GOVERNMENT OF TAMILNADU

పదవ తరగతి

STANDARD TEN

గణితము

MATHEMATICS

TELUGU MEDIUM

Department Of School Education

Untouchability is Inhuman and a Crime

10th_Maths_Telugu_Medium_FM.indd 1 13-02-2023 20:00:19

Government of Tamil Nadu

First Edition - 2019

Revised Edition - 2020, 2021, 2022, 2023

Reprint - 2024

(Published under new syllabus)

Content Creation

State Council of Educational
Research and Training

© SCERT 2019

Printing & Publishing

Tamil NaduTextbook and Educational
Services Corporation

www.textbooksonline.tn.nic.in

10th_Maths_Telugu_Medium_FM.indd 2 13-02-2023 20:00:19

చిహ్నములు

$=$	సమానము
$\neq$	సమానం కానిది
$<$	కంటే తక్కువ
$\leq$	కంటే తక్కువ లేక సమానం
$>$	కంటే ఎక్కువ
$\geq$	కంటే ఎక్కువ లేక సమానం
$\approx$	సమానత్వము
$\cup$	సమ్మేళనము
$\cap$	ఖండనము
$\mathbb{U}$	విశ్వసమితి
$\in$	చెందినది
$\notin$	చెందినది కాదు
$\subset$	శుద్ధ ఉపసమితి
$\subseteq$	ఉపసమితి లేక ఉన్నది
$\not\subset$	శుద్ధ ఉపసమితి కాదు
$\not\subseteq$	ఉపసమితి కాదు లేక లేనిది
A' (or) A^c	A యొక్క పూరక సమితి
$\varnothing$ (or) $\{\ \}$	శూన్య సమితి
$n(A)$	A యొక్క మూలకముల సంఖ్య
$P(A)$	A యొక్క ఘాత సమితి
$\sum$	కూడిక
$\|\|\|^{by}$	అదే విధంగా
Δ	సౌష్టవ వ్యత్యాసం
$\mathbb{N}$	సహజ సంఖ్యలు
$\mathbb{W}$	పూర్ణాంకములు
$\mathbb{Z}$	పూర్ణ సంఖ్యలు
$\mathbb{R}$	వాస్తవ సంఖ్యలు
Δ	త్రిభుజము
$\angle$	కోణము
$\perp$	లంబముగా
$\parallel$	సమాంతరముగా
$\Longrightarrow$	అదే అర్థమునిచ్చు
$\therefore$	కాబట్టి
$\because$	అందువలన
$\|\ \|$	నిర్ధారక విలువ
$\simeq$	ఉజ్జాయింపుగా
$\|$ (or) :	దానిప్రకారము
$\equiv$ (or) $\cong$	సర్వసమానము
π	పై
$\pm$	ఋణాత్మకము లేక ధనాత్మకము

10th_Maths_Telugu_Medium_FM.indd 3 13-02-2023 20:00:20

పాఠ్యపుస్తకములో ఉపయోగించు శీర్షికలు

సంఖ్యలు మరియు అక్షరాలు అనేవి మనిషి యొక్క రెండు కళ్ళు వంటివి
– కురల్ 392

Numbers and letters, they are known as
eyes to humans. - Kural 392

అభ్యసన ఫలితములు

తరగతి గదిలోని ప్రక్రియలను గణితములోని కొలతల ప్రక్రియగా మార్చడం

సూచన

పాఠ్యపుస్తకములో విద్యార్థుల కొరకు అదనపు విషయాలను అందించడం.



మెదడుకు మేత

విద్యార్థులను గణితము మీద ఆసక్తి గలవారిగా తయారుచేయడం మరియు విద్యార్థులను తార్కికంగా ఆలోచించేటట్లు చేయడం.



ప్రగతి శోధన

విద్యార్థులను తనను తానుగా (స్వయంగా) మూల్యాంకనం చేసుకొనుట

కృత్యము

గణితమును నేర్చుకొనుటకు విద్యార్థులను ప్రోత్సహించే విధంగా కృత్యములలో పాల్గొనేటట్లు చేయడం.



అభ్యాసము

పాఠ్యాంశములోని విషయాలను విద్యార్థులు ఏవిధంగా అర్థం చేసుకున్నారు అని మూల్యాంకనం చేయడం.



బహుళ ఎంపిక ప్రశ్నలు

పాఠ్యాంశములోని విషయాలను బహుళ ఎంపిక ప్రశ్నల ద్వారా ఇవ్వడం



అధ్యాయ అభ్యాసము

అనేక భావనలను అనుసంధానించడం, విద్యార్థులు సమస్యలను ప్రయత్నించి సాధించడానికి వీలుగా సమస్యలు నిర్దేశింపబడినది.

గుర్తించుకోవలసిన విషయం

పాఠ్యాంశములో నేర్చుకొన్న విషయాలను గుర్తుచేసుకోవడం



అంతర్జాల కృత్యము

పాఠ్యాంశములోని విషయములను విద్యార్థుల కొరకు సాంకేతిక పరిజ్ఞానం మూలంగా తెలియపరచడం.



విషయ సూచిక

1	**సంబంధాలు మరియు ప్రమేయములు**	**1-37**	
1.1	పరిచయం	1	జూన్
1.2	క్రమయుగ్మముల జత	2	
1.3	కార్టీషియన్ లబ్ధము	2	
1.4	సంబంధాలు	6	
1.5	ప్రమేయములు	10	
1.6	ప్రమేయమును సూచించు విధానములు	15	
1.7	ప్రమేయముల రకాలు	17	
1.8	ప్రమేయముల ప్రత్యేక రకములు	24	
1.9	సంయుక్త ప్రమేయములు	27	
1.10	సరళ, వర్గ, ఘన మరియు వ్యుత్క్రమ ప్రమేయముల రేఖాచిత్రములను గుర్తించుట	30	
2	**సంఖ్యలు మరియు క్రమానుగత వరుసలు**	**38-87**	
2.1	పరిచయము	39	జూన్
2.2	యూక్లిడ్ భాగాహార న్యాయము	39	
2.3	యూక్లిడ్ భాగాహార శేషవిధి	41	
2.4	అంక గణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతము	45	
2.5	మాపక అంకగణితము	49	
2.6	క్రమానుగత వరుసలు	54	
2.7	అంక శ్రేడి	58	జూలై
2.8	శ్రేణులు	64	
2.9	గుణశ్రేడి	69	
2.10	గుణశ్రేడిలోని n పదాల మొత్తము	75	
2.11	ప్రత్యేక శ్రేణులు	79	
3	**బీజగణితము**	**88-167**	
3.1	పరిచయము	88	జూలై
3.2	మూడు చలరాశులు కలిగిన సమకాలిక ఏకఘాత సమీకరణములు	90	
3.3	బహుపద సమాసం యొక్క గ.సా.భా మరియు క.సా.గు	97	
3.4	అకరణీయ సమాసములు	102	ఆగస్టు
3.5	బహుపదుల యొక్క వర్గమూలము	107	
3.6	వర్గసమీకరణములు	110	
3.7	చలత్వముల యొక్క రేఖాచిత్రములు	127	సెప్టెంబర్
3.8	వర్గ సమీకరణం యొక్క రేఖా చిత్రములు	134	అక్టోబర్
3.9	మాత్రికలు	142	

10th_Maths_Telugu_Medium_FM.indd 5 13-02-2023 20:00:21

4	**రేఖాగణితము**	**168-213**	
4.1	పరిచయం	168	జూలై
4.2	సరూపత	169	
4.3	థేల్స్ సిద్ధాంతము మరియు కోణ సమద్విఖండన సిద్ధాంతము	179	ఆగస్టు
4.4	పైథాగరస్ సిద్ధాంతము	192	అక్టోబర్
4.5	వృత్తములు మరియు స్పర్శరేఖలు	197	
4.6	అనురూపత సిద్ధాంతము	201	
5	**నిరూపక రేఖాగణితము**	**214-250**	
5.1	పరిచయం	214	ఆగస్టు
5.2	త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యం	216	
5.3	చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యం	218	
5.4	ఒక రేఖ యొక్క ఏటవాలు	223	
5.5	సరళ రేఖ	231	
5.6	సరళ రేఖ యొక్క సాధారణ రూపం	241	
6	**త్రికోణమితి**	**251-279**	
6.1	పరిచయం	251	సెప్టెంబర్
6.2	త్రికోణమితీయ సర్వసమీకరణాలు	254	
6.3	ఎత్తులు మరియు దూరాలు	262	నవంబర్
7	**క్షేత్రగణితము**	**280-314**	
7.1	పరిచయం	280	నవంబర్
7.2	ఉపరితల వైశాల్యము	281	
7.3	ఘనపరిమాణము	295	
7.4	మిళితమైన ఘనముల యొక్క ఉపరితల వైశాల్యము మరియు ఘనపరిమాణము	304	
7.5	ఘనములు ఒక ఆకారము నుండి మరొక ఆకారములోనికి రూపాంతరము చెందిన దాని ఘనపరిమాణంలో మార్పుండదు.	308	
8	**సాంఖ్యక శాస్త్రము మరియు సంభావ్యత**	**315-350**	
8.1	పరిచయం	315	డిసెంబర్
8.2	విస్తరణ కొలతలు	317	
8.3	విచలన గుణకము	329	
8.4	సంభావ్యత	332	
8.5	బీజీయ ఘటనలు	341	
8.6	సంభావ్యత సంకలన సిద్ధాంతము	342	
	జవాబులు	**351-359**	
	గణిత పదాలు	**360**	

7P6Y0 పాఠ్యపుస్తకము

3VJ8B మూల్యాంకనము

10th_Maths_Telugu_Medium_FM.indd 6 13-02-2023 20:00:21

1 సంబంధాలు మరియు ప్రమేయములు

"గణిత శాస్త్రవేత్తలు వస్తువులను గురించి పరిశోధన చేయరు. కాని వారు వాటి మధ్యగల సంబంధాలను పరిశోధిస్తారు. వారికి విషయము కన్న వాని రూపమే ముఖ్యము." – హెన్రి పాయింకేర్



Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646 – 1716)

గాట్‌ఫ్రైడ్ విల్హెల్మ్ లెబ్నిజ్ (ఇతనిని వాన్ లెబ్నిజ్ అని కూడా పిలుస్తారు) అనునతడు ప్రముఖ జర్మన్ గణిత శాస్త్రవేత్త, తత్వవేత్త, భౌతిక శాస్త్రవేత్త మరియు ఆవిష్కర్త. ఇతను విస్తృతంగా వ్రాసిన 26 విషయాలు అనగా భూగర్భ శాస్త్రం, వైద్యశాస్త్రం, జీవ శాస్త్రం, రోగ సాంక్రమిక శాస్త్రము, పురా జీవశాస్త్రము, మనస్తత్వ శాస్త్రము, యంత్రశాస్త్రము, ప్రాచీన భాషా (లక్షణ శాస్త్రం), సామాజిక శాస్త్రము, నీతిశాస్త్రము, చరిత్ర, రాజనీతి శాస్త్రము, చట్టం మరియు సంగీత సిద్ధాంతములలో తన పాత్రను పోషిస్తున్నది.

లెబ్నిజ్ రాసిన పుస్తకంలో "ప్రమేయము" అను పదాన్ని వాడారు. ప్రమేయము అనగా ఒక వక్రము యొక్క ఏ కొలతైన ఒక బిందువు నుండి మరియొక బిందువు వరకు మారుతూ ఉండుటను సూచించును. లెబ్నిజ్ అధికారిక తర్కము మరియు బూలియన్ బీజగణితమును కనుగొనుటలో ప్రముఖ పాత్ర వహించెను. ఇవి ఆధునిక కంప్యూటర్లు పనిచేయుటకు కూడా ప్రాథమిక పాత్ర పోషిస్తున్నది. తన గొప్ప ఆవిష్కరణలు పలు రంగాలలో సహకారము అందిస్తున్నది. అందువలన లెబ్నిజ్‌ను అనువర్తిత శాస్త్ర పితామహుడిగా ప్రశంసించారు.

అభ్యసన ఫలితములు

C5SFE

- సమితులు యొక్క కార్టీషియన్ లబ్ధమును కనుగొనుట మరియు నిర్వచించుట.
- సంబంధమును కార్టీషియన్ లబ్ధముల ఉపసమితిగా నిర్వచించుట.
- ప్రమేయమును ఒక ప్రత్యేక సంబంధముగా అర్థం చేసుకొనుట.
- ప్రమేయమును బాణా చిత్రంగానూ, క్రమయుగ్మములుగాను, పట్టికగాను, రేఖా చిత్రముగాను సూచించుట.
- ప్రమేయములను ఏక– ఏక, బహు –ఏక, సంగ్రస్త, అంతర మరియు ద్విగుణ ప్రమేయములుగా వర్గీకరించుట.
- సమ్మేళన ప్రక్రియ ద్వారా సంయుక్త ప్రమేయములను అర్థం చేసుకొనుట.
- రేఖీయ, వర్గ, ఘన మరియు వ్యుత్క్రమము ప్రమేయముల యొక్క రేఖాచిత్రములను అర్థం చేసుకొనుట.

1.1 పరిచయం

సమితులు అనే భావన గణితంలో ఉన్నత భావనలను నేర్చుకోవడానికి ప్రేరణను అందిస్తుంది. సమితి అనేది సునిర్వచితమైన వస్తువుల సముదాయము. సునిర్వచితమైనది అనగా, ఆ వస్తువు బాగా నిర్వచించబడినది (బాగుగా గుర్తించబడినది) అని అర్థము. ఈ అధ్యాయములో సమితులను సంబంధాలు మరియు ప్రమేయములు అనే రెండు విధాలుగా చదువబోవుచున్నాము. ఇవి నేర్చుకునే ముందు రెండు శూన్యేతర సమితులలోని కార్టీషియన్ లబ్ధము గూర్చి తెలుసుకొనవలెను.

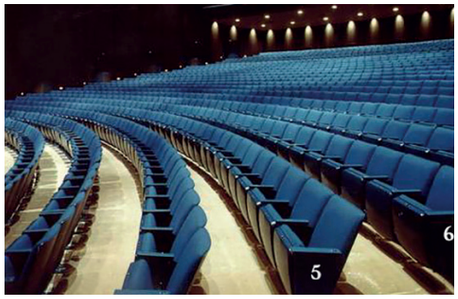
10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_1.indd 1 11-02-2023 17:46:44

మన రోజువారి పరిస్థితులను గణితములో సంబంధములుగాను లేక ప్రమేయములుగాను తెలుపవచ్చును. ఉదాహరణకు ఒక వాహనం ఇచ్చిన సమయంలో కొంతదూరము ప్రయాణము చేయుటను ప్రమేయం ద్వారా సూచించవచ్చు. ఒక వస్తువు ధరను దాని డిమాండ్‌కు తగినట్లు ప్రమేయము ద్వారా చెప్పవచ్చు. బహుభుజి వైశాల్యము మరియు ఘనపరిమాణము; వృత్తము, కృమవృత్తాకార శంఖువు, క్రమ వృత్తాకార స్థూపము, గోళముల ఘనపరిమాణమును ఒకటి లేక పలు చలరాశులు కలిగిన ప్రమేయంగా సూచించవచ్చు.

9వ తరగతిలో సమితుల భావన గూర్చి తెలుసుకొనియున్నాము. వీటిలో ఇవ్వబడిన సమితుల నుండి సమ్మేళనము, ఖండనము మరియు పూరకముల గూర్చి నేర్చుకొనియున్నాము.

మనమిప్పుడు ఇవ్వబడిన రెండు సమితులు A మరియు B నుండి కార్టీషియన్ లబ్ధముల నుండి కొత్త సమితి ఏర్పడు విధము గూర్చి చదువుదాం.

1.2 క్రమయుగ్మముల జత



పటము. 1.1

పటములో చూపిన ఒక ఆడిటోరియంలో సీటింగ్ అమరికను గమనించుము. ఒక వ్యక్తి తన సీటులో క్రమంగా కూర్చొనుటకు, సంఖ్యలు గల టోకెన్లు ఉపయోగపడును. అవి (1,5), (7,16), (3,4), (10,12) మొదలగునవి జారీ చేస్తారు. ఒక వ్యక్తికి (4,10) టోకెన్ వచ్చిన అతను 4 వ వరుసలోని 10 వ సీటు నందు కూర్చొనవలెను. కావున మొదటి సంఖ్య అడ్డు వరుసను సూచిస్తే రెండవ సంఖ్య అదే వరుసలోని సీటు నెంబరును తెలియజేయును. (5,9) టోకెన్ గల వ్యక్తి ఏ సీటును ఆక్రమించును? అతను 9వ వరుసలోని 5వ సీటునా? (9,5) మరియు (5,9) ఒకే సీటును చూపునా? ఖచ్చితంగా లేదు! (2,3), (6,3) మరియు (10,3) టోకెన్లు గూర్చి ఏమి చెప్పగలవు?

ఈ విధంగా వ్రాయబడు జతను క్రమయుగ్మముల జత అంటారు. ఈ భావన సంబంధాలను అర్థం చేసుకొనుటకు ఉపయోగపడును.

1.3 కార్టీషియన్ లబ్ధము



వివరణ 1

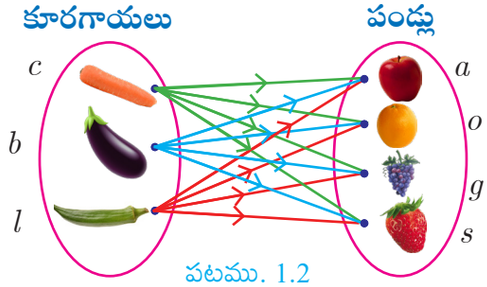
కింది రెండు సమితులను తీసుకొనుము.

A అనేది 3 రకాల కూరగాయల సమితి, B అనేది 4 రకాల పండ్లు

A = {క్యారెట్, వంకాయ, బెండకాయ) మరియు B = (ఆపిల్, నారింజ, ద్రాక్ష, స్ట్రాబెరి}

ఒక పండు ఒక కూరగాయను ఎంచుకొనే సాధ్యమార్గాలు ఎన్ని?

కూరగాయలు (A)	పండ్లు (B)
క్యారెట్ (c)	ఆపిల్ (a)
వంకాయ (b)	నారింజ (o)
బెండకాయ (l)	ద్రాక్ష (g)
	స్ట్రాబెరి (s)



పటము. 1.2

కింద ఇవ్వబడిన 12 రకముల జతల ద్వారా మనము ఎంపిక చేయవచ్చును.

$(c, a), (c, o), (c, g), (c, s), (b, a), (b, o), (b, g), (b, s), (l, a), (l, o), (l,g), (l, s)$

ఈ సేకరణనే కూరగాయల సమితి మరియు పండ్ల సమితి యొక్క కార్టీషియన్ లబ్ధమును సూచిస్తున్నది.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_1.indd 2 11-02-2023 17:46:46

నిర్వచనము

A మరియు B రెండు శూన్యేతర సమితులైన వీటి క్రమయుగ్మముల సమితి (a, b) అనేది $a \in A,\ b \in B$ గా ఉండును. దీనిని A మరియు B ల కార్టీషీయన్ లబ్ధము అందురు. దీనిని $A \times B$ తో సూచిస్తారు. కావున $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$ ($A \times B$ ను A క్రాస్ B అని చదువవలెను) మరియు $A \times \phi = \phi$.

సూచన

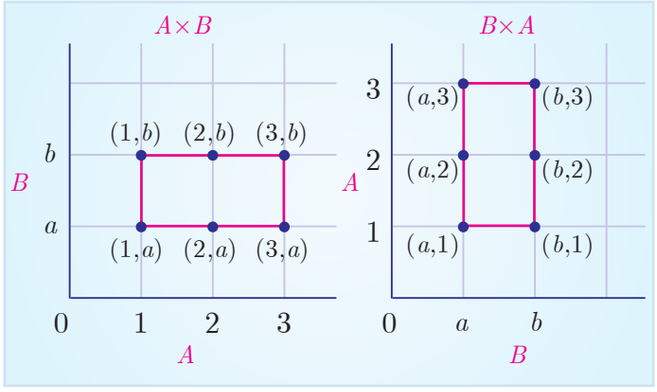
- $A \times B$ అనేది A మరియు B యొక్క మూలకముల మధ్య నున్న అన్ని క్రమయుగ్మముల సమితి అగును. ప్రథమ నిరూపకం A యొక్క మూలకము మరియు ద్వితీయ నిరూపకము B యొక్క మూలకమగును.
- $B \times A$ అనేది B మరియు A యొక్క మూలకముల మధ్య ఉన్న అన్ని క్రమయుగ్మముల సమితి అగును. ప్రథమ నిరూపకము B యొక్క మూలకము మరియు ద్వితీయ నిరూపకము A యొక్క మూలకమగును.
- సాధారణముగా $(a, b) \neq (b, a)$, ప్రత్యేకించి $a = b$ అయిన $(a, b) = (b, a)$
- కార్టీషియన్ లబ్ధమును అడ్డగుణకారమని కూడా పిలుస్తారు.

వివరణ 2

A = {1, 2, 3} మరియు B = {a, b} అయిన $A \times B$ మరియు $B \times A$ ను కనుగొనుము.

$A \times B = \{1,2,3\} \times \{a,b\} = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$ (పటము 1.3లో చూపినట్లు)

$B \times A = \{a,b\} \times \{1,2,3\} = \{(a,1), (a,2), (a,3),(b,1), (b,2), (b,3)\}$ (పటము 1.3లో చూపినట్లు)



పటము. 1.3

మెదడుకు మేత

$A \times B$ ఎప్పుడు $B \times A$ కు సమానమగును

సూచన

- సాధారణంగా $A \times B \neq B \times A$, కాని $n(A \times B) = n(B \times A)$
- $A \times B = \phi$ అయినప్పుడు $A = \phi$ లేక $B = \phi$ కావలెను.
- $n(A) = p$ మరియు $n(B) = q$ అయిన $n(A \times B) = pq$ అగును.

అపరిమిత సమితిని మరలా గుర్తించుకొనుము

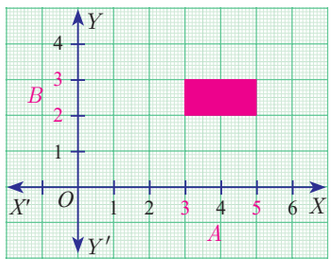
సహజసంఖ్యలు $\mathbb{N} = \{1,2,3,4\ldots\}$; పూర్ణాంకములు $\mathbb{W} = \{0,1,2,3, \ldots\}$;

పూర్ణసంఖ్యలు $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$; అకరణీయసంఖ్యలు $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$;

వాస్తవసంఖ్యలు $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$, ఇచ్చట $\mathbb{Q}'$ అనునది కరణీయసంఖ్యల సమితి

వివరణ 3

A అనేది [3, 5] అంతరములో గల సంఖ్యల సమితి మరియు B అనేది [2,3] అంతరము గల సంఖ్యల సమితి అయిన $A \times B$ ల కార్టీషీయన్ లబ్ధము పటము 1.4. లో చూపిన విధంగా దీర్ఘ చతురస్ర ప్రాంతమును చూపును. (x, y) యొక్క అన్ని బిందువులు దీర్ఘ చతురస్ర ప్రాంతములోనే అమరి ఉండును.



పటము. 1.4

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_1.indd 3 11-02-2023 17:46:49

ప్రగతి శోధన

1. A మరియు B అను శూన్యేతర సమితులలో $A \times B$ ను _____ అంటారు.
2. $n(A \times B) = 20$ మరియు $n(A) = 5$ అయిన $n(B)$ _____.
3. $A = \{-1, 1\}$ మరియు $B = \{-1, 1\}$ అయిన జామితీయ పరంగా $A \times B$ బిందువుల సమితి _____.
4. A, B అనునవి క్రమంగా (–4, 3) మరియు (–2, 3) అంతరము కల్గిన రెండు రేఖా ఖండములు అయిన A మరియు B ల కార్టీషియన్ లబ్ధమును సూచించును.

సూచన

- కార్టీషియన్ తలములో గల బిందువుల సమితిని (x, y) క్రమయుగ్మముల సమితిగా చూడవచ్చును. ఇక్కడ x, y అనేవి వాస్తవ సంఖ్యలు. ఒక వేళ $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ అనే సమితిలో గల అన్ని బిందువుల సమితిని కార్టీషియన్ తలం అంటారు.

కృత్యము 1

$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 4\}$, $B = \{y \mid y \in \mathbb{N}, y < 3\}$ అయిన

$A \times B$ మరియు $B \times A$ లను గ్రాఫ్ కాగితంపై సూచించుము. $A \times B$ మరియు $B \times A$ ల మధ్య వ్యత్యాసము గమనించినావా?

ఉదాహరణ 1.1 If $A = \{1,3,5\}$ మరియు $B = \{2,3\}$ అయిన (i) $A \times B$ మరియు $B \times A$ ను కనుగొనుము.
(ii) $A \times B = B \times A$ అగునా? కాకపోతే ఎందుకు సమానంకాదు?
(iii) $n(A \times B) = n(B \times A) = n(A) \times n(B)$ అని చూపుము

సాధన $A = \{1,3,5\}$ మరియు $B = \{2,3\}$

(i) $A \times B = \{1,3,5\} \times \{2,3\} = \{(1,2), (1,3), (3,2), (3,3), (5,2), (5,3)\}$ ...(1)

$B \times A = \{2,3\} \times \{1,3,5\} = \{(2,1), (2,3), (2,5), (3,1), (3,3), (3,5)\}$ ...(2)

(ii) (1) మరియు (2) ల నుండి $A \times B \neq B \times A$ అని నిర్ధారించవచ్చు. ఎందుకనగా
$(1,2) \neq (2,1)$ మరియు $(1,3) \neq (3,1)$.

(iii) $n(A) = 3$; $n(B) = 2$.

(1) మరియు (2) లను గమనించగా $n(A \times B) = n(B \times A) = 6$;

$n(A) \times n(B) = 3 \times 2 = 6$ మరియు $n(B) \times n(A) = 2 \times 3 = 6$

కావున, $n(A \times B) = n(B \times A) = n(A) \times n(B) = 6$.

అందువలన, $n(A \times B) = n(B \times A) = n(A) \times n(B)$.

ఉదాహరణ 1.2 $A \times B = \{(3,2), (3,4), (5,2), (5,4)\}$ అయిన A మరియు B విలువలను కనుగొనుము.

సాధన $A \times B = \{(3,2), (3,4), (5,2), (5,4)\}$

$A = \{A \times B$ లోని ప్రథమ నిరూపకములు$\}$. కావున, $A = \{3,5\}$

$B = \{A \times B$ లోని ద్వితీయ నిరూపకములు$\}$. కావున, $B = \{2,4\}$

కావున $A = \{3,5\}$ మరియు $B = \{2,4\}$.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_1.indd 4 11-02-2023 17:46:51

ఉదాహరణ 1.3 $A=\{x\in\mathbb{N}\mid 1<x<4\}$, $B=\{x\in\mathbb{W}\mid 0\le x<2\}$ మరియు $C=\{x\in\mathbb{N}\mid x<3\}$. అయిన

(i) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$ (ii) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$ ను సరిచూడుము.

సాధన $A=\{x\in\mathbb{N}\mid 1<x<4\}=\{2,3\}$, $B=\{x\in\mathbb{W}\mid 0\le x<2\}=\{0,1\}$,
$C=\{x\in\mathbb{N}\mid x<3\}=\{1,2\}$

(i) $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$

$B\cup C = \{0,1\}\cup\{1,2\}=\{0,1,2\}$

$A\times(B\cup C) = \{2,3\}\times\{0,1,2\}=\{(2,0),(2,1),(2,2),(3,0),(3,1),(3,2)\}$ ...(1)

$A\times B = \{2,3\}\times\{0,1\} = \{(2,0),(2,1),(3,0),(3,1)\}$

$A\times C = \{2,3\}\times\{1,2\}=\{(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$

$(A\times B)\cup(A\times C) = \{(2,0),(2,1),(3,0),(3,1)\}\cup\{(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$

$=\{(2,0),(2,1),(2,2),(3,0),(3,1),(3,2)\}$ ...(2)

(1) మరియు (2) ల నుండి, $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$ అని సరిచూడబడినది.

(ii) $A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$

$B\cap C = \{0,1\}\cap\{1,2\}=\{1\}$

$A\times(B\cap C) = \{2,3\}\times\{1\}=\{(2,1),(3,1)\}$ ... (3)

$A\times B = \{2,3\}\times\{0,1\}=\{(2,0),(2,1),(3,0),(3,1)\}$

$A\times C = \{2,3\}\times\{1,2\}=\{(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$

$(A\times B)\cap(A\times C) = \{(2,0),(2,1),(3,0),(3,1)\}\cap\{(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$

$=\{(2,1),(3,1)\}$ ... (4)

(3) మరియు (4)ల నుండి, $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$ అని సరిచూడబడినది.

సూచన

- పైన సరిచూసిన రెండు ధర్మముల క్రమమును కార్టీషియన్ లబ్ధముల సమ్మేళనము మరియు ఖండనములపై విభాగ ధర్మము అంటారు, A, B, C మూడు సమితులలో
  (i) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$ (ii) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$.

1.3.1 మూడు సమితుల యొక్క కార్టీషియన్ లబ్ధము

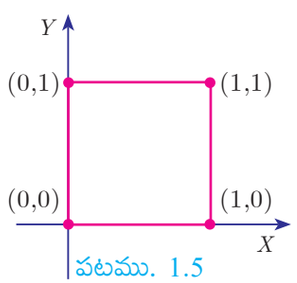
A, B, C అనునవి మూడు శూన్యేతర సమితులయిన, మూడు సమితుల యొక్క కార్టీషియన్ లబ్ధము అనునది త్రిపాది క్రమయుగ్మముల సమితి అగును.

$A\times B\times C=\{(a,b,c)$ అన్ని $a\in A, b\in B, c\in C\}$

రెండు లేక మూడు సమితుల కార్టీషియన్ లబ్ధమును జ్యామితీయ అవగాహన ద్వారా ఒక ఉదాహరణ ఇవ్వవచ్చును.

$A=\{0,1\}$, $B=\{0,1\}$, $C=\{0,1\}$ అనుకొనిన

$A\times B = \{0,1\}\times\{0,1\}=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$



పటము. 1.5

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_1.indd 5 11-02-2023 17:46:57

$A \times B$ ను XY- తలములో గుర్తించిన పటము 1.5 లో చూపిన విధంగా వచ్చును.

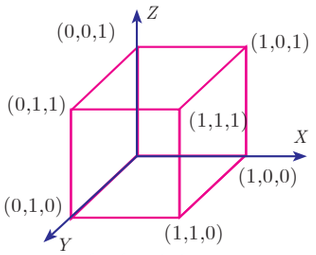
$$(A \times B) \times C = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\} \times \{0,1\}$$
$$= \{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1)(1,1,0),(1,1,1)\}$$

$A \times B \times C$ ను XYZ- తలములో గుర్తించిన పటము 1.6 లో చూపిన విధముగా వచ్చును.

కావున $A \times B$ ద్విపరిమాణములో చతురస్ర శీర్షములను సూచించును. $A \times B \times C$ త్రిపరిమాణములో ఘనము యొక్క కొలతలను సూచించుచున్నది.

సూచన

- సాధారణంగా రెండు శూన్యేతర సమితుల కార్టీషియన్ లబ్ధము కలుపగా ద్విపరిమాణము కలిగిన ఆకారాన్ని ఏర్పరచును. అదే విధంగా మూడు శూన్యేతర సమితుల కార్టీషియన్ లబ్ధము త్రిపరిమాణము కలిగిన ఆకారాన్ని ఏర్పరచును.



పటము. 1.6

అభ్యాసము 1.1

1. (i) $A=\{2,-2,3\}$ మరియు $B=\{1,-4\}$ (ii) $A=B=\{p,q\}$ (iii) $A=\{m,n\}$; $B=\phi$ అయిన $A \times B$, $A \times A$ మరియు $B \times A$ ను కనుగొనుము.
2. $A = \{1,2,3\}$ మరియు $B = \{x \mid x$ అనునది 10 కన్నా తక్కువైన ప్రధాన సంఖ్య$\}$. అయిన $A \times B$ మరియు $B \times A$.ను కనుగొనుము
3. $B \times A = \{(-2,3),(-2,4),(0,3),(0,4),(3,3),(3,4)\}$ అయిన A మరియు B ను కనుగొనుము.
4. $A = \{5,6\}$, $B = \{4,5,6\}$, $C = \{5,6,7\}$, అయిన $A \times A = (B \times B) \cap (C \times C)$ అని చూపుము.
5. A=$\{1,2,3\}$, $B = \{2,3,5\}$, $C = \{3,4\}$ మరియు $D = \{1,3,5\}$, అయిన $(A \cap C) \times (B \cap D) = (A \times B) \cap (C \times D)$ అనునది సమానమా? అని సరిచూడుము.
6. $A = \{x \in \mathbb{W} \mid x < 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x \leq 4\}$ మరియు $C = \{3,5\}$ ను
   (i) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ (ii) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
   (iii) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ అని నిరూపించుము.
7. A = 8 కన్నా తక్కువ గల సహజ సంఖ్యల సమితి, B = 8 కన్నా తక్కువ గల ప్రధాన సంఖ్యల సమితి, C = సరి ప్రధాన సంఖ్యల సమితి అయిన
   (i) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$ (ii) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$ అని నిరూపించుము.

1.4 సంబంధాలు

మన నిత్య జీవితంలో రెండు వస్తువులు కొన్ని నిబంధనలకనుగుణంగా ఒకదానికి ఒకటి సంబంధము కల్గి ఉండుటను మనము గమనిస్తుంటాము. ఆ రెండు వస్తువులు కొన్ని నిబంధనలకనుగుణంగా ఆ సంబంధాన్ని ఏర్పరచున్నది. అయితే ఆ సంబంధమును ఏ విధంగా తెలియపరచవచ్చును? ఇక్కడ కొన్ని ఉదాహరణల ద్వారా తెలుసుకొందాము.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_1.indd 6 11-02-2023 17:47:00

సంబంధాలు	$\mathbb{R}$ గుర్తును ఉపయోగించి వ్యక్తపరచడము	క్రమయుగ్మంగా సూచించడము
భారతదేశం యొక్క రాజధాని నగరం న్యూఢిల్లీ.	భారతదేశం R న్యూఢిల్లీ	(న్యూఢిల్లీ, భారతదేశము)
AB అనే రేఖ XY కు లంబంగా కలదు.	AB అను రేఖ R XY రేఖ	(AB రేఖ, XY రేఖ)
-1 అనునది -5 కన్నా పెద్దదిగా కలదు.	-1 R -5	$(-1, -5)$
ΔPQR యొక్క సౌష్ఠవరేఖ ℓ	ℓ R ΔPQR	(ℓ, ΔPQR)

కొత్త ఢిల్లీ మరియు భారతదేశం ఎలా సంబంధం కల్గి ఉన్నది? దీనికి సమాధానం "కొత్త ఢిల్లీ భారతదేశం యొక్క రాజధాని" అని చెప్పవచ్చును. కాని భారతదేశం మరియు న్యూఢిల్లీని అనేక విధాలుగా సంబంధ పరచవచ్చును. వాటిలో కొన్ని ఉదాహరణలు క్రింద ఇవ్వబడినవి.

- భారతదేశ రాజధాని న్యూఢిల్లీ
- భారతదేశం యొక్క ఉత్తర దిక్కులో న్యూఢిల్లీ కలదు.
- న్యూఢిల్లీ భారతదేశంలో గల ఒక పెద్ద పట్టణము.

కాని వీటిని క్రమయుగ్మముగా ఒకే ఒక విధంగా వ్రాయవచ్చును. అది (న్యూఢిల్లీ, భారతదేశము). ఆచరణాత్మకంగా ఇది ఉపయోగకరంగా ఉండదు. కింద నివ్వబడిన (ఢిల్లీ, భారతదేశము), (వాషింగ్‌టన్, అమెరికా సంయుక్త దేశాలు), (బీజింగ్, చైనా), (లండన్, ఇంగ్లాండు) (ఖాట్మండు, నేపాల్). క్రమయుగ్మ సమితిగా అడిగిన సంబంధముగా తెల్పడం చాలా సులువు.

ప్రగతి శోధన

A = {1, 2, 3, 4} మరియు B = {a, b, c}.

1. కింది వానిలో A నుండి B కు గల సంబంధము ఏది?	2. కింది వానిలో B నుండి A కు గల సంబంధము ఏది?
(i) { (1, b), (1, c), (3, a), (4, b) }	(i) { (c, a), (c, b), (c, 1) }
(ii) { (1, a), (b, 4), (c, 3) }	(ii) { (c, 1), (c, 2), (c, 3), (c, 4) }
(iii) { (1, a), (a, 1), (2, b), (b, 2) }	(iii) { (a, 4), (b, 3), (c, 2) }

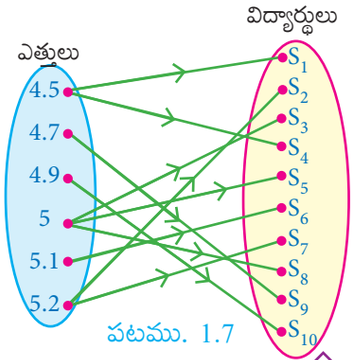
వివరణ 4

తరగతిలో గల విద్యార్థులు	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}
ఎత్తు (అడుగులలో)	4.5	5.2	5	4.5	5	5.1	5.2	5	4.7	4.9

విద్యార్థుల ఎత్తుల కనుగుణంగా గల సంబంధాన్ని నిర్వచించిన

R = {(ఎత్తులు, విద్యార్థులు)}

$R = \{(4.5, S_1),\ (4.5, S_4),\ (4.7, S_9),\ (4.9, S_{10}),\ (5, S_3),\ (5, S_5), (5, S_8),\ (5.1, S_6),\ (5.2, S_2),\ (5.2, S_7)\}$



పటము. 1.7

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_1.indd 7 11-02-2023 17:47:01

నిర్వచనము

A మరియు B అనునవి రెండు శూన్యేతర సమితులయ్యి A నుండి B కు గల సంబంధము R అనేది కొన్ని ప్రత్యేక నిబంధనలను సంతృప్తిపరచి; $A \times B$ యొక్క ఉపసమితిగా ఉండును. $x \in A$ నుండి $y \in B$ నకు గల సంబంధం R ద్వారా ఉండిన $x\,\mathrm{R}\,y$ అని వ్రాయవచ్చును. $x\,\mathrm{R}\,y$ ఉన్నట్లయిన $(x, y) \in \mathrm{R}$

R యొక్క ప్రదేశము $\{x \in A \mid x\,\mathrm{R}\,y,$ ఏదైనా ఒక $y \in B\}$

సంబంధము R యొక్క సహప్రదేశము B

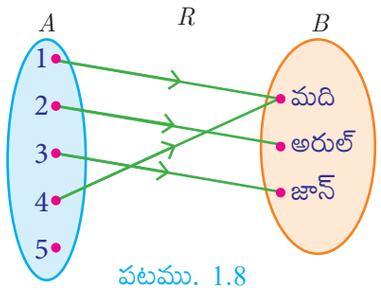
R యొక్క వ్యాప్తి $\{y \in B \mid x\mathrm{R}y,$ ఏదైనా ఒక $x \in A\}$

ఈ నిర్వచనముల నుండి ప్రదేశము $\mathrm{R} \subseteq A$ సహప్రదేశము $\mathrm{R} = B$, వ్యాప్తి $\mathrm{R} \subseteq B$ అని గమనించవచ్చును.

వివరణ 5

$A = \{1,2,3,4,5\}$ మరియు $B =$ {మది, అరుల్, జాన్} అనుకొనిన

A మరియు B సమితుల మధ్య గల సంబంధము R ను బాణా చిత్రములో సూచించిన.



పటము. 1.8

R యొక్క ప్రదేశము {1,2,3,4}

R యొక్క వ్యాప్తి = {మది, అరుల్, జాన్} = R యొక్క సహ ప్రదేశము.

R యొక్క ప్రదేశము A కు శుద్ధ ఉపసమితి అగును అని గమనించుము.

కృత్యము 2

A మరియు B అనేది xy- తలములో గల రేఖల సమితి అయిన, A లో X- అక్షమునకు సమాంతరముగా గల రేఖలు గలవు. $x \in A$, $y \in B$, అనుకొనిన $x\mathrm{R}y$ అయిన x అనేది y కు లంబము అని అనుకొనుము. రేఖా చిత్రము ఉపయోగించి B యొక్క మూలకములను కనుగొనుము.

వివరణ 6

$A = \{1,3,5,7\}$ మరియు $B = \{4,8\}$, R అను సంబంధము A అనునది B కన్నా తక్కువ అని నిర్వచించబడినది అయితే 1R4 (∵1 అనునది 4 కన్నా తక్కువ) అదేవిధంగా 1R8, 3R4, 3R8, 5R8, 7R8

దీనికి సమానంగా R= {(1,4), (1,8), (3,4), (3,8), (5,8), (7,8)}

సూచన

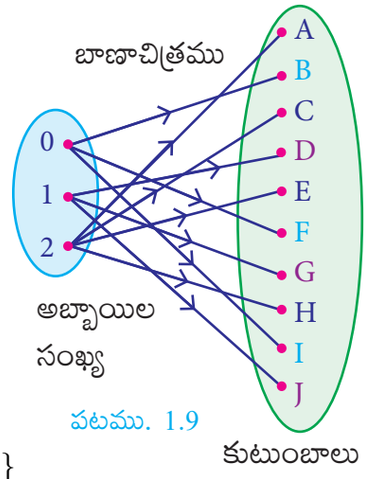
- పై ఉదాహరణలో $A \times B = \{(1,4), (1,8), (3,4), (3,8), (5,4), (5,8), (7,4), (7,8)\}$
  $\mathrm{R} = \{(1,4), (1,8), (3,4), (3,8), (5,8), (7,8)\}$ R అనునది $A \times B$ కు ఉపసమితిగా కలదని గమనించవచ్చును.

వివరణ 7

ఒక గ్రామము నందు ఒక ప్రత్యేక స్థలములో ఇద్దరు పిల్లలు గల పది కుటుంబములు $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ మరియు J అనుకొనిన, వారిలో B, F, I కుటుంబములో ఇద్దరూ అమ్మాయిలే, D, G, J కుటుంబములో ఒక అబ్బాయి, ఒక అమ్మాయి కలరు. మిగిలిన కుటుంబంలో ఇద్దరు అబ్బాయిలే కలరు. సంబంధము R ను

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_1.indd 8 11-02-2023 17:47:03

xRy, గా నిర్వచించిన ఇక్కడ x అనేది అబ్బాయిల సంఖ్యను సూచించిన మరియు y అనేది x సంఖ్య గల అబ్బాయిల కుటుంబములను సూచించును. ఈ పరిస్థితిని సంబంధముగా తీసుకొని క్రమయుగ్మములుగా మరియు బాణా చిత్రములుగా సూచించుము.



పటము. 1.9

సంబంధము R యొక్క ప్రదేశము ఇద్దరూ పిల్లలు గల అబ్బాయిల సంఖ్యను సూచించును. కావున R యొక్క ప్రదేశము $\{0,1,2\}$, అనే మూడు మూలకాలు కలిగియుండును. ఇక్కడ 0 అబ్బాయిలు గల కుటుంబములే ఇద్దరు అమ్మాయిలు గల కుటుంబమగును. 1 అబ్బాయి గల కుటుంబములో 1 అబ్బాయి, 1 అమ్మాయి ఉంటారు. కావున R యొక్క సంబంధము కింద ఇవ్వబడినవి.

$$R = \{(0,B),(0,F),(0,I),(1,D),(1,G),(1,J),(2,A),(2,C),(2,E),(2,H)\}$$

ఈ సంబంధము బాణా చిత్రముగా (పటము 1.9)లో చూపబడినది.

ఉదాహరణ 1.4 $A = \{3,4,7,8\}$ మరియు $B = \{1,7,10\}$. కింది వానిలో A నుండి B కు గల సంబంధము ఏది?

(i) $R_1 = \{(3,7), (4,7), (7,10), (8,1)\}$ (ii) $R_2 = \{(3,1), (4,12)\}$

(iii) $R_3 = \{(3,7), (4,10), (7,7), (7,8), (8,11), (8,7), (8,10)\}$

సాధన $A \times B = \{(3,1), (3,7), (3,10), (4,1), (4,7), (4,10), (7,1), (7,7), (7,10), (8,1), (8,7), (8,10)\}$

(i) $R_1 \subseteq A \times B$ అని గమనించాలి. కావున R_1 అనునది A నుండి B కు సంబంధమగును

(ii) ఇక్కడ, $(4,12) \in R_2$, కాని $(4,12) \notin A \times B$ . .కావున, R_2 అనునది A నుండి B కు సంబంధము కాదు.

(iii) ఇక్కడ, $(7,8) \in R_3$, కాని $(7,8) \notin A \times B$. కావున, R_3 అనునది A నుండి B కు సంబంధము కాదు.

సూచన

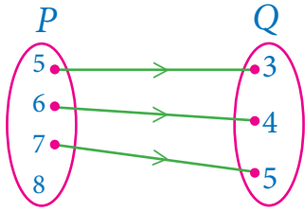
- ఒక సంబంధమును బీజీయంగా రోస్టర్ పద్ధతిలోను లేక సమితి నిర్మాణ పద్ధతిలోను సూచించవచ్చును.
- బాణాపు గుర్తు పటము సంబంధములలో దృశ్య ప్రాతినిధ్యంను సూచించును.

ఉదాహరణ 1.5 (పటము 1.10) బాణపు చిత్రము P మరియు Q సమితుల మధ్యగల సంబంధమును తెల్పుచున్నది. అయిన దీని నుండి కింది సంబంధమును వ్రాయుము.

(i) సమితి నిర్మాణ పద్ధతి

(ii) రోస్టర్ రూపం

(iii) R యొక్క ప్రదేశము మరియు వ్యాప్తి.



పటము. 1.10

సాధన

(i) R యొక్క సమితి నిర్మాణ పద్ధతి $= \{(x,y) \mid y = x-2,\ x \in P, y \in Q\}$

(ii) R యొక్క రోస్టర్ రూపం $= \{(5,3),(6,4),(7,5)\}$

(iii) R యొక్క ప్రదేశము $= \{5,6,7\}$ మరియు వ్యాప్తి $= = \{3,4,5\}$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_1.indd 9 11-02-2023 17:47:04

'శూన్య సంబంధము'

క్రింది ఉదాహరణను గమనించిన $A=\{-3,-2,-1\}$ మరియు $B=\{1,2,3,4\}$, A నుండి B కు గల సంబంధమును $a-b=8$ గా నిర్వచించిన $a-b=8$ గా ఎటువంటి (a,b) జత ఉండదు. కావున R లో ఎటువంటి మూలకము ఉండదు. మరియు $R=\phi$

ఎటువంటి మూలకములు లేనటువంటి సంబంధమును శూన్య సంబంధము అంటారు.

మీకు తెలుసా?

$n(A)=p$, $n(B)=q$, అయిన A మరియు B మధ్య ఉన్న సంబంధాల మొత్తము సంఖ్య 2^{pq} .

అభ్యాసము 1.2

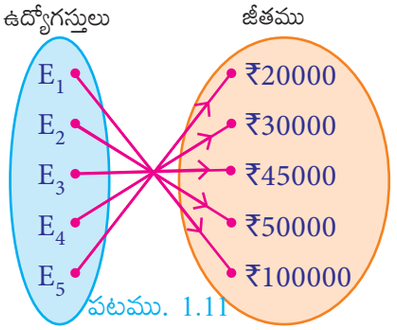
1. $A=\{1,2,3,7\}$ మరియు $B=\{3,0,-1,7\}$, అయిన కింది వానిలో ఏవి A నుండి B కు సంబంధమగును?
   (i) $R_1=\{(2,1),(7,1)\}$ (ii) $R_2=\{(-1,1)\}$
   (iii) $R_3=\{(2,-1),(7,7),(1,3)\}$ (iv) $R_4=\{(7,-1),(0,3),(3,3),(0,7)\}$
2. $A=\{1,2,3,4,\ldots,45\}$ మరియు R అనునది A యొక్క వర్గముగా నిర్వచించిన R ను $A\times A$ యొక్క ఉపసమితిగా వ్రాయము మరియు R యొక్క ప్రదేశము మరియు వ్యాప్తిని కనుగొనుము.
3. R అనే ఒక సంబంధము $\{(x,y)/y=x+3,\ x\in\{0,1,2,3,4,5\}\}$ గా ఇవ్వబడిన R యొక్క ప్రదేశము మరియు వ్యాప్తిని కనుగొనుము.
4. (i) $\{(x,y)|x=2y,\ x\in\{2,3,4,5\},\ y\in\{1,2,3,4\}$
   (ii) $\{(x,y)|y=x+3,\ x,\ y$ అనునవి సహజ సంఖ్యలు$<10\}$
   ఇవ్వబడిన ఒక్కొక్క సంబంధమునకు (అ) బాణా చిత్రము (ఆ) రేఖాచిత్రంగా
   (ఇ) రోస్టర్ రూపంలో చూపుము.
5. ఒక కంపెనీలో నాలుగు వర్గాల ఉద్యోగస్తులు కలరు. వారిలో సహయకులు (A), గుమస్తాలు (C), నిర్వహకులు (M), కార్యనిర్వహకులు (E), ఆ కంపెనీ ₹10,000, ₹25,000, ₹50,000 మరియు ₹1,00,000 లుగా జీతము అక్కడ పనిచేసే A, C, M మరియు E లకు అందిస్తున్నది. If A_1, A_2, A_3, A_4 మరియు A_5 అనేవి సహయకులు, C_1, C_2, C_3, C_4 అనేవి గుమస్తాలు, M_1, M_2, M_3 అనేవి నిర్వహకులు మరియు E_1, E_2 కార్యనిర్వహకులు అయిన xRy అనే సంబంధములో x అనేది y కు ఇవ్వబడిన జీతము అయిన సంబంధము R ను క్రమయుగ్మములుగాను మరియు బాణచిత్రములుగాను సూచించుము.

1.5 ప్రమేయములు

రెండు శూన్యేతర సమితుల మధ్య ఉండే పలు సంబంధాలలో కొన్ని ప్రత్యేక సంబంధములను ప్రమేయములు అని అంటారు.

వివరణ 8

ఒక సంస్థ నందు వివిధ వర్గాల 5 మంది ఉద్యోగస్తులు కలరు. ఆ ఉద్యోగస్తులకి ఇస్తున్న జీతమును పటము 1.11 నందు బాణ చిత్రముగా ఇవ్వబడినది. సంస్థలోని ప్రతి ఉద్యోగస్తునికి ఒక జీతము మాత్రమే సంబంధపడి యుండును.



పటము. 1.11

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_1.indd 10 11-02-2023 17:47:06

సూచించిన ప్రత్యేక సంబంధములను కింద ఇవ్వబడిన నిత్య జీవిత పరిస్థితుల ద్వారా చూడవచ్చును.

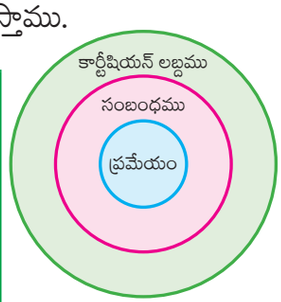
1. తరగతిలోని ఒకే వయసు గల విద్యార్థుల సమితి A అనుకొనుము. ఒక్కొక్క విద్యార్థికి ఒకే ఒక వయసు మాత్రము ఉండుటకు వీలగును.
2. ఒక పుస్తకము కొనుటకు పుస్తక దుకాణం వెళ్ళినప్పుడు ఒకే ధర గల పుస్తకముల సమితి (చాలా పుస్తకములకు ఒకే ధర ఉండవచ్చును.
3. బాయిల్స్ నియమము తెలిసినపుడు పీడనం P యొక్క ఒక్కొక్క విలువకు అనుగుణంగా ఒకే ఒక ఘనపరిమాణం V విలువ ఉండును.
4. అర్థశాస్త్రంలో అవసరమైనంత పరిమాణమును $Q = 360 - 4P$ గా వ్యక్తపరచవచ్చును. ఇక్కడ P అనేది వస్తువు ధర. ఇక్కడ మనము గమనించిన P యొక్క ప్రతి విలువకు Q కు ఒకే ఒక విలువ మాత్రమే ఉండును. కావున పరిమాణము Q అనేది వస్తువు ధర P మీద ఆధారపడి ఉండును.

మనం ఇటువంటి సంబంధములను చాలాసార్లు గమనించి ఉంటాము. A సమితిలోని ఒకే ఒక మూలకమునకు దానికి అనుగుణంగా B సమితిలోని ఒకే ఒక మూలకమునకు సంబంధం కల్గియుండిన అట్టి సంబంధమును ప్రమేయము అంటారు. ప్రమేయమును సూచించుటకు సాధారణంగా 'f' ను సూచిస్తాము.

నిర్వచనము

X మరియు Y లు రెండు శూన్యేతర సమితులు అనుకొనుము X నుండి Y కు ఒక ప్రమేయం f అగుటకు ప్రతి మూలకము $x \in X$ కు ఏకైక మూలకము $y \in Y$ గా వుండవలెను. అది $(x, y) \in f$ గా ఉండును.

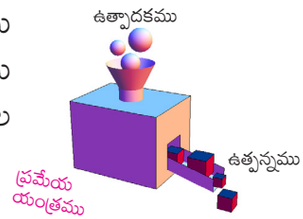
కావున $f = \{(x, y) \mid$ అన్ని $x \in X, y \in Y\}$.



పటము. 1.12(a)

X నుండి Y కు గల ప్రమేయమును $f : X \to Y$ గా వ్రాయవచ్చును.

సంబంధములు మరియు ప్రమేయముల నిర్వచనాలను పోల్చగా మనము గమనించునది ప్రతి ప్రమేయము ఒక సంబంధము. కావున సంబంధములు అగును. ప్రమేయము యొక్క ఉపసమితి అగును మరియు సంబంధాలు లబ్ధముల ఉపసమితి అగును.(పటము 1.12(a))



పటము. 1.12(b)

ప్రమేయము f ను ఒక యంత్రము వలె అనుకొనిన x యొక్క ప్రతి ఉత్పాదక విలువకు ఏకైక ఉత్పన్నము $f(x)$ ను ఇచ్చును.

మీకు తెలుసా?

ఒక ప్రమేయమును ప్రతిసర్జనము లేక పరివర్తనము అని కూడా అంటారు.

సూచన

$f : X \to Y$ ప్రమేయమైన

- సమితి X ను ప్రమేయం f యొక్క ప్రదేశమని మరియు సమితి Y ను సహప్రదేశమని అంటారు.
- $f(a) = b$, అయిన ప్రమేయం f లో b ను a యొక్క ప్రతిబింబము, a ను b యొక్క పూర్వ బింబము అని అంటారు.
- X యొక్క అన్ని ప్రతిబింబముల సమితిని f యొక్క వ్యాప్తి అంటారు.
- $f : X \to Y$ ప్రమేయమగుటకు
  - (i) f యొక్క ప్రదేశములోని ప్రతి మూలకమునకు ప్రతిబింబము ఉండవలెను.
  - (ii) ఒక్కొక్క మూలకమునకు ఒకే ఒక ప్రతిబింబము ఉండవలెను.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_1.indd 11 11-02-2023 17:47:07

- పరిమిత సమితులు A మరియు B లో $n(A)=p$, $n(B)=q$ అయిన A మరియు B మధ్యగల ప్రమేయముల మొత్తము q^p అగును.
- ఈ అధ్యాయములో f ను వాస్తవ విలువల ప్రమేయముగా తీసుకొంటాము.
- ప్రమేయము యొక్క ప్రదేశాన్ని వివరించేటప్పుడు

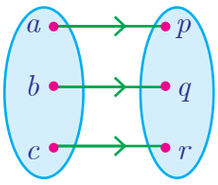
(i) $f(x)=\frac{1}{x+1}$ లో $x=-1$ అయిన $f(-1)$ నిర్వచితము కాదు. కావున $x=-1$. తప్ప f అనునది అన్ని వాస్తవ సంఖ్యలకు నిర్వచితమగును. అందువలన f యొక్క ప్రదేశము $\mathbb{R}-\{-1\}$

(ii) $f(x)=\frac{1}{x^2-5x+6}$ లో $x=2,3$ అయిన $f(2)$ మరియు $f(3)$ నిర్వచితము కాదు. కావున $x=2,3$ తప్ప f అన్ని వాస్తవ సంఖ్యలకు నిర్వచితమగును. అందువలన f యొక్క ప్రదేశము $=\mathbb{R}-\{2,3\}$.

ప్రగతి శోధన

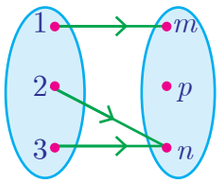
1. సంబంధాలు ____ యొక్క ఉపసమితి ప్రమేయాలు ____ యొక్క ఉపసమితి.
2. సరియా (లేక) తప్పా అని తెల్పుము ఒక సంబంధము యొక్క అని మూలకములకు ప్రతిబింబములు ఉండును.
3. సరియా (లేక) తప్పా అని తెల్పుము ఒక ప్రమేయము యొక్క అన్ని మూలకములకు ప్రతిబింబములు ఉండును.
4. సరియా (లేక) తప్పా అని తెల్పుము $\mathrm{R}: A \to B$ అనేది ఒక సంబంధము అయిన R యొక్క ప్రదేశము A
5. $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ అని నిర్వచితమైన $f(x)=x^2$ లో 1 మరియు 2 యొక్క ప్రతిబింబములు ____ మరియు ____.
6. సంబంధము మరియు ప్రమేయము మధ్య గల భేదము ____.
7. A మరియు B అనునది రెండు శూన్యేతర పరిమిత సమితులు అయిన కింద నివ్వబడిన రెండు సేకరణలో ఏది పెద్దది?
   (i) A మరియు B ల మధ్య గల సంబంధాలు సంఖ్య.
   (ii) A మరియు B మధ్య గల ప్రమేయముల సంఖ్య.

వివరణ 9 - ప్రమేయముల కొరకు పరీక్షలు బాణా చిత్రము ద్వారా సూచించుట



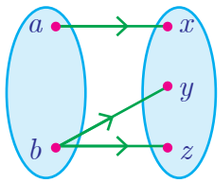
ఇది ప్రమేయమును సూచించును. ప్రతి ఉత్పాదకమునకు అనుగుణంగా ఒక ఉత్పాదన కలదు.

పటము. 1.13(a)



ఇది కూడా ప్రమేయమును సూచించును. ప్రతి ఉత్పాదకమునకు ఒక ఉత్పాదనం కలదు.

పటము. 1.13(b)



ఇది ప్రమేయం కాదు b ఉత్పాదకమునకు రెండు ఉత్పాదనలు కలవు.

పటము. 1.13(c)

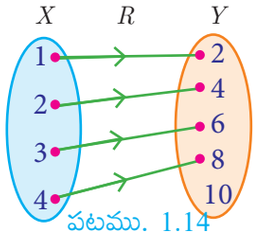
10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_1.indd 12 11-02-2023 17:47:08

ప్రమేయములు గణితంలో ఉన్నత భావనల అవగాహనలో ముఖ్యమైన పాత్ర పోషిస్తున్నాయి. ప్రమేయాలు ఒక రూపం నుండి మరొక రూపమునకు మార్చుటకు ప్రాథమిక ఉపకరణమగుచున్నది. అందువలన ప్రమేయాలు విస్తృతంగా సాంకేతిక శాస్త్రాలలో ఉపయోగిస్తున్నారు.

సూచన

- ఒక ప్రమేయము యొక్క వ్యాప్తి దాని సహప్రదేశానికి ఉపసమితియగును.

ఉదాహరణ 1.6 $X = \{1,2,3,4\}$ మరియు $Y = \{2,4,6,8,10\}$ మరియు $R = \{(1,2),(2,4),(3,6),(4,8)\}$. అయిన R అనేది ప్రమేయమని చూపుము మరియు ప్రదేశము, సహప్రదేశము మరియు వ్యాప్తిని కనుగొనుము.



పటము. 1.14

సాధన పటము 1.14 లో R గుర్తించబడినది $x \in X$ కు ఒకే ఒక $y \in Y$ మూలకం కలదు. కావున X లోని అన్ని మూలకములకు Y లో ఒకే ఒక ప్రతిబింబము కలదు. అందువలన అనేది ప్రమేయము. X యొక్క ప్రదేశము $= \{1,2,3,4\}$; Y సహప్రదేశము $= \{2,3,6,8,10\}$; f యొక్క వ్యాప్తి $\{2,4,6,8\}$.

ఉదాహరణ 1.7 'f' అను సంబంధములో $f(x) = x^2 - 2$ గా నిర్వచితమైనది. ఇక్కడ $X = \{-2,-1,0,3\}$ మరియు $Y = \mathrm{R}$ అయిన

(i) f యొక్క మూలకములను జాబితా పరుచుము (ii) f అనేది ప్రమేయమగునా?

సాధన $f(x) = x^2 - 2$, $X = \{-2,-1,0,3\}$

(i) $f(-2) = (-2)^2 - 2 = 2$; $f(-1) = (-1)^2 - 2 = -1$

$f(0) = (0)^2 - 2 = -2$; $f(3) = (3)^2 - 2 = 7$

కావున, $f = \{(-2,2),(-1,-1),(0,-2),(3,7)\}$

(ii) f యొక్క ప్రదేశములోని ప్రతి ఒక్క మూలకమునకు ఏకైక ప్రతిబింబము కలదు కనుక f అనేది ప్రమేయమగును.

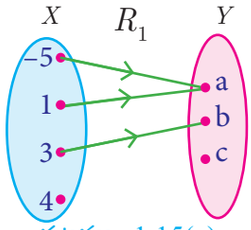
మెదడుకు మేత

గ్రహాలు వాటి ఉపగ్రహాలకు మధ్య గల సంబంధము ప్రమేయమగునా?

ఉదాహరణ 1.8 $X = \{-5,1,3,4\}$ మరియు $Y = \{a,b,c\}$, అయిన కింద ఇవ్వబడిన వాటిలో X నుండి Y కు గల సంబంధాలు ఏవి?

(i) $\mathbb{R}_1 = \{(-5,a), (1,a), (3,b)\}$ (ii) $\mathbb{R}_2 = \{(-5,b), (1,b), (3,a),(4,c)\}$

(iii) $\mathbb{R}_3 = \{(-5,a), (1,a), (3,b),(4,c),(1,b)\}$



పటము. 1.15(a)

సాధన

(i) $\mathbb{R}_1 = \{(-5,a), (1,a), (3,b)\}$

$\mathbb{R}_1$ ను బాణపు చిత్రము ద్వారా పటం 1.15(a) లో చూపవచ్చును.

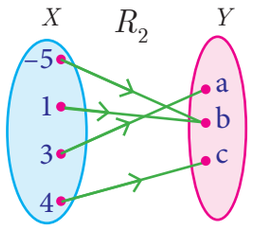
$\mathbb{R}_1$ ప్రమేయం కాదు $4 \in X$ కు 4 లో ప్రతిబింబం లేదు.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_1.indd 13 11-02-2023 17:47:10

(ii) $\mathbb{R}_2 = \{(-5,b), (1,b), (3,a),(4,c)\}$

$\mathbb{R}_2$ ను బాణపు చిత్రము ద్వారా పటం 1.15(b) లో చూపవచ్చును.

$\mathbb{R}_2$ ప్రమేయమగును. X లోని ప్రతిమూలకం Y లో ఏకైక మూలకంతో జతపరచబడినది.

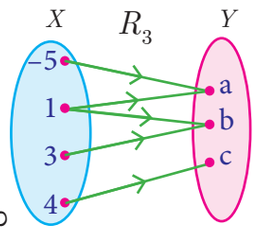


పటము. 1.15(b)

(iii) $\mathbb{R}_3 = \{(-5,a), (1,a), (3,b),(4,c),(1,b)\}$

$\mathbb{R}_3$ ను బాణపు చిత్రము ద్వారా పటం 1.15(c) లో చూపవచ్చును.

$\mathbb{R}_3$ ప్రమేయం కాదు. $1 \in X$ కు రెండు వేర్వేరు ప్రతిబింబములు $a \in Y$ మరియు $b \in Y$ కలదు.



పటము. 1.15(c)

దీని నుండి ప్రతి మూలకమునకు ఒకే ఒక ప్రతిబంబము ఉన్నప్పుడు మాత్రమే ఆ సంబంధము ప్రమేయమగునని తెలుసుకొనవచ్చును.

ఉదాహరణ 1.9 $f(x) = 2x - x^2$, గా ఇవ్వబడిన (i)$f(1)$ (ii) $f(x+1)$ (iii) $f(x) + f(1)$ ను కనుగొనుము.

సాధన (i) x బదులు 1 ని మార్చగా

$$f(1) = 2(1) - (1)^2 = 2 - 1 = 1$$

(ii) x బదులు $x+1$ ని మార్చగా

$$f(x+1) = 2(x+1) - (x+1)^2 = 2x + 2 - (x^2 + 2x + 1) = -x^2 + 1$$

(iii) $f(x) + f(1) = (2x - x^2) + 1 = -x^2 + 2x + 1$

[$f(x) + f(1) \neq f(x+1)$ అని గమనించుము. సాధారణంగా $f(a+b)$ కు $f(a)+f(b)$ సమానము కాదు.]

అభ్యాసము 1.3

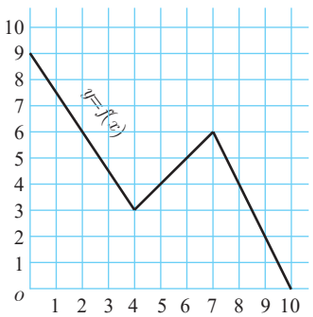
1. $f = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{N}$ మరియు $y = 2x\}$ అనునది N వద్ద సంబంధం కలిగియుండిన ప్రదేశము, సహప్రదేశం మరియు వ్యాప్తిని కనుగొనుము. ఈ సంబంధము ఒక ప్రమేయమగునా?

2. $X = \{3, 4, 6, 8\}$ అనుకొంటే $\mathbb{R} = \{(x, f(x)) \mid x \in X, f(x) = x^2 + 1\}$ అను సంబంధం X నుండి $\mathbb{N}$ వరకు ఒక ప్రమేయమగునా?

3. ఇవ్వబడిన ప్రమేయము $f : x \rightarrow x^2 - 5x + 6$, అయిన

   (i) $f(-1)$ (ii) $f(2a)$ (iii) $f(2)$ (iv) $f(x-1)$ ను కనుగొనుము.

4. పటము 1.16 లో ఇవ్వబడిన రేఖాచిత్రం $f(x)$ ద్వారా $f(9) = 2$ అని తెలియుచున్నది.



పటము. 1.16

   (i) క్రింది ప్రమేయముల విలువలను కనుగొనుము.

   (a) $f(0)$ (b) $f(7)$ (c) $f(2)$ (d) $f(10)$

   (ii) x యొక్క ఏ విలువకు $f(x) = 1$ అగును?

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_1.indd 14 11-02-2023 17:47:12

(iii) $f(x)$ యొక్క (i) ప్రదేశము (ii) వ్యాప్తి కనుగొనుము.

(iv) f అనే ప్రమేయంలో 6 యొక్క ప్రతి బింబము కనుగొనుము.

5. $x \neq 0$ అయిన $f(x) = 2x+5$ అనుకొంటే $\dfrac{f(x+2)-f(2)}{x}$ ను కనుగొనుము

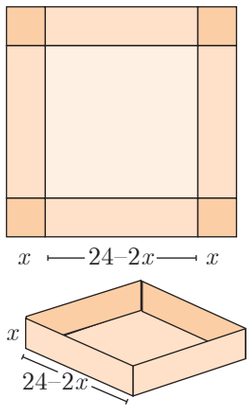
6. ప్రమేయం f, $f(x) = 2x - 3$ గా నిర్వచితమైన కింది వాటిని కనుగొనుము

(i) $\dfrac{f(0)+f(1)}{2}$ విలువ

(ii) $f(x) = 0$ అయిన x విలువ

(iii) $f(x) = x$ అయిన x విలువ

(iv) $f(x) = f(1-x)$ అయిన x విలువ



పటము. 1.17

7. 24 సెం.మీ భుజము గల ఒక చతురస్ర రేకు నుండి ఒక తెరచిన పెట్టెను తయారు చేయుటకు నాలుగు మూలలోను సమాన చతురస్రాలను పటము 1.17 లో చూపిన విధంగా కత్తిరించి భుజాలను మడచి తెరచిన పెట్టెను తయారుచేసెను. పెట్టె ఘనపరిమాణము V ను x యొక్క ప్రమేయముగా తెల్పుము.

8. ఒక ప్రమేయం $f(x)$ అనునది $3-2x$ గా నిర్వచితమైతే $f(x^2) = (f(x))^2$ అయిన x విలువ కనుగొనుము.

9. గంటకు 500 కి.మీ వేగముతో ఒక విమానము ఎగురుచున్నది. విమానం d దూరం ప్రయాణించుటకు పట్టు కాలమును t (గంటలలో) ప్రమేయముగా వ్యక్తపరచుము.

10. ప్రక్కన ఇచ్చిన పట్టిక సమాచారము ఒక వ్యక్తి యొక్క నుదుట భాగము పొడవు మరియు అతని ఎత్తును తెలియజేస్తుంది. దత్తాంశము ఆధారంగా ఒక విద్యార్థి ఎత్తు (y) మరియు నుదిటి పొడవు (x) సంబంధమును $y = ax + b$ ద్వారా తెలుసుకొంటాడు. ఇక్కడ a, b లు స్థిరాంకములు

'x' యొక్క నుదిటి భాగం పొడవు (సెం.మీలలో)	ఎత్తు 'y (అంగుళములో)
35	56
45	65
50	69.5
55	74

(i) ఈ సంబంధము ప్రమేయమగునా అని సరిచూడుము.

(ii) a మరియు b విలువలు కనుగొనుము.

(iii) నుదుటి పొడవు 40 సెం.మీ అయిన అతని ఎత్తును కనుగొనుము.

(iv) ఎత్తు 53.3 అంగుళాలయిన అతని నుదుటి పొడవు కనుగొనుము.

1.6 ప్రమేయమును సూచించు విధానములు

ప్రమేయమును క్రింది విధముగా సూచించవచ్చును.

(i) క్రమయుగ్మాల సమితి (ii) పట్టిక

(iii) బాణపు చిత్రములు (iv) రేఖాచిత్రములు

$f : A \to B$ ప్రమేయము అనుకొనుము.

(i) క్రమయుగ్మములు

సమితి $f = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in A\}$ యొక్క అన్ని క్రమయుగ్మములు ప్రమేయమును సూచించవచ్చు.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_1.indd 15 11-02-2023 17:47:14

(ii) పట్టిక

ప్రమేయము f ను పట్టిక రూపంలో x విలువలను మరియు వాటి ప్రతిబింబ విలువలను సూచించవచ్చును.

(iii) బాణపు చిత్రములు

f ప్రమేయం యొక్క ప్రదేశము మూలకములను వాటి ప్రతిబింబములను బాణపు గుర్తులతో సూచించవచ్చు.

(iv) రేఖా చిత్రములు

$f = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in A\}$ లో గల సమితి క్రమయుగ్మములన్నింటిని XY- తలములో బిందువులుగా గుర్తించవచ్చు. అన్ని బిందువులను కలిపే పటమును f ప్రమేయం యొక్క రేఖాచిత్రం అగును.

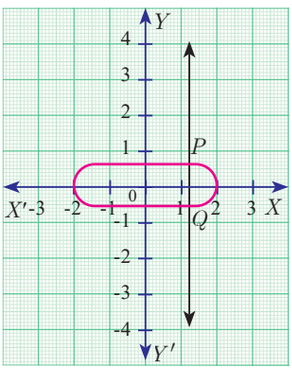
ప్రతి ప్రమేయమును రేఖాచిత్రములో ఒక వక్రముగా సూచించవచ్చు. కాని రేఖాచిత్రములో గీయు అన్ని వక్రములు ప్రమేయమును సూచించదు.

కింది పరీక్ష నుండి ఒక వక్రము ప్రమేయమగునా కాదా అని నిర్ధారించవచ్చు.

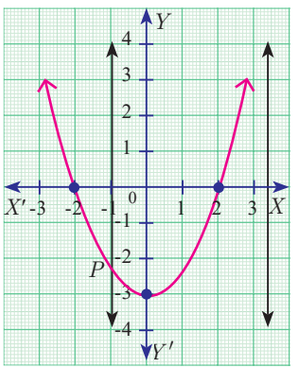
1.6.1 లంబరేఖా పరీక్ష

ఒక వక్రము ప్రమేయము కావలెనన్న ప్రతి నిలువు రేఖ, వక్రమును ఒకే ఒక బిందువు వద్ద ఖండించవలయును.

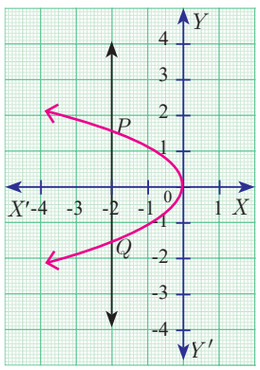
ఉదాహరణ 1.10 లంబరేఖ పరీక్షను ఉపయోగించి కింది రేఖాచిత్రములు పటం 1.18(a), 1.18(b), 1.18(c), 1.18(d) ఏవి ప్రమేయము లను సూచించును?



పటము. 1.18(a)



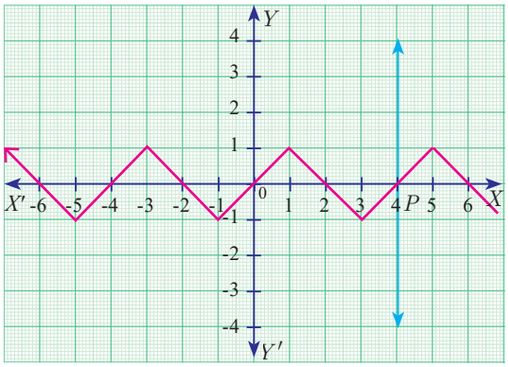
పటము. 1.18(b)



పటము. 1.18(c)

సాధన పటం 1.18(a) మరియు1.18(c) వక్రములు ప్రమేయమును సూచించదు. ఎందుకనగా నిలువరేఖ రేఖా చిత్రమును రెండు బిందువులు P మరియు Q వద్ద ఖండించుచున్నది.

పటము 1.18(b) మరియు 11.18(d) వక్రములు ప్రమేయమును సూచించును. ఎందుకనగా నిలువరేఖ రేఖాచిత్రము ఒకే ఒక బిందువు వద్ద ఖండించుచున్నది.



పటము. 1.18(d)

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_1.indd 16 11-02-2023 17:47:15

సూచన

➢ ఏ సమీకరణమునైనా రేఖాచిత్రం ద్వారా సూచించిన దానిని 'వక్రము' అంటారు.

ఉదాహరణ 1.11 $A=\{1,2,3,4\}$ మరియు $B=\{2,5,8,11,14\}$ అనునవి రెండు సమితులు అయిన $f: A\to B$ ప్రమేయము $f(x)=3x-1$ అని ఇవ్వబడినది ఈ ప్రమేయమును

(i) బాణా చిత్రము (ii) పట్టిక

(iii) క్రమయుగ్మములు (iv) రేఖా చిత్రములలో సూచించుము

సాధన

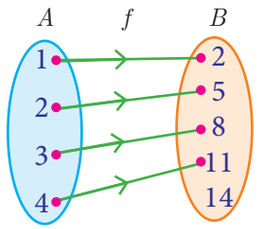
$A=\{1,2,3,4\}$; $B=\{2,5,8,11,14\}$; $f(x)=3x-1$

$f(1)=3(1)-1=3-1=2$; $f(2)=3(2)-1=6-1=5$

$f(3)=3(3)-1=9-1=8$; $f(4)=4(3)-1=12-1=11$

(i) బాణా చిత్రము

ప్రమేయము $f: A\to B$ ను పటము 1.19 లో ఉన్నవిధంగా బాణా చిత్రంగా సూచించవచ్చును.



పటము. 1.19

(ii) పట్టిక రూపము

ఇవ్వబడిన ప్రమేయము f ను కింద చూపిన విధంగా పట్టికలో చూపవచ్చును

x	1	2	3	4
$f(x)$	2	5	8	11

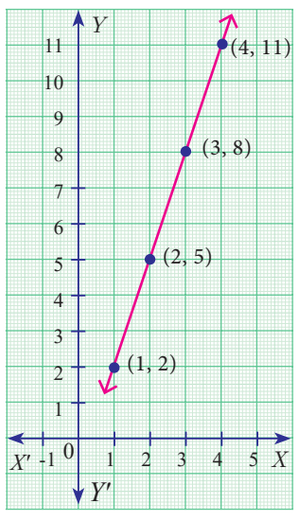
(iii) క్రమయుగ్మముల సమితి

ప్రమేయము f ను క్రమయుగ్మముల సమితిగా చూపవచ్చు

$f=\{(1,2),(2,5),(3,8),(4,11)\}$

(iv) రేఖా చిత్ర రూపము

ప్రక్కనున్న XY- తలములో బిందువులను పటము 1.20 లో చూపినట్లు ఒకే రేఖపై (1,2), (2,5), (3,8), (4,11) గా సూచించవచ్చు.



పటము. 1.20

1.7 ప్రమేయముల రకాలు

ఈ విభాగంలో కింద ఇవ్వబడిన ప్రమేయముల రకాల గూర్చి సరైన ఉదాహరణలతో చర్చిద్దాం

(i) ఏక-ఏక (ii) బహు-ఏక (iii) సంగ్రస్త (iv) అంతర ప్రమేయము

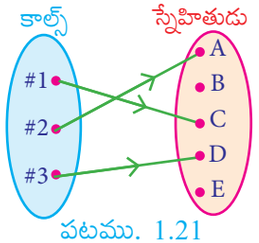
1.7.1 ఏక-ఏక ప్రమేయం

మన దగ్గర చక్కగా పనిచేసే ఒక సెల్ ఫోన్ ఉంది అనుకుందాం. మీరు మీ స్నేహితునికి ఒక సాధారణ

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_1.indd 17 11-02-2023 17:47:17

కాల్ చేస్తే అప్పుడు మీరు ఒక సమయంలో ఒకే ఒక కాల్ మాత్రమే చేయగలరు.

ఇక్కడ కాల్ చేయడానికి మనము ఉపయోగించే నంబరును ప్రమేయము అని అనుకుంటే ఇది ఏక-ఏక ప్రమేయము అగును.



పటము. 1.21

ఒక ప్రమేయము $f : A \to B$ ఏక-ఏక ప్రమేయము అగుటకు A లోని విభిన్న మూలకమునకు B లో విభిన్న మూలకాలతో ప్రతిబింబం కలిగి యుండవలెను.

ఏక-ఏక ప్రమేయమును అన్వేక ప్రమేయము అని కూడా అంటారు.

దీనికి సమానముగా,

$a_1, a_2 \in A$ అయిన $f(a_1) = f(a_2)$ నుండి $a_1 = a_2$ అయితే f ను ఏక-ఏక ప్రమేయము అందురు.

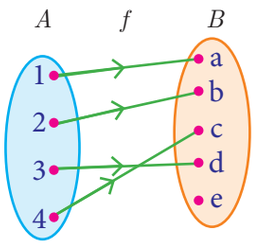
వివరణ 10

$A = \{1,2,3,4\}$ మరియు $B = \{a,b,c,d,e\}$

(i) $f = \{(1,a), (2,b), (3,d), (4,c)\}$

అనుకొంటే పటము 1.22 లో A యొక్క విభిన్న మూలకములకు B లో గల విభిన్న మూలకాలకు ప్రతిబింబమయ్యి ఉండును.

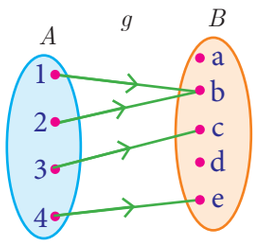
కావున f ఏక-ఏక ప్రమేయమగును.



పటము. 1.22

(ii) $g = \{(1,b), (2,b), (3,c), (4,e)\}$

g అనునది A నుండి B కు ఒక ప్రమేయము అయిన $g(1) = g(2) = b$, కాని $1 \neq 2$.

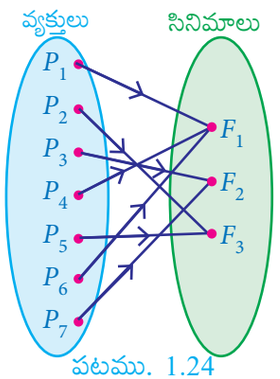


పటము. 1.23

కావున A సమితిలో గల రెండు విభిన్న మూలకాలు 1 మరియు 2 లకు రెండవ సమితి B లో ఒకే ఒక ప్రతిబింబము b కలదు. కావున 'g' అనునది ఏక-ఏక ప్రమేయం కాదు.

1.7.2 బహు-ఏక ప్రమేయము

ఒక సినిమా హాల్‌ల సముదాయములో F_1, F_2, F_3 అనే మూడు సినిమాలు నడుస్తున్నాయి. ఏడుగురు వ్యక్తులు (P_1 నుండి P_7 వరకు) సినిమా హాలుకు వచ్చి పటము 1.24 లో చూపినట్లు టికెట్లు కొన్నారు.



పటము. 1.24

వ్యక్తులు సినిమాలను ఎంచుకోవడం ఒక సంబంధమైన అది ఒక బహు-ఏక ప్రమేయము అగును. కారణం ఒక్కొక్కరికి ఒక్క టికెట్ మాత్రమే ఇవ్వబడును. అయితే ఒకే సినిమాను చూచుటకు చాలామంది ఎంచుకోవచ్చు.

ఒక ప్రమేయం $f : A \to B$ బహు-ఏక ప్రమేయం కావలెనన్న A లో గల రెండు లేక అంతకన్నా ఎక్కువ మూలకాలు B లో ఒకే ఒక మూలకంతో ప్రతిబింబమై ఉండును.

మరియొక విధంగా $f : A \to B$ ను బహు-ఏక ప్రమేయం అయిన f ఏక-ఏక ప్రమేయం కాదు.

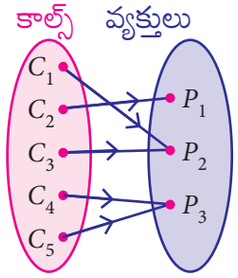
10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_1.indd 18 11-02-2023 17:47:18

వివరణ 11

$A = \{1,2,3,4\}$ మరియు $B = \{a,b,c\}$ అయిన $f = \{(1,a), (2,a), (3,b), (4,c)\}$ అనుకొనుము.

f అనునది A నుండి B కు గల ప్రమేయము A లో గల మూలకాలు 1 మరియు 2 నకు B లో గల a కు ప్రతిబింబమై ఉండును. కావున f అనునది బహు-ఏక ప్రమేయం అగును.

1.7.3 సంగ్రస్త ప్రమేయము



పటము. 1.25

మొబైల్ ఫోన్‌లో ముగ్గురు వ్యక్తుల పేర్లు నమోదు చేయబడినదని అనుకొనుము. నమోదు చేయబడిన ముగ్గురికి కాల్స్ వెళ్ళినట్లైన కాల్స్‌ను సూచించునది సంగ్రస్త ప్రమేయమగును.

ఒక ప్రమేయము $f : A \to B$ ను సంగ్రస్త ప్రమేయము కావలెనన్న f యొక్క వ్యాప్తి, f యొక్క సహప్రదేశమునకు సమానంగా ఉండవలెను.

మరియొక విధంగా, సహప్రదేశము B లో గల ప్రతి మూలకమునకు ప్రదేశము A లో గల మూలకములకు పూర్వబింబములు కలిగియుండును.

సంగ్రస్త ప్రమేయమును బాహ్య ప్రమేయము అని కూడా అంటారు.

సూచన

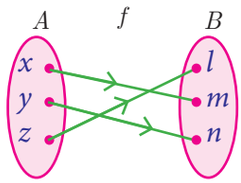
➢ $f : A \to B$ సంగ్రస్త ప్రమేయము అయిన f యొక్క వ్యాప్తి $= B$ అంటే $f = B$.

వివరణ 12

$A = \{x, y, z\}, B = \{l, m, n\}$; అనుకొనుము

f యొక్క వ్యాప్తి $= \{l, m, n\} = B$ (పటము.1.26)

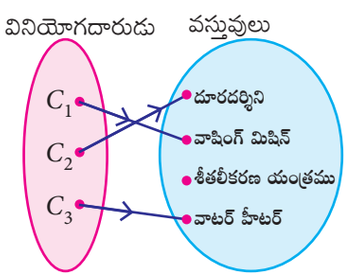
కావున f అనునది సంగ్రస్త ప్రమేయమగును.



పటము. 1.26

1.7.4 అంతర ప్రమేయము

ఒక గృహోపకరణ వస్తువు విక్రయ షాపులో క్రొత్త సంవత్సరం సందర్భంగా టీవీ, వాషింగ్ మిషన్, ఎయిర్ కండిషన్ మరియు వాటర్ హీటర్‌ల మీద ఆఫర్ కింద 20% త్రోపుడు ఇచ్చి అమ్మదలచెను. C_1, C_2, C_3 అనే ముగ్గురు వినియోగదార్లు ద్వారా పైన చెప్పబడిన వస్తువులు ఎంపిక చేయబడి, అది ఒక ప్రమేయంగా అనుకొనిన పటము (1.27) అంతర ప్రమేయమును సూచించును.



పటము. 1.27

సాధారణంగా చలికాలంలో ఏ ఒక్క వినియోగదారుడు ఎయిర్ కండిషనర్‌ను కొనడానికి ఇష్టపడరు. అందువల్ల ఏ వినియోగదారుడు ఎయిర్ కండిషనర్‌ను ఎంపిక చేయలేదు. ఇది అంతర్గత ప్రమేయానికి ఒక ఉదాహరణ.

ఒక ప్రమేయము $f : A \to B$ అంతర ప్రమేయం కావలెనన్న B లో కనీసము ఒక మూలకముకైనా A లో గల మూలకమునకు పూర్వ బింబం అయ్యి ఉండును.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_1.indd 19 11-02-2023 17:47:19

f యొక్క వ్యాప్తి 'f' యొక్క సహప్రదేశమునకు క్రమోపసమితి అగును.

మరియొక విధంగా ప్రమేయం $f : A \to B$ ను అంతర ప్రమేయం అయిన అది సంగ్రస్త ప్రమేయము కాదు.

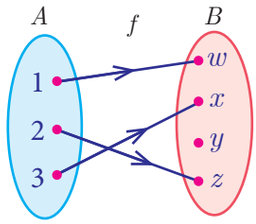
వివరణ 13

$A = \{1,2,3,\}$ మరియు $B = \{w, x, y, z\}$; $f = \{(1, w), (2, z), (3, x)\}$

అయిన $f = \{w,\ x,\ z\} \subset B$ (పటము.1.28)

అగుటవలన, f అనునది అంతర ప్రమేయము.

$y \in B$ కు పూర్వబింబం A లో లేదని గమనించుము.



పటము. 1.28

1.7.5 ద్విగుణ ప్రమేయము

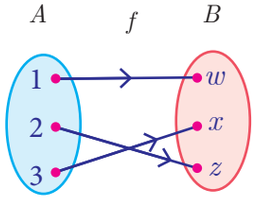
ఒక వృత్తంలో ఆంగ్ల వర్ణమాల యొక్క ప్రతి అక్షరము లోపలి భాగం నుండి బాహ్య భాగానికి ఒక అక్షరానికి మార్చబడియున్నది. అవి $A \to D$, $B \to E$, $C \to F$, ... $Z \to C$. గా కలవు. ఈ వృత్తమును మనము సాంకేతిక లిపి వృత్తము అంటారు. దీనిని ఉపయోగించి 'HELLO' అనే పదమును 'KHOOR' గా వ్రాయవచ్చు. ఇదే వృత్తమును ఉపయోగించి ప్రతి బాహ్య భాగంలో ఉన్న అక్షరానికి అంతర్భాగంలో ఉన్న అక్షరము ప్రతిక్షేపించిన మరలా 'HELLO' అనే పదము వచ్చును. ఈ విధంగా ఒక రూపము నుండి మరొక రూపమునకు మార్చి కావలసిన సమాచారం సేకరించుటను **ద్విగుణ ప్రమేయం** అందురు. ఈ పద్ధతిని విస్తృతంగా రహస్య సంకేతాలు చదువుటకు ఉపయోగిస్తారు. దీనినే **క్రిప్టోగ్రఫీ** అని అంటారు.



Cipher Circle
పటము. 1.29

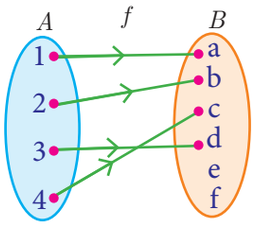
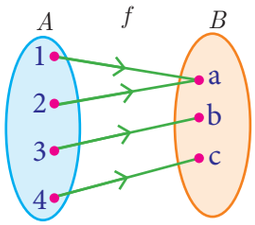
ప్రమేయము $f : A \to B$ అనునది ఏక-ఏక మరియు సంగ్రస్త ప్రమేయము అయిన f ను A నుండి B కు గల ద్విగుణ ప్రమేయము అందురు.

వివరణ 14

ఏక-ఏక మరియు సంగ్రస్త ప్రమేయము (ద్విగుణ ప్రమేయం)	
 పటము. 1.30	A లోని విభిన్న మూలకములకు B లో విభిన్న మూలకములకు ప్రతిబింబములు కలదు మరియు B లో ప్రతి మూలకమునకు A లో పూర్వ బింబము కలదు.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_1.indd 20 11-02-2023 17:47:21

వివరణ 15

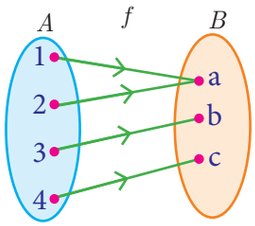
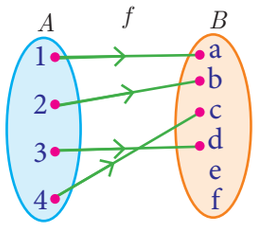
ఏక-ఏక	బహు-ఏక
 పటము. 1.31	 పటము. 1.32
A లో విభిన్న మూలకాలకు B లో గల విభిన్న ప్రతిబింబాలు ఉంటాయి.	A లో రెండు లేక అంతకన్నా ఎక్కువ మూలకములకు B లో ఒకే ప్రతిబింబము ఉండును.

సూచన

- ఒక ప్రమేయము ఏక-ఏక మరియు సంగస్త ప్రమేయముగా ఉండిన దానిని ఏక-ఏక సంబంధము అని కూడా చెప్పవచ్చును.

మెదడుకు మేత

ఏక-బహు అనే ప్రమేయం ఉండుటకు వీలగునా?

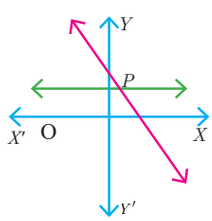
సంగ్రస్త	అంతర
 పటము. 1.33	 పటము. 1.34
f యొక్క వ్యాప్తి = సహప్రదేశము (B లో ప్రతి మూలకమునకు A లో పూర్వబింబము ఉండును)	f యొక్క వ్యాప్తి సహప్రదేశానికి క్రమోపసమితి అగును. (B లో కనీసము ఒక మూలకము A లోని మూలకమునకు పూర్వబింబం కలిగి ఉండదు)

ఇచ్చిన ప్రమేయాలు ఏక-ఏక ప్రమేయం అగునా లేక కాదా అని కింది పరీక్షల ద్వారా తెలుసుకోవచ్చును.

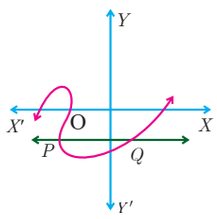
1.7.6 సమాంతర రేఖ పరీక్ష

ఇంతకు ముందు మనము నిలువు రేఖా పరీక్ష గురించి నేర్చుకొనియున్నాము. ఇప్పుడు సమాంతర రేఖా పరీక్ష గురించి తెలుసుకోబోవుచున్నాము. రేఖా చిత్రములో నుండు ప్రమేయము ఏక-ఏక ప్రమేయం కావలెనన్న ప్రతి సమాంతర రేఖ వక్రమును ఒకే బిందువు వద్ద మాత్రమే ఖండించవలెను.

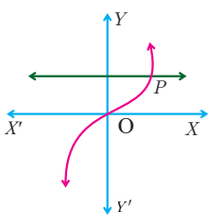
ఉదాహరణ 1.12 సమాంతర రేఖా పరీక్ష ఉపయోగించి కింద ఇవ్వబడిన పటము (పటము.1.35(a), 1.35(b), 1.35(c)) లలో ఏవి ఏక-ఏక ప్రమేయములో కనుగొనుము..



పటము. 1.35(a)



పటము. 1.35(b)



పటము. 1.35(c)

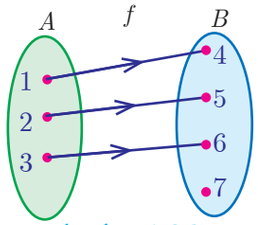
సాధన పటము 1.35(a) లో మరియు 1.35(c) లో ఉన్న వక్రములు ఏక-ఏక ప్రమేయమగును. ఎందుకనగా సమాంతర రేఖలు వక్రమును ఒకే ఒక బిందువు p వద్ద ఖండించుచున్నది.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_1.indd 21 11-02-2023 17:47:23

పటము 1.35(b) లో గల వక్రము ఏక-ఏక ప్రమేయము కాదు. ఎందుకనగా సమాంతర రేఖ వక్రమును రెండు బిందువులు P మరియు Q వద్ద ఖండించుచున్నది.

ఉదాహరణ 1.13 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{4,5,6,7\}$ మరియు $f=\{(1,4),(2,5),(3,6)\}$ అనేది A నుండి B కు ప్రమేయమైన f అనేది ఏక-ఏక ప్రమేయము అగును. సంగ్రస్త ప్రమేయం కాదు అని నిరూపించుము.

సాధన $A=\{1,2,3\}$, $B=\{4,5,6,7\}$; $f=\{(1,4),(2,5),(3,6)\}$



పటము. 1.36

f అనేది A నుండి B కు గల ప్రమేయము. A లో విభిన్న మూలకములకు B లో విభిన్న ప్రతిబింబములు కలవు. కావున f అనేది ఏక-ఏక ప్రమేయము. సహప్రదేశంలో గల f కు పూర్వ బింబము లేదు. కావున f సంగ్రస్తము కాదు.

అందువలన f ఏక-ఏక ప్రమేయము అగును. సంగ్రస్త ప్రమేయము కాదు.

ఉదాహరణ 1.14 $A=\{-2,-1,0,1,2\}$ మరియు $f:A\to B$ అనే ప్రమేయం సంగ్రస్త ప్రమేయముగా నిర్వచితమైన $f(x)=x^2+x+1$ అయిన B విలువను కనుగొనుము.

సాధన ఇవ్వబడినది $A=\{-2,-1,0,1,2\}$ మరియు $f(x)=x^2+x+1$.

$$f(-2)=(-2)^2+(-2)+1=3;\quad f(-1)=(-1)^2+(-1)+1=1$$
$$f(0)=0^2+0+1=1;\qquad f(1)=1^2+1+1=3$$
$$f(2)=2^2+2+1=7$$

కావున f అనునది సంగ్రస్త ప్రమేయము. f యొక్క వ్యాప్తి $=B$ = f యొక్క సహప్రదేశము

అందువలన f యొక్క వ్యాప్తి $B=\{1,\ 3,\ 7\}$.

ఉదాహరణ 1.15 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ అనే ప్రమేయం $f(x)=3x+2, x\in\mathbb{N}$ గా నిర్వచితమైన

(i) 1, 2, 3 యొక్క ప్రతిబింబములు కనుగొనుము.

(ii) 29 మరియు 53 యొక్క పూర్వబింబములు కనుగొనుము.

(ii) ప్రమేయ రకమును కనుగొనుము.

సాధన ప్రమేయము $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ గా నిర్వచితమైన $f(x)=3x+2$

(i) $x=1$, అయిన $f(1)=3(1)+2=5$

$x=2$, అయిన $f(2)=3(2)+2=8$

$x=3$, అయిన $f(3)=3(3)+2=11$

1, 2, 3 యొక్క ప్రతిబింబములు 5, 8, 11

(ii) x అనేది 29 యొక్క పూర్వబింబమైన $f(x)=29$. కావున $3x+2=29$

$3x=27\Rightarrow x=9$.

అదేవిధంగా x అనేది 53 యొక్క పూర్వబింబమైన $f(x)=53$. కావున $3x+2=53$

$3x=51\Rightarrow x=17$.

29 మరియు 53 ల పూర్వంబింబములు 9 మరియు 17.

(iii) $\mathbb{N}$ యొక్క విభిన్న మూలకములకు సహప్రదేశంలో విభిన్న ప్రతిబింబములు కలవు. కావున ప్రమేయము f అనునది ఏక- ఏక ప్రమేయమగును.

f యొక్క సహప్రదేశం $\mathbb{N}$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_1.indd 22 11-02-2023 17:47:26

f యొక్క వ్యాప్తి $f = \{5, 8, 11, 14, 17, ...\}$ అనేది $\mathbb{N}$ యొక్క క్రమోపసమితి అగును.

f అనునది సంగస్త ప్రమేయముకాదు. అంటే f అంతర ప్రమేయం అగును.

కావున f అనేది ఏక-ఏక మరియు అంతరప్రమేయమగును.

ఉదాహరణ 1.16 ఫోరెన్సిక్ శాస్త్రవేత్తలు మనిషి తొడ ఎముకను బట్టి మనిషి ఎత్తును నిర్ధారణ చేయగలరు. సాధారణంగా వారు $h(b) = 2 \cdot 47b + 54 \cdot 10$ అను ప్రమేయమును ఉపయోగించి ఎత్తును కనుగొంటారు. b అనునది తొడ ఎముక పొడవు అగును.

(i) h అనునది ఏక- ఏక ప్రమేయమగునా అని సరిచూడుము.

(ii) తొడ ఎముక పొడవు 50 సెం.మీ అయిన మనిషి ఎత్తును కనుగొనుము.

(iii) మనిషి ఎత్తు $147 \cdot 96$ సెం.మీ అయిన తొడ ఎముక పొడవు కనుగొనుము.

సాధన (i) h అనునది ఏక- ఏక ప్రమేయమగునా అని సరిచూచుటకు $h(b_1) = h(b_2)$. అని అనుకొనవలెను.

$$2 \cdot 47b_1 + 54 \cdot 10 = 2 \cdot 47b_2 + 54 \cdot 10$$

$$2 \cdot 47b_1 = 2 \cdot 47b_2 \Rightarrow b_1 = b_2$$

కావున, $h(b_1) = h(b_2) \Rightarrow b_1 = b_2$. దీని నుండి h ఏక-ఏక ప్రమేయమని చెప్పవచ్చు.

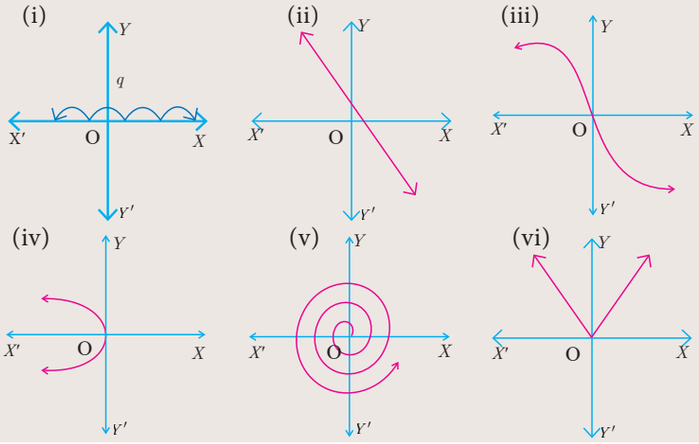
(ii) తొడ ఎముక పొడవు $b = 50$ సెం.మీ అయిన మనిషి ఎత్తు
$h(50) = (2 \cdot 47 \times 50) + 54 \cdot 10 = 177 \cdot 6$ సెం.మీ.లు.

(iii) మనిషి ఎత్తు $147 \cdot 96$ సెం.మీలు అయిన $147 \cdot 96$ తొడ ఎముక పొడవు
$2 \cdot 47b + 54 \cdot 10 = 147 \cdot 96$.

$$b = \frac{93 \cdot 86}{2 \cdot 47} = 38$$ తొడ ఎముక పొడవు 38 సెం.మీ

కృత్యము 3

కింద ఇవ్వబడిన వక్రములు ప్రమేయమగునా? అని సరిచూడుము. ప్రమేయమైతే అది ఏక-ఏక ప్రమేయమగునా? అని సరిచూడుము. (సూచన: సమాంతర మరియు లంబరేఖల పరీక్షలను ఉపయోగించము)



10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_1.indd 23 11-02-2023 17:47:27

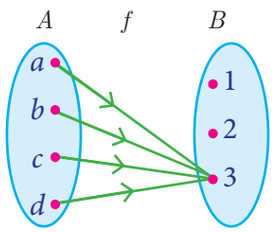
1.8 ప్రమేయముల ప్రత్యేక రకములు

ప్రమేయంలలో కొన్ని ప్రత్యేక రకములు కలవు. అవి ఎంతో ఉపయోగకరమైనవి. కింద ఇవ్వబడిన కొన్నింటిని చర్చించుకుందాం.

(i) స్థిర ప్రమేయము (ii) తత్సమ ప్రమేయం (iii) వాస్తవ విలువ ప్రమేయం

(i) స్థిర ప్రమేయము

$f : A \to B$ స్థిర ప్రమేయము అగుటకు f యొక్క వ్యాప్తి ఒకే ఒక మూలకము ఉండవలెను. అంటే $f(x) = c$, $x \in A$ మరియు $c \in B$.

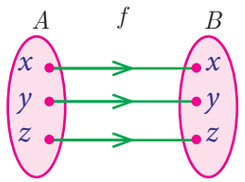


పటము. 1.37

వివరణ 16

పటము 1.37 నుండి $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ మరియు $f = \{(a, 3), (b, 3), (c, 3), (d, 3)\}$. దీనిని $f(x) = 3$ అని రాయవచ్చు మరియు f యొక్క వ్యాప్తి $f = \{3\}$ అయిన f అనుది స్థిర ప్రమేయము.

(ii) తత్సమ ప్రమేయము



పటము. 1.38

A ఒక శూన్యేతర సమితి A ప్రమేయం $f : A \to A$ తత్సమ ప్రమేయమగుటకు $f(x) = x$ అన్ని $x \in A$ అగును. A లోని ప్రతి మూలకం B లోని అదే మూలకమునకు అనుసంధానమగును. దీనిని I_A తో సూచిస్తారు.

వివరణ 17

$A = \{a, b, c\}$ అయిన $f = I_A = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$ అనేది A వద్ద తత్సమ ప్రమేయమగును.

మెదడుకు మేత

ఒక తత్సమ ప్రమేయము ఏక-ఏక ప్రమేయమగునా?

(iii) వాస్తవ విలువ కలిగిన ప్రమేయము

$f : A \to B$ అనునది వాస్తవ విలువ కలిగిన ప్రమేయం అగుటకు f యొక్క వ్యాప్తి అనునది వాస్తవ సంఖ్యల సమితి $\mathbb{R}$ కు ఉపసమితి కావలెను. కావున, $f(a) \subseteq \mathbb{R}$, $\forall\ a \in A$.

ప్రగతి శోధన

సరియా, తప్పా అని తెలుపుము.

1. అన్ని ఏక ఏక ప్రమేయములు సంగ్రస్తప్రమేయములు అగును.
2. $n(A) = 4$, $n(B) = 3$ గా ఉన్నప్పుడు A నుండి B కు గల ప్రమేయము ఏక-ఏక ప్రమేయంగా ఉండదు.
3. అన్ని సంగ్రస్త ప్రమేయములు ఏక-ఏక ప్రమేయములు అగును.
4. $n(A) = 4$, $n(B) = 5$ అయిన A నుండి B కు గల ప్రమేయము సంగ్రస్త ప్రమేయం కాదు.
5. f అనునది A నుండి B కు ద్విగుణ ప్రమేయమయిన $n(A) = n(B)$ అగును.
6. $n(A) = n(B)$ అయిన f అనునది A నుండి B కు ఒక ద్విగుణ ప్రమేయము.
7. అన్ని స్థిర ప్రమేయములు ద్విగుణ ప్రమేయమగును.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_1.indd 24 11-02-2023 17:47:29

ఉదాహరణ 1.17 f అనునది $\mathbb{R}$ నుండి $\mathbb{R}$ కు గల ప్రమేయము. అది $f(x) = 3x - 5$ గా నిర్వచితమైతే $(a, 4)$ మరియు $(1, b)$ కు చెందిన a మరియు b విలువలను కనుగొనుము

సాధన $f(x) = 3x - 5$ ను $f = \{(x,\ 3x - 5) \mid x \in R\}$ గా వ్రాయవచ్చు.

$(a, 4)$ అనగా a యొక్క ప్రతిబింబం 4 కావున, $f(a) = 4$

$$3a - 5 = 4 \quad \Rightarrow a = 3$$

$(1, b)$ అనగా 1 యొక్క ప్రతిబింబము b కావున $f(1) = b$

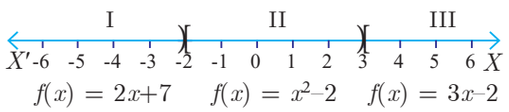
$$3(1) - 5 = b \Rightarrow b = -2$$

ఉదాహరణ 1.18 ప్రమేయము $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ అనునది కింది విధంగా నిర్వచించబడినది. $f(x) = \begin{cases} 2x + 7, & x < -2 \\ x^2 - 2, & -2 \le x < 3 \\ 3x - 2, & x \ge 3 \end{cases}$ అయిన కింది విలువలను కనుగొనుము.

(i) $f(4)$ (ii) $f(-2)$ (iii) $f(4) + 2f(1)$ (iv) $\dfrac{f(1) - 3f(4)}{f(-3)}$

సాధన

ఇవ్వబడిన ప్రమేయం ఇవ్వబడిన ప్రమేయము
f అనేది I, II, III అనే అంతరములుగా నిర్వచించబడినది.



పటము. 1.39

ఇవ్వబడిన $x = a$ విలువకు ఏ బిందువు వద్ద అంతరముకలదో కనుగొని తర్వాత $f(a)$ ను కనుగొనుము.

(i) మొదట $x = 4$ అనేది 3వ అంతరముల వద్ద కలదు.

కావున, $f(x) = 3x - 2$; $f(4) = 3(4) - 2 = 10$

(ii) $x = -2$ అనేది 2వ అంతరముల వద్ద కలదు.

కావున, $f(x) = x^2 - 2$; $f(-2) = (-2)^2 - 2 = 2$

(iii) (i) నుండి $f(4) = 10$

$f(1)$, ను కనుగొనుటకు $x = 1$ అనునది 2వ అంతరముల వద్ద కలదు.

కావున, $f(x) = x^2 - 2 \Rightarrow f(1) = 1^2 - 2 = -1$

$$f(4) + 2f(1) \quad = 10 + 2(-1) = 8$$

(iv) $f(1) = -1$ మరియు $f(4) = 10$ అని మనకు తెలుసు.

$f(-3)$ ను కనుగొనుటకు $x = -3$ అనునది 1వ అంతరము వద్ద కలదు.

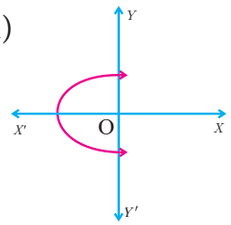
కావున, $f(x) = 2x + 7$; కావున, $f(-3) = 2(-3) + 7 = 1$

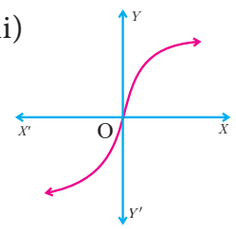
కావున, $$\frac{f(1) - 3f(4)}{f(-3)} = \frac{-1 - 3(10)}{1} = -31$$

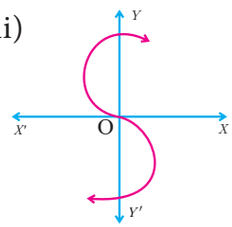
10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_1.indd 25 11-02-2023 17:47:32

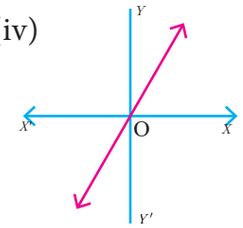
అభ్యాసము 1.4

1. కింద ఇవ్వబడిన రేఖాచిత్రములు ప్రమేయమును సూచించునా అని కనుగొనుము మరియు కారణమును తెలుపుము.

(i) 

(ii) 

(iii) 

(iv) 

2. $f : A \to B$ ప్రమేయము $f(x) = \frac{x}{2} - 1$, గా నిర్వచితమైన $A = \{2,4,6,10,12\}$, మరియు $B = \{0,1,2,4,5,9\}$గా ఉన్నప్పుడు ప్రమేయం f ను కింది విధముగా సూచించుము.

(i) క్రమ యుగ్మములు; (ii) పట్టిక; (iii) బాణపు చిత్రము; (iv) రేఖ చిత్రంగా

3. $f = \{(1,2),(2,2),(3,2),(4,3),(5,4)\}$ అను ప్రమేయాన్ని

(i) బాణాచిత్రము (ii) పట్టిక (iii) రేఖాచిత్రముగా సూచించుము

4. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ అనే ప్రమేయము $f(x) = 2x - 1$ గా నిర్వచితమైన ఈ ప్రమేయము ఏక ఏక ప్రమేయము అగును కాని, సంగ్రస్తము కాదు అని నిరూపించుము.

5. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ అనే ప్రమేయం $f(m) = m^2 + m + 3$ గా నిర్వచితమైతే ఈ ప్రమేయము ఏక-ఏక ప్రమేయం అగును అని నిరూపించుము.

6. $A = \{1,2,3,4\}$ మరియు $B = \mathbb{N}$ అయిన $f : A \to B$ అను ప్రమేయము $f(x) = x^3$ గా నిర్వచితమైన

(i) f యొక్క వ్యాప్తిని కనుగొనుము. (ii) ప్రమేయ రకమును తెలుపుము.

7. కింద ఇవ్వబడిన ప్రమేయములు ద్విగుణ ప్రమేయమగునా? కాదా? అని సమాధానమును న్యాయ పరచుము.

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ప్రమేయము $f(x) = 2x + 1$ గా నిర్వచితమైన.

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ప్రమేయము $f(x) = 3 - 4x^2$ గా నిర్వచితమైన.

8. $A = \{-1,1\}$ మరియు $B = \{0,2\}$ అనుకొనుము. $f : A \to B$ అనేది $f(x) = ax + b$ మరియు $f(-1)=0$, $f(1)=2$ గా నిర్వచితమై సంగ్రస్త ప్రమేయమైన a మరియు b విలువలను కనుగొనుము.

9. ప్రమేయము f అనునది $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{if } x > 1 \\ 2 & \text{if } -1 \le x \le 1 \\ x-1 & \text{if } -3 < x < -1 \end{cases}$; గా నిర్వచితమైన,

(i) $f(3)$ (ii) $f(0)$ (iii) $f(-1 \cdot 5)$ (iv) $f(2) + f(-2)$ విలువలను కనుగొనుము.

10. $f : [-5,9] \to \mathbb{R}$ అనే ప్రమేయము క్రింది విధంగా నిర్వచితమైన

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_1.indd 26 11-02-2023 17:47:35

$$f(x)=\begin{cases}6x+1 & \text{if } -5\le x<2\\ 5x^2-1 & \text{if } 2\le x<6\\ 3x-4 & \text{if } 6\le x\le 9\end{cases}$$

(i) $f(-3)+f(2)$ (ii) $f(7)-f(1)$

(iii) $2f(4)+f(8)$ (iv) $\dfrac{2f(-2)-f(6)}{f(4)+f(-2)}$ విలువలను కనుగొనుము.

11. గురుత్వాకర్షణ ప్రభావం వలన ఒక వస్తువు t సెకనులలో S దూరము ప్రయాణించిన $S(t)=\dfrac{1}{2}gt^2+at+b$ గా ఇవ్వబడినది. (g అనునది గురుత్వాకర్షణ శక్తి) ఇక్కడ a, b స్థిరాంకములు అయిన $S(t)$ ప్రమేయము ఏక-ఏక ప్రమేయమగునా అని సరిచూడము.

12. 't' అనే ప్రమేయము సెల్సియస్ (C) లో ఉష్ణోగ్రతను, ఫారన్‌హీట్ (F) లో ఉష్ణోగ్రతను ప్రతిసర్జన చేసిన $t(C)=F$ అని నిర్వచితమైన $F=\dfrac{9}{5}C+32$.

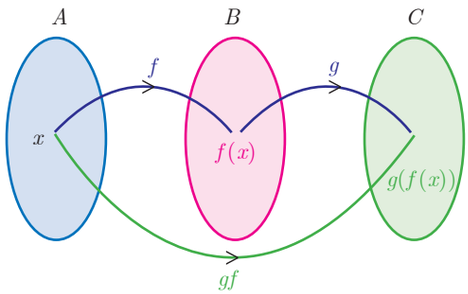
(i) $t(0)$ (ii) $t(28)$ (iii) $t(-10)$

(iv) $t(C)=212$ అయిన C విలువ

(v) సెల్సియస్ విలువ ఫారన్‌హీట్ విలువ ఎప్పుడు సమానమగునో కనుగొనుము.

1.9 సంయుక్త ప్రమేయములు

కారు డ్రైవరు యాక్సిలరేటర్ పెడలుపై ఒత్తిడిని తగ్గించినపుడు కారులోని ఇంధన ప్రవాహము తగ్గును. ఇది కారు యొక్క వేగముపై ప్రభావితం చూపును. అదేవిధంగా రెండు ప్రమేయముల యొక్క సంయుక్త ప్రమేయము కూడా గొలుసుకట్టు వంటిది. పటము 1.40 లో చూపినట్లు ప్రమేయము ఒకదాని తరువాత మరొకటిగా పనిచేయును.



పటము. 1.40

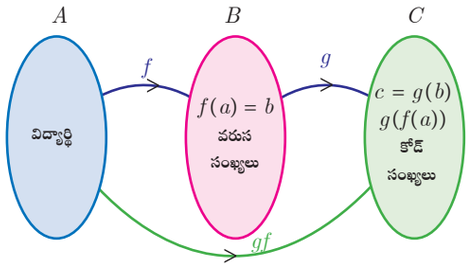
f మరియు G అనునవి రెండు ప్రమేయములైన వాటి సంయుక్తము $g(f(x))$ పటము (1.41) లో చూపినట్లు రెండు సోపానాలలో ఏర్పడును.

(i) f కు ఉత్పాదకము x ఇచ్చిన;

(ii) $f(x)$ అనే f యొక్క ఉత్పాదనకు g యొక్క ఉత్పాదకము ఇచ్చిన $g(f(x))$ పొందుతాము.

వివరణ

సమితి A లోని విద్యార్థులంతా 10వ తరగతి పరీక్షలకు హాజరయ్యేవారు. పరీక్షకు హాజరయ్యే ప్రతి విద్యార్థికి బోర్టు వరుస సంఖ్య కేటాయించబడుతుంది. విద్యార్థి వరుస సంఖ్యను గోప్యంగా ఉంచుటకు బోర్టు ప్రతి విద్యార్థి వరుస సంఖ్యకు ఒక కోడ్ సంఖ్యను కేటాయించును.



పటము. 1.41

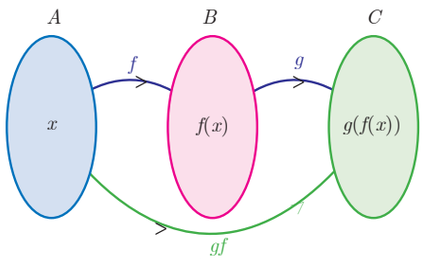
10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_1.indd 27 11-02-2023 17:47:37

A అనేది 10 వ తరగతి పరీక్షలకు హాజరయ్యే విద్యార్థులు $B \subseteq \mathbb{N}$ అనేది వరుస శంఖ్యల సమితి మరియు $C \subseteq \mathbb{N}$ అనేది కోడ్‌సంఖ్యల సమితి పటము 1.41 గమనించిన ఇక్కడ రెండు ప్రమేయాలు $f : A \to B$ మరియు $g : B \to C$ కలదు. $b = f(a)$ అనునది ' a' విద్యార్థికి ఇవ్వబడిన వరుస సంఖ్య అగును. $c = g(b)$ అనేది వరుస సంఖ్యకు ఇవ్వబడిన కోడ్ సంఖ్య అగును. ఇక్కడ $a \in A$, $b \in B$ మరియు $c \in C$. దీనిని $c = g(b) = g(f(a))$ గా వ్రాయవచ్చును.

కావున f , g అనే రెండు ప్రమేయాల సమ్మేళనము ద్వారా విద్యార్థి కోడ్ సంఖ్య జతచేయబడును. దీనినుండి వచ్చునదే క్రింది నిర్వచనము.

నిర్వచనం

$f : A \to B$ మరియు $g : B \to C$ అనునవి రెండు ప్రమేయములైన f మరియు g సంయుక్త ప్రమేయమును $g \circ f$ ను $g \circ f(x) = g(f(x))$ ప్రమేయమును $x \in A$ గా నిర్వచించవచ్చు.



పటము. 1.42

మెదడుకు మేత

If $f(x) = x^m$ మరియు $g(x) = x^n$ అయిన $f \circ g = g \circ f$? అగునా?

ఉదాహరణ 1.19 $f(x) = 2x + 1$ మరియు $g(x) = x^2 - 2$ అయిన $f \circ g$ మరియు $g \circ f$ ను కనుగొనుము.

సాధన $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^2 - 2$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 2) = 2(x^2 - 2) + 1 = 2x^2 - 3$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = (2x + 1)^2 - 2 = 4x^2 + 4x - 1$$

కావున $f \circ g = 2x^2 - 3$, $g \circ f = 4x^2 + 4x - 1$.

$f \circ g \neq g \circ f$.

సూచన

- f మరియు g రెండు ప్రమేయములైన సాధారణంగా $f \circ g \neq g \circ f$ అగును. కావున సంయుక్త ప్రమేయములు స్థిత్యంతర ధర్మాన్ని పాటించదు.

ఉదాహరణ 1.20 $f(x) = \sqrt{2x^2 - 5x + 3}$ అనే ప్రమేయము రెండు ప్రమేయముల సంయుక్తము అని చూపుము.

సాధన $f_2(x) = 2x^2 - 5x + 3$ మరియు $f_1(x) = \sqrt{x}$

అయితే, $f(x) = \sqrt{2x^2 - 5x + 3} = \sqrt{f_2(x)}$

$= f_1\left[f_2(x)\right] = f_1 f_2(x)$

ఉదాహరణ 1.21 $f(x) = 3x - 2$, $g(x) = 2x + k$ మరియు $f \circ g = g \circ f$, అయిన k విలువను కనుగొనుము.

సాధన $f(x) = 3x - 2$, $g(x) = 2x + k$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(2x + k) = 3(2x + k) - 2 = 6x + 3k - 2$$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_1.indd 28 11-02-2023 17:47:42

కావున, $f \circ g(x) = 6x + 3k - 2$.

$g \circ f(x) = g(3x-2) = 2(3x-2) + k$

కావున, $g \circ f(x) = 6x - 4 + k$.

$f \circ g = g \circ f$

$6x + 3k - 2 = 6x - 4 + k$

$6x - 6x + 3k - k = -4 + 2 \Rightarrow k = -1$

మీకు తెలుసా?

$g \circ f(x)$ అనేది సంయుక్త ప్రమేయంలో ఉండవలెనన్న f యొక్క వ్యాప్తి ప్రదేశానికి g యొక్క ప్రదేశానికి ఉపసమితిగా ఉండవలెను.

ఉదాహరణ 1.22 $f \circ f(k) = 5$ మరియు $f(k) = 2k - 1$ అయిన k విలువ కనుగొనుము.

సాధన $f \circ f(k) = f(f(k))$

$= 2(2k-1) - 1 = 4k - 3$.

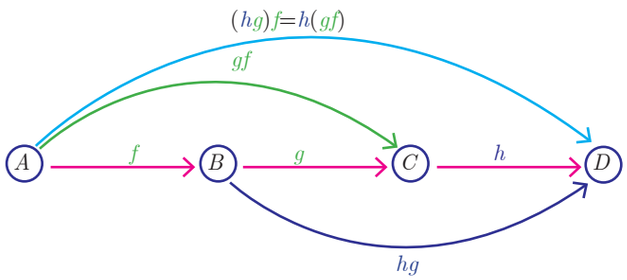
$f \circ f(k) = 4k - 3$ అని ఇవ్వబడినది.

$f \circ f(k) = 5$

కావున, $4k - 3 = 5 \Rightarrow k = 2$.

1.9.1 మూడు ప్రమేయముల యొక్క సంయుక్తము

A, B, C, D అనునవి నాలుగు సమితులు అనుకొనుము. $f : A \to B$, $g : B \to C$ మరియు $h : C \to D$ మూడు ప్రమేయములయిన సంయుక్త ప్రమేయము $f \circ g$ మరియు $g \circ h$ ను ఉపయోగించి $(f \circ g) \circ h$ మరియు $f \circ (g \circ h)$ అనే రెండు కొత్త ప్రమేయములు పొందవచ్చును.



పటము. 1.43

సంయుక్త ప్రమేయములు స్థిత్యంతర ధర్మాన్ని పాటించదని గమనించవలెను. ఇప్పుడు సహచర ధర్మాన్ని పాటించునా?

సూచన

➢ మూడు ప్రమేయముల యొక్క సంయుక్తము సహచర ధర్మము పాటించును. $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$

ఉదాహరణ 1.23 $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = 1 - 2x$ మరియు $h(x) = 3x$. అయిన $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ అని నిరూపించుము.

సాధన $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = 1 - 2x$, $h(x) = 3x$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1-2x) = 2(1-2x) + 3 = 5 - 4x$

అయితే, $(f \circ g) \circ h(x) = (f \circ g)(h(x)) = (f \circ g)(3x) = 5 - 4(3x) = 5 - 12x$ ....(1)

$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(3x) = 1 - 2(3x) = 1 - 6x$

$f \circ (g \circ h)(x) = f(1-6x) = 2(1-6x) + 3 = 5 - 12x$ ....(2)

(1) మరియు (2) ల నుండి, $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_1.indd 29 11-02-2023 17:47:47

ఉదాహరణ 1.24 $f(x) = 3x + 1$ మరియు $g(x) = x + 3$ అనునవి రెండు ప్రమేయములు $gff(x) = fgg(x)$, అయిన x విలువను కనుగొనుము.

సాధన

$$gff(x) = g\,[f\{f(x)\}] \text{ (అనగా “} g \text{ of } f \text{ of } f \text{ of } x\text{” అని అర్థం)}$$

$$= g\,[\,f(3x+1)] = g\,[\,3(3x+1)+1] = g\,(9x+4)$$

$$g\,(9x+4) = [\,(9x+4)+3] = 9x+7$$

$$fgg(x) = f\,[g\,\{g\,(x)\}] \text{ (అనగా “} f \text{ of } g \text{ of } g \text{ of } x\text{” అని అర్థం)}$$

$$= f\,[\,g\,(x+3)] = f\,[\,(x+3)+3] = f\,(x+6)$$

$$f\,(x+6) = [\,3(x+6)+1\,] = 3x+19$$

$9x + 7 = 3x + 19$ రెండింటిని సాధించగా $x = 2$ వచ్చును.

కృత్యము 4

$h(x) = f \circ g(x)$ అని ఇవ్వబడిన, కింది పట్టికలో $h(x)$ ను పూరింపుము.

x	$f(x)$
1	2
2	3
3	1
4	4

x	$g(x)$
1	2
2	4
3	3
4	1

x	$h(x)$
1	3
2	-
3	-
4	-

$h(1)$ ను ఏ విధంగా కనుగొంటాము?

$$h(x) = f \circ g(x)$$

$$h(1) = f \circ g(1)$$

$$= f(2) = 3$$

$$\therefore\ h(1) = 3$$

ప్రగతి శోధన

కింద ఇవ్వబడిన ప్రశ్నలకు సరైన జవాబును ఎంపిక చేయుము.

1. సంయుక్త ప్రమేయములు స్థిత్యంతర ధర్మాన్ని పాటించును.
   (అ) ఎల్లప్పుడూ సత్యము (ఆ) ఎప్పుడూ సత్యముకాదు (ఇ) కొన్నిసందర్భాలలో సత్యమగును.
2. సంయుక్త ప్రమేయము సహచర ధర్మాన్ని పాటించును.
   (అ) ఎల్లప్పుడూ సత్యము (ఆ) ఎప్పుడూ సత్యముకాదు (ఇ) కొన్నిసందర్భాలలో సత్యమగును.

1.10 సరళ, వర్గ, ఘన మరియు వ్యుత్క్రమ ప్రమేయముల రేఖాచిత్రములను గుర్తించుట

వక్ర చిత్రములు మరియు ప్రమేయములను రేఖాచిత్రములలో చూపవచ్చును. భావనలను చక్కగా అర్థంచేసుకొనుటకు రేఖా చిత్రములు ఎంతో ఉపయోగపడును.

ఈ విభాగంలో కొన్ని ప్రమేయములను రేఖాచిత్రముల ద్వారా గుర్తించడం తెలుసుకొందాము. ఆ రేఖా చిత్రములు సరళ, వర్గ, ఘన మరియు వ్యుత్క్రమ ప్రమేయాలు అగును.

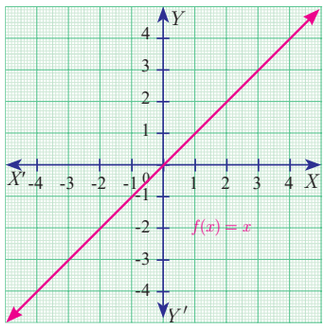
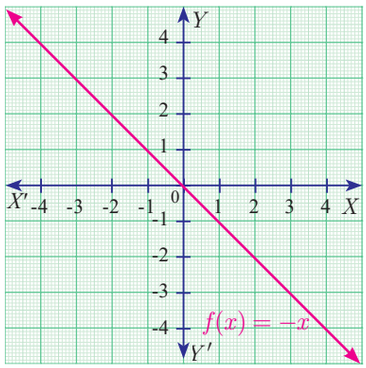
10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_1.indd 30 11-02-2023 17:47:49

1.10.1 సరళ ప్రమేయాలు

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ అనునది $f(x) = mx + c$, $m \neq 0$ గా నిర్వచితమైన ఈ ప్రమేయాన్ని సరళ ప్రమేయం అందురు. రేఖా చిత్రములో ఒక సరళరేఖగా సూచించబడును.
కొన్ని సరళ ప్రమేయాలు కింద రేఖా చిత్రము ద్వారా చూపబడినవి.

సూచన

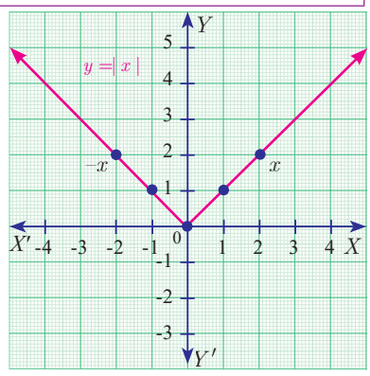
- నిర్ధారక ప్రమేయము సరళ ప్రమేయము కాదు. కాని ఇది రెండు సరళప్రమేయాలు x మరియు $-x$ కలిసిన సమ్మేళనమగును.
- సరళ ప్రమేయాలు ఎల్లప్పుడూ ఏక-ఏక ప్రమేయము మరియు ఇవి క్రిప్టోగ్రాఫీలలోమ, శాస్త్ర, సాంకేతిక విజ్ఞానంలోను ఉపయోగించబడుచున్నది.

వ.సం..	ప్రమేయము	ప్రదేశము మరియు నిర్వచనము	రేఖా చిత్రము
1	తత్సమ ప్రమేయం	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x$ గా నిర్వచితమైన	 పటము. 1.44
2	సంకలన విలోమ ప్రమేయము	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = -x$ గా నిర్వచితమైన	 పటము. 1.45

1.10.2 నిర్ధారకము లేక ఖచ్చిత విలువ ప్రమేయము

$f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $f(x) = |x|$ గా నిర్వచితమైనది.
దీనిని రేఖాచిత్రం ద్వారా గమనించవచ్చును.

$$= \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$



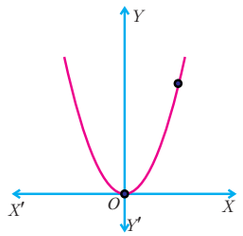
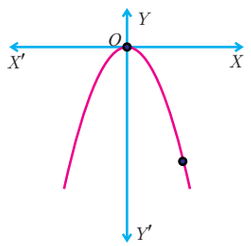
పటము. 1.46

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_1.indd 31 11-02-2023 17:47:50

వర్గ ప్రమేయము

ప్రమేయము $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c, (a\neq 0)$ గా నిర్వచితమైన ఈ ప్రమేయమును వర్గప్రమేయము అందురు.

కొన్ని ప్రత్యేక వర్గప్రమేయాలు రేఖాచిత్రం ద్వారా చూపబడినవి.

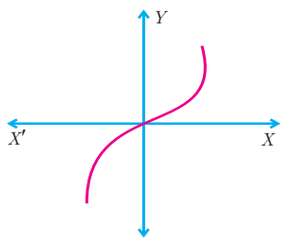
ప్రమేయము, ప్రదేశము, వ్యాప్తి మరియు నిర్వచనము	రేఖాచిత్రములు
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ అనేది $f(x)=x^2, x\in\mathbb{R}$. $f(x)\in[0,\infty)$ గా నిర్వచితమైన	 పటము. 1.47(a)
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ అనేది $f(x)=-x^2, x\in\mathbb{R}$. $f(x)\in(-\infty,0]$ గా నిర్వచితమైన	 పటము. 1.47(b)

ఒక వస్తువు భూమ్యాకర్షణ వలన వస్తువు కదిలే మార్గమును వర్గప్రమేయము అంటారు. ఇది ఏక-ఏక ప్రమేయం కాదు. ఎందుకు?

1.10.3 ఘన ప్రమేయము

ప్రమేయము $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $a\neq 0$ గా నిర్వచితమైన అట్టి ప్రమేయమును ఘన ప్రమేయము అందురు.

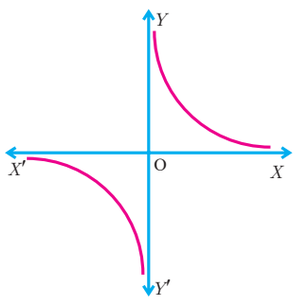
$f(x)=x^3$ పటము 1.48 రేఖాచిత్రములో చూపబడినది.



పటము. 1.48

1.10.4 వ్యుత్క్రమ ప్రమేయము

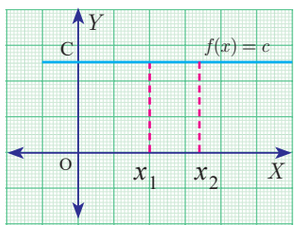
ప్రమేయము $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x}$ గా నిర్వచితమైన అట్టి ప్రమేయమును వ్యుత్క్రమ ప్రమేయము అంటారు. (పటము 1.49)



పటము. 1.49

1.10.5 స్థిర ప్రమేయము

ప్రమేయము $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ను $f(x)=c,$ గా నిర్వచితమైన అట్టి ప్రమేయము స్థిరప్రమేయము అందురు.



పటము. 1.50

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_1.indd 32 11-02-2023 17:47:52

ప్రగతి శోధన

1. ఒక స్థిర ప్రమేయము సరళ ప్రమేయమగునా?
2. ఒక వర్గ ప్రమేయము ఏక-ఏక ప్రమేయమగునా?
3. ఒక ఘన ప్రమేయము ఏక-ఏక ప్రమేయమగునా?
4. ఒక వ్యుత్క్రమ ప్రమేయము ద్విగుణ ప్రమేయమగునా?
5. $f : A \to B$ అనునది స్థిర ప్రమేయమైన f యొక్క వ్యాప్తిలో _____ మూలకములు ఉండును.



అభ్యాసము 1.5

1. కింద ఇవ్వబడిన ప్రమేయములు f మరియు g ను ఉపయోగించి $f \circ g$ మరియు $g \circ f$ ను కనుగొని $f \circ g = g \circ f$ అగునా అని సరిచూడుము.

   (i) $f(x) = x - 6,\ g(x) = x^2$ (ii) $f(x) = \frac{2}{x},\ g(x) = 2x^2 - 1$

   (iii) $f(x) = \frac{x+6}{3},\ g(x) = 3 - x$ (iv) $f(x) = 3 + x,\ g(x) = x - 4$

   (v) $f(x) = 4x^2 - 1,\ g(x) = 1 + x$

2. $f \circ g = g \circ f$ అయిన k విలువను కనుగొనుము.

   (i) $f(x) = 3x + 2,\ g(x) = 6x - k$ (ii) $f(x) = 2x - k,\ g(x) = 4x + 5$

3. If $f(x) = 2x - 1,\ g(x) = \frac{x+1}{2}$, అయిన $f \circ g = g \circ f = x$ అని నిరూపించుము.

4. $f(x) = x^2 - 1,\ g(x) = x - 2$ మరియు $g \circ f(a) = 1$ అయిన a విలువను కనుగొనుము.

5. $A, B, C \subseteq \mathbb{N}$ మరియు ప్రమేయము $f : A \to B$ అనే ప్రమేయం $f(x) = 2x + 1$ గా నిర్వచితమైన మరియు $g : B \to C$ అనే ప్రమేయము $g(x) = x^2$ గా నిర్వచితమైన $f \circ g$ మరియు $g \circ f$. యొక్క వ్యాప్తిని కనుగొనుము.

6. $f(x) = x^2 - 1$. అయిన (i) $f \circ f$ (ii) $f \circ f \circ f$ ను కనుగొనుము.

7. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ మరియు $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ అనేది క్రమముగా $f(x) = x^5$ మరియు $g(x) = x^4$ గా నిర్వచితమైతే f, g అనేవి ఏక-ఏక ప్రమేయమా మరియు $f \circ g$ కూడా ఏక-ఏక ప్రమేయం అని సరిచూడుము.

8. కింద ఇవ్వబడిన ప్రమేయాలు $f(x),\ g(x),\ h(x)$ వంటి వాటిని $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ అని నిరూపించుము.

   (i) $f(x) = x - 1,\ g(x) = 3x + 1$ మరియు $h(x) = x^2$

   (ii) $f(x) = x^2,\ g(x) = 2x$ మరియు $h(x) = x + 4$

   (iii) $f(x) = x - 4,\ g(x) = x^2$ మరియు $h(x) = 3x - 5$

9. $f = \{(-1, 3), (0, -1), (2, -9)\}$ అనేది $\mathbb{Z}$ నుండి $\mathbb{Z}$ కు గల సరళ ప్రమేయమైన $f(x)$ ను కనుగొనుము.

10. ఒక విద్యుత్ సర్క్యూట్ సిద్ధాంతం ప్రకారం $C(t)$ అనే సరళ సర్క్యూట్ $C(at_1 + bt_2) = aC(t_1) + bC(t_2$ ను సంతృప్తిపరచును. ఇక్కడ a, b అనునవి స్థిరాంకములు అయిన $C(t) = 3t$ అనేది ఒక సరళ సర్క్యూట్ అని నిరూపించుము.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_1.indd 33 11-02-2023 17:47:57

అభ్యాసము 1.6

బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు

1. $n(A\times B)=6$ మరియు $A=\{1,3\}$ అయిన $n(B)$ విలువ

   (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 6

2. $A=\{a,b,p\},\ B=\{2,3\},\ C=\{p,q,r,s\}$ అయిన $n[(A\cup C)\times B]$ విలువ

   (A) 8 (B) 20 (C) 12 (D) 16

3. $A=\{1,2\},\ B=\{1,2,3,4\}, C=\{5,6\}$ మరియు $D=\{5,6,7,8\}$ అయిన కింద ఇవ్వబడిన వాటిలో ఏది సత్యం?

   (A) $(A\times C)\subset(B\times D)$ (B) $(B\times D)\subset(A\times C)$ (C) $(A\times B)\subset(A\times D)$ (D) $(D\times A)\subset(B\times A)$

4. సమితి $A=\{1,2,3,4,5\}$ నుండి సమితి B కు గల సంబంధముల సంఖ్య 1024 అయిన B లో గల మూలకముల సంఖ్య.

   (A) 3 (B) 2 (C) 4 (D) 8

5. $R=\{(x,x^2)\mid x$ అనునది 13 కన్నా తక్కువ గల ప్రధానసంఖ్యలు$\}$ అను సంబంధము R యొక్క వ్యాప్తి

   (A) $\{2,3,5,7\}$ (B) $\{2,3,5,7,11\}$ (C) $\{4,9,25,49,121\}$ (D) $\{1,4,9,25,49,121\}$

6. $(a+2,4)$ మరియు $(5,2a+b)$ క్రమయుగ్మములు సమానము అయిన (a,b) విలువ

   (A) (2, –2) (B) (5,1) (C) (2,3) (D) (3, –2)

7. $n(A)=m$ మరియు $n(B)=n$ అయిన A నుండి B కు నిర్వచితమైన శూన్యేతర సంబంధముల సంఖ్య.

   (A) m^n (B) n^m (C) $2^{mn}-1$ (D) 2^{mn}

8. $\{(a,8),(6,b)\}$ అనునది తత్సమ ప్రమేయాన్ని తెలియజేసిన a మరియు b విలువ

   (A) (8,6) (B) (8,8) (C) (6,8) (D) (6,6)

9. $A=\{1,2,3,4\}$ మరియు $B=\{4,8,9,10\}$. అనే ప్రమేయము $f:A\to B$ గా నిర్వచితమైన $f=\{(1,4),(2,8),(3,9),(4,10)\}$ అనునది

   (A) బహు–ఏక ప్రమేయం (B) తత్సమ ప్రమేయం (C) అన్వేక ప్రమేయం (D) అంతర ప్రమేయం

10. $f(x)=2x^2$ మరియు $g(x)=\dfrac{1}{3x}$, అయిన $f\circ g$ అనునది

    (A) $\dfrac{3}{2x^2}$ (B) $\dfrac{2}{3x^2}$ (C) $\dfrac{2}{9x^2}$ (D) $\dfrac{1}{6x^2}$

11. $f:A\to B$ అనునది ద్విగుణ ప్రమేయము మరియు $n(B)=7$, అయిన $n(A)$ విలువ

    (A) 7 (B) 49 (C) 1 (D) 14

12. $f=\{(0,1),(2,0),(3,-4),(4,2),(5,7)\}$ $g=\{(0,2),(1,0),(2,4),(-4,2),(7,0)\}$ అని ఇవ్వబడింది. f మరియు g అనునవి రెండు ప్రమేయములైన $f\circ g$ వ్యాప్తి కనుగొనుము.

    (A) $\{0,2,3,4,5\}$ (B) $\{-4,1,0,2,7\}$ (C) $\{1,2,3,4,5\}$ (D) $\{0,1,2\}$

13. $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ అయిన

    (A) $f(xy)=f(x).f(y)$ (B) $f(xy)\geq f(x).f(y)$ (C) $f(xy)\leq f(x).f(y)$ (D) ఏదీకాదు

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_1.indd 34 11-02-2023 17:48:02

14. $g=\{(1,1),(2,3),(3,5),(4,7)\}$ అను ప్రమేయంలో $g(x)=\alpha x+\beta$ అని ఇవ్వబడిన α మరియు β విలువ కనుగొనుము.

(A) $(-1,2)$ (B)$(2,-1)$ (C) $(-1,-2)$ (D) $(1,2)$

15. $f(x)=(x+1)^3-(x-1)^3$ అనునవి _____ ప్రమేయమును సూచించును.

(A) సరళ (B) ఘనము (C) వ్యుత్క్రమము (D) వర్గ ప్రమేయము

అధ్యాయ అభ్యాసము - 1



1. క్రమయుగ్మములు $(x^2-3x,\ y^2+4y)$ మరియు $(-2,5)$ అనేవి సమానము అయిన x మరియు y విలువలను కనుగొనుము.

2. $A\times A$ కార్టీషియన్ లబ్ధములో 9 మూలకాలలో $(-1,0)$ మరియు $(0,1)$ మూలకాలున్నచో A లో గల మూలకాలు మరియు $A\times A$ లో మిగిలిన మూలకాలను కనుగొనుము.

3. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-1} & x\geq 1\\ 4 & x<1\end{cases}$. అని ఇవ్వబడిన

(i) $f(0)$ (ii) $f(3)$ (iii) $f(a+1)$ ($a\geq 0$ ను కనుగొనుము.

4. $A=\{9,10,11,12,13,14,15,16,17\}$ అనుకొనుము. $f:A\to N$ అనేది $f(n)=$ n యొక్క గరిష్ఠ ప్రధాన కారణాంకము $n\in A$ గా నిర్వచించబడిన f యొక్క క్రమయుగ్మాల జతను మరియు వ్యాప్తిని కనుగొనుము.

5. ప్రమేయము $f(x)=\sqrt{1+\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}$ యొక్క ప్రదేశమును కనుగొనుము.

6. $f(x)=x^2$, $g(x)=3x$ మరియు $h(x)=x-2$, అయిన $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$ అని నిరూపించుము.

7. $A=\{1,2\}$ మరియు $B=\{1,2,3,4\}$, $C=\{5,6\}$ మరియు $D=\{5,6,7,8\}$. అయిన A×C అనేది B×D? ఉపసమితిగా ఉందా అని సరిచూడుము.

8. $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$, $x\neq -1$ అనుకొనుము $f(f(x))=-\dfrac{1}{x}$, అని చూపుము $x\neq 0$.

9. f మరియు g అనునవి రెండు ప్రమేయములైన $f(x)=6x+8;\ g(x)=\dfrac{x-2}{3}$ అయిన

(i) $gg\left(\dfrac{1}{2}\right)$ విలువను కనుగొనుము. (ii) $gf(x)$ ను సూక్ష్మరూపంలో వ్రాయుము.

10. కింద ఇవ్వబడిన ప్రమేయాలకు ప్రదేశమును కనుగొనుము.

(i) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-9}$ (ii) $p(x)=\dfrac{-5}{4x^2+1}$ (iii) $g(x)=\sqrt{x-2}$ (iv) $h(x)=x+6$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_1.indd 35 11-02-2023 17:48:05

గుర్తించుకోవలసిన విషయాలు

- A తో B కు కార్టీషియన్ లబ్ధమును కింది విధంగా నిర్వచించవచ్చు.
  $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$
- A నుండి B కు సంబంధం R ఎల్లప్పుడూ $A \times B$ యొక్క ఉపసమితిగా ఉండును.దీనిని $R \subseteq A \times B$ గా వ్రాయవచ్చు.
- ప్రమేయం X నుండి Y నిర్వచింపబడినట్లయితే ఈ కింది నిబంధనలు వర్తించవలెను. ప్రతి $x \in X$ కు ఒక $y \in Y$ కి మాత్రము సంబంధము కలిగియుండవలెను.
- ప్రమేయమును కింది విధంగా సూచించవచ్చును.
  (i) బాణాచిత్రము (ii) పట్టిక రూపం (iii) క్రమయుగ్మములు (iv) రేఖా చిత్రము
- ప్రమేయములోని రకములు
  (i) ఏక-ఏక ప్రమేయము (ii) సంగ్రస్త ప్రమేయము (iii) బహు-ఏక ప్రమేయము
  (iv) అంతర్గత ప్రమేయము
- తత్సమ ప్రమేయము $f(x) = x$ • విలోమ ప్రమేయము $f(x) = \frac{1}{x}$
- సరళ ప్రమేయము $f(x) = ax + b,\ a \neq 0$ • వర్గ ప్రమేయము $f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$
- ఘన ప్రమేయము $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,\ a \neq 0$ • స్థిర ప్రమేయము $f(x) = c$
- A, Bమరియు Cఅనే మూడు శూన్యేతర సమితిలలో $f : A \to B$ మరియు $g : B \to C$ అనేవి రెండు ప్రమేయములైన f మరియు g సంయుక్త ప్రమేయమును $g \circ f : A \to C$ అనునది $g \circ f(x) = g(f(x))$ గా నిర్వచితమగును.
- f మరియు g అనేవి రెండు ప్రమేయములు అయిన $f \circ g \neq g \circ f$
- f, g మరియు h అనేవి మూడు ప్రమేయములు అయిన $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_1.indd 36 11-02-2023 17:48:07

అంతర్జాల కృత్యము

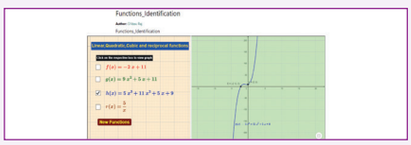
ICT 1.1

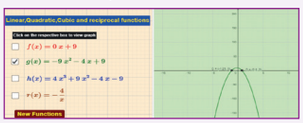
సోపానము 1: బ్రౌజర్‌ను ఓపెన్‌చేసి URL లింకును టైపు చేయుము (లేదా) QR కోడ్‌ను స్కేన్ చేయుము. GeoGebra వర్క్‌బుక్ నందు **"Relations and Functions–X"** అను పేరుతో ఓపెన్ అగును. ఎడమ ప్రక్క నున్న వర్క్‌బుక్ నందు **"Functions Identification"** అనే అధ్యాయంలో ఎక్కువ కృత్యాలు ఉండును. వర్క్‌షీట్‌లో ప్రమేయముల గుర్తింపును ఎంపికచేయుము.

సోపానము 2: ఇవ్వబడిన వర్క్‌షీటు నందు check boxes వద్ద క్లిక్ చేసిన ఎడమ ప్రక్క గల ప్రతి ప్రమేయమునకు కుడి ప్రక్క దానికి తగిన రేఖాచిత్రము ఉండును. ప్రతి రేఖాచిత్రమును విశ్లేషించి"New Functions" వద్ద క్లిక్ చేసి అర్థమయ్యే వరకు కొనసాగించుము.

సోపానము 1 | సోపానము 2 | ఫలితములు







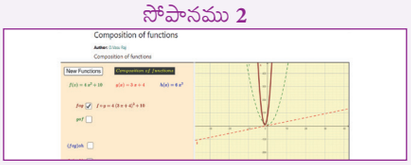
ICT 1.2

సోపానము 1: బ్రౌజర్‌ను ఓపెన్‌చేసి URL లింకును టైపు చేయుము (లేదా) QR కోడ్‌ను స్కేన్ చేయుము. GeoGebra వర్క్‌బుక్ నందు **"Relations and Functions–X"** అను పేరుతో ఓపెన్ అగును. ఎడమ ప్రక్క నున్న వర్క్‌బుక్ నందు **"Composition of Functions"** అనే అధ్యాయంలో ఎక్కువ కృత్యాలు ఉండును. సంయుక్త ప్రమేయము గల వర్క్‌షీట్‌ను ఎంపికచేయుము.

సోపానము 2: Iఇవ్వబడిన వర్క్‌షీటు నందు check boxes వద్ద క్లిక్ చేసిన ఎడమ ప్రక్క గల ప్రతి ప్రమేయమునకు కుడి ప్రక్క దానికి తగిన రేఖాచిత్రము ఉండును. ప్రతి రేఖాచిత్రమును విశ్లేషించి **"New Functions"** వద్ద క్లిక్ చేసి అర్థమయ్యే వరకు కొనసాగించుము.

సోపానము 1 | సోపానము 2 | ఫలితములు







You can repeat the same steps for other activities

https://www.geogebra.org/m/jfr2zzgy#chapter/356191
or Scan the QR Code.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_1.indd 37 11-02-2023 17:48:08

2 సంఖ్యలు మరియు క్రమానుగత వరుసలు

" సంఖ్యలు అందమైనవి అని నాకు తెలుసు, అవి అందమైనవి కాకుంటే, ఏదీ లేదు"

- పాల్ ఎర్డోస్



శ్రీనివాస రామానుజన్
(1887-1920)

శ్రీనివాసరామానుజన్ భారతదేశానికి చెందిన ప్రఖ్యాతిగాంచిన గొప్ప గణితశాస్త్రవేత్త. ఈయన ఒక నిరుపేద కుటుంబములో ఈరోడ్ పట్టణములో జన్మించారు. ఈయన బాల మేధావి మరియు మెరుపు వేగంతో లెక్కలను గణించేవారు. ఈయన గణితశాస్త్రంలో వేల సంఖ్యలో సూత్రాలను ఉత్పాదించారు. ఇతను వ్రాసిన మూడు ముఖ్యమైన నోటు పుస్తకాలు మద్రాసు విశ్వవిద్యాలయంలో భద్రపరచబడియున్నది. ఇతడు ప్రముఖ వ్యక్తుల సహాయంతో మద్రాసు విశ్వవిద్యాలయంలోని గణిత విభాగానికి పరిశోదనా విద్యార్థిగా అయ్యారు. తరువాత ఇతడు ఇంగ్లాండుకు వెళ్ళి జి. హెచ్. హార్డితో 1914 నుండి 1919 వరకు కలసి పనిచేసినారు.

ఇతడు సంఖ్యల అమరిక గురించి పరిశోధన చేయుటలో గొప్ప ఆసక్తి కలిగి ఉండెను. దీని ఫలితంగా వైశ్లేషిక సంఖ్యా సిద్ధాంతము అనేక నూతన ఫలితాలను ఉత్పాదించారు. ఇతని గణిత సామర్థ్యాన్ని ఆయిలర్ మరియు జాకోబి అనే ఇద్దరు గొప్ప గణిత శాస్త్రవేత్తలతో పోల్చబడినది. ఇతను జి. హెచ్. హార్డీతో 30 పరిశోధన పత్రాలు మరియు 7 పరిశోధనా పత్రాలను జి. హెచ్. హార్డీతో కలిసి వ్రాసినారు. ఇతడు 32 సంవత్సరాల అతి తక్కువ జీవితకాలంలో 3972 సూత్రాలను మరియు సిద్ధాంతాలను ఉత్పాదించారు. ఇతని పరిశోధనలకుగాను ఆధునిక కాలంలోని పి. హెచ్‌డి డిగ్రీతో సమానమైన బి.ఎ. డిగ్రీని 1916 వ సంవత్సరంలో కేంబ్రిడ్జ్ విశ్వవిద్యాలయం వారు ప్రధానం చేశారు. సంఖ్యా సిద్ధాంత శాస్త్రానికి ఇతను చేసిన కృషి ఫలితంగా 1918 వ సంవత్సరంలో 'ఫెలో ఆఫ్ రాయల్ సొసైటీ (ఎఫ్. ఆర్. యస్)గా గుర్తింపబడినారు.

నేటికీ ప్రపంచ వ్యాప్తంగా ఈయన కనుగొనిన సూత్రములు గణితశాస్త్రవేత్తలచే ఆకర్షింపబడుతున్నాయి. ఒక శతాబ్దమునకు ముందు తన జీవిత చివరి కాలంలో అతను కనుగొన్న విషయాలు నేటి నవీన శాస్త్రములతో సంబంధం కలిగి ఉన్నది.

అభ్యసన ఫలితములు

TOHGM

- యూక్లిడ్ భాగాహార న్యాయ భావనలను అధ్యయనం చేయుట.
- యూక్లిడ్ భాగాహార శేష విధిని అవగాహన చేసుకొనుట.
- యుక్లిడ్ భాగాహార శేష విధిని ఆధారము చేసుకొని క.సా.గు మరియు గ.సా.కా కనుగొనుట.
- అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతమును అవగాహన చేసుకొనుట.
- అనురూపత మాపము 'n', సంకలన మాపము 'n' మరియు గుణకారమాపము 'n' ను అవగాహన చేసుకొనుట.
- క్రమానుగతంను నిర్వచించి మరియు క్రమానుగతమును ఒక ప్రమేయంగా అవగాహన చేసుకొనుట.
- అంకశ్రేఢి మరియు గుణశ్రేఢిలను నిర్వచించుట.
- అంకశ్రేడి యొక్క n వ పదము మరియు n పదాలు మొత్తమును కనుగొనుట.
- గుణశ్రేడి యొక్క n వ పదము మరియు n పదాల మొత్తమును కనుగొనుటకు.
- కొన్ని పరిమిత శ్రేణుల మొత్తాన్ని $\sum n$, $\sum n^2$, $\sum n^3$ ను తెలుసుకొనుట.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_2.indd 38 11-02-2023 17:49:59

2.1 పరిచయము

కొన్ని వేల సంవత్సరాల ముందునుండే మానవులు సంఖ్యల గూర్చి చదవడానికి మిక్కిలి ఆసక్తి చూపేవారు. 25000 సంవత్సరాలకు మునుపు ఉపయోగించిన లేబొంబో మరియు ఇషాంగో ఎముకల నుండి కనుగొనబడినది. మానవులు తన నిత్య అవసరాలను లెక్కించు పద్ధతులలో ఉపయోగించినట్లు తెలియుచున్నది. ఎముకలపై గుర్తులను ఏర్పరచి వారి యొక్క గణనలను సామర్థ్యవంతంగా నమోదు చేసియున్నారు. ఇది చంద్రుని స్థానమును బట్టి కాల నిర్ణయం చేసేవారు. వీటిని చంద్ర కాలమానముగా పిలిచేవారు. కావున ఎముకలను పురాతన కాలంలో లెక్కించే యంత్రముగా ఉపయోగించేవారు. దీనినుండి ఈరోజు పరిస్థితులలో మనం లెక్కించుటలో గొప్ప అభివృద్ధిని సాధించియున్నాము.



ఇషాంగో ఎముకలలో సంఖ్యల చిత్రములు
పటం.2.1

సంఖ్యల ద్వారా ప్రదర్శించబడిన నమూనాలు దాదాపుగా అన్ని ప్రొఫెషనల్ గణితవేత్తలను పైథాగరస్ కాలము నుండి ప్రస్తుత కాలం వరకు ఆకర్షించాయని చెప్పడం నిజం. మనము యుక్లిడ్ అందించిన ముఖ్యమైన భావనలను చర్చిస్తూ అంకగణిత మాపకము అధ్యయనం మరియు క్రమానుగతలు మరియు"పరిమిత శ్రేణులు" గురించి తెలుసుకొంటున్నాము. ఈ ఆలోచనలు రాబోయే తరగతులకు గణితంలో మీ పురోగతికి చాలా మౌలికమైనది. సంఖ్యలు అధ్యాయం, వాటి పేర్లు గణితం యొక్క అత్యంత ఆకర్షణీయమైన భాగాన్ని అవగాహన చేసుకోవడానికి ఇది మంచి సమయము.

2.2 యూక్లిడ్ భాగాహార న్యాయము

యూక్లిడ్ అత్యంత ప్రాముఖ్యమైన గణితశాస్త్రవేత్తలలో ఒకరు. 13 సంపుటల మూలకాలు అనే ముఖ్యమైన పుస్తకం రాశారు. మొదటి 6 సంపుటాలను జ్యామితికి అంకితం చేశారు మరియు ఈ కారణంగా యూక్లిడ్‌ని "జ్యామితి తండ్రి" అని పిలుస్తారు. కానీ కొన్ని కొద్ది సంపుటాలలో అతను సంఖ్యల గుణాలను అర్థం చేసుకోవడానికి మౌలిక రచనలు చేసినారు. వాటిలో ఒకటి "యూక్లిడ్ భాగాహార న్యాయము". అంతకుముందు తరగతుల్లోని సంఖ్యల భాగాహారమును పొడవు భాగాహార పద్ధతిలో సరళముగా అనువదించబడినది.

"యూక్లిడ్ భాగాహార శేషవిధి"ని శేషవిధి విధానం ద్వారా యూక్లిడ్ న్యాయము మరియు వాటి అనువర్తనములను చర్చించండి.

ముఖ్యమైన సిద్ధాంతములను రుజువు చేయుటకు న్యాయమును సహాయకారినిగా ఉపయోగిస్తారు. దీనిని సాధారణంగా చిన్న సిద్ధాంతములుగా పరిగణించబడును.

సిద్ధాంతము 1: యూక్లిడ్ భాగాహార న్యాయము

a మరియు b $(a > b)$. లు ఏవైనా రెండు ధన పూర్ణసంఖ్యలు. అయితే $a = bq + r,\ 0 \le r < b$ గా ఉండునట్లు రెండు ఏకైక పూర్ణ సంఖ్యలు q మరియు r లు ఉండును.

సూచన

- శేషము ఎల్లప్పుడు భాజకం కంటే తక్కువ.
- $r = 0$ అయితే $a = bq$ అవుతుంది. కాబట్టి b అనునది a ను భాగిస్తుంది.
- విపర్యయముగా, b అనునది a ను భాగిస్తే అప్పుడు $a = bq$ అవుతుంది.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_2.indd 39 11-02-2023 17:50:00

ఉదాహరణ 2.1 మన దగ్గర 34 కేకు ముక్కలు ఉన్నవి. ఒక్కొక్క పెట్టెలో 5 కేకులు మాత్రమే ఉంచుటకు వీలున్న కేకులను ఉంచుటకు ఎన్ని పెట్టెలు అవసరమగును. మరియు మిగిలి ఉన్న కేకులను కనుగొనుము.

సాధన మనకు 30 కేకులను ఉంచుటకు 6 పెట్టెలు అవసరము. మిగిలిన 4 కేకులను పెట్టెలో ఉంచు పద్ధతిని కింది విధంగా అర్థం చేసుకొనవచ్చును:

34	=	5	×	6	+	4
మొత్తం కేకుల సంఖ్య	=	ప్రతి పెట్టెలోని కేకుల సంఖ్య	×	పెట్టెల సంఖ్య	+	మిగిలిన కేకుల సంఖ్య
↓		↓		↓		↓
విభాజ్యము a	=	భాజకము b	×	భాగఫలము q	+	శేషము r

సూచన

- పై న్యాయం పొడవు భాగాహార పద్ధతికి మరొక విధానమే అగును. ఇక్కడ పూర్ణసంఖ్యలు qమరియు r లు వరుసగా భాగఫలము మరియు శేషములు.
- ఏ ఒక్క ధన పూర్ణసంఖ్యను 2 చే భాగించిన శేషము 0 లేక 1 మాత్రమే వచ్చును. కావున ఏ ఒక్క ధన పూర్ణసంఖ్యను $2k$ లేక $2k+1$ రూపంలో వ్రాయవచ్చు. ఇక్కడ k అనునది ధన పూర్ణసంఖ్య. ఏదైనా రెండు ధన పూర్ణ సంఖ్యలను యూక్లిడ్ బాగాహార న్యాయం ద్వారా క్రమపరచవచ్చును.

యూక్లిడ్ భాగాహార న్యాయ సాధారణ రూపము (Generalised form of Euclid's division lemma)

a మరియు b లు రెండు పూర్ణసంఖ్యలు అయినప్పుడు $a=bq+r$ అగునట్లు ఏకైక పూర్ణసంఖ్యలు q మరియు r లు వ్యవస్థీకృతము అవుతాయి. ఇక్కడ $0 \le r < |b|$

ఉదాహరణ 2.2 కింద ఇవ్వబడిన ఒక్కొక్కదానిలో a ను b చే భాగించిన వచ్చు భాగఫలము మరియు శేషమును కనుగొనుము. (i) $a=-12,\ b=5$ (ii) $a=17,\ b=-3$ (iii) $a=-19,\ b=-4$

సాధన

(i) $a=-12,\ b=5$

యూక్లిడ్ భాగాహారం న్యాయం ద్వారా

$a=bq+r$, ఇక్కడ $0 \le r < |b|$

$-12=5\times(-3)+3 \quad 0 \le r < |5|$

భాగఫలము $q=-3$, శేషము $r=3$

(ii) $a=17 \quad b=-3$

యూక్లిడ్ భాగాహార న్యాయం ద్వారా

$a=bq+r$, ఇక్కడ $0 \le r < |b|$

$17=(-3)\times(-5)+2 \quad 0 \le r < |-3|$

భాగఫలము $q=-5$, శేషము $r=2$

మెదడుకు మేత

ఒక ధన పూర్ణ సంఖ్యను 3 చే భాగింపబడినపుడు

1. వచ్చే శేషములు ఏవి?
2. దీనిని ఏ రూపంలో వ్రాయగలము?

ప్రగతిశోధన

క్రింద ఇవ్వబడిన పూర్ణసంఖ్యలు a మరియు b. లలో $a=bq+r$ ను తృప్తిపరిచే విధంగా q మరియు r లను కనుగొనుము.

1. $a=13,\ b=3$
2. $a=18,\ b=4$
3. $a=21,\ b=-4$
4. $a=-32,\ b=-12$
5. $a=-31,\ b=7$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_2.indd 40 11-02-2023 17:50:02

(iii) $a = -19,\ b = -4$

యూక్లిడ్ భాగాహార న్యాయం ద్వారా

$a = bq + r$, ఇక్కడ $0 \le r < |b|$

$-19 = (-4) \times (5) + 1 \quad 0 \le r < |-4|$

భాగఫలము $q = 5$, శేషము $r = 1$.

ఉదాహరణ 2.3 కొన్ని పూర్ణసంఖ్యలు q కు ఒక బేసి పూర్ణసంఖ్య యొక్క వర్గము $4q + 1$ రూపంలో ఉండునని నిరూపించుము.

సాధన x అనేది ఏదైనా బేసి పూర్ణసంఖ్య అనుకొనుము. ఏదైనా బేసి పూర్ణసంఖ్య సరి పూర్ణసంఖ్య కంటే ఒకటి ఎక్కువగా ఉండును. కావున కొన్ని పూర్ణ సంఖ్యలు k కు, $x = 2k + 1$

$$\begin{aligned} x^2 &= (2k+1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 4k(k+1) + 1 \\ &= 4q + 1, \text{ ఇక్కడ } q = k(k+1) \text{ అనునది ఒక పూర్ణసంఖ్య} \end{aligned}$$

2.3 యూక్లిడ్ భాగాహార శేషవిధి

ముందు భాగములో మనము యూక్లిడ్ భాగాహార న్యాయం గూర్చి అధ్యయనం చేసినాము మరియు దాని అనువర్తనాలు గూర్చి ఇప్పుడు యూక్లిడ్ భాగాహార అల్గారిథమ్‌ను అధ్యయనం చేద్దాము. ఆల్గారిథమ్ అనే పదము '9' వ శతాబ్దమునకు చెందిన పారశీక గణితశాస్త్రజ్ఞుడు ఆల్ ఖార్వీజ్మి పేరిట వచ్చినది. ఆల్గారిథమ్ అనేది వరుస సోపానాల సాధనా క్రమము. ఈ సోపానాలు మనకు కావాల్సిన సమాధానం పొందే వరకు కొనసాగుతుంది.

ఇచ్చిన రెండు ధన పూర్ణసంఖ్యల గరిష్ఠ సామాన్య కారణం (గ.సా.కా)ను కనుగొనడానికి యూక్లిడ్ భాగాహార అల్గారిథమ్ ఒక సులభమైన మార్గమును అందిస్తున్నది. ఇప్పుడు ఈ క్రింది సిద్ధాంతమును రుజువు చేద్దాము.

సిద్ధాంతం 2

$a = bq + r$, అయ్యేవిధంగా a మరియు b లు పూర్ణసంఖ్యలు అయితే అప్పుడు a మరియు b ల యొక్క ప్రతి సామాన్య భాజకం b మరియు r ల యొక్క సామాన్య భాజకము అవుతుంది. ఇదేవిధంగా దీని విపర్యయమును తెలుపవచ్చును.

యూక్లిడ్ భాగాహార శేషవిధి

a మరియు b రెండు ధన పూర్ణసంఖ్యలు యొక్క గరిష్ఠ సామాన్య కారణాంకమును కనుగొనుట. ఇక్కడ $a > b$

సోపానము 1: యూక్లిడ్ భాగాహార న్యాయం ద్వారా $a = bq + r\ ;\ 0 \le r < b$. ఇక్కడ q అనునది భాగఫలము, r అనునది శేషము. $r = 0$ అయితే a మరియు b ల యొక్క గరిష్ఠ సామాన్య కారణాంకము b అవుతుంది.

సోపానము 2: ఆ విధంగా కాకపోతే $b = rq_1 + r_1,\ 0 \le r_1 < r$ ను పొందడానికి యూక్లిడ్ యొక్క భాగాహార న్యాయము అనుసరించి b ను r చే భాగించాలి.

సోపానము 3: $r_1 = 0$ అయితే a మరియు b ల యొక్క గరిష్ఠ సామాన్య కారణాంకము r అవుతుంది.

సోపానము 4: ఆ విధంగా కాకపోతే, యూక్లిడ్ యొక్క భాగాహార న్యాయం ఉపయోగించి మరలా ఈ

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_2.indd 41 11-02-2023 17:50:03

విధానమునే మనము శేషం సున్నా వచ్చేవరకు ప్రక్రియ పునరావృతం చేయాలి. ఆ సందర్భంలో సంబంధిత భాజకం a మరియు b ల గరిష్ఠ సామాన్య కారణాంకము(గ.సా.కా) అవుతుంది.

సూచన

- పై ఆల్గారిథమ్ ఎల్లప్పుడూ కొన్ని దశలలో శేషం సున్నను ఇస్తుంది. అందువల్ల అల్గారిథమ్ అంతమగును.
- శేషం సున్న వచ్చువరకు యూక్లిడ్ భాగాహార న్యాయ అనువర్తనాన్ని పునరావృతం చేయడమే యూక్లిడ్ భాగాహార అల్గారిథమ్.
- రెండు ధన సంఖ్యల గరిష్ఠ సామాన్య కారణాంకమును (a,b) చేత సూచిస్తారు.
- గరిష్ఠ సామాన్య కారణాంకము (గ.సా.కా)ను గరిష్ఠ సామాన్య భాజకం(గ.సా.భా)గా కూడా పిలుస్తారు.

ప్రగతి శోధన

1. శేషము _____ వచ్చేవరకు భాగాహార న్యాయము అనువర్తనాన్ని పునరావృతం చేయడమే యూక్లిడ్ భాగాహార ఆల్గారిథమ్.
2. రెండు సమాన ధన పూర్ణ సంఖ్యలు k, k ల గ.సా.కా _____.

వివరణ 1

పై అల్గారిథమ్‌ను ఉపయోగించి ఇచ్చిన రెండు ధన పూర్ణసంఖ్యల గరిష్ఠ సామాన్య కారణాంకమును కనుగొందాము. $a > b$ అయ్యేటట్లు రెండు ధన పూర్ణ సంఖ్యలు $a = 273$ మరియు $b = 119$ అనుకొనుము.

యూక్లిడ్ భాగాహార న్యాయమును ఉపయోగించి మొదట 273 ను 119 చే భాగించిన.

$$273 = 119 \times 2 + 35 \qquad \ldots(1)$$

శేషము $35 \neq 0$ వచ్చును.

భాజకము 119 మరియు శేషము 35 లకు యూక్లిడ్ భాగాహార అల్గారిథమ్‌ను అనువర్తించిన.

$$119 = 35 \times 3 + 14 \qquad \ldots(2)$$

శేషము $14 \neq 0$ వచ్చును.

భాజకము 35 మరియు శేషము 14 లకు యూక్లిడ్ భాగాహార అల్గారిథమ్ ను అనువర్తించిన.

$$35 = 14 \times 2 + 7 \qquad \ldots(3)$$

శేషము $7 \neq 0$ వచ్చును.

భాజకము 14 మరియు శేషము 7 లకు యూక్లిడ్ భాగాహార అల్గారిథమ్‌ను అనువర్తించిన.

$$14 = 7 \times 2 + 0 \qquad \ldots(4)$$

ఈ దశలో శేషము $= 0$.

వచ్చును, భాజకము $= 7$.

$273, 119$ ల గరిష్ఠ సామాన్య కారణాంకము $= 7$.

ఉదాహరణ 2.4 210 మరియు 55 యొక్క గరిష్ఠ సామాన్య కారణాంకమును $55x - 325$ రూపంలోకి వ్యక్తపరచిన, x ను కనుగొనుము.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_2.indd 42 11-02-2023 17:50:04

సాధన యూక్లిడ్ భాగాహార అల్గారిథమ్‌ను ఉపయోగించి, ఇచ్చిన సంఖ్యల యొక్క గరిష్ట సామాన్య కారణాంకము ను కనుగొందాం.

$$210 = 55 \times 3 + 45$$

$$55 = 45 \times 1 + 10$$

$$45 = 10 \times 4 + 5$$

$$10 = 5 \times 2 + 0$$

శేషము సున్న.

కావున చివరి భాజకము 5 అనేది 210 మరియు 55 ల యొక్క గరిష్ట సామాన్య కారణాంకము అగును.

కాబట్టి $55x - 325 = 5$ ను గ.సా.కా రూపంలో ఇవ్వబడి ఉండడం వలన

$$55x = 330$$

కావున $x = 6$ అవుతుంది.

ఉదాహరణ 2.5 445 మరియు 572 లను ఏ గరిష్ట సంఖ్యచే భాగించిన శేషములు వరుసగా 4 మరియు 5 లు వచ్చును.

సాధన శేషములు వరుసగా 4, 5 లు కావడము వలన కావలసిన సంఖ్య $445 - 4 = 441$, $572 - 5 = 567$ గ.సా.కా అగును.

కావున, 441 మరియు 567 ల గ.సా.కాను కనుగొనాలి.

యూక్లిడ్ భాగాహార అల్గారిథమ్‌ను ఉపయోగించిన

$$567 = 441 \times 1 + 126$$

$$441 = 126 \times 3 + 63$$

$$126 = 63 \times 2 + 0 \text{ వచ్చును.}$$

441, 567 యొక్క గ.సా.కా $= 63$ మరియు కాబట్టి కావలసిన సంఖ్య 63.



కృత్యము 1

ఈ కృత్యం రెండు ధనసంఖ్యల గ.సా.కాను కనుగొనడానికి ఉపయోగపడును. మొదట ఈ క్రింది సూచనలను పరిశీలించండి.

(i) ఇచ్చిన పొడవు మరియు వెడల్పుల కొలతలతో దీర్ఘచతురస్రంను నిర్మించాలి.

(ii) చిన్న చతురస్రములను ఉపయోగించి దీర్ఘచతురస్రాన్ని పూరించడానికి ప్రయత్నించండి.

(iii) 1×1 చతురస్రము, 2×2 చతురస్రము, మరియు 3×3 చతురస్రము మొదలగునవి ఉపయోగించి ప్రయత్నించుము.

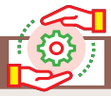
(iv) ఏ అతిపెద్ద చతురస్రము మొత్తం దీర్ఘచతురస్రాన్ని ఖాళీ లేకుండా పూరిస్తుందో దాని యొక్క భుజమే ఇచ్చిన సంఖ్యల గ.సా.కా అవుతుంది.

(v) (a) 12,20 (b) 16,24 (c) 11,9 ల గ.సా.కాను కనుగొనుము.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_2.indd 43 11-02-2023 17:50:05

సిద్ధాంతం 3

a, b రెండు ధన పూర్ణసంఖ్యలు మరియు $a > b$ అయితే (a,b) ల గ.సా.భా $=$ $(a-b,b)$. ల గ.సా.భా.



కృత్యము 2

ఇవ్వబడిన రెండు ధన పూర్ణసంఖ్యల యొక్క గ.సా.కాను నిర్ధారించుటకు మరొక కృత్యం

(i) ఇచ్చిన రెండు సంఖ్యలలో, పెద్ద సంఖ్య నుండి చిన్న సంఖ్యను తీసివేయుము.

(ii) ఇప్పుడు వచ్చిన సంఖ్యను, చిన్న సంఖ్యను తీసుకొని ఈ రెండు సంఖ్యలలో చిన్న సంఖ్యను పెద్ద సంఖ్య నుండి తీసివేయుము.

(iii) మరల తీసివేత ప్రక్రియ ద్వారా పెద్ద దాని నుండి చిన్నదానిని తీసివేయుము.

(iv) సంఖ్యలు సమానం అయినపుడు ప్రక్రియను నిలిపివేయాలి.

(v) దశ (iv) లో వచ్చిన సమాన సంఖ్యలు, ఇచ్చిన సంఖ్యల యొక్క గ.సా.కా అగును.

ఈ కృత్యాన్ని ఉపయోగించి క్రింది వాటికి గ.సా.కాలను కనుగొనుము

(i) 90,15 (ii) 80,25 (iii) 40,16 (iv) 23,12 (v) 93,13

మూడు సంఖ్యల యొక్క గరిష్ట సామాన్య కారణాంకము

మనము ఈ క్రింది విధానాన్ని ఉపయోగించి యూక్లిడ్ భాగాహార అల్గారిథమ్ ద్వారా మూడు ధన పూర్ణసంఖ్యల యొక్క గరిష్ట సామాన్య కారణాంకమును(గ.సా.కా) కనుగొనవచ్చు.

a, b, c అనునవి ఇచ్చిన మూడు ధన పూర్ణసంఖ్యలు అనుకొందాం.

(i) a,b ల గ.సా.కా ను కనుగొనుటకు దానిని d అనుకొనిన

$$d = (a,b)$$

(ii) d మరియు c ల యొక్క గ.సా.కాను కనుగొనుము. ఇదే ఇచ్చిన 3 సంఖ్యల a, b, c యొక్క గ.సా.కా అవుతుంది.

ఉదాహరణ 2.6 396, 504, 636 యొక్క గ.సా.కాను కనుగొనుము

సాధన ఇచ్చిన మూడు సంఖ్యల యొక్క గ.సా.కాను కనుగొనుటకు మొదట రెండు సంఖ్యల గ.సా.కాను కనుగొనవలెను.

396 మరియు 504 యొక్క గ.సా.కాను కనుగొనుట.

యూక్లిడ్ భాగాహార అల్గారిథమ్‌ను ఉపయోగించిన మనకు $504 = 396 \times 1 + 108$

శేషము $108 \neq 0$ వచ్చును.

మరల యూక్లిడ్ భాగాహార అల్గారిథమ్‌ను అనువర్తించిన $396 = 108 \times 3 + 72$

శేషము $72 \neq 0$, వచ్చును.

మరల యూక్లిడ్ భాగాహార అల్గారిథమ్‌ను అనువర్తించిన $108 = 72 \times 1 + 36$

శేషము $36 \neq 0$, వచ్చును.

మరల యూక్లిడ్ భాగాహార అల్గారిథమ్‌ను అనువర్తించిన $72 = 36 \times 2 + 0$

ఇక్కడ శేషము సున్న. 396, 504 యొక్క గ.సా.కా $= 36$ 636 మరియు 36 ల గ.సా.కాను కనుగొనుట.

యూక్లిడ్ భాగాహార అల్గారిథమ్‌ను ఉపయోగించిన మనకు $636 = 36 \times 17 + 24$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_2.indd 44 11-02-2023 17:50:06

శేషము $24 \neq 0$ వచ్చును.

మరల యూక్లిడ్ భాగాహార అల్గారిథమ్‌ను అనువర్తించిన $36 = 24 \times 1 + 12$

శేషము $12 \neq 0$ వచ్చును.

మరల యూక్లిడ్ భాగాహార అల్గారిథమ్‌ను అనుమతించిన $24 = 12 \times 2 + 0$ వచ్చును.

ఇక్కడ శేషము 0. కనుక $636, 36$ ల యొక్క గ.సా.కా $= 12$

$396, 504$ మరియు 636 ల యొక్క గరిష్ట సామాన్య కారణాంకము $= 12$

రెండు ధన పూర్ణసంఖ్యల యొక్క గరిష్ట సామాన్య కారణాంకము 1 అయితే వాటిని సాపేక్ష ప్రధాన సంఖ్యలు లేక సహ ప్రధాన సంఖ్యలు అంటారు.

మీకు తెలుసా?

అభ్యాసము 2.1

1. 3 చే భాగించిన శేషము 2 వచ్చే అన్ని ధన పూర్ణసంఖ్యలను కనుగొనుము.
2. ఒక వ్యక్తికి 532 పూలకుండీలు ఉన్నాయి. అతను ప్రతి వరుసలో 21 పూలకుండీలు ఉండేవిధంగా వాటిని ఏర్పాటు చేయాలనుకున్నాడు. పూర్తి అయిన వరుసల సంఖ్యను కనుగొనుము. మరియు మిగిలి ఉన్న పూలకుండీలు ఎన్ని?
3. రెండు వరుస ధన పూర్ణసంఖ్యల లబ్ధము 2 చేత భాగింపబడును అని నిరూపించుము
4. ధన పూర్ణ సంఖ్యలు a, b మరియు c లు 13 చేత భాగింపబడిన, వచ్చు శేషములు వరుసగా $9, 7$ మరియు 10. అయిన $a+b+c$ అనునది 13 చేత భాగింపబడును అని నిరూపించుము.
5. ఏదైనా ఒక ధన పూర్ణ సంఖ్య వర్గమును 4 చే భాగించినపుడు లభించు శేషము 0 లేక 1 గా ఉండునని నిరూపించుము.
6. యూక్లిడ్ భాగాహార శేష విధిని ఉపయోగించి క్రింది వాటికి గరిష్ట సామాన్య గుణిజము కనుగొనుము.

   (i) 340 మరియు 412 (ii) 867 మరియు 255

   (iii) 10224 మరియు 9648 (iv) 84, 90 మరియు 120
7. 1230 మరియు 1926 లను భాగించినప్పుడు శేషము 12 ను ఇచ్చు గరిష్ట సంఖ్యను కనుగొనుము.
8. 32 మరియు 60 ల గరిష్ట సామాన్య కారణాంకమును అనుకొనుము, $d = 32x + 60y$ అయిన x మరియు y లను కనుగొనుము.
9. ఒక ధన పూర్ణ సంఖ్యను 88 చే భాగించిన శేషము 61 వచ్చును. అదే పూర్ణసంఖ్యను 11 చే భాగించిన వచ్చు శేషము ఏది?
10. రెండు వరుస ధన పూర్ణసంఖ్యలు ఎల్లప్పుడు సహప్రధానము (సాపేక్ష ప్రధానసంఖ్యలు) అని నిరూపించుము

2.4 అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతము

ఉపాధ్యాయుడు మరియు విద్యార్థుల మధ్య ఈ క్రింది సంభాషణను పరిశీలిద్దాం:

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_2.indd 45 11-02-2023 17:50:08

ఉపాధ్యాయుడు	:	240 ను కారణాంకాల లబ్ధముగా వ్రాయండి.
సుమ	:	24×10
రఘు	:	8×30
లక్ష్మీ	:	12×20
కుమార్	:	15×16
సుమ	:	ఎవరి సమాధానము సరైనది సార్?
ఉపాధ్యాయుడు	:	అన్ని సమాధానములు సరైనవి.
రఘు	:	ఎలాగా సార్?
ఉపాధ్యాయుడు	:	ప్రతి కారణాంకాన్ని ప్రధాన సంఖ్యల లబ్ధముగా విడగొట్టండి.
సుమ	:	$2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 5$
రఘు	:	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$
లక్ష్మీ	:	$2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 2 \times 5$
కుమార్	:	$3 \times 5 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
ఉపాధ్యాయుడు	:	మంచిది! ఇప్పుడు 2, 3 మరియు 4 సంఖ్యలను లెక్కించండి.
సుమ	:	నేను నాలుగు 2 లు, ఒక 3 మరియు ఒక 5 లను పొందియున్నాను.
రఘు	:	నేను నాలుగు 2 లు, ఒక 3 మరియు ఒక 5 లను పొందియున్నాను.
లక్ష్మీ	:	నేను కూడా అదే సంఖ్యలను పొందాను.
కుమార్	:	నాకు కూడా సార్.
సుమ	:	మా అందరికీ నాలుగు 2 లు, ఒక 3 మరియు ఒక 5 వచ్చింది. ఇది మాకు చాలా ఆశ్చర్యకరమైనది.
ఉపాధ్యాయుడు	:	అవును, అలా ఉండాలి. ఏ సంఖ్యనైనా ఒకసారి ప్రధాన కారణంకాల లబ్ధంగా విడగొట్టి నప్పుడు ప్రధాన సంఖ్యల సమూహం వస్తుంది.

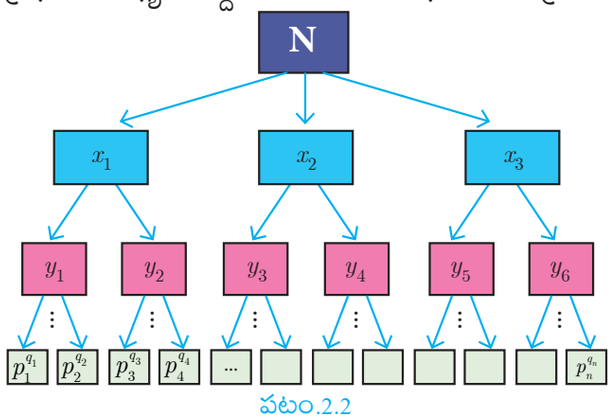
ఈ భావన క్రింది ముఖ్యమైన సిద్ధాంతానికి దారితీస్తుంది.

సిద్ధాంతం 4 (అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతము) (రుజువు లేకుండా)

"1 మినహా ప్రతి సహజ సంఖ్యను ప్రధాన కారణంకాల లబ్ధముగా విడగొట్టవచ్చును. మరియు ప్రధాన కారణంకాలను వ్రాసిన క్రమములో మినహా ఈ కారణాంక విభజన అనేది ఏకైకము."

ప్రాథమిక సిద్ధాంతము ప్రతి సంయుక్త సంఖ్యను ప్రధాన సంఖ్యల లబ్ధంగా ఒకే ఒక విధంగా మాత్రమే. విడగొట్టగలమని తెలియజేస్తున్నది.

సాధారణంగా ఇచ్చిన ఒక సంయుక్త సంఖ్య .. ను తీసుకొనిన $N = p_1^{q_1} \times p_2^{q_2} \times p_3^{q_3} \times \cdots \times p_n^{q_n}$ రూపంలో ఒకే ఒక విధంగా మాత్రమే విడగొట్టగలమని చెప్పవచ్చును. ఇక్కడ $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ లు ప్రధాన సంఖ్యలు మరియు $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$ లు సహజ సంఖ్యలు.



పటం.2.2

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_2.indd 46 11-02-2023 17:50:09

మొదట N ను కారణంకాలుగా విడగొట్టడానికి ప్రయత్నించవలెను. ఒకవేళ N యొక్క అన్ని కారణాంకాలు ప్రధాన సంఖ్యలు అయితే అప్పుడు కారణంక విభజనను నిలిపివేయాలి. అలా కాకపోతే ఈ కారణంకాలను ప్రధాన సంఖ్యలుగా విడగొట్టే వరకు ఈ ప్రక్రియను కొనసాగించాలి.

మెదడుకు మేత

'1' ప్రధాన సంఖ్య అగునా?

వివరణ

ఉదాహరణకు, మనము 32760 ను కారణాంకాలుగా విడగొట్టడానికి ప్రయత్నించగా.

$$32760 = 2\times2\times2\times3\times3\times5\times7\times13$$
$$= 2^3\times3^2\times5^1\times7^1\times13^1$$

కావున, 32760 ను ఏ విధంగా కారణాంకాలుగా విడగొట్టడానికి ప్రయత్నించినా, చివరకు మూడు 2 లు, రెండు 3 లు, ఒక 5, ఒక 7 మరియు ఒక 13 పొందుతాము.

ప్రగతిశోధన

1. ___ ను తప్ప మిగిలిన అన్ని సహజ సంఖ్యలు ____ యొక్క కారణాంక లబ్ధముగా వ్రాయవచ్చు.
2. ఒక సంయుక్త సంఖ్యను ఎన్ని విధములుగా ప్రధాన సంఖ్య ఘాతముల లబ్ధముగా వ్రాయవచ్చు.
3. ప్రతి ప్రధాన సంఖ్యకు గల భాజకముల సంఖ్య ____.

నిజానికి "ప్రతి సంయుక్త సంఖ్యను ప్రధాన సంఖ్యల ఘాతముల లబ్ధముగా" ఒకే ఒక విధంగా వ్రాయగలము. దీనినే అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతము అందురు.

2.4.1 అంకగణితం ప్రాథమిక సిద్ధాంతం ప్రాముఖ్యత

పైన తెలిపిన విధంగా 1 మినహా మిగిలిన సహజ సంఖ్యల ప్రాథమిక సిద్ధాంతము. గణితశాస్త్రము మరియు ఇతర రంగాలలోను అనేక ప్రయోజనాలను కలిగి ఉంది. అన్ని ధన పూర్ణసంఖ్యలకు ప్రధాన సంఖ్యలు "నిర్మిత ఆధారాలు" కావడం వలన గణితశాస్త్రములో ఈ సిద్ధాంతము మిక్కిలి ప్రాధాన్యత కలిగి ఉన్నది. అణువుల పరమాణువులచే ఏ విధంగా ఏర్పడుతుందో ఆ విధంగా ప్రధాన సంఖ్యలను పోల్చబడినది.

మీకు తెలుసా?

1. ab ను p అనే ఒక ప్రధాన సంఖ్య భాగిస్తే అప్పుడు p అనేది a ను గాని లేక b గాని భాగిస్తుంది. అనగా p అనేది కనీసం ఒక దానిని భాగిస్తుంది.
2. n అనే ఒక సంయుక్తసంఖ్య ab ను భాగిస్తే n అనేది a ను గాని b ను గాని భాగించినవసరం లేదు. ఉదాహరణకు, 6 అనే సంఖ్య 4×3 ను భాగిస్తుంది. కానీ 4 ను గాని 3 ను గాని భాగించదు

ఉదాహరణ 2.7 ఇవ్వబడిన కారణంకావృక్షమును ఉపయోగించి m మరియు n సంఖ్యలను కనుగొనండి.

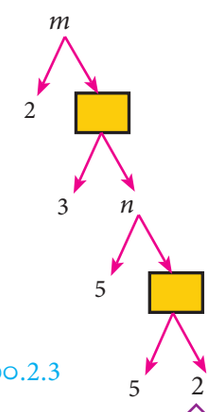
సాధన

క్రింది నుండి మొదటి పెట్టె విలువ $= 5\times2 = 10$

n విలువ $= 5\times10 = 50$

క్రింది నుండి రెండవ పెట్టె విలువ $= 3\times50 = 150$

m విలువ $= 2\times150 = 300$



పటం.2.3

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_2.indd 47 11-02-2023 17:50:10

కనుక, కావలసిన సంఖ్యలు $m = 300,\ n = 50$

ఉదాహరణ 2.8 6^n లో n సహజసంఖ్యగా ఉండి 5 అంకెతో అంతమయ్యే సంఖ్యేనా? కారణాన్ని తెల్పండి?

సాధన దత్తాంశము ప్రకారము $6^n = (2\times 3)^n = 2^n \times 3^n$,

2 అనునది 6^n కు ఒక కారణాంకము, కాబట్టి 6^n అనేది ఎల్లప్పుడు సరి సంఖ్య అవుతుంది.

కాని ఏదైనా ఒక సంఖ్య లో చివరి అంకె 5 అయితే అది ఎల్లప్పుడు బేసి సంఖ్య.

కావున, 6^n అనేది 5 అనే అంకెతో అంతము కాదు.

ప్రగతిశోధన

1. m,n ను భాగిస్తుంది అయితే, m,n ల గ.సా.భా మరియు క.సా.గు __ మరియు __.
2. 2^m మరియు 3^n రూపంలో గల సంఖ్యల గ.సా.గు. _____.

ఉదాహరణ 2.9 $7\times 5\times 3\times 2+3$ అనేది ఒక సంయుక్త సంఖ్యేనా? మీ జవాబును సమర్థించండి.

సాధన అవును, ఇచ్చిన సంఖ్య ఒక సంయుక్త సంఖ్యే. ఎందుకనగా

$$7\times 5\times 3\times 2+3 = 3\times\left(7\times 5\times 2+1\right) = 3\times 71$$

ఇచ్చిన సంఖ్యను రెండు ప్రధాన సంఖ్యలుగా కారణాంక విభజన చేయవచ్చును. కనుక ఇది ఒక సంయుక్త సంఖ్య.

ఉదాహరణ 2.10 'a' మరియు 'b' లు రెండు ధన పూర్ణసంఖ్యలు, $a^b \times b^a = 800$. అయితే 'a' మరియు 'b' లను కనుగొనుము.

మెదడుకు మేత

$a^b = b^a$ అగునట్లు రెండు ధన పూర్ణసంఖ్యలు a, b లు కనుగొనుటకు వీలగునా?

సాధన 800 అనే సంఖ్యలు కారణాంకాల లబ్ధముగా వ్రాయగా

$$800 = 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 5\times 5 = 2^5\times 5^2$$

కనుక, $a^b \times b^a = 2^5 \times 5^2$

$a = 2$ మరియు $b = 5$ (లేక) $a = 5$ మరియు $b = 2$.

కృత్యము 3

$p^2 \times q^1 \times r^4 \times s^3 = 3,15,000$ అయ్యేటట్లు 4 అంకెల ATM కార్డ్‌ఫిన్ సంఖ్య '$pqrs$' ను కనుగొనగలవా?



పటం.2.4

అభ్యాసము 2.2

1. సహజ సంఖ్య n యొక్క ఏ విలువకు 4^n అనునది 6 అనే అంకెతో అంతమవుతుంది?
2. m, n లు రెండు సహజ సంఖ్యలయిన, m యొక్క ఏ విలువకు $2^n \times 5^m$ అనేది 5 తో అంతమవుతుంది?
3. 252525 మరియు 363636. ల గ.సా.కా ను కనుగొనుము.
4. $13824 = 2^a \times 3^b$ అయితే a మరియు b లను కనుక్కోండి.
5. $p_1^{x_1} \times p_2^{x_2} \times p_3^{x_3} \times p_4^{x_4} = 113400$ ఇక్కడ p_1, p_2, p_3, p_4 లు ఆరోహణ క్రమములో ఉన్న ప్రధాన సంఖ్యలు మరియు x_1, x_2, x_3, x_4 లు పూర్ణసంఖ్యలు అయితే p_1, p_2, p_3, p_4 మరియు x_1, x_2, x_3, x_4 విలువలను కనుగొనుము.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_2.indd 48 11-02-2023 17:50:12

6. అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతమును అన్వయించడం ద్వారా 408 మరియు 170 ల క.సా.గు మరియు గ.సా.భా లను కనుగొనుము.
7. 24,15,36 లచే ఖచ్చితంగా భాగింపబడే 6అంకెల గరిష్ట సంఖ్యను కనుక్కోండి?
8. 35, 56 మరియు 91. తో భాగించినపుడు శేషము 7 ను ఇచ్చు కనిష్ట సంఖ్య ఏది?
9. మొదటి 10 సహజసంఖ్యలచే నిశ్శేషంగా భాగించబడే కనిష్ట సంఖ్యను కనుగొనుము?

2.5 మాపక అంకగణితము



పటం.2.5

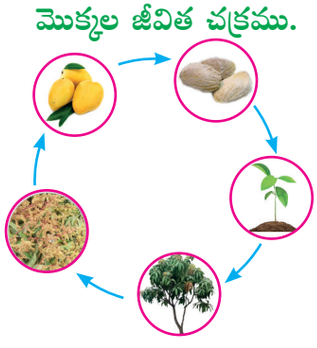
ఒక గడియారంలో 24 గంటల కాలవ్యవధిని చూపుటకు 1 నుండి 12 సంఖ్యలను మనము ఉపయోగిస్తాము. ఒక రోజులోని 24 గంటలను 12 సంఖ్యల అమరిక ద్వారా చూపడం ఎలా సాధ్యం? ఈ అమరికలో మనము 1 నుండి 12 వరకు సంఖ్యలను ఉపయోగిస్తాము. మరియు 12 తర్వాత 13 కు బదులుగా 1 ని మరియు 14 కు బదులుగా 2ను మరియు అదేవిధంగా మిగతా సంఖ్యలను ఉపయోగిస్తాము. అనగా 12 తర్వాత మరల 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 అని మొదలుపెడతాము. ఈ పద్ధతిలో 1 నుండి 12 వరకు సంఖ్యలు పునరావృతము అవుతుంది. నిర్ణీత సమయ విలువను చేరుకొన్న తర్వాత పునరావృతము అయ్యే పద్ధతిని 'మాపక అంకగణితము' అందురు.

గణితశాస్త్రములో, ఒక నిర్ణీత విలువ పునరావృతం అయ్యే పూర్ణ సంఖ్యల అంకగణిత వ్యవస్తే మాపక అంకగణితము. ఇది సాధారణ అంకగణితం లాగా కాకుండా చక్రీయంగా జరిగే ప్రక్రియ. మాపక అంకగణిత భావనలను గొప్ప జర్మనీ గణితశాస్త్రవేత్త కార్ల్‌ఫ్రైడ్రిచ్ గాస్ అభివృద్ధి పరిచారు.

84M9G

ఉదాహరణలు

1. పగలు మరియు రాత్రి పునరావృతం అవడము.
2. ఆదివారం నుండి శనివారం వరకు వారం రోజులు పునరావృతం కావడము.
3. మొక్కల జీవిత చక్రము.
4. ఋతువులు చక్రీయంగా మారడం. (వేసవి, ఆకురాలు కాలం(శిశిరం), శీతాకాలం, వసంత కాలము)
5. రైలు మరియు విమాన సమయములు కూడా చక్రీయంగా పని చేయడము. రైల్వే సమయము 00:00 తో మొదలై మరియు కొనసాగుతుంది. 23:59 సమయం చేరుకున్న తరువాత, తరువాతి నిమిషం 24:00 కు బదులుగా 00:00 అవుతుంది.



పటం.2.6

2.5.1 సదృశ మాపకము

a మరియు b రెండు పూర్ణసంఖ్యలు n యొక్క సదృశ మాపకము అయితే n అనునది పూర్ణసంఖ్యలను విభేదిస్తుంది. కాని పూర్ణసంఖ్యలు k కు $a-b=kn$ దీనిని $a \equiv b$ (మాపము n) అని కూడా వ్రాయవచ్చును. ఇక్కడ n సంఖ్యను మాపము అని అందురు.

దీనిని మరొక విధంగా, $a \equiv b$ (మాపము n) దీని అర్థము n చే $a-b$ భాగింపబడును.

ఉదాహరణకు, $61 \equiv 5$ (మాపము 7). కావున $61-5=56$ అనునది 7 చే భాగింపబడును.
మాపకము అనే భావనలను చాలా స్పష్టంగా అవగాహన చేసుకొనుటకు రెండు వివరణలు ఇవ్వబడినది.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_2.indd 49 11-02-2023 17:50:13

సూచన

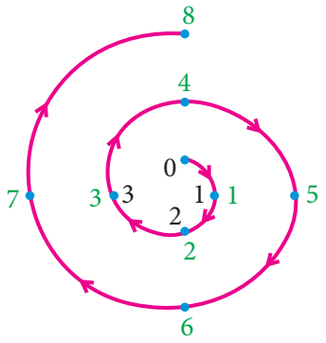
- ఒక ధన పూర్ణసంఖ్య nతో భాగించబడితే వచ్చు శేషములు $0, 1, 2, \ldots, n-1$
- కావున మాపము n కనుగొనేటప్పుడు మనము అన్ని సంఖ్యలను n తో భాగించిన వచ్చే శేషము $0,1,2,3,\ldots, n-1$ తో స్థానమార్పిడి చేయువలెను.

వివరణ 1

8 (మాపము 4)ను కనుగొనుము.

మాపము 4 తో (దాని సాధ్యమైన శేషములు $0, 1, 2, 3$) మనము $0,1,2,3$ సంఖ్యలతో ఒక గడియారం లాంటి పటమును తయారు చేయవలెను. మనము సవ్యదిశ క్రమములో 0 నుండి మొదలుపెట్టి 8 సంఖ్యలు $1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 0$ వచ్చును. చక్రీయంగా ఈ ప్రక్రియను కొనసాగించిన '0' వద్ద అంతమగును.

$8 \equiv 0$ (మాపము 4)



పటం.2.7

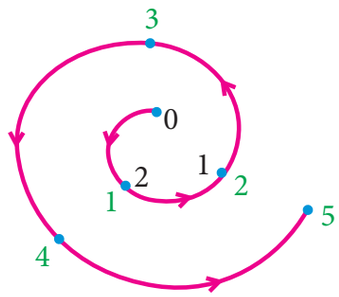
వివరణ 2

-5 (మాపము 3) ను కనుగొనుము.

మాపము 3తో (దాని సాధ్యమైన శేషములు $0, 1, 2$) $0, 1, 2$ సంఖ్యలతో గడియారం లాంటి పటమును తయారు చేయవలెను.

అపసవ్యదిశ క్రమము $2, 1, 0, 2, 1$ సంఖ్యలను మనము '0' తో ప్రారంభించి '5' సంఖ్యల వరకు వ్రాయవలెను. చక్రీయంగా ఈ ప్రక్రియను కొనసాగించిన 1 వద్ద అంతమగును.

$-5 \equiv 1$ (మాపము 3)



పటం.2.8

2.5.2 యూక్లిడ్ భాగాహార న్యాయం మరియు అంక గణిత మాపముల అనుసంధానము.

m మరియు n లు రెండు పూర్ణసంఖ్యలు. ఇక్కడ m అనునది ధనాత్మకము. యూక్లిడ్ భాగాహార న్యాయంను అనుసరించి $n = mq + r$ గా వ్రాయవచ్చును. ఇక్కడ $0 \leq r < m$ మరియు q ఒక పూర్ణసంఖ్య $n = mq + r$ కు సరూపమును ఉపయోగించి క్రింది విధముగా వ్రాయవచ్చును. q అనే పూర్ణసంఖ్యకు $n = mq + r$ అయితే r యొక్క m వ మాపకము n కు సరూపము అని అంటాము.

$$\begin{aligned} n &= mq + r \\ n - r &= mq \\ n - r &\equiv 0 \text{ (మాపము } m) \\ n &\equiv r \text{ (మాపము } m) \end{aligned}$$

కనుక యూక్లిడ్ భాగాహార న్యాయము ద్వారా $n = mq + r$ సమీకరణమును $n \equiv r$ (మాపము m) గా వ్రాయవచ్చును.

ప్రగతి శోధన

1. _____ అయితే రెండు పూర్ణసంఖ్యలు a, b ల సదృశ మాపకము n అవుతుంది.
2. 7 చే భాగించగా 5 శేషము వచ్చే అన్ని అన్నపూర్ణ సంఖ్యల సమితి _____.

సూచన

- aమరియు b అనే రెండు పూర్ణసంఖ్యల మాపము m సదృశ మాపముగా అమరుటకు $a \equiv b$ (మాపము m), అని వ్రాయవలెనన్న ఆ రెండు సంఖ్యలు m తో భాగించబడినపుడు ఒకే శేషమును ఇవ్వవలెను.

2.5.3 మాపక ప్రక్రియలు

అంకగణిత ప్రక్రియలో ఉన్న కూడిక, తీసివేత మరియు గుణకారం వలె మాపక అంకగణితంలో కూడా కలదు. దీనిని అవగాహన చేసుకొనుటకు కింది సిద్ధాంతము ఉపయోగపడును.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_2.indd 50 11-02-2023 17:50:15

సిద్ధాంతం 5

a, b, c మరియు d అనునవి పూర్ణసంఖ్యలు మరియు m అనునది ధన పూర్ణ సంఖ్య. $a \equiv b$ (మాపము m) మరియు $c \equiv d$ (మాపము m) అయిన

(i) $(a + c) \equiv (b + d)$ (మాపము m) (ii) $(a - c) \equiv (b - d)$ (మాపము m)

(iii) $(a \times c) \equiv (b \times d)$ (మాపము m)

వివరణ 3

$17 \equiv 4$ (మాపము 13) మరియు $42 \equiv 3$ (మాపము 13) అయిన సిద్ధాంతము (5) నుండి

(i) $17 + 42 \equiv 4 + 3$ (మాపము 13)

$59 \equiv 7$ (మాపము 13)

(ii) $17 - 42 \equiv 4 - 3$ (మాపము 13)

$-25 \equiv 1$ (మాపము 13)

(iii) $17 \times 42 \equiv 4 \times 3$ (మాపము 13)

$714 \equiv 12$ (మాపము 13)

మెదడుకు మేత

3తో భాగించినపుడు 2 శేషము గా వచ్చు పూర్ణ సంఖ్యలు ఎన్ని కలవు?

సిద్ధాంతం 6

$a \equiv b$ (మాపము m) అయిన

(i) $ac \equiv bc$ (మాపము m) (ii) $a \pm c \equiv b \pm c$ (మాపము m) c అనేది ఏదైనా పూర్ణ సంఖ్య

ప్రగతి శోధన

1. $(k-3) \equiv 5$ (మాపము 11) అనే విధంగా అమరు k యొక్క ధనాత్మక విలువలు _____.
2. $59 \equiv 3$ (మాపము 7), $46 \equiv 4$ (మాపము 7) అయిన $105 \equiv$ _____ (మాపము 7), $13 \equiv$ _____ (మాపము 7), $413 \equiv$ _____ (మాపము 7), $368 \equiv$ _____ (మాపము 7).
3. $7 \times 13 \times 19 \times 23 \times 29 \times 31$ ను 6 తో భాగించిన శేషము _____.

ఉదాహరణ 2.11 70004 మరియు 778 లను 7 తో భాగించిన శేషములను కనుగొనుము.

సాధన ఇక్కడ 70000 అనేది 7 తో భాగించబడును.

$70000 \equiv 0$ (మాపము 7)

$70000 + 4 \equiv 0 + 4$ (మాపము 7)

$70004 \equiv 4$ (మాపము 7)

కావున 70004 ను 7 తో భాగించిన శేషము 4 వచ్చును.

$\because$ ఇక్కడ 777 అనేది 7 తో భాగించబడును.

$777 \equiv 0$ (మాపము 7)

$777 + 1 \equiv 0 + 1$ (మాపము 7)

$778 \equiv 1$ (మాపము 7)

కావున 778 అనేది 7 తో భాగించిన శేషము 1 వచ్చును.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_2.indd 51 11-02-2023 17:50:18

ఉదాహరణ 2.12 $15 \equiv 3$ (మాపము d) అయిన d విలువను కనుగొనుము.

సాధన $15 \equiv 3$ (మాపము d) అనగా $15 - 3 = kd$, అనేది ఏదైనా ఒక పూర్ణసంఖ్య.

$$12 = kd.$$

12 ను d భాగించును.

12 యొక్క భాజకములు 1,2,3,4,6,12. కాని d అనేది 3 కన్నా ఎక్కువ ఉండాలి. ఎందుకనగా శేషము 3 వచ్చియున్నది. కావున d విలువ 4,6,12 ఉండుటకు సాధ్యం.

ఉదాహరణ 2.13 కింది వానిలో x యొక్క కనీస ధనాత్మక విలువలను కనుగొనుము.

(i) $67 + x \equiv 1$ (మాపము 4) (ii) $98 \equiv (x + 4)$ (మాపము 5)

సాధన (i) $67 + x \equiv 1$ (మాపము 4)

$67 + x - 1 = 4n$, n అనేది ఒక పూర్ణసంఖ్య

$66 + x = 4n$

$66 + x$ అనేది 4 యొక్క గుణిజము.

కావున x యొక్క కనీస ధనాత్మక విలువ కచ్చితంగా 2 అగును. 66 కన్నా ఎక్కువ గల 4 యొక్క గుణిజం 68.

(ii) $98 \equiv (x + 4)$ (మాపము 5)

$98 - (x + 4) = 5n$, n అనేది ఒక పూర్ణసంఖ్య.

$94 - x = 5n$

$94 - x$ అనేది 5 యొక్క గుణిజము.

కావున x యొక్క కనీస ధనాత్మక విలువ 4

$94 - 4 = 90$ అనేది 5 యొక్క దగ్గరి గుణిజము.

సూచన

- బీజగణితంలో గల బహుపద సమీకరణములను సాధించేటప్పుడు పరిమిత సంఖ్య గల సాధనలు ఉంటాయి. కాని సదృశ సమీకరణములను సాధించేటప్పుడు మనకు అపరిమిత సాధనలుంటాయి.

ఉదాహరణ 2.14 $8x \equiv 1$ (మాపము 11) ను సాధించుము.

సాధన $8x \equiv 1$ (మాపము 11) ను $8x - 1 = 11k$, (k అనేది పూర్ణ సంఖ్య) గా వ్రాయవచ్చు.

$$x = \frac{11k + 1}{8}$$

$k = 5, 13, 21, 29,...$ అని ప్రతిక్షేపించిన $11k$+1 అనేది 8 చే భాగించబడును.

$$x = \frac{11 \times 5 + 1}{8} = 7$$

$$x = \frac{11 \times 13 + 1}{8} = 18$$

$\therefore$ కావున సాధనలు 7,18,29,40, ...

ఉదాహరణ 2.15 $10^4 \equiv x$ (మాపము 19)లో x విలువ కనుగొనుము.

సాధన $10^2 = 100 \equiv 5$ (మాపము 19)

$10^4 = (10^2)^2 \equiv 5^2$ (మాపము 19)

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_2.indd 52 11-02-2023 17:50:21

$10^4 \equiv 25 \pmod{19}$

$10^4 \equiv 6 \pmod{19}$ (ఇక్కడ $25 \equiv 6 \pmod{19}$)

$\therefore$ కావున, $x = 6$.

ఉదాహరణ 2.16 $3x \equiv 1 \pmod{15}$ యొక్క పూర్ణ సంఖ్య సాధనాలు ఎన్నిగలవో కనుగొనుము.

సాధన $3x \equiv 1 \pmod{15}$ ను కింది విధంగా వ్రాయవచ్చు.

$3x - 1 = 15k$ k అనేది ఒక పూర్ణసంఖ్య

$3x = 15k + 1$

$$x = \frac{15k+1}{3}$$

$$x = 5k + \frac{1}{3}$$

ఇక్కడ $5k$ ఒక పూర్ణసంఖ్య, $5k + \frac{1}{3}$ అనేది పూర్ణసంఖ్య కాదు

$\therefore$ కావున ఇక్కడ పూర్ణ సంఖ్య సాధనలు లేవు.

ఉదాహరణ 2.17 ఒక వ్యక్తి రైలులో చెన్నై నుండి ఢిల్లీకి ప్రయాణం చేయదలెచను. అతను బుధవారం 22.30 గంటలకు చెన్నై నుండి బయలుదేరెను. ప్రయాణ సమయం 32 గంటలు తీసుకొనిన ఢిల్లీకి ఎప్పుడు చేరుతాడు. (రైలు ఆలస్యం కాదు అనుకొనిన).

సాధన చెన్నై నుండి బయలుదేరిన సమయము 22.30, ప్రయాణ సమయం 32 గంటలు. ఇక్కడ మాపము 24 ను ఉపయోగించవలెను.

ఢిల్లీ వచ్చి చేరు సమయం

$22.30 + 32 \pmod{24} \equiv 54.30 \pmod{24}$

$\equiv 6.30 \pmod{24}$ ($\because 32 = (1\times24) + 8$ గురువారం శుక్రవారం)

కావున ఢిల్లీ వచ్చి చేరు సమయం శుక్రవారం 6.30 గంటలకు.

ఉదాహరణ 2.18 కళా మరియు వాణి ఇద్దరు స్నేహితులు.“ఈరోజు నా పుట్టినరోజు” అని కళ చెప్పింది. వాణితో “నీ పుట్టినరోజును ఎప్పుడు జరుపుకుంటావు?” అని కళా అడిగింది. దానికి వాణి ఈరోజు సోమవారం, నా పుట్టినరోజును 75 రోజులకు ముందు జరుపుకున్నాను, అని బదులిచ్చింది. అయితే వాణి ఏ రోజున తన పుట్టిన రోజును జరుపుకున్నది కనుగొనుము.

సాధన 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 సంఖ్యలు ఆదివారం నుండి శనివారము వరకు గల రోజులను సూచించును.

వాణి ఈరోజు సోమవారం అని చెప్పింది. సోమవారం ‘1’ ను సూచించును. వాణి 75 రోజులకు ముందు తన పుట్టినరోజు జరుపుకున్నది. మనము 75 నుండి 1 ను తీసివేసి మరియు మాపము 7 ను తీసుకొనవలెను. (ఎందుకనగా వారానికి 7 రోజులు కావున.)

$-74 \pmod{7} \equiv -4 \pmod{7} \equiv 7-4 \pmod{7} \equiv 3 \pmod{7}$

(ఎందుకనగా , $-74 - 3 = -77$ అనేది 7 చే భావించబడును.)

కావున, $1 - 75 \equiv 3 \pmod{7}$

3 అనేది బుధవారాన్ని సూచించును.

కావున వాణి తన పుట్టినరోజును ఖచ్చితంగా బుధవారం జరుపుకొని ఉండును.

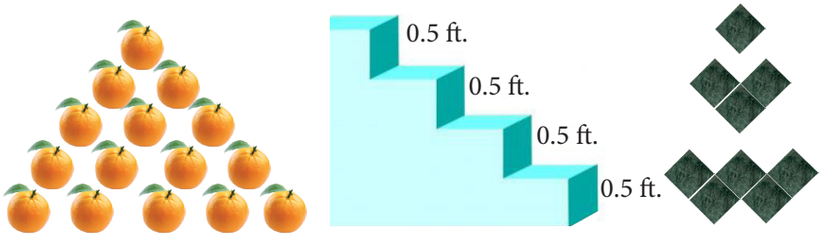
10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_2.indd 53 11-02-2023 17:50:22

అభ్యాసము 2.3

1. x యొక్క ధనాత్మక విలువలను కనుగొనుము.
   (i) $71 \equiv x$ (మాపము 8) (ii) $78 + x \equiv 3$ (మాపము 5) (iii) $89 \equiv (x + 3)$ (మాపము 4)
   (iv) $96 \equiv \frac{x}{7}$ (మాపము 5) (v) $5x \equiv 4$ (మాపము 6)
2. x అనేది మాపము 17 కింద 13 కు సదృశమైన $7x - 3$ అనేది ఏ సంఖ్యకు సదృశమగును?
3. సాధించుము $5x \equiv 4$ (మాపము 6)
4. సాధించుము $3x - 2 \equiv 0$ (మాపము 11)
5. ఉదయం 7:00 తరువాత 100 గంటలు అంటే ఎంత సమయం?
6. రాత్రి 11:00 ముందు 15 గంటలు అంటే ఎంత సమయం?
7. ఈరోజు మంగళవారము. మా బాబాయి 45 రోజుల తర్వాత వస్తారు. అయితే ఏ రోజున మా బాబాయి వస్తారు?
8. ఏదైనా n ధన పూర్ణ సంఖ్యలకు $2^n + 6 \times 9^n$ అనునది ఎల్లప్పుడు 7 చే భాగించబడునని చూపుము.
9. 2^{81} అనునది 17 చే భాగించబడిన శేషమును కనుగొనుము.
10. బ్రిటిష్ విమానం ద్వారా చెన్నై నుండి లండన్‌కు ప్రయాణించు సమయం సుమారు 11 గంటలు. ఆదివారము 23:30 గంటలకు బయలు దేరును. లండన్ సమయం కన్నా చెన్నైలోని సమయం 04:30 నిమిషాలు ముందుండును. అయితే ఎప్పుడు లండన్ విమానాశ్రయం చేరును మరియు లండన్ సమయమును కనుగొనుము.

2.6 క్రమానుగత వరుసలు

క్రింది పటములను గమనించిన.



పటం.2.9

ప్రతి పటము కొంత నమూనా లేక అమరికను కలిగియున్నది. మొదటి పటములోని మొదటి అడ్డు వరుసలో ఒక ఆపిల్, రెండవ అడ్డు వరుసలో రెండు ఆపిల్‌లు, మూడవ వరుసలో మూడు ఇలా కొనసాగుతూ పోవును. ప్రతి వరుసలోని ఆపిల్‌ల సంఖ్య 1, 2, 3, ...

రెండవ పటము నందు ప్రతి మెట్టు 0.5 అడుగుల ఎత్తు కలదు. మొదటి మెట్టు నుండి మొత్తం మెట్ల ఎత్తు వరుసగా 0.5 అడుగు, 1 అడుగు, 1.5 అడుగులు ..... గా కలదు. మూడవ పటము నందు ఒక్కొక్క ఆకారము నందు గల చతురస్రాల సంఖ్య 1,3,5 .... గా కలదు. ఈ మూడు ఉదాహరణల ద్వారా పొందిన సంఖ్యలు క్రమానుగత వరుసకు చెందినవి.

నిర్వచనం

వాస్తవ సంఖ్యల క్రమానుగత వరుస అనునది సహజసంఖ్యలపై నిర్వచింపబడిన వాస్తవ సంఖ్యల విలువలను తీసుకోవడమే ప్రమేయము అగును.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_2.indd 54 11-02-2023 17:50:24

వరుసలోని ప్రతి మూలకమును పదములు అంటారు. వరుసలోని మొదటి మూలకమును మొదటి పదము అంటారు. రెండవ మూలకమును రెండవ పదం అని అంటారు. అలాగే కొనసాగుతూ పోవును

n^{th} వ పదమును a_n తో సూచిస్తారు. అయితే a_1 అనేది మొదటి పదము, a_2 అనేది రెండవ పదము అయిన క్రమానుగత వరుసను $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ గా వ్రాస్తాము.

వివరణ

1. $1,3,5,7,\ldots$అనే వరుసలో $a_n = 2n-1$ అనేది సాధారణ పదము అయిన $n = 1,2,3,\ldots,$ అని ప్రతిక్షేపించిన $a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_3 = 5,\ a_4 = 7,\ldots$ వచ్చును.

2. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ అనే వరుసలో $\frac{1}{n+1}$ అనేది సాధారణ పదము అయిన $n = 1,2,3,\ldots.$ ప్రతిక్షేపించిన

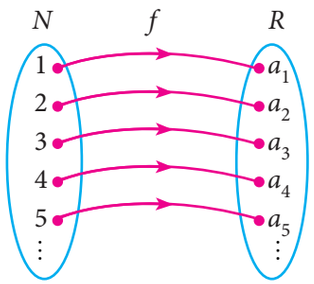
$a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = \frac{1}{3},\ a_3 = \frac{1}{4},\ a_4 = \frac{1}{5}, \ldots$ వచ్చును.

క్రమానుగత వరుసలో పరిమిత మూలకములున్నచో అట్టి వరుసను పరిమిత క్రమానుగత వరుస అని, అపరిమిత మూలకములన్న అట్టి వరుసను అపరిమిత క్రమానుగత వరుస అని అంటారు.

క్రమానుగత వరుసను ప్రమేయముగా చూపుట

సహజ సంఖ్యల సమితి Nపై నిర్వచించబడిన ప్రమేయముగా క్రమానుగతము పరిగణించబడినది. ముఖ్యముగా, క్రమానుగతము అనేది ఒక ప్రమేయము $f : N \to R$ ఇక్కడ R అనునది వాస్తవ సంఖ్యల సమితి.

క్రమానుగత వరుస $a_1, a_2, a_3, \ldots$ అను రూపంలో ఉన్న $a_1, a_2, a_3, \ldots$ వరుస క్రమమునకు $f(k) = a_k,$ అను ప్రమేయమును. $k = 1,2,3,\ldots$ గా క్రమ పరచవచ్చును.



పటం 2.10

ప్రగతి శోధన

1. కింది ఇవ్వబడిన వరుసలను పూరింపుము.
   (i) 7, 13, 19, _____ , ... (ii) 2, _____, 10, 17, 26,...
   (iii) 1000, 100, 10, 1, _____, ...
2. ఒక క్రమానుగత వరుస అనునది _____ సమితిలో నిర్వచింపబడిన ప్రమేయము అగును.
3. $0,2,6,12,20,\ldots$ వరుస యొక్క n పదాన్ని _____ గా వ్రాయవచ్చు.
4. సత్యమా, అసత్యమా తెలుపుము
   (i) అన్ని క్రమానుగత వరుసలు ప్రమేయాలు (ii) అన్ని ప్రమేయాలు క్రమానుగత వరుసలు

ఉదాహరణ 2.19 క్రింది వరుసలో తర్వాతి మూడు పదాలను కనుగొనుము.

(i) $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{14}, \ldots.$ (ii) $5,\ 2, -1, -4, \ldots.$ (iii) $1, 0.1, 0.01, \ldots$

సాధన (i) $\frac{1}{2}, \underset{+4}{\rightarrow} \frac{1}{6}, \underset{+4}{\rightarrow} \frac{1}{10}, \underset{+4}{\rightarrow} \frac{1}{14}, \ \ldots$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_2.indd 55 11-02-2023 17:50:26

పై వరుసలో లవములు సమానము మరియు హారములలో పెరుగుదల 4.

కావున తరువాత మూడు పదములు $a_5 = \frac{1}{14+4} = \frac{1}{18}$

$$a_6 = \frac{1}{18+4} = \frac{1}{22}$$

$$a_7 = \frac{1}{22+4} = \frac{1}{26}$$

సూచన

- అన్ని క్రమానుగతములు ప్రమేయములు అయినప్పటికీ. అన్ని ప్రమేయాలు క్రమానుగత వరుసలు కావు

(ii) $5, \underset{-3}{\rightarrow} 2, \underset{-3}{\rightarrow} -1, \underset{-3}{\rightarrow} -4, \ldots$

ప్రతి పదములోని ఇక్కడ ఒక్కొక్క పదము దాని ముందు పదము కన్నా మూడు తక్కువ కలదు.

కావున తరువాత మూడు పదములు $-7,\ -10,\ -13$.

(iii) $1, \underset{\sqrt{10}}{\rightarrow} 0.1, \underset{\sqrt{10}}{\rightarrow} 0.01, \ldots$

ఇక్కడ ఒక్కొక్క పదము ముందు పదమును 10 చే భాగించగా లభించునది. కావున తరువాతి మూడు పదములు

$$a_4 = \frac{0.01}{10} = 0.001$$

$$a_5 = \frac{0.001}{10} = 0.0001$$

$$a_6 = \frac{0.0001}{10} = 0.00001$$

ఉదాహరణ 2.20 క్రింద ఇవ్వబడిన క్రమములో సాధారణ పదమును కనుగొనుము

(i) $3,6,9,\ldots$ (ii) $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\ldots$ (iii) $5,-25,125,\ldots$

సాధన (i) $3,6,9,\ldots$

ఇక్కడ పదములు 3 యొక్క గుణిజములు కనుక సాధారణ పదము

$a_n = 3n,$

(ii) $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\ldots$

$a_1 = \frac{1}{2};\ a_2 = \frac{2}{3};\ a_3 = \frac{3}{4}$

పైన తెలిపిన విధముగా nవ పదము యొక్క లవము n, మరియు హారము లవము కంటే 1 ఎక్కువ. కనుక , $a_n = \frac{n}{n+1}, n \in N$

(iii) $5,-25,125,\ldots$

పై క్రమానుగతంలోని పదాలు ఏకాంతరంగా ధన మరియు ఋణాత్మక గుర్తులు కలిగియున్నాయి మరియు. 5 యొక్క ఘాతాలుగా కూడా ఉన్నాయి.

కావున, సాధారణ పదము $a_n = (-1)^{n+1}5^n, n \in N$

ఉదాహరణ 2.21 క్రమానుగత వరుసలోని సాధారణ పదమును కింది విధంగా

$$a_n = \begin{cases} n(n+3); & n \in N \text{ అనేది బేసిసంఖ్య} \\ n^2+1 \quad ; & n \in N \text{ నేది సరిసంఖ్య} \quad \text{అనేది బేసిసంఖ్య} \end{cases}$$

11 మరియు 18 వ పదములను కనుగొనుము.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_2.indd 56 11-02-2023 17:50:28

సాధన 11 వ పదము a_{11} ను కనుగొనవలెనన్న, $n = 11$ అనేది బేసి సంఖ్య $a_n = n(n+3)$ ప్రతిక్షేపించాలి

కావున $n = 11 \quad a_{11} = 11(11+3) = 154$. ప్రతిక్షేపించాలి

18 వ పదము a_{18} ను కనుగొనవలెనన్న, $n = 18$ అనేది సరిసంఖ్య $a_n = n^2 + 1$

కావున 18 ను $a_{18} = 18^2 + 1 = 325$.

ఉదాహరణ 2.22 కింది ఇవ్వబడిన వరుసలో మొదటి 5 పదాలను కనుగొనుము.

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1, a_n = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2} + 3};\ n \geq 3,\ n \in N$$

సాధన మొదటి రెండు వరుస పదాలు ఇవ్వబడినది కావున $a_1 = 1$, $a_2 = 1$. మూడవ పదము a_3 అనేది మొదటి మరియు రెండవ పదాల మీద ఆధారపడి ఉండును.

$$a_3 = \frac{a_{3-1}}{a_{3-2} + 3} = \frac{a_2}{a_1 + 3} = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}$$

అదేవిధంగా నాల్గవ పదము a_4 అనేది a_2 మరియు a_3 మీద ఆధారపడి ఉండును.

$$a_4 = \frac{a_{4-1}}{a_{4-2} + 3} = \frac{a_3}{a_2 + 3} = \frac{\frac{1}{4}}{1+3} = \frac{\frac{1}{4}}{4} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

అదేవిధంగా 5 వ పదము a_5 ను కింది విధంగా కనుగొనవచ్చు.

$$a_5 = \frac{a_{5-1}}{a_{5-2} + 3} = \frac{a_4}{a_3 + 3} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{4} + 3} = \frac{1}{16} \times \frac{4}{13} = \frac{1}{52}$$

మొదటి ఐదు పదాల వరుసలు $1, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}$ మరియు $\frac{1}{52}$

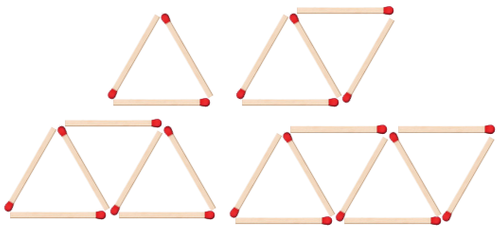
అభ్యాసము 2.4

1. కింద ఇవ్వబడిన వరుసలో తరువాతి మూడు పదాలను కనుగొనుము.
   (i) $8, 24, 72, \ldots$ (ii) $5, 1, -3, \ldots$ (iii) $\frac{1}{4}, \frac{2}{9}, \frac{3}{16}, \ldots$
2. ఇవ్వబడిన 'n' వ పదానికి మొదటి నాలుగు పదాలను కనుగొనుము.
   (i) $a_n = n^3 - 2$ (ii) $a_n = (-1)^{n+1} n(n+1)$ (iii) $a_n = 2n^2 - 6$
3. కింద ఇవ్వబడిన వరుసలకు 'n'వ పదమును కనుగొనుము.
   (i) $2, 5, 10, 17, \ldots$ (ii) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots$ (iii) $3, 8, 13, 18, \ldots$
4. కింది ఇవ్వబడిన 'n'వ పదమునకు సూచించిన పదములను కనుగొనుము.
   (i) $a_n = \frac{5n}{n+2}$; a_6 మరియు a_{13} (ii) $a_n = -(n^2 - 4)$; a_4 మరియు a_{11}
5. 'n'వ పదం $a_n = \begin{cases} \frac{n^2 - 1}{n+3} & ;\ n \text{ సరిసంఖ్య},\ n \in N \\ \frac{n^2}{2n+1} & ;\ n \text{ బేసిసంఖ్య}\ n \in N \end{cases}$ అయిన a_8 మరియు a_{15} ను కనుగొనుము.
6. $a_1 = 1,\ a_2 = 1$ మరియు $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2,}\ n \geq 3,\ n \in \mathbb{N}$, అయిన మొదటి ఆరు వరుస పదాలను కనుగొనుము.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_2.indd 57 11-02-2023 17:50:31

2.7 అంక శ్రేడి

కింద రెండు వివరణల ద్వారా ప్రారంభించిన



పటం.2.11

వివరణ 1

పక్క పటములను అగ్గిపుల్లలు ఉపయోగించి తయారు చేయుము.

(i) ఒక్కొక్క పటమును తయారుచేయుటకు ఎన్ని అగ్గిపుల్లలు అవసరమగును? 3,5,7 మరియు 9.

(ii) వరుస సంఖ్యల వ్యత్యాసము కనుగొనగలమా?

$5-3=7-5=9-7=2$

కావున వరుస సంఖ్యల వ్యత్యాసము 2 గా ఉండును.

వివరణ 2

ఒక వ్యక్తి నెల జీతము ₹10,000 లుగా నిర్ణయించెను. అతనికి సంవత్సర ఇంక్రిమెంటు ₹2000 అయిన ఆ వ్యక్తి మొదటి, రెండవ మరియు మూడవ సంవత్సరముల జీతముల వరుస ₹ 10000, ₹ 12000 మరియు ₹ 14000 అగును.

తరువాతి సంవత్సరముల జీతముల వ్యత్యాసము కనుగొనవలెనన్న $12000-10000=2000;\ 14000-12000=2000$ కావున క్రమానుసార సంఖ్యల వ్యత్యాసము 2000

పై రెండు వివరణల యందు ఒక ఉమ్మడి ధర్మము కలదని గమనించినావా? రెండు వివరణలలో వరుస పదాల వ్యత్యాసము స్థిరంగా కలదు. అంతేకాక ప్రతి పదము వచ్చుటకు ఒక స్థిరమైన విలువను ముందు పదమునకు కూడవలెను. ఈ స్థిర విలువ అనేది రెండు వరుస పదాల వ్యత్యాసానికి సమానంగా ఉండును.

నిర్వచనం

a మరియు d లు వాస్తవ సంఖ్యలయిన $a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ a+4d,\ \ldots$ రూపములో గల సంఖ్యలను **అంకశ్రేడి** అంటారు. దీనిని A.P తో సూచిస్తారు. ఇక్కడ 'a' ను **మొదటి పదం** మరియు 'd' ను **సామాన్య భేదం** అని అంటారు.

సరి సంఖ్యలను ఉదాహరణగా తీసుకొనిన 2, 4, 6, 8, 10, 12,... అనునది అంకశ్రేడిలో కలదు. ఎందుకనగా వరుస సంఖ్యల వ్యత్యాసము సమానంగా కలదు. దీనిలో మొదటి పదము $a=2$ మరియు సామాన్యభేదం $d=2$ కావున $4-2=2,\ 6-4=2,\ 8-6=2,\ \ldots$

సాధారణంగా నిత్యజీవిత పరిస్థితులలో వచ్చే సంఖ్యలన్ని అంకశ్రేడిలో ఉంటాయి.

సూచన

- అంకశ్రేడిలో రెండు వరుస పదాల వ్యత్యాసము ఎల్లప్పుడు ఒక స్థిర విలువగా ఉండును. ఆ స్థిర విలువను సామాన్యం భేదం అని అంటారు.
- పరిమిత పదాలున్న అంకశ్రేడిని పరిమిత అంకశ్రేడి అని, అపరిమిత పదాలున్న అంకశ్రేడిని అపరిమిత అంకశ్రేడి అని అంటారు.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_2.indd 58 11-02-2023 17:50:33

2.7.1 అంకశ్రేడిలోని పదాలు మరియు సామాన్య భేదము

1. అంకశ్రేడిలోని పదాలను ఈ కింది విధంగా వ్రాయవచ్చును

$t_1 = a = a + (1-1)d$, $t_2 = a + d = a + (2-1)d$, $t_3 = a + 2d = a + (3-1)d$,

$t_4 = a + 3d = a + (4-1)d$, . . .

సాధారణంగా n వ పదాన్ని t_n తో సూచిస్తారు. దీనిని $t_n = a + (n-1)d$ గా వ్రాయవచ్చును.

అంకశ్రేడిలో n^{i} వ పదము $t_n = a + (n-1)d$ ఆగును. ఇచ్చట a మొదటి పదము, d సామాన్యభేదము

2. అంకశ్రేడిలో సామాన్యభేదము కనుగొనవలెనన్న రెండవ పదము నుండి మొదటి పదమును, మూడవ పదము నుండి రెండవ పదమును .... తీసివేయవలెను.

ఉదాహరణ, $t_1 = a$, $t_2 = a + d$

కావున, $t_2 - t_1 = (a + d) - a = d$

అదేవిధంగా, $t_2 = a + d$, $t_3 = a + 2d$,...

కావున, $t_3 - t_2 = (a + 2d) - (a + d) = d$

సాధారణంగా, $d = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = t_4 - t_3 = ...$

కావున, $d = t_n - t_{n-1}$, $n = 2, 3, 4, ...$

ప్రగతి శోధన

1. అంకశ్రేడిలోని రెండు వరుస పదాల భేదం _____.
2. a మరియు d అనునది అంకశ్రేడిలోని మొదటి పదము మరియు సామాన్య భేదము అయిన 8 వ పదము _____.
3. అంక శ్రేడిలోని n^{i} వ పదము t_n అయిన $t_{2n} - t_n$ _____.

కింద ఇవ్వబడిన అంకశ్రేడిలోని సామాన్య భేదమును కనుగొందాము.

(i) $1, 4, 7, 10, \ldots$

$d = 4 - 1 = 7 - 4 = 10 - 7 = \ldots = 3$

(ii) $6, 2, -2, -6, \ldots$

$d = 2 - 6 = -2 - 2 = -6 - \left(-2\right) = \ldots = -4$

ఉదాహరణ 2.23 కింద ఇవ్వబడిన వరుస క్రమము అంక శ్రేడిలో కలదా అని సరిచూడుము.

(i) $x + 2,\ 2x + 3,\ 3x + 4, \ldots$ (ii) $2, 4, 8, 16, \ldots$ (iii) $3\sqrt{2}, 5\sqrt{2}, 7\sqrt{2}, 9\sqrt{2}, \ldots$

సాధన ఇవ్వబడిన వరుస క్రమము అంకశ్రేడిలో కలదు అని సరి చూచుటకు ముందు వరుస క్రమములోని వ్యత్యాసము సమానంగా కలదా అని చూడవలెను.

(i) $t_2 - t_1 = (2x + 3) - (x + 2) = x + 1$

$t_3 - t_2 = (3x + 4) - (2x + 3) = x + 1$

$t_2 - t_1 = t_3 - t_2$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_2.indd 59 11-02-2023 17:50:35

కావున వరుస క్రమములోని వ్యత్యాసము సమానం

అందువలన ఇచ్చిన వరుస క్రమము $x+2,\ 2x+3,\ 3x+4,\ldots$ అంక శ్రేడిలో కలదు.

(ii) $t_2 - t_1 = 4-2 = 2$

$t_3 - t_2 = 8-4 = 4$

$t_2 - t_1 \neq t_3 - t_2$

వరుస క్రమములోని భేదము సమానంగా లేదు. కావున $2, 4, 8, 16, \ldots$ పదాలు అంకశ్రేడిలో లేదు.

(iii) $t_2 - t_1 = 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

$t_3 - t_2 = 7\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

$t_4 - t_3 = 9\sqrt{2} - 7\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

వరుస క్రమములోని భేదము సమానంగా కలదు. అందువలన $3\sqrt{2}, 5\sqrt{2}, 7\sqrt{2}, 9\sqrt{2},\ldots$ పదాలు అంకశ్రేడిలో కలదు.

మీకు తెలుసా?

అంకశ్రేడిలోని సామాన్యభేదము ధనాత్మక విలువగాను, ఋణాత్మక విలువగాను లేక 0 గాను ఉండవచ్చును.

మెదడుకు మేత

t_n అనునది అంకశ్రేఢిలోని n^{th} వ పదము అయిన $t_{n+1} - t_{n-1}$ యొక్క విలువ _____.

ఉదాహరణ 2.24 మొదటిపదము 20 మరియు సామాన్యభేదము 8 అయిన అంకశ్రేడి సామాన్యరూపమును వ్రాయుము.

సాధన మొదటి పదము $= a = 20$ సామాన్య భేదము $= d = 8$

అంక శ్రేడి సామాన్య రూపము $a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ldots$

దీని నుండి $20,\ 20+8,\ 20+2(8),\ 20+3(8),\ldots$

కావలిసిన అంకశ్రేడి సామాన్య రూపము $20, 28, 36, 44, \ldots$

సూచన

- ఒక అంకశ్రేడిలోని సామాన్య భేదము '0' అయిన ఆ అంక శ్రేడిని 'స్థిర అంకశ్రేడి' అంటారు.

కృత్యము 4

ఇక్కడ 5 పెట్టెలు గలవు. ఒక్కొక్క పెట్టె నుండి ఒక సంఖ్య ఎన్నుకొనిన 5 వేర్వేరు అంక శ్రేడి రూపములను నిర్మించుము.

8, 6, −8, 12, 85	14, 1, 40, −5, 2	26, 3.5, −14, 7, 55	20, 11, −11, −3, 70	32, 8.5, −2, 17, 100

ఉదాహరణ 2.25 ఇవ్వబడిన అంకశ్రేడి $3, 15, 27, 39,\ldots$ నుండి 15 వ పదము, 24 వ పదము మరియు n వ పదమును కనుగొనుము.

సాధన మొదటి పదము $= a = 3$ సామాన్య భేదము $= d = 15-3 = 12$

$t_n = a + (n-1)d$ అనే n^{th} వ పదము నుండి మొదటి పదం a మరియు సామాన్య భేదము d అని మనకు తెలుసు.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_2.indd 60 11-02-2023 17:50:38

$$t_{15} = a + (15-1)d = a + 14d = 3 + 14(12) = 171 \quad (\text{ఇక్కడ } a = 3 \text{ మరియు } d = 12)$$

$$t_{24} = a + (24-1)d = a + 23d = 3 + 23(12) = 279$$

n^{th} వ పదము $t_n = a + (n-1)d$

కావున, $t_n = 3 + (n-1)12$

$t_n = 12n - 9$

సూచన

➢ పరిమిత అంకశ్రేడిలో మొదటి పదము a మరియు చివరి పదము l అయిన ఆ శ్రేడిలో గల పదముల సంఖ్య $n = \left(\frac{l-a}{d}\right) + 1$ ఎందుకనగా $l = a + (n-1)d$

ఉదాహరణ 2.26 3, 6, 9, 12,..., 111 అనే అంకశ్రేడిలోని పదముల సంఖ్యను కనుగొనుము.

సాధన

మొదటి పదము $a = 3$ సామాన్య భేదము $d = 6 - 3 = 3$ చివరి పదం $l = 111$

$n = \left(\frac{l-a}{d}\right) + 1$ అని మనకు తెలుసు

$n = \left(\frac{111-3}{3}\right) + 1 = 37$

కావున అంకశ్రేడి నందు 37 పదాలు కలవు.

ప్రగతి శోధన

1. స్థిర అంకశ్రేడిలోని సామాన్య భేదము -------
2. అంకశ్రేడిలో a మరియు l అనునవి మొదటి మరియు చివరి పదాలయిన అంకశ్రేడిలోని పదాల సంఖ్య -------

ఉదాహరణ 2.27 అంకశ్రేడిలోని 7వ పదము -1 మరియు 12వ పదము 12 అయిన సామాన్య పదమును కనుగొనుము.

సాధన అంక శ్రేడిలోని పదాలు $t_1, t_2, t_3, t_4, \ldots$

$t_7 = -1$ మరియు $t_{16} = 17$

$a + (7-1)d = -1$ మరియు $a + (16-1)d = 17$

$a + 6d = -1 \quad \ldots(1)$

$a + 15d = 17 \quad \ldots(2)$

(2)వ సమీకరణము నుండి (1) వ సమీకరణమును తీసివేయగా, $9d = 18$ నుండి $d = 2$ వచ్చును.

$d = 2$ ను (1) వ సమీకరణములో ఉంచిన $a + 12 = -1$ కావున $a = -13$

సామాన్య పదము $t_n = a + (n-1)d$

$= -13 + (n-1) \times 2 = 2n - 15$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_2.indd 61 11-02-2023 17:50:41

ఉదాహరణ 2.28 అంక శ్రేడిలో lవ mవ మరియు nవ పదాలు వరుసగా x, y మరియు z అయిన (i) $x(m-n)+y(n-l)+z(l-m)=0$ (ii) $(x-y)n+(y-z)l+(z-x)m=0$ అని చూపుము.

సాధన (i) a అనునది మొదటి పదము మరియు d అనునది సామాన్య భేదము అయిన

$t_l = x, t_m = y, t_n = z$ అగును.

సామాన్యపద సూత్రముపయోగించిన

$$a+(l-1)d = x \quad \ldots(1)$$
$$a+(m-1)d = y \quad \ldots(2)$$
$$a+(n-1)d = z \quad \ldots(3)$$

$$x(m-n)+y(n-l)+z(l-m)$$
$$= a[(m-n)+(n-l)+(l-m)]+d[(m-n)(l-1)+(n-l)(m-1)+(l-m)(n-1)]$$
$$= a[0]+d[lm-ln-m+n+mn-lm-n+l+ln-mn-l+m]$$
$$= a(0)+d(0)=0$$

(ii) (1)వ సమీకరణము నుండి (2)వ సమీకరణము (2)వ సమీకరణం నుండి (3)వ సమీకరణము, (3)వ సమీకరణము నుండి (1) వ సమీకరణమును తీసివేయగా.

$$x-y=(l-m)d$$
$$y-z=(m-n)d$$
$$z-x=(n-l)d$$
$$(x-y)n+(y-z)l+(z-x)m = [(l-m)n+(m-n)l+(n-l)m]d$$
$$= \left[ln-mn+lm-nl+nm-lm\right]d=0$$

సూచన

అంకశ్రేడిలో

- ఒక అంకశ్రేడిలోని ప్రతి పదమునకు ఒక స్థిర విలువను కూడిన లేక తీసివేసిన వచ్చు ఫలితము అంకశ్రేడిగానే ఉండును.
- ఒక అంకశ్రేడిలోని ప్రతి పదమును ఏదైనా స్థిర సంఖ్యతో గుణించిన లేక భాగించిన వచ్చు ఫలిత శ్రేడి అంకశ్రేడిగానే ఉండును.
- అంక శ్రేడిలోని మూడు వరుస పదములను $a-d,\ a\quad a+d$ గా తీసుకొన వలయును. ఇక్కడ సామాన్యభేదము d అగును.
- అంకశ్రేణిలో నాలుగు వరుస పదములను $a-3d,\ a-d,\ a+d\quad a+3d$ గా తీసుకొనవలయును. ఇక్కడ సామాన్యభేదము $2d$. అగును.

ఉదాహరణ 2.29 ఒక అంకశ్రేడిలో నాలుగు వరుస పదముల మొత్తం 28. మరియు దాని వర్గముల మొత్తము 276 అయిన నాలుగు పదములను కనుగొనుము.

సాధన నాలుగు వరుస పదాలు $(a-3d),(a-d),(a+d)$ మరియు $(a+3d)$.గా అనుకొనుము

నాలుగు పదాలు మొత్తము 28 కావున,

$$a-3d+a-d+a+d+a+3d=28$$
$$4a=28 \qquad a=7 \text{ అగును.}$$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_2.indd 62 11-02-2023 17:50:45

అదేవిధంగా వర్గముల మొత్తము 276,

$$(a-3d)^2+(a-d)^2+(a+d)^2+(a+3d)^2=276.$$

$$a^2-6ad+9d^2+a^2-2ad+d^2+a^2+2ad+d^2+a^2+6ad+9d^2=276$$

$$4a^2+20d^2=276 \Rightarrow 4(7)^2+20d^2=276.$$

$$d^2=4 \Rightarrow d=\pm\sqrt{4} \text{ నుండి}, d=\pm 2$$

$d=2$ అయిన నాలుగు పదములు $7-3(2),\ 7-2,\ 7+2,\ 7+3(2)$

కావున 4 పదములు $1, 5, 9$ మరియు 13

$a=7,\ d=-2$ అయిన నాలుగు పదాల $13, 9, 5$ మరియు 1

అంకశ్రేడిలో నాలుగు పదాలు $1, 5, 9$ మరియు 13

మూడు సంఖ్యలు అంకశ్రేడిలో ఉండుటకు నిబంధనలు:

a, b, c అనునవి అంకశ్రేడిలో ఉన్న $a=a,\ b=a+d,\ c=a+2d$

కావున $a+c=2a+2d=2(a+d)=2b$

అందువలన $\boxed{2b=a+c}$

అదేవిధంగా $2b=a+c$, అయిన $b-a=c-b$ కావున a, b, c లు అంకశ్రేడిలో కలవు.

మూడు శూన్యేతర సంఖ్యలు a, b, c లు అంకశ్రేడిలో ఉన్న $\boxed{2b=a+c}$ అగును.

ఉదాహరణ 2.30 ఒక తల్లి ₹207 ను తన ముగ్గురు పిల్లలకు అంకశ్రేడి రూపంలో విభజించి పంచెను. రెండు కనిష్ట మొత్తముల లబ్ధము ₹4623 అయిన ఒక్కొక్క పిల్లవాడికి తల్లి పంచిపెట్టిన మొత్త మెంత?

సాధన ముగ్గురు పిల్లలకు పంచి పెట్టిన మొత్తము అంకశ్రేడిలో కలదు. కావున

$a-d, a, a+d$. మొత్తము₹207,

$$(a-d)+a+(a+d)=207$$

$$3a=207 \text{ నుండి } a=69$$

రెండు కనిష్ట మొత్తముల లబ్ధము 4623 అయిన.

$$(a-d)a=4623$$

$$(69-d)69=4623$$

$$d=2$$

ఒక్కొక్క పిల్లవాడికి తల్లి పంచిపెట్టిన మొత్తము

₹(69−2), ₹69, ₹(69+2). నుండి, ₹67, ₹69 మరియు ₹71.

ప్రగతి శోధన

1. అంకశ్రేడిలోని ప్రతి పదమును 3 తో గుణించిన ఏర్పడు కొత్త అంకశ్రేడి యొక్క సామాన్యభేదము _____.
2. a, b మరియు c అనే మూడు సంఖ్యలు అంకశ్రేడిలో ఉండవలెనన్న _____.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_2.indd 63 11-02-2023 17:50:47

అభ్యాసము 2.5

1. కింద ఇవ్వబడిన వరుసలు అంకశ్రేడిలో ఉన్నావా అని సరి చూడుము.

   (i) $a-3, a-5, a-7,...$ (ii) $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},...$ (iii) $9, 13, 17, 21, 25,...$

   (iv) $\frac{-1}{3},0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},...$ (v) $1,-1,1,-1,1,-1,...$

2. మొదటి పదము a మరియు సాధారణ భేదము d కింద ఇవ్వబడినది అయిన అంకశ్రేణి రూపమును వ్రాయము.

   (i) $a=5,\ d=6$ (ii) $a=7,\ d=-5$ (iii) $a=\frac{3}{4},\ d=\frac{1}{2}$

3. అంక శ్రేడిలోని n వ పదము కింద ఇవ్వబడినది అయిన మొదటి పదము మరియు సామాన్య భేదమును కనుగొనుము.

   (i) $t_n=-3+2n$ (ii) $t_n=4-7n$

4. $-11,-15,-19,...$ అను అంకశ్రేడి యొక్క 19వ పదమును కనుగొనుము.

5. $11, 6, 1,...$ అంకశ్రేడిలో -54 అనేది ఎన్నవ పదము?

6. $9, 15, 21, 27,...,183$ అంకశ్రేడిలో మధ్య పదము కనుగొనుము.

7. ఒక అంకశ్రేడిలో 9 వ పదము యొక్క 9 రెట్లు, మరియు 15 వ పదము యొక్క 15 రెట్లకు సమానమైన 24 వ పదము యొక్క 6 రెట్లు సున్న అని చూపుము.

8. $3+k,\ 18-k,\ 5k+1$ అంక శ్రేడిలో ఉన్న k విలువను కనుగొనుము.

9. $x, 10, y, 24, z$ అంకశ్రేడిలో ఉన్న x, y మరియు z విలువలను కనుగొనుము

10. ఒక సినిమా థియేటర్‌లో మొదటి అడ్డు వరుసలో 20 సీట్లు కలవు. మొత్తము 30 అడ్డు వరుసలు కలవు. తరువాత ఒక్కొక్క వరుసలోని దాని ముందు వరుస కన్నా అధికంగా ఉండిన చివరి అడ్డువరుసలో ఎన్ని సీట్లు కలవు.

11. అంక శ్రేడిలో గల మూడు పదాల మొత్తము 27 మరియు దాని లబ్ధము 288 అయిన ఆ పదాలను కనుగొనుము.

12. అంకశ్రేడిలోని 6వ మరియు 8వ పదముల నిష్పత్తి 7:9 అయిన 9వ పదము మరియు 13వ పదముల నిష్పత్తిని కనుగొనుము.

13. చలికాలంలో ఊటి యొక్క ఉష్ణోగ్రత సోమవారం నుండి శుక్రవారం వరకు అంక శ్రేడిలో కలదు. సోమవారం నుండి బుధవారం వరకు గల ఉష్ణోగ్రతల మొత్తము 0° C. బుధవారం నుండి శుక్రవారము వరకు గల ఉష్ణోగ్రతల మొత్తము 18° C. అయితే ప్రతి ఐదు రోజుల ఉష్ణోగ్రతను కనుగొనుము.

14. ప్రియ మొదటి నెల ₹15,000 సంపాదించెను. ఒక సంవత్సరానికి ₹1500 చొప్పున జీతము పెరిగెను. మొదటి సంవత్సరము ఖర్చు ₹13,000, ప్రతి సంవత్సరము ఖర్చు ₹900 పెరుగుతూ పోయిన ఒక నెలకు ₹20,000 పొదుపు చేయుటకు ఎంత కాలము పట్టును?

2.8 శ్రేణులు

ఒక వరుస పదముల మొత్తమును శ్రేణి అందురు. $a_1, a_2, a_3,..., a_n,....$ అనేవి వరుస వాస్తవ సంఖ్యలయిన $a_1+a_2+a_3+\cdots$ ను వాస్తవ సంఖ్యల యొక్క శ్రేణి అంటారు.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_2.indd 64 11-02-2023 17:50:48

ఒక శ్రేణిలో పరిమిత పదాల సంఖ్య ఉన్న అట్టి శ్రేణిని పరిమిత శ్రేణి అని అంటారు. శ్రేణిలో అపరిమిత పదాల సంఖ్య ఉన్న అట్టి శ్రేణిని అపరిమిత శ్రేణి అంటారు. మనం ఇప్పుడు పరిమిత శ్రేణి గురించి మాత్రమే నేర్చుకోబోవుచున్నాము.

2.8.1 అంక శ్రేడిలోని n పదాల మొత్తము

ఒక శ్రేణిలోని పదాలు అంకశ్రేడిలో ఉన్న దానిని అంకశ్రేణి అంటారు.

$a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots$ అంక శ్రేడిలో కలదు.

అంక శ్రేణిలోని మొదటి n పదాల మొత్తమును S_n తో సూచిస్తారు.

$S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + (a+(n-1)d)$ ...(1)

పై వరుసను చివరి నుండి మొదటి పదం వరకు మార్చి వ్రాసిన మనకు లభించునది.

$S_n = (a+(n-1)d) + (a+(n-2)d) + \cdots + (a+d) + a$ ...(2)

(1) మరియు (2) లను కూడిన,

$2S_n = [a+a+(n-1)d] + [a+d+a+(n-2)d] + \cdots + [a+(n-2)d+(a+d)] + [a+(n-1)d+a]$

$= [2a+(n-1)d] + [2a+(n-1)d + \cdots + [2a+(n-1)d]$ (n పదాలు)

$2S_n = n \times [2a+(n-1)d]$ నుండి $S_n = \frac{n}{2}\left[2a+\left(n-1\right)d\right]$

సూచన

➢ ఒక అంక శ్రేడిలోని మొదటి పదము a మరియు చివరి పదము l ఇచ్చిన

$S_n = \frac{n}{2}\left[2a+\left(n-1\right)d\right] = \frac{n}{2}\left[a+a+\left(n-1\right)d\right]$ ఇక్కడ $l = a+\left(n-1\right)d$

$S_n = \frac{n}{2}[a+l]$.

ప్రగతి శోధన

1. ఒక వరుస పదాల మొత్తమును _____ అంటారు.
2. ఒక శ్రేణిలో పరిమిత పదాలు ఉన్న అట్టి శ్రేణిని _____ అంటారు.
3. ఒక శ్రేణిలోని పదాలు _____ గా ఉన్న దానిని అంకశ్రేణి అంటారు.
4. అంక శ్రేణిలో మొదటి మరియు చివరి పదాలను ఇచ్చిన _____ పదాల మొత్తము కనుగొనుటకు సూత్రము.

ఉదాహరణ 2.31 $8, 7\frac{1}{4}, 6\frac{1}{2}, 5\frac{3}{4}, \ldots$ అను అంకశ్రేణిలోని మొదటి 15 పదాల మొత్తమును కనుగొనుము.

సాధన మొదటి పదము $a = 8$, సామాన్య భేదము $= 7\frac{1}{4} - 8 = -\frac{3}{4}$,

అంకశ్రేణిలోని మొదటి n పదాల మొత్తము $S_n = \frac{n}{2}\left[2a+(n-1)d\right]$

$S_{15} = \frac{15}{2}\left[2\times 8 + (15-1)(-\frac{3}{4})\right]$

$S_{15} = \frac{15}{2}\left[16 - \frac{21}{2}\right] = \frac{165}{4}$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_2.indd 65 11-02-2023 17:50:51

ఉదాహరణ 2.32 $0.40 + 0.43 + 0.46 + \cdots + 1$ అను పదాల మొత్తము కనుగొనుము.

సాధన ఇక్కడ n విలువ ఇవ్వలేదు. కాని చివరిపదం ఇచ్చియున్నారు, దీని నుండి మనం n విలువను కనుగొనవచ్చును.

ఇవ్వబడినది $a = 0.40$ మరియు $l = 1$, $d = 0.43 - 0.40 = 0.03$.

$$\text{కావున, } n = \left(\frac{l-a}{d}\right) + 1$$
$$= \left(\frac{1-0.40}{0.03}\right) + 1 = 21$$

అంక శ్రేణిలో మొదటి n పదాల మొత్తము $S_n = \frac{n}{2}\left[a + l\right]$

ఇక్కడ, $n = 21$. $S_{21} = \frac{21}{2}\left[0.40 + 1\right] = 14.7$

కావున 21 పదాల మొత్తము 14.7.

ఉదాహరణ 2.33 $1 + 5 + 9 + \ldots$ అను అంక శ్రేణిలో ఎన్ని పదములను కూడిన మొత్తము 190 అగును?

సాధన ఇక్కడ మనము n విలువను కనుగొనవలెను. $S_n = 190$.

మొదటి పదము $a = 1$, సామాన్య భేదము $d = 5 - 1 = 4$

అంక శ్రేడిలోని మొదటి n పదాల మొత్తము

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = 190$$
$$\frac{n}{2}[2 \times 1 + (n-1) \times 4] = 190$$
$$n[4n - 2] = 380$$
$$2n^2 - n - 190 = 0$$
$$(n - 10)(2n + 19) = 0$$

$n = 10$, $n = -\frac{19}{2}$ అంక శ్రేడిలోని మొదటి n పదాల మొత్తము. కావున, $n = 10$. కాని $n = -\frac{19}{2}$ సాధ్యముకాదు.

మెదడుకు మేత

n విలువ ఎల్లప్పుడు ధనాత్మకంగానే ఉండాలి ఎందుకు?

ప్రగతి శోధన

సరియా లేక తప్పా అని తెలిపి న్యాయపరచుము.

1. ఒక అంకశ్రేడిలోని n వ పదము $pn+q$ రూపములో ఉండును. ఇక్కడ p q అనేవి స్థిరాంకము.
2. ఒక అంక శ్రేడి లోని మొదటి పదాల మొత్తము $pn^2+qn + r$ రూపంలో ఉండును. ఇక్కడ p, q, r అనేవి స్థిరాంకములు.

ఉదాహరణ 2.34 ఒక అంక శ్రేడిలోని 13వ పదము 3 మరియు మొదటి 13 పదాల మొత్తము 234 అయిన సామాన్య భేదమును మరియు మొదటి 21 పదాల మొత్తమును కనుగొనుము.

సాధన 13వ పదము 3 కావున $t_{13} = a + 12d = 3$ ...(1)

మొదటి 13 పదాల మొత్తము. $= 234$, $S_{13} = \frac{13}{2}[2a + 12d] = 234$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_2.indd 66 11-02-2023 17:50:53

$$2a + 12d = 36 \qquad \ldots(2)$$

(1) మరియు (2) లను సాధించగా, $a = 33,\ d = \frac{-5}{2}$

సామాన్య భేదము $\frac{-5}{2}$. అగును

మొదటి 21 పదాల మొత్తము $S_{21} = \frac{21}{2}\left[2\times 33 + (21-1)\times\left(-\frac{5}{2}\right)\right] = \frac{21}{2}[66-50] = 168.$

ఉదాహరణ 2.35 ఒక అంక శ్రేడిలో మొదటి n పదాల మొత్తము $\frac{5n^2}{2} + \frac{3n}{2}$ అయిన17వ పదము కనుగొనుము.

సాధన 17వ పదము కనుగొనడానికి మొదటి 17 పదాల మొత్తము నుండి మొదటి 16 పదాల మొత్తమును తీసివేయవలెను.

$$S_{17} = \frac{5\times(17)^2}{2} + \frac{3\times 17}{2} = \frac{1445}{2} + \frac{51}{2} = 748$$

$$S_{16} = \frac{5\times(16)^2}{2} + \frac{3\times 16}{2} = \frac{1280}{2} + \frac{48}{2} = 664$$

ఇప్పుడు, $t_{17} = S_{17} - S_{16} = 748 - 664 = 84$

ఉదాహరణ 2.36 300 మరియు. 600 మధ్య 7 చే భాగింపబడే అన్ని సహజసంఖ్యల మొత్తమును కనుగొనుము.

సాధన 300 మరియు 600 మధ్య 7 చే భాగించబడే సహజ సంఖ్యలు 301, 308, 315, ..., 595.

300 మరియు 600 మధ్య 7 చే భాగించబడే సహజ సంఖ్యలు $301 + 308 + 315 + \cdots + 595$.

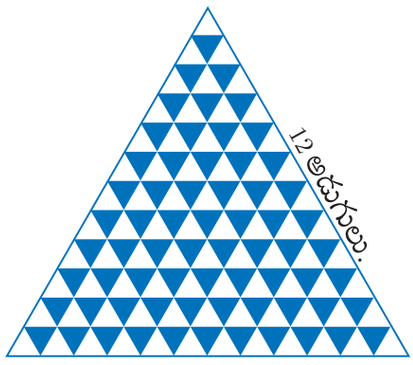
పై నున్న పదాల శ్రేణి అంకశ్రేడిలో కలదు.

మొదటిపదము $a = 301$ సామాన్యభేదము $d = 7$ చివరిపదము $l = 595$.

$$n = \left(\frac{l-a}{d}\right) + 1 = \left(\frac{595-301}{7}\right) + 1 = 43$$

కావున, $S_n = \frac{n}{2}[a+l], \qquad S_{43} = \frac{43}{2}[301+595] = 19264.$

ఉదాహరణ 2.37 చిన్న పెంకులను ఉపయోగించి సమభుజ త్రిభుజాకారంలో ఒక్కొక్క భుజం 12 అడుగులు గల మొజాయిక్ రూపొందించినారు. దానిలో గల ప్రతి పెంకు సమభుజ త్రిభుజాకారంలో మరియు భుజము 12 అంగుళాలు కలవు. ఆ పెంకుకు పటములో చూపిన విధంగా ప్రత్యామ్నాయ రంగులు కలదు. అయిన ఒక్కొక్క రంగులో గల పెంకులు ఎన్ని కలవు మరియు మొజాయిక్‌లోని మొత్తం పెంకుల సంఖ్యను కనుగొనుము.



పటం.2.12

సాధన సమభుజ త్రిభుజాకారంలో ఉన్న మొజాయిక్ భుజము పొడవు 12 అడుగులు. మొజాయిక్‌లో గల పెంకులు కూడా సమభుజ త్రిభుజాకారంలో కలదు దాని పొడవు 12 అంగుళాలు. మొజాయిక్‌లో 12 అడ్డు వరుసలు కలవు.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_2.indd 67 11-02-2023 17:50:55

పటము నుండి గమనించిన ప్రతి అడ్డువరుసలో గల తెల్ల రంగు పెంకులు $1, 2, 3, 4, \ldots, 12$ ఇవి అంకశ్రేడిలో గలవు.

అదేవిధంగా ప్రతి అడ్డు వరుస లో గల నీలం రంగు పెంకులు $0, 1, 2, 3, \ldots, 11$ ఇది కూడా అంకశ్రేడిలో గలవు.

తెల్ల రంగు పెంకుల సంఖ్య $= 1+2+3+\cdots+12 = \frac{12}{2}[1+12] = 78$

నీలం రంగు పెంకుల సంఖ్య $= 0+1+2+3+\cdots+11 = \frac{12}{2}[0+11] = 66$

మొజాయిక్‌లో గల మొత్తము పెంకుల సంఖ్య $= 78 + 66 = 144$

ఉదాహరణ 2.38 ఒక వీధిలో గల ఇండ్లకు 1 నుండి 49 వరకు వరుసగా ఇంటి నంబర్‌లు ఇవ్వబడినది. సెంథిల్ ఇంటికి ముందు గల ఇంటి నంబర్‌ల మొత్తము సెంథిల్ ఇంటికి తరువాత గల ఇంటి నంబర్‌ల మొత్తమునకు సమానము అయిన సెంథిల్ ఇంటినంబర్‌ను కనుగొనుము.

సాధన సెంథిల్ ఇంటినంబర్‌ను x అనుకొనుము.

లెక్క ప్రకారం

$$1+2+3+\cdots+(x-1) = (x+1)+(x+2)+\cdots+49$$

$$1+2+3+\cdots+(x-1) = \big[1+2+3+\cdots+49\big]-\big[1+2+3+\cdots+x\big]$$

$$\frac{x-1}{2}\big[1+(x-1)\big] = \frac{49}{2}\big[1+49\big]-\frac{x}{2}\big[1+x\big]$$

$$\frac{x(x-1)}{2} = \frac{49\times 50}{2}-\frac{x(x+1)}{2}$$

$$x^2-x = 2450-x^2-x \Rightarrow 2x^2 = 2450$$

$$x^2 = 1225 \text{ నుండి } x = 35$$

కావున సెంథిల్ ఇంటి నంబర్ 35 అగును.

ఉదాహరణ 2.39 ఒక అంకశ్రేడిలోని మొదటి n, $2n$ మరియు $3n$ పదాల మొత్తము క్రమముగా S_1, S_2 మరియు S_3 అయిన $S_3 = 3(S_2 - S_1)$ అని నిరూపించుము.

సాధన S_1, S_2 మరియు S_3 అనేవి క్రమముగా అంకశ్రేడిలోని మొదటి n, $2n$ మరియు $3n$ పదాల మొత్తము అయిన

$$S_1 = \frac{n}{2}\big[2a+(n-1)d\big],\quad S_2 = \frac{2n}{2}\big[2a+(2n-1)d\big],\quad S_3 = \frac{3n}{2}\big[2a+(3n-1)d\big]$$

$S_2 - S_1 = \frac{2n}{2}\big[2a+(2n-1)d\big]-\frac{n}{2}\big[2a+(n-1)d\big]$ పరిగణలోకి తీసుకొనిన

$$= \frac{n}{2}\big[[4a+2(2n-1)d]-[2a+(n-1)d]\big]$$

$$S_2 - S_1 = \frac{n}{2}\times\big[2a+(3n-1)d\big]$$

$$3(S_2-S_1) = \frac{3n}{2}\big[2a+(3n-1)d\big]$$

$$3(S_2-S_1) = S_3$$



మెదడుకు మేత

1. మొదటి n బేసి సహజ సంఖ్యల మొత్తము ఎంత?
2. మొదటి n సరిసంఖ్యల మొత్తము ఎంత?

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_2.indd 68 11-02-2023 17:50:58

అభ్యాసము 2.6

1. కింది అంకశ్రేణి మొత్తమును కనుగొనుము.

   (i) $3,7,11,\ldots$ 40 పదాలు వరకు. (ii) $102,97,92,\ldots$ 27 పదాలు వరకు.

   (iii) $6+13+20+\cdots+97$

2. 5తో ప్రారంభమయ్యి మొత్తము 480 వచ్చువిధంగా ఎన్ని వరుస బేసిపూర్ణసంఖ్యలు గలవు?

3. అంకశ్రేడిలోని nవ పదము $4n-3$ అయిన 28 పదాల మొత్తమును కనుగొనుము.

4. ఒక శ్రేణి యొక్క మొదటి n పదాల మొత్తము $2n^2-3n$ అయిన ఆ శ్రేణి అంకశ్రేడి అని నిరూపించుము.

5. అంకశ్రేడిలోని 104వ పదము మరియు 4వ పదము క్రమముగా 125 మరియు 0 అయిన మొదటి 35 పదాల మొత్తమును కనుగొనుము

6. 450 కన్నా తక్కువగల అన్ని బేసి పూర్ణసంఖ్యల మొత్తమును కనుగొనుము.

7. 602 మరియు 902 మధ్య 4చే భాగింపబడని అన్ని సహజసంఖ్యల మొత్తమును కనుగొనుము.

8. రఘు ₹40,000 విలువ గల ల్యాప్‌టాప్‌ను నగదు చెల్లించి లేదా 10 వాయిదా రూపంలో కొనదలచెను. మొదటి నెల వాయిదా ₹4800, రెండవ నెలలో ₹4750, మూడవ నెలలో ₹4700 గా 10 నెలలు చెల్లించిన కింది వాటిని కనుగొనుము.

   (i) 10 వాయిదాలలో అతను చెల్లించిన మొత్తమును కనుగొనుము.

   (ii) ఉన్న ధర కన్నా వాయిదాల పద్ధతిలో అతను ఎంత సొమ్ము అధికంగా చెల్లించెను?

9. ఒక వ్యక్తి ₹65,000 లోన్ తీసుకొని మొదటి నెల ₹400 చెల్లించెను. ప్రతి నెల ముందు నెలలో చెల్లించిన దానికన్నా ₹300 అదనంగా చెల్లించిన ఎంత కాలములో లోన్ పూర్తియగును?

10. ఇటుకలతో కట్టిన మెట్ల వరుసలో మొత్తం 30 మెట్లు కలవు. కింది మెట్టులో 100 ఇటుకలు కలవు. తరువాత వచ్చు ప్రతి మెట్లలో రెండు ఇటుకలు తగ్గుతూ వచ్చును.

    (i) అగ్ర భాగానున్న మెట్టులో గల ఇటుకల సంఖ్యను కనుగొనుము

    (ii) మొత్తము మెట్ల పరుసను కట్టుటకు ఎన్ని ఇటుకలు అవసరమగును?

11. m అంకశ్రేడి యొక్క n పదాల మొత్తము $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_m$ వీటి మొదటి పదాలు $1,3,5,\ldots,(2m-1)$. క్రమముగా అమరిన $S_1+S_2+S_3+\cdots+S_m=\frac{1}{2}mn(mn+1)$ అని చూపుము.

12. $\left[\frac{a-b}{a+b}+\frac{3a-2b}{a+b}+\frac{5a-3b}{a+b}+\cdots 12 \text{ పదాలు}\right]$ యొక్క మొత్తము కనుగొనుము.

2.9 గుణశ్రేడి

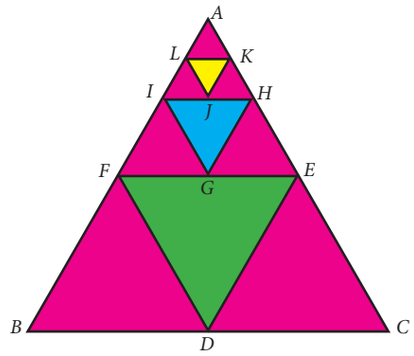
ఇవ్వబడిన పటము 2.13లో ΔABC భుజములు AB, BC మరియు CA మధ్యబిందువులను కలుపుతూ గీయబడిన క్రిభుజము ΔDEF అగును. అయితే ΔDEF వైశాల్యము ΔABC లో 1/4వ వంతు ఉండును. ఇది అలాగే మిగిలిన త్రిభుజములకు కొనసాగుతుంది. సాధారణంగా ఒక్కొక్క చిన్న త్రిభుజ వైశాల్యం దాని వైశాల్యానికి 1/4 వంతు ఉండును.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_2.indd 69 11-02-2023 17:50:59

ΔABC వైశాల్యములో

$\frac{1}{4}\ \Delta$ ABC, $\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\ \Delta\ ABC$, ...

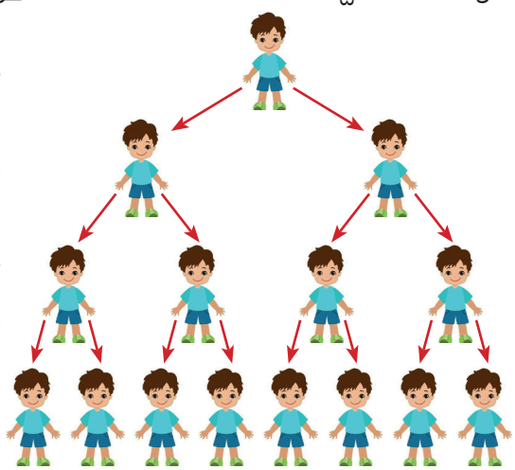
$\Delta\ ABC$, $\frac{1}{4}\ \Delta\ ABC$, $\frac{1}{16}\ \Delta\ ABC$,...



పటం.2.13

ఈ సందర్భములో మనము గమనించునది ΔDEF వైశాల్యము ΔABC లో 1/3 వ వంతు ఉండును. ఒక్కొక్క పదము ముందున్న పదమును 1/4 తో గుణించిన లభించును.

మరియొక సందర్భములో ఒక వైరల్ జ్వరం సోకిన వ్యక్తి నుండి మొదటి దశలో ఇద్దరికి ఆ వ్యాధి అంటుకొంటుంది. రెండవ దశలో ఆ ఇద్దరు వ్యక్తులు నుండి నాలుగు వ్యక్తులకు రోగం అంటుకొనును. ఇలా కొనసాగుతూ పోవును. ఒక్కొక్క దశలో వైరల్ జ్వరం అంటుకొన్న వ్యక్తుల సంఖ్య 1, 2, 4, 8, ... మొదటి పదం తప్ప ప్రతి పదము దాని తరువాత పదానికి రెట్టింపుగా కలదు.


పటం.2.14

పై రెండు ఉదాహరణల నుండి ప్రతి పదానికి ఒక స్థిర విలువను గుణించిన తరువాతి పదము వచ్చును అని తెలియుచున్నది.

ఈ ఉదాహరణలు గుణశ్రేడి అను భావనను అర్థము చేసుకొనుటకు దారితీయును.

నిర్వచనం

మొదటి పదం తప్ప మిగిలిన పదములన్నింటిని దానికి ముందున్న పదమును ఒక స్థిర సంఖ్యతో గుణించిన వచ్చునదే గుణశ్రేడి అనబడును. ఆ స్థిర సంఖ్యను సామాన్య నిష్పత్తి అంటాము. దీనిని 'r' తో సూచిస్తాము.

2.9.1 గుణశ్రేడి యొక్క సాధారణరూపము

a మరియు $r \neq 0$ అనునది వాస్తవ సంఖ్యలయిన, $a, ar, ar^2, \ldots ar^{n-1}\ldots$ రూపంలో గలవాటిని గుణశ్రేడి రూపము అంటారు. ఇక్కడ 'a' ను మొదటి పదము మరియు 'r' ను సామాన్య నిష్పత్తి అంటారు.

గుణశ్రేడిలోని మొదటి పదము a తో సామాన్య నిష్పత్తి 'r' తో సూచించిన రెండవ పదమును పొందవలెనన్న మొదటి పదము a ను సామాన్య నిష్పత్తి r చేత గుణించవలెను. గుణించగా ఏర్పడు శ్రేడి $ar, ar^2, ar^3, \ldots$

2.9.2 గుణశ్రేడి యొక్క సాధారణ పదము

గుణశ్రేడిలోని nవ పదము (లేక) సాధారణ పదము కనుగొనుటకు

$a, ar, ar^2, \ldots, ar^{n-1}, \ldots$ లో a అనునది మొదటి పదము మరియు 'r' అనునది సామాన్య నిష్పత్తి అయిన t_n అనేది గుణశ్రేడిలో nవ పదం అగును.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_2.indd 70 11-02-2023 17:51:01

$$
\begin{aligned}
t_1 &= a = a \times r^0 = a \times r^{1-1} \\
t_2 &= t_1 \times r = a \times r = a \times r^{2-1} \\
t_3 &= t_2 \times r = ar \times r = ar^2 = ar^{3-1} \\
&\vdots \qquad \vdots \\
t_n &= t_{n-1} \times r = ar^{n-2} \times r = ar^{n-2+1} = ar^{n-1}
\end{aligned}
$$

కావున గుణశ్రేడిలో n వ పదము $t_n = ar^{n-1}$

సూచన

➤ ఒక గుణశ్రేడిలోని వరుస పదాల నిష్పత్తిని కింది విధంగా వ్రాయవచ్చు

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{ar}{a} = r\,,\ \frac{t_3}{t_2} = \frac{ar^2}{ar} = r\,,\ \frac{t_4}{t_3} = \frac{ar^3}{ar^2} = r\,,\ \frac{t_5}{t_4} = \frac{ar^4}{ar^3} = r\,,\ldots$$

కావున గుణశ్రేడిలోని ఏదైనా రెండు వరుస పదముల నిష్పత్తి ఎల్లప్పుడు స్థిరాంకము మరియు ఆ స్థిరాంకమును ఇచ్చిన శ్రేడి యొక్క సామాన్య నిష్పత్తి అంటారు.

ప్రగతిశోధన

1. ఒక గుణిశ్రేడి రావుటకు ముందు పదానికి _____ తో గుణించాలి.
2. ఒక గుణశ్రేడిలోని ఏదైనా రెండు వరుస పదముల నిష్పత్తి _____ మరియు దీనిని _____ గా పిలుస్తారు.
3. గుణశ్రేడిలో గల కింది వాటిని పూరింపుము

(i) $\frac{1}{8}, \frac{3}{4}, \frac{9}{2}, ___$ (ii) $7, \frac{7}{2}, ___$ (iii) $___, 2\sqrt{2}, 4, \ldots$

ఉదాహరణ 2.40 కిందనివ్వబడిన వరుసలలో ఏది గుణశ్రేడిని ఏర్పరచును?

(i) 7, 14, 21, 28, … (ii) $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, … (iii) 5, 25, 50, 75, …

సాధన ఇవ్వబడిన వరుస గుణశ్రేడిని ఏర్పరచునని కనుగొనుటకు ముందు వాటి సామాన్య నిష్పత్తి సమానంగా కలదా? అని చూడవలెను.

(i) 7, 14, 21, 28, …

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{14}{7} = 2\,; \qquad \frac{t_3}{t_2} = \frac{21}{14} = \frac{3}{2}\,; \qquad \frac{t_4}{t_3} = \frac{28}{21} = \frac{4}{3}$$

ఇక్కడ సామాన్య నిష్పత్తి సమానంగా లేదు. కావున ఇచ్చిన వరుస గుణశ్రేడిని ఏర్పరచదు.

(ii) $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, …

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2\,; \qquad \frac{t_3}{t_2} = \frac{2}{1} = 2\,; \qquad \frac{t_4}{t_3} = \frac{4}{2} = 2$$

ఇక్కడ వరుస పదాల సామాన్య నిష్పత్తి $r = 2$ సమానంగా ఉండుటవలన

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_2.indd 71 11-02-2023 17:51:03

$\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, ...అనే వరుస గుణశ్రేడిలో కలదు. .

(iii) 5, 25, 50, 75,...

$\frac{t_2}{t_1} = \frac{25}{5} = 5$; $\frac{t_3}{t_2} = \frac{50}{25} = 2$; $\frac{t_4}{t_3} = \frac{75}{50} = \frac{3}{2}$

ఇక్కడ వరుస పదాల నిష్పత్తి సమానంగా లేనందువలన 5, 25, 50, 75 ... అనేది గుణశ్రేడి కాదు.

మెదడుకు మేత

$2, 2^2, 2^{2^2}, 2^{2^{2^2}}$,... వరుస పదాలు గుణశ్రేడిలో కలవా?

ఉదాహరణ 2.41 మొదటి పదము మరియు సామాన్య నిష్పత్తి కింద ఇవ్వబడినది అయిన గుణశ్రేడిని కనుగొనుము. (i) $a = -7$, $r = 6$ (ii) $a = 256$, $r = 0.5$

సాధన (i) గుణశ్రేడి యొక్క సాధారణ రూపము a, ar, ar^2,...

$a = -7$, $ar = -7 \times 6 = -42$, $ar^2 = -7 \times 6^2 = -252$

కావున కావలసిన గుణశ్రేడి $-7, -42, -252$,...

(ii) గుణశ్రేడి యొక్క సాధారణ రూపము a, ar, ar^2,...

$a = 256$, $ar = 256 \times 0.5 = 128$, $ar^2 = 256 \times (0.5)^2 = 64$

కావున కావలసిన గుణశ్రేడి 256,128, 64,....

ప్రగతిశోధన

1. మొదటి పదము $= a$ సామాన్య నిష్పత్తి $= r$ అయిన t_9 మరియు t_{27}. విలువలను కనుగొనుము.
2. గుణశ్రేడిలో $t_1 = \frac{1}{5}$ మరియు $t_2 = \frac{1}{25}$ అయిన సామాన్య నిష్పత్తి _____.

ఉదాహరణ 2.42 9, 3, 1,... అనే గుణశ్రేడిలో 8వ పదము కనుగొనుము.

సాధన 8వ పదమును కనుగొనుటకు $t_n = ar^{n-1}$ అనే n వ పద సూత్రమును ఉపయోగించవలెను.

మొదటి పదము $a = 9$ సామాన్య నిష్పత్తి $r = \frac{t_2}{t_1} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$$t_8 = 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{8-1} = 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^7 = \frac{1}{243}$$

కావున గుణశ్రేడిలో 8వ పదము $\frac{1}{243}$.

ఉదాహరణ 2.43 ఒక గుణశ్రేడిలోని 4వ పదము $\frac{8}{9}$ మరియు 7వ పదము $\frac{64}{243}$ అయిన గుణశ్రేడిని కనుగొనుము.

సాధన 4వ పదం, $t_4 = \frac{8}{9}$ నుండి $ar^3 = \frac{8}{9}$ ...(1)

7వ పదం, $t_7 = \frac{64}{243}$ నుండి $ar^6 = \frac{64}{243}$ ...(2)

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_2.indd 72 11-02-2023 17:51:06

(1) తో (2) ను భాగించగా, $\frac{ar^6}{ar^3} = \frac{\frac{64}{243}}{\frac{8}{9}}$

$r^3 = \frac{8}{27}$ నుండి $r = \frac{2}{3}$

r విలువను (1)లో ప్రతిక్షేపించగా $a \times \left[\frac{2}{3}\right]^3 = \frac{8}{9} \Rightarrow a = 3$

కావున గుణశ్రేడి రూపము $a,\ ar,\ ar^2, \ldots$ అనగా $3, 2, \frac{4}{3}, \ldots$

సూచన

- ఒక గుణశ్రేడిలోని మూడు వరుస పదాల లబ్ధము ఇచ్చిన మూడు పదములను $\frac{a}{r}, a, ar$ గా తీసుకొనవలెను.
- ఒక గణశ్రేడిలోని నాలుగు వరుస పదాల లబ్ధము ఇచ్చిన నాలుగు పదములను $\frac{a}{r^3}, \frac{a}{r}, ar, ar^3$ గా తీసుకొనవలయును.
- ఒక గుణశ్రేడిలోని ప్రతిపదమును ఒక శూన్యేతర స్థిరాంకముతో గుణించిన (లేక) భాగించిన వచ్చు వరుస పదాలు కూడా గుణశ్రేడిలో ఉండును.

ఉదాహరణ 2.44 ఒక గుణశ్రేడిలోని మూడు వరుస పదాల లబ్ధము 343 మరియు మూడు పదాల మొత్తము $\frac{91}{3}$ అయిన ఆ మూడు పదాలను కనుగొనుము.

సాధన మూడు వరుస పదాలను మనము $\frac{a}{r}, a, ar$ అని తీసుకొనగా

మూడు వరుస పదాల లబ్ధము $= 343$

$\frac{a}{r} \times a \times ar = 343$

$a^3 = 7^3$ నుండి $a = 7$

మూడు పదాల మొత్తము $= \frac{91}{3}$

కావున $a\left(\frac{1}{r} + 1 + r\right) = \frac{91}{3}$ నుండి

$7\left(\frac{1 + r + r^2}{r}\right) = \frac{91}{3}$

$3 + 3r + 3r^2 = 13r$ నుండి

$3r^2 - 10r + 3 = 0$

$(3r - 1)(r - 3) = 0$ నుండి $r = 3$ లేక $r = \frac{1}{3}$

If $a = 7, r = 3$ అయిన మూడు పదాలు $\frac{7}{3}, 7, 21.$

$a = 7, r = \frac{1}{3}$ అయిన మూడు పదాలు $21, 7, \frac{7}{3}.$

మెదడుకు మేత

1. 64 ను మూడు భాగాలుగా విడగొట్టిన అది గుణశ్రేడిలో ఉండునా?
2. $a, b, c, \ldots$ లు గుణశ్రేడిలో ఉన్న $2a, 2b, 2c,$ లు _____
3. $3, x, 6.75$ అనేవి గుణశ్రేడిలో ఉన్న x విలువ _____.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_2.indd 73 11-02-2023 17:51:08

మూడు సంఖ్యలు గుణశ్రేడిలో ఉండుటకు గల నిబంధనలు

a, b, c అనునవి గుణశ్రేడిలో ఉన్న $b = ar$, $c = ar^2$ కావున $ac = a \times ar^2 = (ar)^2 = b^2$ అదే విధంగా $b^2 = ac$ అయిన $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$ కావున a, b, c గుణశ్రేడిలో కలదు.

మూడు శూన్యేతర సంఖ్యలు a, b, c గుణశ్రేడిలో ఉన్న $b^2 = ac$ అగును.

ఉదాహరణ 2.45 ఒక యంత్రము యొక్క ప్రస్తుత విలువ ₹40,000 ప్రతి సంవత్సరము ఆ యంత్రము విలువ 10% తగ్గును. 6వ సంవత్సరము ఆ యంత్రము యొక్క విలువను కనుగొనుము.

సాధన యంత్రము యొక్క ప్రస్తుత విలువ ₹40,000

మొదటి సంవత్సరము చివర యంత్రము విలువ $40,000 \times \frac{90}{100}$

రెండు సంవత్సరము చివర యంత్రము యొక్క విలువ $40,000 \times \left(\frac{90}{100}\right)^2$

ఇదే పద్ధతిని కొనసాగిస్తే యంత్రము యొక్క విలువ కింది విధంగా ఉండును.

$$40000,\ 40000 \times \frac{90}{100},\ 40000 \times \left(\frac{90}{100}\right)^2 \ldots$$

పై వరుస గుణశ్రేడి రూపములో కలదు. ఇందులో మొదటి పదము 40,000 సామాన్య నిష్పత్తి $\frac{90}{100}$ యంత్రము యొక్క విలువ 5 సంవత్సరముల చివర (అనగా 6వ సంవత్సరం) మనము గుణశ్రేడిలో 6వ పదము కనుగొనవలెను.

కావున, n=6, a=40,000, $r = \frac{90}{100}$.

$t_n = ar^{n-1}$, ను ఉపయోగించి $t_6 = 40,000 \times \left(\frac{90}{100}\right)^{6-1} = 40000 \times \left(\frac{90}{100}\right)^5$

$$t_6 = 40,000 \times \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} = 23619.6$$

6వ సంవత్సరములో యంత్రము యొక్క విలువ= ₹23619.60

అభ్యాసము 2.7

1. కింద ఇవ్వబడిన వరుసలు ఏది గుణశ్రేడిలో కలవు?

(i) 3,9,27,81,... (ii) 4,44,444,4444,...

(iii) 0.5,0.05,0.005,... (iv) $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \ldots$

(v) $1, -5, 25, -125, \ldots$ (vi) 120,60,30,18,...

(vii) $16, 4, 1, \frac{1}{4}, \ldots$

ప్రగతిశోధన

మూడు శూన్యేతర సంఖ్యలు a, b, c గుణశ్రేడిలో ఉన్నట్లయితే _____.

2. ఒక గుణశ్రేడిలోని మొదటి పదము మరియు సామాన్య నిష్పత్తి కిందఇవ్వబడినది. అయిన మొదటి మూడు పదములను కనుగొనుము.

(i) $a = 6, r = 3$ (ii) $a = \sqrt{2}, r = \sqrt{2}$ (iii) $a = 1000, r = \frac{2}{5}$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_2.indd 74 11-02-2023 17:51:10

3. $729, 243, 81, \ldots$ అనునవి గుణశ్రేడిలో కలదు. అయిన t_7 ను కనుగొనుము.

4. $x+6,\ x+12$ మరియు $x+15$ అనునవి గుణశ్రేడిలోని వరుస పదములయిన x విలువను కనుగొనుము.

5. కిందనివ్వబడిన గుణశ్రేడి వరుసలో ఎన్ని పదములు కలవు?

   (i) $4,8,16,\ldots,8192$? (ii) $\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{27},\ldots,\frac{1}{2187}$

6. ఒక గుణశ్రేడిలోని 9వ పదము 32805 మరియు 6వ పదము 1215 అయిన 12వ పదమును కనుగొనుము.

7. ఒక గుణశ్రేడి యొక్క 8వ పదము 768 మరియు సామాన్య నిష్పత్తి 2 అయిన 10వ పదమును కనుగొనుము.

8. $a,\ b,\ c$ లు అంకశ్రేడిలో ఉన్న $3^a, 3^b, 3^c$ లు గుణశ్రేడిలో కలవని నిరూపించుము.

9. ఒక గుణశ్రేడిలో మూడు వరుస పదముల లబ్ధము 27 మరియు రెండ్రెండు పదముల లబ్ధము యొక్క మొత్తము (రెండు పదాలను ఒక్కసారి మాత్రమే తీసుకోవాలి) $\frac{57}{2}$ అయిన ఆ మూడు పదాలను కనుగొనుము.

10. ఒక వ్యక్తి ఒక కార్యాలయంలో నిర్వాహకుడిగా పనిలో చేరాడు. మొదటి నెల జీతం ₹60,000 ఇచ్చి మరియు ప్రతి సంవత్సరం ముందు సంవత్సరం యొక్క జీవితంలో అతనికి ఆ కార్యాలయం వారు 5% పెంచే విధంగా కార్యాలయం నిర్ణయించింది. అయితే 5వ సంవత్సరం చివర అతని నెలజీతమెంత?

11. శివమణి ఒక ఉద్యోగం కోసము ఒక కంపెనీ ఇంటర్వ్యూకు హాజరయ్యెను. అతనికి కంపెనీవారు రెండు ఆఫర్‌లు ఇచ్చెను.

    ఆఫర్ A: ₹20,000 మొదటి సంవత్సరం జీతం ఇచ్చి 5 సంవత్సరాలకు ప్రతి సంవత్సరము 6% చొప్పున పెంచిన

    ఆఫర్ B. ₹22,000 మొదటి సంవత్సరం జీతం ఇచ్చి 5 సంవత్సరములకు ప్రతి సంవత్సరము 3% చొప్పున పెంచిన

    4వ సంవత్సరము ఆఫర్ A మరియు ఆఫర్ B ల జీతము ఎంత?

12. a, b, c అను 3 వరుస పదాలు అంకశ్రేడిలో కలవు. మరియు x, y, z అను 3 వరుస పదాలు గుణశ్రేడిలో కలవు అయితే $x^{b-c} \times y^{c-a} \times z^{a-b} = 1$ అని నిరూపించుము.

2.10 గుణశ్రేడిలోని *n* పదాల మొత్తము (Sum to *n* terms of a G.P.)

ఒక శ్రేణిలోని పదాలు గుణశ్రేడిలో ఉన్న దానిని గుణశ్రేణి అంటారు.

$a,\ ar,\ ar^2, \ldots ar^{n-1}, \ldots$గుణశ్రేడి అనుకొనిన.

గుణశ్రేడిలోని మొదటి n పదాల మొత్తము

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \quad \ldots (1)$$

ఇరువైపులా r తో గుణించగా $rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \quad \ldots (2)$

$(2)-(1)$ నుండి $rS_n - S_n = ar^n - a$

$$S_n(r-1) = a(r^n - 1)$$

కావున, n పదాల మొత్తము $S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1},\ r \neq 1.$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_2.indd 75 11-02-2023 17:51:12

సూచన

- $r=1$ అయిన పై నున్న గుణశ్రేడి యొక్క n పదాల మొత్తము సూత్రము వర్తించును.

  $r=1$, అయిన

  $S_n = a+a+a+\cdots+a = na$

ప్రగతి శోధన

1. ఒక శ్రేణిలోని పదాలు గుణశ్రేడిలో ఉన్న అట్టి శ్రేణి _____ అంటారు.
2. $r=1$ అయిన గుణశ్రేడిలోని n పదాల మొత్తము కనుగొనుటకు సూత్రము _____.
3. $r\neq 1$ అయిన గుణశ్రేడిలోని n పదాల మొత్తము కనుగొనుటకు సూత్రము

2.10.1 గుణశ్రేడిలోని అనంత పదముల మొత్తము

గుణశ్రేడిలోని అనంత పదముల మొత్తమును $S_\infty = a+ar+ar^2+ar^3+\cdots = \frac{a}{1-r}, -1<r<1$ గా వ్రాయవచ్చు.

ఉదాహరణ 2.46 ఇవ్వబడిన $1,-3,9,-27\ldots$ గుణశ్రేడిలోని మొదటి 8 పదాల మొత్తమును కనుగొనుము.

సాధన మొదటి పదము $a=1$ సామాన్య నిష్పత్తి $r=\frac{-3}{1}=-3<1$, ఇక్కడ $n=8$

గుణశ్రేడిలోని n పదాల మొత్తము $S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$ if $r\neq 1$ అయిన

కావున, $S_8 = \frac{1\left((-3)^8-1\right)}{(-3)-1} = \frac{6561-1}{-4} = -1640$

ఉదాహరణ 2.47 గుణశ్రేడిలోని $S_6 = 4095$ మరియు $r=4$ అయిన మొదటి పదమును కనుగొనుము.

సాధన సామాన్య నిష్పత్తి $=4>1$, మొదటి 6 పదాల మొత్తము $S_6 = 4095$

కావున, $S_6 = \frac{a(r^n-1)}{r-1} = 4095$

$r=4, \frac{a(4^6-1)}{4-1} = 4095$ నుండి $a\times\frac{4095}{3} = 4095$

మొదటి పదము $a=3$.

ఉదాహరణ 2.48 $1+4+16+\cdots$ అనే శ్రేడిలో ఎన్ని పదములు కూడిన మొత్తము 1365 వచ్చును?

సాధన మొత్తము 1365 పొందుటకు కూడవలసిన పదముల సంఖ్య n అనుకొనుము.

$a=1,\ r=\frac{4}{1}=4>1$

$S_n = 1365$ నుండి $\frac{a(r^n-1)}{r-1} = 1365$

$\frac{1(4^n-1)}{4-1} = 1365$ కావున, $(4^n-1)=4095$

$4^n = 4096$ కాని $4^n = 4^6$

$n=6$

ప్రగతి శోధన

1. గుణశ్రేడిలోని అనంత పదముల మొత్తము ___
2. r యొక్క ఏవిలువకు గుణశ్రేడిలోని అనంత పదముల సూత్రము వర్తించును.

ఉదాహరణ 2.49 $3+1+\frac{1}{3}+\ldots\infty$ యొక్క అనంత పదముల మొత్తము కనుగొనుము.

సాధన ఇక్కడ $a=3$, $r=\frac{t_2}{t_1}=\frac{1}{3}$

అనంత పదముల మొత్తము $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{3}{1-\frac{1}{3}} = \frac{9}{2}$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_2.indd 76 11-02-2023 17:51:15

ఉదాహరణ 2.50 $0.6666\ldots$ యొక్క అకరణీయ రూపమును కనుగొనుము.

సాధన $0.6666\ldots$ ను కింది విధముగా వ్రాయవచ్చు.

$$0.6666\ldots = 0.6 + 0.06 + 0.006 + 0.0006 + \cdots$$

$0.6, 0.06, 0.006\ldots$ అనునవి గుణశ్రేడిలో కలవు. కావున మొదటి పదము $a = 0.6$

సామాన్య నిష్పత్తి $r = \dfrac{0.06}{0.6} = 0.1$ మరియు $-1 < r = 0.1 < 1$

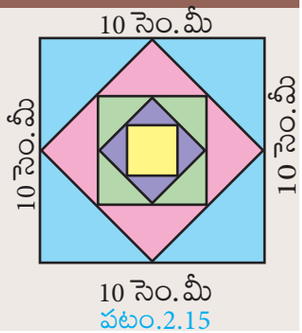
గుణశ్రేడిలోని అనంత పదాల మొత్తము సూత్రము ఉపయోగించిన

$$0.6666\ldots = 0.6 + 0.06 + 0.006 + 0.0006 + \cdots = \frac{0.6}{1-0.1} = \frac{0.6}{0.9} = \frac{2}{3}$$

కావున $0.6666\ldots$ యొక్క అకరణీయ రూపము $\dfrac{2}{3}$ అగును.

కృత్యము 5

ఇవ్వబడిన చతురస్రము యొక్క భుజములు 10 సెం.మీ. దీని భుజాల మధ్య బిందువును కలుపుతూ ఒక క్రొత్త చతురస్రమును ఏర్పరచవచ్చు. అదేవిధంగా ఏర్పడిన చతురస్ర భుజాల మధ్య బిందువు కలుపుతూ మరియొక చతురస్రాన్ని ఏర్పరచవచ్చును. ఇదే పద్ధతిలో అపరిమితంగా కొనసాగించిన చతురస్ర వైశాల్యముల మొత్తము మరియు చతురస్ర చుట్టుకొలతల మొత్తమును కనుగొనుము.



పటం.2.15

ఉదాహరణ 2.51 $5 + 55 + 555 + \cdots$ అను శ్రేణి యొక్క n పదాల మొత్తమును కనుగొనుము.

సాధన ఇవ్వబడిన శ్రేణి అంకశ్రేణి కాదు, గుణశ్రేణి కాదు. కావున దీనిని రెండు శ్రేణులుగా విడదీసి మొత్తమును కనుగొంటాము.

$$5 + 5 + 555 + \cdots + n \text{ పదాలు} = 5\,[1 + 11 + 111 + \cdots + n \text{ పదాలు}]$$

$$= \frac{5}{9}[9 + 99 + 999 + \cdots + n \text{ పదాలు}]$$

$$= \frac{5}{9}[(10-1) + (100-1) + (1000-1) + \cdots + n \text{ పదాలు}]$$

$$= \frac{5}{9}[(10 + 100 + 1000 + \cdots + n \text{ పదాలు}) - n]$$

$$= \frac{5}{9}\left[\frac{10(10^n - 1)}{(10-1)} - n\right] = \frac{50(10^n - 1)}{81} - \frac{5n}{9}$$

ప్రగతి శోధన

1. $3+33+333+\ldots..$ అనేది గుణశ్రేడిలో కలదా?

2. $1 + r + r^2 + r^3\ldots = \dfrac{3}{4}$ అయిన r విలువ ___

ఉదాహరణ 2.52 $1 + 6 + 6^2 + \cdots + 6^n > 5000$ అయిన కనీస ధనపూర్ణ సంఖ్య 'n' ను కనుగొనుము.

సాధన ఎన్ని కనిష్ఠ పదములను కూడిన మొత్తము 5000 ను దాటును అని గమనించవలెను.

కనుగొనవలసిన కనీస విలువ n కావున $S_n > 5000$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r-1} = \frac{1(6^n - 1)}{6-1} = \frac{6^n - 1}{5}$$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_2.indd 77 11-02-2023 17:51:17

$S_n > 5000$ నుండి $\frac{6^n - 1}{5} > 5000$

$6^n - 1 > 25000$ నుండి $6^n > 25001$

కావున, $6^5 = 7776$ మరియు $6^6 = 46656$

$1 + 6 + 6^2 + \cdots + 6^n > 5000$. లో n యొక్క కనీస ధనపూర్ణసంఖ్య 6.

ఉదాహరణ 2.53 ఒక వ్యక్తి ప్రతి సంవత్సరము ముందు సంవత్సరము పొదుపు చేసిన దానిలో సగము పొదుపు చేయును. 6 సంవత్సరములలో ₹ 7875 పొదుపు చేసిన మొదటి సంవత్సరములో చేసిన పొదుపును కనుగొనుము.

సాధన 6 సంవత్సరములలో పొదుపు చేసిన మొత్తము $S_6 = 7875$

వ్యక్తి ముందు సంవత్సరము పొదుపు చేసిన దానిలో సగము ప్రతి సంవత్సరము పొదుపు చేసిన

మనకు $r = \frac{1}{2} < 1$

$$\frac{a\left(1 - r^n\right)}{1 - r} = \frac{a\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6\right]}{1 - \frac{1}{2}} = 7875$$

$$\frac{a\left[1 - \frac{1}{64}\right]}{\frac{1}{2}} = 7875 \text{ నుండి } a \times \frac{63}{32} = 7875$$

$$a = \frac{7875 \times 32}{63} \text{ కావున, } a = 4000$$

మొదటి సంవత్సరము చేసిన పొదుపు ₹ 4000.

అభ్యాసము 2.8

1. గుణశ్రేడి యొక్క n పదాల మొత్తమును కనుగొనుము. (i) $5, -3, \frac{9}{5}, -\frac{27}{25}, \ldots$ (ii) $256, 64, 16, \ldots$
2. గుణశ్రేడి యొక్క మొదటి 6 పదముల మొత్తమును కనుగొనుము. $5, 15, 45, \ldots$
3. ఒక గుణశ్రేడిలోని సామాన్య నిష్పత్తి 5 మరియు మొదటి 6 పదముల మొత్తము 46872 అయిన మొదటి పదమును కనుగొనుము.
4. గుణశ్రేడి యొక్క అనంత పదముల మొత్తమును కనుగొనుము. (i) $9 + 3 + 1 + \cdots$ (ii) $21 + 14 + \frac{28}{3} + \cdots$
5. ఒక గుణశ్రేడిలోని మొదటి పదము 8 మరియు అనంత పదముల మొత్తము $\frac{32}{3}$ అయిన సామాన్య నిష్పత్తిని కనుగొనుము.
6. కింద ఇవ్వబడిన శ్రేణులకు n పదముల మొత్తమును కనుగొనుము.
   (i) $0.4 + 0.44 + 0.444 + \cdots$ n పదముల వరకు (ii) $3 + 33 + 333 + \cdots$ n పదముల వరకు
7. $3 + 6 + 12 + \cdots + 1536$ అను గుణశ్రేణి యొక్క మొత్తమును కనుగొనుము.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_2.indd 78 11-02-2023 17:51:19

8. కుమార్ తన నాలుగు స్నేహితులకు ఉత్తరం వ్రాయును. మరియు తన స్నేహితులను వారు ఒక్కొక్కరు నాలుగు వేర్వేరు స్నేహితులకు ఉత్తరం వ్రాయమని మరియు ఈ కృత్యము కొనసాగించమని తెలిపెను. ఈ కృత్యము కొనసాగుతూ పోవును. ఒక ఉత్తరానికి అయ్యే ఖర్చు ₹2 అయిన 8 దశల వరకు ఉత్తరములు పంపుటకు అగు ఖర్చును కనగొనుము.

9. $0.\overline{123}$ యొక్క అకరణీయ రూపమును కనుగొనుము.

10. $S_n = (x+y)+(x^2+xy+y^2)+(x^3+x^2y+xy^2+y^3)+\cdots n$ పదములు అయిన $(x-y)S_n = \left[\frac{x^2(x^n-1)}{x-1} - \frac{y^2(y^n-1)}{y-1}\right]$ అని నిరూపించుము.

2.11 ప్రత్యేక శ్రేణులు

కొన్ని శ్రేణుల మొత్తమును స్పష్టమైన సూత్రములుగా వ్రాయగల్గిన అట్టి శ్రేణులను ప్రత్యేక శ్రేణులు అంటారు.

ఇక్కడ మనము కొన్ని ప్రత్యేక శ్రేణుల గురించి నేర్చుకొందాము.

(i) మొదటి 'n' సహజ సంఖ్యల మొత్తము

(ii) మొదటి 'n' బేసి సంఖ్యల మొత్తము

(iii) మొదటి 'n' సహజ సంఖ్యల వర్గముల మొత్తము

(iv) మొదటి 'n' సహజ సంఖ్యల ఘనముల మొత్తము

$1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$ యొక్క విలువను $(x+1)^{k+1} - x^{k+1}$ అను సమాసమును ఉపయోగించి కనుగొనవచ్చును.

2.11.1 మొదటి n సహజ సంఖ్యల మొత్తము

$1+2+3+\cdots+n$ ను కనుగొనుటకు $(x+1)^2 - x^2 = 2x+1$ అనే సమీకరణము తీసుకోవాలి

$x = 1$, అయిన $2^2 - 1^2 = 2(1)+1$

$x = 2$, అయిన $3^2 - 2^2 = 2(2)+1$

$x = 3$, అయిన $4^2 - 3^2 = 2(3)+1$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

$x = n-1$ అయిన, $n^2 - (n-1)^2 = 2(n-1)+1$

$x = n-1$ అయిన, $(n+1)^2 - n^2 = 2(n)+1$

పై సమీకరణములను కూడగా

$$\begin{aligned}(n+1)^2 - 1^2 &= 2(1+2+3+\cdots+n)+n\\ n^2+2n &= 2(1+2+3+\cdots+n)+n\\ 2(1+2+3+\cdots+n) &= n^2+n = n(n+1)\\ 1+2+3+\cdots+n &= \frac{n(n+1)}{2}\end{aligned}$$

2.11.2 మొదటి n బేసి సంఖ్యల మొత్తము

$1+3+5+\cdots+(2n-1)$

ఇది అంకశ్రేడిలో కలదు. $a = 1$, $d = 2$ మరియు $l = 2n-1$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_2.indd 79 11-02-2023 17:51:22

$$S_n = \frac{n}{2}\left[a + l\right]$$

$$= \frac{n}{2}\left[1 + 2n - 1\right]$$

$$S_n = \frac{n}{2} \times 2n = n^2$$

2.11.3 మొదటి n సహజ సంఖ్యల వర్గముల మొత్తము

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$, విలువను కనుగొనుటకు

$(x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$ అనే సమీకరణము తీసుకొనిన

$x = 1$ అయిన, $2^4 - 1^4 = 4(1)^3 + 6(1)^2 + 4(1) + 1$

$x = 2$ అయిన, $3^4 - 2^4 = 4(2)^3 + 6(2)^2 + 4(2) + 1$

$x = 3$ అయిన, $4^4 - 3^4 = 4(3)^3 + 6(3)^2 + 4(3) + 1$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$x = n-1$ అయిన, $n^4 - (n-1)^4 = 4(n-1)^3 + 6(n-1)^2 + 4(n-1) + 1$

$x = n$ అయిన, $(n+1)^4 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$

ఎడమ పక్క ఉన్న దానిని తొలగిస్తూ అన్ని సమీకరణములను కూడగా

$$(n+1)^3 - 1^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) + 3(1 + 2 + 3 + \cdots + n) + n$$

$$n^3 + 3n^2 + 3n = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) + \frac{3n(n+1)}{2} + n$$

$$3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) = n^3 + 3n^2 + 2n - \frac{3n(n+1)}{2} = \frac{2n^3 + 6n^2 + 4n - 3n^2 - 3n}{2}$$

$$3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2} = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2.11.4 మొదటి n సహజ సంఖ్యల ఘనముల మొత్తము

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$, కనుగొనుటకు $(x+1)^4 - x^4 = 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$ ను తీసుకొనిన

$x = 1$, అయిన $2^4 - 1^4 = 4(1)^3 + 4(1) + 1$

$x = 2$, అయిన $3^4 - 2^4 = 4(2)^3 + 4(2) + 1$

$x = 3$, అయిన $4^4 - 3^4 = 4(3)^3 + 6(3) + 1$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$x = n-1$, అయిన $n^4 - (n-1)^4 = 4(n-1)^3 + 4(n-1) + 1$

$x = n$, అయిన $(n+1)^4 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$

అన్ని సమీకరణములను కూడి ఎడమప్రక్క ఉన్నదాని తొలగించిన మనము పొందునది.

$$(n+1)^4 - 1^4 = 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3) + 6(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) + 4(1 + 2 + 3 + \cdots + n) + n$$

$$n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n = 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3) + 6 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4 \times \frac{n(n+1)}{2} + n$$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_2.indd 80 11-02-2023 17:51:26

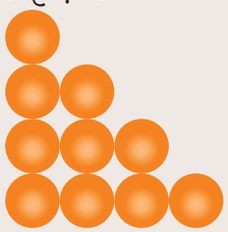
$$4(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3) = n^4+4n^3+6n^2+4n-2n^3-n^2-2n^2-n-2n^2-2n-n$$

$$4(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3) = n^4+2n^3+n^2 = n^2(n^2+2n+1) = n^2(n+1)^2$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

కృత్యము 6

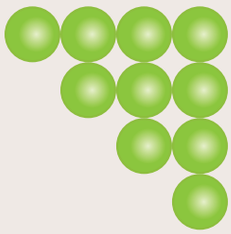
ఇలాంటి త్రిభుజమును ఒకటి తీసుకోండి.



$(1+2+3+4)$

పటం.2.16

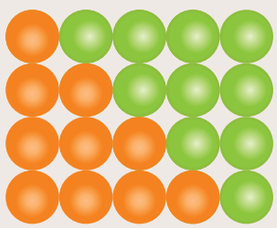
ఇదే విధంగా మరొక త్రిభుజాన్ని తీసుకొనుము.



$(4+3+2+1)$

పటం.2.17

పటము 2.16 ను 2.17 ను కలిపిన రెండవ త్రిభుజమును మొదటి త్రిభుజంతో జతవేసిన మనము పొందునది



పటం.2.18

కావున $1+2+3+4$ రెండుసార్లు చేరినప్పుడు 4×5 కొలత గల ఒక దీర్ఘచతురస్రం మనకు లభించును.

పటములో మనము చేసినది సంఖ్యలలో వ్రాసిన

$$(4+3+2+1)+(1+2+3+4) = 4\times5$$

$$2(1+2+3+4) = 4\times5$$

$$1+2+3+4 = \frac{4\times5}{2} = 10$$

ఇదే విధంగా మొదటి 5 సహజ సంఖ్యల మొత్తమును కనుగొనుము. వచ్చిన జవాబును ఏదైనా సూత్రముతో పోల్చగలవా?

మీకు తెలుసా?

1. మొదటి n సహజ సంఖ్యలను ఒక త్రిభుజాకారంలో అమర్చ వీలగును. కావున వాటి మొత్తమును త్రిభుజాకార సంఖ్యలు అంటారు.
2. మొదటి n సహజ సంఖ్యల వర్గములను చదరపు పిరమిడ్ ఆకారములో అమర్చవచ్చు. కావున వీటి మొత్తమును చతురస్ర పిరమిడ్ సంఖ్య అంటారు.

మెదడుకు మేత

1. చెస్ బోర్డు నందు ఎన్ని చతురస్రాలు కలవు?
2. చెస్ బోర్డు నందు ఎన్ని దీర్ఘచతురస్రాలు కలవు?

ఇక్కడ కొన్ని ఉపయోగకరమైన మొత్తముల సూత్రములను మనము చర్చించియున్నాము. ఈ సూత్రములు పరిమత పదాలు గల సమస్యలను సాధించుటకు ఉపయోగపడును.

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = 1+2+3+\cdots+(2n-1) = n^2$$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_2.indd 81 11-02-2023 17:51:28

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

ఉదాహరణ 2.54 కింది శ్రేణుల మొత్తమును కనుగొనుము.

(i) $1 + 2 + 3 + \ldots + 50$ (ii) $16 + 17 + 18 + \ldots + 75$

సాధన (i) $1 + 2 + 3 + \cdots + 50$

$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ను ఉపయోగించి

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 50 = \frac{50 \times (50+1)}{2} = 1275$$

(ii) $16 + 17 + 18 + \cdots + 75 = (1 + 2 + 3 + \cdots + 75) - (1 + 2 + 3 + \cdots + 15)$

$$= \frac{75(75+1)}{2} - \frac{15(15+1)}{2}$$

$$= 2850 - 120 = 2730$$



ప్రగతి శోధన

1. మొదటి n సహజ సంఖ్యల ఘనముల మొత్తము మొదటి సహజ సంఖ్యల మొత్తానికి _____ గా ఉండును.
2. మొదటి 100 సహజసంఖ్యల సరాసరి _____.

ఉదాహరణ 2.55 కింది శ్రేణుల మొత్తమును కనుగొనుము (i) $1 + 3 + 5 + \cdots$ 40 పదాలు వరకు

(ii) $2 + 4 + 6 + \cdots + 80$ (iii) $1 + 3 + 5 + \cdots + 55$

సాధన (i) $1 + 3 + 5 + \cdots 40$ పదాలు $= 40^2 = 1600$

(ii) $2 + 4 + 6 + \cdots + 80 = 2(1 + 2 + 3 + \cdots + 40) = 2 \times \frac{40 \times (40+1)}{2} = 1640$

(iii) $1 + 3 + 5 + \cdots + 55$

ఇక్కడ పదముల సంఖ్య ఇవ్వలేదు. కావున మనము పదముల సంఖ్యను $n = \frac{(l-a)}{d} + 1$ నుండి $n = \frac{(55-1)}{2} + 1 = 28$ అను సూత్రమును ఉపయోగించి కనుగొనవచ్చును.

కావున, $1 + 3 + 5 + \cdots + 55 = (28)^2 = 784$

ఉదాహరణ 2.56 కింది శ్రేణుల మొత్తము కనుగొనుము. (i) $1^2 + 2^2 + \cdots + 19^2$

(ii) $5^2 + 10^2 + 15^2 + \cdots + 105^2$ (iii) $15^2 + 16^2 + 17^2 + \cdots + 28^2$

సాధన (i) $1^2 + 2^2 + \cdots + 19^2 = \frac{19 \times (19+1)(2 \times 19+1)}{6} = \frac{19 \times 20 \times 39}{6} = 2470$

(ii) $5^2 + 10^2 + 15^2 + \cdots + 105^2 = 5^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 21^2)$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_2.indd 82 11-02-2023 17:51:31

$$= 25 \times \frac{21 \times (21+1)(2 \times 21+1)}{6}$$

$$= \frac{25 \times 21 \times 22 \times 43}{6} = 82775$$

(iii) $15^2 + 16^2 + 17^2 + \cdots + 28^2 = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 28^2) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 14^2)$

$$= \frac{28 \times 29 \times 57}{6} - \frac{14 \times 15 \times 29}{6} = 7714 - 1015 = 6699$$



అనువైన స్నేహము

220 మరియు 284 సంఖ్యలను తీసుకొనిన.

220 యొక్క భాజకముల మొత్తము (220ను మినహాయించి) =1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=254.

284 యొక్క భాజకముల మొత్తము (284 ను వినహాయించి) =1+2+4+71+142=220.

కనుక ఒక సంఖ్య యొక్క భాజకముల మొత్తము ఆ సంఖ్య వినహాయించి మరొక సంఖ్య వచ్చిన ఆ సంఖ్యల జతను స్నేహ సంఖ్యలు అంటారు.

220 మరియు 284 లు అతి కనిష్ఠ స్నేహ సంఖ్యల జత అగును. దీనిని మొట్టమొదట పైథాగరస్ కనుగొనెను. ఇటువంటి స్నేహసంఖ్యలు 12 మిలియన్లకు కన్నా ఎక్కువగా కలదు.

ఉదాహరణ 2.57 కింది శ్రేణుల మొత్తమును కనుగొనుము. (i) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 16^3$

(ii) $9^3 + 10^3 + \cdots + 21^3$

సాధన (i) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 16^3 = \left[\frac{16 \times (16+1)}{2}\right]^2 = (136)^2 = 18496$

(ii) $9^3 + 10^3 + \cdots + 21^3 = (1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 21^3) - (1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 8^3)$

$$= \left[\frac{21 \times (21+1)}{2}\right]^2 - \left[\frac{8 \times (8+1)}{2}\right]^2 = (231)^2 - (36)^2 = 52065$$

ఉదాహరణ 2.58 $1 + 2 + 3 + \cdots + n = 666$ అయిన n విలువను కనుగొనుము.

సాధన ఇక్కడ, $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, మనకు $\frac{n(n+1)}{2} = 666$

$n^2 + n - 1332 = 0$ నుండి $(n + 37)(n - 36) = 0$

$n = -37$ లేక $n = 36$

$n \neq -37$ ($\because n$ సహజ సంఖ్య); కాబట్టి $n = 36$.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_2.indd 83 11-02-2023 17:51:34

ప్రగతిశోధన

సరియా (లేక) తప్పా అని తెల్పి కారణమిమ్ము

1. మొదటి n బేసి సంఖ్యల మొత్తము ఎల్లప్పుడూ ఒక బేసి సంఖ్య అగును.
2. వరుస సరిసంఖ్యల మొత్తము ఎల్లప్పుడూ ఒక సరిసంఖ్య అగును.
3. మొదటి సహజసంఖ్యల వర్గముల మొత్తము మరియు మొదటి n సహజసంఖ్యల మొత్తము మధ్యగల భేదము ఎల్లప్పుడూ 2తో భాగించబడును.
4. మొదటి n సహజ సంఖ్యల ఘనముల మొత్తము ఎల్లప్పుడూ ఒక వర్గ సంఖ్య అగును.

అభ్యాసము 2.9

1. కింది శ్రేణుల మొత్తమును కనుగొనుము.
   (i) $1+2+3+\cdots+60$ (ii) $3+6+9+\cdots+96$ (iii) $51+52+53+\cdots+92$
   (iv) $1+4+9+16+\cdots+225$ (v) $6^2+7^2+8^2+\cdots+21^2$
   (vi) $10^3+11^3+12^3+\cdots+20^3$ (vii) $1+3+5+\cdots+71$
2. $1+2+3+\cdots+k=325$, అయిన $1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3$ విలువను కనుగొనుము.
3. $1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=44100$ అయిన $1+2+3+\cdots+k$ విలువను కనుగొనుము.
4. $1^3+2^3+3^3+\cdots$ ల వరుసలో ఎన్ని పదములు కూడిన మొత్తం 14400 వచ్చును?
5. మొదటి n సహజ సంఖ్యల వర్గముల మొత్తము 285, మొదటి n సహజ సంఖ్యల ఘనముల మొత్తము 2025 అయిన n విలువను కనుగొనుము.
6. రేఖ వద్ద 15 సెం.మీ, 11సెం.మీ, 12సెం.మీ .... 24సెం.మీ కొలతలు గల 15 చతురస్రాకార రంగు కాగితములు కలవు. ఆ రంగు కాగితములను ఉపయోగించి ఎంత వైశాల్యమును అలంకరించవచ్చును?
7. $(2^3-1)+(4^3-3^3)+(6^3-15^3)+\cdots$ శ్రేణుల మొత్తమును
   (i) n పదాల వరకు (ii) 8 పదాల వరకు కనుగొనుము.

అభ్యాసము 2.10

బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు

1. యూక్లిడ్ భాగహార నియమము ప్రకారం a మరియు b అనే ధనపూర్ణసంఖ్యలకు ఏదైనా పూర్ణసంఖ్యలు q మరియు r, $a=bq+r$ గా అమరిన ఇక్కడ r అనునది
   (A) $1<r<b$ (B) $0<r<b$ (C) $0\le r<b$ (D) $0<r\le b$
2. యూక్లిడ్ భాగహార నియమాన్ని ఉపయోగించి ఏదైనా ధనపూర్ణసంఖ్య ఘనము 9 చే భాగించిన ఈ కింది శేషములు ఏర్పడుటకు అవకాశాలు కలవు
   (A) 0, 1, 8 (B) 1, 4, 8 (C) 0, 1, 3 (D) 1, 3, 5
3. 65 మరియు 117 యొక్క గ.సా.భాను $65m-117$ గా వ్రాసిన m విలువ
   (A) 4 (B) 2 (C) 1 (D) 3

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_2.indd 84 11-02-2023 17:51:36

4. 1729 ను ప్రధాన కారణాంక పద్ధతిలో కారణాంకపరచినపుడు ఆ ప్రధానకారణాంకము ఘాతముల మొత్తము

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

5. 1 నుండి 10 వరకు గల (రెండు సంఖ్యలతో సహా) అన్ని సంఖ్యలతో భాగించబడు మిక్కిలి చిన్న సంఖ్య

(A) 2025 (B) 5220 (C) 5025 (D) 2520

6. $7^{4k} \equiv$_____ (మాపము 100)

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

7. $F_1 = 1$, $F_2 = 3$ మరియు $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ గా ఇవ్వబడినది అయితే F_5 విలువ

(A)3 (B)5 (C)8 (D)11

8. ఒక అంకశ్రేడిలోని మొదటి పదము ఒకటి మరియు సామాన్యభేదము 4 అయిన కింది వానిలో ఏవి అంకశ్రేడిలో గలవు?

(A) 4551 (B) 10091 (C) 7881 (D) 13531

9. ఒక అంకశ్రేడిలోని మొదటి పదము 6 రెట్లు మరియు 7వ పదము 7 రెట్లకు సమానమైన అంకశ్రేడిలోని 13వ పదము

(A) 0 (B) 6 (C) 7 (D) 13

10. ఒక అంకశ్రేడిలో 31 పదాలు కలవు. దానిలో 16వ పదము m అయిన అంకశ్రేడిలో గల అన్ని పదముల మొత్తము

(A) 16 m (B) 62 m (C) 31 m (D) $\frac{31}{2}$ m

11. ఒక అంకశ్రేడిలో మొదటిపదము 1 మరియు సామాన్య భేదము 4 అయిన పదముల మొత్తము 120 అగుటకు ఎన్ని పదములను కూడవలెను?

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9

12. $A = 2^{65}$ మరియు $B = 2^{64} + 2^{63} + 2^{62} + \ \ + 2^0$ అయిన కిందివానిలో ఏది సత్యం?

(A) B అనేది A కన్నా 2^{64} ఎక్కువ (B) A మరియు B సమానము

(C) B అనునది A కంటె 1 ఎక్కువ (D) A అనునది B కంటే 1 ఎక్కువ

13. $\frac{3}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}, \frac{1}{18}, \cdots$ అనే శ్రేణిలో తరువాతి పదము

(A) $\frac{1}{24}$ (B) $\frac{1}{27}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{1}{81}$

14. $t_1, t_2, t_3, \ldots$ అనునది అంకశ్రేడిలో ఉన్న $t_6, t_{12}, t_{18}, \ldots$ అనునవి ఏ శ్రేణిలో గలదు?

(A) గుణశ్రేడి (B) అంకశ్రేడి (C) అంకశ్రేణి కాదు (D) గుణశ్రేడి కాదు

15. $(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 15^3) - (1 + 2 + 3 + \cdots + 15)$ యొక్క విలువ

(A) 14400 (B) 14200 (C) 14280 (D) 14520

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_2.indd 85 11-02-2023 17:51:37

అధ్యాయ అభ్యాసము - 2



1. ప్రతి ధనపూర్ణసంఖ్య n కు $n^2 - n$ అనునది 2తో భాగించునని నిరూపించుము
2. ఒక పాల వ్యాపారి వద్ద 175 లీటర్ల ఆవుపాలు మరియు 105 లీటర్ల గేదెపాలు కలదు. వ్యాపారి రెండింటిని ఒకే ఘనపరిమాణం గల క్యాన్‌లలో నింపి అమ్మదలచెను అయితే కింది వానిని కనుగొనుము.
   (i) క్యాన్ ఘనపరిమాణం (ii) ఆవు పాలు గల క్యాన్‌ల సంఖ్య (iii) గేదె పాలు గల క్యాన్‌ల సంఖ్య
3. a, b మరియు c అనే ధనపూర్ణసంఖ్యలను 73చే భాగించిన వచ్చు శేషములు 9, 7 మరియు 10 అయిన $a + 2b + 3c$ ను 13తో భాగించగా వచ్చు శేషమును కనుగొనుము.
4. 107 ను $4q + 3$, q అనేది ఏదేని ఒక పూర్ణసంఖ్య రూపంలో ఉండునని నిరూపించుము.
5. ఒక అంకశ్రేడిలోని $(m+1)$ వ పదము $(n+1)$ వ పదానికి రెట్టింపయిన $(3m+1)$ వ పదము $(m+n+1)$ వ పదానికి రెట్టింపని నిరూపించుము.
6. $-2, -4, -6, \ldots -100$ అను అంకశ్రేడిలో చివరి పదము నుండి 12 వ పదమును కనుగొనుము.
7. రెండు అంకశ్రేడిలోను ఒకే సామాన్య భేదము కల్గియున్నది. ఒక అంక శ్రేడి యొక్క మొదటి పదము 2 మరియు మరొక అంకశ్రేడి యొక్క మొదటిపదం 7. రెండు అంకశ్రేడిల 10వ పదముల మధ్య గల భేదము, 21వ పదముల మధ్య గల భేదము సమానము అని నిరూపించబడినది. ఈ భేదము ఆ అంకశ్రేడి సామాన్య భేదమునకు సమానమని నిరూపించుము.
8. ఒక వ్యక్తి 10 సంవత్సరములలో ₹16500పొదుపుచేయును. ఒక్కొక్క సంవత్సరం అతను పొదుపు చేయు మొత్తము దానికి ముందు సంవత్సరము పొదుపు చేసిన మొత్తానికి ₹100 ఎక్కువ. అతను మొదటి సంవత్సరం చేయు పొదుపు మొత్తమును కనుగొనుము.
9. గుణశ్రేడిలోని 2వ పదము $\sqrt{6}$ మరియు 6వ పదము $9\sqrt{6}$ అయిన గుణశ్రేడి రూపము కనుగొనుము.
10. ఒక మోటారు సైకిలు ధర ₹ 45,000? దాని విలువ ప్రతి సంవత్సరం 15% తగ్గుతూ ఉండును. అయిన 3 సంవత్సరములకు దాని విలువ కనుగొనుము.

గుర్తించుకోవలసిన విషయాలు

- **యూక్లిడ్ భాగహార నియమము**

  $a = bq + r$, $0 \le r < |b|$ అయ్యేవిధంగా ధనపూర్ణసంఖ్యలు a మరియు b ల జతకు అనుగుణంగా q మరియు r లు ఏకైక పూర్ణసంఖ్యలు వ్యవస్థితం అవుతాయి.

- **అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతము**

  ప్రతి సంయుక్త సంఖ్యను ప్రధానసంఖ్యల కారణాంకాల లబ్ధముగా వ్యక్తపరచవచ్చును మరియు ప్రధాన కారణాంకాల వరుస క్రమం ఏదైనప్పటికీ ఇది ఏకైకం అని నిర్వచించవచ్చును.

- **అంకశ్రేడి**

  (i) అంకశ్రేడి రూపము $a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d, \ldots$ లో n^{th} పదము $t_n = a + (n-1)d$

  (ii) అంకశ్రేడిలో మొదటి n పదాల మొత్తము $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

  (iii) అంకశ్రేడిలోని చివరి పదము l (n వ పదము) అయిన n^{th} పదాల మొత్తము $S_n = \frac{n}{2}[a + l]$)

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_2.indd 86 11-02-2023 17:51:39

- **గుణశ్రేడి**

(i) గుణశ్రేడి రూపము $a,\ ar,\ ar^2,\ldots,ar^{n-1}$ లో n వ పదము $t_n = ar^{n-1}$

(ii) గుణశ్రేడిలోని n పదాల మొత్తము $S_n = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$ $r \neq 1$ అయిన

(iii) $r=1$ అయిన $S_n = na$ అగును.

(iv) గుణశ్రేడిలోని అనంత పదముల $a + ar + ar^2 + \cdots$ $S_\infty = \dfrac{a}{1-r}$ అయిన $-1 < r < 1$

- **ప్రత్యేక శ్రేడులు**

(i) మొదటి n సహజసంఖ్యల మొత్తము $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

(ii) మొదటి n సహజ సంఖ్యల వర్గముల మొత్తము $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(iii) మొదటి n సహజ సంఖ్యల ఘనముల మొత్తము $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

(iv) మొదటి n బేసి సహజ సంఖ్యల మొత్తము $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$

అంతర్జాల కృత్యము

ICT 2.1

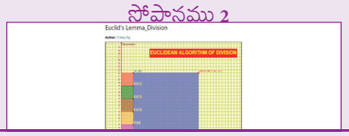
సోపానము 1: బ్రౌజర్‌ను ఓపెన్ చేసి కింద ఇవ్వబడిన URL లింకును టైపు చేయుము లేదా QR కోడ్‌ను స్కాన్ చేయుము. **"Numbers and Sequences"** వర్క్‌బుక్ నందు 'సంఖ్యలు మరియు క్రమానుగత వరుసలు' వర్క్‌బుక్‌లో ఎడమప్రక్క ఓపెన్ అగును. అందులో క్షేత్రగణితం గూర్చి ఎక్కువ కృత్యములు ఉండును. దానిలో యూక్లిడ్ భాగహార నియమమును ఎంపికచేయుము.

సోపానము 2: ఇచ్చిన వర్క్‌షీటు నందు పేర్కొన్న పాయింటును క్లిక్ చేయుము. అందులో కొత్త బిందువుల సమితి ఉండును. ఇప్పుడు నీవు పుస్తకము నుండి నేర్చుకొన్న యూక్లిడ్ భాగహార నియమమును పోల్చుము.

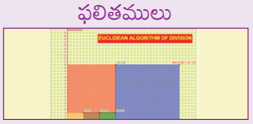
సోపానము 1



సోపానము 2



ఫలితములు

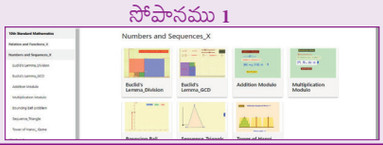


ICT 2.2

సోపానము 1: బ్రౌజర్‌ను ఓపెన్ చేసి కిందనివ్వబడిన URL లింక్‌ను టైపు చేయుము. లేదా QR కోడ్‌ను స్కాన్ చేయుము. **"Numbers and Sequences"** వర్క్‌బుక్ నందు సంఖ్యలు మరియు క్రమానుగత వరుసలు వర్క్‌బుక్‌లో ఎడమ ప్రక్క ఓపెన్ అగును. అందులో క్షేత్రగణితం గూర్చి ఎక్కువ కృత్యములు ఉండును. దానిలో **"Bouncing Ball Problem"** ను ఎంపిక చేయుము.

సోపానము 2:ఇచ్చిన వర్క్‌షీటు నందు bounces సంఖ్యను కొత్త విలువ **"Get Ball"** క్లిక్ చేయుము. కొత్త విలువలు ఇచ్చే కొద్ది బాల్‌బౌన్స్ అవుతూ ఉండును. కుడిపక్క గల శ్రేణుల మొత్తమును నేర్చుకొందాము.

సోపానము 1



సోపానము 2



ఫలితములు



You can repeat the same steps for other activities

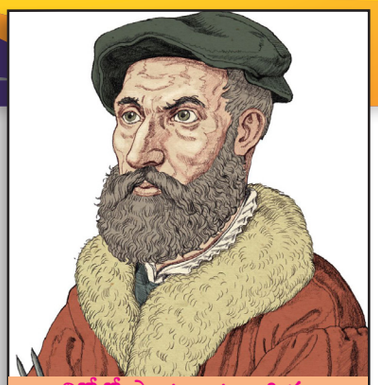
https://www.geogebra.org/m/jfr2zzgy#chapter/356192
or Scan the QR Code.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_2.indd 87 11-02-2023 17:51:41

3

బీజగణితము

"$x^2 - 92y^2 = 1$ అను సమీకరణమునకు ఒక సంవత్సరంలోపల సాధన కనుగొనువారే గణితశాస్త్రవేత్త గా పిలువబడుచున్నది- బ్రహ్మపుత్ర



నికోలో ఫాంటనా టార్టాగ్లియా
1499/1500 – 1557 AD(CE)

నికోలో ఫాంటనా టార్టాగ్లియా ఒక ఇటలీ దేశానికి చెందిన గణితశాస్త్రవేత్త. ఇతను ఇంజనీరు, సర్వేయరు మరియు స్వతంత్ర వెన్నిస్ (ప్రస్తుత ఇటలీ) నందు పుస్తక సంరక్షకుడు (bookkeeper), ఇతడు ఇటలీ దేశమునకు చెందిన ఆర్క్‌మిడిస్ మరియు యూక్లిడ్ పుస్తకములను ఇటలీ భాషలలో అనువాదం చేశెను. ఇతను అనేక ముఖ్య గణిత పుస్తకములను ప్రచురించెను. గణితసంగ్రహణములతోకూడిన మెచ్చుకోతగిన అనేక పుస్తకములను ప్రచురించెను. టార్టాగ్లియా ఫిరంగి గుండ్లు దూసుకుపోయే మార్గమును కనుగొనుటకు గణిత భావనలను వినియోగించిన ప్రధమ వ్యక్తి. తర్వాత కాలములో గెలీలియో చేపట్టిన పైనుండి క్రిందపడు వస్తువులు గూర్చి పరిశోధన టార్టాగ్లియా యొక్క పరిశోధనలు బల పరచబడినవి.

"టార్టాగ్లియా" కార్డ్‌నోలు ఇరువురు కలిసి అంతస్తు మూడు కలిగిన అనగా త్రిఘాత సమీకరణముల సమస్యలకు సాధనలు కనుగొనిరి. ఇతను చతుర్ముఖి ఘనపరిమాణము కనుగొనుటకు ఒక చక్కటి సూత్రమును వాటి నాలుగు శీర్షములకు మధ్య గల దూరము ఉపయోగించి లెక్కించు ప్రత్యేకమైన సూత్రమును తెలియుచేసెను.

అభ్యసన ఫలితములు

- మూడు చలరాశులు కలిగిన రేఖీయ సమీకరణముల వ్యవస్థను తొలగించు పద్ధతి ద్వారా సాధించుట.
- బహుపద సమాసములకు గ.సా.భా మరియు క.సా.గు. లను కనుగొనుట.
- బీజగణిత అకరణీయ సమాసములను సూక్ష్మీకరించుట.
- బహుపద సమాసములకు వర్గమూలములను కనుగొనుట మరియు అర్థము చేసుకొనుట.
- వర్గ సమీకరణమును గూర్చి తెలుసుకొనుట.
- వర్గ సమీకరణములకు రేఖా చిత్రామును గీయుట.
- మాత్రికలు, వాటి రకములు మరియు వాటి పరిక్రియలు గూర్చి అభ్యసించుట.

3.1 పరిచయము

బీజగణితము అనునది సంఖ్యలు గూర్చి అభ్యసించుటలో తరువాత దశగా పరిగణించబడుచున్నది. మనము కొన్ని ప్రత్యేక నియమములను అనుసరించి ఏదైనా కనుగొనుటకు, మనకు బీజగణితం ఆవశ్యమగుచున్నది. అనగా బీజగణిత అభ్యసన "తెలియనివాటిని కనుగొను విజ్ఞానశాస్త్రం"గా పరిగణించబడుతున్నది. మూడవ శతాబ్దమునందు జీవించిన అలెగ్‌జాండ్రియాకు చెందిన ఢియో ఫాంటస్ రచించిన "అరిత్ మేటికా" అను చారిత్రాత్మక పుస్తకము నందలి 13 అధ్యాయములలో ఆరు అధ్యాయములు మాత్రమే మిక్కిలి ప్రసిద్ధి గాంచియున్నది. ఇది ఇవ్వబడిన నిబంధనలకు తగినట్లుగా సమస్యలను సమీకరణ రూపంలో కలిగిన మొట్టమొదటి పుస్తకము

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 88 26-02-2023 14:32:55

మరియు ఆ సమీకరణములకు తగినట్లు సాధించబడియున్నది. ధియో ఫాంటస్ అనేక నిజజీవిత పరిస్థితుల సమస్యలకు తీసుకొను చలరాశులు సాధారణంగా ధనాత్మక సంఖ్యలుగా ఉండటను గ్రహించెను.

(బీజగణితము) "Algebra" అను పదము 'al-jabr" అను పదము నుండి రూపాంతరం చెంది వచ్చినది. ఇది Al-Khwarizmi 9వ శతాబ్దమునకు చెందిన ఆల్ క్వారిజిమి అను పారశీక గణిత శాస్త్రవేత్త వ్రాసిన అల్–కితాబ్–అల్. ముక్తసర్షి హిసాబ్ అల్– జభీర్ వాల్ము ఖాబూలా(పూర్తిచేయు మరియు సమన్వయములపై గణించు సంగ్రహమైన పుస్తకము) నుండి జభీర్ అను పదము గ్రహింపబడినది. అప్పటి నుండి అల్ క్వేర్‌మి యొక్క అల్ జాభర్ పుస్తకము సమీకరణములను సాధించుటకు అత్యంత అనువైన పద్ధతులు కలిగియుండుటచే అతనిని "బీజగణిత పితామహుడు"గా పేర్కొందురు.

మునుపటి తరగతుల యందు, మనము బీజగణితమందలి అనేక భావనలు గూర్చి చదివియున్నాము. ఈ తరగతియందు సమస్యలను పరిష్కరించుటకు దోహదము చేయు అధిక ఆస్కారము గల ఇతర ముఖ్యమైన భావనలను తెలుసుకొనుటకు ప్రయాణమును కొనసాగిద్దాం. ఈ భావనలను అర్థం చేసుకొనుట వలన పై తరగతులలో ఉన్నత గణిత భావనలను నేర్చుకొనుటకు చాలా దోహదపడును.

రెండు చలరాశులు కలిగిన సమకాలిక ఏక ఘాత సమీకరణములు

మనము రెండు చలరాశులు కలిగిన ఒక జత సమకాలిక ఏక ఘాత సమీకరణము సాధించుటను జ్ఞప్తికి తెచ్చుకొందాము.

నిర్వచనము

రెండు చలరాశులు కలిగిన ఏక ఘాత సమీకరణము

ఒకటిని అంతస్తుగా కలిగిన x మరియు y అను రెండు చలరాశులు గల సమీకరణమును రెండు చలరాశులు గల ఏకఘాత సమీకరణం అని అందురు. x మరియు y అను రెండు చలరాశులు గల ఏకఘాత సమీకరణము యొక్క సాధారణ రూపము $ax+by+c = 0$ ఇచ్చట a, b నందు కనీసము ఏదేని ఒకటి శూన్యేతరము మరియు a, b, c లు వాస్తవ సంఖ్యలు.

గమనిక: ఏక ఘాత సమీకరణాలు నందు ఇవ్వబడిన చలరాశుల ఒక అంతస్తు సమీకరణం అని చెప్పవచ్చును.

సూచన

- $xy - 7 = 3$ అనునది రెండు చలరాశులు కలిగిన ఏకఘాతసమీకరణము కాదు ఎందుకనగా xy పదము యొక్క అంతస్తు (పరిమాణము) 2
- రెండు చలరాశులు కలిగిన ఏకఘాత సమీకరణమును xy తలము నందు ఒక సరళరేఖను సూచించును.

ఉదాహరణ 3.1 తండ్రి వయస్సు అతని కొడుకు వయస్సు కంటే ఆరు రెట్లు ఉన్నది. 6 సంవత్సరములకు తర్వాత అతని తండ్రి వయస్సు కొడుకు వయస్సు కంటే నాలుగు రెట్లు ఉండును. తండ్రి మరియు కొడుకుల ప్రస్తుత వయస్సు సంవత్సరములలో కనుగొనుము.

సాధన తండ్రి యొక్క ప్రస్తుత వయస్సు x సంవత్సరములుగా మరియు

కొడుకు యొక్క ప్రస్తుత వయస్సు y సంవత్సరములుగా తీసుకొనిన

ఇవ్వబడినది, $x = 6y$ … (1)

$x + 6 = 4(y + 6)$ … (2)

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 89 26-02-2023 14:32:55

(1) ను (2) లో ప్రతిక్షేపించగా, $6y + 6 = 4\left(y + 6\right)$

$6y + 6 = 4y + 24$, $y = 9$ లభించును.

కనుక కొడుకు ప్రస్తుత వయస్సు = 9 సం॥లు. మరియు తండ్రి ప్రస్తుత వయస్సు = 54 సం॥లు

ఉదాహరణ 3.2 $2x - 3y = 6$, $x + y = 1$ లను సాధించుము.

సాధన

$2x - 3y = 6$ ... (1)

$x + y = 1$ ... (2)

(1) $\times$ 1, $2x - 3y = 6$

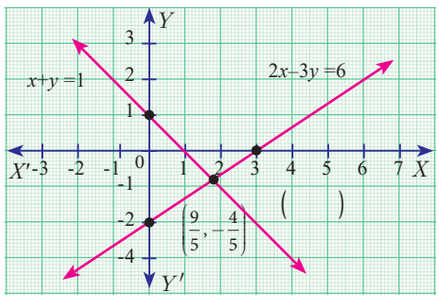
(2) $\times$ 2, $2x + 2y = 2$

$-5y = 4$, $y = \frac{-4}{5}$ లభించును.

$y = \frac{-4}{5}$ ను (2)లో ప్రతిక్షేపించగా $x - \frac{4}{5} = 1$

$x = \frac{9}{5}$ లభించును.

కనుక, $x = \frac{9}{5}$, $y = \frac{-4}{5}$.



పటం. 3.1

3.2 మూడు చలరాశులు కలిగిన సమకాలిక ఏకఘాత సమీకరణములు



పటం. 3.2

సూపర్ మార్కెట్ నందు వేరువేరు వస్తువులను కొనుటకు, మొత్తం సొమ్మును లెక్కించుటకు, ప్రత్యేక సందర్భములలో వ్యక్తుల వయసులను కనుగొనుటకు, పైకి విసరబడిన వస్తువు యొక్క దారిని కనుగొనుటకు బీజగణితము మన దైనందిన జీవితంలో ఒక ముఖ్యమైన పాత్ర వహించుచున్నది.

అంతరిక్షము నందు గల ఏదేని ఒక బిందువు దాని యొక్క అక్షాంశం మరియు దీర్ఘాంశం మరియు లంబపుటెత్తుల ద్వారా కనుగొనవచ్చును. కావున భూమి ఎందుకలా ఒక నిర్దిష్టమైన ప్రదేశంలో అమరియుండు ఒక వస్తువు యొక్క స్థితిని గుర్తించుటకు మూడు ఉపగ్రహములు స్థానము నుండి మూడు సమీకరణములు లభించును. ఈ మూడు సమీకరణములు నుండి రెండు ఏకఘాత సమీకరణాలు మరియు ఒక దిఘాత సమీకరణం వచ్చును. కావున సూచించిన సమయంలో ఒక వస్తువు అమరియున్న చోటును సరిగ్గా తెలుసుకొనుటకు మనకు అక్షాంశం, దీర్ఘాంశం మరియు లంబపుటెత్తు విలువలను సమీకరణలను సాధించుట ద్వారా కనుగొనవచ్చును. ఇది Geo-Positioning System (GPS) భూస్థాన వ్యవస్థ కనుక GPS నందు మూడు చలరాశులు కలిగిన ఏక ఘాత సమీకరణాలు అను భావనను ఉపయోగించుకున్నారని తెలుసుకొనవచ్చును.

3.2.1 మూడు చలరాశులు కలిగిన రేఖీయ సమీకరణాల వ్యవస్థ

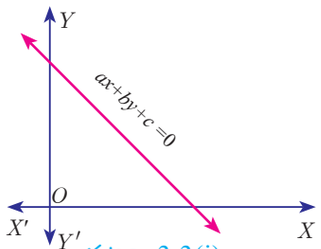
ముందు తరగతిలో మనము రెండు చలరాశులు కలిగిన సమకాలిక రేఖీయ సమీకరణాలను సాధించుట గురించి నేర్చుకొనియున్నాము. ఇచ్చట x, y మరియు z అను మూడు చలరాశులు కలిగిన రేఖీయ సమీకరణాలు

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 90 26-02-2023 14:32:57

సాధించుట గూర్చి తెలుసుకొనబోవుచున్నాము. x, y మరియు z అను మూడు చలరాశులను కలిగిన రేఖీయ సమీకరణాల యొక్క సాధారణ రూపము $ax + by + cz + d = 0$ ఇచ్చట a, b, c, d అనునవి వాస్తవ సంఖ్యలు మరియు ఇందులో ఏదేని ఒకటి శూన్యేతరముగా ఉండును.

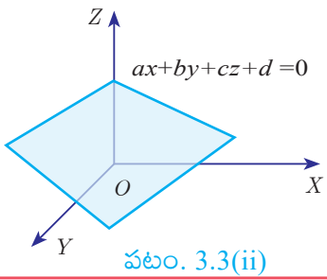
సూచన

➢ రెండు చలరాశులు కలిగిన రేఖీయ సమీకరణ రూపము $ax + by + c = 0$, ఒక సరళరేఖను సూచించును.



పటం. 3.3(i)

➢ మూడు చలరాశులు కలిగిన రేఖీయ సమీకరణ రూపము $ax + by + cz + d = 0$, ఒక తలమును సూచించును..



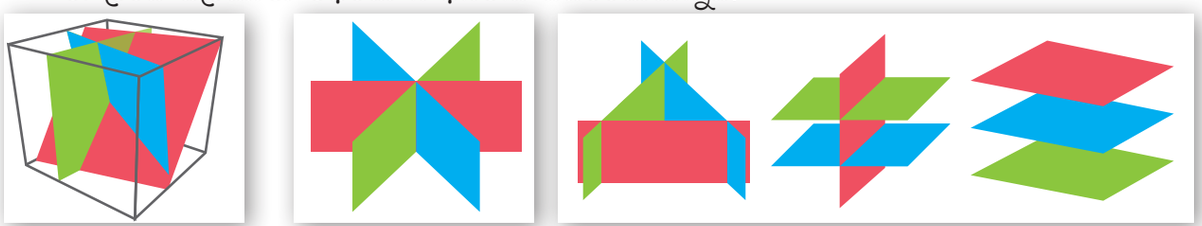
పటం. 3.3(ii)

సాధారణ రూపము : x, y, z అను మూడు చలరాశులు కలిగిన ఏకఘాత సమీకరణముల సాధారణ రూపము.

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$
$$a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0$$

ప్రతి సమీకరణము తలమునందలి త్రిపరిమాణమును సూచించును మరియు మూడు సమీకరణముల సాధనలు అనునవి ఖచ్చితంగా మూడు తలముల అనుషక్త బిందువుగా నుండును. ఈ సమీకరణములు ఒకే ఒక సాధన, అనేక సాధనాలు లేక సాధనలు లేకుండుట అనునది తలములు (planes) ఒకదానికొకటి ఖండించుకొను విధానంపై ఆధారపడి యుండును.

ఈ క్రింది చిత్రములు లభించు సాధనలను వివరించుచున్నవి.



ఒకే ఒక సాధన | అనంతమైన సాధన | సాధనలు లేవు

పటం. 3.4

మూడు చలరాశులు కలిగిన రేఖీయ సమీకరణాలను సాధించు పద్ధతులు

సోపానము 1 ఇవ్వబడిన మూడు సమీకరణముల నుండి ఏదేని రెండు సమీకరణములను తీసుకొని వాటిలో మొదట శూన్యేతర స్థిరాంకం గుణించి ఒక చలరాశి యొక్క గుణకము (xలేక yలేక z) సమమగునట్లు గుణించవలెను.

సోపానము 2 సమీకరణంలో గుణకములు సమానముగా గల చలరాశులను ఏదేని ఒక దానిని తొలగించవలెను.

సోపానము 3 మరొక జత సమీకరణముల నుండి పై తొలగించిన అదే చలరాశిని తొలగించవలెను.

సోపానము 4 మనకు ఇపుడు రెండు చలరాశులు కలిగిన రెండు సమీకరణములు లభించును.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 91 26-02-2023 14:32:57

సోపానము 5 వాటిని ముందు తరగతుల యందు అభ్యసించిన ఏదేని ఒక పద్ధతి ద్వారా సాధించుము.

సోపానము 6 మిగిలిన చలరాశులను ఇవ్వబడిన సమీకరణములలో ప్రతిక్షేపించుట ద్వారా కనుగొనవచ్చును.

సూచన

- పైనున్న సోపానముల నుండి $0=1$ వంటి తప్పైన సాధన వచ్చినట్లయైన ఆ సమీకరణ వ్యవస్థకు సాధన లేదు.
- తప్పుడు సమీకరణము లభించని యెడల అనగా $0=0$ అనే సర్వ సమానత లభించిన ఆ సమీకరణమునకు అనంతమైన సాధనలు కలిగియుండును.

ఉదాహరణ 3.3 మూడు చలరాశులు కలిగిన ఈ క్రింది రేఖీయ సమీకరణాలును సాధించుము. $3x-2y+z=2$, $2x+3y-z=5$, $x+y+z=6$.

సాధన $3x-2y+z=2$ ...(1) $2x+3y-z=5$ ...(2) $x+y+z=6$ ...(3)

(1) మరియు (2) లను కూడగ,

$$\begin{array}{rl} 3x-2y+z &= 2 \\ 2x+3y-z &= 5 \quad (+) \\ \hline 5x+y &= 7 \quad \ldots(4) \end{array}$$

(2) మరియు (3) లను కూడగ,

$$\begin{array}{rl} 2x+3y-z &= 5 \\ x+y+z &= 6 \quad (+) \\ \hline 3x+4y &= 11 \quad \ldots(5) \end{array}$$

$4 \times (4)-(5)$

$$\begin{array}{rl} 20x+4y &= 28 \\ 3x+4y &= 11 \quad (-) \\ \hline 17x &= 17, \end{array}$$

$x=1$ లభించును.

$x=1$ ను (4), $5+y=7$ లో ప్రతిక్షేపించగా, $y=2$ లభించును.

$x=1$, $y=2$ లను (3), $1+2+z=6$.లో ప్రతిక్షేపించగా, $z=3$

కావున, $x=1$, $y=2$, $z=3$ అగును.

ఉదాహరణ 3.4 పాఠశాలల మధ్య జరిగే ఒక క్రీడా ప్రోటీలో 24 వ్యక్తిగత పోటీలు మొత్తము 56 బిందువులు కేటాయించబడినవి. మొదటి స్థానము పొందినవారు 5 బిందువులు, రెండవ స్థానం పొందిన వారు 3 బిందువులు మరియు మూడవ స్థానం పొందిన వారికి 1 బిందువు ఇవ్వబడును. మొదటి మరియు రెండవ స్థానం వారు పొందిన బిందువుల మొత్తము మూడవ స్థానం వారు పొందిన బిందువులకు సమానము అయిన మొదటి, రెండవ మరియు మూడవ క్రీడాకారుల సంఖ్యను కనుగొనుము..

సాధన I, II మరియు II వ్యవస్థాపనములు పొందిన వారిని క్రమముగా x, y మరియు z అని తీసుకొనిన.

మొత్తము పోటీ సంఖ్య .$=24$; మొత్తము బిందువులు $=56$.

కావున, మూడు చలరాశులు కలిగిన ఏకఘాత సమీకరణాలు

$x+y+z=24$ ...(1) $5x+3y+z=56$ ...(2) $x+y=z$ ...(3)

(1) లో (3) ను ప్రతిక్షేపించగా $z+z=24$ $z=12$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 92 26-02-2023 14:32:59

కనుక, (3) సమీకరణము, $x + y = 12$ గా మారును.

$$\begin{array}{rl} (2) \Rightarrow 5x + 3y &= 44 \\ 3\times(3) \Rightarrow 3x + 3y &= 36 \quad (-) \\ \hline 2x &= 8 \\ \hline \end{array} \qquad x = 4 \text{ అగును.}$$

$x = 4$, $z = 12$ ను (3) లో ప్రతిక్షేపించగా $y = 12 - 4 = 8$

కనుక, మొదటి స్థానం పొందిన వారి సంఖ్య 4

రెండవ స్థానమును పొందిన వారి సంఖ్య 8

మూడవ స్థానము పొందిన వారి సంఖ్య 12.

ఉదాహరణ 3.5 $x + 2y - z = 5$; $x - y + z = -2$; $-5x - 4y + z = -11$ లను సాధించుము.

సాధన $x + 2y - z = 5$ ...(1) $x - y + z = -2$ ...(2) $-5x - 4y + z = -11$ ...(3)

(1) మరియు (2) లను కూడగా,

$$\begin{array}{rl} x + 2y - z &= 5 \\ x - y + z &= -2 \quad (+) \\ \hline 2x + y &= 3 \\ \hline \end{array} \qquad \ldots(4)$$

(2) నుండి (3) ను తీసివేయగా,

$$\begin{array}{rl} x - y + z &= -2 \\ -5x - 4y + z &= -11 \quad (-) \\ \hline 6x + 3y &= 9 \\ \hline \end{array}$$

3 చే భాగించగా $2x + y = 3$ ...(5)

(4) నుండి (5) లను తీసివేయగా,

$$\begin{array}{rl} 2x + y &= 3 \\ 2x + y &= 3 \\ \hline 0 &= 0 \\ \hline \end{array}$$

ఇక్కడ మనకు సర్వసమానం $0=0$ లభించింది.

కనుక పై సమస్య అనంతమైన సాధనలు కలిగియుండును.

ఉదాహరణ 3.6 $3x + y - 3z = 1$; $-2x - y + 2z = 1$; $-x - y + z = 2$ లను సాధించుము.

సాధన $3x + y - 3z = 1$ ... (1) $-2x - y + 2z = 1$ ... (2) $-x - y + z = 2$ ...(3)

(1) మరియు (2) లను కూడగా,

$$\begin{array}{rl} 3x + y - 3z &= 1 \\ -2x - y + 2z &= 1 \quad (+) \\ \hline x - z &= 2 \\ \hline \end{array} \qquad \ldots (4)$$

(1) మరియు (3) లను కూడగా,

$$\begin{array}{rl} 3x + y - 3z &= 1 \\ -x - y + z &= 2 \quad (+) \\ \hline 2x - 2z &= 3 \\ \hline \end{array} \qquad \ldots (5)$$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 93 26-02-2023 14:33:02

ఇప్పుడు, (5) $-2\times$(4)

$$\begin{array}{rcrcl} 2x & - & 2z & = & 3 \\ 2x & - & 2z & = & 4 \quad (-) \\ \hline 0 & & & = & -1 \end{array}$$

ఇచ్చట మనకు ఒక అసమానత్వం $0 \neq -1$ లభించినది

ఇది పై వ్యవస్థ అస్థిరమైనది మరియు సాధనలు లేనిదిగా తెలియజేయును.

ఉదాహరణ 3.7 సాధించుము $\frac{x}{2}-1=\frac{y}{6}+1=\frac{z}{7}+2\,;\ \frac{y}{3}+\frac{z}{2}=13$

సాధన $\frac{x}{2}-1=\frac{y}{6}+1$ గా తీసుకొనిన

$\frac{x}{2}-\frac{y}{6}=1+1\,,\qquad \frac{6x-2y}{12}=2\,,\qquad 3x-y=12$ ... (1) లభించును

$\frac{x}{2}-1=\frac{z}{7}+2$ గా తీసుకొనిన

$\frac{x}{2}-\frac{z}{7}=1+2\,,\qquad \frac{7x-2z}{14}=3$ మరియు $7x-2z=42$ ... (2) లభించును

ఇంకనూ, $\frac{y}{3}+\frac{z}{2}=13$ నుంచి, $\frac{2y+3z}{6}=13$ మరియు $2y+3z=78$ ... (3) లభించును.

(2) మరియు (3) ల నుంచి z తొలగించగా,

$$\begin{array}{lrcl} (2)\times 3 \Rightarrow & 21x - 6z & = & 126 \\ (3)\times 2 \Rightarrow & 4y + 6z & = & 156 \quad (+) \\ \hline & 21x + 4y & = & 282 \\ (1)\times 4 \Rightarrow & 12x - 4y & = & 48 \quad (+) \\ \hline & 33x & = & 330,\ x = 10 \end{array}$$

$x=10$ ను (1) లో ప్రతిక్షేపించగా, $30-y=12$ అయిన, $y=18$

$x=10$ ను (2) లో ప్రతిక్షేపించగా, $70-2z=42$ అయిన, $z=14$

కనుక, $x=10\,,\ y=18\,,\ z=14\,.$

ఉదాహరణ 3.8 $\frac{1}{2x}+\frac{1}{4y}-\frac{1}{3z}=\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{x}=\frac{1}{3y};\ \frac{1}{x}-\frac{1}{5y}+\frac{4}{z}=2\frac{2}{15}$ సాధించుము

సాధన $\frac{1}{x}=p\ ,\ \frac{1}{y}=q\ ,\ \frac{1}{z}=r$ గా తీసుకొనిన

ఇవ్వబడిన సమీకరణములను ఈ క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చును.

$$\begin{aligned} \frac{p}{2}+\frac{q}{4}-\frac{r}{3} &= \frac{1}{4} \\ p &= \frac{q}{3} \end{aligned}$$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 94 26-02-2023 14:33:05

$$p - \frac{q}{5} + 4r = 2\frac{2}{15} = \frac{32}{15}$$

పై సమీకరణాలను సూక్ష్మీకరించగా

$$6p + 3q - 4r = 3 \quad \ldots(1)$$

$$3p = q \quad \ldots(2)$$

$$15p - 3q + 60r = 32 \quad \ldots(3)$$

(1) మరియు (3) లో (2) ను ప్రతిక్షేపించగా

$$15p - 4r = 3 \quad \ldots(4)$$

$$6p + 60r = 32 \quad (2 \text{ చే భాగించగా}) \quad 3p + 30r = 16 \quad \ldots(5)$$

(4) మరియు (5) ల నుండి,

$$\begin{array}{rl} 15p - 4r &= 3 \\ 15p + 150r &= 80 \quad (-) \\ \hline -154r &= -77 \end{array} \quad \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

$r = \frac{1}{2}$ ను (4) లో ప్రతిక్షేపించగా, $15p - 2 = 3$ మరియు $p = \frac{1}{3}$

(2) వ సమీకరణము నుండి, $q = 3p$ మరియు $q = 1$

కనుక, $x = \frac{1}{p} = 3, \quad y = \frac{1}{q} = 1, \quad z = \frac{1}{r} = 2$. $\Rightarrow \quad x = 3, y = 1, z = 2$.

ఉదాహరణ 3.9 మొదటి సంఖ్య యొక్క మూడు రెట్లు, రెండవ సంఖ్య మరియు మూడవ సంఖ్య యొక్క రెండు రెట్లు మొత్తము 5. మొదటి సంఖ్య మరియు మూడవ సంఖ్య యొక్క మూడు రేట్లు మొత్తం నుండి రెండవ సంఖ్య యొక్క మూడు రేట్లను తీసివేయగా 2 లభించును. మొదటి సంఖ్య యొక్క రెండు రెట్లు మరియు రెండవ సంఖ్య మూడు రెట్లను కూడిన మొత్తము నుండి మూడవ సంఖ్యను తీసివేసిన 1 లభించును. అయిన ఆ సంఖ్యలను కనుగొనండి.

సాధన x, y, z అను మూడు సంఖ్యలుగా తీసుకొనిన

పై ఇవ్వబడిన దత్తాంశములను సమీకరణ రూపంలో వ్రాయగా,

$$3x + y + 2z = 5 \quad \ldots(1)$$

$$x + 3z - 3y = 2 \quad \ldots(2)$$

$$2x + 3y - z = 1 \quad \ldots(3)$$

$$\begin{array}{rll} (1) \times 1 \Rightarrow & 3x + y + 2z &= 5 \\ (2) \times 3 \Rightarrow & 3x - 9y + 9z &= 6 \quad (-) \\ \hline & 10y - 7z &= -1 \end{array} \quad \ldots(4)$$

$$\begin{array}{rll} (1) \times 2 \Rightarrow & 6x + 2y + 4z &= 10 \\ (3) \times 3 \Rightarrow & 6x + 9y - 3z &= 3 \quad (-) \\ \hline & -7y + 7z &= 7 \end{array} \quad \ldots(5)$$

మెదడుకు మేత

1. మూడు చలరాశులు కలిగిన ఏకఘాత సమీకరణాలను సాధించినపుడు లభించు సాధనల సంఖ్య _____.
2. మూడు తలములు సమాంతరంగా ఉండిన అవి ఖండించు బిందువుల సంఖ్యలు _____.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 95 26-02-2023 14:33:08

(4) మరియు (5) ను కూడిన, $10y - 7z = -1$

$-7y + 7z = 7$

$3y = 6$ $\quad y = 2$ అగును.

$y = 2$ ను (5) లో ప్రతిక్షేపించగా, $-14 + 7z = 7$ $\quad z = 3$ అగును.

$y = 2$ మరియు $z = 3$ ను (1) లో ప్రతిక్షేపించగా,

$3x + 2 + 6 = 5$ $\quad x = -1$ అగును.

కావున, $x = -1$, $y = 2$, $z = 3$.

ప్రగతి శోధన

1. మూడు చలరాశులు కలిగిన రేఖాసమీకరణమనకు ఏకైక సాధన పొందుటకు కావలసిన కనీస సమీకరణముల సంఖ్య _____.
2. _____ అయిన రేఖీయ సమీకరణ వ్యవస్థ ఒక సర్వసమీకరణం అగును.
3. _____ అయిన రేఖీయ సమీకరణ వ్యవస్థ ఒక అర్థరహిత సమీకరణమగును.

అభ్యాసము 3.1

1. ఈ క్రింది మూడు చలరాశులు కలిగిన రేఖీయ సమీకరణాలును సాధించుము.

   (i) $x + y + z = 5$; $2x - y + z = 9$; $x - 2y + 3z = 16$

   (ii) $\frac{1}{x} - \frac{2}{y} + 4 = 0$; $\frac{1}{y} - \frac{1}{z} + 1 = 0$; $\frac{2}{z} + \frac{3}{x} = 14$

   (iii) $x + 20 = \frac{3y}{2} + 10 = 2z + 5 = 110 - (y + z)$

2. ఈ క్రింది సమీకరణ వ్యవస్థల సాధన స్వభావమును చర్చించుము.

   (i) $x + 2y - z = 6$; $-3x - 2y + 5z = -12$; $x - 2z = 3$

   (ii) $2y + z = 3(-x + 1)$; $-x + 3y - z = -4$; $3x + 2y + z = -\frac{1}{2}$

   (iii) $\frac{y+z}{4} = \frac{z+x}{3} = \frac{x+y}{2}$; $x + y + z = 27$

3. తాత, తండ్రి మరియు వాణి ముగ్గురి సరాసరి వయస్సు 53. ఆమె తాత వయసులో సగము, తండ్రి వయసు మూడింట ఒక భాగం మరియు వాణి వయసులో నాలుగింట ఒక భాగముల మొత్తం 65. నాలుగు సంవత్సరముల ముందు వాణి వయస్సు కంటే ఆమె తాత వయస్సు నాలుగు రెట్లు అయిన ముగ్గురి ప్రస్తుత వయస్సులను కనుగొనుము.
4. ఒక మూడంకెల సంఖ్యలోని అంకెల మొత్తం 11 అదే సంఖ్యలోని అంకెలను తారుమారుగా వ్రాసిన ఏర్పడు క్రొత్త సంఖ్య మొదటి సంఖ్య యొక్క ఐదు రెట్లు కంటే 46 ఎక్కువ. వందల స్థానంలోని అంకె మరియు పదుల స్థానంలోని అంకె యొక్క రెండు రెట్లు కూడగా ఒకట్ల స్థానంలోని అంకెకు సమానమైన ఆ మూడు అంకెల సంఖ్యను కనుగొనుము.
5. ₹5 రూపాయిలు, ₹10 మరియు ₹20 నోట్లు 12 గలవు. వాటి మొత్తం విలువ ₹105 మొదటి రెండు రకముల నోట్ల సంఖ్యలను తారుమారు చేయగా మొత్తం రూపాయలు ₹20 అధికమగును. ఒక్కొక్క రకమైన నోట్ల సంఖ్య కనుగొనుము.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 96 26-02-2023 14:33:11

3.3 బహుపద సమాసం యొక్క గ.సా.భా మరియు క.సా.గు (GCD and LCM of Polynomials)

3.3.1 బహుపద సమాసముల యొక్క గరిష్ట సామాన్య భాజకం (GCD) లేక కనిష్ఠ సామాన్య గుణిజము (HCF)

మనము ముందు తరగతిలో ద్విఘాత మరియు త్రిఘాత సమీకరణములను కారణాంక పరచుటను నేర్చుకొనియున్నాము. ఇప్పుడు మనము ఇవ్వబడిన బహుపద సమాసముల గ.సా.భాను దీర్ఘ భాగాహార పద్ధతి (Long division method) ద్వారా కనుగొనుట గూర్చి తెలుసుకొందాము.

మనము రెండవ అధ్యాయము నందు సంఖ్యలు మరియు క్రమానుగతములు చర్చించిన విధముగా యూక్లిడియన్ అల్గారిథం (Euclidean Algorithm) ఉపయోగించి రెండు ధనాత్మక పూర్ణాంకముల గ.సా.భా కనుగొనియున్నాము. అదే పద్ధతి ద్వారా ఇవ్వబడిన రెండు బహుపద సమాసములకు గ.సా.భాలను కనుగొనెదము.

ఇవ్వబడిన రెండు బాహుపద సమాసములకు $f(x)$ మరియు $g(x)$ గ.సా.భాను ఈ క్రింది విధానం ద్వారా కనుగొనవచ్చును.

సోపానం 1 మొదట $f(x)$ ను $g(x)$ చే భాగించగా $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ ఇచ్చట $q(x)$ అనునది భాగఫలము మరియు $r(x)$ అనునది శేషము అగును. అయితే $\deg\left[r(x)\right] < \deg\left[g(x)\right]$ యొక్క అంతస్థుగా ఉండును.

సోపానం 2 శేషము $r(x)$ శూన్యేతరము అయిన $g(x)$ ను $r(x)$ చే భాగించగా $g(x) = r(x)q(x) + r_1(x)$ ఇచ్చట $r_1(x)$ అనునది క్రొత్త శేషము. శేషములు $r_1(x)$ శూన్యమైన యెడల $r(x)$ యొక్క అంతస్తు $q(x)$ యొక్క అంతస్థు అయిన $r_1(x)$ అనునది కావలసిన గ.సా.భా.

సోపానం 3 శూన్యం కాని యెడల, పై పద్ధతిని శేషము 0 లభించునంత వరకు కొనసాగించవలెను. ఈ స్థితిలో గల భాజకము మనకు కావలసిన గ.సా.భా. అగును.

$f(x), g(x)$. బహుపద సమాసములా గ.సా.భా.ను సూచించుటకు మనము $GCD\left[f(x), g(x)\right]$ అని వ్రాయవచ్చును.

ప్రగతి శోధన

1. రెండు సమాన అంతస్తులు కలిగిన బహుపద సమాసములు భాగింపబడునపుడు _____ ను ఆధారముగా విభాజ్యము మరియు భాజకములను నిర్ణయింపవచ్చును.
2. $r(x) = 0$ అయిన $f(x)$ ను $g(x)$ చే భాగించినపుడు $g(x)$ ను బహుపద సమాసం యొక్క _____ గా చెప్పవచ్చును.
3. $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, అయిన $g(x)$ చే నిశ్శేషంగా భాగింపబడుటకు $f(x)$ కు _____ కూడవలెను.
4. $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, అయిన $g(x)$ చే నిశ్శేషముగా భాగించబడుటకు $f(x)$ నుండి _____ తీసివేయవలెను.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 97 26-02-2023 14:33:12

సూచన

- $f(x)$ మరియు $g(x)$ అను రెండు బాహుపద సమాసములు ఒకే అంతస్తు కలిగియుండిన యెడల అతిపెద్ద గుణకము కలిగిన బహుపద సమాసమును విభాజ్యముగా తీసుకొనవలెను. ఒకవేళ రెండు గుణములు సమానముగానున్న తరువాతి తక్కువ అంతస్తు యొక్క గుణకములను పోల్చి చూసి భాగహారము కొనసాగించవలెను.

ఉదాహరణ 3.10 x^3+x^2-x+2 మరియు $2x^3-5x^2+5x-3$ బహుపద సమాసములకు గ.సా.భా కనుగొనుము.

సాధన $f(x)=2x^3-5x^2+5x-3$ మరియు $g(x)=x^3+x^2-x+2$ గా తీసుకొనిన

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline x^3+x^2-x+2 & 2x^3-5x^2+5x-3 \\ & 2x^3+2x^2-2x+4 \quad (-) \\ \hline & -7x^2+7x-7 \end{array}$$

$$=-7(x^2-x+1)$$

$-7(x^2-x+1)\neq 0$, -7 అనునది $g(x)$ యొక్క భాజకము కాదు.

ఇప్పుడు $g(x)=x^3+x^2-x+2$ ను కొత్త శేషము x^2-x+1 చే భాగించగా (స్థిరాంక భాజకమును వదిలివేసి) మనకు లభించునది.

$$\begin{array}{r|l} & x+2 \\ \hline x^2-x+1 & x^3+x^2-x+2 \\ & x^3-x^2+x \quad (-) \\ \hline & 2x^2-2x+2 \\ & 2x^2-2x+2 \quad (-) \\ \hline & 0 \end{array}$$

ఇచ్చట మనకు 0 శేషముగా లభించినది

కనుక, $\text{GCD}(2x^3-5x^2+5x-3,\ x^3+x^2-x+2)=x^2-x+1$

ఉదాహరణ 3.11 $6x^3-30x^2+60x-48$ మరియు $3x^3-12x^2+21x-18$ ల గ.సా.భా కనుగొనుము

సాధన $f(x)=6x^3-30x^2+60x-48=6(x^3-5x^2+10x-8)$ అనుకొనుము

$g(x)=3x^3-12x^2+21x-18=3(x^3-4x^2+7x-6)$

ఇప్పుడు మనము $x^3-5x^2+10x-8$ మరియు x^3-4x^2+7x-6 లకు గ.సా.భా కనుగొనెదము

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline x^3-5x^2+10x-8 & x^3-4x^2+7x-6 \\ & x^3-5x^2+10x-8 \quad (-) \\ \hline & x^2-3x+2 \end{array}$$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 98 26-02-2023 14:33:15

$$
\begin{array}{r|l}
 & x-2 \\
\hline
x^2-3x+2 & x^3-5x^2+10x-8 \\
 & x^3-3x^2+2x \quad (-) \\
\hline
 & -2x^2+8x-8 \\
 & -2x^2+6x-4 \quad (-) \\
\hline
 & 2x-4 \\
 & =2(x-2)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x-1 \\
\hline
x-2 & x^2-3x+2 \\
 & x^2-2x \quad (-) \\
\hline
 & -x+2 \\
 & -x+2 \quad (-) \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

ఇచ్చట మనకు '0' శేషము లభించును.

3 మరియు 6ల గ.సా.భా= 3

కనుక, గ.సా.భా $\left[(6x^3-30x^2+60x-48,\ 3x^3-12x^2+21x-18)\right]=3(x-2)$.

3.3.2 బహుపద సమాసముల కనిష్ఠ సామాన్య గుణిజము (LCM) of Polynomials

రెండు లేక అంతకంటే ఎక్కువ బీజీయ సమాసములు కనిష్ఠ సామాన్య గుణిజమనునది ఆ రెండింటిచే భాగింపబడు అతి తక్కువ అంతస్తు (ఘాతము) కలిగిన సమాసమగును.

a^3b^2, a^2b^3. అను రెండు సరళ సమాసములను తీసుకొనెదము,

వీటి యొక్క క.సా.గు $LCM=a^3b^3$.

కారణాంక పద్ధతి ద్వారా క.సా.గు కనుగొనుటకు

(i) ప్రతి సమాసమును దాని కారణాంకముగా విభజింపవలెను.

(ii) అతి పెద్ద ఘాతములుగల కారణాంకములవు క.సా.గు అగును.

(iii) ఒకవేళ సమాసములు సంఖ్యా గుణకముల కలిగియున్న యెడల సంఖ్యల క.సా.గు కనుగొనవలెను.

(iv) కారణాంకముల మరియు గుణకముల క.సా.గుల లబ్ధము అనునది మనకు కావలసిన క.సా.గుగా తీసుకొనవలెను.

ఉదాహరణ 3.12 క్రింది వాటికి క.సా.గు కనుగొనుము.

(i) $8x^4y^2,\ 48x^2y^4$ (ii) $5x-10,\ 5x^2-20$

(iii) $x^4-1,\ x^2-2x+1$ (iv) $x^3-27,\ (x-3)^2,\ x^2-9$

సాధన (i) $8x^4y^2,\ 48x^2y^4$

మొదట మనము సంఖ్యా గుణములకు క.సా.గు కనుగొనెదము.

అనగా, క.సా.గు $(8,48)=2\times2\times2\times6=48$

తర్వాత ఇప్పుడు చలరాశులు కలిగిన పదములు

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 99 26-02-2023 14:33:18

అనగా, క.సా.గు $(x^4y^2, x^2y^4) = x^4y^4$

చివరగా సమాసముల క.సా.గు కనుగొనుము.

ఇవ్వబడిన సమాసముల క.సా.గు అనునది సంఖ్యా గుణముల క.సా.గు మరియు చలరాశులతో కూడిన పదముల క.సా.గుల లబ్ధమని మనకు తెలియును.

కనుక క.సా.గు $(8x^4y^2, 48x^2y^4) = 48x^4y^4$

(ii) $(5x-10), (5x^2-20)$

$$5x-10 = 5(x-2)$$

$$5x^2-20 = 5(x^2-4) = 5(x+2)(x-2)$$

కావున, క.సా.గు $[(5x-10), (5x^2-20)] = 5(x+2)(x-2)$

(iii) $(x^4-1),\ x^2-2x+1$

$$x^4-1 = (x^2)^2-1 = (x^2+1)(x^2-1) = (x^2+1)(x+1)(x-1)$$

$$x^2-2x+1 = (x-1)^2$$

కావున, క.సా.గు $[(x^4-1), (x^2-2x+1)] = (x^2+1)(x+1)(x-1)^2$

(iv) $x^3-27, (x-3)^2, x^2-9$

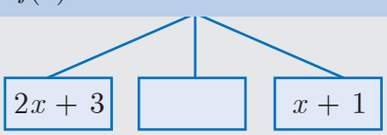
$x^3-27 = (x-3)(x^2+3x+9)$; $(x-3)^2 = (x-3)^2$; $(x^2-9) = (x+3)(x-3)$

కావున, క.సా.గు $[(x^3-27), (x-3)^2, (x^2-9)] = (x-3)^2(x+3)(x^2+3x+9)$

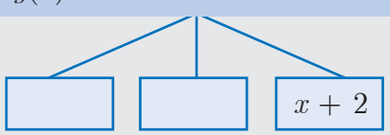
మెదడుకు మేత

ఇవ్వబడిన బహుపద సమాసముల $f(x)$ మరియు $g(x)$ కారణాంక వృక్షంలో పూరింపుము. దీనినుండి క.సా.గు మరియు గ.సా.భా కనుగొనుము.

$f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 32x - 21$



$g(x) = 2x^3 - 7x^2 - 43x - 42$



గ.సా.భా $[f(x)$ మరియు $g(x)] =$ _____ క.సా.గు $[f(x)$ మరియు $g(x)] =$ _____

అభ్యాసము 3.2

1. క్రింద ఇవ్వబడిన బహుపద సమాసములకు గ.సా.భా కనుగొనుము.

(i) $x^4+3x^3-x-3,\ x^3+x^2-5x+3$ (ii) $x^4-1,\ x^3-11x^2+x-11$

(iii) $3x^4+6x^3-12x^2-24x,\ 4x^4+14x^3+8x^2-8x$

(iv) $3x^3+3x^2+3x+3,\ 6x^3+12x^2+6x+12$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 100 26-02-2023 14:33:21

2. క్రింద ఇవ్వబడిన బహుపద సమాసములకు క.సా.గును కనుగొనుము

(i) $4x^2y,\ 8x^3y^2$ (ii) $9a^3b^2,\ 12a^2b^2c$ (iii) $16m,\ 12m^2n^2,\ 8n^2$

(iv) $p^2-3p+2,\ p^2-4$ (v) $2x^2-5x-3,\ 4x^2-36$

(vi) $(2x^2-3xy)^2, (4x-6y)^3, 8x^3-27y^3$

3.3.3 క.సా.గు మరియు గ.సా.భా ల మధ్యగల సంబంధము

12 మరియు 18 సంఖ్యలను తీసుకొనిన

క.సా.గు $(12,18)=36$, గ.సా.భా $(12,18)=6$.

ఇప్పుడు క.సా.గు $(12,18)\times$ గ.సా.భా $(12,18)=36\times6=216=12\times18$

అందువలన క.సా.గు $\times$ గ.సా.భాలు ఇచ్చిన రెండు సంఖ్యల లబ్ధమగును.

అదేవిధంగా క.సా.గు మరియు గ.సా.భా లబ్ధములు రెండు బహుపద సమాసముల లబ్ధమగును. కనుక, $f(x)\times g(x)$ = క.సా.గు $[f(x),g(x)]\times$ గ.సా.భా $[f(x),g(x)]$

వివరణ

$f(x)=12(x^2-y^2)$ మరియు $g(x)=8(x^3-y^3)$ గా తీసుకొనుము.

ఇప్పుడు $f(x)=12(x^2-y^2)=2^2\times3\times(x+y)(x-y)$ ...(1)

మరియు $g(x)=8(x^3-y^3)=2^3\times(x-y)(x^2+xy+y^2)$ ...(2)

(1) మరియు (2) ల నుండి,

$$\text{క.సా.గు}[f(x),\ g(x)]=2^3\times3\times(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)$$
$$=24\times(x^2-y^2)(x^2+xy+y^2)$$
$$\text{గ.సా.భా.}\left[f(x),g(x)\right]=2^2\times(x-y)=4(x-y)$$
$$\text{క.సా.గు.}\times\text{గ.సా.భా}=24\times4\times(x^2-y^2)\times(x^2+xy+y^2)\times(x-y)$$
$$\text{క.సా.గు.}\times\text{గ.సా.భా}=96(x^3-y^3)(x^2-y^2) \quad ...(3)$$
$$f(x)\text{ మరియు }g(x)\text{ లబ్ధము}=12(x^2-y^2)\times8(x^3-y^3)$$
$$=96(x^2-y^2)(x^3-y^3) \quad ...(4)$$

(3) మరియు (4) నుండి క.సా.గు $\times$ గ.సా.భా $=f(x)\times g(x)$

మెదడుకు మేత

$f(x)\times g(x)\times r(x)=$ క.సా.గు $[f(x),g(x),r(x)]\times$ గ.సా.భా $[f(x),g(x),r(x)]$ అగును.

అభ్యాసము 3.3

1. క్రింది వాటిలో క్రమముగా $f(x)$ మరియు $g(x)$ లకు క.సా.గు మరియు గ.సా.భా కనుగొని మరియు $f(x)\times g(x)$ = క.సా.గు $\times$ గ.సా.భా అని సరిచూడుము.

(i) $21x^2y,\ 35xy^2$ (ii) $(x^3-1)(x+1),\ (x^3+1)$ (iii) $(x^2y+xy^2),\ (x^2+xy)$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 101 26-02-2023 14:33:25

2. క్రింద ఇవ్వబడిన ప్రతి జత బహుపద సమాసములకు క.సా.గు ను కనుగొనుము.

(i) $a^2+4a-12, a^2-5a+6$ ఇచ్చట గ.సా.భా $a-2$

(ii) $x^4-27a^3x, (x-3a)^2$ ఇచ్చట గ.సా.భా $(x-3a)$

3. క్రింద ఇవ్వబడిన ప్రతి జత బహుపద సమాసములకు గ.సా.భాను కనుగొనుము.

(i) $12(x^4-x^3),\ 8(x^4-3x^3+2x^2)$ ఇచ్చట క.సా.గు. $24x^3(x-1)(x-2)$

(ii) $(x^3+y^3), (x^4+x^2y^2+y^4)$ ఇచ్చట క.సా.గు. $(x^3+y^3)(x^2+xy+y^2)$

4. $p(x)$, $q(x)$ అనే రెండు బహుపద సమాసముల క.సా.గు మరియు గ.సా.భా ఇవ్వబడినది. వీటి నుండి క్రింద ఇవ్వబడిన పట్టికలో తెలియని బహుపద సమాసము కనుగొనుము.

వ.సం.	క.సా.గు	గ.సా.భా	$p(x)$	$q(x)$
(i)	$a^3-10a^2+11a+70$	$a-7$	$a^2-12a+35$	
(ii)	$(x^2+y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)$	(x^2-y^2)		$(x^4-y^4)(x^2+y^2-xy)$

3.4 అకరణీయ సమాసములు (Rational Expressions)

నిర్వచనము : ఒక సమాసము అనునది $\frac{p(x)}{q(x)}$ అను రూపంలో ఉండిన $p(x)$ మరియు $q(x)$లను బహుపద సమాసములు $q(x)\neq 0$ గా ఉన్నచో ఆ సమాసమును అకరణీయ సమాసమందురు. ఒక అకరణీయ సమాసము, రెండు బహుపద సమాసముల నిష్పత్తి అగును.

ఈ క్రింద ఇవ్వబడినవి అకరణీయ సమాసములకు ఉదాహరణములు

$$\frac{9}{x},\ \frac{2y+1}{y^2-4y+9},\ \frac{z^3+5}{z-4},\ \frac{a}{a+10}.$$

దూరము, కాలము వంటి సమస్యలను గుర్తించుటకు బహుపద మాదిరి సమస్యలు రూపొందించుటకు, పని దినాలు లేక యంత్రములను క్రమపరచి ఒక పనిని ముగించుటకు మరియు అనేక సందర్భాలలో అకరణీయ సమాసములు ఉపయోగపడును.

3.4.1 అకరణీయ సమాసాలను సూక్ష్మీకరించుట

$\frac{p(x)}{q(x)}$ అను అకరణీయ సమాసం యొక్క గ.సా.భా$\big(p(x), q(x)\big)=1$ అయిన అది సూక్ష్మరూపము లేదా కనిష్ఠ రూపంలో కలదని చెప్పవచ్చును.

ఇవ్వబడిన ఒక అకరణీయ సమాసమును కనిష్ట రూపంలో మార్చుటకు ఈ క్రింది ఇవ్వబడిన సోపానములు అనుసరించుము.

(i) లవము మరియు హారములను కారణాంక పరచవలెను.

(ii) లవము మరియు హారములకు ఉమ్మడి కారణాంకము ఉన్న యెడల వాటిని తొలగించవలెను.

(iii) ఫలిత సమాసము అనేది అకరణీయ సమాసం యొక్క కనిష్ఠ రూపము.

ఉదాహరణ 3.13 ఈ క్రింది అకరణీయ సమాసములను సూక్ష్మీకరించుము.

(i) $\frac{x-3}{x^2-9}$ (ii) $\frac{x^2-16}{x^2+8x+16}$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 102 26-02-2023 14:33:27

సాధన (i) $\frac{x-3}{x^2-9} = \frac{x-3}{(x+3)(x-3)} = \frac{1}{x+3}$

(ii) $\frac{x^2-16}{x^2+8x+16} = \frac{(x+4)(x-4)}{(x+4)^2} = \frac{x-4}{x+4}$

XEMQY

3.4.2 మినహాయించిన విలువ

$\frac{p(x)}{q(x)}$ అను అకరణీయ సమాసమును నిర్వచించుటకు వీలుకాని యెడల (సూక్ష్మరూపంలో) ఆ విలువ ఇవ్వబడిన అకరణీయ సంఖ్యకు మినహాయించిన విలువ అందురు.

ఇవ్వబడిన అకరణీయ సమాసములను సూక్ష్మరూపములో మినహాయించిన విలువను కనుగొనుటకు అనగా $\frac{p(x)}{q(x)}$ కు $q(x) = 0$ గా హారమును తీసుకొనవలెను.

ఉదాహరణకు $\frac{5}{x-10}$ అకరణీయ సమాసమునకు $x = 10$ అనేది నిర్వచింపలేనిది కావున $\frac{5}{x-10}$ యొక్క మినహాయించిన విలువ 10

ఉదాహరణ 3.14 క్రింద ఇవ్వబడిన అకరణీయ సమాసములకు మినహాయింపు విలువలను కనుగొనుము.

(i) $\frac{x+10}{8x}$ (ii) $\frac{7p+2}{8p^2+13p+5}$ (iii) $\frac{x}{x^2+1}$

సాధన

(i) $\frac{x+10}{8x}$

$\frac{x+10}{8x}$ సమాసమునకు $8x = 0$ లేక $x = 0$. అనేది నిర్వచనము లేని విలువ అగును. కనుక '0' అనునది మినహాయించిన విలువ అగును.

(ii) $\frac{7p+2}{8p^2+13p+5}$

$\frac{7p+2}{8p^2+13p+5}$ అకరణీయ సమాసమునకు $8p^2+13p+5 = 0$

అనగా, $(8p+5)(p+1) = 0$ కు నిర్వచనము లేదు.

$p = \frac{-5}{8}$, $p = -1$. దీనికి నిర్వచనము లేని విలువ $\frac{-5}{8}$ మరియు -1.

(iii) $\frac{x}{x^2+1}$

$\frac{x}{x^2+1}$ ఇచ్చట అన్ని x విలువలకు $x^2 \geq 0$ $x^2+1 \geq 0+1=1$ కావున x యొక్క అన్ని విలువలకు $x^2+1 \neq 0$ కావున $\frac{x}{x^2+1}$ అను ఇవ్వబడిన అకరణీయ సమాసమునకు మినహాయించిన వాస్తవ సంఖ్యలు లేవు.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 103 26-02-2023 14:33:29

మెదడుకు మేత

1. x^2-1 మరియు $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ అనునవి అకరణీయ సమాసములు అగునా?
2. $\dfrac{x^3+x^2-10x+8}{x^4+8x^2-9}$ నకు మినహాయించిన విలువల సంఖ్య _____ అగును.

అభ్యాసము 3.4

1. క్రింది ఇవ్వబడిన అకరణీయ సమాసములను సూక్ష్మరూపంలో వ్రాయుము.

(i) $\dfrac{x^2-1}{x^2+x}$ (ii) $\dfrac{x^2-11x+18}{x^2-4x+4}$ (iii) $\dfrac{9x^2+81x}{x^3+8x^2-9x}$ (iv) $\dfrac{p^2-3p-40}{2p^3-24p^2+64p}$

2. క్రింద ఇవ్వబడిన అకరణీయ సమాసములకు మినహాయించిన విలువలను కనుగొనుము.

(i) $\dfrac{y}{y^2-25}$ (ii) $\dfrac{t}{t^2-5t+6}$ (iii) $\dfrac{x^2+6x+8}{x^2+x-2}$ (iv) $\dfrac{x^3-27}{x^3+x^2-6x}$

3.4.3 అకరణీయ సమాసముల ప్రక్రియలు

క్రింది తరగతులలో మనము అకరణీయ సమాసముల కూడిక, తీసివేత, గుణించుట మరియు భాగించుటను నేర్చుకునియున్నాము. ఇప్పుడు అకరణీయ సమాసములను సామాన్యకరించెదము.

అకరణీయ సమాసముల గుణకారము

$\dfrac{p(x)}{q(x)}$ మరియు $\dfrac{r(x)}{s(x)}$ అను అకరణీయ సమాసములు ఇచ్చట $q(x)\neq 0, s(x)\neq 0$,

వాటి లబ్ధము $\dfrac{p(x)}{q(x)}\times\dfrac{r(x)}{s(x)}=\dfrac{p(x)\times r(x)}{q(x)\times s(x)}$

రెండు అకరణీయ సమాసముల లబ్ధము అనునవి వాటి యొక్క లవముల లబ్ధమును హారముల లబ్ధముచే భాగించుట ద్వారా వచ్చు ఫలితమును వచ్చు సూక్ష్మరూపంలో వ్రాయుట అని చెప్పవచ్చును.

అకరణీయ సమాసముల భాగాహారము

$\dfrac{p(x)}{q(x)}$ మరియు $\dfrac{r(x)}{s(x)}$ రెండు అకరణీయ సమాసములు. ఇచ్చట $q(x), s(x)\neq 0$ అయిన,

$$\frac{p(x)}{q(x)}\sqrt{\frac{r(x)}{s(x)}}=\frac{p(x)}{q(x)}\times\frac{s(x)}{r(x)}=\frac{p(x)\times s(x)}{q(x)\times r(x)}$$

దీని నుండి రెండు అకరణీయ సమాసముల భాగాహారం అనునది మొదటి అకరణీయ సమాసము మరియు రెండవ అకరణీయ సమాసం యొక్క వ్యుత్క్రమము యొక్క లబ్ధమగును. ఈ లబ్ధ ఫలితము సూక్ష్మరూపంలో లేనిచో దీనిని సూక్ష్మరూపంలో మార్చి వ్రాయవలెను.

ఉదాహరణ 3.15 (i) $\dfrac{x^3}{9y^2}$ ను $\dfrac{27y}{x^5}$ తో గుణించుము. (ii) $\dfrac{x^4b^2}{x-1}$ ను $\dfrac{x^2-1}{a^4b^3}$ తో గుణించుము.

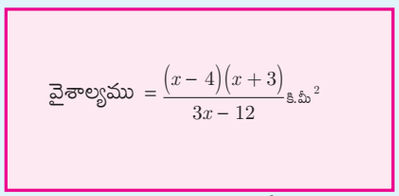
సాధన (i) $\dfrac{x^3}{9y^2}\times\dfrac{27y}{x^5}=\dfrac{3}{x^2y}$ (ii) $\dfrac{x^4b^2}{x-1}\times\dfrac{x^2-1}{a^4b^3}=\dfrac{x^4\times b^2}{x-1}\times\dfrac{(x+1)(x-1)}{a^4\times b^3}=\dfrac{x^4(x+1)}{a^4b}$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 104 26-02-2023 14:33:32

ప్రగతి శోధన

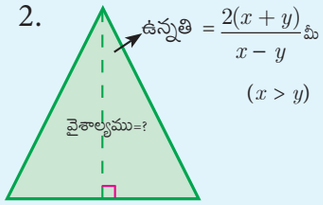
క్రింది పటములో వదిలివేయబడిన సమాసములను కనుగొనుము.

1.



పటం. 3.5

2.



భూభుజము = $(x+y)(x+y)$మీ

పటం. 3.6

ఉదాహరణ 3.16 కనుగొనుము

(i) $\frac{14x^4}{y} \sqrt{\frac{7x}{3y^4}}$ (ii) $\frac{x^2-16}{x+4} \div \frac{x-4}{x+4}$ (iii) $\frac{16x^2-2x-3}{3x^2-2x-1} \div \frac{8x^2+11x+3}{3x^2-11x-4}$

సాధన (i) $\frac{14x^4}{y} \sqrt{\frac{7x}{3y^4}} = \frac{14x^4}{y} \times \frac{3y^4}{7x} = 6x^3y^3$

(ii) $\frac{x^2-16}{x+4} \div \frac{x-4}{x+4} = \frac{(x+4)(x-4)}{(x+4)} \times \left(\frac{x+4}{x-4}\right) = x+4$

(iii) $\frac{16x^2-2x-3}{3x^2-2x-1} \div \frac{8x^2+11x+3}{3x^2-11x-4} = \frac{16x^2-2x-3}{3x^2-2x-1} \times \frac{3x^2-11x-4}{8x^2+11x+3}$

$= \frac{(8x+3)(2x-1)}{(3x+1)(x-1)} \times \frac{(3x+1)(x-4)}{(8x+3)(x+1)} = \frac{(2x-1)(x-4)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x^2-9x+4}{x^2-1}$

అభ్యాసము 3.5

1. సూక్ష్మీకరించుము

(i) $\frac{4x^2y}{2z^2} \times \frac{6xz^3}{20y^4}$ (ii) $\frac{p^2-10p+21}{p-7} \times \frac{p^2+p-12}{(p-3)^2}$ (iii) $\frac{5t^3}{4t-8} \times \frac{6t-12}{10t}$

2. సూక్ష్మీకరించుము

(i) $\frac{x+4}{3x+4y} \times \frac{9x^2-16y^2}{2x^2+3x-20}$ (ii) $\frac{x^3-y^3}{3x^2+9xy+6y^2} \times \frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}$

3. సూక్ష్మీకరించుము

(i) $\frac{2a^2+5a+3}{3a^2+7a+6} \div \frac{a^2+6a+5}{-5a^2-35a-50}$ (ii) $\frac{b^2+3b-28}{b^2+4b+4} \div \frac{b^2-49}{b^2-5b-14}$

(iii) $\frac{x+2}{4y} \div \frac{x^2-x-6}{12y^2}$ (iv) $\frac{12t^2-22t+8}{3t} \div \frac{3t^2+2t-8}{2t^2+4t}$

4. $x = \frac{a^2+3a-4}{3a^2-3}$ మరియు $y = \frac{a^2+2a-8}{2a^2-2a-4}$ అయితే x^2y^{-2} విలువ కనుగొనుము.

5. $p(x) = x^2-5x-14$ అను బహుపద సమాసమును $q(x)$ మరొక బహుపదిచే భాగించగా $\frac{x-7}{x+2}$, వచ్చును. అయితే $q(x)$. ను కనుగొనుము.

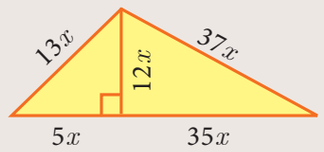
10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 105 26-02-2023 14:33:36

కృత్యము 1

(i) దీర్ఘ చతురస్రాకారపు తోట పొడవు ఒక సంఖ్య మరియు దాని విలోమముల కూడిక మొత్తము అగును. వెడల్పు అనునది ఒక సంఖ్య యొక్క వర్గము మరియు అదే సంఖ్య యొక్క విలోమముల వ్యత్యాసముఅగును.



(ii) ఆ దీర్ఘ చతురస్ర పొడవు, వెడల్పు మరియు పొడవు వెడల్పుల నిష్పత్తి కనుగొనుము.



అకరణీయ సమాసముల కూడిక మరియు తీసివేత

సజాతి హారములు గల అకరణీయ సమాసములను కూడిక మరియు తీసివేయుట.

(i) లవములను కూడుము లేక తీసివేయుము.

(ii) లవములను కూడినప్పుడు లేక తీసివేసినప్పుడు ఉమ్మడి హారం మీద లవముగా వ్రాయుము.

(iii) ఈ అకరణీయ సమాసమును సూక్ష్మరూపంలో వ్రాయుము.

ఉదాహరణ 3.17 $\frac{x^2+20x+36}{x^2-3x-28}-\frac{x^2+12x+4}{x^2-3x-28}$ కనుగొనుము.

సాధన

$$\frac{x^2+20x+36}{x^2-3x-28}-\frac{x^2+12x+4}{x^2-3x-28}=\frac{(x^2+20x+36)-(x^2+12x+4)}{x^2-3x-28}$$

$$=\frac{8x+32}{x^2-3x-28}=\frac{8(x+4)}{(x-7)(x+4)}=\frac{8}{x-7}$$

విజాతి హారములు గల అకరణీయ సమాసములను కూడుట మరియు తీసివేయుట

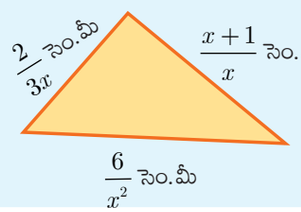
(i) హారము యొక్క కనిష్ట సామాన్య గుణిజము కనుగొనవలెను.

(ii) సోపానం (i) లో ఉన్న ఒక క..సా.గు.కు తగినట్లుగా ఒక్కొక్క భిన్నమునకు సమాన భిన్నమును వ్రాయవలెను. దీని లవము మరియు హారముల గల సమాసముల క.సా.గు.కు అవసరమైన కారణాంకముతో గుణించుట ద్వారా పొందవచ్చును.

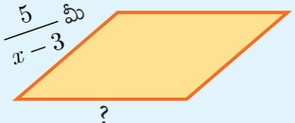
(iii) హారములు సమమయినందువల్ల సజాతి భిన్నములు గల అకరణీయ సమాసమును కూడుటకు, తీసివేయుటకు గల సోపానములను పైన తెలిపిన విధముగా చేయవలయును

ప్రగతి శోధన

1. త్రిభుజము చుట్టుకొలత యొక్క అకరణీయ సమాసమును వ్రాసి సూక్ష్మీకరించుము.



2. చుట్టుకొలత $\frac{4x^2+10x-50}{(x-3)(x+5)}$ గా గల సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క ఆధార భుజమును కనుగొనుము.



10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 106 26-02-2023 14:33:38

ఉదాహరణ 3.18 సూక్ష్మీకరించుము $\frac{1}{x^2-5x+6}+\frac{1}{x^2-3x+2}-\frac{1}{x^2-8x+15}$

సాధన

$$\frac{1}{x^2-5x+6}+\frac{1}{x^2-3x+2}-\frac{1}{x^2-8x+15}$$

$$=\frac{1}{(x-2)(x-3)}+\frac{1}{(x-2)(x-1)}-\frac{1}{(x-5)(x-3)}$$

$$=\frac{(x-1)(x-5)+(x-3)(x-5)-(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)}$$

$$=\frac{(x^2-6x+5)+(x^2-8x+15)-(x^2-3x+2)}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)}$$

$$=\frac{x^2-11x+18}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)}=\frac{(x-9)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)}$$

$$=\frac{x-9}{(x-1)(x-3)(x-5)}$$

మెదడుకు మేత

సరియా కాదా తెలుపుము

1. రెండు అకరణీయ సమాసముల మొత్తము ఎల్లప్పుడు అకరణీయ సమాసముగానే ఉండును.
2. రెండు అకరణీయ సమాసముల లబ్ధం ఎల్లప్పుడు అకరణీయ సమాసముగానే ఉండును.

అభ్యాసము 3.6

1. సూక్ష్మీకరించుము (i) $\frac{x(x+1)}{x-2}+\frac{x(1-x)}{x-2}$ (ii) $\frac{x+2}{x+3}+\frac{x-1}{x-2}$ (iii) $\frac{x^3}{x-y}+\frac{y^3}{y-x}$
2. సూక్ష్మీకరించుము (i) $\frac{(2x+1)(x-2)}{x-4}-\frac{(2x^2-5x+2)}{x-4}$ (ii) $\frac{4x}{x^2-1}-\frac{x+1}{x-1}$
3. $\frac{2x^3+x^2+3}{(x^2+2)^2}$ నుండి $\frac{1}{x^2+2}$ ను తీసివేయుము.
4. $\frac{x^2+6x+8}{x^8+8}$ నుండి ఏ అకరణీయ సమాసమును తీసివేయగా $\frac{3}{x^2-2x+4}$ వచ్చును.
5. $A=\frac{2x+1}{2x-1}$, $B=\frac{2x-1}{2x+1}$ అయిన $\frac{1}{A-B}-\frac{2B}{A^2-B^2}$ ను కనుగొనుము.
6. $A=\frac{x}{x+1}$, $B=\frac{1}{x+1}$, అయిన $\frac{(A+B)^2+(A-B)^2}{A\div B}=\frac{2(x^2+1)}{x(x+1)^2}$ అని నిరూపించుము.
7. గోవింద్ ఒక పనిని పూర్తిచేయుటకు 4 గం॥ పట్టును. అతని స్నేహితుడు సుమన్ అదే పనిని పూర్తి చేయుటకు 6 గం॥ పట్టును. అయిన ఆ ఇద్దరు కలిసి ఆ పనిని ఎంత కాలములో పూర్తిచేయుదురు?
8. నదియ 50 కి.గ్రాల ఆపిల్ మరియు అరటి పండ్లను కొనెను. ఆమె ఒక కి.గ్రా అరటిపండ్లకు చెల్లించిన ధర కంటే ఒక కి.గ్రా ఆపిల్‌కు రెట్టింపు ధర చెల్లించెను. ఆమె ₹ 1800 విలువచేసే ఆపిల్ పండ్లను మరియు ₹ 600 విలువచేసే అరటిపండ్లను కొనినయెడల ఆమె ఒక్కొక్క రకం పండ్లను ఎన్ని కి.గ్రా కొనెను.

3.5 బహుపదుల యొక్క వర్గమూలము

ఇచ్చిన ఒక ధన వాస్తవ సంఖ్య వర్గమూలం అనునది ఏ సంఖ్యను అదే సంఖ్యచే గుణించగా ఇవ్వబడిన ధన సంఖ్య లభించునో, ఆ సంఖ్య అగును.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 107 26-02-2023 14:33:40

అదే విధముగా $p(x)$ అను ఇవ్వబడిన సమాసం యొక్క వర్గమూలం అనునది ఏ సమాసమును అదే సమాసముతో గుణించగా ఇవ్వబడిన సమాసమును ఇచ్చునో, ఆ సమాసమగును. కావున $q(x)$ యొక్క వర్గమూలం $p(x)$ అయితే $q(x)$. $q(x) = p(x)$

కనుక $\left|q(x)\right| = \sqrt{p(x)}$ ఇచ్చట $\left|q(x)\right|$ అనుది ఖచ్చిత విలువ అగును.

ఇచ్చిన సమాసము యొక్క వర్గమూలాన్ని కనుగొనడానికి ఈ క్రింది రెండు పద్ధతులను ఉపయోగిస్తాము

(i) కారణాంక విభజన పద్ధతి (ii) భాగాహార పద్ధతి

ప్రగతి శోధన

1. $x^2 + 4x + 4$ ఒక ఖచ్చిత వర్గమగునా?
2. $3\sqrt{x} = 9$ అయిన x విలువ ఎంత?
3. $361x^4y^2$ యొక్క వర్గమూలం _____.
4. $\sqrt{a^2x^2 + 2abx + b^2}$ = _____.
5. ఒక బహుపది ఖచ్చిత వర్గము అయిన దాని కారణాంకములు _____ సార్లు (బేసి/సరి) పునరావృతం అగును.

3.5.1 కారణాంక విభజన పద్ధతి ద్వారా వర్గమూలమును కనుగొనుట

ఉదాహరణ 3.19 ఈ క్రింది సమాసములకు వర్గమూలమును కనుగొనుము.

(i) $256(x-a)^8(x-b)^4(x-c)^{16}(x-d)^{20}$ (ii) $\dfrac{144\ a^8\ b^{12}\ c^{16}}{81\ f^{12} g^4\ h^{14}}$

సాధన (i) $\sqrt{256(x-a)^8(x-b)^4(x-c)^{16}(x-d)^{20}} = 16\left|(x-a)^4(x-b)^2(x-c)^8(x-d)^{10}\right|$

(ii) $\sqrt{\dfrac{144a^8b^{12}c^{16}}{81f^{12}g^4h^{14}}} = \dfrac{4}{3}\left|\dfrac{a^4b^6c^8}{f^6g^2h^7}\right|$

ఉదాహరణ 3.20 ఈ క్రింది సమాసములకు వర్గమూలమును కనుగొనుము.

(i) $16x^2 + 9y^2 - 24xy + 24x - 18y + 9$ (ii) $(6x^2 + x - 1)(3x^2 + 2x - 1)(2x^2 + 3x + 1)$

(iii) $\left[\sqrt{15}x^2 + \left(\sqrt{3} + \sqrt{10}\right)x + \sqrt{2}\right]\left[\sqrt{5}x^2 + \left(2\sqrt{5} + 1\right)x + 2\right]\left[\sqrt{3}x^2 + \left(\sqrt{2} + 2\sqrt{3}\right)x + 2\sqrt{2}\right]$

సాధన (i) $\sqrt{16x^2 + 9y^2 - 24xy + 24x - 18y + 9}$

$= \sqrt{(4x)^2 + (-3y)^2 + (3)^2 + 2(4x)(-3y) + 2(-3y)(3) + 2(4x)(3)}$

$= \sqrt{(4x - 3y + 3)^2} = \left|4x - 3y + 3\right|$

(ii) $\sqrt{(6x^2 + x - 1)(3x^2 + 2x - 1)(2x^2 + 3x + 1)}$

$= \sqrt{(3x-1)(2x+1)(3x-1)(x+1)(2x+1)(x+1)} = \left|(3x-1)(2x+1)(x+1)\right|$

(iii) మొదట బహుపదులను కారణాంక విభజన చేద్దాము

$\sqrt{15}x^2 + \left(\sqrt{3} + \sqrt{10}\right)x + \sqrt{2} = \sqrt{15}x^2 + \sqrt{3}x + \sqrt{10}x + \sqrt{2}$

$= \sqrt{3}x\left(\sqrt{5}x + 1\right) + \sqrt{2}\left(\sqrt{5}x + 1\right)$

$= \left(\sqrt{5}x + 1\right) \times \left(\sqrt{3}x + \sqrt{2}\right)$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 108 26-02-2023 14:33:44

$$\sqrt{5}x^2+\left(2\sqrt{5}+1\right)x+2 = \sqrt{5}x^2+2\sqrt{5}x+x+2$$
$$= \sqrt{5}x(x+2)+1(x+2) = \left(\sqrt{5}x+1\right)(x+2)$$
$$\sqrt{3}x^2+\left(\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)x+2\sqrt{2} = \sqrt{3}x^2+\sqrt{2}x+2\sqrt{3}x+2\sqrt{2}$$
$$= x\left(\sqrt{3}x+\sqrt{2}\right)+2\left(\sqrt{3}x+\sqrt{2}\right) = \left(x+2\right)\left(\sqrt{3}x+\sqrt{2}\right)$$

కనుక,

$$\sqrt{\left[\sqrt{15}x^2+\left(\sqrt{3}+\sqrt{10}\right)x+\sqrt{2}\right]\left[\sqrt{5}x^2+\left(2\sqrt{5}+1\right)x+2\right]\left[\sqrt{3}x^2+\left(\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)x+2\sqrt{2}\right]}$$
$$= \sqrt{\left(\sqrt{5}x+1\right)\left(\sqrt{3}x+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}x+1\right)(x+2)\left(\sqrt{3}x+\sqrt{2}\right)(x+2)} = \left|\left(\sqrt{5}x+1\right)\left(\sqrt{3}x+\sqrt{2}\right)(x+2)\right|$$

అభ్యాసము 3.7

1. క్రింది ఆకరణీయ సమాసములకు వర్గమూలములను కనుగొనుము.

   (i) $\frac{400x^4y^{12}z^{16}}{100x^8y^4z^4}$ (ii) $\frac{7x^2+2\sqrt{14}x+2}{x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}}$ (iii) $\frac{121(a+b)^8(x+y)^8(b-c)^8}{81(b-c)^4(a-b)^{12}(b-c)^4}$

2. క్రింది ఆకరణీయ సమాసములకు వర్గ మూలమును కనుగొనుము.

   (i) $4x^2+20x+25$ (ii) $9x^2-24xy+30xz-40yz+25z^2+16y^2$

   (iii) $(4x^2-9x+2)\,(7x^2-13x-2)\,(28x^2-3x-1)$

   (iv) $\left(2x^2+\frac{17}{6}x+1\right)\left(\frac{3}{2}x^2+4x+2\right)\left(\frac{4}{3}x^2+\frac{11}{3}x+2\right)$

3.5.2 భాగహార పద్ధతి ద్వారా ఒక బహుపది యొక్క వర్గమూలమును కనుగొనుట.

ఒక బహుపది యొక్క అంతస్తు ఎక్కువగా ఉన్నప్పుడు పొడవు భాగహార పద్ధతిని ఉపయోగించి బహుపది యొక్క వర్గమూలం కనుగొనవచ్చును.

ఉదాహరణ 3.21 $64x^4-16x^3+17x^2-2x+1$ కు వర్గమూలం కనుగొనుము.

సాధన

$$\begin{array}{r|l|l} & 8x^2-x+1 & \\ \hline 8x^2 & 64x^4-16x^3+17x^2-2x+1 & \\ & 64x^4 & (-) \\ \hline 16x^2-x & -16x^3+17x^2 & \\ & -16x^3+x^2 & (-) \\ \hline 16x^2-2x+1 & 16x^2-2x+1 & \\ & 16x^2-2x+1 & (-) \\ \hline & 0 & \end{array}$$

కనుక, $\sqrt{64x^4-16x^3+17x^2-2x+1} = \left|8x^2-x+1\right|$

సూచన

- బహుపది వర్గమూలమును కనుగొనుటకు ఉపక్రమించినప్పుడు చలరాశుల యొక్క అంతస్తు ఆరోహణ లేక అవరోహణ క్రమంలో ఉండునట్లు చూసుకొనవలెను.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 109 26-02-2023 14:33:47

ఉదాహరణ 3.22 $9x^4+12x^3+28x^2+ax+b$ అనునది ఖచ్చితవర్గమైన a మరియు b విలువలను కనుగొనుము.

సాధన

$$
\begin{array}{r|l|l}
 & 3x^2+2x+4 & \\
\hline
3x^2 & 9x^4+12x^3+28x^2+ax+b & \\
 & 9x^4 & (-)\\
\hline
6x^2+2x & 12x^3+28x^2 & \\
 & 12x^3+4x^2 & (-)\\
\hline
6x^2+4x+4 & 24x^2+ax+b & \\
 & 24x^2+16x+16 & (-)\\
\hline
 & 0 &
\end{array}
$$

ఇవ్వబడిన బహుపది ఖచ్చిత వర్గము $a-16=0$, $b-16=0$
కనుక $a=16$, $b=16$.

అభ్యాసము 3.8

1. భాగహార పద్ధతిలో క్రింద ఇవ్వబడిన బహుపదులకు వర్గమూలమును కనుగొనుము.
   (i) $x^4-12x^3+42x^2-36x+9$ (ii) $37x^2-28x^3+4x^4+42x+9$
   (iii) $16x^4+8x^2+1$ (iv) $121x^4-198x^3-183x^2+216x+144$
2. క్రింది ఇవ్వబడిన బహుపదులు ఖచ్చిత వర్గములైతే a మరియు b విలువలను కనుగొనుము.
   (i) $4x^4-12x^3+37x^2+bx+a$ (ii) $ax^4+bx^3+361x^2+220x+100$
3. క్రింద ఇవ్వబడిన బహుపదులు ఖచ్చిత వర్గములైతే m మరియు n విలువలను కనుగొనుము.
   (i) $36x^4-60x^3+61x^2-mx+n$ (ii) $x^4-8x^3+mx^2+nx+16$

3.6 వర్గ సమీకరణములు

పరిచయం

అరబ్బు గణిత శాస్త్రవేత్త అబ్రహంచార్ హియాహానాసి, తరచు ఇతను లాటిన్ పేరు "సావసోర్టా"గా సుపరిచుతుడు. ఇతను క్రీ.శ. 1145 లో ప్రచురించబడిన "లివర్ ఎంబధరం" అనే గ్రంథంతో ప్రసిద్ధికెక్కాడు. వర్గ సమీకరణాలకు పూర్తి సాధనను అందించడానికి ఐరోపాలో ప్రచురితమైన మెట్టు మొదటి గ్రంథం కూడా ఇదే.

ప్రాచీన నాగరికత మొదలు ప్రస్తుత కాలం వరకు అనగా 3000 సంవత్సరాలకు పూర్వమే నాలుగు అంకగణిత ప్రక్రియలను ఉపయోగించి గుణకాలతో కూడిన సాధారణ వర్గసమీకరణాలను సాధించడం మరియు వాటి మూలాలను రాబట్టడం ఎలాగో మానవులకు తెలుసు. ఈ ప్రక్రియను "ప్రాతిపదికలచే సాధించుట" అందురు. అనేక రకాల సమీకరణాలను సాధించడంలో భారీ స్థాయిలో పరిశోధనలు జరుగుతున్నాయి.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 110 26-02-2023 14:33:49

వర్గ సమాసము

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ అనునది x చలరాశి యొక్క n వ అంతస్తు కలిగిన సమాసము. ఇక్కడ $a_0 \neq 0$ మరియు $a_1, a_2, \ldots a_n$లు వాస్తవ సంఖ్యలు అగును. $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ అనునవి సమాసం యొక్క గుణకాలు.

ప్రత్యేకించి సమాసం యొక్క అంతస్తు 2 గా గల వాటిని "వర్గ సమాసము" అని అందురు. దీనిని $p(x) = ax^2 + bx + c,$ గా తెలియజేయవచ్చును. ఇక్కడ $a \neq 0$ మరియు $a,\ b,\ c$ అనునవి వాస్తవ సంఖ్యలు.

3.6.1 వర్గ బహుపది యొక్క శూన్య విలువ

$p(x)$ అను ఒక బహుపది $p(a)=0$ అయిన $x=a$ అనునది $p(x)$ యొక్క శూన్య విలువ.

ఉదాహరణకు if $p(x)=x^2-2x-8$ అయిన $p(-2)=4+4-8 = 0$ మరియు $p(4)= 16- 8 -8 = 0.$

కావున -2 మరియు 4 అనునవి $p(x)=x^2-2x-8$ బహుపది యొక్క శూన్య విలువలగును.

3.6.2 వర్గ సమీకరణాల యొక్క మూలాలు

$ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0)$ అనునది ఒక వర్గ సమీకరణం x యొక్క ఏ విలువకు $ax^2 + bx + c$ సమాసము యొక్క విలువ సున్నా అయిన దానిని $ax^2 + bx + c = 0$ అను వర్గ సమీకరణం యొక్క మూలములు అందురు.

$$, \quad ax^2 + bx + c = 0$$

$$a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad \left(a \neq 0 \text{ కావున}\right)$$

$$x^2 + \frac{b}{2a}(2x) + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

కావున, $$x^2 + (2x)\left(\frac{b}{2a}\right) + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ మరియు $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ మూలములగును.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 111 26-02-2023 14:33:52

3.6.3 వర్గ సమీకరణం రూపొందించుట

α మరియు β అనునవి $ax^2+bx+c=0$ అను ద్విఘాత సమీకరణ మూలములు అయిన.

$$\alpha = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ మరియు } \beta = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

5NYE2

కనుక, $\alpha+\beta = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b}{a}$

మరియు $\alpha\beta = \left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\times\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) = \frac{c}{a}$.

కావున, $(x-\alpha)$ మరియు $(x-\beta)$ అనునవి $ax^2+bx+c=0$, యొక్క కారణాంకములు ఆగును.

$$(x-\alpha)(x-\beta) = 0$$

$$\text{కనుక, } x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta = 0$$

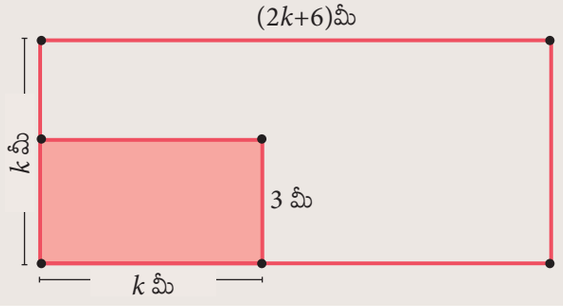
అనగా, x^2 – (మూలములు మొత్తము) x + మూలముల లబ్ధము $= 0$ అనునది మూలములు ఇవ్వబడిన ద్విఘాత సమీకరణ సాధారణ రూపమగును.

సూచన

➢ $ax^2+bx+c=0$ అను సమీకరణము a≠0 కనుక $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ (a≠0 కావున) అని వ్రాయవచ్చును.

కృత్యము 2

మీ ఇంటి ముందు $(2k+6)$ మీ మరియు k మీ కొలతలు గల ఒక దీర్ఘచతురస్రాకార తోట కలదు అనుకొనుము. పటములో చూపినట్లు k మీ మరియు 3 మీ కొలతలు గల ఒక చిన్న దీర్ఘచతురస్రాకార భాగము చదును చేయుబడినది. మిగిలిన చదును చేయని తోట భాగపు వైశాల్యం కనుగొనుము.



ఉదాహరణ 3.23 $x^2+8x+12$ వర్గ సమాసము యొక్క శూన్య విలువను కనుగొనుము.

సాధన $p(x)=x^2+8x+12=(x+2)(x+6)$ గా తీసుకొనిన

$p(-2)=4-16+12=0$

$p(-6)=36-48+12=0$

కావున $p(x)=x^2+8x+12$ నకు -2 మరియు -6 శూన్య విలువలగును.

ఉదాహరణ 3.24 మూలముల మొత్తం మరియు లబ్ధము క్రింది ఇవ్వబడినవి అయిన వాటికి తగిన వర్గ సమీకరణము కనుగొనుము.

(i) 9, 14 (ii) $-\frac{7}{2}, \frac{5}{2}$ (iii) $-\frac{3}{5}, -\frac{1}{2}$

సాధన (i) మూలములు ఇవ్వబడినచో వర్గ సమీకరణం యొక్క సాధారణ రూపము.

$$x^2-(\text{మూలముల మొత్తము})\,x + \text{మూలముల లబ్ధము} = 0$$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 112 26-02-2023 14:33:56

$$x^2 - 9x + 14 = 0$$

(ii) $x^2 - \left(-\frac{7}{2}\right)x + \frac{5}{2} = 0$ నుండి $2x^2 + 7x + 5 = 0$

(iii) $x^2 - \left(-\frac{3}{5}\right)x + \left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{10x^2 + 6x - 5}{10} = 0$

కావున, $10x^2 + 6x - 5 = 0$.

ఉదాహరణ 3.25 క్రింది ఇవ్వబడిన వర్గసమీకరణంలో మూలముల మొత్తం మరియు లబ్ధములను కనుగొనుము.

(i) $x^2 + 8x - 65 = 0$ (ii) $2x^2 + 5x + 7 = 0$ (iii) $kx^2 - k^2x - 2k^3 = 0$

సాధన α మరియు β లు ఇవ్వబడిన వర్గ సమీకరణముల మూలములు అనుకొనిన

(i) $x^2 + 8x - 65 = 0$

ఇచ్చట $a = 1,\ b = 8,\ c = -65$

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -8 \text{ మరియు } \alpha\beta = \frac{c}{a} = -65$$

$$\alpha + \beta = -8;\quad \alpha\beta = -65$$

(ii) $2x^2 + 5x + 7 = 0$ ఇచ్చట

ఇచ్చట $a = 2,\ b = 5,\ c = 7$

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{-5}{2} \text{ మరియు } \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{7}{2}$$

$$\alpha + \beta = -\frac{5}{2};\ \alpha\beta = \frac{7}{2}$$

(iii) $kx^2 - k^2x - 2k^3 = 0$ ఇచ్చట

$a = k,\ b = -k^2,\ c = -2k^3$

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{-(-k^2)}{k} = k \text{ మరియు } \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-2k^3}{k} = -2k^2$$



అభ్యాసము 3.9

1. మూలముల మొత్తము మరియు లబ్ధములు క్రింద ఇవ్వబడినవి వీటికి వర్గ సమీకరణములను కనుగొనుము.

   (i) $-9,\ 20$ (ii) $\frac{5}{3},\ 4$ (iii) $\frac{-3}{2},\ -1$ (iv) $-(2-a)^2,\ (a+5)^2$

2. క్రింది ఇవ్వబడిన వర్గ సమీకరణములకు మూలముల మొత్తము మరియు మూలముల లబ్ధమును కనుగొనుము.

   (i) $x^2 + 3x - 28 = 0$ (ii) $x^2 + 3x = 0$ (iii) $3 + \frac{1}{a} = \frac{10}{a^2}$ (iv) $3y^2 - y - 4 = 0$

3.6.4 వర్గ సమీకరణములను సాధించుట

ఒకటి, రెండు, మూడు చలరాశుల గల రేఖీయ సమీకరణాలు సాధించుటను గూర్చి ముందు తరగతిలో నేర్చుకొనియున్నాము. ఏ చలరాశుల విలువ సమీకరణములను తృప్తిపరచునో, వాటిని సమీకరణం యొక్క

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 113 26-02-2023 14:34:00

సాధనలగునని జ్ఞప్తికి తెచ్చుకుందాము. ఈ అధ్యాయములో వర్గ సమాసములను సాధించుటకు కారణంక పద్ధతి, వర్గ పద్ధతి మరియు సూత్రమును ఉయోగించుట వంటి మూడు పద్ధతులు గూర్చి నేర్చుకొనబోవుచున్నాము.

వర్గ సమాసమును కారణాంక పద్ధతిలో సాధించుట.

ఈ క్రింది సోపానము ద్వారా వర్గ సమీకరణం కారణంక పద్ధతిలో సాధించుట.

సోపానం 1 ఇవ్వబడిన సమీకరణమును $ax^2 + bx + c = 0$ అను సాధారణ రూపంలో వ్రాయుము.

సోపానం 2 సమీకరణమును కారణంకపరచుము

సోపానం 3 ఇచ్చిన వర్గ సమీకరణమును కారణంకపరచిన తరువాత రెండు రేఖీయ కారణాంకముల లబ్ధముగా వ్రాయము.

సోపానం 4 రేఖీయ కారణాంకమును 0 కు సమానము చేసిన x విలువను కనుగొనుము.

ఈ x విలువ ఇవ్వబడిన వర్గ సమీకరణం యొక్క మూలములగును.

ఉదాహరణ 3.26 సాధించుము : $2x^2 - 2\sqrt{6}\,x + 3 = 0$

సాధన $2x^2 - 2\sqrt{6}\,x + 3 = 2x^2 - \sqrt{6}\,x - \sqrt{6}x + 3$ (మధ్య పదమును విడదీయగా)

$$= \sqrt{2}x\left(\sqrt{2}x - \sqrt{3}\right) - \sqrt{3}\left(\sqrt{2}x - \sqrt{3}\right) = \left(\sqrt{2}x - \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}x - \sqrt{3}\right)$$

ఇప్పుడు కారణాంకములను సున్నకు సమము చేయగా

$$\left(\sqrt{2}x - \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}x - \sqrt{3}\right) = 0$$

$$\left(\sqrt{2}x - \sqrt{3}\right)^2 = 0$$

$$\sqrt{2}x - \sqrt{3} = 0$$

$\therefore$ కావున $x = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ సాధన అగును

ఉదాహరణ 3.27 సాధించుము : $2m^2 + 19m + 30 = 0$

సాధన $2m^2 + 19m + 30 = 2m^2 + 4m + 15m + 30 = 2m(m+2) + 15(m+2)$

$$= (m+2)(2m+15)$$

ఇప్పుడు కారణంకములు సున్నకు సమము చేయగా

$$(m+2)(2m+15) = 0$$

$m + 2 = 0$ నుండి, $m = -2$ లేక $2m + 15 = 0$ నుండి, $m = \dfrac{-15}{2}$

కావున మూలములు $-2, \dfrac{-15}{2}$.

వర్గ సమీకరణంల రూపములో లేని కొన్ని సమీకరణములను తగిన విలువలు ప్రతిక్షేపించుట ద్వారా వాటిని సమీకరణము రూపంలో సూక్ష్మీకరించి సాధించవచ్చును. ఇవి ఈ క్రింది ఉదాహరణ ద్వారా వివరించబడినవి.

ఉదాహరణ 3.28 సాధించుము : $x^4 - 13x^2 + 42 = 0$

సాధన ఇచ్చట $x^2 = a$ అనుకొనుము. కనుక, $(x^2)^2 - 13x^2 + 42 = a^2 - 13a + 42 = (a-7)(a-6)$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 114 26-02-2023 14:34:02

కాని, $(a-7)(a-6)=0$ అగును, $a=7$ లేక 6.

$a=x^2$ కనుక, $x^2=7$ నుండి, $x=\pm\sqrt{7}$ మరియు $x^2=6$ నుండి, $x=\pm\sqrt{6}$

కనుక $x=\pm\sqrt{7},\ \pm\sqrt{6}$ మూలములగును.

ఉదాహరణ 3.29 సాధించుము : $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x-1}{x}=2\dfrac{1}{2}$

సాధన $y=\dfrac{x}{x-1}$ అనుకొనుము $\dfrac{1}{y}=\dfrac{x-1}{x}$.

కావున, $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x-1}{x}=2\dfrac{1}{2}$ అగును $y+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{2}$

$2y^2-5y+2=0$ అయిన, $y=\dfrac{1}{2},\ 2$

$\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{1}{2}$ పొందిన, $2x=x-1,\quad x=-1$ అగును.

$\dfrac{x}{x-1}=2$ పొందిన, $x=2x-2,\quad x=2$ అగును.

కావున మూలములు $x=-1,\ 2$.

అభ్యాసము 3.10

1. కారణాంక పద్ధతిని ఉపయోగించి క్రింది ఇవ్వబడిన వర్గ సమీకరణములను సాధించుము.

   (i) $4x^2-7x-2=0$ (ii) $3(p^2-6)=p(p+5)$ (iii) $\sqrt{a(a-7)}=3\sqrt{2}$

   (iv) $\sqrt{2}x^2+7x+5\sqrt{2}=0$ (v) $2x^2-x+\dfrac{1}{8}=0$

2. n జట్లు పాల్గొను ఒక చేతి బంతి ఆటల పోటీలో ఒక్కొక్క జట్టు మిగిలిన అన్ని జట్టులతో ఆడవలను. మొత్తము 15 పోటీలు గల ఆటలో మొత్తం పోటీలు సంఖ్య $G(n)=\dfrac{n^2-n}{2}$ అయిన, పాల్గొను జట్ల సంఖ్య ఎంత?

వర్గమును పూరించు పద్ధతి ద్వారా వర్గ సమీకరణమును సాధించుట.

ఇవ్వబడిన వర్గసమీకరణము యొక్క సాధనను వర్గము పూరించు పద్ధతి ద్వారా కనుగొనుటకు క్రింద ఇవ్వబడి ఉన్న సోపానములును అనుసరించవలెను.

సోపానం 1 ఇవ్వబడిన సమీకరణమును $ax^2+bx+c=0$ సాధారణ రూపములో వ్రాయుము.

సోపానం 2 x^2 యొక్క గుణకము 1 లేనియెడల x^2 యొక్క గుణకముతో సమీకరణములను ఇరుప్రక్కల భాగించి x^2 యొక్క గుణకము 1 గా మార్చుము.

సోపానం 3 స్థిరసంఖ్యను కుడివైపునకు వ్రాయము.

సోపానం 4 ఇరువైపుల x గుణకము యొక్క సగ వర్గమును కూడవలెను.

సోపానం 5 ఎడమవైపు పూర్తి వర్గంగాను కుడి వైపు సూక్ష్మీకరించి వ్రాయము.

సోపానం 6 వర్గ మూలములు కనుగొనుట ద్వారా x విలువను కనుగొనవచ్చును.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 115 26-02-2023 14:34:05

ఉదాహరణ 3.30 సాధించుము : $x^2 - 3x - 2 = 0$

సాధన

$$x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$x^2 - 3x = 2 \qquad \text{(స్థిరాంకమును కుడి వైపుకు తీసుకొనిన)}$$

$$x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \quad \left[\frac{1}{2}x \text{ యొక్క గుణకమును ఇరుప్రక్కల కూడిన}\right]^2$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{17}{4} \qquad \text{(ఎడమ ప్రక్క వర్గ రూపములో రాసిన)}$$

$$x - \frac{3}{2} = \pm\frac{\sqrt{17}}{2} \qquad \text{(ఇరుప్రక్కల వర్గమూలం చేయగా)}$$

$$x = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2} \text{ లేక } x = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2} \text{ అగును}$$

కావున, $x = \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$, $\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$

ఉదాహరణ 3.31 సాధించుము $2x^2 - x - 1 = 0$

సాధన $2x^2 - x - 1 = 0$

$$x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = 0 \quad (x^2 \text{ యొక్క గుణకమును } \sqrt{2} \text{ తో భాగించగా})$$

$$x^2 - \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x^2 - \frac{x}{2} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} = \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$x - \frac{1}{4} = \pm\frac{3}{4} \Rightarrow x = 1, -\frac{1}{2}$$

వర్గ సమీకరణమును సూత్రము ద్వారా సాధించుట.

$ax^2 + bx + c = 0$ వర్గ సమీకరణం యొక్క మూలములను సూత్రము ద్వారా కనుగొనుట (విశదీకరణము 3.6.2లో తెలుపబడియునది) $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

మీకు తెలుసా?

ప్రాచీన బాబిలోయన్‌లు వర్గ సమీకరణముల మూలములు కనుగొను సూత్రములను తెలుసుకొనియున్నారు. వారు పద్యాలు మరియు పాటల రూపములో మూలములను కనుగొను సోపానాలను వ్రాసియున్నారు. వ్యవసాయము కొరకు భూముల కొలతలను కొలుచుటకు బాబిలోయన్‌లు వర్గ సమీకరణములను ఉయోగించినారు.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 116 26-02-2023 14:34:08

ఉదాహరణ 3.32 సూత్రము పద్ధతిలో $x^2 + 2x - 2 = 0$ ను సాధించుము.

సాధన $x^2 + 2x - 2 = 0$ను సామాన్యరూపము $ax^2 + bx + c = 0$ తో పోల్చిన,

$a = 1,\ b = 2,\ c = -2$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$a,\ b$ మరియు c విలువలను సూత్రములో ప్రతిక్షేపించగా,

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$$

కావున, $x = -1 + \sqrt{3}\ ,\ -1 - \sqrt{3}$ అగును.

ఉదాహరణ 3.33 $2x^2 - 3x - 3 = 0$ ను సూత్రము పద్ధతిలో సాధించుము.

సాధన $2x^2 - 3x - 3 = 0$ ను సామాన్య రూపము $ax^2 + bx + c = 0$ తో పోల్చిన

$a = 2,\ b = -3,\ c = -3$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$a,\ b$ మరియు c విలువలను సూత్రములో ప్రతిక్షేపించగా,

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)} = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{4}$$

కావున, $x = \frac{3 + \sqrt{33}}{4}\ ,\quad x = \frac{3 - \sqrt{33}}{4}$

ఉదాహరణ 3.34 $3p^2 + 2\sqrt{5}p - 5 = 0$.ను సూత్రము పద్ధతి ద్వారా సాధించుము.

సాధన $3p^2 + 2\sqrt{5}p - 5 = 0$ ను సామాన్య రూపములో గల $ax^2 + bx + c = 0$ తో పోల్చిన

$a = 3,\ b = 2\sqrt{5},\ c = -5$.

$$p = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$a,\ b$ మరియు c విలువలను సూత్రములో ప్రతిక్షేపించగా,

$$p = \frac{-2\sqrt{5} \pm \sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2 - 4(3)(-5)}}{2(3)} = \frac{-2\sqrt{5} \pm \sqrt{80}}{6} = \frac{-\sqrt{5} \pm 2\sqrt{5}}{3}$$

కావున, $x = \frac{\sqrt{5}}{3}\ ,\ -\sqrt{5}$

ఉదాహరణ 3.35 సాధించుము : $pqx^2 - (p+q)^2 x + (p+q)^2 = 0$

సాధన $ax^2 + bx + c = 0$ సమీకరణమునకు ఇవ్వబడిన గుణకములను పోల్చగా

$a = pq,\ b = -(p+q)^2,\ c = (p+q)^2$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 117 26-02-2023 14:34:12

a, b మరియు c విలువలను సూత్రంలో ప్రతిక్షేపించగా.

$$x = \frac{-\left[-(p+q)^2\right] \pm \sqrt{\left[-(p+q)^2\right]^2 - 4(pq)(p+q)^2}}{2pq}$$

$$= \frac{(p+q)^2 \pm \sqrt{(p+q)^4 - 4(pq)(p+q)^2}}{2pq}$$

$$= \frac{(p+q)^2 \pm \sqrt{(p+q)^2\left[(p+q)^2 - 4pq\right]}}{2pq}$$

$$= \frac{(p+q)^2 \pm \sqrt{(p+q)^2(p^2+q^2+2pq-4pq)}}{2pq}$$

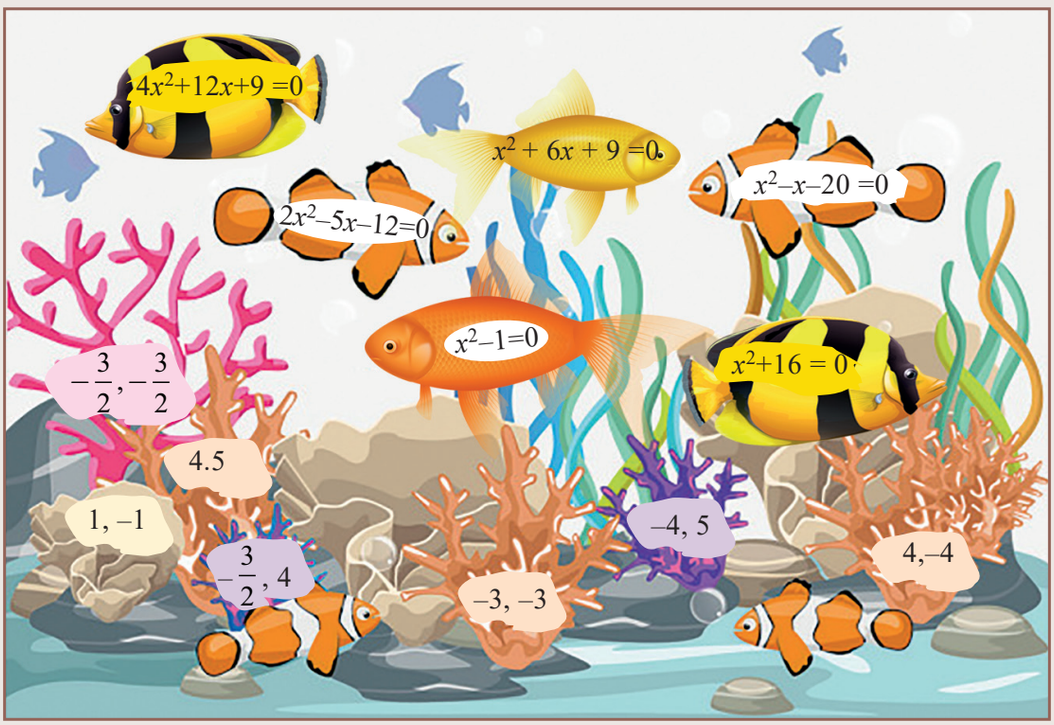
$$= \frac{(p+q)^2 \pm \sqrt{(p+q)^2(p-q)^2}}{2pq}$$

$$= \frac{(p+q)^2 \pm (p+q)(p-q)}{2pq} = \frac{(p+q)\{(p+q) \pm (p-q)\}}{2pq}$$

కావున, $x = \frac{p+q}{2pq} \times 2p$, $\frac{p+q}{2pq} \times 2q$, $x = \frac{p+q}{q}$, $\frac{p+q}{p}$ మనకు లభించును.

కృత్యము 3

చేపలకు (సమీకరణము) వాటికి తగిన ఆహారము (మూలములు)ను అందించుము. ఏ చేపకు ఆహారము అందజేయుటకు వీలు కాదు?



10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 118 26-02-2023 14:34:15

అభ్యాసము 3.11

1. ఈ క్రింది వర్గ సమీకరణములను వర్గ పద్ధతిలో సాధించుము.

   (i) $9x^2 - 12x + 4 = 0$ (ii) $\frac{5x+7}{x-1} = 3x + 2$

2. సూత్ర పద్ధతి ద్వారా క్రింది వర్గ సమీకరణములను సాధించుము.

   (i) $2x^2 - 5x + 2 = 0$ (ii) $\sqrt{2}f^2 - 6f + 3\sqrt{2} = 0$ (iii) $3y^2 - 20y - 23 = 0$

   (iv) $36y^2 - 12ay + (a^2 - b^2) = 0$

3. ఏటవాలు తలములో t సెకండ్‌లలో ఒక బంతి ప్రయాణించు దూరము $d = t^2 - 0.75t$ అడుగులు. 11.25 అడుగుల దూరము ప్రయాణించుటకు బంతి తీసుకొనిన సమయము ఎంత?

3.6.5 వర్గ సమీకరణములతో కూడిన సమస్యలను సాధించుట.

సమీకరణములు సాధించుటకు గల సోపానములు

సోపానం 1 పద సమస్యలను వర్గ సమీకరణముగా మార్చుము.

సోపానం 2 పైన తెలిపిన మూడు పద్ధతిలో ఏదేని ఒక పద్ధతిలో వర్గ సమీకరణమును సాధించుము.

సోపానం 3 గణిత రూపములో పొందిన సమాధానములను ప్రశ్నలకు తగ్గట్టు పదసమస్యలుగా మార్చి వ్రాయుము.

ఉదాహరణ 3.36 కుమరన్ ప్రస్తుత వయస్సు రెండు రెట్లు తో ఒకటిని కూడిన వచ్చును, కుమరన్ రెండు సంవత్సరములకు ముందు వయస్సు అతనికి నాలుగు సంవత్సరముల తరువాత వయస్సుతో గుణించిన వచ్చుటకు సమానమైన, అతని ప్రస్తుత వయస్సు ఎంత?

సాధన కుమరన్ ప్రస్తుత వయస్సు x సం॥ అనుకొనుము.

రెండు సం॥లు ముందు అతని వయస్సు $= (x - 2)$ సం॥.

నాలుగు సంవత్సరములు తరువాత అతని వయస్సు $= (x + 4)$ సం॥.

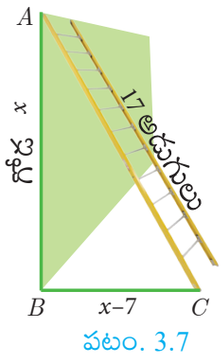
ఇవ్వబడిన, $(x - 2)(x + 4) = 1 + 2x$

$x^2 + 2x - 8 = 1 + 2x$ నుండి $(x - 3)(x + 3) = 0$ అయిన, $x = \pm 3$

కావున, $x = 3$ (వయస్సు ఋణ సంఖ్యగా ఉండుటకు వీలులేదు కనుక -3 ను తీసుకోకూడదు)

కావున కుమరన్ ప్రస్తుత వయసు 3 సంవత్సరములు.

ఉదాహరణ 3.37 ఒక గోడకు 17 అడుగు పొడవు కలిగిన నిచ్చెన వాలి యున్నది. భూమి, నిచ్చెన మరియు లంబపుటెచ్చు గోడ మూడును ఒక లంబకోణ త్రిభుజమును ఏర్పరచినది. గోడ అడుగు భాగము నుండి నిచ్చెన అడుగు భాగము వరకు గల దూరము, నిచ్చెన పై భాగము గోడను తాకు ఎత్తుకంటే 7 అడుగులు తక్కువైన గోడ ఎత్తు కనుగొనుము.



పటం. 3.7

సాధన గోడ ఎత్తు $AB = x$ అడుగులు

తీసుకొనిన, BC కి ఇవ్వబడిన దత్తాంశ ప్రకారము $= (x–7)$ అడుగులు

లంబ కోణ త్రిభుజము ABC, AC =17 అడుగులు, $BC = (x–7)$ అడుగులు

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 119 26-02-2023 14:34:17

పైథాగరస్ సిద్ధాంత ప్రకారము, $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$(17)^2 = x^2 + (x-7)^2$; $289 = x^2 + x^2 - 14x + 49$

$x^2 - 7x - 120 = 0$ నుండి, $(x-15)(x+8) = 0$ కావున, $x = 15$ (లేక) -8

కావున, గోడ ఎత్తు $AB = 15$ అడుగులు

(గోడ ఎత్తు ఋణ సంఖ్యగా ఉండుటకు వీలులేదు. కావున -8 ని తీసుకోకూడదు)

ఉదాహరణ 3.38 ఒక స్థలము నందు x^2 హంసలు గుంపుగా ఉండినవి. మేఘములు దట్టముగా ఏర్పడగానే హంసల గుంపు నుండి $10x$ గుంపు చెరువుకు, 8 లో ఒక భాగము గుంపు తోటలోకి ఎగిరివెళ్ళినవి. మిగిలిన మూడు జతల హంసలు నీటిలో ఆడుచుండెను. అయినట్లయితే హంసల మొత్తము సంఖ్యను కనుగొనుము.

సాధన x^2 హంసలు కలవు. పై ఇవ్వబడిన వివరణ ప్రకారము

$$x^2 - 10x - \frac{1}{8}x^2 = 6 \text{ దీని నుండి, } 7x^2 - 80x - 48 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{80 \pm \sqrt{6400 - 4(7)(-48)}}{14} = \frac{80 \pm 88}{14}$$

కావున, $x = 12, -\frac{4}{7}$.

ఇచ్చట $(x = -\frac{4}{7}$ ఉండుటకు వీలులేదు).

కావున, $x = 12$. హంసల మొత్తము $x^2 = 144$.

ఉదాహరణ 3.39 చెన్నై నుండి విరుదాచలం వరకు గల 240 కి.మీ దూరము ప్రయాణించుటకు సాధారణ రైలులో, ఎక్స్‌ప్రెస్ రైలు కంటే ఒక గంట అధిక సమయం పట్టును. సాధారణ రైలు యొక్క వేగం ఎక్స్‌ప్రెస్ రైలు వేగం కంటే 20 కి.మీ/గం. తక్కువైన రెండు రైలుల సరాసరి వేగమును కనుగొనుము.

సాధన సాధారణ రైలు సరాసరి వేగము x గం॥లు అనుకొనిన.

ఇప్పుడు ఎక్స్‌ప్రెస్ రైలు సరాసరి వేగం $(x+20)$ కి.మీ/గం॥లు అగును.

సాధారణ రైలు 240 కి.మీ ప్రయాణించుటకు తీసుకొనిన సమయము . $= \frac{240}{x}$ గం॥లు

ఎక్స్‌ప్రెస్ రైలు 240 కి.మీ దూరం ప్రయాణించుటకు తీసుకొనిన కాలము $= \frac{240}{x+20}$ గం॥లు

దత్తాంశము ప్రకారము, $\frac{240}{x} = \frac{240}{x+20} + 1$ అనుకొనిన

$240\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+20}\right] = 1$ నకు, $240\left[\frac{x+20-x}{x(x+20)}\right] = 1$, $4800 = (x^2 + 20x)$ పొందగలము.

$x^2 + 20x - 4800 = 0$ వచ్చును, $(x+80)(x-60) = 0$, $x = -80$ లేక 60 పొందుదుము.

కావున, ప్రయాణికుల రైలు సరాసరి వేగము 60 కి.మీ/గం

కావున, దూరం సరాసరి వేగము 80 కి.మీ/గం

(వేగము ఒక ఋణ సంఖ్యగా ఉండుటకు వీలులేదు)

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 120 26-02-2023 14:34:20

అభ్యాసము 3.12

1. ఒక సంఖ్య మరియు దాని యొక్క విలోమముల వ్యత్యాసము $\frac{24}{5}$ అయిన ఆ సంఖ్యను కనుగొనుము.
2. 12 మీ × 16 మీ కొలతలు గల ఒక దీర్ఘచతురస్రాకార తోట చుట్టూ 'w' మీటర్లు వెడల్పు గల బాట వేసిన దాని మొత్తం వైశాల్యం 285 మీ^{2} అధికమగుచున్నది. అయిన బాట వెడల్పును కనుగొనుము.
3. ఒక బస్సు ఏకరీతి వేగముతో 90 కి.మీ దూరము ప్రయాణము చేసెను. దాని వేగమును 15 కి.మీ/గంటకు పెంచిన యెడల ప్రయాణ కాలం 30 నిమిషాలు తగ్గును. అయిన బస్సు యొక్క నిజ వేగమును కనుగొనుము.
4. ఒక అమ్మాయి వయస్సు తన చెల్లెల వయస్సు కన్నా రెండు రెట్లుండును. ఐదు సంవత్సరముల తరువాత వారిద్దరి వయస్సు (సంవత్సరములలో) ల లబ్ధము 375 అయిన, వారి ప్రస్తుత వయస్సు ఎంత?
5. 20 మీ వ్యాసము కలిగిన వృత్తాకార పరిధిలో ఒక స్తంభము నాట వలెను. ఏదేని ఒక వ్యాసార్ధమును రెండు అంచులలో అమర్చియున్న P మరియు Q అను తలుపులు నుండి స్తంభమునకు మధ్య గల దూర వ్యత్యాసము 4 మీ ఉండునట్లు స్తంభము నాటనగునా? సరి అనిన, రెండు తలుపుల నుండి స్తంభమును ఎంత దూరములో అమర్చవలయును?
6. $2x^2$ సంఖ్య కలిగిన నల్లని తేనటీగల గుంపు నుండి సగ భాగము యొక్క వర్గమూలము ఒక చెట్టుకు వెళ్ళెను. మరల గుంపులో నుండి 9 లో 8 వ వంతు తేనెటీగలు అదే చెట్టుకు వెళ్ళెను. మిగిలియున్న రెండు తేనెటీగలు సువాసన వెదజల్లు పుష్పములో చిక్కుకొనెను. అయిన తేనెటీగల సంఖ్యను కనుగొనుము.
7. ఎదురెదురుగా నున్న రెండు సంగీత సభా మందిరంలో సంగీత ఖచ్చేరి జరుగుచున్నది. మొదటి మందిరంలో నలుగురు గాయకులు, రెండవ దానిలో 9 మంది పాడుచుండిరి. ఈ రెండు సభామందిరముల మధ్య దూరము 70 మీ. సమ ధ్వనితో సంగీతమును వినదలిచిన వ్యక్తి ఈ రెండు సభా మందిరములకు మధ్య ఎక్కడ నిలబడవలెను. (**సూచన:** ధ్వని తీవ్రత నిష్పత్తి, మధ్య గల దూరం వర్గము నిష్పత్తికి సమానము)
8. 10 మీ భుజం గల ఒక చతురస్రాకార నేల మధ్యలో ఒక చతురస్ర పూలపాన్పు, దాని చుట్టూ ఒకే వెడల్పు గల ఒక కంకర బాటను అమర్చబడింది. చతురస్ర పూలపాన్పు మరియు బాటను అమర్చుటకు క్రమముగా ₹3 మరియు ₹4 గా అయ్యే మొత్తం ఖర్చు ₹364 అయిన కంకర బాట వెడల్పును కనుగొనుము.
9. ఒక లంబకోణ త్రిభుజములో కర్ణము 25 సెం.మీ మరియు చుట్టుకొలత 56 సెం.మీ అయిన త్రిభుజము యొక్క అతి చిన్న భుజ పొడవును కనుగొనుము.

3.6.6 వర్గ సమీకరణం యొక్క మూలముల స్వభావము

$ax^2 + bx + c = 0$ సమీకరణం యొక్క మూలములు $a \neq 0$ సూత్రము $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ఇచ్చట $b^2 - 4ac$ దీనిని వర్గ సమీకరణం **విచక్షిణి** అందురు. మరియు Δ అను గుర్తుతో సూచించుదురు. మూలముల స్వభావము ఈ క్రింది విధముగా నిర్ణయించును.

విచక్షిణి విలువ $\Delta = b^2 - 4ac$	**మూలముల స్వభావము**
$\Delta > 0$	వాస్తవములు మరియు అసమానములు.
$\Delta = 0$	వాస్తవములు మరియు సమానములు.
$\Delta < 0$	వాస్తవ మూలములు కావు (కల్పిత మూలములు)

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 121 26-02-2023 14:34:21

ఉదాహరణ 3.40 ఈ క్రింది వర్గ సమీకరణములకు మూలముల స్వభావములను తెలుపుము.

(i) $x^2 - x - 20 = 0$ (ii) $9x^2 - 24x + 16 = 0$ (iii) $2x^2 - 2x + 9 = 0$

సాధన (i) $x^2 - x - 20 = 0$

ఇచ్చట, $a = 1, b = -1, c = -20$

ఇప్పుడు, $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-20) = 81$

ఇచ్చట, $\Delta = 81 > 0$. కనుక మూలములు వాస్తవములు మరియు అసమానములు.

(ii) $9x^2 - 24x + 16 = 0$

ఇచ్చట, $a = 9, b = -24, c = 16$

ఇప్పుడు, $\Delta = b^2 - 4ac = \left(-24\right)^2 - 4\left(9\right)\left(16\right) = 0$

ఇచ్చట, $\Delta = 0$. అయినందున మూలములు వాస్తవములు మరియు సమానములు.

(iii) $2x^2 - 2x + 9 = 0$

ఇచ్చట, $a = 2, b = -2, c = 9$

ఇప్పుడు, $\Delta = b^2 - 4ac = \left(-2\right)^2 - 4\left(2\right)\left(9\right) = -68$

ఇచ్చట, $\Delta = -68 < 0$. ఈ సమీకరణమునకు వాస్తవ మూలములు లేవు.

ఉదాహరణ 3.41 (i) వర్గ సమీకరణం $kx^2 - (8k + 4) + 81 = 0$ లో మూలములు వాస్తవములు మరియు సమానములైన 'k' విలువను కనుగొనుము.

(ii) వర్గ సమీకరణము $(k + 9)x^2 + (k + 1)x + 1 = 0$ లో వాస్తవ మూలములు లేనట్లయితే 'k' విలువను కనుగొనుము.

సాధన (i) $kx^2 - (8k + 4) + 81 = 0$

$\Delta = 0$ మూలములు వాస్తవములు మరియు సమానములు.

అందువల్ల, $b^2 - 4ac = 0$

ఇక్కడ, $a = k, b = -(8k + 4), c = 81$

$$\left[-(8k + 4)\right]^2 - 4(k)(81) = 0$$

$$64k^2 + 64k + 16 - 324k = 0$$

$$64k^2 - 260k + 16 = 0$$

4 చే భాగించగా, $16k^2 - 65k + 4 = 0$

$(16k - 1)(k - 4) = 0$ నుండి, $k = \frac{1}{16}$ లేదా $k = 4$

(ii) $(k + 9)x^2 + (k + 1)x + 1 = 0$ సమీకరణం యొక్క మూలములు వాస్తవములు కావు

$\Delta < 0$ అందువలన, $b^2 - 4ac < 0$

ఇక్కడ, $a = k + 9, b = k + 1, c = 1$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 122 26-02-2023 14:34:26

కావున, $(k+1)^2 - 4(k+9)(1) < 0$

$k^2 + 2k + 1 - 4k - 36 < 0$

$k^2 - 2k - 35 < 0$

$(k+5)(k-7) < 0$

కావున, $-5 < k < 7$. $\{\ \alpha < \beta \quad (x-\alpha)(x-\beta) < 0$ అయిన, $\alpha < x < \beta\ \}$.

ఉదాహరణ 3.42 $x^2(p^2+q^2) + 2x(pr+qs) + r^2 + s^2 = 0$ సమీకరణమునకు వాస్తవ మూలములు లేవని చూపుము మరియు $ps = qr$ అయిన మూలములు వాస్తవములు మరియు సమానములని నిరూపించుము.

సాధన ఇవ్వబడిన వర్గ సమీకరణం $x^2(p^2+q^2) + 2x(pr+qs) + r^2 + s^2 = 0$

ఇక్కడ, $a = p^2+q^2$, $b = 2(pr+qs)$, $c = r^2+s^2$

ఇప్పుడు, $\Delta = b^2 - 4ac = \left[2(pr+qs)\right]^2 - 4(p^2+q^2)(r^2+s^2)$

$= 4\left[p^2r^2 + 2pqrs + q^2s^2 - p^2r^2 - p^2s^2 - q^2r^2 - q^2s^2\right]$

$= 4\left[-p^2s^2 + 2pqrs - q^2r^2\right] = -4\left[(ps-qr)^2\right] < 0$ ...(1)

కాబట్టి, $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, వాస్తవ మూలములు కావు.

$ps = qr$, $\Delta = -4\left[ps - qr\right]^2 = -4\left[qr - qr\right]^2 = 0$ ((1) ని ఉపయోగించి)

కావున, $\Delta = 0$ అయిన $ps = qr$ మూలములు వాస్తవములు మరియు సమానములు.

అభ్యాసము 3.13

1. క్రింద ఇవ్వబడిన వర్గ సమీకరణమునకు మూలముల స్వభావములు కనుగొనుము.
   (i) $15x^2 + 11x + 2 = 0$ (ii) $x^2 - x - 1 = 0$ (iii) $\sqrt{2}t^2 - 3t + 3\sqrt{2} = 0$
   (iv) $9y^2 - 6\sqrt{2}y + 2 = 0$ (v) $9a^2b^2x^2 - 24abcdx + 16c^2d^2 = 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$
2. ఈ క్రింది ఇవ్వబడిన వర్గ సమీకరణములకు మూలములు వాస్తవములు మరియు సమానములైన 'k' విలువను కనుగొనుము. (i) $(5k-6)x^2 + 2kx + 1 = 0$ (ii) $kx^2 + (6k+2)x + 16 = 0$
3. $(a-b)x^2 + (b-c)x + (c-a) = 0$ మూలములు వాస్తవములు మరియు సమానములైన b, a, c అంక శ్రేణిలో ఉండునని నిరూపించుము.
4. a మరియు b వాస్తవ సంఖ్యలయిన $(a-b)x^2 - 6(a+b)x - 9(a-b) = 0$ మూలములు వాస్తవములు మరియు అసమానములని నిరూపించుము.
5. $(c^2-ab)x^2 - 2(a^2-bc)x + b^2 - ac = 0$ అను సమీకరణ మూలములు వాస్తవములు మరియు సమానములైన $a=0$ లేక $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ అని నిరూపించుము.

మెదడుకు మేత

క్రింది ఇవ్వబడిన వర్గ సమాసము ఖచ్చిత వర్గమైన ఖాళీ స్థలము పూరింపుము.

(i) $x^2 + 14x +$ ☐ (ii) $x^2 - 24x +$ ☐ (iii) $p^2 + 2qp +$ ☐

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 123 26-02-2023 14:34:30

3.6.7 వర్గ సమీకరణం యొక్క మూలములు మరియు గుణకములకు మధ్య గల సంబంధము.

వర్గ సమీకరణం $ax^2 + bx + c = 0$ ఇక్కడ a, b, c వాస్తవ సంఖ్యలు మరియు $a \neq 0$ ఇచ్చిన సమీకరణము మూలములు α మరియు β అయిన

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

3.6.3 నుండి మనకు లభించునది

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-x \text{ గుణకము}}{x^2 \text{ గుణకము}}$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{\text{స్థిరాంకము}}{x^2 \text{ గుణకము}}$$

ప్రగతి శోధన

వర్గ సమీకరణము	వర్గ సమీకరణ మూలములు (α మరియు β)	x^2, x యొక్క గుణకములు మరియు స్థిరాంకములు	$\alpha + \beta$ మూలముల మొత్తము	$\alpha\beta$ మూలముల లబ్ధము	$-\frac{b}{a}$	$\frac{c}{a}$	పరిష్కారము
$4x^2-9x+2=0$							
$\left(x-\frac{4}{5}\right)^2 = 0$							
$2x^2-15x-27=0$							

ఉదాహరణ 3.43 $x^2 - 13x + k = 0$ సమీకరణము యొక్క మూలముల వ్యత్యాసము 17 అయిన k విలువ కనుగొనుము.

సాధన $x^2 - 13x + k = 0$ ఇక్కడ, $a = 1$, $b = -13$, $c = k$

α, β సమీకరణ మూలములు అనుకొనుము

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(-13)}{1} = 13 \quad \ldots(1) \text{ అదేవిధంగా } \alpha - \beta = 17 \quad \ldots(2)$$

(1)+(2) నుండి, $2\alpha = 30$, $\alpha = 15$ అగును

కావున, $15 + \beta = 13$ ((1) నుండి) $\beta = -2$ అగును

కాని, $\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{k}{1} \Rightarrow 15 \times (-2) = k \quad k = -30$ అగును.

మెదడుకు మేత

$ax^2+bx+c=0$ సమీకరణ స్థిరాంకము నున్న అయిన మూలముల మొత్తము మరియు లబ్ధములు _____ మరియు _____ అగును.

ఉదాహరణ 3.44 $x^2 + 7x + 10 = 0$ సమీకరణము మూలములు α మరియు β అయిన క్రింది వాటి విలువను కనుగొనుము.

(i) $(\alpha - \beta)$ (ii) $\alpha^2 + \beta^2$ (iii) $\alpha^3 - \beta^3$ (iv) $\alpha^4 + \beta^4$ (v) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$ (vi) $\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha}$

సాధన $x^2 + 7x + 10 = 0$ ఇచ్చట, $a = 1$, $b = 7$, $c=10$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 124 26-02-2023 14:34:35

α మరియు β మూలములైన,

$$\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{-7}{1}=-7\,;\ \alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{10}{1}=10$$

(i) $\alpha-\beta=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{(-7)^2-4\times10}=\sqrt{9}=3$

(ii) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-7)^2-2\times10=29$

(iii) $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha-\beta)=(3)^3+3(10)(3)=117$

(iv) $\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2=29^2-2\times(10)^2=641$ ((ii) నుండి $,\alpha^2+\beta^2=29$)

(v) $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{49-20}{10}=\dfrac{29}{10}$

(vi) $\dfrac{\alpha^2}{\beta}+\dfrac{\beta^2}{\alpha}=\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}=\dfrac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}$

$$=\frac{(-343)-3\big(10\times(-7)\big)}{10}=\frac{-343+210}{10}=\frac{-133}{10}$$

ఉదాహరణ 3.45 $3x^2+7x-2=0$ సమీకరణ మూలములు α, β అయిన క్రింది వాటి విలువలను కనుగొనుము. (i) $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}$ (ii) $\dfrac{\alpha^2}{\beta}+\dfrac{\beta^2}{\alpha}$

సాధన $3x^2+7x-2=0$ ఇక్కడ, $a=3$, $b=7$, $c=-2$

ఇక్కడ సమీకరణం యొక్క మూలములు

(i) $\alpha+\beta=\dfrac{-b}{a}=\dfrac{-7}{3}\,;\ \alpha\beta=\dfrac{c}{a}=\dfrac{-2}{3}$

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{\left(\frac{-7}{3}\right)^2-2\left(\frac{-2}{3}\right)}{\frac{-2}{3}}=\frac{-61}{6}$$

(ii) $$\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}=\frac{\left(-\frac{7}{3}\right)^3-3\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{7}{3}\right)}{-\frac{7}{3}}=\frac{469}{18}$$

ఉదాహరణ 3.46 $2x^2-x-1=0$, సమీకరణం యొక్క మూలములు α, β అయిన, క్రింద ఇవ్వబడిన మూలములు గల వర్గసమీకరణాలను వ్రాయండి. (i) $\dfrac{1}{\alpha}, \dfrac{1}{\beta}$ (ii) $\alpha^2\beta$, $\beta^2\alpha$ (iii) $2\alpha+\beta$, $2\beta+\alpha$

సాధన $2x^2-x-1=0$ ఇక్కడ, $a=2$, $b=-1$, $c=-1$

$$\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{-(-1)}{2}=\frac{1}{2}\,;\ \alpha\beta=\frac{c}{a}=-\frac{1}{2}$$

(i) $\dfrac{1}{\alpha}, \dfrac{1}{\beta}$ ఇవ్వబడిన మూలములు

మూలముల మొత్తము $=\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}=-1$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 125 26-02-2023 14:34:41

మూలముల లబ్ధము $= \frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$

కావలసిన సమీకరణము, x^2 –(మూలముల మొత్తము)x + (మూలముల లబ్ధము) $=0$

$x^2 - (-1)x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$

(ii) $\alpha^2\beta$, $\beta^2\alpha$ ఇవ్వబడిన మూలములు

మూలముల మొత్తము $\alpha^2\beta + \beta^2\alpha = \alpha\beta(\alpha + \beta) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$

కావలసిన సమీకరణము $(\alpha^2\beta) \times (\beta^2\alpha) = \alpha^3\beta^3 = (\alpha\beta)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$

కావలసిన సమీకరణము, x^2 –(మూలముల మొత్తము)x + (మూలముల లబ్ధము) $=0$

$x^2 - \left(-\frac{1}{4}\right)x - \frac{1}{8} = 0 \Rightarrow 8x^2 + 2x - 1 = 0$

(iii) $2\alpha + \beta$, $2\beta + \alpha$

$2\alpha + \beta + 2\beta + \alpha = 3(\alpha + \beta) = 3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$ ఇవ్వబడిన మూలములు

మూలముల లబ్ధము $= (2\alpha + \beta)(2\beta + \alpha) = 4\alpha\beta + 2\alpha^2 + 2\beta^2 + \alpha\beta$

$= 5\alpha\beta + 2(\alpha^2 + \beta^2) = 5\alpha\beta + 2\left[\left(\alpha + \beta\right)^2 - 2\alpha\beta\right]$

$= 5\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\left[\frac{1}{4} - 2 \times -\frac{1}{2}\right] = 0$

కావలసిన సమీకరణము, x^2 –(మూలముల మొత్తము)x + (మూలముల లబ్ధము) $=0$

$x^2 - \frac{3}{2}x + 0 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 3x = 0$

అభ్యాసము 3.14

1. ఈ క్రింది ఇవ్వబడిన సమాసములను $\alpha + \beta$ మరియు $\alpha\beta$. వాటి ద్వారా మార్చి వ్రాయుము.

   (i) $\frac{\alpha}{3\beta} + \frac{\beta}{3\alpha}$ (ii) $\frac{1}{\alpha^2\beta} + \frac{1}{\beta^2\alpha}$ (iii) $(3\alpha - 1)(3\beta - 1)$ (iv) $\frac{\alpha + 3}{\beta} + \frac{\beta + 3}{\alpha}$

2. $2x^2 - 7x + 5 = 0$ సమీకరణ మూలములు α మరియు β అయిన క్రింద ఇవ్వబడిన వాటికి విలువలను కనుగొనుము.

   (i) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ (ii) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$ (iii) $\frac{\alpha + 2}{\beta + 2} + \frac{\beta + 2}{\alpha + 2}$

3. $x^2 + 6x - 4 = 0$ యొక్క మూలము α, β అయిన క్రింద ఇవ్వబడి ఉన్న మూలములు కలిగిన వర్గసమీకరణమును కనుగొనుము.

   (i) α^2 మరియు β^2 (ii) $\frac{2}{\alpha}$ మరియు $\frac{2}{\beta}$ (iii) $\alpha^2\beta$ మరియు $\beta^2\alpha$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 126 26-02-2023 14:34:46

4. α, β అనునది $7x^2 + ax + 2 = 0$ యొక్క మూలములు మరియు $\beta - \alpha = \frac{-13}{7}$ అయిన a యొక్క విలువను కనుగొనుము.

5. $2y^2 - ay + 64 = 0$ సమీకరణం యొక్క ఒక మూలం, మరో మూలమునకు రెట్టింపుగా ఉండిన, a యొక్క విలువను కనుగొనుము.

6. వాస్తవ సంఖ్యలు మూలములుగా కలిగిన $3x^2 + kx + 81 = 0$ సమీకరణము ఒక మూలము మరొక మూలమునకు వర్గమైన k యొక్క విలువను కనుగొనుము.

3.7 చలత్వముల యొక్క రేఖాచిత్రములు



చలరాశులు:

హరిత ప్రతిరోజు పాఠశాలకు తన సైకిల్ పై స్థిరవేగముతో ఇంటి నుండి బయలుదేరును. దీనిని గణిత సమీకరణములో $d = rt$ సూచించవచ్చును. ఇక్కడ d అనేది, t కాలములో r అనే స్థిరవేగముతో పయనించే దూరమగును.

ఒక వేళ హరిత 20 కి.మీ/గం. వేగముతో 15 నిముషాలు సైకిల్‌ను త్రొక్కిన, ఆమె పయనించిన దూరమును కనుగొనవచ్చును.

ఇక్కడ $r = 20$ మరియు $t = \frac{1}{4}$ (ఎలా?) d కనుగొనుటకు ఇంకా $rt = 20 \times \frac{1}{4} = 5$ కి.మీ ఇక్కడ d అనేది ఆధారిత చలరాశి (dependent variable) అని, r మరియు t అనేది స్వతంత్ర చలరాశి (independent variable) అని పిలుస్తారు. ఎందుకనగా పయనించిన దూరము d అనేది వేగము r మరియు పయనించుటకు పట్టినకాలము t పై ఆధారపడి ఉండును.

అందువలన, ఒక స్వతంత్ర చరరాశి ఇవ్వబడిన పరిస్థితిలో ఉపయోగించబడిన పరిమాణాన్ని సూచిస్తుంది. అదే ఆధారిత చరరాశి ఒక పరిమాణాన్ని సూచిస్తుంది; దీనివిలువ స్వతంత్ర చరరాశి ఎలా ఉపయోగపడుతుందో దానిపై ఆధారపడి ఉంటుంది.

ఒక వాక్యంలోని రెండు చరరాశుల మధ్య సంబంధాన్ని వివరించే సమీకరణాలు ఆ చరరాశుల మధ్య చలత్వాన్ని తెలియజేయును.



ఒక హోటల్‌లో పనిచేసే సురేశ్ అనే పడ్డించేవానికి ఒక గంటకు ₹50 ఇచ్చిన, అతని నెలజీతము కనుగొనవచ్చును. ఇక్కడ, రెండు చరరాశులు గలవు. ఒకటి అతన నెలజీతము మరోకటి అతను పనిచేసిన గంటలు. ఈ రెండింటిలో ఏది స్వతంత్ర చలత్వము అవుతుంది?

స్థిరాంకములు:

ఒక వృత్తము యొక్క వ్యాసార్ధము ఇచ్చిన దాని వైశాల్యమును కనుగొనుట నాకు తెలుసు, వ్యాసార్ధము r వైశాల్యము A అయిన కావలసిన సూత్రము $A = \pi r^2$ అవుతుంది.

ఇక్కడ వైశాల్యము A అనేది వ్యాసార్ధము r యొక్క పొడవుపై ఆధారపడి ఉండును. కావున A అనేది ఆధారిత చరరాశి (dependent variable). r అనేది స్వతంత్ర చరరాశి (independent variable) కాని π గురించి మనము ఏమి చెప్పగలము? అది అన్ని సందర్భాలలో మార్పుచెందకుండా ఉండు ఒక సంఖ్య అనగా అది ఒక స్థిర సంఖ్య. ఒక నిర్ధిష్ట గణిత సందర్భాలన్నింటిలో ఒక స్థిరమైన విలువను తీసుకొనే పరిమాణమును స్థిరాంకము అని అంటారు.

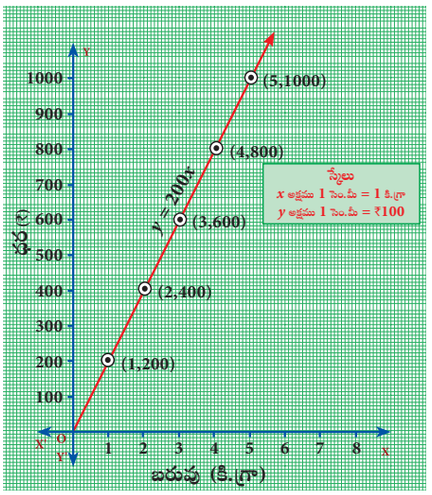
10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 127 26-02-2023 14:34:48

చలత్వములు రెండు రకములు

అనుపాతములో గల రెండు వస్తువులలో, ఒక విలువ మారినపుడు మరొక విలువ మారును. ఈ విధంగా మారే రెండు చలత్వములను క్రింద మనము చూడవచ్చును.

(i) ప్రత్యక్ష చలత్వము

(ii) పరోక్ష చలత్వము



పటము. 3.8

(i) ప్రత్యక్ష చలత్వము

మీరు అంగడికి వెళ్ళి ఎక్కువ ఆపిల్ కొనదలచిన, ఎక్కువ ఖర్చు చేయవలెను. ఉదాహరణకు ఒక కిలో ఆపిల్ – 200 అయిన కింది ఇచ్చిన విధంగా చేయవలెను.

బరువు (కి.గ్రా)	1	2	3	4	5
ధర (₹)	200	400	600	800	1000

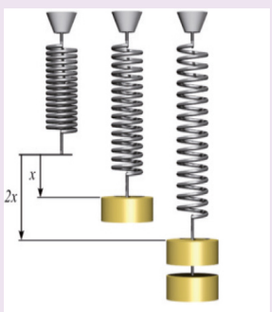
కావున $\frac{1}{200} = \frac{2}{400} = \frac{3}{600} = \frac{4}{800} = \frac{5}{1000} = \ldots$

ఈ విధంగా అనుపాతములో ఉండే చరరాశిని ప్రత్యక్ష చలత్వము అని అంటారు. ఇక్కడ ధరను కనుగొనుటకు బరువు 200 తో గుణించవలెను.

ఇక్కడ మారే బరువును x అని మారని ధరను y అని అనుకొన్న దీనిని $y = 200x$ గా బీజీయ సమీకరణముగా వ్రాయవచ్చు. పై సమీకరణములో గుణకార స్థిరాంకము 200.

$\frac{y}{x}=k$, k అనేది ఒక ధనసంఖ్య (స్థిరాంకము) అయిన, x మరియు y అనేవి ప్రత్యక్ష చలత్వములో కలవు. k ను అనుపాత స్థిరాంకము అని అంటారు.

నిత్యజీవితములో గణితము: ఈ పటము బలమును రెట్టింపు చేసిన స్థానభ్రంశము కూడా రెట్టింపు అగును అని తెలియజేయును. ఇదియే హూక్స్ సిద్ధాంతము. దీనిని $F = kx$ గా సూచిస్తారు. ఇక్కడ స్ప్రింగుకు x అనే స్థానభ్రంశము ఏర్పరచుటకు F అనే బలము అవసరమగును. స్థానభ్రంశము రెట్టింపు చేయుటకు బలమును కూడా రెట్టింపు చేయవలెను. ఇక్కడ అనుపాత స్థిరాంకము k అనేది స్ప్రింగు యొక్క దృడత్వముపై ఆధారపడి ఉండును. కావున ఇది ప్రత్యక్ష చలత్వమునకు ఉదాహరణ.



ప్రత్యక్ష చలత్వముల ప్రదర్శన:

ఒక సమీకరణములో ప్రత్యక్ష చలత్వము కలదా అని తెలుసుకొనుటకు అది $y = kx$ రూపములో కలదా అని తెలుసుకొనవలెను. ఇక్కడ k అనేది అనుపాతస్థిరాంకము. కావున $y = 5x$ అనే సమీకరణము ఎల్లప్పుడూ ప్రత్యక్ష చలత్వము గల సమీకరణముగా ఉండును.

మెదడుగు మేత

x మరియు y చరరాశులు గల $3y - 7x = 0$ అనే సమీకరణము ప్రత్యక్ష చలత్వము గలదని ఏ విధముగా చెప్పగలము? దీని గురించి ఆలోచించుము. పై సమీకరణములో అనుపాత స్థిరాంకము ఎంత?

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 128 26-02-2023 14:34:50

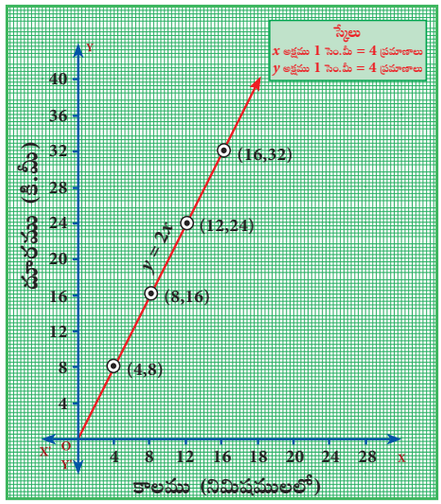
రేఖాచిత్రమును గమనించుము:

పయనించిన దూరము, దానికి తీసుకొన్న కాలము అనుపాతములో కలదని ఏ విధముగా తెలుసుకొనవచ్చును?

i) రేఖాచిత్రము అనేది ఒక సరళరేఖ

ii) సరళరేఖ అనేది మూలబిందువు గుండా వెళ్ళునదని గుర్తించుకొనుము. ఈ రెండు ధర్మములను తృప్తిపరచిన రేఖాచిత్రము ప్రత్యక్ష అనుపాతములో కలదని చెప్పవచ్చు.

ఈ రేఖాచిత్రము నుండి మనం తెలుసుకోగలిగినది ఏమి?

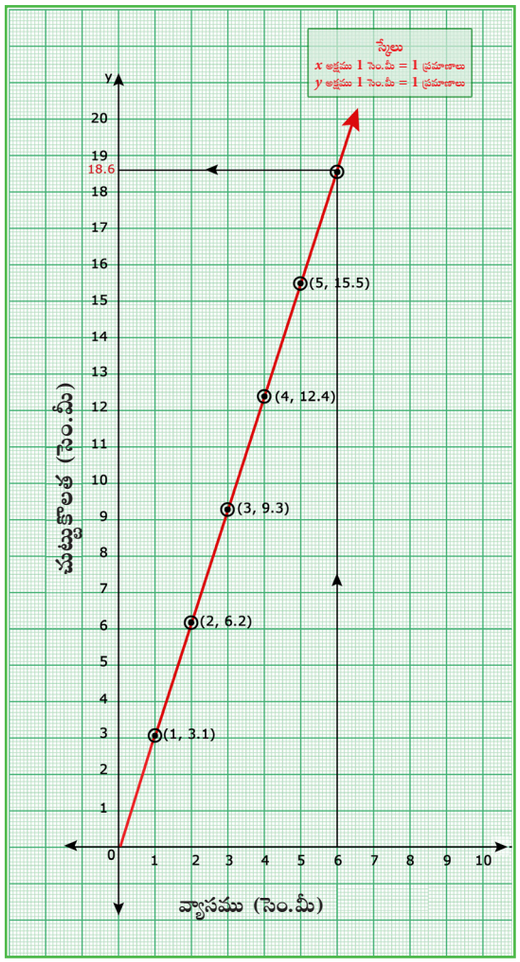


పటము. 3.9

కాలము (నిమిషములలో)	4	8	12	16
దూరము (కి.మీ)	8	16	24	32

చరరాశి రెట్టింపు అయినపుడు మరొక రాశి కూడా రెట్టింపగును. దీని నుండి $d = rt$ అనే సంబంధము ఏర్పడుచున్నది. అనుపాత స్థిరాంకమును సులువుగా కనుగొనవచ్చును.

ఉదాహరణ 3.47 వర్షిక వేర్వేరు కొలతలతో 6 వృత్తములను గీచెను. పట్టికలో ఉన్నట్లు ఒక్కొక్క వృత్తము యొక్క వ్యాసము మరియు చుట్టుకొలతకు గల సంబంధమును రేఖాచిత్రములో గీయుము. దానిని ఉపయోగించి వ్యాసము 6 సెం.మీగా ఉన్న వృత్తము యొక్క చుట్టుకొలతను కనుగొనుము.



పటము. 3.10

వ్యాసము (x) సెం.మీ	1	2	3	4	5
చుట్టుకొలత (y) సెం.మీ	3.1	6.2	9.3	12.4	15.5

సాధన:

పై పట్టిక నుండి x విలువ అధికమయ్యే కొలది y విలువ కూడా అధికమగుచున్నదని గమనించవచ్చును. కావున, ఇది

ప్రత్యక్ష చలత్వము.

కావున $y = kx$ లో k అనేది అనుపాత స్థిరాంకము.

ఇవ్వబడిన విలువల నుండి మనము పొందునది

$$k = \frac{3.1}{1} = \frac{6.2}{2} = \frac{6.3}{3} = \frac{12.4}{4} = \ldots = 3.1$$

మనకు $(1, 3.1)(2, 6.2)(3, 9.3), (4, 12.4), (5, 15.5)$, బిందువులను గ్రాఫ్ కాగితముపై గుర్తించిన $y = (3.1)x$ అనేది ఒక సరళరేఖా చిత్రముగా వచ్చునని గమనించవచ్చును.

రేఖాచిత్రము నుండి వ్యాసము 6సెం.మీగా గల వృత్తము యొక్క చుట్టుకొలత 18.6 సెం.మీగా ఉంటుంది.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 129 26-02-2023 14:34:51

ఉదాహరణ 3.48 ఒక బస్సు 50కి.మీ/గం॥ స్థిర వేగముతో ప్రయాణించుచున్నది. దీని నుండి దూరము – కాలము రేఖాచిత్రము గీచి క్రింది వాటిని కనుగొనుము.

(i) స్థిరాంక చలత్వమును

(ii) 90 నిమిషములలో ప్రయాణించిన దూరమును

(iii) 300కి.మీ దూరమును ప్రయాణించుటకు పట్టు కాలమును కనుగొనుము.

సాధన:

x అనేది కాలమును (నిమిషములలో), y అనేది ప్రయాణించిన దూరము (కి.మీలలో) అనుకొనుము.

ప్రయాణించిన సమయము x (నిమిషములలో)	60	120	180	240
ప్రయాణించిన దూరము y (కి.మీలలో)	50	100	150	200

(i) కాలము ఎక్కువయ్యే కొలది ప్రయాణించిన దూరము కూడా ఎక్కువయినదని గమనించగలరు. కావున ఇది $y = kx$. రూపములో గల ప్రత్యక్ష చలత్వమును సూచించుచున్నది.

స్థిరాంక చలత్వము

$$k = \frac{y}{x} = \frac{50}{60} = \frac{100}{120} = \frac{150}{180} = \frac{200}{240} = \frac{5}{6}$$

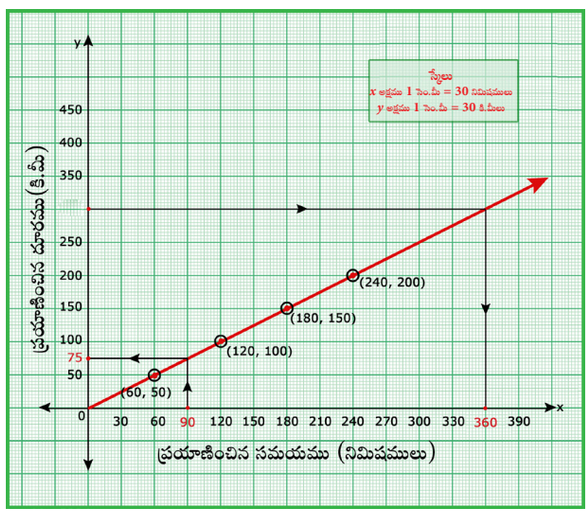
రెండు చరరాశుల మధ్య సంబంధాన్ని వివరించే సమీకరణము $y = kx \Rightarrow y = \frac{5}{6}x$

(ii) $y = \frac{5x}{6}$, అనే రేఖాచిత్రము నుండి $x = 90$, అయిన $y = \frac{5}{6} \times 90 = 75$ కి.మీ.

కావున 90 నిమిషములలో బస్సు ప్రయాణించిన దూరము 75కి.మీ.

(iii) $y = \frac{5x}{6}$, అనే రేఖాచిత్రము నుండి $y = 300$ అయిన $x = \frac{6y}{5} = \frac{6}{5} \times 300 = 360$ నిమిషములు (లేదా) 6 గంటలు.

300 కి.మీ దూరము ప్రయాణించుటకు పట్టుకాలము 360 నిమిషములు అనగా 6 గంటలు.



పటము. 3.11

(ii) పరోక్ష చలత్వము:

చెన్నై, మధురైకు మధ్యగల దూరము సుమారు 480 కి.మీ అయితే ఒక రైలుబండి చెన్నై నుండి బయలుదేరి మధురై మీదుగా వెళ్ళునట్లు అనుకొనుము. రైలు వేగము పెరిగే కొలది, ప్రయాణించే సమయము తగ్గుతుంది. క్రింద ఇవ్వబడిన పట్టిక వేగము v అనేది కి.మీలలో కాలము t అనేది గంటలలో ఇవ్వబడినది.

వేగము (v) (కి.మీ/గం॥)	30	40	60	80
కాలము (t) (గంటలలో)	16	12	8	6

మనము రైలు తక్కువ వేగముతో ప్రయాణము చేసిన, కాలము ఎక్కువ అగుటను, ఎక్కువ వేగముతో ప్రయాణం చేసిన కాలము తక్కువ అగుటను పై పట్టిక నుండి గమనించగలము. $30 \times 16 = 40 \times 12 = 60 \times 8 = 80 \times 6$, అని మనము గమనించవచ్చును. ఇది vt అనే స్థిరాంకమును అని తెలుపుచున్నది. $vt = 480$ లో

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 130 26-02-2023 14:34:53

v మరియు t విలోమానుపాతములో కలదు. $vt = 480$ సమీకరణము యొక్క రేఖాచిత్రము ఒక సరళరేఖలో ఉండదని గమనించవలెను. కావున పరోక్ష చలత్వములో ఒక చరరాశి పెరిగిన మరొకటి తగ్గును.

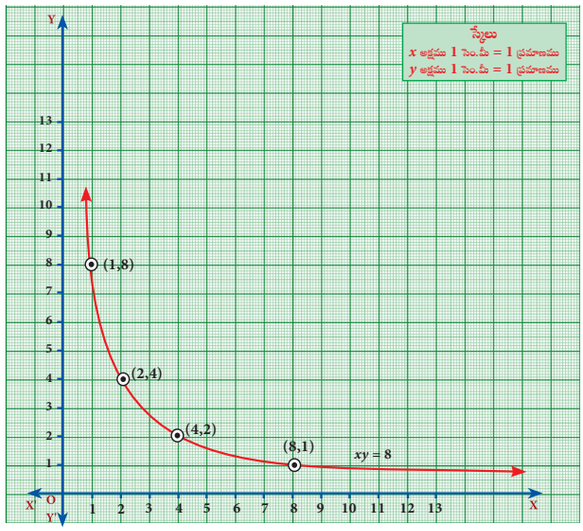
పరోక్ష చలత్వము యొక్క ప్రదర్శన

రేఖాచిత్రము (పటము 3.12) ను గమనించుము. ఇది $xy = 8$ అనే సమీకరణము యొక్క రేఖాచిత్రము. ఇక్కడ x, y విలువలను మనము ధనాత్మక విలువగానే తీసుకొనవలెను.

పట్టిక విలువలు

x	1	2	4	8
$y=\frac{8}{x}$	8	4	2	1

ఇది పరోక్ష చలత్వము లేదా విలోమ చలత్వమునకు మంచి వివరణ. రేఖాచిత్రము వక్రము యొక్క భాగము. దీనినే దీర్ఘచతురస్రాకార అతిపరావలయము అని పిలుస్తారు.



పటము. 3.12

ఉదాహరణ 3.49 ఒక కర్మాగారము 40 మంది కార్మికులతో ప్రారంభించబడి 150 రోజులలో ఒక పనిని ముగించదలచెను. పిదప పనిని త్వరగా ముగించుటకు క్రింద ఇవ్వబడినట్లు కార్మికులను పెంచెను.

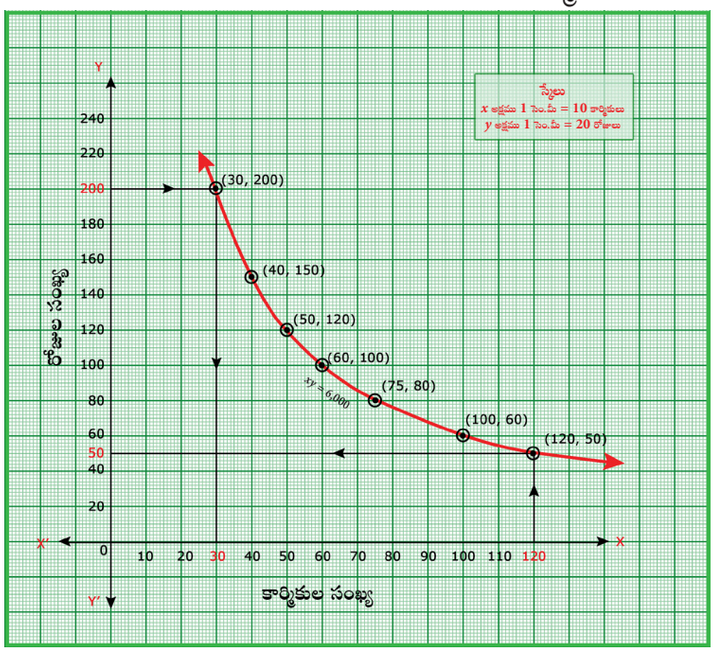
కార్మికుల సంఖ్య (x)	40	50	60	75
రోజుల సంఖ్య (y)	150	120	100	80

(i) పై దత్తాంశమునకు రేఖాచిత్రము గీచి చలత్వ రకమును కనుగొనుము.

(ii) రేఖాచిత్రము నుండి 120 మంది కార్మికులను పనిలో ఉంచిన పని ముగియుటకు ఎన్ని రోజులు పట్టును?

(iii) 200 రోజులలో పనిని ముగించదలచిన ఎంత మంది కార్మికులు అవసరమగును?

సాధన:



పటము. 3.13

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 131 26-02-2023 14:34:56

ఇవ్వబడిన పట్టిక నుండి x అధికమయ్యే కొలది y తగ్గుచున్నదని తెలియుచున్నది. కావున ఇది పరోక్ష చలత్వము అవుతుంది.

$y = \frac{k}{x}$ అనుకొనిన

$\Rightarrow xy = k,\ k > 0$ అనేది చలత్వము యొక్క స్థిరాంకము.

పట్టిక నుండి $k = 40 \times 150 = 50 \times 120 = \ldots = 75 \times 80 = 6000$

కావున, $xy = 6000$

$(40,150), (50,120), (60,100), (75,80)$ బిందువులను కలిపి దీర్ఘచతురస్రాకార అతిపరావలయమును నిర్మించుము.

(ii) రేఖాచిత్రము నుండి 120 మంది కార్మికులు పనిలో చేరిన ఆ పనిని 50 రోజులలో ముగిస్తారు.

$xy = 6000$, $x = 120$ అయిన $y = \frac{6000}{120} = 50$

(iii) రేఖాచిత్రము నుండి 200 రోజులలో పనిని ముగించుటకు కావలసిన కార్మికుల సంఖ్య 30 మంది.

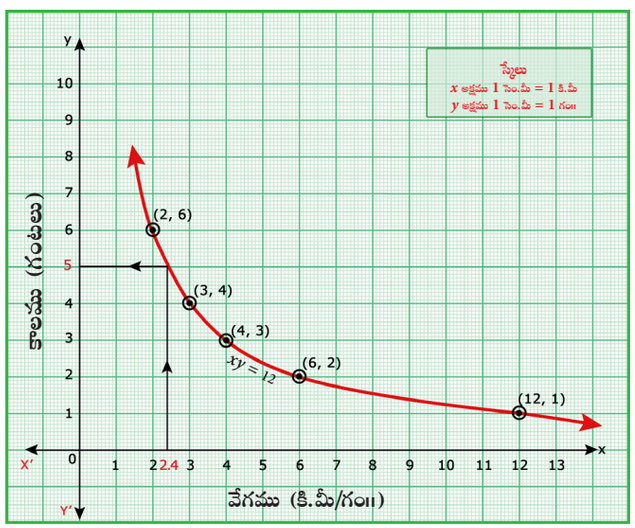
$xy = 6000$, $y = 200$ అయిన $x = \frac{6000}{200} = 30$

ఉదాహరణ 3.50 నిశాంత్ 12కి.మీ దూరమును మారథాన్ పరుగులో గెలుపొందిన వ్యక్తి. అతను గంటకు 12కి.మీ/గం॥ స్థిరమైన వేగముతో పరిగెత్తి 1 గంటలో గమ్యము చేరి గెలుపొందెను. అతనిని అనుసరించి ఆరాధన, జయంత్, సత్య మరియు శ్వేతలు క్రమముగా 6కి.మీ/గం॥, 4కి.మీ/గం॥, 3కి.మీ/గం॥ మరియు 2కి.మీ/గం॥ వేగముతో పరిగెత్తి వచ్చినారు. వారు ఆ గమ్యమును చేరుటకు క్రమముగా 2గంటలు, 3 గంటలు, 4 గంటలు, 6గంటలు పట్టెను.

వేగము – కాలము రేఖాచిత్రమును గీచి దాని నుండి గంటకు 2.4కి.మీ/గం॥ వేగముతో పరిగెత్తిన కౌశిక్ తీసుకొన్న సమయమును కనుగొనుము.

సాధన: ఇవ్వబడిన వివరముల నుండి ఒక పట్టికను ఏర్పరచుము.

వేగము (కి.మీ/గంట) (x)	12	6	4	3	2
కాలము (గంటలు) (y)	1	2	3	4	6



పటము. 3.14

పట్టిక నుండి x తగ్గినప్పుడు y పెరుగుచున్నది. కావున ఇది పరోక్ష చలత్వము కలిగియున్నది.

$y = \frac{k}{x}$ అనుకొనిన

$\Rightarrow xy = k,\ k > 0$ అనేది చలత్వము యొక్క స్థిరాంకము.

ఇక్కడ $k = 12 \times 1 = 6 \times 2 = \ldots$

$= 2 \times 6 = 12$

కావున, $xy = 12$.

$(12,1), (6,2), (4,3), (3,4), (2,6)$ బిందువులను గుర్తించి దీర్ఘచతురస్రాకార అతిపరావలయమును నిర్మించవలెను.

రేఖాచిత్రము నుండి గంటకు 2.4కి.మీ/గం॥ కు వేగముతో పరిగెత్తిన కౌశిక్ 5 గంటలలో గమ్యం చేరును.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 132 26-02-2023 14:34:57

సూచన

ఒక ఏకఘాత సమీకరణము యొక్క సరళరేఖ $y = mx+c$ అని మనము ఇది వరకే తెలుసుకొనియున్నాము. దీనిలో m అనేది సరళరేఖ యొక్క వాలు మరియు c అనేది y – అంతరఖండము. ఈ సరళరేఖ ఆది బిందువు గుండా పోయిన $y = mx$ అవుతుంది. ప్రత్యక్ష చలత్వము యొక్క రేఖాచిత్రము ఒక సరళరేఖను సూచించిన దాని సాధారణ రూపము $y = kx$ అవుతుంది. అనుపాత స్థిరాంకము. అనేది సరళరేఖ యొక్క వాలు అవుతుంది.

అభ్యాసము 3.15

1. బట్టల షాపు వినియోగదారులకు కొనే ప్రతి వస్తువుపై 50% త్రోపుడును ప్రకటించెను. గుర్తింపు ధరకు, త్రోపుడుకు మధ్యగల సంబంధమును రేఖాచిత్రము గీచి క్రిందివానిని కనుగొనుము.
   (i) రేఖాచిత్రము నుండి ఒక వినియోగదారుడు ₹3250ను త్రోపుడుగా పొందిన గుర్తింపు ధర కనుగొనుము.
   (ii) గుర్తింపు ధర ₹2500 అయిన త్రోపుడు కనుగొనుము.

2. $xy = 24, x,y > 0$ అనేది రేఖాచిత్రము గీచి దానినుండి
   (i) $x = 3$ అయిన y ను కనుగొనుము. (ii) $y = 6$ అయిన x ను కనుగొనుము.

3. $y = \frac{1}{2}x$ అనే రేఖీయ సమీకరణమునకు రేఖాచిత్రము గీచి చలత్వము యొక్క స్థిరాంకమును కనుగొని, దానిని రేఖాచిత్రముతో సరిచూడుము. (i) ఇంకా $x = 9$ అయిన y ను కనుగొనుము.
   (ii) $y = 7.5$ అయిన x ను కనుగొనుము

4. ఒక తొట్టిని నింపుటకు కావలసిన పైపుల సంఖ్య, అది నింపుటకు పట్టే సమయము క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడినది.

పైపుల సంఖ్య (x)	2	3	6	9
నింపుటకు పట్టే సమయము (నిమిషాలలో) (y)	45	30	15	10

   పై దత్తాంశము నుండి రేఖాచిత్రము గీచి దాని నుండి
   (i) ఐదు పైపులు ఉపయోగించిన తొట్టి నింపుటకు పట్టు సమయమును కనుగొనుము.
   (ii) 9 నిమిషాలలో తొట్టి నిండిన ఉపయోగించిన పైపుల సంఖ్యను కనుగొనుము.

5. ఒక పాఠశాలలో నిర్వహించిన కొన్ని నిర్ధిష్ట పోటీలకు నగదు బహుమతిని అన్ని పోటీదారులకు సమానముగా క్రింద ఇచ్చిన విధముగా పంచబడినది.

పోటీదారుల సంఖ్య (x)	2	4	6	8	10
ఒక్కొక్క పోటీదారునికి ఇవ్వబడిన మొత్తము (₹ లో) (y)	180	90	60	45	36

   (i) చలత్వము యొక్క స్థిరాంకమును కనుగొనుము.
   (ii) పైన ఇవ్వబడిన దత్తాంశమునకు రేఖాచిత్రము గీచి, 12 పోటీదారులు పాల్గొనిన ఒక్కొక్క పోటీదారునికి ఇచ్చిన మొత్తమును కనుగొనుము.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 133 26-02-2023 14:34:58

6. బస్సు నిలయము దగ్గర గల ఒక ద్విచక్ర వాహన స్టాండువారు వసూలు చేసే మొత్తమును క్రింద ఇవ్వబడినది.

కాలము (గంటలలో) (x)	4	8	12	24
వసూలు చేసే మొత్తము ₹ (y)	60	120	180	360

వసూలు చేసే మొత్తము వాహనము నిలిపే సమయానికి ప్రత్యక్ష చలత్వములో కలదా లేదా పరోక్ష చలత్వములో కలదా అని సరిచూడుము. ఇచ్చిన దత్తాంశమును రేఖాచిత్రములో చూపుము. మరియు

(i) ఒక వాహనాన్ని 6 గంటలు నిలిపిన వసూలు చేసే మొత్తమును కనుగొనుము.
(ii) ₹ 150 వసూలు చేసిన వాహనాన్ని ఎన్ని గంటలు నిలిపారో కనుగొనుము.

3.8 వర్గ సమీకరణం యొక్క రేఖా చిత్రములు

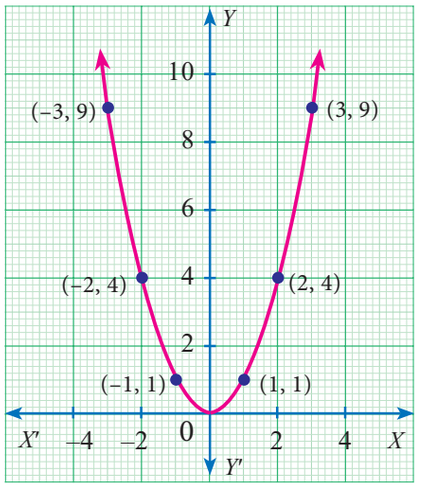


పటం. 3.15

పరిచయము

ఒక వస్తువును (బంతి వంటి) పైకి విసిరినప్పుడు ఏర్పడు ఒక కోణము నుండి ఏర్పడు మార్గము పరావలయము అనే వక్రమును ఏర్పరుచును. పైకి చిమ్మే నీటిధార నుండి కనబడు పైకి ఎగిసిపడు నీటి యొక్క మార్గము మొదలగునవి పరావలయము మార్గములాగా ఉండును. పరావలయము అనునది ఒక వర్గ ప్రమేయమును సూచించును.

$f(x) = ax^2 + bx + c$ అను అది వర్గ ప్రమేయము అగును. ఇచ్చట a, b, c లు స్థిరాంకములు మరియు $a \neq 0$.



పటం. 3.16

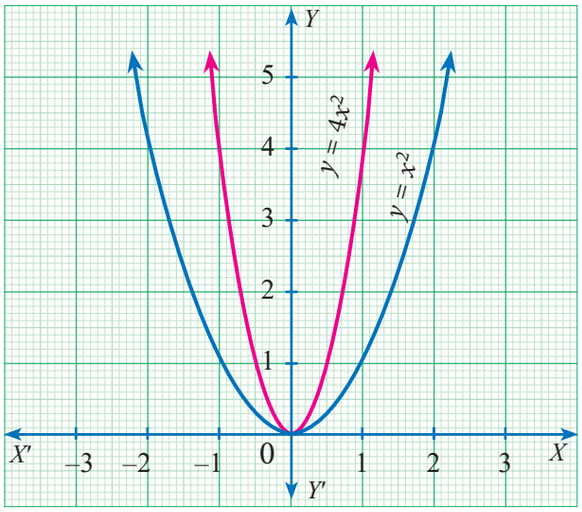
అనేక వర్గ సమీకరణాలు రేఖా చిత్రము ద్వారా పరావలయము ఆధారముగా చేతితో గీయవచ్చును. $y = x^2$ అను పరావలయమును గీయవచ్చును.

పరావలయము $y = x^2$ పటము 3.16 లో చూపిన విధముగా రూపొందును.

సాధారణ సమీకరణములో గుణకము a ను బట్టి మిగిలిన వెడల్పయిన పైకున్నట్లు లేక క్రింది ఉన్నట్లు ఉండును. అదే విధముగా a యొక్క విలువ బట్టి వెడల్పైనదిగా లేక సంకోచమైనదా అని నిర్ణయించవచ్చును. అన్ని పరావలయములు ముఖ్యముగా "∪" ఆకారములో ఉండును. వర్గ సమీకరణం యొక్క గుణకము అధికముగా ఉన్న యెడల పరావలయము సంకోచముగా ఉండును.

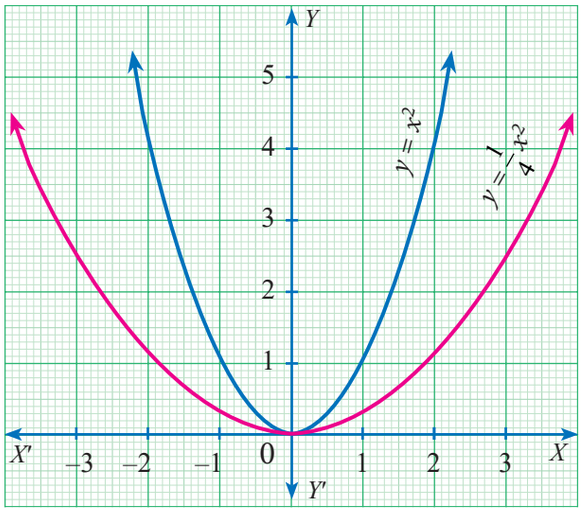
వర్గ సమీకరణం యొక్క గుణకము చిన్నదిగా నుండిన పరావలయము వెడల్పుగా కనబడును.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 134 26-02-2023 14:34:59



పటం. 3.17

$y = x^2$ అను రేఖాచిత్రము $y = 4x^2$ కన్న వెడల్పుగా ఉన్నది.



పటం. 3.18

$y = x^2$ అను రేఖా చిత్రము $y = \frac{1}{4}x^2$ రేఖాచిత్రము కన్నా సంకోచముగా ఉన్నది.

ఒక ప్రత్యేక రేఖను బట్టి పరావలయము సౌష్ఠవముగా ఉండును. ఆ రేఖనే 'సౌష్ఠవ అక్షరేఖ' అనబడును. పరవాలయము, సౌష్ఠవ అక్షరేఖను ఖండించు బిందువును 'పరావలయ శీర్షము' అందురు. ద్విఘాత సమాసమును గ్రాఫ్‌నందు చూపగా ఏర్పడు వక్రమును 'పరావలయము' అందురు.

సూచన : $ax^2 + bx + c = 0$ వర్గ సమీకరణం రేఖాచిత్రము అక్షరేఖ $x = \frac{-b}{2a}$ మరియు దాని శీర్షము $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$, (ఇచ్చట $\Delta = b^2 - 4ac$ అనునది వర్గ సమీకరణము యొక్క విచక్షిణిని తెలుపును, a ≠ 0).

$ax^2 + bx + c = 0$ ఇచ్చట $a, b, c \in \mathbb{R}$ మరియు $a \neq 0$ అయిన వర్గ సమీకరణం యొక్క మూలములు ఏ విధముగా కనుగొనుట మునుపటి తరగతిలోనే చదివియున్నాము. ఈ విభాగములో వర్గసమీకరణముల మూలములను రేఖాచిత్రము ద్వారా ఏ విధంగా కనుగొనుటయో తెలుసుకొందాము.

3.8.1 రేఖా చిత్రం ద్వారా వర్గ సమీకరణం యొక్క సాధన స్వభావాన్ని కనుగొనుట.

రేఖా చిత్రం ద్వారా $ax^2 + bx + c = 0$ అను వర్గ సమీకరణం యొక్క మూలాలను పొందుటకు మనము మొదట $y = ax^2 + bx + c$ కి రేఖా చిత్రం గీయవలెను.

వర్గ సమీకరణం యొక్క సాధనలు X అక్షమును ఖండించే వక్రం యొక్క ఖండన బిందువుల x నిరూపకాలు అవుతుంది.

వర్గ సమీకరణం యొక్క సాధనల స్వభావాన్ని నిర్ధారించడానికి మనము క్రింది విధానాన్ని ఉపయోగిస్తాము.

(i) ఇచ్చిన వర్గ సమీకరణం యొక్క రేఖాచిత్రం X అక్షాన్ని రెండు వేరువేరు బిందువుల వద్ద ఖండిస్తే అప్పుడు ఇచ్చిన సమీకరణము రెండు వాస్తవ మరియు అసమాన మూలాలు కలిగి ఉంటుంది.

(ii) ఇచ్చిన వర్గ సమీకరణం యొక్క రేఖా చిత్రము X అక్షాన్ని ఒకే ఒక బిందువు వద్ద తాకితే అప్పుడు

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 135 26-02-2023 14:35:02

ఇచ్చిన సమీకరణము ఒకే ఒక మూలాన్ని కలిగి ఉంటుంది. పైన చెప్పిన విధంగా ఇది రెండు వాస్తవ మరియు సమాన మూలాలు.

(iii) ఇచ్చిన సమీకరణం యొక్క రేఖా చిత్రము X అక్షాన్ని ఏ బిందువు వద్ద కూడా ఖండించకపోతే అప్పుడు ఇచ్చిన సమీకరణం వాస్తవ మూలాన్ని కలిగి ఉండదు.

ఉదాహరణ 3.51 క్రింది వర్గ సమీకరణాల యొక్క సాధనల స్వభావాన్ని చర్చించండి.

(i) $x^2 + x - 12 = 0$ (ii) $x^2 - 8x + 16 = 0$ (iii) $x^2 + 2x + 5 = 0$

సాధన

(i) $x^2 + x - 12 = 0$

సోపానం 1 $y = x^2 + x - 12$ సమీకరణము యొక్క విలువతో పట్టికను తయారు చేయుము.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	8	0	-6	-10	-12	-12	-10	-6	0	8

సోపానం 2 (x, y) అను క్రమ బిందువులను తగిన కొలతలను ఉపయోగించి రేఖాచిత్రం పై గుర్తించండి.

సోపానం 3 X అక్షాన్ని ఖండించే పరావలయాన్ని గీయండి. మరియు దాని నిరూపకాలను గుర్తించండి.

సోపానం 4 ఈ సమీకరణం యొక్క మూలాలు పరావలయం X అక్షాన్ని ఖండించే ఖండన బిందువులు $(-4, 0)$ మరియు $(3,0)$ ఈ బిందువుల x నిరూపకాలు వరుసగా -4 మరియు 3

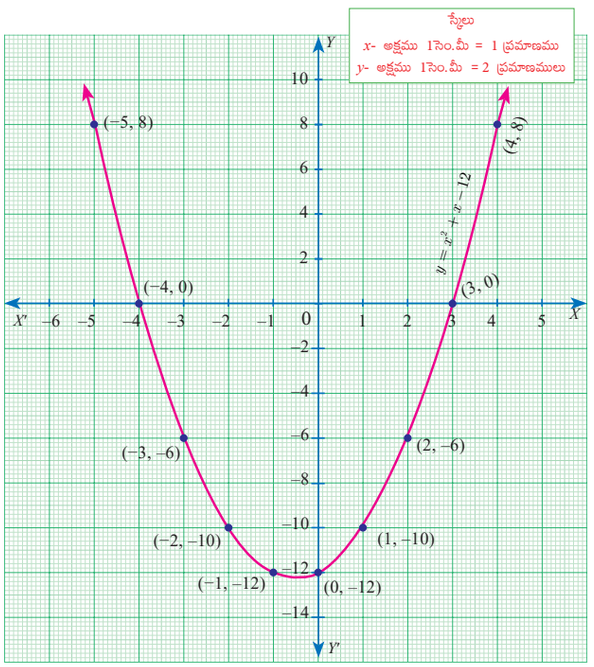


Fig. 3.19

X అక్షాన్ని రెండు బిందువులు వద్ద ఖండించడం వలన వర్గ సమీకరణం $x^2 + x - 12 = 0$ వాస్తవ మరియు అసమాన మూలములు కలిగి ఉంటుంది.

(ii) $x^2 - 8x + 16 = 0$

సోపానం 1 $y = x^2 - 8x + 16$ సమీకరణము యొక్క విలువలతో పట్టికను తయారు చేయుము.

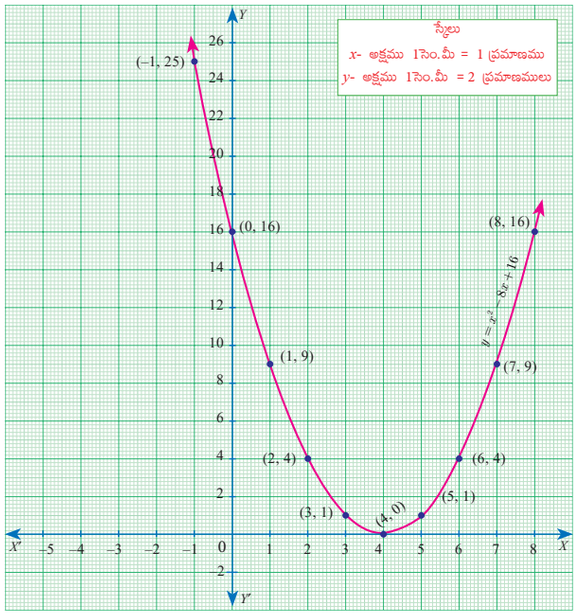
x	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 136 26-02-2023 14:35:04

సోపానం 2 తగిన కొలతలను ఉపయోగించి రేఖాచిత్రం పై క్రమయుగ్మాలు (x, y) లకు బిందువులను గుర్తించండి.

సోపానం 3 X అక్షాన్ని ఖండించే పరావలయాన్ని గీయండి. మరియు దాని నిరూపకాలను గుర్తించండి.

సోపానం 4 ఈ సమీకరణం యొక్క మూలాలు X అక్షాన్ని పరావలయం ఖండించే ఖండన బిందువు $(4,0)$ యొక్క x నిరూపకము 4.



పటం. 3.20

ఇక్కడ X అక్షాన్ని ఖండించే ఒక ఒక ఖండన బిందువు ఉండడం వలన వర్గసమీకరణము $x^2 - 8x + 16 = 0$ వాస్తవ మరియు సమాన మూలములను కలిగియుంటుంది.

(iii) $x^2 + 2x + 5 = 0$

$y = x^2 + 2x + 5$ అనుకొనిన

సోపానం 1 $y = x^2 + 2x + 5$ సమీకరణము యొక్క విలువతో పట్టికను తయారు చేయుము.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	8	5	4	5	8	13	20

సోపానం 2 తగిన కొలతలను ఉపయోగించి రేఖాచిత్రం మీద క్రమయుగ్మాలు (x, y) లను గుర్తించండి.

సోపానం 3 ఈ బిందువులను కలుపుతూ గీచిన సున్నిత వక్రం $y = x^2 + 2x + 5$ యొక్క రేఖాచిత్రం అగును.

సోపానం 4 ఇచ్చిన వర్గ సమీకరణం యొక్క సాధనలు పరావలయం X అక్షాన్ని ఖండించే ఖండన బిందువు యొక్క x నిరూపకాలు.

ఇక్కడ పరావలయము X అక్షాన్ని ఖండించడం గాని లేక స్పృరించడం గాని జరగలేదు.

కనుక ఇచ్చిన వర్గ సమీకరణానికి వాస్తవ మూలాలు లేవని నిర్ణయించవచ్చును.

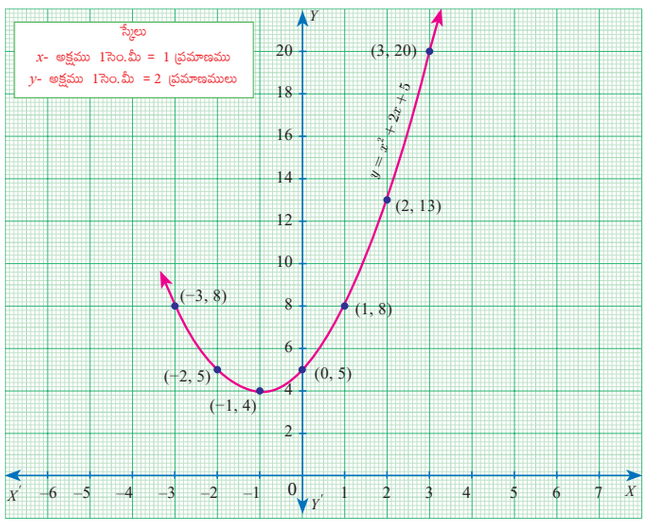
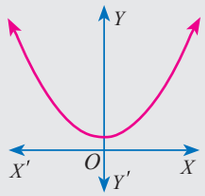
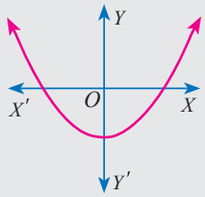
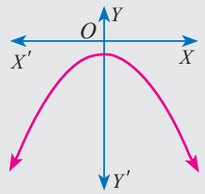
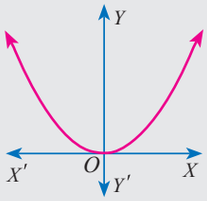
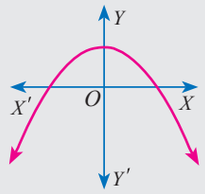
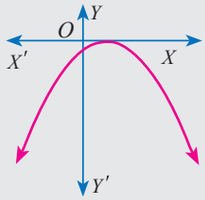


Fig. 3.21

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 137 26-02-2023 14:35:06

ప్రగతి శోధన

ఇవ్వబడిన రేఖా చిత్రము X అక్షమును ఖండించేటప్పుడు ఏర్పడు బిందువుల సంఖ్య మరియు దానికి ఏర్పడు సాధన స్వభావమును జతపరుచుము.

వ.సం.	రేఖా చిత్రము	X అక్షమును ఖండించుకొను బిందువుల సంఖ్య	సాధన స్వభావము
1.		2	వాస్తవము మరియు సమానమైన మూలములు.
2.		1	వాస్తవములు కాదు
3.		2	వాస్తవములు కాదు.
4.		0	వాస్తవములు మరియు సమాన మూలములు.
5.		0	వాస్తవములు మరియు అసమాన మూలములు.
6.		1	వాస్తవము మరియు అసమాన మూలములు

3.7.1 ఖండన రేఖల ద్వారా వర్గసమీకరణాలను సాధించుట.

రేఖాచిత్రములో పరావలయమును ఎంపిక చేసుకొని కావలసిన దానిని అందించడం ద్వారా వర్గ సమీకరణం యొక్క మూలాలను మనము నిర్ధారించవచ్చును.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 138 26-02-2023 14:35:08

(i) సరళరేఖ పరావలయమును రెండు వేర్వేరు బిందువుల వద్ద ఖండిస్తే అప్పుడు ఆ బిందువుల యొక్క x నిరూపకాలు ఇచ్చిన వర్గ సమీకరణం యొక్క మూలములు అగును.

(ii) సరళ రేఖ పరావలయమును ఒక బిందువు వద్ద మాత్రమే స్పృశిస్తే అప్పుడు ఆ ఉమ్మడి బిందువు యొక్క x నిరూపకము ఇచ్చిన వర్గసమీకరణము యొక్క ఒకే ఒక మూలమగును.

(iii) సరళ రేఖ పరావలయాన్ని ఖండించడం గాని లేదా స్పృశించడం గాని చేయకపోతే అప్పుడు వర్గ సమీకరణము వాస్తవ మూలాలను కలిగి ఉండదు.

ఉదాహరణ 3.52 $y = 2x^2$ అను రేఖా చిత్రమును గీచి ఇచ్చి దానిద్వారా $2x^2 - x - 6 = 0$ అను సమీకరణమును సాధించుము.

సాధన

సోపానం 1 $y=2x^2$ యొక్క రేఖాచిత్రమును గీయుటకు విలువలను ఈ క్రింది ఇవ్వబడిన విధంగా పట్టిక తయారు చేయుము.

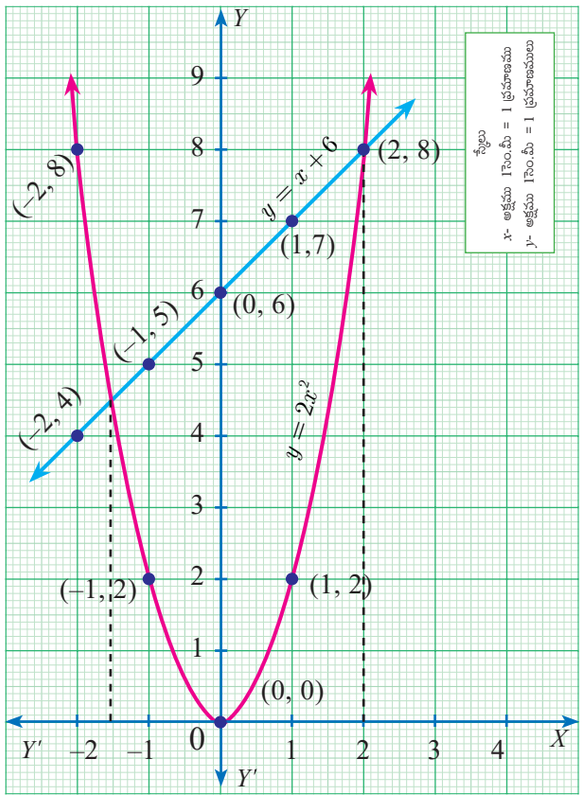
x	-2	-1	0	1	2
y	8	2	0	2	8

సోపానం 2 $2x^2 - x - 6 = 0$ అను సమీకరణము సాధించుటకు మొదట $y = 2x^2$ నుండి $2x^2 - x - 6 = 0$ ను తీసివేయుము.

$$\begin{array}{r} y = 2x^2 \\ 0 = 2x^2 - x - 6 \quad (-) \\ \hline y = x + 6 \end{array}$$

$y=x+6$ అనేది ఒక సరళ రేఖ సమీకరణము $y = x + 6$ సరళ రేఖకు రేఖాచిత్రము గీయుటకు క్రింది ఇవ్వబడిన విధంగా పట్టికను తయారు చేయవలెను.

x	-2	-1	0	1	2
y	4	5	6	7	8



పటం. 3.22

సోపానం 3 $y = 2x^2$ అను పరావలయము మరియు $y = x + 6$ అను సరళ రేఖను ఖండించు బిందువులు $(-1.5, 4.5)$ మరియు $(2,8)$.

సోపానం 4 ఈ బిందువు యొక్క x అక్ష బిందువులు $\{-1.5,2\}$ ఆగును కావున సమీకరణము $2x^2 - x - 6 = 0$ యొక్క మూలముల సాధన -1.5 మరియు -1.5 అగును.

ఉదాహరణ 3.53 $y = x^2 + 4x + 3$ రేఖా చిత్రమును గీయుము మరియు దాని ద్వారా $x^2 + x + 1 = 0$ యొక్క మూలములను కనుగొనుము.

సోపానం 1 $y = x^2 + 4x + 3$ రేఖాచిత్రము గీయుటకు విలువలను క్రింది ఇవ్వబడిన విధంగా పట్టికను ఏర్పరుచుము.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y	3	0	-1	0	3	8	15

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 139 26-02-2023 14:35:10

సోపానం 2 $x^2 + x + 1 = 0$ సమీకరణము సాధించుటకు మొదట $y = x^2 + 4x + 3$ నుండి $x^2 + x + 1 = 0$ ను తీసివేయము.

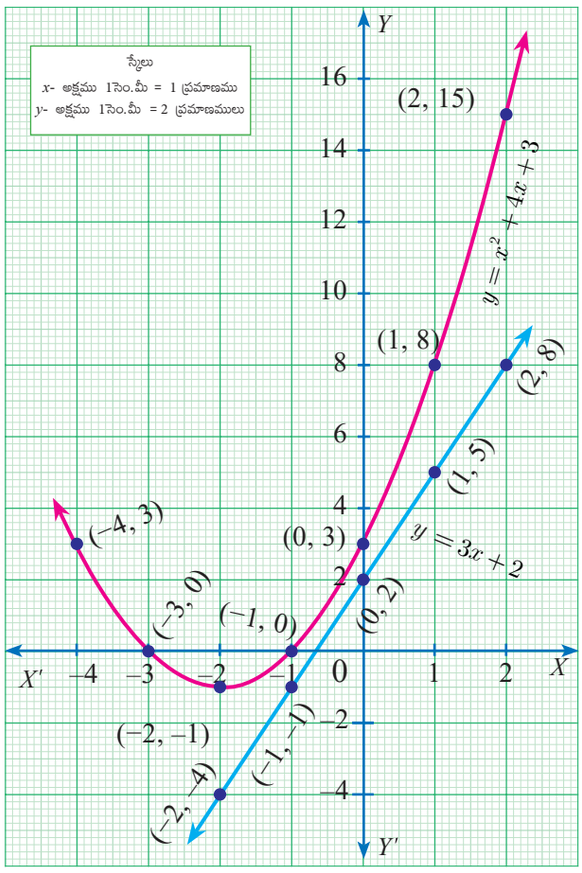
$$\begin{array}{rl} y = & x^2 + 4x + 3 \\ 0 = & x^2 + x + 1 \\ \hline y = & 3x+2 \end{array} \quad (-)$$

ఇక్కడ $y = 3x+2$ అనేది ఒక సరళరేఖ. దీనిని రేఖాచిత్రంలో గీయుటకు విలువలను క్రింది ఇవ్వబడిన విధముగా పట్టిక ఏర్పరచవలెను.

x	-2	-1	0	1	2
y	-4	-1	2	5	8

సోపానం 3 $y = 3x+2$ సరళరేఖ $y = x^2 + 4x + 3$ అను పరావలయమును ఏ ఒక్క బిందువు వద్ద ఖండించదు.

కావున, $x^2 + x + 1 = 0$ వర్గ సమీకరణమునకు వాస్తవ మూలములు లేవు.



పటం. 3.23

ఉదాహరణ 3.54 $y = x^2 + x - 2$ రేఖా చిత్రమును గీచి మరియు దాని ద్వారా $x^2 + x - 2 = 0$ అను సమీకరణమును సాధించుము.

సాధన

సోపానం 1 $y = x^2 + x - 2$ రేఖాచిత్రము గీయుటకు ఈ క్రింది ఇవ్వబడిన విధముగా పట్టిక ఏర్పరచుము.

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	4	0	-2	-2	0	4

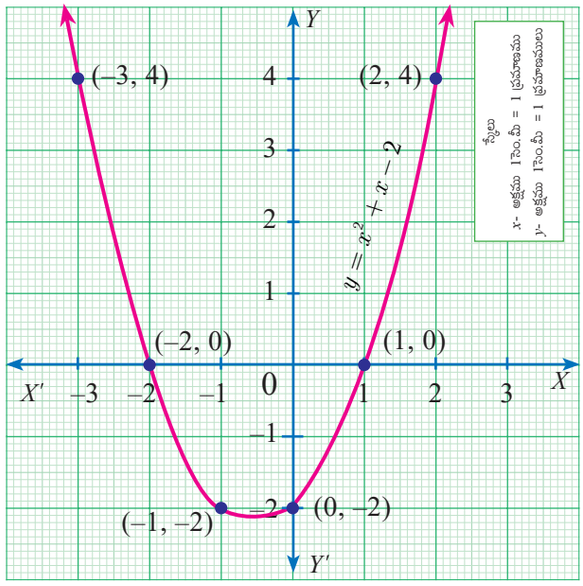
సోపానం 2 $x^2 + x - 2 = 0$ అను సమీకరణము సాధించుటకు $y = x^2 + x - 2$ నుండి $x^2 + x - 2 = 0$ ను తీసివేయుము.

కావున

$$\begin{array}{rl} y = & x^2 + x - 2 \\ 0 = & x^2 + x - 2 \\ \hline y = & 0 \end{array} \quad (-)$$

ఇక్కడ $y = 0$ అనేది X అక్ష సమీకరణము అగును.

సోపానం 3 $y = x^2 + x - 2$ అను పరావలయము X అక్షము పై $(-2,0)$ మరియు $(1,0)$ అను బిందువులు వద్ద ఖండించును.



పటం. 3.24

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 140 26-02-2023 14:35:14

సోపానం 4 ఈ బిందువు యొక్క X అక్షము మూలముల సాధనలు $\{-2,1\}$ అగును. కావున సమీకరణము $x^2 + x - 2 = 0$ నకు సాధనలు $\{-2,1\}$ అగును.

ఉదాహరణ 3.55 $y = x^2 - 4x + 3$ రేఖాచిత్రమును గీచి మరియు దీని ద్వారా $x^2 - 6x + 9 = 0$ అను సమీకరణమును సాధించుము.

సాధన

సోపానం 1 $y = x^2 - 4x + 3$ రేఖ చిత్రము గీయుటకు విలువలను కింద చూపిన విధంగా పట్టిక పరచవలెను.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	15	8	3	0	-1	0	3

సోపానం 2 $x^2 - 6x + 9 = 0$ అను సరళరేఖ సమీకరణము సాధించుటకు $y = x^2 - 4x + 3$ నుండి $x^2 - 6x + 9 = 0$ తీసివేయవలెను.

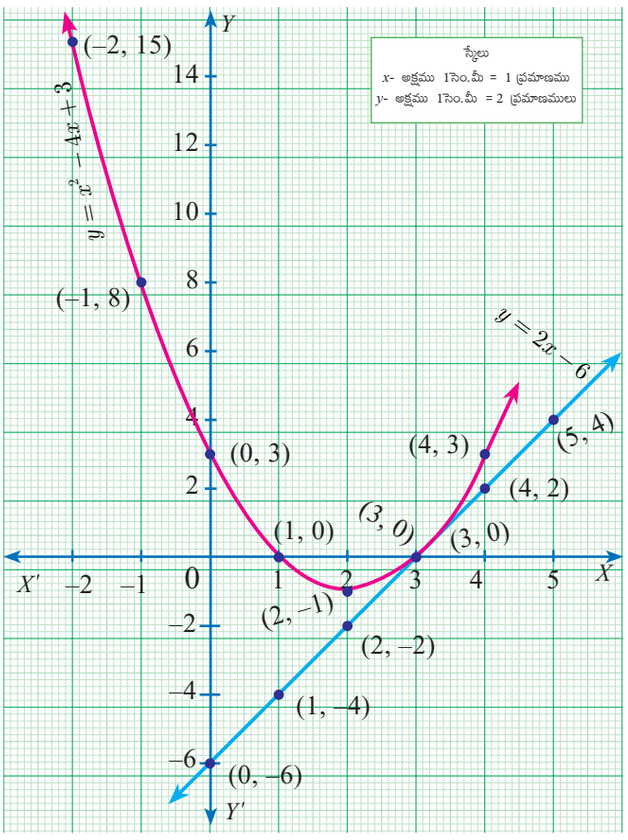
కనుక
$$\begin{array}{rl} y = & x^2 - 4x + 3 \\ 0 = & x^2 - 6x + 9 \quad (-) \\ \hline y = & \quad 2x - 6 \end{array}$$

$y = 2x - 6$ అనునది ఒక సరళ రేఖ సమీకరణము $y = 2x - 6$ రేఖాచిత్రమును గీయుటకు ఈ క్రింది పట్టికను ఏర్పరచవలెను.

x	0	1	2	3	4	5
y	-6	-4	-2	0	2	4

$y = 2x - 6$ అనే రేఖ $y = x^2 - 4x + 3$ ను ఒకే ఒక బిందువు వద్ద ఖండించును.

సోపానం 3 $y = x^2 - 4x + 3$ అనేపరావలయము $y = 2x - 6$ అను సరళరేఖను $(3,0)$ అను బిందువులు నందు ఖండించును. కావున దీనిని X అక్షము ఖండన మూలములు 3 అగును.



పటం. 3.25

కనుక $x^2 - 6x + 9 = 0$ సమీకరణము యొక్క సాధన 3 అగును.

అభ్యాసము 3.16

1. ఈ క్రింది ఇవ్వబడిన ఉన్న వర్గ సమీకరణములకు మూలముల స్వభావమును కనుగొనుము.

(i) $x^2 - 9x + 20 = 0$ (ii) $x^2 - 4x + 4 = 0$ (iii) $x^2 + x + 7 = 0$
(iv) $x^2 - 9 = 0$ (v) $x^2 - 6x + 9 = 0$ (vi) $(2x - 3)(x + 2) = 0$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 141 26-02-2023 14:35:18

2. $y = x^2 - 4$ రేఖాచిత్రమును గీచి దీని ద్వారా $x^2 - x - 12 = 0$ సమీకరణమును సాధించుము.

3. $y = x^2 + x$ రేఖాచిత్రమును గీచి దీని ద్వారా $x^2 + 1 = 0$ సమీకరణమును సాధించుము.

4. $y = x^2 + 3x + 2$ రేఖాచిత్రమును గీచి దీని ద్వారా $x^2 + 2x + 1 = 0$ సమీకరణమును సాధించుము.

5. $y = x^2 + 3x - 4$ రేఖాచిత్రమును గీచి దీని ద్వారా $x^2 + 3x - 4 = 0$ సమీకరణమును సాధించుము.

6. $y = x^2 - 5x - 6$ రేఖాచిత్రమును గీచి దీని ద్వారా $x^2 - 5x - 14 = 0$ సమీకరణమును సాధించుము.

7. $y = 2x^2 - 3x - 5$ రేఖాచిత్రమును గీచి దీని ద్వారా $2x^2 - 4x - 6 = 0$ సమీకరణమును సాధించుము.

8. $y = (x - 1)(x + 3)$ రేఖాచిత్రమును గీచి దీని ద్వారా $x^2 - x - 6 = 0$ సమీకరణమును సాధించుము.

3.9 మాత్రికలు

పరిచయం

మనము ఈ క్రింది సమాచారమును పరిశీలించెదము. వనిత 12 కథల పుస్తకములు 20 నోటు పుస్తకములు మరియు 4 పెన్సిల్‌లు, రాధా 27 కథల పుస్తకములు 17 నోటు పుస్తకములు మరియు 6 పెన్సిల్‌లు, గోకుల్ 7 కథల పుస్తకములు, 11 నోటు పుస్తకములు మరియు 4 పెన్సిల్‌లు, గీత 10 కథల పుస్తకములు 12 నోటు పుస్తకములు మరియు 5 పెన్సిల్‌లు కలిగియున్నారు.

వివరములు	కథల పుస్తకములు	నోటు పుస్తకములు	పెన్సిల్‌లు
వనిత	12	20	4
రాధా	27	17	6
గోకుల్	7	11	4
గీత	10	12	5

మనము ఈ సమాచారమును పట్టిక రూపములో ఈ క్రింది విధముగా అమర్చవచ్చును.

$$\begin{matrix} \text{మొదటి అడ్డు వరుస} \\ \text{రెండవ అడ్డు వరుస} \\ \text{మూడవ అడ్డు వరుస} \\ \text{నాలుగవ అడ్డు వరుస} \end{matrix} \begin{bmatrix} 12 & 20 & 4 \\ 27 & 17 & 6 \\ 7 & 11 & 4 \\ 10 & 12 & 5 \end{bmatrix}$$

మొదటి నిలువు వరుస | రెండవ నిలువు వరుస | మూడవ నిలువు వరుస

ఇచ్చట నలుగురు వ్యక్తులు కలిగియుండు వస్తువలు, 4 అడ్డు వరుసలు మరియు 3 నిలువ వరుసలు కలిగిన దీర్ఘచతురస్రాకార అమరికలో కలదు. భూ సమాంతరముగా గల వరుసలను అడ్డువరసలు అనియు మరియు భూ లంబముగా గల వరుసలను నిలువవరుసలు అనియు అందురు. ఈ మొత్తము దీర్ఘచతురస్రాకార అమరికను మాత్రిక. అని అందురు. సాధారణంగా వస్తువులను దీర్ఘచతురస్రాకార అమరికలో అమర్చిన వాటిని మాత్రికలు అని చెప్పవచ్చును.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 142 26-02-2023 14:35:20

అనేక విజ్ఞానశాస్త్ర విభాగముల యందు మాత్రికల యొక్క వినియోగమును చూడవచ్చును. భౌతిక శాస్త్రము నందు, బ్యాటరీ శక్తి పరిమాణము, విద్యుత్ శక్తి నిరోధక మార్పిడి ద్వారా ఇతర శక్తి రూపములోకి మార్చుటను మాత్రికలనుపయోగించి లెక్కించవచ్చును. కంప్యూటర్ ఆధారిత అప్లికేషన్ నందు త్రిపరిమాణ పటమును ద్విపరిమాణ పటము గా తెరపై చూపుటకు మరియు నిజమైన కదలికలు అగుపడునట్లు సృష్టించుటకు మాత్రికలు అత్యంత ముఖ్య భూమికను పోషించును. గ్రాఫిక్ సాఫ్ట్వేర్ నందు మాత్రికాక బీజగణితమును ఉపయోగించి రేఖీయ రూపాంతరముల ద్వారా చిత్రములను చూపించవచ్చును. సంకేత సందేశములను నిక్షిప్తము మాత్రికల వినియోగము నందు అత్యంత ప్రాముఖ్యత వహించినదిగా చెప్పవచ్చును. మాత్రికల గుణకారం మరియు మాత్రిక విలోమ ప్రక్రియల ద్వారా సందేశములను నిక్షిప్తము (encryption) మరియు సంక్షిప్తము (decryption) చేయుటకు వీలగును. సమాచారం సంకేతములు చాలా పొడవైనవిగా ఉన్నప్పుడు వాటిని పంపుటకు మాత్రికల భావనను వినియోగించెదరు. భూగర్భశాస్త్రము నందు భూకంపములకు సంబంధించిన సర్వేలకు మాత్రికలను వినియోగించెదరు. రోబోటిక్స్ నందు యంత్రపు మనుషుల కదలికలను కనుగొనుటకు మాత్రికలు ఉపయోగపడుచున్నవి.

నిర్వచనము

మూలకములను దీర్ఘచతురస్రాకార అమరికలో అమర్చుటను **మాత్రిక** అని అందురు. భూ సమాంతర అమరికలను **అడ్డు వరుసలు** మరియు భూలంబ అమరికలను **నిలువు వరుసలు** అని అందురు

ఉదాహరణకు, $\begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 1 & 9 & -2 \end{pmatrix}$ అనునది ఒక మాత్రిక.

సాధారణముగా ఆంగ్ల పెద్ద అక్షరములైన $A,\ B,\ C,\ X,\ Y,\ \ldots$ మొదలగు వాటిని మాత్రికలను సూచించుటకు మరియు ఆంగ్ల చిన్న అక్షరములైన $a,\ b,\ c,\ l,\ m,\ n,\ a_{12},\ a_{13},\ \ldots$ మాత్రికల మూలకములను సూచించుటకు ఉపయోగించుదురు.

మాత్రికలకు కొన్ని ఉదాహరణలు క్రింద ఇవ్వబడి ఉన్నది.

(i) $\begin{pmatrix} 8 & 4 & -1 \\ \frac{1}{2} & 5 & 4 \\ 9 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} 1+x & x^3 & \sin x \\ \cos x & 2 & \tan x \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 3+1 & \sqrt{2} & -1 \\ 1.5 & 8 & 9 \\ \frac{1}{3} & 13 & \frac{-7}{9} \end{pmatrix}$

ప్రగతి శోధన

1. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ మాత్రిక నందలి రెండవ అడ్డు వరుస మరియు మూడవ నిలువు వరుసలో గల మూలకం ఏది?

2. . $\begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \\ \tan\theta \end{pmatrix}$ మాత్రిక తరగతిని కనుగొనుము

3. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 9 & -4 & \sqrt{7} \\ 3 & \frac{5}{2} & 8 & 9 \\ 7 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ మాత్రిక నుండి $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}$ మూలకములను కనుగొనుము.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 143 26-02-2023 14:35:22

3.9.1 మాత్రిక తరగతి

A అనే ఒక మాత్రికలో m అడ్డు వరుసలు మరియు n నిలువు వరుసలు కలిగియున్న యెడల, A మాత్రిక యొక్క తరగతి అనునది (అడ్డు వరుసల సంఖ్య × నిలువు వరుసల సంఖ్య) అనగా మనము $m\times n$ ను m క్రాస్ n లేదా m బై n అని చదువవలెను. ఇచ్చట గమనించవలసిన అంశం $m\times n$ అనునది m మరియు n ల లబ్ధము కాదు.

m అడ్డు వరుసల మరియు n నిలువు వరుసలు (తరగతి $m\times n$) కలిగిన A అను మాత్రిక యొక్క సాధారణ రూపమును ఈ క్రింది విధముగా వ్రాయవచ్చును.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ఇచ్చట $a_{11}, a_{12},\ldots$ అనునవి మాత్రికక మూలకములను తెలియజేయును. a_{11} అనునది మొదటి అడ్డు వరుస, మొదటి నిలువ వరుసలో గల మూలకమును తెలియజేయును. a_{12} అను మూలకము మొదటి అడ్డు వరుస, రెండవ నిలువు వరుసలో గల మూలకమును తెలుపును.

సాధారణముగా a_{ij} అనునది i వ అడ్డు వరుస మరియు j వ నిలువు వరుసలో గల మూలకము అగును.

ఈ సంకేతములతో మనము A అను మాత్రికను $A=(a_{ij})_{m\times n}$ అని తెలుపవచ్చును. ఇచ్చట $i=1,2,\ldots m$ మరియు $j=1,2,\ldots n$.

$A=(a_{ij})_{m\times n}$ మాత్రిక నందలి గల మూలకముల మొత్తం సంఖ్య అనునది mn లబ్ధమునకు సమానము.

సూచన

- ఒక మాత్రిక యొక్క తరగతిని తెలియజేయునప్పుడు తప్పనిసరిగా మొదట అడ్డు వరుస సంఖ్యను తరువాత నిలువు వరుసల సంఖ్యను తెలుపవలెను.

ఉదాహరణకు,

వ.సం.	మాత్రికలు	మాత్రికలోని మూలకములు	మాత్రిక తరగతి
1.	$\begin{pmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}$	$a_{11}=\sin\theta,\ a_{12}=-\cos\theta,$ $a_{21}=\cos\theta,\ a_{22}=\sin\theta$	2×2
2.	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \sqrt{2} & 5 \\ \frac{1}{2} & -4 \end{pmatrix}$	$a_{11}=1,\ a_{12}=3,$ $a_{21}=\sqrt{2},\ a_{22}=5,$ $a_{31}=\frac{1}{2},\ a_{32}=-4$	3×2

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 144 26-02-2023 14:35:25

కృత్యము 4

(i) ఏదేని ఒక నిర్ధిష్ట సం॥లోని నిర్ధిష్ట నెలకు సంబంధించిన క్యాలెండరు తీసుకొనుము.

(ii) కాలెండరు నందలి తేదీలు నుండి మాత్రికలను నిర్మించుము.

(iii) $2\times2,\ 3\times2,\ 2\times3,\ 3\times3,\ 4\times3,$ మొదలగు మాత్రికా తరగతులకు తగినట్లు మాత్రికలను వ్రాయుము.

(iv) ఇవ్వబడిన క్యాలెండరు నుండి నీవు ఏర్పరచిన అత్యంత పెద్ద మాత్రిక తరగతిని కనుగొనుము.

(v) దైనందిన జీవితములో గల సమాచారమును నిర్వహించుటకు మాత్రికలు ఏ విధంగా ఉపయోగపడుచున్నదని సూచించుము.



3.9.2 మాత్రికల రకములు

ఈ విభాగము నందు మనము కొన్ని రకములైన మాత్రికల నిర్వచనములను చూడబోవుచున్నాము.

1. అడ్డు వరుస మాత్రిక (Row Matrix)

ఒకే ఒక అడ్డు వరుసను మరియు పలు నిలువరుసలను కలిగిన మాత్రికను అడ్డు వరుస మాత్రిక అని అందురు. అడ్డు వరుస మాత్రికను "అడ్డు వరుస సదిశ" అని కూడా పిలిచెదరు.

ఉదాహరణము, $A=\begin{pmatrix}8 & 9 & 4 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$ అనునవి క్రమముగా 1×4 మరియు 1×3 తరగతులు కలిగిన అడ్డు వరుస మాత్రికలు.

సాధారణముగా $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n}\end{pmatrix}$ అనునది $1\times n$ తరగతి కలిగిన అడ్డు వరుస మాత్రిక.

2. నిలువు వరుస మాత్రిక (Column Matrix)

ఒకే ఒక నిలువు వరుస మరియు పలు అడ్డు వరుసలను కలిగిన మాత్రికను నిలువు వరుస మాత్రిక అని అందురు. నిలువు వరుస మాత్రికను నిలువవరుస సదిశ అని కూడా పిలిచెదరు.

ఉదాహరణ, $A=\begin{pmatrix}\sin x\\ \cos x\\ 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}\sqrt{5}\\ 7\end{pmatrix}$ మరియు $C=\begin{pmatrix}8\\ -3\\ 23\\ 17\end{pmatrix}$ అనునవి క్రమముగా 3×1, 2×1 మరియు 4×1 తరగతులుగా గల నిలువు వరుస మాత్రికలు అగును.

$A=\begin{pmatrix}a_{11}\\ a_{21}\\ a_{31}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{pmatrix}$ అనునది $m\times1$ తరగతితో కూడిన నిలువ వరుస మాత్రిక యొక్క సాధారణ రూపము అగును.

3. చతురస్ర మాత్రిక (Square Matrix)

అడ్డు వరుసల సంఖ్య మరియు నిలువు వరుసల సంఖ్య సమానముగా గల మాత్రికను చతురస్ర మాత్రిక అని అందురు $A=(a_{ij})_{m\times n}$ మాత్రిక నందు $m=n$ అయిన యెడల, అది చతురస్ర మాత్రికగా నుండును

ఉదాహరణకు, $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}_{2\times2}$, $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 3 & 6 & 8\\ 2 & 3 & 5\end{pmatrix}_{3\times3}$ అనునవి చతురస్ర మాత్రికలకు ఉదాహరణలు అగును.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 145 26-02-2023 14:35:28

సాధారణంగా, $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}_{2\times2}$, $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ అనునవి క్రమముగా 2×2 మరియు 3×3 లతో కూడిన చతురస్ర మాత్రికలు అగును.

నిర్వచనము : ఒక చతురస్ర మాత్రికలో $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots$ అనునవి చతురస్ర మాత్రిక యొక్క ప్రధానవికర్ణ మూలకములు అంటారు. ఇవి a_{ii} అను రూపంలో ఉండు మూలకములగును. ఉదాహరణకు $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ మాత్రికలో 1 మరియు 5 అనునవి ప్రధానవికర్ణ మూలకములగును.

4. వికర్ణ మాత్రిక (Diagonal Matrix)

ఒక చతురస్ర మాత్రిక నందలి ప్రధాన వికర్ణ మూలకములు విడిచి మిగత మూలకములు అన్నియు సున్నగా నున్న యెడల ఆ మాత్రికను వికర్ణ మాత్రిక అని అందురు.

$A = (a_{ij})$ అను చతురస్ర మాత్రిక నందు $a_{ij} = 0$ మరియు $i \neq j$ గా నున్న యెడల ఆ మాత్రికను వికర్ణ మాత్రిక అని అందురు. ప్రధాన కర్ణము నందలి కొన్ని మూలకములు సున్నగా ఉండవచ్చును. కాని అన్ని మూలకములు సున్నగా నుండరాదు.

$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ అనునవి వికర్ణ మాత్రికలకు ఉదాహరణములు అగును.

5. అదిశ మాత్రిక (Scalar Matrix)

వికర్ణ మాత్రిక నందలి ప్రధాన కర్ణములోని అన్ని మూలకములు సమానముగా నున్న యెడల ఆ మాత్రికను అదిశ మాత్రిక అని అందురు.

$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ అనునవి ఉదాహరణలు.

సాధారణముగా, $A = (a_{ij})_{m\times m}$ అనునది

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{అయినప్పుడు } i \neq j \\ k, & \text{అయినప్పుడు } i = j \end{cases}$$ ఇచ్చట K అనునది స్థిరాంకము.

6. తత్సమ మాత్రిక లేక యూనిట్ మాత్రిక (Identity (or) Unit Matrix)

ఒక చతురస్ర మాత్రిక నందలి ప్రధాన వికర్ణములోని మూలకములన్నియు 1 గాను మిగిలిన అన్ని మూలకములు సున్నాగాను యుండిన యెడల ఆ మాత్రికను తత్సమ మాత్రిక లేక యూనిట్ మాత్రిక అని అందురు.

$A = (a_{ij})$ అను చతురస్ర మాత్రిక $a_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ అయిన

I_n గా యున్న యెడల దానిని తత్సమ మాత్రిక అని అందురు.

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 2 మరియు 3 మాత్రిక తరగతి గల తత్సమ మాత్రిక.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 146 26-02-2023 14:35:31

7. శూన్య మాత్రిక (Zero matrix (or) null matrix)

ఒక మాత్రిక నందలి అన్ని మూలకములు సున్నగా యున్న యెడల, ఆ మాత్రికను శూన్య మాత్రిక అని అందురు.

$(0), \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ అనునవి క్రమముగా $1\times1,\ 2\times2\ \ 3\times3$ వేర్వేరు తరగతులుగా గల శూన్య మాత్రికలు అగును. మనము $n\times n$ తరగతి గల శూన్య మాత్రికను O_n గా సూచించవచ్చును.

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ అనునది 2×3 తరగతిగా గల శూన్య మాత్రిక అగును.

8. వ్యత్యయ మాత్రిక (Transpose of a matrix)

ఇవ్వబడిన మాత్రిక నందలి అడ్డు వరుసలను నిలువు వరుసలుగాను లేక నిలువవరుసలను అడ్డు వరుసలుగాను మార్చగా లభించు మాత్రికను ఆ మాత్రిక యొక్క వ్యత్యయమాత్రిక అని అందురు. A యొక్క వ్యత్యయ మాత్రికను A^T అని సూచించెదరు. (దీనిని A ట్రాన్స్‌ఫోస్ అని చదవవలెను).
ఉదాహరణకు,

(a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & 8 & 9 \\ -4 & 7 & 5 \end{pmatrix}_{3\times3}$ అయిన $A^T = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 3 & 8 & 7 \\ -1 & 9 & 5 \end{pmatrix}_{3\times3}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 8 & 9 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}_{3\times2}$ అయిన $B^T = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 5 & 9 & 3 \end{pmatrix}_{2\times3}$

A యొక్క తరగతి $m\times n$ అయిన A^T యొక్క తరగతి $n\times m$.

$(A^T)^T = A$ గా నుండుటను గమనించగలము.

9. త్రిభుజ మాత్రిక (Triangular Matrix)

ఒక చతురస్ర మాత్రిక నందలి ప్రధాన వికర్ణమునకు పైన గల అన్ని మూలకములు '0' గా నున్న యెడల ఆ మాత్రికను దిగువ త్రిభుజ మాత్రిక (lower triangular matrix) అని అందురు.

ఒక చతురస్ర మాత్రిక నందలి ప్రధాన వికర్ణమునకు దిగువన గల అన్ని మూలకములు సున్నగా నున్న యెడల ఆ మాత్రికను ఎగువ త్రిభుజ మాత్రిక (upper triangular matrix) అని అందురు.

నిర్వచనము : ఒక చతురస్ర మాత్రిక $A = (a_{ij})_{n\times n}$ అనునది $a_{ij} = 0\ ,\ i > j$ అయిన యెడల ఎగువ త్రిభుజం మాత్రిక అని మరియు $a_{ij} = 0\ , i < j$ అయిన యెడల దిగువ త్రిభుజ మాత్రిక అని అందురు.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ అనునది ఎగువ త్రిభుజం మాత్రికకు మరియు $B = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ -11 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ అనునది దిగువ త్రిభుజ మాత్రికకు ఉదాహరణలుగా చెప్పవచ్చును.

సమాన మాత్రికలు (Equal Matrices)

ఇవ్వబడిన A మరియు B అను రెండు మాత్రికలలో తరగతులు సమానముగా నుండి A మాత్రికలోని ప్రతి మూలకము B మాత్రికలోని ప్రతి అనురూపమూలకమునకు సమానముగా నున్న యెడల ఆ రెండు మాత్రికలను సమాన మాత్రికలు అని అందురు. అనగా $a_{ij} = b_{ij}$ అని $i,\ j$ లకు అగును.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 147 26-02-2023 14:35:34

ఉదాహరణకు $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 1^2 + 2^2 & \sin^2\theta + \cos^2\theta \\ 1 + \frac{3}{2} - \frac{5}{2} & 2 + \sec^2\theta - \tan^2\theta \end{pmatrix}$

అయితే మనము గమనించిన A మరియు B ను సమాన తరగతులు కలిగియున్నవి మరియు ప్రతి i, j నకు $a_{ij} = b_{ij}$ గా నున్నవి. కనుక A మరియు B మాత్రికలు సమాన మాత్రికలు అగును.

ప్రగతి శోధన

1. ఒక నిలువ వరుస మాత్రికలోని నిలువ వరుసల సంఖ్య _____.
2. ఒక అడ్డు వరుస మాత్రికలోని అడ్డు వరుసల సంఖ్య _____.
3. ఏ ఒక్క తత్సమ మాత్రికలోను ప్రధాన వికర్ణములో లేని మూలకములు _____ అగును.
4. చతురస్ర మాత్రికలో 32 మూలకములు ఉండుటకు సాధ్యమా?

ఋణాత్మక మాత్రిక

$A_{m\times n}$ మాత్రిక యొక్క ఋణాత్మక మాత్రికను $-A_{m\times n}$ అని సూచించవచ్చును మరియు ఋణాత్మక మాత్రికను పొందుటకు దానిలోని ప్రతి మూలకమునకు సంకలన విలోమమును వ్రాయవలెను.

k మూలకము యొక్క సంకలన విలోమం $-k$ అయిన $-A$ నందు గల ప్రతి మూలకము A నందలి కల సదరు మూలకములకు సంకలన విలోమం అగును.

ఉదాహరణకు, $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 9 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix}_{2\times 3}$ అయిన $-A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -9 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 3}$

ఉదాహరణ 3.56 I, II మరియు III అను మూడు కర్మాగారములు యందు పనిచేయు స్త్రీ మరియు పురుషుల వివరములు క్రింద చూపిన విధంగా ఇవ్వబడి ఉన్నది.

కర్మాగారము	పురుషులు	స్త్రీలు
I	23	18
II	47	36
III	15	16

పై సమాచారమును మాత్రిక రూపములో సూచించుము. దీనిలో రెండవ అడ్డు వరుస మరియు మొదటి నిలువు వరుసలో అమరియుండు విలువలను తెలియజేయుము.

సాధన ఇవ్వబడిన సమాచారము 3×2 మాత్రికగా క్రింది రూపములో తెలియచేయుము

$A = \begin{pmatrix} 23 & 18 \\ 47 & 36 \\ 15 & 16 \end{pmatrix}$

రెండవ అడ్డు వరుస మరియు మొదటి నిలువు వరుసలో ఉండు 47 విలువ II కర్మాగారములో పనిచేయు పురుషుల సంఖ్యను తెలుపును.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 148 26-02-2023 14:35:37

ఉదాహరణ 3.57 ఒక మాత్రిక 16 మూలకములు కలిగి ఉన్న యెడల ఆ మాత్రికకు ఎన్ని విధములయిన తరగతులు ఉండును?

సాధన mn మూలకములు గల ఒక మాత్రిక యొక్క తరగతి $m \times n$ అని మనకు తెలియును. కనుక 16 మూలకములు కలిగిన మాత్రిక యొక్క తరగతిని కనుగొనుటకు మనము 16 లబ్ధముగా కలిగిన సహజ సంఖ్యల జంటలను కనుగొనవలయును.

$(1,16), (16,1), (4,4), (8,2), (2,8)$ అనునవి అలాంటి జతలు అగును.

కనుక సాధ్యమైన మాత్రికా తరగతులు $1\times16, 16\times1, 4\times4, 2\times8, 8\times2$ అగును.

కృత్యము 5

వ.సం	మూలకములు	మాత్రికా తరగతులు	సాధ్యమైన మాత్రికల సంఖ్య
1.	4		3
2.		$1\times9,\ 9\times1,\ 3\times3$	
3.	20		
4.	8		4
5.	1		
6.	100		
7.		$1\times10,\ 10\times1,\ 2\times5,\ 5\times2$	

రెండవ నిలువ వరుసలోని మూలకముల సంఖ్యకు నాలుగవ నిలువ వరుసలోని మూలకముల సంఖ్యకు గల సంబంధమును కనుగొనగలవా? అవును అయితే ఆ వరుసలను పూరింపుము.

ఉదాహరణ 3.58 $a_{ij} = i^2 j^2$ మూలకములుగా గల 3×3 మాత్రికను నిర్మించుము.

సాధన 3×3 మాత్రిక యొక్క సాధారణ రూపము $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ $\qquad a_{ij} = i^2 j^2$

$a_{11} = 1^2 \times 1^2 = 1\times1 = 1;$ $\quad a_{12} = 1^2 \times 2^2 = 1\times4 = 4;$ $\quad a_{13} = 1^2 \times 3^2 = 1\times9 = 9;$

$a_{21} = 2^2 \times 1^2 = 4\times1 = 4;$ $\quad a_{22} = 2^2 \times 2^2 = 4\times4 = 16;$ $\quad a_{23} = 2^2 \times 3^2 = 4\times9 = 36$

$a_{31} = 3^2 \times 1^2 = 9\times1 = 9;$ $\quad a_{32} = 3^2 \times 2^2 = 9\times4 = 36;$ $\quad a_{33} = 3^2 \times 3^2 = 9\times9 = 81$

కనుక కావలసిన మాత్రిక $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 4 & 16 & 36 \\ 9 & 36 & 81 \end{pmatrix}$

ఉదాహరణ 3.59 $\begin{pmatrix} a-b & 2a+c \\ 2a-b & 3c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ లో ఇవ్వబడిన సమీకరణము నందలి $a,\ b,\ c,\ d$ ల విలువలను కనుగొనుము.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 149 26-02-2023 14:35:39

సాధన ఇవ్వబడిన మాత్రికలు సమానము. కనుక అనురూప మూలకములు సమానము.

కనుక, $a-b=1$ ...(1)

$2a+c=5$ ...(2)

$2a-b=0$ ...(3)

$3c+d=2$ ...(4)

(3) నుండి $2a-b=0$

$2a=b$ ...(5)

$2a=b$ ను (1) లో ప్రతిక్షేపించగా, $a-2a=1$ మరియు $a=-1$

$a=-1$ (5) ను లో ప్రతిక్షేపించగా, $2(-1)=b$ మరియు $b=-2$

$a=-1$ (2) ను లో ప్రతిక్షేపించగా, $2(-1)+c=5$ మరియు $c=7$

$c=7$ (4) ను లో ప్రతిక్షేపించగా, $3(7)+d=2$ మరియు $d=-19$ లభించును.

కనుక, $a=-1, b=-2, c=7, d=-19$ అగును.

అభ్యాసము 3.17

1. మాత్రిక $A=\begin{pmatrix} 8 & 9 & 4 & 3 \\ -1 & \sqrt{7} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 6 & 8 & -11 & 1 \end{pmatrix}$ నుండి (i) మూలకముల సంఖ్యను కనుగొనుము.

(ii) మాత్రిక యొక్క తరగతిని తెలుపుము.

iii) $a_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{34}, a_{43}, a_{44}$. మూలకములను వ్రాయుము

2. ఒక మాత్రిక 18 మూలకములు కలిగియున్న యెడల, అది కలిగియుండు సాధ్యమైన తరగతులు ఏవి?ఒకవేళ 6 మూలకములు ఉన్న యెడల సాధ్యమైన తరగతులు ఏవి?

3. ఈ క్రింద ఇవ్వబడిన వాటితో 3×3 తరగతి మాత్రికను నిర్మించుము.

(i) $a_{ij}=|i-2j|$ (ii) $a_{ij}=\frac{(i+j)^3}{3}$

4. $A=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 1 & -7 & 9 \\ 3 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ అయిన A యొక్క వ్యత్యయ మాత్రికను కనుగొనుము.

5. $A=\begin{pmatrix} \sqrt{7} & -3 \\ -\sqrt{5} & 2 \\ \sqrt{3} & -5 \end{pmatrix}$ అయిన $-A$ యొక్క వ్యత్యయ మాత్రికను కనుగొనుము.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 150 26-02-2023 14:35:46

6. $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -\sqrt{17} & 0.7 & \frac{5}{2} \\ 8 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ అయిన $(A^T)^T = A$ ను సరిచూడుము.

7. క్రింద ఇవ్వబడిన సమీకరణముల నుంచి x, y మరియు z లను కనుగొనుము.

(i) $\begin{pmatrix} 12 & 3 \\ x & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & z \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} x+y & 2 \\ 5+z & xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} x+y+z \\ x+z \\ y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

3.8.1 మాత్రికల పరిక్రియలు (Operations on Matrices)

ఈ విభాగము నందు మనము మాత్రికల కూడిక, తీసివేత, ఒక అదిశచే మాత్రికను గుణించుట మరియు మాత్రికల గుణకారములను గూర్చి తెలుసుకొనబోవుచున్నాము.

మాత్రికల కూడిక మరియు తీసివేత

రెండు మాత్రికలను కూడుటకు లేక తీసివేత చేయుటకు ఆ రెండు మాత్రికలు సమాన తరగతిని కలిగి ఉండవలెను. రెండు మాత్రికలను కూడుటకు లేక తీసివేత చేయుటకు అనురూప మూలకములను కూడిక లేక తీసివేత చేయవలయును.

ఉదాహరణకు, $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g & h & i \\ j & k & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d+j & e+k & f+l \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{pmatrix}$$

$A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $i = 1,2, \ldots m$, $j = 1,2, \ldots n$ అయిన $C = A + B$ అనునది $C = (c_{ij})$ ఇచ్చట $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ అన్ని విలువలకు $i = 1,2, \ldots m$ మరియు $j = 1,2, \ldots n$

ఉదాహరణ 3.60 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, అయిన $A+B$ ను కనుగొనుము.

సాధన $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 2+7 & 3+0 \\ 4+1 & 5+3 & 6+1 \\ 7+2 & 8+4 & 9+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 3 \\ 5 & 8 & 7 \\ 9 & 12 & 9 \end{pmatrix}$

ఉదాహరణ 3.61 తమిళము, ఆంగ్లము, సామాన్య శాస్త్రము మరియు గణిత శాస్త్రము పాఠ్యాంశములందలి గ్రూపు-1, గ్రూపు-2 గ్రూపు-3 లకు చెందిన విద్యార్థులకు రెండు పరీక్షలు జరిపి పై పాఠ్యాంశముల సరాసరి మార్కులతో A మరియు B మాత్రికలు నిర్మించబడి ఉన్నవి. మూడు గ్రూపులలో గల విద్యార్థులు రెండు పరీక్షలయందు పొందిన మొత్తము మార్కులను కనుగొనుము.

	తమిళము	ఆంగ్లము	సామాన్య శాస్త్రము	గణిత శాస్త్రము
$A =$ గ్రూపు 1	22	15	14	23
గ్రూపు 2	50	62	21	30
గ్రూపు 3	53	80	32	40

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 151 26-02-2023 14:35:54

$$B = \begin{matrix} \\ \text{గ్రూపు } 1 \\ \text{గ్రూపు } 2 \\ \text{గ్రూపు } 3 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} \text{తమిళము} & \text{ఆంగ్లము} & \text{సామాన్య శాస్త్రము} & \text{గణిత శాస్త్రము} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 20 & 38 & 15 & 40 \\ 18 & 12 & 17 & 80 \\ 81 & 47 & 52 & 18 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

సాధన మూడు గ్రూపుల విద్యార్థుల రెండు పరీక్షల మొత్తం మార్కులు అనునవి ఇవ్వబడిన మాత్రికల కూడిక మొత్తం అగును.

$$A + B = \begin{pmatrix} 22+20 & 15+38 & 14+15 & 23+40 \\ 50+18 & 62+12 & 21+17 & 30+80 \\ 53+81 & 80+47 & 32+52 & 40+18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 & 53 & 29 & 63 \\ 68 & 74 & 38 & 110 \\ 134 & 127 & 84 & 58 \end{pmatrix}$$

ఉదాహరణ 3.62 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & -4 & 6 \\ -3 & 2 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 4 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$, అయిన $A+B$ ను కనుగొనుము.

సాధన A మరియు B మాత్రికలు వేర్వేరు తరగతులను కలిగియుండుటచే కూడుటకు వీలుకాదు.

మాత్రికను అదిశ మాత్రికచే గుణించుట

ఇవ్వబడిన మాత్రిక A నందలి మూలకములను 0 కాని, k అను స్థిరాంకంచే గుణించిన kA మాత్రిక లభించును. దీనిలోని అన్ని మూలకములు k చే గుణించబడును. kA అనునవి A యొక్క అదిశ మాత్రికా లబ్ధము అంటారు.

కనుక $A = (a_{ij})_{m\times n}$ అయితే , $kA = (ka_{ij})_{m\times n}$ అన్ని $i = 1,2,\ldots,m$ మరియు $j = 1,2,\ldots,n$ విలువలకు

ఉదాహరణ 3.63 $A = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 6 \\ 1 & 3 & 9 \\ -4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 11 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ అయిన $2A+B$ ను కనుగొనుము.

సాధన A మరియు B లు ఒకే విధమైన 3×3, $2A+B$ తరగతులు కలిగియున్నవి.

$$2A+B \text{ సాధ్యమగును.} = 2\begin{pmatrix} 7 & 8 & 6 \\ 1 & 3 & 9 \\ -4 & 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 11 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 & 12 \\ 2 & 6 & 18 \\ -8 & 6 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 11 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 18 & 27 & 9 \\ 1 & 8 & 22 \\ -1 & 11 & -2 \end{pmatrix}$$

ఉదాహరణ 3.64 $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \sqrt{2} \\ 1 & 9 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -7 & 4 & -3 \\ \frac{1}{4} & \frac{7}{2} & 3 \\ 5 & -6 & 9 \end{pmatrix}$, అయిన $4A-3B$ ను కనుగొనుము

సాధన A మరియు B లు ఒకే విధమైన 3×3 తరగతులను కలిగియుండుటచే $4A-3B$ సాధ్యమగును.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 152 26-02-2023 14:35:58

$$
\begin{aligned}
4A-3B &= 4\begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \sqrt{2} \\ 1 & 9 & 4 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -7 & 4 & -3 \\ \frac{1}{4} & \frac{7}{2} & 3 \\ 5 & -6 & 9 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 20 & 16 & -8 \\ 2 & 3 & 4\sqrt{2} \\ 4 & 36 & 16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 21 & -12 & 9 \\ -\frac{3}{4} & -\frac{21}{2} & -9 \\ -15 & 18 & -27 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 41 & 4 & 1 \\ \frac{5}{4} & -\frac{15}{2} & 4\sqrt{2}-9 \\ -11 & 54 & -11 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

మాత్రికల కూడిక మరియు మాత్రికల అదిశా గుణకారముల ధర్మములు:

$A,\ B,\ C$ అనునవి $m \times n$ తరగతులు గల మాత్రికలు p మరియు q అనునవి రెండు శూన్యం కానీ అదిశలు (సంఖ్యలు) అనుకొనిన దీని నుండి ఈ క్రింది ధర్మములు పొందవచ్చు.

(i) $A+B=B+A$ [మాత్రికల సంకలన వినిమయ ధర్మము]

(ii) $A+(B+C)=(A+B)+C$ [మాత్రికల సంకలన సహచర ధర్మము]

(iii) $(pq)A=p(qA)$ [మాత్రికల అదిశా గుణకారముల సహచర ధర్మము]

(iv) $IA=A$ [అదిశా తత్సమ ధర్మము, ఇచ్చట I అనునది తత్సమ మాత్రిక]

(v) $p(A+B)=pA+pB$ [రెండు మాత్రికలు మరియు అదిశా విభాగ ధర్మము]

(vi) $(p+q)A=pA+qA$ [రెండు అదిశలు మరియు ఒక మాత్రిక విభాగ ధర్మము]

మాత్రికల సంకలన తత్సమము (Additive Identity)

శూన్య మాత్రిక లేక సున్న మాత్రికను మాత్రికల కూడికల యందు తత్సమము అందురు.

A అనునది ఏదేని ఒక మాత్రిక.

అయితే $A+O=O+A=A\ \ O$, అనునది A మాత్రికతో సమాన తరగతి గల శూన్య మాత్రిక అగును

మాత్రికల సంకలన విలోమము (Additive Inverse)

A అనునది ఏదేని ఒక మాత్రికలో $-A$ అనునది A మాత్రిక యొక్క సంకలన విలోమము అగును.

$A+(-A)=(-A)+A=O$ గా నున్నది.

ఉదాహరణ 3.65 ఈ క్రింది మాత్రికల నుండి $a,\ b,\ c,\ d$ లను కనుగొనుము.

$$
\begin{pmatrix} d & 8 \\ 3b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & a \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2a \\ b & 4c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}
$$

సాధన

ఇరువైపులా గల రెండు మాత్రికలను మొదట కూడవలయును.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 153 26-02-2023 14:36:01

$$\begin{pmatrix} d+3 & 8+a \\ 3b-2 & a-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2a+1 \\ b-5 & 4c \end{pmatrix}$$

రెండు మాత్రికలలోని అనురూప మూలకములను సమానము చేయగా

$d+3=2$ నుండి $d=-1$

$8+a=2a+1$ నుండి $a=7$

$3b-2=b-5$ నుండి $b=\frac{-3}{2}$ లు లభించును.

$a=7$ ను $a-4=4c$ నందు ప్రతిక్షేపించగా $c=\frac{3}{4}$ వచ్చును.

కనుక, $a=7,\ b=-\frac{3}{2},\ c=\frac{3}{4},\ d=-1$.

ఉదాహరణ 3.66 $A=\begin{pmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 3 & 5 & 0 \\ 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 8 & -6 & -4 \\ 2 & 11 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -1 & -7 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ అయిన

(i) $3A+2B-C$ (ii) $\frac{1}{2}A-\frac{3}{2}B$ లను కనుగొనుము.

సాధన (i) $3A+2B-C = 3\begin{pmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 3 & 5 & 0 \\ 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 8 & -6 & -4 \\ 2 & 11 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -1 & -7 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 24 & 9 \\ 9 & 15 & 0 \\ 24 & 21 & 18 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 16 & -12 & -8 \\ 4 & 22 & -6 \\ 0 & 2 & 10 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -5 & -3 & 0 \\ 1 & 7 & -2 \\ -1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 14 & 9 & 1 \\ 14 & 44 & -8 \\ 23 & 19 & 25 \end{pmatrix}$$

(ii) $\frac{1}{2}A-\frac{3}{2}B = \frac{1}{2}(A-3B)$

$$= \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 3 & 5 & 0 \\ 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 8 & -6 & -4 \\ 2 & 11 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 3 & 5 & 0 \\ 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -24 & 18 & 12 \\ -6 & -33 & 9 \\ 0 & -3 & -15 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -23 & 26 & 15 \\ -3 & -28 & 9 \\ 8 & 4 & -9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{23}{2} & 13 & \frac{15}{2} \\ -\frac{3}{2} & -14 & \frac{9}{2} \\ 4 & 2 & -\frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 154 26-02-2023 14:36:07

అభ్యాసము 3.18

1. If $A=\begin{pmatrix}1 & 9\\ 3 & 4\\ 8 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 7\\ 3 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ అయితే

   (i) $A+B=B+A$ (ii) $A+(-A)=(-A)+A=O$. అని సరిచూడుము.

2. $A=\begin{pmatrix}4 & 3 & 1\\ 2 & 3 & -8\\ 1 & 0 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 1 & 9 & 2\\ -7 & 1 & -1\end{pmatrix}$ మరియు $C=\begin{pmatrix}8 & 3 & 4\\ 1 & -2 & 3\\ 2 & 4 & -1\end{pmatrix}$ అయిన

   $A+(B+C)=(A+B)+C$. సరిచూడుము.

3. $X+Y=\begin{pmatrix}7 & 0\\ 3 & 5\end{pmatrix}$ మరియు $X-Y=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ అయిన X మరియు Y లను కనుగొనుము.

4. $A=\begin{pmatrix}0 & 4 & 9\\ 8 & 3 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & 3 & 8\\ 1 & 4 & 9\end{pmatrix}$ అయిన (i) $B-5A$ (ii) $3A-9B$ లను కనుగొనుము.

5. (i) $\begin{pmatrix}x-3 & 3x-z\\ x+y+7 & x+y+z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 6\end{pmatrix}$ (ii) $(x \quad y-z \quad z+3)+(y \quad 4 \quad 3)=(4 \quad 8 \quad 16)$

   అయిన x, y మరియు z విలువలను కనుగొనుము.

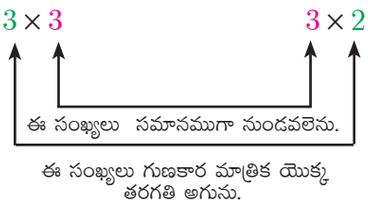
6. $x\begin{pmatrix}4\\ -3\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 6\end{pmatrix}$ అయిన x మరియు y విలువలను కనుగొనుము.

7. క్రింది మాత్రికా సమీకరణము సంతృప్తి పరచు x యొక్క సున్నకాని విలువలను కనుగొనుము

$$x\begin{pmatrix}2x & 2\\ 3 & x\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}8 & 5x\\ 4 & 4x\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x^2+8 & 24\\ 10 & 6x\end{pmatrix}$$

8. $x, y:\begin{pmatrix}x^2\\ y^2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-2x\\ -y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ 8\end{pmatrix}$ నందు x, y లను కనుగొనుము.

మాత్రికల గుణకారము



రెండు మాత్రికలను గుణించుటకు మొదటి మాత్రిక నందలి నిలువు వరుసల సంఖ్యకు రెండవ మాత్రికలోని అడ్డు వరుసల సంఖ్య ఖచ్చితముగా సమానముగా నుండవలయును. ఇప్పుడు 3×3 మరియు 3×2 తరగతులతో కూడిన మాత్రికల గుణకారం చూచెదమా!

(ఎడమ వైపుగల మాత్రిక తరగతి) × (కుడి వైపు గల మాత్రిక తరగతి) → (ఫలితం మాత్రిక తరగతి).

(3×3) (3×2) → (3×2)

మాత్రికల గుణకారమనునది మొదటి మాత్రికలోని అడ్డు వరుసలో గల మూలకమును రెండవ మాత్రిక నందలి నిలువు వరుసలో గల మూలకములతో గుణించి లబ్ధములను కూడవలయును.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 155 26-02-2023 14:36:12

ఉదాహరణకు, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} g & h & i \\ k & l & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ag+bk & ah+bl & ai+bm \\ cg+dk & ch+dl & ci+dm \\ eg+fk & eh+fl & ei+fm \end{pmatrix}$

AB ఫలిత మాత్రికను కనుగొనుటకు, A మాత్రిక యొక్క నిలువు వరుసలు మరియు B మాత్రికల యొక్క అడ్డు వరుసలు సమానముగా యుండవలయును. A మాత్రిక తరగతి $m \times n$ మరియు B మాత్రిక తరగతి $n \times p$ అయిన AB మాత్రిక తరగతి $m \times p$ గా ఉండును.

మాత్రికల గుణకార ధర్మములు

(a) మాత్రికల గుణకారం వినిమయ ధర్మము పాటించదు

A మాత్రిక తరగతి $m \times n$ మరియు B మాత్రిక తరగతి $n \times p$ అయిన AB మాత్రికను కనుగొనవచ్చును. అయితే BA మాత్రికను కనుగొనుటకు వీలుకాదు. ఒకవేళ AB మరియు BA లు కనుగొనుటకు వీలయినను అవి సమానముగా ఉండవలసిన ఆవశ్యకత లేదు. సాధారణముగా $AB \neq BA$.గా నుండును.

(b) మాత్రికల కూడికపై మాత్రికల గుణకారము విభాగ ధర్మమును పాటించును

(i) $A,\ B,\ C$ మాత్రికల తరగతులు క్రమముగా $m \times n$, $n \times p$ మరియు $n \times p$ అయిన $A(B+C) = AB + AC$ (కుడి విభాగ ధర్మము)

(ii) $A,\ B,\ C$ మాత్రికల తరగతులు క్రమముగా $m \times n$, $n \times p$ మరియు $n \times p$ అయిన $\big(A+B\big)C = AC + BC$ (ఎడమ విభాగ ధర్మము)

(c) మాత్రికల గుణకారము ఎల్లప్పుడు సహచర ధర్మమును పాటించును

$A,\ B,\ C$ మాత్రికల తరగతులు క్రమముగా $m \times n$, $n \times p$ మరియు $p \times q$లుగా నున్న యెడల $(AB)C = A(BC)$

(d) ఒక మాత్రికను తత్సమ మాత్రికచే గుణించుట

A అనునది ఒక $n \times n$ తరగతి కలిగిన చతురస్ర మాత్రికగాను మరియు I అనునది అదే తరగతిగా గల తత్సమ మాత్రిక అయిన $AI = IA = A$.

సూచన

- x మరియు y అనునవి రెండు వాస్తవ సంఖ్యలు అయిన $xy = 0$ మరియు $x = 0$ లేక $y = 0$ గా నుండును. అయితే మాత్రికల గుణకారమునందు ఈ నియమము వర్తించదు.
- $AB = 0$ అయిన $A = 0$ లేక $B = 0$ లేక $A, B = 0$ గా నుండవలసిన ఆవశ్యకత లేదు. ప్రత్యేకంగా, రెండు శూన్యేతర మాత్రికల లబ్ధము శూన్యంమాత్రికను ఇవ్వవచ్చు.

వివరణ

ఉదాహరణకు $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$ మరియు $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 156 26-02-2023 14:36:17

అయితే $AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & 1-1 \\ -1+1 & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

కనుక $A \neq 0, B \neq 0$ అయితే $AB = 0$.

ఉదాహరణ 3.67 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, అయిన AB ను కనుగొనుము.

సాధన A యొక్క తరగతి 2×3 మరియు B యొక్క తరగతి 3×3 అని గమనించగలము, కనుక AB ను కనుగొనుటకు వీలగును మరియు దాని తరగతి 2×3 గా నుండును.

ఇవ్వబడినది $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}_{2\times3}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}_{3\times3}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8+4+0 & 3+8+0 & 1+2+0 \\ 24+2+25 & 9+4+15 & 3+1+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 11 & 3 \\ 51 & 28 & 9 \end{pmatrix}$$

ఉదాహరణ 3.68 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ అయిన AB మరియు BA లను కనుగొనుము మరియు $AB = BA$ అని సరిచూడుము.

సాధన A యొక్క తరగతి 2×2 మరియు B యొక్క తరగతి 2×2 గా ఉండుట వలన AB ను కనుగొనవచ్చును. మరియు ఫలిత మాత్రిక తరగతి 2×2 గా నుండును.

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+1 & 0+3 \\ 2+3 & 0+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+0 & 2+0 \\ 2+3 & 1+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$$

కనుక, $AB \neq BA$.

ఉదాహరణ 3.69 $A = \begin{pmatrix} 2 & -2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$ మరియు $B = \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$

అయిన A మరియు B లు మాత్రిక గుణకారమున వినిమయ ధర్మమును సంతృప్తిపరచునని నిరూపించుము.

సాధన మనము $AB = BA$ అని నిరూపించవలయును

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 157 26-02-2023 14:36:22

$$\text{LHS} \quad AB = \begin{pmatrix} 2 & -2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4+4 & 4\sqrt{2}-4\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2}-2\sqrt{2} & 4+4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{RHS} \quad BA = \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4+4 & -4\sqrt{2}+4\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2}+2\sqrt{2} & 4+4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

కనుక LHS = RHS అనగా $AB = BA$

ఉదాహరణ 3.70 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ ను సాధించుము.

సాధన

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 2} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{2\times 1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

మాత్రికల గుణకారం ప్రకారము $\begin{pmatrix} 2x+y \\ x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

దీనిని ఈ క్రింది విధముగా $2x + y = 4$ ...(1)

తీసుకొనిన $x + 2y = 5$ ...(2)

(1) $-2 \times$ (2), $2x + y = 4$

$2x + 4y = 10$ $(-)$

$-3y = -6$ నుంచి $y = 2$

$y = 2$ ను (1) లో ప్రతిక్షేపించగా $2x + 2 = 4$ నుంచి $x = 1$

కనుక, $x = 1$, $y = 2$.

ఉదాహరణ 3.71 $A = (1 \quad -1 \quad 2)$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ మరియు $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

అయిన $(AB)C = A(BC)$ అని నిరూపించుము.

సాధన LHS = $(AB)C$

$$AB = (1 \quad -1 \quad 2)_{1\times 3} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 2} = (1-2+2 \quad -1-1+6) = (1 \quad 4)$$

$$(AB)C = (1 \quad 4)_{1\times 2} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}_{2\times 2} = (1+8 \quad 2-4) = (9 \quad -2) \qquad \ldots(1)$$

RHS = $A(BC)$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 158 26-02-2023 14:36:30

$$BC = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}_{3\times2} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}_{2\times2} = \begin{pmatrix} 1-2 & 2+1 \\ 2+2 & 4-1 \\ 1+6 & 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 3 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A(BC) = (1 \quad -1 \quad 2)_{1\times3} \times \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 3 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}_{3\times2}$$

$$A(BC) = (-1-4+14 \quad 3-3-2) = (9 \quad -2) \qquad \ldots(2)$$

(1) మరియు (2) ల నుండి, $(AB)C = A(BC)$.

ఉదాహరణ 3.72 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ అయిన $A\left(B+C\right) = AB + AC.$ ను సరిచూడుము.

సాధన LHS, $A(B+C)$

$$B + C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A(B+C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6-1 & 8+4 \\ 6-3 & -8+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 12 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \ldots(1)$$

RHS, $AB + AC$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-4 & 2+2 \\ -1-12 & -2+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -13 & 4 \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7+3 & 6+2 \\ 7+9 & -6+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 16 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB + AC = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -13 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 16 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 12 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \ldots(2)$$

(1) మరియు (2) ల నుండి, $A(B+C) = AB + AC$ అని నిరూపించబడినది

ఉదాహరణ 3.73 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ మరియు $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ అయిన $(AB)^T = B^T A^T$ అని నిరూపించుము.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 159 26-02-2023 14:36:38

సాధన

LHS, $(AB)^T$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}_{2\times3} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}_{3\times2}$$

$$= \begin{pmatrix} 2-2+0 & -1+8+2 \\ 4+1+0 & -2-4+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 9 & -4 \end{pmatrix} \quad \ldots(1)$$

RHS, (B^TA^T)

$$B^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix},\ A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^TA^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}_{2\times3} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{3\times2}$$

$$= \begin{pmatrix} 2-2+0 & 4+1+0 \\ -1+8+2 & -2-4+2 \end{pmatrix}$$

$$B^TA^T = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 9 & -4 \end{pmatrix} \quad \ldots(2)$$

(1) మరియు (2) ల నుండి, $(AB)^T = B^TA^T$. అని నిరూపించబడినది.

అభ్యాసము 3.19

1. A, B అను మాత్రికలు క్రింది విధంగా కలవు AB యొక్క తరగతులను కనుగొనుము.

	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)
A మాత్రిక తరగతి	3×3	4×3	4×2	4×5	1×1
B మాత్రిక తరగతి	3×3	3×2	2×2	5×1	1×3

2. A మాత్రిక తరగతి $p\times q$ మరియు B మాత్రిక తరగతి $q\times r$ రెండుమాత్రికలను గుణించుటకు వీలు అయిన AB మరియు BA తరగతులను కనుగొనుము.
3. A మాత్రిక 'a' అడ్డు వరుసలు మరియు '$a+3$' నిలువ వరుసలు కలిగియున్నది. B మాత్రిక 'b' అడ్డు వరుసలు మరియు '$17-b$' నిలువు వరుసలు కలిగియున్నది. AB మరియు BA మాత్రికల లబ్ధములు సాధ్యమైనచో a, b లను కనుగొనుము.
4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ అయిన; AB, BA లను కనుగొనుము మరియు

   $AB = BA$ లను సరిచూడుము.
5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ అయిన

   $A(B+C) = AB + AC$ ను సరిచూడుము.
6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ అయిన ఈ రెండు మాత్రికలకు $AB=BA$ అను వినిమయ

   ధర్మమును సంతృప్తిపరచునని నిరూపించుము.
7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ అయిన క్రింది వాటిని నిరూపించుము.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 160 26-02-2023 14:36:47

(i) $A(BC) = (AB)C$ (ii) $(A-B)C = AC - BC$ (iii) $(A-B)^T = A^T - B^T$

8. $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta \end{pmatrix}$ అయిన $A^2 + B^2 = I$ అని నిరూపించుము.

9. $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ అయిన $AA^T = I$ అని నిరూపించుము.

10. $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$ అయిన $A^2 = I$ అని సరిచూడుము.

11. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ మరియు $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ అయిన $A^2 - (a+d)A = (bc - ad)I_2$ అని నిరూపించుము.

12. $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ అయిన $(AB)^T = B^T A^T$ అని సరిచూడుము.

13. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ అయిన $A^2 - 5A + 7I_2 = 0$ అని నిరూపించుము.

6ZM3R

అభ్యాసము 3.20

బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు

1. మూడు చలరాశులు కలిగిన మూడు సమీకరణముల వ్యవస్థకు సాధనలు లేని యెడల ఆ వ్యవస్థలో గల తలములు

(A) ఒకే ఒక బిందువు వద్ద ఖండించుకొనును. (B) ఒకే ఒక రేఖపై ఖండించును.

(C) ఒకదానితో నొకటి ఏకీభవించును. (D) ఖండించుకొనవు.

2. $x + y - 3x = -6$, $-7y + 7z = 7$, $3z = 9$ సమీకరణముల వ్యవస్థకు సాధన.

(A) $x = 1, y = 2, z = 3$ (B) $x = -1, y = 2, z = 3$

(C) $x = -1, y = -2, z = 3$ (D) $x = 1, y = 2, z = 3$

3. $x^2 - 2x - 24$ మరియు $x^2 - kx - 6$ గ.సా.భా. $(x-6)$ అయిన k విలువ.

(A) 3 (B) 5 (C) 6 (D) 8

4. $\dfrac{3y-3}{y} \div \dfrac{7y-7}{3y^2}$ అనునది

(A) $\dfrac{9y}{7}$ (B) $\dfrac{9y^3}{(21y-21)}$ (C) $\dfrac{21y^2 - 42y + 21}{3y^3}$ (D) $\dfrac{7(y^2 - 2y + 1)}{y^2}$

5. $y^2 + \dfrac{1}{y^2}$ కు క్రింది వానిలో సమానము కానిది.

(A) $\dfrac{y^4 + 1}{y^2}$ (B) $\left(y + \dfrac{1}{y}\right)^2$ (C) $\left(y - \dfrac{1}{y}\right)^2 + 2$ (D) $\left(y + \dfrac{1}{y}\right)^2 - 2$

6. $\dfrac{x}{x^2 - 25} - \dfrac{8}{x^2 + 6x + 5}$ యొక్క సూక్ష్మరూపము

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 161 26-02-2023 14:36:55

(A) $\dfrac{x^2-7x+40}{(x-5)(x+5)}$ (B) $\dfrac{x^2+7x+40}{(x-5)(x+5)(x+1)}$

(C) $\dfrac{x^2-7x+40}{(x^2-25)(x+1)}$ (D) $\dfrac{x^2+10}{(x^2-25)(x+1)}$

7. $\dfrac{256x^8y^4z^{10}}{25x^6y^6z^6}$ యొక్క వర్గమూలమునకు సమానమైనది.

(A) $\dfrac{16}{5}\left|\dfrac{x^2z^4}{y^2}\right|$ (B) $16\left|\dfrac{y^2}{x^2z^4}\right|$ (C) $\dfrac{16}{5}\left|\dfrac{y}{xz^2}\right|$ (D) $\dfrac{16}{5}\left|\dfrac{xz^2}{y}\right|$

8. x^4+64 నకు ఈ క్రింది వాటిలో దీనిని చేర్చిన ఖచ్చిత వర్గము లభించును.

(A) $4x^2$ (B) $16x^2$ (C) $8x^2$ (D) $-8x^2$

9. $\left(2x-1\right)^2=9$ యొక్క సాధన

(A) -1 (B) 2 (C) -1, 2 (D) ఏదీ కాదు.

10. $4x^4-24x^3+76x^2+ax+b$ ఒక ఖచ్చిత వర్గము అయిన a మరియు b విలువలు

(A) 100,120 (B) 10,12 (C) -120,100 (D) 12,10

11. $q^2x^2+p^2x+r^2=0$ యొక్క మూలముల వర్గములు $qx^2+px+r=0$ సమీకరణకు మూలములు అయిన q, p, r అనునవి _____ లో ఉండును.

(A) ఒక అంక శ్రేణిలో కలదు. (B) ఒక గుణ శ్రేణిలో కలదు.

(C) అంక శ్రేణి మరియు గుణ శ్రేణి రెండునూ. (D) వీటిలో ఏదీ కాదు.

12. రేఖీయ బహుపదసమాసపు రేఖాచిత్రము.

(A) సరళ రేఖ (B) వృత్తము (C) పరా వలయము (D) అతి పరావలయము

13. x^2+4x+4 అను వర్గ సమాసములో X అక్షమును ఖండించు బిందువుల సంఖ్య

(A) 0 (B) 1 (C) 0 or 1 (D) 2

14. $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 7\\ 2 & 4 & 6 & 8\\ 9 & 11 & 13 & 15\end{pmatrix}$ అని ఇవ్వబడిన A^T మాత్రిక యొక్క తరగతి.

(A) 2×3 (B) 3×2 (C) 3×4 (D) 4×3

15. A మాత్రిక తరగతి 2×3 మరియు B మాత్రిక తరగతి 3×4 అయిన, AB మాత్రిక నందు గల నిలువు వరుసల సంఖ్య.

(A) 3 (B) 4 (C) 2 (D) 5

16. ఒక మాత్రిక నందు అడ్డు వరుసల సంఖ్య మరియు నిలువు వరుసల సంఖ్య సమానముగా లేని యెడల ఆ మాత్రికను.

(A) వికర్ణ మాత్రిక (B) దీర్ఘ చతురస్ర మాత్రిక (C) చతురస్ర మాత్రిక (D)తత్సమ మాత్రిక

17. నిలుపు వరుస మాత్రిక యొక్క వ్యత్యయ మాత్రిక.

(A) తత్సమ మాత్రిక (B) వికర్ణ మాత్రిక (C) నిలువ వరుస మాత్రిక (D) అడ్డు వరుస మాత్రిక

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 162 26-02-2023 14:37:02

18. $2X+\begin{pmatrix}1 & 3\\ 5 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 7\\ 9 & 5\end{pmatrix}$ అయిన X మాత్రికను కనుగొనుము.

(A) $\begin{pmatrix}-2 & -2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$

19. ఇవ్వబడిన ఈ మాత్రికల నుండి ఈ క్రింది వాటిలో దేనిని కనుగొనవచ్చును.

$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$, (i) A^2 (ii) B^2 (iii) AB (iv) BA

(A) (i) మరియు (ii) మాత్రమే (B) (ii) మరియు (iii) మాత్రమే

(C) (ii) మరియు (iv) మాత్రమే (D) పైవన్నియూ.

20. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ మరియు $C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & 5\end{pmatrix}$. అయిన ఈ క్రింది వాటిలో ఏది సరియైనది.

(i) $AB+C=\begin{pmatrix}5 & 5\\ 5 & 5\end{pmatrix}$ (ii) $BC=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & -3\\ -4 & 10\end{pmatrix}$ (iii) $BA+C=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 3 & 0\end{pmatrix}$ (iv) $(AB)C=\begin{pmatrix}-8 & 20\\ -8 & 13\end{pmatrix}$

(A) (i) మరియు (ii) మాత్రమే (B) (ii) మరియు (iii) మాత్రమే

(C) (iii) మరియు (iv) మాత్రమే (D) పైవన్నియు

అధ్యాయ అభ్యాసము- 3



1. $\frac{1}{3}(x+y-5)=y-z=2x-11=9-(x+2z)$ ను సాధించుము
2. ఒక పాఠశాలలో 150 మంది విద్యార్థులు చేరి ఉన్నారు. వారు A, B, C అను మూడు విభాగములుగా విభజింపబడిరి. 6 మంది విద్యార్థులు A విభాగము నుండి C విభాగమునకు మార్చిన ఆ రెండు విభాగములు సమానమగును. C విభాగము విద్యార్థులు నాలుగు రెట్లు మరియు A విభాగ విద్యార్థుల సంఖ్య వ్యత్యాసము B విభాగ విద్యార్థుల సంఖ్యకు సమానము.
3. ఒక మూడంకెల సంఖ్యలో, పదుల స్థానము వందల స్థానములను మార్చుట ద్వారా లభించు క్రొత్త సంఖ్య, ఇవ్వబడిన సంఖ్యకు మూడురెట్లు కన్నా 54 ఎక్కువ. ఇవ్వబడిన సంఖ్యకు 198 ను కూడిన స్థాన విలువలు మారును. ఒకట్ల స్థానంలో కన్నా ఎక్కువ గల పదుల స్థానంలోని రెండు రెట్లు, వందల స్థానం కన్నా ఎక్కువ గల పదుల స్థానమునకు సమానము అయిన, ఇవ్వబడిన సంఖ్యను కనుగొనుము.
4. $xy(k^2+1)+k(x^2+y^2)$ మరియు $xy(k^2-1)+k(x^2-y^2)$ ల క.సా.గు కనుగొనుము.
5. క్రింది బహుపద సమాసముల గ.సా.భాను కనుగొనుము.

$2x^4+13x^3+27x^2+23x+7$, x^3+3x^2+3x+1, x^2+2x+1

6. ఈ క్రింది అకరణీయ సమాసములను సూక్ష్మరూపంలోకి మార్చుము.

(i) $\frac{x^{3a}-8}{x^{2a}+2x^a+4}$ (ii) $\frac{10x^3-25x^2+4x-10}{-4-10x^2}$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 163 26-02-2023 14:37:06

7. సూక్ష్మీకరించుము $\dfrac{\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q+r}}{\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q+r}} \times \left(1+\dfrac{q^2+r^2-p^2}{2qr}\right)$

8. అరుల్, రవి మరియు రాములు ముగ్గురూ కలిపి పనిచేసిన ఒక అంగడిని 6 గం॥ల సమయములో శుభ్రపరిచెదరు. వారు వేర్వేరుగా పనిచేసిన అరుల్ పనిచేయు సమయం కంటె రవి రెండింతల సమయము పట్టును. అరుల్ కంటె రాముకు మూడింతల సమయం పట్టును. వారు వేర్వేరుగా పనిచేసిన ఒక్కొక్కరు తీసుకొను సమయం ఎంత?

9. $289x^4 - 612x^3 + 970x^2 - 684x + 361$ యొక్క వర్గమూలమును కనుగొనుము.

10. $\sqrt{y+1} + \sqrt{2y-5} = 3$ ను సాధించుము.

11. 36 కి.మీ దూరమును ఒక పడవ నీటి ప్రవాహ దిశలో ప్రయాణించు సమయం కన్నా నీటి వ్యతిరేక దిశలో ప్రయాణించు సమయము 1.6 గంటల సమయము ఎక్కువగా తీసుకొనును. నీటి ప్రవాహ వేగం 4 కి.మీ/గంట అయిన, నిశ్చల నీటిలో పడవ వేగము కనుగొనుము.

12. 320 మీ ల చుట్టుకొలత మరియు 4800 మీ^{2} వైశాల్యము గల దీర్ఘచతురస్రాకార తోటను నిర్మించుటకు వీలగునా? దాని పొడవు మరియు వెడల్పును కనుగొనుము.

13. ఒక గడియారంలో మధ్యాహ్నం 2 గంటల నుండి t నిమిషములకు తరువాత 3 గంటలు వచ్చుటకు కాల సమయం $\dfrac{t^2}{4}$ కన్నా మూడు నిమిషములు తక్కువైన t యొక్క విలువను కనుగొనుము.

14. ఒక హాలు నందు ఒక వరుసలో గల కుర్చీల సంఖ్య ఆ హాలులో గల మొత్తం సంఖ్యకు సమానము. ఒక్కొక్క వరుసలో గల కుర్చీల 5 తగ్గిన మొత్తము వరుసలోని సంఖ్య రెట్టింపు అయిన, హాలులో గల కుర్చీల సంఖ్య ముందు కన్నా 375 ఎక్కువగును. హాలులో ప్రారంభంలో నున్న వరుసల సంఖ్యను కనుగొనుము.

15. $f(x) = x^2 - 2x + 3$, బహుపద సమాసము యొక్క మూలములు α మరియు β అయిన యెడల ఈ క్రింది మూలముల కలిగిన బహుపద సమాసములను కనుగొనుము.

(i) $\alpha+2,\ \beta+2$ (ii) $\dfrac{\alpha-1}{\alpha+1},\ \dfrac{\beta-1}{\beta+1}$.

16. $x^2 + px - 4 = 0$ అను సమీకరణపు మూలము -4 మరియు $x^2 + px - 4 = 0$ సమీకరణపు మూలములు సమానము అయిన p మరియు q విలువలను కనుగొనుము.

17. సెంథిల్ మరియు రవి ఇరువురు వ్యవసాయదారులు వరి, గోధుమ మరియు రాగి అను మూడు రకములైన పంటలను పండించిన ధాన్యముల అమ్మకపు ధరను క్రింద మాత్రికలలో ఇవ్వబడినది. ఏప్రిల్ నెల నందలి అమ్మకము ధరలలో

$$\begin{array}{c} \\ \text{A} = \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} \text{వరి} & \text{గోదుమ} & \text{రాగి} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 500 & 1000 & 1500 \\ 2500 & 1500 & 500 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{సెంథిల్} \\ \text{రవి} \end{array}$$

మరియు మే నెల ధర ఏప్రిల్ నెల యందలి ధర కన్నా రెండింతలయిన కింది వాటిని కనుగొనుము..

(i) ఏప్రిల్ మరియు మే నెలల యొక్క సరాసరి అమ్మకమును కనుగొనుము.

(ii) అమ్మకము ఇదేవిధంగా క్రమముగా తరువాత నెలలో పెరిగిన ఆగస్టు నెలయందలి అమ్మకమును తెలుపుము

18. $\cos\theta \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} + \sin\theta \begin{pmatrix} x & -\cos\theta \\ \cos\theta & x \end{pmatrix} = I_2$, అయిన x విలువ కనుగొనుము.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 164 26-02-2023 14:37:09

19. $A=\begin{pmatrix}p & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -q\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ మరియు $BA=C^2$, అయిన p మరియు q విలువలు కనుగొనుము.

20. $A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 4 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 8 & 5\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ అయిన మరియు $CD-AB=0$,అదేవిధంగా మాత్రిక D ను కనుగొనుము.

గుర్తించుకోవలసిన విషయాలు



- మూడు చలరాశులతో కూడిన రేఖీయ సమీకరణ వ్యవస్థ ఈ క్రింది వాటిలో ఏదేని ఒక రకమునకు చెందినదిగా నుండును.

  (i) ఒకేఒక సాధన కలిగియుండును. (ii) అనంతమైన సాధనలు (iii) సాధనలు లేవు.

- రెండు అంతకంటే ఎక్కువ రేఖీయ సమీకరణములకు కనిష్ఠ సామాన్య గుణిజము అనునది అతి తక్కువ ఘాతము కలిగి ఆ సమీకరణమును భాగించునదిగా వుండవలెను.

- x చలరాశి కలిగి రెండు ఘాతముగా గల బహుపద సమాసమును x తో కూడిన వర్గసమాసము అందురు. ప్రతి వర్గసమాసమునకు రెండు కనీస శూన్య విలువలుండును. వర్గసమీకరణము యొక్క శూన్యములు x అక్షమును ఖండించును.

- $ax^2+bx+c=0$ అను వర్గసమీకరణము యొక్క మూలములు $(a\neq 0)$గా నున్నప్పుడు $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ గా ఉండును.

- $a\neq 0$గా గల $ax^2+bx+c=0$, అను

  వర్గసమీకరణమునకు మూలముల మొత్తము $\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{-x \text{ గుణకము}}{x^2 \text{ గుణకము}}$

  ఒక వర్గసమీకరణము యొక్క మూలములు, $\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{\text{స్థిరాంకము}}{x^2 \text{ గుణకము}}$

- α మరియు β అయిన యెడల, ఆ సమీకరణమును $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$ గా వ్రాయవచ్చును.

- $(\Delta=b^2-4ac)$ విచక్షిణి విలువ మూలముల యొక్క స్వభావమును ఈ క్రింది విధముగా తెలుపుము.

  (i) $\Delta=0$ అయిన మూలములు వాస్తవములు మరియు అసమానము.

  (ii) $\Delta=0$, అయిన మూలములు వాస్తవములు మరియు సమానము.

  (iii) $\Delta<0$, అయిన మూలములు వాస్తవ మూలము లేవు.

- వర్గ సమీకరణమును రేఖా చిత్రము ద్వారా సాధించుట.

- ఒక మాత్రిక అనునది మూలకములను అడ్డు వరుసలు మరియు నిలువ వరుసలతో కూడిన దీర్ఘచతురాస్రాకారములో అమర్చుట అగును.

- మాత్రిక యొక్క తరగతి

  A అను మాత్రిక m సంఖ్య గల అడ్డు వరుసలు n సంఖ్య గల నిలువ వరుసలు కలిగియుండిన A మాత్రిక యొక్క తరగతి అడ్డు వరుసల సంఖ్య $\times$ నిలువ వరుసల సంఖ్య అనగా $m\times n$, $m\times n$ ను మనము m క్రాస్ n అని లేక m బై n అని చదవవచ్చును. $m\times n$ అనునది m మరియు m ల లబ్ధముగా తీసుకొనరాదు.

- **మాత్రికల రకములు**

(i) ఒకే ఒక అడ్డు వరుసను మరియు పలు నిలువ వరుసలను కలిగిన మాత్రికను అడ్డువరుస మాత్రిక

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 165 26-02-2023 14:37:13

అని అందురు. అడ్డువరుస మాత్రికను అడ్డు వరుస సదిశ అని కూడా పిలిచెదరు.

(ii) ఒకే ఒక నిలువ వరుస మరియు పలు అడ్డు వరుసలను కలిగిన మాత్రికను నిలువ వరుస మాత్రిక అని అందురు. నిలువ వరుస మాత్రికను నిలువ వరుస సదిశ అని కూడా పిలిచెదరు.

(iii) అడ్డు వరుసల సంఖ్య మరియు నిలువ వరుసల సంఖ్య సమానముగా గల మాత్రికను చతురస్ర మాత్రిక అని అందురు.

(iv) ఒక చతురస్ర మాత్రికనందలి, ప్రధాన కర్ణమూలకములు విడిచి మిగతా మూలములు అన్నియు సున్నగానున్న యెడల ఆ మాత్రికను వికర్ణ మాత్రిక అందురు.

(v) వికర్ణ మాత్రికనందలి ప్రధాన కర్ణములోని అన్ని మూలకములు సమానముగానున్న యెడల ఆ మాత్రికను అదిశ మాత్రిక అందురు.

(vi) ఒర చతురస్ర మాత్రికనందలి ప్రధాన వికర్ణములోని మూలకములన్నియు 1 గాను మిగిలిన అన్ని మూలకములు సున్నగాను యుండిన యెడల ఆ మాత్రికను తత్సమ మాత్రిక లేక యూనిట్ మాత్రిక అని అందురు.

(vii) ఒక మాత్రికనందలి అన్ని మూలకములు సున్నగాయున్న యెడల, ఆ మాత్రికను శూన్య మాత్రిక అని అందురు.

(viii) ఇవ్వబడిన మాత్రికనందలి అడ్డువరుసలను నిలువవరుసలుగానూ లేక నిలువవరుసలను అడ్డువరుసలుగా మార్చినపుడు లభించు మాత్రికను, ఆ మాత్రిక యొక్క వ్యత్యయ మాత్రిక అని అందురు. A యొక్క వ్యత్యయ మాత్రికను A^T అని సూచించుదురు.

(ix) ఒక చతురస్ర మాత్రికనందలి ప్రధాన వికర్ణమునకు పైన గల అన్ని మూలకములు సున్నగానున్న యెడల, ఆ మాత్రికను దిగువ త్రిభుజ మాత్రిక అని అందురు.

ఒక చతురస్ర మాత్రికనందలి ప్రధాన వికర్ణమునకు దిగువన గల అన్ని మూలకములు సున్నగానున్న యెడల ఆ మాత్రికను ఎగువ త్రిభుజ మాత్రిక అని అందురు.

(x) A మరియు B అను రెండు మాత్రికలలో రెండు మాత్రికల తరగతులు సమానముగా నుండి A మాత్రికలోని ప్రతి మూలకము b మాత్రికలోని ప్రతి అనురూప $a_{ij} = b_{ij}$ అన్ని i, jలకు మూలకమునకు సమానముగానున్న యెడల ఆ రెండు మాత్రికలను సమాన మాత్రికలు అని అందురు.

- $A_{m\times n}$ మాత్రిక యొక్క ఋణాత్మక మాత్రికను $-A_{m\times n}$ అని సూచించవచ్చును. మరియు ఋణాత్మక మాత్రికను పొందుటకు దాని ప్రతి మూలకమునకు వాటి సంకలన విలోమము వ్రాయవలెను.
- **మాత్రికల కూడిక మరియు తీసివేత**

  రెండు మాత్రికలను కూడుటకు లేదా తీసివేత చేయుటకు ఆ రెండు మాత్రికలు సమాన తరగతిని కలిగియుండవలయును. రెండు మాత్రికలను కూడుటకు లేదా తీసివేత చేయుటకు అనురూప మూలకములను కూడుట లేక తీసివేత చేయవలయును.

- **మాత్రికను అదిశ రాశిచే గుణించుట**

  ఇవ్వబడిన మాత్రిక A నందలి మూలకములను సున్నకాని k అను స్థిరాంకముచే గుణించిన kA మాత్రిక లభించును. ఈ kA మాత్రికను అదిశచే గుణించబడిన మాత్రిక అని అందురు
  కనుక $A = (a_{ij})_{m\times n}$ అయితే, $kA = (ka_{ij})_{m\times n}$ అన్ని $i = 1,2,\ldots,m$ మరియు $j = 1,2,\ldots,n$ అగును.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 166 26-02-2023 14:37:14

అంతర్జాల కృత్యము

ICT 3.1

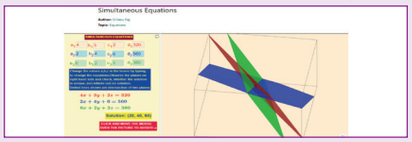
సోపానము 1: Browser ను Open చేసి క్రింద ఇవ్వబడిన URL Link ను type చేయుము. లేక QR Code ను స్కాన్ చేయుము. **"Algebra"** అను పేరు గల అధ్యాయము open అగును. **"Simultaneous equations"** అను work sheet ను Select చేయుము.

సోపానము 2:ఇవ్వబడిన worksheet నందు నీవు మూడు రేఖీయ సమీకరణము చూడగలవు. మరియు నీవు సమీకరణమునందలి type చేయుట ద్వారా a, b,c లకు ప్రతి సమీకరణమునకు క్రొత్త విలువలు మార్చగలవు. నీవు 3-D గ్రాఫ్‌ను కదిలించి పరిశీలించగలవు. సమీకరణములను మార్చి సాధనల స్వభావమును పరిశీలించుము.

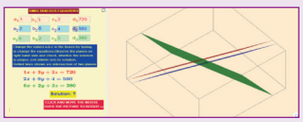
సోపానము 1



సోపానము 2



ఫలితములు

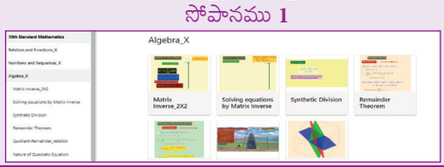


ICT 3.2

సోపానము – 1 బ్రౌజరు ఓపెన్ చేసి క్రింద ఇవ్వబడిన URL ను type చేయుము. లేక QR Code ను స్కాన్ చేయుము. GeoGebra నందు "ALGEBRA" అను పేరు గల work book open అగును. "Nature of Quadratic Equation" అను worksheet పై క్లిక్ చేయుము.

సోపానము - 2: ఇవ్వబడిన worksheet నందు నీవు ఇవ్వబడిన sliders ను జరుపుట ద్వారా గుణకములను మార్చవచ్చును. "New position" పై క్లిక్ చేసి మరియు sliders ను జరుపుట ద్వారా shell ను boundary వైపునకు విస్తరించవచ్చును. తరువాత "fire" పై క్లిక్ చేసి target ఛేదించవచ్చును. ఇచ్చట నీవు ప్రతి గుణకములను మార్చుట ద్వారా రేఖా వలయము నుండి ఏమి జరుగునని నేర్చుకుంటావు.

సోపానము 1



సోపానము 2



ఫలితములు

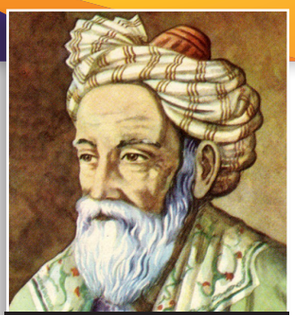


మరికొన్ని కృత్యముల కొరకు అవే సోపానములను మరలా చేయండి.
https://www.geogebra.org/m/jfr2zzgy#chapter/356193
లేదా QR కోడ్‌ని స్కేన్ చేయండి.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_3.indd 167 26-02-2023 14:37:15

4 రేఖాగణితము

"కొలుచుటకు వీలుకాని స్థితిని అర్థం చేసుకొనుటయే రేఖా గణితము యొక్క ముఖ్య ఉద్దేశ్యము"
- ప్లేటో


ఒమర్ ఖయ్యాం
(18.5.1048 – 4.12.1131)

ఓమర్ ఖయ్యాం ఒక పారశీక గణిత శాస్త్రవేత్త, జ్యోతిష్కుడు మరియు ఒక కవి. ఒక కవిగా, ఇతను రచించిన "రుబాయట్" (Rubaiyat) కావ్యము ప్రపంచ ప్రసిద్ధి గాంచినది.

ఖయ్యాం బీజగణితం మరియు రేఖాగణితములను ఒకటిగా చేయుటకు చాలా వరకు ప్రయత్నము చేసిరి. ఖయ్యాం యొక్క పరిశోధనలు మొట్టమొదటగా క్రమముగా అభ్యసించుటకు మరియు మొట్టమొదటగా త్రిఘాత సమీకరణములను సాధించుటకు సరైన పద్ధతిని తెలుపు విధముగా అమరియున్నవి. అతను ఈ కార్యమును రేఖాగణితమును ఉపయోగించి పూర్తి చేసెను. ఇతను రేఖాగణితము నందు యూక్లిడ్‌చే ఇవ్వబడిన అనేక సిద్ధాంతములను సాధారణీకరించుటకు ప్రయత్నము చేసెను. భవిష్యత్తులో ఉపయోగపడు విధముగా నాన్–యూక్లిడియన్ (non-Euclidean) రేఖాగణితమును కనుగొనుట ద్వారా ఎంతో మంది యూరోపియన్ గణిత శాస్త్రవేత్తలకు స్ఫూర్తిగా నిలిచెను. ఖయ్యాం గుర్తించదగిన శాస్త్రవేత్తలకు ఒక చక్కటి తార్కాణము (Example) మరియు ఒక గొప్ప కవి. ఇతరులకంటే ఇతని సాధనలు తీవ్ర ప్రభావమును చూపెను.

అభ్యసన ఫలితములు

G04WE

- సర్వ సమాన త్రిభుజములను జ్ఞప్తికి తెచ్చుకొనుట మరియు స్వరూప త్రిభుజముల నిర్వచనములను అర్థము చేసుకొనుట.
- సరూప త్రిభుజముల ధర్మములు అర్థము చేసుకొనుట మరియు నిర్మించుట, వాటిని ఉపయోగించి సమస్యలకు పరిష్కారము కనుగొనుట.
- ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతము, కోణ సమద్విఖండన సిద్ధాంతములను నిరూపించుట, వాటి ఉపయోగములను అభ్యసించుట మరియు ఇవ్వబడిన నియమములననుసరించి త్రిభుజ నిర్మాణములను గూర్చి అభ్యసించుట.
- పైథాగరస్ సిద్ధాంతమును నిరూపించుట మరియు దాని ఉపయోగములను అభ్యసించుట.
- వృత్తమునకు స్పర్శ రేఖ అను భావనను అర్థం చేసుకొనుట మరియు వృత్తమునకు స్పర్శరేఖ గీయుటను గూర్చి అభ్యసించుట.
- అనుషక్త సిద్ధాంతములను అర్థము చేసుకొనుట మరియు వినియోగించుట.

4.1 పరిచయము

రేఖాగణిత అభ్యసనము అనునది వివిధ రకముల ఆకారములు మరియు నిర్మాణముల ధర్మములను గూర్చి తెలుసుకొనుటకు సంబంధించినది. అంకగణితము మరియు రేఖాగణితము అను రెండునూ గణితశాస్త్రం యొక్క పురాతన శాఖలుగా పరిగణించబడుచున్నవి. గ్రీకులు రేఖాగణితమునకు ఉన్నతమైన స్థానమును కల్పించి గౌరవించుచుండిరి మరియు దాని ధర్మములను అనేక సాధ్యముకాని వాటిని సుసాధ్యం గావించుటకు విజ్ఞానశాస్త్ర సూత్రములందు ఉపయోగించుటకు చర్చించుచుండిరి. ఎరటోస్తినీస్ వృత్తముల సరూపతను ఉపయోగించి

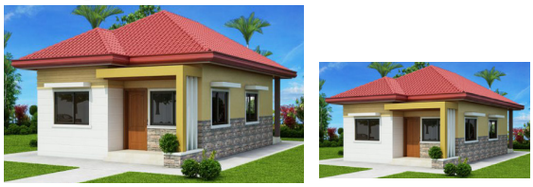
10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_4.indd 168 13-02-2023 19:51:57

భూమి యొక్క చుట్టుకొలతను, భూమి నుండి చంద్రునికి మరియు సూర్యునికి మధ్య గల దూరములను, ఆశ్చర్యకరమైన, ఖచ్చితముగా కనుగొనెను. ఈ సాధనలు మాత్రమే కాకుండా, సరూ పతలు ఉపయోగించి నదుల వెడల్పును, చెట్లు ఎత్తులను ఇంకా ఎన్నెన్నో కనుగొనవచ్చును.

ఈ పాఠ్యభాగము నందు మనము ముఖ్యముగా మునుపటి తరగతుల యందు అభ్యసించిన భావనల కొనసాగింపు గూర్చి చర్చించుట మరియు అతిముఖ్యమైన భావనలగు సరూప త్రిభుజమునకు ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతము, కోణ సమద్విఖండన సిద్ధాంతము, అత్యంత ప్రాముఖ్యత గాంచిన మరియు అందరి మన్ననలు పొందిన పైథాగరస్ సిద్ధాంతము, మొదలగు భావనలను గూర్చి చర్చించెదము. సెవాస్ సిద్ధాంతము (Ceva's Theorem) మరియు మెనెలాస్ సిద్ధాంతము (Menelaus Theorem)ను మొట్టమొదటిసారిగా పరిచయం చేయబడినది. ఈ రెండు కొత్త సిద్ధాంతములు మనకు తెలిసిన అన్ని అనుషక్త సిద్ధాంతములను సాధారణీకరించును. మొత్తముగా, రేఖాగణితమును అభ్యసించుట వలన మన చుట్టుప్రక్కల గల వస్తువుల గూర్చి దీర్ఘముగా అర్థముచేసుకొనుటకు ఆసక్తి రేకెత్తును.

రేఖాగణితము విజ్ఞానశాస్త్రము, ఇంజనీరింగు మరియు వాస్తుశాస్త్రము నందు ముఖ్యపాత్ర వహించుచున్నది. మనము ప్రకృతి నందు అనేక రేఖాగణిత నమూనాలను చూచుచున్నాము. మనము త్రిభుజములు మరియు వాటి ధర్మములను గూర్చి మునుపటి తరగతుల యందు బాగుగా అభ్యసించియున్నాము.

4.2 సరూపత (Similarity)



రెండు పటములు, ప్రతి అంశము నందు ఒకదానితోనొకటి తగిన విధముగా నుండిన వాటిని సరూప పటములని చెప్పవచ్చును. ఉదాహరణముగా:



పటం. 4.1

పై పటములలో గృహములను చూచిన అవి ఒకే మాదిరిగా నున్నవి. కాని వివిధ పరిమాణములలో నున్నవి. రెండు మొబైల్ ఫోన్లు ఒకే మాదిరిగా నున్నవి కానీ వేర్వేరు పరిమాణములలోనున్నవి. కనుక, మనము గణితశాస్త్ర ప్రకారము రెండు వస్తువులను సరూపత కల్గినవి అవి చెప్పుటకు ఒకే ఆకారములో ఉండవలెను. కాని ఒకే పరిమాణములో ఉండవలసిన అవశ్యకత లేదు. రెండు సరూప వస్తువుల అనురూప కొలతల నిష్పత్తి సరియైనదిగా నుండవలయును

ఈ క్రింది గల రేఖాగణిత సంబంధిత ఆకారముల పెట్టె గలదు. వాటి నుండి సరూప వస్తువులను కనుగొని పట్టికీకరించుము.



పటం. 4.2

ఈ పాఠ్యాంశము నందు, మనము ప్రత్యేకముగా సరూప త్రిభుజముల గూర్చి చర్చించుట అనునది బాహ్యముగా కొలత సామగ్రినుపయోగించి కొలుచు దూరము మరియు ఎత్తులను కనుగొనుటలో అత్యంత ప్రాముఖ్యత వహించుచున్నది. సరూపత అను భావన ఇంజనీరింగు, వాస్తుశాస్త్రము మరియు నిర్మాణముల యందు విశదముగా వినియోగించబడుచున్నది.

సరూపత యొక్క ఉపయోగములలో కొన్ని క్రింద ఇవ్వబడియున్నవి.

(i) నీడ వలన ఏర్పడు త్రిభుజములను పరిశీలించుట ద్వారా, మనము వస్తువుల యొక్క నిజమైన ఎత్తులను కనుగొనవచ్చును.

(ii) భూతలముపై ఒక నిర్దిష్ట స్థానము నుండి ఆకాశము నందలి వస్తువులకు మధ్యగల దూరమును వైమానిక ఛాయ చిత్రం ద్వారా ఉపయోగింపబడును.

(iii) వాస్తు నిర్మాణముల యందు వారి పనికి సహాయకారిగా నుండుటకు ఉపయోగించెదరు.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_4.indd 169 13-02-2023 19:51:58

4.2.1 సరూప త్రిభుజములు

తొమ్మిదవ తరగతి యందు, మనము సర్వసమాన త్రిభుజములను గూర్చి చదివియున్నాము. మనము రెండు రేఖాగణిత ఆకారములు ఒకే ఆకారము మరియు సమాన పరిమాణముతో యున్న యెడల వాటిని సర్వసమాన ఆకారములు అని చెప్పవచ్చును. అయితే ఇచ్చట మనము ఒకే ఆకారము మరియు తగిన పరిమాణము గల రేఖాగణిత ఆకారములను గూర్చి అభ్యసించుచున్నాము. ఈ ఆకారములను "సరూపములు" అని అందురు.



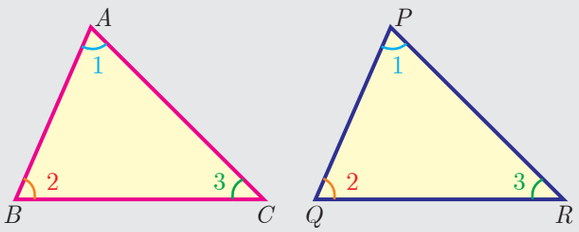
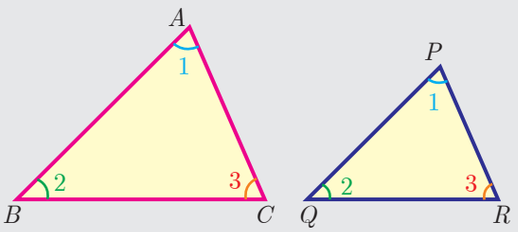
పటం. 4.3

సర్వసమాన మరియు సరూప త్రిభుజములు

సర్వ సమానత అనునది సరూపత నందలి ఒక నిర్దిష్ట అంశము అగును. రెండు సందర్భములలోను త్రిభుజము నందలి మూడు అనురూప కోణములు క్రమముగా మరొక త్రిభుజము నందలి మూడు కోణములకు సమానముగా నుండును. అయితే సర్వసమాన త్రిభుజములలో, అనురూప భుజముల పొడవులు కూడా సమానముగా నుండును. అదే సరూప త్రిభుజములలో అనురూప భుజముల పొడవులు ఒకే నిష్పత్తిలో ఉండును.

గమనిక

త్రిభుజము ABC మరియు PQR రెండు సరూపములు
$\Delta ABC \sim \Delta PQR$

సర్వసమాన త్రిభుజములు	సరూప త్రిభుజములు
	
పటం. 4.4	పటం. 4.5
$\Delta ABC \cong \Delta PQR$	$\Delta ABC \sim \Delta PQR$
$\angle A = \angle P, \angle B = \angle Q, \angle C = \angle R$.	$\angle A = \angle P, \angle B = \angle Q, \angle C = \angle R$
$AB = PQ, BC = QR, CA = RP$	$AB \neq PQ, BC \neq QR, CA \neq RP$
$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP} = 1$	but $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP} > 1$ *or* < 1
ఒకే ఆకారము మరియు ఒకే పరిమాణము.	ఒకే ఆకారము అయితే ఒకే పరిమాణము కాదు.

మెదడుకు మేత

1. చతురస్రము మరియు రాంబస్‌లు సరూపములా లేక సర్వసమానములా? చర్చించుము.
2. దీర్ఘచతురస్రము మరియు సమాంతర చతురస్రములు సరూపములా? చర్చించుము.

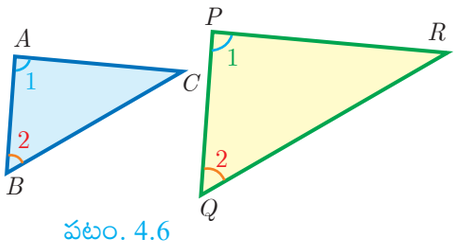
4.2.2 సరూపత త్రిభుజముల యొక్క లక్షణములు

ఈ క్రింది లక్షణములు రెండు త్రిభుజములు సరూపములని నిరూపించుటకు సరిపోవును.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_4.indd 170 13-02-2023 19:51:59

కో.కో. సరూపత లక్షణములు

ఒక త్రిభుజము నందలి రెండు కోణములు క్రమముగా మరొక త్రిభుజము నందలి రెండు కోణములకు సమానముగా నున్న యెడల ఆ రెండు త్రిభుజములు సరూపములు. ఎందుకనగా రెండు త్రిభుజము నందలి మూడవ కోణము సమానముగా నుండును. కనుక కో.కో. సరూపత లక్షణము అనునది కో.కో.కో. సరూపత లక్షణములకు సమానమగును.

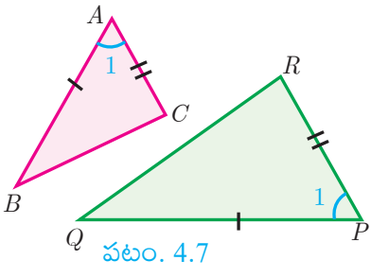


పటం. 4.6

ఇపుడు $\angle A = \angle P = 1$ మరియు $\angle B = \angle Q = 2$ అయితే $\Delta ABC \sim \Delta PQR$.

భు-కో-భు సరూపత లక్షణము

ఒక త్రిభుజము నందలి ఒక కోణము మరొక త్రిభుజము నందలి ఒక కోణమునకు సమానముగా ఉండవలయును మరియు ఆ కోణమును కలిగిన భుజముల నిష్పత్తి సమానమైన ఆ రెండు త్రిభుజములను సరూప త్రిభుజములందురు.



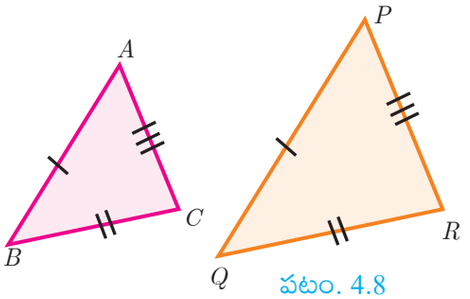
పటం. 4.7

కనుక $\angle A = \angle P = 1$ మరియు

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} \text{ అయితే } \Delta ABC \sim \Delta PQR$$

భు-భు-భు సరూపత లక్షణము

రెండు త్రిభుజములలో, ఒక త్రిభుజములోని భుజములు మరొక త్రిభుజములోని అనురూప భుజములకు అనుపాత(ఒకే నిష్పత్తి) లో ఉండిన వాటి అనురూప కోణములు సమానము. కనుక ఆ రెండు త్రిభుజములు సరూపములు.



పటం. 4.8

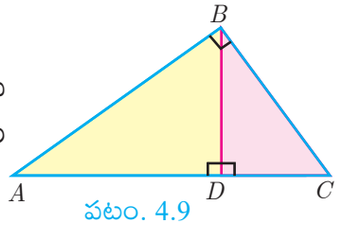
కనుక $\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR}$ అయితే $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

మెదడుకు మేత

ఏదేని రెండు లంబకోణ త్రిభుజములు సరూపములా? అయిన ఎందులకు?

సరూప త్రిభుజముల నుండి కొన్ని ఉపయోగకరమైన ఫలితములు

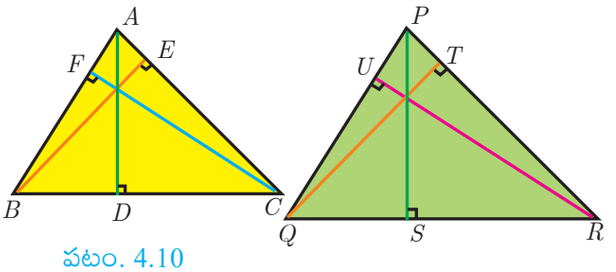
1. ఒక లంబకోణ త్రిభుజము నందలి లంబకోణ శీర్షము నుండి లంబ రేఖ గీచినప్పుడు ఆ త్రిభుజములు రెండు ఒక దానికి ఒకటి సరూప త్రిభుజములు మరియు నిజ త్రిభుజముతోను సరూపత కలిగియుండును.



పటం. 4.9

$\Delta ADB \sim \Delta BDC, \Delta ABC \sim \Delta ADB, \Delta ABC \sim \Delta BDC$

2. రెండుత్రిభుజములుసరూపములుగానున్నయెడల అనురూప భుజముల నిష్పత్తి దాని అనురూప ఉన్నతుల నిష్పత్తికి సమానముగానుండును..



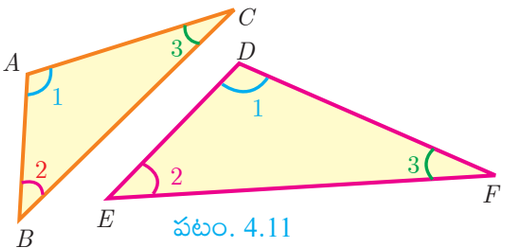
పటం. 4.10

అనగా $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ అయితే

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP} = \frac{AD}{PS} = \frac{BE}{QT} = \frac{CF}{RU}$$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_4.indd 171 13-02-2023 19:52:00

3. రెండు త్రిభుజములు సరూపములుగా నున్న యెడల అనురూప భుజముల నిష్పత్తి దాని అనురూప చుట్టుకొలత నిష్పత్తినకి సమానము.

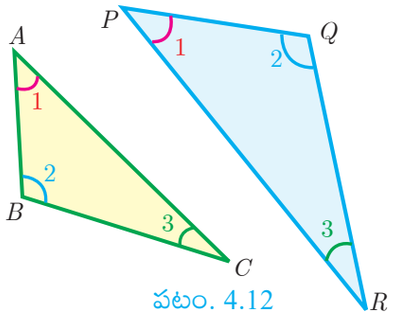


పటం. 4.11

అనగా $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ అయితే

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} = \frac{AB + BC + CA}{DE + EF + FD}$$

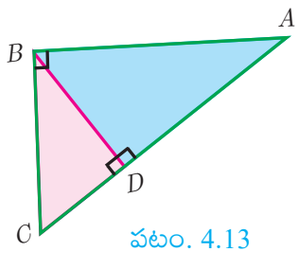
4. రెండు సరూప త్రిభుజముల వైశాల్యముల నిష్పత్తి వాటి అనురూప భుజముల వర్గముల నిష్పత్తికి సమానముగా నుండును.



పటం. 4.12

$$\frac{(\Delta ABC)}{(\Delta PQR)} = \frac{\text{వైశాల్యము}}{\text{వైశాల్యము}} = \frac{AB^2}{PQ^2} = \frac{BC^2}{QR^2} = \frac{AC^2}{PR^2}$$

5. రెండు త్రిభుజములు సామాన్య శీర్షము కలిగియుండి మరియు వాటి ఆధార భుజములు ఒకే సరళరేఖపై అమరియున్న యెడల వాటి వైశాల్యముల నిష్పత్తి వాటి ఆధార భుజముల పొడవుల నిష్పత్తికి సమానముగావుండును.



పటం. 4.13

ఇచ్చట, $\frac{\text{వైశాల్యము}\,(\Delta\, ABD)}{\text{వైశాల్యము}\,(\Delta\, BDC)} = \frac{AD}{DC}$.

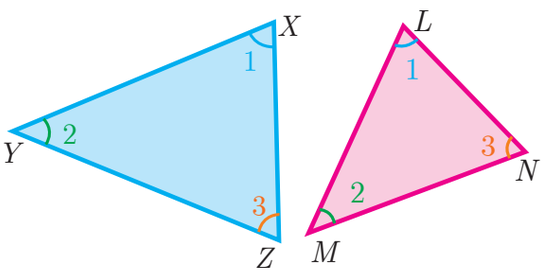
నిర్వచనము 1

రెండు త్రిభుజముల అనురూప భుజములు ఒకే నిష్పత్తిలో అమరియుండిన వాటిని సరూప త్రిభుజములందురు.

నిర్వచనము 2

రెండు త్రిభుజముల అనురూప కోణములు సమానమైన యెడల అవి సమ కోణీయ త్రిభుజములు (equiangular)

ఉదాహరణముగా రెండు త్రిభుజములు ΔXYZ మరియు ΔLMN లు సరూపములు ఎందుకనగా వాటి అనురూప కోణములు సమానము.



పటం. 4.14

సూచన

(i) ఒక జత సమ కోణీయ త్రిభుజములు సరూపములు.

(ii) రెండు త్రిభుజములు సరూపములైన వాటిని సమకోణీయ త్రిభుజములందురు.

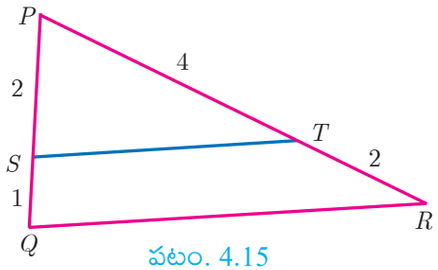
(i) $\angle X = \angle L, \angle Y = \angle M, \angle Z = \angle N$ (కోణముల ఆధారము) (ii) $\frac{XY}{LM} = \frac{YZ}{MN} = \frac{XZ}{LN}$ (భుజముల ఆధారము)

కనుక X, Y, Z అను శీర్షములకు L, M, N అను శీర్షములు అనురూపములు. కనుక $\Delta XYZ \sim \Delta LMN$ అని చెప్పవచ్చును.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_4.indd 172 13-02-2023 19:52:02

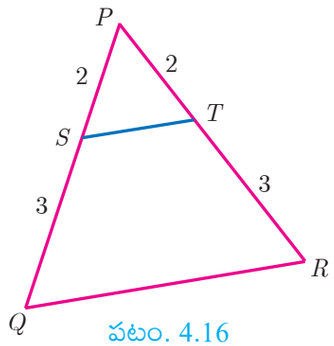
ఉదాహరణ 4.1 $\Delta PST \sim \Delta PQR$ అని చూపుము.

(i)



పటం. 4.15

(ii)



పటం. 4.16

సాధన

(i) ΔPST మరియు ΔPQR,

$$\frac{PS}{PQ}=\frac{2}{2+1}=\frac{2}{3},\ \frac{PT}{PR}=\frac{4}{4+2}=\frac{2}{3}$$

కనుక, $\frac{PS}{PQ}=\frac{PT}{PR}$ మరియు $\angle P$ అగును.

కనుక భు-కో-భు సరూపత లక్షణము

$\Delta PST \sim \Delta PQR$

(ii) ΔPST మరియు ΔPQR,

$$\frac{PS}{PQ}=\frac{2}{2+3}=\frac{2}{5},\ \frac{PT}{PR}=\frac{2}{2+3}=\frac{2}{5}$$

అయిన, $\frac{PS}{PQ}=\frac{PT}{PR}$ మరియు $\angle P$ ఉమ్మడి కోణము

కనుక భు-కో-భు అగును

$\Delta PST \sim \Delta PQR$

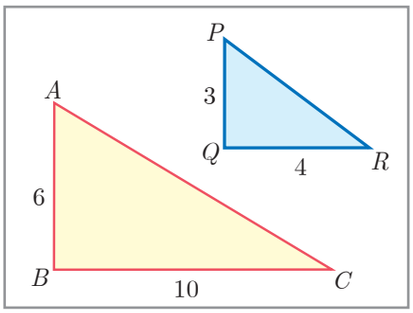
ఉదాహరణ 4.2 $\Delta ABC \sim \Delta PQR$? అగునా?

సాధన ΔABC మరియు ΔPQR, ల నుండి

$$\frac{PQ}{AB}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2};\ \frac{QR}{BC}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

$\frac{1}{2}\neq\frac{2}{5}$, కనుక, $\frac{PQ}{AB}\neq\frac{QR}{BC}$.

అనురూప భుజములు ఒకే నిష్పత్తిలో లేదు. కనుక ΔABC అనునది ΔPQR నకు సరూపము కాదు.



పటం. 4.17

సూచన

- ఇవ్వబడిన నాలుగు కొలతలలో ఏదేని ఒక దానిని మార్పిడి చేసిన మనము ఈ సరూప త్రిభుజములను నిర్మించగలము.

ఉదాహరణ 4.3 పటము 4.18లో చూపిన విధముగా $\angle P$ కోణము కనుగొనుము.

సాధన ΔBAC మరియు ΔPRQ, $\frac{AB}{RQ}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$;

$$\frac{BC}{QP}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2};\ \frac{CA}{PR}=\frac{3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$$

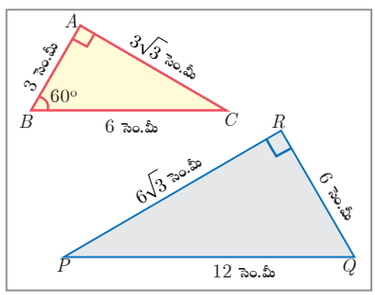
అయిన, $\frac{AB}{RQ}=\frac{BC}{QP}=\frac{CA}{PR}$

$\Delta BAC \sim \Delta QRP$ భు-భు-భు స్వరూప త్రిభుజము.

$\angle P=\angle C$ (త్రిభుజము నందలి అనురూప భాగములు సరూపములు)

$\angle P=\angle C=180^\circ-(\angle A+\angle B)=180^\circ-(90^\circ+60^\circ)$

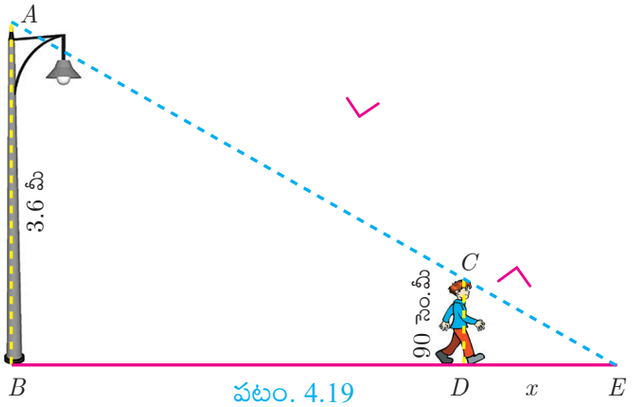
$\angle P=180^\circ-150^\circ=30^\circ$



పటం. 4.18

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_4.indd 173 13-02-2023 19:52:06

ఉదాహరణ 4.4 90 సెం.మీ ఎత్తు గల ఒక అబ్బాయి దీపస్తంభము యొక్క అడుగు భాగము నుండి 1.2 మీ/సె వేగముతో నడుచుచున్నాడు. దీపస్తంభము భూతలము నుండి 3.6 మీ ఎత్తులో నుండిన, 4 సెకండ్లు ప్రయాణించిన తరువాత అతని నీడ ఏర్పరచు పొడవును కనుగొనుము



పటం. 4.19

సాధన వేగము $= 1.2$ మీ/సె, ఇవ్వబడియున్నది

కాలము $= 4$ సెకనులు

దూరము $=$ వేగము $\times$ కాలము

$= 1.2 \times 4 = 4.8$ మీ

4 సెకండ్లు తరువాత నీడ యొక్క పొడవు x అనుకొనుము.

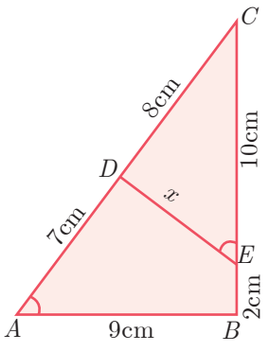
ఇచ్చట, $\Delta ABE \sim \Delta CDE$, $\frac{BE}{DE} = \frac{AB}{CD}$ నుండి $\frac{4.8+x}{x} = \frac{3.6}{0.9} = 4$ వచ్చును.

(90 సెం.మీ $= 0.9$ మీ అయిన)

$4.8 + x = 4x$ నుండి $3x = 4.8$ కనుక, $x = 1.6$ మీ

నీడ యొక్క పొడవు $DE = 1.6$ మీ అగును.

ఉదాహరణ 4.5 $\angle A = \angle CED$ అయిన $\Delta CAB \sim \Delta CED$ ని పటము 4.20 లో చూపినట్లు విధముగా నిరూపించుము. మరియు x విలువను కనుగొనుము.



పటం. 4.20

సాధన ΔCAB మరియు ΔCED, $\angle C$ మరియు ఉమ్మడి కోణము

$\angle A = \angle CED$ అగును.

కావున, $\Delta CAB \sim \Delta CED$ (కో-కో సరూపములు)

కనుక, $\frac{CA}{CE} = \frac{AB}{DE} = \frac{CB}{CD}$

$\frac{AB}{DE} = \frac{CB}{CD}$ నుండి $\frac{9}{x} = \frac{10+2}{8}$ కనుక, $x = \frac{8 \times 9}{12} = 6$ సెం.మీ

ఉదాహరణ 4.6 పటము 4.21 లో చూపిన విధముగా AB రేఖా ఖండమునకు లంబ సమద్విఖండన రేఖలు QA మరియు PB అయిన $AO = 10$ సెం.మీ, $BO = 6$ సెం.మీ మరియు $PB = 9$ సెం.మీ గీయబడిన AQ కనుగొనుము.

సాధన ΔAOQ మరియు ΔBOP, $\angle OAQ = \angle OBP = 90^\circ$

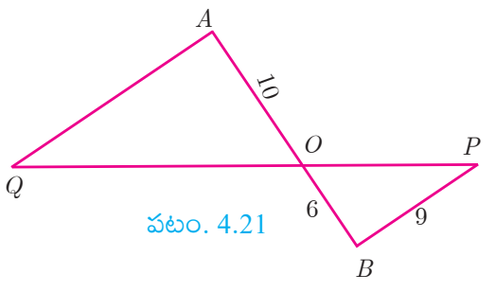
$\angle AOQ = \angle BOP$ (ఎదురెదురు లంబకోణములు)

కావున కో-కో సరూప లక్షణములు

$\Delta AOQ \sim \Delta BOP$

$\frac{AO}{BO} = \frac{OQ}{OP} = \frac{AQ}{BP}$

$\frac{10}{6} = \frac{AQ}{9}$ నుండి $AQ = \frac{10 \times 9}{6} = 15$ సెం.మీ

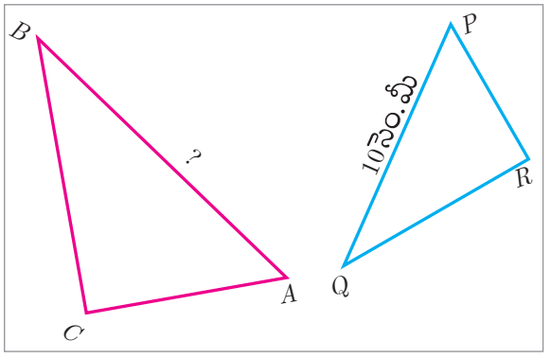


పటం. 4.21

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_4.indd 174 13-02-2023 19:52:10

ఉదాహరణ 4.7 ABC మరియు PQR సరూప త్రిభుజములైన చుట్టుకొలతలు 36 సెం.మీ మరియు 24 సెం.మీ $PQ = 10$ cm అయిన AB ని కనుగొనుము.

సాధన రెండు త్రిభుజములు సరూపములుగానున్న యెడల అనురూప భుజములు నిష్పత్తి దాని అనురూప చుట్టుకొలత నిష్పత్తికి సమానము.



పటం. 4.22

కావున $\Delta ABC \sim \Delta PQR$,

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR} = \frac{36}{24}$$

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{36}{24} \text{ నుండి } \frac{AB}{10} = \frac{36}{24}$$

$$AB = \frac{36 \times 10}{24} = 15 \text{ సెం.మీ}$$

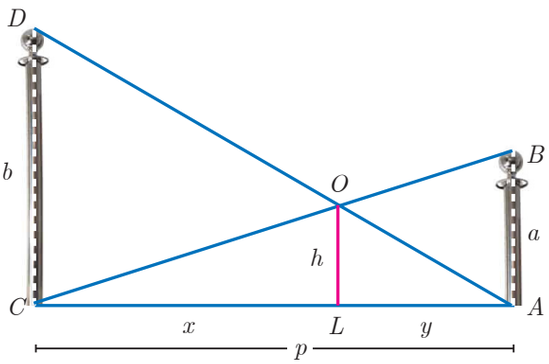
ఉదాహరణ 4.8 ΔABC అనునది ΔDEF నకు సరూపము అయిన $BC = 3$ సెం.మీ, $EF = 4$ సెం.మీ మరియు ΔABC వైశాల్యము 54 సెం.మీ^{2}. ΔDEF యొక్క వైశాల్యము కనుగొనుము.

సాధన రెండు సరూప త్రిభుజముల వైశాల్యముల నిష్పత్తి వాటి అనురూప భుజముల వర్గముల నిష్పత్తికి సమానముగా నుండును.

$$\frac{\text{వైశాల్యము } (\Delta ABC)}{\text{వైశాల్యము } (\Delta DEF)} = \frac{BC^2}{EF^2} \Rightarrow \frac{54}{\text{వైశాల్యము } (\Delta DEF)} = \frac{3^2}{4^2}$$

$$\text{వైశాల్యము } (\Delta DEF) = \frac{16 \times 54}{9} = 96 \text{ సెం.మీ}^2$$

ఉదాహరణ 4.9 'a' మీటరు మరియు 'b' మీటరు ఎత్తు కలిగిన రెండు స్తంభాలు ఒకదానికొకటి 'p' మీటర్ల దూరములో అమరియున్నది. ప్రతి స్తంభము యొక్క పైభాగమునుండి ఎదుటి స్తంభముల అడుగుభాగమును తాకునట్లు సరళరేఖలు గీచిన అవి రెండు ఖండించుకొను బిందువు భూభాగం నుండి $\frac{ab}{a+b}$ ఎత్తులో అమరియుండునని నిరూపించుము.



పటం. 4.23

సాధన AB మరియు CD అనునవి క్రమముగా 'a' మీ మరియు 'b' మీ ఎత్తు కలిగిన రెండు స్తంభములు మరియు రెండింటి మధ్య దూరము 'p' మీ అనగా $AC = p$ మీ. ఒకవేళ AD మరియు BC రేఖలు 'O' వద్ద ఖండించుకొనిన, అనగా, $OL = h$ మీ.

$CL = x$ మరియు $LA = y$.

అయిన, $x + y = p$

ΔABC మరియు ΔLOC,లో

$\angle CAB = \angle CLO$ [$90°$కి సమానము]

$\angle C = \angle C$ [ఉమ్మడి బిందువు C అగును]

$\Delta CAB \sim \Delta CLO$ [కో-కో సరూపములు]

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_4.indd 175 13-02-2023 19:52:13

$$\frac{CA}{CL}=\frac{AB}{LO}\Rightarrow\frac{p}{x}=\frac{a}{h}$$

కనుక, $x=\frac{ph}{a}$ ...(1)

ΔALO మరియు ΔACD, మనకు ఇక్కడ

$\angle ALO=\angle ACD$ [90° కి సమానము]

$\angle A=\angle A$ [A ఉమ్మడి బిందువు]

$\Delta ALO\sim\Delta ACD$ [కో-కో సరూపములు]

$$\frac{AL}{AC}=\frac{OL}{DC}\Rightarrow\frac{y}{p}=\frac{h}{b},\ y=\frac{ph}{b}\quad(2)$$

(1)+(2) $\Rightarrow$ $x+y=\frac{ph}{a}+\frac{ph}{b}$

$p=ph\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ (ఇక్కడ $x+y=p$)

$1=h\left(\frac{a+b}{ab}\right)$

కనుక, $h=\frac{ab}{a+b}$

ప్రగతి శోధన

1. అన్ని వృత్తములు _____ (సర్వసమానము/సరూపము)
2. అన్ని చతురస్రములు _____ (సరూపము/సర్వసామానము)
3. రెండు త్రిభుజములు సరూపములైన వాటి అనురూప కోణములు _____ మరియు అనురూప భుజములు _____.
4. (a) అన్ని సరూప త్రిభుజములు సర్వసమానము (సరియా/కాదా)

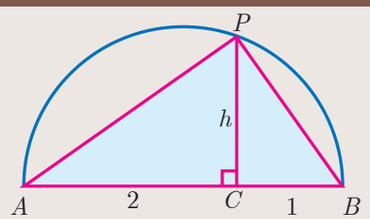
   (b) అన్ని సర్వసమాన త్రిభుజములు సరూపములు (సరి/కాదు)
5. సరూపము కాని ఒక జత చిత్రములకు రెండు వేర్వేరు ఉదాహరణలిమ్ము.

రెండు స్తంభముల పై భాగముల నుండి ఎదుటెదుటి స్తంభములు భూభాగమును తాకునట్లు గీయబడిన రేఖల ఖండన బిందువు ఎత్తు $\frac{ab}{a+b}$ గా నుండును.

కృత్యము 1

$\sqrt{2}$ పొడవునకు ఒక రేఖా ఖండమును నిర్మించుటకు ప్రయత్నించెదమా!

ఇందుకు మనము ఈ క్రింది సోపానాలను అనుసరించవలయును.



పటం. 4.24

సోపానం1: యూనిట్ పొడవుగల ఒక రేఖా ఖండమును తీసుకోనుము. దానికి AB పేరు పెట్టుము.

సోపానం 2: AB పైన C అను బిందువును $AC=2$, $CB=1$ గా ఉండునట్లు తీసుకొనుము.

సోపానం 3: AB ను వ్యాసముగా కలిగిన ఒక అర్ధ వృత్తమును పటములో చూపిన విధముగా గీయుము.

సోపానం 4: అర్ధ వృత్తము పై 'P' అను బిందువును తీసుకొనుము. అది CP గా ఉండవలెను.

సోపానం 5: P నుండి A మరియు B లకు రేఖలు కలుపుము. మనము ఇప్పుడు ACP మరియు BCP అను రెండు లంబకోణ త్రిభుజమును పొందెదము.

సోపానం 6: ACP మరియు BCP త్రిభుజములు సరూపములా అని పరీక్షించుము.

సోపానం 7: $CP=h$ అనునది సామాన్య లంబపుటెత్తు సరూపతనుపయోగించి h ను కనుగొనుము.

సోపానం 8: h ను కనుగొనుట ద్వారా నీవేమి పొందగలవు.

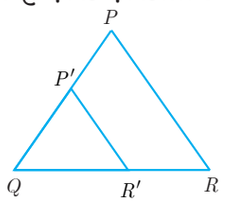
ఇదే పద్ధతినుపయోగించి $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$ నకు రేఖా ఖండములను నిర్మించుము.

4.2.3 సరూప త్రిభుజములను నిర్మించుట

ఇదివరకు మనము సరూప త్రిభుజముల సిద్ధాంత పరమైన విషయములు మరియు వాటి ధర్మములు గూర్చి చర్చించితిమి.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_4.indd 176 13-02-2023 19:52:14

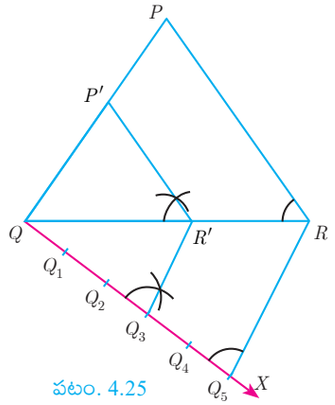
ఇపుడు మనము ఇవ్వబడిన త్రిభుజ మునకు మరొక సరూప త్రిభుజమును నిర్మించుట గూర్చి చర్చించుదుము. ఇవ్వబడిన త్రిభుజము యొక్క అనురూప భుజముల నిష్పత్తి నిర్మించు సరూప త్రిభుజ భుజముల నిష్పత్తికి సమానంగానుండవలెను.



చిత్తు పటము

ఉదాహరణ 4.10 ఇవ్వబడిన ΔPQR త్రిభుజమునకు $\frac{3}{5}$ నిష్పత్తిలో దాని భుజములు అమరినట్లు మరొక సరూప త్రిభుజమును నిర్మించుము (కొలత $\frac{3}{5} < 1$)

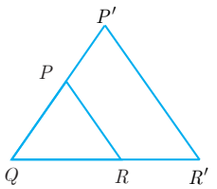
సాధన ΔPQR అనునది ఇవ్వబడిన త్రిభుజము మనము నిర్మించవలసిన త్రిభుజపు కొలతలు ΔPQR యొక్క అనురూప భుజముల $\frac{3}{5}$ కొలతకు సమానముగా నుండవలెను.



పటం. 4.25

నిర్మాణక్రమము

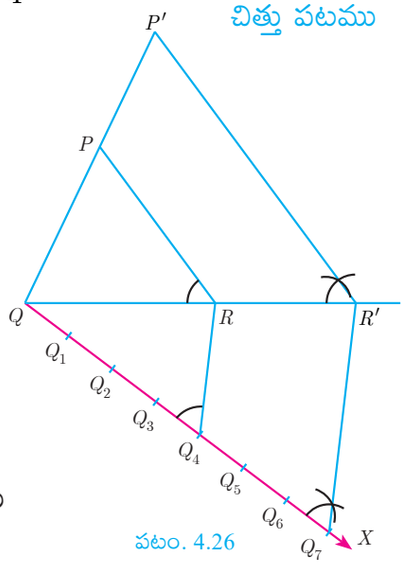
1. ఏదేని కొలతతో ΔPQR ను నిర్మించుము.
2. QX అను రేఖ QR తో లఘు కోణము ఏర్పరచున్నట్లు P శీర్షము వ్యతిరేఖ భుజములో రేఖను గీయుము.
3. 5 బిందువులను గుర్తించుము ($\frac{3}{5}$ నందు 3 మరియు 5 లలో పెద్దది) Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 మరియు Q_5 లు QX కనుక $QQ_1 = Q_1Q_2 = Q_2Q_3 = Q_3Q_4 = Q_4Q_5$ అగును.
4. Q_5R ను కలుపుము మరియు QR ను R' వద్ద ఖండించునట్లు 3 నకు సమాంతరముగా $\frac{3}{5}$ గుండా ఒక రేఖను గీయుము. (మూడవ బిందువు, 3 అనునది 3/5 నందు 3 మరియు 5 లలో చిన్న విలువ)
5. R' గుండా RP రేఖకు సమాంతరముగా QP ను P' వద్ద ఖండించునట్లు ఒక రేఖను గీయుము. తరువాత త్రిభుజము అనునది $\Delta P'QR'$ యొక్క ΔPQR భుజములకు అనురూప భుజములు కలిగి కావలసిన త్రిభుజమగును.



చిత్తు పటము

ఉదాహరణ 4.11 $\frac{7}{4}$ భుజములుగా గల PQR త్రిభుజమునకు సమాన అనురూప భుజములతో కూడిన మరొక అనురూప త్రిభుజమును నిర్మించుము.($\frac{7}{4} > 1$ కొలత కారణాంకము)

సాధన ΔPQR అనునది ఇవ్వబడిన త్రిభుజము మనము నిర్మించవలసిన త్రిభుజము $\frac{7}{4}$ నిష్పత్తిలో కూడిన అనురూప భుజములు కలిగిన త్రిభుజము నిర్మించెదము



పటం. 4.26

నిర్మాణక్రమము

1. ఏదేని కొలతతో ΔPQR ను నిర్మించుము.
2. P శీర్షమునకు ఎదురుగా QR భుజముపై అల్ప కోణము ఏర్పరచునట్లు QX రేఖను గీయుము.
3. 7 బిందువులను గుర్తించుము. ($\frac{7}{4}$ నందు 7 మరియు 4 లలో పెద్దది) బిందువు.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_4.indd 177 13-02-2023 19:52:16

QX పైన $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$ మరియు Q_7 7 బిందువులను అను విధముగా గుర్తించుము.
$QQ_1 = Q_1Q_2 = Q_2Q_3 = Q_3Q_4 = Q_4Q_5 = Q_5Q_6 = Q_6Q_7$

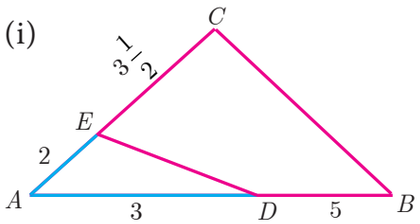
4. Q_4 ను (4 వ బిందువు, $\frac{7}{4}$ నందు 4 అనునది 4 మరియు 7 లలో చిన్నది) బిందువు R ను కలుపుము. Q_4R, కు సమానముగా Q_7 నుండి QR ను R' లో ఖండించును.

5. R' గుండా RP నకు సమాంతరముగా P' వద్ద ఖండించినట్లు QP రేఖను పొడిగించుము. త్రిభుజము ΔPQR నకు అనురూప భుజములతో ఏడింట నాలుగు భాగములు భుజము కొలతలగా గల $\Delta P'QR'$ లభించినది.

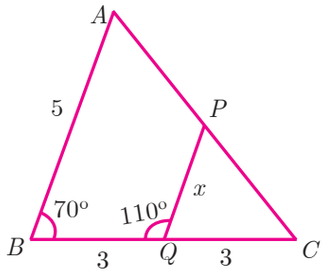
అభ్యాసము 4.1

1. ఈ క్రింది త్రిభుజములో సరూప త్రిభుజములు గలవా అని పరిశీలించుము. మరియు x విలువను కనుగొనుము.

(i)



(ii)

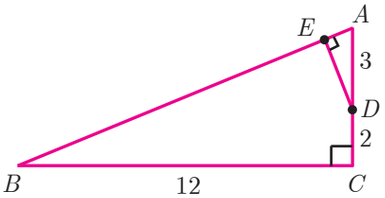


2. ఒక అమ్మాయి దీపస్తంభము పైభాగములో ఏర్పడిన పరావర్తనము దీపస్తంభపు అడుగు భాగము నుండి 6.6 మీటర్లు దూరంలో గల దర్పణము నందు చూచెను. 1.25 మీ పొడవు గల అమ్మాయి దర్పణము నుండి 2.5 మీ దూరములో ఉన్నది. అమ్మాయి దర్పణము మరియు దీపస్తంభము అన్ని ఒకే రేఖపై ఉండి దర్పణము, ఆకాశము మరియు అమ్మాయిని చూచినట్లు నేలపై అమర్చబడియున్నదని అనుకొని. దీపస్తంభము ఎత్తును కనుగొనుము.

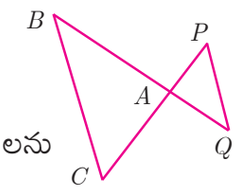
3. 6 సెం.మీ పొడవు గల ఒక నిట్టనిలువు కడ్డీ ఏర్పరచు నీడ పొడవు 400 సెం.మీ అదే సమయములో టవర్ ఏర్పరచు నీడ పొడవు 28 మీ.లు అగును. సరూపపతలనుపయోగించి టవర్ ఎత్తును కనుగొనుము.

4. QPR మరియు QSR అను రెండు త్రిభుజములు QR భూ భుజముగా కలిగి క్రమముగా P మరియు S ల వద్ద లంబకోణములు కలిగియుండును. PR మరియు SQలు T వద్ద ఖండించుకొనిన $PT \times TR = ST \times TQ$ నిరూపించుము.

5. ప్రక్క పటములో, ΔABC అనునది C వద్ద లంబకోణము కలిగియుండును. మరియు $DE \perp AB$ అయిన $\Delta ABC \sim \Delta ADE$ నిరూపించుము మరియు AE మరియు DE ల పొడవులను కనుగొనుము.

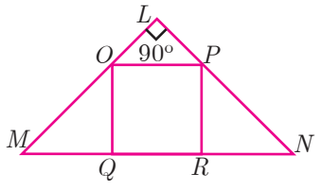


6. ప్రక్క పటములో $\Delta ACB \sim \Delta APQ$, $BC = 8$ సెం.మీ, $PQ = 4$ సెం.మీ, $BA = 6.5$ సెం.మీ మరియు $AP = 2.8$ సెం.మీ అయిన CA మరియు AQ లను కనుగొనుము.

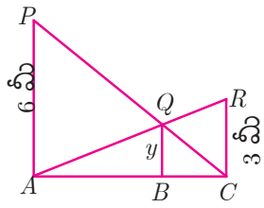


10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_4.indd 178 13-02-2023 19:52:18

7. పటములో నున్న $OPRQ$ ఒక చతురస్రము మరియు $\angle MLN = 90°$ అయిన (i) $\Delta LOP \sim \Delta QMO$ (ii) $\Delta LOP \sim \Delta RPN$ (iii) $\Delta QMO \sim \Delta RPN$ (iv) $QR^2 = MQ \times RN$ నిరూపించుము.



8. $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ వైశాల్యము 9 సెం.మీ^{2} మరియు ΔDEF వైశాల్యము 16 సెం.మీ^{2} మరియు $BC = 2.1$ సెం.మీ అయిన EF పొడవును కనుగొనుము.



9. 6 మీ మరియు 3 మీ పొడవు గల రెండు స్తంభములు నిట్టనిలువుగా AC దూరములో నాటబడియున్నవి. అయిన y విలువను కనుగొనుము.

10. ఇవ్వబడిన PQR త్రిభుజమునకు దాని భుజములు $\frac{2}{3}$ సరూపత భుజములతో కూడిన ఒక సరూప త్రిభుజమును నిర్మించుము.(నిర్మాణ కొలత $\frac{2}{3} < 1$)

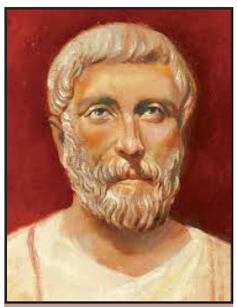
11. ఇవ్వబడిన LMN త్రిభుజమునకు ఒక సరూప త్రిభుజమును నిర్మించుము. దాని భుజముల పొడవులు $\frac{4}{5}$ గా గల సరూప భుజములతో నుండవలయును. (కొలత కారణాంకము $\frac{4}{5} < 1$)

12. ఇవ్వబడిన ABC త్రిభుజమునకు $\frac{6}{5}$ కొలతతో అనురూప భుజములు కలిగిన మరొక సరూప త్రిభుజమును నిర్మించుము.(కొలత కారణాంకము $\frac{6}{5} > 1$)

13. ఇవ్వబడిన PQR త్రిభుజమునకు $\frac{7}{3}$ కొలతతో అనురూప భుజములు కలిగిన మరొక సరూప త్రిభుజమును నిర్మించుము.(కొలత కారణాంకము $\frac{7}{3} > 1$)

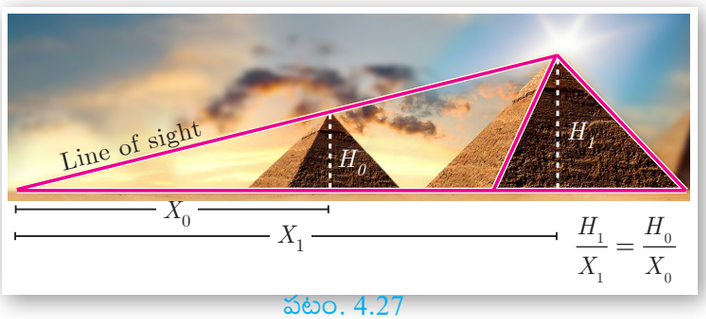
4.3 థేల్స్ సిద్ధాంతము మరియు కోణ సమద్విఖండన సిద్ధాంతము

4.3.1 పరిచయము


Thales
(640 - 540 BC (BCE))

థేల్స్ (640 - 540 BC (BCE)) క్రీ.పూ 7వ శతాబ్ద కాలములో జీవించిన గొప్ప గ్రీకు గణిత శాస్త్రవేత్త మరియు తత్వవేత్త అగుదురు. అతడు అపారమైన జ్ఞానం కలిగియుండుటచే గ్రీకు దేశము నందలి 7 మంది సలహా దారులలో (sages) ప్రథముడుగా నుండెను. కనుగొనిన ఏదేని క్రొత్త భావనను విజ్ఞానపరమైన పరిశోధనతో పరీక్షించి ఆమోదించిన పిదప తెలియజేయుటలో థేల్స్ మొదటివాడు. ఈ దిశగా అతను గణితము మరియు ఖగోళశాస్త్రము నందు అనేక పరిశోధనలు చేసి పెక్కు భావనలను కనుగొనెను.

ఈరోజు మనము గణితములో అభ్యసించు "ప్రాథమిక అనుపాద సిద్ధాంతము" నిరూపన ఇచ్చిన ఘనత థేల్స్‌కు చెందును. దీనిని 'థేల్స్ సిద్ధాంతమ'ని కూడా అందురు. థేల్స్ సిద్ధాంతమును కనుగొనుటకు ఒక ఆసక్తికరమైన సంఘటన ప్రేరేపితంగా ఉండెను. థేల్స్ ఈ జిప్టనకు వెళ్ళినప్పుడు, అతనికి ఈజిప్ట ప్రజలు వారి పూర్వికులు నిర్మించిన అతి గొప్ప పిరమిడ్‌లలో ఒక దాని ఎత్తును కనుగొనమని సవాల్ విసిరిరి.థేల్స్ ఆ సవాళును అంగీకరించి పిరమిడ్ ఎత్తును కనుగొనుటకు పూనుకొనెను.రేఖాగణిత మరొక వినియోగమైన



పటం. 4.27

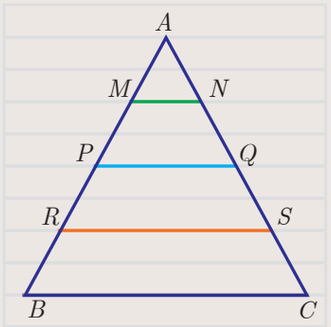
10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_4.indd 179 13-02-2023 19:52:19

సరూప త్రిభుజములను పయోగించి పిరమిడ్ ఎత్తు కనుగొనుటలో విజయమును పొందెను. పటములో చూపిన విధముగా X_0, X_1 మరియు H_0 లు తెలిసిన, మనము పిరమిడ్ యొక్క ఎత్తు H_1ను కనుగొనవచ్చును

ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతం లేక థేల్స్ సిద్ధాంతమును అర్థము చేసుకొనుటకు మనము ఈ క్రింది కృత్యము చేయవలయును.

కృత్యము 2

త్రిభుజము ABC యొక్క భుజము అనునది గీతల కాగితములో ఒక గీతపై అమరునట్లు తీసుకొనిన అనేక సమాంతర రేఖలు త్రిభుజము ABC ని ఖండించును.



పటం. 4.28

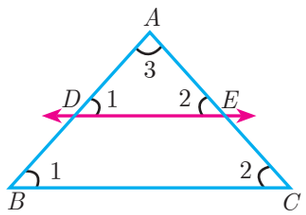
ఈ సమాంతర రేఖలు ఏదేని ఒక సమాంతర రేఖ తీసుకొనుము. మరియు ఈ రేఖ భుజములు AB మరియు AC ను క్రమముగా P మరియు Q బిందువులు ఖండించిన $\frac{AP}{PB}$ మరియు $\frac{AQ}{QC}$ యొక్క నిష్పత్తులు గుర్తించగలమా?

AP, PB, AQ మరియు QC లు స్కేలు సహాయముతో కొలిచినట్లైతే నిష్పత్తులు సమానముగా నున్నదా సరి చూడుము. వేర్వేరు సమాంతర రేఖలు $MNRS$ నకు, $\frac{AM}{MB}, \frac{AN}{NC}$ మరియు $\frac{AR}{RB}, \frac{AS}{SC}$ అయిన నిష్పత్తులు కనుగొనుము. ఈ నిష్పత్తులు సమానముగా ఉన్నవా? ఈ ఫలితములు నుండి రేఖాగణిత సిద్ధాంతం ఎంతో ప్రాముఖ్యతను కలిగినదో క్రింది వాటిని చర్చించగలము.

సిద్ధాంతము 1: ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతము లేక థేల్స్ సిద్ధాంతము (BPT)

నిర్వచనము

ఒక త్రిభుజములోని ఏదేని ఒక భుజమునకు సమాంతరముగా మిగిలిన రెండు భుజములను ఖండించినట్లు ఒక రేఖను గీచిన, అది ఆ మిగిలిన రెండు భుజములను ఒకే నిష్పత్తిలో విభజించును.



పటం. 4.29

నిరూపణ

దత్తాంశము: త్రిభుజము ΔABC లో AB పై బిందువు D, AC పై బిందువు E అగును.

సారాంశము: $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

నిర్మాణము : $DE \parallel BC$ రేఖను గీయుము.

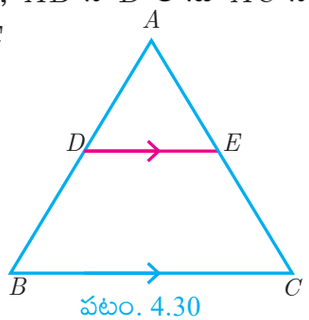
వ.సం.	వివరణ	కారణము
1.	$\angle ABC = \angle ADE = \angle 1$	$DE \parallel BC$ కావున అనురూప కోణములు సమానము.
2.	$\angle ACB = \angle AED = \angle 2$	$DE \parallel BC$ ఎందుకనగా అనురూప కోణములు సమానము.
3.	$\angle DAE = \angle BAC = \angle 3$ $\Delta ABC \sim \Delta ADE$ $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ $\frac{AD+DB}{AD} = \frac{AE+EC}{AE}$	రెండు త్రిభుజములు ఒక సామాన్య కోణమును కలిగియున్నవి. కో-కో-కో ప్రతిపాదన అనుసరించి అనురూప కోణముల నిష్పత్తులు సమానము AB మరియు AC బిందువులను ఉపయోగించి D మరియు E. ని విభజించును.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_4.indd 180 13-02-2023 19:52:21

4	$1+\frac{DB}{AD}=1+\frac{EC}{AE}$ $\frac{DB}{AD}=\frac{EC}{AE}$ $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$	సూక్ష్మీకరించిన ఇరుప్రక్కల 1 ని తొలగించిన. విలోమము చేయగా
	కావున సిద్ధాంతము నిరూపించబడినది.	

ఉప సిద్ధాంతము

ΔABC లో BC కి సమాంతరముగా రేఖా ఖండము DE ని కలిగియున్నది, AB ని D లోను AC ని E లోను ఖండించిన. ΔABC లో BC కి సమాంతరముగా రేఖా ఖండము DE ని కలిగియున్నది, AB ని D లోను AC ని E లోను ఖండించిన.



పటం. 4.30

(i) $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$ (ii) $\frac{AB}{DB}=\frac{AC}{EC}$.

నిరూపణ

ΔABC, లో $DE \parallel BC$,

కావున, $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ (ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతము)

(i) విలోమముగా చేసినట్లైన మనము

పొందునది $\frac{DB}{AD}=\frac{EC}{AE}$ అగును.

ఇరుప్రక్కల 1 ని కూడగా $\frac{DB}{AD}+1=\frac{EC}{AE}+1$

$\frac{DB+AD}{AD}=\frac{EC+AE}{AE}$ కావున, $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$

(ii) ఇరుప్రక్కల 1ని కూడగా

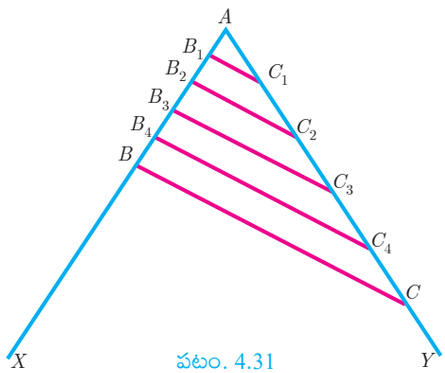
$\frac{AD}{DB}+1=\frac{AE}{EC}+1$

కావున, $\frac{AB}{DB}=\frac{AC}{EC}$

ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతము సరియేనా? దీనిని చర్చించుము. ఈ క్రింది కృత్యముల నుండి పరిశీలించుదుము.

వివరణ

పటము 4.31 లో చూపినట్లుగా మీ నోటు పుస్తకంలో కోణము XAY ని గీచి AX అను కిరణము $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B = 1$ సెం.మీ (అనుకొనుము) ఉండునట్లు బిందువులు B_1, B_2, B_3, B_4 మరియు B లను గుర్తించుము



పటం. 4.31

ఇదే విధముగా కిరణము AY పై

$AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = C_4C = 2$ సెం.మీ

(అనుకొనుము) ఉండునట్లు బిందువులు C_1, C_2, C_3, C_4 మరియు C లను గుర్తించుము.

$\frac{AB_1}{B_1B}=\frac{AC_1}{C_1C}=\frac{1}{4}$ మరియు $B_1C_1 \parallel BC$ బిందువులను కలుపుము.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_4.indd 181 13-02-2023 19:52:23

దీని నుండి B_2C_2, B_3C_3 మరియు B_4C_4 అదేవిధంగా

$\frac{AB_2}{B_2B} = \frac{AC_2}{C_2C} = \frac{2}{3}$ మరియు $B_2C_2 \parallel BC$

$\frac{AB_3}{B_3B} = \frac{AC_3}{C_3C} = \frac{3}{2}$ మరియు $B_3C_3 \parallel BC$

$\frac{AB_4}{B_4B} = \frac{AC_4}{C_4C} = \frac{4}{1}$ మరియు $B_4C_4 \parallel BC$ కలుపుట వలన.

అందువలన ఒక రేఖాఖండం ఒక త్రిభుజము యొక్క రెండు భుజాలను సమాన నిష్పత్తిలో విభజించుట వలన అదే రేఖాఖండము మూడవ భుజానికి సమాంతరంగా ఉండునని తెలుసుకొనగలము. ఈ విషయమును నిరూపించుటకు సిద్ధాంతములు మూలముగా థేల్స్ సిద్ధాంత విపర్యయమును పొందవచ్చును.

సిద్ధాంతము 2: ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంత విపర్యయము లేక థేల్స్ సిద్ధాంత విపర్యము.

నిర్వచనము

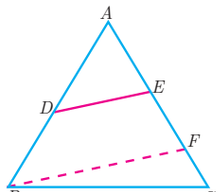
ఒక త్రిభుజములోని రెండు భుజాలను ఒకే నిష్పత్తిలో విభజించు సరళరేఖ మూడవ భుజానికి సమాంతరంగా ఉండును.

నిరూపణ

దత్తాంశము : ΔABC లో, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

సారాంశము : $DE \parallel BC$

నిర్మాణము : DE, BC కు సమాంతరము కానిచో, $DF \parallel BC$ గీయుము.



పటం. 4.32

వ.సం.	వివరణ	కారణము
1.	$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ ...(1)	దత్తాంశము
2.	ΔABC, $DF \parallel BC$	నిర్మాణము
3.	$\frac{AD}{DB} = \frac{AF}{FC}$ ... (2)	థేల్స్ సిద్ధాంతము
4.	$\frac{AE}{EC} = \frac{AF}{FC}$ $\frac{AE}{EC} + 1 = \frac{AF}{FC} + 1$ $\frac{AE + EC}{EC} = \frac{AF + FC}{FC}$ $\frac{AC}{EC} = \frac{AC}{FC}$ EC = FC కావున, $E = F$ కనుక $DE \parallel BC$	థేల్స్ సిద్ధాంతము 1 ని ఇరుప్రక్కల కూడిన AC ని ఇరుప్రక్కల కొట్టివేయగా F అనునది A మరియు E కు మధ్యలో కలదు. సిద్ధాంతము నిరూపించబడినది

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_4.indd 182 13-02-2023 19:52:24

సిద్ధాంతము 3: కోణ సమద్విఖండన సిద్ధాంతము

నిర్వచనము

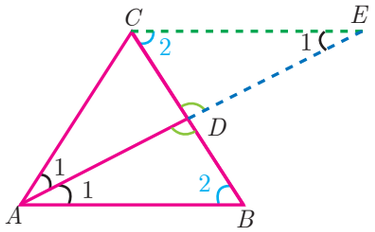
ఒక త్రిభుజములోని కోణమును అంతరముగా సమద్విఖండన చేయు రేఖ ఆ కోణము యొక్క ఎదుటి భుజాన్ని అంతరముగా మిగిలిన రెండు భుజాల నిష్పత్తిలో విభజించును.

నిరూపణ

దత్తాంశము : ΔABC లో AD అనునది కోణసమద్విఖండన రేఖ.

సారాంశము : $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$

నిర్మాణము : AB కి సమాంతరముగా C నుండి రేఖా ఖండము గీయుము. AD ని పొడిగించగా C గుండా పోవు రేఖాఖండమును E దగ్గర ఖండించును.



పటం. 4.33

వ.సం.	వివరణ	కారణము
1.	$\angle AEC = \angle BAE = \angle 1$ $\angle ABD = \angle ECD = \angle 2$	ఒక తిర్య రేఖ రెండు సమాంతర రేఖలు ఖండించిన ఏకాంత కోణములు సమానము.
2.	ΔACE సమద్విబాహు త్రిభుజం, AC = CE (1)	ΔACE లో, $\angle CAE = \angle CEA$
3.	$\Delta ABD \sim \Delta ECD$ $\frac{AB}{CE} = \frac{BD}{CD}$	కో – కో ప్రతిపాదన అనుసరించి
4.	$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$	(1) నుండి $AC = CE$. సిద్ధాంతము నిరూపించబడినది.

కృత్యము 3

సోపానం 1: పటము 4.34(a) లో చూపినట్లు ఒక చార్ట్ పేపరు త్రిభుజాకారములో కత్తిరించుకొనుము.

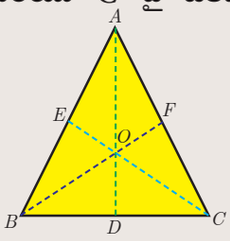
సోపానం 2: బిందువులు C మరియు B అనునవి ఒక దానిపై ఒకటి అమరియుండునట్లు సమాంతర ఖండము AD కి దగ్గర మడుపుము.

సోపానం 3: ఇదే విధముగా CE ను మడిచినపుడు, బిందువులు B మరియు A ను ఒక దానిపై ఒకటి అమరియుండును.

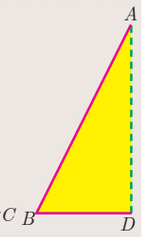
సోపానం 4: ఇదే విధముగా BF ను మడిచినపుడు బిందువులు A మరియు C పై ఒకదానికొకటి అమరియుండును.

స్కేలు సహాయముతో AB, AC, BD, DC విలువలను కనుగొనుము మరియు $\frac{AB}{AC}, \frac{BD}{DC}$ సమానమా అని సరి చూడుము.? ఈ మూడు సిద్ధాంతముల నుండి ఒక త్రిభుజములోని అంతరముగా సమద్విఖండన చేయు రేఖ, ఆ కోణము యొక్క ఎదుటి భుజాన్ని అంతరముగా, మిగిలిన రెండు భుజాల నిష్పత్తిలో విభజించును.

ఈ కృత్యం ద్వారా నీవు ఏమి నేర్చుకొంటివి.



పటం. 4.34(a)



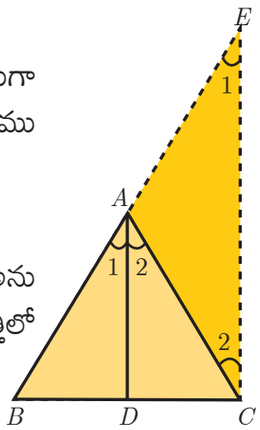
పటం. 4.34(b)

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_4.indd 183 13-02-2023 19:52:25

సిద్ధాంతము 4: కోణ సమద్విఖండన సిద్ధాంత విపర్యయము

నిర్వచనము

ఒక త్రిభుజ శీర్షము గుండా అ పోవు రేఖ, ఎదుటి భుజమును అంతరముగా (బాహ్యంగా) మిగిలిన రెండు భుజముల నిష్పత్తిలో విభజించిన, ఆ రేఖ శీర్ష కోణము అంతరంగా (బాహ్యంగా) సమద్విఖండన చేయును.



పటం. 4.35

నిరూపణ

దత్తాంశము : ABC త్రిభుజము AD అనునది భుజమును BC ని D అను బిందువు కోణము $\angle A$ ను అంతర భుజములు నిష్పత్తిలో విభజించును.

కావున $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$ ... (1)

సారాంశము : $\angle A$ ను AD సమద్వి ఖండన చేయను. i.e. $\angle 1 = \angle 2$

నిర్మాణము : $CE \parallel DA$ గీచిన BA ను పొడిగించిన అది E వద్ద తాకును.

వ.సం.	వివరణ	కారణము
1.	$\angle BAD = \angle 1$ మరియు $\angle DAC = \angle 2$ తీసుకొనిన	భావన
2.	$\angle BAD = \angle AEC = \angle 1$	తిర్యగ్రేఖ $DA \parallel CE$ మరియు AC , అనురూప కోణములు సమానము.
3.	$\angle DAC = \angle ACE = \angle 2$	తిర్యగ్రేఖ $DA \parallel CE$ మరియు AC ఏకాంత కోణములు సమానము.
4.	$\frac{BA}{AE} = \frac{BD}{DC}$ ... (2)	ΔBCE ని థేల్స్ సిద్ధాంతము.
5.	$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$	(1) నుండి.
6.	$\frac{AB}{AC} = \frac{BA}{AE}$	(1) మరియు (2) నుండి
7.	AC = AE ... (3)	AB ని కొట్టివేయగా
8.	$\angle 1 = \angle 2$	(3) నుండి ΔACE సమద్విబాహు త్రిభుజము
9.	$\angle A$ సమద్విఖండన రేఖ AD	$\angle 1 = \angle BAD = \angle 2 = \angle DAC$.కావున నిరూపించబడినది.

ఉదాహరణ 4.12 ΔABC లో, $DE \parallel BC$, $AD = x$, $DB = x - 2$, $AE = x + 2$ మరియు $EC = x - 1$ అయిన AB మరియు AC భుజముల పొడవులను కనుగొనుము.

సాధన ΔABC లో $DE \parallel BC$ కావున

థేల్స్ సిద్ధాంతము నుండి, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_4.indd 184 13-02-2023 19:52:28

$\frac{x}{x-2} = \frac{x+2}{x-1}$ నుండి $x(x-1) = (x-2)(x+2)$

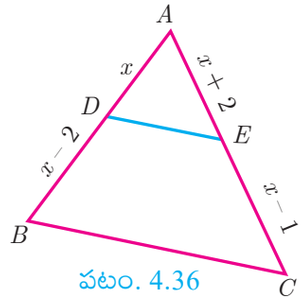
కావున, $x^2 - x = x^2 - 4$ కనుక, $x = 4$

$x = 4$ అయిన $AD = 4$, $DB = x - 2 = 2$,

$AE = x + 2 = 6$, $EC = x - 1 = 3$ అగును.

$AB = AD + DB = 4 + 2 = 6$, $AC = AE + EC = 6 + 3 = 9$.

కావున, $AB = 6$, $AC = 9$.



పటం. 4.36

ఉదాహరణ 4.13 ΔABC లో AB మరియు AC భుజములపై D మరియు E బిందువులుండిన AB=5.6 సెం.మీ, AD=1.4 సెం.మీ, AC=7.2 సెం.మీ మరియు AE = 1.8 సెం.మీ, అయిన $DE \parallel BC$ అని చూపుము.

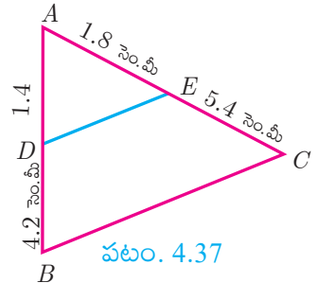
సాధన $AB = 5.6$ సెం.మీ, $AC = 7.2$ సెం.మీ, మరియు $AE = 1.8$ సెం.మీ

$BD = AB - AD = 5.6–1.4 = 4.2$ సెం.మీ

మరియు $EC = AC - AE = 7.2–1.8 = 5.4$ సెం.మీ

$\frac{AD}{DB} = \frac{1.4}{4.2} = \frac{1}{3}$ మరియు $\frac{AE}{EC} = \frac{1.8}{5.4} = \frac{1}{3}$

$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$



పటం. 4.37

కావున, ప్రాథమికఅనుపాత సిద్ధాంతము ప్రకారము DE, BC కి సమాంతరమగును. కావున నిరూపించబడినది.

ఉదాహరణ 4.14 పటము 4.38 నందు చూపినట్లు $DE \parallel AC$ మరియు $DC \parallel AP$ అయిన $\frac{BE}{EC} = \frac{BC}{CP}$ నిరూపించము.

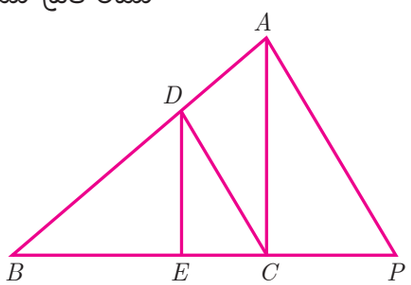
సాధన ΔBPA లో, $DC \parallel AP$ కలిగిన ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతము ప్రకారము

$$\frac{BC}{CP} = \frac{BD}{DA} \quad \ldots(1)$$

ΔBCA లో, $DE \parallel AC$ కలిగిన ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతము ప్రకారము

$$\frac{BE}{EC} = \frac{BD}{DA} \quad \ldots(2)$$

(1) మరియు (2) నుండి $\frac{BE}{EC} = \frac{BC}{CP}$ అని నిరూపించబడినది.

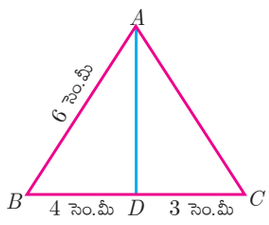


పటం. 4.38

ఉదాహరణ 4.15 పటము 4.39 లో $\angle A$ యొక్క కోణసమద్విఖండన రేఖ AD అయిన $BD = 4$ సెం.మీ, $DC = 3$ సెం.మీ మరియు $AB = 6$ సెం.మీ అయిన AC కనుగొనుము.

సాధన ΔABC లో $\angle A$ యొక్క కోణసమద్విఖండన రేఖ AD అగును.

కావున కోణ సమద్విఖండన సిద్ధాంతము ప్రకారము



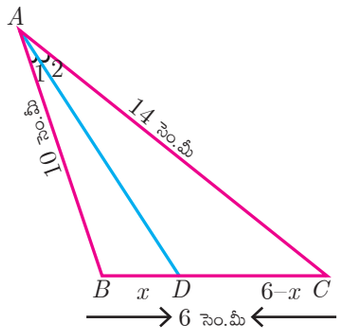
పటం. 4.39

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_4.indd 185 13-02-2023 19:52:31

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

$\frac{4}{3} = \frac{6}{AC}$ అయిన $4AC = 18$. కావున, $AC = \frac{9}{2} = 4.5$ సెం.మీ

ఉదాహరణ 4.16 పటము 4.40 చూపినట్లుగా $\angle BAC$ యొక్క కోణసమద్విఖండన రేఖ AD అగున $AB = 10$ సెం.మీ, $AC = 14$ సెం.మీ మరియు BC = 6 సెం.మీ అయిన BD మరియు DC లను కనుగొనుము.



పటం. 4.40

సాధన $BD = x$ సెం.మీ అయిన $DC = (6-x$ సెం.మీ

$\angle A$ యొక్క కోణసమద్విఖండన రేఖ AD అగును.

కావున, కోణ సమద్విఖండన సిద్ధాంతము ప్రకారము

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$

$\frac{10}{14} = \frac{x}{6-x}$, $\frac{5}{7} = \frac{x}{6-x}$ అగును.

కనుక, $12x = 30$ అయిన $x = \frac{30}{12} = 2.5$ సెం.మీ

కావున, $BD = 2.5$ సెం.మీ, $DC = 6 - x = 6 - 2.5 = 3.5$ సెం.మీ

ప్రగతి శోధన

1. ఒక త్రిభుజము లోని రెండు భుజాలను ఒకే నిష్పత్తిలో విభజించు సరళరేఖ, మూడవ భుజానికి _____ గా ఉండును.
2. ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతమును _____ అని కూడ తెలుపవచ్చును.
3. ΔABC ఒక సమబాహు త్రిభుజము BC మరియు AD ని D వద్ద అంతరముగా $\angle A$ ను సమద్విఖండన చేసిన కోణ సమద్విఖండన సిద్ధాంతము ప్రకారము $\frac{BD}{DE}$ అనునది _____ అగును.
4. ఒక త్రిభుజములోని కోణమును _____ చేయు రేఖ ఆ కోణము యొక్క ఎదుటి భుజాన్ని అంతరముగా మిగిలిన రెండు భుజాల నిష్పత్తిలో విభజించును.
5. ΔABC లో భుజము BC కి మధ్య రేఖాఖండము, AD అనునది $\angle A$ రెండు సమద్విఖండనగా ఉండిన $\frac{AB}{AC}$ అనునది _____ అగును.

4.3.2 త్రిభుజముల నిర్మాణము

మునుపటి తరగతిలో భుజములు మరియు కోణములను ఇచ్చినచో త్రిభుజములను నిర్మించుటను నేర్చుకొనియున్నాము.

ఈ భాగంలో త్రిభుజములను నిర్మించుట గూర్చి ఈ క్రింది పద్ధతిలు ఇవ్వబడినది:

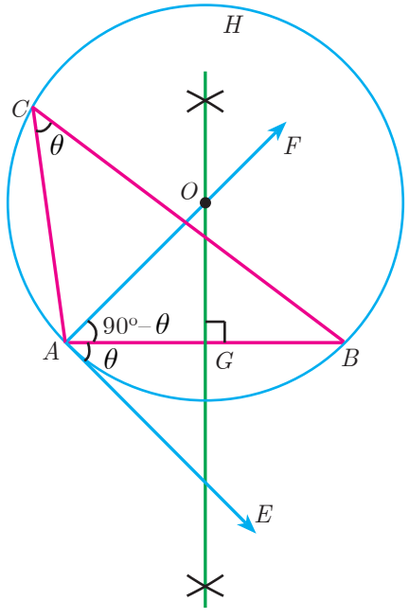
(i) భూ భుజము, శీర్షకోణము మరియు భూభుజ మధ్యగతరేఖ ఇచ్చినచో

(ii) భూభుజము, శీర్షకోణము మరియు భూభుజమునకు ఉన్నతి ఇచ్చినచో

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_4.indd 186 13-02-2023 19:52:33

(iii) భూభుజము, శీర్షకోణము మరియు శీర్షకోణ సమద్విఖండనరేఖ భూభుజమును ఖండించే బిందువును ఇచ్చినచో

మొదట, ఈ భాగంలో త్రిభుజ నిర్మాణము క్రింది విధముగా నేర్చుకొనెదము.



పటం. 4.41

ఇవ్వబడిన రేఖాఖండముపై, ఇవ్వబడిన కోణము θ ఉండునట్లు వృత్త ఖండమును నిర్మించుట.

నిర్మాణక్రమము

1: $\overline{AB}$ రేఖా ఖండము గీయుము.

సోపానం 2: A వద్ద $\angle BAE = \theta$ ఉండునట్లు గీయుము.

సోపానం 3: $AF \perp AE$ ఉండునట్లు గీయుము.

సోపానం 4: AB కి లంబసమద్విఖండన రేఖను గీయుము. ఇది AF ని O వద్ద కలియును.

సోపానం 5: O కేంద్రముగా OA వ్యాసార్ధంతో ఒక వృత్తము ABH ను గీయుము.

సోపానం 6: వృత్తం పై ఏదేని ఒక బిందువు C తీసుకొనిన స్పర్శ రేఖ–జ్యా సిద్ధాంతం నుండి గురుచాపము ACB అనునది θ కోణము కలిగిన వృత్త ఖండము అగును.

సూచన

- వృత్తముపై బిందువులు $C_1, C_2, \ldots$ అయిన ΔBAC_1, $\Delta BAC_2, \ldots$ ఒకే భుజము మరియు శీర్ష కోణములు కలిగియుండును.

భూ భుజము, శీర్షకోణము మరియు శీర్షము నుండి భూ భుజమునకు గల మధ్యగతరేఖ ఇచ్చిన త్రిభుజమును నిర్మించుట.

ఉదాహరణ 4.17 $PQ = 8$ సెం.మీ, $\angle R = 60°$ మరియు R నుండి RG కి గల మధ్యగతరేఖ 5.8 సెం.మీ కొలతలతో ΔPQR ని నిర్మింపుము. మరియు PQ కు గల ఉన్నతి పొడవును కనుగొనుము.

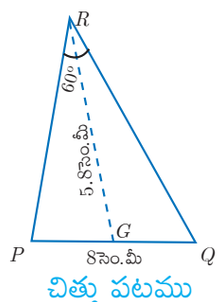
సాధన

నిర్మాణక్రమము

సోపానం 1: PQ = 8 సెం.మీ రేఖా ఖండమును గీయుము.

సోపానం 2: $\angle QPE = 60°$ ఉండునట్లు PE ని P వద్ద కోణము.

సోపానం 3: $\angle EPF = 90°$ ఉండునట్లు PF కి P వద్ద కోణము.



చిత్తు పటము

సోపానం 4: PQ కి లంబ సమద్విఖండన రేఖను గీయుము, అది PF మరియు PQ లను క్రమముగా O మరియు G వద్ద సంధించును.

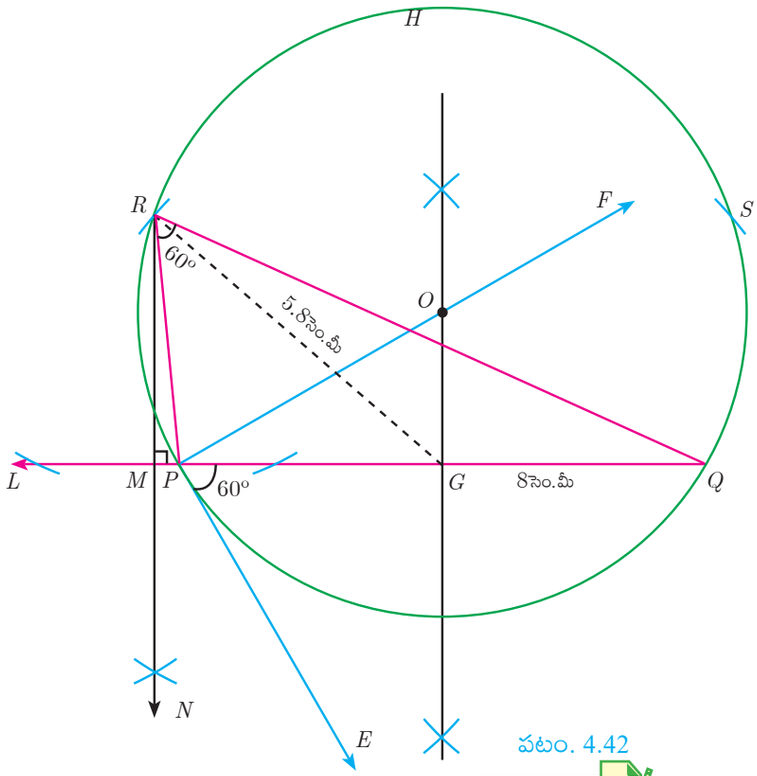
10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_4.indd 187 13-02-2023 19:52:34

సోపానం 5: O కేంద్రంగా OP వ్యాసార్ధంతో ఒక వృత్త ఖండమును గీయుము.

సోపానం 6: G కేంద్రంగా 5.8 సెం.మీ వ్యాసార్ధంతో ఒక వృత్తఖండమును గీయగా అది వృత్తము R మరియు S ల వద్ద ఖండించును.

సోపానం 7 : PR మరియు RQ కలుపుము $\triangle PQR$ కావలసిన త్రిభుజము.

సోపానం 8 : RN ను LQ కి R నుండి లంబము గీచిన అది M వద్ద RN ను కలియును.



పటం. 4.42

సోపానం 9: ఉన్నతి పొడవు $RM = 3.5$ సెం.మీ

సూచన

ఇవ్వబడిన త్రిభుజ కొలతతో కావలసిన ΔPQS ఏర్పడును.

భూ భుజము, శీర్షకోణము మరియు శీర్షము నుండి భూ భుజమునకు గీసిన ఉన్నతి(ఎత్తు) ఇవ్వబడిన త్రిభుజమును నిర్మించుట.

ఉదాహరణ 4.18 $QR = 5$ సెం.మీ, $\angle P = 30°$ P నుండి QR కి గా ఉన్నతి(ఎత్తు) పొడవు 4.2 సెం.మీ ఉండునట్లు ΔPQR ను నిర్మింపుము.

సాధన

నిర్మాణక్రమము

సోపానం 1 : $QR = 5$ సెం.మీ గల ఒక రేఖా ఖండమును గీయుము.

సోపానం 2 : $\angle RQE = 30°$ ఉండునట్లు Q దగ్గర QE ను గీయుము.

సోపానం 3 : $\angle EQF = 90°$ ఉండునట్లు Q దగ్గర QF ను గీయుము.

సోపానం 4 : QR ని G వద్ద QF ని O వద్ద ఖండించునట్లు QR కి లంబ సమద్విఖండనరేఖను గీయుము O ను కేంద్రముగా, OQ వ్యాసార్ధముతో వృత్తమును గీయుము..

సోపానం 5 : కేంద్రము O మరియు వ్యాసార్ధము OQ తో వృత్తమును గీయుము.

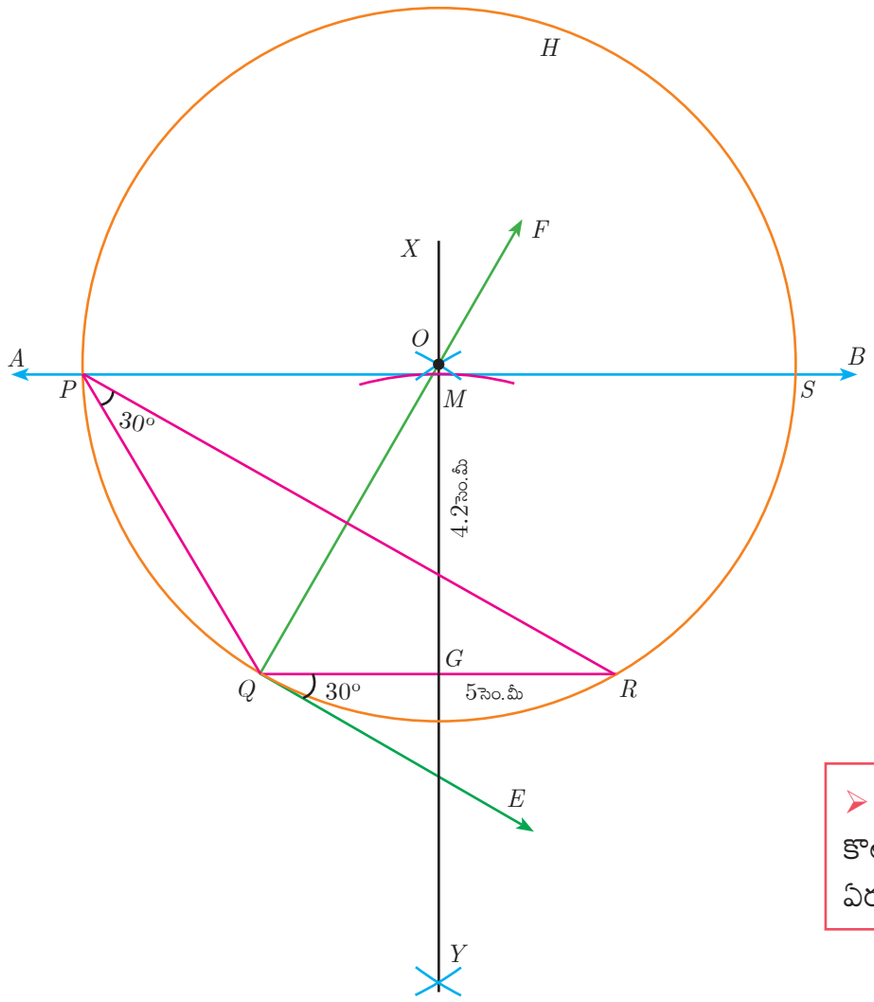
సోపానం 6: XY లో M నుండి G ఒక చాపము గీచిన $GM = 4.2$ సెం.మీ అగును.

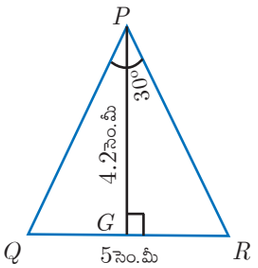
సోపానం 7 : QR కి సమాంతరముగా M ద్వారా AB రేఖను గీయుము.

సోపానం 8 : P మరియు S లో కలియును.

సోపానం 9 : RP మరియు QP ల కలపగా కావలసిన $\triangle PQR$ ఏర్పడును.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_4.indd 188 13-02-2023 19:52:35





చిత్తు పటము

సూచన

➢ ఇవ్వబడిన త్రిభుజ కొలతతో కావలసిన ΔSQR ఏర్పడును.

పటం. 4.43

భూభుజము, శీర్షకోణము మరియు శీర్షకోణ సమద్విఖండనరేఖ భూభుజమును ఖండించే బిందువును ఇచ్చినచో ఇవ్వబడిన త్రిభుజమును నిర్మించుట.

ఉదాహరణ 4.19 $BC = 8$ సెం.మీ, $\angle A = 60^\circ$ మరియు $\angle A$ యొక్క సమద్విఖండన రేఖ BC ని D వద్ద ఖండించిన పొడవు $BD = 6$ సెం.మీ ఉండునట్లు $\triangle ABC$ ని నిర్మింపుము.

సాధన

నిర్మాణక్రమము

సోపానం 1 : $BC = 8$ సెం.మీ గల ఒక రేఖా ఖండమును గీయుము.

సోపానం 2 : $\angle CBE = 60^\circ$ ఉండునట్లు B వద్ద BE ను కోణమును గీయుము.

సోపానం 3 : $\angle EBF = 90^\circ$ ఉండునట్లు B వద్ద BF ను కోణమును గీయుము.

సోపానం 4 : BC ని G వద్ద BC ని O వద్ద ఖండించునట్లు BC కి లంబసమద్విఖండన రేఖను గీయుము.

సోపానం 5 : O ను కేంద్రముగా, OB వ్యాసార్ధముతో వృత్తమును గీయుము.

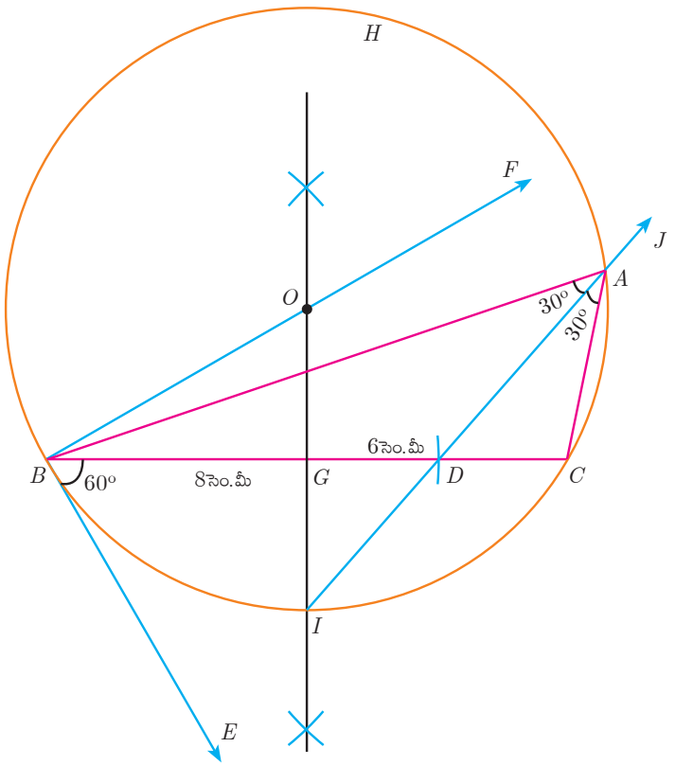
సోపానం 6 : D ని BC పై 6 సెం.మీ గలిగిన చాపమును గుర్తించుము.

సోపానం 7 : వృత్తము I అనునది నంబ సముద్వి ఖండన రేఖలో ఉండును ID ని కలుపుము.

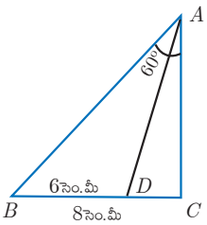
సోపానం 8 : A నుండి ID కి పొదించిన వృత్తమును తాకును. AB మరియు AC ని కలుపుము.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_4.indd 189 13-02-2023 19:52:36

కాబట్టి మనకు కావలసిన $\triangle ABC$ ఏర్పడును.



పటం. 4.44



చిత్తు పటము

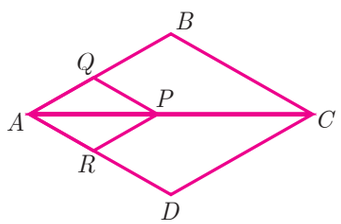
అభ్యాసము 4.2

1. ΔABC, లో D మరియు E లు క్రమముగా భుజములు AE మరియు AC ల పై ఉన్నవి మరియు $DE \parallel BC$ అయిన (i) $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{4}$ మరియు $AC = 15$ సెం.మీ అయిన AE ని కనుగొనుము.
   (ii) $AD = 8x - 7$, $DB = 5x - 3$, $AE = 4x - 3$ మరియు $EC = 3x - 1$ అయిన x విలువను కనుగొనుము.

2. సమలంబ చతుర్భుజము ABCD లో $AB \parallel DC$ మరియు P, Q లు AD మరియు BC పై గల బిందువులు. ఇచ్చట $PQ \parallel DC$ అయిన $PD = 18$ సెం.మీ, $BQ = 35$ సెం.మీ మరియు $QC = 15$ సెం.మీ అయిన AD కనుగొనుము.

3. ΔABC లో, బిందువులు D మరియు E లు క్రమముగా భుజములు AB మరియు AC లపై ఉన్నవి. $AB = 12$ సెం.మీ $AD = 8$ సెం.మీ $AE = 12$ సెం.మీ మరియు $AC = 18$ సెం.మీ అయిన $DE \parallel BC$ అని నిరూపించుము.

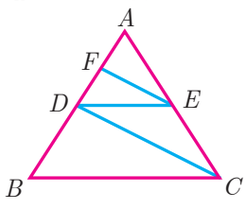
4. పటములో $PQ \parallel BC$ మరియు $PR \parallel CD$ అయిన
   (i) $\frac{AR}{AD} = \frac{AQ}{AB}$ (ii) $\frac{QB}{AQ} = \frac{DR}{AR}$. అని నిరూపించుము.



10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_4.indd 190 13-02-2023 19:52:38

5. ΔABC లోపల $\angle B$ ని ఒక కోణమును కలిగిన సమచతుర్భుజము PQRB అమరియున్నది. P, Q మరియు R క్రమముగా భుజములు AB, AC మరియు BC పై అమరియున్న బిందువులగును. $AB=12$ సెం.మీ మరియు $BC = 6$ సెం.మీ అయిన సమచతుర్భుజము యొక్క భుజములు PQ, RB లను కనుగొనుము.

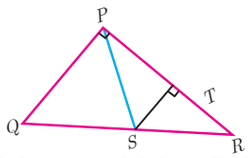
6. చతుర్భుజము $ABCD$ లో $AB \parallel DC$, E మరియు F క్రమముగా సమాంతరము లేని భుజములు AD మరియు AD లపై ఉండు బిందువులు, మరియు $EF \parallel AB$ అని ఏర్పడి యున్న యెడల $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$ అని నిరూపించుము..



7. పటములో చూపినట్లుగా $DE \parallel BC$ మరియు $CD \parallel EF$ అయిన $AD^2 = AB \times AF$ అని నిరూపించుము.

8. ΔABC లో AD అనునది $\angle A$ యొక్క అంతర సమద్వి ఖండనము వద్ద సంధించును. అయిన ఈ క్రింది వాటిని కనుగొనుము.
   (i) $AB = 5$ సెం.మీ, $AC = 10$ సెం.మీ, $BD = 1.5$ సెం.మీ మరియు $CD = 3.5$ సెం.మీ.
   (ii) $AB = 4$ సెం.మీ, $AC = 6$ సెం.మీ, $BD = 1.6$ సెం.మీ మరియు $CD = 2.4$ సెం.మీ.

9. పటములో చూపినట్లు $\angle QPR = 90°$, PS కోణ సమద్విఖండన రేఖ $ST \perp PR$ అయిన $ST \times (PQ+PR) = PQ \times PR$ అని నిరూపించుము.



10. చతుర్భుజము $ABCD$ లో AB=AD, $\angle BAC$ మరియు $\angle CAD$ కోణ సమద్విఖండనము BC మరియు CD భుజములు కలిగిన క్రమముగా E మరియు F అను బిందువులు సంధించినట్లైతే $EF \parallel BD$ అని నిరూపించుము.

11. $PQ = 4.5$ సెం.మీ $\angle R = 35°$ మరియు శీర్షము R నుండి గీయబడిన మధ్యగత రేఖ పొడవు $RG = 6$ సెం.మీ కలిగిన విధముగా ΔPQR నిర్మించుము.

12. $QR = 5$ సెం.మీ, $\angle P = 40°$ మరియు శీర్షము P నుండి QR కు గీయబడిన మధ్యగత రేఖ పొడవు $PG = 4.4$ సెం.మీ ఉండునట్లు ΔPQR నిర్మించుము. మరియు P నుండి QR కు గీయబడిన ఉన్నతి(ఎత్తు) కనుగొనుము.

13. $QR = 6.5$ సెం.మీ $\angle P = 60°$ మరియు శీర్షము P నుండి QR కు గీయబడిన ఉన్నతి (ఎత్తు) 4.5 సెం.మీ గా గల ΔPQR ను నిర్మించుము.

14. $AB = 5.5$ సెం.మీ $\angle C = 25°$ మరియు శీర్షము C నుండి AB నకు గీయబడిన ఉన్నతి యొక్క పొడవు 4 సెం.మీ గా గల త్రిభుజము ΔABC ను నిర్మించుము.

15. భూ భుజము $BC = 5.6$ సెం.మీ, $\angle A = 40°$ మరియు $\angle A$ యొక్క కోణ సమద్విఖండన రేఖ BC ను D వద్ద ఖండించిన, $CD = 4$ సెం.మీగా ఉండునట్లు ΔABC ను నిర్మించుము.

16. $PQ = 6.8$ సెం.మీ నిలువు కోణము $50°$ మరియు దాని కోణ సమద్విఖండన రేఖ భూభుజమును D వద్ద ఖండించినపుడు $PD = 5.2$ సెం.మీ గా గల ΔPQR ను నిర్మించుము.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_4.indd 191 13-02-2023 19:52:41

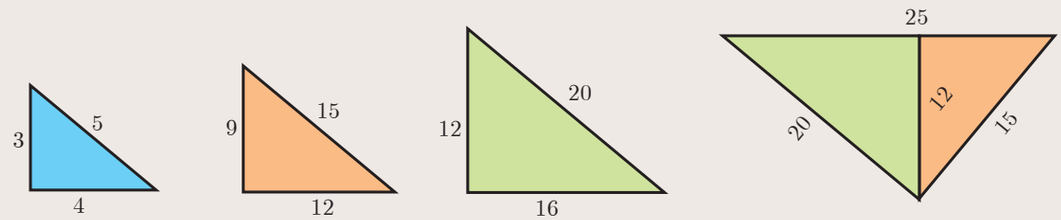
4.4 పైథాగరస్ సిద్ధాంతము. (Pythagorems Theorem)

గణితము నందలి అన్ని సిద్ధాంతముల కంటే పైథాగరస్ సిద్ధాంతం అత్యంత ముఖ్యమైనదిగా పరిగణించబడుచున్నది. ఎందుకనగా అది అత్యధిక సంఖ్యలో నిరూపణలు కలిగియున్నది. సుమారు 350 కంటే అధిక విధానముల ద్వారా అనేక పద్ధతులలో పైథాగరస్ సిద్ధాంతమును నిరూపించవచ్చును. ఈ నిరూపణలు కనుగొనిన వారిలో ప్రసిద్ధ గణిత శాస్త్రవేత్తలు, విద్యార్థులు, ఇంజనీర్లు మరియు గణితముపై వీరాభిమానము గలవారు, అమెరికా దేశపు 20వ అధ్యక్షుడైన జేమ్స్ గార్ ఫీల్డ్ కూడా కలరు. ఎలైసా స్కాట్ లూమిస్ వ్రాసిన "The Pythagorean Proposition" అను పుస్తకము అమెరికా నందలి (National Council of Teaching of Mathematics) (NCTM) చే ప్రచురించబడినది. ఇందులో పైథాగరస్ సిద్ధాంతమునకు 367 నిరూపణలు గలవు

(a,b,c) లు ఒక లంబకోణ త్రిభుజ భుజములైన యెడల ఆ మూడు సంఖ్యలను (a,b,c) పైథాగోరియన్ త్రికములు అని అందురు. (a,b,c) లు పైథాగోరియన్ త్రికములైన యెడల, $c^2 = a^2 + b^2$ గా నుండును.

మనము ఇప్పుడు అతి ప్రాచుర్యమైన మరియు ముఖ్యమైన సిద్ధాంతమును రేఖాగణితము నందు మాత్రమే కాక మొత్తం గణితమునకు అవశ్యమగునట్లు అభ్యసించవలసిన స్థితిలో యున్నాము.

కృత్యము 4



(i) (ii) (iii) (iv)

పటం. 4.45

సోపానం 1: ఒక చార్టు పేపరును తీసుకొని (i) వ పటములో చూపిన విధముగా కొలతలు గల లంబకోణ త్రిభుజమును కత్తరించుము.

సోపానం 2: మరో మూడు రకములైన వేర్వేరు రంగులలో గల చార్టులను తీసుకొని (ii) పటములో గల, (iii) పటములో గల మరియు (iv) పటములో ఉండునట్లు (i) వ పటమునకు క్రమముగా 3 రెట్లు, 4 రెట్లు మరియు 5 రెట్లు కొలతలు ఉండునట్లు మూడు త్రిభుజములు కత్తిరించుము.

సోపానం 3: 12 కొలతగా గల ఉమ్మడి భుజమును అనుసంధానించి (ii) మరియు (iii) వ త్రిభుజములను (iv) వ త్రిభుజముపై అమర్చిన, ఆ రెండు త్రిభుజములు ((ii) మరియు (iii)) (iv) వ త్రిభుజముతో ఏకీభవించను.

కర్ణమును గమనించుము మరియు సమీకరణమును వ్రాయము. నీవు ఏకీభవించుటలో ఏమి గమనించితివి.

సూచన

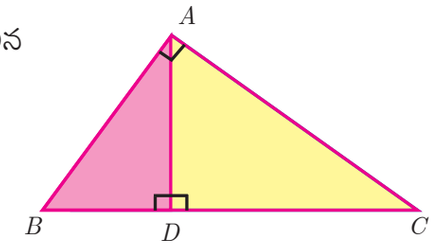
- లంబకోణ త్రిభుజము నందు, 90° (లంబ కోణము) నకు ఎదురుగా గల భుజమును కర్ణము అని అందురు.
- లంబకోణ త్రిభుజము నందలి మిగిలిన రెండు భుజములను లంబకోణ త్రిభుజ భుజములందురు.
- కర్ణము అనునది లంబకోణ త్రిభుజము నందలి అత్యంత పొడవైన భుజము అగును.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_4.indd 192 13-02-2023 19:52:42

సిద్ధాంతము 5 : పైథాగరస్ సిద్ధాంతము. (Pythagorems Theorem)

నిర్వచనము

ఒక లంబకోణ త్రిభుజములో కర్ణము యొక్క వర్గము మిగిలిన రెండు భుజముల వర్గముల మొత్తమునకు సమానము.



పటం. 4.46

నిరూపణ

దత్తాంశము : లంబకోణ ΔABC, లో $\angle A = 90^\circ$

సారాంశము : $AB^2 + AC^2 = BC^2$

నిర్మాణము : $AD \perp BC$ ఉండునట్లు గీయుము.

వ.సం.	వివరణ	కారణము
1.	ΔABC మరియు ΔABD లో $\angle B$ ఉమ్మడి కోణము $\angle BAC = \angle BDA = 90^\circ$ కనుక, $\Delta ABC \sim \Delta ABD$ $\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{AB}$ $AB^2 = BC \times BD$ ... (1)	$\angle BAC = 90^\circ$ ఇవ్వబడినది మరియు $\angle BDA = 90^\circ$ నిర్మాణము (కో–కో ప్రతిపాదన)
2.	అదేవిధంగా, ΔABC మరియు ΔADC $\angle C$ ఉమ్మడి కోణము $\angle BAC = \angle ADC = 90^\circ$ కనుక, $\Delta ABC \sim \Delta ADC$ $\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC}$ $AC^2 = BC \times DC$ ...(2)	$\angle BAC = 90^\circ$ దత్తాంశము $\angle CDA = 90^\circ$ నిర్మాణము (కో–కో ప్రతిపాదన)

(1) మరియు (2) లను కూడిన

$$AB^2 + AC^2 = BC \times BD + BC \times DC$$
$$= BC(BD + DC) = BC \times BC$$

కనుక

పైథాగరస్ సిద్ధాంతము నిరూపించబడినది.

మీకు తెలుసా?

భారతదేశములో పైథాగరస్ సిద్ధాంతమును భౌద్ధాయన సిద్ధాంతముగా పరిగణించుచున్నారు.

మెదడుకు మేత

1. ఏవేని ఐదు పైథాగరస్ త్రికములు వ్రాయుము.
2. ఒక లంబకోణ త్రిభుజములోని రెండు కోణముల మొత్తము _____ అగును.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_4.indd 193 13-02-2023 19:52:44

పైథాగరస్ సిద్ధాంత విపర్యము

వివరణ

ఒక త్రిభుజము నందు ఒక భుజము యొక్క వర్గము మిగిలిన రెండు భుజముల వర్గముల మొత్తమునకు సమానమైన, మొదటి భుజమునకు అభిముఖముగా నున్న కోణము లంబకోణ మగును.

కృత్యము 5

(i) రెండు వరుస బేసి సంఖ్య పదములు తీసుకొనుము

(ii) ఈ రెండు సంఖ్యలను విలోమము చేసి కూడిన. $\frac{p}{q}$ రూపములో సంఖ్య వచ్చును. $\frac{p}{q}$.

(iii) $\frac{p}{q}$ కు హారములో 2 ని కూడిన, $q+2$ వచ్చును.

(iv) $p, q, q+2$. సంఖ్యలు అనుకొనిన ఈ మూడు సంఖ్యలకు గల సంబంధమేమి?

ఈ ప్రక్రియ, మూడు జతల బేసి సంఖ్యలను చూచి మీ జవాబును గుర్తించుము (వ్రాయుము)

మెదడుకు మేత

లంబకోణ త్రిభుజములోని మూడు భుజములు కొలత బేసి సంఖ్యలు వుండునగునా? ఎందులకు?

ఉదాహరణ 4.20 ఒక దీపస్థంబము ఎత్తు 6 మీ. దాని అడుగుభాగము నుండి 8 మీ దూరంలో గల ఒక కీటకము, స్థంబము వైపు ఒక నిర్ధిష్ట దూరము కదులుచున్నవి. స్థంబము యొక్క పైభాగమున ప్రస్తుతము కీటకము ఉన్న చోటుకు మధ్య దూరం, కీటకము స్థంబము అడుగుభాగం నుండి కీటకం ప్రస్తుతం ఎంత దూరంలో కలదు.

సాధన దీప స్థంభము భూభాగము మరియు ఈగకు మధ్యగల దూరము $BD = 8$ మీ,

ద్వీప స్థంభము యొక్క ఎత్తు $AB = 6$ మీ,

x మీ దూరము ప్రయాణించిన బిందువు C దగ్గర ఈగ ఉన్నది.

కావున, $AC = CD = x$ అయిన $BC = BD - CD = 8 - x$

ΔABC, లో $\angle B = 90^\circ$

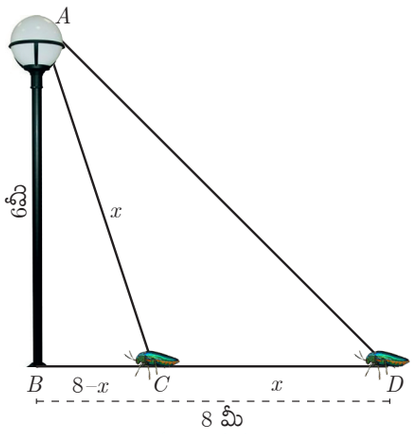
$AC^2 = AB^2 + BC^2$, $x^2 = 6^2 + (8-x)^2$ వచ్చును.

$$x^2 = 36 + 64 - 16x + x^2$$

$16x = 100$ అయిన $x = 6.25$

కావున, $BC = 8 - x = 8 - 6.25 = 1.75$ మీ.

దీప స్థంభము నుండి ఈగకు గల దూరము 1.75 మీ అగును.



పటం. 4.47

ఉదాహరణ 4.21 ΔABC లో, CA మరియు CB భుజములకు P మరియు Q మధ్య బిందువులు, శీర్షము C లంబకోణము అయిన $4(AQ^2 + BP^2) = 5AB^2$ అని నిరూపించుము.

సాధన ΔAQC లో శీర్షము C వద్ద లంబకోణము. అయిన $AQ^2 = AC^2 + QC^2$ ... (1)

ΔBPC లో శీర్షము C వద్ద లంబకోణము

$BP^2 = BC^2 + CP^2$ అగును. ... (2)

(1) మరియు (2) నుండి, $AQ^2 + BP^2 = AC^2 + QC^2 + BC^2 + CP^2$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_4.indd 194 13-02-2023 19:52:47

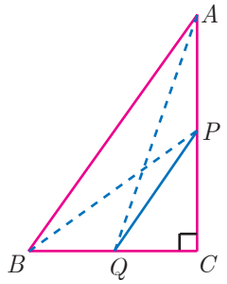
$$4(AQ^2 + BP^2) = 4AC^2 + 4QC^2 + 4BC^2 + 4CP^2$$

$$= 4AC^2 + (2QC)^2 + 4BC^2 + (2CP)^2$$

$$= 4AC^2 + BC^2 + 4BC^2 + AC^2 \quad (P \text{ మరియు } Q \text{ మధ్య బిందువులు})$$

$$= 5(AC^2 + BC^2)$$

$$4(AQ^2 + BP^2) = 5AB^2 \qquad \text{(పైథాగరస్ సిద్ధాంత ప్రకారము)}$$



పటం. 4.48

ఉదాహరణ 4.22 4 అడుగుల దూరములో గల నిచ్చెన, 7 అడుగులు ఎత్తు గల గోడను తాకినట్లున్నది. అయిన నిచ్చెన పొడవును కనుగొనుము 10 ల స్థానమునకు సవరించి మీ జవాబు వ్రాయుము.

సాధన నిచ్చెన ఎత్తు x అయిన $BC=4$ అడుగులు, $AC=7$ అడుగులు

$AB^2 = AC^2 + BC^2$ పైథాగరస్ సిద్ధాంతము ప్రకారము

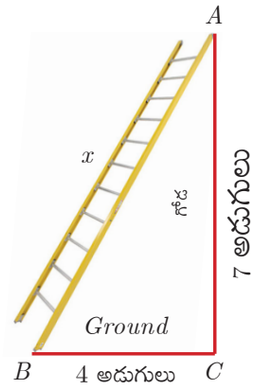
$x^2 = 7^2 + 4^2 \Rightarrow x^2 = 49 + 16$

$x^2 = 65$. కనుక, $x = \sqrt{65}$

$\sqrt{65}$ విలువ 8 మరియు 8.1 మధ్యన కలదు.

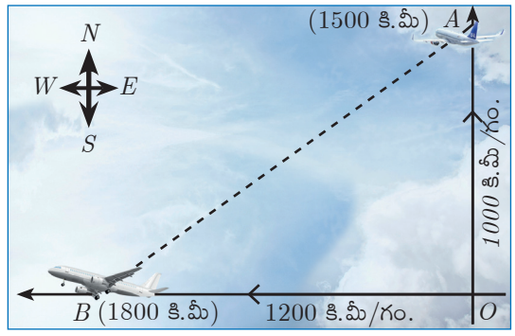
$8^2 = 64 < 65 < 65.61 = 8.1^2$

కావున నిచ్చెన ఎత్తు 8.1 అడుగులు రమారమి గాంచును.



పటం. 4.49

ఉదాహరణ 4.23 విమానాశ్రయములో ఒక విమానము వేగము 1000 కి.మీ/గం॥ ఉత్తర దిశగా ఎగురుచున్నది. అదే విధముగా ఆ విమానాశ్రయములో మరొక విమానము వేగము 1200 కి.మీ/గం॥ పడమర దిశలో ఎగురుచున్నది. అయిన 1½ గం॥ తర్వాత ఆ రెండు విమానములు ఎంత దూరము ప్రయాణించును?



పటం. 4.50

సాధన మొదటి విమానము O నుండి A నకు ఉత్తర దిశలో పోవుచున్నది. (దూరము=వేగము×కాలము)

కనుక $OA = \left(1000 \times \frac{3}{2}\right)$ కి.మీ $= 1500$ కి.మీ

రెండవ విమానము O నుండి B నకు పడమర దిశలో అదే సమయమున పోవుచున్నది.

కనుక $OB = \left(1200 \times \frac{3}{2}\right) = 1800$ కి.మీ

అగును. BA కనుగొనవలసిన దూరమును తెలిసికొనుటకు,

AOB లంబకోణ త్రిభుజము నుండి $AB^2 = OA^2 + OB^2$.

$$AB^2 = (1500)^2 + (1800)^2 = 100^2\ (15^2+18^2)$$

$$= 100^2 \times 549 = 100^2 \times 9 \times 61$$

$$AB = 100 \times 3 \times \sqrt{61} = 300\sqrt{61} \text{ కి.మీ.}$$

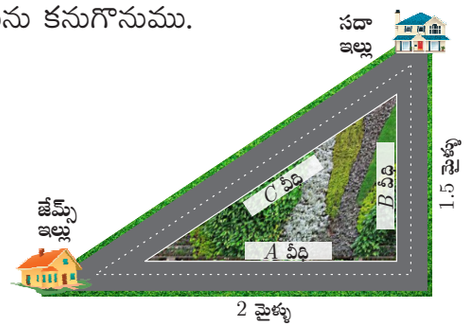
10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_4.indd 195 13-02-2023 19:52:49

ప్రగతి శోధన

1. _____ అనునది లంబకోణ త్రిభుజములోని అధిక పొడవుగల భుజము అందురు.
2. గణితంలో మొదటి సిద్ధాంతము _____ అందురు.
3. ఒక త్రిభుజములోని కర్ణము మీద వర్గము, మిగిలిన రెండు భుజాల వర్గాల మొత్తానికి సమానమైన ఆ త్రిభుజమును _____ త్రిభుజము అందురు.
4. సరి లేక తప్పును సరిచూడుము.
   (i) అన్నిరకాల త్రిభుజములకు పైథాగరస్ సిద్ధాంతము వర్తించును.
   (ii) లంబకోణ త్రిభుజములోని ఒక భుజము 4 యొక్క కోణము కలిగియుండును.

అభ్యాసము 4.3

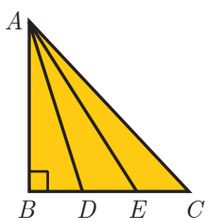
1. ఒక వ్యక్తి 18 మీ తూర్పునకు వెళ్ళి మరియు 24 మీ ఉత్తరమునకు ప్రయాణించెను. మొదలుపెట్టిన స్థలము నుండి అతను ఉండు స్థలమునకు మధ్య గల దూరమును కనుగొనుము.
2. సదా ఇంటి నుండి జేమ్స్ ఇంటికి పోవుటకు రెండు దారులు కలదు. ఒకదారి C అను వీధిలో నుండి పోవుటకు మరొకదారి A మరియు B వీధుల నుండి పోవుటకు కలదు. నేరుగా ఉన్న దారి అగు C ద్వారా వెళ్ళిన యెడల ఎంత దూరము తక్కువగును? (పటమునుపయోగించిన)



3. A అనే బిందువు నుండి B అనే బిందువుకు వెళ్లుటకు ఒక కొలను వెపు నడిచి వెళ్లవలెను. కొలను వెపు వెళ్లుటకు నిరాకరించిన 34 మీ దక్షిణము వెపు 41 మీ తూర్పువైపుకు నడిచి వెళ్లవలెను. కొలను వైపు వెళ్లుటకు దారిని అమర్చి ఆ దారిలో వెళ్లిన ఎన్ని మీటర్ల దూరం కలిసివచ్చును?
4. $WXYZ$, దీర్ఘచతురస్రములో $XY+YZ=17$ సెం.మీ మరియు $XZ+YW=26$ సెం.మీ అయిన దీర్ఘచతురస్రము యొక్క పొడవు మరియు వెడల్పును కనుగొనుము.



5. ఒక లంబకోణ త్రిభుజము యొక్క కర్ణము చిన్న భుజము యొక్క 2 రెట్లుకన్నా 6 అధికము. మరియు మూడవ భుజము కర్ణము కన్నా 2మీ తక్కువైనచో త్రిభుజములోని భుజములను కనుగొనుము.
6. 5 మీ పొడవుగల ఒక నిచ్చెన నిటారుగొడపై ఏటవాలుగా ఉంచబడినది. నిచ్చెన పై భాగము గొడను 4 మీ ఎత్తులో తాకుచున్నది. నిచ్చెన అడుగుభాగము గొడవైపుకు 6 మీ జరిపినపుడు నిచ్చెన పై భాగము గొడపైకి ఎంతదూరము జరుగునని కనుగొనుము..
7. ΔPQR లో భూభుజము QR కు లంబముగా కలదు. PS అనేది QR ను S వద్ద ఖండించుచున్నది మరియు $QS = 3\ SR$ అయిన $2PQ^2 = 2PR^2 + QR^2$ ఆని నిరూపించుము.
8. పటములో చూపినట్లు లంబకోణ త్రిభుజము ABC లో కోణము B అనునది లంబకోణము D, E అను బిందువుల భుజము BC ని మూడు సమ భాగాలుగా విభజించిన యెడల $8AE^2 = 3AC^2 + 5AD^2$ అని నిరూపించుము.



10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_4.indd 196 13-02-2023 19:52:50

4.5 వృత్తములు మరియు స్పర్శరేఖలు (Circles and Tangents)



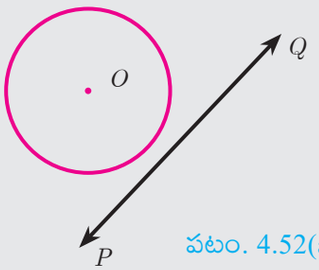
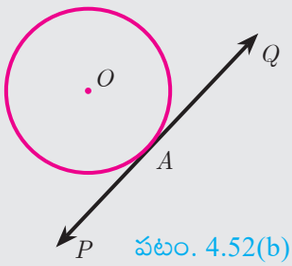
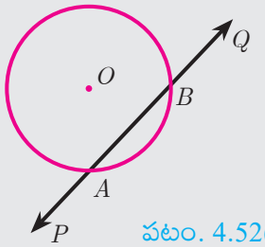
పటం. 4.51

మన నిత్య జీవిత పరిస్థితులలో ఒక తలములో రెండు రేఖలు ఒక దానికొకటి ఒక బిందువులో ఖండించుకొను పోవుటను లేక ఖండించుకొనక పోవుటను చూచియున్నాము. ఉదాహరణకు, రైలు పట్టాలలో రెండు సమాంతర రేఖలు, ఒకదానికొకటి ఖండించకుండ పోవుచున్నవి. అదే సమయమున కిటికీలలో ఉండు కంభీలు ఒక దానికొకటి ఖండించుకొనుచున్నవి.

ఇదే విధముగా ఒక తలములో ఒక వక్ర రేఖ మరియు ఒక రేఖ ఇవ్వబడిన ఏమి జరుగును? ఈ వక్ర రేఖ అనునది (curve) పరావలయముగా, వృత్తముగానో లేక ఏదేని ఒక సాధారణ ఆకారముగానో వుండవచ్చును.

ఇదే విధముగా, ఒక రేఖ ఒక వృత్తములో ఖండించుకొనుటను పరిశీలించినపుడు ఏమి జరుగుచున్నది ?

ఈ క్రింది మూడు విధాలుగా గల పటములను పరిశీలించగలము.

పటము 1	పటము 2	పటము 3
 పటం. 4.52(a)	 పటం. 4.52(b)	 పటం. 4.52(c)
(i) పటము (i) లో PQ రేఖకు, వృత్తానికి ఉమ్మడి బిందువు లేదు	(i) PQ రేఖకు, వృత్తానికి ఒకే ఒక ఉమ్మడి బిందువు అది A బిందువు అగును.	(i) PQ సరళ రేఖ వృత్తానికి A మరియు B రెండు ఉమ్మడి బిందువులు వుండును.
(ii) సరళరేఖకు మరియు వృత్తమునకు ఖండన బిందువు లేదు.	(ii) PQ బిందువు A సరళ రేఖకు స్పర్శ రేఖ అందురు.	(ii) రెండు ఉమ్మడి బిందువులు ద్వారా PQ ఏర్పడును.
(iii) సరళరేఖకు మరియు వృత్తమునకు ఖండన బిందువులు సంఖ్య సున్న అగును.	(iii) దీని వలన సరళ రేఖకు మరియు వృత్తమునకు ఖండన బిందువుల సంఖ్య ఒకటి అగును.	(iii) దీని వలన సరళ రేఖ మరియు వృత్తమునకు ఖండన బిందువులు రెండు అగును.

సూచన

- పటము 4.52(c) లో చూపిన విధముగా వృత్తముపై AB రేఖా ఖండమును వృత్తము యొక్క జ్యా అందురు.

మీకు తెలుసా?

స్పర్శ రేఖ “tangent” అనే పదం లాటిన్ భాష టాన్ గ్రీ “tangere” అనే పదం నుండి వచ్చినది. దీని అర్థం “స్పర్శించడం” ఈ పదాన్ని మొదటిసారిగా డెన్మార్క్ గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు “థామస్ ఫినికో” 1583 సం॥ లో ప్రవేశపెట్టాడు.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_4.indd 197 13-02-2023 19:52:51

నిర్వచనము

ఒక సరళరేఖ ఒక వృత్తమును ఒక బిందువు వద్ద మాత్రమే స్పర్శించిన దానిని వృత్తమునకు **స్పర్శరేఖ** అందురు.

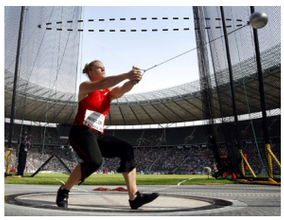
నిత్యజీవితములో వృత్తస్పర్శ రేఖల ఉదాహరణములు

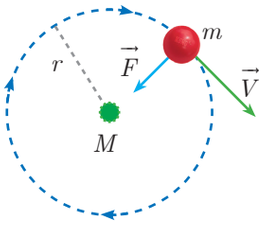
(i) ఒక సైకిల్ రోడ్డుపై పోవుచున్నప్పుడు తిరుగుచున్న చక్రము రోడ్డు తలముపై గల ప్రతి బిందువును స్పర్శించుకొంటూ పోవుటను గమనించవచ్చు.



పటం. 4.53(a)

(ii) ఒక ఇనుప గొలుసు చివరన కట్టబడిన రాయిని ఇంకొక చివర పట్టుకొని త్రిప్పినప్పుడు రాయి వృత్తాకార మార్గములో భ్రమణము చేయును. అకస్మాత్తుగా చేతినుండి గొలుసును వదిలితే రాయి వృత్తాకార మార్గంలో కాకుండా స్పర్శరేఖ దిశలో ఋజుమార్గంలో పోవుటను చూడవచ్చును.

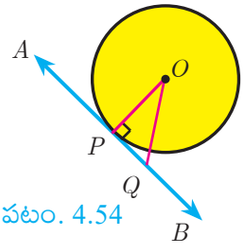




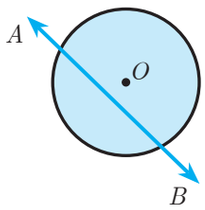
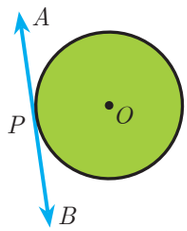
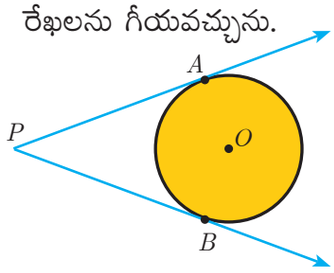
పటం. 4.53(b)

వృత్తములు స్పర్శరేఖల ఆధారముగా గల సిద్ధాంతములు

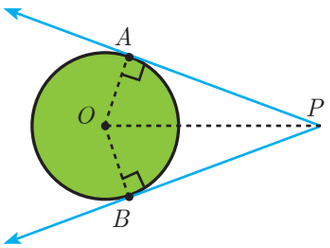
1. ఒక వృత్తముపై ఏదేని బిందువు వద్ద గీయబడిన స్పర్శరేఖ, ఆ స్పర్శ బిందువు ద్వారా పోవు వ్యాసార్ధమునకు లంబముగా నుండును.



పటం. 4.54

2. (a) అంతర వృత్తములో బిందువు గుండా ఆ వృత్తానికి ఏ స్పర్శ రేఖను గీయలేము.  పటం. 4.55(a)	(b) వృత్తముపై గల ఒక బిందువు నుండి ఆ వృత్తానికి ఒకే ఒక స్పర్శ రేఖను మాత్రమే గీయవచ్చును.  పటం. 4.55(b)	(c) వృత్త బాహ్యంలో గల ఏదైన బిందువు గుండా వృత్తానికి ఖచ్చితముగా రెండు స్పర్శ రేఖలను గీయవచ్చును.  పటం. 4.55(c)

3. బాహ్య బిందువు నుండి వృత్తమునకు గీయబడు వృత్తానికి బాహ్య బిందువు గుండా గీయబడిన ఆ రెండు స్పర్శ రేఖ పొడవులు సమానము.



పటం. 4.56

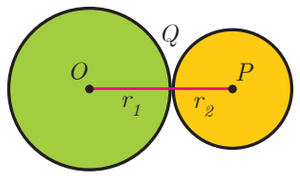
నిరూపణ :

1 నుండి. $OA \perp PA, OB \perp PB$. మరియు $OA = OB =$ వ్యాసార్ధము, OP సాధారణ భుజము. $\angle AOP = \angle BOP$

కావున, $\Delta OAP \cong \Delta OBP$. కనుక $PA = PB$ అగును.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_4.indd 198 13-02-2023 19:52:52

4. రెండు వృత్తములు బాహ్యముగా స్పృశించుకొను చుండిన, వాటి కేంద్రముల మధ్య దూరము వాటి వ్యాసార్ధముల మొత్తమునకు సమానము. కనుక $OP = r_1 + r_2$



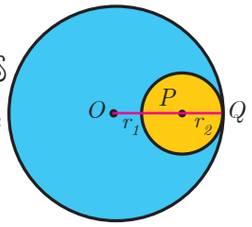
పటం. 4.57

నిరూపణ : O మరియు P రెండు వృత్తముల కేంద్ర బిందువులు.

వద్ద స్పర్శించిన $OQ = r_1$ మరియు $PQ = r_2$ కనుక $r_1 > r_2$

కేంద్రములకు మధ్య గల దూరము $OP = d$ నుండి రెండు వృత్తములు బాహ్యముగా స్పర్శించుకొనుట వలన $OP = d = OQ + PQ = r_1 + r_2$ అగును.

5. రెండు వృత్తములు అంతరముగా స్పృశించుకొను చుండిన వాటి కేంద్రముల మధ్య దూరముకు వాటి వ్యాసార్ధముల భేదమునకు సమానము. కావున, $OP = r_1 - r_2$ అగును



పటం. 4.58

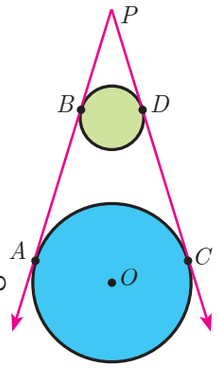
నిరూపణ : O మరియు P రెండు వృత్తముల కేంద్ర బిందువుల

Q వద్ద స్పర్శించినట్లైన $OQ = r_1$ మరియు $PQ = r_2$ మరియు $r_1 > r_2$ అగును.

రెండు కేంద్రములకు మధ్య గల దూరము $OP = d$ పటములో 4.58 చూపిన విధముగా రెండు వృత్తములు అంతరముగా స్పృశించు కొనిన $OP = d = OQ - PQ$ అగును.

$$OP = r_1 - r_2 .$$

6. వృత్తములకు గీయబడిన రెండు సామాన్య స్పర్శరేఖలు పొడవులు సమానమగును. కావున, $AB = CD$. అగును.



పటం. 4.59

నిరూపణ :

P అను బిందువు నుండి రెండు వృత్తములకు గీయబడిన స్పర్శరేఖ పొడవులు సమానముగా ఉండును.

$$PA = PC \text{ మరియు } PB = PD$$

$$PA - PB = PC - PD .$$

$$AB = CD$$

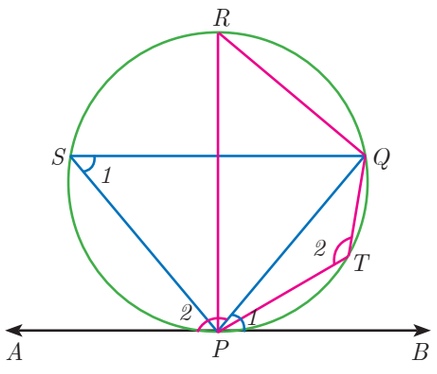
మెదడుకు మేత

1. ఒకదానికొకటి సమాంతరముగా ఒక వృత్తమునకు రెండు స్పర్శరేఖలు గీయగలమా?
2. ఒకదానికొకటి లంబముగా ఒక వృత్తమునకు రెండు స్పర్శరేఖలు గీయగలమా?

ఏకాంతరవృత్తఖండము

పటము 4.60 లో PQ అను జ్యా వృత్తమును రెండు ఖండనములుగా విభజించును. P అను బిందువు గుండా వృత్తమును స్పర్శించుపోవు AB అను స్పర్శరేఖ గీయుము.

$\angle QPB$ ($\angle 1$) మరియొక వృత్త ఖండములో వుండు కోణము $\angle QSP$ ($\angle 1$) అగును. మరియు $\angle QPA$ ($\angle 2$) యొక్క మరియొక వృత్త ఖండ కోణము $\angle PTQ$ ($\angle 2$) అగును



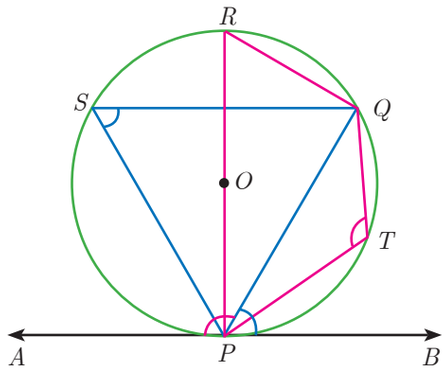
పటం. 4.60

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_4.indd 199 13-02-2023 19:52:54

సిద్ధాంతము: 6 : ఏకాంతరవృత్తఖండ సిద్ధాంతము (Alternate Segment Teorem)

నిర్వచనము

ఒక వృత్తమునకు ఒక స్పర్శరేఖను గీచిన, స్పర్శబిందువు నుండి గీచిన జ్యా, ఆ స్పర్శరేఖతో చేయుకోణము ఏకాంతర వృత్తఖండములోని కోణములకు సమానము.



పటం. 4.61

నిరూపణ

దత్తాంశము : O కేంద్రముగా గల వృత్తమును AB అను స్పర్శరేఖ P వద్ద తాకుచున్నది PQ జ్యా మరియు S, T బిందువులు, జ్యా PQ కు ఇరువైపుల వృత్తముపై ఉన్న ఏవైన బిందువులు.

సారాంశము: (i) $\angle QPB = \angle PSQ$ మరియు (ii) $\angle QPA = \angle PTQ$

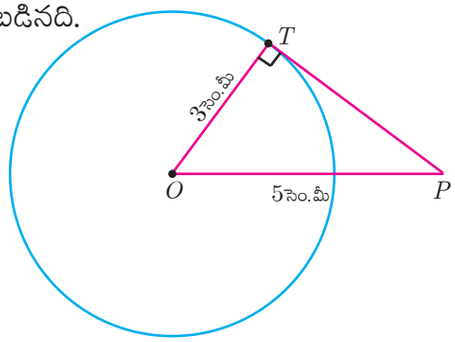
నిర్మాణము: POR అను వృత్త వ్యాసమును గీచి, QR, QS మరియు PS లను కలుపుము.

వ.సం.	వివరణ	కారణము
1.	$\angle RPB = 90^\circ$ ఇప్పుడు, $\angle RPQ + \angle QPB = 90^\circ$ ...(1)	స్పర్శ బిందువు AB వద్ద వ్యాసము RP స్పర్శ రేఖకు లంబముగా నుండును.
2.	ΔRPQ లో, $\angle PQR = 90^\circ$ ...(2)	అర్ధ వృత్తములోని కోణము 90Ύ.
3.	$\angle QRP + \angle RPQ = 90^\circ$ ...(3)	లంబకోణత్రిభుజములో అల్పకోణముల మొత్తము 90° అగును.
4.	$\angle RPQ + \angle QPB = \angle QRP + \angle RPQ$ $\angle QPB = \angle QRP$ ...(4)	(1) మరియు (2) ల నుండి.
5.	$\angle QRP = \angle PSQ$ ...(5)	ఒకే వృత్తఖండములోని కోణములు సమానము
6.	$\angle QPB = \angle PSQ$ ...(6)	కావున (4) మరియు (5) నుండి (i)ని నిరూపించబడినది.
7.	$\angle QPB + \angle QPA = 180^\circ$ ...(7)	రేఖీయ ద్వయము.
8.	$\angle PSQ + \angle PTQ = 180^\circ$ ...(8)	చక్రీయ చతుర్భుజములోని అభిముఖ కోణముల మొత్తము 180Ύ
9.	$\angle QPB + \angle QPA = \angle PSQ + \angle PTQ$	(7) మరియు (8) నుండి
10.	$\angle QPB + \angle QPA = \angle QPB + \angle PTQ$	$\angle QPB = \angle PSQ$ (6) నుండి
11.	$\angle QPA = \angle PTQ$	కనుక (ii) నిరూపించబడినది కావున సిద్ధాంతము నిరూపించబడినది.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_4.indd 200 13-02-2023 19:52:56

ఉదాహరణ 4.24 3 సెం.మీ వ్యాసార్ధము గల వృత్త కేంద్రము నుండి 5 సెం.మీ దూరములో గల బిందువుకు నుండి వృత్తమునకు గీయబడిన స్పర్శ రేఖల పొడవును కనుగొనుము.

సాధన $OP = 5$ సెం.మీ వ్యాసార్ధము $r = 3$ సెం.మీ ఇవ్వబడినది.



పటం. 4.62

స్పర్శ రేఖ PT పొడవు కనుగొనుట.

ΔOTP, లంబకోణముత్రిభుజములో

$OP^2 = OT^2 + PT^2$ (పైథాగరస్ సిద్ధాంతము ప్రకారము)

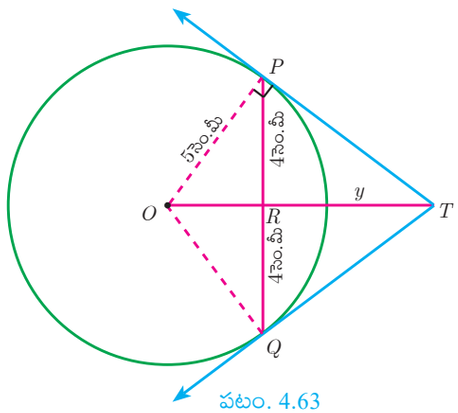
$5^2 = 3^2 + PT^2$ నుండి $PT^2 = 25 - 9 = 16$

కావున స్పర్శ రేఖ పొడవు $PT = 4$ అగును.

ఉదాహరణ 4.25 5 సెం.మీ వృత్త వ్యాసార్ధము PQ అనునది 8 సెం.మీ పొడవు గల జ్యా అగును. P మరియు Q. లు ద్వారా పోవు స్పర్శరేఖలు T బిందువు వద్ద కలిసిన, TP యొక్క స్పర్శరేఖ పొడవు కనుగొనుము.

సాధన $TR = y$ అనుకొనిన PQ .... కు OT లంబ సమద్విఖండన అయిన.

$PR = QR = 4$ సెం.మీ.



పటం. 4.63

ΔORP, $OP^2 = OR^2 + PR^2$

$OR^2 = OP^2 - PR^2$

$OR^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow OR = 3$ సెం.మీ

$OT = OR + RT = 3 + y$ ... (1)

ΔPRT , లో $TP^2 = TR^2 + PR^2$ ... (2)

మరియు ΔOPT నుండి , $OT^2 = TP^2 + OP^2$

$OT^2 = (TR^2 + PR^2) + OP^2$ నుండి ((2)) నుండి TP^2 ప్రతిక్షేపించగా)

$(3 + y)^2 = y^2 + 4^2 + 5^2$ ((1) నుండి OT ని ప్రతిక్షేపించగా)

$9 + 6y + y^2 = y^2 + 16 + 25$

$6y = 41 - 9$ కావున $y = \frac{16}{3}$

(2) నుండి, $TP^2 = TR^2 + PR^2$

కావున $TP^2 = \left(\frac{16}{3}\right)^2 + 4^2 = \frac{256}{9} + 16 = \frac{400}{9}$

$TP = \frac{20}{3}$ సెం.మీ అగును.

ఉదాహరణ 4.26 పటము 4.64 లో, O అనునది వృత్తము యొక్క కేంద్రము PQ అనునది ఒక జ్యా అగును. స్పర్శ రేఖ PR, PQ కు P వద్ద 50° కోణము ఏర్పరిచిన, $\angle POQ$ ను కనుగొనుము.

సాధన $\angle OPQ = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$ (స్పర్శ రేఖకు, వ్యాసార్ధమునకు మధ్యగల కోణం 90°)

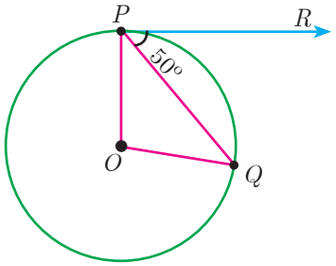
10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_4.indd 201 13-02-2023 19:52:59

$OP = OQ$ (వృత్తములో వ్యాసార్ధము సమానము)

$\angle OPQ = \angle OQP = 40°$ ($\triangle OPQ$ అనునది సమద్విబాహు త్రిభుజము)

$\angle POQ = 180° - \angle OPQ - \angle OQP$

$\angle POQ = 180° - 40° - 40° = 100°$



పటం. 4.64

ఉదాహరణ 4.27 ప్రక్క పటము 4.65 లో ΔABC ఒక వృత్తమును స్పృశిస్తూ దాని చుట్టూ అమరియున్నది అయిన BC యొక్క పొడవును కనుగొనుము.

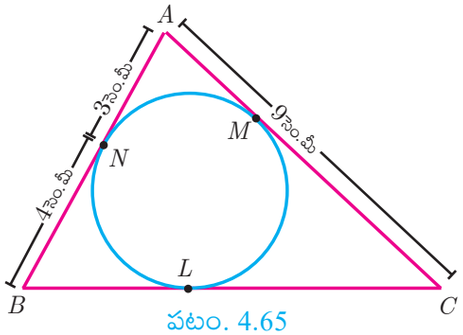
సాధన $AN = AM = 3$ సెం.మీ

(ఒకే బాహ్య బిందువు నుండి గీయబడిన స్పర్శ రేఖలు సమము)

$BN = BL = 4$ సెం.మీ

$CL = CM = AC - AM = 9 - 3 = 6$ సెం.మీ

$BC = BL + CL = 4 + 6 = 10$ సెం.మీ



పటం. 4.65

ఉదాహరణ 4.28 రెండు ఏక కేంద్ర వృత్తాల వ్యాసార్ధములు 4 సెం.మీ, 5 సెం.మీ. ఒక వృత్తము యొక్క జ్యా అనునది మరొక వృత్తమునకు స్పర్శరేఖగా ఏర్పడిన ఆ వృత్త జ్యా పొడవును కనుగొనుము.

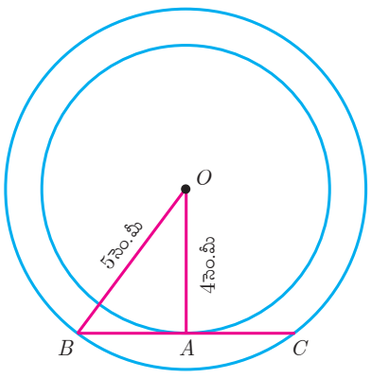
సాధన $OA = 4$ సెం.మీ, OB = 5 సెం.మీ; మరియు $OA \perp BC$.

$OB^2 = OA^2 + AB^2$

$5^2 = 4^2 + AB^2$ నుండి $AB^2 = 9$

కనుక $AB = 3$ సెం.మీ

$BC = 2AB$ కావున $BC = 2 \times 3 = 6$ సెం.మీ



పటం. 4.66

4.5.1 వృత్తమునకు స్పర్శ రేఖలను నిర్మించుట

క్రింది ఇవ్వబడిన వాటిని ఏ విధముగా నిర్మించ వలయునని ఇప్పుడు చర్చించిద్దాం

(i) కేంద్రమునుపయోగించి వృత్తమునకు స్పర్శరేఖలు నిర్మించుట.

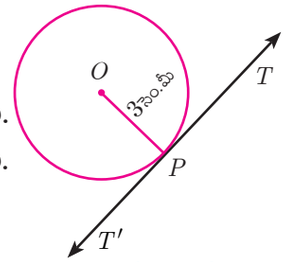
(ii) ప్రత్యామ్నాయ వృత్త ఖండము సిద్ధాంతము ఉపయోగించి వృత్తమునకు స్పర్శరేఖలు నిర్మించుట.

(iii) బాహ్య బిందువు నుండి వృత్తమునకు రెండు స్పర్శరేఖలు నిర్మించుట

వృత్తమునకు స్పర్శరేఖను నిర్మించుట (కేంద్రమునుపయోగించి)

ఉదాహరణ 4.29 3 సెం.మీ వ్యాసార్ధంతో ఒక వృత్తమును గీయుము. వృత్తముపై ఏదేని ఒక బిందువు P తీసుకొని ఆ బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖను గీయుము.

సాధన వ్యాసార్ధము $r = 3$ సెం.మీ



చిత్తు పటము

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_4.indd 202 13-02-2023 19:53:02

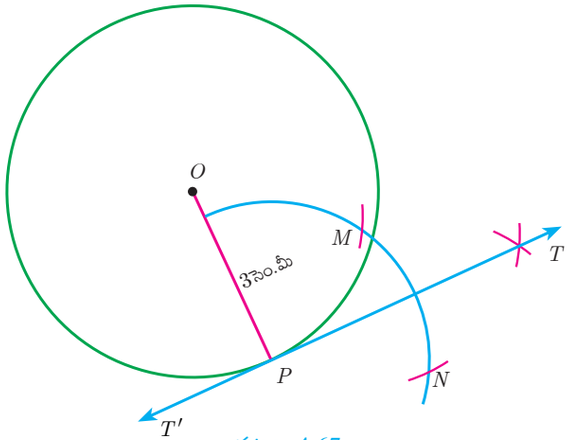
నిర్మాణక్రమము

సోపానం 1: O కేంద్రంగా 3 సెం.మీ వ్యాసార్ధంతో ఒక వృత్తమును గీయుము.

సోపానం 2: వృత్తముపై P బిందువు గుర్తించి OP ను కలుపుము.

సోపానం 3: P బిందువు ద్వారా OP నకు లంబముగా TT' గీయుము.

సోపానం 4: TT' కావలసిన స్పర్శరేఖ అగును.



పటం. 4.67

వృత్తమునకు స్పర్శరేఖను నిర్మించుట. (స్పర్శ రేఖ–జ్యా సిద్ధాంతంనుపయోగించి)
(Construct of a tangent to a circle)

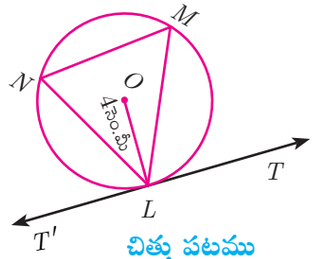
ఉదాహరణ 4.30 4 సెం.మీ వ్యాసార్ధముతో ఒక వృత్తము గీయుము. దానిపై L అను బిందువును గుర్తించి, దాని ద్వారా స్పర్శ రేఖ–జ్యా సిద్ధాంతమునుపయోగించి వృత్తమునకు స్పర్శరేఖను గీయుము.

సాధన

వృత్త వ్యాసార్ధం $= 4$ సెం.మీ

నిర్మాణక్రమము

సోపానం 1 : O కేంద్రంగా 4 సెం.మీ వ్యాసార్ధంతో ఒక వృత్తమును గీయుము.



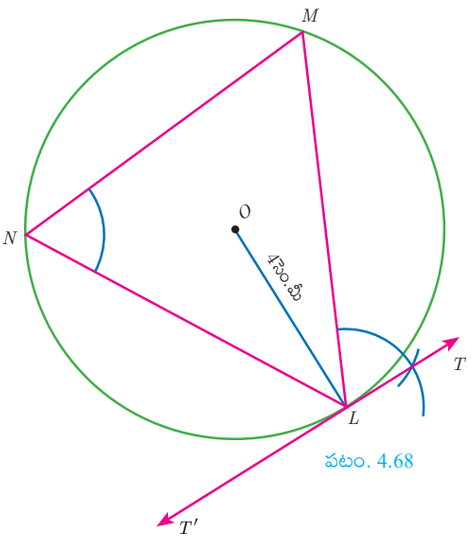
చిత్తు పటము

సోపానం 2 : వృత్తముపై ఏదేని ఒక బిందువు L ని గుర్తించుము. L ద్వారా LM అను ఒక జ్యాను గీయుము.

సోపానం 3 : వృత్తము పై L మరియు M లకు విభిన్న బిందువైన N ను గుర్తించుము. L, M మరియు N లు అపసవ్యదిశలో నుండును. LN మరియు NM లను కలుపుము.

సోపానం 4 : స్పర్శ రేఖ L ను TT' వరకు పొడిగించుము. కనుక $\angle TLM = \angle MNL$.

సోపానం 5 : TT' కావలసిన స్పర్శరేఖ అగును.



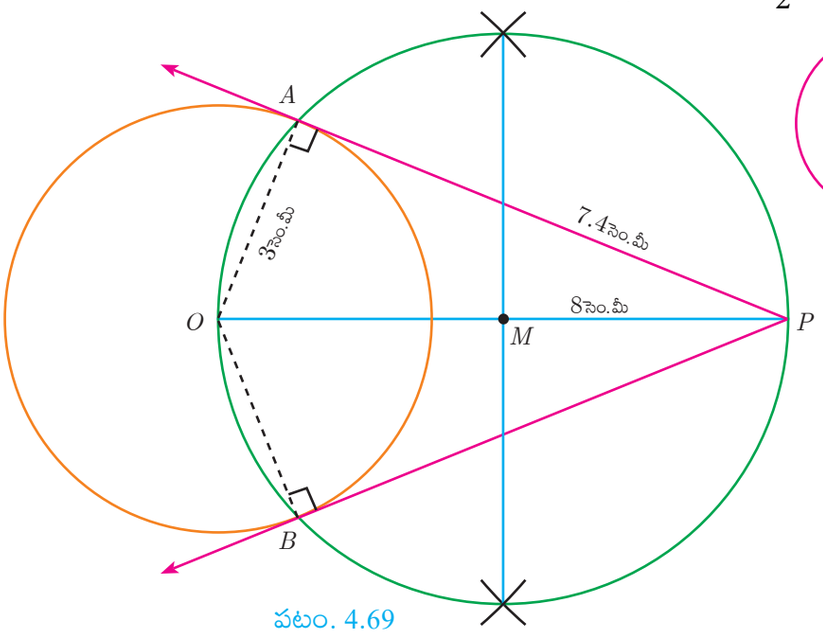
పటం. 4.68

బాహ్య బిందువు P నుండి వృత్తమునకు రెండు స్పర్శ రేఖలను నిర్మించుట.

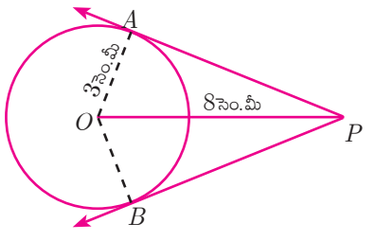
ఉదాహరణ 4.31 6 సెం.మీ వ్యాసార్ధంతో ఒక వృత్తమును గీయుము. ఈ వృత్త కేంద్రం నుండి 8సెం.మీ దూరంలో బాహ్య బిందువు నుండి వృత్తమునకు రెండు స్పర్శరేఖలు PA మరియు PB గీయుము. వాటి పొడవులను కనుగొనుము?

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_4.indd 203 13-02-2023 19:53:02

సాధన వృత్త వ్యాసము $(d) = 6$ సెం.మీ, వ్యాసార్ధము $(r) = \frac{6}{2} = 3$ సెం.మీ కనుగొనెదము.



పటం. 4.69



చిత్తు పటము

నిర్మాణక్రమము

సోపానం 1: O కేంద్రముగా 3 సెం.మీ, వ్యాసార్ధంతో ఒక వృత్తమును గీయుము.

సోపానం 2: O నుండి 8 సెం.మీ OP గీయుము.

సోపానం 3: OP కి లంబసమద్విఖండన రేఖను గీయుము. అది OP ని M వద్ద ఖండిస్తుంది.

సోపానం 4: M కేంద్రముగా MO వ్యాసార్ధముతో మరొక వృత్తమును గీయుము. రెండు వృత్తములు A మరియు B ల వద్ద ఖండించుకొనును.

సోపానం 5: PA మరియు PB లను కలిపిన, కావలసిన స్పర్శరేఖలు ఏర్పడును. స్పర్శరేఖల పొడవులు $PA = PB = 7.4$ సెం.మీ

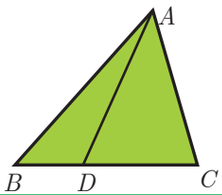
సరిచూడుము : లంబకోణ త్రిభుజము OAP, $PA^2 = OP^2 - OA^2 = 64 - 9 = 55$

$PA = \sqrt{55} = 7.4$ సెం.మీ (రమారమిగా).

4.6 అనురూపత సిద్ధాంతము (Concurrency Theorem)

నిర్వచనము

ఒక త్రిభుజము యొక్క ఒక శీర్షము నుండి ఆ త్రిభుజము యొక్క ఎదుటి భుజముకు గీయబడు రేఖాఖండమును సీవియన్ అందురు. పటములో AD అనునది ఒక సీవియన్ అగును.



ప్రత్యేక సీవియన్‌లు

(i) ఎదుటి భుజమునకు ఒక సర్వసమాన విభాగముగా విభజించు మధ్యగతరేఖ అనునది ఒక సీవియన్ అందురు.

(ii) ఎదుటి భుజమునకు లంబముగా వుండు ఉన్నతి (ఎత్తు)ని ఒక సీవియన్ అందురు.

(iii) కోణమును రెండు సమాన భాగముగా విభజించు కోణసమద్విఖండనరేఖ అనునది ఒక సీవియన్ అగును.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_4.indd 204 13-02-2023 19:53:03

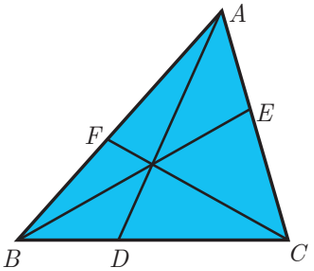
మీకు తెలుసా?

ఇటలీ దేశమునకు చెందిన ఇంజనీర్ జియోవాని సీవా అను అతని పేరు నుండి సీవియన్ అని పదము వచ్చినది. ఇతను సీవియన్లు గూర్చి సిద్ధాంతములు నిరూపించెను.

సీవాస్ సిద్ధాంతము (నిరూపణ లేకుండా)

నిరూపణ

ABC అనునది ఒక త్రిభుజము అనుకొనుము. భుజములు BC, CA, మరియు AB లో ఉండు బిందువులు క్రమముగా $D, E,$ మరియు F అనుకొనుము. త్రిభుజము యొక్క భుజములు ఒకే దిశననుసరించి AD, BE, CF అను సీవియన్లు అనుషక్తము అయిన $\frac{BD}{DC}\times\frac{CE}{EA}\times\frac{AF}{FB}=1$ ఒక్కొక్క నిష్పత్తిని తలక్రిందులుగా (విలోమము) మార్చినను పై చెప్పబడినది నిజమే అగును. ఎందుకంటే 1 యొక్క విలోమం ఒకటే అగును.



పటం. 4.70

మీకు తెలుసా?

జియోవాని సీవా (డిసంబర్ 7, 1647 – జూన్ 15, 1734)

1686 న మాండువా విశ్వవిద్యాలయంలో గణిత అధ్యాపకునిగా చేరిన "సివా" తన జీవిత చివరినాటి వరకు అచటనే ఉద్యోగము చేసెను. 1678 న ఇతను కృతిమ రేఖాగణితము, త్రిభుజములు గూర్చి ఒక ముఖ్యమైన సిద్ధాంతమును ప్రచురించెను. ఆ సిద్ధాంతము "సీవాస్ సిద్ధాంతము" అని పిలువబడుచున్నది.

1692 న "ఒపస్‌కులా మెతమెటికా" మరియు జియామండ్రియో మోటస్ అను పరిశోధనలో మరల తెలుసుకొని వెలిబుచ్చెను. యంత్ర గణితశాస్త్రము మరియు హైడ్రాతిక్స్ విభాగములో సీవా సిద్ధాంత నియమములు ఉపయోగించెను.

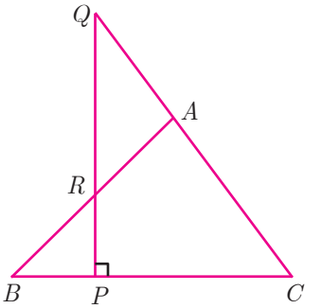
సూచన

- అనేక సీవియన్స్ త్రిభుజమునకు అంతరములో అమరినను, అన్ని సీవియన్స్ త్రిభుజమునకు లోపలే అమరియుండు అవసరము లేదు..

మెనలాస్ సిద్ధాంతము

నిరూపణ

ABC అను త్రిభుజము యొక్క భుజములు BC, CA, AB (లేక వాటి యొక్క పొడిగింపు) లో ఉండు బిందువులు క్రమముగా P, Q, R కలిగిన ఒక రేఖపై బిందువులుగా అమరియుండి కావలసిన మరియు సాధారణ పద్ధతి $\frac{BP}{PC}\times\frac{CQ}{QA}\times\frac{AR}{RB}=-1$ ఈ సూత్రములో నుండు రేఖా ఖండములు అన్నియు దిశవిభాగాలు అగును.



పటం. 4.71

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_4.indd 205 13-02-2023 19:53:03

మీకు తెలుసా? **మెనలాస్**

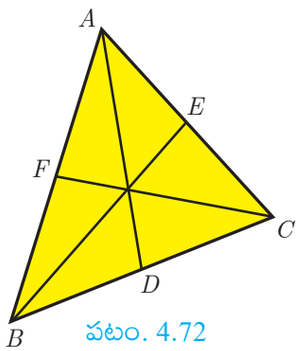
ఇతని "స్పెరికా" అను పుస్తకములో మొట్టమొదటగా మెనలాస్ సిద్ధాంతమును చెప్పియున్నారు. దీనిని తరువాత కాలంలో టాలమి తన "ఆలెమాగెస్ట్" అను గ్రంథంలో పేర్కొనియున్నారు. గోళములు గోళపు త్రిభుజములచే నిర్మితమైనవని ఈ సిద్ధాంతం నిరూపించినది.

సూచన

- $BP \times CQ \times AR = -PC \times QA \times RB$ అనియు. మెనలాస్ సిద్ధాంతమును పేర్కొనవచ్చును.
- BP అనునది PB గాను, CQ అనునది QC గాను, AR అనునది RA గాను మార్చినట్లైన లేక BP, PC, CQ, QA, AR, RB అను ఒక దిశలో అమరిన 6 రేఖాఖండములలో ఏదైనా ఒక దానిని స్థానమార్పిడి చేసిన పై తెలిపిన గుణకార లబ్ధము 1 అగును.

ఉదాహరణ 4.32 ఒక త్రిభుజములోని మధ్యగతరేఖలు అనుషక్తములు అని నిరూపించుము.

సాధన త్రిభుజము యొక్క ఒక్కొక్క శీర్షము నుండి దాని ఎదుటి భుజము యొక్క మధ్య బిందువుకు గీయబడు రేఖాఖండమును మధ్యరేఖ అంటారు.



పటం. 4.72

భుజములు BC, CA మరియు AB కు మధ్య బిందువులు క్రమముగా D, E మరియు F నకు గీయబడు మధ్య రేఖలు సీవియన్‌లుగా ఉండును.

BC కి మధ్యగత బిందువు D కావున, $BD = DC$ కనుక, $\frac{BD}{DC} = 1$ ...(1)

CA కి మధ్యగత బిందువు E కావున, $CE = EA$ కనుక, $\frac{CE}{EA} = 1$ ... (2)

AB కి మధ్యగత బిందువు F కావున, $AF = FB$ కనుక, $\frac{AF}{FB} = 1$ ... (3)

(1), (2) మరియు (3) లను గుణించిన మనము పొందునది

$$\frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} \times \frac{AF}{FB} = 1 \times 1 \times 1 = 1$$

కావున సీవాస్ సిద్ధాంతము నిరూపించబడినది.

అందువలన, త్రిభుజ మధ్యగతరేఖలు అనుషక్తములు.

మీకు తెలుసా? మధ్యగత రేఖల అనుషక్త బిందువును గురుత్వ కేంద్రము అందురు.

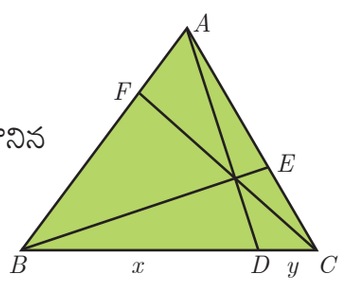
ఉదాహరణ 4.33 AB, AC మరియు BC ల పొడవు 13, 14 మరియు 15 కావున $\frac{AF}{FB} = \frac{2}{5}$ మరియు $\frac{CE}{EA} = \frac{5}{8}$ అయిన BD మరియు DC లను కనుగొనుము.

సాధన $AB = 13$, $AC = 14$ మరియు $BC = 15$ ఇవ్వబడిన

$BD = x$ మరియు $DC = y$ తీసుకొనిన

సీవియన్ సిద్ధాంతం నుండి $\frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} \times \frac{AF}{FB} = 1$ ...(1) తీసుకొనిన

(1) లో $\frac{AF}{FB}$ మరియు $\frac{CE}{EA}$ విలువలను ప్రతిక్షేపించగా



పటం. 4.73

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_4.indd 206 13-02-2023 19:53:05

$\frac{BD}{DC}\times\frac{5}{8}\times\frac{2}{5}=1$ అగును.

$\frac{x}{y}\times\frac{10}{40}=1$ $\frac{x}{y}\times\frac{1}{4}=1$. పొందగలము. , $x=4y$ ...(2)

కావున $BC=BD+DC=15$ కనుక, $x+y=15$ ... (3)

$x=4y$ ను (2) నుండి (3) లో ప్రతిక్షేపించగా $4y+y=15$ $5y=15$ పొందగలము.

కావున $y=3$ అగును. $y=3$ ను (3) లో ప్రతిక్షేపించగా $x=12$ $BD=12$, $DC=3$. అగును.

ఉదాహరణ 4.34 అనేక వృక్షములు గల తోటలో P, Q, R అను వృక్షములు పటములో చూపిన విధముగా అమరియున్నవి A, B, C అను త్రిభుజములో భుజము BC పై P, భుజము AC పై Q, భుజము AB పై R అను బిందువులు కలవు. మరియు $BP=2$ మీ, $CQ=3$ మీ, $RA=10$ మీ, $PC=6$ మీ, $QA=5$ మీ, $RB=2$ మీ అగును. P, Q, R అను వృక్షములు ఒకే సరళ రేఖ పై అమరునా అని పరిశీలించుము.

సాధన మీన్లై సిద్ధాంతం ప్రకారం P, Q, R ఏక రేఖీయ బిందువులు అగును (ఒకే రేఖపై ఉండు బిందువులు)

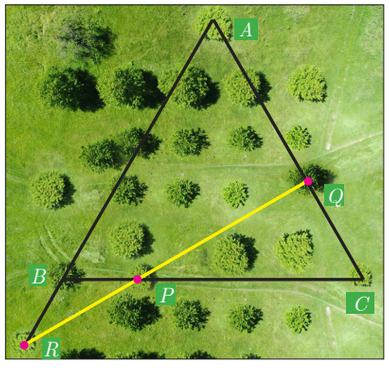
if $\frac{BP}{PC}\times\frac{CQ}{QA}\times\frac{RA}{RB}=1$ ...(1) అయినచో

$BP=2$ మీ, $CQ=3$ మీ, $RA=10$ మీ, $PC=6$ మీ,
$QA=5$ మీ మరియు $RB=2$ మీ ఇవ్వబడినది.

(1) లో ఇవ్వబడిన విలువలను ప్రతిక్షేపించగా

$\frac{BP}{PC}\times\frac{CQ}{QA}\times\frac{RA}{RB}=\frac{2}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{10}{2}=\frac{60}{60}=1$ ని పొందగలము.

కనుక P, Q, R లు వృక్షములు ఒకే రేఖపై అమరియున్నవి.



పటం. 4.74

ప్రగతి శోధన

1. సరళ రేఖ, వృత్తమును స్పర్శించు పోవు సాధారణ బిందువు _____ అని పిలువబడును.
2. _____ యొక్క ఒక భాగము జ్యా అగును.
3. వృత్తమునకు _____ ఉండు బిందువు నుండి గీయబడు స్పర్శ రేఖ యొక్క పొడవులు సమానము.
4. వృత్తము యొక్క _____ బిందువుల నుండి ఏ ఒక్క స్పర్శరేఖ గీయలేము.
5. _____ అను సీవియన్ (cevian) త్రిభుజం యొక్క కోణములను రెండు సమభాగాలుగా విభజించును.

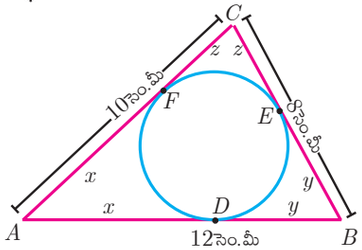
10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_4.indd 207 13-02-2023 19:53:07

అభ్యాసము 4.4

1. వృత్త కేంద్రము నుండి 25 సెం.మీ దూరమున గల 'P' బాహ్య బిందువు నుండి గీయబడిన స్పర్శరేఖ పొడవు 24 సెం.మీ అయిన వృత్తకేంద్ర వ్యాసార్ధమును కనుగొనుము.

2. లంబకోణ త్రిభుజం $\triangle LMN$ లో $\angle L = 90°$ అగును. ఒక వృత్తము అనునది లంబకోణ త్రిభుజం యొక్క లోపల వాటి యొక్క భుజములు స్పర్శించునట్లు గీయబడియున్నది. లంబకోణమును కలిగిన భుజములు పొడవు 6 సెం.మీ, మరియు 8 సెం.మీ అయిన వృత్త వ్యాసార్ధమును కనుగొనుము.

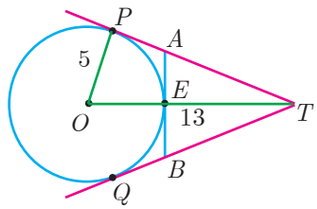
3. పటంలో చూపిన విధంగా, 8 సెం.మీ, 10 సెం.మీ మరియు 12 సెం.మీ భుజములు కలిగిన త్రిభుజం లో ఒక వృత్తము అమరియున్న యెడల AD, BE మరియు CF ను కనుగొనుము.



4. O ను కేంద్రముగా కలిగిన వృత్తమునకు P నుండి గీయబడు స్పర్శ రేఖ PQ, QOR అనునది వ్యాసము అగును. వృత్తములో $\angle POR = 120°$ అయిన, $\angle OPQ$ ను కనుగొనుము.

5. స్పర్శరేఖ ST వృత్తమును B అను బిందువు వద్ద స్పర్శించు కొనుచున్నది. $\angle ABT = 65°$, AB అనునది ఒక జ్యా అయిన, $\angle AOB$ ను కనుగొనుము. ఇందులో "O" అనునది తమ యొక్క కేంద్రమగును.

6. ఇవ్వబడిన పటములో O ను కేంద్రముగా కలిగిన వృత్తము యొక్క వ్యాసార్ధము 5 సెం.మీ అగును. T అనునది $OT = 13$ సెం.మీ అగు అమరియున్న ఒక బిందువు మరియు OT అనునది వృత్తమును E లో ఖండించుచున్నది. వృత్తములో E అను బిందువు గుండా పోవు ఒక స్పర్శరేఖ AB అయిన, AB యొక్క పొడవును కనుగొనుము.

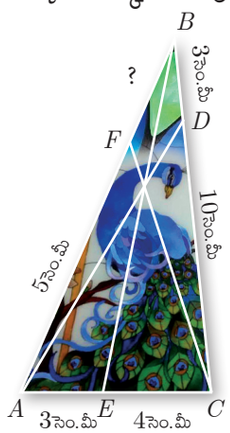


7. రెండు ఏకకేంద్ర వృత్తాలలో, 16 సెం.మీ పొడవు కలిగిన పెద్ద వృత్తము యొక్క జ్యా అనునది 6సెం.మీ వ్యాసార్ధం కలిగిన చిన్న వృత్తమునకు స్పర్శరేఖగా అమరిన, పెద్ద వృత్తము యొక్క వ్యాసార్ధమును కనుగొనుము.

8. O మరియు O' కేంద్ర బిందువులుగా కలిగిన రెండు వృత్తముల యొక్క వ్యాసార్ధములు క్రమముగా. 3 సెం.మీ మరియు 4 సెం.మీ అగును. ఈ రెండును P, Q అను బిందువులు వద్ద ఖండించుకొనుచున్నవి. OP మరియు $O'P$ లు వృత్తము యొక్క రెండు స్పర్శరేఖలు అయిన, ఉమ్మడి జ్యా PQ యొక్క పొడవు కనుగొనుము.

9. ఒక త్రిభుజము యొక్క కోణసమద్విఖండన రేఖలు అనుషక్తమని చూపుము.

10. పటములో చూపిన విధముగా ఒక త్రిభుజము అలంకరణ అర్ధపు కిటికిని పూర్తిగా తయారు చేయుటకు ఒక చిన్న అర్ధపు భాగము ఒక కళా నిపుణుడు కావలయును. మిగిలిన అద్ధములు భాగములు యొక్క పొడవులను అమర్చుటకు అతనికి కావలసిన అద్ధము యొక్క భాగము పొడవును లెక్కించుము.



11. P ను కేంద్రముగా కలిగిన 3.4 సెం.మీ వ్యాసార్ధము కలిగిన ఒక వృత్తమునకు R బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖను గీయుము.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_4.indd 208 13-02-2023 19:53:08

12. 4.5 సెం.మీ వ్యాసార్ధము కలిగిన వృత్తమును గీయుము. వృత్తము పై ఏదేని ఒక బిందువునకు ఏకాంతరవృత్తఖండ సిద్ధాంతమును ఉపయోగించి స్పర్శరేఖ గీయుము.

13. 5 సెం.మీ వ్యాసార్ధము కలిగిన వృత్తము యొక్క కేంద్రము నుండి 10 సెం.మీ దూరములో గల బిందువు నుండి వృత్తమునకు స్పర్శరేఖలు గీయుము. మరియు స్పర్శ రేఖ యొక్క పొడవులను కనుగొనుము.

14. 4 సెం.మీ వ్యాసార్ధము కలిగిన వృత్తమును గీచి. ఆ వృత్త కేంద్రము నుండి 11 సెం.మీ దూరములో ఒక బిందువును గుర్తించి, ఆ బిందువు నుండి వృత్తమునకు రెండు స్పర్శరేఖలు గీయుము.

15. 6 సెం.మీ వ్యాసము గల వృత్తమును గీచి వృత్త కేంద్రము నుండి 5 సెం.మీ దూరములో నున్న ఒక బిందువు గుర్తించుము. వృత్తమునకు స్పర్శరేఖలను గీయుము మరియు స్పర్శరేఖలు పొడవులను కొలువుము.

ISY2K

16. O ను కేంద్రముగా 3.6 సెం.మీ వ్యాసార్ధము కలిగిన వృత్తమును గీయుము. వృత్త కేంద్రము నుండి 7.2 సెం.మీ దూరములో నున్న P అను బిందువును గుర్తించి P బిందువు నుండి వృత్తమునకు స్పర్శరేఖలు గీయుము.

అభ్యాసము 4.5

బహుళ ఎంపిక ప్రశ్నలు

1. $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{FD}$ అయిన, ABC మరియు EDF ఎప్పుడున్న త్రిభుజములు సరూపములుగా ఉండును.

(A) $\angle B = \angle E$ (B) $\angle A = \angle D$ (C) $\angle B = \angle D$ (D) $\angle A = \angle F$

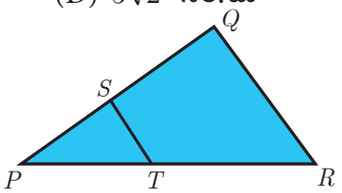
2. ΔLMN, త్రిభుజములో $\angle L = 60°$, $\angle M = 50°$ మరియు $\Delta LMN \sim \Delta PQR$ అయిన $\angle R$ యొక్క విలువ

(A) $40°$ (B) $70°$ (C) $30°$ (D) $110°$

3. సమద్విబాహు త్రిభుజము ΔABC లో, $\angle C = 90°$ మరియు $AC = 5$ సెం.మీ, అయిన AB అనునది

(A) 2.5 సెం.మీ (B) 5 సెం.మీ (C) 10 సెం.మీ (D) $5\sqrt{2}$ సెం.మీ

4. ఇవ్వబడిన పటము నందు $ST \parallel QR$, $PS = 2$ సెం.మీ మరియు $SQ = 3$ సెం.మీ అయిన ΔPQR యొక్క వైశాల్యమునకు ΔPST వైశాల్యమునకు గల నిష్పత్తి.



(A) 25 : 4 (B) 25 : 7 (C) 25 : 11 (D) 25 : 13

5. రెండు సరూప త్రిభుజములు ΔABC మరియు ΔPQR యొక్క చుట్టుకొలతలు క్రమముగా 36 సెం.మీ మరియు 24 సెం.మీ అగును. $PQ = 10$ సెం.మీ అయిన AB యొక్క పొడవు.

(A) $6\frac{2}{3}$ సెం.మీ (B) $\frac{10\sqrt{6}}{3}$ సెం.మీ (C) $66\frac{2}{3}$ సెం.మీ (D) 15 సెం.మీ

6. ΔABC లో $DE \parallel BC$, $AB = 3.6$ సెం.మీ, $AC = 2.4$ సెం.మీ మరియు $AD = 2.1$ సెం.మీ అయిన, AE యొక్క పొడవు

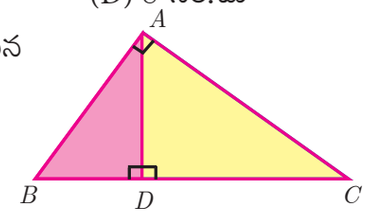
(A) 1.4 సెం.మీ (B) 1.8 సెం.మీ (C) 1.2 సెం.మీ (D) 1.05 సెం.మీ

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_4.indd 209 13-02-2023 19:53:11

7. ΔABC లో AD అనునది $\angle BAC$ యొక్క సమద్విఖండన $AB = 8$ సెం.మీ, $BD = 6$ సెం.మీ మరియు $DC = 3$ సెం.మీ అయిన, భుజము AC యొక్క పొడవు

(A) 6 సెం.మీ (B) 4 సెం.మీ (C) 3 సెం.మీ (D) 8 సెం.మీ

8. ఇవ్వబడిన పటములో $\angle BAC = 90°$ మరియు $AD \perp BC$ అయిన



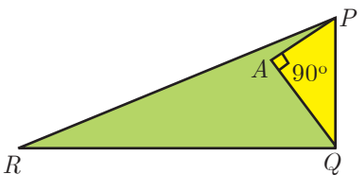
(A) $BD \cdot CD = BC^2$ (B) $AB.AC = BC^2$

(C) $BD \cdot CD = AD^2$ (D) $AB \cdot AC = AD^2$

9. 6 మీ. మరియు 11 మీ ఎత్తు గల రెండు స్తంభములు సమతల భూతలంలో లంబముగా ఉన్నవి. వాటి యొక్క క్రింది భాగముల మధ్య గల దూరము 12 మీ అయిన వాటి యొక్క పై శీర్ష భాగమునకు మధ్య గల దూరము ఎంత?

(A) 13 మీ (B) 14 మీ (C) 15 మీ (D) 12.8 మీ

10. ఇవ్వబడిన పటములో, $PR = 26$ సెం.మీ, $QR = 24$ సెం.మీ, $\angle PAQ = 90°$, PA=6 సెం.మీ మరియు $QA = 8$ సెం.మీ అయిన $\angle PQR$.



(A) 80° (B) 85° (C) 75° (D) 90°

11. వృత్తము యొక్క స్పర్శరేఖను, దాని యొక్క వ్యాసార్ధము లంబముగా ఏర్పడిన స్థలము

(A) కేంద్రము (B) స్పర్శ బిందువు (C) అనంతము (D) జ్యా

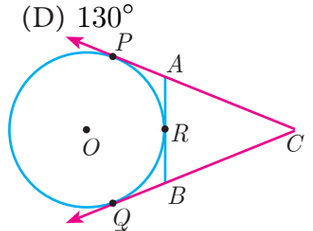
12. వృత్తము యొక్క బాహ్య బిందువు నుండి వృత్తమునకు ఎన్ని స్పర్శరేఖలు గీయవచ్చును.

(A) ఒకటి (B) రెండు (C) అనంతము (D) సున్న

13. O ను కేంద్రముగా కలిగిన వృత్తమునకు బాహ్య బిందువు P నుండి గీయబడిన స్పర్శరేఖలు PA మరియు PB అగును. $\angle APB = 70°$ అయిన $\angle AOB$ విలువ

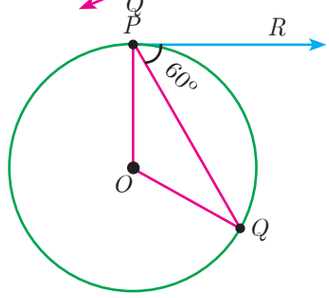
(A) 100° (B) 110° (C) 120° (D) 130°

14. పటము నందు O ను కేంద్రముగా కలిగిన వృత్తమునకు గీయబడిన స్పర్శరేఖలు CP మరియు CQ అగును. ARB అను వృత్తము పై నుండి R ను సంధించు మరొక స్పర్శరేఖ అగును. $CP = 11$ సెం.మీ మరియు $BC = 7$ సెం.మీ అయిన BR యొక్క పొడవు



(A) 6 సెం.మీ (B) 5 సెం.మీ (C) 8 సెం.మీ (D) 4 సెం.మీ

15. పటములో చూపిన విధముగా O ను కేంద్రముగా కలిగిన వృత్తమునకు స్పర్శరేఖ PR అయిన $\angle POQ$

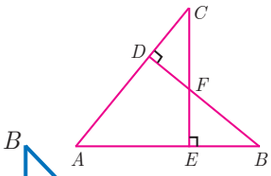


(A) 120° (B) 100° (C) 110° (D) 90°

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_4.indd 210 13-02-2023 19:53:15

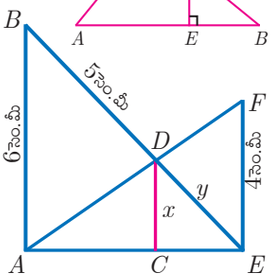
అధ్యాయ అభ్యాసము - 4

1. ఇవ్వబడిన పటములో $BD \perp AC$ మరియు $CE \perp AB$, అయిన



(i) $\Delta AEC \sim \Delta ADB$ (ii) $\frac{CA}{AB} = \frac{CE}{DB}$ అని నిరూపించుము.

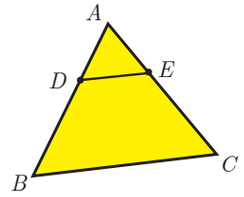
2. ఇవ్వబడిన పటములో $AB \parallel CD \parallel EF$,



$AB = 6$ సెం.మీ $CD = x$, సెం.మీ $EF = 4$ సెం.మీ $BD = 5$ సెం.మీ మరియు $DE = y$ సెం.మీ అయిన, x మరియు y యొక్క విలువను కనుగొనుము.

3. O అనునది త్రిభుజము ABC లోపల అమరియున్న ఒక బిందువు అగును. $\angle AOB, \angle BOC$ మరియు $\angle COA$ యొక్క సమద్విఖండనలు, భుజములు AB, BC మరియు CA ను క్రమముగా D, E మరియు F లను సంధించిన యెడల, $AD \times BE \times CF = DB \times EC \times FA$ చూపుము.

4. ఇవ్వబడిన త్రిభుజము ABC లో $AB = AC$ అగును. $AD = AE$ అని వుండునట్లు D మరియు E అను బిందువులు క్రమముగా భుజములు AB మరియు AC పై అమరియున్నది. B, C, E మరియు D అను బిందువులు ఒకే వృత్తములో అమరును అని చూపుము.



5. రెండు రైల్లు ఒకే సమయములో, ఒక రైల్వేస్టేషన్ నుండి బయలుదేరుచున్నది. మొదటి రైలు బండి పడమర దిక్కుకు రెండవ రైలుబండి ఉత్తరదిక్కుకు ప్రయాణించుచున్నది. మొదటి రైలు బండి 20 కి.మీ/ గం వేగముతోను, రెండవ రైలుబండి 30 కి.మీ/గం వేగముతో పోవుచున్నది. రెండు గంటల తరువాత వాటి యొక్క మధ్య గల దూరము ఎంత?

6. BC యొక్క కేంద్ర బిందువు D మరియు $AE \perp BC.$, $AE \perp BC$. $BC = a, AC = b, AB = c$, $ED = x, AD = p$ మరియు $AE = h$ అయిన

(i) $b^2 = p^2 + ax + \frac{a^2}{4}$ (ii) $c^2 = p^2 - ax + \frac{a^2}{4}$ (iii) $b^2 + c^2 = 2p^2 + \frac{a^2}{2}$ అని నిరూపించుము.

7. 2 మీ ఎత్తుగల వ్యక్తి ఒక చెట్టు యొక్క ఎత్తును కనుగొనుటకు ఇష్టపడెను. చెట్టు యొక్క అడుగుభాగము నుండి 20 మీ దూరములో B అను బిందువు నందు ఒక అద్దము స్థితిజ సమాంతరము పై దిశలో వుంచబడియున్నది. అద్దము నుండి 4 మీ దూరములో C అను బిందువు నిలుచుండు వ్యక్తి చెట్టు యొక్క పై శీర్షభాగము యొక్క బింబము అద్దములో చూడదగినదైన చెట్టు యొక్క ఎత్తును కనుగొనుము (చెట్టు యొక్క అడుగు తలము, అద్దము వ్యక్తి ఒకే సరళరేఖపై ఉండునని అనుకొనుము)

8. 30 అడుగులు ఎత్తు గల ఒక స్తంభము అడుగు తలము నుండి 8 అడుగులు ఎత్తు గల ఒక ఈముకోడి అచట నుండి నడిచిపోవుచున్నది. ఈము కోడి యొక్క నీడ, అది నడచిపోవు దిశలో దీని ముందు పడుచున్నది. ఈము కోడి యొక్క నీడ పొడవునకు, ఈము స్తంభము నుండి వుండు దూరమునకు మధ్యగల సంబంధమును కనుగొనుము.

9. A మరియు B అను బిందువులలో రెండు వృత్తములు ఖండించుకొనుచున్నవి. ఒక వృత్తము యొక్క పై నందు బిందువు P లో నుండి గీయబడు PAC మరియు PBD అను రేఖలు రెండవ వృత్తమును క్రమముగా C మరియు D లో ఖండించుకొనినట్లైన, CD అనునది P ద్వారా గీయబడు స్పర్శరేఖకు తాకును అని నిరూపించుము.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_4.indd 211 13-02-2023 19:53:17

10. ABC అను ఒక త్రిభుజము యొక్క భుజములు AB, BC, AC యొక్క (లేక భుజములు యొక్క ఉన్నతి(ఎత్తు) క్రమముగా D,E,F అను బిందువులు కలవు. $AD : DB = 5 : 3$, $BE : EC = 3 : 2$ మరియు $AC = 21$ అయిన, రేఖాఖండము CF యొక్క పొడవును కనుగొనుము.

గుర్తుంచుకోవలసిన అంశాలు

- రెండు త్రిభుజములు సరూపములైన
  (i) వాటి యొక్క అనురూప కోణములు సమావము.
  (ii) వాటి యొక్క అనురూప భుజములు సమాన నిష్పత్తిలో ఉండును.
- సర్వసమాన త్రిభుజములు అన్నియును అనురూపమైనవి. అయిన దీని విపర్యయము సత్యము కాదు.
- AA సరూపత సిద్ధాంతమనునది AAA సరూపత సిద్ధాంతము అగును.
- ఒక త్రిభుజములోని ఒక కోణము, వేరొక త్రిభుజములోని ఒక కోణమునకు సమానమైన, ఈ కోణాలను కలిగియున్న భుజాలు అనుపాతంలో వుంటే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు.
- రెండు త్రిభుజాలలో, ఒక త్రిభుజములోని భుజాలు వేరొక త్రిభుజములోని భుజాలకు అనుపాతములో వున్న ఆ రెండు త్రిభుజాలలోని అనురూప కోణములు సమానము ఇంకా ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు.
- రెండు త్రిభుజములు సరూపముగా ఉండిన, సర్వసమాన భుజముల నిష్పత్తి దాని సర్వ సమాన చుట్టుకొలతల నిష్పత్తికి సమానము అగును.
- రెండు త్రిభుజములు సర్వసమానమైన అనురూప భుజములు నిష్పత్తి వాటి యొక్క అనురూప చుట్టుకొలత నిష్పత్తులకు సమానమగును.
- రెండు త్రిభుజములు సరూపములైన
  (i) వాటి యొకిక అనురూప కోణములు సమావము.
  (ii) వాటి యొక్క అనురూప భుజములు సమాన నిష్పత్తిలో ఉండును.
- సర్వసమాన త్రిభుజములు అన్నియును అనురూపమైనవి. అయిన దీని విపర్యయము సత్యము కాదు.
- AA సరూపత సిద్ధాంతమనునది AAA సరూపత సిద్ధాంతము అగును.
- ఒక త్రిబుజములోని ఒక కోణము, వేరొక త్రిభుజములోని ఒక కోణమునకు సమానమైన, ఈ కోణాలను కలిగియున్న భుజాలు అనుపాతంలో వుంటే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు.
- రెండు త్రిభుజాలలో, ఒక త్రిభుజములోని భుజాలు వేరొక త్రిభుజములోని భుజాలకు అనుపాతములో వున్న ఆ రెండు త్రిభుజాలలోని అనురూప కోణములు సమానము ఇంకా ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు.
- రెండు త్రిభుజములు సరూపముగా ఉండిన, సర్వసమాన భుజముల నిష్పత్తి దాని సర్వ సమాన చుట్టుకొలతల నిష్పత్తికి సమానము అగును.
- రెండు త్రిభుజములు సర్వసమానమైన అనురూప
- భుజములు నిష్పత్తి వాటి యొక్క అనురూప చుట్టుకొలత నిష్పత్తులకు సమానమగును.
- రెండు సరూప త్రిభుజాలు వైశాల్యాల నిష్పత్తి వాటి అనురూప భుజాల వర్గముల నిష్పత్తికి వర్గమునకు సమానము.

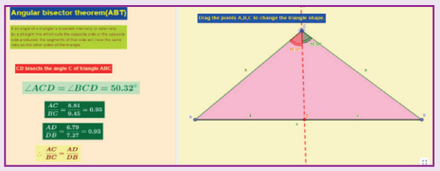
10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_4.indd 212 13-02-2023 19:53:17

- వృత్తముపై గల ఏదైనా బిందువు గుండా గీయబడిన స్పర్శరేఖ, ఆస్పర్శ బిందువు గుండా గీయబడిన స్పర్శ రేఖల పొడవులు సమానము,
- బాహ్య బిందువు నుండి వృత్తమునకు గీయబడు రెండు స్పర్శరేఖల యొక్క పొడవులు సమానము.
- వృత్తములకు గీయబడు రెండు సమాంతర స్పర్శరేఖలు సమానము.

అంతర్జాల కృత్యము

ICT 4.1

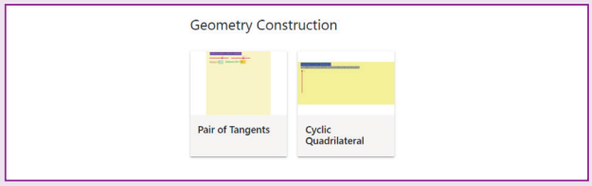
ఫలితములు



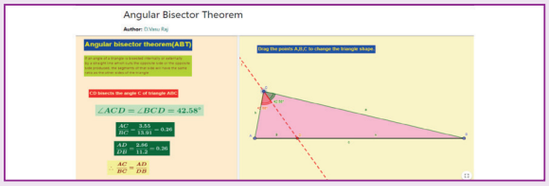
సోపానము 1: బ్రౌజర్ ఓపెన్ చేసి క్రింద ఇవ్వబడిన URL లింక్‌ను టైపు చేసి లేదా QR కోడ్‌ను స్కాన్ చేసి **"Geometry"** అను పేజీకి వెళ్ళుము. **"Angular Bisector theorem"** అను వర్క్‌షీట్‌ను ఎంపిక చేయండి.

సోపానము 2: వర్క్‌షీట్‌లను త్రిభుజము ABC మరియు కోణసమద్విఖండన CD మొదలగువాటిలో సంభవించు మార్పులను గమనించుము. ఎడమవైపు గల నిష్పత్తుల ద్వారా సిద్ధాంతాలను అవగాహన చేసుకొనవచ్చును.

ఫలితములు 1

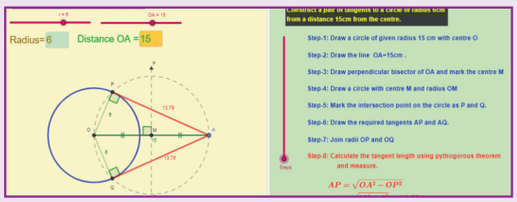


ఫలితములు 2



ICT 4.2

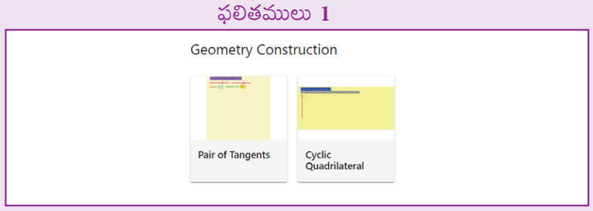
ఫలితములు



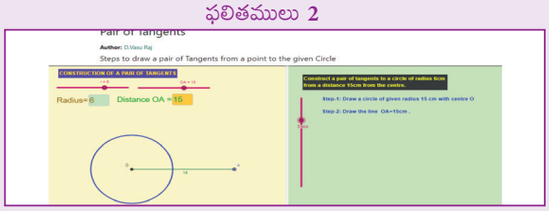
సోపానము 1: బ్రౌజర్ ఓపెన్ చేసి క్రింద ఇవ్వబడిన URL లింక్‌ను టైపు చేసి లేదా QR కోడ్‌ను స్కాన్ చేసి **"Geometry"** అను పేజీకి వెళ్ళుము. **"Pair of Tangents"** అను వర్క్‌షీట్‌ను ఎంపిక చేయండి.

సోపానము 2: వర్క్‌షీట్ యందు వ్యాసార్ధము మరియు స్పర్శరేఖల పొడవులలో ఏర్పడు మార్పులను గమనించుము

ఫలితములు 1



ఫలితములు 2



మరికొన్ని కృత్యముల కొరకు అవే సోపానములను మరలా చేయండి.

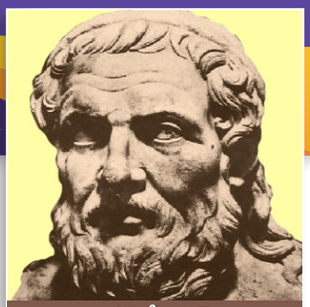
https://www.geogebra.org/m/jfr2zzgy#chapter/356194

లేదా QR కోడ్‌ని స్కేన్ చేయండి.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_4.indd 213 13-02-2023 19:53:18

5 నిరూపక రేఖాగణితము

"వెడల్పులేని పొడవే ఒక రేఖ" – యూక్లిడ్



అపోల్లోనియస్
క్రీ.పూ.శ. 262 - 190

అపోల్లోనియస్ ఆధునిక (ప్రస్తుత) టర్కీలో పెర్గా నందు జన్మించెను. అతని గొప్ప రచనను "కానిక్స్" "conics" గా పిలువబడినది. ఇది వక్రములైన వృత్తము మరియు పరావలయములను రేఖాగణితములో పరిచయంచేసినది. ఇతడు ఆధునిక నిరూపక రేఖాగణితము మూలాలకు సంబంధించిన ఆరు పుస్తకములను రచించెను.

గ్రహ సిద్ధాంతమును అధ్యయనం చేయడానికి మరియు ఆచరణాత్మక సమస్యల పరిష్కారమునకు ఇతని ఆలోచనలు అనువర్తింపబడినది. ఇతడు నీడ గడియారమును అభివృద్ధి చేసెను మరియు అసాధారణమైన రేఖాగణిత నైపుణ్యాలనుపయోగించి విజ్ఞానశాస్త్రంలోని ఇతర శాఖలకు తోడ్పాటునందించెను. ఇందువలన అపోల్లోనియస్‌ను "మహా క్షేత్రగణితజ్ఞుడు" అని ప్రశంసించిరి.

అభ్యసన ఫలితములు

- ఇవ్వబడిన మూడు బిందువులతో ఏర్పడిన త్రిభుజ వైశాల్యమును కనుగొనుట.
- ఇవ్వబడిన నాలుగు బిందువులతో ఏర్పడిన చతుర్భుజ వైశాల్యమును కనుగొనుట.
- ఒక సరళరేఖ వాలును కనుగొనుట.
- వివిధ పద్ధతులలో సరళరేఖ సమీకరణమును కనుగొనుట.
- $ax + by + c = 0$ అను రేఖకు సమాంతరంగా నుండు రేఖ యొక్క సమీకరణమును కనుగొనుట.
- $ax + by + c = 0$ అను రేఖకు లంబంగా నుండు రేఖ యొక్క సమీకరణమును కనుగొనుట.

5.1 పరిచయం



నిరూపక రేఖాగణితమును వైశ్లేషిక రేఖాగణితం అని కూడా పిలిచెదరు. ఇది గణితశాస్త్రపు ఒక శాఖ అగును. ఇందులో ఒక తలంలోని వక్రములను బీజీయ సమీకరణముల ద్వారా సూచింపబడును. ఉదాహరణకు సమీకరణం $x^2 + y^2 = 1$ అనునది ఒక తలంలో ఒక ప్రమాణ వ్యాసార్ధంతో గల వృత్తమును వివరించును. ఇది బీజగణితం మరియు రేఖాగణితమును అనుసంధానించును. ఇక్కడ బీజీయ సమీకరణాలు జ్యామితీయ వక్రాల ద్వారా సూచింపబడుతాయి. అందువలన నిరూపక రేఖాగణితమును గణితశాస్త్రం యొక్క ఒక శాఖగా చూడవచ్చును. ఈ సంబంధమే రేఖాగణితంలోని సమస్యలను బీజగణితంలోని సమస్యలుగా పునఃపరిష్కరించుటకు వీలుకల్పించును మరియు విపర్యయంగాకూడా. నిరూపక జ్యామితిలో బీజీయ సమీకరణములకు దృశ్యపరమైన వివరణలు ఉన్నందువలన మనం వీటిని మరింత లోతుగా అవగాహన చేసుకొనవచ్చును. ఉదా॥కు రెండు చరరాశులు గల ఏకఘాత సమీకరణం $ax + by + c = 0$ అనునది ఒక తలంలో గల సరళరేఖను సూచించును. మొత్తం మీద నిరూపక రేఖాగణితము అనునది భావనలను దృశ్యరూపంగా అర్థంచేసుకొనటకు మరియు ఆధునిక కాలంలో గణితశాస్త్రంలో కొత్త శాఖలను సృష్టించుటకు ఒక సాధనంగా ఉన్నది.

ముందు తరగతులలో మనం నిరూపక అక్షములు, నిరూపక తలం, ఒక తలంలో బిందువులను గుర్తించుట, రెండు బిందువుల మధ్య దూరం, విభజన సూత్రాలు మొదలగు వాటిని అభ్యసించుట ద్వారా నిరూపక రేఖాగణితము అధ్యయమును ప్రారంభించాము. ఈ భావనలన్నీ నిరూపక జ్యామితి యొక్క ప్రాథమిక అంశములే. ఇప్పుడు మనం కొన్ని ఆధార సూత్రములను గుర్తుచేసుకొందాం.

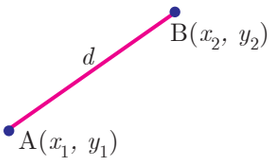
10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_5.indd 214 11-02-2023 18:03:21

పునఃశ్చరణ

రెండు బిందువుల మధ్య దూరం

రెండు బిందువులు $A(x_1, y_1)$ మరియు $B(x_2, y_2)$ ల మధ్య దూరం

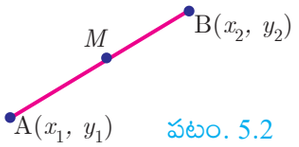
$$|AB| = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$



పటం. 5.1

రేఖా ఖండం యొక్క మధ్య బిందువు

బిందువులు $A(x_1, y_1)$ మరియు $B(x_2, y_2)$ లను కలుపు రేఖా ఖండం మధ్య బిందువు M అనునది $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

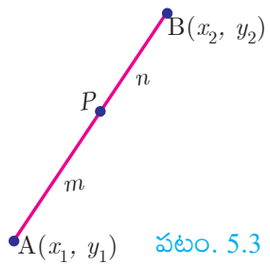


పటం. 5.2

విభజన సూత్రం

అంతరముగా విభజన

$A(x_1, y_1)$ మరియు $B(x_2, y_2)$ లను రెండు విభిన్న బిందువులు అనుకొనుము. $P(x, y)$ అను బిందువు AB ని అంతరముగా $m:n$ నిష్పత్తిలో విభజించును అనుకొనుము. అయితే P యొక్క నిరూపకములు $\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$ అని ఇవ్వబడినది.

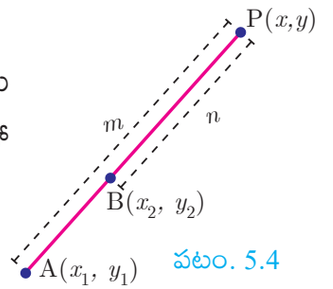


పటం. 5.3

బాహ్యంగా విభజన

$A(x_1, y_1)$ మరియు $B(x_2, y_2)$ లను రెండు విభిన్న బిందువులు అనుకొనుము. $P(x, y)$ అను బిందువు AB ని బాహ్యంగా $m:n$ నిష్పత్తిలో విభజించును అనుకొనుము.

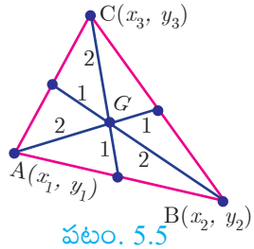
అయిన P యొక్క నిరూపకములు $\left(\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \frac{my_2 - ny_1}{m-n}\right)$.



పటం. 5.4

త్రిభుజం యొక్క గురుత్వకేంద్రం

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ మరియు $C(x_3, y_3)$ లను శీర్షములుగా కలిగిన త్రిభుజము యొక్క గురుత్వకేంద్రం (G) యొక్క నిరూపకములు $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ అవుతుంది.



పటం. 5.5

ప్రగతి శోధన

1. క్రింది పట్టికను పూరింపుము

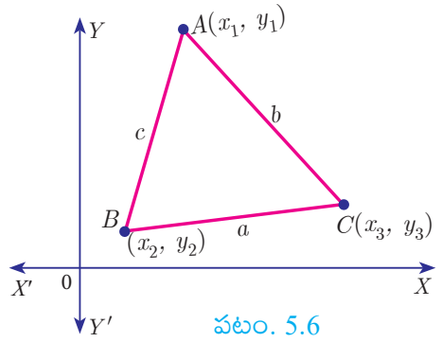
వ.సం	బిందువులు	దూరం	మధ్య బిందువు	అంతరముగా		బాహ్యంగా	
				బిందువు	నిష్పత్తి	బిందువు	నిష్పత్తి
(i)	$(3, 4), (5, 5)$				2:3		2:3
(ii)	$(-7,13),(-3,1)$			$\left(-\frac{13}{3}, 5\right)$		$(-13, 15)$	

2. $A(0,5)$, $B(5,0)$ మరియు $C(-4,-7)$ లు త్రిభుజ శీర్షములయితే దాని గురుత్వకేంద్రం నిరూపకములు_____.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_5.indd 215 11-02-2023 18:03:23

5.2 త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యం

ముందు తరగతులలో మనం, ఒక త్రిభుజము యొక్క భూమి మరియు దాని అనురూప ఎత్తు (ఉన్నతి) ఇవ్వబడినపుడు త్రిభుజ వైశాల్యము కనుగొనుటను నేర్చుకున్నాము. అపుడు మీరు ఉపయోగించిన సూత్రం



పటం. 5.6

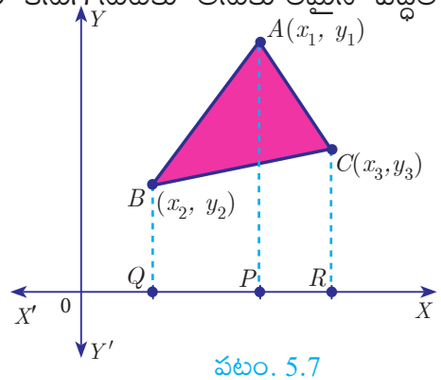
త్రిభుజం వైశాల్యం = $\frac{1}{2}$ × భూమి × ఎత్తు చదరపు ప్రమాణములు

ఒక తలములో ఏవేని మూడు సరేఖీయం కాని బిందువులు $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ మరియు $C(y_3, y_3)$ లతో మనం త్రిభుజము ABC ని ఏర్పరచవచ్చును.

రెండు బిందువుల మధ్య దూరం సూత్రమునుపయోగించి, $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. అని లెక్కించవచ్చును. a, b, c లు త్రిభుజం ABC యొక్క భుజాల పొడవులను సూచించును.

$2s = a + b + c$ ని ఉపయోగించుకొని, హెరాన్ సూత్రం $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ద్వారా మనం ఒక త్రిభుజం ABC వైశాల్యమును కనుగొనవచ్చును. కాని ΔABC భుజాల పొడవులు కనిపెట్టి తర్వాత వైశాల్యమును లెక్కించు ఈ పద్ధతి చాలా క్లిష్టమైన పద్ధతి అవుతుంది.

త్రిభుజ శీర్షముల నిరూపకములనుపయోగించి దాని వైశాల్యం కనుగొనుటకు అనుకూలమైన పద్ధతి కలదు. ఆ పద్ధతి గురించి వివరణ క్రింద ఇవ్వబడినది.



పటం. 5.7

ABC ని $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ మరియు $C(x_3, y_3)$. లను శీర్షములుగా కలిగిన ఏదేని ఒక త్రిభుజము అని అనుకొనుము.

A, B మరియు C ల నుండి x- అక్షమునకు AP, BQ మరియు CR అనే లంబములు గీయుము.

స్పష్టముగా $ABQP$, $APRC$ మరియు $BQRC$ లన్నీ సమలంబ చతుర్భుజాలు అగును.

ఇపుడు పటం 5.7 నుండి స్పష్టముగా

ΔABC యొక్క వైశాల్యము

= సమలంబ చతుర్భుజం ABQP వైశాల్యం + సమలంబ చతుర్భుజం APRC వైశాల్యం − సమలంబ చతుర్భుజం $BQRC$ వైశాల్యం

సమలంబ చతుర్భుజం వైశాల్యం

= $\frac{1}{2}$ × (సమాంతర భుజాల పొడవుల మొత్తం) × ((సమాంతర భుజాల మధ్య దూరం) అని మనకు ముందే తెలుసు.

కావున ΔABC యొక్క వైశాల్యం

$$= \frac{1}{2}(BQ + AP)QP + \frac{1}{2}(AP + CR)PR - \frac{1}{2}(BQ + CR)QR$$

$$= \frac{1}{2}(y_2 + y_1)(x_1 - x_2) + \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) - \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_3 - x_2)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right\}$$

దీని ప్రకారం, ΔABC యొక్క వైశాల్యమును క్రింది సమాసము ద్వారా ఖచ్చితంగా తెలుసుకొనవచ్చును.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_5.indd 216 11-02-2023 18:03:26

$= \frac{1}{2}\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}$ చదరపు ప్రమాణములు

శీర్షములు A, B, C లను అపసవ్య దిశలో తీసుకొనిన, ΔABC శీర్షములు $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ మరియు $C(x_3, y_3)$ లను 'వరుస ప్రకారం తీసుకొనబడినది" అని చెప్పవచ్చును. ఈ విధంగా తీసుకొనుట వలన ΔABC యొక్క వైశాల్యం ఎప్పుడూ ఋణాత్మకం కాదు.

సూచన

➤ ఒక త్రిభుజ వైశాల్యం ఎప్పుడూ ఋణాత్మకం కాదు. కావున వైశాల్యం ఋణాత్మకంగా ఉంటే దానిని ధనాత్మకాంగా తీసుకొనవలెను.

మరొక పద్ధతి

క్రింది చిత్ర రూపము ద్వారా పై సూత్రమును చాలా సులభంగా వ్రాయవచ్చును.

$$\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{Bmatrix}$$

ΔABC యొక్క వైశాల్యం $= \frac{1}{2}\{(x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1) - (x_2 y_1 + x_3 y_2 + x_1 y_3)\}$ చ.ప్రమాణాలు.

ప్రగతి శోధన

1. ΔPQR శీర్షములు $P(0, -4)$, $Q(3,1)$ మరియు $R(-8,1)$ అనుకొనుము.
2. గ్రాఫ్ కాగితముపైన ΔPQR ని గీయుము.
3. ΔPQR సమభుజత్రిభుజమగునా అని సరిచూడుము.
4. ΔPQR యొక్క వైశాల్యం కనుగొనుము.
5. QP యొక్క మధ్య బిందువు M యొక్క నిరూపకములను కనుగొనుము
6. QR యొక్క మధ్య బిందువు N యొక్క నిరూపకములను కనుగొనుము.
7. ΔMPN యొక్క వైశాల్యం కనుగొనుము.
8. ΔMPN మరియు ΔPQR వైశాల్యముల మధ్య గల నిష్పత్తి ఎంత?

5.2.1 మూడు బిందువుల సరేఖీయత

మూడు విభిన్న బిందువులు $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ మరియు $C(x_3, y_3)$లు సరేఖీయ బిందువులయితే మనం వాటితో త్రిభుజమును ఏర్పరచలేము. ఎందుకనగా అటువంటి త్రిభుజమునకు ఎత్తు ఉండదు. కావున మూడు బిందవులు $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ మరియు $C(x_3, y_3)$ సరేఖీయములైతే ΔABC వైశాల్యం = 0 అవుతుంది

సూచన

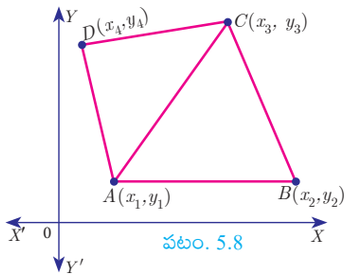
➤ **సరేఖీయతకు మరొక నిబంధన**

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ మరియు $C(x_3, y_3)$లు సరేఖీయ బిందువులు అయితే $x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0$ లేదా $x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 = x_1y_3 + x_2y_1 + x_3y_2$ అవుతుంది.

అదే విధంగా ΔABC వైశాల్యం సున్న అయితే మూడు బిందువులూ ఒకే సరళరేఖపై అమరి ఉంటుంది. అందువలన ΔABC యొక్క వైశాల్యం సున్న అయినపుడు మాత్రమే మూడు విభిన్న బిందువులు $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ మరియు $C(x_3, y_3)$లు సరేఖీయములు అగును.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_5.indd 217 11-02-2023 18:03:29

5.3 చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యం



పటం. 5.8

$ABCD$ అనునది ఒక చతుర్భుజం అగును. కర్ణము AC ని ఆధారంగా చేసుకొని $ABCD$ ని రెండు త్రిభుజములు ABC మరియు ACD లుగా విభజించవచ్చును.

ఇవ్వబడిన శీర్షములకు త్రిభుజ వైశాల్య సూత్రమునుపయోగించి త్రిభుజములు ABC మరియు ACD ల వైశాల్యమును మనం కనుగొనవచ్చును.

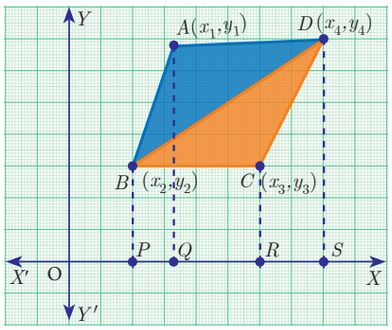
ఇప్పుడు చతుర్భుజం $ABCD$ యొక్క వైశాల్యం = త్రిభుజం ABC వైశాల్యం + త్రిభుజం ACD వైశాల్యం

ఈ సమాచారమును ఉపయోగించుకొని ఒక చతుర్భుజం శీర్షములు ఇవ్వబడినపుడు దాని వైశాల్యమును కనుగొనవచ్చును.

మెదడుకు మేత

వైశాల్యం సున్నగా ఉండునట్లు ఎన్ని త్రిభుజాలను నిర్మించవచ్చును?

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ మరియు $D(x_4, y_4)$ లను చతుర్భుజం $ABCD$ శీర్షములు అనుకొనుము.



పటం. 5.9

ఇపుడు, చతుర్భుజం $ABCD$ వైశాల్యం = ΔABD వైశాల్యం + ΔBCD వైశాల్యం

$$= \frac{1}{2}\left\{(x_1y_2 + x_2y_4 + x_4y_1) - (x_2y_1 + x_4y_2 + x_1y_4)\right\}$$

$$+ \frac{1}{2}\left\{(x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_2) - (x_3y_2 + x_4y_3 + x_2y_4)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_4y_3 + x_1y_4)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{(x_1 - x_3)(y_2 - y_4) - (x_2 - x_4)(y_1 - y_3)\right\}$$ చదరపు ప్రమాణములు

క్రింది చిత్ర రూపము పై సూత్రమును సులభంగా వ్రాయుటకు సహాయపడును. శీర్షములు $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ మరియు $D(x_4, y_4)$ లను అపసవ్య దిశలో తీసుకొని, వాటిని త్రిభుజ వైశాల్యం కనుగొనుటకు వ్రాసినట్లు నిలువ వరుసలుగా వ్రాయుము.

చతుర్భుజం ABCD వైశాల్యం $= \frac{1}{2}\left\{\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_1 \end{matrix}\right\}$

కావున

$$= \frac{1}{2}\left\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_4y_3 + x_1y_4)\right\}$$ చదరపు ప్రమాణములు.

సూచన

- చతుర్భుజం వైశాల్యమును కనుగొనుటకు, చతుర్భుజంను ఉమ్మడి వైశాల్యం లేని రెండు త్రిభుజ భాగాలుగా విభజించి, తరువాత ఆ భాగముల వైశాల్యములను కనుగొని కూడవలెను.
- చతుర్భుజ వైశాల్యం ఎప్పుడూ ఋణాత్మకం కాదు. అందువలన మనం ఎల్లప్పుడూ చతుర్భుజం వైశాల్యమును ధనాత్మకంగానే తీసుకొంటాం.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_5.indd 218 11-02-2023 18:03:31

మెదడుకు మేత

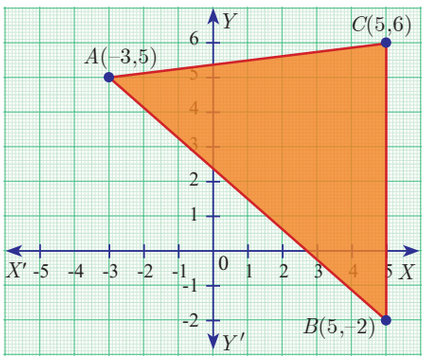
1. బిందువులు $(a,\ a)$, $(-a,\ a)$, $(a,\ -a)$ మరియు $(-a,\ -a)$ లతో ఇక్కడ $a \neq 0$ ఏర్పడిన చతుర్భుజం వైశాల్యం 64 చదరపు ప్రమాణములు అయిన ఏర్పడిన చతుర్భుజం రకమును గుర్తించుము
2. a కు వీలైనన్ని విలువలను కనుగొనండి.

ఉదాహరణ 5.1 $(-3,5)$, $(5,6)$ మరియు $(5,-2)$ లను శీర్షములుగా గల త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యం కనుగొనండి.

సాధన బిందువులను చిత్తు పటములో గుర్తించి వాటిని అపసవ్య దిశలో తీసుకొనుము.

$A(-3,5)$, $B(5,-2)$, $C(5,6)$ లను శీర్షములు అనుకొనుము.

(x_1,y_1) (x_2,y_2) (x_3,y_3)



పటం. 5.10

ΔABC యొక్క వైశాల్యం

$$= \frac{1}{2}\left\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{(6 + 30 + 25) - (25 - 10 - 18)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\{61 + 3\}$$

$$= \frac{1}{2}(64) = 32 \text{ చదరపు ప్రమాణములు}$$

ఉదాహరణ 5.2 బిందువులు $P(-1.5,3)$, $Q(6,-2)$, $R(-3,4)$ లు సరేఖీయములని చూపుము

సాధన ఇవ్వబడిన బిందువులు $P(-1.5,3)$, $Q(6,-2)$, $R(-3,4)$

$$\Delta PQR \text{ యొక్క వైశాల్యం} = \frac{1}{2}\left\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{(3 + 24 - 9) - (18 + 6 - 6)\right\} = \frac{1}{2}\{18 - 18\} = 0$$

కాబట్టి, ఇవ్వబడిన బిందువులు సరేఖీయములు.

ఉదాహరణ 5.3 వరుసగా తీసుకొనబడిన శీర్షములు $A(-1,2)$, $B(k,-2)$ మరియు $C(7,4)$ లతో ఏర్పడిన త్రిభుజ వైశాల్యం 22 చదరపు ప్రమాణములు అయిన k. విలువను కనుగొనుము.

సాధన శీర్షములు $A(-1,2)$, $B(k,-2)$ మరియు $C(7,4)$ లు అవుతుంది.

త్రిభుజము ABC యొక్క వైశాల్యం 22 చదరపు ప్రమాణములు

$$\frac{1}{2}\left\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\right\} = 22$$

$$\frac{1}{2}\left\{(2 + 4k + 14) - (2k - 14 - 4)\right\} = 22$$

$$2k + 34 = 44 \text{ నుండి } 2k = 10 \text{ కావున } k = 5$$

ఉదాహరణ 5.4 బిందువులు $P(-1,-4)$, $Q(b,c)$ మరియు $R(5,-1)$ లు సరేఖీయములు మరియు $2b + c = 4$, అయితే b మరియు c విలువలను కనుగొనుము.

సాధన మూడు బిందువులు $P(-1,-4)$, $Q(b,c)$ మరియు $R(5,-1)$ లు సరేఖీయములు.

కావున, త్రిభుజము PQR యొక్క వైశాల్యం $= 0$

$$\frac{1}{2}\left\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\right\} = 0$$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_5.indd 219 11-02-2023 18:03:34

$$\frac{1}{2}\{(-c-b-20)-(-4b+5c+1)\} = 0$$

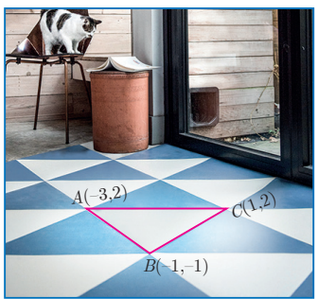
$$-c-b-20+4b-5c-1 = 0$$

$$b-2c = 7 \quad \ldots(1)$$

మరియు, $2b+c = 4 \quad \ldots(2)$ (ఇవ్వబడిన సమాచారం నుండి)

(1) మరియు (2) లను సాధించగా లభించినది $b = 3$, $c = -2$

ఉదాహరణ 5.5 ఒక హాలు యొక్క తలము ఒకే కొలత గల త్రిభుజాకార టైల్స్‌తో కప్పబడినది. అటువంటి ఒక త్రిభుజం యొక్క శీర్షములు $(-3,2)$, $(-1,-1)$ మరియు $(1,2)$. ఆ హాలు యొక్క మొత్తం నేలను 110 టైల్స్‌తో కప్పిన ఆ హాలు యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనుము.



పటం. 5.11

సాధన ఒక త్రిభుజాకార టైల్ శీర్షములు $(-3,2)$, $(-1,-1)$ మరియు $(1,2)$

ఒక టైల్ యొక్క వైశాల్యం $= \frac{1}{2}\{(3-2+2)-(-2-1-6)\}$ చ.ప్రమాణాలు

$= \frac{1}{2}(12) = 6$ చదరపు ప్రమాణములు

ఆ హాలు తలము 110 త్రిభుజాకార టైల్స్‌తో కప్పబడినది, దీని నుండి

తలము యొక్క వైశాల్యం $= 110 \times 6 = 660$ చదరపు ప్రమాణములు

ఉదాహరణ 5.6 బిందువులు $(8,6)$, $(5,11)$, $(-5,12)$ మరియు $(-4,3)$ లతో ఏర్పడిన చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనుము.

సాధన చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనుటకు ముందు శీర్షములను గ్రాఫులో గుర్తించవలెను.

శీర్షములు $A(8,6)$, $B(5,11)$, $C(-5,12)$ మరియు $D(-4,3)$ లు అనుకొనుము.

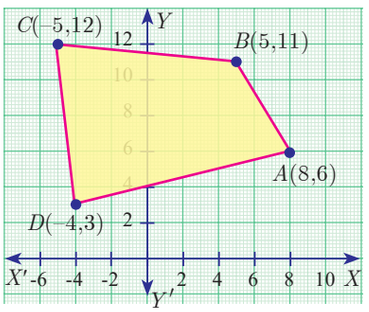
కావున చతుర్భుజం $ABCD$ యొక్క వైశాల్యం

$$= \frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_4y_3 + x_1y_4)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{(88+60-15-24)-(30-55-48+24)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{109+49\}$$

$$= \frac{1}{2}\{158\} = 79 \text{ చదరపు ప్రమాణములు}$$

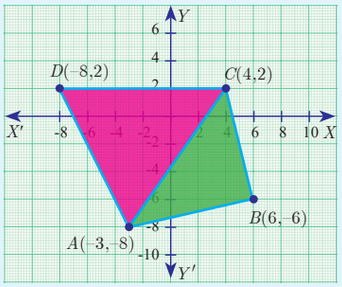


పటం. 5.12

ప్రగతి శోధన

ఒక చతుర్భుజం $ABCD$ యొక్క శీర్షములు $A(-3,-8)$, $B(6,-6)$, $C(4,2)$, మరియు $D(-8,2)$ అని ఇవ్వబడినవి.

1. ΔABC యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనుము.
2. ΔACD యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనుము.
3. ΔACD యొక్క వైశాల్యం + ΔABC యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనుము.
4. చతుర్భుజం $ABCD$ యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనండి.
5. 3 మరియు 4 ల యందు లభించిన సమాధానములను పోల్చుము.



పటం. 5.13

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_5.indd 220 11-02-2023 18:03:37

ఉదాహరణ 5.7 ఇవ్వబడిన పటము ఒక ప్రాంగణము నందు నిర్మించుచున్న ఒక పెద్ద పార్కింగ్ ప్రణాళికను సూచిస్తున్నది. ఆ నిర్మాణమునకు ఒక చదరపు అడుగుకు ₹1300 ఖర్చు అవుతుందని అంచనా వేయబడినది. ఆ పార్కింగ్ స్థలమును నిర్మించుటకు అయ్యే మొత్తం ఖర్చు ఎంత?

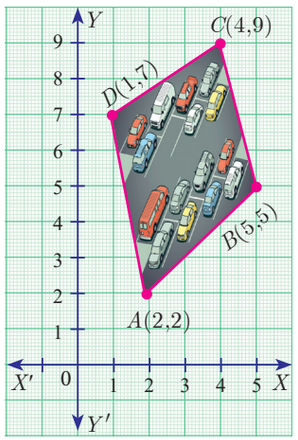
సాధన ఆ పార్కింగ్ స్థలము ఒక చతుర్భుజం అవుతుంది మరియు దాని శీర్షములు $A(2,2)$, $B(5,5)$, $C(4,9)$ మరియు $D(1,7)$, కావున

ఆ పార్కింగ్ స్థలము యొక్క వైశాల్యం $= \frac{1}{2}\begin{Bmatrix}2 & 5 & 4 & 1 & 2\\ 2 & 5 & 9 & 7 & 2\end{Bmatrix}$ చదరపు ప్రమాణములు

$= \frac{1}{2}\{(10+45+28+2)-(10+20+9+14)\}$

$= \frac{1}{2}\{85-53\}$

$= \frac{1}{2}(32) = 16$ చదరపు ప్రమాణములు



పటం. 5.14

కావున పార్కింగ్ స్థలము యొక్క వైశాల్యం $= 16$ చదరపు. అడుగులు

ఒక చదరపు అడుగుకు అయ్యే నిర్మాణ ఖర్చు $= ₹1300$

ఆ పార్కింగ్ స్థలము నిర్మించుటకు అయ్యే మొత్తం ఖర్చు $= 16 \times 1300 = ₹20800$

కృత్యము 1

(i) ఒక గ్రాఫు కాగితమును తీసుకొనుము.

(ii) బిందువులు (0,0) మరియు (6,0) లను కలుపు రేఖను భూమిగా (ఆధారంగా) గల ఒక త్రిభుజమును తీసుకొనుము.

(iii) (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5) లను మూడవ శీర్షముగా తీసుకొని వాటి వైశాల్యములను కనుగొనండి. ఇవ్వబడిన వాటిని పూరింపుము.

మూడవ శీర్షం	త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యం
(1,1)	$A_1 =$
(2,2)	$A_2 =$
(3,3)	$A_3 =$
(4,4)	$A_4 =$
(5,5)	$A_5 =$

(iv) A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 లలో ఏదైనా క్రమమును నీవు గమనించితివా? గమనించినట్లయితే దానిని వివరించుము.

(v) (1,2), (2,4), (3,8), (4,16), (5,32 లను మూడవ శీర్షముగా తీసుకొని మెట్టు (iii) లోని విధానమును మరలా ప్రయత్నించండి.

మూడవ శీర్షం	త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యం
(1,2)	$A_1 =$
(2,4)	$A_2 =$
(3,8)	$A_3 =$
(4,16)	$A_4 =$
(5,32)	$A_5 =$

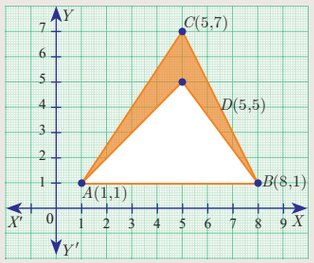
(vi) క్రొత్త శీర్షములతో పట్టికను పూరింపుము.

(vii) A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 లతో నీవు ఏదైనా క్రమమును గుర్తించావా?

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_5.indd 221 11-02-2023 18:03:38

కృత్యము 2

ఛాయచేయబడిన ప్రాంతపు వైశాల్యమును కనుగొనండి.



పటం. 5.15

మీకు తెలుసా?

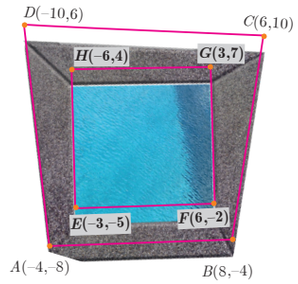
ఆధునిక నిరూపక జ్యామితికి సంబంధించిన ఆలోచనలను మొట్టమొదట 1630లో. ఇద్దరు ఫ్రెంచి గణితజ్ఞులైన రెనెడెస్కార్ట్స్ మరియు ఫియరీ-డి-ఫెర్మాట్‌లు ప్రతిపాదించిరి

అభ్యాసము 5.1

1. క్రింది బిందువులతో ఏర్పడిన త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనుము.
   (i) (1,−1), (−4, 6) మరియు (−3, −5) (ii) (−10, −4), (−8, −1) మరియు (−3, −5)
2. క్రింద ఇవ్వబడిన బిందువులు సరేఖీయమగునా అని నిర్ధారించుము.
   (i) $\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$, (−5, 6) మరియు (−8, 8) (ii) $(a, b+c)$, $(b, c+a)$ మరియు $(c, a+b)$
3. ఇవ్వబడిన త్రిభుజ శీర్షములు వరుసలో తీసుకొనబడినవి మరియు వాటి వైశాల్యములు ప్రక్కనే ఇవ్వబడినవి. ప్రతి సందర్భంలోనూ 'p'. యొక్క విలువను కనుగొనుము.

వ.సం.	శీర్షములు	వైశాల్యం (చ.ప్ర॥)
(i)	$(0, 0), (p, 8), (6, 2)$	20
(ii)	$(p, p), (5, 6), (5, -2)$	32

4. క్రింద వానిలో, ఇవ్వబడిన బిందువులు సరేఖీయములైన 'a' విలువను కనుగొనుము.
   (i) (2, 3), (4, a) మరియు (6, −3) (ii) $(a, 2-2a)$, $(-a+1, 2a)$ మరియు $(-4-a, 6-2a)$
5. క్రింద ఇవ్వబడిన బిందువులను శీర్షములుగా గల చతుర్భుజం వైశాల్యమును కనుగొనుము.
   (i) (−9, −2), (−8, −4), (2, 2) మరియు (1, −3)
   (ii) (−9, 0), (−8, 6), (−1, −2) మరియు (−6, −3)
6. బిందువులు (−4, −2), (−3, k), (3, −2) మరియు (2, 3) లు శీర్షాలుగా గల చతుర్భుజం వైశాల్యం 28 చ.ప్ర॥ అయితే k విలువను కనుగొనుము.
7. బిందువులు $A(-3,9)$, $B(a,b)$ మరియు $C(4,-5)$ లు సరేఖీయములు మరియు $a+b=1$ అయిన, a మరియు b విలువను కనుగొనుము.
8. ΔABC భుజాలు AB, BC మరియు ACల మధ్య బిందువులు వరుసగా $P(11,7)$, $Q(13.5,4)$ మరియు $R(9.5,4)$ అనుకొనుము. శీర్షాలు A, B మరియు Cల నిరూపకములు కనుగొనుము. ΔABC యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనుము. దానిని ΔPQR యొక్క వైశాల్యముతో పోల్చుము.
9. ఒక చతుర్భుజాకార ఈత కొలను చుట్టూ గల కాంక్రీటు నిర్మాణమును పటములో చూపబడినది. ఆ కాంక్రీటు నిర్మాణ వైశాల్యమును కనుగొనుము.

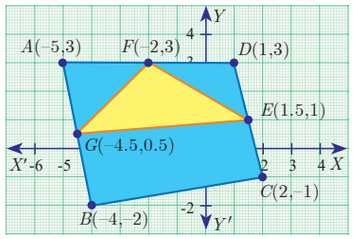


10. శీర్షములు $A(-5,-4)$, $B(1,6)$ మరియు $C(7,-4)$ లుగా గల ఒక త్రిభుజాకార గాజుకు రంగు వేయవలెను. ఒక బకెట్టు రంగుతో 6

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_5.indd 222 11-02-2023 18:03:40

చదరపు అడుగులు రంగు పూయుటకు వీలైతే మొత్తం గాజుకి ఒకసారి రంగు పూయుటకు ఎన్ని బకెట్లు అవసరమగును?

11. పటములో గల (i) త్రిభుజము AGF (ii) త్రిభుజము FED (iii) చతుర్భుజం $BCEG$ ల వైశాల్యమును కనుగొనుము.



5.4 ఒక రేఖ యొక్క ఏటవాలు

ఒక రేఖ యొక్క ఏటవాలు లేదా ఒక రేఖ యొక్క ఏటవాలు కోణం (లేదా) వంపు కోణం అనునది ఒక సరళరేఖ X అక్షము యొక్క ధనాత్మక దిశలో X అక్షమునకు పై భాగంలో X అక్షంతో అపసవ్య దిశలో చేయు కోణము అవుతుంది. ఒక రేఖ క్షితిజంతో చేయు కోణమును సాధారణంగా θ తో గుర్తిస్తారు

సూచన

- X అక్షము లేదా X అక్షమునకు సమాంతరంగా గల ప్రతి రేఖ క్షితిజంతో చేయు కోణం 0° అగును.
- Y అక్షమునకు లేదా Y అక్షమునకు సమాంతరంగా గల ప్రతి రేఖ క్షితిజంతో చేయు కోణం 90° అగును.

5.4.1 సరళరేఖ వాలు

రోడ్లు వేయునపుడు అవి ఎంత నిటారుగా ఉన్నదని ఖచ్చితంగా తెలుసుకొనవలెను. అదే విధంగా మెట్లను నిర్మించునపుడు కూడా మనం ఖచ్చితంగా నిటారును పరిగణించవలెను. ఈ కారణం చేతనే ఎవరైనా కొండ పైకి లేదా వంతెనపై ప్రయాణించునపుడు సమతల రోడ్డుపై ప్రయాణించుటకన్నా కష్టముగా ఉన్నదని భావించెదరు.

పై ఉదాహరణలన్నీ ఒక ముఖ్య విషయమైన "నిటారత్వము"ను తెలుపును. నిటారత్వము యొక్క కొలత వాలు లేదా ఏటవాలు అగును.



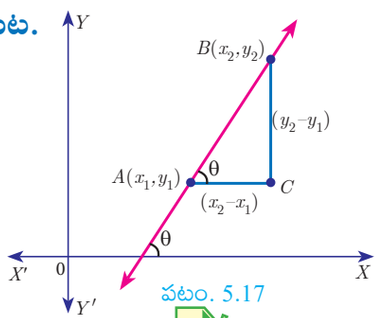
పటం. 5.16

అర్థశాస్త్రంలో వాలు అనే భావన చాలా ముఖ్యమైనది. ఎందుకనగా నిర్ణీత కాలంలో వస్తువు ధర ఆధారంగా దాని డిమాండ్‌లో ఏర్పడే మార్పు రేటును కొలవడానికి ఇది ఉపయోగపడుతుంది. వాలు అనునది నిటారత్వము మరియు దిశ అను రెండు కారణులను అంతర్భాగంగా కలిగి ఉంటుంది.

నిర్వచనము: క్షితిజ లంబం కాని ఒక సరళరేఖ క్షితిజముతో చేయు కోణము θ అయితే ఆ రేఖ యొక్క వాలు లేదా ఏటవాలును $\tan\theta$ అని పిలిచెదరు మరియు దీనిని m తో గుర్తిస్తారు.

కావున సరళ రేఖ యొక్క వాలు $m = \tan\theta,\ 0 \le \theta \le 180^\circ,\ \theta \ne 90^\circ$

రెండు బిందువులు ఇవ్వబడినపుడు ఒక సరళ రేఖ యొక్క వాలును కనుగొనుట.



పటం. 5.17

$$\text{వాలు } m = \tan\theta$$

$$= \frac{\text{ఎదుటి భుజము}}{\text{ఆసన్న భుజము}}$$

$$= \frac{BC}{AC}$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

$$\text{వాలు } m = \frac{y \text{ నిరూపకాల భేధం}}{x \text{ నిరూపకాల భేదం}}$$

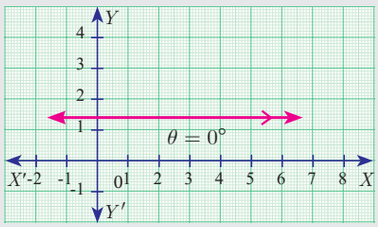
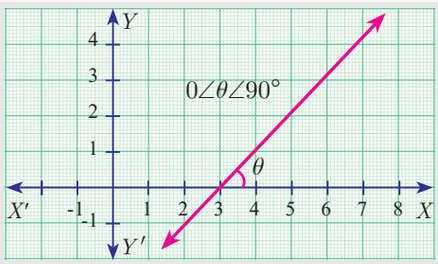
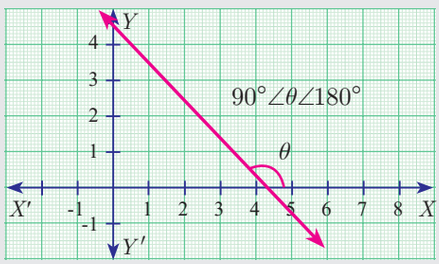
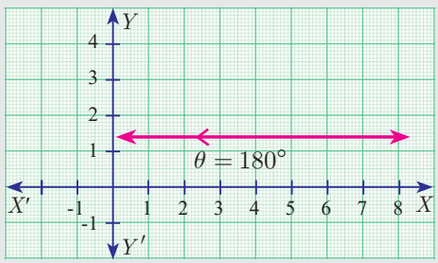
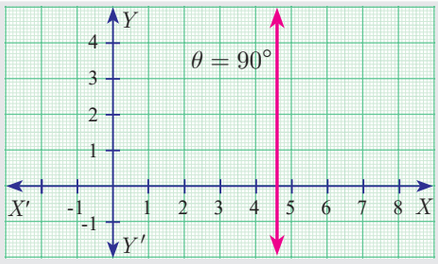
సూచన

- క్షితిజ లంబ రేఖ యొక్క వాలును నిర్వచింపలేము.

(x_1, y_1) మరియు (x_2, y_2) ద్వారా వెళ్ళు రేఖ వాలు $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ అగును. ఇచ్చట $x_1 \ne x_2$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_5.indd 223 11-02-2023 18:03:42

వాలు యొక్క విలువలు

వ.సం.	నిబంధన	వాలు	రేఖా చిత్రం
(i)	$\theta = 0^\circ$	రేఖ X అక్షము యొక్క ధనాత్మక దిశకు సమాంతరంగా ఉంటుంది.	 పటం. 5.18(a)
(ii)	$0 < \theta < 90^\circ$	రేఖ వాలు ధనాత్మకం అగును (ధనాత్మక వాలు కలిగిన రేఖ ఎడమ నుండి కుడి వైపునకు ఎత్తుగా పెరుగును)	 పటం. 5.18(b)
(iii)	$90^\circ < \theta < 180^\circ$	రేఖ వాలు ఋణాత్మకం అగును. (ఋణాత్మక వాలు కలిగిన రేఖ కుడి నుండి ఎడమ వైపునకు ఎత్తు తగ్గును)	 పటం. 5.18(c)
(iv)	$\theta = 180^\circ$	రేఖ X అక్షము యొక్క ఋణాత్మక దిశకు సమాంతరంగా ఉంటుంది.	 పటం. 5.18(d)
(v)	$\theta = 90^\circ$	వాలును నిర్వచింప లేము.	 పటం. 5.18(e)

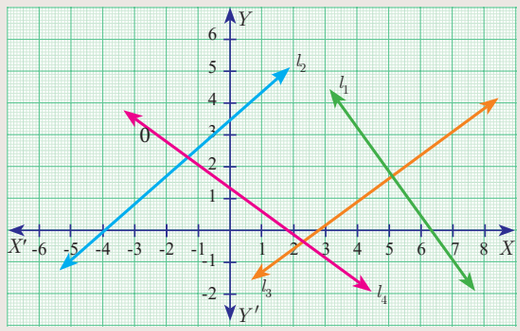
10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_5.indd 224 11-02-2023 18:03:44

కృత్యము 3

రేఖా చిత్రమునందు నాలుగు రేఖలు l_1, l_2, l_3 మరియు l_4 కలవు.

(i) ఎన్ని రేఖలు ధనాత్మక వాలును కలిగియున్నవి?

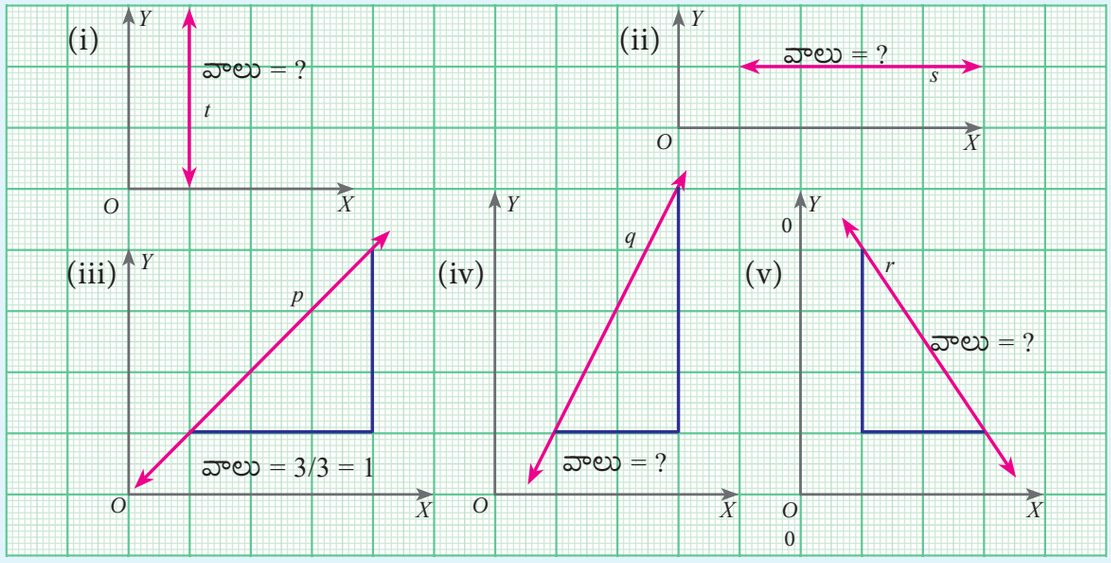
(ii) ఎన్ని రేఖలు ఋణాత్మక వాలును కలిగియున్నవి?



పటం. 5.19

ప్రగతి శోధన

క్రింది గడులలో ఇవ్వబడిన ప్రతి రేఖల వాలును వ్రాయుము. ఒకటి మీ కోసం సాధించబడింది.



పటం. 5.20

సాధన (iii) p రేఖ యొక్క వాలు $= \dfrac{y \text{ నిరూపకాల భేధం}}{x \text{ నిరూపకాల బేదం}} = \dfrac{3}{3} = 1$

5.4.2 సమాంతర రేఖల వాలు

రెండు క్షితిజ లంబంకాని రేఖలు సమాంతరంగా ఉన్నపుడు మాత్రమే వాటి వాలులు సమానంగా ఉంటాయి.

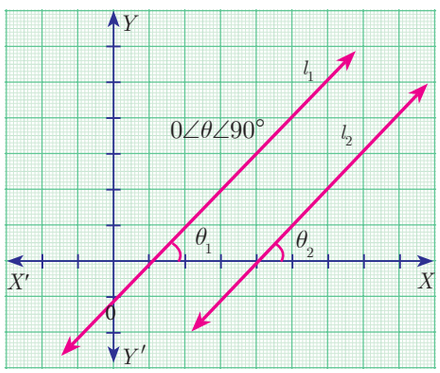
l_1 మరియు l_2 అనునవి రెండు క్షితిజ లంబంకాని రేఖలు మరియు వాటి వాలులు వరుసగా m_1 మరియు m_2 అనుకొనుము.

ఆ రేఖలు X అక్షము ధనాత్మక దిశలో క్షితిజంతో చేయు కోణాలు వరుసగా θ_1 మరియు θ_2 అనుకొనుము.

l_1 మరియు l_2 లు సమాంతరం అని ఊహించుకొనుము.

$\theta_1 = \theta_2$ (θ_1, θ_2 లు సదృశకోణాల నుండి)

$\tan\theta_1 = \tan\theta_2$



పటం. 5.21

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_5.indd 225 11-02-2023 18:03:45

$m_1 = m_2$

కావున, వాలులు సమానం.

కావున క్షితిజ లంబంకాని రేఖలు సమాన వాలులను కలిగి ఉన్నవి

విపర్యయం

వాలులు సమానమని అనుకొనుము. $m_1 = m_2$

అపుడు $\tan\theta_1 = \tan\theta_2$

$\theta_1 = \theta_2 \ (0 \le \theta_1, \theta_2 \le 180^\circ$ నుండి)

దీని నుండి సదృశ కోణాలు సమానం.

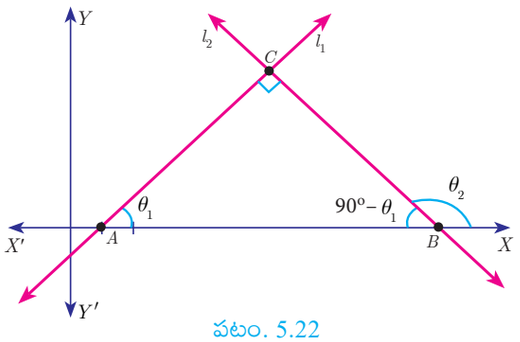
కావున l_1 మరియు l_2 లు సమాంతరం.

దీని నుండి సమాన వాలులు కలిగిన క్షితిజ లంబం కాని రేఖలు సమాంతరంగా ఉంటాయి.
దీని ప్రకారం, క్షితిజ లంబంకాని రేఖలు సమాంతరంగా ఉన్నప్పుడు మాత్రమే వాటి వాలులు సమానం అవుతుంది.

5.4.3 లంబరేఖ వాలు

m_1 మరియు m_2 లను వాలుగా కలిగిన రెండు క్షితిజ లంబంకాని రేఖలు లంబంగా ఉన్నప్పుడు మాత్రమే $m_1 m_2 = -1$ అవుతుంది.

l_1 మరియు l_2 లు రెండు క్షితిజ లంబంకాని రేఖలు మరియు వాటి వాలులు వరుసగా m_1 మరియు m_2 అనుకొనుము. అవి క్షితిజముతో చేయు కోణాలు వరుసగా θ_1 మరియు θ_2 అనుకొనము.



పటం. 5.22

అందువలన $m_1 = \tan\theta_1$ మరియు $m_2 = \tan\theta_2$

మొదట మనం l_1 మరియు l_2 లు ఒకదానికొకటి లంబము అని ఊహించుకొందాము.

అందువలన $\angle ABC = 90^\circ - \theta_1$ (ΔABC యొక్క కోణాల మొత్తం 180°)

పరస్పరం ఎదురుగా ఉన్న కోణాలు θ_2 మరియు $90^\circ - \theta_1$,ల ద్వారా l_2 యొక్క వాలును కొలిచెదము.

మనం పొందునది $\tan\theta_2 = -\tan(90^\circ - \theta_1)$

$$= \frac{-\sin(90^\circ - \theta_1)}{\cos(90^\circ - \theta_1)} = \frac{-\cos\theta_1}{\sin\theta_1} = -\cot\theta_1 \text{ కావున, } \tan\theta_2 = -\frac{1}{\tan\theta_1}$$

$\tan\theta_1 . \tan\theta_2 = -1$

$m_1 . m_2 = -1$.

దీని నుండి l_1, l_2 రేఖలు ఒకదానికొకటి కి లంబం అయినపుడు $m_1 m_2 = -1$. అవుతుంది.

విపర్యయం,

m_1 మరియు m_2 లను వాలులుగా కలిగిన క్షితిజ లంబంకాని రేఖలు వరుసగా l_1 మరియు l_2 అనుకొనుము ఇంకా $m_1 m_2 = -1$. అనుకొనుము.

$m_1 = \tan\theta_1$, $m_2 = \tan\theta_2$ నుండి

మనం పొందునది $\tan\theta_1 \tan\theta_2 = -1$

$$\tan\theta_1 = -\frac{1}{\tan\theta_2}$$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_5.indd 226 11-02-2023 18:03:48

$$\tan\theta_1 = -\cot\theta_2$$
$$\tan\theta_1 = -\tan(90^\circ - \theta_2)$$
$$\tan\theta_1 = \tan\left(-(90^\circ - \theta_2)\right) = \tan(\theta_2 - 90^\circ)$$
$$\theta_1 = \theta_2 - 90^\circ \qquad (\ 0 \le \theta_1, \theta_2 \le 180^\circ \text{ నుండి})$$
$$\theta_2 = 90^\circ + \theta_1$$

కాని ΔABC లో $\theta_2 = \angle C + \theta_1$

కావున, $\angle C = 90^\circ$

కావున l_1 మరియు l_2 రేఖలు ఒకదానికొకటి లంబం అగును.

మీకు తెలుసా?

ఏ త్రిభుజంలోనైనా ఎదురెదురుగానున్న రెండు అంతరకోణాల మొత్తం బాహ్యకోణానికి సమానం.

సూచన

- l_1 మరియు l_2 లు రెండు రేఖలు మరియు నిర్వచింపబడిన వాటి వాలులు వరుసగా m_1 మరియు m_2 అనుకొనుము. అయిన
  - (i) l_1 కి l_2 సమాంతరం అయినప్పుడు మాత్రమే $m_1 = m_2$ అవుతుంది.
  - (ii) l_1, l_2 లు ఒకదానికొకటి లంబం అయినప్పుడు మాత్రమే $m_1 m_2 = -1$ అవుతుంది.

ఉదాహరణ 5.8 (i) క్షితిజముతో 30° ల కోణము చేయు రేఖ యొక్క వాలు ఎంత?

(ii) ఒక రేఖ వాలు $\sqrt{3}$ అయిన అది క్షితిజముతో చేయు కోణం ఎంత?

సాధన (i) ఇక్కడ $\theta = 30^\circ$

వాలు $m = \tan\theta$

కావున, వాలు $m = \tan 30^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(ii) ఇవ్వబడినది $m = \sqrt{3}$, రేఖ క్షితిజముతో చేయు కోణం θ అనుకొనుము.

$$\tan\theta = \sqrt{3}$$

మనకు లభించునది, $\theta = 60^\circ$

మెదడుకు మేత

సరళ రేఖలు X అక్షము మరియు Y అక్షములు ఒక దానికొకటి లంబంగా ఉన్నాయి. ఇప్పుడు నిబంధన $m_1 m_2 = -1$ నిజమగునా?

ఉదాహరణ 5.9 ఇవ్వబడిన బిందువులను కలుపు రేఖ యొక్క వాలును కనుగొనండి.

(i) $(-6,1)$ మరియు $(-3,2)$ (ii) $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ మరియు $\left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}\right)$ (iii) $(14,10)$ మరియు $(14,-6)$

సాధన

(i) $(-6,1)$ మరియు $(-3,2)$

వాలు $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{2-1}{-3+6} = \dfrac{1}{3}$.

(ii) $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ మరియు $\left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}\right)$

వాలు $= \dfrac{\frac{3}{7} - \frac{1}{2}}{\frac{2}{7} + \frac{1}{3}} = \dfrac{6-7}{6+7} = \dfrac{14}{21}$

ప్రగతి శోధన

లోపించిన గడులను పూరింపుము

వ.సం.	బిందువులు	వాలు
1	$A(-a, b), B(3a, -b)$	
2	$A(2, 3), B(_, _)$	2
3		0
4		నిర్వచింపలేము

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_5.indd 227 11-02-2023 18:03:51

$$= -\frac{1}{14} \times \frac{21}{13} = -\frac{3}{26}.$$

(iii) $(14,10)$ మరియు $(14,-6)$

వాలు $= \dfrac{-6-10}{14-14} = \dfrac{-16}{0}$.

వాలును నిర్వచింపలేము.

ఉదాహరణ 5.10 బిందువులు $(-2, 2)$ మరియు $(5, 8)$ ల గుండా r అను రేఖ మరియు బిందువులు $(-8, 7)$ మరియు $(-2, 0)$ ల గుండా s అను రేఖ వెళ్ళును. అయిన రేఖ r అనునది రేఖ s కి లంబమగునా?

సాధన రేఖ r యొక్క వాలు $m_1 = \dfrac{8-2}{5+2} = \dfrac{6}{7}$

రేఖ s యొక్క వాలు $m_2 = \dfrac{0-7}{-2+8} = \dfrac{-7}{6}$

వాలుల లబ్ధము $= \dfrac{6}{7} \times \dfrac{-7}{6} = -1$

అందువలన, $m_1 m_2 = -1$

కావున రేఖ r అనునది రేఖ s కి లంబమగును.

ఉదాహరణ 5.11 బిందువులు $(3,-2)$ మరియు $(12,4)$ ల ద్వారా p అనే రేఖ మరియు బిందువులు $(6,-2)$ మరియు $(12,2)$ ల ద్వారా q అనే రేఖ వెళ్ళును. అయిన p అనేది q కి సమాంతరమగునా?

సాధన రేఖ p యొక్క వాలు $m_1 = \dfrac{4+2}{12-3} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$

రేఖ q యొక్క వాలు $m_2 = \dfrac{2+2}{12-6} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

దీని నుండి రేఖ p యొక్క వాలు $=$ రేఖ q యొక్క వాలు

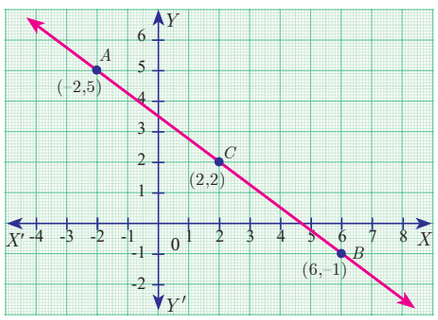
కాబట్టి, రేఖ p అనేది రేఖ q కి సమాంతరమగును.

ఉదాహరణ 5.12 బిందువులు $(-2,5)$, $(6,-1)$ మరియు $(2,2)$ లు సరేఖీయములని చూపుము.

సాధన శీర్షము $A(-2,5)$, $B(6,-1)$ మరియు $C(2,2)$ లు అనుకొనుము

AB వాలు $= \dfrac{-1-5}{6+2} = \dfrac{-6}{8} = \dfrac{-3}{4}$

BC వాలు $= \dfrac{2+1}{2-6} = \dfrac{3}{-4} = \dfrac{-3}{4}$



పటం. 5.23

దీని నుండి, AB వాలు $= BC$ వాలు

కాబట్టి బిందువులు A, B, మరియు C లు ఒకే రేఖపై అమరియున్నవి.

దీని నుండి బిందువులు A, B మరయు C లు సరేఖీయములు.

ఉదాహరణ 5.13 $A(1,-2)$, $B(6,-2)$, $C(5,1)$ మరియు $D(2,1)$ లను నాలుగు బిందువులు అనుకొనుము.

(i) (a) AB (b) CD రేఖా ఖండముల వాలును కనుగొనుము.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_5.indd 228 11-02-2023 18:03:53

(ii) (a) BC (b) AD రేఖా ఖండముల వాలును కనుగొనుము.

(iii) మీ సమాధానము నుండి మీరేమి గ్రహించితిరి?

సాధన (i) (a) AB = వాలు $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2+2}{6-1}$:

(b) CD వాలు : $\frac{1-1}{2-5} = \frac{0}{-3} = 0$

(ii) (a) BC వాలు : $\frac{1+2}{5-6} = \frac{3}{-1} = -3$

(b) AD : వాలు $\frac{1+2}{2-1} = \frac{3}{1} = 3$

మీకు తెలుసా?

ఒక చతుర్భుజంలో రెండు ఎదుటి భుజముల జతల వాలులు సమానమైతే అది ఒక సమాంతరచతుర్భుజం అవుతుంది.

(iii) AB మరియు CD ల వాలులు సమానం కావున AB మరియు CD లు సమాంతరం అవుతుంది.

అదేవిధంగా రేఖలు AD మరియు BC ల వాలులు సమానం కాదు. కావున అవి సమాంతరం కావు. దీని నుండి, చతుర్భుజం ABCD అనునది ఒక సమలంబ చతుర్భుజం అవుతుందని గ్రహించితిమి.

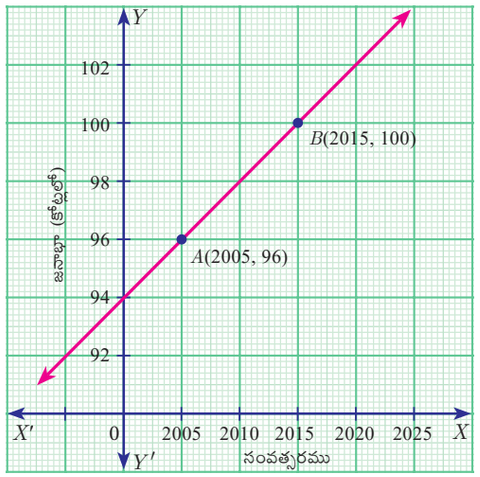
ఉదాహరణ 5.14 జనాభా పెరుగుదల (కోట్లలో) రేఖా చిత్రము ఆధారంగా AB రేఖ వాలును కనుగొనుము. మరియు 2030 వ సంవత్సరములో జనాభాను అంచనా వేయుము.

సాధన బిందువులు $A(2005, 96)$ మరియు $B(2015, 100)$ లు AB రేఖపై కలవు.

వాలు $AB = \frac{100-96}{2015-2005} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

2030 లో జనాభా పెరుగుదల k కోట్లు అనుకొనుము.

బిందువు $C(2030, k)$ అనేది AB రేఖపై కలదని ఊహించుకొనుము.



పటం. 5.24

దీని ప్రకారం, AC వాలు $= AB$ వాలు అవుతుంది.

$\frac{k-96}{2030-2005} = \frac{2}{5}$ నుండి $\frac{k-96}{25} = \frac{2}{5}$

$k - 96 = 10$

$k = 106$

దీని నుండి 2030లో గల అంచనా వేయబడిన జనాభా = 106 కోట్లు.

ఉదాహరణ 5.15 పైథాగరస్ సిద్ధాంతమును ఉపయోగించకుండా బిందువులు $(1, -4)$, $(2, -3)$ మరియు $(4, -7)$ లు లంబకోణ త్రిభుజాన్ని ఏర్పరుస్తాయని చూపుము.

సాధన ఇవ్వబడిన బిందువులు $A(1, -4)$, $B(2, -3)$ మరియు $C(4, -7)$లు అనుకొనుము.

AB వాలు $= \frac{-3+4}{2-1} = \frac{1}{1} = 1$

BC వాలు $= \frac{-7+3}{4-2} = \frac{-4}{2} = -2$

AC వాలు $= \frac{-7+4}{4-1} = \frac{-3}{3} = -1$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_5.indd 229 11-02-2023 18:03:55

AB వాలు × AC వాలు $= (1)(-1) = -1$

AB అనునది AC కి లంబమగును. $\angle A = 90^\circ$

కాబట్టి ΔABC అనునది ఒక లంబకోణ త్రిభుజం అవుతుంది.

మెదడుకు మేత

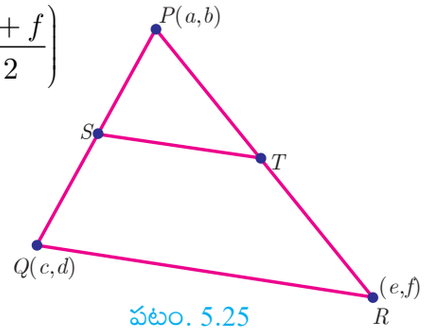
వాలు భావనకి సంబంధించి మనం నిజ జీవితంలో ఉపయోగించు మూడు ఉదాహరణములను తెలుపుము.

ఉదాహరణ 5.16 ఒక త్రిభుజంలో రెండు భుజాల మధ్య బిందువులను కలుపు రేఖా ఖండం మూడవ భుజానికి సమాంతరంగా ఉంటుందని మరియు దాని పొడవులో సగభాగం ఉంటుందని వేర్వేరుగా నిరూపించుము.

సాధన $P(a,b)$ $Q(c,d)$ మరియు $R(e,f)$ లను ఒక త్రిభుజం శీర్షాలు అనుకొనుము.

PQ మధ్యబిందువు S మరియు PR మధ్యబిందువు T అనుకొనుము

కావున, $S = \left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$ మరియు $T = \left(\frac{a+e}{2}, \frac{b+f}{2}\right)$



పటం. 5.25

ఇప్పుడు, ST వాలు $= \dfrac{\frac{b+f}{2} - \frac{b+d}{2}}{\frac{a+e}{2} - \frac{a+c}{2}} = \dfrac{f-d}{e-c}$

మరియు QR వాలు $= \dfrac{f-d}{e-c}$

కావున, ST అనేది QR కి సమాంతరంగా ఉంటుంది. (వాలులు సమానం నుండి)

అదే విధంగా $ST = \sqrt{\left(\frac{a+e}{2} - \frac{a+c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b+f}{2} - \frac{b+d}{2}\right)^2}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{(e-c)^2 + (f-d)^2}$

$\mathrm{ST} = \frac{1}{2}QR$

దీని ప్రకారం ST అనేది QR సమాంతరం మరియు పొడవులో సగముంటుంది.

సూచన

- నిరూపక జ్యామితిని ఉపయోగించుకొని ఒక జ్యామితీయ ఫలితమును ఏవిధంగా నిరూపించవచ్చునని ఈ ఉదాహరణ విశదీకరించుచున్నది.

అభ్యాసము 5.2

1. x - అక్షముతో ధనాత్మక దిశలో క్షితజముతో కోణము చేయు రేఖ యొక్క వాలును కనుగొనుము.
   (i) 90° (ii) 0°
2. రేఖ యొక్క వాలు ఇవ్వబడినపుడు అది క్షితిజముతో చేయు కోణాన్ని కనుగొనుము. (i) 0 (ii) 1
3. క్రింది బిందువులను కలుపు రేఖ వాలును కనుగొనుము.
   (i) ఆది బిందువు మరియు $\left(5, \sqrt{5}\right)$ (ii) $(\sin\theta, -\cos\theta)$ మరియు $(-\sin\theta, \cos\theta)$
4. $A(5,1)$ మరియు P లను కలుపు రేఖకు లంబంగా నుండు రేఖ యొక్క వాలును కనుగొనుము. ఇక్కడ P అనునది $(4,2)$ మరియు $(-6,4)$. లను కలుపు రేఖాఖండం యొక్క మధ్యబిందువు అవుతుంది.
5. ఇవ్వబడిన బిందువులు సరేఖీయములని చూపుము.: $(-3,-4)$, $(7,2)$ మరియు $(12,5)$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_5.indd 230 11-02-2023 18:03:58

6. మూడు బిందువులు $(3,-1)$, $(a,3)$ మరియు $(1,-3)$ లు సరేఖీయములయితే, a విలువను కనుగొనుము.

7. బిందువులు $(-2,a)$ మరియు $(9,3)$ ల ద్వారా పోవు రేఖ వాలు $-\frac{1}{2}$. అయిన a విలువను కనుగొనుము.

8. బిందువులు (-2,6) మరియు (4,8) ల ద్వారా పోవు రేఖ, బిందువులు $(8,12)$ మరియు $(x,24)$ ల ద్వారా పోవు రేఖకు లంబం అయిన x విలువను కనుగొనుము.

9. ఇవ్వబడిన బిందువులు లంబకోణత్రిభుజమును ఏర్పరుచునా? మరియు పైథాగరస్ సిద్ధాంతమును తృప్తి పరచునా అని సరిచూడుము.

   (i) $A(1,-4)$, $B(2,-3)$ మరియు $C(4,-7)$ (ii) $L(0,5)$, $M(9,12)$ మరియు $N(3,14)$

10. ఇవ్వబడిన బిందువులు సమాంతర చతుర్భుజమును ఏర్పరుచునని తెలుపుము :
    $A(2.5,3.5)$, $B(10,-4)$, $C(2.5,-2.5)$ మరియు $D(-5,5)$

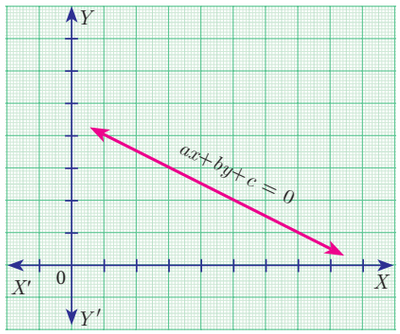
11. బిందువులు $A(2,2)$, $B(-2,-3)$, $C(1,-3)$ మరియు $D(x, y)$ లు సమాంతర చతుర్భుజమును ఏర్పరిస్తే x మరియు y విలువను కనుగొనుము.

12. బిందువులు $A(3,-4)$, $B(9,-4)$, $C(5,-7)$ మరియు $D(7,-7)$. లు అనుకొనిన $ABCD$ ఒక సమలంబ చతుర్భుజమగునని చూపుము.

13. ఒక చతుర్భుజం శీర్షాలు $A(-4,-2)$, $B(5,-1)$, $C(6,5)$ మరియు $D(-7,6)$. అయిన వాటి భుజాల మధ్య బిందువులు సమాంతర చతుర్భుజమును ఏర్పరుచునని చూపుము.

5.5 సరళ రేఖ

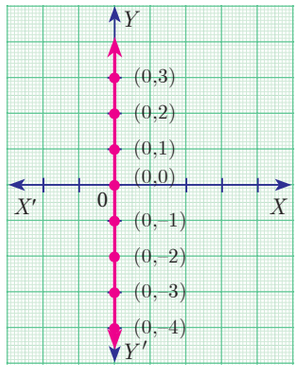
రెండు చరరాశులు x మరియు y లను కల్గిన ఏదేని రేఖీయ సమీకరణ రూపం $ax + by + c = 0$ ...(1) ఇచ్చట a, b, c లు వాస్తవ సంఖ్యలు మరియు a, b లలో కనీసం ఒకటైనా శూన్యేతరంగా ఉండవలెను. ఇటువంటి సమీకరణమునే xy తలములో గల "సరళరేఖ" అని అంటారు.



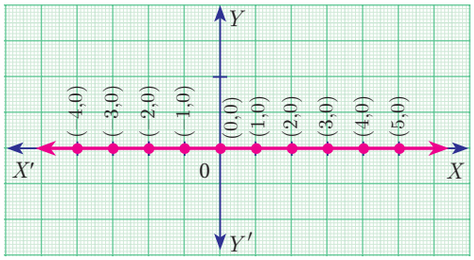
పటం. 5.26

5.5.1 నిరూపకాక్షాల సమీకరణం

X అక్షము మరియు Y అక్షములను కలిపి నిరూపకాక్షములు అంటారు. OY (Y అక్షము) పై గల ఏ బిందువు వద్దనైనను x నిరూపకము 0 అవుతుంది. కాబట్టి OY (Y అక్షము) యొక్క సమీకరణం $x = 0$ (పటం 5.27)



పటం. 5.27



పటం. 5.28

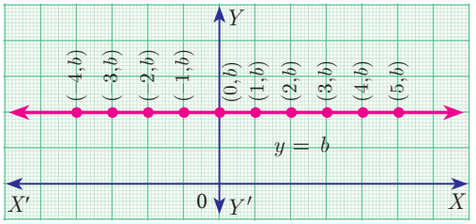
OX (X అక్షము) పై గల ఏ బిందువు వద్దనైనను y నిరూపకము 0 అవుతుంది. కాబట్టి OX (y అక్షము) యొక్క సమీకరణం $y = 0$ (పటం 5.28)

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_5.indd 231 11-02-2023 18:04:00

5.5.2 X అక్షమునకు సమాంతరంగా గల సరళరేఖ సమీకరణం

AB అనునది X అక్షమునకు సమాంతరంగా మరియు x అక్షము నుండి 'b' దూరంలో గల సరళ రేఖ అనుకొనుము. అయిన 'AB' పై గల ఏ బిందువు వద్దనైనను y నిరూపకం 'b' అవుతుంది. (పటం 5.29)

కాబట్టి AB యొక్క సమీకరణం $y = b$



పటం. 5.29

సూచన

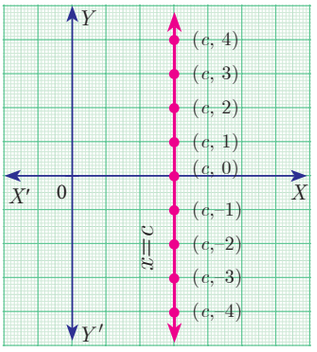
- $b > 0$ అయితే $y=b$ అనే రేఖ X అక్షమునకు పైన ఉంటుంది.
- $b < 0$ అయితే $y=b$ అనే రేఖ X అక్షమునకు కింద ఉంటుంది.
- $b = 0$ అయితే $y=b$ అనే రేఖ X అక్షము అవుతుంది.

5.5.3 Y అక్షమునకు సమాంతరంగా గల సరళరేఖ సమీకరణం

CD అనునది Y అక్షమునకు సమాంతరంగా మరియు y అక్షము నుండి 'c' దూరంలో గల సరళరేఖ అనుకొనుము. అయిన CD పై గల ఏ బిందువు వద్దైనా x నిరూపకం c అవుతుంది. కాబట్టి CD యొక్క సమీకరణం $x=c$ (పటం 5.30)

సూచన

- $c > 0$ అయిన $x=c$ అనే రేఖ Y అక్షమునకు కుడి వైపున ఉంటుంది.
- $c < 0$ అయిన $x=c$ అనే రేఖ Y అక్షమునకు ఎడమ వైపున ఉంటుంది.
- $c = 0$ అయిన $x=c$ అనే రేఖ Y అక్షము అవుతుంది.



పటం. 5.30

ఉదాహరణ 5.17 $(5,7)$ ద్వారా వెళ్ళు (i) X అక్షమునకు సమాంతరంగా (ii) Y అక్షమునకు సమాంతరంగా గల సరళరేఖ సమీకరణంను కనుగొనండి.

సాధన (i) X అక్షమునకు సమాంతరంగా గల ఏదేని సరళరేఖ సమీకరణం $y=b$.

ఈ రేఖ $(5,7)$, ద్వారా వెళ్ళునపుడు $b = 7$.

కాబట్టి మనకు అవసరమగు సరళ రేఖ సమీకరణం $y=7$.

(ii) Y అక్షమునకు సమాంతరంగా గల ఏదేని సరళ రేఖ సమీకరణం $x=c$

ఈ రేఖ $(5,7)$ ద్వారా వెళ్ళునపుడు $c = 5$

కాబట్టి మనకు అవసరమగు సరళరేఖ సమీకరణం $x=5$.

5.5.4 వాలు – అంతరఖండం రూపము

క్షితిజ లంబంకాని ప్రతి సరళరేఖ Y అక్షమును ఒక బిందువు వద్ద ఖండించును. ఆ బిందువు యొక్క y నిరూపమును ఆ రేఖ యొక్క y అంతర ఖండం అని అందురు.

వాలు m మరియు y అంతరఖండం c గా గల సరళరేఖ సమీకరణం $y=mx+c$

మనం ఈ సమీకరణమును వాలు – అంతరఖండం రూపంలో గల సరళ రేఖ సమీకరణం అని పిలుస్తాము.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_5.indd 232 11-02-2023 18:04:01

సూచన

- ఒక రేఖ వాలు m, $m \neq 0$ మరియు x అంతర ఖండం d అయిన ఆ సరళ రేఖ సమీకరణం $y = m\,(x - d)$.
- $y = mx$ అను సమీకరణం వాలు m గా కలిగి ఆది బిందువు ద్వారా వెళ్ళు సరళ రేఖ సమీకరణమును సూచిస్తుంది

ఉదాహరణ 5.18 క్రింది సరళ రేఖ సమీకరణంను కనుగొనుము.

(i) వాలు 5 మరియు y అంతరఖండం -9

(ii) క్షితిజంతో చేయు కోణం $45°$ మరియు y అంతరఖండం 11

సాధన

(i) ఇవ్వబడినది వాలు $= 5$, y అంతరఖండం, $c = -9$

కాబట్టి సరళరేఖ సమీకరణం $y = mx + c$

$$y = 5x - 9 \Rightarrow 5x - y - 9 = 0$$

(ii) ఇవ్వబడినది, $\theta = 45°$, y అంతరఖండం $c = 11$

వాలు $m = \tan\theta = \tan 45° = 1$

కాబట్టి సరళ రేఖ సమీకరణ రూపం $y = mx + c$

దీని నుండి మనకు లభించునది $y = x + 11 \Rightarrow x - y + 11 = 0$

మీకు తెలుసా?

xy తలములో గల బిందువు (x, y) నందు x నిరూపకం x ను 'ప్రథమ నిరూపకం" "Abscissae" అందురు. మరియు y నిరూపకం y ను "ద్వితీయ నిరూపకం" "Ordinate". అని అందురు.

ఉదాహరణ 5.19 సరళరేఖ $8x - 7y + 6 = 0$ యొక్క వాలు మరియు y అంతరఖండమును కనుగొనుము.

సాధన

ఇవ్వబడిన సరళరేఖ సమీకరణం $8x - 7y + 6 = 0$

$7y = 8x + 6$ ($y = mx + c$ రూపంలోకి మార్చుము.)

$$y = \frac{8}{7}x + \frac{6}{7} \quad \ldots(1)$$

(1) ని $y = mx + c$ తో పోల్చగా

వాలు $m = \frac{8}{7}$ మరియు y అంతరఖండం $c = \frac{6}{7}$

ఉదాహరణ 5.20 రేఖా చిత్రం y అక్షంలో ఉష్ణోగ్రతను ఫారన్‌హీట్‌లలో, x అక్షంలో ఉష్ణోగ్రతలను సెల్సియస్‌లలో సూచిస్తున్నది. అయిన అ) వాలు మరియు y అంతరఖండం కనుగొనుము. ఆ) రేఖ యొక్క సమీకరణమును కనుగొనుము ఇ) భూమి యొక్క సరాసరి ఉష్ణోగ్రతను $25°$ సెల్సియస్ అయిన సరాసరి ఉష్ణోగ్రత పారన్‌హీట్‌లలో తెలుపుము.

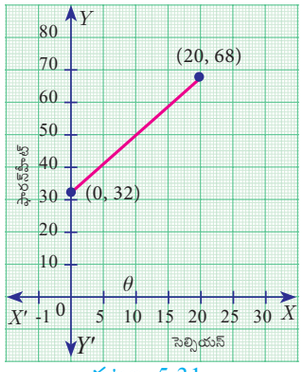
సాధన

(అ) పటం నుండి వాలు $= \dfrac{y \text{ నిరూపకాల భేదం}}{x \text{ నిరూపకాల బేదం}} = \dfrac{68 - 32}{20 - 0} = \dfrac{36}{20} = \dfrac{9}{5} = 1.8$

రేఖ Y అక్షమును $(0, 32)$ వద్ద ఖండించును.

కావున, వాలు $\frac{9}{5}$ మరియు y అంతర ఖండం 32.

(ఆ) వాలు మరియు y అంతరఖండం నుపయోగించి సమీకరణమును వ్రాసిన, ఆ సమీకరణము $y = \frac{9}{5}x + 32$



పటం. 5.31

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_5.indd 233 11-02-2023 18:04:03

(ఇ) భూమి యొక్క సరాసరి ఉష్ణోగ్రతను సెల్సియస్‌లో $25°$, సరాసరి ఉష్ణోగ్రత ఫారన్‌హీట్‌లలో కనుగొనుటకు, $x = 25$ అయినప్పుడు y విలువను కనుగొనుము.

$$y = \frac{9}{5}x + 32$$

$$y = \frac{9}{5}(25) + 32$$

$$y = 77$$

సూచన

➢ ఉష్ణోగ్రతను సెల్సియస్ నుండి ఫారన్‌హీట్‌లోకి మార్చుటకు సూత్రం $F = \frac{9}{5}C + 32$.. ఇది ఉదాహరణ యందు ఉత్పాదించబడిన సరళరేఖను సూచించు రేఖీయ సమీకరణమును పోలి ఉన్నది.

కాబట్టి భూమి యొక్క సరాసరి ఉష్ణోగ్రత ఫారన్‌హీట్‌లలో $77°$ F.

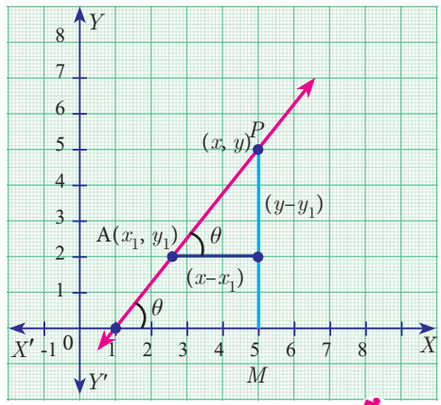
5.5.5 బిందువు – వాలు రూపం

వాలు m గా కలిగి బిందువు $A(x_1, y_1)$ ద్వారా వెళ్ళు సరళరేఖ సమీకరణంను మనం ఇక్కడ కనుగొందాము.

$P(x, y)$ అనునది ఇవ్వబడిన రేఖపై గల ఏదేని మరొక బిందువు అనుకొందాము. $A(x_1, y_1)$ మరియు $P(x, y)$ లను కలుపు రేఖ యొక్క వాలు

$$m = \tan\theta = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

కాబట్టి కావలసిన రేఖ సమీకరణం $y - y_1 = m(x - x_1)$ (బిందువు–వాలు రూపం)



పటం. 5.32

ఉదాహరణ 5.21 వాలు $\frac{-5}{7}$ గా కలిగి బిందువు $(3, -4)$ ద్వారా వెళ్ళు రేఖ సమీకరణమును కనుగొనుము.

సాధన ఇవ్వబడినది, $(x_1, y_1) = (3, -4)$ మరియు $m = \frac{-5}{7}$

బిందువు–వాలురూపంలోసరళరేఖసమీకరణం $y - y_1 = m(x - x_1)$

దీనిని మనం $y + 4 = -\frac{5}{7}(x - 3)$ అని వ్రాయవచ్చును.

దీని నుండి $5x + 7y + 13 = 0$

మెదడుకు మేత

ఒక సరళరేఖ Y అక్షానికి సమాంతరంగా ఉన్నప్పుడు బిందువు – అంతర ఖండ రూపంలో ఆ రేఖకి సమీకరణం కనుగొనుటకు వీలగునా?

ఉదాహరణ 5.22 బిందువు $A(1, 4)$ గుండా పోవుచూ మరియు బిందువులు $(2, 5)$ మరియు $(4, 7)$ లను కలుపు రేఖకు లంబంగా ఉండు సరళ రేఖ సమీకరణం కనుగొనుము.

సాధన

ఇవ్వబడిన బిందువులు $A(1, 4)$, $B(2, 5)$ మరియు $C(4, 7)$ అనుకొనుము.

BC రేఖ వాలు $= \frac{7 - 5}{4 - 2} = \frac{2}{2} = 1$

అవసరమగు రేఖ వాలు m అనుకొనుము.

లెక్క నుండి కావలసిన రేఖ BC కి లంబంగా ఉన్నది.

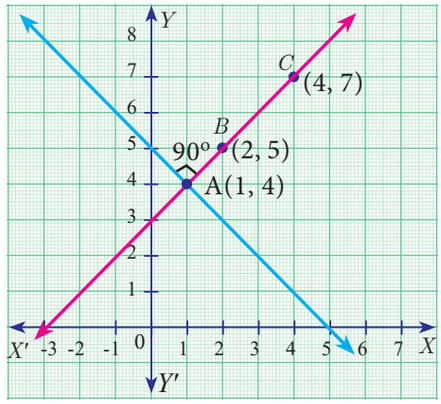
$$m \times 1 = -1$$

$$m = -1$$

కావలసిన రేఖ కూడా బిందువు $A(1,4)$ గుండా పోవును.

కావలసిన సరళరేఖ సమీకరణం $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 4 = -1(x - 1)$$



పటం. 5.33

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_5.indd 234 11-02-2023 18:04:06

$$y-4 = -x+1$$

మనకు లభించునది $x+y-5=0$

5.5.6 రెండు బిందువుల రూపము

$A(x_1,y_1)$ మరియు $B(x_2,y_2)$ లు ఇవ్వబడిన రెండు విభిన్న బిందువులు అనుకొనుము. ఈ బిందువుల గుండా పోయే సరళ రేఖ వాలు $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, $(x_2 \neq x_1)$.

బిందువు–వాలు రూపం నుండి సరళరేఖ సమీకరణం

$$y-y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

దీని నుండి $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ (ఇదియే రెండు బిందువుల రూపంలో సరళరేఖ సమీకరణం)

ఉదాహరణ 5.23 బిందువులు (5,-3) మరియు (7,-4) ల గుండా పోయే సరళరేఖ సమీకరణమును కనుగొనుము.

సాధన రెండు బిందువులు (x_1,y_1) మరియు (x_2,y_2) ల గుండా పోయే సరళరేఖ సమీకరణం

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

బిందువులను ప్రతిక్షేపించగా,

$$\frac{y+3}{-4+3} = \frac{x-5}{7-5}$$

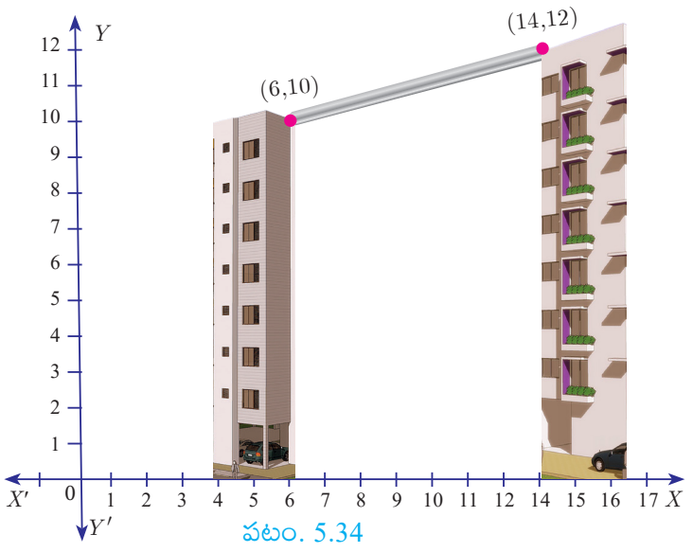
నుండి $2y+6 = -x+5$

కాబట్టి, $x+2y+1 = 0$

మీకు తెలుసా?

గెలీలియో మరియు న్యూటన్ వంటి గణితజ్ఞ భౌతికశాస్త్రవేత్తలు తలం మరియు అంతరిక్షంలో వస్తువుల కదలికలను (చలనమును) వివరించడానికి నిరూపక రేఖాగణితమును ఉపయోగించారు.

ఉదాహరణ 5.24 వేర్వేరు ఎత్తులు గల రెండు భవనములు పరస్పరం ఎదురెదురుగా ఉన్నవి. ఒక భారీ ఇనుప కడ్డీ భవనముల పై భాగములను బిందువు (6,10) నుండి బిందువు (14,12) వరకు కలుపుతున్నది. అయిన భారీ ఇనుప కడ్డీ సమీకరణమును కనుగొనండి.



పటం. 5.34

సాధన $A(6,10)$ మరియు $B(14,12)$ లు భవనముల మిద్దెపై గుర్తించబడిన బిందువులు అనుకొనుము.

$A(6,10)$ మరియు $B(14,12)$ ల గుండా పోవు సరళ రేఖ సమీకరణమే ఇనుప కడ్డీ సమీకరణం అవుతుంది.

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \quad \text{నుండి} \quad \frac{y-10}{12-10} = \frac{x-6}{14-6}$$

$$\frac{y-10}{2} = \frac{x-6}{8}$$

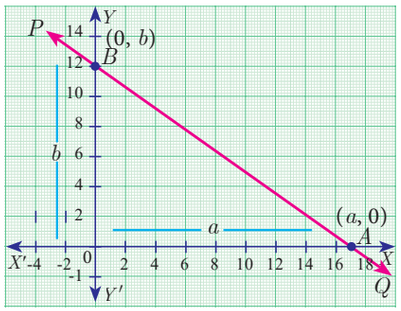
కావున, $x-4y+34 = 0$

దీని నుండి ఇనుప కడ్డీ సమీకరణం $x-4y+34=0$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_5.indd 235 11-02-2023 18:04:09

5.5.7 అంతరఖండం రూపం

నిరూపకాక్షముల అంతరఖండములు వరుసగా a మరియు b లుగా గల రేఖ యొక్క సమీకరణమును కనుగొంటాం.



పటం. 5.35

PQ అనే రేఖ X అక్షమును A వద్ద మరియు Y అక్షమును B వద్ద ఖండిస్తుంది అనుకొంటాం. $OA=a,\ OB=b$ అనుకొనము.

అయిన

A మరియు B ల నిరూపకాలు వరుసగా $(a,0)$ మరియు $(0,b)$

కావున A మరియు B లను కలిపే సరళరేఖ సమీకరణం

$$\frac{y-0}{b-0}=\frac{x-a}{0-a} \text{ నుండి, } \frac{y}{b}=\frac{x-a}{-a} \text{ మనం పొందునది } \frac{y}{b}=\frac{-x}{a}+1$$

దీని నుండి $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ (అంతర ఖండం రూపంలో సరళరేఖ సమీకరణం)

ప్రగతి శోధన ఆయా పెట్టెలకు సంబంధించిన వివరములను పూరింపుము.

రూపము	ఎప్పుడు ఉపయోగించవలెను	పేరు
$y=mx+c$	వాలు$=m$, అంతరఖండం$=c$ ఇవ్వబడినపుడు	
$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$		
	అంతరఖండంలు ఇవ్వబడినపుడు	అంతరఖండ రూపం

ఉదాహరణ 5.25 బిందువు $(5,7)$ గుండా పోవు మరియు అక్షములపై సమాన పరిమాణం కలిగి వ్యతిరేఖ గుర్తులతో అంతర ఖండములను ఏర్పరిచే సరళరేఖ సమీకరణంను కనుగొనండి.

సాధన x అంతర ఖండం 'a' మరియు y అంతర ఖండం '$-a$' అనుకొనుము.

అంతర ఖండ రూపంలో సరళరేఖ సమీకరణం $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

$$\text{నుండి } \frac{x}{a}+\frac{y}{-a}=1 \quad (\text{ఇక్కడ } b=-a)$$

కావున, $x-y=a$ ...(1)

(1) వ సమీకరణం $(5,7)$ గుండా పోవుటచే

కావున, $5-7=a \Rightarrow a=-2$

దీని నుండి కావలసిన సరళరేఖ సమీకరణం $x-y=-2$; లేదా $x-y+2=0$

ఉదాహరణ 5.26 సరళరేఖ $4x-9y+36=0$ నిరూపకాక్షముల వద్ద చేయు అంతరఖండములను కనుగొనండి.

సాధన ఇవ్వబడిన సరళరేఖ సమీకరణం $4x-9y+36=0$

దీనిని $4x-9y=-36$ అని వ్రాయవచ్చు (సాధారణ రూపంలోకి మార్చగా)

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_5.indd 236 11-02-2023 18:04:11

-36 తో భాగించగా మనకు లభించునది $\frac{x}{-9}+\frac{y}{4}=1$ ...(1)

(1) ని అంతర ఖండ రూపంతో పోల్చగా మనం పొందునది x అంతరఖండం $a=-9$; y అంతరఖండం $b=4$

ఉదాహరణ 5.27 ఒక చరవాణిని దాని బ్యాటరీ సామర్థ్యం 100% ఉన్నప్పుడు ఉపయోగించుటకు ప్రారంభించెను. చరవాణి x గంటలు ఉపయోగించిన తరువాత దాని బ్యాటరీ సామర్థ్యం ('y' దశాంశంలో) $y=-0.25x+1$ అని ఊహించబడింది.

(i) బ్యాటరీ సామర్థ్యం 40% అయిన ఎన్ని గంటలు గడిచినదని కనుగొనుము.

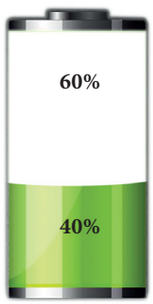
(ii) బ్యాటరీ సామర్థ్యం పూర్తిగా తగ్గిపోవుటకు ఎన్ని గంటలు పడుతుంది?

సాధన

(i) బ్యాటరీ సామర్థ్యం 40% గా ఉన్నప్పుడు గడిచిన గంటలను కనుగొనడానికి $y=0.40$ అని తీసుకొనవలెను,

$0.40 = -0.25x+1$ నుండి $0.25x=0.60$

మనం పొందునది, $x = \frac{0.60}{0.25}=2.4$ గంటలు.



పటం. 5.36

(ii) బ్యాటరీ సామర్థ్యం 0 అయితే $y=0$

కావున, $0 = -0.25x+1$ నుండి $0.25x=1$ దీని నుండి $x=4$ గంటలు.

కావున, నాలుగు గంటల తరువాత చరవాణి బ్యాటరీ సామర్థ్యం పూర్తిగా తగ్గిపోతుంది.

ఉదాహరణ 5.28 నిరూపకాక్షములపై చేయు ధనాత్మక అంతరఖండముల మొత్తం 7 మరియు బిందువు $(-3,8)$ గుండా పోవు సరళరేఖ సమీకరణంను కనుగొనుము.

సాధన a మరియు b లను అంతరఖండములనుకొనిన $a+b=7$ లేదా $b=7-a$

అంతర ఖండ రూపం నుండి $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ...(1)

కావున $\frac{x}{a}+\frac{y}{7-a}=1$

ఈ రేఖ బిందువు $(-3,8)$, గుండా పోవుట వలన

$$\frac{-3}{a}+\frac{8}{7-a}=1 \Rightarrow -3(7-a)+8a=a(7-a)$$

$$-21+3a+8a=7a-a^2$$

కావున, $a^2+4a-21=0$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_5.indd 237 11-02-2023 18:04:12

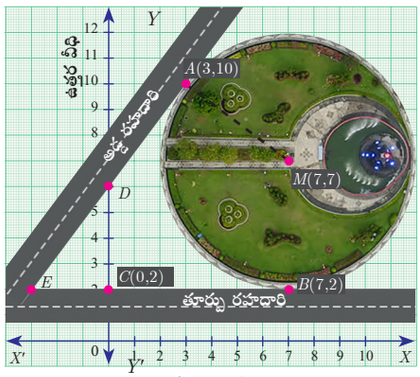
ఈ సమీకరణంను సాధించగా $(a-3)(a+7)=0$

$$a=3 \text{ లేదా } a=-7$$

a ధనాత్మకం కావున మనం పొందునది $a = 3$ మరియు $b = 7-a = 7-3 = 4$.

దీని ప్రకారం $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$

కావున మనకు అవసరమగు సమీకరణం $4x+3y-12=0$.



పటం. 5.37

ఉదాహరణ 5.29 ఒక వృత్తాకార తోట అనునది తూర్పు రహదారి మరియు అడ్డరహదారులతో ఆవరించబడి ఉంది. అడ్డరహదారి ఉత్తరవీధిని D వద్ద మరియు తూర్పు రహదారిని E వద్ద ఖండించును. స్పర్శరేఖ AD వృత్తాకార తోటను $A(3, 10)$ వద్ద తాకును. పటమునుపయోగించి

(అ) క్రింది వాటికి సమీకరణం కనుగొనుము.

(i) తూర్పు రహదారి

(ii) ఉత్తర వీధి

(iii) అడ్డ రహదారి

(ఆ) క్రింది వాటిని అడ్డ రహదారి ఎక్కడ ఖండించును

(i) తూర్పు రహదారి ? (ii) ఉత్తర వీధి ?

సాధన (a) (i) తూర్పు రహదారి అనేది $C(0,2)$ మరియు $B(7,2)$ లను కలుపు సరళరేఖ అగును. అందువలన రెండు బిందువుల రూపం నుండి తూర్పు రహదారి సమీకరణంను పొందవచ్చును.

$$\frac{y-2}{2-2}=\frac{x-0}{7-0}$$

$$\frac{y-2}{0}=\frac{x}{7} \Rightarrow y=2$$

(ii) బిందువు $C(0,2)$ పైన క్షితిజ లంబంగా బిందువు D అమరినది. D యొక్క x నిరూపకం 0. దీని ప్రకారం ఉత్తర వీధిపై గల ప్రతి బిందువు యొక్క x నిరూపకం విలువ 0.

ఉత్తర వీధి యొక్క సమీకరణం $x=0$

(iii) అడ్డ రహదారి సమీకరణమును కనుగొనుట

వృత్తాకార తోట కేంద్రం $M(7, 7)$, స్పర్శ బిందువు $A(3, 10)$ మొదట మనం MA యొక్క వాలు m_1 ను కనుగొందాము.

అందువలన $m_1=\frac{10-7}{3-7}=\frac{-3}{4}$.

అడ్డ రహదారి MA కి లంబంగా ఉంది, అడ్డ రహదారి వాలు m_2 అనుకొనిన, $m_1m_2=-1$ నుండి $\frac{-3}{4}m_2=-1$ కావున $m_2=\frac{4}{3}$.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_5.indd 238 11-02-2023 18:04:14

ఇపుడు అడ్డరహదారి యొక్క వాలు $\frac{4}{3}$ మరియు ఇది $A(3,10)$ బిందువు గుండా పోవుట వలన

అడ్డరహదారి సమీకరణం $y-10=\frac{4}{3}(x-3)$

$$3y-30=4x-12$$

దీని నుండి, $4x-3y+18=0$

(b) (i) బిందువు $D\ (0,k)$ అనునది అడ్డరహదారిపై గల బిందువు అనుకొనుము

కావున అడ్డరహదారి సమీకరణంలో $x=0$, $y=k$ ని ప్రతిక్షేపించుము.

మనం పొందునది, $0-3k+18=0$

$k=6$ కావున, D అనునది $(0,\ 6)$ అవుతుంది.

(ii) E ని కనుగొనుటకు $E\ (q,2)$ అనుకొనుము.

అడ్డరహదారి సమీకరణంలో $y=2$ ను ప్రతిక్షేపించుము.

మనం పొందునది, $4q-6+18=0$

$4q=-12$ నుండి $q=-3$

కాబట్టి బిందువు E నిరూపకం $(-3,2)$

దీని ప్రకారం అడ్డరహదారి ఉత్తర వీధిని $D(0,\ 6)$ వద్ద మరియు తూర్పు రహదారిని E $(-3,2)$ వద్ద ఖండించును.

ప్రగతి శోధన ఆయా పెట్టెలకు సంబంధించిన విషయమును పూరింపుము.

వ.సంఖ్య	సమీకరణం	వాలు	x అంతరఖండం	y అంతరఖండం
1	$3x-4y+2=0$			
2	$y=14x$			0
3			2	-3

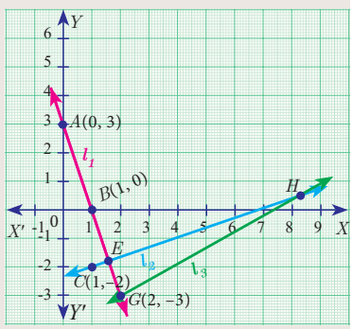
కృత్యము 4

l_1 రేఖ l_2 కి లంబం మరియు l_3 రేఖ వాలు 3 అయిన

(i) l_1 రేఖ యొక్క సమీకరణం కనుగొనండి.

(ii) l_2 రేఖ యొక్క సమీకరణం కనుగొనండి.

(iii) l_3 రేఖ యొక్క సమీకరణం కనుగొనండి.

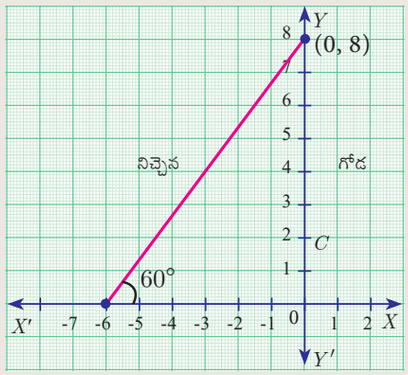


పటం. 5.38

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_5.indd 239 11-02-2023 18:04:15

కృత్యము 5

ఒక నిచ్చెన క్షితిజ లంబ గోడకి ఆనించబడియున్నది. దాని అడుగు భాగం క్షితిజ సమాంతర తలంను తాకుచున్నది. క్రింది నిబంధనలననుసరించి నిచ్చెన యొక్క సమీకరణంను కనుగొనండి.

వ.సం.	నిబంధన	పటం	నిచ్చెన సమీకరణం
(i)	నిచ్చెన నేలతో 60° కోణం చేయుచున్నది మరియు గోడను $(0,8)$ వద్ద తాకుచున్నది	 పటం. 5.39	
(ii)	నిచ్చెన యొక్క అడుగు మరియు పై భాగపు బిందువులు $(2,4)$ మరియు $(5,1)$		

అభ్యాసము 5.3

1. బిందువులు $(1,-5)$ మరియు $(4,2)$ లను కలుపు రేఖాఖండం మధ్య బిందువు గుండా పోవు మరియు (i) X అక్షము (ii) Y అక్షమునకు సమాంతరంగా గల సరళరేఖ సమీకరణంను కనుగొనండి.
2. ఒక సరళరేఖ సమీకరణం $2(x-y)+5=0$. ఆ రేఖ యొక్క వాలు, క్షితిజంతో చేయు కోణం మరియు Y అక్షము పై అంతరఖండమును కనుగొనుము.
3. క్షితిజముతో చేయు కోణం 30° మరియు Y అక్షముపై అంతరఖండం -3 గా గల రేఖ సమీకరణంను కనుగొనుము.
4. $\sqrt{3}x+(1-\sqrt{3})y=3$ యొక్క వాలు మరియు y అంతరఖండంను కనుగొనుము.
5. ఒక రేఖ (–2,3) మరియు (8,5) ల గుండా పోవుచూ $y=ax+2$ కి లంబంగా ఉన్నట్లయితే, 'a' విలువను కనుగొనుము.
6. ఒక కొండ లంబకోణ త్రిభుజాకారంలో కలదు. దాని అడుగు భాగం $(19,3)$ వద్ద మరియు ఆ కొండ క్షితిజముతో 45° ల కోణము చేయుచున్నది. అయిన ఆ కొండ అడుగు నుండి శిఖర భాగంను కలిపే రేఖ సమీకరణంను కనుగొనుము.
7. క్రింద ఇవ్వబడిన బిందువుల జత ద్వారా వెళ్ళు రేఖ యొక్క సమీకరణంను కనుగొనుము.
   (i) $\left(2,\frac{2}{3}\right)$ మరియు $\left(\frac{-1}{2},-2\right)$ (ii) $(2,3)$ మరియు $(-7,-1)$
8. xy తలంలో బిందువు $(-6,-4)$ వద్ద ఒక పిల్లి ఉన్నది. ఒక సీసాలో పాలును బిందువు $(5,11)$ వద్ద

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_5.indd 240 11-02-2023 18:04:17

ఉంచబడింది. ఆ పిల్లి వీలయిన తక్కువ దూరం ప్రయాణించి ఆ పాలును త్రాగవలెను. అయిన ఆ పిల్లి పాలు త్రాగుటకు వెళ్ళవలసిన దారి యొక్క సమీకరణంను కనుగొనుము.

9. ΔABC యొక్క శీర్షాలు $A(6,2)$, $B(-5,-1)$ మరియు $C(1,9)$ లు అయిన A.ద్వారా పోయే మధ్యగత రేఖ మరియు ఉన్నతి యొక్క సమీకరణంను కనుగొనుము.

10. వాలు $\frac{-5}{4}$ కలిగి బిందువు $(-1,2)$ గుండా పోయే సరళ రేఖ సమీకరణంను కనుగొనుము.

11. నీవు ఒక పాటను డౌన్‌లోడ్ చేస్తున్నావు. మిగిలిన y శాతం (దశాంశ రూపంలో) మెగాబైట్లను x సెకన్లలో డౌన్‌లోడ్ చేయబడును అనుదానిని $y = -0.1x + 1$ అని ఇవ్వబడినది.
   (i) పాట యొక్క మొత్తం MB ని కనుగొనండి.
   (ii) పాటలో 75% డౌన్‌లోడ్ అగుటకు ఎన్ని సెకన్లు పడుతుంది?
   (iii) పాట మొత్తం డౌన్‌లోడ్ అగుటకు ఎన్ని సెకన్లు పడుతుంది?

12. క్రింది విధంగా x మరియు y అంతరఖండములు కలిగిన రేఖ సమీకరణమును కనుగొనుము.
   (i) $4, -6$ (ii) $-5, \frac{3}{4}$

13. క్రింది సమీకరణములు నిరూపకాక్షముల వద్ద చేయు అంతరఖండములను కనుగొనుము.
   (i) $3x - 2y - 6 = 0$ (ii) $4x + 3y + 12 = 0$

14. సరళరేఖ సమీకరణంను కనుగొనుము.
   (i) బిందువు $(1,-4)$ గుండా పోవుచూ మరియు అంతరఖండముల నిష్పత్తి $2:5$
   (ii) బిందువు $(-8,4)$ గుండా పోవుచూ మరియు నిరూపకాక్షములపై సమానమైన అంతరఖండములను చేయు

5.6 సరళరేఖ యొక్క సాధారణరూపము

రేఖీయ సమీకరణం (రెండు చరరాశులు x మరియు y గల ఏకఘాత బహుపద సమాసం) $ax + by + c = 0$ (ఇక్కడ a, b మరియు c లు వాస్తవ సంఖ్యలు అదేవిధంగా a, b లలో కనీసం ఏదైనా ఒకటి శూన్యేతరమగును) ఎప్పుడూ సరళరేఖను సూచించును. ఇదే సరళరేఖ యొక్క సాధారణ రూపం అవుతుంది.

ఇప్పుడు మనం క్రింది సందర్భములలో సరళరేఖ యొక్క సమీకరణంను కనుగొందాము

(i) $ax + by + c = 0$ కి సమాంతరంగా ఉండు రేఖ
(ii) $ax + by + c = 0$ కి లంబంగా ఉండు రేఖ

5.6.1 $ax + by + c = 0$ రేఖకి సమాంతరంగా నుండు రేఖ సమీకరణం

$ax + by + c = 0$ రేఖకి సమాంతరంగా నుండు అన్ని రేఖల సమీకరణములు $ax + by + k = 0$ రూపంలో ఉంటుంది. ఇచ్చట k కి విభిన్న విలువలుంటుంది

5.6.2 $ax + by + c = 0$ రేఖకి లంబంగా నుండు రేఖ సమీకరణం

$ax + by + c = 0$ రేఖకి లంబంగా నుండు అన్ని రేఖల సమీకరణములు $bx - ay + k = 0$ రూపంలో ఉంటుంది. k కి విభిన్న విలువలుంటుంది.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_5.indd 241 11-02-2023 18:04:18

మీకు తెలుసా?

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ మరియు $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ అనునవి శూన్యేతర గుణకములు కలిగిన రెండు సరళరేఖలు.

(i) పరస్పరం సమాంతరమైతే $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$; అనగా, $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$

(ii) పరస్పరం లంబమైతే $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ అవుతుంది.

ప్రగతి శోధన ఆయా గడులకు సంబంధించిన విషయములను పూరింపుము.

వ.సం	సమీకరణాలు	సమాంతరం లేక లంబం	సంఖ్య	సమీకరణాలు	సమాంతరం లేక లంబం
1	$5x + 2y + 5 = 0$ $5x + 2y - 3 = 0$		3	$8x - 10y + 11 = 0$ $4x - 5y + 16 = 0$	
2	$3x - 7y - 6 = 0$ $7x + 3y + 8 = 0$		4	$2y - 9x - 7 = 0$ $27y + 6x - 21 = 0$	

5.6.3 సరళరేఖ వాలు

సరళరేఖ సమీకరణం యొక్క సాధారణ రూపం $ax + by + c = 0$ (a, b లలో కనీసం ఏదైనా ఒకటి శూన్యేతరమగును)

x గుణకము $= a$, y గుణకము $= b$, స్థిరపదం $= c$

పై సమీకరణమును $by = -ax - c$ గా వ్రాయవచ్చును.

దీని ప్రకారం, $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, $b \neq 0$ అయిన...(1)

(1) ని అంతరఖండ రూపమైన $y = mx + l$ తో పోల్చగా

మనం పొందునది, వాలు $m = -\frac{a}{b}$

$$m = \frac{-\ x \text{ గుణకము}}{y \text{ గుణకము}}$$

y అంతరఖండం $l = -\frac{c}{b}$

$$y \text{ అంతరఖండం} = \frac{-\ \text{స్థిరపదం}}{y \text{ గుణకము}}$$

మెదడుకు మేత

వాలు 1 గా ఉండునట్లు ఎన్ని సరళరేఖలు నీవు గీయగలవు?

ఉదాహరణ 5.30 సరళరేఖ $6x + 8y + 7 = 0$ యొక్క వాలును కనుక్కొండి.

సాధన ఇవ్వబడినది $6x + 8y + 7 = 0$

$$\text{వాలు } m = \frac{-\ x \text{ గుణకము}}{y \text{ గుణకము}} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$$

కాబట్టి సరళరేఖ యొక్క వాలు $-\frac{3}{4}$.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_5.indd 242 11-02-2023 18:04:21

ఉదాహరణ 5.31

(i) $3x - 7y = 11$ కి సమాంతరంగా గల (ii) $2x - 3y + 8 = 0$ కి లంబంగా గల రేఖల వాలును కనుగొనుము.

సాధన (i) ఇవ్వబడిన సరళ రేఖ $3x - 7y = 11$

నుండి $3x - 7y - 11 = 0$

వాలు $m = \frac{-3}{-7} = \frac{3}{7}$

సమాంతర రేఖ వాలులు సమానం నుండి,

$3x - 7y = 11$ సమాంతరంగా ఉన్న ఏదేని రేఖ వాలు $\frac{3}{7}$

(ii) ఇవ్వబడిన సరళ రేఖ $2x - 3y + 8 = 0$

వాలు $m = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$

లంబంగా నుండు రేఖల వాలుల లబ్ధము -1 నుండి $2x - 3y + 8 = 0$ కి లంబంగా నుండు ఏదేని రేఖ వాలు $= \frac{-1}{\frac{2}{3}} = \frac{-3}{2}$

ఉదాహరణ 5.32 సరళరేఖలు $2x + 3y - 8 = 0$ మరియు $4x + 6y + 18 = 0$ లు సమాంతరంగా ఉన్నాయని చూపుము.

సాధన సరళ రేఖ $2x + 3y - 8 = 0$ యొక్క వాలు

$$m_1 = \frac{-\ x \text{ గుణకము}}{y \text{ గుణకము}}$$

$$m_1 = \frac{-2}{3}$$

సరళ రేఖ $4x + 6y + 18 = 0$ యొక్క వాలు

$$m_2 = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3}$$

ఇక్కడ, $m_1 = m_2$

అనగా, వాలులు సమానం, దీని నుండి రెండు సరళ రేఖలు సమాంతరంగా ఉన్నాయి.

మరొక పద్ధతి

$a_1 = 2,\ b_1 = 3$

$a_2 = 4,\ b_2 = 6$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

కావున, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$

దీని నుండి రేఖలు సమాంతరంగా ఉన్నాయి.

ఉదాహరణ 5.33 సరళరేఖలు $x - 2y + 3 = 0$ మరియు $6x + 3y + 8 = 0$ లు లంబంగా ఉన్నాయని చూపుము.

సాధన సరళ రేఖ $x - 2y + 3 = 0$ యొక్క వాలు

$$m_1 = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

సరళ రేఖ $6x + 3y + 8 = 0$ యొక్క వాలు

$$m_2 = \frac{-6}{3} = -2$$

ఇక్కడ, $m_1 \times m_2 = \frac{1}{2} \times (-2) = -1$

అనగా, దీనినుండి, రెండు సరళ రేఖలు ఒకదానికొకటి లంబంగా ఉన్నాయి.

మరొక పద్ధతి

$a_1 = 1,\ b_1 = -2;$

$a_2 = 6,\ b_2 = 3$

$a_1a_2 + b_1b_2 = 6 - 6 = 0$

రేఖలు లంబంగా ఉన్నాయి.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_5.indd 243 11-02-2023 18:04:24

ఉదాహరణ 5.34 బిందువు $(6,4)$ గుండా పోవుచూ, రేఖ $3x-7y=12$ కి సమాంతరంగా గల సరళ రేఖ సమీకరణమును కనుగొనుము.

సాధన రేఖ $3x-7y-12=0$ కి సమాంతరంగా గల సరళరేఖ సమీకరణం $3x-7y+k=0$.

ఇది $(6,4)$ బిందువు గుండా పోవును.

$$\begin{aligned} 3(6)-7(4)+k &= 0 \\ k = 28-18 &= 10 \end{aligned}$$

కావున కావలసిన సరళరేఖ సమీకరణం $3x-7y+10=0$.

ఉదాహరణ 5.35 బిందువు $(7,-1)$ గుండా పోవుచూ, రేఖ $y=\frac{4}{3}x-7$ కి లంబంగా గల సరళ రేఖ సమీకరణమును కనుగొనుము.

సాధన సమీకరణం $y=\frac{4x}{3}-7$ ని $4x-3y-21=0$ గా వ్రాయవచ్చును.

రేఖ $4x-3y-21=0$ కి లంబంగా గల సరళ రేఖ సమీకరణం $3x+4y+k=0$

ఇది $(7,-1)$, బిందువు గుండా పోవును.

$21-4+k=0$ దీని నుండి $k=-17$

కావున కావలసిన సరళరేఖ సమీకరణం $3x+4y-17=0$.

ఉదాహరణ 5.36 $4x+5y=13$ మరియు $x-8y+9=0$ రేఖల ఖండన బిందువు ద్వారా పోవుచూ, Y అక్షమునకు సమాంతరంగా గల సరళరేఖ సమీకరణంను కనుగొనుము.

సాధన ఇవ్వబడిన రేఖలు

$$\begin{aligned} 4x+5y-13 &= 0 \quad \ldots(1) \\ x-8y+9 &= 0 \quad \ldots(2) \end{aligned}$$

ఖండన బిందువును కనుగొనుటకు సమీకరణము (1) మరియు (2) లను సాధించుము.

$$\begin{array}{ccccc} x & & y & & 1 \\ 5 & \times & -13 & \times & 4 \\ -8 & & 9 & & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \times \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ 5 \\ \\ -8 \end{array}$$

$$\frac{x}{45-104} = \frac{y}{-13-36} = \frac{1}{-32-5}$$

$$\frac{x}{-59} = \frac{y}{-49} = \frac{1}{-37}$$

$$x=\frac{59}{37},\quad y=\frac{49}{37}$$

కావున, ఖండన బిందువు $(x,y)=\left(\frac{59}{37},\frac{49}{37}\right)$

Y అక్షమునకు సమాంతంగా గల రేఖ సమీకరణం $x=c$

ఇది $(x,y)=\left(\frac{59}{37},\frac{49}{37}\right)$ ద్వారా పోవును, కావున $c=\frac{59}{37}$.

రేఖ యొక్క సమీకరణం $x=\frac{59}{37}$ నుండి $37x-59=0$

మెదడుకు మేత

1. రెండు సరళ రేఖలకు ఎన్ని ఖండన బిందువులు కలవు?
2. రేఖ $2x-3y+6=0$. కి లంబంగా ఎన్ని సరళరేఖలు కలవు?

ఉదాహరణ 5.37 బిందువులు $A(0,5)$ మరియు $B(4,1)$ లను కలుపు రేఖ బిందువు $C\,(4,4)$ ని కేంద్రంగా గల ఒక వృత్తము యొక్క స్పర్శ రేఖ అగును. అయిన క్రిందివానిని కనుగొనుము

(i) AB రేఖ యొక్క సమీకరణం

(ii) AB కి లంబంగా నుండు మరియు, C గుండా పోవు రేఖ యొక్క సమీకరణం

(iii) స్పర్శరేఖ AB వృత్తమును తాకు బిందువు యొక్క నిరూపకములు.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_5.indd 244 11-02-2023 18:04:28

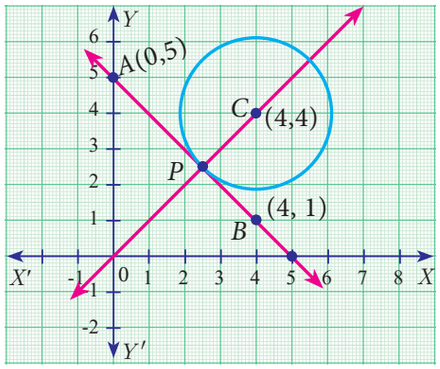
సాధన (i) $A(0,5)$ మరియు $B(4,1)$ లను కలుపు రేఖ AB యొక్క సమీకరణం

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y-5}{1-5} = \frac{x-0}{4-0}$$

$$4(y-5) = -4x \Rightarrow y-5 = -x$$

$$x + y - 5 = 0 \quad \ldots(1)$$



పటం. 5.40

(ii) AB రేఖ $x+y-5=0$ కి లంబంగా నుండు రేఖ సమీకరణం $x-y+k=0$

ఇది బిందువు $(4,4)$, గుండా పోవును.

దీని నుండి $4 - 4 + k = 0 \Rightarrow k = 0$

AB కి లంబంగా నుండు మరియు C ద్వారా పోవు రేఖ యొక్క సమీకరణం $x - y = 0$ ...(2)

(iii) రేఖల ఖండన బిందువే, స్పర్శ రేఖ AB వృత్తమును తాకు బిందువు P అవుతుంది.

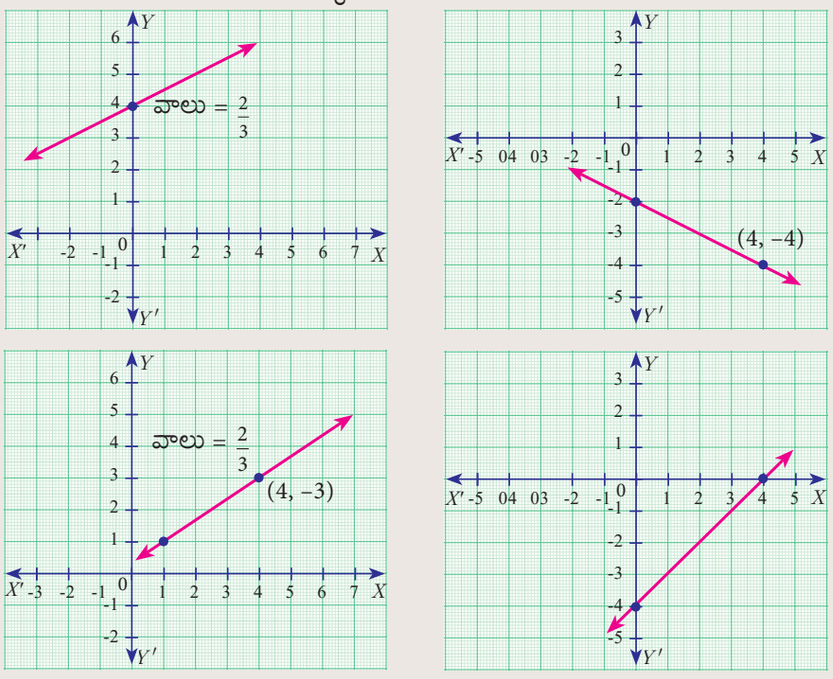
$x+y-5=0$ మరియు $x-y=0$ లను సాధించగా

సాధించగా మనం పొందునది $x=\frac{5}{2}$ మరియు $y=\frac{5}{2}$

కావున, వృత్తమును తాకు బిందువు P యొక్క నిరూపకాలు $\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)$

కృత్యము 6

ఇవ్వబడిన రేఖా చిత్రములలో గల సరళరేఖ యొక్క సమీకరణమును కనుగొనండి.



పటం. 5.41

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_5.indd 245 11-02-2023 18:04:30

అభ్యాసము 5.4

1. క్రింది సరళ రేఖల వాలును కనుగొనుము. (i) $5y-3=0$ (ii) $7x-\frac{3}{17}=0$
2. (i) రేఖ $y=0.7x-11$ కి సమాంతరంగా గల (ii) రేఖ $x=-11$ కి లంబంగా గల సరళరేఖల వాలును కనుగొనుము.
3. క్రింద ఇవ్వబడిన రేఖలు సమాంతరమగునా లేదా లంబమగునా అని సరిచూడుము.
   (i) $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{1}{7}=0$ మరియు $\frac{2x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{1}{10}=0$
   (ii) $5x+23y+14=0$ మరియు $23x-5y+9=0$
4. సరళ రేఖలు $12y=-(p+3)x+12$, $12x-7y=16$ లు ఒకదానికొకటి లంబమయిన 'p' విలువను కనుగొనుము.
5. బిందువు $P(-5,2)$ గుండా పోవుచూ, బిందువులు $Q(3,-2)$ మరియు $R(-5,4)$ లను కలుపు రేఖకు సమాంతరంగా నుండు సరళ రేఖ సమీకరణమును కనుగొనుము.
6. బిందువు $(6,-2)$ గుండా పోవుచూ, బిందువులు $(6,7)$ మరియు $(2,-3)$ లను కలుపు రేఖకి లంబంగా నుండు సమీకరణమును కనుగొనుము.
7. $A(-3,0)$ $B(10,-2)$ మరియు $C(12,3)$ లు ΔABC యొక్క శీర్షాలు అయిన, A మరియు B నుండి ఉన్నతుల సమీకరణమును కనుగొనుము.
8. బిందువులు $A(-4,2)$ మరియు $B(6,-4)$ లను కలుపు రేఖ యొక్క లంబసమద్విఖండన రేఖ సమీకరణమును కనుగొనుము.
9. రేఖలు $7x+3y=10$, $5x-4y=1$ ల ఖండన బిందువు గుండా పోవుచూ మరియు రేఖ $13x+5y+12=0$ కి సమాంతరంగా నుండు సరళరేఖ కమీకరణమును కనుగొనుము.
10. రేఖలు $5x-6y=2$, $3x+2y=10$ ల ఖండన బిందువు గుండా పోవుచూ మరియు రేఖ $4x-7y+13=0$ కి లంబంగా నుండు సరళరేఖ కమీకరణమును కనుగొనుము.
11. రేఖలు $3x+y+2=0$ మరియు $x-2y-4=0$ ల ఖండన బిందువు, రేఖలు $7x-3y=-12$ మరియు $2y=x+3$ ల ఖండన బిందువుల గుండా పోవు సరళరేఖ సమీకరణమును కనుగొనుము.
12. రేఖలు $8x+3y=18$, $4x+5y=9$ ల ఖండన బిందువు మరియు బిందువులు $(5,-4)$ మరియు $(-7,6)$ లను కలుపు రేఖా ఖండమును సమద్విఖండన చేయు బిందువుల గుండా పోవు సరళరేఖ సమీకరణమును కనుగొనుము.

GF86M

అభ్యాసము 5.5

బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు

1. బిందువులు $(-5,0)$, $(0,-5)$ మరియు $(5,0)$ లతో ఏర్పడిన త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యం
   (A) 0 చ.ప్రమాణాలు (B) 25 చ.ప్రమాణాలు (C) 5 చ.ప్రమాణాలు (D) ఏవీకావు

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_5.indd 246 11-02-2023 18:04:33

2. ఒక వ్యక్తి ఒక గోడకి దగ్గరగా నడిచివెళ్ళుతున్నాడు. అతనికి మరియు గోడకి మధ్య గల దూరం 10 ప్రమాణాలు. గోడను Y అక్షంగా తీసుకొనిన, అతడు ప్రయాణించుచున్న మార్గం

(A) $x = 10$ (B) $y = 10$ (C) $x = 0$ (D) $y = 0$

3. ఇవ్వబడిన సరళరేఖ సమీకరణం $x = 11$ అనునది

(A) X అక్షమునకు సమాంతరం (B) Y అక్షమునకు సమాంతరం

(C) ఆది బిందువు గుండా పోవును (D) బిందువు $(0,11)$ గుండా పోవును.

4. బిందువులు $(5,7), (3,p)$ మరియు $(6,6)$ లు సరేఖీయములైన p విలువ

(A) 3 (B) 6 (C) 9 (D) 12

5. $3x - y = 4$ మరియు $x + y = 8$ రేఖల ఖండన బిందువు

(A) $(5,3)$ (B) $(2,4)$ (C) $(3,5)$ (D) $(4,4)$

6. $(12,3)$, $(4,a)$ లను కలుపు రేఖ వాలు $\frac{1}{8}$ అయిన 'a' విలువ

(A) 1 (B) 4 (C) -5 (D) 2

7. బిందువులు $(0,0)$ మరియు $(-8,8)$ లను కలుపు రేఖకి లంబంగా నుండు రేఖ యొక్క వాలు

(A) -1 (B) 1 (C) $\frac{1}{3}$ (D) -8

8. PQ రేఖ యొక్క వాలు $\frac{1}{\sqrt{3}}$ అయిన PQ యొక్క లంబసమద్విఖండన రేఖ వాలు

(A) $\sqrt{3}$ (B) $-\sqrt{3}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (D) 0

9. Y అక్షంపై గల బిందువు A యొక్క ద్వితీయ నిరూపకం 8 మరియు X అక్షంపై గల బిందువు B యొక్క ప్రథమ నిరూపకం 5 అయిన రేఖ AB యొక్క సమీకరణం

(A) $8x + 5y = 40$ (B) $8x - 5y = 40$ (C) $x = 8$ (D) $y = 5$

10. ఆది బిందువు గుండా పోవుచూ మరియు రేఖ $7x - 3y + 4 = 0$ కి లంబంగా నుండు రేఖ సమీకరణం

(A) $7x - 3y + 4 = 0$ (B) $3x - 7y + 4 = 0$ (C) $3x + 7y = 0$ (D) $7x - 3y = 0$

11. (i) $l_1 : 3y = 4x + 5$ (ii) $l_2 : 4y = 3x - 1$

(iii) $l_3 : 4y + 3x = 7$ (iv) $l_4 : 4x + 3y = 2$

లను నాలుగు సరళరేఖలుగా తీసుకొనుము. క్రింది ప్రవచనములలో ఏది సత్యము?

(A) l_1 మరియు l_2 లు లంబమగును. (B) l_1 మరియు l_4 లు సమాంతరమగును.

(C) l_2 మరియు l_4 లు లంబమగును. (D) l_2 మరియు l_3 లు సమాంతరమగును.

12. ఒక సరళరేఖ సమీకరణం $8y = 4x + 21$ అయిన క్రింది వానిలో ఏది సత్యం?

(A) వాలు 0.5 మరియు y అంతరఖండం 2.6

(B) వాలు 5 మరియు y అంతరఖండం 1.6

(C) వాలు 0.5 మరియు y అంతరఖండం 1.6

(D) వాలు 5 మరియు y అంతరఖండం 2.6

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_5.indd 247 11-02-2023 18:04:36

13. ఒక చతుర్భుజం అనునది సమలంబ చతుర్భుజమవుతుందని నిరూపించునపుడు క్రింది వానిలో తప్పనిసరిగా చూపవలసినది.

(A) రెండు భుజాలు సమాంతరం

(B) రెండు భుజాలు సమాంతరం మరియు రెండు భుజాలు సమాంతరం కానివి.

(C) ఎదుటి భుజాలు సమాంతరం

(D) అన్ని భుజాల పొడవులు సమానం

14. వాలులను ఉపయోగించి ఒక చతుర్భుజం సమాంతర చతుర్భుజమగునని నిరూపించునపుడు మనం ఖచ్చితంగా కనుగొనవలసినది.

(A) రెండు భుజాల వాలులు

(B) రెండు జతల ఎదుటి భుజాల వాలులు

(C) అన్ని భుజాల పొడవులు

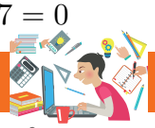
(D) రెండు భుజాల పొడవులు మరియు వాలులు.

15. $(2, 1)$ ని ఖండన బిందువుగా కల్గిన రెండు రేఖలు

(A) $x - y - 3 = 0;\ 3x - y - 7 = 0$ (B) $x + y = 3;\ 3x + y = 7$

(C) $3x + y = 3;\ x + y = 7$ (D) $x + 3y - 3 = 0;\ x - y - 7 = 0$

అధ్యాయ అభ్యాసము - 5



1. PQRS అనునది బిందువులు $P(-1,-1)$, $Q(-1,4)$, $R(5,4)$ మరియు $S(5,-1)$ లచే ఏర్పడిన ఒక దీర్ఘచతురస్రమగును. A, B, C మరియు D లు వరుసగా PQ, QR, RS మరియు SP ల మధ్య బిందువులగును. చతుర్భుజం $ABCD$ అనునది ఒక చతురస్రం, ఒక దీర్ఘచతుంస్రం లేదా ఒక సమచతుర్భుజం అవుతుందా? నీ సమాధానమును నిర్ధారించుము.
2. ఒక త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యం 5చ.ప్రమాణాలు, త్రిభుజం యొక్క రెండు శీర్షాలు $(2,1)$ మరియు $(3, -2)$ మూడవ శీర్షము (x, y) అనునది ఇచ్చట $y = x + 3$ అని ఇవ్వబడిన మూడవ శీర్షం యొక్క నిరూపకాలను కనుగొనండి.
3. $3x + y - 2 = 0$, $5x + 2y - 3 = 0$ మరియు $2x - y - 3 = 0$ రేఖలతో ఏర్పడిన త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యమును కనుక్కోండి.
4. ఒక చతుర్భుజం యొక్క శీర్షాలు $A(-5,7)$, $B(-4,k)$, $C(-1,-6)$ మరియు $D(4,5)$ మరియు దాని వైశాల్యం 72 చ.ప్రమాణాలు అయిన k విలువను కనుగొనండి. 1
5. దూరము సూత్రమునుపయోగించకుండా బిందువులు $(-2,-1)$, $(4,0)$, $(3,3)$ మరియు $(-3,2)$ లు సమాంతర చతుర్భుజం శీర్షాలని చూపండి.
6. అంతరఖండముల మొత్తం మరియు లబ్ధం వరుసగా 1 మరియు -6 అయిన ఆ సరళ రేఖల సమీకరణములను కనుగొనండి.
7. ఒక పాల దుకాణం యజమాని ప్రతిరూపం 980 లీటర్ల పాలను ₹14/లీటరు వంతున మరియు 1220 లీటర్ల పాలను ₹16/ లీటరు వంతున విక్రయిస్తాడు. విక్రయ ధర మరియు డిమాండ్‌లకు మధ్యగల రేఖీయ సంబంధమును ఊహించుకోండి. అతడు ప్రతివారము ₹17/ లీటరు వంతున ఎన్ని లీటర్ల పాలను విక్రయిస్తాడు.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_5.indd 248 11-02-2023 18:04:38

8. రేఖ $x+3y=7$ అనునది ఒక సమతల దర్పణమును సూచించునని ఊహించుకోండి. బిందువు $(3,8)$ యొక్క ప్రతిబింబమును కనుగొనండి.
9. రేఖలు $4x+7y-3=0$ మరియు $2x-3y+1=0$ ల ఖండన బిందువు గుండా పోవు అక్షముల వద్ద సమానమైన అంతరఖండములను కలిగిన రేఖ సమీకరణమును కనుగొనండి.
10. సమీకరణములు $2x-3y+4=0$ మరియు $3x+4y-5=0$ సూచింపబడిన రెండు సరళమైన మార్గముల కూడలి వద్ద ఒక వ్యక్తి నిలబడియున్నాడు. అతడు కనీస సమయంలో $6x-7y+8=0$ ని సమీకరణంగా గల దారిని చేరుకోవడానికి ప్రయత్నిస్తున్నాడు. అయిన అతను వెళ్ళవలసిన దారి యొక్క సమీకరణమును కనుగొనండి.

గుర్తించుకోవలసిన అంశాలు



- బిందువులు (x_1,y_1), (x_2,y_2) మరియు (x_3,y_3) లతో ఏర్పడిన త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యం $\frac{1}{2}\left\{(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(x_2y_1+x_3y_2+x_1y_3)\right\}$ చదరపు ప్రమాణములు.
- మూడు బిందువులు $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ మరియు $C(x_3,y_3)$ లు సరేఖీయములైనప్పుడు మాత్రమే.

  (i) ΔABC యొక్క వైశాల్యం $=0$ లేదా $x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1=x_2y_1+x_3y_2+x_1y_3$

  (ii) AB వాలు $=$ BC వాలు లేదా AC వాలు
- నాలుగు బిందువులు (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) మరియు (x_4,y_4) లతో ఏర్పడిన చతుర్భుజం వైశాల్యం $\frac{1}{2}\left\{(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_4+x_4y_1)-(x_2y_1+x_3y_2+x_4y_3+x_1y_4)\right\}$ చదరపు ప్రమాణములు.
- ఒక రేఖ X అక్షముతో ధనాత్మక దిశలో చేయు కోణము θ అయిన దాని వాలు $m=\tan\theta$
- $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ లు రెండు విభిన్న బిందువులయిన AB వాలు $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ అగును.
- రేఖ $ax+by+c=0$ యొక్క వాలు $m=\frac{-a}{b}$.

వివిధ రూపాలలో సరళరేఖ సమీకరణం

రూపము	పేరు	రూపము	పేరు
$ax+by+c=0$	సాధారణ రూపం	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$	అంతరఖండ రూపం
$y-y_1=m(x-x_1)$	బిందువు - వాలు రూపం	$x=c$	Y అక్షమునకు సమాంతరం
$y=mx+c$	వాలు –అంతరఖండ రూపం	$y=b$	X అక్షమునకు సమాంతరం
$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$	రెండు బిందువుల రూపం		

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_5.indd 249 11-02-2023 18:04:41

- రెండు సరళ రేఖల వాలులు సమానమైనప్పుడు మాత్రమే అవి సమాంతరంగా ఉంటాయి.
- బాగా నిర్వచింపబడిన వాలులు m_1, m_2 లుగా గల రెండు సరళ రేఖలు లంబం అయినప్పుడు మాత్రమే $m_1 \times m_2 = -1$. అగును.

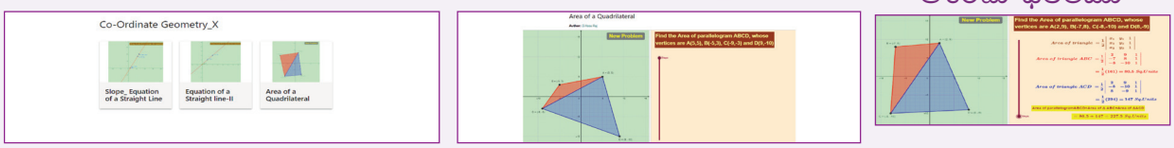
అంతర్జాల కృత్యము

ICT 5.1

సోపానము 1 బ్రౌజర్ ఓపెన్ చేసి క్రింద ఇవ్వబడిన URL లింక్‌ను టైపు చేయండి లేదా QR కోడ్‌ను స్కాన్ చేయండి. జియోజిబ్రా వర్క్‌బుక్ **"Co-Ordinate Geometry"** ఓపెన్ అవుతుంది. వర్క్‌బుక్‌లో ఎడమవైపున క్షేత్రగణితం పాఠమునకు సంబంధించిన చాలా కృత్యములు ఉంటుంది. **"Area of a Quadrilateral"** అను వర్క్‌షీట్‌ను ఎంపిక చేయండి.

సోపానము 2 వర్క్‌షీటు నందు **"New Problem"** ని క్లిక్ చేయుట ద్వారా ప్రశ్నలను మార్చవచ్చును. స్లైడర్‌లను జరిపి సోపానములను చూడండి. ప్రతి సమస్యను పరిష్కరించి మీ సమాధానమును సరిచూడుము.

సోపానము1 | సోపానము 2 | ఆశించు ఫలితము

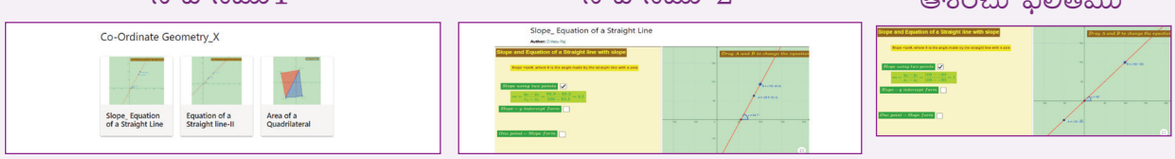


ICT 5.2

సోపానము 1 బ్రౌజర్ ఓపెన్ చేసి క్రింద ఇవ్వబడిన URL లింక్‌ను టైపు చేయండి లేదా QR కోడ్‌ను స్కాన్ చేయండి. జియోజిబ్రా వర్క్‌బుక్ **"Co-Ordinate Geometry"** ఓపెన్ అవుతుంది. వర్క్‌బుక్‌లో ఎడమవైపున క్షేత్రగణితం పాఠమునకు సంబంధించిన చాలా కృత్యములు ఉంటుంది. **"Slope_Equation of a Straight Line"** అను వర్క్‌షీట్‌ను ఎంపిక చేయండి.

సోపానము 2 వర్క్‌షీటు నందు గ్రాపుపై గల బిందువులు A మరియు B లను లాగుట ద్వారా రేఖను మార్చవచ్చును. ఎడమవైపు గల తనిఖీ పెట్టెలను క్లిక్ చేయుట ద్వారా సరళ రేఖ యొక్క వివిధ రూపాలను చూడవచ్చును.

సోపానము1 | సోపానము 2 | ఆశించు ఫలితము



మరికొన్ని కృత్యముల కొరకు అవే సోపానములను మరలా చేయండి.

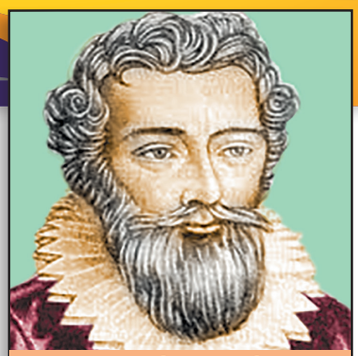
https://www.geogebra.org/m/jfr2zzgy#chapter/356195

లేదా QR కోడ్‌ని స్కేన్ చేయండి.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_5.indd 250 11-02-2023 18:04:42

6 త్రికోణమితి

"ప్రకృతిపై లోతైన అధ్యయనం అనునది గణితాత్మక ఆవిష్కరణల యందు ఫలప్రదమైన వనరుగా ఉన్నది" – జోసెఫ్ పోరియర్



ఫ్రాంకోయిస్ వైటే
(1540–1603 AD(CE))

ఫ్రెంచ్ గణితజ్ఞుడు ఫ్రాంకోయిస్ వైటే బీజగణిత అధ్యయనమందు నిర్ణీత సమీకరణములను పరిష్కరించడానికి తగిన త్రికోణమితీయ ప్రత్యామ్నాయాలను తయారుచేయుటకు త్రికోణమితిని ఉపయోగించాడు. ఇతని ప్రఖ్యాతిగాంచిన సూత్రమైన π అనునది త్రికోణమితి నిష్పత్తుల ఉపయోగములను అనేకసార్లు పునరావృతం చేయడం వలన నిర్వచింపబడినది. అతని గొప్ప రచనలలో ఒకటైన "కనోన్ గణితం" (Canon Mathematicus) త్రికోణమితిని పూర్తిస్థాయిలో వివరించెను. ఇది త్రికోణమితి పట్టికలను కలిగియున్నది, ఇది త్రికోణమితి పట్టికల నిర్మాణమునకు వెనుక ఉన్న గణితాన్ని కూడా తెలియజేయును మరియు ఇది సమతలము మరియు గోళీయ త్రిభుజముల (చాపీయ త్రిభుజములు)ను పరిష్కరించుటను వివరించును. ఇతడు మూలములను కనుగొనుట మరియు అంతస్తు కలిగిన సమీకరణముల సాధనలను కనుగొనుటకు కూడా మార్గములను చూపెను. వైటే గణితంలో "గుణకము" (coefficient) అను పదమును పరిచయం చేశాడు. ఇతడు సమీకరణం యొక్క మూలములకు దాని గుణకములకు మధ్య గల సంబంధమును తెలియజేయుటకు ఒక సులభమైన సూత్రమును తెలిపెను. ఇతడు ఘనములను రెట్టింపుచేయుట మరియు ఒక కోణమును త్రిధాకరణచేయుట వంటి సమస్యలను సాధించుటకు జ్యామితీయ పద్ధతులను రచించెను. ఇతను సంకేతములను చేధించుటలో (అవగతం చేసుకొనుటలో) కొన్ని పద్ధతులను తెలిపెను.

CIXVK

అభ్యసన ఫలితములు

- త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులను గుర్తుచేయుట.
- ఒక కోణము యొక్క త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల మధ్య గల ఆధార సంబంధములను గుర్తుచేయుట.
- సంపూరక కోణముల యొక్క త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులను గుర్తుచేయుట.
- వివిధ వస్తువులకు చెందిన ఎత్తులు మరియు దూరములకు సంబంధించిన సమస్యలను పరిష్కరించు పద్ధతులను తెలుసుకొనుట.
- త్రికోణమితీయ సర్వసమీకరణాలను అర్థంచేసుకొనుట.

6.1 పరిచయం

అతి పురాతన కాలములో సర్వేయర్లు నావికులు మరియు ఖగోళశాస్త్రజ్ఞులు ప్రత్యక్షంగా కొలుచుటకు సాధ్యంకాని దూరాలను త్రిభుజములను ఉపయోగించి కొలుచుచుండిరి. ఇది ప్రస్తుతం మనచే పిలవబడుచున్న గణితశాస్త్రపు శాఖయైన "త్రికోణమితి" పుట్టుకకు దోహదపడినది.

హిప్పార్కస్ ఆఫ్ రోడ్స్ క్రీ.పూ(సా.శ.పూ) 200 కాలంలో వృత్తపరిధి $360 \times 60 = 21600$ ప్రమాణాలు గల వృత్తము కొరకు జ్యా పొడవుల పట్టికను నిర్మించెను. ఇది చాపము యొక్క ప్రతి నిమిషం చుట్టుకొలత

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_6.indd 251 11-02-2023 18:05:34

యొక్క ఒక ప్రమాణమునకు సమానంగా ఉంటుంది. ఈ సాధన కొరకు హిప్పార్కస్ "త్రికోణమితి పితామహుడు"గా పరిగణించెబడెను. ఇది త్రికోణమితి అభివృద్ధికి మూలం (ఆధారం) అయినది.

క్రీ.శ. (సా.శ.) 5వ శతాబ్దమునకు చెందిన భారతీయ విద్వాంతులు అర్ధ-కోణముల కొరకు అర్ధ-జ్యాలతో పని చేసి సాధన కనుగొనినపుడు అది ఖగోళశాస్త్ర గణితం యొక్క సూక్ష్మ రూపమని గ్రహించిరి.

గణితజ్ఞులైన ఆర్యభట్ట, భాస్కరా - I,II మరియు అనేకమంది అర్ధ-జ్యా విలువలను లెక్కించుటకు అద్భుతమైన అధునాతన సాంకేతిక యుక్తులను అభివృద్ధిపరచెను.

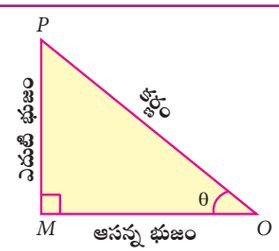
బాగ్దాద్‌కు చెందిన గణితశాస్త్రజ్ఞుడు అబుఅల్-వాఫా స్పర్శరేఖ ధర్మాలను కనుగొన్నాడని నమ్మెను. అతడు దానిని షాడో "Shadow" అని పిలిచెను. అరబిక్ విద్వాంసులకు జ్యా (Jya) అనుపదమును ఏవిధంగా అనువదించాలో తెలియలేదు. వారి గ్రంథములలో దానిని ఇంచుమించు సన్నిహిత పదమైన "జిబా" (jiba) అని రాసెను.

అరబిక్ పదమైన " జిబా" (jiba) అనునది 'కోవ్' (cove) లేదా 'బే' (bay) అని మార్పుచెంది లాటిన్ భాషలో "సైనస్" (sinus) గా రాసెను. ఇది అర్ధ-జ్యాను సూచిస్తుంది. దీని నుండి వచ్చిన పదం "సైన్" (sine) ను మనం ప్రస్తుతం ఉపయోగిస్తున్నాము. జర్మనీ గణితశాస్త్రజ్ఞుడు బర్తోలోమాయిస్ పిటిస్కస్ క్రీ.శ.(సా.శ) 17వ శతాబ్దము ప్రారంభములో "త్రికోణమితి" అను పదమును కనిపెట్టాడు.

పునఃశ్చరణ

త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు

$0^\circ < \theta < 90^\circ$ అనుకొనుము.



పటం. 6.1

లంబకోణం OMP ను తీసుకొనుము

$$\sin\theta = \frac{\text{ఎదుటి భుజం}}{\text{కర్ణం}} = \frac{MP}{OP}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{ఆసన్న భుజం}}{\text{కర్ణం}} = \frac{OM}{OP}$$

పై రెండు నిష్పత్తుల నుండి మరో నాలుగు త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులను మనం క్రింది విధంగా పొందగలము.

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta};\ \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta};$$
$$\text{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta};\ \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

సూచన

- θ ను కోణంగా కలిగిన అన్ని లంబకోణ త్రిభుజాలు సరూపంగా ఉంటుంది. అందువలన ఇటువంటి లంబకోణ త్రిభుజముల ద్వారా నిర్వచింపబడిన త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు ఎంపికచేయబడిన త్రిభుజములపై ఆధారపడియుండదు.

పూరకకోణమునకు త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు

$\sin(90^\circ-\theta) = \cos\theta$	$\cos(90^\circ-\theta) = \sin\theta$	$\tan(90^\circ-\theta) = \cot\theta$
$\text{cosec}(90^\circ-\theta) = \sec\theta$	$\sec(90^\circ-\theta) = \text{cosec}\,\theta$	$\cot(90^\circ-\theta) = \tan\theta$

త్రికోణమితీయ పూరక కోణమునకు దృశ్య ఆధారము

పటంలో చూపినట్లు వ్యాసార్ధం 1 గా గల ఒక అర్ధవృత్తమును తీసుకోండి.

$\angle QOP = \theta$ అనుకొనుము.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_6.indd 252 11-02-2023 18:05:36

అప్పుడు $\angle QOR = 90^\circ - \theta$, అవుతుంది. కావున $OPQR$ దీర్ఘచతురస్రమును ఏర్పరుచును.

త్రిభుజం OPQ నుండి, $\frac{OP}{OQ} = \cos\theta$

కాని $OQ =$ వ్యాసార్ధం $= 1$

కాబట్టి $OP = OQ \times \cos\theta = \cos\theta$

అదేవిధంగా, $\frac{PQ}{OQ} = \sin\theta$

$PQ = OQ \times \sin\theta = \sin\theta$ లభించును ($OQ = 1$ నుండి))

$OP = \cos\theta,\ PQ = \sin\theta$ ... (1)

ఇప్పుడు త్రిభుజం QOR నుండి

మనకు లభించునది $\frac{OR}{OQ} = \cos(90^\circ - \theta)$

కావున $OR = OQ\ \cos(90^\circ - \theta)$

అనగా $OR = \cos(90^\circ - \theta)$

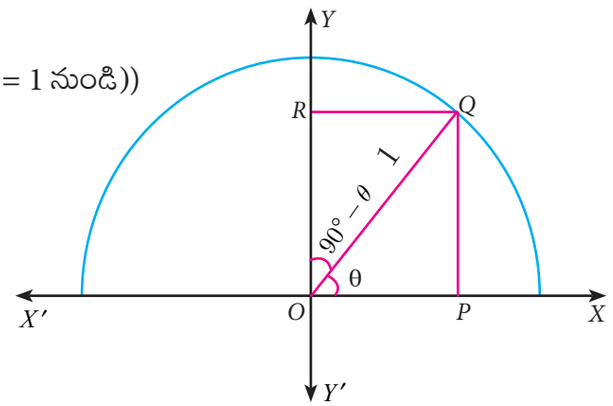
అదేవిధంగా $\frac{RQ}{OQ} = \sin(90^\circ - \theta)$

అప్పుడు $RQ = \sin(90^\circ - \theta)$

$OR = \cos(90^\circ - \theta),\ RQ = \sin(90^\circ - \theta)$ ... (2)

$OPQR$ ఒక దీర్ఘచతురస్రము నుండి,

$OP = RQ$ మరియు $OR = PQ$



పటం. 6.2

కావున (1) మరియు (2) ల నుండి మనం పొందునది

$\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$ మరియు $\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$

సూచన

$(\sin\theta)^2 = \sin^2\theta$	$(\text{cosec}\theta)^2 = \text{cosec}^2\theta$
$(\cos\theta)^2 = \cos^2\theta$	$(\sec\theta)^2 = \sec^2\theta$
$(\tan\theta)^2 = \tan^2\theta$	$(\cot\theta)^2 = \cot^2\theta$

త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ లకు పట్టిక

θ / త్రికోణమితీయ నిష్పత్తి	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	నిర్వచింపబడదు
$\text{cosec}\theta$	నిర్వచింపబడదు	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
$\sec\theta$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	నిర్వచింపబడదు
$\cot\theta$	నిర్వచింపబడదు	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_6.indd 253 11-02-2023 18:05:39

మెదడుకు మేత

1. $\sin\theta$ మరియు $\cos\theta$ విలువలు ఎప్పుడు సమానంగా ఉంటాయి?
2. θ, యొక్క ఏయే విలువలకు $\sin\theta = 2$ అవుతుంది?
3. ఆరు త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులలో కోణం θ విలువ 0° నుండి 90° వరకు పెరుగుతూపోతుంటే ఆరు త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులలో ఏది నిర్వచించబడని విలువను కలిగియుంటుంది?
4. ఎనిమిది త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు ఉండుటకు వీలగునా?
5. $0^\circ \le \theta \le 90^\circ$ అనుకొనుము. θ యొక్క ఏ విలువలకు క్రింద ఇవ్వబడినవి సత్యమగును?
(i) $\sin\theta > \cos\theta$ (ii) $\cos\theta > \sin\theta$ (iii) $\sec\theta = 2\tan\theta$ (iv) $\operatorname{cosec}\theta = 2\cot\theta$

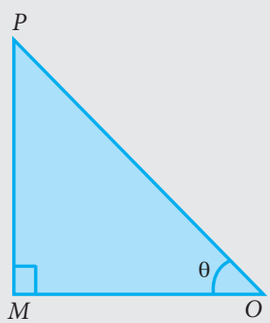
6.2 త్రికోణమితీయ సర్వసమీకరణాలు

θ యొక్క అన్ని విలువలకు సత్యమైనప్పుడు, మనకు క్రింది మూడు సర్వసమీకరణాలు కలవు.

(i) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ (ii) $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ (iii) $1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$

పై సర్వసమీకరణాలను మూడు త్రికోణమితీయ ప్రాథమిక సమీకరణాలు అని పిలువబడినవి.

ఇప్పుడు మనం వాటిని క్రింది విధంగా ఉత్పాదించెదము.

పటం	సర్వసమీకరణం	నిరూపణ
 పటం. 6.3	$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$	లంబకోణ త్రిభుజం OMP నుండి $\frac{OM}{OP} = \cos\theta, \quad \frac{PM}{OP} = \sin\theta \ldots(1)$ పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం $MP^2 + OM^2 = OP^2 \ldots(2)$ (2) యొక్క ఇరువైపులా ప్రతిపదమును OP^2 చే భాగించగా($OP \neq 0$ నుండి) మనం పొందునది $\frac{MP^2}{OP^2} + \frac{OM^2}{OP^2} = \frac{OP^2}{OP^2}$ $\Rightarrow \left(\frac{MP}{OP}\right)^2 + \left(\frac{OM}{OP}\right)^2 = \left(\frac{OP}{OP}\right)^2$ (1) నుండి , $(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1^2$ దీని ప్రకారం $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_6.indd 254 11-02-2023 18:05:41

	$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$	లంబకోణ త్రిభుజం OMP నుండి $\frac{MP}{OM}=\tan\theta,\quad \frac{OP}{OM}=\sec\theta \quad ...(3)$ (2) నుండి, $MP^2+OM^2=OP^2$ (2) యొక్క ఇరువైపులా ప్రతిపదమును OM^2 చే భాగించగా, ($OM\neq 0$ నుండి) మనం పొందునది $\frac{MP^2}{OM^2}+\frac{OM^2}{OM^2}=\frac{OP^2}{OM^2}$ $\Rightarrow \left(\frac{MP}{OM}\right)^2+\left(\frac{OM}{OM}\right)^2=\left(\frac{OP}{OM}\right)^2$ (3) నుండి, $(\tan\theta)^2+1^2=(\sec\theta)^2$ దీని ప్రకారం $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$.
	$1+\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta$	లంబకోణ త్రిభుజం OMP నుండి $\frac{OM}{MP}=\cot\theta,\quad \frac{OP}{MP}=\operatorname{cosec}\theta \quad ...(4)$ (2) నుండి, $MP^2+OM^2=OP^2$ (2) యొక్క ఇరువైపులా ప్రతిపదమును MP^2 చే భాగించగా, ($MP\neq 0$) నుండి) మనం పొందునది, $\frac{MP^2}{MP^2}+\frac{OM^2}{MP^2}=\frac{OP^2}{MP^2}$ $\Rightarrow \left(\frac{MP}{MP}\right)^2+\left(\frac{OM}{MP}\right)^2=\left(\frac{OP}{MP}\right)^2$ (4) నుండి, $1^2+(\cot\theta)^2=(\operatorname{cosec}\theta)^2$ దీని ప్రకారం $1+\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta$

పై సమీకరణాలను క్రింది విధంగా కూడా రాయవచ్చును.

సర్వసమీకరణం	తుల్యరూపములు
$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$	$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$ (లేక) $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$
$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$	$\tan^2\theta=\sec^2\theta-1$ (లేక) $\sec^2\theta-\tan^2\theta=1$
$1+\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta$	$\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta-1$ (లేక) $\operatorname{cosec}^2\theta-\cot^2\theta=1$

సూచన

- పై త్రికోణమితీయ సర్వసమీకరణాలన్నీ θ యొక్క అన్ని విలువలకు సత్యమగును. మనం ఆరు త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల కోణాలను $0^\circ<\theta<90^\circ$ విలువలకు మాత్రమే తీసుకొంటాము

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_6.indd 255 11-02-2023 18:05:43

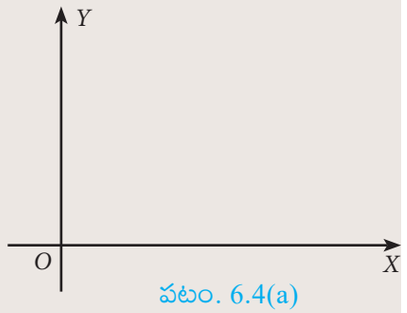
కృత్యము 1

ఒక తెల్లకాగితమును తీసుకొనుము. పటం 6.4(a)లో చూపిన విధంగా OX, OY అను రెండు లంబరేఖలు 0 వద్ద కలుసుకొనునట్లు నిర్మించుము.

OX ను X అక్షంగా, OY ను Y అక్షంగా తీసుకొనుము.

θ యొక్క గుర్తింపబడిన కోణములకు $\sin\theta$ మరియు $\cos\theta$ విలువలను సరిచూడుము.

$\theta = 30\Upsilon$ అనుకొనుము.

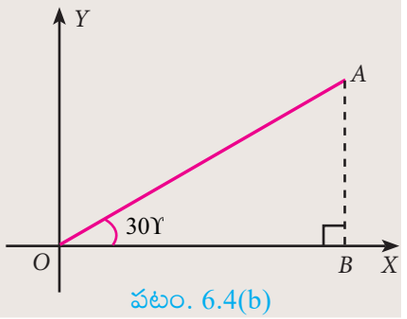


పటం. 6.4(a)

పటం 6.4(b) లో చూపిన విధంగా ఏదైనా ఒక పొడవుతో $\angle AOX = 30°$, ఉండునట్లు ఒక రేఖా ఖండము OA ను నిర్మింపుము. B వద్ద కలుసుకొనునట్లు A నుండి OX కి లంబరేఖను గీయుము.

ఇప్పుడు స్కేలునుపయోగించి AB, OB మరియు OA ల పొడవులను కొలుచుము.

నిష్పత్తులు $\frac{AB}{OA}, \frac{OB}{OA}$ మరియు $\frac{AB}{OB}$ లను కనుగొనుము.



పటం. 6.4(b)

దీని నుండి నీకు ఏమి లభించినది? ఈ విలువలను త్రికోణమితి పట్టిక విలువలతో పోల్చవచ్చునా? నీ నిర్ణయము ఏమి? ఇదే విధంగా $\theta = 45\Upsilon$ మరియు $\theta = 60\Upsilon$ కోణములకు పైన చూపిన మూడు విలువలను కనుగొనండి. దీని నుండి మీరు గ్రహించినదేమి?

ఉదాహరణ 6.1 $\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta\sin^2\theta$ అని నిరూపించుము.

సాధన
$$\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta - \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}.\cos^2\theta$$
$$= \tan^2\theta(1-\cos^2\theta) = \tan^2\theta\sin^2\theta$$

ఉదాహరణ 6.2 $\frac{\sin A}{1+\cos A} = \frac{1-\cos A}{\sin A}$ అని నిరూపించుము.

సాధన
$$\frac{\sin A}{1+\cos A} = \frac{\sin A}{1+\cos A}\times\frac{1-\cos A}{1-\cos A}$$ [$1+\cos A$ యొక్క సంయోజకంతో లవము మరియు హారములను గుణించుము]
$$= \frac{\sin A(1-\cos A)}{(1+\cos A)(1-\cos A)} = \frac{\sin A(1-\cos A)}{1-\cos^2 A}$$
$$= \frac{\sin A(1-\cos A)}{\sin^2 A} = \frac{1-\cos A}{\sin A}$$

ఉదాహరణ 6.3 $1+\frac{\cot^2\theta}{1+\operatorname{cosec}\theta} = \operatorname{cosec}\theta$ అని నిరూపించుము.

సాధన
$$1+\frac{\cot^2\theta}{1+\operatorname{cosec}\theta} = 1+\frac{\operatorname{cosec}^2\theta-1}{\operatorname{cosec}\theta+1}$$ [$\operatorname{cosec}^2\theta - 1 = \cot^2\theta$ నుండి]
$$= 1+\frac{(\operatorname{cosec}\theta+1)(\operatorname{cosec}\theta-1)}{\operatorname{cosec}\theta+1}$$
$$= 1+(\operatorname{cosec}\theta-1) = \operatorname{cosec}\theta$$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_6.indd 256 11-02-2023 18:05:46

ఉదాహరణ 6.4 $\sec\theta - \cos\theta = \tan\theta \sin\theta$ అని నిరూపించుము.

సాధన $\sec\theta - \cos\theta = \frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta = \frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}$

$= \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$ $\left[1-\cos^2\theta = \sin^2\theta \text{ నుండి }\right]$

$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \times \sin\theta = \tan\theta \sin\theta$

ఉదాహరణ 6.5 $\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$ అని నిరూపించుము.

సాధన $\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} \times \frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}}$ $[1-\cos\theta$ యొక్క సంయోజకముతో లవము మరియు హారమును గుణించుము$]$

$= \sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}} = \frac{1+\cos\theta}{\sqrt{\sin^2\theta}}$ $\left[\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \text{ నుండి }\right]$

$= \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$

ఉదాహరణ 6.6 $\frac{\sec\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \cot\theta$ అని నిరూపించుము.

సాధన $\frac{\sec\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{1}{\cos\theta}}{\sin\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$= \frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \cot\theta$

ఉదాహరణ 6.7 $\sin^2 A\cos^2 B + \cos^2 A\sin^2 B + \cos^2 A\cos^2 B + \sin^2 A\sin^2 B = 1$ అని నిరూపించుము.

సాధన $\sin^2 A\cos^2 B + \cos^2 A\sin^2 B + \cos^2 A\cos^2 B + \sin^2 A\sin^2 B$

$= \sin^2 A\cos^2 B + \sin^2 A\sin^2 B + \cos^2 A\sin^2 B + \cos^2 A\cos^2 B$

$= \sin^2 A(\cos^2 B + \sin^2 B) + \cos^2 A(\sin^2 B + \cos^2 B)$

$= \sin^2 A(1) + \cos^2 A(1)$ $(\because \sin^2 B + \cos^2 B = 1)$

$= \sin^2 A + \cos^2 A = 1$

ఉదాహరణ 6.8 $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta$, అయిన $\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin\theta$ అని నిరూపించుము.

సాధన ఇప్పుడు $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta$ ను ఇరువైపులా వర్గము చేయుము.

$(\cos\theta + \sin\theta)^2 = (\sqrt{2}\cos\theta)^2$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta = 2\cos^2\theta$

$2\cos^2\theta - \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_6.indd 257 11-02-2023 18:05:49

$$\cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$(\cos\theta + \sin\theta)(\cos\theta - \sin\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos\theta - \sin\theta = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta + \sin\theta} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{2}\cos\theta} \quad [\because \cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta]$$

$$= \sqrt{2}\sin\theta$$

కావున $\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin\theta$.

ఉదాహరణ 6.9 $(\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta)(\sec\theta - \cos\theta)(\tan\theta + \cot\theta) = 1$ అని నిరూపించుము.

సాధన $(\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta)(\sec\theta - \cos\theta)(\tan\theta + \cot\theta)$

$$= \left(\frac{1}{\sin\theta} - \sin\theta\right)\left(\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right)\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

$$= \frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta} \times \frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta} \times \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{\cos^2\theta\sin^2\theta \times 1}{\sin^2\theta\cos^2\theta} = 1$$

ఉదాహరణ 6.10 $\dfrac{\sin A}{1+\cos A} + \dfrac{\sin A}{1-\cos A} = 2\operatorname{cosec}A.$ అని నిరూపించుము.

సాధన $\dfrac{\sin A}{1+\cos A} + \dfrac{\sin A}{1-\cos A}$

$$= \frac{\sin A(1-\cos A) + \sin A(1+\cos A)}{(1+\cos A)(1-\cos A)}$$

$$= \frac{\sin A - \sin A\cos A + \sin A + \sin A\cos A}{1-\cos^2 A}$$

$$= \frac{2\sin A}{1-\cos^2 A} = \frac{2\sin A}{\sin^2 A} = 2\operatorname{cosec} A$$

ఉదాహరణ 6.11 $\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = P$ అయిన, $\cos\theta = \dfrac{P^2-1}{P^2+1}$ అని నిరూపించుము.

సాధన ఇవ్వబడినది $\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = P$ ...(1)

$\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$ (సర్వసమీకరణం)

$$\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta}$$

$$\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta = \frac{1}{P} \quad \ldots(2)$$

(1) మరియు (2) లను కూడగా లభించునది, $2\operatorname{cosec}\theta = P + \dfrac{1}{P}$

$$2\operatorname{cosec}\theta = \frac{P^2+1}{P} \quad \ldots(3)$$

(1) నుండి (2) ను తీసివేయగా లభించునది, $2\cot\theta = P - \dfrac{1}{P}$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_6.indd 258 11-02-2023 18:05:52

$$2\cot\theta = \frac{P^2-1}{P} \qquad \ldots(4)$$

(4) ను (3) చే భాగించగా లభించునది.

$\frac{2\cot\theta}{2\,\text{cosec}\,\theta} = \frac{P^2-1}{P} \times \frac{P}{P^2+1}$ దీని నుండి, $\cos\theta = \frac{P^2-1}{P^2+1}$ అని లభించును.

ఉదాహరణ 6.12 $\tan^2 A - \tan^2 B = \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\cos^2 A \cos^2 B}$ అని నిరూపించుము.

సాధన

$$\tan^2 A - \tan^2 B = \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} - \frac{\sin^2 B}{\cos^2 B}$$

$$= \frac{\sin^2 A\cos^2 B - \sin^2 B\cos^2 A}{\cos^2 A\cos^2 B}$$

$$= \frac{\sin^2 A(1-\sin^2 B) - \sin^2 B(1-\sin^2 A)}{\cos^2 A\ \cos^2 B}$$

$$= \frac{\sin^2 A - \sin^2 A\sin^2 B - \sin^2 B + \sin^2 A\sin^2 B}{\cos^2 A\cos^2 B} = \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\cos^2 A\cos^2 B}$$

ఉదాహరణ 6.13 $\left(\frac{\cos^3 A - \sin^3 A}{\cos A - \sin A}\right) - \left(\frac{\cos^3 A + \sin^3 A}{\cos A + \sin A}\right) = 2\sin A\cos A$ అని నిరూపించుము..

సాధన

$$\left(\frac{\cos^3 A - \sin^3 A}{\cos A - \sin A}\right) - \left(\frac{\cos^3 A + \sin^3 A}{\cos A + \sin A}\right)$$

$$= \left(\frac{(\cos A - \sin A)(\cos^2 A + \sin^2 A + \cos A\sin A)}{\cos A - \sin A}\right) \quad \left[\begin{matrix} a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+b^2+ab) \\ a^3 + b^3 = (a+b)(a^2+b^2-ab) \end{matrix} \text{ నుండి}\right]$$

$$-\left(\frac{(\cos A + \sin A)(\cos^2 A + \sin^2 A - \cos A\sin A)}{\cos A + \sin A}\right)$$

$$= (1 + \cos A\sin A) - (1 - \cos A\sin A)$$

$$= 2\ \cos A\sin A$$

ఉదాహరణ 6.14 $\frac{\sin A}{\sec A + \tan A - 1} + \frac{\cos A}{\text{cosec A} + \cot A - 1} = 1$ అని నిరూపించుము.

సాధన

$$\frac{\sin A}{\sec A + \tan A - 1} + \frac{\cos A}{\text{cosec A} + \cot A - 1}$$

$$= \frac{\sin A(\text{cosec}A + \cot A - 1) + \cos A(\sec A + \tan A - 1)}{(\sec A + \tan A - 1)(\text{cosec}A + \cot A - 1)}$$

$$= \frac{\sin A\,\text{cosec}A + \sin A\cot A - \sin A + \cos A\sec A + \cos A\tan A - \cos A}{(\sec A + \tan A - 1)(\text{cosec}A + \cot A - 1)}$$

$$= \frac{1 + \cos A - \sin A + 1 + \sin A - \cos A}{\left(\frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A} - 1\right)\left(\frac{1}{\sin A} + \frac{\cos A}{\sin A} - 1\right)}$$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_6.indd 259 11-02-2023 18:05:54

$$= \frac{2}{\left(\frac{1+\sin A-\cos A}{\cos A}\right)\left(\frac{1+\cos A-\sin A}{\sin A}\right)}$$

$$= \frac{2\sin A\cos A}{(1+\sin A-\cos A)(1+\cos A-\sin A)}$$

$$= \frac{2\sin A\cos A}{[1+(\sin A-\cos A)][1-(\sin A-\cos A)]} = \frac{2\sin A\cos A}{1-(\sin A-\cos A)^2}$$

$$= \frac{2\sin A\cos A}{1-(\sin^2 A+\cos^2 A-2\sin A\cos A)} \qquad = \frac{2\sin A\cos A}{1-(1-2\sin A\cos A)}$$

$$= \frac{2\sin A\cos A}{1-1+2\sin A\cos A} = \frac{2\sin A\cos A}{2\sin A\cos A} = 1.$$

ఉదాహరణ 6.15 $\left(\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}\right) = \left(\frac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2$ అని నిరూపించుము.

సాధన

ఎడమ వైపు **(LHS)**

$$\left(\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}\right) = \frac{1+\tan^2 A}{1+\frac{1}{\tan^2 A}}$$

$$= \frac{1+\tan^2 A}{\frac{\tan^2 A+1}{\tan^2 A}} = \tan^2 A \quad \ldots (1)$$

కుడివైపు **(RHS)**

$$\left(\frac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2 = \left(\frac{1-\tan A}{1-\frac{1}{\tan A}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1-\tan A}{\frac{\tan A-1}{\tan A}}\right)^2 = (-\tan A)^2 = \tan^2 A \ldots (2)$$

(1) మరియు (2) ల నుండి, $\left(\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}\right) = \left(\frac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2$

ఉదాహరణ 6.16 $\frac{(1+\cot A+\tan A)(\sin A-\cos A)}{\sec^3 A-\operatorname{cosec}^3 A} = \sin^2 A\cos^2 A$ అని నిరూపించుము.

సాధన

$$\frac{(1+\cot A+\tan A)(\sin A-\cos A)}{\sec^3 A-\operatorname{cosec}^3 A}$$

$$= \frac{\left(1+\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\sin A}{\cos A}\right)(\sin A-\cos A)}{(\sec A-\operatorname{cosec} A)(\sec^2 A+\sec A\operatorname{cosec} A+\operatorname{cosec}^2 A)}$$

$$= \frac{\frac{(\sin A\cos A+\cos^2 A+\sin^2 A)(\sin A-\cos A)}{\sin A\cos A}}{(\sec A-\operatorname{cosec} A)\left(\frac{1}{\cos^2 A}+\frac{1}{\cos A\sin A}+\frac{1}{\sin^2 A}\right)}$$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_6.indd 260 11-02-2023 18:05:57

$$= \frac{(\sin A\cos A+1)\left(\frac{\sin A}{\sin A\cos A}-\frac{\cos A}{\sin A\cos A}\right)}{(\sec A-\operatorname{cosec} A)\left(\frac{\sin^2 A+\sin A\cos A+\cos^2 A}{\sin^2 A\cos^2 A}\right)}$$

$$= \frac{(\sin A\cos A+1)(\sec A-\cos ecA)}{(\sec A-\cos ecA)(1+\sin A\cos A)} \times \sin^2 A\cos^2 A = \sin^2 A\cos^2 A$$

ఉదాహరణ 6.17 $\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}=p$ మరియు $\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}=q$, అయిన $p^2q^2(p^2+q^2+3)=1$ అని నిరూపించుము.

సాధన ఇక్కడ $\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}=p$ ...(1) మరియు $\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}=q$ ...(2)

$$p^2q^2(p^2+q^2+3) = \left(\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\right)^2\left(\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right)^2 \times\left[\left(\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\right)^2+\left(\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right)^2+3\right] \quad [(1) \text{ మరియు } (2) \text{ ల నుండి}]$$

$$= \left(\frac{\cos^4\theta}{\sin^2\theta}\right)\left(\frac{\sin^4\theta}{\cos^2\theta}\right)\times\left[\frac{\cos^4\theta}{\sin^2\theta}+\frac{\sin^4\theta}{\cos^2\theta}+3\right]$$

$$= (\cos^2\theta\times\sin^2\theta)\times\left[\left(\frac{\cos^6\theta+\sin^6\theta+3\sin^2\theta\cos^2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}\right)\right]$$

$$= \cos^6\theta+\sin^6\theta+3\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$= (\cos^2\theta)^3+(\sin^2\theta)^3+3\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$= [(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^3-3\cos^2\theta\sin^2\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta)]+3\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$= 1-3\cos^2\theta\sin^2\theta(1)+3\cos^2\theta\sin^2\theta \;=1$$

ప్రగతి శోధన

1. త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల సంఖ్య _____.
2. $1-\cos^2\theta$ = _____.
3. $(\sec\theta+\tan\theta)(\sec\theta-\tan\theta)$ = _____.
4. $(\cot\theta+\operatorname{cosec}\theta)(\cot\theta-\operatorname{cosec}\theta)$ = _____.
5. $\cos 60^\circ\sin 30^\circ+\cos 30^\circ\sin 60^\circ$ = _____.
6. $\tan 60^\circ\cos 60^\circ+\cot 60^\circ\sin 60^\circ$ = _____.
7. $(\tan 45^\circ+\cot 45^\circ)+(\sec 45^\circ\operatorname{cosec}45^\circ)$ = _____.
8. (i) $\sec\theta=\operatorname{cosec}\theta$ అయిన θ =_____. (ii) $\cot\theta=\tan\theta$ అయిన θ =_____.

అభ్యాసము 6.1

1. క్రింది సర్వసమీకరణాలను నిరూపించుము.
   (i) $\cot\theta+\tan\theta=\sec\theta\operatorname{cosec}\theta$ (ii) $\tan^4\theta+\tan^2\theta=\sec^4\theta-\sec^2\theta$
2. క్రింది సర్వసమీకరణాలను నిరూపించుము.
   (i) $\frac{1-\tan^2\theta}{\cot^2\theta-1}=\tan^2\theta$ (ii) $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}=\sec\theta-\tan\theta$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_6.indd 261 11-02-2023 18:06:00

3. క్రింది సర్వసమీకరణాలను నిరూపించుము.

(i) $\sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}} = \sec\theta + \tan\theta$ (ii) $\sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}} + \sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = 2\sec\theta$

4. క్రింది సర్వసమీకరణాలను నిరూపించుము.

(i) $\sec^6\theta = \tan^6\theta + 3\tan^2\theta\sec^2\theta + 1$

(ii) $(\sin\theta + \sec\theta)^2 + (\cos\theta + \operatorname{cosec}\theta)^2 = 1 + (\sec\theta + \operatorname{cosec}\theta)^2$

5. క్రింది సర్వసమీకరణాలను నిరూపించుము.

(i) $\sec^4\theta(1-\sin^4\theta) - 2\tan^2\theta = 1$ (ii) $\frac{\cot\theta - \cos\theta}{\cot\theta + \cos\theta} = \frac{\operatorname{cosec}\theta - 1}{\operatorname{cosec} + 1}$

6. క్రింది సర్వసమీకరణాలను నిరూపించుము.

(i) $\frac{\sin A - \sin B}{\cos A + \cos B} + \frac{\cos A - \cos B}{\sin A + \sin B} = 0$ (ii) $\frac{\sin^3 A + \cos^3 A}{\sin A + \cos A} + \frac{\sin^3 A - \cos^3 A}{\sin A - \cos A} = 2$

7. (i) $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{3}$ అయిన, $\tan\theta + \cot\theta = 1$. అని నిరూపించండి.

(ii) $\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta = 0$ అయిన, $\tan 3\theta = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}$ అని నిరూపించుము.

8. (i) $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = m$ మరియు $\frac{\cos\alpha}{\sin\beta} = n$ అయితే, $(m^2+n^2)\cos^2\beta = n^2$ అని నిరూపించుము.

(ii) $\cot\theta + \tan\theta = x$ మరియు $\sec\theta - \cos\theta = y$ అయితే, $(x^2y)^{\frac{2}{3}} - (xy^2)^{\frac{2}{3}} = 1$ అని నిరూపించుము.

9. (i) $\sin\theta + \cos\theta = p$ మరియు $\sec\theta + \operatorname{cosec}\theta = q$ అయితే, $q(p^2-1) = 2p$ అని నిరూపించండి.

(ii) $\sin\theta(1+\sin^2\theta) = \cos^2\theta$ అయితే, $\cos^6\theta - 4\cos^4\theta + 8\cos^2\theta = 4$ అని నిరూపించుము.

10. $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = \frac{1}{a}$ అయిన, $\frac{a^2-1}{a^2+1} = \sin\theta$ అని నిరూపించుము.

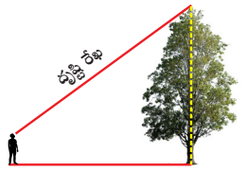
H3RU9

6.3 ఎత్తులు మరియు దూరాలు (Heights and distances)

ఈ పాఠములో, విభిన్నమైన వస్తువుల యొక్క ఎత్తులు మరియు దూరాలను ప్రత్యక్షంగా కొలవకుండా త్రికోణమితినుపయోగించి ఏవిధంగా కొలవవచ్చునని తెలుసుకొంటాం. ఉదాహరణకు గోపురం, పర్వతశిఖరం, భవనము లేదా చెట్టు యొక్క ఎత్తును, దీపగృహము నుండి నౌకకు మధ్యగల దూరం మరియు నది యొక్క వెడల్పు మొదలగువాటిని కనుగొనుటకు త్రికోణమితికి సంబంధించిన భావనలను ఉపయోగిస్తారు. ఎత్తులు మరియు దూరాలను కనుగొను ప్రక్రియలు, నిజజీవిత పరిస్థితులలో త్రికోణమితి అనువర్తనాలకు మంచి ఉదాహరణలగును. కొన్ని ఉదాహరణలు ద్వారా త్రికోణమితి అనువర్తనాలను మనం వివరించెదము. ఎత్తులు మరియు దూరాలను కనుగొను పద్ధతుల గురించి అధ్యయించుటకు ముందు మనం కొన్ని ప్రాథమిక నిర్వచనాల గురించి తెలుసుకొందాము.

దృష్టి రేఖ (Line of sight)

మనం ఒక వస్తువును చూస్తున్నప్పుడు మన కంటి నుండి ఆ వస్తువునకు గీయబడు సరళరేఖను "దృష్టిరేఖ" అంటారు.



పటం. 6.5

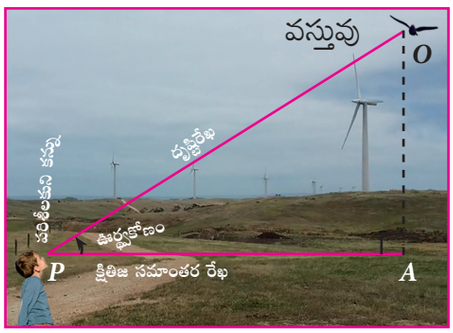
10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_6.indd 262 11-02-2023 18:06:02

థియోడలైట్



పటం. 6.6

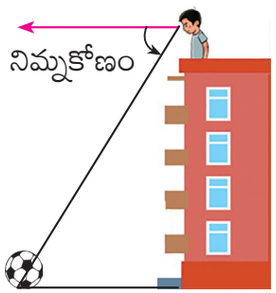
థియోడలైట్ పరికరము ఒక వస్తువును చూస్తున్న పరిశీలకుని కంటికి మరియు ఆ వస్తువుకి మధ్యగల కోణాన్ని కొలుచుటకు ఉపయోగించబడుతుంది. థియోడలైట్ నందు రెండు చక్రములు ఒకదానికొకటి లంబంగా ఉండునట్లు దూరదర్శినితో బిగింపబడియుంటుంది. ఈ చక్రములతో క్షితిజ సమాంతర కోణం మరియు క్షితిజ లంబకోణాలను కొలవవచ్చును. నిర్దేశింపబడిన బిందువు యొక్క కోణాన్ని కొలుచుటకు, దూరదర్శినిని ఆ బిందువు వైపు ఉన్నట్లు అమర్చవలెను. అప్పుడు ఆ కోణాన్ని దూరదర్శిని యొక్క స్కేలులో చూడవచ్చును.



పటం. 6.7

ఊర్ధ్వకోణం (Angle of Elevation)

ఒక వస్తువు కంటి నుండి క్షితిజ సమాంతర రేఖకు పైన ఉన్నప్పుడు క్షితిజ సమాంతర రేఖతో దృష్టిరేఖ చేయు కోణాన్ని ఊర్ధ్వకోణం అంటారు. అనగా ఆ వస్తువును చూచుటకు మనం తలను కొంచెం పైకెత్తే స్థితియే అగును. (పటం 6.7 ను చూడుము)



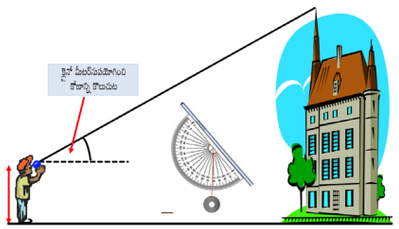
పటం. 6.8

నిమ్నకోణం (Angle of Depression)

ఒక వస్తువు కంటి నుండి క్షితిజ సమాంతర రేఖకు క్రింద ఉన్నప్పుడు క్షితిజ సమాంతరరేఖతో దృష్టిరేఖ చేయు కోణాన్ని "నిమ్న కోణం" అంటారు. అనగా ఆ వస్తువును చూచుటకు మనం తలను కొంచెం వంచే స్థితియే అగును. (పటం 6.8 ని చూడండి)

కోణమాపకం (Clinometer)

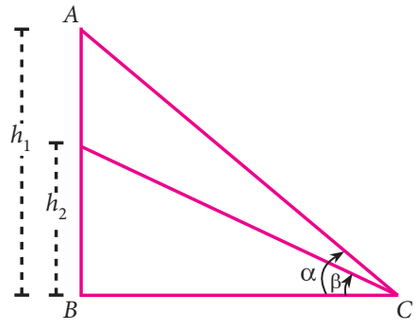
సాధరణంగా ఊర్ధ్వ మరియు నిమ్న కోణాలను కోణమాపకం (క్లైనోమీటర్) అను పరికరంతో కొలవ వచ్చును.



పటం. 6.9

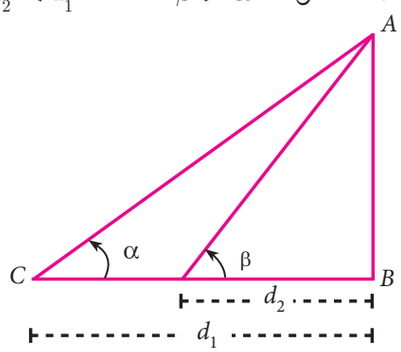
సూచన

- ఇవ్వబడిన బిందువు నుండి ఒక వస్తువు యొక్క ఎత్తును పెంచునపుడు దాని ఊర్ధ్వకోణం పెరుగుతుంది
  $h_1 > h_2$ అయిన $\alpha > \beta$ అవుతుంది.



పటం. 6.10(a)

- క్షితిజ లంబంగా గల గోపురం లేదా భవనం మొదలగు వాటి అడుగు భాగం వైపు జరుగునపుడు దాని ఊర్ధ్వకోణం పెరుగుతుంది.
  $d_2 < d_1$ అయిన $\beta > \alpha$ అవుతుంది.

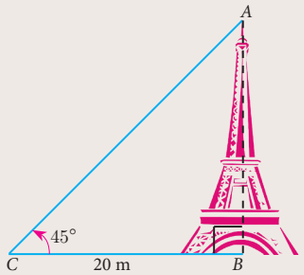


పటం. 6.10(b)

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_6.indd 263 11-02-2023 18:06:03

కృత్యము 2

ఇవ్వబడిన సందర్భమునకు లంబకోణ త్రిభుజమును గీయుము.

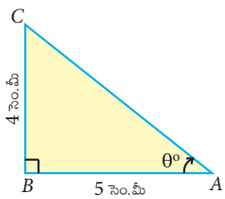
సందర్భము	లంబకోణ త్రిభుజము
ఒక గోపురం భూతలమునకు లంబంగా ఉన్నది. గోపురము అడుగు భాగం నుండి 20 మీ దూరంలో గల ఒక బిందువు నుండి గోపురం పైభాగమునకు ఊర్ధ్వకోణం 45° గా ఉన్నది.	 పటం. 6.11
2.8 మీ ఎత్తుగల ఒక పరిశీలకుడు **25.2** మీ దూరంలో గల పొగగొట్టాన్ని (చిమ్ని) చూసెను. అతని కంటి నుండి పొగ గొట్టము పై భాగమునకు ఊర్ధ్వకోణం **45°** అగును.	.....
నేలపై P అను బిందువు నుండి **20** మీ ఎత్తు గల భవనము పైభాగమునకు ఊర్ధ్వకోణం **30°** అగును. భవనం పై భాగములో ఒక జెండా ఎగురవేయబడినది అయితే బిందువు P నుండి జెండా స్తంభము పైభాగానికి గల ఊర్ధ్వకోణం **55°** అగును.	.....
సూర్యున్ని చూచుటకు గల ఊర్ధ్వకోణం 60° నుండి 30° గా మారునపుడు సమతలంలో గల ఒక గోపురం యొక్క నీడ పొడవు 40 మీ పెరిగెను.	.....

6.3.1 ఊర్ధ్వకోణముతో కూడిన సమస్యలు

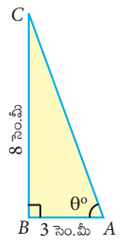
ఈ పాఠ్య విభాగములో ఊర్ధ్వకోణం ఇవ్వబడిన సమస్యలను సాధించుటకు ప్రయత్నిస్తాం.

ఉదాహరణ 6.18

ఇవ్వబడిన త్రిభుజములలో $\angle BAC$ ని కనుగొనండి.



పటం. 6.12(a)



పటం. 6.12(b)

సాధన

(i) లంబకోణ త్రిభుజం ABC లో (పటం 6.12(a) ను చూడండి

$$\tan\theta = \frac{\text{ఎదుటిభుజం}}{\text{ఆసన్న భుజం}} = \frac{4}{5}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) = \tan^{-1}(0.8)$$

$\theta = 38.7°$ ($\tan\ 38.7° = 0.8011$ కావున)

$\angle BAC = 38.7°$

(ii) లంబకోణ త్రిభుజం ABC లో (పటం 6.12(b) ను చూడండి

$$\tan\theta = \frac{8}{3}$$

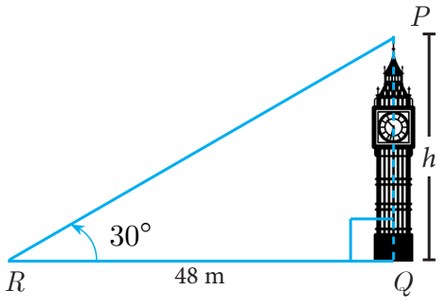
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{8}{3}\right) = \tan^{-1}(2.66)$$

$\theta = 69.4°$ ($\tan\ 69.4° = 2.6604$ కావున)

$\angle BAC = 69.4°$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_6.indd 264 11-02-2023 18:06:04

ఉదాహరణ 6.19 ఒక గోపురము నేలపై నిటారుగా (లంబంగా) ఉన్నది. గోపురము పాదము నుండి నేలపై 48 మీ దూరంలో గల ఒక బిందువు నుండి గోపురము పై భాగమునకు చేయు ఊర్ధ్వకోణం $30°$ అయిన, గోపురం ఎత్తును కనుగొనండి.



పటం. 6.13

సాధన గోపురం ఎత్తు PQ అనుకొనుము. $PQ = h$ అనుకొనుము.

గోపురం మరియు బిందువు R కు మధ్య గల దూరం QR గా తీసుకొనుము.

లంబకోణ త్రిభుజం PQR లో, $\angle PRQ = 30°$

$$\tan\theta = \frac{PQ}{QR}$$

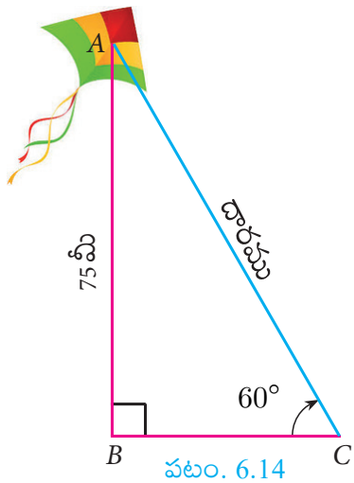
$\tan 30° = \frac{h}{48}$ దీని నుండి, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{48}$ కావున, $h = 16\sqrt{3}$

కాబట్టి గోపురం ఎత్తు $16\sqrt{3}$ మీ.

ఉదాహరణ 6.20 నేల నుండి ఒక గాలిపటం 75 మీ ఎత్తులో ఎగురుచున్నది. ఒక దారముతో గాలిపటమును నేలపై గల ఒక బిందువు వద్ద తాత్కాలికంగా కట్టబడియున్నది. దారము నేలతో చేయు వాలు కోణము $60°$ అయిన దారము పొడవును కనుక్కోండి. (దారమును సరళరేఖగా ఊహించుకొనుము)

సాధన నేల నుండి గాలిపటం ఎత్తు $AB = 75$ మీ అనుకొనుము.

దారము పొడవు AC అనుకొనుము.



పటం. 6.14

లంబకోణ త్రిభుజం ABC లో $\angle ACB = 60°$

$$\sin\theta = \frac{AB}{AC}$$

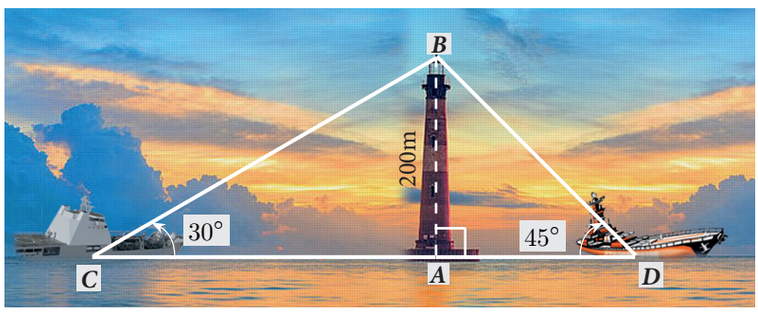
$$\sin 60° = \frac{75}{AC}$$

మనం పొందునది $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{75}{AC}$ కావున, $AC = \frac{150}{\sqrt{3}} = 50\sqrt{3}$

కావున దారము పొడవు $50\sqrt{3}$ మీ.

ఉదాహరణ 6.21 రెండు నౌకలు దీపగృహమునకు ఇరు వైపులా సముద్రంలో ప్రయాణించుచున్నవి. రెండు నౌకల నుండి దీపగృహము పై భాగమునకు చేయు ఊర్ధ్వకోణాలు వరుసగా $30°$ మరియు $45°$ అగును. దీప గృహం ఎత్తు 200 మీ అయిన రెండు నౌకలకు మధ్య గల దూరమును కనుగొనండి. ($\sqrt{3} = 1.732$)

సాధన దీపగృహం AB అనుకొనుము. C మరియు D అనునవి రెండు నౌకలు గల ప్రాంతాలు అనుకొనుము.



పటం. 6.15

ఇంకా $AB = 200$ మీ.

$\angle ACB = 30°$, $\angle ADB = 45°$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_6.indd 265 11-02-2023 18:06:06

లంబకోణ త్రిభుజం BAC లో , $\tan 30^\circ = \frac{AB}{AC}$

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{200}{AC}$ దీని నుండి $AC = 200\sqrt{3}$ ...(1)

లంబకోణ త్రిభుజం BAD లో, $\tan 45^\circ = \frac{AB}{AD}$

$1 = \frac{200}{AD}$ దీని నుండి $AD = 200$ ...(2)

ఇప్పుడు, $CD = AC + AD \quad = 200\sqrt{3} + 200$ ...(1), (2) ల నుండి

$CD = 200(\sqrt{3}+1) \quad = 200 \times 2.732 \; = 546.4$

రెండు నౌకలకు మధ్యగల దూరం 546.4 మీ.

ఉదాహరణ 6.22 భూమి పై గల ఒక బిందువు నుండి 30 మీ ఎత్తుగల భవనము పైన గల ఒక గోపురము యొక్క అడుగు మరియు పై భాగముల ఊర్ధ్వకోణాలు వరుసగా 45° మరియు 60° అయిన గోపురం ఎత్తును కనుగొనుము. $(\sqrt{3} = 1.732)$

సాధన గోపురం ఎత్తు AC అనుకొనుము.

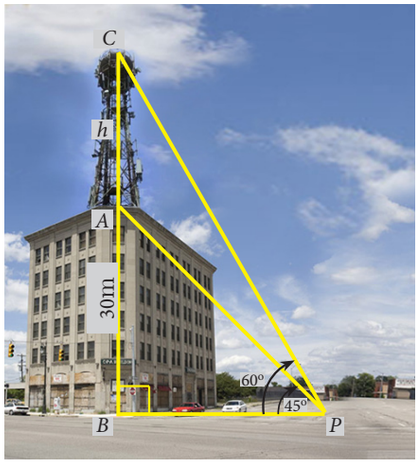
భవనము ఎత్తు AB అనుకొనుము.

ఇంకా, $AC = h$ మీ, $AB = 30$ మీ

లంబకోణ త్రిభుజం CBP లో, $\angle CPB = 60^\circ$

$\tan\theta = \frac{BC}{BP}$

$\tan 60^\circ = \frac{AB + AC}{BP}$ దీని ప్రకారం, $\sqrt{3} = \frac{30+h}{BP}$ ...(1)



పటం. 6.16

లంబకోణ త్రిభుజం ABP లో, $\angle APB = 45^\circ$

$\tan\theta = \frac{AB}{BP}$

$\tan 45^\circ = \frac{30}{BP}$ దీని నుండి $BP = 30$ ...(2)

(2) ను (1) లో ప్రతిక్షేపించగా లభించునది, $\sqrt{3} = \frac{30+h}{30}$

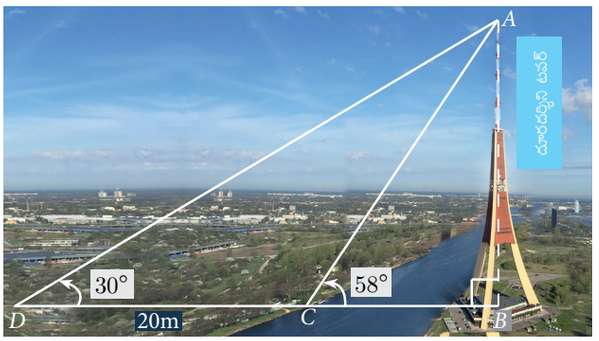
$h = 30(\sqrt{3}-1) = 30(1.732-1) = 30(0.732) \; = 21.96$

కాబట్టి గోపురం పొడవు $=$ 21.96 మీ.

ఉదాహరణ 6.23 ఒక కాలువ గట్టుపైన ఒక దూరదర్శిని టవర్ నిటారుగా ఉన్నది. కాలువ యొక్క ఇంకొక గట్టులో గల ఒక బిందువు నుండి చూచినపుడు టవర్ పైభాగమునకు చేయు ఊర్ధ్వకోణం 58Υ గా ఉన్నది. ఆ బిందువు నుండి జరిగి సరళరేఖలో 20 మీ దూరం వెళ్ళి అక్కడ గల ఒక బిందువు నుండి గోపురం పై భాగమునకు చేయు ఊర్ధ్వకోణం 30Υ అయిన, గోపురం ఎత్తు, కాలువ వెడల్పును కనుక్కోండి. $(\tan 58\Upsilon = 1.6003)$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_6.indd 266 11-02-2023 18:06:09

సాధన



పటం. 6.17

దూరదర్శిని టవర్ ఎత్తు AB అనుకొనుము.

కాలువ వెడల్పు BC అనుకొనుము.

ఇక్కడ $CD = 20$ మీ

లంబకోణ త్రిభుజం ABC లో, $\tan 58° = \frac{AB}{BC}$

$$1.6003 = \frac{AB}{BC} \quad \ldots(1)$$

లంబకోణ త్రిభుజం ABD లో, $\tan 30° = \frac{AB}{BD} = \frac{AB}{BC + CD}$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AB}{BC + 20} \quad \ldots(2)$$

(1) ని (2) చే భాగించగా లభించునది $\frac{1.6003}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{BC + 20}{BC}$

$$BC = \frac{20}{1.7791} = 11.24 \text{ మీ} \quad \ldots(3)$$

$$1.6003 = \frac{AB}{11.24} \quad [(1),\ (3) \text{ ల నుండి}]$$

$$AB = 17.99$$

కావున టవర్ ఎత్తు 17.99 మీ. కాలువ వెడల్పు 11.24 మీ.

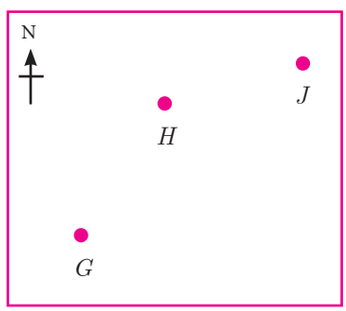
ఉదాహరణ 6.24 ఒక విమానం G నుండి 24Υ ల కోణముతో 250 కి.మీ దూరంలో నున్న H వైపు వెళ్ళును. తరువాత H వద్ద దిశను మార్చి 55° ల కోణంతో 180 కి.మీ దూరంలో నున్న J వైపు వెళ్ళినట్లయితే.

(i) G యొక్క ఉత్తరదిశ నుండి H కు గల దూరం ఎంత?

(ii) G యొక్క తూర్పుదిశ నుండి H కు గల దూరమెంత?

(iii) H యొక్క ఉత్తరదిశ నుండి J కు గల దూరము ఎంత?

(iv) H యొక్క తూర్పుదిశ నుండి J కు గల దూరమెంత?



పటం. 6.18 (a)

$$\begin{pmatrix} \sin 24° = 0.4067 & \sin 11° = 0.1908 \\ \cos 24° = 0.9135 & \cos 11° = 0.9816 \end{pmatrix}$$

సాధన (i) లంబకోణ త్రిభుజం GOH లో, $\cos 24° = \frac{OG}{GH}$

$0.9135 = \frac{OG}{250}$; $OG = 228.38$ కి.మీ

G యొక్క ఉత్తరదిశ నుండి H కు గల దూరము $= 228.38$ కి.మీ

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_6.indd 267 11-02-2023 18:06:10

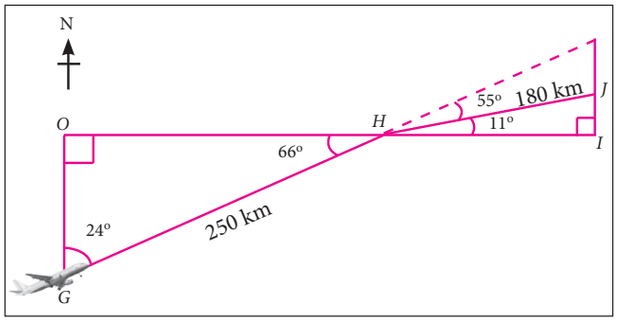
(ii) లంబకోణ త్రిభుజం GOH లో

$$\sin 24^\circ = \frac{OH}{GH}$$

$$0.4067 = \frac{OH}{250} \; ; \; OH = 101.68$$

G యొక్క తూర్పుదిశ నుండి

H కు గల దూరము $= 101.68$ కి.మీ



పటం. 6.18 (b)

(iii) లంబకోణ త్రిభుజం HIJ లో

$$\sin 11^\circ = \frac{IJ}{HJ}$$

$$0.1908 = \frac{IJ}{180} ; \; IJ = 34.34 \text{ km}$$

H యొక్క ఉత్తర దిశ నుండి J కు గల దూరం $= 34.34$ కి.మీ

(iv) లంబకోణత్రిభుజం HIJ, లో

$$\cos 11^\circ = \frac{HI}{HJ}$$

$$0.9816 = \frac{HI}{180} ; \; HI = 176.69 \text{ కి.మీ}$$

H యొక్క తూర్పు దిశ నుండి J కు గల దూరం $= 176.69$ కి.మీ

ఉదాహరణ 6.25 పటం 6.19 లో ఉన్నట్లు ఒకసమతలంలో రెండు చెట్లు ఉన్నవి. నేలపై గల X అను బిందువు నుండు రెండు చెట్ల యొక్క పై భాగములకు చేయు ఊర్ధ్వకోణం 40°, బిందువు X నుండి చిన్న చెట్టుకు గల క్షితిజ సమాంతర దూరం 8 మీ మరియు 2 చెట్ల పై భాగముల మధ్య దూరం 20 మీ అయిన.

(i) బిందువు X కు చిన్న చెట్టు పైభాగమునకు మధ్య గల దూరం

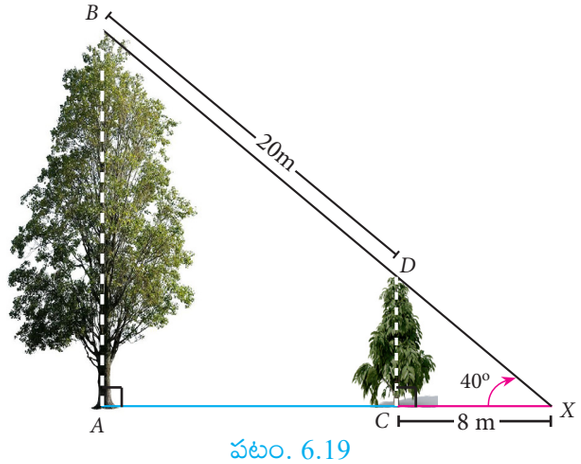
(ii) రెండు చెట్లకు మధ్యగల క్షితిజ దూరం $(\cos 40^\circ = 0.7660)$ మొదలగువాటిని కనుక్కోండి.

సాధన పెద్ద చెట్టు ఎత్తు AB అనుకొనుము. చిన్న చెట్టు ఎత్తు CD అనుకొనుము. నేలపై గల బిందువు X అనుకొనుము.

(i) లంబకోణ త్రిభుజం XCD లో $\cos 40^\circ = \frac{CX}{XD}$

$$XD = \frac{8}{0.7660} = 10.44 \text{ మీ}$$

కావున బిందువు X కు చిన్న చెట్టు పైభాగమునకు మధ్యగల దూరం= $XD = 10.44$ మీ.



పటం. 6.19

(ii) లంబకోణ త్రిబుజం XAB, లో

$$\cos 40^\circ = \frac{AX}{BX} = \frac{AC + CX}{BD + DX}$$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_6.indd 268 11-02-2023 18:06:12

$0.7660 = \dfrac{AC+8}{20+10.44}$ దీని నుండి $AC = 23.32 - 8 = 15.32$ మీ

రెండు చెట్లకు మధ్యగల క్షితిజ దూరం= $AC = 15.32$ మీ

మెదడుకు మేత

1. ఎత్తులను, దూరములను కొలుచుటకు ఏరకమైన త్రిభుజమును ఉపయోచున్నాము?
2. భవనము ఎత్తు మరియు భవనము పాదము నుండి ఏదైన ఒక బిందువుకు మధ్యగల దూరం ఇవ్వబడినపుడు దాని ఊర్ధ్వకోణాన్ని కనుగొనుటకు ఏ త్రికోణమితీయ నిష్పత్తిని ఉపయోగించవలెను?
3. దృష్టిరేఖ పొడవు మరియు ఊర్ధ్వకోణం ఇవ్వబడినపుడు.
   (i) భవనము ఎత్తును కనుగొనుటకు
   (ii) భవనము పాదము నుండి చూడబడు ప్రాంతమునకు మధ్యగల దూరాన్ని కనుగొనుటకు. ఏ త్రికోణమితి నిష్పత్తిని ఉపయోగించవలెను.

అభ్యాసము 6.2

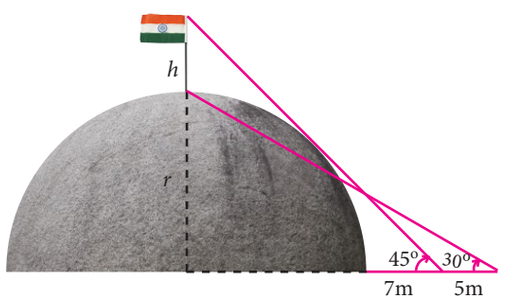
1. $10\sqrt{3}$ మీ ఎత్తుగల గోపురం అడుగుభాగం నుండి 30 మీ దూరంలో నేలపై గల ఒక బిందువు నుండి గోపురం పై భాగమునకు గల ఊర్ధ్వకోణమును కనుగొనండి?

2. ఒక రహదారికి ఇరువైపులా ఎడతెరపి లేకుండా వరుసగా ఇండ్లు కలవు. వాటి ఎత్తు $4\sqrt{3}$ మీ. ఒక బాటసారి రహదారి మధ్యలో నిలబడుకొని వరుసగా ఇండ్లను చూచెను. $30°$ ఊర్ధ్వకోణములో బాటసారి ఇంటి పైభాగమును చూసెను. అయిన రహదారి వెడల్పును కనుగొనుము?

3. ఒక వ్యక్తి అతని ఇంటికి బయట నిలబడి ఒక కిటికీ యొక్క పై భాగము మరియు అడుగు భాగమును వరుసగా $60°$ మరియు $45°$ మొదలగు ఊర్ధ్వకోణములలో చూచెను. అతని ఎత్తు 180 సెం.మీ, అతను ఇంటి నుండి 5మీ దూరంలో ఉన్నాడనుకొనిన కిటికీ ఎత్తును కనుగొనము. $(\sqrt{3} = 1.732)$

4. 1.6 మీ ఎత్తు గల ఒక విగ్రహం పీఠముపైన ఉన్నది. నేలపై గల బిందువు నుండి విగ్రహం యొక్క పై భాగమునకు చేయు ఊర్ధ్వకోణం 60Υ మరియు అదే బిందువు నుండి పీఠము పై భాగమునకు చేయు ఊర్ధ్వకోణం 40Υ అయిన పీఠము ఎత్తును కనుగొనుము. $(\tan 40° = 0.8391,\ \sqrt{3} = 1.732)$

5. 5 మీ. వ్యాసార్ధము కలిగిన అర్ధగోళాకార బురుజు పైన 'h' మీ ఎత్తు గల ఒక జెండా స్థంభము నిలబడియున్నది. అర్ధగోళాకార బురుజు అడుగు భాగము నుండి 7మీ. దూరంలో ఒక వ్యక్తి నిలబడియున్నాడు. అతను జెండా



10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_6.indd 269 11-02-2023 18:06:13

స్థంభం శీర్షమును 45Υ. ల ఊర్ధ్వకోణంలోను నిలబడిన చోటు నుండి 5మీ. దూరంగా జరిగి జెండా స్తంభము అడుగు భాగమును 30Υ ల ఊర్ధ్వకోణములో చూచెను. అయిన

(i) జెండా స్తంభము ఎత్తు

(ii) అర్ధగోళాకార బురుజు వ్యాసార్ధములను కనుగొనుము. $(\sqrt{3} = 1.732)$

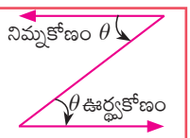
6. 15 మీ. ఎత్తుగల ఒక గోపురం కలదు. ఒక విద్యుత్‌స్తంభం అడుగు మరియు పై భాగముల నుండి గోపురం పై భాగమును వరుసగా $60°$ మరియు $30°$ ఊర్ధ్వకోణాలతో చూచిన విద్యుత్ స్తంభపు ఎత్తును కనుగొనుము.

6.3.2 నిమ్నకోణముతో కూడిన సమస్యలు (Problems involving Angle of Depresion)

ఈ పాఠ్య విభాగములో నిమ్నకోణం ఇవ్వబడిన సమస్యలను సాధించుటకు ప్రయత్నిస్తాం.

సూచన

- ఊర్ధ్వకోణం మరియు నిమ్నకోణం రెండూ ఏకాంతర కోణాలు కావున అవి సమానంగా ఉంటుంది.



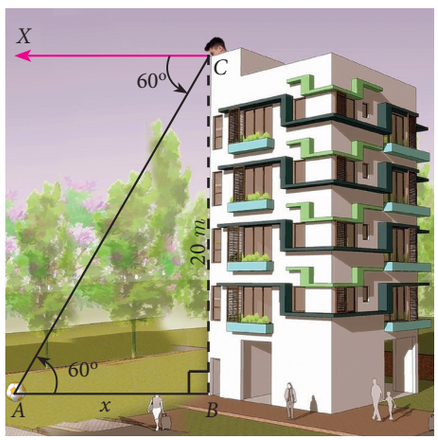
పటం. 6.20

ఉదాహరణ 6.26 20 మీ. ఎత్తు గల భవనము పై భాగములో ఒక క్రీడాకారుడు కూర్చుని నేలపై గల ఒక బంతిని నిమ్నకోణంలో చూసెను. అయిన భవనము అడుగు భాగమునకు మరియు బంతికి మధ్యగల దూరాన్ని కనుక్కోండి. $(\sqrt{3} = 1.732)$

సాధన భవనము ఎత్తు BC అనుకొనుము. నేలపై బంతి గల స్థానమును A అనుకొనుము.

$BC = 20$ మీ మరియు $\angle XCA = 60° = \angle CAB$

$AB = x$ మీ అనుకొనుము..



పటం. 6.21

లంబకోణ త్రిభుజం ABCలో,

$$\tan 60° = \frac{BC}{AB}$$

$$\sqrt{3} = \frac{20}{x}$$

$$x = \frac{20 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{20 \times 1.732}{3} = 11.55 \text{ మీ.}$$

కావున భవనము అడుగు భాగమునకు మరియు బంతికి మధ్య గల దూరము 11.55 మీ.

ఉదాహరణ 6.27 రెండు భవనములకు మధ్య గల క్షితిజ సమాంతర దూరం 140 మీ. రెండవ భవనం శీర్షం నుండి మొదటి భవనం శీర్షానికి గల నిమ్నకోణం 30Υ అగును. మొదటి భవనం ఎత్తు 60 మీ అయిన రెండవ భవనం ఎత్తును కనుగొనుము. $(\sqrt{3} = 1.732)$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_6.indd 270 11-02-2023 18:06:15

సాధన మొదటి భవనం ఎత్తు AB = 60మీ

ఇప్పుడు $AB = MD = 60$ మీ.

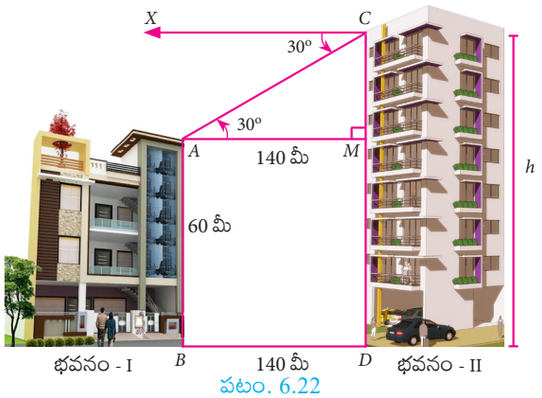
రెండవ భవనం ఎత్తు $CD = h$ అనుకొనుము.

ఇంకా AM = BD = 140 మీ

దూరము $BD = 140$ మీ.

పటం నుండి,

$$\angle XCA = 30^\circ = \angle CAM$$



పటం. 6.22

లంబకోణ త్రిభుజం AMCలో $\tan 30^\circ = \dfrac{CM}{AM}$ లో,

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{CM}{140}$$

$$CM = \frac{140}{\sqrt{3}} = \frac{140\sqrt{3}}{3}$$

$$= \frac{140 \times 1.732}{3}$$

$$CM = 80.83$$

ఇప్పుడు, $h = CD = CM + MD = 80.83 + 60 = 140.83$ మీ

కాబట్టి, రెండవ భవనం ఎత్తు = 140.83 మీ

ఉదాహరణ 6.28 50 మీ. ఎత్తు గల ఒక గోపురం పై భాగము నుండి ఒక చెట్టు యొక్క పై భాగము మరియు అడుగు భాగమునకు నిమ్నకోణాలు వరుసగా 30Υ మరియు 45Υ అయిన చెట్టు ఎత్తును కనుగొనండి. $(\sqrt{3} = 1.732)$

సాధన గోపురం ఎత్తు $AB = 50$ మీ

చెట్టు ఎత్తు $CD = y$ మరియు $BD = x$ అనుకొనుము.

పటం నుండి $\angle XAC = 30^\circ = \angle ACM$ మరియు $\angle XAD = 45^\circ = \angle ADB$

లంబకోణ త్రిభుజం ABD లో,

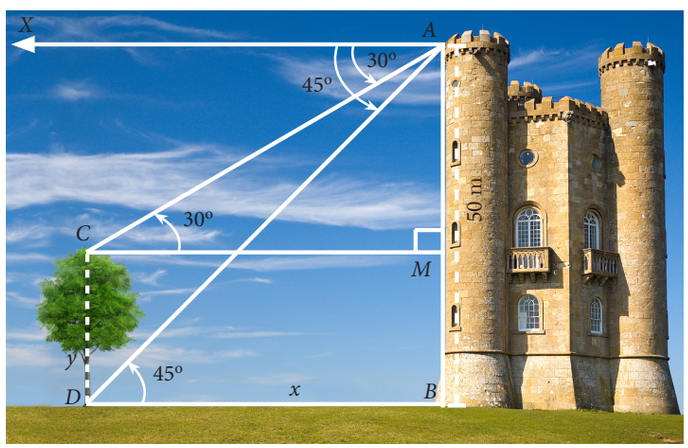
$$\tan 45^\circ = \frac{AB}{BD}$$

$1 = \dfrac{50}{x}$ దీని నుండి $x = 50$ మీ

లంబకోణ త్రిభుజం AMCలో,

$$\tan 30^\circ = \frac{AM}{CM}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AM}{50} \quad [DB = CM \text{ కావున})]$$



పటం. 6.23

$$AM = \frac{50}{\sqrt{3}} = \frac{50\sqrt{3}}{3} = \frac{50 \times 1.732}{3} == 28.87 \text{ మీ.}$$

కాబట్టి చెట్టు ఎత్తు $= CD = MB = AB - AM = 50 - 28.87 = 21.13$ మీ.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_6.indd 271 11-02-2023 18:06:17

ఉదాహరణ 6.29 సముద్ర మట్టంనుండి 60 మీ ఎత్తు గల దీపగృహం పై భాగము నుండి ఒక వ్యక్తి రెండు పడవలను వరుసగా $28°$ మరియు $45°$ ల నిమ్నకోణాలతో చూచెను. ఒక పడవ మరొక పడవకు వెనుక దీపగృహమునకు ఒకేవైపున సరళరేఖలో ఉన్నదనుకొనిన, రెండు పడవలకు మధ్యగల దూరాన్ని కనుక్కోండి. $(\tan 28° = 0.5317)$

సాధన దీపహృహము ఎత్తు CD అనుకొనుము.

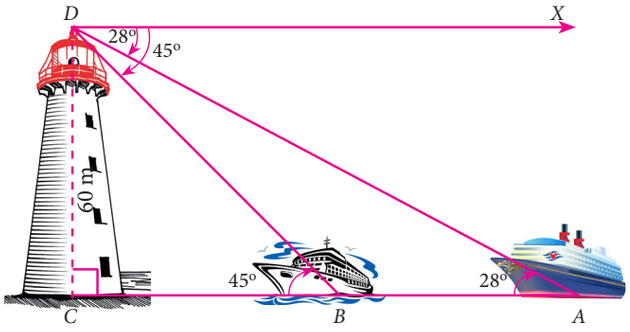
D అనునది పరిశీలకుడు ఉన్న స్థానం అనుకొనుము

దీప గృహం ఎత్తు CD = 60 మీ

పటము నుండి

$\angle XDA = 28° = \angle DAC$ మరియు

$\angle XDB = 45° = \angle DBC$



పటం. 6.24

లంబకోణ త్రిభుజం DCB లో $\tan 45° = \dfrac{DC}{BC}$

$$1 = \frac{60}{BC} \quad \text{దీని నుండి} \quad BC = 60 \text{ మీ.}$$

లంబకోణ త్రిభుజం DCA లో $\tan 28° = \dfrac{DC}{AC}$

$$0.5317 = \frac{60}{AC} \quad \text{దీని నుండి} \quad AC = \frac{60}{0.5317} = 112.85$$

రెండు పడవలకు మధ్యగల దూరం $AB = AC - BC = 52.85$ మీ.

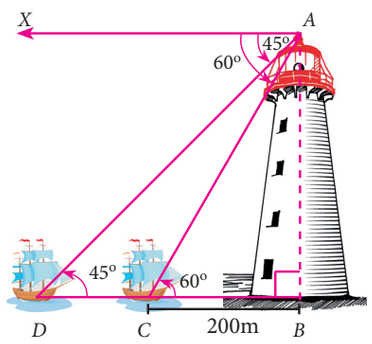
ఉదాహరణ 6.30 ఒక వ్యక్తి గోపురము నుండి దూరముగా సముద్రంలో ప్రయాణిస్తున్న ఒక పడవను గోపురం పై భాగము నుండి చూచెను. గోపురం అడుగు భాగం నుండి 200మీ దూరంలో పడవ ఉన్నప్పుడు పడవను అతడు $60°$ల నిమ్నకోణంలో చూచెను. 10 సెకన్ల తరువాత నిమ్నకోణం $45°$గా మారినది. అయిన పడవ యొక్క వేగమును (కి.మీ/గం) రమారమిగా కనుక్కోండి. పడవ నిశ్చలమైన నీటిలో ప్రయాణిస్తుందనుకొనుము. $(\sqrt{3} = 1.732)$

సాధన AB ని గోపురం అనుకొనుము.

C మరియు D అనునవి పడవలు ఉన్న స్థానము అనుకొనుము.

పటం నుండి, $\angle XAC = 60° = \angle ACB$ మరియు

$\angle XAD = 45° = \angle ADB$, $BC = 200$ మీ.



పటం. 6.25

లంబకోణ త్రిభుజం ABC లో $\tan 60° = \dfrac{AB}{BC}$

కావున $\sqrt{3} = \dfrac{AB}{200}$

దీని నుండి $AB = 200\sqrt{3}$ ...(1)

లంబకోణ త్రిభుజం ABD లో $\tan 45° = \dfrac{AB}{BD}$

దీని నుండి $1 = \dfrac{200\sqrt{3}}{BD}$ [(1) నుండి)]

కావున $BD = 200\sqrt{3}$

ఇప్పుడు, $CD = BD - BC$

$CD = 200\sqrt{3} - 200 = 200(\sqrt{3} - 1) = 146.4$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_6.indd 272 11-02-2023 18:06:20

CD దూరాన్ని ప్రయాణించుటకు పట్టిన సమయం 10 సెకన్లు అని ఇవ్వబడినది.
అనగా 146.4 మీ దూరాన్ని 10 సెకన్లలో పడవ దాటినది.

$$\text{కాబట్టి పడవ వేగం} = \frac{\text{దూరం}}{\text{వేగం}}$$

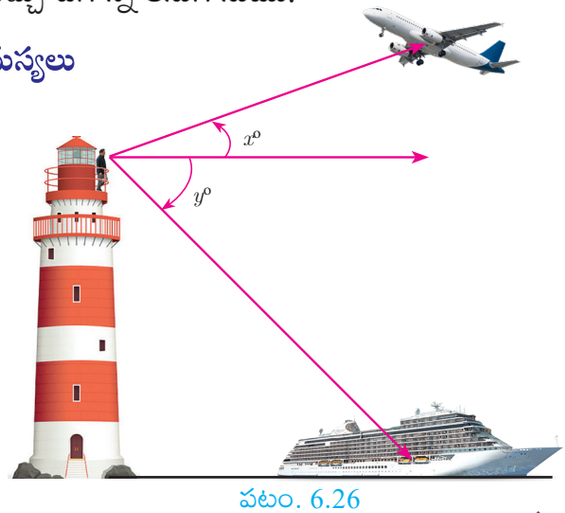
$$= \frac{146.4}{10} = 14.64 \text{ మీ/సె.} \implies 14.64 \times \frac{3600}{1000} \text{ కి.మీ/గం} = 52.704 \text{ కి.మీ/గం}$$

అభ్యాసము 6.3

1. $50\sqrt{3}$ మీ ఎత్తు గల ఒక బండపై భాగం నుండి $30°$ నిమ్నకోణంలో నేలపై గల ఒక కారుని చూచినట్లయితే కారుకి మరియు బండకి మధ్యగల దూరాన్ని కనుక్కోండి.
2. రెండు భవనములకు మధ్యగల క్షితిజ సమాంతర దూరం 70 మీ, రెండవ భవనం పై భాగం నుండి మొదటి భవనం పైభాగానికి గల నిమ్నకోణం $45°$, రెండవ భవనం ఎత్తు 120 మీ అయిన మొదటి భవనపు ఎత్తును కనుక్కోండి.
3. 60 మీ ఎత్తుగల టవర్ శీర్షము నుండి నిటారుగా గల ఒక దీపస్తంభము యొక్క పైభాగం మరియు అడుగు భాగపు నిమ్నకోణాలు వరుసగా $38°$ మరియు $60°$అయిన దీపస్తంభపు ఎత్తును కనుగొనుము. $(\tan 38° = 0.7813,\ \sqrt{3} = 1.732)$
4. 1800 మీ ఎత్తులో ఎగురుతున్న ఒక విమానం నుండి ఒకే దిశలో విమానం వైపు ప్రయాణిస్తున్న రెండు పడవలను చూడబడినవి. విమానం నుండి రెండు పడవలను క్రమంగా $60°$ మరియు $30°$ ల నిమ్నకోణాలలో చూచిన, రెండు పడవలకు మధ్యగల దూరాన్ని కనుగొనుము. $(\sqrt{3} = 1.732)$
5. ఒక దీపగృహము పైభాగం నుండి దానికి ఎదురెదురుగా గల రెండు నౌకలను $30°$ మరియు $60°$ నిమ్నకోణాలతో చూడబడినది. దీపగృహము అడుగుభాగం ఒకే సరళరేఖలో ఉన్నాయనుకొనిన, రెండు నౌకలకు మధ్యగల దూరం $\frac{4h}{\sqrt{3}}$ మీ అని చూపండి.
6. 90 అడుగుల ఎత్తుగల భవనము పై నుండి పారదర్శకగాజు గోడలను కలిగిన లిఫ్ట్ క్రిందికి వస్తున్నది. భవనం పైభాగంలో లిఫ్ట్ ఉన్నప్పుడు పూలతోటలోని ఒక పౌంటెన్‌కి గల నిమ్నకోణం $60°$ రెండు నిమిషముల తరువాత దాని నిమ్నకోణం $30°$ లుగా తగ్గినది. లిఫ్ట్ ముఖద్వారం నుండి పౌంటెన్ $30\sqrt{3}$ అడుగుల దూరంలో ఉన్నదనుకొనిన లిఫ్ట్ క్రిందకు వచ్చు వేగాన్ని కనుగొనుము.

6.3.3 ఊర్ధ్వకోణం మరియు నిమ్నకోణంతో కూడిన సమస్యలు

క్రింది సందర్భమును తీసుకొనుము. సముద్ర తీరంలో గల దీపగృహము పైన ఒక వ్యక్తి నిలబడి ఆకాశంలో ఎగురుతున్న విమానమును చూచెను. అదే సమయంలో సముద్రంలో ప్రయాణిస్తున్న ఒక నౌకను కూడా చూచెను. అతడు విమానమును ఊర్ధ్వకోణంలోను నౌకను నిమ్నకోణంలోను చూచెను. ఈ ఉదాహరణ నుండి ఊర్ధ్వకోణం మరియు నిమ్నకోణం ఒకే సందర్భములో ఉపయోగపడునని తెలుస్తున్నది



పటం. 6.26

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_6.indd 273 11-02-2023 18:06:21

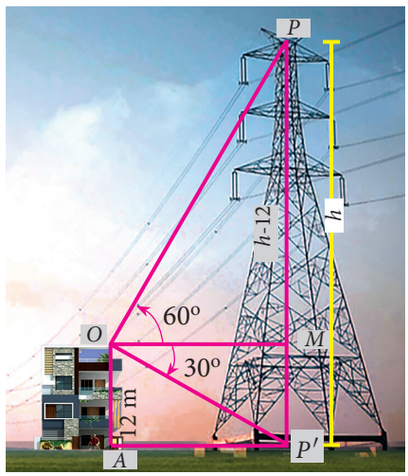
పటం 6.26, లో x° అనునది ఊర్ధ్వకోణం మరియు y° అనునది నిమ్నకోణం అవుతుంది.

ఈ పాఠ్య విభాగములో ఊర్ధ్వకోణం మరియు నిమ్నకోణం ఇవ్వబడిన సమస్యలను సాధించుటకు ప్రయత్నిస్తాం.

ఉదాహరణ 6.31 12 మీ ఎత్తుగల భవనము పై భాగం నుండి విద్యుత్ గోపురం పైభాగమునకు చేయు ఊర్ధ్వకోణం 60° మరియు దాని అడుగు భాగమునకు గల నిమ్నకోణం 30° అయిన విద్యుత్ గోపురం ఎత్తును కనుగొనుము.

సాధన పటం 6.27లో OA అనునది భవనము. O అనునది భవనము పైభాగమున గల బిందువు అనుకొనుము. ఇంకా $OA = 12$ మీ.

PP' అనునది విద్యుత్ గోపురం. దీని యందు P అనునది విద్యుత్ గోపురం పైభాగం మరియు P' అనునది విద్యుత్ గోపురం అడుగుభాగం అవుతుంది.



పటం. 6.27

P యొక్క ఊర్ధ్వకోణం $\angle MOP = 60^\circ$. మరియు

P' యొక్క నిమ్నకోణం $\angle MOP' = 30^\circ$

విద్యుత్ గోపురం ఎత్తు $PP' = h$ మీ అనుకొనుము.

O ద్వారా $OM \perp PP'$ గీయుము.

$MP = PP' - MP' = h - OA = h - 12$

లంబకోణ త్రిభుజం OMP లో $\dfrac{MP}{OM} = \tan 60^\circ$

$$\Rightarrow \frac{h-12}{OM} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow OM = \frac{h-12}{\sqrt{3}} \quad \ldots(1)$$

లంబకోణ త్రిభుజం OMP', లో $\dfrac{MP'}{OM} = \tan 30^\circ$

$$\Rightarrow \frac{12}{OM} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

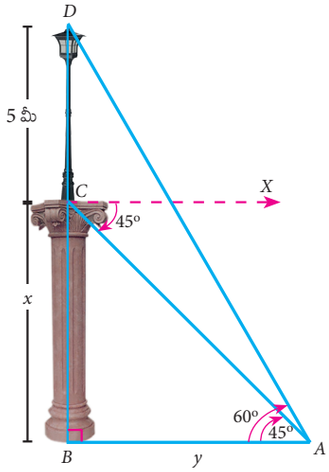
$$\Rightarrow OM = 12\sqrt{3} \quad \ldots(2)$$

(1) మరియు (2) ల నుండి, $\dfrac{h-12}{\sqrt{3}} = 12\sqrt{3}$

$\Rightarrow h - 12 = 12\sqrt{3} \times \sqrt{3}$ కావున, $h = 48$

కాబట్టి విద్యుత్ గోపురం ఎత్తు 48 మీ.

ఉదాహరణ 6.32 ఒక గోపురం పైన 5మీ ఎత్తుగల స్తంభము అమర్చబడియున్నది. నేలపై గల A అను బిందువు నుండి స్తంభము యొక్క శీర్షమును 60° ల ఊర్ధ్వకోణంలోను, గోపురం పై భాగం నుండి 'A' అను బిందువును 45° ల నిమ్నకోణంలోను చూడబడిన, గోపురం ఎత్తును కనుక్కోండి $(\sqrt{3} = 1.732)$



పటం. 6.28

సాధన గోపురం ఎత్తు BC అనుకొనుము, స్తంభము ఎత్తు CD అని అనుకొనుము.

పరిశీలకుని బిందువును 'A' అనుకొనుము.

$BC = x$ మరియు $AB = y$ అనుకొనుము.

పటంలో

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_6.indd 274 11-02-2023 18:06:23

$\angle BAD = 60°$ మరియు $\angle XCA = 45° = \angle BAC$

లంబకోణ త్రిభుజం ABC లో, $\tan 45° = \dfrac{BC}{AB}$

$\Rightarrow 1 = \dfrac{x}{y}$ నుండి $x = y$ ...(1)

లంబకోణత్రిభుజం ABD, లో $\tan 60° = \dfrac{BD}{AB} = \dfrac{BC + CD}{AB}$

$\Rightarrow \sqrt{3} = \dfrac{x+5}{y}$ దీని నుండి, $\sqrt{3}\, y = x + 5$

కావున , $\sqrt{3}\, x = x + 5$ [(1) నుండి]

$$x = \frac{5}{\sqrt{3}-1} = \frac{5}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{5(1.732+1)}{2} = 6.83$$

కావున గోపురం ఎత్తు 6.83 మీ.

ఉదాహరణ 6.33 ఒక వీధిలో గల ఒక ఇంటి కిటికీ నుండి (కిటికీ నేలకు పైన h మీ ఎత్తులో గలదు) వీధికి ఎదురుగానున్న మరొక్క ఇంటి పైభాగం మరియు అడుగుభాగముల ఊర్ధ్వకోణం మరియు నిమ్నకోణాలు వరుసగా θ_1 మరియు θ_2 అయిన ఎదురుగానున్న ఇంటి ఎత్తు $h\left(1 + \dfrac{\cot\theta_2}{\cot\theta_1}\right)$ అని చూడండి.

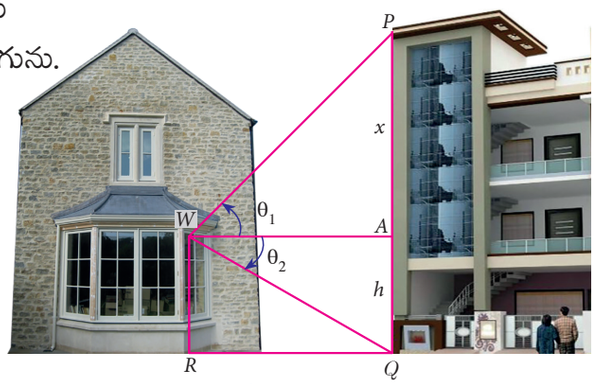
సాధన పటంలో W అనునది కిటికీలో గల ఒక బిందువు అనుకొనుము. ఈ బిందువు నుండి ఊర్ధ్వకోణం మరియు నిమ్నకోణాలను లెక్కించబడును అని తీసుకొనుము.

PQ అనునది ఎదురుగా నున్న ఇల్లు అనుకొనుము

WA అనునది కటికీ నుండి ఇంటికి గల దూరమగును.

కిటికీ ఎత్తు $= h = AQ\,(WR = AQ)$

$PA = x$ మీ. అనుకొనుము



పటం. 6.29

లంబకోణ త్రిభుజం PAW లో, $\tan\theta_1 = \dfrac{AP}{AW}$

కావున $\tan\theta_1 = \dfrac{x}{AW}$

$\Rightarrow AW = \dfrac{x}{\tan\theta_1}$

అనగా, $AW = x\cot\theta$ ...(1)

లంబకోణ త్రిభుజం QAW లో, $\tan\theta_2 = \dfrac{AQ}{AW}$

$\Rightarrow \tan\theta_2 = \dfrac{h}{AW}$

$AW = h\cot\theta_2$ ...(2)

(1) మరియు (2) ల నుండి $x\cot\theta_1 = h\cot\theta_2$

$\Rightarrow x = h\dfrac{\cot\theta_2}{\cot\theta_1}$

అందువలన ఎదురుగానున్న ఇంటి ఎత్తు= $PA + AQ = x + h = h\dfrac{\cot\theta_2}{\cot\theta_1} + h = h\left(1 + \dfrac{\cot\theta_2}{\cot\theta_1}\right)$ నిరూపించబడినది.

మెదడుకు మేత

ఎత్తు, దూరం మరియు ఊర్ధ్వకోణం కనుగొనుటకు కనీసం ఎన్ని కొలతలు అవసరమగును?

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_6.indd 275 11-02-2023 18:06:26

ప్రగతి శోధన

1. పరిశీలకుని కంటి నుండి వస్తువుపై గల ఒక బిందువుకు గీయబడు రేఖను _____ అంటారు.
2. ఒక వస్తువును చూచునపుడు క్షితిజ సమాంతర రేఖకు దృష్టి రేఖకు మధ్యగల కోణాన్ని ఏ పరికరం ద్వారా కొలుస్తారు.
3. దృష్టిరేఖ అనునది క్షితిజ సమాంతర రేఖకు పైన ఉన్నప్పుడు ఏర్పడు కోణం _____.
4. నిటారుగా నున్న ఒక వస్తువు (గోపురం) యొక్క అడుగు భాగంవైపు పోవునప్పుడు దాని ఊర్ధ్వకోణం _____.
5. దృష్టిరేఖ అనునది క్షితిజ సమాంతర రేఖకు క్రింద ఉన్నప్పుడు ఏర్పడు కోణమును _____ అంటారు.

అభ్యాసము 6.4

1. 13 మీ ఎత్తుగల ఒక చెట్టు పైభాగం నుండి మరొక చెట్టు పైభాగము మరియు అడుగు భాగము యొక్క ఊర్ధ్వకోణం మరియు నిమ్నకోణాలు వరుసగా 45° మరియు 30° అయిన రెండవ చెట్టు ఎత్తును కనుగొనుము. $(\sqrt{3} = 1.732)$

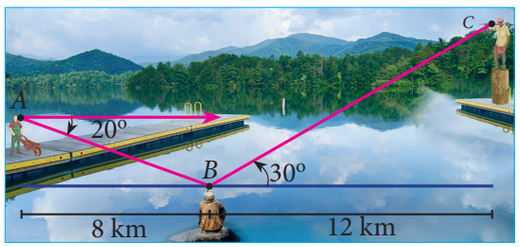
2. సముద్ర నీటి మట్టము నుండి 40 మీ పైన గల నౌక పైభాగములో నిలబడియున్న ఒక వ్యక్తి ఒక కొండ యొక్క పై భాగమును 60° ఊర్ధ్వకోణంలోను, అడుగు భాగమును 30° నిమ్నకోణంలోను చూచినట్లయితే నౌక నుండి కొండకు గల దూరం, కొండ ఎత్తును కనుగొనుము. $(\sqrt{3} = 1.732)$

3. ఒక సరస్సు నీటి మట్టం నుండి 'h' అను ఎత్తులో గల ఒక బిందువు నుండి ఒక మేఘమునకు గల ఊర్ధ్వకోణం θ_1 మరియు సరస్సు నీటిలో పడు మేఘ ప్రతిబింబం యొక్క నిమ్నకోణం θ_2 అయిన నేల నుండి మేఘము ఎత్తు $\frac{h(\tan\theta_1 + \tan\theta_2)}{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}$ అని నిరూపించండి.

4. ఎత్తైన ఒక అపార్ట్‌మెంట్ అడుగుభాగం నుండి చరవాణి గోపురం పైభాగమునకు చేయు ఊర్ధ్వకోణం 60° మరియు అపార్ట్‌మెంట్ పైభాగము నుండి గోపురం అడుగుభాగమునకు గల నిమ్నకోణం 30° అపార్ట్‌మెంట్ ఎత్తు 50 మీ అయిన చరవాణి గోపురం ఎత్తును కనుగొనండి. వికిరణ ప్రసార నిబంధన ప్రకారం చరవాణి గోపురం కనిష్ఠ ఎత్తు 120 మీ ఉండవలెను. చరవాణి గోపురం ఈ నిబంధనకు కట్టుబడియున్నదా?

5. 66 మీ ఎత్తుగల అపార్ట్‌మెంట్ పైభాగం నుండి ఒక దీపస్తంభపు పైభాగం మరియు అడుగు భాగపు ఊర్ధ్వ మరియు నిమ్న కోణాలు వరుసగా 60° మరియు 30° అయిన క్రింది వానిని కనుక్కోండి.
   (i) దీప స్తంభం ఎత్తు
   (ii) దీప స్తంభము ఎత్తు మరియు అపార్ట్‌మెంట్ ఎత్తులకు మధ్యగల వ్యత్యాసం
   (iii) దీపస్తంభము మరియు అపార్ట్‌మెంట్‌కు మధ్యగల దూరం $(\sqrt{3} = 1.732)$

6. A, B మరియు C అను ముగ్గురు గ్రామస్తులు ఒక లోయలో ఒకరినొకరు చూసుకొనేవిధంగా ఉన్నారు. A కు, B కు మధ్య గల క్షితిజ సమాంతర దూరం 12 కి.మీ. A నుండి B కి గల నిమ్నకోణం 20° మరియు B నుండి C కి మధ్యగల ఊర్ధ్వకోణం 30° అయిన క్రింది వాటిని కనుక్కోండి. :



   (i) A కు , B కు మధ్యగల లంబటెత్తు.
   (ii) B కు, C కు మధ్యగల లంబటెత్తు. $(\tan 20^\circ = 0.3640,\ \sqrt{3} = 1.732)$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_6.indd 276 11-02-2023 18:06:28

అభ్యాసము 6.5

బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు

1. $\sin^2\theta + \dfrac{1}{1+\tan^2\theta}$ విలువ

   (A) $\tan^2\theta$ (B) 1 (C) $\cot^2\theta$ (D) 0

2. $\tan\theta\text{cosec}^2\theta - \tan\theta$ విలువ

   (A) $\sec\theta$ (B) $\cot^2\theta$ (C) $\sin\theta$ (D) $\cot\theta$

3. If $(\sin\alpha + \text{cosec}\alpha)^2 + (\cos\alpha + \sec\alpha)^2 = k + \tan^2\alpha + \cot^2\alpha$, అయిన k విలువ

   (A) 9 (B) 7 (C) 5 (D) 3

4. $\sin\theta + \cos\theta = a$ మరియు $\sec\theta + \text{cosec}\theta = b$, అయిన $b(a^2-1)$ విలువ

   (A) $2a$ (B) $3a$ (C) 0 (D) $2ab$

5. $5x = \sec\theta$ మరియు $\dfrac{5}{y} = \tan\theta$, అయిన $x^2 - \dfrac{1}{y^2}$ విలువ

   (A) 25 (B) $\dfrac{1}{25}$ (C) 5 (D) 1

6. $\sin\theta = \cos\theta$, అయిన $2\tan^2\theta + \sin^2\theta - 1$ విలువ

   (A) $\dfrac{-3}{2}$ (B) $\dfrac{3}{2}$ (C) $\dfrac{2}{3}$ (D) $\dfrac{-2}{3}$

7. $x = a\tan\theta$ మరియు $y = b\sec\theta$ అయిన

   (A) $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$ (B) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (C) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (D) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$

8. $(1 + \tan\theta + \sec\theta)(1 + \cot\theta - \text{cosec}\theta)$ విలువ

   (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) -1

9. $a\cot\theta + b\,\text{cosec}\theta = p$ మరియు $b\cot\theta + a\,\text{cosec}\theta = q$ అయిన $p^2 - q^2$ విలువ

   (A) $a^2 - b^2$ (B) $b^2 - a^2$ (C) $a^2 + b^2$ (D) $b - a$

10. ఒక గోపురం ఎత్తుకు మరియు దాని నీడకు గల నిష్పత్తి $\sqrt{3} : 1$ అయిన సూర్యున్ని చూసే ఊర్ధ్వకోణం కొలత

    (A) 45° (B) 30° (C) 90° (D) 60°

11. ఒక విద్యుత్ స్తంభం దాని అడుగుభాగంలోని సమతలంలో గల ఒక బిందువు వద్ద 30° కోణమును ఏర్పరుస్తున్నది. మొదటి బిందువుకు 'b' మీ ఎత్తులో గల రెండవ బిందువు నుండి విద్యుత్ స్తంభపు అడుగుభాగానికి నిమ్నకోణం 60° అయిన విద్యుత్‌స్తంభం ఎత్తు

    (A) $\sqrt{3}\ b$ (B) $\dfrac{b}{3}$ (C) $\dfrac{b}{2}$ (D) $\dfrac{b}{\sqrt{3}}$

12. ఒక గోపురం ఎత్తు 60 మీ సూర్యున్ని చూసే ఊర్ధ్వకోణం 30° లనుండి 45° గా పెరిగినపుడు గోపురం నీడ పొడవు x మీ తగుతుంది. అయిన x విలువ

    (A) 41.92 మీ (B) 43.92 మీ (C) 43 మీ (D) 45.6 మీ

13. బహుళ అంతస్తుల భవనం పైభాగం నుండి 20 మీ ఎత్తు గల భవనం పైభాగం మరియు అడుగు భాగముల నిమ్నకోణాలు వరుసగా 30° మరియు 60° అయితే బహుళ అంతస్తుల భవనం ఎత్తు మరియు రెండు భవనాలకు మధ్యగల దూరం (మీటర్లలో)

    (A) 20, $10\sqrt{3}$ (B) 30, $5\sqrt{3}$ (C) 20, 10 (D) 30, $10\sqrt{3}$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_6.indd 277 11-02-2023 18:06:32

14. ఇద్దరు వ్యక్తులకు మధ్యగల దూరం 'x' మీ. ఎదుటి వ్యక్తి ఎత్తు రెండవ వ్యక్తి ఎత్తునకు రెట్టింపగును. వారి మధ్యగల సరళరేఖా దూరంలో మధ్యబిందువు నుండి ఇద్దరి తలల పైభాగమునకు చేయు ఊర్ధ్వకోణాలు పూరకకోణాలయిన పొట్టిగానున్న వ్యక్తి ఎత్తును (మీటర్లలో) కనుగొనుము.

(A) $\sqrt{2}\ x$ (B) $\frac{x}{2\sqrt{2}}$ (C) $\frac{x}{\sqrt{2}}$ (D) $2x$

15. ఒక సరస్సుపైన h మీ ఎత్తులో గల ఒక బిందువు నుండి మేఘమునకు గల ఊర్ధ్వకోణం β , మేఘ ప్రతిబింబమునకు గల నిమ్నకోణం $45°$ అయిన, సరస్సు నుండి మేఘానికి గల ఎత్తు

(A) $\frac{h(1+\tan\beta)}{1-\tan\beta}$ (B) $\frac{h(1-\tan\beta)}{1+\tan\beta}$ (C) $h\tan(45°-\beta)$ (D) ఇవి ఏవీ కావు

అధ్యాయ అభ్యాసము- 6



1. నిరూపించండి (i) $\cot^2 A\left(\frac{\sec A-1}{1+\sin A}\right)+\sec^2 A\left(\frac{\sin A-1}{1+\sec A}\right)=0$ (ii) $\frac{\tan^2\theta-1}{\tan^2\theta+1}=1-2\cos^2\theta$

2. $\left(\frac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}\right)^2=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$ అని నిరూపించండి.

3. If $x\sin^3\theta+y\cos^3\theta=\sin\theta\cos\theta$ మరియు $x\sin\theta=y\cos\theta$, అయిన t $x^2+y^2=1$ అని నిరూపించండి.

4. $a\cos\theta-b\sin\theta=c$, అయిన $(a\sin\theta+b\cos\theta)=\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}$ అని నిరూపించండి.

5. 80 మీ ఎత్తు గల చెట్టు యొక్క అగ్రభాగమున ఒక పక్షి ఉన్నది. నేలపై గల ఒక బిందువు నుండి పక్షికి గల ఊర్ధ్వకోణం 45Υ పక్షి ఒకే ఎత్తులో క్షితిజ సమాంతరంగా ఎగురుచూ వెళ్తున్నది. 2 సెకన్లు తరువాత అదే బిందువు నుండి పక్షికి గల ఊర్ధ్వకోణం 30Υ అయిన పక్షి ఎగురుచున్న వేగమును కనుగొనండి. $(\sqrt{3}=1.732)$

6. ఒక విమానం భూ తలమునకు సమాంతరంగా 600 మీ ఎత్తులో 175 మీ/సె వేగంతో పోతున్నది. భూమిపై గల ఒక బిందువు నుండి విమానానికి గల ఊర్ధ్వకోణం 37Υ అగును. అదే బిందువు నుండి ఊర్ధ్వకోణం $53°$ లకు పెరగాలంటే ఎంత సమయం పట్టును?? $(\tan 53° = 1.3270,\ \tan 37° = 0.7536)$

7. ఒక పక్షి A అను చోటు నుండి 30 కి.మీ దూరంలో గల B అను చోటుకి $35°$ కోణంలో ఎగురుచున్నది. B వద్ద దాని కోణమును $48°$ లుగా మార్చుకొని 32 కి.మీల దూరంలో గల C అను చోటుకి ఎగిరివెళ్ళెను.
(i) A యొక్క ఉత్తర వైపు నుండి B కి గల దూరమెంత?
(ii) A యొక్క పడమర వైపు నుండి B కి గల దూరమెంత?
(iii) B యొక్క ఉత్తరవైపు నుండి C కి గల దూరమెంత?
(iv) B యొక్క తూర్పు వైపు నుండి C కి గల దూరమెంత?
$(\sin 55° = 0.8192,\ \cos 55° = 0.5736,\ \sin 42° = 0.6691,\ \cos 42° = 0.7431)$

8. దీపగృహము నుండి సముద్రంలో ఎదురెదురుగా రెండు నౌకలు ప్రయాణించుచున్నవి. దీపగృహం పైభాగం నుండి రెండు నౌకలకు గల నిమ్నకోణాలు వరుసగా 60Υ మరియు 45Υ, నౌకలకు మధ్యగల దూరము $200\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}\right)$ మీ అయిన దీపగృహం ఎత్తును కనుగొనండి.

9. ఒక వీధిలో ఒక భవనము మరియు ఒక విగ్రహం పరస్పరం ఎదురుగా ఉన్నవి. వాటి మధ్య దూరం 35 మీ అగును. భవనము పైభాగము నుండి విగ్రహము యొక్క పైభాగానికి గల ఊర్ధ్వకోణం $24°$ మరియు విగ్రహం అడుగుభాగానికి నిమ్నకోణం $34°$ అయిన విగ్రహం ఎత్తు ఎంత?
$(\tan 24° = 0.4452,\ \tan 34° = 0.6745)$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_6.indd 278 11-02-2023 18:06:35

గుర్తించుకోవలసిన విషయాలు

- త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులను ఆధారంగా కలిగిన సమీకరణాన్ని త్రికోణమితీయ సమీకరణం అంటారు. ఇది నిర్వచింపబడిన కోణాల అన్ని విలువలకు సత్యం అవుతుంది.
- త్రికోణమితీయ సమీకరణాలు

  (i) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ (ii) $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ (iii) $1 + \cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta$
- మనం ఒక వస్తువును పరిశీలించునపుడు మన కంటి నుండి ఆ వస్తువుకు గీయబడు సరళరేఖను దృష్టిరేఖ అంటారు.
- క్షితిజ సమాంతర రేఖకు పైన వస్తువు ఉన్నప్పుడు, దృష్టిరేఖకు క్షితిజ సమాంతర రేఖకు మధ్యగల కోణాన్ని నిమ్నకోణం అంటారు.
- క్షితిజ సమాంతర రేఖకు క్రింద వస్తువు ఉన్నప్పుడు, దృష్టిరేఖకు క్షితిజ సమాంతర రేఖకు మధ్యగల కోణాన్ని నిమ్నకోణం అంటారు.
- త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల ద్వారా వస్తువుల ఎత్తు లేదా పొడవు లేదా వస్తువులకు మధ్య గల దూరాన్ని కొలవవచ్చును.

అంతర్జాల కృత్యము

ICT 6.1

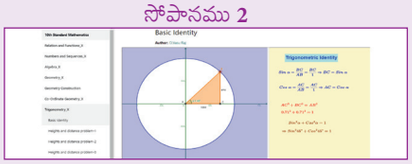
సోపానము 1: బ్రౌజర్‌ను ఓపెన్ చేసి క్రింద ఇవ్వబడిన URL లింక్‌ను టైపు చేయండి లేదా QR కోడ్‌ని స్కాన్ చేయండి. **"Trigonometry"** అను పాఠము ఓపెన్ అగును. **"Basic Identity"** అను పనికాగితాన్ని ఎంచుకొనుము.

సోపానము 2: పనికాగితంలో "B". అను బిందువును మార్చుట ద్వారా త్రిభుజమును మార్చి అమర్చవచ్చును. వృత్తంలో గల లంబకోణ త్రిభుజం ప్రతికోణాన్ని త్రికోణమితీయ సర్వసమీకరణంతో సరిచూడుము

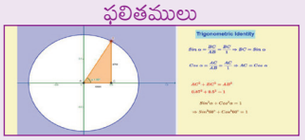
సోపానము 1



సోపానము 2



ఫలితములు



ICT 6.2

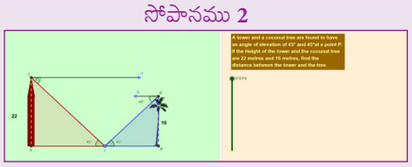
సోపానము 1: బ్రౌజర్‌ను ఓపెన్ చేసి క్రింద ఇవ్వబడిన URL లింక్‌ను టైపు చేయండి లేదా QR కోడ్‌ని స్కాన్ చేయండి. **"Trigonometry"**అను పాఠము ఓపెన్ అగును. **"Heights and distance problem-1"** అను పనికాగితాన్ని ఎంచుకొనుము.

సోపానము 2: పనికాగితంలో "New Problem". ను క్లిక్ చేయుట ద్వారా క్రొత్త లెక్కలను పొందవచ్చును. స్లైడర్‌లను జరిపి సోపానములను చూడుము. సమస్యలను సాధించిన సమాధానమును సరిచూడుము.

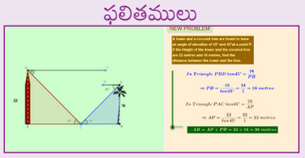
సోపానము 1



సోపానము 2



ఫలితములు



ఈ మెట్టులతో ఇతర కృత్యములను చేయండి

https://www.geogebra.org/m/jfr2zzgy#chapter/356196

లేదా QR కోడ్‌ని స్కేన్ చేయండి.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_6.indd 279 11-02-2023 18:06:36

7 క్షేత్రగణితము

అన్ని ప్రదేశములలో కేంద్రమును కలిగి హద్దులులేని చుట్టుకొలతలుగల అంతముకాని గోళమే ప్రకృతి అగును.



పప్పుస్
290 - 350 AD(CE)

ఈజిప్టు నందు గల అలెగ్జాండ్రియాలో జన్మించిన పప్పుస్ మిక్కిలి ప్రసిద్ధి చెందిన గ్రీకు జ్యామితి మేధావి. ఎనిమిది పుస్తకములలో అమరిన "సైనగోజ్" (Synagoge) అనే గణితసేకరణే ఇతని ప్రత్యేక ఆవిష్కరణ అగును.

తులాదండము, కప్పీ, గూటము, ఇరుసు మరియు మరలు యొక్క ధర్మములను పప్పుస్ వివరించియున్నారు. భౌతిక మరియు నవీన సాంకేతిక విజ్ఞానము నందు పైన తెల్పిన ధర్మాలు ఎంతో ఉపయోగపడుతున్నాయి.

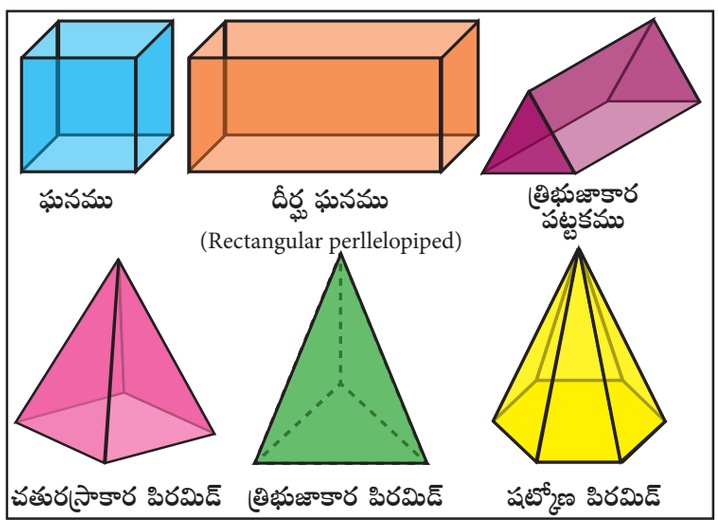
అభ్యసన ఫలితములు

FMR72

- స్థూపము, శంఖువు, గోళము, అర్ధగోళము, శంఖు ఖండముల ఉపరితల వైశాల్యము, ఘనపరిమాణములను కనుగొనుట.
- సంయుక్త ఘనముల ఘనపరిమాణము మరియు ఉపరితల వైశాల్యములను కనుగొనుట.
- ఘనములను ఒక ఆకృతి నుండి మరో ఆకృతికి మార్చడం ద్వారా దాని ఘనపరిమాణంలో ఎటువంటి మార్పుండదు అన్న విషయంపై కొన్ని సమస్యలను సాధించడం ద్వారా తెలుసుకొంటాము.

7.1 పరిచయం

క్షేత్రగణితము యొక్క భావనలు పురాతన కాలము నుండే ప్రజలకు అవగాహన కలదు. నిత్యజీవితంలో వ్యవసాయం మరియు వర్తకరంగంలో ముఖ్యమైన నిర్ణయాలు తీసుకోవడంలో అనగా వ్యవసాయం చేయవలసిన స్థలవైశాల్యము, ఒక పాత్రలో ఎంత సామర్థ్యము పట్టును మొదలగునవి తెలుసుకొనుటకు ఉపయోగపడును. గణితశాస్త్రవేత్తలు క్షేత్రగణితమును నిత్యజీవిత పరిస్థితులలో చాలా చక్కగా ఉపయోగించి పలు విషయాలను కనుగొన్నారు. ఇదియే క్షేత్రగణితము యొక్క ప్రారంభ విజయనగును. కావున అనువర్తిత జ్యామితిని క్షేత్రగణితముగా పిలువవచ్చును.



పటం. 7.1

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_7.indd 280 13-02-2023 18:33:12

చతురస్రము, దీర్ఘచతురస్రము, త్రిభుజము మరియు వృత్తము వంటి వాటి వైశాల్యముల గురించి గత తరగతులలో నేర్చుకొనియున్నాము. ఇవి ద్విపరిమాణ ఆకారములకు చెందియున్నవి. మన నిత్యజీవితంలో గమనించు పలు వస్తువులైన కొళాయి, నీటి ట్యాంకు, ఇటుకలు, ఐస్‌క్రీమ్ కోన్‌లు, పుట్‌బాల్‌లు మొదలగునవి. ఇవి త్రిపరిమాణ ఆకారములకు చెందియున్నవి.

ఘనము, దీర్ఘఘనము, పట్టకము మరియు పిరమిడు వంటి త్రిపరిమాణ ఆకారములకు ఉపరితల వైశాల్యము మరియు ఘనపరిమాణములు కలవు.

ఈ అధ్యాయములో స్థూపము, శంఖువు, గోళము, అర్ధగోళము మరియు శంఖు ఖండము వంటి త్రిపరిమాణ ఆకారముల ఉపరితల వైశాల్యము, ఘనపరిమాణం గూర్చి విపులంగా నేర్చుకొందాము.

7.2 ఉపరితల వైశాల్యము

ఉపరితల వైశాల్యము అనునది ఘన వస్తువు యొక్క బాహ్య వైశాల్యము అగును.

7.2.1 క్రమవృత్తాకార స్థూపము

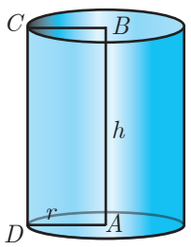
పటము 7.2 ను గమనించి ఆకారాలను గుర్తించుము.

ఈ ఆకారాలు స్థూపమును తలపించే విధంగా కలవు.



పటం. 7.2

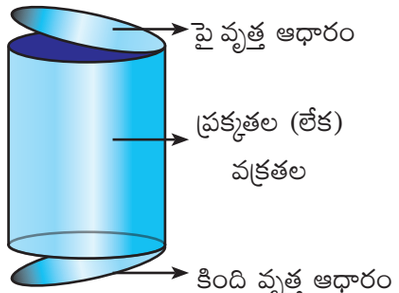
నిర్వచనం : ఒక దీర్ఘ చతురస్రంలోని ఏదైనా ఒక భుజమును ఆధారంగా చేసుకొని ఒక పూర్తి భ్రమణము చేసిన ఏర్పడు ఘన ఆకారమును క్రమ వృత్తాకార స్థూపము అందురు.



పటం. 7.3

అక్షము పొడవు వ్యాసార్ధమునకు లంబముగా ఉండిన ఆ స్థూపమును క్రమవృత్తాకార స్థూపము అందురు. పటము 7.3 లో $AB = h$ అనునది స్థూపము ఎత్తును $AD = r$ అనునది స్థూప వ్యాసార్ధమును సూచించును.

ఒక ఘనస్థూపము రెండు సమాన వృత్తాలను మరియు వక్రతలం కల్గి ఉండును. రెండు సమాన వృత్తాల మధ్య గల వైశాల్యమును వక్రతల వైశాల్యము లేదా పక్కతల వైశాల్యము అందురు.



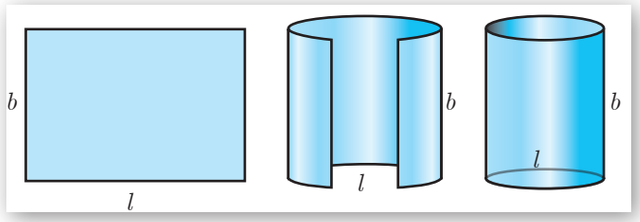
పటం. 7.4

క్రమ వృత్తాకార స్థూపనిర్మాణం - ప్రదర్శన

(i) పొడవు l మరియు వెడల్పు b గా గల దీర్ఘచతురస్రాకార కాగితమును తీసుకొనుము.

(ii) ఒక భుజాన్ని b ఆధారంగా ఆ పేపరును పూర్తి భ్రమణం వచ్చునట్లు చుట్టుము.

(iii) భూ చుట్టు కొలత l ఎత్తు b తో వచ్చిన ఆకారమే క్రమవృత్తాకార స్థూపము.



పటం. 7.5

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_7.indd 281 13-02-2023 18:33:13

క్రమవృత్తాకార స్థూపము యొక్క వక్రతల వైశాల్యము

(i) వక్రతల వైశాల్యము

క్రమవృత్తాకార స్థూపము యొక్క వక్రతల వైశాల్యము

$$= \text{సంబంధిత దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యము}$$
$$= l \times b$$
$$= 2\pi r \times h \quad (l \text{ అనునది భూపరిధి, } b \text{ అనునది ఎత్తు}$$
$$= 2\pi rh$$

క్రమవృత్తాకార స్థూపం యొక్క వక్రతల వైశాల్యం $= 2\pi rh$ చదరపు ప్రమాణాలు

(ii) సంపూర్ణతల వైశాల్యము

స్థూపము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము కనుగొనుటకు స్థూపము పైభాగము, అడుగు భాగములో యున్న వృత్తాకార తలముల వైశాల్యములను పక్కతల వైశాల్యముతో కూడితే మనకు స్థూపము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము వస్తుంది.

కావున క్రమవృత్తాకార స్థూపము సంపూర్ణతల వైశాల్యము

$$= \text{వక్రతల వైశాల్యము} + \text{పై భాగపు వైశాల్యం} + \text{భూ వైశాల్యం}$$
$$= 2\pi rh + \pi r^2 + \pi r^2 \quad (\text{పటం. } 7.4)$$
$$= 2\pi rh + 2\pi r^2$$
$$= 2\pi r\left(h + r\right)$$

క్రమవృత్తాకార స్థూపము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము $= 2\pi r(h + r)$ చదరపు ప్రమాణాలు

సూచన

- విలువ ఇవ్వనప్పుడు $\prod$ యొక్క రమారమి విలువను $22/7$ గా తీసుకొనవలెను.
- ఉపరితల వైశాల్యము అనగా సంపూర్ణతల వైశాల్యముగా తీసుకొనవలెను

ఉదాహరణ 7.1 ఎత్తు 20 సెం.మీ మరియు భూ వ్యాసార్ధము 14 సెం.మీగా గల ఒక స్థూపాకార పాత్ర యొక్క వక్రతల వైశాల్యము మరియు సంపూర్ణతల వైశాల్యమును కనుగొనుము.

సాధన ఇవ్వబడినది స్థూపము $h = 20$ సెం.మీ, వ్యాసార్ధము $r = 14$ సెం.మీ

ఇపుడు స్థూపము యొక్క వక్రతల వైశాల్యము $= 2\pi rh$ చదరపు ప్రమాణాలు

స్థూపము యొక్క వక్రతల వైశాల్యము $= 2 \times 22 \times 2 \times 20 = 1760$ సెం.మీ^{2}

స్థూపము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము $= 2\pi r\left(h + r\right)$ చదరపు ప్రమాణాలు

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 14 \times \left(20 + 14\right) = 2 \times \frac{22}{7} \times 14 \times 34$$

$$= 2992 \text{ సెం.మీ}^2$$

కావున వక్రతల వైశాల్యము = 1760 సెం.మీ^{2} మరియు సంపూర్ణతల వైశాల్యము = 2992 సెం.మీ^{2}

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_7.indd 282 13-02-2023 18:33:14

ఉదాహరణ 7.2 14 సెం.మీ ఎత్తు గల ఒక స్థూపము యొక్క వక్రతల వైశాల్యము 88 సెం.మీ^{2} అయిన ఆ స్థూపము యొక్క వ్యాసమును కనుగొనుము.

సాధన ఇవ్వబడిన స్థూపము యొక్క వక్రతల వైశాల్యము $=88$ చ.సెం.మీ

$$2\pi rh = 88$$

$$2\times\frac{22}{7}\times r\times 14 = 88 \qquad (h=14 \text{ సెం.మీ ఇవ్వబడినది})$$

$$2r = \frac{88\times 7}{22\times 14} = 2$$

కావున వ్యాసము $= 2$ సెం.మీ

ఉదాహరణ 7.3 3 మీ పొడవు 2.8 మీ వ్యాసము కల్గిన ఒక రోలర్‌తో తోటను చదును చేయుచున్నారు. ఆ రోలర్ 8 చుట్లు చుట్టిన ఎంత వైశాల్యము చదునుచేయును?

సాధన ఇవ్వబడిన రోలర్ వ్యాసము $d = 2.8$ మీ మరియు ఎత్తు $= 3$ మీ

వ్యాసార్ధము $r = 1.4$ మీ

ఒక చుట్టుకు రోలర్ ఆక్రమించు స్థలము = స్థూపము యొక్క వక్రతల వైశాల్యము

$= 2\pi rh$ చదరపు ప్రమాణాలు

$= 2\times\frac{22}{7}\times 1.4\times 3 = 26.4$

ఒక చుట్టుకు రోలర్ ఆక్రమించు స్థలము $= 26.4$ మీ^{2}

8 చుట్లకు రోలర్ ఆక్రమించు స్థలము $= 8\times 26.4 = 211.2$

కావున, రోలర్ ఆక్రమించు స్థలము 211.2 మీ^{2}



పటం. 7.6

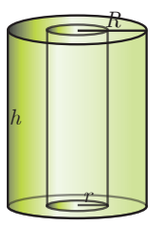
మెదడుకు మేత

1. వ్యాసార్ధము 'r' ప్రమాణాలు మరియు మందము 1 ప్రమాణము కలిగిన 'h నాణెములను ఒకదానిపై ఒకటి పేర్చగా ఎటువంటి ఘనాకారమును మనము పొందుతాము? మరియు దాని వక్రతల వైశాల్యమును కనుగొనుము.
2. స్థూపము యొక్క వ్యాసార్ధము దాని ఎత్తునకు రెండు రెట్లుండిన స్థూపం యొక్క వక్రతల వైశాల్యము మరియు భూ వైశాల్యమునకు మధ్యగల సంబంధమును కనుగొనుము.
3. 12 మీ పొడవు మరియు 5 మీ వెడల్పు గల రెండు దీర్ఘచతురస్రాకార అల్యూమినియం రేకులను ఒకదానిని పొడవును ఆధారంగా చేసుకొని, మరొకదానిని వెడల్పును ఆధారంగా చేసుకొని చుట్టుట ద్వారా రెండు క్రమవృత్తాకార స్థూపములు వచ్చును. అయితే వాటి ఉపరితల వైశాల్యముల నిష్పత్తిని కనుగొనుము.

7.2.2 బోలు స్థూపము

సమాన ఎత్తులు వేర్వేరు వ్యాసార్ధములు గల రెండు స్థూపములు ఒకదానిలో ఒకటి ఇమిడి యుండునట్లు ఉన్న దానినే బోలు స్థూపము అంటారు.

R మరియు r అనునది స్థూపం యొక్క బాహ్య, అంతర వ్యాసార్ధములు అనుకొనిన h అనునది స్థూపము యొక్క ఎత్తు అగును.



పటం. 7.7

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_7.indd 283 13-02-2023 18:33:15

బోలు స్థూపము యొక్క వక్రతల వైశాల్యము = బాహ్య స్థూపము యొక్క వక్రతల వైశాల్యము
+ అంతర స్థూపము యొక్క వక్రతల వైశాల్యము

$= 2\pi Rh + 2\pi rh$

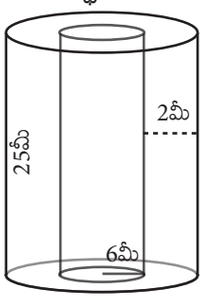
బోలు స్థూపము యొక్క వక్రతల వైశాల్యము $= 2\pi(R + r)h$ చదరపు ప్రమాణాలు

బోలు స్థూపము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము = వక్రతల వైశాల్యము + 2 × భూవైశాల్యము

$= 2\pi(R + r)h + 2\pi(R^2 - r^2)$

బోలు స్థూపము సంపూర్ణతల వైశాల్యము $= 2\pi(R + r)(R - r + h)$ చదరపు ప్రమాణాలు

ఉదాహరణ 7.4 మందము 2 మీ, లోపలి వ్యాసార్ధము 6 మీ మరియు ఎత్తు 25 మీ గల స్థూపాకారపు సొరంగము యొక్క లోపలి మరియు వెలుపలి వైశాల్యములకు రంగు వేయదలచెను. ఒక లీటరు రంగుతో 10 చ.మీ పూయుటకు వీలైన, సొరంగము మొత్తము రంగువేయుటకు ఎన్ని లీటర్ల రంగు అవసరమగును?



పటం. 7.8

సాధన ఇవ్వబడిన ఎత్తు $h = 25$ 25 మీ, స్థూపము యొక్క మందము $= 2$ మీ.

అంతర వ్యాసార్ధం $r = 6$ మీ

బాహ్య వ్యాసార్ధము $R = 6 + 2 = 8$ మీ

స్థూపాకార సొరంగము వక్రతల వైశాల్యము = బోలు స్థూపము యొక్క వక్రతల వైశాల్యము

బోలు స్థూపము యొక్క వక్రతల వైశాల్యము $= 2\pi(R + r)h$ చదరపు ప్రమాణాలు

$= 2 \times \frac{22}{7}(8 + 6) \times 25$

కావున స్థూపాకార సొరంగము వక్రతల వైశాల్యము $= 2200$ మీ^{2}

ఒక లీటరు రంగు పూయదగిన వైశాల్యము = 10 మీ^{2}

స్థూపాకార సొరంగమునకు రంగు వేయుటకు కావలసిన పెయింట్ లీటర్లలో $= \frac{2200}{10} = 220$ లీ.

కావున, స్థూపాకార సొరంగమునకు రంగువేయుటకు 220 లీటర్ల రంగు అవసరమగును.

ప్రగతిశోధన

1. ఒక _____ ను దాని _____ కేంద్రము గుండా త్రిప్పడం వలన ఒక ఘనక్రమవృత్తాకార స్థూపమును పొందవచ్చును.
2. ఒక క్రమవృత్తాకార స్థూపము యొక్క అక్షము దాని వ్యాసమునకు _____ గా ఉండును.
3. క్రమవృత్తాకార స్థూపము యొక్క వక్రతల మరియు సంపూర్ణతల వైశాల్యముల భేదము _____
4. సమాన వ్యాసార్ధము మరియు ఎత్తుగల క్రమ వృత్తాకార స్థూపము యొక్క వక్రతల వైశాల్యము భూ వైశాల్యమునకు _____ గా ఉండును.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_7.indd 284 13-02-2023 18:33:16

7.2.3 క్రమవృత్తాకార శంఖువు

పటము 7.9 ని గమనించి ఆ ఆకారములు దేనిని సూచించును?

ఈ ఆకారములు శంఖువును తలపిస్తున్నాయి.

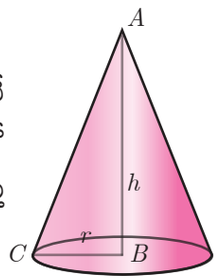


పటం. 7.9

నిర్వచనం : లంబకోణమును అక్షముగా కలిగియుండు ఏదైనా ఒక భుజమును కేంద్రముగా తీసుకొని లంబకోణ త్రిభుజమును ఒక పరిపూర్ణ భ్రమణము చేసినపుడు ఏర్పడే ఘనమే క్రమవృత్తాకార శంఖువు అగును.

క్రమ వృత్తాకార శంఖువు ఏర్పడే విధానము – వివరణ

పటము 7.10 లో ABC లంబకోణ త్రిభుజము అగును. ఆ త్రిభుజములోని AB అనే భుజము అక్షముగా కల్గి ఒక పరిపూర్ణ భ్రమణము చేయుచున్నది. ఈ భ్రమణము పటములో గల ఒక క్రమవృత్తాకార శంఖువును ఏర్పరచుచున్నది. ఇక్కడ AB అక్షము శంఖువు ఎత్తు అని, కర్ణము AC అనేది శంఖువు ఏటవాలు ఎత్తు అని పిలువబడుచున్నది.

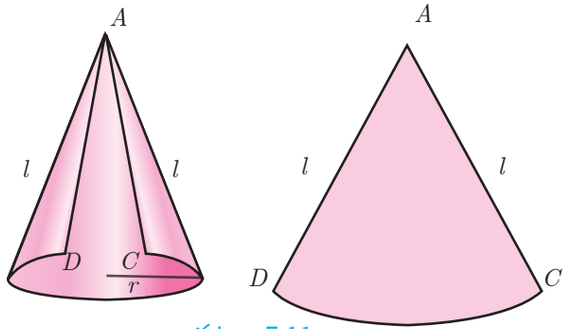


పటం. 7.10

క్రమవృత్తాకార శంఖువు ఉపరితల వైశాల్యము

పటములో చూపినట్లు శంఖువు ఉపరితల వైశాల్యమును ఏటవాలు ఎత్తు AC ద్వారా ఖండించిన ACD అనే వృత్త కోణ భాగము వచ్చును. వృత్త కోణ భాగము యొక్క వ్యాసార్ధము AC అనేది శంఖువు యొక్క ఏటవాలు ఎత్తుగాను, వృత్తకోణ భాగ చాపము CD శంఖువు ఆధార చుట్టుకొలతగాను ఉండును.

ఇక్కడ చాపము పొడవు 's' మరియు వృత్తకోణం వ్యాసార్ధము l అనునవి వృత్త వ్యాసార్ధం 'l' నకు అనురూపముగా ఉండును.



పటం. 7.11

(i) వక్రతల వైశాల్యము

కావున, $\dfrac{\text{కావున వృత్త ఖండ వైశాల్యము}}{\text{వృత్త వైశాల్యము}} = \dfrac{\text{వృత్త ఖండ చాపము యొక్క పొడవు}}{\text{వృత్తము యొక్క చుట్టుకొలత}}$

$$\text{వృత్త ఖండ వైశాల్యము} = \frac{\text{వృత్త ఖండ చాపము యొక్క పొడవు}}{\text{వృత్తము యొక్క చుట్టుకొలత}} \times \text{వృత్త వైశాల్యము}$$

$$= \frac{s}{2\pi l} \times \pi l^2 = \frac{s}{2} \times l = \frac{2\pi r}{2} \times l \qquad (\text{ఇక్కడ } s = 2\pi r)$$

$\therefore$ శంఖువు వక్రతల వైశాల్యము = వృత్తఖండ వైశాల్యము $= \pi rl$ చదరపు ప్రమాణాలు

శంఖువు వక్రతల వైశాల్యము $= \pi rl$ చదరపు ప్రమాణాలు

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_7.indd 285 13-02-2023 18:33:17

మెదడుకు మేత

1. ఘన శంఖువుకు ఒక ఆచరణాత్మక ఉదాహరణనిమ్ము
2. ఒక శంఖువు ఎత్తు వ్యాసార్ధమునకు సమానమయిన దాని ఉపరితల వైశాల్యమును వ్యాసార్ధరూపముతో తెల్పుము.
3. పై ఉపరితల వైశాల్యమును శంఖువు భూ వైశాల్యముతో పోల్చుము.

కృత్యము 1

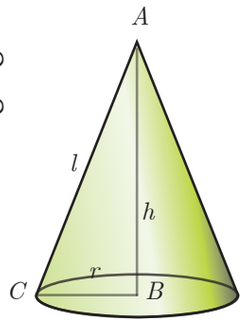
(i) వ్యాసార్ధము 7 సెం.మీ గల అర్ధవృత్తాకార కాగితము తీసుకొని శంఖువును తయారుచేసి దాని వక్రతల వైశాల్యమును కనుగొనుము.

(ii) వ్యాసార్ధము 3.5 సెం.మీ గల పావు వృత్తాకార కాగితమును తీసుకొని శంఖువును తయారు చేసి దాని వక్రతల వైశాల్యమును కనుగొనుము.

ఏటవాలు ఎత్తు 'l' యొక్క ఉత్పాదన

B వద్ద లంబకోణము కల్గిన ABC లంబకోణ త్రిభుజములో కర్ణము, భూమి మరియు ఎత్తును l, r మరియు h గా సూచించిన ΔABC,లో పైథాగరస్ సిద్ధాంతమును ఉపయోగించి

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$l^2 = h^2 + r^2$$
$$l = \sqrt{h^2 + r^2} \text{ ప్రమాణాలు}$$



పటం. 7.12

(ii) సంపూర్ణతల వైశాల్యము

శంఖువు సంపూర్ణతల వైశాల్యము = శంఖువు వక్రతల వైశాల్యము + శంఖువు భూ వైశాల్యము

$= \pi rl + \pi r^2$ (శంఖువు భూమి వృత్తాకారంలో ఉండును)

శంఖువు యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము $= \pi r(l + r)$ చదరపు ప్రమాణాలు

ఉదాహరణ 7.5 7 మీ వ్యాసార్ధము, 24 మీ ఎత్తు గల శంఖాకారపు గుడారమును 4మీ వెడల్పు గల కాన్వాస్ గుడ్డను కప్పుటకు ఎంత పొడవు గుడ్డ కావలెను?

సాధన r మరియు h అనునది శంఖువు యొక్క వ్యాసార్ధము మరియు ఎత్తు అనుకొనిన

ఇవ్వబడినది వ్యాసార్ధము $r = 7$ మీ మరియు ఎత్తు $h = 24$ మీ

కావున, $l = \sqrt{r^2 + h^2}$

$= \sqrt{49 + 576}$

$l = \sqrt{625} = 25$ మీ

శంఖాకారపు గుడారము వక్రతల వైశాల్యము $= \pi rl$ చదరపు ప్రమాణాలు

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_7.indd 286 13-02-2023 18:33:18

$$\text{కాన్వాస్ గుడ్డ వైశాల్యము } = \frac{22}{7}\times 7\times 25 \ = 550 \text{ మీ}^2$$

$$\text{కాన్వాస్ గుడ్డ పొడవు } = \frac{\text{కాన్వాస్ గుడ్డ వైశాల్యం}}{\text{వెడల్పు}} = \frac{550}{4} = 137.5 \text{ మీ}$$

కావున కాన్వాస్ గుడ్డ పొడవు 137.5 మీ

ఉదాహరణ 7.6 వ్యాసార్ధము 7 సెం.మీ గల శంఖువు సంపూర్ణతల వైశాల్యం 704 చ.సెం.మీ అయితే శంఖువు ఏటవాలు ఎత్తును కనుగొనుము.

సాధన ఇవ్వబడిన వ్యాసార్ధము $r = 7$ సెం.మీ

శంఖువు సంపూర్ణతల వైశాల్యము $= \pi r\left(l + r\right)$ చదరపు ప్రమాణాలు

శంఖువు సంపూర్ణ తల వైశాల్యం $= 704$ సెం.మీ^{2}

$$704 = \frac{22}{7}\times 7\left(l + 7\right)$$

$$32 = l + 7 \ \Rightarrow l = 25 \text{ సెం.మీ}$$

కావున శంఖువు ఏటవాలు ఎత్తు 25 సెం.మీ

ఉదాహరణ 7.7 2.4 సెం.మీ ఎత్తు మరియు 1.4 సెం.మీ వ్యాసము గల ఘన స్థూపములో స్థూప ఎత్తుకు సమానమగు ఎత్తు గల శంఖువు కుహరంను (పటము 7.13) భూఆధారంతో సహా తోలగించిన మిగిలిన ఘనము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యమును కనుగొనుము.

సాధన h మరియు r అనునవి శంఖువు మరియు స్థూపముల ఎత్తు మరియు వ్యాసార్ధము

l అనునది శంఖువు ఏటవాలు ఎత్తు అయిన

ఇవ్వబడిన, $h = 2.4$ సెం.మీ మరియు $d = 1.4$ సెం.మీ ; $r = 0.7$ సెం.మీ

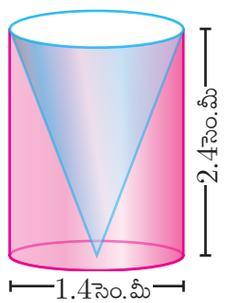
$$\text{మిగిలిన ఘనము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము} = \text{స్థూపము యొక్క వక్రతల వైశాల్యము} + \text{శంఖువు వక్రతల వైశాల్యము} + \text{భూవైశాల్యము}$$

$$= 2\pi rh + \pi rl + \pi r^2 \text{ చదరపు ప్రమాణాలు}$$

$$= \pi r\left(2h + l + r\right) \text{ చదరపు ప్రమాణాలు}$$

కావున, $l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{0.49 + 5.76} = \sqrt{6.25} = 2.5$ సెం.మీ

$$l = 2.5 \text{ సెం.మీ}$$



పటం. 7.13

మిగిలిన ఘనము సంపూర్ణతల వైశాల్యము $= 2\pi rh + \pi rl + \pi r^2$ చదరపు ప్రమాణాలు

$$= \pi r\left(2h + l + r\right)$$

$$= \frac{22}{7}\times 0.7\times\left[\left(2\times 2.4\right) + 2.5 + 0.7\right]$$

$$= 17.6$$

కావున మిగిలిన సంపూర్ణతల వైశాల్యము 17.6 మీ^{2}

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_7.indd 287 13-02-2023 18:33:19

ప్రగతి శోధన

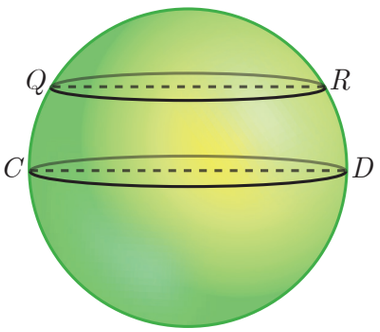
1. ఒక _____ ను _____ దాని _____ ను కేంద్రముగా తీసుకొని భ్రమణము చెందుట మూలంగా ఒక ఘన క్రమవృత్తాకార శంఖువును పొందవచ్చు.
2. ఒక క్రమవృత్తాకార శంఖువు యొక్క అక్షము దాని వ్యాసమునకు _____గా ఉండును.
3. శంఖువు వక్రతల వైశాల్యము మరియు సంపూర్ణతల వైశాల్యముల మధ్య భేదము _____.
4. వృత్తఖండమును శంఖువుగా మార్చేటప్పుడు ఏర్పడు మార్పులను సరిగ్గా జతపరుచుము.

వృత్త ఖండము	శంఖువు
వ్యాసార్ధము	భూపరిధి
వైశాల్యము	ఏటవాలు ఎత్తు
చాపము పొడవు	వక్రతల వైశాల్యము

7.2.4 గోళము

నిర్వచనము : ఒక అర్ధవృత్తము యొక్క వ్యాసమును అక్షముగా తీసుకొని ఒక పూర్తి భ్రమణం చేయునప్పుడు ఏర్పడు ఘనాకారమే గోళమగును.

గోళం యొక్క ప్రతి సమతల ఖండనము ఒక వృత్తమగును. ఒక సమతలంచే గోళంను చేదించినపుడు ఖండనరేఖ గోళ కేంద్రము గుండా పోయినట్లయితే ఆ వృత్తమును పెద్ద వృత్తమని సమతల ఖండనములను చిన్న వృత్తాలు అంటారు.



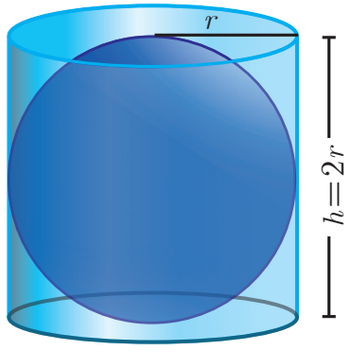
పటం. 7.14

పటములో చూపినట్లు CD ను వ్యాసముగా కలిగిన వృత్తము పెద్ద వృత్తము మరియు QR ను వ్యాసముగా కలిగిన వృత్తము చిన్న వృత్తమగను.

గోళము యొక్క ఉపరితల వైశాల్యము

ఆర్కిమెడిస్ నిరూపణ

ఒక గోళమును దాని వ్యాసమునకు సమానమైన ఎత్తుగల స్థూపము లోపల పటములో చూపిన విధముగా ఉంచబడినది. గోళము యొక్క ఉపరితల వైశాల్యము స్థూపము యొక్క వక్రతల వైశాల్యమునకు సమానము అని ఆర్కమెడిస్ నిరూపించినారు.



పటం. 7.15

కావున, గోళము ఉపరితల వైశాల్యం = స్థూపము వక్రతల వైశాల్యం

$$= 2\pi rh = 2\pi r\left(2r\right)$$

గోళము ఉపరితల వైశాల్యం $= 4\pi r^2$ చదరపు ప్రమాణాలు

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_7.indd 288 13-02-2023 18:33:19

కృత్యము 2

(i) 'r' ను వ్యాసార్ధముగా కలిగిన ఒక గోళమును తీసుకొనుము.

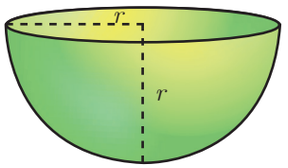
(ii) r వ్యాసము, 2r ఎత్తు కలిగిన ఒక స్థూపమును తీసుకొనుము.

(iii) గోళము మరియు స్థూపము పూర్తి ఉపరితల వైశాల్యమును ఒక దారముతో మధ్య స్థలము వదలి ఒకదాని మీద ఒకటి లేకుండా చుట్టవలెను.

(iv) చుట్టుటకు ఉపయోగించిన దారము యొక్క పొడవును కొలిచి పోల్చుము.

(v) గోళము యొక్క ఉపరితల వైశాల్యము కనుగొనుటకు పైన ఇవ్వబడిన సమాచారమును ఉపయోగించుము.

7.2.5 అర్ధగోళము



పటం. 7.16

ఒక ఘన గోళమును ఏదైనా ఒక పెద్ద వృత్త మార్గము ద్వారా ఒక తలమును కత్తరించునపుడు ఏర్పడు గోళము యొక్క ఒక భాగమును అర్ధగోళము అంటారు.

ఒక గోళము యొక్క సరిసగమును అర్ధగోళమందురు.

అందువలన అర్ధగోళ వక్రతల వైశాల్యము $= \dfrac{\text{గోళము యొక్క ఉపరితల వైశాల్యం}}{2} = \dfrac{4\pi r^2}{2}$

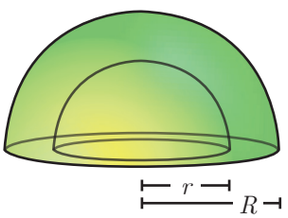
అర్ధగోళ వక్రతల వైశాల్యము $= 2\pi r^2$ చదరపు ప్రమాణాలు

అర్ధగోళ సంపూర్ణతల వైశాల్యము = వక్రతల వైశాల్యం + పైనున్న వృత్తభాగ వైశాల్యం

$= 2\pi r^2 + \pi r^2$

అర్ధగోళ సంపూర్ణతల వైశాల్యము $= 3\pi r^2$ చదరపు ప్రమాణాలు

7.2.6 బోలు అర్ధగోళము



పటం. 7.17

అంతర వ్యాసార్ధము r మరియు బాహ్య వ్యాసార్ధము R అనుకొనుము

బోలు అర్ధగోళము మందము $= R\text{-}r$

కావున, వక్రతల వైశాల్యము = బాహ్య అర్ధగోళ వైశాల్యము + అంతర అర్ధగోళ వైశాల్యము

$= 2\pi R^2 + 2\pi r^2$

బోలు అర్ధగోళము వక్రతల వైశాల్యము $= 2\pi(R^2 + r^2)$ చదరపు ప్రమాణాలు

సంపూర్ణతల వైశాల్యము = వక్రతల వైశాల్యము + భూ వైశాల్యము

$= 2\pi(R^2 + r^2) + \pi(R^2 - r^2)$

$= \pi\left[2R^2 + 2r^2 + R^2 - r^2\right]$

బోలు అర్ధగోళ సంపూర్ణతల వైశాల్యం $= \pi(3R^2 + r^2)$ చదరపు ప్రమాణాలు

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_7.indd 289 13-02-2023 18:33:21

ఉదాహరణ 7.8 గోళము యొక్క ఉపరితల వైశాల్యం బోలు అర్ధగోళ సంపూర్ణతల వైశాల్యం 154 మీ^{2} అయిన గోళము వ్యాసమును కనుగొనుము.

సాధన r అనునది గోళము యొక్క వ్యాసార్ధము అనుకొనుము

ఇవ్వబడిన గోళము యొక్క ఉపరితల వైశాల్యము $= 154$ మీ^{2}

$$4\pi r^2 = 154$$

$$4 \times \frac{22}{7} \times r^2 = 154$$

$$\Rightarrow \quad r^2 = 154 \times \frac{1}{4} \times \frac{7}{22}$$

కావున, $r^2 = \frac{49}{4}$, $r = \frac{7}{2}$ వచ్చును.

వ్యాసము 7 మీ

ఉదాహరణ 7.9 గోళాకారంలో గల బెలూన్‌లో గాలి నింపడం ద్వారా వ్యాసార్ధము 12 సెం.మీ నుండి 16 సెం.మీ వరకు పెరిగిన ఉపరితల వైశాల్యముల నిష్పత్తిని కనుగొనుము.

సాధన r_1 మరియు r_2 అనునది బెలూన్‌ల వ్యాసార్ధములు అనుగొనుము.

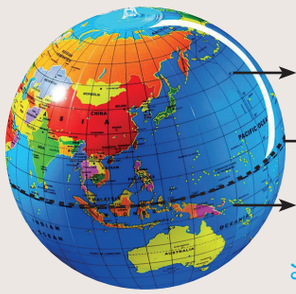
ఇవ్వబడినది, $\frac{r_1}{r_2} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

బెలూన్ ఉపరితల వైశాల్యముల నిష్పత్తి $= \frac{4\pi r_1^2}{4\pi r_2^2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$

బెలూన్ ఉపరితల వైశాల్యముల నిష్పత్తి 9:16.

కృత్యము 3

గ్లోబును ఉపయోగించి ఉత్తర్ధాగోళములో మరియు దక్షిణార్ధగోళములో గల ఏదైనా రెండు దేశములను జాబితా పరచుము.



పటం. 7.18

మెదడుకు మేత

1. గోళము ఉపరితల వైశాల్యము 36π చదరపు ప్రమాణాలు అయిన వ్యాసార్ధమును కనుగొనుము.
2. గోళములో ఎన్ని పెద్ద వృత్తములు కలవు.
3. భూ వ్యాసము 12756 కి.మీ అయిన ఉపరితల వైశాల్యమును కనుగొనుము.

ప్రగతి శోధన

1. గోళము యొక్క ఒక్కొక్క తల ఖండనము ఒక _____ అగును.
2. పెద్ద వృత్త కేంద్రము గోళము యొక్క _____ అగును.
3. అర్ధగోళము యొక్క వక్రతల మరియు సంపూర్ణతల వైశాల్యముల భేదం _____.
4. గోళము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము మరియు వక్రతల వైశాల్యముల నిష్పత్తి _____.
5. ఒక గోళము దాని పెద్ద వృత్తము ద్వారా ఒక తలము ఖండించునపుడు ఏర్పడు ఒక భాగమును _____ అని అంటారు.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_7.indd 290 13-02-2023 18:33:22

ఉదాహరణ 7.10 అర్ధగోళము యొక్క భూవైశాల్యము 1386 చ.మీ అయితే అర్ధగోళ సంపూర్ణతల వైశాల్యమును కనుగొనుము.

సాధన r ను అర్ధగోళ వ్యాసార్ధము అనుకొనుము.

ఇవ్వబడిన భూవైశాల్యము $= \pi r^2 = 1386$ చ.మీ

అర్ధగోళ సంపూర్ణతల వైశాల్యము$= 3\pi r^2$ చ.మీ

$= 3 \times 1386 \quad = 4158$

కావున అర్ధగోళ సంపూర్ణతల వైశాల్యము$= 4158$ మీ^{2}.

సూచన

➢ బోలు గోళము యొక్క వక్రతల మరియు సంపూర్ణతల వైశాల్యము కనుగొనుటకు వృత్త వైశాల్యము సూత్రము ఉపయోగపడును.

మెదడుకు మేత

1. గోళమును వృత్తముగా కత్తరించిన అర్ధగోళము లభించునా?
2. అర్ధగోళము సంపూర్ణతల వైశాల్యము భూవైశాల్యమునకు ఎన్ని రెట్లుండును?
3. ఇవ్వబడిన గోళము నుండి ఎన్ని అర్ధగోళములను ఏర్పరచవచ్చును?

ఉదాహరణ 7.11 బోలు అర్ధగోళము యొక్క అంతర మరియు బాహ్య వ్యాసార్ధములు 3మీ మరియు 5మీ అయితే బోలు అర్ధగోళము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము మరియు ప్రక్కతల వైశాల్యము కనుగొనుము

సాధన r మరియు R అనునవి బో అర్ధగోళము యొక్క అంతర మరియు బాహ్య వ్యాసార్ధములు అనుకొనుము.

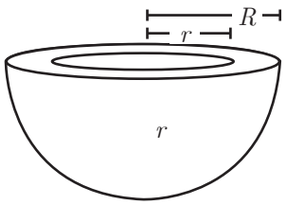
ఇవ్వబడినది, $R = 5$ మీ, $r = 3$ మీ

బోలు అర్ధగోళము వక్రతల వైశాల్యము $= 2\pi(R^2 + r^2)$ చదరపు ప్రమాణాలు

$= 2 \times \frac{22}{7} \times \left(25 + 9\right) = 213.71$

కావున సంపూర్ణతల వైశాల్యం $= \pi(3R^2 + r^2)$ చదరపు ప్రమాణాలు

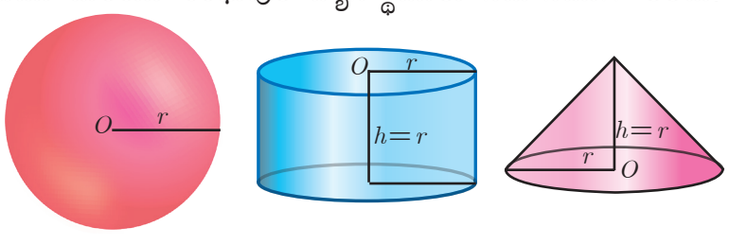
$= \frac{22}{7}\left(75 + 9\right) \quad = 264$



పటం. 7.19

కావున వక్రతల వైశాల్యం $= 213.71$ మీ^{2} మరియు సంపూర్ణతల వైశాల్యం $= 264$ మీ^{2}.

ఉదాహరణ 7.12 ఒక గోళము, స్థూపము మరియు శంఖువుల వ్యాసార్ధములు సమానముగా కలదు. అదేవిధంగా స్థూపము మరియు శంఖువుల ఎత్తు సమానముగా కలదు. అయితే మూడు వక్రతల వైశాల్యముల నిష్పత్తిని కనుగొనుము.



పటం. 7.20

సాధన కావలసినన నిష్పత్తులు = గోళము వక్రతల వైశాల్యము : స్థూపము వక్రతల వైశాల్యము : శంఖువు వక్రతల వైశాల్యము

$= 4\pi r^2 : 2\pi rh : \pi rl \qquad (l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{2r^2} = \sqrt{2}r)$

$= 4\pi r^2 : 2\pi r^2 : \pi r\sqrt{2}\, r$

$= 4\pi r^2 : 2\pi r^2 : \sqrt{2}\pi r^2$

$= 4 : 2 : \sqrt{2} = 2\sqrt{2} : \sqrt{2} : 1$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_7.indd 291 13-02-2023 18:33:23

7.2.7 క్రమవృత్తాకార శంఖువు యొక్క శంఖుఖండము

పాతకాలములో శంఖువు ఆకార బకెట్టుల నిండుగా ఇసుక / నీరు నింపి అగ్ని ప్రమాద నివారణకు ఉపయోగించేవారు. ఎక్కువ ఘనపరిమాణం సరిపోయేటట్లు [పటము.7.21(b)] లో చూపినట్లు బకెట్టు ఆకారము వృత్తాకారంలో చేసినారు.



పటం. 7.21(a) పటం. 7.21(b) పటం. 7.21(c)

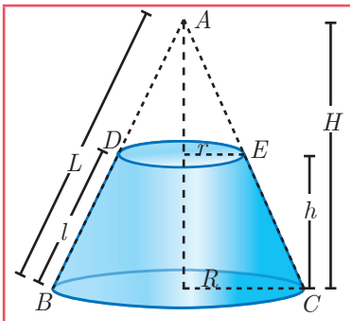
పటము [పటము.7.21(c)]లో ఆకార మార్పు చేసిన బకెట్టును శంఖుఖండము అంటారు.

నిత్య జీవితంలో మనం శంఖుఖండ రూపంలో ఉపయోగించే వస్తువులు నీటి గ్లాసు, బకెట్టు మొదలగునవి ఉదాహరణలుగా చెప్పవచ్చును.



బకెట్టు వీధికోను గ్లాసు

పటం. 7.22



పటం. 7.23

నిర్వచనం

ఒక ఘన క్రమవృత్తాకార శంఖువును కత్తిరించగా ఏర్పడు శంఖుఖండము యొక్క తలము ఆధారమునకు సమాంతరముగా ఉండును. ఆధారమును కలిగియున్న శంఖువు యొక్క భాగమును శంఖుఖండము అందురు.

శంఖుఖండము యొక్క ఉపరితల వైశాల్యము

R మరియు r అనునవి క్రమముగా $DECB$ శంఖుఖండము యొక్క ఎగువ మరియు దిగువ వ్యాసార్ధములు అనుకొనుము. h మరియు l అనునవి క్రమముగా ఎత్తు మరియు ఏటవాలు ఎత్తు అనుకొనుము.

కావున వక్రతల వైశాల్యం $= \frac{1}{2}$ (ఆధార భాగము మరియు పై భాగముల చుట్టుకొలత మొత్తం) $\times$ ఏటవాలు ఎత్తు

$$= \frac{1}{2}(2\pi R + 2\pi r)l$$

శంఖుఖండము యొక్క వక్రతల వైశాల్యము $= \pi(R + r)l$ చదరపు ప్రమాణాలు

ఇక్కడ, $l = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$

శంఖుఖండ సంపూర్ణతల వైశాల్యము = వక్రతల వైశాల్యము + దిగువ వృత్తాకార ప్రాంతపు వైశాల్యము + ఎగువ వృత్తాకార ప్రాంతపు వైశాల్యము

శంఖుఖండ సంపూర్ణతల వైశాల్యము $= \pi(R + r)l + \pi R^2 + \pi r^2$ చదరపు ప్రమాణాలు

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_7.indd 292 13-02-2023 18:33:24

ఉదాహరణ 7.13 ఒక శంఖు ఖండము యొక్క రెండు వృత్తాకార వ్యాసార్ధములు 4 సెం.మీ, 1 సెం.మీ మరియు ఏటవాలు ఎత్తు 5 సెం.మీ అయిన దాని వక్రతల వైశాల్యమును కనుగొనుము.

సాధన l, R మరియు r అనునవి శంఖు ఖండము యొక్క ఏటవాలు ఎత్తు, పై భాగ వ్యాసార్ధము మరియు క్రింది భాగ వ్యాసార్ధము అనుకొనుము.

ఇవ్వబడినది, $l = 5$ సెం.మీ, $R = 4$ సెం.మీ, $r = 1$ సెం.మీ

శంఖు ఖండము యొక్క వక్రతల వైశాల్యము $= \pi(R + r)l$ చదరపు ప్రమాణాలు

$$= \frac{22}{7} \times (4 + 1) \times 5$$

$$= \frac{550}{7}$$

కావున వక్రతల వైశాల్యము $= 78.57$ సెం.మీ^{2}

మెదడుకు మేత

1. నిత్యజీవితంలో శంఖుఖండ రూపంలో ఉపయోగించే రెండు వస్తువులను పేర్కొనుము.
2. అర్ధగోళమును శంఖు ఖండముగా భావించవచ్చునా?

ఉదాహరణ 7.14 ఒక బక్కెట్టు శంఖు ఖండ రూపంలో కలదు. దాని ఎగువ మరియు దిగువ వృత్తాకార వ్యాసములు 10 మీ మరియు 4 మీ మరియు దాని ఎత్తు 4మీ అయిన బక్కెట్టు వక్రతల మరియు సంపూర్ణతల వైశాల్యమును కనుగొనుము.

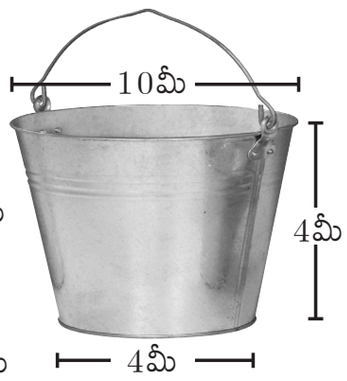
సాధన h, l, R మరియు r అనునవి శంఖు ఖండము యొక్క ఎత్తు, ఏటవాలు ఎత్తు, ఎగువ వ్యాసార్ధము మరియు దిగువ వ్యాసార్ధము అనుకొనుము

ఇవ్వబడిన ఎగువ వృత్తాకార వ్యాసము $=$ 10 మీ; ఎగువ వృత్తాకార వ్యాసార్ధము $R = 5$ మీ.
దిగువ వృత్తాకార వ్యాసము $= 4$ మీ; దిగువ వృత్తాకార వ్యాసార్ధము $r = 2$ మీ, ఎత్తు $h = 4$ మీ

కావున, $l = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$

$= \sqrt{4^2 + (5 - 2)^2}$

$l = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$ మీ



పటం. 7.24

వక్రతల వైశాల్యము $= \pi(R + r)l$ చదరపు ప్రమాణాలు

$= \frac{22}{7}(5 + 2) \times 5 = 110$ మీ^{2}

సంపూర్ణతల వైశాల్యం $= \pi(R + r)l + \pi R^2 + \pi r^2$ చదరపు ప్రమాణాలు

$$= \frac{22}{7}\left[(5 + 2)5 + 25 + 4\right] = \frac{1408}{7} = 201.14$$

కావున వక్రతల వైశాల్యం $= 110$ మీ^{2} మరియు సంపూర్ణతల వైశాల్యం $= 201.14$ మీ^{2}

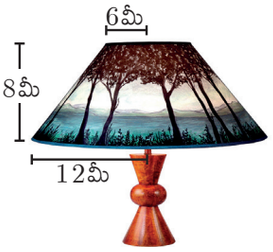
10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_7.indd 293 13-02-2023 18:33:26

ప్రగతి శోధన

1. ఒక క్రమవృత్తాకార శంఖువును రెండు సమాంతర తలములచే ఖండించగా లభించు విభాగమును _____ అంటారు.
2. ఒక క్రమవృత్తాకార శంఖువులో ఎన్ని శంఖుఖండములు గలవు?

అభ్యాసము 7.1

1. ఒక స్థూపము యొక్క వ్యాసార్ధము, ఎత్తుల నిష్పత్తి 5:7 మరియు స్థూపము ప్రక్కతల వైశాల్యము 5500 చ.సెం.మీ అయిన స్థూపము యొక్క వ్యాసార్ధము మరియు ఎత్తును కనుగొనుము.
2. ఒక ఘన స్థూపము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము 1848 చ.సెం.మీ స్థూపము పక్కతల వైశాల్యము సంపూర్ణతల వైశాల్యమునకు 5/6 రెట్లుండును. అయిన స్థూపము యొక్క వ్యాసార్ధము మరియు ఎత్తును కనుగొనుము.
3. ఒక బోలు కొయ్య దుంగ యొక్క వెలుపలి వ్యాసార్ధము మరియు పొడవు క్రమముగా 16 సెం.మీ మరియు 13 సెం.మీ కొయ్య మందము 4 సెం.మీ అయిన కొయ్య యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యమును కనుగొనుము.
4. PQR లంబకోణ త్రిభుజంలో $\angle Q = 90^\circ$, QR మరియు PQ ను త్రిప్పబడినది. QR=16 సెం.మీ మరియు PR=20 సెం.మీ అయిన త్రిభుజము నుండి ఏర్పడిన శంఖువు ప్రక్కతల వైశాల్యములను పోల్చుము.
5. ఒక శంఖాకారపు గుడారంలో నలుగురు వ్యక్తులు నివసిస్తున్నారు. శంఖాకారపు గుడారపు ఏటవాలు ఎత్తు 19 మీ శంఖాకారపు గుడారంలో నివసించుటకు ఒక్కొక్క మనిషికి 22 మీ^{2} స్థలము కావలెనన్న శంఖాకారపు గుడారము యొక్క ఎత్తును కనుగొనుము.
6. ఒక అమ్మాయి తన పుట్టినరోజునాడు క్రమవృత్తాకార శంఖువు ఆకారంలో టోపీలను తయారుచేయుటకు ఇష్టపడెను. దానికి 5720 సెం.మీ^{2} వైశాల్యము గల ఒక కాగితమును ఉపయోగించి 5 సెం.మీ వ్యాసార్ధము, 12 సెం.మీ ఎత్తు గల టోపీలు ఎన్నింటిని తయారుచేయగలదు?
7. ఒకే ఎత్తు గల రెండు క్రమ వృత్తాకార శంఖువు వ్యాసార్ధములు 1:3 నిష్పత్తిలో కలదు. శంఖువు ఎత్తు చిన్న శంఖువు వ్యాసార్ధమునకు 3 రెట్లయిన వక్రతల వైశాల్యముల నిష్పత్తిని కనుగొనుము.
8. గోళము యొక్క వ్యాసార్ధములో 25% పెరిగినపుడు, ఉపరితల వైశాల్యములో పెరుగు శాతమును కనుగొనుము.
9. ఒక బోలు అర్ధ గోళాకార పాత్ర యొక్క లోపలి మరియు బాహ్య వ్యాసములు వరుసగా 20 సెం.మీ మరియు 28 సెం.మీ. ఆ పాత్రకు ఒక చదరపు సెం.మీ రంగు పూయుటకు ₹ 0.14 ఖర్చు అయిన మొత్తం పాత్ర రంగు పూయుటకు అయ్యే ఖర్చు ఎంత?



10. ఒక శంఖుఖండ ఆకారంలో గల టేబుల్ దీపమునకు రంగు వేయుటకు 1 చ.సెం.మీ కు ₹ 2 అయిన పై భాగము కలిపి రంగువేయుటకు అగు ఖర్చు ఎంత?

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_7.indd 294 13-02-2023 18:33:26

7.3 ఘనపరిమాణము

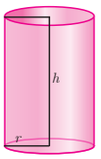
ఇదివరకు స్థూపము, శంఖువు, గోళము, అర్ధగోళము మరియు శంఖు ఖండముల ఉపరితల వైశాల్యము గూర్చి చర్చించుకొన్నాము. ఇపుడు వాటి ఘనపరిమాణముల గూర్చి తెలుసుకొందాం.

ఘనపరిమాణము అనునది ఆ వస్తువు ఎంత స్థలమును ఆక్రమించునో దానిని తెల్పును. ఘనపరిమాణమును ఘనపు ప్రమాణాలలో తెల్పుతారు.

7.3.1 క్రమస్థూప ఘనపరిమాణము

క్రమ స్థూపము యొక్క భూవ్యాసార్ధం 'r' మరియు ఎత్తు 'h'

ఘనపరిమాణము $V =$ భూవైశాల్యం × ఎత్తు $= \pi r^2 \times h = \pi r^2 h$ ఘన ప్రమాణాలు.

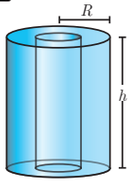


పటం. 7.25

అయిన, స్థూప ఘనపరిమాణము $= \pi r^2 h$ ఘన ప్రమాణాలు

7.3.2 బోలు స్థూపము యొక్క ఘనపరిమాణము

ఒక బోలు స్థూపము యొక్క బాహ్య మరియు అంతర వ్యాసార్ధములు R మరియు r వాటి ఎత్తు h అయిన



పటం. 7.26

ఘనపరిమాణము $V = \begin{bmatrix}\text{బాహ్య స్థూప}\\ \text{ఘనపరిమాణము}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{అంతర స్థూప}\\ \text{ఘనపరిమాణము}\end{bmatrix}$

$$V = \pi R^2 h - \pi r^2 h = \pi(R^2 - r^2)h$$

బోలు స్థూప ఘనపరిమాణము $= \pi(R^2 - r^2)h$ ఘన ప్రమాణాలు

ఉదాహరణ 7.15 ఒక స్థూపము ఎత్తు 2 మీ మరియు భూ వైశాల్యము 250 మీ^{2} అయిన స్థూపము యొక్క ఘనపరిమాణమును కనుగొనుము.

సాధన r మరియు h అనునది స్థూపము యొక్క వ్యాసార్ధం మరియు ఎత్తు

స్థూపము ఎత్తు $h = 2$ మీ, భూవైశాల్యం $= 250$ మీ^{2}

స్థూప ఘనపరిమాణము $= \pi r^2 h$ ఘన ప్రమాణాలు

= భూ వైశాల్యము × ఎత్తు

$= 250 \times 2 = 500$ మీ^{3}

కావున స్థూప ఘనపరిమాణము $= 500$ మీ^{3}

మెదడుకు మేత

1. స్థూప వ్యాసార్ధ వర్గమునకు, స్థూపము ఎత్తు విలోమానుపాతంలో ఉన్న స్థూప ఘనపరిమాణము _____.
2. వ్యాసార్ధము r, ఎత్తు h గల స్థూప ఘనపరిమాణము, దాని (i) వ్యాసార్ధము సగమైన కనుగొనుము. (ii) ఎత్తు సగమైన కనుగొనుము.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_7.indd 295 13-02-2023 18:33:27

ఉదాహరణ 7.16 ఒక స్థూపాకార ట్యాంకు వ్యాసము 7 మీ మరియు దాని ఘనపరిమాణము 1.078×10^6 లీటర్లు అయిన స్థూపాకార ట్యాంకు ఎత్తును కనుగొనుము.

సాధన స్థూపము యొక్క వ్యాసార్ధము మరియు ఎత్తులను r మరియు h గా తీసుకొనిన

ఇవ్వబడిన, స్థూపాకార ట్యాంకు ఘనపరిమాణమ $= 1.078 \times 10^6 = 1078000$ లీటర్లు

$= 1078$ మీ^{3} (ఇక్కడ 1లీ $= \frac{1}{1000}$ మీ^{3})

వ్యాసము $= 7$ మీ, వ్యాసార్ధము $= \frac{7}{2}$ మీ

స్థూపాకార ట్యాంకు ఘనపరిమాణము $= \pi r^2 h$ ఘన ప్రమాణాలు

$$1078 = \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times h$$

కావున స్థూపాకార ట్యాంకు ఎత్తు 28 మీ

ఉదాహరణ 7.17 అంతర మరియు బాహ్య వ్యాసార్ధములు 21 సెం.మీ మరియు 28 సెం.మీ మరియు ఎత్తు 9 సెం.మీ గా గల ఒక బోలు స్థూపమును నిర్మించుటకు కావలసిన లోహ ఘనపరిమాణమును కనుగొనుము.

సాధన బోలు స్థూపము యొక్క అంతర, బాహ్య వ్యాసార్ధములు మరియు ఎత్తులు r, R మరియు h లు అనుకొనిన

ఇవ్వబడిన, $r = 21$ సెం.మీ, $R = 28$ సెం.మీ, $h = 9$ సెం.మీ

బోలు స్థూపము ఘనపరిమాణము $= \pi(R^2 - r^2)h$ ఘన ప్రమాణాలు

$$= \frac{22}{7}(28^2 - 21^2) \times 9$$

$$= \frac{22}{7}(784 - 441) \times 9 = 9702$$

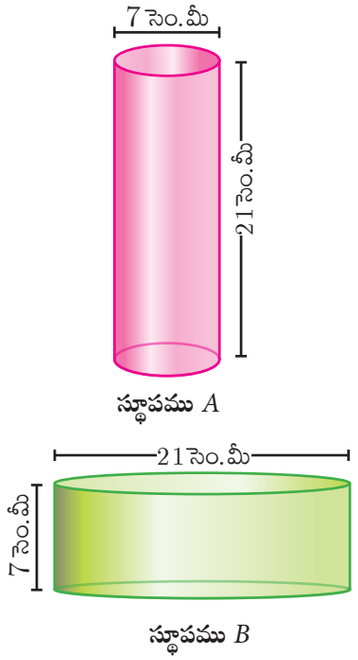
కావలసిన లోహ ఘనపరిమాణం $= 9702$ సెం.మీ^{3}

ఉదాహరణ 7.18 A మరియు B స్థూపములలో

(i) గరిష్ఠ ఘనపరిమాణము గల స్థూపమును కనుగొనుము.

(ii) గరిష్ఠ ఘనపరిమాణము గల స్థూపమునకు గరిష్ఠ సంపూర్ణతల వైశాల్యము ఉంటుందా అని సరిచూడుము.

(iii) రెండు స్థూపములు A మరియు B యొక్క ఘనపరిమాణముల నిష్పత్తిని కనుగొనుము.



పటం. 7.27

సాధన

(i) స్థూపము ఘనపరిమాణము $= \pi r^2 h$ ఘన ప్రమాణాలు

స్థూపము ఘనపరిమాణము $A = \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times 21$

$= 808.5$ మీ^{3}

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_7.indd 296 13-02-2023 18:33:28

B స్థూపము ఘనపరిమాణము $= \frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times \frac{21}{2} \times 7$

$= 2425.5$ సెం.మీ^{3}

కావున B స్థూప ఘనపరిమాణము A స్థూప ఘనపరిమాణము కన్నా ఎక్కువగా ఉండును.

(ii) స్థూప సంపూర్ణతల వైశాల్యము $= 2\pi r(h + r)$ సెం.మీ^{2}

A స్థూప సంపూర్ణతల వైశాల్యము $= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times (21 + 3.5) = 539$ సెం.మీ^{2}

B స్థూప సంపూర్ణతల వైశాల్యము $= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times (7 + 10.5) = 1155$ సెం.మీ^{2}

కావున గరిష్ఠ ఘనపరిమాణం గల B స్థూపమునకు గరిష్ట సంపూర్ణతల వైశాల్యం ఉండును.

(iii) $\frac{\text{A స్థూపము యొక్క ఘనపరిమాణము}}{\text{B స్థూపము యొక్క ఘనపరిమాణము}} = \frac{808.5}{2425.5} = \frac{1}{3}$

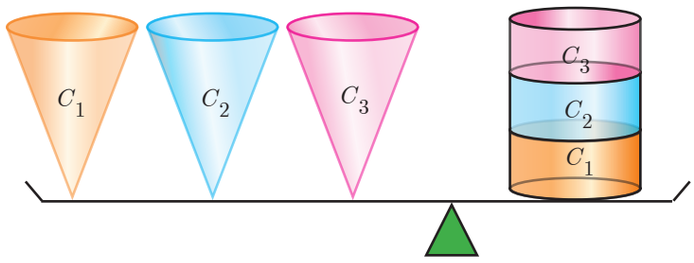
A మరియు B స్థూపముల యొక్క ఘనపరిమాణముల నిష్పత్తి 1:3.

7.3.3 క్రమవృత్తాకార శంఖువు ఘనపరిమాణం

r మరియు h అనునవి శంఖువు యొక్క వ్యాసార్ధము మరియు ఎత్తులు అయిన

శంఖువు ఘనపరిమాణం $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ఘన ప్రమాణాలు

ప్రదర్శన



- ఒక క్రమవృత్తాకార స్థూపము మరియు ఒకే వ్యాసార్ధము మరియు ఎత్తు కలిగిన మూడు క్రమవృత్తాకార శంఖువులు తీసుకొనుము.
- మూడు శంఖువులో గల పదార్థము స్థూపములో ఖచ్చితంగా సరిపోవును.

పటం. 7.28

పటము 7.28 ను గమనించిన

$3\times$ (శంఖువు ఘనపరిమాణము) $=$ స్థూపము ఘనపరిమాణము

$= \pi r^2 h$ ఘన ప్రమాణాలు

శంఖువు ఘనపరిమాణము $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ఘన ప్రమాణాలు

ఉదాహరణ 7.19 ఒక క్రమవృత్తాకార శంఖువు ఘనపరిమాణము 11088 సెం.మీ^{3} మరియు శంఖువు ఎత్తు 24 సెం.మీ అయిన శంఖువు వ్యాసార్ధము కనుగొనుము.

సాధన r మరియు h అనునవి శంఖువు వ్యాసార్ధము మరియు ఎత్తులు అనుకొనిన

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_7.indd 297 13-02-2023 18:33:29

ఇవ్వబడిన శంఖువు ఘనపరిమాణము $= 11088$ సెం.మీ^{3}

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h = 11088$$

$$\frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times r^2\times 24 = 11088$$

$$r^2 = 441$$

కావున శంఖువు వ్యాస్థాము $r = 21$ సెం.మీ

మెదడుకు మేత

1. కింద ఇవ్వబడినవి సమానముగా అమరునట్లు ఒక క్రమ వృత్తాకార శంఖువును కనుగొనగలవా? (a) ఎత్తు మరియు ఏటవాలు ఎత్తు (b) వ్యాసార్ధము మరియు ఏటవాలు ఎత్తు (c) ఎత్తు మరియు వ్యాసార్ధమునకు సమానమైన క్రమవృత్తాకార శంఖువు కనుగొనుటకు సాధ్యమగునా?

2. రెండు శంఖువుల యొక్క ఘనపరిమాణములు సమానమయిన వాటి వ్యాసార్ధములు మరియు ఎత్తుల నిష్పత్తి ఏమగును?

ఉదాహరణ 7.20 రెండు శంఖువుల యొక్క ఘనపరిమాణముల నిష్పత్తి 2:3 అయిన రెండవ శంఖువు ఎత్తు మొదటి శంఖువు ఎత్తుకు రెండు రెట్లయిన రెండు శంఖు వ్యాసార్ధముల నిష్పత్తిని కనుగొనుము.

సాధన r_1 మరియు h_1 అనునవి శంఖువు -I యొక్క వ్యాసార్ధము మరియు ఎత్తు మరియు r_2 మరియు h_2 అనునవి శంఖువు -II యొక్క వ్యాసార్ధము మరియు ఎత్తులని అనుకొనుము.

ఇవ్వబడినది $h_2 = 2h_1$ మరియు $\frac{\text{I శంఖువు ఘనపరిమాణము}}{\text{II శంఖువు ఘనపరిమాణము}} = \frac{2}{3}$

$$\frac{\frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1}{\frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{r_1^2}{r_2^2}\times\frac{h_1}{2h_1} = \frac{2}{3}$$

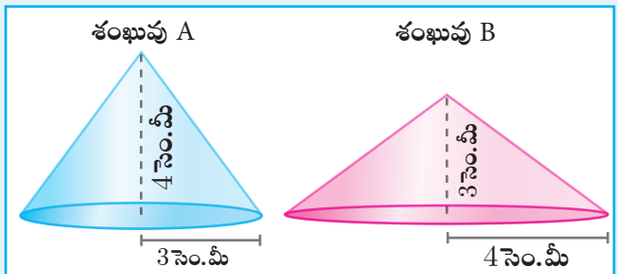
$$\frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{4}{3} \quad \text{నుండి} \quad \frac{r_1}{r_2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

కావున వ్యాసార్ధముల నిష్పత్తి $= 2:\sqrt{3}$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_7.indd 298 13-02-2023 18:33:30

ప్రగతి శోధన

1. భూవైశాల్యము మరియు _____ల లబ్ధము శంఖువు ఘనపరిమాణమగును.
2. శంఖువు వ్యాసార్ధము రెట్టింపు అయిన, కొత్త ఘనపరిమాణము, పాత ఘనపరిమాణానికి _____ రెట్లుండును.
3. పటము 7.29 లో ఇవ్వబడిన శంఖువులను చూసి,
   (i) ఎటువంటి లెక్కింపు లేకుండా ఏ శంఖువు ఘనపరిమాణం పెద్దది అని తెల్పుము.
   (ii) గరిష్ఠ ఘనపరిమాణము గల శంఖువుకి గరిష్ఠ ఉపరితల వైశాల్యము ఉండునా అని సరిచూడుము
   (iii) A శంఖువు ఘనపరిమాణం : B శంఖువు ఘనపరిమాణం =?

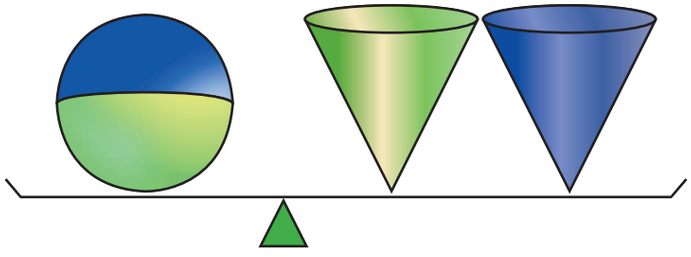


పటం. 7.29

7.3.4 గోళము యొక్క ఘనపరిమాణము

r అనునది ఒక గోళము యొక్క వ్యాసార్ధము అయిన దాని ఘనపరిమాణము $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ఘన. ప్రమాణాలు

ప్రదర్శన



- సమాన వ్యాసార్ధము, ఎత్తు కలిగిన రెండు క్రమవృత్తాకార శంఖువులను, ఆ శంఖువుల ఎత్తునకు సమాన వ్యాసము కలిగిన ఒక గోళమును తీసుకొనుము.
- రెండు శంఖువులో గల పదార్థములు, గోళములో పూర్తిగా ఆక్రమించునా అని గమనించుము.

పటం. 7.30

పటము 7.30 ను గమనించిన

గోళము ఘనపరిమాణము = 2 × (శంఖువు యొక్క ఘనపరిమాణము)

ఇక్కడ శంఖువు మరియు గోళము వ్యాసములు శంఖువు ఎత్తునకు సమానము.

$$= 2\left(\frac{1}{3}\pi r^2 h\right)$$

$$= \frac{2}{3}\pi r^2 (2r), \quad (\text{ఇక్కడ } h = 2r)$$

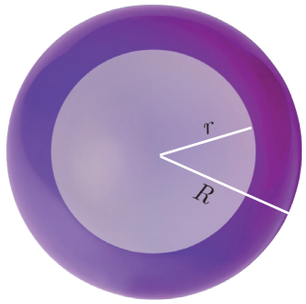
గోళ ఘనపరిమాణము $= \frac{4}{3}\pi r^3$ ఘన ప్రమాణములు

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_7.indd 299 13-02-2023 18:33:31

7.3.5 బోలు గోళము యొక్క ఘనపరిమాణము

r మరియు R అనునవి బోలు గోళము యొక్క అంతర మరియు బాహ్య వ్యాసార్ధములు. బాహ్య మరియు అంతర గోళముల ఘనపరిమాణముల వ్యత్యాసము

$$= \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$$



పటం. 7.31

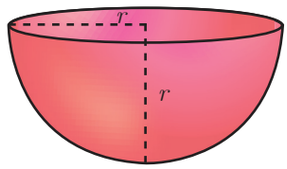
బోలు గోళము ఘనపరిమాణము $= \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)$ ఘన ప్రమాణాలు.

7.3.6 అర్ధగోళ ఘనపరిమాణము

r అనునది అర్ధగోళము యొక్క వ్యాసార్ధము అయిన

అర్ధగోళము ఘనపరిమాణము $= \frac{1}{2}$ (గోళము ఘనపరిమాణము)

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}\pi r^3\right]$$



పటం. 7.32

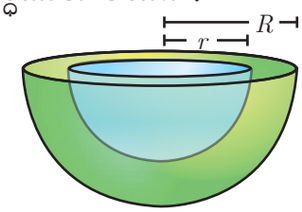
అర్ధగోళ ఘనపరిమాణము $= \frac{2}{3}\pi r^3$ ఘన ప్రమాణాలు

7.3.7 బోలు అర్ధగోళ ఘనపరిమాణము

r మరియు R అనునవి అంతర మరియు బాహ్య బోలు అర్ధగోళముల వ్యాసార్ధములు అయిన .

$$\begin{bmatrix}\text{బోలు అర్ధగోళ}\\ \text{ఘనపరిమాణము}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{బాహ్య అర్ధగోళ}\\ \text{ఘనపరిమాణము}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{అంతర అర్ధగోళ}\\ \text{ఘనపరిమాణము}\end{bmatrix}$$

$$= \frac{2}{3}\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi r^3$$



పటం. 7.33

బోలు అర్ధ గోళ ఘనపరిమాణము $= \frac{2}{3}\pi(R^3 - r^3)$ ఘన ప్రమాణాలు

మెదడుకు మేత

ఒక శంఖువు, అర్ధగోళము మరియు స్థూపములకు సమాన భూములు కల్గి శంఖువు మరియు స్థూపము ఎత్తులు సమానముగా మరియు ఒకే వ్యాసార్ధములుండిన అవి సమానమగునా?

ఉదాహరణ 7.21 ఒక అర్ధగోళము యొక్క ఘనపరిమాణము 29106 సెం.మీ^{3} మరియొక అర్ధగోళ ఘనపరిమాణము, మొదటి అర్ధగోళ ఘనపరిమాణమునకు 2/3 రెట్లుండిన కొత్త అర్ధగోళ వ్యాసార్ధంను కనుగొనుము.

సాధన r అనునది అర్ధగోళ వ్యాసార్ధము అనుకొనిన

ఇవ్వబడిన అర్ధగోళ ఘనపరిమాణం = 29106 సెం.మీ^{3}

కొత్త అర్ధగోళ ఘనపరిమాణం $= \frac{2}{3}$ (మొదటి అర్ధగోళ ఘనపరిమాణం)

$$= \frac{2}{3} \times 29106$$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_7.indd 300 13-02-2023 18:33:33

కొత్త అర్ధగోళ ఘనపరిమాణం $= 19404$ సెం.మీ^{3}

$$\frac{2}{3}\pi r^3 = 19404$$

$$r^3 = \frac{19404 \times 3 \times 7}{2 \times 22} = 9261$$

$$r = \sqrt[3]{9261} = 21 \text{ సెం.మీ}$$

కావున వ్యాసార్ధం $r = 21$ సెం.మీ



మెదడుకు మేత

1. గోళము మరియు అర్ధగోళము గూర్చి నిజజీవితంలో ఏదైనా రెండు ఉదాహరణలిమ్ము.
2. ఒక తలములో గల పెద్ద వృత్తమును, గోళముగా _____ భాగాలుగా విడగొట్టవచ్చు.
3. ఒక గోళము యొక్క ఘనపరిమాణము మరియు ఉపరితల వైశాల్యములు సంఖ్యాపరంగా సమానము అయిన గోళము యొక్క వ్యాసార్ధము _____.

ఉదాహరణ 7.22 బోలు ఇత్తడి గోళము యొక్క అంతర వ్యాసము 14 సెం.మీ మరియు దాని మందము 1మి.మీ మరియు సాంద్రత 17.3 గ్రా/సెం.మీ^{3} అయిన బోలు ఇత్తడి గోళము ద్రవ్యరాశి కనుగొనుము. (**సూచన:** ద్రవ్యరాశి = సాంద్రత × ఘనపరిమాణము)

సాధన r మరియు R అనునది బోలు గోళము యొక్క అంతర మరియు బాహ్య వ్యాసార్ధములు

అంతర గోళ వ్యాసము $d = 14$ సెం.మీ; అంతర వ్యాసార్ధము $r = 7$ సెం.మీ; మందము $= 1$ మి.మీ $= \frac{1}{10}$ సెం.మీ

బాహ్య వ్యాసార్ధము $R = 7 + \frac{1}{10} = \frac{71}{10} = 7.1$ సెం.మీ

బోలు గోళము ఘనపరిమాణము $= \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)$ ఘన సెం.మీ

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7}(357.91 - 343) = 62.48 \text{ సెం.మీ}^3$$

ఇత్తడి ద్రవ్యరాశి 1 సెం.మీ^{3} $= 17.3$ గ్రాము

మొత్తం ద్రవ్యరాశి $= 17.3 \times 62.48 = 1080.90$ గ్రాములు

కావున మొత్తం ద్రవ్యరాశి 1080.90 గ్రాములు.



ప్రగతి శోధన

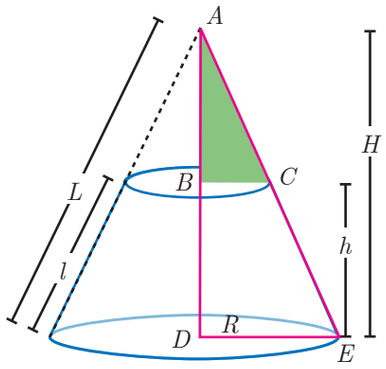
1. గోళము ఘనపరిమాణము మరియు గోళము ఉపరితల వైశాల్యమునకు గల నిష్పత్తిని కనుగొనుము.
2. అర్ధగోళము యొక్క ఎత్తు మరియు వ్యాసార్ధముల మధ్య గల సంబంధము _____.
3. గోళము యొక్క ఉపరితల వైశాల్యము మరియు _____ లబ్ధము గోళము యొక్క ఘనపరిమాణమగును.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_7.indd 301 13-02-2023 18:33:34

7.3.8 శంఖుఖండము యొక్క ఘనపరిమాణము

Hమరియు h అనునది క్రమముగా శంఖువు మరియు శంఖు ఖండము యొక్క ఎత్తు అనుకొనుము. వీటి ఏటవాలు ఎత్తు క్రమముగా Lమరియు l అనుకొనుము.

R మరియు r అనునవి శంఖు ఖండము యొక్క ఇరువైపులా గల వ్యాసార్ధములు అయిన శంఖు ఖండ ఘనపరిమాణము రెండు శంఖువు ఘనపరిమాణముల వ్యత్యాసమగును.



పటం. 7.34

కావున $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H - \frac{1}{3}\pi r^2 (H-h)$

త్రిభుజములు ABC మరియు ADE అనురూపమైనవి. కావున వాటి అనురూప భుజముల నిష్పత్తి అనుపాతములో ఉండును.

అందువలన, $\frac{H-h}{H} = \frac{r}{R}$ నుండి $H = \frac{hR}{R-r}$ ...(1)

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H - \frac{1}{3}\pi r^2 (H-h)$$

$$= \frac{\pi}{3} H(R^2 - r^2) + \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$= \frac{\pi}{3}\frac{hR}{R-r}(R^2 - r^2) + \frac{\pi}{3} r^2 h \quad [(1) \text{ ను ఉపయోగించి}]$$

$$= \frac{\pi}{3} hR(R+r) + \frac{\pi}{3} r^2 h$$

మెదడుకు మేత

ఒక శంఖు ఖండము ఘనపరిమాణము ఉపయోగించి పూర్తి శంఖువు ఘనపరిమాణం కనుగొనగలమా?

$$\text{శంఖుఖండ ఘనపరిమాణం} = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2) \text{ ఘన ప్రమాణాలు}$$

ఉదాహరణ 7.23 45 సెం.మీ ఎత్తు గల ఒక శంఖు ఖండము యొక్క వ్యాసార్ధములు క్రమముగా 28 సెం.మీ మరియు 7 సెం.మీ అయిన, శంఖుఖండ ఘనపరిమాణము కనుగొనుము.

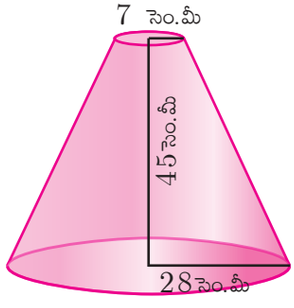
సాధన శంఖు ఖండము ఎత్తు h, దాని వ్యాసార్ధములు r మరియు R అని అనుకొనుము.

ఇక్కడ, $h = 45$ సెం.మీ, $R = 28$ సెం.మీ, $r = 7$ సెం.మీ

$$\text{శంఖుఖండ ఘనపరిమాణం} = \frac{1}{3}\pi\left[R^2 + Rr + r^2\right]h \text{ ఘన ప్రమాణాలు}$$

$$= \frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times\left[28^2 + (28\times 7) + 7^2\right]\times 45$$

$$= \frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times 1029\times 45 = 48510$$



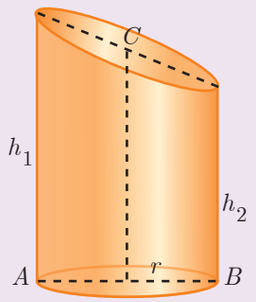
పటం. 7.35

కావున శంఖు ఖండ ఘనపరిమాణం 48510 ఘన ప్రమాణాలు అగును.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_7.indd 302 13-02-2023 18:33:36

మీకు తెలుసా?

ప్రక్క పటము ఏటవాలైన స్థూప ఖండమును సూచించును. స్థూపమును C గుండా AB అనే ఆధారానికి సమాంతరంగా లేని ఒక తలాన్ని కత్తరించిన ఏర్పడునది



పటం. 7.36

స్థూప ఖండము యొక్క ఉపరితల వైశాల్యం : $2\pi r \times \frac{h_1 + h_2}{2}$ చ.ప్ర

h_1 మరియు h_2 అనునవి స్థూప ఖండము యొక్క గరిష్ఠ మరియు కనిష్ఠ ఎత్తులు

స్థూప ఖండ ఘనపరిమాణము $= \pi r^2 \times \frac{h_1 + h_2}{2}$ ఘన ప్రమాణాలు

అభ్యాసము 7.2

1. ఒక అతను 10 మీ లోపలి వ్యాసముతో 14 మీ లోతు గల ఒక స్థూపాకార బావిని త్రవ్వి ఆ మట్టిని బావి చుట్టూ గట్టు వలె 5 మీ వెడల్పుతో పరిచెను. అయిన గట్టు ఎత్తును కనుగొనుము.
2. వ్యాసము 20 సెం.మీ, గల ఒక స్థూపాకార గాజు గ్లాసులో 9 సెం.మీ ఎత్తు వరకు నీరు కలదు. 5 సెం.మీ వ్యాసార్ధం మరియు 4 సెం.మీ ఎత్తు కలిగిన చిన్న లోహపు స్థూపములను పూర్తిగా మునుగునట్లు వేసిన స్థూపాకార గ్లాసులో పెరిగిన నీటి మట్టమును కనుగొనుము.
3. ఒక శంఖాకారంలో ఉన్న కొయ్య దిమ్మె చుట్టుకొలత 484 సెం.మీ దాని ఎత్తు 105 సెం.మీ అయిన ఘనపరిమాణమును కనుగొనుము.
4. శంఖాకారపు పాత్రలో నిండుగా పెట్రోలు కలదు. ఆ పాత్ర వ్యాసార్ధము 10 మీ మరియు ఎత్తు 15 మీ. పాత్ర అడుగుభాగం నుండి పెట్రోలును నిమిషామికి 25 క్యూబిక్ మీటరు చొప్పున విడుదల చేస్తే ఎన్ని నిమిషాలకు పాత్రలోని పెట్రోలు ఖాళీ అగును. మీ జవాబును నిమిషాలలో సవరించి తెల్పుము.
5. 6 సెం.మీ, 8 సెం.మీ మరియు 10 సెం.మీ భుజములు కలిగిన ఒక లంబకోణ త్రిభుజము కలదు. దాని భుజాలను లంబకోణము ఏర్పడునట్లు రెండు విధములుగా త్రిప్పినప్పుడు ఏర్పడు రెండు ఘనముల యొక్క ఘనపరిమాణములోని వ్యత్యాసములను కనుగొనుము.
6. రెండు సమాన భూవ్యాసార్ధం గల శంఖువుల ఘనపరిమాణములు 3600 సెం.మీ^{3} మరియు 5040 సెం.మీ^{3} అయిన రెండు శంఖువుల ఎత్తుల నిష్పత్తిని కనుగొనుము.
7. రెండు గోళముల వ్యాసార్ధముల నిష్పత్తి 4:7 అయిన వాటి ఘనపరిమాణముల నిష్పత్తిని కనుగొనుము.
8. ఒక ఘనగోళము మరియు ఒక ఘన అర్ధగోళముల సంపూర్ణతల వైశాల్యములు సమానమయిన, వాటి ఘనపరిమాణముల నిష్పత్తి $3\sqrt{3} : 4$ అని నిరూపించుము.
9. ఒక గోళాకార రాగి రేకు యొక్క బాహ్య మరియు అంతర ఉపరితల వైశాల్యములు 576π సెం.మీ^{2} మరియు 324 సెం.మీ^{2} అయిన ఆ రాగి రేకు తయారుచేయుటకు కావలసిన లోహమును కనుగొనుము.
10. ఎత్తు 16 సెం.మీ కలిగిన ఒక శంఖు ఖండ ఆకారంలో కల ఒక పాత్ర యొక్క పై భాగము తెరచియున్నది. క్రిందిభాగ వ్యాసార్ధము 8 సెం.మీ మరియు పై భాగ వ్యాసార్ధము 20 సెం.మీ పాత్రలో నిండుగా పాలు నింపబడియున్నది. 1 లీ పాలధర ₹40 అయిన, పాత్రలో నింపబడిన మొత్తము పాల ధరను కనుగొనుము.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_7.indd 303 13-02-2023 18:33:37

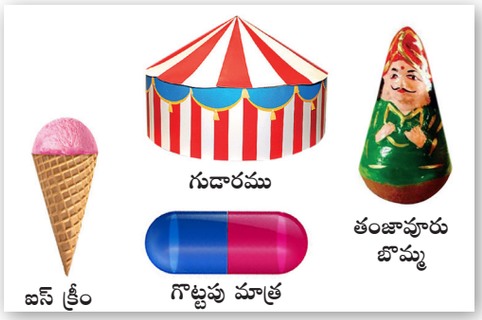
7.4 మిళితమైన ఘనముల యొక్క ఉపరితల వైశాల్యము మరియు ఘనపరిమాణము

పటము 7.37 లో గల ఆకారములను గమనించుము.

పక్కపటములు మిళితమైన ఘనముల గురించి తెలుసుకొనుటకు ఉపయోగపడును.

మిళితమైన ఘనము అనగా రెండు లేక అంతకంటే ఎక్కువ ఘనముల కలయిక.

మిళిత ఘనములు అను భావన గృహ నిర్మాణములోను, బొమ్మల తయారీలోను, వడ్రంగి పనులలోను ఉపయోగపడును.

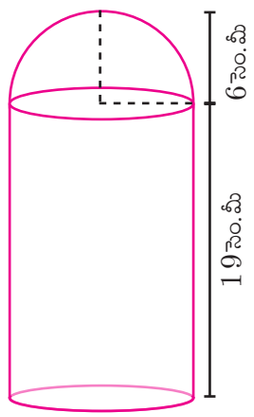


పటం. 7.37

మిళిత ఘనముల ఉపరితల వైశాల్యము కనుగొనుటకు మొదట ఒక్కొక్క ఘనముల వైశాల్యములను కనుగొనవలెను. ఉదాహరణకు ఒక శంఖువుపై అర్ధగోళము బోర్లించబడి ఉన్నట్లయితే దాని సంపూర్ణతల వైశాల్యము కనుగొనుటకు ముందు అర్ధగోళ ఉపరితల వైశాల్యము మరియు శంఖువు ఉపరితల వైశాల్యమును కనుగొనవలెను. అటుపిమ్మట ఆ రెండు ఉపరితల వైశాల్యములను కూడవలెను. ఇక్కడ రెండు భూవైశాల్యములను వదిలివేస్తాము. ఎందుకనగా రెండు భూములు ఒకదానికొకటి కలిసి ఉండును.

కాని ఘనపరిమానములను కనుగొనేటప్పుడు రెండు ఘనపరిమాణములను వేర్వేరుగా కనుగొనవలెను.

ఉదాహరణ 7.24 స్థూపముపై అర్ధగోళము బోర్లించినట్లున్న ఒక ఆట బొమ్మ మొత్తము ఎత్తు 25 సెం.మీ, దాని ఉమ్మడి వ్యాసము 12 సెం.మీ అయిన ఆ బొమ్మ యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యమును కనుగొనుము.



పటం. 7.38

సాధన r మరియు h అనునవి స్థూపం యొక్క వ్యాసార్ధము మరియు ఎత్తులు అనుకొనిన

ఇవ్వబడిన వ్యాసము $d = 12$ సెం.మీ, వ్యాసార్ధం $r = 6$ సెం.మీ

బొమ్మ మొత్తము ఎత్తు $= 25$ సెం.మీ

స్థూపాకార భాగము ఎత్తు $= 25 - 6 = 19$ సెం.మీ

ఆట బొమ్మ సంపూర్ణతల వైశాల్యము = స్థూపము యొక్క ప్రక్కతల వైశాల్యం + అర్ధగోళ ప్రక్కతల వైశాల్యం + స్థూపం యొక్క భూవైశాల్యం

$$= 2\pi rh + 2\pi r^2 + \pi r^2$$

$$= \pi r(2h + 3r) \quad \text{చదరపు ప్రమాణాలు}$$

$$= \frac{22}{7} \times 6 \times (38 + 18)$$

$$= \frac{22}{7} \times 6 \times 56 = 1056$$

కావున బొమ్మసంపూర్ణతల వైశాల్యము 1056 సెం.మీ^{2}

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_7.indd 304 13-02-2023 18:33:38

ఉదాహరణ 7.25 30 సెం.మీ × 15 సెం.మీ × 10 సెం.మీ కొలతలు గల దీర్ఘఘనాకార ఆభరణ పెట్టెపై అర్ధ స్థూపము బొర్లించునట్లు పక్క పటంలో (పటం. 7.39) చూపబడినది. అయిన ఆ పెట్టె యొక్క ఘనపరిమాణమును కనుగొనుము.

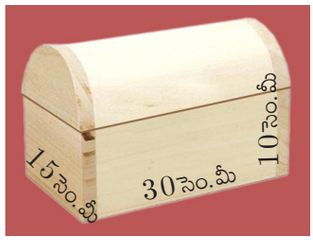
సాధన l, b మరియు h_1 అనునవి పెట్టె యొక్క పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తు అదేవిధంగా r మరియు h_2 అనునవి స్థూపము యొక్క వ్యాసార్ధము మరియు ఎత్తు అనుకొనిన

ఇపుడు ఆభరణాల పెట్టె ఘనపరిమాణము = దీర్ఘ ఘన పరిమాణం + $\frac{1}{2}$(స్థూప ఘనపరిమాణం)

$$= (l \times b \times h_1) + \frac{1}{2}(\pi r^2 h_2) \text{ ఘన ప్రమాణములు}$$

$$= \left(30 \times 15 \times 10\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{22}{7} \times \frac{15}{2} \times \frac{15}{2} \times 30\right)$$

$$= 4500 + 2651.79 = 7151.79$$



పటం. 7.39

కావున ఆభరణ పెట్టె ఘనపరిమాణము = 7151.79 సెం.మీ^{3}

ఉదాహరణ 7.26 అఖిల్ తన కుటుంబ వేడుక కొరకు 150 మందికి సరిపడు వసతిని ఏర్పాటు చేయదలచెను. అతను స్థూపము పై శంఖువు బొర్లించు విధముగా ఒక గూడారమును నిర్మించెను. ఆ గూడారములో ఒక్కొక్క వ్యక్తికి 4 చ.మీ స్థల వైశాల్యము ఆక్రమించే విధంగా 40 ఘన మీటరు గాలి అవసరమగుచున్నది. ఆ గూడారములో స్థూపాకార భాగము ఎత్తు 8మీ అయిన శంఖువు ఆకార భాగము ఎత్తును కనుగొనుము.

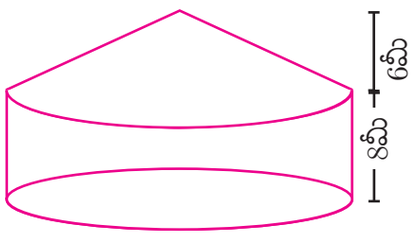
సాధన h_1 మరియు h_2 అనునవి స్థూపము మరియు శంఖువుల ఎత్తు అనుకొనిన

ఒక వ్యక్తి ఆక్రమించే స్థల వైశాల్యము = 4 చ.మీ

మొత్తము వ్యక్తుల సంఖ్య = 150

కావలసిన మొత్తము భూవైశాల్యము = 150×4

$$\pi r^2 = 600 \quad \ldots (1)$$



పటం. 7.40

1 వ్యక్తికి కావలసిన గాలి ఘనపరిమాణము = 40 మీ^{3}

150 వ్యక్తులకు కావలసిన గాలి ఘనపరిమాణము = $150 \times 40 = 6000$ మీ^{3}

$$\pi r^2 h_1 + \frac{1}{3}\pi r^2 h_2 = 6000$$

$$\pi r^2\left(h_1 + \frac{1}{3}h_2\right) = 6000$$

$$600\left(8 + \frac{1}{3}h_2\right) = 6000 \qquad [(1) \text{ ని ఉపయోగించి}]$$

$$8 + \frac{1}{3}h_2 = \frac{6000}{600}$$

$$\frac{1}{3}h_2 = 10 - 8 = 2$$

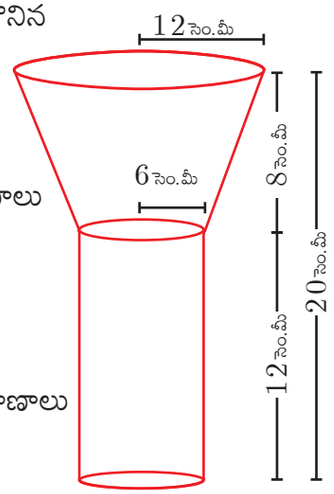
$$h_2 = 6 \text{ మీ}$$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_7.indd 305 13-02-2023 18:33:39

కావున శంఖువు ఆకారపు భాగము ఎత్తు h_2 = 6 మీ

ఉదాహరణ 7.27 ఒక స్థూపముపై శంఖు ఖండము అతికించినట్లు ఒక గరాటు కలదు. స్థూపాకార భాగము వ్యాసము 12 సెం.మీ, గరాటు మొత్తము ఎత్తు 20 సెం.మీ. గరాటు పై భాగ వ్యాసము 24 సెం.మీ అయిన గరాటు యొక్క బాహ్య ఉపరితల వైశాల్యము కనుగొనుము.

సాధన R మరియు r అనువి శంఖు ఖండము యొక్క ఎగువ మరియు దిగువ వ్యాసార్ధములు అనుకొనిన h_1 మరియు h_2 అనునవి శంఖుఖండము మరియు స్థూప ఎత్తులు అనుకొనిన $R = 12$ సెం.మీ, $r = 6$ సెం.మీ, h_2 = 12 సెం.మీ ఇవ్వబడినది.



పటం. 7.41

ఇపుడు, h_1 = 20–12 = 8 సెం.మీ

ఇక్కడ శంఖు ఖండము ఏటవాలు ఎత్తు l $= \sqrt{(R-r)^2 + h_1^2}$ ప్రమాణాలు

$= \sqrt{36 + 64}$

l $= 10$ సెం.మీ

బాహ్య ఉపరితల వైశాల్యము $= 2\pi r h_2 + \pi(R + r)l$ చ.ప్రమాణాలు

$= \pi\left[2rh_2 + (R + r)l\right]$

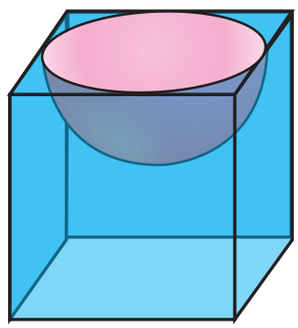
$= \pi\left[(2 \times 6 \times 12) + (18 \times 10)\right]$

$= \pi\left[144 + 180\right]$

$= \frac{22}{7} \times 324 = 1018.28$

కావున గరాటు బాహ్య ఉపరితల వైశాల్యము 1018.28 సెం.మీ^{2}

ఉదాహరణ 7.28 ఒక ఘనాకారంలో గల పెట్టె ఒక తలము నుండి అర్ధగోళాకారము కత్తరించబడినది. అర్ధగోళ వ్యాసము l అనునది ఘనము యొక్క భుజము పొడవునకు సమానమైన మిగిలిన ఘనము యొక్క ఉపరితల వైశాల్యమును కనుగొనుము.


పటం. 7.42

సాధన r అనునది అర్ధగోళ వ్యాసార్ధమనుకొనిన

ఇవ్వబడిన అర్ధగోళ వ్యాసము= ఘనము యొక్క భుజము పొడవు = l

అర్ధగోళ వ్యాసార్ధము = $\frac{l}{2}$

మిగిలిన ఘనము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము = ఘనాకృతి భాగం యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము

+ అర్ధగోళ భాగం యొక్క ప్రక్కతల వైశాల్యము

– అర్ధగోళ భాగము యొక్క భూవైశాల్యము

$= 6 \times (\text{భుజము})^2 + 2\pi r^2 - \pi r^2$

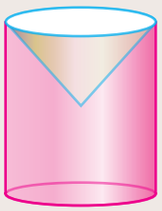
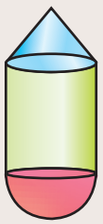
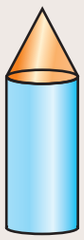
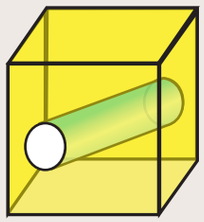
$= 6 \times (\text{భుజము})^2 + \pi r^2$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_7.indd 306 13-02-2023 18:33:41

$$= 6 \times (l)^2 + \pi\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(24 + \pi)l^2$$

మిగిలిన ఘనాకార భాగం యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము $= \frac{1}{4}(24 + \pi)l^2$ చదరపు ప్రమాణాలు

కృత్యము 4

సంయుక్త ఘనములు				
ఇవ్వబడిన ఒక్కొక్క సంయుక్త ఘనముల నుండి ఒక్కొక్క ఘనమును జాబితా చేయుము.				
సంయుక్త ఘనముల యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము				

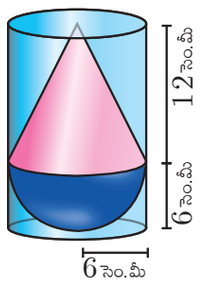
అభ్యాసము 7.3

1. ఒక పాత్ర అర్ధగోళము మీద బోలు స్థూపమును బోర్లించినట్లున్నది. పాత్ర వ్యాసము 14 సెం.మీ మరియు ఎత్తు 13 సెం.మీ అయితే ఆ పాత్ర సామర్థ్యం కనుగొనుము.

2. నాథన్ అనే ఒక ఇంజనీరింగ్ విద్యార్థి రెండు శంఖువుల చివరలను కలుపుతూ ఒక స్థూపాకారంలో గల నమూనాను చేయదలచెను. ఆ నమూనా వ్యాసము 3 సెం.మీ మరియు పొడవు 12 సెం.మీ ప్రతి శంఖువు ఎత్తు 2 సెం.మీ అయిన నాథన్ తయారుచేసిన నమూనా ఘనపరిమాణమును కనుగొనుము.

3. ఒక ఘన స్థూపము ఎత్తు 2.4 సెం.మీ మరియు వ్యాసము 1.4 సెం.మీ, దీని నుండి ఒకేఎత్తు మరియు వ్యాసము గల ఒక శంఖువును తయారుచేసిన మిగిలిన ఘనము యొక్క ఘనపరిమాణమును సెం.మీ^{3} లోకనుగొనుము.

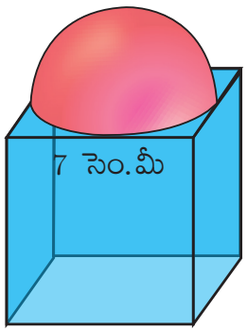
4. ఒక ఘనము యొక్క అడుగుభాగము 6 సెం.మీ వ్యాసార్ధముగా గల అర్ధగోళాకారము పైభాగము 12 సెం.మీ ఎత్తు, 6సెం.మీ వ్యాసార్ధం గల శంఖువు ఆకారములో కలదు. పూర్తిగా నీటితో నింపబడిన ఒక స్థూపములో దాని అడుగు భాగం తాకునట్లు ఈ ఘనమును ఉంచినపుడు ఆ స్థూపం నుండి బయటకి వచ్చే నీటి ఘనపరిమాణం కనుగొనుము. స్థూప వ్యాసార్ధం 6 సెం.మీ, ఎత్తు 18 సెం.మీ గా తీసుకొనుము.



5. ఒక గొట్టపు మాత్ర స్థూపాకారం పై రెండు అర్ధగోళములు బోర్లించినట్లున్నది. మొత్తము గొట్టపు మాత్ర పొడవు 12 మి.మీ మరియు వ్యాసము 3 మి.మీ అయిన ఆ మాత్రలో ఎంత ఔషధము నింపగలము?

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_7.indd 307 13-02-2023 18:33:42

6. ప్రక్క పటంలో చూపిన విధంగా భుజము 7 సెం.మీ గల ఒక ఘనాకారపు దిమ్మె పై అర్ధగోళమును బోర్లించబడియున్నది. అయిన ఆ ఘనము యొక్క ఉపరితల వైశాల్యమును కనుగొనుము.



7. క్రమ వృత్తాకార స్థూపములో r ప్రమాణాల వ్యాసార్ధము గల ఒక గోళము ఇమిడియున్న కింది వాటిని కనుగొనుము.

(i) గోళము యొక్క ఉపరితల వైశాల్యము

(ii) స్థూపము యొక్క ప్రక్కతల వైశాల్యము

(iii) (i) మరియు (ii) ల నుండి లభించిన వైశాల్యముల నిష్పత్తిని కనుగొనుము.

7.5 ఘనములు ఒక ఆకారము నుండి మరొక ఆకారములోనికి రూపాంతరము చెందిన దాని ఘనపరిమాణంలో మార్పుండదు.

మార్పిడి లేదా బదిలీ అనునది మన నిత్యజీవితంలో ఒక భాగమే. ఉదాహరణకు కంసాలి (బంగారు పనిచేయువాడు) బంగారు దిమ్మెను కరిగించి ఆభరణాలుగా చేయుట, ఒక పిల్లవాడు బంకమట్టితో విభిన్న రకాల బొమ్మలు చేయుట, కొయ్యదుంగలతో వడ్రంగి విభిన్న ఇంటిసామగ్రి చేయుట. అదేవిధంగానే ఘనములను అనేక ప్రయోజనాల కొరకు ఒక ఆకారము నుండి మరొక ఆకారములోకి మారుస్తుంటాము. ఈ విభాగము నందు మనము విభిన్న ఘనములను ఒక ఆకారము నుండి మరొక ఆకారములోకి మార్చిన దాని ఘనపరిమాణం మారదు అని కొన్ని సమస్యలను చేయడం ద్వారా తెలుసుకొందాము.

ఉదాహరణ 7.29 వ్యాసార్ధము 16 సెం.మీ గల ఒక లోహపు గోళమును కరిగించి వ్యాసార్ధము 2 సెం.మీగా గల చిన్న గోళములను ఎన్ని తయారుచేయవచ్చును?

సాధన చిన్న గోళముల సంఖ్య n అనుకొనుము.

r అనేది చిన్న గోళవ్యాసార్ధము R అనేది పెద్ద గోళ వ్యాసార్ధము అనుకొనుము.

ఇక్కడ, $R = 16$ సెం.మీ, $r = 2$ సెం.మీ

ఇపుడు, $n\times$(చిన్న గోళముల ఘనపరిమాణము) $=$ పెద్ద గోళము ఘనపరిమాణము

$$n\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$n\left(\frac{4}{3}\pi \times 2^3\right) = \frac{4}{3}\pi \times 16^3$$

$$8n = 4096 \Rightarrow n = 512$$

కావున 512 చిన్న గోళములు తయారుచేయవచ్చు.

ఉదాహరణ 7.30 బంకమన్నుతో చేయబడిన 24 సెం.మీ ఎత్తు గల ఒక శంఖువును ఒక పిల్లవాడు అదే వ్యాసార్ధముతో ఒక స్థూపముగా మార్చిన యెడల స్థూపము ఎత్తును కనుగొనుము.

సాధన : h_1 మరియు h_2 అనునవి క్రమముగా శంఖువు మరియు స్థూపముల ఎత్తు అనుకొనుము. r అనేది శంఖువు వ్యాసార్ధము అనుకొనుము.

ఇవ్వబడిన శంఖువు ఎత్తు $h_1 = 24$ సెం.మీ; శంఖువు మరియు స్థూప వ్యాసార్ధము $r = 6$ సెం.మీ

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_7.indd 308 13-02-2023 18:33:43

ఇక్కడ స్థూప ఘనపరిమాణము = శంఖువు ఘనపరిమాణము

$$\pi r^2 h_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 h_1$$

$$h_2 = \frac{1}{3}\times h_1 \quad \text{నుండి } h_2 = \frac{1}{3}\times 24 = 8$$

కావున స్థూపము ఎత్తు = 8 సెం.మీ

ఉదాహరణ 7.31 6 సెం.మీ భూవ్యాసార్ధము 15 సెం.మీ ఎత్తు కల్గిన ఒక క్రమ వృత్తాకార స్థూపాకృతి పాత్రలో నిండుగా ఐస్‌క్రీం యున్నది. దానిని 9 సెం.మీ ఎత్తు 3 సెం.మీ భూవ్యాసార్ధముగా కల్గిన శంఖువు ఆకార వస్తువు (కోన్)లో పై భాగము అర్ధగోళాకారంలో ఉండే విధంగా ఐస్‌క్రీంను నింపితే ఆ మొత్తం ఐస్‌క్రీంను నింపుటకు కావలసిన శంఖువుల సంఖ్య ఎంత?

సాధన h మరియు r అనునవి స్థూపము యొక్క ఎత్తు మరియు వ్యాసార్ధము అనుకొనిన

ఇవ్వబడినది, $h = 15$ సెం.మీ, $r = 6$ సెం.మీ

పాత్ర ఘనపరిమాణము $V = \pi r^2 h$ ఘన ప్రమాణాలు

$$= \frac{22}{7}\times 6\times 6\times 15$$

$r_1 = 3$ సెం.మీ,, $h_1 = 9$ సెం.మీ, అనునవి శంఖువు యొక్క వ్యాసార్ధము మరియు ఎత్తు అనుకొనిన

$r_1 = 3$ సెం.మీ, అనునది అర్ధగోళము యొక్క వ్యాసార్ధము

ఒక ఐస్‌క్రీమ్ కలిగిన శంఖువు యొక్క ఘనపరిమాణం = (శంఖువు ఘనపరిమాణము + అర్ధగోళము యొక్క ఘనపరిమాణము)

$$= \frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1 + \frac{2}{3}\pi r_1^3$$

$$= \frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times 3\times 3\times 9 + \frac{2}{3}\times\frac{22}{7}\times 3\times 3\times 3$$

$$= \frac{22}{7}\times 9(3+2) = \frac{22}{7}\times 45$$

$$\text{శంఖువుల సంఖ్య} = \frac{\text{స్థూపము యొక్క ఘనపరిమాణము}}{\text{ఒక ఐస్‌క్రీం కలిగిన శంఖువు ఘనపరిమాణము}}$$

$$\text{కావలసిన ఐస్‌క్రీం శంఖువుల సంఖ్య} = \frac{\frac{22}{7}\times 6\times 6\times 15}{\frac{22}{7}\times 45} = 12$$

కావున స్థూపాకార పాత్రలో ఉండే ఐస్‌క్రీంను ఖాళీచేయుటకు 12 ఐస్‌క్రీం శంఖువులు అవసరము.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_7.indd 309 13-02-2023 18:33:44

కృత్యము 5

ప్రక్క నున్న పటము ఒక స్థూపాకార పాత్రలో రెండు బంతులు ఇమిడియుండేదాన్ని సూచించున్నది. ఒక్క బంతి వ్యాసార్ధము 3 సెం.మీ అయిన కిందివాటిని కనుగొనుము.

(i) స్థూపము ఎత్తు

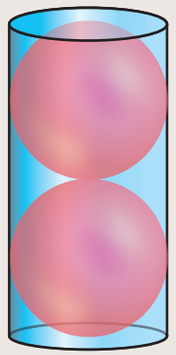
(ii) స్థూపము వ్యాసార్ధములు

(iii) స్థూపము ఘనపరిమాణము

(iv) రెండు బంతుల ఘనపరిమాణము

(v) రెండు బంతులు ఇమిడకుండా ఉండే స్థూపము ఘనపరిమాణము

(vi) స్థూపములో బంతులు ఆక్రమించిన ఘనపరిమాణ శాతము



పటం. 7.43

అభ్యాసము 7.4

1. 12 సెం.మీ వ్యాసార్ధముగా గల ఒక అల్యూమినియం గోళమును కరిగించి 8 సెం.మీ వ్యాసార్ధముగా గల స్థూపముగా తయారుచేసిన ఆ స్థూపము ఎత్తును కనుగొనుము.

2. వ్యాసము 14 సెం.మీ గల గొట్టము నుండి నీరు గంటకు 15 కి.మీ చొప్పున దీర్ఘచతురస్రాకార తొట్టిలోనికి నీరు ప్రవహించెను. దీర్ఘచతురస్రాకార తొట్టి పొడవు 50 మీ మరియు వెడల్పు 44 మీ అయిన తొట్టిలోని నీటి మట్టం 21 సెం.మీ పెరుగుటకు ఎన్ని గంటలు పట్టును.

3. ఒక శంఖాకారపు జాడీ నిండుగా నీరు కలదు. ఆ జాడీ భూ వ్యాసార్ధము r ప్రమాణాలు మరియు ఎత్తు h ప్రమాణాలు, ఆ జాడీలో గల నీటిని xr ప్రమాణాల వ్యాసార్ధము గల స్థూపాకార జాడీలో పోసిన స్థూపాకార జాడీలో పెరిగిన నీటి మట్టమును కనుగొనుము.

4. వ్యాసము 14 సెం.మీ, ఎత్తు 8 సెం.మీ గల క్రమవృత్తాకార శంఖువును కరిగించి బాహ్య వ్యాసము 10 సెం.మీ గల ఒక బోలు గోళమును తయారుచేసిన, ఆ గోళము యొక్క అంతర వ్యాసమును కనుగొనుము.

5. శీను ఇంటి మీద గల స్థూపాకార నీటి తొట్టె వ్యాసార్ధము 60 సెం.మీ మరియు ఎత్తు 105 సెం.మీ ఈ తొట్టెలోనికి 2 మీ × 1.5 మీ × 1 మీ కొలతలు గల దీర్ఘఘనాకార సంపు నుండి నీరు నింపబడును. సంపులో నీరు నిండుగా కలదని అనుకొనుము. ఇంటిపై భాగంలో గల తొట్టెలోనికి నీటిని నింపిన తరువాత సంపులో గల మిగిలిన నీటి ఘనపరిమాణమును కనుగొనుము.

6. ఒక బోలు అర్ధగోళము యొక్క అంతర మరియు బాహ్య వ్యాసములు 6 సెం.మీ మరియు 10 సెం.మీ. దీనిని కరిగించి 14 సెం.మీ వ్యాసం గల ఒక స్థూపముగా తయారుచేసిన స్థూపము ఎత్తును కనుగొనుము.

7. 6 సెం.మీ వ్యాసార్ధముగా గల ఒక ఘన గోళమును కరిగించి ఒకే మందము గల బోలు స్థూపాన్ని ఏర్పరచినారు. ఆ బోలు స్థూపము బాహ్య వ్యాసార్ధము 5 సెం.మీ మరియు ఎత్తు 32 సెం.మీ అయిన ఆ స్థూపము యొక్క మందమును కనుగొనుము.

8. ఒక అర్ధగోళాకారము పాత్ర అంచువరకు జ్యూస్ కలదు. ఆ జ్యూస్‌ను ఎత్తుకన్నా 50% ఎక్కువ వ్యాసార్ధం గల ఒక స్థూపాకార పాత్రలో పోయబడినది. ఆ స్థూపాకార పాత్ర వ్యాసము అర్ధగోళాకార వ్యాసము సమానంగా ఉండును. అయిన అర్ధగోళాకార పాత్ర నుండి స్థూపాకార పాత్రలోకి పోయబడిన జ్యూస్ శాతమెంత?

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_7.indd 310 13-02-2023 18:33:44

అభ్యాసము 7.5

TIN9V

బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు

1. క్రమ వృత్తాకార శంఖువు వ్యాసము 16 సెం.మీ మరియు ఎత్తు 15 సెం.మీ అయిన శంఖువు ప్రక్కతల వైశాల్యము

(A) 60π సెం.మీ^{2} (B) 68π సెం.మీ^{2} (C) 120π సెం.మీ^{2} (D) 136π సెం.మీ^{2}

2. రెండు ఘన అర్ధగోళముల సమాన వ్యాసార్ధములు r ప్రమాణాలు. ఆ రెండు అర్ధగోళముల అడుగు భాగములను ఒకదానినొకటి కలుపగా ఏర్పడు కొత్త ఘన వక్రతల వైశాల్యము

(A) $4\pi r^2$ చ. ప్రమాణాలు (B) $6\pi r^2$ చ. ప్రమాణాలు (C) $3\pi r^2$ చ. ప్రమాణాలు (D) $8\pi r^2$ చ. ప్రమాణాలు

3. వ్యాసార్ధము 5 సెం.మీ మరియు ఏటవాలు ఎత్తు 13 సెం.మీగా గల క్రమవృత్తాకార శంఖువు ఎత్తు

(A) 12 సెం.మీ (B) 10 సెం.మీ (C) 13 సెం.మీ (D) 5 సెం.మీ

4. ఒక క్రమ వృత్తాకార స్థూపము ఎత్తును మార్చకుండా దాని వ్యాసార్ధమును సగముగా చేసి కొత్త స్థూపమును తయారుచేయబడినది. అయితే క్రొత్తగా తయారుచేయబడిన స్థూపము, ముందున్న స్థూపము ఘనపరిమాణములు నిష్పత్తి

(A) 1:2 (B) 1:4 (C) 1:6 (D) 1:8

5. ఒక స్థూపము వ్యాసార్ధము ఎత్తునకు 3 లో ఒక వంతు అయిన సంపూర్ణతల వైశాల్యము

(A) $\frac{9\pi h^2}{8}$ చ. ప్రమాణాలు (B) $24\pi h^2$ చ. ప్రమాణాలు

(C) $\frac{8\pi h^2}{9}$ చ. ప్రమాణాలు (D) $\frac{56\pi h^2}{9}$ చ. ప్రమాణాలు

6. ఒక బోలు స్థూపము బాహ్య మరియు అంతర వ్యాసార్ధముల మొత్తం 14 సెం.మీ మరియు వెడల్పు 4 సెం.మీ, ఎత్తు 20 సెం.మీ అయిన ఘనపరిమాణము

(A) 5600π సెం.మీ^{3} (B) 11200π సెం.మీ^{3} (C) 56π సెం.మీ^{3} (D) 3600π సెం.మీ^{3}

7. శంఖువు యొక్క భూ వ్యాసార్ధము మూడు రెట్లుగాను మరియు ఎత్తు రెండు రెట్లుగా మారిన ఘనపరిమాణము ఎన్ని రెట్లుగా మారును?

(A) 6 రెట్లు అయిన (B) 18 రెట్లు అయిన (C) 12 రెట్లు అయిన (D) మార్పు ఉండదు

8. అర్ధగోళము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము వ్యాసార్ధమునకు ఎన్ని రెట్లు

(A) π (B) 4π (C) 3π (D) 2π

9. వ్యాసార్ధము x సెం.మీ గల ఒక ఘనగోళమును కరిగించి అదే వ్యాసార్ధము గల ఘన శంఖువును తయారుచేసిన శంఖువు ఎత్తు

(A) $3x$ సెం.మీ (B) x సెం.మీ (C) $4x$ సెం.మీ (D) $2x$ సెం.మీ

10. 16 సెం.మీ ఎత్తు గల ఒక క్రమ వృత్తాకార శంఖువు యొక్క శంఖుఖండము చివరి రెండు వ్యాసార్ధములు 8 సెం.మీ మరియు 20 సెం.మీ అయిన శంఖుఖండ ఘనపరిమాణము

(A) 3328π సెం.మీ^{3} (B) 3228π సెం.మీ^{3} (C) 3240π సెం.మీ^{3} (D) 3340π సెం.మీ^{3}

11. క్రింది వాటిలో ఏ రెండు ఆకారములను మిళితము చేసిన ఒక షటిల్‌కాక్ ఆకారము వచ్చును.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_7.indd 311 13-02-2023 18:33:46

(A) స్థూపము మరియు గోళము (B) అర్ధగోళము మరియు శంఖువు

(C) గోళము మరియు శంఖువు (D) శంఖ ఖండము మరియు అర్ధ గోళము

12. ఒక గోళాకార బంతి వ్యాసార్ధము r_1 ప్రమాణములు. దీనిని కరిగించి r_2 వ్యాసార్ధంతో సమాన గోళములు తయారు చేసిన $r_1 : r_2$ నిష్పత్తి

(A) 2:1 (B) 1:2 (C) 4:1 (D) 1:4

13. ఎత్తు 5 సెం.మీ మరియు భూ వ్యాసార్ధము 1 సెం.మీ గా గల స్థూపాకార కొయ్య దుంగ నుండి ఒక పెద్ద గోళమును కత్తరించిన ఆ గోళ ఘనపరిమాణము (సెం.మీ^{3} లలో)

(A) $\frac{4}{3}\pi$ (B) $\frac{10}{3}\pi$ (C) 5π (D) $\frac{20}{3}\pi$

14. శంఖు ఖండములోని శంఖువు భాగము యొక్క ఎత్తు మరియు వ్యాసార్ధము క్రమముగా h_1 ప్రమాణములు మరియు r_1 ప్రమాణాలు. శంఖు ఖండము ఎత్తు h_2 ప్రమాణాలు మరియు కనిష్ఠ భూవ్యాసార్ధము r_2 ప్రమాణాలు. $h_2 : h_1 = 1 : 2$ అయిన $r_2 : r_1$ విలువ

(A) 1 : 3 (B) 1 : 2 (C) 2 : 1 (D) 3 : 1

15. ఒకే వ్యాసము మరియు ఒకే ఎత్తు గల స్థూపము, శంఖువు మరియు గోళము ఘనపరిమాణముల నిష్పత్తి

(A) 1:2:3 (B) 2:1:3 (C) 1:3:2 (D) 3:1:2

అధ్యాయ అభ్యాసము - 7



1. ఒక పౌంటెన్ పెన్ బారెల్ స్థూపాకారంలో కలదు. దీని పొడవు 7 సెం.మీ మరియు వ్యాసము 5 మి.మీ. పెన్ బారెల్ నిండుగా సిరా ఉంటే సరాసరిగా 330 పదాలు వ్రాయవచ్చును. ఒక లీటరులో 5 లో ఒక భాగము సిరా ఒక సీసాలో ఉన్నట్లయితే, దానిని ఉపయోగించి ఎన్ని పదాలు వ్రాయవచ్చును.

2. వ్యాసార్ధము 1.75 మీ గల అర్ధగోళాకార తొట్టె నిండుగా నీరు కలదు. ఈ తొట్టెకు ఒక గొట్టము అనుసంధానం చేయబడినది. అనుసంధానం చేయబడిన గొట్టము ఒక సెకనుకు 7 లీటర్లు చొప్పున నీరు ఖాళీ చేయును. అయితే మొత్తము తొట్టెను ఖాళీ చేయుటకు పట్టుకాలమెంత?

3. వ్యాసార్ధము r ప్రమాణాలు గల ఘన అర్ధగోళము నుండి కత్తరించిన శంఖువు ఘనపరిమాణమును కనుగొనుము.

4. ఒక శంఖువు ఖండమును 10 సెం.మీ ఎత్తు గల ఒక స్థూపముతో కలుపబడినట్లున్న నూనె గరాటు మొత్తము ఎత్తు 22 సెం.మీ స్థూపము యొక్క వ్యాసము 8 సెం.మీ మరియు గరాటు పైభాగ వ్యాసము 18 సెం.మీ అయిన గరాటును తయారుచేయుటకు కావలసిన తగర రేకు వైశాల్యమును కనుగొనుము.

5. ఎత్తు 10 సెం.మీ మరియు వ్యాసము 4.5 సెం.మీ గల ఒక క్రమవృత్తాకార స్థూపము నుండి వ్యాసము 1.5 సెం.మీ మరియు మందం 2 మి.మీగా గల నాణెములు ఎన్ని తయారుచేయవచ్చును?

6. ఒక బోలు లోహస్థూపము యొక్క బాహ్య మరియు అంతర వ్యాసార్ధములు 4.3 సెం.మీ, 1.1 సెం.మీ మరియు ఎత్తు 4 సెం.మీ. దీనిని కరిగించి 12 సెం.మీ ఎత్తు గల స్థూపముగా చేసిన స్థూపము యొక్క వ్యాసమును కనుగొనుము.

7. ఒక శంఖు ఖండము యొక్క ఏటవాలు ఎత్తు 4 మీ చివరి వృత్తముల చుట్టుకొలతలు 18 మీ మరియు 16 మీ రంగువేయుటకు 1 చ.మీ కు ₹100 ఖర్చు అయిన శంఖు ఖండం వక్రతల వైశాల్యమునకు

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_7.indd 312 13-02-2023 18:33:47

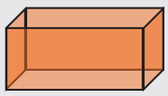
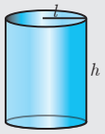
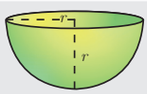
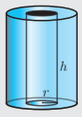
రంగువేయుటకు ఎంత ఖర్చగును.

8. ఘనపరిమాణము $\frac{436\pi}{3}$ ఘన సెం.మీ గా గల ఒక బోలు అర్ధగోళము యొక్క బాహ్య వ్యాసము 14 సెం.మీ అయిన ఆ అర్ధగోళ మందమును కనుగొనుము.

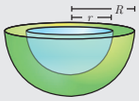
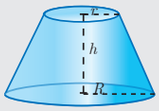
9. ఒక శంఖువు ఘనపరిమాణము $1005\frac{5}{7}$ ఘన సెం.మీ. భూ వైశాల్యము $201\frac{1}{7}$ చ.సెం.మీ. అయిన శంఖువు ఏటవాలు ఎత్తును కనుగొనుము.

10. వ్యాసార్ధము 21 సెం.మీ మరియు కేంద్రకోణము 216° గా గల వృత్తఖండ రూపంలో గల ఒక లోహపు రేకు కలదు. వృత్త ఖండమును మడిచినపుడు శంఖువుగా మారును. అయిన ఆ శంఖువు ఘనపరిమాణమును కనుగొనుము.

గుర్తించుకోవలసిన విషయాలు

ఘనము	పటము	వక్రతల వైశాల్యము/ ఉపరితల వైశాల్యము (చదరపు ప్రమాణాలు)	సంపూర్ణతల వైశాల్యము (చదరపు ప్రమాణాలు)	ఘనపరిమాణం (ఘనపు ప్రమాణాలు)
దీర్ఘఘనము		$2h(l+b)$	$2(lb+bh+lh)$	$l\times b\times h$
ఘనము		$4a^2$	$6a^2$	a^3
క్రమవృత్తాకార స్థూపము		$2\pi rh$	$2\pi r(h+r)$	πr^2h
క్రమవృత్తాకార శంఖువు		πrl $l=\sqrt{r^2+h^2}$ $l=$ ఏటవాలు ఎత్తు	$\pi rl+\pi r^2$ $=\pi r(l+r)$	$\frac{1}{3}\pi r^2h$
గోళము		$4\pi r^2$	$4\pi r^2$	$\frac{4}{3}\pi r^3$
అర్ధగోళము		$2\pi r^2$	$3\pi r^2$	$\frac{2}{3}\pi r^3$
బోలు స్థూపము		$2\pi(R+r)h$	$2\pi(R+r)$ $(R-r+h)$	$\pi(R^2-r^2)h$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_7.indd 313 13-02-2023 18:33:50

బోలు గోళము		$4\pi R^2$ = బాహ్య ఉపరితల వైశాల్యం	$4\pi\left(R^2+r^2\right)$	$\frac{4}{3}\pi\left(R^3-r^3\right)$
బోలు అర్ధగోళము		$2\pi\left(R^2+r^2\right)$	$\pi\left(3R^2+r^2\right)$	$\frac{2}{3}\pi\left(R^3-r^3\right)$
శంఖు ఖండము		$\pi\left(R+r\right)l$ ఇక్కడ $l=\sqrt{h^2+\left(R-r\right)^2}$	$\pi(R+r)l+\pi R^2$ $+\pi r^2$	$\frac{1}{3}\pi h\left[R^2+r^2+Rr\right]$

అంతర్జాల కృత్యము

ICT 7.1

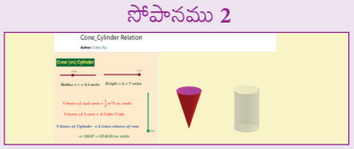
సోపానము 1: బ్రౌసర్‌ను ఓపెన్ చేసి క్రింద ఇచ్చిన URL లింకును టైపు చేయుము. లేక QR కోడ్‌ను స్కాన్ చేయుము. GeoGebra వర్క్‌బుక్ నందు "Mensuration _X" తెరువబడును. దానినుండి "Cone-Cylinder relation" అనే వర్క్‌షీట్‌ను ఎంపిక చేయుము.

సోపానము 2: ఇచ్చిన వర్క్‌షీటు నందు cone-Cylinder యొక్క వ్యాసార్ధమును, ఎత్తును slider ను ఎడమ వైపు కదుపుతూ మార్చుకొన వచ్చును.

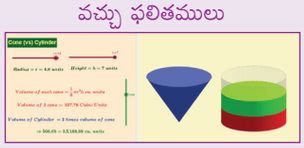
సోపానము 1



సోపానము 2



వచ్చు ఫలితములు

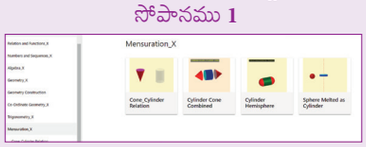


ICT 7.2

సోపానము 1: బ్రౌసర్‌ను ఓపెన్‌చేసి క్రింద ఇచ్చిన URL లింకును టైపు చేయుము లేదా QR కోడ్‌ను స్కాన్ చేయుము. GeoGebra వర్క్‌బుక్ నందు "Mensuration _X" నందు "Cylinder Hemispheres" అనునది ఓపెన్ అయితే దానిలోSelect అను వర్క్‌షీటును ఎంపిక చేయుము.

సోపానము 2: ఇచ్చిన వర్క్‌షీటు నందు Hemisphere-Cylinder యొక్క వ్యాసార్ధమును, sliders ను ఎడమ వైపు కదుపుతూ మార్చుకొన వచ్చును. sliders ను Attach/Detach వద్ద కదిపితే సంయుక్త ఘనములు ఏర్పడును. త్రిపరిమాణ బొమ్మల వైపు త్రిప్పితే వాటి ఘనములను చూడవచ్చు. ఎడమ వైపు అభ్యాసము చేయుటకు ఇవ్వబడును. ఆ సమస్యలను చేసి జవాబును సరిచూడుము.

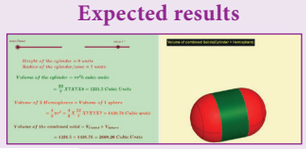
సోపానము 1



సోపానము 2



Expected results



You can repeat the same steps for other activities

https://www.geogebra.org/m/jfr2zzgy#chapter/356197

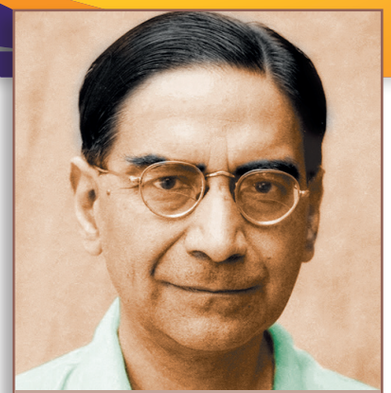
or Scan the QR Code.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_7.indd 314 13-02-2023 18:33:52

8

సాంఖ్యక శాస్త్రము మరియు సంభావ్యత

"జీవితమే ఒక సంభావ్యత యొక్క పాఠశాల" – వాల్టర్ బాగేట్.



Prasanta Chandra Mahalanobis

ప్రశాంతచంద్ర మహలానోబిన్ కలకత్తాలో జన్మించెను. ఇతను భారతీయ సాంఖ్యకశాస్త్రజ్ఞుడు. ఇతను రెండు దత్తాంశ సమితుల మధ్యగల పోలిక కొలతను రూపొందించెను. ఇతడు భారీ తరహా మాదిరి సర్వేలను చేయుట కొరకు విన్నూతనమైన సాంకేతిక పద్ధతులను పరిచయం చేసెను మరియు యాదృచ్ఛిక మాదిరి పద్ధతినుపయోగించి ఎకరాల విస్తీర్ణం మరియు పంట దిగుబడులను గణించెను. ఇతని నూతన పద్ధతుల ఆవిష్కరణ కొరకు భారతప్రభుత్వం 1968 వ సంవత్సరంలో భారత ప్రభుత్వ అత్యున్నత పురస్కారాలలో ఒకటైన పద్మభూషణ్ బిరుదుతో సత్కరించెను. ఇతను "భారతీయ సాంఖ్యకశాస్త్ర పితామహుడు"గా కీర్తింపబడెను. భారతప్రభుత్వం అతని పుట్టిన రోజైన జూన్ 29ని "జాతీయ సాంఖ్యకశాస్త్రదినం"గా పాటిస్తున్నది.

అభ్యసన ఫలితములు

- కేంద్రీయస్థాన విలువలను గుర్తుచేయుట.
- వర్గీకృత మరియు అవర్గీకృత దత్తాంశముల సగటుని గుర్తుచేసుకొనుట.
- విస్తరణ భావనను అర్థంచేసుకొనుట
- వ్యాప్తిని కనుగొనుట, క్రమవిచలనము, విస్తృతి మరియు విచలనగుణకమును అర్థంచేసుకొనుట.
- యాదృచ్ఛిక ప్రయోగములు, ప్రతిరూప ఆవరణ మరియు వృక్షచిత్రములను అర్థము చేసుకొనుట.
- యాదృచ్ఛిక ప్రయోగము యొక్క వివిధ ఘటనలను నిర్వచించుట.
- సంభావ్యత సంకలన సిద్ధాంతమును అర్థంచేసుకొనుట మరియు దానినుపయోగించి కొన్ని సమస్యలను పరిష్కరించుట.

8.1 పరిచయం

'STATISTICS' అను పదము లాటిన్ పదమైన 'status' నుండి గ్రహింపబడినది. దీనికి రాజకీయ స్థితి అని అర్థం. ప్రస్తుతం సాంఖ్యకశాస్త్రం ప్రతి ఒక్కరి జీవితంలో అంతర్భాగమైనది. ఇది మన భవిష్యత్తు ప్రణాళికలను రచించుటకు, వ్యాపారంచేయుటకు, క్రయ విక్రయ పరిశోధనలు ఆర్థిక నివేదకలందు అనివార్యమైనది. దీనిని ప్రజాభిప్రాయ సేకరణ, ఆధునిక పరిశోధనలయందు కూడా విస్తారంగా ఉపయోగిస్తారు. సాంఖ్యక శాస్త్రముపై అధ్యయనం శాస్త్రీయ పద్ధతుల సేకరణ, నిర్వహణ, సంగ్రహపరుచుట, ప్రదర్శించుట, దత్తాంశమును విశ్లేషించుట మరియు అర్థవంతమైన నిర్ణయములను తీసుకొనుట. ముందు తరగతులలో మనం దత్తాంశమును సేకరించుట, దత్తాంశమును పట్టిక రూపంలో, గ్రాఫు రూపంలో ప్రదర్శించుట మరియు కేంద్రీయ స్థానవిలువలను గణించుటను తెలుసుకొన్నాము. ఇప్పుడు మనం ఈ తరగతిలో విస్తరణ కొలతల గురించి చదువుకొందాం.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_8.indd 315 13-02-2023 19:17:31

పునఃశ్చరణ

కేంద్రీయ స్థానవిలువలు

మొత్తం దత్తాంశమును ఒక సంఖ్యచే సూచించడం అనునది మనకు చాలా అనుకూలంగా ఉంటుంది. అటువంటి సంఖ్యనే "కేంద్రీయ స్థానవిలువ" అంటారు.

కేంద్రీయ స్థానవిలువలు సాధారణంగా దత్తాంశములోని మధ్యవిలువకు దగ్గరగా ఉంటుంది. ఇవ్వబడిన దత్తాంశమునకు అనేకరకాలైన కేంద్రీయ స్థాన కొలతలు ఉంటాయి.

వాటిలో అధిక సామాన్యమైనవి

- అంకమధ్యమము
- మధ్యగతము
- బాహుళకము

మెదడుకు మేత

1. ఇవ్వబడిన దత్తాంశమునకు సగటు, మధ్యగతము, బాహుళకము ఒకటేగా ఉంటుంది?
2. అంకమధ్యమము మరియు సగటుకి మధ్యగల భేదమేమి?

సూచన

- **దత్తాంశము** : వాస్తవాలను సంఖ్యాత్మకంగా ప్రదర్శించుటనే దత్తాంశము అంటారు.
- **పరిశీలనాంశము లేదా రాశి** : దత్తాంశములో పొందుపరచిన ప్రతిదానిని రాశి అంటారు.
- **చలరాశి** : ఒక సర్వేయందు తీసుకొనబడిన పరిమాణములను చలరాశులంటారు. చలరాశులను సాధారణంగా x_iతో సూచిస్తారు. ఇక్కడ, $i=1,2,3,\ldots,n$.
- **పౌనఃపున్యాలు** : ఇవ్వబడిన దత్తాంశములో ఒక చలరాశి ఎన్ని సార్లు వచ్చినదో దానిని చలరాశి యొక్క పౌనఃపున్యమంటారు. పౌనఃపున్యాలను సాధారణంగా f_i తో సూచిస్తారు. ఇక్కడ $i=1,2,3,\ldots,n$.

ఈ తరగతిలో మనం అంకమధ్యమమును గుర్తుచేసుకొందాం.

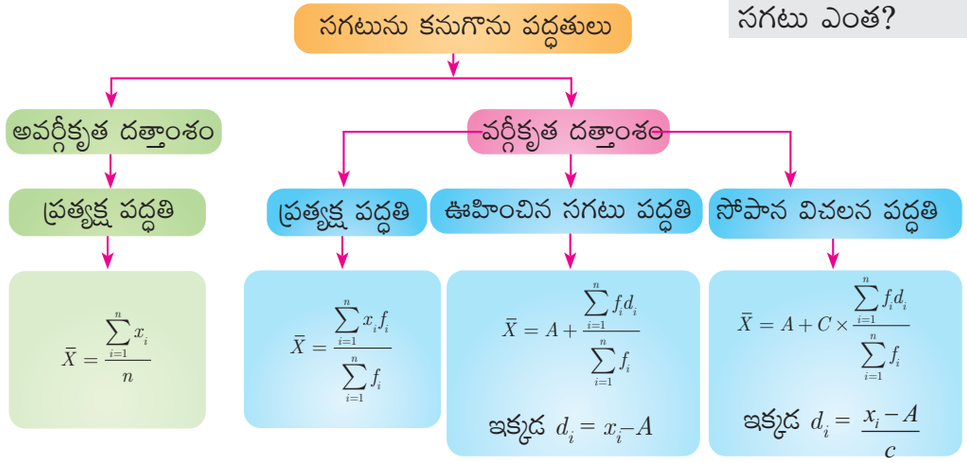
అంకమధ్యమము

అన్ని రాశుల యొక్క మొత్తాన్ని, మొత్తం రాశుల సంఖ్యచే భాగిస్తే ఇవ్వబడిన విలువల యొక్క అంకమధ్యమం లేదా సగటు వస్తుంది. దీనిని $\bar{x}$ (x బార్ అని పిలువవలెను) చే గుర్తిస్తారు.

$$\bar{x} = \frac{\text{రాశుల మొత్తం}}{\text{రాశుల సంఖ్య}}$$

మెదడుకు మేత

n రాశుల సగటు $\bar{x}$ మొదటి పదమునకి 1 ని కూడి రెండవ పదమునకు 2 ని కూడి ఇదేవిధంగా కొనసాగించిన ఏర్పడు క్రొత్త రాశుల యొక్క సగటు ఎంత?



లెక్కయందు ఇవ్వబడిన విషయమును ఆధారంగా చేసుకొని తగిన సూత్రమును ప్రయోగించవలెను.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_8.indd 316 13-02-2023 19:17:34

ప్రగతి శోధన

1. అన్ని పరిశీలనాంశముల మొత్తమును పరిశీలనాంశముల సంఖ్యచే భాగించినపుడు ఏర్పడునది _____.
2. 10 దత్తాంశ విలువల మొత్తం 265 అయిన వాటి సగటు _____.
3. దత్తాంశము యొక్క మొత్తం మరియు సగటులు వరుసగా 407 మరియు 11 అయిన దాత్తంశంలో గల రాశుల సంఖ్య _____.

8.2 విస్తరణ కొలతలు

క్రింది దత్తాంశము ఇద్దరు ఆటగాళ్ళు చివరి 10 క్రికెట్ పోటీలలో వారు సాధించిన పరుగులను తెలియజేయును.

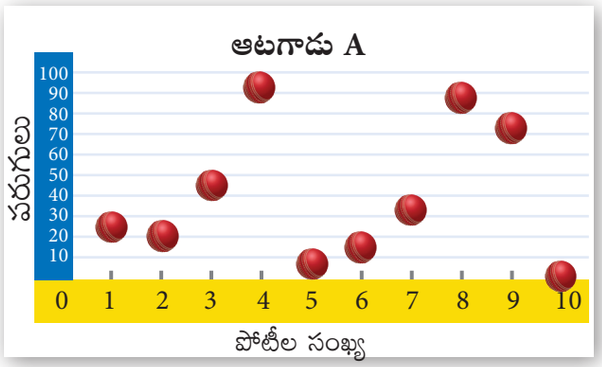
ఆటగాడు A: 25, 20, 45, 93, 8, 14, 32, 87, 72, 4

ఆటగాడు B: 33, 50, 47, 38, 45, 40, 36, 48, 37, 26

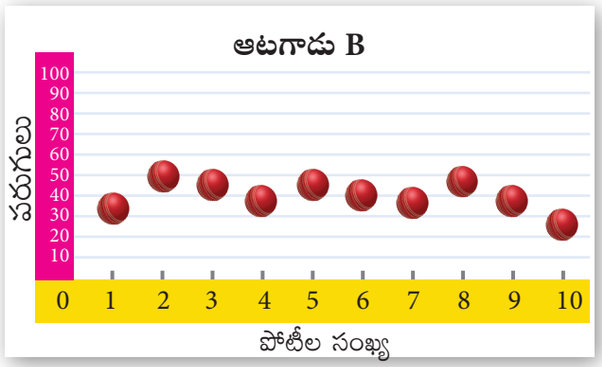
ఆటగాడు A యొక్క సగటు $= \frac{25+20+45+93+8+14+32+87+72+4}{10} = 40$

ఆటగాడు B యొక్క సగటు $= \frac{33+50+47+38+45+40+36+48+37+26}{10} = 40$

రెండు దత్తాంశముల సగటు (40) ఒక్కటే, కాని దత్తాంశములోని విలువలు వేర్వేరుగా ఉన్నవి.



పటం. 8.1(a)



పటం. 8.1(b)

పై చిత్రము నుండి, ఆటగాడు B చేసిన పరుగులు సగటుకి దగ్గరగా వర్గీకృతమై ఉన్నది. కాని ఆటగాడు A చేసిన పరుగులు 0 నుండి 100 కు మధ్య చెదిరియున్నది. కాని ఇద్దరి సగటు ఒక్కటిగానే ఉండుటను మనం గమనింపవచ్చును.

అందువలన దత్తాంశములో విలువలు ఏవిధంగా వ్యాప్తి చెందినదో నిర్ధారించుటకు మరికొంత సాంఖ్యక సమాచారం అవసరమగును. అందుకొరకు మనం విస్తరణ కొలతలను గురించి చర్చించెదము.

విస్తరణ అనునది ఒక కొలత అగును. ఇది రాశుల వ్యాప్తికి సంబంధించిన ఆలోచనలను తెలుపును.

విచలన కొలతలు లేదా దత్తాంశము విస్తరణ అనునది రాశులు ఏవిధంగా వ్యాప్తి చెందినది లేదా దత్తాంశము ద్వారా వెదజల్లబడినది వంటి ఆలోచనలను పెంపొందించును.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_8.indd 317 13-02-2023 19:17:35

విభిన్న విస్తరణ కొలతలు

1. వ్యాప్తి
2. విచలన సగటు
3. చతుర్థాంశక విచలనము
4. క్రమ విచలనము
5. విస్తృతి
6. విచలన గుణకము

8.2.1 వ్యాప్తి

గరిష్ఠ విలువ మరియు కనిష్ఠ విలువ గల రాశుల భేదమునే వ్యాప్తి అంటారు.

$$\text{వ్యాప్తి } R = L - S$$

$$\text{వ్యాప్తి గుణకము} = \frac{L-S}{L+S}$$

ఇచ్చట L - గరిష్ఠ విలువ; S - కనిష్ఠ విలువ

ప్రగతి శోధన

మొదటి 10 ప్రధానాంకముల వ్యాప్తి _____

ఉదాహరణ 8.1 ఇవ్వబడిన దత్తాంశమునకు వ్యాప్తి మరియు వ్యాప్తి గుణకమును కనుగొనండి: 25, 67, 48, 53, 18, 39, 44.

సాధన గరిష్ఠ విలువ $L = 67$; కనిష్ఠ విలువ $S = 18$

$$\text{వ్యాప్తి } R = L - S = 67 - 18 = 49$$

$$\text{వ్యాప్తి గుణకము} = \frac{L-S}{L+S}$$

$$\text{వ్యాప్తి గుణకము} = \frac{67-18}{67+18} = \frac{49}{85} = 0.576$$

ఉదాహరణ 8.2 క్రింది దత్తాంశమునకు వ్యాప్తిని కనుగొనండి.

వయస్సు (సంవత్సరాలలో)	16-18	18-20	20-22	22-24	24-26	26-28
విద్యార్థుల సంఖ్య	0	4	6	8	2	2

సాధన ఇక్కడ గరిష్ఠ విలువ $L = 28$

కనిష్ఠ విలువ $S = 18$

$$\text{వ్యాప్తి } R = L - S$$

$$R = 28 - 18 = 10 \text{ సంవత్సరాలు.}$$

సూచన

- వ్యాప్తిని గణించునపుడు మొదటి తరగతి పౌనఃపున్యం 0 అయితే తరువాత తరగతిని పరిగణనలోనికి తీసుకొనవలెను.

ఉదాహరణ 8.3 ఒక దత్తాంశ సమితి యొక్క వ్యాప్తి 13.67 మరియు గరిష్ఠ విలువ 70.08 అయిన కనిష్ఠ విలువను కనుగొనండి.

సాధన

$$\text{వ్యాప్తి } R = 13.67$$

$$\text{గరిష్ఠ విలువ } L = 70.08$$

$$\text{వ్యాప్తి } R = L - S$$

$$13.67 = 70.08 - S$$

$$S = 70.08 - 13.67 = 56.41$$

కావున కనిష్ఠ విలువ 56.41.

సూచన

- వ్యాప్తి ద్వారా కేంద్రీయ స్థాన విలువల నుండి దత్తాంశము యొక్క విస్తరణను ఖచ్చితంగా కనుగొనుటకు వీలుకాదు. కావున కేంద్రీయ స్థానవిలువల నుండి విస్తరణకు సంబంధించిన కొలత మనకు అవసరమగుచున్నది.

8.2.2 సగటు నుండి విచలనములు

n రాశులు(పరిశీలనాంశములు) $x_1, x_2, \ldots x_n$ లు గల దత్తాంశములో సగటు $\bar{x}$ నుండి కలిగే విచలనములు $x_1 - \bar{x},\ x_2 - \bar{x},\ x_n - \bar{x}$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_8.indd 318 13-02-2023 19:17:36

8.2.3 సగటు నుండి కలిగే విచలనముల వర్గములు

రాశులు $x_1, x_2, \ldots, x_n$ యొక్క సగటు $\bar{x}$ నుండి కలిగే విచలనముల యొక్క వర్గములు $(x_1-\bar{x})^2, (x_2-\bar{x})^2, \ldots, (x_n-\bar{x})^2$ లేదా $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ అవుతుంది.

సూచన

- అన్ని x_i, $i = 1,2,3,\ldots,n.$ రాశులకు $(x_i-\bar{x}) \geq 0$ సగటు $(x_i-\bar{x})$ నుండి కలిగే విచలనములు చిన్నవి అయిన విచలనముల వర్గములు చాలా చిన్నవి అవుతాయని గమనించుము..

8.2.4 విస్తృతి

సగటు నుండి కలిగే విచలనముల వర్గముల యొక్క సగటునే విస్తృతి అంటారు. విస్తృతిని σ^2 చే గుర్తిస్తారు. (సిగ్మా వర్గము అని చదువవలెను)

$$\text{విస్తృతి} = \text{విచలనముల వర్గముల సగటు}$$

$$= \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2}{n}$$

$$\text{విస్తృతి } \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}$$

మెదడుకు మేత

విస్తృతి ఋణాత్మకంగా ఉంటుందా?

8.2.5 క్రమవిచలనము

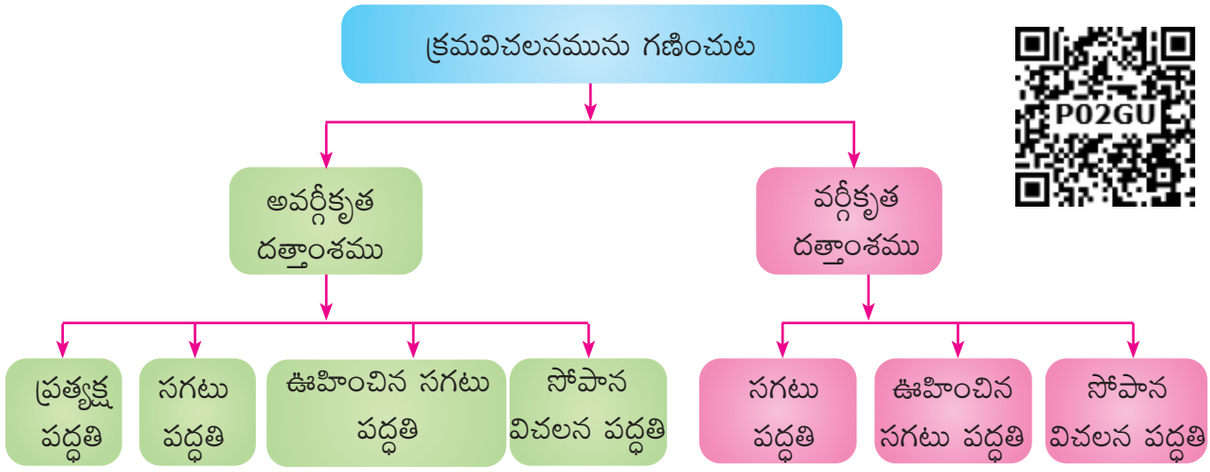
విస్తృతి యొక్క ధనాత్మక వర్గమూలమునే క్రమవిచలనము అందురు. ఇవ్వబడిన రాశుల(విలువల) సగటు నుండి కలిగే విచలనముల వర్గముల సగటు యొక్క ధనాత్మక వర్గమూలమే క్రమవిచలనము అవుతుంది. దీనిని σ చే గుర్తిస్తారు.

రాశుల విలువలు సగటు నుండి ఎంత దూరంలో వ్యాపించినవి లేదా విచలనం చెందినదనే స్పష్టమైన ఆలోచనను క్రమవిచలనము తెలియజేయును.

$$\text{క్రమవిచలనము } \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}}$$

మీకు తెలుసా?

"క్రమవిచలనము అనుపదమును ఉపయోగించిన మొదటి వ్యక్తి 'కార్ల్‌పర్సన్'. జర్మనీ గణితశాస్త్రజ్ఞుడు గాస్ 'సగటు దోషము" అను పదమును ఉపయోగించెను.



P02GU

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_8.indd 319 13-02-2023 19:17:38

అవర్గీకృత దత్తాంశమునకు క్రమవిచలనమును గణించుట

(i) ప్రత్యక్ష పద్ధతి

$$\text{క్రమవిచలనము } \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - 2\bar{x}\frac{\Sigma x_i}{n} + \frac{\bar{x}^2}{n} \times \left(1+1+\cdots to\ n \text{ సార్లు}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - 2\bar{x}\times\bar{x} + \frac{\bar{x}^2}{n}\times n} = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \bar{x}^2}$$

క్రమవిచలనము, $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2}$

సూచన

- ఇవ్వబడిన దత్తాంశమునకు అనుగుణంగా క్రమవిచలనము మరియు అంకమధ్యమము ఒకే ప్రమాణాలను కలిగియుండును.

సూచన

- క్రమవిచలనమును గణించునపుడు దత్తాంశమును ఆరోహణ క్రమంలో అమర్చవలెను అనేది తప్పనిసరికాదు.
- దత్తాంశ విలువలను ప్రత్యక్షంగా ఇచ్చినప్పుడు క్రమవిచలనమును కనుగొనుటకు మనం ఉపయోగించవలసిన సూత్రం $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2}$
- దత్తాంశ విలువలను ప్రత్యక్షంగా ఇవ్వకుండా ప్రతి రాశి యొక్క అంకమధ్యమము నుండి విచలనముల వర్గములు ఇవ్వబడినపుడు క్రమవిచలనమును కనుగొనుటకు మనం ఉపయోగించవలసిన సూత్రం $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma\left(x_i-\bar{x}\right)^2}{n}}$.

ఉదాహరణ 8.4 ఒక వారంలో ప్రతిరోజు అమ్మబడిన దూరదర్శినిల సంఖ్య 13, 8, 4, 9, 7, 12, 10. క్రమవిచలనము కనుగొనండి.

సాధన

x_i	x_i^2
13	169
8	64
4	16
9	81
7	49
12	144
10	100
$\Sigma x_i = 63$	$\Sigma x_i^2 = 623$

క్రమవిచలనము

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{623}{7} - \left(\frac{63}{7}\right)^2}$$

$$= \sqrt{89-81} = \sqrt{8}$$

నుండి, $\sigma \simeq 2.83$

మెదడుకు మేత

క్రమవిచలనము విస్తృతి కన్నా అధికంగా ఉంటుందా?

ప్రగతి శోధన

విస్తృతి 0.49 అయిన క్రమవిచలనము _____.

(ii) అంకమధ్యమ పద్ధతి లేదా సగటు పద్ధతి

క్రమవిచలనమును కనుగొనుటకు మరొక సౌకర్యవంతమైన పద్ధతి క్రింది సూత్రమును ఉపయోగించుట అవుతుంది.

$$\text{క్రమవిచలనము (అంకమధ్యమ పద్ధతి) } \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}{n}}$$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_8.indd 320 13-02-2023 19:17:40

$d_i = x_i - \bar{x}$ విచలనములయిన $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d_i^2}{n}}$

ఉదాహరణ 8.5 ఒక నిర్దిష్టమైన కాలమునందు 6 రోజులలో నమోదైన వర్షపాతము 17.8 సెం.మీ, 19.2 సెం.మీ, 16.3 సెం.మీ, 12.5 సెం.మీ, 12.8 సెం.మీ మరియు 11.4 సెం.మీ అని ఇవ్వబడినది. క్రమవిచలనము కనుగొనండి.

సాధన ఇవ్వబడిన సంఖ్యలను ఆరోహణక్రమంలో రాయుము 11.4, 12.5, 12.8, 16.3, 17.8, 19.2.

రాశుల సంఖ్య $n = 6$

అంకమధ్యమము $= \frac{11.4 + 12.5 + 12.8 + 16.3 + 17.8 + 19.2}{6} = \frac{90}{6} = 15$

x_i	$d_i = x_i - \bar{x}$ $= x - 15$	d_i^2
11.4	−3.6	12.96
12.5	−2.5	6.25
12.8	−2.2	4.84
16.3	1.3	1.69
17.8	2.8	7.84
19.2	4.2	17.64
		$\Sigma d_i^2 = 51.22$

క్రమవిచలనము $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d_i^2}{n}}$

$= \sqrt{\frac{51.22}{6}} = \sqrt{8.53}$

దీని నుండి, $\sigma \simeq 2.9$

(iii) ఊహించిన అంకమధ్యమ పద్ధతి

అంకమధ్యమము విలువ పూర్ణసంఖ్య కానప్పుడు (దత్తాంశ రూపంలో గణన చేయుటు విసుగు పుట్టించును కావున) ఊహించిన అంకమధ్యమ పద్ధతిని ఉపయోగించి క్రమవిచలనమును కనుగొనుట ఉత్తమమైనది.

ఇవ్వబడిన దత్తాంశం యొక్క విలువలు $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ అనుకొనుము. దాని యొక్క సగటు $\bar{x}$ అనుకొనండి.

ఊహించిన అంకమధ్యమము A నుండి x_i యొక్క విచలనమును d_i అనుకొనుము. ఇది సాధారణంగా ఇవ్వబడిన దత్తాంశము యొక్క మధ్యవిలువగా ఉంటుంది. లేదా మధ్యవిలువకు దగ్గరగా ఉంటుంది.

$$d_i = x_i - A \text{ నుండి, } x_i = d_i + A \quad \ldots(1)$$

$$\Sigma d_i = \Sigma(x_i - A)$$

$$= \Sigma x_i - (A + A + A + \cdots n \text{ సార్లు})$$

$$\Sigma d_i = \Sigma x_i - A \times n$$

$$\frac{\Sigma d_i}{n} = \frac{\Sigma x_i}{n} - A$$

$$\bar{d} = \bar{x} - A \text{ (లేదా) } \quad \bar{x} = \bar{d} + A \quad \ldots(2)$$

ఇప్పుడు క్రమవిచలనము

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\Sigma(d_i + A - \bar{d} - A)^2}{n}} \quad ((1) \text{ మరియు } (2) \text{ ల నుండి})$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma(d_i - \bar{d})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\Sigma(d_i^2 - 2d_i \times \bar{d} + \bar{d}^2)}{n}}$$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_8.indd 321 13-02-2023 19:17:43

$$= \sqrt{\frac{\Sigma d_i^2}{n} - 2\bar{d}\frac{\Sigma d_i}{n} + \frac{\bar{d}^2}{n}\,(1+1+1+\cdots n \text{ సార్లు})}$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma d_i^2}{n} - 2\bar{d}\times\bar{d} + \frac{\bar{d}^2}{n}\times n} \qquad (\bar{d} \text{ అనుది స్థిరాంకము నుండి})$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma d_i^2}{n} - \bar{d}^2}$$

క్రమవిచలనము $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d_i}{n}\right)^2}$

మెదడుకు మేత

ఏవైనా సేకరింపబడిన n విలువలకు, క్రిందివాని విలువలను కనుగొనండి.

(i) $\Sigma(x_i - \bar{x})$ (ii) $(\Sigma x_i) - \bar{x}$

ఉదాహరణ 8.6 ఒక తరగతి పరీక్షలో 10 మంది విద్యార్థులు పొందిన మార్కులు 25, 29, 30, 33, 35, 37, 38, 40, 44, 48. అయిన క్రమవిచలనము కనుగొనండి.

సాధన మార్కుల సగటు 35.9 ఇది పూర్ణసంఖ్య కాదు. కావున మనం ఊహించిన సగటు $A = 35$ తీసుకొంటాం $n = 10$.

x_i	$d_i = x_i - A$ $d_i = x_i - 35$	d_i^2
25	−10	100
29	−6	36
30	−5	25
33	−2	4
35	0	0
37	2	4
38	3	9
40	5	25
44	9	81
48	13	169
	$\Sigma d_i = 9$	$\Sigma d_i^2 = 453$

క్రమవిచలనము

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d_i}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{453}{10} - \left(\frac{9}{10}\right)^2}$$

$$= \sqrt{45.3 - 0.81}$$

$$= \sqrt{44.49}$$

$$\sigma \simeq 6.67$$

(ii) సోపాన విచలన పద్ధతి

ఇవ్వబడిన దత్తాంశం $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$.అనుకొనండి. A ని ఊహించిన సగటు అనుకొనుము. c ను $x_i - A$ యొక్క సామాన్యభాజకం అనుకొనండి.

$$d_i = \frac{x_i - A}{c} \quad \text{అనుకొనుము.}$$

అయిన $x_i = d_i c + A \qquad \ldots(1)$

$$\Sigma x_i = \Sigma\left(d_i c + A\right) = c\Sigma d_i + A\times n$$

$$\frac{\Sigma x_i}{n} = c\frac{\Sigma d_i}{n} + A$$

$$\bar{x} = c\bar{d} + A \qquad \ldots(2)$$

$$x_i - \bar{x} = cd_i + A - c\bar{d} - A = c(d_i - \bar{d}) \quad ((1) \text{ మరియు } (2) \text{ ల నుండి})$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\Sigma(c(d_i - \bar{d}))^2}{n}} = \sqrt{\frac{c^2\Sigma(d_i - \bar{d})^2}{n}}$$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_8.indd 322 13-02-2023 19:17:46

$$\sigma = c \times \sqrt{\frac{\Sigma d_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d_i}{n}\right)^2}$$

సూచన

➢ క్రమవిచలనమును కనుగొనుటకు పై పద్ధతులలో దేనినైనా ఉపయోగించవచ్చును.

కృత్యము 1

నీవు త్రైమాసిక మరియు మాధ్యమిక పరీక్షలయందు ఐదు పాఠ్యాంశములలో పొందిన మార్కులకు క్రమవిచలనమును వేర్వేరుగా కనుగొనుము. మీ ఫలితముల నుండి మీరేమి పరిశీలించితిరి?

ఉదాహరణ 8.7 పాఠశాల నుండి ఒకరోజు విహారయాత్రకు వెళ్ళిన విద్యార్థులు తినుబండారాలను కొనుటకు గాను చేసిన ఖర్చులు 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40. సోపాన విచలన పద్ధతిని ఉపయోగించి విద్యార్థులు చేసిన ఖర్చు యొక్క క్రమవిచలనము కనుగొనండి.

సాధన అన్ని రాశులు 5 చే భాగింపబడుటను మనం గమనింపవచ్చు. కావున మనం సోపాన విచలన పద్ధతిని ఉపయోగించవలెను. ఊహించిన సగటు $A = 20$ అనుకొనుము $n = 8$.

x_i	$d_i = x_i - A$ $d_i = x_i - 20$	$d_i = \frac{x_i - A}{c}$ $c = 5$	d_i^2
5	−15	−3	9
10	−10	−2	4
15	−5	−1	1
20	0	0	0
25	5	1	1
30	10	2	4
35	15	3	9
40	20	4	16
		$\Sigma d_i = 4$	$\Sigma d_i^2 = 44$

క్రమవిచలనము

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d_i}{n}\right)^2} \times c$$

$$= \sqrt{\frac{44}{8} - \left(\frac{4}{8}\right)^2} \times 5 = \sqrt{\frac{11}{2} - \frac{1}{4}} \times 5$$

$$= \sqrt{5.5 - 0.25} \times 5 = 2.29 \times 5$$

$$\sigma \simeq 11.45$$

ఉదాహరణ 8.8 దత్తాంశము 7, 4, 8, 10, 11. లకు క్రమవిచలనమును కనుగొనండి. ప్రతి విలువకు 3 ని కూడగా వచ్చు క్రొత్త విలువలకు క్రమవిచలనమును కనుగొనండి.

సాధన అన్ని విలువలను ఆరోహణక్రమంలో రాసిన, 4, 7, 8, 10, 11. ఇక్కడ $n = 5$

x_i	x_i^2
4	16
7	49
8	64
10	100
11	121
$\Sigma x_i = 40$	$\Sigma x_i^2 = 350$

క్రమవిచలనము

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{350}{5} - \left(\frac{40}{5}\right)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{6} \simeq 2.45$$

ప్రతి విలువకి 3 ని కూడగా, మనకు లభించు క్రొత్త విలువలు 7,10,11,13,14.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_8.indd 323 13-02-2023 19:17:48

x_i	x_i^2
7	9
10	100
11	121
13	169
14	196
$\Sigma x_i = 55$	$\Sigma x_i^2 = 635$

క్రమవిచలనము

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{635}{5} - \left(\frac{55}{5}\right)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{6} \simeq 2.45$$

దత్తాంశములోని అన్ని విలువలకు ఏదైనా ఒక స్థిరాంకమును కూడుట వలన క్రమవిచలనములో ఏ మార్పు ఏర్పడదని తెలుస్తున్నది.

ఉదాహరణ 8.9 దత్తాంశము 2, 3, 5, 7, 8. లకు క్రమవిచలనమును కనుగొనండి. ప్రతిరాశిని 4 చే గుణించగా ఏర్పడు క్రొత్త దత్తాంశమునకు క్రమవిచలనము కనుగొనుము.

సాధన ఇవ్వబడినది, $n = 5$

x_i	x_i^2
2	49
3	9
5	25
7	49
8	64
$\Sigma x_i = 25$	$\Sigma x_i^2 = 151$

క్రమవిచలనము

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{151}{5} - \left(\frac{25}{5}\right)^2} = \sqrt{30.2 - 25} = \sqrt{5.2} \simeq 2.28$$

ప్రతి రాశిని 4 చే గుణించగా ఏర్పడు కొత్త రాశుల విలువలు 8, 12, 20, 28, 32.

x_i	x_i^2
8	64
12	144
20	400
28	784
32	1024
$\Sigma x_i = 100$	$\Sigma x_i^2 = 2416$

క్రమవిచలనము

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{2416}{5} - \left(\frac{100}{5}\right)^2} = \sqrt{483.2 - 400} = \sqrt{83.2}$$

$$\sigma = \sqrt{16 \times 5.2} = 4\sqrt{5.2} \simeq 9.12$$

దత్తాంశములోని అన్ని రాశులను 4 చే గుణించినపుడు క్రమవిచలనము కూడా 4 చే గుణించబడినది.

ఉదాహరణ 8.10 మొదటి n సహజసంఖ్యల అంకమధ్యమము మరియు విస్తృతి కనుగొనండి.

సాధన అంకమధ్యమము $\bar{x} = \dfrac{\text{రాశుల మొత్తము}}{\text{రాశుల సంఖ్య}}$

$$= \frac{\Sigma x_i}{n} = \frac{1 + 2 + 3 + \ldots + n}{n} = \frac{n(n+1)}{2 \times n}$$

అంకమధ్యమము $\bar{x} = \dfrac{n+1}{2}$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_8.indd 324 13-02-2023 19:17:50

$$\text{విస్తృతి} \quad \sigma^2 = \frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2 \left[\begin{matrix}\Sigma x_i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 \\ (\Sigma x_i)^2 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2\end{matrix}\right]$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6 \times n} - \left[\frac{n(n+1)}{2 \times n}\right]^2$$

$$= \frac{2n^2 + 3n + 1}{6} - \frac{n^2 + 2n + 1}{4}$$

$$\text{విస్తృతి} \quad \sigma^2 = \frac{4n^2 + 6n + 2 - 3n^2 - 6n - 3}{12} = \frac{n^2 - 1}{12}.$$

వర్గీకృత దత్తాంశమునకు క్రమవిచలనమును గణించుట

(i) అంకమధ్యమ పద్ధతి

క్రమవిచలనము $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_i (x_i - \bar{x})^2}{N}}$

$d_i = x_i - \bar{x}$ అనుకొనండి.

$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_i d_i^2}{N}}$, ఇక్కడ $N = \sum_{i=1}^{n} f_i$

(f_i అనునది దత్తాంశ బిందువులు x_i కి అనురూపముగా గల పౌనఃపున్య విలువలు అగును)

ఉదాహరణ 8.11 48 మంది విద్యార్థులను ఒక వారంలో దూరదర్శినిని వీక్షించుటకు ఎన్ని గంటలను కేటాయిస్తారో రా యమని అడిగెను. ఈ సమాచారము నుండి దూరదర్శినిని వీక్షించుటకు కేటాయించిన గంటల క్రమవిచలనమును కనుగొనండి.

x	6	7	8	9	10	11	12
f	3	6	9	13	8	5	4

సాధన

x_i	f_i	$x_i f_i$	$d_i = x_i - \bar{x}$	d_i^2	$f_i d_i^2$
6	3	18	−3	9	27
7	6	42	−2	4	24
8	9	72	−1	1	9
9	13	117	0	0	0
10	8	80	1	1	8
11	5	55	2	4	20
12	4	48	3	9	36
	$N = 48$	$\Sigma x_i f_i = 432$	$\Sigma d_i = 0$		$\Sigma f_i d_i^2 = 124$

అంకమధ్యమము

$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i f_i}{N} = \frac{432}{48} = 9$

క్రమవిచలనము $N = \sum f_i$ నుండి

$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_i d_i^2}{N}} = \sqrt{\frac{124}{48}} = \sqrt{2.58}$

$\sigma \simeq 1.6$

(ii) ఊహించిన సగటు పద్ధతి

ఇవ్వబడిన దత్తాంశము $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ మరియు వాటి పౌనఃపున్యాలు వరుసగా $f_1, f_2, f_3, \ldots f_n$ అనుకొనుము. వాటి అంకమధ్యమము (సగటు) $\bar{x}$ మరియు ఊహించిన అంకమధ్యము (సగటు) A అని అనుకొనుము.

$$d_i = x_i - A$$

క్రమవిచలనము, $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_i d_i^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_i d_i}{N}\right)^2}$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_8.indd 325 13-02-2023 19:17:53

ఉదాహరణ 8.12 ఒక స్లిప్ టెస్ట్‌లో విద్యార్థులు పొందిన మార్కులు క్రింద ఇవ్వబడినది.

x	4	6	8	10	12
f	7	3	5	9	5

వారి మార్కుల క్రమవిచలనము కనుగొనండి.

సాధన ఊహించిన అంకమధ్యమము $A = 8$ అనుకొనుము.

x_i	f_i	$d_i = x_i - A$	$f_i d_i$	$f_i d_i^2$
4	7	−4	−28	112
6	3	−2	−6	12
8	5	0	0	0
10	9	2	18	36
12	5	4	20	80
	$N = 29$		$\Sigma f_i d_i = 4$	$\Sigma f_i d_i^2 = 240$

క్రమవిచలనము

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_i d_i^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_i d_i}{N}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{240}{29} - \left(\frac{4}{29}\right)^2} = \sqrt{\frac{240 \times 29 - 16}{29 \times 29}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{6944}{29 \times 29}} \; ; \quad \sigma \simeq 2.87$$

నిరంతర పౌనఃపున్య విభాజనమునకు క్రమవిచలనమును గుణించుట

(i) అంకమధ్యమ పద్ధతి

క్రమవిచలనము $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_i \left(x_i - \overline{x}\right)^2}{N}}$ ఇచ్చట $x_i =$ i తరగతి యొక్క మధ్యవిలువ

$f_i = i$ తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యం

(ii) సులభ పద్ధతి (లేదా) సోపాన విచలన పద్ధతి

గణనమును సులభతరం చేయుటకు మనం క్రింది సూత్రమును ఉపయోగించవచ్చును. ఊహించిన అంకమధ్యమమును (సగటుని) A, i తరగతి యొక్క మధ్యవిలువను x_i మరియు తరగతి అంతరం యొక్క వెడల్పును c అని అనుకొనండి.

$$d_i = \frac{x_i - A}{c} \text{ అనుకొనుము.}$$

$$\sigma = c \times \sqrt{\frac{\Sigma f_i d_i^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_i d_i}{N}\right)^2}$$

ఉదాహరణ 8.13 ఒక పాఠ్యాంశంలో విద్యార్థులు పొందిన మార్కులు క్రింద ఇవ్వబడినది. దాని క్రమవిచలనము కనుగొనండి.

మార్కులు	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
విద్యార్థుల సంఖ్య	8	12	17	14	9	7	4

సాధన ఊహించిన అంకమధ్యమము $A = 35$ గా అనుకొనుము. $c = 10$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_8.indd 326 13-02-2023 19:17:55

మార్కులు	మధ్య విలువ (x_i)	f_i	$d_i = x_i - A$	$d_i = \frac{x_i - A}{c}$	$f_i d_i$	$f_i d_i^2$
0-10	5	8	-30	−3	−24	72
10-20	15	12	-20	−2	−24	48
20-30	25	17	-10	−1	−17	17
30-40	35	14	0	0	0	0
40-50	45	9	10	1	9	9
50-60	55	7	20	2	14	28
60-70	65	4	30	3	12	36
		$N = 71$			$\Sigma f_i d_i = -30$	$\Sigma f_i d_i^2 = 210$

క్రమవిచలనము $\sigma = c \times \sqrt{\frac{\Sigma f_i d_i^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_i d_i}{N}\right)^2}$

$$\sigma = 10 \times \sqrt{\frac{210}{71} - \left(-\frac{30}{71}\right)^2} = 10 \times \sqrt{\frac{210}{71} - \frac{900}{5041}}$$

$$= 10 \times \sqrt{2.779} \; ; \quad \sigma \simeq 16.67$$

మెదడుకు మేత

1. దత్తాంశము యొక్క క్రమవిచలనము 2.8, దత్తాంశములోని అన్ని రాశులకు 5 ని కూడగా లభించు క్రొత్త క్రమవిచలనము ___.
2. రాశులు p, q, r ల యొక్క క్రమవిచలనము S అయిన $p-3$, $q-3$, $r-3$ ల క్రమవిచలనము ___.

ఉదాహరణ 8.14 15 పరిశీలనాంశముల (రాశుల) అంకమధ్యమము మరియు క్రమవిచలనములు వరుసగా 10 మరియు 5 అని కనుగొనబడినది. వాటిని మరలా తనిఖీ చేసినపుడు ఒక పరిశీలనాంశము విలువ 8 తప్పుని తెలిసినది. ఆ పరిశీలనాంశము సరైన విలువ 23 అయిన సరైన అంకమధ్యమము మరియు క్రమవిచలనము కనుగొనుము.

సాధన $n = 15$, $\bar{x} = 10$, $\sigma = 5$; $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$; $\Sigma x = 15 \times 10 = 150$

తప్పైన పరిశీలనాంశ విలువ $= 8$, సరియైన పరిశీలనాంశ విలువ $= 23$.

సరియైన మొత్తము $= 150 - 8 + 23 = 165$

సరియైన అంకమధ్యమము $\bar{x} = \frac{165}{15} = 11$

క్రమవిచలనము $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2}$

తప్పైన విలువగల క్రమవిచలనము $\sigma = 5 = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{15} - (10)^2}$

$25 = \frac{\Sigma x^2}{15} - 100$ నుండి, $\frac{\Sigma x^2}{15} = 125$

తప్పైన విలువ గల $\Sigma x^2 = 1875$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_8.indd 327 13-02-2023 19:17:57

సరియైన విలువ గల $\Sigma x^2 = 1875 - 8^2 + 23^2 = 2340$

సరియైన క్రమవిచలనము $\sigma = \sqrt{\frac{2340}{15} - \left(11\right)^2}$

$\sigma = \sqrt{156 - 121} = \sqrt{35} \quad \sigma \simeq 5.9$



అభ్యాసము 8.1

1. క్రింది దత్తాంశమునకు వ్యాప్తి మరియు వ్యాప్తి గుణకమును కనుగొనండి.
   (i) 63, 89, 98, 125, 79, 108, 117, 68
   (ii) 43.5, 13.6, 18.9, 38.4, 61.4, 29.8
2. ఒక దత్తాంశ సమితి యొక్క వ్యాప్తి మరియు కనిష్ఠ విలువలు వరుసగా 36.8 మరియు 13.4 అయిన గరిష్ఠ విలువను కనుగొనండి.
3. క్రింది దత్తాంశమునకు వ్యాప్తిని కనుగొనండి.

ఆదాయం	400-450	450-500	500-550	550-600	600-650
పనివారి సంఖ్య	8	12	30	21	6

4. ఒక ఉపాధ్యాయుడు విద్యార్థులను 60 పుటలు గల రికార్డు పుస్తకమును పూర్తిచేయమని చెప్పెను. 8 మంది విద్యార్థులు 32, 35, 37, 30, 33, 36, 35 మరియు 37 పుటలను మాత్రమే పూర్తిచేసిరి. అయిన వారిచే పూర్తిచేసిన పుటల క్రమవిచలనమును కనుగొనండి.
5. 9 మంది పనివారి కూలీని క్రింద ఇవ్వబడింది. దాని విస్తృతి మరియు క్రమవిచలనమును కనుగొనండి. ₹310, ₹290, ₹320, ₹280, ₹300, ₹290, ₹320, ₹310, ₹280.
6. ఒక గోడ గడియారము 1 గంటకి ఒకసారి, 2 గంటలకు రెండుసార్లు, 3 గంటలకు 3 సార్లు అను క్రమంలో మ్రోగిన ఒక రోజులో గంట ఎన్నిసార్లు మ్రోగును? ఒక రోజులో గంట మ్రోగిన క్రమమునకు క్రమవిచలనము కనుగొనండి.
7. మొదటి 21 సహజసంఖ్యల క్రమవిచలనమును కనుగొనండి.
8. ఒక దత్తాంశం యొక్క క్రమవిచలనము 4.5, దత్తాంశంలోని ప్రతిరాశి నుండి 5 ని తీసివేసి క్రొత్త క్రమవిచలనమును కనుగొనండి.
9. ఒక దత్తాంశం యొక్క క్రమవిచలనము 3.6, దత్తాంశంలోని ప్రతిరాశిని (విలువను) 3 చే భాగించగా ఏర్పడు దత్తాంశమునకు క్రొత్త విస్తృతి మరియు క్రొత్త క్రమవిచలనము కనుగొనండి.
10. ఒక వారములో ఐదు జిల్లాలో వివిధ ప్రాంతములయందు నమోదైన వర్షపాతము క్రింద ఇవ్వబడినది. దాని క్రమవిచలనము కనుక్కోండి.

వర్షపాతం (మి.మీలలో)	45	50	55	60	65	70
ప్రాంతముల సంఖ్య	5	13	4	9	5	4

11. వైరస్ జ్వరము గురించి జరిపిన అధ్యయములో ఒక నగరమునందు దానికి ప్రభావితం చెందిన వారి సంఖ్యను క్రింద ఇవ్వబడినది. దాని క్రమవిచలనము కనుక్కోండి.

వయస్సు సం॥లలో	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
ప్రభావితం చెందిన వారి సంఖ్య	3	5	16	18	12	7	4

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_8.indd 328 13-02-2023 19:17:58

12. ఒక కర్మాగారము నందు తయారుచేయబడిన తట్టల యొక్క వ్యాసము (సెం.మీలలో) కొలతలు క్రింద ఇవ్వబడినది. దాని క్రమవిచలనము కనుగొనండి.

వ్యాసము (సెం.మీ)	21-24	25-28	29-32	33-36	37-40	41-44
తట్టల సంఖ్య	15	18	20	16	8	7

13. 50 మంది విద్యార్థులు 100 మీటర్ల పరుగు పందెమును పూర్తిచేయుటకు పట్టిన కాలము క్రింద ఇవ్వబడినది. దాని క్రమవిచలనము కనుగొనండి.

పట్టిన సమయం (సెకన్లు)	8.5-9.5	9.5-10.5	10.5-11.5	11.5-12.5	12.5-13.5
విద్యార్థుల సంఖ్య	6	8	17	10	9

14. ఒక గ్రూపు నందు గల 100 మంది విద్యార్థుల మార్కుల అంకమధ్యమము మరియు క్రమవిచలనము వరుసగా 60 మరియు 15 గా కనుగొనబడింది. తరువాత మార్కులు 45 మరియు 72 లకు బదులుగా 40 మరియు 27 లను తప్పుగా నమోదుచేశారని కనిపెట్టబడినది. అయిన సరైన అంకమధ్యమము మరియు క్రమవిచలనము కనుగొనండి.

15. 7 రాశుల అంకమధ్యమము మరియు విస్తృతి వరుసగా 8 మరియు 16 వాటిలో ఐదురాశులు 2, 4, 10, 12 మరియు 14 లు అయిన మిగిలిన రెండు రాశుల విలువలను కనుగొనండి.

8.3 విచలన గుణకము (Coefficient of Variation)

రెండు దత్తాంశముల యందు గల క్రేందీయస్థాన విలువలు మరియు విస్తరణ కొలతలను పోల్చునపుడు అవి అర్థవంతముగా నుండదు. ఎందుకనగా దత్తాంశములోని రాశుల కొలత ప్రమాణములు ఒకే విధంగా ఉండవు.

ఉదాహరకు క్రింది దత్తాంశమును తీసుకొనుము

	బరువు	ధర
అంక మధ్యమము	8 కి.గ్రా	₹ 85
క్రమవిచలనము	1.5 కి.గ్రా	₹ 21.60

ఇక్కడ క్రమవిచలనములు 1.5కి.గ్రా మరియు ₹21.60 లను పోల్చలేము. రెండు లేక అంతకన్నా ఎక్కువ దత్తాంశముల అనురూపమార్పులను పోల్చుటకు క్రమవిచలనమునకు సంబంధం కలిగిన విలువైన **విచలన గుణకం** ఉపయోగపడును.

క్రమవిచలనమును అంకమధ్యమముచేత భాగించుట ద్వారా విచలన గుణకమును పొందవచ్చును. సాధారణంగా దీనిని శాతములలో సూచిస్తారు. ఈ భావనను చాలా ముఖ్యమైన గణాంకశాస్త్రజ్ఞులలో ఒకరైన **కార్ల్‌పియర్సన్** సూచించెను.

అందువలన, మొదటి దత్తాంశము యొక్క విచలన గుణకము $(C.V_1) = \frac{\sigma_1}{\bar{x}_1} \times 100\%$

మరియు రెండవ దత్తాంశము యొక్క విచలన గుణకము $(C.V_2) = \frac{\sigma_2}{\bar{x}_2} \times 100\%$

విచలన గుణకం తక్కువగా ఉన్న దత్తాంశము ఎక్కువ స్థిరత్వమును లేదా నిలకడను కలిగియుంటుంది.

రెండు దత్తాంశములను తీసుకొనుము

A	500	900	800	900	700	400
B	300	540	480	540	420	240

	అంకమధ్యమము	క్రమవిచలనము
A	700	191.5
B	420	114.9

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_8.indd 329 13-02-2023 19:17:58

రెండు దత్తాంశముల అంకమధ్యమము మరియు క్రమవిచలనములను పోల్చునపుడు, ఆ రెండు దత్తాంశములు పూర్తిగా వ్యత్యాసముగా ఉన్నదని మనం ఆలోచిస్తాం. కాని B యొక్క అంకమధ్యమము మరియు క్రమవిచలనము A లో 60% గా ఉన్నది. కావున తక్కువ (చిన్న) అంకమధ్యమము మరియు తక్కువ (చిన్న) క్రమవిచలనము అపోహకు దారితీస్తుంది.

రెండు దత్తాంశములను పోల్చునపుడు, విచలన గుణకం $= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\%$

A యొక్క విచలన గుణకం $= \frac{191.5}{700} \times 100\% = 27.4\%$

B యొక్క విచలన గుణకం $= \frac{114.9}{420} \times 100\% = 27.4\%$

దీని నుండి, రెండు దత్తాంశముల విచలన గుణకం సమానంగా ఉన్నవి. దత్తాంశములు సమాన విచలన గుణకం విలువలను కలిగియుండుట నుండి, ఒక దత్తాంశము మరొక దానిపై ఆధారపడి ఉంటుందని మనం నిర్ధారించితిమి. కాని దత్తాంశము B యొక్క విలువలు దాని అనురూప దత్తాంశము A యొక్క విలువలలో సరిగ్గా 60% ఉన్నది. కావున అవి చాలా దగ్గర సంబంధమును కలిగియున్నది. కాని రెండు దత్తాంశముల సగటు మరియు క్రమవిచలనములను పరిశీలించిన అవి ఒకదానికొకటి సంబంధం లేనిదిగా అనిపిస్తుంది. అందువలన తికమక పరిస్థితి ఏర్పడును.

ఇవ్వబడిన దత్తాంశము యొక్క ఖచ్చితత్వమును తీసుకొనుటకు మనం విచలన గుణకమును కనుగొనవలెను. అందువలన మనకు విచలన గుణకం అవసరమగుచున్నది.

ప్రగతి శోధన

1. విచలన గుణకం అనునది _____ కి సంబంధించిన కొలత.
2. క్రమవిచలనమును అంకమధ్యమముతో భాగించునపుడు మనం పొందునది _____.
3. విచలన గుణకం అనునది _____ మరియు _____ లపై ఆధారపడియుంటుంది.
4. ఒక దత్తాంశము యొక్క అంకమధ్యమము మరియు క్రమవిచలనము వరుసగా 8 మరియు 2 అయిన విచలన గుణకం _____.
5. రెండు దత్తాంశములను పోల్చునపుడు, విచలన గుణకం _____ గా ఉన్నట్లయితే ఆ దత్తాంశము అస్థిరమగును.

ఉదాహరణ 8.15 ఒక దత్తాంశము అంకమధ్యమము 25.6 మరియు విచలన గుణకం 18.75 అయిన క్రమవిచలనమును కనుగొనుము.

సాధన అంకమధ్యమము $\bar{x} = 25.6$, విచలన గుణకం, C.V. = 18.75

విచలన గుణకం, C.V. $= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\%$

$18.75 = \frac{\sigma}{25.6} \times 100$; $\sigma = 4.8$

ఉదాహరణ 8.16 10 వ తరగతి విద్యార్థుల ఎత్తులు మరియు బరువుల యొక్క అంకమధ్యమము మరియు విస్తృతుల విలువలు క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడినవి.

	ఎత్తు	బరువు
అంకమధ్యమము	155 సెం.మీ	46.50 కి.గ్రా
విస్తృతి	72.25 సెం.మీ^{2}	28.09 కి.గ్రా

ఇందులో ఏది మరొకదానికన్నా ఎక్కువ వ్యత్యాసముగా ఉన్నది?

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_8.indd 330 13-02-2023 19:17:59

సాధన రెండు దత్తాంశములను పోల్చుటకు మనం మొదట వాటి విచలన గుణకములను కనుగొనవలెను.

అంకమధ్యమము $\bar{x}_1 = 155$ సెం.మీ, విస్తృతి $\sigma_1^2 = 72.25$ సెం.మీ^{2}

కాబట్టి క్రమవిచలనము $\sigma_1 = 8.5$

విచలన గుణకం $C.V_1 = \frac{\sigma_1}{\bar{x}_1} \times 100\%$

$C.V_1 = \frac{8.5}{155} \times 100\% = 5.48\%$ (ఎత్తులకు)

అంకమధ్యమము $\bar{x}_2 = 46.50$ కి.గ్రా, విస్తృతి $\sigma_2^2 = 28.09$ కి.గ్రా^{2}

కాబట్టి క్రమవిచలనము $\sigma_2 = 5.3$ కి.గ్రా

విచలన గుణకం $C.V_2 = \frac{\sigma_2}{\bar{x}_2} \times 100\%$

$C.V_2 = \frac{5.3}{46.50} \times 100\% = 11.40\%$ (బరువులకు)

$C.V_1 = 5.48\%$ మరియు $C.V_2 = 11.40\%$

ఎత్తు ఎక్కువ సిరత్వము కలిగివున్నది.

అభ్యాసము 8.2

1. ఒక దత్తాంశము యొక్క క్రమవిచలనము మరియు అంకమధ్యమము వరుసగా 6.5 మరియు 12.5 అయిన విచలన గుణకం కనుగొనుము.
2. ఒక దత్తాంశము యొక్క క్రమవిచలనం మరియు విచలన గుణకం వరుసగా 1.2 మరియు 25.6 అయిన అంకమధ్యమ విలువను కనుగొనుము.
3. ఒక దత్తాంశము యొక్క అంకమధ్యమము మరియు విచలన గుణకం వరుసగా 15 మరియు 48 అయితే క్రమవిచలనమును కనుగొనుము.
4. $n = 5$, $\bar{x} = 6$, $\Sigma x^2 = 765$, అయితే విచలన గుణకమును కనుగొనుము.
5. 24, 26, 33, 37, 29, 31 ల విచలన గుణకమును గణించుము.
6. 8 మంది విద్యార్థులు ఒక రోజు వారి ఇంటిపనిని పూర్తిచేయుటకు పట్టిన సమయము (నిమిషాలలో) క్రింది విధంగా ఇవ్వబడినది 38, 40, 47, 44, 46, 43, 49, 53. విచలన గుణకం కనుగొనుము.
7. ఇద్దరు విద్యార్థులు సత్య మరియు విద్య 5 పాఠ్యాంశములలో పొందిన మార్కుల మొత్తము వరుసగా 460 మరియు 480 మరియు వారి క్రమవిచలనములు వరుసగా 4.6 మరియు 2.4 ప్రతిభను కనబరుచుటలో ఎవరు ఎక్కువ స్థిరత్వమును కలిగియున్నారు?
8. ఒక తరగతిలో 40 మంది విద్యార్థులు మూడు పాఠ్యాంశములు గణిత శాస్త్రము, సామాన్య శాస్త్రము మరియు సాంఘిక శాస్త్రము నందు పొందిన మార్కుల యొక్క అంకమధ్యమము మరియు క్రమవిచలనము క్రింద ఇవ్వబడినది.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_8.indd 331 13-02-2023 19:18:01

పాఠ్యాంశము	అంకమధ్యమము	క్రమవిచలనము
గణిత శాస్త్రము	56	12
సామాన్య శాస్త్రము	65	14
సాంఘిక శాస్త్రము	60	10

మూడు పాఠ్యాంశములలో మార్కుల పరంగా ఎక్కువ స్థిరత్వం మరియు తక్కువ స్థిరత్వం కలిగినది ఏది?

8.4 సంభావ్యత


Blaise Pascal

కొన్ని శతాబ్దముల క్రితం జూదము మరియు జూదక్రీడలు నాగరికమైనవిగా భావింపబడ్డాయి మరియు చాలా మంది పురుషులలో బాగా ప్రాచుర్యం పొందినది. జూదక్రీడలు చాలా సంక్లిష్టంగా మారడంతో ఇచ్చిన పరిస్థితిలో ఆటను గెలుచుటకు లేదా ఓడిపోవుటకు గల అవకాశములను తెలుసుకొనుటకు చాలా ఆసక్తిని కనబరిచెను. 1654లో గొప్ప ఫ్రెంచ్ గణితజ్ఞుడైన చెవాలియర్ డీమియర్ జూదముపై గల ఆసక్తితో ఆ కాలంలో ప్రసిద్ధ గణితజ్ఞుడైన బాస్లీ పాస్కల్‌కి ఒక లేఖ రాసెను. డబ్బులు చెల్లించి ఆడే జూద క్రీడలలో ఎంత భాగమును పొందవచ్చునని అతని సలహా కోరెను. పాస్కల్ ఈ సమస్యను గణితశాస్త్రపరంగా పరిష్కరించాడు కానీ అతని మంచి స్నేహితుడైన గణితజ్ఞుడైన పియరీడీపెర్మాట్‌కి ఈ సమస్యను వివరించి అతను ఎలాపరిష్కరిస్తాడో చూడాలని భావించెను. అనంతరం ఈ సమస్యపై వారిమధ్య జరిగిన తదుపరి ఉత్తరప్రత్యుత్తరాలు ద్వారా పుట్టిన సంభావ్యత సిద్ధాంతమును గణితశాస్త్రపు నూతనశాఖగా సూచింపబడింది.

యాదృచ్ఛిక ప్రయోగము

యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం అనునది ఒక ప్రయోగం దీనియందు

(i) సాధ్యమైన అన్ని పర్యవసానముల సమితి తెలుస్తుంది. (ii) ఖచ్చితమైన పర్యవసానం తెలియదు.

ఉదాహరణ : 1. నాణెమును ఎగురువేయుట. 2. పాచికను దొర్లించుట.

3. 52 ముక్కలు గల పేకాట కట్ట నుండి ఒక ముక్కను తీయుట.

ప్రతిరూప ఆవరణ

ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగమునందు సాధ్యమగు అన్ని పర్యవసానముల సమితిని ప్రతిరూప ఆవరణ అంటారు. దీనిని సాధారణంగా S చే గుర్తిస్తారు.


పటం. 8.2

ఉదాహరణ : ఒక పాచికను దొర్లించునపుడు సాధ్యమయ్యే పర్యవసానములు, పాచిక యొక్క ముఖసంఖ్యలు $1,2,3,4,5,6$ అగును.

కావున ప్రతిరూప ఆవరణ $S = \{1,2,3,4,5,6\}$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_8.indd 332 13-02-2023 19:18:01

8.4.1 వృక్ష పటము (Tree diagram)

వృక్ష పటము యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం యొక్క సాధ్యమయ్యే అన్ని పర్యవసానములను చూచుటకు అనుమతిస్తుంది. వృక్షపటంలో గల ప్రతి శాఖ సాధ్యమయ్యే పర్యవసానములను సూచిస్తుంది.

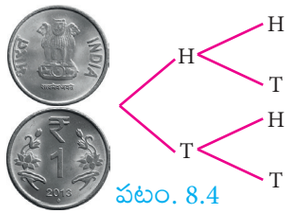
Illustration



పటం. 8.3

(i) ఒక పాచికను దొర్లించునపుడు వృక్షపటం (పటం 8.3) నుండి ప్రతిరూప ఆవరణ $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ అని వ్రాయవచ్చును.

(ii) రెండు నాణెములను ఎగరవేసినపుడు వృక్షపటం (పటం 8.4) నుండి ప్రతిరూప ఆవరణ $S = \{HH, HT, TH, TT\}$ అని వ్రాయవచ్చును.



పటం. 8.4

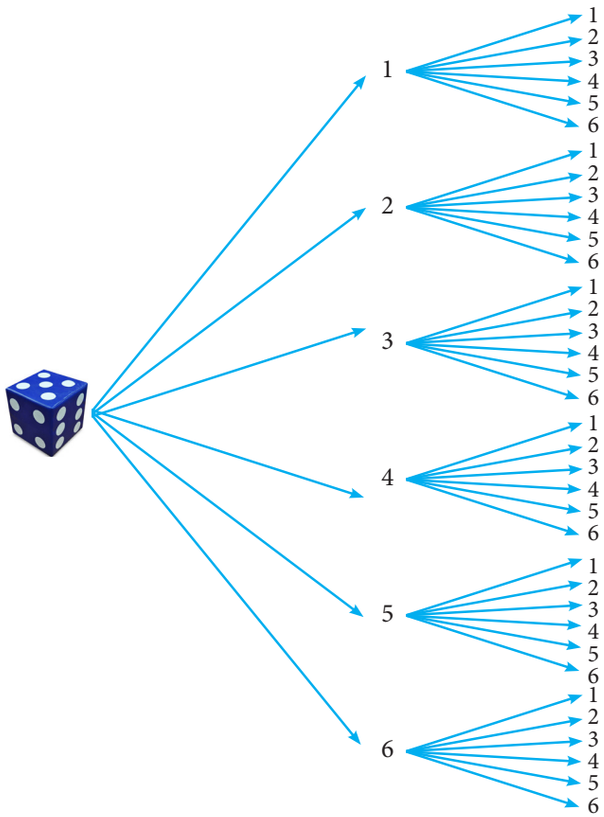
ప్రగతి శోధన

1. ఒక నిర్ధిష్ట పర్యవసానమును ముందుగానే ఊహించలేని ప్రయోగమును _____ అంటారు.
2. సాధ్యమయ్యే అన్ని పర్యవసానముల సమితిని _____ అంటారు.

ఉదాహరణ 8.17 వృక్షపటమునుపయోగించి రెండు పాచికలను దొర్లించినపుడు ఏర్పడు ప్రతిరూప ఆవరణను తెలియజేయుము.

సాధన రెండు పాచికలను దొర్లించినపుడు ప్రతి పాచిక 6 ముఖములను కలిగి వాటిపై 1,2,3,4,5,6 సంఖ్యలను కలిగియుండుట వలన వృక్షపటము క్రింది విధంగా ఉంటుంది.

దీని నుండి ప్రతిరూప ఆవరణను క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చును.



$S = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)$

$(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)$

$(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)$

$(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)$

$(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)$

$(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_8.indd 333 13-02-2023 19:18:02

ఘటన : ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగము నందు సాధ్యమయ్యే ప్రతి పర్యవసానాన్ని ఘటన అని అంటారు. అందువలన ఘటన అనునది ప్రతిరూప ఆవరణకు ఉపసమితి అవుతుంది.

BHF73

ఉదాహరణ : రెండు నాణెములను ఎగురవేసినపుడు రెండు బొమ్మలు పొందుట అనునది ఒక ఘటన.

యత్నము : ఒక ప్రయోగమును ఒకసారి చేయుటను యత్నము అంటారు.

ఉదాహరణ : ఒక నాణెమును మూడుసార్లు ఎగురవేసినపుడు, ప్రతిసారి నాణెమును ఎగుర వేయుట ఒక ప్రయత్నం.

ఘటనలు	వివరణ	ఉదాహరణ
సమసంభవ ఘటనలు	రెండు లేదా అంతకన్నా ఎక్కువ ఘటనలు సమ సంభవ ఘటనలినిన, ప్రతి ఘటన సంభవించుటకు సమాన అవకాశము ఉంటుంది.	ఒక నాణెమును ఎగురవేయునపుడు బొమ్మపడుట లేదా బొరుసు పడుట అనునది సమ సంభవ ఘటనలు.
ఖచ్చిత లేదా ధృడ ఘటనలు	ఒక ప్రయోగములో ఖచ్చితంగా సంభవించు ఘటననే ఖచ్చిత లేదా ధృడ ఘటన అంటారు.	ఒక పాచికను దొర్లించునపుడు 1 నుండి 6 వరకు గల ఏదైనా సంఖ్యను పొందు ఘటన.
అసాధ్య ఘటన	ఒక ప్రయోగములో సంభవించుటకు ఎప్పటికీ అవకాశంలేని ఘటనను అసాధ్య ఘటన అంటారు.	రెండు నాణెములను ఎగురవేసినపుడు మూడు బొమ్మలు పొందు ఘటన అనేది అసాధ్య ఘటన అవుతుంది.
పరస్పర వర్జిత ఘటనలు	ఉమ్మడి ప్రతిరూప బిందువులు లేని రెండు లేక అంతకన్నా ఎక్కువ ఘటనలను పరస్పర వర్జిత ఘటనలు అంటారు. i.e., A, B లు వర్జిత ఘటనలైన $A \cap B = \phi$.	ఒక పాచికను దొర్లించునపుడు బేసి సంఖ్యలను పొందు ఘటన మరియు సరిసంఖ్యలను పొందు ఘటనలు పరస్పర వర్జిత ఘటనలు.
పూర్ణ ఘటనలు	ఘటనల సమ్మేళనం ప్రతిరూప ఆవరణమయితే ఆ సంగ్రహ ఘటనలను పూర్ణ ఘటనలు అంటారు.	ఒక నాణెమును రెండుసార్లు ఎగురవేసినపుడు సంగ్రహ ఘటనలైన రెండు బొమ్మలు, ఖచ్చితంగా ఒక బొమ్మ, బొమ్మలేదు వంటివి పూర్ణ ఘటనలు.
పూరక ఘటనలు	ఘటన A లో లేని ప్రతిరూప బిందువులను కలిగియున్న ఘటననే A యొక్క పూరక ఘటన అంటారు. దీనిని A' లేదా A^c లేదా $\bar{A}$ లతో గుర్తిస్తారు. ఘటన A మరియు దాని పూరక ఘటన A' లు పరస్పర వర్జిత మరియు పూర్ణ ఘటలను అగును.	ఒక పాచికను దొర్లించునపుడు 5 లేదా 6 ను పొందు ఘటన మరియు 1, 2, 3 లేదా 4 లను పొందు ఘటన పూరక ఘటనలగును.

సూచన

ప్రాథమిక ఘటన

E అను ఘటన ఒకే ఒక పర్యవసానమును కలిగి ఉంటే దానిని ప్రాథమిక ఘటన అంటారు.

మీకు తెలుసా?

1713 లో జూదక్రీడలందు సంభావ్యతని విస్తృతంగా అనువర్తించిన వ్యక్తిగా బెర్నౌలీ గుర్తింపు పొందెను.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_8.indd 334 13-02-2023 19:18:02

8.4.2 ఒక ఘటన యొక్క సంభావ్యత

ఒక యాధృచ్ఛిక ప్రయోగములో ప్రతిరూప ఆవరణను S అని మరియు $E \subseteq S$ అనుకొనుము. E అనునది ఒక ఘటన అయితే E సంభవించుటకు గల సంభావ్యతను క్రింది విధంగా నిర్వచించవచ్చును.

$$P(E) = \frac{E \text{ సంభవించుటకు అనుకూల పర్యవసానముల సంఖ్య}}{\text{సాధ్యమయ్యే మొత్తం పర్యవసానముల సంఖ్య}} = \frac{n(E)}{n(S)}$$

ఈ విధంగా నిర్వచింపబడిన సంభావ్యతను పరిమిత ప్రతిరూప ఆవరణకు మాత్రమే అనువర్తించవలెను. కావున ఈ పాఠములో పరిమిత ప్రతిరూప ఆవరణగల సమస్యలను మాత్రమే మనం పరిష్కరిస్తాం.

సూచన

- $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$
- $P(S) = \frac{n(S)}{n(S)} = 1$. ఖచ్చిత లేదా ధృడ ఘటన యొక్క సంభావ్యత 1.
- $P(\phi) = \frac{n(\phi)}{n(\mathrm{s})} = \frac{0}{n(s)} = 0$. అసాధ్య ఘటన యొక్క సంభావ్యత 0.
- S యొక్క ఉపసమితి E మరియు ఏదైనా సమితి యొక్క ఉపసమితి ϕ నుండి

  $\phi \subseteq E \subseteq S$

  $P(\phi) \leq P(E) \leq P(\mathrm{S})$

  $0 \leq P(E) \leq 1$

  కావున సంభావ్యత విలువ ఎల్లప్పుడూ 0 నుండి 1 వరకు ఉంటుంది.
- E యొక్క పూరక ఘటన $\bar{E}$.

  $P(E) = \frac{m}{n}$ అనుకొనండి (ఇక్కడ m అనునది E కు అనుకూల పర్యవసానముల సంఖ్య మరియు n అనునది సాధ్యమయ్యే మొత్తం పర్యవసానముల సంఖ్య)

  $$P(\bar{E}) = \frac{E \text{ సంభవించుటకు అనుకూలంగా లేని పర్యవసానముల సంఖ్య}}{\text{సాధ్యమగు మొత్తం పర్యవసానముల సంఖ్య}}$$

  $$P(\bar{E}) = \frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n}$$

  $P(\bar{E}) = 1 - P(\mathrm{E})$



- $P(E) + P(\bar{\mathrm{E}}) = 1$

ప్రగతి శోధన

క్రింది విలువలలో ఒక ఘటన యొక్క సంభావ్యత కానిది ఏది?

(a) -0.0001 (b) 0.5 (c) 1.001 (d) 1

(e) 20% (f) 0.253 (g) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (h) $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_8.indd 335 13-02-2023 19:18:04

ఉదాహరణ 8.18 ఒక సంచిలో 5 నీలము మరియు 4 పచ్చ రంగు బంతులు గలవు. సంచి నుంచి యాదృచ్ఛికముగా ఒక బంతిని తీసిన అది (i) నీలి రంగు (ii) నీలిరంగు కాని బంతిగా నుండుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన సాధ్యమయ్యే పర్యవసానముల సంఖ్య $n(\mathrm{S}) = 5 + 4 = 9$

(i) నీలి రంగు బంతిని తీయు ఘటనను A అనుకొనుము.

ఘటన A కు అనుకూల పర్యవసానముల సంఖ్య $n(\mathrm{A}) = 5$

కావున, నీలి రంగు బంతిని తీయుటకు గల సంభావ్యత, $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{9}$

(ii) నీలి రంగుకాని బంతిని తీయు ఘటనను $\bar{A}$ అనుకొనుము. $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$

ఉదాహరణ 8.19 రెండు పాచికలు దొర్లించబడినవి. వాటి ముఖవిలువల మొత్తం (పర్యవసానాల మొత్తం) (i) 4 కు సమానం (ii) 10 కన్నా ఎక్కువ (iii) 13 కన్నా తక్కువ గా నుండుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన రెండు పాచికలను దొర్లించినపుడు ఏర్పడు ప్రతిరూప ఆవరణ

$$\begin{aligned} S = \{ & (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6) \\ & (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6) \\ & (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6) \\ & (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6) \\ & (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6) \\ & (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6) \}; \; n(S) = 36 \end{aligned}$$

(i) పర్యావసానముల విలువల మొత్తం (ముఖ విలువల మొత్తం) 4 కి సమానమగు ఘటనను A అనుకొనుము.

అపుడు $A = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}; \; n(A) = 3$.

పర్యవసానముల విలువల మొత్తం 4 కి సమానమగు ఘటన యొక్క సంభావ్యత $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

(ii) పర్యవసానముల విలువల మొత్తం 10 కన్నా ఎక్కువగా నుండు ఘటనను B అనుకొనండి. అపుడు $\mathrm{B} = \{(5,6),(6,5),(6,6)\}; \; n(B) = 3$

పర్యవసానముల విలువల మొత్తం 10 కన్నా ఎక్కువగా నుండు ఘటన యొక్క సంభావ్యత

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

(iii) పర్యవసానముల మొత్తము 13 కన్నా తక్కువగా నుండు ఘటనను C అనుకొనుము. ఇక్కడ అన్ని పర్యవసానముల మొత్తం విలువ 13 కన్నా తక్కువ. కావున $C = S$

కావున, $n(C) = n(S) = 36$

పర్యవసానముల మొత్తం 13 కన్నా తక్కువగా నుండు ఘటన యొక్క సంభావ్యత $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{36}{36} = 1$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_8.indd 336 13-02-2023 19:18:05

ఉదాహరణ 8.20 రెండు నాణెములు ఒకేసారి ఎగురవేయబడినవి. నాణెములపై వేర్వేరు ముఖములు పడుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన రెండు నాణెములను ఒకేసారి ఎగురవేసినపుడు ఏర్పడు ప్రతిరూప ఆవరణ

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}; \quad n(S) = 4$$

నాణెములపై వేర్వేరు ముఖములు పడు ఘటనను A అనుకొనండి.

$$A = \{HT, TH\}; \quad n(A) = 2$$

నాణెములపై వేర్వేరు ముఖములు పడుటకు గల సంభావ్యత $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

ఉదాహరణ 8.21 యాదృచ్ఛికముగా ఎన్నుకోబడిన లీపు సంవత్సరములో 53 శనివారములు ఉండుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన ఒక లీపు సంవత్సరంలో 366 రోజులు ఉంటుంది. అనగా 52 వారములు మరియు 2 రోజులు ఉంటుంది. 52 వారములలో తప్పనిసరిగా 52 శనివారములు ఉంటుంది.

మిగిలిన 2 రోజులకు గల సాధ్యమగు అవకాశములే ప్రతిరూప ఆవరణ అవుతుంది.

S = {ఆది–సోమ, సోమ–మంగళ, మంగళ–బుధ, బుధ–గురు, గురు–శుక్ర, శుక్ర–శని, శని–ఆది}

$n(S) = 7$

53వ శనివారము నండుటకు గల ఘటనను A అనుకొనండి.

మెదడుకు మేత

సాధారణ సంవత్సరములో 53 శనివారములు నుండుటకు గల సంభావ్యత ఎంత?

అప్పుడు A = {శుక్ర–శని, శని–ఆది}; $n(A) = 2$

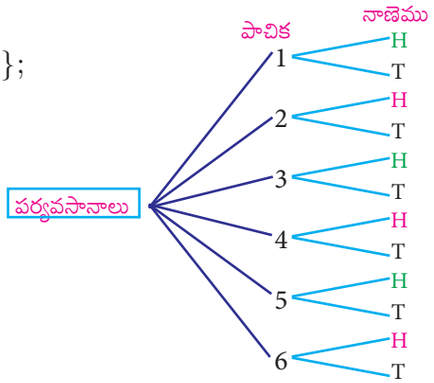
ఒక లీపు సంవత్సరములో 53 శనివారములు నుండుటకు గల సంభావ్యత $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{7}$

ఉదాహరణ 8.22 ఒకే సమయంలో ఒక పాచిక దొర్లింపబడినది మరియు నాణెము ఎగురవేయబడినది. పాచికపై బేసి సంఖ్య మరియు నాణెముపై బొమ్మను చూపించుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన ప్రతిరూప ఆవరణ

$$S = \{1H, 1T, 2H, 2T, 3H, 3T, 4H, 4T, 5H, 5T, 6H, 6T\};$$

$$n(S) = 12$$



బేసి సంఖ్య మరియు బొమ్మపడు ఘటనను A అనుకొనుము.

$$A = \{1H, 3H, 5H\}; \; n(A) = 3$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_8.indd 337 13-02-2023 19:18:07

కృత్యము 3	కృత్యము 4
మధు నివాసము నుండి ఆమె పనిచేయు స్థలమునకు R_1, R_2 మరియు R_3 అను మూడు మార్గములు గలవు. కార్యాలయ భవనమునకు నాలుగు పార్కింగ్ స్థలములు P_1, P_2, P_3, P_4 లు మరియు మూడు ప్రవేశములు B_1, B_2, B_3 లు గలవు. ఆమె తళమునకు రెండు ఎలివేటర్‌లు E_1 మరియు E_2 లు గలవు. వృక్షశాఖ పటమునుపయోగించి ఆమె కార్యాలయమునకు వెళ్ళుటకు ఎన్ని మార్గములు కలవు.	క్రింది వాటికి సమాచారములను సేకరించి సంభావ్యతను కనుగొనుము. (i) నీ తరగతి నుండి ఒక అబ్బాయిని ఎన్నుకొనుట. (ii) నీ తరగతి నుండి ఒక అమ్మాయిని ఎన్నుకొనుట. (iii) మీ పాఠశాలయందు పదవ తరగతిలో గల ఒక విద్యార్థిని ఎన్నుకొనుట. (iv) మీ పాఠశాలయందు పదవతరగతిలో గల ఒక బాలుడిని ఎన్నుకొనుట. (v) మీ పాఠశాలయందు పదవతరగతిలో గల ఒక బాలికను ఎన్నుకొనుట.

ఉదాహరణ 8.23 ఒక సంచిలో 6 పచ్చ బంతులు, కొన్ని నలుపు మరియు ఎరుపు బంతులు ఉన్నవి. నలుపు బంతుల సంఖ్య ఎరుపు బంతుల సంఖ్యకు రెండింతలగును. పచ్చ రంగు బంతిని తీయుటకు గల సంభావ్యత ఎరుపు బంతిని తీయుటకు గల సంభావ్యతకు మూడు రెట్లుంటుంది. అయిన (i) నలుపు బంతుల సంఖ్య (ii) మొత్తం బంతుల సంఖ్య కనుగొనుము.

సాధన పచ్చరంగు బంతుల సంఖ్య $n(G) = 6$

ఎరుపు బంతుల సంఖ్య $n(R) = x$ అనుకొనుము.

కావున, నలుపు బంతుల సంఖ్య $n(B) = 2x$

మొత్తం బంతుల సంఖ్య $n(S) = 6 + x + 2x = 6 + 3x$

ఇవ్వబడినది, $P(G) = 3 \times P(R)$

$$\frac{6}{6+3x} = 3 \times \frac{x}{6+3x}$$

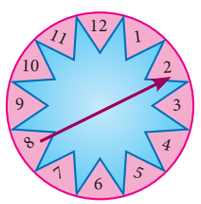
$3x = 6$ నుండి, $x = 2$

(i) నలుపు బంతుల సంఖ్య $= 2 \times 2 = 4$

(ii) మొత్తం బంతుల సంఖ్య $= 6 + (3 \times 2) = 12$

ఉదాహరణ 8.24 పటములో చూపినట్లు ఒక బాణం గిరగిరా తిరిగి నిలిచే ఆటలో, ఆ బాణం సంఖ్యలు 1, 2, 3, ...12 లలో ఏదైనా ఒక సంఖ్య వద్ద ఆగుటకు సమాన అవకాశాలు కలవు. అయిన అది ఆగు స్థానము (i) 7 (ii) ప్రధాన సంఖ్య (iii) సంయుక్త సంఖ్యగా నుండుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన ప్రతిరూప ఆవరణ $S = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$; $n(S) = 12$



పటం. 8.6

(i) 7 వద్ద ఆగు ఘటనను A అనుకొనుము. $n(A)=1$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{12}$$

(ii) బాణము ప్రధానసంఖ్య వద్ద ఆగు ఘటనను B అనుకొనుము.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_8.indd 338 13-02-2023 19:18:09

$$B = \{2,3,5,7,11\};\ n(B) = 5$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{12}$$

(iii) బాణము సంయుక్తసంఖ్య వద్ద ఆగు ఘటనను C అనుకొనుము.

$$C = \{4,6,8,9,10,12\};\ n(C) = 6$$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

మెదడుకు మేత

అసాధ్య ఘటన యొక్క పూరక ఘటన ఏమి?

అభ్యాసము 8.3

1. వృక్ష పటమునుపయోగించి మూడు నాణెములను ఎగురవేసినపుడు ఏర్పడు ప్రతిరూప ఆవరణను రాయుము.

2. ఒక సంచిలో 1 నుండి 6 వరకు సంఖ్యలు కలిగిన బంతులు ఉన్నాయి. వాటిలో రెండు బంతులను ఎన్నుకొనుటకు గల ప్రతిరూప ఆవరణను రాయుము. (వృక్ష పటమునుపయోగించి)

3. యాదృచ్ఛిక ప్రయోగములో A అనునది ఒక ఘటన, అది $P(A) : P(\bar{A}) = 17:15$ మరియు $n(S)=640$ అయిన (i) $P(\bar{A})$ (ii) $n(A)$ కనుగొనండి.

4. ఒక నాణెమును మూడుసార్లు ఎగురవేయబడినది. వరుసగా రెండు బొరుసులు పడుటకు గల సంభావ్యత ఎంత?

5. ఒక వేడుకలో ఒక కార్డుపై ఒక సంఖ్య ఉండు విధంగా 1 నుండి 1000 వరకు సంఖ్యలు గల కార్డులు ఒక పెట్టెలో వేయబడినది. ప్రతి ఆటగాడు యాదృచ్ఛికంగా ఒక కార్డును ఎన్నుకొనవలెను మరియు ఎన్నుకొనిన కార్డు మరలా భర్తీచేయబడదు. ఎన్నుకొనిన కార్డు 500 కన్నా ఎక్కువైన ఖచ్చిత వర్గసంఖ్య అయితే ఆటగాడు బహుమతిని గెలుచుకొంటాడు. అయిన (i) మొదటి ఆటగాడు బహుమతిని గెలుచుకొనుటకు (ii) మొదటి ఆటగాడు గెలిచిన తరువాత రెండవ ఆటగాడు బహుమతిని గెలుచుకొనుటకు గల సంభావ్యత ఎంత?

6. ఒక సంచిలో 12 నీలం బంతులు మరియు x ఎరుపు బంతులు ఉన్నాయి. యాదృచ్ఛికంగా ఒక బంతిని తీసిన (i) అది ఎరుపు బంతిగా నుండుటకు గల సంభావ్యత ఎంత? (ii) మరో 8 ఎరుపు బంతులను ఆ సంచిలో వేసిన, ఎరుపు బంతిని తీయుటకు గల సంభావ్యత (i) లో వచ్చిన సంభావ్యత కన్నా రెండింతలగును. అయిన x విలువ కనుగొనుము.

7. రెండు నిష్పాక్షికమైన పాచికలు ఒకసారి దొర్లించబడినది.

(i) రెండు పాచికలలో ఒకే ముఖ సంఖ్య (ii) లబ్ధం ప్రధాన సంఖ్య

(iii) మొత్తం ప్రధాన సంఖ్య (iv) మొత్తం 1 గా నుండుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_8.indd 339 13-02-2023 19:18:10

8. మూడు రకములైన నాణెములను ఒకేసారి ఎగురవేయబడినది.

(i) అన్నీ బొమ్మలు (ii) కనీసం ఒక బొరుసు

(iii) గరిష్ఠంగా ఒక బొమ్మ

(iv) గరిష్ఠంగా రెండు బొరుసులు పడుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.

9. ఒక సంచిలో 5 ఎరుపు బంతులు, 6 తెలుపు బంతులు, 7 పచ్చరంగు బంతులు, 8 నలుపు బంతులు ఉన్నవి. సంచి నుండి యాదృచ్ఛికంగా ఒక బంతిని తీసిన అది

(i) తెలుపు (ii) నలుపు లేదా ఎరుపు

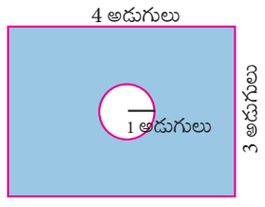
(iii) తెలుపు కానిది

(iv) నలుపు కానిది తెలుపుకానిదిగా నుండుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.

10. ఒక పెట్టెలో 20 మంచి బల్బులు మరియు కొన్ని లోపము గల బల్బులు ఉన్నాయి. పెట్టె నుండి యాదృచ్ఛికంగా ఒక బల్బుని తీసిన అది లోపమైన బల్బుగా నుండుటకు గల సంభావ్యత $\frac{3}{8}$ అయిన లోపమైన బల్బుల సంఖ్యను కనుగొనుము.

11. కొందరు అబ్బాయిలు (బాలురు) ఒక ఆటను ఆడుచున్నారు. ఆ ఆటలో వారిచే విసరబడిన రాయి వృత్తాకార ప్రాంతంలో (పటంలో ఇవ్వబడినది) పడితే గెలుపొందినట్లు మరియు వృత్తాకార ప్రాంతమునకు వెలుపల పడితే ఓడిపోయినట్లు తీసుకొనవలెను. అయిన ఆ ఆటలో గెలుచుటకు గల సంభావ్యత ఎంత? ($\pi = 3.14$)

12. ఇద్దరు వాడుకదారులు ప్రియ మరియు అముదన్ ఒక దుకాణమును ఒక నిర్ధిష్ట వారంలో (సోమవారం నుండి శనివారం వరకు) సందర్శించెదరు. వారు దుకాణమును సమాన అవకాశ పద్ధతిలో ప్రతిరోజు సందర్శించెదరు. ఇద్దరు దుకాణమును (i) ఒకే రోజులో (ii) వేర్వేరు రోజులలో (iii) ప్రక్కప్రక్క రోజులలో సందర్శించుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.



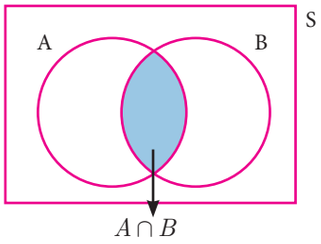
13. ఒక ఆట యొక్క ప్రవేశ రుసుము ₹150. ఆ ఆటలో ఒక నాణెమును 3 సార్లు ఎగురవేయవలెను. ధన ప్రవేశ టికెట్టును కొనెను. ఒకటి లేదా రెండు సార్లు బొమ్మ పడితే ఆమె ప్రవేశరుసుము తిరిగి ఇవ్వబడును. 3 సార్లు బొమ్మపడితే ఆమెకు రెండింతల ప్రవేశ రుసుము ఇవ్వబడును. అట్లు లేనియెడల ఆమె ఓడిపోవును. అయిన (i) రెండింతల ప్రవేశ రుసుమును పొందుటకు (ii) ఆమె చెల్లించిన ప్రవేశ రుసుమును మాత్రము పొందుటకు (iii) ప్రవేశ రుసుము కోల్పోవుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_8.indd 340 13-02-2023 19:18:11

8.5 బీజీయ ఘటనలు

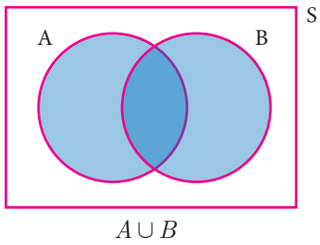
ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగములో ప్రతిరూప ఆవరణను S అనుకొనుము. $A \subseteq S$ మరియు $B \subseteq S$ లను S యొక్క ఘటనలనుకొనుము. అయితే

(i) ఘటనలు A మరియు B లు రెండూ సంభవించునపుడు మాత్రమే ఘటన $(A \cap B)$ సంభవించును.



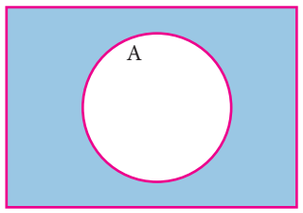
పటం. 8.7(a)

(ii) ఘటన A లేదా B లలో ఏదైనా ఒకటి సంభవించినపుడు ఘటన $(A \cup B)$ సంభవించును.



పటం. 8.7(b)

(iii) ఘటన A సంభవించకుండా ఉన్నప్పుడు మాత్రమే ఘటన $\bar{A}$ సంభవించును.



పటం. 8.7(c)

సూచన

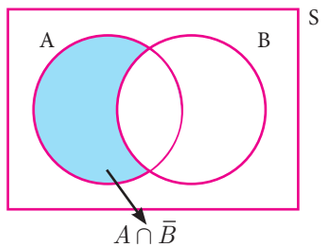
- $A \cap \bar{A} = \phi$
- $A \cup \bar{A} = S$
- A, B లు పరస్పర వర్జిత ఘటనలయిన $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- P(పరస్పర వర్జిత ఘటనల సమ్మేళనం) $= \sum$(ఘటనల సంభావ్యత)

సిద్ధాంతము 1

ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగమునకు చెందిన రెండు ఘటనలు A మరియు B అయిన క్రింది వానిని నిరూపించుము.

(i) $P(A \cap \bar{B}) = P(A$ మాత్రము$) = P(A) - P(A \cap B)$

(ii) $P(\bar{A} \cap B) = P(B$ మాత్రము$) = P(B) - P(A \cap B)$



పటం. 8.8

నిరూపణ

(i) సమితుల విభాగ ధర్మముల నుండి

1. $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A \cap (B \cup \bar{B}) = A \cap S = A$
2. $(A \cap B) \cap (A \cap \bar{B}) = A \cap (B \cap \bar{B}) = A \cap \phi = \phi$

కావున ఘటనలు $A \cap B$ మరియు $A \cap \bar{B}$ లు పరస్పర వర్జిత ఘటనలు మరియు వీటి సమ్మేళనం A.

కావున, $P(A) = P\left[(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})\right]$

$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$

కావున, $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

అనగా, $P(A \cap \bar{B}) = P(A$ మాత్రము$) = P(A) - P(A \cap B)$

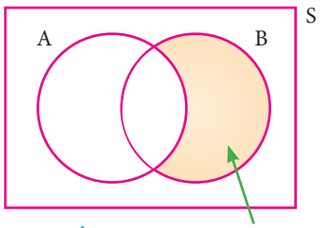
10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_8.indd 341 13-02-2023 19:18:13

(ii) సమితుల విభాగ ధర్మము నుండి

1. $(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B) = (A \cup \bar{A}) \cap B = S \cap B = B$

2. $(A \cap B) \cap (\bar{A} \cap B) = (A \cap \bar{A}) \cap B = \phi \cap B = \phi$

కావున, ఘటనలు $A \cap B$ మరియు $\bar{A} \cap B$ లు పరస్పర వర్జిత ఘటనలు మరియు వాటి సమ్మేళనం B.



పటం. 8.9 $\bar{A} \cap B$

$$P(B) = P\left[(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)\right]$$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

కావున, $$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

అనగా, $P(\bar{A} \cap B) = P(B$ మాత్రము$) = P(B) - P(A \cap B)$

ప్రగతి శోధన

1. $P(A$ మాత్రమే$)$= _____. 2. $P(\bar{A} \cap B) =$ _____.
3. $A \cap B$ మరియు $\bar{A} \cap B$ లు _____ ఘటనలు.
4. $P(\bar{A} \cap \bar{B}) =$ _____.
5. A మరియు B లు పరస్పర వర్జిత ఘటనలయిన $P(A \cap B) =$ _____.
6. $P(A \cap B) = 0.3,\ P(\bar{A} \cap B) = 0.45$ అయిన $P(B) =$_____.

8.6 సంభావ్యత సంకలన సిద్ధాంతము

(i) A మరియు B లు ఏవైనా రెండు ఘటనలు అయిన

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

(ii) A, B మరియు C లు ఏవైనా మూడు ఘటనలు అయిన

$$P\left(A \cup B \cup C\right) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

నిరూపణ

(i) ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగములో A మరియు B లు ఏవైనా రెండు ఘటనలు మరియు వాటి ప్రతిరూప ఆవరణ S అనుకొనుము. వెన్ చిత్రము నుండి, ఘటనలు A మాత్రము, $A \cap B$ మరియు B మాత్రము పరస్పర వర్జిత ఘటనలగును. మరియు వాటి సమ్మేళనం $A \cup B$ అవుతుంది.

కావున, $P(A \cup B) = P[$ (A మాత్రము$) \cup (A \cap B) \cup (B$ మాత్రము$)]$

$= P(A$ మాత్రము$) + P(A \cap B) + P(B$ మాత్రము$)$

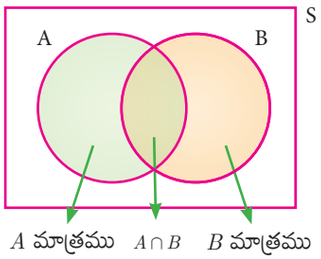
$= [P(A) - P(A \cap B)] + P(A \cap B) + [P(B) - P(A \cap B)]$

$P(A \cup B)$ $P(A) + P(B)$ $P(A \cap B)$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_8.indd 342 13-02-2023 19:18:17

(ii) ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగములో A, B మరియు C లు ఏవైనా మూడు ఘటనలు మరియు వాటి ప్రతిరూప ఆవరణ S అనుకొనుము.

$D = B \cup C$ అనుకొనుము.



పటం. 8.10

$$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup D)$$

$$= P(A) + P(D) - P(A \cap D)$$

$$= P(A) + P(B \cup C) - P[A \cap (B \cup C)]$$

$$= P(A) + P(\mathrm{B}) + P(C) - P(B \cap C) - P[(A \cap B) \cup (A \cap C)]$$

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P[(A \cap B) \cap (A \cap C)]$$

$P(A \cup B \cup C)$ $P(A) + P(B) + P(C)$ $P(A \cap B)$ $P(B \cap C)$

$P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$

కృత్యము 5

క్రింది పద్ధతినుపయోగించి సంభావ్యత సంకలన సిద్ధాంతమును సులభంగా రాయవచ్చును.

$$P(A \cup B) = S_1 - S_2$$

$$P(A \cup B \cup C) = S_1 - S_2 + S_3$$

ఇక్కడ $S_1 \rightarrow$ ఏక కాలంలో ఒక ఘటన మాత్రమే సంభవించు సంభావ్యతల మొత్తం.

$S_2 \rightarrow$ ఏక కాలంలో రెండు ఘటనలు మాత్రమే సంభవించు సంభావ్యతల మొత్తం.

$S_3 \rightarrow$ ఏక కాలంలో మూడు ఘటనలు మాత్రమే సంభవించు సంభావ్యతల మొత్తం.

$$P(A \cup B) = \underbrace{P(A) + P(B)}_{S_1} \underbrace{-P(A \cap B)}_{S_2}$$

$$P(A \cup B \cup C) = \underbrace{P(A) + P(B) + P(C)}_{S_1} \underbrace{-(P(A \cap B) + P(B \cap C) + P(A \cap C))}_{S_2} \underbrace{+P(A \cap B \cap C)}_{S_3}$$

పై పద్ధతిని ఉపయోగించి $P(A \cup B \cup C \cup D)$ యొక్క సంభావ్యతను కనుగొనుము.

ఉదాహరణ 8.25 $P(\mathrm{A}) = 0.37$, $P(\mathrm{B}) = 0.42$, $P(A \cap B) = 0.09$ అయిన $P(A \cup B)$ ను కనుగొనుము.

మెదడుకు మేత

$P(A \cup B) + P(A \cap B)$ అనునది _____.

సాధన $P(\mathrm{A}) = 0.37$, $P(\mathrm{B}) = 0.42$, $P(A \cap B) = 0.09$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = 0.37 + 0.42 - 0.09 = 0.7$$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_8.indd 343 13-02-2023 19:18:20

ఉదాహరణ 8.26 రెండు పాచికలు ఒకేసారి దొర్లించబడినవి. అయిన జంటపదము (doublet) లేక ముఖవిలువల మొత్తము 4 పడుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన రెండు పాచికలను ఒకేసారి దొర్లించినపుడు లభించు పర్యవసానముల సంఖ్య $6\times6=36$ ప్రతిరూప ఆవరణను S అనుకొనిన $n(S)=36$

జంటపదము పడు ఘటనను A మరియు ముఖ విలువల మొత్తము 4 గా నుండు ఘటనను B అని అనుకొనుము.

కాబట్టి
$$A = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$$
$$B = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$$
$$A\cap B = \{(2,2)\}$$

అయిన, $n(A)=6$, $n(B)=3$, $n(A\cap B)=1$.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36}$$
$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{36}$$
$$P(A\cap B) = \frac{n(A\cap B)}{n(S)} = \frac{1}{36}$$

కాబట్టి, P (జంట పదము లేక ముఖవిలువల మొత్తం 4) = $P(A\cup B)$

$$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$= \frac{6}{36}+\frac{3}{36}-\frac{1}{36}=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$$

దీని నుండి కావలసిన సంభావ్యత $\frac{2}{9}$.

ఉదాహరణ 8.27 ఒక తరగతిలోని 50 మంది విద్యార్థులలో, 28 మంది NCC ని, 30 మంది NSS మరియు 18 మంది NCC మరియు NSS రెండింటిని ఎంచుకొనెను. యాదృచ్ఛికముగా ఒక విద్యార్థిని ఎన్నుకొనబడినది, ఎన్నుకొనబడిన విద్యార్థి

(i) NSS కాకుండా NCC ను ఎంచుకొన్న విద్యార్థి.

(ii) NCC కాకుండా NSS ని ఎంచుకొన్న విద్యార్థి.

(iii) రెండింటిలో ఒక దానిని మాత్రమే ఎంచుకొన్న విద్యార్థిగా నుండుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన మొత్తం విద్యార్థుల సంఖ్య $n(S)=50$.

NCC మరియు NSS లను ఎంచుకొన్న విద్యార్థుల ఘటనలను వరుసగా A మరియు B అనుకొనుము.

$n(A)=28$, $n(B)=30$, $n(A\cap B)=18$

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_8.indd 344 13-02-2023 19:18:22

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{28}{50}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{30}{50}$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{18}{50}$$

(i) NSS కాకుండా NCC ని మాత్రమే ఎంచుకొన్న విద్యార్థుల సంభావ్యత

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{28}{50} - \frac{18}{50} = \frac{1}{5}$$

(ii) NCC కాకుండా NSS ని మాత్రమే ఎంచుకొన్న విద్యార్థుల సంభావ్యత

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{30}{50} - \frac{18}{50} = \frac{6}{25}$$

(iii) రెండింటిలో ఒకదానిని మాత్రమే ఎంచుకొన్న విద్యార్థుల సంభావ్యత

$$= P[(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)]$$

$$= P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) = \frac{1}{5} + \frac{6}{25} = \frac{11}{25}$$

$((A \cap \bar{B}), (\bar{A} \cap B)$ లు పరస్పర వర్జిత ఘటనలు అని గమనింపుము)

ఉదాహరణ 8.28 A మరియు B అను ఇద్దరు విద్యార్థులు IIT నందు ప్రవేశ అనుమతి కొరకు ప్రయత్నిస్తున్నారు. A ఎంపికగుటకు గల సంభావ్యత 0.5, A మరియు B లు ఇద్దరూ ఎంపికగుటకు గల సంభావ్యత 0.3 అయిన B ఎంపికగుటకు గల సంభావ్యత గరిష్టంగా 0.8 ఉంటుందని నిరూపించండి.

సాధన $P(A) = 0.5$, $P(A \cap B) = 0.3$

మనకు తెలిసినది $P(A \cup B) \leq 1$

$$P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) - P(A \cap B) \leq 1$$

$$0.5 + P(B) - 0.3 \leq 1$$

$$P(B) \leq 1 - 0.2$$

$$P(B) \leq 0.8$$

కావున B ఎంపికగుటకు గల సంభావ్యత గరిష్ఠంగా 0.8 అగును.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_8.indd 345 13-02-2023 19:18:24

అభ్యాసము 8.4

1. If $P(A)=\frac{2}{3}$, $P(B)=\frac{2}{5}$, $P(A\cup B)=\frac{1}{3}$ అయిన $P(A\cap B)$ కనుగొనుము.
2. A మరియు B అను రెండు ఘటనలలో $P(A)=0.42$, $P(B)=0.48$, మరియు $P(A\cap B)=0.16$. అయిన (i) $P(A$ కానిది) (ii) $P(B$ కానిది) (iii) $P(A$ లేక $B)$ లను కనుగొనుము.
3. ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగములో A మరియు B లు అనునవి రెండు పరస్పర వర్జిత ఘటనలు, $P(A$ కానిది$)=0.45$, $P(A\cup B)$ =0.65, అయిన $P(B)$ ని కనుగొనుము.
4. A మరియు B లలో కనీసం ఒకటి సంభవించుటకు గల సంభావ్యత 0.6. A మరియు B లు ఏకకాలంలో సంభవించుటకు గల సంభావ్యత 0.2 అయిన $P(\bar{A})+P(\bar{B})$ ని కనుగొనుమా.
5. ఘటన A సంభవించుటకు గల సంభావ్యత 0.5 మరియు ఘటన B సంభవించుటకు గల సంభావ్యత 0.3. A మరియు B లు పరస్పర వర్జిత ఘటనలయిన A,B లలో ఏదీ సంభవించకుండా ఉండుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.
6. రెండు పాచికలను ఒకసారి దొర్లించబడినది. మొదటి పాచికలో సరిసంఖ్య పొందుట లేక ముఖవిలువల మొత్తం 8 గా నుండుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.
7. ఒక పెట్టెలో $3, 5, 7, 9, \ldots 35, 37$ అను సంఖ్యలు గల కార్డులున్నాయి. పెట్టె నుండి యాదృచ్ఛికంగా ఒక కార్డును తీసిన అది 7 యొక్క గుణిజములు లేక ప్రధాన సంఖ్యగా నుండుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.
8. మూడు నిష్పాక్షికమైన నాణెములను ఒకసారి ఎగురవేయబడినవి. గరిష్ఠంగా 2 బొరుసులు లేదా కనీసము 2 బొమ్మలు పొందుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.
9. ఒక వ్యక్తి విద్యుదీకరణ ఒప్పందమును పొందుటకు గల సంభావ్యత $\frac{3}{5}$ మరియు ప్లంబింగ్ ఒప్పందము పొందకుండా ఉండుటకు గల సంభావ్యత $\frac{5}{8}$, కనీసం ఒక ఒప్పందమును పొందుటకు గల సంభావ్యత $\frac{5}{7}$ అయిన అతడు రెండు ఒప్పందములను పొందుటకు గల సంభావ్యత ఎంత?
10. ఒక నగరములోని 8000 మంది ప్రజలలో 1300 మంది 50 సంవత్సరములకు పైబడినవారు మరియు 3000 మంది మహిళలు ఉన్నారు. 30% మంది మహిళలు 50 సంవత్సరములకు పైబడినవారు. నగరంలోని ప్రజలలో ఒకరిని ఎన్నుకొనిన వారు మహిళ లేక 50 సంవత్సరములకు పైబడినవారిగా నుండుటకు గల సంభావ్యత ఎంత?
11. ఒక నాణెమును మూడుసార్లు ఎగురవేయబడినది. అయిన ఖచ్చితంగా రెండు బొమ్మలు లేక కనీసం ఒక బొరుసు లేక వరుసగా రెండు బొమ్మలు పడుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.
12. A, B, C లు ఏవైనా మూడు ఘటనలు అనుకొనుము. B యొక్క సంభావ్యత A యొక్క సంభావ్యతకు రెండు రెట్లుండును. మరియు C యొక్క సంభావ్యత A యొక్క సంభావ్యతకు మూడు రెట్లుంటుంది. $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$, $P(B\cap C)=\frac{1}{4}$, $P(A\cap C)=\frac{1}{8}$, $P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{10}$, $P(A\cap B\cap C)=\frac{1}{15}$, అయిన $P(A), P(B)$ మరియు $P(C)$ లను కనుగొనుము?
13. ఒక తరగతిలో గల 35 మంది విద్యార్థులకు 1 నుండి 35 వరకు సంఖ్యలు కేటాయించబడింది. బాలురు మరియు బాలికల నిష్పత్తి $4:3$ విద్యార్థులు వరుస సంఖ్యలు బాలురుతో ప్రారంభమై బాలికలతో అంతమగును. ఒక విద్యార్థిని ఎన్నుకొనిన ఆ విద్యార్థి ప్రధాన సంఖ్యను వరుస సంఖ్యగా గల బాలుడు లేక సంయుక్త సంఖ్యను వరుస సంఖ్యగా గల బాలిక లేక సరిసంఖ్య వరుస సంఖ్యగా నుండుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_8.indd 346 13-02-2023 19:18:26

అభ్యాసము 8.5

బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు

S6ENC

1. క్రింది వానిలో విస్తరణ కొలతకానిది ఏది?
   (A) వ్యాప్తి (B) క్రమవిచలనము
   (C) అంక మధ్యమము (D) విస్తృతి
2. దత్తాంశము $8, 8, 8, 8, 8 \ldots 8$ యొక్క వ్యాప్తి
   (A) 0 (B) 1 (C) 8 (D) 3
3. దత్తాంశములోని అన్ని విచలనముల మొత్తము నుండి దాని సగటు (అంకమధ్యమము) _____
   (A) ఎల్లప్పుడూ ధనాత్మకం (B) ఎల్లప్పుడూ ఋణాత్మకం (C) సున్న (D) శూన్యేతర పూర్ణసంఖ్య
4. 100 పరిశీలనాంశముల (రాశుల) సగటు 40 మరియు దాని క్రమవిచలనము 3. అయిన అన్ని విచలనముల వర్గముల మొత్తం
   (A) 40000 (B) 160900 (C) 160000 (D) 30000
5. మొదటి 20 సహజసంఖ్యల విస్తృతి
   (A) 32.25 (B) 44.25 (C) 33.25 (D) 30
6. ఒక దత్తాంశము క్రమవిచలనము 3. దత్తాంశములోని ప్రతి విలువను 5 చే గుణించగా క్రొత్త విస్తృతి
   (A) 3 (B) 15 (C) 5 (D) 225
7. x, y, z ల క్రమవిచలనము p అయిన $3x+5, 3y+5, 3z+5$ ల క్రమవిచలనము
   (A) $3p+5$ (B) $3p$ (C) $p+5$ (D) $9p+15$
8. ఒక దత్తాంశము అంకమధ్యమము మరియు విచలన గుణకములు 54 మరియు 87.5% అయిన క్రమవిచలనము
   (A) 3.5 (B) 3 (C) 4.5 (D) 2.5
9. క్రిందివానిలో ఏది సరియైనది కాదు?
   (A) $P(A) > 1$ (B) $0 \leq P(A) \leq 1$ (C) $P(\phi) = 0$ (D) $P(A) + P(\bar{A})$ 1
10. ఒక జాడీలో p ఎరుపు రంగు, q నీలం రంగు మరియు r పచ్చ రంగు గోళీలు కలవు. యాదృచ్ఛికంగా ఒక ఎరుపు రంగు గోళీని తీయుటకు గల సంభావ్యత
    (A) $\frac{q}{p+q+r}$ (B) $\frac{p}{p+q+r}$ (C) $\frac{p+q}{p+q+r}$ (D) $\frac{p+r}{p+q+r}$
11. ఒక పుస్తకములోని ఒక పేజీని యాదృచ్ఛికంగా ఎన్నుకొనబడినది. ఆ పేజీ సంఖ్యలోని ఒకట్ల స్థానంలో గల అంకె 7 కన్నా తక్కువగా నుండుటకు గల సంభావ్యత
    (A) $\frac{3}{10}$ (B) $\frac{7}{10}$ (C) $\frac{3}{9}$ (D) $\frac{7}{9}$
12. ఒక వ్యక్తి ఉద్యోగమును పొందుటకు గల సంభావ్యత $\frac{x}{3}$. ఉద్యోగమును పొందకుండుటకు గల సంభావ్యత $\frac{2}{3}$ అయిన x విలువ
    (A) 2 (B) 1 (C) 3 (D) 1.5

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_8.indd 347 13-02-2023 19:18:28

13. కమల ఒక లక్కీడ్రా పోటీలో పాల్గొనెను. ఆ లక్కీడ్రా పోటీకి 135 టికెట్లు అమ్ముడయ్యాయి. కమల గెలుచుటకు గల సంభావ్యత $\frac{1}{9}$ అయిన కమల కొన్న టికెట్ల సంఖ్య

(A) 5 (B) 10 (C) 15 (D) 20

14. ఆంగ్ల అక్షరములు $\{a,b,\ldots,z\}$ ల నుండి యాదృచ్ఛికముగా ఒక అక్షరమును ఎన్నుకొనిన అది x ముందు గల అక్షరముగా నుండుటకు గల సంభావ్యత

(A) $\frac{12}{13}$ (B) $\frac{1}{13}$ (C) $\frac{23}{26}$ (D) $\frac{3}{26}$

15. ఒక పర్సులో ..₹2000 నోట్లు 10, ₹500 నోట్లు 15 మరియు ₹200 నోట్లు 25 ఉన్నవి. యాదృచ్ఛికముగా ఒక నోటును ఎన్నుకొనిన అది ₹500 నోటు లేక ₹200 నోటుగా నుండుటకు గల సంభావ్యత ఎంత?

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{3}{10}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{4}{5}$

అధ్యాయ అభ్యాసము 8



1. క్రింది పౌనఃపున్య విభాజనం యొక్క అంకమధ్యమము 62.8 మరియు పౌనఃపున్యాల మొత్తం 50. విడుపడిన పౌనఃపున్యాలు f_1 మరియు f_2 లను లెక్కించండి.

తరగతి అంతరం	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100	100-120
పౌనఃపున్యం	5	f_1	10	f_2	7	8

2. ఒక ఆకృతిలో గీయబడిన వృత్తముల వ్యాసము (మి.మీలలో) క్రింద ఇవ్వబడినది. క్రమవిచలనము కనుగొనుము.

వ్యాసములు	33-36	37-40	41-44	45-48	49-52
వృత్తముల సంఖ్య	15	17	21	22	25

3. పౌనఃపున్య విభాజనము క్రింద ఇవ్వబడినది

x	k	$2\,k$	$3\,k$	$4\,k$	$5\,k$	$6\,k$
f	2	1	1	1	1	1

పట్టికలో k అనేది ధనపూర్ణసంఖ్య మరియు విస్తృతి 160 అయిన k విలువను కనుగొనుము.

4. ఉష్ణోగ్రతను సెల్సియస్ డిగ్రీలలో (^oC) సూచింపబడిన ఒక దత్తాంశము క్రమవిచలనము 5. దత్తాంశమును ఫారన్‌హీట్ డిగ్రీలోకి (^oF) మార్చి విస్తృతి కనుగొనుము.

5. ఒక విభాజనములో $\sum(x-5)=3$, $\sum(x-5)^2=43$, మరియు మొత్తం రాశుల (పరిశీలనాంశముల) సంఖ్య 18 అయిన అంకమధ్యమము మరియు క్రమవిచలనమును కనుగొనండి.

6. రెండు నగరములలో వివిధ ప్రాంతాలయందు అమ్మబడు వేరుశెనగ ప్యాకెట్ల ధరలు క్రింద ఇవ్వబడినది. ఏ నగరములో ధరలు ఎక్కువ స్థిరంగా ఉన్నది?

A నగరములో ధర	20	22	19	23	16
B నగరములో ధర	10	20	18	12	15

7. ఒక దత్తాంశము వ్యాప్తి మరియు వ్యాప్తి గుణకములు వరుసగా 20 మరియు 0.2 అయిన దత్తాంశము గరిష్ఠ మరియు కనిష్ఠ విలువలను కనుగొనుము.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_8.indd 348 13-02-2023 19:18:29

8. రెండు పాచికలు దొర్లించబడినది. అయిన ముఖవిలువల లబ్ధం 6 లేక ముఖవిలువల భేదం 5 గా నుండుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.
9. ఇద్దరు పిల్లలు గల కుటుంబంలో కనీసం ఒక అమ్మాయి ఉండుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.
10. ఒక సంచిలో 5 తెలుపు బంతులు మరియు కొన్ని నలుపు బంతులు ఉన్నాయి. సంచి నుండి నలుపు బంతిని తీయుటకు గల సంభావ్యత తెలుపు బంతిని తీయుటకు గల సంభావ్యతకు రెండింతలుంటుంది. అయిన నలుపు బంతుల సంఖ్యను కనుగొనుము.
11. ఒక విద్యార్థి వార్షిక పరీక్షలో ఆంగ్లము మరియు తెలుగు రెండింటిలో ఉత్తీర్ణత సాధించుటకు గల సంభావ్యత 0.5 మరియు రెండింటిలోను ఉత్తీర్ణత సాధించకుండుటకు గల సంభావ్యత 0.1. ఆంగ్లములో ఉత్తీర్ణత సాధించుటకు గల సంభావ్యత 0.75 అయిన తెలుగులో ఉత్తీర్ణత సాధించుటకు గల సంభావ్యత ఎంత?

గుర్తించుకోవలసిన విషయాలు

- వ్యాప్తి $= L-S$ (L - గరిష్ఠ విలువ, S - కనిష్ఠ విలువ)
- వ్యాప్తి గుణకము $= \frac{L-S}{L+S}$; విస్తృతి $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}$
- క్రమవిచలనము $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma\left(x_i-\bar{x}\right)^2}{n}}$
- క్రమవిచలనము (అవర్గీకృత దత్తాంశమునకు)

  (i) ప్రత్యక్ష పద్ధతి $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n}-\left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2}$ (ii) అంకమధ్యమ పద్ధతి $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d_i^2}{n}}$

  (iii) ఊహించిన అంకమధ్యమ పద్ధతి $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d_i^2}{n}-\left(\frac{\Sigma d_i}{n}\right)^2}$

  (iv) సోపాన విచలన పద్ధతి $\sigma = c\times\sqrt{\frac{\Sigma d_i^2}{n}-\left(\frac{\Sigma d_i}{n}\right)^2}$
- మొదటి n సహజసంఖ్యల క్రమవిచలనము $\sigma = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$
- క్రమవిచలనము (వర్గీకృత దత్తాంశమునకు)

  (i) అంకమధ్యమ పద్ధతి $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_i d_i^2}{N}}$ (ii)ఊహించిన అంకమధ్యమ పద్ధతి $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_i d_i^2}{N}-\left(\frac{\Sigma f_i d_i}{N}\right)^2}$

  (iii) సోపాన విచలన పద్ధతి $\sigma = C\times\sqrt{\frac{\Sigma f_i d_i^2}{N}-\left(\frac{\Sigma f_i d_i}{N}\right)^2}$
- విచలన గుణకము $\text{C.V} = \frac{\sigma}{\bar{x}}\times 100\%$
- విచలన గుణకము తక్కువగా ఉన్నట్లయితే దత్తాంశములోని రాశులు ఎక్కువ స్థిరత్వమును కలిగియుండును.
- విచలన గుణకము ఎక్కువగా ఉన్నట్లయితే దత్తాంశములోని రాశులు తక్కువ స్థిరత్వమును కలిగి ఉంటాయి.
- ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగములో, అన్ని పర్యవసానాల సమితి ముందుగానే తెలుస్తుంది కాని ఖచ్చితమైన పర్యవసానము ముందుగానే తెలియదు.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_8.indd 349 13-02-2023 19:18:30

- సాధ్యమయ్యే అన్ని పర్యవసానాల సమితిని ప్రతిరూప ఆవరణ అంటారు.
- A, B లు పరస్పర వర్జిత ఘటనలైన $A \cap B = \phi$
- ఘటన E యొక్క సంభావ్యత $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)}$

  (i) ఖచ్చిత లేక ధృడ ఘటన సంభావ్యత 1 మరియు అసాధ్య ఘటన సంభావ్యత 0

  (ii) $0 \leq P(E) \leq 1$; (iii) $P(\bar{E})$ 1 $P(E)$
- A మరియు B లు పరస్పర వర్జిత ఘటనలైన $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- (i) $P(A \cap \bar{B}) = P(A$ మాత్రము$) = P(A) - P(A \cap B)$

  (ii) $P(\bar{A} \cap B) = P(B$ మాత్రము$) = P(B) - P(A \cap B)$
- A మరియు B లు ఏవైనా రెండు ఘటనలయిన $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- A, B, C లు ఏవైనా మూడు ఘటనలైన

  $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C)$

  $-P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$

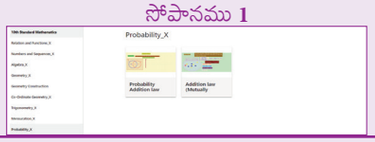
అంతర్జాల కృత్యము

ICT 8.1

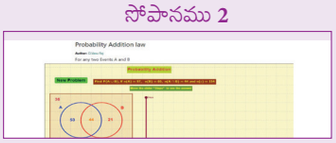
సోపానము 1: బ్రౌజర్‌ను ఓపెన్ చేసి క్రింద ఇవ్వబడిన URL లింక్‌ను టైపు చేయుము. లేదా QR కోడ్‌ను స్కాన్ చేయుము. పాఠము **"Probability"** సంభావ్యత ఓపెన్ అవుతుంది. పని కాగితము **" Probability Addition law "** ని ఎన్నుకొనుము.

సోపానము 2: పనికాగితములో ఇవ్వబడిన ప్రశ్నలను "New Problem" క్లిక్ చేయుట ద్వారా మార్చుకొనవచ్చును. స్లైడర్‌లను జరిపి సోపానములను చూడండి.

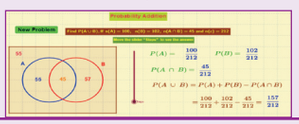
సోపానము 1



సోపానము 2



ఆశించిన ఫలితములు

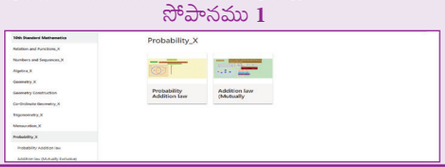


ICT 8.2

సోపానము 1: బ్రౌజర్‌ను ఓపెన్ చేసి క్రింద ఇవ్వబడిన URL లింక్‌ను టైపు చేయుము. లేదా QR కోడ్‌ను స్కాన్ చేయుము. పాఠము **"Probability"** సంభావ్యత ఓపెన్ అవుతుంది. పని కాగితము **" Addition law Mutually Exclusive"** ని ఎన్నుకొనుము.

సోపానము 2: పనికాగితములో ఇవ్వబడిన ప్రశ్నలను "New Problem" క్లిక్ చేయుట ద్వారా మార్చుకొనవచ్చును. స్లైడర్‌లను జరిపి సోపానములను చూడండి.

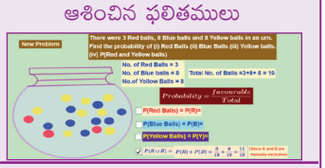
సోపానము 1



సోపానము 2



ఆశించిన ఫలితములు



ఇతర కృత్యముల కొరకు పై సోపానాలను మరలా ప్రయత్నించండి.

https://www.geogebra.org/m/jfr2zzgy#chapter/359554

or Scan the QR Code.

10th_Maths_Telugu_Medium_Unit_8.indd 350 13-02-2023 19:18:32

జవాబులు

అభ్యాసము 1.1

1.(i) $A\times B=\{(2,1),(2,-4),(-2,1),(-2,-4),(3,1),(3,-4)\}$

$A\times A=\{(2,2),(2,-2),(2,3),(-2,2),(-2,-2),(-2,3),(3,2),(3,-2),(3,3)\}$

$B\times A=\{(1,2),(1,-2),(1,3),(-4,2),(-4,-2),(-4,3)\}$

(ii) $A\times B=\{(p,p)(p,q)(q,p)(q,q)\}$; $A\times A=\{(p,p),(p,q),(q,p),(q,q)\}$;

$B\times A=\{(p,p),(p,q),(q,p),(q,q)\}$

(iii) $A\times B=\{\ \}$; $A\times A=\{(m,m),(m,n),(n,m),(n,n)\}$; $B\times A=\{\ \}$

2. $A\times B=\{(1,2),(1,3),(1,5),(1,7),(2,2),(2,3),(2,5),(2,7),(3,2),(3,3),(3,5),(3,7)\}$

$B\times A=\{(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(5,1),(5,2),(5,3),(7,1),(7,2),(7,3)\}$

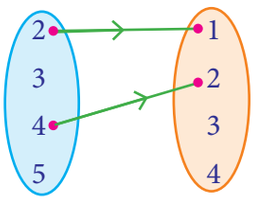
3. $A=\{3,4\}$ $B=\{-2,0,3\}$ 5. సత్యము

అభ్యాసము 1.2

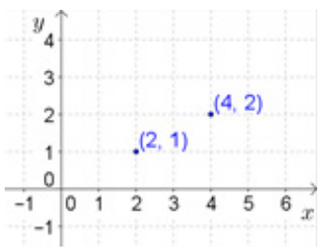
1.(i) సంబంధం లేదు (ii) సంబంధం లేదు (iii) సంబంధం (iv) సంబంధం లేదు

2. $\{1,2,3,4,5,6\},\{1,4,9,16,25,36\}$ 3. $\{0,1,2,3,4,5\},\{3,4,5,6,7,8\}$

4. (i)(a)

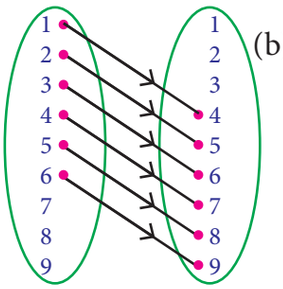


(b)

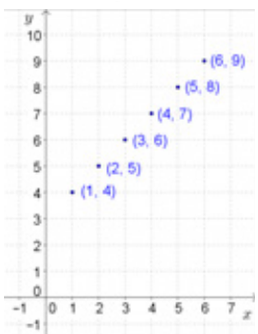


(c) $\{(2,1),(4,2)\}$

(ii)(a)

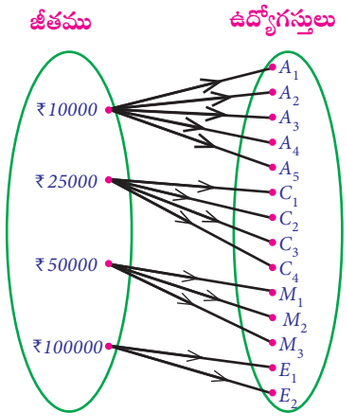


(b)



(c) $\{(1,4),(2,5),(3,6),(4,7),(5,8),(6,9)\}$

5. $\{(10000,A_1),(10000,A_2),(10000,A_3),(10000,A_4),(10000,A_5),(25000,C_1),(25000,C_2),(25000,C_3),(25000,C_4),(50000,M_1),(50000,M_2),(50000,M_3),(100000,E_1),(100000,E_2)\}$



10th_Maths_Telugu_Medium_Answer_Key.indd 351 13-02-2023 19:48:39

అభ్యాసము 1.3

1. $\{1,2,3,4,...\}$, $\{1,2,3,4\}$, $\{2,4,6,8,...\}$, అవును. 2. అవును

3.(i) 12 (ii) $4a^2-10a+6$ (iii) 0 (iv) $x^2-7x+12$

4.(i) (a) 9 (b) 6 (c) 6 (d) 0

(ii) 9.5 (iii) (a) $\{x \mid 0 \le x \le 10, x \in R\}$ (b) $\{x \mid 0 \le x \le 9, x \in R\}$

(iv) 5 5. 2 6.(i) -2 (ii) $\frac{3}{2}$ (iii) 3 (iv) $\frac{1}{2}$

7. $4x^3-96x^2+576x$ 8. 1 9. $500t$

10.(i) అవును (ii) 0.9, 24.5 (iii) 60.5 అంగుళాలు (iv) 32 సెం.మీ

అభ్యాసము 1.4

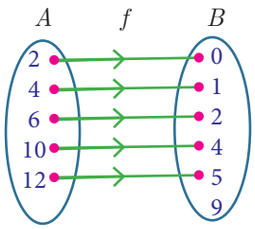
1.(i) ప్రమేయం కాదు (ii) ప్రమేయం (iii) ప్రమేయం కాదు (iv) ప్రమేయం

2.(i) $\{(2,0),(4,1),(6,2),(10,4),(12,5)\}$

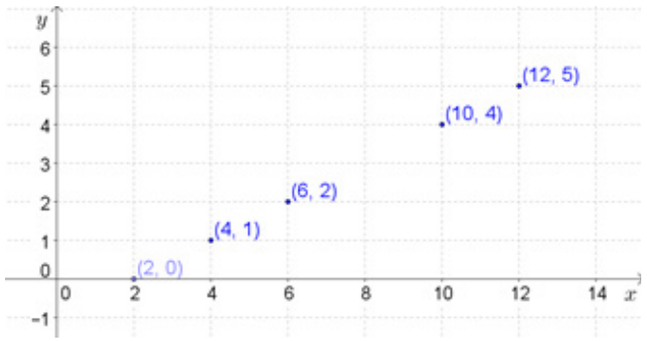
(ii)

x	2	4	6	10	12
$f(x)$	0	1	2	4	5

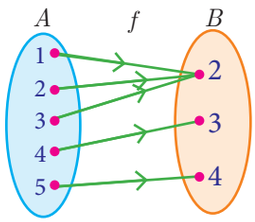
(iii)



(iv)



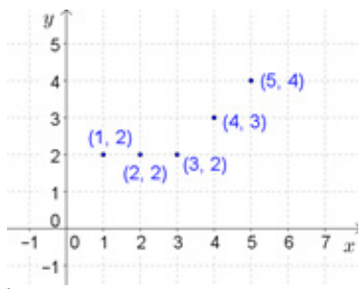
3.(i)



(ii)

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	2	2	2	3	4

(iii)



6.(i) $\{1,8,27,64\}$ (ii) ఏక-ఏక మరియు సంగ్రస్త ప్రమేయం

7.(i) ద్విగుణ ప్రమేయం (ii) ద్విగుణ ప్రమేయం కాదు 8. a = -1 లేక b = 1

9.(i) 5 (ii) 2 (iii) -2.5 (iv) 1

10.(i) 2 (ii) 10 (iii) 178 (iv) $\frac{-9}{17}$

11. అవును 12.(i) $32°F$ (ii) $82.4°F$ (iii) $24°F$

(iv) $100°C$ (v) $-40°$

అభ్యాసము 1.5

1.(i) $x^2-6,\ (x-6)^2$; సమానంకావు (ii) $\frac{2}{2x^2-1},\ \frac{8}{x^2}-1$; సమానంకావు

(iii) $\frac{3-x}{3},\ \frac{9-x}{3}$; సమానంకావు (iv) $x-1,\ x-1$; సమానం (v) $4x^2+8x+3,\ 4x^2$; సమానం కావు

2.(i) -5 (ii) $\frac{-5}{3}$ 4.(i) $a=\pm 2$

5. $\{y \mid y=2x^2+1,\ x \in \mathbb{N}\}$; $\{y \mid y=(2x+1)^2, x \in \mathbb{N}\}$ 6.(i) x^4-2x^2 (ii) $\left[x^4-2x^2\right]^2-1$

7. f ఏక-ఏక, g ఏక-ఏకం కాదు, $f \circ g$ ఏక-ఏకం కాదు 9. $-4x-1$

10th_Maths_Telugu_Medium_Answer_Key.indd 352 13-02-2023 19:48:42

అభ్యాసము 1.6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
(C)	(C)	(A)	(B)	(C)	(D)	(C)	(A)	(C)	(C)	(A)	(D)	(C)	(B)	(D)

అధ్యాయ అభ్యాసము-1

1. 1,2 మరియు -5,1 2. $\{-1,0,1\}$, $\{(-1,-1),(-1,1),(0,-1),(0,0),(1,-1),(1,0),(1,1)\}$

3.(i) 4 (ii) $\sqrt{2}$ (iii) $\sqrt{a}$

4. $\{(9,3),(10,5),(11,11),(12,3),(13,13),(14,7),(15,5),(16,2),(17,17)\}$, $\{2,3,5,7,11,13,17\}$

5. $-1 \le x \le 1$ 9.(i) $\frac{-5}{6}$ (ii) $2(x+1)$ 10.(i) $R-\{9\}$

(ii) R (iii) $[2,\infty)$ (iv) R

అభ్యాసము 2.1

1. 2, 5, 8, 11, … 2. 25, 7 6.(i) 4 (ii) 51

(iii) 144 (iv) 6 7. 174 8. $2,-1$ 9. 6

అభ్యాసము 2.2

1. సరిసంఖ్య 2. ఏ విలువలేదు 3. 10101 4. 9, 3

5. 2,3,5,7 and 3,4,2,1 6. 2040, 34 7. 999720 8. 3647 9. 2520

అభ్యాసము 2.3

1.(i) 7 (ii) 5 (iii) 2 (iv) 7 (v) 2

2. 3 3. 2,8,14,… 4. 8, 19, 30, … 5. 11 a.m

6. 8 p.m 7. శుక్రవారం 9. 2 10. 6 am, సోమవారం

అభ్యాసము 2.4

1.(i) 216,648,1944 (ii) $-7,-11,-15$ (iii) $\frac{4}{25},\frac{5}{36},\frac{6}{49}$ 2.(i) $-1,6,25,62$

(ii) $2,-6,12,-20$ (iii) -4, 2, 12, 26 3.(i) n^2+1 (ii) $\frac{n-1}{n}$

(iii) $5n-2$ 4.(i) $\frac{15}{4}, \frac{13}{3}$ (ii) $-12,-117$ 5. $\frac{63}{11},\frac{225}{31}$ 6. 1,1,3,7,17,41

అభ్యాసము 2.5

1.(i) అంకశ్రేడి (ii) అంకశ్రేడి కాదు (iii) అంకశ్రేడి (iv) అంకశ్రేడి

(v) అంకశ్రేడి కాదు 2.(i) 5, 11, 17, … (ii) 7, 2, -3, … (iii) $\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \ldots$

3.(i) -1, 2 (ii) $-3,-7$ 4. -83 5. 15

6. 93, 99 8. 4 9. 3,17,31 10. 78

11. 2,9,16 12. 5:7 13. $-3^\circ C, 0^\circ C, 3^\circ C, 6^\circ C, 9^\circ C$ 14. 31 సంవత్సరాలు

అభ్యాసము 2.6

1.(i) 3240 (ii) 999 (iii) 721 2. 20 3. 1540

5. 612.5 6.50625 7. 168448 8.(i) ₹ 45750 (ii) ₹ 5750 9. 20 నెలలు

10.(i) 42 (ii) 2130 12. $\frac{6}{a+b}(24a-13b)$

అభ్యాసము 2.7

1.(i) గుణశ్రేడి (ii) గుణశ్రేడి కాదు (iii) గుణశ్రేడి (iv) గుణశ్రేడి (v) గుణశ్రేడి

(vi) గుణశ్రేడి కాదు (vii) గుణశ్రేడి 2.(i) 6,18,54 (ii) $\sqrt{2},2,2\sqrt{2}$

10th_Maths_Telugu_Medium_Answer_Key.indd 353 13-02-2023 19:48:45

(iii) 1000,400,160 3. 1 4. -18 5.(i) 12 (ii) 7 6. $5\times(3^{11})$

7. 3072 9. $\frac{9}{2}$, 3, 2 లేక 2,3, $\frac{9}{2}$ 10. ₹ 76577 11. ₹ 23820, ₹ 24040

అభ్యాసము 2.8

1.(i) $\frac{25}{8}\left[1-\left(-\frac{3}{5}\right)^n\right]$ (ii) $\frac{1024}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$ 2. 1820 3. 12

4.(i) $\frac{27}{2}$ (ii) 63 5. $\frac{1}{4}$ 6.(i) $\frac{4}{9}n-\frac{4\left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right]}{81}$

(ii) $\frac{10(10^n-1)}{27}-\frac{n}{3}$ 7. 3069 8. ₹ 174760 9. $\frac{41}{333}$

అభ్యాసము 2.9

1.(i) 1830 (ii) 1584 (iii) 3003 (iv) 1240 (v) 3256

(vi) 42075 (vii) 1296 2. 105625 3. 210

4. 15 5. 9 6.4615 సెం.మీ^{2} 7.(i) $4n^3+3n^2$ (ii) 2240

అభ్యాసము 2.10

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
(C)	(A)	(B)	(C)	(D)	(A)	(D)	(C)	(A)	(C)	(C)	(D)	(B)	(B)	(C)

అధ్యాయ అభ్యాసము-2

2.(i) 35 litres (ii) 5 (iii) 3 3. 1 6. -78

8. ₹1200 9. $\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$, $3\sqrt{2}$, ... 10. ₹27636

అభ్యాసము 3.1

1.(i) 2, -1, 4 (ii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ (iii) 35, 30, 25

2.(i) అనంతమైన సాధనలు (ii) సాధనలేదు (iii) ఏకైక సాధన

3. 24 సంవత్సరాలు, 51 సంవత్సరాలు, 84 సంవత్సరాలు, 4. 137 5. 7, 3, 2

అభ్యాసము 3.2

1.(i) x^2+2x-3 (ii) x^2+1 (iii) $x(x^2+4x+4)$ (iv) $3(x^2+1)$

2.(i) $8x^3y^2$ (ii) $-36a^3b^2c$ (iii) $-48m^2n^2$ (iv) $(p-1)(p-2)(p+2)$

(v) $4(x+3)(2x+1)(x-3)$ (vi) $2^3x^2(2x-3y)^3(4x^2+6xy+9y^2)$

అభ్యాసము 3.3

1.(i) $7xy,\ 105x^2y^2$ (ii) $(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1),\ (x+1)$

(iii) $x(x+y),\ xy(x+y)$ 2.(i) $(a+6)(a-2)(a-3)$ (ii) $x(x-3a)^2(x^2+3ax+9a^2)$

3.(i) $4x^2(x-1)$ (ii) x^2-xy+y^2 4. (i) $(a+2)(a-7)$ (ii) $(x^2-y^2)(x^2+xy+y^2)$

అభ్యాసము 3.4

1.(i) $\frac{x-1}{x}$ (ii) $\frac{x-9}{x-2}$ (iii) $\frac{9}{x-1}$ (iv) $\frac{p+5}{2p(p-4)}$

2. (i) -5, 5 (ii) 2, 3 (iii) 1 (iv) 0, -3, 2

10th_Maths_Telugu_Medium_Answer_Key.indd 354 13-02-2023 19:48:48

అభ్యాసము 3.5

1.(i) $\frac{3x^3z}{5y^3}$ (ii) $p+4$ (iii) $\frac{3t^2}{4}$ 2.(i) $\frac{3x-4y}{2x-5}$ (ii) $\frac{x^2+xy+y^2}{3(x+2y)}$

3.(i) -5 (ii) $\frac{b-4}{b+2}$ (iii) $\frac{3y}{x-3}$ (iv) $\frac{4(2t-1)}{3}$ 4. $\frac{4}{9}$ 5. x^2+4x+4

అభ్యాసము 3.6

1.(i) $\frac{2x}{x-2}$ (ii) $\frac{2x^2+2x-7}{(x+3)(x-2)}$ (iii) x^2+xy+y^2 2.(i) $\frac{2(x-2)}{x-4}$ (ii) $\frac{1-x}{1+x}$

3. $\frac{2x^3+1}{(x^2+2)^2}$ 4. $\frac{x+1}{x^2-2x+4}$ 5. $\frac{(4x^2-1)}{2(4x^2+1)}$ 7. 2 గంటల 24 నిమిషాలు 8. 30 కి.గ్రా, 20 కి.గ్రా

అభ్యాసము 3.7

1.(i) $2\left|\frac{y^4z^6}{x^2}\right|$ (ii) $4\left|\frac{\sqrt{7}x+\sqrt{2}}{4x-1}\right|$ (iii) $\frac{11}{9}\left|\frac{(a+b)^4(x+y)^4}{(a-b)^6}\right|$ 2.(i) $|2x+5|$

(ii) $|3x-4y+5z|$ (iii) $|(x-2)(7x+1)(4x-1)|$ (iv) $\frac{1}{6}|(4x+3)(3x+2)(x+2)|$

అభ్యాసము 3.8

1.(i) $|x^2-6x+3|$ **(ii)** $|2x^2-7x-3|$ **(iii)** $|4x^2+1|$ **(iv)** $|11x^2-9x-12|$

2.(i) 49, -42 (ii)144, 264 3.(i) 24, 9 (ii) 24, -32

అభ్యాసము 3.9

1.(i) $x^2+9x+20=0$ (ii) $3x^2-5x+12=0$ (iii) $2x^2+3x-2=0$

(iv) $x^2+(2-a)^2x+(a+5)^2=0$ 2.(i) $-3, -28$ (ii) $-3, 0$ (iii) $-\frac{1}{3}, -\frac{10}{3}$ (iv) $\frac{1}{3}, \frac{-4}{3}$

అభ్యాసము 3.10

1.(i) $-\frac{1}{4}, 2$ (ii) $-2, \frac{9}{2}$ (iii) $-2, 9$ (iv) $-\sqrt{2}, \frac{-5}{\sqrt{2}}$ (v) $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ 2. 6

అభ్యాసము 3.11

1.(i) $\frac{2}{3}, \frac{2}{3}$ (ii) $-1, 3$ 2.(i) 2, $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

(iii) $-1, \frac{23}{3}$ (iv) $\frac{a+b}{6}, \frac{a-b}{6}$ 3. 3.75 సెకన్లు

అభ్యాసము 3.12

1. 5, $-\frac{1}{5}$ 2. 1.5 మీ 3. 45 కి.మీ/గం॥ 4. 20 సంవత్సరాలు,, 10 సంవత్సరాలు

5.అవును, 12 మీ, 16 మీ 6. 72 7. 28 మీ, 42 మీ 8. 2 మీ 9. 10.7 సెం.మీ

అభ్యాసము 3.13

1.(i) వాస్తవములు మరియు అసమానములు (ii)వాస్తవములు మరియు అసమానములు (iii) వాస్తవ మూలములు కావు

(iv)వాస్తవములు మరియు సమానము (v)వాస్తవములు మరియు సమానము 2.(i) 2, 3 (ii) 1, $\frac{1}{9}$

అభ్యాసము 3.14

1.(i) $\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{3\alpha\beta}$ (ii) $\frac{\alpha+\beta}{(\alpha\beta)^2}$ (iii) $9\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+1$

(iv) $\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+3(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}$ 2.(i) $\frac{7}{5}$ (ii) $\frac{29}{10}$ (iii) $\frac{13}{6}$

10th_Maths_Telugu_Medium_Answer_Key.indd 355 13-02-2023 19:48:53

3.(i) $x^2-44x+16=0$ (ii) $x^2-3x-1=0$ (iii) $x^2-24x-64=0$

4. $-15, 15$ 5. $-24, 24$ 6. -36

అభ్యాసము 3.15

1. ₹6500, ₹1250 2. $y=8, x=4$ 3. $y=4.5, x=15$, 4. $y=18$ నిమిషాలు, 10 పైపులు

5. 360, ₹30 6. ₹90, 10 గంటలు

అభ్యాసము 3.16

1.(i) వాస్తవ మరియు అసమాన మూలాలు (ii) వాస్తవ మరియు సమాన మూలాలు (iii) వాస్తవ మూలాలు లేవు

(iv)వాస్తవ మరియు అసమాన మూలాలు (v) వాస్తవ మరియు సమాన మూలాలు (vi) వాస్తవ మరియు అసమాన మూలాలు

2. $-3, 4$ 3.వాస్తవ మూలాలు లేవు 4. -1 5. $-4, 1$ 6. $-2, 7$ 7.$-1, 3$ 8. $-2, 3$

అభ్యాసము 3.17

1.(i) 16 (ii) 4×4 (iii) $\sqrt{7}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 5, 0, -11, 1$

2. $1\times18, 2\times9, 3\times6, 6\times3, 9\times2, 18\times1$ మరియు $1\times6, 2\times3, 3\times2, 6\times1$

3.(i) $\begin{pmatrix}1&3&5\\0&2&4\\1&1&3\end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix}\frac{8}{3}&9&\frac{64}{3}\\9&\frac{64}{3}&\frac{125}{3}\\\frac{64}{3}&\frac{125}{3}&72\end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix}5&1&3\\4&-7&8\\3&9&2\end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix}-\sqrt{7}&\sqrt{5}&-\sqrt{3}\\3&-2&5\end{pmatrix}$ 7.(i) 3,12,3 (ii) 4,2,0 లేదా 2,4,0 (iii) 2,4,3

అభ్యాసము 3.18

3. $\begin{pmatrix}5&0\\\frac{3}{2}&\frac{9}{2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2&0\\\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ 4.(i) $\begin{pmatrix}7&-17&-37\\-39&-11&-26\end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix}-63&-15&-45\\15&-27&-60\end{pmatrix}$

5.(i) $4, -10, 12$ (ii) $-10, 14, 10$ 6. 4,6 7. 4 8. $-1, 5$ మరియు $-2, 4$

అభ్యాసము 3.19

1. $3\times3, 4\times2, 4\times2, 4\times1, 1\times3$ 2. $p\times r$, నిర్వచించబడదు 3. 7,10

4. $\begin{pmatrix}12&19\\10&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-10&-4\\24&25\end{pmatrix}$, $AB\neq BA$

అభ్యాసము 3.20

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
(D)	(A)	(B)	(A)	(B)	(C)	(D)	(B)	(C)	(C)	(B)	(A)	(B)	(D)	(B)	(B)	(D)	(B)	(C)	(A)

అధ్యాయ అభ్యాసము-3

1. 6,2,1 2. 42,78,30 3. 153 4. $(ky+x)(k^2x^2-y^2)$ 5. x^2+2x+1 6. (i) x^a-2

(ii) $-x+\frac{5}{2}$ 7. $\frac{(p+q+r)^2}{2qr}$ 8. 11 గంటలు,, 22 గంటలు,, 33 గంటలు, 9. $|17x^2-18x+19|$ 10. 3

11. 14 కి.మీ/గం 12. 120 మీ,40 మీ 13. 14 నిమిషాలు 14. 25 15.(i) $x^2-6x+11=0$

(ii) $3x^2-2x+1=0$ 16. $3, \frac{9}{4}$ 17.(i) $\begin{pmatrix}750&1500&2250\\3750&2250&750\end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix}8000&16000&24000\\40000&24000&8000\end{pmatrix}$

10th_Maths_Telugu_Medium_Answer_Key.indd 356 13-02-2023 19:48:56

18. $\sin\theta$ 19. 8, 4 20. $\begin{pmatrix} 122 & 71 \\ -58 & -34 \end{pmatrix}$

అభ్యాసము 4.1

1.(i) సరూపం కాదు (ii) సరూపం,2.5 2. 3.3 మీ 3. 42 మీ

5. $\frac{15}{13}, \frac{36}{13}$ 6. 5.6 సెం.మీ, 3.25 సెం.మీ 8.2.8 సెం.మీ 9. 2 మీ

అభ్యాసము 4.2

1.(i) 6.43 సెం.మీ (ii) 1 2. 60 సెం.మీ 5. 4 సెం.మీ, 4 సెం.మీ

8.(i) సమద్విఖండన రేఖ కాదు (ii) సమద్విఖండన రేఖ 12. 2.1 సెం.మీ

అభ్యాసము 4.3

1. 30 మీ 2. 1 మైలు 3. 21.74 మీ 4. 12 సెం.మీ, 5 సెం.మీ

5. 10 మీ, 24 మీ, 26 మీ 6. 0.8 మీ

అభ్యాసము 4.4

1. 7 సెం.మీ 2.2 సెం.మీ 3.7 సెం.మీ, 5 సెం.మీ, 3 సెం.మీ 4. 30° 5. 130° 6 $\frac{20}{3}$ సెం.మీ

7. 10 సెం.మీ 8. 4.8 సెం.మీ 10. 2 సెం.మీ 13. 8.7 సెం.మీ 14. 10.3 సెం.మీ 15. 4 సెం.మీ 16. 6.3 సెం.మీ

అభ్యాసము 4.5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
(C)	(B)	(D)	(A)	(D)	(A)	(B)	(C)	(A)	(D)	(B)	(B)	(B)	(D)	(A)

అధ్యాయ అభ్యాసము-4

2. $\frac{12}{5}$ సెం.మీ, $\frac{10}{3}$ సెం.మీ 5. $20\sqrt{13}$ కిమీ 7. 10 మీ 8. నీడ $= \frac{4}{11} \times$ (దూరం) 10.6 ప్రమాణాలు

అభ్యాసము 5.1

1.(i) 24 చ.ప్రమాణాలు (ii) 11.5 చ.ప్రమాణాలు 2.(i) సరేఖీయం (ii) సరేఖీయం

3.(i) 44 (ii) 13 4.(i) 0 (ii) $\frac{1}{2}$ or -1 5.(i) 35 చ.ప్రమాణాలు (ii) 34 చ.ప్రమాణాలు

6. -5 7. $2, -1$ 8. 24 చ.ప్రమాణాలు, (ΔABC) వైశాల్యం $4 \times (\Delta PQR)$ వైశాల్యం 9. 122 చ.ప్రమాణాలు

10. 10 బకెట్లు 11.(i) 3.75 చ.ప్రమాణాలు (ii) 3 చ.ప్రమాణాలు (iii) 13.88 చ.ప్రమాణాలు

అభ్యాసము 5.2

1.(i) నిర్వచించలేము (ii) 0 2.(i) 0° (ii) 45° 3.(i) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (ii) $-\cot\theta$

4. 3 6. 7 7. $\frac{17}{2}$ 8. 4 9.(i) అవును (ii) అవును 11. 5.2

అభ్యాసము 5.3

1.(i) $2y + 3 = 0$ (ii) $2x - 5 = 0$ 2. $1, 45°, \frac{5}{2}$

3. $x - \sqrt{3y} - 3\sqrt{3} = 0$ 4. $\frac{\sqrt{3}+3}{2}, \frac{3+3\sqrt{3}}{-2}$ 5. -5 6. $x - y - 16 = 0$

7.(i) $16x - 15y - 22 = 0$ (ii) $4x - 9y + 19 = 0$ 8. $15x - 11y + 46 = 0$

9. $x + 4y - 14 = 0, 3x + 5y - 28 = 0$ 10. $5x + 4y - 3 = 0$ 11. (i)

(ii) 1 (iii) 7.5 సెకన్లు (iv) 10 సెకన్లు

12.(i) $3x - 2y - 12 = 0$ (ii) $3x - 20y + 15 = 0$ 13.(i) 2, -3

(ii) $-3, -4$ 14.(i) $5x + 2y + 3 = 0$ (ii) $x + y + 4 = 0$

10th_Maths_Telugu_Medium_Answer_Key.indd 357 13-02-2023 19:48:59

అభ్యాసము 5.4

1.(i) 0 (ii) నిర్వచించలేము 2.(i) 0.7 (ii) నిర్వచించగలము

3.(i) సమాంతరం (ii) లంబం 4. 4 5. $3x + 4y + 7 = 0$

6. $2x + 5y - 2 = 0$ 7. $2x + 5y + 6 = 0$, $5x + y - 48 = 0$ 8. $5x - 3y - 8 = 0$

9. $13x + 5y - 18 = 0$ 10. $49x + 28y - 156 = 0$ 11. $31x + 15y + 30 = 0$

12. $4x + 13y - 9 = 0$

అభ్యాసము 5.5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
(B)	(A)	(B)	(C)	(C)	(D)	(B)	(B)	(A)	(C)	(C)	(A)	(B)	(B)	(B)

అధ్యాయ అభ్యాసము-1

1. సమచతుర్భుజం 2. $\left(\frac{7}{2}, \frac{13}{2}\right)$ 3. 0 చ.ప్రమాణాలు 4. -5 6. $2x - 3y - 6 = 0$, $3x - 2y + 6 = 0$

7. 1340 litres 8. $(-1, -4)$ 9. $13x + 13y - 6 = 0$ 10. $119x + 102y - 115 = 0$

అభ్యాసము 6.2

1. 30° 2. 24 మీ 3. 3.66 మీ 4. 1.5 మీ 5.(i) 7 మీ (ii) 16.39 మీ 6. 10 మీ

అభ్యాసము 6.3

1. 150 మీ 2. 50 మీ 3. 32.93 మీ 4. 2078.4 మీ 6. 30 $Feet$ / m

అభ్యాసము 6.4

1. 35.52 మీ 2. 69.28 మీ, 160 మీ 4. 150 మీ, ఉన్నది

5.(i) 264 మీ (ii) 198 మీ (iii) 114.31 మీ 6.(i) 2.91 కి.మీ (ii) 6.93 కి.మీ

అభ్యాసము 6.5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
(B)	(D)	(B)	(A)	(B)	(B)	(A)	(C)	(B)	(D)	(B)	(B)	(D)	(B)	(A)

అధ్యాయ అభ్యాసము-6

5. 29.28 మీ/సె 6. 1.97 సెకన్లు (రమారమిగా) 7.(i) 24.58 కి.మీ (రమారమిగా)

(ii) 17.21 కి.మీ (రమారమిగా) (iii) 21.41 కి.మీ (రమారమిగా) (iv) 23.78 కి.మీ (రమారమిగా)

8. 200 మీ 9. 39.19 మీ

అభ్యాసము 7.1

1. 25 సెం.మీ, 35 సెం.మీ 2. 7 మీ, 35 మీ 3. 2992 చ.సెం.మీ

4. PQ ను త్రిప్పినప్పుడు శంఖువు ప్రక్కతల వైశాల్యము పెద్దదిగా ఉండును 5. 18.25 మీ

6. 28 caps 7. $\sqrt{5} : 9$ 8. 56.25% 9. ₹ 302.72 10. ₹ 1357.72

అభ్యాసము 7.2

1. 4.67 మీ 2. 1 సెం.మీ 3. 652190 సెం.మీ^{3} 4. 63 నిమిషాలు (సుమారుగా)

5. 100.58 6. 5:7 7. 64:343 9. 4186.29 సెం.మీ^{3} 10. ₹ 418.36

అభ్యాసము 7.3

1. 1642.67 సెం.మీ^{3} 2. 66 సెం.మీ^{3} 3. 2.46 సెం.మీ^{3} 4. 905.14 సెం.మీ^{3}

5. 77.78 మి.మీ^{3} 6. 332.5 సెం.మీ^{2} 7.(i) $4\pi r^2$ చ.ప్రమాణాలు

(ii) $4\pi r^2$ చ.ప్రమాణాలు (iii) 1:1

అభ్యాసము 7.4

1.36 సెం.మీ 2. 2 గంటలు 3. $\frac{h}{3x^2}$ 4. 6 సెం.మీ 5. 1812000 సెం.మీ^{3}/1812 లీ॥ 6. 1.33 సెం.మీ

7. 1 సెం.మీ 8. 100%

10th_Maths_Telugu_Medium_Answer_Key.indd 358 13-02-2023 19:49:02

అభ్యాసము 7.5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
(D)	(A)	(A)	(B)	(C)	(B)	(B)	(C)	(C)	(A)	(D)	(A)	(A)	(B)	(D)

అధ్యాయ అభ్యాసము-7

1. 48000 పదాలు 2. 27 నిమిషాలు (రమారమిగా) 3. $\frac{1}{3}\pi r^3$ ఘ. ప్రమాణాలు 4. 782.57 చ.సెం.మీ
5. 450 నాణెములు 6. 4.8 సెం.మీ 7. ₹ 6800 8. 2 సెం.మీ 9. 17 సెం.మీ 10. 2794.18 సెం.మీ^{3}

అభ్యాసము 8.1

1.(i) 62; 0.33 (ii) 47.8; 0.64 2. 50.2 3. 250 4. 2.34
5. 222.22, 14.91 6. 6.9 7. 6.05 8. 4.5 9. 1.2, 1.44 10. 7.76 11. 14.6
12. 6 13. 1.24 14. 60.5, 14.61 15. 6 మరియు 8

అభ్యాసము 8.2

1. 52% 2. 4.69 3. 7.2 4. 180.28% 5. 14.4% 6. 10.07% 7. విద్య 8. విజ్ఞానశాస్త్రం, సాంఘికవిజ్ఞానశాస్త్రం

అభ్యాసము 8.3

1. $\{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$
2. $\{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\ (3,1),(3,2),(3,4),(3,5),(3,6),$
$(4,1),(4,2),(4,3),(4,5),(4,6),\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5)\}$

3. (i) $\frac{15}{32}$ (ii) 340 4. $\frac{3}{8}$ 5. (i) $\frac{9}{1000}$ (ii) $\frac{8}{999}$ 6. (i) $\frac{1}{4}$ (ii) $x = 4$
7.(i) $\frac{1}{6}$ (ii) $\frac{1}{6}$ (iii) $\frac{5}{12}$ (iv) 0 8. (i) $\frac{1}{8}$ (ii) $\frac{7}{8}$ (iii) $\frac{1}{2}$ (iv) $\frac{7}{8}$
9.(i) $\frac{3}{13}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{10}{13}$ (iv) $\frac{6}{13}$
10. 12 11. $\frac{157}{600}$ 12. (i) $\frac{1}{6}$ (ii) $\frac{5}{6}$ (iii) $\frac{5}{18}$
13. (i) $\frac{1}{8}$ (ii) $\frac{3}{4}$ (iii) $\frac{1}{8}$

అభ్యాసము 8.4

1. $\frac{11}{15}$ 2. (i) 0.58 (ii) 0.52 (iii) 0.74 3. 0.1 4. 1.2 5. 0.2
6. $\frac{5}{9}$ 7. $\frac{13}{18}$ 8. $\frac{7}{8}$ 9. $\frac{73}{280}$ 10. $\frac{17}{40}$ 11. 1 12. $\frac{11}{48}, \frac{11}{24}, \frac{11}{16}$ 13. $\frac{29}{35}$

అభ్యాసము 8.5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
(C)	(A)	(C)	(B)	(C)	(D)	(B)	(A)	(A)	(B)	(B)	(B)	(C)	(C)	(D)

అధ్యాయ అభ్యాసము-8

1. 8,12 2. 5.55 3. 7 4. 81 5. 5.17, 1.53 6. నగరము A 7. 60, 40
8. $\frac{1}{9}$ 9. $\frac{3}{4}$ 10. 10 11. $\frac{13}{20}$

10th_Maths_Telugu_Medium_Answer_Key.indd 359 13-02-2023 19:49:04

గణిత పదాలు

Algorithm	సోపాన పద్ధతి	Decompose	విభజించుట
Alternate segment	ఏకాంతర ఖండము	Diagonal matrix	వికర్ణమాత్రిక
Altitude	ఉన్నతి	Dimensions	పరిమాణములు
Angle bisector	కోణ సమద్విఖండన రేఖ	Discriminant	విచక్షణి
Angle of depression	నిమ్నకోణం	Distributive property	విభాగన్యాయము
Angle of elevation	ఊర్ధ్వకోణం	Domain	ప్రదేశము
Arithmetic progression	అంకశ్రేడి	Equal matrices	సమాన మాత్రికలు
Arrow diagram	బాణాచిత్రం	Equiangular	సమకోణీయం
Axis	అక్షం	Event	ఘటన
Axis of symmetry	సౌష్ఠవాక్షం	Frustum	శంఖు ఖండం
Basic proportionality	ప్రాథమిక అనురూప	Functions	ప్రమేయాలు
Bijection	ద్విగుణ ప్రమేయము	Geometric progression	గుణశ్రేడి
Cartesian product	కార్టీషియన్ లబ్ధం	Geo-positioning system	భౌగోళిక స్థాన వ్యవస్థ
Circular motion	వృత్తాకార చలనం	Graphical form	రేఖాచిత్ర రూపం
Clinometer	కోణమాపకం (క్లైనోమీటర్)	Great circle	పెద్ద వృత్తము
Co-domain	సహప్రదేశము	Height and distance	ఎత్తు మరియు దూరం
Coefficient of range	వ్యాప్తి గుణకము	Hemisphere	అర్ధగోళము
Coefficient of variation	విచలన గుణకం	Hollow	బోలు
Collinearity	సరేఖీయత	Horizontal level	క్షితిజ సమాంతర వరుస
Column matrix	నిలువు వరుస మాత్రిక	Horizontal line test	సమాంతర రేఖా పరీక్ష
Combined solids	సంయుక్త గనాలు	Hyperbola	అతిపరావలయం
Common difference	సామాన్య భేదము	Identity function	తత్సమ ప్రమేయం
Common ratio	సామాన్య నిష్పత్తి	Image	ప్రతిబింబం
Completing square method	చతురస్ర పద్ధతి	Inclination	వాలుకోణం
Composition of functions	మిశ్రమ ప్రమేయాలు	Inconsistent	అస్థిరమైనది
Concurrency theorem	స్వరూప సిద్ధాంతము	Injection	అన్వేక ప్రమేయం
Concurrent	సరూపాలు	Intercept	అంతరఖండం
Concyclic	ఏకవృత్తీయ	Into function	సంగస్త ప్రమేయం
Congruence	సర్వసమానం	Kadhams (unit of distance)	దూరము యొక్క ప్రమాణం
Consistent	స్థిరత్వం	Latitude	అక్షాంశ రేఖ
Constant function	స్థిర ప్రమేయం	Lemma	ఉప సిద్ధాంతం
Coordinate axes	నిరూపకాక్షములు	Line of sight	దృష్టి రేఖ
Counter-clock wise	సవ్యదిశ	Linear equations	రేఖీయ సమీకరణాలు
Curved surface area	వక్రతల వైశాల్యం	Linear function	రేఖీయ ప్రమేయాలు

10th_Maths_Telugu_Medium_Glosary.indd 360 13-02-2023 19:21:24

Longitude	రేఖాంశ రేఖ
Magnitude	పరిమాణము
Many-one function	బహు–ఏక ప్రమేయం
Matrix	మాత్రిక
Measures of central tendency	కేంద్రీయ స్థాన విలువలు
Measures of dispersion	విస్తరణ కలతలు
Median	మధ్యగతము
Modular	మాపము
Mutually exclusive events	పరస్పర వర్జిత ఘటనలు
Negative of a matrix	మాత్రిక ఋణాత్మకము
Non-vertical lines	క్షితిజ లంబంకాని రేఖలు
Non-zero integer	శూన్యేతర పూర్ణసంఖ్య
Non-zero real number	శూన్యేతర వాస్తవ సంఖ్య
Null matrix / Zero matrix	శూన్య మాత్రిక
Null relation	శూన్య సంబంధము
Oblique cylinder	వాలు స్థూపము
Oblique frustum	వంకరాన శంఖుఖండము
One-one function	ఏక–ఏక ప్రమేయం (అన్వేక ప్రమేయం)
Onto function	సంగస్త ప్రమేయం
Ordered pair	క్రమయుగ్మం
Outcomes	పర్యావసానము
Parabola	పరావలయం
Parallel planes	సమాంతర తలాలు
Perpendicular bisector	లంబసమద్విఖండన రేఖ
Point of contact	స్పర్శ బిందువు
Point of intersection	ఖండన బిందువు
Pre-image	పూర్వబింబము
Quadratic equation	వర్గ సమీకరణం
Quadratic function	వర్గ ప్రమేయము
Quadratic polynomials	వర్గబహుపద సమాసములు
Random experiment	యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం
Range	వ్యాప్తి
Rational expression	అకరణీయ సమాసము
Real valued function	వాస్తవ విలువ ప్రమేయము
Reciprocal function	వ్యుత్క్రమ ప్రమేయము

Relations	సంబంధాలు
Revolutions	భ్రమణాలు
Right circular cone	క్రమవృత్తాకార శంఖువు
Right circular cylinder	క్రమవృత్తాకార స్థూపం
Row matrix	అడ్డువరుస మాత్రిక
Sample point	ప్రతిరూప బిందువు
Sample space	ప్రతిరూప ఆవరణ
Scalar matrix	అదిశా మాత్రిక
Secant	ఛేదన రేఖ
Sequence	క్రమానుగత
Series	శ్రేణి
Similar triangle	సరూప త్రిభుజాలు
Simultaneous linear equations	ఏక రేకీయ సమీకరణం
Slant height	వాలుటెత్తు
Slope or gradient	వాలు
Solid	ఘనం
Square matrix	చతురస్ర మాత్రిక
Standard deviation	క్రమవిచలనము
Surface area	ఉపరితల వైశాల్యం
Table form	పట్టిక రూపం
Tangents	స్పర్శరేఖలు
Theodolite	థియోడలైట్ (భూకోణాలను కొలుచు పరికరం)
Tossed	ఎగుర వేయబడ్డ
Total surface area	సంపూర్ణతల వైశాల్యము
Transpose matrix	వ్యత్యయ మాత్రిక
Trial	ప్రయత్నము
Triangular matrix	త్రిభుజాకార మాత్రిక
Unbiased coins	నిష్పాక్షికమైన నాణెములు
Undefined	నిర్వచించబడదు
Unique solution	ఏకైక సాధన
Uniqueness	ఏకైకత
Unit matrix / Identity matrix	తత్సమ మాత్రిక
Variance	విస్తృతి
Vertical angle	శిఖర కోణము (ఉన్నతాంశ కోణం)
Vertical line test	నిలువు రేఖా పరీక్ష
Zeros of polynomials	బహుపద సమాసం యొక్క శూన్యాలు

10th_Maths_Telugu_Medium_Glosary.indd 361 13-02-2023 19:21:24

Secondary Mathematics - Class 10 (Telugu Medium)
Text Book Development Team

Academic Advisor

- **Dr. P. Kumar**
  Joint Director (Syllabus)
  TNSCERT, Chennai 06

Coordinators

- **K. Chandrasekaran**
  Lecturer DIET Chennai
- **Dr. M. Ethirajulu**
  Assistant Professor,
  TNSCERT, Chennai 06

Art and Design Team

Layout Artist

- **Kumaran Offset,**

Ammayarkuppam.

Inhouse-QC

Kamatchi Balan Arumugam,
Jerald wilson,
Rajesh Thangappan
Prasanth.C,
Mathan raj,
Adison Raj

Cover Design

- **Kathir Arumugam**

Coordination

- **Ramesh Munisamy**

Translators

- **P. Natarajan, B.T. Asst**
  GBHSS, Proddaturpeta
  Tiruvallur(dt)
- **K. Ramesh kumar, B.T. Asst**
  G.H. School, Keechalam
  Tiruvallur(dt)
- **J. Krishnamoorthy, B.T. Asst**
  G.H. School, Deveerapalli
  Hosur T.K, kirshnagiri (dt)
- **M. Devarajulu, B.T. Asst**
  G.H. School, Athimanjaripet
  Tiruvallur(dt)
- **D. Sudhakar naidu, B.T. Asst**
  G.H. School, Peddabelagondapalli
  Hosur T.K, kirshnagiri (dt)
- **C. Sivappa, B.T. Asst,**
  RMGH school, Paerandapalli
  Soolagiri Tk, kirshnagiri (dt).
- **O. Leelarani, B.T. Asst,**
  K.T.C.T Girls Hr. Sec. School
  Sowcarpet, Ch-01
- **E. Gurumurthy, B.T. Asst,**
  S.K.P.D. Boys Hr. Sec. School
  Sowcarpet, Ch-01
- **S. Sathyanarayana, B.T. Asst,**
  Kesari Hr. Sec. School
  Mylapore Ch-04

This book has been printed on 80 GSM
Elegant Maplitho paper
Printed by offset at :

10th_Maths_Telugu_Medium_Glosary.indd 362 13-02-2023 19:21:24