്രം. 4.72

മധ്യമങ്ങൾ സിവിയൻസ് ആണ്. ഇവിടെ $D$, $E$, $F$ എന്നിവ യഥാക്രമം $BC$, $CA$,$AB$ എന്നിവയുടെ മധ്യബിന്ദുക്കളാണ്.

$D$ എന്നത് $BC$ യുടെ മധ്യബിന്ദു, അതുകൊണ്ട് $BD=DC$ അതിനാൽ

$$\frac{BD}{DC}=1 \qquad \ldots(1)$$

$E$ എന്നത് $CA$, യുടെ മധ്യബിന്ദു അതുകൊണ്ട് $CE=EA$ $\quad \frac{CE}{EA}=1 \ldots (2)$

$F$ എന്നത് $AB$ യുടെ മധ്യബിന്ദു, അതുകൊണ്ട് $AF=FB$ $\quad \frac{AF}{FB}=1 \qquad \ldots (3)$

(1), (2) , (3) ഗുണിച്ചാൽ,

$$\frac{BD}{DC}\times\frac{CE}{EA}\times\frac{AF}{FB}=1\times 1\times 1=1$$

അതിനാൽ സിവിയൻസ് സിദ്ധാന്തം തെളിയിക്കപ്പെട്ടു. തൃപ്തികരം അതുകൊണ്ട് മധ്യമങ്ങൾ ഒരു ബിന്ദുവിൽ സംഗമിക്കുന്നു എന്ന് മനസ്സിലാക്കാം.

നിങ്ങൾക്കറിയാമോ?

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മധ്യമങ്ങളുടെ സംഗമബിന്ദുവാണ് കേന്ദ്രകം.



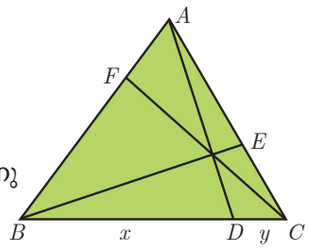
4 Geometry malayalam.indd 196 20/01/2023 17:48:50

**ഉദാഹരണം 4.33** $\Delta ABC$ ൽ $BC,\ CA,\ AB$ എന്നിവയിലെ ബിന്ദുക്കളാണ് യഥാക്രമം $D,\ E,\ F$ എന്നവ $AB,\ AC,\ BC$ എന്നിവയുടെ നീളങ്ങൾ യഥാക്രമം $13,\ 14,\ 15$ എന്ന് കരുതുക $\frac{AF}{FB}=\frac{2}{5}$ , $\frac{CE}{EA}=\frac{5}{8}$ എങ്കിൽ $BD$ യും $DC$ യും കണ്ടുപിടിക്കുക.

**നിർദ്ധാരണം** തന്നിട്ടുള്ളത് $AB=13$ , $AC=14$ യും $BC=15$ .

$BD=x,\ DC=y$

സിവയുടെ സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച്, $\frac{BD}{DC}\times\frac{CE}{EA}\times\frac{AF}{FB}=1$ ...(1)



ചിത്രം. 4.73

മൂല്യങ്ങൾ $\frac{AF}{FB}$ , $\frac{CE}{EA}$ എന്നിവയുടെ മൂല്യങ്ങൾ (1)ൽ പ്രതിസ്ഥാപിക്കുന്നു

$\frac{BD}{DC}\times\frac{5}{8}\times\frac{2}{5}=1$

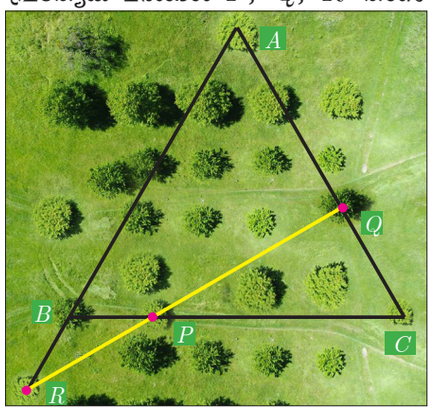
$\frac{x}{y}\times\frac{10}{40}=1$, $\frac{x}{y}\times\frac{1}{4}=1$. , $x=4y$ ...(2)

നമുക്ക് $BC=BD+DC=15$ so, $x+y=15$ ... (3)

(2) ൽ നിന്ന്, $x=4y$ (3) ൽ പ്രതിസ്ഥാപിക്കുന്നു $4y+y=15$ എങ്കിൽ $5y=15$ അതുകൊണ്ട് $y=3$

നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നത് $y=3$ (3) ൽ പ്രതിസ്ഥാപിക്കുന്നു, $x=12$ . അതുകൊണ്ട് $BD=12$ , $DC=3$.

**ഉദാഹരണം 4.34** ഒരു പൂന്തോട്ടത്തിൽ ധാരാളം മരങ്ങളുണ്ട്. മൂന്ന് പ്രത്യേക മരങ്ങൾ $P,\ Q,\ R$ താഴെ കാണുന്നപ്രകാരം സ്ഥാപിച്ചിരിക്കുന്നു $BP=2$ മീ, $CQ=3$ മീ, $RA=10$ മീ, $PC=6$ മീ, $QA=5$ മീ, $RB=2$ മീ ഇവിടെ $ABC$ എന്നത്രികോണത്തിൽ, $P$ കാണുന്നത് $BC$ യിലും $Q$ കാണുന്നത് $AC$ യിലും $R$ കാണുന്നത് $AB$ യിലുംഎങ്കിൽ മരങ്ങൾ $P,Q,R$ ഒരേ നേർരേഖയിലാണ് എന്നത് പരിശോധിക്കുക.



ചിത്രം. 4.74

**നിർദ്ധാരണം** മെനലാസ് സിദ്ധാന്തം അനുസരിച്ച്, മരങ്ങൾ $P,\ Q,\ R$ എന്നിവ രേഖീയമാണെങ്കിൽ

$\frac{BP}{PC}\times\frac{CQ}{QA}\times\frac{RA}{RB}=1$ ...(1)

തന്നിട്ടുള്ളത് $BP=2$ മീ, $CQ=3$ മീ, $RA=10$ മീ, $PC=6$ മീ,

$QA=5$ മീ, $RB=2$ മീ

മൂല്യങ്ങൾ (1)ൽ പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ, $\frac{BP}{PC}\times\frac{CQ}{QA}\times\frac{RA}{RB}=\frac{2}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{10}{2}=\frac{60}{60}=1$

അതുകൊണ്ട് മരങ്ങൾ P, $Q,\ R$ എന്നിവ ഒരേ നേർരേഖയിലാണ്.

## പുരോഗതി പരിശോധന

1. ഒരു നേർരേഖ ഒരു വൃത്തത്തെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവിൽ സ്പർശിച്ചാൽ അതിനെ _____ എന്ന് പറയുന്നു.
2. ഒരു ഞാൺ _____ന്റെ ഉപഭാഗമാണ്.
3. വൃത്തത്തിന്റെ _____ ബിന്ദുവിൽ നിന്നും വരയ്ക്കുന്ന രണ്ട് സ്പർശരേഖകളുടെ നീളങ്ങൾ തുല്യം.
4. വൃത്തത്തിന്റെ _____ ൽ നിന്നും സ്പർശരേഖ വരയ്ക്കാൻ സാധ്യമല്ല.
5. _____ എന്ന സീവിയൻ കോണിനെ രണ്ട് തുല്യ ഭാഗങ്ങളായി വിഭജിക്കുന്നു.



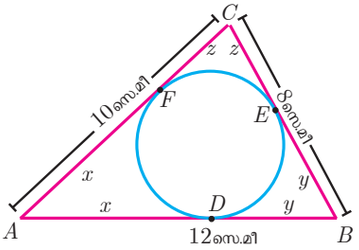
4 Geometry malayalam.indd 197 20/01/2023 17:48:54

## അഭ്യാസം 4.4

1. വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന് 25 സെ.മീ അകലെയുള്ള ബിന്ദു $P$ യിലിരുന്നുള്ള സ്പർശരേഖയുടെ നീളം 24 സെ.മീ. എങ്കിൽ വൃത്തത്തിന്റെ ആരം എന്താണ്?

2. $\angle L = 90^\circ$ ആയ $\triangle LMN$ ഒരു സമകോണത്രികോണം അതിൽ അന്തർവൃത്തം ലേഖനം ചെയ്തിട്ടുണ്ട്. സമകോണത്തിന് അടുത്തുള്ള വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ 6 സെ.മീ, 8 സെ.മീ എങ്കിൽ വൃത്തത്തിന്റെ ആരം കണ്ടുപിടിക്കുക.

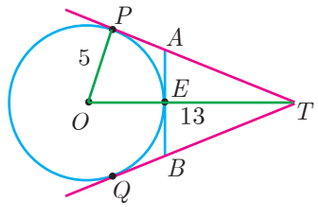
3. ചിത്രത്തിലുള്ളതു പോലെ $\Delta ABC$ ൽ വൃത്തം ലേഖനം ചെയ്തിട്ടുണ്ട്. ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ 8 സെ.മീ, 10 സെ.മീ, 12 സെ.മീ എങ്കിൽ $AD$, $BE$, $CF$ എന്നിവ കണ്ടു പിടിക്കുക.




4. $O$ കേന്ദ്രമായി $QOR$ വ്യാസമുള്ള വൃത്തത്തിന്റെ $P$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് സ്പർശരേഖ $PQ$ വരച്ചിട്ടുണ്ട്. $\angle POR = 120^\circ$ എങ്കിൽ $\angle OPQ$ കണ്ടുപിടിക്കുക

5. സ്പർശരേഖ $ST$ വൃത്തത്തെ $B$ ൽ സന്ധിക്കുന്നു. $AB$ ഒരു ഞാൺ $\angle ABT = 65^\circ$ എങ്കിൽ $\angle AOB$ കണ്ടുപിടിക്കുക ഇവിടെ "$O$" വൃത്തകേന്ദ്രം.

6. ചിത്രത്തിൽ $O$ കേന്ദ്രമായ വൃത്തത്തിന്റെ ആരം 5 സെ.മീ $OT = 13$ സെ.മീ കൂടാതെ $OT$ വൃത്തത്തെ $E$ ൽ ഛേദിക്കുന്നു .$E$ വഴിയുള്ള സ്പർശരേഖ $AB$ എങ്കിൽ $AB$ യുടെ നീളം കാണുക.

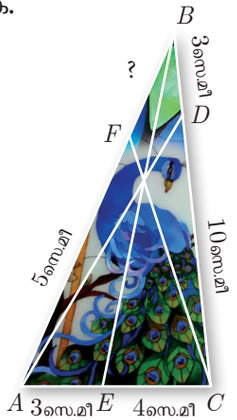



7. രണ്ട് ഏകകേന്ദ്ര വൃത്തങ്ങളിൽ 16 സെ.മീ നീളമുള്ള വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ ഞാൺ ചെറിയ വൃത്തത്തിന്റെ സ്പശരേഖയാണ്. അതിന്റെ ആരം 6 സെ.മീ വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ ആരം കണ്ടുപിടിക്കുക.

8. $O$ , $O'$ കേന്ദ്രങ്ങളായുള്ള വൃത്തങ്ങളുടെ ആരങ്ങൾ 3 സെ.മീ, 4 സെ.മീ യഥാക്രമം $P, Q$ എന്നീ ബിന്ദു ക്കളിൽ ഛേദിക്കുന്നു. $OP$ യും $O'P$യും രണ്ട് വൃത്തങ്ങളുടേയും സ്പർശരേഖകൾ ആണ് പൊതു ഞാൺ $PQ$ ന്റെ നീളം കാണുക.

9. ഒരു ത്രികോണത്തിലെ കോണദ്വിഭാജകങ്ങൾ സംഗമിക്കുന്നു എന്ന് തെളിയിക്കുക.

10. ഒരു കലാകാരി ഒരുത്രികോണാകൃതിയിലുള്ള ഗ്ലാസ് ജാലകം സൃഷ്ടിച്ചിരിക്കുന്നു. ജാലകം പൂർത്തിയാക്കുന്നതിന് മുമ്പ് ചെറിയ നീളമുള്ള ഒരു കഷണം ബാക്കി ഉണ്ട്. അവൾ ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതു പോലെ മറ്റ് വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങളെ ആധാരമാക്കി ബാക്കി ഭാഗത്തിന്റെ നീളം പൂർത്തിയാക്കേണ്ടതാണ് എങ്ങനെ?




11. $P$ കേന്ദ്രമായി 3.4 സെ.മീ ആരമുള്ള വൃത്തത്തിന്റെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദു $R$ ലിരുന്ന് സ്പർശരേഖ വരയ്ക്കുക ?

12. 4.5 സെ.മീ ആരമുള്ള വൃത്തം വരയ്ക്കുക വൃത്തത്തിൻമേൽ ഒരു ബിന്ദു കുറിയ്ക്കുക. ആ ബിന്ദു വഴി ഏകാന്തര വൃത്തഖണ്ഡ സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച് വൃത്തത്തിന് സ്പർശരേഖ വരയ്ക്കുക.

13. 5 സെ.മീ ആരമുള്ള വൃത്തത്തിന് കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നും 10 സെ.മീ അകലെയുള്ള ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് രണ്ട് സ്പർശരേഖകൾ വരയ്ക്കുക. സ്പർശരേഖകളുടെ നീളം അളക്കുക.

14. 4 സെ.മീ ആരമുള്ള വൃത്തത്തിന് കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നും 11 സെ.മീ അകലെയുള്ള ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് രണ്ട് സ്പർശരേഖകൾ വരയ്ക്കുക.

15. 6 സെ.മീ വ്യാസമുള്ള വൃത്തത്തിന് കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന് 5 സെ.മീ അകലെയുള്ള ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് രണ്ട് സ്പർശരേഖകൾ വരയ്ക്കുക. സ്പർശ് രേഖകളുടെ നീളം അളക്കുക.



4 Geometry malayalam.indd 198 20/01/2023 17:48:56

16. $O$ കേന്ദ്രമായി 3.6 സെ.മീ ആരമുള്ള വൃത്തത്തിന് $P$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് സ്പർശരേഖ വരയ്ക്കുക. ബിന്ദു $P$ വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന് 7.2 സെ.മീ അകലെയാണ്.

## അഭ്യാസം 4.5

### ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുക്കുക

1. ത്രികോണങ്ങൾ $ABC, EDF$,എന്നിവയിൽ $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{FD}$ അവ സദൃശം എങ്കിൽ

(A) $\angle B = \angle E$ (B) $\angle A = \angle D$ (C) $\angle B = \angle D$ (D) $\angle A = \angle F$

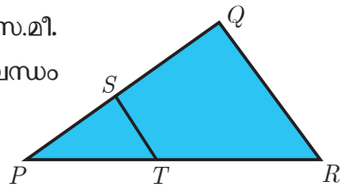
2. $\Delta LMN$, $\angle L = 60°$, $\angle M = 50°$. $\Delta LMN \sim \Delta PQR$ എങ്കിൽ $\angle R$ ന്റെ മൂല്യം

(A) $40°$ (B) $70°$ (C) $30°$ (D) $110°$

3. $\Delta ABC$ ഒരു ദ്വിസമഭുജ ത്രികോണം $\angle C = 90°$ , $AC = 5$ സെ.മീ, എങ്കിൽ $AB$

(A) 2.5 സെ.മീ (B) 5 സെ.മീ (C) 10 സെ.മീ (D) $5\sqrt{2}$ സെ.മീ

4. തന്നിട്ടുള്ള ചിത്രത്തിൽ $ST \parallel QR$, $PS = 2$ സെ.മീ, $SQ = 3$ സെ.മീ. എങ്കിൽ $\Delta PQR$ , $\Delta PST$ എന്നിവയുടെ വിസ്തീർണ്ണങ്ങളുടെ അംശബന്ധം




(A) 25 : 4 (B) 25 : 7 (C) 25 : 11 (D) 25 : 13

5. രണ്ട് സമാന ത്രികോണങ്ങളുടെ ചുറ്റളവുകൾ $\Delta ABC$ , $\Delta PQR$ യഥാക്രമം 36 സെ.മീ, 24 സെ.മീഎങ്കിൽ $PQ = 10$ സെ.മീ, $AB$ യുടെ നീളം

(A) $6\frac{2}{3}$ സെ.മീ (B) $\frac{10\sqrt{6}}{3}$ സെ.മീ (C) $66\frac{2}{3}$ സെ.മീ (D) 15 സെ.മീ

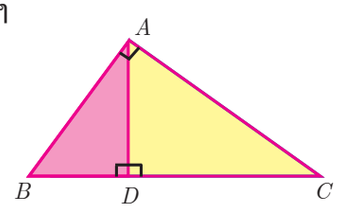
6. $\Delta ABC$ , $DE \parallel BC$. $AB = 3.6$ സെ.മീ, $AC = 2.4$ സെ.മീ, $AD = 2.1$ സെ.മീ എങ്കിൽ AE യുടെ നീളം

(A) 1.4 സെ.മീ (B) 1.8 സെ.മീ (C) 1.2 സെ.മീ (D) 1.05 സെ.മീ

7. $\Delta ABC$ യിൽ, $\angle BAC$ യുടെ ദ്വിഭാജകം. $AD$ $AB = 8$ സെ.മീ, $BD = 6$ സെ.മീ, $DC = 3$ സെ.മീ. എങ്കിൽ $AC$ യുടെ നീളം

(A) 6 സെ.മീ (B) 4 സെ.മീ (C) 3 സെ.മീ (D) 8 സെ.മീ

8. സമീപ ചിത്രത്തിൽ $\angle BAC = 90°$, $AD \perp BC$ എങ്കിൽ



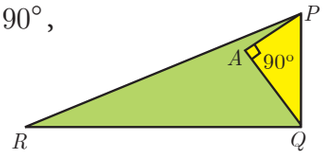

(A) $BD \cdot CD = BC^2$ (B) $AB.AC = BC^2$

(C) $BD \cdot CD = AD^2$ (D) $AB \cdot AC = AD^2$

9. നിരപ്പായ കളിസ്ഥലത്തിൽ ലംബമായി നിൽക്കുന്ന രണ്ട് കൊടിമരങ്ങളുടെ ഉയരങ്ങൾ 6 മീ, 11 മീ അവയുടെ പാദങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള അകലം 1.2 മീ എങ്കിൽ അവയുടെഅഗ്രങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള അകലം എന്താണ്?

(A) 13 മീ (B) 14 മീ (C) 15 മീ (D) 12.8 മീ

10. തന്നിട്ടുള്ള ചിത്രത്തിൽ, $PR = 26$ സെ.മീ, $QR = 24$ സെ.മീ, $\angle PAQ = 90°$, $PA$=6 സെ.മീ കൂടാതെ $QA = 8$ സെ.മീ. $\angle PQR$ കണ്ടുപിടിക്കുക




(A) $80°$ (B) $85°$ (C) $75°$ (D) $90°$



4 Geometry malayalam.indd 199 20/01/2023 17:49:01

11. സ്പർശരേഖ ആരത്തിന് ലംബമാകുന്നത് ——— ൽ

(A) കേന്ദ്രം (B) സംഗമ ബിന്ദു (C) നിർവ്വചിച്ചിട്ടില്ല (D) ഞാൺ

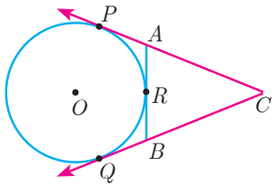
12. പുറത്തുള്ള ബിന്ദുവിലിരുന്ന് വൃത്തത്തിന് എത്ര സ്പർശരേഖകൾ വരയ്ക്കാൻ സാധിക്കും?

(A) ഒന്ന് (B) രണ്ട് (C) ധാരാളം (D) പൂജ്യം

13. $O$ കേന്ദ്രമായ വൃത്തത്തിന്റെ പുറത്തുള്ള ബിന്ദു $P$ യിൽനിന്നുള്ള രണ്ട് സ്പർശരേഖകൾ $PA$, $PB$ $\angle APB = 70^\circ$ എങ്കിൽ $\angle AOB$ യുടെ മൂല്യം

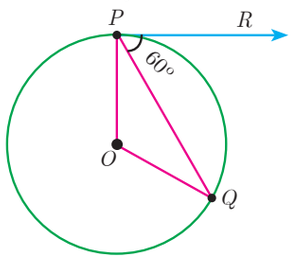
(A) $100^\circ$ (B) $110^\circ$ (C) $120^\circ$ (D) $130^\circ$

14. ചിത്രത്തിൽ $CP$, $CQ$ എന്നിവ $O$ കേന്ദ്രമായ വൃത്തത്തിന്റെ സ്പർശരേഖകൾ $ARB$ വൃത്തത്തെ $R$ ൽ സ്പർശിക്കുന്ന മറ്റൊരു സ്പർശരേഖ എങ്കിൽ $BR$ ന്റെ നീളം




(A) 6 സെ.മീ (B) 5 സെ.മീ (C) 8 സെ.മീ (D) 4 സെ.മീ

15. ചിത്രത്തിൽ $O$ കേന്ദ്രമായ വൃത്തത്തിന്റെ $P$ എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള സ്പർശരേഖ $PR$ എങ്കിൽ $\angle POQ$

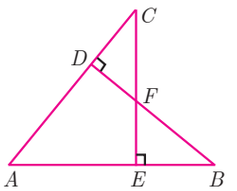



(A) $120^\circ$ (B) $100^\circ$

(C) $110^\circ$ (D) $90^\circ$

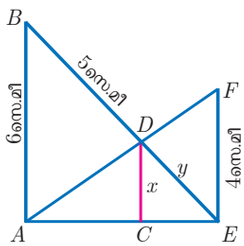
## പാഠഅഭ്യാസം - 4

1. ചിത്രത്തിൽ $BD \perp AC$, $CE \perp AB$,




(i) $\Delta AEC \sim \Delta ADB$ (ii) $\frac{CA}{AB} = \frac{CE}{DB}$ തെളിയിക്കുക

2. തന്നിട്ടുള്ള ചിത്രത്തിൽ $AB \parallel CD \parallel EF$.

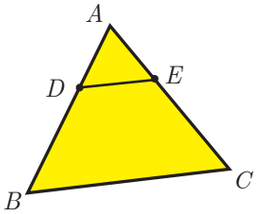



$AB = 6$ സെ.മീ, $CD = x$ സെ.മീ, $EF = 4$ സെ.മീ, $BD = 5$ സെ.മീ

$DE = y$ സെ.മീ. എങ്കിൽ $x$, $y$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

3. ത്രികോണം $ABC$ യുടെ അകത്തുള്ള ബിന്ദു O. $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COA$ എന്നിവയുടെ ദ്വിഭാജകങ്ങൾ $AB$, $BC$, $CA$ എന്നീ വശങ്ങളിൽ യഥാക്രമം $D$, $E$, $F$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ സന്ധിക്കുന്നു. $AD \times BE \times CF = DB \times EC \times FA$ തെളിയിക്കുക

4. ചിത്രത്തിൽ $AB = AC$ ആയ ത്രികോണം $ABC$. $AB$, $AC$ എന്നീ വശങ്ങളിലെ ബിന്ദുക്കൾ യഥാക്രമം $D$, $E$ ആകുന്നു.. $AD = AE$ എങ്കിൽ $B$, $C$, $E$, $D$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഒരേ വൃത്തത്തിൽ കാണപ്പെടുന്നു. എന്ന് തെളിയിക്കുക.




5. രണ്ട് തീവണ്ടികൾ ഒരേ സമയം റെയിൽവേ സ്റ്റേഷനിൽ നിന്ന് പുറപ്പെട്ടു. ആദ്യത്തെ തീവണ്ടി പടിഞ്ഞാറോട്ടും രണ്ടാമത്തെ തീവണ്ടി വടക്കോട്ടും സഞ്ചരിച്ചു. ആദ്യത്തെ തീവണ്ടിയുടെ വേഗത 20 കി.മീ / മണിക്കൂർ രണ്ടാമത്തെ തീവണ്ടിയുടെ വേഗത 30 കി.മീ / മണിക്കൂർ 2 മണിക്കൂറിനുശേഷം അവയ്ക്കിടയിലുള്ള ദൂരംഎത്ര?



4 Geometry malayalam.indd 200 20/01/2023 17:49:05

6. വശം $BC$ യുടെ മധ്യബിന്ദു $D$ $AE \perp BC$. If $BC = a$ , $AC = b$ , $AB = c$ , $ED = x$ , $AD = p$ കൂടാതെ $AE = h$ , എങ്കിൽ

(i) $b^2 = p^2 + ax + \frac{a^2}{4}$ (ii) $c^2 = p^2 - ax + \frac{a^2}{4}$ (iii) $b^2 + c^2 = 2p^2 + \frac{a^2}{2}$ തെളിയിക്കുക.

7. തറ നിരപ്പിൽ നിന്നും 2 മീ ഉയരത്തിൽ വീഷണതലമുള്ള ഒരാൾ മരത്തിന്റെ ഉയരം കണ്ടുപിടിക്കാൻ ആഗ്രഹിക്കുന്നു. മരത്തിൽ നിന്നും 20 മീ അകലെ തറയിൽ ഒരു കണ്ണാടി തിരശ്ചീനമായി വച്ചിട്ടുണ്ട്. കണ്ണാടി $B$ യിൽ നിന്നും 4 മീ അകലെ $C$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ അയാൾ നിൽക്കുകയാണെങ്കിൽ അയാൾക്ക് മരത്തിന്റെ അഗ്രത്തിന്റെ പ്രതിഛായ കണ്ണാടിയിൽ കാണാൻ സാധിക്കും. എങ്കിൽ മരത്തിന്റെ ഉയരം എന്താണ്?

8. 8 അടി പൊക്കമുള്ള ഒരു ഒട്ടകപക്ഷി 30 അടി ഉയരമുള്ള തൂണിന്റെ അടിഭാഗത്ത് നിൽക്കുന്നു. ഇത് തൂണിൽ നിന്ന് ദൂരെ നടന്ന പോകുന്നു. ഒട്ടകപക്ഷിയുടെ നിഴൽ ഒട്ടകപക്ഷിയ്ക്ക് പുറകേ പതിയുന്നു . നിഴലിന്റെ നീളത്തിനും ഒട്ടകപക്ഷയിൽ നിന്ന് തൂണിന്റെ അകലത്തിനും ഉള്ള ബന്ധം എന്താണ്?

9. രണ്ട് വൃത്തങ്ങൾ $A$, $B$ ൽ ഛേദിക്കുന്നു. ബിന്ദു $P$ യിൽ നിന്നും ഒരു വൃത്തത്തിൽ വരയ്ക്കുന്ന നേർരേഖകൾ $PAC$, $PBD$ എന്നിവ രണ്ടാമത്തെ വൃത്തത്തെ $C$, $D$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഛേദിക്കുന്നു. എങ്കിൽ $P$ യിലെ സ്പർശരേഖയ്ക്ക് $CD$ സമാന്തരം എന്ന് തെളിയിക്കുക.

10. $ABC$ ഒരു ത്രികോണം $AB$, $BC$, $AC$ (അല്ലെങ്കിൽ നീട്ടിയാൽ) എന്നീ വശങ്ങളിലെ ബിന്ദുക്കൾ യഥാക്രമം D,E,F ആകുന്നു. $AD : DB = 5 : 3$, $BE : EC = 3 : 2$ and $AC = 21$ എങ്കിൽ രേഖാഖണ്ഡം $CF$ ന്റെ നീളം കാണുക?

## ഓർമ്മിക്കേണ്ടവ

- രണ്ട് ത്രികോണങ്ങൾ സദൃശ്യം എങ്കിൽ
  - (i) സമാനകോണുകൾ തുല്യം
  - (ii) സമാനവശങ്ങൾ ഒരേ അംശബന്ധത്തിലും ആനുപാതത്തിലും ആയിരിക്കും.
- സർവ്വസമത്രികോണങ്ങൾ സദൃശ്യം, അതിന്റെ വിപരീതം ശരിയല്ല
- $AA$ സദൃശ്യതാ പ്രമാണം $AAA$ സദൃശ്യതാ പ്രമാണത്തിന് തുല്യമാണ്.
- ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു കോൺ മറ്റെ ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു കോണിനോട് തുല്യമായിരിക്കുകയും ഈ കോണുകൾ ഉൾകൊള്ളുന്ന വശങ്ങൾ ആനുപാതികത്തിലുമായിരിക്കും. (SAS)
- ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്ന് വശങ്ങൾ മറ്റൊരു ത്രികോണത്തിന്റെ സമാനവശങ്ങൾക്ക് ആനുപാതികമായാൽ ത്രികോണങ്ങൾ രണ്ടും സദൃശ്യമായിരിക്കും.(SSS)
- രണ്ട് ത്രികോണങ്ങൾ സദൃശ്യങ്ങളായാൽ അവയുടെ സമാനവശങ്ങളുടെ അനുപാതം സമാന ചുറ്റളവുകളുടെ അനുപാതത്തിന്. തുല്യമായിരിക്കും.
- രണ്ട് സദൃശത്രികോണങ്ങളുടെ വിസ്തീർണ്ണങ്ങളുടെ അംശബന്ധം അവയുടെ സമാനവശങ്ങളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ അംശബന്ധത്തിന്.
- തുല്യമായിരിക്കും. ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ സ്പർശരേഖയും സ്പർശബിന്ദുവഴിയുള്ള വ്യാസാർദ്ധവും പരസ്പരം ലംബമായിരിക്കും.
- ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ബാഹ്യബിന്ദുവിൽ നിന്നും രണ്ട് സ്പർശരേഖകൾ വരയ്ക്കാം.
- വൃത്തത്തിന്റെ ബാഹ്യബിന്ദുവിൽ നിന്നും വരയ്ക്കുന്ന സ്പർശരേഖകൾ രണ്ടും തുല്യമായിരിക്കും.
- വൃത്തങ്ങളിലേക്ക് വരയ്ക്കുന്ന രണ്ട് പൊതുവായ സ്പർശരേഖകൾ തുല്യനീളമുള്ളവയാണ്.

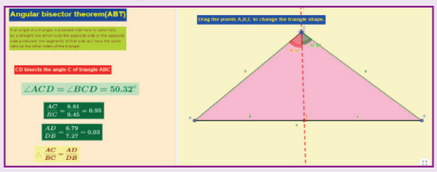


4 Geometry malayalam.indd 201 20/01/2023 17:49:06

# ICT CORNER

## ICT 4.1

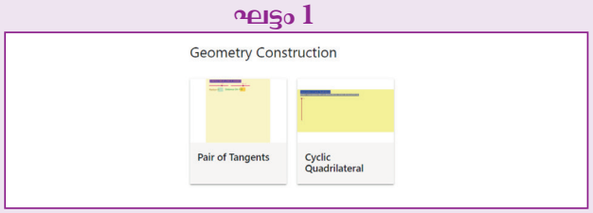
### Expected results



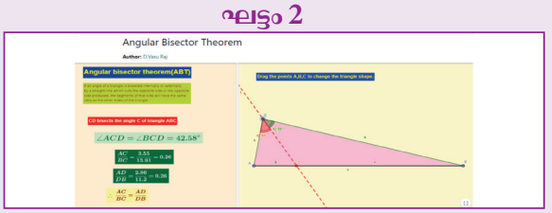

**ഘട്ടം 1:** Browser Open ചെയ്ത് താഴെ കാണുന്ന URL Link Type ചെയ്യുക. (അല്ലെങ്കിൽ) QR Code Scan ചെയ്യുക 10-ാം തരം ഗണിതത്തിലെ. **"Geometry"** എന്നു അദ്ധ്യായം തെളിയും **"Angular Bisector theorem"** എന്ന വർക്ക്ഷീറ്റ് തെരെഞ്ഞെടുക്കുക.

**ഘട്ടം 2:** തന്നിരിക്കുന്ന വർക്ക് ഷീറ്റിൽ $\Delta$ ABC അതിന്റെ കോൺ ദ്വിഭാജകം CD യും കാണാം. ശീർഷങ്ങൾ നീക്കി ത്രികോണങ്ങൾ മാറ്റാം. ഇടതുഭാഗത്ത് തന്നിരിക്കുന്ന അനുപാതം നിരീക്ഷിച്ച് സിദ്ധാന്തം പഠിക്കാം.

**ഘട്ടം 1**

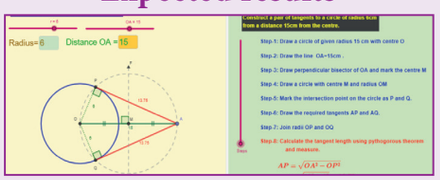



**ഘട്ടം 2**




## ICT 4.2

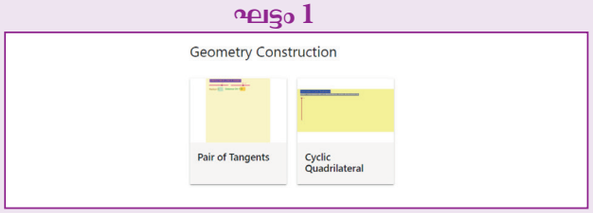
### Expected results



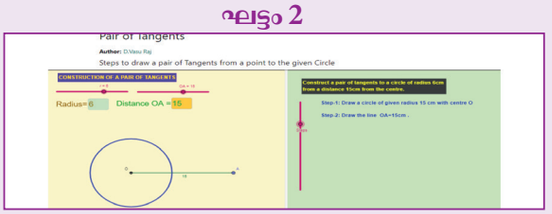

**ഘട്ടം 1:** Browser Open ചെയ്ത് താഴെ കാണുന്ന URL Link Type ചെയ്യുക. (അല്ലെങ്കിൽ) QR Code Scan ചെയ്യുക 10-ാം തരം ഗണിതത്തിലെ. **"Geometry"** എന്നു അദ്ധ്യായം തെളിയും **"Pair of Tangents"** എന്ന വർക്ക്ഷീറ്റ് തെരെഞ്ഞെടുക്കുക.

**ഘട്ടം 2:** തന്നിട്ടുള്ള വർക്ക്ഷീറ്റിൽ Slider ഇടതു കൈഭാഗത്തോട് നീക്കി വ്യാസാർദ്ധവും ദൂരവും മാറ്റാം. Slider മദ്ധ്യഭാഗത്തേക്ക് നീക്കി നിർമ്മിതി മനസ്സിലാക്കാം.

**ഘട്ടം 1**




**ഘട്ടം 2**




ഇതേ ഘട്ടം ആവർത്തിച്ച് മറ്റു കണക്കുകളും ചെയ്യാവുന്നതാണ്.

https://www.geogebra.org/m/jfr2zzgy#chapter/356194

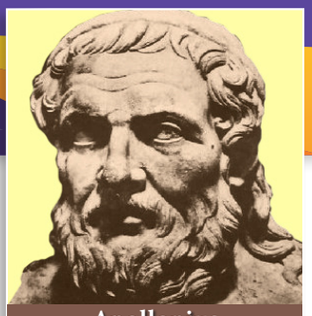
QR Code സ്കാൻ ചെയ്യുക.



4 Geometry malayalam.indd 202 20/01/2023 17:49:07

# 5 നിർദ്ദേശാങ്കജ്യാമിതി

"A line is breadthless length" - Euclid



Apollonius
262 - 190 BC (BCE)

ഇന്നത്തെ തുർക്കിയിലെ പെർഗ്ഗ് എന്ന സ്ഥലത്താണ് അപ്പോളോണിയസ് ജനിച്ചത്. അദ്ദേഹത്തിന്റെ ഏറ്റവും പ്രധാനപ്പെട്ട പ്രവർത്തനത്തെ (1 കോണിക്സ്) (വളയങ്ങൾ) എന്നു വിളിക്കുന്നു. ഇത് വൃത്തം, പാരബോള തുടങ്ങിയ വളവുകളെ ജ്യാമിതീയ രീതിയിൽ ആവിഷ്കരിക്കുന്നു. അദ്ദേഹം മറ്റ് ആറ് ഗ്രന്ഥങ്ങൾ കൂടി രചിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഇവയെല്ലാം ആധുനിക നിർദ്ദേശാങ്കജ്യാമിതിയുമായി അടിസ്ഥാന ബന്ധമുള്ളവയാണ്.

അദ്ദേഹത്തിന്റെ ആശയങ്ങൾ വാനശാസ്ത്രസിദ്ധാന്തങ്ങളെ കുറിച്ച് പഠിയ്ക്കുവാനും, പ്രായോഗികഗണിത പ്രശ്നങ്ങളെ പരിഹരിക്കാനും ഉപയോഗിക്കുന്നു. അദ്ദേഹം സൺഡയലിന്റെ ആവിഷ്കരിച്ചു. അദ്ദേഹം തന്റെ അസാധാരണമായ ജ്യാമിതി മികവിനെ മറ്റ് ശാസ്ത്ര ശാഖകൾക്ക് സമ്മാനിച്ചു. അതുകൊണ്ടു തന്നെ അപ്പോളോണിയസിനെ "മഹാനായ ജിയോമീറ്റർ" എന്നു വിളിക്കുന്നു.

## പഠനഫലങ്ങൾ

- തന്നിട്ടുള്ള മൂന്ന് ബിന്ദുക്കൾ ഉപയോഗിച്ച് രൂപപ്പെടുന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കണ്ടുപിടിക്കൽ.
- തന്നിട്ടുള്ള നാല് ബിന്ദുക്കളാൽ രൂപപ്പെടുന്ന ചതുർഭുജത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കണ്ടുപിടിക്കൽ.
- ഒരു നേർ രേഖയുടെ ചായ്വിനെ കണ്ടുപിടിക്കൽ.
- പല രൂപത്തിലുള്ള നേർരേഖയുടെ സമീകരണത്തെ നിർണ്ണയിക്കൽ.
- $ax + by + c = 0$ എന്ന രേഖയുടെ സമാന്തര രേഖയുടെ സമീകരണത്തെ കണ്ടുപിടിക്കൽ
- $ax + by + c = 0$ എന്ന രേഖയുടെ ലംബരേഖയുടെ സമീകരണത്തെ കണ്ടുപിടിക്കൽ.

## 5.1 ആമുഖം

നിർദ്ദേശാങ്കജ്യാമിതിയിയെ വിശ്ലേഷക ജ്യാമിതി എന്നും പറയുന്നു. ഇത് ഗണിത ശാസ്ത്രത്തിലെ ഒരു ശാഖയാണ് ഇതിൽ ഒരു പ്രതലത്തിലെ വളവുകളെ ബീജഗണിത സമീകരണങ്ങളാൽ സൂചിപ്പിക്കപ്പെടുന്നു. ഉദാഹരണമായി $x^2 + y^2 = 1$, എന്ന സമീകരണം ഒരു പ്രതലത്തിലെ വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധമാത്രയെ വിവരിക്കുന്നു. അതുകൊണ്ട് നിർദ്ദേശാങ്കജ്യാമിതി എന്ന ശാസ്ത്രശാഖ ബീജഗണിതത്തെയും ജ്യാമിതിയെയും പരസ്പരം ബന്ധിപ്പിക്കുന്നു. ഇവിടെ ജ്യാമിതി അവളവുകൾ ബീജഗണിതസമീകരണങ്ങളെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. ഈ ബന്ധം കൊണ്ട് ജ്യാമിതിയിലെ പ്രശ്നങ്ങളെ ബീജഗണിതപ്രശ്നങ്ങളുമായും തിരിച്ചും പുനരാവിഷ്കരിക്കാൻ സാധിക്കുന്നു. അതുകൊണ്ട് നിർദ്ദേശാങ്കജ്യാമിതിയിൽ ബീജഗണിത സമീകരണങ്ങൾക്ക് ദൃശ്യആവിഷ്കാരം സാധ്യമാണ്. അതിലൂടെ നമുക്ക് കൂടുതൽ പഠിക്കുവാനും സാധിക്കുന്നു. ഉദാഹരണമായി $ax + by + c = 0$ എന്ന രണ്ട് ചരങ്ങളുള്ള ആദ്യ ഡിഗ്രി സമവാക്യത്തെ എടുക്കുക. ഇത് പ്രതലത്തിലെ നേർരേഖയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ചുരുക്കത്തിൽ നിർദ്ദേശാങ്കജ്യാമിതി എന്നത് ആശയങ്ങളെ ദൃശ്യരീതിയിൽ മനസ്സിലാക്കുവാനുള്ള ഉപകരണമാണ്. ഇത് ആധുനികകാലത്ത് ഗണിതശാസ്ത്രത്തിൽ പുതിയ ശാഖകളെ സൃഷ്ടിച്ചു.

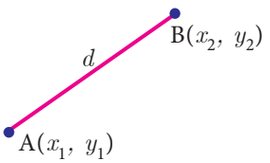


5 CordinateGeo Malayalam.indd 203 20/01/2023 17:53:36

മുൻ ക്ലാസ്സുകളിൽ നിർദ്ദേശാങ്കജ്യാമിതിയെകുറിച്ചുള്ള പഠനം നമ്മൾ ആരംഭിച്ചിരുന്നു. അവിടെ നമ്മൾ നിർദ്ദേശാങ്ക അക്ഷങ്ങൾ നിർദ്ദേശാങ്കപ്രതലങ്ങൾ ഒരു പ്രതലത്തിൽ ബിന്ദുക്കളെ അടയാളപ്പെടുത്തൽ രണ്ടുബിന്ദുക്കൾക്കിടയിലുള്ള ദൂരം, വിഭജനസൂത്രങ്ങൾ മുതലായവ പഠിച്ചു. മേൽപറഞ്ഞ ആശയങ്ങളെല്ലാം നിർദ്ദേശാങ്കജ്യാമിതിയുടെ അടിസ്ഥാനതത്വങ്ങളാണ്. ഇനി നമുക്ക് ചില അടിസ്ഥാന സൂത്രങ്ങളെ ഓർമ്മിക്കാൻ ശ്രമിയ്ക്കാം

## ഓർമ്മിയ്ക്കുക

### രണ്ടുബിന്ദുക്കൾക്കിടയിലുള്ള ദൂരം

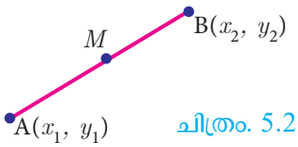


ചിത്രം. 5.1

രണ്ടുബിന്ദുക്കൾക്കിടയിലുള്ള ദൂരം $A(x_1, y_1)$ , $B(x_2, y_2)$

$$\left|AB\right| = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$

### രേഖാഖണ്ഡത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദു



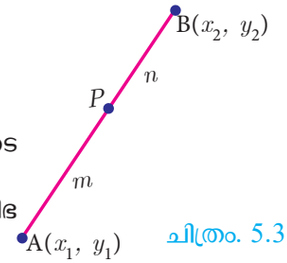
ചിത്രം. 5.2

$A(x_1, y_1)$ , $B(x_2, y_2)$ രേഖാഖണ്ഡത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദു

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

## വിഭജനസൂത്രം

### ആന്തരികവിഭജനം

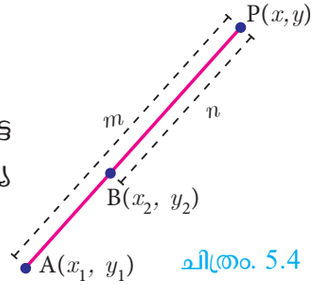


ചിത്രം. 5.3

$A(x_1, y_1)$ , $B(x_2, y_2)$ രണ്ടു വ്യത്യസ്ത ബിന്ദുക്കളാണെന്നിരിക്കട്ടെ ഇവിടെ $P(x, y)$ എന്ന ബിന്ദു $AB$ യെ $m{:}n$. എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ആന്തരികമായി വിഭജിക്കുന്നു. എങ്കിൽ

$P$ യുടെ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ $\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$.

### ബാഹ്യവിഭജനം

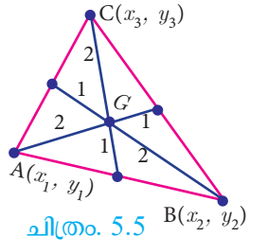


ചിത്രം. 5.4

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ രണ്ട് വ്യത്യസ്ത ബിന്ദുക്കളാണെന്നിരിക്കട്ടെ ഇവിടെ $P(x, y)$ എന്ന ബിന്ദു $AB$ യെ $m{:}n$. എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ബാഹ്യമായി വിഭജിക്കുന്നു.

എങ്കിൽ $P$ യുടെ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ $\left(\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \frac{my_2 - ny_1}{m-n}\right)$.

### ത്രികോണത്തിന്റെ കേന്ദ്രകം



ചിത്രം. 5.5

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ , $C(x_3, y_3)$ ശീർഷങ്ങളോടുകൂടിയ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ കേന്ദ്രകത്തിന്റെ ($G$) നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ

$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ ആയി തന്നിട്ടുണ്ട്.



5 CordinateGeo Malayalam.indd 204 20/01/2023 17:53:38

## പുരോഗതി പരിശോധന

1. താഴെതന്ന പട്ടികയെ പൂരിപ്പിക്കുക.

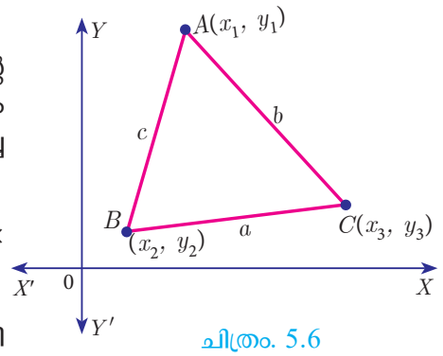
| ക്രമ നമ്പർ | ബിന്ദുക്കൾ | ദൂരം | മധ്യ ബിന്ദു | ആന്തരികമായി | | ബാഹ്യമായി | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | ബിന്ദു | അനുപാതം | ബിന്ദു | അനുപാതം |
| (i) | (3, 4), (5, 5) | | | | 2:3 | | 2:3 |
| (ii) | (–7,13),(–3,1) | | | $\left(-\frac{13}{3}, 5\right)$ | | (–13, 15) | |

2. ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങൾ $A(0,5)$, $B(5,0)$, $C(-4,-7)$ അല്ലെങ്കിൽ അതിന്റെ കേന്ദ്രകം _____ ലായിരിക്കും.

## 5.2 ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം

നിങ്ങളുടെ മുൻക്ലാസ്സുകളിൽ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ആധാരവും ഉയരവും തന്നിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ അതിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കണ്ടുപിടിക്കുന്നത് പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്. അതിനു നിങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച സൂത്രവാക്യം..

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം = $\frac{1}{2}$ × ആധാരം × ഉയരം ചമാത്രകൾ.



ചിത്രം. 5.6

ഒരു പ്രതലത്തിലുള്ള $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ , $C(y_3, y_3)$ എന്നീ മൂന്ന് സമരേഖീയമല്ലാത്ത ബിന്ദുക്കൾ ഉപയോഗിച്ച് $ABC$ എന്ന ത്രീകോണം നിർമ്മിക്കാം.

രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾക്കിടയിലുള്ള ദൂരം കാണുന്നതിനുള്ള സൂത്രവാക്യം $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ . എന്നിങ്ങനെ കണക്കാക്കാം $a$, $b$, $c$ എന്നത് $ABC$ എന്ന ത്രീകോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

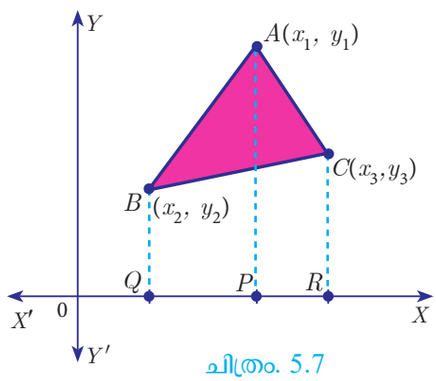
$2s = a + b + c$ ,ഉപയോഗിച്ച് നമുക്ക് $ABC$ എന്ന ത്രീകോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കണക്കാക്കാം ഇതിന് (Heron's)ഹെറോണിന്റെ സൂത്രവാക്യം. $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ . ഉപയോഗിക്കുന്നു. എന്നാൽ $\Delta ABC$ യുടെ വശങ്ങളുടെ നീളം കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള ഈ പ്രക്രിയയും വിസ്തീർണ്ണത്തിന്റെ കണക്കാക്കലും പ്രയാസമുള്ള നടപടിയാണ്..

ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണംഅതിന്റെ ശീർഷങ്ങളുടെ നിർദ്ദേശാങ്കം ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള ഒരു എളുപ്പവഴിയുണ്ട്. അത്തരം രീതിയെകുറിച്ച് നമുക്ക് പഠിയ്ക്കാം.

$ABC$ എന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങൾ $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ , $C(x_3, y_3)$

$ABC$ യിൽ നിന്നും $x$- അക്ഷത്തിന് ലംബമായി യഥാക്രമം $AP$, $BQ$ ,$CR$ വരയ്ക്കുക.

$ABQP$, $APRC$ , $BQRC$ എന്നിവവ്യക്തമായ ട്രപ്പീസിയങ്ങളാണ് (ലംബകം).



ചിത്രം. 5.7



5 CordinateGeo Malayalam.indd 205 20/01/2023 17:53:42

ചിത്രം 5.7 ൽ നിന്നും നമുക്ക് വ്യക്തമാകുന്നത്

$\Delta ABC$ യുടെ വിസ്തീർണ്ണം

= ABQP എന്ന ലംബകത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം + APRC ലംബകത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം − $BQRC$ ലംബകത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം.

ലംബകത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം

$= \frac{1}{2} \times$ (സമാന്തരവശങ്ങളുടെ തുക) $\times$ (സമാന്തരവശങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള ലംബദൂരം)

അതായത് $\Delta ABC$ യുടെ വിസ്തീർണ്ണം

$$= \frac{1}{2}(BQ + AP)QP + \frac{1}{2}(AP + CR)PR - \frac{1}{2}(BQ + CR)QR$$

$$= \frac{1}{2}(y_2 + y_1)(x_1 - x_2) + \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) - \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_3 - x_2)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right\}$$

അതുകൊണ്ട് $\Delta ABC$ യുടെ വിസ്തീർണ്ണം വ്യക്തമായ മൂല്യമാണ്.

$= \frac{1}{2}\left\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right\}$ ചതുരശ്രമാത്രകൾ.

$\Delta ABC$ യുടെ $A$, $B$, $C$ എന്നിവ എതിർ ഘടികാരദിശയിലും, ആ ത്രികോണത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങൾ $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ , $C(x_3, y_3)$ എന്ന ക്രമത്തിൽ എടുക്കുകയും ചെയ്താൽ ത്രികോണത്തിന്റെ $(ABC)$ വിസ്തീർണ്ണം ഒരിക്കലും $(-)$ ആയിരിക്കില്ല .

**കുറിപ്പ്**

➢ "ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീ ർണ്ണം ഒരിക്കലും (-) ആയിരിക്കില്ല. വിസ്തീർണ്ണം (-)ആകുന്ന സാഹചര്യത്തിൽ അതിന്റെ സമ്പൂർണ്ണ മൂല്യത്തെ മാത്രം എടുക്കണം".

### മറ്റൊരു രീതി

താഴെതന്നിട്ടുള്ള ചിത്രം മുകളിൽപറഞ്ഞ സൂത്രത്തെ വളരെ ലളിതമായി എഴുതുവാൻ സഹായിക്കുന്നു..

$\Delta ABC$ യുടെ വിസ്തീർണ്ണം $= \frac{1}{2}\left\{\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{matrix}\right\}$

$= \frac{1}{2}\left\{(x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1) - (x_2 y_1 + x_3 y_2 + x_1 y_3)\right\}$ ചതുരശ്രമാത്രകൾ.

### പുരോഗതി പരിശോധന

$\Delta PQR$ ന്റെ ശീർഷങ്ങൾ $P(0,-4)$, $Q(3,1)$ , $R(-8,1)$ ആകുന്നു

1. ഗ്രാഫ് പേപ്പറിൽ $\Delta PQR$ വരയ്ക്കുക.
2. $\Delta PQR$ സമഭുജ ത്രികോണമാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.
3. $\Delta PQR$ ന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കണ്ടുപിടിക്കുക.
4. $QP$ യുടെ മധ്യബിന്ദുവായ $M$ ന്റെ നിർദ്ദേശാങ്കം കണ്ടുപിടിക്കുക.
5. $QR$ ന്റെ മധ്യബിന്ദുവായ $N$ ന്റെ നിർദ്ദേശാങ്കം കണ്ടുപിടിക്കുക.
6. $\Delta MPN$ ന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കണ്ടുപിടിയ്ക്കുക.
7. $\Delta MPN$ ന്റെയും $\Delta PQR$ ന്റെയും വിസ്തീർണ്ണങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അനുപാതങ്ങൾ എന്താണ്?



5 CordinateGeo Malayalam.indd 206 20/01/2023 17:53:45

### 5.2.1 മൂന്നു ബിന്ദുക്കളുടെ സമരേഖീയത

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ എന്നീ മൂന്ന് വ്യത്യസ്ത ബിന്ദുക്കൾ സമരേഖീയതയിലാണെങ്കിൽ നമുക്ക് ഒരു ത്രികോണം നിർമ്മിയ്ക്കുവാൻ സാധ്യമല്ല. കാരണം അത്തരം ത്രികോണങ്ങൾക്ക് ഉയരം ഉണ്ടാവുകയില്ല. അതുകൊണ്ട് $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ എന്നീ മൂന്നു ബിന്ദുക്കളും $\Delta ABC$ യുടെ വിസ്തീർണ്ണം = 0 ആണെങ്കിൽ മാത്രമേ സമരേഖീയമാവുകയുള്ളൂ.

**കുറിപ്പ്**

- സമരേഖീയതയുള്ള മറ്റൊരു നിബന്ധന $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ സമരേഖീയമാണെങ്കിൽ

$$x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+ x_3(y_1-y_2) = 0$$

അല്ലെങ്കിൽ

$$x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 = x_1y_3 + x_2y_1 + x_3y_2$$

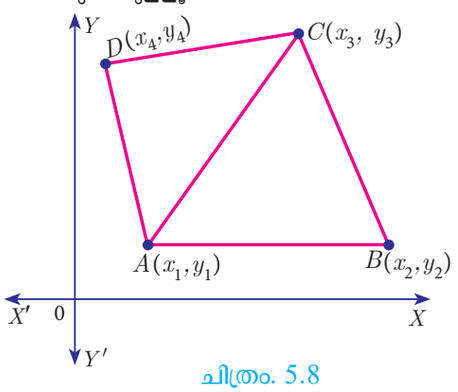
ആയിരിക്കും.

അതുപോലെ $\Delta ABC$ യുടെ വിസ്തീർണ്ണം പൂജ്യമാണെങ്കിൽ മൂന്നു ബിന്ദുക്കളും ഒരേ നേർരേഖയിൽ കാണപ്പെടും അതുകൊണ്ട് $\Delta ABC$ യുടെ വിസ്തീർണ്ണം = 0 ആണെങ്കിൽ മാത്രമേ മൂന്നു വ്യത്യസ്ത ബിന്ദുക്കളായ $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ ഒരു സമരേഖീയതയിൽ വരുകയുള്ളൂ.

## 5.3 ചതുർഭുജത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണൽ

$ABCD$ ഒരു ചതുർഭുജമാണെങ്കിൽ $AC$ വികർണ്ണത്തെ ആസ്പദമാക്കി $ABCD$ എന്ന ചതുർഭുജത്തെ നമുക്ക് $ABC$, $ACD$ എന്ന രണ്ട് ത്രികോണങ്ങളായി വിഭജിക്കാം.

ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുന്നതിനുള്ള സൂത്ര വാക്യം ഉപയോഗിച്ച് $ABC$, $ACD$ എന്നീ ത്രീകോണങ്ങളുടെ വിസ്തീർണ്ണം കണ്ടുപിടിക്കാവുന്നതാണ്.



ചിത്രം. 5.8

ഇപ്പോൾ $ABCD$ എന്ന ചതുർഭുജത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം = $ABC$ ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം + $ACD$ ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം

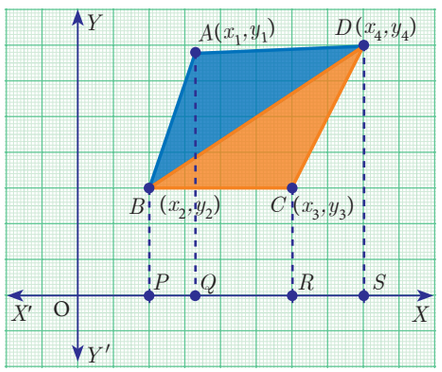
**ചിന്തിയ്ക്കുക**

വിസ്തീർണ്ണം പൂജ്യമുള്ള എത്ര ത്രികോണങ്ങൾ ഉണ്ട്.?

ഇതിൽ നിന്നും ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങൾ തന്നിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ വിസ്തീർണ്ണം കണ്ടുപിടിക്കാം.

$ABCD$ എന്ന ചതുർഭുജത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങൾ $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ and $D(x_4, y_4)$ ആണെന്നിരിക്കട്ടെ.

ഇപ്പോൾ, $ABCD$ ചതുർഭുജത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം = $\Delta ABD$ യുടെ വിസ്തീർണ്ണം + $\Delta BCD$ യുടെ വിസ്തീർണ്ണം (Fig 5.9)



ചിത്രം. 5.9

$$= \frac{1}{2}\left\{(x_1y_2 + x_2y_4 + x_4y_1) - (x_2y_1 + x_4y_2 + x_1y_4)\right\}$$

$$+ \frac{1}{2}\left\{\left(x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_2\right) - \left(x_3y_2 + x_4y_3 + x_2y_4\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_4y_3 + x_1y_4)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{(x_1 - x_3)(y_2 - y_4) - (x_2 - x_4)(y_1 - y_3)\right\}$$ ചതുരശ്രമാത്രകൾ.

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ചിത്രത്തിന്റെ സഹായത്താൽ മുകളിലത്തെ സൂത്രത്തെ വളരെ ലഘുവായി എഴുതാൻ സാധിക്കും. $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, $D(x_4, y_4)$ എന്നീ ശീർഷങ്ങളെ എതിർഘടികാരദിശയിൽ എടുക്കുക. പിന്നീട് അതിനെ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണരൂപത്തിൽ നിരയായി എഴുതുക.



5 CordinateGeo Malayalam.indd 207 20/01/2023 17:53:48

$$= \frac{1}{2}\left\{\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_1 \end{matrix}\right\}$$ അതുകൊണ്ട് ABCD എന്ന ചതുർഭുജത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം

$= \frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_4y_3 + x_1y_4)\}$ ചതുരശ്രമാത്രകൾ.

**കുറിപ്പ്**

- ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കണ്ടുപിടിക്കുവാൻ അതിനെ പൊതുവിസ്തീർണ്ണം ഇല്ലാത്ത ത്രികോണഭാഗങ്ങളായി വിഭജിക്കണം അതിനുശേഷം ഈ ഭാഗങ്ങളെ കൂട്ടുകയും വേണം.
- ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം ഒരിക്കലും (-) ആയിരിക്കില്ല. അതായത് ചതുർഭുജത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണത്തെ (+) ആയാണ് കരുതുന്നത്.

## ചിന്തിക്കുക

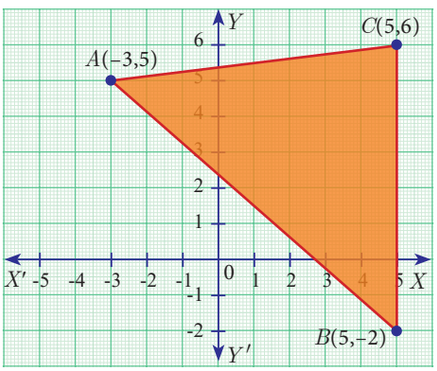
1. ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം $(a, a)$, $(-a, a)$, $(a, -a)$, $(-a, -a)$, എന്നീ ബിന്ദുക്കളാൽ രൂപപ്പെടുകയും അതിൽ $a \neq 0$ എന്നത് 64 ചതുരശ്രമാത്രയുമാണെങ്കിൽ ആ ചതുർഭുജത്തിന്റെ തരം കണ്ടുപിടിക്കുക
2. $a$ യുടെ സാധ്യമായ എല്ലാ മൂല്യങ്ങളെയും കണ്ടുപിടിക്കുക.

**ഉദാ 5.1 :** $(-3,5)$, $(5,6)$ കൂടാതെ $(5,-2)$ എന്നീ ശീർഷങ്ങളുള്ള ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കണ്ടുപിടിക്കുക

**നിർദ്ധാരണം** ഒരു മാതൃകാ ചിത്രത്തിൽ ബിന്ദുക്കളെ അടയാളപ്പെടുത്തി അവയെ എതിർഘടികാരദിശയിൽ ക്രമപ്പെടുത്തുക.

ശീർഷങ്ങൾ $A(-3,5)$, $B(5,-2)$, $C(5,6)$ ആണെന്നിരിക്കട്ടെ

$(x_1, y_1)$ $(x_2, y_2)$ $(x_3, y_3)$



ചിത്രം. 5.10

$\Delta ABC$ യുടെ വിസ്തീർണ്ണം

$= \frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\}$

$= \frac{1}{2}\{(6 + 30 + 25) - (25 - 10 - 18)\}$

$= \frac{1}{2}\{61 + 3\}$

$= \frac{1}{2}(64) = 32$ ചതുരശ്രമാത്രകൾ ആകുന്നു.

**ഉദാ 5.2 :** $P(-1.5,3)$, $Q(6,-2)$, $R(-3,4)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ സമരേഖീയമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

**നിർദ്ധാരണം** ബിന്ദുക്കൾ $P(-1.5,3)$, $Q(6,-2)$, $R(-3,4)$

$\Delta PQR$ ന്റെ വിസ്തീർണ്ണം $= \frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\}$

$= \frac{1}{2}\{(3 + 24 - 9) - (18 + 6 - 6)\} = \frac{1}{2}\{18 - 18\} = 0$

അതുകൊണ്ട് തന്നിട്ടുള്ള ബിന്ദുക്കൾ സമരേഖീയമാണ്.

**ഉദാ 5.3 :** ശീർഷങ്ങൾ $A(-1,2)$, $B(k,-2)$ and $C(7,4)$ ഉള്ള ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം 22 ചതുരശ്രമാത്രകൾ ആണെങ്കിൽ $k$ യുടെ മൂല്യം കണ്ടുപിടിക്കുക.



5 CordinateGeo Malayalam.indd 208 20/01/2023 17:53:51

**നിർദ്ധാരണം** ശീർഷങ്ങൾ $A(-1,2)$, $B(k,-2)$, $C(7,4)$ ആകുന്നു

$ABC$ യുടെ വിസ്തീർണ്ണം 22 ചതുരശ്രമാത്രകൾ ആകുന്നു.

$$\frac{1}{2}\left\{(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(x_2y_1+x_3y_2+x_1y_3)\right\} = 22$$

$$\frac{1}{2}\left\{(2+4k+14)-(2k-14-4)\right\} = 22$$

$$2k+34 = 44 \ , \ 2k=10 \ , \ k=5$$

**ഉദാ 5.4 :** $P(-1,-4)$, $Q(b,c)$, $R(5,-1)$ ബിന്ദുക്കൾ സമരേഖീയമാണെങ്കിൽ $2b+c=4$, ആണെങ്കിൽ $b$, $c$ എന്നിവയുടെ മൂല്യം കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം** $P(-1,-4)$, $Q(b,c)$, $R(5,-1)$ എന്ന മൂന്നു ബിന്ദുക്കളും സമരേഖീയമായതിനാൽ,

$$PQR \text{ ന്റെ വിസ്തീർണ്ണം} = 0$$

$$\frac{1}{2}\left\{(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(x_2y_1+x_3y_2+x_1y_3)\right\} = 0$$

$$\frac{1}{2}\left\{(-c-b-20)-(-4b+5c+1)\right\} = 0$$

$$-c-b-20+4b-5c-1 = 0$$

$$b-2c = 7 \quad \ldots(1)$$

$$2b+c = 4 \quad \ldots(2) \text{ (തന്നിട്ടുള്ള വിവരമനുസരിച്ച്)}$$

(1), (2) നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുമ്പോൾ $b=3$, $c=-2$ ലഭിക്കുന്നു.

**ഉദാ 5.5 :** ഒരു മുറിയുടെ തറയിൽ ത്രികോണാകൃതിയിലും ഒരേ അളവിലുമുള്ള തറയോടുകൾ പാകിയിട്ടുണ്ട്. അത്തരത്തിലുള്ള ഒരു ത്രികോണത്തിന് $(-3,2)$, $(-1,-1)$, $(1,2)$. ശീർഷങ്ങൾ ഉണ്ട്. മുറി മുഴുവനും 110 തറയോടുകൾ പാകിയിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ തറയുടെ വിസ്തീർണ്ണം കണ്ടുപിടിക്കുക.

**നിർദ്ധാരണം** ത്രികോണാകൃതിയിലുള്ള ഒരു തറയോടിന്റെ ശീർഷങ്ങൾ

$(-3,2)$, $(-1,-1)$ കൂടാതെ $(1,2)$

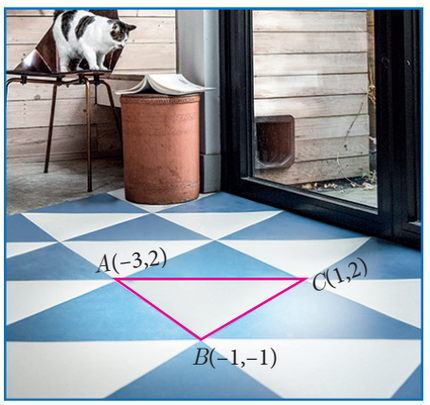
ഒരു തറയോടിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം

$= \frac{1}{2}\left\{(3-2+2)-(-2-1-6)\right\}$ ചതരുരശ്രമാത്രകൾ (ച.മാ)

$= \frac{1}{2}(12) = 6$ ച.മാ

തറമുഴുവനും ത്രികോണാകൃതിയിലും ഒരേ അളവിലുമുള്ള 110 തറയോടുകൾ ഉള്ളതുകൊണ്ട്,

തറയുടെ വിസ്തീർണ്ണം $= 110 \times 6 = 660$ ച.മാ



ചിത്രം. 5.11

**ഉദാ 5.6 :** $(8,6)$, $(5,11)$, $(-5,12)$, $(-4,3)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളാൽ രൂപപ്പെടുന്ന ചതുർഭുജത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കണ്ടുപിടിക്കുക.

**നിർദ്ധാരണം** ചതുർഭുജത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം നിർണ്ണയിക്കുന്നതിനുമുമ്പ് ശീർഷങ്ങളെ ഒരു ഗ്രാഫിൽ അടയാളപ്പെടുത്തുക.

ശീർഷങ്ങൾ $A(8,6)$, $B(5,11)$, $C(-5,12)$, $D(-4,3)$ ആണെന്നിരിക്കട്ടെ

അതുകൊണ്ട് ചതുർഭുജം $ABCD$ യുടെ വിസ്തീർണ്ണം



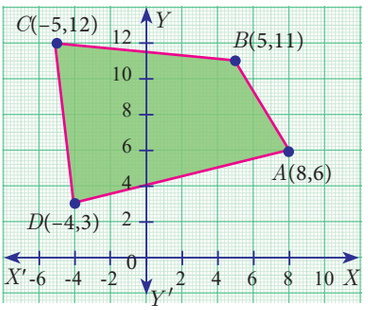
5 CordinateGeo Malayalam.indd 209 20/01/2023 17:53:55

$$= \frac{1}{2}\left\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_4y_3 + x_1y_4)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{(88 + 60 - 15 - 24) - (30 - 55 - 48 + 24)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\{109 + 49\}$$

$$= \frac{1}{2}\{158\} = 79 \text{ ച.മാ}$$

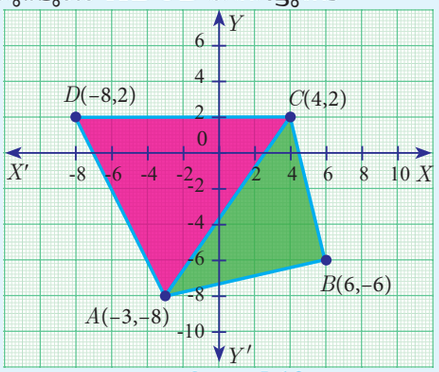


ചിത്രം. 5.12

## പുരോഗതി പരിശോധന

ശീർഷങ്ങൾ $A(-3, -8)$, $B(6, -6)$, $C(4, 2)$, $D(-8, 2)$ ഉള്ള ചതുർഭുജം $ABCD$തന്നിട്ടുണ്ട്

1. $\Delta ABC$ യുടെ വിസ്തീർണ്ണം കണ്ടുപിടിക്കുക.
2. $\Delta ACD$ യുടെ വിസ്തീർണ്ണം കണ്ടുപിടിക്കുക.
3. $\Delta ABC$ യുടെ വിസ്തീർണ്ണം + $\Delta ACD$ യുടെ വിസ്തീർണ്ണം കണ്ടുപിടിക്കുക.
4. $ABCD$ ചതുർഭുജത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കണ്ടുപിടിക്കുക.
5. 3 ലും 4 ലും ലഭിക്കുന്ന ഉത്തരം താരതമ്യം ചെയ്യുക.



ചിത്രം. 5.13

**ഉദാ 5.7 :** തന്നിട്ടുള്ള ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിട്ടുള്ളത് ഒരു വാഹന പാർക്കിങ് സ്ഥലത്തിന്റെ നിർമ്മിതി ആകുന്നു. ഒരു ചതുരശ്രഅടിയ്ക്ക് ₹1300 രൂപയാണെങ്കിൽ പാർക്കിങ് സ്ഥലം നിർമ്മിക്കുവാനുള്ള മൊത്ത ചെലവ് എത്രയാണ്?

**നിർദ്ധാരണം** പാർക്കിങ് സ്ഥലം ഒരു ചതുർഭുജമാകുന്നു. ഇതിന്റെ ശീർഷങ്ങൾ $A(2,2)$, $B(5,5)$, $C(4,9)$, $D(1,7)$ ആകുന്നു.

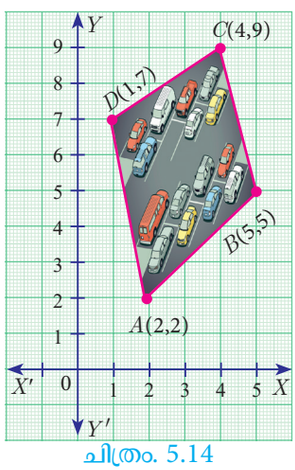
പാർക്കിങ് സ്ഥലത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം

$$= \frac{1}{2}\left\{\begin{matrix}2 & 5 & 4 & 1 & 2\\ 2 & 5 & 9 & 7 & 2\end{matrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{(10 + 45 + 28 + 2) - (10 + 20 + 9 + 14)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\{85 - 53\}$$

$$= \frac{1}{2}(32) = 16 \text{ ച.മാ. ആകുന്നു.}$$



ചിത്രം. 5.14

പാർക്കിങ് സ്ഥലത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം = 16 ച.അടിയാകുന്നു

ഒരു ചതുരശ്ര അടിയുടെ നിർമ്മാണചെലവ് = ₹1300

വാഹന പാർക്കിങ് സ്ഥലത്തിന്റെ മൊത്ത നിർമ്മാണചെലവ് = $16 \times 1300$ = ₹20800



5 CordinateGeo Malayalam.indd 210 20/01/2023 17:53:57

## പ്രവർത്തി 1

(i) ഒരു ഗ്രാഫ് പേപ്പർ എടുക്കുക.

(ii) (0,0), (6,0) എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖ ആധാരവുമായുള്ള ഒരു ത്രികോണത്തെ എടുക്കുക.

(iii) മൂന്നാമത്തെ ശീർഷത്തെ (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5) എന്നെടുക്കുക. അവയുടെ വിസ്തീർണ്ണം കണ്ടുപിടിക്കുക. തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളെ എഴുതുക :

(iv) $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ ? എന്ന ഏതെങ്കിലും രീതി നിങ്ങൾ കാണുന്നുവോ? ഉണ്ടെങ്കിൽ അവയെ എഴുതുക.

(v) മൂന്നാമത്തെ ഘട്ടത്തിൽ കാണിച്ചിട്ടുള്ളതുപോലെ മൂന്നാമത്തെ ശീർഷത്തെ (iii)(1,2), (2,4), (3,8), (4,16), (5,32) എന്നെടുത്ത് ഈ പ്രക്രിയ ആവർത്തിക്കുക

(vi) ഈ ശീർഷങ്ങളെ പട്ടികപ്പെടുത്തുക

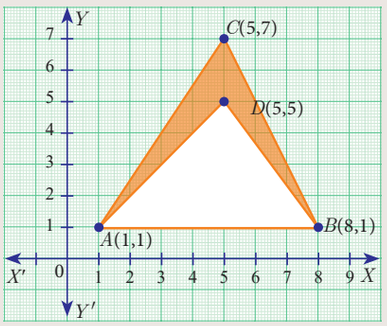
(vii) നിങ്ങൾ നിരീക്ഷിക്കുന്ന രീതി എതാണ് $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ ?

| മൂന്നാമത്തെ ശീർഷം | ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം |
|---|---|
| (1,1) | $A_1 =$ |
| (2,2) | $A_2 =$ |
| (3,3) | $A_3 =$ |
| (4,4) | $A_4 =$ |
| (5,5) | $A_5 =$ |

| മൂന്നാമത്തെ ശീർഷം | ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം |
|---|---|
| (1,2) | $A_1 =$ |
| (2,4) | $A_2 =$ |
| (3,8) | $A_3 =$ |
| (4,16) | $A_4 =$ |
| (5,32) | $A_5 =$ |

## പ്രവർത്തി 2

നിഴലിട്ട ഭാഗത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കണ്ടുപിടിക്കുക




ചിത്രം. 5.15

**നിങ്ങൾക്ക് അറിയാമോ**

റെനെഡസ്കാർഡ്സ്, പീ.ഡി.ഫെരമേറ്റ് എന്നീ രണ്ട് ഫ്രഞ്ച് ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞൻമാരാണ് 1630 കളിൽ ആദ്യമായി ആധുനിക നിർദ്ദേശാങ്കജ്യാമിതി എന്ന ആശയത്തെ ആവിഷ്കരിച്ചത്.

## അഭ്യാസം 5.1

1. താഴെതന്നിട്ടുള്ള ബിന്ദുക്കളാൽ രൂപപ്പെട്ട ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കണ്ടുപിടിക്കുക?
   (i) (1,−1), (−4, 6), (−3, −5)  (ii) (−10, −4), (−8, −1), (−3, −5)

2. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ബിന്ദുക്കൾ സമരേഖീയമാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക?
   (i) $\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$, (−5, 6) കൂടാതെ (−8, 8)  (ii) $(a, b+c)$, $(b, c+a)$ കൂടാതെ $(c, a+b)$

3. തന്നിട്ടുള്ള ത്രികോണങ്ങളുടെ ശീർഷങ്ങളെ ക്രമത്തിൽ എടുക്കുക അവയുടെ വിസ്തീർണ്ണങ്ങൾ തന്നിട്ടുണ്ട്. ഓരോന്നിലും '$p$' യുടെ മൂല്യം കണ്ടുപിടിക്കുക.

| ക്രമനമ്പർ | ശീർഷങ്ങൾ | വിസ്തീർണ്ണം (ച.മാ) |
|---|---|---|
| (i) | $(0, 0), (p, 8), (6, 2)$ | 20 |
| (ii) | $(p, p), (5, 6), (5, -2)$ | 32 |



5 CordinateGeo Malayalam.indd 211 20/01/2023 17:53:58

4. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ഓരോന്നിലും '$a$' യുടെ മൂല്യം കണ്ടുപിടിക്കുക. ഇവിടെ തന്നിട്ടുള്ള ബിന്ദുക്കൾ സമരേഖീയമാണ്

   (i) $(2, 3), (4, a), (6, -3)$ (ii) $(a, 2-2a), (-a+1, 2a), (-4-a, 6-2a)$

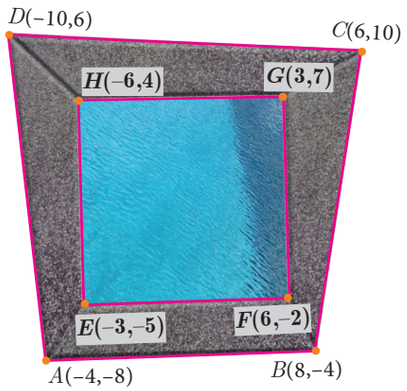
5. തന്നിട്ടുള്ള ശീർഷങ്ങളുള്ള ചതുർഭുജത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കണ്ടുപിടിക്കുക

   (i) $(-9, -2), (-8, -4), (2, 2)$ കൂടാതെ $(1, -3)$ (ii) $(-9, 0), (-8, 6), (-1, -2)$ കൂടാതെ $(-6, -3)$

6. $(-4, -2), (-3, k), (3, -2), (2, 3)$ എന്ന ക്രമത്തിൽ ശീർഷങ്ങളുള്ള ചതുർഭുജത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം 28 ച.മാത്രകളാണെങ്കിൽ $k$ യുടെ മൂല്യം കണ്ടുപിടിക്കുക.,

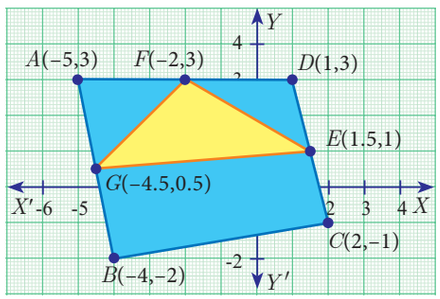
7. $A(-3,9)$, $B(a,b)$, $C(4,-5)$ ബിന്ദുക്കൾ സമരേഖീയമാണെങ്കിൽ $a+b=1$, ആണെങ്കിൽ $a$, $b$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

8. $\Delta ABC$ യുടെ $AB, BC, AC$ എന്നീ വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ യഥാക്രമം $P(11,7)$, $Q(13.5,4)$, $R(9.5,4)$ എന്നിരിക്കട്ടെ $A$, $B$, $C$ എന്നീ ശീർഷങ്ങളുടെ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുക. $\Delta ABC$ യുടെ വിസ്തീർണ്ണത്തെ കണ്ടുപിടിച്ച് $\Delta PQR$ ന്റെ വിസ്തീർണ്ണവുമായി താരതമ്യം ചെയ്യുക.




9. ചിത്രത്തിൽ ഒരു ചതുർഭുജാകൃതിയിലുള്ള നീന്തൽ കുളത്തിനു ചുറ്റും കാൺക്രീറ്റുകൊണ്ടുള്ള ഭിത്തി കാണപ്പെടുന്നു. ഭിത്തിയുടെ വിസ്തീർണ്ണം കണ്ടുപിടിക്കുക..

10. ഒരു ത്രികോണാകൃതിയിലുള്ള ഗ്ലാസ്സിന്റെ ശീർഷങ്ങൾ $A(-5,-4)$, $B(1,6)$, $C(7,-4)$ ആകുന്നു. ഇതിന് 6 ചതുരശ്ര അടിയ്ക്ക് ഒരു ബക്കറ്റ് പെയിന്റ് ആവശ്യമുണ്ടെങ്കിൽ ഗ്ലാസ്സുമുഴുവനും പെയിന്റുചെയ്യാൻ എത്ര ബക്കറ്റ് പെയിന്റ് ആവശ്യമുണ്ട് ? ഒരു പ്രാവശ്യം മാത്രമാണ് പെയിന്റു ചെയ്യുന്നത്?




11. ചിത്രത്തിൽ നിന്നും (i) $AGF$
    (ii) $FED$ (iii) ചതുർഭുജം $BCEG$ എന്നിവയുടെ വിസ്തീർണ്ണം കണ്ടുപിടിക്കുക.

## 5.4 ഒരു രേഖയുടെ ചായ്‌വ്

ഒരു രേഖയുടെ ചായ്‌വ് അല്ലെങ്കിൽ ഒരു രേഖയുടെ ചരിവുകോൺ എന്നത് $X$അക്ഷത്തിലുള്ള ഒരു നേർരേഖ $X$ അക്ഷത്തിലെ ഒരു നിശ്ചിത ബിന്ദു A യിൽ നിന്നും എതിർഘടികാര ദിശയിൽ ചുറ്റി അവസാനം X അക്ഷത്തിൽ തന്നെ എത്തുന്നു. നേർരേഖയുടെ ചരിവുകോണിനെ $\theta$ എന്നു കുറിക്കുന്നു.

**കുറിപ്പ്**

- $X$ അക്ഷത്തിന്റെ അഥവാ $X$ അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായ നേർരേഖയുടെ ചായ്‌വ് പൂജ്യമാകുന്നു $0°$.
- $Y$ അക്ഷത്തിന്റെ അഥവാ $Y$ അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായ നേർരേഖയുടെ ചായ്‌വ് $90°$.

### 5.4.1 നേർരേഖയുടെ ചായ്‌വ്

റോഡുകൾ ഉണ്ടാക്കുമ്പോൾ എത്ര ചെരിവ് എത്ര ആയിരിക്കണം എന്നറിയേണ്ടതാണ്. സമാനമായി കോണിപടികൾ ഉണ്ടാക്കുമ്പോഴും നാം അതിന്റെ കുത്തനെയുള്ള സ്ഥിതിയെ പരിഗണിക്കണം. അതേ കാരണത്താൽമലയുടെ അടിവാരത്തിലൂടെയോ പാലത്തിലൂടെയോ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരാൾക്ക് സമതലത്തിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്നതിനെക്കാൾ വളരെ ബുദ്ധിമുട്ട് അനുഭവപ്പെടുന്നു.



5 CordinateGeo Malayalam.indd 212 20/01/2023 17:54:01

ഈ ഉദാഹരണങ്ങളെല്ലാം ചെരിവ് എന്ന പ്രധാനപ്പെട്ട വസ്തുതയെ വിശദീകരിക്കുന്നു. കുത്തനെയുള്ള അളവിനെ ചായ്‌വ് അല്ലെങ്കിൽ (ചെരിവുകോൺ ഗ്രേഡിയന്റ് എന്നു പറയുന്നു. ചായ്‌വ് എന്ന ആശയത്തിന് സാമ്പത്തികശാസ്ത്രത്തിൽ വളരെ പ്രധാന്യമുണ്ട് എന്തെന്നാൽ സാധനങ്ങൾക്ക് അവയുടെ വിലമാറ്റം ഒരു പ്രത്യേകകാലപരിധിയ്ക്ക് അനുസരിച്ച് വസ്തുക്കളുടെ ആവശ്യകത മാറുന്നു. ഇതിന്റെ വിഹിതത്തെ അളക്കുവാൻ ചായ്‌വ് ഉപയോഗിക്കുന്നു. ചായ്‌വിൽ രണ്ട് ഘടകങ്ങൾ അടങ്ങിയിട്ടുണ്ട് അവ കുത്തനെ ഉള്ളതും ദിശഉള്ളതും ആകുന്നു.



ചിത്രം. 5.16

**നിർവ്വചനം**

ഒരു ലംബമല്ലാത്ത നേർരേഖയുടെ ചെരിവുകോൺ $\theta$ ആണെങ്കിൽ $\tan\theta$ ആ രേഖയുടെ ചായ്‌വ് അല്ലെങ്കിൽ ചെരിവുകോൺ എന്നുപറയുന്നു. ഇതിനെ $m$ എന്നു സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

അതുകൊണ്ട് ഒരു നേർരേഖയുടെ ചായ്‌വ് $m = \tan\theta$, $0 \le \theta \le 180^\circ$, $\theta \ne 90^\circ$ ആകുന്നു.

## രണ്ടുബിന്ദുക്കൾ തന്നിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ ഒരു നേർരേഖയുടെ ചായ്‌വ് കണ്ടുപിടിക്കുന്ന വിധം

ചായ്‌വ് $m = \tan\theta$

$= \frac{\text{എതിർവശം}}{\text{സമീപവശം}}$

$= \frac{BC}{AC}$

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

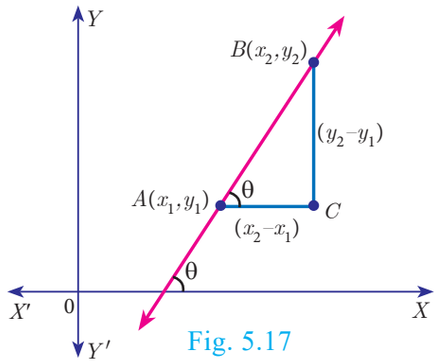



Fig. 5.17

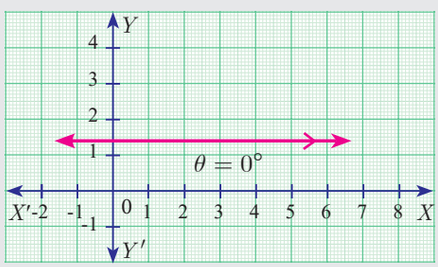
ചായ്‌വ് $m = \frac{y \text{ നിർദ്ദേശാങ്കമൂല്യങ്ങളിലുള്ള വ്യത്യാസം}}{x \text{ നിർദ്ദേശാങ്കമൂല്യങ്ങളിലുള്ള വ്യാത്യാസം}}$

**കുറിപ്പ്**

- ഒരു ലംബരേഖയ്ക്ക് ചായ്‌വ് നിർവ്വചിച്ചിട്ടില്ല.

$(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന നേർരേഖയുടെ ചായ്‌വിനെ $x_1 \ne x_2$ $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ആകുന്നു.

## ചായ്‌വിന്റെ മൂല്യങ്ങൾ

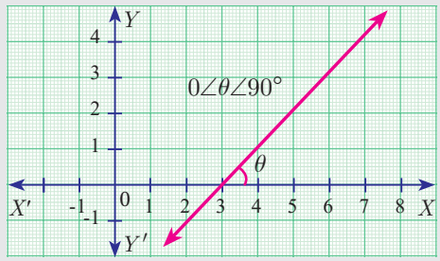
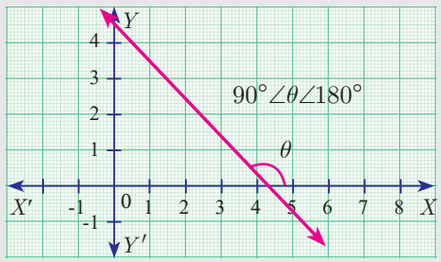
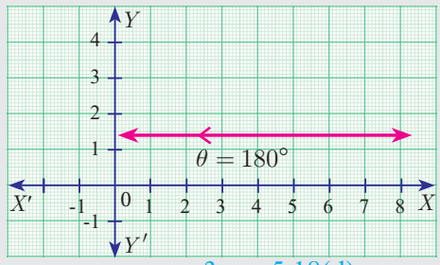
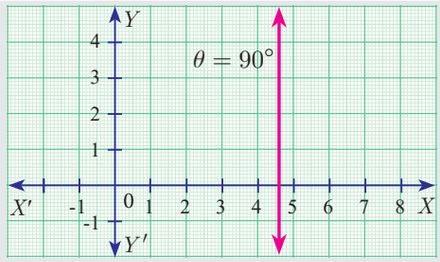
| ക്രമനമ്പർ | നിബന്ധന | ചായ്‌വ് | ചിത്രം |
|---|---|---|---|
| (i) | $\theta = 0^\circ$ | ഈ രേഖ $X$ അക്ഷത്തിന്റെ ദിശയ്ക്ക് '+' സമാന്തരമാണ്. |  |



ചിത്രം. 5.18(a)



5 CordinateGeo Malayalam.indd 213 20/01/2023 17:54:02

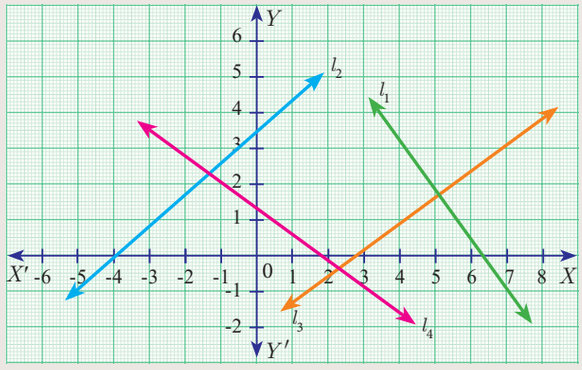
| | | | |
|---|---|---|---|
| (ii) | $0 < \theta < 90°$ | ഈ രേഖയ്ക്ക് '+' ചായ് വാണുള്ളത് (ചായ് വുള്ള രേഖ ഇടത്തുനിന്നും വലത്തോട്ടാണ് ഉയരുന്നത്) |  ചിത്രം. 5.18(b) |
| (iii) | $90° < \theta < 180°$ | ഈ രേഖയ്ക്ക് (-)ചായ് വാണുള്ളത് ((-)ചായ് വുള്ള രേഖ ഇടത്തുനിന്നും വലത്തോട്ടാണ് താഴുന്നത്) |  ചിത്രം. 5.18(c) |
| (iv) | $\theta = 180°$ | ഈ രേഖ $X$അക്ഷത്തിന്റെ (-) ദിശക്ക് സമാന്തരമാണ്. |  ചിത്രം. 5.18(d) |
| (v) | $\theta = 90°$ | ചായ്വ് നിർവ്വചിച്ചിട്ടില്ല. |  ചിത്രം. 5.18(e) |

## പ്രവർത്തി 3

ഈ ചിത്രത്തിൽ $l_1$, $l_2$, $l_3$, $l_4$ എന്നീ നാലുരേഖകൾ തന്നിട്ടുണ്ട്.

(i) ഏതൊക്കെ രേഖകളാണ് (+) ചായ്വ് ഉള്ളത്?

(ii) ഏതൊക്കെ രേഖകൾക്കാണ് (-) ചായ്വ് ഉള്ളത്?



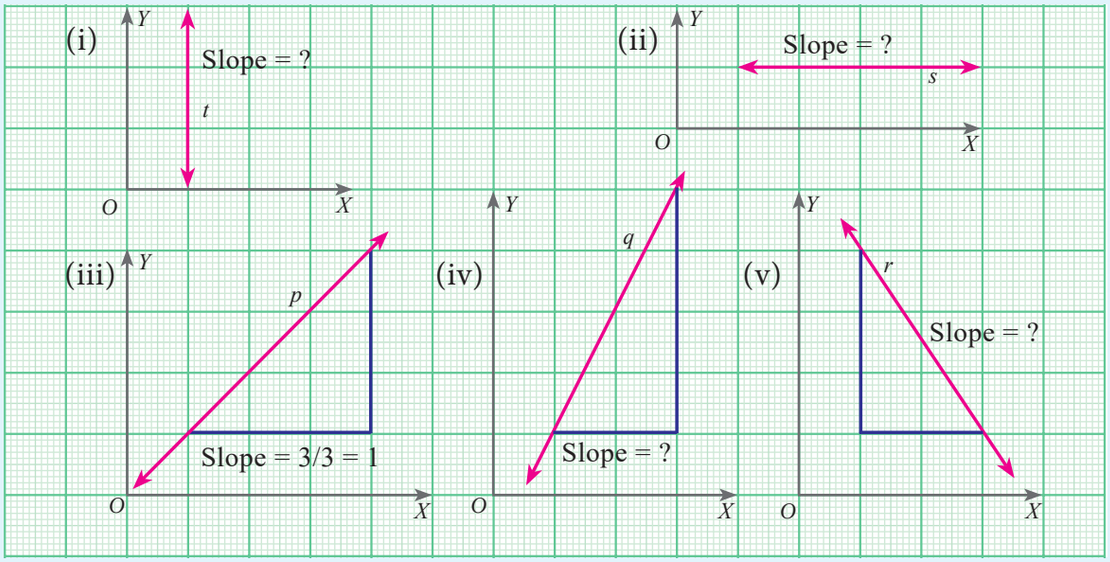
ചിത്രം. 5.19



5 CordinateGeo Malayalam.indd 214 20/01/2023 17:54:04

## പുരോഗതി പരിശോധന

താഴെകൊടുത്തിട്ടുള്ള രേഖകളുടെ ചായ്വുകൾ എഴുതുക. ഒരെണ്ണം നിങ്ങൾക്കായി നിർദ്ധാരണം ചെയ്തിട്ടുണ്ട്.




ചിത്രം. 5.20

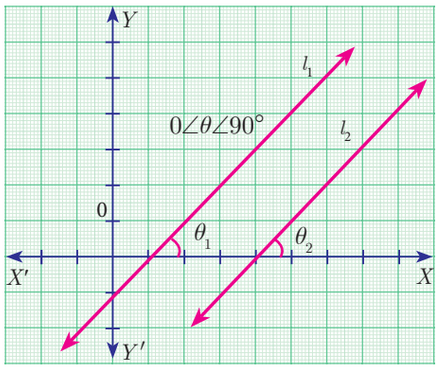
**നിർദ്ധാരണം** (iii) രേഖ $p$ യുടെ ചായ്വ് $m = \frac{y \text{ നിർദ്ദേശാങ്കമൂല്യങ്ങളിലുള്ള വ്യത്യാസം}}{x \text{ നിർദ്ദേശാങ്കമൂല്യങ്ങളിലുള്ള വ്യാത്യാസം}} = \frac{3}{3} = 1$

### 5.4.2 സമാന്തരരേഖകളുടെ ചായ്വുകൾ

രണ്ട് ലംബമല്ലാത്ത നേർരേഖകൾ സമാന്തരമായിരുന്നാൽ ചായ്വുകൾ തുല്യമാണ്.

$l_1$, $l_2$ എന്നീ ലംബമല്ലാത്ത നേർരേഖകളുടെ ചായ്വുകൾ , $m_2$ ആകുന്നു.

ഈ രേഖകളുടെ ചെരിവുകോൺ ധനദിശയിൽ $\theta_1$ , $\theta_2$ എന്നിരിക്കട്ടെ.




ചിത്രം. 5.21

$l_1$, $l_2$ സമാന്തരമാണെന്ന് സങ്കൽപ്പിക്കുക.

$\theta_1 = \theta_2$ ($\theta_1$, $\theta_2$ സമാനകോണുകൾആയിരിക്കട്ടെ)

$\tan\theta_1 = \tan\theta_2$

$m_1 = m_2$

അതുകൊണ്ട് ചായ്വുകൾ സമമാണ്.

ലംബമല്ലാത്ത സമാന്തരരേഖകളുടെ ചായ്വുകൾ സമമാണ്

**വിപരീതമായി,**

ചായ്വുകൾ സമമായിരിക്കട്ടെ എന്നാൽ $m_1 = m_2$

$\tan\theta_1 = \tan\theta_2$

$\theta_1 = \theta_2 \ (\because\ 0 \le \theta_1 \le 180°)$



5 CordinateGeo Malayalam.indd 215 20/01/2023 17:54:06

അതായത് സമാനകോണുകൾ സമമായിരിക്കും.

അതുകൊണ്ട്, $l_1$, $l_2$ എന്നീ രേഖകൾ സമാന്തരമാണ് .

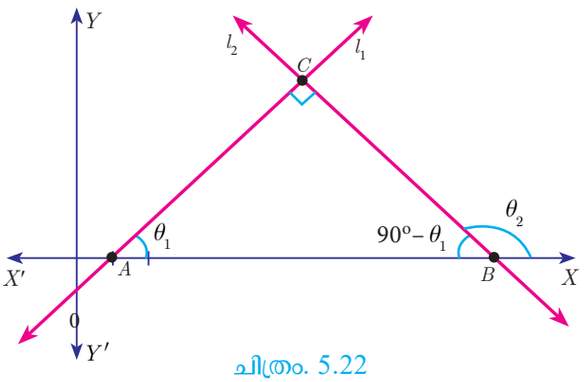
അതായത് ലംബമല്ലാത്ത ചായ്വുകൾ സമമായിട്ടുള്ള രേഖകൾ സമാന്തരമായിരിക്കും.

അതുകൊണ്ട് ലംബമല്ലാത്ത രേഖകൾ സമാന്തരമാകണമെങ്കിൽ അവയുടെ ചായ്വുകൾ സമമായിരിക്കണം

### 5.4.3 ലംബരേഖകളുടെ ചായ്വ്

രണ്ട് ലംബമല്ലാത്ത നേർരേഖകളുടെ ചായ്വുകൾ $m_1$ , $m_2$ എന്നാൽ $m_1 m_2 = -1$ എങ്കിൽ രണ്ടുനേർരേഖകൾ പരസ്പരം ലംബമാണ്.

$l_1$, $l_2$ എന്നീ രണ്ട് ലംബമല്ലാത്ത നേർരേഖകളാണെന്നിരിക്കട്ടെ അവയുടെ ചായ്വുകൾ $m_1$ , $m_2$ , ഉം ചരിവുകോൺ $\theta_1$ , $\theta_2$ എന്നിങ്ങനെ ആകുന്നു.



ചിത്രം. 5.22

ഇപ്പോൾ $m_1 = \tan\theta_1$ , $m_2 = \tan\theta_2$

$l_1$, $l_2$ എന്നീ രേഖകൾ പരസ്പരം ലംബമാണെന്ന് നമുക്ക് സങ്കൽപ്പിക്കാം.

$\angle ABC = 90° - \theta_1$ ( $\Delta ABC$ യുടെ കോണുകളുടെ കൂട്ടുതുക $180°$ )

പരസ്പരം വിപരീതമായ $\theta_2$, $90° - \theta_1$, എന്നീ കോണുകളിലൂടെ $l_2$ ന്റെ ചായ്വിനെ അളക്കുമ്പോൾ നമുക്കു ലഭിക്കുന്നത്

$$\tan\theta_2 = -\tan(90° - \theta_1)$$

$$= \frac{-\sin(90° - \theta_1)}{\cos(90° - \theta_1)} = \frac{-\cos\theta_1}{\sin\theta_1} = -\cot\theta_1 \quad , \tan\theta_2 = -\frac{1}{\tan\theta_1}$$

$$\tan\theta_1 . \tan\theta_2 = -1$$

$$m_1 . m_2 = -1 .$$

അതായത്, $l_1$ രേഖ $l_2$ രേഖയ്ക്ക് ലംബമാകുമ്പോൾ $m_1 m_2 = -1$ .

**വിപരീതമായി,**

$m_1 m_2 = -1$ . എന്ന സ്ഥിതിയിൽ $l_1$, $l_2$ എന്നീ ലംബമല്ലാത്ത രേഖകൾക്ക് ചായ്വുകൾ യഥാക്രമം $m_1$ , $m_2$ എന്നിരിക്കട്ടെ

ആയതുകൊണ്ട് $m_1 = \tan\theta_1$ , $m_2 = \tan\theta_2$ ലഭിക്കുന്നു.

$$\tan\theta_1 \tan\theta_2 = -1$$

$$\tan\theta_1 = -\frac{1}{\tan\theta_2}$$

$$\tan\theta_1 = -\cot\theta_2$$

$$\tan\theta_1 = -\tan(90° - \theta_2)$$

$$\tan\theta_1 = \tan\left(-(90° - \theta_2)\right) = \tan(\theta_2 - 90°)$$

$$\theta_1 = \theta_2 - 90° \qquad (\because \ 0 \le \theta_1 \le 180° , \ 0 \le \theta_2 \le 180°)$$



5 CordinateGeo Malayalam.indd 216 20/01/2023 17:54:10

$\theta_2 = 90° + \theta_1$

എന്നാൽ $\Delta ABC$, $\theta_2 = \angle C + \theta_1$

അതുകൊണ്ട്, $\angle C = 90°$

**നിങ്ങൾക്ക് അറിയാമോ**

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ബാഹ്യ കോൺ ആന്തരഎതിർ കോണീ ന്റെ കൂട്ടുതുകയ്ക്ക് തുല്യമായിരിക്കും.

**കുറിപ്പ്**

- $l_1$, $l_2$ എന്നീ രണ്ട് നേർരേഖകൾക്ക് യഥാക്രമം $m_1$, $m_2$ എന്ന് വ്യക്തമായ ചായ്വുകൾ ഉണ്ട് എങ്കിൽ
  - (i) $m_1 = m_2$ ആണെങ്കിൽ മാത്രമെ $l_1$ എന്ന രേഖ $l_2$ എന്ന രേഖയ്ക്ക് സമാന്തരമാവുകയുള്ളൂ.
  - (ii) $m_1 m_2 = -1$. ആണെങ്കിൽ മാത്രമേ $l_1$ രേഖ $l_2$ രേഖയ്ക്ക് ലംബമാവുകയുള്ളൂ.

**ഉദാ 5.8 :**(i) ചെരിവുകോൺ $30°$ ഉള്ള ഒരു രേഖയുടെ ചായ്വ് എന്താണ്?

(ii) $\sqrt{3}$ ചായ്വുള്ള ഒരുരേഖയുടെ ചരിവുകോൺ എത്രയാണ്?

**നിർദ്ധാരണം** (i) ഇവിടെ $\theta = 30°$

ചായ്വ് $m = \tan\theta$

അതുകൊണ്ട് ചായ്വ് $m = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

**ചിന്തിക്കുക**

$X$ അക്ഷം $Y$ അക്ഷം എന്നീ നേർരേഖകൾ പരസ്പരം ലംബമായിരിക്കും. $m_1 m_2 = -1$ എന്ന നിബന്ധനശരിയാണോ?

(ii) $m = \sqrt{3}$ തന്നിട്ടുണ്ട്, രേഖയുടെ ചരിവുകോൺ $\theta$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$\tan\theta = \sqrt{3}$

$\theta = 60°$

**ഉദാ 5.9 :** തന്നിട്ടുള്ള ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖയുടെ ചായ്വ് കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) $(-6,1)$ , $(-3,2)$ (ii) $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$ , $\left(\frac{2}{7},\frac{3}{7}\right)$ (iii) $(14,10)$ , $(14,-6)$

**നിർദ്ധാരണം**

(i) $(-6,1)$, $(-3,2)$

ചായ്വ് $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-1}{-3+6} = \frac{1}{3}$.

(ii) $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{2}{7},\frac{3}{7}\right)$

ചായ്വ് $= \frac{\frac{3}{7} - \frac{1}{2}}{\frac{2}{7} + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{6-7}{14}}{\frac{6+7}{21}}$

$= -\frac{1}{14} \times \frac{21}{13} = -\frac{3}{26}$.

**പുരോഗതി പരിശോധന**

വിട്ടുപോയ ഭാഗങ്ങൾ പൂരിപ്പിക്കുക

| S.No. | ബിന്ദുക്കൾ | ചായ്വ് |
|---|---|---|
| 1 | $A(-a,\ b)$, $B(3a,-b)$ | |
| 2 | $A(2,\ 3)$, $B(_,_)$ | 2 |
| 3 | | 0 |
| 4 | | നിർവ്വചിച്ചിട്ടില്ല |

(iii) $(14,10)$ , $(14,-6)$

ചായ്വ് $= \frac{-6-10}{14-14} = \frac{-16}{0}$.

ചായ്വ് നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ല.



5 CordinateGeo Malayalam.indd 217 20/01/2023 17:54:14

**ഉദാ 5.10 :** $r$ എന്ന രേഖ $(-2, 2)$ , $(5, 8)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നു. $s$ എന്ന രേഖ $(-8, 7)$, $(-2, 0)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നു $r$ എന്ന രേഖ $s$ എന്ന രേഖയ്ക്ക് ലംബമാണോ?

**നിർദ്ധാരണം** $r$ എന്ന രേഖയുടെ ചായ്‌വ $m_1 = \dfrac{8-2}{5+2} = \dfrac{6}{7}$

$s$ എന്ന രേഖയുടെ ചായ്‌വ $m_2 = \dfrac{0-7}{-2+8} = \dfrac{-7}{6}$

ചായ്‌വുകളുടെ ഗുണനഫലം $= \dfrac{6}{7} \times \dfrac{-7}{6} = -1$

അതായത്, $m_1 m_2 = -1$

അതുകൊണ്ട് $r$ എന്ന രേഖ $s$ എന്ന രേഖയ്ക്ക് ലംബമാണ്.

**ഉദാ 5.11 :** $p$ എന്ന രേഖ $(3,-2)$ , $(12,4)$ എന്നീബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നു. $q$ എന്ന രേഖ $(6,-2)$ , $(12,2)$ . എന്നീബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നു. $p$ എന്ന രേഖ $q$ എന്ന രേഖയ്ക്ക് സമാന്തരമാണോ ?

**നിർദ്ധാരണം** $p$ എന്ന രേഖയുടെ ചായ്‌വ് $m_1 = \dfrac{4+2}{12-3} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$

$q$ എന്ന രേഖയുടെ ചായ്‌വ് $m_2 = \dfrac{2+2}{12-6} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

അതുകൊണ്ട് $p$ രേഖയുടെ ചായ്‌വ് $=$ $q$ രേഖയുടെ ചായ്‌വ്.

അതിനാൽ $p$ രേഖ $q$ രേഖയ്ക്ക് സമാന്തരമാണ്.

**ഉദാ 5.12 :** $(-2,5)$ , $(6,-1)$ , $(2,2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ സമരേഖീയമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

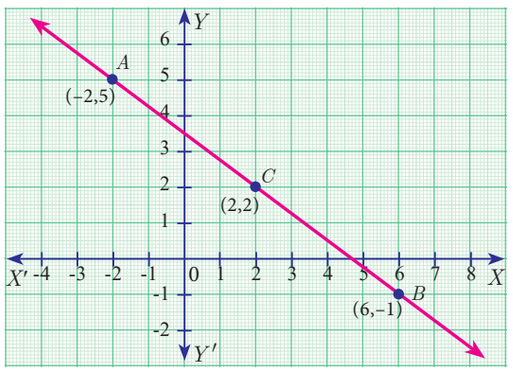
**നിർദ്ധാരണം** ശീർഷങ്ങൾ $A(-2,5)$ , $B(6,-1)$ , $C(2,2)$ ആകുന്നു.

$AB$ യുടെ ചായ്‌വ് $= \dfrac{-1-5}{6+2} = \dfrac{-6}{8} = \dfrac{-3}{4}$

$BC$ യുടെ ചായ്‌വ് $= \dfrac{2+1}{2-6} = \dfrac{3}{-4} = \dfrac{-3}{4}$

$AB$ യുടെ ചായ്‌വ് $=$ $BC$ യുടെ ചായ്‌വ്

അതുകൊണ്ട് $A$, $B$, $C$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഒരേരേഖയിൽ കാണപ്പെടുന്നു.



ചിത്രം. 5.23

അതുകൊണ്ട് $A$, $B$ , $C$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ സമരേഖീയമാകുന്നു.

**ഉദാ 5.13 :** $A(1,-2)$ , $B(6,-2)$, $C(5,1)$, $D(2,1)$ എന്നിവ നാലു ബിന്ദുക്കളാണെന്നിരിക്കട്ടെ

(i) (a) $AB$ (b) $CD$ എന്നീ രേഖാഖണ്ഡങ്ങളുടെ ചായ്‌വ് കണ്ടുപിടിക്കുക.

(ii) (a) $BC$ (b) $AD$ എന്നീ രേഖാഖണ്ഡങ്ങളുടെ ചായ്‌വ് കണ്ടുപിടിക്കുക.

(iii) ഉത്തരത്തിൽ നിന്നും നിങ്ങൾ മനസ്സിലാക്കുന്നത് എന്താണ്.

**നിർദ്ധാരണം** (i) (a) ചായ്‌വ് $AB = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{-2+2}{6-1} = 0$

(b) ചായ്‌വ് $CD = \dfrac{1-1}{2-5} = \dfrac{0}{-3} = 0$

നിങ്ങൾക്ക് അറിയാമോ

രണ്ടു ജോഡി വിപരീത വശങ്ങളുടെ ചായ്‌വുകളും സമമാണെങ്കിൽ ചതുർഭുജത്തിനെ സാമാന്തരികമെന്നു പറയുന്നു.



5 CordinateGeo Malayalam.indd 218 20/01/2023 17:54:17

(ii) (a) ചായ്‌വ് $BC = \frac{1+2}{5-6} = \frac{3}{-1} = -3$

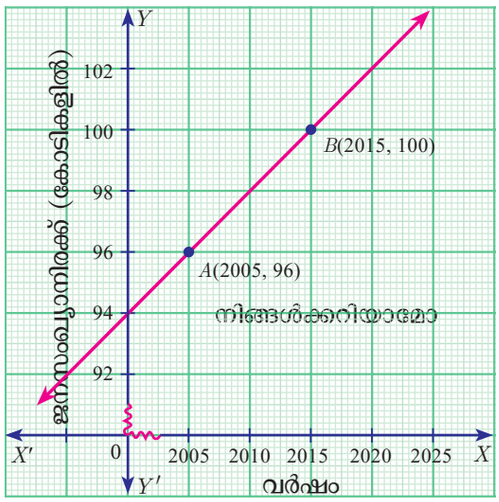
(b) ചായ്‌വ് $AD = \frac{1+2}{2-1} = \frac{3}{1} = 3$

(iii) AB യുടെയും CD യുടെയും ചായ്‌വുകൾ തുല്യമാണ്. അതുകൊണ്ട് AB, CD സമാന്തരമാണ്. അതുപോലെ BC യുടേയും AD യുടേയും ചായ്‌വുകൾ സമമല്ലാത്തതുകൊണ്ട് അവസമാന്തരമല്ല.

അതുകൊണ്ട് ഇതിൽ നിന്നും മനസ്സിലാകുന്നത് ABCD എന്ന ചതുർഭുജം ഒരു ട്രപ്പീസിയം (ലംബകം ആകുന്നു)

**ഉദാ 5.14 :** ജനസംഖ്യവളർച്ചയെ (കോടികളിൽ) കുറിക്കുന്ന ഒരു ഗ്രാഫ് എടുക്കുക. AB രേഖയുടെ ചായ്‌വിനെ കണ്ടുപിടിച്ച് 2030 ലെ ജനസംഖ്യാനിരക്കിനെ കണക്കാക്കുക.?

**നിർദ്ധാരണം** $AB$ എന്ന രേഖയിൽ $A(2005, 96)$, $B(2015, 100)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഉണ്ട്.



ചിത്രം. 5.24

AB യുടെ ചായ്‌വ് $= \frac{100-96}{2015-2005} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

2030 ലെ ജനസംഖ്യാവളർച്ച $k$ കോടികൾ എന്നിരിക്കട്ടെ.

$C$ എന്ന ബിന്ദു $(2030, k)$ $AB$ യിലാണെന്ന് വിചാരിക്കുക,

$AC$ യുടെ ചായ്‌വ് $= AB$ യുടെ ചായ്‌വ്

$\frac{k-96}{2030-2005} = \frac{2}{5}$ നൽകുന്നത് $\frac{k-96}{25} = \frac{2}{5}$

$k - 96 = 10$

$k = 106$ ആകുന്നു

അതുകൊണ്ട് 2030 ലെ ജനസംഖ്യാനിരക്ക് $= 106$ കോടികൾ.

**ഉദാ 5.15 :** പൈഥഗോറസ്സ് നിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിക്കാതെ $(1, -4)$, $(2, -3)$, $(4, -7)$ ബിന്ദുക്കൾ ഒരു സമകോണത്രികോണമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

**നിർദ്ധാരണം** തന്നിട്ടുള്ള ബിന്ദുക്കൾ $A(1, -4)$, $B(2, -3)$, $C(4, -7)$ ആണെന്നിരിക്കട്ടെ.

AB യുടെ ചായ്‌വ് $= \frac{-3+4}{2-1} = \frac{1}{1} = 1$

BC യുടെ ചായ്‌വ് $= \frac{-7+3}{4-2} = \frac{-4}{2} = -2$

AC യുടെ ചായ്‌വ് $= \frac{-7+4}{4-1} = \frac{-3}{3} = -1$

$AB \times$ യുടെ ചായ്‌വ് $AC$ യുടെ ചായ്‌വ് $= (1)(-1) = -1$

AB, AC യ്ക്കു ലംബമാകുന്നു. $\angle A = 90°$

അതായത്, $\Delta ABC$ ഒരു സമകോണത്രികോണമാകുന്നു.

**ചിന്തിക്കുക**

യാഥാർത്ഥ ജീവിതസാഹചര്യങ്ങളിൽ ചായ്‌വ് എന്ന ആശയത്തിന്റെ ഉപയോഗത്തെ കുറിക്കുന്ന മൂന്നു ഉദാഹരണങ്ങൾ നല്കുക.



5 CordinateGeo Malayalam.indd 219 20/01/2023 17:54:20

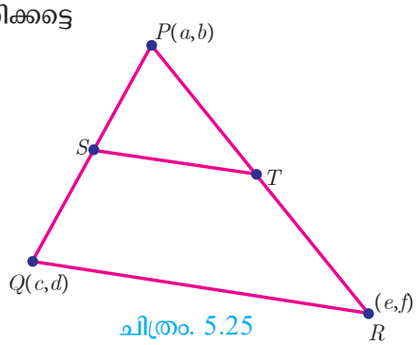
**ഉദാ 5.16 :** ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടുവശങ്ങളിലുള്ള മധ്യബിന്ദുക്കളെയോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡം മൂന്നാമത്തെ വശത്തിന് സമാന്തരമാണെന്നും അതിന്റെ പകുതി നീളത്തിന് സമമാണെന്നും തെളിയിക്കുക.

**നിർദ്ധാരണം** $P(a,b)$ $Q(c,d)$, $R(e,f)$ എന്നിവ ത്രികോണത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങളാണെന്നിരിക്കട്ടെ.

$PQ$ വിന്റെ മധ്യബിന്ദു $S$ , $QR$ ന്റെ മധ്യബിന്ദു $T$ എന്നും ഇരിക്കട്ടെ

അതുകൊണ്ട്, $S = \left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$ and $T = \left(\frac{a+e}{2}, \frac{b+f}{2}\right)$

$ST$ യുടെ ചായ്‌വ് $= \dfrac{\frac{b+f}{2} - \frac{b+d}{2}}{\frac{a+e}{2} - \frac{a+c}{2}} = \dfrac{f-d}{e-c}$



ചിത്രം. 5.25

$QR$ ന്റെ ചായ്‌വ് $= \dfrac{f-d}{e-c}$

അതുകൊണ്ട്, $ST$ , $QR$. ന് സമാന്തരമാകുന്നു. (അവയുടെ ചായ്‌വുകൾ തുല്യമായതുകൊണ്ട്)

മാത്രമല്ല $ST = \sqrt{\left(\frac{a+e}{2} - \frac{a+c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b+f}{2} - \frac{b+d}{2}\right)^2}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{(e-c)^2 + (f-d)^2}$

$ST = \frac{1}{2}QR$

അതുകൊണ്ട് $ST$ , $QR$ ന് സമാന്തരവും അതിന്റെ പകുതിയുമാണ്.

**കുറിപ്പ്**

➢ ഈ ഉദാഹരണത്തിൽ നിന്നും നിർദ്ദേശാങ്കജ്യാമിതി ഉപയോഗിച്ച് ഒരു ജ്യാമിതീയ ഫലത്തെ എങ്ങനെ തെളിയിക്കാം എന്ന് മനസ്സിലാകുന്നു.

## അഭ്യാസം 5.2

1. $x$ -അക്ഷത്തിന്റെ (+) ദിശയിൽ ചരിവുകോണുള്ള രേഖയുടെ ചായ്‌വ് എത്രയാണ്
(i) $90°$ (ii) $0°$
2. ഒരുരേഖയുടെ ചായ്‌വ് (i) 0 (ii) 1 ആണെങ്കിൽ അതിന്റെ ചരിവു കോൺ എത്ര?
3. ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖയുടെ ചായ്‌വ് കണ്ടുപിടിക്കുക
(i) $\left(5, \sqrt{5}\right)$ മൂലബിന്ദുക്കളോടുകൂടി (ii) $(\sin\theta, -\cos\theta)$, $(-\sin\theta, \cos\theta)$
4. $A(5,1)$ , $P$എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖയ്ക്ക് ലംബമായ രേഖയുടെ ചായ്‌വ് എന്താണ്? ഇവിടെ $P$ എന്നത് $(4,2)$, $(-6,4)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്നരേഖാഖണ്ഡത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവാണ്.
5. തന്നിട്ടുള്ള ബിന്ദുക്കൾ സമരേഖീയമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.: $(-3,-4)$, $(7,2)$, $(12,5)$
6. $(3,-1)$, $(a,3)$, $(1,-3)$ എന്നീ മൂന്നു ബിന്ദുക്കൾ സമരേഖീയമാണെങ്കിൽ $a$ യുടെ മൂല്യം കണ്ടു പിടിക്കുക.
7. $(-2,a)$, $(9,3)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന രേഖയുടെ ചായ്‌വ് $-\frac{1}{2}$ ആകുന്നു. $a$ യുടെ മൂല്യം കണ്ടുപിടിക്കുക.
8. $(-2,6)$, $(4,8)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപൊകുന്ന രേഖ $(8,12)$, $(x,24)$. എന്ന ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന രേഖയ്ക്ക് ലംബമാകുന്നു. $x$ ന്റെ മൂല്യം കണ്ടുപിടിക്കുക.
9. തന്നിട്ടുള്ള ബിന്ദുക്കൾ ഒരു സമകോണത്രികോണമാകുന്നു എന്ന് തെളിയിക്കുക അത് പൈഥഗോറസ്സ് സിദ്ധാന്തം വഴി ശരിനോക്കുക
(i) $A(1,-4)$, $B(2,-3)$ and $C(4,-7)$ (ii) $L(0,5)$, $M(9,12)$ and $N(3,14)$



5 CordinateGeo Malayalam.indd 220 20/01/2023 17:54:24

10. തന്നിട്ടുള്ള ബിന്ദുക്കൾ ഒരു സാമാന്തരികമാകുന്നു എന്ന് തെളിയിക്കുക:

$A(2.5, 3.5)$, $B(10, -4)$, $C(2.5, -2.5)$ and $D(-5, 5)$

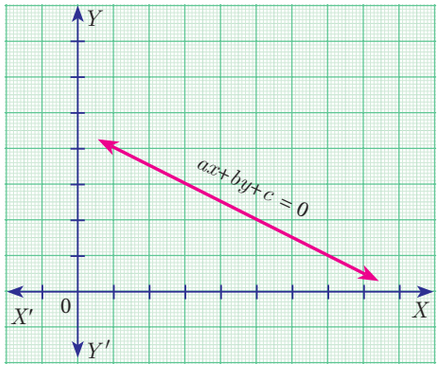
11. $A(2,2)$, $B(-2, -3)$, $C(1, -3)$, $D(x, y)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഒരു സാമാന്തരികമാണെങ്കിൽ $x$ , $y$ ന്റെ മൂല്യം കണ്ടുപിടിക്കുക.

12. $A(3, -4)$, $B(9, -4)$, $C(5, -7)$, $D(7, -7)$. ആണെങ്കിൽ $ABCD$ ഒരു ലംബകമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

13. ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങൾ $A(-4, -2)$, $B(5, -1)$, $C(6, 5)$, $D(-7, 6)$ ആകുന്നു. എങ്കിൽ വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ ഒരു സാമാന്തരികത്തെരൂപീകരിക്കുന്നു എന്ന് തെളിയിക്കുക.

## 5.5 നേർരേഖയുടെ സമീകരണം

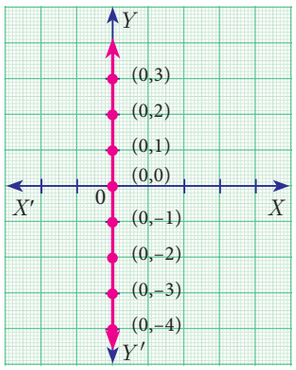
$ax+by+c = 0$ എന്ന നേർരേഖ $x, y$ എന്നീ രണ്ടു ചരങ്ങളുള്ള ഏകഘാത സമീകരണം എപ്പോഴും ഒരു നേർരേഖയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. $a, b, c$ എന്നിവ വാസ്തവിക സംഖ്യകളും, $a, b$ ഏതെങ്കിലും ഒന്ന് പൂജ്യമല്ലാത്തതും ആകുന്നു.



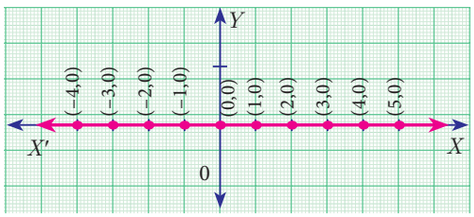
ചിത്രം. 5.26

### 5.5.1 നിർദ്ദേശാങ്ക അക്ഷങ്ങളുടെ സമീകരണം

$x$ അക്ഷത്തെയും $y$ അക്ഷത്തെയും ചേർത്ത് നിർദ്ദേശാങ്കഅക്ഷങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നു. OY ($y$ അക്ഷത്തിൽ) ലെ എല്ലാ ബിന്ദുക്കളിലും $x$ നിർദ്ദേശാങ്കം പൂജ്യമാകുന്നു.



ചിത്രം. 5.27

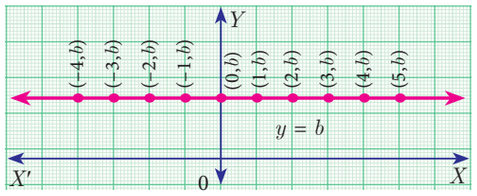


ചിത്രം. 5.28

അതുകൊണ്ട് OY യുടെ സമീകരണം ($y$ അക്ഷം) $x=0$ ആകുന്നു. OX ($x$ അക്ഷത്തിൽ) ലെ എല്ലാ ബിന്ദുക്കളേയും നിർദ്ദേശാങ്കം ചെയ്യുന്ന $y$ പൂജ്യമാകുന്നു. അതുകൊണ്ട് OX യുടെ സമീകരണം ($x$ അക്ഷം) $y=0$ ആകുന്നു.

### 5.5.2 $X$ അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായ നേർരേഖയുടെ സമീകരണം

X അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായ നേർരേഖ $AB$ എന്നിരിക്കട്ടെ. അതിന്റെ ദൂരം '$b$' ആകുന്നു. എങ്കിൽ. '$AB$' യുടെ എല്ലാ ബിന്ദുവിലും $y$ നിർദ്ദേശാങ്കം '$b$' ആകുന്നു അതുകൊണ്ട് (ചിത്രം 5.29) $AB$ യുടെ സമീകരണം $y = b$ ആകുന്നു.



ചിത്രം. 5.29

**കുറിപ്പ്**

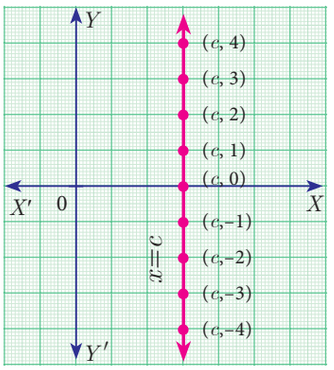
- $b > 0$, ആണെങ്കിൽ $y=b$ എന്ന രേഖ $X$ അക്ഷത്തിന്റെ മുകളിലായിരിക്കും
- $b < 0$, ആണെങ്കിൽ $y=b$ എന്ന രേഖ $X$ അക്ഷത്തിന്റെ താഴെ ആയിരിക്കും
- $b = 0$, ആണെങ്കിൽ $y=b$ എന്ന രേഖ $X$ അക്ഷത്തിൽ ആയിരിക്കും.



5 CordinateGeo Malayalam.indd 221 20/01/2023 17:54:26

### 5.5.3 $Y$ അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായ നേർ രേഖയുടെ സമീകരണം

'c' ദൂരത്തിൽ $Y$ അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായ നേർ രേഖ $CD$ ആയിരിക്കട്ടെ.എങ്കിൽ $CD$ യുടെ ഓരോ ബിന്ദുവിലും $x$ നിർദ്ദേശാങ്കം 'c' ആകുന്നു. അതിനാൽ $CD$ യുടെ സമീകരണം $x = c$ ആകുന്നു.. (ചിത്രം 5.30)



ചിത്രം. 5.30

**കുറിപ്പ്**

- $c > 0$, ആണെങ്കിൽ $x=c$ എന്ന രേഖ $Y$ അക്ഷത്തിന്റെ വലതുവശത്തിലാകുന്നു
- $c < 0$, ആണെങ്കിൽ $x=c$ എന്ന രേഖ $Y$ അക്ഷത്തിന്റെ ഇടതുവശത്തിലാകുന്നു
- $c = 0$ ,ആണെങ്കിൽ $x=c$ എന്ന രേഖ $Y$ അക്ഷത്തിലാകുന്നു.

**ഉദാ 5.17 :** (5,7) എന്ന ബിന്ദുവഴി കടന്നുചൊല്ലുന്നനേർരേഖയുടെ സമീകരണം കണ്ടുപിടിക്കുക (i) $X$ അക്ഷത്തിന് സമാന്തരവും (ii) $Y$അക്ഷത്തിന് സമാന്തരവും .

**നിർദ്ധാരണം** (i)$X$അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായ ഏതൊരു നേർരേഖയുടെയും സമീകരണം $y=b$ ആകുന്നു.

അത് (5,7), എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നു ചെല്ലുന്നതുകൊണ്ട് $b = 7$ .

അതുകൊണ്ട് ആവശ്യപ്പെട്ട സമീകരണം $y=7$ ആകുന്നു.

(ii) $Y$ അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായ ഏതൊരുനേർരേഖയുടെയും സമീകരണം $x=c$ ആകുന്നു.

ഇത്(5,7), എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നു ചെല്ലുന്നതുകൊണ്ട് $c = 5$

അതുകൊണ്ട് ആവശ്യപ്പെട്ട സമീകരണം $x=5$ആകുന്നു.

### 5.5.4 ചായ്‌വ് അന്തഃഖണ്ഡരൂപം

ലംബമല്ലാത്ത എല്ലാനേർരേഖയും $Y$ അക്ഷത്തിൽ ഒരു ബിന്ദുവിൽ ഛേദിക്കുന്നു. ഈ ബിന്ദുവിന്റെ $y$ നിർദ്ദേശാങ്കത്തെ രേഖയുടെ $y$ അന്തഃഖണ്ഡം എന്നു പറയുന്നു.

$m$, ചായ്‌വുള്ള ഒരു രേഖ $c$ യിൽ ഛേദിക്കുന്നു ഇതിനെ $y=mx+c$ എന്നെഴുതാം

ഈ സമീകരണത്തെ നമുക്ക് രേഖയുടെ സമീകരണത്തിന്റെ ചായ്‌വ് അന്തഃഖണ്ഡരൂപം എന്നുവിളിക്കുന്നു.




- ചായ്‌വ് $m$, $m\neq0$ ഉള്ള ഒരു രേഖയുടെ $x$ അന്തഃഖണ്ഡം$d$ ആകുന്നു., എന്നാൽ നേരരേഖയുടെ സമീകരണം $y = m\ (x–d)$.
- ചായ്‌വ് $m$ ഉം മൂലബിന്ദുവഴി കടന്നുചെല്ലുന്നതുമായ നേരരേഖയുടെ സമീകരണം $y = mx$ .

**ഉദാ 5.18 :** താഴെ തന്നവയ്ക്ക് നേർരേഖയുടെ സമീകരണം കാണുക

(i) ചായ്‌വ് 5 , $y$ അന്തഃഖണ്ഡം $-9$ ആകുന്നു. (ii)ചരിവുകോൺ $45°$ , $y$ അന്തഃഖണ്ഡം 11 ആകുന്നു.

**നിർദ്ധാരണം** (i) ചായ്‌വ് $= 5$, $y$ അന്തഃഖണ്ഡം, $c = -9$

നേരരേഖയുടെ സമീകരണം $y = mx + c$

$y = 5x - 9$ , $5x - y - 9 = 0$

(ii) $\theta = 45°$, $y$ അന്തഃഖണ്ഡം, $c = 11$

ചായ്‌വ് $m = \tan\theta = \tan 45° = 1$

നേർരേഖയുടെ സമീകരണം $y = mx + c$

അതുകൊണ്ട്, $y= x + 11$ , $x - y + 11 = 0$



5 CordinateGeo Malayalam.indd 222 20/01/2023 17:54:29

**ഉദാ 5.19 :** $8x - 7y + 6 = 0$ എന്ന നേർരേഖയുടെ ചായ്‌വും $y$ അന്തഃഖണ്ഡവും കണ്ടുപിടിക്കുക

**നിർദ്ധാരണം** നേർരേഖയുടെ സമീകരണം $8x - 7y + 6 = 0$

$7y = 8x + 6$ (നേർരേഖയുടെ സമീകരണം $y = mx + c$)

$$y = \frac{8}{7}x + \frac{6}{7} \quad \ldots(1)$$

$y = mx + c$ ആണെങ്കിൽ

ചായ്‌വ് $m = \frac{8}{7}$, $y$ അന്തഃഖണ്ഡം $c = \frac{6}{7}$



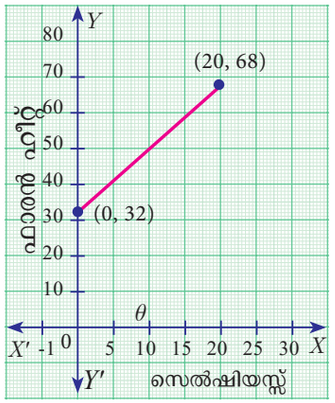

$xy$ പ്രതലത്തിലെ $(x, y)$ എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ $x$ നിർദ്ദേശാങ്കത്തിനെ "Abscissae" എന്നും $y$ നിർദ്ദേശാങ്കത്തിനെ "Ordinate" എന്നും വിളിക്കുന്നു.

**ഉദാ 5.20 :** താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ഗ്രാഫ് താപനില $y$ യെ (ഫാരൻ ഹീറ്റ്) താപനില $x$ മായി (Celsius) ബന്ധപ്പെടുത്തുന്നു. (a) ചായ്‌വ്, $y$ അന്തഃഖണ്ഡം എന്നിവകണ്ടുപിടിക്കുക (b) രേഖയുടെ സമീകരണം എഴുതുക (c) ഭൂമിയുടെ ശരാശരി താപനില $25°$ ആകുന്നു. എന്നാൽ ഫാരൻഹീറ്റ് ഡിഗ്രിയിൽ ഭൂമിയുടെ ശരാശരി താപനില കണ്ടുപിടിക്കുക?

**നിർദ്ധാരണം** (a) ചിത്രത്തിൽ നിന്നും ചായ്‌വ് $m = \frac{y \text{ നിർദ്ദേശാങ്കമൂല്യങ്ങളിലുള്ള വ്യത്യാസം}}{x \text{ നിർദ്ദേശാങ്കമൂല്യങ്ങളിലുള്ള വ്യാത്യാസം}} = \frac{68 - 32}{20 - 0} = \frac{36}{20} = \frac{9}{5} = 1.8$

ഈ രേഖ $Y$ അക്ഷത്തിൽ $(0, 32)$ ഛേദിച്ചപ്പോൾ

അതുകൊണ്ട് ചായ്‌വ് $\frac{9}{5}$, $y$ അന്തഃഖണ്ഡം 32 ആകുന്നു.




ചിത്രം. 5.31

(b) ചായ്‌വ് $y$ അന്തഃഖണ്ഡം സമീകരണം ഉപയോഗിച്ചാൽ

സമീകരണം $y = \frac{9}{5}x + 32$

(c) സെൽഷിയെസിൽ ഭൂമിയുടെ ശരാശരി താപനില $25°$.ആകുന്നു. ഫാരൻഹീറ്റിൽ ഭൂമിയുടെ ശരാശരി താപനില കണ്ടുപിടിക്കാനായി $x = 25$ ആകുമ്പോൾ $y$ യുടെ മൂല്യം

$$y = \frac{9}{5}x + 32$$

$$y = \frac{9}{5}(25) + 32$$

$$y = 77$$

**കുറിപ്പ്**

- സെൽഷിയസ്സിനെ ഫാരൻ ഹീറ്റിലോട്ട് മാറ്റാനുള്ള സൂത്രം $F = \frac{9}{5}C + 32$. ഇത് ഉദാഹരണത്തിൽ ഉണ്ടായതുപോലെ നേർരേഖയെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന രേഖീയ സമീകരണമാണ്.

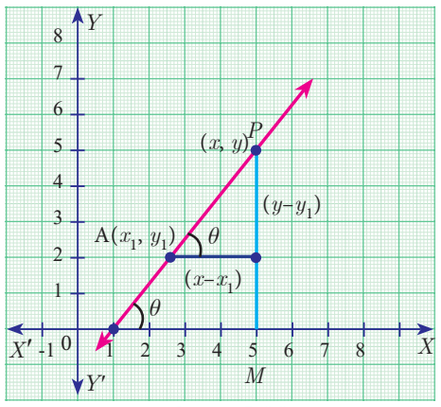
അതുകൊണ്ട് ഭൂമിയുടെ ശരാശരി താപനില $77°$ F ആകുന്നു.

### 5.5.5 ബിന്ദു- ചായ്‌വ് രൂപം

$A(x_1, y_1)$ എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന ചായ്‌വ് $m$ ഉള്ള ഒരു നേർരേഖയുടെ സമീകരണത്തെ നമുക്ക് കണ്ടുപിടിക്കാം.

$P(x, y)$ എന്നത് തന്നിട്ടുള്ള രേഖയിൽ $A$ അല്ലാത്തൊരു ബിന്ദുവാണ്. $A(x_1, y_1)$, $P(x, y)$ ഇവയെ യോജിപ്പിക്കുന്നരേഖയുടെ ചായ്‌വ് താഴെ കാണുന്ന രീതിയിലാണ്.

$$m = \tan\theta = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$




ചിത്രം. 5.32



5 CordinateGeo Malayalam.indd 223 20/01/2023 17:54:33

അതുകൊണ്ട്, ആവശ്യപ്പെട്ടരേഖയുടെ സമീകരണം
$y - y_1 = m(x - x_1)$ (ബിന്ദു- ചായ്‌വ് രൂപം)

**ചിന്തിക്കുക**

ഒരു നേർരേഖയുടെ സമീകരണം ചായ്‌വ് അന്തഃഖണ്ഡരൂപത്തിൽ $Y$ അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമാകുമ്പോൾ അതിനെ രേഖപ്പെടുത്താൻ സാധിക്കുമോ?

**ഉദാ 5.21 :** $(3,-4)$ ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന, ചായ്‌വ് $\frac{-5}{7}$ എന്ന രേഖയുടെ സമീകരണം കണ്ടുപിടിക്കുക

**നിർദ്ധാരണം** തന്നിട്ടുള്ളത് $(x_1, y_1) = (3,-4)$ $m = \frac{-5}{7}$

ഒരു നേർരേഖയുടെ ബിന്ദു ചായ്‌വ് രൂപത്തിന്റെ സമീകരണം $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y + 4 = -\frac{5}{7}(x - 3)$$

$$5x + 7y + 13 = 0$$

**ഉദാ 5.22 :** $A(1,4)$ എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നതും $(2,5)$, $(4,7)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖയ്ക്ക്‌ലംബവുമായ ഒരു രേഖയുടെ സമീകരണം കണ്ടുപിടിക്കുക.

**നിർദ്ധാരണം**

തന്നിട്ടുള്ള ബിന്ദുക്കൾ $A(1,4)$, $B(2,5)$, $C(4,7)$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

$BC$ എന്ന രേഖയുടെ ചായ്‌വ് $= \frac{7-5}{4-2} = \frac{2}{2} = 1$

ആവശ്യപ്പെട്ട രേഖയുടെ ചായ്‌വ് $m$ ആണെന്നിരിക്കട്ടെ.

ആവശ്യപ്പെട്ട രേഖ $BC$ യ്ക്ക് ലംബമായതുകൊണ്ട്,

$$m \times 1 = -1$$

$$m = -1$$

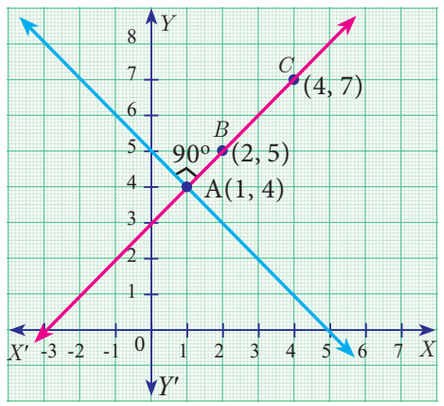
ആവശ്യപ്പെട്ട രേഖ ബിന്ദു $A$ (1,4) ലൂടെ കടന്നുപോകുന്നു.

ആവശ്യപ്പെട്ട നേർരേഖയുടെ സമീകരണം $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 4 = -1(x - 1)$$

$$y - 4 = -x + 1 \text{ ആകുന്നു.}$$

$$x + y - 5 = 0 \text{ ലഭിക്കുന്നു.}$$



ചിത്രം. 5.33

### 5.5.6 രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ രൂപം

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ എന്നിവ രണ്ട് വ്യത്യസ്ത ബിന്ദുക്കളാണെന്നിരിക്കട്ടെ ഈ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന നേർരേഖയുടെ ചായ്‌വ് $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $(x_2 \neq x_1)$.

ബിന്ദു - ചായ്‌വ് രൂപത്തിലുള്ള നേർരേഖയുടെ സമീകരണത്തിൽ നിന്നും

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

അതുകൊണ്ട്, $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ (ഇത് രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ രൂപത്തിന്റെ രേഖയുടെ സമീകരണമാണ്)

**ഉദാ 5.23 :** $(5,-3)$, $(7,-4)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന നേർരേഖയുടെ സമീകരണം കണ്ടുപിടിക്കുക.

**നിർദ്ധാരണം** $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന നേർരേഖയുടെ സമീകരണം



5 CordinateGeo Malayalam.indd 224 20/01/2023 17:54:38

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

ബിന്ദുക്കളെ പ്രതിസ്ഥാപിക്കുമ്പോൾ,

$$\frac{y+3}{-4+3} = \frac{x-5}{7-5}$$

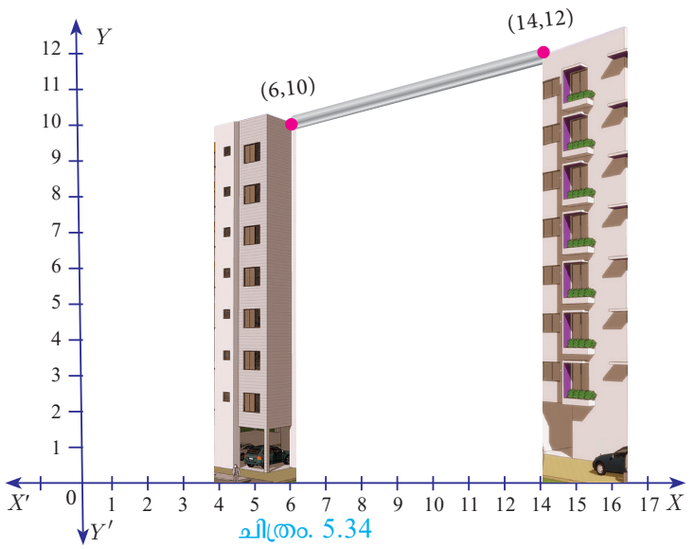
$$2y+6 = -x+5$$

അതുകൊണ്ട്, $x+2y+1 = 0$

**നിങ്ങൾക്ക് അറിയാമോ**

ഗലീലിയോ, ന്യൂട്ടൻ തുടങ്ങിയ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞൻമാർ പ്രതലത്തിലും ബഹിരാകാശത്തിലും വസ്തുക്കളുടെ ചലന സ്വഭാവത്തെകുറിക്കുന്നതിന് നിർദ്ദേശാങ്കജ്യാമിതിയെ ഉപയോഗിച്ചിരുന്നു.

**ഉദാ 5.24 :** വ്യത്യസ്ത ഉയരങ്ങളിലുള്ള രണ്ടു കെട്ടിടങ്ങൾ പരസ്പരം എതിർ ദിശയിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു. കെട്ടിടത്തിന്റെ മേൽതട്ടുകളെ $(6,10)$ ൽ നിന്നും $(14,12)$, ലേക്ക് ഒരു വലിയ ദണ്ഡുകൊണ്ട് യോജിപ്പിച്ചാൽ ആ ദണ്ഡിന്റെ സമീകരണത്തെ കണ്ടു പിടിക്കുക?



ചിത്രം. 5.34

**നിർദ്ധാരണം** $A(6,10)$, $B(14,12)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ കെട്ടിടത്തിന്റെ മേൽതട്ടിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

ദണ്ഡിന്റെ സമീകരണമെന്നത് $A(6,10)$, $B(14,12)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന സമീകരണമാകുന്നു.

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \quad , \quad \frac{y-10}{12-10} = \frac{x-6}{14-6}$$

$$\frac{y-10}{2} = \frac{x-6}{8}$$

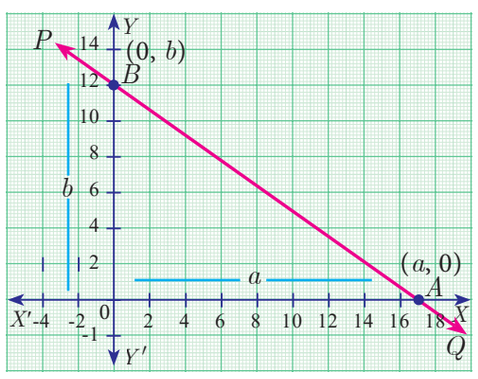
അതുകൊണ്ട്, $x-4y+34 = 0$

അതിനാൽ ദണ്ഡിന്റെ സമീകരണം $x-4y+34=0$ ആകുന്നു.

### 5.5.7 അന്തഃഖണ്ഡ രൂപം

ഒരു നിർദ്ദേശാങ്കഅക്ഷത്തിൽ യഥാക്രമം $a$ യിലും $b$ യിലും ഛേദിക്കുന്ന രേഖയുടെ സമീകരണം കണ്ടുപിടിക്കാം.

$PQ$ എന്നത് $X$ അക്ഷത്തിൽ $A$ യിലും $Y$ അക്ഷത്തിൽ $B$. യിലും സന്ധിക്കുന്ന രേഖയാണെന്നിരിക്കട്ടെ. $OA=a$, $OB=b$. അങ്ങനെയെങ്കിൽ $A$, $B$ യുടെ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ യഥാക്രമം $(a,0)$, $(0,b)$ ആകുന്നു. അതുകൊണ്ട് $A$, $B$ യെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖയുടെ സമീകരണം



ചിത്രം. 5.35

$$\frac{y-0}{b-0} = \frac{x-a}{0-a} \quad , \quad \frac{y}{b} = \frac{x-a}{-a} \quad , \quad \frac{y}{b} = \frac{-x}{a}+1$$

അതുകൊണ്ട്, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ (രേഖയുടെ അന്തഃഖണ്ഡരൂപം)



5 CordinateGeo Malayalam.indd 225 20/01/2023 17:54:41

**പുരോഗതി പരിശോധന** യോജിച്ച കളത്തിൽ പൂരിപ്പിക്കുക

| രൂപം | എപ്പോൾ ഉപയോഗിക്കണം | പേര് |
|---|---|---|
| $y = mx + c$ | ചായ്‌വ് $= m$, അന്തഃഖണ്ഡം $= c$ | |
| $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ | | |
| | അന്തഃഖണ്ഡങ്ങൾ തന്നിട്ടുണ്ട് | അന്തഃഖണ്ഡരൂപം |

**ഉദാ 5.25 :** $(5,7)$ലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന ഒരു രേഖയുടെ സമീകരണം കണ്ടുപിടിക്കുക അക്ഷങ്ങളിലുള്ള അന്തഃഖണ്ഡങ്ങളുടെ അളവുകൾ തുല്യവും ചിഹ്നങ്ങൾ വിപരീതവും ആയിരിക്കും.

**നിർദ്ധാരണം** $x$ അന്തഃഖണ്ഡം '$a$' , $y$ അന്തഃഖണ്ഡം '$-a$' എന്നിരിക്കട്ടെ.

രേഖയുടെ അന്തഃഖണ്ഡസൂത്രം $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

$\frac{x}{a} + \frac{y}{-a} = 1$ ആകുന്നു. (ഇവിടെ $b = -a$)

അതുകൊണ്ട്, $x - y = a$ ...(1)

സമീകരണം (1) , $(5,7)$ ലൂടെ കടന്നുപോകുന്നു

അതുകൊണ്ട് , $5 - 7 = a$ , $a = -2$

നേർരേഖയുടെ ആവശ്യപ്പെട്ട സമീകരണം $x - y = -2$ ; അല്ലെങ്കിൽ $x - y + 2 = 0$

**ഉദാ 5.26 :** $4x - 9y + 36 = 0$ എന്ന രേഖ നിർദ്ദേശാങ്ക അക്ഷത്തിൽ ഉണ്ടാക്കുന്ന അന്തഃഖണ്ഡങ്ങളെ കണ്ടുപിടിക്കുക.

**നിർദ്ധാരണം** തന്നിട്ടുള്ള രേഖയുടെ സമീകരണം $4x - 9y + 36 = 0$ ആകുന്നു.

അതിനെ നമ്മൾ $4x - 9y = -36$ (എന്നെഴുതുന്നു. )

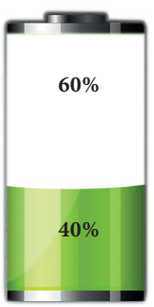
$-36$ കൊണ്ട് വിഭജിക്കുമ്പോൾ, $\frac{x}{-9} + \frac{y}{4} = 1$ ലഭിക്കുന്നു (1)

സമീകരണം (1) നെ അന്തഃഖണ്ഡരൂപവുമായി താരതമ്യം ചെയ്യുമ്പോൾ $x$ അന്തഃഖണ്ഡം $a = -9$ ; $y$ അന്തഃഖണ്ഡം $b = 4$ എന്നു ലഭിക്കുന്നു.

**ഉദാ 5.27 :** ഒരു മൊബൈൽ ഫോൺ അതിന്റെ ബാറ്ററി ഊർജ്ജം 100%. ഉള്ളപ്പോൾ ഉപയോഗിക്കാൻ തുടങ്ങുന്നു. '$x$' മണിക്കൂറുകൾ ഉപയോഗിച്ചതിനുശേഷം അവശേഷിക്കുന്ന ബാറ്ററി ഊർജ്ജത്തിന്റെ ശതമാനം $y$ (ദശാംശത്തിൽ) എന്നിരിക്കട്ടെ. അപ്പോൾ $y = -0.25x + 1$ ആകുന്നു.

(i) ബാറ്ററി ഊർജ്ജം 40% ആയിരിക്കുമ്പോൾ കഴിഞ്ഞുപോയ മണിക്കൂറുകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(ii) ബാറ്ററിയുടെ ഊർജ്ജം തീരുന്നതുവരെ എത്രസമയം എടുത്തു എന്ന് കണ്ടുപിടിക്കുക?



ചിത്രം.. 5.36

**നിർദ്ധാരണം**

(i) ബാറ്ററി ഊർജ്ജം 40%,ത്തിലെത്താൻ ചെലവായ സമയം $y = 0.40$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$0.40 = -0.25x + 1$ , $0.25x = 0.60$

$x = \frac{0.60}{0.25} = 2.4$ മണിക്കൂർ

(ii) ബാറ്ററി ഊർജ്ജം 0 ആണെങ്കിൽ $y = 0$

അതുകൊണ്ട്, $0 = -0.25x + 1$ , $0.25x = 1$ അതിനാൽ $x = 4$ മണിക്കൂർ

അതിനാൽ 4 മണിക്കൂറിനുശേഷം ബാറ്ററിയിൽ ഊർജ്ജം ഉണ്ടായിരിക്കുകയില്ല.



5 CordinateGeo Malayalam.indd 226 20/01/2023 17:54:45

**ഉദാ 5.28 :** നിർദ്ദേശാങ്കഅക്ഷത്തിൽ അന്തഃഖണ്ഡം ചെയ്യുന്ന ഒരു രേഖയുടെ കൂട്ടുതുക 7ആകുന്നു. അത് $(-3, 8)$. ലൂടെ കടന്നുപോകുന്നു. സമീകരണം കണ്ടുപിടിക്കുക.

**നിർദ്ധാരണം** $a$ യും $b$ യും അന്തഃഖണ്ഡം ചെയ്യുമ്പോൾ $a + b = 7$ അല്ലെങ്കിൽ $b = 7 - a$

അന്തഃഖണ്ഡരൂപത്തിൽ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ...(1)

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{7-a} = 1$$

ഈ രേഖ $(-3, 8)$, ലൂടെ കടന്നുപോകുന്നതുകൊണ്ട്

$$\frac{-3}{a} + \frac{8}{7-a} = 1 \text{ അതിനാൽ } -3(7-a) + 8a = a(7-a)$$

$$-21 + 3a + 8a = 7a - a^2$$

$$a^2 + 4a - 21 = 0$$

സമീകരണത്തെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുമ്പോൾ $(a-3)(a+7) = 0$

$a = 3$ or $a = -7$ അല്ലെങ്കിൽ

$a$ (+) ആയതുകൊണ്ട് $a = 3$ അല്ലെങ്കിൽ $b = 7-a = 7-3 = 4$.

അതുകൊണ്ട് $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$

ആവശ്യപ്പെട്ട സമീകരണം-, $4x + 3y - 12 = 0$ ആകുന്നു.

**ഉദാ 5.29 :** ഈസ്റ്റ് അവന്യൂ ക്രോസ് റോഡിനാലും ചുറ്റപ്പെട്ട ഒരു വൃത്താകാര പൂന്തോട്ടം ഉണ്ട് ക്രോസ് റോഡ് വടക്കുവീഥിയെ $D$ യിലും ഈസ്റ്റ് അവന്യൂ വിനെ $E$. യിലും ഛേദിക്കുന്നു. $AD$ വൃത്താകാര പൂന്തോട്ടത്തെ $A(3, 10)$ ൽ സ്പർശിച്ചു നില്ക്കുന്നു. ചിത്രം ഉപയോഗിച്ച്.

(a) താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയുടെ സമീകരണങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുക

(i) ഈസ്റ്റ് അവന്യൂ.

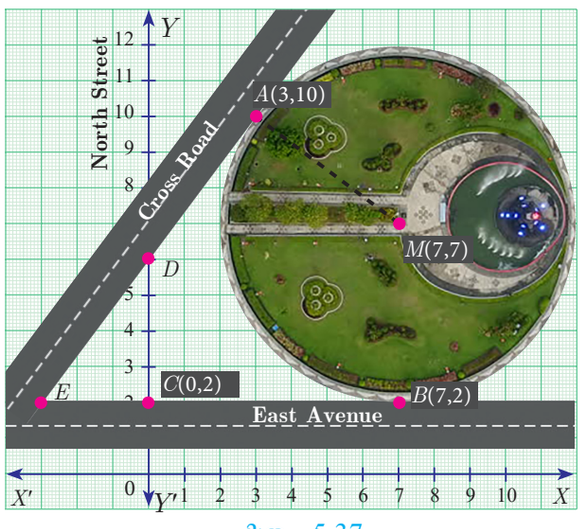
(ii) നോർത്ത് സ്ട്രീറ്റ്

(iii) ക്രോസ്സ് റോഡ്

(b) ക്രോസ്സ് റോഡ് ഇവയെ എവിടെയാണ് ഛേദിക്കുന്നത്

(i) ഈസ്റ്റ് അവന്യൂ ?

(ii) നോർത്ത് സ്ട്രീറ്റ്?



ചിത്രം. 5.37

**നിർദ്ധാരണം** (a) (i) ഈസ്റ്റ് അവന്യൂ എന്നത് $C(0,2)$, $B(7,2)$. യോജിപ്പിക്കുന്ന നേരരേഖയാണ്. അതുകൊണ്ട് രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ രൂപം ഉപയോഗിച്ച് ഈസ്റ്റ് അവന്യൂവിന്റെ സമീകരണം രൂപപ്പെടുത്താം അത്

$$\frac{y-2}{2-2} = \frac{x-0}{7-0}$$

$$\frac{y-2}{0} = \frac{x}{7} \quad , \quad y = 2$$



5 CordinateGeo Malayalam.indd 227 20/01/2023 17:54:48

(ii) $D$ എന്ന ബിന്ദുലംബമായി $C(0,2)$ . നുമുകളിൽ ഉള്ളതിനാൽ $D$ യുടെ $x$ നിർദ്ദേശാങ്കം 0 ആകുന്നു. .

നോർത്ത് സ്ട്രീറ്റിലെ ഏത് ബിന്ദുവിനും $x$ നിർദ്ദേശാങ്കമൂല്യം 0.

പൂജ്യമായതുകൊണ്ട് നോർത്ത് സ്ട്രീറ്റിന്റെ സമീകരണം $x = 0$ ആകുന്നു.

(iii) ക്രോസ്സ് റോഡിന്റെ സമീകരണം കണ്ടുപിടിക്കൽ.

വൃത്താകാരപൂന്തോട്ടത്തിന്റെ കേന്ദ്രം $M$ എന്നത് $(7, 7)$ നും, $A$ എന്നത് $(3, 10)$ ലും കാണപ്പെടുന്നു.

ആദ്യം $MA$, യുടെ ചായ്‌വ് കണ്ടുപിടിക്കുക അതിനെ $m_1$ എന്നു പറയാം

അങ്ങനെ $m_1 = \frac{10-7}{3-7} = \frac{-3}{4}$.

ക്രോസ്സ് റോഡ് MA, യ്ക്ക് ലംബമായതുകൊണ്ട് $m_2$ ക്രോസ്സ് റോഡിന്റെ ചായ്‌വ് ആയതുകൊണ്ട്, $m_1 m_2 = -1$ , $\frac{-3}{4} m_2 = -1$ so $m_2 = \frac{4}{3}$.

ഇപ്പോൾ ക്രോസ്സ് റോഡിന്റെ ചായ്‌വ് $\frac{4}{3}$ അത് $A(3,10)$ എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നു പോകുന്നു.

ക്രോസ്സ് റോഡിന്റെ സമീകരണം $y - 10 = \frac{4}{3}(x - 3)$

$$3y - 30 = 4x - 12$$

അതുകൊണ്ട്, $4x - 3y + 18 = 0$

(b) (i) $D$ എന്നത് $(0,k)$ ആണെങ്കിൽ $D$ ക്രോസ്സ് റോഡിലെ ഒരു ബിന്ദുവാണ്. അതുകൊണ്ട് ക്രോസ്സ് റോഡിന്റെ സമീകരണത്തിൽ നിന്നും $x = 0$, $y = k$ യെ പ്രതിസ്ഥാപിക്കുക,

$0 - 3k + 18 = 0$

$k = 6$ മൂല്യമാണ്

$D$ എന്നത് $(0, 6)$ ആകുന്നു.

(ii) $E$ കണ്ടുപിടിക്കുക $E$ എന്നത് $(q,2)$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$y = 2$ നെ ക്രോസ്സ്റോഡിന്റെ സമീകരണത്തിലിട്ടാൽ ,

നമുക്ക്, $4q - 6 + 18 = 0$ ലഭിക്കുന്നു.

$4q = -12$ എന്നാൽ $q = -3$

$E$ എന്ന ബിന്ദു $(-3,2)$ ആകുന്നു.

അതുകൊണ്ട് ക്രോസ്സ് റോഡ് നോർത്ത് സ്ട്രീറ്റിൽ $D(0, 6)$ ലും ഈസ്റ്റ് അവന്യൂവിൽ E $(-3,2)$ ലും ചേരുന്നു.

NOJFT

**പുരോഗതി പരിശോധന** യോജിച്ച കളളികളിൽ പൂരിപ്പിക്കുക

| ക്രമനമ്പർ | സമീകരണം | ചായ്‌വ് | $x$ അന്തഃഖണ്ഡം | $y$ അന്തഃഖണ്ഡം |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $3x - 4y + 2 = 0$ | | | |
| 2 | $y = 14x$ | | | 0 |
| 3 | | | 2 | –3 |



5 CordinateGeo Malayalam.indd 228 20/01/2023 17:54:51

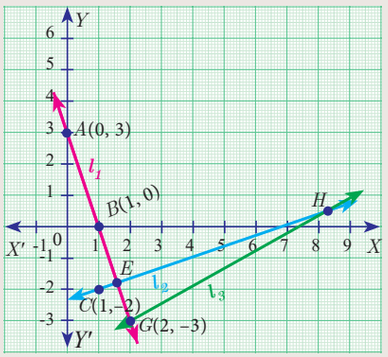
## പ്രവർത്തി 4

$l_1$ എന്ന രേഖ $l_2$ എന്ന രേഖയ്ക്ക് ലംബമാണെങ്കിൽ $l_3$ രേഖയിൽ മൂന്ന് ചായ്വുകൾ ഏർപ്പെടുന്നു അങ്ങനെയെങ്കിൽ

(i) $l_1$ എന്ന രേഖയുടെ സമീകരണം കണ്ടുപിടിക്കുക

(ii) $l_2$ എന്ന രേഖയുടെ സമീകരണം കണ്ടുപിടിക്കുക

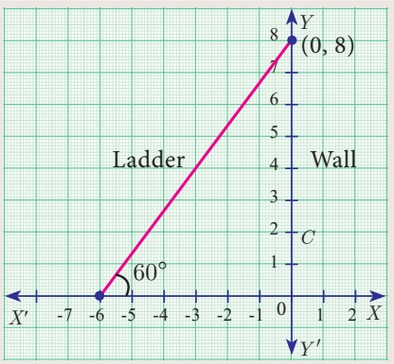
(iii) $l_3$ എന്ന രേഖയുടെ സമീകരണം കണ്ടുപിടിക്കുക.




ചിത്രം. 5.38

## പ്രവർത്തി 5

ഒരു ഏണിയെ അതിന്റെ അടിഭാഗം തറയിൽ തൊട്ടു കൊണ്ട് ചെങ്കുത്തായ ചുമരിൽ ചാരി വച്ചിരിക്കുന്നു. താഴെ പറയുന്ന നിബന്ധനകളിൽ ഏണിയുടെ സമീകരണം കണ്ടുപിടിക്കുക.

| നമ്പർ | നിബന്ധന | ചിത്രം | ഏണിയുടെ സമീകരണം |
|---|---|---|---|
| (i) | ഏണിതറയുമായി $60^\circ$ ചരിവുകോണിൽ ചുമരിനെ (0,8) ൽ തൊട്ടിരിക്കുന്നു |  ചിത്രം. 5.39 | |
| (ii) | ഏണിയുടെ അടിഭാഗവും മുകൾഭാഗവും(2,4), (5,1) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു | | |



## അഭ്യാസം 5.3

1. $(1,-5)$ , $(4,2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോവുകയും താഴെതന്നവയ്ക്ക് സമാന്തരമായും ഉള്ള നേർരേഖയുടെ സമീകരണം കണ്ടുപിടിക്കുക (i) $X$ അക്ഷം (ii) $Y$ അക്ഷം
2. നേർരേഖയുടെ സമീകരണം $2(x-y)+5=0$ . ആകുന്നു. രേഖയുടെ ചായ്വ്, ചരിവുകോൺ, അന്തഃഖണ്ഡം എന്നിവ കണ്ടുപിടിക്കുക..
3. ചരിവുകോൺ $30^\circ$ ഉള്ള രേഖയുടെ സമീകരണം കണ്ടുപിടിക്കുക. കൂടാതെ $Y$ അന്തഃഖണ്ഡം $-3$ ആകുന്നു.
4. $\sqrt{3}x+(1-\sqrt{3})y=3$ ന്റെ ചായ്വിനേയും $y$ അന്തഃഖണ്ഡത്തിനെയും കണ്ടുപിടിക്കുക.
5. $(-2,3)$ , $(8,5)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന രേഖ $y=ax+2$ നുലംബമാകുമ്പോൾ '$a$', യുടെ മൂല്യം കണ്ടുപിടിക്കുക.
6. ഒരു സമകോണത്രികോണാകൃതിയിലുള്ള കുന്നിന്റെ അടിഭാഗം $(19,3)$ എന്ന ബിന്ദുവിലാണ്. ഗ്രൗണ്ടിലേക്കുള്ള കുന്നിന്റെ ചരിവുകോൺ $45^\circ$. ആകുന്നു. അടിഭാഗത്തെയും മുകൾഭാഗത്തെയും യോജിപ്പിക്കുന്ന കുന്നിന്റെ സമീകരണം എഴുതുക.



5 CordinateGeo Malayalam.indd 229 20/01/2023 17:54:53

7. തന്നിട്ടുള്ള ഒരു ജോഡി ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന രേഖയുടെ സമീകരണം കണ്ടുപിടിക്കുക

(i) $\left(2,\frac{2}{3}\right)$ , $\left(\frac{-1}{2},-2\right)$ (ii) $(2,3)$ , $(-7,-1)$

8. $xy$ എന്ന സമതലത്തിൽ $(-6,-4)$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ ഒരു പൂച്ച ഇരിക്കുന്നു. $(5,11)$. ൽ ഒരു കുപ്പി പാൽ വെച്ചിട്ടുണ്ട്. പൂച്ചയ്ക്ക് പാൽ ഏറ്റവും ചുരുങ്ങിയ ദൂരത്തിൽ നേടണം അതിനുള്ള പാതയുടെ സമീകരണം കണ്ടുപിടിക്കുക.

9. ത്രികോണം $ABC$ യുടെ ശീർഷങ്ങൾ $A(6,2)$ , $B(-5,-1)$ , $C(1,9)$.

(i) മാധ്യമത്തിന്റെ സമീകരണം. (ii) ഉന്നതിയുടെ സമീകരണം ഇവ കാണുക

10. $\frac{-5}{4}$ ചായ്‌വ്, $(-1,2)$ എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നതുമായ നേർരേഖയുടെ സമീകരണം കണ്ടുപിടിക്കുക.

11. നിങ്ങൾ ഒരുപാട്ട് ഡൗൺലൊഡ് ചെയ്യുകയാണ്. $x$ സെക്കന്റിൽ ഡൗൺലോഡ് ചെയ്യേണ്ട ബാക്കിയുള്ള ശതമാനം $y = -0.1x + 1$ എന്ന് തന്നിട്ടുണ്ട്.

(i) സമീകരണത്തെ ഗ്രാഫിൽ വരയ്ക്കുക.

(ii) പാട്ടിന്റെ ആകെ MB കണ്ടുപിടിക്കുക.

(iii) 75% പാട്ടും ഡൗൺലോഡ് ചെയ്തത് എത്ര സെക്കന്റുകൾക്ക് ശേഷമാണ്?

(iv) എത്ര സെക്കന്റുകൾക്കു ശേഷം പാട്ട് പൂർണ്ണമായും ഡൗൺലോഡ് ചെയ്തു?

*12.* $x$, $y$ എന്നീ അക്ഷത്തിൽ അന്തഃഖണ്ഡം ചെയ്യുന്ന രേഖയുടെ സമീകരണം കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) 4, –6 (ii) $-5,\frac{3}{4}$

13. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള രേഖകൾ നിർദ്ദേശാങ്ക അക്ഷത്തിൽ ഏർപ്പെടുത്തുന്ന അന്തഃഖണ്ഡങ്ങളെ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) $3x - 2y - 6 = 0$ (ii) $4x + 3y + 12 = 0$

14. ഒരു നേർരേഖയുടെ സമീകരണം കണ്ടുപിടിക്കുക

(i) $(1,-4)$ ലൂടെ കടന്നു ചെല്ലുകയും 2:5 എന്ന അനുപാതത്തിൽ അന്തഃഖണ്ഡങ്ങൾ കാണപ്പെടുകയും ചെയ്യുന്നു.

(ii) $(-8,4)$ ലൂടെ കടന്നു ചെല്ലുകയും നിർദ്ദേശാങ്ക അക്ഷത്തിൽ സമ അന്തഃഖണ്ഡങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു.

## 5.6 ഒരു നേർരേഖയുടെ പൊതു രൂപം

$ax + by + c = 0$ എന്ന രേഖീയ സമീകരണം ($x$, $y$ എന്നീ രണ്ടു ചരങ്ങളുള്ള ഏകഘാതവ്യംജകം) എപ്പോഴും ഒരു നേർരേഖയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. (ഇവിടെ $a$, $b$, $c$എന്നിവ വാസ്തവിക സംഖ്യകൾ ആകുന്നു. ഇതിൽ $a$, $b$ ഏതെങ്കിലും ഒന്ന് പൂജ്യമല്ലാത്തതായിരിക്കും) ഇതാണ് ഒരു നേർരേഖയുടെ പൊതു രൂപം.

ഇപ്പോൾ നമുക്ക് താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയിലെ നേർരേഖയുടെ സമീകരണങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കാം

(i) $ax + by + c = 0$ യ്ക്ക് സമാന്തരം

(ii) $ax + by + c = 0$ യ്ക്ക് ലംബമായി

### 5.6.1 $ax + by + c = 0$ എന്ന രേഖയ്ക്ക് സമാന്തരമായ രേഖയുടെ സമീകരണം

$ax + by + c = 0$ എന്ന രേഖയ്ക്ക് സമാന്തരമായ എല്ലാ രേഖകളുടെ സമീകരണത്തെ $k$ യ്ക്ക് വ്യത്യസ്ത മൂല്യങ്ങളിൽ $ax + by + k = 0$ എന്ന രൂപത്തിൽ എഴുതുന്നു.

### 5.6.2 $ax + by + c = 0$ എന്ന രേഖയ്ക്ക് ലംബമായിട്ടുള്ള രേഖയുടെ സമീകരണം

$ax + by + c = 0$ എന്ന രേഖയ്ക്ക് ലംബമായിട്ടുള്ള എല്ലാ രേഖകളുടേയും സമീകരണത്തെ $k$ യ്ക്ക് വ്യത്യസ്ത മൂല്യങ്ങളിൽ $bx - ay + k = 0$ എന്ന രൂപത്തിൽ എഴുതുന്നു.



5 CordinateGeo Malayalam.indd 230 20/01/2023 17:54:55

നിങ്ങൾക്ക് അറിയാമോ

രണ്ട് നേർരേഖകൾ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ , $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ആകുന്നു. ഇവിടെ ഗുണാങ്കങ്ങൾ പൂജ്യമല്ല. അവ

(i) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$; എങ്കിൽ മാത്രമേ സമാന്തരമാവുകയുള്ളൂ. അതായത് $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$

(ii) $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ എങ്കിൽ മാത്രമേ ലംബമാവുകയുള്ളൂ.1

പുരോഗതി പരിശോധന യോജിച്ച കള്ളികളിൽ പൂരിപ്പിക്കുക

| ക്രമ നമ്പർ | സമീകരണങ്ങൾ | സമാന്തരം അല്ലെങ്കിൽ ലംബമായി | ക്രമ നമ്പർ | സമീകരണങ്ങൾ | സമാന്തരം അല്ലെങ്കിൽ ലംബമായി |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $5x + 2y + 5 = 0$<br>$5x + 2y - 3 = 0$ | | 3 | $8x - 10y + 11 = 0$<br>$4x-5y+16 = 0$ | |
| 2 | $3x - 7y - 6 = 0$<br>$7x + 3y + 8 = 0$ | | 4 | $2y - 9x - 7 = 0$<br>$27y + 6x - 21 = 0$ | |

### 5.6.3 നേർരേഖയുടെ ചായ്‌വ്

ഒരു നേർരേഖയുടെ സമീകരണത്തിന്റെ പൊതുരൂപം $ax + by + c = 0$. ($a$, $b$ യിൽ കുറഞ്ഞത് ഏതെങ്കിലും ഒന്ന് പൂജ്യമല്ലാത്തതാണ്)

$x$ ന്റെ ഗുണാങ്കം $= a$, $y$ ന്റെ ഗുണാങ്കം $= b$, സ്ഥിരാങ്കം$= c$.

മുകളിൽ പറഞ്ഞ സമീകരണത്തെ $by = -ax - c$ എന്നും എഴുതാം

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}, \quad b \neq 0 \qquad \ldots(1)$$

സമീകരണം (1) നെ $y$ നോട് താരതമ്യം ചെയ്യുമ്പോൾ $y = mx + l$

$$\text{ചായ്‌വ് } m = -\frac{a}{b}$$

$$m = \frac{-\ x \text{ ന്റെ ഗുണാങ്കം}}{y \text{ ന്റെ ഗുണാങ്കം}}$$

$$y \text{ അന്തഃഖണ്ഡം } l = -\frac{c}{b}$$

$$y \text{ അന്തഃഖണ്ഡം} = \frac{-\ \text{സ്ഥിരാങ്കം}}{y \text{ ന്റെ ഗുണാങ്കം}}$$

**ചിന്തിക്കുക**

ചായ്‌വ് 1 ൽ നിങ്ങൾക്ക് എത്ര നേർരേഖകൾ ലഭിച്ചു?

**ഉദാ 5.30:** $6x + 8y + 7 = 0$. എന്ന നേർരേഖയുടെ ചായ്‌വിനെ കണ്ടുപിടിക്കുക.

**നിർദ്ധാരണം** $6x + 8y + 7 = 0$ തന്നിട്ടുണ്ട്

$$\text{ചായ്‌വ് } m = \frac{-\ x \text{ ന്റെ ഗുണാങ്കം}}{y \text{ ന്റെ ഗുണാങ്കം}} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$$

അതുകൊണ്ട് നേർരേഖയുടെ ചായ്‌വ് $-\frac{3}{4}$.

**ഉദാ 5.31:** രേഖയുടെ ചായ്‌വിനെ കണ്ടുപിടിക്കുക. രേഖ

(i) $3x - 7y = 11$ നു സമാന്തരം (ii) $2x - 3y + 8 = 0$ ക്ക് ലംബമായി



5 CordinateGeo Malayalam.indd 231 20/01/2023 17:54:59

**നിർദ്ധാരണം** (i) തന്നിട്ടുള്ള നേർരേഖ $3x - 7y = 11$ ആകുന്നു

$$3x - 7y - 11 = 0$$

$$\text{ചായ്‌വ് } m = \frac{-3}{-7} = \frac{3}{7}$$

സമാന്തരരേഖകൾക്ക് ഒരേ ചായ്‌വുകൾ ആയതുകൊണ്ട് ഏതൊരു രേഖയുടെ ചായ്‌വും $3x - 7y = 11$ ന് സമാന്തരമായിരിക്കും അതായത് $m = \frac{3}{7}$ .

(ii) തന്നിട്ടുള്ള നേർരേഖ $2x - 3y + 8 = 0$ ആകുന്നു

$$\text{ചായ്‌വ് } m = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

ലംബരേഖകളുടെ ചായ്‌വുകളുടെ ഗുണനഫലം $-1$ ആയതുകൊണ്ട് $2x - 3y + 8 = 0$ എന്ന രേഖയ്ക്ക് ലംബമായ രേഖകയുടെ ചായ്‌വ് = $\frac{-1}{\frac{2}{3}} = \frac{-3}{2}$

**ഉദാ 5.32 :** $2x + 3y - 8 = 0$ , $4x + 6y + 18 = 0$ എന്നീ നേർരേഖകൾ സമാന്തരമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക

**നിർദ്ധാരണം** നേർരേഖയുടെ ചായ്‌വ് $2x + 3y - 8 = 0$ is

$$m_1 = \frac{-\ x \text{ ന്റെ ഗുണാങ്കം}}{y \text{ ന്റെ ഗുണാങ്കം}}$$

$$m_1 = \frac{-2}{3}$$

നേർരേഖയുടെ ചായ്‌വ് $4x + 6y + 18 = 0$ is

$$m_2 = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3}$$

$$m_1 = m_2$$

ചായ്‌വുകൾ സമമായതിനാൽ രണ്ട് രേഖകളു സമാന്തരമാണ്.

**മറ്റൊരുരീതി**

$a_1 = 2$ , $b_1 = 3$

$a_2 = 4$ , $b_2 = 6$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

അതായത്, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$

അതുകൊണ്ട് രേഖകൾ സമാന്തരമാകുന്നു.

**ഉദാ 5.33:** $x - 2y + 3 = 0$ കൂടാതെ $6x + 3y + 8 = 0$ എന്നീ നേർരേഖകൾ ലംബമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

**നിർദ്ധാരണം** നേർരേഖയുടെ ചായ്‌വ് $x - 2y + 3 = 0$ ആകുന്നു.

$$m_1 = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

നേർരേഖയുടെ ചായ്‌വ് $6x + 3y + 8 = 0$ ആകുന്നു

$$m_2 = \frac{-6}{3} = -2$$

$$m_1 \times m_2 = \frac{1}{2} \times (-2) = -1$$

അതുകൊണ്ട് രണ്ട് നേർരേഖകളും ലംബമാണ്

**മറ്റൊരുരീതി**

$a_1 = 1$ , $b_1 = -2$ ;

$a_2 = 6$ , $b_2 = 3$

$a_1 a_2 + b_1 b_2 = 6 - 6 = 0$

നേർരേഖകൾ ലംബമാകുന്നു.

**ഉദാ 5.34:** $3x - 7y = 12$ എന്ന രേഖയ്ക്ക് സമാന്തരവും (6,4) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നു ചെല്ലുന്നതുമായ ഒരു നേർരേഖയുടെ സമീകരണം കണ്ടുപിടിക്കുക.



5 CordinateGeo Malayalam.indd 232 20/01/2023 17:55:04

**നിർദ്ധാരണം** $3x-7y-12=0$ എന്ന രേഖയ്ക്ക് സമാന്തരമായ നേർരേഖയുടെ സമീകരണം $3x-7y+k=0$ ആകുന്നു. കാരണം അത് (6,4) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നു ചെല്ലുന്നതുകൊണ്ട്

$$3(6)-7(4)+k = 0$$
$$k = 28-18 = 10$$

അതുകൊണ്ട് ആവശ്യപ്പെട്ട നേർരേഖയുടെ സമീകരണം $3x-7y+10=0$ ആകുന്നു.

**ഉദാ 5.35:** $y=\frac{4}{3}x-7$ എന്ന രേഖയ്ക്ക് ലംബവും $(7,-1)$ എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നു ചെല്ലുന്നതുമായ നേർരേഖയുടെ സമീകരണം കണ്ടുപിടിക്കുക.

**നിർദ്ധാരണം** $y=\frac{4x}{3}-7$ എന്ന സമീകരണത്തെ $4x-3y-21=0$ എന്നെഴുതാം.

$4x-3y-21=0$ രേഖയ്ക്ക് ലംബമായ നേർരേഖയുടെ സമീകരണം $3x+4y+k=0$ ആകുന്നു.

കാരണം ഇത് $(7,-1)$, ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നു ചൊല്ലുന്നു.

$$21-4+k=0,\ k=-17$$

അതുകൊണ്ട് ആവശ്യപ്പെട്ട നേർരേഖയുടെ സമീകരണം $3x+4y-17=0$ ആകുന്നു.

**ഉദാ 5.36:** $Y$ അക്ഷത്തിന് സമാന്തരവും $4x+5y=13$ , $x-8y+9=0$ എന്നീ രേഖകളിലെ ഛേദകബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നു ചെല്ലുന്നതുമായ നേർരേഖയുടെ സമീകരണം കണ്ടുപിടിക്കുക..

**നിർദ്ധാരണം** തന്നിട്ടുള്ള രേഖകൾ $4x+5y-13=0$ ...(1)

$$x-8y+9=0 \quad ...(2)$$

ഛേദക ബിന്ദുവിനെ കണ്ടുപിടിക്കാൻ സമീകരണം (1)നെയും (2) നെയും നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക.

$$\begin{array}{ccccc} x & & y & & 1 \\ 5 & & -13 & & 4 \\ -8 & & 9 & & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ 5 \\ -8 \end{array}$$

$$\frac{x}{45-104} = \frac{y}{-13-36} = \frac{1}{-32-5}$$

$$\frac{x}{-59} = \frac{y}{-49} = \frac{1}{-37}$$

$x=\frac{59}{37}$, $y=\frac{49}{37}$ അതുകൊണ്ട് ഛേദകബിന്ദു $(x,y)=\left(\frac{59}{37},\frac{49}{37}\right)$

$Y$ അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായ രേഖയുടെ സമീകരണം $x=c$ ആകുന്നു.

ഇത് $(x,y)=\left(\frac{59}{37},\frac{49}{37}\right)$. ലൂടെ കടക്കുന്നു. അതുകൊണ്ട് $c=\frac{59}{37}$.

രേഖയുടെ സമീകരണം $x=\frac{59}{37}$ , $37x-59=0$

**ഉദാ 5.37:** $A(0,5)$, $B(4,1)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖ ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ സ്പർശരേഖയാകുന്നു. വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം $C(4,4)$ എന്ന ബിന്ദുവിലാണ്. താഴെ പറയുന്നവയെ കണ്ടുപിടിക്കുക.

*(i)* $AB$ എന്ന രേഖയുടെ സമീകരണം.

*(ii)* $AB$ രേഖയ്ക്ക് ലംബവും $C$ യിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നതുമായ രേഖയുടെ സമീകരണം.

*(iii)* വൃത്തത്തിന്റെ $AB$ എന്ന സ്പർശരേഖയുടെ സ്പർശബിന്ദുവിന്റെ നിർദ്ദേശാങ്കം.



5 CordinateGeo Malayalam.indd 233 20/01/2023 17:55:08

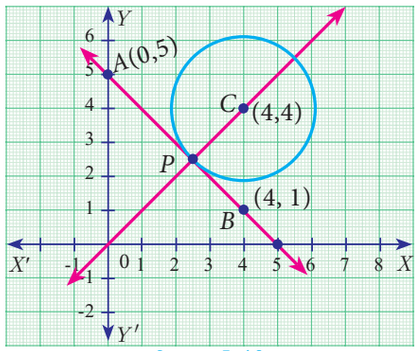
**നിർദ്ധാരണം** (i) രേഖയുടെ സമീകരണം AB, $A(0,5)$ \, $B(4,1)$

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y-5}{1-5} = \frac{x-0}{4-0}$$

$$4(y-5) = -4x \quad , y-5 = -x$$

$$x+y-5 = 0$$



ചിത്രം. 5.40

(ii) $AB$ രേഖയ്ക്ക് ലംബമായരേഖയുടെ സമീകരണം : $x+y-5=0$ , $x-y+k=0$ ആകുന്നു

(4,4), എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ അത് കടന്നുചെല്ലുന്നതുകൊണ്ട്

$$4-4+k = 0, \quad k=0$$

C യിലൂടെ കടന്നുചെല്ലുന്നതും $AB$ യ്ക്ക് ലംബവുമായ രേഖയുടെ സമീകരണം $x-y=0$ ...(2)

(iii) വൃത്തത്തിന്റെ $AB$ എന്ന സ്പർശരേഖയുടെ$P$ എന്ന സ്പർശബിന്ദുവിന്റെ നിർദ്ദേശാങ്കം ഇത് രേഖകളുടെ ഛേദകബിന്ദുവാകുന്നു.

$x+y-5=0$ കൂടാതെ $x-y=0$

$x=\frac{5}{2}$ കൂടാതെ $y=\frac{5}{2}$

അതുകൊണ്ട് സ്പർശബിന്ദുവിന്റെ നിർദ്ദേശാങ്കം $P\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)$.

**ചിന്തിയ്ക്കുക**

1. രണ്ടു നേർരേഖകളുടെ ഛേദക ബിന്ദുവിന്റെ എണ്ണം കണ്ടുപിടിക്കുക.
2. $2x-3y+6=0$ എന്ന രേഖയ്ക്ക് ലംബമായ നേർ രേഖകളുടെ എണ്ണം കണ്ടുപിടിക്കുക.

## പ്രവർത്തി 6

തന്നിട്ടുള്ള ചിത്രങ്ങളിലെ നേർരേഖകളുടെ സമീകരണം കണ്ടുപിടിക്കുക.

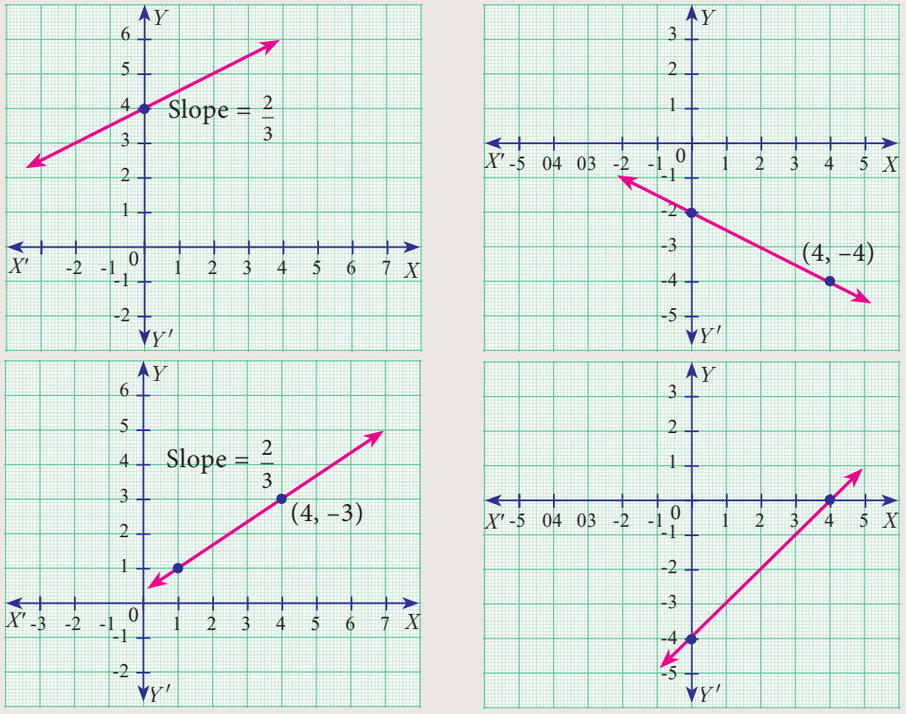


Fig. 5.41



5 CordinateGeo Malayalam.indd 234 20/01/2023 17:55:14

## അഭ്യാസം 5.4

1. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള നേർരേഖകളുടെ ചായ്‌വ് കണ്ടുപിടിക്കുക

   (i) $5y - 3 = 0$  (ii) $7x - \frac{3}{17} = 0$

2. താഴെതന്നിട്ടുള്ള രേഖകളുടെ ചായ്‌വ് കണ്ടുപിടിക്കുക

   (i) $y = 0.7x - 11$ ന് സമാന്തരം  (ii) $x = -11$ എന്ന രേഖയ്ക്ക് ലംബം

3. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള രേഖകൾ സമാന്തരമാണോ ലംബമാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക

   (i) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{1}{7} = 0$ കൂടാതെ $\frac{2x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{1}{10} = 0$

   (ii) $5x + 23y + 14 = 0$ കൂടാതെ $23x - 5y + 9 = 0$

4. $12y = -(p + 3)x + 12$ , $12x - 7y = 16$ എന്ന നേർരേഖ ലംബമാണെങ്കിൽ '$p$' കണ്ടുപിടിക്കുക.

5. $Q(3,-2)$ , $R(-5,4)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖയ്ക്ക് സമാന്തരവും. $P(-5,2)$ ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നതുമായ നേർരേഖയുടെ സമീകരണം കണ്ടുപിടിക്കുക.

6. $(6,7), (2,-3)$. എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖയ്ക്ക് ലംബവും $(6,-2)$ എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നതുമായ രേഖയുടെ സമീകരണം കണ്ടുപിടിക്കുക.

7. $A(-3,0)$ $B(10,-2)$, $C(12,3)$ എന്നിവ $\Delta ABC$ . യുടെ ശീർഷങ്ങളാകുന്നു. $A$, $B$ ലൂടെ യുള്ള ഉയരത്തിന്റെ സമീകരണം കണ്ടുപിടിക്കുക..

8. $A(-4,2)$ , $B(6,-4)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖയുടെ ലംബദ്വിഭാജകത്തിന്റെ സമീകരണം എഴുതുക.

9. $13x + 5y + 12 = 0$ എന്ന രേഖയ്ക്ക് സമാന്തരവും $7x + 3y = 10$ , $5x - 4y = 1$ രേഖകളുടെ പ്രതിഛേദകത്തിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന നേർരേഖയുടെ സമീകരണം എഴുതുക.

10. $4x - 7y + 13 = 0$ എന്ന രേഖയ്ക്ക് ലംബവും $5x - 6y = 2$ , $3x + 2y = 10$ എന്ന രേഖകളുടെ പ്രതിഛേദകത്തിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നതുമായ നേർരേഖയുടെ സമീകരണം എഴുതുക.

11. $3x + y + 2 = 0$ , $x - 2y - 4 = 0$ എന്നീ രേഖകളുടെ പ്രതിഛേദബിന്ദുവിനെ $7x - 3y = -12$ , $2y = x + 3$ എന്നീ രേഖകളുടെ പ്രതിഛേദ ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിക്കുന്ന നേർരേഖകളുടെ സമീകരണം കണ്ടുപിടിക്കുക.

12. $8x + 3y = 18$ , $4x + 5y = 9$ എന്നീ രേഖകളുടെ പ്രതിഛേദ ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നതും $(5,-4), (-7,6)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തെ ദ്വിഭാജകം ചെയ്യുന്നതുമായ നേർരേഖയുടെ സമീകരണം കണ്ടുപിടിക്കുക.

## അഭ്യാസം 5.5

GF86M

**തെരഞ്ഞെടുത്തെഴുതുക**

1. $(-5,0), (0,-5), (5,0)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളാൽ രൂപപ്പെടുന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം

   (A) 0 ച.മാ  (B) 25 ച.മാ  (C) 5 ച.മാ  (D) ഇതൊന്നുമല്ല

2. ഒരു മനുഷ്യൻ ചുമരിനോട് ചേർന്ന് നടക്കുമ്പോൾ ചുമരിനും അയാൾക്കുമിടയിലുള്ള ദൂരം 10 മാത്രകളാണ് ചുമരിനെ $Y$ അക്ഷമായി കാണുക അയാൾ യാത്ര ചെയ്തവഴി

   (A) $x = 10$  (B) $y = 10$  (C) $x = 0$  (D) $y = 0$

3. $x = 11$ എന്ന സമീകരണത്താൽ ഉണ്ടാകുന്ന നേർരേഖ

   (A) $X$ അക്ഷത്തിന് സമാന്തരം  (B) $Y$ അക്ഷത്തിന് സമാന്തരം

   (C) മൂലബിന്ദു വഴി കടന്നു ചെല്ലുന്നു  (D) $(0,11)$ വഴി കടന്നുചെല്ലുന്നു.



5 CordinateGeo Malayalam.indd 235  20/01/2023 17:55:19

4. (5,7), (3,$p$), (6,6) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ സമരേഖീയമെങ്കിൽ $p$ യുടെ മൂല്യം
(A) 3 (B) 6 (C) 9 (D) 12

5. $3x - y = 4$ കൂടാതെ $x + y = 8$ എന്നിവയുടെ പ്രതിഛേദബിന്ദു
(A) (5,3) (B) (2,4) (C) (3,5) (D) (4,4)

6. $(12,3)$, $(4,a)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രെഖയുടെ ചായ്‌വ് $\frac{1}{8}$. ആകുന്നു. '$a$' യുടെ മൂല്യം
(A) 1 (B) 4 (C) $-5$ (D) 2

7. (0,0), (−8,8) എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖയ്ക്ക് ലംബമായ രേഖയുടെ ചായ്‌വ്
(A) −1 (B) 1 (C) $\frac{1}{3}$ (D) $-8$

8. $PQ$ എന്ന രേഖയുടെ ചായ്‌വ് $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ആണെങ്കിൽ $PQ$ വിന്റെ ലംബദ്വിഭാജകത്തിന്റെ ചായ്‌വ്
(A) $\sqrt{3}$ (B) $-\sqrt{3}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (D) 0

9. $x$ നിർദ്ദേശാങ്കം 8 ആയിട്ടുള്ള $Y$ അക്ഷത്തിലെ ബിന്ദു $A$ ഉം, $y$ നിർദ്ദേശാങ്കം 5 ആയുള്ള $X$ അക്ഷത്തിന്റെ ബിന്ദു B ഉം ആണെങ്കിൽ $AB$ എന്ന രേഖയുടെ സമീകരണം
(A) $8x + 5y = 40$ (B) $8x - 5y = 40$ (C) $x = 8$ (D) $y = 5$

10. $7x - 3y + 4 = 0$ എന്ന രേഖയ്ക്ക് ലംബവും മൂലബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുചെല്ലുന്ന രേഖയുടെ സമീകരണം
(A) $7x - 3y + 4 = 0$ (B) $3x - 7y + 4 = 0$ (C) $3x + 7y = 0$ (D) $7x - 3y = 0$

11. നാല് രേഖകളെ എടുക്കുക.അവ
(i) $l_1$; $3y = 4x + 5$ (ii) $l_2$; $4y = 3x - 1$ (iii) $l_3$; $4y + 3x = 7$ (iv) $l_4$; $4x + 3y = 2$
താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയിൽ ഏതാണ് ശരി ?
(A) $l_1$ ഉം $l_2$ ഉം ലംബമാണ് (B) $l_1$ ഉം $l_4$ ഉം സമാന്തരമാണ്
(C) $l_2$ ഉം $l_4$ ഉം ലംബമാണ് (D) $l_2$ ഉം $l_3$ ഉം സമാന്തരമാണ്

12. ഒരു നേർരേഖയുടെ സമീകരണം $8y = 4x + 21$. താഴെ ഉള്ളവയിൽ ഏതാണ് ശരി
(A) ചായ്‌വ് 0.5 ഉം $y$ അന്തഃഖണ്ഡം 2.6 ഉം ആകുന്നു
(B) ചായ്‌വ് 5 ഉം $y$ അന്തഃഖണ്ഡം 1.6 ഉം ആകുന്നു
(C) ചായ്‌വ് 0.5 ഉം $y$ അന്തഃഖണ്ഡം 1.6 ഉം ആകുന്നു
(D) ചായ്‌വ് 5 ഉം $y$ അന്തഃഖണ്ഡം 2.6 ഉം ആകുന്നു

13. ഒരു ചതുർ ഭുജത്തെ ലംബകമാണെന്ന് തെളിയിക്കുമ്പോൾ താഴെ സൂചിപ്പിക്കേണ്ടത്.
(A) രണ്ടുവശങ്ങളും സമാന്തരം.
(B) രണ്ടുസമാന്തരവും രണ്ടുസമാന്തരമല്ലാത്ത വശങ്ങളും.
(C) വിപരീത വശങ്ങൾ സമാന്തരങ്ങളാണ്.
(D) എല്ലാവശങ്ങളും തുല്യനീളമാണ് .

14. ചായ്‌വുകൾ ഉപയോഗിച്ച് ഒരു ചതുർഭജത്തെ സാമാന്തരികമാണെന്ന് തെളിയിക്കുമ്പോൾ നിങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടത്
(A) രണ്ടുവശങ്ങളുടേയും ചായ്‌വ്
(B) രണ്ടുജോഡിഎതിർവശങ്ങളുടേയും ചായ്‌വുകൾ
(C) എല്ലാവശങ്ങളുടേയും നീളം
(D) രണ്ടുവശങ്ങളുടേയും നീളവും ചായ്‌വുകളും

15. (2, 1) രണ്ടുരേഖകളുടെ പ്രതിഛേദബിന്ദു.
(A) $x - y - 3 = 0$; $3x - y - 7 = 0$ (B) $x + y = 3$; $3x + y = 7$
(C) $3x + y = 3$; $x + y = 7$ (D) $x + 3y - 3 = 0$; $x - y - 7 = 0$



5 CordinateGeo Malayalam.indd 236 20/01/2023 17:55:23

## യൂണിറ്റ് അഭ്യാസം - 5

1. $P(-1,-1)$, $Q(-1,4)$, $R(5,4)$, $S(5,-1)$. എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ച് ഉണ്ടാകുന്ന ദീർഘചതുരം PQRS ആകുന്നു. $PQ$, $QR$, $RS$, $SP$ എന്നിവയുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ യഥാക്രമം $A$, $B$, $C$, $D$ ആകുന്നു $ABCD$ എന്ന ചതുർഭുജം ഒരു സമചതുരമാണോ ഒരു ദീർഘചതുരമാണോ അല്ലെങ്കിൽ ഒരു സമചതുർഭുജംമാണോ ഉത്തരത്തിന്റെ കാരണം പറയുക.

2. ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം 5 ച.മാത്രകളാകുന്നു. അതിന്റെ രണ്ടുശീർഷങ്ങൾ (2,1) , (3, –2). ആകുന്നു. മൂന്നാമത്തെ ശീർഷം $(x, y)$ ഇവിടെ $y = x + 3$. മൂന്നാമത്തെ ശീർഷത്തിന്റെ നിർദ്ദേശാങ്കം കണ്ടുപിടിക്കുക.

3. $3x + y - 2 = 0$, $5x + 2y - 3 = 0$ , $2x - y - 3 = 0$ എന്നീ രേഖകളാൽ രൂപപ്പെടുന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കണ്ടുപിടിക്കുക

4. ചതുർഭുജത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങൾ $A(-5,7)$, $B(-4,k)$, $C(-1,-6)$, $D(4,5)$ ഉം അതിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം 72 ച.മാത്രകളുമാണെങ്കിൽ $k$ യുടെ മൂല്യം കണ്ടുപിടിക്കുക.

5. ദൂരം കാണുന്നതിനുള്ള സൂത്രം ഉപയോഗിക്കാതെ $(-2,-1)$, $(4,0)$, $(3,3)$, $(-3,2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങളാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

6. ഒരു രേഖയുടെ കൂട്ടുതുകയും പ്രതിഛേദബിന്ദുവിന്റെ ഗുണനഫലവും യഥാക്രമം 1 , –6 ആകുന്നു. ആ രേഖകളുടെ സമീകരണം കണ്ടുപിടിക്കുക.

7. ഒരു പാൽക്കടക്കാരൻ തന്റെ കടയിലെ പാൽ വില്പനരീതി മനസ്സിലാക്കിയത് ഇങ്ങനെയാണ്. ഒരു ലിറ്ററിന് 14 രൂപാ നിരക്കിൽ ഓരോ ആഴ്ചയിലും 980 ലിറ്റർ പാൽ വില്ക്കാൻ സാധിക്കുന്നു. അതുപോലെ ലിറ്ററിന് 16 രൂപ നിരക്കിൽ ഓരോ ആഴ്ചയിലും 1220 ലിറ്റർ പാൽ വില്ക്കാൻ സാധിക്കുന്നു. വില്പന വിലയ്ക്കും ആവശ്യത്തിനും തമ്മിൽ ഒരു രേഖീയബന്ധം ഉണ്ടെന്ന് വിചാരിക്കുക. എങ്കിൽ ലിറ്ററിന് 17 രൂപാ നിരക്കിൽ ആഴ്ചതോറും എത്രലിറ്റർപാൽ വില്ക്കാൻ സാധിക്കും.

8. $x + 3y = 7$ എന്ന രേഖയുടെ ബിന്ദുവിന്റെ പ്രതിബിംബം (3,8) നെ കണ്ടുപിടിക്കുക. രേഖ സമതല കണ്ണാടിയിലാണെന്ന് സങ്കൽപ്പിക്കുക.

9. അക്ഷങ്ങളിൽ തുല്യമായ പ്രതിഛേദങ്ങളുള്ള $4x + 7y - 3 = 0$, $2x - 3y + 1 = 0$ ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുചെല്ലുന്ന രേഖയുടെ സമീകരണം കണ്ടുപിടിക്കുക..

10. $2x - 3y + 4 = 0$, $3x + 4y - 5 = 0$ എന്നീ സമീകരണങ്ങളാൽ സൂചിപ്പിക്കപ്പെടുന്നുണ്ട് നേർവഴികളുടെ ജംഗ്ഷനിൽ ഒരു മനുഷ്യൻ നില്ക്കുന്നു. അയാൾക്ക് ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ സമയംകൊണ്ട് $6x - 7y + 8 = 0$ എന്ന സമീകരണമുള്ള വഴിയിലെത്താൻ അയാൾ ആഗ്രഹിക്കുന്നു. അയാൾക്ക് കടന്നുപോകാനുള്ള വഴിയുടെ സമീകരണം കണ്ടുപിടിക്കുക.

### ഓർമ്മിയ്ക്കേണ്ടവ

- $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ , $(x_3, y_3)$ എന്ന ബിന്ദുക്കളാൽ രൂപപ്പെടുന്ന ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം $\frac{1}{2}\left\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\right\}$ ചതുരശ്രമാത്രകളാകുന്നു.
- (i) വിസ്തീർണ്ണം $\Delta ABC = 0$ അല്ലെങ്കിൽ $x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 = x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3$
  (ii) $AB$ യുടെ ചായ്‌വ്=$BC$ യുടെ ചായ്‌വ് വിസ്തീർണ്ണം ..... അല്ലെങ്കിൽ $AC$ യുടെ ചായ്‌വ്
  എങ്കിൽ മാത്രമെ $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ എന്നീ മൂന്നുബിന്ദുക്കളും സമരേഖീയമാവുകയുള്ളു
- $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, $(x_3, y_3)$, $(x_4, y_4)$ എന്നീ നാലുബിന്ദുക്കളാൽ രൂപപ്പെട്ട ചതുർഭുജത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം $\frac{1}{2}\left\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_4y_3 + x_1y_4)\right\}$ ആകുന്നു.
- ഒരു രേഖ $X$ അക്ഷത്തിന്റെ ധനദിശയിൽ കോൺ $\theta$ ഉണ്ടാക്കുകയാണെങ്കിൽ അതിന്റെ ചായ്‌വ് $m = \tan\theta$.
- $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ രണ്ട് വ്യത്യസ്ത ബിന്ദുക്കളാണെങ്കിൽ$AB$ യുടെചായ്‌വ് $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ആകുന്നു.
- $ax + by + c = 0$ എന്ന രേഖയുടെ ചായ്‌വ് $m = \frac{-a}{b}$ ആകുന്നു..



5 CordinateGeo Malayalam.indd 237 20/01/2023 17:55:28

### പല രൂപത്തിലുള്ള നേർരേഖകളുടെ സമീകരണം

| രൂപം | പേര് | രൂപം | പേര് |
|---|---|---|---|
| $ax + by + c = 0$ | പൊതുരൂപം | $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ | അന്തഃഖണ്ഡരൂപം |
| $y - y_1 = m(x - x_1)$ | ബിന്ദു ചായ്‌വ് രൂപം | $x = c$ | $Y$ അക്ഷത്തിന് സമാന്തരം |
| $y = mx + c$ | ചായ്‌വ്- അന്തഃഖണ്ഡം | $y = b$ | $X$ അക്ഷത്തിന് സമാന്തരം |
| $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ | രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ രൂപം | | |

- രണ്ട് നേർരേഖകൾ സമാന്തരമാകണമെങ്കിൽ അവയുടെ ചായ്‌വുകൾ തുല്യമായിരിക്കണം.
- $m_1 \times m_2 = -1$. ആയിരുന്നാൽ മാത്രമെ $m_1$, $m_2$ ചായ്‌വുകളുള്ള നേർരേഖകൾ ലംബമാവുകയുള്ളൂ

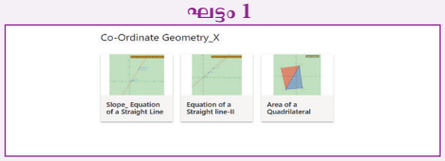
## ICT CORNER

### ICT 5.1

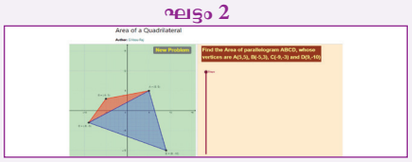
ഘട്ടം 1: Open ചെയ്ത് താഴെ കാണുന്ന URL ചെയ്യുക (അല്ലെങ്കിൽ) QR Code. ചെയ്യുക. GeoGebra യുടെ നിർദ്ദേശാങ്കജ്യാമിതി എന്ന വർക്ക് ഷീറ്റ് ഭാഗം open ആകും. ബുക്കിന്റെ ഇടത്തേഭാഗത്തുള്ള വർക്ക് ബുക്കിൽ വിസ്താരകലനം chapter. മായി ബന്ധപ്പെട്ട പ്രവൃത്തികൾ ഉണ്ടാകും. ചതുർഭുജത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം **"Area of a Quadrilateral"** എന്ന വർക്ക്ഷീറ്റ് Select ചെയ്യുക

ഘട്ടം 2: ആ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന വർക്ക് ഷീറ്റിൽ "New Problem". നെ Click ചെയ്താൽ നിങ്ങൾക്ക് ചോദ്യങ്ങൾ മാറ്റാവുന്നതാണ്. Slider നെ നീക്കി Step കൾ കാണാവുന്നതാണ്. ഓരോ Problem കണക്കിനെയും ചെയ്തുനോക്കി ഉത്തരത്തിനെ ശരിനോക്കുക..

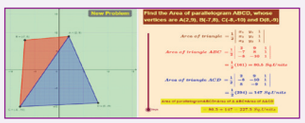
ഘട്ടം 1




ഘട്ടം 2




പ്രതീക്ഷിച്ച ഫലം

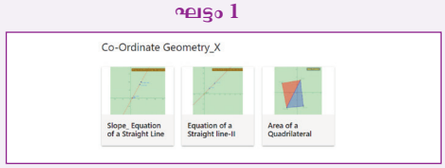


### ICT 5.2

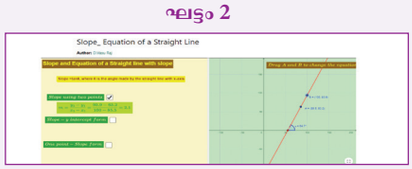
ഘട്ടം 1: Browser Open ചെയ്ത് താഴെ കാണുന്ന URL Linktype ചെയ്യുക (അലെല്ലങ്കിൽ) QR Code Scan ചെയ്യുക. **Geometry** നിർദ്ദേശാങ്കജ്യാമിതി **Co ordinate Geometry Open** ആകും ഈ വർക്ക് ബുക്കിൽ ഇടത്തേഭാഗത്ത് വിസ്താരകലന **Chapter** മായി ബന്ധപ്പെട്ട പ്രവർത്തികൾ ഉണ്ടാകും ചായ്‌വ് നേർരേഖയുടെ സമീകരണം **Slope Equation of a Straight line Worksheet Select**

ഘട്ടം 2:തന്നിരിക്കുന്ന വർക്ക്ഷീറ്റിൽ ഗ്രാഫിൽ A, B പോയിന്റുകൾ വലിച്ചിട്ടുകൊണ്ട് നിങ്ങൾക്ക് ലൈൻ മാറ്റാനാകും. ഒരേ നേർരേഖയുടെ വിവിധ രൂപങ്ങൾ കാണുന്നതിന് ഇടത് വശത്തുള്ള ചെക്ക് ബോക്സുകളിൽ ക്ലിക്കുചെയ്യുക

ഘട്ടം 1




ഘട്ടം 2




പ്രതീക്ഷിച്ച ഫലം



*You can repeat the same steps for other activities*

https://www.geogebra.org/m/jfr2zzgy#chapter/356195

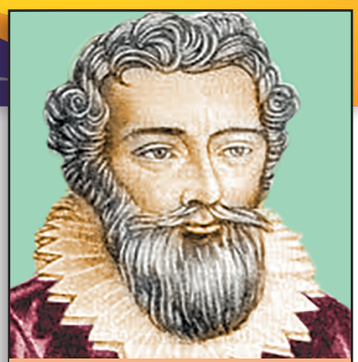
or Scan the QR Code.



5 CordinateGeo Malayalam.indd 238 20/01/2023 17:55:30

# 6 ത്രികോണമിതി

*"The deep study of nature is the most fruitful source of mathematical discoveries"* - **Joseph Fourier.**



**Francois Viete**
(1540–1603 AD(CE))

ഫ്രഞ്ച് ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞനായ ഫ്രാങ്ക് ജോയിസ് വിയറ്റ ബീജഗണിത പഠനത്തിൽ ചില സമീകരണങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണത്തി നായി ത്രികോണമിതി ഉപയോഗിച്ചു. അദ്ദേഹത്തിന്റെ $\pi$ യ്ക്കു വേണ്ടി യുള്ള സൂത്രവാക്യം ത്രികോണമിതി അംശബന്ധങ്ങളുടെ ആവർത്തി ച്ചുള്ള ഉപയോഗത്തിൽ നിന്നും ലഭിക്കാവുന്നതാണ്. അദ്ദേഹത്തിന്റെ പ്രശസ്ത കൃതിയായ കതോർമാത്തമാറ്റിക്സ്, ത്രികോണമിതി മുഴുവൻ ഉൾക്കൊള്ളുന്നു. അതിൽ ത്രികോണമിതി പട്ടിക ഉണ്ട്.കൂടാതെ പട്ടി ക നിർമ്മിതിക്ക് പുറകിലുള്ള ഗണിത ശാസ്ത്രം വിശദീകരിച്ചിട്ടുണ്ട്. കൂടാതെ തലങ്ങൾ, ഗോളീയത്രികോണങ്ങൾ എന്നിവ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നതും വിശദീകരിച്ചിട്ടുണ്ട്.

കൃതി 6 വരുന്ന സമീകരണങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണവും മൂലങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുന്ന വിധവും അദ്ദേഹം കണ്ടു പിടിച്ചു.ഗണിതത്തിൽ ഗുണകം എന്ന വാക്ക് ആദ്യമായി അവ തരിപ്പിച്ചത് വിയറ്റയാണ്. ഒരു സമീകരണത്തിന്റെ മൂലങ്ങളും ഗുണകങ്ങളും തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തെ കുറിക്കുന്ന സൂത്രവാക്യം അദ്ദേഹം കണ്ടുപിടിച്ചു.സമചതുരഘനികയെ രണ്ട് മടങ്ങാക്കുക. കോൺഅളവുകളെ മൂന്നായി വാഭജിക്കൽ എന്നീ തരത്തിലുള്ള പ്രശ്നങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണം ജ്യാമിതീയ രീതിയിൽ അദ്ദേഹം നൽകി

CIXVK

## പഠനഫലങ്ങൾ

- ത്രികോണമിതി അംശബന്ധങ്ങൾ ഓർമ്മിക്കൽ
- ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ത്രികോണമിതി അംശബന്ധങ്ങൾക്ക് ഇടയിലുള്ള അടിസ്ഥാന ബന്ധങ്ങൾ ഓർമ്മിക്കുന്നു.
- പൂരക കോണുകളുടെ ത്രികോണമിതി അംശബന്ധങ്ങൾ ഓർക്കുന്നു.
- ത്രികോണമിതി സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ മനസ്സിലാക്കുന്നു.
- ഉയരങ്ങളും ദൂരങ്ങളും സംബന്ധിച്ച പ്രശ്നങ്ങൾ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്ന വിധം മന സ്സിലാക്കുന്നു.

## 6.1 ആമുഖം

പുരാതനകാലം മുതൽ സർവ്വേയർമാർ,നാവികർ,ജോതിശാസ്ത്രജ്ഞർ എന്നിവർ നേരിട്ട് അളക്കാൻ പറ്റാത്ത ദൂരങ്ങൾ അളക്കുന്നതിനായി ത്രികോണങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചിരുന്നു. ഇന്ന് നമ്മൾ ത്രികോണമിതി എന്ന് വിളിക്കുന്ന ഗണിത ശാസ്ത്ര ശാഖ ഇങ്ങനെയാണ് ആവിർഭവിച്ചത്.

ഹിപ്പാർക്കസ് ആഫ് റോഡ്സ് ഏകദേശം. 200 BC(BCE) ൽ, $360 \times 60 = 21600$ യൂണിററുകൾ ചുററളവുള്ള വൃത്തത്തിന്റെ ഞാണുകളുടെ നീളത്തിന് പട്ടിക നിർമ്മിച്ചു. ഇത് ഒരു യൂണിറ് ചുററളവിൽ ഓരോ മിനിററിനുമുള്ള ചാപവുമായി യോജിക്കുന്നു. ഈ നേട്ടത്തിനായി ഹിപ്പാർക്കസ് 'ത്രികോണമിതിയുടെ പിതാവ്' ആയി കണക്കാക്കപ്പെടുന്നു. കാരണം ഇത് ത്രികോണമിതി കൂടുതൽ വികസിപ്പിക്കാനുള്ള അടിത്തറയായിമാറി.



6 Trigonometry_Malayalam.indd 239 20/01/2023 19:01:37

അർദ്ധ ഞാണുകളുടെയും അർദ്ധകോണുകളുടെയും ഉപയോഗം ഞാൺ സിദ്ധാന്തത്തെ ലഘൂകരിക്കുമെന്ന് അഞ്ചാം നൂറ്റാണ്ടിലെ ഇന്ത്യൻ പണ്ഡിതന്മാർ മനസ്സിലാക്കി. ഗണിത ശാസ്ത്ര ജ്ഞന്മാരായ ആര്യഭട്ടാ, രണ്ട് ഭാസ്കരന്മാർ കൂടാതെ മറ്റുള്ളവരും അർദ്ധഞാണുകളുടെ മൂല്യങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് പുതിയ വിദ്യകൾ കണ്ടെത്തി.

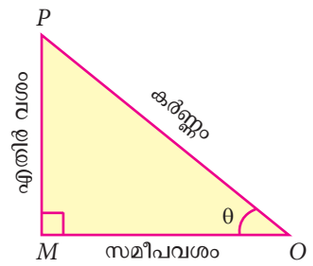
ബഗ്ദാദിലെ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞൻ ആയിരുന്ന അബു-അൽ-വാഫാ ആണ് സ്പർശരേഖ ഫലനം കണ്ടുപിടിച്ചത്. അദ്ദേഹം അതിനെ നിഴൽ എന്ന് വിളിച്ചു. അറബി പണ്ഡിതന്മാർക്ക് ജ് എന്ന പദം വിവർത്തനം ചെയ്യാൻ അറിഞ്ഞിരുന്നില്ല. അതു കൊണ്ട് അവർ അതിന് പകരം ജിബാ എന്ന് എഴുതി.

ജിബാ എന്ന അറബി വാക്ക് തെറ്റായി വ്യാഖ്യാനിക്കപ്പെട്ടത് കൊണ്ട് വിവർത്തകർ ജിബാ എന്നതിനെ ലാറ്റിനിൽ അർദ്ധ ഞാണിനെ പ്രതിനിധീകരിക്കാൻ സൈനസ് എന്നു എഴുതി.ഇതിൽ നിന്നാണ് ഇന്ന് നാം ഉപയോഗിക്കുന്ന 'sine' എന്ന വാക്ക് ലഭിച്ചത്.എ.ഡി 17 ാം നൂറ്റാണ്ടിന്റെ ആരംഭത്തിൽ ജീവിച്ചിരുന്ന ജെർമൻ ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞനായ ബർത്തലോമയസ് പിറ്റ്റഡ് ആണ് ത്രികോണമിതി എന്ന പദം കണ്ടുപിടിച്ചത്.

## ഓർമ്മിക്കുക

### ത്രികോണമിതി അംശബന്ധങ്ങൾ

$0^\circ < \theta < 90^\circ$ എന്നിരിക്കട്ടെ



ചിത്രം 6.1

$OMP$ എന്ന സമകോണത്രികോണം എടുക്കുക

$$\sin\theta = \frac{\text{എതിർവശം}}{\text{കർണ്ണം}} = \frac{MP}{OP}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{എതിർവശം}}{\text{കർണ്ണം}} = \frac{OM}{OP}$$

മുകളിലുള്ള രണ്ട് അംശബന്ധങ്ങളിൽ നിന്ന് മറ്റ് നാല് ത്രികോണമിതി അംശബന്ധങ്ങൾ നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നു.

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta};\ \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta};$$
$$\text{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta};\ \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

**കുറിപ്പ്**

- എല്ലാ സമകോണത്രികോണങ്ങളിലും ഒരു കോൺ $\theta$ ഒരു പോലെയാണ്. അതു കൊണ്ട് ഇതു പോലത്തെ സമകോണ ത്രികോണങ്ങളിൽ നിർവ്വചിക്കപ്പെടുന്ന ത്രികോണമിതി അംശബന്ധങ്ങൾ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്ന ത്രികോണങ്ങളെ ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്നില്ല.

### പൂരക കോണുകൾ

| | | |
|---|---|---|
| $\sin(90^\circ-\theta) = \cos\theta$ | $\cos(90^\circ-\theta) = \sin\theta$ | $\tan(90^\circ-\theta) = \cot\theta$ |
| $\text{cosec}(90^\circ-\theta) = \sec\theta$ | $\sec(90^\circ-\theta) = \text{cosec}\,\theta$ | $\cot(90^\circ-\theta) = \tan\theta$ |

### ത്രികോണമിതി പൂരകകോണുകളുടെ ചിത്രരീതിയിൽ ഉള്ള തെളിവ്.

ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിട്ടുള്ളത് പോലെ 1 മാത്ര വ്യാസാർദ്ധമുള്ള അർദ്ധവൃത്തത്തെ പരിഗണിക്കാം.

$\angle QOP = \theta$ എന്നിരിക്കട്ടെ

എങ്കിൽ $\angle QOR = 90^\circ - \theta$, ആണെങ്കിൽ $OPQR$ ഒരു ദീർഘ ചതുരത്തെ രൂപീകരിക്കുന്നു.

ത്രികോണം $OPQ$ ൽ നിന്ന്, $\frac{OP}{OQ} = \cos\theta$



6 Trigonometry_Malayalam.indd 240 20/01/2023 19:01:39

പക്ഷേ $OQ$ = വ്യാസാർദ്ധം $= 1$

അതുകൊണ്ട് $OP = OQ\ \cos\theta = \cos\theta$

അതു പോലെ, $\frac{PQ}{OQ} = \sin\theta$

തന്നിട്ടുള്ളത്, $PQ = OQ \sin\theta = \sin\theta$ (എന്തു കൊണ്ടെന്നാൽ $OQ = 1$)

$OP = \cos\theta,\ PQ = \sin\theta$ ... (1)

ഇപ്പോൾ, ത്രികോണം $QOR$ ൽ നിന്ന്,

തന്നിട്ടുള്ളത്, $\frac{OR}{OQ} = \cos(90° - \theta)$

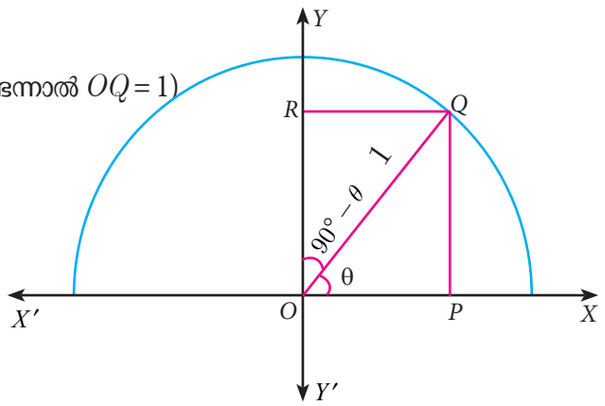
അതു കൊണ്ട്, $OR = OQ\ \cos(90° - \theta)$

$OR = \cos(90° - \theta)$

അതുപോലെ, $\frac{RQ}{OQ} = \sin(90° - \theta)$

$RQ = \sin(90° - \theta)$

$OR = \cos(90° - \theta),\ RQ = \sin(90° - \theta)$ ... (2)



ചിത്രം 6.2

എന്തു കൊണ്ടെന്നാൽ $OPQR$ ഒരു ദീർഘചതുരമാണ്.

$OP = RQ$ കൂടാതെ $OR = PQ$

സമീകരണം (1) കൂടാതെ (2) ഇവയിൽ നിന്ന്,

$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$ കൂടാതെ $\cos(90° - \theta) = \sin\theta$

**കുറിപ്പ്**

| | |
|---|---|
| $(\sin\theta)^2 = \sin^2\theta$ | $(\text{cosec}\theta)^2 = \text{cosec}^2\theta$ |
| $(\cos\theta)^2 = \cos^2\theta$ | $(\sec\theta)^2 = \sec^2\theta$ |
| $(\tan\theta)^2 = \tan^2\theta$ | $(\cot\theta)^2 = \cot^2\theta$ |

**$0°, 30°, 45°, 60°, 90°$ എന്നീ കോണുകളുടെ ത്രികോണമിതി അംശബന്ധങ്ങളുടെ പട്ടിക**

| $\theta$ / ത്രികോണമിതി അംശബന്ധങ്ങൾ | $0°$ | $30°$ | $45°$ | $60°$ | $90°$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\theta$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| $\cos\theta$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\tan\theta$ | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | നിർവ്വചിച്ചിട്ടില്ല |
| $\text{cosec}\theta$ | നിർവ്വചിച്ചിട്ടില്ല | 2 | $\sqrt{2}$ | $\frac{2}{\sqrt{3}}$ | 1 |
| $\sec\theta$ | 1 | $\frac{2}{\sqrt{3}}$ | $\sqrt{2}$ | 2 | നിർവ്വചിച്ചിട്ടില്ല |
| $\cot\theta$ | നിർവ്വചിച്ചിട്ടില്ല | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0 |



6 Trigonometry_Malayalam.indd 241 20/01/2023 19:01:43

**ചിന്തിക്കുക**

1. $\sin\theta$ യുടെയും $\cos\theta$ യുടെയും മൂല്യങ്ങൾ തുല്യമാകുന്നത് എപ്പോൾ?
2. $\theta$, യുടെ ഏതൊക്കെ മൂല്യങ്ങൾക്കാണ് $\sin\theta = 2$ ?
3. ആറ് ത്രികോണമിതി കോണുകളിൽ θ യുടെ മൂല്യം പൂജ്യം ഡിഗ്രിയിൽ നിന്ന് $90°$ ഡിഗ്രിയിലേക്ക് വർദ്ധിക്കുന്നു.ഇവയിൽ ഏതൊക്കെ കോണുകളുടെ മൂല്യങ്ങളാണ് നിർവ്വചിക്കപ്പെടാത്തത്?
4. എട്ട് ത്രികോണമിതി അംശബന്ധങ്ങൾ ഉണ്ടാകാൻ സാധ്യതയുണ്ടോ?
5. $0° \leq \theta \leq 90°$ എന്നിരിക്കട്ടെ. ഏതൊക്കെ $\theta$ യുടെ മൂല്യങ്ങൾക്കാണ്

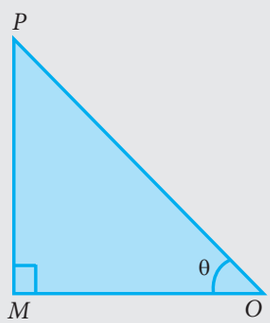
   (i) $\sin\theta > \cos\theta$ (ii) $\cos\theta > \sin\theta$ (iii) $\sec\theta = 2\tan\theta$ (iv) $\operatorname{cosec}\theta = 2\cot\theta$

## 6.2 ത്രികോണമിതി സർവ്വസമ വാക്യങ്ങൾ

$\theta$ യുടെ എല്ലാ വാസ്തവിക മൂല്യങ്ങൾക്കും താഴെ തന്നിട്ടുള്ള മൂന്ന് ത്രികോണമിതി അംശബന്ധങ്ങളും ബാധകമാണ്.

(i) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ (ii) $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ (iii) $1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$

ഈ മൂന്ന് ത്രികോണമിതി സർവ്വസമവാക്യങ്ങളെയും അടിസ്ഥാന ത്രികോണമിതി സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നു. നമുക്ക് ഇവയെ താഴെ തന്നിട്ടുള്ളത് പോലെ തെളിയിക്കാം.

| ചിത്രം | സർവ്വസമവാക്യം | തെളിവ് |
|---|---|---|
|  ചിത്രം 6.3 | $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ | സമകോണ ത്രികോണം $OMP$ യിൽ<br>$\frac{OM}{OP} = \cos\theta, \quad \frac{PM}{OP} = \sin\theta$ ...(1)<br>പിതഗോറസ് സിദ്ധാന്തത്തിൽ നിന്ന്<br>$MP^2 + OM^2 = OP^2$ ...(2)<br>(2)ന്റെ രണ്ട് വശങ്ങളിലുള്ള ഓരോ പദത്തെയും $OP^2$ കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ, (എന്തു കൊണ്ടെന്നാൽ) $OP \neq 0$)<br>$\frac{MP^2}{OP^2} + \frac{OM^2}{OP^2} = \frac{OP^2}{OP^2}$<br>$\left(\frac{MP}{OP}\right)^2 + \left(\frac{OM}{OP}\right)^2 = \left(\frac{OP}{OP}\right)^2$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു<br>(1) ൽ നിന്ന് $(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1^2$<br>ആയത് കൊണ്ട് $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ |



6 Trigonometry_Malayalam.indd 242 20/01/2023 19:01:45

| | | |
|---|---|---|
| | $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$ | സമകോണത്രികോണം $OMP$ ൽ നിന്ന്<br>$\frac{MP}{OM}=\tan\theta,\quad \frac{OP}{OM}=\sec\theta$ ...(3)<br>(2) ൽ നിന്ന് $MP^2+OM^2=OP^2$<br>(2)ന്റെ രണ്ട് വശങ്ങളിലുള്ള ഓരോ പദത്തെയും $OM^2$ കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ (എന്തു കൊണ്ടെന്നാൽ $OM\neq 0$ )<br>$\frac{MP^2}{OM^2}+\frac{OM^2}{OM^2}=\frac{OP^2}{OM^2}$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു<br>$\left(\frac{MP}{OM}\right)^2+\left(\frac{OM}{OM}\right)^2=\left(\frac{OP}{OM}\right)^2$<br>(3) ൽ നിന്ന് $(\tan\theta)^2+1^2=(\sec\theta)^2$<br>$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$ . |
| | $1+\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta$ | സമകോണത്രികോണം $OMP$ യിൽ നിന്ന്<br>$\frac{OM}{MP}=\cot\theta,\quad \frac{OP}{MP}=\operatorname{cosec}\theta$ ...(4)<br>(2)ൽ നിന്ന്, $MP^2+OM^2=OP^2$<br>(2) ന്റെ രണ്ട് വശങ്ങളിലുള്ള ഓരോ പദത്തെയും $MP^2$ കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ (എന്തു കൊണ്ടെന്നാൽ $MP\neq 0$) )<br>$\frac{MP^2}{MP^2}+\frac{OM^2}{MP^2}=\frac{OP^2}{MP^2}$<br>$\left(\frac{MP}{MP}\right)^2+\left(\frac{OM}{MP}\right)^2=\left(\frac{OP}{MP}\right)^2$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു<br>(4) ൽ നിന്ന്, $1^2+(\cot\theta)^2=(\operatorname{cosec}\theta)^2$<br>ആയത് കൊണ്ട്, $1+\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta$ |

**ഈ സർവ്വ സമവാക്യങ്ങളെ ഇങ്ങനെ മാറ്റി എഴുതാം.**

| സർവ്വ സമവാക്യം | തുല്യ രൂപങ്ങൾ |
|---|---|
| $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ | $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$ (അല്ലെങ്കിൽ) $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$ |
| $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$ | $\tan^2\theta=\sec^2\theta-1$ (അല്ലെങ്കിൽ) $\sec^2\theta-\tan^2\theta=1$ |
| $1+\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta$ | $\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta-1$ (അല്ലെങ്കിൽ) $\operatorname{cosec}^2\theta-\cot^2\theta=1$ |

**കുറിപ്പ്**

- $\theta$ യുടെ എല്ലാ മൂല്യങ്ങൾക്കും മുകളിലുള്ള സർവ്വ സമവാക്യങ്ങൾ ശരിയാണ്, നമ്മൾ $0^\circ<\theta<90^\circ$ ഇടയിലുള്ള ആറ് ത്രികോണമിതി അംശബന്ധങ്ങൾ മാത്രം പരിഗണിക്കുന്നു.



6 Trigonometry_Malayalam.indd 243 20/01/2023 19:01:48

## പ്രവർത്തി 1

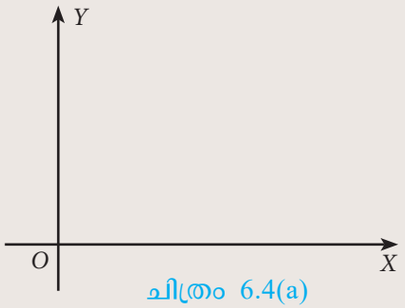
ഒരു ഷീറ്റ് പേപ്പർ എടുക്കുക. ചിത്രം 6.4 (a) യിൽ കാണിച്ചിട്ടുള്ളത് പോലെ $OX$, $OY$ എന്നീ രണ്ട് പരസ്പര ലംബരേഖകൾ $O$ യിൽ ഛേദിക്കുന്ന രീതിയിൽ നിർമ്മിക്കുക.

$OX$ നെ $X$ അക്ഷമായും $OY$ യെ $Y$ അക്ഷമായും കരുതുക.

$\sin\theta$ കൂടാതെ $\cos\theta$ എന്നിവയിൽ കോൺ $\theta$ യുടെ ചില പ്രത്യേക മൂല്യങ്ങൾക്ക് പരിശോധിക്കാം

$\theta = 30^\circ$ എന്നിരിക്കട്ടെ

ചിത്രം 6.4 യിൽ കാണിച്ചിട്ടുള്ളത് പോലെ $\angle AOX = 30^\circ$, വരത്തക്കരീതിയിൽ രേഖാഖണ്ഡം $OA$ നിർമ്മിക്കുക

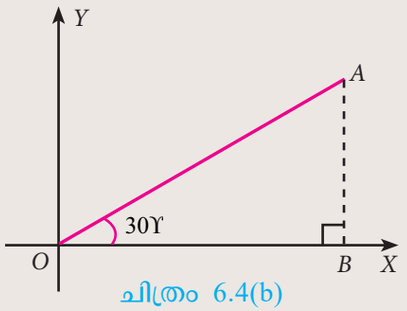


ചിത്രം 6.4(a)

$A$ യിൽ നിന്ന് $OX$ ലേക്ക് ലംബം $B$ യിൽ ഛേദിക്കുന്ന രീതിയിൽ വരയ്ക്കുക.

ഇപ്പോൾ അളവ് കോൽ കൊണ്ട് $AB$, $OB$ കൂടാതെ $OA$ നീളങ്ങൾ അളക്കുക.

$\frac{AB}{OA}$, $\frac{OB}{OA}$ കൂടാതെ $\frac{AB}{OB}$ എന്നിവയുടെ അംശബന്ധങ്ങൾ കാണുക.



ചിത്രം 6.4(b)

നിങ്ങൾക്ക് എന്തു ലഭിക്കുന്നു? ഈ മൂല്യങ്ങളെ ത്രികോണമിതി പട്ടികയിലുള്ള മൂല്യങ്ങളുമായി താരതമ്യം ചെയ്യാമോ? നിങ്ങളുടെ നിഗമനം എന്താണ്? ഇതിനെ $\theta = 45^\circ$ കൂടാതെ $\theta = 60^\circ$ എന്നിവയ്ക്കും ആവർത്തിക്കുക.നിങ്ങളുടെ നിഗമനങ്ങൾ എന്താണ്?

**ഉദാഹരണം 6.1** തെളിയിക്കുക $\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta\sin^2\theta$

***നിർദ്ധാരണം*** $\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta - \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}.\cos^2\theta$

$= \tan^2\theta(1-\cos^2\theta) = \tan^2\theta\sin^2\theta$

**ഉദാഹരണം 6.2** തെളിയിക്കുക $\frac{\sin A}{1+\cos A} = \frac{1-\cos A}{\sin A}$

***നിർദ്ധാരണം*** $\frac{\sin A}{1+\cos A} = \frac{\sin A}{1+\cos A}\times\frac{1-\cos A}{1-\cos A}$ [$1+\cos A$ യുടെ സമാന്തര കരണികൊണ്ട് അംശത്തെയും ഛേദത്തെയും ഗുണിക്കുക]

$= \frac{\sin A(1-\cos A)}{(1+\cos A)(1-\cos A)} = \frac{\sin A(1-\cos A)}{1-\cos^2 A}$

$= \frac{\sin A(1-\cos A)}{\sin^2 A} = \frac{1-\cos A}{\sin A}$

**ഉദാഹരണം 6.3** തെളിയിക്കുക $1 + \frac{\cot^2\theta}{1+\operatorname{cosec}\theta} = \operatorname{cosec}\theta$

***നിർദ്ധാരണം*** $1 + \frac{\cot^2\theta}{1+\operatorname{cosec}\theta} = 1 + \frac{\operatorname{cosec}^2\theta - 1}{\operatorname{cosec}\theta + 1}$ [$\because \operatorname{cosec}^2\theta - 1 = \cot^2\theta$]

$= 1 + \frac{(\operatorname{cosec}\theta+1)(\operatorname{cosec}\theta-1)}{\operatorname{cosec}\theta+1}$

$= 1 + (\operatorname{cosec}\theta - 1) = \operatorname{cosec}\theta$



6 Trigonometry_Malayalam.indd 244 20/01/2023 19:01:52

**ഉദാഹരണം 6.4** തെളിയിക്കുക $\sec\theta - \cos\theta = \tan\theta\sin\theta$

**നിർദ്ധാരണം** $\sec\theta - \cos\theta = \dfrac{1}{\cos\theta} - \cos\theta = \dfrac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}$

$= \dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$ $\left[\text{since } 1-\cos^2\theta = \sin^2\theta\right]$

$= \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} \times \sin\theta = \tan\theta\sin\theta$

**ഉദാഹരണം 6.5** തെളിയിക്കുക $\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$

**നിർദ്ധാരണം** $\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} \times \dfrac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}}$ [$1-\cos\theta$ യുടെ സമാന്തര കരണികൊണ്ട് അംശത്തെയും ഛേദത്തെയും ഗുണിക്കുക]

$= \sqrt{\dfrac{(1+\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}} = \dfrac{1+\cos\theta}{\sqrt{\sin^2\theta}}$ $\left[\text{since } \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1\right]$

$= \dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$

**ഉദാഹരണം 6.6** തെളിയിക്കുക $\dfrac{\sec\theta}{\sin\theta} - \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \cot\theta$

**നിർദ്ധാരണം** $\dfrac{\sec\theta}{\sin\theta} - \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\frac{1}{\cos\theta}}{\sin\theta} - \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta} - \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$= \dfrac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \cot\theta$

**ഉദാഹരണം 6.7** തെളിയിക്കുക $\sin^2 A\cos^2 B + \cos^2 A\sin^2 B + \cos^2 A\cos^2 B + \sin^2 A\sin^2 B = 1$

**നിർദ്ധാരണം** $\sin^2 A\cos^2 B + \cos^2 A\sin^2 B + \cos^2 A\cos^2 B + \sin^2 A\sin^2 B$

$= \sin^2 A\cos^2 B + \sin^2 A\sin^2 B + \cos^2 A\sin^2 B + \cos^2 A\cos^2 B$

$= \sin^2 A(\cos^2 B + \sin^2 B) + \cos^2 A(\sin^2 B + \cos^2 B)$

$= \sin^2 A(1) + \cos^2 A(1)$ $\quad(\text{since } \sin^2 B + \cos^2 B = 1)$

$= \sin^2 A + \cos^2 A = 1$

**ഉദാഹരണം 6.8** If $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta$, ആണെങ്കിൽ തെളിയിക്കുക $\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin\theta$

**നിർദ്ധാരണം** $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta$.

ഇരു വശങ്ങളിലും വർഗ്ഗം കാണുമ്പോൾ,

$(\cos\theta + \sin\theta)^2 = (\sqrt{2}\cos\theta)^2$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta = 2\cos^2\theta$



6 Trigonometry_Malayalam.indd 245 20/01/2023 19:01:56

$\because$

$$2\cos^2\theta - \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$(\cos\theta + \sin\theta)(\cos\theta - \sin\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos\theta - \sin\theta = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta + \sin\theta} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{2}\cos\theta} \quad [\because \cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta]$$

$$= \sqrt{2}\sin\theta$$

അതു കൊണ്ട് $\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin\theta$ .

**ഉദാഹരണം 6.9** തെളിയിക്കുക $(\text{cosec}\,\theta - \sin\theta)(\sec\theta - \cos\theta)(\tan\theta + \cot\theta) = 1$

***നിർദ്ധാരണം*** $(\text{cosec}\,\theta - \sin\theta)(\sec\theta - \cos\theta)(\tan\theta + \cot\theta)$

$$= \left(\frac{1}{\sin\theta} - \sin\theta\right)\left(\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right)\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

$$= \frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta} \times \frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta} \times \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{\cos^2\theta\sin^2\theta \times 1}{\sin^2\theta\cos^2\theta} = 1$$

**ഉദാഹരണം 6.10** തെളിയിക്കുക $\dfrac{\sin A}{1+\cos A} + \dfrac{\sin A}{1-\cos A} = 2\text{cosecA}.$

***നിർദ്ധാരണം***

$$\frac{\sin A}{1+\cos A} + \frac{\sin A}{1-\cos A}$$

$$= \frac{\sin A(1-\cos A) + \sin A(1+\cos A)}{(1+\cos A)(1-\cos A)}$$

$$= \frac{\sin A - \sin A\cos A + \sin A + \sin A\cos A}{1-\cos^2 A}$$

$$= \frac{2\sin A}{1-\cos^2 A} = \frac{2\sin A}{\sin^2 A} = 2\,\text{cosec A}$$

**ഉദാഹരണം 6.11** $\text{cosec}\,\theta + \cot\theta = P$ , ആണെങ്കിൽ തെളിയിക്കുക $\cos\theta = \dfrac{P^2-1}{P^2+1}$

***നിർദ്ധാരണം*** തന്നിട്ടുള്ളത് $\text{cosec}\,\theta + \cot\theta = P$ ...(1)

$\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$ (സർവ്വ സമവാക്യം)

$$\text{cosec}\,\theta - \cot\theta = \frac{1}{\text{cosec}\,\theta + \cot\theta}$$

$$\text{cosec}\,\theta - \cot\theta = \frac{1}{P} \quad \ldots(2)$$

(1) നെ (2) കൊണ്ട് കൂട്ടുമ്പോൾ, $2\text{cosec}\,\theta = P + \dfrac{1}{P}$

$$2\text{cosec}\,\theta = \frac{P^2+1}{P} \quad \ldots(3)$$

(1) ൽ നിന്ന് (2) നെ കുറയ്ക്കുമ്പോൾ, $2\cot\theta = P - \dfrac{1}{P}$



6 Trigonometry_Malayalam.indd 246 20/01/2023 19:02:00

$$2\cot\theta = \frac{P^2-1}{P} \qquad \ldots (4)$$

(4) നെ (3) കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ, $\frac{2\cot\theta}{2\,\text{cosec}\,\theta} = \frac{P^2-1}{P} \times \frac{P}{P^2+1}$, $\cos\theta = \frac{P^2-1}{P^2+1}$ ലഭിക്കുന്നു

**ഉദാഹരണം 6.12** തെളിയിക്കുക $\tan^2 A - \tan^2 B = \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\cos^2 A \cos^2 B}$

***നിർദ്ധാരണം***

$$\tan^2 A - \tan^2 B = \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} - \frac{\sin^2 B}{\cos^2 B}$$

$$= \frac{\sin^2 A\cos^2 B - \sin^2 B\cos^2 A}{\cos^2 A\cos^2 B}$$

$$= \frac{\sin^2 A(1-\sin^2 B) - \sin^2 B(1-\sin^2 A)}{\cos^2 A\ \cos^2 B}$$

$$= \frac{\sin^2 A - \sin^2 A\sin^2 B - \sin^2 B + \sin^2 A\sin^2 B}{\cos^2 A\cos^2 B} = \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\cos^2 A\cos^2 B}$$

**ഉദാഹരണം 6.13** തെളിയിക്കുക $\left(\frac{\cos^3 A - \sin^3 A}{\cos A - \sin A}\right) - \left(\frac{\cos^3 A + \sin^3 A}{\cos A + \sin A}\right) = 2\sin A\cos A$

***നിർദ്ധാരണം*** $\left(\frac{\cos^3 A - \sin^3 A}{\cos A - \sin A}\right) - \left(\frac{\cos^3 A + \sin^3 A}{\cos A + \sin A}\right)$

$$= \left(\frac{(\cos A - \sin A)(\cos^2 A + \sin^2 A + \cos A\sin A)}{\cos A - \sin A}\right) \quad \left[\because\ a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + b^2 + ab)\right.$$
$$\left. a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 + b^2 - ab)\right]$$

$$-\left(\frac{(\cos A + \sin A)(\cos^2 A + \sin^2 A - \cos A\sin A)}{\cos A + \sin A}\right)$$

$$= (1 + \cos A\sin A) - (1 - \cos A\sin A)$$

$$= 2\ \cos A\sin A$$

**ഉദാഹരണം 6.14** തെളിയിക്കുക $\frac{\sin A}{\sec A + \tan A - 1} + \frac{\cos A}{\text{cosec A} + \cot A - 1} = 1$

***നിർദ്ധാരണം*** $\frac{\sin A}{\sec A + \tan A - 1} + \frac{\cos A}{\text{cosec A} + \cot A - 1}$

$$= \frac{\sin A(\text{cosec}\,A + \cot A - 1) + \cos A(\sec A + \tan A - 1)}{(\sec A + \tan A - 1)(\text{cosec}\,A + \cot A - 1)}$$

$$= \frac{\sin A\,\text{cosec}\,A + \sin A\cot A - \sin A + \cos A\sec A + \cos A\tan A - \cos A}{(\sec A + \tan A - 1)(\text{cosec}\,A + \cot A - 1)}$$

$$= \frac{1 + \cos A - \sin A + 1 + \sin A - \cos A}{\left(\frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A} - 1\right)\left(\frac{1}{\sin A} + \frac{\cos A}{\sin A} - 1\right)}$$



6 Trigonometry_Malayalam.indd 247 20/01/2023 19:02:03

$$= \frac{2}{\left(\frac{1+\sin A-\cos A}{\cos A}\right)\left(\frac{1+\cos A-\sin A}{\sin A}\right)}$$

$$= \frac{2\sin A\cos A}{(1+\sin A-\cos A)(1+\cos A-\sin A)}$$

$$= \frac{2\sin A\cos A}{[1+(\sin A-\cos A)][1-(\sin A-\cos A)]} = \frac{2\sin A\cos A}{1-(\sin A-\cos A)^2}$$

$$= \frac{2\sin A\cos A}{1-(\sin^2 A+\cos^2 A-2\sin A\cos A)} \qquad = \frac{2\sin A\cos A}{1-(1-2\sin A\cos A)}$$

$$= \frac{2\sin A\cos A}{1-1+2\sin A\cos A} = \frac{2\sin A\cos A}{2\sin A\cos A} = 1.$$

**ഉദാഹരണം 6.15** തെളിയിക്കുക $\left(\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}\right) = \left(\frac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2$

***നിർദ്ധാരണം***

**LHS**

$$\left(\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}\right) = \frac{1+\tan^2 A}{1+\frac{1}{\tan^2 A}}$$

$$= \frac{1+\tan^2 A}{\frac{\tan^2 A+1}{\tan^2 A}} = \tan^2 A \quad \text{... (1)}$$

**RHS**

$$\left(\frac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2 = \left(\frac{1-\tan A}{1-\frac{1}{\tan A}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1-\tan A}{\frac{\tan A-1}{\tan A}}\right)^2 = (-\tan A)^2 = \tan^2 A \text{ ... (2)}$$

(1), (2) ൽനിന്ന് $\left(\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}\right) = \left(\frac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2$

**ഉദാഹരണം 6.16** തെളിയിക്കുക $\frac{(1+\cot A+\tan A)(\sin A-\cos A)}{\sec^3 A-\operatorname{cosec}^3 A} = \sin^2 A\cos^2 A$

***നിർദ്ധാരണം*** $\frac{(1+\cot A+\tan A)(\sin A-\cos A)}{\sec^3 A-\operatorname{cosec}^3 A}$

$$= \frac{\left(1+\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\sin A}{\cos A}\right)(\sin A-\cos A)}{(\sec A-\operatorname{cosec} A)(\sec^2 A+\sec A\operatorname{cosec} A+\operatorname{cosec}^2 A)}$$

$$= \frac{\frac{(\sin A\cos A+\cos^2 A+\sin^2 A)(\sin A-\cos A)}{\sin A\cos A}}{(\sec A-\operatorname{cosec} A)\left(\frac{1}{\cos^2 A}+\frac{1}{\cos A\sin A}+\frac{1}{\sin^2 A}\right)}$$



6 Trigonometry_Malayalam.indd 248 20/01/2023 19:02:05

$$= \frac{(\sin A\cos A+1)\left(\frac{\sin A}{\sin A\cos A}-\frac{\cos A}{\sin A\cos A}\right)}{(\sec A-\operatorname{cosec}A)\left(\frac{\sin^2 A+\sin A\cos A+\cos^2 A}{\sin^2 A\cos^2 A}\right)}$$

$$= \frac{(\sin A\cos A+1)(\sec A-\cos ecA)}{(\sec A-\cos ecA)(1+\sin A\cos A)} \times \sin^2 A\cos^2 A = \sin^2 A\cos^2 A$$

**ഉദാഹരണം 6.17** $\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} = p$ കൂടാതെ $\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} = q$, ആണെങ്കിൽ തെളിയിക്കുക $p^2q^2(p^2+q^2+3)=1$

***നിർദ്ധാരണം*** $\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} = p$ ...(1) കൂടാതെ $\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} = q$ ...(2)

$$p^2q^2(p^2+q^2+3) = \left(\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\right)^2\left(\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right)^2 \times \left[\left(\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\right)^2+\left(\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right)^2+3\right] \quad [(1),(2)\text{ൽ നിന്ന്}]$$

$$= \left(\frac{\cos^4\theta}{\sin^2\theta}\right)\left(\frac{\sin^4\theta}{\cos^2\theta}\right) \times \left[\frac{\cos^4\theta}{\sin^2\theta}+\frac{\sin^4\theta}{\cos^2\theta}+3\right]$$

$$= (\cos^2\theta\times\sin^2\theta)\times\left[\left(\frac{\cos^6\theta+\sin^6\theta+3\sin^2\theta\cos^2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}\right)\right]$$

$$= \cos^6\theta+\sin^6\theta+3\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$= (\cos^2\theta)^3+(\sin^2\theta)^3+3\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$= [(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^3-3\cos^2\theta\sin^2\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta)]+3\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$= 1-3\cos^2\theta\sin^2\theta(1)+3\cos^2\theta\sin^2\theta \;=1$$

## പുരോഗതി പരിശോധന

1. ത്രികോണമിതി അംശബന്ധങ്ങളുടെ എണ്ണം _____.
2. $1-\cos^2\theta$ എന്നത് _____.
3. $(\sec\theta+\tan\theta)(\sec\theta-\tan\theta)$ എന്നത് _____.
4. $(\cot\theta+\operatorname{cosec}\theta)(\cot\theta-\operatorname{cosec}\theta)$ എന്നത് _____.
5. $\cos 60^\circ\sin 30^\circ+\cos 30^\circ\sin 60^\circ$ എന്നത് _____.
6. $\tan 60^\circ\cos 60^\circ+\cot 60^\circ\sin 60^\circ$ എന്നത് _____.
7. $(\tan 45^\circ+\cot 45^\circ)+(\sec 45^\circ\operatorname{cosec}45^\circ)$ എന്നത് _____.
8. (i) $\sec\theta=\operatorname{cosec}\theta$ ആണെങ്കിൽ $\theta$ എന്നത് _____. (ii) $\cot\theta=\tan\theta$ ആണെങ്കിൽ $\theta$ എന്നത് _____.

## അഭ്യാസം 6.1

1. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള സർവ്വസമവാക്യങ്ങളെ തെളിയിക്കുക.
   (i) $\cot\theta+\tan\theta=\sec\theta\operatorname{cosec}\theta$ (ii) $\tan^4\theta+\tan^2\theta=\sec^4\theta-\sec^2\theta$
2. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള സർവ്വസമവാക്യങ്ങളെ തെളിയിക്കുക.
   (i) $\frac{1-\tan^2\theta}{\cot^2\theta-1}=\tan^2\theta$ (ii) $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}=\sec\theta-\tan\theta$



6 Trigonometry_Malayalam.indd 249 20/01/2023 19:02:09

3. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള സർവ്വസമവാക്യങ്ങളെ തെളിയിക്കുക.

(i) $\sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}} = \sec\theta + \tan\theta$ (ii) $\sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}} + \sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = 2\sec\theta$

4. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള സർവ്വസമവാക്യങ്ങളെ തെളിയിക്കുക.

(i) $\sec^6\theta = \tan^6\theta + 3\tan^2\theta\sec^2\theta + 1$

(ii) $(\sin\theta + \sec\theta)^2 + (\cos\theta + \operatorname{cosec}\theta)^2 = 1 + (\sec\theta + \operatorname{cosec}\theta)^2$

5. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള സർവ്വസമവാക്യങ്ങളെ തെളിയിക്കുക.

(i) $\sec^4\theta(1-\sin^4\theta) - 2\tan^2\theta = 1$ (ii) $\frac{\cot\theta - \cos\theta}{\cot\theta + \cos\theta} = \frac{\operatorname{cosec}\theta - 1}{\operatorname{cosec}\theta + 1}$

6. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള സർവ്വസമവാക്യങ്ങളെ തെളിയിക്കുക.

(i) $\frac{\sin A - \sin B}{\cos A + \cos B} + \frac{\cos A - \cos B}{\sin A + \sin B} = 0$ (ii) $\frac{\sin^3 A + \cos^3 A}{\sin A + \cos A} + \frac{\sin^3 A - \cos^3 A}{\sin A - \cos A} = 2$

7. (i) $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{3}$ ആണെങ്കിൽ, $\tan\theta + \cot\theta = 1$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

(ii) $\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta = 0$ ആണെങ്കിൽ, $\tan 3\theta = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

8. (i) $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = m$ , $\frac{\cos\alpha}{\sin\beta} = n$ ആണെങ്കിൽ, $(m^2+n^2)\cos^2\beta = n^2$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

(ii) $\cot\theta + \tan\theta = x$ , $\sec\theta - \cos\theta = y$ ആണെങ്കിൽ, $(x^2y)^{\frac{2}{3}} - (xy^2)^{\frac{2}{3}} = 1$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

9. (i) $\sin\theta + \cos\theta = p$ , $\sec\theta + \operatorname{cosec}\theta = q$ ആണെങ്കിൽ, $q(p^2-1) = 2p$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

(ii) $\sin\theta(1+\sin^2\theta) = \cos^2\theta$ ആണെങ്കിൽ, $\cos^6\theta - 4\cos^4\theta + 8\cos^2\theta = 4$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

10. $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = \frac{1}{a}$ ആണെങ്കിൽ, $\frac{a^2-1}{a^2+1} = \sin\theta$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

## 6.3 ഉയരങ്ങളും ദൂരങ്ങളും

ഈ വിഭാഗത്തിൽ വിവിധ വസ്തുക്കളുടെ ഉയരങ്ങളും ദൂരങ്ങളും യഥാർത്ഥമായി അളക്കാതെ ത്രികോണമിതി ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടു പിടിക്കുന്നത് എങ്ങനെ എന്ന് നോക്കാം.ഉദാഹരണമായി ഗോപുരത്തിന്റെ ഉയരം, ശിഖരം,കെട്ടിടം, മരം, ദീപസ്തംഭത്തിൽ നിന്നും കപ്പലിന്റെ ദൂരം,നദിയുടെ അകലം,എന്നിവ ത്രികോണമിതി ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കാം. ദൈനംദിന ജീവിതത്തിൽ ത്രികോണമിതി ഉപയോഗിച്ച് ഉയരങ്ങളും ദൂരങ്ങളും കണ്ട് പിടിക്കുന്നതിന് ഇതൊരു ഉത്തമ ഉദാഹരണമാണ്. ചില ഉദാഹരണങ്ങളിലൂടെ ഇതിന്റെ പ്രയോഗങ്ങൾ വിശദീകരിക്കാം.ഉയരങ്ങളും ദൂരങ്ങളും കണ്ടു പിടിക്കുന്ന രീതികളെ പഠിക്കുന്നതിന് മുമ്പ് ചില അടിസ്ഥാന നിർവ്വചനങ്ങൾ മനസ്സിലാക്കേണ്ടത് ഉണ്ട്.

### വീക്ഷണരേഖ

ഒരു നിരീക്ഷകന്റെ കണ്ണിനും വസ്തുവിനും ഇടയിലുള്ള നേർരേഖയെ വീക്ഷണരേഖ എന്നു പറയുന്നു.



ചിത്രം 6.5



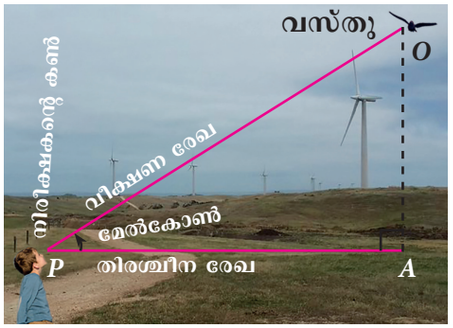
6 Trigonometry_Malayalam.indd 250 20/01/2023 19:02:12

### ഭൂമാപനക്കോൽ

ഭൂമാപനക്കോൽ എന്ന ഉപകരണം ഒരു നിരീക്ഷകന്റെ കണ്ണിനും വസ്തുവിനും ഇടയിൽ ഉണ്ടാക്കുന്ന കോൺ അളക്കുന്നതിന് ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഈ ഉപകരണത്തിൽ പരസ്പരം സമകോണിൽ ഘടിപ്പിച്ചിട്ടുള്ള രണ്ട് ക്രമമായ ചക്രങ്ങളും ഒരു ദൂരദർശിനിയും ഉണ്ട്. നിരശ്ചീനവും, ലംബവുമായ കോണുകൾ അളക്കുന്നതിന് ഈ ചക്രങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഒരു നിശ്ചിതസ്ഥാനത്തിന്റെ കോൺ അളക്കുന്നതിന് ദൂരദർശിനിയെ ആ സ്ഥാനത്തേക്ക് ക്രമീകരിക്കുന്നു. ദൂര ദർശിനിയിൽ കോണളവ് കാണാവുന്നതാണ്.



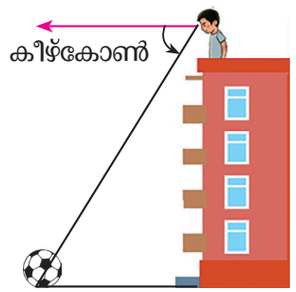
ചിത്രം 6.6




ചിത്രം 6.7

### മേൽകോൺ

കണ്ണിൽ നിന്നുള്ള തിരശ്ചീന രേഖയ്ക്ക് മുകളിലാണ് വസ്തു ഉള്ളതെങ്കിൽ ആ വസ്തുവിനെ വീക്ഷിക്കുമ്പോൾ വീക്ഷണ രേഖയ്ക്കും തിരശ്ചീന രേഖയ്ക്കും ഇടയിലുള്ള കോണിനെ മേൽകോൺ എന്നു പറയുന്നു. ഈ പ്രക്രിയയിൽ ആ വസ്തു വിനെ വീക്ഷിക്കുമ്പോൾ തല അൽപം മുകളിൽ ഉയർത്തണം. (ചിത്രം 6.7 നോക്കുക)



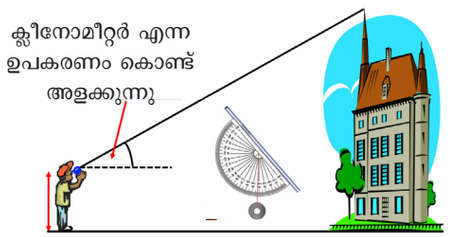

ചിത്രം 6.8

### കീഴ്കോൺ

കണ്ണിൽ നിന്നുള്ള തിരശ്ചീന രേഖയ്ക്ക് താഴെയാണ് വസ്തു ഉള്ളതെങ്കിൽ വീക്ഷണരേഖയ്ക്കും തിരശ്ചീന രേഖയ്ക്കും ഇടയിലുള്ള കോണിനെ കീഴ് കോൺ എന്നു പറയുന്നു.ഈ പ്രക്രിയയിൽ ആ വസ്തുവിനെ വീക്ഷിക്കുന്ന തിനായി തല അൽപം കീഴോട്ട് ചലിപ്പിക്കണം. (ചിത്രം 6.8 നോക്കുക)

### ക്ലീനോമീറ്റർ

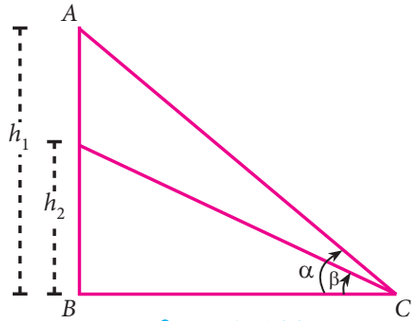
മേൽക്കോൺ കീഴ്ക്കോൺ എന്നിവ ക്ലീനോമീറ്റർ എന്ന ഉപകരണം കൊണ്ട് അളക്കുന്നു.




ചിത്രം 6.9

- തന്നിട്ടുള്ള ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് ഒരു വസ്തുവിന്റെ ഉയരം വർദ്ധിക്കുമ്പോൾ മേൽക്കോണും വർദ്ധി ക്കുന്നു.

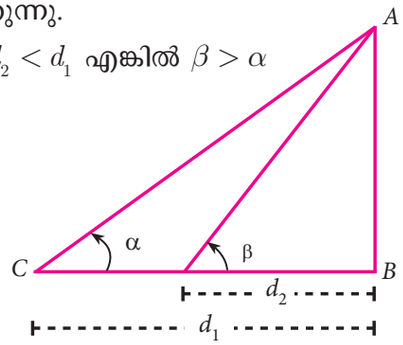
$h_1 > h_2$ എങ്കിൽ $\alpha > \beta$




ചിത്രം 6.10(a)

- ഗോപുരം അല്ലെങ്കിൽ കെട്ടിടം എന്നീ ലംബമായ വസ്തുക്കളുടെ പാദത്തിലേ ക്ക് നീങ്ങുമ്പോൾ മേൽകോൺ വർദ്ധി ക്കുന്നു.

$d_2 < d_1$ എങ്കിൽ $\beta > \alpha$



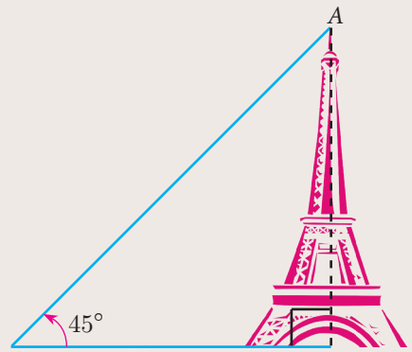

ചിത്രം 6.10(b)



6 Trigonometry_Malayalam.indd 251 20/01/2023 19:02:13

## പ്രവർത്തി 2

സന്ദർഭങ്ങളെ സമകോണത്രികോണങ്ങളിൽ വശദീകരിക്കുക. സാഹചര്യങ്ങളെ വിശദീകരിക്കുന്നതിന് ചിത്രം വരയ്ക്കുക.

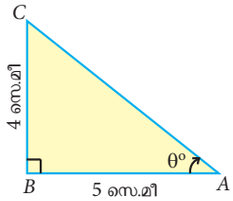
| സന്ദർഭം | ചിത്രം വരയ്ക്കുക |
|---|---|
| തറ നിരപ്പിൽ നിന്ന് ലംബമായി ഒരു ഗോപുരം നിൽക്കുന്നു. ഗോപുരത്തിന്റെ പാദത്തിൽ നിന്നും 20 മീറ്റർ അകലെയുള്ള ബിന്ദുവിൽ നിന്നും ഗോപുരത്തിന്റെ മുകൾഭാഗത്തിന്റെ മേൽകോൺ 45°. |  ചിത്രം 6.11 |
| 1.8 മീറ്റർ ഉയരമുള്ള ഒരു നിരീക്ഷകൻ പുക കുഴലിൽ 25.2 മീറ്റർ അകലെയാണ്. പുക കുഴലിന്റെ മുകളറ്റത്തിനും നിരീക്ഷകന്റെ കണ്ണിനും ഇടയിലുള്ള മേൽകോൺ 45°. | ..... |
| തറ നിരപ്പിൽ $P$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് 20 മീറ്റർ ഉയരമുള്ള കെട്ടിടത്തിന്റെ മേൽകോൺ 30° ആകുന്നു.ആ കെട്ടിടത്തിന്റെ മുകളിൽ ഒരു കൊടികമ്പ് നിൽക്കുന്നു. തറയിൽ ഉള്ള $P$ ബിന്ദുവിന്റെയും കൊടികമ്പിന്റെ മുകൾ ഭാഗത്തിന്റെയും മേൽകോൺ 55° . | ..... |
| സൂര്യന്റെ മേൽകോൺ 30° യിൽനിന്നും 60° വ്യതിചലിച്ച് 30° ആകുമ്പോൾ ഒരു ഗോപുരത്തിന്റെ നിഴലിന്റെ നീളം 40 മീറ്റർ കൂടുന്നു. | ..... |

### 6.3.1 മേൽകോൺ ഉൾപ്പെടുന്ന പ്രശ്നങ്ങൾ

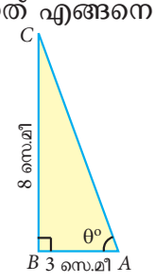
ഈ വിഭാഗത്തിൽ മേൽകോൺ തന്നിട്ടുള്ള പ്രശ്നങ്ങളെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നത് എങ്ങനെ എന്ന് നോക്കാം.

**ഉദാഹരണം 6.18**

തന്നിട്ടുള്ള ത്രികോണങ്ങളിൽ കോൺ $\angle BAC$ കണക്കാക്കുക
($\because$ tan 38.7° = 0.8011, tan 69.4° = 2.6604)



ചിത്രം 6.12(a)



ചിത്രം 6.12(b)

*നിർദ്ധാരണം*

(i) സമകോണ ത്രികോണം $ABC$ൽ യിൽ [ചിത്രം 6.12(a) നോക്കൂ].

$$\tan\theta = \frac{\text{എതിർവശം}}{\text{സമീപവശം}} = \frac{4}{5}$$

$$tan\ \theta = 0.8$$

$\Rightarrow \theta = 38.7°$ ($\because$ tan 38.7° = 0.8011)

$\therefore \quad \angle BAC = 38.7°$

(ii) സമകോണ ത്രികോണം $ABC$ൽ യിൽ [ചിത്രം 6.12(b) നോക്കൂ].

$$\tan\theta = \frac{8}{3}$$

$$tan\ \theta = 2.66$$

$\Rightarrow \quad \theta = 69.4°$ ($\because$ tan 69.4° = 2.6604)

$\therefore \quad \angle BAC = 69.4°$



6 Trigonometry_Malayalam.indd 252 20/01/2023 19:02:15

**ഉദാഹരണം 6.19** തറ നിരപ്പിന് ലംബമായി ഒരു ഗോപുരം നിൽക്കുന്നു. ഗോപുരത്തിന്റെ പാദത്തിൽ നിന്ന് 48 മീറ്റർ അകലെയുള്ള ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് ഗോപുരത്തിന്റെ മുകൾ അറ്റം 30 മേൽകോണിലാണ്. എങ്കിൽ ഗോപുരത്തിന്റെ ഉയരം കാണുക.

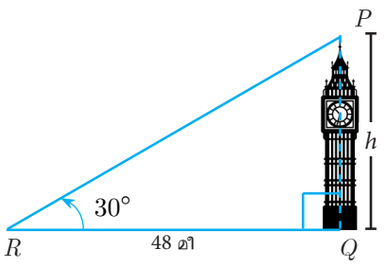
***നിർദ്ധാരണം*** $PQ$ ഗോപുരത്തിന്റെ ഉയരം എന്നിരിക്കട്ടെ.

$PQ = h$ എന്നെടുക്കുക. കൂടാതെ ഗോപുരത്തിന്റെയും $R$ ന്റെയും തമ്മിലുള്ള അകലം $QR$ ആകുന്നു. സമകോണ ത്രികോണം $PQR$ൽ, $\angle PRQ = 30°$.

$$\tan\theta = \frac{PQ}{QR}$$

$$\tan 30° = \frac{h}{48} \quad \text{gives,} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{48} \quad \text{so,} \quad h = 16\sqrt{3}$$

അതുകൊണ്ട് ഗോപുരത്തിന്റെ ഉയരം $16\sqrt{3}$ മീറ്റർ ആകുന്നു.



ചിത്രം 6.13

**ഉദാഹരണം 6.20** തറ നിരപ്പിൽ നിന്ന് 75 മീറ്റർ ഉയരത്തിൽ ഒരു പട്ടം പറക്കുന്നു. തറയിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവുമായി പട്ടത്തിന്റെ ചരട് ബന്ധിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു. ചരട് തറയുമായി $60°$ കോൺ ഉണ്ടാക്കുന്നു. ചരടിന്റെ നീളം കണക്കാക്കുക. ഇവിടെ ചരട് നേർരേഖയിലാണ് എന്ന് കണക്കാക്കുക.

***നിർദ്ധാരണം*** തറയിൽ നിന്ന് പട്ടത്തിന്റെ ഉയരം $AB$ എന്നിരിക്കട്ടെ.അപ്പോൾ $AB = 75$.

ചരടിന്റെ നീളം $AC$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

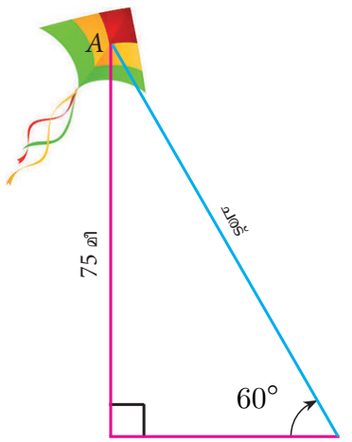
സമകോണ ത്രികോണം $ABC$ ൽ $\angle ACB = 60°$

$$\sin\theta = \frac{AB}{AC}$$

$$\sin 60° = \frac{75}{AC}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{75}{AC} \text{ , അതുകൊണ്ട് } AC = \frac{150}{\sqrt{3}} = 50\sqrt{3}$$

അതുകൊണ്ട്, ചരടിന്റെ നീളം $50\sqrt{3}$ മീറ്റർ.



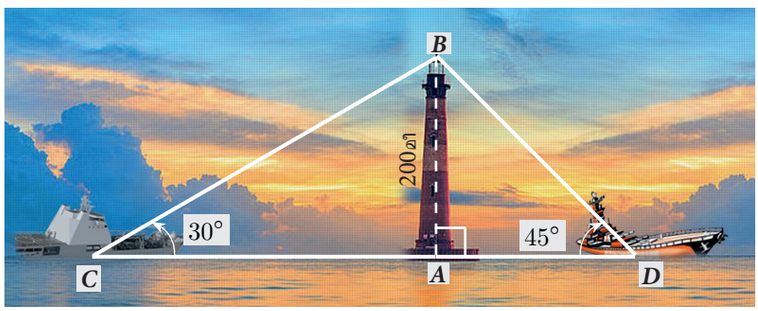
ചിത്രം 6.14

**ഉദാഹരണം 6.21** ഒരു ദീപസ്തംഭത്തിന്റെ ഇരു വശങ്ങളിലായി കടലിൽ രണ്ട് കപ്പലുകൾ സഞ്ചരിക്കുന്നു. ദീപസ്തംഭത്തിന്റെ മുകളിൽ നിന്ന് കപ്പലുകളുടെ കീഴ്കോണുകൾ $30°$, $45°$ എന്നിവയാണ്. ദീപസ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരം 200 മീ ആണെങ്കിൽ രണ്ട് കപ്പലുകൾ തമ്മിലുള്ള ദൂരം കാണുക. ($\sqrt{3} = 1.732$)

***നിർദ്ധാരണം*** ദീപസ്തംഭം $AB$ എന്നിരിക്കട്ടെ. രണ്ട് കപ്പലുകളുടെ സ്ഥാനങ്ങൾ $C$ കൂടാതെ $D$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

അപ്പോൾ, $AB = 200$ മീ.

$\angle ACB = 30°$, $\angle ADB = 45°$



ചിത്രം 6.15



6 Trigonometry_Malayalam.indd 253 20/01/2023 19:02:17

സമകോണ ത്രികോണം $BAC$ ൽ $\tan 30° = \frac{AB}{AC}$

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{200}{AC}$ ഇതിൽ നിന്ന് $AC = 200\sqrt{3}$ ...(1)

സമകോണ ത്രികോണം $BAD$ൽ, $\tan 45° = \frac{AB}{AD}$

$1 = \frac{200}{AD}$ ഇതിൽ നിന്ന് $AD = 200$ ...(2)

അപ്പോൾ, $CD = AC + AD \quad = 200\sqrt{3} + 200$ [(1) കൂടാതെ (2) ൽ നിന്ന്]

$CD = 200(\sqrt{3} + 1) \quad = 200 \times 2.732 \; = 546.4$

രണ്ട് കപ്പലുകൾ തമ്മിലുള്ള ദൂരം $546.4$ മീ.

**ഉദാഹരണം 6.22** തറ നിരപ്പിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്നും $30$ മീ ഉയരമുള്ള കെട്ടിടത്തിന്റെ മുകളിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന ഗോപുരത്തിന്റെ മുകൾ ഭാഗത്തിന്റെയും അടിഭാഗത്തിന്റെയും മേൽകോണുകൾ യഥാക്രമം $45°$ കൂടാതെ $60°$ ആകുന്നു. ഗോപുരത്തിന്റെ ഉയരം കാണുക. $(\sqrt{3} = 1.732)$

***നിർദ്ധാരണം*** ഗോപുരത്തിന്റെ ഉയരം $AC$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

കെട്ടിടത്തിന്റെ ഉയരം $AB$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

അപ്പോൾ, $AC = h$ മീറ്റർ, $AB = 30$ മീ

സമകോണ ത്രികോണം $CBP$ ൽ, $\angle CPB = 60°$

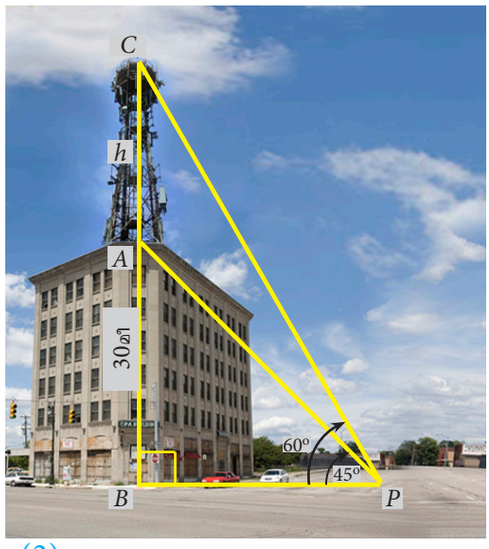
$\tan\theta = \frac{BC}{BP}$

$\tan 60° = \frac{AB + AC}{BP}$ , $\sqrt{3} = \frac{30 + h}{BP}$ ...(1)

സമകോണ ത്രികോണം $ABP$ ൽ, $\angle APB = 45°$

$\tan\theta = \frac{AB}{BP}$

$\tan 45° = \frac{30}{BP}$ ഇതിൽ നിന്ന് $BP = 30$ ...(2)



ചിത്രം 6.16

സമീകരണം (2) നെ (1) ൽ പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ കിട്ടുന്നത $\sqrt{3} = \frac{30 + h}{30}$

$h = 30(\sqrt{3} - 1) = 30(1.732 - 1) = 30(0.732) \; = 21.96$

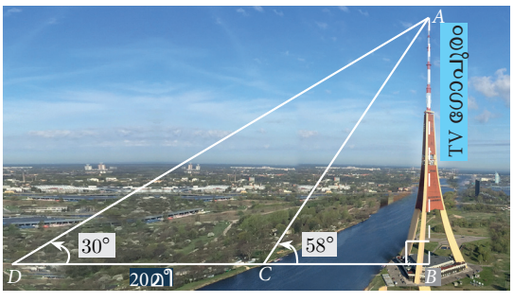
ആയതുകൊണ്ട് ഗോപുരത്തിന്റെ ഉയരം $21.96$ മീ ആകുന്നു.

**ഉദാഹരണം6.23** ഒരുകനാലിന്റെതീരത്ത്ലംബമായിഒരുTVഗോപുരംസ്ഥിതിചെയ്യുന്നു.കനാലിന്റെ നേർ എതിർതീരത്തെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് ഗോപുരത്തെ വീക്ഷിക്കുന്നു. ഗോപുരത്തിന്റെ മുകൾ ഭാഗത്തിന്റെ മേൽകോൺ $58°$ ആണ്. ഗോപുരത്തിന്റെ അടിഭാഗത്തെയും ഈ ബിന്ദുവിനെയും യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖയിൽ ഈ ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് $20$ മീറ്റർ അകലെയുള്ള മറ്റൊരു ബിന്ദിുവിൽ നിന്നുള്ള മേൽ കോൺ $30°$ ആണ്. എങ്കിൽ ഗോപുരത്തിന്റെ ഉയരവും കനാലിന്റെ വീതിയും കാണുക. $(\tan 58° = 1.6003)$



6 Trigonometry_Malayalam.indd 254 20/01/2023 19:02:21

*നിർദ്ധാരണം*



ചിത്രം 6.17

TV ഗോപുരത്തിന്റെ ഉയരം $AB$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$CD = 20$ മീ.

കനാലിന്റെ വീതി $BC$ എന്നിരിക്കട്ടെ

സമകോണത്രികോണം $ABC$ ൽ, $\tan 58° = \frac{AB}{BC}$

$$1.6003 = \frac{AB}{BC} \qquad ...(1)$$

സമകോണത്രികോണം $ABD$ ൽ, $\tan 30° = \frac{AB}{BD} = \frac{AB}{BC + CD}$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AB}{BC + 20} \qquad ...(2)$$

സമീകരണം (1) നെ (2) കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്നത്, $\frac{1.6003}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{BC + 20}{BC}$

$$BC = \frac{20}{1.7791} = 11.29 \text{ മീ.} \qquad ...(3)$$

$1.6003 = \frac{AB}{11.29}$ [(1) കൂടാതെ (3) നിന്ന്]

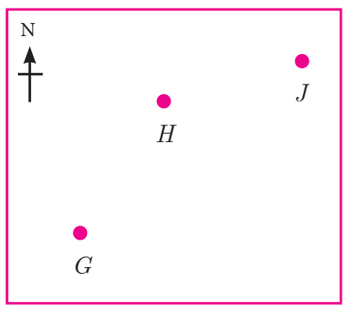
$AB = 18.07$

ആയതിനാൽ ഗോപുരത്തിന്റെ ഉയരം $18.07$ മീ കൂടാതെ കനാലിന്റെ വീതി $11.29$ മീ

**ഉദാഹരണം 6.24** $G$ ൽ നിന്ന് $250$ കി.മീ അകലെയുള്ള $H$ ലേക്ക് ഒരു വിമാനം $24\Upsilon$കോണിൽ പറക്കുന്നു. $H$ ൽ നിന്നും $180$ കി.മീ അകലെയുള്ള $J$ യിലേക്ക് $55°$ കോണിൽ പറക്കുന്നു.
(i) $G$ യിന് വടക്കായി $H$ എത്ര ദൂരത്തിലാണ്? (ii) $G$ യിന് കിഴക്കായി $H$ എത്ര ദൂരത്തിലാണ്?

(iii) $H$ ന് വടക്കായി $J$ എത്ര ദൂരത്തിലാണ്? (iv) $H$ ന് കിഴക്കായി $J$ എത്ര ദൂരത്തിലാണ്?

$\begin{pmatrix} \sin 24° = 0.4067 & \sin 11° = 0.1908 \\ \cos 24° = 0.9135 & \cos 11° = 0.9816 \end{pmatrix}$



ചിത്രം 6.18 (a)

*നിർദ്ധാരണം*

(i) സമകോണത്രികോണം $GOH$ ൽ, $\cos 24° = \frac{OG}{GH}$

$0.9135 = \frac{OG}{250}$; $OG = 228.38$ കി.മീ

$G$ ന് വടക്കായി $H$ ലേയ്ക്കുള്ള ദൂരം $= 228.38$ കി.മീ



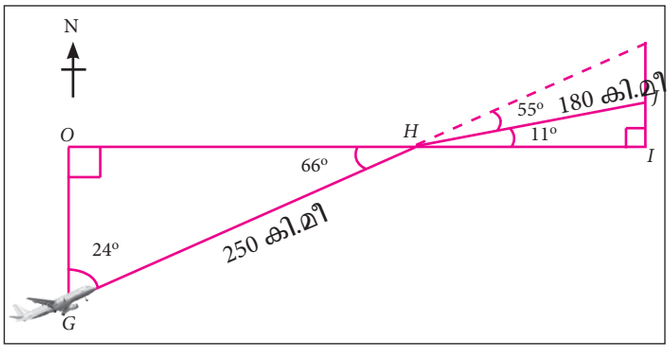
6 Trigonometry_Malayalam.indd 255 20/01/2023 19:02:23

(ii) സമകോണത്രികോണം $GOH$ ൽ,

$$\sin 24^\circ = \frac{OH}{GH}$$

$$0.4067 = \frac{OH}{250} \; ; \; OH = 101.68$$

$G$ ന് കിഴക്കായി $H$ ലേക്ക് ഉള്ള ദൂരം $= 101.68$ കി.മീ



ചിത്രം 6.18 (b)

(iii) സമകോണത്രികോണം $HIJ$ ൽ,

$$\sin 11^\circ = \frac{IJ}{HJ}$$

$$0.1908 = \frac{IJ}{180} ; \; IJ = 34.34 \text{ കി.മീ}$$

$H$ ന് വടക്കായി $J$ യിലേക്കുള്ള ദൂരം $= 34.34$ കി.മീ

(iv) സമകോണത്രികോണം $HIJ$ ൽ,

$$\cos 11^\circ = \frac{HI}{HJ}$$

$$0.9816 = \frac{HI}{180} ; \; HI = 176.69 \text{ കി.മീ}$$

$H$ ന് കിഴക്കായി $J$ യിലേക്കുള്ളഅള ദൂരം $= 176.69$ കി.മീ

**ഉദാഹരണം 6.25** ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിട്ടുള്ളതുപോലെ ഒരു നിരപ്പായ തറയിൽ രണ്ട് മരങ്ങൾ നിൽക്കുന്നു. തറയിൽ $X$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് രണ്ടു വശങ്ങളുടെയും മുകൾ അറ്റത്തിന്റെ മേൽ കോൺ $40^\circ$ യാണ്. $X$ ന്റെയും ചെറിയ വശത്തിന്റെയും തിരശ്ചീനദൂരം 8 മീ.കൂടാതെ രണ്ട് വശങ്ങളുടെയും മുകൾ അറ്റങ്ങളുടെയും ദൂരം 20 മീ എങ്കിൽ

(i) $X$ ന്റെയും ചെറിയ മരത്തിന്റെയും തിരശ്ചീന ദൂരം

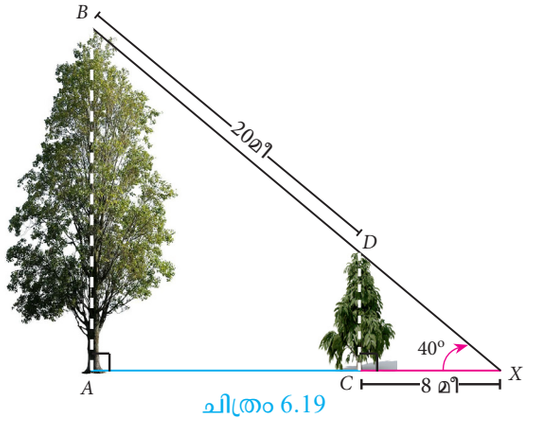
(ii) രണ്ട് വശങ്ങൾക്കിടിയിലുള്ള തിരശ്ചീന ദൂരം കാണുക.
$(\cos 40^\circ = 0.7660)$

***നിർദ്ധാരണം*** വലിയ മരത്തിന്റെ ഉയരം $AB$ എന്നിരിക്കട്ടെ, കൂടാതെ ചെറിയ മരത്തിന്റെ ഉയരം $CD$ എന്നിരിക്കട്ടെ. തറയിലുള്ള ബിന്ദു $X$ എന്നിരിക്കട്ടെ

(i) സമകോണത്രികോണം $XCD$ ൽ, $\cos 40^\circ = \frac{CX}{XD}$

$$XD = \frac{8}{0.7660} = 10.44 \text{ മീ}$$

$X$ നും ചെറിയ മരത്തിനും ഇടയിലുള്ള ദൂരം $= XD = 10.44$ മീ



ചിത്രം 6.19

(ii) സമകോണത്രികോണം $XAB$,

$$\cos 40^\circ = \frac{AX}{BX} = \frac{AC + CX}{BD + DX}$$



6 Trigonometry_Malayalam.indd 256 20/01/2023 19:02:25

$$0.7660 = \frac{AC + 8}{20 + 10.44} \text{ കിട്ടുന്നത് } AC = 23.32 - 8 = 15.32 \text{ മീ}$$

രണ്ട് വശങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള തിരശ്ചീന ദൂരം $= AC = 15.32$ മീ

**ചിന്തിക്കുക**

1. ഉയരങ്ങളും ദൂരങ്ങളും കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് ഏത് തരം ത്രികോണമാണ് ഉപയോഗിക്കുന്നത്?
2. ഒരു കെട്ടിടത്തിന്റെ ഉയരവും അതിന്റെ പാദത്തിൽ നിന്നുള്ള ദൂരവും തന്നിരുന്നാൽ മേൽ കോൺ കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് ഏത് ത്രികോണമിതി അംശബന്ധമാണ് ഉപയോഗിക്കേണ്ടത്?
3. വീക്ഷണരേഖയും മേൽകോണും തന്നിരുന്നാൽ,

   (i) കെട്ടിടത്തിന്റെ ഉയരം

   (ii) കെട്ടിടത്തിന്റെ പാദത്തിൽ നിന്നുള്ള ഉയരം എന്നിവ കണ്ടു പിടിക്കുന്നതിന് ഏത് ത്രികോണമിതി അംശബന്ധമാണ് ഉപയോഗിക്കേണ്ടത്.

## അഭ്യാസം 6.2

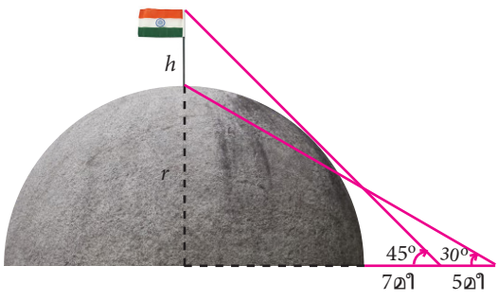
1. $10\sqrt{3}$ മീറ്റർ ഉയരമുള്ള ഒരു ഗോപുരത്തിന്റെ ചുവട്ടിൽ നിന്നും 30 മീറ്റർ ദൂരത്തിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് ഗോപുരത്തിന്റെ മുകളറ്റത്തിന്റെ മേൽ കോൺ കാണുക.

2. ഒരു റോഡിന്റെ ഇരു വശങ്ങളിലുമായി $4\sqrt{3}$ മീ ഉയരമുള്ള വീടുകൾ അന്തരമില്ലാതെ തുടർച്ചയായി സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു. ഒരു കാൽനട യാത്രക്കാരൻ റോഡിന്റെ മധ്യത്തിൽ നിന്ന് ഒരു വീടിനെ വീക്ഷിക്കുന്നു. കാൽനടയാത്രക്കാരന്റെയും വീടിന്റെ മുകളറ്റത്തിന്റെയും മേൽ കോൺ $30°$ യാണ്. എങ്കിൽ റോഡിന്റെ വീതി കാണുക.

3. തന്റെ വീടിന്റെ വെളിയിൽ നിൽക്കുന്ന ഒരാൾക്ക് ഒരു ജനാലയുടെ മുകൾ ഭാഗത്തിന്റെയും അടി ഭാഗത്തിന്റെ മേൽ കോണുകൾ യഥാക്രമം $60°$, $45°$ യാണ്.അയാളുടെ ഉയരം 180 സെ.മീ അയാൾ ഭിത്തിയിൽ നിന്നും 5 മീറ്റർ ദൂരത്തിൽ ആണെങ്കിൽ ജനാലയുടെ ഉയരം എത്ര? $(\sqrt{3} = 1.732)$

4. ഒരു പ്രതിമാ പീഠത്തിന്റെ മുകളിലുള്ള ഒരു പ്രതിമയുടെ ഉയരം 1.6 മീ.തറ നിരപ്പിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്നും പ്രതിമയുടെ മുകൾഭാഗത്തിന്റെ മേൽകോൺ $60\Upsilon$. അതേ ബിന്ദുവിൽ നിന്നും പ്രതിമാ പീഠത്തിന്റെ മുകൾഭാഗത്തിന്റെ മേൽകോൺ $40\Upsilon$ പ്രതിമ പീഠത്തിന്റെ ഉയരം കാണുക $(\tan 40° = 0.8391,\ \sqrt{3} = 1.732)$.

5. അർദ്ധ ഗോളാകൃതിയിലുള്ള ഒരു കുംഭ ഗോപുരത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം '$r$' മീറ്റർ അതിന്റെ മുകളിൽ '$h$' മീറ്റർ ഉയരമുള്ള ഒരു കൊടിമരം ഉണ്ട്. കുംഭഗോപുരത്തിൽ നിന്നും 7 മീറ്റർ അകലെയായി ഒരാൾ നിൽക്കുന്നു. അയാൾ കൊടിമരത്തിന്റെ അഗ്രം $45\Upsilon$ മേൽകോണിൽ കാണുന്നു. 5 മീറ്റർ നീങ്ങിയ ശേഷം അടിഭാഗം $30\Upsilon$മേൽകോണിൽ കാണുന്നു.
   (i) കൊടിമരത്തിന്റെ ഉയരം കാണുക.
   (ii) കുംഭഗോപുരത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം കാണുക $(\sqrt{3} = 1.732)$.






6 Trigonometry_Malayalam.indd 257 20/01/2023 19:02:27

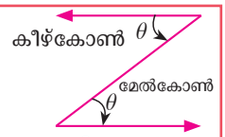
6. 15 മീറ്റർ ഉയരമുള്ള ഒരു ഗോപുരം വൈദ്യുത പോസ്റ്റിന്റെ അടിഭാഗവുമായി $60°$ മേൽകോണും മുകൾഭാഗവുമായി $30°$ മേൽകോണും ഉണ്ടാക്കുന്നു. വൈദ്യുത പോസ്റ്റിന്റെ ഉയരം കാണുക?

### 6.3.2 കീഴ്കോൺ ഉൾപ്പെടുന്ന പ്രശ്നങ്ങൾ

ഈ വിഭാഗത്തിൽ കീഴ്കോൺ ഉൾപ്പെടുന്ന പ്രശ്നങ്ങളെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നതെങ്ങനെ എന്ന് നോക്കാം.

**കുറിപ്പ്**

- മേൽകോൺ, കീഴ്കോൺ എന്നിവ ഏകാന്തരകോണുകളായതുകൊണ്ട് അവ തുല്യമായിരിക്കും.



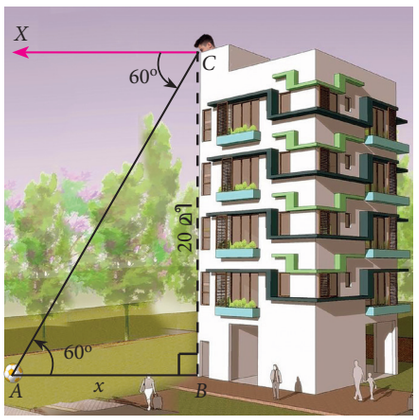
ചിത്രം 6.20

**ഉദാഹരണം 6.26** 20 മീറ്റർ ഉയരമുള്ള ഗോപുരത്തിന്റെ മുകളറ്റത്തിൽ ഇരിക്കുന്ന ഒരു കളിക്കാരൻ കളിസ്ഥലത്തിലുള്ള ഒരു പന്തിനെ $60\Upsilon$ കീഴ്കോണിലായി നിരീക്ഷിക്കുന്നു. ഗോപുരത്തിന്റെ പാദത്തിനും പന്തിനും ഇടയിലുള്ള ദൂരം കാണുക. $(\sqrt{3} = 1.732)$

***നിർദ്ധാരണം*** ഗോപുരത്തിന്റെ ഉയരം $BC$ എന്നിരിക്കട്ടെ, കൂടാതെ കളിസ്ഥലത്ത് പന്തിന്റെ സ്ഥാനം $A$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

$BC$ = 20 മീ കൂടാതെ $\angle XCA = 60° = \angle CAB$

$AB$ = $x$ മീറ്റർ എന്നിരിക്കട്ടെ.



ചിത്രം 6.21

സമകോണ ത്രികോണം $ABC$ ൽ,

$$\tan 60° = \frac{BC}{AB}$$

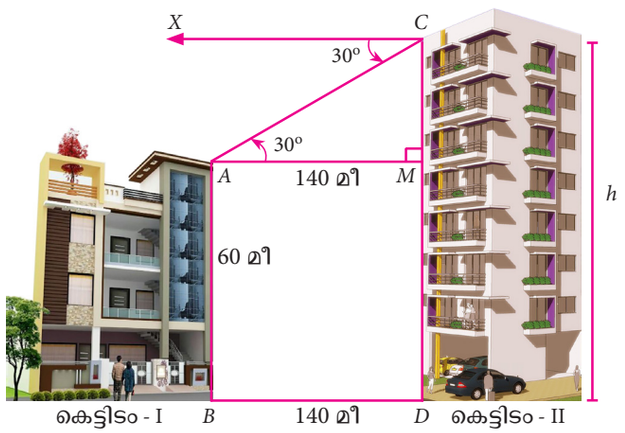
$$\sqrt{3} = \frac{20}{x}$$

$$x = \frac{20 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{20 \times 1.732}{3} = 11.55 \text{ മീ}$$

ആയതുകൊണ്ട് ഗോപുരത്തിന്റെ പാദത്തിനും പന്തിനും ഇടയിലുള്ള ദൂരം 11.55 മീ ആകുന്നു.

**ഉദാഹരണം 6.27** രണ്ട് കെട്ടിടങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള തിരശ്ചീന ദൂരം 140 മീ ആണ്.രണ്ടാമത്തെ കെട്ടിടത്തിന്റെ മുകൾഭാഗത്തിന്റെ കീഴ്കോൺ $30\Upsilon$ ആണ്. ആദ്യത്തെ കെട്ടിടത്തിന്റെ ഉയരം 60മീ ആണെങ്കിൽ രണ്ടാമത്തെ കെട്ടിടത്തിന്റെ ഉയരം കാണുക $(\sqrt{3} = 1.732)$.

***നിർദ്ധാരണം*** ആദ്യത്തെ കെട്ടിടത്തിന്റെ ഉയരം $AB$ = ***60*** മീ.



ചിത്രം 6.22

അപ്പോൾ, $AB = MD = 60$ മീ

രണ്ടാമത്തെ കെട്ടിടത്തിന്റെ ഉയരം $CD = h$. ദൂരം $BD = 140$ മീ

അപ്പോൾ, $AM = BD = 140$ മീ

ചിത്രത്തിൽ നിന്ന്,

$$\angle XCA = 30° = \angle CAM$$



6 Trigonometry_Malayalam.indd 258 20/01/2023 19:02:29

സമകോണ ത്രികോണം$AMC$ ൽ, $\tan 30° = \frac{CM}{AM}$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{CM}{140}$$

$$CM = \frac{140}{\sqrt{3}} = \frac{140\sqrt{3}}{3}$$

$$= \frac{140 \times 1.732}{3}$$

$$CM = 80.83$$

അപ്പോൾ, $h = CD = CM + MD = 80.83 + 60 = 140.83$

ആയതുകൊണ്ട്, രണ്ടാമത്തെ കെട്ടിടത്തിന്റെ ഉയരം $140.78$ മീ ആകുന്നു.

**ഉദാഹരണം 6.28** $50$ മീറ്റർ ഉയരമുള്ള ഒരു ഗോപുരത്തിൽ നിന്ന് ഒരു മരത്തിന്റെ മുകൾഭാഗത്തെയും അടിഭാഗത്തെയും യഥാക്രമം $30°, 45°$ കീഴ്കോണുകളിൽ വീക്ഷിക്കുന്നു. എങ്കിൽ മരത്തിന്റെ ഉയരം കാണുക $(\sqrt{3} = 1.732)$.

***നിർദ്ധാരണം*** ഗോപുരത്തിന്റെ ഉയരം $AB = 50$ മീ

മരത്തിന്റെ ഉയരം $CD = y$ കൂടാതെ $BD = x$

ചിത്രത്തിൽ നിന്ന്, $\angle XAC = 30° = \angle ACM$ കൂടാതെ $\angle XAD = 45° = \angle ADB$

സമകോണ ത്രികോണം $ABD$ ൽ,

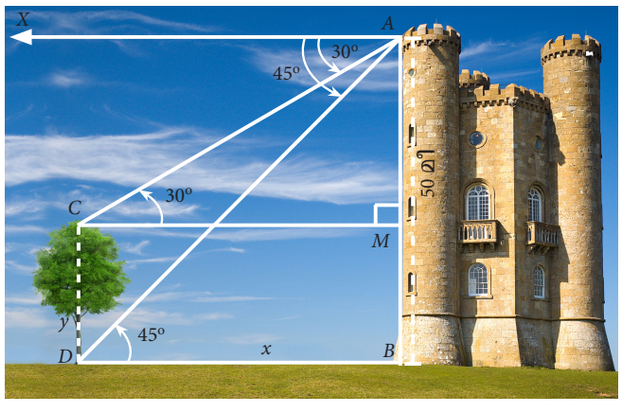
$\tan 45° = \frac{AB}{BD}$

$1 = \frac{50}{x}$ കിട്ടുന്നു $x = 50$ മീ

സമകോണ ത്രികോണം $AMC$ ൽ,

$\tan 30° = \frac{AM}{CM}$

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AM}{50}$ $[\because DB = CM]$



ചിത്രം 6.23

$AM = \frac{50}{\sqrt{3}} = \frac{50\sqrt{3}}{3} = \frac{50 \times 1.732}{3} = 28.87$ മീ.

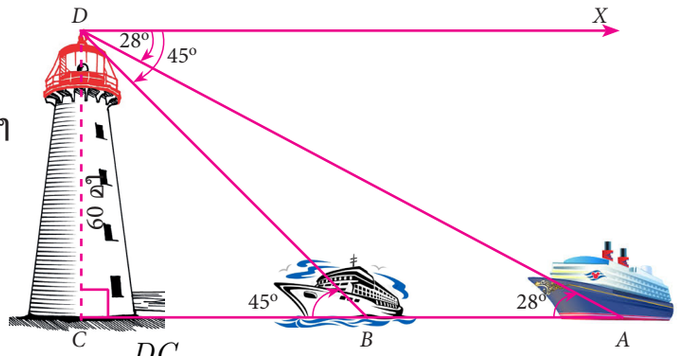
ആയതുകൊണ്ട് മരത്തിന്റെ ഉയരം $= CD = MB = AB - AM = 50 - 28.87 = 21.13$ മീ



6 Trigonometry_Malayalam.indd 259 20/01/2023 19:02:32

**ഉദാഹരണം 6.29** സമുദ്ര നിരപ്പിൽ നിന്ന് 60 മീ ഉയരമുള്ള ദീപസ്തംഭത്തിന്റെ മുകളിൽ നിന്ന് നിരീക്ഷകൻ രണ്ട് കപ്പലുകളെ $28^\circ, 45^\circ$ എന്നീ കീഴ്കോണുകളിൽ വീക്ഷിക്കുന്നു. രണ്ട് കപ്പലുകളും ഒന്നിന് പുറകേ ഒന്നായി ദീപസ്തംഭത്തിന്റെ ഒരേ വശത്ത് നിൽക്കുന്നു. എങ്കിൽ അവ തമ്മിലുള്ള ദൂരം കാണുക ($\tan 28^\circ = 0.5317$).

***നിർദ്ധാരണം*** ദീപസ്തംഭം $CD$ ൽ നിരീക്ഷകൻ $D$ ൽ നിൽക്കുന്നു.



ചിത്രം 6.24

ദീപസ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരം $CD = 60$ മീ

ചിത്രത്തിൽ നിന്ന്,

$\angle XDA = 28^\circ = \angle DAC$ കൂടാതെ

$\angle XDB = 45^\circ = \angle DBC$

സമകോണ ത്രികോണം $DCB$ ൽ, $\tan 45^\circ = \dfrac{DC}{BC}$

$$1 = \frac{60}{BC} \quad \text{കിട്ടുന്നു} \quad BC = 60 \text{ മീ}$$

സമകോണ ത്രികോണം $DCA$ ൽ, $\tan 28^\circ = \dfrac{DC}{AC}$

$$0.5317 = \frac{60}{AC} \quad \text{കിട്ടുന്നു} \quad AC = \frac{60}{0.5317} = 112.85$$

രണ്ട് കപ്പലുകളുടെ ഇടയിലുള്ള ദൂരം $AB = AC - BC = 52.85$ മീ

**ഉദാഹരണം 6.30** ഒരു വ്യക്തി ഗോപുരത്തിന്റെ മുകളറ്റത്തിൽ നിന്ന് ഒരു ബോട്ട് സഞ്ചരിക്കുന്നത് വീക്ഷിക്കുന്നു. ഗോപുരത്തിൽ നിന്ന് 200മീ അകലെ ബോട്ട് സഞ്ചരിക്കുമ്പോൾ ആ വ്യക്തിയുടെ കണ്ണിൽ നിന്ന് അതിന്റെ കീഴ്കോൺ $60^\circ$ആണ്. 10 സെക്കന്റിന് ശേഷം കീഴ്കോൺ $45^\circ$ ആയി മാറുന്നു. എങ്കിൽ ബോട്ടിന്റെ വേഗത (km / hr ൽ) കാണുക.ബോട്ട് ഒഴുക്കില്ലാത്ത വെള്ളത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നുവെന്ന് കരുതുക? ($\sqrt{3} = 1.732$)

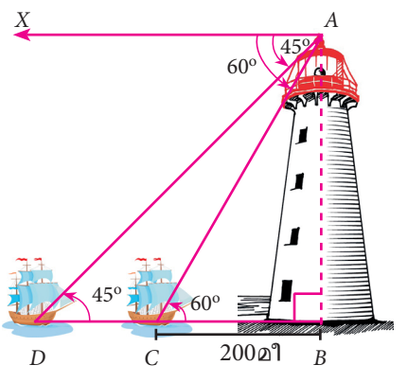
***നിർദ്ധാരണം*** ഗോപുരം $AB$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

ബോട്ടിന്റെ സ്ഥാനങ്ങൾ $C$ കൂടാതെ $D$ എന്നിരിക്കട്ടെ

ചിത്രത്തിൽ നിന്ന്,

$\angle XAC = 60^\circ = \angle ACB$ കൂടാതെ

$\angle XAD = 45^\circ = \angle ADB$, $BC = 200$ മീ



ചിത്രം 6.25

സമകോണ ത്രികോണം $ABC$ ൽ, $\tan 60^\circ = \dfrac{AB}{BC}$

$$\text{കിട്ടുന്നത്} \quad \sqrt{3} = \frac{AB}{200}$$

$$\text{കിട്ടുന്നത്} \quad AB = 200\sqrt{3} \qquad \ldots(1)$$

സമകോണ ത്രികോണം $ABD$ ൽ, $\tan 45^\circ = \dfrac{AB}{BD}$



6 Trigonometry_Malayalam.indd 260 20/01/2023 19:02:35

$$1 = \frac{200\sqrt{3}}{BD} \qquad [(1) \text{ ൽ നിന്ന്}]$$

$$BD = 200\sqrt{3}$$

അപ്പോൾ, $CD = BD - BC$

$$CD = 200\sqrt{3} - 200 = 200(\sqrt{3} - 1) = 146.4$$

ദൂരം $CD$ മറികടക്കുന്നതിന് ബോട്ട് 10 സെക്കന്റ് എടുക്കുന്നു

അതായത് ദൂരം $146.4$ മീ നെ 10 സെക്കൻഡിൽ കടക്കുന്നു.

അതുകൊണ്ട് ബോട്ടിന്റെ വേഗത $= \dfrac{\text{ദൂരം}}{\text{സമയം}}$

$$= \frac{146.4}{10} = 14.64 \text{ m/s} \text{ കിട്ടുന്നു } 14.64 \times \frac{3600}{1000} \text{ km/hr} = 52.704 \text{ km/hr}$$

## അഭ്യാസം 6.3

1. $50\sqrt{3}$ മീ ഉയരമുള്ള ഒരു പാറയുടെ മുകളിൽ നിന്നും തറനിരപ്പിലുള്ള ഒരു കാറിന്റെ കീഴ്കോൺ $30°$. കാർ പാറയിൽ നിന്നും എത്ര ദൂരത്തിലാണ് എന്ന് കാണുക.

2. രണ്ട് കെട്ടിടങ്ങൾക്ക് ഇടയിലുള്ള തിരശ്ചീന ദൂരം $70$ മീ. രണ്ടാമത്തെ കെട്ടിടത്തിന്റെ മുകളിൽ നിന്നും ആദ്യത്തെ കെട്ടിടത്തിന്റെ മുകൾഭാഗത്തിന്റെ കീഴ്കോൺ $45°$ ആണ്. രണ്ടാമത്തെ കെട്ടിടത്തിന്റെ ഉയരം $120$ മീ. എങ്കിൽ ആദ്യത്തെ കെട്ടിടത്തിന്റെ ഉയരം കാണുക.

3. $60$ മീ ഉയരമുള്ള ഒരു ഗോപുരത്തിന്റെ മുകളിൽ നിന്നും ഒരു ലംബവിളക്ക് മരത്തിന്റെ അഗ്രവും ചുവടും യഥാക്രമം $38°$, $60°$ കീഴ്കോണിൽ കാണുന്നു. വിളക്ക് മരത്തിന്റെ ഉയരം കാണുക. $(\tan 38° = 0.7813, \ \sqrt{3} = 1.732)$

4. തറ നിരപ്പിൽ നിന്നും $1800$ മീ ഉയരത്തിൽ പറക്കുന്ന ഒരു വിമാനത്തിൽ നിന്നും ഒരേ ദിശയിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന രണ്ട് കപ്പലുകൾ വീക്ഷിക്കുന്നു. കപ്പലുകളുടെ കീഴ്കോണുകൾ $60°$, $30°$ എങ്കിൽ കപ്പലുകൾക്ക് ഇടയിലുള്ള ദൂരം കാണുക. $(\sqrt{3} = 1.732)$

5. ഒരു ദീപസ്തംഭത്തിന്റെ മുകളിൽ നിന്നും അതിന്റെ ഇരുവശങ്ങളിലുമുള്ള രണ്ട് കപ്പലുകൾ $30°$, $60°$ കീഴ്കോണുകളിൽ വീക്ഷിക്കുന്നു. ദീപസ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരം $h$ മീ കപ്പലുകളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖ. ദീപസ്തംഭത്തിന്റെ ചുവട്ടിൽ കൂടി കടന്നുപോകുന്നുവെങ്കിൽ കപ്പലുകൾക്കിടയിലുള്ള ദൂരം $\dfrac{4h}{\sqrt{3}}$ മീ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

6. $90$ അടി ഉയരമുള്ള ഒരു കെട്ടിടത്തിലെ ലിഫ്റ്റ് കെട്ടിടത്തിന്റെ മുകളിൽ നിന്നും താഴേക്ക് വരുന്നു. കെട്ടിടത്തിന്റെ മുകളിൽ നിന്ന് അവിടെയുള്ള പൂന്തോട്ടത്തിലെ ഫൗണ്ടന്റെ കീഴ്കോൺ $60°$ ആണ്. രണ്ട് മിനിറ്റിന് ശേഷം കീഴ്കോൺ $30°$ ആയി മാറുന്നു. ലിഫ്റ്റിന്റെ പ്രവേശന കവാടത്തിൽ നിന്നും ഫൗണ്ടൻ $30\sqrt{3}$ അടി ദൂരെ എങ്കിൽ താഴോട്ട് വരുന്ന ലിഫ്റ്റിന്റെ വേഗത കാണുക.

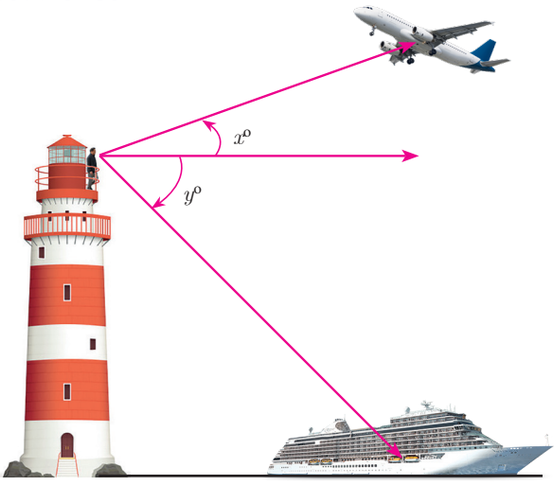


6 Trigonometry_Malayalam.indd 261 20/01/2023 19:02:36

### 6.3.3 മേൽകോൺ കീഴ്കോൺ ഉൾപ്പെടുന്ന പ്രശ്നങ്ങൾ

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള സന്ദർഭം. നോക്കാം,

ഒരു കടൽ തീരത്തുള്ള ദീപസ്തംഭത്തിന്റെ മുകളിൽ നിൽക്കുന്ന ഒരു ആൾ സമുദ്രനിരപ്പിന് മുകളിൽ പറക്കുന്ന വിമാനത്തിനെ നോക്കുന്നു. അതേ സമയം സമുദ്രനിരപ്പിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു കപ്പലിനെയും കാണുന്നു. അദ്ദേഹം വിമാനത്തെ നോക്കുമ്പോൾ മേൽകോണും കപ്പലിനെ നോക്കുമ്പോൾ കീഴ്കോണും രൂപപ്പെടുന്നു. ഈ രണ്ട് കോണുകളും ഒരേ നിരീക്ഷണത്തിൽ വരുന്നതിനുള്ള ഉദാഹരണമാണ് ഇത്.



ചിത്രം 6.26

ചിത്രം 6.26 ൽ മേൽകോൺ $x^\circ$, കീഴ്കോൺ $y^\circ$ ആകുന്നു.

ഈ വിഭാഗത്തിൽ മേൽകോണും കീഴ്കോണും തന്നിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ നിർദ്ധാരണം കാണുന്നത് എങ്ങനെയെന്ന് നോക്കാം.

**ഉദാഹരണം 6.31** 12 മീ ഉയരമുള്ള ഒരു കെട്ടിടത്തിൽ നിന്നും ഒരു കേബിൾ ഗോപുരത്തിന്റെ മേൽകോൺ $60^\circ$ അതിന്റെ ചുവടിന്റെ കീഴ്കോൺ $30^\circ$ എങ്കിൽ ഗോപുരത്തിന്റെ ഉയരം എത്ര?

***നിർദ്ധാരണം*** ചിത്രം 6.27 ൽ കാണിച്ചിട്ടുള്ളത് പോലെ $OA$ കെട്ടിടമാണ്. കെട്ടിടം $OA$ യുടെ മുകൾ അഗ്രബിന്ദു $O$ നിരീക്ഷണ ബിന്ദുവാണ്. $PP'$ എന്നത് കേബിൾ ഗോപുരമാണ്, $P$ അതിന്റെ മുകൾ അറ്റവും $P'$ ചുവടുമാണ്. $OA = 12$ മീ.

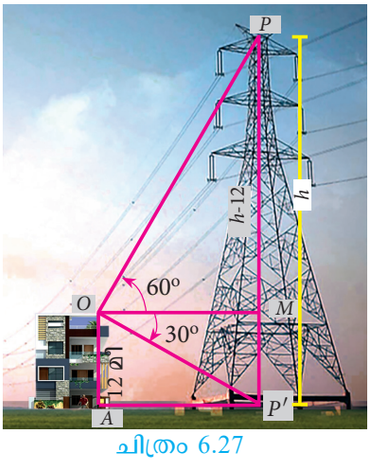
അങ്ങനെയാണെങ്കിൽ $P$ യുടെ മേൽകോൺ, $\angle MOP = 60^\circ$.

$P'$ ന്റെ കീഴ്കോൺ, $\angle MOP' = 30^\circ$.

കേബിൾ ഗോപുരം $PP'$ ന്റെ ഉയരം $h$ മീ

$O$ യിലൂടെ $OM \perp PP'$ വരയ്ക്കുക

$MP = PP' - MP' = h - OA = h - 12$



ചിത്രം 6.27

സമകോണ ത്രികോണം $OMP$, ൽ $\dfrac{MP}{OM} = \tan 60^\circ$

കിട്ടുന്നത് $\dfrac{h-12}{OM} = \sqrt{3}$

ആയതുകൊണ്ട്, $OM = \dfrac{h-12}{\sqrt{3}}$ ...(1)

സമകോണ ത്രികോണം $OMP'$, $\dfrac{MP'}{OM} = \tan 30^\circ$

കിട്ടുന്നത് $\dfrac{12}{OM} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$



6 Trigonometry_Malayalam.indd 262 20/01/2023 19:02:39

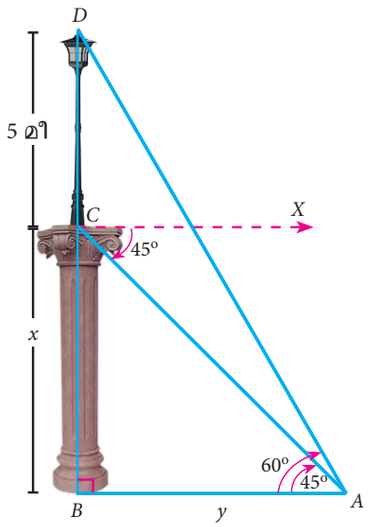
ആയതുകൊണ്ട്, $OM = 12\sqrt{3}$ ...(2)

(1), (2) ഇവയിൽ നിന്ന്, $\frac{h-12}{\sqrt{3}} = 12\sqrt{3}$

കിട്ടുന്നത് $h - 12 = 12\sqrt{3} \times \sqrt{3}$ കിട്ടുന്നത്, $h = 48$

ആയതുകൊണ്ട് കേബിൾ ഗോപുരത്തിന്റെ ഉയരം 48 മീ ആകുന്നു.

**ഉദാഹരണം 6.32** 5 മീ ഉയരമുള്ള തൂൺ ഒരു ഗോപുരത്തിന്റെ മുകളിൽ ഘടിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു. തറയിലുള്ള '$A$' ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് തൂണിന്റെ മുകളറ്റത്തിന്റെ മേൽകോൺ $60°$, ഗോപുരത്തിന്റെ മുകളറ്റത്തിൽ നിന്നും '$A$' യിലേക്കുള്ള കീഴ്കോൺ $45°$ ആണ്. ഗോപുരത്തിന്റെ ഉയരം കാണുക. ($\sqrt{3} = 1.732$)



ചിത്രം 6.28

***നിർദ്ധാരണം*** ഗോപുരത്തിന്റെ ഉയരം $BC$, തൂണിന്റെ ഉയരം $CD$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

നിരീക്ഷണ ബിന്ദു '$A$' എന്നിരിക്കട്ടെ.

$BC = x$ കൂടാതെ $AB = y$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

ചിത്രത്തിൽ നിന്ന്,

$\angle BAD = 60°$ കൂടാതെ $\angle XCA = 45° = \angle BAC$

സമകോണ ത്രികോണം $ABC$ ൽ, $\tan 45° = \frac{BC}{AB}$

കിട്ടുന്നത് $1 = \frac{x}{y}$ ആയത് കൊണ്ട്, $x = y$ ... (1)

സമകോണ ത്രികോണം $ABD$ ൽ, $\tan 60° = \frac{BD}{AB} : \frac{BC + CD}{AB}$

കിട്ടുന്നത് $\sqrt{3} = \frac{x+5}{y}$, $\sqrt{3}\, y = x + 5$

കിട്ടുന്നത്, $\sqrt{3}\, x = x + 5$ [(1) ൽ നിന്ന്]

ആയതുകൊണ്ട്, $x = \frac{5}{\sqrt{3}-1} = \frac{5}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{5(1.732+1)}{2} = 6.83$

ആയതുകൊണ്ട് ഗോപുരത്തിന്റെ ഉയരം 6.83 മീ.

**ഉദാഹരണം 6.33** ഒരു തെരുവിലുള്ള ഒരു വീടിന്റെ ജനാലയിൽ നിന്നും (തറനിരപ്പിൽ നിന്നും $h$ മീ ഉയരത്തിലാണ്). നേർ എതിരെ തെരുവിലുള്ള വീടിന്റെ മുകൾഭാഗത്തിന്റെയും അടിഭാഗത്തിന്റെയും മേൽകോൺ $\theta_1$, കീഴ്തോൺ $\theta_2$ എന്നിവയാണ്. ആ വീടിന്റെ ഉയരം $h\left(1 + \frac{\cot\theta_2}{\cot\theta_1}\right)$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

***നിർദ്ധാരണം*** ജനാലയുടെ $W$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് മേൽകോൺ കീഴ്കോൺ കണക്കാക്കുന്നുവെന്നിരിക്കട്ടെ, എതിർവശത്തുള്ള വീട് $PQ$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

അപ്പോൾ തെരുവിന്റെ വീതി $WA$ ആകുന്നു.

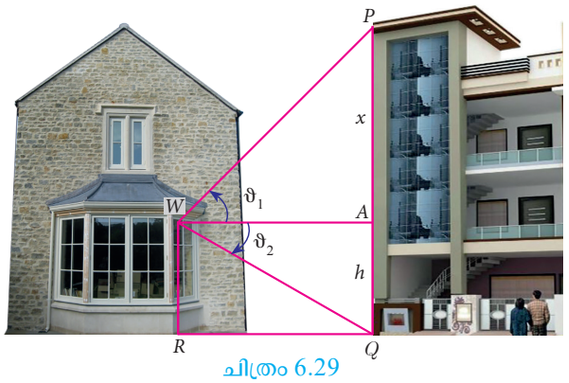


6 Trigonometry_Malayalam.indd 263 20/01/2023 19:02:42

ജനാലയുടെ ഉയരം = $h$ മീ

$= AQ\ (WR = AQ)$

$PA = x$ മീ എന്നിരിക്കട്ടെ.



ചിത്രം 6.29

സമകോണ ത്രികോണം $PAW$ ൽ, $\tan\theta_1 = \dfrac{AP}{AW}$

കിട്ടുന്നത് $\tan\theta_1 = \dfrac{x}{AW}$

$AW = \dfrac{x}{\tan\theta_1}$

കിട്ടുന്നത്, $AW = x\cot\theta$ ...(1)

സമകോണ ത്രികോണം $QAW$ ൽ, $\tan\theta_2 = \dfrac{AQ}{AW}$

കിട്ടുന്നത് $\tan\theta_2 = \dfrac{h}{AW}$

കിട്ടുന്നത്, $AW = h\cot\theta_2$ ...(2)

(1), (2) ഇവയിൽ നിന്ന് കിട്ടുന്നു, $x\cot\theta_1 = h\cot\theta_2$

കിട്ടുന്നത്, $x = h\dfrac{\cot\theta_2}{\cot\theta_1}$

**ചിന്തിക്കുക**

ഉയരം,ദൂരം കൂടാതെ മേൽകോൺ കാണുന്നതിന് എത്ര അളവുകൾ ആവശ്യമാണ്.?

ആയതുകൊണ്ട് എതിർവശത്തുള്ള ഈ വീടിന്റെ ഉയരം = $PA+AQ = x + h = h\dfrac{\cot\theta_2}{\cot\theta_1} + h$

$= h\left(1 + \dfrac{\cot\theta_2}{\cot\theta_1}\right)$

എന്ന് തെളിയിച്ചു.

## പുരോഗതി പരിശോധന

1. ഒരു നിരീക്ഷകന്റെ കണ്ണിനും വസ്തുവിനും ഇടയിലുള്ള നേർരേഖ _____.
2. ഒരു വസ്തുവിനും കണ്ണിനും ഇടയിലുള്ള രേഖ അളക്കുന്നതിന് ഉപയോഗിക്കുന്ന യന്ത്രം ഏതാണ്?
3. വീക്ഷണരേഖ തിരശ്ചീനരേഖയ്ക്ക് മുകളിൽ ആകുമ്പോൾ ഉണ്ടാകുന്ന കോൺ _____.
4. ലംബമായ വസ്തുവിന് (ഗോപുരം) നേരെ ചലിക്കുമ്പോൾ മേൽ കോൺ _____.
5. വീക്ഷണരേഖ തിരശ്ചീനരേഖയ്ക്ക് താഴെയാകുമ്പോൾ ഉണ്ടാകുന്ന കോൺ _____.

## അഭ്യാസം 6.4

1. 13 മീ ഉയരമുള്ള ഒരു മരത്തിന്റെ മുകളിൽ നിന്നും മറ്റൊരു മരത്തിന്റെ അഗ്രഭാഗത്തിന്റെയും അടിഭാഗത്തിന്റെയും മേൽകോണും കീഴ്കോണും യഥാക്രമം $45^\circ, 30^\circ$ ആകുന്നു. രണ്ടാമത്തെ മരത്തിന്റെ ഉയരം കാണുക. $(\sqrt{3} = 1.732)$



6 Trigonometry_Malayalam.indd 264 20/01/2023 19:02:44

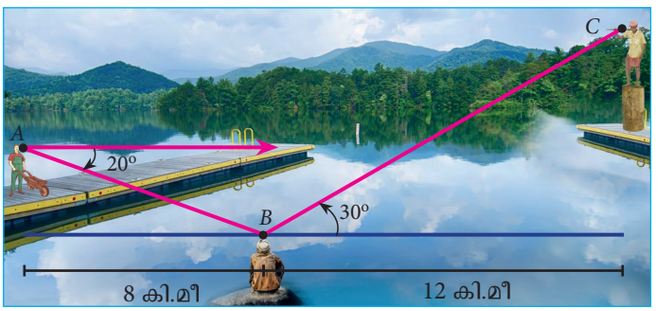
2. ജലനിരപ്പിൽ നിന്ന് 40 മീ ഉയരത്തിലുള്ള ഒരു കപ്പലിന്റെ ടെക്കിൽ നിൽക്കുന്ന ഒരാൾ ഒരു പാറയുടെ മുകൾഭാഗം $60\Upsilon$ മേൽകോണിലും അടിഭാഗം $30\Upsilon$ കീഴ്കോണിലും വീക്ഷിക്കുന്നു.കപ്പലിൽനിന്നും പാറയിലേക്കുള്ള ദൂരവും പാറയുടെ ഉയരവും കാണുക. $(\sqrt{3} = 1.732)$

3. ഒരു തടാകത്തിൽ നിന്നും '$h$' മീ ഉയരത്തിലുള്ള ബിന്ദുവിൽ നിന്നും ഒരു മേഘത്തിന്റെ മേൽകോൺ $\theta_1$ അതിന്റെ പ്രതിഫലനത്തിന്റെ കീഴ്കോൺ $\theta_2$ തറയിൽ നിന്നും മേഘത്തിലേക്കുള്ള ഉയരം $\frac{h(\tan\theta_1 + \tan\theta_2)}{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

4. ഒരു ഉയരമുള്ള കെട്ടിടത്തിന്റെ ചുവട്ടിൽ നിന്നും ഒരു മൊബൈൽ ടവറിന്റെ മേൽകോൺ $60\Upsilon$ കെട്ടിടത്തിന്റെ മുകളിൽ നിന്നും ടവറിന്റെ അടിഭാഗം $30\Upsilon$ കീഴ്കോണിൽ കാണുന്നു. കെട്ടിടത്തിന്റെ ഉയരം $50$മീ എങ്കിൽ മൊബൈൽ ടവറിന്റെ ഉയരം കാണുക. വികരണ നിയന്ത്രണ മാനദണ്ഡം അനുസരിച്ച് ഒരു മൊബൈൽ ടവറിന്റെ ഉയരം കുറഞ്ഞത് $120$ മീ ആയിരിക്കണം. മുകളിൽ പറഞ്ഞ മൊബൈൽ ടവർ വികരണ മാനദണ്ഡങ്ങൾ പാലിക്കുന്നുണ്ടോ എന്ന് പ്രസ്ഥാവിക്കുക.

5. 66 മീ ഉയരമുള്ള ഒരു കെട്ടിടത്തിന്റെ മുകളിൽ നിന്നും ഒരു വിളക്ക്മരത്തിന്റെ അഗ്രഭാഗത്തിന്റെയും ചുവടിന്റെയും മേൽകോണും, കീഴ്കോണും $60\Upsilon, 30\Upsilon$ എങ്കിൽ
   (i) വിളക്ക് മരത്തിന്റെ ഉയരം കാണുക.
   (ii) വിളക്ക് മരത്തിന്റെയും കെട്ടിടത്തിന്റെയും ഉയരങ്ങൾ തമ്മിലുലുള്ള വ്യത്യാസം കാണുക.
   (iii) വിളക്ക് മരത്തിന്റെയും കെട്ടിടത്തിന്റെയും ഇടയിലുള്ള ദൂരം കാണുക. $(\sqrt{3} = 1.732)$

6. ഒരു താഴ് വരയിലുള്ള മൂന്ന് ഗ്രാമവാസികൾ $A, B, C$. ഇവർക്ക് പരസ്പരം കാണാൻ ആകും. $A$ ക്കും $B$ ക്കും ഇടയിലുള്ള തിരശ്ചീനദൂരം 8 കി.മീ, $B$, $C$ ഇവയ്ക്ക് ഇടയിലുള്ള തിരശ്ചീന ദൂരം 12കി.മീ. $A$ യിൽ നിന്ന് B യിലേക്ക് ഉള്ള കീഴ്കോൺ $20\Upsilon$, $C$ യിൽ നിന്ന് B യിലേക്ക് ഉള്ള കീഴ്കോൺ $30\Upsilon$എങ്കിൽ. (i) $A, B$ ഇവർക്കിടയിലുള്ള ലംബദൂരം എത്ര? (ii) $B, C$ ഇവർക്കിടിയിലുള്ള ലംബദൂരം എത്ര? $(\tan 20° = 0.3640,\ \sqrt{3} = 1.732)$




## അഭ്യാസം 6.5

### ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുക്കുക

1. $\sin^2\theta + \frac{1}{1+\tan^2\theta}$ ന്റെ മൂല്യം
   (A) $\tan^2\theta$ (B) 1 (C) $\cot^2\theta$ (D) 0

2. $\tan\theta\text{cosec}^2\theta - \tan\theta =$
   (A) $\sec\theta$ (B) $\cot^2\theta$ (C) $\sin\theta$ (D) $\cot\theta$

3. $(\sin\alpha + \text{cosec}\alpha)^2 + (\cos\alpha + \sec\alpha)^2 = k + \tan^2\alpha + \cot^2\alpha$, ആണെങ്കിൽ $k$ യുടെ മൂല്യം
   (A) 9 (B) 7 (C) 5 (D) 3



6 Trigonometry_Malayalam.indd 265 20/01/2023 19:02:47

4. $\sin\theta + \cos\theta = a$ കൂടാതെ $\sec\theta + \text{cosec}\theta = b$, ആണെങ്കിൽ $b(a^2 - 1)$ ന്റെ മൂല്യം

(A) $2a$ (B) $3a$ (C) $0$ (D) $2ab$

5. $5x = \sec\theta$ കൂടാതെ $\frac{5}{y} = \tan\theta$, ആണെങ്കിൽ $x^2 - \frac{1}{y^2}$ ന്റെ മൂല്യം

(A) 25 (B) $\frac{1}{25}$ (C) 5 (D) 1

6. $\sin\theta = \cos\theta$, ആണെങ്കിൽ $2\tan^2\theta + \sin^2\theta - 1$ ന്റെ മൂല്യം

(A) $\frac{-3}{2}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{-2}{3}$

7. $x = a\tan\theta$ കൂടാതെ $y = b\sec\theta$ ആണെങ്കിൽ

(A) $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ (B) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (C) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (D) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$

8. $(1 + \tan\theta + \sec\theta)(1 + \cot\theta - \text{cosec}\theta)$ ന്റെ മൂല്യം

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) $-1$

9. $a\cot\theta + b\,\text{cosec}\theta = p$ കൂടാതെ $b\cot\theta + a\,\text{cosec}\theta = q$ ആണെങ്കിൽ $p^2 - q^2$ ന്റെ മൂല്യം

(A) $a^2 - b^2$ (B) $b^2 - a^2$ (C) $a^2 + b^2$ (D) $b - a$

10. ഒരു ഗോപുരത്തിന്റെ ഉയരം അതിന്റെ നിഴൽ എന്നിവയുടെ അംശബന്ധം $\sqrt{3} : 1$ ആണ് എങ്കിൽ സൂര്യന്റെ മേൽകോൺ

(A) $45°$ (B) $30°$ (C) $90°$ (D) $60°$

11. ഒരു വൈദ്യുത സ്തംഭത്തിന്റെ ചുവടിന്റെ നേരെയുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിലേക്ക് $30°$ കോൺ ഉണ്ടാക്കുന്നു. ഈ ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് '$b$' മീ മുകളിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് സ്തംഭത്തിന്റെ ചുവടിലേക്ക് $60°$ കോൺ ഉണ്ടാകുന്നു എന്നാൽ സ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരം (മീററിൽ)

(A) $\sqrt{3}\ b$ (B) $\frac{b}{3}$ (C) $\frac{b}{2}$ (D) $\frac{b}{\sqrt{3}}$

12. ഒരു ഗോപുരത്തിന് 60 മീറ്റർ ഉയരമുണ്ട് സൂര്യൻറെ മേൽകോൺ 30 ഡിഗ്രിയിൽ നിന്നും 45 ഡിഗ്രിയിലേക്ക് കൂടുമ്പോൾ ഗോപുരത്തിന്റെ നിഴലിന്റെ നീളം $x$ മീറ്റർ കുറയുന്നു എങ്കിൽ $x$ എന്നത്

(A) 41.92 മീ (B) 43.92 മീ (C) 43 മീ (D) 45.6 മീ

13. ഒരു ബഹുനില കെട്ടിടത്തിന്റെ മുകളിൽ നിന്നും 20 മീറ്റർ ഉയരമുള്ള ഒരു കെട്ടിടത്തിന്റെ മുകൾ ഭാഗം, അടിഭാഗം എന്നിവ $30°, 60°$ കീഴ്കോണിലാണ്. എങ്കിൽ ബഹുനില കെട്ടിടത്തിന്റെ ഉയരം, അവ തമ്മിലുള്ള ദൂരം

(A) 20, $10\sqrt{3}$ (B) 30, $5\sqrt{3}$ (C) 20, 10 (D) 30, $10\sqrt{3}$

14. രണ്ട് ആളുകൾ '$x$' മീറ്റർ അകലത്തിലാണ്. ആദ്യത്തെ ആളിന്റെ ഉയരം, രണ്ടാമത്തെ ആളുടെ ഉയരത്തിന് ഇരട്ടിയാണ് രണ്ട് ആളുടെയും പാദങ്ങൾക്ക് മദ്ധ്യബിന്ദുവിൽ നിന്ന് അവരുടെ ഉയരങ്ങളിലേയ്ക്കുള്ള ഒരു നിരീക്ഷകന്റെ കോണുകൾ പൂരകമാണ് എങ്കിൽ ഉയരം കുറഞ്ഞ ആളുടെ ഉയരം.

(A) $\sqrt{2}\ x$ (B) $\frac{x}{2\sqrt{2}}$ (C) $\frac{x}{\sqrt{2}}$ (D) $2x$



6 Trigonometry_Malayalam.indd 266 20/01/2023 19:02:51

15. ഒരു തടാകത്തിന്റെ ഉപരിതലത്തിൽ നിന്നും $h$ മീറ്റർ ഉയരത്തിലുള്ള മേഘത്തിന്റെ മേൽകോൺ $\beta$ ആണ്. അതിന്റെ പ്രതിബിംബത്തിന്റെ കീഴ്കോൺ $45^\circ$ തടാകത്തിന്റെ ഉപരിതലത്തിൽ നിന്നും മേഘത്തിന്റെ ഉയരം

(A) $\frac{h(1+\tan\beta)}{1-\tan\beta}$ (B) $\frac{h(1-\tan\beta)}{1+\tan\beta}$ (C) $h\tan(45^\circ-\beta)$ (D) ഇവ ഒന്നുമല്ല

## യൂണിറ്റ് അഭ്യാസം - 6



1. തെളിയിക്കുക (i) $\cot^2 A\left(\frac{\sec A-1}{1+\sin A}\right)+\sec^2 A\left(\frac{\sin A-1}{1+\sec A}\right)=0$ (ii) $\frac{\tan^2\theta-1}{\tan^2\theta+1}=1-2\cos^2\theta$
2. തെളിയിക്കുക $\left(\frac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}\right)^2=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$
3. $x\sin^3\theta+y\cos^3\theta=\sin\theta\cos\theta$ and $x\sin\theta=y\cos\theta$ ആണെങ്കിൽ തെളിയിക്കുക $x^2+y^2=1$.
4. $a\cos\theta-b\sin\theta=c$ , ആണെങ്കിൽ തെളിയിക്കുക $(a\sin\theta+b\cos\theta)=\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}$ .
5. 80 മീറ്റർ ഉയരമുള്ള മരത്തിന്റെ മുകളറ്റത്തിൽ ഒരു പക്ഷി ഇരിക്കുന്നു.തറനിരപ്പിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് പക്ഷിയുടെ മേൽകോൺ $45\Upsilon$ യാണ്. തറനിരപ്പിൽ നിന്ന് സ്ഥിര ഉയരത്തിൽ തിരശ്ചീനമായി പക്ഷി പറക്കുന്നു. പക്ഷി രണ്ട് സെക്കന്റ് തിരശ്ചീനമായി പറന്ന ശേഷം മേൽകോൺ അതേ ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് $30\Upsilon$ യായി മാറുന്നു. എങ്കിൽ പക്ഷി പറക്കുന്ന വേഗത കാണുക. $(\sqrt{3}=1.732)$
6. ഒരു വിമാനം ഭൂമിയുടെ ഉപരിതലത്തിൽ നിന്ന് 60 മീ ഉയരത്തിൽ 175 മീ സെക്കന്റ് വേഗതയിൽ പറക്കുന്നു.ഭൂമിയുടെ ഉപരിതലത്തിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് വിമാനം $37\Upsilon$ മേൽകോണിലാണ് എങ്കിൽ എത്ര സമയത്തിന് ശേഷം മേൽകോൺ $53^\circ$ യായി വർദ്ധിക്കും? $(\tan 53^\circ=1.3270,\ \tan 37^\circ=0.7536)$
7. $A$ യിൽ നിന്ന് 30 മീ അകലെയുള്ള $B$ എന്ന ബിന്ദുവിലേക്ക് $35^\circ$ കോണിൽ ഒരു പക്ഷി പറക്കുന്നു. $B$ ൽ നിന്ന് 32 കി.മീ അകലെയുള്ള $C$ എന്ന ബിന്ദുവിന് $48^\circ$ കോണിൽ ആ പക്ഷി പറക്കുന്നു.
(i) $A$ യ്ക്ക് വടക്കായി $B$ യുടെ ദൂരം എത്ര? (ii) $A$ യ്ക്ക് പടിഞ്ഞാറായി $B$ യുടെ ദൂരം എത്ര?
(iii) $B$ യ്ക്ക് വടക്കായി $C$ യുടെ ദൂരം എത്ര? (iv) $B$ യ്ക്ക് കിഴക്കായി $C$ യുടെ ദൂരം എത്ര?
$(\sin 55^\circ=0.8192,\ \cos 55^\circ=0.5736,\ \sin 42^\circ=0.6691,\ \cos 42^\circ=0.7431)$
8. ഒരു ദീപസ്തംഭത്തിന്റെ ഇരു വശങ്ങളിലായി രണ്ട്കപ്പലുകൾ സഞ്ചരിക്കുന്നു, ദീപസ്തംഭത്തിന്റെ മുകളറ്റത്തിൽ നിന്ന് രണ്ട് കപ്പലുകളുടെയും കീഴ്കോണുകൾ യഥാക്രമം $60\Upsilon, 45\Upsilon$ ആണ്. രണ്ട് കപ്പലുകൾക്കിടയിലുള്ള ദൂരം $200\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}\right)$ മീ ആണെങ്കിൽ ദീപസ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരം എത്ര?
9. ഒരു തെരുവിന്റെ എതിർ വശത്തായി ഒരു കെട്ടിടം, പ്രതിമ എന്നിവ 35 മീറ്റർ അകലത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു. കെട്ടിടത്തിന്റെ മുകളറ്റത്തിലുള്ള ബിന്ദുവിൽ നിന്നും പ്രതിമയുടെ മുകളറ്റത്തിന്റെ മേൽകോൺ $24^\circ$ പ്രതിമയുടെ ചുവടിന്റെ കീഴ്കോൺ $34^\circ$ ആകുന്നു. എങ്കിൽ പ്രതിമയുടെ ഉയരം കാണുക.
$(\tan 24^\circ=0.4452,\ \tan 34^\circ=0.6745)$



6 Trigonometry_Malayalam.indd 267 20/01/2023 19:02:55

## ഓർമ്മിക്കേണ്ട വസ്തുതകൾ

- ത്രികോണമിതി അംശബന്ധങ്ങൾ ഉൾപ്പെടുന്ന സമീകരണം ഏത് കോണിനും ശരിയാണെങ്കിൽ അതിനെ സർവ്വ സമവാക്യം എന്ന് പറയുന്നു.
- ത്രികോണമിതി സമവാക്യങ്ങൾ

  (i) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ (ii) $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ (iii) $1 + \cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta$
- ഒരു നിരീക്ഷകന്റെ കണ്ണിനും വസ്തുവിനും ഇടയിലുള്ള നേർരേഖയെ വീക്ഷണരേഖ എന്നു പറയുന്നു.
- കണ്ണിൽ നിന്നുള്ള തിരശ്ചീനരേഖയ്ക്ക് മുകളിലാണ് വസ്തു ഉള്ളതെങ്കിൽ ആ വസ്തുവിനെ വീക്ഷിക്കുമ്പോൾ വീക്ഷണരേഖയ്ക്കും തിരശ്ചീനരേഖയ്ക്കും ഇടയിലുള്ള കോണിനെ മേൽകോൺ എന്നു പറയുന്നു.
- കണ്ണിൽ നിന്നുള്ള തിരശ്ചീന രേഖയ്ക്ക് താഴെയാണ് വസ്തു ഉള്ളതെങ്കിൽ വീക്ഷണരേഖയ്ക്കും തിരശ്ചീനരേഖയ്ക്കും ഇടയിലുള്ള കോണിനെ കീഴ്കോൺ എന്നു പറയുന്നു.
- ഉയരം അല്ലെങ്കിൽ ഒരു വസ്തുവിന്റെ നീളം രണ്ട് വ്യത്യസ്ത വസ്തുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം എന്നിവ ത്രികോണമിതി അംശബന്ധങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് കാണാം.

## ഇന്റർനെറ്റ് പ്രവർത്തി (ICT CORNER)

### ICT 6.1

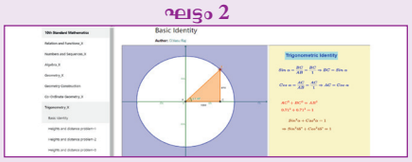
**ഘട്ടം1 –** ബ്രൗസർ തുറന്ന് താഴെ തന്നിട്ടുള്ള URL ടൈപ്പ് ചെയ്യുക.അല്ലെങ്കിൽ QR കോഡ് സ്കാൻ ചെയ്യുക.ത്രികോണമിതി എന്ന അദ്ധ്യായം തെളിയും അതിൽ നിന്ന് **അടിസ്ഥാന സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ** എന്ന വർക്ഷീറ്റ് തെരഞ്ഞെടുക്കുക

**ഘട്ടം 2** B എന്ന ബിന്ദുവിനെ ചലിപ്പിച്ച് തന്നിട്ടുള്ള വർക്ഷീറ്റ് ത്രികോണങ്ങൾക്ക് മാറ്റം വരുത്താവുന്നതാണ്.യൂണിറ്റ് വൃത്തത്തിലുള്ള സമകോണത്രികോണം ഏത് കോണിനും ശരിയാണ് എന്നത് പരിശോധിക്കുക.

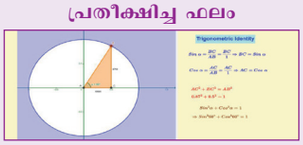
ഘട്ടം 1




ഘട്ടം 2




പ്രതീക്ഷിച്ച ഫലം




### ICT 6.2

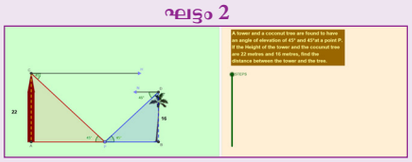
**ഘട്ടം 1** – ബ്രൗസർ തുറന്ന് താഴെതന്നിട്ടുള്ള URL ടൈപ്പ് ചെയ്യുക അല്ലെങ്കിൽ QR കോഡ് സ്കാൻ ചെയ്യുക. **ത്രികോണമിതി** എന്ന അദ്ധ്യായം തെളിയും. അതിൽ നിന്ന് **ഉയരങ്ങളും ദൂരങ്ങളും** പ്രവേശനം 1 എന്ന വർക്കിഷീറ്റ് തെരഞ്ഞെടുക്കുക.

**ഘട്ടം 2** – തന്നിട്ടുള്ള വർക്ഷീറ്റിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ പുതിയ ചോദ്യങ്ങൾ തെളിയും. വഴികൾ അറിയുന്നതിന് സ്ലൈഡറിനെ ചലിപ്പിക്കുക. സ്വയം ഉത്തരങ്ങൾ കണ്ടെത്തി കിട്ടുന്ന ഉത്തരങ്ങൾ ശരി നോക്കുക.

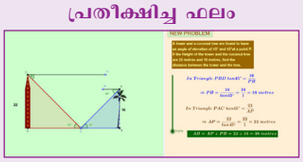
ഘട്ടം 1




ഘട്ടം 2



പ്രതീക്ഷിച്ച ഫലം



*You can repeat the same steps for other activities*

https://www.geogebra.org/m/jfr2zzgy#chapter/356196

or Scan the QR Code.



6 Trigonometry_Malayalam.indd 268 20/01/2023 19:02:56

# 7 വിസ്താരകലനം

*"Nature is an infinite sphere of which the centre is everywhere and the circumference nowhere".* - Blaise Pascal



**Pappus**
**290 - 350 AD(CE)**

ഈജിപ്തിലെ അലക്സാണ്ട്രിയയിൽ ജനിച്ച പപ്പൂസ് പ്രഗല്ഭ ഗ്രീക്ക് ജ്യാമിതീയ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞന്മാരിൽ അവസാനത്തേതാണ്. Synagoge അല്ലെങ്കിൽ 'The Mathematical CollectionS പപ്പൂസിന്റെ ഗണിശാസ്ത്ര ശേഖരങ്ങളിലെ പ്രധാനപ്പെട്ട ആദ്യത്തെ എട്ടുപുസ്തകങ്ങളിൽ ഒന്നാണ്.

അദ്ദേഹം ഉത്തലോകങ്ങൾ, കപ്പികൾ, ഒരറ്റം കട്ടികൂടിയതും മറ്റേ അറ്റം കട്ടികുറഞ്ഞതുമായ ലോഹം, സ്ക്രൂകൾ, അച്ചുതണ്ട് എന്നിവയുടെ തത്വങ്ങൾ വിവരിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഭൗതീക ശാസ്ത്രത്തിലും ആധുനിക എൻജിനീയറിങ്ങിലും ഈ ആശയങ്ങൾ വ്യാപകമായി ഉപയോഗിക്കുന്നുണ്ട്.

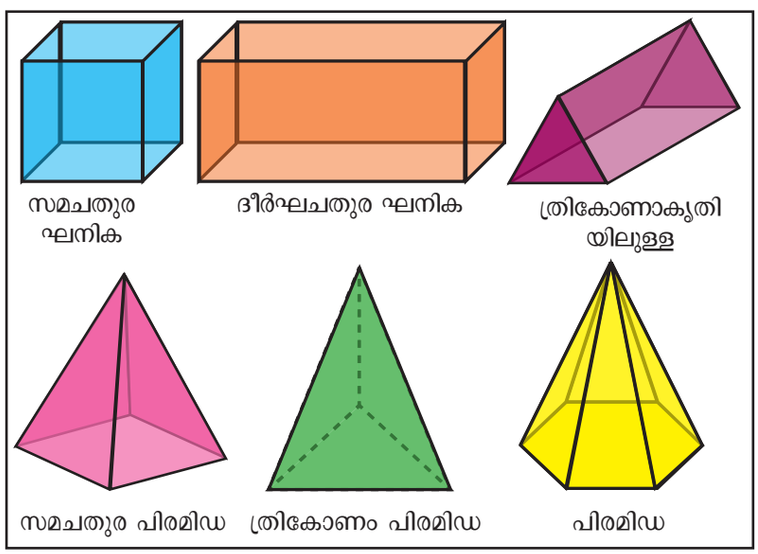
FMR72

## പഠനഫലം ലക്ഷ്യങ്ങൾ

- സിലിണ്ടർ, വൃത്തസ്തൂപിക, ഗോളം, അർദ്ധഗോളം വൃത്തസ്തൂപികാപീഠം എന്നിവയുടെ പ്രതല വിസ്തീർണ്ണവും, വ്യാപ്തവും കാണുന്നതിന്.
- മിശ്രരൂപങ്ങളുടെ വ്യാപ്തവും പ്രതലവിസ്തീർണ്ണവും കണക്കുകൂട്ടുന്നതിന്
- വ്യാപ്തങ്ങൾക്കുമാറ്റം ഉണ്ടാകാതെ തന്നെ ഒരു രൂപത്തിൽ നിന്നു മറ്റൊരു രൂപത്തിലേക്കു മാറുമ്പോൾ ഉണ്ടാകുന്ന പ്രശ്നങ്ങൾക്കു പരിഹാരം കാണൽ.

## 7.1 ആമുഖം

ലോകമെമ്പാടുമുള്ള പുരാതന സംസ്ക്കാരങ്ങൾ തങ്ങളുടെ ദൈനംദിന ആവശ്യങ്ങൾ നിറവേറ്റുന്നതിന് അളവുകളുടെ ആശ്രയം തേടി. ഉദാഹരണത്തിന്, നൽകിയിരിക്കുന്ന മേഖലയിൽ (area) എത്ര വിളകൾ കൃഷി ചെയ്യണമെന്ന് അറിയുന്നണ്ടതിനുംഒരു ടാങ്ക് (Container) എത്രമാത്രം ഉൾക്കൊള്ളുന്നു എന്നറിയുന്നണ്ടതിനും ഈ ചോദ്യങ്ങൾ കൃഷി, വാണിജ്യം എന്നീ മേഖലകളിൽ തീരുമാനങ്ങൾ എടുക്കാൻ ഏറെ പ്രാധാന്യമുള്ളവയാണ്. ഈ കാരണങ്ങളുടെ അടിസ്ഥാനത്തിലാണ് ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞൻമാർ യഥാർത്ഥ ജീവിത സാഹചര്യങ്ങളിൽ ജിയോമെട്രി ഉപയോഗിക്കുന്നതിനെക്കുറിച്ച് ചിന്തിച്ചത്. ഇതുവഴി തെളിയിച്ചത് വിസ്താരകലനത്തിന്റെ ഉത്ഭവത്തിനാണ്. അങ്ങനെ വിസ്താരകലനത്തെ പ്രായോഗികമായ ജ്യാമട്രിയായ് കണക്കാക്കാം..




ചിത്രം. 7.1



7 Mensuration Malayalam.indd 269 20/01/2023 19:05:06

പ്രതല ചിത്രങ്ങളായ സമചതുരം, ദീർഘചതുരം, ത്രികോണം, വൃത്തം എന്നിവ നമുക്ക് നേരം മുമ്പേ സുപരിചിതങ്ങളാണല്ലോ. തലത്തിൽ വരയ്ക്കാവുന്ന ഈ ചിത്രങ്ങളെ ദ്വിമാന ചിത്രങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നു. പക്ഷേ മിക്ക വസ്തുക്കളും നമ്മുടെ ദൈനംദിന ജീവിതത്തിൽ പ്രയോജനപ്പെടുത്തുന്ന രീതിയിലാണ് അത് തല ത്തിൽ വരയ്ക്കാൻ സാധിക്കുന്നത്. ഉദാഹരണത്തിന് കുഴലുകൾ (tubes), ടാങ്കുകൾ, ഇഷ്ടികകൾ, ഐസ്ക്രീം കോണുകൾ, ഫുട്ബാൾ തുടങ്ങിയവ. ഈ വസ്തുക്കളെ ഖരവസ്തുക്കൾ (Solids) അല്ലെങ്കിൽ ത്രിമാന രൂപ ങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നു.

സമചതുര ഘനിക, ദീർഘചതുര ഘനിക, പ്രിസം, പിരമിഡ് എന്നിവ നമുക്ക് പരിചിത ങ്ങളാണല്ലോ. ത്രിമാന വസ്തുക്കളെ അളക്കുന്നതിനുള്ള അളവുകൾ പ്രതല വിസ്തീർണ്ണം, വ്യാപ്തം തുടങ്ങിയവയാണ്.

ഈ അദ്ധ്യായത്തിൽ, സിലിണ്ടർ, സ്തൂപിക, ഗോളം, അർദ്ധഗോളം, വൃത്തസ്തൂപികാ പീഠം എന്നിവ പോലുള്ള ത്രിമാന വസ്തുക്കളുടെ പ്രതലവിസ്തീർണ്ണം, വ്യാപ്തം എന്നിവയെ ക്കുറിച്ച് പഠിക്കാം.

## 7.2 പ്രതലവിസ്തീർണ്ണം

ഒരു ഘനരൂപത്തിന്റെ ദൃശ്യഭാഗത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം പ്രതല വിസ്തീർണ്ണമാകുന്നു.

### 7.2.1 സമവൃത്താകാര സിലിണ്ടർ

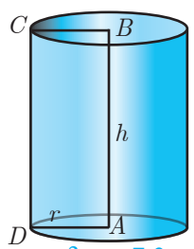
തന്നിട്ടുള്ള ചിത്രങ്ങൾ ശ്രദ്ധിക്കുക. അവ ഏത് രൂപങ്ങളാണെന്ന് തിരച്ചറിയുക.

ആ വസ്തുക്കളെല്ലാം സിലിണ്ടർ രൂപത്തെ കുറിക്കുന്നു.




ചിത്രം. 7.2

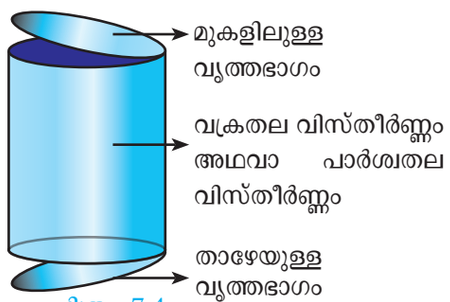
**നിർവചനം :** ഒരു ദീർഘചതുരം അതിന്റെ ഏതെങ്കിലും ഒരു വശത്തെ അക്ഷമാക്കി ഒരു പൂർണ്ണമായ ചുറ്റൽ ചുറ്റിയാൽ കിട്ടുന്ന ഘനരൂപത്തെ സമവൃത്താകാര സിലിണ്ടർ എന്നു പറയുന്നു.




ചിത്രം. 7.3

അക്ഷം വ്യാസാർദ്ധത്തിനു ലംബമായി വരുകയാണെങ്കിൽ ആ സിലിണ്ടറിനെ സമവൃ ത്താകാര സിലിണ്ടർ എന്നുപറയുന്നു. ചിത്രം 7.3, -ൽ AB = $h$ ഉയരത്തെ കുറിക്കുന്നു. $AD$= $r$ സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാസാർദ്ധത്തെ കുറിക്കുന്നു.

ഒരു ഘന സിലിണ്ടറിന്റെ മുകളിലും താഴേയും രണ്ട് വൃത്തഭാഗ ങ്ങളാൽ മൂടപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. ഈ വൃത്ത ഭാഗങ്ങൾക്ക് ഇടയ്ക്കുള്ള ഭാഗത്തെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം അഥവാ പാർശ്വതല വിസ്തീർണ്ണം എന്നു പറയുന്നു.



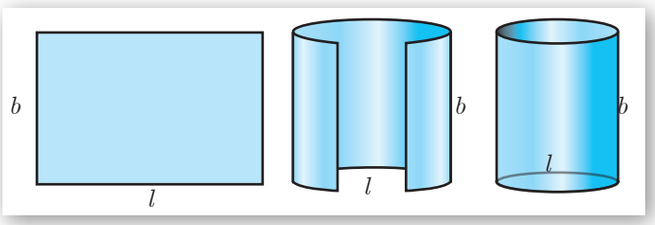

ചിത്രം. 7.4

### സമവൃത്താകാര സിലിണ്ടർ രൂപീകരിക്കൽ

(i) ഒരു ദീർഘചതുരാകൃതിയിലുള്ള പേപ്പർ എടുക്കുക. നീളം $l$ വീതി $b$ എന്നും കണക്കാക്കുക .

(ii) പേപ്പറിന്റെ വീതിവശങ്ങളെ ചേരുംവിധം പൂർണ്ണമായും ചുറ്റുക.

(iii) ഇപ്പോൾ കിട്ടുന്ന രൂപം സമവൃത്താകാര സിലിണ്ടർ. അതിന്റെ ആധാര ചുറ്റളവ് $l$ ഉം ഉയരം $b$ ഉം ആകുന്നു.




ചിത്രം. 7.5



7 Mensuration Malayalam.indd 270 20/01/2023 19:05:06

## സമവൃത്താകാര സിലിറിന്റെ പ്രതലവിസ്തീർണ്ണം

### (i) വക്രതലവിസ്തീർണ്ണം

സമവൃത്താകാര സിലിണ്ടറിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം

$= $ ദീർഘചതുരത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം

$= l \times b$

$= 2\pi r \times h$ ($l$ ചുറ്റളവ്

$= 2\pi rh$ ആധാരം $b$ ഉയരമാഘാന)[ചിത്രം. 7.5]

സമവൃത്താകാര സിലിണ്ടറിന്റെ വക്രതലവിസ്തീർണ്ണം $= 2\pi rh$ ച.മാ..

### (ii) ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം

ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം എന്നത് മുകളിലും താഴേയുമുള്ള വൃത്ത ഭാഗങ്ങളുടെ വിസ്തീർണ്ണത്തിന്റേയും ലംബപ്രതലത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണത്തിന്റേയും തുകയാണ്.

സമവൃത്താകാര സിലിണ്ടറിന്റെ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം

$= $ പ്രതലവിസ്തീർണ്ണം + മുകൾ വൃത്തഭാഗത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം +താഴെയുള്ള വൃത്ത ഭാഗത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം.

$= 2\pi rh + \pi r^2 + \pi r^2$ (Refer Fig.7.4)

$= 2\pi rh + 2\pi r^2$

$= 2\pi r\left(h + r\right)$

സമവൃത്താകാര സിലിണ്ടറിന്റെ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം $= 2\pi r(h + r)$ ച.മാ.

**കുറിപ്പ്**

- ആവശ്യമുള്ളിടത്ത് $\pi = \dfrac{22}{7}$, ഉപയോഗിക്കുക.
- പ്രതല വിസ്തീർണ്ണം എന്നത് ആകെ ഉപരിതലവിസ്തീർണ്ണത്തെ കുറിക്കുന്നു.A

**ഉദാഹരണം 7.1** സിലിണ്ടറാകൃതിയിലുള്ള ഒരു പാത്രത്തിന്റെ ഉയരം 20 സെ.മീ.., വ്യാസാർദ്ധം 14 സെ.മീ.. അതിന്റെ വക്രതലവിസ്തീർണ്ണവും ആകെ ഉപരിതലവിസ്തീർണ്ണവും കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം** തന്നിട്ടുള്ളവ: സിലിണ്ടറിന്റെ ഉയരം $h = 20$ സെ.മീ. ; വ്യാസാർദ്ധം $r = 14$ സെ.മീ.

ഇപ്പോൾ,സിലിണ്ടറിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം $= 2\pi rh$ ച.മ

പ്രതലവിസ്തീർണ്ണം $= 2 \times \dfrac{22}{7} \times 14 \times 20 = 2 \times 22 \times 2 \times 20 = 1760 \text{ cm}^2$

ആകെ ഉപരിതലവിസ്തീർണ്ണം $= 2\pi r\left(h + r\right)$ ച.മാ.

$= 2 \times \dfrac{22}{7} \times 14 \times \left(20 + 14\right) = 2 \times \dfrac{22}{7} \times 14 \times 34$

$= 2992 \text{ cm}^2$

വക്രതലവിസ്തീർണ്ണം. $= 1760 \text{ cm}^2$, ആകെ ഉപരിതലവിസ്തീർണ്ണം $= 2992 \text{ cm}^2$



7 Mensuration Malayalam.indd 271 20/01/2023 19:05:08

**ഉദാഹരണം 7.2** 14 സെ.മീ.. ഉയരമുള്ള സമവൃത്താകാര സിലിണ്ടറിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം 88 സെ.മീ.$^2$ സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാസം കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം** തന്നിട്ടുള്ളവ, സിലിണ്ടറിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം=88 sq. cm

$$2\pi rh = 88$$

$$2 \times \frac{22}{7} \times r \times 14 = 88 \qquad \text{(തന്നിട്ടുള്ളത് } h\text{=14 cm)}$$

$$2r = \frac{88 \times 7}{22 \times 14} = 2$$

വ്യാസം = 2 cm

**ഉദാഹരണം 7.3** 3 മീ. നീളവും 2.8 മീ. വ്യാസവുമുള്ള റോളർകൊണ്ട് പൂന്തോട്ടം നിരപ്പാക്കുന്നു. 8 ചുറ്റൽ കൊണ്ട് പൂന്തോട്ടം എത്രദൂരം നിരപ്പാക്കാൻ കഴിയും?

**നിർദ്ധാരണം** വ്യാസം $d$ = 2.8 m , height = 3 m

വ്യാസാർത്ഥം $r$ = 1.4 m



ചിത്രം. 7.6

ഒരു ചുറ്റൽ കൊണ്ട് നിരപ്പാക്കുന്ന സ്ഥലം = സിലിണ്ടറിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം

$$= 2\pi rh \text{ ച.മാ.}$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 1.4 \times 3 = 26.4$$

ഒരു ചുറ്റൽ കൊണ്ട് നിരപ്പാക്കുന്ന സ്ഥലം = 26.4 m$^2$

8 ചുറ്റൽ കൊണ്ട് നിരപ്പാക്കുന്ന സ്ഥലം $8 \times 26.4 = 211.2$

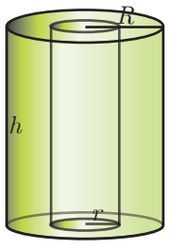
ആകെ നിരപ്പാക്കുന്ന സ്ഥലം 211.2 m$^2$

**ചിന്തിക്കുക**

1. '$r$' മാത്ര വ്യാസാർദ്ധവും 1 മാത്ര കനവും ഉള്ള '$h$' നാണയങ്ങൾ ഒന്നിനു മുകളിൽ ഒന്നായി അടുക്കിവയ്ക്കുക. ഏതുരൂപത്തിലുള്ള വസ്തുവാണ് നിങ്ങൾക്കു കിട്ടുന്നത്. അതിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.
2. ഒരു സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം അതിന്റെ ഉയരത്തിന്റെ രണ്ടുമടങ്ങാണ്. സിലിണ്ടറിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണത്തിനും ആധാര വിസ്തീർണ്ണത്തിനും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം കാണുക.
3. 12 മി. നീളവും 5 മീ. വീതിയുമുള്ള രണ്ടു അലുമിനിയത്തകിടുകൾ ചുഴറ്റി രണ്ടു സമവൃത്താകാര സിലിണ്ടർ ഉണ്ടാക്കുന്നു. ഒന്നു നീളവശവും മറ്റൊന്ന് അകലവശവുമാണ് ചുഴറ്റുന്നത്. എങ്കിൽ അവയുടെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണങ്ങളുടെ അംശബന്ധം കാണുക.

## 7.2.2 പൊള്ളയായ സിലിണ്ടർ

ഒരേ ഉയരവും വ്യത്യസ്ത വ്യാസാർദ്ധവുമുള്ള രണ്ടു സിലിണ്ടറുകളെ യോജിപ്പിക്കു. ഘനരൂപത്തെ പൊള്ളയായ സിലിണ്ടർ എന്നുപറയുന്നു.




ചിത്രം. 7.7

$R$ ബാഹ്യവ്യാസാർദ്ധം $r$ ആന്തരവ്യാസാർദ്ധം, ഉയരം $h$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

പൊള്ളയായ സിലിണ്ടറിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം = ബാഹ്യപ്രതലവിസ്തീർണ്ണം + ആന്തരപ്രതലവിസ്തീർണ്ണം

$$= 2\pi Rh + 2\pi rh$$

പൊള്ളയായ സിലിണ്ടറിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം $= 2\pi(R + r)h$ ച.മാ.



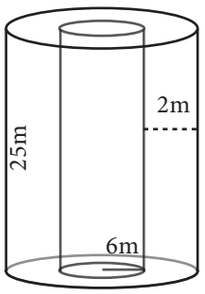
7 Mensuration Malayalam.indd 272 20/01/2023 19:05:09

ആകെ ഉപരിതലവിസ്തീർണ്ണം = പ്രതലവിസ്തീർണ്ണം + മുകളിലും താഴേയുമുള്ള വൃത്തങ്ങളുടെ വിസ്തീർണ്ണം

$$2\pi(R+r)h \quad + 2\pi(R^2 - r^2)$$

പൊള്ളായ സിലിണ്ടറിന്റെ ആകെ ഉപരിതലവിസ്തീർണ്ണം $= 2\pi(R+r)(R-r+h)$ ച.മാ.

**ഉദാഹരണം 7.4** ഒരു ലിറ്റർ ചായംകൊണ്ട് 10 ച.മീ. ചായം പൂശാമെങ്കിൽ പൊള്ളയായ സിലിണ്ടറിന് ബാഹ്യപ്രതലവും, ആന്തര പ്രതലവും ചായം പൂശുന്നതിന് എത്ര ലിറ്റർ ചായം വേണ്ടി വരും? സിലിണ്ടറിന്റെ കനം 2 മീ. ആന്തര വ്യാസാർദ്ധം 6 മീ, ഉയരം 25 മീ.



ചിത്രം. 7.8

**നിർദ്ധാരണം** തന്നിട്ടുള്ളവ ഉയരം $h$ = 25 m; കനം = 2 m.

ആന്തരവ്യാസാർദ്ധം $r$ = 6 m

ബാഹ്യവ്യാസാർദ്ധം $R = 6 + 2 = 8$ m

ടണലിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം = പൊള്ളയായ സിലിണ്ടറിന്റെ പ്രതലവിസ്തീർണ്ണം

പൊള്ളയായ സിലിണ്ടറിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം $2\pi(R+r)h$ ച.മാ.

$$2 \times \frac{22}{7}(8+6) \times 25$$

പ്രതലവിസ്തീർണ്ണം = 2200 $m^2$

ഒരു ലിറ്റർ ചായംകൊണ്ട് 10 ച.മീ. ചായം പൂശാമെങ്കിൽ

220 ച.മീ. ചായം പൂശുന്നതിന് ആവശ്യമായ ചായം $= \frac{2200}{10} = 220$ ലിറ്റർ.

### പുരോഗതി പരിശോധന

1. _____ അതിന്റെ ഏതെങ്കിലും ഒരു വശത്തെ _____ ഒരു പൂർണ്ണമായ ചുറ്റൽ ചുറ്റിയാൽ കിട്ടുന്ന ഘനരൂപത്തെ സമവൃത്താകാര സിലിണ്ടർ എന്നു പറയുന്നു.
2. സമവൃത്താകാര സിലിണ്ടണ്ടറിന്റെ അക്ഷം വ്യാസത്തിന് _____ആയിരിക്കും.
3. സമവൃത്താകാര സിലിണ്ടണ്ടറിന്റെ പ്രതലവിസ്തീർണ്ണത്തിനും ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണത്തിനും ഉള്ള വ്യത്യാസം _____.
4. തുല്യവ്യാസാർദ്ധവും ഉയരവുമുള്ള സമവൃത്താകാര സിലിണ്ടണ്ടറിന്റെ പ്രതലവിസ്തീർണ്ണം എന്നത് _____ ആധാരവിസ്തീർണ്ണമാണ്.

## 7.2.3 സമവൃത്താകാരവൃത്തസ്തൂപിക

തന്നിട്ടുള്ള ചിത്രത്തെ ശ്രദ്ധിക്കുക. അവ ഏത് രൂപങ്ങളാണെന്ന് തിരിച്ചറിയുക?

ആ വസ്തുക്കളെല്ലാം വൃത്തസ്തൂപികാകൃതിയിലാണ്.



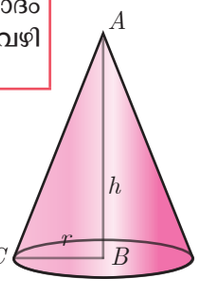
ക്രിസ്മസ് മരം | പിറന്നാൾ തൊപ്പി | ഐസ് ക്രീം | പമ്പരം

ചിത്രം. 7.9



7 Mensuration Malayalam.indd 273 20/01/2023 19:05:10

**നിർവചനം :** സമവൃത്താകാര വൃത്തസ്തൂപികാ എന്നതുകൊണ്ട് അർത്ഥമാക്കുന്നത് പാദം വൃത്താകൃതിയിലും സമവൃത്താകാരം വൃത്താകൃതിയിലുള്ള അടി ഭാഗത്തിന്റെ കേന്ദ്രം വഴി ചെല്ലുന്ന അക്ഷം പാദപ്രതലത്തിനു ലംബവുമാണ് എന്നതാണ്.



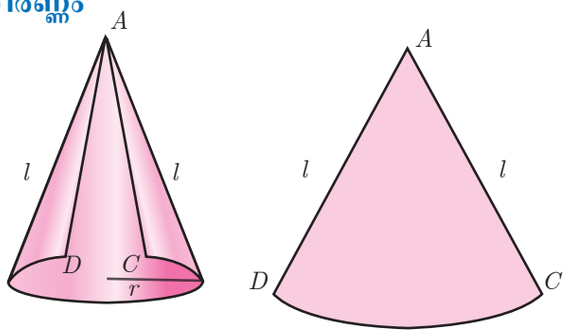
ചിത്രം. 7.10

## സമവൃത്താകാര സിലിറിന്റെ രൂപീകരണം പ്രകടനം

ഒരു സമകോണത്രികോണത്തിന് $ABC$ യിൽ $AB$ അക്ഷം , കർണ്ണം $AC$ ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നതുപോലെ വൃത്തസ്തൂപികയുടെ പ്രതല വിസ്തീർണ്ണത്തെ കുറിക്കുന്നു. വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ഉയരം അക്ഷം $AB$ യുടെ നീളവും ചെരിവു ഉയരം കർണ്ണം $AC$ യുടെ നീളവും ആകുന്നു.

## സമവൃത്താകാര സിലിണ്ടറിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം

ഒരു വൃത്തസ്തൂപികയിലെ പ്രതല വിസ്തീർണ്ണത്തെ അതിന്റെ കർണ്ണം $AC$ യിലൂടെ മുറിച്ച് ഒരു പ്രതലത്തിൽ നിവർത്തി വച്ചാൽ ഒരു വൃത്തഖണ്ഡമായി മാറുന്നു. വൃത്തഖണ്ഡത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം $AC$ യും ചാപ നീളം $CD$ യും യഥാക്രമം വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ ചായ്വുയരവും വൃത്തസ്തൂപികയുടെ പാദചുറ്റളവും ആകുന്നു. ഇവിടെ $l$ വ്യാസാർദ്ധവും ചാപനീളം $S$ ഉം ഉള്ള വൃത്ത ഖണ്ഡം വ്യാസാർദ്ധം $l$ ഉള്ള ഒരു വൃത്തത്തിനു സമമാണ്.



ചിത്രം. 7.11

### (i) വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം

$$\frac{\text{വൃത്തഖണ്ഡത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം}}{\text{വൃത്തത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം}} = \frac{\text{വൃത്തചാപത്തിന്റെ നീളം}}{\text{വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്}}$$

$$\text{വൃത്തഖണ്ഡത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം} = \frac{\text{വൃത്തചാപത്തിന്റെ നീളം}}{\text{വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്}} \times \text{വൃത്തത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം}$$

$$= \frac{s}{2\pi l} \times \pi l^2 = \frac{s}{2} \times l = \frac{2\pi r}{2} \times l \quad (s = 2\pi r)$$

∴ വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം = വൃത്തഖണ്ഡത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം = $\pi rl$ ച.മാ..

വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം = $\pi rl$ ച.മാ.

### ചിന്തിക്കുക

1. ഘനവൃത്തസ്തൂപികയുടെ മാതൃക ചെയ്ത് കാണിക്കുക.
2. ആധാരത്തെ അടിസ്ഥാനമാക്കി വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം കാണുക. അതിന്റെ ഉയരം വ്യാസാർദ്ധം എന്നിവ തുല്യമായിരിക്കും.
3. മുകളിലെ പ്രതലവിസ്തീർണ്ണവും വൃത്തസ്തൂപികയുടെ പാദവിസ്തീർണ്ണവും താരതമ്യപ്പെടുത്തുക.

### പ്രവർത്തി 1

(i) 7 സെ.മീ.. വ്യാസാർദ്ധമുള്ള അർദ്ധവൃത്താകൃതിയിലുള്ള ഒരു പേപ്പർ എടുത്ത് വൃത്തസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കുക. പ്രതലവിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

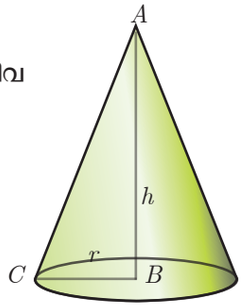
(ii) 3.5 സെ.മീ. വ്യാസാർദ്ധമുള്ള 1/4 വൃത്താകൃതിയിലുള്ള പേപ്പർ എടുത്ത് വൃത്തസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കുക. വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.



7 Mensuration Malayalam.indd 274 20/01/2023 19:05:11

### ചെരിവു ഉയരത്തിന്റെ നിർവചനം 'l'

$ABC$ ഒരു സമകോണത്രികോണം $\angle B = 90^0$ കർണ്ണം, ആധാരം, ഉയരം എന്നിവ യഥാക്രമം $l$, $r$, $h$ എന്നിരിക്കട്ടെ.



ചിത്രം. 7.12

പൈതഗോറസ്സ് സിദ്ധാന്ത പ്രകാരം $\Delta ABC$, യിൽ

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$l^2 = h^2 + r^2$$
$$l = \sqrt{h^2 + r^2} \text{ units}$$

### (ii) ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം

ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം = വക്രതലവിസ്തീർണ്ണം + വൃത്തസ്തൂപികയുടെ പാദ വിസ്തീർണ്ണം

$= \pi rl + \pi r^2$ (since, the base is a circle)

ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം $= \pi r(l + r)$ ച.മാ.

**ഉദാഹരണം 7.5** വൃത്തസ്തൂപികാകൃതിയിലുള്ള ഒരു കൂടാരത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം 7 മീ, ഉയരം 24 മീ, 4 മീ വീതിയുള്ളദീർഘചതുരാകൃതിയിലുള്ള ക്യാൻവാസ് കൊണ്ട് കൂടാരം നിർമ്മിക്കുന്നതിന് ആവശ്യമായ ക്യാൻവാസിന്റെ നീളം കാണുക?

**നിർദ്ധാരണം** $r$ വ്യാസാർദ്ധം $h$ ഉയരം 24 മീ

തന്നിട്ടുള്ളവ, വ്യാസാർദ്ധം $r$ =7 m, ഉയരം $h$ = 24 m

$$l = \sqrt{r^2 + h^2}$$
$$= \sqrt{49 + 576}$$
$$l = \sqrt{625} = 25 \text{ m}$$

വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വക്രതലവിസ്തീർണ്ണം $= \pi rl$ ച.മാ

$$\text{ക്യാൻവാസിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം} : \frac{22}{7} \times 7 \times 25 = 550 \text{ m}^2$$

$$\text{ക്യാൻവാസിന്റെ നീളം} = \frac{\text{ക്യാൻവാസിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം}}{\text{വീതി}} = \frac{550}{4} = 137.5 \text{ m}$$

ക്യാൻവാസിന്റെ നീളം137.5 മീ

**ഉദാഹരണം 7.6** വ്യാസാർദ്ധ 7 സെ.മീ.. ഉള്ള വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം = 704 ച.സെ.മീ..

**നിർദ്ധാരണം** തന്നിട്ടുള്ളവ $r$ = 7 cm

ആകെ ഉപരിതലവിസ്തീർണ്ണം $\pi r\left(l + r\right)$ ച.മാ.

ചെരിവു ഉയരം = 704 സെ.മീ$^2$

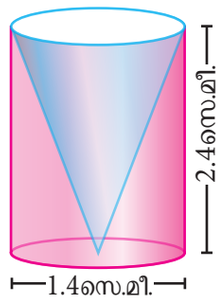
$$704 \quad \frac{22}{7} \times 7\left(l + 7\right)$$
$$32 \quad l + 7$$
$$l = 25 \text{ സെ.മീ}$$

ചെരിവുയരം 25 സെ.മീ.



7 Mensuration Malayalam.indd 275 20/01/2023 19:05:13

**ഉദാഹരണം 7.7** ചിത്രത്തിൽ കാണുന്ന ഘന സിലിണ്ടറിന്റെ ഉയരം 2.4 സെ.മീ. വ്യാസം 1.4 സെ.മീ. സിലിണ്ടറിന്റെ ഉൾഭാഗത്തായി അതേ ഉയരവും ആധാരവും ഉള്ള വൃത്തസ്തൂപികാകൃതിയിലുള്ള പാത്രം വെച്ചിരിക്കുന്നു. ഘനസിലിണ്ടറിന്റെ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.



ചിത്രം. 7.13

**നിർദ്ധാരണം** ഉയരം $h$, വ്യാസാർത്ഥം, $l$ ചെരിവു ഉയരം.

തന്നിട്ടുള്ളവ, $h = 2.4$ സെ.മീ. , $d = 1.4$ സെ.മീ. ; $r = 0.7$ സെ.മീ.

ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം } = സിലിണ്ടറിന്റെ വക്രതലവിസ്തീർണ്ണം + വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം + പാദ വിസ്തീർണ്ണം

$$= 2\pi rh + \pi rl + \pi r^2 \text{ ച.മാ.}$$

$$l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{0.49 + 5.76} = \sqrt{6.25} = 2.5 \text{ സെ.മീ}$$

$$l = 2.5 \text{ cm}$$

ബാക്കി ഭാഗത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം $2\pi rh + \pi rl + \pi r^2$ ച.മാ.

$$= \pi r\left(2h + l + r\right)$$

$$= \frac{22}{7} \times 0.7 \times \left[\left(2 \times 2.4\right) + 2.5 + 0.7\right]$$

$$= 17.6$$

ബാക്കിയുള്ള ഘനരൂപത്തിന്റെ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം 17.6 സെ.മീ$^2$

### പുരോഗതി പരിശോധന

1. ഏതെങ്കിലും ഒരു വശത്തെ _____ പൂർണ്ണമായി ചുറ്റിയാൽ കിട്ടുന്ന ഘനരൂപത്തെ _____സമവൃത്താകാര സ്തൂപിക എന്നു പറയുന്നു.
2. സമവൃത്താകാര സ്തൂപികയുടെ അക്ഷം ചാപത്തിന് _____ ആയിരിക്കും.
3. സമവൃത്താകാര സ്തൂപികയുടെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണത്തിനും ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണത്തിനും ഉള്ള വ്യത്യാസം _____.
4. വൃത്തഖണ്ഡാംശത്തെ വൃത്തസ്തൂപികയാക്കി മാറ്റുമ്പോൾ ഉണ്ടാകുന്ന മാറ്റങ്ങൾ.

| വൃത്തഖണ്ഡാംശം | വൃത്തസ്തൂപിക |
|---|---|
| വ്യാസാർദ്ധം | പാദചുറ്റളവ് |
| വിസ്തീർണ്ണം | ചെരിവു ഉയരം |
| ചാപനീളം | വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം |

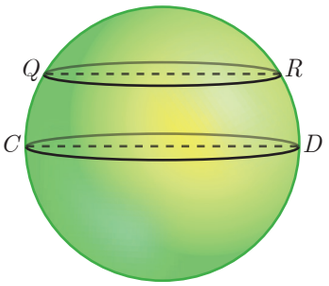
## 7.2.4 ഗോളം

**നിർവചനം :** ഒരു വൃത്താകാരത്തകിടിന്റെ ഏതെങ്കിലും ഒരു വ്യാസത്തെ അക്ഷമാക്കി ചുറ്റിയാൽ കിട്ടുന്ന ഘന രൂപമാണ് ഗോളം.



7 Mensuration Malayalam.indd 276 20/01/2023 19:05:14

ഗോളത്തിന്റെ ഓരോ പ്രതലഭാഗവും വൃത്തമാകുന്നു. ഒരു ഘനഗോളത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന തലത്തെ വലിയ വൃത്തം എന്നു പറയുന്നു. ബാക്കിയുള്ള ഭാഗത്തെ ചെറിയ വൃത്തം എന്നു പറയുന്നു.



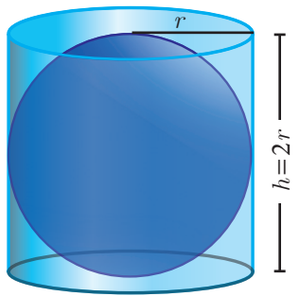
ചിത്രം. 7.14

ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നതുപോലെ വ്യാസം $CD$ ആയിട്ടുള്ള വൃത്തം വലിയ വൃത്തമെന്നും വ്യാസം $QR$ ആയിട്ടുള്ള വൃത്തം ചെറിയ വൃത്തമെന്നും പറയുന്നു.

## ഘനഗോളത്തിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം

### ആർക്കിമിഡീസ് നിർവചനം

ഒരു സമവൃത്താകാര സിലിണ്ടറിനുള്ളിൽ ഒരേ വ്യാസവും ഉയരവുമുള്ള ഗോളം വരയ്ക്കുക. ഇപ്പോൾ സിലിണ്ടറിന്റെ ഉയരം ഗോളത്തിന്റെ വ്യാസമാകുന്നു. ആർക്കിമിഡീസിന്റെ നിർവചനത്തിൽ ഗോളത്തിന്റെ ബാഹ്യവിസ്തീർണ്ണം എന്നത് സിലിണ്ടറിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണമാകുന്നു.



ചിത്രം. 7.15

ഗോളത്തിന്റെ പ്രതലവിസ്തീർണ്ണം = സിലിണ്ടറിന്റെ വക്രതലവിസ്തീർണ്ണം

$$= 2\pi rh = 2\pi r\left(2r\right)$$

ഗോളത്തിന്റെ പ്രതലവിസ്തീർണ്ണം $= 4\pi r^2$ ച.മീ.



**പ്രവർത്തി 2**

(i) വ്യാസാർദ്ധം 'r' ഉള്ള ഒരു ഗോളം എടുക്കുക.

(ii) ഗോളത്തിന്റെ വ്യാസത്തിനു സമമായിട്ടുള്ള വ്യാസവും ഉയരവുമുള്ള സിലിണ്ടർ എടുക്കുക.

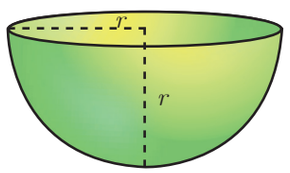
(iii) ഗോളത്തിനു ചുറ്റും സിലിണ്ടറിനു ചുറ്റും ഒരു നൂൽകൊണ്ട് ചുറ്റുക.

(iv) രണ്ടു നൂൽകളുടെയും നീളം താരതമ്യപ്പെടുത്തുക.

(v) അവയിൽ നിന്ന് കിട്ടുന്ന അറിവ് ഗോളത്തിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം കാണുന്നതിന് ഉപകരിക്കുന്നു.

## 7.2.5 അർദ്ധഗോളം

ഒരു ഘനഗോളത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന തലം ഗോളത്തെ രണ്ടു സമഭാഗങ്ങളാക്കുന്നു. ഓരോ ഭാഗത്തേയും ഒരുഘന അർദ്ധഗോളം എന്നു പറയുന്നു.



ചിത്രം. 7.16

ഇതിൽ നിന്ന് നാം മനസ്സിലാക്കുന്നത് അർദ്ധഗോളം എന്നത് ഗോളത്തിന്റെ നേർ പകുതിഭാഗം എന്നാണ്.

പൊള്ളയായ അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ പ്രതലവിസ്തീർണ്ണം $= \frac{\text{ഗോളത്തിന്റെ പ്രതലവിസ്തീർണ്ണം}}{2} = \frac{4\pi r^2}{2}$

അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ പ്രതലവിസ്തീർണ്ണം $= 2\pi r^2$ ച.മാ

പൊള്ളയായ അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം

= പൊള്ളയായ അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ പ്രതലവിസ്തീർണ്ണം +വൃത്തഭാഗത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം

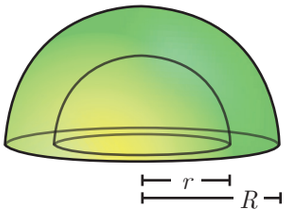
$= = 2\pi r^2 + \pi r^2$

അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം $= 3\pi r^2$ ച.മാ



7 Mensuration Malayalam.indd 277 20/01/2023 19:05:15

### 7.2.6 പൊള്ളയായ അർദ്ധഗോളം



ചിത്രം. 7.17

വ്യാസാർദ്ധം $r$ , ബാഹ്യ വ്യാസാർദ്ധം $R$ എന്നിരിക്കട്ടെഅകലം

അകലം $= R\text{-}r$

അതുകൊണ്ട്, C.S.A.= ബാഹ്യ അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം + ആന്തര അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം

$= 2\pi R^2 + 2\pi r^2$

പൊള്ളയായ അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം $= 2\pi(R^2 + r^2)$ ച.മാ.

T.S.A. = C.S.A. + വൃത്തഭാഗത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം

$= 2\pi(R^2 + r^2) + \pi(R^2 - r^2)$

$= \pi\left[2R^2 + 2r^2 + R^2 - r^2\right]$

അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം $= \pi(3R^2 + r^2)$ ച.മാ.

**ഉദാഹരണം 7.8** ഒരു ഗോളത്തിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം 154 ച.മീ. എങ്കിൽ അതിന്റെ വ്യാസം കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം** വ്യാസാർത്ഥം $r$

തന്നിട്ടുള്ളവ, ഗോളത്തിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം = 154 $m^2$

$$4\pi r^2 = 154$$

$$4 \times \frac{22}{7} \times r^2 = 154$$

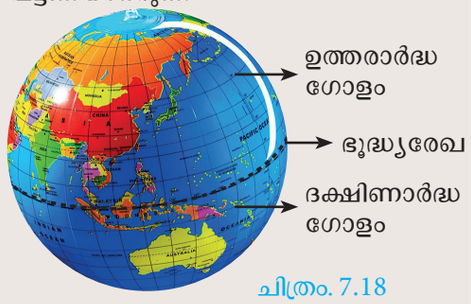
$$r^2 = 154 \times \frac{1}{4} \times \frac{7}{22}$$

$$r^2 = \frac{49}{4} \text{ we get } r = \frac{7}{2}$$

വ്യാസം 7 മീ.

**പ്രവർത്തി 3**

ഉത്തരാർദ്ധഗോളത്തിലും ദക്ഷിണാർദ്ധഗോളത്തിലും ഉള്ള രണ്ട് രാജ്യങ്ങളെ ഗ്ലോബ് ഉപയോഗിച്ച് പട്ടികയാക്കുക.



ചിത്രം. 7.18

**ഉദാഹരണം 7.9** ഗോളാകൃതിയിലുള്ള ബലൂൺ വായു നിറയ്ക്കുന്നതിന് അനുസരിച്ച് അതിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം 12 സെ.മീ.. ൽ നിന്ന് 16 സെ.മീ.. ആയി വികസിക്കുന്നു. ഈ രണ്ടു ഘട്ടങ്ങളിലും രണ്ട് ബലൂണിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണങ്ങളുടെ അംശബന്ധം കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം** $r_1$ , $r_2$ എന്നിവ ബലൂണിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം.

തന്നിട്ടുള്ളവ, $\frac{r_1}{r_2} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

വക്രതലവിസ്തീർണ്ണം $= \frac{4\pi r_1^2}{4\pi r_2^2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$

രണ്ടു ഘട്ടങ്ങളിലും ബലൂണിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണങ്ങളുടെ അംശബന്ധം 9:16.

**ചിന്തിക്കുക**

1. ഗോളത്തിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം $36\pi$ ച.മീ. എങ്കിൽ അതിന്റെ വ്യാപ്തം കാണുക.
2. ഒരു ഗോളത്തിൽ എത്ര വലിയ വൃത്തം കാണാൻ സാധിക്കും?
3. ഭൂമിയുടെ വ്യാസം 12756 kms അതിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.



7 Mensuration Malayalam.indd 278 20/01/2023 19:05:18

## പുരോഗതി പരിശോധന

1. ഗോളത്തിന്റെ എല്ലാ പ്രതലവും ഒരു_____.
2. വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം ഗോളത്തിന്റെ _____ ആകുന്നു.
3. അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ വക്രതലവിസ്തീർണ്ണത്തിനും ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണത്തിനും ഉള്ള വ്യത്യാസം _____.
4. ഗോളത്തിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണത്തിനും അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണത്തിനും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം _____.
5. ഒരു ഘനഗോളത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വലിയ വൃത്തം _____.

**ഉദാഹരണം 7.10** ഒരു ഘന അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ പാദവിസ്തീർണ്ണം 1386 ച.മീ. ഗോളത്തിന്റെ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം കാണുക?

**നിർദ്ധാരണം** വ്യാസാർദ്ധം $r$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

തന്നിട്ടുള്ള പാദവിസ്തീർണ്ണം $= \pi r^2 = 1386$ ച.മീ.

ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം $= 3\pi r^2$ ച.മീ.

$= 3 \times 1386 \quad = 4158$

ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം $4158\ \text{m}^2$.

**Note**

➢ പൊള്ളയായ സിലിണ്ടറിന്റെ വക്രതല, ആകെ ഉപരിതല വിസ് തീർണ്ണം കാണുന്നതിന് ഗോളത്തിന്റെ വക്രതലവിസ്തീർണ്ണം കാണുന്ന സൂത്രം ഉപയോഗിക്കുക.

## ചിന്തിക്കുക

1. ഗോളത്തിൽ നിന്നു കിട്ടുന്ന ചെറിയ വൃത്തത്തിൽ നിന്ന് അർദ്ധഗോളം കിട്ടാൻസാധ്യതയുണ്ടോ?
2. അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം പാദവിസ്തീർണ്ണത്തിന്റെ എത്ര മടങ്ങാണ്?
3. ഒരു ഗോളത്തിൽനിന്ന് എത്ര അർദ്ധഗോളങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കാം?

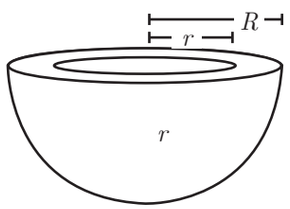
**ഉദാഹരണം 7.11** പൊള്ളയായ അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ ആന്തര വ്യാസാർദ്ധം, ബാഹ്യവ്യാസാർദ്ധം എന്നിവ യഥാക്രമം 3 മീ, 5 മീ എങ്കിൽ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം, വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം** $r$ ആന്തര വ്യാസാർദ്ധം $R$ ബാഹ്യ വ്യാസാർദ്ധം.

തന്നിട്ടുള്ളവ, $R = 5$ m, $r = 3$ m

പൊള്ളയായ അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം $= 2\pi(R^2 + r^2)$ ച.മാ.

$= 2 \times \frac{22}{7} \times (25 + 9) = 213.71$



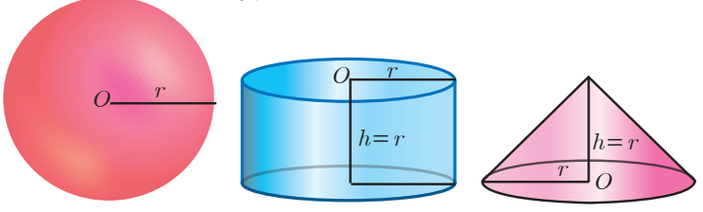
ചിത്രം. 7.19

പൊള്ളയായ അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം $= \pi(3R^2 + r^2)$ ച.മാ.

$= \frac{22}{7}(75 + 9) \quad = 264$

വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം $. = 213.71\ \ m^2$ ആകെ ഉപരിതലവിസ്തീർണ്ണം $= 264\ \ \text{m}^2$.

**ഉദാഹരണം 7.12** ഒരു ഗോളം, ഒരു സിലിണ്ടർ, വൃത്ത സ്തൂപിക എന്നിവയ്ക്ക് തുല്യ വ്യാസാർദ്ധങ്ങളാണുള്ളത്. വൃത്തസ്തൂപികയ്ക്കും സിലിണ്ടറിനും തുല്യ ഉയരങ്ങളാണ്. ഇവയുടെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണങ്ങളുടെ അംശബന്ധം കാണുക.



ചിത്രം. 7.20



7 Mensuration Malayalam.indd 279 20/01/2023 19:05:19

**നിർദ്ധാരണം** ആവശ്യപ്പെട്ട അംശബന്ധം= ഗോളത്തിന്റെ പ്രതല വിസ്തീർണ്ണം : സിലിണ്ടറിന്റെ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം : വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം

$$= 4\pi r^2 : 2\pi rh : \pi rl\,, \quad (l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{2r^2} = \sqrt{2}r \text{ units})$$

$$= 4\pi r^2 : 2\pi r^2 : \pi r\sqrt{2}\, r$$

$$= 4\pi r^2 : 2\pi r^2 : \sqrt{2}\pi r^2$$

$$= 4 : 2 : \sqrt{2} = 2\sqrt{2} : \sqrt{2} : 1$$

### 7.2.1 സമവൃത്താകാര വൃത്തസ്തൂപികാപീഠം

മുൻകാലങ്ങളിൽ വൃത്തസ്തൂപീകാകൃതിയിൽ ഉള്ള ബക്കറ്റു (ചിത്രം 7.21(a)) കളിൽ മണൽ / വെള്ളം നിറച്ച് തീ പിടുത്തത്തിൽ നിന്നും സംരക്ഷിക്കാൻ ആയി ഉപയോഗിച്ചിരുന്നു. ഇപ്പോൾ അതിന്റെ രൂപം മാറ്റി പാദം വൃത്താകാര ആകൃതിയിലും വ്യാപ്തവും വികസിപ്പിച്ചിട്ടുണ്ട്.

ചിത്രം 7.21(c) കമിഴ്ത്തിയ ബക്കറ്റിന്റെ ആകൃതിയിലുള്ള രൂപത്തെ വൃത്തസ്തൂപികാ പീഠം എന്നു പറയുന്നു.



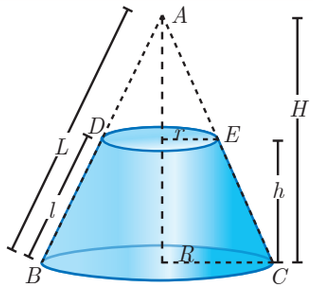

ചിത്രം. 7.21(a) ചിത്രം. 7.21(b) ചിത്രം. 7.21(c)

ചിത്രം 7.22 ൽ കാണുന്നതുപോലുള്ള നാം നിത്യേന ഉപയോഗിക്കാറുള്ള ഗ്ലാസ്, ബക്കറ്റ് എന്നിവ വൃത്തസ്തൂപികാ പീഠത്തിന് ഉദാഹരണങ്ങളാണ്.



ബക്കറ്റ് തെരുവ് കോൺ ഗ്ലാസ്

ചിത്രം. 7.22




ചിത്രം. 7.23

**നിർവചനം**

ഒരു സമാന്തരവൃത്തസ്തൂപിക ABC എടുത്ത് അതിന്റെ അടിഭാഗത്തിന് സമാന്തരമായി ഒരു ചെറിയ വൃത്തസ്തൂപിക ലഭിക്കത്തക്കവിധം മുറിച്ചെടുക്കുക. ശേഷിച്ച DECB ഭാഗത്തെ വൃത്തസ്തൂപികാ പീഠം എന്നുപറയുന്നു.

### വൃത്തസ്തൂപികാ പീഠത്തിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം

$R, r$ എന്നിവ യഥാക്രമം $DECB$ യുടെ പാദം, മുകൾഭാഗം എന്നിവയുടെ വ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ എന്നിരിക്കട്ടെ. $h$ ഉയരം, $l$ ചെരിവു ഉയരം എന്നിരിക്കട്ടെ.

വക്രതലവിസ്തീർണ്ണം= $\frac{1}{2}$ (പാദച്ചുറ്റളവ് + മുകൾഭാഗച്ചുറ്റളവ്) × ചെരിവുയരം

$$= \frac{1}{2}(2\pi R + 2\pi r)l$$

**സമവൃത്താകാര വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം= $\pi(R + r)l$ ച.മാ.**

ഇവിടെ, $l = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$

ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം = വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം + പാദവിസ്തീർണ്ണം + മുകൾഭാഗവിസ്തീർണ്ണം.

**സമവൃത്താകാര വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ആകെ ഉപരിതലവിസ്തീർണ്ണം= $\pi(R + r)l + \pi R^2 + \pi r^2$ ച.മാ.**

$l = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$



7 Mensuration Malayalam.indd 280 20/01/2023 19:05:21

**ഉദാഹരണം 7.13** ഒരു വൃത്തസ്തൂപികാപീഠത്തിന്റെ ചെരിവുയരം 5 സെ.മീ.. അതിന്റെ വ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ R=4 സെ.മീ., r=1 സെ.മീ.. എങ്കിൽ അതിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം** ചെരിവുയരം $l$, പാദവ്യാസാർദ്ധം $r$, മുകൾഭാഗ വ്യാസ്യാർദ്ധം $R$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

തന്നിട്ടുള്ളവ, $l = 5$ സെ.മീ., $R = 4$ സെ.മീ., $r = 1$ സെ.മീ.

വൃത്തസ്തൂപികാപീഠത്തിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം $= \pi\left(R + r\right)l$ ച.മാ.

$$= \frac{22}{7} \times \left(4 + 1\right) \times 5$$

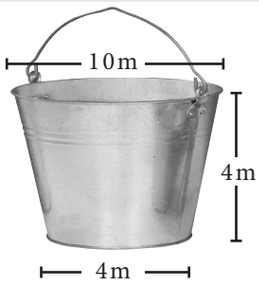
$$= \frac{550}{7}$$

അതുകൊണ്ട്, വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം = 78.57 സെ.മീ.$^2$

**ചിന്തിയ്ക്കുക**

1. നമ്മുടെ ദൈനംദിന ജീവിതത്തിൽ ഉപയോഗപ്പെടുത്തുന്ന വൃത്തസ്തൂപികാപീഠത്തിന് രണ്ട് ഉദാഹരണങ്ങൾ.
2. അർദ്ധഗോളം, ഗോളത്തിന്റെ വൃത്തസ്തൂപികാപീഠമായി അംഗീകരിക്കാൻ കഴിയുമോ.

**ഉദാഹരണം 7.14** ഒരു ബക്കറ്റ് (industrial bucket) സമവൃത്താകാര വൃത്തസ്തൂപികാ പീഠാകൃതിയിലാണ്. അവയുടെ മുകൾഭാത്തെയും പാദഭാഗത്തെയും വ്യാസങ്ങൾ യഥാക്രമം 10 സെ.മീ.., 4 സെ.മീ.. അതിന്റെ ഉയരം 4 സെ.മീ.. എങ്കിൽ ബക്കറ്റിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.



ചിത്രം. 7.24

**നിർദ്ധാരണം** $h$, $l$, $R$, $r$ എന്നിവ യഥാക്രമം വൃത്തസ്തൂപികാ പീഠത്തിന്റെ ഉയരം, ചെരിവുയരം, മുകൾഭാഗ വ്യാസാർദ്ധം, പാദവ്യാസാർദ്ധം എന്നിരിക്കട്ടെ.

തന്നിട്ടുള്ളവ മുകൾഭാഗത്തിന്റെ വ്യാസം =10 m; മുകൾഭാത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം $R$ = 5 m.

പാദഭാഗത്തിന്റെ വ്യാസം = 4 m; പാദഭാഗത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം $r$ = 2 m, ഉയരം $h$= 4 m

$$l = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$$

$$= \sqrt{4^2 + (5 - 2)^2}$$

$$l = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5\text{m}$$

ഇവിടെ, C.S.A. $= \pi(R + r)l$ ച.മാ.

$$= \frac{22}{7}(5 + 2) \times 5 = 110\, m^2$$

T.S.A. $= \pi(R + r)l + \pi R^2 + \pi r^2$ ച.മാ.

$$= \frac{22}{7}\left[(5 + 2)5 + 25 + 4\right] = \frac{1408}{7} = 201.14$$

അതുകൊണ്ട്, C.S.A. = 110 m$^2$ and T.S.A. = 201.14 m$^2$

**പുരോഗതി പരിശോധന**

1. വൃത്തസ്തൂപികയുടെ രണ്ടു സമാന്തരഭാഗങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള (പാദഭാഗം, മുകൾഭാഗം) ഭാഗം _____.
2. ഒരു വൃത്തസ്തൂപികയിൽ നിന്ന് എത്ര വൃത്തസ്തൂപികാ പീഠം ഉണ്ടാക്കാം?



7 Mensuration Malayalam.indd 281 20/01/2023 19:05:22

## അഭ്യാസം7.1

1. ഒരു സിലിണ്ടർന്റെ വ്യാസാർദ്ധം, ഉയരം എന്നിവ 5:7 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്. വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം 5500 ച.സെ.മീ., എങ്കിൽ വ്യാസാർദ്ധം ഉയരം എന്നിവ കാണുക.

2. ഉരുക്കുകൊണ്ടുള്ള ഒരു ഘന സിലിണ്ടർന്റെ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം 1848 ച.സെ.മീ. വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം, ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണത്തിന്റെ 5/6 ഭാഗമാണ്. സിലിണ്ടർന്റെ ആധാരവും ഉയരവും കാണുക.

3. പൊള്ളയായ മരക്കട്ടയുടെ ബാഹ്യ വ്യാസാർദ്ധം, നീളം എന്നിവ യഥാക്രമം 16 സെ.മീ.., 12 സെ.മീ. ഇതിന്റെ കനം 4 സെ.മീ. എങ്കിൽ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

4. $\angle Q = 90^\circ$ സമകോണ ത്രികോണം $PQR$ ൽ $QR, PQ$ വിലേക്ക് മാറുന്നു. $QR$=16 സെ.മീ., $PR$=20 സെ.മീ., ഈ ത്രികോണങ്ങളാൽ രൂപീകൃതമായ സമവൃത്താകാര വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

5. 19 മീ. ചരിവു ഉയരവുമുള്ള വൃത്തസ്തൂപികാകൃതിയിലുള്ള കൂടാരത്തിൽ 4 പേർ താമസിക്കുന്നു. ഓരോരുത്തരും 22 മീ$^2$ സ്ഥലം ഉപയോഗപ്പെടുത്തുന്നുവെങ്കിൽ കൂടാരത്തിന്റെ ഉയരം കാണുക.

6. ഒരു പെൺകുട്ടി അവളുടെ ജന്മദിനാഘോഷത്തിലേക്ക് സമവൃത്താകാര വൃത്തസ്തൂപികാകൃതിയിലുള്ള തൊപ്പി (caps) ചെയ്യാൻ തീരുമാനിച്ചു. അതിലേക്ക് 5720 ച.സെ.മീ.. കടലാസ് ഉപയോഗിക്കുന്നുവെങ്കിൽ വ്യാസാർദ്ധം 5 സെ.മീ.., ഉയരം 12 സെ.മീ.. ഉം ഉള്ള എത്ര തൊപ്പി ഉണ്ടാക്കാൻ സാധിക്കും.

7. ഒരു സമവൃത്താകാര വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാസാർദ്ധവും ഉയരവും1:3 എന്ന അനുപാതത്തിലാണ്. ഓരോ കോണിന്റെ ഉയരവും ചെറിയകോണിന്റെ 3 മടങ്ങാണെങ്കിൽ അവയുടെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണത്തിന്റെ അംശബന്ധം കാണുക.

8. ഒരു ഗോളത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം 25% അധികരിക്കുന്നുവെങ്കിൽ അവയുടെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം എത്ര ശതമാനം അധികരിക്കുന്നു എന്ന് കണക്കാക്കുക.

9. ഉള്ളുപൊള്ളയായ അർദ്ധവൃത്താകൃതിയിലുള്ള പാത്രത്തിന്റെ ആന്തര, ബാഹ്യവ്യാസങ്ങൾ യഥാക്രമം 20 സെ.മീ.., 28 സെ.മീ.. ആകുന്നു. 1 ച.മീ.ന് ചായം പൂശുന്നതിന് ₹ 0.14 എങ്കിൽ പാത്രം ചായം പൂശുന്നതിന് എത്ര ചെലവാകും.




10. ഒരു സമവൃത്താകാര വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ആകൃതയിലുള്ള മേശവിളക്ക് അതിന്റെ മേൽഭാഗം ഉൾപ്പെടെ ചായം പൂശുന്നു. 1 ച. സെ.മീ. ന് ₹ 2 എങ്കിൽ വിളക്ക് ചായം പൂശുന്നതിന് എത്ര ചെലവാകും

## 7.3 വ്യാപ്തം




സിലിണ്ടർ, സ്തൂപിക, ഗോളം, അർദ്ധഗോളം, സമവൃത്താകാരവൃത്തസ്തൂപിക എന്നീ ഘനരൂപങ്ങളുടെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണത്തെക്കുറിച്ച് നാം പഠിച്ചുകഴിഞ്ഞു. ഇനി ഘനരൂപങ്ങളുടെ വ്യാപ്തങ്ങളെക്കുറിച്ച് പഠിക്കാം.

### 7.3.1 സമവൃത്താകാര സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാപ്തം

ഒരു വസ്തു ഉൾക്കൊള്ളുന്ന സ്ഥലത്തിന്റെ അളവിനെ വ്യാപ്തം എന്നു പറയുന്നു. വ്യാപ്തത്തിനെ ഘനമാത്ര കൊണ്ട് കുറിക്കുന്നു. വ്യാസാർദ്ധം $r$, ഉയരം $h$ ആയ ഒരു ഘനസിലിണ്ടർന്റെ വ്യാപ്തം $V$ = (പാദവിസ്തീർണ്ണം) × (ഉയരം) = $\pi r^2 \times h = \pi r^2 h$ ഘന മാത്രകൾ.

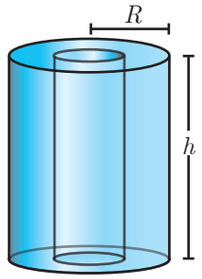
അതുകൊണ്ട്, സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാപ്തം = $\pi r^2 h$ ഘന മാത്രകൾ.



7 Mensuration Malayalam.indd 282 20/01/2023 19:05:23

### 7.3.2 പൊള്ളയായ സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാപ്തം

ആന്തരവ്യാസാർദ്ധം $r$, ബാഹ്യവ്യാസാർദ്ധം $R$ അതിന്റെ ഉയരം$h$ എങ്കിൽ



ചിത്രം. 7.26

വ്യാപ്തം $V$ = {ബാഹ്യസിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാപ്തം} − {ആന്തര സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാപ്തം}

$$V = \pi R^2 h - \pi r^2 h = \pi(R^2 - r^2)h$$

പൊള്ളയായ സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാപ്തം $= \pi(R^2 - r^2)h$ ഘ.മീ.

**ഉദാഹരണം 7.15** ഉയരം 2 മീ. ഉം പാദവിസ്തീർണ്ണം 250 മീ ഉം ആയ സിലിണ്ടറിന്റെവ്യാപ്തം കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം** വ്യാസാർദ്ധം $r$ , ഉയരം $h$ എന്നിരിക്കട്ടെ..

തന്നിട്ടുള്ളവ : ഉയരം $h$ = 2 മീ, പാദവിസ്തീർണ്ണം $= 250$ മീ$^2$

സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാപ്തം $= \pi r^2 h$ ഘ.മാ

$= base\ area \times h$

$= 250 \times 2 = 500$ മീ$^3$

സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാപ്തം $= 500$ മീ$^3$

**ചിന്തിക്കുക**

1. സിലിണ്ടറിന്റെ ഉയരം അതിന്റെ വ്യാസാർദ്ധത്തിന്റെ വർഗ്ഗത്തിന് വിപരീതാനുപാതത്തി ലാണ്, എങ്കിൽ സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാപ്തം _____.
2. വ്യാസാർദ്ധം $r$, ഉയരം $h$ ആയ സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാപ്തം (a) വ്യാസാർദ്ധം പകുതിയായാൽ (b) ഉയരം പകുതിയാക്കിയാൽ എന്ത് സംഭവിക്കുന്നു.

**ഉദാഹരണം 7.16** വെള്ളം നിറച്ചിട്ടുള്ള സിലിണ്ടറാകൃതിയിലുള്ള ടാങ്കിന്റെ വ്യാപ്തം $1.078 \times 10^6$ ടാങ്കിന്റെ വ്യാസം 7 മീ എങ്കിൽ അതിന്റെ ഉയരം കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം** വ്യാസാർദ്ധം $r$, ഉയരം $h$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

ടാങ്കിന്റെ വ്യാപ്തം$= 1.078 \times 10^6 = 1078000$ ലിറ്റർ

$= 1078$ മീ$^3$ $\quad (\because 1l = \frac{1}{1000}$ മീ$^3)$

വ്യാസം $= 7m$ മീ, വ്യാസാർദ്ധം $= \frac{7}{2}$ മീ

ടാങ്കിന്റെ വ്യാപ്തം $= \pi r^2 h$ ഘന മാത്രകൾ

$$1078 = \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times h$$

ടാങ്കിന്റെ ഉയരം 28 മീ



7 Mensuration Malayalam.indd 283 20/01/2023 19:05:25

**ഉദാഹരണം 7.17** ഉയരം 9 സെ.മീ. ആന്തരവ്യാസാർദ്ധം 21 സെ.മീ.. ബാഹ്യവ്യാസാർദ്ധം 28 സെ.മീ. ആയ സിലിണ്ടണ്ടറിനെ നിർമ്മിക്കുന്നതിന് ആവശ്യമായ ഉരുക്കിന്റെ വ്യാപ്തം കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം**

വ്യാസാർദ്ധം $r$ =21 സെ.മീ., $R$ = 28 സെ.മീ.,, $h$ = 9 സെ.മീ.,

പൊള്ളയായ സിലിണ്ടണ്ടറിന്റെ വ്യാപ്തം= $\pi(R^2 - r^2)h$ ഘന മാത്രകൾ

$$= \frac{22}{7}(28^2 - 21^2) \times 9$$

$$= \frac{22}{7}(784 - 441) \times 9 \ = 9702$$

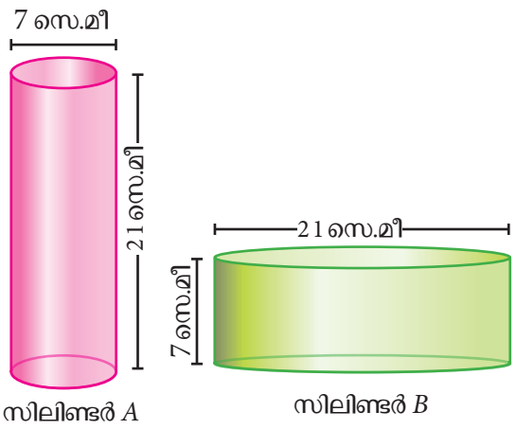
ഉരുക്കിന്റെ വ്യാപ്തം = 9702 സെ.മീ.$^3$

**ഉദാഹരണം 7.18** ചിത്രത്തിൽ കാണുന്ന സിലിണ്ടറുകളിൽ,

(i) ഏതു സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാപ്തമാണ് കൂടുതൽ.

(ii) ഏതു സിലിണ്ടറിനാണ് ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം കൂടുതലായിട്ടുള്ളത്.

(iii) വ്യാപ്തങ്ങളുടെ അംശബന്ധം കാണുക.



ചിത്രം. 7.27

**നിർദ്ധാരണം**

(i) സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാപ്തം $= \pi r^2 h$ ഘന മാത്രകൾ

$A$ എന്ന സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാപ്തം= $\frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times 21$

$= 808.5$ സെ.മീ$^3$

$B$ എന്ന സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാപ്തം= $\frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times \frac{21}{2} \times 7$

$= 2425.5$ സെ.മീ$^3$

$A$ യുടെ വ്യാപ്തം സിലിണ്ടർ $B$ യുടെ വ്യാപ്തത്തെക്കാൾ കൂടുതലാണ്.

(ii) ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം $= 2\pi r(h + r)$ ച.മാ.

$A$ യുടെ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം $= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times (21 + 3.5) = 539$ സെ.മീ$^2$

$B$ യുടെ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം $= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times (7 + 10.5) = 1155$ സെ.മീ$^2$

സിലിണ്ടർ $B$ യുടെ വ്യാപ്തം സിലിണ്ടർ $A$ യുടെ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണത്തേക്കാൾ കൂടുതലാണ്.

(iii) $\frac{\text{A എന്ന സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാപ്തം}}{\text{B എന്ന സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാപ്തം}} = \frac{808.5}{2425.5} = \frac{1}{3}$

സിലിണ്ടർ $A, B$ യുടെ വ്യാപ്തങ്ങളുടെ അംശബന്ധം 1:3.



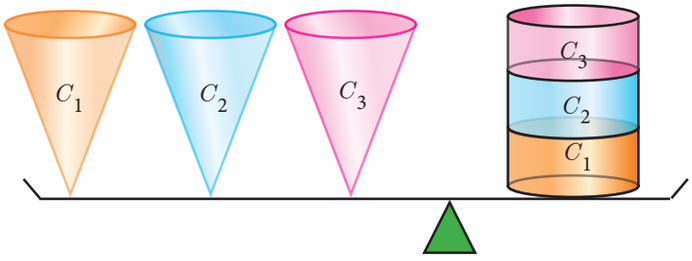
7 Mensuration Malayalam.indd 284 20/01/2023 19:05:27

### 7.3.1 സമവൃത്താകാര വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം

വ്യാസാർദ്ധം $r$ ഉയരം $h$ ഉം ആയ വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \text{ ഘ.മാ.}$$

**വിശദീകരണം**




- ഒരേ വ്യാസാർദ്ധവും ഒരേ ഉയരവുമുള്ള മൂന്നു സമവൃത്താകാര സ്തൂ പികയും ഒരു സമവൃത്താകാര സിലിണ്ടറും എടുക്കുക.
- മൂന്നു വൃത്തസ്തൂപികയിലുള്ള വസ്തുക്കളെയും സിലിണ്ടർ മുഴുവനായി ഉൾക്കൊള്ളുന്നു.

ചിത്രം. 7.28

ചിത്രം.7.28 ൽ നിന്നും,

3× (വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം) = സിലിണ്ടണ്ടറിന്റെ വ്യാപ്തം

$= \pi r^2 h$ ഘ.മാ

വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ഘ.മാ

**ഉദാഹരണം 7.19** സമവൃത്താകാരവൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം 11088 സെ.മീ$^3$ ഇതിന്റെ ഉയരം 24 സെ. മീ.. എങ്കിൽ അതിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം** വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാസാർദ്ധം, ഉയരം എന്നിവ യഥാക്രമം $r$, $h$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

തന്നിട്ടുള്ളവ, വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം = 11088 സെ.മീ$^3$

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h = 11088$$

$$\frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times r^2 \times 24 = 11088$$

$$r^2 = 441$$

വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാസാർദ്ധം $r$ = 21 സെ.മീ..

**ചിന്തിക്കുക**

1. സമവൃത്താകാര വൃത്തസ്തൂപികയാകാൻ കഴിയുമോ

   (a) ഉയരവും ചെരിവു ഉയരവും തുല്യമായാൽ (b) വ്യാസാർദ്ധവും ചരിവു ഉയരവും തുല്യമായാൽ (c) ഉയരവും വ്യാസാർദ്ധവും തുല്യമായാൽ.

2. തുല്യ വ്യാപ്തമുള്ള രണ്ടു കോണുകളുടെ വ്യാസാർദ്ധത്തിനും ഉയരത്തിനും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം കണക്കാക്കുക?



7 Mensuration Malayalam.indd 285 20/01/2023 19:05:27

**ഉദാഹരണം 7.20** രണ്ടു വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം 2:3. രണ്ടാമത്തെ കോണിന്റെ ഉയരം ആദ്യത്തെ കോണിന്റെ ഉയരത്തെക്കാൾ 2 മടങ്ങാണ് എങ്കിൽ വ്യാസാർദ്ധങ്ങളുടെ അംശബന്ധം കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം** ആദ്യത്തെ കോണിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം $r_1$ ഉയരം $h_1$ എന്നും രണ്ടാമത്തെ കോണിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം $r_2$ ഉയരം $h_2$ എന്നും ഇരിക്കട്ടെ.

തന്നിട്ടുള്ളവ $h_2 = 2h_1$ , $\frac{\text{ഒന്നാമത്തെ കോണിന്റെ വ്യാപ്തം}}{\text{രണ്ടാമത്തെ കോണിന്റെ വ്യാപ്തം}} = \frac{2}{3}$

$$\frac{\frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1}{\frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2} = \frac{2}{3}$$

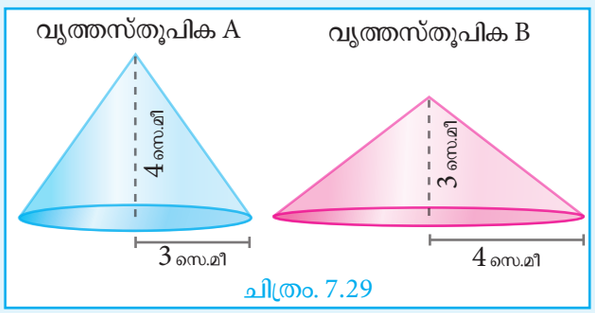
$$\frac{r_1^2}{r_2^2} \times \frac{h_1}{2h_1} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{4}{3} \quad \text{gives} \quad \frac{r_1}{r_2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

വ്യാസാർദ്ധങ്ങളുടെ അംശബന്ധം = $2 : \sqrt{3}$

## പുരോഗതി പരിശോധന

1. വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം എന്നത് പാദവിസ്തീർണ്ണം , _____എന്നിവയുടെ ഗുണനഫലമാണ്.
2. വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാസാർദ്ധം ഇരട്ടിയാക്കിയാൽ കിട്ടുന്ന പുതിയ വ്യാപ്തം ആദ്യത്തെ വ്യാപ്തത്തിന്റെ _____ മടങ്ങാണ്.
3. ചിത്രത്തിൽ നിന്ന്.
   (i) കണക്കുകൾ ചെയ്തു നോക്കാതെ ഏതിന്റെ വ്യാപ്തമാണ് കൂടുതൽ എന്ന് പറയാമോ?
   (ii) ഏതു കോണിന്റെ വ്യാപ്തമാണ് വക്ര തലവിസ്തീർണ്ണത്തേക്കാൾ കൂടുതൽ എന്നു പറയാമോ.
   (iii) A യുടെ വ്യാപ്തം : B യുടെ വ്യാപ്തം

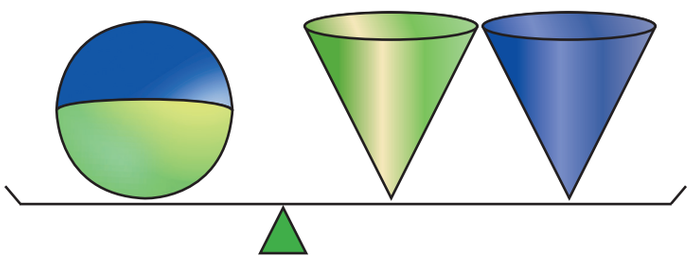


ചിത്രം. 7.29

### 7.3.4 ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം

വ്യാസാർദ്ധം $r$ എങ്കിൽ ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ഘ:മാ.

**തെളിയിക്കൽ**


ചിത്രം. 7.30

- ഒരു ഗോളവും ഒരേ പാദവ്യാസാർദ്ധവും ഉയരവുമുള്ള രണ്ടു സമവൃത്താകാരവൃത്തസ്തൂപികയും പരിഗണിക്കുക. ഗോളത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധത്തിന്റെ രണ്ടുമടങ്ങ് വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ഉയരത്തിനും സമമായിരിക്കും.
- നാം ഇതിൽ നിന്ന് മനസ്സിലാക്കുന്നത് രണ്ടു കോണുകളിലുള്ള വസ്തുക്കളെ സിലിണ്ടർ പൂർണ്ണമായും ഉൾക്കൊള്ളുന്നു.



7 Mensuration Malayalam.indd 286 20/01/2023 19:05:29

ചിത്രം.7.30, ൽ നിന്ന്

ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം= $2 \times$ (വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം)

ഇവിടെ ഗോളത്തിന്റെയും കോണിന്റെയും വ്യാസങ്ങൾ വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ ഉയരത്തിനു സമമാണ്.

$$= 2\left(\frac{1}{3}\pi r^2 h\right)$$

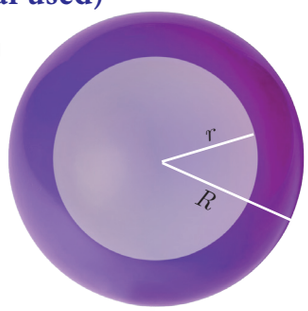
$$= \frac{2}{3}\pi r^2\left(2r\right), \quad (\because\ h = 2r)$$

ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം $= \frac{4}{3}\pi r^3$ ഘ.മാ

### 7.3.5 പൊള്ളയായ ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം (volume of the material used)

പൊള്ളയായ സിലിണ്ടറിന്റെ ആന്തരവ്യാസാർദ്ധം, ബാഹ്യവ്യാസാർദ്ധം എന്നിവ $r, R$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

ബാഹ്യഗോളത്തിനും ആന്തരഗോളത്തിനും ഇടയിൽ വ്യാപ്തം ഉൾക്കൊണ്ടിരിക്കുന്നു.



ചിത്രം. 7.31

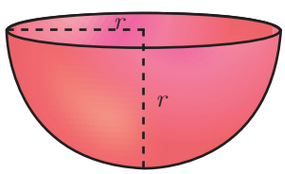
$$= \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$$

പൊള്ളയായ ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം $= \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)$ ഘ.മാ

### 7.3.6 ഘന അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം

ഘന അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം $r$ എന്നിരിക്കട്ടെ

ഘന അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം $= \frac{1}{2}$ (ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം)



ചിത്രം. 7.32

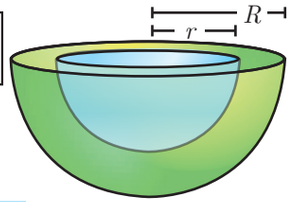
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}\pi r^3\right]$$

ഘന അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം $= \frac{2}{3}\pi r^3$ ഘ.മാ

### 7.3.7 പൊള്ളയായ അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം (volume of the material used)

$r, R$ എന്നിവ യഥാക്രമം പൊള്ളയായ അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ ആന്തര, ബാഹ്യവ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ എന്നിരിക്കട്ടെ.

പൊള്ളയായ അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം = [ബാഹ്യഅർദ്ധഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം] − [ആന്തര അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം]



ചിത്രം. 7.33

$$= \frac{2}{3}\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi r^3$$

പൊള്ളയായ അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം $= \frac{2}{3}\pi(R^3 - r^3)$ ഘ.മാ

**ചിന്തിക്കുക**

ഒരു വൃത്തസ്തൂപിക, അർദ്ധഗോളം, സിലിണ്ടണ്ടർ എന്നിവയ്ക്ക് തുല്യ പാദങ്ങളാണുള്ളത്. വൃത്തസ്തൂപിക സിലിണ്ടണ്ടർ എന്നിവയുടെ ഉയരവും വ്യാസാർദ്ധവും സമമാണ് എങ്കിൽ അവയുടെ വ്യാപ്തങ്ങൾ തുല്യമാകുമോ?



7 Mensuration Malayalam.indd 287 20/01/2023 19:05:32

**ഉദാഹരണം 7.21** ഒരു ഘന അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം 29106 സെ.മീ$^3$ മറ്റൊരു ഘനഅർദ്ധഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം ആദ്യത്തേതിന്റെ 2/3 മടങ്ങാണ് എങ്കിൽ പുതിയ അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം** അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം $r$.

തന്നിട്ടുള്ളത് - അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം $= 29106$ സെ.മീ$^3$

പുതിയ അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം $= \frac{2}{3}$ (ആദ്യത്തെ ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം)

$$= \frac{2}{3} \times 29106$$

പുതിയ അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം $= 19404$ സെ.മീ$^3$

$$\frac{2}{3}\pi r^3 = 19404$$

$$r^3 = \frac{19404 \times 3 \times 7}{2 \times 22} = 9261$$

$$r = \sqrt[3]{9261} = 21 \text{ സെ.മീ}$$

അതുകൊണ്ട്, $r = 21$ സെ.മീ



**ചിന്തിക്കുക**

1. യഥാർത്ഥജീവിതവുമായി ഗോളം, അർദ്ധഗോളം എങ്ങനെ ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു എന്നതിന് രണ്ട് ഉദാഹരണം.
2. വലിയ വൃത്തത്തിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന തലം ഗോളത്തെ _____ ഭാഗങ്ങളാക്കുന്നു.
3. ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തവും വക്രതലവിസ്തീർണ്ണവും എണ്ണത്തിൽ തുല്യമെങ്കിൽ ഗോളത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം _____.

**ഉദാഹരണം 7.22** പൊള്ളയായ ലോഹ ഗോളത്തിന്റെ ആന്തരവ്യാസം 14 സെ.മീ. കനം 1 മി.മീ. സാന്ദ്രത 17.3 / സെമീ. എങ്കിൽ ആകെ ഭാരം കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം** പൊള്ളയായ ഗോളത്തിന്റെ ആന്തര, ബാഹ്യ വ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ $r$, $R$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

ആന്തരവ്യാസം $d = 14$ സെ.മീ; $r = 7$ സെ.മീ; കനം = 1മി.മീ $= \frac{1}{10}$ സെ.മീ

$$\text{ബാഹ്യവ്യാസാർദ്ധം } R = 7 + \frac{1}{10} = \frac{71}{10} = 7.1 \text{ സെ.മീ}$$

$$\text{പൊള്ളയായ ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം} = \frac{4}{3}\pi\left(R^3 - r^3\right) \text{ ഘന. സെ.മീ}$$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7}(357.91 - 343) = 62.48 \text{ സെ.മീ}^3$$

ലോഹത്തിന്റെ ഭാരം1 സെ.മീ$^3$ $= 17.3$ ഗ്രാം

$$\text{ആകെ ഭാരം} = 17.3 \times 62.48 = 1080.90 \text{ ഗ്രാം}$$

അതുകൊണ്ട്, ആകെ ഭാരം 1080.90 ഗ്രാം.



7 Mensuration Malayalam.indd 288 20/01/2023 19:05:33

## പുരോഗതി പരിശോധന

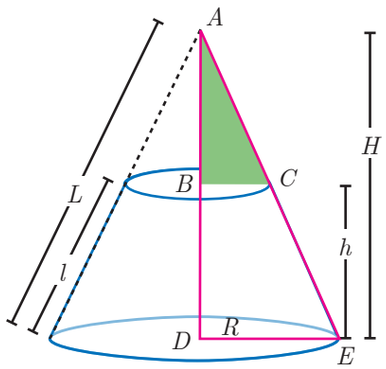
1. ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തത്തിനും വക്രതലവിസ്തീർണ്ണത്തിനും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം കാണുക?
2. അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ ഉയരത്തിനും വ്യാസാർദ്ധത്തിനും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം_____.
3. ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം എന്നത് അതിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണത്തിനും നും തമ്മിലുള്ള ഗുണനഫലമാണ് _____.

### 7.3.1 വൃത്തസ്തൂപികാ പീഠത്തിന്റെ വ്യാപ്തം

വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ഉയരം, $h$ വൃത്തസ്തൂപികാ പീഠത്തിന്റെ ഉയരം എന്നിരിക്കട്ടെ.

$l$ വൃത്തസ്തൂപികാ പീഠത്തിന്റെ ചെരിവുയരം $R$, $r$ എന്നിവ യഥാക്രമം വൃത്തസ്തൂപികാപീഠത്തിന്റെ താഴെയും മുകളിലുമുള്ള വൃത്തഭാഗത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ. വൃത്തസ്തൂപികാ പീഠത്തിന്റെ വ്യാപ്തം എന്നത് രണ്ടു കോണുകളുടെയും വ്യാപ്തങ്ങളുടെയും വ്യത്യാസമാകുന്നു.

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H - \frac{1}{3}\pi r^2 (H-h)$$



ചിത്രം. 7.34

ത്രികോണം $ABC$ യും ത്രികോണം $ADE$ യും സദൃശ്യത്രികോണങ്ങൾ. ഒരേ അനുപാതത്തിലുള്ള അവയുടെ വശങ്ങളും ഒരേ അനുപാതത്തിലാണ്.

അതുകൊണ്ട്, $\frac{H-h}{H} = \frac{r}{R}$ . $H = \frac{hR}{R-r}$ ...(1)

**ചിന്തിക്കുക**

മുഴുവൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം കണ്ടുപിടിച്ചാൽ വൃത്തസ്തൂപികാ പീഠത്തിന്റെ വ്യാപ്തം അറിയാൻ സാധിക്കും?

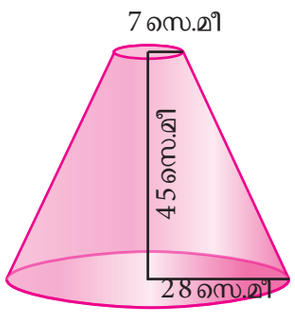
$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi R^2 H - \frac{1}{3}\pi r^2 (H-h) \\ &= \frac{\pi}{3} H(R^2 - r^2) + \frac{1}{3}\pi r^2 h \\ &= \frac{\pi}{3}\frac{hR}{R-r}(R^2 - r^2) + \frac{\pi}{3} r^2 h \quad [\,(1) \text{ ഉപയോഗിച്ച്}] \\ &= \frac{\pi}{3} hR(R+r) + \frac{\pi}{3} r^2 h \end{aligned}$$

$$\text{വൃത്തസ്തൂപികാ പീഠത്തിന്റെ വ്യാപ്തം} = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2) \text{ ഘ.മാ}$$

**ഉദാഹരണം 7.23** ഒരു വൃത്ത സ്തൂപികാപീഠത്തിന്റെയും രണ്ടു അഗ്രങ്ങളിലെയും വ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ 28 സെ.മീ.., 7 സെ.മീ.., ഉയരം 45 സെ.മീ.. എന്നാൽ വൃത്തസ്തൂപികാ പീഠത്തിന്റെ വ്യാപ്തം കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം** വൃത്തസ്തൂപികാ പീഠത്തിന്റെ ഉയരം $h$ മുകളിലും താഴെയുമുള്ള വ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ $r$, $R$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

തന്നിട്ടുള്ളവ, $h = 45$ സെ.മീ., $R = 28$ സെ.മീ., $r = 7$ സെ.മീ.



ചിത്രം. 7.35

$$\text{വ്യാപ്തം} = \frac{1}{3}\pi\left[R^2 + Rr + r^2\right]h \text{ ഘ.മാ}$$

$$= \frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times\left[28^2 + (28\times 7) + 7^2\right]\times 45$$

$$= \frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times 1029\times 45 = 48510$$

സമവൃത്താകാര വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം 48510 സെ.മീ.$^3$



7 Mensuration Malayalam.indd 289 20/01/2023 19:05:35

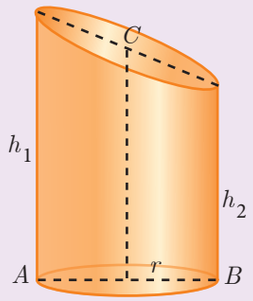
നിങ്ങൾക്ക് അറിയാമോ?

ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നത്. തിര്യക് സിലിണ്ടറാണ്. $AB$ യ്ക്കു സമാന്തര മല്ലാത്ത രീതിയിൽ ഘനരൂപം $C$ യിൽ കൂടിവെട്ടിയെടുക്കുകയാണെങ്കിൽ

വക്രതലവിസ്തീർണ്ണം $= 2\pi r \times \frac{h_1 + h_2}{2}$ ച.മാ

ഇവിടെ $h_1$, $h_2$ എന്നത് വൃത്തസ്തൂപികാ പീഠത്തിന്റെ കൂടിയ ഉയരവും കുറഞ്ഞ ഉയരവും ആണ്.

വ്യാപ്തം $= \pi r^2 \times \frac{h_1 + h_2}{2}$ ഘ.മാ



ചിത്രം. 7.36

## അഭ്യാസം 7.2

1. 10 മീ. ആന്തരവ്യാസവും 14 മീ. ആഴവുമുള്ള ഒരു കിണർ കുഴിച്ചെടുത്ത് മണ്ണ് കൂമ്പാര ആകൃതിയിൽ തട്ടുന്നു. മണൽക്കൂമ്പാരത്തിന്റെ വീതി 5 മീ. എങ്കിൽ ഉയരം കാണുക.

2. 20 സെ.മീ. വ്യാസവും 9 സെ.മീ. ഉയരവുമുള്ള ഒരു സിലിണ്ടർആകൃതിയിലുള്ള ഗ്ലാസ്സ് നിറയെ ജലം നിറച്ചിരിക്കുന്നു. 5 സെ.മീ. വ്യാസാർദ്ധവും 4 സെ.മീ.. ഉയരവുമുള്ള ചെറിയ സിലിണ്ടർആകൃതിയിലുള്ള ലോഹം ഗ്ലാസ്സിലെ ജലത്തിൽ പൂർണ്ണമായും മുങ്ങിയിരിക്കത്തക്കവണ്ണം വയ്ക്കുന്നു. ഗ്ലാസ്സിൽ നിന്ന് പുറത്തേയ്ക്ക് ഒഴുകിയ ജലത്തിന്റെ അളവ് കാണുക?

3. വൃത്തസ്തൂപികാകൃതിയിലുള്ള ഒരു മരക്ഷണത്തിന്റെ ആധാരചുറ്റളവ് 484 സെ.മീ.. അതിന്റെ ഉയരം 105 സെ.മീ.. എങ്കിൽ അതിന്റെ വ്യാപ്തം കാണുക.

4. ഒരു വൃത്തസ്തൂപികാകൃതിയിലുള്ള ടാങ്ക് നിറയെ പെട്രോൾ നിറച്ചിരിക്കുന്നു. അതിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം 10 മീ. ഉം ഉയരം 15 മീ ഉം ആകുന്നു. ടാങ്കിന്റെ കീഴ് ഭാഗത്ത് നിന്ന് 1 മിനിട്ടിൽ 25 ഘന.സെ.മീ.. എന്ന അളവിൽ പെട്രോൾ പുറത്തേക്ക് ഒഴുകുന്നു. ടാങ്കിലെ പെട്രോൾ മുഴുവ നും തീരുന്നതിന് എത്ര മിനിട്ട് വേണ്ടിവരും? നിങ്ങളുടെ ഉത്തരത്തിനെ അടുത്തുള്ള മിനിട്ടിന് ശരിയാക്കി എഴുതുക.

5. 6 സെ.മീ., 8 സെ.മീ., 10 സെ.മീ.. അളവുകളുള്ള ഒരു സമകോണത്രികോണം അതിന്റെ സമകോൺ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന വശങ്ങളെ കേന്ദ്ര അക്ഷങ്ങളാക്കികൊണ്ട് രണ്ടു രീതിയിൽ ചുഴറ്റുന്നു. ഇപ്പോൾ കിട്ടുന്ന ഘനരൂപത്തിന്റെ വ്യാപ്തങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം കാണുക.

6. തുല്യപാദവും വ്യാസാർദ്ധവുമുള്ള രണ്ടു വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തങ്ങൾ യഥാക്രമം 3600 സെ.മീ, 5040 സെ.മീ. ആകുന്നു. ഉയരങ്ങളുടെ അംശബന്ധം കാണുക.

7. രണ്ടു ഗോളങ്ങളുടെ വ്യാസാർദ്ധങ്ങളുടെ അംശബന്ധം 4:7 എങ്കിൽ അവയുടെ വ്യാപ്തങ്ങളുടെ അംശബന്ധം കാണുക.

8. ഒരു ഗോളത്തിനും ഘന അർദ്ധഗോളത്തിനും തുല്യവക്രതല വിസ്തീർണ്ണമാണുള്ളത് അവയുടെ വ്യാപ്തങ്ങളുടെ അംശബന്ധം $3\sqrt{3} : 4$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

9. ചെമ്പുകൊണ്ടുണ്ടുള്ള ഗോളാകൃതിയിലുള്ള ഒരു പാത്രത്തിന്റെ ബാഹ്യവിസ്തീർണ്ണം, ആന്തര വിസ്തീർണ്ണം എന്നിവ യഥാക്രം $576\pi$ സെ.മീ.$^2$, $324\pi$ സെ.മീ.$^2$ ആണ്. ചെമ്പുപാത്രം നിർമ്മിക്കുന്നതിന് ആവശ്യമായ വസ്തുക്കളുടെ വ്യാപ്തം കാണുക.

10. സമവൃത്താകാര വത്തസ്തൂപിക പീഠാകൃതിയിലുള്ള തുറന്ന ടാങ്കിന്റെ ഉയരം 16 സെ.മീ.. അതിന്റെ താഴേ അറ്റത്തിന്റെയും മുകൾ അറ്റത്തിന്റെയും വ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ യഥാക്രമം 8 സെ.മീ.., 20 സെ.മീ.. ആകുന്നു. ഒരു ലിറ്ററിന് ₹40 വീതം ആ ടാങ്ക് നിറയെ പാൽ നിറയ്ക്കുന്നതിന് എന്ത് രൂപ ചെലവാകും.

## 7.4 മിശ്രഘനരൂപങ്ങളുടെ വ്യാപ്തവും വക്രതല വിസ്തീർണ്ണവും

ചിത്രത്തിൽ കാണുന്ന രൂപങ്ങൾ ശ്രദ്ധിക്കുക. ആ രൂപങ്ങൾ താഴെ കാണുന്ന രീതിയിലുള്ള മിശ്രഘനരൂപങ്ങളുടെ നിർവചനം നമുക്ക് തരുന്നു.



7 Mensuration Malayalam.indd 290 20/01/2023 19:05:36

ഒന്നിലധികം ഘനരൂപങ്ങൾ ഒരുമിച്ചു ചേർന്നുണ്ടാകുന്ന ഘനരൂപത്തെ മിശ്രഘനരൂപങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നു.

മിശ്രഘനരൂപങ്ങളുടെ ആശയം നമുക്ക് ഇഷ്ടപ്പെടുന്ന രീതിയിൽ പാവകൾ ഉണ്ടാക്കുന്നതിനും കെട്ടിടം നിർമ്മിക്കുന്നതിനും, മരയോലകൾ ചെയ്യുന്നതിനും സഹായകമായിരിക്കും.

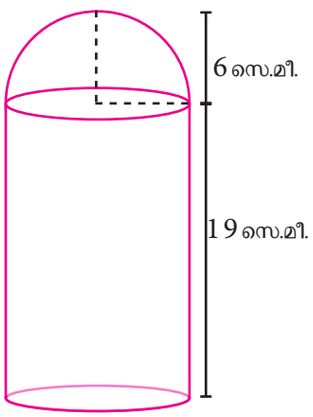


ചിത്രം. 7.37

മിശ്രഘനരൂപങ്ങളുടെ പ്രതല വിസ്തീർണ്ണം കാണുന്നതിന്, നമുക്ക് കാണാൻ കഴിയുന്ന അളവിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കണക്കുകൂട്ടിയാൽ മതിയാവുന്നതാണ്. ഉദാഹരണത്തിന്, അർദ്ധഗോളത്തിനുമുകളിൽ വൃത്തസ്തൂപിക ഘടിപ്പിച്ച മാതൃക, അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ പ്രതലവിസ്തീർണ്ണവും വൃത്തസ്തൂപികയുടെ പ്രതലവിസ്തീർണ്ണവും വെവ്വേറെ കണ്ടുപിടിച്ച് അവയെ കൂട്ടിയാൽ മതിയാവുന്നതാണ്. ഇവിടെ ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടത്, വൃത്തസ്തൂപിക, അർദ്ധഗോളം ഇവ രണ്ടിന്റേയും പാദവിസ്തീർണ്ണം നാം ഒഴിവാക്കിയിരിക്കുന്നു. ഇവ രണ്ടിന്റേയും പാദവിസ്തീർണ്ണം കാണാൻ കഴിയാത്തവിധം ഒരുമിച്ചാണുള്ളത്.

എന്നാൽ മിശ്രഘനരൂപത്തിന്റെ വ്യാപ്തം ഒരുമിച്ച് ചേർന്നിരിക്കുന്ന ഘനരൂപങ്ങളുടെ വ്യാപ്തങ്ങളുടെ തുകയാണ്.

**ഉദാഹരണം 7.24** ഒരു കളിപ്പാട്ടം സിലിണ്ടറിനുമുകളിൽ അർദ്ധഗോളം കമിഴ്ത്തിയ ആകൃതിയിലാണ്. കളിപ്പാട്ടത്തിന്റെ ഉയരം 25 സെ.മീ.. അതിന്റെ പൊതുവായ വ്യാസം 12 സെ.മീ.. എങ്കിൽ ആകെ ഉപരിതലവിസ്തീർണ്ണം കാണുക.



ചിത്രം. 7.38

**നിർദ്ധാരണം** $r$, $h$എന്നിവ സിലിണ്ടറിന്റെ ആധാരം, ഉയരം എന്നിരിക്കട്ടെ.

$$\text{വ്യാസം } d = 12 \text{ സെ.മീ.., വ്യാസാർദ്ധം } r = 6 \text{ സെ.മീ.}$$

ആകെ ഉയരം 25 സെ.മീ.

$$\text{സിലിണ്ടർ ഭാഗത്തിന്റെ ഉയരം } = 25 - 6 = 19 \text{ സെ.മീ.}$$

കളിപ്പാട്ടത്തിന്റെ ആകെ ഉപരിതലവിസ്തീർണ്ണം = സിലിണ്ടറിന്റെ പ്രതലവിസ്തീർണ്ണം + അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ പ്രതലവിസ്തീർണ്ണം + സിലിണ്ടറിന്റെ പാദവിസ്തീർണ്ണം

$$= 2\pi rh + 2\pi r^2 + \pi r^2$$

$$= \pi r(2h + 3r) \text{ ച.മാ.}$$

$$= \frac{22}{7} \times 6 \times (38 + 18)$$

$$= \frac{22}{7} \times 6 \times 56 = 1056$$

കളിപ്പാട്ടത്തിന്റെ ആകെ ഉപരിതലവിസ്തീർണ്ണം 1056 സെ.മീ.$^2$

**ഉദാഹരണം 7.25** ഒരു ആഭരണപ്പെട്ടി ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നതുപോലെ 30 സെ.മീ. × 15 സെ.മീ. × 10 സെ.മീ..അളവുകളുള്ളദീർഘചതുരഘനാകൃതിയിലുള്ളപ്പെട്ടി സിലിണ്ടറിന്റെ പകുതിഭാഗത്ത് ഘടിപ്പിച്ച ആകൃതിയിലാണ്. അതിന്റെ വ്യാപ്തം കാണുക.



ചിത്രം. 7.39

**നിർദ്ധാരണം** ദീർഘചതുര ഘനികയുടെ നീളം $l$, വീതി $b$ ഉയരം $h$ എന്നിരിക്കട്ടെ. സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം $r_1$ ഉയരം $h_2$ എന്നിരിക്കട്ടെ.



7 Mensuration Malayalam.indd 291 20/01/2023 19:05:37

പെട്ടിയുടെ വ്യാപ്തം = ദീർഘചതുര ഘനികയുടെ വ്യാപ്തം + $\frac{1}{2}$ (സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാപ്തം)

$$= (l \times b \times h_1) + \frac{1}{2}(\pi r^2 h_2) \text{ ഘ.മാ}$$

$$= \left(30 \times 15 \times 10\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{22}{7} \times \frac{15}{2} \times \frac{15}{2} \times 30\right)$$

$$= 4500 + 2651.79 = 7151.79$$

പെട്ടിയുടെ വ്യാപ്തം = 7151.79 സെ.മീ$^3$

**ഉദാഹരണം 7.26** അരുൾ തന്റെ കുടുംബവിശേഷത്തിനായി 150 പേർക്ക് തങ്ങാനുള്ള സൗകര്യം ചെയ്യാൻ തീരുമാനിച്ചു. ഇതിലേക്ക് സിലിണ്ടറിനുമുകളിൽ വൃത്തസ്തൂപിക ആകൃതിയിൽ ഒരു കൂടാരം നിർമ്മിക്കാൻ തീരുമാനിച്ചു. ഓരോരുത്തർക്കും 4 ച.മീ. തറനിരപ്പിലും തറനിരപ്പിനുമുകളിൽ 40 ഘ.മീ. ശ്വസനത്തിനായി വേണ്ടിവരുന്നു. സിലിണ്ടർ ഭാഗത്തിന്റെ ഉയരം 8 മീ. എങ്കിൽ കൂടാരത്തിലെ വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ ഉയരം കാണുക?

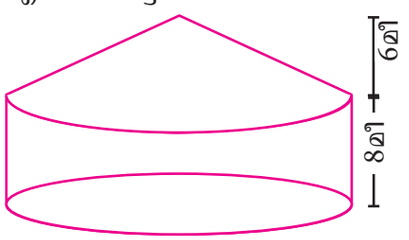
**നിർദ്ധാരണം** സിലിണ്ടറിന്റെ ഉയരം $h_1$ വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ഉയരം $h_2$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

ഒരാൾക്ക് ആവശ്യമായ സ്ഥലം = 4 ച.മാ

ആകെ ആളുകൾ = 150

ആകെ പാദവിസ്തീർണ്ണം = $150 \times 4$

$\pi r^2$ = 600




ചിത്രം. 7.40

ഒരാൾ സ്വീകരിക്കുന്ന വായുവിന്റെ വ്യാപ്തം = 40 മീ$^3$

150 പേർ സ്വീകരിക്കുന്ന വായുവിന്റെ വ്യാപ്തം= $150 \times 40 = 6000$ മീ$^3$

$$\pi r^2 h_1 + \frac{1}{3}\pi r^2 h_2 = 6000$$

$$\pi r^2 \left(h_1 + \frac{1}{3} h_2\right) = 6000$$

$$\left(8 + \frac{1}{3} h_2\right) = 6000$$

$$8 + \frac{1}{3} h_2 = \frac{6000}{600}$$

$$\frac{1}{3} h_2 = 10 - 8 = 2$$

വൃത്തസ്തൂപികാകൃതിയിലുള്ള കൂടാരത്തിന്റെ ഉയരം $h_2$ = 6 മീ

**ഉദാഹരണം 7.27** ഒരു ചോർപ്പിന്റെ വൃത്തസ്തൂപികാ പീഠാകൃതിയുടെ ഭാഗത്ത് സംഘടിപ്പിച്ചിരിക്കുന്ന സിലിണ്ടർ അതിന്റെ പാദം വരെ 12 മീ. നീളം ആകുന്നു. ആകെ ഉയരം 20 സെ.മീ.. സിലിണ്ടർ ഭാഗത്തിന്റെ വ്യാസം 20 സെ.മീ.. ചോർപ്പിന്റെ മുകൾ ഭാഗത്തിന്റെ വ്യാസം 24 സെ.മീ.. ബാഹ്യപ്രതല വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.



7 Mensuration Malayalam.indd 292 20/01/2023 19:05:39

**നിർദ്ധാരണം** $R$, $r$എന്നിവ വൃത്തസ്തൂപികാപീഠത്തിന്റെ മുകൾഭാഗത്തിന്റെയും കീഴ്ഭാഗത്തിന്റെയും വ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ എന്നിരിക്കട്ടെ.

$R = 12$ സെ.മീ., $r = 6$ സെ.മീ., $h_2$ = 12 സെ.മീ.

$h_1$ = 20–12 = 8 സെ.മീ.

ചെരിവു ഉയരം $l = \sqrt{\left(R-r\right)^2 + h_1^2}$ മാത്രകൾ

$= \sqrt{36+64}$

$l$ = 10 സെ.മീ.

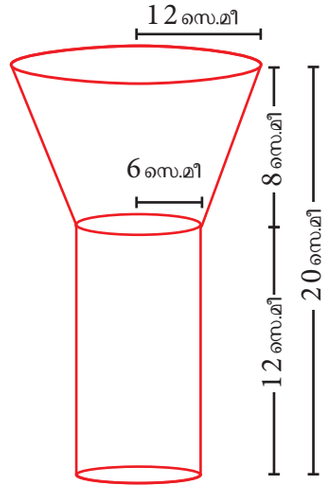
പ്രതലവിസ്തീർണ്ണം $= 2\pi r h_2 + \pi\left(R+r\right)l$ ച.മാ.

$= \pi\left[2rh_2 + \left(R+r\right)l\right]$

$= \pi\left[\left(2\times 6\times 12\right) + \left(18\times 10\right)\right]$

$= \pi\left[144+180\right]$

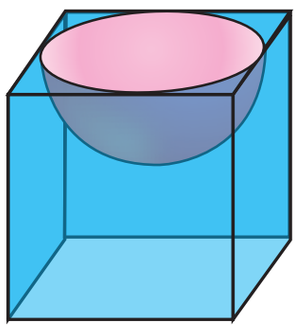
$= \frac{22}{7}\times 324 = 1018.28$



ചിത്രം. 7.41

ബാഹ്യപ്രതലവിസ്തീർണ്ണം 1018.28 സെ.മീ.$^2$

**ഉദാഹരണം 7.28** ഒരു ഘനികയുടെ മുകൾഭാഗത്തിൽ നിന്ന് അർദ്ധഗോളാകൃതിയിൽ ഒരു ഭാഗം മുറിച്ചെടുത്തിട്ടുണ്ടണ്ട്. അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ വ്യാസം ഘനികയുടെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളമാകുന്നു. ഘനികയുടെ ബാക്കി ഭാഗത്തിന്റെ പ്രതലവിസ്തീർണ്ണം കാണുക.


ചിത്രം. 7.42

**നിർദ്ധാരണം** $r$ എന്നത് അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം.

അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ വ്യാസം = ഘനികയുടെ വശം $= l$

അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം = $\frac{l}{2}$ മാത്രകൾ

ഘനികയുടെ ബാക്കി ഭാഗത്തിന്റെ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം = ഘനികയുടെ പ്രതല വിസ്തീർണ്ണം + അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം – അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ പാദവിസ്തീർണ്ണംt

$= 6\cdot\ (\text{വശം})^2 + 2\pi r^2 - \pi r^2$

$= 6\cdot\ (\text{വശം})^2 + \pi r^2$

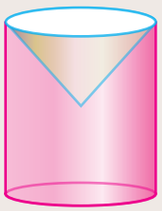
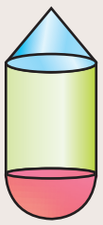
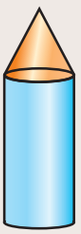
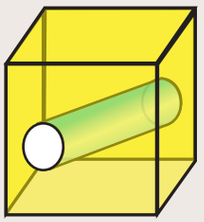
$= 6\times (l)^2 + \pi\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(24+\pi)l^2$

ഘനികയുടെ ബാക്കി ഭാഗത്തിന്റെ ആകെ ഉപരിതലവിസ്തീർണ്ണം $= \frac{1}{4}(24+\pi)l^2$ ച.മാ.



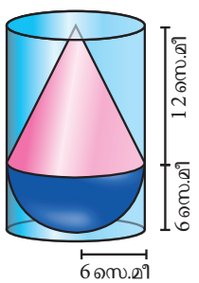
7 Mensuration Malayalam.indd 293 20/01/2023 19:05:41

## പ്രവർത്തി 4

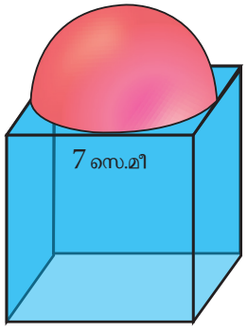
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| മിശ്രരൂപഘനികകൾ |  |  |  |  |
| മിശ്രഘനിക ഏതെല്ലാമെന്ന് വേർതിരിക്കുക | | | | |
| മിശ്രഘനികയുടെ ആകെ ഉപരിതലവിസ്തീർണ്ണം കാണുക | | | | |

## അഭ്യാസം 7.3

1. ഒരു പാത്രം പൊള്ളയായ സിലിണ്ടറിനു മുകളിൽ അർദ്ധഗോളം ഘടിപ്പിച്ച മാതൃകയിലാണ്. അതിന്റെ വ്യാസം 14 സെ.മീ.., ഉയരം 13 സെ.മീ.. അതിന്റെ കൊള്ളളവ് കാണുക.
2. ഒരു ഇൻജിനിയറിങ് വിദ്യാർത്ഥി നാഥൻ ഒരു സിലിണ്ടറിന്റെ രണ്ട് അംഗങ്ങളിലും രണ്ട് വൃത്ത സ്തൂപിക ഘടിപ്പിച്ച ആകൃതിയിലുള്ള ഒരു മാതൃക ചെയ്യാൻ തീരുമാനിച്ചു. മാതൃകയുടെ വ്യാസം 3 സെ.മീ.., അതിന്റെ നീളം 12 സെ.മീ. ഓരോ വൃത്തസ്തൂപികയുടെയും ഉയരം 2 സെ.മീ.. എങ്കിൽ നാഥൻ ചെയ്യാൻ തീരുമാനിച്ച മാതൃകയുടെ വ്യാപ്തം കാണുക.
3. 2.4 സെ.മീ. ഉയരവും വ്യാസം 1.4 സെ.മീ.. ഉം ആയ ഒരു ഘനസിലിണ്ടറിൽ നിന്ന് ഒരേ ഉയരവും വ്യാസവുമുള്ള ഒരു വൃത്തസ്തൂപിക കൊത്തിയെടുത്താൽ ബാക്കിയുള്ള ഭാഗത്തിന്റെ വ്യാപ്തം അടുത്ത സെ. മീ.$^3$ ന് ശരിയാക്കി കാണുക.
4. ചിത്രം ഒരു സമവൃത്താകാര വൃത്തസ്തൂപിക ഒരു അർദ്ധഗോളത്തിനു മുകളിൽ ഘടിപ്പിച്ച രീതിയിലാണ്. ഇതിന്റെ ഉയരം 12 സെ.മീ., വ്യാസാർദ്ധം 6 സെ.മീ. ഈ രൂപം വെള്ളം നിറച്ചു വച്ചിരിക്കുന്ന സിലിണ്ടറിന്റെ പാദം അടിഭാഗത്ത് തൊടുന്ന രീതിയിൽ പൂഴ്ത്തിവെച്ചിരിക്കുന്നു. സിലിണ്ടറിൽ നിന്ന് വെളിയേറുന്ന വെള്ളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം കാണുക. സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം 6 സെ.മീ.., ഉയരം 18 സെ.മീ..




5. ഒരു ക്യാപ്സ്യൂൾ അതിന്റെ രണ്ടഗ്രങ്ങളിലും അർദ്ധഗോളങ്ങൾ ഘടിപ്പിച്ച രീതിയിലാണ്. ക്യാപ്സൂളിന്റെ ആകെ നീളം 12 കി.മീ. അതിന്റെ വ്യാസം 3 മി.മീ. എത്ര അളവ് മരുന്ന് ക്യാപ്സ്യൂളിൽ നിറയ്ക്കാൻ കഴിയും?
6. ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നതുപോലെ വശം 7 സെ.മീ. ഉള്ള ഒരു ഘനികയുടെ മുകൾ ഭാഗം അർദ്ധഗോളം ഘടിപ്പിച്ച ആകൃതിയിലാണ്. അതിന്റെ പ്രതലവിസ്തീർണ്ണം കാണുക.




7. ഒരു സമവൃത്താകാര സിലിണ്ടർ $r$ വ്യാസാർദ്ധമുള്ള ഒരു ഗോളം കൊണ്ട് മൂടിയിരിക്കുന്നു
   (i) ഗോളത്തിന്റെ പ്രതലവിസ്തീർണ്ണം
   (ii) സിലിണ്ടറിന്റെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം
   (iii) (i) ന്റെയും (ii) യും അനുപാതം കാണുക.



7 Mensuration Malayalam.indd 294 20/01/2023 19:05:42

## 7.5 വ്യാപ്തത്തിനു മാറ്റമൊന്നും സംഭവിക്കാത്ത ഒരു രൂപത്തിൽ നിന്ന് മറ്റൊന്നിലേക്ക് ഖരവസ്തുക്കളെ മാറ്റുന്ന വിധം

പരിവർത്തനം (മാറ്റം) നമ്മുടെ ദൈനംദിനത്തിന്റെ ഒരു സാധാരണ ഭാഗമായി മാറിയിരിക്കുന്നു. ഉദാഹരണത്തിനു ഒരു സ്വർണ്ണപണിക്കാരൻ തങ്കക്കട്ടിയെ ഉരുക്കി ആഭരണമാക്കി മാറ്റിയെടുക്കുന്നു. അതുപോലെ കളിമണ്ണു കൊണ്ടു കളിക്കുന്ന കൊച്ചുകുട്ടി വിവിധതരം കളിക്കോപ്പുകൾക്ക് രൂപം നല്കുന്നു. ഒരു മരപ്പണിക്കാരൻ തടികൊണ്ട് വിവിധതരത്തിലുള്ള ഗ്രഹോപകരണങ്ങളെ സൃഷ്ടിക്കുന്നു. ആയതിനാൽ ഖരവസ്തുക്കളുടെ പരിവർത്തനം അഥവാ രൂപമാറ്റം അനവധി കാര്യങ്ങൾക്കു ഉപകാരപ്രദമാണ്.

ഈ വിഭാഗത്തിൽ നാം വ്യാപ്തത്തിനു വ്യത്യാസമില്ലാതെ ഖരവസ്തുക്കളുടെ രൂപവ്യത്യാസം സംഭവിക്കുന്നതെങ്ങനെ എന്നു പഠിക്കാം.

**ഉദാഹരണം 7.29** 16 സെ.മീ.. ചുറ്റളവുള്ള ഒരു ലോഹഗോളം ഉരുക്കി 2 സെ.മീ. വീതിയുള്ള ചെറിയ ഗോളങ്ങളാക്കി മാറ്റിയിരിക്കുന്നു. എത്രഗോളങ്ങൾ ഈ വിധത്തിൽ തയ്യാറാക്കാൻ സാധിക്കും?

**നിർദ്ധാരണം**

ഇവിടെ, $R = 16$ സെ.മീ, $r = 2$ സെ.മീ.

ഇപ്പോൾ, $n\times$ (ചെറിയഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം) $=$ വലിയ ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം

$$n\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$n\left(\frac{4}{3}\pi \times 2^3\right) = \frac{4}{3}\pi \times 16^3$$

$$8n = 4096 \ , \ \ n = 512$$

ആയതിനാൽ 512 ചെറിയ ഗോളങ്ങൾ ലഭ്യമാകും.

**ഉദാഹരണം 7.30** 24 സെ.മീ. ഉയരമുള്ള കളിമൺ നിർമ്മിത കോണിനെ (വൃത്ത സ്തൂപിക) ഒരു കുട്ടി അതേ വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ ഒരു സിലിണ്ടർ രൂപത്തിൽ ആക്കി മാറ്റുന്നു. സിലിണ്ടറിന്റെ ഉയരം കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം** വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ഉയരം $h_1$ സിലിണ്ടറിന്റെ ഉയരം $h_2$ എന്നും എടുക്കുക.

വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ഉയരം $h_1 = 24$ സെ.മീ.; വൃത്തസ്തൂപിക, സിലിണ്ടർഎന്നിവയുടെ വ്യാസാർദ്ധം $r = 6$ സെ.മീ.

വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാസാർദ്ധം = സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം

$$\pi r^2 h_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 h_1$$

$$h_2 = \frac{1}{3}\times h_1 \ , \ h_2 = \frac{1}{3}\times 24 = 8$$

ആയതിനാൽ, സിലിണ്ടറിന്റെ ഉയരം 8 സെ.മീ.

**ഉദാഹരണം 7.31** പാദ വ്യാസാർദ്ധം 6 സെ.മീ.. ഉയരം 15 സെ.മീ. ഉള്ള ഒരു സമവൃത്താകാര സിലിണ്ടറാകൃതിയിലുള്ള പാത്രത്തിൽ നിറയെ ഐസ്ക്രീം നിറച്ചിരിക്കുന്നു. 9 സെമി. ഉയരവും പാദ വ്യാസാർദ്ധം 3 സെ.മീ.. ഉം ഉള്ള അർദ്ധഗോളാകൃതിയിലുള്ള തൊപ്പിയോടുകൂടിയ വൃത്തസ്തൂപികാകൃതിയിലുള്ള(കോൺ) പാത്രത്തിലേക്ക് ഐസ്ക്രീം നിറയ്ക്കുന്നു. സിലിണ്ടറാകൃതിയിലുള്ള പാത്രത്തിലെ മുഴുവൻ ഐസ്ക്രീമും മാറ്റുന്നതിന് എത്ര കോണുകൾ വേണ്ടിവരും.

**നിർദ്ധാരണം** സിലണ്ടറിന്റെ ഉയരം $h$ ഉം വ്യാസാർദ്ധം $r$ എന്നും ഇരിക്കട്ടെ.

തന്നിട്ടുള്ളവ, $h = 15$ സെ.മീ., $r = 6$ സെ.മീ.



7 Mensuration Malayalam.indd 295 20/01/2023 19:05:43

സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാപ്തം $V = \pi r^2 h$ ഘ.മാ.

$$= \frac{22}{7} \times 6 \times 6 \times 15$$

ഇവിടെ, $r_1$ = 3 സെ.മീ., $h_1$ = 9 സെ.മീ. എന്ന വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ വ്യാസാർദ്ധവും ഉയരവും ആകുന്നു.

$r_1$ = 3 സെ.മീ. അർദ്ധഗോളാകൃതിയിലുള്ള തൊപ്പി.

ഐസ്ക്രീം കോണിന്റെ വ്യാപ്തം = (കോണിന്റെ വ്യാപ്തം + അർദ്ധഗോളാകൃതിയിലുള്ള തൊപ്പിയുടെ വ്യാപ്തം)

$$= \frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1 + \frac{2}{3}\pi r_1^3$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 3 \times 3 \times 9 + \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 3 \times 3 \times 3$$

$$= \frac{22}{7} \times 9(3+2) = \frac{22}{7} \times 45$$

$$\text{കോണുകളുടെ എണ്ണം} = \frac{\text{സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാപ്തം}}{\text{ഐസ്ക്രീം കോണിന്റെ വ്യാപ്തം}}$$

$$\text{ആവശ്യമായ ഐസ്ക്രീം കോണുകൾ} = \frac{\frac{22}{7} \times 6 \times 6 \times 15}{\frac{22}{7} \times 45} = 12$$

ആവശ്യമായ കോണുകൾ = 12

## പ്രവർത്തി 5

അടുത്തു കാണുന്ന ചിത്രത്തിൽ രണ്ടു പന്തുകൾ ഉള്ള സിലിണ്ടറിന്റെ ആകൃതിയിലുള്ള തകരപാത്രം ഉണ്ട്. രണ്ടു പന്തുകളെ മാത്രം ഉള്ളിൽ വെച്ച് അടയ്ക്കുവാൻ ഉള്ള സ്ഥലമാണ് പാത്രത്തിനുള്ളത്. പന്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം 3 സെ.മീ.. ആണെങ്കിൽ താഴെപറയുന്നവ കണക്കുകൂട്ടുക

(i) സിലിണ്ടറിന്റെ ഉയരം.

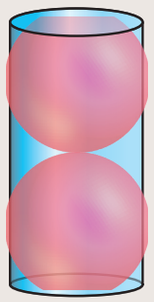
(ii) സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം.

(iii) സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാപ്തം.

(iv) രണ്ടു പന്തുകളുടെ വ്യാപ്തം.

(v) സിലിണ്ടറിൽ പന്തു ഉൾക്കൊള്ളുന്ന സ്ഥലത്തിന്റെ വ്യാപ്തം.

(vi) പന്തുകൾ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന സ്ഥലത്തിന്റെ വ്യാപ്തത്തിന്റെ ശതമാനം.



ചിത്രം. 7.43

## അഭ്യാസം 7.4

1. വ്യാസാർദ്ധം 12 സെ.മീ.. ഉള്ള ഒരു അലുമിനിയ ഗോളത്തെ ഉരുക്കി 8 സെ.മീ.. വ്യാസാർദ്ധമുള്ള സിലിണ്ടറാക്കി മാറ്റുന്നു. സിലിണ്ടറിന്റെ ഉയരം കാണുക.
2. 14 സെ.മീ.. വ്യാസമുള്ള ഒരു സിലിണ്ടറാകാരകുഴലിലൂടെ 15 കി.മീ/1 മണിക്കൂർ വേഗതയിൽ വെള്ളം ഒഴുകി 50 മീ. നീളവും 44 മീ. വീതിയുമുള്ള ദീർഘചതുര ഘനികാകൃതിയിലുള്ള ടാങ്കിൽ വീഴുന്നു. എത്ര മണിക്കൂറിൽ ടാങ്കിൽ ജലനിരപ്പ് 21 സെ.മീ.. ഉയരുന്നു.
3. ഒരു കോണിക്കൽ ഫ്ളാസ്ക്കിൽ നിറയെ ജലം നിറച്ചിരിക്കുന്നു. ഫ്ളാസ്ക്കിന്റെ ആധാര വ്യാസാർദ്ധം $r$ മാത്ര, ഉയരം $h$ മാത്ര ആധാര വ്യാസാർദ്ധം $xr$ മാത്രയുള്ള സിലിണ്ടറാകൃതിയിലുള്ള പാത്രത്തിലേക്ക് വെള്ളം ഒഴിക്കുക. സിലിണ്ടർ ഫ്ളാസ്ക്കിലുള്ള വെള്ളത്തിന്റെ ഉയരം കാണുക.



7 Mensuration Malayalam.indd 296 20/01/2023 19:05:45

4. 14 സെ.മീ.. വ്യാസവും 8 സെ.മീ.. ഉയരവുമുള്ള സമവൃത്താകാര വൃത്തസ്തൂപിക ഉരുക്കി ഒരു പൊള്ള യായ ഗോളം നിർമ്മിക്കുന്നു. ഗോളത്തിന്റെ ബാഹ്യവ്യാസം 10 സെ.മീ.. എങ്കിൽ ആന്തര വ്യാസാർദ്ധം കാണുക.

5. സീനുവിന്റെ വീടിനുമുകളിൽ സിലിണ്ടറാകൃതിയിലുള്ള ടാങ്ക് ഉണ്ട്. അതിലേക്ക് ഭൂമിയ്ക്കിടയിലെ ഘനി കാകൃതിയിലുള്ള ടാങ്കിൽ നിന്നും വെള്ളം പമ്പ് ചെയ്ത് കയറ്റുന്നു. ഭൂമിയ്ക്കടിയിലെ ടാങ്ക് 2 മീ $\times$ 1.5 മീ $\times$ 1 മീ അളവുള്ളതാകുന്നു. വീടിനു മുകളിലെ ടാങ്കിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം 60 സെ.മീ.. ഉം ഉയരം 105 സെ.മീ.. ഉം ആകുന്നു. ഭൂമിയ്ക്കടിയിലെ ടാങ്കിൽ നിന്ന് മുകളിലെ ടാങ്കിൽ മുഴുവ നായി വെള്ളം നിറഞ്ഞ ശേഷം വെള്ളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം കാണുക.

6. പൊള്ളയായ അർദ്ധഗോളാകൃതിയിലുള്ള ഒരു കട്ടയുടെ ആന്തര, ബാഹ്യവ്യാസങ്ങൾ യഥാക്രമം 6 സെ.മീ.., 10 സെ.മീ.. ആണ്. ഇവയെ ഉരുക്കി വീണ്ടും കട്ടയാക്കി (പുനഃസൃഷ്ടിച്ച്) സിലിണ്ടറാക്കി മാറ്റു ന്നു. അതിന്റെ വ്യാസം 14 സെ.മീ. എങ്കിൽ സിലിണ്ടറിന്റെ ഉയരം കാണുക.

7. 6 സെ.മീ.. വ്യാസാർദ്ധമുള്ള ഒരു ഘനഗോളം ഉരുക്കി അതേ ഭാരത്തിലുള്ള പൊള്ളയായ സിലിണ്ടറാക്കി മാറ്റുന്നു. സിലിണ്ടറിന്റെ ബാഹ്യപാദവ്യാസാർദ്ധം 5 സെ.മീ.., ഉയരം 32 സെ.മീ.. എങ്കിൽ സിലിണ്ടറിന്റെ കനം കാണുക.

8. അർദ്ധഗോളാകൃതിയിലുള്ള പാത്രത്തിൽ നിറയെ ജ്യൂസ് നിറച്ചിരിക്കുന്നു. ഉയരത്തെക്കാൾ 50% അധികം വ്യാസാർദ്ധമുള്ള സിലിണ്ടർ പാത്രത്തിലേക്ക് ജ്യൂസ് ഒഴിക്കുന്നു. ഗോളാകൃതിയിലുള്ള പാത്രത്തിനും സിലിണ്ടറിനും ഒരേ വ്യാസമാണുള്ളതെങ്കിൽ ഗോളാകൃതിയിലുള്ള പാത്രത്തിൽ നിന്ന് സിലിണ്ടറാകൃതി യിലുള്ള പാത്രത്തിലേക്ക് മാറ്റിയ ജ്യൂസിന്റെ ശതമാനംകാണുക.

## അഭ്യാസം 7.5

### ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുത്ത് എഴുതുക

1. സമവൃത്താകാര വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ഉയരം 15 സെ.മീ.., ആധാരവ്യാസം 16 സെ.മീ.. എങ്കിൽ വക്രതലവിസ്തീർണ്ണം

(A) $60\pi$ സെ.മീ.$^2$ B) $68\pi$ സെ.മീ. $^2$ (C) $120\pi$ സെ.മീ$^2$ (D) $136\pi$ സെ.മീ. $^2$

2. ഒരേ ആധാര വ്യാസാർദ്ധമുള്ള രണ്ട് ഘനഅർദ്ധഗോളങ്ങളെ അവയുടെ ആധാരങ്ങളെയോജിപ്പിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന പുതിയ ഘനരൂപത്തിന്റെ പ്രതലവിസ്തീർണ്ണം

(A) $4\pi r^2$ ച.മാ. (B) $6\pi r^2$ ച.മാ. (C) $3\pi r^2$ ച.മാ. (D) $8\pi r^2$ ച.മാ.

3. സമവൃത്താകാര വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ വ്യാസാർദ്ധം 5 സെ.മീ.., ഉയരം 13 സെ.മീ.. എങ്കിൽ ഉയരം

(A) 12 സെ.മീ (B) 10 സെ.മീ (C) 13 സെ.മീ (D) 5 സെ.മീ

4. സമവൃത്താകാര സിലിണ്ടറിന്റെ പാദവ്യാസാർദ്ധം അതിന്റെ ഉയരത്തിന്റെ പകുതിയാക്കി മാറ്റിയാൽ വ്യാപ്തങ്ങളുടെ അംശബന്ധം

(A) 1:2 (B) 1:4 (C) 1:6 (D) 1:8

5. ഒരുസിലിണ്ടറിന്റെവ്യാസാർദ്ധംഉയരത്തിന്റെമൂന്നിൽഒരുഭാഗമെങ്കിൽആകെഉപരിതലവിസ്തീർണ്ണം

(A) $\frac{9\pi h^2}{8}$ ച.മാ (B) $24\pi h^2$ ച.മാ (C) $\frac{8\pi h^2}{9}$ ച.മാ (D) $\frac{56\pi h^2}{9}$ ച.മാ

6. പൊള്ളയായ സിലിണ്ടറിന്റെ ബാഹ്യ, ആന്തര, വ്യാസാർദ്ധങ്ങളുടെ തുക 14 സെ.മീ., അതിന്റെ വീതി 4 സെ.മീ.., ഉയരം 20 സെ.മീ., സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാപ്തം

(A) $5600\pi$ സെ.മീ$^3$ (B) $112011200\pi$ സെ.മീ$^3$ (C) $56\pi$ സെ.മീ$^3$ (D) $3600\pi$ സെ.മീ$^3$



7 Mensuration Malayalam.indd 297 20/01/2023 19:05:46

7. വൃത്തസ്തൂപികയുടെ പാദവ്യാസാർദ്ധം 3 മടങ്ങും ഉയരം 2 മടങ്ങും അധികമായാൽ വ്യാപ്തം
(A) 6മടങ്ങ് അധികമാകും (B)18 മടങ്ങ് അധികമാകും (C) 12 മടങ്ങ് അധികമാകും (D) മാറ്റമൊന്നുമില്ല

8. അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ ആകെ ഉപരിതലവസ്തീർണ്ണം വ്യാസാർദ്ധത്തിന്റെ വർഗ്ഗത്തിന്റെ എത്ര മടങ്ങാണ്.
(A) $\pi$ (B) $4\pi$ (C) $3\pi$ (D) $2\pi$

9. $x$ സെ.മീ.. വ്യാസാർദ്ധമുള്ള ഒരു ഘനഗോളത്തെ ഉരുക്കി വീണ്ടും വൃത്തസ്തൂപികാകൃതിയിൽ മാറ്റുന്നു. ഇവയുടെ വ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ തുല്യമായാൽ ഉയരം
(A) $3x$ സെ.മീ (B) $x$ സെ.മീ (C) $4x$ സെ.മീ (D) $2x$ സെ.മീ

10. വൃത്തസ്തൂപികാ പീഠാകൃതിയിലുള്ള വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ ഉയരം 16 സെ.മീ.. അതിന്റെ വ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ യഥാക്രമം 8 സെ.മീ., 20 സെ.മീ.. എങ്കിൽ വ്യാപ്തം
(A) $3328\pi$ സെ.മീ$^3$ (B) $3228\pi$ സെ.മീ$^3$ (C) $3240\pi$ സെ.മീ$^3$ (D) $3340\pi$ സെ.മീ$^3$

11. ബാഡ്മിന്റൻ കളിക്കാൻ ഉപയോഗിക്കുന്ന ഇവയുടെ സംയോജനമാണ്
(A) ഒരു സിലിണ്ടറും കൂടാതെ ഒരു ഗോളവും
(B) ഒരു അർദ്ധഗോളവും കൂടാതെ ഒരു വൃത്തസ്തൂപികയും
(C) ഒരു ഗോളവും കൂടാതെ ഒരു വൃത്തസ്തൂപികയും
(D) ഒരു വൃത്തസ്തൂപീകാപീഠവും കൂടാതെ ഒരു അർദ്ധഗോളവും

12. ഗോളാകൃതിയിലുള്ള പന്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം $r$ മാത്ര, അതു ഉരുക്കി 8 പുതിയ തരത്തിലുള്ള പന്തുകൾ ഉണ്ടാക്കുന്നു. അവയുടെ ഓരോന്നിന്റെയും വ്യാസാർദ്ധം $r_2$ എങ്കിൽ $r_1$: $r_2$ എന്നത്.
(A) 2:1 (B) 1:2 (C) 4:1 (D) 1:4

13. 1 സെ.മീ.. വ്യാസാർദ്ധവും ഉയരം 5 സെ.മീ.. ഉം ആയ സിലിണ്ടറാകൃതിയിലുള്ള മരക്കഷണങ്ങൾ കൊണ്ടുണ്ടണ്ടാക്കിയ വലിയ ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം
(A) $\frac{4}{3}\pi$ (B) $\frac{10}{3}\pi$ (C) $5\pi$ (D) $\frac{20}{3}\pi$

14. സമവൃത്താകാര വൃത്തസ്തൂപീകാപീഠത്തിന്റെ ഉയരവും വ്യാസാർദ്ധവും $h_1$, $r_1$ ആകുന്നു. വൃത്തസ്തൂപികാ പീഠത്തിന്റെ $h_2$, $r_2$, $h_1 : 1 : 2_2 = 1 : 2$ എങ്കിൽ $r_2 : r_1$
(A) 1 : 3 (B) 1 : 2 (C) 2 : 1 (D) 3 : 1

15. സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാപ്തം, സ്തൂപിക, ഗോളം എന്നിവയുടെ വ്യാപ്തത്തിന്റെ അംശബന്ധം കാണുക. ഓരോന്നിന്റെ വ്യാസവും ഉയരവും സമം
(A) 1:2:3 (B) 2:1:3 (C) 1:3:2 (D) 3:1:2

## യൂണിറ്റ് അഭ്യാസം - 7



1. സിലിണ്ടറാകൃതിയിലുള്ള മഷി നിറയ്ക്കുന്ന വലിയ പേനയുടെ നീളം 7 സെ.മീ.. വ്യാസം 5 മി.മീ. ഒരു പേന മഷി ഏകദേശം 330 പദങ്ങൾ എഴുതാൻ സാധിക്കുമെങ്കിൽ 1/5 ലിറ്റർ മഷികൊണ്ട് എത്ര പദങ്ങൾ എഴുതാൻ സാധിക്കും?

2. 1.75 മി. വ്യാസാർദ്ധമുള്ള അർദ്ധഗോളാകൃതിയിലുള്ള പാത്രത്തിൽ ജലം നിറച്ചിരിക്കുന്നു. ഒരു സെക്കന്റിന് 7 ലിറ്റർ എന്ന നിരക്കിൽ ഒരു പൈപ്പ് ഉപയോഗിച്ച് ടാങ്കിൽ നിന്ന് ജലം വെളിയേറ്റുന്നു. ടാങ്കിലെ ജലം മുഴുവനായി പുറത്തു കളയാൻ എത്ര സമയം വേണ്ടിവരും?

3. വ്യാസാർദ്ധം $r$ സെ.മീ. ഉള്ള ഒരു തുറന്ന ഘന അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ ഏറ്റവും കൂടിയ വ്യാപ്തം എത്രയായിരിക്കും.

4. ഒരു ഫണൽ വൃത്തസ്തൂപികാ പീഠത്തിന്റെ സിലിണ്ടർ ഭാഗത്തിൽ ഘടിപ്പിച്ച ആകൃതിയിലാണ് സിലിണ്ടണ്ടർ ഭാഗത്തിന്റെ നീളം 10 സെ.മീ. ഇതിന്റെ ആകെ ഉയരം 22 സെ.മീ. വ്യാസം 8 സെ.മീ. ഫണലിന്റെ മുകൾഭാഗത്തിന്റെ വ്യാസം 18 സെ.മീ. ഫണൽ ഉണ്ടാക്കാൻ ആവശ്യമായ തകിടിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.



7 Mensuration Malayalam.indd 298 20/01/2023 19:05:48

5. വ്യാസം 1.5 സെ.മീ., കനം 2. മി.മീ. ഉള്ള നാണയങ്ങൾ ഉരുക്കി ഒരു സമവൃത്താകാര സിലിണ്ടറാക്കി മാറ്റുന്നു. സിലിണ്ടറിന്റെ ഉയരം 10 സെ.മീ. ഉം വ്യാസം 4.5 സെ.മീ. ഉം ആണെങ്കിൽ സിലിണ്ടർ ഉണ്ടാക്കുന്നതിന് എത്ര നാണയങ്ങൾ വേണ്ടിവരും.

6. ബാഹ്യവ്യാസാർദ്ധം 4.3 സെ.മീ. ഉം ആന്തര വ്യാസാർദ്ധം 1.1 സെ.മീ.. ഉം നീളം 4 സെ.മീ. ഉം ഉള്ള പൊള്ളയായ ലോഹ സിലിണ്ടർ ഉരുക്കി വീണ്ടും 12 സെ.മീ. നീളമുള്ള ഘന സിലിണ്ടറാക്കി മാറ്റുന്നു. എങ്കിൽ അതിന്റെ വ്യാസം കാണുക.

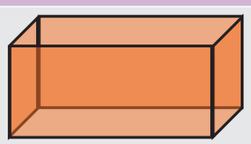
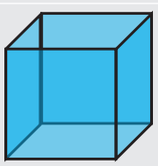
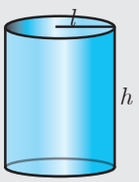
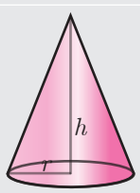
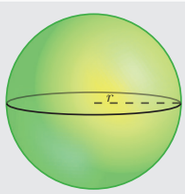
7. വൃത്തസ്തൂപികാപീഠത്തിന്റെ ചരിവു ഉയരം 4 മീ. വൃത്തഭാഗത്തിന്റെ ചുറ്റളവുകൾ 18 മീ. ഉം 16 മീ. ഉം ആകുന്നു. 1 ച.മീ.ക്ക് ₹100 രൂപ വീതം അതിന്റെ പ്രതലവിസ്തീർണ്ണത്തിന് ചായം പൂശുന്നതിന് എന്ത് ചെലവാകും.

8. പൊള്ളയായ അർദ്ധഗോളാകൃതിയിലുള്ള പാത്രത്തിന്റെ വ്യാപ്തം $1005\frac{5}{7}$ ഘ.സെ.മീ. ബാഹ്യവ്യാസം $201\frac{1}{7}$ എങ്കിൽ അതിന്റെ കനം കാണുക.

9. വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം 1005 ഘ.സെ.മീ.. പാദവിസ്തീർണ്ണം 201 ച.സെ.മീ. ചെരിവു ഉയരം കാണുക

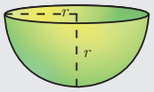
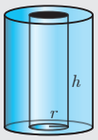
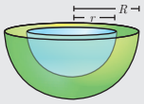
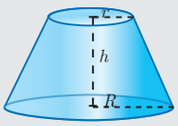
10. ലോഹതകിടുണ്ടാക്കിയ വൃത്ത ഖണ്ഡാംശത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം 21 സെ.മീ. കേന്ദ്ര കോൺ $216^0$. ഇതിന്റെ വ്യാസാർദ്ധത്തെ ചുഴറ്റി കോൺ ഉണ്ടാക്കുന്നു. കോണിന്റെ വ്യാപ്തം കാണുക.

## ഓർമ്മിക്കേണ്ടത്

| ഘനരൂപങ്ങൾ | ചിത്രം | വക്രതലവിസ്തീർണ്ണം (ച.മീറ്ററിൽ) | ആകെ ഉപരിതലവിസ്തീർണ്ണം (.ചമി.) | Volume (in cubic units) |
|---|---|---|---|---|
| ദീർഘചതുരഘനിക |  | $2h\left(l+b\right)$ | $2\left(lb+bh+lh\right)$ | $l\times b\times h$ |
| സമചതുരഘനിക |  | $4a^2$ | $6a^2$ | $a^3$ |
| സമവൃത്താകാര സിലിണ്ടർ |   | $2\pi rh$ | $2\pi r\left(h+r\right)$ | $\pi r^2h$ |
| സമവൃത്താകാര വൃത്തസ്തൂപിക |   | $\pi rl$<br>$l=\sqrt{r^2+h^2}$<br>$l=$ slant height | $\pi rl+\pi r^2$<br>$=\pi r(l+r)$ | $\frac{1}{3}\pi r^2h$ |
| ഗോളം |   | $4\pi r^2$ | $4\pi r^2$ | $\frac{4}{3}\pi r^3$ |



7 Mensuration Malayalam.indd 299 20/01/2023 19:05:50

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| അർദ്ധഗോളം |  | $2\pi r^2$ | $3\pi r^2$ | $\frac{2}{3}\pi r^3$ |
| പൊള്ളയായ സിലിണ്ടർ |  | $2\pi\left(R+r\right)h$ | $2\pi(R+r)$ $(R-r+h)$ | $\pi\left(R^2-r^2\right)h$ |
| പൊള്ളയായ ഗോളം<br>പ്രതല വിസ്തീർണ്ണം |  | $4\pi R^2$ = outer surface area | $4\pi\left(R^2+r^2\right)$ | $\frac{4}{3}\pi\left(R^3-r^3\right)$ |
| പൊള്ളയായ അർദ്ധഗോളം |  | $2\pi\left(R^2+r^2\right)$ | $\pi\left(3R^2+r^2\right)$ | $\frac{2}{3}\pi\left(R^3-r^3\right)$ |
| സമവൃത്താകാര വൃത്തസ്തൂപികാ പീഠം. |  | $\pi\left(R+r\right)l$ where $l=\sqrt{h^2+\left(R-r\right)^2}$ | $\pi(R+r)l+\pi R^2$ $+\pi r^2$ | $\frac{1}{3}\pi h\left[R^2+r^2+Rr\right]$ |

## ICT CORNER

### ICT 7.1

**ഘട്ടം 1:** Browser Open ചെയ്ത് താഴെ കാണുന്ന URL Link Type ചെയ്യുക. (അല്ലെങ്കിൽ) QR Code Scan ചെയ്യുക GeoGebra work book named "Mensuration _X" എന്നു അദ്ധ്യായം തെളിയും "Cone-Cylinder relation" എന്ന വർക്ക്ഷീറ്റ് തെരെഞ്ഞെടുക്കുക

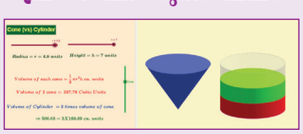
**ഘട്ടം 2:** തന്നിട്ടുള്ള വർക്ക്ഷീറ്റിൽ sliders ഇടതു കൈഭാഗത്തോട് നീക്കി വൃത്തസ്തൂപിക സിലിണ്ടർ എന്നിവയുടെ വ്യാസാർദ്ധം ഉയരം എന്നിവ കാണാവുന്നതാണ്. vertical slider ചലിപ്പിച്ച് വൃത്തസ്തൂപിക സിലിണ്ടറിൽ നിറയ്ക്കുന്നത്, 3 തവണ ഒരു സിലിറിൽ നിറയ്ക്കുക. ഒരേ വ്യാസാർദ്ധവും ഉയരവുമുള്ള മൂന്നു കോണുകൾ ഒരു സിലിണ്ടറിൽ നിറയ്ക്കുന്നത് കാണാൻ കഴിയും.

ഘട്ടം 1 | ഘട്ടം 2 | പ്രതീക്ഷിക്കുന്ന ഫലം







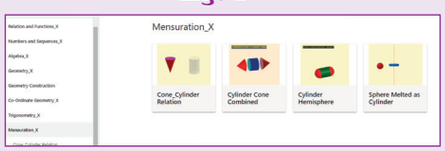


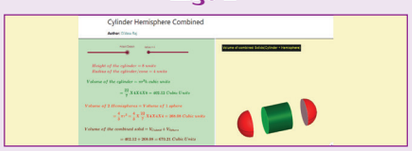
### ICT 7.2

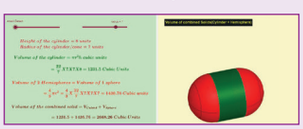
**ഘട്ടം 1:** Browser Open ചെയ്ത് താഴെ കാണുന്ന URL Link Type ചെയ്യുക. (അല്ലെങ്കിൽ) QR Code Scan ചെയ്യുക GeoGebra work book named "Mensuration _X" എന്നു അദ്ധ്യായം തെളിയും. സിലിണ്ടർ അർദ്ധഗോളം എന്ന വർക്ക് ഷീറ്റ് തെരെഞ്ഞെടുക്കുക.

**ഘട്ടം 2:** തന്നിട്ടുള്ള വർക്ക്ഷീറ്റിൽ ഇടതുകൈ വശത്തോട് സ്ലൈഡ് ചലിപ്പിച്ച് അർദ്ധഗോളം സിലിണ്ടർ എന്നിവയുടെ വ്യാസാർദ്ധം മാറ്റിയിരിക്കുന്നത് കാണാവുന്നതാണ്. സ്ലൈഡ് മാറ്റി യോജിപ്പിച്ചിട്ടുള്ളതും അല്ലാത്തതുമായ മിശ്രഘനരൂപങ്ങളെ കാണാം. അവയെ നമുക്ക് അഭിമുഖമായി തിരിച്ച് 3-D ചിത്രം കാണാവുന്നതാണ്. ഇടതുകൈ വശത്തോട് തിരിച്ച് കണക്കുകൾ ചെയ്ത് അത് ശരിനോക്കാം?

ഘട്ടം 1 | ഘട്ടം 2 | പ്രതീക്ഷിക്കുന്ന ഫലം



ഇതേ ഘട്ടം ആവർത്തിച്ച് മറ്റു കണക്കുകളും ചെയ്യാവുന്നതാണ്.

https://www.geogebra.org/m/jfr2zzgy#chapter/356197

QR Code സ്കാൻ ചെയ്യുക.

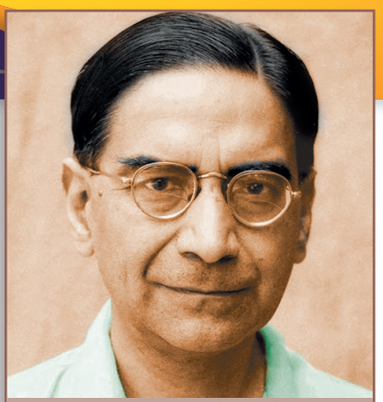


7 Mensuration Malayalam.indd 300 20/01/2023 19:05:53

# 8

# സാംഖ്യികവും സംഭാവ്യതയും

*"Life is a School of Probability" - Walter Bagehot*



**Prasanta Chandra Mahalanobis**

കൽക്കത്തയിൽ ജനിച്ച പ്രശാന്തചന്ദ്ര മഹാലാനോബിസ് എന്ന ഇന്ത്യൻ സാംഖ്യിക ശാസ്ത്രജ്ഞൻ രണ്ട് ദത്തങ്ങളെ താരതമ്യം ചെയ്യുന്നതിന് രണ്ട് സമ്പ്രദായം കണ്ടുപിടിച്ചു. അദ്ദേഹം വൻതോതിലുള്ള മാതൃകാ നിരീക്ഷണങ്ങൾ നടത്തുന്നതിന് നവീനമായ വിദ്യകൾ തുടങ്ങുകയും യാദൃശ്ചിക പരിശോധനകൾ ഉപയോഗിച്ച് വിസ്താരമുള്ള പ്രദേശങ്ങളും, വിളവെടുപ്പുകളും കണ്ടുപിടിച്ചു. അദ്ദേഹത്തിന്റെ മഹത്തായ പ്രവർത്തനത്തിന്, 1968-ൽ ഇന്ത്യൻ ഗവണ്മെന്റിന്റെ മഹനീയ പുരസ്കാരമായ പത്മ വിഭൂഷൻ പുരസ്കാരം നൽകുകയും ഇന്ത്യൻ സാംഖ്യികത്തിന്റെ പിതാവ് എന്ന പദവി നൽകി ആദരിക്കുകയും ചെയ്തു. ഓരോ വർഷവും അദ്ദേഹത്തിന്റെ പിറന്നാൾ ദിനമായ ജൂൺ 29 നെ ദേശീയ സാംഖിക ദിനമായി പ്രഖ്യാപിച്ചു.

## പഠന ഫലങ്ങൾ

- കേന്ദ്ര പ്രവണതയുടെ അളവുകളെ ഓർമ്മിക്കൽ.
- തരം തിരിച്ചതും തരം തിരിക്കാത്തതുമായ വിവരങ്ങളുടെ മാധ്യം ഓർമ്മിക്കൽ.
- വ്യതിയാനം എന്ന ആശയത്തെ മനസ്സിലാക്കൽ.
- പരിസരം, പ്രമാണ വിചലനം, വർഗ്ഗശരാശരി വ്യതിയാന വർഗ്ഗശരാശരി എന്നിവ മനസ്സിലാക്കുന്നതും കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിനും.
- യാദൃശ്ചിക പരീക്ഷണങ്ങൾ, സാമ്പിൾ സ്പേസ്, വൃക്ഷചിത്രങ്ങൾ എന്നിവ മനസ്സിലാക്കൽ.
- യാദൃശ്ചിക പരീക്ഷണത്തിന്റെ വിവിധതരം സംഭവങ്ങളെ നിർവചിക്കലും, വിശദീകരിക്കലും.
- സംഭാവ്യതയുടെ സങ്കലന സിദ്ധാന്തം മനസ്സിലാക്കുകയും അതുപയോഗിച്ച് വിവിധതരം കണക്കുകൾ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യൽ.

## 8.1 ആമുഖം

രാഷ്ട്രീയ അവസ്ഥയെ അർത്ഥമാക്കുന്ന ലാറ്റിൻ പദമായ 'status' എന്ന വാക്കിൽ നിന്നാണ് 'STATISTICS' എന്ന പദം ഉത്ഭവിച്ചത്. ഇന്ന് നമ്മുടെ ഭാവിയുടെ രൂപരേഖ തയ്യാറാക്കുന്നതിനും, വ്യവസായം ചെയ്യുന്നതിനും, വിപണനഗവേഷണം നടത്തുന്നതിനും, സാമ്പത്തിക റിപ്പോർട്ടുകൾ തയ്യാറാക്കുന്നതിനും ഒരാളുടെ ജീവിതത്തിൽ സാംഖികം പ്രധാന പങ്ക് വഹിക്കുന്നു. അഭിപ്രായ വോട്ടെടുപ്പിലും വിപുലമായ ഗവേഷണങ്ങൾ നടത്തുന്നതിനും ഇത് ഉപയോഗപ്പെടുത്തുന്നു. സാംഖ്യിക പഠനം, വിവരങ്ങളുടെ ശേഖരിക്കൽ, സംഘടിപ്പിക്കൽ, ലഘൂകരിക്കൽ, അവതരിപ്പിക്കൽ, താരതമ്യം ചെയ്യൽ, അർത്ഥവത്തായ തീരുമാനങ്ങൾ എടുക്കൽ എന്നിവ ഉൾപ്പെട്ടതാണ്. താഴ്ന്ന ക്ലാസ്സുകളിൽ നാം വിവരങ്ങളെ ശേഖരിക്കുന്നതിനും പട്ടികരീതിയിലും, ഗ്രാഫ് മുഖേനെയും അവതരിപ്പിക്കുന്നതിനും, കേന്ദ്ര പ്രവണതയുടെ അളവുകൾ കണക്കാക്കുന്നതിനും പഠിച്ചു കഴിഞ്ഞു. വ്യതിയാന വ്യാപ്തിയുടെ അളവുകൾ കണക്കാക്കുന്നതിന് ഈ ക്ലാസ്സിൽ പഠിക്കാം.



8 Stats Malayalam.indd 301 10/02/2023 11:59:05

## ഓർമ്മിക്കൽ

### കേന്ദ്ര പ്രവണതയുടെ അളവുകൾ

മുഴുവൻ വിവരങ്ങളെയും പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നതിന് ഉപയോഗപ്രദമായ ഒരു സംഖ്യ. അത്തരത്തിലുള്ള സംഖ്യയാണ് കേന്ദ്രപ്രവണതയുടെ അളവ് എന്ന് പറയുന്നത്.

സാധാരണമായി കേന്ദ്രപ്രവണതയുടെ അളവുകൾ വിവരങ്ങളുടെ മധ്യഭാഗത്തിനു സമീപമായിട്ടാണ് സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നത്. തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങൾക്ക് ധാരാളം കേന്ദ്ര പ്രവണതാ അളവുകൾ ഉണ്ട്.

അവയിൽ പ്രധാനപ്പെട്ടത് താഴെ പറയുന്നവയാണ്.

- സമാന്തരമാധ്യം
- മീഡിയൻ
- മോഡ്

**ചിന്തിയ്ക്കുക**

1. തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങൾക്ക് സമാന്തര മാധ്യം മീഡിയൻ, മോഡ് എന്നിവ സമമാണോ?
2. സമാന്തര മാധ്യത്തിനും ശരാശരിയ്ക്കും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം എന്ത്?

**കുറിപ്പ്**

- വിവരം (ദത്തം) : വസ്തുതകളെ സംഖ്യാ രൂപേണ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നതിനെയാണ് വിവരം എന്നു പറയുന്നത്.
- നിരീക്ഷണം : വിവരങ്ങളിലെ ഓരോ അവതരണത്തിനെയും നിരീക്ഷണം എന്നു പറയുന്നു.
- ചരം : ഒരു പരിശോധനയിൽ ഉപയോഗിക്കുന്ന അളവുകളെ ചരങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നു. ചരങ്ങളെ $x_i$, $i=1,2,3,\ldots,n$. എന്നിങ്ങനെയാണ് സാധാരണയായി സൂചിപ്പിക്കുന്നത്
- ആവൃത്തികൾ : ഒരു വിധത്തിൽ ഒരു ചരം എത്രപ്രാവശ്യം ആവർത്തിക്കുന്നു എന്നതിനെയാണ് ആ ചരത്തിന്റെ ആവൃത്തി എന്നു പറയുന്നത്. ആവൃത്തികളെ സാധാരണയായി $f_i$, $i=1,2,3,\ldots,n$. എന്നു സൂചിപ്പിക്കുന്നു

ഈ ക്ലാസ്സിൽ സമാന്തരമാധ്യത്തെ കുറിച്ച് വീണ്ടും പഠിക്കാം..

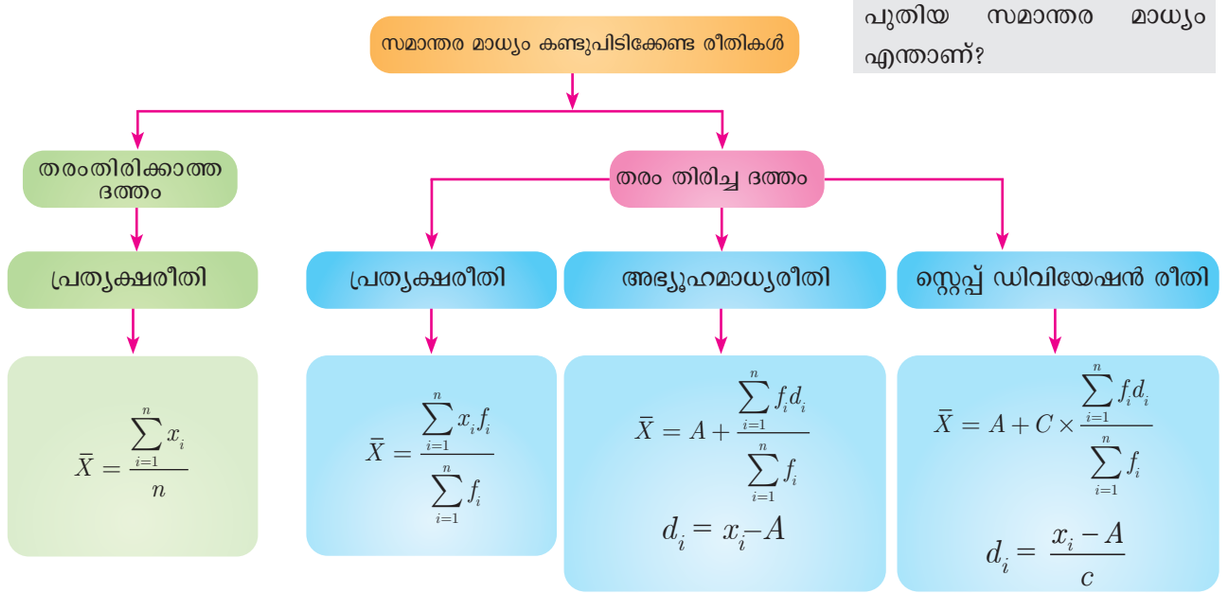
### സമാന്തരമാധ്യം

സമാന്തരമാധ്യം എന്നത് എല്ലാ നിരീക്ഷണങ്ങളുടെ തുകയ്ക്കും അവയുടെ എണ്ണങ്ങൾക്കും തമ്മിലുള്ള അനുപാതമാണ്. ഇതിനെ $\bar{x}$ എന്നു സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ($x$ ബാർ എന്നു വായിക്കുന്നു)

$$\bar{x} = \frac{\text{എല്ലാ നിരീക്ഷണങ്ങളുടെയും തുക}}{\text{നിരീക്ഷണങ്ങളുടെ എണ്ണം}}$$

**ചിന്തിയ്ക്കുക**

$n$ നിരീക്ഷണങ്ങളുടെ സമാന്തര മാധ്യം $\bar{x}$ , എങ്കിൽ ആദ്യ പദത്തിനോട് 1ഉം രണ്ടാം പദത്തിനോടു 2ഉം എന്ന ക്രമത്തിൽ കൂട്ടുകയാണെങ്കിൽ പുതിയ സമാന്തര മാധ്യം എന്താണ്?




കണക്കിൽ തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളെ അടിസ്ഥാനമാക്കി യോജിച്ച സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിക്കാവുന്നതാണ്.



8 Stats Malayalam.indd 302 10/02/2023 11:59:07

## പുരോഗതി പരിശോധന

1. എല്ലാ നിരീക്ഷണങ്ങളുടെ തുകയ്ക്കും അവയുടെ എണ്ണങ്ങൾക്കും തമ്മിലുള്ള അനുപാതത്തിനെ _____ എന്നു പറയുന്നു.
2. ഒരു വിവരത്തിലെ 10 മൂല്യങ്ങളുടെ തുക 265 ആണെങ്കിൽ അവയുടെ സമാന്തര മാധ്യം _____ ആകുന്നു.
3. ഒരു വിവരത്തിലെ തുകയും സമാന്തരമാധ്യവും യഥാക്രമം 407, 11 ആണെങ്കിൽ നിരീക്ഷണങ്ങളുടെ എണ്ണം _____ ആകുന്നു.

## 8.2 വ്യതിയാന വ്യാപ്തിയുടെ അളവുകൾ

അവസാന 10 കളികളിൽ 2 ബാറ്റ്സ്മാന്മാർ നേടിയ ഓട്ടങ്ങൾ താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

ബാറ്റ്സ്മാൻ A: 25, 20, 45, 93, 8, 14, 32, 87, 72, 4

ബാറ്റ്സ്മാൻ B: 33, 50, 47, 38, 45, 40, 36, 48, 37, 26

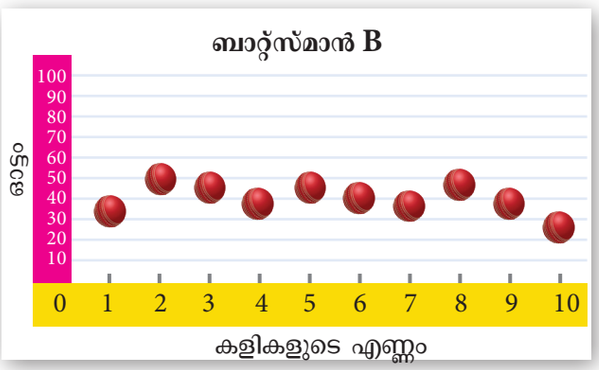
ബാറ്റ്സ്മാൻ A യുടെ സമാന്തര മാധ്യം $\frac{25+20+45+93+8+14+32+87+72+4}{10} = 40$

ബാറ്റ്സ്മാൻ B യുടെ സമാന്തര മാധ്യം $\frac{33+50+47+38+45+40+36+48+37+26}{10} = 40$

രണ്ടു വിവരങ്ങളുടെയും സമാന്തര മാധ്യം സമമാണ്, പക്ഷെ അവ ഗണ്യമായി വ്യത്യാസപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു..




ചിത്രം. 8.1(a)




ചിത്രം. 8.1(b)

ചിത്രത്തിൽ നിന്നും A യുടെയും B യുടെയും സമാന്തരമാധ്യം സമമാണെങ്കിലും ബാറ്റ്സ്മാൻ B യുടെ ഓട്ടങ്ങൾ സമാന്തര മാധ്യത്തിനു സമീപത്തായി കാണാവുന്നതാണ്. എന്നാൽ ബാറ്റ്സ്മാൻ A യുടെ ഓട്ടങ്ങൾ 0 മുതൽ 100 വരെ ചിതറിക്കിടക്കുന്നതായി കാണാം..

ഇപ്രകാരം വിവരങ്ങൾ ചിതറപ്പെടുന്നതു കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് സാംഖികതയുടെ കൂടുതൽ അറിവുകൾ ആവശ്യമായിട്ടുണ്ട്. ഇതിനായി നമുക്ക് വ്യതിയാന വ്യാപ്തിയുടെ അളവുകളെ കുറിച്ച് ചർച്ച ചെയ്യാം.

വ്യതിയാന വ്യാപ്തി എന്ന അളവ് ചിതറി കിടക്കുന്ന മൂല്യങ്ങളെ കുറിച്ച് ആശയം നൽകുന്നു..

വ്യതിയാന വ്യാപ്തിയുടെ അളവുകൾ ദത്തത്തിൽ എങ്ങനെ ചിതറിക്കിടക്കുന്നു എന്നതിനെ കുറിച്ച് ആശയം നൽകുന്നു.

### വ്യതിയാന വ്യാപ്തിയുടെ വിവിധ തരങ്ങൾ

1. പരിസരം
2. മാധ്യവിചലനം
3. ചതുർത്ഥക വിചലനം
4. പ്രമാണ വിചലനം
5. വ്യതിയാന വർഗ്ഗശരാശരി
6. വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം



8 Stats Malayalam.indd 303 10/02/2023 11:59:07

### 8.2.1 പരിസരം

ഒരുകൂട്ടം നിരീക്ഷണങ്ങളിൽ ഏറ്റവും വലിയ മൂല്യവും ഏറ്റവും ചെറിയ മൂല്യവും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസമാണ് പരിസരം .

$$\text{പരിസരം } R = L - S$$

$$\text{പരിസരത്തിന്റെ ഗുണാങ്കം} = \frac{L-S}{L+S}$$

ഇവിടെ $L$ - ഏറ്റവും വലിയ മൂല്യം; $S$ - ഏറ്റവും ചെറിയ മൂല്യം

**പുരോഗതി പരിശോധന**

ആദ്യത്തെ 10 അഭാജ്യ സംഖ്യകളുടെ പരിസരം _____

**ഉദാഹരണം 8.1** $25, 67, 48, 53, 18, 39, 44$ എന്നീ വിവരങ്ങളുടെ പരിസരവും പരിസരത്തിന്റെ ഗുണാങ്കവും കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം** ഏറ്റവും വലിയ മൂല്യം $L = 67$; ഏറ്റവും ചെറിയ മൂല്യം $S = 18$

$$\text{പരിസരം } R = L - S = 67 - 18 = 49$$

$$\text{പരിസരത്തിന്റെ ഗുണാങ്കം} = \frac{L-S}{L+S}$$

$$\text{പരിസരത്തിന്റെ ഗുണാങ്കം} = \frac{67-18}{67+18} = \frac{49}{85} = 0.576$$

**ഉദാഹരണം 8.2** താഴെ തന്നിട്ടുള്ള വിതരണത്തിന്റെ പരിസരം കാണുക.

| വയസ്സ് (വർഷങ്ങളിൽ) | 16-18 | 18-20 | 20-22 | 22-24 | 24-26 | 26-28 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| കുട്ടികളുടെ എണ്ണം | 0 | 4 | 6 | 8 | 2 | 2 |

**നിർദ്ധാരണം** ഇവിടെ ഏറ്റവും വലിയ മൂല്യം $L = 28$

ഏറ്റവും ചെറിയ മൂല്യം $S = 18$

പരിസരം $R = L - S$

$R = 28 - 18 = 10$ വർഷങ്ങൾ

**കുറിപ്പ്**

- ആദ്യവർഗ്ഗത്തിന്റെ ആവൃത്തി 0 ആയതിനാൽ അടുത്ത വർഗ്ഗത്തെ പരിഗണിക്കേണ്ടതാണ്.

**ഉദാഹരണം 8.3** വിവരങ്ങളുടെ ശേഖരണത്തിലെ പരിസരം $13.67$ ഏറ്റവും വലിയ മൂല്യം $70.08$. എങ്കിൽ ഏറ്റവും ചെറിയ മൂല്യം കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം** പരിസരം $R = 13.67$

ഏറ്റവും വലിയ മൂല്യം $L = 70.08$

പരിസരം $R = L - S$

$13.67 = 70.08 - S$

$S = 70.08 - 13.67 = 56.41$

അതുകൊണ്ട്, ഏറ്റവും ചെറിയ മൂല്യം $56.41$ ആണ്.

**കുറിപ്പ്**

- വിവരങ്ങളുടെ പരിസരം കേന്ദ്ര പ്രവണതയിൽ നിന്നുള്ള വ്യതിയാനത്തെ കുറിച്ച് വ്യക്തമായി ആശയം നൽകുന്നില്ല. ഇതിന് കേന്ദ്ര പ്രവണതയിൽ നിന്നുള്ള വ്യതിയാനത്തെ അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ള ഒരു അളവ് ആവശ്യമാണ്.

### 8.2.2 സമാന്തരമാധ്യത്തിൽ നിന്നുള്ള വ്യതിയാനം

തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളുടെ $n$ നിരീക്ഷണത്തിൽ $x_1, x_2, \ldots x_n$, എന്നിവയുടെ സമാന്തരമാധ്യം $\bar{x}$ നിന്നുള്ള വ്യതിയാനങ്ങൾ $x_1 - \bar{x},\ x_2 - \bar{x},\ \ldots,\ x_n - \bar{x}$ .

### 8.2.3 സമാന്തമാധ്യത്തിൽ നിന്നുള്ള വ്യതിയാന വർഗ്ഗം

തന്നിട്ടുള്ള നിരീക്ഷണങ്ങൾ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ എന്നിവയുടെ സമാന്തരമാധ്യം $\bar{x}$ ൽ നിന്നുള്ള വ്യതിയാ വർഗ്ഗം $(x_1 - \bar{x})^2, (x_2 - \bar{x})^2, \ldots, (x_n - \bar{x})^2$ or $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$



8 Stats Malayalam.indd 304 10/02/2023 11:59:10

**കുറിപ്പ്**

- എല്ലാ നിരീക്ഷണങ്ങൾക്കും (അതായത് $x_i,\ i = 1,2,3,\ldots,n.$ ) $\left(x_i - \overline{x}\right) \geq 0$ എന്നു മനസ്സിലാക്കാം. സമാന്തരമാധ്യത്തിൽ നിന്നുള്ള വ്യതിയാനം ചെറുതാണെങ്കിൽ വ്യതിയാനങ്ങളുടെ വർഗ്ഗം വളരെ ചെറുതും ആയിരിക്കും.$\left(x_i - \overline{x}\right)$.

### 8.2.4 വ്യതിയാന വർഗ്ഗശരാശരി

വ്യതിയാന വ്യാപ്തിയുടെ അളവ് കാണുന്നതിന്, വിവരങ്ങളുടെ ഓരോ മൂല്യത്തിൽ നിന്നും മാധ്യത്തെ കുറിച്ച് വർഗ്ഗം കണ്ട്, വർഗ്ഗങ്ങളുടെ ശരാശരി കാണേണ്ടതാണ്. ഈ വ്യതിയാന വ്യാപ്തിയുടെ അളവിനെ വ്യതിയാന വർഗ്ഗ ശരാശരി എന്നു പറയുന്നു. ഇതിനെ $\sigma^2$ എന്നു സൂചിപ്പിക്കുന്നു. (സിഗ്മ സ്കയർ എന്നു വായിക്കേണ്ടതാണ്).

**ചിന്തിയ്ക്കുക**

വ്യതിയാന വർഗ്ഗ ശരാശിര ഋണസംഖ്യ ആകുമോ?

വ്യതിയാന വർഗ്ഗ ശരാശരി = വ്യതിയാന വർഗ്ഗങ്ങളുടെ ശരാശരി

$$= \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n}$$

വ്യതിയാന വർഗ്ഗശരാശരി $\sigma^2$ $= \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}$

### 8.2.5 പ്രമാണ വിചലനം

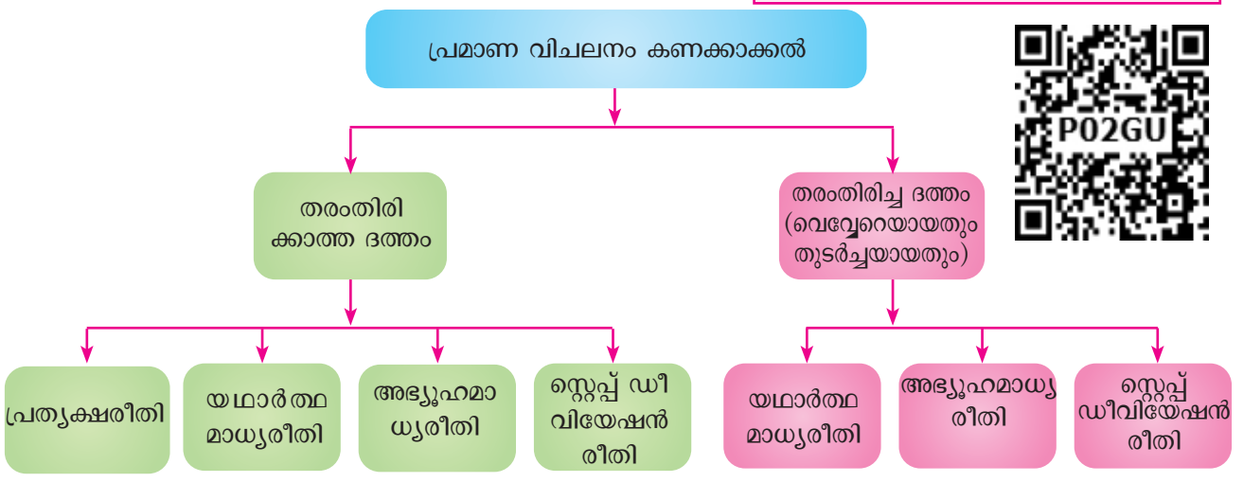
വ്യതിയാന വർഗ്ഗ ശരാശരിയുടെ ധനവർഗ്ഗമൂലത്തെ പ്രമാണ വിചലനം എന്നു പറയുന്നു. അതായത് വിവരങ്ങളുടെ ഓരോ മൂല്യത്തിൽ നിന്നും മാധ്യത്തെക്കുറിച്ച് വർഗ്ഗം കണ്ട്, വർഗ്ഗങ്ങളുടെ ശരാശരിയുടെ ധനവർഗ്ഗമൂലത്തെ പ്രമാണ വിചലനം എന്നു പറയുന്നു. ഇതിനെ $\sigma$. എന്നു കുറിക്കുന്നു.

പ്രമാണ വിചലനം, മൂല്യങ്ങൾ ശരാശരിയിൽ നിന്നും വ്യതിചലിച്ചിരിക്കുന്നതിനെ കുറിച്ച് കൃത്യമായ ആശയം നൽകുന്നു

പ്രമാണ വിചലനം $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}}$

**നിങ്ങൾക്ക് അറിയാമോ**

പ്രമാണ വിചലനം എന്ന പദം ആദ്യമായി ഉപയോഗിച്ചത് കാൾ പിയേർസൺ. ജർമ്മൻ ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞനാണ്. ഗാസ്സ് Mean error എന്ന പദമാണ് അന്ന് ഉപയോഗിച്ചത്.




P02GU

### തരം തിരിക്കാത്ത വിവരങ്ങളുടെ പ്രമാണ വിചലനം കണക്കാക്കൽ

**(i)** പ്രത്യക്ഷരീതി

പ്രമാണ വിചലനം $\sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma(x_i - \overline{x})^2}{n}}$

$= \sqrt{\dfrac{\Sigma(x_i^2 - 2x_i\overline{x} + \overline{x}^2)}{n}}$

**കുറിപ്പ്**

- തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളുടെ പ്രമാണ വിചലനത്തിനും സമാന്തരമാധ്യത്തിനും ഒരേ തോതായിരിക്കും..



8 Stats Malayalam.indd 305 10/02/2023 11:59:11

$$= \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - 2\overline{x}\,\frac{\Sigma x_i}{n} + \frac{\overline{x}^2}{n} \times \left(1+1+\cdots to\ n\ \text{times}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - 2\overline{x} \times \overline{x} + \frac{\overline{x}^2}{n} \times n} = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - 2\overline{x}^2 + \overline{x}^2} = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \overline{x}^2}$$

പ്രമാണ വിചലനം, $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2}$

**കുറിപ്പ്**

- പ്രമാണ വിചലനം കണക്കാക്കുമ്പോൾ വിവരങ്ങൾ ആരോഹണക്രമത്തിൽ ആയിരിക്കുമെന്ന് നിർബന്ധമില്ല..
- വിവരങ്ങൾ പ്രത്യക്ഷമായി തന്നിരുന്നാൽ പ്രമാണ വിചലനം കാണുന്നതിന് താഴെ തന്നിട്ടുള്ള സൂത്ര വാക്യം ഉപയോഗിക്കാം $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2}$
- വിവരങ്ങൾ പ്രത്യക്ഷമായി നൽകാതെ നിരീക്ഷണങ്ങളുടെ സമാന്തരമാധ്യത്തിൽ നിന്നുള്ള വ്യതിയാന വർഗം തന്നിരുന്നാൽ പ്രമാണ വിചലനം കാണുന്നതിന് താഴെ പറയുന്ന സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിക്കാം $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n}}$.

**ഉദാഹരണം 8.45** ഒരാഴ്ചയിലെ ഓരോ ദിവസവും വിറ്റ ടെലിവിഷനുകളുടെ എണ്ണം 13, 8, 4, 9, 7, 12, 10. എന്നിങ്ങനെയാണ്. പ്രമാണ വിചലനം കണക്കാക്കുക.

**നിർദ്ധാരണം**

| $x_i$ | $x_i^2$ |
|---|---|
| 13 | 169 |
| 8 | 64 |
| 4 | 16 |
| 9 | 81 |
| 7 | 49 |
| 12 | 144 |
| 10 | 100 |
| $\Sigma x_i = 63$ | $\Sigma x_i^2 = 623$ |

- പ്രമാണ വിചലനം

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{623}{7} - \left(\frac{63}{7}\right)^2}$$

$$= \sqrt{89 - 81} = \sqrt{8}$$

, $\sigma \simeq 2.83$

**ചിന്തിയ്ക്കുക**

പ്രമാണവിചലനം, വ്യതിയാന വർക്ഷ ശരാശരിയെക്കാൾ കൂടുതലായിരിക്കുമോ?

**പുരോഗതി പരിശോധന**

വ്യതിയാനവർക്ഷ ശരാശരി 0.49 ആണെങ്കിൽ പ്രമാണ വിചലനം _____.

### (ii) യഥാർത്ഥ മാധ്യരീതി

പ്രമാണ വിചലനം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് അനുയോജ്യമായ മറ്റൊരു സൂത്രവാക്യം താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു.

പ്രമാണ വിചലനം (യഥാർത്ഥ മാധ്യരീതി) $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \overline{x})^2}{n}}$

$d_i = x_i - \overline{x}$ ആണെങ്കിൽ $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d_i^2}{n}}$

**ഉദാഹരണം 8.5** ഒരു പ്രത്യേക കാലഘട്ടത്തിൽ 6 ദിവസം പെയ്ത മഴയുടെ അളവ് 17.8 സെ.മീ, 19.2 സെ.മീ, 16.3 സെ.മീ, 12.5 സെ.മീ, 12.8 സെ.മീ കൂടാതെ 11.4 സെ.മീ. പ്രമാണ വിചലനം കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം** സംഖ്യകളെ ആരോഹണക്രമത്തിൽ എഴുതാം 11.4, 12.5, 12.8, 16.3, 17.8, 19.2. നിരീക്ഷണങ്ങളുടെ എണ്ണം $n = 6$

$$\text{ശരാശരി} = \frac{11.4 + 12.5 + 12.8 + 16.3 + 17.8 + 19.2}{6} = \frac{90}{6} = 15$$



8 Stats Malayalam.indd 306 10/02/2023 11:59:13

| $x_i$ | $d_i = x_i - \overline{x}$ $= x - 15$ | $d_i^2$ |
|---|---|---|
| 11.4 | −3.6 | 12.96 |
| 12.5 | −2.5 | 6.25 |
| 12.8 | −2.2 | 4.84 |
| 16.3 | 1.3 | 1.69 |
| 17.8 | 2.8 | 7.84 |
| 19.2 | 4.2 | 17.64 |
| | | $\Sigma d_i^2 = 51.22$ |

പ്രമാണ വിചലനം $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d_i^2}{n}}$

$= \sqrt{\frac{51.22}{6}} = \sqrt{8.53}$

അതായത്, $\sigma \simeq 2.9$

### (iii) അഭ്യൂഹമാധ്യരീതി

ശരാശരി ഒരു പൂർണ്ണാങ്കം ഇല്ലെങ്കിൽ (ദശാംശ സംഖ്യകളെ കണക്കാക്കൽ പ്രയാസമായതിനാൽ) പ്രമാണ വിചലനം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് അഭ്യൂഹ മാധ്യരീതി ഉപയോഗിക്കുന്നതിന് കൂടുതൽ എളുപ്പമായിരിക്കും.

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ എന്നീ തന്നിട്ടുള്ള മൂല്യങ്ങളുടെ ശരാശരി $\overline{x}$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

വിവരങ്ങളുടെ മധ്യഭാഗത്തോ, അതിനടുത്തോ ഉള്ള $x_i$ യുടെ അഭ്യൂഹമാധ്യം $A$, യിൽ നിന്നുള്ള വ്യതിയാനം $d_i$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

$$d_i = x_i - A\,,\ x_i = d_i + A \qquad \ldots(1)$$

$$\Sigma d_i = \Sigma(x_i - A)$$

$$= \Sigma x_i - (A + A + A + \cdots \text{ to } n \text{ തവണ})$$

$$\Sigma d_i = \Sigma x_i - A \times n$$

$$\frac{\Sigma d_i}{n} = \frac{\Sigma x_i}{n} - A$$

$$\overline{d} = \overline{x} - A \text{ (or) } \overline{x} = \overline{d} + A \qquad \ldots(2)$$

പ്രമാണ വിചലനം

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \overline{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\Sigma(d_i + A - \overline{d} - A)^2}{n}} \qquad ((1), (2) \text{ഇവയിൽനിന്ന്})$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma(d_i - \overline{d})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\Sigma(d_i^2 - 2d_i \times \overline{d} + \overline{d}^2)}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma d_i^2}{n} - 2\overline{d}\,\frac{\Sigma d_i}{n} + \frac{\overline{d}^2}{n}\,(1 + 1 + 1 + \cdots \text{തവണ}}$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma d_i^2}{n} - 2\overline{d} \times \overline{d} + \frac{\overline{d}^2}{n} \times n} \qquad (\overline{d} \text{ ഒരു സ്ഥിരാങ്കമായതുകൊണ്ട്})$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma d_i^2}{n} - \overline{d}^2}$$

പ്രമാണ വിചലനം $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d_i}{n}\right)^2}$

**ചിന്തിക്കുക**

ഏതെങ്കിലും $n$ മൂല്യങ്ങൾക്ക്

(i) $\Sigma(x_i - \overline{x})$ (ii) $(\Sigma x_i) - \overline{x}$

കണ്ടുപിടിക്കാൻ കഴിയുമോ?



8 Stats Malayalam.indd 307 10/02/2023 11:59:17

**ഉദാഹരണം 8.6** ഒരു പരീക്ഷയിൽ 10 കുട്ടികൾക്ക് ലഭിച്ച മാർക്കുകൾ 25, 29, 30, 33, 35, 37, 38, 40, 44, 48. എന്നിങ്ങനെയാണ്. പ്രമാണ വിചലനം കണക്കാക്കുക.

**നിർദ്ധാരണം** മാർക്കുകളുടെ ശരാശരി 35.9 എന്നത് ഒരു പൂർണ്ണാങ്കമല്ല. അതുകൊണ്ട് അഭ്യൂഹമാധ്യം, $A = 35$, $n = 10$ എന്ന് പരിഗണിക്കാം.

| $x_i$ | $d_i = x_i - A$<br>$d_i = x_i - 35$ | $d_i^2$ |
|---|---|---|
| 25 | −10 | 100 |
| 29 | −6 | 36 |
| 30 | −5 | 25 |
| 33 | −2 | 4 |
| 35 | 0 | 0 |
| 37 | 2 | 4 |
| 38 | 3 | 9 |
| 40 | 5 | 25 |
| 44 | 9 | 81 |
| 48 | 13 | 169 |
| | $\Sigma d_i = 9$ | $\Sigma d_i^2 = 453$ |

പ്രമാണവിചലനം

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d_i}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{453}{10} - \left(\frac{9}{10}\right)^2}$$

$$= \sqrt{45.3 - 0.81}$$

$$= \sqrt{44.49}$$

$$\sigma \simeq 6.67$$

### (ii) സ്റ്റെപ്പ് ഡീവിയേഷൻ രീതി

തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങൾ $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ എന്നും അഭ്യൂഹമാധ്യം A എന്നും ഇരിക്കട്ടെ.

$x_i - A$ യുടെ പൊതുഘടകം $c$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

$$d_i = \frac{x_i - A}{c}$$

$$x_i = d_i c + A \qquad \ldots(1)$$

$$\Sigma x_i = \Sigma\left(d_i c + A\right) = c\,\Sigma d_i + A \times n$$

$$\frac{\Sigma x_i}{n} = c\frac{\Sigma d_i}{n} + A$$

$$\bar{x} = c\bar{d} + A \qquad \ldots(2)$$

$$x_i - \bar{x} = cd_i + A - c\bar{d} - A = c(d_i - \bar{d}) \quad ((1)\,,\,(2)\text{ഇവയിൽനിന്ന})$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\Sigma(c(d_i - \bar{d}))^2}{n}} = \sqrt{\frac{c^2\Sigma(d_i - \bar{d})^2}{n}}$$

$$\sigma = c \times \sqrt{\frac{\Sigma d_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d_i}{n}\right)^2}$$

**കുറിപ്പ്**

- മുകളിൽ പറഞ്ഞിട്ടുള്ള ഏതെങ്കിലും രീതിയിൽ പ്രമാണ വിചലനം കണക്കാക്കാം.

**പ്രവർത്തി**

കാൽവർഷ പരീക്ഷയുടെയും അതിനു മുൻപുള്ള ഇടക്കാല പരീക്ഷയുടെയും അഞ്ച് വിഷയങ്ങളുടെ മാർക്കുകളുടെ പ്രമാണ വിചലനം പ്രത്യേകം പ്രത്യേകം കണ്ടുപിടിക്കുക. എന്താണ് അതിൽ നിന്നും മനസ്സിലാകുന്നത്.



8 Stats Malayalam.indd 308 10/02/2023 11:59:20

**ഉദാഹരണം 8.7** ഒരു ദിവസത്തെ വിനോദയാത്രയിൽ കുട്ടികൾ ചില ആഹാരസാധനങ്ങൾക്ക് വാങ്ങാൻ ചിലവഴിച്ച തുക 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40 എന്നിങ്ങനെയാണ്. അവർ ചിലവഴിച്ച തുകയുടെ പ്രമാണ വിചലനം സ്റ്റെപ്പ് ഡീവിയേഷൻ രീതിയിൽ കണക്കാക്കുക.

**നിർദ്ധാരണം** എല്ലാ നിരീക്ഷണങ്ങളെയും 5. കൊണ്ട് വിഭജിക്കാൻ സാധിക്കും. അതുകൊണ്ട് സ്റ്റെപ്പ് ഡീവി യേഷൻ രീതി ഉപയോഗിക്കാവുന്നതാണ്.

അഭ്യൂഹമാധ്യം $A = 20$, $n = 8$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

| $x_i$ | $d_i = x_i - A$<br>$d_i = x_i - 20$ | $d_i = \frac{x_i - A}{c}$<br>$c = 5$ | $d_i^2$ |
|---|---|---|---|
| 5 | −15 | −3 | 9 |
| 10 | −10 | −2 | 4 |
| 15 | −5 | −1 | 1 |
| 20 | 0 | 0 | 0 |
| 25 | 5 | 1 | 1 |
| 30 | 10 | 2 | 4 |
| 35 | 15 | 3 | 9 |
| 40 | 20 | 4 | 16 |
| | | $\Sigma d_i = 4$ | $\Sigma d_i^2 = 44$ |

പ്രമാണവിചലനം

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d_i}{n}\right)^2} \times c$$

$$= \sqrt{\frac{44}{8} - \left(\frac{4}{8}\right)^2} \times 5 = \sqrt{\frac{11}{2} - \frac{1}{4}} \times 5$$

$$= \sqrt{5.5 - 0.25} \times 5 = 2.29 \times 5$$

$$\sigma \simeq 11.45$$

**ഉദാഹരണം 8.8** 7, 4, 8, 10, 11. എന്നീ സംഖ്യകളുടെ പ്രമാണവിചലനം കാണുക. ഓരോ മൂല്യത്തോ ടൊപ്പവും 3 കൂട്ടി പുതിയ മൂല്യങ്ങളുടെ പ്രമാണവിചലനം കണക്കാക്കുക.

**നിർദ്ധാരണം** സംഖ്യകൾ ആരോഹണക്രമത്തിൽ, 4, 7, 8, 10, 11 ലും $n = 5$ ആണ്.

| $x_i$ | $x_i^2$ |
|---|---|
| 4 | 16 |
| 7 | 49 |
| 8 | 64 |
| 10 | 100 |
| 11 | 121 |
| $\Sigma x_i = 40$ | $\Sigma x_i^2 = 350$ |

പ്രമാണവിചലനം

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{350}{5} - \left(\frac{40}{5}\right)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{6} \simeq 2.45$$

ഓരോ മൂല്യത്തോടൊപ്പവും 3 ചേർക്കുമ്പോൾ പുതിയ മൂല്യങ്ങൾ 7,10,11,13,14 എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

| $x_i$ | $x_i^2$ |
|---|---|
| 7 | 9 |
| 10 | 100 |
| 11 | 121 |
| 13 | 169 |
| 14 | 196 |
| $\Sigma x_i = 55$ | $\Sigma x_i^2 = 635$ |

പ്രമാണവിചലനം

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{635}{5} - \left(\frac{55}{5}\right)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{6} \simeq 2.45$$

ഓരോ മൂല്യത്തിനോടും ഒരേ സംഖ്യ കൂട്ടിയാൽ പ്രമാണ വിചലനം മാറുന്നില്ല.



8 Stats Malayalam.indd 309 10/02/2023 11:59:23

**ഉദാഹരണം 8.9** 2, 3, 5, 7, 8. എന്നീ മൂല്യങ്ങളുടെ പ്രമാണവിചലനം കാണുക. ഓരോ മൂല്യത്തിനേയും 4. കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ ലഭിക്കുന്ന മൂല്യങ്ങളുടെ പ്രമാണ വിചലനം കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം** $n = 5$

| $x_i$ | $x_i^2$ |
|---|---|
| 2 | 49 |
| 3 | 9 |
| 5 | 25 |
| 7 | 49 |
| 8 | 64 |
| $\Sigma x_i = 25$ | $\Sigma x_i^2 = 151$ |

പ്രമാണവിചലനം

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{151}{5} - \left(\frac{25}{5}\right)^2} = \sqrt{30.2 - 25} = \sqrt{5.2} \simeq 2.28$$

ഓരോ മൂല്യത്തിനെയും 4, കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ ലഭിക്കുന്ന പുതിയ മൂല്യങ്ങൾ 8, 12, 20, 28, 32.

| $x_i$ | $x_i^2$ |
|---|---|
| 8 | 64 |
| 12 | 144 |
| 20 | 400 |
| 28 | 784 |
| 32 | 1024 |
| $\Sigma x_i = 100$ | $\Sigma x_i^2 = 2416$ |

പ്രമാണ വിചലനം

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{2416}{5} - \left(\frac{100}{5}\right)^2} = \sqrt{483.2 - 400} = \sqrt{83.2}$$

$$\sigma = \sqrt{16 \times 5.2} = 4\sqrt{5.2} \simeq 9.12$$

ഓരോ മൂല്യത്തിനെയും k കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ പ്രമാണ വിചലത്തെയും k കൊണ്ട് ഗുണിക്കണം.

**ഉദാഹരണം 8.10** ആദ്യത്തെ $n$ നിസർഗ്ഗസംഖ്യകളുടെ ശരാശരിയും വ്യതിയാന വർഗ്ഗത്തിന്റെ ശരാശരിയും കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം**

ശരാശരി $\bar{x}$ $= \dfrac{\text{നിരീക്ഷണങ്ങളുടെ തുക}}{\text{നിരീക്ഷണങ്ങളുടെ എണ്ണം}}$

$$= \frac{\Sigma x_i}{n} = \frac{1 + 2 + 3 + \ldots + n}{n} = \frac{n(n+1)}{2 \times n}$$

ശരാശരി $\bar{x}$ $= \dfrac{n+1}{2}$

വ്യതിയാന വർഗ്ഗ ശരാശരി $\sigma^2$ $= \dfrac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\dfrac{\Sigma x_i}{n}\right)^2 \left[\begin{matrix}\Sigma x_i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 \\ (\Sigma x_i)^2 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2\end{matrix}\right]$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6 \times n} - \left[\frac{n(n+1)}{2 \times n}\right]^2$$

$$= \frac{2n^2 + 3n + 1}{6} - \frac{n^2 + 2n + 1}{4}$$

വ്യതിയാന വർഗ്ഗ ശരാശരി $\sigma^2$ $= \dfrac{4n^2 + 6n + 2 - 3n^2 - 6n - 3}{12} = \dfrac{n^2 - 1}{12}.$

## തരംതിരിച്ച ദത്തങ്ങളുടെ പ്രമാണവിചലനം കണക്കാക്കൽ

i. **മാധ്യരീതി**

പ്രമാണവിചലനം $\sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma f_i (x_i - \bar{x})^2}{N}}$

$d_i = x_i - \bar{x}$

$\sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma f_i d_i^2}{N}}$, ഇവിടെ $N = \sum_{i=1}^{n} f_i$

($x_i$ മൂല്യങ്ങൾക്ക് ആവൃത്തി മൂല്യങ്ങൾ $f_i$ ആണ്)



8 Stats Malayalam.indd 310 10/02/2023 11:59:27

**ഉദാഹരണം 8.11** 48 കുട്ടികളോട് അവർ ഒരാഴ്ചയിൽ ടെലിവിഷൻ കാണാൻ ചെലവഴിക്കുന്ന മണിക്കൂറുകളുടെ എണ്ണം എഴുതാൻ ആവശ്യപ്പെട്ടു. ഇതുപയോഗിച്ച് ടെലിവിഷൻ കാണാൻ ചെലവഴിച്ച മണിക്കൂറുകളുടെ പ്രമാണ വിചലനം കാണുക..

| $x$ | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | 3 | 6 | 9 | 13 | 8 | 5 | 4 |

**നിർദ്ധാരണം**

| $x_i$ | $f_i$ | $x_i f_i$ | $d_i = x_i - \bar{x}$ | $d_i^2$ | $f_i d_i^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 3 | 18 | −3 | 9 | 27 |
| 7 | 6 | 42 | −2 | 4 | 24 |
| 8 | 9 | 72 | −1 | 1 | 9 |
| 9 | 13 | 117 | 0 | 0 | 0 |
| 10 | 8 | 80 | 1 | 1 | 8 |
| 11 | 5 | 55 | 2 | 4 | 20 |
| 12 | 4 | 48 | 3 | 9 | 36 |
| | $N = 48$ | $\Sigma x_i f_i = 432$ | $\Sigma d_i = 0$ | | $\Sigma f_i d_i^2 = 124$ |

സമാന്തരമാധ്യം

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i f_i}{N} = \frac{432}{48} = 9 \quad (\because N = \sum f_i)$$

പ്രമാണ വിചലനം

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_i d_i^2}{N}} = \sqrt{\frac{124}{48}} = \sqrt{2.58}$$

$$\sigma \simeq 1.6$$

**(ii) അഭ്യൂഹ മാധ്യരീതി**

$x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ എന്നീ $f_1, f_2, f_3, \ldots f_n$ എന്നീ ആവൃത്തിക്കുള്ള വിവരങ്ങൾ തന്നിരിക്കുന്നു. $\bar{x}$ എന്നത് ശരാശരിയും $A$ അഭ്യൂഹമാധ്യവും എന്നിരിക്കട്ടെ.

$$d_i = x_i - A$$

പ്രമാണവിചലനം, $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_i d_i^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_i d_i}{N}\right)^2}$

**ഉദാഹരണം 8.12** ഒരു പരീക്ഷയിൽ വിദ്യാർത്ഥികൾ നേടിയ മാർക്കുകൾ താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു.

| $x$ | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | 7 | 3 | 5 | 9 | 5 |

അവരുടെ മാർക്കുകളുടെ പ്രമാണ വിചലനം കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം** അഭ്യൂഹമാധ്യം $A = 8$ എന്നിരിക്കട്ടെ

| $x_i$ | $f_i$ | $d_i = x_i - A$ | $f_i d_i$ | $f_i d_i^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 7 | −4 | −28 | 112 |
| 6 | 3 | −2 | −6 | 12 |
| 8 | 5 | 0 | 0 | 0 |
| 10 | 9 | 2 | 18 | 36 |
| 12 | 5 | 4 | 20 | 80 |
| | $N = 29$ | | $\Sigma f_i d_i = 4$ | $\Sigma f_i d_i^2 = 240$ |

പ്രമാണ വിചലനം

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_i d_i^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_i d_i}{N}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{240}{29} - \left(\frac{4}{29}\right)^2} = \sqrt{\frac{240 \times 29 - 16}{29 \times 29}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{6944}{29 \times 29}} \; ; \quad \sigma \simeq 2.87$$

## തുടർച്ചയായ ആവൃത്തി വിതരണത്തിന്റെ പ്രമാണ വിചലനം കണക്കാക്കൽ

**(i) മാധ്യരീതി**

പ്രമാണവിചലനം $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_i \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{N}}$ ഇവിടെ $x_i =$ $i$ വർഗ്ഗത്തിന്റെ മധ്യമൂല്യം.

$f_i =$ $i$ വർഗ്ഗത്തിന്റെ ആവൃത്തി.



8 Stats Malayalam.indd 311 10/02/2023 11:59:30

### (iii) ലഘുരീതി (or) സ്റ്റെപ് ഡീവിയേഷൻ

ക്രിയകൾ ലഘൂകരിക്കാൻ താഴെ തന്നിട്ടുള്ള സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിക്കാം. $A$ എന്നത് അഭ്യൂഹമാധ്യം, $x_i$ , $i^{\text{th}}$ വർഗ്ഗത്തിന്റെ മധ്യമൂല്യം. $c$ വർഗ്ഗാന്തരം എന്നിരിക്കട്ടെ.

$$d_i = \frac{x_i - A}{c}$$

$$\sigma = c \times \sqrt{\frac{\Sigma f_i d_i^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_i d_i}{N}\right)^2}$$

**ഉദാഹരണം 8.13** ഒരു പ്രത്യേക വിഷയത്തിൽ ഒരു ക്ലാസ്സിൽ കുട്ടികൾക്ക് ലഭിച്ച മാർക്കുകൾ താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു.

| മാർക്കുകൾ | 0-10 | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 | 50-60 | 60-70 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| കുട്ടികളുടെ എണ്ണം | 8 | 12 | 17 | 14 | 9 | 7 | 4 |

പ്രമാണ വിചലനം കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം** അഭ്യൂഹമാധ്യം, $A = 35$, $c = 10$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

| മാർക്കുകൾ | മധ്യമൂല്യം $(x_i)$ | $f_i$ | $d_i = x_i - A$ | $d_i = \frac{x_i - A}{c}$ | $f_i d_i$ | $f_i d_i^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0-10 | 5 | 8 | -30 | −3 | −24 | 72 |
| 10-20 | 15 | 12 | -20 | −2 | −24 | 48 |
| 20-30 | 25 | 17 | -10 | −1 | −17 | 17 |
| 30-40 | 35 | 14 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 40-50 | 45 | 9 | 10 | 1 | 9 | 9 |
| 50-60 | 55 | 7 | 20 | 2 | 14 | 28 |
| 60-70 | 65 | 4 | 30 | 3 | 12 | 36 |
| | | $N = 71$ | | | $\Sigma f_i d_i = -30$ | $\Sigma f_i d_i^2 = 210$ |

പ്രമാണ വിചലനം $\sigma = c \times \sqrt{\frac{\Sigma f_i d_i^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_i d_i}{N}\right)^2}$

$$\sigma = 10 \times \sqrt{\frac{210}{71} - \left(-\frac{30}{71}\right)^2} = 10 \times \sqrt{\frac{210}{71} - \frac{900}{5041}}$$

$$= 10 \times \sqrt{2.779} \; ; \quad \sigma \simeq 16.67$$

**ചിന്തിയ്ക്കുക**

1. ചില വിവരങ്ങളുടെ പ്രമാണ വിചലനം 2.8, ആകുന്നു. വിവരത്തിലെ ഓരോ മൂല്യത്തോടൊപ്പവും 5 കൂട്ടിയാൽ ലഭിക്കുന്ന പുതിയ പ്രമാണ വിചലനം ആകുന്നു ____.
2. $p$, $q$, $r$ എന്നീ മൂല്യങ്ങളുടെ പ്രമാണ വിചലനം $S$ ആയാൽ $p-3$, $q-3$, $r-3$ എന്നിവയുടെ പ്രമാണ വിചലനം ____ ആകുന്നു.

**ഉദാഹരണം 8.14** 15 നിരീക്ഷണങ്ങളുടെ സമാന്തരമാധ്യവും പ്രമാണ വിചലനവും യഥാക്രമം 10, 5 ആണ്. പുനഃപരിശോധനയിൽ 8 എന്ന മൂല്യം തെറ്റായ മൂല്യം ആണെന്ന് കണ്ടുപിടിച്ചു. ശരിയായ മൂല്യം 23 ആണെങ്കിൽ ശരിയായ സമാന്തരമാധ്യവും, പ്രമാണ വിചലനവും കാണുക?

**നിർദ്ധാരണം** $n = 15$ , $\bar{x} = 10$ , $\sigma = 5$ ; $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$ ; $\Sigma x = 15 \times 10 = 150$

തെറ്റായ നിരീക്ഷണമൂല്യം $= 8$, ശരിയായ നിരീക്ഷണമൂല്യം $= 23$.

ശരിയായ തുക $= 150 - 8 + 23 = 165$



8 Stats Malayalam.indd 312 10/02/2023 11:59:33

$$\text{ശരിയായ സമാന്തരമാധ്യം } \bar{x} = \frac{165}{15} = 11$$

$$\text{പ്രമാണ വിചലനം } \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2}$$

$$\text{തെറ്റായ പ്രമാണ വിചലനം } \sigma = 5 = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{15} - \left(10\right)^2}$$

$$25 = \frac{\Sigma x^2}{15} - 100\,,\ \frac{\Sigma x^2}{15} = 125$$

$$\text{തെറ്റായ } \Sigma x^2 = 1875$$

$$\text{ശരിയായ } \Sigma x^2 = 1875 - 8^2 + 23^2 = 2340$$

$$\text{ശരിയായ പ്രമാണ വിചലനം } \sigma = \sqrt{\frac{2340}{15} - \left(11\right)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{156 - 121} = \sqrt{35} \quad \sigma \simeq 5.9$$

## അഭ്യാസം 8.1

1. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള വിവരണത്തിന്റെ പരിസരവും പരിസരത്തിന്റെ ഗുണാങ്കവും കാണുക.
   (i) 63, 89, 98, 125, 79, 108, 117, 68
   (ii) 43.5, 13.6, 18.9, 38.4, 61.4, 29.8
2. ചില വിവരങ്ങളുടെ പരിസരവും, ഏറ്റവും ചെറിയ മൂല്യവും യഥാക്രമം 36.8, 13.4, ആണ്. എങ്കിൽ ഏറ്റവും വലിയ മൂല്യം കാണുക.
3. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള വിവരത്തിന്റെ പരിസരം കാണുക.

| വരുമാനം | 400-450 | 450-500 | 500-550 | 550-600 | 600-650 |
|---|---|---|---|---|---|
| തൊഴിലാളികളുടെ എണ്ണം | 8 | 12 | 30 | 21 | 6 |

4. ഒരു അദ്ധ്യാപിക 60 പേജുള്ള ഒരു റെക്കോർഡു ബുക്ക് പൂർത്തിയാക്കി കൊണ്ടു വരാൻ വിദ്യാർത്ഥികളോട് ആവശ്യപ്പെട്ടു. 8 കുട്ടികൾ യഥാക്രമം 32, 35, 37, 30, 33, 36, 35 കൂടാതെ 37 പേജുകൾ മാത്രം പൂർത്തിയാക്കി. പൂർത്തിയാക്കാനുള്ള പേജുകളുടെ പ്രമാണ വിചലനം കാണുക.
5. 9 തൊഴിലാളികളുടെ വേതനം താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു. അതിന്റെ വ്യതിയാന വർഗ്ഗ ശരാശരിയും പ്രമാണ വിചലനവും കാണുക:₹310, ₹290, ₹320, ₹280, ₹300, ₹290, ₹320, ₹310, ₹280.
6. ഒരു ചുവർ ഘടികാരം ഒരു മണിക്ക് ഒരു പ്രാവശ്യവും രണ്ടു മണിക്ക് രണ്ട് പ്രാവശ്യവും 3 മണിക്ക് മൂന്ന് പ്രാവശ്യവും തുടർന്ന് അടിക്കുന്നു. ഒരു ദിവസം ഘടികാരം എത്രപ്രാവശ്യം അടിക്കുന്നു. എന്നതിന്റെ പ്രമാണ വിചലനം കണക്കാക്കുക.
7. ആദ്യത്തെ 21 നിസർഗ്ഗ സംഖ്യകളുടെ പ്രമാണ വിചലനം കാണുക.
8. ചില വിവരങ്ങളുടെ പ്രമാണ വിചലനം 4.5 ആണ്. ഓരോ മൂല്യത്തിൽ നിന്നും 5 കുറച്ചാൽ ലഭിക്കുന്ന മൂല്യങ്ങളുടെ പുതിയ പ്രമാണ വിചലനം കാണുക.
9. ചില വിവരങ്ങളുടെ പ്രമാണ വിചലനം 3.6 ഓരോ മൂല്യത്തിനെയും 3 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ ലഭിക്കുന്ന പുതിയ മൂല്യങ്ങളുടെ വ്യതിയാന വർഗ്ഗ ശരാശരിയും പ്രമാണ വിചലവും കാണുക.
10. 5 ജില്ലകളിലെ വിവിധ സ്ഥലങ്ങളിൽ ഒരാഴ്ചയിൽ പെയ്ത മഴയുടെ അളവുകൾ താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

| മഴയുടെ അളവ് (മി.മീ) | 45 | 50 | 55 | 60 | 65 | 70 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| സ്ഥലങ്ങളുടെ എണ്ണം | 5 | 13 | 4 | 9 | 5 | 4 |

പ്രമാണ വിചലനം കാണുക.



8 Stats Malayalam.indd 313 10/02/2023 11:59:35

11. ഒരു പട്ടണത്തിൽ വൈറൽ പനി ബാധിച്ച ആളുകളുടെ എണ്ണം താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു

| വയസ്സ് വർഷങ്ങളിൽ | 0-10 | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 | 50-60 | 60-70 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| പനി ബാധിച്ചവരുടെ എണ്ണം | 3 | 5 | 16 | 18 | 12 | 7 | 4 |

പ്രമാണ വിചലനം കാണുക.

12. ഒരു ഫാക്ടറിയിൽ നിർമ്മിച്ച പിഞ്ഞാണങ്ങളുടെ വ്യാസത്തിന്റെ അളവുകൾ (സെ.മി) താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. അവയുടെ പ്രമാണ വിചലനം കാണുക.

| വ്യാസം (സെ.മീ) | 21-24 | 25-28 | 29-32 | 33-36 | 37-40 | 41-44 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| പിഞ്ഞാണങ്ങളുടെ എണ്ണം | 15 | 18 | 20 | 16 | 8 | 7 |

13. 100 മി. ഓട്ടത്തിന് 50 കുട്ടികൾ എടുത്ത സമയം താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. അതിന്റെ പ്രമാണ വിചലനം കാണുക.

| എടുത്ത സമയം (സെക്കന്റ്സ്) | 8.5-9.5 | 9.5-10.5 | 10.5-11.5 | 11.5-12.5 | 12.5-13.5 |
|---|---|---|---|---|---|
| കുട്ടികളുടെ എണ്ണം | 6 | 8 | 17 | 10 | 9 |

14. ഒരു സംഘത്തിലെ 100 കുട്ടികളുടെ മാർക്കുകളുടെ സമാന്തരമാധ്യവും പ്രമാണ വിചലനവും യഥാക്രമം 60, 15 ആണ്. പിന്നീട് 45, 72 എന്നീ മൂല്യങ്ങൾ 40, 27 എന്ന് തെറ്റായി രേഖപ്പെടുത്തിയത് കണ്ടു. ശരിയായ സമാന്തരമാധ്യവും, പ്രമാണവിചലനവും കാണുക.

15. 7 നിരീക്ഷണങ്ങളുടെ സമാന്തര മാധ്യവും, വ്യതിയാന വർഗ്ഗശരാശരിയും യഥാക്രമം 8, 16 ആണ്. ഇവയിലെ 5 നിരീക്ഷണങ്ങൾ 2, 4, 10, 12 കൂടാതെ 14 ആണെങ്കിൽ മറ്റു രണ്ട് നിരീക്ഷണങ്ങൾ കാണുക.

## 8.3 വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം

രണ്ടുതരം വിവരങ്ങളുടെ കേന്ദ്രപ്രവണതയുടെയും വ്യതിയാന വ്യാപ്തിയുടെയും അളവുകളുടെ താരതമ്യം ശരിയായിരിക്കണമെന്നില്ല. എന്തുകൊണ്ടെന്നാൽ വിവരങ്ങളിലെ ചരങ്ങളുടെ മാത്രകൾ വ്യത്യസ്തമായിരിക്കും.

ഉദാഹരണം

| | ഭാരം | വില |
|---|---|---|
| സമാന്തരമാധ്യം | 8 കി.ഗ്രാം | ₹ 85 |
| പ്രമാണ വിചലനം | 1.5 കി.ഗ്രാം | ₹ 21.60 |

ഇവിടെ നമുക്ക് 1.5 കി.ഗ്രാം പ്രമാണ വിചലനത്തെയും ₹21.60 നെയും താരതമ്യം ചെയ്യാനാവില്ല.. രണ്ടോ അതിൽ കൂടുതലോ വിവരങ്ങളുടെ ഇത്തരം മാറ്റത്തെ താരതമ്യം ചെയ്യുന്നതിന് പ്രമാണവിചലനത്തിന്റെ മറ്റൊരു അളവായ വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം ഉപയോഗിക്കാവുന്നതാണ്.

വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം എന്നത് പ്രമാണ വിചലനത്തെ സമാന്തരമാധ്യം കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്നു. ഇത് സാധാരണയായി ശതമാനരൂപത്തിലാണ് കാണുന്നത്. ഈ ആശയത്തിന് തുടക്കമിട്ടത് പ്രശസ്ത സാഖ്യിക ശാസ്ത്രജ്ഞനായ കാൾ പീയേർസൺ ആണ്.

$$\text{ആദ്യത്തെ വിവരങ്ങളുടെ വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം } (C.V_1) = \frac{\sigma_1}{\bar{x}_1} \times 100\%$$

$$\text{രണ്ടാമത്തെ വിവരങ്ങളുടെ വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം } (C.V_2) = \frac{\sigma_2}{\bar{x}_2} \times 100\%$$

കുറഞ്ഞ വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം ഉള്ള വിവരം മറ്റേ വിവരത്തേക്കാൾ കൂടുതൽ സ്ഥിരതയുള്ളതാണ്. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങൾ പരിഗണക്കുക

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 500 | 900 | 800 | 900 | 700 | 400 |
| B | 300 | 540 | 480 | 540 | 420 | 240 |

| | സമാന്തരമാധ്യം | പ്രമാണവിചലനം |
|---|---|---|
| A | 700 | 191.5 |
| B | 420 | 114.9 |

ഈ രണ്ടു വിവരങ്ങളുടെ സമാന്തര മാധ്യവും പ്രമാണ വിചലനവും താരതമ്യം ചെയ്താൽ, രണ്ടും വളരെ വ്യത്യസ്തമായിരിക്കുന്നത് കാണാം. പക്ഷേ $B$ യുടെ സമാന്തര മാധ്യവും പ്രമാണ വിചലനവും $A$ യുടെ $60\%$ എന്ന് മനസ്സിലാക്കാം. കുറഞ്ഞ സമാന്തര മാധ്യത്തിന് കുറഞ്ഞ പ്രമാണ വിചലനം തെറ്റിദ്ധാരണ ഉണ്ടാകാൻ സാധ്യതയുണ്ട്.



8 Stats Malayalam.indd 314 10/02/2023 11:59:35

രണ്ടു വിവരങ്ങളുടെയും വ്യതിയാന വ്യാപ്തി താരതമ്യം ചെയ്യാൻ, വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം $= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\%$

$A$ യുടെ വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം $= \frac{191.5}{700} \times 100\% = 27.4\%$

$B$ യുടെ വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം $= \frac{114.9}{420} \times 100\% = 27.4\%$

രണ്ടു വിവരങ്ങൾക്കും വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം തുല്യമാണ്. രണ്ടു വിവരങ്ങൾക്കും ഒരേ വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം ഉള്ളതു കൊണ്ട് ഒരു വിവരം മറ്റേതിനെ ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്നതായി കാണാം. എന്നാൽ $B$ വിവരത്തിലെ മൂല്യങ്ങൾ $A$ എന്ന വിവരത്തിലെ മൂല്യങ്ങളുടെ $60\%$(കൃത്യമായി) ആകുന്നു. അതുകൊണ്ട് അവ പരസ്പരം വളരെ ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. ഇത് നമ്മെ വീണ്ടും കുഴപ്പത്തിലാക്കുന്നു.

തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളുടെ ശരിയായ ധാരണ ലഭിക്കണമെങ്കിൽ അവയുടെ വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം കാണേണ്ടതുണ്ട്. ഇവിടെയാണ് നമുക്ക് വ്യതിയാന ഗുണാങ്കത്തിന്റെ ആവശ്യകത ഉള്ളത്.

### പുരോഗതി പരിശോധന

1. വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം _____ നു സമാനമായ മറ്റൊരു അളവാണ്.
2. പ്രമാണ വിചലനത്തെ സമാന്തര മാധ്യം കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ _____ ലഭിക്കുന്നു.
3. വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം _____ നെയും _____ നെയും ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്നു.
4. ഒരു വിവരത്തിന്റെ സമാന്തര മാധ്യം (ശരാശരി) യും പ്രമാണ വിചലനവും യഥാക്രമം 8 കൂടാതെ 2 ആണ് എങ്കിൽ വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം ആണ് _____.
5. രണ്ട് വിവരങ്ങൾ താരതമ്യം ചെയ്യുമ്പോൾ _____ വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം അസ്ഥിരമാണ്.

**ഉദാഹരണം 8.15** ചില ഗുണങ്ങളുടെ മാധ്യം 25.6 വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം 18.75ും ആണ്. പ്രമാണ വിചലനം കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം** മാധ്യം $\bar{x} = 25.6$ , വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം, C.V. = 18.75

വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം, $\text{C.V.} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\%$

$18.75 = \frac{\sigma}{25.6} \times 100$ ; $\sigma = 4.8$

**ഉദാഹരണം 8.16** ഒരു സ്കൂളിലെ പത്താം ക്ലാസ്സ് വിദ്യാർത്ഥികളുടെ ഉയരത്തിന്റെയും ഭാരത്തിന്റെയും മാധ്യവും വ്യതിയാന വർഗ്ഗ ശരാശരിയും താഴെ തന്നിട്ടുള്ള പട്ടികയിൽ കാണിച്ചിട്ടുണ്ട്.

| | ഉയരം | ഭാരം |
|---|---|---|
| മാധ്യം | 155 സെ.മീ | 46.50 കി.ഗ്രാം |
| വ്യതിയാന വർഗ്ഗശരാശരി | 72.25 സെ.മീ$^2$ | 28.09 കി.ഗ്രാം |

ഏതാണ് കൂടുതൽ വ്യത്യാസപ്പെട്ടിരിക്കുന്നത്?

**നിർദ്ധാരണം** രണ്ടു വിവരങ്ങൾ താരതമ്യം ചെയ്യുമ്പോൾ, അവയുടെ വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം കാണേണ്ടതാണ്

ശരാശരി $\bar{x}_1 = 155$സെ.മീ, വ്യതിയാന വർഗ്ഗ ശരാശരി $\sigma_1^2 = 72.25$ സെ.മീ$^2$

പ്രമാണ വിചലനം $\sigma_1 = 8.5$

വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം $C.V_1 = \frac{\sigma_1}{\bar{x}_1} \times 100\%$

$C.V_1 = \frac{8.5}{155} \times 100\% = 5.48\%$ (ഉയരങ്ങൾക്ക്)

ശരാശരി $\bar{x}_2 = 46.50$ കി.ഗ്രാം, വ്യതിയാന വർഗ്ഗ ശരാശരി $\sigma_2^2 = 28.09$ കി.ഗ്രാം$^2$

പ്രമാണ വിചലനം $\sigma_2 = 5.3kg$



8 Stats Malayalam.indd 315 10/02/2023 11:59:37

വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം $C.V_2 = \frac{\sigma_2}{\bar{x}_2} \times 100\%$

$C.V_2 = \frac{5.3}{46.50} \times 100\% = 11.40\%$ (ഭാരതത്തിൽ)

$C.V_1 = 5.48\%$ കൂടാതെ $C.V_2 = 11.40\%$

$C.V_2 > C.V_1$, ആയതുകൊണ്ട് കുട്ടികളുടെ ഭാരങ്ങൾ, ഉയരത്തെക്കാൾ കൂടുതൽ വ്യത്യസ്തപ്പെട്ടിരിക്കുന്നതായി കാണാം.

## അഭ്യാസം 8.2

1. ചില ഇനങ്ങളുടെ പ്രമാണ വിചലനവും, ശരാശരിയും യഥാക്രമം 6.5 കൂടാതെ 12.5 ആണ്. വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം കാണുക.
2. ചില ഇനങ്ങളുടെ പ്രമാണ വിചലനവും വ്യതിയാന ഗുണാങ്കവും യഥാക്രമം 1.2, 25.6 ആണ്. മാധ്യം കാണുക.
3. ചില ഇനങ്ങളുടെ ശരാശരിയും, വ്യതിയാന ഗുണാങ്കവും യഥാക്രമം 15, 48 ആണ്, എങ്കിൽ പ്രമാണ വിചലനം കാണുക.
4. $n = 5$, $\bar{x} = 6$, $\Sigma x^2 = 765$ ആണെങ്കിൽ വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം കാണുക.
5. വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം കാണുക $24, 26, 33, 37, 29, 31$.
6. ഒരു ദിവസത്തിൽ 8 വിദ്യാർത്ഥികൾ ഗൃഹപാഠം ചെയ്യാൻ എടുക്കുന്ന സമയം (മിനിറ്റുകളിൽ) താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു. വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം കാണുക. $38, 40, 47, 44, 46, 43, 49, 53$. .
7. 5 വിഷയങ്ങളിൽ സതി, വിദ്യ എന്നീ രണ്ടു വിദ്യാർത്ഥികൾ നേടിയ മാർക്കുകളുടെ ആകെ തുക യഥാക്രമം $460$ കൂടാതെ $480$ പ്രമാണ വിചലനം യഥാക്രമം $4.6$ കൂടാതെ $2.4$ ആണ്. ആരുടെ പ്രകടനമാണ് കൂടുതൽ മെച്ചപ്പെട്ടത്?
8. ഒരു ക്ലാസ്സിലുള്ള 40 വിദ്യാർത്ഥികൾക്ക് ഗണിതം, ശാസ്ത്രം, സാമൂഹ്യശാസ്ത്രം എന്നീ മൂന്ന് വിഷയങ്ങൾക്കു ലഭിച്ച മാധ്യവും പ്രമാണ വിചലനവും താഴെ തന്നിട്ടുണ്ട്.

| വിഷയം | ശരാശരി | പ്രമാണ വിചലനം |
|---|---|---|
| ഗണിതം | 56 | 12 |
| ശാസ്ത്രം | 65 | 14 |
| സാമൂഹിക ശാസ്ത്രം | 60 | 10 |

മൂന്ന് വിഷയങ്ങളിൽ ഏറ്റവും കൂടിയ വ്യതിയാനവും, ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വ്യതിയാനവും ഏത് വിഷയത്തിനാണ് കാണിക്കുന്നത്?

## 8.4 സംഭാവ്യത


Blaise Pascal

നൂറ്റാണ്ടുകൾക്കു മുമ്പ്, വാതുവയ്പും ചൂതാട്ടവുമെല്ലാം പരിഷ്കാരമുള്ളവയും പ്രത്യേകിച്ച് ചെറുപ്പക്കാർക്കിടയിൽ കൂടുതലായി കണ്ടു വന്നവയുമാണ്. ഇത്തരം കളികൾ കൂടുതൽ സങ്കീർണ്ണമായതോടെ കളിക്കാർ ഒരു പ്രത്യേക സാഹചര്യത്തിലെ ജയത്തിന്റെയും തോൽവിയുടെയും സാധ്യതയെ കുറിച്ച് കൂടുതൽ അറിയാൻ താൽപര്യപ്പെട്ടു തുടങ്ങി. 1654 ൽ Chevalier de Mere, എന്ന ഒരു ഫ്രഞ്ച് ഉന്നതൻ വാതുവയ്പ്പിലുള്ള തന്റെ താൽപര്യം കൊണ്ട് പ്രശസ്ത ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞനായ Blaise Pascal, നോട് കാശു കെട്ടിവച്ചുള്ള ഒരു ചൂതാട്ട കളിയിൽ തനിക്ക് എന്തു കിട്ടുമെന്ന് കത്തെഴുതി അന്വേഷിച്ചു. ഈ വിഷയത്തെ ഗണിതപരമായി ചെയ്യുകയും തന്റെ നല്ല സുഹൃത്തും ഗണിതജ്ഞനുമായ പിയറി ഡി ഫെർമാറ് എങ്ങനെ ഇത് ചെയ്യുമെന്ന ആകാംക്ഷ കൊണ്ട് അദ്ദേഹവുമായി ഇത് പങ്കിടുകയും ചെയ്തു. ഈ വിഷയത്തിൽ അവരുടെ ഒരുമിച്ചുള്ള പ്രയത്നത്തിന്റെ ഫലമായാണ് ഗണിത ശാസ്ത്രത്തിന്റെ ഒരു പുതിയ ശാഖയായ സംഭാവ്യത രൂപം കൊണ്ടത്.

### യാദൃശ്ചിക പരീക്ഷണം

യാദൃശ്ചിക പരീക്ഷണം എന്നത്

(i) സാധ്യമായ എല്ലാ ഫലങ്ങളും അറിയാൻ കഴിയുന്ന പരീക്ഷണം.

(ii) (ii)കൃത്യമായ ഫലം അറിയാൻ സാധിക്കാത്ത പരീക്ഷണം.



8 Stats Malayalam.indd 316 10/02/2023 11:59:38

**ഉദാ :** 1. നാണയം ടോസ്സിടുക. 2. പകിട ഉരുട്ടുക.



ചിത്രം. 8.2

### സാമ്പിൾ സ്പേസ്

ഒരു യാദൃശ്ചിക പരീക്ഷണത്തിൽ സാധ്യമായ എല്ലാ ഫലങ്ങളുടെയും ഗണത്തെ സാമ്പിൾ സ്പേസ് എന്നു പറയുന്നു. ഇതിനെ $S$ എന്നു കുറിക്കുന്നു.

**ഉദാ :** ഒരു പകിട ഉരുട്ടുമ്പോൾ സാധ്യമായ ഫലങ്ങൾ ആ പകിടയുടെ മുഖ സംഖ്യകളായ 1,2,3,4,5,6 എന്നീ സംഖ്യകളാണ്. അതായത് $S = \{1,2,3,4,5,6\}$

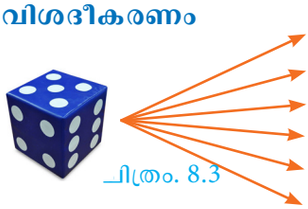
### സാമ്പിൾ പോയിന്റ്

സാമ്പിൾ സ്പേസിലുള്ള ഓരോ അംഗത്തെയും സാമ്പിൾ പോയിന്റ എന്നു പറയുന്നു.

### 8.4.1 വൃക്ഷ ചിത്രം

ഒരു യാദൃശ്ചിക പരീക്ഷണത്തിന്റെ സാധ്യമായ എല്ലാ ഫലങ്ങളും കണ്ടു മനസ്സിലാക്കാൻ വൃക്ഷ ചിത്രം സഹായിക്കുന്നു. വൃക്ഷ ചിത്രത്തിലെ ഓരോ ശാഖയും സാധ്യമായ ഓരോ ഫലത്തെയും പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു.

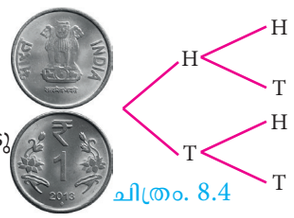
### വിശദീകരണം




ചിത്രം. 8.3

(i) വൃക്ഷ ചിത്രത്തിൽ (ചിത്രം.8.3) നിന്നും ഒരു പകിട ഉരുട്ടുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന സാമ്പിൾ സ്പേസ് ആയിരിക്കും. $S = \{1,2,3,4,5,6\}$

(iii) വൃക്ഷ ചിത്രത്തിൽ (ചിത്രം.8.4) നിന്നും രണ്ടു നാണയങ്ങൾ ടോസ്സിടുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന സാമ്പിൾ സ്പേസ് ആകുന്നു $S=\{HH,HT,TH,TT\}$




ചിത്രം. 8.4

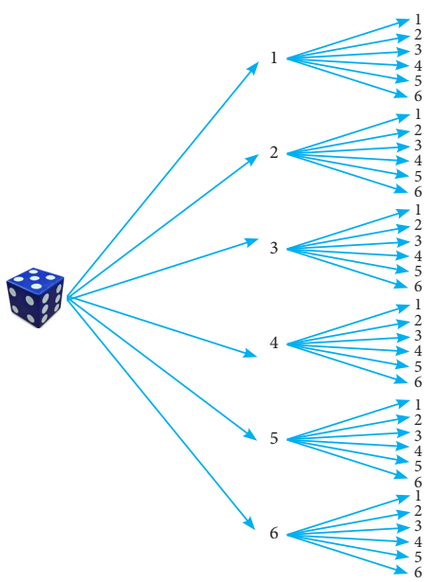
### പുരോഗതി പരിശോധന

1. യഥാർത്ഥ ഫലം പ്രവചിക്കാൻ കഴിയാത്ത പരീക്ഷണത്തെ _____ എന്നു പറയുന്നു.
2. സാധ്യമായ എല്ലാ ഫലങ്ങളുടെയും ഗണത്തെ _____ എന്നു പറയുന്നു.

**ഉദാഹരണം 8.17** രണ്ടു പകിടകൾ ഉരുട്ടുമ്പോൾ ഉണ്ടാകുന്ന സാമ്പിൾ സ്പേസ് വൃക്ഷ ചിത്രത്തിലൂടെ വെളിപ്പെടുത്തുക.

**നിർദ്ധാരണം** രണ്ട് പകിടകൾ ഉരുട്ടുമ്പോൾ ഓരോ പകിടയിലും 1, 2, 3, 4, 5, 6 എന്നീ മുഖ്യ സംഖ്യകൾ ഉള്ളതു കൊണ്ട് വൃക്ഷ ചിത്രം തരുന്ന രൂപത്തിലായിരിക്കും

അതുകൊണ്ട് സാമ്പിൾ സ്പേസ് താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു.




$$S= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)$$

$$(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)$$

$$(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)$$

$$(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)$$

$$(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)$$

$$(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$



8 Stats Malayalam.indd 317 10/02/2023 11:59:39

**സംഭവം:** ഒരു യാദൃശ്ചിക പരീക്ഷണത്തിൽ സാധ്യമായ ഓരോ ഫലത്തെയും സംഭവം എന്നു പറയുന്നു. ഓരോ സംഭവും സാമ്പിൾ സ്പേസിന്റെ ഉപഗണമായിരിക്കും.

**ഉദാഹരണം:** രണ്ടു നാണയം ടോസ്സിടുമ്പോൾ രണ്ടു തലകൾ കിട്ടുന്നത് ഒരു സംഭവമാണ്.

**ശ്രമം:** ഒരു പരീക്ഷണത്തെ ഓരോ പ്രാവശ്യവും ചെയ്യുന്നതിനെ ശ്രമം എന്നു പറയുന്നു.

**ഉദാഹരണം:** ഒരു നാണയം മൂന്നു പ്രാവശ്യം ടോസ്സിടുന്നതും ഓരോ പ്രാവശ്യം ടോസ്സിടുന്നതും ഒരു ശ്രമമാണ്.

BHF73

| സംഭവം | വിശദീകരണം | ഉദാഹരണം |
|---|---|---|
| സമ സന്ദർഭ സംഭവങ്ങൾ | രണ്ടോ അതിലധികമോ സംഭവങ്ങളിൽ ഓരോന്നും സംഭവിക്കാൻ തുല്യ സാധ്യത ഉണ്ടെങ്കിൽ അവയെ സമ സന്ദർഭ സംഭവങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നു. | ഒരു നാണയം ടോസ്സിടുമ്പോൾ ഒരു തല കിട്ടുന്നതും ഒരു പൂവ് കിട്ടുന്നതും സമ സന്ദർഭ സംഭവങ്ങളാണ്. |
| സുനിശ്ചിത സംഭവം | ഒരു പരീക്ഷണത്തിൽ തീർച്ചയായും നടക്കാൻ സാധ്യതയുള്ള സംഭവത്തെ സുനിശ്ചിത സംഭവം എന്നു പറയുന്നു. | ഒരു പകിട ഉരുട്ടുമ്പോൾ 1 മുതൽ 6 വരെയുള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരു സംഖ്യ കിട്ടുന്നതിനെ സുനിശ്ചിത സംഭവമാണ്. |
| അസാദ്ധ്യ സംഭവം | ഒരു പരീക്ഷണത്തിൽ ഒരിക്കലും നടക്കാൻ സാദ്ധ്യതയില്ലാത്ത സംഭവത്തെ അസാദ്ധ്യ സംഭവം എന്നു പറയുന്നു. | രണ്ടു പകിടകൾ ഉരുട്ടുമ്പോൾ മൂന്ന് തലകൾ കിട്ടുന്നത് ഒരു അസാദ്ധ്യ സംഭവമാണ്. |
| പരസ്പര വർജ്ജക സംഭവങ്ങൾ | രണ്ടോ അതിലധികമോ ഉള്ള സംഭവങ്ങൾക്ക് ഒരു പൊതുവായ സാമ്പിൾ പോയിന്റു പോലും ഇല്ലാതിരുന്നാൽ അവയെ പരസ്പര വർജ്ജക സംഭവം എന്നു പറയുന്നു. അതായത് $A \cap B = \phi$ ആയാൽ $A$ യും $B$ യും പരസ്പര വർജ്ജക സംഭവങ്ങളാണ്. | ഒരു പകിട ഉരുട്ടുമ്പോൾ ഒറ്റ സംഖ്യകൾ കിട്ടുന്ന സംഭവും ഇരട്ട സംഖ്യകൾ കിട്ടുന്ന സംഭവും പരസ്പര വർജ്ജക സംഭവങ്ങളാണ്.. |
| സമ്പൂർണ്ണ സംഭവങ്ങൾ | സംഭവങ്ങളുടെ യോഗം സാമ്പിൾ സ്പേസ് ആണെങ്കിൽ അവ സമ്പൂർണ്ണ സംഭവങ്ങളാണ്.. | ഒരു നാണയം രണ്ടു പ്രാവശ്യം ടോസ്സിടുമ്പോൾ രണ്ടു തലകൾ കിട്ടുന്നതിനും കൃത്യമായി ഒരു തലയിട്ടുന്നതിനും ഒരു തലയും കിട്ടാതിരിക്കുന്നതിനും ഉള്ള സംഭവങ്ങൾ സമ്പൂർണ്ണ സംഭവങ്ങളാണ്. |
| പൂരക സംഭവങ്ങൾ | $A$ യിലില്ലാത്ത സാമ്പിൾ പോയിന്റുകളെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്ന സംഭവം $\bar{A}$ നെ $A$ യുടെ പൂരക സംഭവം എന്നു പറയുന്നു. ഇതിനെ $A'$ or $A^c$ or $\bar{A}$ എന്നു സൂചിപ്പിക്കുന്നു.<br>$A$ എന്ന സംഭവവും അതിന്റെ പൂരക സംഭവം $A'$ ഉം പരസ്പര വർജ്ജകവും സമ്പൂർണ്ണ സംഭവുമാണ്. | ഒരു പകിട ഉരുട്ടുമ്പോൾ 5 or 6' കിട്ടുന്ന സംഭവും a 1, 2, 3 or 4 കിട്ടുന്ന സംഭവവും പരസ്പര പൂരക സംഭവങ്ങളാണ്.. |

**കുറിപ്പ്**

- **പ്രാഥമിക സംഭവം:** ഒരു സംഭവത്തിൽ ഒരേ ഒരു ഫലം മാത്രമേ ഉള്ളൂ എങ്കിൽ അതിനെ പ്രാഥമിക സംഭവം എന്നു പറയുന്നു.

**നിങ്ങൾക്ക് അറിയാമോ**

1713 ൽ ചൂതാട്ടത്തിനു പുറമേ മറ്റു മേഖലകളിലും സംഭാവ്യതയുടെ പ്രായോഗികതയെ ആദ്യമായി തിരിച്ചറിഞ്ഞത് Bernoulli ആണ്



8 Stats Malayalam.indd 318 10/02/2023 11:59:39

### 8.4.2 ഒരു സംഭവത്തിന്റെ സംഭാവ്യത

ഒരു യാദൃശ്ചിക പരീക്ഷണത്തിൽ, S എന്നത് സാമ്പിൾ സ്പേസ്, $E \subseteq S$ . $E$ ഒരു സംഭവം, $E$ സംഭവിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത

$$P(E) = \frac{\text{സംഭവിക്കുന്നതിനുള്ള അനുകൂലമായ ഫലങ്ങളുടെ എണ്ണം}}{\text{സാധ്യതയുള്ള ഫലങ്ങളുടെ ആകെ എണ്ണം}} = \frac{n(E)}{n(S)}$$

സംഭാവ്യതയുടെ ഈ നിർവചനം പരിമിതമായ സാമ്പിൾ സ്പേസുകൾക്കു മാത്രമേ പ്രായോഗികമായിട്ടുള്ളൂ. അതുകൊണ്ട് ഈ അദ്ധ്യായത്തിൽ പരിമിതമായ സാമ്പിൾ സ്പേസുകളെയാണ് നാം പരിഗണിക്കുന്നത്.

**കുറിപ്പ്**

- $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$
- $P(S) = \frac{n(S)}{n(S)} = 1$ . സുനിശ്ചിത സംഭവത്തിന്റെ സംഭാവ്യത 1 ആയിരിക്കും.
- $P(\phi) = \frac{n(\phi)}{n(\mathrm{s})} = \frac{0}{n(s)} = 0$ . അസാധ്യ സംഭവത്തിന്റെ സംഭാവ്യത 0 ആയിരിക്കും.
- $E$ എന്നത് $S$ ന്റെ ഉപഗണവും $\phi$ എന്നത് ഏതൊരു ഗണത്തിന്റെ ഉപഗണവുമാണെങ്കിൽ,

  $\phi \subseteq E \subseteq S$

  $P(\phi) \leq P(E) \leq P(\mathrm{S})$

  $0 \leq P(E) \leq 1$

  അതുകൊണ്ട് സംഭാവ്യത എല്ലായ്പ്പോഴും 0 നും 1 നും ഇടയിലായിരിക്കും.
- $E$ യുടെ പൂരക ഗണം $\bar{E}$ ആണ്.

  $P(E) = \frac{m}{n}$ എന്നിരിക്കട്ടെ (ഇവിടെ $m$ എന്നത് $E$എന്ന സംഭവത്തിന്റെ സാധ്യതയുള്ള എല്ലാ ഫലങ്ങളുടെയും എണ്ണം, $n$ ).

  $$P(E) = \frac{\text{സംഭവിക്കുന്നതിനുള്ള അനുകൂലമല്ലാത്ത ഫലങ്ങളുടെ എണ്ണം}}{\text{സാധ്യതയുള്ള ഫലങ്ങളുടെ ആകെ എണ്ണം}}$$

  $$P(\bar{E}) = \frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n}$$

  $$P(\bar{E}) = 1 - P(\mathrm{E})$$




- $P(E) + P(\bar{\mathrm{E}}) = 1$

### പുരോഗതി പരിശോധന

താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയിൽ സംഭാവ്യത അല്ലാത്തവ ഏവ്?

(a) $-0.0001$ (b) $0.5$ (c) $1.001$ (d) $1$

(e) $20\%$ (f) $0.253$ (g) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (h) $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$



8 Stats Malayalam.indd 319 10/02/2023 11:59:41

**ഉദാഹരണം 8.18** ഒരു സഞ്ചിയിൽ 5 നീല പന്തുകളും 4 പച്ച പന്തുകളും ഉണ്ട്. അതിൽ നിന്ന് സമസന്ദർഭ രീതിയിൽ ഒരു പന്തെടുക്കുന്നു. എങ്കിൽ ആ പന്ത് (i) നീല (ii) നീല അല്ലാതിരിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം** സാധ്യമായ എല്ലാ ഫലങ്ങളുടെയും ആകെ എണ്ണം $n(\mathrm{S}) = 5 + 4 = 9$

(ശ) നീല പന്ത് ലഭിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭവം $A$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

സംഭവം A. യ്ക്കു അനുകൂലമായ ഫലങ്ങളുടെ എണ്ണം, $n(\mathrm{A}) = 5$

നീല പന്ത് കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത, $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{9}$

(ii) $\bar{A}$ എന്നത് നീല പന്ത് ലഭിക്കാതിരിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭവം $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$

**ഉദാഹരണം 8.19** രണ്ട് പകിടകൾ ഉരുട്ടുമ്പോൾ തുക, (i) 4 നു തുല്യം (ii) 10 നെ ക്കാൾ കൂടുതൽ (iii) 13 നെ ക്കാൾ കുറവ് കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക

**നിർദ്ധാരണം** രണ്ട് പകിടകൾ ഉരുട്ടുമ്പോൾ സാമ്പിൾ സ്പേസ്

$$S = \{\ (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)$$
$$(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)$$
$$(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)$$
$$(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)$$
$$(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)$$
$$(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\ \};\ n\big(S\big) = 36$$

(i) ഫലങ്ങളുടെ തുക 4 കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭവം $A$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

$$A = \{(1,3),(2,2),(3,1)\};\ n(A) = 3\,.$$

ഫലങ്ങളുടെ തുക 4 കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

(ii) ഫലങ്ങളുടെ തുക 10 നെക്കാൾ കൂടുതൽ കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭവം B എന്നിരിക്കട്ടെ.

$$\mathrm{B} = \{(5,6),(6,5),(6,6)\};\ n(B) = 3$$

ഫലങ്ങളുടെ തുക 10 നെക്കാൾ കൂടുതൽ കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

(iii) ഫലങ്ങളുടെ തുക 13 നെ ക്കാൾ കുറവായിരിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭവം C എന്നിരിക്കട്ടെ $C = S$.

$$n(C) = n(S) = 36$$

ഫലങ്ങളുടെ തുക 13നെ ക്കാൾ കുറവായിരിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത s $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{36}{36} = 1\,.$

**ഉദാഹരണം 8.20** ഒരേ സമയം രണ്ടു നാണയങ്ങൾ ടോസ്സിടുമ്പോൾ നാണയങ്ങൾ വ്യത്യസ്ത മുഖങ്ങൾ കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക?

**നിർദ്ധാരണം** രണ്ടു നാണയങ്ങൾ ഒരേ സമയം ടോസ്സിടുമ്പോൾ സാമ്പിൾ സ്പേസ്

$$S = \big\{HH, HT, TH, TT\big\};\quad n(S) = 4$$

വ്യത്യസ്ത മുഖങ്ങൾ കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭവം $A$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

$$A = \big\{HT, TH\big\};\quad n(A) = 2$$

വ്യത്യസ്ത മുഖങ്ങൾ കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത $P\big(A\big) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$



8 Stats Malayalam.indd 320 10/02/2023 11:59:44

**ഉദാഹരണം 8.21** ഒരു അധിവർഷത്തിൽ യാദൃശ്ചികമായി തിരഞ്ഞെടുത്താൽ അതിൽ 53 ശനിയാഴ്ചകൾ ഉൾക്കൊണ്ടിരിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക. (സൂചന: $366 = 52 \times 7 + 2$ )

**നിർദ്ധാരണം** ഒരു അധിവർഷത്തിൽ 360 ദിവസങ്ങൾ ഉണ്ട്. അതായത് 52 ആഴ്ചകളും 2 ദിവസവും, 52 ആഴ്ചകളിൽ 52 ശനിയാഴ്ചകൾ ഉൾക്കൊള്ളുന്നു.

ബാക്കിയുള്ള രണ്ടു ദിവസങ്ങൾക്കുള്ള സാധ്യതകൾ ഉള്ള സാമ്പിൾ സ്പേസ്.

$S =$ {ഞാ - തി, തി-ചൊ, ചൊ-ബു, ബു-വ്യ, വ്യ-വെ, വെ-ശ, ശ-ഞാ വെ. വെ.ശ, ശ- ഞ}

$n(S) = 7$

53 ശനിയാഴ്ചകൾ കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭവം $A$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$A =$ {വെ- ശ, ശ- ഞാ}; $n(A) = 2$

**ചിന്തിക്കുക**

ഒരു സാധാരണ വർഷത്തിൽ 53 ശനിയാഴ്ചകൾ ഉണ്ടാകാനുള്ളസംഭാവ്യത കാണുക.

ഒരു അധിവർഷത്തിൽ 53 ശനിയാഴ്ചകൾ ലഭിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{7}$

**ഉദാഹരണം 8.22** ഒരേ സമയത്ത് ഒരു പകിട ഉരുട്ടുകയും ഒരു നാണയം ടോസ്സിടുകയും ചെയ്യുന്നു. പകിടയിൽ ഒരു ഒറ്റസംഖ്യ കിട്ടുന്നതിനും കൂടാതെ നാണയത്തിൽ തല കിട്ടുന്നതിനും ഉള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം**

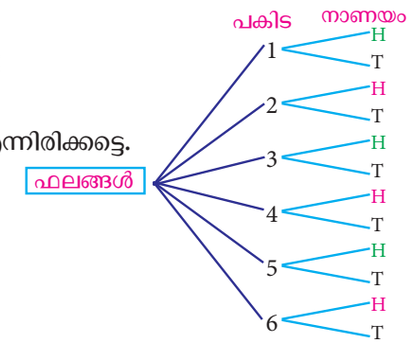
$S = \{1H,1T,2H,2T,3H,3T,4H,4T,5H,5T,6H,6T\}$;

$n(S) = 12$

ഒരു ഒറ്റസംഖ്യയും ഒരു തലയും കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭവം $A$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

A $= \{1H, 3H, 5H\}$; $n(A) = 3$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$




**പ്രവർത്തി 3**

മധുവിന്റെ വീട്ടിൽ നിന്നും ജോലി സ്ഥലത്തേയ്ക്കു പോകുവാൻ $R_1$, $R_2$, $R_3$ എന്നീ മൂന്നു വഴികൾ ഉണ്ട്. അവിടെ $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$ എന്നിങ്ങനെ നാല് പാർക്കിംഗ് കേന്ദ്രങ്ങളും $B_1$, $B_2$, $B_3$ എന്നിങ്ങനെ മൂന്നു പ്രവേശന കവാടങ്ങളും ഉണ്ട് അവരുടെ ജോലി ചെയ്യുന്ന നിലയിലേയ്ക്ക് ചെല്ലുന്നതിന് $E_1$, $E_2$ എന്നീ രണ്ടു ലിഫ്റ്റുകളും ഉണ്ട്. വൃക്ഷചിത്രം ഉപയോഗിച്ച് അവർക്ക് ഓഫീസിൽ പോകാൻ എത്ര വഴികൾ ഉണ്ടെന്ന് വിശദമാക്കുക.

**പ്രവർത്തി 4**

വിവരങ്ങൾ ശേഖരിച്ച് താഴെ പറയുന്ന സംഭാവ്യത കാണുക

(i) നിങ്ങളുടെ ക്ലാസ്സിൽ നിന്നും ഒരു ആൺകുട്ടിയെ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നതിന്.

(ii) നിങ്ങളുടെ ക്ലാസ്സിൽ നിന്നും ഒരു പെൺകുട്ടിയെ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നതിന്.

(iii) നിങ്ങളുടെ സ്കൂളിൽ നിന്നും പത്താം ക്ലാസിലെ ഒരു കുട്ടിയെ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നതിന്.

(iv) നിങ്ങളുടെ സ്കൂളിൽ നിന്നും പത്താം ക്ലാസിലെ ഒരാൺകുട്ടിയെ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നതിന്.

(v) നിങ്ങളുടെ സ്കൂളിൽ നിന്നും പത്താം ക്ലാസ്സിലെ ഒരു പെൺകുട്ടിയെ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നതിന്.

**ഉദാഹരണം 8.23** ഒരു സഞ്ചിയിൽ 6 പച്ച പന്തുകളും കുറച്ച് കറുപ്പും ചുവപ്പും പന്തുകളും ഉണ്ട് കറുപ്പു പന്തുകളുടെ എണ്ണം ചുവപ്പ് പന്തുകളുടെ എണ്ണത്തിനു രണ്ടുമടങ്ങാണ്. ഒരു പച്ച പന്ത് എടുക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത ഒരു ചുവപ്പ് പന്ത് എടുക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യതയുടെ മൂന്ന് മടങ്ങാണ് എങ്കിൽ (i) കറുപ്പുപന്തുകളുടെ എണ്ണം (ii) ആകെ പന്തുകളുടെ എണ്ണം കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം** പച്ച പന്തുകളുടെ എണ്ണം $n(G) = 6$

ചുവപ്പ് പന്തുകളുടെ എണ്ണം $n(R) = x$

അതുകൊണ്ട് കറുപ്പു പന്തുകളുടെ എണ്ണം $n(B) = 2x$

ആകെ പന്തുകളുടെ എണ്ണം $n(S) = 6 + x + 2x = 6 + 3x$

$P(G) = 3 \times P(R)$



8 Stats Malayalam.indd 321 10/02/2023 11:59:46

$$\frac{6}{6+3x} = 3 \times \frac{x}{6+3x}$$

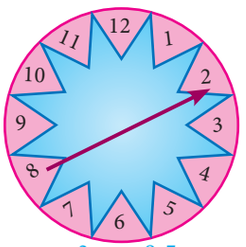
$$3x = 6 \ , \ x = 2$$

(i) കറുപ്പു പന്തുകളുടെ എണ്ണം $= 2 \times 2 = 4$

(ii) ആകെ പന്തുകളുടെ എണ്ണം $= 6 + (3 \times 2) = 12$

**ഉദാഹരണം 8.24** സാധ്യതയെ ആശ്രയിച്ചിട്ടുള്ള അമ്പ് ചുഴറ്റുന്ന കളിയിൽ അമ്പ് 1, 2, 3, ...12. എന്നീ സംഖ്യകളിൽ വന്നു നിൽക്കുന്നതിന് സമസന്ദർഭങ്ങളാണുള്ളത്. അമ്പ് താഴെ തരുന്ന സംഖ്യകളിൽ വന്നു നിൽക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക. (i) 7 (ii) ഒരു അഭാജ്യസംഖ്യ (iii) ഒരു ഭാജ്യസംഖ്യ

**നിർദ്ധാരണം** സാമ്പിൾ സ്പേസ് $S = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$; $n(S) = 12$



ചിത്രം. 8.5

(i) 7 ൽ നിൽക്കുന്ന സംഭവം $A$ എന്നിരിക്കട്ടെ. $n(A)=1$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{12}$$

(ii) ഒരു അഭാജ്യ സംഖ്യയിൽ അമ്പ് നിൽക്കുന്ന സംഭവം $B$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

$$B = \{2,3,5,7,11\}; \ n(B) = 5$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{12}$$

(iii) ഒരു ഭാജ്യ സംഖ്യയിൽ അമ്പ് നിൽക്കുന്ന സംഭവം $C$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

$$C = \{4,6,8,9,10,12\}; \ n(C)=6$$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

**ചിന്തിക്കുക**

ഒരു അസാധ്യസംഭവത്തിന്റെ പൂരക സംഭവം എന്താണ്.?

## അഭ്യാസം 8.3

1. വൃക്ഷചിത്രം ഉപയോഗിച്ച് 3 നാണയങ്ങൾ ടോസ്സിടുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന സാമ്പിൾ സ്പേസ് കാണുക.
2. 1 മുതൽ 6 വരെ അക്കമിട്ട 6 പന്തുകളുള്ള ഒരു സഞ്ചിയിൽ നിന്നും രണ്ടു പന്തുകൾ ഒരേ സമയംഎടുക്കുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന സാമ്പിൾ സ്പേസ് എഴുതുക (വൃക്ഷചിത്രം) ഉപയോഗിച്ച്.
3. ഒരു യാദൃച്ഛിക പരീക്ഷണത്തിലെ ഒരു സംഭവം $A$ ആണ്. $P(A) : P(\bar{A}) = 17:15$ കൂടാതെ $n(S)=640$ എങ്കിൽ (i) $P(\bar{A})$ (ii) $n(A)$ കാണുക.
4. ഒരു നാണയം മൂന്നു പ്രാവശ്യം ടോസ്സിടുന്നു. അടുത്തടുത്ത് രണ്ട് പൂവുകൾ കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.
5. ഒരു ഉത്സവ വേളയിൽ 1 മുതൽ 1000 വരെ അക്കമിട്ട 1000 കാർഡുകൾ ഒരു പെട്ടിയിൽ ഇട്ടിട്ടുണ്ട്. ഓരോ കളിക്കാരനും യാദൃശ്ചികമായി ഒരു കാർഡ് എടുക്കാം ഒരു പ്രാവശ്യം എടുത്ത കാർഡ് വീണ്ടും പെട്ടിയിൽ ഇടാൻ പാടില്ല. തെരെഞ്ഞെടുത്ത കാർഡിൽ 500 ൽ കൂടിയ ഒരു പൂർണ്ണവർഗ്ഗം കിട്ടിയെങ്കിൽ കാർഡ് എടുത്ത കളിക്കാരന് സമ്മാനം ലഭിക്കുമോ? താഴെ പറയുന്ന സംഭാവ്യത കാണുക (i) ആദ്യത്തെകളിക്കാരന് സമ്മാനം കിട്ടുന്നതിന് (ii) ആദ്യത്തെ കളിക്കാരന് സമ്മാനം കിട്ടിയതിനു ശേഷം രണ്ടാമത്തെ കളിക്കാരനു സമ്മാനം കിട്ടുന്നതിന് ?
6. ഒരു സഞ്ചിയിൽ 12 നീല പന്തുകളും $x$ ചുവപ്പു പന്തുകളും ഉണ്ട്. (i) ഒരു ചുവപ്പ് പന്ത് കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത് ? (ii) 8 ചുവപ്പ് പന്തുകൾ കൂടുതലായി സഞ്ചിയിലിട്ടാൽ കൂടാതെ ചുവപ്പ് പന്ത് എടുക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത 1-ാമത്തെ ചോദ്യത്തിലുള്ള സംഭാവ്യതയെക്കാൾ രണ്ട് മടങ്ങാണ്. എങ്കിൽ $x$ കാണുക.
7. രണ്ട് പകിടകൾ ഒരേസമയത്ത് ഉരുട്ടുന്നു.

(i) രണ്ടു പകിടയിലും ഒരേ സംഖ്യ (ii) ഗുണനഫലം ഒരു അഭാജ്യ സംഖ്യ

(iii) തുക ഒരു അഭാജ്യസംഖ്യ (iv) തുക 1 കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക



8 Stats Malayalam.indd 322 10/02/2023 11:59:49

8. മൂന്നു നാണയങ്ങൾ ഒരേ സമയം ടോസ്സിട്ടാൽ താഴെ പറയുന്ന സംഭാവ്യത കാണുക
(i) എല്ലാം തലകൾ (ii) കുറഞ്ഞത് ഒരു പൂവ്
(iii) അധികപക്ഷമായി ഒരു തല (iv) അധികപക്ഷമായി രണ്ടു പൂവുകൾ

9. ഒരു സഞ്ചയിൽ 5 ചുവപ്പ് പന്തുകളും 6 വെള്ള പന്തുകളും 7 പച്ചപന്തുകളും 8 കറുപ്പു പന്തുകളും ഉണ്ട്. യാദൃശ്ചികമായി സഞ്ചയിൽ നിന്നും ഒരു പന്ത് എടുക്കുന്നു.
(i) വെള്ള (ii) കറുപ്പ് അല്ലെങ്കിൽ ചുവപ്പ്
(iii) വെള്ള അല്ലാതിരിക്കുന്നതിന് (iv) വെള്ളയുമല്ല കറുപ്പുമല്ല. സംഭാവ്യത കാണുക

10. ഒരു പെട്ടിയിൽ 20 നല്ല ബൾബുകളും കുറച്ചു കേടായ ബൾബുകളും ഉണ്ട് യാദൃശ്ചികമായി ഒരു ബൾബു തെരഞ്ഞെടുത്താൽ അത് കേടായിരിക്കുന്നതിനു ള്ള സംഭാവ്യത $\frac{3}{8}$ എങ്കിൽ കേടായ ബൾബുകളുടെ എണ്ണം കാണുക.

11. കുറച്ചു കുട്ടികൾ ഒരു കളി കളിക്കുകയാണ്. അതിൽ എറിയുന്ന കല്ല് വൃത്തത്തിനകത്ത് പതിക്കുകയാണെങ്കിൽ ജയിച്ചതായും വൃത്തത്തിനു വെളിയിൽ പതിക്കുകയാണെങ്കിൽ തോറ്റതായും കണക്കാക്കുന്നു. കളി ജയിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക ( $\pi$ = 3.14).

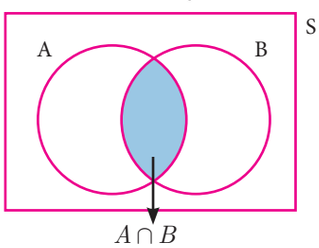
12. രണ്ട് ഉപഭോക്താക്കളായ പ്രിയയും അമുതയും ഒരേ ആഴ്ചയിൽ (തിങ്കൾ മുതൽ ശനി) ഒരു പ്രത്യേക കടയിൽ സന്ദർശനം നടത്തുന്നു. ഓരോരുത്തർക്കും ഓരോ ദിവസവും കട സന്ദർശിക്കുന്നതിനുള്ള സാധ്യത തുല്യമാണ് രണ്ടുപേരും ഒന്നിച്ചു താഴെ പറയുന്ന ദിവസങ്ങളിൽ കട സന്ദർശിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക
(i) ഒരേ ദിവസം (ii) വ്യത്യസ്ത ദിവസങ്ങളിൽ (iii) അടുത്തടുത്ത ദിവസങ്ങളിൽ.

13. ഒരു കളിയിലെ പ്രവേശനഫീസ് ₹150 ആണ്. ഒരു നാണയം മൂന്നു പ്രാവശ്യം ടോസ്സിടുന്നതാണ് കളി. ധനയ്ക്ക് അകത്തു പ്രവേശിക്കുന്നതിനുള്ള ഒരു ടിക്കറ്റ് കിട്ടി. ഒന്ന് അല്ലെങ്കിൽ രണ്ട് തലകൾ ലഭിക്കുകയാണെങ്കിലും അവളുടെ പ്രവേശന ഫീസ് തിരികെ കിട്ടുന്നതാണ്. അവൾക്ക് 3 തലകൾ കിട്ടിയാൽ പ്രവേശന ഫീസിന്റെ ഇരട്ടി തിരിച്ചു കിട്ടുന്നതാണ്. അല്ലെങ്കിൽ പ്രവേശന ഫീസ് നഷ്ടമാകും (i) ഇരട്ടി പ്രവേശന ഫീസ് (ii) അവളുടെ പ്രവേശനഫീസ് (iii) പ്രവേശനഫീസ് നഷ്ടമാകുക എന്നിവയ്ക്കുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

## 8.5 സംഭവങ്ങളുടെ ബീജഗണിതം

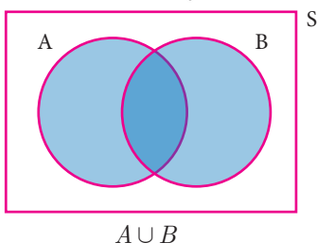
ഒരു യാദൃശ്ചിക പരീക്ഷണത്തിൽ സാമ്പിൾ സ്പേസ് $S$ എന്നിരിക്കട്ടെ. $A \subseteq S$ കൂടാതെ $B \subseteq S$ എന്നിവ $S$. ന്റെ രണ്ടു സംഭവങ്ങൾ എന്നിരിക്കട്ടെ. എന്നാൽ

(i) $(A \cap B)$ എന്ന സംഭവം $A$ യിലും $B$ യിലും വരുമ്പോഴാണ് സംഭവിക്കുന്നത്.



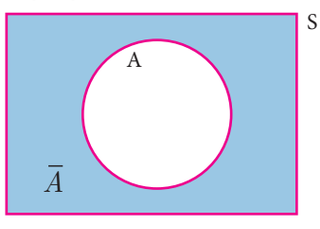

ചിത്രം. 8.6(a)

(ii) $(A \cup B)$ എന്ന സംഭവം $A$ യിലോ $B$ യിലോ വരുമ്പോഴാണ് സംഭവിക്കുന്നത്..




ചിത്രം. 8.6(b)

(iii) $\overline{A}$ എന്ന സംഭവം $A$ യിൽ വരാതിരിക്കുമ്പോൾ സംഭവിക്കുന്നു




ചിത്രം. 8.6(c)

**കുറിപ്പ്**

- $A \cap \overline{A} = \phi$
- $A \cup \overline{A} = S$
- $A$, യും $B$ യും പരസ്പര വർജ്ജക സംഭവങ്ങളാണെങ്കിൽ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P$(പരസ്പര വർജ്ജക സംഭവങ്ങളുടെ യോഗം) = $\sum$( സംഭവങ്ങളുടെ സംഭാവ്യത)



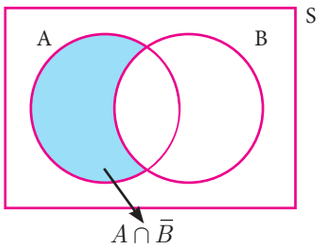
8 Stats Malayalam.indd 323 10/02/2023 11:59:50

**സിദ്ധാന്തം 1**

ഒരു യാദൃശ്ചിക സംഭവത്തിലെ രണ്ടു സംഭവങ്ങളാണ് $A$, $B$ എങ്കിൽ

(i) $P(A \cap \bar{B}) = P(A \text{ മാത്രം}) = P(A) - P(A \cap B)$

(ii) $P(\bar{A} \cap B) = P(B \text{ മാത്രം}) = P(B) - P(A \cap B)$



ചിത്രം. 8.7

**തെളിവ്**

(i) ഗണങ്ങളുടെ വിതരണ നിയമം അനുസരിച്ച്,

1. $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A \cap (B \cup \bar{B}) = A \cap S = A$
2. $(A \cap B) \cap (A \cap \bar{B}) = A \cap (B \cap \bar{B}) = A \cap \phi = \phi$

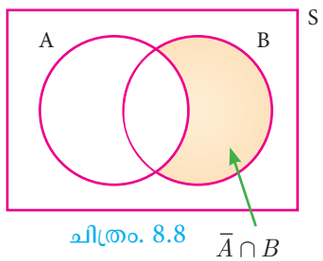
അതുകൊണ്ട് $A \cap B$ കൂടാതെ $A \cap \bar{B}$ എന്നീ പരസ്പര വർജ്ജക സംഭവങ്ങളുടെ യോഗമാണ് $A$.

അതുകൊണ്ട്, $P(A) = P\left[(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})\right]$

$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$

അതുകൊണ്ട്, $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

അതായത്, $P(A \cap \bar{B}) = P(A \text{ മാത്രം}) = P(A) - P(A \cap B)$



ചിത്രം. 8.8

(ii) ഗണങ്ങളുടെ വിതരണ നിയമം ഉപയോഗിച്ച്

1. $(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B) = (A \cup \bar{A}) \cap B = S \cap B = B$
2. $(A \cap B) \cap (\bar{A} \cap B) = (A \cap \bar{A}) \cap B = \phi \cap B = \phi$

അതുകൊണ്ട്, $A \cap B$ കൂടാതെ $\bar{A} \cap B$ എന്നീ പരസ്പര വർജ്ജക സംഭവങ്ങളുടെ യോഗമാണ് $B$.

$P(B) = P\left[(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)\right]$

$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$

അതുകൊണ്ട്, $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

അതായത് , $P(\bar{A} \cap B) = P(B \text{ മാത്രം}) = P(B) - P(A \cap B)$

**പുരോഗതി പരിശോധന**

1. $P(A \text{ മാത്രം}) =$ _____. 2. $P(\bar{A} \cap B) =$ _____.
3. $A \cap B$ കൂടാതെ $\bar{A} \cap B$ യും _____ സംഭവങ്ങളാണ്.
4. $P(\bar{A} \cap \bar{B}) =$ _____.
5. $A$ , $B$ എന്നിവ പരസ്പരവർജ്ജക സംഭവങ്ങളാണെങ്കിൽ $P(A \cap B) =$ _____.
6. $P(A \cap B) = 0.3$, $P(\bar{A} \cap B) = 0.45$ എങ്കിൽ $P(B) =$_____.

## 8.6 സംഭാവ്യതയുടെ സങ്കലന സിദ്ധാന്തം

(i) $A$, $B$ രണ്ടു സംഭവങ്ങളാണെങ്കിൽ

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



8 Stats Malayalam.indd 324 10/02/2023 11:59:55

(ii) $A, B, C$ എന്നിവ മൂന്ന് സംഭവങ്ങളാണെങ്കിൽ

$$P\left(A \cup B \cup C\right) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

**തെളിവ്**

(i) $A, B$ എന്നീ രണ്ടു സംഭവങ്ങളുള്ള ഒരു യാദൃശ്ചിക പരീക്ഷണത്തിലെ സാമ്പിൾ സ്പേസ് $S$ ആണ്.

വെൻചിത്രത്തിൽ നിന്ന് $A$ മാത്രം $A \cap B$ കൂടാതെ $B$ മാത്രം എന്നിവ പരസ്പര വർജ്ജക സംഭവങ്ങളാണ് കൂടാതെ അവയുടെ യോഗം $A \cup B$ ആണ്

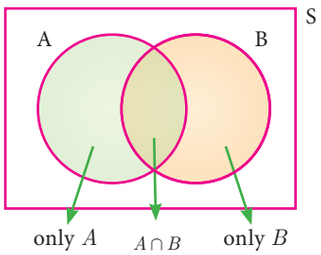
അതുകൊണ്ട്, $P(A \cup B) = P[\text{(A മാത്രം)} \cup (A \cap B) \cup (B \text{ മാത്രം})]$

$$= P(A \text{ മാത്രം}) + P(A \cap B) + P(B \text{ മാത്രം})$$

$$= [P(A) - P(A \cap B)] + P(A \cap B) + [P(B) - P(A \cap B)]$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

(ii) സാമ്പിൾസ്പേസ് $S$ ഉള്ള ഒരു യാദൃശ്ചിക പരീക്ഷണത്തിൽ $A$, $B$, $C$ എന്നിവ മൂന്നു സംഭവങ്ങളാണ്.



ചിത്രം. 8.9

$$D = B \cup C$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup D)$$

$$= P(A) + P(D) - P(A \cap D)$$

$$= P(A) + P(B \cup C) - P[A \cap (B \cup C)]$$

$$= P(A) + P(\mathrm{B}) + P(C) - P(B \cap C) - P[(A \cap B) \cup (A \cap C)]$$

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P[(A \cap B) \cap (A \cap C)]$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$$

## പ്രവർത്തി 5

സംഭാവ്യതയുടെ സങ്കലന സിദ്ധാന്തം താഴെ പറയുന്ന രീതിയിൽ എളുപ്പത്തിൽ എഴുതാൻ സാധിക്കും.

$$P(A \cup B) = S_1 - S_2$$

$$P(A \cup B \cup C) = S_1 - S_2 + S_3$$

ഇവിടെ $S_1 \rightarrow$ സംഭവങ്ങളുടെ സംഭാവ്യതയുടെ സങ്കലനം ഒരു സമയം ഒന്നെടുക്കുമ്പോൾ.

$S_2 \rightarrow$ സംഭവങ്ങളുടെ സംഭാവ്യതയുടെ സങ്കലനം ഒരു സമയം രണ്ടെടുക്കുമ്പോൾ.

$S_3 \rightarrow$ സംഭവങ്ങളുടെ സംഭാവ്യതയുടെ സങ്കലനം ഒരു സമയം മൂന്നെടുക്കുമ്പോൾ.

$$P(A \cup B) = \underbrace{P(A) + P(B)}_{S_1} \quad \underbrace{-P(A \cap B)}_{S_2}$$

$$P(A \cup B \cup C) = \underbrace{P(A) + P(B) + P(C)}_{S_1} \quad \underbrace{-(P(A \cap B) + P(B \cap C) + P(A \cap C))}_{S_2} \quad \underbrace{+P(A \cap B \cap C)}_{S_3}$$

മുകളിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള രീതിയിൽ $P(A \cup B \cup C \cup D)$ യുടെ സംഭാവ്യത കാണുക. ഈ സൂത്രവാക്യത്തിൽ വരുന്ന പദങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിന് ഒരു പട്ടിക തയ്യാറാക്കാൻ സാധിക്കുമോ?



8 Stats Malayalam.indd 325 10/02/2023 12:00:00

**ഉദാഹരണം 8.25** $P(\mathrm{A}) = 0.37$ , $P(\mathrm{B}) = 0.42$ , $P(A \cap B) = 0.09$ എങ്കിൽ $P(A \cup B)$ കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം** $P(\mathrm{A}) = 0.37$ , $P(\mathrm{B}) = 0.42$ , $P(A \cap B) = 0.09$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cup B) = 0.37 + 0.42 - 0.09 = 0.7$$

**ഉദാഹരണം 8.26** 80 മഞ്ഞപ്പൂക്കളും 70 ചുവപ്പു പൂക്കളും 50 വെള്ള പൂക്കളും ഉള്ള ഒരു സഞ്ചിയിൽ നിന്നും ഒരു പൂവ് യാദൃശ്ചികമായി എടുക്കുന്നു എങ്കിൽ ആ പൂവ് ഒരു മഞ്ഞ അല്ലെങ്കിൽ ഒരു ചുവപ്പ് ആകാനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക

**നിർദ്ധാരണം**

ആകെ പൂക്കളുടെ എണ്ണം $n(S) = 80+70+50 = 200$

മഞ്ഞപ്പൂക്കളുടെ എണ്ണം $n(Y) = 80,\ P(Y) = \dfrac{n(Y)}{n(S)} = \dfrac{80}{200}$

ചുവപ്പ് പൂക്കളുടെ എണ്ണം $n(R) = 70,\ P(R) = \dfrac{n(R)}{n(S)} = \dfrac{70}{200}$

Y ഉം Rഉം പരസ്പരം വർജ്ജകങ്ങളാണ് അതുകൊണ്ട് $P(Y \cap R) = 0$

$$P(Y \cup R) = P(Y) + P(R)$$

അതുകൊണ്ട് മഞ്ഞ അല്ലെങ്കിൽ ചുവപ്പ് പൂവ് ലഭിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത

$$P(Y \cup R) = \frac{80}{200} + \frac{70}{200} = \frac{150}{200} = \frac{3}{4}$$

**ഉദാഹരണം 8.27** രണ്ടു പകിടകൾ ഒരേ സമയം ഉരുട്ടുന്നു. മുഖ സംഖ്യകളിൽ ഒരേ സംഖ്യ അല്ലെങ്കിൽ തുക 4 കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക..

**നിർദ്ധാരണം** രണ്ടു പകിടകൾ ഒരേ സമയം ഉരുട്ടിയാൽ $6 \times 6 = 36$ ഫലങ്ങൾ കാണും. സാമ്പിൾ സ്പേസ് $S$ എന്നിരിക്കട്ടെ. $n(S) = 36$

മുഖസംഖ്യകളിൽ ഒരേ സംഖ്യ കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭവം $A$ എന്നിരിക്കട്ടെ, തുക 4 കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭവം $B$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

അതുകൊണ്ട് $A = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$

$B = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$

അതുകൊണ്ട് , $A \cap B = \{(2,2)\}$

അതുകൊണ്ട് , $n(A) = 6$ , $n(B) = 3$ , $n(A \cap B) = 1$ .

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{36}$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{1}{36}$$

അതുകൊണ്ട് , $P$ (മുഖ സംഖ്യകളിൽ ഒരേ സംഖ്യ അല്ലെങ്കിൽ തുക $4$ കിട്ടുന്നതിന്) = $P(A \cup B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



8 Stats Malayalam.indd 326 10/02/2023 12:00:04

$$= \frac{6}{36} + \frac{3}{36} - \frac{1}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

ആവശ്യപ്പെട്ട സംഭാവ്യത $\frac{2}{9}$ ആണ്.

**ഉദാഹരണം 8.28** $A, B$ എന്നിവ രണ്ടു സംഭവങ്ങളെങ്കിൽ $P(A) = \frac{1}{4}$ , $P(B) = \frac{1}{2}$ കൂടാതെ $P(A$ യും $B$ യും$) = \frac{1}{8}$ ,എങ്കിൽ (i) $P(A$ അല്ലെങ്കിൽ $B)$ (ii) $P(A$ യും അല്ല $B$ യും അല്ല).

**നിർദ്ധാരണം** (i) $P(A$അല്ലെങ്കിൽ$B) = P(A \cup B)$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \text{ അല്ലെങ്കിൽ } B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

(ii) $P(A$ യും അല്ല $B$ യും അല്ല$) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$

$$= P\left(\overline{A \cup B}\right)$$

$$= 1 - P\left(A \cup B\right)$$

$$P(A \text{ യും അല്ല } B \text{ യും അല്ല}) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

**ഉദാഹരണം 8.29** ഒന്നു മുതൽ നൂറു വരെ ഡോർ നമ്പർ ഉള്ള ഒരു അപ്പാർട്ട്മെന്റിൽ നിന്നും ഒരു വീട് യാദൃശ്ചികമായി എടുത്താൽ ആ വീടിൻറെ ഡോർ നമ്പർ ഒരു ഇരട്ട സംഖ്യ അല്ലെങ്കിൽ ഒരു പൂർണ്ണവർഗ്ഗം അല്ലെങ്കിൽ ഒരു പൂർണ്ണഘന സംഖ്യ ആകുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക

**നിർദ്ധാരണം**

ആകെ വീടുകളുടെ എണ്ണം $n(S) = 100$

ഡോർ നമ്പർ ഇരട്ടസംഖ്യ കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭവം A എന്നിരിക്കട്ടെ

A = {2, 4, 6, 8 ..... 100}

$$n(A) = 50$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{50}{100}$$

ഡോർ നമ്പർ ഒരു പൂർണ്ണ വർഗ്ഗ സംഖ്യയാകുന്നതിനുള്ള സംഭവം B എന്നിരിക്കട്ടെ

B = {1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100}

$$n(B) = 10$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{10}{100}$$

ഡോർ നമ്പർ പൂർണ്ണഘന സംഖ്യ ആകുന്നതിനുള്ള സംഭവം C എന്നിരിക്കട്ടെ

C = {1, 8, 9, 27, 64}

$$n(C) = 4$$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{4}{100}$$



8 Stats Malayalam.indd 327 10/02/2023 12:00:06

$P(A \cap B) = P$ [പൂർണ്ണ വർഗ്ഗമായ ഇരട്ടസംഖ്യ] $= \frac{5}{100}$

$P(B \cap C) = P$ [പൂർണ്ണവർഗ്ഗവും പൂർണ്ണഘനവും ആയ സംഖ്യ] $= \frac{2}{100}$

$P(A \cap C) = P$ [പൂർണ്ണഘനമായ ഇരട്ടസംഖ്യ]$= \frac{2}{100}$

$P(A \cap B \cap C) = P$ [പൂർണ്ണവർഗ്ഗവും പൂർണ്ണഘനവും ആയ ഇരട്ടസംഖ്യ]$= \frac{1}{100}$

അതുകൊണ്ട് ആവശ്യപ്പെട്ട സംഭാവ്യത

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$= \frac{50}{100} + \frac{10}{100} + \frac{4}{100} - \frac{5}{100} - \frac{2}{100} - \frac{2}{100} + \frac{1}{100} = \frac{65}{100} - \frac{9}{100} = \frac{56}{100} = \frac{14}{25}$$

**ഉദാഹരണം 8.30** 50 വിദ്യാർത്ഥികളുള്ള ഒരു ക്ലാസ്സിൽ 28 പേർ NCC യും 30 പേർ NSS വും കൂടാതെ 18 പേർ NCC, NSS രണ്ടിലും ചേർന്നു. യാദൃശ്ചികമായി ഒരു വിദ്യാർത്ഥി തെരഞ്ഞെടുക്കപ്പെടുന്നു എങ്കിൽ

(i) NCCയിൽ ചേർന്നും NSS ൽ ചേരാത്തതുമായ വിദ്യാർത്ഥികൾ.

(ii) NSS യിൽ ചേർന്നും NCC ൽ ചേരാത്തതുമായ വിദ്യാർത്ഥികൾ.

(iii) കൃത്യമായി ഒന്നിൽ മാത്രം ചേരുന്ന വിദ്യാർത്ഥികൾ എന്നിവയുടെ സംഭാവ്യത കാണുക.

**നിർദ്ധാരണം** ആകെ വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം $n(S) = 50$.

$A$, $B$ എന്നിവ NCC , NSS ൽ ചേരുന്ന വിദ്യാർത്ഥികളുടെ സംഭവം എന്നിരിക്കട്ടെ.

$n(A) = 28$ , $n(B) = 30$ , $n(A \cap B) = 18$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{28}{50}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{30}{50}$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{18}{50}$$

(i) NCC യിൽ ചേർന്നു NSS ൽ ചേരാത്ത വിദ്യാർത്ഥികളുടെ സംഭാവ്യത

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{28}{50} - \frac{18}{50} = \frac{1}{5}$$

(ii) NSS ൽ ചേർന്നു NCC ൽ ചേരാത്ത വിദ്യാർത്ഥികളുടെ സംഭാവ്യത.

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{30}{50} - \frac{18}{50} = \frac{6}{25}$$

(iii) കൃത്യമായി ഒന്നിൽ മാത്രം ചേർന്ന വിദ്യാർത്ഥികളുടെ സംഭാവ്യത

$$= P[(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)]$$

$$= P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) = \frac{1}{5} + \frac{6}{25} = \frac{11}{25}$$

(കുറിപ്പ് $(A \cap \bar{B}), (\bar{A} \cap B)$ എന്നിവ പരസ്പര വർജ്ജക സംഭവങ്ങളാണ്)



8 Stats Malayalam.indd 328 10/02/2023 12:00:10

**ഉദാഹരണം 8.31** $A$ യും $B$ യും $IIT$ യിൽ ചേരാൻ ശ്രമിക്കുന്ന രണ്ടു വിദ്യാർത്ഥികളാണ്. $A$ തെരഞ്ഞെടുക്കപ്പെടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത $0.5$ $A$ യും $B$ യും തെരഞ്ഞെടുക്കപ്പെടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത $0.3$ ആണ്. $B$ തെരഞ്ഞെടുക്കപ്പെടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത. അധികപക്ഷമായി $0.8$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

**നിർദ്ധാരണം** $P(A) = 0.5$, $P(A \cap B) = 0.3$

$$P(A \cup B) \leq 1$$

$$P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) - P(A \cap B) \leq 1$$

$$0.5 + P(B) - 0.3 \leq 1$$

$$P(B) \leq 1 - 0.2$$

$$P(B) \leq 0.8$$

അതുകൊണ്ട്, $B$ തെരഞ്ഞെടുക്കപ്പെടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത അധികപക്ഷമായി $0.8$ ആണ്.

## അഭ്യാസം 8.4

1. If $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{2}{5}$, $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$ എങ്കിൽ $P(A \cap B)$ കാണുക.
2. $A$, $B$ എന്നിവ രണ്ടു സംഭാവങ്ങളാണെങ്കിൽ, $P(A) = 0.42$, $P(B) = 0.48$, കൂടാതെ $P(A \cap B) = 0.16$. (i) $P(A$ അല്ല) (ii) $P(B$ അല്ല) (iii) $P(A$ അല്ലെങ്കിൽ $B)$
3. $A, B$ എന്നിവ ഒരു യാദൃശ്ചിക പരീക്ഷണത്തിലെ പരസ്പര വർജ്ജക സംഭവങ്ങളാണ് കൂടാതെ $P(A$ അല്ല) $= 0.45$, $P(A \cup B)$ =0.65, എങ്കിൽ $P(B)$ കാണുക.
4. കുറഞ്ഞ പക്ഷം $A$ യോ $B$ യോ സംഭവിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത $0.6$ $A$ യും $B$ യും ഒരേ സമയം വരുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത $0.2$ എങ്കിൽ $P(\bar{A}) + P(\bar{B})$ കാണുക.
5. $A, B$ എന്നിവ സംഭവിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത യഥാക്രമം $0.5, 10.3$ ആണ്. $A,B$ എന്നിവ പരസ്പര വർജ്ജക സംഭവങ്ങളാണെങ്കിൽ $A$ യും $B$യും സംഭവിക്കാതിരിക്കാനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക..
6. രണ്ടു പകിടകൾ ഒരു പ്രാവശ്യം ഉരുട്ടുന്നു. ആദ്യത്തെ പ്രാവശ്യം ഉരുട്ടുമ്പോൾ ഒരു ഇരട്ടസംഖ്യ കിട്ടുന്നതിന് അല്ലെങ്കിൽ രണ്ട് ഉരുട്ടലിലും മുഖ സംഖ്യകളുടെ തുക $8$ കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.
7. ഒരു പെട്ടിയിൽ $3,5,7,9, \ldots 35,37$ എന്നീ അക്കമിട്ടകാർഡുകളുണ്ട്. പെട്ടിയിൽ നിന്നും യാദൃശ്ചികമായി ഒരു കാർഡ് തെരഞ്ഞെടുത്താൽ $7$ ന്റെ ഗുണിതങ്ങൾ അല്ലെങ്കിൽ ഒരു അഭാജ്യ സംഖ്യ ആയിരിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.
8. $3$ നാണയങ്ങൾ ഒരേ സമയം ടോസ്സിടുന്നു. അധിക പക്ഷമായി $2$ പൂവുകൾ അല്ലെങ്കിൽ കുറഞ്ഞപക്ഷ $2$ തലകൾ ലഭിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക..
9. ഒരാൾക്ക് വൈദ്യുതീകരിക്കേണ്ട കരാറിനുള്ള സംഭാവ്യത $\frac{3}{5}$ കൂടാതെ പ്ലംബിങ്ങ് കരാറിനുള്ള സംഭാവ്യത $\frac{5}{8}$. കുറഞ്ഞപക്ഷം ഒരു കരാർ ലഭിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത $\frac{5}{7}$. രണ്ടു കരാറും ലഭിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക?
10. ഒരു പട്ടണത്തിലെ $8000$ ആളുകളിൽ $13000$ പേർ $50$ വയസ്സിനു മുകളിലുള്ളവരും $3000$ പേർ സ്ത്രീകളും ആണ്. $30\%$ സ്ത്രീകൾ $50$ വയസ്സിനു മുകളിലുള്ളവരാണ്. പട്ടണത്തിൽ നിന്നും



8 Stats Malayalam.indd 329 10/02/2023 12:00:13

ഒരാളിനെ തെരഞ്ഞെടുത്താൽ അത് ഒരു സ്ത്രീയോ അല്ലെങ്കിൽ 50 വയസ്സിനു മുകളിലുള്ളവരോ ആയിരിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക?

11. ഒരു നാണയം മൂന്നു പ്രാവശ്യം ടോസ്സിടുന്നു. കൃത്യമായി രണ്ട് തലകൾ അല്ലെങ്കിൽ കുറഞ്ഞപക്ഷം ഒരു പൂവ് അല്ലെങ്കിൽ തുടർച്ചയായി രണ്ടു തലകൾ ലഭിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

12. $A, B, C$ എന്നിവ ഏതെങ്കിലും മൂന്ന് സംഭവങ്ങൾ $B$ യുടെ സംഭാവ്യത $A$ യുടെ സംഭാവ്യതയുടെ രണ്ടു മടങ്ങും $C$ യുടെ സംഭാവ്യത $A$ യുടെ സംഭാവ്യതയുടെ മൂന്നു മടങ്ങും ആയിരിക്കും കൂടാതെ $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$, $P(B \cap C) = \frac{1}{4}$, $P(A \cap C) = \frac{1}{8}$, $P(A \cup B \cup C) = \frac{9}{10}$, $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{15}$, എങ്കിൽ $P(A), P(B)$ , $P(C)$ കാണുക?

13. ഒരു ക്ലാസ്സിലെ35 കുട്ടികൾക്ക്1 മുതൽ35 വരെ അക്കമിട്ടു. ആൺകുട്ടികൾക്കും പെൺകുട്ടികൾക്കും ഉള്ള അംശബന്ധം 4:3 ആൺകുട്ടികളുടെ ക്രമസംഖ്യ ആദ്യവും പെൺകുട്ടികളുടേത് രണ്ടാമതും ആണ് വരുന്നത്. ഇതിൽ നിന്നും ഒരു കുട്ടിയെ തെരെഞ്ഞെടുത്താൽ അത് അഭാജ്യ ക്രമസംഖ്യയുള്ള ആൺകുട്ടി അല്ലെങ്കിൽ ഭാജ്യസംഖ്യയുള്ള പെൺകുട്ടി അല്ലെങ്കിൽ ഇരട്ട ക്രമസംഖ്യ ആയിരിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

## അഭ്യാസം 8.5

### ശരിയായ ഉത്തരം തെരെഞ്ഞെടുത്തെഴുതുക

1. താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയിൽ ഏതാണ് വ്യതിയാന വ്യാപ്തിയുടെ അളവല്ലാത്തത്?
   (A) റേഞ്ച് (B) പ്രമാണ ചലനം
   (C) സമാന്തര മാധ്യം (D) വ്യതിയാന വർഗ്ഗ ശരാശരി

2. $8, 8, 8, 8, 8 \ldots 8$ എന്ന ദത്തത്തിന്റെ റേഞ്ച്
   (A) 0 (B) 1 (C) 8 (D) 3

3. സമാന്തരമാധ്യത്തിൽ നിന്നും വിവരങ്ങളുടെ വ്യതിയാനങ്ങളുടെ തുക
   (A) എല്ലായ്പ്പോഴും ധനം (B) എല്ലായ്പ്പോഴും ഋണം (C) പൂജ്യം (D) പൂജ്യമല്ലാത്ത പൂർണ്ണാങ്കം

4. 100 ഇനങ്ങളുടെ മാധ്യം 40 പ്രമാണ വിചലനം 3 ആണ്. നിരീക്ഷണങ്ങളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുക
   (A) 40000 (B) 160900 (C) 160000 (D) 30000

5. ആദ്യത്തെ 20 നിസ്സർഗ്ഗസംഖ്യകളുടെ വ്യതിയാന വർഗ്ഗ ശരാശരി
   (A) 32.25 (B) 44.25 (C) 33.25 (D) 30

6. വിവരങ്ങളുടെ പ്രമാണ വിചലനം 3 ഓരോ മൂല്യത്തിനെയും 5 കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ പുതിയ വ്യതിയാന വർഗ്ഗ ശരാശരി
   (A) 3 (B) 15 (C) 5 (D) 225

7. $x, y, z$ന്റെ പ്രമാണ വിചലനം $p$ എന്നാൽ $3x + 5$ , $3y + 5$ , $3z + 5$ എന്നിവയുടെ പ്രമാണ വിചലനം
   (A) $3p + 5$ (B) $3p$ (C) $p + 5$ (D) $9p + 15$

8. ചില വിവരങ്ങളുടെ സമാന്തരമാധ്യവും വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം യഥാക്രമം 4, 87.5% എന്നാൽ പ്രമാണ വിചലനം
   (A) 3.5 (B) 3 (C) 4.5 (D) 2.5



8 Stats Malayalam.indd 330 10/02/2023 12:00:14

9. താഴെ പറയുന്നവയിൽ ഏതാണ് തെറ്റ്?

(A) $P(A) > 1$ (B) $0 \leq P(A) \leq 1$ (C) $P(\phi) = 0$ (D) $P(A) + P(\bar{A}) = 1$

10. ഒരു ഭരണിയിൽ $p$ ചുവപ്പു മാർബിളുകളും, $q$ നീല മാർബിളുകളും, r പച്ച മാർബിളുകളും ഉണ്ട്. ഒരു ചുവപ്പു മാർബിൾ കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത

(A) $\frac{q}{p+q+r}$ (B) $\frac{p}{p+q+r}$ (C) $\frac{p+q}{p+q+r}$ (D) $\frac{p+r}{p+q+r}$

11. ഒരു പുസ്തകത്തിൽ നിന്നും യാദൃശ്ചികമായി ഒരു പേജ് തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. ആ പേജിന്റെ ക്രമസംഖ്യയുടെ ഒന്നാം സ്ഥാനത്തു വരുന്ന അക്കം 7 നെക്കാൾ കുറവായിരിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത

(A) $\frac{3}{10}$ (B) $\frac{7}{10}$ (C) $\frac{3}{9}$ (D) $\frac{7}{9}$

S6ENC

12. ഒരാൾക്ക് ജോലി കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത $\frac{x}{3}$. ജോലി കിട്ടാതിരിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത $\frac{2}{3}$ എന്നാൽ $x$ ന്റെ വില

(A) 2 (B) 1 (C) 3 ( D )

1.5

13. കമലം ഒരു നറുക്കെടുപ്പു മൽസരത്തിൽ പങ്കെടുത്തു. 135 ടിക്കറ്റുകൾ വിറ്റു. കമലം ജയിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത $\frac{1}{9}$,കമലം വാങ്ങിയ ടിക്കറ്റുകളുടെ എണ്ണം

(A) 5 (B) 10 (C) 15 (D) 20

14. ഇംഗ്ലീഷ് അക്ഷരമാല $\{a, b, \ldots, z\}$, ൽ നിന്നും യാദൃശ്ചികമായി ഒരു അക്ഷരം തെരഞ്ഞെടുത്താൽ അത് $x$ നും മുൻപേ വരുന്ന അക്ഷരങ്ങൾ ആയിരിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത

(A) $\frac{12}{13}$ (B) $\frac{1}{13}$ (C) $\frac{23}{26}$ (D) $\frac{3}{26}$

15. ഒരു പണസഞ്ചിയിൽ ₹2000 യുടെ 10 നോട്ടുകളും ₹500 ന്റെ 15 നോട്ടുകളും, ₹200 ന്റെ 25 നോട്ടുകളും ഉണ്ട്. ഒരു നോട്ട് യാദൃശ്ചികമായി തെരഞ്ഞെടുത്താൽ ₹500 ന്റെ നോട്ടോ അല്ലെങ്കിൽ ₹200 ന്റെ നോട്ടോ ആയിരിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത?

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{3}{10}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{4}{5}$

## യൂണിറ്റ് അഭ്യാസം - 8

1. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ആവൃത്തി വിതരണത്തിന്റെ സമാന്തര മാധ്യം 62.8 കൂടാതെ ആവൃത്തികളുടെ തുക 50 ഉം ആണ്. വിട്ടുപോയ ആവൃത്തികൾ $f_1$ $f_2$ കാണുക.

| വർഗ്ഗാന്തരം | 0-20 | 20-40 | 40-60 | 60-80 | 80-100 | 100-120 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ആവൃത്തി | 5 | $f_1$ | 10 | $f_2$ | 7 | 8 |

2. ഒരു രൂപരേഖയിലുള്ള വൃത്തങ്ങളുടെ വ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ (mm) താഴെ തന്നിട്ടുണ്ട്.

| വ്യാസാർദ്ധം | 33-36 | 37-40 | 41-44 | 45-48 | 49-52 |
|---|---|---|---|---|---|
| വൃത്തങ്ങളുടെ എണ്ണം | 15 | 17 | 21 | 22 | 25 |

പ്രമാണ വിചലനം കണക്കാക്കുക.



8 Stats Malayalam.indd 331 10/02/2023 12:00:17

3. ആവൃത്തി വിതരണം താഴെ തന്നിട്ടുണ്ട്.

| $x$ | $k$ | $2\,k$ | $3\,k$ | $4\,k$ | $5\,k$ | $6\,k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

പട്ടികയിൽ $k$ ധനസംഖ്യയാണ്, വ്യതിയാന വർഗ്ഗശരാശരി 160 ആണ്. $k$ യുടെ മൂല്യം കാണുക.

4. ചില താപനില വിവരങ്ങളുടെ പ്രമാണ വിചലനം ഡിഗ്രി സെൽഷ്യസിൽ ($^{o}$C) 5 ആണ് വിവരങ്ങളെ ഡ്രിഗ്രിഫാരൻഹീറ്റിൽ ($^{o}$F) മാറ്റിയാണ് വ്യതിയാന വർഗ്ഗശരാശരി കാണുക?

5. ഒരു വിതരണത്തിൽ, $\sum(x-5)=3$, $\sum(x-5)^2=43$, കൂടാതെ നിരീക്ഷണങ്ങളുടെ ആകെ എണ്ണം 18 എങ്കിൽ സമാന്തരമാധ്യവും പ്രമാണ വിചലനവും കാണുക.

6. രണ്ടു നഗരങ്ങളിലെ വ്യത്യസ്ത സ്ഥലങ്ങളിൽ നിലകടലയുടെ വിലകൾ താഴെ തന്നിട്ടുണ്ട്. ഏത് നഗരത്തിലാണ് വിലയ്ക്കു കൂടുതൽ സ്ഥിരത ഉള്ളത്?

| നഗരം A യിലെ വില | 20 | 22 | 19 | 23 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|
| നഗരം B യിലെ വില | 10 | 20 | 18 | 12 | 15 |

7. ശേഖരിക്കപ്പെട്ട വിവരത്തിലെ പരിസരവും പരിസരത്തിന്റെ ഗുണാങ്കവും യഥാക്രമം 20, 0.2 ആണ് എങ്കിൽ ആ വിവരത്തിന്റെ ഏറ്റവും വലിയ മൂല്യവും ഏറ്റവും ചെറിയ മൂല്യവും കാണുക.

8. രണ്ടു പകിടകൾ ടോസ്സിടുന്നു. മുഖ സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം 6 അല്ലെങ്കിൽ വ്യത്യാസം 5 ആയിരിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

9. രണ്ടു കുട്ടികളുള്ള കുടുംബങ്ങളിൽ, ഒരു കുടുംബത്തിൽ കുറഞ്ഞത് ഒരു പെൺകുട്ടി ഉണ്ടായിരിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

10. ഒരു സഞ്ചിയിൽ 5 വെള്ളയും കുറച്ചു കറുത്ത പന്തുകളും ഉണ്ട്. കറുത്ത പന്ത് തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത വെള്ള പന്ത് തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യതയുടെ രണ്ടു മടങ്ങാണ്. കറുത്ത പന്തുകളുടെ എണ്ണം കാണുക.

11. ഒരു വിദ്യാർത്ഥി അസാന വർഷ പരീക്ഷയിൽ ഇംഗ്ലീഷിലും തമിഴിലും ജയിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത 0.5 ഒന്നും ജയിക്കാതിരിക്കാനുള്ള സംഭാവ്യത 0.1 ഇംഗ്ലീഷ് പരീക്ഷ ജയിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത 0.75 തമിഴ് പരീക്ഷ ജയിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക?

12. 52 കാർഡുകളുള്ള ഒരു കശക്കിയ കെട്ടിൽ സ്പേഡ് കാർഡുകളിൽ നിന്നും ഒരു കിങ്ങ്, ഒരു ക്യൂൻ, ഒരു ജാക്ക് കാർഡ് എടുത്തുമാറ്റി. ബാക്കിയുള്ള കാർഡുകളിൽ നിന്നും ഒരു കാർഡു തെരെഞ്ഞടുത്തു. താഴെ പറയുന്ന സംഭാവ്യത കാണുക (i) ഡയമണ്ട് കാർഡ് (ii) ക്യൂൻ കാർഡ് (iii) സ്പേഡ് കാർഡ് (iv) 5 എന്ന സംഖ്യയുള്ള ഹാർട്ട് കാർഡ്.

## ഓർമ്മിക്കേണ്ടവ

- പരിസരം $= L-S$ ($L$ - ഏറ്റവും വലിയ മൂല്യം , $S$ - ഏറ്റവും ചെറിയ മൂല്യം)
- പരിസരത്തിന്റെ ഗുണാങ്കം $=\dfrac{L-S}{L+S}$; വ്യതിയാന വർഗ്ഗശരാശരി $\sigma^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}$
- പ്രമാണ വിചലനം $\sigma=\sqrt{\dfrac{\Sigma\left(x_i-\bar{x}\right)^2}{n}}$
- പ്രമാണ വിചലനം (തരം തിരിക്കാത്ത ദത്തം)



8 Stats Malayalam.indd 332 10/02/2023 12:00:17

- (i) യഥാർത്ഥ രീതി $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2}$ (ii) മാധ്യരീതി $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d_i^2}{n}}$

  (iii) അഭ്യൂഹമാധ്യരീതി $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d_i}{n}\right)^2}$

  (iv) സ്റ്റെപ്പ് ഡിവിയേഷൻ രീതി $\sigma = c \times \sqrt{\frac{\Sigma d_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d_i}{n}\right)^2}$
- ആദ്യത്തെ $n$ നിസർഗ്ഗ സംഖ്യകളുടെ പ്രമാണ വിചലനം $\sigma = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$
- പ്രമാണ വിചലനം (തരം തിരിച്ച ദത്തം)

  (i) യഥാർത്ഥ രീതി $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_i d_i^2}{N}}$ (ii) അഭ്യൂഹ മാധ്യരീതി $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_i d_i^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_i d_i}{N}\right)^2}$

  (iii) സ്റ്റെപ്പ് ഡീവിയേഷൻ രീതി $\sigma = C \times \sqrt{\frac{\Sigma f_i d_i^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_i d_i}{N}\right)^2}$
- വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം $\text{C.V} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\%$
- വ്യതിയാന ഗുണാങ്കത്തിന്റെ മൂല്യം കുറവാണെങ്കിൽ തന്നിട്ടുള്ള വിവരത്തിന്റെ നിരീക്ഷണങ്ങൾ സ്ഥിരതയുള്ളതാണ്. വ്യതിയാന ഗുണാങ്കത്തിന്റെ മൂല്യം കൂടുതലാണെങ്കിൽ തന്നുള്ള വിവരത്തിന്റെ നിരീക്ഷണങ്ങൾ സ്ഥിരതയില്ലാത്തത്.
- ഒരു യാദൃശ്ചിക പരീക്ഷണത്തിൽ എല്ലാ ഫലങ്ങളുടെയും ഗണം അറിയാവുന്നതാണ് എന്നാൽ യഥാർത്ഥ ഫലം അറിയാൻ സാധിക്കില്ല.
- സാധ്യമായ എല്ലാ ഫലങ്ങളുടെ ഗണത്തിനെയും സാമ്പിൾ സ്പേസ് എന്നു പറയുന്നു.
- A, B എന്നിവ പരസ്പരം വർജ്ജക സംഭവങ്ങളാണെങ്കിൽ $A \cap B = \phi$
- $E$ എന്ന സംഭത്തിന്റെ സംഭാവ്യത $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$

  (i) സുനിശ്ചിത സംഭാവത്തിന്റെ സംഭാവ്യത $1$ കൂടാതെ അസാധ്യ സംഭവത്തിന്റെ സംഭാവ്യത $0$ ആകുന്നു.

  (ii) $0 \leq P(E) \leq 1$ ; (iii) $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$
- $A$, $B$ എന്നിവ പരസ്പര വർജ്ജക സംഭവങ്ങളാണെങ്കിൽ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- (i) $P(A \cap \bar{B}) = P(A \text{ മാത്രം}) = P(A) - P(A \cap B)$

  (ii) $P(\bar{A} \cap B) = P(B \text{ മാത്രം}) = P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, $A$, $B$ ഏതെങ്കിലും രണ്ടു സംഭവങ്ങൾ.
- $A$, $B$, $C$ എന്നിവ മൂന്നു സംഭവങ്ങളാണെങ്കിൽ
  $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C)$
  $-P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$



8 Stats Malayalam.indd 333 10/02/2023 12:00:20

## ICT CORNER

### ICT 8.1

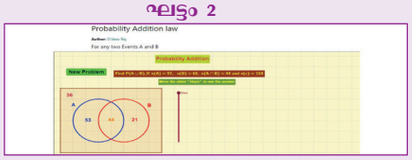
ഘട്ടം 1 : ബ്രൗസർ തുറന്ന് താഴെ തന്നിട്ടുള്ള URL ടൈപ്പു ചെയ്യുക. അല്ലെങ്കിൽ QR Code സ്കാൻ ചെയ്യുക **"Probability"** എന്ന അദ്ധ്യായം തെളിയും അതിൽ **" Probability Addition law "**എന്ന വർക്ക് ഷീറ്റ് തെരഞ്ഞെടുക്കുക

ഘട്ടം 2 : തന്നിട്ടുള്ള വർക്ക്ഷീറ്റിൽ "New Problem" ക്ലിക്ക് ചെയ്താൽ പുതിയ ചോദ്യങ്ങൾ തെളിയും. സ്ലൈഡർ ചലിപ്പിച്ച് അടുത്തടുത്ത ഘട്ടങ്ങളിലേയ്ക്ക് പോകാം.

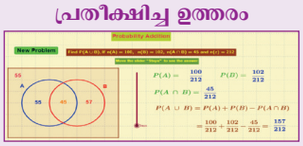
ഘട്ടം 1




ഘട്ടം 2




പ്രതീക്ഷിച്ച ഉത്തരം




### ICT 8.2

ഘട്ടം 1 :ബ്രൗസർ തുറന്ന് താഴെ തന്നിട്ടുള്ള URL ടൈപ്പു ചെയ്യുക. അല്ലെങ്കിൽ QR Code സ്കാൻ ചെയ്യുക **"Probability"** എന്ന അദ്ധ്യായം തെളിയും അതിൽ **" Addition law Mutually Exclusive"**എന്ന വർക്ക് ഷീറ്റ് തെരഞ്ഞെടുക്കുക

ഘട്ടം 2 : തന്നിട്ടുള്ള വർക്ക്ഷീറ്റിൽ "New Problem" ക്ലിക്ക് ചെയ്താൽ പുതിയ ചോദ്യങ്ങൾ തെളിയും. check boxes ക്ലിക്ക് ചെയ്തൽ ചോദ്യങ്ങൾക്കുള്ള ഉത്തരങ്ങൾ കാണാം.

ഘട്ടം 1




ഘട്ടം 2




പ്രതീക്ഷിച്ച ഉത്തരം




ഓരോ പ്രവൃത്തികൾക്കും ഇതേ രീതി ആവർത്തിക്കുക

https://www.geogebra.org/m/jfr2zzgy#chapter/359554

അല്ലെങ്കിൽ QR Code Scan ചെയ്യുക.



8 Stats Malayalam.indd 334 10/02/2023 12:00:21

# ഉത്തരങ്ങൾ

## അഭ്യാസം 1.1

1.(i) $A \times B = \{(2,1),(2,-4),(-2,1),(-2,-4),(3,1),(3,-4)\}$

$A \times A = \{(2,2),(2,-2),(2,3),(-2,2),(-2,-2),(-2,3),(3,2),(3,-2),(3,3)\}$

$B \times A = \{(1,2),(1,-2),(1,3),(-4,2),(-4,-2),(-4,3)\}$

(ii) $A \times B = \{(p,p)(p,q)(q,p)(q,q)\}$; $A \times A = \{(p,p),(p,q),(q,p),(q,q)\}$ ;

$B \times A = \{(p,p),(p,q),(q,p),(q,q)\}$

(iii) $A \times B = \{\ \}$; $A \times A = \{(m,m),(m,n),(n,m),(n,n)\}$; $B \times A = \{\ \}$

2. $A \times B = \{(1,2),(1,3),(1,5),(1,7),(2,2),(2,3),(2,5),(2,7),(3,2),(3,3),(3,5),(3,7)\}$

$B \times A = \{(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(5,1),(5,2),(5,3),(7,1),(7,2),(7,3)\}$

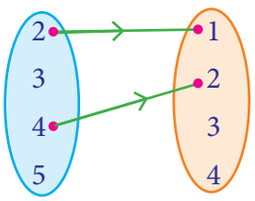
3. $A = \{3,4\}$ $B = \{-2,0,3\}$ 5. ശരി

## അഭ്യാസം1.2

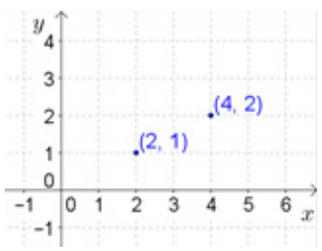
1.(i) ബന്ധമല്ല (ii) ബന്ധമല്ല (iii) ബന്ധമാണ് (iv) ബന്ധമല്ല

2. $\{1,2,3,4,5,6\}, \{1,4,9,16,25,36\}$ 3. $\{0,1,2,3,4,5\}, \{3,4,5,6,7,8\}$

4. (i)(a)

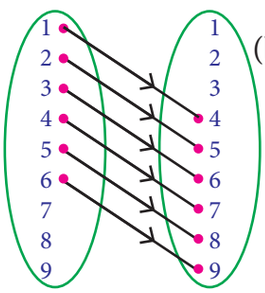



(b)

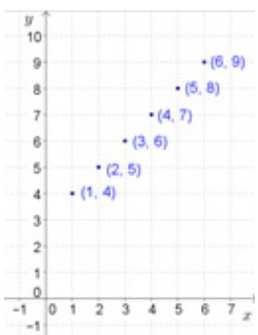



(c) $\{(2,1),(4,2)\}$

(ii)(a)

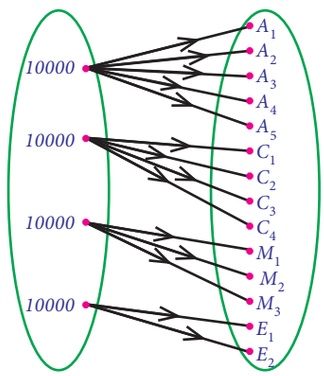



(b)




(c) $\{(1,4),(2,5),(3,6),(4,7),(5,8),(6,9)\}$

5. $\{(10000, A_1),(10000, A_2),(10000, A_3),(10000, A_4),$
$(10000, A_5),(25000, C_1),(25000, C_2),(25000, C_3),$
$(25000, C_4),(50000, M_1),(50000, M_2),(50000, M_3),$
$(100000, E_1),(100000, E_2)\}$






Answers Malayalam_X_Maths.indd 335 3/31/2022 1:29:28 PM

## അഭ്യാസം 1.3

1. $\{1,2,3,4,...\}$, $\{1,2,3,4\}$, $\{2,4,6,8,...\}$, ശരി. 2. ശരി

3.(i) 12 (ii) $4a^2-10a+6$ (iii) 0 (iv) $x^2-7x+12$

4.(i) (a) 9 (b) 6 (c) 6 (d) 0

(ii) 9.5 (iii) (a) $\{x \,/\, 0 \le x \le 10, x \in R\}$ (b) $\{x \,/\, 0 \le x \le 9, x \in R\}$

(iv) 5 5. 2 6.(i) $-2$ (ii) $\frac{3}{2}$ (iii) 3 (iv) $\frac{1}{2}$

7. $4x^3-96x^2+576x$ 8. 1 9. $500t$

10.(i) ശരി (ii) 0.9,24.5 (iii) 60.5 ഇഞ്ച് (iv) 32 സെ.മീ

## അഭ്യാസം 1.4

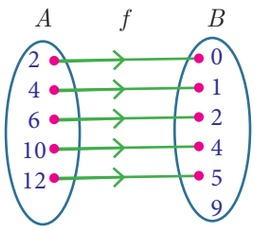
1.(i) ഫലനമല്ല (ii) ഫലനം (iii) ഫലനമല്ല (iv) ഫലനം

2.(i) $\{(2,0),(4,1),(6,2),(10,4),(12,5)\}$

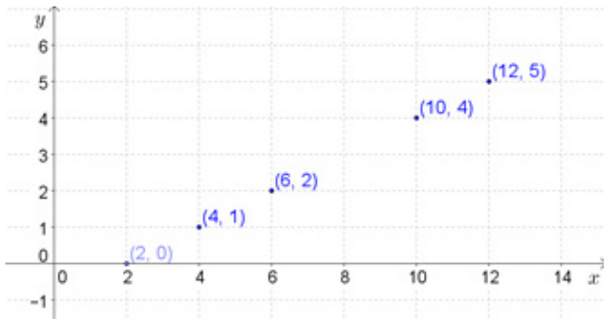
(ii)

| $x$ | 2 | 4 | 6 | 10 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | 1 | 2 | 4 | 5 |

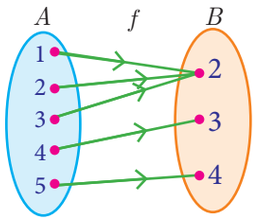
(iii)




(iv)



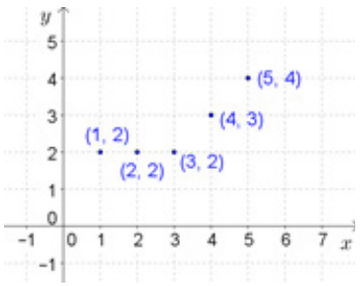

3.(i)




(ii)

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 2 | 2 | 2 | 3 | 4 |

(iii)




6.(i) $\{1,8,27,64\}$ (ii) 1-1 കൂടാതെ ഇൻടു ഫലനം

7.(i) ബൈജക്ടീവ് ഫലനം (ii) ബൈജക്ടീവ് ഫലനമല്ല 8. 1,1

9.(i) 5 (ii) 2 (iii) $-2.5$ (iv) 1

10.(i) 2 (ii) 10 (iii) 178 (iv) $\frac{-9}{17}$

11. Yes 12.(i) $32°F$ (ii) $82.4°F$ (iii) $24°F$

(iv) $100°C$ (v) $-40°$

## അഭ്യാസം1.5

1.(i) $x^2-6$, $(x-6)^2$; സമമല്ല (ii) $\frac{2}{2x^2-1}$, $\frac{8}{x^2}-1$; സമമല്ല

(iii) $\frac{3-x}{3}$, $\frac{9-x}{3}$; സമമല്ല (iv) $x-1$, $x-1$ ; സമം (v) $4x^2+8x+3$, $4x^2$ ;സമമല്ല

2.(i) $-5$ (ii) $\frac{-5}{3}$ 4.(i) $a=\pm 2$

5. $\{y \mid y=2x^2+1,\ x \in \mathbb{N}\}$; $\{y \mid y=(2x+1)^2, x \in \mathbb{N}\}$ 6.(i) $x^4-2x^2$



Answers Malayalam_X_Maths.indd 336 3/31/2022 1:29:33 PM

(ii) $\left[x^4 - 2x^2\right]^2 - 1$ 7. $f$ 1-1 ആകുന്നു, g 1-1 അല്ല, $f \circ g$ 1-1 ആകുന്നു 9. $-4x - 1$

## അഭ്യാസം 1.6

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (C) | (C) | (A) | (B) | (C) | (D) | (C) | (A) | (C) | (C) | (A) | (D) | (C) | (B) | (D) |

## യൂണിറ്റ് അഭ്യാസം

1. 1,2 and $-5$,1 2. $\{-1,0,1\}$, $\{(-1,-1),(-1,1),(0,-1),(0,0),(1,-1),(1,0),(1,1)\}$

3.(i) 4 (ii) $\sqrt{2}$ (iii) $\sqrt{a}$

4. $\{(9,3),(10,5),(11,11),(12,3),(13,13),(14,7),(15,5),(16,2),(17,17)\}$, $\{2,3,5,7,11,13,17\}$

5. $-1 \leq x \leq 1$ 9.(i) $\frac{-5}{6}$ (ii) $2(x+1)$ 10.(i) $R - \{9\}$

(ii) R (iii) $[2,\infty)$ (iv) R

## അഭ്യാസം 2.1

1. 2, 5, 8, 11, … 2. 25, 7 6.(i) 4 (ii) 51

(iii) 144 (iv) 6 7. 174 8. 2,$-1$ 9. 6

## അഭ്യാസം 2.2

1. ഇരട്ടസംഖ്യകൾ 2. മൂല്യമില്ല 3. 10101 4. 9, 3

5. 2,3,5,7 and 3,4,2,1 6. 2040, 34 7. 999720 8. 3647 9. 2520

## അഭ്യാസം 2.3

1.(i) 7 (ii) 5 (iii) 2 (iv) 7 (v) 2

2. 3 3. 2,8,14,… 4. 8, 19, 30, … 5. 11 a.m

6. 8 p.m 7. വെള്ളിയാഴ്ച 9. 2 10. 6am, തിങ്കളാഴ്ച

## അഭ്യാസം 2.4

1.(i) 216,648,1944 (ii) $-7, -11, -15$ (iii) $\frac{4}{25}, \frac{5}{36}, \frac{6}{49}$ 2.(i) $-1$,6,25,62

(ii) 2,$-6$,12,$-20$ (iii) $-4$, 2, 12, 26 3.(i) $n^2 + 1$ (ii) $\frac{n-1}{n}$

(iii) $5n - 2$ 4.(i) $\frac{15}{4}, \frac{13}{3}$ (ii) $-12, -117$ 5. $\frac{63}{11}, \frac{225}{31}$ 6. 1,1,3,7,17,41

## അഭ്യാസം 2.5

1.(i) A.P (ii) A.P അല്ല (iii) A.P (iv) A.P

(v) A.P അല്ല 2.(i) 5, 11, 17, … (ii) 7, 2, $-3$, … (iii) $\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \ldots$

3.(i) $-1$, 2 (ii) $-3, -7$ 4. $-83$ 5. 15

6. 93, 99 8. 4 9. 3,17,31 10. 78

11. 2,9,16 12. 5:7 13. $-3°\,C, 0°\,C, 3°\,C, 6°\,C, 9°\,C$ 14. 31 years

## അഭ്യാസം2.6

1.(i) 3240 (ii) 999 (iii) 721 2. 20 3. 1540

5. 612.5 6.50625 7. 168448 8.(i) ₹ 45750 (ii) ₹ 5750 9. 20 മാസങ്ങൾ

10.(i) 42 (ii) 2130 12. $\frac{6}{a+b}(24a - 13b)$



Answers Malayalam_X_Maths.indd 337 3/31/2022 1:29:36 PM

## അഭ്യാസം 2.7

1.(i) G.P (ii) G.P അല്ല (iii) G.P (iv) G.P (v) G.P

(vi) G.P അല്ല (vii) G.P 2.(i) 6,18,54 (ii) $\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}$

(iii) 1000,400,160 3. 1 4. $-18$ 5.(i) 12 (ii) 7 6. $5\times(3^{11})$

7. 3072 9. $\frac{9}{2}$, 3, 2 (അഥവാ) 2, 3, $\frac{9}{2}$ 10. ₹ 76577 11. ₹23820,₹24040

## അഭ്യാസം 2.8

1.(i) $\frac{25}{8}\left[1-\left(-\frac{3}{5}\right)^n\right]$ (ii) $\frac{1024}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$ 2. 1820 3. 12

4.(i) $\frac{27}{2}$ (ii) 63 5. $\frac{1}{4}$ 6.(i) $\frac{4}{9}n-\frac{4\left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right]}{81}$

(ii) $\frac{10(10^n-1)}{27}-\frac{n}{3}$ 7. 3069 8. ₹ 174760 9. $\frac{41}{333}$

## അഭ്യാസം 2.9

1.(i) 1830 (ii) 1584 (iii) 3003 (iv) 1240 (v) 3256

(vi) 42075 (vii) 1296 2. 105625 3. 210

4. 15 5. 9 6.4615 ച.സെ.മീ. 7.(i) $4n^3+3n^2$ (ii) 2240

## അഭ്യാസം 2.10

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (C) | (A) | (B) | (C) | (D) | (A) | (D) | (C) | (A) | (C) | (C) | (D) | (B) | (B) | (C) |

## യൂണിറ്റ് അഭ്യാസം

2.(i) 35 ലിറ്റർ (ii) 5 (iii) 3 3. 1 6. $-78$

8. ₹1200 9. $\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$, $3\sqrt{2}$, ... 10. ₹27636

## അഭ്യാസം 3.1

1.(i) 2, $-1$, 4 (ii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ (iii) 35, 30, 25

2.(i) അനേകം നിർദ്ധാരണങ്ങൾ (ii) നിർദ്ധാരണമില്ല (iii) ഒരേ ഒരു നിർദ്ധാരണം

3. 24 വർഷങ്ങൾ, 51 വർഷങ്ങൾ, 84 വർഷങ്ങൾ 4. 137 5. 7, 3, 2

## അഭ്യാസം 3.2

1.(i) $x^2+2x-3$ (ii) $x^2+1$ (iii) $x(x^2+4x+4)$ (iv) $3(x^2+1)$

2.(i) $8x^3y^2$ (ii) $-36a^3b^2c$ (iii) $-48m^2n^2$ (iv) $(p-1)(p-2)(p+2)$

(v) $4(x+3)(2x+1)(x-3)$ (vi) $2^3x^2(2x-3y)^3(4x^2+6xy+9y^2)$

## അഭ്യാസം 3.3

1.(i) $105x^2y^2, 7xy$ (ii) $(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1), (x+1)$

(iii) $xy(x+y), x(x+y)$ 2.(i) $(a+6)(a-2)(a-3)$ (ii) $x(x-3a)^2(x^2+3ax+9a^2)$

3.(i) $4x^2(x-1)$ (ii) $x^2-xy+y^2$ 4. (i) $(a+2)(a-7)$ (ii) $x^2+xy+y^2$

## അഭ്യാസം 3.4

1.(i) $\frac{x-1}{x}$ (ii) $\frac{x-9}{x-2}$ (iii) $\frac{9}{x-1}$ (iv) $\frac{p+5}{2p(p-4)}$



Answers Malayalam_X_Maths.indd 338 3/31/2022 1:29:39 PM

2. (i) $-5, 5$ (ii) $2, 3$ (iii) $1$ (iv) $0, -3, 2$

### അഭ്യാസം 3.5

1.(i) $\frac{3x^3z}{5y^3}$ (ii) $p+4$ (iii) $\frac{3t^2}{4}$ 2.(i) $\frac{3x-4y}{2x-5}$ (ii) $\frac{x^2+xy+y^2}{3(x+2y)}$

3.(i) $-5$ (ii) $\frac{b-4}{b+2}$ (iii) $\frac{3y}{x-3}$ (iv) $\frac{4(2t-1)}{3}$ 4. $\frac{4}{9}$ 5. $x^2+4x+4$

### അഭ്യാസം 3.6

1.(i) $\frac{2x}{x-2}$ (ii) $\frac{2x^2+2x-7}{(x+3)(x-2)}$ (iii) $x^2+xy+y^2$ 2.(i) $\frac{2(x-2)}{x-4}$ (ii) $\frac{1-x}{1+x}$

3. $\frac{2x^3+1}{(x^2+2)^2}$ 4. $\frac{x+1}{x^2-2x+4}$ 5. $\frac{(4x^2-1)}{2(4x^2+1)}$ 7. 2മണിക്കൂർ 24 മിനിട്ടുകൾ 8. 30 kgs, 20 kgs

### അഭ്യാസം 3.7

1.(i) $2\left|\frac{y^4z^6}{x^2}\right|$ (ii) $4\left|\frac{\sqrt{7}x+\sqrt{2}}{4x-1}\right|$ (iii) $\frac{11}{9}\left|\frac{(a+b)^4(x+y)^4}{(a-b)^6}\right|$ 2.(i) $\left|2x+5\right|$

(ii) $\left|3x-4y+5z\right|$ (iii) $\left|(x-2)(7x+1)(4x-1)\right|$ (iv) $\frac{1}{6}\left|(4x+3)(3x+2)(x+2)\right|$

### അഭ്യാസം3.8

**1.(i)** $\left|x^2-6x+3\right|$ **(ii)** $\left|2x^2-7x-3\right|$ **(iii)** $\left|4x^2+1\right|$ **(iv)** $\left|11x^2-9x-12\right|$

2.(i) $49, -42$ (ii) $144, 264$ 3.(i) $30, 9$ (ii) $24, -32$

### അഭ്യാസം 3.9

1.(i) $x^2+9x+20=0$ (ii) $3x^2-5x+12=0$ (iii) $2x^2+3x-2=0$

(iv) $x^2+(2-a\ )^2x+(a+5)^2=0$ 2.(i) $-3, -28$ (ii) $-3, 0$ (iii) $-\frac{1}{3}, -\frac{10}{3}$ (iv) $\frac{1}{3}, \frac{-4}{3}$

### അഭ്യാസം 3.10

1.(i) $-\frac{1}{4}, 2$ (ii) $-2, \frac{9}{2}$ (iii) $-2, 9$ (iv) $-\sqrt{2}, \frac{-5}{\sqrt{2}}$ (v) $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ 2. 6

### അഭ്യാസം 3.11

1.(i) $\frac{2}{3}, \frac{2}{3}$ (ii) $-1, 3$ 2.(i) $2, \frac{1}{2}$ (ii) $\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

(iii) $-1, \frac{23}{3}$ (iv) $\frac{a+b}{6}, \frac{a-b}{6}$ 3. 3.75 സെക്കന്റ്

### അഭ്യാസം 3.12

1. $5, -\frac{1}{5}$ 2. 1.5 മീ. 3. 45 കി.മീ./മണിക്കൂർ 4. 20 വർഷങ്ങൾ, 10 വർഷങ്ങൾ

5.അതെ, 12 മീ., 16 മീ. 6. 72 7. 28 മീ., 42 മീ. 8. 2 മീ. 9. 7 സെ.മീ

### അഭ്യാസം 3.13

1.(i) വാസ്തവികം, സമമല്ല (ii)വാസ്തവികം,സമമല്ല (iii) വാസ്തവികമല്ല

(iv) വാസ്തവികം സമം (v)വാസ്തവികം സമം 2.(i) $2, 3$ (ii) $1, \frac{1}{9}$

### അഭ്യാസം 3.14

1.(i) $\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{3\alpha\beta}$ (ii) $\frac{\alpha+\beta}{(\alpha\beta)^2}$ (iii) $9\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+1$



Answers Malayalam_X_Maths.indd 339 3/31/2022 1:29:44 PM

(iv) $\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+3(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}$ 2.(i) $\frac{7}{5}$ (ii) $\frac{29}{10}$ (iii) $\frac{13}{6}$

3.(i) $x^2-44x+16=0$ (ii) $x^2-3x-1=0$ (iii) $x^2-24x-64=0$

4. $-15, 15$ 5. $-24, 24$ 6. $-36$

## അഭ്യാസം3.15

1. ₹6500, ₹1250 2. $y$=8, $x$=4 3. $y$=4.5, $x$=15, 4. $y$=18 മിനിട്ടുകൾ, 10 പൈപ്പുകൾ
5. 360, ₹30 6. ₹90, 10 മണിക്കുറുകൾ

## അഭ്യാസം3.16

1.(i) വാസ്തവികം, സമമല്ലാത്തഘടകങ്ങൾ (ii) വാസ്തവികം, സമഘടകങ്ങൾ (iii) വാസ്തവിക ഘടകങ്ങളല്ല (iv)വാസ്തവികം, സമമല്ലാത്ത ഘടകങ്ങൾ (v) വാസ്തവികം, സമഘടകങ്ങൾ (vi) വാസ്തവിക സമമല്ലാത്ത ഘടകങ്ങൾ

2. $-3, 4$ 3. വാസ്തവിക ഘടകങ്ങളല്ല 4. $-1$ 5. $-4, 1$ 6. $-2, 7$

7. $-1, 3$ 8. $-2, 3$

## അഭ്യാസം3.17

1.(i) 16 (ii) $4\times4$ (iii) $\sqrt{7}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 5, 0, -11, 1$ 2. $1\times18, 2\times9, 3\times6, 6\times3, 9\times2, 18\times1$ കൂടാതെ $1\times6, 2\times3, 3\times2, 6\times1$

3.(i) $\begin{pmatrix}1&3&5\\0&2&4\\1&1&3\end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix}\frac{8}{3}&9&\frac{64}{3}\\9&\frac{64}{3}&\frac{125}{3}\\\frac{64}{3}&\frac{125}{3}&72\end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix}5&1&3\\4&-7&8\\3&9&2\end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix}-\sqrt{7}&\sqrt{5}&-\sqrt{3}\\3&-2&5\end{pmatrix}$ 7.(i) 3,12,3 (ii) 4,2,0 അല്ലെങ്കിൽ 2,4,0 (iii) 2,4,3

## അഭ്യാസം3.18

3. $\begin{pmatrix}5&0\\\frac{3}{2}&\frac{9}{2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2&0\\\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ 4.(i) $\begin{pmatrix}7&-17&-37\\-39&-11&-26\end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix}-63&-15&-45\\15&-27&-60\end{pmatrix}$

5.(i) $4, -10, 12$ (ii) $-10, 14, 10$ 6. 4,6 7. 4 8. $-1, 5$ കൂടാതെ $-2, 4$

## അഭ്യാസം 3.19

1. $P\times R$, നിർവ്വചിച്ചിട്ടില്ല 2. 7,10 3. $3\times3, 4\times2, 4\times2, 4\times1, 1\times3$

4. $\begin{pmatrix}12&19\\10&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-10&-4\\24&23\end{pmatrix}$, $AB\neq BA$

## അഭ്യാസം 3.20

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (D) | (A) | (B) | (A) | (B) | (C) | (D) | (B) | (C) | (C) | (B) | (A) | (B) | (D) | (B) | (B) | (D) | (B) | (C) | (A) |

## യൂണിറ്റ് അഭ്യാസം-3

1. 6,2,1 2. 42,78,30 3. 153 4. $(ky+x)(k^2x^2-y^2)$ 5. $x^2+2x+1$ 6. (i) $x^a-2$

(ii) $-x+\frac{5}{2}$ 7. $\frac{1}{2qr}$ 8. 11 മണിക്കുറുകൾ, 22 മണിക്കുറുകൾ, 33 മണിക്കുറുകൾ



Answers Malayalam_X_Maths.indd 340 3/31/2022 1:29:48 PM

9. $\left|17x^2 - 18x + 19\right|$ 10. 3

11. 14 കി.മീ./മണിക്കൂർ 12. 120 മീ., 40 മീ. 13. 14 മിനിറ്റ് 14. 25 5.(i) $x^2 - 6x + 11 = 0$

(ii) $3x^2 - 2x + 1 = 0$ 16. $3, \frac{9}{4}$ 17.(i) $\begin{pmatrix} 750 & 1500 & 2250 \\ 3750 & 4250 & 750 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 8000 & 1600 & 24000 \\ 40000 & 24000 & 8000 \end{pmatrix}$

18. $\sin\theta$ 19. 8, 4 20. $\begin{pmatrix} 122 & 71 \\ -58 & -34 \end{pmatrix}$

## അഭ്യാസം 4.1

1. (i) സദൃശ്യമല്ല (ii) സദൃശ്യം, 2.5 2. 3.3 മീ 3. 42 മീ 5. $\frac{15}{13}, \frac{36}{13}$ 6. 5.6 സെമീ, 3.25 സെമീ
7. 2.8 സെമീ 9. 2 മീ

## അഭ്യാസം 4.2

1. (i) 6.43 സെ.മീ (ii) 1 2. 60 സെ.മീ 5. 4 സെ.മീ, 4 സെ.മീ 8.(i) ദ്വിഭാജകമല്ല
(ii) ദ്വിഭാജകം 12. 2.1 സെ.മീ

## അഭ്യാസം 4.3

1. 30 മീ 2. 1 മൈൽ 3. 21.74 മീ 4. 12 സെ.മീ, 5 സെ.മീ 5. 10 മീ, 24 മീ, 26 മീ 6. 0.8 മീ

## അഭ്യാസം 4.4

1. 7 സെ.മീ 2. 2 സെ.മീ 3. 7 സെ.മീ, 5 സെ.മീ, 3 സെ.മീ 4. 30° 5. 130° 6. $\frac{20}{3}$ സെ.മീ
7. 10 സെ.മീ 8. 4.8 സെ.മീ 10. 2 സെ.മീ 13. 8.7 സെ.മീ 14. 10.3 സെ.മീ 15. 4 സെ.മീ
16. 6.3 സെ.മീ

## അഭ്യാസം 4.5

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (C) | (B) | (D) | (A) | (D) | (A) | (B) | (C) | (A) | (D) | (B) | (B) | (B) | (D) | (A) |

## യൂണിറ്റ് അഭ്യാസം

2. $\frac{12}{5}$ സെ.മീ, $\frac{10}{3}$ സെ.മീ 5. $20\sqrt{13}$ കി.മീ 7. 10 മീ 8. നിഴൽ $= \frac{4}{11}\cdot$ (ദൂരം) 10. 14 മാത്രകൾ

## അഭ്യാസം 5.1

1.(i) 24 ച.മാത്രകൾ (ii) 11.5 ച.മാത്രകൾ 2.(i) സമരേഖീയത (ii) സമരേഖീയത
3.(i) 44 (ii) 13 4.(i) 0 (ii) $\frac{1}{2}$ or $-1$ 5.(i) 35 ച.മാത്രകൾ (ii) 34 ച.മാത്രകൾ 6. $-5$
7. $2, -1$ 8. 24 ച.മാത്രകൾ, $\text{area}(\Delta ABC) = 4 \times \text{area}(\Delta PQR)$ 9. 122 ച.മാത്രകൾ
10. 10 ബക്കറ്റ് 11. (i) 3.75 ച.മാത്രകൾ (ii) 3 ച.മാത്രകൾ (iii) 13.88 ച.മാത്രകൾ

## അഭ്യാസം5.2

1.(i) നിർവ്വചിച്ചിട്ടില്ല (ii) 0 2.(i) 0° (ii) 45° 3.(i) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (ii) $-\cot\theta$
4. 3 6. 7 7. $\frac{17}{2}$ 8. 4 9.(i) ശരി (ii) ശരി 11. 5, 21 14. $\left(1, \frac{-3}{2}\right)$ or $\left(3, \frac{-1}{2}\right)$

## അഭ്യാസം 5.3

1.(i) $2y + 3 = 0$ (ii) $2x - 5 = 0$ 2. $1, 45°, \frac{5}{2}$
3. $x - \sqrt{3}y - 3\sqrt{3} = 0$ 4. $\frac{\sqrt{3}+3}{2}, \frac{3+3\sqrt{3}}{-2}$ 5. $-5$ 6. $x - y - 16 = 0$
7.(i) $16x - 15y - 22 = 0$ (ii) $4x - 9y + 19 = 0$ 8. $15x - 11y + 46 = 0$



Answers Malayalam_X_Maths.indd 341 3/31/2022 1:29:51 PM

9. $x + 4y - 14 = 0$ $3x + 5y - 28 = 0$ 10. $5x + 4y - 3 = 0$ 11. (i) 1 (ii) 7.5 സെക്കന്റ് (iii) 10 സെക്കന്റ് 12. (i) $3x - 2y - 12 = 0$ (ii) $3x - 20y + 15 = 0$ 13.(i) 2, $-3$ (ii) $-3, -4$ 14.(i) $5x + 2y + 3 = 0$ (ii) $x + y + 4 = 0$

### അഭ്യാസം 5.4

1.(i) 0 (ii) നിർവ്വചിച്ചിട്ടില്ല 2.(i) 0.7 (ii) നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്
3.(i) സമാന്തരം (ii) ലംബം 4. 4 5. $3x + 4y + 7 = 0$
6. $2x + 5y - 2 = 0$ 7. $2x + 5y + 6 = 0$, $5x + y - 48 = 0$ 8. $5x - 3y - 8 = 0$
9. $13x + 5y - 18 = 0$ 10. $49x + 28y - 156 = 0$ 11. $31x + 15y + 30 = 0$
12. $4x + 13y - 9 = 0$

### അഭ്യാസം 5.5

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (B) | (A) | (B) | (C) | (C) | (D) | (B) | (B) | (A) | (C) | (C) | (A) | (B) | (B) | (B) |

### യൂണിറ്റ് അഭ്യാസം

1. സമചതുർഭുജം 2. $\left(\frac{7}{2}, \frac{13}{2}\right)$ 3. 0 ച.മാ. 4. $-5$ 6. $2x - 3y - 6 = 0$, $3x - 2y + 6 = 0$
7. 1340 ലിറ്റർ 8. $(-1, -4)$ 9. $13x + 13y - 6 = 0$ 10. $119x + 102y - 125 = 0$

### അഭ്യാസം 6.2

1. $30°$ 2. 24 മീ 3. 3.66 മീ 4. 1.5 മീ 5.(i) 7 മീ (ii) 16.39 മീ 6. 10 മീ

### അഭ്യാസം 6.3

1. 150 മീ 2. 50 മീ 3. 32.93 മീ 4. 2078.4 മീ 6. 0.5 അടി/മീ

### അഭ്യാസം 6.4

1. 35.52 മീ 2. 69.28 മീ, 160 മീ 4. 150 മീ, അതെ 5. (i) 264 മീ (ii) 198 മീ (iii) 114.31 മീ
6. (i) 2.91 കി.മീ (ii) 6.93 കി.മീ

### അഭ്യാസം 6.5

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (B) | (D) | (B) | (A) | (B) | (B) | (A) | (C) | (B) | (D) | (B) | (B) | (D) | (B) | (A) |

### യൂണിറ്റ് അഭ്യാസം

5. 29.28 m/s 6. 1.97 സെക്കന്റ് (ഏകദേശം) 7.(i) 24.58 കി.മീ (ഏകദേശം)
(ii) 17.21 കി.മീ (ഏകദേശം) (iii) 21.41 കി.മീ (ഏകദേശം) (iv) 23.78 കി.മീ (ഏകദേശം)
8. 200 മീ 9. 39.19 മീ

### അഭ്യാസം7.1

1. 25 സെ.മീ, 35 സെ.മീ 2.7 മീ, 35 മീ 3. 2992 ച.സെ.മീ. 4. PQ വെച്ച് ചുറ്റുമ്പോൾ വൃത്തസൂചികയുടെ വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം വലുതാകുന്നു 5. 18.25 സെ.മീ 6. 28 തൊപ്പികൾ
7. $\sqrt{5} : 9$ 8. 56.25% 9. ₹ 302.72 10. ₹ 1357.72

### അഭ്യാസം 7.2

1. 4.67 മീ 2. 1 സെ.മീ 3. 652190 സെ.മീ$^3$ 4. 63 മിനിറ്റ് (ഏകദേശം)
5. 100.58 6. 5:7 7. 64:343 9. 4186.29 സെ.മീ$^3$ 10. ₹ 418.36

### അഭ്യാസം 7.3

1. 1642.67 സെ.മീ$^3$ 2. 66 സെ.മീ$^3$ 3. 2.46 സെ.മീ$^3$ 4. 905.14 സെ.മീ$^3$
5. 77.78 മി.മീ$^3$ 6. 332.5 സെ.മീ$^2$ 7.(i) $4\pi r^2$ ച.മാ. (ii) $4\pi r^2$ ച.മാ. (iii) 1:1



Answers Malayalam_X_Maths.indd 342 3/31/2022 1:29:54 PM

## അഭ്യാസം 7.4

1. 36 സെ.മീ 2. 2 hrs 3. $\frac{h}{3x^2}$ 4. 6 സെ.മീ 5. 1812000 സെ.മീ$^3$ 6. 1.33 സെ.മീ 7. 1 സെ.മീ 8. 100%

## അഭ്യാസം 7.5

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (D) | (A) | (A) | (B) | (C) | (B) | (B) | (C) | (C) | (A) | (D) | (A) | (A) | (B) | (D) |

## യൂണിറ്റ് അഭ്യാസം

1. 48000 വാക്കുകൾ 2. 27 മിനിറ്റ് (ഏകദേശം) 3. $\frac{1}{3}\pi r^3$ ഘ.മാ. 4. 782.57 ച.സെ.മീ. 5. 450 നാണയങ്ങൾ 6. 4.8 സെ.മീ 7. ₹ 6800 8. 2 സെ.മീ 9. 17 സെ.മീ 10. 2794.18 സെ.മീ$^3$

## അഭ്യാസം 8.1

1.(i) 62; 0.33 (ii) 47.8; 0.64 2. 50.2 3. 250 4. 2.34 5. 222.22, 14.91 6. 6.9 7. 6.05 8. 4.5 9. 1.2, 1.44 10. 7.76 11. 14.6 12. 6 13. 1.24 14. 60.5, 14.61 15. 6 and 8

## അഭ്യാസം 8.2

1. 52% 2. 4.69 3. 7.2 4. 180.28% 5. 14.4% 6. 10.07% 7. വിദ്യ 8. സോഷ്യൽ, സയൻസ്

## അഭ്യാസം 8.3

1. $\{HHH, HHT, HTH, THH, THT, TTH, TTT\}$

2. $\{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5)\}$

3. (i) $\frac{15}{32}$ (i) 340 4. $\frac{3}{8}$ 5. (i) $\frac{9}{1000}$ (ii) $\frac{8}{999}$ 6. (i) $\frac{1}{4}$ (ii) $x = 4$

7.(i) $\frac{1}{6}$ (ii) $\frac{1}{6}$ (iii) $\frac{5}{12}$ (iv) 0 8. (i) $\frac{1}{8}$ (ii) $\frac{7}{8}$ (iii) $\frac{1}{2}$ (iv) $\frac{7}{8}$

9. (i) $\frac{3}{13}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{10}{13}$ (iv) $\frac{6}{13}$

10. 12 11.(i) $\frac{13}{46}$ (ii) 0 (iii) $\frac{1}{46}$ 12. $\frac{157}{600}$ 13. (i) $\frac{1}{6}$ (ii) $\frac{5}{6}$ (iii) $\frac{5}{18}$

14. (i) $\frac{1}{8}$ (ii) $\frac{3}{4}$ (iii) $\frac{1}{8}$

## അഭ്യാസം 8.4

1. $\frac{11}{15}$ 2. (i) 0.58 (ii) 0.52 (iii) 0.74 3. 0.1 4. 1.2 5. 0.2 6. $\frac{5}{9}$ 7. $\frac{1}{13}$ 8. $\frac{5}{6}$ 9. $\frac{7}{8}$ 10. $\frac{73}{280}$ 11. $\frac{17}{40}$ 12. 1 13. $\frac{11}{48}, \frac{11}{24}, \frac{11}{16}$ 14. $\frac{29}{35}$

## അഭ്യാസം 8.5

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (C) | (A) | (C) | (B) | (C) | (D) | (B) | (A) | (A) | (B) | (B) | (B) | (C) | (C) | (D) |

## യൂണിറ്റ് അഭ്യാസം

1. 8,12 2. 5.55 3. 7 4. 81 5. 5.17, 1.53 6. നഗരം A 7. 60, 40

8. $\frac{1}{9}$ 9. $\frac{3}{4}$ 10. 10 11. $\frac{13}{20}$ 12. (i) $\frac{13}{49}$ (ii) $\frac{3}{49}$ (iii) $\frac{1}{49}$



Answers Malayalam_X_Maths.indd 343 3/31/2022 1:29:57 PM

## ഗണിത പദങ്ങൾ

| | |
|---|---|
| Algorithm | അൽഗോരിതം |
| Alternate segment | ഒന്നിടവിട്ട ഖണ്ഡം |
| Altitude | ലംബഉയരം |
| Angle bisector | കോണദ്വിഭാജകം |
| Angle of depression | കീഴ്കോൺ |
| Angle of elevation | മേൽകോൺ |
| Arithmetic progression | കൂട്ടുസമാന്തരശ്രേണി |
| Arrow diagram | അമ്പടയാളം |
| Axis | അക്ഷം |
| Axis of symmetry | പ്രതിസാമ്യതാ അക്ഷം |
| Basic proportionality | അടിസ്ഥാന അപുപാതം |
| Bijection | ബൈജക്ഷൻ |
| Cartesian product | കാർട്ടീഷ്യൻ ഗുണനഫലം |
| Circular motion | വൃത്തകാര ചലനം |
| Clinometer | ക്ലീനോമീറ്റർ |
| Co-domain | സഹമണ്ഡലം |
| Coefficient of range | റേഞ്ചിന്റെ ഗുണാങ്കം (ഘടകം) |
| Coefficient of variation | വ്യതിയാനഗുണാങ്കം |
| Collinearity | സമരേഖീയത |
| Column matrix | നിരമാട്രിക്സ് |
| Combined solids | മിശ്രഖരരൂപങ്ങൾ |
| Common difference | പൊതു വ്യത്യാസം |
| Common ratio | പൊതു അനുപാതം |
| Completing square method | പൂർണ്ണവർഗ്ഗ രീതി |
| Composition of functions | ഫലനങ്ങളുടെ കോമ്പോസിഷൻ |
| Concurrency theorem | സംഗാമി സിദ്ധാന്തം |
| Concurrent | സംഗാമി |
| Concyclic | ഒരേ ചുറ്റിലുള്ള |
| Congruence | സർവ്വസമം |
| Consistent | ഒരേ ക്രമമുള്ള |
| Constant function | സ്ഥിരഫലനം |
| Coordinate axes | നിർദ്ദേശാങ്ക അക്ഷങ്ങൾ |
| Counter-clock wise | ഘടികാരദിശ |
| Curved surface area | വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം |
| Decompose | വിഭജിക്കൽ |
| Diagonal matrix | വികർണ്ണ മാട്രിക്സ് |
| Dimensions | അളവ് |
| Discriminant | വേർപെടുത്തൽ |
| Distributive property | വിതരണ ഗുണം |
| Domain | മണ്ഡലം |
| Equal matrices | സമമാട്രിക്സ് |
| Equiangular | സമകോണുകൾ |
| Event | സംഭവം |
| Frustum | വൃത്തസ്തൂപികാഛിന്നം |
| Functions | ഫലനങ്ങൾ |
| Geometric progression | ഗുണനക്രമാനുപാത ശ്രേണി |
| Geo-positioning system | ഭൂഘടക |
| Graphical form | ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കൽ രീതി |
| Great circle | ദീർഘ വൃത്തം (വലിയ വൃത്തം) |
| Height and distance | ഉയരവും ദൂരവും |
| Hemisphere | അർധഗോളം |
| Hollow | പൊള്ളയായ |
| Horizontal level | സമാന്തരമായ |
| Horizontal line test | സമാന്തര രേഖാപരിശോധന |
| Hyperbola | വക്ര വളയം |
| Identity function | അനന്യത ഫലനം |
| Image | ബിംബം |
| Inclination | ചായ്വ്കോൺ |
| Inconsistent | ക്രമരഹിതം |
| Injection | ഒരേ വശത്തുള്ള ഫലനം |
| Intercept | അന്തഃഖണ്ഡങ്ങൾ |
| Into function | ഇൻടു ഫലനം |
| Kadhams (unit of distance) | ദൂരത്തിന്റെ മാത്ര |
| Latitude | അക്ഷരേഖ |
| Lemma | ഉപസിദ്ധാന്തം |
| Line of sight | വീക്ഷണ രേഖ |
| Linear equations | രേഖീയ സമീകരണം |
| Linear function | രേഖീയ ഫലനം |



Glosary Malayalam _X_Maths.indd 344 3/31/2022 1:28:41 PM

| | |
|---|---|
| Longitude | രേഖാംശം |
| Magnitude | അളവ് |
| Many-one function | മെനി വൺ ഫലനം |
| Matrix | മാട്രിക്സ് |
| Measures of central tendency | കേന്ദ്ര പ്രവണത അളവ് |
| Measures of dispersion | വിതരണ അളവുകൾ |
| Median | മധ്യമം |
| Modular | മോഡ് |
| Mutually exclusive events | പരസ്പര വർജക സംഭവം |
| Negative of a matrix | വിപരീത മാട്രിക്സ് |
| Non-vertical lines | ലംബമല്ലാത്ത രേഖ |
| Non-zero integer | പൂജ്യമല്ലാത്ത പൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾ |
| Non-zero real number | പൂജ്യമല്ലാത്ത വാസ്തവിക സംഖ്യകൾ |
| Null matrix / Zero matrix | ശൂന്യ മാട്രിക്സ് |
| Null relation | ശൂന്യമായ ബന്ധം |
| Oblique cylinder | ചരിഞ്ഞ വൃത്തസ്തംഭം |
| Oblique frustum | ചരിഞ്ഞ വൃത്തസ്തൂപികാപീഠം |
| One-one function | 1 1 ഫലനം |
| Onto function | ഓൺടു ഫലനം |
| Ordered pair | ക്രമ ജോഡി |
| Outcomes | ഫലങ്ങൾ |
| Parabola | പാരബോള |
| Parallel planes | സമാന്തരരേഖകൾ |
| Perpendicular bisector | ലംബദ്വിഭാജകം |
| Point of contact | സ്പർശബിന്ദു |
| Point of intersection | ഛേദകബിന്ദു |
| Pre-image | പ്രതിബിംബം |
| Quadratic equation | ദ്വിഘാത സമീകരണം |
| Quadratic function | ദ്വിഘാത ഫലനം |
| Quadratic polynomials | ദ്വിഘാത ബഹുപദ വ്യംജകങ്ങൾ |
| Random experiment | ക്രമരഹിതമായ പരീക്ഷണം |
| Range | പരിസരം |
| Rational expression | പരിമേയ വ്യംജകം |
| Real valued function | വാസ്തകവിക മൂല്യ ഫലനം |
| Reciprocal function | വ്യുൽക്രമ ഫലനം |

| | |
|---|---|
| Relations | ബന്ധങ്ങൾ |
| Revolutions | ചുറ്റൽ |
| Right circular cone | സമവൃത്താകാര വൃത്ത സ്തൂപിക |
| Right circular cylinder | സമവൃത്താകാര ഖര വൃത്തസ്തംഭം |
| Row matrix | വരി മാട്രിക്സ് |
| Sample point | സാമ്പിൾ ബിന്ദു |
| Sample space | സാമ്പിൾ സമഷ്ടി |
| Scalar matrix | സ്കയിലാർ മാട്രിക്സ് |
| Secant | ഛേദക രേഖ |
| Sequence | അനുക്രമം |
| Series | ശ്രേണി |
| Similar triangle | സദൃശ്യ ത്രികോണങ്ങൾ |
| Simultaneous linear equations | ഒരേ സമയ രേഖീയ സീകരണങ്ങൾ |
| Slant height | പാർശ്വോന്നതി |
| Slope or gradient | ചായ്വ് |
| Solid | ഖര |
| Square matrix | ചതുര മാട്രിക്സ് |
| Standard deviation | പ്രമാണവിചലനം |
| Surface area | ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം |
| Table form | പട്ടികാ രീതി |
| Tangents | സ്പർശരേഖ |
| Theodolite | തിയോട്രാലൈറ്റ് |
| Tossed | ഏറ് (ചുണ്ടൽ) |
| Total surface area | ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം |
| Transpose matrix | പരിവർത്തന മാട്രിക്സ് |
| Trial | ശ്രമം |
| Triangular matrix | ത്രികോണ മാട്രിക്സ് |
| Unbiased coins | മുറയായ നാണയങ്ങൾ |
| Undefined | നിർവ്വചിക്കപ്പെടാത്തത് |
| Unique solution | ഒരേ ഒരു നിർദ്ധാരണം |
| Uniqueness | അതുല്യത |
| Unit matrix / Identity matrix | അനന്യത മാട്രിക്സ് |
| Variance | വ്യതിയാന വർഗ്ഗശരാശരി |
| Vertical angle | ശീർഷകോൺ |
| Vertical line test | ലംബരേഖാ പരിശോധന |
| Zeros of polynomials | ബഹുപദവ്യംജകങ്ങളുടെ പൂജ്യങ്ങൾ |



Glosary Malayalam _X_Maths.indd 345 3/31/2022 1:28:41 PM

## Secondary Mathematics - Class 10
## Malayalam Medium List of Translators

### Academic Advisor

- **Dr. P. Kumar**
  Joint Director (Syllabus),
  SCERT, Chennai.

### Academic Co-ordinator

- **K.Chandrasekaran**
  Lecturer, DIET
  Chennai - 600005

### Layout Design and Illustration Team

- **Yogesh .B**
- **Pakkirisamy Annadurai**
- **Adison Raj. A**
- **Petchimuthu. K**
- **Balasubramani. R**
- **Manohar .R**
- **Manikaraj Prabahar M.A**

### In-House QC

- **Rajesh Thangappan**

### Wrapper Design

- **Kathir Arumugam**

### Coordination

- **Ramesh Munisamy**

### EMIS Technology Team

- **R.M. Satheesh**
  State Coordinator Technical,
  TN EMIS, Samagra Shiksha.
- **K.P. Sathya Narayana**
  IT Consultant,
  TN EMIS, Samagra Shikaha
- **R. Arun Maruthi Selvan**
  Technical Project Consultant,
  TN EMIS, Samagra Shiksha

### Translators

- **Jaya P.S**
  B.T Asst.,
  Malayala Vidyalayam HS, Chennai.
- **Kumari S.S**
  B.T Asst.,
  Kerala Vidyalayam HSS, Chennai.
- **S. Chinchu**
  B.T., G.H.S.S.,
  Kollemcode K.K District.
- **N. Bindu**
  B.T., ST. Ephrem's HSS., Sooryacode,
  K.K District.
- **S.R Monibun Latha,**
  B.T., ST. Ephrem's HSS.,
  Sooryacode, K.K District.
- **T.S Ajith Singh,**
  B.T., G.H.S.S., Palukal, K.K District.
- **P. Sailaja Kumari,**
  B.T., G.H.S.S., Velavancode, K.K District.
- **K.K. Anitha,**
  B.T., G.H.S.,
  Puliyoorsalai, K.K District.
- **RajKumar,**
  B.T., G.H.S., Ezhudesappattu, K.K District.
- **Sheeba Rani,**
  ST. Mary's HSS., Melpalni, K.K District.
- **Rathi,**
  B.T.,G.H.S., Mecode, K.K District.
- **T. Clarence,**
  B.T., ST. Aloysius HSS.,
  Manthandam thurai, K.K District.

This book has been printed on 80 G.S.M.
Elegant Maplitho paper.
Printed by offset at:



Glosary Malayalam _X_Maths.indd 346 3/31/2022 1:28:42 PM