GOVERNMENT OF TAMIL NADU

ہائر سکنڈری سالِ اوّل

HIGHER SECONDARY FIRST YEAR

حساب

MATHEMATICS

جِلد - I

VOLUME - I

(URDU MEDIUM)

Department of School Education

Untouchability is Inhuman and a Crime

11 maths V1 index
Wednesday, September 28, 2022 8:46:09 PM

Government of Tamil Nadu

First Edition - 2022
Revised Edition - 2023
Reprint - 2024

(Published under New Syllabus)

Content Creation

State Council of Educational Research and Training

© SCERT 2022

Printing & Publishing

Tamil NaduTextbook and Educational Services Corporation

www.textbooksonline.tn.nic.in

11 maths V1 index
Wednesday, September 28, 2022 8:46:09 PM

HOW TO USE THE BOOK

Scope of Mathematics

- Awareness on the scope of higher educational opportunities; courses, institutions and required competitive examinations.
- Possible financial assistance to help students climb academic ladder.

Learning Objectives

- Overview of the unit
- Give clarity on the intended learning outcomes of the unit.



- Additional facts related to the topics have been included to arouse interest for searching of more information for deeper and wider learning.



- Visual representation of concepts with illustrations
- Videos, animations, and tutorials.

ICT

- To increase the span of attention of concepts
- To visualize the concepts for strengthening and understanding
- To link concepts related to one unit with other units.
- To utilize the digital skills in classroom learning and providing students experimental learning.

Summary

- Recapitutation of the salient points of each chapter for recalling the concepts learnt.

Evaluation

- Assessing student's understanding of concepts and get them acquainted with solving exercise problems.

Books for Reference

- List of relevant books for further reading.

Scope for Higher Order Thinking

- To motivate students aspiring to take up competitive examinations such as JEE, KVPY, Math olympiad, etc., the concepts and questions based on Higher Order Thinking are incorporated in the content of this book.

Glossary

- Frequently used Mathematical terms have been given with their Tamil equivalents.

Mathematics Learning

The correct way to learn is to understand the concepts throughly. Each chapter opens with an Introduction, Learning Objectives, Various Definitions, Theorems, Results and Illustrations. These in turn are followed by solved examples and exercise problems which have been classified into various types for quick and effective revision. One can develop the skill of solving mathematical problems only by doing them. So the teacher's role is to teach the basic concepts and problems related to it and to scaffold students to try the other problems on their own. Since the first year of Higher Secondary is considered to be the foundation for learning higher mathematics, the students must be given more attention to each and every concept mentioned in this book.

11th Std Maths - Introduction Pages.indd 3 12-02-2019 16:31:54

CONTENTS مضامین

MATHEMATICS حساب

باب 1 - مجموعے، تعلقات اور تفاعلات			جون
1.1	تعارف	1	
1.2	مجموعے	2	
1.3	کرتیسی حاصل ضرب	4	
1.4	مستقلات، اور متغیرات، وقفے اور محلے	8	
1.5	تعلقات	10	
1.6	تفاعلات	19	
1.7	تحویلات کے استعمال سے تفاعلات کو مرتسم کرنا	38	
باب 2 - بنیادی الجبرا			جون/ جولائی
2.1	تعارف	52	
2.2	حقیقی اعداد کا نظام	53	
2.3	مطلق قیمت	55	
2.4	خطی نامساوات	57	
2.5	دو درجی تفاعلات	59	
2.6	کثیر رقمی تفاعلات	64	
2.7	ناطق تفاعلات	68	
2.8	قوت نما اور جذریہ (اصلیہ)	73	
2.9	لوگارتم	77	
2.10	حقیقی زندگی میں الجبرا کا اطلاق	81	
باب 3 - علم مثلث			جولائی
3.1	تعارف	87	
3.2	بنیادی نتائج کا اعادہ	88	
3.3	ریڈین کی پیمائش	92	
3.4	علم مثلث کے افعال اور ان کی خصوصیات	96	
3.5	علم مثلث کی تماثلات	104	
3.6	علم مثلث کی مساوات	125	
3.7	مثلث کی خصوصیات	134	
3.8	مثلث کے استعمالات	143	
3.9	معکوس علم مثلثی تفاعلات	147	

11 maths V1 index
Wednesday, September 28, 2022 8:46:09 PM

باب 4 - تالیفیات اور حسابی امالیت			جولائی/اگست
4.1	تعارف	155	
4.2	گنتی کا بنیادی اصول	156	
4.3	ضربیہ (فیکوریل)	163	
4.4	گروہوں یا جوڑوں میں بانٹنا یا ترتیب دینا	167	
4.5	ترکیب یا اتصال یا جوڑنا	178	
4.6	حسابی امالیت	187	
باب 5 - دورکنی مسئلہ، تواتر اور سلسلے			اگست
5.1	تعارف	202	
5.2	دورکنی مسئلہ	203	
5.3	دورکنی مسئلہ کے خاص معاملات	206	
5.4	محدود تواتر	210	
5.5	محدود سلسلے	218	
5.6	لامحدود تواتر اور سلسلے	221	
باب 6 - دوابعادی تحلیلی جیومٹری			اگست/ستمبر
6.1	تعارف	237	
6.2	ایک نقطہ کا طریق	238	
6.3	خطوط مستقیم	244	
6.4	دو خطوط مستقیم کا درمیانی زاویہ	261	
6.5	خطوط مستقیم کی جوڑی	272	
جوابات		290	
لغت اصطلاحات		301	

ET8XD

E-book

B7Z8Y

Assessment

11 maths V1 index
Wednesday, September 28, 2022 8:46:09 PM

11th Std Maths - Introduction Pages.indd 6

Scope for students after completing Higher Secondary



EXAMS

MEDICAL RELATED COURSES:	
JEE (Main & Advanced)	Bio Informatics
NEET, JIPMER, AIIMS	M.B.B.S / B.D.S
ENGINEERING RELATED COURSES:	
JEE (Main & Advanced)	B.E. / B.Tech. / B.Arch in IITs and NITs
B.Tech.	Avionics / Aerospace
B.Tech. & M.Tech	Dual degree programme in IIST Trivandram.
B.E	Agricultural Engineering (TamilNadu Agricultural University Entrance Exam)
CET	Common Entrance Test for Maritime Courses (www.imu.edu.in)
BITS	Birla Institute of Technology and science Admission Test (www.bits – pilani.ac.in)
NATA	National Aptitude Test in Architecture (www.nata.in)
IIIT	Indian Institute of Information Technology (www.iiit.ac.in)
BASIC SCIENCE COURSES:	
TIFR	Tata Institute of Fundamental Research conducts Graduate School admission examination (Univ.tirf.res.in)
NEST, NISER	National Institute of Science Education and Research (www.niser.ac.in)
IISC	Indian Institute of Science (www.iisc.ac.in)
RIE	Regional Institute of Education
CEE	Common Entrance Examination (www.rie ajmer.raj.nic.in)
CUCET	Central Universities Common Entrance Test (http://Ucetexam.in)
GATE	Graduate Aptitude Test in Engineering (gate.iitg.ac.in)
NET	CSIR and UGC - National Eligibility Test (http://cbsenet.nic.in)
JAM	Joint Admission Test for M.Sc (Jam.iitb.ac.in)
ISI	Indian Statistical Institute Admission Test (www.isical.ac.in)
IISER - KVPY / IIT – JEE / NEET	Indian Institute of science Education and Research (www.iiser.ac.in & www.iiseradmission.in)



AFTER COMPLETING +2

UNDER GRADUATE COURSES:	
B.Sc	Mathematics / Applied Mathematics / Statistics
B.Sc	Physics, Chemistry
B.Stat.(Hons.)	Bachelor of Statistics
B.Math (Hons.)	Bachelor of Mathematics
B.S. - M.S Dual Degree	5 years programme
B.Sc. Ed.	4 years programme
POST GRADUATE COURSES:	
M.Sc	Mathematics / Applied Mathematics / Statistics
M.Sc	Astronomy
M.Sc	Operational Research
M.Stat.(Hons.)	Master of Statistics
M.Math (Hons.)	Master of Mathematics
M.Sc. Ed.	6 years programme
M.Sc	Mathematics - 5 years Integrated programme

12-02-2019 16:31:54

11th Std Maths - Introduction Pages.indd 7

Job and Scholarship Opportunities



JOB OPPORTUNITIES

- Indian Forest Services
- Scientist Jobs in ISRO, DRDO, CSIR labs
- Union Public Service Commission
- Staff Selection Commission
- Indian Defense Services
- Public Sector Bank
- Tax Assistant
- Statistical Investigator
- Combined Graduate Level Exam
- Tamil Nadu Public Service Commission
- Teaching Profession



FINANCIAL ASSISTANCE

- Scholarship for Graduate and Post – Graduate courses
- NTSE at the end of X (from class XI to Ph.D)
- International Olympiad: for getting stipend for Higher Education in Science and Mathematics
- DST – INSPIRE Scholarships (for UG and PG)
- DST – INSPIRE Fellowships (for Ph.D)
- UGC National Fellowships (for Ph.D)
- Indira Gandhi Fellowship for Single Girl Child (for UG and PG)
- Moulana Azad Fellowship for minorities (for Ph.D)
- In addition various fellowships for SC / ST / PWD / OBC etc are available. (Visit website of University Grants Commission (UGC) and Department of Science and Technology (DST))
- University Fellowships
- Tamil Nadu Collegiate Education fellowship.

12-02-2019 16:31:55

11th Std Maths - Introduction Pages.indd 8

Institutes in india to pursue research in Mathematics

RESEARCH INSTITUTIONS IN VARIOUS AREAS OF SCIENCE

NAME OF THE INSTITUTION	WEBSITE
Indian Institute of Science (IISc), Bangalore	www.iisc.ac.in
Chennai Mathematical Institute (CMI), Chennai	www.cmi.ac.in
Tata Institue of Fundamental Research (TIFR), Mumbai	www.tifr.res.in
Indian Institute of Space Science and Technology (IIST), Trivandrum	www.iist.ac.in
National Institute of Science Education and Research (NISER)	www.niser.ac.in
Birla Institute of Technology and Science, Pilani	www.bits-pilani.ac.in
Indian Institute of Science Education and Research	www.iiseradmission.in
Anna University	https://www.annauniv.edu/
Indian Institute of Technology in various places (IIT's)	www.iitm.ac.in
National Institute of Technology (NIT's)	www.nitt.edu
Central Universities	www.cucet.ac.in
State Universities	www.ugc.ac.in
Tamil Nadu agricultural University (tnau.ac.in)	tnau.ac.in
International Institute of Information Technology	www.iiit.ac.in
The Institute of Mathematical Sciences (IMSC), Chennai.	www.imsc.res.in
Hyderabad Central university, Hyderabad.	www.uohyd.ac.in
Delhi University, Delhi	www.du.ac.in
Mumbai University, Mumbai	www.mu.ac.in
Savithiri Bai Phule Pune University, Pune	www.unipune.ac.in
Indian Statistical Institute	www.iisical.ac.in
Regional Institute of Education	www.rieajmer.raj.nic.in

12-02-2019 16:31:55

باب 1

مجموعے، تعلقات اور تفاعلات

Sets Relations and Functions

"ایک مجموعہ بہت سا ہے جو خود ایک جیس تصور کرنے کو جائز قرار دیتا ہے۔"

تعارف -

1.1 تعارف (Introduction)

مجموعے ، تعلقات اور تفاعلات کے تصورات حسابی سوچ کے عام رجحان میں بنیادی مقام رکھتے ہیں۔ جیسا کہ روسی ریاضی دان (Luzin) (Galileo) نے ٹھیک کہا ہے۔تفاعلات کا تصور اچانک پیدا نہیں ہوتا یہ وقت کے ساتھ گہری تبدیلیاں کیں۔ گلیلیو نے واضح طور پر سیاروں کی حرکات کے مطالعہ میں ایک مقدار پر دوسری مقدار کا استعمال کیا۔ دسکریٹ (Descartes) (1596-1650) نے واضح طور پر کیا ہے کہ ایک مساوات میں دومتغیرات ، جغرافیائی طور پر ایک منحنی Curve کی طرف سے نمائندگی کرتا ہے جو متغیر مقداریں کے درمیان انحصار کی نشان دہی کرتا ہے۔ لیب نیز (Leibnitz) (1646-1716) نے 1673 میں میں مخطوطہ (Manuscript) میں لفظ تفاعل (Functions) کا استعمال کیا۔ جو ایک نقطہ سے منحنی نقطہ تک مختلف مقدار کا مطلب ہے۔ گاس (Gauss) کا ایک طالب علم ڈرچ لٹ (Dirichlet) (1805-1859) نے تفاعل کی جدید "رسمی (formal)" کی تعریف کے ساتھ ترقیم (Notation) کا سمرا دیا گیا۔ $y = f(x)$ ویں صدی میں ، اس تصور کو قام اختیاری (arbitary) خط وکتابت کو شامل کرنے کے لئے بڑھایا گیا جو مجموعے اور عددی یا غیر عددی مقداریں کے درمیان انفرادیت کی شرط کو پورا کرتا ہے۔



کینٹر
1845-1918

مجموعہ کا نظریہ (Set theory) کی نشوونما کے ساتھ ، کینٹر (Cantor) (1845-1918) کی طرف سے تفاعل کی ترقیم کا تصور جاری رہا۔ خط وکتابت کے تصور سے، ریاضی دان تعلق کے تصور کی طرف بڑھا۔ تاہم اب بھی تحاسب کا نظریہ (theory of computation) میں، ایک تفاعل کو ایک تعلق کے طور پر نہیں بلکہ ایک تحاسی اصول کے طورپر دیکھا جاتا ہے۔ تفاعل کی جدید تعریف مصنوعی "دہانت (artificial intelligence) کی نشوونما کے مطابق تعلقات کے لحاظ سے دی گئی ہے۔

پچھلی جماعتوں میں ہم نے ان پر حقیقی اعداد اور ریاضی کے اعمال کا مطالعہ اور مہارت حاصل کیا ہے۔ ہم نے حقیقی اعداد "ون نقشے" مجموعے کا کارتیسی ضرب ، تعلقات اور تفاعل کی بنیادی تعریفوں کے بارے میں بھی سیکھا ۔بہتر تفہیم کے لئے ہم مجموعے اور مجموعے کا کارتیسی ضرب کے بارے میں مزید یاد کریں ۔اس باب میں ہم "تعلقات" اور "تفاعلات" کے ریاضیات کی ترقیم کے لئے ایک نئی شکل دیتے ہیں۔

سیکھنے کے مقاصد (Learning objectives)

اس باب کی تکمیل پر طلباء سے توقع کی جاتی ہے۔

- مجموعے اور کارتیسی حاصلِ ضرب کی بہت سی خصوصیات کے ساتھ فہرست بنائیں اور اس پر کام کریں۔
- مستقلات ، متغیرات، وقفوں اور محلوں کے تصورات کو جانیں۔
- مختلف قسم کے تعلقات کو سمجھیں ،کسی بھی مطلوبہ قسم کے تعلقات بنائیں۔
- مختلف طریقوں سے تفاعل کی نمائندگی کریں۔
- ابتدائی تفاعلات، تفاعلات کے اقسام ، تفاعلات پر اعمال بشمول دو ربطی تفاعلات کے معکوس کے ساتھ کام کریں۔
- کچھ خاص تفاعلات کے ترسیمات کی شناخت کریں۔
- کچھ نسبتاً پیچیدہ تفاعلات کے ترسیمات کا تصور اور خاکہ بنائیں۔

11th_Maths_Vol 1_Chapter 1_Urdu Medium.indd 1 05-10-2021 3.01.52 PM

1.2 مجموعے (Sets)

پچھلی کلاس میں ہم نے دیکھا ہے کہ ایک سیٹ (مجموعہ) اچھی طرح سے متعین اشیاء (well–defined objects) کا مجموعہ ہے جیسا کہ سیٹ کا نظریہ جدید ریاضی کا بنیادی حصہ ہے۔کسی کو سیٹ کے تصورات کو احتیاط اور گہرائی سے سیکھنا پڑتا ہے۔اب ہم اصطلاح (term) "متعین" (well defined) کو تھوڑی گہرائی سے دیکھیں گے۔ آئیے دوبیانات پر غور کریں۔

(i) اوٹی گلاب باغ میں تمام خوبصورت پھولوں کا مجموعہ

(ii) تامل ناڈو میں تمام بوڑھے مردوں کا مجموعہ

خوبصورت پھولوں اور بوڑھے مردوں کی اصطلاح اچھی طرح بیان نہیں کی گئی ہیں۔ہم "خوبصورت پھول" اور "بوڑھے مردوں" کی اصطلاح کو تیز انداز میں بیان نہیں کرسکتے کیونکہ خوب صورتی میں کوئی جامع تعریف نہیں ہے۔کیونکہ خوبصورتی کا تصورہر شخص سے شخص ، مواد اور چیزیں سے چیز مختلف ہوتا ہے۔ ہمیں بیانات جیسے "اوٹی گلاب باغ میں خوبصورت پھولوں کا مجموعہ" کو ایک مجموعہ سیٹ نہیں سمجھنا چاہئے۔اب کیا ہم "اوٹی گلاب باغ میں تمام سرخ (red) پھولوں کا مجموعہ" ایک سیٹ کہہ سکتے ہیں؟ اس کا جواب "ہاں" ہے

کوئی 06 سال کی عمر کے شخص کو بوڑھا سمجھ سکتا ہے۔اور دوسرے اس سے اتفاق نہیں کرسکتے ہیں۔دوسرا بیان زیادہ تیزی سے دیا جاسکتا ہے جیسا کہ

"تمل ناڈو میں 07 سال سے زیادہ عمر کے تمام مردوں کا مجموعہ"

اب مندرجہ بالا مجموعہ عمر میں قطعیت کی وجہ سے ایک مجموعہ بن جاتا ہے۔ اس طرح ایک سیٹ کی تفصیل ہمیں ٹھوس فیصلہ کرنے کے قابل بناتی ہے کہ آیا کوئی خاص شئے (عنصر) مجموعہ میں دستیاب ہے یا نہیں ۔تو سیٹ اشیاء کا ایک ممتاز (distinguishable collection) ہے۔

ہم نے علامتوں جیسے $\in$ ، $\subset$، $\subseteq$، $\cup$ اور $\cap$ کو دیکھا اور استعمال کرنے بھی سیکھا ہے۔آئیے سوال سے شروع کرتے ہیں۔

"اگر A اور B دو مجموعے (سیٹ) ہیں تو کیا $A \in B$ لکھنا معنی خیز ہے؟"

پہلی نظر میں کوئی یہ کہنے میں جلدی کرسکتا ہے کہ یہ بولنے میں ہمیشہ بے معنی ہوتا ہے۔"علامت $\in$ ایک عنصر اور ایک سیٹ کے درمیان استعمال ہونی چاہئے اور اسے دوسیٹوں کے درمیان استعمال نہیں کیا جانا چاہئے"۔بیان کی پہلا حصہ صحیح ہے جہاں دوسرا حصہ صحیح نہیں ہے۔مثال کے طورپر $A = \{1, 2\}$ اور $B = \{1,\{1,2\},3,4\}$ ہوتو پھر $A \in B$ ہے۔اس حصے میں ہم ایسی علامتوں کے معنی پر زیادہ گہرائی پر بحث کریں گے۔

جیسا کہ ہم نے پچھلے کلاسوں میں سیکھا تھا۔جس سیٹ میں کوئی عنصر نہیں ہوتا ۔اُسے ایک خالی سیٹ یا محدوم سیٹ کہا جاتا ہے۔اس کو ہمیشہ ϕ یا $\{\ \}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ $A \subseteq B$ کے ذریعہ اس کا مطلب سیٹ A کا ہر عنصر سیٹ B کا عنصر ہے اس معمولے میں ہم کہیں گے B کا تحتی مجموعہ A (subset) ہے۔اور A کا بالاسیٹ B (super set) ہے۔ کوئی دو سیٹ A اور B اگر $A \subseteq B$ اور $B \subseteq A$ دونوں مجموعے مساوی ہیں ۔کوئی سیٹ A کے لئے خالی سیٹ ϕ ہواور سیٹ A ہمیشہ A کے تحتی سیٹ ہوتے ہیں۔ ان دونوں تحتی سیٹوں کو ادنیٰ تحتی مجموعے (trivial subsets) کہتے ہیں۔مزید ہم A کو B کا مناسب تحتی مجموعہ (proper subset) کہتے ہیں۔اگر B کا تحتی مجموعہ A ہو اور $A \neq B$ یعنی، A کے تمام عنصر B میں شامل ہیں اور کم از کم ایک عنصر جو A میں نہیں ہے۔جیسا کہ A کا ہر ایک عنصر A ہے۔ہمارے پاس $A \subseteq A$ موجود ہے۔ اس طرح کوئی بھی سیٹ کا خود ایک تحتی سیٹ ہے۔اس تحتی سیٹ کو غیر مناسب تحتی سیٹ (improper subset) کہاجاتا ہے۔ دوسرے الفاظ میں کسی بھی سیٹ A کے لئے A کا غیر مناسب تحتی سیٹ A ہے۔ ہمیں معلوم ہے کہ $\mathbb{N} \subset \mathbb{W} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ،جہاں $\mathbb{N}$ تمام طبعی اعداد یا مثبت سالم اعداد کا مجموعے کو ظاہر کرتا ہے۔ $\mathbb{W}$ جو تمام غیر منفی سالم اعداد کا مجموعے کو ظاہر کرتا ہے، $\mathbb{Z}$ جو تمام سالم اعداد کے مجموعے کو ظاہر کرتا ہے۔ $\mathbb{Q}$ جو تمام ناطق اعداد کے مجموعے کو ظاہر کرتا ہے اور $\mathbb{R}$ جہاں تمام صحیح (حقیقی)اعداد کے مجموعے کو ظاہر کرتا ہے نوٹ کریں کہ ، تمام غیر ناطق اعداد کا سیٹ $\mathbb{R}$ کا سیٹ ہے، لیکن مذکورہ کسی دوسرے سیٹ کا تحتی سیٹ نہیں ہے۔

ہم نے سیکھا ہے کہ دو سیٹ A اور B کا اتحاد $A \cup B$ سے ظاہر ہوتا ہے۔ اور اس کی تعریف اس طرح کی جاتی ہے۔

$A \cup B = \{x : x \in A$ یا $x \in B\}$

اور تقاطع (Intersection) کے طورپر

$A \cap B = \{x : x \in A$ اور $x \in B\}$

11th_Maths_Vol 1_Chapter 1_Urdu Medium.indd 2 05-10-2021 3.01.53 PM

دوسیٹ A اور B غیر مشترک (disjoint) ہیں۔ اگر ان میں کوئی مشترک عنصر نہیں ہے۔یعنی، A اور B الگ الگ ہیں۔اگر $A \cap B = \phi$ ہو۔

آئیے ہم کچھ مزید اظہار علامتیں (ترمیم) دیکھیں ہم جیسے $\sum_{i=1}^{n} a_i$ اظہار علامت سے واقف ہیں یہ حقیقت میں $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ اسی طرح ہم علامتیں اظہار $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ اور $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ کو اظہار کرنے کے لئے بالترتیب $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ اور $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ استعمال کرسکتے ہیں۔

اسی طرح {کچھ - i کے لئے $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x : x \in A_i$ } اور {ہر - i کے لئے $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x : x \in A_i$ جب ہم سیٹ کی زیادہ تعداد میں تبادلہ خیال کرتے ہیں تو یہ اظہار علامتیں مفید ہوتی ہیں۔

اگر A ایک سیٹ ہے پھر A کے تمام سیٹوں کے سیٹ کو A کا قوتی سیٹ (power set) کہاجاتا ہے اور اس کو ہمیشہ $\mathcal{P}(A)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔یہ ہے کہ ، $\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$ ۔ $\mathcal{P}(A)$ میں عناصر کی تعداد 2^n ہے جہاں n میں عناصر کی تعداد ہے۔

اب، ایک سیٹ کی تکمیل کی وضاحت کے لئے، عالم گیر سیٹ (universal set) کے تصور کے بارے میں جاناضروری ہے۔ عام طورپر ریاضی کے عمل میں زیر غور تمام سیٹ کچھ مقررہ نقطہ (fixed point) کے تحتی سیٹ سمجھے جاتے ہیں۔ اس بنیادی سیٹ کو عالم گیر سیٹ کہا جاتا ہے۔ مثال کے طورپر ، صورت حال کے لحاظ سے، مفرد اعداد کے سیٹ کے لئے، مفرد اعدادکے سیٹ پر مشتمل سیٹوں میں عالمگیر سیٹ بھی کوئی ایک ہوسکتا ہے۔ اس طرح $\mathbb{N}, \mathbb{W}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ میں سے ایک سیٹ کو ضرورت کے لحاظ سے بنیادی مفرد اعداد کے سیٹ کے لئے ایک عالم گیر سیٹ کے طورپر لیا جاسکتا ہے۔ عالم گیر سیٹ کو عام طور پر U سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

ایک سیٹ کی تکمیل کی وضاحت کے لئے ، ہمیں عالم گیر سیٹ سے طئے کرنا ہوگا۔ عالم گیر سیٹ U کا تحتی سیٹ A رکھ لیں۔ A کی اتمہ (Complement) U کے حوالے سے A' یا A^c سے ظاہر کیا گیا $A' = \{x : x \in U$ اور $x \notin A\}$ کے طورپر بیان کیا گیا۔

سیٹ A سے سیٹ B کا فرق سیٹ (set difference) یا $A - B$ سے یا $A \setminus B$ سے ظاہر کیا گیا۔

$A - B = \{a : a \in A$ اور $a \notin B\}$

،غور کریں

(i) $U - A = A'$ (ii) $A - A = \phi$ (iii) $\phi - A = \phi$ (iv) $A - \phi = A$ (v) $A - U = \phi$.

A اور B دوسیٹ کا تشاکل فرق (symmetric difference) کو $A \Delta B$ سے ظاہر کیا جاتا ہے اور $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$ سے بیان کیا گیا ہے۔دراصل $A \Delta B$ کے عناصر $A \cup B$ کے عناصر ہیں۔ جو $A \cap B$ میں موجود نہیں ہیں۔اس طرح $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$ ہو۔

ایک سیٹ X کوایک محدود سیٹ (finite set) کہا جاتا ہے۔اگر اس کچھ k کے عناصر $k \in \mathbb{W}$ ہو۔ اس معاملے میں ہم کہتے ہیں کہ k درجاتیت (cardinality) کا محدود سیٹ A ہے۔اور اس کو $n(X)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے ایک سیٹ ، ایک لامحدود سیٹ (infinite set) ہے۔ اگر یہ محدود نہیں ہے۔ایک لامحدود سیٹ A کے لئے ، درجاتیت لامتناہی infinity ہے۔ اگر $n(A) = 1$ پھر اس کو ایک عنصری سیٹ (singleton set) کہتے ہیں۔ نوٹ کریں $n(\phi) = 0$ اور $n(\{\phi\}) = 1$.

1.2.1 مجموعے کے اعمال کے خصوصیات (Properties of Set Operations)

اب ہم کچھ خصوصیات کی فہرست دیتے ہیں۔

متبادلت پذیر (Commutative)

(i) $A \cup B = B \cup A$ (ii) $A \cap B = B \cap A$

مربوطی (Associative)

(i) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (ii) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

تقسیمی (Distributive)

(i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

تماثل (Identity)

(i) $A \cup \phi = A$ (ii) $A \cap U = A$

ہماں‌قوت (Idempotent)

(i) $A \cup A = A$ (ii) $A \cap A = A$

تحلیل (Absorbtion)

(i) $A \cup (A \cap B) = A$ (ii) $A \cap (A \cup B) = A$

11th_Maths_Vol 1_Chapter 1_Urdu Medium.indd 3 05-10-2021 3.01.56 PM

ڈی مارگین قوانین (De Morgan Laws)

(i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

(iii) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$ (iv) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

تشاکل فرق پر (Symmetric difference)

(i) $A \Delta B = B \Delta A$ (ii) $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$

(iii) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

خالی سیٹ اور عالم گیر سیٹ پر (Empty and universal sets)

(i) $\phi' = U$ (ii) $U' = \phi$

(iii) $A \cup A' = U$ (iv) $A \cap A' = \phi$

(v) $A \cup U = U$ (vi) $A \cap U = A$

درجانیت پر (Cardinality)

(i) کوئی دو محدود سیٹ A اور B . $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

(ii) اگر A اور B مشترک سیٹ ہیں تو پھر . $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

(iii) کوئی تین محدود سیٹ میں A ، B اور C ہو۔

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

1.3 کرتیسی حاصل ضرب (Cartesian product)

ہم جانتے ہیں کہ سیٹوں کا کارتیسی حاصل ضرب منظم عناصر (Cartesian product) کے سیٹ کے سوا کچھ نہیں ہے۔ خاص طور پر دو سیٹوں کا کارتیسی حاصل ضرب منظم جوڑوں کا ایک سیٹ ہے۔ جبکہ تین سیٹوں کا کرتیسی ضرب triplets سہ گانہ کا ایک سیٹ ہے۔

درست طور پر، فرض کیجئے A، B اور C تین مجموعے ہیں۔ تو A کے ساتھ B کا کارتیسی حاصل ضرب کا اظہار $A \times B$ ۔

اس کی وضاحت اس طرح کی جاتی ہے۔

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$$

اسی طرح، کارتیسی حاصل ضرب $A \times B \times C$ کی طرف سے وضاحت کی گئی ہے۔

$$A \times B \times C = \{(a,b,c) : a \in A, b \in B, c \in C\}$$

اسی طرح : $A \times A = \{(a,b) : a,b \in A\}$

$A \times A = \{(a,a) : a \in A\}$ کیا کہنا درست ہے؟

یہ ضروری ہے کہ کارتیسی حاصل ضرب کے عناصر منظم کئے جائیں اور اسی وجہ سے غیر خالی سیٹوں کے لئے

$A \times B \neq B \times A$ جب تک $A = B$

یہ غیر خالی سیٹ $A \times B = B \times A$. کے لئے ہے۔ جبکہ صرف اور صرف $A = B$ ہو۔

$\mathbb{R}$ حقیقی اعداد کے مجموعہ کو ظاہر کرتا ہے۔

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}\}, \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y,z) : x,y,z \in \mathbb{R}\}.$$

علامتی طور پر، $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ کو $\mathbb{R}^2$ کے طور پر اور $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ کو $\mathbb{R}^3$ کے طور پر نمائندگی کی جاسکتی ہے۔ نوٹ کریں کہ $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ایک منظم جوڑوں کا ایک سیٹ ہے اور $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ایک منظم سہ گانے کا ایک سیٹ ہے۔

اگر $A = \{1,2,3\}$ اور $B = \{2,4,6\}$ پھر

$$A \times B = \{(1,2),(1,4),(1,6),(2,2),(2,4),(2,6),(3,2),(3,4),(3,6)\}.$$

11th_Maths_Vol 1_Chapter 1_Urdu Medium.indd 4 05-10-2021 3.01.58 PM

یہاں $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ کا تحتی سیٹ $A\times B$ ہے۔ A کے عناصر کی تعداد اور B کے عناصر کی تعداد کا حاصل ضرب $A\times B$ کے عناصر کی تعداد ہیں۔ یہ ہے کہ $n(A\times B)=n(A)\,n(B)$ ،اگر A اور B محدود ہیں مزید $n(A\times B\times C)=n(A)\,n(B)\,n(C)$ ، اگر A, B اور C محدود ہیں۔

یہ دیکھنا آسان ہے کہ مندرجہ ذیل $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ کے تحتی سیٹ ہیں۔

(i) $\{(x,2x):x\in\mathbb{R}\}$ (ii) $\{(x,x^2):x\in\mathbb{R}\}$

(iii)$\{(x,\sqrt{x}):x$ ایک غیر منفی حقیقی عدد$\}$ (iv) $\{(x^2,x):x\in\mathbb{R}\}$.

(v)$\{(x,-\sqrt{x}):x$ ایک غیر منفی حقیقی عدد$\}$

مثال 1.1

A کے تحتی سیٹ کی تعداد معلوم کرو اگر $A=\{x:x=4n+1,2\le n\le 5,n\in\mathbb{N}\}$ ہو۔

حل

واضح طور پر $A=\{x:x=4n+1,n=2,3,4,5\}=\{9,13,17,21\}$

اس لئے $n(A)=4$. اس کا مطلب $n(\mathcal{P}(A))=2^4=16$ ہے۔

مثال 1.2

شہر میں 5000 افراد کے معائنہ (survey) میں، یہ پتہ چلا کہ 45% افراد A زبان، 25% زبان B، 10% زبان C جانتے ہیں۔ 5% زبان A اور B زبان 4% اور B اور C؛ اور 4% زبان A اور C جانتے ہیں۔ اگر 3% افراد تمام زبان جانتے ہیں تو صرف A زبان جاننے والے افراد کی تعداد معلوم کرو؟

حل

یہ مسئلہ کو یا تو درجاتیت کی خصوصیت سے یا ون نقشے کے ذریعے حل کیا جاسکتا ہے۔

رجاتیت (Cardinality) : دیا گیا $n(A)=45\%$ کا $5000=2250$

اسی طرح $n(B)=1250,n(C)=500,n(A\cap B)=250,n(B\cap C)=200,n(C\cap A)=200$

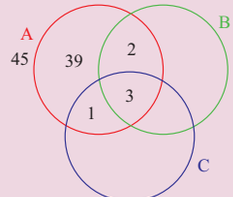
اور $n(A\cap B\cap C)=150$

زبان A جاننے والے افراد کی تعداد اس طرح مطلوبہ افراد کی تعداد

$$\begin{aligned} n(A\cap B'\cap C') &= n\{A\cap(B\cup C)'\}=n(A)-n\{A\cap(B\cup C)\}\\ &= n(A)-n(A\cap B)-n(A\cap C)+n(A\cap B\cap C).\\ &= 2250-250-200+150=1950. \end{aligned}$$

اس طرح A مطلوبہ افراد کی تعداد 1950 ہے۔

ون نقشے (Venn diagram) : ہم فیصد کو استعمال کرتے ہوئے ون نقشہ کھینچتے ہیں۔



خاکہ 1.1

خاکہ 1.1 کی طرف سے، صرف A زبان جاننے والے افراد کا فیصد 39 ہے۔اس لئے ، مطلوبہ افراد کی تعداد $5000\times\frac{39}{100}=1950$. ہے۔

11th_Maths_Vol 1_Chapter 1_Urdu Medium.indd 5 05-10-2021 3.02.00 PM

مثال 1.3 ثابت کرو $((A\cup B'\cup C)\cap(A\cap B'\cap C'))\cup((A\cup B\cup C')\cap(B'\cap C'))=B'\cap C'$

حل

ہمارے پاس $A\cap B'\cap C'\subseteq A\subseteq A\cup B'\cup C$ اور اسی لئے $(A\cup B'\cup C)\cap(A\cap B'\cap C')=A\cap B'\cap C'$

$(A\cup B\cup C')\cap(B'\cap C')=B'\cap C'$ میں بھی، $B'\cap C'\subseteq C'\subseteq A\cup B\cup C'$ اور اس لئے

اب $A\cap B'\cap C'\subseteq B'\cap C'$، ہمارے پاس

$$((A\cup B'\cup C)\cap(A\cap B'\cap C'))\cup((A\cup B\cup C')\cap(B'\cap C'))=B'\cap C'$$

مندرجہ بالا مہارت کو ون نقشے کے استعمال سے آسان بنانے کی کوشش کریں۔

مثال 1.4 اگر $X=\{1,2,3,\ldots,10\}$ اور $A=\{1,2,3,4,5\}$ ہو۔ $B\subseteq X$ کی مجموعہ کی تعداد معلوم کرو جیساکہ $A-B=\{4\}$ ہے۔

حل

ہر تحتی سیٹ C کے لئے $\{6,7,8,9,10\}$ فرض کریں کہ $B=C\cup\{1,2,3,5\}$ پھر $A-B=\{4\}$ ہے۔اس کو دوسرے الفاظ میں یہ تحتی سیٹ C کے لئے $\{6,7,8,9,10\}$ ہمارے پاس ایک منفرد سیٹ B جیسا کہ $A-B=\{4\}$ تو $B\subseteq X$ سیٹ کی تعداد جو کہ $A-B=\{4\}$ ہوتو $2^5=32$ ہے۔

مثال 1.5 اگر A اور B دوسٹیں ہیں تو $n(A\cap B)=4\,n(A-B)=2\,n(B-A)$ اور اگر $n(A\cup B)=14$ ہوتو $n(\mathcal{P}(A))$ معلوم کرو۔

حل

$n(\mathcal{P}(A))$ معلوم کرنے کے لئے، ہمیں $n(A)$ کی ضرورت ہے۔

فرض کریں کہ $n(A\cap B)=k$ پھر $n(A-B)=2k$ اور $n(B-A)=4k$

اب $n(A\cup B)=n(A-B)+n(B-A)+n(A\cap B)=7k$

$n(A\cup B)=14$ دیا گیا ہے۔ اس طرح $7k=14$ اور لہٰذا $k=2$ ہوتو $n(A-B)=4$ اور $n(B-A)=8$

جیسا کہ $n(A)=n(A-B)+n(A\cap B)$ ہو۔

$n(A)=6$ ہمیں حاصل ہوتا ہے اور لہٰذا $n(\mathcal{P}(A))=2^6=64$

مثال 1.6 دو سیٹ m اور k عناصر رکھتے ہیں اگر پہلے سیٹ کے تحتی سیٹوں کی کل تعداد دوسرے سیٹ کے مقابلے میں 112 زیادہ ہیں، تو m اور k کی قیمتیں معلوم کرو۔

حل

دوسیٹ A اور B کے ساتھ $n(A)=m$ اور $n(B)=k$ لیں چونکہ A میں B سے زیادہ عناصر ہیں ہمارے پاس $m>k$ دی گئی شرط کے طورپر $2^m-2^k=112$ کو ہم دیکھتے ہیں۔ اسی طرح ہمیں $2^k(2^{m-k}-1)=2^4\times 7$ حاصل ہوتا ہے۔

پھر ایک ہی امکان $k=4$ اور $2^{m-k}-1=7$ ہے۔ تو، $m-k=3$ اور لہٰذا $m=7$ ہے۔

مثال 1.7 اگر $n(A)=10$ اور $n(A\cap B)=3$ ہوتو $n((A\cap B)'\cap A)$ معلوم کرو۔

حل

$$(A\cap B)'\cap A=(A'\cup B')\cap A=(A'\cap A)\cup(B'\cap A)=\phi\cup(B'\cap A)=(B'\cap A)=A-B.$$

تو، $n((A\cap B)'\cap A)=n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=7$

مثال 1.8 اگر $A=\{1,2,3,4\}$ اور $B=\{3,4,5,6\}$ ہوتو۔ $n((A\cup B)\times(A\cap B)\times(A\Delta B))$ معلوم کرو۔

حل

ہمارے پاس $n(A\cup B)=6, n(A\cap B)=2$ اور $n(A\Delta B)=4$ ہے۔

تو، $n((A\cup B)\times(A\cap B)\times(A\Delta B))=n(A\cup B)\times n(A\cap B)\times n(A\Delta B)=6\times2\times4=48$

مثال 1.9 اگر سیٹ A کے قوت کو $\mathcal{P}(A)$ سے ظاہر کرتے ہیں۔تو $n(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\phi))))$ معلوم کرو۔

حل

چونکہ $\mathcal{P}(\phi)$، 1 عنصر پر مشتمل $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\phi))$، 2^1 عناصر پر مشتمل ہیں اور لہٰذا $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\phi)))$، 2^2 عناصر پر مشتمل ہیں یہ 4 عناصر ہیں۔

مشق 1.1

1. مندرجہ ذیل کو روسٹر طریقہ (Roster form) (فہرستی طریقہ) میں لکھو۔
   (i) $\{x$ ایک اولیٰ ہے اور $x\in\mathbb{N}:x^2<121\}$
   (ii) $(x-1)(x+1)(x^2-1)=0$ مساوات کی تمام مثبت حدوں کا مجموعہ
   (iii) $\{x\in\mathbb{N}:4x+9<52\}$
   (iv) $\{x:\frac{x-4}{x+2}=3, x\in\mathbb{R}-\{-2\}\}$
2. مجموعہ $\{1,-1\}$ کو سیٹ معماری طریقہ (Set Builder Form) میں لکھیں۔
3. بتائیں کہ درج ذیل سیٹ محدود ہیں یا لامحدود۔
   (i) $\{x\in\mathbb{N}:x$ ایک جفت اور اولیٰ ہے$\}$
   (ii) $\{x\in\mathbb{N}:x$ ایک طاق اور اولیٰ ہے$\}$
   (iii) $\{x\in\mathbb{Z}:x$ ایک جفت 10 سے کم ہے$\}$
   (iv) $\{x\in\mathbb{R}:x$ ایک ناطق عدد ہے$\}$
   (v) $\{x\in\mathbb{N}:x$ ایک ناطق عدد ہے$\}$
4. منسب سیٹ A, B, C لے کر درج ذیل نتائج کے تصدیق کریں۔
   (i) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$
   (ii) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$
   (iii) $(A\times B)\cap(B\times A)=(A\cap B)\times(B\cap A)$
   (iv) $C-(B-A)=(C\cap A)\cup(C\cap B')$
   (v) $(B-A)\cap C=(B\cap C)-A=B\cap(C-A)$
   (vi) $(B-A)\cup C=(B\cup C)-(A-C)$
5. بیان کی حقائق (Trueness) کا جواز (Justify) پیش کریں۔
   "ایک سیٹ کا عنصر کبھی بھی خود کا تحتی سیٹ نہیں ہوسکتا"۔
6. اگر $n(\mathcal{P}(A))=1024$ ، $n(A\cup B)=15$ اور $n(\mathcal{P}(B))=32$ ہوتو $n(A\cap B)$ معلوم کرو۔ ر
7. اگر $n(A\cap B)=3$ اور $n(A\cup B)=10$ ہوتو $n(\mathcal{P}(A\Delta B))$ معلوم کرو۔
8. ایک سیٹ A کے لئے، $A\times A$ 16 عناصر پر مشتمل ہیں اور دو عناصر $(1,3)$ اور $(0,2)$ ہیں۔ A کے عناصر معلوم کرو۔

11th_Maths_Vol 1_Chapter 1_Urdu Medium.indd 7 05-10-2021 3.02.05 PM

9. فرض کریں کہ A اور B دو سیٹ ہیں جس میں $n(A) = 3$ اور $n(B) = 2$ ہو اگر $A \times B$ میں $(x,1)$، $(y,2)$، $(z,1)$ ہیں۔ تو A اور B معلوم کریں۔ جہاں x, y, z مختلف عناصر ہیں۔

10. اگر $A \times A$ میں 16 عناصر ہیں $S = \{(a,b) \in A \times A : a < b\}$ ہو۔ جس میں کے دو عناصر $(-1, 2)$ اور $(0, 1)$ ہیں۔ تو پھر S کے بقیہ عناصر معلوم کرو۔

1.4 مستقلات اور متغیرات، وقفے اور محلے (Constants, Variables, Intervals and Neighbourhoods)

بحث ہماری رکھنے کے لئے، ہمیں کچھ لازمی شرائط یعنی مستقل، متغیر، آزاد متغیر، منحصر متغیر، وقفے اور محلے کی ضرورت ہے۔

1.4.1 مستقلات اور متغیرات (Constants and Variables)

ایک مقدار جو ریاضیاتی عمل کے دوران غیر متغیر ہوتی ہے۔ مستقل کہا جاتا ہے۔ ایک مقدار جو ریاضیاتی عمل میں مختلف ہوتی ہے۔ اسے متغیر کہا جاتا ہے۔ آزاد متغیر میں ایک متغیر جب کوئی اختیاری (آزاد) قیمت رکھتے ہوئے کسی دوسرے متغیر پر انحصار نہیں کرتا۔ جبکہ اگر اس کی قیمت دوسرے متغیر پر انحصار نہیں کرتا۔ جب کہ اگر اس کی قیمت دوسرے متغیر پر منحصر ہوتی ہے۔ تو اسے تابع متغیر (dependent variable) کہا جاتا ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ مثلث کا رقبہ A، $A = \frac{1}{2}bh$ دیتا ہے۔ یہاں $\frac{1}{2}$ ایک مستقل ہے اور A، b، h متغیرات ہیں۔ اس کے علاوہ b اور h آزاد متغیرات ہیں اور A ایک تابع متغیر ہے۔ ہمیں نوٹ کرنا چاہئے کہ تابع اور آزاد ارقام متعلقہ اور قائم ہیں۔ مثال کے طور پر $x + y = 1$ میں x، y متغیرات ہیں اور 1 ایک مستقل ہے۔ جہاں x اور y تابع ہے اور جہاں 1 آزاد ہے۔ اگر ہم جو x کو ایک آزاد متغیر سمجھتے ہیں تو y تابع ہو جاتا ہے جبکہ اگر ہم y کو ایک آزاد متغیر سمجھتے ہیں، تو x انحصار ہو جاتا ہے۔

مزید مندرجہ مثالیں پر غور کریں۔

(i) مستطیل کا رقبہ $A = lb$

(ii) دائرے کا رقبہ $A = \pi r^2$

(iii) مکعب نما کا حجم $V = lbh$

مندرجہ بالا مثالوں سے ہم براہ راست اندازہ لگا سکتے ہیں کہ b، h، l، r آزاد متغیرات ہیں۔ A اور V تابع متغیرات ہیں اور π ایک مستقل ہے۔

1.4.2 وقفے اور محلے (Intervals and Neighbourhoods)

حقیقی اعداد کے نظام $\mathbb{R}$ کی نمائندگی خط پر موجود نقاط سے کی جاسکتی ہے۔ اور خط پر ایک خطہ ایک منفرد حقیقی عدد سے متعلق ہو سکتا ہے۔ جیسا کہ شکل 1.2 میں دکھایا گیا۔ اس سے ہمارا مطلب یہ ہے کہ کوئی بھی حقیقی عدد خط پر ایک نقطہ کے طور پر شناخت کیا جاسکتا ہے۔ اس شناخت کے ساتھ ہم خط کو حقیقی خط کہتے ہیں۔



خاکہ 1.2

جب ہم دائیں جانب جاتے ہیں تو قیمت بڑھتی ہے اور بائیں جانے پر کم ہوتی ہے۔ اگر حقیقی خط میں x کے بائیں طرف y پایا جاتا ہے تو $x < y$ ہے۔ جیسا کہ وہاں ایک خط میں کوئی خالی جگہ نہ ہو۔ ہمارے پاس دو حقیقی اعداد کے درمیان بہت سے لامحدود حقیقی اعداد ہیں۔

1.1 تعریف

$\mathbb{R}$ کا ایک تحتی سیٹ I کو ایک وقفہ کہا جاتا ہے۔ اگر

(i) I کم از کم دو عناصر پر مشتمل ہوں اور

(ii) $a, b \in I$ اور $a < c < b$ ہو تو $c \in I$ ہے۔

11th_Maths_Vol 1_Chapter 1_Urdu Medium.indd 8 05-10-2021 3.02.06 PM

جغرافیائی طور پر، وقفے حقیقی خط پر شعاعوں اور قطاع خطوط کے مطابق ہوتے ہیں۔

نوٹ کریں کہ تمام طبعی اعداد کا مجموعہ، تمام غیر منفی سالم اعداد کا مجموعہ، تمام طاق اعداد کا مجموعہ ، تمام جفت اعداد کا مجموعہ، اعداد اولیٰ کا مجموعہ ، وقفے نہیں ہیں، مزید مشاہدہ کریں کہ کسی بھی دو حقیقی اعداد کے درمیان بہت سے لامحدود اعداد ہیں اور اسی وجہ سے اوپر والے سیٹ وقفے نہیں ہیں۔

مندرجہ ذیل مجموعے پر غور کریں۔

(i) تمام حقیقی اعداد کا مجموعہ صفر سے زیادہ ہو۔

(ii) تمام حقیقی اعداد کا مجموعہ 5 سے زیادہ اور 7 سے کم ہو۔

(iii) تمام حقیقی اعداد کا مجموعہ x اس طرح $1 \leq x \leq 3$ ہو۔

(iv) تمام حقیقی اعداد کا مجموعہ x اس طرح $1 < x \leq 2$ ہو۔

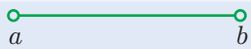
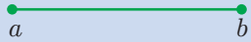
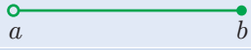
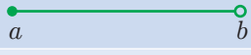
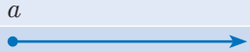
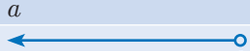
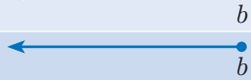
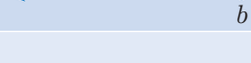
مندرجہ بالا چار سیٹ وقفے ہیں خاص طور پر (i) آئیے لامحدود وقفہ ہے اور (ii) (iii) اور (iv) محدود وقفے ہیں۔ اصطلاح "محدود وقفہ" کا مطلب یہ نہیں ہے کہ وقفہ صرف حتمی طور پر بہت سی حقیقی اعداد پر مشتمل ہے تاہم دونوں سروں محدود اعداد ہیں۔دونوں محدود اور لامحدود وقفے لامحدود سیٹ ہیں۔وقفے جو قطاع خطوط سے مطابقت رکھتے ہیں۔ محدود وقفے ہیں۔ جبکہ وقفے جو ایک شعاعیں اور پوری حقیقی خط کے مطابق ہیں۔ لامحدود وقفے ہیں۔ ایک محدود وقفہ کو بند کہاجاتا ہے۔ اگراس کے دونوں افتتاحی نکات ہوں اور اگر اس میں سے کوئی بھی ایک نکات نہ ہوتو یہ کھلا ہے۔ علامتی طور پر مندرجہ ذیل یا لاچار وقفے کو $(0,\infty)$، $(5,7)$، $[1,3]$، $(1,2]$ کی طرح لکھا جاسکتا ہے۔نوٹ کریں کہ ہم نے علامتی وقفوں کو ظاہر کرنے کے لئے قوسین اور مربع بریکٹس استعمال کرتے ہیں۔ '( )' قوسین کھلا وقفہ اور '[ ]' بند وقفہ کو ظاہر کرتے ہیں ۔پہلے دو سیٹ کھلا وقفے ہیں اور تیسرا ایک بندوقفہ ہے ۔نوٹ کریں کہ چوتھا سیٹ نہ کھلا ہے نہ بند، یہ ہے کہ، ایک سرا کھلا اور دوسرا سرا بند ہے۔

خاص طور پر $[1,\ 3]$، دونوں 1 اور 3 اور حقیقی اعداد کے درمیان مشکل ہے۔ وقفہ $(1,\ 3)$ 1 اور 3 پر مشتمل نہیں ہے۔ وقفہ $[1,\ 2)$ 1 پر مشتمل نہیں ہے لیکن 2 پر اس کے تمام درمیان اعداد پر مشتمل نہیں ہے لیکن پر اور اس کے تمام درمیانی اعداد پر مشتمل ہے۔

نوٹ کریں کہ سے ∞ ایک اور نہیں ہے علامتیں ∞ اور $-\infty$ حقیقی خط کو ظاہر کرنے کے لئے استعمال ہوتی ہے۔مزید، (a,b) اور $[a,b]$ وقفے $\mathbb{R}$ کے ماتحت سیٹ ہیں۔

وقفے کے اقسام (Types of intervals)

وقفے کے کئی اقسام ہیں۔ فرض کرو کہ $a,b \in \mathbb{R}$ اس طرح $a < b$ ہو، مندرجہ ذیل جدول مختلف قسم کے وقفے کو بیان کرتی ہے۔اگر کوئی نقطہ ہٹادیاجائے تو خط کھینچنا ناممکن ہے۔لہٰذا ہم اس خط کو ہٹانے کے لئے بغیر پھرے ہو کے دائرہ "o" کا استعمال کرتے ہیں اور ایک بھرا ہوا دائرہ '●' کا استعمال کرتے ہوئے اس بات کی نشان ہی کرتے ہیں کہ نقطہ شامل ہے۔

وقفہ	ترقیم	مجموعہ	خاکہ نگاری کی نمائندگی
محدود	(a,b)	$\{x : a < x < b\}$	
	$[a,b]$	$\{x : a \leq x \leq b\}$	
	$(a,\ b]$	$\{x : a < x \leq b\}$	
	$[\ a,\ b)$	$\{x : a \leq x < b\}$	
لا محدود	(a,∞)	$\{x : a < x < \infty\}$	
	$[a,\infty)$	$\{x : a \leq x < \infty\}$	
	$(-\infty,b)$	$\{x : -\infty < x < b\}$	
	$(-\infty,b]$	$\{x : -\infty < x \leq b\}$	
	$(-\infty,\infty)$ or $\mathbb{R}$	$\{x : -\infty < x < \infty\}$ حقیقی اعداد کا مجموعہ	

11th_Maths_Vol 1_Chapter 1_Urdu Medium.indd 9 05-10-2021 3.02.09 PM

مندرجہ ذیل وقفے کو علامتی شکل میں لکھیں۔

(i) $\{x : x \in \mathbb{R}, -2 \leq x \leq 0\}$ (ii) $\{x : x \in \mathbb{R}, 0 < x < 8\}$

(iii) $\{x : x \in \mathbb{R}, -8 < x \leq -2\}$ (iv) $\{x : x \in \mathbb{R}, -5 \leq x \leq 9\}$

محلے (Neighbourhood)

ایک نقطہ a کا کوئی بھی کھلا وقفہ ہے۔ جس میں 'a' ہوتا ہے۔ خاص طور پر، اگر 'ϵ' ایک مثبت عدد ہے عام طور پر بہت چھوٹا، پھر 'a' کا ϵ پڑوس کھلا وقفہ $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ ہے۔ مجموعہ $(a-\epsilon, a+\epsilon) - \{a\}$، '$a$' کا حذف شدہ پڑوس کہا جاتا ہے اور اس کو $0 < |x-a| < \epsilon$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ خاکہ 1.3 ملاحظہ کریں



خاکہ 1.3

1.5 تعلقات (Relations)

ہم مجموعے کے کارتیسی حاصل ضرب کے ذریعے حقیقی زندگی کے احساس، اسرار تحریر (Cryptography) اور علم ہندسہ (Geometry) کا استعمال کرتے ہوئے مختلف پہلوؤں سے تعلقات کے تصور سے رجوع کرتے ہیں۔

ہماری روز مرہ زندگی میں اکثر ہمیں ایسے سوالات آتے ہیں جیسے "آپ سے ان کا تعلق کیا ہے؟" کچھ ممکنہ جوابات ہیں،

(i) وہ میرے والد ہیں۔

(ii) وہ میرے استاد ہیں۔

(iii) ان کا مجھ سے تعلق نہیں ہے۔

اس سے ہم دیکھتے ہیں کہ لفظ تعلق ایک شخص کو دوسرے شخص سے جوڑتا ہے۔ اس خیال کو بڑھاتے ہوئے، ریاضی میں ہم تعلقات کو ایسا سمجھتے ہیں جو ریاضیاتی اشیاء کو جوڑتا ہے۔ مثالیں:

(i) ایک عدد m کا تعلق ایک عدد n سے ہے اگر $\mathbb{N}$ میں m کو n تقسیم کرتا ہے۔

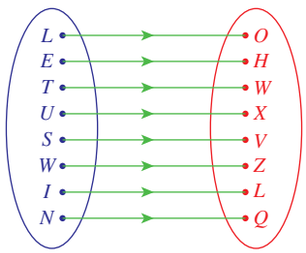
(ii) ایک حقیقی عدد x کا تعلق ایک حقیقی عدد y سے ہے اگر $x \leq y$ ہو۔

(iii) ایک نقطہ p کا تعلق ایک خط L سے ہے اگر L پر p واقع ہو۔

(iv) ایک طالب علم X کا تعلق ایک اسکول S سے ہے۔ اگر S کا طالب علم X میں ہو۔

مثال 1.1 : اسرار تحریر (Cryptography)

صدیوں سے، لوگوں نے خفیہ معلومات کو مخلوط رکھنے کے لئے (Codes) خفیہ نویس یا (Cipher) خفیہ تحریرات استعمال کئے ہیں۔ فوج، عالیاتی اداروں اور کمپیوٹر پروگرامز کے لئے موثر خفیہ نویس ضروری ہے۔ اس خفیہ نویس کو کوڈنگ اور ڈی کوڈنگ (Decoding) بنانے میں استعمال ہونے والی تکنیک کا مطالعہ اسرار تحریر یا خفیہ نگاری (Cryptography) کہلاتا ہے۔



خاکہ 1.4

پیغام مرموز (Coding) کرنے کا ابتدائی طریقوں میں سے ایک سادہ متبدل تھا۔ مثال کے طور پر، پیغام میں ہر حرف کو حرف سے تبدیل جاسکتا ہے۔ جوبعد حروف تہجی میں تین مقامات پر ظاہر ہوتا ہے۔

11th_Maths_Vol 1_Chapter 1_Urdu Medium.indd 10 05-10-2021 3.02.09 PM

اس کوڈنگ اسکیم (Coding Scheme) کا استعمال کرتے ہوئے، "LET US WIN" ہوجاتا ہے اس اسکیم کو جولیس کیسر (Julius Caesar) نے استعمال کیا تھا اور یہ کیسر خفیہ نویس (Caesars cipher) کہلاتا ہے۔غیر مرموز کرنے کے لئے، ہر حرف کو حرف سے تین جگہ پہلے تبدیل کریں۔ یہ تصور اکثر ذہنی صلاحیت کی جانچ میں استعمال ہوتی ہے۔ مندرجہ بالا کو ایک تیر خاکہ (Decoding) کے طور پر نمائندگی کی جاسکتی ہے۔ جیسا کہ شکل 1.4 میں دیا گیا ہے۔

$\{(L,O),(E,H),(T,W),(U,X),(S,V),(W,Z),(I,L),(N,Q)\}$ جو کارتیسی حاصل ضرب $C \times D$ کا ماتحت سیٹ ہے۔جہاں $C=\{L,E,T,U,S,W,I,N\}$ اور $D=\{O,H,W,X,V,Z,L,Q\}$

کیا آپ جانتے ہیں؟



اگر "KDUGZRUN" کا مطلب "HARDWORK" ہے۔تو "DFKLHYHPHQW" ، "ACHIEVEMENT" بن جاتا ہے۔ کیا یہ $f(x)=x-3$ ہے؟

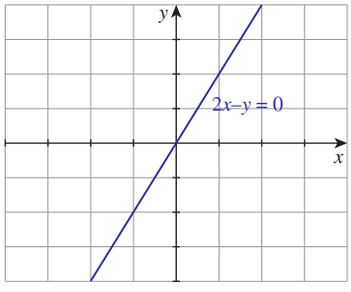
مثال 1.2 : علم ہندسہ (Geometry)

درج ذیل تین مساوات پر غور کریں۔

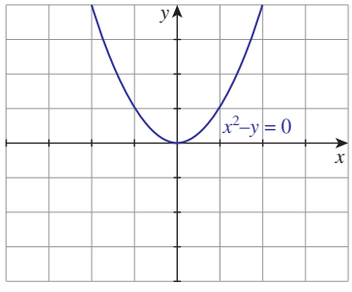
(i) $2x-y=0$ (ii) $x^2-y=0$ (iii) $x-y^2=0$

(i) $2x-y=0$

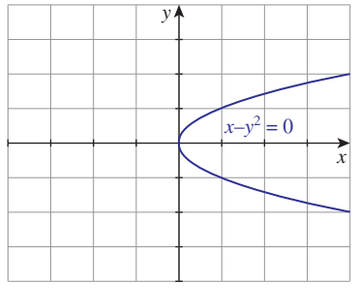
مساوات $2x-y=0$ ایک خط مستقیم کی نمائندگی کرتا ہے۔ صاف طور پر نقاط $(3,\ 6)$، $(1,\ 2)$ اس پر واقع ہیں۔ جبکہ $(1,\ 1)$، $(3,\ 5)$، $(4,\ 5)$ خط مستقیم پر واقع نہیں ہیں۔ x اور y کے درمیان تجزیاتی تعلق (Analytical Relation) $y=2x$ کی طرف سے دیا گیا ہے۔خط کے تمام نقاط جو خط مستقیم پر واقع ہے جیسا کہ دیا گیا ہے۔ $\{(x,2x):x\in\mathbb{R}\}$ واضح طور پر یہ $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ کا تحتی سیٹ ہے۔ (نقشہ 1.5 دیکھیں)



خاکہ 1.5



خاکہ 1.6



خاکہ 1.7

(ii) $x^2-y=0$

جیسا کہ پہلے بحث ہوچکے ہے، x اور y کا تعلق $y=x^2$ ہے۔ منحنی میں موجود تمام نقاط کا مجموعہ $\{(x,x^2):x\in\mathbb{R}\}$ (خاکہ 1.6 ملاحظہ کریں)۔ اس کے علاوہ یہ کارتیسی حاصل ضرب $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ کا تحتی مجموعہ ہے۔

(iii) $x-y^2=0$

جیسا کہ اوپر، x اور y کا درمیانی تعلق $x=y^2$ یا $y=\pm\sqrt{x},\ x\geq 0$ ہے اس مساوات کو $y=+\sqrt{x}$ اور $y=-\sqrt{x}$ کے طور پر دوبارہ لکھا جاسکتا ہے۔ منحنی پر تمام نقاط کا مجموعہ $\{(x,\sqrt{x})\}$ اور $\{(x,-\sqrt{x})\}$ جو سیٹوں کا اتحاد ہے جہاں x ایک غیر منفی حقیقی عدد ہے۔ جو کارتیس حاصل ضرب $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ کا ماتحت سیٹ ہیں۔ (شکل 7.1 دیکھیں)

مندرجہ بالا مثال سے ہم الہامی (intuitively) طور پر سمجھتے ہیں کہ تعلق کیا ہے لیکن ریاضی میں ، ہمیں ہر ایک تکنیکی اصطلاح (Technical term) کے لئے کھلی تعریف کرتی ہوگی، اب ہم ریاضی کی اصطلاح "تعلق" کی وضاحت شروع کرتے ہیں۔

11th_Maths_Vol 1_Chapter 1_Urdu Medium.indd 11 05-10-2021 3.02.11 PM

تعلق کی تعریف (Definition of Relation)

فرض کرو کہ ایک طالب علم کا مجموعہ $A = \{ p, q, r, s, t, u\}$ اور $B = \{ X, Y, Z, W\}$ ایک اسکول کا مجموعہ ہے آیئے ہم تعلق پر غور کریں۔

ایک طالب علم $a \in A$ کا تعلق ایک اسکول $S \in B$ سے کیا گیا ہے۔ اگر "a" اسکول S میں تعلیم حاصل کر رہا ہو یا کیا ہو۔

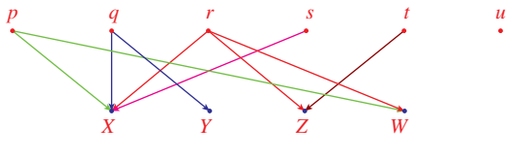
غرض کریں کہ p ہو X میں تعلیم حاصل کیا اور اب W میں حاصل کر رہا ہے۔ q نے X میں تعلیم حاصل کیا اور اب Y میں تعلیم حاصل کر رہا ہے r نے X اور W میں تعلیم حاصل کیا اور Z میں پڑھ رہا ہے۔ s نے شروع ہی سے X میں پڑھ رہا ہے۔ t نے Z میں تعلیم حاصل کیا اور اب کسی اسکول میں پڑھ نہیں رہا ہے اور u ان چاروں اسکولوں میں سے کسی میں بھی تعلیم حاصل نہیں کیا۔

اگرچہ تعلقات واضح طور پر دیئے گئے ہیں لیکن اس طرح ہمیشہ تعلق بنانا ممکن نہیں ہے تو آیئے اس رشتے کے اظہار کے لئے کچھ دوسری پیش کش کرنے کی کوشش کریں۔

(i) $p \quad p \quad q \quad q \quad r \quad r \quad r \quad s \quad t$

$X \quad W \quad X \quad Y \quad X \quad Z \quad W \quad X \quad Z$

(ii)



(iii) $\{(p, X), (p,W), (q,X),(q,Y),(r,X),(r, Z), (r, W), (s, X), (t, Z)\}$

(iv) $pRX, pRW, qRX, qRY, rRX, rRZ, rRW, sRX, tRZ$

تعلقات کے چار نمائندگیوں میں سے ، تیسرا ایک سیٹ کے لحاظ سے کسی تعلق سے نمٹنے کے لئے زیادہ آسان اور آرام دہ لگتا ہے۔

تیسری نمائندگی میں دیا گیا سیٹ کارتیسی حاصل ضرب $A \times B$ کا تحتی سیٹ ہے۔ مثال 1.1 اور 1.2 میں بھی ، ہم کارتیسی حاصل ضرب کے تحتی سیٹوں پر پہنچے۔

تعریف 1.2

A اور B دو خالی سیٹ ہیں۔ A سے B کا ایک تعلق R کو A اور B کے کارتیسی حاصل ضرب کا تحتی سیٹ کے طور پر تعریف کیا گیا ہے۔ علامتی طور پر $R \subseteq A \times B$ ہے۔

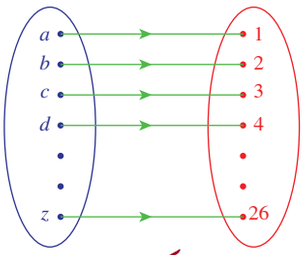
A سے B کا تعلق، A سے B کے ایک تعلق سے مختلف ہے۔

ایک مجموعہ کچھ $\{a \in A : (a, b) \in R$ $b \in B\}$ کے لئے ہو تو یہ علاقہ (domain) کہلاتا ہے۔

ایک مجموعہ {کچھ $\{ b \in B : (a, b) \in R \}$ } ہو تو یہ وسعت (range) کہلاتا ہے۔

اس طرح تعلق ہم R کا علاقہ ترتیب وار جوڑیاں کے تمام پہلا محدد (first coordinates) کا مجموعہ ہے اور تعلق R کی وسعت ترتیب وار جوڑیاں کے تمام دوسرا محدد کا مجموعہ ہے۔

مثال 1.3 : شکل 1.8 کے خاکہ پر غور کریں یہاں حروف تہجی کو طبعی اعداد پر نقشہ بنایا گیا ہے ایک سادہ (cipher) خفیہ نویس ہر حروف تہجی کو طبعی عدد تفویض کرتا ہے۔ یہاں a کی نمائندگی 1 سے، b کی نمائندگی 2 سے z کی نمائندگی 26 سے کی گئی ہیں۔ یہ نظیری (correspondence) کو ترتیب وار جوڑیاں $\{ (a, 1), (b, 2),\ldots,(z, 26)\}$ کے طور پر لکھی جاسکتی ہے۔ ترتیب وار جوڑیاں کا یہ مجموعہ تعلق ہے۔ اس تعلق کا علاقہ $\{a, b,\ldots, z\}$ اور وسعت $\{1, 2,\ldots, 26\}$ ہے۔

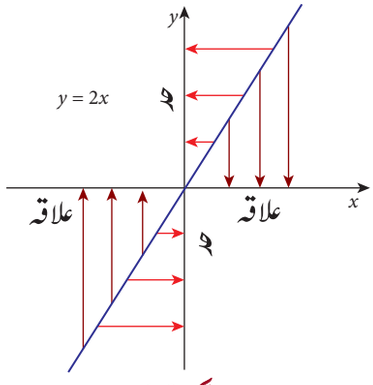


خاکہ 1.8

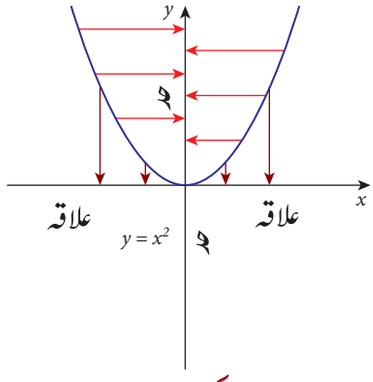
11th_Maths_Vol 1_Chapter 1_Urdu Medium.indd 12 05-10-2021 3.02.12 PM

اب ہم یاد کرتے ہیں کہ مثال 1.1 اور 1.2 میں زیر بحث تعلقات بھی مجموعے کے کارتیسی حاصل ضرب کے ماتحت مجموعے کے ساتھ ختم ہوتے ہیں۔لہٰذا تعلق کی اصطلاح جو ہم نے اب تک کی تمام بحثوں میں استعمال کئے ہیں جو ریاضی کی اصطلاح سے تعلق رکھتا ہے۔جو تعریف 2.1 میں بیان کیا گیا ہے۔

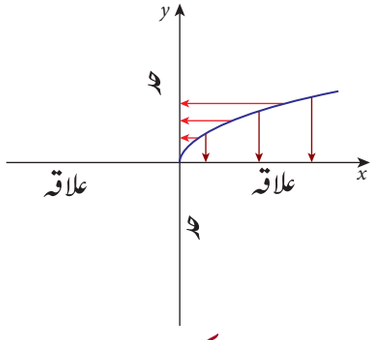
مثال 1.1 میں زیر بحث تعلق کا سیٹ $\{ L, E, T, U, S, W, I, N \}$ علاقی ہے $\{ O, H, W, X, V, Z, L, Q\}$ وسعت ہے ۔ مثال 1.2 میں مساوات $2x - y = 0$ کے لئے زیر بحث تعلق کا علاقہ اور وسعت $\mathbb{R}$ ہے اور $\mathbb{R}$ (1.9 شکل لکھیں) $x^2 - y = 0$ مساوات کے لئے علاقہ $\mathbb{R}$ ہے۔ اور وسعت $[0, \infty)$ ہے۔ (شکل 1.9 دیکھیں)، اور تیسری مساوات $x^2 - y = 0$ کے اس معاملے میں، علاقہ $[0, \infty)$ اور وسعت $\mathbb{R}$ ہے۔ (شکلیں 1.11 اور 1.12 دیکھیں)



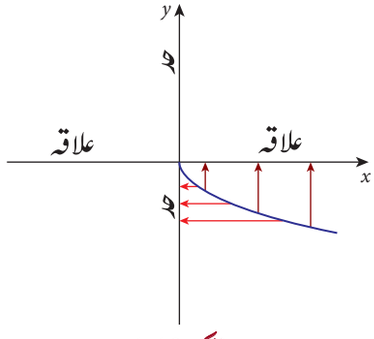
خاکہ 1.9



خاکہ 1.10



خاکہ 1.11



خاکہ 1.12

نوٹ کریں کہ تعلق کا علاقہ کارتیسی حاصل ضرب میں پہلے سیٹ کا ماتحت سیٹ ہے اور وسعت دوسرے سیٹ کا ماتحت سیٹ ہے۔ عام طور پر ہم نے تعلق کا دوسرا سیٹ کو (co-domain) معاون علاقہ کہا۔ اس طرح ، ایک تعلق کا وسعت ، معاون علاقہ کے تمام عناصر کا مجموعہ ہے۔جو علاقہ کے کچھ عنصر سے متعلق ہے آئیے ہم نوٹ کرتے ہیں کہ معاون علاقہ کا تحتی سیٹ تعلق کا وسعت ہے۔

کسی بھی سیٹ A کے لئے ، ϕ اور $A \times A$ کے تحتی سیٹ $A \times A$ ہیں۔ ان دوتعلقات کو انتہائی تعلقات (extreme relations) کہا جاتا ہے۔ سابقہ تعلق (former relation) ایک خالی تعلق (empty relation) ہے اور آگے چل کر ایک عالمگیر تعلق (universal relation) ہے۔

ہم اگلے حصے میں علاقہ ، معاون علاقہ اور وسعت کا بارے میں یعنی تفاعل کے بارے میں مزید بحث کریں گے۔

اگر R کا تعلق A سے B کو ہے اور اگر $(x, y) \in R$ ہم xRy (اس طرح پڑھیں کہ "x" کا تعلق "y" سے ہے) لکھتے ہیں۔ اور اگر $(x, y) \notin R$ تو کبھی کبھی ہم $x \not R y$ (اس طرح پڑھیں کہ "x" کا تعلق "y" سے نہیں ہے) لکھتے ہیں۔

اگرچہ کسی تعلق کی عمومی تعریف ایک سیٹ سے دوسرے سیٹ پر متعین ہوتی ہے۔لیکن ایک سیٹ پر متعین تعلقات ریاضی کے نقطۂ نظر سے زیادہ دلچسپی رکھتے ہیں تو آئیے ہم ایک سیٹ پر متعین تعلقات پر توجہ دیں۔

11th_Maths_Vol 1_Chapter 1_Urdu Medium.indd 13 05-10-2021 3.02.14 PM

1.5.1 تعلقات کے اقسام (Type of relations)

مندرجہ ذیل مثالیں پر غور کریں۔

(i) فرض کریں کہ S پر $S = \{1, 2, 3, 4\}$ اور $R = \{(1, 1),(1, 3),(2, 3)\}$ ہو۔

(ii) فرض کریں کہ $S = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ اور وضاحت کریں کہ "m کا تعلق n سے ہے، اگر m کو n تقسیم کرتا ہے۔"

(iii) فرض کریں کہ $\mathscr{E}$ ایک مسطح (plane) کے تمام دائرے کا مجموعہ اور وضاحت کرتا ہے کہ "ایک دائرہ C کا تعلق دائرہ C' سے کیا گیا" اگر C کا نصف قطر C' کے نصف قطر کے مساوی ہوں۔

(iv) تمام لوگوں کے سیٹ S میں بیان کیا گیا ہے کہ "a کا تعلق b سے ہے، اگر a کا بھائی b ہے"۔

(v) فرض کریں کہ تمام لوگوں کا سیٹ ٹ S ہے۔ کے اصول "mother of" سے ٹ S پر تعلق کی وضاحت کریں۔

دوسری مثال میں، جیسا کہ ہر عدد خود کو تقسیم کرتا ہے۔ a تمام $a \in S$ کے لئے a سے متعلق ہے۔" تیسرا تعلق میں بھی یہی ہے۔ پہلی مثال میں a تمام $a \in S$ سے متعلق a ہے۔" سچ نہیں ہے کیونکہ 2 کا تعلق 2 سے نہیں ہے۔

یہ دیکھنا آسان ہے کہ "اگر a کا تعلق b سے ہے، تو b کا تعلق کا a سے ہے اور b کا c سے، پھر a کا تعلق c سے ہے"۔ دوسرے اور تیسرے تعلقات میں یہ خاصیت صحیح ہے لیکن پانچویں میں نہیں۔

یہ خصوصیت، کچھ اور خصوصیات کے ساتھ ریاضی کے ڈھانچے میں بہت زیادہ مطالعہ کیا جاتا ہے۔

تعریف 1.3

فرض کریں کہ S ایک غیر خالی مجموعہ ہے فرض کریں کہ S پر R کا تعلق ہو، تو،

- R کو مضطرای (reflexive) کہا جاتا ہے۔ اگر a کا تعلق a کے لئے تمام $a \in S$ ہو۔
- R کو متشاکل (symmetric) کہا جاتا ہے۔ اگر a کا تعلق b سے ہے تو اس کا مطلب b کا تعلق a سے ہے۔
- R کو منتقلی (transitive) کہاجاتا ہے۔ اگر a کا تعلق b سے ہے اور b کا تعلق c سے ہے۔" اس کا مطلب a کا تعلق c سے ہے۔

ان تینوں تعلقات بنیادی تعلقات (basic relations) کہا جاتا ہے۔

آئیے ہم ان بنیادی تعلقات کی تعریفوں کو ایک مختلف شکل میں دوبارہ لکھتے ہیں۔

فرض کرو کہ S ایک غیر خالی مجموعہ ہے فرض کرو کہ S پر R کا ایک تعلق ہے تو R ہے۔

- مضطراری (reflexive) اگر "$(a,a) \in R$ تمام $a \in S$ کے لئے ہو"۔
- متشاکل (symmetric) ہو، اگر $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$ ہو۔
- متشاکل (transitive) ہو، اگر $(a, b),(b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$ ہو۔

تعریف 1.4

فرض کریں کہ S کوئی سیٹ ہے S پر ایک تعلق کو ایک معاولت کا تعلق (equivalance relation) کہا جاتا ہے اگر یہ مضطراری، متشاکل اور منتقلی ہو۔

آئیے مندرجہ ذیل دو تعلقات پر غور کریں۔

(i) تمام لوگوں کے سیٹ S_1 میں، اصول کے مطابق R_1 کا تعلق کی وضاحت کریں: "a کا تعلق b سے ہے۔ اگر a کا بھائی b ہے"۔

(ii) تمام مردوں کے سیٹ S_2 میں ،اصول کے مطابق R_2 کا تعلق کی وضاحت کریں: "اگر a کا تعلق b سے ہے اگر a کا بھائی b ہے"۔

"اگر a کا تعلق b سے ہے اگر a کا بھائی b ہے" اصول جو S_1 اور S_2 پر وضاحت کرتے ہیں وہ ایک جیسے ہیں۔ لیکن سیٹ جیسے نہیں ہیں۔ R_1 کی تشاکل تعلقٹ S_1 پر نہیں ہے جبکہ R_2 کی تشاکل تعلق S_2 پر ہے۔ اس سے پتہ چلتا ہے کہ نہ صرف تعلق کی وضاحت کرنے والا اصول اہم ہے وہ سیٹ جس پر تعلق کی وضاحت کی گئی ہے۔وہ بھی اہم ہے لہٰذا جب بھی کوئی تعلق رکھتا ہے تو دونوں تعلقات کے ساتھ ساتھ وہ سیٹ جس پر تعلق وضاحت کی گئی ہو اس کو واضح کرنا ہوگا۔ نوٹ کریں کہ اگر تعلق $\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2)\}$ مضطراری ہے اگر یہ سیٹ $\{1,2,3\}$ پر بیان کیا گیا ہے۔ یہ مضطراری نہیں ہے اگر اس کی وضاحت سیٹ $\{1,2,3,4\}$ پر کی گئی ہو۔

11th_Maths_Vol 1_Chapter 1_Urdu Medium.indd 14 05-10-2021 3.02.15 PM

مثال 4.1

1. فرض کریں کہ $X = \{1, 2, 3, 4\}$ اور $R = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2),(3, 3), (1, 3), (4, 4), (1, 2),(3, 1)\}$ جیسا کہ $(1, 1)$، $(2, 2)$، $(3, 3)$ اور $(4, 4)$ سب R میں ہیں، یہ مضطراری ہے، ہر جوڑا کے لئے بھی $(a, b) \in R$، $(b, a) \in R$ بھی R میں ہیں۔ تو R تشاکل ہے۔جیسا کہ $(1, 3) \in R$ اور $(2, 1)$ ہوپ ہم دیکھتے ہیں کہ $(2,3) \notin R$ R غیر منتقلی ہے، اس طرح معاولت کا تعلق نہیں ہے۔
2. فرض کریں کہ P ایک مسطح میں تمام خطوط مستقیم کا مجموعہ کا نشان دہی کرتا ہے فرض کریں کہ R کا تعلق P پر وضاحت کیا گیا ہے جیسا کہ lRm اگر l کے متوازی (Parallel) m ہو۔یہ تعلق مضطراری، تشاکلی اور منتقلی ہے جبکہ یہ ایک معادلت کا تعلق ہے۔
3. فرض کریں کہ مجموعہ A والدیں کے ساتھ ان کے بچے، دولڑکیاں اور ایک لڑکا پر مشتمل ہے۔ فرض کریں کہ R کا تعلق aRb کی طرف سے بیان کیا گیا ہو اگر b کی ایک بہن a ہے۔
اس تعلق کو غور سے دیکھنا چاہئے ۔ ایک عورت خود اپنی ایک بہن نہیں ہوتی ، تو یہ مضطراری نہیں ہے یہ تشاکلی بھی نہیں ہے واضح طورپر یہ منتقلی بھی نہیں ہے تو ، یہ معادلت کا تعلق نہیں ہے۔(اگر ہم عورتوں کے تحتی سیٹ کے لئے ایک ہی تعلق پر غور کریں تو یہ تشاکل ہوجاتا ہے۔یہاں تک کہ اس معاملے میں یہ منتقلی نہیں ہے۔)
4. فرض کریں کہ طبعی اعداد کے مجموعے پر R کا تعلق xRy سے بیان کیا گیا ہے ۔ اگر $x + 2y = 21$ ہو یہ بہتر ہوگا کہ تعلق واضح طورپر لکھیں۔ تعلق R سیٹ ہے۔

$$\{(1,10),(3, 9), (5, 8),(7, 7), (9, 6), (11, 5), (13, 4), (15, 3),(17, 2), (19, 1)\}$$

بطور $(1,1) \notin R$ یہ ایک مضطراری نہیں ہے بطور $(1, 10) \in R$ اور $(10,1) \notin R$ ایک تشاکلی نہیں ہے بطور $(3,9) \in R$، $(9,6) \in R$ جبکہ $(3, 6) \notin R$ یہ تعلق منتقلی نہیں ہے۔
5. فرض کریں کہ $X = \{ 1, 2, 3, 4\}$ اور $R = \phi$ جہاں ϕ ایک خالی سیٹ ہے بطور $(1,1) \notin R$ یہ ایک مضطراری نہیں ہے۔ جیسا کہ R میں (x, y) کا ایک جوڑ نہیں مل سکتا، جیسے $(y, x) \notin R$ یہ تعلق غیر تشاکل نہیں ہے لہٰذا یہ تشاکل ہے ۔ اس طرح یہ منتقلی ہے۔
6. عالم گیر تعلق ہمیشہ ایک معادلت کا تعلق ہوتا ہے۔
7. ایک خالی تعلق کو تشاکل اور منتقلی سمجھا جاسکتا ہے۔
8. اگر ایک تعلق ایک ، وار صفر پر مشتمل ہے تو تعلق منتقلی ہے۔ آئیے اب کچھ اور خاص تعلقات پر بات کریں۔

مثال 1.10 تین بنیادی تعلقات کے لئے سیٹ $S = \{1,2, 3, \ldots, n\}$ پر وضاحت کی گئی تعلق $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), \ldots, (n, n)\}$ چیک کریں ۔

حل: بطور $(a, a) \in R$، تمام $a \in S$ ، R ایک مضطراری ہے۔ R میں (a, b) کا جوڑ نہیں ہے اس طرح $(b,a) \notin R$ دوسرے الفاظ میں $(a,b) \in R$ کا ہر ایک جوڑ، (b, a) بھی R میں ہے۔ اس طرح R ایک تشاکل ہے۔
ہم R میں دوجوڑیاں (a, b) اور (b, a) معلوم کر نہیں سکتے اس طرح $(a, c) \notin R$ یہ بیان "R ایک منتقلی نہیں ہے۔" صحیح نہیں ہے۔ اس لئے ، "یہ بیان R منتقلی ہے" صحیح ہے۔
لہٰذا R منتقلی ہے۔ چونکہ R ایک مضطراری ، تشاکلی اور منتقلی ہے یہ تعلق ایک معادلت کا تعلق ہے۔

شروع ہی سے ہم نے تمام تعلقات کو ایک ہی حرف R سے ظاہر کیا ہے ایسا کرنا ضروری نہیں ہے ہم تعلقات کو ظاہر کرنے کے لئے یونانی حرف (Greek letter) ρ (وہ پڑھیں) استعمال کرسکتے ہیں۔ معادلت کا تعلقات زیادہ تر "$\sim$" سے ظاہر ہوتے ہیں۔
اگر کوئی تعلق مطلوبہ قسم کا نہ ہو، تو کچھ جو ڈال کر یا حذف (نکال) کرکے ہم اسے مطلوبہ قسم بناسکتے ہیں ہم اسے مندرجہ ذیل مسئلہ میں کرتے ہیں۔

مثال 1.11 فرض کریں کہ $S = \{1, 2, 3\}$ اور $\rho = \{(1, 1),(1, 2),(2, 2), (1, 3), (3, 1)\}$ ہو

حل:

(i) کیا ρ مضطراری ہے؟ اگر نہیں ، تو وجہ بیان کریں اور کم از کم ترتیب وار جوڑیاں کا مجموعہ ρ میں شامل کرنے کے لئے لکھیں تاکہ اسے مضطرای بناسکے۔

11th_Maths_Vol 1_Chapter 1_Urdu Medium.indd 15 05-10-2021 3.02.18 PM

(ii) کیا ρ تشاکل ہے؟ تووجہ بیان کریں اور کم از کم ترتیب وار جوڑیاں کی تعداد ρ میں شامل کرنے کے لئے لکھیں تاکہ اسے تشاکل بناسکے اور کم از کم ترتیب وار جوڑیاں کی تعداد ρ میں نکال کر لکھیں تاکہ اسے تشاکل بناسکے۔

(iii) کیا ρ متقالی ہے؟ اگر نہیں، تو وجہ بیان کریں کم از کم ترتی وار جوڑیاں کی تعداد ρ میں شامل کرنے کے لئے لکھیں تاکہ اسے منتقلی بناسکے اور کم از کم ترتیب وار جوڑیاں کی تعداد ρ میں نکال کر لکھیں تاکہ اسے منتقل بنا سکے۔

(iv) کیا ρ ایک مفادلت کا تعلق ہے؟ اگر نہیں تو کم از کم ترتیب وار جوڑیاں کی تعداد ρ میں شامل کرنے کے لئے لکھیں تاکہ اُسے معادلت کا تعلق بنا سکے۔

حل:

(i) ρ مضطراری نہیں چونکہ $(3, 3) \rho$ میں نہیں ہے جیسا کہ $(1, 1)$ اور $(2, 2) \rho$ میں ہیں جوڑی $(3, 3)$ کو ρ میں شامل کرنا کافی ہے ، تاکہ اسے مضطراری بنا سکے۔

(ii) ρ تشاکل نہیں ہے چونکہ $(1, 2) \rho$ میں ہے۔جبکہ $(2, 1) \rho$ میں نہیں ہے۔ جوڑی $(2, 1)$ کو تشاکل بنانے کے لئے ρ میں شامل کرنا کافی ہے۔

(iii) ρ منتقلی نہیں ہے چونکہ $(1, 3)$ اور $(1, 3) \rho$ میں ہیں۔جبکہ $(3, 3) \rho$ میں نہیں ہے اسے منتقل بنانے کے لئے ہمیں ρ میں $(3, 3)$ شامل کرنا ہوگا $(3, 3)$ کو شامل کرنے کے بعد بھی، تعلق $(3, 2) \rho$ میں نہیں ہے۔ہمیں منتقلی بنانے کے لئے ρ میں $(3, 2)$ کو شامل کرنا ہوگا اب یہ منتقلی ہوجاتا ہے۔لہٰذا $(3, 3)$ اور $(3, 2)$ کو شامل کیا جائے تاکہ ρ کو منتقلی بنایا جاسکے۔لیکن اگر ہم ρ سے $(3, 1)$ کو ہٹادیں تو پھر منتقلی ہوجاتا ہے۔

(iv) ہم نے دیکھا ہے۔

- ρ کو مضطراری بنانے کے لئے ، ہمیں $(3, 3)$ کو شامل کرنا ہوگا۔
- ρ کو تشاکل بنانے کے لئے ، ہمیں $(2, 1)$ کو شامل کرنا ہوگا۔

اور ρ کو منتقلی بنانے کے لئے، ہمیں $(3, 3)$ اور $(3, 2)$ شامل کرنا ہوگا۔

- ρ کو معادلت کا تعلق بنانے کے لئے ہمیں یہ تمام جوڑیاں کو شامل کرنا ہوگا۔ لہٰذا جوڑیاں کو شامل کرنے کے بعد تعلق $\{(1, 1),(2, 2),(3, 3),(1, 2),(2, 1),(1, 3),(3, 1),(3, 2),(2, 3)\}$ بن جاتا ہے۔

جبکہ یہ تعلق تشاکل نہیں ہے۔کیونکہ $(3, 2)$ تعلق میں ہے اور $(2, 3)$ تعلق میں نہیں ہے۔ اب ہمیں 5 کو بھی شامل کرنا ہوگا اب یہ تعلق $\{(1, 1),(2, 2),(3, 3),(1, 2),(2, 1),(1, 3),(3, 1),(3, 2),(2, 3)\}$ ہوجاتا ہے۔

یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ یہ تعلق مضطراری ، تشاکلی اور منتقلی ہے اور اسی وجہ سے یہ ایک معادلت کا تعلق ہے ہمیں ρ کو معادلت کا تعلق بنانے کے لئے $(3,2),(2,1),(3, 3)$ اور $(2, 3)$ کو شامل کرنا ہوگا۔

آئیے اب ذیل میں دی گئی مثالوں کے ذریعے کچھ خاص خصوصیات والے تعلقات بنانے کا طریقہ سیکھیں۔

مثال 1.12 فرض کریں کہ $A = \{0, 1, 2, 3\}$ ہو۔ مندرجہ ذیل اقسام میں سے A پر تعلقات استوار (Construct) کریں۔

(i) مضطراری نہیں، تشاکلی نہیں، منتقلی نہیں۔

(ii) مضطراری نہیں، تشاکلی نہیں، منتقلی ۔

(iii) مضطراری نہیں، تشاکلی، منتقلی نہیں۔

(iv) مضطراری نہیں، تشاکلی ، منتقلی

(v) مضطراری، تشاکلی نہیں، منتقلی نہیں

(vi) مضطراری، تشاکلی نہیں، منتقلی

(vii) مضطراری، تشاکلی ، منتقلی نہیں

(viii) مضطراری، تشاکلی، منتقلی

11th_Maths_Vol 1_Chapter 1_Urdu Medium.indd 16 05-10-2021 3.02.18 PM

حل:

(i) آئیے ہم تعلق $(1, 2)$ کو جوڑیں تاکہ تعلق "متشاکل نہ ہو" اور تعلق $\{(1, 2)\}$ پر غور کریں۔یہ منتقلی ہے اگر ہم $(2, 3)$ کو شامل کرتے ہیں اور $(1, 3)$ کو غیر شامل کرتے ہیں تو تعلق منتقلی نہیں ہے تو تعلق $\{(2,3),(1,2)\}$ مضطراری نہیں، متشاکلی نہیں اور منتقلی نہیں ہے اور اس طرح ہم مزید مثالیں بناسکتے ہیں۔

(ii) ابھی ہم نے دیکھا ہے کہ تعلق $\{(1, 2)\}$ منتقلی ہے مضطراری اور متشاکلی نہیں ہے۔

(iii) آئیے جوڑی $(1, 2)$ کے ساتھ شروع کرتے ہیں۔چونکہ ہمیں متشاکل کی ضرورت ہے ہمیں جوڑی $(2, 1)$ کو شامل کرنا ہوگا اس مرحلے پر جیسا کہ $(1, 1)$ اور $(2, 2)$ یہاں نہیں ہیں تعلق منتقلی نہیں ہے۔اس طرح $\{(2,1),(1,2)\}$ مضطراری نہیں ہے۔یہ متشاکلی ہے اور منتقلی نہیں ہے۔

(iv) اگر ہم جوڑیاں $(1, 1)$ اور $(2, 2)$ کو (iii) میں زیربحث تعلق میں شامل کریں تو یہ منتقلی ہوجانے کا اس طرح $\{(1, 2), (2, 1), (1, 1), (2, 2)\}$ مضطراری نہیں ہے یہ متشاکل اور یہ منتقلی ہے۔

(v) $\{0, 1, 2, 3\}$ پر تعلق کے لئے مضطراری ہونے کے لئے اس کے جوڑی $(0, 0), (1, 1), (2,2), (3, 3)$ ہونی چاہئے۔ خوش قسمتی سے ، یہ متشاکلی اور منتقلی ہوجاتا ہے لہٰذا جیسا کہ (i) میں اگر ہم $(1, 2)$ اور $(2, 3)$ داخل کرتے ہیں تو ہمیں مطلوبہ حاصل ہوجاتا ہے اس طرح $\{(0, 0), (1, 1),(2, 2),(3, 3),(1, 2),(2, 3)\}$ ایک مضطراری ہے یہ متشاکل نہیں اور منتقلی نہیں ہے۔

(vi) اس طرح آگے پڑھتے ہوئے ہمیں تعلق $\{(0, 0),(1, 1), (2, 2),(3, 3),(1, 2)\}$ ملتا ہے جو مضطراری ، منتقلی ہے اور متشاکلی نہیں ہے۔

(vii) جیسا کہ اوپر ہمیں تعلق $\{(0, 0),(1, 1),(2, 2),(3, 3), (1, 2),(2, 3),(2, 1), (3, 2)\}$ ملتا ہے جو مضطراری ہے منتقلی ہے اور متشاکلی نہیں ہے۔

(viii) ہمارے پاس تعلق $\{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3)\}$ ہے جو مضطراری ہے متشاکلی اور منتقلی ہے۔

مثال 1.13 سالم اعداد کے سیٹ $\mathbb{Z}$ میں mRn کی وِضاحت کریں اگر 12 کا (multiple) ایک ضعیف $m-n$ ہے۔ ثابت کریں کہ R ایک معادلت کا تعلق ہے۔

حل:

بطور $m - m = 0$ اور $0 = 0 \times 12$، لہٰذا mRm یہ ثابت کرتا ہے کہ $\mathbb{R}$ ایک مضطراری ہے۔

فرض کریں کہ mRn تو $m - n = 12k$ کچھ سالم اعداد k کے لئے ہو، اس طرح $n - m = 12(-k)$ اور اس لئے nRm یہ بتاتا ہے کہ R ایک متشاکل ہے۔

فرض کریں کہ mRn اور nRp تو $m-n = 12k$ اور $n-p = 12l$ کچھ سالم اعداد k اور l کے لئے ہو۔

اس طرح $m - p = 12(k+l)$ اوراس لئے mRp یہ بتاتا ہے کہ R ایک منتقلی ہے اس طرح R ایک معادلت کا تعلق (equivalence relation) ہے۔

مسئلہ 1.1 m عنصر پر مشتمل ایک سیٹ سے n عناصر پر مشتمل ایک سیٹ کے تعلقات کی تعداد 2^{mn} ہے۔خاص طورپر n عناصر پر مشتمل سیٹ پر تعلقات کی تعداد 2^{n^2} ہے۔

ثبوت : فرض کریں کہ A اور B مجموعے بالترتیب m اور n عناصر پر مشتمل ہیں۔ پھر $A \times B$ عناصر mn ہوتے ہیں اور $A\times B$ کے 2^{mn} تحتی سیٹ ہوتے ہیں چونکہ $A \times B$ کا ہر تحتی سیٹ کا تعلق A سے B ہے ایک سیٹ پر مشتمل m عناصر سے ایک سیٹ پر مشتمل n عناصر تک کا تعلقات 2^{mn} ہے۔

$A=B$ لینے پر ، ہم دیکھتے ہیں کہ n عناصر پر مشتمل ایک سیٹ کا تعلقات کی تعداد 2^{n^2} ہے۔

(i) n عناصر مشتمل ایک سیٹ پر مضطراری تعلقات کی تعداد 2^{n^2-n} ہے۔

(ii) n عناصر مشتمل ایک سیٹ پر متشاکل تعلقات کی تعداد $2^{\frac{(n^2+n)}{2}}$ ہے۔

تعریف 1.5

اگر A سے B کا تعلق R ہے پھر تعلق R^{-1} کی طرف سے B سے A کی وضاحت کی گئی۔

$$R^{-1} = \{(b,a) : (a,b) \in R\}$$

اسے تعلق R کا معکوس کہا جاتا ہے۔

11th_Maths_Vol 1_Chapter 1_Urdu Medium.indd 17 05-10-2021 3.02.20 PM

مثال کے طور پر، اگر $R = \{(1, a), (2, b), (2, c), (3, a)\}$ ہوتو $R^{-1} = \{(a,1),(b, 2),(c, 2),(a, 3)\}$ یہ دیکھنا آسان ہے کہ R کا علاقہ R^{-1} کی وسعت بن جاتا ہے۔ اور R کی وسعت R^{-1} کا علاقہ بن جاتا ہے۔

$a,b \in \mathbb{Z}$ کے لئے، aRb صرف اسی صورت $a-b=3k,\ k \in \mathbb{Z}$ میں ہو۔ R پر $\mathbb{Z}$ ایک معادلت کا تعلق ہے۔ ایک سیٹ پر ایک معادلت کا تعلق اسے اپنے ماتحت سیٹ (معادلت کی کلاسوں) کے ایک جداگانہ اتحاد میں مشترک ہوجاتا ہے۔اس طرح کے تجزیہ (decomposition) کو علیحدہ کرنا (partition) کہاجاتا ہے۔یہ مندرجہ ذیل میں بیان کیا گیا ہے۔

کیا تم جانتے ہو؟

$a,b \in \mathbb{Z}$ کے لئے، aRb صرف اسی صورت $a-b=3k,\ k \in \mathbb{Z}$ میں ہو۔ $\mathbb{Z}$ پر ایک معادلت کا تعلق ہے۔

$$\begin{aligned} Z_0 &= \{x \in \mathbb{Z} : xR0\} = \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\} \\ Z_1 &= \{x \in \mathbb{Z} : xR1\} = \{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots\} \\ Z_2 &= \{x \in \mathbb{Z} : xR2\} = \{\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots\} \end{aligned}$$

اس طرح $\mathbb{Z} = Z_0 \cup Z_1 \cup Z_2$ اور سب الگ الگ تحتی سیٹ ہیں۔

ایک سیٹ S کے دی گئی علیٰحدگی $S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n$ کے لئے مشترکہ تحتی سیٹ میں، کوئی xRy کی طرف سے S پر معادلت کا تعلق R بناسکتا ہے۔ اگر $x, y \in S_i$ کچھ i کے لئے ہو۔ معادلت کا تعلق اعلیٰ ریاضی کے تقریباً تمام شاخوں میں استعمال ہوتا ہے۔

مشق 1.2

1. مضطراری، تشاکل اور منتقلی کے لئے درج ذیل تعلقات پر تبادلہ خیال کریں۔
   (i) mRn اگر m تقسیم n ہو۔ کے ذریعہ تمام مثبت سالم اعداد کا مجموعہ پر تعلق R بیان کیا گیا ہے۔
   (ii) فرض کریں کہ ایک مسطح کے تمام خطوط مستقیم کا مجموعہ کو P نشان دہی کرتا ہے۔ lRm اگر l عمودی m ہے کے ذریعہ تعلق R بیان کیا گیا ہے۔
   (iii) غرض کریں کہ A ایک سیٹ ہو جو ایک خاندان کے تمام افراد پر مشتمل ہے۔"aRb اگر b کی ایک بہن a نہیں ہے" کے ذریعے تعلق R بیان کیا گیا ہے۔
   (iv) فرض کریں کہ A ایک سیٹ ہوجو ایک خاندان کے تمام خواتین ممبران پر مشتمل ہے۔ "aRb اگر b کی ایک بہن a نہیں ہے"۔کے ذریعے تعلق R بیان کیا گیا ہے۔
   (v) ایک طبعی اعداد کے مجموعے پر تعلق R xRy اگر $x + 2y = 1$ کی طرف سے بیان کیا گیا ہے۔
2. فرض کریں کہ $X = \{a,b,c,d\}$ اور $R = \{(a,a),(b,b),(a,c)\}$ ہو، R میں کم از کم تعداد میں ترتیب وار جوڑیاں شامل کرنے کے لئے لکھیں تاکہ اسے بنایا جاسکے۔
   (i) مضطراری (ii) تشاکل (iii) منتقلی (iv) معادلت
3. فرض کریں کہ $A = \{a,b,c\}$ اور $R = \{(a, a),(b, b),(a, c)\}$ ہو، R میں کم از کم تعداد میں ترتیب وار جوڑیاں شامل کرنے کے لئے لکھیں تاکہ اسے بنایا جاسکے۔
   (i) مضطراری (ii) تشاکل (iii) منتقلی (iv) معادلت
4. فرض کریں کہ ایک مسطح پر تمام مثلثوں کا مجموعہ P ہو۔ اور aRb پر P کا تعلق R سے ہو۔ اگر a کی طرح b ہے۔ تو ثابت کروکہ R ایک معادلت کا تعلق ہے۔
5. طبعی اعداد کے مجموعے پر فرض کریں کہ R کا تعلق aRb سے وضاحت کی گئی ہے۔ اگر $2a + 3b = 30$ ہوتمام جوڑیاں کی فہرست دے کر تعلق لکھیں۔ چیک کریں کہ کیا یہ
   (i) مضطراری (ii) تشاکل (iii) منتقلی (iv) معادلت
6. ثابت کریں کہ تعلق "دوستی (friendship)" چینئی کے تمام لوگوں کے سیٹ پر معادلت کا تعلق نہیں رکھتا ہے؟
7. طبعی اعداد کے مجموعے پر فرض کریں کہ R کا تعلق aRb سے وضاحت کیا گیا ہے۔ اگر $a + b \leq 6$ ہر تمام چڑیاں کی فہرست دے کر تعلق لکھیں چیک کریں کہ کیا یہ
   (i) مضطراری (ii) تشاکل (iii) منتقلی (iv) معادلت

11th_Maths_Vol 1_Chapter 1_Urdu Medium.indd 18 05-10-2021 3.02.22 PM

8. فرض کریں کہ $A = \{a, b, c\}$ ہو A پر سب سے کم درجاتیت (cardinality) کا معادلتی تعلق کیا ہے؟ A پر سب سے زیادہ درجاتیت کا معادلتی تعلق کیا ہے؟

9. سالم اعداد $\mathbb{Z}$ میں، mRn کی وضاحت کریں اگر 7 سے $m-n$ تقسیم پذیر ہے ثابت کریں کہ R ایک معادلتی تعلق ہے۔

1.6 تفاعلات (Functions)

فرض کریں کہ ایک ذرہ خلامیں حرکت کررہا ہے ہم جسمانی ذرہ (physical particle) کو ایک نقطہ سمجھتے ہیں۔جیسا کہ وقت بدلنے پر ذرہ اپنا مقام بدلتا ہے ریاضی طور پر کسی بھی وقت نقطہ سہ المعادی خلا (three dimensional space) $\mathbb{R}^3$ میں مقام پر قابض ہوتا ہے۔ آیئے فرض کریں کہ وقت 0 سے 1 تک مختلف ہوتا ہے۔لہٰذا ذرات کے حرکت یا کام کرنے میں کسی بھی وقت t 0 اور 1 کے درمیان ذرہ کا مقام کا فیصلہ کرتا ہے، دوسرے الفاظ میں، ہر ایک $t \in [0,1]$ ،ذرات کے تفاعل $\mathbb{R}^3$ میں ایک نقطہ دیتا ہے۔ آیئے ہم ذرہ کا مقام کو وقت t کے ساتھ $f(t)$ سے ظاہر کریں۔

آیئے ایک اور سادہ مثال دیکھیں ، ہم جانتے ہیں کہ مساوات $2x - y = 0$ ایک خط مستقیم کو بیان کرتی ہے۔یہاں فرض کریں کہ x جب بھی کوئی طاقت رکھتا ہے y اس کے مطابق کچھ قیمت رکھتا ہے x کی نقل و حرکت یا کام کا فیصلہ y سے ہوتا ہے۔ ہم فطرت میں اسی طرح کی بہت سی صورت حال دیکھ سکتے ہیں۔ قدرتی مظاہر کے مطالعہ میں ، ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ ایک مقدار تغیر پر غور کرنا ضروری ہے ۔ جو دوسرے کی تغیر پر منحصر ہے۔

وقت اور ذرہ کی مقام کا تعلق ، x -محور میں ایک نقطہ سے y -محور میں ایک نقطہ کا تعلق ، اور اسی طرح بہت سے تعلقات کا نام تفاعل میں طویل عرصے تک مطالعہ کیا جاسکتا ہے۔ کینٹر (Cantor) سے پہلے ، اصطلاح "تفاعل" کو ایک اصول کے طورپر بیان کیا گیا ہے۔ جو ایک متغیر کودوسرے متغیر سے جوڑتا ہے۔ سیٹ کے تصور کی ترقی کے بعد،ایک تفاعل کو ایک اصول کے طورپر بیان کیا جاتا ہے جو ایک سیٹ A کے ہر عنصر ایک سیٹ B کے ایک منفرد عنصر کے ساتھ منسلک ہوتا ہے۔ تاہم شرائط اصول اور ساتھی (associatives) ریاضی کی اصطلاحات کو صحیح طورسے بیان نہیں کرتے ہیں۔جدید ریاضی میں ہر اصطلاح جو ہم استعمال کرتے ہیں اسے صحیح طریقے سے بیان کرنا ہوتا ہے۔ لہٰذا تفاعل کی تعریف تعلقات کا استعمال کرتے ہوئے دی گئی ہے۔

فرض کریں کہ ہم طلباء کے ایک سیٹ کے لکھے ہوئے ٹیسٹ پر بحث کرناچاہتے ہیں۔ ہم اس کو تعلق کے طور پر دیکھیں گے۔

فرض کریں کہ $B = \{0, 1, 2, 3, ..., 100\}$ طلباء کا ایک سیٹ جو ایک امتحان کے لئے حاضر ہوااور فرض کریں کہممکنہ مارکس کا مجموعہ ہے، ہم ایک تعلق R کی وضاحت کرتے ہیں۔ ایک طالب علم a کا تعلق ایک مارکس b سے ہوتا ہے۔ اگر a نے ٹیسٹ میں b مارکس حاصل کئے۔

ہم اس مثال سے درج ذیل کا مشاہدہ کرتے ہیں۔

- ہر طالب علم کوایک نمبر (مارکس) ملا، دوسرے الفاظ میں، ہر $a \in A$ کے لئے ،یہاں ایک صفر $b \in B$ سے اس طرح $(a, b) \in R$
- ایک طالب علم کسی بھی ٹیسٹ میں دو مختلف نمبرات حاصل نہیں کرسکتا۔دوسرے الفاظ میں، ہر $a \in A$ کے لئے ، یقینی طورپر صرف ایک $b \in B$ ہے۔ اس طرح کہ $(a, b) \in R$. اس کو ایک مختلف طریقے سے بحال (restated) کیا جاسکتا ہے۔ اگر $(a, b), (a, c) \in R$ ہوتو $b = c$ ہے۔

مندرجہ بالا دو خصوصیات رکھنے والے تعلقات ، تعلقات کی ایک بہت اہم جماعت بناتے ہیں۔ جسے تفاعل سے کہتے ہیں۔ آیئے اب ہم تعلقات کے ذریعے تفاعل کی سخت تعریف کریں۔

تعریف 1.6

فرض کریں کہ A اور B دوسیٹ ہیں ۔ ایک تعلق f کا A سے B ایک ماتحت سیٹ $A \times B$ کو، ایک تفاعل کہا جاتا ہے اگر یہا A سے B مندرجہ ذیل کو پورا کرتا ہے۔

(i) تمام $a \in A$ کے لئے،ایک عنصر $b \in B$ ہے اس طرح $(a, b) \in f$ ہو۔

(ii) اگر $(a, b) \in f$ اور $(a, c) \in f$ تو $b = c$ ہو۔

یعنی، ایک تفاعل ایک تعلق ہے۔ جس میں علاقہ کا ہر عنصر وسعت میں بالکل ایک عنصر سے نقشہ بناتا ہے۔

A کو f کا علاقہ کہا جاتا ہے اور B کو f کا معاون علاقہ کہا جاتا ہے۔ اگر f میں (a, b) ہے۔پھر ہم لکھیں گے $f(a)= b$ ،عنصر b کو a خیال کہا جاتا ہے اور عنصر b کو a کا پیش خیال (Pre-image) کہا جاتا ہے۔ اور $f(a)$ کی قیمت طورپر a پر f جانا جاتا ہے۔

مجموعہ $\{b : (a, b) \in f$ ، کچھ $a \in A\}$ کو تفاعل کا وسعت کہا جاتا ہے۔ اگر $\mathbb{R}$ کا تحتی سیٹ B ہے۔تو پھر ہم کہتے ہیں کہ تفاعل ایک حقیقی قابل قدر تفاعل (real valued function) ہے۔

11th_Maths_Vol 1_Chapter 1_Urdu Medium.indd 19 05-10-2021 3.02.23 PM

دو تفاعلات f اور g مساوی تفاعلات کہلاتے ہیں۔ اگر ان کے علاقے ایک جیسے ہوں اور علاقے میں تمام a کے لئے $f(a) = g(a)$ ہو۔

اگر f علاقہ A اور معاون علاقہ B کے ساتھ ایک تفاعل ہے ہم $f:A \to B$ لکھیں گے (اس طرح پڑھیں گے f ؛ A سے B تک ہے یا f ایک تفاعل A سے B تک ہے)۔ ہم یہ بھی کہتے ہیں کہ A کو B میں f کا نقشہ (maps) ہے اگر $f(a) = b$ پھر ہم کہتے ہیں کہ f کے ذریعے نقشہ a سے b یا b کو a پر نقشہ بنایا گیا ہے اور اسی طرح۔

ایک تفاعل کی وسعت ، معاون علاقہ کے تمام عناصر کا مجموعہ ہے جس میں پیش خیال ہے۔ واضح طور پر ایک تفاعل کی وسعت معاون علاقہ کا تحتی سیٹ ہے۔ مزید پہلی شرط یہ کہتی ہے کہ علاقہ کے ہر عنصر کا ایک خیال ہونا چاہئے۔ سیٹ A سے سیٹ B تک تعلق $\mathbb{R}$ کے وسعت کی وضاحت کرنے کی یہی وجہ ہے۔ کہ A کے تمام عناصر کا مجموعہ جس میں خیال ہیں نہ کہ A جیسے ہیں۔ دوسری شرط یہ کہتی ہے کہ علاقہ میں کسی عنصر کا دو یا دوسے زیادہ خیالات ہو نہیں سکتے ہیں۔

قدرتی طور پر کسی کو درج ذیل شک (doubts) ہو سکتے ہیں۔

- تعریف میں، ہم a کے خیال کے لئے مخصوص مضمون "the" اور b کا پیش خیال کے لئے غیر معینہ مضمون "a" کیوں استعمال کرتے ہیں۔
- ہمارے پاس یہ شرط ہے کہ علاقہ کے پر عنصر کا ایک خیال ہونا چاہئے ۔ کیا کوئی شرط ہے جیسے معاون علاقہ کے ہر عنصر کے پیش خیال رکھنا چاہئے ؟ اگر نہیں تو کیوں؟
- ہماری ایک شرط ہے جس میں کہا گیا ہے کہ علاقہ میں کسی عنصر کا دو یا زیادہ خیال نہیں ہوسکتے۔ کیا کوئی شرط ہے جیسے معاون علاقہ میں ایک عنصر دو یا زیادہ پیش خیالات نہیں رکھ سکتا ؟ اگر نہیں ، کیوں؟

چونکہ علاقہ میں ایک عنصر کا بالکل ایک خیال ہوتا ہے۔اور معاون علاقہ میں ایک عنصر تعریف کے مطابق ایک سے زیادہ پیش خیال رکھ سکتا ہے۔ہم ایک مخصوص مضمون "the"، a کے خیال کے لئے استعمال کرتے ہیں اور b پیش خیال کے لئے ایک معینہ مضمون 'a' استعمال کرتے ہیں۔دیگر دوسولات میں پوچھے گئے شرائط نہیں ہیں۔ اس کے پیچھے کی وجہ طلباء کے نمبروں کے مسئلے سے سمجھی جاسکتی ہے۔جیسے اوپر سمجھا جائے۔

ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ ہر تفاعل کا ایک تعلق ہے لیکن تعلق کو تفاعل ہونے کی ضرورت نہیں ہے۔

فرض کریں کہ $f = \{(a, 1), (b, 2), (c, 2), (d, 4)\}$ ہو۔ کیا f ایک تفاعل ہے؟ یہ مجموعہ $\{a, b, c, d\}$ سے $\{1, 2, 4\}$ کا ایک تفاعل ہے مجموعہ $\{a, b, c, d, e\}$ سے $\{1, 2, 3, 4\}$ ایک تفاعل نہیں ہے۔ کیونکہ خیال d اس کے معاون علاقہ سے نہیں ہے۔ $\{a, b, c, d\} \times \{1, 2, 3, 5\}$ کا تحتی سیٹ f نہیں ہے۔لہٰذا جب بھی ہم کسی تفاعل پر غور کرتے ہیں علاقہ اور معاون علاقہ کو واضح طور پر بیان کیا جانا چاہئے۔

مثال 1.1 میں زیر بحث تعلق، علاقہ $\{L, E, T, U, S, W, I, N\}$ اور معاون علاقہ $\{O, H, W, X, V, Z, L, Q\}$ کے ساتھ ایک تفاعل ہے مثال 1.3 میں زیر بحث تعلق، علاقہ $\{a, b, ..., z\}$ اور معاون علاقہ $\{1, 2, 3, ..., 26\}$ کے ساتھ ایک تفاعل ہے۔

مثال 2.1 میں، ہم نے تین تعلقات پر تبادلہ خیال کیا، یعنی

$$y = 2x \text{ (i)} \qquad y = x^2 \text{ (ii)} \qquad y^2 = x \text{ (iii)}$$

واضح طور پر (i) اور (ii) تفاعل ہیں جبکہ (iii) ایک تفاعل نہیں ہے اگر علاقہ اور معاون علاقہ $\mathbb{R}$ ہیں (iii) میں ایک ہی x کے لئے ، ہمارے پاس دو y کی قیمتیں ہیں جو تفاعل کی تعریف سے متصادم (Contradicts) ہیں۔ اگر ہم دوتعلقات کو الگ کریں، یہ ہے کہ، $y = \sqrt{x}$ اور $y = -\sqrt{x}$ ، پھر دونوں ایک ہی علاقہ کے غیر منحنی حقیقی اعداد کے ساتھ تفاعل بن جاتے ہیں اور معاون علاقہ بالترتیب $[0, \infty)$, $(-\infty, 0]$ اور ہیں۔

1.6.1 تفاعلات کو نمائندگی کرنے کا طریقے (Ways of Representing Functions)

(a) تفاعل کا جدولی نمائندگی (Tabular Representation of a Function)

جب علاقہ کے عناصر $x_1, x_2, x_3 ... x_n$ ، کی طرح درج ہوتے ہیں تو ہم اس جدولی شکل استعمال کرتے ہیں یہاں، دلائل کی قیمتیں $x_1, x_2, x_3 ... x_n$ اور تفاعل کی متعلقہ قیمتیں $y_1, y_2, y_3 ... y_n$ ایک مخصوص ترتیب میں لکھی گئی ہیں۔

x	x_1	x_2	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_n

(b) تفاعل کا ترقیمی نمائندگی (Graphical Representation of a Function)

جب علاقہ اور معاون علاقہ $\mathbb{R}$ کے تحت سیٹ ہیں ترسیم کا استعمال کرتے ہوئے بہت سے تفاعل کی نمائندگی کی جاسکتی ہے جس میں x محور علاقہ کی نمائندگی کرتاہے اور y محور مسطح (x,y) میں معاون علاقہ کی نمائندگی کرتا ہے۔

11th_Maths_Vol 1_Chapter 1_Urdu Medium.indd 20 05-10-2021 3.02.25 PM

ہم نوٹ کرتے ہیں کہ مثال 1.2 میں پہلے اور دوسرے تصویر میں بالترتیب $f(x) = 2x$ اور $f(x) = x^2$ کی نمائندگی کرتے ہیں۔عام طور پر متغیر x کو آزاد متغیر اور y کو منحصر متغیر سمجھا جاتا ہے۔متغیر کو دلیل (argument) اور $f(x)$ کو قیمت کہا جاتا ہے۔

(c) تفاعل کی تجزیاتی نمائندگی (Analytical Representation of a Function)

اگر تفاعل تعلق $y = f(x)$ ایسا ہے جو f تجزیاتی اظہار کو ظاہر کرتا ہے ہم کہتے ہیں کہ تفاعل y اگر x کا تجزیاتی طور پر نمائندگی یا وضاحت کرتا ہے۔ تجرباتی اظہارات کی کچھ مثالیں ہیں۔

$$x^3 + 5,\ \frac{sinx + cosx}{x^2+1},\ logx + 5\sqrt{x}$$

یہ ہے کہ علامتوں کا ایک سلسلہ جو کچھ ریاضیاتی عملوں کو ظاہر کرتا ہے۔جو اعداد ، حروف پر ایک قطعی ترتیب میں کارگردگی کا مظاہرہ انجام دیتے ہیں جو مستقل اور متغیر مقدار نامزد کرتے ہیں تجزیاتی طور پر بیان کردہ تفاعل کی مثالیں ہیں۔

(i) $y = \frac{x-1}{x+1}$ (ii) $y = \sqrt{9 - x^2}$ (iii) $y = sinx + cosx$ (iv) $A = \pi r^2$

تجرباتی طور پر تحریری تفاعل کے استعمال سے ایک قدرتی طور پر علاقہ تلاش کرتا ہے، یعنی x کی قیمتیں کا وہ مجموعہ جس کے لئے دائیں ہاتھ کے تجزیاتی تاثرات کی ایک خاص قیمت ہوتی ہے۔ایک تفاعل علاقہ ہے جو تجزیاتی طور پر نمائندگی کرتا ہے

اس طرح ، تفاعل کا قدرتی علاقہ،

(i) $y = x^3 + 3$ is $(-\infty, \infty)$ (ii) $y = x^4 - 2$ is $(-\infty, \infty)$

(iii) $y = \frac{x-1}{x+1}$ is $\mathbb{R} - \{-1\}$ (iv) $y = +\sqrt{4 - x^2}$ is $-2 \le x \le 2$

اب تفاعلات کے علاقے

(i) $y=2x$ (ii) $y = x^2$ (iii) $y = +\sqrt{x}$ (iv) $y = -\sqrt{x}$

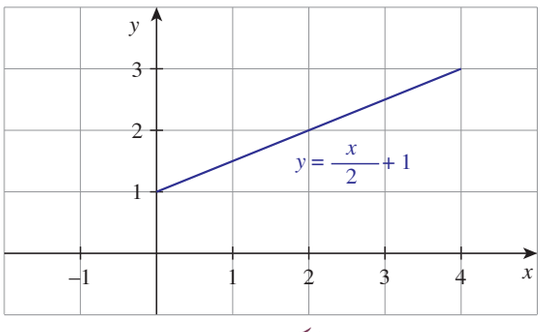
یاد کریں۔

جو تجزیاتی نوعیت رکھتے ہیں جو پہلے بیان کی گئی ہیں۔ بعض اوقات ہم ٹکڑوں کے لحاظ سے متعین تفاعل حاصل کرسکتے ہیں۔ مثال کے طور پر، تفاعل پر غور کریں $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ کے طور پر بیان کیا گیا ہے۔

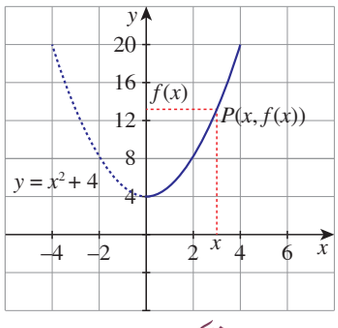
$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad -\infty < x \le -2 \\ 2x & ; \quad -2 < x \le 3 \\ x^2 & ; \quad 3 < x < \infty \end{cases}$$

x کی قیمت پر منحصر ، ہمیں کسی بھی نقطہ x پر f کی قیمت معلوم کرنے کے لئے استعمال ہونے والا ضابطہ منتخب کرتا ہوگا کسی بھی حقیق عدد کی قیمت معلوم کرنے کے لئے ، ہمیں پہلے یہ معلوم کرناہوگا کہ x کا وقفہ کسی سے ہے پھر اس ضابطہ کا استعمال کرتے ہوئے ہم اس وقت f کی قیمت معلوم کرسکتے ہیں۔ $f(x)$ معلوم کرنے کے لئے ہم جانتے ہیں کہ $(6 \in [3,\infty))$ $3 \le 6 < \infty$ تو ہم ضابطہ $f(x)=x^2$ کا استعمال کرتے ہوئے $f(6)=36$ معلوم کریں ۔ اسی طرح $f(-1)=-2$، $f(-5)=0$ اور اسی طرح ۔

اگر تفاعل کی وضاحت $\mathbb{R}$ سے کی جاتی ہے یا $\mathbb{R}$ کا تحتی سیٹ ہے تو ہم تفاعل کا ترسیم کھینچ سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر $f: [0, 4] \to \mathbb{R}$ کی وضاحت $f(x) = \frac{x}{2} + 1$ سے ہوتی ہے تو ہم نقاط $\left(x, \frac{x}{2} + 1\right)$ تمام $x \in [0,4]$ کے لئے مرتسم کرسکتے ہیں۔ پھر ہمیں $(4, 3)$ اور $(0, 1)$ میں شامل ہونے والا ایک مستقیم قطاع خط (Straight line segment) حاصل ہوگا ۔ (خاکہ 1.13 دیکھیں)



خاکہ 1.13



خاکہ 1.14

11th_Maths_Vol 1_Chapter 1_Urdu Medium.indd 21 05-10-2021 3.02.29 PM

ایک اور تفاعل $f(x) = x^2 + 4, x \geq 0$ پر غور کریں۔تفاعل اس کے ترسیم کی بنا پر دیا جائے گا ۔ (خاکہ 1.14 دیکھیں)

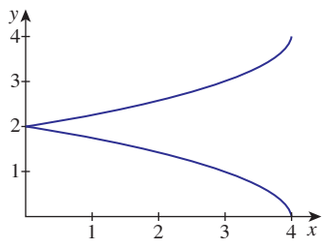
فرض کریں کہ x علاقہ میں ایک نقطہ ہے آیئے نقطہ x کے ذریعے عمودی خط کھینچیں۔ 1 سے P پر منحنی سے ملنے دیں۔ وہ نقطہ جس پر P کے ذریعے کھینچی گی افقی خط y محور سے ملتی ہے۔ وہ $f(x)$ ہے اسی طرح معاون علاقہ میں ایک نقطہ y کے ذریعے اُفقی خطوط کا استعمال کرکے، ہم y کے پیش خیالات معلوم کرسکتے ہیں۔

کیا ہم کہہ سکتے ہیں کہ مسطح پر کھینچے گئے کسی بھی منحنی کو ایک تفاعل کے طورپر $\mathbb{R}$ سے $\mathbb{R}$ کا سیٹ ماتحت سمجھا جائے؟ نہیں، ہم نہیں کہہ سکتے ۔ اس کو معلوم کرنے کے لئے ایک آسان ٹیسٹ ہے۔

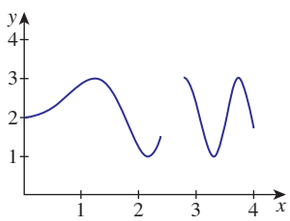
عمودی خط ٹیسٹ (Vertical line test)

جیسا کہ ہم نے پہلے بھی نوٹ کیا ہے کہ علاقہ میں کسی بھی نقطہ x کے ذریعے عمودی خط کسی نقطہ منحنی سے ملتی ہے۔پھر نقطہ کا y -عدد $f(x)$ ہے۔ اگر علاقہ میں ایک نقطہ x کے ذریعے عمودی خط ایک سے زیادہ نقطے پر منحنی سے ملتی ہے۔تو ہمیں ایک x کے لئے $f(x)$ کی ایک سے زیادہ قیمت ملے گی۔تفاعل میں اس کی اجازت نہیں ہے مزید ، اگر علاقہ میں ایک نقطہ x کے ذریعے عمودی خط منحنی کو نہیں ملتا تو پھر x کے لئے کوئی خیال نہیں ہوگا۔ یہ کسی تفاعل میں بھی ممکن نہیں ہے تو ہم کہہ سکتے ہیں۔

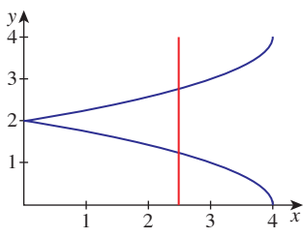
اگر علاقہ میں ایک نقطہ x کے ذریعے عمودی خط ایک سے زیادہ نقاط پر منحنی سے ملتی ہے یا منحنی سے نہیں ملتی ہے پھر منحنی کسی تفاعل کی نمائندگی نہیں کرے گا۔



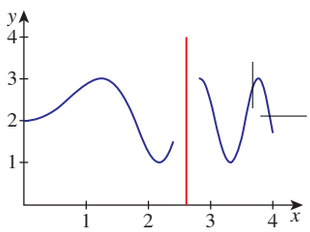
خاکہ 1.15



خاکہ 1.16



خاکہ 1.17



خاکہ 1.18

خاکہ 1.15 میں دکھایا گیا منحنی $[0, 4]$ سے $\mathbb{R}$ تک کسی تفاعل کی نمائندگی نہیں کرتا کیونکہ ایک عمودی خط ایک سے زیادہ نقاط پر منحنی سے ملتی ہے۔(شکل 1.17 دیکھیں)، خاکہ 1.16 میں دکھایا گیا منحنی $[0, 4]$ سے $\mathbb{R}$ تک کسی تفاعل کی نمائندگی نہیں کرتا کیونکہ $x = 2.5$ سے کھینچا ہوا عمودی خط $[0, 4]$ منحنی سے نہیں ملتی ۔ (خاکہ 1.18 دیکھیں)

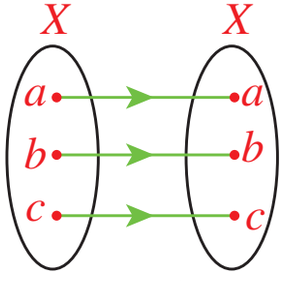
یہ جانچنا کہ دیا گیا منحنی پر عمودی خط کھینچنے سے ایک تفاعل کی نمائندگی کرتا ہے یا نہیں۔ یہ عمودی خط ٹیسٹ یا محض عمودی ٹیسٹ (vertical test simple) کہلاتا ہے۔

مثال 1.2 میں تیسرا منحنی $y^2=x$ عمودی خط ٹیسٹ میں ناکام ہوجاتا ہے اور اسی وجہ سے یہ $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ کا تفاعل نہیں ہے۔

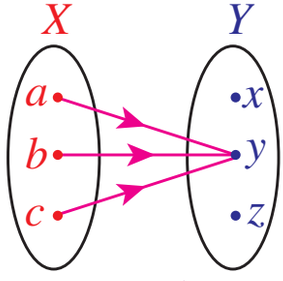
1.6.2 چند ابتدائی تفاعلات (Some elementary functions)

چند اکثر استعمال ہونے والے تفاعلات کو ناموں سے جانا جاتا ہے آیئے ان میں سے چند کی فہرست بنائیں۔

(i) فرض کریں کہ X ایک غیر خالی مجموعہ ہے ۔ تفاعل $f: X \to X$ جس کی وضاحت تمام $x \in X$ کے لئے ہو۔ یہ X پر متماثل تفاعل (identity function) کہلاتا ہے اور اس کو I یا I_X سے ظاہر کرتے ہیں۔ جس میں $f(x) = x$ ہو۔



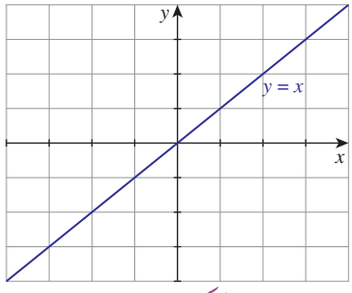
خاکہ 1.19



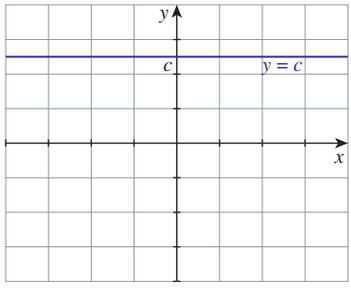
خاکہ 1.20

11th_Maths_Vol 1_Chapter 1_Urdu Medium.indd 22 05-10-2021 3.02.30 PM

(ii) فرض کریں کہ X اور Y دو سیٹ ہیں۔ فرض کریں کہ Y میں مقررہ (fixed element) c ہو۔ تفاعل $f: X \to Y$ کی وضاحت $f(x) = c$ کے لئے تمام ہو اس کو مستقل (constant function) کہا جاتا ہے (شکل 1.20 دیکھیں) مستقل تفاعل کی قیمت تمام علاقے میں X کی تمام قیمتیں کے لئے یکساں ہیں۔ اگر $\mathbb{R}$ میں X اور Y ہو تو تماثل تفاعل کا ترسیم اور ایک منتقل تفاعل شکلیں 1.21 اور 1.22 کی طرح ہیں۔ اگر X کوئی سیٹ ہے تو تمام X کے لئے $f(x) = 0$ سے متعین مستقل تفاعل کو محدوم تفاعل یا صفر تفاعل (zero function) کہاجاتا ہے لہٰذا صفر تفاعل، مستقل تفاعل کا ایک خاص صورت ہے۔



خاکہ 1.21

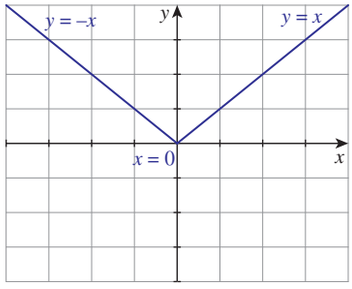


خاکہ 1.22

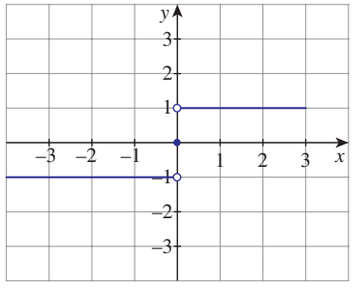
(iii) تفاعل $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ کی وضاحت $f(x) = |x|$ جہاں معین و ضروب (modulus) یا مطلق قیمت $|x|$ ہے۔ اس کو معین و ضروب تفاعل یا مطلق قیمت تفاعل کہتے ہیں۔ آیئے یاد کرتے ہیں کہ $|x|$ کو

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{اگر } x < 0 \\ 0 & \text{اگر } x = 0 \\ x & \text{اگر } x > 0 \end{cases} \quad \text{یا} \quad |x| = \begin{cases} -x & \text{اگر } x \leq 0 \\ x & \text{اگر } x > 0 \end{cases} \quad \text{یا} \quad |x| = \begin{cases} -x & \text{اگر } x < 0 \\ x & \text{اگر } x \geq 0 \end{cases}$$

کے طور پر بیان کیا گیا ہے۔



خاکہ 1.23



خاکہ 1.24

(iv) تفاعل $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ کی وضاحت $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{اگر } x \neq 0 \\ 0 & \text{اگر } x = 0 \end{cases}$ سے کی گئی ہے جسے سائن تفاعل (signum function) کہتے ہیں۔ اس کو sgn سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ (خاکہ 1.24 دیکھیں)

(v) تفاعل $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ جس کی وضاحت $f(x)$ سے ہوتی ہے جو سب سے بڑا سالم عدد x سے کم یا اس کے برابر ہے۔ اس کو تفاعل کا لازمی حصہ (integral part) یا سب بڑا سالمی عدد تفاعل (greatest integer function) یا فرشی تفاعل $\lfloor x \rfloor$ (floor function) کہا جاتا ہے۔ (خاکہ 1.25 دیکھیں)

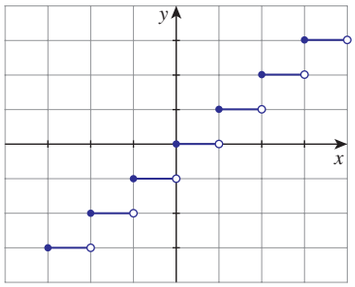
(vi) تفاعل $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ جس کی وضاحت $f(x)$ سے ہے جو سب سے چھوٹا سالم عدد x سے یا برابر ہے اس کو سب سے چھوٹا سالمی عدد تفاعل (smallest integer function) یا چھتی تفاعل (smallest integer function) کہاجاتا ہے۔ (خاکہ 1.26 دیکھیں) اس تفاعل کو $\lceil . \rceil$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ $f(x)$ کو $\lceil . \rceil$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

تفاعلات (v) اور (vi) قدمی تفاعلات (step functions) بھی کہا جاتا ہے۔

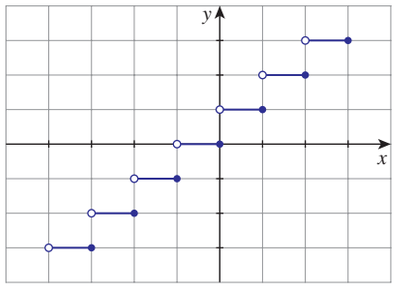
آیئے اس کو نوٹ کریں۔ $\left\lfloor -2\frac{1}{2} \right\rfloor = -3$, $\lfloor 7.23 \rfloor = 7$, $\left\lfloor 1\frac{1}{5} \right\rfloor = 1$, $\lfloor 6 \rfloor = 6$ (not -2) اور $\lfloor -4 \rfloor = -4$

آیئے اس کو نوٹ کریں $\left\lceil -2\frac{1}{2} \right\rceil = -2$, $\lceil 7.23 \rceil = 8$, $\left\lceil 1\frac{1}{5} \right\rceil = 2$, $\lceil 6 \rceil = 6$ (not-3) اور $\lceil -4 \rceil = -4$

11th_Maths_Vol 1_Chapter 1_Urdu Medium.indd 23 05-10-2021 3.02.33 PM



خاکہ 1.25

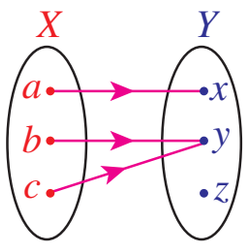


خاکہ 1.26

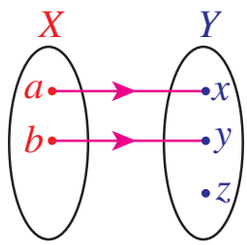
کوئی نوٹ کر سکتا ہے کہ ان تفاعلات کے ناموں کے مابین تعلقات ، تفاعلات کو ظاہر کرنے والی علامتیں عام طور پر استعمال ہونے والے الفاظ کمرے کی چھت اور فرش ہیں ان کا ترسیم شکلیں 1.25 اور 1.26 میں دیا گیا ہے۔

1.6.3 تفاعلات کے اقسام (Types of functions)

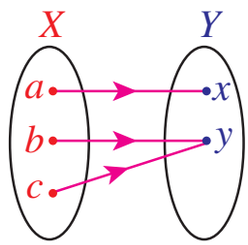
اگرچہ ضروریات کے مطابق تفاعلات کو مختلف اقسام میں تقسیم کیا جاسکتا ہے؟ ہم دو بنیادی اقسام پر توجہ مرکوز کرنے جارہے ہیں :
ایک-تا-ایک تفاعل اور بروں تفاعل



خاکہ 1.27



خاکہ 1.28



خاکہ 1.29

آئیے 1.27 اور 1.28 شکلوں میں دیئے گئے دوسادہ تفاعلات کو دیکھیں ۔ پہلا تفاعل میں علاقہ کے دوعناصر، b اور c ایک ہی عنصر میں نقشہ بنایا گیا ہے جبکہ شکل 1.28 میں ایسا نہیں ہے دوسرا جیسے تفاعلات ایک-تا-ایک تفاعلات کی مثالیں ہیں۔
آئیے 1.28 اور 1.29 شکلوں میں دیئے گئے دوتفاعلات کو دیکھیں ، شکل 1.28 میں معاون علاقہ عنصر z کا کوئی پیش خیال نہیں ہے جبکہ شکل 1.29 میں ایسا نہیں ہے شکل 1.29 جیسے تفاعلات بروں (onto functions) کی مثالیں ہیں۔ اب اہم ایک –تا-ایک اور بروں تفاعلات کی وضاحت کرتے ہیں۔

تعریف 1.7

ایک تفاعل $f: A \to B$ کو ایک –تا-ایک کہا جاتا ہے۔اگر $x,y \in A, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ [یا مساوی طورپر $f(x)=f(y) \Rightarrow x=y$] ہو۔ ایک تفاعل $f: A \to B$ کو بروں کہا جاتا ہے اگر $b \in B$ کے لئے کم از کم ایک عنصر $a \in A$ کوموجود ہو ایسا کہ $f(a) = b$ یعنی f کی وسعت B ہے۔

ایک –یا-ایک تفاعل کا دوسرا نام (injective function) یک ربطی تفاعل ہے بروں تفاعل کا دوسرا نام (surjective function) پر ربطی تفاعل ہے ایک تفاعل $f: A \to B$ کو دوربطی تفاعل (bijective function) کہا جاتا ہے اگر یہ ایک –تا-ایک اوربروں پر ہو۔
کسی تفاعل کو ثابت کرنے کے لئے $f: A \to B$ ایک –تا-ایک ہونے کے لئے مندرجہ ذیل میں سے کسی ایک کو ثابت کرنا کافی ہے۔

اگر $x \neq y$ تو $f(x) \neq f(y)$ ، یا اگر $f(x) = f(y)$ تو $x = y$ ہے۔

11th_Maths_Vol 1_Chapter 1_Urdu Medium.indd 24 05-10-2021 3.02.35 PM

یہ مشاہدہ کرنا آسان ہے کہ ہر تماثل تفاعل ایک –تا-ایک اور ساتھ ہی بروں تفاعل ہے ایک مستقل تفاعل اس وقت تک بروں نہیں ہوتا جب تک کوئی معاون علاقہ میں صرف ایک عنصر ہو۔ مندرجہ ذیل بیانات چند اہم سادہ نتائج ہیں۔

فرض کریں کہ A اور B دوسیٹ کے ساتھ عناصر m اور n ہیں۔

(i) A سے B تک کوئی ایک –تا-ایک تفاعل نہیں ہے۔اگر $m > n$ ہو۔

(ii) اگر A سے B تک ایک-تا-ایک (one to one function) تفاعل ہے تو $m \leq n$ ہے۔

(iii) A سے B تک کوئی تفاعل پروں نہیں ہے اگر $m < n$ ہو۔

(iv) اگر A سے B تک ایک تفاعل پروں ہے تو $m \geq n$ ہے۔

(v) A سے B تک ایک دوربطی (bijective) ہے صرف اور صرف $m = n$ کی صورت میں ہو۔

(iv) A سے B تک دوربطی نہیں ہے صرف اور صرف $m \neq n$ کی صورت میں ہو۔

ایک تفاعل جس پر پروں نہیں ہے ایک دروں تفاعل (into function) کہلاتا ہے تفاعل کی وسعت کا مناسب تحتی سیٹ اس کا معاون علاقہ ہے آیئے کچھ مثالیں دیکھیں۔

(1) ہو، $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ، $Y = \{a, b, c, d, e\}$ اور $f = \{(1, a), (2, c), (3, e), (4, b)\}$ یہ تفاعل ایک – تا-ایک ہے لیکن پروں نہیں ہے۔

(2) $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ، $Y = \{a, b\}$ اور $f = \{(1, a), (2, a), (3, a), (4, a)\}$ یہ تفاعل ایک-تا-ایک نہیں ہے اور یہ پروں بھی نہیں ہے۔

(3) $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ، $Y = \{a\}$ اور $f = \{(1, a), (2, a), (3, a), (4, a)\}$ یہ تفاعل ایک-تا-ایک نہیں ہے لیکن یہ پروں ہے ایسا لگتا ہے کہ یہ تفاعل پچھلے تفاعل جیسا ہی ہے تفاعل کا معاون علاقہ یہ فیصلہ کرنے کے لئے بہت اہم ہے کہ تفاعل پروں ہے یا نہیں،

(4) $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ، $Y = \{a, b, c, d, e\}$ اور $f = \{(1, a), (2, c), (3, b), (4, b)\}$. یہ تفاعل نہ تو ایک-تا-ایک ہے اور نہ ہی پروں ہے۔

(5) $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ، $\{a, b, c, d\}$ اور $f = \{(1, a), (2, c), (3, d), (4, b)\}$ یہ تفاعل ایک-تا-ایک اور پروں دونوں ہیں۔

(6) $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ، $Y = \{a, b, c, d, e\}$ اور $f = \{(1, a), (2, c), (3, e)\}$ یہ بالکل تفاعل نہیں ہے۔صرف ایک تعلق ہے۔

(7) فرض کریں کہ k عناصر کے ساتھ ایک محدود سیٹ X ہو، پھر ہمارے پاس X سے $\{1,2,3,...,k\}$ تک ایک دوربط ہے۔

آیئے ایک ضابطہ کے اصول کے ذریعے کچھ مجموعے پر متعین تفاعل پر غور کریں۔

مثال 1.14

چیک کریں کہ آیا مندرجہ ذیل تفاعل ایک-تا-ایک اور پروں ہیں۔

(i) $f:\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ کی وضاحت $f(n) = n + 2$ سے ہوتی ہے۔

(ii) $f:\mathbb{N} \cup \{-1, 0\} \to \mathbb{N}$ کی وضاحت $f(n) = n + 2$ سے ہوتی ہے۔

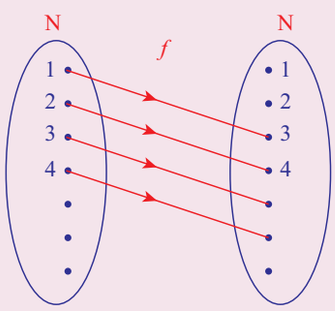
حل:

(i) اگر $f(n) = f(m)$ ہوتو، $n + 2 = m + 2$ اور اس لئے $m = n$ ہے۔اس طرح f ایک-تا-ایک ہے۔جیسا کہ 1 کا کوئی پیش خیال نہیں ہے یہ تفاعل پروں نہیں ہے ۔ (شکل 1.30 دیکھیں)

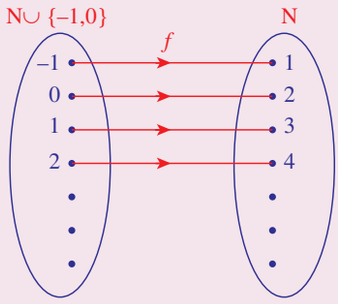
(ii) جیسا کہ اوپر ہے یہ تفاعل ایک-تا-ایک ہے ۔ اگر معاون علاقہ میں m ہے، تو علاقہ میں $m - 2$ ہے۔اور $f(m-2) = (m-2) + 2 = m$ اس طرح m کا ایک پیش خیال ہے اور اسی وجہ سے یہ تفاعل پروں ہے۔

(1.31 شکل دیکھیں)

11th_Maths_Vol 1_Chapter 1_Urdu Medium.indd 25 05-10-2021 3.02.38 PM



خاکہ 1.30



خاکہ 1.31

ایسا لگتا ہے کہ پہلا تفاعل (i) جیسا (ii) دوسرا تفاعل ہے جبکہ علاقے مختلف ہیں یہیں پر دیکھیں گے۔ تفاعل کا علاقہ یہ فیصلہ کرنے کے لئے بہت اہم ہے کہ تفاعل پروں ہے یا نہیں۔علاقہ کا یہ فیصلہ کرنے میں کوئی کردار نہیں کہ تفاعل پروں ہے یا نہیں ۔لیکن یہ فیصلہ کرنا ضروری ہے کہ تفاعل پروں ہے یا نہیں۔

مثال 1.15

ایک-تا-ایک اور پروں ہونے کے لئے درج ذیل تفاعلات کو چیک کریں۔

(i) $f:\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ کی وضاحت $f(n) = n^2$ سے کی گئی ہے۔

(ii) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ کی وضاحت $f(n) = n^2$ سے کی گئی ہے۔

حل

(i) $f(m)=f(n) \Rightarrow m^2 = n^2 \Rightarrow m = n$ جب سے $m, n \in \mathbb{N}$ اس طرح f ایک-تا-ایک ہے۔ لیکن ، معاون عناصر کا حل مربع عناصر کے پہلے سے پیش خیالات نہیں ہیں۔اور اس وجہ سے پروں نہیں۔

(ii) علاقہ کو دو مختلف عناصر ایک جیسے خیالات رکھتے ہیں۔ اور اس لئے f ایک-تا-ایک نہیں ہے۔ واضح طور پر f کی وسعت کا ایک مناسب تحتی سیٹ $\mathbb{R}$ ہے اس لئے یہ پروں نہیں ہے۔

اب ہم مثال 1.1 کو یاد کریں اسی مثال میں تفاعل $f:C \to D$ کی وضاحت

$f(L) = O, f(E) = H, f(T) = W, f(U) = X, f(S) = V, f(W) = Z, f(I) = L, f(N) = Q$ سے کی گئی ہے۔

جہاں $C = \{ L, E, T, U, S, W, I, N \}$ اور $D = \{ O, H, W, X, V, Z, L, Q\}$ ایک-تا-ایک اور پروں تفاعل ہے۔

مثال 1.3 میں، تفاعل $f:A \to \mathbb{N}$ کی وضاحت $f(a) = 1$، $f(b) = 2$،...، $f(z) = 26$ سے کی گئی ہے۔جہاں $A = \{a,b,...z\}$ ہے یہ تفاعل ایک-تا-ایک ہے۔ اگر ہم $\mathbb{N}$ کو معاون علاقہ کے طورپر رکھتے ہیں تو یہ تفاعل پروں نہیں ہے۔ $\mathbb{N}$ کی بجائے اگر ہم معاون علاقہ $\{1,2,3,...,26\}$ رکھتے ہیں۔تو یہ پروں ہوجاتا ہے۔

مثال 1.16

ایک-تا-ایک اور پروں ہونے کے لئے درج ذیل تفاعلات کو چیک کریں۔

(i) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ کی وضاحت $f(x) = \frac{1}{x}$ سے کی گئی ہے۔

(ii) $f:\mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R}$ کی وضاحت $f(x) = \frac{1}{x}$ سے کی گئی ہے۔

حل

(i) یہ بالکل ایک تفاعل نہیں ہے، کیوں کہ $f(x)$ کی وضاحت $x = 0$ کے لئے نہیں کیا گیا ہے۔

(ii) یہ تفاعل ایک-تا-ایک (تصدیق کرنا) ہے،لیکن پروں نہیں ہے، کیوں کہ 0 کا پیش خیال نہیں ہے۔

آئیے $\mathbb{R}-\{0\}$ کو دوسرے معاون علاقہ کے طور پر غور کریں پھر f ایک (bijection) دو ربط بن جائے گا۔

11th_Maths_Vol 1_Chapter 1_Urdu Medium.indd 26 05-10-2021 3.02.40 PM

مثال 1.17 اگر $f: \mathrm{R} - \{-1,1\} \to \mathrm{R}$ کی وضاحت $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ سے کی گئی ہے تصدیق کرو کہ ایک-تا-ایک ہے یا نہیں۔

حل

ہم مقروضہ سے شروع کرتے ہیں پھر

$$f(x) = f(y)$$

$$\text{تو} \quad \frac{x}{x^2-1} = \frac{y}{y^2-1}$$

$$\Rightarrow \quad x(y^2-1) = y(x^2-1)$$

$$\Rightarrow \quad xy^2 - x - yx^2 + y = 0$$

$$\Rightarrow \quad (y-x)(xy+1) = 0$$

اس کا مطلب یہ ہے کہ $x = y$، $xy = -1$ لہٰذا ہم دو اعداد x اور y منتخب کریں تاکہ $xy = -1$ پھر $f(x) = f(y)$ بہت سے لامحدود ممکنہ جوڑیاں میں سے ہیں اس طرح $\left(2, -\frac{1}{2}\right), \left(7, -\frac{1}{7}\right), \left(-2, \frac{1}{2}\right)$ یہ ہے کہ $f(2) = f\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{2}{3}$ $f(x) = f(y)$ اس کا مطلب $x = y$ نہیں ہے۔لہٰذا یہ ایک-تا-ایک نہیں ہے۔

مثال 1.18 اگر $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ کو $f(x) = 2x^2 - 1$ کے طور پر بیان کیا گیا ہے 17، 4 ہے اور 2- کے پیش خیال معلوم کرو۔

حل

17 کا پیش خیال معلوم کرنے کے لئے ہم مساوات $2x^2 - 1 = 17$ کو حل کرتے ہیں اس مساوات کے دو حل 3 اور 3- f کے تحت 17 کے پیش خیال ہیں 4 کے دو پیش خیال کے طور پر $\sqrt{\frac{5}{2}}$ اور $-\sqrt{\frac{5}{2}}$ کو مساوات $2x^2 - 1 = 4$ حاصل کرتا ہے ہمیں 2- کے پیش خیال معلوم کرنے کے لئے مساوات $2x^2 - 1 = -2$ کو حل کرتے ہیں اس سے پتہ چلتا ہے کہ $x^2 = -\frac{1}{2}$ کا $\mathbb{R}$ میں حل نہیں ہے کیونکہ ایک عدد کا مربع منفی نہیں ہو سکتا۔اور اس وجہ سے 2- کا f کے تحت کو پیش خیال نہیں ہے۔

مثال 1.19 اگر $f: [-2,2] \to B$ کو $f(x) = 2x^3$ کے ذریعہ دیا گیا ہے تو B معلوم کرو تاکہ f ایک بروں ہے۔

حل

کم از کم قیمت $f(-2)$ اور اس کا زیادہ سے زیادہ قیمت $f(2)$ ہے جو بالترتیب -16 اور 16 کے برابر ہیں۔تو B $[-16, 16]$ ہے۔

جیسا کہ $[-2, 2]$ پر $f(x) = 2x^3$ پر بڑھتا ہوا تفاعل ہے کم سے کم قیمت بائیں طرف اور زیادہ سے زیادہ قیمت دائیں طور حاصل کی جاتی ہے (تفاعل کو مزید بڑھانے گھٹانے کے بارے میں بعد کے ابواب کا حوالہ دے سکتے ہیں۔)

مثال 1.20 چیک کریں کہ تفاعل $f(x) = x|x|$ جو $[-2, 2]$ پر متعین ہے ایک-تا-ایک ہے یا نہیں ۔ اگر ایک-تا-ایک نہیں ہے۔ ایک مناسب معادی علاقہ معلوم کریں تاکہ تفاعل دو ربط (bijection) بن جائے۔

حل

فرض کریں کہ $x, y \in [-2, 2]$ اس طرح $f(x) = f(y)$ اگر $y = 0$، $x = 0$ فرض کریں کہ $y \neq 0$ ، $x \neq 0$ اب $x|x| = y|y|$ جب سے $f(x) = f(y)$ اس کا مطلب یہ ہے کہ $\frac{x}{y} = \frac{|y|}{|x|}$ جب سے $\frac{|y|}{|x|} > 0$ ، $\frac{x}{y} > 0$ اس طرح x اور y دونوں مثبت ہیں یا دونوں منفی ہیں۔لہٰذا $x^2 = y^2$ ہیں۔

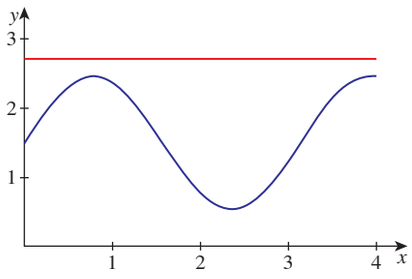
اگر $f(x) = f(y)$ ، $x^2 = y^2$ ہمارے پاس ہونا چاہئے x اور y بھی دونوں مثبت ہیں یا تو دونوں منفی ہیں اگر صرف $x = y$ ہو تو یہ ممکن ہے اس طرح f ایک-تا-ایک ہے۔جب $x < 0$ ، $f(x) = -x^2$ اور جب $x \geq 0$ ، $f(x) = -x^2$ تو وسعت $[-4,4]$ ہے۔تو $[-2,2]$ سے $[-4,4]$ تک f دوربط ہو جاتا ہے۔

11th_Maths_Vol 1_Chapter 1_Urdu Medium.indd 27 05-10-2021 3.02.46 PM

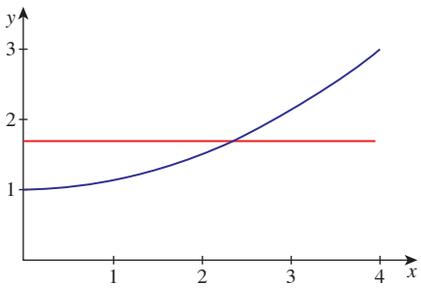
$f(x) = x|x|$ بھی ایک بڑھتا ہوا تفاعل ہے۔

افقی ٹیسٹ (Horizontal test)

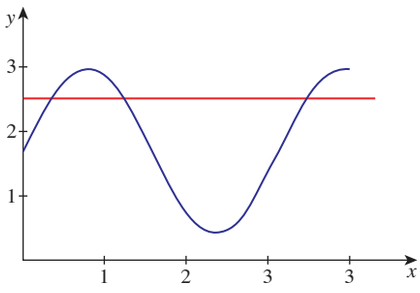
عمودی خط ٹیسٹ کی طرح ہمارے پاس ایک ٹیسٹ ہے جسے افقی ٹیسٹ کہتے ہیں۔تاکہ چیک کیا جاسکے کہ کوئی تفاعل ایک-تا-ایک ہے یا نہیں، بروں ہے یا نہیں ۔فرض کریں کہ مسطح (plane) میں ایک منحنی کے طورپر ایک تفاعل ہے اگر معاون علاقہ میں ایک نقطہ y کے ذریعے اُفقی خط کچھ نقاط پر منحنی سے ملتی ہیں۔ پھر تمام نقاط کا x محدد (x - coordinate)، y کے لئے پیش خیال دیتا ہے۔



خاکہ 1.32



خاکہ 1.33



خاکہ 1.34

(i) اگر معاون علاقہ میں ایک نقطہ y کے ذریعہ افقی خط منحنی سے نہیں ملتی ہے۔تو y کے لئے کوئی پیش خیال نہیں ہوگا اور اسی وجہ سے تفاعل بروں نہیں ہے۔

(ii) اگر معاون علاقہ کے کم از کم ایک نقطہ کے ذریعے افقی خط ایک سے زیادہ نقاط پر منحنی سے ملتی ہے۔تو تفاعل ایک-تا-ایک نہیں ہے۔

(iii) اگر وسعت میں تمام y کے لئے اُفقی خط y کے ذریعے ایک نقطہ پر منحنی سے ملتی ہے تو "تفاعل ایک-تا-ایک ہے۔تو ہم کہہ سکتے ہیں ایک منحنی کی نمائندگی کرنے والا تفاعل ایک-تا-ایک ہے صرف اور صرف اس صورت میں کہ جو تمام y کی وسعت میں ہو۔نقطہ y کے ذریعہ افقی خط بالکل ایک نقطہ پر منحنی سے ملتی ہے۔

ایک منحنی کی نمائندگی کرنے والا تفاعل بروں ہے۔ اگر صرف اس صورت میں جب معاوی علاقہ میں تمام y کے لئے، نقطہ y کے ذریعے افقی خط کم از کم ایک نقطہ سے ملتی ہے۔ خاکہ 1.32.میں دیا گیا۔ منحنی $[0, 4]$ سے ایک تفاعل کی نمائندگی کرتا ہے۔جو کہ معاون علاقہ $[1, 3]$ پر مشتمل ہونے سے یہ بروں نہیں ہے۔ نقشہ 1.33 میں دیا گیا ہے کہ منحنی $[0, 4]$ سے $\mathbb{R}$ تک ایک-تا-ایک تفاعل کی نمائندگی کرتاہے اور نقشہ 1.34 میں دیا گیا ہے کہ منحنی $[0, 4]$ سے $\mathbb{R}$ تک ایک تفاعل کی نمائندگی کرتا ہے جو ایک-تا-ایک نہیں ہے۔

اس بات کی جانچ کرنا کہ دیا گیا منحنین سے ایک تا ایک تفاعل، بروں تفاعل یا بغیر افقی خط کھینچے نمائندگی کرتا ہے۔یہ افقی خط ٹیسٹ یا سادہ افقی ٹیسٹ کہلاتا ہے۔مزید مثال 1.2 اور شکل 1.5 سے شکل 1.7 میں خاکہ دیکھ کر ، تفاعل

(i) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ کی وضاحت $f(x) = 2x$ سے کی گئی ہے جو ایک تا ایک اوربروں تفاعل ہے۔

(ii) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ کی وضاحت $f(x) = x^2$ سے کی گئی ہے جو نہ ایک تا ایک ہے نہ ہی بروں ہے۔

(iii) $f:[0, \infty) \to \mathbb{R}$ کی وضاحت $f(x) = +\sqrt{x}$ سے کی گئی ہے۔جو ایک تا ایک ہے جبکہ بروں تفاعل نہیں ہے۔

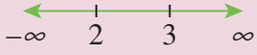
(iv) $f:[0, \infty) \to [0, \infty)$ کی وضاحت $f(x) = +\sqrt{x}$ سے کی گئی ہے۔ جو ایک تا ایک اور بروں تفاعل ہے۔

(v) $f:[0, \infty) \to \mathbb{R}$ کی وضاحت $f(x) = -\sqrt{x}$ سے کی گئی ہے۔جو ایک تا ایک ہے جبکہ بروں تفاعل نہیں ہے۔

(vi) $f:[0, \infty) \to (-\infty, 0]$ کی وضحات $f(x) = -\sqrt{x}$ سے کی گئی ہے جو ایک تا ایک اور بروں تفاعل ہے۔

مثال 1.21: $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ کی طرف سے بیان کردہ حقیقی قابل قدر تفاعل f کے لئے سب سے بڑا ممکنہ علاقہ معلوم کریں۔

حل



خاکہ 1.35

جیسا کہ ہم $x^2 - 5x + 6$ کا جذر المربع معلوم کررہے ہیں۔ ہمارے پاس $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ تمام x کے لئے علاقہ میں ہونا چاہئے اس کے لئے ، دیئے گئے طریقہ کار پر عمل کریں۔

$x^2 - 5x + 6$ حل کرنے پر ہمیں $x = 2$ اور 3 حاصل ہوتا ہے۔ اب شکل 1.35 کی طرح عددی خط کھینچیں۔

11th_Maths_Vol 1_Chapter 1_Urdu Medium.indd 28 05-10-2021 3.02.50 PM

اب ہمارے پاس تین وقفے $(-\infty, 2)$، $(2, 3)$ اور $(3, \infty)$ ہیں۔

(i) $(-\infty, 2)$ پر کوئی نقطہ نہیں، $x = 1$ کہیں، صاف طور پر $x^2 - 5x + 6$ ایک مثبت ہے۔

(ii) $(2, 3)$ پر کوئی نقطہ نہیں، $x = 2.5$ کہیں، صاف طور پر $x^2 - 5x + 6$ ایک منفی ہے۔

(iii) $(3, \infty)$ پر کوئی نقطہ لیں، $x = 4$ کہیں، صاف طور پر $x^2 - 5x + 6$ ایک مثبت ہے۔

تمام x کے لئے $(-\infty, 2)$ اور $(3, \infty)$ وقفوں میں، $x^2 - 5x + 6$ مثبت ہے۔ $x = 2, 3$ پر $x^2 - 5x + 6$ کی قیمت صفر ہے اس طرح، $\sqrt{x^2 - 5x + 6}$ کو $(-\infty, 2] \cup [3, \infty)$ میں تمام x کے لئے متعین کیا گیا ہے۔ لہٰذا $\sqrt{x^2 - 5x + 6}$ کا علاقہ $(-\infty, 2] \cup [3, \infty)$ ہے۔

مثال 1.22 $f(x) = \frac{1}{1 - 2\cos x}$ کا علاقہ معلوم کریں۔

حل:

سوائے $1 - 2\cos x$ کے، تفاعل کی وضاحت تمام $x \in \mathbb{R}$ کے لئے کی گئی ہے۔ یہ ہے کہ سوائے $\cos x = \frac{1}{2}$ یہ ہے کہ سوائے $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$ لہٰذا $\mathbb{R} - \left\{2n\pi \pm \frac{\pi}{3}\right\}, n \in \mathbb{Z}$ علاقہ ہے۔

مثال 1.23 $f(x) = \frac{1}{1 - 3\cos x}$ تفاعل کی وسعت معلوم کرو۔

حل:

واضح طور پر $-1 \leq \cos x \leq 1$

$\Rightarrow 3 \geq -3\cos x \geq -3$

$\Rightarrow -3 \leq -3\cos x \leq 3$

$\Rightarrow 1-3 \leq 1-3\cos x \leq 1+3$

اس طرح ہم $-2 \leq 1 - 3\cos x \leq 4$ اور $1 - 3\cos x$ حاصل کرتے ہیں۔ مقلوب سے، ہمیں $\frac{1}{1 - 3\cos x} \leq -\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{1 - 3\cos x} \geq \frac{1}{4}$ حاصل ہوتا ہے۔

لہٰذا f کا وسعت $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{4}, \infty\right)$ ہے۔

مثال 1.24 $f(x) = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{\sqrt{x^2 - 1}}$ کی طرف سے دیا گیا حقیقی قابل قدر تفاعل کے لئے سب سے بڑا ممکنہ علاقہ معلوم کریں۔

حل:

اگر $x < -3$ یا $x > 3$ 9 سے x^2 پر زیادہ ہوگا۔ اور اسی وجہ سے $9 - x^2$ منفی ہوجائے گا جس کا $\mathbb{R}$ میں کوئی جذرالمربع نہیں ہے تو x کو وقفہ $[-3, 3]$ پر واقع ہونا چاہئے۔

اگر $x < 1$ اور $x < -1$، تو $1 - x^2$ منفی یا صفر ہوجائے گا $1 - x^2$ کا $\mathbb{R}$ میں کوئی جذر المربع نہیں ہے۔ اگر یہ صفر ہے تو، f کی وضاحت نہیں کی گئی ہے x کو $[-1, 1]$ کے باہر ہونا چاہئے ۔ یہ ہے کہ، x کو $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ پر واقع ہونا چاہئے ۔ ان دو شرائط کو ملاکر f کے لئے سب سے بڑا ممکنہ علاقہ $((-\infty, -1) \cup (1, \infty)) \cap [-3, 3] = [-3, -1) \cup (1, 3]$ ہے۔ یہ $[-3, -1) \cup (1, 3]$ ہے۔

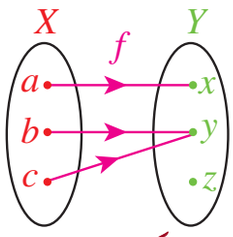
عددی خط کھینچ کر اور مطلوبہ علاقہ وقفہ حاصل کرنے کے لئے وقفے کی منصوبہ بندی کریں۔

1.6.4 تفاعلات کے اعمال (Operations on functions)

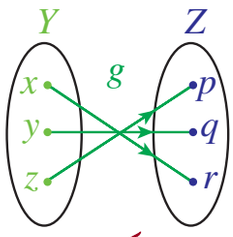
اجزائے ترکیب (Composition)

فرض کریں کہ جیسا شکل 1.36 اور شکل 1.37 میں دیا گیا ہو۔ f کے دو تفاعل f اور g نہیں ۔ آیئے نوٹ کریں کہ f کا معاون علاقہ اور g کا علاقہ ایک جیسے ہیں۔ آیئے g کی شکل 1.37 کو کاٹ دیں اور اسے f کی شکل 1.36 پر چسپاں (paste) کریں، تاکہ g کا علاقہ کو f کے معاون علاقہ Y پر چسپاں کیا جائے ۔ (شکل 1.38 دیکھیں)

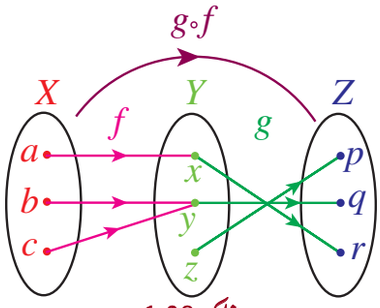
11th_Maths_Vol 1_Chapter 1_Urdu Medium.indd 29 05-10-2021 3.02.58 PM



خاکہ 1.36



خاکہ 1.37

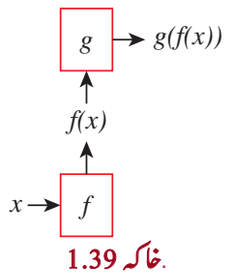


خاکہ 1.38

اب ہم قدرتی طریقہ سے $h:X \longrightarrow Z$ تفاعل کی وضاحت کرسکتے ہیں۔ a کے تحت h کا خیال معلوم کرنے کے لئے ہمیں سب سے پہلے f کے تحت a کا خیال دیکھتے ہیں یہ x ہے ، پھر ہم سب سے پہلے g کے تحت xکا خیال دیکھتے ہیں۔ یہ $h(a)=r$ ہے۔ مساوی طورپر، ہم $h(b)=q$ اور $h(a)=r$ اعلان کرتے ہیں اس طریقے سے ہم نئے تفاعل h کی وضاحت کرسکتے ہیں اس h کو g کے ساتھ f کی اجزائے ترکیب کہا جاتا ہے۔

تعریف 1.8

فرض کریں کہ وہ تفاعلات $f:X\to Y$ اور $g:Y\to Z$ پھر تفاعل $h:X\to Z$ پر $x\in X$ کے لئے $h(x)=g(f(x))$ کے طور پر بیان کیا جاتا ہے۔ اس کو g کے ساتھ f کی اجزائے ترکیب کہا جاتا ہے۔اس کو $g\circ f$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔(اسے g کے ساتھ f جامع کے طورپر پڑھیں(شکلیں 1.38 اور 1.39 دیکھیں)



خاکہ 1.39.

ہم نوٹ کرسکتے ہیں کہ f کی وسعت کو Y ہونے کی ضرورت نہیں ہے اگر $f:X\to Y_1$ ، $g:Y_2\to Z$ اور $Y_1\subseteq Y_2$ پھر ہم $g\circ f$ کی وضاحت بھی کرسکتے ہیں۔ ہم Y_2 کو f کا معاون علاقہ کے طورپر لے سکتے ہیں اور اسی تعریف کو استعمال کرسکتے ہیں لہٰذا ہم $g\circ f$ کی وضاحت صرف اور صرف اسی صورت میں کرسکتے ہیں جب f کی وسعت علاقہ g میں موجود ہو۔

مثال 1.25 : فرض کریں کہ $f=\{(1,2),(3,4)(2,2)\}$ اور $g=\{(2,1),(3,1),(4,2)\}$ ہو $g\circ f$ اور $f\circ g$ معلوم کریں۔

حل

چیک کریں کہ کیا اجزائے ترکیب کی وضاحت کی جاسکتی ہے۔ آئیے ان تفاعل کا علاقہ اور وسعت معلوم کریں۔

کا علاقہ ، $f=\{1,2,3\}$ کا وسعت $f=\{2,4\}$ چونکہ f کی وسعت g کے علاقہ میں موجود ہے ہم $g\circ f$ کی وضاحت کرسکتے ہیں تاکہ $g\circ f$ کے تحت 1 کا خیال معلوم کرسکے اور پھر یہ g کے تحت خیال ہو۔ ہمیں f کے تحت 1 کا خیال معلوم کرنا ہے f کے تحت 1 کا خیال 2 ہے۔ اور g کے تحت اس کا خیال 1 ہے۔ تو $(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(2)=1.$

11th_Maths_Vol 1_Chapter 1_Urdu Medium.indd 30 05-10-2021 3.02.59 PM

اسی طرح ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ $(g \circ f)(2) = 1$ اور $(g \circ f)(3) = 2$ ہوتو $g \circ f = \{(1,1),(2,1),(3,2)\}$ اسی طرح $f \circ g = \{(2,2),(3,2),(4,2)\}$ ہے۔

مثال 1.26 : فرض کریں کہ $f = \{(1,4),(2,5),(3,5)\}$ اور $g = \{(4,1),(5,2),(6,4)\}$ ہو $g \circ f$ معلوم کرو۔ کیا تم $f \circ g$ معلوم کرسکتے ہیں۔

حل

صاف طورپر $g \circ f = \{(1,1),(2,2),(3,2)\}$ لیکن $f \circ g$ کی وضاحت نہیں کی گئی ہے کیونکہ $f = \{1, 2, 3\}$ کے علاقہ میں $g = \{1, 2, 4\}$ کی وسعت شامل نہیں ہے۔

مثال 1.27 : فرض کریں کہ دو تفاعلات f اور g $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ کی وضاحت $f(x) = 3x - 4$ اور $g(x) = x^2 + 3$ کی گئی ہے۔ $g \circ f$ اور $f \circ g$ معلوم کریں۔

حل

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x-4) = (3x-4)^2 + 3 = 9x^2 - 24x + 19.$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2+3) = 3(x^2+3) - 4 = 3x^2 + 5.$$

ہمارے پاس $f \circ g \neq g \circ f$ اس طرح عمل "تفاعل کے اجزائے ترکیب" عام طورپر متبادل پذیر نہیں ہوتا۔

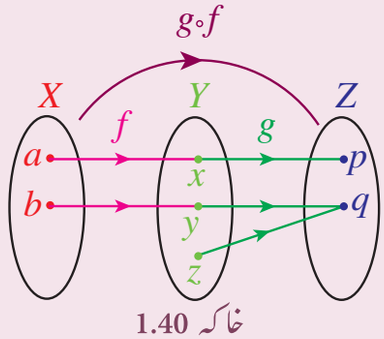
مسئلہ 1.2 : فرض کریں کہ $f: A \to B$ اور $g: B \to C$ تفاعلات ہیں اگر f اور g ایک-تا-ایک ہیں تو $g \circ f$ بھی ایک تا ایک ہے۔

ثبوت : فرض کریں کہ A میں $x \neq y$ ہو چونکہ f ایک تاایک ہے $f(x) \neq f(y)$ چونکہ ایک تا ایک ہے۔ $g(f(x)) \neq g(f(y))$ یہ ہے کہ $(g \circ f)(x) \neq (g \circ f)(y)$ لہٰذا، $x \neq y \Rightarrow (g \circ f)(x) \neq (g \circ f)(y)$ ایک -تا-ایک ہے۔

مثال 1.28 : بتائیں کہ بیان ، "اگر f اور $g \circ f$ ایک تا ایک ہیں تو g ایک تا ایک ہے" سچ نہیں ہے۔

حل

ایک بیان کو صحیح نہیں دعوٰی کرنے کے لئے ہمیں ایک جوابی (counter) مثال دے کر ثابت کرنا ہوگا ۔ شکل 1.40 میں دی گئی خاکہ پر غور کریں۔



خاکہ 1.40

واضح طورپر f اور $g \circ f$ ایک تاایک ہیں لیکن g ایک تا ایک نہیں ہے اس طرح اوپری شکل بتاتا ہے کہ یہ بیان صحیح نہیں ہے۔

11th_Maths_Vol 1_Chapter 1_Urdu Medium.indd 31 05-10-2021 3.03.02 PM

مثال 1.29 : فرض کریں کہ $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ کو $f(x) = 2x - |x|$ اور $g(x) = 2x + |x|$ کے طور پر بیان کیا گیا ہے۔ $f \circ g$ معلوم کرو۔

حل

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{اگر } x \leq 0 \\ x & \text{اگر } x > 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - (-x) & \text{اگر } x \leq 0 \\ 2x - x & \text{اگر } x > 0 \end{cases} \quad \text{تو}$$

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{اگر } x \leq 0 \\ x & \text{اگر } x > 0 \end{cases} \quad \text{اس طرح}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x + (-x) & \text{اگر } x \leq 0 \\ 2x + x & \text{اگر } x > 0 \end{cases} \quad \text{میں بھی}$$

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{اگر } x \leq 0 \\ 3x & \text{اگر } x > 0 \end{cases} \quad \text{اس طرح}$$

فرض کریں $x \leq 0$ ہے تو $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x) = 3x.$

آخری مساوات $3x \leq 0$ لی جاتی ہے جب بھی $x \leq 0$ ہو۔

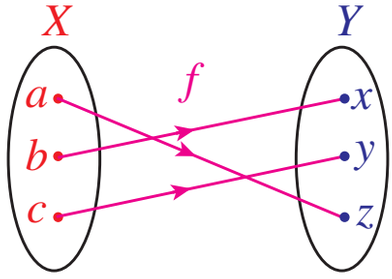
فرض کریں $x > 0$ ہے تو

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x) = 3x.$$

لہٰذا، $(f \circ g)(x) = 3x$ تمام x کے لئے ہو۔

1.6.5 تفاعل کا معکوس (Inverse of a function)

فرض کریں کہ $f : X \to Y$ ایک دوربط (bijection) جیسا کہ شکل 1.41 میں دیا گیا ہے۔



شکل 1.41.

اگر ہم اس تفاعل کو آئینہ میں دیکھیں تو ہمیں Y سے X تک کا تفاعل ملتا ہے ہم اس تفاعل کو g کہتے ہیں Y سے X تک g ایک تفاعل ہے جس کی وضاحت $g(x) = b$ ، $g(y) = c$ ، $g(z) = a$ سے کی گئی ہے f کے معکوس کے لئے تفاعل g ایک مثال ہے اب ہم تفاعل کا معکوس کی وضاحت کریں۔

11th_Maths_Vol 1_Chapter 1_Urdu Medium.indd 32 05-10-2021 3.03.03 PM

تعریف 1.9

فرض کریں کہ $f : X \to Y$ ایک دو ربط (bijection) ہے۔تفاعل $g : Y \to X$ کی وضاحت $g(y) = x$ اگر $f(x) = y$ سے کی گئی ہے یہ f معکوس کہلاتا ہے اس کو f^{-1} سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

اگر ایک تفاعل f معکوس رکھتا ہے ۔تو ہم کہتے ہیں کہ f الٹا (invertible) ہے تفاعل کے اجزائے ترکیب اور معکوس کے درمیان ایک اچھا رشتہ ہے۔

فرض کریں کہ $f : X \to Y$ ایک دو ربط ہے اور $g : Y \to X$ اس کا معکوس ہے تو $g \circ f = I_X$ اور $f \circ g = I_Y$ جہاں I_X اور I_Y بالترتیب X اور Y پر متماثل تفاعل ہیں اس کے علاوہ اگر $f : X \to Y$ اور $g : Y \to X$ تفاعلات ہیں۔ جیسے $g \circ f = I_X$ اور $f \circ g = I_Y$ ،تو دونوں f اور g دوربط (bijection) ہیں اور وہ ایک دوسرے کے معکوس ہیں۔یہ ہے کہ $f^{-1} = g$ اور $g^{-1} = f$ ہیں۔مذکورہ بالا بحث کا استعمال کرتے ہوئے الٹا اور معکوس کو کسی اور طریقے سے بیان کیا جاسکتا ہے۔

تعریف 1.10

ایک تفاعل $f : X \to Y$ کو الٹا کہا جاتا ہے۔اگر کوئی تفاعل $g : Y \to X$ موجود ہو۔اس طرح $g \circ f = I_X$ اور $f \circ g = I_Y$ جہاں I_X اور I_Y بالترتیب X اور Y پر متماثل تفاعل ہیں اس معاملے میں، g کو f کا معکوس کہاجاتا ہے اور g کو f^{-1} سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

چند تفاعلات دو ربط ہوتے ہیں ثابت کرنے کے لئے ہم اس تصور کو استعمال کرتے ہیں۔ اگر ایک دوربط ہے، تو $f^{-1}(y)$ کچھ بھی نہیں ہے لیکن f کے تحت y کا پیش خیال ہے آیئے ہم نوٹ کریں کہ معکوس صرف دوربطی کے لئے متعین کیا گیا ہے۔اگر f ایک-تا-ایک نہیں، پھر a اور b موجود ہے جو $a \neq b$ اور $f(a) = f(b)$ ہے۔ فرض کریں کہ یہ قیمت y، سے پھر ہم $f^{-1}(y)$ کی وصاحت نہیں کرسکتے کیونکہ a اور b دونوں f کے تحت y کے پیش خیالات ہیں۔ جیسا کہ y کے لئے f^{-1} دومختلف قیمتیں اختیار نہیں کرسکتا ۔اگر f بروں نہیں ہے، پھر y ہیں پیش y خیال کے بغیر ہوگا۔اس معاملے میں ہم $f^{-1}(y)$ کی کوئی قیمت نہیں دے سکتے ۔

مثال کے طورپر، اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ اور $f = \{(1, 2), (2, 4), (3, 1), (4, 3)\}$ ہے تو f کا وسعت $\{1, 2, 3, 4\}$ ہے f کا معکوس $\{(1, 3), (2, 1), (3, 4), (4, 2)\}$ ہے۔

$\mathbb{R}$ سے $\mathbb{R}$ تک تفاعلات کے معکوس معلوم کرنے کے لئے کام کرنے کا اصول

(Working Rule to Find the Inverse of Functions from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$)

فرض کریں کہ $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ تفاعل دیا گیا ہے۔

(i) $y = f(x)$ لکھیں۔

(ii) y کے شرط میں x لکھیں۔

(iii) y میں اظہار $f^{-1}(y)$ لکھیں۔

(iv) x کے طورپر y تبدیل کریں۔

مثال 1.30 اگر $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ کی وضاحت $f(x) = 2x - 3$ سے کی گئی ہے۔ ثابت کرو کہ f ایک دوربطی (bijection) ہے اور اس کا معکوس معلوم کرو۔

حل

طریقہ 1 (Method)

ایک-تا-ایک (One-to-one) : فرض کریں کہ $f(x) = f(y)$ ،تو $2x - 3 = 2y - 3$; اس کا مطلب ہے $x = y$ ہے اس طرح $f(x) = f(y)$ کا مطلب $x = y$ ہے اس طرح f ایک -تا-ایک ہے۔

بروں (Onto): فرض کریں کہ $y \in \mathbb{R}$، فرض کریں $x = \frac{y+3}{2}$ ہو۔تو $f(x) = 2\left(\frac{y+3}{2}\right) - 3 = y$ ، اس طرح f ایک بروں ہے ذیل بیان سے یہ بھی ثابت کیا جاسکتا ہے کہ f کی وسعت $\mathbb{R}$ ہے (کیسا؟) جو معاون علاقہ کے مساوی ہے اور لہٰذا f بروں (Onto) ہے۔

معکوس (Inverse) : فرض کریں کہ $y = 2x - 3$ ،تو $y + 3 = 2x$ اور لہٰذا $x = \frac{y+3}{2}$ ،اس طرح $f^{-1}(y) = \frac{y+3}{2}$ y کو x جگہ لینے پر ہمیں $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$ حاصل ہوتا ہے۔

11th_Maths_Vol 1_Chapter 1_Urdu Medium.indd 33 05-10-2021 3.03.08 PM

طریقہ 2 (Method)

فرض کریں کہ $y = 2x - 3$ ہو، تو $x = \frac{y+3}{2}$ فرض کریں کہ $g(y) = \frac{y+3}{2}$ ہو۔

اب

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x-3) = \frac{(2x-3)+3}{2} = x$$

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f\left(\frac{y+3}{2}\right) = 2\left(\frac{y+3}{2}\right) - 3 = y$$

اس طرح $f \circ g = I_Y$ اور $g \circ f = I_X$

اس سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ f اور g دو ربطی ہیں اور وہ ایک دوسرے کے معکوس ہیں لہٰذا f ایک دوربطہ ہے اور $f^{-1}(y) = \frac{y+3}{2}$ کو x کی جگہ لینے پر ہمیں $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$ حاصل ہوتا ہے۔

1.6.6 تفاعلات کا الجبرا (Algebra of function)

ایک تفاعل جس کا معاون علاقہ $\mathbb{R}$ ہے یا $\mathbb{R}$ کا تحتی مجموعہ ہے اس کو حقیقی قابل قدر تفاعل (Real valued function) کہا جاتا ہے۔اگر یہ حقیقی قابل قدر حقیقی قابل قدر میں تو ہم تفاعل پر بہت سے اعمال پر تبادلہ خیال کرسکتے ہیں۔

فرض کریں کہ f اور g دو حقیقی قابل قدر تفاعلات ہیں۔کیا ہم f اور g کے جمع کی وضاحت کرسکتے ہیں ؟ قدرتی طور پر ہم توقع کرسکتے ہیں کہ وہ تفاعلات کا حاصل جمع ایک تفاعل ہوگا ایک نقطہ x پر $f + g$ کی قیمت کا تعلق x کے f اور g کی قیمتیں پر ہونا چاہئے۔تو ہو x کے نقطہ پر $f + g$ کی وضاحت کرنے کے لئے ہمیں $f(x)$ اور $g(x)$ دونوں کو ضرور جاننا چاہئے ۔دوسرے الفاظ میں x کو f کے علاقہ کے ساتھ ساتھ g کے علاقے میں ضرور ہونا چاہئے اور x پر $f + g$ کی وضاحت کا قدرتی طریقہ (natural way) $f(x) + g(x)$ ہے۔ لہٰذا اگر ہم یہ شرط لگاتے ہیں کہ f اور g کے علاقے ایک جیسے ہوں، تو ہم $f + g$ کی وضاحت کرسکتے ہیں۔اس طرح ہم حقیقی اعداد کے سیٹ R پر دستیاب تفریق ، ضرب اور بہت سی الجبریائی کارویئوں کی وضاحت کرسکتے ہیں۔

تعریف 1.11

فرض کریں کہ X کوئی سیٹ ہے۔فرض کریں کہ f اور g حقیقی قابل قدر تفاعل جو X پر متعین ہیں۔ تمام $x \in X$ کے لئے وضاحت کریں۔

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
- $(fg)(x) = f(x)g(x)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$ جہاں
- $(cf)(x) = cf(x)$, c جہاں سے ایک حقیقی مستقل ہے۔
- $(-f)(x) = -f(x)$

نوٹ کریں کہ علاقہ کوئی سیٹ ہوسکتا ہے، ضروری نہیں کہ اعداد کا ایک سیٹ ہو مثال کے طور پر ہو X ایک کلاس کے طلباء کا ایک مجموعہ ہے؟ تفاعلات f اور g طالب علموں کے دوٹیسٹ میں حاصل کردہ نمبرات (مارکس) کی نمائندگی کرتے ہیں۔ پھر تفاعل $f + g$ دوٹیسٹ میں طلباء کے کل مارکس کی نمائندگی کرتا ہے۔یہ دیکھنا آسان ہے کہ اوپر بیان کی گئی کاروائیاں کی جمع ، تفریق ، ضرب اور تقسیم مندرجہ ذیل خصوصیات کو پورا کرتے ہیں۔

- $(f + g) + h = f + (g + h)$
- $f + g = g + f$
- $\mathbf{0} + f = f + \mathbf{0}$ جہاں $\mathbf{0}$ صفر تفاعل ہے جس کی وضاحت $0(x) = 0$ تمام x کے لئے ہے۔
- $f + (-f) = (-f) + f = \mathbf{0}$
- $f(g + h) = fg + fh$
- $(c_1 + c_2)f = c_1 f + c_2 f$ جہاں c_1 اور c_2 حقیقی مستقلات ہیں۔

ہم ان کارروائیاں کی بہت سی مزید خصوصیات کی فہرست دے سکتے ہیں۔ یہ ثبوت آسان ہیں۔ تاہم صرف ایک کو ثابت کرنے دیں تاکہ کوئی ایسا راستہ دکھایا جائے جس میں ان خصوصیات کو ثابت کیا جاسکے۔

آئیے ثابت کریں $f(g + h) = fg + fh$

$f(g + h) = fg + fh$ کو ثابت کرنے کے لئے ہمیں، یہ ثابت کرنا ہوگا کہ تمام x کے لئے علاقہ $(f(g + h))(x) = (fg + fh)(x)$ ہے۔

11th_Maths_Vol 1_Chapter 1_Urdu Medium.indd 34 05-10-2021 3.03.14 PM

مسئلہ 3.1 : اگر f اور g حقیقی قابل قدر تفاعلات ہیں تو $f(g + h) = fg + fh$

ثبوت: فرض کریں کہ X کوئی سیٹ اور X پر وضاحت کیا گیا حقیقی قابل قدر تفاعلات f اور g ہو۔

فرض کریں کہ $x \in X$

$$\begin{aligned}
(f(g + h))(x) &= f(x)(g + h)(x) && \text{(حاصل ضرب کی تعریف کے مطابق)}\\
&= f(x)[g(x) + h(x)] && \text{(جمع کی تعریف کے مطابق)}\\
&= f(x)g(x) + f(x)h(x) && \text{(حقائق کے تقسیم کے مطابق)}\\
&= (fg)(x) + (fh)(x) && \text{(حاصل ضرب کی تعریف کے مطابق)}\\
&= (fg + fh)(x) && \text{(جمع کی تعریف کے مطابق)}
\end{aligned}$$

چنانچہ تمام $x \in X$ کے لئے $(f(g + h))(x) = (fg + fh)(x)$ ہے۔ لہٰذا $f(g + h) = fg + fh$ ہے۔

1.6.7 جن مخصوص تفاعلات (Some Special Functions)

آئیے اب ہم چند مخصوص تفاعلات دیکھتے ہیں۔

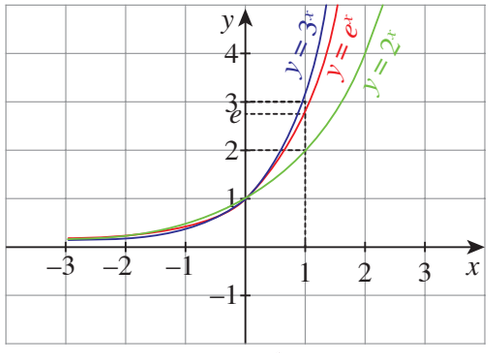
(i) تفاعل $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ کی وضاحت

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \ , \ a_i$$

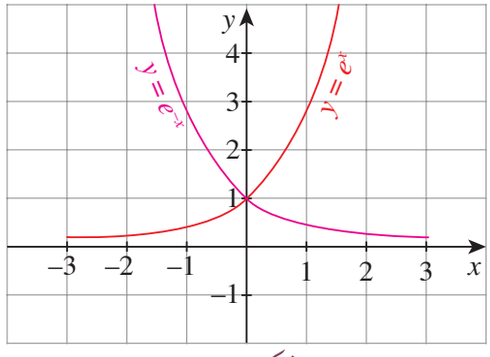
سے کی گئی ہے جہاں a_i مستقلات ہیں، یہ تفاعل کثیر رقمی تفاعل (polynomial function) کہلاتا ہے۔ چونکہ تفاعل کی وضاحت کرنے والی مساوات کا دائیں ہاتھ ایک کثیر رقمی ہے، یہ تفاعل ایک کثیر رقمی تفاعل کہلاتا ہو۔

(ii) تفاعل $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ کی وضاحت $f(x) = ax + b$ سے کی گئی ہے۔ جہاں $a \neq 0$ اور b مستقلات ہیں یہ خطی تفاعل کہلاتا ہے۔ ایک تفاعل جو غیر خطی ہے وہ غیر خطی تفاعل (non–linear function) کہلاتا ہے۔ صاف طور پر ایک خطی تفاعل ایک کثیر رقمی تفاعل ہے تفاعل کی ترسیم ایک خط مستقیم ہے ۔ خط مستقیم کو منحنی (linear function) کہا جاتا ہے۔تو یہ تفاعل ایک خطی تفاعل کہلاتا ہے۔ (ریاضی کے اعلیٰ مطالبہ کے لئے خطی تفاعلات کی مختلف تعریفیں سامنے آسکتی ہے۔)

(iii) فرض کریں a ایک غیر منفی مستقل ہے تفاعل $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ پر غور کریں۔ جس کی وضاحت $f(x) = a^x$ سے کی گئی ہے۔ اگر $a = 0$، $x \neq 0$ تو پھر تفاعل ، صفر تفاعل ہوجاتا ہے اور اگر $a = 1$ تو تفاعل $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ کی وضاحت $f(x) = a^x$ سے کی گئی ہے $f(x) = 1$ ایک مستقل تفاعل ہے (شکل میں 1.42 اور 1.43 دیکھیں)



خاکہ 1.42



خاکہ 1.43

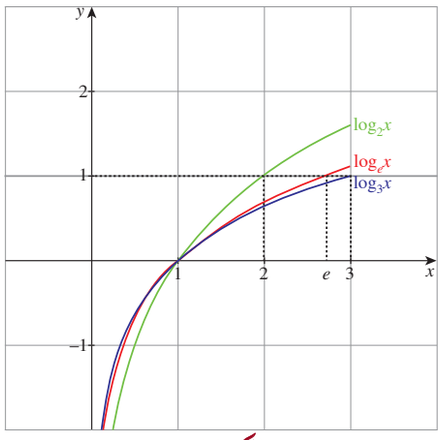
جب $a > 1$ تفاعل $f(x) = a^x$ ایک قوت نما تفاعل (exponential function) کہلاتا ہے اس کے علاوہ x پر قوت رکھنے والی کسی بھی تفاعل کو ایک قوت نما تفاعل کہا جاتا ہے۔

e ایک خاص غیر ناطق عدد ہے۔ جو 2 اور 3 کے درمیان واقع ہے ہم e کے بارے میں اس کے بعد کے ابواب میں مزید مطالبہ کریں گے۔

(iv) فرض کریں کہ $a > 1$ ایک مستقل ہے تفاعل $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ کی وضاحت $f(x) = \log_a x$ سے کی گئی ہے جو ایک لوگارتھی تفاعل (logarithmic function) کہلاتا ہے۔ درحقیقت ، ایک مناسب علاقہ پر ایک قوت نما تفاعل $f(x) = a^x$ کے معکوس کو لوگارتھی تفاعل کہا جاتا ہے۔ (شکل 1.44 دیکھیں)

(v) ایک مناسب علاقہ پر $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ کے ذریعے بیان کردہ حقیقی قابل قدر تفاعل، جہاں $p(x)$ اور $q(x)$ کثیر رقمیات ہیں۔ $q(x) \neq 0$ ناطق تفاعل کہلاتا ہے۔ درحقیقت ، اس تفاعل کا علاقہ حقیقی اعداد کو ہٹا کر $\mathbb{R}$ سے حاصل کردہ سیٹ ہے جس پر $q(x) \neq 0$ ہے۔

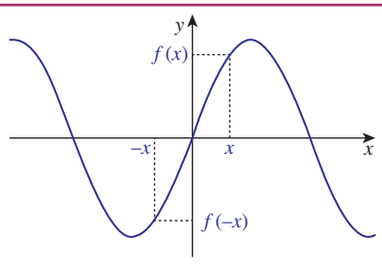
11th_Maths_Vol 1_Chapter 1_Urdu Medium.indd 35 05-10-2021 3.03.17 PM



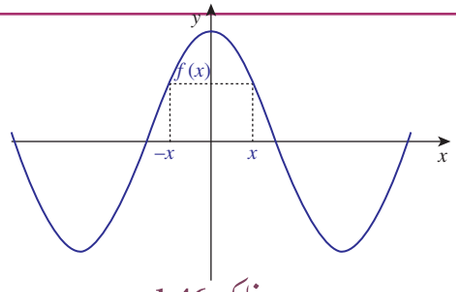
خاکہ 1.44.

(vi) اگر f ایک حقیقی قابل قدر تفاعل ہے جیسے $f(x) \neq 0$ تو حقیقی قابل قدر تفاعل g کی طرف سے مناسب علاقہ پر $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ کی وضاحت کی جاتی ہے۔ f کا مقلوب تفاعل کہلاتا ہے۔ g کا علاقہ حقیقی اعداد کو ہٹا کر، $\mathbb{R}$ سے حاصل کردہ سیٹ ہے جس پر $f(x) = 0$ ہے۔ مثال کے طور پر، $f(x) = \frac{1}{x-1}$ کا سب سے بڑا ممکن علاقہ $\mathbb{R} - \{1\}$ ہے۔

تعریف 1.12 : ایک تفاعل $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ کو ایک طاق تفاعل کہا جاتا ہے۔ اگر $f(-x) = -f(x)$ تمام $x \in \mathbb{R}$ کے لئے ہو ایک جفت تفاعل کہا جاتا ہے۔ اگر $f(-x) = f(x)$ تمام $x \in \mathbb{R}$ کے لئے ہو۔(شکلیں 1.45 اور 1.46 دیکھیں)



خاکہ 1.45



خاکہ 1.46

$f(x) = x$، $f(x) = 2x$ اور $f(x) = x^3 + 2x$ کی طرف سے بیان کردہ تفاعل طاق تفاعلات کی کچھ مثالیں ہیں۔ $f(x) = x^2$، $f(x) = 3$، $f(x) = x^4 + x^2$ اور $f(x) = |x|$ کی طرف سے بیان کردہ تفاعل جفت تفاعلات کی کچھ مثالیں ہیں۔ نوٹ کریں کہ تفاعل $f(x) = x + x^2$ نہ تو جفت ہے نہ طاق۔

مندرجہ ذیل نتائج کو ہم ثابت کرسکتے ہیں۔

(i) دوطاق تفاعلات کا جمع ایک طاق تفاعل ہے۔

(ii) دوجفت تفاعلات کا جمع ایک جفت تفاعل ہے۔

(iii) دوطاق تفاعلات کا حاصل ضرب ایک جفت تفاعل ہے۔

(iv) دوجفت تفاعلات کا حاصل ضرب ایک جفت تفاعل ہے۔

(v) ایک طاق تفاعل اور ایک جفت تفاعل کا حاصل ضرب ایک طاق تفاعل ہے۔

(vi) صرف ایک تفاعل جو کہ طاق اور جفت تفاعل ہے وہ صفر تفاعل ہے۔

(vii) ایک مثبت مستقل اور ایک جفت تفاعل کا حاصل ضرب ایک مثبت تفاعل ہے۔

(viii) ایک منفی مستقل اور ایک جفت تفاعل کا حاصل ضرب بھی ایک مثبت تفاعل ہے۔

(ix) ایک مستقل اور ایک طاق تفاعل کا حاصل ضرب ایک طاق تفاعل ہے۔

(x) ایسے تفاعلات ہیں جو نہ تو طاق ہیں اور نہ ہی جفت آیئے مندرجہ بالا خصوصیات میں ایک کو ثابت کریں اسی طرح دوسری خصوصیات بھی ثابت کی جاسکتی ہیں۔

11th_Maths_Vol 1_Chapter 1_Urdu Medium.indd 36 05-10-2021 3.03.19 PM

4.1 مسئلہ : ایک طاق تفاعل اور ایک جفت تفاعل کا حاصل ضرب ایک طاق تفاعل ہے۔

ثبوت: فرض کریں کہ f ایک طاق تفاعل ہے اور g ایک جفت تفاعل ہے۔

اب فرض کریں $h = fg$

$$h(-x) = (fg)(-x) = f(-x)g(-x) = -f(x)g(x) \quad \text{(جیسا کہ ایک طاق } f \text{ اور } g \text{ ایک جفت)}$$
$$= -h(x)$$

اسی طرح h ایک طاق "تفاعل ہے یہ بتاتا ہے کہ fg ایک طاق تفاعل ہے۔

اگر ایک تفاعل طاق نہیں ہے تو یہ مت سوچیں کہ تفاعل ایک جفت تفاعل ہے بہت سارے تفاعلات ہیں جو نہ تو جفت ہیں اور نہ ہی طاق ہیں۔

مشق 1.3

1. فرض کریں کہ ایک اسکول میں گیارہویں جماعت کے 4 سیکشن (sections) میں 120 طلباء پڑھ رہے ہیں فرض کریں کہ A طلباء کا مجموعہ کو ظاہر کرتا ہے۔ اور B سیکشن کا مجموعہ کو ظاہر کرتا ہے۔ A سے B تعلق کی وضاحت کریں بطور "اگر طالب علم x کا تعلق y سیکشن سے رکھتا ہے۔ تو x کا تعلق y سے ہے۔" کیا یہ تعلق ایک تفاعل ہے؟ اپنے جواب کی وضاحت کریں۔

2. 0، 7، 2-، 1، 4- پر f کی قیمتیں لکھیں اگر

$$f(x) = \begin{cases} -x+4 & \text{اگر } -\infty < x \leq -3 \\ x+4 & \text{اگر } -3 < x < -2 \\ x^2 - x & \text{اگر } -2 \leq x < 1 \\ x - x^2 & \text{اگر } 1 \leq x < 7 \\ 0 & \text{دوسری صورت میں} \end{cases}$$

3. 0، 1-، 2، 5، 3- پر f کی قیمتیں لکھیں اگر

$$f(x) = \begin{cases} x^2+x-5 & \text{اگر } x \in (-\infty, 0) \\ x^2+3x-2 & \text{اگر } x \in (3, \infty) \\ x^2 & \text{اگر } x \in (0, 2) \\ x^2-3 & \text{دوسری صورت میں} \end{cases}$$

4. بتائیں کہ درج ذیل تعلقات ، تفاعلات ہیں یا نہیں۔ اگر یہ تفاعل ہیں تو ایک-یا-ایک اور بروں چیک کریں۔ اگر یہ تفاعل نہیں ہیں تو بتائیں کیوں؟

(i) اگر $A = \{a, b, c\}$ اور $(f: A \to A)$ $f = \{(a, c), (b, c), (c, b)\}$

(ii) اگر $X = \{x, y, z\}$ اور $(f: X \to X)$ $f = \{(x, y), (x, z), (z, x)\}$

5. فرض کریں $A = \{1, 2, 3, 4\}$ اور $B = \{a, b, c, d\}$ مندرجہ ذیل سے ہر ایک کے لئے $A \to B$ تفاعل دیں۔

(i) نہ ایک تاایک ہے نہ ہی بروں ہے (ii) ایک تا ایک نہیں مگر بروں ہے۔

(iii) ایک تاایک ہے مگر بروں نہیں (iv) ایک تا ایک اور بروں

6. $\frac{1}{1-2sinx}$ کا علاقہ معلوم کرو۔

7. $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{x^2-9}}$ حقیقی قدر تفاعل کا سب سے بڑا ممکنہ علاقہ معلوم کرو۔

8. $\frac{1}{2cosx-1}$ تفاعل کا وسعت معلوم کرو۔

9. دکھائیں کہ تعلق $xy = -2$ ایک مناسب علاقہ کے لئے ایک تفاعل ہے تفاعل کا علاقہ اور وسعت معلوم کرو۔

10. اگر $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ کی وضاحت $f(x) = |x| + x$ اور $g(x) = |x| - x$ سے کی گئی ہیں تو $g \circ f$ اور $f \circ g$ معلوم کریں۔

11th_Maths_Vol 1_Chapter 1_Urdu Medium.indd 37 05-10-2021 3.03.22 PM

11. اگر $\mathbb{R}$ پر f, g, h حقیقی قابل قدر تفاعلات ہیں تو ثابت کریں کہ $(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h$ آپ $f \circ (g + h)$ کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟ اپنے جواب کا جواز پیش کرو۔

12. اگر $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ کی وضاحت $f(x) = 3x - 5$ سے کی گئی ہے۔ ثابت کرو کہ f ایک (bijection) دوربطی ہے اور اس کا معکوس معلوم کرو۔

13. ایک انسان کے عضلات (muscles) کا وزن اس کے جسمانی وزن x کا ایک تفاعل ہے اور اسے $W(x) = 0.35x$ کے طور پر ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ اس تفاعل کا علاقہ کا تعین کرو۔

14. کسی چیز کے گرنے کا فاصلہ وقت t کا ایک تفاعل ہے اور اسے $s(t) = -16t^2$ کے طورپر ظاہر کیا جاسکتا ہے تفاعل کو ترسیم کریں اور یقین کریں کہ یہ ایک تا ایک ہے۔

15. دیئے گئے راستے پر ہوائی کرائے (airfare) کی کل قیمت اس کے بنیادی لاگت (surcharge) اور ایندھن کے زائد رقم روپئے میں S پر مشتمل ہیں۔ C اور S دونوں مالیج (milage) m کے تفاعلات $C(m) = 0.4m + 50$ اور $S(m) = 0.03m$ ہیں۔مالیج کے لحاظ سے ٹکٹ کی کل قیمت کے لئے تفاعل کا یقین کریں اور 1600 میل پرواز کے لئے ہوائی کرایہ معلوم کریں۔

16. ایک فروخت کار (sales person) جس کی سالانہ آمدنی تفاعل $A(x) = 30,000 + 0.04x$ سے نمائندگی کی جاسکتی ہے۔ جہاں ہو x اس کے فروخت کردہ مال کی روپئے قیمت ہے اس کا بیٹا بھی فروخت کرتا ہے اور اس کی آمدنی $S(x) = 25,000 + 0.05x$ تفاعل سے ظاہر ہوتی ہے۔ $(A + S)(x)$ معلوم کرو اور خاندان کی کل آمدنی کا تعین کریں۔ اگر وہ ہر ایک ₹1,50,00,000 روپئے مالیت کا سامان فروخت کرتے ہیں۔

17. امریکی ڈالر کو ایک دن میں سنگاپورڈالر میں تبدیل کرنے کا تفاعل $f(x) = 1.23x$ ہے جہاں x امریکی ڈالروں کی عدد کی نمائندگی کرتا ہے۔ اسی دن سنگاپور ڈالر کو ہندوستانی روپئے میں تبدیل کرنے کا تفاعل $g(y) = 50.50y$, ہے۔جہاں y سنگاپور ڈالروں کی عدد کی نمائندگی کرتا ہے ایک تفاعل لکھیں جو ہندوستانی روپئے کے لحاظ سے امریکی ڈالر کی شرح تبادلہ بتائے گا۔

18. ایک طعام گاہ (Restaurant) کا مالک ₹100 روپئے کی لاگت سے ایک خاص کھانا تیار کرسکتا ہے اس لئے اندازہ لگایا کہ اگر کھانے کی فہرست طعام (menu) میں قیمت x روپئے ہے تو ان گاہکوں کی اور تفاعل $D(x) = 200 - x$ دیاگیا ہے جو شام کو اس قیمت پر اس کھانے کا آرڈر کریں گے اس کھانے پر اپنے دن کی آمدنی، کل لاگت اور منافع کو x کے تفاعلات کے طورپر ظاہر کریں۔

19. فارن ہیٹ (Fahrenheit) سے سلیس (Celsius) درجہ حرارت میں تبدیل کرنے کا فارمولہ $y = \frac{5x}{9} - \frac{160}{9}$ ہے۔ تفاعل کا معکوس معلوم کرو اور اس بات کا یقین کریں کہ کیا معکوس بھی ایک تفاعل ہے۔

20. تفاعل $f(x) = 3x - 4$ کا استعمال کرتے ہوئے، ایک سادہ خفیہ نویس (Simple cipher) ایک عدد لیتا ہے اور اسے خفیہ تحریر (code) کرتا ہے۔اس تفاعل کا معکوس معلوم کرو۔ اس بات کا یقین کریں کہ معکوس بھی ایک تفاعل ہے اور خط $y = x$ کے بارے میں متشاکل خصوصیت کی تصدیق کریں (خطوط کھینچ کر)۔

1.7 تحویلات کے استعمال سے تفاعلات کا ترسیم کرنا (Graphing Functions using Tranformations)

"ایک تصویر ہزار الفاظ سے قیمتی ہے"۔ایک مشہور رکہاوت ہے کسی تفاعل کے بارے میں اچھی طرح سے جاننے کے لئے اس کا ترسیمی تجزیاتی اظہار سے ہماری مدد زیادہ کرے گا بہت سے نکات کی منصوبہ بندی کے بغیر تیزی سے ترسیم کھینچنا ایک انمول مہارت ہے کچھ بنیادی تفاعلات کی شکلوں سے واقفیت دیگر پیچیدہ تفاعلات کو ترسیم کرنے میں مدد کرے گا۔تفہیم اور تشاکل کا استعمال اور تحویلات ترسیم کی صلاحیتوں کو قابل مضبوط بنائے گا یہ سیکشن صرف ترسیم کا بنیادی اعداد شمار نہیں ہے۔ ہم کچھ تفاعلات کو ترسیم کرنے کے لئے چند طریقے سیکھتے ہیں۔

فرض کریں کہ ہم تفاعل $y = 2\sin(x - 1) + 3$ کے منحنی کو کھینچنا یا خاکہ بنانا چاہتے ہیں۔پہلی نظر میں ایسا لگتا ہے۔ کہ اس کو تفاعل کی نمائندگی کرنے والے منحنی کو کھینچنا بہت مشکل ہے لیکن اس سیکشن کے مواد کو سمجھنے کے بعد اسے کھینچنا بہت آسان ہوگا۔

اگر ہم جانتے ہیں کہ ترسیم کا آدھا حصہ دوسرے آدھے حصے کا خیال ہوتا ہے۔جس کا تعلق کسی خط سے ہوتا ہے یا کسی ترسیم کو کسی معروف ترسیم کے سمت میں منتقل کرکے حاصل کیا جاسکتا ہے تو پھر ہم معروف کو استعمال کرتے ہوئے نیا کھینچ سکتے ہیں مزید یہ ہے کہ اگر ہم جانتے ہیں کہ کسی معروف کو بڑھا کریا گھٹا کر ترسیم حاصل کیا جاسکتا ہے۔ تو ہم بھی معروف کا استعمال کرتے ہوئے نیا کھینچ سکتے ہیں۔

مندرجہ ذیل تبدیلیاں کی اقسام ترسیم کرنے میں بہت اہم کردار ادا کرتی ہیں۔

11th_Maths_Vol 1_Chapter 1_Urdu Medium.indd 38 05-10-2021 3.03.26 PM

(i) انعکاس (reflection)

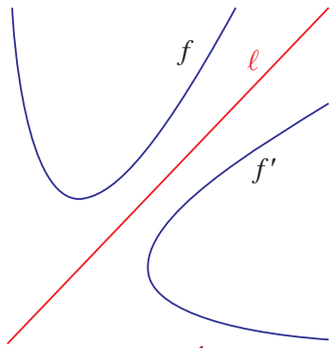
(ii) ترجمہ (translation)

(iii) اتساع (dilation)

انعکاسوں اور ترجمے کے اس معاملے ہیں، وہ اصل ترسیم کے مطابق مماثلت ترسیم تیار کرتے ہیں۔ترسیم کا جسامت اور شکل تبدیل نہیں ہوتی لیکن اِتساع (dilation)میں، یہ اصل ترسیم سے متعلقہ شکلوں کے ساتھ ترسیم تیار کرتا ہے۔

انعکاس (reflection)

ایک خط l کے حوالے سے کسی تفاعل کے ترسیم کی، انعکاس وہ ترسیم ہے جو l کے حوالے سے اس کے لئے تشاکل ہے ایک انعکاس ترسیم کی آئینہ دار خیال ہے جہاں خط l آئینہ کا انعکاس ہے (شکل 1.47 دیکھیں)



خاکہ 1.47.

یہاں l کے حوالے سے f کا آئینی خیال f' ہے۔ f' میں f کا ہر نقطہ خیال رکھتا ہے۔ $y=f(x)$ کے چند مفید انعکاسیں ہیں۔

(i) f ترسیم کا انعکاسی ترسیم $y=f(x)$ جو x-محور پر ہو۔

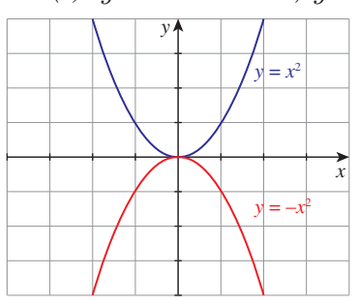
(ii) f' ترسیم انعکاس ترسیم $y=f(x)$ جو y-محور پر ہو۔

(iii) $y=x$ میں f ترسیم کا انعکاسی ترسیم $y=f^{-1}(x)$ ہے۔

مثال 1.5

مندرجہ ذیل پر غور کریں۔

(i) $y=x^2$ ii) $y=-x^2$



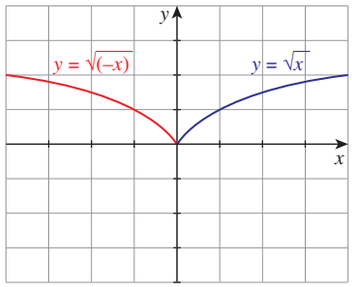
خاکہ 1.48.

منحنی $f(x)=x^2$ $-f(x)=-x^2$ کے لئے، لہٰذا x محور پر $y=x^2$ کا انعکاس $y=-x^2$ ہے۔ (شکل 1.48 دیکھیں)

مثال 1.6

$y^2=x$ اور $y^2=-x$ کی مثبت شاخوں پر غور کریں۔

11th_Maths_Vol 1_Chapter 1_Urdu Medium.indd 39 05-10-2021 3.03.27 PM

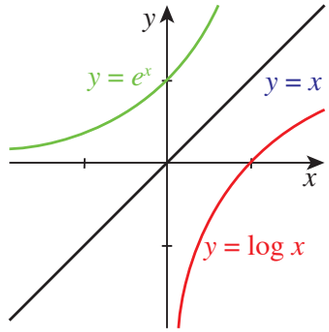


خاکہ 1.49

منحنی $f(x) = \sqrt{x}$ کے لئے ہمارے پاس $f(-x) = \sqrt{-x}$ اور $f(-x) = \sqrt{-x}$ جہاں $x < 0$ ہو یہ y محور پر $f(x) = \sqrt{x}$ کا انعکاس ہے۔

مثال 7.1 : تفاعلات پر غور کریں۔

(i) $y = e^x$ (ii) $y = \log_e x$



خاکہ 1.50

ہم جانتے ہیں کہ $y = \log_e x$ کا معکوس تفاعل $y = e^x$ ہے اور اس لئے $y = x$ ہے $y = \log_e x$ کا انعکاس $y = e^x$ ہے۔

ترجمہ (Translation)

ترسیم کا **ترجمہ**، ترسیم کی ایک عمودی یا افقی تبدیلی ہے جو مماثلتی ترسیم تیار کرتے ہیں۔

بائیں طرف منتقل ہونے کا سبب $c > 0$، $y = f(x + c)$

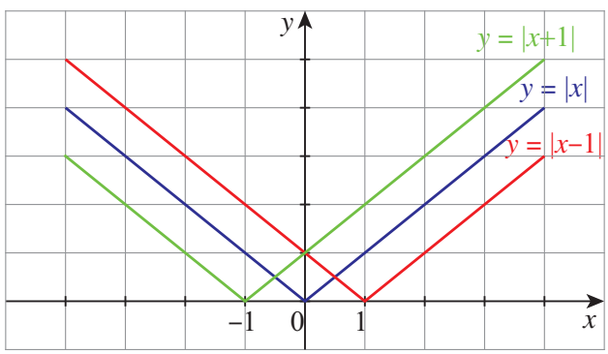
دائیں طرف منتقل ہونے کا سبب $c > 0$، $y = f(x - c)$

اوپری طرف منتقل ہونے کا سبب $d > 0$، $y = f(x) + d$ ترسیم

نیچے کی طرف منتقل ہونے کا سبب $d > 0$، $y = f(x) - d$

مثال 1.8 : تفاعلات پر غور کریں۔

(i) $f(x) = |x|$ (ii) $f(x) = |x - 1|$ (iii) $f(x) = |x + 1|$



خاکہ 1.51

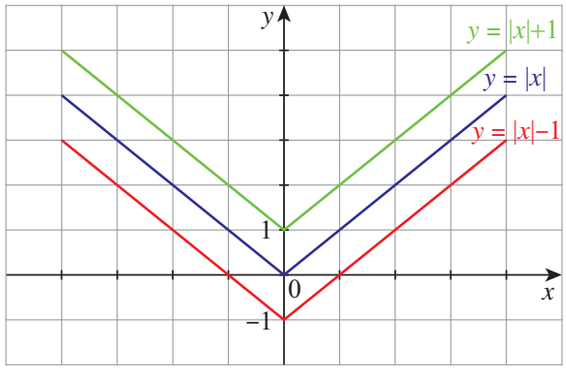
11th_Maths_Vol 1_Chapter 1_Urdu Medium.indd 40 05-10-2021 3.03.29 PM

$f(x) = |x - 1|$ کے سبب تفاعل کی ترسیم $f(x) = |x|$ کو دائیں کی طرف ایک اکائی کے لئے منتقل کرتا ہے۔

$f(x) = |x + 1|$ کے سبب تفاعل کی ترسیم $f(x) = |x|$ کو بائیں کی طرف ایک اکائی کے لئے منتقل کرتا ہے۔ (شکل 1.51 دیکھیں)

مثال 1.9 : تفاعلات غور کریں۔

$f(x) = |x| + 1$ (iii) $\quad f(x) = |x| - 1$ (ii) $\quad f(x) = |x|$ (i)



خاکہ 1.52

$f(x) = |x| - 1$ کے سبب تفاعل کی ترسیم $f(x) = |x|$ کو نیچے کی طرف ایک اکائی کے لئے منتقل کرتا ہے۔

$f(x) = |x| + 1$ کے سبب تفاعل کی ترسیم $f(x) = |x|$ کو اوپری طرف ایک اکائی کے لئے منتقل کرتا ہے۔

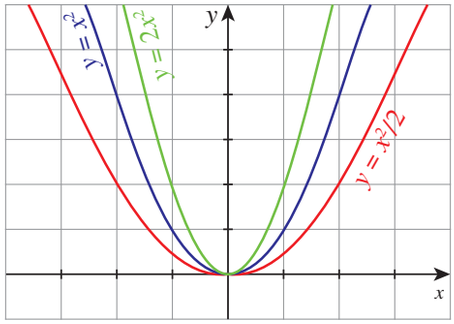
اِتساع (Dilation)

اتساع ایک تحویل ہے جس کی وجہ سے منحنی کھینچنا (پھیلنا) ہے یا دبتا (سکڑتا) ہے کسی تفاعل کو ایک مثبت مستقل سے ضرب دینے پر اس کے ترسیم کو عمودی جانب کھینچنا یا پھیلتا ہے۔ یعنی ترسیم x محور سے یا x محور کی طرف سے ہٹ جاتا ہے۔

اگر مثبت مستقل ایک سے زیادہ ہوتو، ترسیم x محور سے باہر کی طرف چلے جاتا ہے۔ اگر مثبت مستقل ایک سے کم ہو تو، ترسیم x محور کی طرف بڑھتا ہے۔

مثال 1.10 : تفاعلات غور کریں۔

$f(x) = 2x^2$ (iii) $\quad f(x) = \frac{1}{2}x^2$ (ii) $\quad f(x) = x^2$ (i)



خاکہ 1.53

$f(x) = \frac{1}{2}x^2$ کے سبب تفاعل کی ترسیم $f(x) = x^2$، x کی طرف پھیلنا ہے کیونکہ ضربی جز $\frac{1}{2}$ ہے۔جو ایک سے کم ہے۔

$f(x) = 2x^2$ کے سبب تفاعل کی ترسیم $f(x) = x^2$، y محور کی طرف سکڑتا ہے یہ ہے کہ x محور پر سے ہٹ جاتا ہے۔کیونکہ ضربی جز 2 ہے جو ایک سے زیادہ ہے۔ (شکل 1.53 دیکھیں)

مثال 1.11

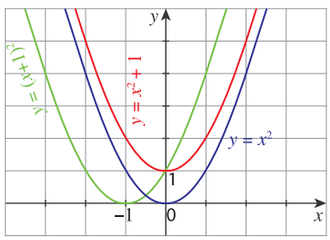
تفاعلات پر غور کریں۔

$f(x) = (x + 1)^2$ (iii) $\quad f(x) = x^2 + 1$ (ii) $\quad f(x) = x^2$ (i)

11th_Maths_Vol 1_Chapter 1_Urdu Medium.indd 41 05-10-2021 3.03.33 PM

وضاحت 1.11: تفاعلات پرغور کریں۔

(i) $f(x) = x^2$ (ii) $f(x) = x^2 + 1$ (iii) $f(x) = (x + 1)^2$.



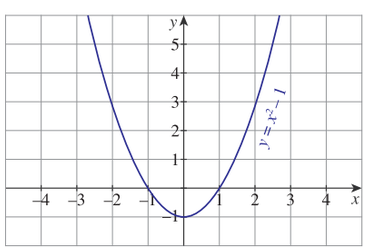
شکل 1.54

$f(x) = x^2 + 1$ کے سبب تفاعل کی ترسیم $f(x) = x^2$ کو اوپر کی طرف ایک اکائی کے لئے منتقل کرتا ہے۔

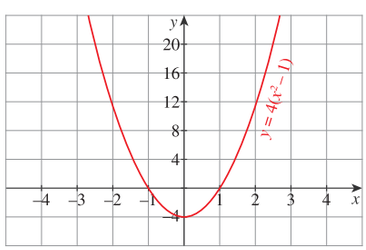
$f(x) = (x + 1)^2$ کے سبب تفاعل کی ترسیم $f(x) = x^2$ کو بائیں جانب ایک اکائی کے لئے منتقل کرتا ہے۔

(شکل 1.54 دیکھیں)

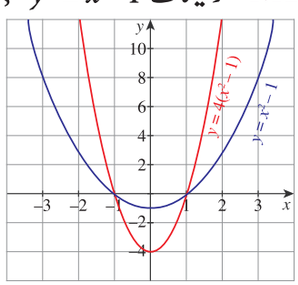
مثال 1.12: ترسیمات $y^2 = x^2 - 1$, $y = 4(x^2 - 1)$ اور $y = (4x^2) - 1$ کا موازنہ اور محاکمہ کریں۔



خاکہ 1.55



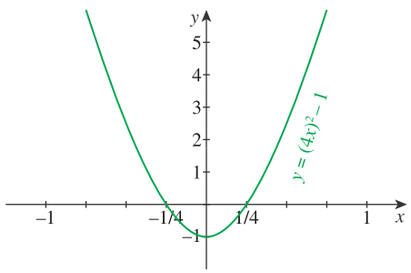
خاکہ 1.56



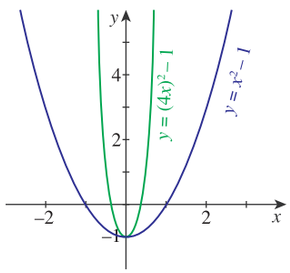
خاکہ 1.57

جب تک ہم y محور کے پیمانے کا موازنہ نہیں کرتے۔ ترسیمات 1.55 اور 1.56 ایک جیسے نظر آتے ہیں۔ شکل 1.56 میں پیمانہ چار گنا بڑا ہے۔ جو اصل تفاعل کی ضرب کو 4 سے عکاسی کرتا ہے۔ یہ اثر مختلف نظر آتا ہے جب تفاعلات کو اس پیمانے پر مرتسم کیا جاتا ہے۔ جیسا کہ شکل 1.57 میں ہے۔

شکل 1.58 میں $y = (4x)^2 - 1$ کی ترسیم دکھایا گیا ہے۔ کیا آپ شکل 1.55 اور شکل 1.58 کے درمیان فرق دیکھ سکتے ہیں؟ اس معاملے میں 4 کے اسی جز سے اب x اسکیل بدل گیا ہے، جیسا کہ تفاعل میں ہے۔ شکل 1.58 ۔ یہ دیکھنے کے لئے، نوٹ کریں کہ $x = ¼$ کو میں قائم مقام $(4x)^2 - 1$ کرنے سے $1^2 - 1$ حاصل ہوتا ہے۔ بالکل وہی جیسا کہ اصل تفاعل میں $x = 1$ کو قائم مقام کرنا ہے، (نقشہ 1.55 دیکھیں)۔ غور کریں کہ ایک ہی سیٹ (جیسا کہ شکل 1.59 میں) پر مرتسم کیا جاتا ہے۔ تو $y = (4x)^2 - 1$ پیرابولا بہت پتلا لگتا ہے یہاں x مقطوعات مختلف ہیں، جبکہ y مقطوعات یکساں ہیں۔



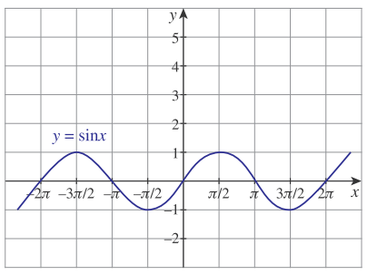
خاکہ 1.58



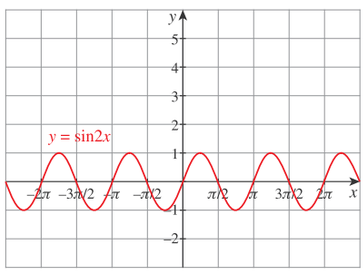
خاکہ 1.59

11 maths V unit 1 p 42 onwards
Tuesday, September 06, 2022 9:28:04 AM

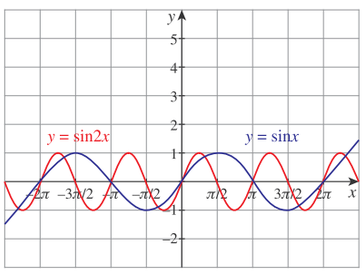
مثال 1.13: مثال 1.12 میں لاگو اس تصور کو استعمال کرتے ہوئے $y = \sin x$ اور $y = \sin 2x$ کے ترسیمات، اور ان کے مشترکہ ترسیمات کو شکل 1.60, 1.61 اور 1.62 میں دیئے گئے ہیں۔ $\sin x$ اور $\sin 2x$ کی کم اور زیادہ قیمتیں یکساں ہوتی ہیں۔ لیکن ان کے پاس مختلف x مقطوعات ہیں۔ $y = \sin x$ کے مقطوعات $\pm n\pi$ ہیں اور $y = \sin 2x$ کے لئے $\pm\frac{1}{2}n\pi$ ، $n \in \mathbb{Z}$ ہیں۔



خاکہ 1.60



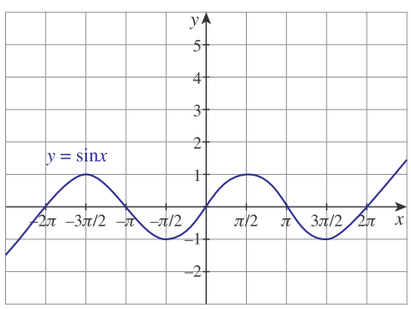
خاکہ 1.61



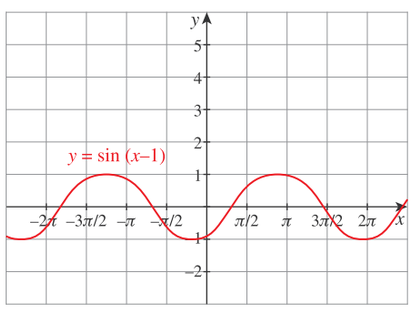
خاکہ 1.62

سیکشن کے آغاز میں ہم نے $y = \sin 2x(x-1) + 3$ ترسیم کھینچنے کے بارے میں بات کی۔ اب ہم منحنی کھینچنے کے لئے اچھی طرح سے لیس ہیں۔ اور یہاں تک کہ ہم زیادہ پیچیدہ منحنی کو کھینچ سکتے ہیں۔

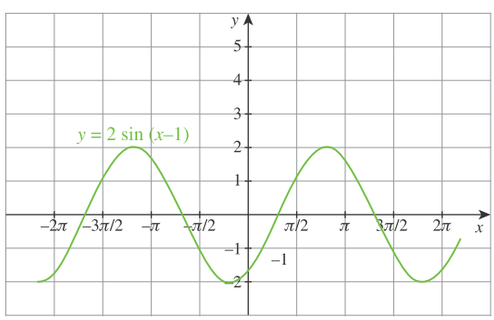
مثال 1.14: آیئے اب ہم ترسیم $y = \sin 2x(x-1) + 3$ کھینچے۔ یہ واضح ہے کہ ترجمہ اور اِتساع کا استعمال کرتے ہوئے منحنی کو سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ تو ہم پہلے $y = \sin x$ کھینچتے ہیں۔ اس سے منحنی $y = \sin(x-1)$ کھینچنا آسان ہے، پھر $y = 2\sin(x-1) + 3$ اور آخر میں $y = 2\sin(x-1) + 3$ کھینچیں۔ (شکلیں 1.63 سے 1.66 تک دیکھیں)



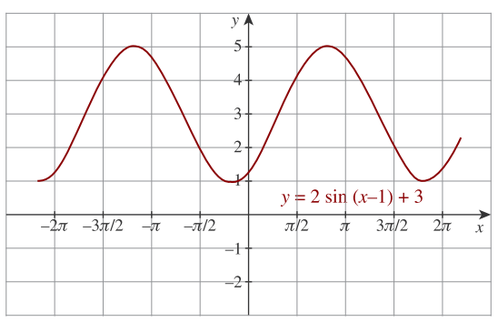
خاکہ 1.63



خاکہ 1.64



خاکہ 1.65



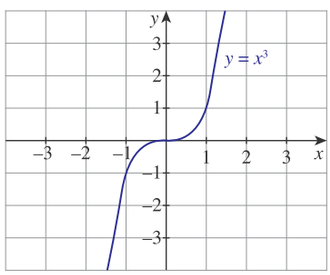
خاکہ 1.66

11 maths V unit 1 p 42 onwards
Tuesday, September 06, 2022 9:28:05 AM

مشق 1.4

1۔ شکل 1.67 میں دی گئی منحنی $y = x^3$ کے لئے کھینچیں۔

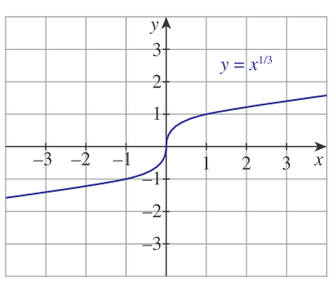
ایک ہی پیمانہ کے ساتھ (i) $y = -x^3$ (ii) $y = x^3 + 1$ (iii) $y = x^3 - 1$ (iv) $y = (x+1)^3$



خاکہ 1.67

2۔ شکل 1.68 میں منحنی $y = x^{(\frac{1}{3})}$ کے لئے کھینچیں۔

(i) $y = -x^{(\frac{1}{3})}$ (ii) $y = x^{(\frac{1}{3})} + 1$ (iii) $y = x^{(\frac{1}{3})} - 1$ (iv) $y = (x+1)^{(\frac{1}{3})}$



خاکہ 1.68

3۔ ایک ہی محدود مسطح پر مرتسم کریں۔ $f(x) = x^3$ معلوم کریں، اور $g(x) = \sqrt[3]{x}$ اسی مسطح پر بھی مرتسم کریں۔
$f \circ g$ اپنے نتائج کی وضاحت کریں۔

4۔ $y = x^2$ ترسیم سے تفاعل $y = 3(x-1)^2 + 5$ کو ترسیم حاصل کرنے کے لئے اقدامات لکھیں۔

5۔ منحنی $y = \sin x$ سے تفاعل کو مرتسم کریں۔

(i) $y = \sin(-x)$ (ii) $y = -\sin(-x)$ (iii) $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ جو کہ $\cos x$ ہے۔
(iv) $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ جو کہ $\cos x$ بھی ہے (علم مثلث کا حوالہ دیں)

6۔ منحنی $y = x$ کی طرف سے کھینچئے۔

(i) $y = -x$ (ii) $y = 2x$ (iii) $y = x + 1$ (iv) $y = \frac{1}{2}x + 1$ (v) $2x + y + 3 = 0$.

7۔ منحنی $y = |x|$ سے کھینچئے۔

(i) $y = |x-1| + 1$ (ii) $y = |x+1| - 1$ (iii) $y = |x+2| - 3$.

8۔ منحنی $y = \sin x$ سے کھینچئے (اشارہ : $\sin(-x) = -\sin x$)

11 maths V unit 1 p 42 onwards
Tuesday, September 06, 2022 9:28:05 AM

گیندیں اور رنز

کیا جشن ہے! کیا تعلق ہے!! کیا تفاعل ہے!!!



BATTING BLASTERCLASS

Rohit's Joint Fastest T20 Ton Off 35 Balls Sinks Lanka

Ruchir.Mishra @timesgroup.com

Indore: A belter of a wicket, short boundaries and an average bowling attack. An in-form Indian team couldn't have asked for a perfect T20 recipe than this.

Rohit Sharma (118, 43b, 12x4, 10x6) and Lokesh Rahul (89, 49, 5x4, 8x6) feasted on the Sri Lankan bowlers with some breath-taking stroke-play. Rohit blasted a record equalling hundred, while Rahul missed out on his second T20 ton. The duo had a record Indian opening stand—fourth overall—as India posted 260-5, the joint second highest total.

India then wrapped up the series without much discomfort with an 88 run victory after restricting Sri Lanka to 172-9 in 17.2 overs. The injured Angelo Mathews didn't come out to bat.

Sri Lanka kept the contest alive with an improved batting performance. Kusal Perera and Upul Tharanga took India's wrist spinners Yuzvendra Chahal and Kuldeep Yadav to the cleaners during their 100-run second wicket stand, which came off just 88 balls. Unlike Cuttack, where they managed to overcome the dew problem, Chahal and Yadav struggled but still managed to get wickets in the middle overs.

91.52 Percent of runs scored scored in boundaries by Rohit. 106 runs of his 118 were scored by hitting fours or sixes. He is the third player to score 100 or more through boundaries after Aaron Finch and Glenn Maxwell.

By scoring a hundred in the second T20 International against Sri Lanka in Indore on Friday, Rohit Sharma became the first cricketer to score a hundred in every format in a series

ROHIT SHARMA

RUNS	BALLS	4s	6s	DOTS	SINGLES
118	43	12	10	8	10

10 Sixes hit by Rohit is the most by an Indian batsman in a T20 innings. He beat the record of Yuvraj Singh, who had hit seven sixes against England in Durban in 2007.

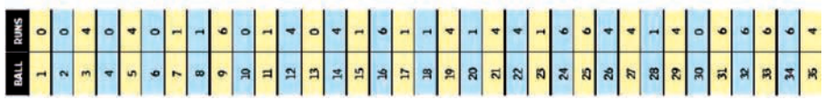
It was just a kind of momentum

SCOREBOARD

INDIA
R Sharma c Dananjaya b Chameera 118, L Rahul c Dickwella b Pradeep 89, MS Dhoni b Perera 24, H Pandya c Samarawickrama b Pradeep 10, S Iyer lbw Perera 0, M Pandey not out 1, D Karthik not out 5.
Extras (lb1, w6) 9
Total (5 wickets, 20 overs) 260
Fall of wickets: 1-165, 2-243, 3-253, 4-254, 5-255
Bowling: Mathews 2.2-0-16-0, Chameera 4-0-45-1, Pradeep 4-0-61-2 (w2), Dananjaya 3.4-0-49-0 (w2), Perera 4-0-49-2 (w2), De Silva 1-0-15-0, Gunaratne 1-0-21-0

SRI LANKA
N Dickwella c Pandya b Unadkat 25, U Tharanga c and b Chahal 47, K Perera c Pandey b Yadav 77, T Perera c Panya b Yadav 0, D Gunaratne st Dhoni b Yadav 0, S Samarawickrama st Dhoni b Chahal 5, P de Silva b Chahal 1, A Dhananjaya c Pandey b Chahal 5, P Chameera b Pandya 3, A Pemarathna not out 0. A Mathews absent hurt.
Extras: 9 (lb2, w 7). Total 172 all out in 17.2 overs.
Fall of wickets: 1-38, 2-148, 3-155, 4-156, 5-161, 6-162, 70164, 8-170, 9-172.
Bowling: J Unadkat 3-0-22-1, J Bumrah 3-0-21-0 (w2), K Yadav 4-0-52-3 (w1), H Pandya 2.2-0-23-1, Y Chahal 4-0-52-4 (w4).

Highest Totals In Completed T20 Innings



Source: Times of India

1۔ مندرجہ بالا اعداد و شمار کی تشریح اس طرح کریں۔

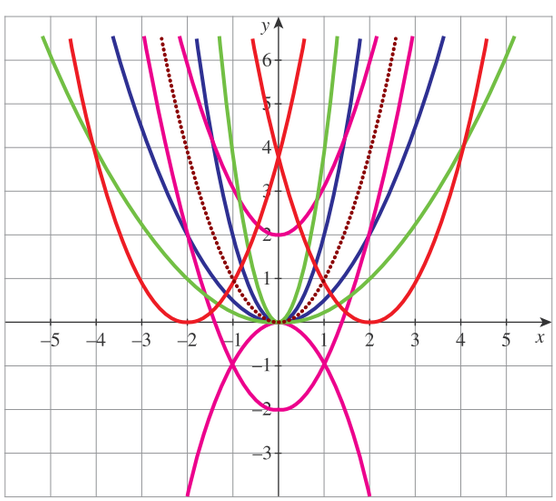
(i) ایک تعلق

(ii) ایک تفاعل

(iii) ایک بروں تفاعل

(iv) کیا آپ اعداد و شمار کو ایک تا ایک تفاعل بنا سکتے ہیں؟ اگر نہیں، تو کیوں؟

2۔ شکل 1.69 میں منحنیوں اور قاعدہ کے منحنی $y = x^2$ کے متعلقہ مساوات کو پیمانہ دیکھ کر شناخت کریں۔



خاکہ 1.69

11 maths V unit 1 p 42 onwards
Tuesday, September 06, 2022 9:28:05 AM

مشق 1.5

صحیح یا مناسب جواب کا انتخاب کریں۔

1۔ اگر $A = \{(x, y) : y = e^x, x \in R\}$ اور $B = \{(x, y) : y = e^{-x}, x \in R\}$ تو $n(A \cap B)$ ہے۔

(1) لامتناہی (2) 0 (3) 1 (4) 2

2۔ اگر $A = \{(x, y) : y = \sin x, x \in R\}$ اور $B = \{(x, y) : y = \cos x, x \in R\}$ پھر $A \cap B$ مشتمل ہے۔

1۔ کوئی عنصر نہیں (2) کئی لامتناہی عناصر (3) صرف ایک عنصر (4) یقین نہیں کیا جا سکتا۔

3۔ تعلق نے ایک سیٹ $A = \{0, -1, 1, 2\}$ پر xRy کی وضاحت کی گی ہے، اگر $|x^2 + y^2| \leq 2$, تو مندرجہ ذیل میں سے کون سا صحیح ہے؟

(1) $R = \{(0,0), (0,-1), (0,1), (-1,0), (-1,1), (1,2), (1,0)\}$

(2) $R^{-1} = \{(0,0), (0,-1), (0,1), (-1,0), (1,0)\}$

(3) R کا علاقہ $\{0, -1, 1, 2\}$ ہے۔

(4) R کی وسعت $\{0, -1, 1\}$ ہے۔

4۔ اگر $f(x) = |x-2| + |x+2|, x \in \mathbb{R}$ تو

(1) $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{if} \quad x \in (\infty, \ -2] \\ 4 & \text{if} \quad x \in (-2, 2] \\ 2x & \text{if} \quad x \in (2, \infty) \end{cases}$

(2) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{if} \quad x \in (\infty, \ -2] \\ 4x & \text{if} \quad x \in (-2, 2] \\ -2x & \text{if} \quad x \in (2, \infty) \end{cases}$

(3) $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{if} \quad x \in (\infty, \ -2] \\ -4x & \text{if} \quad x \in (-2, 2] \\ 2x & \text{if} \quad x \in (2, \infty) \end{cases}$

(4) $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{if} \quad x \in (\infty, \ -2] \\ 2x & \text{if} \quad x \in (-2, 2] \\ 2x & \text{if} \quad x \in (2, \infty) \end{cases}$

5۔ فرض کریں کہ R ایک تمام حقیقی اعداد کا مجموعہ ہے، مسطح $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ کے درجہ ذیل تحتی مجموعے پر غور کریں۔

$S = \{(x, y) : y = x + 1$ اور $0 < x < 2\}$ اور $T = \{(x, y) : x - y$ ایک سالم عدد ہے $\}$

پھر مندرجہ ذیل میں سے کون سا صحیح ہے؟

(1) T ایک معادلت کا تعلق ہے، لیکن S ایک معادلت کا تعلق نہیں ہے۔

(2) نہ ہی S اور نہ ہی T سے معادلت کا تعلق ہے۔

(3) S اور T دونوں معادلت کا تعلق ہیں۔

(4) S ایک معادلت کا تعلق ہے، لیکن T ایک معادلت کا تعلق نہیں ہے۔

6۔ فرض کریں کہ A اور B عالمگیر سیٹ N جو طبعی اعداد کا مجموعہ ہے۔ تو $A' \cup [(A \cap B) \cup B']$ یہ ہیں۔

(1) A (2) A' (3) B (4) $\mathbb{N}$

7۔ ریاضی اور کیمیاء دونوں مضامین لینے والے طلباء کی تعداد 70 ہے۔ یہ ریاضی میں 10% اندراج اور کیمیا میں 14% اندراج کی نمائندگی کرتا ہے۔ طلباء کی تعداد ان دونوں مضامین میں سے کم از کم ایک لینے والے یہ ہیں۔

(1) 1120 (2) 1130 (3) 1100 (4) ناکافی اعداد و شمار

11 maths V unit 1 p 42 onwards
Tuesday, September 06, 2022 9:28:06 AM

8۔ اگر $n((A \times B) \cap (A \times C)) = 8$ اور $n(B \cap C) = 2$ ہوتو **n(A)** ہے۔

(1) 6 (2) 4 (3) 8 (4) 16

9۔ اگر $n(A) = 2$ اور $n(B \cup C) = 3$ ہوتو $n[(A \times B) \cup (A \times C)]$ ہے۔

(1) 2^3 (2) 3^2 (3) 6 (4) 5

10۔ اگردوسیٹ A اور B میں 17 عناصرمشترک ہیں۔توسیٹ $A \times B$ اور $B \times A$ میں مشترک عناصر کی تعداد ہے۔

(1) 2^{17} (2) 17^2 (3) 34 (4) ناکافی اعداد و شمار

11۔ غیرخالی سیٹ A اور B کے لئے، اگر $A \subset B$ ہوتو $(A \times B) \cap (B \times A)$ اس کے مساوی ہیں۔

(1) $A \cap B$ (2) $A \times A$ (3) $B \times B$ (4) ان میں سے کوئی نہیں

12۔ 3 عناصر پر مشتمل مجموعہ پر تعلقات کی تعداد

(1) 9 (2) 81 (3) 512 (4) 1024

13۔ فرض کریں کہ ایک مجموعہ X پر R کوایک سے زیادہ عنصر کے ساتھ عالمگیر تعلق ہے تو R ہے۔

(1) مضطراری نہیں (2) متشاکل نہیں (3) منتقلی (4) مندرجہ بالا میں سے کوئی نہیں

14۔ فرض کریں کہ $X = \{1, 2, 3, 4\}$ اور $R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (3,3), (2,1), (3,1), (1,4), (4,1)\}$ ہوتو R ہے۔

(1) مضطراری (2) متشاکل (3) منتقلی (4) معادلت

15۔ $\frac{1}{1-2\sin x}$ تفاعل کا وسعت ہے۔

(1) $(\infty, -1) \cup (\frac{1}{3}, \infty)$ (2) $(-1, \frac{1}{3})$ (3) $[-1, \frac{1}{3}]$ (4) $(\infty, -1] \cup [\frac{1}{3}, \infty)$.

16۔ $f(x) = |\lfloor x \rfloor - x|, x \in \mathbb{R}$ تفاعل کا وسعت ہے۔

(1) $[0, 1]$ (2) $[0, \infty)$ (3) $[0, 1)$ (4) $(0, 1)$

17۔ اصول $f(x) = x^2$ ایک دوربطی ہے، اگرعلاقہ اورمعاون علاقہ کے ذریعہ دیا گیا ہے۔

(1) $\mathbb{R}, \mathbb{R}$ (2) $\mathbb{R}, (0, \infty)$ (3) $(0, \infty), \mathbb{R}$ (4) $[0, \infty), [0, \infty)$

18۔ عناصر پر مشتمل ایک سیٹ سے n عناصر پر مشتمل ایک سیٹ کے مستقل تفاعلات کی تعداد ہے۔

(1) mn (2) m (3) n (4) $m + n$

19۔ $f : [0, 2\pi] \to [-1, 1]$ تفاعل کی وضاحت $f(x) = \sin x$ سے کی گئی ہے۔

(1) ایک-تا-ایک (2) بروں (3) دوربطی (4) وضاحت نہیں کی جاسکتی۔

20۔ اگر $f : [-3, 3] \to S$ کی طرف سے بیان کردہ تفاعل $f(x) = x^2$ بروں ہےتو S ہے۔

(1) $[-9, 9]$ (2) $\mathbb{R}$ (3) $[-3, 3]$ (4) $[0, 9]$

21۔ فرض کریں کہ $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$ اور

$f = \{(1, a), (4, b), (2, c), (3, d), (2, d)\}$ ہوتو f ہے۔

(1) ایک-تا-ایک تفاعل (2) ایک بروں تفاعل (3) تفاعل جوایک تاایک نہیں (4) ایک تفاعل نہیں

11 maths V unit 1 p 42 onwards
Tuesday, September 06, 2022 9:28:06 AM

22۔ $f(x) = \begin{cases} x & \text{اگر } x < 1 \\ x^2 & \text{اگر } 1 \le x \le 4 \\ 8\sqrt{x} & \text{اگر } x > 4 \end{cases}$ کا معکوس ہے۔

(1) $f^{-1}(x) = \begin{cases} x & \text{اگر } x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{اگر } 1 \le x \le 16 \\ \frac{x^2}{64} & \text{اگر } x > 16 \end{cases}$

(2) $f^{-1}(x) = \begin{cases} -x & \text{اگر } x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{اگر } 1 \le x \le 16 \\ \frac{x^2}{64} & \text{اگر } x > 16 \end{cases}$

(3) $f^{-1}(x) = \begin{cases} x^2 & \text{اگر } x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{اگر } 1 \le x \le 16 \\ \frac{x^2}{64} & \text{اگر } x > 16 \end{cases}$

(4) $f^{-1}(x) = \begin{cases} 2x & \text{اگر } x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{اگر } 1 \le x \le 16 \\ \frac{x^2}{8} & \text{اگر } x > 16 \end{cases}$

23۔ فرض کریں کہ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = 1 - |x|$. کی وضاحت سے کی گئی ہو تو f کا وسعت ہے۔

(1) $\mathbb{R}$ (2) $(1, \infty)$ (3) $(-1, \infty)$ (4) $(\infty, \ 1]$

24۔ تفاعل $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ کی وضاحت $f(x) = \sin x + \cos x$ سے کی گئی ہے یہ تفاعل ہے۔

(1) ایک طاق تفاعل (3) ایک جفت تفاعل

(2) نہ طاق تفاعل اور نہ ہی جفت تفاعل (4) دونوں طاق تفاعل اور جفت تفاعل

25۔ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ کی وضاحت $f(x) = \dfrac{(x^2 + \cos x)(1 + x^4)}{(x - \sin x)(2x - x^3)} + e^{|x|}$

(1) ایک طاق تفاعل (3) ایک جفت تفاعل

(2) نہ طاق تفاعل اور نہ ہی جفت تفاعل (4) دونوں طاق تفاعل اور جفت تفاعل

Summary خلاصہ

اس باب سے ہم نے حاصل کیا ہوا علم

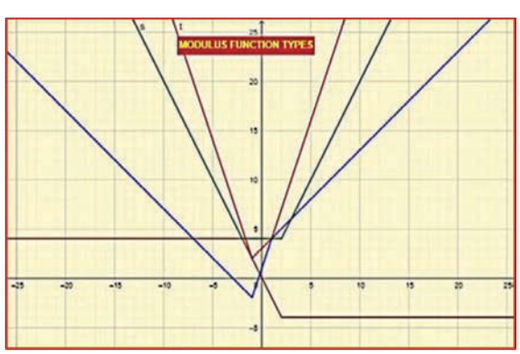
- مجموعہ
  - تحتی مجموعہ، بالاسیٹ، ادنیٰ تحتی محموعہ، واجب تحتی سیٹ، غیر واجب تحتی سیٹ
  - خالی سیٹ، قوتی سیٹ، ایک عنصری سیٹ، محدود سیٹ، لامحدود سیٹ
  - ایک سیٹ کی درجاتیت
  - اتحاد، تقاطع، اتمہ، فرق سیٹ،
  - ڈی مارگن کے قوانین اور خصوصیات
  - کارتیسی حاصل ضرب
- وقفے
  - مستقلات، تابع اور آزاد متغیرات
  - کھلا، بند، محدود اور لامحدود وقفے اور محلے

11 maths V unit 1 p 42 onwards
Tuesday, September 06, 2022 9:28:06 AM

- تعلقات
  - تعلق کا علاقہ اور وسعت
  - انتہائی تعلقات (خالی اور عالمگیر)
  - ایک تعلق کا معکوس
  - مضطراری، متشاکلی، منتقلی، معادلت کا تعلق
- تفاعلات
  - تعریف، علاقہ، معاون علاقہ، وسعت، خیال، پیش خیالی
  - جدولی، ترسیمی، تجزیاتی اور ٹکڑوں کی نمائندگی
  - تمثال تفاعل، مستقل تفاعل، صفر تفاعل، معین وضروب تفاعل، سائن تفاعل، سب سے بڑا سالم عددی تفاعل، سب سے چھوٹا سالم عددی تفاعل
  - ایک ربطی، پر ربطی اور دور ربطی تفاعلات
  - عمودی اور افقی ٹیسٹ
  - تفاعلات کا اجزائے ترکیب، تفاعل کا معکوس
  - حقیقی قابل مقدر تفاعلات کا جمع اور حاصل ضرب
  - کثیر رقمی تفاعل، خطی تفاعل، قوت نما تفاعل، لوگارتمی تفاعل، ناطق تفاعل، مقلوب تفاعل۔
  - طاق اور جفت تفاعلات
- ترسیمی تفاعلات
  - انعکاس، ترجمہ، اِتساع (Dilation)
  - چند کا ترسیم کھینچنا پیچیدہ تفاعل لگتا ہے۔

ICT کارنر

متوقع نتائج ⇐



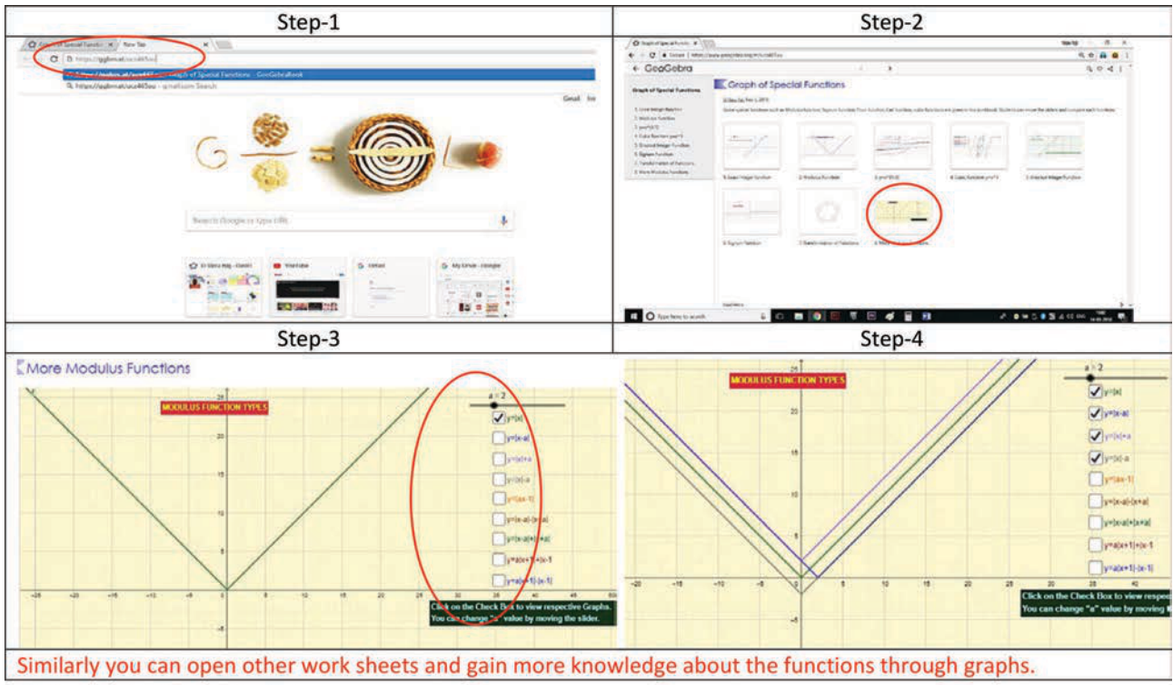
مرحلہ 1 : براؤزر کھولیں اور نیچے دیا گیا URL لنک ٹائپ کریں یا QR کوڈ اسکین کریں۔

مرحلہ 2 : Graph of special function نامی ایک ورک لنک کھل جائے گا۔ تفاعل اور ترسیم سے متعلق اس ورک بک 7 میں ورک شیٹ دی گئی ہیں۔ More Modulus Functions نامی ورک شیٹ منتخب کریں۔

مرحلہ 3 : ورک شیٹ کے دائیں جانب کئی معین وضروب کے تفاعلات (Modulus Function) کے لئے چیک باکس ہیں۔

مرحلہ 4 : آپ ترسیم دیکھنے کے لئے کی بھی چیک باکس پر کلک کر سکتے ہیں۔ تفاعل کو تبدیل کرنے اور مشاہدہ کرنے کے لئے اب مزید سلائڈر کو حرکت کریں۔

11 maths V unit 1 p 42 onwards
Tuesday, September 06, 2022 9:28:06 AM

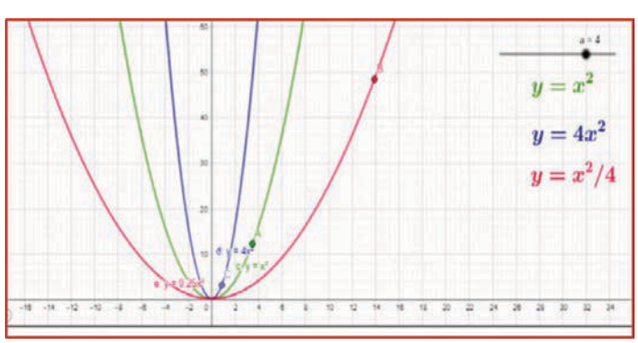


*Pictures are only indicatives.

Browse in the link Graph of Special Functions: https://ggbm.at/ucz465auor Scan the QR Code.

1(b) کارز ICT

متوقع نتائج ⇐



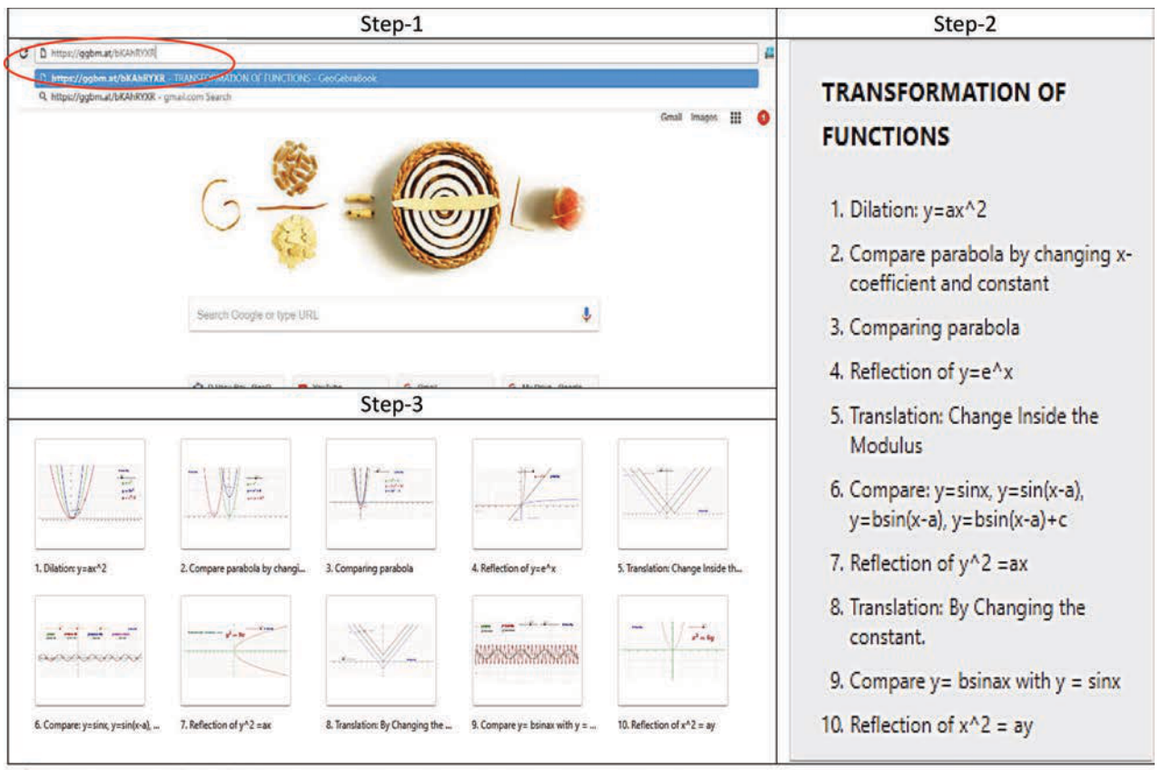
مرحلہ 1 : براؤزر کھولیں اور نیچے دیا گیا لنک URL ٹائپ کریں (یا) QR کوڈ اسکین کریں۔

مرحلہ 2 : TRANSFORMATION OF FUNCTIONS نامی جیوجبرا ورک بک کھلے گا۔ اس میں اپنے سبق سے متعلق 10 ورک شیٹ موجود ہیں۔

11 maths V unit 1 p 42 onwards
Tuesday, September 06, 2022 9:28:07 AM

مرحلہ 3 : Translation، Reflection اور Dilation نامی Transformations کے تجزیہ کے لئے
ایک ایک ورک شیٹ منتخب کریں۔

اسی طرح Sine functions کے موازنہ کے لئے ایک ورک شیٹ ہے۔ آپ کو ورک شیٹ کے سلائڈر کو حرکت دینا ہے اور موازنہ کرنا ہے۔



*Pictures are only indicatives.

Browse in the link Transformation of Functions: https://ggbm.at/bKAhRYXR

11 maths V unit 1 p 42 onwards
Tuesday, September 06, 2022 9:28:07 AM

باب 2 بنیادی الجبرا (Basic Algebra)

میں اسے دیکھتا ہوں، مگر میں اس پر بھروسہ نہیں کرتا۔ رچرڈ ڈیڈے کینڈ

I see it but I dont believe it. **Richard Dedekind**

2.1۔ تعارف

الجبراء ریاضی کی ایک شاخ ہے جس میں کسی مقدار کے درمیان تعلقات کے اظہار کو علامتوں کے استعمال سے ان مقداروں کی نمائندگی کی جاتی ہے۔ ان علامتوں کو متغیر کہا جاتا ہے۔ اس جماعت میں ہم صرف حقیقی اعداد کو ظاہر کرنے کے لئے متغیرات کو استعمال کریں گے۔ اعداد کے حساب کی طرح ہم متغیرات کو بھی استعمال کرتے ہوئے حساب لگا سکتے ہیں۔ یعنی جملہ میں متغیرات کو حقیقی اعداد سے تبدیل کرتے ہوئے نتیجہ بھی حقیقی عدد حاصل کر سکتے ہیں جب بھی حسابی بیان یا مقدار کو متغیرات کی لحاظ سے ظاہر کریں، تو ان متغیرات کے لئے مخصوص عدد قیمتی درج کرنا ممکن ہے۔ یہ الجبراء کو ایک طاقتور آلہ بناتا ہے۔ نہ صرف ریاضی کے اندر، بلکہ دیگر شعبوں اور حقیقی زندگی میں بھی الجبرا کا مضمون بہت وسیع ہے۔ حقیقی اعداد کا تصور تمام ریاضی کے لئے بنیادی ہے۔ حقیقی عددی نظام صرف انیسویں صدی میں اچھی طرح سے سمجھا گیا تھا۔ ناطق نمبروں میں توسیع کی ضرورت ریاضی کی تاریخ میں بہت پہلے کیا جانے لگا۔ فیثاغورث جانتے تھے کہ $\sqrt{2}$ کوئی ناطق عدد نہیں ہے۔ کچھ غیر ناطق اعداد کی تصنیف شُلبہ سترا (Shulbha Sutras) میں پائے جا سکتے ہیں، جو تقریباً 800 BC(BCE) کا ہے۔ آریہ بھٹا (550 -476) نے π کی تقریبی قیمت دریافت کی تھی۔



Richard Dedekind
(1831-1916)
رچرڈ ڈیڈے کینڈ

برہما گپتا (670 -598) اور بھاسکر آچاریہ (1185-1114)،
جیسے ہندوستانی ریاضی دانوں نے حقیقی عددی نظام اور الجبراء کو سمجھنے میں اپنا حصہ پیش کیا تھا۔ برہما گپتا نے مثبت اور منفی دونوں جذروں کے لئے عام دودرجی مساوات کو حل کیا تھا۔ بھاسکر آچاریہ نے ایک سے زیادہ نامعلوم کے ساتھ دو درجی مساوات کو حل کیا اور منفی اور غیر ناطق حل تلاش کئے۔ سب سے اہم حقیقی عدد صفر ہندوستانیوں کی شراکت تھی۔

رینے ڈیکارٹے (1650-1596) نے ''حقیقی'' کی اصطلاح متعارف کرائی، تاکہ ایک کثیر رقمی کی جذروں کو غیر حقیقی جذر سے الگ کیا جا سکے۔ رچرڈ ڈیڈے کینڈ (1916-1831) کی وجہ سے حقیقی عددی نظام کے بیان کی تشریح ہوئی۔

سیکھنے کے مقاصد:

اس باب کی تکمیل پر طلباء ذیل کی باتوں کو سمجھیں گے۔

- حقیقی اعداد اور ان کی خصوصیات کا تصور
- مطلق قیمت، کثیر رقمیات، قوت نما، جذری، لوگارتم (ان تصورات پر مشتمل ایک متغیر والے تفاعلات)
- مساوات و نامساوات کا حل کیسے کیا جائے جس میں مندرجۂ بالا تفاعلات شامل ہو۔
- دو متغیرات پر مشتمل خطی مساوات اور کارتیسی مستوی ترسیمات کے حل کی نمائندگی کس طرح کیا جائے۔

11 maths v1 unit 2 UM algebra
Tuesday, September 06, 2022 9:55:25 AM

2.2۔ حقیقی اعداد کا نظام (Real number system)

سب سے پہلے ہم اعادہ کریں گے کہ حقیقی عددی نظام کا وجود کیسے ہوا۔ ہم طبعی اعداد $\mathbb{N}$ سے شروع کریں گے۔

2.2.1۔ ناطق اعداد (Rational numbers)

غور کریں $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ شئے کی گنتی کے لئے کافی ہے۔نقصان یا قرضہ کو برتنے کے لئے ہم $\mathbb{N}$ کو سالم اعداد $\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ تک طویل کرتے ہیں، جس میں طبعی اعداد و صفر اور طبعی اعداد کے منفیات شامل ہوتے ہیں۔ ہم $\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$ کو صحیح اعداد کا مجموعہ کہتے ہیں اور اسے $\mathbb{W}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ غور کریں کہ یہ $\mathbb{N}$ سے صرف ایک عنصر سے مختلف ہے اور وہ صفر کہلاتا ہے۔اب ہم تصور کریں کہ ایک کیک کو پانچ مساوی حصوں میں تقسیم کرتے ہیں جو $5x = 1$ کے برابر ہے، لیکن اس مساوات کو $\mathbb{Z}$ کے دائرے حل کے اندر حل نہیں کیا جاسکتا۔ لہذا ہم نے $\mathbb{Z}$ کو مجموعہ $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$ کے تناسب سے بڑھا دیا ہے۔ اس لئے ہم ہر ایک $x \in \mathbb{Q}$ کو ناطق عدد رکھیں گے۔ناطق اعداد کی چند مثالیں یہ ہیں۔

$$-5,\ \frac{-7}{3},\ 0,\ \frac{22}{7},\ 7,\ 12.$$

ہم نے گذشتہ جماعتوں میں دیکھا کہ ناطق اعداد بالکل اختتام پذیر اور لامحدود متواتر اعشاریہ کا مجموعہ ہے۔ مثال کے طور پر

$$-5.0,\ -2.333\cdots,\ \frac{25}{99} = 0.252525\cdots,\ \frac{2}{3} = 0.66666\cdots, 7.14527836231231231\cdots$$

ناطق اعداد ہیں۔

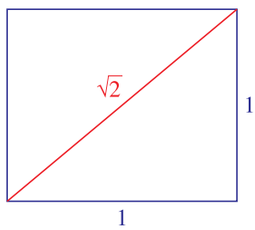
2.2.2۔ عددی خط (The Number Line)

آیئے ہم ''عددی خط'' کا اعادہ کریں۔مبداء کے ساتھ یہ ایک افقی خط ہے۔ '0' کی نمائندگی کرنے کے لئے اور ایک نقطہ 1 کی نمائندگی کے لئے '0' کے دائیں طرف جانب نشان لگایا جاتا ہے۔0 سے 1 تک کے فاصلے کی لمبائی ایک اکائی کی وضاحت کرتا ہے۔ اب 2 اکائی 1 کے دائیں جانب ڈالیں اور اسی طرح کسی بھی مثبت ناطق اعداد x کو '0' کے دائیں جانب اور x اکائی کے فاصلہ میں ڈالتے ہیں۔ اس کے علاوہ ہم ایک منفی ناطق اعداد $-r, r > 0$ کو 0 کے بائیں جانب x اکائی پر نوٹ کریں کوئی بھی $x, y \in \mathbb{Q}$ اگر $x>y$ ہو تو x,y کے بائیں جانب ہوگا۔ اور $x < \frac{x+y}{2} < y$ لہذا کسی بھی دو علاحدہ ناطق اعداد کے درمیان اور بھی ناطق اعداد پائے جاتے ہیں۔

سوالات:

کیا ہم نے صحیح اعداد کے خط کو ناطق اعداد سے پُر کیا ہے؟

مندرجۂ بالا سوال کا جواب ''نہیں'' ہے۔جیسا کہ درج ذیل وضاحت ہوتی ہے۔ایک مربع پر غور کریں،جس کی لمبائی 1 اکائی ہے۔پھر فیثا غورث کے نظریہ کے مطابق اس کی وتر کی لمبائی $\sqrt{2}$ یونٹ (اکائی) ہے۔



شکل 2.1

11 maths v1 unit 2 UM algebra
Tuesday, September 06, 2022 9:55:25 AM

2.2.3۔ غیر ناطق اعداد (Irrational Numbers)

مسئلہ 2.1 : $\sqrt{2}$ ایک ناطق عدد نہیں ہے۔

ثبوت: فرض کریں $\sqrt{2}$ ایک ناطق عدد ہے اور $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$، جہاں m اور n مثبت سالم اعداد ہیں جب کہ کوئی مشترکہ جزوضربی 1 سے بڑا نہیں ہوگا۔ پھر، ہمارے پاس $m^2 = 2n^2$ جس کا مطلب m^2 ایک جفت ہے، لہٰذا m بھی جفت ہے۔

$m = 2k$، پھر ہمارے پاس $2n^2 = 4k^2$ ہے، جس سے $n^2 = 2k^2$ حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح 'n' بھی جفت ہوگا۔

مندرجۂ ذیل کے مطابق m اور n مثبت عدد ہیں جو مشترکہ جزوضربی 2 رکھتے ہیں۔ اس طرح ہم ایک تضاد پر پہنچتے ہیں۔

لہٰذا $\sqrt{2}$ ایک غیر ناطق عدد ہے۔

تبصرہ : (Remark)

(i) نوٹ کریں مذکورہ بالا ثبوت میں ہم نے اس کے برعکس فرض کیا ہے جو ہم ثابت کرنا چاہتے تھے اور ہم ایک تضاد پر پہنچے۔ ثبوت کے اس طریقے کو ''تضاد ثبوت'' کہا جاتا ہے۔

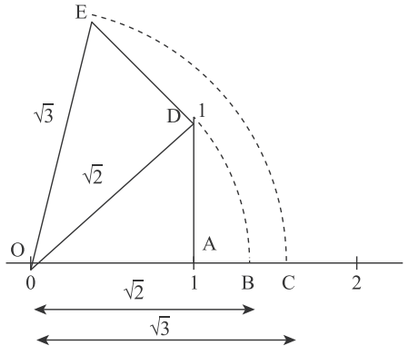
(ii) عددی خط پر ایسے نقاط ہیں جن کی نمائندگی ناطق عدد سے نہیں ہوتی۔

(iii) ہم ان اعداد کو عددی خط کہتے ہیں جو ناطق اعداد کے نظیری نہیں ہوتے۔ غیر ناطق اعداد کے طور پر غیر ناطق اعداد کے تمام مجموعے $\mathbb{Q}'$ سے ظاہر ہوتے ہیں (عددی خط کے لئے شکل 1.2 دیکھیں۔)

ہر حقیقی عدد یا تو ایک ناطق عدد ہوتا ہے یا ایک غیر ناطق عدد، لیکن دونوں نہیں۔ اس طرح $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$ اور $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \emptyset$

ہمیں معلوم ہے کہ ایک ناطق عدد اختتام پذیر یا غیر اختتام پذیر متواتی عشری عدد ہے۔ حقیقی اعداد کے مجموعہ $\mathbb{R}$ کو عددی خط پر نقاط کے مجموعے کے طور پر دیکھا جاسکتا ہے۔ جیسا کہ اگر $x < y$ ہو تو پھر y کے بائیں جانب x واقع ہوتے ہیں۔

شکل 2.2۔ مظاہرہ کرتا ہے کہ کس طرح 2 اور 3 کی جذر المربع عددی خط پر شناخت کیا جاسکتا ہے۔



شکل 2.2

ہم نے غور کیا کہ $\mathbb{N} \subset \mathbb{W} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

جیسا کہ ہم پہلے ہی دیکھ چکے ہیں کہ غیر حقیقی زندگی کے حالات میں پائی جاتی ہیں۔ 2000 سے زائد سال پہلے مشرقی ایشیاء اور مصر کے لوگوں نے مشاہدہ کیا کہ قطر کے محیط کا تناسب کسی بھی دائرے کے لئے یکساں ہے۔ 1767 میں Johann Heinrich Lambret کے ذریعہ غیر حقیقی اعداد کی جانچ ثابت ہوئی۔ π کی قیمت نویں اعشاریہ مقامات کے برابر ہے۔ یعنی 3.141592654 ہے۔

$\frac{22}{7}$ اور 3.14 (جیسے دائرے کا رقبہ اور کرہ کا حجم) وغیرہ محسوب کرنے کے لئے استعمال ہوتے ہیں۔ اس کی تقریبی قیمت π ہے۔

عدد π ، جو ایک دائرہ کے قطر اور اس کے احاطہ کی نسبت ہے، یہ بھی ایک غیر ناطق عدد ہے۔

11 maths v1 unit 2 UM algebra
Tuesday, September 06, 2022 9:55:26 AM

آیئے حقیقی عددوں کے خصوصیات کو یاد کرتے ہیں جو کہ ریاضی کی بنیاد ہے۔

2.2.4۔ حقیقی اعداد کی خصوصیات: (Properties of Real Numbers)

(i) کسی بھی $a, b \in \mathbb{R}$, $a+b \in \mathbb{R}$ اور $ab \in \mathbb{R}$. کے لئے

(دو حقیقی عددوں کا جمع دوبارہ ایک حقیقی عدد ہوگا اور دو حقیقی عددوں کا جمع دوبارہ ایک حقیقی عدد ہوگا اور دو حقیقی اعداد کا ضرب ایک حقیقی عدد ہے۔

(ii) کسی بھی $a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a+b)+c = a+(b+c)$ اور $a(bc) = (ab)c.$ کے لئے

(حقیقی اعداد کی محدود عدد کو جمع کرتے ہوئے (یا ضرب دیتے ہوئے) ہم انہیں کسی بھی ترتیب میں گروہ بنا کر (یا ضرب) دے سکتے ہیں۔

(iii) تمام $a \in \mathbb{R}$, $a+0 = a$ اور $a(1) = a.$ کے لئے

(iv) ہر $a \in \mathbb{R}$, $a+(-a) = 0$ کے لئے اور ہر $b \in \mathbb{R} - \{0\}$, $b\left(\frac{1}{b}\right) = 1.$ کے لئے

(v) کسی بھی $a, b \in \mathbb{R}$, $a+b = b+a$ اور $ab = ba.$ کے لئے

(vi) $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a(b+c) = ab+ac.$ کے لئے

(vii) $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ کے لئے صرف اور صرف $b-a > 0.$

(viii) کسی بھی $a \in \mathbb{R}$, $a^2 \geq 0.$ کے لئے

(ix) کسی بھی $a, b \in \mathbb{R}$ کے لئے درج ذیل میں سے صرف ایک: $a > b.$ یا $a < b$ یا $a = b$

(x) اگر $a, b \in \mathbb{R}$ اور $a < b,$ ہو تو تمام $c \in \mathbb{R}.$ کے لئے $a+c < b+c$

(xi) اگر $a, b \in \mathbb{R}$ اور $a < b,$ ہو تو تمام $x > 0.$ کے لئے $ax < bx$

(xii) اگر $a, b \in \mathbb{R}$ اور $a < b,$ ہو تو تمام $y < 0.$ کے لئے $ay > by$

مشق 2.1

(1) $\{\sqrt{7}, \frac{-1}{4}, 0, 3.14, 4, \frac{22}{7}\}$ کے ہر عنصر کو بطور رکن درجہ بندی کریں $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}-\mathbb{Q}$ or $\mathbb{Z}.$

(2) ثابت کریں کہ $\sqrt{3}$ ایک غیر ناطق عدد ہے۔

(اشارہ: اس طرح پر عمل کریں کہ جو ہم نے ثابت کرنے کے لئے استعمال کیا ہے۔ $(\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.)$

(3) کیا دو علاحدہ (الگ الگ) غیر ناطق اعداد ہیں جیسے کہ ان کا فرق ایک ناطق عدد ہے؟ توجیہ کریں (یا) ثابت کریں۔

(4) دو غیر ناطق اعداد معلوم کریں جیسے کہ ان کا جوڑ (جمع) ایک ناطق عدد ہو۔ کیا آپ دو غیر ناطق اعداد معلوم کر سکتے ہیں جن پر ضرب کا عمل ایک ناطق عدد ہے۔

(5) $\frac{1}{2^{1000}}$ سے چھوٹا ایک مثبت عدد معلوم کریں؟ توجیہ کریں یا ثابت کریں۔

2.3۔ مطلق قدر (قیمت) (Absolute Value)

2.3.1۔ تعریف اور خصوصیات (Definition and properties)

جیسا کہ ہم نے مشاہدہ کیا کہ $\mathbb{R}$ کے عناصر اور عدد خط پر نقاط کے درمیان یک یک مطابقت کی ترتیب محفوظ ہے۔ نوٹ کریں کہ ہر x, $x \in \mathbb{R}$ اور $-x$ مبدا سے مساوی فاصلہ رکھتے ہیں۔ نمبر لائن پر 0 سے $a \in \mathbb{R}$ نمبر کا فاصلہ نمبر a کی مطلق قیمت کہلاتا ہے۔ اور $|a|$ کے ذریعہ ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس طرح، کسی بھی $x \in \mathbb{R}$ کے لئے

$$|x| = \begin{cases} x & \text{if } x \geq 0, \\ -x & \text{if } x < 0. \end{cases}$$

اس لئے $|\cdot|$ کی تفاعل وضاحت کو مطلق قدر تفاعل کیا جاتا ہے۔ $\mathbb{R}$ سے $[0, \infty)$ پر تک اور اس تفاعل کی ترسیم باب 1 میں زیر بحث ہے۔

11 maths v1 unit 2 UM algebra
Tuesday, September 06, 2022 9:55:26 AM

(i) کسی بھی $x \in \mathbb{R}$ کے لئے ہمارے پاس $|x| = |-x|$ ہے اور اس طرح $|x| = |y|$ صرف اور صرف $x = y$ یا $x = -y$ ہے۔

(ii) $|x-a| = r$ صرف اور صرف $r \geq 0$ اور $x - a = r$ یا $x - a = -r$

2.3.2۔ مطلق قدر پر مشتمل مساوات: (Equations involving Absolute Value)

نوٹ کریں کہ ایک حقیقی عدد a کو مساوات یا غیر مساوات کا ***solution*** حل کہا جاتا ہے۔ اگر متغیر کو a سے بدلنے کے بعد حاصل کردہ بیان درست ہے۔

مثال 2.1 : $|2x-17| = 3$ حل کریں $x.$ کے لئے

حل: $|2x-17| = 3$ پھر ہمارے پاس ہے $2x - 17 = \pm 3$ جس کا مطلب $x = 10$ یا $x = 7$ ہے۔

مثال 2.2 $3|x-2| + 7 = 19$ حل کریں $x.$ کے لئے

حل: $3|x-2| + 7 = 19$ ، تاکہ ہمارے پاس $|x-2| = \frac{19-7}{3} = 4.$ ہو۔

یوں تو ہمارے پاس یا تو $x - 2 = 4$ یا $x - 2 = -4.$ ہے۔

لہذا حل $x = -2$ اور $x = 6.$ ہیں۔

مثال 2.3 حل کریں: $|2x-3| = |x-5|.$

حل: ہم جانتے ہیں $|u| = |v|$ صرف اور صرف $u = v$ یا $u = -v.$ کے لئے

لہذا $|2x-3| = |x-5|$ مطلب $2x - 3 = x - 5$ یا $2x - 3 = 5 - x.$

دو مساوات کو حل کرتے ہوئے، ہمیں اور $x = \frac{8}{3}$ ملتا ہے۔

لہذا، $x = -2$ اور $x = \frac{8}{3}$ دونوں حل ہیں۔

2.3.3۔ مطلق قدر کے چند نتائج (Soem Results For Absolute Value)

(i) اگر $x, y \in \mathbb{R}, |y + x| = |x - y|,$ پھر $xy = 0.$

(ii) کسی بھی $x, y \in \mathbb{R}, |xy| = |x||y|.$ کے لئے

(iii) سب $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|},$ کے لئے $x, y \in \mathbb{R}$ اور $y \neq 0.$

(iv) کسی بھی $x, y \in \mathbb{R}, |x + y| \leq |x| + |y|.$ کے لئے

2.3.4۔ مطلق قدر میں مشتمل نا مساوات: (Inequalities involving absolute value)

یہاں ہم مطلق اقدار پر مشتمل نا مساوات کو حل کرنا سیکھیں گے۔ پہلے ہم بہت آسان نا مساوات کا تجربہ کرتے ہیں، جیسے

(i) $|x| < r$ اور (ii) $|x| > r$

(i) آیئے ثابت کریں کہ اگر $|x| < r$ صرف اور صرف $-r < x < r$ کے لئے ہوں۔ نوٹ کریں $r > 0$ کیوں کہ $|x| \geq 0.$

x کے نشان پر منحصر ہونے پر غور کرنے کے دو امکانات ہیں۔

صورت حال (1) اگر $x \geq 0$ ہو تو پھر $|x| = x,$ تو $|x| < r$ جس کا مطلب $x < r$ ہوگا۔

صورت حال (2) اگر $x < 0$ ہو پھر $|x| = -x$ تو $|x| < r$ جس کا مطلب $-x < r$ یعنی $x > -r$ ہوگا۔

چنانچہ ہمارے پاس ہے $|x| < r$ صرف اور صرف اگر $-r < x < r,$ یعنی $x \in (-r, r).$

11 maths v1 unit 2 UM algebra
Tuesday, September 06, 2022 9:55:26 AM

(ii) آیئے ثابت کریں کہ $|x| > r$ صرف اور صرف اگر $x < -r$ ہوں یا $x > r$

فرض کریں $|x| > r$ اگر $r < 0$ تو ہر کوئی $x \in \mathbb{R}$ نامساوات کو مطمئن کرتا ہے۔ $r \geq 0$ کے لئے غور کرنے کے دو امکانات ہیں۔

صورت حال **(1)** اگر $x \geq 0$ تو $|x| = x > r$ ہیں۔

صورت حال **(2)** اگر $x < 0$ تو $|x| = -x > r$ ہیں، یعنی $x < -r$

تو ہمارے پاس $|x| > r$ صرف اور صرف اگر $x < -r$ یا $x > r$ ہیں۔ یعنی $x \in (\infty, -r) \cup (r, \infty)$.

ریمارک (تبصرہ)

(i) کسی بھی r $a \in \mathbb{R}, |x-a| \leq r$ کے لئے $-r \leq x - a \leq r$ صرف اور صرف اگر $x \in [a-r, a+r]$.

(ii) کسی بھی r $a \in \mathbb{R}, |x-a| \geq r$ برابر ہے $x - a \leq -r$ کے یا $x - a \geq r$ صرف اور صرف اگر $x \in (\infty, a - r] \cup [a+r, \infty)$ ہو.

مثال 2.4 x کے لئے $|x-9| < 2$ حل کریں۔

حل: $|x-9| < 2$ کا مطلب $-2 < x - 9 < 2$. ہے۔ یعنی $7 < x < 11$.

مثال 2.5 حل کریں۔ $\left|\frac{2}{x-4}\right| > 1, x \neq 4.$

حل: دی گئی نامساوات سے ہمارے پاس ہے۔ $2 > |x-4|$

یعنی $-2 < x - 4 < 2$ اور $x \neq 4$.

تمام نامساوات میں **4** کو جمع کرنے پر، ہمیں $2 < x < 6$ اور $x \neq 4$. ملتا ہے۔ مجموعے کا حل $(2,4) \cup (4,6)$ ہے۔

مشق 2.2

(1) x کے لئے حل کریں:

(i) $|3 - x| < 7.$ (ii) $|4x - 5| \geq -2.$ (iii) $\left|3 - \frac{3}{4}x\right| \leq \frac{1}{4}.$
(iv) $|x| - 10 < -3.$

(2) حل کریں $\frac{1}{|2x-1|} < 6$ اور وقفۂ ترسیم **(interval notation)** کو استعمال کرتے ہوئے حل کا اظہار کریں۔

(3) $-3|x| + 5 \leq -2$ کو حل کریں اور ایک نمبر لائن میں حل کو ترسیم کریں۔

(4) $2|x+1| - 6 \leq 7$ کو حل کریں اور ایک نمبر لائن میں حل کو ترسیم کریں۔

(5) حل کریں $\frac{1}{5}|10x - 2| < 1.$

(6) حل کریں $|5x - 12| < -2.$

2.4۔ خطی نامساوات: (Linear Inequalities)

یاد رکھیں کہ تفاعل کی ترتیب $f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}$ مستقل ہے۔ سے خطی تفاعل کہا جاتا ہے۔ کیونکہ اس کی ہیئم ایک سیدھی خط ہے یہاں a خط کا ڈھلوان (میلان) ہے اور b مقطوعہ - Y ہے۔ اگر $a \neq 0$ ہو تو، پھر x -مقطوعہ $x = \frac{-b}{a}$ کو $f(x) = ax + b = 0.$ حل کر کے حاصل کیا جاتا ہے لیکن ایسے حالات ہیں جہاں ہمیں خطی نامساوات پر غور کرنے کی ضرورت ہے۔

مثال کے طور پر ایک بیان کی وضاحت کرنا، جیسے، اگر ''ایک ٹاور پچاس فٹ سے زیادہ لمبا نہیں ہے''۔ اگر x ٹاور کی اونچائی کو ظاہر کرتا ہے۔ فٹ میں تو مندرجۂ بالا بیان $x \leq 50.$ کے طور پر ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

11 maths v1 unit 2 UM algebra
Tuesday, September 06, 2022 9:55:27 AM

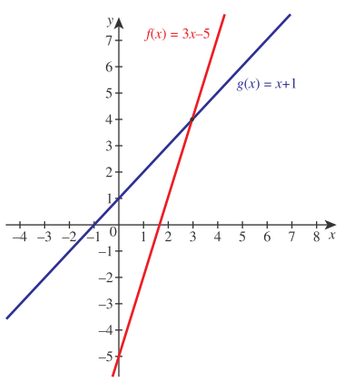
مثال 2.6 : ہمارے ماہانہ بجلی کے بل میں ایک بنیادی چارٹ ہوتا ہے، جو کہ استعمال شدہ یونٹس سے غیر تابع ہوتا ہے اور ایک چارج جو استعمال شدہ یونٹس پر منحصر ہوتا ہے۔ الیکٹرک بورڈ ₹ 110 بنیادی قیمت لگاتی ہے اور ہر یونٹ کے لئے ₹ 4 لگاتی ہے جو ہم استعمال کرتے ہیں۔ اگر کوئی شخص اپنے بجلی کے بل کو ₹ 250 سے کم رکھنا چاہتا ہے تو اس کے بجلی کا استعمال کیا ہونا چاہئے؟

حل: استعمال ہوئے یونٹس کو x سے ظاہر کی جاتی ہے۔ نوٹ کریں $x \geq 0$ پھر اس کی الکٹرک بل $110 + 4x$ ہوگی۔ وہ شخص چاہتا ہے کہ اس کا بل 250 سے کم ہو۔ آیئے نامساوات $110 + 4x < 250$ کو حل کریں۔ لہذا $4x < 140$ ۔ جو $0 \leq x < 35$ دیتا ہے۔ اس شخص کو اپنا بل 250 سے کم رکھنے کے لئے 35 یونٹس سے کم استعمال کرنا چاہئے۔

مثال 2.7 x کے لئے حل کریں۔ $3x - 5 \leq x + 1$

حل: ہمارے پاس $3x - 5 \leq x + 1$ ہوتو، جو اس کے برابر ہے $2x \leq 6$ لہذا ہمارے پاس ہے $x \leq 3$ ہے۔
مجموعے کا حل $(-\infty, 3]$ ہے۔

ہم مندرجۂ بالا نامساوات کو ترسیمی طریقے سے بھی حل کر سکتے ہیں۔
$f(x) = 3x - 5$ اور $g(x) = x + 1$ کے گراف پر غور کریں (شکل 2.3 دیکھیں)۔
وہ تمام X - اقدار معلوم کریں جن کے لئے f کا گراف g کے گراف سے نیچے ہے۔



شکل 2.3

مثال 2.8 : خطی نامساوات کے درج ذیل نظام کو حل کریں۔

$$3x - 9 \geq 0, 4x - 10 \leq 6.$$

حل : نوٹ کریں کہ $3x - 9 \geq 0$, کا مطلب $3x \geq 9$ ہے، دونوں جانب 1/3 سے ضرب کرنے پر ہمیں $x \geq 3$ ملتا ہے۔
$4x - 10 \leq 6$ اس کا مطلب $4x \leq 16$ اور $x \leq 4$. تو $3x - 9 \geq 0, 4x - 10 \leq 6$ کے مجموعے کا حل $[3, \infty)$ اور $(\infty, 4]$ کا تقاطع ہے۔ واضح طور پر، ان وقفوں کا تقاطع $[3, 4]$ دیتا ہے۔

11 maths v1 unit 2 UM algebra
Tuesday, September 06, 2022 9:55:27 AM

مثال 2.9 ایک لڑکی A , 446 صفحات کی ایک کتاب پڑھ رہی ہے، اور وہ پہلے ہی 271 صفحات پڑھ چکی ہے، وہ ایک ہفتہ کے اندر اس کتاب کو پڑھ کر ختم کرنا چاہتی ہے۔ ایک ہفتے میں مکمل پڑھنے کے لئے اسے روزانہ کتنے صفحات پڑھنے چاہئیں؟

حل: x صفحات کی تعداد کی طرف اشارہ کرتا ہے، جو فی دن لڑکی کو پڑھنا چاہئے۔ پھر ہمیں 'x' کی ضرورت ہے جو $7x + 271 \geq 446$ کو پورا کرنے کے لئے لہذا $x \geq 25$ ، جس کا مطلب یہ ہے کہ، وہ ہر دن 25 صفحات کو پڑھنا ضروری ہے۔

مندرجۂ بالا تمام مثالوں میں مشاہدہ کیا گیا ہے کہ ہر نامساوات کا ایک سے زیادہ حل ہے۔ عام طور پر نامساوات میں قدروں کے حل میں اضافہ ہوتا ہے۔

مشق 2.3

1۔ وقفہ ترقیم میں درجہ ذیل نامساوات کی نمائندگی کریں۔

(i) $x \geq -1$ and $x < 4$ (ii) $x \leq 5$ and $x \geq -3$
(iii) $x < -1$ or $x < 3$ (iv) $-2x > 0$ or $3x - 4 < 11$.

2۔ حل کریں $23x < 100$ جس میں (i) x ایک طبعی عدد ہو (ii) x ایک سالم عدد ہو

3۔ حل کریں $-2x \geq 9$ جس میں (i) x ایک حقیقی عدد ہو (ii) x ایک سالم عدد ہو (iii) x ایک طبعی عدد ہو

4۔ حل کریں (i) $\frac{3(x-2)}{5} \leq \frac{5(2-x)}{3}$. (ii) $\frac{5-x}{3} < \frac{x}{2} - 4$.

5۔ کسی کو A گریڈ برقرار رکھنے کے لئے 5 مضامین اوسطاً 90 یا اس سے زیادہ نمبر حاصل کرنے ہوں گے۔ ہر ایک سبق کے 100 مارکس ہوتے ہیں۔ اگر کسی نے پہلے چار مضامین 84,87,95,91 اسکور کئے ہیں، کورس میں A گریڈ حاصل کرنے کے لئے پانچوں موضوع کے کم از کم مارکس کیا ہوں گے؟

6۔ ایک کارخانہ دار کے پاس ایسڈ کا 12 فی صد حل 600 لیٹر ہوتا ہے۔ اس میں 30 فی صد ایسڈ محلول کے کتنے لیٹر شامل کرنے چاہئیں تا کہ نتیجے میں ایسڈ مواد 15 فی صد سے زائد ہو لیکن 18 فی صد سے کم ہو؟

7۔ متواتر طاق طبعی عدد کے تمام جوڑوں کو معلوم کریں جو دونوں 10 سے بڑے ہوں اور ان کی رقم 40 سے کم ہو۔

8۔ ایک ماڈل راکٹ زمین سے لانچ کیا گیا ہے۔ اوپر اڑنے کے لئے 't' سکنڈ بعد راکٹ کی اونچائی h تک پہنچ گئی ہو جو $h(t) = -5t^2 + 100t, 0 \leq t \leq 20$ دی گئی ہے۔ کس وقت پر راکٹ زمین سے اوپر 495 فٹ ہوگی؟

9۔ مندرجۂ ذیل منصوبوں کے مطابق ایک پلمبر کو رقم ادا کی گئی۔ پہلی منصوبہ بندی میں 500 روپئے اور 70 روپئے فی گھنٹہ حاصل کرتا ہے اور دوسری منصوبہ بندی میں 120 روپئے فی گھنٹہ حاصل کرتا ہے۔ اگر وہ گھنٹے کام کرتا ہے تو پہلی منصوبہ بندی x کی کس قیمت کے لئے بہتر اجرت دیتی ہے؟

10۔ A اور B ایک جیسی ملازمتوں میں کام کرتے ہیں لیکن ان کی ماہانہ تنخواہ میں 6000 کا فرق ہے۔ اگر B ماہانہ 27000 روپئے کماتا ہے تو A کی ماہانہ تنخواہ کے کیا امکانات ہیں؟

SKV1A

2.5۔ دو درجی تفاعلات: (Quadratic Functions)

پچھلی کلاسوں میں ہم نے سیکھا ہے کہ کسی بھی $z \in \mathbb{R}$ اور $n \in \mathbb{N}$, کے لئے

$$z^n = z \cdot z \cdot z \cdots z \ (n\text{-times}).$$

تفاعلات کی ترتیب $P(x) = ax^2 + bx + c$، جہاں $a, b, c \in \mathbb{R}$ ایک مستقل اور $a \neq 0$, ہو تو اسے دو درجی تفاعلات کہتے ہیں۔ اگر $P(t) = 0$ چند $t \in \mathbb{R}$ کے لئے تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ 't' صفر ہے $P(x)$ کا ۔

11 maths v1 unit 2 UM algebra
Tuesday, September 06, 2022 9:55:28 AM

2.5.1۔ دو درجی ضابطہ (Quadratic Formula)

کیا عام دو درجی تفاعلات $P(x)=ax^2+bx+c$ کو $a(x-k)^2+d$ کی شکل میں لکھنا ممکن ہے؟ جواب ''ہاں'' میں ہے۔
''مربع مکمل کرنا'' (Completing the square) نامی طریقہ سے کر سکتے ہیں۔ ہم تفاعلات $P(x)$ کو پھر سے اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
P(x) &= ax^2+bx+c \\
&= a\left(x^2+2x\frac{b}{2a}+\frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(x^2+2x\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-a\frac{b^2}{4a^2}+c \\
&= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(a\left(\frac{b}{2a}\right)^2-b\frac{b}{2a}+c\right).
\end{aligned}$$

اس طرح $$P(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+P\left(\frac{-b}{2a}\right). \qquad (1)$$

اب $P(x)$ کے بیان کردہ منحنی x -مقطوعہ کو معلوم کرنے کے لئے آیئے $P(x)=0$ کو حل کریں۔

(1) سے $P(x)=0$ فرض کرنے پر $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+P\left(\frac{-b}{2a}\right)=0$ یہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned}
a\left(x+\tfrac{b}{2a}\right)^2 &= -P\left(\tfrac{-b}{2a}\right) \\
&= -\tfrac{(-b^2+4ac)}{4a} \\
\left(x+\tfrac{b}{2a}\right)^2 &= \tfrac{b^2-4ac}{4a^2}.
\end{aligned}$$

$$x=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}-\frac{b}{2a} \quad \text{یا} \quad x=-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}-\frac{b}{2a}.$$

لہذا $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ جسے دو درجی ضابطہ ***quadratic formula*** کہا جاتا ہے۔

ریمارک: **(i)** نوٹ کریں کہ $\sqrt{u}$ صرف $u \geq 0$ کے لئے ایک حقیقی عدد کے طور پر بیان کیا گیا ہے۔

(ii) جب ہم $\sqrt{u}$ لکھتے ہیں، تو ہمارا مطلب صرف غیر منفی جذر ہوتا ہے۔

نوٹ کریں کہ اگر $b^2-4ac>0$ ہو تو، $P(x)=0$ کے دو الگ الگ حقیقی حل ہیں
اگر $b^2-4ac=0,$ ہوں تو جذریں حقیقی اور مساوی ہیں۔ اگر $b^2-4ac<0.$ ہو تو کوئی حقیقی جذر نہیں ہے۔

اسی طرح اگر $b^2-4ac>0$ ہو تو منحنی x محور کے دو جگہوں پر قطع ہوتے ہیں ۔ اگر $b^2-4ac=0,$ ہو تو، صرف x محور کے ایک نقطہ کو قطع کرتا ہے۔ اور اگر $b^2-4ac<0.$ ہو تو x کے محور کے کسی بھی نقطہ پر قطع نہیں کرتا۔
اس لئے $P(x)=ax^2+bx+c.$ کو دو درجی تفاعل کی امتیازی خصوصیت (discriminant) کہا جاتا ہے۔

(i) اگر $ax^2+bx+c=0$ کے جذر α اور β ہیں، تو پھر $\alpha+\beta=\frac{-b}{a}$ اور $\alpha\beta=\frac{c}{a}.$ ہیں۔

(ii) اگر b^2-4ac منفی ہو تو پھر دو درجی مساوات $ax^2+bx+c=0$ کے کوئی حقیقی جذر نہیں ہے۔
اس معاملے میں ہمارے پاس جذریں دیئے گئے ہیں۔

$$\alpha=\frac{-b+i\sqrt{4ac-b^2}}{2a} \quad , \quad \beta=\frac{-b-i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$$

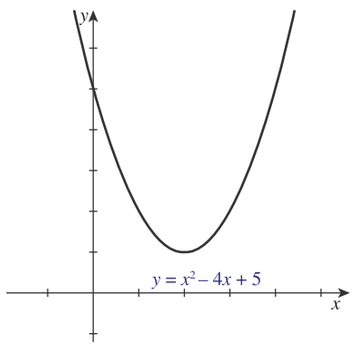
جہاں $i^2=-1$ ہے۔
جو ہم ہائیر سکنڈری کے دوسرے سال میں پڑھیں گے۔

11 maths v1 unit 2 UM algebra
Tuesday, September 06, 2022 9:55:28 AM

(iii) مثال کے طور پر آیئے $y = x^2 - 4x + 5$ کے گراف کو دیکھیں (شکل 2.4 دیکھیں) چونکہ گراف x محور پر قطع نہیں کرتا $x^2 - 4x + 5 = 0$ کے کوئی حقیقی جذر نہیں ہیں۔

(iv) ہمارے پاس مندرجۂ ذیل جدول ہے جو ایک دودرجی مساوات $D = b^2 - 4ac$ کے جذروں کی نوعیت اور علامت بیان کرتا ہے۔

شکل 2.4



مکافی شکل Parabola	جذر کی نوعیت	ممیّز
x-محور سے دو نقاب پر قطع کرتے ہیں	حقیقی اور واضح	مثبت Positive
x-محور سے ایک نقطہ پر قطع کرتا ہے	حقیقی اور مساوی	صفر Zero
x-محور پر مس نہیں کرتے	کوئی حقیقی جذر نہیں	منفی Negative

مثال 2.10 اگر مساوات $x^2 - px + q = 0,$ کے جذر **a** اور **b** ہیں، تو $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ کی قیمت معلوم کریں۔

حل: دیا گیا ہے کہ $x^2 - px + q = 0,$ کے جذر **a** اور **b** ہیں۔ تو $a + b = p$ اور $ab = q$ ہیں۔ اس طرح

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = \frac{p}{q}.$$

مثال 2.11: مجموعے **a** کی مکمل قیمت معلوم کریں، جس کے دو درجی مساوات $x^2 - ax + a + 2 = 0$ میں مساوی جذر ہیں۔

حل: دودرجی مساوات $x^2 - ax + a + 2 = 0$ کے مساوی جذر ہیں۔ لہذا اس کی امتیازی خصوصیت صفر ہے۔ اس طرح

$D = b^2 - 4ac = a^2 - 4a - 8 = 0.$ تو $a = \frac{4 \pm \sqrt{48}}{2}$،

جس سے $a = 2 + \sqrt{12}, \quad 2 - \sqrt{12}.$ حاصل ہوتا ہے۔

مثال 2.12 $x^2 + |x - 1| = 1$ کے حلوں کی تعداد معلوم کریں۔

حل : **صورت حال (1)** $x \geq 1, |x - 1| = x - 1$ کے لئے

پھر دی گئی مساوات $x^2 + x - 2 = 0$ کو مختصر کرتے ہیں۔ اجزائے ضربی حاصل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $(x+2)(x-1) = 0.$

جس کا مطلب **x =–2** یا **1** ہے۔ چونکہ $x \geq 1,$ ہے ، ہمیں **x = 1** حاصل ہوتا ہے۔

صورت حال (2) $x < 1, |x - 1| = 1 - x$ کے لئے

دی گئی مساوات اس طرح بن جاتی ہے۔ $x^2 + 1 - x = 1$ ۔

اس طرح ہمارے پاس $x(x - 1) = 0$ ہوتا ہے، جس کا مطلب **x=0** یا **x=1** ہے۔

چونکہ **x < 1** ہے، اس لئے ہمیں **x = 0** کے طور پر انتخاب کرنا ہوگا۔ مجموعہ کا حل **{0,1}** ہے۔ لہذا مساوات کے دو حل ہیں۔

11 maths v1 unit 2 UM algebra
Tuesday, September 06, 2022 9:55:28 AM

مشق 2.4

(1) جذر 7 اور 3- والے ایک دودرجی مساوات بنائیں۔

(2) ایک دودرجی کثیر رقمی میں سے ایک صفر $1+\sqrt{5}$ ہے، اور یہ $p(1)=2$ پر مطمئن کرتا ہے۔ دو درجہ کثیر رقمی معلوم کریں۔

(3) اگر دودرجی مساوات $x^2+\sqrt{2}x+3=0$ کے جذر α اور β ہیں، تو $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ صفروں کے ساتھ دودرجی کثیر رقمی بنائیں۔

(4) اگر $k(x-1)^2=5x-7$ کی ایک جذر دوسری جذر سے دوگنی ہے تو بتائیے کہ $k=2$ یا -25 ہے۔

(5) اگر مساوات $2x^2-(a+1)x+a-1=0$ کی جذروں کا فرق، ان کی ضرب کے مساوی ہے، تو ثابت کریں کہ $a=2$ ہے۔

(6) ان شرائط کو معلوم کریں کہ ax^2+bx+c کی جذروں میں سے ایک (i) دوسرے کا منفی ہو (ii) دوسرے سے تین گنا ہو (iii) ایک دوسرے کا مقلوب ہو۔

(7) اگر مساوات $x^2-ax+b=0$ اور $x^2-ex+f=0$ مشترک طور پر ایک جذر ہیں اور اگر دوسری مساوات کی جذریں مساوی ہیں، تو ثابت کرو کہ $ae=2(b+f)$

(8) جذروں کی نوعیت پر بحث کریں۔ (i) $-x^2+3x+1=0$, (ii) $4x^2-x-2=0$, (iii) $9x^2+5x=0$.

(9) مرتسم کئے بغیر، معلوم کریں کہ مندرجۂ ذیل تفاعلات کا گراف x- محور کو قطع کرے گا اور اگر ہے تو کتنے نقاط میں۔

(i) $y=x^2+x+2$, (ii) $y=x^2-3x-7$, (iii) $y=x^2+6x+9$.

(10) $f(x)=x^2+5x+4$ کو مکمل مربع شکل میں لکھیں۔

2.5.2۔ دو درجی نامساوات (Quadratic inequalities)

یہاں ہم دو درجی نامساوات $ax^2+bx+c<0$ یا $ax^2+bx+c>0$. کو حل کرنا سیکھیں گے۔

دودرجی نامساوات کو حل کرنے کے اقدامات: (Steps to solve Quadratic Inequalities)

(i) سب سے پہلے $ax^2+bx+c=0$. کو حل کریں۔

(ii) اگر کوئی حقیقی حل نہیں ہے، تو اوپر کی نامساوات تمام $x\in\mathbb{R}$ کے لئے درست ہے۔

(iii) اگر حقیقی حل ہیں جیسے ہم 'تنقیدی نقاط' یا 'فاصل نقاط' (Critical points) کہتے ہیں۔ تو ان نقاط کو عددی خط پر لیبل کریں۔

(iv) نوٹ کریں کہ یہ تنقیدی نقاط عددی خط کو الگ الگ وقفوں میں تقسیم کرتے ہیں (یہ ممکن ہے کہ صرف تنقیدی نقاط ہو سکتا ہے)

(v) ہر وقفہ سے ایک اختیاری عدد منتخب کریں۔

(vi) متبادل کریں کہ یہ اختیاری عدد نامساوات میں ہیں۔

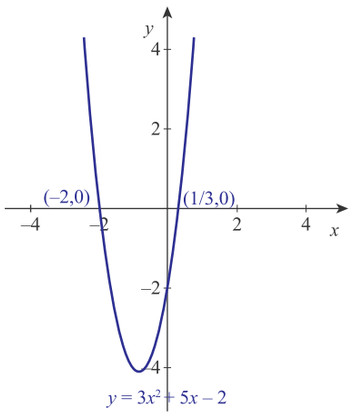
(vii) وقفوں کی نشاندہی کریں جہاں نامساوات مطمئن ہے۔

مثال 2.13: حل کریں۔ $3x^2+5x-2\leq 0$

حل: دودرجی کثیر رقمی کو اجزائے ضربی کرنے پر ہمیں $3(x+2)(x-\frac{1}{3})\leq 0$ ملتا ہے۔ عددی خط کھینچیں۔ تنقیدی نقاط (فاصل نقاط) -2 اور $\frac{1}{3}$ مارک کریں، جہاں اجزائے ضربی صفر ہوں (شکل 2.5 دیکھیں)۔ ہر ذیلی وقفے کے $(x+2)(x-\frac{1}{3})$ کے نشان چیک کریں۔ اسے کرنے کے لئے وقفہ میں کہیں بھی اختیاری نقطہ کا انتخاب کریں۔ نتیجے کی قیمت میں جو بھی نشان ہے۔ کثیر رقمی پورے متعلقہ وقفے میں ایک ہی علامت ہے۔ (بصورت دیگر، وقفہ کے اندر ایک اور تنقیدی نقاط ہوگا)۔ یہ عمل آسانی سے درج ذیل جدول میں ترتیب دیا گیا ہے۔

11 maths v1 unit 2 UM algebra
Tuesday, September 06, 2022 9:55:29 AM





شکل 2.5

وقفہ	$(x+2)$ کی علامت	$(x-1/3)$ کی علامت	$3x^2+5x-2$ کی علامت
$(\infty, \quad -2)$	-	-	+
$(-2, 1/3)$	+	-	-
$(1/3, \infty)$	+	+	+

تم دیکھو گے کہ یہاں نامساوات کی شرط پوری ہوتی ہے۔$[-2, 1/3]$

مثال 2.14: حل کریں۔$\sqrt{x+14} < x+2$

حل: تفاعل $\sqrt{x+14}$ کی توضیح کے لئے $x+14 \geq 0$ اس لئے $x \geq -14, x+2 > 0$ مطلب$x \geq -2$ ہے۔

$(x+14) < (x+2)^2$

لہٰذا $(x+5)(x-2) > 0$ ہے۔ عددی خط کو فاصلی نقطوں سے تقسیم کرنے پر $x=-5$ اور $x=2$ حاصل ہوتا ہے۔

ذیلی وقفے میں ایک حوالاتی نقطہ کو بھرتی کرنے پر، ہمیں ایک حل مجموعہ حاصل ہوتا ہے، جو $x<-5$ اور $x>2$ کی طرح ہوتا ہے۔

چونکہ $x \geq -2$ ہے، ہمارا حل اس طرح ہوگا۔ $x>2$

مثال 2.15: مساوات $\sqrt{6-4x-x^2} = x+4.$ کو حل کریں۔

حل: دی گئی مساوات **(x+4)** مجموعے کے مساوی ہے، $6-4x-x^2 = (x+4)^2$ اور $(x+4) \geq 0$

اس کا مطلب $x \geq -4$ اور $x^2+6x+5=0$ ۔ لہٰذا $x=-1, -5.$

مگر صرف $x=-1$ شرط پوری کرتی ہے۔ لہٰذا $x=-1$

مشق 2.5

1۔ حل کیجئے۔ $2x^2+x-15 \leq 0.$

2۔ حل کیجئے۔ $-x^2+3x-2 \geq 0.$

11 maths v1 unit 2 UM algebra
Tuesday, September 06, 2022 9:55:29 AM

2.6۔ کثیر رقمی تفاعلات: (Polynomial Functions)

اب تک ہم نے خطی تفاعلات اور دودرجی تفاعلات کے بارے میں سمجھ چکے ہیں۔اب ہم ان خیالات کے اطلاق کو توسیع دیں گے۔ہم عبارت $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ جہاں $i = 0, 1, 2, \cdots, n$ کی اس ترتیب کو متغیر x کی کثیر رقمی *(polynomial)* کہتے ہیں، $a_i \in \mathbb{R}$۔یہاں n غیر منفی سالم عدد ہے۔ جب $a_n \neq 0$, ہو تو ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ کثیر رقمی کا درجہ یا قوت **degree** n ہوتا ہے۔ عدد $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ کو کثیر رقمی کا ضریب کہتے ہیں۔نمبر a_0 کو مستقل رقم اور a_n کو معروف ضریب کہا جاتا ہے (جب یہ غیر صفر ہوں)

یہ واضح ہے۔

(i) $100x^7 - \pi x^5 + 20\sqrt{2}x^2 + 7x + 1.22$ میں کثیر رقمیات کا درجہ 7 ہے۔

(ii) $(17x - 3)(x + 3)(2x - \sqrt{\pi})(x + 2.3)$ کثیر رقمیات کا درجہ 4 ہے۔

(iii) $(x^2 + x + 1)(x^3 + 2x + 2)(x^5 - 5x + \sqrt{3})$ کثیر رقمیات کا درجہ 10 ہے۔

کوئی ایک متبادل مخصوص قیمت x کے لئے، لہذا $x=c$ ہو تو ہمیں $a_nc^n + a_{n-1}c^{n-1} + \cdots + a_1c + a_0$. حاصل ہوتا ہے۔اس ترتیب کی تفاعل کی قسم $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ کو کثیر رقمی تفاعل کہا جاتا ہے جس کی توضیح $\mathbb{R}$ سے $\mathbb{R}$ تک ہوتی ہے۔ ہم کثیر رقمی اور کثیر رقمی تفاعلات ایک اور مساوی کے طور پر تواضح کرتے ہیں۔

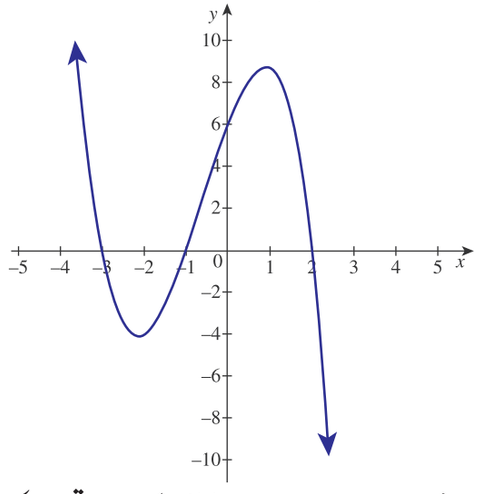
درجہ 1 کی کثیر رقمی کو خطی کثیر رقمی (linear polynomial) کہتے ہیں ۔ 2 درجہ کثیر رقمی کو دو درجی کثیر رقمی (quadratic polynomial) کہا جاتا ہے۔ مکعبی کثیر رقمی وہ ہوتا ہے جس کا درجہ 3 ہو۔ اسی طرح درجہ 4 اور درجہ 5 کثیر رقمی کو نوٹ کریں کہ کوئی بھی مستقل $a \neq 0$ میں کثیر رقمی کا درجہ '0' ہوتا ہے !

دو کثیر رقمیات $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0, a_n \neq 0$ اور $g(x) = b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0,$ $b_m \neq 0$ صرف اور صرف تب ہی مساوی ہو سکتے ہیں $f(x) = g(x)$ سب کے لئے $x \in \mathbb{R}$ ہو۔ اس کو اس طرح بھی ثابت کر سکتے ہیں۔ جب $f(x) = g(x)$ ہوں، صرف اور صرف $n = m$ اور $a_k = b_k, k = 0, 1, 2, \cdots n$ ۔دئے گئے دو کثیر رقمیات کو جمع اور ضرب کر سکتے ہیں۔مثال کے طور پر اگر $P(x) = 2x^3 + 7x^2 - 5$ اور $Q(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + x + 1$ تو

$P(x) + Q(x) = x^4 + 8x^2 + x - 4$ (x کے یکساں قوت کے ضریب کو جمع کریں) اور

$P(x)Q(x) = 2x^7 + 3x^6 - 12x^5 + 4x^4 + 19x^3 + 2x^2 - 5x - 5$ کے ہر رقم کو $Q(x)$ کے ہر ارقام سے ضرب دیں

$P(x)$ اور $Q(x)$ کے درجے کو جمع کرنے پر $P(x)Q(x)$ کے درجہ کو بڑے آسانی سے معلوم کر سکتے ہیں جب کہ $P(x) + Q(x)$ کا درجہ، $P(x)$ یا $Q(x)$ کے درجوں میں سے زیادہ ہوں گے۔ یہاں پر مکعبی کثیر رقمیات تفاعل کی ترسیمات کی مثال دی گئی ہے۔



شکل 2.6

اگر چہ $f(x)$ اور $g(x)$ کثیر رقمیات، جس میں $g(x)$ صفر نہ ہو۔ $\frac{f(x)}{g(x)}$ کے خارج قسمت کو ناطق تفاعل کہتے ہیں، جس کی وضاحت پر ایک $x \in \mathbb{R}$ کے لئے ہوتے ہیں اس طرح سے کہ $g(x) \neq 0$ عام طور پر ناطق تفاعل کثیر رقمی ہونا ضروری نہیں۔

11 maths v1 unit 2 UM algebra
Tuesday, September 06, 2022 9:55:29 AM

2.6.1۔ تقسیمی الگورتھم: (Division Algorithm)

دئے گئے دو کثیر رقمیات $f(x)$ اور $g(x)$ جہاں پر $g(x)$ صفر کثیر رقمی نہ ہوں، تو $q(x)$ اور $r(x)$ نامی دو کثیر رقمیات وجود پاتے ہیں، جیسا کہ $f(x) = q(x)g(x)+r(x)$ جہاں $g(x)$ کا درجہ $>$ $r(x)$ کا درجہ ہے۔ یہاں $q(x)$ کثیر رقمی کا درجہ قیمت کہلاتا ہے، اور $r(x)$ بچت کثیر رقمی کہلاتا ہے۔ اگر $r(x)$ صفر کثیر رقمی ہوتو، $f(x)$ کے جذر $q(x), g(x)$ ہیں، اور $f(x) = q(x)g(x)$

یہ اصطلاحات ہم شکل ہیں۔ اصطلاحات کے جو سالم اعداد کے تقسیمی طریقے میں استعمال ہوتے ہیں۔

اگر $g(x) = x-a$ ہوتو پھر $r(x)$ کے بقیہ درجہ صفر ہو اور $r(x)$ مستقل ہوگا۔ مستقل کا تعین کرنے کے لئے $f(x) = (x-a)q(x)+c$ کو لکھیں۔ $x=a$ کی قیمت کو بھرتی کرنے پر ہمیں یہ حاصل ہوگا۔ $c = f(a)$

مسئلہ باقی (Remainder Theorem)

اگر کثیر رقمی $f(x)$ کو $x-a$ سے تقسیم کرنے پر حاصل بچت $f(a)$ ہوگا۔ لہٰذا باقی $c = f(a) = 0$ صرف اور صرف $f(x)$ کا $x-a$ ہے۔

توضیح 2.1 حقیقی عدد a صفری کثیر رقمی $f(x)$ کہلاتا ہے، جب کہ $f(a) = 0$ ہو۔ اگر $x = a$ کا صفر $f(x)$ ہوتو، پھر $f(x)$ کا جزو ضربی $x-a$ ہوگا۔

عام طور پر اگر $f(x)$ کو اس طرح ظاہر کریں کہ $f(x) = (x-a)^k.g(x)$ ہو جس میں $g(a) \neq 0$ ہو، تب k کی قیمت جو a پر منحصر ہوگی، $f(x)$ کا درجہ اس سے بڑھ کر نہیں ہوگا۔ k کی قیمت صفر a کی ضربیت (Multiplicity) کہلاتی ہے۔

(i) کثیر رقمی تفاعلات کا درجہ n ہوتو، ہمارے پاس n تعداد کے حقیقی صفر ہوں گے۔ یہ اس وقت ممکن ہے، جب ایک کثیر رقمی تفاعل جیسے $P(x) = x^2 + 1$ میں کوئی حقیقی صفر نہ ہوگا۔

(ii) فرض کریں کہ $P(x)$ ایک کثیر رقمی تفاعل ہوں، جس کے ناطق سر اعداد ہوں۔ اگر $a + b\sqrt{p}$، جس میں $a, b \in \mathbb{Q}$، p ایک عدد اولی ہوگا، یہ بھی $P(x)$ کا ایک صفر ہوگا۔ تب اس کا زوجی عدد (conjugate) $a - b\sqrt{p}$ بھی صفر ہوگا۔

کثیر رقمیات کے دو اہم مسائل یہ ہیں۔

(i) کثیر رقمی تفاعلات کی صفر کو پہچاننا اور پھر کثیر رقمی اجزائے ضربی کو خطی جزو ضربی میں تبدیل کرنا اور

(ii) دئے گئے صفری کثیر رقمیات میں تشریح دینا اور/یا کچھ مزید شرائط کو پورا کرنا۔

مسئلہ کو حل کرنے کے لئے کثیر رقمی تفاعل کے صفر کو پہچاننا، چند مشہور الجبر یائی تماثل، جو یہاں پر مفید ہیں۔ یہ کس طرح کا تماثل ہے؟

ایک مساوات اس وقت تماثل کہلاتی ہے، اگر یہ مساوات اپنے علاقے کی تمام قیمت کے لئے درست ہے۔ یہ مساوات تب شرطی مساوات کہلائے گی، جب صرف علاقے (domain) کے کچھ (سب کے لئے نہیں) قیمت صحیح ہوں۔ اب ہم مندرجۂ ذیل تماثلات کا اعادہ کریں گے۔

2.6.2۔ اہم تماثلات

تمام $x, a, b \in \mathbb{R}$ کے لئے، ہمارے پاس ہے۔

1. $(x+a)^3 = (x+a)^2(x+a) = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3 = x^3 + 3xa(x+a) + a^3$
2. $(x-b)^3 = x^3 - 3x^2b + 3xb^2 - b^3 = x^3 - 3xb(x-b) - b^3$ ((1) میں a = –b لینے پر)
3. $x^3 + a^3 = (x+a)(x^2 - xa + a^2)$
4. $x^3 - b^3 = (x-b)(x^2 + xb + b^2)$ ((3) میں a = –b لینے پر)
5. $x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + x^{n-k-1}a^k + \cdots + a^{n-1}),\ n \in \mathbb{N}$
6. $x^n + b^n = (x+b)(x^{n-1} - x^{n-2}b + \cdots + x^{n-k-1}(-b)^k + \cdots + (-b)^{n-1}),\ n \in \mathbb{N}$

11 maths v1 unit 2 UM algebra
Tuesday, September 06, 2022 9:55:30 AM

مشق 2.6

1۔ کثیر رقمی تفاعل $f(x) = 4x^2 - 25$ کے صفریں معلوم کیجئے۔

2۔ اگر $x^3 - x^2 - 17x = 22$ کا ایک جذر $x = -2$ ہو تو مساوات کے باقی جذروں کو معلوم کیجئے۔

3۔ $x^4 = 16.$ کا حقیقی جذر معلوم کیجئے۔

4 حل کیجئے۔ $(2x+1)^2 - (3x+2)^2 = 0$

غیر متعین ضریب کا طریقہ: (Method of Undertermined Coefficients)

آیئے اب غیر متعین ضریب کے طریقہ کار کا استعمال کرتے ہوئے، دی گئی معلومات کثیر رقمی کی تشریح پر توجہ دیں۔ یعنی ہم دی گئی شرائط کا استعمال کرتے ہوئے مطلوبہ کثیر رقمی کے ضریب کا تعین کریں گے۔ یہاں اہم خیال یہ ہے کہ دو کثیر رقمیات تب مساوی ہوں گے جب کہ صرف اور صرف ان دو کثیر رقمیات کے متغیرات کے درجہ بھی مساوی ہوں۔

مثال 2.16۔ دو درجی کثیر رقمی **f(x)** معلوم کریں، اس طرح سے کہ $f(0) = 1, f(-2) = 0$ اور $f(1) = 0.$ ہو۔

حل: فرض کیجئے $f(x) = ax^2 + bx + c$ ایک کثیر رقمی، جو دئے گئے شرائط کو پورا کرتا ہے۔

$f(0) = a(0)^2 + b(0) + c = 1$ اس کا مطلب **c = 1** ہے۔ اب دیگر دو شرائط $f(-2) = 0, f(1) = 0$ یہ $4a - 2b + c = 0$ اور دیتے ہیں۔ $a + b + c = 0.$ حاصل ہوئے۔

c = 1 استعمال کرنے پر، ہمیں $4a - 2b = -1$ اور $a + b = -1.$ حاصل ہوتے ہیں۔ ان دو مساوات کو حل کرنے سے ہمیں $a = b = -\frac{1}{2}$ حاصل ہوتا ہے اور اس طرح ہمارے پاس $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1.$ ہے۔

مذکورہ مسئلہ کو دوسرے طریقہ سے بھی حل کیا جاسکتا ہے۔ $f(x)$ کے صفر $x = -2, x = 1$ ہیں۔

اس طرح $f(x) = d(x+2)(x-1)$ کے چند مستقل ' **d** ' کے لئے ہیں۔

f(0) =1 استعمال کرنے پر ہمیں **$-2d = 1$** حاصل ہوتا ہے، لہذا **$d = -½$** ہے۔ چنانچہ

$$f(x) = -\tfrac{1}{2}(x+2)(x-1) = -\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x + 1.$$

مثال 2.17 ایک مکعبی کثیر رقمی تفاعل کی تصنیف کریں، جس میں $x = \frac{2}{5}, 1 + \sqrt{3}$ پر ناطق ضریب کے صفر ہوں، جیسا کہ $f(0) = -8.$

حل: دئے گئے $f(x)$ کے صفر $\frac{2}{5}$ اور $1 + \sqrt{3}$ ہیں۔ اس طرح $1 - \sqrt{3}$ بھی **f(x)** کا صفر ہے۔

فرض کیجئے کہ $f(x) = a(x - \frac{2}{5})[(x - (1+\sqrt{3}))][x - (1 - \sqrt{3})] = a(x - \frac{2}{5})[(x-1)^2 - 3].$

$f(0) = -8,$ کو استعمال کرنے پر ہمارے پاس $\left(-\frac{2}{5}a\right)(-2) = -8$ ہے؛ جس سے $a = -10.$ حاصل ہوتا ہے۔

اس طرح مطلوبہ کثیر رقمی $f(x) = (-10)(x - \frac{2}{5})[x^2 - 2x - 2] = -10x^3 + 24x^2 + 12x - 8.$

مثال 2.18 ثابت کریں کہ اگر $ap + q = 0$ ہو تو $f(x) = x^3 - 3px + 2q$ سے $g(x) = x^2 + 2ax + a^2.$ تقسیم پذیر ہے۔

حل: نوٹ کریں کہ **f(x)** کا درجہ **3** اور معروف ضریب **1** ہے۔

چونکہ **g(x)** کو **f(x)** تقسیم کرتا ہے۔ $b \in \mathbb{R}$ کے لئے ہمارے پاس ہے۔ $f(x) = (x+b)g(x)$

لہذا $x^3 - 3px + 2q = (x+b)(x^2 + 2ax + a^2).$

دونوں جانب کے ضریب کو مساوی کرنے پر، ہمارے پاس $2a + b = 0,\ a^2 + 2ab = -3p$ اور $2q = ba^2$ ہیں۔

لہذا $b = -2a, p = a^2$ اور $q = -a^3$

اب $q = -a^3 = -a(a^2) = -ap,$ جس سے یہ حاصل ہوتا ہے۔ $ap + q = 0$

11 maths v1 unit 2 UM algebra
Tuesday, September 06, 2022 9:55:30 AM

مثال 2.19 $1+2+3+\cdots+(n-1)+n, n\in\mathbb{N}$ کا حاصل جمع معلوم کرنے کے لئے غیر متعین ضریب کا طریقہ استعمال کریں۔

حل: فرض کرو کہ

$$\begin{aligned} S(n) &= n+(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1 \\ &= n+(n-1)+(n-2)+\cdots+[n-(n-2)]+[n-(n-1)] \\ &= n\left[1+\frac{n-1}{n}+\frac{n-2}{n}+\cdots+\frac{n-(n-2)}{n}+\frac{n-(n-1)}{n}\right] \\ &\leq n[1+1+\cdots+1] \qquad \frac{n-1}{n}<1,\ \frac{n-2}{n}<1,\cdots \text{ چونکہ} \end{aligned}$$

$$S(n) \leq n^2. \text{ لہٰذا}$$

فرض کرو کہ $S(n) = a+bn+cn^2$ جس میں $a,b,c,\in\mathbb{R}$

اب
$$\begin{aligned} S(n+1)-S(n) &= n+1 \\ a+b(n+1)+c(n+1)^2-[a+bn+cn^2] &= n+1 \\ b+2cn+c &= n+1 \end{aligned}$$

لہٰذا $b+c=1$ اور $2c=1$ (یکساں ضریب کو مساوی کرنے پر) $b=\frac{1}{2};\ c=\frac{1}{2}$ حاصل ہوتا ہے۔

اب $a+b+c=1,\ S(1)=1$ جس سے یہ حاصل ہوتا ہے۔ $a=0$

لہٰذا $S(n)=\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}n^2=\frac{n(n+1)}{2}, n\in\mathbb{N}.$

مثال 2.20 کثیر رقمی مساوات $(x-1)^3(x+1)^2(x+5)=0$ کی جذریں معلوم کیجئے اور ان کے ضربیت (multiplicity) بیان کیجئے۔

حل: فرض کیجئے کہ $f(x)=(x-1)^3(x+1)^2(x+5)=0$ واضح طور پر ہمارے پاس ہے۔ $x=1,-1,-5$

لہذا جذریں ضرب 3, -1 کے ساتھ 1 ہیں۔ ضرب 2 کے ساتھ

(1) جب جذور 1 ہیں، جس کی ضربیت 3, -1 ہے، 2 اور -5 ہیں جس کی ضربیت 1 ہے۔

جب جذور کی ضربیت 1 ہو تو اسے مفرد جذر (سادہ جذر) (Simple root) کہا جاتا ہے۔

مثال 2.21 $x\in\mathbb{R}.$ کے لئے $x=\sqrt{x+20}$ حل کریں

حل: مشاہدہ کریں کہ $\sqrt{x+20}$ صرف اس صورت میں واضح ہوتا ہے جب $x+20\geq 0$

وضاحت کے ساتھ $(x+20)\geq 0$، لہٰذا x مثبت ہے۔

اب مربع کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے، $(x-5)(x+4)=0,\ x^2-x-20=0$، $x^2=x+20$

جس سے یہ حاصل ہوتا ہے۔ $x=5, x=-4$ چونکہ x مثبت ہے، درکار حل یہ ہے۔ $x=5$

11 maths v1 unit 2 UM algebra
Tuesday, September 06, 2022 9:55:31 AM

مثال 2.22 مساوات $x^2 - 6x + a = 0$ اور $x^2 - bx + 6 = 0$ میں ایک جذر مشترک ہے۔
پہلی اور دوسری مساوات کے دیگر جذر 4:3 کے تناسب میں سالم اعداد ہیں۔ مشترک جذر معلوم کریں۔

حل: فرض کرو کہ α ایک مشترک جذر ہے۔

فرض کرو کہ α اور 4β، $x^2 - 6x + a = 0$ کے جذر ہیں۔

فرض کرو کہ α اور 3β، $x^2 - bx + 6 = 0$ کے جذر ہیں۔

تو $4\alpha\beta = a$ اور $3\alpha\beta = 6$ ہیں جس سے $\alpha\beta = 2$ اور $a = 8$ حاصل ہوتا ہے ۔

$x^2 - 6x + 8 = 0$ کے جذور $2, 4$ ہیں۔

اگر $\alpha = 2$، تو $\beta = 1$ ہے۔

اگر $\alpha = 4$ ہو تو $\beta = ½$ ہے، جو ایک سالم عدد نہیں ہے۔ لہذا مشترک جذر 2 ہے۔

مثال 2.23 : مساوات $x^2 + px + 8 = 0$ میں p کی قیمت معلوم کریں، جس میں جذور کا فرق 2 ہے۔

حل:

فرض کرو کہ α اور β ، مساوات $x^2 + px + 8 = 0.$ کے جذور ہیں۔

تو $\alpha\beta = 8$, $\alpha + \beta = -p$ اور $|\alpha - \beta| = 2$

اب $(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (\alpha - \beta)^2$ جس سے یہ حاصل ہوتا ہے۔ $p^2 - 32 = 4$ لہذا $p = \pm 6$

مشق 2.7

(1) اجزائے ضربی معلوم کرو۔ $x^4 + 1$ (اشارہ: مربع کو مکمل کرنے کی کوشش کیجئے)۔

(2) اگر کثیر رقمی $3x^3 + 8x^2 + 8x + a$, کا ایک جزو ضربی $x^2 + x + 1$ ہو تو a کی قیمت دریافت کریں۔

2.7۔ ناطق تفاعلات: (Rational Functions)

x کے ایک ناطق عبارت کی وضاحت، x کی دو کثیر رقمیوں کی نسبت کے طور پر کی جاتی ہے، جیسے $P(x)$ اور $Q(x)$، جس میں $Q(x) \neq 0$

ناطق عبارت کی چند مثالیں $\frac{x^4+1}{x^2+1}, \frac{2x+1}{x^2+x+1}$ اور $\frac{x^2+x}{x^2-5x+6}$. ہیں۔

اگر نسب نما کا درجہ $P(x)$ ، شمار کنندہ $Q(x)$ سے مساوی یا بڑھ کر ہو تو پھر $P(x) = f(x)Q(x)+r(x)$ کی طرح لکھ سکتے ہیں

جہاں $r(x) = 0$ کا درجہ $Q(x)$. کے درجے سے کم ہوگا۔

تو $\frac{P(x)}{Q(x)} = f(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}$

2.7.1۔ ناطق نامساوات (Rational inequalities)

مثال 2.24 حل کریں : $\frac{x+1}{x+3} < 3$

حل: دونوں جانب 3 سے تفریق کرنے پر ہمیں حاصل ہوگا۔ $\frac{x+1}{x+3} - 3 < 0$

11 maths v1 unit 2 UM algebra
Tuesday, September 06, 2022 9:55:31 AM

$$\frac{x+1-3(x+3)}{x+3} < 0$$
$$\frac{-2x-8}{x+3} < 0$$
$$\frac{x+4}{x+3} > 0$$

اس طرح $x+4$ اور $x+3$ دونوں مثبت یا دونوں منفی ہیں۔

لہٰذا آیئے $x+3$ اور $x+4$ کی علامتیں معلوم کریں۔

x	$x+3$	$x+4$	$\frac{x+4}{x+3}$
$x < -4$	$-$	$-$	$+$
$-4 < x < -3$	$-$	$+$	$-$
$x > -3$	$+$	$+$	$+$
$x = -4$	$-$	0	0

تو حل مجموعہ $(\infty, \quad -4) \cup (-3, \infty)$ کے ذریعہ دیا گیا ہے۔

مذکورہ بالا قسم کی ناطق نامساوات کو نمبر لائن کے وقفوں پر مختلف اجزائے ضربی کی علامتوں کی نقشے سے حل کر سکتے ہیں۔

مشق 2.8

1۔ x کی تمام قیمتیں معلوم کریں، جس میں $\frac{x^3(x-1)}{(x-2)} > 0.$ ہے۔

2۔ x کی تمام قیمتیں معلوم کریں جو نامساوات $\frac{2x-3}{(x-2)(x-4)} < 0.$ کی شرط کو پورا کرتے ہیں۔

3۔ حل کریں $\frac{x^2-4}{x^2-2x-15} \leq 0.$

2.7.2۔ جزوی کسریں: (Partial Fractions)

ایک ناطق عبارت $\frac{f(x)}{g(x)}$ واجب کسر کہلاتی ہے، جب $f(x)$ کا درجہ $g(x)$ کے درجے سے کم ہو، جس میں $g(x)$ کو حقیقی صفروں کے بغیر خطی جزو ضربی اور دو درجی جزو ضربی کی طرح اجزائے ضربی حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اب $\frac{f(x)}{g(x)}$ کو سادہ رقموں میں ظاہر کیا جا سکتا ہے، درج ذیل جملوں کے حاصل جمع کی طرح۔

(i) $\frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-a)^k}$ اگر $x-a$ تقسیم کرتا ہے $g(x)$ کو اور

(ii) $\frac{(B_1x+C_1)}{(x^2+ax+b)} + \frac{(B_2x+C_2)}{(x^2+ax+b)^2} + \cdots + \frac{(B_kx+C_k)}{(x^2+ax+b)^k}$

اگر x^2+ax+b کے حقیقی صفر نہیں ہیں اور (x^2+ax+b) تقسیم کرتا ہے $g(x)$ کو۔

$\frac{f(x)}{g(x)}$ سے حاصل ہونے والی عبارت کو جزوی کسر علاحدگی (partial fraction decomposition) کہا جاتا ہے۔ اس طرح کی علاحدگی دیے گئے ناطق تفاعل کے لئے منفرد ہے۔

یہ طریقہ احصائے تکمیل کرنے میں مفید ہے۔ تو آیئے چند مثالوں پر بات کرتے ہیں۔

11 maths v1 unit 2 UM algebra
Tuesday, September 06, 2022 9:55:31 AM

مثال 2.25 $\frac{x}{(x+3)(x-4)}$ کو جزوی کسر میں مختصر کریں۔

حل: فرض کیجئے $\frac{x}{(x+3)(x-4)}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-4}$ جہاں A اور B مستقل ہیں۔

تو $\frac{x}{(x+3)(x-4)}=\frac{A(x-4)+B(x+3)}{(x+3)(x-4)}$, جس سے یہ حاصل ہوتا ہے۔ $x=A(x-4)+B(x+3)$

جب $x=4$ ہو تو ہمیں $B=\frac{4}{7}$ حاصل ہوتا ہے۔

جب $x=-3$ ہو تو ہمیں $A=\frac{3}{7}$ حاصل ہوتا ہے۔

لہذا $\frac{x}{(x+3)(x-4)}=\frac{3}{7(x+3)}+\frac{4}{7(x-4)}$.

مذکورہ بالا طریقہ کار کو اس وقت انجام دیا جا سکتا ہے، اگر نسب نما کے تمام صفر R میں ہوں جو کہ سب سے واضح (distinct) ہوں۔

مثال 2.26 $\frac{2x}{(x^2+1)(x-1)}$ کو جزوی کسر میں مختصر کریں۔

حل: اس صورت حال میں، نوٹ کریں کہ نسب نما کا ایک جزو ضربی x^2+1 ہے، جس میں حقیقی صفر نہیں ہیں۔

فرض کیجئے $\frac{2x}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$ جہاں C,B,A مستقل ہیں۔

ہمارے پاس ہے۔ $2x=A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)$

جب $x=1$ ہو تو ہمیں $A=1$ حاصل ہوتا ہے۔

جب $x=0$ ہو تو ہمیں $A-C=0$ حاصل ہوتا ہے۔ لہذا $A=C=1$۔

جب $x=-1$ ہو تو ہمیں $2A-2(C-B)=-2,$ حاصل ہوتا ہے، جس سے $B=-1$ حاصل ہوتا ہے۔

لہذا $\frac{2x}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{1}{(x-1)}+\frac{1-x}{x^2+1}$

اب ہم اس صورت حال کی وضاحت کرتے ہیں، جب نسب نما میں ایک سے زیادہ ضربیت کے ساتھ حقیقی صفر ہوتے ہیں۔

مثال 2.27 $\frac{x+1}{x^2(x-1)}$ کو جزوی کسر میں مختصر کریں۔

حل:

فرض کیجئے کہ $\frac{x+1}{x^2(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}$

تو $x+1=Ax(x-1)+B(x-1)+Cx^2$

جب $x=0$ ہو تو ہمیں $B=-1$ اور جب $x=1$، ہو تو ہمیں $C=2$ حاصل ہوتا ہے۔

جب $x=-1$ ہو تو ہمیں $2A-2B+C=0$ حاصل ہوتا ہے جس سے $A=-2$ حاصل ہوتا ہے۔

لہذا $\frac{x+1}{x^2(x-1)}=\frac{-2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x-1}$.

11 maths v1 unit 2 UM algebra
Tuesday, September 06, 2022 9:55:31 AM

مشق 2.9

مندرجۂ ذیل ناطق عبارت کو جزوی کسر میں مختصر کریں۔

1. $\frac{1}{x^2-a^2}$
2. $\frac{3x+1}{(x-2)(x+1)}$
3. $\frac{x}{(x^2+1)(x-1)(x+2)}$
4. $\frac{x}{(x-1)^3}$
5. $\frac{1}{x^4-1}$
6. $\frac{(x-1)^2}{x^3+x}$
7. $\frac{x^2+x+1}{x^2-5x+6}$
8. $\frac{x^3+2x+1}{x^2+5x+6}$
9. $\frac{x+12}{(x+1)^2(x-2)}$
10. $\frac{6x^2-x+1}{x^3+x^2+x+1}$
11. $\frac{2x^2+5x-11}{x^2+2x-3}$
12. $\frac{7+x}{(1+x)(1+x^2)}$

2.7.3۔ خطی نامساوات کی ترسیمی نمائندگی (Graphical Representation of Linear Inequalities)

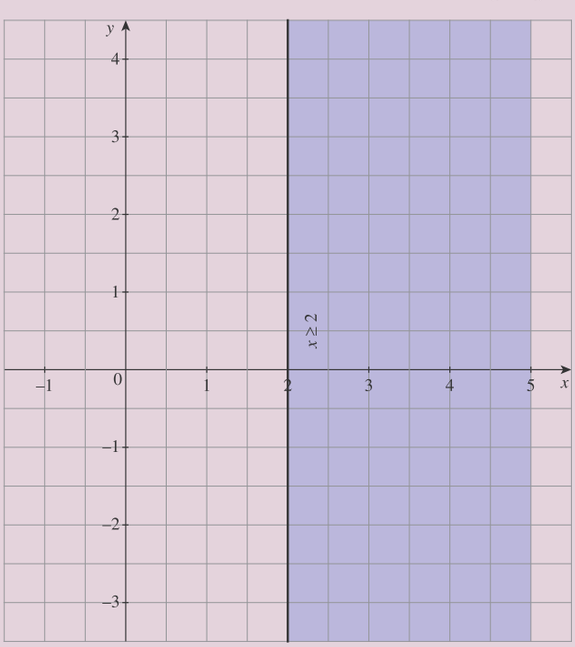
ایک سیدھی خط $ax + by = c$ کارتیسی مسطح کو دو حصوں میں تقسیم کرتی ہے۔ ہر حصہ نصف مسطح ہے۔ عمودی خط $x=c$ مستوی کو بائیں اور دائیں نصف مسطح میں تقسیم کرے گی اور افقی خط $y = k$ مسطح کو اوپری اور نچلے نصف مسطح میں تقسیم کرے گی۔

کارتیسی مستوی کا ایک نقطہ جو کہ $ax+by= c$ لائن پر نہیں ہے، یہ خط کے ذریعے طے شدہ دو نصف مستوی میں سے ایک میں پڑے گا اور $ax + by > c$ یا $ax + by < c$ کی نامساوات کی شرط میں سے ایک کو پورا کرے گا۔

آدھے مسطح کی نشاندہی کرنے کے لئے $ax + by < c$ نصف مسطح میں سے کسی ایک میں نقطہ P کا انتخاب کریں اور نامساوات میں P کے نقاط کو تبدیل کریں۔

اگر نامساوات کی شرط پوری ہو جائے تو مطلوبہ نصف مسطح وہ ہوتا ہے جس میں P ہوتا ہے۔ ورنہ مطلوبہ نصف مسطح وہ ہوتا ہے جس میں P نہ ہو، جب $c \neq 0$ ہو تو مبدا سے P کو لے جانا بہت آسان ہے۔

مثال 2.28: نامساوات $x \geq 2$ کے ذریعہ حاصل کردہ علاقہ کو سیاہ کریں۔

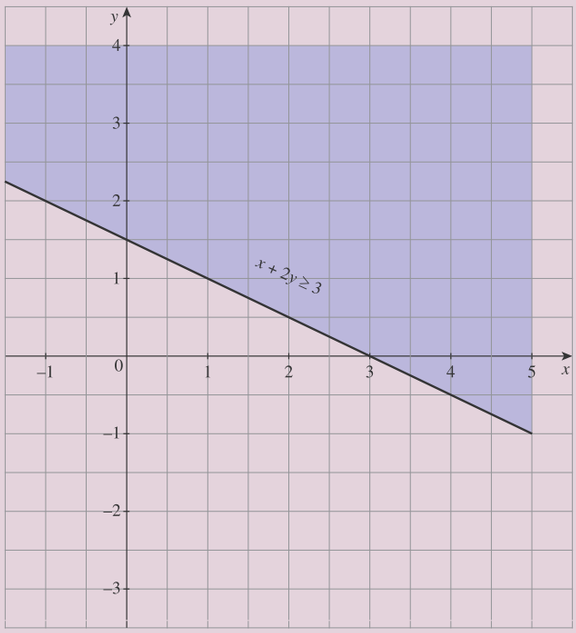


حل:

پہلے ہم مساوات $x = 2$ پر غور کریں۔ یہ محور سے 2 اکائیوں کے فاصلہ پر y محور کے متوازی خط ہے۔ یہ خط کارتیسی مسطح کو دو حصوں میں تقسیم کرتی ہے۔ نامساوات میں (0,0) تبدیل کرنے پر ہمیں $0 \geq 2$ حاصل ہوتا ہے جو کہ غلط ہے۔ لہذا وہ حصہ جس نقطہ آغاز نہیں ہوتا ہے اس کی نمائندگی نامساوات $x \geq 2$ سے ہوتی ہے۔ سیادہ کردہ حصہ، دی گئی نامساوات کا مطلوبہ حل ہے۔ چونکہ $x \geq 2$ خط کا نقطہ بھی ہے۔ $x = 2$ بھی اس کا حل ہے۔

11 maths v1 unit 2 UM algebra
Tuesday, September 06, 2022 9:55:32 AM

مثال 2.29 دی گئی خطی نامساوات $x + 2y > 3$ کے علاقے کو سیاہ کریں۔



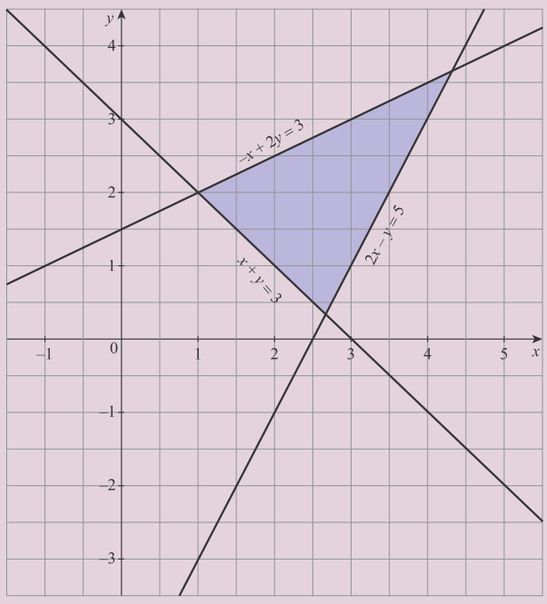
ثبوت: لائن $x + 2y = 3$ کارتیسی مسطح کو دو نصف مستوی میں تقسیم کرتی ہے۔ $3x + 2y > 3$ کی طرف سے نمائندگی کرنے والے نصف مسطح کو معلوم کرنے کے لئے نامساوات نصف مسطح میں سے ایک نقطہ کو تبدیل کریں اور چیک کریں کہ یہ مطمئن ہے یا نہیں۔ آیئے نامساوات میں $(0,0)$ کو تبدیل کریں۔ ہمیں $0 < 3$ ملتا ہے، جو کہ غلط ہے۔ لہذا $x + 2y > 3$ کے ذریعہ دیا گیا علاقہ، نصف مسطح ہے، جو مبدا میں نہیں ہے۔

مثال 2.30 خطی نامساوات کو حل کریں اور نتیجہ کو ترسیمی طور پر پیش کریں۔

$$x + y \geq 3,\ 2x - y \leq 5,\ -x + 2y \leq 3.$$

حل: مشاہدہ کریں کہ ایک سیدھی خط کھینچی جاسکتی ہے، اگر ہم اس پر دو نقاط کی نشاندہی کریں۔ مثال کے طور پر $(3,0)$ اور $(0,3)$ کو سیدھی لائن $x + y = 3$ پر دو نقاط کے طور پر آسانی سے پہچانا جاسکتا ہے۔ تین سیدھے خطوط $x + y = 3$, $2x - y = 5$ اور $-x + 2y = 3$ کھینچیں۔ $(0,0)$ $x + y \geq 3$ کی شرط کو پورا نہیں کرتا۔

پھر نصف مسطح $x + y = 3$ کا سرحد مبداء میں نہ ہونے کی وجہ سے مبداء کا حل $x + y \geq 3$ ہے۔



اسی طرح، آدھا مستوی $2x - y \leq 5$ جس میں مبدا ہونے کی وجہ سے اس کا حل $2x - y \leq 5$ ہوگا۔

علاقہ $-x + 2y \leq 3$ نمائندگی کرتا ہے وہ آدھی جگہ $-x + 2y = 3$ سے جڑی ہوئی ہے اور اس میں مبدا بھی واقع ہے۔

مذکورہ تین آدھے مسطح میں مشترکہ علاقے دی گئی خطی نامساوات کی حل سیٹ کی نمائندگی کرتا ہے۔

11 maths v1 unit 2 UM algebra
Tuesday, September 06, 2022 9:55:32 AM

مشق 2.10

نامساوات کے ذریعہ مسطح میں ظاہر کردہ حصہ معلوم کیجئے۔

(1) $x \leq 3y, \quad x \geq y.$
(2) $y \geq 2x, \quad -2x + 3y \leq 6.$
(3) $3x + 5y \geq 45, x \geq 0, y \geq 0.$
(4) $2x + 3y \leq 35, y \geq 2, x \geq 5.$
(5) $2x + 3y \leq 6, \ x + 4y \leq 4, \ x \geq 0, y \geq 0.$
(6) $x - 2y \geq 0, \ 2x - y \leq -2, \ x \geq 0, y \geq 0.$
(7) $2x + y \geq 8, x + 2y \geq 8, x + y \leq 6.$

2.8۔ قوت نما اور جذریہ (اصلیہ) (Exponents and Radicals)

پہلے ہم قوت نما پر غور کریں گے۔

2.8.1۔ قوت نمائیں (Exponents)

پہلے ہم قوت نماؤں پر غور کریں گے۔

فرض کیجئے کہ $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$ تو $a^n = a \cdot a \cdots a$ (n مرتبہ) ۔ اگر m منفی سالم عدد اور حقیقی عدد $a \neq 0$ ہو تو $a^m = \frac{1}{a^{-m}}$

نوٹ کریں کہ کسی بھی $a \neq 0$ کے لئے، ہمارے پاس $\frac{a}{a} = a^{1-1} = a^0 = 1.$ ہے۔ مندرجۂ ذیل خصوصیات کو آسانی سے حل کیا جاتا ہے۔

قوت نماؤں کی خصوصیات: (Properties of Exponents)

(i) $m, n \in \mathbb{Z}$ اور $a \neq 0$ کے لئے، ہمارے پاس ہے۔ $a^m a^n = a^{m+n}$

(ii) $m, n \in \mathbb{Z}$ اور $a \neq 0$ کے لئے، ہمارے پاس ہے۔ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

2.8.2۔ جذریہ (یا) اصلیہ (Radicals)

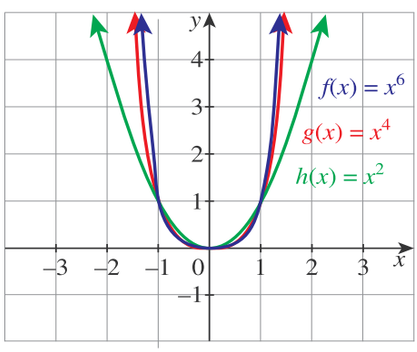
سوالات:

$r \in \mathbb{Q}$ اور $a \neq 0$ سے، کیا a^r کی تعریف ممکن ہے؟ پہلے ہم اس صورت حال پر غور کریں۔ جب $r = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ ہو۔

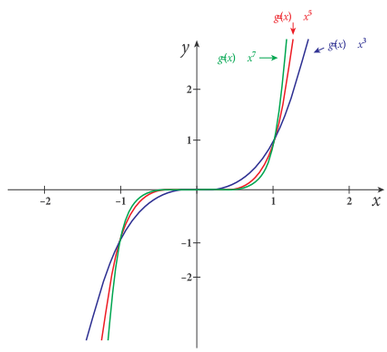
فرض کریں کہ حقیقی عدد $y \in \mathbb{R}$ اس طرح سے کہ $y = a^{\frac{1}{n}}$ پھر $y^n = a.$ ضرور ہونا چاہئے۔

بنیادی طور پر یہ مسئلہ معکوس تفاعلات $y = x^n$ کو معلوم کرنے کا ہے۔ بہتر طور پر سمجھنے کے لئے آیئے درجہ ذیل تفاعل کے گراف پر غور کریں۔

(i) $f(x) = x^{2n}, n \in \mathbb{N}$



(ii) $g(x) = x^{2n+1}, n \in \mathbb{N}$



11 maths v1 unit 2 UM algebra
Tuesday, September 06, 2022 9:55:32 AM

ان دوشکلوں سے یہ واضح ہے کہ تفاعل $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ جو اس $g(x) = x^{2n+1}, n \in \mathbb{N}$ سے دیا گیا ہے، جو ایک ایک اور بروں ہے۔ اور لہذا اس کا معکوس تفاعل $\mathbb{R}$ بروں $\mathbb{R}$ واقع ہوگا، مگر $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ جو $f(x) = x^{2n}, n \in \mathbb{N}$ سے دیا گیا ہے، وہ بروں ہوگا، مگر ایک ایک نہیں ہوگا۔ اگر ہم اس علاقہ کو $[0, \infty)$ تک محدود رکھتے ہیں تو f ایک اور بروں ہوں گے۔ یہ ایک حقیقی عدد کی n ویں جذر کو سمجھنے میں مددگار ہے تو ہمارے پاس دو صورت حال ہیں۔

صورت حال 1 : جب n جفت ہو۔ اس صورت میں $y^n = a$ بامعنی نہیں ہے جب $a<0$ ہو، تو کوئی ایسی y موجود نہیں، جب $a<0$ ہو۔

فرض کریں کہ $a > 0$ ، اگر $x^n = a$ کا حل y ہے تو $-y$ کا حل بھی $x^n = a$ ہے۔

صورت حال 2 : جب n طاق ہو۔ اس صورت میں مسئلہ صورت حال 1 کی طرح مسئلہ درپیش نہیں آئے گا۔ $y \in \mathbb{R}$ کے لئے، ایک واحد $x \in \mathbb{R}$ ہے۔ اس طرح سے کہ $y = x^n$

اوپر کے مشاہدہ کی بنیاد پر ذیل کی طرح ہم جذریہ (radical) کی وضاحت کرتے ہیں۔

تعریف 2.2 (i) $n \in \mathbb{N}$ کے لئے n جفت ہے، اور $b>0$ کے لئے، ایک واحد $a>0$ اس طرح ہے کہ $a^n=b$

(ii) $n \in \mathbb{N}$, کے لئے n طاق ہے، $b \in \mathbb{R}$, ایک واحد $a \in \mathbb{R}$ اس طرح کہ $a^n=b$ ہے ۔ ان دونوں صورتوں میں a کو b کا n واں جذر یا جذریہ کہتے ہیں اور اسے $b^{1/n}$ یا $\sqrt[n]{b}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

(i) اگر $n = 2$ ہو تو n ویں جذر المربع کہا جاتا ہے۔ اگر $n=3$ ہو تو پھر اسے جذر المکعب (Cube root) کہتے ہیں۔

(ii) مشاہدہ کریں کہ مساوات $x^2 - a^2$ کے دو حل ہیں $x=0$ اور $x = -a$ لیکن $\sqrt{a^2} = |a|$

(iii) مذکورہ بالا قوت نما کی خصوصیات اب بھی جذروں کے لئے درست ہیں، بشرطیکہ علحدہ رقمیں واضح ہو۔

(iv) نوٹ کریں کہ $n \in \mathbb{N}$ اور $a \neq 0$ کے لئے، ہمارے پاس ہے

$$(a^n)^{1/n} = \begin{cases} |a| & \text{اگر n جفت ہے۔} \\ a & \text{اگر n طاق ہے۔} \end{cases}$$

مثال کے طور پر $\sqrt[4]{(-2)^4} = 16^{1/4} = 2, 343^{1/3} = 7$ اور $(-1000)^{\frac{1}{3}} = -10.$

کسی بھی ناطق عدد $r = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ جس کا gcd (m,n) =1 ہے اور $a > 0$ کے لئے ہم $a^r = a^{\frac{m}{n}} = (a^{1/n})^m$ اس طرح وضاحت کر سکتے ہیں۔

مثال کے طور پر $49^{3/2} = (49^{1/2})^3 = 7^3 = 343$ ۔ لیکن $(-49)^{3/2}$ حقیقی عددی نظام میں بے معنی ہے۔

کیونکہ کوئی حقیقی عدد x اس طرح نہیں ہے، جیسے $x^2 = (-49)^3$ ہے۔

2.8.3۔ قوت نما تفاعل: (Exponential Function)

مشاہدہ کریں کہ کسی بھی $a > 0$ اور $x \in \mathbb{R}$ کے لئے a^x کی وضاحت کی جاسکتی ہے۔ اگر $a=1$ ہو تو، ہم اس کی وضاحت $1^x = 1$ کی طرح کر سکتے ہیں۔ لہٰذا، ہم a^x پر غور کریں گے۔ $x \in \mathbb{R}$ ، $0 < a \neq 1$ کے لئے۔

یہاں a^x کو قاعدہ 'a' والا قوت نما تفاعل (exponential function with base a) کہتے ہیں۔ نوٹ کریں کہ a^x کی وضاحت نہیں کی جاسکتی جب $a < 0$ ہو، اور $x = \frac{1}{m}$ جفت $m \in \mathbb{N}$ کے لئے۔ اسی لئے ہم $a > 0$ تک محدود کرتے ہیں۔ اس کے علاوہ $a^x > 0$ تمام $x \in \mathbb{R}$ کے لئے۔ یہ ذیل کے تماثلات کی شرط کو بھی پورا کرتا ہے۔

قوت نما تفاعل کی خصوصیات **Properties of Exponential Function**

(i) تمام $x, y \in \mathbb{R},$ کے لئے $a^{x+y} = a^x\, a^y$ اور $a, b > 0$ کے لئے $a \neq 1 \neq b$

(ii) تمام $x, y \in \mathbb{R},$ کے لئے $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

11 maths v1 unit 2 UM algebra
Tuesday, September 06, 2022 9:55:33 AM

(iii) $(a^x)^y = a^{xy}$ تمام $x, y \in \mathbb{R}$, کے لئے

(iv) $(ab)^x = a^x b^x$ تمام $x \in \mathbb{R}$, کے لئے

(v) $a^x = 1$ صرف اورصرف $x = 0.$ کے لئے

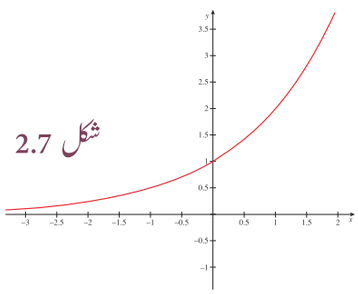
I۔آیئے ہم $f(x) = a^x, x \in \mathbb{R}$ پرغورکریں جہاں $a=2$ ہو۔

اب $f(x) = 2^x,\ x \in \mathbb{R}$ آیئے اب ہم f کوایک ایک اور بروں ثابت کریں۔

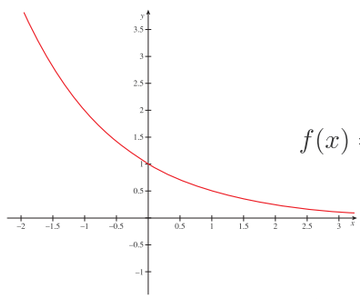
فرض کروکہ کسی $u, v \in \mathbb{R}$ کے لئے $f(u) = f(v)$ ہے۔ تو ہمارے پاس ہے $2^u = 2^v$، جس کا یہ مطلب ہے کہ $\frac{2^u}{2^v} = 1 \Rightarrow 2^{u-v} = 1.$

چنانچہ، $u-v = 0$ اوراس لئے $u=v$ اس طرح f ایک۔ایک تفاعل ہوتا ہے۔

شکل 2.7 $f(x) = 2^x$



شکل 2.8 $f(x) = \frac{1}{2^x}$



ترسیم سے یہ بات واضح ہے کہ جیسے ہی x کی قیمت بڑھتی ہے, $f(x) = 2^x$ کی قیمت بڑھتی ہے اور f کی حد $(0,\infty)$ ہوتی ہے۔

لہٰذا $2^0 = 1$ ۔ تو تمام $x > 0$ کے لئے ہمارے پاس $2^x > 1$ ہے اور تمام $x < 0$ کے لئے $2^x < 1$ ہے۔ مشاہدہ کریں کہ $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ بروں ہے۔

2۔ آیئے ہم $a = ½$ پرغورکریں۔ فرض کیجئے کہ $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^x},\ x \in \mathbb{R}.$

گراف سے یہ بات واضح ہے کہ، جیسے ہی x کی قیمت بڑھتی ہے، $g(x) = (½)^x$ کی قیمت گھٹتی ہے۔ $g(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ ۔ اسی طرح $g(0) = 1$۔ ہمارے پاس تمام $x<0$ کے لئے $g(x)>1$ اور $x>0$ کے لئے $g(x)<1$ ہے۔

ریمارک: بالکل وہی دلائل جو اوپر بیان کئے گئے ہیں، وہ قوت نمائی تفاعل $f(x) = a^x$ کے لئے ہیں۔ کسی بھی $0 < a \neq 1$ کے قاعدہ کے لئے ایک قوت نما تفاعل ایک-ایک اور بروں ہے، جس کا علاقہ $\mathbb{R}$ اور معاون علاقہ $(0,\infty)$ ہے۔

خاص قوت نما تفاعل:(A Special Exponential Function)

تمام قوت نما تفاعلات میں $f(x) = e^x,\ x \in \mathbb{R}$ سب سے اہم ہے۔ کیونکہ اس میں کئی شعبوں جیسے ریاضی، سائنس اور معاشیات میں استعمال ہوتا ہے۔ پھر یہ e کیا ہے؟ مندرجۂ ذیل کی تشریح سے پیچیدہ مرکب سود کا مسئلہ، مستقل e کی طرف جاتا ہے۔

تشریح:

2.8.3.1۔ مرکب سود (Compound interest)

اعادہ کریں کہ اگر P زر اصل، $r = \frac{\text{شرح سود}}{100}$, n ایک سال میں مرکب سود کے وقفہ کی تعداد اور t سالوں کی تعداد ہے، تو $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ ، t سالوں کے بعد کل رقم دیتی ہے ۔ اگر $n = 4$ پھر، اس کو سہ ماہی میں مرکب سود کیا جاتا ہے (موجودہ اصل میں سال میں تین ماہ کے لئے سود شامل کیا جاتا ہے) اگر $n=12$ ہو تو پھر مرکب سود ماہانہ $n=365$ کا مطلب ہے، روزانہ کا سود مرکب۔ ہم سود مرکب کو ہر گھنٹہ، ہر منٹ وغیرہ کو سود مرکب کا حساب لگا سکتے ہیں۔ ہم جانتے ہیں کہ اگر P اور r فیصد ہیں تو اور ایک سال میں سود مرکب وقفہ کی تعداد بڑھ جائے تو کل رقم بھی بڑھ جاتی ہے۔ آیئے ہم $P=1$ $r=1$ اور $t=1$ کے صورت حال پرغورکریں پھر ہمارے پاس ہے۔

$A_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ہم سمجھنا چاہتے ہیں کہ جیسے جیسے n حقیقی طور پر بڑھتے جاتا ہے، اس کی قیمت بھی بڑھتی جاتی ہے۔ آیئے n کی مختلف قسموں جیسے $n = 10, 100, 10000, 100000, 100000000$ کو رکھ کر ایک جدول بناتے ہیں۔

11 maths v1 unit 2 UM algebra
Tuesday, September 06, 2022 9:55:33 AM

n	10	100	10000	100000	100000000
A_n	2.593742460	2.704813829	2.718145927	2.718268237	2.718281815

ہم غور کرتے ہیں کہ جیسے جیسے n بہت زیادہ ہوجاتا ہے۔ A_n کی قیمت .... 2.7182818181 5 کے قریب ہوتی دکھائی دیتی ہیں۔
درحقیقت A_n کی قیمت حقیقی عدد e تک پہنچتی ہے، جو ایک غیر ناطق عدد 2.71828181815 ہے۔ یہ e کا تخمینی عدد ہے۔ تو سود مرکب کا ضابطہ $A = Pe^{rt}$ بن جاتا ہے، جہاں r سود کی شرح اور P زر اصل اور t سالوں کی تعداد ہے۔ اسے مسلسل سود مرکب (continuous compounding) کہا جاتا ہے۔

مثال 2.31: (i) مختصر کریں $(x^{1/2}y^{-3})^{1/2}$ جس میں $x, y \geq 0$ ہے۔
(ii) مختصر کریں $\sqrt{x^2 - 10x + 25}$

حل: (i) چونکہ $x, y \geq 0$ ہے، ہمارے پاس $(x^{1/2}y^{-3})^{1/2} = x^{1/4}/y^{3/2}$ ہے۔
(ii) مشاہدہ کریں کہ $\sqrt{x^2 - 10x + 25} = \sqrt{(x-5)^2} = |x-5|$

(i) $(x^{1/4})^4 = x$ مگر $(y^4)^{1/4} = |y|$

مشاہدہ کریں کہ $x^{1/4}$ کی وضاحت اسی وقت کی جاتی ہے جب x ایک مثبت عدد ہے۔ مگر y^4 کی وضاحت اس وقت بھی کی جاتی ہے، جب $y > 0$ ہو۔
اب $(y^4)^{1/4}$ ایک مثبت عدد ہے، جس کی چوتھی قوت y^4 کے برابر ہوگی۔ چنانچہ اسے اس طرح ہونا چاہئے۔ $|y|$۔

(ii) $(x^8.y^4)^{1/4} = x^2|y|.$

(iii) فرض کریں کہ u, v, b ناطق اعداد ہیں، جہاں b مثبت ہے۔
فرض کریں کہ وہ ناطق اعداد کے مربع نہیں ہیں، تو $u + v\sqrt{b}, u - v\sqrt{b}$ ان کو زوجی اعداد (conjugates) کہا جاتا ہے۔
مشاہدہ کریں کہ $(u + v\sqrt{b})(u - v\sqrt{b}) = u^2 - bv^2$ اب ناطق ہیں۔
اس طرح اگر، $u + v\sqrt{b}$ جملہ نسب نما میں ظاہر ہوں تو ہم شمار کنندہ اور نسب نما دونوں کو اس کے زوجی عدد $u - v\sqrt{b},$ سے ضرب دیں، تاکہ شمار کنندہ میں ناطق عدد نسب نما میں حاصل کرنے کے لئے

(iv) $(u\sqrt{a} - v\sqrt{b})(u\sqrt{a} + v\sqrt{b}) = u^2a - v^2$ کا استعمال کرتے ہوئے، جملہ کو آسان بنانا ممکن ہے جب $u\sqrt{a} + v\sqrt{b}$ نسب نما میں ہوتا ہے۔

مثال 2.32 $\dfrac{\sqrt{5}}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}$ کے نسب نما کو ناطق بنائیے۔

حل: شمار کنندہ اور نسب نما دونوں کو $(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ سے ضرب دینے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\sqrt{5}}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})} = \frac{(\sqrt{30}-\sqrt{10})}{4}.$$

مثال 2.33 $7 - 4\sqrt{3}$ کا جذر المربع معلوم کریں۔

حل: فرض کریں کہ $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = a + b\sqrt{3}$ جہاں a, b ناطق ہیں۔
دونوں جانب جذر المربع حاصل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $7 - 4\sqrt{3} = a^2 + 3b^2 + 2ab\sqrt{3}$
لہٰذا $a^2 + 3b^2 = 7$ اور $2ab = -4.$ ہیں۔

11 maths v1 unit 2 UM algebra
Tuesday, September 06, 2022 9:55:34 AM

لہذا $a = -2/b$

$a^2 + 3b^2 = 7$ سے ہمیں $(-2/b)^2 + 3b^2 = 7$ حاصل ہوتا ہے جس سے $4/b^2 + 3b^2 = 7$ یا

$3b^4 + 7b^2 + 4 = 0$ حاصل ہوتا ہے۔

b^2 کو حل کرنے پر $b^2 = \frac{(7\pm\sqrt{49-48})}{6}$ حاصل ہوتا ہے، جس سے $b^2 = 1$ یا $b^2 = \frac{4}{3}$ حاصل ہوتا ہے۔

غرض $b = \pm 1$ یا $b = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$

چونکہ b ایک ناطق عدد ہے۔ ہمارے پاس $b = \pm 1$ اور چنانچہ a کی نظیری قیمت ± 2 ہیں۔

چونکہ $\sqrt{7-4\sqrt{3}} > 0$ ہے، ہمارے پاس $\sqrt{7-4\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$. ہے۔

$u + v\sqrt{b}$ کے جذرالمربع کو جو $x + y\sqrt{b}$ کی شکل میں u, v ناطق عدد ہیں، ظاہر کرنا ہمیشہ ممکن نہیں۔ اس کے ناطق x,y ہیں۔
مثال کے طور پر $\sqrt{2} + 1$ کا جذرالمربع $a + b\sqrt{2}$ کی شکل میں نہیں ہے، جس میں، a,b ناطق ہیں۔

مشق 2.11

1۔ مختصر کیجئے: (i) $(125)^{\frac{2}{3}}$, (ii) $16^{\frac{-3}{4}}$, (iii) $(-1000)^{\frac{-2}{3}}$, (iv) $(3^{-6})^{\frac{1}{3}}$, (v) $\frac{27^{\frac{-2}{3}}}{27^{\frac{-1}{3}}}$.

2۔ محسوب کیجئے: $\left(((256)^{-1/2})^{\frac{-1}{4}}\right)^3$

3۔ اگر $(x^{1/2} + x^{-1/2})^2 = 9/2$ ہوتو $x > 1$ کے لئے $(x^{1/2} - x^{-1/2})$ کی قیمت معلوم کیجئے۔

4۔ مختصر کیجئے اور اس کی قیمت معلوم کیجئے۔ $n: 3^{2n}9^2 3^{-n}/3^{3n} = 27$

5۔ ایک کروی حوض کا نصف قطر معلوم کیجئے جس کا حجم $32\pi/3$ اکائیاں ہیں۔

6۔ نسب نما کو ناطق بناتے ہوئے مختصر کیجئے۔ $\frac{7+\sqrt{6}}{3-\sqrt{2}}$

7۔ مختصر کیجئے۔ $\frac{1}{3-\sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}-2}$

8۔ اگر $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ ہوتو $\frac{x^2+1}{x^2-2}$ معلوم کیجئے۔

2.9۔ لوگارتم (Logarithm)

ہم سیکھ چکے ہیں کہ $0 < a \neq 1$ قاعدہ والے قوت نما تفاعل $f(x) = a^x$، کی وضاحت $\mathbb{R}$ پر حد $(0,\infty)$ سے وضاحت کی گئی ہے۔ ہم مشاہدہ کر چکے ہیں کہ $f(x)$ ایک دہرا تفاعل ہے۔ چنانچہ اس تفاعل کا ایک معکوس ہے۔ ہم اس معکوس تفاعل کو **لوگارتمی تفاعل** کہیں گے اور اسے $\log_a(.)$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ آیئے اس تفاعل پر آگے بحث کریں گے۔ غور کیجئے کہ اگر $f(x)$ کی قیمت x سے $y = a^x$ ہے تو $\log_a(.)$ کی قیمت y سے x ہے۔ یعنی $0 < a \neq 1$ کے لئے، ہمارے پاس $y = a^x$ جو معادل ہے $\log_a y = x$ کے۔

مثال کے طور پر چونکہ $81 = 3^4$ ہے۔ ہمارے پاس $\log_3(81) = 4$۔ بہ الفاظ دیگر، متعین a سے، ایک حقیقی عدد y دیا گیا ہے۔ لوگارتم سے قوت نما x معلوم ہوتا ہے جو $a^x = y$ کی شرط کو پورا کرتا ہے۔ اس کے ذریعہ تجرباتی مسائل کو حل کرنے میں مدد ملتی ہے، جیسے کسی مخصوص لگائے ہوئے سرمایہ سے مخصوص رقم تک پہنچنے کے لئے کتنا وقت لگے گا؟'' بہت چھوٹے یا بڑے اعداد کو ضرب کرنے کے لئے بھی لوگارتم زیادہ استعمال ہوتا ہے۔

(i) غور کیجئے کہ قوت نما تفاعل a^x کی تعریف تمام $x \in \mathbb{R}$ کے لئے اور $a^x > 0$ اور اس طرح $\log a(.)$ صرف مثبت حقیقی اعداد کے لئے وضاحت کی گئی ہے۔

(ii) اس کے علاوہ، $a^0 = 1$ کے لئے کسی قاعدہ a کے لئے اور چنانچہ $\log_a(1) = 0$ کسی قاعدہ a کے لئے۔

11 maths v1 unit 2 UM algebra
Tuesday, September 06, 2022 9:55:34 AM

2.9.1۔ لوگارتم کی خصوصیات: (Properties of Logarithm)

(i) تمام $a^{\log_a x} = x$ کے لئے $x \in (0, \infty)$ اور تمام $\log_a (a^y) = y$ کے لئے $y \in \mathbb{R}$.

(ii) کسی بھی $x,y > 0$ کے لئے $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y.$ (حاصل ضرب کا اصول)

(iii) کسی بھی $x,y > 0$ کے لئے $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y.$ (خارج قسمت کا اصول)

(iv) کسی بھی $x > 0$ کے لئے اور $r \in \mathbb{R},$ کے لئے $\log_a x^r = r \log_a x.$ (قوت کا اصول)

(v) کسی بھی $x > 0$ کے لئے a اور b کو قاعدہ لیتے ہوئے $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$ (قاعدہ کی تبدیلی کا ضابطہ)

ثبوت: چونکہ قاعدہ a والا قوت نما تفاعل اور قاعدہ a والا لوگارتھمی تفاعل ایک دوسرے کے معکوس ہیں۔

(i) وضاحتوں کے استعمال سے درست ہوتا ہے۔

(ii) $x,y>0$ کے لئے، فرض کیجئے کہ $\log_a x = u, \log_a y = v$ اور $\log_a(xy) = w$ انہیں قوت نما شکل میں دوبارہ لکھنے پر ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے۔ $a^u = x, a^v = y$ اور $a^w = xy$ ۔اس لئے $a^w = xy = a^u a^v = a^{u+v}$ ہے۔
غرض $w = u + v.$ ہے۔ غرض ہمیں $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y.$ حاصل ہوتا ہے۔

(iii) فرض کیجئے کہ $\log_a x = u, \log_a y = v$ اور $\log_a \frac{x}{y} = w$ تو $a^u = x, \quad a^v = y$ اور $a^w = \frac{x}{y}$ ہے۔ چنانچہ
$a^w = \frac{x}{y} = \frac{a^u}{a^v} = a^{u-v}$ ہے، جس کا مطلب یہ ہے۔ $w = u - v$
لہٰذا، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y.$

(iv) فرض کیجئے کہ $\log_a x = u$ تو $a^u = x$ اور لہٰذا $x^r = (a^u)^r = a^{ru}$ ہے۔ غرض $\log_a x^r = ru = r \log_a x.$

(v) فرض کیجئے کہ $\log_b x = v.$ تو ہمارے پاس یہ ہے۔ $b^v = x$ دونوں جانب قاعدہ a والے لوگارتم لینے پر ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے۔
$\log_a b^v = \log_a x.$ تو دوسری طرف قوت نما اصول کے ذریعے سے $\log_a b^v = v \log_a b$ ہے، لہٰذا $v \log_a b = \log_a x.$
چنانچہ $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}, \ b > 0.$ اس پر یہ ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

■

تبصرہ:

(i) اگر $a = 10$ ہو تو نظیری لوگارتمی تفاعل $\log_{10} x$ عام لوگارتم (Common logarithm) کہلاتا ہے۔

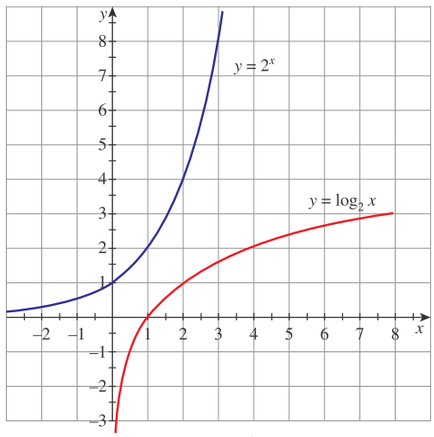
(ii) اگر $a = e$ (ایک غیر ناطق عدد، تقریباً 2.718 کے مساوی ہے) ہو تو نظیری لوگارتمی تفاعل $\log_e x$ طبیعی لوگارتم (natural logarithm) کہلاتا ہے۔اس کو $In\ x$ سے ظاہر کرتے ہیں۔اوپر کے لوگارتمی تفاعلات کے ان مخصوص صورتوں کو دوسرے سائنس اور انجینیر نگ میں بہت زیادہ استعمال کرتے ہیں۔خاص طور پر طبعی لوگارتم بہت ہی طبعی (natural) طور پر واقع ہوتا ہے۔جب ہم $\log x$ لکھتے ہیں تو اس کا مطلب $\log_e x$ ہے۔

(iii) اگر $a = 2$ ہو تو نظیری لوگارتمی تفاعل $\log_2 x$ دوہری لوگارتم (Binary logarithm) کہلاتا ہے جسے کمپیوٹر سائنس میں استعمال کیا جاتا ہے۔

(iv) مشاہدہ کیجئے $\log_a 35 = \log_a(7 * 5) = \log_a 7 + \log_a 5$ $\log_a \frac{50}{3} = \log_a 50 - \log_a 3.$
$\log_a 22^x = x \log_a 22; \quad \log_5 50 = \frac{\log_{10} 50}{\log_{10} 5}.$

(v) لوگارتمی اور قوت نما تفاعلات کے ترسیم پر غور کیجئے۔

11 maths v1 unit 2 UM algebra
Tuesday, September 06, 2022 9:55:35 AM



شکل 2.9

مثال 2.34 : 1728 کا لوگارتم معلوم کریں، جس کا قاعدہ $2\sqrt{3}$ ہے۔

حل : فرض کیجئے کہ $\log_{2\sqrt{3}} 1728 = x.$

پھر ہمارے پاس $(2\sqrt{3})^x = 1728 = 2^6\, 3^3 = 2^6\, (\sqrt{3})^6$ ہے۔

لہذا $(2\sqrt{3})^x = (2\sqrt{3})^6.$

چنانچہ $x = 6$ یعنی $\log_{2\sqrt{3}} 1728 = 6.$

مثال 2.35: اگر قاعدہ a والے 324 کا لوگارتم 4 ہے تو a معلوم کیجئے۔

حل: ہمیں دیا گیا ہے $\log_a 324 = 4$ ، جس سے $a^4 = 324 = 3^4\, (\sqrt{2})^4$ حاصل ہوتا ہے۔

لہذا $a = 3\sqrt{2}.$

مثال 2.36 ثابت کیجئے۔ $\log \frac{75}{16} - 2\log \frac{5}{9} + \log \frac{32}{243} = \log 2.$

حل: لوگارتم کی خصوصیات استعمال کرتے ہوئے ہمارے پاس ہے

$$\log \frac{75}{16} - 2\log \frac{5}{9} + \log \frac{32}{243} = \log 75 - \log 16 - 2\log 5 + 2\log 9 + \log 32 - \log 243.$$

(خارج قسمت کے اصول کو استعمال سے)

$$= \log 3 + \log 25 - \log 16 - \log 25 + \log 81 + \log 16 + \log 2 - \log 81 - \log 3$$

$$= \log 2.$$

مثال 2.37 اگر $\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x = \frac{7}{2}$ ہو تو x کی قیمت معلوم کرو۔

حل: غور کیجئے۔ $x > 0$

$\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x = \frac{7}{2}$ سے اس طرح ہو جاتا ہے۔ $\frac{1}{\log_x 2} + \frac{1}{\log_x 4} + \frac{1}{\log_x 16} = \frac{7}{2}$

(قاعدہ کے اصول کی تبدیلی سے)

غرض $\frac{1}{a} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{4a} = \frac{7}{2}$ جہاں $a = \log_x 2.$ یعنی $\frac{7}{4a} = \frac{7}{2}.$

11 maths v1 unit 2 UM algebra
Tuesday, September 06, 2022 9:55:35 AM

لہٰذا $a = \frac{1}{2}$ اوراس طرح $\log_x 2 = \frac{1}{2}$ جس سے یہ حاصل ہوتا ہے۔ $x^{\frac{1}{2}} = 2$

لہٰذا $x = 2^2 = 4.$

مثال 2.38 : حل کریں $x^{\log_3 x} = 9.$

حل: فرض کیجئے کہ $\log_3 x = y.$ پھر $x = 3^y$ غرض اس طرح $3^{y^2} = 9.$

لہٰذا $y^2 = 2$ جس کا مطلب $y = \sqrt{2}, \quad -\sqrt{2}$ لہٰذا $x = 3^{\sqrt{2}}, \ 3^{-\sqrt{2}}.$

مثال 2.39 محسوب کیجئے۔ $\log_3 5 \log_{25} 27$

حل:

$$\log_3 5 \log_{25} 27 = \log_3 5 \log_{25} 3^3.$$
$$= \log_3 5 \times 3 \log_{25} 3 \quad \text{(قوت نمائی اصول سے)}$$
$$= 3 \log_{25} 5 = \frac{3}{\log_5 25} = \frac{3}{2 \log_5 5} = \frac{3}{2}.$$

مثال 2.40: دیا گیا ہے کہ $\log_{10} 2 = 0.30103$,$\log_{10} 3 = 0.47712$ (تقریباً)۔ $2^8.3^{12}$ میں ہندسوں کی تعداد معلوم کریں۔

حل: فرض کریں کہ $N = 2^8 3^{12}$ میں $n+1$ ہندسے ہیں۔ پھر N کو $10^n \times b$ کے طور پر لکھا جاسکتا ہے۔

جہاں $1 \leq b < 10$

لوگارتم کو قاعدہ 10 پر لینے پر ہمیں $\log N = \log(10^n\ b) = n \log 10 + \log b = n + \log b.$ حاصل ہوتا ہے۔

دوسری جانب $\log N = \log 2^8 3^{12} = 8 \log 2 + 12 \log 3 = 8 \times 0.30103 + 12 \times 0.47712 = 8.13368.$

اس طرح ہمیں $n + \log b = 8.13368.$ حاصل ہوتا ہے، چونکہ $1 \leq b < 10$ ہندسوں کی تعداد 9 ہے۔

مشق 2.12

1۔ فرض کیجئے کہ $b > 0$ اور $b \neq 1$ ۔ $y = b^x$ کو لوگارتمی شکل میں ظاہر کریں۔ لوگارتمی تماثل کا علاقہ اور وسعت بھی بتائیں۔

2۔ محسوب کیجئے۔ $\log_9 27 - \log_{27} 9$

3۔ حل کریں۔ $\log_8 x + \log_4 x + \log_2 x = 11$

4۔ حل کریں۔ $\log_4 2^{8x} = 2^{\log_2 8}$

5۔ اگر $a^2 + b^2 = 7ab,$ ہو تو ثابت کریں کہ $\log \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\log a + \log b).$

6۔ ثابت کریں کہ $\log \frac{a^2}{bc} + \log \frac{b^2}{ca} + \log \frac{c^2}{ab} = 0.$

7۔ ثابت کریں کہ $\log 2 + 16 \log \frac{16}{15} + 12 \log \frac{25}{24} + 7 \log \frac{81}{80} = 1.$

8۔ ثابت کریں کہ $\log_{a^2} a \ \log_{b^2} b \ \log_{c^2} c = \frac{1}{8}.$

9۔ ثابت کریں کہ $\log a + \log a^2 + \log a^3 + \cdots + \log a^n = \frac{n(n+1)}{2} \log a.$

11 maths v1 unit 2 UM algebra
Tuesday, September 06, 2022 9:55:35 AM

10۔ اگر $\frac{\log x}{y-z} = \frac{\log y}{z-x} = \frac{\log z}{x-y}$ تو پھر ثابت کریں کہ $xyz = 1$

11۔ حل کریں $\log_2 x - 3\log_{\frac{1}{2}} x = 6$

12۔ حل کریں $\log_{5-x}(x^2 - 6x + 65) = 2$

2.10۔ حقیقی زندگی میں الجبرا کا اطلاق (Application of Algebra in Real life)

الجبرا زندگی کے کئی پہلوؤں میں استعمال ہوتا ہے۔ مالیاتی منصوبہ بندی روزمرہ کی زندگی کا ایک ایسا علاقہ ہے جہاں الجبراء استعمال ہوتا ہے۔ الجبرا کے تصورات بینکروں کے ذریعہ شرح سود کا حساب لگانے کے ساتھ ساتھ قرض کی ادائیگیوں کا حساب لگانے کے لئے استعمال ہوتے ہیں۔ وہ پیسے کی ترقی کی پیش گوئی کرنے کے لئے استعمال ہوتے ہیں۔ جسمانی تندرستی ایک اور شعبہ ہے جہاں کسی فرد کے لئے کھانے کی مقدار کی صحیح مقدار کا تعین کرنے کے لئے حساب لگایا جاتا ہے۔ جیسے شخص کا قد، جسمانی وزن وغیرہ کو مدنظر رکھتے ہوئے، معمار عمارتوں کو ڈیزائن کرنے کے لئے الجبرا پر انحصار کرتے ہیں جب کہ سول انجینئر (civil engineers) اسے، سڑکوں، پلوں اور سرنگوں کے ڈیزائن کے لئے استعمال کرتے ہیں۔ اشیاء کو پیمانے میں تبدیل کرنے کے لئے الجبراء کی ضرورت ہوتی ہے تاکہ ڈیزائن کئے گئے ڈھانچہ کا صحیح تناسب ہو۔ یہ کمپیوٹر اور فون کو پروگرام کرنے کے لئے استعمال ہوتا ہے۔ آیئے چند مثالیں دیکھتے ہیں۔ انسانی کان کی حساسیت کی غیر معمولی حد کی وجہ سے 1000 ملین سے ایک وسعت) اس وسعت پر آواز کی شدت کی پیائش کے لئے لوگرتھمک پیمانہ استعمال کرنا مفید ہے۔ پیائش ڈیسیبل (Decibel) کی اکائی کا نام ٹیلی فون کے موجد الیگزینڈر گراہم بیل کے نام پر رکھا گیا ہے۔

اگر ہم آج دنیا میں آبادی کو جانتے ہیں تو جو تیزی سے ہے، اس کا تخمینہ ایک قوت نما تفاعل سے لگایا جاسکتا ہے۔ تابکار کاربن۔14 ایک ایسا حیاتیات ہے، جو ایک قوت نما ضابطہ کے مطابق تبدیل پذیر ہوتا ہے۔

48017

مشق 2.13

صحیح یا مناسب جواب منتخب کریں۔

1۔ اگر $9 \leq |x+2|$ ہو تو پھر x کا تعلق اس سے ہوگا۔

(1) $(\infty, -7)$ (2) $[-11, 7]$ (3) $(\infty, -7) \cup [11, \infty)$ (4) $(-11, 7)$

2۔ دئے گئے x, y اور b حقیقی عدد ہیں تو پھر $x < y$ ، $b > 0$

(1) $xb < yb$ (2) $xb > yb$ (3) $xb \leq yb$ (4) $\frac{x}{b} \geq \frac{y}{b}$

3۔ اگر $\frac{|x-2|}{x-2} \geq 0$ ہو تو پھر x کا تعلق

(1) $[2, \infty)$ (2) $(2, \infty)$ (3) $(\infty, 2)$ (4) $(-2, \infty)$

4۔ $5x - 1 < 24$ اور $5x + 1 > -24$ کا حل معلوم کرو۔

(1) $(4, 5)$ (2) $(-5, -4)$ (3) $(-5, 5)$ (4) $(-5, 4)$

5۔ مندرجۂ ذیل نامساوات $|x-1| \geq |x-3|$ کے مجموعے کا حل معلوم کریں۔

(1) $[0, 2]$ (2) $[2, \infty)$ (3) $(0, 2)$ (4) $(-\infty, 2)$

11 maths v1 unit 2 UM algebra
Tuesday, September 06, 2022 9:55:36 AM

6۔ $\log_{\sqrt{2}} 512$ کی قیمت یہ ہے۔

(1) 16 (2) 18 (3) 9 (4) 12

7۔ $\log_3 \frac{1}{81}$ کی قیمت یہ ہے۔

(1) -2 (2) -8 (3) -4 (4) -9

8۔ اگر $\log_{\sqrt{x}} 0.25 = 4$ ہوتو، **x** کی قیمت یہ ہے۔

(1) 0.5 (2) 2.5 (3) 1.5 (4) 1.25

9۔ $\log_a b \log_b c \log_c a$ کی قیمت یہ ہے۔

(1) 2 (2) 1 (3) 3 (4) 4

10۔ اگر **343** کا لوگارتم **3** ہے تو اس کا قاعدہ یہ ہے۔

(1) 5 (2) 7 (3) 6 (4) 9

11۔ **a** معلوم کریں تاکہ مساوات $2x^2 + (a-3)x + 3a - 5 = 0$ کی جذروں کی جمع اور ضرب برابر ہوں۔

(1) 1 (2) 2 (3) 0 (4) 4

12۔ اگر **a** اور **b** مساوات $x^2 - kx + 16 = 0$ کے جذریں ہیں اور $a^2 + b^2 = 32$ کی شرط کو پورا کرتے ہیں تو **k** کی قیمت یہ ہے۔

(1) 10 (2) -8 (3) $-8, 8$ (4) 6

13۔ $x^2 + |x-1| = 1$ کے حلوں کی تعداد

(1) 1 (2) 0 (3) 2 (4) 3

14۔ $3x^2 - 5x - 7 = 0$ جن کی جذریں عددی اعتبار سے مساوی، مگر علامت میں مخالف ہوں تو وہ مساوات یہ ہے۔

(1) $3x^2 - 5x - 7 = 0$ (2) $3x^2 + 5x - 7 = 0$ (3) $3x^2 - 5x + 7 = 0$ (4) $3x^2 + x - 7$

15۔ اگر $x^2 + ax + c = 0$ کی جذریں **8** اور **2** ہیں اور $x^2 + dx + b = 0,$ کی جذریں **3,3** ہوں، تو پھر مساوات $x^2 + ax + b = 0$ کی جذریں یہ ہیں۔

(1) $1, 2$ (2) $-1, 1$ (3) $9, 1$ (4) $-1, 2$

16۔ اگر مساوات $x^2 - kx + c = 0$ کی حقیقی جذریں **a** اور **b** ہیں، تو نقاط **(a,0)** اور **(b,0)** کے درمیانی فاصلہ

(1) $\sqrt{k^2 - 4c}$ (2) $\sqrt{4k^2 - c}$ (3) $\sqrt{4c - k^2}$ (4) $\sqrt{k - 8c}$

11 maths v1 unit 2 UM algebra
Tuesday, September 06, 2022 9:55:36 AM

17۔ اگر $\frac{kx}{(x+2)(x-1)} = \frac{2}{x+2} + \frac{1}{x-1}$ ہوتو k کی قیمت یہ ہے۔

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

18۔ اگر $\frac{1-2x}{3+2x-x^2} = \frac{A}{3-x} + \frac{B}{x+1}$ ہوتو A+B کی قیمت

(1) $\frac{-1}{2}$ (2) $\frac{-2}{3}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{2}{3}$

19۔ $(x+3)^4 + (x+5)^4 = 16$ کے جذروں کی تعداد

(1) 4 (2) 2 (3) 3 (4) 0

20۔ $\log_3 11 \cdot \log_{11} 13 \cdot \log_{13} 15 \cdot \log_{15} 27 \cdot \log_{27} 81$ کی قیمت

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

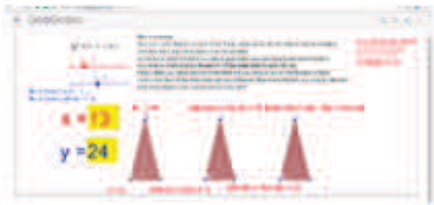
خلاصہ (Summary)

- π اور $\sqrt{p}$ جہاں ، p ایک مفرد عدد، کچھ غیر ناطق اعداد ہیں۔
- $|x-a| = r$ صرف اور صرف $r \geq 0$ کے لئے اور $x - a = \pm r$
- $|x-a| \leq r$ صرف اور صرف $-r \leq x-a \leq r$ یا $a-r \leq x \leq a+r$ کے لئے۔
- $|x-a| > r$ جس کا مطلب $x < a-r$ اور $x > a+r$ یا $x \in (\infty, a-r) \cup (a+r, \infty)$
- عام طور پر نا مساوات کے ایک سے زیادہ حل ہیں۔
- $ax^2+bx+c=0$ کے جذر کی نوعیت کا تعین $D = b^2 - 4ac.$ کے ممیّز سے ہوتا ہے۔
- 'a' حقیقی عدد کثیر رقمی تفاعل $f(x)$ کا صفر ہے، صرف اور صرف $f(x)$ کا جزو ضربی $(x-a)$ ہے۔
- اگر $f(x)$ کا درجہ $g(x)$ کے درجے سے کم ہوتو، پھر $\frac{f(x)}{g(x)}$ کو جزوی کسر کے مجموعے کے طور پر لکھا جا سکتا ہے۔
- عام طور پر قوت نما تفاعل اور لوگارتمی تفاعل ایک دوسرے کے معکوس تفاعل ہیں۔

11 maths v1 unit 2 UM algebra
Tuesday, September 06, 2022 9:55:36 AM

ICT کارنر - 2(a)

متوقع نتائج ⇒



مرحلہ 1: براؤزر کھولیں اور نیچے دئے گئے URL لنک ٹائپ کریں (یا) QRCode اسکین کریں۔

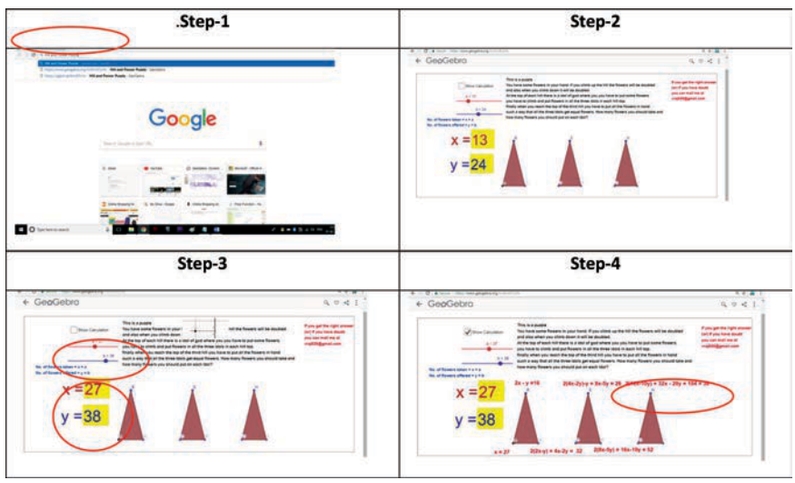
مرحلہ 2: ''Hill and Flower Puzzle'' نامی جیوجیرا ورک شیٹ ظاہر ہوگی۔ پہیلی کی تفصیل

(a) آپ کے ہاتھوں میں چند پھول ہیں۔ اگر آپ پہاڑ پر چڑھتے ہیں تو پھول دوگنے ہوجائیں گے اور جب آپ پہاڑ سے نیچے اترتے ہیں تو بھی یہ دوگنے ہوجاتے ہیں۔ (b) پہاڑی کی چوٹی پر ایک مورتی ہے جہاں آپ کو کچھ پھول ڈالنے ہیں۔ (c) آپ کو ہر پہاڑی کی چوٹی کے تینوں پر چڑھنا اور پھول ڈالنا ہوگا۔

آخر میں جب آپ تیسری پہاڑی کی چوٹی پر پہنچتے ہیں تو آپ کے ہاتھوں میں اتنے پھول ہونا چاہئے کہ آپ تینوں مورتیوں کو مساوی طور پر پھول بانٹ سکیں۔ آپ کو کتنے پھول لینے چاہئیں اور ہر مورتی پر کتنے پھول ڈالنا چاہئے۔

مرحلہ 3: آپ x کی قیمت کے طور پر لئے گئے پھولوں کی تعداد اور مورتی کو y کی قیمت کے طور پر پیش کئے گئے پھولوں کی تعداد کا تصور کرلیں اور براؤزر کے صفحہ کو آراستہ کریں گے تو آپ کو اس پہیلی کا حل نہیں ملے گا۔

مرحلہ 4: ایسے وقت میں ہمیں الجبرا کی ضرورت پڑتی ہے۔ الجبرا استعمال کرنے کا طریقہ سوچئے۔ بصورت دیگر ڈبے پر کلک کریں۔ حسابی کارآمد دکھائیں۔ ہر سطح پر الجبراء کا حساب دیکھا جاسکتا ہے۔ پہیلی کو حل کرنے کے لئے مساوات کی شناخت کرنی ہوگی۔ نوٹ: نتیجہ ایک تناسب ہوگا۔



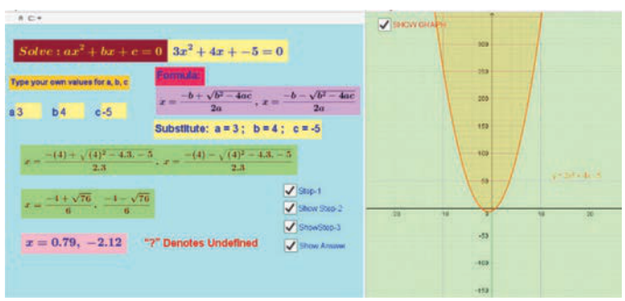
11 maths v1 unit 2 UM algebra
Tuesday, September 06, 2022 9:55:36 AM

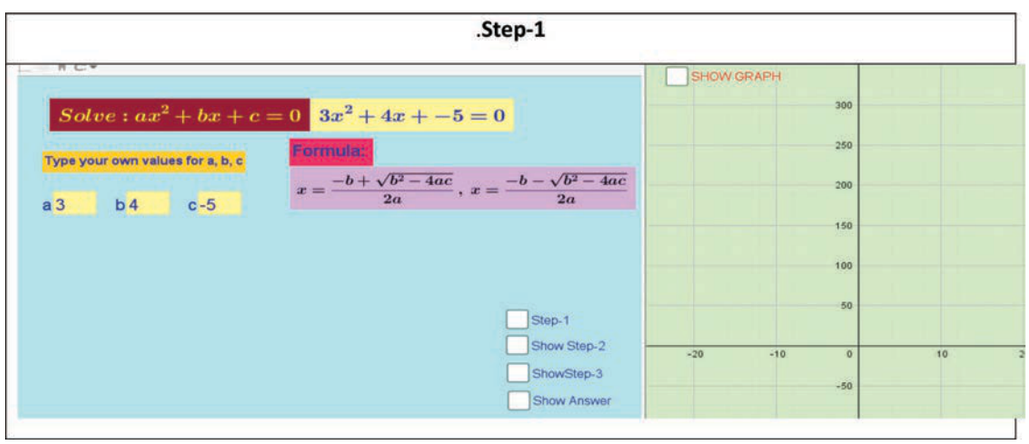
براؤزر پر hill and flower puzzle کے لئے لنک

https://ggbm.at/KmrE5vHsor Scan the QR Code.

2(b) - کارنر ICT

متوقع نتائج ⇒





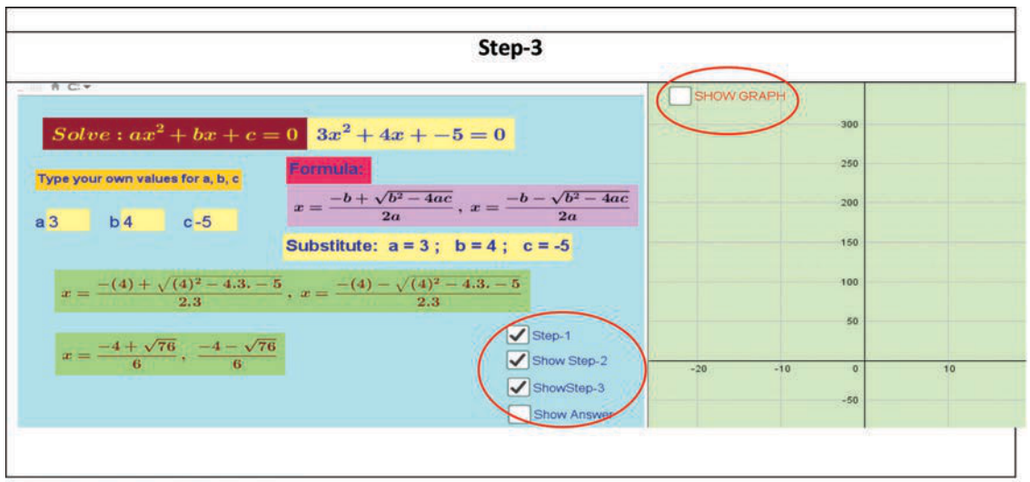
مرحلہ 1: براؤزر کھولیں اور نیچے دئے گئے URL Link ٹائپ کریں (یا) QR Code اسکین کریں۔ ہائی اسکول الجبرا کے نام سے جیوجیبرا ورک بک کھلے گی۔ اس میں کئی ورک شیٹیں دی گئی ہیں۔ کوئی بھی ورک شیٹ جو آپ چاہتے ہیں منتخب کریں۔ مثال کے طور پر فارمولا کے ذریعہ حل کرنے پر "Quadratic Equation" ورک شیٹ کو کھولیں۔

ورک شیٹ میں آپ a,b,c کے لئے 20 اور 20 کے درمیان کوئی بھی قیمت درج کر سکتے ہیں۔ آپ کو دئے گئے فارمولے کا استعمال کرتے ہوئے جواب پر عمل کریں۔ نشان غیر متعین جواب کی نشاندہی کرتا ہے۔

مرحلہ 2: اب جانچ کرنے کے لئے جواب پر کلک کریں۔ آپ اقدامات کو دیکھنے کے لئے ایک ایک کر کے چیک ڈبے پر کلک کر سکتے ہیں۔ آخر میں دائیں طرف کی ترسیم کو دیکھنے کے لئے گراف دکھائیں پر کلک کریں، اپنے جواب کے ساتھ گراف کا موزانہ کریں۔

11 maths v1 unit 2 UM algebra
Tuesday, September 06, 2022 9:55:37 AM

(وہ منحنی جو x- محور کو قطع کرتی ہے، وہی اس کا جواب ہوگا)



*Pictures are only indicatives.

براؤزر پر **hill and flower puzzle** کے لئے لنک

https://ggbm.at/N4kX9QJqor Scan the QR Code.

11 maths v1 unit 2 UM algebra
Tuesday, September 06, 2022 9:55:37 AM

باب 3

علم مثلث (Trigonometry)

When I trace at my pleasure the windings to and fro of the heavenly bodies,
I no longer touch the earth with my feet

Ptolemy

3.1 تعارف :



اسکندریہ کے ٹالمی
(90-168 AD(CE))

علم مثلث ریاضی کی ایک شاخ ہے۔جس میں مثلث کے اضلاع اور زاویوں کے درمیانی تعلقات کے بارے میں سیکھا جاتا ہے۔ یونانی زبان سے ماخوذ ہے۔لفظ Trigonon کے معنی مثلث اور metron کے معنی پیائش کے ہیں۔اس طرح، لفظی طور پر علم مثلث، مثلثوں کی پیائش کا مطالعہ ہے۔یونانی ریاضی دانوں نے نا معلوم فاصلوں کو دریافت کرنے کے لئے علم مثلثی نسبتوں کا استعمال کیا۔دو ہزار سال قبل (BC(BCE)) مصریوں نے اہراموں کی تعمیر میں علم مثلث کا استعمال کیا۔ارسطوکوس (310-250 BC (BCE)) نے چاند اور سورج کے فاصلوں کو محسوب کرنے کے لئے علم مثلث کا استعمال کیا تھا۔

ایراٹوس تھینس (276-195 BC(BCE)) وہ پہلا شخص تھا، جس نے علم مثلث کے اصول کو استعمال کر کے زمین کا محیط دریافت کیا تھا۔اس سے پہلے ہپارکس (190-120 BC(BCE)) یونانی ماہر فلکیات نے علم مثلث کے اصولوں کو تشکیل دیا۔نہیں علم مثلث کا بانی مانا جاتا ہے۔اُن اصولوں کو استعمال کر کے اسکندریہ کے ٹالمی (90-168 AD(CE)) نے ٹالیمی فلکی مسئلہ کو دریافت کیا۔قدیم دور میں ہندوستان علم مثلث میں بہت اہم ترقی کر چکا تھا۔ہندوستانی ریاضی دان اور ماہر فلکیات آریہ بھٹا (476-550 BC(BCE)) نے سائن، کوسائن، معکوس کوسائن، معکوس سائن کی وضاحت کیا اور ریاضی کے نتائج مصرعوں کی شکل میں نتائج پیش کیا۔جس مثلث کا رقبہ کا ایک ضابطہ بھی شامل ہے۔

علم مثلث کی ترقی میں قدیم ہندوستانی ریاضی دان برہما گپتا (598 AD(CE))، بھاسکرا اول (600 AD(CE)) اور دوسم (1114 AD(CE)) اہم کردار ادا کئے ہیں۔جان برنولی (1667-1748) اور لیون ہارڈ ائلر (1707-1783) کے کام کی وجہ سے علم مثلث، ریاضی کی ایک شاخ کے طور پر وجود میں آیا۔ائلر نے علم مثلثی تفاعلات اور ملتف امداد کی قوت نمائی ترقیم کو جوڑنے والے بنیادی نتائج کو قائم کیا۔جوسف فوریر (1768-1830) کا علم مثلثی سلسلہ کے مطالعہ میں اہم حصّہ ہے۔اس کی فوریّر سلسلہ پر اثر تخلیق کے وسیع استعمالات ہیں۔جیسے ارتعاش کا تجزیہ، برقی انجینئرنگ، سمعیات، بصریات، سگنل کا عمل، خیال کا عمل اور قدریہ میکانیات ہیں۔جدید دور میں علم مثلثی تفاعلات، زاویتی قدر کے ریاضی تفاعلات کے طور پر ترقی ہوا۔علم ہندسہ اور الجبراء کے ذریعہ ریاضی کے تمام شعبوں کے ایجادات میں استعمال ہوتا ہے۔ہماری کاروں اور موبائل فون میں موجود کا نظام علم مثلثی حسابات کی بنیادی پر کام کرتا ہے۔

اعلیٰ طبی (میڈیکل) اسکینگ جیسے CT اور MRI میں جسم میں اندر موجود رسولی کی جانچ میں سائن اور کوسائن تفاعلات استعمال ہوتے ہیں۔

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:20:42 AM

سیکھنے کے مقاصد اس باب کے اختتام پر، طلباء سے توقع کی جاتی ہے کہ وہ مندرجہ ذیل نکات کو جانیں۔

- مثلث قائمۃ الزاویہ کے علم مثلث کی نسبتوں میں حادہ زاویوں کے طور پر شامل ہو تو ان کی حد بندی۔
- کسی زاویہ کی ریڈین کی پیمائش کا مطالعہ کی ضرورت اور اس کے درجہ کی پیمائش کے فوائد۔
- علم مثلثی تفاعلات میں حقیقی اعداد کی تشریح میں اکائی دائرہ کس طرح استعمال ہوتا ہے۔
- مختلف علم مثلثی تماثلات، ان کے درمیانی تعلقات اور استعمالات۔
- ایک علم مثلثی مساوات کا عام اور اصل حل۔
- علم مثلثی مساوات کو کس طرح حل کریں۔
- مثلثوں میں سائن کا قاعدہ (کلیہ) کوسائن کا قاعدہ اور حقیقی زندگی میں ان کے استعمالات۔
- ہیرون ضابطہ کے استعمالات اور کس طرح مثلث کا ارتفاع کے بغیر مثلث کا رقبہ دریافت کرنا۔
- معکوس علم مثلثی تفاعلات موجودگی اور ان کے علاقے اور وسعتوں کو معلوم کرنا۔
- کس طرح سائن کا قاعدہ اور کوسائن کا قاعدہ استعمال کر کے ترچھا مثلث کو حل کرنا۔

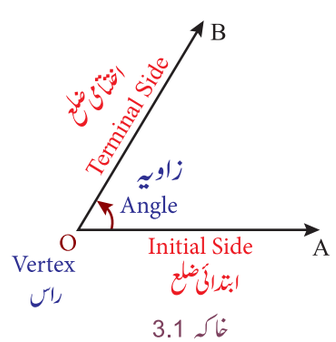
زاویہ حادّہ کے استعمال سے علم مثلث کی نسبتیں اور اُن کی خصوصیات کا اعادہ کریں گے، جس کو ہم پچھلی جماعتوں میں سیکھا تھا۔

3.2 بنیادی نتائج کا اعادہ: (A recall of basic results)

پچھلی جماعتوں ہم مثلث قائمۃ الزاویہ کے استعمال سے علم مثلث کی نسبتیں سیکھا تھا اور زاویہ حادہ کے لئے علم مثلثی تماثلات کو ثابت کیا تھا۔ آپ کو حیرت ہوگی کہ کس طرح سیاروں کا درمیانی فاصلہ، پہاڑ کی اونچائی، بہت دور کے اشیاء کا درمیانی فاصلہ، جیسے زمین اور سورج بلند عمارتوں کی اونچائیاں، سوپرسونک جٹ کی رفتار کی پیمائش دریافت کی جاتی ہے۔ اس طرح کے فاصلے یا اونچائیوں کو علم مثلث کی نسبتوں کو استعمال کر کے دریافت کیا جاسکتا ہے۔ ہمارا مقصد کسی بھی حقیقی عدد کے لئے علم مثلثی تفاعلات کی تشریح کرنا اور اس کو تمام ریاضی کے شعبوں میں استعمال کرنا خاص طور پر کیلکولس میں، سب سے پہلے ہم زاویہ اور زاویہ کے درجہ کی پیمائش کی تعریف کا اعادہ کریں گے۔

3.2.1 زاویے (Angles)

دو شعاعیں OA اور OB ، مشترک نقطہ سے زاویہ AOB بنا ہوا ہے، جیسا کہ خاکہ 3.1 میں دکھایا گیا ہے۔ مشترک نقطہ O کو زاویہ کا راس (Vertex) کہتے ہیں۔ اگر شعاع OA کو راس پر گھماتے ہیں تو OB کے مقام پہنچتا ہے۔ تو OA اور OB بالترتیب ابتدائی ضلع اور اختتامی ضلع کہلاتے ہیں۔ اگر زاویہ گھڑی کی مخالف سمت (غیر ساعت وار) میں ہو تو مثبت زاویہ (مثبت علامت کے ساتھ زاویہ) بنتا ہے جبکہ زاویہ گھڑی کی سمت (ساعت وار) گھومتا ہے تو منفی زاویہ (منفی علامت کے ساتھ زاویہ) بنتا ہے۔



خاکہ 3.1

OA سے گھڑی کی مخالف سمت میں ایک مکمل گردش کرتے ہوئے پھر وہی مقام پر پہنچے تو اس کو ایک مکمل چکّر یا گردش کہتے ہیں۔

3.2.2 زاویہ کی پیمائش کے مختلف نظام: (Different systems of measurement of angle)

زاویوں کی پیمائش کے لئے تین مختلف نظام ہیں۔

(i) ساٹھواں نظام: (Sexagesimal system)

ساٹھواں نظام، پیمائش کا بہت زیادہ مستعمل نظام ہے جس میں ایک قائمۃ الزاویہ کو 90 ، مساوی حصّوں تقسیم کیا گیا ہے جس کو درجہ (degrees) کہتے ہیں۔ ہر ایک درجہ کو 60 مساوی حصّوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ جس کو منٹ (minutes) کہتے ہیں اور ایک منٹ کو 60 مساوی حصّوں میں تقسیم کیا گیا ہے جس کو سکنڈ (seconds) کہتے ہیں۔

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:20:42 AM

علامتیں 1° ، $1'$ اور $1''$ بالترتیب، ایک درجہ (ڈگری) ایک منٹ اور ایک سکنڈ کو ظاہر کرتے ہیں۔

(ii) سوواں نظام : (Centesimal system)

سوواں نظام میں، زاویہ قائمہ کو 100 مساوی حصّوں میں تقسیم کیا جاتا ہے۔ جس کو گریڈس (Grades) کہتے ہیں۔ ہر ایک گریڈ کو 100 مساوی منٹوں میں تقسیم کیا جاتا ہے۔ ہر ایک منٹ کو 100 مساوی سکنڈوں تقسیم کیا جاتا ہے۔ علامت 1^g ایک گریڈ کو ظاہر کرنے کے لئے استعمال ہوتی ہے۔

(iii) دائرہ نما نظام : (Circular system) : دائرہ نما نظام میں، ایک زاویہ کی ریڈین کی پیمائش کا تعارف ایک دائرہ کا نصف قطر r میں قوس کی لمبائیوں کو استعمال کر کے کیا جاتا ہے۔ دائرہ نما نظام کا استعمال ریاضی کے تمام شعبوں ہوتا ہے اور سائنس میں دوسرے استعمالات بھی ہیں۔ علامت 1^c ریڈین کی پیمائش کو ظاہر کرنے کے لئے استعمال ہوتی ہے۔

3.2.3 درجہ کی پیمائش : (Degree measure)

درجہ، زاویوں کی اکائی کی پیمائش ہے اور اس کو $^\circ$ علامت سے ظاہر کرتے ہیں۔ ہم ایک مکمل گردش کو 360 مساوی حصّوں میں بانٹتے۔ ہر ایک حصّہ ایک ڈگری (درجہ) ہوتا ہے۔ جس کو 1° سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس طرح، ایک مکمل گردش $1/360$ کا حصّہ ہے۔ ایک زاویہ کا کسری حصہ کی پیمائش اور زاویوں کی بالکل صحیح پیمائش کے لئے منٹ اور سکنڈ کا تعارف کیا گیا ہے۔ ایک منٹ $1'$ ایک ڈگری کے $1/60$ کے برابر ہوگا۔ ایک $1''$ ایک منٹ کے $1/60$ حصے یا ایک درجہ کے $1/3600$ حصوں کے برابر ہوگا۔

زاویوں کو بہتر انداز میں سمجھنے اور استعمال کرنے کے لئے ہم زاویوں کی جوڑیوں کو مندرجہ ذیل طریقے سے تقسیم بندی کر سکتے ہیں۔

i. دو زاویے ٹھیک یکساں پیمائش رکھتے ہوں تو مماثل زاویے (congruent angles) کہتے ہیں۔

ii. دو زاویوں کو جمع کرنے سے حاصل ہو تو انہیں متمم زاویے (complementary angles) کہتے ہیں۔

iii. دو زاویوں کو جمع کرنے سے حاصل ہو تو انہیں مکملہ زاویے (supplementary angles) کہتے ہیں۔

iv. 0° اور 360° کے درمیان دو زاویوں حاصل جمع 360° ہو تو انہیں زوجی معکوس (conjugate) کہتے ہیں۔

i. ہم جہاں بھی ایک ڈگری کو ایک گھنٹہ سمجھتے ہیں وہاں ڈگری، منٹ اور سکنڈ میں وقت کا پیمائش کے نظام کے مساوی ہوگا۔

ii. غور کیجئے کہ $59.0854^\circ = 59^\circ + 0.0854^\circ$

$$0.0854^\circ = .0854^\circ \times \frac{60'}{1^\circ} = 5.124'$$

$$5.124' = 5' + 0.124'$$

$$0.124' = 0.124' \times \frac{60''}{1'} = 7.44''$$

اس طرح $59.0854^\circ = 59^\circ 5' 7.44''$

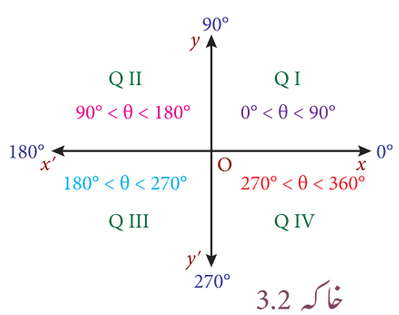
iii. مزید غور کیجئے

$$34^\circ 51' 35'' = 34.8597^\circ$$

اور $90^\circ - 36^\circ 18' 47'' = 53^\circ 41' 13''$

3.2.4 معیاری مقام زاویے: (Angles in Standard Position)

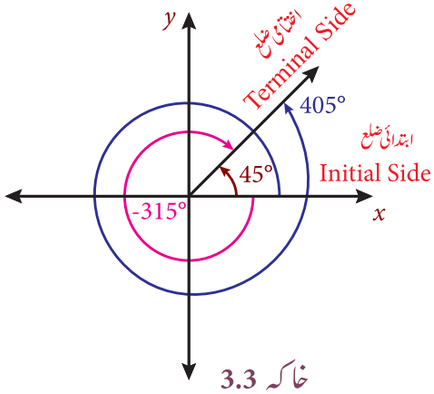
ایک زاویہ کا راس مبدا پر ہو، اس کا ابتدائی ضلع مثبت x- محور پر واقع ہو تو ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ زاویہ معیاری مقام (standard position) پر ہے۔ معیاری مقام پر زاویہ کا اختتامی ضلع پہلے ربع میں واقع ہو تو کہہ سکتے ہیں کہ پہلے ربع میں ہے۔ اسی طرح بقیہ تین ربعوں کی تشریح کر سکتے ہیں۔ ان کو ربعی زاویے (quadrant angles) کہتے ہیں، جن میں زاویے معیاری مقام پر ہوتے ہیں اور ان کے اختتامی ضلع x- محور یا y - محور پر ہوتے ہیں۔ 0° ، 90°، 180° اور 360° یہ ربعی زاویے ہیں۔



خاکہ 3.2

ربعی زاویہ کی ڈگری کی پیمائش 90° کے ضعف میں ہوگی۔

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:20:43 AM



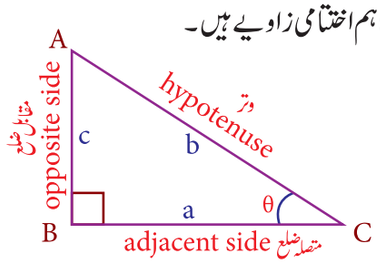
خاکہ 3.3

3.2.5 ہم اختتامی زاویے (Coterminal angles): گھڑی کی سوئی کے مخالف سمت میں ایک شعاع کی مکمل گردش کے نتیجہ میں زاویہ کی پیمائش $360°$ ہوگی۔ اسی سمت میں گردش کو جاری رکھتے ہیں تو زاویہ $360°$ سے زیادہ ہوسکتا ہے۔ اگر ہم شعاع کو گھڑی کی سوئی کے سمت میں گردش کریں تو منفی زاویہ حاصل ہوگا۔ زاویے $417°$, $57°$ اور $-303°$ کے ابتدائی ضلع اور اختتامی ضلع یکساں ہوتے ہیں۔ لیکن ان کی گردش کی مقدار مختلف ہوتی ہے۔ اس طرح کے زاویوں کو ہم اختتامی زاویے (Coterminal angles) کہتے ہیں۔ لہٰذا زاویے جو معیاری مقام پر ہیں، ان کے اختتامی ضلع یکساں ہوں تو یہ ہم اختتامی زاویے ہیں۔ اگر α اور β ہم اختتامی زاویے ہو تو, $\beta = \alpha + k(360°)$ ہوگا۔ جس میں k ایک سالم عدد ہے۔ ہم اختتامی زاویوں کی پیمائش کا فرق $360°$ کا ضعف ہوگا۔

مثال کے طور پر $417°$ اور $-303°$ ہم اختتامی زاویے ہیں کیونکہ $417° - (-303°) = 720° = 2\,(360°)$.

i۔ غور کیجئے کہ $57°$, $417°$ اور $-303°$ پہلے ربع میں واقع ہیں۔

ii۔ مندرجہ ذیل زاویوں کی جوڑیاں $(30°,390°)$;$(280°,1000°)$اور$(275,-85°)$ ہم اختتامی زاویے ہیں۔



خاکہ 3.4

3.2.6 مثلث قائمۃ الزاویہ کے استعمال سے بنیادی علم مثلث کی نسبتیں:

ہم جانتے ہیں کہ ایک مثلث قائمۃ الزاویہ ABC کے تین ضلعوں کی لمبائیاں c,b,a کی مدد سے 6 نسبتیں بنائی جاسکتی ہیں۔ دلچسپی کی بات یہ ہے کہ یہ نسبتیں چھ بنیادی علم مثلث کی نسبتوں کے افعال بنتے ہیں۔

سب سے پہلے ہم ایک مثلث قائمۃ الزاویہ جو الہ سے علم مثلث کی نسبتوں کی تشریح کریں گے۔

$$\sin\theta = \frac{\text{opposite side}}{\text{hypotenuse}} \quad \frac{\text{مقابل ضلع}}{\text{وتر}} \quad ; \quad \cos\theta = \frac{\text{adjacent side}}{\text{hypotenuse}} \quad \frac{\text{متصل ضلع}}{\text{وتر}}$$

$\sin\theta$ اور $\cos\theta$ کی مدد سے بقیہ علم مثلث کی نسبتیں $\tan\theta$، $\cot\theta$, $\sec\theta$ اور $\text{cosec}\,\theta$ دریافت کریں گے۔

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\,, \quad \text{cosec}\,\theta = \frac{1}{\sin\theta}\,, \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}\,, \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,.$$

3.2.7 علم مثلثی تفاعلات کے وسیع پیمانے پر استعمال ہونے والے ٹھیک زاویے کی قیمتیں:

علم مثلث کے تفاعلات کے ہم معلوم شدہ زاویوں کی فہرست بنائیں گے۔

θ	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	غیر واضح

i۔ اوپر دی گئی تمام قیمتیں بالکل درست ہیں۔

ii۔ ہم نے غور کیا کہ $\sin 30°$ اور $\cos 60°$ مساوی ہیں ۔ $\sin 60°$ اور $\cos 30°$ مساوی ہیں۔

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:20:43 AM

iii۔ مندرجہ بالا جدول سے مقلوب کی نسبتیں جیسے,cosecant، secant اور cotangent کی قیمتوں کو حاصل کر سکتے ہیں۔

iv۔ $\cos 90° = 0$ رہنے کی وجہ سے ہم $\tan 90°$ اور $\sec 90°$ کو ہم واضح نہیں کر سکتے ہیں۔

v۔ $\sin 0° = 0$ رہنے کی وجہ سے ہم $\text{cosec}\ 0°$ اور $\cot 0°$ کو ہم واضح نہیں کر سکتے ہیں۔

3.2.8 بنیادی علم مثلثی تماثلات (Basic Trigonometric Identities)

علم مثلثی تماثل ایک تعلق کو ظاہر کرتا ہے۔ جو تمام قابل منظور قیمتوں کے لئے علاقے میں ہمیشہ صحیح ہیں۔ مثال کے طور پر $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ کے تمام قابل منظور θ کی قیمتوں کے لئے صحیح ہے۔ لہٰذا، یہ ایک تماثل ہے۔ جبکہ $\sin\theta = \frac{1}{2}$ ایک تماثل نہیں ہے۔ چونکہ جب $\theta = 60°$ ہو تو تعلق ناکام ہو جاتا ہے۔ تماثلات مشکل جملوں کو مختصر کر کیقابل بناتا ہے۔ علم مثلثی مساواتوں کو حل کرنے کا علم مثلثی کا بنیادی آلہ ہے۔ تماثلات کے استعمال بہت اہم پہلو یہ ہے کہ اس کو الجبراء کے مختلف قسم کے تکنیک سلیقے سے استعمال کر سکتے ہیں۔

آیئے ہم علم مثلث کے بنیادی تماثلات (فیثا غورث کے تماثلات) کا اعادہ کریں گے۔

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$
$$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$$
$$\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$$

i۔ $\sin^2\theta°$ کے لئے عام طور پر $(\sin\theta)^2$ استعمال ہوتا ہے۔ یہی طریقہ دوسرے علم مثلث کی نسبتوں کے لئے بھی ہوتا ہے۔

ii۔ $\sec^3\theta - \tan^2\theta = 1$ بے معنی ہے، جب $\theta = 90°$ ہو۔ لیکن یہ ایک تماثل ہے اور θ کی تشریح کے لئے تمام $\sec\theta$ اور $\tan\theta$ کی قیمتوں کی وضاحت کی گئی ہے۔ لہٰذا، تماثل ایک مساوات ہے، جو اس کے علاقے قیمتوں کے لئے تمام قیمتیں صحیح ہیں۔

iii۔ $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$ جب ہم اس جملہ کو لکھتے ہیں تو ہم یہ سمجھتے ہیں کہ یہ θ کی تمام قیمتوں کے لئے درست ہے جس کی مساوات $1 + \cos\theta \neq 0.$ ہے۔

مثال 3.1 ثابت کیجئے کہ $\dfrac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1} = \dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$.

حل :

$$\begin{aligned}\frac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1} &= \frac{\tan\theta + \sec\theta - \left(\sec^2\theta - \tan^2\theta\right)}{\tan\theta - \sec\theta + 1} \\ &= \frac{(\tan\theta + \sec\theta)\left[1 - (\sec\theta - \tan\theta)\right]}{\tan\theta - \sec\theta + 1} \\ &= \tan\theta + \sec\theta = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}.\end{aligned}$$

مثال 3.2 ثابت کیجئے کہ $(\sec A - \text{cosec}A)\,(1 + \tan A + \cot A) = \tan A \sec A - \cot A\,\text{cosec}A.$

حل :

$$\text{L.H.S.} = \left(\frac{1}{\cos A} - \frac{1}{\sin A}\right)\left[1 + \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{\sin A}\right]$$
$$= \frac{\sin^3 A - \cos^3 A}{\sin^2 A \cos^2 A} \quad \ldots(i)$$
$$\text{R.H.S.} = \frac{\sin A}{\cos^2 A} - \frac{\cos A}{\sin^2 A} = \frac{\sin^3 A - \cos^3 A}{\sin^2 A \cos^2 A} \quad \ldots(ii)$$

(i) اور (ii) سے ہم مطلوبہ نتیجہ حاصل کرتے ہیں۔

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:20:44 AM

مثال 3.3 $a\cos\theta = b$ اور $c\sin\theta = d$ سے θ خارج کیجئے۔ جس میں a, b, c اور d مستقلات ہیں۔

حل: $ac\cos\theta = bc$ اور $ac\sin\theta = ad$ کو مربع کر کے جمع کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$a^2c^2 = b^2c^2 + a^2d^2.$$

مشق 3.1

1) پہچانئے کہ دئے گئے زاویے کونسے ربع میں واقع ہیں۔ (i) 25° (ii) 825° (iii) -55° (iv) 328° (v) -230°

2) دئے گئے ہر ایک زاویہ کا ہم اختتامی زاویہ θ معلوم کیجئے اس طرح سے کہ $0^\circ \le \theta < 360^\circ$

(i) 395° (ii) 525° (iii) 1150° (iv) -270° (v) -450°

3) اگر $a\cos\theta - b\sin\theta = c$ ہو تو ثابت کیجئے کہ $a\sin\theta + b\cos\theta = \pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}$

4) اگر $\sin\theta + \cos\theta = m$ ہو تو ثابت کیجئے کہ، $\cos^6\theta + \sin^6\theta = \dfrac{4 - 3\left(m^2-1\right)^2}{4}$ جس میں $m^2 \le 2$ ہے۔

5) اگر $\dfrac{\cos^4\alpha}{\cos^2\beta} + \dfrac{\sin^4\alpha}{\sin^2\beta} = 1$ ہو تو ثابت کیجئے کہ

(i) $\sin^4\alpha + \sin^4\beta = 2\sin^2\alpha\sin^2\beta$ (ii) $\dfrac{\cos^4\beta}{\cos^2\alpha} + \dfrac{\sin^4\beta}{\sin^2\alpha} = 1.$

6) اگر $y = \dfrac{2\sin\alpha}{1+\cos\alpha+\sin\alpha}$ ہو تو ثابت کیجئے کہ $\dfrac{1-\cos\alpha+\sin\alpha}{1+\sin\alpha} = y$

7) اگر $x = \sum_{n=0}^{\infty}\cos^{2n}\theta, y = \sum_{n=0}^{\infty}\sin^{2n}\theta$ اور $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ ہو تو ثابت کیجئے کہ $\sum_{n=0}^{\infty}\cos^{2n}\theta\sin^{2n}\theta =$

$xyz = x + y + z.$ (اشارہ: ضابطہ $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \dfrac{1}{1-x}$ کے استعمال سے، جہاں $|x| < 1$.)

8) اگر $\tan^2\theta = 1 - k^2$ ہو تو ثابت کیجئے کہ $\sec\theta + \tan^3\theta\,\text{cosec}\,\theta = \left(2-k^2\right)^{3/2}$ ہے۔ مزید k کی قیمت دریافت کیجئے، جو نتیجہ کے لئے درست ہو۔

9) اگر $\sec\theta + \tan\theta = p$ ہو تو، $\sec\theta$، $\tan\theta$ اور $\sin\theta$ کی قیمتوں کو p کی صورت میں معلوم کیجئے۔

10) اگر $\cot\theta\,(1+\sin\theta) = 4m$ اور $\cot\theta\,(1-\sin\theta) = 4n$ ہو تو ثابت کیجئے کہ، $\left(m^2-n^2\right)^2 = mn.$

11) اگر $\text{cosec}\,\theta - \sin\theta = a^3$ اور $\sec\theta - \cos\theta = b^3$ ہو تو ثابت کیجئے کہ، $a^2b^2\left(a^2+b^2\right) = 1$

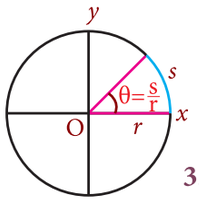
12) مساوات $a\sec\theta - c\tan\theta = b$ اور $b\sec\theta + d\tan\theta = c.$ سے θ خارج کیجئے۔

3.3 ریڈین کی پیمائش: (Radian measure)

ابتداء میں مثلث قائمۃ الزاویہ استعمال کر کے علم مثلث کی نسبتوں کو واضح کیا جاتا تھا اور زاویے ڈگری (درجہ) میں پیمائش کئے جاتے تھے۔ لیکن مثلث قائمۃ الزاویہ میں تھوڑی حد بندی تھی، جیسے ان میں صرف زاویہ حادہ مستعمل تھا۔ ایک ڈگری (درجہ) کی مکمل چکّر 360° کے برابر ہوتی ہے۔ جبکہ بابُل کے لوگوں نے ہزاروں سال پہلے 360 انتخاب کیا تھا۔ ہوسکتا ہے کہ وہ ایک سال میں دنوں کی تعداد کی بنیادی پر 360 کا انتخاب کیا ہوگا۔ اس میں اچھی خاصیت تھی جس سے زاویوں کو چھوٹے حصے جیسے 30°، 45°، 60°، 90° اور 180° میں تقسیم کیا جاسکتا تھا۔ 17 ویں صدی میں علم مثلث پھیل کر طبیعیات اور علم کیمیا میں شامل ہوا، جہاں علم مثلث کے تفاعلات کی ضرورت پیش آئی۔ جس کے علاقے حقیقی اعداد کے مجموعے تھے۔ کہ زاویے تھے، اس کو پورا کرنے کے لئے ایک زاویہ اور اکائی دائرہ کی قوس کی لمبائی کے درمیانی تعلق کو استعمال کیا گیا۔ اس طرح کی زاویہ کی پیمائش کو ریڈین پیمائش (radian measure) کا نام دیا گیا۔ زاویہ کی پیمائش کا ریڈین سب سے عام نظام ہے۔ بہت سارے تکنیکی شعبوں میں ریڈین ایک عام پیمائشی اکائی ہے۔ اس میں کیلکوس بھی شامل ہے۔ زاویوں کی ریڈین پیمائش میں ایک نہایت اہم غیر ناطق عدد π کلیدی رول ادا کرتا ہے۔ چلئے اب ایک زاویہ کی ریڈین پیمائش کا تعارف کریں گے۔

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:20:44 AM

تعریف 3.1 : ایک زاویہ کی ریڈین پیمائش دائرہ کے قوس کی لمبائی سے دائرہ کا نصف قطر کی نسبت ہے جس پر مرکزی زاویہ بنا ہوا ہے۔



خاکہ 3.5

فرض کیجئے کہ ایک دائرہ کا نصف قطر r ہے۔ دائرہ کے قوس کی لمبائی مرکز پر بننے والا زاویہ θ ہے۔

اس طرح

ریڈین $= \frac{s}{r}$ $\quad$ $\frac{\text{قوس کی لمبائی}}{\text{نصف قطر}}$ $\quad$ $\theta = \frac{\text{arc length}}{\text{radius}}$ $\quad$ لہٰذا، $s = r\theta$.

i۔ تمام دائرے مشابہ ہوتے ہیں۔اس طرح کسی دائرہ کا دیا گیا مرکزی زاویہ، مقطوعہ قوس کی لمبائی سے نصف قطر کی نسبت ہمیشہ مستقل ہوتی ہے۔

ii۔ جب $s = r$ تو ایک زاویہ 1 ریڈین ہوتا ہے۔اس طرح ایک ریڈین، دائرہ کے مرکز پر بننے والا زاویہ ہے۔
قوس کی لمبائی اور دائرہ کا نصف قطر کی لمبائی سے مساوی ہوتی ہے۔

iii۔ چونکہ s اور r کی لمبائیاں مساوی اکائی والی ہیں۔θ بغیر اکائی کے ہوتا ہے۔ہم ریڈین کو ظاہر کرنے کے لئے کوئی علامت استعمال نہیں کرتے ہیں۔

iv۔ اگر $s = r$ ہو تو ریڈین کی پیمائش $\theta = 1$ ہے۔اگر $s = 2r$ ہو تو ریڈین کی پیمائش $\theta = 2$ ہے۔اسی طرح اگر $s = kr$ ہو تو ریڈین کی پیمائش $\theta = k$ ہے۔ لہٰذا ایک زاویہ کی ریڈین کی پیمائش ہمیں یہ بتاتی ہے کہ کتنے نصف قطر کی لمبائیاں ہیں۔

v۔ ریڈین زاویہ کی پیمائش کو اکائی دائرہ، کنارے سے تعلق ہوسکتا ہے۔ریڈین نظام میں، ہم زاویہ پیمائشی، اکائی دائرہ کے کنارے سے طے شدہ فاصلہ پیمائش سے جہاں زاویہ اختتامی ضلع جو اکائی دائرہ کو قطع کرتا ہے۔

3.3.1 ڈگری (درجہ) اور ریڈین پیمائش کا درمیانی تعلق (Relationship between Degree and Radian Measures)

زاویوں کے پیمائش کے لئے درجہ اور ریڈین اکائیاں مجود ہیں۔ ایک پیمائشی اکائی دوسرے پیمائشی اکائی سے بہتر ہے۔ اگر اس کو آسانی اور بجمدہ طریقے سے تشریح کرسکتے ہوں۔ مثال کے طور پر حرارت کی پیمائش میں فارن ہائیٹ سے سلشیس اکائی بہتر ہے۔کیونکہ پانی کا نقطہ انجما اور نقطہ جوش بالترتیب 0°C اور 100°C ہے، جس کو آسانی سے واضح کرسکتے ہیں۔ ریڈین کی پیمائش تبدیلی اور شمار کرنے کے لئے بہت عمدہ ہے۔ تجزیہ کے لئے ریڈین پیمائش زیادہ مناسب ہے۔ جبکہ زاویہ کی پیمائش کے لئے ڈگری زیادہ مناسب ہے۔ یونانی ریاضی دانوں کے تعلق پر غور کیا ایک دائرہ کے محیط سے اخذ ہوا اور ریڈین پیمائش میں π ایک اہم کردار کرتا ہے۔

دائرہ کی اکائی میں، ایک مکمل چکر (گردش) $360°$ کا ہوتا ہے۔ جبکہ ایک مکمل گردش 2π ریڈین اکائی دائرہ کا محیط ہے۔ چنانچہ ہم مندرجہ ذیل میں یہ تعلقات رکھتے ہیں۔

$2\pi = 360°$ ریڈین، جو مختصر ہوکر $\pi = 180°$ ریڈین ہوتا ہے۔

لہٰذا

$$1° = \frac{\pi}{180} \text{ radians.} \quad \text{یا} \quad 1 \text{ radian} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$$

$$x° = \frac{\pi x}{180} \text{ radians.} \quad \text{یا} \quad x \text{ radian} = \left(\frac{180x}{\pi}\right)^\circ$$

غور کیجئے کہ ڈگری میں استعمال ہونے والی اسکیل کے مقابلہ میں ریڈین کی اسکیل بہت چھوٹی ہوتی ہے۔چھوٹی اسکیل رہنے کی وجہ سے علم مثلث تفاعلات کی ترسیمات صاف نظر آتے ہیں اور استعمال کے قابل ہوتے ہیں۔اوپر کا تعلق، ریڈین سے ڈگری میں یا ڈگری سے ریڈین میں تبدیل کرنے کا طریقہ مہیا کرتا ہے۔

i۔ کسی دائرہ کے محیط سے اس کا قطر کی نسبت ہمیشہ ایک مستقل ہوتی ہے۔اس مستقل کو غیر ناطق عدد π سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

ii۔ ایک اکائی دائرہ میں ایک نقطہ P نشان کریں اور اکائی دائرہ کو عددی خط پر اس طرح رکھیں کہ P عدد 0 کو مس کرے، دائرہ کو عددی خط پر

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:20:45 AM

لڑھکائیں۔ P جب دائرہ عددی خط کے دائیں جانب لڑھکتے ہوئے ایک مکمل چکّر پورا کرتا ہے۔تو نقطہ،عددی خط پر عدد 2π کو مس کرے گا۔

iii۔ اگر زاویہ کی پیمائش میں اکائی بیان نہیں کی گئی ہو تو یہ سمجھ لینا ہوگا کہ زاویہ ریڈین میں ہے۔

iv۔ فرض کریں کہ ایک قطاع دائرہ کا نصف قطر r ہے۔ اور قطاع دائرہ کا مرکزی زاویہ θ ہو تو

$$\text{قطاع دائرہ کا رقبہ} = \begin{cases} \left(\frac{\pi r^2}{360^\circ}\right)\theta & \text{پیمائش ڈگری میں} \\ \left(\frac{\pi r^2}{2\pi}\right)\theta = \frac{r^2\theta}{2} & \text{پیمائش ریڈین میں} \end{cases}$$

ریڈین پیمائش سے حساب کرنا بہت آسان ہوتا ہے۔

v۔ π اور $\frac{22}{7}$ قیمتوں کے چار عشری مقامات بالترتیب 3.1416 اور 3.1420 ہیں۔ چنانچہ π اور $\frac{22}{7}$ کے دو عشری مقامات تک تقریباً قیمتیں مساوی ہیں۔ لہٰذا $\pi \approx \frac{22}{7}$ ہے۔

vi۔
$$1 \text{ radian} \approx 57^\circ 17' 45'' \text{ and } 1^\circ \approx 0.017453 \text{ radian}$$
$$1' = \left(\frac{\pi}{180 \times 60}\right) \text{radian} \approx 0.000291 \text{ radian.}$$
$$1'' = \left(\frac{\pi}{180 \times 60 \times 60}\right) \text{radian} \approx 0.000005 \text{ radian.}$$

vii۔ ریڈین پیمائش اور ان نظیری ڈگری پیمائش کے چند اہم زاوئے مندرجہ ذیل جدول میں دئے گئے ہیں۔

ریڈین	Radians	0	1	0.017453	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ڈگری	Degrees	0°	$57^\circ 17' 45''$	1°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°

viii۔ $\sin 90^\circ = 1$ لیکن $\sin 90 \neq 1$ (ریڈین پیمائش میں)

مثال 3.4 : (i) 18° کو ریڈین میں اور (ii) -108° کو ریڈین میں تبدیل کیجئے۔

حل: اب $180^\circ = \pi$ radians سے حاصل ہوتا، $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ radians

(i) $18^\circ = \frac{\pi}{180} \times 18 \text{ radians} = \frac{\pi}{10} \text{ radians}$

(ii) $-108^\circ = \frac{\pi}{180} \times (-108) \text{ radians} = -\frac{3\pi}{5} \text{ radians.}$

مثال 3.5 : (i) $\frac{\pi}{5}$ ریڈین کو درجہ میں اور (ii) 6 ریڈین کو درجہ میں تبدیل کیجئے۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ $\pi \text{ radians} = 180^\circ$ اور اس طرح

(i) $\frac{\pi}{5} \text{ radians} = \frac{180^\circ}{5} = 36^\circ$

(ii) $6 \text{ radians} = \left(\frac{180}{\pi} \times 6\right)^\circ \approx \left(\frac{7 \times 180}{22} \times 6\right)^\circ = \left(343\frac{7}{11}\right)^\circ.$

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:20:45 AM

مثال 3.6: ایک دائرہ کا نصف قطر 5 سم اور مرکزی زاویہ کی پیمائش $15°$ ہے، تو دائرے کے قوس کی لمبائی معلوم کیجئے۔

حل: فرض کیجئے کہ دائرے کے قوس کی لمبائی s ، نصف قطر r اور مرکزی زاویہ θ ہے۔ $s = r\theta.$

دیا گیا ہے کہ $\theta = 15° = 15 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{12}$ radians

اس طرح $s = r\theta$ gives $s = 5 \times \frac{\pi}{12} = \frac{5\pi}{12}\, cm$

$r\theta$ کے حاصل ضرب میں، θ ضرور ریڈین میں ہونا چاہئے۔

مثال 3.7: اگر یکساں قوس کی لمبائیاں رکھنے والے دو دائروں کے مرکزی زاویے $30°$ اور $80°$ ہیں تو ان کے نصف قطروں کی نسبت معلوم کیجئے۔

حل: فرض کریں کہ r_1 اور r_2 دئے گئے دو دائروں کے نصف قطریں ہیں اور l قوس کی لمبائی ہے۔

$\theta_1 = 30° = \frac{\pi}{6}$ radians

$\theta_2 = 80° = \frac{4\pi}{9}$ radians

دیا گیا ہے کہ $l = r_1\theta = r_2\theta$

اس طرح $\frac{\pi}{6} r_1 = \frac{4\pi}{9} r_2$

جس سے $\frac{r_1}{r_2} = \frac{8}{3}$ $r_1 : r_2 = 8 : 3.$

مشق 3.2

1) مندرجہ ذیل کے ہر ایک زاویہ کو ریڈین پیمائش میں ظاہر کیجئے۔

(i) $30°$ (ii) $135°$ (iii) $-205°$ (iv) $150°$ (v) $330°$.

2) مندجہ ذیل کے ہر ایک ریڈین پیمائش کو ڈگری پیمائش میں ظاہر کیجئے۔

(i) $\frac{\pi}{3}$ (ii) $\frac{\pi}{9}$ (iii) $\frac{2\pi}{5}$ (iv) $\frac{7\pi}{3}$ (v) $\frac{10\pi}{9}$.

3) ایک کھلاڑی کو 1 کلومیٹر دوڑ پورا کرنے کے لئے ایک مدّور راستہ کو 5 مرتبہ چکر لگانا پڑتا ہے۔ تو دوڑ کے راستہ کا نصف قطر کیا ہوگا۔

4) ایک دائرہ کا قطر 40 سم اور وتر کی لمبائی 20 سم ہے۔ وتر کی چھوٹی قوس (قوس صغرٰی) کی لمبائی معلوم کیجئے۔

5) 100 سم نصف قطر والے دائرہ میں قوس کی لمبائی 22 سم ہو تو مرکزی زاویہ کے ڈگری کی پیمائش معلوم کیجئے۔

6) 10 فٹ نصف قطر والے ایک دائرہ میں مرکزی زاویہ کی پیمائش $41°$ ہے تو قوس کی لمبائی معلوم کیجئے۔

7) اگر یکساں قوس کی لمبائیاں رکھنے والے دو دائروں کے مرکزی زاویے $60°$ اور $75°$ ہیں، تو ان کے نصف قطروں کی نسبت معلوم کیجئے۔

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:20:46 AM

8) ایک قطاع دائرہ کا احاطہ، ایک نصف دائرہ کے قوس کی لمبائی کے مساوی ہے، جن کے نصف قطریں یکساں ہیں۔ قطاع دائرہ کا زاویہ، ڈگری، منٹ اور سکنڈ میں ظاہر کیجئے۔

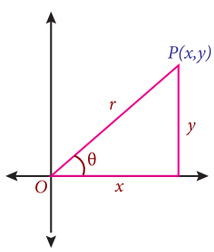
9) ایک ہوائی جہاز کا پنکھا فی منٹ میں 1000 مرتبہ گردش کرتا ہے۔ پنکھے کے کنارہ کا ایک نقطہ 20 سکنڈ میں کتنی مرتبہ گردش کرے گا؟

10) ایک ریل گاڑی 66 km/hr کی رفتار سے مدوّر پٹری پر چلتی ہے جس کا نصف قطر 1500 میٹر ہے۔ معلوم کیجئے کہ 20 سکنڈ میں وہ کونسے زاویہ سے گذرے گی؟

11) ایک مدّور دھاتی برتن جس کا نصف قطر 8 سمراور موٹائی (اونچائی) 6 ملی میٹر ہے۔ اس کو پگھلا کر ایک پئی (ایک موٹائی والا قطاع دائرہ) کی شکل میں تبدیل کیا گیا ہے، جس کا نصف قطر 16 سمراور موٹائی 4 ملی میٹر ہے۔ قطاع دائرہ کا زاویہ معلوم کیجئے۔

3.4 علم مثلث کے افعال اور اُن کی خصوصیات (Trigonometric functions and their properties)

3.4.1 علم مثلث کے افعال کا کوئی بھی زاویہ کا رتیسی محددیں کی شکل میں:



خاکہ 3.6

پچھلی جماعتوں میں ہم نے حادہ زاویوں کے استعمال سے علم مثلث کی نسبتوں کے اُصولوں کو پڑھا تھا۔ لیکن اب ہم ان زاویوں کے بارے میں بھی معلومات حاصل کریں گے، جو زاویہ حادہ نہیں ہیں۔ ہم زاویہ حادہ کے اُصول ہی آگے بڑھاتے ہوئے کسی بھی زاویہ کے لئے علم مثلث کے تفاعلات کی تشریح کریں گے۔ ریڈین پیمائش کے لحاظ سے کسی بھی زاویہ کا علم، مثلث کی نسبتوں کو علم مثلث کے افعال کہتے ہیں۔

معیاری مقام پر زاویہ θ کا اختتامی ضلع پر مبدا کے علاوہ کوئی بھی ایک نقطہ $P(x,y)$ لیجئے۔

فرض کیجئے کہ $OP = r$ اس طرح $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

θ کے چھ علم مثلث کے تفاعلات کو مندرجہ ذیل طریقہ سے تشریح کریں گے۔ $\sin\theta = \frac{y}{r}$ اور $\cos\theta = \frac{x}{r}$. اس کو استعمال کرکے ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں۔ $\tan\theta = \frac{y}{x}, x \neq 0; \cot\theta = \frac{x}{y}, y \neq 0; \operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{y}, y \neq 0; \sec\theta = \frac{r}{x}, x \neq 0.$

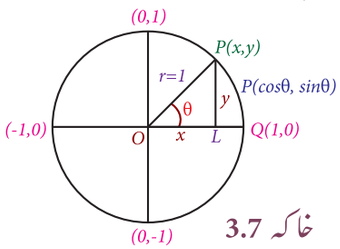
(i) چونکہ $|x| \leq r, |y| \leq r$ ہے، اس سے ہمیں ملتا ہے $|\sin\theta| \leq 1$ اور $|\cos\theta| \leq 1$

(ii) زاویہ حادہ ہونے کی صورت میں، اوپر کے اُصول مثلث قائمۃ الزاویہ میں استعمال ہونے والے اُصول کے مساوی ہوں گے۔

(iii) علم مثلثی تفاعلات کی قیمتیں اس بنیاد پر منفی یا مثبت ہوتے ہیں۔ کہ نقطہ $P(x,y)$ ربع کے اختتامی ضلع جہاں پر θ واقع ہے۔

(iv) اوپر کے مثلثی تفاعلات کے اُصول اختتامی ضلع کا زاویہ کے نقاط ہر منحصر ہوتا ہے۔ (جانچ کیجئے!)

ربع زاویوں کے علم مثلث کی نسبتیں: (Trigonometric ratios of Quadrantal angles)



خاکہ 3.7

معیاری مقام میں زاویہ کا اختتامی ضلع کسی بھی محور پر منطبق ہو تو اس زاویہ کو ربعی زاویہ کہتے ہیں۔ ہم ربعی زاویوں کے لئے علم مثلث کی نسبتیں دریافت کریں گے۔ فرض کیجئے کہ اکائی دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ ہے۔ فرض کیجئے کہ $P(x,y)$ اکائی دائرہ پر ایک نقطہ ہے، جہاں اختتامی ضلع کا زاویہ θ، اکائی دائرہ پر قطع کرتا ہے۔

تو $\cos\theta = \frac{x}{1} = x$ (P کا x- محدد) اور $\sin\theta = \frac{y}{1} = y$ (P کا y- محدد)

لہٰذا اکائی دائرہ پر کسی بھی نقطہ $P(x,y)$ کے محددیں، $P(\cos\theta, \sin\theta)$ ہیں۔ اس طریقے سے، زاویہ کی پیمائش کو ایک نقطہ سے اکائی دائرہ سے جوڑا جاتا ہے۔ مندرجہ ذیل جدول میں کس طرح اوپر کی تشریح کو استعمال کرکے ربعی زاویوں کو علم مثلثی تفاعل کی قیمتوں کو دریافت کیا جاسکتا ہے، اس کی وضاحت کی گئی ہے۔

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:20:46 AM

علم مثلثی تفاعلات کے ربعی زاویوں کی ٹھیک قیمتیں

ربعی زاویہ	اکائی دائرہ پر نظیری نقطہ $P(x,y) = P(\cos\theta, \sin\theta)$	کوسائن قیمت $\cos\theta$	سائن قیمت $\sin\theta$
$\theta = 0°$	$(1,0) = (\cos 0°, \sin 0°)$	$\cos 0° = 1$	$\sin 0° = 0$
$\theta = 90°$	$(0,1) = (\cos 90°, \sin 90°)$	$\cos 90° = 0$	$\sin 90° = 1$
$\theta = 180°$	$(-1,0) = (\cos 180°, \sin 180°)$	$\cos 180° = -1$	$\sin 180° = 0$
$\theta = 270°$	$(0,-1) = (\cos 270°, \sin 270°)$	$\cos 270° = 0$	$\sin 270° = -1$
$\theta = 360°$	$(1,0) = (\cos 360°, \sin 360°)$	$\cos 360° = 1$	$\sin 360° = 0$

(i) غور کیا گیا کہ اکائی دائرہ پر تمام نقاط کے x اور y محددیں -1 اور 1 کے درمیان واقع ہیں۔
لہٰذا $-1 \leq \cos\theta \leq 1, -1 \leq \sin\theta \leq$ کی کوئی بھی قیمت وہ θ میں ہوں گے۔

(ii) جب $\theta = 360°$ ہوتو ایک مکمل چکر ہوگا، چنانچہ اختتامی ضلع، مثبت x- محور پر منطبق ہوگا۔لہٰذا سائن $0°$ اور $360°$ ہر یکساں قیمتیں ہوں گی۔اسی اصول کو کوسائن اور دوسرے علم مثلثی تفاعلات میں اپناتے ہیں۔

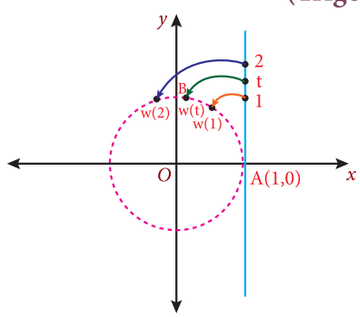
(iii) اگر دو زاویوں کا فرق $360°$ یا 2π کے ضعف میں ہوتو ہر علم مثلث کے تفاعل کے دونوں زاویوں میں مساوی قیمتیں ہوں گی۔

(iv) ربعی دائروں پر سائن اور کوسائن قیمتوں استعمال کر کے مندرجہ ذیل میں علم ہندسی طور پر عام اصل حاصل کئے ہیں۔

ربعی زاویہ پر	وجہ معقول	عام اصل
$\sin 0 = 0$ $\sin \pi = 0$	$\sin(0 + 2n\pi) = 0; n \in \mathbb{Z}$ $\sin(\pi + 2n\pi) = 0; n \in \mathbb{Z}$	$\sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = n\pi; n \in \mathbb{Z}$
$\cos\frac{\pi}{2} = 0$ $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 0; n \in \mathbb{Z}$ $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right) = 0; n \in \mathbb{Z}$	$\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{Z}$
$\tan 0 = 0$ $\tan \pi = 0$	$\tan(0 + 2n\pi) = 0; n \in \mathbb{Z}$ $\tan(\pi + 2n\pi) = 0; n \in \mathbb{Z}$	$\tan\theta = 0 \Rightarrow \theta = n\pi; n \in \mathbb{Z}$

(v) جب $\cos\theta = 0°$ ہوتو $\tan\theta$ غیر واضح ہے اور جب $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ ، $n \in \mathbb{Z}$ ہوتو $\tan\theta$ غیر واضح ہے۔

3.4.2 حقیقی اعداد کے علم مثلثی تفاعلات (Trigonometric functions of real numbers)



خاکہ 3.8

اعلیٰ ریاضی کے حسابات، کیلکولس، طبیعیات اور علم کیمیاء کے حسابات کو حل کرنے کے لئے سائنس دانوں کو حقیقی اعداد کے مثلثی تفاعلات کی ضرورت تھی۔ایک زاویہ اور ایک قوس کی لمبائی اکائی دائرہ پر حقیقی عدد سے ظاہر کی گئی۔

فرض کیجئے ایک اکائی دائرہ جس کا مرکز مبدا ہو۔صفر زاویہ (ریڈین پیمائش میں) کو اکائی دائرہ پر نقطہ $A(1,0)$ سے تعلق ملائیں۔اکائی دائرہ کا نقطہ $A(1,0)$ پر ایک مماس کھینچئے۔ایک حقیقی عدد t اس طرح لیں کہ t مماس کے خط پر ایک نقطہ y- محدد ہو۔

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:20:47 AM

ہر حقیقی عدد t کے لئے اکائی دائرہ پر تماثل نقطہ $B(x,y)$ اس طرح لیں کہ AB قوس کی لمبائی t کے مساوی ہو۔ اگر t مثبت ہو تو نقطہ $B(x,y)$ گھڑی کی سوئی کی مخالف سمت میں انتخاب کریں، ورنہ اس کو گھڑی کی سوئی کی سمت میں انتخاب کریں، قوس AB کے مرکز پر بننے والا زاویہ θ ہوگا۔ اس طریقہ میں AB ہمیں ایک تفاعل w(t) حاصل ہوتا ہے، جو ایک حقیقی عدد t سے اکائی دائرہ پر ایک نقطہ کو تعلق جوڑتا ہے۔ اس طرح کے تفاعل کو لپٹا تفاعل (wrapped function) کہتے ہیں، تو $s = r\theta$ سے قوس کی لمبائی $t = \theta$ حاصل ہوتا ہے۔

اب واضح کریں $\sin t = \sin\theta$ اور $\cos t = \cos\theta$ واضح طور پر $\sin t = \sin\theta = y$ اور $\sin t = \sin\theta = x$۔

$\sin t$ اور $\cos t$ کے استعمال سے دوسرے علم مثلثی تفاعلات کو حقیقی اعداد کے تفاعلات کے طور پر تشریح کر سکتے ہیں۔

(i) اکائی دائرہ پر ایک نقطہ $B(x,y) = B(\cos t, \sin t)$ ہے۔ اس طرح، لہٰذا کسی بھی حقیقی عدد t کے لئے $-1 \le \cos t \le 1$ اور $-1 \le \sin t \le 1$ ہوگا۔

(ii) لپٹا تفاعل w(t) جیسے ایک خط کو ایک دائرہ کے اطراف لپیٹنے کے مماثل ہے۔

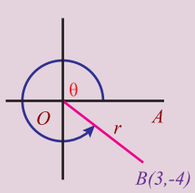
(iii) ایک علم مثلثی تفاعل کی حقیقی عدد t کی قیمت، اس کی قیمت زاویہ t ریڈین کے برابر ہوگی۔

(iv) حقیقی اعداد کے علم مثلثی تفاعلات کا استعمال موجوں، اہتزازات جیسے باقاعدہ وقفوں میں ہونے والے واقعات کے مطالعہ میں ہوتا ہے۔

مثال 3.8: معیاری مقام میں موجود اختتامی ضلع کا زاویہ θ، نقطہ (3,–4) سے گذرتا ہے۔ زاویہ θ کی چھ علم مثلثی تفاعل کی قیمتیں معلوم کیجئے۔

حل: فرض کریں $B(x,y) = B(3,-4)$، OA ابتدائی ضلع اور OB اختتامی ضلع کا θ زاویہ معیاری مقام میں ہے۔

تو $\angle AOB$، کا زاویہ θ ہے اور θ چوتھے ربع میں واقع ہے۔ اسی طرح



خاکہ 3.9

$$OB = r,\ r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{3^2+(-4)^2} = 5$$

ہمارے پاس ہے $r = 5,\quad$ اور $\quad x = 3,\ y = -4$

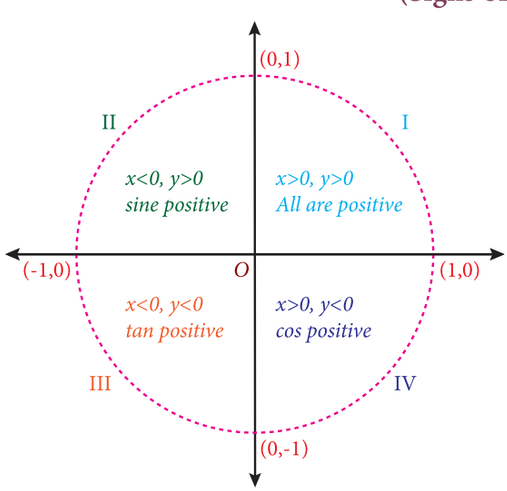
$$\sin\theta = \frac{y}{r} = -\frac{4}{5};\quad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{3}{5};\quad \tan\theta = \frac{y}{x} = -\frac{4}{3};$$

$$\text{cosec}\,\theta = \frac{r}{y} = -\frac{5}{4};\quad \sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{5}{3};\quad \cot\theta = \frac{x}{y} = -\frac{3}{4}.$$

علم مثلث کے تفاعلات کی علامتیں (Signs of Trigonometric functions)

فرض کریں ایک اکائی دائرہ جس کا مرکز، مبدا پر ہے۔ θ معیاری مقام پر ہے۔

اکائی دائرہ پر نقطہ $P(x,y)$ اس کا نظیری زاویہ θ ہے تو $\sin\theta = y$، $\cos\theta = x$ اور $\tan\theta = \frac{y}{x}$ ہوگا۔ x اور y کی قیمتیں کے جس ربع میں P واقع ہوں، اس کی بنیاد پر قیمتیں مثبت یا منفی ہوتی ہیں۔



خاکہ 3.10

پہلے ربع میں $\cos\theta = x > 0$ (مثبت) $\sin\theta = y > 0$ (مثبت)

چنانچہ $\sin\theta$ اور $\cos\theta$ اور تمام علم مثلثی تفاعلات پہلے ربع میں مثبت رکھتے ہیں۔

دوسرے ربع میں $\cos\theta = x < 0$ (منفی) $\sin\theta = y > 0$ (مثبت)

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:20:47 AM

چنانچہ اس میں $\sin\theta$ اور $\text{cosec}\ \theta$ مثبت ہیں اور بقیہ منفی ہیں۔اسی طرح، دوسرے دوربعوں کے علم مثلثی تفاعلات کی علامتیں معلوم کر سکتے ہیں۔
آیئے اس کے متعلق ہم خاکہ 3.10 میں اوپر کی بحث کی تشریح کریں گے۔

مختلف ربعوں میں علم مثلثی تفاعلات کی علامتیں کو اس مقولہ (ASTC rule) "All Students Take Chocolate" سے یاد رکھ سکتے ہیں۔

All Students Take Chocolate (ASTC rule)

مثال 3.9: اگر $\sin\theta = \frac{3}{5}$ ہو اور زاویہ θ دوسرے ربع میں ہو تو دوسرے پانچ علم مثلثی تفاعلات کی قیمتیں معلوم کیجئے۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \cos\theta = \pm\sqrt{1-\sin^2\theta} = \pm\sqrt{1-\frac{9}{25}} = \pm\frac{4}{5}$

لہٰذا دوسرے ربع میں $\cos\theta = -\frac{4}{5}$ as $\cos\theta$ منفی ہے۔

$$\sin\theta = \frac{3}{5} \Rightarrow \text{cosec}\ \theta = \frac{5}{3};\quad \cos\theta = -\frac{4}{5} \Rightarrow \sec\theta = -\frac{5}{4}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\frac{3}{4};\quad \cot\theta = -\frac{4}{3}$$

اگر $\sin\theta$ اور $\cos\theta$ معلوم شدہ ہوں تو مقلوب تماثلات (reciprocal identities) اور خارج قسمت تماثلات (quotient identities) استعمال کر کے دوسرے چار علم مثلثی قیمتیں دریافت کر سکتے ہیں۔جب ہم ایک علم مثلثی کی قیمت اور ربع جانتے ہیں تو فیثا غورثی تماثلات کے استعمال سے دوسرے علم مثلثی قیمتوں معلوم کر سکتے ہیں۔

3.4.2 تعلق دار زاویئے (Allied Angles)

اگر دو زاویوں کا حاصل جمع یا فرق، ریڈین کا ضعف $\frac{\pi}{2}$ ہو تو تعلق دار زاویئے کہتے ہیں۔ θ کے کوئی دو اس طرح سے کہ

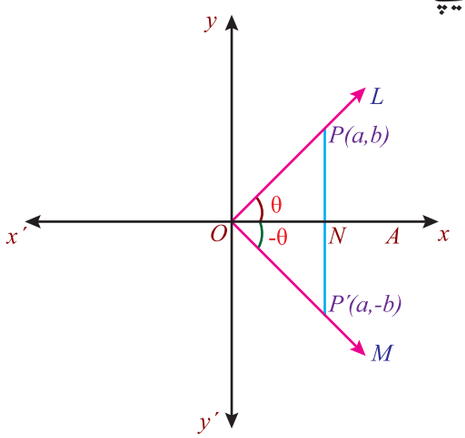
$\pm\theta, \frac{\pi}{2}\pm\theta, \pi\pm\theta, \frac{3\pi}{2}\pm\theta, \ldots,$ زاویئے، تعلق دار زاویئے ہوں گے۔

اب ہم θ اور $-\theta$ تعلق دار زایوں کے لئے علم مثلث کی نسبتیں معلوم کریں گے۔

$-\theta$ کے علم مثلث کی نسبتیں θ کے طور پر

فرض کیجئے کہ $\angle AOL = \theta$ اور $\angle AOM = -\theta$ لیں۔ فرض کیجئے کہ OL پر ایک نقطہ $P(a,b)$ لیجئے۔ OM پر ایک نقطہ P' اس طرح انتخاب کریں کہ OP = OP' ہو۔ OA کے عمود میں ایک خط PN اس طرح کھینچے کہ وہ P' کو OM پر قطع کرے۔ چونکہ $\angle AOP = \angle AOP'$ اور $\angle PON = \angle P'ON$ متماثل (congruent) ہیں۔

لہٰذا، $PN = P'N$ اور چونکہ نقطہ P' کو $P'(a, -b)$ کے طور پر دیا گیا ہے۔



خاکہ 3.11

اب، علم مثلثی تفاعلات کی تعریف تحت

$$\sin\theta = \frac{b}{OP},\ \cos\theta = \frac{a}{OP},\ \tan\theta = \frac{b}{a}$$

اسی طرح $\sin(-\theta) = \frac{-b}{OP'} = \frac{-b}{OP} = -\sin\theta$

اور $\cos(-\theta) = \frac{a}{OP'} = \frac{a}{OP} = \cos\theta$

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:20:47 AM

تو یہ آسانی سے حاصل کر سکتے ہیں۔

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta,\ \operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec}\theta,\ \sec(-\theta) = \sec\theta,\ \cot(-\theta) = -\cot\theta.$$

(i) $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ اور $\cos(-\theta) = \cos\theta$، اکائی دائرہ کے x- محور کے تشاکل سے یہ اُصول حاصل ہوتے ہیں۔ زاویہ θ صرف x- محور کے دوسرے جانب ہوتو θ- زاویہ، θ زاویہ کے یکساں ہوگا، ایک نقطہ (x,y) کو x- محور کے دوسرے جانب تبدیل کرنے سے نقطہ $(x,-y)$ بنتا ہے۔ چونکہ y- محدد منسوخ ہوتا ہے۔ لہٰذا سائن sine منسوخ ہوتا ہے۔لیکن x- محدد وہیں رہتا ہے، اور cosine میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی۔

(ii) منفی -زاویہ کے تماثلات کے استعمال سے یہ جان سکتے ہیں کہ علم مثلثی تفاعل ، طاق تفاعل یا جفت تفاعل ہیں۔

مثال 8.10 : قیمتوں کو دریافت کیجئے۔ (i) $\sin(-45^\circ)$ (ii) $\cos(-45^\circ)$ (iii) $\cot(-45^\circ)$

حل:

$$\text{(i) } \sin(-45^\circ) = -\sin(45^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$(iii)\ \cot(-45^\circ) = -1 \qquad \text{اور} \qquad \text{(ii) } \cos(-45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

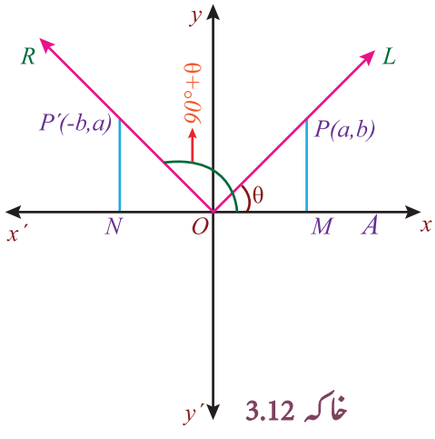
پچھلی جماعتوں میں ہم علم مثلث کی نسبتوں میں زاویہ $(90^\circ - \theta)$, $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ کے بارے میں پڑھ چکے ہیں۔ چلئے ہم علم مثلث کی نسبتوں کا زاویہ $(90^\circ - \theta)$ کا اعادہ کریں گے۔

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta,\quad \cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta,\quad \tan(90^\circ - \theta) = \cot\theta$$
$$\operatorname{cosec}(90^\circ - \theta) = \sec\theta,\quad \sec(90^\circ - \theta) = \operatorname{cosec}\theta,\quad \cot(90^\circ - \theta) = \tan\theta.$$

اب اوپر معلوم کئے ہوئے علم مثلث کی نسبتوں کو، $(90^\circ + \theta)$ شکل والے زاویوں کو ثابت کریں گے۔

$\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$, $(90^\circ + \theta)$ کی شکل میں موجود زاویہ کی علم مثلث کی نسبتیں کو θ میں ظاہر کرنا۔

فرض کیجئے $\angle AOL = \theta$ اور $\angle AOR = (90^\circ + \theta)$ ہے۔



خاکہ 3.12

فرض کیجئے کہ OL پر ایک نقطہ P(a,b) ہے اور OR پر ایک نقطہ P' اس طرح لیجئے کہ OP = OP' لیجئے، P'N پر ایک عمود PM اور Ox اور Ox' پر بالترتیب عمودیں P اور P' کھینچئے۔

یہاں پر $\angle AOP' = 90^\circ + \theta$

واضح طور پر، $\triangle OPM$ اور $\triangle P'ON$ متماثل ہیں۔

$$ON = MP \quad \text{اور} \quad NP' = OM$$

لہٰذا P اور P' کی محددیں بالترتیب $P(a,b)$ اور $P(-b, a)$ ہیں۔ یہاں پر

$$\sin(90^\circ + \theta) = \frac{\text{P' کا } y\text{- محدد}}{OP'} = \frac{a}{OP} = \cos\theta,$$

$$\cos(90^\circ + \theta) = \frac{\text{P' کا } x\text{- محدد}}{OP'} = \frac{-b}{OP} = -\sin\theta,$$

اس طرح $\tan(90^\circ+\theta) = -\cot\theta, \operatorname{cosec}(90^\circ+\theta) = \sec\theta, \sec(90^\circ+\theta) = -\operatorname{cosec}\theta, \cot(90^\circ+\theta) = -\tan\theta.$

علم مثلثی تفاعل کے دوسرے تعلق دار زاویوں $\pi \pm \theta,\ \frac{3\pi}{2} \pm \theta,\ 2\pi \pm \theta$ کو اسی طریقے سے حاصل کر سکتے ہیں۔

مندرجہ ذیل جدول میں اوپر کے نتائج کا خلاصہ دیا گیا ہے۔ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ یہاں پر

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:20:48 AM

	$-\theta$	$\frac{\pi}{2}-\theta$	$\frac{\pi}{2}+\theta$	$\pi-\theta$	$\pi+\theta$	$\frac{3\pi}{2}-\theta$	$\frac{3\pi}{2}+\theta$	$2\pi-\theta$	$2\pi+\theta$
sine	$-\sin\theta$	$\cos\theta$	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$-\sin\theta$	$-\cos\theta$	$-\cos\theta$	$-\sin\theta$	$\sin\theta$
cosine	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$-\sin\theta$	$-\cos\theta$	$-\cos\theta$	$-\sin\theta$	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\cos\theta$
tangent	$-\tan\theta$	$\cot\theta$	$-\cot\theta$	$-\tan\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$-\cot\theta$	$-\tan\theta$	$\tan\theta$

(i) نظیری مقلوب کی نسبتوں کو اوپر کے جدول کو استعمال کر کے لکھ سکتے ہیں۔

(ii) اگر تعلق دارز زاویئے $\pm\theta, \pi\pm\theta, 2\pi\pm\theta,$ ہیں، یعنی زاویوں کی شکل $2n\frac{\pi}{2}\pm\theta, n\in\mathbb{Z},$ ہو تو علم مثلث کی نسبت کی شکل تبدیل نہیں ہوتی ہے۔(یعنی sine، کی جگہ sine ہی رہے گا،اور cosine کی جگہ cosine ہی رہے گا، وغیرہ۔)

(iii) اگر تعلق دارز زاویئے $\frac{\pi}{2}\pm\theta, \frac{3\pi}{2}\pm\theta,$ ہیں، یعنی زاویوں کی شکل $(2n+1)\frac{\pi}{2}\pm\theta, n\in\mathbb{Z}$ ہو تو علم مثلث کی نسبت کی شکل کو اس کے متمم نسبت میں تبدیل کر سکتے ہیں۔ یعنی sine کی جگہ cosine میں تبدیل ہو جائے گا، اور cosine کی جگہ sine ہو جائے گا، وغیرہ۔) co سابقہ لگائیں، اگر وہ نہ ہو یا وہ پہلے ہی موجود ہو تو سابقہ co نکال دیں۔

(iv) علامت دریافت کرنے کے لئے سب سے پہلے ربع معلوم کرنا ہوگا اور اس کے بعد ربع کا ASTC اصول کے تحت مناسب علامت + یا − لگانا ہوگا۔

مثال 3.11 : $\sin 150^\circ$ (i) $\cos 135^\circ$ (ii) $\tan 120^\circ$. (iii) کی قیمت معلوم کیجئے ۔

حل :

(i) $\sin 150^\circ = \sin(90^\circ+60^\circ) = \cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$

(یا) $\sin 150^\circ = \sin(180^\circ-30^\circ) = \sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$

(ii) $\cos 135^\circ = \cos(90^\circ+45^\circ) = -\sin(45^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

(یا) $\cos 135^\circ = \cos(180^\circ-45^\circ) = -\cos(45^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

(iii) $\tan 120^\circ = \tan(180^\circ-60^\circ) = -\tan(60^\circ) = -\sqrt{3}$

(یا) $\tan 120^\circ$ کو $\tan(90^\circ+30^\circ)$ کے طور پر لکھ اس کی قیمت معلوم کریں گے۔

مثال 3.12 : $\sin(765^\circ)$ (i) $\operatorname{cosec}(-1410^\circ)$ (ii) $\cot\left(\frac{-15\pi}{4}\right)$. (iii) کی قیمت معلوم کیجئے۔

حل:

(i) $\sin 765^\circ = \sin(2\times360^\circ+45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(ii) $\operatorname{cosec}(-1410^\circ) = -\operatorname{cosec}(1410^\circ) = -\operatorname{cosec}(4\times360^\circ-30^\circ) = \operatorname{cosec} 30^\circ = 2$

(iii) $\cot\left(\frac{-15\pi}{4}\right) = -\cot\left(\frac{15\pi}{4}\right) = -\cot\left(4\pi-\frac{\pi}{4}\right) = \cot\frac{\pi}{4} = 1.$

مثال 3.13 : $\tan(315^\circ)\cot(-405^\circ)+\cot(495^\circ)\tan(-585^\circ) = 2$ ثابت کیجئے

حل:

$\text{L.H.S} = \tan(360^\circ-45^\circ)[-\cot(360^\circ+45^\circ)] + \cot(360^\circ+135^\circ)[-\tan(360^\circ+225^\circ)]$

$= [-\tan 45^\circ][-\cot 45^\circ] + [-\tan 45^\circ][-\tan 45^\circ] = (-1)(-1)+(-1)(-1) = 2.$

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:20:48 AM

3.4.3 علم مثلث کے تفاعلات کی چند خصوصیات (Some Characteristics of Trigonometric functions)

علم مثلثی تفاعلات کی چند بہترین خصوصیات یہ ہیں۔ مثال کے طور پر :

(i) Sine اور Cosine تفاعلات ایک دوسرے کے متمم ہیں۔ اس بنیاد پر کہ $\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$ اور $\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta.$ ہیں۔

(ii) اکائی دائرہ کے ایک نقطہ کے محددیں $\cos\theta$ اور $\sin\theta$ کے طور پر حاصل ہوتے ہیں، تو وہ نامساوات $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ اور $-1 \leq \sin\theta \leq 1$ کو پورا کرتے ہیں۔ لہٰذا $\cos\theta, \sin\theta \in [-1, 1]$

(iii) علم مثلثی تفاعل اس کی قیمتوں کو باقاعدہ وقفوں میں دہراتے ہیں۔

(iv) Sine اور Cosine تفاعلات ایک دلچسپ خصوصیت رکھتے ہیں، اس طرح سے کہ $\cos(-\theta) = \cos\theta$ اور $\sin(-\theta) = -\sin\theta$

آخری کے دو خصوصیات کو بحث کریں گے۔

علم مثلث تفاعلات کی دورانیت: (Periodicity of Trigonometric Functions)

ہم جانتے ہیں کہ ایک تفاعل f کو دوری تفاعل کہتے ہیں، جس میں p دور ہے۔ اگر ایک سب سے چھوٹا مثبت عدد p اس طرح واقع ہو کہ تمام $f(x+p) = f(x)$ کے لئے x کے علاقہ میں۔ مثال کے طور پر $\sin(x + 2n\pi) = \sin x, n \in \mathbb{Z}.$

یعنی $i.e., \sin(x + 2\pi) = \sin(x + 4\pi) = \sin(x + 6\pi) = \ldots = \sin x$

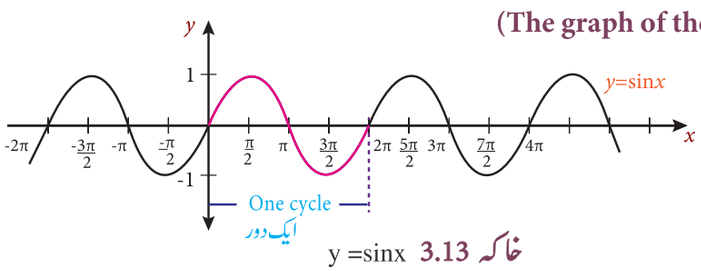
لہٰذا $\sin x$ ایک دوری تفاعل ہے جس کا وقفہ 2π ہے۔

اسی طرح $\cos x$, $\text{cosec}\, x$ اور $\sec x$ دوری تفاعلات ہیں۔ جس کا وقفہ 2π ہے۔

مگر $\tan x$ اور $\cot x$ دوری تفاعل تفاعلات ہیں جس کا وقفہ π ہے۔

$\sin x$ اور $\cos x$ کی دورانیت کو بہترین طریقے سے ترسیمات کے ذریعہ دیکھا جاسکتا ہے۔

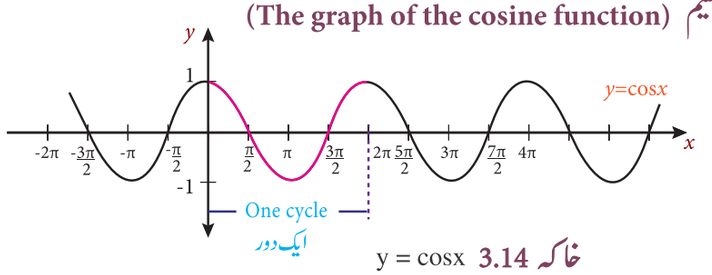
(i) سائن تفاعل کی ترسیم : (The graph of the sine function)



y =sinx **خاکہ 3.13**

یہاں پر x ایک متغیر زاویہ کو ظاہر کرتا ہے۔ افقی محور کو x- محور اور عمودی محور کو y- محور کے طور پر لیجئے۔ خاکہ 3.13 میں تفاعل $y = \sin x$ کی ترسیم دکھائی گئی ہے۔ پہلے غور کریں کہ اس کا دوری وقفہ 2π ہے۔ علم ہندسی طور پر اس کے معنی یہ ہیں کہ اگر تم ایک منحنی خط لے کر 2π اس کے دائیں یا بائیں جانب حرکت کرتے ہیں تو دوبارہ وہی سلسلہ جاری رہے گا۔ غور کیجئے کہ ترسیم y- محور کے ایک اکائی اندر ہے۔ ترسیم دوری طور پر بڑھتا یا گھٹتا ہے۔ مثلاً $-\frac{\pi}{2}$ سے $\frac{\pi}{2}$ تک بڑھتا ہے اور $\frac{\pi}{2}$ سے $\frac{3\pi}{2}$ تک گھٹتا ہے۔

(ii) کوسائن تفاعل کی ترسیم (The graph of the cosine function)



y = cosx **خاکہ 3.14**

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:20:48 AM

غور کیجئے کہ $y = \cos x$ کی ترسیم $y = \sin x$ کے مانند نظر آتی ہے، سوائے اس کے وہ $\frac{\pi}{2}$ بائیں جانب ہٹایا گیا ہے۔ یہ اس وجہ سے کہ تماثل $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ ہے۔ اس کو ترسیم سے آسانی سے مشاہدہ کر سکتے ہیں کہ $\cos x = \cos(-x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

(i) سائن اور کوسائن تفاعلات بہت کارآمد ہیں۔ اس کی سب سے بڑی وجہ یہ ہے کہ وہ باقاعدہ وقفوں میں دہراتے ہیں۔ ہمارے اطراف باقاعدہ وقفوں میں دہرانے والی بہت ساری اشیاء موجود ہیں۔ مثلاً سورج کا طلوع اور غروب ہونا، اسپرنگ کی اوپر نیچے حرکت کرنا، سمندر میں موجوں کی حرکت، وغیرہ یہ باقاعدہ وقفوں کو دہراتے ہیں۔ تمام دوری وقفوں کے طرز عمل کا مطالعہ سائن اور کوسائن تفاعلات کے ملاپ کے ذریعہ کر سکتے ہیں۔

(ii) دوری تفاعلات کے استعمال کے ذریعہ دوری وقفوں میں واقع ہونے والے حرکات جیسے اہتزاز، موجوں کی حرکت وغیرہ وضاحت کی جاتی ہے۔

طاق اور جفت علم مثلثی تفاعلات (Odd and Even Trigonometric functions)

جفت اور طاق تفاعلات تشاکلوں کی خصوصیات کو پورا کرتے ہیں۔ $f(x)$ کی تمام حقیقی قیمتوں کے لئے $f(-x) = f(x)$ ہو تو x ایک جفت تفاعل ہوگا، اور $f(x)$ کی تمام قیمتوں کے لئے $f(-x) = -f(x)$ ہو تو x ایک طاق تفاعل ہوگا۔

بنیادی علم مثلثی تفاعلات، غیر کثیر رقمی جفت اور طاق تفاعلات کی مثالیں ہیں۔ کیونکہ x کی تمام قیمتوں کے لئے $\cos(-x) = \cos x$ اور $\sin(-x) = -\sin x$ ہے۔ اس کا یہ مطلب کہ $\cos x$ ایک جفت تفاعل ہے اور $\sin x$ ایک طاق تفاعل ہوگا۔

یہ بھی غور کیجئے کہ $\sec x$ ایک جفت تفاعل ہے، جب کہ $\operatorname{cosec} x, \tan x$ اور $\cot x$ وغیرہ طاق تفاعل ہیں۔

تاہم $f(t) = t - \cos t$ نہ ہی جفت تفاعل ہے اور نہ ہی طاق تفاعل ہے۔ (ایسا کیوں ہے؟)

مثال 3.14 : جانچئے کہ کیا مندرجہ ذیل میں دئے گئے تفاعلات، جفت ہیں یا طاق ہیں، یا دونوں نہیں ہیں۔

(i) $\sin^2 x - 2\cos^2 x - \cos x$ (ii) $\sin(\cos(x))$ (iii) $\cos(\sin(x))$ (iv) $\sin x + \cos x$

حل:

(i) فرض کیجئے کہ $f(x) = \sin^2 x - 2\cos^2 x - \cos x$

$f(-x) = f(x)$ [since $\sin(-x) = -\sin x$ and $\cos(-x) = \cos x$]

لہٰذا $f(x)$ ایک جفت ہے۔

(ii) فرض کیجئے کہ $f(x) = \sin(\cos(x))$

$f(-x) = f(x)$, $f(x)$ ایک جفت تفاعل ہے۔

(iii) $f(x) = \cos(\sin(x))$, $f(-x) = f(x)$, لہٰذا $f(x)$ ایک جفت تفاعل ہے۔

(iv) فرض کیجئے $f(x) = \sin x + \cos x$

$f(-x) \neq f(x)$ اور $f(-x) \neq -f(x)$

اس طرح $f(x) = \sin x + \cos x$ نہ ہی جفت اور نہ ہی طاق ہے۔

(i) عام طور پر ایک تفاعل کی ترسیم میں، y- محور کے انعکاس میں کوئی تبدیلی نہ ہو تو یہ جفت تفاعل ہوگا۔ ایک تفاعل، طاق ہوگا، اگر اس کی ترسیم مبدا سے تشاکل ہو۔

(ii) جفت اور طاق تفاعلات کے خصوصیات علم مثلثی تفاعلات کی بنیادی خدوخال متعین کرنے کے لئے بہت کارآمد ہیں، خاص طور پر ان کا استعمال حاصل جمع اور فرق کے ضابطہ میں ہوتا ہے۔

(iii) جفت اور طاق تفاعلات کے خصوصیات بہت کارآمد ہیں۔ بعض معین احصائے تکمیلات کو جانچنے میں جس کو ہم کیلکولس میں سیکھیں گے۔

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:20:49 AM

مشق 3.3

1۔ (i) $\sin(480^\circ)$ (ii) $\sin(-1110^\circ)$ (iii) $\cos(300^\circ)$ (iv) $\tan(1050^\circ)$ کی قیمتوں کو دریافت کیجئے۔

(v) $\cot(660^\circ)$ (vi) $\tan\left(\frac{19\pi}{3}\right)$ (vii) $\sin\left(-\frac{11\pi}{3}\right)$

2۔ معیاری مقام میں موجود زاویہ θ کا اختتامی ضلع کا نقطہ $\left(\frac{5}{7}, \frac{2\sqrt{6}}{7}\right)$ ہے۔ زاویہ کے چھ علم مثلثی تفاعلات کی قیمتیں دریافت کیجئے۔

3۔ مندرجہ ذیل کے لئے بقیہ پانچ علم مثلثی تفاعلات کی قیمتوں کو دریافت کیجئے۔

(i) $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ θ تیسرے ربع میں واقع ہے۔ (ii) $\cos\theta = \frac{2}{3}$ θ پہلے ربع میں واقع ہے۔

(iii) $\sin\theta = -\frac{2}{3}$ θ چوتھے ربع میں واقع ہے۔ (iv) $\tan\theta = -2$ θ دوسرے ربع میں واقع ہے۔

(v) $\sec\theta = \frac{13}{5}$ θ چوتھے ربع میں واقع ہے۔

4۔ ثابت کیجئے۔ $\frac{\cot(180^\circ+\theta)\sin(90^\circ-\theta)\cos(-\theta)}{\sin(270^\circ+\theta)\tan(-\theta)\text{cosec}(360^\circ+\theta)} = \cos^2\theta\cot\theta.$

5۔ مساوات $\sin^2\theta = \frac{3}{4}$ کو پورا کرنے کے لئے 0° اور 360° درمیانی تمام زاویوں کو معلوم کیجئے۔

6۔ ثابت کیجئے کہ $\sin^2\frac{\pi}{18} + \sin^2\frac{\pi}{9} + \sin^2\frac{7\pi}{18} + \sin^2\frac{4\pi}{9} = 2.$ ہے۔

3.5 علم مثلث کی تماثلات : (Trigonometric Identities)

3.5.1 حاصل جمع اور فرق کے تماثلات یا مرکب زاویوں کے ضابطے۔

دو یا دو سے زیادہ زاویوں کے حاصل جمع کو مرکب زاویئے کہتے ہیں۔ علم مثلثی تفاعلات تفاعلی تعلق کو پورا نہیں کرتے ہیں۔

جیسے $f(x+y) = f(x) + f(y)$ اور $f(kx) = kf(x)$، k ایک حقیقی عدد ہے۔

مثال کے طور پر $\cos(\alpha+\beta) \neq \cos\alpha + \cos\beta, \sin(2\alpha) \neq 2\sin\alpha, \tan 3\alpha \neq 3\tan\alpha, \ldots.$ ہے۔اس طرح ہمیں $\sin(\alpha+\beta), \cos(\alpha+\beta), \ldots$ کے لئے ضابطے اخذ کرنا ہوگا اور ان کو حسابات میں استعمال کرنا ہوگا۔

موسیقی، ارتعاشات سے بنتی ہے، اور یہ کان کے پردے میں دباؤ ڈالتی ہے۔موسیقی کے سُر کو ارتعاشات کی لہروں جیسی ترسیم سے ناپا جاتا ہے۔ (ترسیمیں $y = \sin x$ یا $y = \cos x$ کی طرح دکھائی دیتی ہیں)۔ جب ایک سے زیادہ سُر بجائے جائے تو ہر ایک انفرادی سُر دباؤ کا حاصل جمع، نتیجہ کے دباؤ کے مساوی ہوگا۔علم مثلثی تماثلات کا حاصل جمع یا فرق کے بہت اہم استعمالات ہیں۔موجوں کا تجزیہ کرنے کے لئے بھی علم مثلثی تماثلات کا حاصل جمع اور فرق استعمال ہوتا ہے۔

سب سے پہلے ہم کو دو زاویئے کا کوسائن کا تماثل ثابت کریں گے اور اسی کو دراز کرتے ہوئے دوسرے حاصل جمع یا فرق کے تماثلات ثابت کریں گے۔

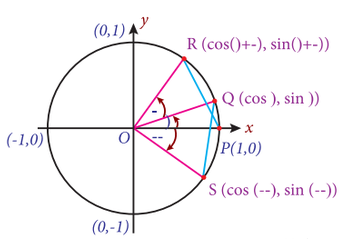
تماثل 3.1: $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

ثبوت: مرکز O والے ایک اکائی دائرہ کو قیاس کیجئے۔ فرض کیجیے کہ P = P(1,0) ہے۔

فرض کیجئے کہ اکائی دائرہ پر نقاط R, Q اور S اس طرح لیں کہ

$\angle POQ = \alpha$, $\angle POR = \alpha+\beta$ اور $\angle POS = -\beta$

ہو، جیسا کہ خاکہ 3.15 میں دکھایا گیا ہے۔واضح طور پر زاویئے α, $\alpha+\beta$ اور $-\beta$ معیاری مقامات پر ہیں۔اب، نقاط R, Q اور S کو $Q(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $R(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))$ اور $S(\cos(-\beta), \sin(-\beta))$. کی طرح دیا گیا ہے۔



خاکہ 3.15

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:20:49 AM

چونکہ ΔPOR اور ΔSOQ متماثل ہیں۔ لہٰذا، $PR = SQ$ ہے، جس سے $PR^2 = SQ^2$ حاصل ہوتا ہے۔

اس طرح، $[\cos(\alpha+\beta)-1]^2+\sin^2(\alpha+\beta)=[\cos\alpha-\cos(-\beta)]^2+[\sin\alpha-\sin(-\beta)]^2$

$$-2\cos(\alpha+\beta)+2=2-2\cos\alpha\cos\beta+2\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

(i) اوپر کا ثبوت $PR = SQ$ یہ کہتا ہے کہ دائرہ پر دو نقاط کا درمیانی فاصلے کو نصف قطر اور مرکزی زاویہ سے دریافت کیا جاتا ہے۔

(ii) PR اور SQ قوس کی لمبائیاں مرکز (پر محیط زاویئے) $\alpha+\beta$ اور $\alpha+(-\beta)$ بالترتیب ہیں۔ اس طرح $PR = SQ$ ہے۔

نقاط $(\cos\alpha,\sin\alpha)$ اور $(\cos(-\beta),\sin(-\beta))$ کا درمیانی فاصلہ اور نقاط $(\cos(\alpha+\beta),\sin(\alpha+\beta))$ اور $(1,0)$ کا درمیانی فاصلہ یکساں ہے۔

(iii) بالا مشتق سے، $0 \le \alpha < 2\pi,\ 0 \le \beta < 2\pi$ ہوں گے۔ سائن اور کوسائن کی دورانیت کی وجہ سے، کسی بھی α اور β قیمت کے لئے اپنایا جاسکتا ہے۔

تماثل 3.2: $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

ثبوت: ہم جانتے ہیں کہ، لہٰذا $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta) &= \cos[\alpha+(-\beta)]\\ &= \cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)\end{aligned}$$

لہٰذا $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$

(i) اگر $\alpha=\beta$ ہو تو اوپر کا تماثل مختصر ہو کر $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1.$ ہوگا۔

(ii) اگر $\alpha=0$ اور ہو تو $\beta=x$ ہو تو $\cos(-x)=\cos x,$ جس سے ثابت ہوتا ہے کہ $\cos x$ ایک جفت تفاعل ہے۔

تماثل 3.3 : $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

ثبوت: اس ضابطہ کو لکھ کر اور تماثل 3.2 کو استعمال کر کے اس کو ثابت کر سکتے ہیں۔

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right]$$

اگر $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ ہو تو اوپر کا تماثل مختصر ہو کر $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1.$ ہوگا۔

تماثل 3.4 : $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

ثبوت: $\sin(\alpha-\beta)=\sin[\alpha+(-\beta)]$ اس ضابطہ کو لکھ کر اور تماثل 3.3 کو استعمال کر کے اس کو ثابت کر سکتے ہیں۔

سائن اور کوسائن کے حاصل جمع اور فرق کے ضابطہ کو میٹرکس کی شکل میں بھی لکھ سکتے ہیں۔

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix}.$$

تماثل 3.5 : $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

ثبوت:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:20:50 AM

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

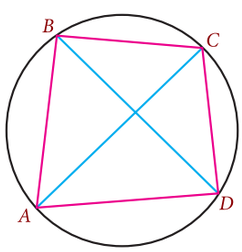
$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$ لہٰذا

اس ضابطہ کو لکھ اور تماثل 3.5 کو استعمال کر کے یہ نتیجہ ثابت کر سکتے ہیں۔ $\tan(\alpha-\beta) = \tan[\alpha + (-\beta)]$

تماثل 3.6

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

i۔ ٹالمی (Ptolemy) (CE 100-170) نے وتر (chord) کا ایک زاویہ کو بنیادی علم مثلثی تفاعل کے طور پر استعمال کیا اور مسئلہ کو حل کیا: ایک مدور چار ضلعی ABCD میں وتروں کا حاصل ضرب، مقابل اضلاع کے حاصل ضرب کا حاصل جمع کے مساوی ہوتا ہے۔ یعنی ایک مدّ ور چار ضلعی میں،



خاکہ 3.16

$$(AC)(BD) = (AB)(CD) + (AD)(BC).$$

اس مسئلہ کو استعمال کر کے تماثلات کا حاصل جمع اور فرق ثابت کر سکتے ہیں۔ لہٰذا، ان تماثلات کو ٹالمی حاصل جمع اور فرق کے ضابطے کہتے ہیں۔

ii۔ غور کیجئے کہ $\cos(\alpha \pm \beta) \neq \cos\alpha \pm \cos\beta$ ہے۔ اسی طرح چیز کو دوسرے علم مثلثی تفاعلات میں بھی غور کر سکتے ہیں۔

iii۔ جب $\alpha = \beta, \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ کو ظاہر کرتا ہے، $\sin 0 = 0$ حاصل ہوتا ہے۔ جس کو ہم نے پہلے ہی ثابت کر دیا تھا۔

iv۔ جب $\alpha = \frac{\pi}{2}$ اور $\beta = \theta,\ \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ حاصل ہوا

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$ جس کو ہم پہلے بھی ثابت کر چکے ہیں۔

v۔ ایک زاویہ کو دو زاویوں کا حاصل جمع یا فرق کے طور پر لکھنے کے ذریعہ علم مثلثی تفاعل کی قیمتیں معلوم کر سکتے ہیں۔ مثلاً $\tan 75^\circ$ کو $\tan(45^\circ + 30^\circ)$ اور $\cos 135^\circ$ کو $\cos(180^\circ - 45^\circ)$. کے طور پر لکھ کر قیمت معلوم کر سکتے ہیں۔

مثال 3.15 : قیمتیں معلوم کیجئے (i) $\cos 15^\circ$ اور (ii) $\tan 165^\circ$.

حل:

i۔ اب،
$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ\cos 30^\circ + \sin 45^\circ\sin 30^\circ$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

مزید غور کریں۔ $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ (خود کوشش کریں)

ii۔ اب،
$$\tan 165^\circ = \tan(120^\circ + 45^\circ) = \frac{\tan 120^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 120^\circ\tan 45^\circ}$$

لیکن، $\tan 120^\circ = \tan(90^\circ + 30^\circ) = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}$ اور $\tan 45^\circ = 1$

اس طرح $\tan 165^\circ = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}.$

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:20:50 AM

مثال 3.16: اگر $\sin x = \frac{4}{5}$ (پہلے ربع میں موجود ہے) اور $\cos y = \frac{-12}{13}$ (دوسرے ربع میں ہے) ہو تو ان کی قیمتیں

(i) $\sin(x-y)$, (ii) $\cos(x-y)$. معلوم کیجئے۔

حل: دیا گیا ہے۔ $\sin x = \frac{4}{5}$.

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \text{ gives } \cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x} = \pm\sqrt{1-\frac{16}{25}} = \pm\frac{3}{5}$$

پہلے ربع میں $\cos x$ ہمیشہ مثبت ہوتا ہے۔ اس طرح $\cos x = \frac{3}{5}$ دوسرے ربع میں $\cos y = -\frac{12}{13}$ دیا گیا ہے۔

$$\sin y = \pm\sqrt{1-\cos^2 y} = \pm\sqrt{1-\frac{144}{169}} = \pm\frac{5}{13}.$$

دوسرے ربع میں $\sin y$ ہمیشہ مثبت ہوتا ہے۔ اس طرح $\sin y = \frac{5}{13}$ ہے۔

(i) $\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y = \frac{4}{5}\left(\frac{-12}{13}\right) - \frac{3}{5}\left(\frac{5}{13}\right) = -\frac{63}{65}.$

(ii) $\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y = \frac{3}{5}\left(\frac{-12}{13}\right) + \frac{4}{5}\left(\frac{5}{13}\right) = -\frac{16}{65}.$

مثال 3.17 : ثابت کیجئے۔ $\cos\left(\frac{3\pi}{4}+x\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{4}-x\right) = -\sqrt{2}\sin x$

حل:

$$\begin{aligned}\text{L.H.S} &= \cos\frac{3\pi}{4}\cos x - \sin\frac{3\pi}{4}\sin x - \cos\frac{3\pi}{4}\cos x - \sin\frac{3\pi}{4}\sin x \\ &= -2\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\sin x = -2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sin x = -\sqrt{2}\sin x.\end{aligned}$$



$\cos(A+x) - \cos(A-x) = -2\sin A\sin x$ غور کیجئے

مثال 3.18 : نقطہ A(9,12) مسطح پر مبدا O کے اطراف $60°$ پر گھڑی کی سوئی کے مخالف سمت میں حرکت کرتے ہوئے نئے مقام B پر پہنچتا ہے۔ نقطہ B کے محددیں معلوم کیجئے۔

حل: $A(9,12) = A(r\cos\theta, r\sin\theta)$ یہاں $r = OA$ لہٰذا $r\cos\theta = 9$ اور $r\sin\theta = 12.$

لہٰذا $r^2 = 81 + 144 = 225 \Rightarrow r = 15.$

لہٰذا، نقطہ A کو اس طرح دیا گیا ہے۔ $A\,(15\cos\theta, 15\sin\theta)$

لہٰذا، نقطہ B کو اس طرح دیا گیا ہے۔ $B\,(15\cos(\theta+60°), 15\sin(\theta+60°))$

$$\begin{aligned}15\cos(\theta+60°) &= 15\,(\cos\theta\cos 60° - \sin\theta\sin 60°) \\ &= (15\cos\theta)\cos 60° - (15\sin\theta)\sin 60° = 9\times\frac{1}{2} - 12\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}(3-4\sqrt{3})\end{aligned}$$

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:20:50 AM

لہٰذا، نقطہ B کو اس طرح دیا گیا ہے۔ $15\sin(\theta+60^\circ)=\frac{3}{2}(4+3\sqrt{3})$.

$$B\left(\frac{3}{2}(3-4\sqrt{3}),\frac{3}{2}(4+3\sqrt{3})\right).$$

مثال 3.19 : ایک لہردار ٹینک (Ripple tank) میں پانی کی دو موجیں ملنے سے بہنے والے تشریح کرتی ہے۔ دو موجیں $h=8\cos t$ اور $h=6\sin t$ ہیں، جس میں $t\in[0,2\pi)$ سکنڈ میں اور h پانی کی سطح سے موج کی اونچائی کو ملی میٹر میں ناپا جاتا ہے۔ دو موجیں ملتے وقت پیدا ہونے والی موج کی زیادہ سے زیادہ اونچائی اور t کی قیمت معلوم کیجئے۔

$$H=8\cos t+6\sin t$$

فرض کیجئے کہ $8\cos t+6\sin t=k\cos(t-\alpha)=k(\cos t\cos\alpha+\sin t\sin\alpha)$

لہٰذا $k=10$ اور $\tan\alpha=\frac{3}{4}$، اس طرح سے کہ

$$H=10\cos(t-\alpha)$$

موج کی اونچائی $H=10$ mm. وقت $t=\alpha$، پر لیجئے۔ جس میں $\tan\alpha=\frac{3}{4}$

مثال 3.20 : پھیلایئے۔ (i) $\sin(A+B+C)$ (ii) $\tan(A+B+C)$

حل:

$$\begin{aligned}
\text{(i)}\ \sin(A+B+C) &= \sin[A+(B+C)]\\
&= \sin A\cos(B+C)+\cos A\sin(B+C)\\
&= \sin A\cos B\cos C+\cos A\sin B\cos C\\
&\quad+\cos A\cos B\sin C-\sin A\sin B\sin C\\
\text{(ii)}\ \tan(A+B+C) &= \tan[A+(B+C)]\\
&= \frac{\tan A+\tan(B+C)}{1-\tan A\tan(B+C)}\\
&= \frac{\tan A+\dfrac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}}{1-\tan A\dfrac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}}\\
&= \frac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan A\tan B-\tan B\tan C-\tan C\tan A}
\end{aligned}$$

(i) اگر A + B + C = 0 یا π ہو تو ہمارے پاس ہے $\tan(A+B+C)=0$ اس طرح سے کہ

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C.$$

ترچھے مثلثوں (oblique triangles) کے لئے بھی یہ نتیجہ صحیح ہے۔

(ii) $\tan(x-y)+\tan(y-z)+\tan(z-x)=\tan(x-y)\tan(y-z)\tan(z-x)$

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:20:51 AM

(iii) $\tan 3A - \tan 2A - \tan A = \tan 3A + \tan(-2A) + \tan(-A) = \tan 3A \tan 2A \tan A$

(iv) اگر $A + B + C = \frac{\pi}{2}$ ہوتو $\tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A = 1$ (کیسے؟)

مشق 3.4

1) اگر $\sin x = \frac{15}{17}$ اور $0 < x < \frac{\pi}{2}, 0 < y < \frac{\pi}{2}, \cos y = \frac{12}{13}$ ہوتو قیمت معلوم کیجئے۔

(i) $\sin(x+y)$ (ii) $\cos(x-y)$ (iii) $\tan(x+y)$.

2) اگر $\sin A = \frac{3}{5}$ اور $0 < A < \frac{\pi}{2}, 0 < B < \frac{\pi}{2}, \cos B = \frac{9}{41}$ ہوتو قیمت معلوم کیجئے۔

(i) $\sin(A+B)$ (ii) $\cos(A-B)$.

3) دیا گیا ہے کہ $\cos x = -\frac{4}{5}$ کے ساتھ $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ اور $\sin y = -\frac{24}{25}$ کے ساتھ $\pi < y < \frac{3\pi}{2}$ ہے۔
معلوم کیجئے۔ $\cos(x-y)$

4) دیا گیا ہے کہ $\sin(x-y)$ کے ساتھ $\sin x = \frac{8}{17}$ اور $0 < x < \frac{\pi}{2}$ کے ساتھ $\cos y = -\frac{24}{25}$ ہے۔ معلوم کیجئے۔

5) قیمت معلوم کیجئے۔ (i) $\cos 105^\circ$ (ii) $\sin 105^\circ$ (iii) $\tan \frac{7\pi}{12}$

6) ثابت کیجئے۔ (i) $\cos(30^\circ + x) = \frac{\sqrt{3}\cos x - \sin x}{2}$ (ii) $\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$
(iii) $\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$.

7) دو درجی مساوات معلوم کیجئے، جس کے جذور $\sin 15^\circ$ اور $\cos 15^\circ$ ہیں۔

8) $\cos(A+B+C$ کو پھیلاؤ۔ اگر $A + B + C = \frac{\pi}{2}$ ہوتو ثابت کیجئے۔
$\cos A \cos B \cos C = \sin A \sin B \cos C + \sin B \sin C \cos A + \sin C \sin A \cos B,$

9) ثابت کیجئے۔ (i) $\sin(45^\circ + \theta) - \sin(45^\circ - \theta) = \sqrt{2}\sin\theta$.
(ii) $\sin(30^\circ + \theta) + \cos(60^\circ + \theta) = \cos\theta$.

10) اگر $a\cos(x+y) = b\cos(x-y)$ ہوتو ثابت کیجئے کہ $(a+b)\tan x = (a-b)\cot y$ ہے۔

11) ثابت کیجئے۔ $\sin 105^\circ + \cos 105^\circ = \cos 45^\circ$

12) ثابت کیجئے۔ $\sin 75^\circ - \sin 15^\circ = \cos 105^\circ + \cos 15^\circ$

13) ثابت کیجئے۔ $\tan 75^\circ + \cot 75^\circ = 4$

14) ثابت کیجئے۔ $\cos(A+B)\cos C - \cos(B+C)\cos A = \sin B \sin(C-A)$

15) ثابت کیجئے۔ $\sin(n+1)\theta \sin(n-1)\theta + \cos(n+1)\theta \cos(n-1)\theta = \cos 2\theta,\ n \in \mathbb{Z}$

16) اگر، $x\cos\theta = y\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) = z\cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right)$ ہوتو، $xy + yz + zx$ کی قیمت معلوم کیجئے۔

17) ثابت کیجئے۔
(i) $\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B$
(ii) $\cos(A+B)\cos(A-B) = \cos^2 A - \sin^2 B = \cos^2 B - \sin^2 A$
(iii) $\sin^2(A+B) - \sin^2(A-B) = \sin 2A \sin 2B$
(iv) $\cos 8\theta \cos 2\theta = \cos^2 5\theta - \sin^2 3\theta$

18) ثابت کیجئے۔ $\cos^2 A + \cos^2 B - 2\cos A \cos B \cos(A+B) = \sin^2(A+B)$

19) اگر، ہوتو ثابت کیجئے۔ $\cos(\alpha-\beta) + \cos(\beta-\gamma) + \cos(\gamma-\alpha) = -\frac{3}{2}$
$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 0.$

100 95 75 25 5 0
11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:20:51 AM

20) ثابت کیجئے۔

$$\text{(i) } \tan(45^\circ + A) = \frac{1+\tan A}{1-\tan A} \quad \text{(ii) } \tan(45^\circ - A) = \frac{1-\tan A}{1+\tan A}.$$

21) ثابت کیجئے۔

$$\cot(A+B) = \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot A + \cot B}.$$

22) اگر $\tan x = \frac{n}{n+1}$ اور $\tan y = \frac{1}{2n+1}$ ہوتو $\tan(x+y)$ معلوم کیجئے۔

23) ثابت کیجئے۔ $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\tan\left(\frac{3\pi}{4}+\theta\right) = -1$

24) $\cot\alpha = \frac{1}{2}, \alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ اور $\sec\beta = -\frac{5}{3}, \beta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ تو $\tan(\alpha+\beta)$ کی قیمت معلوم کیجئے۔

25) اگر $\theta + \phi = \alpha$ اور $\tan\theta = k\tan\phi$ ہوتو ثابت کیجئے کہ $\sin(\theta-\phi) = \frac{k-1}{k+1}\sin\alpha$ ہے۔

3.5.2 ضعف زاویہ کے تماثلات اور تحتی ضعف زاویہ کے تماثلات

(Multiple angle identities and submiltiple angle identities)

1831 میں مائیکل فیراڈے نے محسوس کیا کہ جب ایک تار کے لچھے (coil) کو ایک مقناطیس کے قریب لے جاتے ہیں تو تار میں کم مقدار کی بجلی پیدا ہوتی ہے۔ یہ خصوصیت دنیا بھر کے گھروں، کارخانوں، اداروں میں ضرورت کی بجلی تیار کرنے میں استعمال ہوتی ہے۔ ہزاروں تار کو بہت بڑے برقی مقناطیس کے قریب گھماتے ہیں تو کثیر مقدار میں بجلی تیار ہوتی ہے۔

ماڈل بجلی اور دوسرے قدرتی مظاہر میں علم مثلثی تفاعلات اور تماثلات میں ضعف زاویئے اور تحتی ضعف زاویئے استعمال ہوتے ہیں۔

اگر A ایک زاویہ ہوتو 2A, 3A, ... کو A کے ضعف زاویئے کہتے ہیں اور $\frac{A}{2}, \frac{A}{3}, \ldots$ کو A کے تحتی ضعف زاویئے کہتے ہیں۔

اب ہم علم مثلث کی نسبت کے ضعف زاویئے اور تحتی ضعف زاویئے کے بارے میں بحث ومباحثہ کریں گے اور چند تماثلات اخذ کریں گے۔

دُگنا زاویہ کے تماثلات (doubel angle identities)۔ چلئے ہم تماثلات کے حاصل جمع اور فرق کے چند نتائج کا معائنہ کریں گے۔ دُگنا زاویہ کے تماثلات ایک مخصوص قسم کے حاصل جمع کے مختصر ہوکر دُگنا زاویہ کے تماثلات میں تبدیل ہوتے ہیں۔ وہ علم مثلثی مساوات کو حل کرنے میں بہت کارآمد ہیں اور علم مثلثی تماثلات جانچنے میں بھی مفید ہیں۔ مزید دُگنا زاویہ تماثلات کا استعمال اختصار تماثلات (reduction identities) اخذ کرنے کے لئے بھی ہوتا ہے۔ (قوت مختصر کرنے والے تماثلات)۔ دُگنا زاویہ تماثلات کا استعمال علم مثلثی جملوں کی زیادہ سے زیادہ (یا) کم از کم قیمتوں کو دریافت کرنے کے لئے بھی ہوتا ہے۔

تماثل 3.7 : $\sin 2A = 2\sin A\cos A$

ثبوت ہم جانتے ہیں کہ $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

لیں $\alpha = \beta = A$، اس طرح $\sin(A+A) = \sin A\cos A + \sin A\cos A$

لہٰذا، $\sin 2A = 2\sin A\cos A.$

i۔ $y = \sin 2x$ اور $y = 2\sin x$ ایک دوسرے سے مختلف ہیں ان کے ترسیمات کھینچئے اور ان کے فرق کو پہچانئے۔

ii۔ $\sin 2A = 2\sin A\cos A$ کا استعمال: جب کوئی شئے u رفتار سے پھینکی جائے، زمینی سطح سے افقی طور پر بننے والا زاویہ α ہے۔ شئے کا طے شدہ افقی فاصلہ (وسعت) زمین پر پہنچنے سے پہلے معلوم کرنے کا ضابطہ $R = \frac{u^2\sin 2\alpha}{g}$

جب $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ہوتو واضح طور پر R کی زیادہ سے زیادہ قیمت $\frac{u^2}{g}$ ہے۔

iii۔ $|\sin A\cos A| = \left|\frac{\sin 2A}{2}\right| \le \frac{1}{2}.$

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:20:51 AM

$$-\frac{1}{2} \le \sin A \cos A \le \frac{1}{2}$$

اس طرح اس سے، ہم نے یہ نتیجہ اخذ کیا کہ $\sin A \cos A$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت $\frac{1}{2}$ ہے۔ جب $A = \frac{\pi}{4}$ ہو۔

مثال 8.21 :

ایک فٹ بال کا کھلاڑی زمینی سطح سے (فٹ بال) گیند کو لات مارتا ہے جس کی ابتدائی سمتی رفتار (Velocity) 80 فٹ فی سکنڈ ہے فٹ بال سے طے شدہ زیادہ سے زیادہ افقی فاصلہ اور اس کا زاویہ دریافت کیجئے۔ ($g = 32$ لیجئے۔)

حل :

$$R = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{(80 \times 80)\sin 2\alpha}{32} = 10 \times 20 \sin 2\alpha.$$

افقی فاصلہ R دریافت کرنے کا ضابطہ اس طرح، زیادہ سے زیادہ فاصلہ 200 ft ہے۔ لہٰذا، $\alpha = 45°$ زاویہ پر فٹ بال کو لات مارنے سے فٹ بال زیادہ سے زیادہ طے کرے گا۔

تماثل 3.8 $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

ثبوت :

ہم جانتے ہیں کہ $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

لیجئے۔ $\alpha = \beta = A.$

$$\cos(A + A) = \cos A \cos A - \sin A \sin A$$
$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A.$$

اس تماثل سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A,$

$$\cos 2A = \cos^2 A - (1 - \cos^2 A) = 2\cos^2 A - 1 \text{ and}$$
$$\cos 2A = (1 - \sin^2 A) - \sin^2 A = 1 - 2\sin^2 A.$$

تماثل 3.9 $\tan 2A = \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$

ثبوت :

اب، $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

لیجئے۔ $\alpha = \beta = A.$ ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\tan(A + A) = \frac{\tan A + \tan A}{1 - \tan A \tan A}$$
$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}.$$

تماثل 3.10 $\sin 2A = \frac{2\tan A}{1 + \tan^2 A}$

ثبوت

ہم جانتے ہیں۔

$$\sin 2A = 2\sin A \cos A = \frac{2\sin A \cos A}{\sin^2 A + \cos^2 A}$$
$$= \frac{\frac{2\sin A\cos A}{\cos^2 A}}{\frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\cos^2 A}} = \frac{2\tan A}{1 + \tan^2 A}.$$

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:20:52 AM

تماثل 3.11

$$\cos 2A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

ثبوت

ہم جانتے ہیں۔ $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = \dfrac{\cos^2 A - \sin^2 A}{\cos^2 A + \sin^2 A}$

$$= \frac{\dfrac{\cos^2 A - \sin^2 A}{\cos^2 A}}{\dfrac{\cos^2 A + \sin^2 A}{\cos^2 A}}$$

اس طرح $\cos 2A = \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}.$

قوت کم کرنے والے تماثلات یا اختصار تماثلات — Power reducing identities or Reduction identities

قوت کم کرنے والے تماثلات یا اختصار تماثلات دگنا، زاویہ تماثلات کے استعمال سے وقت کم کرنے والے تماثلات اخذ کریں گے۔ مثال کے طور پر

$$\cos 2A = 2\cos^2 A - 1 \Rightarrow \cos^2 A = \frac{1+\cos 2A}{2}$$

مندرجہ ذیل میں قوت کم کرنے والے تماثلات کی فہرست دی گئی ہے۔

قوت کم کرنے والے تماثلات
$\sin^2 A = \dfrac{1-\cos 2A}{2}, \quad \cos^2 A = \dfrac{1+\cos 2A}{2}, \quad \tan^2 A = \dfrac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}$

i۔ قوت کم کرنے والے تماثلات میں، ہم نے مربع قوت کو ایک جانب اور قوت کو دوسرے جانب مختصر کیا۔

ii۔ قوت کم کرنے والے تماثلات ہمیں جفت قوتوں کے سائن یا کوسائن دوبارہ پہلی قوت کے کوسائن کی صورت میں لکھنے کی اجازت دیتے ہیں۔

مثال کے طور پر، قوت کم کرنے والے تماثلات کے استعمال سے آسانی کے ساتھ یہ ثابت کر سکتے ہیں۔

$\cos^4 x = \dfrac{1}{8}\cos 4x + \dfrac{1}{2}\cos 2x + \dfrac{3}{8}$ and $\sin^4 x = \dfrac{1}{8}\cos 4x - \dfrac{1}{2}\cos 2x + \dfrac{3}{8}$ (Try it!).

iii۔ اعلیٰ درجے کی ریاضی میں قوت کم کرنے والے ضابطے بہت اہمیت کے حامل ہیں۔

تگنا زاویہ تماثلات (Triple angle identities)

دُگنا زاویہ تماثلات کے استعمال سے ہم تگنا۔ زاویہ تماثلات کو اخذ کر سکتے ہیں۔

تماثل 3.12

$$\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$$

ثبوت

ہمارا پاس ہے۔ $\sin 3A = \sin(2A + A) = \sin 2A\cos A + \cos 2A \sin A$

$$= 2\sin A\cos^2 A + \left(1 - 2\sin^2 A\right)\sin A$$
$$= 2\sin A\left(1 - \sin^2 A\right) + \left(1 - 2\sin^2 A\right)\sin A$$
$$= 3\sin A - 4\sin^3 A$$

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:20:52 AM

تماثل 3.13

$$\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$$

ثبوت

ہمارے پاس ہے

$$\begin{aligned}\cos 3A &= \cos(2A + A) = \cos 2A \cos A - \sin 2A \sin A \\ &= \left(2\cos^2 A - 1\right)\cos A - 2\sin A \cos A \sin A \\ &= \left(2\cos^2 A - 1\right)\cos A - 2\cos A\left(1 - \cos^2 A\right) \\ &= 4\cos^3 A - 3\cos A.\end{aligned}$$

تماثل 3.14

$$\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$$

ثبوت

ہمارے پاس ہے

$$\begin{aligned}\tan 3A &= \tan(2A + A) \\ &= \frac{\tan 2A + \tan A}{1 - \tan 2A \tan A} \\ &= \frac{\dfrac{2\tan A}{1 - \tan^2 A} + \tan A}{1 - \dfrac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}\tan A} \\ &= \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}.\end{aligned}$$

دگنا اور تگنا زاویہ تماثلات نیچے دیے گئے ہیں۔

sine	cosine	Tangent
$\sin 2A = 2\sin A \cos A$	$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$	$\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$
$\sin 2A = \dfrac{2\tan A}{1 + \tan^2 A}$	$\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$	$\tan 3A = \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$
$\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$	$\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$	
	$\cos 2A = \dfrac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$	
	$\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$	

آدھا-زاویہ تماثلات (Half life Identities)

آدھا-زاویہ تماثلات، دگنا زاویہ تماثلات کے بہت قریبی تعلقات ہیں۔ جب ہمارے پاس ایک آدھا زاویہ ہے جو مخصوص زاویہ کی جسامت کا آدھا ہو تو ہم آدھا زاویہ تماثلات استعمال کر سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر $\sin 15^\circ$ کو $\sin 15^\circ = \sin\dfrac{30^\circ}{2}$ کے طور لکھ کر حل کر سکتے ہیں آدھا-زاویہ تماثلات کے استعمال سے چند زاویوں کی ٹھیک قیمتیں دریافت کی جا سکتی ہیں۔ اگر ہم $2A = \theta$ یا $A = \dfrac{\theta}{2}$ کو دگنا زاویہ تماثلات میں درج کرتے ہیں تو ہمیں نئے تماثلات زاویہ $\dfrac{\theta}{2}$ کی شکل میں حاصل ہوتے ہیں۔

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:20:52 AM

مندرجہ ذیل جدول میں آدھازاویہ تماثلات کی فہرست دی گئی ہے۔

آدھا۔زاویہ تماثلات	دگنازاویہ تماثلات
$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$	$\sin 2A = 2\sin A\cos A$
$\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}$	$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$
$\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1$	$\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$
$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$	$\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$
$\tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$	$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$
$\sin\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$	$\sin 2A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$
$\cos\theta = \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$	$\cos 2A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

i. آدھازاویہ تماثلات کا استعمال ایک مربع علم مثلثی تفاعل کو ایک غیر مربع مثلثی تفاعل میں تبدیل کرنے میں ہوتا ہے۔

ii. اگر ہم Cosine کی اصلی زاویہ کی قیمت جانتے ہیں تو آدھازاویہ تماثلات ہمیں Sine اور Cosine کا آدھازاویہ کی قیمت معلوم کرنے میں مدد کرتے ہیں۔

مثال 3.22 $\sin\left(22\frac{1}{2}^\circ\right)$ کی قیمت معلوم کیجئے۔

حل

ہم جانتے ہیں کہ $\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} \Rightarrow \sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$ لیجئے۔ $\theta = 45°$

ہمیں حاصل ہوا $\sin\frac{45^\circ}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 45^\circ}{2}}$ ($22\frac{1}{2}^\circ$ ربع میں واقع ہونے کی وجہ سے صرف مثبت علامت لینا ہوگا)

اس طرح، $\sin 22\frac{1}{2}^\circ = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

مثال 3.23 جب $\sin\theta = \frac{12}{13}, \theta$ پہلے ربع میں واقع ہو تو $\sin 2\theta$ کی قیمت معلوم کیجئے۔

حل: مثلث قائمۃ الزاویہ کے استعمال سے ہم آسانی سے $\cos\theta = \frac{5}{13}$ معلوم کر سکتے ہیں۔

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\left(\frac{12}{13}\right)\left(\frac{5}{13}\right) = \frac{120}{169}.$$

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:20:52 AM

مثلث کی تصنیف کرنے کے بجائے ہم $\cos\theta$ کی قیمت کو اس ضابطہ کے معلوم کر سکتے ہیں۔ $\cos\theta = \pm\sqrt{1-\sin^2\theta}$

مثال 3.24

ثابت کیجئے، $\sin 4A = 4\sin A\cos^3 A - 4\cos A\sin^3 A$

حل:

$$\begin{aligned}4\sin A\cos^3 A - 4\cos A\sin^3 A &= 4\sin A\cos A\left(\cos^2 A - \sin^2 A\right)\\ &= 4\sin A\cos A\cos 2A = 2(2\sin A\cos A)\cos 2A\\ &= 2(\sin 2A)\cos 2A = \sin 4A.\end{aligned}$$

مثال 3.25

ثابت کیجئے، $\sin x = 2^{10}\sin\left(\frac{x}{2^{10}}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2^2}\right)\ldots\cos\left(\frac{x}{2^{10}}\right)$

حل:

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\times 2\times\sin\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2}$$

$$= 2^2\sin\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}$$

آدھا زاویہ ضابطہ کو بار بار استعمال سے، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\sin x = 2^{10}\sin\left(\frac{x}{2^{10}}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2^2}\right)\ldots\cos\left(\frac{x}{2^{10}}\right).$$

مندرجہ بالا نتیجہ کو کسی بھی محدود مرتبہ دہرا سکتے ہیں۔

مثال 3.26

ثابت کیجئے، $\dfrac{\sin\theta+\sin 2\theta}{1+\cos\theta+\cos 2\theta} = \tan\theta$

حل:

ہمارے پاس ہے $\dfrac{\sin\theta+\sin 2\theta}{1+\cos\theta+\cos 2\theta} = \dfrac{\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta+(1+\cos 2\theta)} = \dfrac{\sin\theta(1+2\cos\theta)}{\cos\theta(1+2\cos\theta)} = \tan\theta.$

مثال 3.27

ثابت کیجئے، $1-\frac{1}{2}\sin 2x = \dfrac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin x+\cos x}$

حل:

ہمارے پاس ہے

$$\begin{aligned}\frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin x+\cos x} &= \frac{(\sin x+\cos x)\left(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x\right)}{\sin x+\cos x}\\ &= 1-\sin x\cos x = 1-\frac{1}{2}\sin 2x.\end{aligned}$$

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:20:53 AM

مثال 3.28 $\cos 2x = \sin x$ اور $-\pi \le x \le \pi$ ہوتو x کی قیمت معلوم کیجئے۔

حل: ہم جانتے ہیں، $\cos 2x = \sin x$ جس سے حاصل ہوا۔

مساوات کے جذور یہ ہیں۔ $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0.$

$$\sin x = \frac{-1 \pm 3}{4} = -1 \text{ or } \frac{1}{2}$$

اب، $\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

مزید، $\sin x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$

اس طرح $x = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}.$

مثال 3.29 : (i) $\sin 18°$ (ii) $\cos 18°$ (iii) $\sin 72°$ (iv) $\cos 36°$ (v) $\sin 54°$ قیمتوں کو دریافت کیجئے۔

حل:

(i) $\theta = 18°$. Then $5\theta = 90°$

$3\theta + 2\theta = 90° \Rightarrow 2\theta = 90° - 3\theta$

$\sin 2\theta = \sin(90° - 3\theta) = \cos 3\theta$

$2\sin\theta\cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta.$ چونکہ $\cos\theta = \cos 18° \neq 0,$ ہمارے پاس ہے

$2\sin\theta = 4\cos^2\theta - 3 = 4(1 - \sin^2\theta) - 3$

$4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1 = 0$

$$\sin\theta = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(4)(-1)}}{2(4)} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

اس طرح، $\sin 18° = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$ (مثبت علامت لی گئی ہے، کیوں؟)

(ii) $\cos 18° = \sqrt{1 - \sin^2 18°}$

$$= \sqrt{1 - \left[\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right]^2} = \frac{1}{4}\sqrt{16 - (5 + 1 - 2\sqrt{5})} = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

(iii) $\sin 72° = \sin(90° - 18°) = \cos 18° = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$

(iv) $\cos 36° = 1 - 2\sin^2 18° = 1 - 2\left[\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right]^2 = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$

(v) $\sin 54° = \sin(90° - 36°) = \cos 36° = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}.$

غور کیجئے کہ، $\sin 18° = \cos 72°$, $\cos 18° = \sin 72°$, اور $\cos 36° = \sin 54°$

مثال 3.30 اگر $\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\tan\frac{\phi}{2}$ ہوتو ثابت کیجئے کہ $\cos\phi = \frac{\cos\theta - a}{1 - a\cos\theta}$

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:20:53 AM

حل:

آدھا۔زاویہ تماثل سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\cos\phi = \frac{1-\tan^2\frac{\phi}{2}}{1+\tan^2\frac{\phi}{2}} = \frac{1-\left(\frac{1+a}{1-a}\right)\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\left(\frac{1+a}{1-a}\right)\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}\right)-a}{1-a\left(\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}\right)} = \frac{\cos\theta-a}{1-a\cos\theta}.$$

مثال 3.31 $\sqrt{3}\operatorname{cosec} 20^\circ - \sec 20^\circ$ کی قیمت معلوم کیجئے۔

حل:

ہمارے پاس ہے $\sqrt{3}\operatorname{cosec} 20^\circ - \sec 20^\circ = \frac{\sqrt{3}}{\sin 20^\circ} - \frac{1}{\cos 20^\circ} = 4\left[\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20^\circ - \frac{1}{2}\sin 20^\circ}{2\sin 20^\circ\cos 20^\circ}\right]$

$$= 4\left[\frac{\sin 60^\circ\cos 20^\circ - \cos 60^\circ\sin 20^\circ}{\sin 40^\circ}\right] = 4.$$

مثال 3.32 $\cos A\cos 2A\cos 2^2A\cos 2^3A\ldots\cos 2^{n-1}A = \frac{\sin 2^nA}{2^n\sin A}$ ثابت کیجئے۔

حل:

$$\begin{aligned}\text{L.H.S.} &= \cos A\cos 2A\cos 2^2A\cos 2^3A\ldots\cos 2^{n-1}A\\ &= \frac{1}{2\sin A}2\sin A\cos A\cos 2A\cos 2^2A\cos 2^3A\ldots\cos 2^{n-1}A\\ &= \frac{1}{2\sin A}\sin 2A\cos 2A\cos 2^2A\cos 2^3A\ldots\cos 2^{n-1}A\\ &= \frac{1}{2^2\sin A}\sin 4A\cos 2^2A\cos 2^3A\ldots\cos 2^{n-1}A\end{aligned}$$

اس عمل کو دہرانے سے ہمیں حاصل ہوا

$$= \frac{\sin 2^nA}{2^n\sin A}.$$

مشق 3.5

1) A پہلے ربع میں واقع ہو تو Cos 2A کی قیمت معلوم کیجئے۔

(i) $\cos A = \frac{15}{17}$ (ii) $\sin A = \frac{4}{5}$ (iii) $\tan A = \frac{16}{63}$.

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:20:53 AM

2) اگر θ زاویہ حادہ ہو تو معلوم کیجئے۔

(i) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$ ہو تو $\sin\theta=\frac{1}{25}$ جب

(ii) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$ ہو تو $\sin\theta=\frac{8}{9}$ جب

3) اگر $\cos\theta=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)$ ہو تو ثابت کیجئے $\cos 3\theta=\frac{1}{2}\left(a^3+\frac{1}{a^3}\right)$ ہے۔

4) ثابت کیجئے۔ $\cos 5\theta=16\cos^5\theta-20\cos^3\theta+5\cos\theta.$

5) ثابت کیجئے۔ $\sin 4\alpha=4\tan\alpha\frac{1-\tan^2\alpha}{(1+\tan^2\alpha)^2}$

6) اگر $A+B=45^\circ$ ہو تو ثابت کیجئے $(1+\tan A)(1+\tan B)=2.$

7) ثابت کیجئے، $(1+\tan 1^\circ)(1+\tan 2^\circ)(1+\tan 3^\circ)\ldots(1+\tan 44^\circ)$ یہ 4 کا ضعف ہے۔

8) ثابت کیجئے۔ $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)-\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=2\tan 2\theta$

9) ثابت کیجئے۔ $\cot\left(7\frac{1}{2}^\circ\right)=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{6}$

10) ثابت کیجئے۔ $(1+\sec 2\theta)(1+\sec 4\theta)\ldots(1+\sec 2^n\theta)=\tan 2^n\theta\ \cot\theta$

11) ثابت کیجئے۔ $32(\sqrt{3})\sin\frac{\pi}{48}\cos\frac{\pi}{48}\cos\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{6}=3$

3.5.3 حاصل ضرب سے حاصل جمع اور حاصل جمع سے حاصل ضرب تماثلات (Product to sum and sum to product identities)

علم مثلثی تفاعلات کے بعض استعمالات کے دوران علم مثلثی تفاعلات کے حاصل ضرب کو علم مثلثی تفاعلات کے حاصل جمع یا فرق کے طور پر لکھنے کی ضرورت پیش آتی ہے۔ کوسائن اور سائن تفاعلات کا حاصل جمع اور فرق کے تماثلات ایک دوسرے کے مانند نظر آتے ہیں۔ سوائے ان کے درمیانی علامت کے، یہ تعجب والی بات ہے۔ اس خصوصیت ملانے سے ہمیں نئے تماثلات حاصل ہوتے ہیں۔ اس کے ذریعہ ہم حاصل ضرب کو حاصل جمع، حاصل جمع کو حاصل ضرب کے طور پر دوبارہ لکھنا ممکن ہے۔ ہم جانتے ہیں۔ (3.1)

$$\sin(A+B) = \sin A\cos B+\cos A\sin B \tag{3.1}$$
$$\sin(A-B) = \sin A\cos B-\cos A\sin B \tag{3.2}$$
$$\cos(A+B) = \cos A\cos B-\sin A\sin B \tag{3.3}$$
$$\cos(A-B) = \cos A\cos B+\sin A\sin B \tag{3.4}$$

بالا تماثلات کے ذریعہ ہم آسانی سے مندرجہ ذیل حاصل ضرب سے حاصل تماثلات اخذ کر سکتے ہیں۔

$$\sin A\cos B = \frac{1}{2}[\sin(A+B)+\sin(A-B)] \tag{3.5}$$
$$\cos A\sin B = \frac{1}{2}[\sin(A+B)-\sin(A-B)] \tag{3.6}$$
$$\cos A\cos B = \frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)] \tag{3.7}$$
$$\sin A\sin B = \frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B)] \tag{3.8}$$

اوپر کے تماثلات جب کبھی sine اور cosine کے حاصل ضرب کو حاصل جمع میں منتقل کرنے میں اہم کردار ادا کرتے ہیں۔ یہ خیال بعض تکملات کو جانچنے میں بہت کارآمد ہے ۔

حاصل جمع سے حاصل ضرب تماثلات کو حاصل کرنے کے لئے ہمیں اندراج کا طریقہ اپنانا ہوگا۔ $A+B=C$ اور $A-B=D$ درج کریں گے یا (3.5) سے (3.8) تک تماثلات میں $A=\frac{C+D}{2}, B=\frac{C-D}{2}$ درج کریں گے۔ اس کے ذریعہ ہمیں مندرجہ ذیل (3.9) کے حاصل جمع سے حاصل ضرب تماثلات ملتے ہیں۔

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:20:53 AM

$$\sin C + \sin D = 2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2} \tag{3.9}$$

$$\sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2} \tag{3.10}$$

$$\cos C + \cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2} \tag{3.11}$$

$$\cos C - \cos D = 2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2} \tag{3.12}$$

تمثیل 3.15 $\sin(60^\circ - A)\sin A\sin(60^\circ + A) = \frac{1}{4}\sin 3A$ ثابت کیجئے

ثبوت،

$$\begin{aligned}\sin(60^\circ - A)\sin A\sin(60^\circ + A) &= \sin(60^\circ - A)\sin(60^\circ + A)\sin A \\ &= \frac{1}{2}[\cos 2A - \cos 120^\circ]\sin A \\ &= \frac{1}{2}\left[\cos 2A\sin A + \frac{1}{2}\sin A\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 3A\right] = \frac{1}{4}\sin 3A\end{aligned}$$

اسی طریقے سے ہم مندرجہ ذیل کے دو اہم تماثلات کو ثابت کر سکتے ہیں۔

تمثیل 3.16 $\cos(60^\circ - A)\cos A\cos(60^\circ + A) = \frac{1}{4}\cos 3A$

تمثیل 3.17 $\tan(60^\circ - A)\tan A\tan(60^\circ + A) = \tan 3A$

مثال 3.33 مندرجہ ذیل کے ہر ایک حاصل ضرب کو حاصل جمع یا فرق کے طور پر ظاہر کیجئے۔

(i) $\sin 40^\circ\cos 30^\circ$ (ii) $\cos 110^\circ\sin 55^\circ$ (iii) $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}$

حل:

(i) ہم جانتے ہیں کہ، $2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$

لیجئے $A = 40^\circ$ اور $B = 30^\circ$. ہمیں حاصل ہوا

$$2\sin 40^\circ\cos 30^\circ = \sin(40^\circ + 30^\circ) + \sin(40^\circ - 30^\circ) = \sin 70^\circ + \sin 10^\circ.$$

اس طرح، $\sin 40^\circ\cos 30^\circ = \frac{1}{2}[\sin 70^\circ + \sin 10^\circ]$

(ii) ہم جانتے ہیں کہ، $2\cos A\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$

لیجئے $A = 110^\circ$ اور $B = 55^\circ$.

$$2\cos 110^\circ\sin 55^\circ = \sin(110^\circ + 55^\circ) - \sin(110^\circ - 55^\circ).$$

اس طرح، $\cos 110^\circ\sin 55^\circ = \frac{1}{2}[\sin 165^\circ - \sin 55^\circ]$

(iii) ہم جانتے ہیں کہ، $2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$

لیجئے $A = \frac{x}{2}$ اور $B = \frac{3x}{2}$

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2} = \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{3x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{3x}{2}\right)$$

$\sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2} = \frac{1}{2}[\sin 2x - \sin x]$. ہمیں حاصل ہوا۔

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:20:53 AM

مثال 3.34 مندرجہ ذیل کے ہر ایک حاصل جمع یا فرق کو حاصل ضرب کے طور پر ظاہر کیجئے۔

(i) $\sin 50^\circ + \sin 20^\circ$ (ii) $\cos 6\theta + \cos 2\theta$ (iii) $\cos \frac{3x}{2} - \cos \frac{9x}{2}$.

حل:

(i) ہم جانتے ہیں کہ، $\sin C + \sin D = 2 \sin \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2}$

لیجئے $C = 50^\circ$ اور، $D = 20^\circ$.

$\sin 50^\circ + \sin 20^\circ = 2 \sin \frac{50^\circ + 20^\circ}{2} \cos \frac{50^\circ - 20^\circ}{2} = 2 \sin 35^\circ \cos 15^\circ$ ہمیں حاصل ہوا۔

(ii) ہم جانتے ہیں کہ، $\cos C + \cos D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2}$

لیجئے $C = 6\theta$ اور، $D = 2\theta$. .

$\cos 6\theta + \cos 2\theta = 2 \cos \frac{6\theta + 2\theta}{2} \cos \frac{6\theta - 2\theta}{2} = 2 \cos 4\theta \cos 2\theta$

(iii) ہم جانتے ہیں کہ، $\cos C - \cos D = 2 \sin \frac{C+D}{2} \sin \frac{D-C}{2}$

لیجئے $C = \frac{3x}{2}$ اور، $D = \frac{9x}{2}$.

$\cos \frac{3x}{2} - \cos \frac{9x}{2} = 2 \sin \frac{\frac{3x}{2} + \frac{9x}{2}}{2} \sin \frac{\frac{9x}{2} - \frac{3x}{2}}{2} = 2 \sin 3x \sin \frac{3x}{2}$. ہمیں حاصل ہوا۔

مثال 3.35 $\sin 34^\circ + \cos 64^\circ - \cos 4^\circ$. کی قیمت معلوم کیجئے۔

حل:

ہم جانتے ہیں کہ،

$$\begin{aligned} \sin 34^\circ + \cos 64^\circ - \cos 4^\circ &= \sin 34^\circ - 2 \sin \left(\frac{64^\circ + 4^\circ}{2} \right) \sin \left(\frac{64^\circ - 4^\circ}{2} \right) \\ &= \sin 34^\circ - 2 \sin 34^\circ \sin 30^\circ = 0. \end{aligned}$$

مثال 3.36 $\cos 36^\circ \cos 72^\circ \cos 108^\circ \cos 144^\circ = \frac{1}{16}$. ثابت کیجئے۔

حل:

$$\begin{aligned} \text{L.H.S.} &= \cos 36^\circ \cos (90^\circ - 18^\circ) \cos (90^\circ + 18^\circ) \cos (180^\circ - 36^\circ) \\ &= \sin^2 18^\circ \cos^2 36^\circ \\ &= \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4} \right)^2 \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{4} \right)^2 = \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:20:54 AM

مثال 3.37 مختصر کیجئے۔ $\dfrac{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ}{\cos 75^\circ + \cos 15^\circ}$

حل:

ہم جانتے ہیں۔

$$\frac{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ}{\cos 75^\circ + \cos 15^\circ} = \frac{2\cos\left(\frac{75^\circ + 15^\circ}{2}\right)\sin\left(\frac{75^\circ - 15^\circ}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{75^\circ + 15^\circ}{2}\right)\cos\left(\frac{75^\circ - 15^\circ}{2}\right)}$$

$$= \frac{2\cos 45^\circ \sin 30^\circ}{2\cos 45^\circ \cos 30^\circ} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$\cos 75^\circ = \sin 15^\circ$ اور $\sin 75^\circ = \cos 15^\circ$ کو استعمال کر کے حل کرنے کی کوشش کیجئے۔

مثال 3.38 ثابت کیجئے۔ $\cos 10^\circ \cos 30^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ = \dfrac{3}{16}$

حل:

ہم جانتے ہیں۔ $\cos(60^\circ - A)\cos A \cos(60^\circ + A) = \dfrac{1}{4}\cos 3A$

$$\begin{aligned}\cos 10^\circ \cos 30^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ &= \cos 30^\circ [\cos 10^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ] \\ &= \cos 30^\circ [\cos(60^\circ - 10^\circ)\cos 10^\circ \cos(60^\circ + 10^\circ)] \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{1}{4}\cos 30^\circ\right] = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{16}\end{aligned}$$

مشق 3.6

1) مندرجہ ذیل کے ہر ایک کو حاصل جمع یا فرق کے طور پر ظاہر کیجئے۔

(i) $\sin 35^\circ \cos 28^\circ$ (ii) $\sin 4x \cos 2x$ (iii) $2\sin 10\theta \cos 2\theta$ (iv) $\cos 5\theta \cos 2\theta$ (v) $\sin 5\theta \sin 4\theta$.

2) مندرجہ ذیل کے ہر ایک کو حاصل ضرب کے طور پر ظاہر کیجئے۔

(i) $\sin 75^\circ - \sin 35^\circ$ (ii) $\cos 65^\circ + \cos 15^\circ$ (iii) $\sin 50^\circ + \sin 40^\circ$ (iv) $\cos 35^\circ - \cos 75^\circ$.

3) ثابت کیجئے۔ $\sin 12^\circ \sin 48^\circ \sin 54^\circ = \dfrac{1}{8}$.

4) ثابت کیجئے۔ $\cos\dfrac{\pi}{15}\cos\dfrac{2\pi}{15}\cos\dfrac{3\pi}{15}\cos\dfrac{4\pi}{15}\cos\dfrac{5\pi}{15}\cos\dfrac{6\pi}{15}\cos\dfrac{7\pi}{15} = \dfrac{1}{128}$.

5) ثابت کیجئے۔ $\dfrac{\sin 8x\cos x - \sin 6x\cos 3x}{\cos 2x\cos x - \sin 3x\sin 4x} = \tan 2x$.

6) ثابت کیجئے۔ $\dfrac{(\cos\theta - \cos 3\theta)(\sin 8\theta + \sin 2\theta)}{(\sin 5\theta - \sin\theta)(\cos 4\theta - \cos 6\theta)} = 1$.

7) ثابت کیجئے۔ $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \sin 2x\,(1 + 2\cos x)$.

8) ثابت کیجئے۔ $\dfrac{\sin 4x + \sin 2x}{\cos 4x + \cos 2x} = \tan 3x$.

9) ثابت کیجئے۔ $1 + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 4\cos x \cos 2x \cos 3x$.

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:20:54 AM

$$\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{7\theta}{2}+\sin\frac{3\theta}{2}\sin\frac{11\theta}{2}=\sin 2\theta\sin 5\theta.$$ ثابت کیجئے۔ (10

$$\cos(30^\circ-A)\cos(30^\circ+A)+\cos(45^\circ-A)\cos(45^\circ+A)=\cos 2A+\frac{1}{4}.$$ ثابت کیجئے۔ (11

$$\frac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x+\sin 7x}{\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cos 7x}=\tan 4x.$$ ثابت کیجئے۔ (10

$$\frac{\sin(4A-2B)+\sin(4B-2A)}{\cos(4A-2B)+\cos(4B-2A)}=\tan(A+B).$$ ثابت کیجئے۔ (12

$$\cot(A+15^\circ)-\tan(A-15^\circ)=\frac{4\cos 2A}{1+2\sin 2A}.$$ ثابت کیجئے۔ (13

3.5.4 شرطیہ علم مثلثی تماثلات (Conditional Trigonometric Identities)

ہم جانتے ہیں کہ دئے گئے زاویہ کے لئے قابل قبول تمام قیمتیں علم مثلثی تماثلات کے لئے صحیح ہیں۔ بعض علم مثلثی تماثلات جو دئے گئے اضافی شرائط پورا کرتے ہیں۔ اس طرح کے تماثلات کو شرطیہ علم مثلثی تماثلات کہتے ہیں۔ پہلے کے حصّوں سے حاصل ہوئے تعلقات کی بنیاد پر چند شرطیہ علم مثلثی تماثلات کو اس حصّے میں دیکھیں گے۔

مثال 3.39 اگر $A+B+C=\pi$ ہو تو مندرجہ ذیل کو ثابت کیجئے۔

حل:

(i) $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\left(\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{C}{2}\right)$

(ii) $\sin\left(\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{C}{2}\right)\le\frac{1}{8}$

(iii) $1<\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$

(i) $$\begin{aligned}\cos A+\cos B+\cos C &= 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+\cos C\\ &= 2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)\cos\left(\frac{A}{2}-\frac{B}{2}\right)+\cos C \quad \left(\frac{A+B+C}{2}=\frac{\pi}{2}\right)\\ &= 2\sin\left(\frac{C}{2}\right)\cos\left(\frac{A}{2}-\frac{B}{2}\right)+1-2\sin^2\left(\frac{C}{2}\right)\\ &= 1+2\sin\left(\frac{C}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{A}{2}-\frac{B}{2}\right)-\sin\left(\frac{C}{2}\right)\right]\\ &= 1+2\sin\left(\frac{C}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{A}{2}-\frac{B}{2}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)\right]\\ &= 1+2\sin\left(\frac{C}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{A}{2}-\frac{B}{2}\right)-\cos\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)\right]\\ &= 1+4\sin\left(\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{C}{2}\right)\end{aligned}$$

(ii) Let $$\begin{aligned}u &= \sin\left(\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{C}{2}\right)\\ &= -\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)-\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\right]\sin\frac{C}{2}\\ &= -\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)-\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\right]\cos\frac{A+B}{2}\end{aligned}$$

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:20:54 AM

$\cos^2\frac{A+B}{2} - \cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2} + 2u = 0,$ میں دودرجی مساوات $\cos\frac{A+B}{2}$. ہے۔

چونکہ $\cos\frac{A+B}{2}$ حقیقی عدد رہنے کی وجہ سے اُوپر کی مساوات کا ایک حل ہے۔

اس طرح ممیّز $b^2 - 4ac \geq 0,$ جس سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\cos^2\frac{A-B}{2} - 8u \geq 0 \Rightarrow u \leq \frac{1}{8}\cos^2\frac{A-B}{2} \leq \frac{1}{8}$$

لہٰذا $\sin\left(\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{C}{2}\right) \leq \frac{1}{8}$

(i) اور (ii) سے حاصل ہوتا ہے۔ $\cos A + \cos B + \cos C > 1$ اور

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq 1 + 4 \times \frac{1}{8}$$

لہٰذا، حاصل ہوا۔ $1 < \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}.$

$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} > 0$ اگر $A + B + C = \pi$.

مثال 3.40 اگر $A + B + C = \pi$ ہوتو، ثابت کیجئے۔

$$\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} = 1 + 4\sin\left(\frac{\pi-A}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi-B}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi-C}{4}\right),$$

حل :

$$\begin{aligned}
\text{L.H.S.} &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right) \\
&= \left[2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{4}\right)\cos\left(\frac{B-A}{4}\right)\right] + \left[1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{C}{4}\right)\right] \\
&= 1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{C}{4}\right)\cos\left(\frac{B-A}{4}\right) - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{C}{4}\right) \\
&= 1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{C}{4}\right)\left[\cos\left(\frac{B-A}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{C}{4}\right)\right] \\
&= 1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{C}{4}\right)\left[\cos\left(\frac{B-A}{4}\right) - \sin\left(\frac{A+B}{4}\right)\right] \\
&= 1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{C}{4}\right)\left[\cos\left(\frac{B-A}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{4}\right)\right] \\
&= 1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{C}{4}\right)\left[2\sin\left(\frac{\frac{B-A}{4} + \frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{4}}{2}\right)\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{4} - \frac{B-A}{4}}{2}\right)\right] \\
&= 1 + 4\sin\left(\frac{\pi-A}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi-B}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi-C}{4}\right)
\end{aligned}$$

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:20:54 AM

مثال 3.41 اگر $A+B+C=\pi$ ہوتو، ثابت کیجئے۔ $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A\cos B\cos C$

حل :

$$\begin{aligned}
\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C &= \frac{1}{2}\left[2\cos^2 A+2\cos^2 B+2\cos^2 C\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[(1+\cos 2A)+(1+\cos 2B)+(1+\cos 2C)\right]\\
&= \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left[(\cos 2A+\cos 2B)+\cos 2C\right]\\
&= \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left[2\cos(A+B)\cos(A-B)+(2\cos^2 C-1)\right]\\
&= \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left[-2\cos C\cos(A-B)+2\cos^2 C-1\right] \quad (A+B=\pi-C)\\
&= \frac{3}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left[-2\cos C\left(\cos(A-B)-\cos C\right)\right]\\
&= 1-\cos C\left[\cos(A-B)-\cos C\right]\\
&= 1-\cos C\left[\cos(A-B)+\cos(A+B)\right]\\
&= 1-\cos C\left[2\cos A\cos B\right]\\
&= 1-2\cos A\cos B\cos C
\end{aligned}$$

مشق 3.7



1) اگر $A+B+C=180^\circ$ ہوتو ثابت کیجئے۔

(i) $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$

(ii) $\cos A+\cos B-\cos C=-1+4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

(iii) $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+2\cos A\cos B\cos C$

(iv) $\sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C=2\sin A\sin B\cos C$

(v) $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$

(vi) $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

(vii) $\sin(B+C-A)+\sin(C+A-B)+\sin(A+B-C)=4\sin A\sin B\sin C.$

2) اگر $A+B+C=2s$ ہوتو ثابت کیجئے کہ $\sin(s-A)\sin(s-B)+\sin s\sin(s-C)=\sin A\sin B.$

3) اگر $x+y+z=xyz$ ہوتو ثابت کیجئے۔ $\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2y}{1-y^2}+\frac{2z}{1-z^2}=\frac{2x}{1-x^2}\frac{2y}{1-y^2}\frac{2z}{1-z^2}.$

4) اگر $A+B+C=\frac{\pi}{2}$ ہوتو مندرجہ ذیل کو ثابت کیجئے۔

(i) $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\cos A\cos B\cos C$

(ii) $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=1+4\sin A\sin B\sin C.$

5) $\triangle ABC$ ایک مثلث قائمہ الزاویہ ہے اور اگر $\angle A=\frac{\pi}{2}$ ہوتو ثابت کیجئے۔

(i) $\cos^2 B+\cos^2 C=1$

(ii) $\sin^2 B+\sin^2 C=1$

(iii) $\cos B-\cos C=-1+2\sqrt{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:20:54 AM

3.6 علم مثلثی مساواتیں (Trigonometric equations)

مساواتیں جو علم مثلثی تفاعلات کے نامعلوم زاویئے رکھتے ہیں۔ان کو علم مثلثی مساواتیں کہتے ہیں۔نامعلوم زاویہ کی قیمت جو مساوات کو پورا کریں وہی علم مثلثی مساوات کا حل ہوگا۔جب تک کہ علاقہ (Domain) کو محدود نہ کیجئے، علم مثلثی مساواتوں کے لامحدود حل ہوتے ہیں۔جس کی وجہ علم مثلثی تفاعلات کے دورانیت کی ہے۔بعض مساواتوں کا کوئی حل نہیں ہوتا ہے۔

مثال کے طور پر مساوات $\sin\theta = \frac{3}{2}$ کا کوئی حل نہیں، چونکہ $-1 \leq \sin\theta \leq 1$. ہے۔

مساوات $\sin\theta = 0$ کے لامحدود بہت سارے حل ہوتے ہیں۔جیسے $\theta = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$ اور غور کیجئے کہ یہ حل دوری طور دہراتے ہیں۔

عام حل (General Solution)

ایک علم مثلثی تفاعل کی دورانیت کی مدد سے حاصل ہونے والی علم مثلثی مساوات کی تمام قابل قبول قیمتوں کو اس مساوات کا عام حل کہتے ہیں۔

اصل حل (Principal solution)

$[0, 2\pi]$ یا $[-\pi, \pi]$ وقفہ میں مساوات کو پورا کرنے والی نامعلوم زاویہ کی سب سے چھوٹی عددی قیمت کو اصل حل کہتے ہیں۔ہم اصل حل کو واضح کرنے کے لئے وقفہ $[-\pi, \pi]$ لیں گے۔مزید، اس وقفہ میں دو حل ہو سکتے ہیں۔دونوں حل درست ہونے کے باوجود، ہم ان میں صرف عددی طور پر چھوٹی قیمت کو لیں گے۔یہ ہمیں علم مثلثی تفاعلات کے اصلی علاقہ کی وضاحت میں مدد کرتی ہے۔

سائن تفاعل کی اصل قیمت $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ وقفہ میں واقع ہے اور لہٰذا، یہ I ربع یا IV ربع میں واقع ہوگا۔ کوسائن تفاعل کی اصل قیمت، وقفہ $[0, \pi]$ میں واقع ہے، اور لہٰذا، یہ ربع I یا ربع II میں واقع ہوگا۔ٹینجنٹ تفاعل کی اصل قیمت، وقفہ $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ میں واقع ہے۔ لہٰذا، یہ ربع I یا ربع IV میں واقع ہوگا۔

i۔ علم مثلثی مساواتیں، علم مثلثی تماثلات سے مختلف ہیں، چونکہ علم مثلثی تماثلات کے نامعلوم زاویہ کے تمام قابل قبول قیمتوں کے لئے صحیح ہیں۔ لیکن علم مثلثی مساواتیں صرف نامعلوم زاویہ کے مخصوص قیمتوں کے لئے درست ہیں۔

ii۔ علم مثلثی مساواتوں کو حل کرنے کے لئے کوئی عام طریقہ نہیں ہے۔جبکہ، غور کیا گیا کہ چند مساواتوں کے اجزائے ضربی دریافت کر سکتے ہیں، چند مساواتوں کو واحد تفاعل کے طور پر ظاہر کر سکتے ہیں اور چند مساواتوں کو مربع کر سکتے ہیں۔

iii۔ علم مثلثی مساواتوں کے حل دریافت کرنے کے لئے، بعض اوقات دونوں جانب مربع کرنے کا طریقہ اپنا سکتے ہیں۔اس بات کا بھی خیال رکھنا ہوگا کہ اس سے غلط حل بھی حاصل ہو سکتا ہے۔(غیر متعلق حل (extraneous solution)

مثال کے طور پر $\sin x - \cos x = 1$ in $0 \leq x < 360°$ میں کا حل معلوم کرنے کے لئے ہم دونوں جانب مربع کرنے سے $(\sin x - 1)^2 = \cos^2 x$, $2\sin x(\sin x - 1) = 0.$ حاصل ہوتا ہے۔جس سے ہمیں $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ حل حاصل ہوتے ہیں، واضح طور پر $x = 0$ ایک غلط حل ہے، مربع کرنے کے طریقے میں، ہمیں صحیح حل منتخب کرنا ہوگا۔

iv۔ عموماً ہم علم مثلثی مساواتوں کے حل ریڈین میں لکھتے ہیں،

(اب) ہم مختلف شکلوں کے علم مثلثی مساواتوں کے حل دریافت کریں گے۔

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:20:55 AM

i۔ $\sin\theta = k \ \ (-1 \le k \le 1)$ شکل والی مساوات کو حل کرنا:

عددی طور پر سب سے چھوٹا زاویہ α لیتے ہیں جیسا کہ $\sin\alpha = k.$ اس طرح

$$\begin{aligned}
\sin\theta &= \sin\alpha \\
\sin\theta - \sin\alpha &= 0 \\
2\cos\frac{\theta+\alpha}{2}\sin\frac{\theta-\alpha}{2} &= 0 \\
\cos\frac{\theta+\alpha}{2} = 0 \text{ or } \sin\frac{\theta-\alpha}{2} &= 0.
\end{aligned}$$

جس سے حاصل ہوتا ہے

$\cos\frac{\theta+\alpha}{2} = 0$ اب	$\sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0,$ اب
$\frac{\theta+\alpha}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$	$\frac{\theta-\alpha}{2} = n\pi, n \in \mathbb{Z}$
$\theta = (2n+1)\pi - \alpha, n \in \mathbb{Z}$ ...(i)	$\theta = 2n\pi + \alpha, n \in \mathbb{Z}$ ...(ii)

اب (i) اور (ii) ملانے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $\sin\theta = \sin\alpha \Rightarrow \theta = n\pi + (-1)^n\alpha, n \in \mathbb{Z}.$ (3.13)

ii۔ $\cos\theta = k \ \ (-1 \le k \le 1)$ شکل والی مساوات کو حل کرنا:

عددی طور پر سب سے چھوٹا زاویہ α لیتے ہیں جیسا کہ $\cos\alpha = k.$ ہوں۔اس طرح جس سے

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \cos\alpha \\
\cos\theta - \cos\alpha &= 0 \\
2\sin\frac{\theta+\alpha}{2}\sin\frac{\alpha-\theta}{2} &= 0 \\
\sin\frac{\theta+\alpha}{2}\sin\frac{\theta-\alpha}{2} &= 0 \\
\sin\frac{\theta+\alpha}{2} = 0 \text{ or } \sin\frac{\theta-\alpha}{2} &= 0
\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔

$\sin\frac{\theta+\alpha}{2} = 0$ اب	$\sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0$ اب
$\frac{\theta+\alpha}{2} = n\pi, n \in \mathbb{Z}$	$\frac{\theta-\alpha}{2} = n\pi, n \in \mathbb{Z}$
$\theta = 2n\pi - \alpha, n \in \mathbb{Z}.$ ...(i)	$\theta = 2n\pi + \alpha, n \in \mathbb{Z}$ ...(ii)

(i) اور (ii) ملانے سے ہمیں اخذ ہوتا ہے۔ $\cos\theta = \cos\alpha \Rightarrow \theta = 2n\pi \pm \alpha, n \in \mathbb{Z}.$ (3.14)

iii۔ $\tan\theta = k \ \ (-\infty < k < \infty)$ شکل والی مساوات کو حل کرنا:

عددی طور پر سب سے چھوٹا زاویہ α لیتے ہیں جیسا کہ $\tan\ \alpha = k.$ ہو

$$\begin{aligned}
\tan\theta &= \tan\alpha \\
\frac{\sin\theta}{\cos\theta} &= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \sin\theta\cos\alpha - \cos\theta\sin\alpha = 0 \\
\sin(\theta-\alpha) &= 0 \Rightarrow \theta - \alpha = n\pi \\
\theta &= n\pi + \alpha, n \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

لہٰذا، $\tan\theta = \tan\alpha \Rightarrow \theta = n\pi + \alpha, n \in \mathbb{Z}$ (3.15)

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:20:55 AM

(iv) $a\cos\theta + b\sin\theta = c$ شکل والی مساوات کو حل کرنا:

$r = \sqrt{a^2+b^2}$; $\tan\alpha = \frac{b}{a}$, $a \neq 0$ کے طور لیتے ہیں تو $a = r\cos\alpha$, $b = r\sin\alpha$.

$$\begin{aligned} a\cos\theta + b\sin\theta &= c \Rightarrow r\cos\alpha\cos\theta + r\sin\alpha\sin\theta = c \\ r\cos(\theta-\alpha) &= c \\ \cos(\theta-\alpha) &= \frac{c}{r} = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\phi \quad \text{فرض کریں} \\ \theta-\alpha &= 2n\pi \pm \phi, n \in \mathbb{Z} \\ \theta &= 2n\pi + \alpha \pm \phi, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

ہی اوپر کا طریقہ استعمال کر سکتے ہیں۔ اگر $c \leq \sqrt{a^2+b^2}$. ہو تو

اگر $c > \sqrt{a^2+b^2}$ رہنے کی صورت میں مساوات $a\cos\theta + b\sin\theta = c$ کا کوئی حل نہیں ہوگا۔

اب ہم علم مثلثی مساواتوں کے عام حل کا خلاصہ پیش کریں گے۔

علم مثلثی مساواتیں	عام حل
$\sin\theta = 0$	$\theta = n\pi; n \in \mathbb{Z}$
$\cos\theta = 0$	$\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{Z}$
$\tan\theta = 0$	$\theta = n\pi; n \in \mathbb{Z}$
$\sin\theta = \sin\alpha$, جس میں $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$\theta = n\pi + (-1)^n\alpha, n \in \mathbb{Z}$
$\cos\theta = \cos\alpha$, جس میں $\alpha \in [0, \pi]$	$\theta = 2n\pi \pm \alpha, n \in \mathbb{Z}$
$\tan\theta = \tan\alpha$, جس میں $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$\theta = n\pi + \alpha, n \in \mathbb{Z}$

مثال 3.42 اصل حل معلوم کیجئے۔ (i) $\sin\theta = \frac{1}{2}$ (ii) $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
(iii) $\text{cosec}\theta = -2$ (iv) $\cos\theta = \frac{1}{2}$

حل:

(i) $\sin\theta = \frac{1}{2} > 0$ چنانچہ اصل قیمت I ربع میں واقع ہے۔

$\sin\theta = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$

Thus, $\theta = \frac{\pi}{6}$ اصل حل ہے۔

(ii) $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:20:55 AM

ہم جانتے ہیں $\sin\theta$ وقفہ میں $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ کی اصل قیمت واقع ہے۔

چونکہ $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0,$ ہے۔ $\sin\theta$ کی اصل قیمت ربع IV میں واقع ہے۔

$$\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right).$$

لہٰذا، $\theta = -\frac{\pi}{3}$ اصل حل ہے۔

(iii) $\operatorname{cosec}\theta = -2$

$$\operatorname{cosec}\theta = -2 \Rightarrow \frac{1}{\sin\theta} = -2 \Rightarrow \sin\theta = -\frac{1}{2}$$

چونکہ $\sin\theta = -\frac{1}{2} < 0,$ ہے۔ $\sin\theta$ کی اصل قیمت ربع IV میں واقع ہے۔

$$\sin\theta = -\frac{1}{2} = -\sin\frac{\pi}{6} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

لہٰذا، $\theta = -\frac{\pi}{6}$ اصل حل ہے۔

(iv) $\cos\theta = \frac{1}{2}$

$\cos\theta$ کی اصل قیمت I اور II ربع میں واقع ہے۔

چونکہ $\cos\theta = \frac{1}{2} > 0,$ ہے۔ $\cos\theta$ کی اصل قیمت وقفہ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ میں واقع ہے۔

$$\cos\theta = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$$

لہٰذا، $\theta = \frac{\pi}{3}$ اصل حل ہے۔

مثال 3.43 $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ کا عام حل دریافت کیجئے۔

حل:

$\sin\theta = \sin\alpha, \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$ کا عام حل $\theta = n\pi + (-1)^n \alpha, n \in \mathbb{Z}$ ہے۔

$$\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right),$$

اس طرح، عام حل یہ ہے۔

$$\theta = n\pi + (-1)^n\left(-\frac{\pi}{3}\right) = n\pi + (-1)^{n+1}\left(\frac{\pi}{3}\right); n \in \mathbb{Z} \quad \ldots \text{(i)}$$

اوپر کے عام حل میں ہم $-\left(\frac{\pi}{3}\right)$ کو اصل قیمت کے طور لیتے ہیں۔

اصل قیمت $[-\pi, \pi]$ وقفہ میں عددی طور پر سب سے چھوٹی قیمت ہے۔ اب اس مثال کے ذریعہ ہم یہ تصدیق کریں گے اصل قیمت $[0, 2\pi]$ میں بھی لے سکتے ہیں۔

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:20:56 AM

جیسا کہ ہم اصل حل کی تعریف میں بیان کیا تھا۔ اگر ہم اصل حل کو $[0, 2\pi]$ وقفہ میں لیتے ہیں تو اصل حل $\theta = \frac{4\pi}{3}$ ہوگا۔ اور عام حل یہ ہے۔

$$\theta = n\pi + (-1)^n \left(\frac{4\pi}{3}\right), n \in \mathbb{Z}, \frac{4\pi}{3} \in [0, 2\pi] \quad \text{... (ii)}$$

$n = 0, -1, 1, -2, 2, \ldots$ سے، (ii)

کے لئے نظیری حل یہ ہیں۔ $\frac{4\pi}{3}, \frac{-7\pi}{3}, \frac{-\pi}{3}, \frac{-2\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}, \ldots$

$n = 0, -1, 1, -2, 2, \ldots$ سے، (i)

کے لئے نظیری حل یہ ہیں۔ $\frac{-\pi}{3}, \frac{-2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{-7\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \ldots$

دونوں صورتوں میں، ہمیں یکساں حل کا مجموعہ حاصل ہوتا ہے۔ لیکن ترتیب مختلف ہے، اس طرح، ہم تصدیق کریں گے کہ اصل حل کو $[0, 2\pi]$ یا $[-\pi, \pi]$. میں لکھ سکتے ہیں۔

مثال 3.44 عام حل معلوم کیجئے۔ (i) $\sec\theta = -2$ (ii) $\tan\theta = \sqrt{3}$

حل:

(i) $\sec\theta = -2$

$\sec\theta = -2 \Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{2}$

We know that the general solution of $\cos\theta = \cos\alpha, \alpha \in [0, \pi]$, is $\theta = 2n\pi \pm \alpha, n \in \mathbb{Z}$

Let us nd $\alpha \in [0, \pi]$ such that $\cos\alpha = -\frac{1}{2} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3}$.

so, $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

Thus, the general solution is $\theta = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$.

(ii) $\tan\theta = \sqrt{3}$

$\tan\theta = \sqrt{3} = \tan\frac{\pi}{3}$

We know that the general solution of $\tan\theta = \tan\alpha, \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ is $\theta = n\pi + \alpha, n \in \mathbb{Z}$

Thus, $\theta = n\pi + \frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$, is the general solution.

مثال 3.45 حل کیجئے۔ $3\cos^2\theta = \sin^2\theta$

حل:

$3\cos^2\theta = 1 - \cos^2\theta \Rightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{4}$

$\frac{\cos 2\theta + 1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos 2\theta = -\frac{1}{2} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$2\theta = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$.

$\tan^2\theta = 3$. کی طرح لکھ کر حل کرنے کی کوشش کیجئے۔

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:20:56 AM

مثال 3.46 حل کیجئے، $\sin x + \sin 5x = \sin 3x$

حل :

$$\sin x + \sin 5x = \sin 3x \Rightarrow 2\sin 3x \cos 2x = \sin 3x$$
$$\sin 3x\,(2\cos 2x - 1) = 0$$
$$\sin 3x = 0 \qquad \cos 2x = \frac{1}{2}$$

اگر $\sin 3x = 0$, ہوتو $3x = n\pi \Rightarrow x = \frac{n\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$ ... (i)

اگر $\cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = \cos\frac{\pi}{3}$ ... (ii)

$$2x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = n\pi \pm \frac{\pi}{6}, n \in \mathbb{Z}$$

(i) اور (ii) سے عام حل $x = \frac{n\pi}{3}$ (or) $x = n\pi \pm \frac{\pi}{6}, n \in \mathbb{Z}$. ہوگا۔

مثال 3.47 حل کیجئے $\cos x + \sin x = \cos 2x + \sin 2x$

حل :

$$\cos x + \sin x = \cos 2x + \sin 2x \Rightarrow \cos x - \cos 2x = \sin 2x - \sin x$$
$$2\sin\left(\frac{x+2x}{2}\right)\sin\left(\frac{2x-x}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{2x+x}{2}\right)\sin\left(\frac{2x-x}{2}\right)$$
$$2\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{3x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$\sin\left(\frac{x}{2}\right)\left[\sin\left(\frac{3x}{2}\right) - \cos\left(\frac{3x}{2}\right)\right] = 0$$

لہٰذا، $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0$ (یا) $\sin\left(\frac{3x}{2}\right) - \cos\left(\frac{3x}{2}\right) = 0$.

جب، $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0$

$\frac{x}{2} = n\pi \Rightarrow x = 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

جب، $\sin\left(\frac{3x}{2}\right) - \cos\left(\frac{3x}{2}\right) = 0$

$\Rightarrow \tan\left(\frac{3x}{2}\right) = 1 = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$\frac{3x}{2} = n\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{2n\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$.

چنانچہ، عام حل $x = 2n\pi$ (یا) $x = \frac{2n\pi}{3} + \frac{\pi}{6}, n \in \mathbb{Z}$.

اگر $\sin\theta = \cos\theta$ ہوتو $\theta \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$. لہٰذا، ہمیں ملتا ہے۔ $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 1$

مثال 3.48 مساوات حل کیجئے، $\sin 9\theta = \sin\theta$

حل:

$$\sin 9\theta = \sin\theta \Rightarrow \sin 9\theta - \sin\theta = 0$$
$$2\cos 5\theta \sin 4\theta = 0$$
$$\cos 5\theta = 0 \text{ (or) } \sin 4\theta = 0 \quad \text{(یا)}$$

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:20:56 AM

$\cos 5\theta = 0 \Rightarrow 5\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ جب

$\Rightarrow \theta = (2n+1)\frac{\pi}{10}, n \in \mathbb{Z}$

$\sin 4\theta = 0 \Rightarrow 4\theta = n\pi$ جب

$\Rightarrow \theta = \frac{n\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}$

لہٰذا، دیے گئے مساوات کا عام حل $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{10}, \quad \theta = \frac{n\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}.$ ہے۔

مثال 3.49 حل کیجیے۔ $\tan 2x = -\cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

حل:

$$\tan 2x = -\cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + x + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{5\pi}{6} + x\right)$$

$$2x = n\pi + \frac{5\pi}{6} + x, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = n\pi + \frac{5\pi}{6}, n \in \mathbb{Z}.$$

مثال 3.50 $\sin x - 3\sin 2x + \sin 3x = \cos x - 3\cos 2x + \cos 3x$

حل:

$$\sin x - 3\sin 2x + \sin 3x = \cos x - 3\cos 2x + \cos 3x$$
$$\sin 3x + \sin x - 3\sin 2x = \cos 3x + \cos x - 3\cos 2x$$
$$2\sin 2x\cos x - 3\sin 2x = 2\cos 2x\cos x - 3\cos 2x$$
$$(\sin 2x - \cos 2x)(2\cos x - 3) = 0$$

تو $\sin 2x - \cos 2x = 0$ چونکہ $2\cos x - 3 \neq 0$

$$\sin 2x = \cos 2x \Rightarrow \tan 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{8}, n \in \mathbb{Z}.$$

مثال 3.51 حل کیجیے۔ $\sin x + \cos x = 1 + \sin x\cos x$

حل:

فرض کیجیے۔ $\sin x + \cos x = t$

$$\Rightarrow 1 + 2\sin x\cos x = t^2 \Rightarrow \sin x\cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$$

دی گئی مساوات اس طرح ہو جاتی ہے $t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow t = 1$

لہٰذا، $\sin x + \cos x = 1$

$$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) = 1$$
$$\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1 \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

لہٰذا، ہمیں ملتا ہے۔ $x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \text{ or } x = 2n\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:20:56 AM

مثال 3.52 حل کیجئے۔ $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2$

حل:

$$2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2 \Rightarrow 2\sin^2 x + (2\sin x \cos x)^2 = 2$$
$$\cos^2 x\left(2\sin^2 x - 1\right) = 0$$
$$\cos x = 0 \quad \text{(یا)} \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z} \quad \Big| \quad \sin^2 x = \frac{1}{2} = \sin^2\frac{\pi}{4} \Rightarrow x = n\pi \pm \frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}$$

کیسے

$$x = (2n+1)\frac{\pi}{2}, \quad x = n\pi \pm \frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}.$$ اس طرح حل ہے۔

مثال 3.53 $-\sqrt{a^2+b^2} \le a\sin\theta + b\cos\theta \le \sqrt{a^2+b^2}$ a اور b کے کسی بھی قیمت کے لئے ثابت کیجئے۔

حل:

اب،
$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta\right]$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}\left[\cos\alpha\sin\theta + \sin\alpha\cos\theta\right]$$

جس میں،
$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}\ \sin(\alpha+\theta)$$

لہٰذا،
$$|a\sin\theta + b\cos\theta| \le \sqrt{a^2+b^2}$$

چنانچہ
$$-\sqrt{a^2+b^2} \le a\sin\theta + b\cos\theta \le \sqrt{a^2+b^2}.$$

مثال 3.54 حل کیجئے، $\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta = \sqrt{2}$

حل

$$\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta = \sqrt{2}$$

یہاں
$$a = -1; b = \sqrt{3}; c = \sqrt{2}; r = \sqrt{a^2+b^2} = 2.$$

لہٰذا، دی گئی مساوات کو اس طرح دوبارہ لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\sin\theta\cos\frac{\pi}{6} - \cos\theta\sin\frac{\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{4}$$
$$\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{4}$$
$$\theta - \frac{\pi}{6} = n\pi \pm (-1)^n\frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}$$

چنانچہ
$$\theta = n\pi + \frac{\pi}{6} \pm (-1)^n\frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}.$$

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:20:56 AM

مثال 3.55 حل کیجئے $\sqrt{3}\tan^2\theta + \left(\sqrt{3}-1\right)\tan\theta - 1 = 0$

حل

$$\sqrt{3}\tan^2\theta + \left(\sqrt{3}-1\right)\tan\theta - 1 = 0$$
$$\sqrt{3}\tan^2\theta + \sqrt{3}\tan\theta - \tan\theta - 1 = 0$$
$$\left(\sqrt{3}\tan\theta - 1\right)(\tan\theta + 1) = 0$$

چنانچہ $\sqrt{3}\tan\theta - 1 = 0$ (یا) $\tan\theta + 1 = 0$

اگر، $\tan\theta + 1 = 0$ ہوتو	اگر $\sqrt{3}\tan\theta - 1 = 0$, ہوتو
$\tan\theta = -1 = \tan\left(\frac{-\pi}{4}\right)$	$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\frac{\pi}{6}$
$\Rightarrow \theta = n\pi - \frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}$...(ii)	$\Rightarrow \theta = n\pi + \frac{\pi}{6}, n \in \mathbb{Z}$...(i)

(i) اور (ii) سے ہمیں عام حل حاصل ہوتا ہے۔

مشق 3.8

1) مندرجہ ذیل کے لئے اصل حل اور عام حل معلوم کیجئے۔

(i) $\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $\cot\theta = \sqrt{3}$ (iii) $\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

2) $0° \leq \theta < 360°$ وقفے میں واقع مندرجہ ذیل مساواتوں کے حلوں کو دریافت کیجئے۔

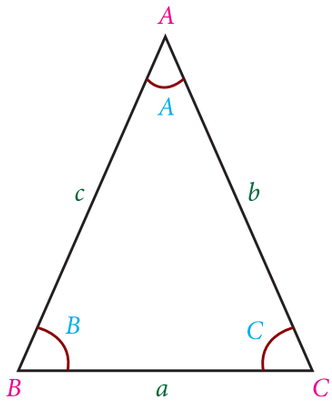
(i) $\sin^4 x = \sin^2 x$
(ii) $2\cos^2 x + 1 = -3\cos x$
(iii) $2\sin^2 x + 1 = 3\sin x$
(iv) $\cos 2x = 1 - 3\sin x$.

3) مندرجہ ذیل مساواتوں کو حل کیجئے۔

(i) $\sin 5x - \sin x = \cos 3x$
(ii) $2\cos^2\theta + 3\sin\theta - 3 = 0$
(iii) $\cos\theta + \cos 3\theta = 2\cos 2\theta$
(iv) $\sin\theta + \sin 3\theta + \sin 5\theta = 0$
(v) $\sin 2\theta - \cos 2\theta - \sin\theta + \cos\theta = 0$
(vi) $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$
(vii) $\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta = 1$
(viii) $\cot\theta + \text{cosec}\theta = \sqrt{3}$
(ix) $\tan\theta + \tan\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$
(x) $\cos 2\theta = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$
(xi) $2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0$

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:20:56 AM

3.7 مثلث کی خصوصیات (Properties of Triangle)



خاکہ 3.17

علم مثلث کا ایک اہم استعمال یہ ہے کہ مثلث کے ذریعہ ترتیب دئے گئے عملی حسابوں کو حل کرنا۔ ایک مثلث کے تمام اضلاع اور زاویوں کو دریافت کرنے کو مثلث کو حل کرنے کے طور پر منسوب کرتے ہیں۔ کسی بھی مثلث کے تین اضلاع اور تین زاویوں کو اس مثلث کے بنیادی عناصر (Basic elements) کہتے ہیں۔ مثلث قائمۃ الزاویہ کا حل دریافت کرنے میں مسئلہ فیثاغورث ایک اہم کردار ادا کرتا ہے۔ سائن کے کلیے اور کوسائن کے کلیے اہم آلات (tools) ہیں۔ ان کو بہتر انداز میں استعمال کر کے ترچھے مثلث (oblique triangle) (مثلث جس میں قائمۃ الزاویہ نہ ہو) کو حل کر سکتے ہیں۔ اس حصّہ میں ہم ایک مثلث کے اضلاع اور زاویوں کے درمیانی تعلقات کے بارے میں بحث کریں گے اور سائن کے کلیے اور کوسائن کے کلیے کو اخذ کریں گے۔

ترقیم: ایک مثلث ABC لیجئے۔ مثلث ABC کے تین راسوں کے نظیر زاویوں کو A, B, C کے طور پر ہی ظاہر کرتے ہیں۔ زاویوں کے مقابل اضلاع کو بالترتیب a , b , c سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ Δ کی علامت مثلث کے رقبہ کو ظاہر کرتی ہے۔

ایک مثلث کے تین راسیں (Vertices) دائرہ سے گذرتے ہیں۔ اس کو مثلث کا حائط دائرہ (Circum circle) کہتے ہیں۔ حائط دائرہ کا مرکز اور نصف قطر r کو بالترتیب حائط مرکز (Circum Centre) اور حائط نصف قطر (Circum radius) کہتے ہیں۔

ΔABC میں $A+B+C=\pi$ اور $a+b>c,\ \ b+c>a,\ \ a+c>b.$ ہوتا ہے،

سائن کا کلیہ یا سائن کا ضابطہ (The law of Sines (or) Sine formula)

3.7.1 سائن کا کلیہ (Law of Sine)

ایک مثلث کے زاویے اور اضلاع کے درمیانی تعلقات کو سائن کا کلیہ کہتے ہیں۔ ایک مثلث کو حل کرنے میں مندرجہ ذیل صورت حال میں سائن کا کلیہ استعمال کر سکتے ہیں۔

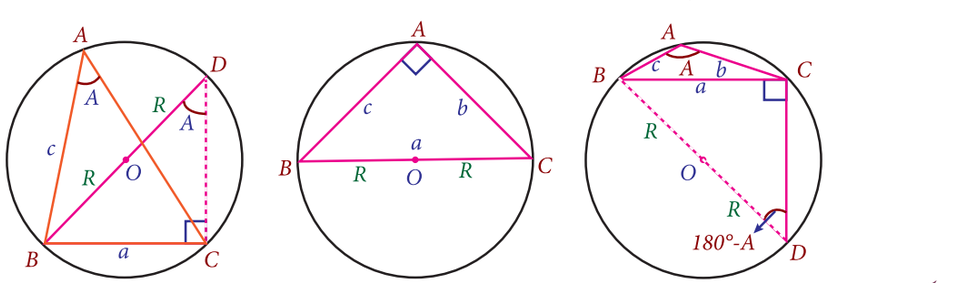
i۔ اگر دو اضلاع اور ایک زاویہ دیا گیا ہو، دئے گئے دو اضلاع کا درمیانی زاویہ اِس میں شامل نہیں کیا گیا، ہو تو دوسرے زاویئے دریافت کر سکتے ہیں۔

ii۔ اگر دو زاویئے اور دئے گئے کسی ایک زاویہ کے مقابل کا ایک ضلع دیا گیا ہو تو باقی ایک ضلع دریافت کر سکتے ہیں۔

مسئلہ 3.1 (سائن کا کلیہ) کسی ایک مثلث میں اضلاع کی لمبائیاں، سائن کے مقابل کے زاویوں کے تناسب (proportional) ہیں۔

یعنی $\triangle ABC$ میں $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$ جس میں مثلث کا حائط قطر R (Circum diameter) ہے۔

ثبوت: ΔABC کا زاویہ A، زاویہ حادہ، (یا) قائمہ (یا) منفرجہ ہوتا ہے۔ یہاں ΔABC کا حائط دائرہ کا مرکز 'O' ہے۔ اور R اس کا نصف قطر ہے۔



$\angle A$ زاویہ حادہ ہے۔ $\angle A = 90°$ $\angle A$ زاویہ منفرجہ ہے۔ خاکہ 3.18

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:20:57 AM

مرحلہ I : $\angle A$ ، زاویہ حادہ ہے۔ BO کو اس طرح دراز کریں کہ وہ دائرہ پر نقطہ D پر ملے۔ (یا)

$$\angle BDC = \angle BAC = A$$
$$\angle BCD = 90^\circ$$
$$\sin\angle BDC = \frac{BC}{BD} \text{ or } \sin A = \frac{a}{2R} \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = 2R$$

مرحلہ II : $\angle A$ ، زاویہ قائمہ ہے۔ اس مرحلہ میں ΔABC کا ضلع BC پر 'O' ہوگا۔

$$\text{Now, } \frac{a}{\sin A} = \frac{BC}{\sin 90^\circ} = \frac{2R}{1} = 2R \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = 2R$$

مرحلہ III : $\angle A$ ، زاویہ منفرجہ ہے۔ BO کو اس طرح دراز کریں کہ وہ دائرہ کے نقطہ D پر ملتا ہو۔

$$\angle BDC + \angle BAC = 180^\circ$$
$$\angle BDC = 180^\circ - \angle BAC = 180^\circ - A$$
$$\angle BCD = 90^\circ$$
$$\sin\angle BDC = \frac{BC}{BD} \quad \text{یا} \quad \sin(180^\circ - A) = \sin A = \frac{a}{2R} \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = 2R$$

(یا) ، ہر ایک مرحلہ میں ہمیں $\frac{a}{\sin A} = 2R$

اسی طریقے کو اپناتے ہوئے زاویئے B اور C کو بالترتیب $\frac{b}{\sin B} = 2R$ اور $\frac{c}{\sin C} = 2R$ ثابت کر سکتے ہیں۔

لہٰذا، $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

i۔ سائن کے کلیہ کو تین مساواتوں کے مجموعہ کے طور پر لکھ سکتے ہیں۔

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}; \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin A}{\sin C}; \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C};$$

ii۔ سائن کا کلیہ یہ کہتا ہے کہ ایک مثلث کے اضلاع کے مقابل زاویوں کی سائن کی قیمت تناسب میں ہوگا۔

iii۔ ایک مثلث دو اضلاع اور ان کا درمیانی زاویہ (Included angle) دیا گیا ہو تو سائن کا کلیہ استعمال کر کے مثلث کا حل معلوم کرنا ممکن ہے۔

iv۔ ایک مثلث کا سب سے بڑا ضلع، سب سے بڑے زاویہ کے مقابل میں واقع ہوگا۔ یہ سائن کلیہ کا ایک دلچسپ علم ہندسہ کا نتیجہ ہے۔

نیپئر کا ضابطہ (Napier formula)

مسئلہ 3.2

$\triangle ABC$ میں

$$\text{(i)} \quad \tan\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$$
$$\text{(ii)} \quad \tan\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$$
$$\text{(iii)} \quad \tan\frac{C-A}{2} = \frac{c-a}{c+a}\cot\frac{B}{2}$$

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:20:57 AM

ثبوت

ہم سائن کا ضابطہ جانتے ہیں۔ $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

$$\begin{aligned}\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}&=\frac{2R\sin A-2R\sin B}{2R\sin A+2R\sin B}\cot\frac{C}{2}\\&=\frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}\cot\frac{C}{2}\\&=\frac{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}\cot\frac{C}{2}\\&=\cot\frac{A+B}{2}\tan\frac{A-B}{2}\cot\frac{C}{2}\\&=\cot\left(90^\circ-\frac{C}{2}\right)\tan\frac{A-B}{2}\cot\frac{C}{2}\\&=\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A-B}{2}\cot\frac{C}{2}=\tan\frac{A-B}{2}\end{aligned}$$

اب، اسی طرح ہم دوسرے دو نتائج کو حل کر سکتے ہیں۔

3.7.2 کوسائن کا کلیہ (Law of Cosine)

جب ایک مثلث کے دو اضلاع اور ان کا درمیانی یا تین اضلاع دیے گئے ہو تو سائن کا ضابطہ کو استعمال کر کے مثلث کو حل نہیں کر سکتے ہیں۔ ایسی صورت میں کوسائن کا کلیہ استعمال کر کے مثلث کو حل کر سکتے ہیں۔ مزید، دو اضلاع اور ان کا درمیانی زاویہ دیا گیا ہو تو مثلث کا رقبہ دریافت کرنے کا ضابطہ کو اخذ کر سکتے ہیں۔

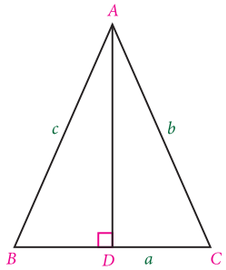
مسئلہ 3.3 (کوسائن کا کلیہ) ΔABC میں

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc};\ \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca};\ \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

ثبوت : ΔABC میں $AD\perp BC$ کھینچیے۔

$AB^2=AD^2+BD^2\Rightarrow c^2=AD^2+BD^2$ ΔABC میں، ہمیں اخذ ہوتا ہے۔

اب، ہم AD اور BD کی قیمتیں ΔABC کے عناصر کے طور پر دریافت کریں گے،



خاکہ 3.19

$$\begin{aligned}\frac{AD}{AC}&=\sin C\Rightarrow AD=b\sin C\\BD&=BC-DC=a-b\cos C\\c^2&=(b\sin C)^2+(a-b\cos C)^2\\&=b^2\sin^2C+a^2+b^2\cos^2C-2ab\cos C\\&=a^2+b^2\left(\sin^2C+\cos^2C\right)-2ab\cos C\\&=a^2+b^2-2ab\cos C\end{aligned}$$

لہٰذا $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ or $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

اسی طرح، دوسرے دو نتائج کو حل کر سکتے ہیں، وہ یہ ہیں۔

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\ \text{ or }\ \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B\ \text{ or }\ \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:20:57 AM

i۔ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ کا مطلب ایک مثلث ایک ضلع کا مربع، دوسرے دو ضلعوں کے مربعوں کا حاصل جمع سے اُن دو ضلعوں کے حاصل ضرب کا دُگنا اور درمیانی زاویہ کا کوسائن کی قیمت کا فرق مساوی ہوگا۔ مزید a , b , c حروف کو ایک ضابطہ میں دہرانے پر دوسرے ضابطہ حاصل ہوتا ہے۔

ii۔ مثلث قائمۃ الزاویہ کے لئے کوسائن کا کلیہ مختصر ہو کر فیثاغورث کا مسئلہ بن جاتا ہے۔ لہٰذا، کوسائن کے کلیے کو مسئلہ فیثاغورث کی عام شکل کے طور پر دیکھ سکتے ہیں۔

iii۔ سائن کے کلیے پر کوسائن کے کلیے فوقیت دینے کا فائدہ یہ ہے کہ کوسائن تفاعل میں زاویہ حادہ اور زاویہ منفرجہ کا درمیانی فرق واضح ہوتا ہے۔ جبکہ سائن تفاعل میں یہ بات نہیں ہوتی ہے۔ اگر کوسائن کا ایک زاویہ مثبت ہو تو وہ حادہ ہے۔ ورنہ وہ منفرجہ ہوگا۔

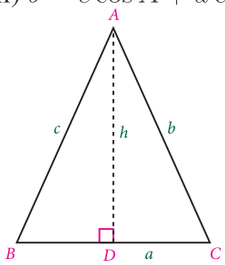
iv۔ **کوسائن کا کلیہ کہتا ہے کہ:** سیدھا راستہ مختصر ترین فاصلہ ہوتا ہے، اس کی تشریح ذیل میں دی گئی ہے۔ ΔABC میں $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$, $\triangle ABC$ ہے۔ چونکہ $-\cos C < 1$ سے ہمیں $c^2 < a^2 + b^2 + 2ab.$ حاصل ہوتا ہے۔ لہٰذا $c < a + b$ ہے۔ $\triangle ABC$ سے $a < b + c,\ \ b < c + a,\ \ c < a + b$ حاصل ہوتا ہے۔

v۔ کوسائن کے کلیے کو استعمال کرتے وقت، ہمیشہ سب سے پہلے بڑی نامعلوم پیمائش کو دریافت کرنا ہوگا چونکہ اس سے ہمیں مثلث کا منفرجہ زاویہ حاصل ہوگا اگر وہ موجود ہوتا ہے تو۔

3.7.3 پروجیکشن ضابطہ (Projection Formula)

(i) $a = b\cos C + c\cos B$
(ii) $b = c\cos A + a\cos C,$ (iii) $c = a\cos B + b\cos A$

مسئلہ 3.4 ΔABC سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔



خاکہ 3.20

ثبوت ΔABC سے، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $a = BC.$ کھینچئے، $AD \perp BC.$

$$\begin{aligned} a &= BC = BD + DC \\ &= \frac{BD}{AB}AB + \frac{DC}{AC}AC \\ &= (\cos B)c + (\cos C)b \\ a &= b\cos C + c\cos B \end{aligned}$$

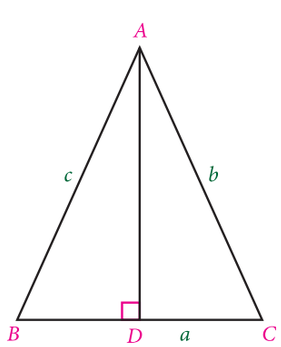
اسی طرح، دوسرے دو پروجیکشن ضابطے بھی ثابت کر سکتے ہیں،

$a = b\cos C + c\cos B$ کا مطلب، a = b کا پروجیکشن a پر c کا پروجیکشن + a پر، لہٰذا، مثلث کا ایک ضلع، کے اس پر دوسرے دو اضلاع پروجیکشن کا حاصل جمع مساوی ہے۔

3.7.4 مثلث کا رقبہ Area of the Triangle

ہم ایک ترچھے مثلث کے چند عناصر اور سائن تفاعل کو استعمال کر کے مثلث کا رقبہ دریافت کریں گے۔

ΔABC کا رقبہ کا ضابطہ ½bh کا اعادہ کریں گے جس میں b قاعدہ اور h اونچائی ہے۔ ترچھا مثلث کے لئے، ہمیں رقبے کے ضابطہ کے استعمال سے پہلے h معلوم کرنا ہوگا۔



خاکہ 3.21

مسئلہ 3.5: ΔABC میں، مثلث کا رقبہ

$$\triangle = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B$$

ثبوت: ΔABC میں، $AD \perp BC$ کھینچئے۔

$$\text{In } \triangle ADC, \frac{AD}{AC} = \sin C \Rightarrow AD = b\sin C$$

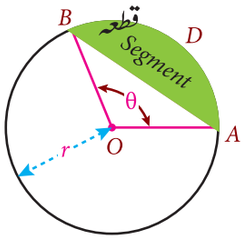
لہٰذا، $\triangle = \frac{1}{2} \times$ قاعدہ $\times$ اونچائی $= \frac{1}{2}ab\sin C.$

اسی طرح، ہم دوسرے دو نتائج اخذ کر سکتے ہیں۔

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:20:58 AM

i۔ ایک ترچھا مثلث کا رقبہ کا ضابطہ کہتا ہے کہ دو اضلاع کی لمبائیاں اور ان کے درمیانی زاویہ کے سائن کی قیمت کے حاصل ضرب کا آدھا ہوگا۔

ii۔ دائرہ کا قطعہ رقبہ معلوم کرنے کے لئے مثلث کا رقبہ کا ضابطہ استعمال ہوتا ہے۔ دائرہ کا قطعہ (ٹکڑا) ایک وتر (Chord) اور قوس کا درمیانی حصّہ ہوتا ہے۔ فرض کریں کہ دائرہ کا نصف قطر r ہے اور θ زاویہ وتر AB مرکز پر بناتا ہے۔



خاکہ 3.22

$$\text{دائرہ کے قطعہ ABD کا رقبہ} = \text{قطاع دائرہ کا رقبہ} - \Delta OAB \text{ کا رقبہ}$$

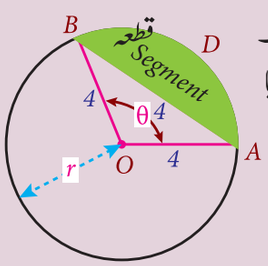
$$= \frac{1}{2}r^2\theta - \frac{1}{2}r^2 \sin\theta$$

$$= \frac{1}{2}r^2 (\theta - \sin\theta)$$

iii۔ مثلث کا رقبہ کا ضابطہ کو ایک مثلث قائمۃ الزاویہ کا رقبہ کا ضابطہ کو عام ضابطہ کے طور پر دیکھیں گے۔

iv۔ اوپر کے ضابطہ سے یہ بات واضح ہوتی ہے کہ مثلث کا رقبہ معلوم کرنے کے لئے تیسرے ضلع کی پیائش ضرورت نہیں ہے۔ اسی طرح رقبہ معلوم کرنے کے لئے مثلث کا ارتفاع (altitude) معلوم کرنے کی بھی ضرورت نہیں ہے۔

مثال 3.56 حکومت ایک مدّور چڑیا گھر (Zoological park) بنانا چاہتی ہے، جس کا قطر 8 km ہو۔ اس میں قطاع دائرہ کی شکل میں ایک مویشیوں کا ہسپتال (Veterinary Hospital) کے لئے زمین مقرر کیا جائے گا۔ جس کی وتر کی لمبائی 4 km ہوگی، مویشیوں کے ہسپتال کے لئے مقرر کردہ زمین کا رقبہ معلوم کیجئے۔



خاکہ 3.23

حل: AB وتر کی لمبائی اور مدّور پارک کا مرکز 'O' ہے۔

$$\angle AOB = \theta.$$

$$\text{قطعہ دائرہ کا رقبہ} = \text{قطاع دائرہ کا رقبہ} - \Delta OAB \text{ کا رقبہ}$$

$$= \frac{1}{2}r^2\theta - \frac{1}{2}r^2 \sin\theta$$

$$= \left(\frac{1}{2} \times 4^2\right)[\theta - \sin\theta] = 8[\theta - \sin\theta] \quad \ldots(i)$$

لیکن، $\cos\theta = \dfrac{4^2 + 4^2 - 4^2}{2(4)(4)} = \dfrac{1}{2}$

لہٰذا، $\theta = \dfrac{\pi}{3}$

(1) سے، مویشیوں کے ہسپتال کے لئے مقرر کردہ زمین کا رقبہ

$$= 8\left[\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right] = \frac{4}{3}\left[2\pi - 3\sqrt{3}\right]\ m^2$$

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:20:58 AM

3.7.5 آدھا - زاویہ کا ضابطہ (Half-angle formula)

مسئلہ 8.6 : ΔABC میں

(i) $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$, (ii) $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$,

(iii) $\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$ جس میں ΔABC کا آدھا احاطہ s ہے۔ یعنی $s=\frac{a+b+c}{2}$

ثبوت : (i)

$$\sin\frac{A}{2} = +\sqrt{\sin^2\frac{A}{2}}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)}$$

$$=\sqrt{\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}$$

$$=\sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}}=\sqrt{\frac{(a+b+c-2c)(a+b+c-2b)}{4bc}}$$

$$=\sqrt{\frac{(2s-2b)(2s-2c)}{4bc}}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

لہٰذا ، $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$.

اسی طرح، ہم دوسرے دو نتائج کو ثابت کر سکتے ہیں۔

دوسرے آدھے - زاویہ کے ضابطے یہ ہیں۔

$$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ac}},\quad \sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$$

$$\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}},\quad \cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$$

$$\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}},\quad \tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}},$$

ضمنی نتیجہ (Corollary)

$$\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=2\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$\sin A=\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

مثلث کا رقبہ (ہرون کا ضابطہ) (Area of a triangle (Herons Formula))

یونانی انجینئر اور ریاضی دان اسکندریہ کا ہیرو (CE 10-70) کے نام سے ہرون کا ضابطہ موسوم ہے۔ یہ ضابطہ مثلث کے تینوں اضلاع کی پیمائش دی گئی ہوں تو استعمال کر سکتے ہیں۔

مسئلہ 3.7 : ΔABC میں، $\triangle=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ جس میں S، ΔABC کا آدھا احاطہ ہے۔

ثبوت:

$$\triangle = \frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ab\left(2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\right)$$

$$=ab\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:20:58 AM

i۔ ہرون کا ضابطہ استعمال کر کے مثلث قائمۃ الزاویہ کے لئے مسئلہ فیثاغورث ثابت کر سکتے ہیں اور اس کا معکوس بھی مثلث قائمۃ الزاویہ مسئلہ فیثاغورث کے استعمال سے ہرون کا ضابطہ ثابت کر سکتے ہیں۔

ii۔ ایک مثلث کا رقبہ ایک سالم عدد (integer) ہو تو مثلث کا سالم عدد والے اضلاع کو معلوم کرنے کے لئے ہرون کا ضابطہ استعمال ہوتا ہے۔

iii۔ اگر ایک مثلث کا احاطہ پہلے سے طے (fixed) ہو تو ہرون کا ضابطہ کو استعمال کر کے مثلث کا سالم عدد والا رقبہ اور سالم عدد والے اضلاع معلوم کر سکتے ہیں۔

مثال کے طور پر، اگر ایک مثلث کا احاطہ 100 m ہو تو 32 m, 34 m, 34 m والے اضلاع اور 480 m^2 رقبہ والا ایک مثلث حاصل ہوگا۔

مثال 3.57 : ΔABC میں ثابت کیجئے $b^2 \sin 2C + c^2 \sin 2B = 2bc \sin A$.

حل : سائن ضابطہ

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

لہٰذا $a = 2R \sin A; \quad b = 2R \sin B; \quad c = 2R \sin C$

$$\begin{aligned} b^2 \sin 2C + c^2 \sin 2B &= 4R^2 \sin^2 B \sin 2C + 4R^2 \sin^2 C \sin 2B \\ &= 4R^2 \left(2 \sin^2 B \sin C \cos C + 2 \sin^2 C \sin B \cos B\right) \\ &= 8R^2 \sin B \sin C \left(\sin B \cos C + \sin C \cos B\right) \\ &= 8R^2 \sin B \sin C \sin(B + C) \\ &= 8R^2 \sin B \sin C \sin(\pi - A) = 8R^2 \sin B \sin C \sin A \\ &= 8R^2 \left(\frac{b}{2R}\right)\left(\frac{c}{2R}\right) \sin A = 2bc \sin A. \end{aligned}$$

مثال 3.58 : ایک ΔABC میں، ثابت کیجئے۔ $\sin\left(\frac{B-C}{2}\right) = \frac{b-c}{a} \cos\frac{A}{2}$.

حل:

سائن کا ضابطہ $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

اب
$$\begin{aligned} \frac{b-c}{a} \cos\frac{A}{2} &= \frac{2R \sin B - 2R \sin C}{2R \sin A} \cos\frac{A}{2} \\ &= \frac{2 \sin\left(\frac{B-C}{2}\right) \cos\left(\frac{B+C}{2}\right)}{2 \sin\frac{A}{2} \cos\frac{A}{2}} \cos\frac{A}{2} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{B-C}{2}\right) \cos\left(90° - \frac{A}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{B-C}{2}\right) \sin\left(\frac{A}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}} \\ &= \sin\left(\frac{B-C}{2}\right). \end{aligned}$$

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:20:59 AM

مثال 3.59 اگرایک مثلث کے تین زاویوں کی نسبت 1:2:3 ہوتو ثابت کیجئے۔ نظیری اضلاع کی نسبت $1 : \sqrt{3} : 2$ ہے۔

حل: فرض کیجئے کہ $\theta, 2\theta, 3\theta$ زاویئے ہیں۔

تو، $\theta + 2\theta + 3\theta = 180^\circ$

لہٰذا، $\theta = 30^\circ$

سائن کا ضابطہ کے استعمال سے، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$,

$$\frac{a}{\sin 30^\circ} = \frac{b}{\sin 60^\circ} = \frac{c}{\sin 90^\circ}$$

$$a : b : c = \sin 30^\circ : \sin 60^\circ : \sin 90^\circ$$

$$= \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} : 1 = 1 : \sqrt{3} : 2$$

مثال 3.60 ایک ΔABC میں، ثابت کیجئے کہ

$$(b + c)\cos A + (c + a)\cos B + (a + b)\cos C = a + b + c$$

حل:

$$\begin{aligned} \text{L.H.S} &= b\cos A + c\cos A + c\cos B + a\cos B + a\cos C + b\cos C \\ &= b\cos C + c\cos B + c\cos A + a\cos C + b\cos A + a\cos B \\ &= a + b + c \qquad \text{(پروجیکشن ضابطہ سے)} \end{aligned}$$

مثال 3.61 ایک مثلث ΔABC میں، ثابت کیجئے کہ $\dfrac{a^2 + b^2}{a^2 + c^2} = \dfrac{1 + \cos(A - B)\cos C}{1 + \cos(A - C)\cos B}$

حل: سائن کا ضابطہ $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

$$\begin{aligned} \text{L.H.S} &= \frac{a^2 + b^2}{a^2 + c^2} = \frac{(2R\sin A)^2 + (2R\sin B)^2}{(2R\sin A)^2 + (2R\sin C)^2} \\ &= \frac{\sin^2 A + \sin^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 C} = \frac{1 - \cos^2 A + \sin^2 B}{1 - \cos^2 A + \sin^2 C} \\ &= \frac{1 - \left(\cos^2 A - \sin^2 B\right)}{1 - \left(\cos^2 A - \sin^2 C\right)} = \frac{1 - \cos(A + B)\cos(A - B)}{1 - \cos(A + C)\cos(A - C)} \\ &= \frac{1 + \cos(A - B)\cos C}{1 + \cos(A - C)\cos B}. \end{aligned}$$

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:20:59 AM

مثال 3.62 ΔABC میں، سائن کا کلیہ استعمال کر کے کوسائن کا ضابطہ اخذ کرنا۔

حل: سائن کا ضابطہ $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

$$\begin{aligned}
\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} &= \frac{(2R\sin B)^2 + (2R\sin C)^2 - (2R\sin A)^2}{2\,(2R\sin B)\,(2R\sin C)} \\
&= \frac{\sin^2 B + \sin(C+A)\sin(C-A)}{2\sin B\sin C} \\
&= \frac{\sin B\,[\sin B + \sin(C-A)]}{2\sin B\sin C} \\
&= \frac{\sin(C+A)+\sin(C-A)}{2\sin C} = \cos A
\end{aligned}$$

لہٰذا، $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$. اسی طرح دوسرے دو کوسائن کے ضابطے اخذ کر سکتے ہیں۔

مثال 3.63 ہرون کا ضابطہ استعمال کر کے ثابت کیجئے کہ کسی مقرر کردہ (fixed) احاطہ مثلث مساوی الاضلاع (equilateral triangle) کا زیادہ سے زیادہ رقبہ رکھتا ہے۔ (اشارہ : $xyz \le k$ میں $x = y = z$ ہو تو زیادہ سے زیادہ قیمت حاصل ہوگی)۔

حل: مثلث ABC میں مقرر کردہ احاطہ 2S ہے، لہٰذا S مستقل ہے۔ ہم جانتے ہیں۔

$$\triangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

غور کریں کہ Δ کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہے۔ جب $(s-a)(s-b))(s-c)$ کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہوں۔

اب، $(s-a)(s-b)(s-c) \le \left(\frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3}\right)^3 = \frac{s^3}{27}$ $[G.M \le A.M.]$

لہٰذا، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $(s-a)(s-b)(s-c) \le \frac{s^3}{27}$

جب $s-a = s-b = s-c$ مساوی واقع ہو تو یعنی، جب a = b = c ہو تو $(s-a)(s-b))(s-c)$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت $\frac{s^3}{27}$ ہے۔

لہٰذا، جب a = b = c ہو تو، 2S مقرر کردہ احاطہ والے مثلث کا رقبے کی زیادہ قیمت ہوگی۔

لہٰذا، ایک مقرر کردہ احاطہ کے لئے مثلث مساوی الاضلاع کا رقبہ زیادہ سے زیادہ ہوتا ہے۔ رقبہ کی زیادہ سے زیادہ قیمت یہ ہے۔

$$\triangle = \sqrt{\frac{s\,(s^3)}{27}} = \frac{s^2}{3\sqrt{3}}$$ مربع اکائیاں

مشق 3.9

1) ΔABC میں، اگر $\frac{\sin A}{\sin C} = \frac{\sin(A-B)}{\sin(B-C)}$ ہو تو ثابت کیجئے کہ a^2, b^2, c^2 یہ حسابی سلسلہ (Arithmetic Progression) میں ہے۔

2) ΔABC کے اضلاع، حسابی سلسلہ میں واقع ہیں اور اگر $b : c = \sqrt{3} : \sqrt{2}$, ہو تو $\angle A$ معلوم کیجئے۔

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:20:59 AM

3) ΔABC میں اگر $\cos C = \dfrac{\sin A}{2\sin B}$ ہوتو ثابت کیجئے کہ یہ ایک مثلث مساوی الساقین (Isosceles triangle) ہے۔

4) ΔABC میں، ثابت کیجئے۔ $\dfrac{\sin B}{\sin C} = \dfrac{c - a\cos B}{b - a\cos C}$

5) ΔABC میں، ثابت کیجئے۔ $a\cos A + b\cos B + c\cos C = 2a\sin B\sin C$

6) ΔABC میں، اگر $\angle A = 60°$ ہوتو ثابت کیجئے۔ $b + c = 2a\cos\left(\dfrac{B-C}{2}\right)$

7) ایک ΔABC میں، مندرجہ ذیل کو ثابت کیجئے۔

(i) $a\sin\left(\dfrac{A}{2} + B\right) = (b + c)\sin\dfrac{A}{2}$

(ii) $a(\cos B + \cos C) = 2(b + c)\sin^2\dfrac{A}{2}$

(iii) $\dfrac{a^2 - c^2}{b^2} = \dfrac{\sin(A - C)}{\sin(A + C)}$

(iv) $\dfrac{a\sin(B - C)}{b^2 - c^2} = \dfrac{b\sin(C - A)}{c^2 - a^2} = \dfrac{c\sin(A - B)}{a^2 - b^2}$

(v) $\dfrac{a + b}{a - b} = \tan\left(\dfrac{A + B}{2}\right)\cot\left(\dfrac{A - B}{2}\right)$.

8) ΔABC میں، ثابت کیجئے کہ $(a^2 - b^2 + c^2)\tan B = (a^2 + b^2 - c^2)\tan C$

9) ایک دیہات میں ایک انجینئر نے 120 m احاطہ والا مثلث نما پارک بنانا چاہتا ہے۔ زیادہ سے زیادہ رقبہ رکھنے والا پارک بناتا ہے تو اس پارک کے اضلاع کے ناپ معلوم کیجئے۔

10) 12m لمبائی والی ایک رسّی دی گئی ہے۔ اس رسی سے بننے والا مثلث کا سب سے بڑا رقبہ معلوم کیجئے اور اس مثلث کے ابعاد (dimensions) معلوم کیجئے۔

11) (i) سائن کا کلیہ (ii) کوسائن کا کلیہ سے پروجیکشن کا ضابطہ اخذ کیجئے۔

3.8 مثلث کے استعمالات (Applications of Triangle)

اکثر فن تعمیری اور انجینئرنگ میں کسی بھی پائیدار اور مضبوط تعمیر کے لئے مثلث کی مدد بے حد اہم ہے، تعمیرات میں مثلث ٹھیک زاویوں کو دریافت کرنے کے لئے علم مثلث استعمال ہوتا ہے۔ اسی طرح معمار (builders) علم مثلث کے نقطہ نظر سے منحنی ساخت (Curved structures) والے تعمیرات کا ٹھیک طور پر خاکہ (layout) بناتے ہیں۔ ایک مثلث قائمۃ الزاویہ کا کم از کم ضلع کے ساتھ SS, SA معلومات کافی ہیں۔ مثلث بقیہ عناصر کو دریافت کرنے کے لئے، لیکن ترچھا مثلث کا حل معلوم کرنے کے لئے ہمیں تین عناصر کے ساتھ کم از کم ایک ضلع درکار ہے۔ اگر کسی مثلث کے تین عناصر کے ساتھ ایک ضلع دیا گیا ہو تو سائن کا کلیہ کوسائن کا کلیہ، پرجیکشن کا ضابطہ کے استعمال سے بقیہ تین عناصر دریافت کر سکتے ہیں۔

حل دریافت کے قوانین (Working Rules)

- ایک مثلث قائمۃ الزاویہ میں دو اضلاع دئے گئے ہو تو مسئلہ فیثاغورث کو استعمال کر کے تیسرا ضلع معلوم کر سکتے ہیں۔ ایک مثلث قائمۃ الزاویہ میں ایک زاویہ، زاویہ حادہ ہو تو متمم (Complementary) زاویئے کے اصول کو اپنا کر دوسرا زاویہ دریافت کر سکتے ہیں۔
- اگر ایک مثلث کے تمام اضلاع دئے گئے ہو تو ہم کوسائن کا ضابطہ یا آدھا۔ زاویہ کا ضابطہ کو استعمال کر کے مثلث کے تمام زاویوں کو محسوب کر سکتے ہیں
- کوئی دو زاویئے اور ان کا کوئی ایک مقابل کا ضلع دیا گیا ہو تو ہم سائن کا ضابطہ استعمال کر کے دوسرے اضلاع محسوب کر سکتے ہیں۔
- اگر ایک مثلث کوئی دو اضلاع اور ان کا درمیانی زاویہ دیا گیا ہو تو ہم سائن کا کلیہ استعمال نہیں کر سکتے لیکن ہم کوسائن کا کلیہ استعمال کر کے تیسرا ضلع اور دوسرے دو زاویئے دریافت کر سکتے ہیں۔ اس صورت حال میں ترچھا مثلث ہوگا۔
- ترچھا مثلث حل کرنے کے لئے تمام طریقوں میں کم از کم ایک ضلع کی لمبائی دیا جانا ضروری ہے۔

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:21:00 AM

مندرجہ ذیل جدول میں ترچھا مثلث حل کرنے کے قوانین کا خلاصہ دیا گیا ہے۔

ترچھا مثلث (تمام زاویئے، حادہ ہیں۔ یا ایک منفرجہ زاویہ ہے)	دیئے گئے معلومات				
	SAA	SSA*	SAS	SSS	AAA
حل کرنے کا طریقہ اور تفصیلات	سائن کا کلیہ	# غیر واضح شک پیدا ہوتا ہے۔	دیا گیا زاویہ، درمیانی زاویہ ہونا چاہئے: کوسائن کا کلیہ یا ٹینجنٹ کا ضابطہ	کوسائن کا کلیہ: پہلے سب سے بڑا زاویہ معلوم کرنا	لاتعداد مثلثیں

زاویہ، درمیانی زاویہ نہ ہو تو ایک سے زیادہ مثلث ہو سکتے ہیں۔ سائن کے کلیے کے استعمال سے تین طرح حل ہو سکتے ہیں:
حل نہیں یا ایک مثلث یا دو مثلثیں
فرض کرو کہ a, b, A جانتے ہیں تو $h = b\sin A$ ہوگا۔ اگر $a < h$ ہو تو کوئی مثلث نہیں بنے گا۔ اگر a = h ہو تو یہ ایک مثلث قائمۃ الزاویہ ہے۔
اگر a > h اور a < h ہو تو ہمیں دو مثلثیں حاصل ہوتے ہیں۔ اگر $a \geq b$ ہو تو صرف ایک مثلث حاصل ہوگا۔
* کا مطلب ضلع (side) ضلع اور زاویہ (angle) ہے۔

مثال 3.64 ایک ΔABC میں a = 3، b = 5، c = 7 ہے۔ $\cos A,\ \cos B$ اور $\cos C$ کی قیمتیں معلوم کیجئے۔

حل : کوسائن کے ضابطہ کے تحت،

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{5^2 + 7^2 - 3^2}{2(5)(7)} = \frac{13}{14}$$

$$\cos B = \frac{11}{14}, \quad \cos C = -\frac{1}{2}. \quad \text{اسی طرح}$$

مثال 3.65 ΔABC میں $A = 30°,\ B = 60°$ اور $c = 10$ ہے۔ a اور b معلوم کیجئے۔

حل : دیا گیا ہے کہ $A = 30°, B = 60°, C = 180° - (A + B) = 90°$

سائن کے ضابطہ کے استعمال سے $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$$\frac{a}{\sin 30°} = \frac{b}{\sin 60°} = \frac{10}{\sin 90°}$$

$$a = \frac{10\sin 30°}{\sin 90°} = \frac{10\left(\frac{1}{2}\right)}{1} = 5$$

$$b = \frac{10\sin 60°}{\sin 90°} = \frac{10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1} = 5\sqrt{3}.$$

مثال 3.66 ایک ΔABC میں، اگر، $a = 2\sqrt{2}$ ، $b = 2\sqrt{3}$ اور $C = 75°$ تیسرا ضلع اور زاویئے معلوم کیجئے۔

حل: دیا گیا ہے $a = 2\sqrt{2}$ ، $b = 2\sqrt{3}$ اور $C = 75°$

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:21:00 AM

کوسائن کا ضابطہ استعمال سے، $\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$$\cos 75^\circ = \frac{8+12-c^2}{8\sqrt{6}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{8+12-c^2}{8\sqrt{6}} \Rightarrow c = \sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$$

لہٰذا، $A = 60^\circ,\ B = 180^\circ - (A+C) = 45^\circ$ مزید، $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{1}{\sqrt{2}},$

مثال 3.67 مثلث کا رقبہ معلوم کیجئے۔ جس کے اضلاع 13 cm، 14 cm ، 15 cm ہیں۔

حل: ہم جانتے ہیں، $s = \dfrac{a+b+c}{2} \Rightarrow s = \dfrac{13+14+15}{2} = 21\ cm.$

مثلث کا رقبہ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

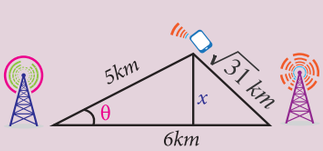
$= \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = 84$ sq.cm.

مثال 3.68 کسی ΔABC میں، ثابت کیجئے۔ $a\cos A + b\cos B + c\cos C = \dfrac{8\triangle^2}{abc}$

حل: ہم جانتے ہیں، $a\cos A + b\cos B + c\cos C = 2a\sin B\sin C$

لہٰذا، $a\cos A + b\cos B + c\cos C = 2a\left(\dfrac{2\triangle}{ac}\right)\left(\dfrac{2\triangle}{ab}\right) = \dfrac{8\triangle^2}{abc}$

مثال 3.69



خاکہ 3.24

فرض کریں کہ دو سیل فون ٹاورس ایک سیل فون کے حد (range) کے اندر آتے ہیں، ایک سیدھی شاہراہ پر دونوں ٹاورس واقع ہیں، جو مشرق سے مغرب کی جانب ہیں۔ ان کا درمیانی فاصلہ 6 km ہے اور سیل فون شاہراہ کے شمال میں ہے، پہلے ٹاور سے سگنل کا فاصلہ 5 km ہے اور دوسرے ٹاور سے سگنل کا فاصلہ $\sqrt{31}$ km ہے۔ سیل فون کا مقام (position) معلوم کیجئے جو پہلے ٹاور کے شمال اور مشرق میں واقع ہے اور یہ شاہراہ سے کتنے فاصلے پر ہے۔

حل: θ سیل فون کا مقام ہے جو پہلے ٹاور کے شمال سے مشرقی واقع ہے تو کوسائن کے ضابطے کے استعمال سے، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\left(\sqrt{31}\right)^2 = 5^2 + 6^2 - 2\times 5\times 6\cos\theta$$
$$31 = 25 + 36 - 60\cos\theta$$
$$\cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

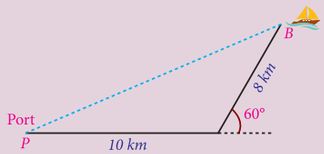
فرض کریں کہ x شاہراہ سے سیل فون کے مقام کا فاصلہ ہے۔ تو،

$$\sin\theta = \frac{x}{5} \Rightarrow x = 5\sin\theta = 5\sin 60^\circ = \frac{5\times\sqrt{3}}{2}\ km.$$

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:21:00 AM

مثال 3.70

فرض کریں کہ ایک کشتی، بندرگاہ سے 10 km دوری پر مشرق کی جانب چل رہی ہے اس کے بعد وہ 60° زاویہ پر بائیں جانب موڑتی ہے۔اور مزید 8 km چلتی ہے۔ بندرگاہ سے کشتی کا فاصلہ معلوم کیجئے۔



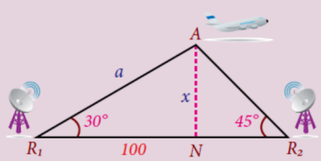
خاکہ 3.25

حل: مطلوب فاصلہ BP ہے، کوسائن ضابطہ استعمال کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$BP^2 = 10^2 + 8^2 - 2 \times 10 \times 8 \times \cos 120° = 24 \text{ km} \quad \Rightarrow \quad BP = 2\sqrt{61} \text{ km}$$

مثال 3.71

فرض کریں دو ریڈار اسٹیشن (Radar station) کا درمیانی فاصلہ 100 km ہے۔ ہر ایک ریڈار ان کے درمیانی ایک جنگی ہوائی جہاز کا انکشاف کرتا ہے۔ پہلے اسٹیشن سے زاویہ فراز (Angle of elevation) کی پیمائش 30° ہے، جبکہ دوسرے اسٹیشن سے زاویہ فراز سے پیمائش 40° ہے۔اس صورت میں جنگی ہوائی جہاز کا ارتفاع (اونچائی) معلوم کیجئے۔



خاکہ 3.26

حل: R_1 اور R_2 دو ریڈار اسٹیشن ہیں۔انکشاف کے وقت جنگی ہوائی جہاز کا مقام A ہے۔ x زمین اور جنگی ہوائی جہاز کا درمیانی فاصلہ ہے۔ کو A سے R_1R_2 تک ایک عمودی خط کھینچئے $AN \perp$ جو N پر ملتی ہے۔

$$\angle A = 180° - (30° + 45°) = 105°$$

لہٰذا، $$\frac{a}{\sin 45°} = \frac{100}{\sin 105°} \Rightarrow a = \frac{100}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{200\ (\sqrt{3}-1)}{2} = 100 \times (\sqrt{3}-1) \text{ km}$$

اب $$\sin 30° = \frac{x}{a} \Rightarrow x = 50 \times (\sqrt{3}-1) \text{ km}$$

مشق 3.10

1) جانچئے کہ کیا $a = 4, b = 2, \angle B = 88°$ ان پیمائشوں سے ایک مثلث، دو مثلثیں بنا سکتے ہیں، یا کوئی مثلث نہیں بنا سکتے۔ اگر مثلث بنا سکتے ہیں تو اس کا حل معلوم کیجئے۔
2) اگر ایک ΔABC کے اضلاع $a=4, b=6, C=8$ ہیں، تو ثابت کیجئے کہ $4\cos B + 3\cos C = 2$ ہے۔
3) ایک ΔABC میں، اگر $a = \sqrt{3}-1, b = \sqrt{3}+1$ اور $C = 60°$ ہو تو تیسرا ضلع اور دوسرے دو زاویئے معلوم کیجئے۔
4) کسی ΔABC میں، ثابت کیجئے رقبہ $\Delta = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4 \cot A}$ ہے۔
5) ایک ΔABC میں، اگر $a = 12, b = 8$ اور $c = 30°$ ہو تو ثابت کیجئے کہ اس کا رقبہ 24 مربع سم ہے۔
6) ایک ΔABC میں، اگر $a = 18 \text{ cm}, b = 24 \text{ cm}$ اور $c = 30 \text{cm}$ ہو تو ثابت کیجئے کہ اس کا رقبہ 216 مربع سم ہے۔
7) ایک خط مستقیم سڑک پر A اور B دو سپاہیاں دو الگ الگ زیر زمین بنکر (Bunker) میں چھپے ہوئے ہیں۔ وہ ایک دشمن کو پہاڑ کے اوپری حصّے میں دیکھتے ہیں۔ A اور B سے دشمن کو دیکھنے کے زاویئے مشرقی جانب بالترتیب 30° اور 45° ہیں۔ اگر A اور B کا درمیانی فاصلہ 5 km ہو تو B سے دشمن کا فاصلہ معلوم کیجئے۔
8) ایک محقق (researcher) ایک تالاب کی چوڑائی کو مشرق سے مغرب کے جانب ناپنا چاہتا ہے، جس کو حسب معمولی طریقے سے دریافت نہیں کر سکتے ہیں۔ نقطہ P سے تالاب کا انتہائی مشرقی نقطہ کا فاصلہ 8 km ہے۔ جبکہ P سے انتہائی مغربی نقطہ کا فاصلہ 6 km ہے۔ اگر دو خطوط بصارت کا درمیانی زاویہ (line of sight) 60° ہو تو تالاب کی چوڑائی معلوم کیجئے۔

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:21:01 AM

9) ایک گمشدہ کشتی کو تلاش کرنے کے لئے دو بحری ہیلی کاپٹرس A اور B خلیج بنگال کے سطح سمندر سے ایک ہی اونچائی پر پرواز کر رہے ہیں۔ ہیلی کاپٹر کے دونوں پائلٹ ایک ہی وقت کشتی کو دیکھتے ہیں اور وہ ایک دوسرے سے 10 km دوری پر ہیں۔ A سے کشتی کا فاصلہ 6 km ہے اور اگر AB قطاع خط کشتی پر بننے والا زاویہ 60° ہے تو B سے کشتی کا فاصلہ دریافت کیجئے۔

10) ایک پہاڑ میں سُرنگ (tunnel) بنانے کے دوران اراضی کا معائنہ کرنے والا غور کرتا ہے۔ پہاڑ کے سامنے ایک نقطہ P سے سرنگ کے دو کنارے A اور B ہیں۔ اگر $AP = 3km,\ BP = 5\ km$ اور $\angle APB = 120°$ ہو تو سرنگ کی لمبائی معلوم کیجئے۔

11) ایک کسان مثلث نما زمین خریدنا چاہتا ہے۔ جس کے اضلاع 120 فٹ اور 60 فٹ ہیں۔ اور ان دو اضلاع درمیانی زاویہ 60° ہے۔ اگر زمین کی قیمت ₹500 فی مربع میٹر ہو تو زمین خریدنے کی کل قیمت دریافت کیجئے اور زمین کا احاطہ بھی معلوم کیجئے۔

12) ایک لڑاکو ہوائی جہاز افقی طور پر پرواز کر کے ایک چھوٹے ہدف (target) کو حملہ کرنا چاہتا ہے۔ جب پائلٹ ہدف کو دیکھتا ہے تو اس کا زاویہ نشیب (Angle of depression) 30° ہے۔ اگر 100 km کے بعد ہدف کا زاویہ نشیب 60° ہو تو لڑاکو ہوائی جہاز سے ہدف کا فاصلہ معلوم کیجئے۔

13) ایک ہوائی جہاز ایک امتیازی نشان (land mark) سے 1 km دور پرواز کرتا ہے۔ اسی وقت دوسرے امتیازی نشان کا فاصلہ 2 km ہے۔ ہوائی جہاز سے دونوں امتیازی نشانوں کا درمیانی زاویہ 45° ہے۔ دونوں امتیازی نشانوں کا درمیانی فاصلہ معلوم کیجئے۔

14) ایک آدمی اپنی صبح کی سیر کو نقطہ A سے شروع کرتا ہے۔ B اور C نقاط سے ہوتے ہوئے واپس نقطہ A کو پہنچتا ہے۔ ΔABC میں $AC = 4km\ , \angle B = 45°, \angle A = 60°$ ہیں تو آدمی سے صبح کی سیر سے طے کردہ فاصلہ معلوم کیجئے۔

15) دو سواریاں ایک ہی نقطہ P سے ایک ہی وقت پر دو مختلف سڑکوں پر روانہ ہوتے ہیں۔ پہلی سواری کی اوسط رفتار 60 kmph اور دوسری سواری کی اوسط رفتار 80kmph ہے۔ آدھا گھنٹے کے بعد سواریاں A اور B منزلوں کو پہنچتی ہیں۔ اگر ابتدائی نقطہ P سے AB کا زاویہ 60° ہو تو AB معلوم کیجئے۔

16) قیاس کریں کہ ایک مصنوعی سیارچہ (satellite) خلا میں ہے۔ زمین پر موجود اسٹیشن اور زمین کا مرکز ایک ہی سطح پر واقع ہیں۔ r زمین کا نصف قطر اور زمین کے مرکز سے مصنوعی سیارچہ کا فاصلہ لیتے ہیں۔ زمین کے اسٹیشن سے مصنوعی سیارچہ کا فاصلہ d ہے۔ زمین اسٹیشن سے مصنوعی سیارچہ کا زاویہ فراز 30° ہے۔ اگر زمین کے اسٹیشن اور مصنوعی سیارچہ جوڑنے والی قطاع کا خط زمین کے مرکز پر بننے والا زاویہ α ہو تو ثابت کیجئے کہ $d = R\sqrt{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2 - 2\frac{r}{R}\cos\alpha}$. ہے۔

3.9 معکوس علم مثلثی تفاعلات: (Inverse Trigonometric Functions)

ایک تفاعل $f(x)$ کا اگر صرف اور صرف 1-1 اور بروں تفاعل (onto functions) ہو تو اس کا معکوس تفاعل ہو سکتا ہے۔ اگر ایک تفاعل 1-1 کی شرط میں ناکام ہوتا ہے تو معکوس تفاعل کی تشریح نہیں کر سکتے ہیں۔ جب کہ اگر ہم علاقہ کو مناسب طور پر محدود کرتے ہیں تو ہم محدود علاقے میں تفاعل کو 1-1 تفاعل بنا سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر $y = x^2$ تمام حقیقی اعداد کے لئے ایک، ایک تفاعل نہیں ہے۔ لیکن $x \geq 0$ یا $x \leq 0$ کے لئے ایک۔ ایک اور بروں تفاعل ہے۔ لہٰذا، $y = x^2, x \geq 0$ کا معکوس $f^{-1}(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$ ہے۔ ان کے دورانیت کے باعث چھ علم مثلثی تفاعلات میں کوئی بھی 1-1 تفاعل نہیں ہو سکتے ہیں۔ ہم اُن علاقوں کو محدود کریں گے تا کہ علم مثلثی تفاعلات کو ایک۔ ایک لا سکے اور اس سے ان معکوس تفاعلات بھی واقع ہو سکتے ہیں۔ ان کے دورانیت کے سبب یہ پابندی مختلف طریقوں سے کر سکتے ہیں۔ محدود علاقوں کے لئے اختیاری قیمتیں (arbitary) روایتی طریقے سے منتخب کر سکتے ہیں۔ لیکن ان کے چند اہم خصوصیات ہوتے ہیں۔ ہر محدود علاقہ میں عدد '0' بھی شامل ہوتا ہے اور بعض مثبت زاویئے ہوتے ہیں۔ خیال (image) کا محدود علاقہ میں مکمل وسعت (entire range) موجود ہوتی ہے۔ چلئے ہم سائن تفاعل کی معکوس کی تشریح کریں گے۔ فرض کریں کہ $f(x) = \sin x, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. ہے۔ تو اس محدود علاقہ میں ایک۔ ایک اور بروں تفاعل ہے۔ لہٰذا، سائن تفاعل کا معکوس واقع ہے۔ غور کریں کہ اگر اور صرف اگر $f^{-1}(y) = x$ ہو تو $f(x) = y$ ہوگا۔ کو اس طرح لکھیں۔ $f^{-1}(x) = \sin^{-1}(x)$. لہٰذا اگر اور صرف اگر $\sin^{-1}(y) = x$ ہو تو $\sin x = y$ ہوگا۔ اسی طرح سائن کے معکوس کی تشریح کرتے ہیں۔

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:21:01 AM

واضح طور پر $\sin x : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ اور $\sin^{-1} x : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ہوگا، $\sin^{-1} t$ ایک زاویہ ہے،
جس کا سائن t کے مساوی ہے۔ جو $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ میں واقع ہے۔ اسی طریقے کو اپنا کر دوسرے علم مثلثی تفاعلات کے معکوس کو دریافت کر سکتے ہیں۔
معکوس تفاعلات $\sin^{-1} x,\ \cos^{-1} x,\ \tan^{-1} x,\ \text{cosec}^{-1}(x),\ \sec^{-1}(x),\ \cot^{-1}(x)$ کو معکوس مدور تفاعلات کہتے ہیں۔
تفاعل کے لامحدود بہت سارے زاویئے x ہیں، جو $\sin x = t,\ -1 \le t \le 1$ کو پورا کرتے ہیں۔ ان لامحدود قیمتوں کا مجموعوں میں،
ان میں ایک ایسی قیمت ہے جو وقفہ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ میں واقع ہے۔
اس زاویہ کو اصل زاویہ کہتے ہیں۔ اس کو $\sin^{-1} t$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ ایک معکوس تفاعل کی اصل قیمت، ایک عام قیمت ہے جو عددی طور چھوٹی ہوتی ہے۔ یہ مثبت یا منفی قیمت ہوسکتی ہے۔ جب دو قیمتیں ہوں۔ ان میں ایک مثبت اور دوسری قیمت منفی ہو تو مثبت قیمت ہی اصل قیمت ہوگی۔
ہم مندرجہ ذیل میں، محدود علاقے علم مثلثی تفاعلات کے وسعتیں اور علاقے، معکوس تفاعلات کے وسعتیں کی تشریح کی گئی ہے۔

(i) $\sin x : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$; $\sin^{-1} x : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

(ii) $\cos x : [0, \pi] \to [-1, 1]$; $\cos^{-1} x : [-1, 1] \to [0, \pi]$

(iii) $\tan x : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to (\infty,\ \ \infty)$; $\tan^{-1} x : (\infty,\ \ \infty) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

(iv) $\cot x : (0, \pi) \to (\infty,\ \ \infty)$; $\cot^{-1} x : (\infty,\ \ \infty) \to (0, \pi)$

(v) $\text{cosec} x : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\} \to \mathbb{R} - (-1, 1)$; $\text{cosec}^{-1} x : \mathbb{R} - (-1, 1) \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$

(vi) $\sec x : [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \to \mathbb{R} - (-1, 1)$; $\sec^{-1} x : \mathbb{R} - (-1, 1) \to [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

i۔ $\sin^{-1} x$ کا مطلب $\frac{1}{\sin x}$ نہیں ہے۔

ii۔ Sir John FW Hershell (1813) نے $\sin^{-1} x$ کو $\arcsin x$ کی ترقیم سے ظاہر کیا۔

iii۔ معکوس سائن تفاعل کے بحث کے دوران ہم $y = \sin x, -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ اور $x = \sin^{-1} y, -1 \le y \le 1$ کے اندر محدود ہوتے ہیں۔

iv۔ معکوس تفاعل f^{-1} کی ترسیم، f ترسیم کا انعکاس ہوتا ہے خط $y = x$ پر، لہٰذا، اگر $(a, b) \in f$ ہو تو $(b, a) \in f^{-1}$ ہے۔

معکوس علم مثلثی تفاعلات کے اصل قیمتوں کی فہرست کو ذیل میں دیا گیا ہے۔

$x \ge 0$ کے لئے اصل قیمت	$x < 0$ کے لئے اصل قیمت
$0 \le \sin^{-1}(x) \le \frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2} \le \sin^{-1}(x) < 0$
$0 \le \cos^{-1}(x) \le \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < \cos^{-1}(x) \le \pi$
$0 \le \tan^{-1}(x) < \frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2} < \tan^{-1}(x) < 0$
$0 < \cot^{-1}(x) \le \frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2} < \cot^{-1}(x) < 0$
$0 \le \sec^{-1}(x) < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < \sec^{-1}(x) \le \pi$
$0 < \text{cosec}^{-1}(x) \le \frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2} < \text{cosec}^{-1}(x) < 0$

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:21:02 AM

i۔ معکوس علم مثلثی تفاعلات کے خصوصیات، ترسیمات اور مسئلوں کو ہائر سکنڈری کے دوسرے سال میں پڑھیں گے۔

ii۔ معکوس علم مثلثی تفاعلات، جزو تکمیلی (Integral) کی بعض قیمتوں کو جانچنے کے لئے بہت کارآمد ہیں۔اس کے بارے میں آگے پڑھیں گے۔

مثال 3.72 اصل قیمت معلوم کیجئے ۔ (i) $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, (ii) $\operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, (iii) $\tan^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$.

(i) فرض کریں $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = y$, جس میں، $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \sin y = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3} \Rightarrow y = \frac{\pi}{3}$$

$\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$ کی اصل قیمت

(ii) فرض کریں $\operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = y$, جس میں $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \operatorname{cosec} y = \frac{2}{\sqrt{3}} = \sin y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{3}$ کی اصل قیمت

(iii) فرض کریں $\tan^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = y$, جس میں $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

$$\tan y = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan y = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow y = -\frac{\pi}{6}$$

$\tan^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$. کی اصل قیمت

مشق 3.11

1) اصل قیمت معلوم کیجئے۔ (i) $\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$ (iii) $\operatorname{cosec}^{-1}(-1)$ (iv) $\sec^{-1}\left(-\sqrt{2}\right)$ (v) $\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)$.

2) ایک آدمی x میٹر چوڑائی والے سڑک کے ایک جانب سے ٹھیک دوسرے جانب موجود مدور شکل کا ہراٹریفک سگنل دیکھتا ہے جس کا قطر a میٹر ہے۔اس شخص کی خط بصارت سے ہراسگنل کے نچلے حصّے کی اونچائی b میٹر ہے۔اگراس شخص کی آنکھ سے قطر کا درمیانی زاویہ α ہے تو ثابت کیجئے کہ

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{a+b}{x}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{b}{x}\right).$$

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:21:02 AM

3.12 مشق

صحیح جواب منتخب کیجئے۔

(1 $\frac{1}{\cos 80^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\sin 80^\circ} =$

(1) $\sqrt{2}$ (2) $\sqrt{3}$ (3) 2 (4) 4

(2 اگر $\cos 28^\circ + \sin 28^\circ = k^3$ $\cos 17^\circ$ اس کے مساوی ہے۔

(1) $\frac{k^3}{\sqrt{2}}$ (2) $-\frac{k^3}{\sqrt{2}}$ (3) $\pm\frac{k^3}{\sqrt{2}}$ (4) $-\frac{k^3}{\sqrt{3}}$

(3 $4\sin^2 x + 3\cos^2 x + \sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت ہے۔

(1) $4 + \sqrt{2}$ (2) $3 + \sqrt{2}$ (3) 9 (4) 4

(4 $\left(1 + \cos\frac{\pi}{8}\right)\left(1 + \cos\frac{3\pi}{8}\right)\left(1 + \cos\frac{5\pi}{8}\right)\left(1 + \cos\frac{7\pi}{8}\right) =$

(1) $\frac{1}{8}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (4) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(5 اگر $\pi < 2\theta < \frac{3\pi}{2}$, ہوتو $\sqrt{2 + \sqrt{2 + 2\cos 4\theta}}$ اس کے مساوی ہے۔

(1) $-2\cos\theta$ (2) $-2\sin\theta$ (3) $2\cos\theta$ (4) $2\sin\theta$

(6 اگر $\tan 40^\circ = \lambda$ ہوتو $\frac{\tan 140^\circ - \tan 130^\circ}{1 + \tan 140^\circ \tan 130^\circ} =$

(1) $\frac{1-\lambda^2}{\lambda}$ (2) $\frac{1+\lambda^2}{\lambda}$ (3) $\frac{1+\lambda^2}{2\lambda}$ (4) $\frac{1-\lambda^2}{2\lambda}$

(7 $\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cos 3^\circ + \ldots + \cos 179^\circ =$

(1) 0 (2) 1 (3) -1 (4) 89

(8 فرض کریں $f_k(x) = \frac{1}{k}\left[\sin^k x + \cos^k x\right]$ جہاں، $x \in R$ اور $k \geq 1$ ہوتو $f_4(x) - f_6(x) =$

(1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{1}{12}$ (3) $\frac{1}{6}$ (4) $\frac{1}{3}$

(9 مندرجہ ذیل میں کونسا صحیح نہیں ہے؟

(1) $\sin\theta = -\frac{3}{4}$ (2) $\cos\theta = -1$ (3) $\tan\theta = 25$ (4) $\sec\theta = \frac{1}{4}$

(10 $\cos 2\theta \cos 2\phi + \sin^2(\theta - \phi) - \sin^2(\theta + \phi)$ کی قیمت یہ ہے۔

(1) $\sin 2(\theta + \phi)$ (2) $\cos 2(\theta + \phi)$ (3) $\sin 2(\theta - \phi)$ (4) $\cos 2(\theta - \phi)$

(11 $\frac{\sin(A-B)}{\cos A \cos B} + \frac{\sin(B-C)}{\cos B \cos C} + \frac{\sin(C-A)}{\cos C \cos A}$ کی قیمت یہ ہے۔

(1) $\sin A + \sin B + \sin C$ (2) 1 (3) 0 (4) $\cos A + \cos B + \cos C$

(12 اگر $\cos p\theta + \cos q\theta = 0$ اور اگر $p \neq q$ ہوتو θ مساوی ہے۔ (n کوئی سالم عدد ہے)

(1) $\frac{\pi(3n+1)}{p-q}$ (2) $\frac{\pi(2n+1)}{p \pm q}$ (3) $\frac{\pi(n \pm 1)}{p \pm q}$ (4) $\frac{\pi(n+2)}{p+q}$

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:21:02 AM

13) اگر $x^2+ax+b=0$ کے جذور $\tan\alpha$ اور $\tan\beta$ ہوں تو $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$ اس کے مساوی ہے۔

(1) $\frac{b}{a}$ (2) $\frac{a}{b}$ (3) $-\frac{a}{b}$ (4) $-\frac{b}{a}$

14) ایک مثلث میں $ABC, \sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2$ ہوتو یہ مثلث ہے۔

1) مثلث مساوی الاضلاع 2) مثلث مساوی الساقین

3) مثلث قائمۃ الزاویہ 4) مثلث مختلف الاضلاع

15) اگر $f(\theta)=|\sin\theta|+|\cos\theta|, \theta\in R$ ہوتو $f(\theta)$ اس وقفہ میں ہے۔

(1) $[0,2]$ (2) $\left[1,\sqrt{2}\right]$ (3) $[1,2]$ (4) $[0,1]$

16) $\frac{\cos 6x+6\cos 4x+15\cos 2x+10}{\cos 5x+5\cos 3x+10\cos x}$ اس کے مساوی ہے۔

(1) $cos2x$ (2) $\cos x$ (3) $\cos 3x$ (4) $2\cos x$

17) 12m مستقل احاطہ والے مثلث زیادہ سے زیادہ رقبہ ہے۔

1) 4m ضلع والا مثلث مساوی الاضلاع

2) 2m, 5m, 5m اضلاع والا مثلث مساوی الساقین

3) 3m, 4m, 5m اضلاع والا ایک مثلث

4) کوئی مثلث نہیں بنتا ہے۔

18) ایک پہیہ (wheel) فی سکنڈ میں 2 ریڈین چکر لگاتا ہے۔10 چکروں کو مکمل کرنے کے لئے کتنے سکنڈ ہوں گے۔

(1) 10π seconds (2) 20π seconds (3) 5π seconds (4) 15π seconds

19) اگر $\sin\alpha+\cos\alpha=b$ ہوتو $\sin 2\alpha$ اس کے مساوی ہے۔

(1) $b^2-1,\ \text{if } b\le\sqrt{2}$ (2) $b^2-1,\ \text{if } b>\sqrt{2}$ (3) $b^2-1,\ \text{if } b\ge 1$ (4) $b^2-1,\ \text{if } b\ge\sqrt{2}$

20) ایک $\triangle ABC$ میں، اگر (i) $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}>0$ (ii) $\sin A\sin B\sin C>0$ ہوتو

1) (i) اور (ii) دونوں صحیح ہیں۔

2) صرف (i) صحیح ہے

3) صحیح (ii) ہے۔

4) نہ (i) اور نہ ہی (ii) صحیح ہے۔

خلاصہ

حاصل جمع اور فرق کے تماثلات (ٹالیمی تماثلات)

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta;\ \sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta};\quad \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:21:02 AM

دگنا، تگنا اور آدھا۔زاویہ کے تماثلات

sine	cosine	Tangent
$\sin 2A = 2\sin A\cos A$	$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$	$\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$
$\sin 2A = \dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$	$\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$	$\tan 3A = \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$
$\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$	$\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$	
	$\cos 2A = \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$	
	$\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$	
$\sin\theta = 2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$	$\cos\theta = \cos^2\dfrac{\theta}{2} - \sin^2\dfrac{\theta}{2}$	$\tan\theta = \dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$
$\sin\theta = \dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$	$\cos\theta = 2\cos^2\dfrac{\theta}{2} - 1$	
	$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\dfrac{\theta}{2}$	

علم مثلثی مساوات	عام حل
$\sin\theta = \sin\alpha$, جس میں $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$\theta = n\pi + (-1)^n\alpha, n \in \mathbb{Z}$
$\cos\theta = \cos\alpha$, جس میں $\alpha \in [0, \pi]$	$\theta = 2n\pi \pm \alpha, n \in \mathbb{Z}$
$\tan\theta = \tan\alpha$, جس میں $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$\theta = n\pi + \alpha, n \in \mathbb{Z}$

سائن کا کلیہ	کوسائن کا کلیہ	ٹینجنٹ کا کلیہ
$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R.$	$\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc};$ $\cos B = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac};$ $\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$	$\tan\dfrac{A-B}{2} = \dfrac{a-b}{a+b}\cot\dfrac{C}{2}$ $\tan\dfrac{B-C}{2} = \dfrac{b-c}{b+c}\cot\dfrac{A}{2}$ $\tan\dfrac{C-A}{2} = \dfrac{c-a}{c+a}\cot\dfrac{B}{2}$

ایک ΔABC سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

(i) $a = b\cos C + c\cos B$, $b = c\cos A + a\cos C$ and $c = a\cos B + b\cos A$ (پروجیکشن کا ضابطہ)

(ii) $\triangle = \dfrac{1}{2}ab\sin C = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}ac\sin B$ (مثلث کا رقبہ)

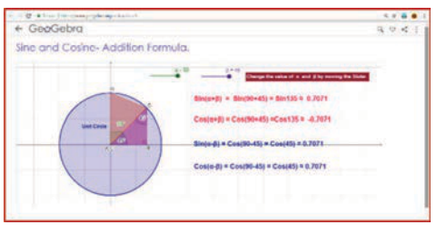
(iii) $\triangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

(iv) $\sin\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}}$, $\cos\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}}$, $\tan\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$

جس میں s مثلث ABC کا آدھا احاطہ ہے۔ $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ [آدھا زاویہ ضابطہ]

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:21:03 AM

ICT کارنر 3(a)



مطلوبہ نتیجہ ⇐

مرحلہ 1

براؤزر کھولئے اور دئے گئے لنک یا URL کو ٹائپ کیجئے یا QR کوڈ کو اسکین کیجئے۔

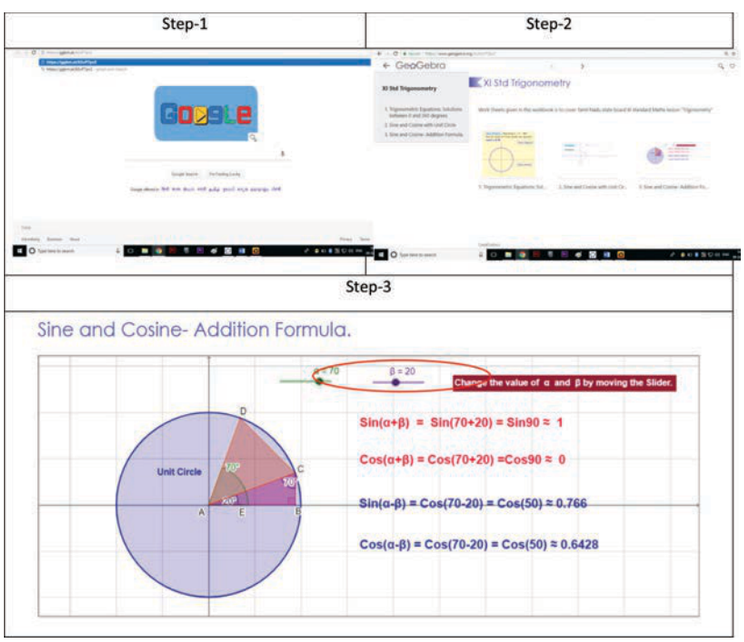
مرحلہ 2

ورک بک نظر آئے گا جس کا نام XI Standard Trigonometry ہوگا۔ اس میں علم مثلث کے مختلف اُصولوں ورک شیٹ نظر آئیں گے۔ تمہاری پسند کا ورک شیٹ انتخاب کریں۔ مثال کے طور پر Sine and Cosine addition formula کھولئے۔

مرحلہ 3

α اور β کی قیمتوں میں تبدیل کرنے کے لئے slider کو حرکت دیں۔ خاکے میں زاویئے تبدیل ہوتے ہیں اور اسی کے مطابق حاصل جمع کی قیمتیں بھی تبدیل ہوتے ہیں۔

ہر ایک قیمت پر غور کیجئے اور ضابطوں کو استعمال کر کے نتائج کو جانچئے۔ اسی طرح دوسرے ورک شیٹ کھول کر نسبت اور اکائی دائرہ وغیرہ کو جانچئے۔



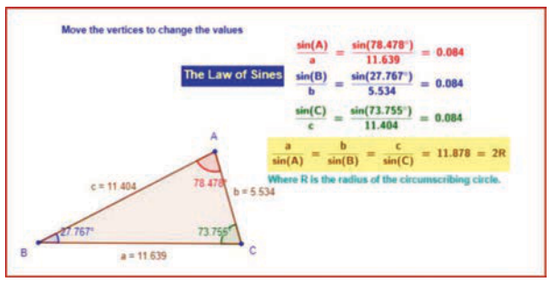
S42ZV

Observe for each value and calculate by formulae and check the results. Similarly Open and check other work sheets for Ratios and Unit circle etc..
*Pictures are only indicatives.

Browse in the link XI Std Trigonometry GeoGebra Work book: https://ggbm.at/k5vP7pv2

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:21:03 AM

3(b) کارز ICT

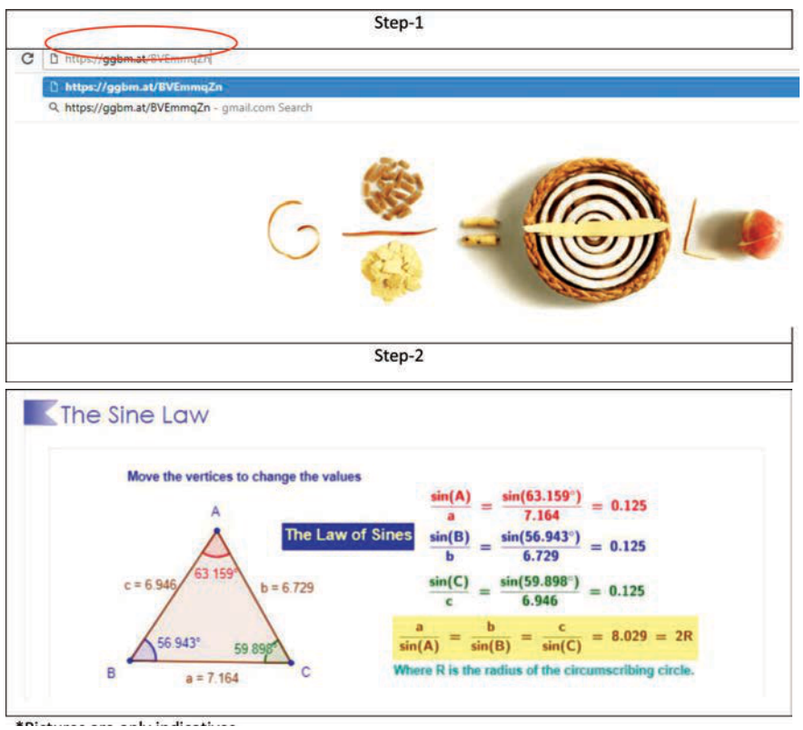


مطلوبہ نتیجہ ⇐

مرحلہ 1 : براؤزر کھولئے اور دئے گئے لنک یا URL کو ٹائپ کیجئے یا QR کوڈ کو اسکین کیجئے۔

مرحلہ 2 : جیوجبرا ورک بک نظر آئے گا۔ جس کا نام The Sine Law ہوگا۔ اِس ورک شیٹ میں A, B اور C راسیں اور a,b,c اضلاع والا مثلث نظر آئے گا۔ مثلث کی جسامت کم کرنے کے لئے راسوں کو حرکت دیں۔

کسی مثلث کے لئے سائن کا کلیہ بحال رکھا جاتا ہے۔ اور اسکرین کے دائیں جانب کاروائی نظر آئی گی۔



N9LR0

*Pictures are only indicatives.

Browse in the link The Sine Law- GeoGebra Work sheet:
https://ggbm.at/BVEmmqZn

11 maths v1 unit 3 UM Trigonometry
Tuesday, September 27, 2022 8:21:03 AM

باب 4

تالیفیات اور حسابی امالیت

COMBINATORICS AND MATHEMATICAL INDUCTION

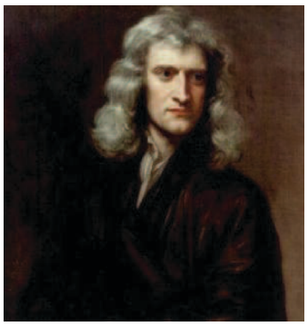
''کوئی بھی ایجاد ایک بڑی سوچ کے بغیر نہیں ہوتی'' سر اسحاق نیوٹن

No great discovery was ever made without a bold guess - **Newton**

4.1۔ تعارف :

حساب کی ایک شاخ تالیفیات ہے جو گنتی سے متعلق ہے۔ یہ اشیاء کی ترتیب کے ساتھ ساتھ گنتی سے متعلق ہے۔ یعنی مخصوص خصوصیات والی اشیاء کی گنتی۔ ان مضامین کی بنیادی کھوج 2800BC(BCE) تک کی جاسکتی ہے جب یہ طلسمی مربع اور نمونوں کے مطالعہ کرنے کے لئے استعمال ہوتا تھا۔ انگریزی طبیعیات دان اور ریاضی دان سر اسحاق نیوٹن اپنے کشش ثقل کے قانون کے لئے مشہور ہیں۔ 17 ویں صدی کے سائنسی انقلاب میں ان کا معاون رہا۔ ''نمونوں کی استقامت'' پر نیوٹن کا یقین ان کی پہلی اہم ریاضیاتی انکشاف کا باعث بنا۔ دورقمی اظہارات کی توسیع کو عام کرنا۔

نیوٹن نے دورقمی مسئلہ دریافت کی جس کا انہوں نے مدعی یہ کیا کہ منحنی خط Quadrature of curves کو حل کرنے کا سب سے آسان طریقہ ہے۔ یہ انکشاف امکان کو سمجھنے کے لئے ضروری ہے۔ مختلف متغیرات کے لئے عمومی کثیر رقمی کا مسئلہ، دورقمی مسئلہ بڑے پیمانے پر، ہر تالیفیات اور شماریات میں استعمال ہوتا ہے۔



سر اسحاق نیوٹن (1643-1727)

وہ کسری اشعاریات کو استعمال کرنے والے پہلے شخص تھے اور ڈیوفینٹائن (Diophantine) کے مساوات کے حل نکلنے کے لئے محددی علم ہندسہ کا استعمال کرتے تھے۔ انہوں نے ہم آہنگی سلسلہ (harmonic series) کی جزوی جمع کو لوگارسم (یولر کے جمع سازی کا ضابطہ سے پہلے) کے ذریعے اندازہ لگایا اور طاقتی سلسلہ کو اعتماد کے ساتھ استعمال کرنے اور طاقتی سلسلہ کو پھرنے والے پہلے شخص تھے۔ لامحدود سلسلہ پر نیوٹن کی محنت سائمن اسٹیون کے اعشاریہ سے متاثر تھا۔

1705ء میں، انہیں انگلینڈ کی ملکہ انے نے سر کا خطاب سے نوازا جس سے وہ سر اسحاق نیوٹن بن گئے۔ ریاضی دان لبنٹز کے ساتھ، نیوٹن نے کیلکولس کی بنیادی اصلوں کا انکشاف کرنے پر مضمر ہے۔

تالیفیات میں حقیقی زندگی کی بہت سی مشغولیت ہیں جہاں اشیاء کی گنتی شامل ہے۔ مثال کے طور پر، ہمیں یہ جاننے میں دلچسپی ہوسکتی ہے کہ آیا طلب کو پورا کرنے کے لئے کافی موبائل نمبر یا کمپیوٹر سسٹم کی کئی پاس ورڈز بنائی جاسکتی ہیں۔ یہ گنتی کی تکنیک اور بیش کارکردگی کے طریقوں سے متعلق ہے۔ یعنی متعلقہ طریقے سے ایک حقیقی مسئلوں میں سے کئی امکانات کے درمیان مناسب ممکن حل تلاش کرنا۔ اس باب میں ہم اشیاء کی ترتیب یا غیر ترتیب انتظامات کے لحاظ سے گنتی کے سوالوں کا مطالعہ کریں گے۔ ان انتظامات کو مبادلہ اور اجتماع کہا جاتا ہے۔ تالیفیات بڑے پیمانے میں نیٹ ورک سیکورٹی اور امکان کے گنتی کے سوالوں میں استعمال ہوتے ہیں۔ ہم ان کی خصوصیات کو دریافت کریں گے اور انہیں گنتی کے سوالوں پر استعمال کریں گے۔

ایک اور صورت حال پر غور کریں۔ ہم سب جانتے ہیں کہ ہمارے بجلی کے صارفین کا کارڈ نمبر A:B:C ہے۔ جہاں A برقی سب اسٹیٹس / بڑی مقدار والے ٹرانسفارمر کے نمبر کو ظاہر کرتا ہے، اور C صارفین کے نمبر کو ظاہر کرتا ہے۔ ٹرانسفارمر B کم برقی مقدار والے ٹرانس فارمر کے نمبر کو ظاہر کرتا ہے۔ ٹرانس فارمر کی زیادہ سے زیادہ تعداد پر پابندیاں ہوسکتی ہیں جو ہر سب اسٹیٹس سے رابطہ ہوسکتی ہیں اور صارفین کی زیادہ سے زیادہ تعداد

192
Wednesday, September 28, 2022 9:17:54 PM

جو ہر ٹرانسفارمر سے رابطہ ہوسکتی ہے۔

یہ جاننے کے لئے کہ جب کسی نئے ٹرانسفارمر یا سب اسٹیشن کھڑا کرنے کی ضرورت ہوئی ہے تو یہ شمار کرنا ضروری ہوتا ہے کہ کتنے صارفین اس ٹرانسفارمر یا سب اسٹیشن سے جڑے ہوئے ہیں۔ یہ گنتی کیسے حاصل کی جائے؟ گنتی کے اصولوں کے استعمال سے یہ گنتی آسانی سے حاصل ہوسکتی ہے۔

اس باب میں ہم تفصیل سے سیکھیں گے کہ گنتی کے عمل کو مبادلہ اور اجتماع کے ذریعے گنتی کے بنیادی اصولوں سے کیسے شروع کیا جاتا ہے۔

سیکھنے کے مقاصد:

اس باب کی تکمیل پر طلباء درجہ ذیل کے قابل بن جائیں گے

- گنتی کے بنیادی اصولوں کو مختلف حالات میں استعمال کیسے کیا جاسکتا ہے۔
- گنتی کے مختلف اشیاء کو کیسے ترتیب دیا جاسکتا ہے۔
- اگر مجموعہ میں یکساں اشیاء ہو تو اشیاء کو کتنے طریقوں سے ترتیب دیا جاسکتا ہے۔
- مختلف اشیاء کے مجموعے کے اجتماع کی تعداد معلوم کرنے کے لئے حکمت عملی کا شمار اور استعمال کیسے کریں
- حسابی امالیت کے اصولوں کے استعمالات ہم اس حصے سے باب کو شروع کریں گے۔

4.2۔ گنتی کا بنیادی اصول (Fundamental principles of counting)

1۔ جمع کا اصول (The sum rule): فرض کریں دو کام ہیں جس کو مکمل کرنے کی ضرورت ہے۔ اگر پہلا کام M مختلف طریقوں سے اور دوسرا N مختلف طریقوں سے مکمل کر سکتے ہیں اور اگر یہ بیک وقت انجام نہیں دیا جاسکتا تو پھر دونوں کام کرنے کے لئے $M+N$ طریقے ہیں۔ یہ گنتی کے جمع کا اصول ہے۔

مثال 4.1: فرض کریں کہ ایک لڑکی یا ایک لڑکے کو کلاس کے 17 لڑکوں اور 29 لڑکیوں میں سے مقابلے کے لئے منتخب کرنا ہے۔ کتنے طریقوں سے یہ انتخاب کیا جاسکتا ہے۔

حل: لڑکی کو منتخب کرنے کا پہلا کام جسے 29 طریقوں سے کیا جاسکتا ہے۔ لڑکے کو منتخب کرنے کا دوسرا کام جسے 17 طریقوں سے کیا جاسکتا ہے۔ یہ جمع کے اصول کے مطابق ہے، یہ انتخاب کرنے کے 17+29=46 طریقے ہیں۔

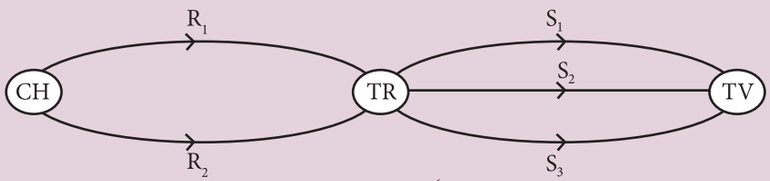
جمع کے اصول کو دو سے زیادہ کاموں تک بڑھایا جاسکتا ہے۔ اس طرح اگر کوئی غیر ہم عصر کام $T_1, T_2, T_3, \cdots, T_n$ ہیں، جو بالترتیب $m_1, m_2, \cdots, m_n$ طریقوں سے انجام دئے جاسکتے ہیں تو ان کاموں میں سے کوئی ایک کام کرنے کے طریقوں کی تعداد $m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ ہے۔

2۔ ضرب کا اصول: (The product rule) فرض کریں کہ ایک کام دو طریقہ عمل پر مشتمل ہے۔ اگر پہلا طریقہ عمل M مختلف طریقوں سے مکمل کیا جاسکتا ہے اور پہلے طریقے کے بعد دوسرا طریقہ عمل N مختلف طریقوں سے کیا جاسکتا ہے تو کام مکمل کرنے کے طریقوں کی کل تعداد $M \times N$ ہے۔

مثال 4.2: فرض کریں، تین شہر چنئی، ترچی اور ترونلویلی ہیں۔ چنئی سے ترونلویلی پہنچنے کے لئے ترچی سے گزرنا پڑتا ہے۔ یہاں 2 سڑکیں ہیں، جو چنئی کو ترچی سے جوڑتی ہیں اور 3 سڑکیں ہیں جو ترچی کو ترونلویلی سے جوڑتی ہیں۔ چنئی سے ترونلویلی تک کتنے راستوں سے جاسکتے ہیں؟

192
Wednesday, September 28, 2022 9:17:55 PM

حل: چنئی سے ترچی کو جوڑنے والی 2 سڑکیں ہیں۔فرض کریں یہ R_1 اور R_2 ہیں۔مزید 3 سڑکیں ہیں، جو ترچی سے ترنل ویلی کو جوڑتی ہیں۔ آیئے ان کے نام S_1, S_2, S_3 رکھیں۔فرض کریں کہ کوئی شخص چنئی سے ترچی تک سفر کرنے کے لئے R1 کو چنتا ہے اور مزید 3 سڑکوں، S_1 S_2 یا S_3 میں سے کسی کو بھی ترچی سے ترونلویلی تک سفر کرنے کے لئے چن سکتا ہے۔اس طرح $(R_1, S_1), (R_1, S_2), (R_1, S_3)$. ممکن راستے ہیں۔اسی طرح اگر کوئی شخص چنئی سے ترچی تک سفر کرنے کے لئے R2 چنتا ہے تو ممکن راستے $(R_2, S_1), (R_2, S_2), (R_2, S_3)$. ہیں۔



خاکہ 4.1

لہذا، چنئی سے ترونل ویلی کے $2\times3=6$ طریقے ہیں۔

ضربی اصول کی توسیع مندرجۂ ذیل بیانات سے کی جاسکتی ہے۔

اگر کوئی کام **n** طریقہ عمل $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n$ پر مشتمل ہے جو بالترتیب $m_1, m_2, \cdots, m_n$ طریقوں سے انجام دیا جاسکتا ہے اور طریقہ عمل $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_{i-1}$ کے بعد P_i طریقہ عمل کو انجام دیا جاسکتا ہے۔ پھر کام مکمل کرنے کے طریقوں کی تعداد $m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$ ہیں۔

3۔ اندراج-اخراج کا اصول (The Inclusion-Exclusion principle) :

فرض کریں کہ دو کام A اور B بیک وقت کرتے ہیں۔فرض کیجئے کہ $n(A)$ اور $n(B)$ کاموں کو انجام دینے کے طریقوں کی تعداد کی نمائندگی کرتے ہیں جو A اور B ایک دوسرے سے آزاد ہیں۔ $n(A\cap B)$ دو کاموں کو بیک وقت انجام دینے کے طریقوں کی تعداد ہو۔ہم کسی ایک کام کو انجام دینے کے طریقوں کی تعداد کو گننے کے لئے جمع کے اصول کو استعمال نہیں کر سکتے ہیں۔کیونکہ اس سے زیادہ گنتی ہوگئی۔طریقوں کی صحیح تعداد حاصل کرنے کے لئے ہم دونوں کاموں میں سے ہر ایک کو انجام دینے کے طریقوں کی شامل کرتے ہیں اور پھر دونوں کاموں کو بیک وقت کرنے کے طریقوں کی تعداد کو گھٹاتے ہیں۔اس طریقہ کو اندراج-اخراج کا اصول کہا جاتا ہے۔سٹ تھیوری کے علامت کا استعمال کرتے ہوئے ہم اسے لکھتے ہیں۔

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

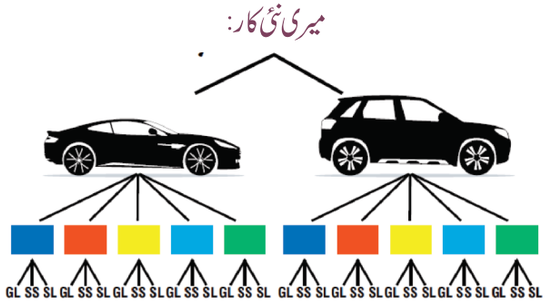
فرض کریں کہ ہمیں مثبت سالم عددوں کی تعداد کو 2 یا 7 سے تقسیم پذیر ہو 1000 تک کا (لیکن دونوں نہیں) اور 2 سے تقسیم ہونے والے سالم عدد کی تعداد $n(A)$ کہلاتے ہیں، 7 سے تقسیم ہونے والے سالم عدد کی تعداد $n(B)$ ہے۔2 اور 7 سے تقسیم ہونے والے سالم عددوں کی تعداد $n(A\cap B)$ ہے۔پھر 2 یا 7 سے تقسیم ہونے والے مثبت عدد کی تعداد

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 500 + 142 - 71 = 571.$$

(غور کریں $n(A)$ میں 1000 تک کے تمام 2 کے ضعف شامل ہوگئے، $n(B)$ میں 1000 تک کے تمام 7 کے ضعف شامل ہوا اور اسی طرح)

شجری خاکہ (Tree diagram) گنتی کے مسئلے میں درختوں کے خاکہ اکثر امکانات کی نمائندگی کرنے میں مددگار ثابت ہوتے ہیں۔عام طور پر ایک درخت کی شاخیں مختلف امکانات کی نمائندگی کرتے ہیں۔مثال کے طور پر، فرض کریں کہ کوئی شخص اپنے خاندان کے لئے کار خریدنا چاہتا ہے۔ دو مختلف برانڈڈ کاریں ہیں اور ہر برانڈ کے لئے پانچ رنگ دستیاب ہیں۔ہر رنگ میں تین مختلف قسمیں ہوگئی یعنی SL، SS، GL پھر ایک کار کے انتخاب کے لئے مختلف اختیارات کی نمائندگی ایک شجری خاکہ کے ذریعے کی جاسکتی ہے۔

100 95 75 25 5 0
192
Wednesday, September 28, 2022 9:17:55 PM



خاکہ 4.2

اب ہم مثالوں کے ذریعے اوپر بیان کردہ مختلف اصولوں کی وضاحت کریں گے۔

مثال 4.3: ایک اسکول کے کتب خانہ میں ریاضی کے 75 کتابیں، طبیعیات کے 35 کتابیں ہیں۔ ایک طالب علم صرف ایک کتاب کا انتخاب کرسکتا ہے۔ ایک طالب علم کتنے طریقوں سے ریاضی یا طبیعیات کی کتابوں میں سے کسی ایک کا انتخاب کرسکتا ہے؟

حل: (i) ایک طالب علم ریاضی کی کتاب کو " 75 "طریقوں سے منتخب کرسکتے ہیں۔

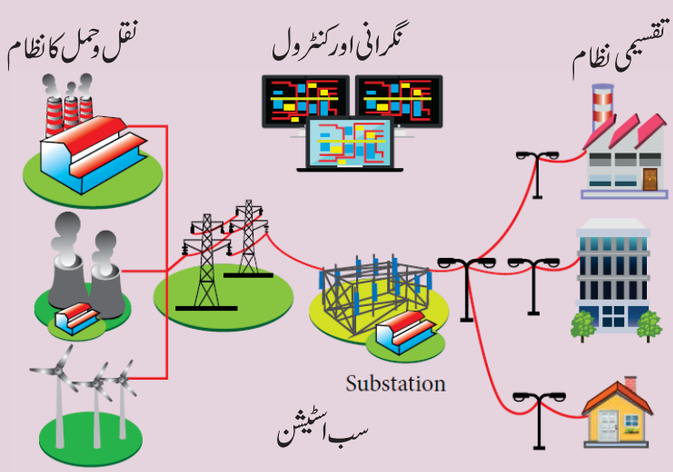
(ii) ایک طالب علم طبیعیات کی کتاب کو" 35 " طریقوں سے منتخب کرسکتے ہیں۔

لہذا، جمع کے اصول کو استعمال کرتے ہوئے ایک طالب علم کتاب کا انتخاب کرنے کے طریقوں کی تعداد 110=35+75۔

اب ہم اس مسئلہ کے بارے میں بات کریں گے جو تعارف میں ذکر کیا گیا تھا۔

مثال 4.4: اگر بجلی کے صارف کے پاس صارفین کا نمبر 238:110:29 ہے تو 238 ویں بڑی مقدار والی ٹرانسفارمر میں سے 29 ویں صارفین نمبر تک بجلی کے رابطے کی تعداد اس شرط پر دیکھیں کہ کم مقدار والے ٹرانسفارمر سے صرف 100 بجلی کا رابطہ جوڑے جاسکتے ہیں۔

حل: مندرجۂ ذیل تصویر بجلی کی نیٹ ورک کی وضاحت کرتی ہے۔



خاکہ 4.3

بڑی مقدار والے ٹرانسفارمر کے ساتھ 110 چھوٹے ٹرانسفارمر جوڑے گئے ہیں۔ چونکہ ہر چھوٹی مقدار کا ٹرانسفارمر صرف 100 صارفین کے ساتھ رابطہ کیا جاسکتا ہے۔ ہمارے پاس 109 ٹرانسفارمر ہیں 10900=100×109 رابطہ ہوں گے۔ 110 ویں ٹرانسفارمر کے لئے صرف 29 صارفین رابطہ ہیں۔ لہذا 238 ویں بڑے مقدار والے ٹرانسفارمر سے رابطہ صارفین کو کل تعداد 10929= 29 + 10900

192
Wednesday, September 28, 2022 9:17:56 PM

مثال 4.5 : ایک شخص کار خریدنا چاہتا ہے۔ مارکیٹ میں کار کے دو برانڈز دستیاب ہیں اور ہر برانڈ کے 3 مختلف ماڈل ہیں اور ہر ماڈل پانچ مختلف رنگوں میں آتے ہیں۔ جیسا کہ شکل 4.2 میں دیکھتے ہیں۔ وہ کتنے طریقوں سے کار خریدنے کا انتخاب کرسکتا ہے۔

حل: ایک کار کو ایک برانڈ، پھر ایک مختلف ماڈل اور پھر ایک رنگ منتخب کر کے خریدا جاسکتا ہے۔ ایک برانڈ 2 طریقوں سے منتخب کیا جاسکتا ہے۔ ایک ماڈل 3 طریقوں سے اور رنگ 5 طریقوں سے منتخب کر سکتے ہیں۔ ضربی اصول کے مطابق وہ شخص $2\times3\times5=30$ مختلف طریقوں سے کار خرید سکتا ہے۔

مثال 4.6: ایک عورت کانچی پورم میں واقع ایک ٹیکسٹائل کی دکان سے ایک ریشمی ساڑی اور ایک سونگڑی ساڑی کا انتخاب کرنا چاہتی ہے۔ اس دکان میں ریشم کی ساڑیوں کی 20 مختلف اقسام اور 8 مختلف اقسام کی سنڈی ساڑیاں ہیں۔ وہ کتنے طریقوں سے اپنی ساڑھیوں کا انتخاب کرسکتی ہے۔

حل : یہ کام اس وقت کیا جاتا ہے جب وہ ایک ریشمی ساڑی اور ایک سونگڑی ساڑی کا انتخاب کرتی ہے۔ ایک عورت 20 طریقوں سے ریشم کی ساڑی اور 8 طریقوں سے سنگوڈی ساڑی کا انتخاب کرسکتی ہے۔ ضربی اصول کے مطابق ان 2 ساڑیوں کو منتخب کرنے کے طریقوں کی کل تعداد $20\times8=160$ ہے۔

مثال 4.7: ایک گاؤں میں لوگوں کی کل تعداد میں سے 80 فی صد لوگ ناریل کے باغات کے مالک ہیں اور 65 فی صد لوگ دھان کے کھیتوں کے مالک ہیں۔ کتنے فی صد لوگ کم سے کم دونوں کے مالک ہیں؟

حل: فرض کریں $n(C)$ ان لوگوں کی فیصد کو ظاہر کرتا ہے جو ناریل کے باغات کے مالک ہیں اور $n(P)$ ان لوگوں کی فیصد کو ظاہر کرتا ہے جو دھان کے کھیتوں کے مالک ہیں۔ ہمیں دیا گیا ہے $n(P) = 65$ اور $n(C) = 80$ اندراج۔

$$n(C \cap P) = n(C) + n(P) - n(C \cup P)$$

اخراج کے اصول سے $n(C \cap P)$ کی کم سے کم قیمت $80 + 65 - 100 = 45$ ہے۔ یعنی کم از کم 45 فی صد لوگ دونوں کے مالک ہیں۔

اگلے سوالوں میں ہم ''تار'' (String) کے تصور کو استعمال کئے گئے۔ ایک سلسلہ میں دئے گئے حروف کو تسلسل لکھ کر ایک تار بنتی ہے۔ مثال کے طور پر a,b,c,d سے بننے والی تین حروف کی لمبی تار aaa, abb, bda, dca, cdd $\cdots$.

مثال 4.8 : (i) لفظ BIRD حروف کو استعمال کر کے بنائے جانے والے 4 حروف والی لمبی تاروں کی تعداد معلوم کیجئے۔ جہاں حرفوں کو دہرانے کی اجازت نہیں ہے۔

(ii) لفظ PRIME کے حرفوں کو بغیر دہرائے بیک وقت لئے جانے پر کتنے 5 حرفوں کی لمبی تار بن سکتی ہیں۔

حل: (i) 4 خالی جگہ کو 4 حروفوں سے بھرنے کے جتنے تار ہیں اس بات کو ذہن میں رکھتے ہوئے کہ دہرانے کی اجازت نہیں ہے۔ B,I,R,D کے کسی ایک حروف سے پہلی 4 مختلف طریقوں سے بھری جاسکتی ہے۔ جس کے بعد دوسری جگہ باقی 3 حروف میں سے کسی ایک کو 3 مختلف طریقوں سے بھری جاسکتی ہے۔ جس کے بعد تیسری جگہ 2 مختلف طریقوں سے بھری جاسکتی ہے جس کے بعد چوتھی جگہ 1 طریقے سے بھرایا جاسکتا ہے۔ اس طرح 4 جگہوں کو بھرنے کے طریقوں کی تعداد ضربی اصول کے مطابق $4\times3\times2\times1=24$ ہے۔ لہذا تار کی مطلوبہ تعداد 24 ہے۔

192
Wednesday, September 28, 2022 9:17:57 PM

(ii) یہاں 5 مختلف حروف ہیں جن میں سے 5 جگہیں بھرنی ہیں ۔ پہلی جگہ 5 طریقوں سے بھری جاسکتی ہے ۔کوئی بھی پانچ حروف P,R,I,M,E میں سے وہاں بھری جاسکتی ہے۔5 حروفوں میں سے کوئی ایک حرف کو لے کر پہلی جگہ کو بھرنے کے بعد، دوسری جگہ 4 حروف سے بھری جاسکتی ہے۔ تیسری جگہ کے لئے بچے ہوئے 3 حروف اور چوتھے جگہ کے لئے باقی 2 حروف سے بھری جاسکتی ہے۔ پانچویں جگہ میں باقی 1 حروف سے بھری جاسکتی ہے۔

لہذا پانچ جگہوں کو بھرنے کے طریقوں کی کل تعداد $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$. ہے۔

مندرجۂ ذیل دو صورتوں کے درمیان مشابہت کو دیکھیں۔

مثال 4.9 : لفظ FLOWER کے حروف کو استعمال کرتے ہوئے کتنی 6 حرفوں والی لمبی تار بنائی جاسکتی ہیں ؟

(i) لفظ F سے شروع ہو یا R پر ختم ہو۔

(ii) نہ تو لفظ F سے شروع ہو نہ تو R پر ختم ہو۔

حل: اس طرح کے کسی بھی تار میں F,L,O,W,E,R میں سے ہر ایک حرف صرف ایک بار استعمال ہوتے ہیں۔

(i) اگر ایسی تار F سے شروع ہوتی ہے تو باقی پانچ جگہوں کو L,O,W,E,R سے بھرا جاسکتا ہے۔ چونکہ تاروں کی تشکیل میں حروف کی کوئی تکرار نہیں ہوسکتی ہم 5 اور 4، 3، 2، 1 طریقوں سے دوسری، تیسری، چوتھی، پانچویں اور چھٹویں جگہوں کو بھر سکتے ہیں۔

لہذا، ضربی اصول کے مطابق F سے شروع ہونے والی 6 حروفوں کی لمبی تار کی تعداد $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ کے برابر ہے۔

					F
1 طریقہ	2 طریقہ	3 طریقہ	4 طریقہ	5 طریقہ	1 طریقہ

خاکہ 4.4

اگر اس طرح کا تار جو R کے ساتھ ختم ہوتا ہے تو باقی پانچ جگہوں کو F,L,O,W,E کے حروف سے بھرا جاسکتا ہے۔

پچھلے معاملے سے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ R کے ساتھ ختم ہونے والی تار کی لمبائی کی تعداد 120 ہے۔

					R
1 طریقہ	2 طریقہ	3 طریقہ	4 طریقہ	5 طریقہ	1 طریقہ

خاکہ 4.5

اگر ایک تار F سے شروع ہوتی ہے اور R پر ختم ہوتی ہے تو باقی 4 جگہوں کو L,O,W,E سے بھرنا ہوگا۔

پچھلے صورت حال کی طرح 6 حروفوں کی لمبی تار کی تعداد F سے شروع ہوتی ہے اور R کے ساتھ ختم ہوتی ہے۔ $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

F					R
1 طریقہ	2 طریقہ	3 طریقہ	4 طریقہ	1 طریقہ	1 طریقہ

خاکہ 4.6

اندراج-اخراج کے اصول کے تحت 6 حرفوں کی لمبی تار کی تعداد یا تو F سے شروع ہوتی ہے یا R کے ساتھ ختم ہوتی ہے۔ $120+120-24=216$

(ii) ایک تار جو نہ F سے شروع ہوتی ہے اور نہ R سے ختم ہوتی ہے وہ ہے جس میں شمار نہیں کیا گیا ہے۔

(i) ایک ساتھ وہ حروف F,L,O,W,E,R سے نکلنے والی لمبائی 6 کی تمام ممکن تاروں کا حساب کرتے ہیں جہاں کوئی حرف نہیں دہرایا جاتا۔ اب، اس طرح کے تمام تاروں کی تعداد 6 حروف میں سے کسی ایک کے ذریعے پہلی جگہ بھرنے سے بنتی ہے، دوسری باقی 5 حروف میں سے اور اسی طرح، یعنی کل $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ اس طرح کے تار ہیں۔ الفاظ کی تعداد جو نہ F سے شروع ہوتی ہے اور نہ R کے ساتھ ختم ہوتی ہے ، وہی ہے جتنا کہ حروف کی تاروں کی کل تعداد اور تار کی تعداد F کے ساتھ شروع ہوتی ہے یا R سے ختم ہوتی ہے جو $720-216=504$ ہے۔

192
Wednesday, September 28, 2022 9:17:57 PM

مثال 4.10 : کتنی لائسنس پلیٹیں بنائی جاسکتی ہیں۔دنوں کا استعمال کرتے ہوئے یا تو دو الگ الگ حروف کے بعد چار ہندسے یا دو ہندسوں کے بعد 4 مختلف حرف ہو جہاں تمام ہندسے یا حروف الگ الگ ہیں؟

حل : یہاں ہمارے پاس دو صورتیں ہیں۔

صورت 1: دو حروف کے بعد چار ہندسوں والی لائسنس پلیٹوں کی تعداد $26 \times 25 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 32,76,000.$ ہے۔

صورت 2: دو ہندسوں کے بعد چار حرفوں والی لائسنس پلیٹوں کی تعداد $10 \times 9 \times 26 \times 25 \times 24 \times 23 = 3,22,92,000.$ ہے۔

چونکہ صورت 1 یا صورت 2 ممکن ہے۔ لائسنس پلیٹوں کی کل تعداد

$$(26 \times 25 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7) + (10 \times 9 \times 26 \times 25 \times 24 \times 23) = 3,55,68,000.$$

مثال 4.11 : مثبت سالم عدد کی تعداد 7000 سے زیادہ اور 8000 سے کم شمار کریں جو 5 سے تقسیم پذیر ہوں بشرطیکہ کوئی ہندسہ دہرایا نہ جائے۔

حل: یہ 4 ہندسوں کا عدد ہونا چاہئے جو 7000 سے زیادہ 8000 سے کم ہو۔

پھر 1000 واں مقام ہندسہ 7 ہوگا۔مزید جیسا کہ عدد 5 سے تقسیم ہونا چاہئے۔

اکائی مقام کی جگہ 0 یا 5 ہونی چاہئے۔

چونکہ دہرانے کی اجازت نہیں ہے۔

7			0 یا 5
1 طریقہ	8 طریقہ	7 طریقہ	2 طریقہ

خاکہ 4.7

100 ویں جگہ بقیہ عددوں کا استعمال کرتے ہوئے عددوں کا استعمال کرتے ہوئے

8 طریقوں سے بھری جاسکتی ہے اور 10 ویں جگہ 7 طریقوں سے بھری جاسکتی ہے۔لہذا،عددوں کا مطلوبہ تعداد $1 \times 8 \times 7 \times 2 = 112.$ ہے۔

مثال 4.12 : 0، 1، 2، 3 اور 4 ہندسوں کے استعمال سے کتنے 4 ہندسوں والے جفت عدد بنائے جاسکتے ہیں۔اگر ہندسوں کو دہرانے کی اجازت نہیں ہے؟

حل: دو شرائط درج ذیل ہیں.

1۔ یہ 4 ہندسوں کا عدد ہے اور اس لئے اس کا 1000 واں جگہ 0 نہیں ہوسکتا۔

2۔ یہ ایک جفت عدد ہے اور اس لئے اس کا اکائی کی جگہ 0، 2 یا 4 ہوسکتی ہیں۔

اس صورت حال میں دو صورتیں سامنے آتی ہیں اکائی کی جگہ 0 پر نہیں۔

			0
4 طریقہ	3 طریقہ	2 طریقہ	1 طریقہ

خاکہ 4.8

صورت 1: جب اکائی کی جگہ 0 سے بھری جائی تو 1000 ویں جگہ کو 4 طریقوں سے 100 ویں جگہ کوئی طریقوں سے اور 10 ویں جگہ کو 2 طریقوں سے بھری جاسکتی ہیں۔

لہذا 4 ہندسوں کی تعداد جن کی اکائی جگہ 0 ہے۔ $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24.$

0			2/4
3 طریقہ	3 طریقہ	2 طریقہ	2 طریقہ

خاکہ 4.9

صورت 2 : جب اکائی کی جگہ غیر صفر عددوں سے بھری ہوئی ہے۔

یعنی، 2 یا 4 طریقوں کی تعداد 2 ہے۔ 1000 ویں جگہ کو بھرنے کے طریقوں کی تعداد 3 طریقوں سے ہے۔

(0 کو چھوڑ کر) 100 ویں جگہ 3 طریقوں سے اور 10 ویں جگہ کو 2 طریقوں سے بھرا جاسکتا ہے۔

لہذا اکائی جگہ پر 0 کے بغیر 4 ہندسوں کی تعداد $3 \times 3 \times 2 \times 2 = 36.$ ہے۔

لہذا، جمع کے اصول کے مطابق، 4 ہندسوں کی جفت عددوں کی مطلوبہ تعداد 24+36=60 ہے۔

192
Wednesday, September 28, 2022 9:17:58 PM

مثال 4.13 : نتائج کی کل تعداد معلوم کیجئے، جب 5 سکے ایک ساتھ اچھالے جائیں۔

حل: جب سکہ اچھالا جاتا ہے تو نتائج دو طرح سے ہوتے ہیں جو کہ (سر، پشت) $\{Head, Tail\}$.

ضربی اصول کے مطابق جب 5 سکے اچھالے جائیں تو نتائج کی تعداد $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32.$ ہے۔

عام طور پر، اگر n سکے اچھالے جاتے ہیں تو نتائج کی تعداد 2^n ہے۔

مثال 4.14 : کتنے طریقوں سے (i)5 مختلف گیندوں کو 3 ڈبوں میں تقسیم کیا جائے (ii)3 مختلف گیندوں کو 5 ڈبوں میں کیا جائے۔

حل:

(i) ہر گیند کو تین مختلف طریقوں سے تین ڈبوں میں سے کسی ایک میں رکھا جا سکتا ہے۔ لہذا ضربی اصول کے مطابق تین ڈبوں میں 5 مختلف گیندوں کو تقسیم کرنے کے طریقوں کی تعداد $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5 = 243.$ ہے۔

(ii) ہر گیند کو 5 مختلف طریقوں سے پانچ ڈبوں میں سے کسی ایک میں رکھا جا سکتا ہے۔ لہٰذا ضربی اصول کے مطابق پانچ ڈبوں میں 3 مختلف گیندوں کو تقسیم کرنے کے طریقوں کی تعداد $5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125.$ ہے۔

الجھنوں سے بچنے کے لئے، اشیاء (گیندیں) لیں اور انہیں جگہوں (ڈبوں) میں تقسیم کریں۔ عام طور پر اگر n مختلف اشیاء کو m جگہوں پر رکھنا ہے، تو رکھنے کے طریقوں کی تعداد m^n ہے۔

مثال 4.15 : ایک کمرے میں 10 بلب ہیں۔ ان میں سے ہر ایک کو علحدہ طور پر جلایا جا سکتا ہے۔ کمروں کو روشن کرنے کے طریقوں کی تعداد معلوم کیجئے۔

حل: 10 بلبوں میں سے ہر ایک کو علاحدہ طور پر چلانے کا مطلب یہ ہے کہ ہر بلب کو دو طریقوں سے چلایا جا سکتا ہے یعنی آف مود یا آن موڈ۔ ایسا کرنے کی کل تعداد 2^{10} ہے۔ جس میں وہ معاملہ بھی شامل ہے جس میں 10 بلب بند ہیں تمام 10 بلبوں کو ''آف موڈ'' میں رکھتے ہوئے کمرے کو روشن نہیں کیا جا سکتا۔ لہذا طریقوں کی کل تعداد $2^{10} - 1 = 1024 - 1 = 1023.$ ہے۔

ایک اور تصور جو گنتی کے عمل میں ایک لازمی آلہ ہے جس کا بیان درج ذیل ہے۔

کبوتر خانہ کا اصول: The Pigeonhole Principle:

فرض کریں کبوتروں کا ایک ریوڑ کبوتر خانہ کی طرف ایک مجموعے میں اڑ رہا ہے۔ اگر کبوتر خانوں سے زیادہ کبوتر ہیں تو کم از کم ایک کبوتر خانہ ہونا چاہئے جس میں کم از کم دو کبوتر ہوں۔ اس کی عام شکل دوسری اشیاء اور حالت پر بھی استعمال کی جا سکتی ہے۔ اگر $k+1$ یا اس سے زیادہ اشیاء k ڈبوں میں رکھی گئی ہیں تو کم از کم ڈبے میں دو یا دو سے زیادہ اشیاء ہو گئے۔

یہاں کچھ مثالیں ہیں :

1۔ 27 انگریزی الفاظ کے کسی بھی گروپ میں کم از کم دو۔ الفاظ ہونے چاہئیں جو ایک ہی حروف سے شروع ہو (چونکہ انگریزی حروف تہجی میں صرف 26 حروف ہیں)۔

2۔ اگر چھ میٹنگز صرف ہفتے کے دنوں (Week days) منعقد کی جاتی ہیں تو کم از کم دو میٹنگز ایک ہی دن ہونی چاہئیں۔

192
Wednesday, September 28, 2022 9:17:58 PM

مبادلہ اور اجتماع کو سمجھنے کے لئے ہم اگلے حصہ میں ''ضربیہ'' کے تصور کو دیکھیں گے۔

4.3۔ ضربیہ (فیکٹوریل) : (Factorials)

پہلے n طبعی اعداد کا حاصل ضرب n طبعی عدد کا ضربیہ ہے جسے $n!$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یعنی

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n.$$

ہم اس علامت کو فیکٹوریل n یا ضربیہ n سے ظاہر کرتے ہیں۔علامت $n!$ کو فرانسیسی ریاض دان کرسٹین کرامپ نے 1808ء میں متعارف کرایا تھا۔ غور کریں n مثبت سالم عدد کے لئے

$$\begin{aligned} n! &= n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1 \\ &= n(n-1)! \qquad n > 1 \\ &= n(n-1)(n-2)! \quad \text{کے لئے} \quad n > 2 \\ &= n(n-1)(n-2)(n-3)! \quad \text{کے لئے} \quad n > 3 \quad \text{اور اسی طرح} \end{aligned}$$

غور کریں کہ

$$\begin{aligned} 1! &= 1 \\ 2! &= 2 \times 1 = 2 \\ 3! &= 3 \times 2 \times 1 = 6 \\ 4! &= 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \\ 5! &= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 \\ \ldots &= \ldots \\ 22! &= 22 \times 21 \times 20 \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1 \quad = 1124000727777607680000 \end{aligned}$$

ضربیہ کے حوالے سے نمبر 22 (رامانوجن کی تاریخ پیدائش ہے) کا ایک خاص مقام ہے کہ، یہ سب سے چھوٹا عدد N ہے جو اسے بڑا ہے جس کا ضربیہ صرف N ہندسی ہے۔

طلباء اور اساتذہ دونوں کے لئے اگلے عدد N کو معلوم کرنا ایک اچھی مشق ہوتی ہے۔ اس طرح سے کہ N! میں بالکل N ہندسے ہیں۔

غور کریں **0!=1** صاف ظاہر ہوتا ہے، جب **n = 0** کو مساوات $(n+1)! = (n+1) \times n!$ میں درج کرنے پر

$1! = (0+1) \times 0! \implies 0! = \frac{1!}{1} = 1$ اس طرح، ہم نے غیر منفی سالم اعداد کے لئے ضربیہ کی بات کرتے ہیں۔

نوٹ کریں ضربیہ کو کچھ منفی عددوں اور پیچیدہ عددوں تک بڑھایا جا سکتا ہے جو اس کتاب کے دائرہ سے باہر ہیں۔

اب ہم کچھ مثالوں پر بحث کریں گے تا کہ ضربیہ کی گنتی سے واقف ہو سکیں۔

مثال 4.16 : قیمت معلوم کیجئے۔

$$\text{(i) } 5! \quad \text{(ii) } 6! - 5! \quad \text{(iii) } \frac{8!}{5! \times 2!}.$$

حل:

$$\text{(i) } 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120.$$

$$\text{(ii) } 6! - 5! = 6 \times 5! - 5! = (6-1) \times 5! = 5 \times 120 = 600.$$

$$\text{(iii) } \frac{8!}{5! \times 2!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 2!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{2} = 168.$$

مثال 4.17 مختصر کیجئے : $\frac{7!}{2!}$

حل :

$$\frac{7!}{2!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2520.$$

مثال 4.18 : محسوب کیجئے $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ جب (i) $n = 7, r = 5$ (ii) $n = 50, r = 47$

حل : (iii) کسی بھی n کے ساتھ $r = 3$ ہوتو۔

(i) جب $n = 7, r = 5$

$$\frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{7!}{5!(7-5)!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{5! \times 2!} = \frac{7 \times 6}{1 \times 2} = 21.$$

(ii) جب $n = 50, r = 47$

$$\frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{50!}{47!(50-47)!} = \frac{50 \times 49 \times 48 \times 47!}{47! \times 3!} = \frac{50 \times 49 \times 48}{1 \times 2 \times 3} = 19600.$$

(iii) کسی بھی n اور $r = 3$ کے لئے

$$\frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2)(n-3)!}{1 \times 2 \times 3 \times (n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

مثال 4.19 : فرض کرو N دنوں کی تعداد کو تعبیر کرتا ہے۔ اگر N! کی قیمت N دنوں کے گھنٹوں کی کل تعداد کے برابر ہے تب N کی قیمت معلوم کیجئے۔

حل : ہمیں مساوات کو حل کرنے کے لئے $N! = 24 \times N.$

$N = 1, 2, 3, 4,$ کے لئے ہمارے پاس ہے $N! < 24 \times N.$

$N = 5$ کے لئے ہمارے پاس ہے $N! = 5! = 4! \times 5 = 24N.$

$N > 5$ کے لئے ہمارے پاس ہے $N! \geq 5! N > 24 \times N$ لہذا $N = 5.$

مثال 4.20 : اگر $\frac{6!}{n!} = 6$ ہوتو n کی قیمت معلوم کیجئے۔

حل:

$$\frac{6!}{n!} = \frac{1.2.3.4.5.6.}{1.2.3...n} = 6$$

جب $n < 6$ ہو تو ہمیں حاصل ہوتا ہے $n = 5.$

مثال 4.21 : اگر $n! + (n-1)! = 30$ ہوتو n کی قیمت معلوم کیجئے۔

حل : یہاں پر $30 = 6 \times 5$ ۔ جب $n! + (n-1)! = (n+1)(n-1)!$

مساویانے پر $(n-1)! = 6 = 3!$ ہمیں حاصل ہوتا ہے $n = 4.$

100 95 75 25 5 0

192
Wednesday, September 28, 2022 9:17:59 PM

مثال 4.22 : $2! + 3! + 4! + ... + 22!$? کے حاصل جمع کا اکائی ہندسہ کیا ہے ؟

حل: $5!$ سے تمام $n!$ تک اکائی ہندسہ کا صفر ہے، اور لہذا صرف $2! + 3! + 4!$ کے ذریعہ اکائی کا ہندسے کے ذریعہ عطا کرتا ہے۔

صرف یہ ہے، جو یہ ہے۔ $2 + 6 + 24 = 32$ لہذا مطلوبہ اکائی ہندسہ 2 ہے۔

مثال 4.23: اگر $\frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} = \frac{A}{9!}$ ہو تو A کی قیمت دریافت کیجئے۔

حل : ہمارے پاس ہے $\frac{A}{9 \times 8 \times 7!} = \frac{1}{7!} + \frac{1}{8 \times 7!}$

لہذا $\frac{1}{7!} \times \frac{A}{9 \times 8} = \frac{1}{7!} \times \left[1 + \frac{1}{8}\right]$ معادل طور پر $\frac{A}{72} = \frac{9}{8}$ جس سے A=81 ہے۔

مثال 4.24 : ثابت کیجئے۔ $\frac{(2n)!}{n!} = 2^n(1.3.5 \cdots (2n-1)).$

حل:

$$\frac{(2n)!}{n!} = \frac{1.2.3.4 \cdots (2n-2).(2n-1)2n}{n!}$$

$$= \frac{(1.3.5. \cdots (2n-1))\,(2.4.6. \cdots (2n-2).2n)}{n!} \quad \text{(طاق اور جفت عددوں کو الگ الگ گروپ کرنا)}$$

$$= \frac{(1.3.5. \cdots (2n-1)) \times 2^n \times (1.2.3. \cdots (n-1).n)}{n!} \quad \text{(اعداد 2 کو باہر نکالیں)}$$

$$= \frac{(1.3.5. \cdots (2n-1)) \times 2^n \times n!}{n!}$$

$$= 2^n\,(1.3.5. \cdots (2n-1))\,.$$

مشق 4.1



1۔ (i) ایک شخص ایک ریستوران میں کھانے کے لئے گیا مینو کارڈ میں اس شخص نے 10 ہندستانی اور 7 چینی کھانے کی چیزیں دیکھیں۔ وہ شخص کتنے طریقوں سے ہندوستانی یا چینی کھانے کا انتخاب کرسکتا ہے ؟

(ii) ایک دکان میں 3 قسم کے کھلونے کے کار اور 2 قسم کے کھلونے کے ٹرین دستیاب ہیں۔ بچہ کھلونا کار اور کھلونا ٹرین خریدنے کے طریقوں کی تعداد معلوم کریں۔

(iii) ہندسوں کو دہرائے بغیر 1,2,3,4,5 کا استعمال کرتے ہوئے کتنے دو ہندسی اعداد بنائے جاسکتے ہیں ؟

(iv) تین افراد ایک کانفرنس ہال میں داخل ہوتے ہیں جس میں 10 کرسیاں ہیں۔ وہ اپنی کرسی کتنے طریقوں سے لے سکتے ہیں؟

(v) کتنے طریقوں سے ایک صف میں 5 افراد کو بٹھایا جاسکتا ہے؟

2۔ (i) ایک موبائل فون میں 6 الگ ہندسوں کا پاس کوڈ ہے۔ پاس کوڈ کو دوبارہ حاصل کرنے کی کوششوں کی زیادہ سے زیادہ تعداد کیا ہے؟
(ii) دئے گئے مختلف رنگوں کے چار جھنڈے، اگر ہر سگنل کو تین جھنڈوں کے استعمال کی ضرورت ہوتی ہے، تو ایک دوسرے کے نیچے کتنے مختلف سگنل پیدا کئے جاسکتے ہیں؟

3۔ چار بچے ایک دوڑ میں حصہ لے رہے ہیں۔
(i) پہلے دو مقامات کو کتنے طریقوں سے بھرا جاسکتا ہے؟ (ii) وہ کتنے مختلف طریقوں سے دوڑ ختم کر سکتے ہیں؟

4۔ 2،4،6،8 میں سے تین ہندسوں والے کتنے عدد بن سکتے ہیں ؟ اگر
(i) ہندسوں کو دہرانے کی اجازت ہے۔ (ii) ہندسوں کو دہرانے کی اجازت نہیں ہے۔

5۔ اکائی مقام میں سے 3 کے اندر کتنے تین ہندسے ہیں؟ (i) دہراتے ہوئے (ii) بغیر دہرائے

6۔ 0،1،2،3،4،5، ہندسوں کے ساتھ 100 اور 500 کے درمیان کتنے عدد ہو گئے ؟ اگر
(i) ہندسوں کو دہرانے کی اجازت ہو۔ (ii) ہندوں کو دہرانے کی اجازت نہیں ہو۔

7۔ 5,4,3,2,1,0 ہندسوں کو استعمال کرتے ہوئے کتنے تین ہندسی طاق عدد بنائے جاسکتے ہیں۔ اگر
(i) ہندسوں کو دہرانے کی اجازت نہیں ہے۔ (ii) ہندوں کو دہرانے کی اجازت ہے۔

8۔ حسب شرط کے مطابق 999 اور 10000 کے درمیان کتنے اعداد ہیں؟
(i) کوئی پابندی نہیں ہے۔ (ii) کوئی ہندسوں کو دہرایا نہیں گیا۔ (iii) کم از کم ایک ہندسہ دہرایا جاتا ہے۔

9۔ 0،1،2،3،4،5 ہندسوں کو استعمال کر کے کتنے تین ہندسی اعداد بنائے جاسکتے ہیں، جو 5 سے تقسیم ہوتے ہیں؟
(i) ہندسوں کو دہرانے کی اجازت نہ ہو (ii) ہندسوں کو دہرانے کی اجازت ہو

10۔ ایک مقام A سے مقام B تک سفر کرنے کے لئے، دو مختلف بس کے راستے B_1، B_2 ہیں۔ دو مختلف ٹرین کے راستے T_1، T_2 ہیں اور ایک ہوائی راستہ A_1 ہے۔ مقام B سے مقام C تک ایک بس کا راستہ 'B ہے۔ دو مختلف ٹرین کے راستوں سے T'_1، T'_2 ہیں اور ایک ہوائی راستہ A'_1 ہے۔ نقل و حمل کے یکساں موڈ کو استعمال کئے بغیر مقام سے مقام C تک مقام B کے ذریعے آنے جانے کے راستوں کی تعداد معلوم کیجئے۔

11۔ 1 اور 1000 کے درمیان کتنے اعداد ہیں (دونوں شامل ہیں) جو نہ تو 2 تقسیم ہوتے ہیں، اور نہ ہی 5 سے۔

12۔ لفظ LOTUS کے حرف کو استعمال کرتے ہوئے کتنے تار بنائی جاسکتی ہیں؟ اگر لفظ
(i) یا تو لفظ L سے شروع ہو یا S پر ختم ہو۔ (ii) نہ تو لفظ L سے شروع ہو، اور نہ S پر ختم ہو؟

13۔ (i) معروضی قسم کے 6 سوالوں کے جواب دینے کے طریقوں کی کل تعداد شمار کریں۔ ہر سوال کے چار انتخابات ہیں۔
(ii) کتنے طریقوں سے 10 کبوتروں کو 3 مختلف کبوتروں کے سوراخوں میں رکھا جاسکتا ہے ؟
(iii) 10 طلباء میں 12 مختلف انعامات تقسیم کرنے کے طریقوں کی تعداد معلوم کیجئے۔

14۔ قیمت معلوم کیجئے۔ (i) $6!$ (ii) $4!+5!$ (iii) $3!-2!$ (iv) $3!\times 4!$ (v) $\frac{12!}{9!\times 3!}$ (vi) $\frac{(n+3)!}{(n+1)!}$

15۔ محسوب کیجئے۔ $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ جب
(i) $n=6, r=2$ (ii) $n=10, r=3$ (iii) کسی بھی n کے ساتھ $r=2$ کے لئے

16۔ n کی قیمت معلوم کیجئے، اگر (i) $(n+1)!=20(n-1)!$ (ii) $\frac{1}{8!}+\frac{1}{9!}=\frac{n}{10!}$.

192
Wednesday, September 28, 2022 9:18:00 PM

ضربیہ کو دگنا ضربیہ کے طور پر عمومی بنایا جاسکتا ہے

Double Factorial of n: **n کا دگنا ضربیہ**

ایک سالم عدد **n** کا ضربیہ $n!$ سے تعبیر کرتے ہیں، جو تفاعل کے طور پر دیکھا جاسکتا ہے $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{N}$
جہاں $\mathbb{N}$ تمام طبیعی عددوں کا مجموعہ ہے۔ اس کی وضاحت یوں کی جاتی ہے۔

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{کے لئے } n = 0, \\ n \times (n-1) \times (n-2) \times .... \times 3 \times 2 \times 1 & \text{کے لئے } n \neq 0. \end{cases}$$

$n!!$ کی وضاحت کرسکتے ہیں (Double factorial of n) (n کا دُگنا ضربیہ)

$$g(n) = \begin{cases} 1 & \text{کے لئے } n = 0, \\ n \times (n-2) \times (n-4) \times .... \times 4 \times 2 & \text{جب } n \text{ جفت عدد ہو} \\ n \times (n-2) \times (n-4) \times .... \times 3 \times 1 & \text{جب } n \text{ طاق عدد ہو} \end{cases}$$

اس طرح سے $5!! = 5 \times 3 \times 1 = 15$ اور $8!! = 8 \times 6 \times 4 \times 2 = 384.$
غور کریں $n!! \neq (n!)!$ اس طرح ہے $4!! = 8$ جب کہ $(4!)! = (24)!$



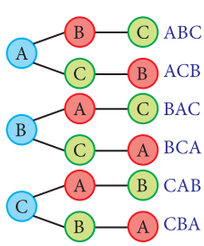
4.4 گروہوں یا جوڑوں میں بانٹنا یا ترتیب دینا (Permutations)

ترتیب دینا کسے کہتے ہیں؟ مختلف شکلوں میں ترتیب دیا جاسکتا ہے۔

فرض کریں کہ تین دوست **A, B** اور **C** کو تصویر کے لئے لائن میں کھڑا ہونا پڑے۔

وہ کتنی ترتیبوں میں کھڑے ہوسکتے ہیں ؟

کچھ ممکن ترتیبیں (بائیں سے دائیں) ہیں۔



A, B, C: A, C, B: B, A, C
B, C, A: C, B, A: C, A, B.

اس طرح **6** ممکن طریقوں سے وہ خود کو تصویر لینے کے لئے ترتیب دے سکتے ہیں۔

اس طرح اگر **3** اشیاء کو صف میں ترتیب دینا ہو تو ممکن ترتیبیں $3 \times 2 \times 1 = 3!$ ہیں۔ بیک وقت چار اشیاء کو ایک ساتھ لے کر ترتیبوں کی تعداد $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4!$ ہے۔ اسی طرح، اگر **n** اشیاء کو ایک صف میں ترتیب، دینا ہو تو ممکن ترتیب یا **permutations** $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1 = n!$ ہیں۔

فرض کرو کہ آپ کے پاس **7** حروف **A, B, C, D, E, F** اور **G** ہیں۔ ہم چار حرفی تار بنانا چاہتے ہیں۔ ہمارے پاس پہلے حرف کے لئے **1** انتخاب ہے۔ پہلا حرف منتخب کرنے کے بعد، ہمارے پاس دوسرے حرف کے لئے **6** انتخاب ہیں۔ اس طرح آگے بڑھتے ہوئے، ہمارے پاس چوتھے حرف کے لئے **4** انتخاب ہیں۔ لہذا، **7** حرفوں میں **4** حروف کی ترتیبوں کی تعداد

$$7 \times 6 \times 5 \times 4 = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = \frac{7!}{3!} = \frac{7!}{(7-4)!}.$$

عام طور پر، **r** اشیاء کے مختلف ترتیبوں کی تعداد جو **n** مختلف اشیاء سے بنایا جاسکتا ہے۔ $\frac{n!}{(n-r)!}$
اس کو ${}^nP_r$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ اس نتیجہ کا ثبوت اس باب میں ثابت کریں گے۔

100
95
75
25
5
0
192
Wednesday, September 28, 2022 9:18:00 PM

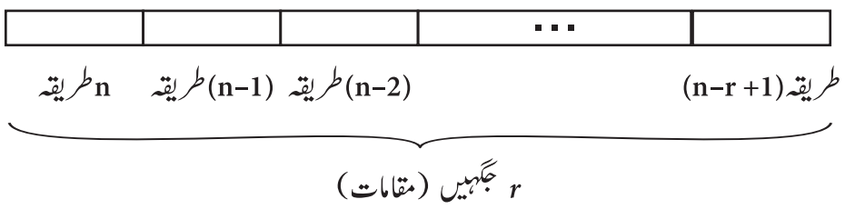
4.4.1۔ واضح اشیاء کو ترتیب دینا (Permutations of distinct objects)

کسی بھی محدود سیٹ پر تفاعل کے لحاظ کریں، $S = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ ہے۔ مبادلہ کو خود مجموعی طور پر دور بطی نقاشی (bijective mapping) کے طور پر بیان کیا جاسکتا ہے۔ مجموعہ S پر مبادلوں کی تعداد مجموعی پر دور بطی نقاشی کی کل تعداد کے برابر ہے۔

ہم مبادلوں کی تعداد کو $^{n}\mathbf{P}r$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

مسئلہ 4.1 : اگر r, n مثبت سالم اعداد ہیں اور $r \leq n$ تب، n مختلف اشیاء کے مبادلوں کی تعداد ایک ساتھ r لینے پر $n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$ ہے۔

ثبوت (Proof) : ترتیب دینا ایک قسم کی تریب دینا ہے۔ r جگہوں کو بھرنے کے لئے n مختلف اشیاء کے ترتیب دینے کو ایک ساتھ r لینا ہے۔ منتخب اشیاء کے ساتھ ایک صف میں دی گئی n مختلف اشیاء کے لئے



پہلی جگہ n اشیاء سے بھری جاسکتی ہیں، دوسری جگہ کے لئے $n-1$ اشیاء ہیں۔ تیسری جگہ کے لئے $n-2$ اشیاء ہیں۔ اسی طرح جاری رکھئے، جب تک ہم $(n-(r-1))$ میں سے ممکن اشیاء کو r ویں مقام پر رکھیں۔ باقی ضربی اصول کے مطابق ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں۔

$$^{n}P_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1).$$

مسئلہ 4.2 : اگر $n \geq 1$ اور $0 \leq r \leq n$ ، ہو تو تب $^{n}P_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

ثبوت: مسئلہ 4.1 سے، ہمارے پاس ہے۔

$$\begin{aligned} ^{n}P_r &= n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1) \\ &= \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1) \times (n-r) \times (n-r-1) \cdots 2 \times 1}{(n-r) \times (n-r-1) \times \cdots \times 2 \times 1} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!}. \end{aligned}$$

■

■

خاص طور پر، اگر n ایک مثبت سالم عدد ہے اور r کوئی غیر منفی عدد ہے۔ ہم اس طرح سے نمائندگی کرتے ہیں۔

$$^{n}P_r = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-r)!} & \text{کے لئے } r \leq n, \\ 0 & \text{کے لئے } r > n. \end{cases}$$

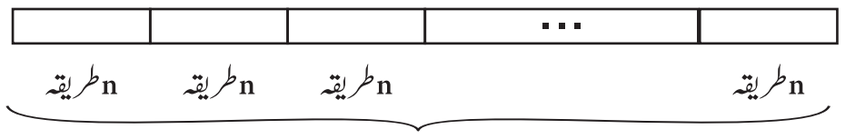
$$^{n}P_r = \begin{cases} ^{n}P_n = n! & \text{کے لئے } r = n, \\ ^{n}P_0 = 1 & \text{کے لئے } r = 0. \end{cases}$$

n مختلف اشیاء کو صفوں میں $^{n}P_n = n!$ طریقوں سے ترتیب دیا جاسکتا ہے۔

مسئلہ 4.3 n مختلف اشیاء کے لئے جب کہ r بیک وقت لی جائیں مبادلوں کی تعداد n^r ہے۔ جہاں دہرانے کی اجازت ہے۔

192
Wednesday, September 28, 2022 9:18:01 PM

ثبوت : جیسا مسئلہ 4.1 میں



r جگہیں (مقامات)

پہلی جگہ کو n اشیاء سے بھری جاسکتی ہے۔دوسری جگہ (ہم پہلی جگہ میں استعمال ہونے والی اشیاء کو استعمال کر سکتے ہیں) کو n اشیاء ہیں۔
اس طرح r ویں جگہ n اشیاء سے بھری جاسکتی ہے۔ضربی اصول کے مطابق مبادلوں کی تعداد n مختلف اشیاء کے لئے r بیک وقت لی جائیں، اس وقت $n \times n \times n \times \cdots n$ (r بار) $= n^r$ کو دہرانے کی اجازت ہے۔

4.4.2۔ ترتیب دینے کی خصوصیات (Properties of permutations)

1.

$$^nP_n = {}^n P_{n-1}.$$

ثبوت: ہمارے پاس ہے۔

$$^nP_{n-1} = \frac{n!}{(n-(n-1))!} = \frac{n!}{1!} = n! = \frac{n!}{(n-n)!} = {}^nP_n$$

2.

$$^nP_r = n \times {}^{n-1} P_{r-1}$$

ثبوت: ہمارے پاس ہے۔

$$n \times {}^{n-1}P_{r-1} = n \times \frac{(n-1)!}{((n-1)-(r-1))!} = \frac{n!}{(n-r)!} = {}^nP_r.$$

اس عمل کو جاری رکھتے ہوئے، ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں۔

$$\begin{aligned} {}^nP_r &= n \times {}^{n-1}P_{r-1} = n \times (n-1) \times {}^{n-2} P_{r-2} \\ &= n \times (n-1) \times (n-2) \times {}^{n-3} P_{r-3} \times \cdots \times (n-(r-1))^{n-r} P_0 \\ &= n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1). \end{aligned}$$

$$\boxed{^nP_r = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1).}$$

3. $^nP_r = {}^{n-1}P_r + r \times {}^{n-1}P_{r-1}$

ثبوت: ہمارے پاس ہے۔

$$\begin{aligned} {}^{n-1}P_r + r \times {}^{n-1}P_{r-1} &= \frac{(n-1)!}{((n-1)-r)!} + r\frac{(n-1)!}{(n-r)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(n-1-r)!} + r\frac{(n-1)!}{(n-r)!} \\ &= \frac{(n-1)! \times (n-r)}{(n-1-r)! \times (n-r)} + r\frac{(n-1)!}{(n-r)!} \\ &= \frac{(n-1)! \times (n-r)}{(n-r)!} + r\frac{(n-1)!}{(n-r)!} \\ &= \frac{(n-1)!\,((n-r)+r)}{(n-r)!} = \frac{(n-1)!n}{(n-r)!} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} = {}^nP_r \end{aligned}$$

192
Wednesday, September 28, 2022 9:18:01 PM

مثال 4.25 : قیمت معلوم کیجئے۔

(i) ${}^4P_4$ (ii) ${}^5P_3$ (iii) ${}^8P_4$ (iv) ${}^6P_5$.

حل:

(i) ${}^4P_4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24.$

(ii) ${}^5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60.$

(iii) ${}^8P_4 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680.$

(iv) ${}^6P_5 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 6! = 720.$

مثال 4.26 : اگر ${}^{(n+2)}P_4 = 42 \times {}^nP_2$ ہوتو n معلوم کیجئے۔

حل:

$$\begin{aligned} {}^{(n+2)}P_4 &= 42 \times {}^nP_2 \\ \Rightarrow \frac{{}^{(n+2)}P_4}{{}^nP_2} &= 42 \\ \Rightarrow \frac{(n+2)(n+1)(n)(n-1)}{n(n-1)} &= 42 \\ \Rightarrow (n+2)(n+1) &= 42 = 7 \times 6 \\ \Rightarrow n+2 &= 7 \Rightarrow n = 5. \end{aligned}$$

مثال 4.27 : اگر ${}^{10}P_r = {}^7P_{r+2}$ ہوتو r معلوم کیجئے۔

حل:

$${}^{10}P_r = {}^7P_{r+2}$$

$$\frac{10!}{(10-r)!} = \frac{7!}{(5-r)!}$$

i.e.,

$$\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{(10-r) \times (9-r) \times (8-r) \times (7-r) \times (6-r) \times (5-r)!} = \frac{7!}{(5-r)!}$$

$$(10-r) \times (9-r) \times (8-r) \times (7-r) \times (6-r) = 10 \times 9 \times 8 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2.$$

$10 - r = 6 \Rightarrow r = 4.$ لہذا

مثال 4.28 : لفظ VOWELS کے حروف کو ایک ساتھ لے کر کتنے حروف کے تار بنائے جاسکتے ہیں۔

(i) تاکہ تار E سے شروع ہو۔

(ii) E سے شروع ہو اور W پر ختم ہو۔

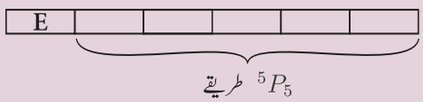
192
Wednesday, September 28, 2022 9:18:01 PM

حل : دی گئی تار میں 6 حروف (V,O,W,E,L,S) ہیں۔

(i) چونکہ تمام تاریں E سے شروع ہونی چاہئے۔ ہمارے پاس باقی 5 حروف ہیں۔

جنہیں $^5P_5 = 5!$ طریقوں سے ترتیب دیا جاسکتا ہے۔

لہذا ابتدائی حروف کے طور پر E کے ساتھ تار کی کل تعداد $5! = 120$ ہے۔



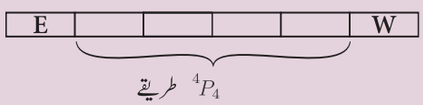
خاکہ 4. 10

(ii) چونکہ تمام تاریں E سے شروع ہوتی ہیں اور

W پر ختم ہوتی ہیں، ہمیں E اور W کو ٹھیک کرنے

ضرورت ہے۔ باقی 4 حروف کو $^4P_4 = 4!$ طریقوں سے ترتیب دیا جاسکتا ہے۔

لہذا E سے شروع ہونے والے حروف اور W پر ختم ہونے والے حرف $4! = 24.$ ہے۔



خاکہ 4. 11

مثال 4.29: چار مختلف ہندسوں والے اعداد جو ہر ممکن طریقے سے 1,2,3,4 اور 5 ہندسوں کے استعمال سے بنتے ہیں۔ درج ذیل معلوم کیجئے۔

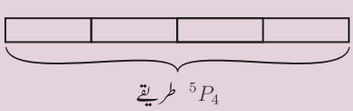
(i) ایسے کتنے عدد بن سکتے ہیں؟ (ii) ان میں سے کتنے جفت عدد ہیں؟

(iii) ان میں سے کتنے ٹھیک 4 سے تقسیم پذیر ہیں۔

حل : (i) اس کا حل وہی ہے جیسا کہ 5 ہندسوں میں سے چار ہندسے لینے کی

ترتیب اس طرح ہے۔

$^5P_4 = 5\times4\times3\times2 = 120$ ہے۔

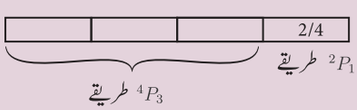


خاکہ 4. 12

(ii) جفت عدد کے لئے آخری ہندسے 2 یا 4 ہونا چاہئے جو کہ $^2P_1$ طریقوں سے

بھرے ہوں اور باقی 4 جگہوں سے 3 جگہوں کو $^4P_3$ طریقوں سے بھر سکتے ہیں۔ لہذا

مطلوبہ طریقوں کی تعداد $^2P_1 \times {}^4P_3 = 2 \times 24 = 48.$ ہے۔



خاکہ 4. 13

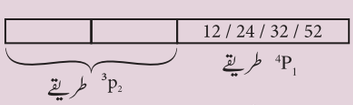
(iii) چونکہ عدد 4 کا تقسیم پذیر ہے۔ پھر آخری دو ہندسوں کو 4 سے تقسیم ہونا چاہئے۔

آخری دو ہندسی 12,24,32,52 (4 طریقے) بن جاتے ہیں۔

باقی پہلے دو جگہیں بقیہ ہندسوں سے $^3P_2$ طریقوں سے بھری ہوئی ہیں۔

اعداد کی مطلوبہ تعداد جو 4 سے تقسیم پذیر ہے۔

$^4P_1 \times {}^3P_2 = 4 \times 6 = 24.$



خاکہ 4. 14

4.4.3۔ اشیاء ہمیشہ ایک ساتھ (تار کا طریقہ) (Objects always together (String method))

n مختلف اشیاء کے مبادلوں کی تعداد بیک وقت لی جائیں، جب m مخصوص اشیاء ہمیشہ ایک ساتھ ہوتی ہیں۔

192
Wednesday, September 28, 2022 9:18:02 PM

- غور کریں کہ m مخصوص اشیاء جو کہ ایک واحد اکائی ہے۔
- پھر ہمارے پاس $(n-m+1)$ ہیں۔ اس $(n-m+1)$ اشیاء کو $(n-m+1)!$ طریقوں سے ترتیب دیں۔
- m مخصوص اشیاء کو ان کے درمیان m! طریقوں سے ترتیب دیں۔
- بالآخر، جواب $m! \times (n-m+1)!$ ہے۔

4.4.4۔ دو شئے ایک ساتھ نہیں ہیں (گیپ طریقہ) (No two things are together(Gap method))

n مختلف اشیاء کے ترتیب کی تعداد حاصل کرنے کے لئے جب k کی کوئی دو اشیاء اکٹھی نہیں ہوتی ہیں اور باقی $m = n-k$ اشیاء پر کوئی پابندی نہیں ہے۔ ہم مندرجۂ ذیل طریقہ پر عمل کرتے ہیں۔

- سب سے پہلے، m اشیاء کو ترتیب دیں جس پر صف کو پابندی نہیں ہے۔ m اشیاء کو $^mP_m = m!$ طریقوں سے ترتیب دیا جاسکتا ہے۔
- پھر ہر دو m اشیاء کے درمیان خلا (Gap) کی تعداد گنیں جس پر کوئی پابندی نہیں ہے اور جس میں اختتامی جگہیں بھی شامل ہیں۔ اس طرح کے خلاؤں کی تعداد m سے زیادہ $(m+1)$ ہوگئی۔ اس $m+1$ خلا میں ہم k اشیاء کو $^{m+1}P_k$ طریقوں سے مبادلہ دے سکتے ہیں۔
- پھر مطلوبہ طریقے $m! \times {}^{(m+1)}P_k$ ہیں۔

مثال 4.30: لفظ EQUATION کے حروف کو ایک ساتھ استعمال کر کے کتنے مختلف تاریں بنائی جاسکتی ہیں، تا کہ

(i) حرف علت (Vowels) ایک ساتھ ہو۔

(ii) حرف علت (Vowels) ایک ساتھ نہ ہو۔

حل: (i) لفظ EQUATION میں 8 حروف ہیں۔ جس میں 5 حرف علت (E,U,A,I,O) ہیں اور 3 حرف صحیح (Q,T,N) Consonant ہیں۔ 5 حرف علت کو ایک حرف سمجھتے ہوئے، ہمارے پاس 4 حروف ہیں، جو $^4P_4 = 4!$ طریقوں سے ترتیب دی جاسکتی ہیں، لیکن ان ترتیب سے ہر ایک کے مطابق حرف E,U,A,I,O کو 5 طریقوں سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

لہذا، ضربی اصول کے مطابق الفاظ کی تعداد $4! \times 5! = 24 \times 120 = 2880.$ ہے۔

(ii) لفظ "EQUATION" کے آٹھ حروف کا استعمال کرتے ہوئے تار کی کل تعداد $^8P_8 = 8! = 40320.$ بنتی ہے۔

لہذا، تاروں کی کل تعداد جس میں حرف علت کبھی اکٹھے نہیں ہوتے ہیں، وہی ہے جو کہ تاروں کی کل تعداد اور تاروں کی تعداد کے درمیان فرق ہے۔ جس میں حرف علت ایک ساتھ ہیں۔ لہذا $40320 - 2880 = 37440.$

مثال 4.31 : ایک امتحان کے لئے 15 طلباء ہیں، 7 طلباء ریاضی کے امتحان میں شرکت کرتے ہیں جب کہ باقی آٹھ طلباء مختلف مضامین میں شرکت کر رہے ہیں۔ کتنے طریقوں سے ایک صف میں بٹھایا جاسکتا ہے تا کہ کوئی دو ریاضی کے طالب علم ایک ساتھ ہوں؟

حل: آیئے 8 غیر ریاضی کے طلباء کو $^8P_8 = 8!$ طریقوں سے ترتیب دیں۔ ان میں سے ہر ایک ترتیب 9 خلا پیدا کرتا ہے۔ لہذا، ریاضی کے 7 طلباء کو ان 9 خلاؤں میں $^9P_7$ طریقوں سے رکھا جاسکتا ہے۔

$$_O_1_O_2_O_3_O_4_O_5_O_6_O_7_O_8_$$

ضربی اصول کے مطابق، ترتیبوں کی مطلوبہ تعداد

$$8! \times {}^9P_7 = 8! \times \frac{9!}{2!} = \frac{8! \times 9!}{2!}$$

192
Wednesday, September 28, 2022 9:18:02 PM

مثال 4.32 : 5 لڑکے اور 4 لڑکیوں کو کتنے طریقوں سے ایک صف میں بٹھایا جاسکتا ہے، اس طرح سے کہ کوئی دو لڑکیاں ایک ساتھ نہ ہو۔

حل : _B1_B2_B3_B4_B5_

5 لڑکوں کو $5! = {}^5P_5$ طریقوں سے صف میں بٹھا سکتے ہیں۔ ان کی ہر ایک ترتیب میں سے 6 خالی جگہیں پیدا ہوتے ہیں۔
چونکہ کوئی دو لڑکیاں ایک ساتھ نہیں بیٹھتی ہیں اس لئے ہم اس 6 جگہوں میں 4 لڑکیوں کو ترتیب دے سکتے ہیں۔
یہ ${}^6P_4$ طریقوں سے کیا جاسکتا ہے۔ لہذا بیٹھنے کے انتظامات کی کل تعداد

$$5! \times {}^6P_4 = 120 \times 360 = 43200$$

مثال 4.33: 4 لڑکے اور 4 لڑکیاں باری باری لڑکوں اور لڑکیوں کے ساتھ ایک لائن بناتے ہیں۔
اس لائن کو بنانے کے طریقوں کی تعداد معلوم کیجئے۔

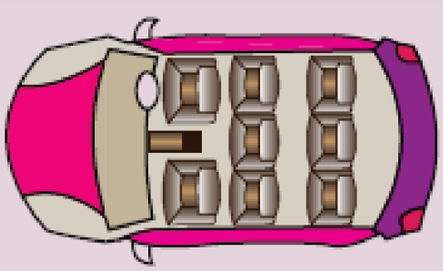
حل: 4 لڑکیوں کو $4! = {}^4P_4$ طریقوں سے ایک لائن میں ترتیب دیا جاسکتا ہے۔ ان ترتیبوں میں سے ہر ایک میں لڑکوں کو اول رکھ کر 4 جگہیں پیدا ہوتے ہیں۔ ان 4 جگہوں میں 4 لڑکیوں کو $4! = {}^4P_4$ طریقوں سے ترتیب دیا جاسکتا ہے۔

_B1_B2_B3_B4_ یا _G1_G2_G3_G4_

لہذا لڑکوں کو پہلے رکھ کر ترتیبوں کی کل تعداد $4! \times 4!$ ہے۔ اسی طرح کی دلیل سے۔ ترتیبوں کی کل تعداد $4! \times 4!$ ہے۔ لہذا جمع کا اصول کے مطابق لڑکا یا لڑکی کو پہلے رکھ کر، ترتیبوں کی کل تعداد

$$(4! \times 4!) + (4! \times 4!) = 2\,(4!)^2 = 1152$$

مثال 4.34: ایک وین میں 8 نشستیں ہیں۔ اس میں آگے دو نشستیں ہیں اور پیچھے تین نشستوں کی دو صفیں ہیں۔ یہ وین ایک خاندان کا ہے۔ جس میں ساتھ افراد $F, M, S_1, S_2, S_3, D_1, D_2$ رہتے ہیں۔



کتنے طریقوں سے خاندان کے لوگ اس وین میں بیٹھ سکتے ہیں؟ اگر

(i) کوئی پابندی نہیں ہے ؟

(ii) F یا M وین چلا رہا ہو ؟

(iii) D_1, D_2 کھڑکی کے پاس بیٹھے ہیں اور F گاڑی چلا رہا ہے ؟

حل:

(i) ایک وین میں 8 نشستیں ہیں جن میں سے ایک نشست گاڑی چلانے والے کے لئے ہے۔ چونکہ کوئی پابندی نہیں ہے کوئی بھی وین چلا سکتا ہے۔ لہذا ڈرائیور کی نشست پر بیٹھنے کے طریقوں کی تعداد $7 = {}^7P_1$ ہے۔ بقیہ 6 افراد باقی 7 نشستوں پر بیٹھنے کے طریقوں کی تعداد $5040 = {}^7P_6$ ہے۔ وین میں خاندان کے لوگ بیٹھنے کے طریقوں کی کل تعداد $7 \times 5040 = 35280$ ہے۔

(ii) چونکہ ڈرائیور کی نشست پر F یا M بیٹھ سکتے ہیں۔ اس پر صرف دو طریقے سے بٹھایا جاسکتا ہے۔ لہذا خاندان میں کار میں بیٹھنے کے طریقوں کی کل تعداد $2 \times 5040 = 10080$ ہے۔

(iii) چونکہ D_1 اور D_2 کے لئے 5 کھڑکی کی نشستیں دستیاب ہیں۔ دو افراد کھڑکی کے قریب بیٹھنے کے طریقوں کی تعداد $20 = {}^5P_2$ ہے۔ چونکہ F ڈرائیور کی نشست پر ہے۔ باقی 5 نشستوں میں سے 4 نشستوں پر باقی 4 افراد بیٹھ سکتے، جو $120 = {}^5P_4$ طریقوں سے۔ لہذا خاندان میں کار میں بیٹھنے کے طریقوں کی کل تعداد $20 \times 1 \times 120 = 2400$ ہے۔

100
95
75
25
5
0

192
Wednesday, September 28, 2022 9:18:03 PM

اگلے مسئلہ کو سمجھنے کے لئے اب ہم لغت میں لفظ کے درجہ (The Rank of a word in the dictionary) کی وضاحت کرتے ہیں۔
یہ وہ جگہ ہے جہاں دیا گیا لفظ اس وقت آتا ہے۔ جب دئے گئے الفاظ کے حروف سے بننے والی تمام تاریں لغت کی ترتیب یا ڈکشنری میں لکھیں۔

مثال 4.35 : اگر لفظ TABLE کے حروف کو ہر ممکن طریقوں سے تبدیل کی جاتی ہے اور اس طرح بنائے گئے الفاظ کو لغت کے ترتیب میں ترتیب دیا جاتا ہے (حروف تہجی کی ترتیب)۔
الفاظ کے درجہ معلوم کریں (i) TABLE (ii) BLEAT

حل : دئے گئے لفظ کے حروف کی لغت کی ترتیب A,B,E,L,T ہے۔ لغت میں ان الفاظ کی ترتیب جو A سے شروع ہوتے ہیں۔
اگر ہم پہلی جگہ A سے بھریں تو باقی 4 حروف (B,E,L,T) کو 4! طریقوں سے ترتیب دیا جائے۔ اس طرح ہمیں ملتا ہے۔

(i) لفظ TABLE کا درجہ

$$A - - - - = 4! = 24 \text{ طریقوں سے}$$
$$B - - - - = 4! = 24 \text{ طریقوں سے}$$
$$E - - - - = 4! = 24 \text{ طریقوں سے}$$
$$L - - - - = 4! = 24 \text{ طریقوں سے}$$
$$TABEL = 1 \text{ طریقہ}$$
$$TABLE = 1 \text{ طریقہ}$$

لفظ TABLE کا درجہ $4 \times 4! + 1 + 1 = 98$ ہے۔

(ii) لفظ BLEAT کا درجہ

$$A - - - - = 4! = 24 \text{ طریقوں سے}$$
$$BA - - - = 3! = 6 \text{ طریقوں سے}$$
$$BE - - - = 3! = 6 \text{ طریقوں سے}$$
$$BLA - - = 2! = 2 \text{ طریقوں سے}$$
$$BLEAT = 1 \text{ طریقہ}$$

لفظ BLEAT کا درجہ $24 + 6 + 6 + 2 + 1 = 39$

4.4.5 تمام غیر واضح اشیاء کو ترتیب دینا (Permutations of not all distinct objects)

لفظ JEE کے حروف کو تبدیلی دینے پر غور کریں، اس صورت میں لفظ کے حروف مختلف نہیں ہیں۔ یہاں 2E's ہیں جو ایک ہی قسم کے ہیں۔
آیئے عارضی طور پر 2E's کو مختلف حروف مان لیں E_1 اور E_2۔ بیک وقت میں 3 مختلف حروف کے ترتیبوں کی تعداد 3! ہے۔

ترتیب جب E_1, E_2 ایک جیسے ہو۔	ترتیب اس طرح ہوگی، جب E_1، E_2 مختلف ہو۔
JEE	JE_1E_2, JE_2E_1
EJE	E_1JE_2, E_2JE_1
EEJ	E_1E_2J, E_2E_1J

192
Wednesday, September 28, 2022 9:18:03 PM

اس کی وجہ یہ ہے کہ اندرونی طور پر اجازت دی گئی دو E_1، E_2 ایک ہی مبادلوں کو جنم دے گی چونکہ وہ ایک جیسے ہیں۔ مبادلوں کی مطلوبہ تعداد $\frac{3!}{2!} = 3$ ہے۔

مسئلہ 4.4 n اشیاء کے مبادلوں کی تعداد، جہاں P اشیاء بالکل ایک طرح کی ہیں اور باقی سب الگ ہیں۔ $\frac{n!}{p!}$

عام طور پر n اشیاء کی ترتیب میں، جہاں p_1 اشیاء ایک طرح کی ہیں۔ P_2 دوسری طرح کی ہیں۔ p_k اشیاء k طرح کی اور باقی مختلف قسم کی ہیں۔ $\frac{n!}{p_1! \times p_2! \times \cdots \times p_k!}$.

مثال 4.36 : لفظ BANANA کے حروف کو ترتیب دینے کے طریقوں کی تعداد معلوم کیجئے۔

حل: یہاں 6 حرف ہیں جن میں A تین بار، N دوبار اور B ایک بار ہے۔ ترتیب دینے کے طریقوں کی تعداد $\frac{6!}{3! \times 2!} = 60.$ ہے۔

مثال 4.37 : لفظ RAMANUJAN کے حروف کو ترتیب دینے کے طریقوں کی تعداد معلوم کریں تا کہ حرف علت اور حرف صحیح کی متعلقہ جگہ تبدیل نہ ہو۔

حل: یہاں حرف RAMANUJAN میں 4 حرف علت (A,A,U,A) ہیں جس میں A، 3 بار، U، ایک بار آتا ہے اور 5 حرف صحیح (R,M,N,J,N) ہیں۔ جس میں N دوبار اور باقی سبھی مختلف ہیں۔ 4 حرف علت ((A,A,A,U) کو خود $\frac{4!}{3!} = 4$ طریقوں سے ترتیب دیا جاسکتا ہے۔ 5 حرف صحیح (R,M,N,J,N) کو خود $\frac{5!}{2!} = 60$ طریقوں سے ترتیب دیا جاسکتا ہے۔ لہذا مطلوبہ ترتیبوں کی تعداد $\frac{4!}{3!} \times \frac{5!}{2!} = 4 \times 60 = 240.$ ہے۔

مثال 4.38 : تین جڑواں بچے لائن میں کھڑے تصویر کے لئے تیاری کر رہے ہیں۔ کتنی ترتیبیں ہیں کہ

(i) جب کوئی پابندی نہیں ہے۔ (ii) جب ہر شخص اپنے جڑواں کے ساتھ کھڑا ہو ؟

حل: بغیر کسی پابندی کے چھ افراد کو $^6P_6 = 6! = 720$ طریقوں سے ترتیب دیا جاسکتا ہے۔ مان لیں T_1, T_2, T_3 تین جڑواں ہیں۔ ہر جڑواں کو ایک فرد سمجھا جاتا ہے اور ان تینوں کو 3! طریقوں سے تبدیل کی جاسکتی ہے۔ ایک بار پھر ہر جڑواں کو 2! میں اپنے درمیان تبدیلی کی جاسکتی ہے۔ لہذا ترتیبوں کی کل تعداد $3! \times 2! \times 2! \times 2! = 48$ طریقے ہے۔

مثال 4.39 1,2,3,4,2,1 ہندسوں کو استعمال کر کے کتنے اعداد بنائے جاسکتے ہیں، اس طرح کہ جفت ہندسوں کو جفت جگہ پر رکھا جائے؟

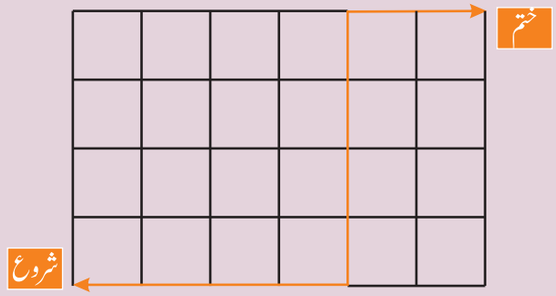
حل : یہاں 6 جگہیں ہیں، جن میں سے 3 جفت جگہیں ہیں۔ 2,4,2 جفت عدد ہیں۔ 3 جفت جگہوں میں 2,4,2 کی تبدیل کرنے کے طریقوں کی تعداد $\frac{3!}{2!} = 3$ طریقے۔ باقی اعداد 1,3,1 کو باقی 3 جگہوں پر 3 طریقوں سے تبدیلی کی جاسکتی ہے۔ $\frac{3!}{2!} = 3$

لہذا، اعداد کی مطلوبہ تعداد 9 = 3×3 ہے۔

100
95
75
25
5
0

192
Wednesday, September 28, 2022 9:18:04 PM

مثال 4.40 : تصویر میں دکھائی گئی 4×6 گرڈ (Grid) پر شروع سے آخر تک کتنے راستے ہیں ؟ کتنے راستے ہیں؟



خاکہ 4.15

حل: غور کریں کہ اس طرح کسی بھی راستے میں 6 افقی اکائی کی لمبائی اور 4 عمودی اکائی کی لمبائی ہوتی ہے۔ یہ ہر راستہ 10 اکائی لمبائی پر مشتمل ہے۔ جہاں 6 ایک طرح کے (افقی) اور 4 دوسری طرح کے (عمودی) ہیں۔

لہٰذا جملہ راستوں کی تعداد یہ ہے۔ $\frac{10!}{4! \times 6!} = 210$

مثال 4.41 : اگر لفظ BHASKARA کے تمام حروف کو مختلف تبادلوں کو بطور لغت استعمال کرنے پر پہلے فہرست میں کتنے تار موجود ہیں؟

حل: تار کی مطلوبہ تعداد A سے شروع ہونے والی تاروں کی کل تعداد اور B سے شروع ہونے والے پہلے لفظ سے A,A,B,H,K,R,S حروف کا استعمال $\frac{7!}{2!} = 2520.$ ہے۔

مثال 4.42 : اگر لفظ IITJEE کے حرف کو ہر ممکن طریقوں سے تبدیل کی جاتی ہے اور اس طرح بنائی گئی تاریں لغت نگاری کی ترتیب (lexicographic order) سے ترتیب دی جاتی ہیں تو IITJEE لفظ کا درجہ معلوم کریں۔

حل: دیے گئے E, E, I, I, J, T لفظ کے حروف کی لغت نگاری کی ترتیب ہے۔ لغت نگاری کی ترتیب میں E سے شروع ہونے والے تار پہلے آتے ہیں۔

اگر ہم پہلی جگہ E سے بھریں تو باقی 5 حروف (E,I,I,J,T) کو $\frac{5!}{2!}$ طریقوں سے ترتیب دیا جاسکتا ہے۔ اس طرح سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$E - - - -$ $= \frac{5!}{2!} = 60$ طریقے

$IE - -$ $= 4! = 24$ طریقے

$IIE - -$ $= 3! = 6$ طریقے

$IIJ - -$ $= \frac{3!}{2!} = 3$ طریقے

$IITE - -$ $= 2! = 2$ طریقے

$IITJEE$ = 1 طریقہ

لفظ IIT JEE کا درجہ (ترتیب) 96 =1+2+3+6+24+60 ہے۔

مثال 4.43 : 1، 2، 4، 6، 8 ہندسوں کو استعمال کرتے ہوئے بنائے جانے والے تمام 4 ہندسی عددوں کا حاصل جمع معلوم کیجئے۔

حل : ہندسوں کی تعداد جو دیے گئے 5 ہندسوں کا استعمال کرتے ہوئے بنائی جاسکتی ہے۔ $^5P_4 = 120$ ہم پہلے ان تمام 120 عددوں کی اکائی مقام میں ہندسوں کا حاصل جمع معلوم کرتے ہیں۔ اکائی کی مقام میں 1 کو بھرنے سے، بقیہ تین جگہیں بقیہ 4 ہندسوں سے $^4P_3=24$

192
Wednesday, September 28, 2022 9:18:04 PM

طریقوں سے بھری جاسکتی ہیں۔اس کا مطلب یہ ہے کہ 4 ہندسوں کی تعداد میں 1 اکائیوں کی جگہ $^4P_3 = 24$ اسی طرح 2,4,6,8 ہر ہندسہ اکائی کی مقام پر 24 بار ظاہر ہوتا ہے۔ ان تمام ہندسوں کا اضافہ تمام 120 اعداد کے تمام اکائی ہندسوں کا حاصل جمع دیتا ہے۔ لہذا

$$(^4P_3 \times 1) + (^4P_3 \times 2) + (^4P_3 \times 4) + (^4P_3 \times 6) + (^4P_3 \times 8)$$

$$= {}^4P_3 \times (1 + 2 + 4 + 6 + 8)$$
$$= {}^4P_3 \times (\text{ہندسوں کا حاصل جمع})$$
$$= {}^4P_3 \times 21.$$

اسی طرح، ہمیں ہندسوں کا حاصل جمع 10ویں مقام میں $^4P_3 \times 21$ کے طور پر حاصل ہوتا ہے۔چونکہ یہ 10ویں مقام پر ہے۔ اس کی قیمت $^4P_3 \times 21 \times 10$ ہے۔اسی طرح 100واں مقام اور 1000واں مقام کے ہندسوں کے حاصل جمع کی قیمت بالترتیب $^4P_3 \times 21 \times 100$ اور $^4P_3 \times 21 \times 1000$ ہیں۔ اس لئے ہندسوں 1,2,4,6,8 کے استعمال سے بننے والے تمام ہندسوں کی تعداد کا حاصل جمع

$$(^4P_3 \times 21) + (^4P_3 \times 21 \times 10) + (^4P_3 \times 21 \times 100) + (^4P_3 \times 21 \times 1000)$$

$$= {}^4P_3\,(21 \times 1111)$$
$$= 24 \times 21 \times 1111$$
$$= 559944.$$

وضع کرنا 4.1 (Deduction) دئے گئے n غیر صفر ہندوں کو استعمال کرتے ہوئے بننے والے تمام r ہندسوں کی تعداد کا حاصل جمع

$$(\text{r بار})1 \cdots 111 \times (\text{ہندسوں کا حاصل جمع}) \times {}^{(n-1)}P_{(r-1)}$$

وضع کرنا 4.2 (Deduction) دئے گئے n ہندسوں میں سے ایک ہندسہ اگر 0 ہے تو ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ دئے گئے n ہندسوں (0 بھی شامل ہے) کو استعمال کرتے ہوئے بنے والے r ہندسوں کا حاصل جمع

$$\{\text{بار } (r-1)\ 1 \ldots 111 \times (\text{ہندسوں کا حاصل جمع})\ n \times {}^{(n-1)}P_{(r-1)}\}$$
$$\{\text{بار } (r-1)\ (1 \ldots 111 \times (\text{ہندسوں کا حاصل جمع})\ n \times {}^{(n-2)}P_{(r-2)}\}$$

ترتیب ایک تفاعل کے طور پر (Permutation as function)

کوئی محدود مجموعہ پر ترتیب $S_n = \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\}$ ایک دوربطی تفاعل ہے $S_n \to S_n$۔لہذا n عناصر کے ساتھ ایک محدود مجموعہ پر تمام ترتیبوں کا مجموعہ جو مجموعے پر دوربطی (bijective) تفاعل کی تعداد کے برابر ہے۔یہ بالکل $n!$ ہے۔لہذا ترتیبوں کا مطالعہ مجموعہ پر دوربطی تفتیش کے مطالع جیسا ہی ہے۔ S_3 پر ترتیبوں کے لئے کچھ نمائندگی دی گئی ہے۔

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{bmatrix}, \cdots$$

مشق 4.2



1 ۔ اگر $^{(n-1)}P_3 : {}^nP_4 = 1 : 10$ ہو تو n معلوم کیجئے۔

2 ۔ اگر $^{10}P_{r-1} = 2 \times {}^6P_r$ ہو تو r معلوم کیجئے۔

3 ۔ (i) فرض کریں کہ 8 لوگ سوئمنگ کے مقابلہ میں حصہ لیتے ہیں۔کتنے طریقوں سے سونا، چاندی اور کانسی کے انعامات دئے جاسکتے ہیں؟

(ii) تین آدمیوں کے پاس بالترتیب 4 کوٹ، 5 واس کوٹ اور 6 ٹوپیاں ہیں۔ وہ انہیں کتنے طریقوں سے پہن سکتے ہیں؟

4۔ لفظ SIMPLE کے حروف کو ترتیب (permutation) کی تعداد کا تعین کریں، اگر سب ایک وقت میں لیا جائے۔

5۔ ایک شیٹ 10 متعدد انتخابی سوالات پر مشتمل ہے۔ اگر ٹسٹ کا جواب کتنے طریقوں سے دیا جا سکتا ہے؟ اگر (i) ہر سوال کے چار انتخاب ہو تو؟
(ii) پہلے چار سوالوں میں تین انتخاب ہیں اور باقی کے پانچ انتخاب ہیں۔ (iii) سوال نمبر n میں n+1 انتخاب ہیں؟

6۔ ایک طالب علم ایک معروضی امتحان لکھتا ہے، جس میں 5 متعدد انتخابی سوالات ہوتے ہیں۔ ہر سوال کے چار انتخاب ہیں، جن میں سے ایک صحیح جواب ہے۔ (i) طلباء زیادہ سے زیادہ تعداد کے مختلف جوابات کیا دے سکتے ہیں؟
(ii) اگر ایک سوال میں ایک سے زیادہ درست جوابات ہوں تو جواب کیسے بدلے گا؟

7۔ لفظ ARTICLE کے حروف سے کتنے تار بنائے جا سکتے ہیں، تاکہ جفت جگہوں پر حروف علت داخل ہونا۔

8۔ 8 عورتیں اور 6 آدمی ایک لائن میں کھڑے ہیں۔ (i) اگر کوئی فرد کسی بھی جگہ کھڑا ہو تو کتنے ترتیب ممکن ہیں؟
(ii) کتنے ترتیبوں میں 6 آدمی ایک دوسرے کے بعد کھڑے ہو گئے؟ (iii) کتنے ترتیبوں میں کوئی دو آدمی ایک دوسرے کے بعد کھڑے نہیں ہوں گے؟

9۔ لفظ MISSISSIPPI کے حروف میں مختلف مبادلہ معلوم کیجئے۔

10۔ کتنے طریقوں سے حاصل ضرب $a^2b^3c^4$ کو بغیر قوت نما کے ظاہر کیا جا سکتا ہے ؟

11۔ کتنے طریقوں سے 4 ریاضی کی کتابیں، 3 طبیعیات کی کتابیں، 2 کیمیات کی کتابیں اور 1 حیاتیات کی کتاب ایک شیلف پر ترتیب دی جا سکتی ہے تاکہ ایک ہی مضامین کی تمام کتابیں ایک ساتھ ہوں۔

12۔ لفظ SUCCESS کے حروف کو کتنے طریقوں سے ترتیب دیا جا سکتا ہے، تاکہ تمام S ایک ساتھ ہوں۔

13۔ ایک سکہ 8 بار پھینکا جاتا ہے۔ (i) سر اور پشتوں کی کتنی مختلف ترتیب ممکن ہیں؟ (ii) چھ سر اور دو پشت پر مشتمل کتنے مختلف ترتیب ممکن ہیں؟

14۔ لفظ INTERMEDIATE کے حروف کا استعمال کر کے کتنے تار بنائے جا سکتے ہیں؟ اگر
(i) حروف علت (Vowels) اور (Consonants) حروف صحیح متبادل ہیں۔
(ii) تمام حروف علت ایک ساتھ ہیں۔ (iii) حروف علت کبھی ساتھ نہیں ہیں۔ (iv) کوئی دو حروف علت ایک ساتھ نہیں ہیں۔

15۔ 1، 1، 2، 3، 3 اور 4 ہندسوں میں سے ہر ایک ہندسہ کو الگ کارڈ پر لکھا گیا ہے۔ 6 کارڈ ایک صف میں رکھے گئے ہیں تاکہ 6 ہندسی عدد بن سکے۔ (i) کتنے مختلف 6 ہندسی عدد ہیں؟ (ii) ان 6 ہندسی عددوں سے کتنے جفت ہیں؟ (iii) ان 6 ہندسی عددوں سے کتنے 4 سے تقسیم پذیر ہیں؟

16۔ اگر لفظ GARDEN کے حروف کو ہر ممکن طریقے سے تبدیل کی جائے اور اس طرح بننے والے تار کو لغت کی ترتیب میں ترتیب دی جاتی ہیں تو الفاظ کے درجہ معلوم کیجئے۔ (i) GARDEN (ii) DANGER

17۔ THING الفاظ کے تمام حروف کا استعمال کرتے ہوئے تار کی تعداد معلوم کریں۔ اگر یہ الفاظ بطور لغت لکھی جائیں تو 85 ویں تار کیا ہوگا؟

18۔ اگر لفظ FUNNY کے حروف کو ہر ممکن طریقے سے تبدیل کی جائے اور اس طرح کی تار لغت میں ترتیب دی جاتی ہے تو لفظ FUNNY کا درجہ معلوم کیجئے۔

19۔ چار ہندسوں والے تمام عددوں کا حاصل جمع کی تعداد معلوم کیجئے، جو ہندسوں 1، 2، 3، 4، 5 سے بنتے ہیں جب کہ ہندسوں کو دہرانے کی اجازت نہیں ہے؟

20۔ چار ہندسوں والے تمام اعدادوں کا حاصل جمع کی تعداد معلوم کیجئے، جو ہندسوں 0، 2، 5، 7، 8 سے بنتے ہیں جب کہ ہندسوں کو دہرائے بغیر؟

4.5۔ ترکیب یا اتصال یا جوڑنا (Combinations)

فرض کریں کہ چار آدمی A، B، C، اور D ہیں، (اصل نام یہاں استعمال کئے جا سکتے ہیں) اور ہمیں ان میں سے تین کو کمیٹی کا حصہ بنانا ہے۔ ہم کتنے طریقوں سے یہ انتخاب کر سکتے ہیں؟ مثال کے طور پر A,B,C ایک ممکن انتخاب ہے۔ یہاں ترتیب کی اہمیت نہیں ہے۔ اسی طرح A,B,C بھی وہی ہے، جو B,A,C یا C,A,B ہے جب تک کہ وہی تین آدمی منتخب ہوں۔ اسی طرح مختلف انتخاب A, B, C; A, B, D;

100 95 75 25 5 0
192
Wednesday, September 28, 2022 9:18:05 PM

A, C, D اور B, C, D ہیں۔اس طرح ہم یہ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ 4 میں سے 3 لوگوں کو منتخب کرنے کے 4 طریقے ہیں۔ ہر انتخاب 4 مختلف اشیاء ترکیب یا اتصال یا جوڑنا کہلاتا ہے جن میں 3 بیک وقت لی گئی ہوں۔

فرض کریں کہ چار آدمیوں میں سے دو آدمی کا انتخاب کیا جائے تو ممکن انتخاب یہ ہیں

$A, B : A, C : A, D : B, C : B, D : C, D$ ۔اس طرح ترکیب کی تعداد جو 4 مختلف اشیاء میں سے 2 کو بیک وقت لینے پر 6 ہے۔ترکیب کی تعداد جو n مختلف اشیاء کے لئے جب کہ r کو بیک وقت لیا جائے تو اسے ^nCr سے ظاہر کیا جاتا ہے۔اوپر سے ہم یہ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ $^4C_3 = 4$ اور $^4C_2 = 6$ ہے۔ 4 اشیاء کے لئے 3 کو بیک وقت لیا جانے پر ترکیب کی تعداد $^4C_3$ ہے۔غور کریں کہ ہر ترکیب میں 3 اشیاء کو 3! طریقوں سے ترتیب دی جا سکتی ہے۔ 4 اشیاء کے لئے 3 کو بیک وقت لیا جانے پر ترتیب کی کل تعداد $^4C_3 \times 3!$ ہے۔ یہ بھی $^4P_3$ کے برابر ہے اس لئے $^4P_3 = ^4C_3 \times 3!$.

عام طور پر یہ ترتیب (permutation) اور ترکیب (combination) کے درمیان ایک اہم تعلق بناتا ہے۔

$$^nP_r = ^nC_r \times r!.$$

عام طور پر کسی بھی پڑھنے والے کے لئے ترتیب اور ترکیب کے درمیان پریشانی ہو سکتی ہے۔مندرجۂ ذیل کے جدول میں دئے گئے مثالوں کی تعداد سے الجھن دور ہو سکتی ہیں۔

S.No.	وضاحت Description	ترتیب (Permutation)	ترکیب (Combination)
1	یہ کیا ہے	ترتیب کی تعداد یا اشیاء کی فہرست	انتخاب کی تعداد یا اشیاء کی گروپ بندی
2	اسے کہاں استعمال کریں	اگر اشیاء کی ترتیب اہم ہے	اگر اشیاء کی ترتیب اہم نہیں ہے
3	نمائندگی	^nP_r	^nC_r
		مثالیں	
4	کرکٹ کے کھیل میں	15 کھلاڑیوں میں سے 11 کی بیٹنگ لائن اپ کی تعداد	15 کھلاڑیوں میں سے 11 کھلاڑیوں پر مشتمل ٹیموں کی تعداد
5	انعام کی تقسیم کے عمل میں	3 مختلف انعامات تقسیم کرنے کے طریقوں کی تعداد	3 ایک جیسے مختلف انعامات تقسیم کرنے کے طریقوں کی تعداد
6	ایک کمیٹی کی تشکیل میں	13 ارکان پر مشتمل کمیٹی کے لئے صدر اور نائب صدر کے انتخاب کے طریقوں کی تعداد	13 میں سے دو افراد کی کمیٹی بنانے کے طریقوں کی تعداد
7	اشیاء کے انتخاب کے عمل میں	15 میں سے 3 مختلف اشیاء کو یکے بعد ایک منتخب کرنے کی طریقوں کی تعداد	بیک وقت 15 میں سے 13 اشیاء کو منتخب کرنے کی طریقوں کی تعداد

مسئلہ 4.5 اجتماع کی تعداد n مختلف اشیاء کے لئے r کو بیک وقت لیا جانے پر اس طرح سے دیا گیا ہے۔

$$^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}, 0 \leq r \leq n.$$

ثبوت : ترتیب اور ترکیب کے درمیان کے تعلق سے، ہمارے پاس ہے۔

$$^nC_r = \frac{^nP_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad \text{(ترتیب کے نتیجہ سے)}$$

4.5.1۔ ترکیب کی خصوصیات: (Properties of Combinations)

خصوصیت 1 : $\text{(i) } ^nC_0 = 1 \text{ , (ii) } ^nC_n = 1, \text{ (iii) } ^nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}.$

ثبوت:

$$\begin{aligned}
(i)^nC_0 &= \frac{n!}{0!(n-0)!} = 1.\\
(ii)^nC_n &= \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!0!} = 1.\\
(iii)^nC_r &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(r-1))}{r!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}.
\end{aligned}$$

کے سبب سے،

ہمارے پاس $^nC_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = ^n C_r,$

خصوصیت 2 : $^nC_r = ^n C_{n-r}.$

خصوصیت 3 : اگر $^nC_x = ^n C_y$ پھر یا تو $x = y$ یا $x + y = n.$

ثبوت : خصوصیت 2 سے ہمارے پاس ہے۔ $^nC_y = ^n C_{n-y}$

لہذا، $^nC_x = ^n C_y = ^n C_{n-y}$ ہمیں $x = y$ یا $x = n - y$ مساوی طور پر، $x = y$ یا $x + y = n$

خصوصیت 4 : $^nC_r + ^n C_{r-1} = ^{n+1} C_r$

ثبوت: ’’ ترکیب ‘‘ کے اظہارات کا استعمال کرتے ہوئے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned}
^nC_r + ^n C_{r-1} &= \frac{n!}{r!.(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!.(n-(r-1))!}\\
&= \frac{n!}{r! \times (n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)! \times (n-r+1)!}\\
&= \frac{n!}{r.(r-1)! \times (n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!.(n-r)!(n-r+1)}\\
&= \frac{n!}{(r-1)! \times (n-r)!} \times \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{(n-r+1)}\right)\\
&= \frac{n!}{(r-1)! \times (n-r)!} \times \frac{(n-r+1+r)}{r(n-r+1)}\\
&= \frac{n!}{(r-1)! \times (n-r)!} \times \frac{(n+1)}{r(n-r+1)}\\
&= \frac{(n+1)!}{r! \times (n+1-r)!} = ^{n+1} C_r.
\end{aligned}$$

192
Wednesday, September 28, 2022 9:18:06 PM

خصوصیت 5:

$$^nC_r = \frac{n}{r} \times^{(n-1)} C_{(r-1)}.$$

ثبوت :

$$\begin{aligned}\frac{n}{r} \times^{(n-1)} C_{(r-1)} &= \frac{n}{r}\frac{(n-1)!}{(r-1)! \times ((n-1)-(r-1))!} \\ &= \frac{n(n-1)!}{r(r-1)!(n-r)!} = ^n C_r\end{aligned}$$

■

مثال 4.44 ۔ مندرجۂ ذیل کی قیمت معلوم کیجئے۔

(i) $^{10}C_3$ (ii) $^{15}C_{13}$ (iii) $^{100}C_{99}$ (iv) $^{50}C_{50}$.

حل :

(i)
$$\begin{aligned}^{10}C_3 &= \frac{10!}{7! \times 3!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7! \times 3 \times 2 \times 1} \\ &= \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120\end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned}^{15}C_{13} &= \frac{15!}{2! \times 13!} = \frac{15 \times 14 \times 13!}{2 \times 1 \times 13!} \\ &= \frac{15 \times 14}{2 \times 1} = 105\end{aligned}$$

(iii)
$$^{100}C_{99} = \frac{100 \times 99!}{99!} = 100$$

(iv)
$$^{50}C_{50} = \frac{50!}{50! \times 0!} = 1.$$

مثال 4.45 5 ویں خصوصیت کو استعمال کرتے ہوئے $^5C_2$ اور $^7C_3$ کی قیمت معلوم کیجئے۔

حل :

$$^nC_r = \frac{n}{r} \times {}^{n-1}C_{r-1}.$$

$n = 5$ اور $r = 2$ درج کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned}^5C_2 &= \frac{5}{2} \times {}^4C_1 = \frac{5}{2} \times \frac{4}{1} \\ &= \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10.\end{aligned}$$

$n = 7$ اور $r = 3$ کو درج کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned}^7C_3 &= \frac{7}{3} \times {}^6C_2 = \frac{7}{3} \times \frac{6}{2} \times {}^5C_{2-1} \\ &= \frac{7}{3} \times \frac{6}{2} \times {}^5C_1 = \frac{7}{3} \times \frac{6}{2} \times \frac{5}{1} \\ &= \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35\end{aligned}$$

مثال 4.46 اگر ${}^nC_4 = 495$ ہوتو **n** کیا ہے؟

حل: ہمیں معلوم ہے۔

$${}^nC_4 = 495.$$

لہذا

$$\frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3)}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 495$$

$$\implies n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) = 495 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

495 کا جزوضربی $495 = 3 \times 3 \times 5 \times 11,$ ہے اوراس حاصل ضرب کونزولی ترتیب میں متواتر **4** عددوں کا حاصل ضرب کے طور پر لکھیں تو ہمیں حاصل ہوتا ہے $n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) = 12 \times 11 \times 10 \times 9$ ۔ زیادہ سے زیادہ تعداد کے ساتھ n کو مساویانے (equating) پر ہمیں **n = 12** حاصل ہوتا ہے۔

مثال 4.47 : اگر ${}^nP_r = 11880$ اور ${}^nC_r = 495$ ہوتو **n** اور **r** معلوم کیجئے۔

حل : ہمیں معلوم ہے۔

$$\frac{{}^nP_r}{{}^nC_r} = r!.$$

لہذا $$r! = \frac{11880}{495} = 24 = 4!,$$

r = 4 حاصل ہوتا ہے۔اس **r = 4** کو ${}^nc_4 = 495$ میں استعمال کرتے ہوئے اورمثال **4.46** کے نتیجہ کواستعمال کرنے پر ہمیں **n = 12** حاصل ہوتا ہے۔

مثال 4.48 : ثابت کیجئے۔ ${}^{24}C_4 + \sum_{r=0}^{4} {}^{(28-r)}C_3 = {}^{29}C_4$

حل:

$$\begin{aligned}
{}^{24}C_4 + \sum_{r=0}^{4} {}^{(28-r)}C_3 &= {}^{24}C_4 + {}^{28}C_3 + {}^{27}C_3 + {}^{26}C_3 + {}^{25}C_3 + {}^{24}C_3 \\
&= {}^{24}C_4 + {}^{24}C_3 + {}^{25}C_3 + {}^{26}C_3 + {}^{27}C_3 + {}^{28}C_3 \\
&= {}^{25}C_4 + {}^{25}C_3 + {}^{26}C_3 + {}^{27}C_3 + {}^{28}C_3 \\
&= {}^{26}C_4 + {}^{26}C_3 + {}^{27}C_3 + {}^{28}C_3 \\
&= {}^{27}C_4 + {}^{27}C_3 + {}^{28}C_3 \\
&= {}^{28}C_4 + {}^{28}C_3 \\
&= {}^{29}C_4
\end{aligned}$$

192
Wednesday, September 28, 2022 9:18:07 PM

مثال 4.49 : ثابت کیجئے۔ $^{10}C_2 + 2 \times {}^{10}C_3 + {}^{10}C_4 = {}^{12}C_4$

حل:

$$\begin{aligned} {}^{10}C_2 + 2 \times {}^{10}C_3 + {}^{10}C_4 &= {}^{10}C_2 + ({}^{10}C_3 + {}^{10}C_3) + {}^{10}C_4 \\ &= ({}^{10}C_2 + {}^{10}C_3) + ({}^{10}C_3 + {}^{10}C_4) \\ &= {}^{11}C_3 + {}^{11}C_4 \\ &= {}^{12}C_4 \end{aligned}$$

مثال 4.50: اگر $^{(n+2)}C_7 : {}^{(n-1)}P_4 = 13 : 24$ ہوتو n معلوم کیجئے

حل :

$$\begin{aligned} {}^{(n+2)}C_7 : {}^{(n-1)}P_4 &= 13 : 24. \\ \frac{{}^{(n+2)}C_7}{{}^{(n-1)}P_4} &= \frac{13}{24}. \\ \frac{(n+2)!}{(n-5)! \times 7!} \times \frac{(n-5)!}{(n-1)!} &= \frac{13}{24}. \\ \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)!}{(n-1)! \times 7!} &= \frac{13}{24}. \\ (n+2)(n+1)(n) &= \frac{13}{24} \times 7! = \frac{13}{24} \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \\ (n+2)(n+1)(n) &= 13 \times 14 \times 15 \\ n+2 &= 15 \Longrightarrow n = 13. \end{aligned}$$

مثال 4.51 : ایک مخصوص ریستوران میں سلاد مندرجۂ ذیل 4 پھلوں یعنی سیب، کیلا، امردود، انار، انگور، پپیتا اور انناس سے بنا ہے۔ پھلوں کے سلاد کی کل ممکن تعداد معلوم کیجئے۔

حل: یہاں سات پھل ہیں اور ہمیں پھلوں کی سلاد کے لئے چار پھل منتخب کرنے ہوں گے۔ لہذا پھلوں کی سلاد بنانے کے ممکن طریقوں کی کل تعداد $^7C_4 = {}^7C_3 = 35$ ہے۔

مثال 4.52 ایک ریاضی کلب میں 15 ممبر ہیں۔ اس میں 8 لڑکیاں ہیں۔ 6 ممبر کو ایک مقابلے کے لئے منتخب کیا جاتا ہے اور ان میں سے آدھے لڑکیاں ہونے چاہئیں۔ کتنے طریقوں سے ان کا انتخاب ممکن ہیں؟

حل: ریاضی کے کلب میں 8 لڑکیاں اور 7 لڑکے ہیں۔ ان میں سے آدھی لڑکیوں (3 لڑکیاں اور دیگر) میں 6 ممبروں کے انتخاب کے طریقوں کی تعداد $^8C_3 \times {}^7C_3 = 56 \times 35 = 1960$ ہے۔

مثال 4.53۔ 20 کار برانڈز کی درجہ بندی میں ایک کا میگزین پہلا، دوسرا، تیسرا، چوتھا اور پانچواں بہترین برانڈز چنتا ہے اور پھر 7 مزید قابل قبول برانڈز کو چنتا ہے۔ یہ کتنے طریقوں سے کیا جا سکتا ہے؟

حل: 20 برانڈز میں سے پہلے۔ دوسرے، تیسرے، چوتھے اور پانچویں بہترین برانڈز کے لئے 5 برانڈز کا انتخاب $^{20}P_5$ طریقوں سے کیا جاتا ہے۔ باقی 15 میں سے ہمیں $^{15}C_7$ طریقوں سے 7 قابل قبول منتخب کرنے کی ضرورت ہے۔ ضربی اصول کے مطابق $^{20}P_5 \times {}^{15}C_7$ طریقوں سے کیا جا سکتا ہے۔

مثال 4.54۔ 25 طلباء کی کلاس میں سے 10 طالب علموں کو ایک تفریحی سفر کے لئے چنا ہے۔ 4 طلباء ایسے ہیں جنہوں نے یہ طے کیا ہے یا تو وہ تینوں جائیں گے یا پھر کوئی نہیں۔ کتنے طریقوں سے تفریحی سفر کے لئے پارٹی چنی جا سکتی ہے؟

حل: یہاں دو امکانات ہیں۔ (i) تمام 4 طلباء تفریحی سفر میں جائیں گے، ہمیں 21 طلباء میں سے 6 طلباء کو منتخب کرنے کی ضرورت ہے۔

$^{21}C_6 = \frac{21!}{6! \times 15!}$ طریقوں سے کیا جا سکتا ہے۔

ii) تمام 4 طلباء تفریحی سفر میں نہیں جائیں گے۔ ہمیں 21 طلباء میں سے 10 طلباء کو منتخب کرنے کی ضرورت ہے۔

$^{21}C_{10} = \frac{21!}{10! \times 11!}$ طریقوں سے کیا جا سکتا ہے۔ لہذا طریقوں کی کل تعداد یہ ہے۔

$$^{21}C_6 + ^{21}C_{10} = \frac{21!}{6! \times 15!} + \frac{21!}{10! \times 11!}$$

مثال 4.55 : ایک درجن سیب کے ڈبے میں ایک بوسیدہ سیب ہے۔ اگر ہم بیک وقت 3 سیب کا انتخاب کرتے ہیں تو کتنے طریقے سے، کوئی صرف اچھا سیب حاصل ہوگا۔

حل: 12 سیبوں میں سے 3 سیب کا انتخاب کرتے وقت $^{12}C_3 = 220.$ ایک بوسیدہ سیب حاصل کرنے کے طریقوں کی کل تعداد 1 بوسیدہ سیب کو منتخب کرنے کے برابر ہے اور باقی 2 سیب 11 سیبوں سے منتخب کئے جا سکتے ہیں۔ $^{11}C_2 = 55.$

لہذا صرف اچھے سیب حاصل کرنے کے طریقوں کی کل تعداد

$$^{12}C_3 - ^{11}C_2 = 220 - 55 = 165$$

مثال 4.56 : ایک امتحان کے پرچے میں 8 سوالات ہیں، حصہ A میں 4 اور حصہ B میں 4۔ امتحان دینے والے کو 5 سوالات کے جوابات دینے ہیں۔ یہ کتنے طریقوں سے کیا جا سکتا ہے۔ اگر (i) دونوں حصوں میں متعدد سوالات کے انتخاب کی کو پابندی نہیں ہے۔

(ii) حصہ A سے کم از کم دو سوالوں کا جواب دینا ضروری ہے۔

حل: (i) کوئی پابندی نہیں ہے۔ حصہ A اور حصہ B دونوں میں 8 سوالات ہیں۔ 8 سوالوں میں سے 5 سوالات کی کوشش کرنے کے طریقوں کی کل تعداد $^8C_5 = ^8C_3 = 56$ ہے۔

(ii) حصہ A سے کم از کم دو سوالات کے جوابات دینا ضرودی ہے۔ اس طرح سے، مختلف انتخابات درج ذیل ہیں۔

حصہ A	حصہ B	انتخابات کی تعداد
2	3	$^4C_2 \times ^4C_3$
3	2	$^4C_3 \times ^4C_2$
4	1	$^4C_4 \times ^4C_1$

لہذا، جواب دینے کے طریقوں کی مطلوبہ تعداد

$$^4C_2 \times ^4C_3 + ^4C_3 \times ^4C_2 + ^4C_4 \times ^4C_1 = 24 + 24 + 4 = 52.$$

192
Wednesday, September 28, 2022 9:18:07 PM

مثال 4.57 : 7 حروف صحیح اور 4 حروف علت میں سے 3 حروف صحیح اور 2 حروف علت کی کتنی تاریں بن سکتی ہیں؟

حل: منتخب کرنے کے طریقوں کی تعداد (7 میں 3 حروف صحیح) اور (4 میں سے 2 حروف علت) ہیں۔

$$^7C_3 \times^4 C_2$$

ہر تار میں 5 حروف ہیں۔آپس میں 5 حروف کو ترتیب دینے کے طریقوں کی تعداد $5! = 120$ ہے۔ لہذا مطلوبہ طریقوں کی تعداد

$$^7C_3 \times^4 C_2 \times 5! = 35 \times 6 \times 120 = 25200$$

مثال 4.58 لفظ PREPOSITION کے حروف سے بننے والے کتنے حروفوں کی تار بنائی جاسکتی ہیں ؟

حل: لفظ میں 11 حروف ہیں، حروف کی تکرار کی تعداد کے حوالے سے 4 واضح حروف ہیں(R,S,T,N) دو یکساں حروف کے 2 سٹ (PP,II)، تین یکساں حروف کے ایک سٹ (OOO) ہیں۔مندرجۂ ذیل جدول ان سیٹ کی ترکیب اور الفاظ کی تعداد کو واضح کرے گا۔

S.No	حروف کے اختیارات	انتخابات	ترتیب
1	5 واضح (R, S, T, N, P, I, O)	$^7C_5$	$^7C_5 \times 5! = 2520$
2	3 یکساں حروف کے 1 سٹ (OOO) 2 یکساں حروف کے 1 سٹ (PP,II)	$^1C_1 \times^2 C_1$	$^1C_1 \times^2 C_1 \times \frac{5!}{3!\times 2!} = 20$
3	3 یکساں حروف کے 1 سٹ (OOO) 2 واضح (R,S,T,N,P,I)	$^1C_1 \times^6 C_2$	$^1C_1 \times^6 C_2 \times \frac{5!}{3!} = 300$
4	2 یکساں حروف کے 2 سٹ (PP,II,OO) 1 واضح (R,S,T,N اور باقی یکساں میں سے 1)	$^3C_2 \times^5 C_1$	$^3C_2 \times^5 C_1 \times \frac{5!}{2!\times 2!} = 450$
5	2 یکساں حروف کے 1 سٹ (PP,II, 00) 3 واضح R,S,T,N اور باقی 2 یکساں میں سے 2 باقی	$^3C_1 \times^6 C_3$	$^3C_1 \times^6 C_3 \times \frac{5!}{2!} = 3600$

لہذا، تار کی کل تعداد $2520 + 20 + 300 + 450 + 3600 = 6890.$

مثال 4.59 : اگر m متوازی خطوط کا ایک سٹ n متوازی خطوط کے دوسرے سٹ کو قطع کرتا ہے (پہلے سٹ میں خطوں کے متوازی نہیں ہے) تو اس جالی کے ڈھانچے میں بننے والے متوازی الاضلاع کی تعداد معلوم کیجئے

حل : جب بھی ہم m خطوط کے پہلے سٹ سے 2 خطوط اور n خطوط کے دوسرے سٹ سے 2 خط منتخب کرتے ہیں۔ایک متوازی الاضلاع بنتا ہے۔ اس طرح بننے والے متوازی الاضلاع $^mC_2 \times^n C_2$ ہے۔

مثال 4.60 : کثیرالاضلاع میں n ضلع والے کتنے وتر ہیں؟

حل : n ضلع والے کثیرالاضلاع میں n راسیں ہیں۔کثیرالاضلاع کے کسی بھی دو راسوں کو جوڑ کر ہم کثیرالاضلاع کا کوئی ایک ضلع یا وتر حاصل کرتے ہیں تو ایک وقت میں دو لئے گئے n ضلع کثیرالاضلاع کی راسوں کو جوڑ کر حاصل کردہ قطاع خط کی تعداد ${}^nC_2 = \frac{n(n-1)}{2}$ ہے۔ ان خطوط میں سے کثیرالاضلاع کے n ضلع ہیں۔لہذا کثیرالاضلاع کی وتر کی تعداد

$$\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$$

خاص طور پر پانچ ضلعی اور سات ضلعی (سپٹاگن) کے لئے وتروں کی تعداد کی ترتیب $\frac{5(5-3)}{2} = 5$ اور $\frac{7(7-3)}{2} = 14$ ہیں۔

مشق 4.3

1۔ اگر ${}^nC_{12} = {}^nC_9$ ہو تو ${}^{21}C_n$ معلوم کیجئے۔

2۔ اگر ${}^{15}C_{2r-1} = {}^{15}C_{2r+4}$ ہو تو r معلوم کیجئے۔

3۔ اگر ${}^nP_r = 720$ اور ${}^nC_r = 120$ ہو تو n, r معلوم کیجئے۔

4۔ ثابت کیجئے۔ ${}^{15}C_3 + 2 \times {}^{15}C_4 + {}^{15}C_5 = {}^{17}C_5$

5۔ ثابت کیجئے۔ ${}^{35}C_5 + \sum_{r=0}^{4} {}^{(39-r)}C_4 = {}^{40}C_5$

6۔ اگر ${}^{(n-3)}P_4 : {}^{(n+1)}C_8 = 57 : 16$ ہو تو n کی قیمت معلوم کیجئے۔

7۔ ثابت کیجئے۔ ${}^{2n}C_n = \frac{2^n \times 1 \times 3 \times \cdots (2n-1)}{n!}$

8۔ ثابت کیجئے، اگر $1 \leq r \leq n$ ہو تو $n \times {}^{(n-1)}C_{r-1} = (n-r+1){}^nC_{r-1}$

9۔ (i) ایک کبڈی کوچ کے پاس 14 کھلاڑی کھیلنے کے لئے تیار ہیں۔7 کھلاڑیوں کی کتنی مختلف ہمیں میدان پر اتارا جاسکتا ہے۔

(ii) ایک پارٹی میں 15 افراد ہیں اور اگر ان میں سے ہر ایک دوسرے سے مصافحہ کرتے ہیں تو پارٹی میں کتنے مصافحے ہوں گے؟

(iii) دائرے پر 20 نقطے کے ذریعے کتنے وتر کھینچے جاسکتے ہیں ؟

(iv) پارکنگ میں ایک سال پرانی سو کاریں کھڑی ہیں۔ان میں سے پانچ کو اس کی آلودگی کے آلات کو جانچ کرنے کے لئے بلامنصوبہ کیسے منتخب کئے جاسکتے ہیں؟

(v) 5 لڑکوں، 4 لڑکیوں اور 2 مخنث Transgender میں سے 3 لڑکوں، 2 لڑکیوں اور 1 مخنث کی ٹیم کو کتنے طریقوں سے منتخب کیا جاسکتا ہے؟

10۔ ایک سیٹ کے تحتی مجموعے کی کل تعداد معلوم کیجئے۔ (اشارہ: ${}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + \cdots + {}^nC_n = 2^n$)

(i) 4 عناصر (ii) 5 عناصر (iii) n عناصر

11۔ ایک ٹرسٹ کے 25 ممبر ہیں (i) ان میں سے 3 افسران کو کتنے طریقے سے منتخب کیا جاسکتا ہے؟

(ii) صدر، نائب صدر اور سکرٹری کا انتخاب کتنے طریقوں سے کیا جاسکتا ہے ؟

192
Wednesday, September 28, 2022 9:18:08 PM

12۔ صدراور سکریٹری کے ساتھ 10 آدمی میں سے چھ آدمیوں کی کمیٹی کتنے طریقے سے منتخب کیا جاسکتا ہے؟

13۔ 12 مختلف کتابوں سے 5 کتابوں کے کتنے مختلف انتخاب کئے جاسکتے ہیں۔اگر

(i) دوخاص کتابیں ہمیشہ منتخب کی جائیں۔ (ii) دوخاص کتابیں کبھی منتخب نہیں کی جائیں۔

14۔ 15 اساتذہ اور 20 طلباء ہیں۔ ان میں سے 2 اساتذہ اور 3 طلباء کی ایک کمیٹی بنتی ہے۔ان طریقوں کی تعداد معلوم کریں جن میں یہ کیا جاسکتا ہے۔ مزید معلوم کریں کہ ان میں سے کتنی کمیٹیاں ہیں۔

(i) ایک مخصوص استاد شامل ہے ؟ (ii) ایک مخصوص طالب علم شامل نہیں ہے ؟

15۔ ایک امتحان میں ایک طالب علم کو 9 سوالات میں سے 5 سوالات کے جوابات دینے ہوتے ہیں، جن میں سے 2 سوال لازمی ہیں۔ ایک طالب علم کتنے طریقوں سے سوالات کے جوابات دے سکتا ہے؟

16۔ 52 تاش کے پتوں کی ایک گڈی سے 5 پتوں کے اجتماع کے کتنے طریقے ہیں۔اگر ہر ایک اجتماع میں بالکل ' 3 ' ایک ہو ؟

17۔ 7 ہندوستانیوں اور 5 امریکیوں میں 5 ممبر پر ایک کمیٹی بنانے کے طریقوں کی تعداد معلوم کریں، تاکہ کمیٹی میں ہمیشہ ہندوستانی اکثریت میں رہیں۔

18۔ 8 مرد اور 4 عورتوں سے 7 لوگوں کی ایک کمیٹی بنانی ہے ۔یہ کتنے طریقے سے بن سکتی ہے؟ جب کمیٹی پر مشتمل ہو

(i) صرف 3 عورتیں ہو؟ (ii) کم ازکم 3 عورتیں ہو؟ (iii) زیادہ سے زیادہ 3 عورتیں ہو؟

19۔ ایک شخص کے رشتہ دار 4 خواتین اور 3 مرد حضرات پر مشتمل ہیں۔اس کی بیوی کے بھی 7 رشتہ دار ہیں۔ان میں سے 3 خواتین اور 4 مرد حضرات ہیں۔وہ کتنے طریقوں سے 3 خواتین اور 3 مرد حضرات کی ڈنر پارٹی دے سکتے ہیں تاکہ مرد کے 3 رشتہ دار اور بیوی کے 3 رشتہ دار ہوں۔

20۔ ایک ڈبے میں دو سفید گیندیں، تین کالی گیندیں اور چار سرخ گیندیں ہیں۔ڈبے سے تین گیندوں کو کتنے طریقوں سے نکالا جاسکتا ہے۔ اگر کم ازکم ایک کالی گیند کو قرعہ اندازی میں کرنا ہو۔

21۔ لفظ EXAMINATION کے حروف سے بنے والے کتنے 4 حروفوں کی تار بنائے جاسکتے ہیں۔

22۔ ایک مستوی سطح میں 15 نقطوں کو ملا کر کتنے مثلث بنائے جاسکتے ہیں، جس میں کوئی خط کسی تین نقطہ میں شامل نہیں ہوئی ہے ؟

23۔ 15 نقطوں سے کتنے مثلث بن سکتے ہیں،ان میں سے 7 ایک نقطہ پر واقع ہیں، اور باقی 8 دوسری متوازی خط پر واقع ہے۔

24۔ ایک سطح پر 11 نقطے ہیں۔ ان میں سے کوئی تین نقطے خط مستقیم پر واقع نہیں ہے، سوائے 4 نقطوں کے جو کہ ہم خط ہے۔ معلوم کیجئے۔

(i) خط مستقیم کی تعداد جو اِن دو نقطوں کی جوڑی سے حاصل کی جاسکتی ہے۔

(ii) ان مثلثوں کی تعداد جو تشکیل دی جاسکتی ہیں، جن کے لئے نقطہ ان کے راسیں ہیں۔

25۔ کثیرالاضلاع میں 90 وتریں ہیں۔اس کے ضلعوں کی تعداد معلوم کیجئے۔

4.6۔ حسابی امالیت: (Mathematical Induction)

آیئے ہم پہلے n مثبت طاق اعداد کا حاصل جمع پر غور کریں۔یہ $1, 3, 5, 7, \cdots, 2n-1$ ہیں۔ پہلا طاق عدد 1 جو 1 کے برابر ہے۔ پہلے دو طاق عدد 1 عدد اور 3 اور ان کا حاصل جمع 4 ہے۔مندرجۂ ذیل لکھنے سے ہمیں ایک نمونہ دیکھنے میں مدد ملتی ہے

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1+3 &= 4 \\ 1+3+5 &= 9 \\ 1+3+5+7 &= 16 \\ 1+3+5+7+9 &= 25 \end{aligned}$$

100 95 75 25 5 0

192
Wednesday, September 28, 2022 9:18:09 PM

اوراسی طرح، ہم یہ غور کرتے ہیں کہ اظہارات کے دائیں ہاتھ کے جانب کامل مربع ہیں 1 ،4،9،16،25۔ یہ نمونہ ہمیں یہ احتمال کرنے پر مجبور کرتے ہیں کہ پہلے n طاق اعداد کا حاصل جمع n^2 کے برابر ہے۔ علامتی طور پر، ہم اس کا اظہار اس طرح کرتے ہیں۔

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

تاہم، ہم نے صرف ایک قیاس آرائی کی ہے۔ قیاس کو ثابت کرنے کے لئے ہم حسابی امالیت کے اصول کا استعمال کریں گے۔ حسابی امالیت حساب کے نتیجے یا مسئلہ کو ثابت کرنے کا ایک طریقہ یا تکنیک ہے۔ یہ تکنیک کسی مخصوص نتیجہ کے تمام ممکن معاملات کا مشاہدہ کرے قیاس آرائی کرنے پر بھروسہ کرتی ہے۔ یہ الجبرا یا حساب کے دیگر شعبوں میں نتیجے کو ثابت کرنے کے لئے موزوں ہے جہاں نتیجے یا مسئلہ کے n ، n ایک مثبت سالم اعداد ہونے کے لحاظ سے ظاہر کئے گئے ہیں۔ حسابی امالیت کے عمل کا موازنہ لامحدود سیڑھیاں چڑھنے سے کیا جاسکتا ہے۔

اس بات کو یقینی بنانے کے لئے کہ ہم چڑھائی مکمل کریں یہ درج ذیل کو یقینی بنانے کے لئے کافی ہے۔

(a) ہم پہلی سیڑھی چڑھ سکتے ہیں۔ (b) ایک بار جب ہم سیڑھی کے ایک خاص مرحلے پر پہنچ گئے تو ہم اگلے مرحلے پر چڑھ سکتے ہیں۔

(a) اور (b) کا یقینی ہونا بھی ہمیں سیڑھی کے تمام قدموں پر چڑھنے کے قابل عمل بنائے گا۔ اسی طرح جب ہم ریاضی کے بیان P (n) کو ثابت کرنے کے لئے یہ طریقہ استعمال کرتے ہیں تو امالہ کے عمل میں درج ذیل کے اقدامات شامل ہیں۔



خاکہ 4.16

مرحلہ 1 : تصدیق کیجئے کہ بیان درست ہے $n = 1$ کے لئے یعنی تصدیق کریں کہ P(1) درست ہے۔ یہ سیڑھی کے پہلے قدم پر چڑھنے کی طرح ہے اور اسے ابتدائی قدم کہا جاتا ہے۔

مرحلہ 2 : تصدیق کیجئے کہ بیان $n = k+1$ کے لئے درست ہے۔ جب بھی یہ $n = k$ کے لئے درست ہے جہاں K ایک مثبت سالم عدد ہے۔
اس کا مطلب یہ ہے کہ ہمیں یہ ثابت کرنے کی ضرورت ہے کہ P(k+1) درست ہے۔ جب بھی P(k) درست ہے۔
اسے امالی مرحلہ (Inductive step) کہا جاتا ہے۔

مرحلہ 3 : اگر مرحلہ 1 اور مرحلہ 2 معین ہو چکے ہیں تو تمام مثبت سالم عدد کے لئے P(n) درست ہے۔

حساب میں ثبوت کا ایک دلچسپ طریقہ حسابی امالیت ہے۔ ہم سوالوں کے ذریعے طریقوں کی وضاحت کریں گے۔
وضاحت کے طور پر آیئے ذیل میں ایک مثال کے ذریعے معروف نتیجے پر نظر ثانی کرتے ہیں۔

192
Wednesday, September 28, 2022 9:18:10 PM

مثال 4.61 حسابی امالیت کے اصول سے ثابت کیجئے کہ تمام سالم عدد $n \geq 1$ کے لئے

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

حل: فرض کیجئے

$$P(n) := 1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

بیان میں $n=1$ کو درج کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے $P(1)=\frac{1(1+1)}{2}=1$ لہذا $P(1)$ درست ہے۔

فرض کریں $n=k$ کے لئے بیان درست ہے، تب

$$P(k)=1+2+3+...+k=\frac{k(k+1)}{2}.$$

ہمیں یہ ثابت کرنے کی ضرورت ہے $P(k+1)$ درست ہے۔ غور کریں

$$P(k+1)=\underbrace{1+2+3+\cdots+k}+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1).$$

$$P(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}. \quad \text{لہذا}$$

لہذا $P(k+1)$ درست ہے۔ $P(k+1)$ کی توثیق $P(k)$ سے ہوتی ہے۔حسابی امالیت کے اصول سے تمام سالم اعداد $n \geq 1$ کے لئے

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

مثال 4.62 : ثابت کیجئے کہ پہلے n مثبت طاق اعداد کا حاصل جمع n^2 ہے۔

حل: فرض کیجئے $P(n)=1+3+5+\cdots+(2n-1)$ لہذا $P(1)=1=1^2$

ہم فرض کرتے ہیں کہ $P(k)=1+3+5+...(2k-1)$ کے لئے درست ہے $n=k$ کے لئے، یعنی $P(k)=k^2$

ہمیں ثابت کرنا ہے $P(k+1)=(k+1)^2$

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 1+3+5+...(2(k+1)-1) \\ &= \underbrace{1+3+5+7+...+(2k-1)}+2k+1 \\ &= P(k)+2k+1 \\ &= k^2+2k+1=(k+1)^2 \end{aligned}$$

لہذا $P(k+1)$ درست ہے۔ لہذا حسابی امالیت کے اصول سے $P(n)$ کے تمام طبعی عدد کے لئے درست ہے۔

100 95 75 25 5 0
192
Wednesday, September 28, 2022 9:18:10 PM

مثال 4.63: حسابی امالیت کے اصول سے ثابت کیجئے کہ تمام سالم اعداد $n \geq 1$ کے لئے

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

حل : فرض کیجئے۔ $P(n) := 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

بیان میں $n = 1$ درج کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$P(1) = \frac{1(1+1)(2(1)+1)}{6} = 1$ لہذا $P(1)$ درست ہے۔

فرض کریں کہ $n = K$ کے لئے بیان درست ہے۔ تب

$$P(k) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

ہمیں ثابت کرنا ہے $P(k+1)$ درست ہے، غور کریں۔

$$\begin{aligned}
P(k+1) &= \underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2} + (k+1)^2 \\
&= P(k) + (k+1)^2 \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} \\
&= \frac{(k+1)\left(k(2k+1) + 6(k+1)\right)}{6} \\
&= \frac{(k+1)\left(2k^2 + 7k + 6\right)}{6} \\
&= \frac{(k+1)\left[(k+2)(2k+3)\right]}{6} \\
&= \frac{(k+1)\left[((k+1)+1)(2(k+1)+1)\right]}{6}.
\end{aligned}$$

لہذا

$$P(k+1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)\left(2(k+1)+1\right)}{6}.$$

لہذا $P(k+1)$ درست ہے۔ $P(k+1)$ کی توثیق $P(k)$ سے ہوتی ہے۔ لہذا حسابی امالیت کے اصول سے

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

تمام $n \geq 1$ کے لئے

مثال 4.64 : حسابی امالیت کے اصول سے کسی بھی n طبعی اعداد کے لئے ثابت کیجئے۔

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

192
Wednesday, September 28, 2022 9:18:10 PM

حل : فرض کیجئے۔ $P(n) := \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ بیان میں $n = 1$ کو درج کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $P(1) = \frac{1}{1.2} = \frac{1}{2}$ لہذا $P(1)$ درست ہے۔ مان لیجئے کہ $n = k$ کے لئے بیان درست ہے،

تب $$P(k) = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}.$$

ہمیں ثابت کرنا ہے $P(k+1)$ درست ہے۔ فرض کریں کہ

$$\begin{aligned} P(k+1) &= \underbrace{\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)}} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= P(k) + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k}{(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{1}{k+1}\left(\frac{k}{1} + \frac{1}{k+2}\right) \\ &= \frac{1}{k+1}\left(\frac{k^2+2k+1}{k+2}\right) \\ &= \frac{1}{k+1}\left(\frac{(k+1)^2}{k+2}\right) = \frac{(k+1)}{(k+2)}. \end{aligned}$$

لہذا $P(k+1)$ درست ہے۔ $P(k+1)$ کی توثیق $P(k)$ سے ہوتی ہے۔ لہذا حسابی امالیت کے اصول سے کوئی n طبعی عدد کے لئے

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

مثال 4.65 : ثابت کیجئے کہ کسی بھی n طبعی عدد کے لئے $a^n - b^n$ جو $a - b$ سے تقسیم پذیر ہے۔ جہاں $a > b$ ہو۔

حل : فرض کریں $P(n) := a^n - b^n$

بیان میں $a - b$ کو درج کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$P(1) = a - b,$$

جو $a - b$ سے تقسیم پذیر ہے۔ لہذا $P(1)$ درست ہے۔ فرض کیجئے کہ $n = k$ کے لئے بیان درست ہے،

تب $P(k) = a^k - b^k$ جو $a - b$ سے تقسیم پذیر ہے۔ ہم لکھ سکتے ہیں۔

$$P(k) = a^k - b^k = \lambda(a - b),\ \lambda \in \mathbb{N}.$$

ہمیں ثابت کرنا ہے۔ $P(k+1) = a^{k+1} - b^{k+1}$, جو $a - b$ سے تقسیم ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} P(k+1) &= a^{k+1} - b^{k+1} \\ &= a^{k+1} - ab^k + ab^k - b^{k+1} \\ &= a(a^k - b^k) + b^k(a - b) \\ &= a(\lambda(a - b)) + b^k(a - b) \\ &= (a - b)\left(a\lambda + b^k\right) \\ &= (a - b)\lambda_1,\ \lambda_1 = a\lambda + b^k,\ \lambda_1 \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

192
Wednesday, September 28, 2022 9:18:10 PM

جو a – b سے تقسیم پذیر ہے۔ لہذا P(k+1) درست ہے۔P(k+1) کی توثیق P(k) سے ہوتی ہے۔ لہذا حسابی امالیت کے اصول سے $a^n - b^n$ جو a–b سے تقسیم ہوتا ہے، جہاں a > b، تمام n≥1 کے لئے

مثال 4.66 : ثابت کیجئے کہ $3^{2n+2} - 8n - 9$ ، 8 سے تقسیم پذیر ہے۔ تمام $n \geq 1$ کے لئے

حل: فرض کیجئے $P(n) := 3^{2n+2} - 8n - 9,$ جو 8 سے تقسیم پذیر ہے۔

بیان میں n = 1 کو درج کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$P(1) = 3^{2+2} - 8(1) - 9 = 64,$$

جو 8 سے تقسیم ہوتا ہے۔ لہذا، P(1) درست ہے۔

فرض کریں کہ n= k کے لئے بیان درست ہے، پھر $P(k) = 3^{2k+2} - 8k - 9,$ سے تقسیم پذیر ہے۔ ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned} P(k) &= 3^{2k+2} - 8k - 9 = 8k_1, \quad k_1 \in \mathbb{N} \\ 3^{2k+2} &= 8k_1 + 8k + 9. \end{aligned}$$ لہذا

ہمیں ثابت کرنا ہے، $P(k+1) = 3^{2(k+1)+2} - 8(k+1) - 9,$ جو 8 سے تقسیم پذیر ہے۔

فرض کریں کہ

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 3^{2(k+1)+2} - 8(k+1) - 9 \\ &= 3^2 3^{2k+2} - 8k - 8 - 9 \\ &= 3^2 \left(8k_1 + 8k + 9\right) - 8k - 17 \\ &= 72k_1 + 64k + 64 \\ &= 8\left(9k_1 + 8k + 1\right) \\ &= 8k_2, \ k_2 = 9k_1 + 8k + 1 \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

جو 8 سے تقسیم پذیر ہے۔لہذا P(k+1) درست ہے۔اس کا مطلب P(k+1) کی توثیق P(k) سے ہوتی ہے۔لہذا حسابی امالیت کے اصول سے $3^{2n+2} - 8n - 9$ جو 8 سے تقسیم پذیر ہیں، تمام n ≥ 1 کے لئے

مثال 4.67 : حسابی امالیت کے اصول سے ثابت کیجئے کہ کسی بھی سالم عدد کے لئے

$$n \geq 2, \ 3n^2 > (n+1)^2$$

حل: فرض کریں بیان P(n) ہے، جو $3n^2 > (n+1)^2$ جس میں $n \geq 2.$ ہے۔ لہذا پہلا مقام $n = 2$ ہے۔

اب $P(2) = 3 \times 2^2 = 12$ اور $12 > 9$ چونکہ $3^2 = 9$ ہے۔ ہمیں حاصل ہوتا ہے P(2) درست ہے۔

فرض کیجئے کہ n = k کے لئے P(n) درست ہے۔

192
Wednesday, September 28, 2022 9:18:11 PM

اب،

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 3(k+1)^2 = 3k^2+6k+3 \\ &= P(k)+6k+3 \\ &> (k+1)^2+6k+3 \\ &= k^2+8k+4 \\ &= k^2+4k+4+4k \\ &= (k+2)^2+4k \\ &> (k+2)^2 \qquad k>0. \text{ جہاں} \end{aligned}$$

P(k+1) درست ہے۔ **P(k+1)** کی توثیق **P(k)** سے ہوتی ہے۔ لہذا حسابی امالیت کے اصول سے
$3n^2 > (n+1)^2$ تمام $n \geq 2$ کے لئے۔

مثال 4.68: حسابی امالیت کا استعمال کرتے ہوئے ثابت کیجئے کہ کسی بھی سالم اعداد کے لئے
$n \geq 2, \quad 3^n > n^2$

حل: فرض کیجئے کہ بیان **P(n)** ہے، جو $3^n > n^2$ جس میں **n>2** ہے۔ لہذا پہلا مقام **n = 2** ہے۔
اب **P(2)** $3^2 = 9$ اور $2^2 = 4$ ہے۔ چونکہ **9>4** ہے۔ ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ **P(2)** درست ہے۔
فرض کیجئے کہ **n = k** کے لئے **P(n)** درست ہے۔لہذا $P(k) > k^2$

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 3^{k+1} = 3 \times 3^k = 3 \times P(k) \\ &> 3k^2 \\ &> (k+1)^2, \quad \text{مثال 4.67 سے} \end{aligned}$$

لہذا کسی بھی سالم اعداد کے لئے $n \geq 2, 3^n > n^2$.

مثال 4.69 : حسابی امالیت کے اصول سے ثابت کیجئے کہ $n \in \mathbb{N}$ کے لئے

$$\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+2\beta) + \cdots + \cos(\alpha+(n-1)\beta) = \cos\left(\alpha + \frac{(n-1)\beta}{2}\right) \times \frac{\sin\left(\frac{n\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

حل: فرض کیجئے $P(n) := \cos(\alpha) + \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+2\beta) + \ldots + \cos(\alpha+(n-1)\beta)$

$$P(1) = \cos(\alpha) = \frac{\cos(\alpha).\sin(\frac{\beta}{2})}{\sin(\frac{\beta}{2})},$$

جو ظاہر کرتا ہے کہ $P(1)$ درست ہے۔ فرض کیجئے کہ اب **n = k** کے لئے **P(n)** درست ہے۔ یعنی

$$\cos(\alpha) + \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+2\beta) + \cdots + \cos(\alpha+(k-1)\beta) = \cos\left(\alpha + \frac{(k-1)\beta}{2}\right) \times \frac{\sin\left(\frac{k\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}.$$

ہمیں ثابت کرنا ہے **P(k+1)** درست ہے، اب

$$P(k+1) = \underbrace{\cos(\alpha) + \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+2\beta) + \cdots + \cos(\alpha+(k-1)\beta)} + \cos(\alpha+k\beta)$$

لہذا

$$
\begin{aligned}
P(k+1) &= P(k) + \cos(\alpha + k\beta) \\
&= \frac{\cos\left(\alpha + \frac{(k-1)\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{k\beta}{2}\right)}{\sin(\frac{\beta}{2})} + \cos(\alpha + k\beta) \\
&= \frac{1}{\sin(\frac{\beta}{2})}\left[\cos\left(\alpha + \frac{(k-1)\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{k\beta}{2}\right) + \cos(\alpha + k\beta)\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sin(\frac{\beta}{2})}\left[\cos\left(\left(\alpha + \frac{k\beta}{2}\right) - \frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{k\beta}{2}\right) + cos(\alpha + k\beta)\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}\left[\left(\cos\left(\alpha + \frac{k\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \sin\left(\alpha + \frac{k\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)\sin\left(\frac{k\beta}{2}\right) + \cos(\alpha + k\beta)\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}\left[\cos\left(\alpha + \frac{k\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{k\beta}{2}\right)\right. \\
&\quad \left. + \sin\frac{\beta}{2}\left(\sin\left(\alpha + \frac{k\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{k\beta}{2}\right) + \cos(\alpha + k\beta)\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}\left[\cos\left(\alpha + \frac{k\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{k\beta}{2}\right)\right. \\
&\quad \left. + \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{2}\left(2\sin\left(\alpha + \frac{k\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{k\beta}{2}\right) + 2\cos(\alpha + k\beta)\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}\left[\cos\left(\alpha + \frac{k\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{k\beta}{2}\right)\right. \\
&\quad \left. + \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{2}\left(\cos\alpha - \cos\left(\alpha + k\beta\right) + 2\cos(\alpha + k\beta)\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}\left[\cos\left(\alpha + \frac{k\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{k\beta}{2}\right) + \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{2}\left(\cos\alpha + \cos(\alpha + k\beta)\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}\left[\cos\left(\alpha + \frac{k\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{k\beta}{2}\right) + \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{2}\left(2\cos\left(\alpha + \frac{k\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{-k\beta}{2}\right)\right)\right] \\
&= \frac{\cos\left(\alpha + \frac{k\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}\left[\sin\left(\frac{k\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) + \sin\frac{\beta}{2}\cos\left(\frac{k\beta}{2}\right)\right] \\
&= \frac{\cos\left(\alpha + \frac{k\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{(k+1)\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}
\end{aligned}
$$

یعنی

$$
\begin{aligned}
&\cos\alpha + \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + 2\beta) + \cdots + \cos(\alpha + (k-1)\beta) + \cos(\alpha + k\beta) \\
&\qquad = \cos\left(\alpha + \frac{k\beta}{2}\right) \times \frac{\sin\left(\frac{(k+1)\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}
\end{aligned}
$$

192
Wednesday, September 28, 2022 9:18:11 PM

لہذا $P(k+1)$ درست ہے۔ $P(k+1)$ کی توثیق $P(K)$ سے ہوتی ہے۔لہذا حسابی امالیت کے اصول سے

$$\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+2\beta) + \cdots + \cos(\alpha+(n-1)\beta)$$

$$= \cos\left(\alpha + \frac{(n-1)\beta}{2}\right) \times \frac{\sin\left(\frac{n\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

مثال 4.70 : حسابی امالیت کے اصول کا استعمال کر کے ثابت کیجئے کہ کسی بھی طبعی اعداد n کے لئے جہاں $i^2 = -1$ ہے۔

$$(r(\cos\theta + i\sin\theta))^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta),$$

حل : فرض کیجئے۔

$$P(n) = (r(\cos\theta + i\sin\theta)^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta).$$

بیان میں $n = 1$ کی قیمت درج کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$P(1) = (r(\cos\theta + i\sin\theta))^1 = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

لہذا، $P(1)$ درست ہے۔ فرض کیجئے $n = k$ کے لئے بیان درست ہے، تب

$$(r(\cos\theta + i\sin\theta))^k = r^k(\cos k\theta + i\sin k\theta),$$

ہمیں یہ ثابت کرنے کی ضرورت ہے کہ $P(k+1)$ درست ہے۔

$$\begin{aligned}
P(k+1) &= (r(\cos\theta + i\sin\theta))^{k+1} \\
&= (r(\cos\theta + i\sin\theta))^k \times r(\cos\theta + i\sin\theta) \\
&= r^k(\cos k\theta + i\sin k\theta) \times r(\cos\theta + i\sin\theta) \\
&= r^{k+1} \times \left((\cos k\theta\cos\theta + i^2\sin k\theta\sin\theta) + i(\sin k\theta\cos\theta + \cos k\theta\sin\theta)\right) \\
&= r^{k+1} \times ((\cos k\theta\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta) + i(\sin k\theta\cos\theta + \cos k\theta\sin\theta)) \\
&= r^{k+1} \times (\cos(k+1)\theta + i\sin(k+1)\theta).
\end{aligned}$$

لہذا $P(k+1)$ درست ہے۔ $P(k+1)$ کی توثیق $P(k)$ سے ہوتی ہے۔ لہذا حسابی امالیت کے اصول سے کسی بھی n طبعی عدد کے لئے

$$(r(\cos\theta + i\sin\theta))^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

.

ہم نے مثال 4.70 میں جو ثابت کیا ہے، اسے طبعی اعداد کے لئے ڈیموئیر مسئلہ (Demoivre's theorem) کہا جاتا ہے، جس کا ہائر سکنڈری کورس کے دوسرے سال میں تفصیل سے مطالعہ کیا جائے گا۔

مشق 4.4

1۔ حسابی امالیت کے اصول سے $n \geq 1$ کے لئے ثابت کرو کہ

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

2۔ حسابی امالیت کے اصول سے $n \geq 1$ کے لئے ثابت کرو کہ

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$$

3۔ ثابت کیجئے کہ پہلے n غیر صفر کے جفت عددوں کا حاصل جمع $n^2 + n$ ہے۔

4۔ حسابی امالیت کے اصول سے، $n \geq 1$ کے لئے ثابت کیجئے کہ

$$1.2 + 2.3 + 3.4 + \cdots + n.(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

5۔ حسابی امالیت کے اصول سے، کسی بھی طبعی عدد $n \geq 2$ کے لئے ثابت کیجئے کہ

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}.$$

6۔ حسابی امالیت کے اصول سے، کوئی بھی طبعی عدد $n \geq 2$ کے لئے ثابت کیجئے کہ

$$\frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \cdots + \frac{1}{1+2+3+\cdots+n} = \frac{n-1}{n+1}.$$

7۔ حسابی امالیت کے اصول سے ثابت کیجئے کہ کسی بھی n طبعی عدد کے لئے

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \cdots + \frac{1}{n.(n+1).(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

8۔ حسابی امالیت کے اصول سے ثابت کیجئے کہ کسی بھی n طبعی عدد کے لئے

$$\frac{1}{2.5} + \frac{1}{5.8} + \frac{1}{8.11} + \cdots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{n}{6n+4}.$$

9۔ حسابی امالیت سے ثابت کیجئے

$$1! + (2 \times 2!) + (3 \times 3!) + \ldots + (n \times n!) = (n+1)! - 1.$$

10۔ حسابی امالیت کے استعمال سے ثابت کیجئے کہ کسی بھی طبعی اعداد $n \geq 1$ کے لئے $x^{2n} - y^{2n}$ جو $x + y$ سے تقسیم پذیر ہے۔

11۔ حسابی امالیت کے اصول سے ثابت کیجئے کہ $n \geq 1$ کے لئے

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 > \frac{n^3}{3}.$$

12۔ امالہ کے استعمال سے ثابت کیجئے۔ $n^3 - 7n + 3$ جو 3 سے تقسیم پذیر ہو، تمام n طبعی عدد کے لئے

13۔ امالہ کے استعمال سے ثابت کیجئے کہ $5^{n+1} + 4 \times 6^n$ جب 20 تقسیم کرنے پر باقی 9 ہے، تمام n طبعی عدد کے لئے۔

100 95 75 25 5 0

192
Wednesday, September 28, 2022 9:18:12 PM

14۔ امالہ کے استعمال سے ثابت کیجئے کہ $10^n + 3 \times 4^{n+2} + 5,$ جو **9** سے تقسیم پذیر ہو جو تمام **n** طبعی عدد کے لئے

15۔ حسابی امالیت کو استعمال کر کے ثابت کیجئے۔

$$\sin(\alpha) + \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{6}\right) + \cdots + \sin\left(\alpha + \frac{(n-1)\pi}{6}\right) = \frac{\sin\left(\alpha + \frac{(n-1)\pi}{12}\right) \times \sin\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}.$$

LWEO3

4. 5 مشق

صحیح یا سب سے مناسب جواب کا انتخاب کریں.

1۔ بیک وقت میں 2, 4, 5, 7 کی مدد سے بننے والے تمام عددوں کے **10** ویں مقام پر ہندسوں کا حاصل جمع

(1) 432 (2) 108 (3) 36 (4) 18

2۔ ایک امتحان میں تین سے زیادہ انتخابی سوالات ہیں اور ہر سوال میں 5 انتخابات ہیں۔ ان طریقوں کی تعداد جن میں ایک طالب علم تمام جوابات درست کرنے میں ناکام ہو سکتا ہے۔

(1) 125 (2) 124 (3) 64 (4) 63

3۔ **30** لڑکوں کی کلاس میں درج ذیل انعامات کی تعداد، جن میں ریاضی میں پہلا اور دوسرا، طبیعیات میں پہلا اور دوسرا، کیمیاء میں پہلا اور انگریزی میں پہلا دیا جائے گا۔

(1) $30^4 \times 29^2$ (2) $30^3 \times 29^3$ (3) $30^2 \times 29^4$ (4) 30×29^5.

4۔ **5** ہندسوں کی تعداد جس کے تمام ہندسے طاق ہیں۔

(1) 25 (2) 5^5 (3) 5^6 (4) 625.

5۔ **3** انگلیوں میں چار انگوٹھیاں پہننے کے طریقوں کی تعداد ..... طریقے ہیں۔

(1) $4^3 - 1$ (2) 3^4 (3) 68 (4) 64

6۔ اگر ${}^{(n+5)}P_{(n+1)} = (\frac{11(n-1)}{2})^{(n+3)}P_n$ ہو تو **n** کی قیمت

(1) 7 and 11 (2) 6 and 7 (3) 2 and 11 (4) 2 and 6.

7۔ **r** متواتر مثبت سالم عدد کا حاصل ضرب کا تقسیم پذیر

(1) $r!$ (2) $(r-1)!$ (3) $(r+1)!$ (4) r^r.

8۔ پانچ ہندسوں کے ٹیلی فون کی تعداد جن میں کم از کم ایک ہندسہ دہرایا گیا ہے۔

(1) 90000 (2) 10000 (3) 30240 (4) 69760.

9۔ اگر ${}^{a^2-a}C_2 = {}^{a^2-a}C_4$ ہو تو **a** کی قیمت کیا ہے؟

(1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) 5

10۔ ایک سطح پر **10** نقطے ہیں اور جن میں سے **4** ہم خط ہیں۔ کسی دو نقطوں کو ملانے والے خط مستقیم کی تعداد

(1) 45 (2) 40 (3) 39 (4) 38.

11۔ ایک میزبان خاتون **8** لوگوں کو دعوت دیتی ہے **12** میں سے **8** لوگوں کو ان طریقوں کی تعداد جن میں سے دو لوگ پارٹی میں شرکت ایک ساتھ نہیں کرنا چاہتے۔

(1) $2 \times {}^{11}C_7 + {}^{10}C_8$ (2) ${}^{11}C_7 + {}^{10}C_8$ (3) ${}^{12}C_8 - {}^{10}C_6$ (4) ${}^{10}C_6 + 2!$.

192
Wednesday, September 28, 2022 9:18:12 PM

12۔ متوازی الاضلاع کی تعداد جو چار متوازی خطوط کے ایک مجموعے سے بن سکتی ہے، جو تین متوازی خطوط کے دوسرے مجموعے کو قطع کرتی ہے۔

(1) 6 (2) 9 (3) 12 (4) 18

13۔ ایک کمرے میں ایک دوسرے کے ساتھ ہر ایک مصافحہ کرتے ہیں۔ مصافحہ کرنے والوں کی کل تعداد 66 ہے۔ کمرے میں لوگوں کی تعداد ..... ہے۔

(1) 11 (2) 12 (3) 10 (4) 6

14۔ 44 وتر والے کثیر الاضلاع کے ضلعوں کی تعداد .....

(1) 4 (2) 4! (3) 11 (4) 22

15۔ اگر ایک سطح پر 10 خطوط کھینچی جائیں، تاکہ ان میں سے کوئی دو متوازی نہ ہو اور کوئی متراکز نہ ہو۔ پھر نقطہ تقاطع کی کل تعداد ہے۔

(1) 45 (2) 40 (3)10! (4) 2^{10}

16۔ ایک سطح پر 10 نقطے ہیں، جن میں سے 4 ہم خط ہوں تو بننے والے مثلثوں کی تعداد

(1) 110 (2) ${}^{10}C_3$ (3) 120 (4) 116

17۔ اگر ${}^{2n}C_3 : {}^{n}C_3 = 11 : 1$ ہو تو n کیا ہے؟

(1) 5 (2) 6 (3)11 (4)7

18۔ ${}^{(n-1)}C_r + {}^{(n-1)}C_{(r-1)}$

(1) ${}^{(n+1)}C_r$ (2) ${}^{(n-1)}C_r$ (3) ${}^{n}C_r$ (4)${}^{n}C_{r-1}$.

19۔ 52 تاش کے پتوں کی ایک گڈی میں 5 پتوں کا انتخاب کرنے کے طریقوں کی تعداد، جس میں کم از کم ایک راجا شامل ہے۔

(1) ${}^{52}C_5$ (2) ${}^{48}C_5$ (3)${}^{52}C_5 + {}^{48}C_5$ (4)${}^{52}C_5 - {}^{48}C_5$.

20۔ شطرنج کے تختے میں مستطیل کی تعداد

(1) 81 (2) 9^9 (3)1296 (4) 6561

21۔ 2 اور 3 ہندسوں کو استعمال کر کے کتنے 10 ہندسی عدد لکھے جا سکتے ہیں۔

(1) ${}^{10}C_2 + {}^{9}C_2$ (2) 2^{10} (3)$2^{10} - 2$ (4) 10!

22۔ اگر P_r کے لئے Pr_r ہے تو سلسلے کا حاصل جمع $1 + P_1 + 2P_2 + 3P_3 + \cdots + nP_n$ is

(1) P_{n+1} (2) $P_{n+1} - 1$ (3) $P_{n-1} + 1$ (4)${}^{(n+1)}P_{(n-1)}$

23۔ پہلے n طاق طبعی اعداد کے حاصل ضرب کا مساوی ہے۔

(1) ${}^{2n}C_n \times {}^{n}P_n$ (2) $(\frac{1}{2})^n \times {}^{2n}C_n \times {}^{n}P_n$ (3)$(\frac{1}{4})^n \times {}^{2n}C_n \times {}^{2n}P_n$ (4)${}^{n}C_n \times {}^{n}P_n$

24۔ اگر ${}^{n}C_4, {}^{n}C_5, {}^{n}C_6$ ایک A.P ہو تو n کی قیمت

(1) 14 (2) 11 (3) 9 (4) 5

25۔ $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 17$ مساوی ہے۔

(1) 101 (2) 81 (3) 71 (4) 61

100 95 75 25 5 0

192
Wednesday, September 28, 2022 9:18:13 PM

Summary خلاصہ:

اس باب میں ہم نے مطالعہ کیا

- پہلے n طبعی اعداد کا حاصل ضرب n طبعی عدد کا ضربیہ ہے۔
- کسی بھی سالم اعداد $n \geq 1$ کے لئے $n! = n(n-1)!$
- n ناموافق اشیاء کے ترتیب دینے کے طریقوں کی تعداد $n!$ ہے۔
- r اشیاء کے مختلف مبادلوں کی تعداد جو n مختلف اشیاء سے بنایا جاسکتا ہے۔

$$^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1).$$

- بیک وقت n اشیاء کے مبادلوں کی تعداد، جہاں P_1 اشیاء ایک طرح کی ہیں P_2 اشیاء دوسری طرح کی ہیں $\cdots P_k$ اشیاء k ویں طرح کی اور کوئی باقی ہیں۔ اگر تمام مختلف ہیں اور دیا گیا ہے۔

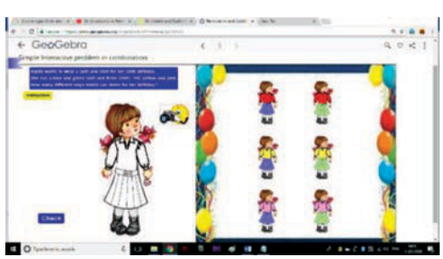
$$\frac{n!}{P_1!P_2!\cdots P_k!}.$$

- n مختلف اشیاء کے لئے r تو بیک وقت لیا جانے پر اجتماع کی تعداد کو ^nCr سے ظاہر کرتے ہیں، اس طرح دیا گیا ہے۔

$$^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}$$

ICT CORNER-4(a) کارنر ICT - 4(a)

متوقع نتائج ⇒



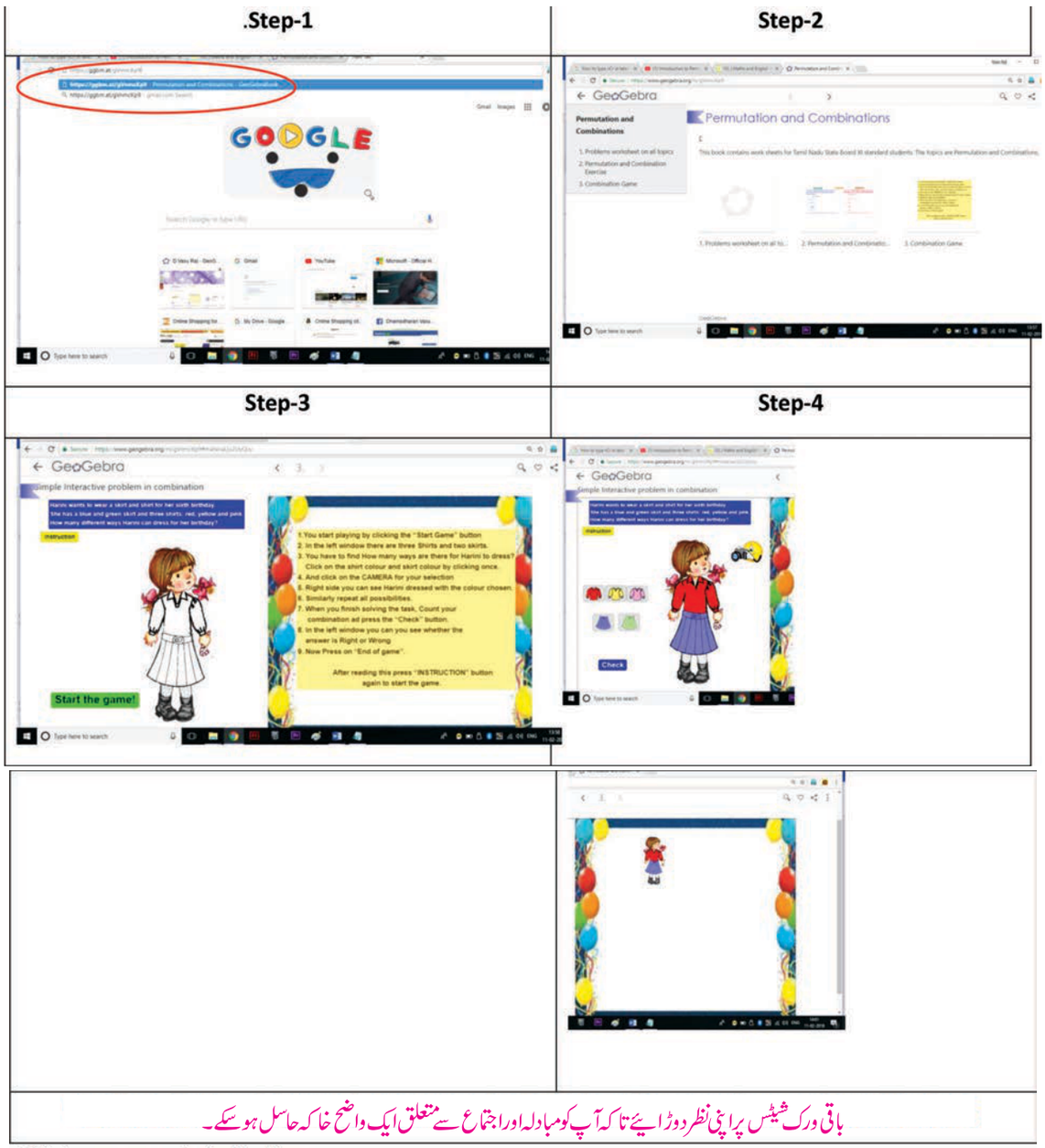
مرحلہ 1۔ براؤزر کھولئے اور نیچے دئے گئے URL لنک ٹائپ کیجئے (یا) QR کوڈ کو اسکین کیجئے۔ جیوجیرا ورک شیٹ پر مبادلہ اور اجتماع ظاہر ہوگا۔ آپ وہ ورک شیٹ منتخب کرسکتے ہیں جسے آپ کھولنا چاہتے ہیں، مثال کے طور پر اجتماعی کھیل کھول سکتے ہیں۔

مرحلہ 2: انسٹرکشن بٹن دبائیں اور پڑھنے کا طریقہ پڑھیں ایک بار پڑھنے کے بعد انسٹرکشن بٹن دبائیں اور گیم اسٹارٹ دبائیں۔

مرحلہ 3: 3 شرٹس اور 2 سکرٹس والی لڑکی کو تیار کرنے کے ترکیب کی تعداد معلوم کیجئے۔ ہر ایک جوڑے کو منتخب کرنے کے بعد کیمرے کی تصویر پر کلک کریں تاکہ منتخب کردہ صحیح جگہ پر ظاہر ہو۔ سلیکشن مکمل کرنے کے بعد نتیجے دیکھنے کے لئے بٹن دبائیں۔

100 95 75 25 5 0

199
Monday, November 07, 2022 8:58:10 PM



باقی ورک شیٹس پر اپنی نظر دوڑایئے تا کہ آپ کو مبادلہ اور اجتماع سے متعلق ایک واضح خاکہ حاصل ہو سکے۔

*Pictures are only indicatives.

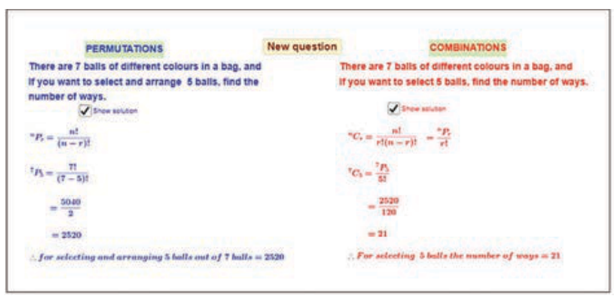
Browse in the link

Permutations and Combinations: https://ggbm.at/gVnmcKp9

192
Wednesday, September 28, 2022 9:18:14 PM

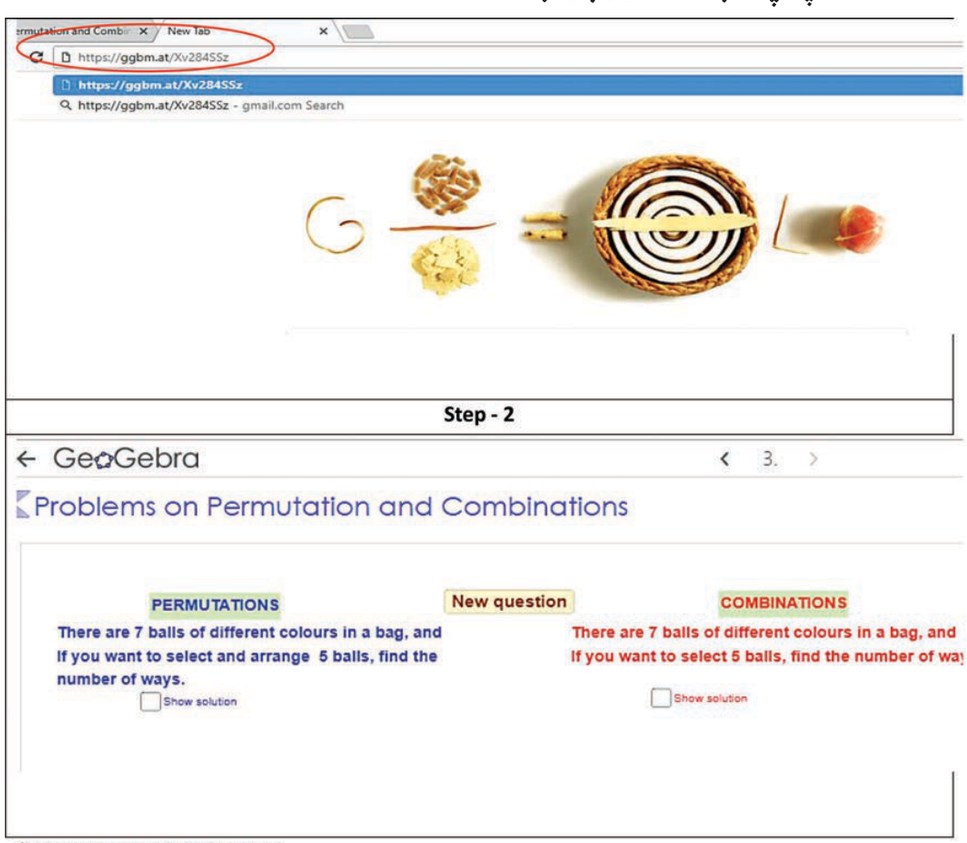
4(b) کارنر ICT

متوقع نتیجہ ⇒



مرحلہ 1 : براؤزر کھولئے اور نیچے دئے گئے لنک کو ٹائپ کیجئے یا دئے گئے QR کوڈ کو اسکین کیجئے۔

مرحلہ 2 : Problems on Permutations and Combinations نامی جیوجبرا ورک شیٹ حاصل ہوگا۔ New problem پر کلک کرنے پر آپ جتنی مرتبہ چاہیں، اتنی مرتبہ نئے حسابات حاصل ہوں گے۔ آپ کو یہ حسابات خود کرنے ہوں گے اور جواب حاصل کرنے ہوں گے۔ اس کے بعد Show solution پر کلک کرنے پر ہر ایک permutation اور combination پر بالترتیب حل حاصل ہوگا۔ آپ اپنے جواب کے ساتھ اس کی جانچ کیجئے۔



*Pictures are only indicatives.

Browse in the link

Permutations and Combinations: https://ggbm.at/Xv284SSz

BUZ07

192
Wednesday, September 28, 2022 9:18:14 PM

باب 5

دورکنی مسئلہ - تواتر اور سلسلے
(Binomial Theorem, Sequences and Series)

Life stands before me like an eternal spring with new and brilliant clothes

Johann Carl Friedrich Gauss

5.1۔ تعارف

دورکنی مسئلہ۔دورکنی $(a+b)$ کی قوت ایک مثبت صحیح دورُکنی n کے پھیلاؤ میں سہولت فراہم کرتا ہے۔دورکنی مسئلہ ریاضی کے تمام شاخوں اور دیگر علوم میں استعمال ہوتا ہے۔مثال کے طور پر دورکنی مسئلہ کا استعمال کرتے ہوئے کوئی بھی آسانی سے x^{20} کے پھیلاؤ میں $(2x-7)^{23}$ کا عددی ضریب معلوم کرسکتے ہیں۔اگر کوئی 10 سال بعد 8% مرکب سود کی شرح پر قومی بینک میں جمع کی گئی رقم، اس کی رسیدگی(maturity) کو پہنچنے پر کتنی رقم ہوگی،اس کو جاننا چاہتا ہو یا اگر کوئی 15 سال ہمارے ملک کی آبادی کی مقدار جاننا،اگر سالانہ ترقی کی شرح اور موجود آبادی کی مقدار معلوم کرنا ہو،تو دورکنی مسئلہ مندرجۂ بالا مقدار کو تلاش کرنے میں ہماری مدد کرتا ہے۔$(a+b)^n$، $n \in \mathbb{N}$ کے پھیلاؤ کے عددی ضریب دورکنی ضریب کہلاتے ہیں۔ دورکنی مسئلہ واقعات کے امکانات کا تعین کرنے میں اہم کردار ادا کرتا ہے۔ جب سریعی تجربہ کے نظیری عرصہ میں محدود موقع شامل ہوتے ہیں اور ہر نتیجہ کامیابی یا ناکامی ہے۔ اس باب میں ہم دورکنی مسئلہ اور اس کے کچھ استعمال سیکھیں گے۔

یونانی ریاضی دان اقلیدس نے قوت نما کے لئے جو رکنی مسئلہ کے خاص صورت حال (Case) کا ذکر کیا ہے،اسے قوت 3 کے لئے دورکنی مسئلہ 6ویں صدی میں ہندوستان میں جانا جاتا تھا۔ 1544 میں مائکل اسٹیل فیل (جرمن ریاضی دان) نے اصطلاح متعارف دورکنی سرع عدد (Binomial coefficient) کو متعارف کروایا اور $(1+x)^n$ کو $(1+x)^{n-1}$ کے لحاظ سے کیا۔

جرمن ریاضی دان Johann Carl Friedrtch Gauss تاریخ کے سب سے مشہور ریاضی ہیں۔بہت سے لوگوں نے اسے ''ریاضی کا شہزادہ'' کہا ہے۔ انہوں نے نمبر تھیوری، طبیعیات، فلکیات وغیرہ کے شعبوں میں حصہ لیا ہے۔

عددی مسئلہ (Number theory) گاوس(Gauss) کا پسندیدہ میدان تھا، اور اس نے نمبر تھیوری کو ''ریاضی کی ملکہ'' کہا۔کہانی میں شامل ہے۔اس کے اسکول کے استاد جو طلباء کو جانچنا چاہتے تھے۔ان سے کہا کہ وہ ایسے 100 تک عدد کا مجموعہ کریں۔چند سکنڈ میں گاوس نے 5050 جواب دکھایا ۔کسی کو اس بات کا یقین نہیں ہے کہ بچپن میں حسابی سلسلہ کے مجموعہ کا کون سا طریقہ استعمال کیا گیا تھا۔



جوہان کارل فرائڈرچ گاس
(1777-1855)

ہزاروں سالوں کے دوران، ریاضی دانوں(Legends) نے ریاضی کے مسائل تیار کئے ہیں۔جن میں تواتر اور سلسلے شامل ہیں۔سلسلہ کے بارے میں مشہور افسانوں میں سے ایک شطرنج کی ایجاد سے متعلق ہے جہاں شطرنج بورڈ کے خانوں 1,2,4,8,... سے متعلق تھے۔(64ویں خلیہ سے متعلقہ نمبر کا تصور کریں)،حقیقی زندگی میں حسابی اور ہندسی سلسلوں کی بہت سے استعمالات ہیں۔

پچھلی جماعتوں میں ہم نے تواتروں (Sequences) اور سلسلوں Series کے بارے میں سیکھا ہے۔ درستی انداز میں بولنا،تواتر اشیاء کی فہرست ایک خاص ترتیب میں اور سلسلہ کسی تواتر کے رقموں کو جمع کرنے کے لئے جیسے $\log 43$, $\sin \frac{9}{44}\pi$ اور e^{20} کا تصور ہمیں ان اقدار کو مطالبہ سطح پر شمار کرنے میں مدد کرتا ہے۔ تفریقی مساوات اور تحلیل (تجزیہ) (analysis) میں سلسلے اہم ہیں۔ہم سلسلے اور تواتر کے بارے میں مزید سیکھیں گے۔

11 maths v1 unit 5 UM binomial
Monday, September 05, 2022 8:17:01 PM

سیکھنے کے مقاصد:

اس باب کے تکمیل پر طلبہ سے توقع کی جاتی ہے کہ وہ جان لیں گے۔

- دورکنی مسئلہ کا تصور، دورکنی ضریب کا حساب لگانا اور ان کے استعمالات
- سلسلے اور تواتر کے تصورات
- حسابی، ہندسی اور ہم آہنگی ے اوسط کا حساب کیسے لگانا۔
- حقیقی اعداد کے محدود اور لامحدود سلسلوں کا مجموعہ کیسے تلاش کریں۔
- ٹیلی سکوپ مشن کا استعمال کرتے ہوئے تواتر کیسے شامل کی جائیں۔
- دورکنی، قوت نمائی اور تواتر کا اطلاق کیسے کریں۔

5.2۔ دورکنی مسئلہ (Binomial Theorem)

بائیسکل، بائنا کلر، بائنری اور بہت سے الفاظ میں 'bi' سابقہ دو کا مطلب ہے۔ دورکنی کا لفظ دو اصطلاحات کے اظہار کے لئے ہے۔ مثال کے طور پر $(1+x)$ ، $(x+y)$ ، (x^2+xy) اور $(2a+3b)$ چند دورکنی جملے ہیں۔

5.2.1۔ دورکنی ضریب: (Binomial Coefficients)

باب 4 میں ہم نے اس علامت ${}^nC_r$ کو سیکھا اور استعمال کیا ہے، جس کی تعریف اس طرح کی گئی ہے۔

$$ {}^nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(r-1))}{r(r-1)(r-2)\dots 1} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}. $$

چونکہ ${}^nC_r$ میں x^n کے ضریب $n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n$ کے طور پر واقع ہوا ہے، جیسا کہ $a^r b^{n-r}$ کے ضریب کے طور پر $(a+b)^n$ ہے۔ ان کی دو رکنی ضریب کہتے ہیں ۔اگرچہ ${}^nC_r$ کی قیمتوں کو فارمولے کے ذریعے معلوم کیا جاسکتا ہے ۔${}^nC_r$ کو ناموافق ضرب (Cumbersome multiplication) کے بغیر معلوم کرنے کا ایک دلچسپ آسان طریقہ ہے۔

پاسکل مثلث: (Pascal Triangle)

پاسکل مثلث ${}^nC_r$ کی قیمتوں کو مثلثی شکل میں ترتیب دیتا ہے۔ (k+1) ویں صف، ان قیمتوں پر مشتمل ہے۔

$$ {}^kC_0\,,\ {}^kC_1\,,\ {}^kC_2\,,\ {}^kC_3\,,\dots,\ {}^kC_k\,. $$

حقیقت میں پاسکل مثلث اس طرح ہے۔

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & {}^0C_0 & & & & \\
 & & & {}^1C_0 & & {}^1C_1 & & & \\
 & & {}^2C_0 & & {}^2C_1 & & {}^2C_2 & & \\
 & {}^3C_0 & & {}^3C_1 & & {}^3C_2 & & {}^3C_3 & \\
{}^4C_0 & & {}^4C_1 & & {}^4C_2 & & {}^4C_3 & & {}^4C_4 \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots
\end{array}
\quad \Leftrightarrow \quad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots
\end{array}
$$

100 95 75 25 5 0

203
Monday, November 07, 2022 8:53:23 PM

پھیلاؤ کے عمل کو یاد کریں اور تماثلات $(a+b)^0, (a+b)^1, (a+b)^2, (a+b)^3$ کے ہر ایک رقم کے ضریبوں پر غور کریں۔ ضریبوں کی ترتیب میں ایک نمونہ دکھائی دیتا ہے۔

$$(a+b)^0 = 1 \qquad 1$$

$$(a+b)^1 = a+b \qquad 1 \quad 1$$

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \qquad 1 \quad 2 \quad 1$$

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \qquad 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$

اگر ہم پاسکل مثلث کا بغور مشاہدہ کریں تو ہم دیکھ سکتے ہیں کہ ہر صف 1 سے شروع ہوتی ہے اور دیگر اعداد اوپر کی صف کے دو اعداد کے حاصل جمع پر ختم ہوتی ہے۔ مثال کے طور پر ' 1 ' اور 2 کا حاصل جمع 3 ہے۔ اس کے اوپر 4 اور 6 کا حاصل جمع 10 ہے۔ ہم تھوڑی دیر میں یہ ثابت کریں گے کہ

$$(a+b)^n = {}^n\mathrm{C}_0\, a^n b^0 + {}^n\mathrm{C}_1\, a^{n-1}b^1 + \cdots + {}^n\mathrm{C}_r\, a^{n-r}b^r + \cdots + {}^n\mathrm{C}_n\, a^0 b^n.$$

جو $(a+b)^n$ کا **دورکنی پھیلاؤ** ہے۔ کسی بھی $n \in \mathbb{N}$ کے لئے ہم پاسکل مثلث کا استعمال کرتے ہوئے اس طرح لکھ سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر پانچویں صف سے ہم $(a+b)^4$ کا پھیلاؤ لکھ سکتے ہیں اور چھٹی قطار سے ہم $(a+b)^5$ کا پھیلاؤ لکھ سکتے ہیں اور اسی طرح۔ ہم جانتے ہیں کہ $(a+b)^5$ کے ارقام (بغیر ضریبوں) کے ہیں۔

$$a^5,\ a^4b,\ a^3b^2,\ a^2b^3,\ ab^4,\ b^5$$

اور پاسکل مثلث کی 6ویں صف یہ ہے۔

$$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1.$$

ان دونوں کا استعمال کر کے ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5.$$

پاسکل مثلث بغیر کسی ضرب یا تقسیم کے صرف جمع کا استعمال کر کے بنایا جا سکتا ہے۔ تو ضرب کے بغیر ہم کسی بھی $n \in \mathbb{N}$ کے لئے $(a+b)^n$ کا دورکنی پھیلاؤ کو لکھ سکتے ہیں۔

اوپر کا نمونہ جو ایک مثلث سے ملتا جلتا ہے، اس کو ساتویں صدی کے فرانسیسی ریاضی دان بلیس پاسکل (Blaise pascal) کے نام سے منسوب کیا گیا ہے، جس نے اس ساخت کی ریاضیاتی خصوصیات کا مطالعہ کیا اور اس صورت کو امکانی نظریہ میں مؤثر طریقے سے استعمال کیا۔

5.2.2۔ مثلث صحیح عدد قوت نما کے لئے دورکنی مسئلہ (Binomial theorem for positive integral index)

اب ہم سب سے زیادہ مشہور مسئلہ کو ثابت کر سکتے ہیں، جسے دورکنی مسئلہ کہتے ہیں۔

مسئلہ 5.1۔ (مثبت صحیح عدد قوت نما کے لئے دورکنی مسئلہ) : اگر n ایک مثبت سالم عدد ہو تو

$$(a+b)^n = {}^n\mathrm{C}_0\, a^n b^0 + {}^n\mathrm{C}_1\, a^{n-1}b^1 + \cdots + {}^n\mathrm{C}_r\, a^{n-r}b^r + \cdots + {}^n\mathrm{C}_n\, a^0 b^n.$$

ثبوت: ریاضیاتی شمولیت کا طریقہ استعمال کر کے ہم اس مسئلہ کو ثابت کریں گے۔ کسی بھی مثبت سالم عدد n کے لئے،

فرض کرو کہ دیا گیا بیان $P(n)$ ہے۔

$$(a+b)^n = {}^n\mathrm{C}_0\, a^n b^0 + {}^n\mathrm{C}_1\, a^{n-1}b^1 + \cdots + {}^n\mathrm{C}_r\, a^{n-r}b^r + \cdots + {}^n\mathrm{C}_n\, a^0 b^n.$$

چونکہ

$${}^1\mathrm{C}_1 = 1, \quad \text{اور} \quad {}^1\mathrm{C}_0 = 1$$

11 maths v1 unit 5 UM binomial
Monday, September 05, 2022 8:17:02 PM

$P(1)$ کے دائیں جانب کا جملہ $a^1b^0 + a^0b^1$ ہے، جو $a+b$ کے مساوی ہے۔ بائیں جانب $(a+b)^1$ ہے۔ لہذا $P(1)$ درست ہے۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ ایک مثلث سالم عدد k کے لئے $P(k)$ درست ہے۔یعنی

$$(a+b)^k = {}^k\mathrm{C}_0\, a^k b^0 + {}^k\mathrm{C}_1\, a^{k-1}b^1 + \cdots + {}^k\mathrm{C}_r\, a^{k-r}b^r + \cdots + {}^k\mathrm{C}_k\, a^0 b^k.$$

آیئے اس تماثل کو اس ثبوت میں استعمال کریں۔

$${}^n\mathrm{C}_r + {}^n\mathrm{C}_{r-1} = {}^{n+1}\mathrm{C}_r$$

اب

$$\begin{aligned}
(a+b)^{k+1} &= (a+b)(a+b)^k \\
&= (a+b)\left[{}^k\mathrm{C}_0\, a^k b^0 + {}^k\mathrm{C}_1\, a^{k-1}b^1 + \cdots + {}^k\mathrm{C}_r\, a^{k-r}b^r + \cdots + {}^k\mathrm{C}_k\, a^0 b^k\right] \\
&= \left[{}^k\mathrm{C}_0\, a^{k+1}b^0 + {}^k\mathrm{C}_1\, a^k b^1 + \cdots + {}^k\mathrm{C}_r\, a^{k-r+1}b^r + \cdots + {}^k\mathrm{C}_k\, a^1 b^k\right] \\
&\quad + \left[{}^k\mathrm{C}_0\, a^k b^1 + {}^k\mathrm{C}_1\, a^{k-1}b^2 + \cdots + {}^k\mathrm{C}_r\, a^{k-r}b^{r+1} + \cdots + {}^k\mathrm{C}_k\, a^0 b^{k+1}\right] \\
&= {}^k\mathrm{C}_0\, a^{k+1}b^0 + \left[{}^k\mathrm{C}_1 + {}^k\mathrm{C}_0\right] a^k b^1 + \cdots + \left[{}^k\mathrm{C}_r + {}^k\mathrm{C}_{r-1}\right] a^{k-r+1}b^r \\
&\quad + \cdots + \left[{}^k\mathrm{C}_k + {}^k\mathrm{C}_{k-1}\right] a^1 b^k + {}^k\mathrm{C}_k\, a^0 b^{k+1} \\
&= {}^{k+1}\mathrm{C}_0\, a^{k+1}b^0 + {}^{k+1}\mathrm{C}_1\, a^k b^1 + {}^{k+1}\mathrm{C}_2\, a^{k-1}b^2 + \cdots + {}^{k+1}\mathrm{C}_r\, a^{k-r+1}b^r \\
&\quad + \cdots + {}^{k+1}\mathrm{C}_k\, a^1 b^k + {}^{k+1}\mathrm{C}_{k+1}\, a^0 b^{k+1} \\
(a+b)^{k+1} &= {}^{k+1}\mathrm{C}_0\, a^{(k+1)}b^0 + {}^{k+1}\mathrm{C}_1\, a^{(k+1)-1}b^1 + {}^{k+1}\mathrm{C}_2\, a^{(k+1)-2}b^2 + \cdots \\
&\quad + {}^{k+1}\mathrm{C}_r\, a^{(k+1)-r}b^r + \cdots + {}^{k+1}\mathrm{C}_k\, a^1 b^{(k+1)-1} + {}^{k+1}\mathrm{C}_{k+1}\, a^0 b^{k+1}.
\end{aligned}$$

اس سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ جب بھی $P(k)$ درست ہونے پر $P(k+1)$ درست ہوگا۔ اسی طرح ریاضیاتی امالیت (Mathematical Induction) کے اصول کے مطابق $P(n)$ تمام طبعی اعداد n کے لئے درست ہے۔ لہذا

$$(a+b)^n = {}^n\mathrm{C}_0\, a^n b^0 + {}^n\mathrm{C}_1\, a^{n-1}b^1 + \cdots + {}^n\mathrm{C}_r\, a^{n-r}b^r + \cdots + {}^n\mathrm{C}_n\, a^0 b^n, n \in \mathbb{N}.$$

(i) $(a+b)^n$, $n \in \mathbb{N}$ کے پھیلاؤ کو اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں۔

$$(a+b)^n = \Sigma_{k=0}^n {}^n\mathrm{C}_k\, a^{n-k}b^k \text{ or } \Sigma_{k=0}^n {}^n\mathrm{C}_k\, a^k b^{n-k}.$$

(ii) $(a+b)^n$, $n \in \mathbb{N}$ کے پھیلاؤ میں ٹھیک $(n+1)$ ارقام ہیں۔

(iii) $(a+b)^n = \Sigma_{k=0}^n {}^n\mathrm{C}_k\, a^{n-k}b^k$, میں، ہر رقم میں a کی قوت میں "1" کی کمی واقع ہوتی ہے، جب کہ b کی قوت میں ہر رقم میں 1 کا اضافہ ہوتا ہے۔ تاہم، a اور b میں قوتوں کا حاصل جمع ہمیشہ "n" ہے۔

(iv) $n \in \mathbb{N}$، $(a+b)^n$ کے پھیلاؤ میں $(r+1)$ویں رقم یہ ہے۔

$$T_{r+1} = {}^n\mathrm{C}_r\, a^{n-r}b^r, \quad r = 0, 1, 2, \cdots, n.$$

(v) $(a+b)\,(a+b)\ldots(a+b)$ کے حاصل ضرب میں b^r حاصل کرنے کے لئے ہمیں n عوامل میں سے r عوامل کی ضرورت ہوتی ہے۔ یہ ${}^n\mathrm{C}_r$ طریقوں سے کیا جا سکتا ہے۔ یہی وجہ ہے کہ ہمارے پاس $a^{n-r}\,b^r$ کا ضریب ${}^n\mathrm{C}_r$ ہے۔

(vi) $n \in \mathbb{N}$، $(a+b)^n$ کے پھیلاؤ میں ضریب شروع میں مساوی فاصلے پر اور آخر میں مساوی ہیں۔اس حقیقت کی وجہ سے کہ

$${}^n\mathrm{C}_r = {}^n\mathrm{C}_{n-r}$$

11 maths v1 unit 5 UM binomial
Monday, September 05, 2022 8:17:02 PM

(vii) $n \in \mathbb{N}$، $(a+b)^n$ کے پھیلاؤ میں سب سے بڑا ضریب ${}^nC_{\frac{n}{2}}$ ہے۔ اگر n جفت ہے اور سب سے بڑا ضریب ${}^nC_{\frac{n-1}{2}}$ یا ${}^nC_{\frac{n+1}{2}}$ ہے، اگر n طاق ہے۔

(viii) $n \in \mathbb{N}$، $(a+b)^n$ کے پھیلاؤ میں اگر n جفت عدد ہے تو درمیانی رقم $T_{\frac{n}{2}+1} = {}^nC_{\frac{n}{2}}\, a^{n-\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}}$ ہے۔
اور اگر n طاق عدد تو دو درمیانی رقمیں $T_{\frac{n-1}{2}+1}$ اور $T_{\frac{n+1}{2}+1}$ ہیں۔

5.3۔ دورکنی مسئلہ کے خاص معاملات: (Particular cases of Binomial Theorem)

(i) $n \in \mathbb{N}$، $(a+b)^n$ کے پھیلاؤ میں b کو $(-b)$ سے تبدیل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned}(a-b)^n &= {}^nC_0\, a^n b^0 - {}^nC_1\, a^{n-1}b^1 + {}^nC_2\, a^{n-2}b^2 - \cdots \\ &\quad + (-1)^r\, {}^nC_r\, a^{n-r}b^r + \cdots + (-1)^n\, {}^nC_n\, a^0 b^n.\end{aligned}$$

غور کریں کہ نشان + اور − دورکنی پھیلاؤ $(a+b)^n$ میں باری باری ظاہر ہوتا ہے۔

(ii) $(a+b)^n$ کے پھیلاؤ میں a کو 1 سے اور b کو x سے تبدیل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$(1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1\, x + {}^nC_2\, x^2 + \cdots + {}^nC_r\, x^r + \cdots + {}^nC_n\, x^n.$$

خاص طور پر جب $x = 1$ ہو تو

$${}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + \cdots + {}^nC_n = 2^n.$$

اگر X ایک سٹ ہے جس میں n عناصر ہیں تو ہم جانتے ہیں کہ ${}^nC_r$ سٹ X کے تحتی سٹ کی تعداد ہے، جس میں ٹھیک r عناصر ہوتے ہیں تو ${}^nC_r$ میں $r = 0,1,2,3,\ldots,n$ کے اضافہ سے ہمیں X کے تحتی سٹوں کی تعداد مل جاتی ہے۔ لہذا مذکورہ بالا تماثل کا استعمال کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ 'n' عناصر کے ایک سٹ میں 2^n تحتی سٹ ہوتے ہیں۔

(iii) $(1-x)^n = {}^nC_0 - {}^nC_1\, x + {}^nC_2\, x^2 - \cdots + (-1)^r\, {}^nC_r\, x^r + \cdots + (-1)^n x^n.$ میں

خاص طور پر جب $x = 1$، ${}^nC_0 + {}^nC_2 + {}^nC_4 + \cdots = {}^nC_1 + {}^nC_3 + {}^nC_5 + \cdots = 2^{n-1}$

مثال 5.1 $(2x+3)^5$ کا پھیلاؤ معلوم کیجئے۔

حل: $(a+b)^n$ کے پھیلاؤ میں $a = 2x$، $b = 3$ اور $n = 5$ لینے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned}(2x+3)^5 &= (2x)^5 + 5(2x)^4 3 + 10(2x)^3 3^2 + 10(2x)^2 3^3 + 5(2x)3^4 + 3^5 \\ &= 32x^5 + 240x^4 + 720x^3 + 1080x^2 + 810x + 243.\end{aligned}$$

مثال 5.2 98^4 کی قیمت معلوم کیجئے۔

حل: $(a+b)^n$ کے پھیلاؤ میں $a = 100$، $b = 2$ اور $n = 4$ لینے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned}98^4 &= (100-2)^4 \\ &= {}^4C_0\, 100^4 - {}^4C_1\, 100^3 2 + {}^4C_2\, 100^2 2^2 - {}^4C_3\, 100^1 2^3 + {}^4C_4\, 100^0 2^4 \\ &= 100000000 - 8000000 + 240000 - 3200 + 16 \\ &= 92236816.\end{aligned}$$

11 maths v1 unit 5 UM binomial
Monday, September 05, 2022 8:17:03 PM

مثال 5.3 $(x+y)^6$ کے پھیلاؤ میں درمیانی رقم معلوم کیجئے۔

حل: یہاں $n = 6$ جو جفت عدد ہے۔ اس طرح $(x+y)^6$ کے پھیلاؤ میں درمیانی رقم x^3y^3 پر مشتمل ہے۔ یعنی رقم ${}^6C_3\, x^3y^3$ جو $20x^3y^3$ کے مساوی ہے۔

مثال 5.4 $(x+y)^7$ کے پھیلاؤ میں درمیانی رقم معلوم کیجئے۔

حل: یہاں $n = 7$ جو طاق عدد ہے۔ اس طرح $(x+y)^7$ کے پھیلاؤ میں درمیانی رقمیں x^4y^3 اور x^3y^4 پر مشتمل ہیں۔ یعنی رقم ${}^7C_3\, x^4y^3$ اور ${}^7C_3\, x^3y^4$ ہیں جو $35x^4y^3$ اور $35\, x^3y^4$ کے مساوی ہیں۔

مثال 5.5 $(3+2x)^{10}$ کے پھیلاؤ میں x^6 کا ضریب معلوم کیجئے۔

حل: $(a+b)^{10}$ کے پھیلاؤ میں $a = 3$ اور $b = 2x$ لیجئے۔ پھر x^6 اس رقم پر ظاہر ہوگا جہاں پر $(2x)^6$ ہے اور کہیں بھی نہیں۔ لہٰذا x^6 رکھنے والی رقم یہ ہے۔

$$ {}^{10}C_6\, a^4b^6 = {}^{10}C_4\, a^4b^6 = \frac{10\times 9\times 8\times 7}{4\times 3\times 2\times 1}\, 3^4(2x)^6 = 210\times 3^4\times 2^6x^6. \quad [\because {}^{10}C_6 = {}^{10}C_4] $$

لہٰذا $(3+2x)^{10}$ کے پھیلاؤ میں x^6 کا ضریب $210\times 3^4 2^6$ ہے۔

مثال 5.6 $(2-3x)^7$ کے پھیلاؤ میں x^3 کا ضریب معلوم کیجئے۔

حل: $(a+b)^7$ کے پھیلاؤ میں $a = 2$ اور $b = -3x$ لیجئے، تب x^3 اس رقم پر ظاہر ہوگا، جہاں پر $(-3x)^3$ ہے اور کہیں بھی نہیں۔ لہٰذا x^3 رکھنے والی رقم یہ ہے۔

$$ {}^7C_3\, a^4b^3 = \frac{7\times 6\times 5}{3\times 2\times 1}\, 2^4(-3x)^3 = 35\times 2^4\times (-3)^3x^3. $$

لہٰذا $(2-3x)^7$ کے پھیلاؤ میں x^3 کا ضریب $35\times 16\times(-27) = -15120$ ہے۔

مثال 5.7 $(x+a)^n$ کے دو رکنی پھیلاؤ میں 2 ویں، 3 ویں اور 4 ویں رقمیں x کی ایک مناسب قیمت کے لئے بالترتیب 240، 720 اور 1080 ہیں۔ x ، a اور n کی قیمتیں معلوم کیجئے۔

حل: دیا گیا ہے $T_2 = 240$ ، $T_3 = 720$ اور $T_4 = 1080$

$$ T_2 = {}^nC_1\, x^{n-1}a = 240 \quad (1) $$
$$ T_3 = {}^nC_2\, x^{n-2}a^2 = 720 \quad (2) $$
$$ T_4 = {}^nC_3\, x^{n-3}a^3 = 1080 \quad (3) $$

11 maths v1 unit 5 UM binomial
Monday, September 05, 2022 8:17:03 PM

(2) کو (1) سے اور (3) کو (2) سے تقسیم کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{a}{x} = \frac{6}{n-1} \qquad (4)$$

$$\frac{a}{x} = \frac{9}{2(n-2)} \qquad (5)$$

(4) اور (5) سے

$$\frac{6}{n-1} = \frac{9}{2(n-2)}$$

اس طرح $n = 5$ ہے۔ $n = 5$ کو (1) اور (4) میں اور (1) سے (4) کو تقسیم کرنے پر بھی ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{5x^4 a}{\frac{a}{x}} = \frac{240}{\frac{6}{4}}$$

اس طرح $5x^2 = 160$ اور لہذا $x = 2$ ، (4) میں درج کرنے سے ہمیں $a = 3$ حاصل ہوتا ہے۔

مثال 5.8 پھیلایئے: $\left(2x - \frac{1}{2x}\right)^4$.

حل: ہمارے پاس ہے۔

$$\begin{aligned}\left(2x - \frac{1}{2x}\right)^4 &= {}^4\mathrm{C}_0\,(2x)^4\left(-\frac{1}{2x}\right)^0 + {}^4\mathrm{C}_1\,(2x)^3\left(-\frac{1}{2x}\right)^1 + {}^4\mathrm{C}_2\,(2x)^2\left(-\frac{1}{2x}\right)^2 \\ &\quad + {}^4\mathrm{C}_3\,(2x)^1\left(-\frac{1}{2x}\right)^3 + {}^4\mathrm{C}_4\,(2x)^0\left(-\frac{1}{2x}\right)^4 \\ &= (2x)^4 - 4(2x)^3\left(\frac{1}{2x}\right) + 6(2x)^2\left(\frac{1}{2x}\right)^2 - 4(2x)\left(\frac{1}{2x}\right)^3 + \left(\frac{1}{2x}\right)^4 \\ &= 16x^4 - 16x^2 + 6 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{16x^4}\end{aligned}$$

مثال 5.9 پھیلایئے: $\left(x^2 + \sqrt{1-x^2}\right)^5 + \left(x^2 - \sqrt{1-x^2}\right)^5$.

حل: ہمارے پاس ہے۔

$$\begin{aligned}\left(x^2 + \sqrt{1-x^2}\right)^5 &= {}^5\mathrm{C}_0\,(x^2)^5\left(\sqrt{1-x^2}\right)^0 + {}^5\mathrm{C}_1\,(x^2)^4\left(\sqrt{1-x^2}\right)^1 \\ &\quad + {}^5\mathrm{C}_2\,(x^2)^3\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 + {}^5\mathrm{C}_3\,(x^2)^2\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3 \\ &\quad + {}^5\mathrm{C}_4\,(x^2)^1\left(\sqrt{1-x^2}\right)^4 + {}^5\mathrm{C}_5\,(x^2)^0\left(\sqrt{1-x^2}\right)^5 \\ &= x^{10} + 5x^8\sqrt{1-x^2} + 10x^6(1-x^2) + 10x^4(1-x^2)\sqrt{1-x^2} \\ &\quad + 5x^2(1-x^2)^2 + (1-x^2)^2(\sqrt{1-x^2})\end{aligned}$$

11 maths v1 unit 5 UM binomial
Monday, September 05, 2022 8:17:03 PM

$$\begin{aligned}\left(x^2-\sqrt{1-x^2}\right)^5 &= {}^5\mathrm{C}_0\,(x^2)^5\left(\sqrt{1-x^2}\right)^0-{}^5\mathrm{C}_1\,(x^2)^4\left(\sqrt{1-x^2}\right)^1\\&\quad+{}^5\mathrm{C}_2\,(x^2)^3\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2-{}^5\mathrm{C}_3\,(x^2)^2\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3\\&\quad+{}^5\mathrm{C}_4\,(x^2)^1\left(\sqrt{1-x^2}\right)^4-{}^5\mathrm{C}_5\,(x^2)^0\left(\sqrt{1-x^2}\right)^5\\&= x^{10}-5x^8\sqrt{1-x^2}+10x^6(1-x^2)-10x^4(1-x^2)\sqrt{1-x^2}\\&\quad+5x^2(1-x^2)^2-(1-x^2)^2(\sqrt{1-x^2})\end{aligned}$$

اس طرح

$$\begin{aligned}\left(x^2+\sqrt{1-x^2}\right)^5+\left(x^2-\sqrt{1-x^2}\right)^5 &= 2[x^{10}+10x^6(1-x^2)+5x^2(1-x^2)^2]\\&= 2[x^{10}+10x^6-10x^8+5x^2(1-2x^2+x^4)]\\&= 2[x^{10}-10x^8+15x^6-10x^4+5x^2]\end{aligned}$$

مثال 5.10 دورکنی مسئلہ کو استعمال کر کے ثابت کیجئے کہ تمام مثبت سالم عدد n کے لئے عدد جب $6^n - 5n$ کو 25 سے تقسیم کیا جاتا ہے تو ہمیشہ بچت 1 حاصل ہوتا ہے۔

حل: اس کو ثابت رکنے کے لئے اتنا ثابت کرنا ٹھیک ہے، کسی بھی سالم عدد k کے لئے $6^n - 5n = 25k + 1$ ۔ ہم پہلے اس پھیلاؤ پر غور کرتے ہیں۔

$$(1+x)^n = {}^n\mathrm{C}_0 + {}^n\mathrm{C}_1\,x + {}^n\mathrm{C}_2\,x^2 + \cdots + {}^n\mathrm{C}_{n-1}\,x^{n-1} + {}^n\mathrm{C}_n\,x^n, n \in \mathbb{N}$$

$x = 5$ لینے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $(1+5)^n = {}^n\mathrm{C}_0 + {}^n\mathrm{C}_1\,5 + {}^n\mathrm{C}_2\,5^2 + \cdots + {}^n\mathrm{C}_{n-1}\,5^{n-1} + {}^n\mathrm{C}_n\,5^n.$

مذکورہ بالا مساوات مختصر ہو کر اس طرح ہو جاتی ہے $6^n = 1 + 5n + 25({}^n\mathrm{C}_2 + 5\,{}^n\mathrm{C}_3 + \cdots + {}^n\mathrm{C}_n\,5^{n-2}).$

$$6^n - 5n = 1 + 25({}^n\mathrm{C}_2 + 5\,{}^n\mathrm{C}_3 + \cdots + {}^n\mathrm{C}_n\,5^{n-2}) = 1 + 25k, k \in \mathbb{N}.$$

اس طرح تمام مثبت سالم عدد n کے لئے جب $6^n - 5n$ کو 25 سے تقسیم کیا جاتا ہے تو بچت 1 حاصل ہوتا ہے۔

مثال 5.11 عدد 7^{400} کے آخری دو ہندسے معلوم کیجئے۔

حل : ہمارے پاس ہے۔

$$\begin{aligned}7^{400} &= (7^2)^{200} = (50-1)^{200}\\&= {}^{200}\mathrm{C}_0\,50^{200} - {}^{200}\mathrm{C}_1\,50^{199} + \cdots\\&\quad + {}^{200}\mathrm{C}_{198}\,50^2(-1)^{198} + {}^{200}\mathrm{C}_{199}\,50(-1)^{199} + {}^{200}\mathrm{C}_{200}\,(-1)^{200}\\&= 50^2\left({}^{200}\mathrm{C}_0\,50^{198} - {}^{200}\mathrm{C}_1\,50^{197} + \cdots + {}^{200}\mathrm{C}_{198}\,(-1)^{198}\right) - 200\times 50 + 1.\end{aligned}$$

چونکہ 100 سے 50^2 اور 200 تقسیم پذیر ہیں۔ 7^{400} کے آخری دو ہندسے 01 ہیں۔

11 maths v1 unit 5 UM binomial
Monday, September 05, 2022 8:17:03 PM

مشق 5.1

1۔ پھیلایئے : (i) $\left(2x^2 - \frac{3}{x}\right)^3$ (ii) $\left(2x^2 - 3\sqrt{1-x^2}\right)^4 + \left(2x^2 + 3\sqrt{1-x^2}\right)^4$

2۔ محسوب کیجئے : (i) 102^4 (ii) 99^4 (iii) 9^7

3۔ دورکنی مسئلہ کا استعمال کر کے بتایئے کہ مندرجۂ ذیل دو اعداد میں سے کون بڑا ہے۔ $(1.01)^{1000000}$ ، 10000

4۔ $\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^{10}$ میں x^{15} کا ضریب معلوم کیجئے۔

5۔ $\left(x^2 - \frac{1}{x^3}\right)^6$ میں x^2 کا ضریب اور x^6 کا ضریب معلوم کیجئے۔

6۔ $(1+x^3)^{50}(x^2+\frac{1}{x})^5$ کے پھیلاؤ میں x^4 کا ضریب معلوم کیجئے۔

7۔ $\left(2x^3 - \frac{1}{3x^2}\right)^5$ میں مستقل رقم (Constant) معلوم کیجئے۔

8۔ عدد 3^{600} کے آخری دو ہندسے معلوم کیجئے۔

9۔ اگر n ایک مثبت سالم عدد ہے۔ دورکنی مسئلہ کو استعمال کر کے دکھایئے کہ $9^{n+1} - 8n - 9$ ہمیشہ 64 سے تقسیم پذیر ہے۔

10۔ اگر n ایک مثبت سالم عدد ہے، ثابت کیجئے کہ $(x+y)^n$ کے پھیلاؤ کے درمیانی رقموں کے ضریب مساوی ہیں۔

11۔ اگر n ایک مثبت سالم عدد ہے اور r غیر منفی سالم عدد، ثابت کیجئے کہ $(1+x)^n$ کے پھیلاؤ میں x^6 اور x^{n-r} کے ضریب مساوی ہیں۔

12۔ اگر a اور b الگ الگ سالم عدد ہیں تو ثابت کیجئے کہ $a^n - b^n$ کا جزو ضربی $a - b$ ہے، جب بھی n ایک مثبت سالم عدد عدد ہے۔
(اشارہ: $a^n = (a - b + b)^n$ لکھئے اور پھیلایئے۔)

13۔ دورکنی $(a+b)^n$ کے پھیلاؤ میں اگر 4 ویں اور 13 ویں ارقام کے ضریب مساوی ہیں تو n معلوم کیجئے۔

14۔ اگر $(a+x)^n$ کے پھیلاؤ میں تین متواتر ارقام کے دورکنی ضریبوں کی نسبت 1:7:42 ہے۔ تو n معلوم کیجئے۔

15۔ دورکنی $(1+x)^n$ کے پھیلاؤ میں، 5 ویں، 6 ویں اور 7 ویں رقموں کے ضریب حسابی سلسلہ (A.P.) میں ہیں۔
n کی تمام قیمتیں معلوم کیجئے۔

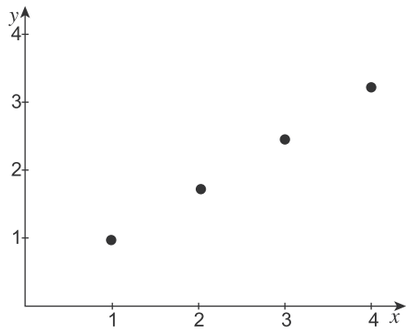
16۔ ثابت کیجئے۔ $C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + \cdots + C_n^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

5.4۔ محدود تواتر (Finite Sequences)

ایک تواتر ایک خاص ترتیب والے عناصر کی فہرست ہے۔ اگرچہ عددوں $a_1, a_2, \ldots,$ کی تواتر کا تصور سیدھا سادھا ہے۔ یہ ایک ترتیب کو بطور تفاعل سوچنے کے لئے استعمال ہوتا ہے۔ جس علاقہ میں یا تو ابتدائی n طبیعی اعداد کا سیٹ یا $\mathbb{N}$ ہوتا ہے۔ اس پورے باب میں ہم صرف حقیقی اعداد کے تواتر پر غور کرتے ہیں اور اہم تواتر کے طور پر حوالہ دیں گے۔ حسابی تواتر اور ہندسی تواتر کو حسابی سلسلہ (AP) اور ہندسی سلسلہ (GP) کے نام سے بھی جانا جاتا ہے۔ آیئے تواتر اور سلسلہ کی بنیادی تعریفیں یاد کرتے ہیں۔

- اگر X کوئی سٹ ہے اور $n \in \mathbb{N}$ ہے تو کوئی بھی تفاعل $f : \{1,2,3,\ldots,n\} \to X$ کو **محدود تواتر** کہا جاتا ہے X پر۔ اور کوئی بھی تفاعل $g : \mathbb{N} \to X$ کو **لامحدود تفاعل** کہا جاتا ہے X پر۔ تفاعل f کی قیمت کو a_n سے ظاہر کیا جاتا ہے اور تواتر خود (a_n) سے ظاہر ہوتا ہے۔
- اگر سٹ X حقیقی اعداد کا ایک سٹ ہے تو اس تواتر کو **عددی تواتر یا حقیقی اعداد کا تواتر** کہا جاتا ہے۔
- اگرچہ ہر تواتر ایک تفاعل ہے، ایک تفاعل ضروری نہیں کہ ایک تواتر ہو۔
- سٹ کے برعکس جہاں عناصر کو دہرایا نہیں جاتا، ایک تواتر میں ارقام کو دہرایا جا سکتا ہے۔ خاص طور پر ایک تواتر جس میں تمام ارقام ایک جیسی ہوتی ہیں اسے **مستقل تواتر** کہا جاتا ہے۔
- تواتر (a_n) کو دیکھنے کا ایک مفید طریقہ $\{(n, a_n) : n \in \mathbb{N}\}$ کی ترسیم کھینچنا ہے جو تواتر کے بارے میں کچھ تفصیلات دیتا ہے۔

11 maths v1 unit 5 UM binomial
Monday, September 05, 2022 8:17:04 PM



شکل 5.1

5.4.1۔ حسابی اور ہندسی سلسلے (Arithmetic and Geometric Progression)

سلسلے تواتر کی کچھ خاص معاملات ہیں جہاں تواتر کے ارقام یا تو بڑھتی ہوئی شکل میں یا گھٹتی ہوئی شکل میں ہوتی ہیں۔
ہم حسابی اور ہندسی سلسلوں کے کچھ تعریفیں اور نتائج یاد کرتے ہیں جن پر پچھلی جماعتوں میں بحث کی گئی ہے۔

حسابی سلسلہ: (A.P)

- تواتر، جس کی شکل $a\ ,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ \ldots\ ,\ a+(n-1)\ d,\ a+nd\ ,\ \ldots$

ہو، اسے حسابی سلسلہ یا حسابی تواتر کہتے ہیں۔دوسرے الفاظ میں،تواتر کی ہر رقم (پہلی رقم کو چھوڑ کر) اس کی پچھلی رقم میں ایک مستقل عدد شامل کر کے حاصل کی جاتی ہے۔مستقل عدد کو مشترک فرق d اور رقم a کو ابتدائی رقم یا پہلی رقم کہتے ہیں۔

- حسابی سلسلہ کی n ویں رقم اس طرح دی گئی ہے۔$T_n = a + (\ n\ -\ 1)\ d$
- تواتر $\sqrt{2},\ \sqrt{2}+\sqrt{3},\ \sqrt{2}+2\sqrt{3},\ \sqrt{2}+3\sqrt{3},\ \ldots$ اور $12,\ 9,\ 6,\ 3,\ \ldots$ حسابی تواتر ہیں،
جن کا مشترک فرق بالترتیب $\sqrt{3}$ اور -3 ہیں۔
- یہ مشاہدہ کرنا دلچسپ ہے کہ 3,7,11 تین عدد اولی (prime numbers) ہیں، جو ایک A.P بناتے ہیں۔
- $n \in \mathbb{N}$ کے لئے $T_n = an + b$، جس میں a اور b نسبتی عدد اولی (Relatively Prime) ایک A.P بناتے ہیں،
جس میں لامحدود عدد اولی اور لامحدود مرکب عدد شامل ہیں۔

ہندسی سلسلہ (G.P)

- تواتر جس کی شکل $a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ \ldots,\ ar^{n-1},\ ar^n,\ \ldots$

جہاں $a \neq 0$ اور $r \neq 0$ ہندسی سلسلہ یا ہندسی تواتر کہلاتا ہے۔دوسرے الفاظ میں تواتر کی رقم (پہلی رقم کو چھوڑ کر) اس کے پچھلی رقم کو ایک مستقل عدد سے ضرب دے کر حاصل کی جاتی ہے۔مستقل r کو مشترک نسبت اور رقم a کو ابتدائی رقم یا پہلی رقم کہتے ہیں۔

- ہندسی سلسلہ کی n ویں رقم یہ ہے۔ $T_n = ar^{n-1}$
- تواتر $1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \ldots$ اور $\sqrt{2},\ 2,\ 2\sqrt{2},\ 4,\ 4\sqrt{2},\ 16,\ \ldots$ ہندسی تواتر ہیں، جن کے مشترک نسبت
بالترتیب 2 اور $\sqrt{2}$ ہیں۔
- ہندسی سلسلہ میں ہر رقم کا لوگارتم، مثبت مشترک نسبت کے ساتھ لینے سے حسابی سلسلہ حاصل ہوتا ہے۔یعنی اگر $r > 0$ کے ساتھ
$a, ar, ar^2, \ldots$ ایک ہندسی سلسلہ (G.P) ہو تو $\log a, \log(ar), \log(ar^2), \ldots$ مشترک فرق $\log r$ کے ساتھ ایک A.P ہے۔
یہ مشاہدہ کرنا دلچسپ ہے کہ مستقل تواتر $c\ ,\ c\ ,\ c,\ \ldots$ ایک حسابی سلسلہ اور ایک ہندسی سلسلہ بھی ہے۔اگر $c \neq 0$ ہو۔
آیئے خصوصی مستقل تواتر $0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ \ldots$ پر غور کریں۔ اس میں کوئی حرج نہیں ہے کہ یہ ایک حسابی سلسلہ ہے۔لیکن جب ہم اسے

11 maths v1 unit 5 UM binomial
Monday, September 05, 2022 8:17:04 PM

ہندسی سلسلہ کے طور پر واضح طور پر دیکھنے کی کوشش کرتے ہیں تو ابتدائی رقم 0 ہونی چاہئے۔ ہم مشترک نسبت r کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں ؟ اگر ہم r کو 1,2 یا کسی اور عدد کے طور پر لیتے ہیں تو ہمیں 1,2 یا کسی اور عدد کے طور پر لیتے ہیں تو ہمیں وہی تواتر $0, 0, 0, 0, \ldots$ ملتا ہے۔ ہم اس صورت حال کے ساتھ رہ گئے ہیں، جہاں ایک ہندسی سلسلہ کے لامحدود بہت سے مشترکہ نسبت ہیں۔ اس الجھن پر قابو پانے کے لئے کچھ ریاضی دان اس سلسلہ کو ہندسی سلسلوں کی جماعت سے $a \neq 0$ فرض کر کے تعریف میں شامل کرتے ہیں (ہم نے یہ قیاس کیا ہے)۔

5.4.2۔ حسابیہ ہندسی سلسلہ (Arithmetico-Geometric Progression) (AGP)

حسابی اور ہندسی سلسلوں کو ملانے پر ایک نیا سلسلہ جس کو حسابیہ ہندسی سلسلہ (AGP) بنتا ہے جیسا کہ ہم حسابی کا سلسلہ اور ہندسی سلسلہ کے لئے AP اور GP کا مخفف استعمال کرتے ہیں۔ ہم حسابیہ، ہندسی سلسلہ کے لئے مخفف AGP استعمال کرتے ہیں۔ AGP کا استعمالات مختلف میدانوں میں ہوتا ہے جیسے امکانی تھیوری میں متوقع قیمت کی گنتی۔

تعریف 5.1 تواتر جس کی شکل

$$a,\ (a+d)r,\ (a+2d)r^2,\ (a+3d)r^3,\ \ldots,\ (a+(n-1)d)r^{n-1},\ (a+nd)r^n,\ \ldots$$

حسابیہ ہندسی سلسلہ ***arithmetico-geometric progression*** (یا) حسابیہ ہندسی تواتر ***arithmetico-geometric sequence*** کہلاتا ہے۔

غور کریں $\text{AP} : a, a+d, a+2d, \ldots$

$\text{GP} : 1, r, r^2, \ldots$

تب AGP یہ ہے۔ $a, (a+d)r, (a+2d)r^2, \ldots$

یہاں 'a' ابتدائی رقم، d مشترک فرق اور r مشترک نسبت ہے AGP کی۔

اگر ہم $r = 1$ لیتے ہیں تو AGP حسابی سلسلہ AP ہوگا اور اگر ہم $d = 0$ لیتے ہیں تو وہ GP ہوگا۔ لہذا حسابی اور ہندسی AGP کے خاص معاملات بن جاتے ہیں۔ ریاضی میں عمومیت کے تصور کو جاننے کے لئے یہ ایک اچھی صورت حال ہے۔

ہم نوٹ کرتے ہیں کہ AGP کی n ویں رقم بذریعہ دی گئی ہے۔ $T_n = (a+(n-1)d)r^{n-1}$ تمام APS، GPS اور تمام AGPS ہیں۔ مثال کے طور پر AP $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ اور GP $\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{8}, \ldots$ AGP دیتے ہیں۔

تواتر $4, 14, 40, 104, 256, 608, \ldots$ بھی حسابیہ ہندسی سلسلہ کی ایک مثال ہے۔ اس تواتر کے لئے $a = 4$ اور $r = 2$ ہے۔

5.4.3۔ ہم آہنگی سلسلہ (Harmonic Progression) (HP)

ہم آہنگی سلسلہ بہت سی ہم تواتروں میں سے ایک ہے اور اس کا حسابی سلسلہ سے گہرا تعلق تھا۔ ہم آہنگی سلسلہ بڑے پیمانے پر استعمال ہوتا ہے۔

تعریف 5.2

ایک تواتر $h_1, h_2, h_3, \ldots$ کو ایک ہم آہنگ تواتر یا ہم آہنگی سلسلہ کہا جاتا ہے۔ اگر $\frac{1}{h_1}, \frac{1}{h_2}, \frac{1}{h_3}, \frac{1}{h_4}, \ldots$ ایک حسابی تواتر ہے۔

نوٹ کریں کہ ایک تواتر ہم آہنگی میں ہے۔ اگر اس کے ارقام کا معکوس حسابی سلسلہ میں ہے، لیکن ہمیں یہ نہیں کہنا چاہئے کہ ہم آہنگی سلسلے حسابی سلسلے کے معکوس ہیں۔ درحقیقت اگر ایک حسابی تواتر کی رقم صفر پر مشتمل ہے تو، اس کا معکوس معنی خیز نہیں ہے۔ یقیناً اگر کوئی حسابی سلسلہ میں کوئی صفر رقم نہیں ہے تو اس کی معکوس ہم آہنگی سلسلہ ہے۔ لہذا عمومی ہم آہنگی سلسلہ کی شکل یہ ہوگی۔

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{a+d}, \frac{1}{a+2d}, \frac{1}{a+3d}, \ldots$$

11 maths v1 unit 5 UM binomial
Monday, September 05, 2022 8:17:05 PM

جیسا کہ ایک کسر کا نسب نما '0' نہیں ہوسکتا، $a+kd \neq 0$ کسی بھی سالم عدد $k \geq 0$ کے لئے۔ لہذا شرط a/d- صحیح عدد نہیں ہے ضروری ہے۔ ہم آہنگی سلسلے کے مسائل کو حسابی سلسلے میں تبدیل کیا جاسکتا اور حسابی سلسلے کی تکنیک اور ضابطے کا استعمال کرتے ہوئے حل کیا جاسکتا ہے۔

(i) تواتر $\left(\frac{1}{n}\right) = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots$ ایک ہم آہنگی تواتر ہے۔ $\{(n, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ کا گراف کھینچ سکتا ہے اور ہم آہنگ تواتر $\left(\frac{1}{n}\right)$ کو دیکھ سکتا ہے۔

(ii) اگر a,b,c ہم آہنگی سلسلے HP میں ہیں، تب $b = \frac{2ac}{a+c}$

(iii) ایک مثلث میں، اگر ارتفاع AP میں ہیں، تب ضلعے HP میں ہیں۔

مثال 5.12 ثابت کیجئے کہ اگر a, b, c ہیں HP میں، صرف اور صرف اگر $\frac{a}{c} = \frac{a-b}{b-c}$

حل: a,b,c HP میں ہیں، اگر $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ AP میں ہیں۔ اس طرح ہمیں $\frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$ حاصل ہوتا ہے، جو $ab - ac = ac - bc$ دیتا ہے۔ لہذا $a(b-c) = c(a-b)$ سے $\frac{a}{c} = \frac{a-b}{b-c}$ حاصل ہوتا ہے۔ دوسری صورت میں، اگر $\frac{a}{c} = \frac{a-b}{b-c}$ ہو تو $a(b-c) = c(a-b)$ دونوں طرف ہم رقم کو abc سے تقسیم کرنے پر ہمیں $\frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$ حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ AP میں ہیں، لہذا a,b,c HP میں ہیں۔

مثال 5.13 اگر ہم آہنگی سلسلے کی 5 ویں اور 9 ویں رقمیں $\frac{1}{19}$ اور $\frac{1}{35}$ ہیں تو سلسلے کی 12 ویں رقم معلوم کیجئے۔

حل: فرض کرو کہ h_n ایک ہم آہنگی سلسلہ ہے اور $a_n = \frac{1}{h_n}$ ہے، تب $a_5 = 19$ اور $a_9 = 35$ ۔ چونکہ a_n حسابی سلسلہ میں ہیں۔ اس لئے $a+4d = 19$ اور $a+8d = 35$۔ یہ دونوں مساوات کو حل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $a=3$ اور $d=4$

اس طرح $a_{12} = a+11d = 47$۔ اس طرح HP کی 12 ویں رقم $\frac{1}{47}$ ہے۔

ہم مستقل سلسلہ کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟ اس صفر سلسلہ کے علاوہ تمام مستقل سلسلے بھی ہم آہنگی سلسلے ہیں۔

5.4.4۔ حسابی، ہندسی اور ہم آہنگی اوسط (Arithmetic, Geometric and Harmonic Mean)

ہم ''اوسط'' کا تصور جانتے ہیں۔ کئی اوسط ہیں۔ حسابی اوسط (AM)، ہندسی اوسط (GM) اور ہم آہنگی اوسط (HM) کچھ اوسط ہیں۔ آیئے اب ہم AM اور GM کی تعریفیں یاد کرتے ہیں، جہاں ارقام AP یا GP میں ہونے کی کوئی شرائط نہیں ہے۔

حسابی اوسط اور ہندسی اوسط: (Arithmetic and Geometric Mean)

تعریف 5.3 فرض کرو کہ n کوئی بھی مثبت سالم عدد ہے اور فرض کرو کہ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ ، n اعداد ہیں۔ ہیں تو عدد

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n}$$

کو $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ کا حسابی اوسط کہتے ہیں۔

اعداد $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ کو الگ الگ ہونے کی ضرورت نہیں ہے اور یہ ضروری نہیں ہے کہ اعداد مثبت ہوں۔ اس کی تعریف آسانی سے اس طرح کی جاسکتی ہے کہ 16 اعداد 14, 14, 17, 20, 15 کا حسابی اوسط ہے۔

11 maths v1 unit 5 UM binomial
Monday, September 05, 2022 8:17:05 PM

حسابی اوسط کی تعریف میں جمع کی جگہ ضرب اور n سے تقسیم کی جگہ n واں جذر لینے پر ہمیں ہندسی اوسط کی تعریف حل ہوتی ہے۔

تعریف 5.4 فرض کرو کہ n کوئی مثبت سالم عدد ہے اور $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ میں n، غیر منفی اعداد ہیں۔

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}$$

تو عدد $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ کا **ہندسی اوسط** کہتے ہیں۔

یہاں بھی یہ ضروری نہیں کہ اعداد $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ الگ الگ ہو۔لیکن یہ ضروری ہے کہ اعداد غیر منفی ہو۔اعداد 4,6,9 کا ہندسی اوسط $\sqrt[3]{216} = 6$ ہے۔ ان 3 اعداد کا حسابی اوسط $\frac{19}{3} = 6\frac{1}{3}$ ہے۔غور کریں کہ حسابی اوسط ہندسی اوسط سے زیادہ ہے۔کیا یہ ہمیشہ صحیح ہے؟ یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ کسی بھی سٹ کے n غیر منفی اعداد کے لئے حسابی اوسط، ہندسی اوسط کے مساوی یا زیادہ ہوتا ہے۔یعنی اگر AM حسابی اوسط کو ظاہر کرتا ہے، اور GM ہندسی اوسط کو ظاہر کرتا ہے، تب $AM \geq GM$ ہے۔

آیئے اس نامساوات $AM \geq GM$ کو دو غیر منفی اعداد کے لئے ثابت کریں۔

مسئلہ 5.2

اگر دو غیر منفی اعداد کے حسابی اوسط اور ہندسی اوسط کو AM اور GM سے ظاہر کیا جاتا ہے، تب $AM \geq GM$۔یہ مساوات برقرار ہے۔ صرف اور صرف اس صورت میں جب دو عدد مساوی ہوں۔

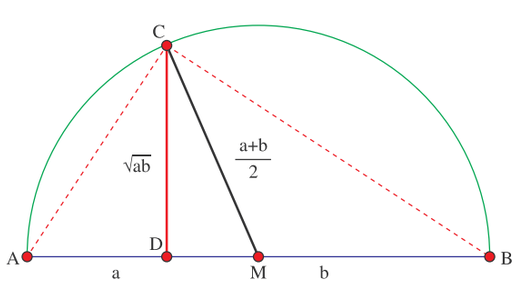
ثبوت: فرض کرو کہ a اور b کوئی دو غیر منفی عدد ہیں۔تب $AM = \frac{a+b}{2}$ اور $GM = \sqrt{ab}$.

ہمارے پاس $(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2 \geq 0$ ہے۔ لہٰذا $(a+b)^2 - 4ab \geq 0$ جو $(a+b) \geq 2\sqrt{ab}$. دیتا ہے۔ لہٰذا $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. بہ الفاظ دیگر $AM \geq GM$

مزید یہ کہ مساوات صرف اور صرف اس صورت میں ہوتی ہے، جب $(a+b)^2 - 4ab = 0$. یہ صرف اور صرف اس صورت میں درست ثابت ہوگا، جب $(a-b)^2$ ہے۔ جو اس صورت میں اور اگر $a=b$ اس طرح AM=GM صرف اور صرف $a=b$ ہوتا ہے۔

$AM \geq GM$ کے لئے ہندسوی ثبوت

فرض کرو a اور b کوئی دو غیر منفی حقیقی عدد ہیں۔اگر ان میں سے کم از کم ایک صفر ہے، تب GM صفر ہے۔اس لئے ہمارے پاس ثابت کرنے کے لئے کچھ نہیں ہے۔تو ہم فرض کرتے ہیں کہ $a>0$ اور $b>0$ ہے۔ ہم ایک سیدھی قطاع خط AB کھینچتے ہیں، جس کی لمبائی $a+b$ اور ایک نصف دائرہ، جس کا قطر AB ہے۔فرض کرو M درمیانی نقطہ ہے AB کا، تب ڈالے گئے نصف دائرہ کا مرکز M ہوگا۔ چونکہ M درمیانی نقطہ AB کا ہمارے پاس $AM=MB=\frac{a+b}{2}$ ہے تو دائرے کا نصف قطر $\frac{a+b}{2}$ ہے۔فرض کرو D ایک نقطہ ہے AB پر اس طرح کہ $AD=a$ تب $BD=b$ ہے۔



شکل 5.2

11 maths v1 unit 5 UM binomial
Monday, September 05, 2022 8:17:06 PM

ہم D سے AB کو ایک عمودی خط کھینچتے ہیں اور اس کو نصف دائرہ پر ملنے دیتے ہیں۔ ہم خطوط مستقیم CB,CA اور CM کھینچتے ہیں۔ چونکہ M درمیانی نقطہ ہے۔ $\frac{a+b}{2}$ = نصف قطر= CM صاف طور پر $MD = \frac{a+b}{2}$۔ صاف طور پر $MD = \frac{a+b}{2} - a$ ۔ مشابہ مثلثیں ΔACD اور ΔCBD کو استعمال کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $\frac{CD}{AD} = \frac{BD}{CD}$ اور لہذا $CD^2 = AD \times BD = ab$۔ اس لئے $CD = \sqrt{ab}$ (فیثا غورث کا مسئلہ استعمال کر کے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ $CD = \sqrt{ab}$) چونکہ کسی بھی نصف قطر کی لمبائی نصف قطر کے کم یا مساوی ہوتی ہے۔ ہمیں ملتا ہے $CD \leq CM$ دوسرے الفاظ میں $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ اس کے معنی $GM \leq AM$. ہے۔

نصف قطر DC کی لمبائی نصف قطر کے مساوی ہوتی ہے صرف اور صرف اگر D=M اس طرح مساوات AM=GM صحیح ہے صرف اور صرف اگر a=b ہو۔

نتیجہ 5.1

اگر $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ ایک حسابی سلسلہ ہے۔ ہر رقم a_k $(k > 1)$ اس کے ماقبل رقم a_{k-1} اور مابعد رقم a_{k+1} کا حسابی اوسط ہے۔

ثبوت: فرض کرو $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ ایک حسابی سلسلہ ہے، جس کی ابتدائی رقم a اور مشترک فرق a ہے۔ تب

$$a_{k-1} = a + (k-2)d, \quad a_k = a + (k-1)d, \quad \text{اور} \quad a_{k+1} = a + kd.$$

چنانچہ $$\frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2} = \frac{a + (k-2)d + a + kd}{2} = \frac{2a + (2k-2)d}{2} = a + (k-1)d = a_k.$$

a_{k-1} اور a_{k+1} کا حسابی اوسط a_k ہے۔ ■

نتیجہ 5.2

اگر $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ ایک ہندسی سلسلہ ہے۔ ہر رقم a_k $(k > 1)$ اس کے ماقبل رقم a_{k-1} اور مابعد رقم a_{k+1} کا ہندسی اوسط ہے۔

ثبوت:

فرض کرو $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ ایک ہندسی سلسلہ ہے، جس کی ابتدائی رقم a اور مشترک نسبت r ہے۔ تب

$$a_{k-1} = ar^{k-2}, \quad a_k = ar^{k-1}, \quad \text{اور} \quad a_{k+1} = ar^k$$

چنانچہ $$\sqrt{a_{k-1}\, a_{k+1}} = \sqrt{ar^{k-2}ar^k} = \sqrt{a^2r^{2k-2}} = ar^{k-1} = a_k.$$

$a_{k\ 1}$ اور a_{k+1} کا ہندسی اوسط a_k ہے۔ ■

مثال 5.14 7 اعداد $A, A_1, A_2, \ldots, A_7$ معلوم کیجئے، تاکہ تواتر $A, A_1, A_2, \ldots, A_7$ حسابی سلسلے میں ہو اور مزید 4 اعداد $G1, G2, G3, G4$ تاکہ تواتر $G1, G2, G3, G4$ ہندسی سلسلے میں ہو

حل: چونکہ $a = 4$ اور $4 + 8\ d = 7$ ہے، ہمیں $d = \frac{3}{8}$ حاصل ہوتا ہے تو مطلوبہ 7 اعداد $4\frac{3}{8}, 4\frac{6}{8}, 5\frac{1}{8}, 5\frac{4}{8}, 5\frac{7}{8}, 6\frac{2}{8}, 6\frac{5}{8}$ ہیں۔ چونکہ $a=12$ اور $ar^5 = \frac{3}{8}$ ہے۔ ہمیں $r^5 = \frac{1}{32}$ اور $r = \frac{1}{2}$. حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح مطلوبہ 4 اعداد یہ ہیں۔ $6, 3, 1\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$

مثال 5.15

اگر ایک ہندسی سلسلہ کے 4 ویں، 5 ویں اور 6 ویں ارقام کا حاصل ضرب 4096 ہے اور اسی کے 5 ویں، 6 ویں اور 7 ویں رقام کا حاصل ضرب 32768 ہے، تو ہندسی سلسلے کے ابتدائی 8 ارقام کا حاصل جمع معلوم کیجئے۔

حل: فرض کرو کہ $a, ar, ar^2, \ldots$ ایک دی گئی خصوصیات والی ہندسی سلسلہ ہے۔ چونکہ 4 ویں، 5 ویں اور 6 ویں ارقام ar^3, ar^4, ar^5 ہیں۔ ان کا حاصل ضرب a^3r^{12} ہے۔ اس طرح $a^3r^{12} = 4096$ اور $a^3r^{15} = 32768$ ہے۔

11 maths v1 unit 5 UM binomial
Monday, September 05, 2022 8:17:06 PM

چنانچہ $\frac{a^3r^{15}}{a^3r^{12}} = \frac{32768}{4096}$ ۔ لہذا $r^3 = 8$۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ $r = 2$، $a^3r^{12} = 4096$ ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$a^3 = 1$، چنانچہ $a = 1$

ابتدائی 8 رقموں کا حاصل جمع $= \frac{a(1-r^8)}{1-r} = \frac{1-2^8}{1-2} = 255$ ہے۔

ہم آہنگی اوسط (Harmonic Mean)

مثبت اعداد کے سٹ کا ہم آہنگی اوسط، سٹ کے اعداد کے معکوسوں کے حسابی اوسط کا معکوس ہے۔یعنی اگر $h_1, h_2, \ldots, h_n$ مثبت اعداد ہیں، تو اس کا معکوس $\frac{1}{h_1}, \frac{1}{h_2}, \ldots, \frac{1}{h_n}$ ہے۔ معکوسوں کا حسابی اوسط یہ ہے۔

$$\frac{\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \cdots + \frac{1}{h_n}}{n}$$

اور اس حسابی اوسط کا معکوس یعنی اعداد $h_1, h_2, \ldots, h_n$ کا ہم آہنگی اوسط یہ ہے۔

$$\frac{n}{\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \cdots + \frac{1}{h_n}}.$$

تعریف 5.5

مثبت اعداد کے سیٹ $\{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ کے ہم آہنگی اوسط کی تعریف اس طرح کی جاسکتی ہے۔

$$\frac{n}{\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \cdots + \frac{1}{h_n}}.$$

خاص طور پر، دو مثبت اعداد a اور b کا ہم آہنگی اوسط $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ ہے۔ جو $\frac{2ab}{a+b}$ کے مساوی ہے۔

یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ ''کسی بھی سٹ کے n مثبت اعداد کے لئے، ہندسی اوسط، ہم آہنگی اوسط سے بڑا یا مساوی ہوتا ہے''۔ یعنی $GM \geq HM$

آیئے اس نامساوات $GM \geq HM$ کو دو غیر منفی اعداد کے لئے ثابت کرتے ہیں۔

مسئلہ 5.3 اگر GM اور HM دو غیر منفی اعداد کے ہندسی اوسط اور ہم آہنگی اوسط کو ظاہر کرتے ہیں۔تب $GM \geq HM$ ہے۔ یہ مساوات اس صورت میں ہوتی ہے۔صرف اور صرف جب دو اعداد مساوی ہوں۔

ثبوت: فرض کرو a اور b کوئی دو مثبت اعداد ہیں۔

$$\begin{aligned}
GM &= \sqrt{ab} \quad \text{and} \quad HM = \frac{2ab}{a+b}. \\
GM - HM &= \sqrt{ab} - \frac{2ab}{a+b} \\
&= \frac{\sqrt{ab}(a+b) - 2ab}{a+b} \\
&= \frac{\sqrt{ab}((a+b) - 2\sqrt{ab})}{a+b} \\
&= \frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{a+b} \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

اس طرح $GM - HM \geq 0$ اور لہذا $GM \geq HM$ ہے۔

■

11 maths v1 unit 5 UM binomial
Monday, September 05, 2022 8:17:07 PM

مسئلہ 5.2 : میں ہم پہلے ہی ثابت کر چکے ہیں کہ $AM \geq GM$ اور اب ہمیں حاصل ہو رہے ہیں۔ $GM \geq HM$ ان دونوں کو ملانے سے ہمیں ایک اہم نامساوات $AM \geq GM \geq HM$ حاصل ہوتی ہے۔

نتیجہ 5.3 کسی بھی دو مثبت اعداد کے لئے، یہ تین اوسط AM، GM اور HM ہندسی سلسلہ میں ہیں۔

ثبوت : فرض کیجئے کہ a اور b دو مثبت حقیقی اعداد ہیں، تو

$$AM = \frac{a+b}{2}, \quad GM = \sqrt{ab}, \quad \text{اور} \quad HM = \frac{2ab}{a+b}$$

یہاں پر

$$AM \times HM = \left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{2ab}{a+b}\right) = ab = (\sqrt{ab})^2 = GM^2$$

یعنی $AM \times HM = GM^2$ اور لہٰذا AM، GM اور HM ہندسی سلسلہ میں ہیں۔ ■

ہم مندرجۂ ذیل دلچسپ نتائج کو نوٹ کرتے ہیں۔

- اگر a اور c کا حسابی اوسط ہے تو a,b,c حسابی سلسلہ ہے۔
- اگر a اور c کا ہم آہنگی اوسط b ہے تو a,b,c ہندسی سلسلہ ہے
- اگر a اور c کا ہم آہنگی اوسط b ہے تو a,b,c ہم آہنگی سلسلہ ہے۔

اگر کوئی گاڑی x kmph کی رفتار سے سفر کرتی ہے، اور مخصوص فاصلے کو طے کرتی ہے اور اسی فاصلے کو y kmph رفتار سے واپس آتی ہے۔ پھر پورے سفر میں گاڑی کی رفتار اوپر اور نیچے کی ہم آہنگی اوسط ہے۔ حقیقت میں اگر d فاصلہ ہے، تو اوپر کے سفر کے لئے لیا گیا وقت d/x اور نیچے کی طرف سفر کرنے کے لئے لیا گیا وقت $\frac{d}{y}$ ہے۔

اس طرح اوسط رفتار $\dfrac{2d}{\frac{d}{x}+\frac{d}{y}} = \dfrac{2xy}{x+y}$.

مثال کے طور پر اگر کوئی گاڑی 60 kmph کی رفتار سے سفر کرتی ہے تو ایک مخصوص فاصلہ طے کرتی ہے اور اسی فاصلہ کو 40 kmph کی رفتار سے واپس آتی ہے، پھر پورے سفر میں گاڑی کی اوسط رفتار 60 اور 40 کا ہم آہنگی اوسط ہے یعنی رفتار $\frac{2\times 60\times 40}{60+40} = 48$ kmph ہے۔

مشق 5.2

1۔ تواتر کی پہلی ابتدائی 6 ارقام، جن کی n ویں رقم، ذیل میں دی گئی ہیں اور ان کی درجہ بندی حسابی سلسلہ، ہندسی سلسلہ، حسابیہ ہندسی سلسلہ ہم آہنگی سلسلہ اور ان میں سے کوئی بھی نہیں کے طور پر کیجئے۔

(i) $\frac{1}{2^{n+1}}$ (ii) $\frac{(n+1)(n+2)}{n+3(n+4)}$ (iii) $4\left(\frac{1}{2}\right)^n$ (iv) $\frac{(-1)^n}{n}$ (v) $\frac{2n+3}{3n+4}$ (vi) 2018 (vii) $\frac{3n-2}{3^{n-1}}$

2۔ تواتر کی ابتدائی 6 ارقام لکھیں جن کی n ویں رقم ذیل میں دی گئی ہے۔

(i) $a_n = \begin{cases} n+1 & \text{if } n \text{ is odd} \\ n & \text{if } n \text{ is even} \end{cases}$

(ii) $a_n = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 1 \\ 2 & \text{if } n = 2 \\ a_{n-1} + a_{n-2} & \text{if } n > 2 \end{cases}$

(iii) $a_n = \begin{cases} n & \text{if } n \text{ is } 1, 2 \text{ or } 3 \\ a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} & \text{if } n > 3 \end{cases}$

11 maths v1 unit 5 UM binomial
Monday, September 05, 2022 8:17:07 PM

3۔ درجہ ذیل تواتروں کی n ویں رقم لکھیں۔

(i) $2, 2, 4, 4, 6, 6, \ldots$ (ii) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$

(iii) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{9}{10}, \ldots$ (iv) $6, 10, 4, 12, 2, 14, 0, 16, -2, \ldots$

4۔ GP میں تین بڑھتی ہوئی اعداد کا حاصل ضرب 5832 ہے۔ اگر ہم دوسرے عدد میں 6 اور تیسرے عدد میں 9 کو جمع کرتے ہیں تو حاصل ہونے والے اعداد AP بناتے ہیں۔ اعداد کو GP میں معلوم کیجئے۔

5۔ تواتر $\frac{3}{1^2 2^2}, \frac{5}{2^2 3^2}, \frac{7}{3^2 4^2}, \ldots$ کی n ویں رقم دو ارقام کے فرق کے طور پر لکھئے۔

6۔ اگر ایک GP کی k ویں رقم t_k ہے، تو بتایئے کہ t_{n-k}, t_n, t_{n+k} بھی کسی بھی مثبت عدد k کے لئے GP بناتے ہیں۔

7۔ اگر a,b,c ہندسی سلسلے (GP) میں ہیں اور اگر $a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}}$ ، تو ثابت کیجئے کہ x,y,z حسابی سلسلے (AP) میں ہیں۔

8۔ دو اعداد کا AM ان کے GM سے 10 زیادہ ہے، اور HM سے 16 زیادہ ہے۔ اعداد معلوم کیجئے۔

9۔ اگر مساوات $(q-r)x^2 + (r-p)x + p - q = 0$ کے جذریں مساوی ہیں تو بتایئے کہ q, p اور r ایک AP ہیں۔

10۔ اگر ایک G.P کی p ویں، q ویں اور r ویں رقمیں بالترتیب a ، b اور c ہیں تو بتایئے کہ

$$(q-r)\log a + (r-p)\log b + (p-q)\log c = 0.$$

5.5۔ محدود سلسلے (Finite Series)



عام طور پر یہ کہا جا سکتا ہے کہ ایک سلسلہ اعداد کے تواتر کی ارقام کا مجموعہ ہے۔ ایک محدود سلسلہ اعداد کی ایک محدود تواتر کی ارقام کا مجموعہ ہے۔ اگر (a_n) اعداد کی تواتر ہے، تو جملہ $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ ایک محدود سلسلہ کہلاتا ہے۔ جملہ $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ ، کا اظہار اس طرح کیا جاتا ہے۔ بعض اوقات زیر غور مسئلے پر منحصر ہوتا ہے اور سادہ طور پر ایک تواتر پہلی رقم a_0 کے ساتھ $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ کے طور پر دیا جا سکتا ہے۔

5.5.1۔ حسابی، ہندسی، حسابیہ، ہندسی سلسلوں کا جمع:

(Sum of Arithmetic, Geometric and Arithmetico-Geometric Progressions)

- ایک سلسلے کو حسابی سلسلہ (AP) کہا جاتا ہے، اگر اس سلسلے کے ارقام حسابی تواتر میں ہوتے ہیں۔
  ایک سلسلے کو ہندسی سلسلہ (GP) کہا جاتا ہے۔ اگر اس سلسلے کے ارقام ہندسی تواتر میں ہوتے ہیں۔
- حسابی تواتر $(a+(n-1)d)$ کے ابتدائی n رقموں کا حاصل جمع S_n اس طرح دیا جاتا ہے۔

$$S_n = na + \frac{(n-1)n}{2}d = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d].$$

- ہندسی تواتر (ar^{n-1}) کے ابتدائی رقموں کا حاصل جمع S_n اس طرح دیا جاتا ہے۔ $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ بشرطیکہ $r \neq 1$ ہو۔
  اگر $r = 1$ ہو تو وہ تواتر کچھ نہیں، بلکہ ایک مستقل تواتر $a, a, a, \ldots$ ہے، اور صاف طور پر ابتدائی n رقموں کا حاصل جمع na ہے۔

اس طرح اگر $r \neq 1$ تب $1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r}$

حسابیہ ہندسی سلسلوں کا مجموعہ:(Sum of Arithmetico-Geometric Progressions)

- ایک سلسلہ حسابیہ ہندسی سلسلہ اُس وقت کہلاتا ہے، اگر اس سلسلہ کے ارقام حسابیہ-ہندسی تواتر میں ہوتے ہیں۔
- حسابیہ ہندسی سلسلہ $((a+(n-1)d)r^{n-1})$ کے ابتدائی n رقموں کا حاصل جمع S_n ، اس طرح دیا جاتا ہے۔

$$S_n = \frac{a-(a+(n-1)d)r^n}{1-r} + dr\left(\frac{1-r^{n-1}}{(1-r)^2}\right)$$

$r \neq 1$ کے لیے

11 maths v1 unit 5 UM binomial
Monday, September 05, 2022 8:17:08 PM

مثال 5.16 سلسلہ $1+\frac{6}{7}+\frac{11}{49}+\frac{16}{343}+\cdots$. کی n ارقام تک حاصل جمع معلوم کیجئے۔

حل: یہاں $a=1$ ، $d=5$ اور $r=\frac{1}{7}$. ہے۔

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a-(a+(n-1)d)r^n}{1-r}+dr\left(\frac{1-r^{n-1}}{(1-r)^2}\right) \\ &= \frac{1-(1+5(n-1))(\frac{1}{7})^n}{1-\frac{1}{7}}+5\times\frac{1}{7}\left(\frac{(1-(\frac{1}{7})^{n-1})}{(1-\frac{1}{7})^2}\right) \\ &= \frac{1-\frac{5n-4}{7^n}}{\frac{6}{7}}+\frac{\frac{5}{7}(7^{n-1}-1)}{7^{n-1}(\frac{6}{7})^2} \\ &= \frac{7^n-5n+4}{7^{n-1}6}+\frac{5(7^{n-1}-1)}{7^{n-2}36} \end{aligned}$$

5.5.2۔ محدود سلسلہ کے لئے دور بینی حاصل جمع (Telescopic summation for Finite Series)

دور بینی حاصل جمع، ایک عام طریقہ ہے جو ایک سلسلہ کی محدود یا لامحدود ارقام کو جمع کرنے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے ۔ یہ تکنیک دی گئی سلسلہ کی n رقموں کے حاصل جمع کو صرف دو رقموں میں عام طور پر پہلی اور آخری رقم میں ظاہر کرتی ہے۔ درمیانی ارقام ایک دوسرے کو منسوخ کر کے، درمیانی ارقام کو منسوخ کرنے کے بعد ہم آخری رقم کو جو پہلی رقم سے بہت دور ہوتی ہے، پہلی رقم کے قریب لاتے ہیں۔ اس لئے اس طریقے کو ''دور بین کا حاصل جمع'' (Telescopic summation) کہتے ہیں۔

مثال 5.17 سلسلہ $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots$ کے ابتدائی n رقموں کا حاصل جمع معلوم کیجئے۔

حل: فرض کرو کہ دئے گئے سلسلہ کی k ویں رقم t_k کو ظاہر کرتا ہے۔ تو $t_k=\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$ ۔ اگر ہم k ویں رقم کو ، دو جملوں کے فرق کے طور پر لکھنے میں کامیاب ہوتے ہیں، تب ہم اس تکنیک کو استعمال کر کے حل کر سکتے ہیں۔ ہمارے پاس ہے۔

$$t_k=\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})}=\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{k-(k+1)}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$$

لہٰذا

$$t_1+t_2+\cdots+t_n=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\sqrt{n+1}-1$$

مثال 5.18 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$ معلوم کیجئے۔

حل: فرض کرو کہ دئے گئے سلسلہ کی k ویں رقم t_k کو ظاہر کرتا ہے۔ تو $t_k=\frac{1}{k(k+1)}$ ۔ جزو کسوری کو استعمال کر کے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}.$$

لہٰذا

$$t_1+t_2+\cdots+t_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

11 maths v1 unit 5 UM binomial
Monday, September 05, 2022 8:17:08 PM

مشق 5.3

1۔ حسابی سلسلے کی ابتدائی 20 رقموں کا حاصل جمع معلوم کیجئے، جس کے ابتدائی 10 رقموں کا حاصل جمع 52 اور ابتدائی 15 رقموں کا حاصل جمع 77 ہے۔

2۔ سلسلہ $\frac{1^3}{1}+\frac{1^3+2^3}{1+3}+\frac{1^3+2^3+3^3}{1+3+5}+\cdots$ میں 17 ویں رقم تک حاصل جمع معلوم کیجئے۔

3۔ مندرجۂ ذیل سلسلوں کے ابتدائی n رقموں کا حاصل جمع محسوب کیجئے۔

i. $8+88+888+8888+\cdots$ ii. $6+66+666+6666+\cdots$

4۔ ابتدائی n رقموں کا حاصل جمع محسوب کیجئے۔ $1+(1+4)+(1+4+4^2)+(1+4+4^2+4^3)+\cdots$

5۔ سلسلہ $1,\frac{4}{3},\frac{7}{9},\frac{10}{27},\ldots$ کی عام رقم اور ابتدائی n رقموں تک کا حاصل جمع معلوم کیجئے۔

6۔ اگر سلسلہ $\sqrt{3}+\sqrt{75}+\sqrt{243}+\cdots$ کے n رقموں تک کا حاصل جمع $435\sqrt{3}$ ہو تو n کے حاصل جمع کی قیمت معلوم کیجئے۔

7۔ بتائیے کہ ایک AP کے $(m+n)$ ویں رقم اور $(m-n)$ ویں کا حاصل جمع، اس کے m ویں رقم کے دگنے کے مساوی ہے۔

8۔ ایک آدمی پہلے ماہ میں Rs. 20 دے کر Rs. 3250 کی رقم واپس کرتا ہے اور پھر ادائیگی میں ماہانہ Rs. 15 کا اضافہ کرتا ہے۔ اسے پوری رقم ادا کرنے میں کتنا وقت لگے گا۔

9۔ دوڑ کے ایک مقابلہ میں 20 گیندیں 4 میٹر کے وقفوں کے فاصلہ سے ایک لائن میں رکھی جاتی ہیں۔ پہلی گیند نقطۂ آغاز سے 24 میٹر دور ہوتی ہے۔ حصہ لینے والا (Contestant) کی ضرورت ہوتی ہے، تاکہ وہ ایک وقت میں ایک گیند کو ابتدائی جگہ پر واپس لائے۔ حصہ لینے والا، تمام گیندیں واپس لانے کے لئے کتنی دوڑ لگائے گا؟

10۔ کلچر (پروردہ) میں بیکٹر یا کی تعداد ہر گھنٹہ میں دوگنی ہو جاتی ہے۔ اگر اصل کلچر میں 30 بیکٹر یا موجود تھے، تو دوسرے گھنٹے، چوتھے گھنٹے اور n ویں گھنٹے کے آخر میں کتنے بیکٹر یا موجود ہوں گے؟

11۔ Rs. 500 ایک بینک میں ماہانہ جمع کئے جاتے ہیں، جو سالانہ 10% کی شرح سے سود مرکب ادا کرتا ہے، دس سال بعد اسے کتنی رقم ملے گی؟

12۔ ایک شہر میں ایک وائرل بیماری سے، اس کے باشندوں کی صحت کو شدید نقصان پہنچا، جس سے ان کی عام زندگی پریشان ہو گئی۔ یہ پایا گیا کہ ہر روز وائرس جو بیماری پھیلاتا ہے، وہ ہندسی سلسلہ میں ہے۔ متعدی وائرس کے ذرات کی تعداد ہر دن دگنی ہو جاتی ہے۔ پہلے دن 5 ذرات کے حساب سے بڑھتے ہیں۔ وہ دن معلوم کیجئے جب متعدد وائرس کی تعداد 1,50,000 اکائیاں سے بڑھ جاتی ہے؟

5.5.3 کچھ خاص محدود سلسلے (Some special finite series)

اس حصے میں، ہم بہت سی محدود ارقام کا حاصل جمع معلوم کرنے کے لئے کچھ اہم ضابطے پیش کئے گئے ہیں، جو GP,AP یا کسی مخصوص سلسلے پر عمل پیرا ہیں۔

1۔ ابتدائی n طبعی اعداد کا حاصل جمع $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

(اس کو AP کے طور پر لے کر حاصل جمع کر سکتے ہیں۔)

2۔ ابتدائی n طبعی اعداد کے مربعوں کا حاصل جمع $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(تماثل $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ کو استعمال کیجئے اور اس نتیجہ کو ثابت کرنے کی کوشش کیجئے۔)

3۔ ابتدائی n طبعی اعداد کے مکعبوں کا حاصل جمع $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

(تماثل $k^4-(k-1)^4=(4k^3-6k^2+4k-1)$ کو استعمال کیجئے۔)

نوٹ کریں کہ مذکورہ بالا تینوں نتائج پچھلی جماعتوں میں ثابت کر چکے ہیں۔

11 maths v1 unit 5 UM binomial
Monday, September 05, 2022 8:17:08 PM

5.6 لامحدود تواتریں اور سلسلے (Infinite Sequences and Series)

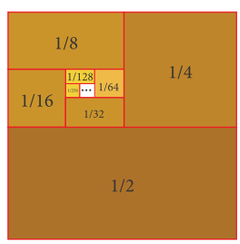
محدود حقیقی اعداد کا جمع حقیقی اعداد کی خصوصیات سے اچھی طرح متعین ہوتی ہیں، لیکن لامحدود سلسلے کو سمجھنے کے لئے ہمیں ارتکاز (مرکوز) Convergence کے تصور پر غور کرنے کی ضرورت ہے۔ ہر رقم مثبت کے ساتھ، لامحدود حاصل جمع $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$ پر غور کیجئے۔

کیا ہم جمع کو عددی قیمت میں تفویض کر سکتے ہیں؟ جب کہ پہلے یہ مشکل یا ناممکن لگتا ہے۔ ہم یقینی طور پر کچھ ایسا ہی کر سکتے ہیں، جہاں ہمارے پاس ایک مقدار ایک مقررہ مقدار کے قریب اور قریب ہو رہی ہو۔

آیئے ہم ایک دلچسپ مسئلہ پر بحث کریں۔ فرض کریں، دو اکائیاں A اور B ہیں۔ فرض کرو رکابی A کے کیک کو ٹھیک دو برابر حصوں میں کاٹ کر ایک حصہ کو رکابی B میں رکھیں اور دوسرے حصہ کو رکابی A میں ہی رہنے دیں۔ آیئے کیک کے بقیہ حصے کو A میں ٹھیک دو برابر حصوں میں کاٹ دیں اور ایک حصہ A میں یوں ہی چھوڑ کر ایک حصہ کو B میں رکھیں۔

اگر ہم ایسا ہی کرتے جائیں تو کیا ہوگا؟ آخر میں A اور B میں کیک کی مقدار کیا ہوگی؟ آیئے مرحلہ بہ مرحلہ فہرست بنائیں۔

مرحلہ	رکابی A	رکابی B
0	1	0
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$
5	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
n	$\frac{1}{2^n}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^n}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$



خاکہ 5.3

خود بخود ہم محسوس کرتے ہیں کہ ''آخر'' میں (finally) کچھ بھی رکابی A میں نہیں رہے گا اور مکمل کیک B میں ہوگا۔ دوسرے الفاظ میں A میں دستیاب کیک 0 ہے اور B میں دستیاب کیک 1 ہے۔ یعنی خود بخود ہم محسوس کرتے ہیں کہ

ایک جگہ 0 (ختم) (چلا جاتا ہے) ہو جاتا ہے اور $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32},\ \cdots$

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16},\ \cdots$$

اس کے معادل دوسری جگہ 1 (آ جاتا ہے) ہو جاتا ہے۔ $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$ is 1.

اس حصے میں، آیئے اس معنی کو سیکھتے ہیں جس میں الفاظ ''آخر'' اور ''جاتا ہے'' استعمال کئے ہیں اور ہمیں بہت سے لامحدود اعداد کے جمع کرنے کو بھی سیکھتے ہیں

خود بخود ہم محسوس کرتے ہیں کہ $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32},\ \cdots$ چلا جاتا ہے '0' ہے۔ اسی طرح ہم محسوس کرتے ہیں کہ تواتر 1 بھی یعنی $1,\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{1000},\ \frac{1}{10000},\ \frac{1}{100000},\ \cdots$ آ جاتا ہے ، 0 پر۔

اگر (a_n) ایک تواتر ہے اور a ایک عدد ہے، تاکہ کسی بھی چھوٹے مثبت عدد کے لئے، ایک مرحلہ ہے، جس کے بعد a_n اور a کے درمیانی فاصلہ اس مثبت عدد سے چھوٹا ہے۔ پھر میں یہ کہہ سکتے ہیں کہ ان a_n جاتا ہے۔ a کو جیسا کہ n جاتا ہے، لامحدود کو تکنیکی لحاظ سے، ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ a_n کا رجحان a کی طرح ہوتا ہے جیسا کہ n کا رجحان لامحدود کی طرح ہوتا ہے، دوسرے الفاظ میں محدود صورت میں a_n بن جاتا ہے۔ a یا a_n کی حد a ہوتی ہے جیسا کہ n لامحدودیت ∞ کی طرف جاتا ہے۔ ہم یہ بھی کہتے ہیں کہ تواتر (a_n) بدل جاتا ہے a میں اگر (a_n) بدل جاتا ہے a میں، تب ہم لکھتے ہیں $\lim_{n\to\infty} a_n = a.$

11 maths v1 unit 5 UM binomial
Monday, September 05, 2022 8:17:09 PM

ایک ہی وقت میں ہم یہ نہیں کہہ سکتے کہ تواتر $1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$

کچھ عدد پر جاتا ہے۔ دوسرے الفاظ میں یہ تواتر کسی حد تک نہیں ملتی تو ایک تواتر کی کوئی حد نہیں ہوسکتی۔ لیکن ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ ایک تواتر ایک سے زیادہ حد تک نہیں مل سکتا ہے، یعنی کہ اگر ایک تواتر ایک حد میں بدل جائے تو یہ منفرد (Unique) ہے۔

5.6.1۔ فیبونا کی تواتر (Fibonoacci Sequene)

فبونا کی تواتر اعداد کا ایک تواتر ہے، جہاں پہلے دو ارقام کے علاوہ کوئی عدد اس سے پہلے دو اعداد کو ملا کر پایا جاتا ہے۔

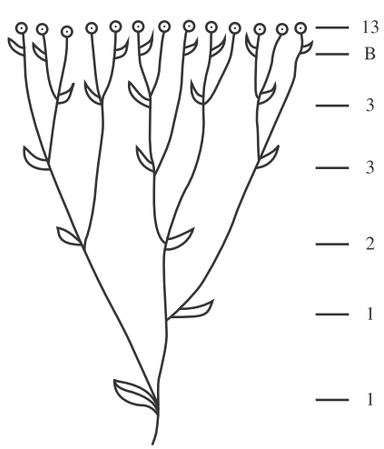
'1 1' کے ساتھ شروع ہونے والا تواتر $1, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 13, 21, 34$ اور اس طرح آگے بڑھتا ہے۔ ایک اصول کے طور پر لکھا گیا اظہار $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, n \geq 3$ کے ساتھ $x_1 = 1, x_2 = 1$ ہے۔

Fibonacci کے نام سے منسوب اور بھی Leonardo of pisa یا Lenonardo Pisanio کے نام سے بھی جانا جاتا ہے۔ فیبونا کی اعداد سب سے پہلے 1202 میں کتاب Liber abaci میں متعارف کروائے گئے تھے۔ Pisan تاجر کا بیٹا Fabonacci نے بڑے پیمانے پر سفر کیا اور مہنگے داموں کی تجارت کی۔ بیوپاروں کے لئے ریاضی نا قابل یقین حد تک اہم تھی اور اعداد کا شوق اسی کی جوانی میں پیدا ہوا تھا۔

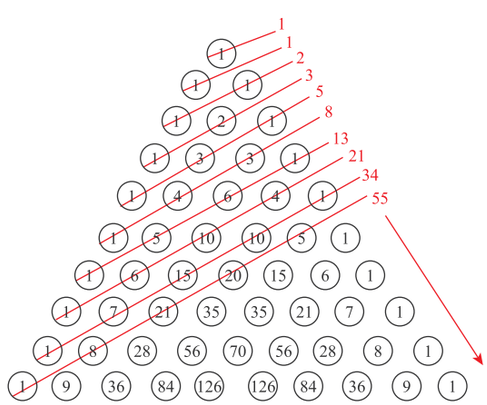
اعداد کے بارے میں کہا جاتا ہے کہ اس کی ابتداء ہندی۔عربی۔ریاضی کے نظام میں ہوئی ہے۔ جیسے فیبونا کی نے شمالی آفریقہ میں پروان چڑھتے ہوئے تعلیم حاصل کی Liber abaci کی اشاعت سے پہلے لاطینی بولنے والی دنیا کو ابھی تک اعشاریہ عدد کا نظام سے متعارف کرانا باقی تھا۔ اس نے جیومٹری، تجارتی ریاضیات اور غیر ناطق اعداد کے بارے میں بہت سی کتابیں لکھیں۔ اس لئے صفر کے تصور کی ترقی میں بھی مدد کی۔

n	=	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	$\cdots$
x_n	=	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	$\cdots$

مثال کے طور پر 8ویں رقم، 6ویں رقم اور 7ویں رقم کا حاصل جمع ہے۔ اس طرح $x_8 = 8 + 13 = 21.$



شکل 5.4



شکل 5.5

فیبونا کی تواتر میں ایک دلچسپ نمونہ دکھائی دیتا ہے۔

مشاہدہ کریں کہ (i) ہر تیسرا عدد 3ویں رقم کا ضعف ہے۔ $(t_3=2)$

(ii) ہر چوتھا عدد 4ویں رقم کا ضعف ہے۔ $(t_4=3)$

(iii) ہر پانچواں عدد 5ویں رقم کا ضعف ہے۔ $(t_5= 5)$

(iv) تو ہر n ویں عدد، n ویں رقم کا ضعف ہے۔

11 maths v1 unit 5 UM binomial
Monday, September 05, 2022 8:17:09 PM

لامحدود سلسلے (Infinite series)

اگر (a_n) ایک لامحدود اعداد کا تواتر ہے تب حسب ضابطہ جملہ $a_1+a_2+\ldots$ تو لامحدود سلسلہ کہتے ہیں اور اس کو اس طرح ظاہر کیا جاتا ہے۔ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

اس حصے کے ابتدار میں ہم لامحدود سلسلہ کو دیکھ چکے ہیں۔ $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$

اور خود بخود محسوس کیا کہ ''اس کا حاصل جمع'' 1 ہے (کیک کے مسئلہ میں) دراصل کیک کے مسئلہ میں رکابی B میں کیک کی مرحلہ وار دستیابی درج ذیل میں ترتیب دی گئی ہے۔

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16} \cdots$$

اس تواتر کی n ویں رقم ہے۔

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^n}$$

جو مساوی ہے $\frac{2^n-1}{2^n}$ کے۔ اگر اس مجموعہ کو S_n سے تعبیر کی جائے، تب $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$ یہ ہمیں محسوس کرنے کی ایک وجہ یہ ہے کہ حاصل جمع $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$ مساوی ہے '1' کے۔

اس طرح کی حوصلہ افزائی سے ہم لامحدود بہت سے اعداد کی جمع کی وضاحت کر سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ (a_n) ایک حقیقی اعداد کا تواتر ہے اور $s_n = a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$ ہے۔ اگر تواتر (a_n) ایک حد تک بدل جاتا ہے تو یہ کہنا معنی خیز ہے کہ تواتر (a_n) ''خلاصہ'' ہے۔ اور جمع " S " ہے۔ اس معاملے میں ہم لکھتے ہیں $a_1+a_2+a_3+\cdots=s$

یہ کہا جا سکتا ہے کہ سلسلہ مرکوز ہو کر s میں بدل جاتا ہے۔

تعریف 5.6

فرض کرو کہ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ حقیقی تعداد کا ایک سلسلہ ہے اور فرض کرو

$$s_n = a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n, n \in \mathbb{N}$$

تواتر (s_n) کو $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ کا جزوی حاصل جمع کا سلسلہ (partial sum sequence) کہا جاتا ہے۔ اگر (s_n) مرکوز ہوتا ہے اور اگر $\lim_{n\to\infty} s_n = s,$ ہو جاتا ہے تو سلسلہ کو مرکوز سلسلہ (Convergent series) کہا جاتا ہے۔ s کو سلسلہ کا حاصل جمع (sum) کہا جاتا ہے۔

ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں۔ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ آیئے چند مثالیں دیکھتے ہیں۔ سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ مرکوز نہیں ہوتا۔

کیونکہ، جزوی حاصل جمع کا سلسلہ $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$ مرکوز نہیں ہوتا ہے۔

ہم محدود سلسلے کے لئے متعین الجبروی قوانین کو بغیر سوچے سمجھے لامحدود سلسلوں پر لاگو نہیں کر سکتے ہیں۔

غور کریں $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} = 1-1+1-1+\cdots$ ۔ اگر $S = 1-1+1-1+\ldots$ ہو تو کوئی اس پر بحث کر سکتا ہے کہ $S=0$ (یا) 1 (یا) $\frac{1}{2}$ کے مطابق بالترتیب $S = (1-1)+(1-1)+\cdots,\ S = 1+(-1+1)+(-1+1)+\cdots$

(یا) بالترتیب $1-S = 1-(+1-1+1-1+\cdots = S)$

11 maths v1 unit 5 UM binomial
Monday, September 05, 2022 8:17:10 PM

سلسلہ $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ مرکوز (Converge) ہوتی ہے۔اگر $x = \frac{1}{2}$ اور یہ غیر مرکوز ہوتا ہے اگر $x=2$ ہو۔ اس سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ سلسلے x کی بعض قیمتوں کے لئے مرکوز(converge) ہوتے ہیں اور x کی بعض قیمتوں کے لئے مرکوز نہیں ہوتے۔ مسئلہ جس کے لئے یہ سلسلے قیمتوں کے لئے اس طرح کے سلسلے ملتے ہیں۔اسی کتاب کے دائرہ کار سے باہر ہے۔تاہم باقی باب میں کچھ سلسلے کی مناسب قیمتوں کے ساتھ x کی فہرست کریں گے، جس کے لئے سلسلے مرکوز ہوتی ہے اور سلسلے کا حاصل جمع جب بھی مرکوز ہوتا ہے۔

5.6.2۔ لامحدود ہندسی سلسلہ (Infinite Goemetric Series)

سلسلہ Σx^n کو ہندسی تواتر یا ہندسی سلسلہ کہتے ہیں۔ آیئے سلسلہ $\sum_{n=0}^{\infty} x^n, x \neq 1$ شروع کرتے ہیں۔ اگر $s_n = x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ ہوتو $s_n = \frac{1-x^n}{1-x}$ ہے۔ جیسے جیسے x^n صفر پر جاتا ہے۔اگر $|x| < 1$ تو ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ s_n، $\frac{1}{1-x}$ کی طرف جاتا ہے، اگر $|x| < 1$ ہو۔

- تمام حقیقی اعداد x کے ساتھ $|x| < 1$ کے لئے $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ مرکوز ہوتا ہے اور حاصل جمع 1/1-x ہے۔یعنی تمام حقیقی اعداد x کے لئے جو $|x| < 1$ کی شرط کو پورا کرتے ہیں۔

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

- تمام حقیقی اعداد x کے ساتھ $|x| < 1$ کے لئے $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ مرکوز ہوتا ہے اور حاصل جمع 1/1+x ہے۔یعنی تمام حقیقی اعداد x کے لئے جو $|x| < 1$ کی شرط کو پورا کرتے ہیں۔

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

- تمام حقیقی اعداد x کے ساتھ $|x| < ½$ کے لئے $\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$ مرکوز ہوتا ہے اور حاصل جمع 1/1-x ہے۔یعنی تمام حقیقی اعداد x کے لئے جو $|x| < ½$ کی شرط کو پورا کرتے ہیں۔

$$\frac{1}{1-2x} = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \cdots$$

- تمام حقیقی اعداد x کے لئے $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ مرکوز ہوتا ہے اور حاصل جمع e^x ہے۔ یعنی

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

تمام حقیقی اعداد x کے لئے

- صرف $x=0$ کے لئے $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x$ مرکوز ہوتا ہے۔

آیئے کچھ خاص سلسلوں پر بات کریں۔ان سلسلوں کے مرکوز ہونے کو فرض کرتے ہوئے، آیئے کچھ مسائل حل کریں۔

5.6.3۔ لامحدود حسابیہ-ہندسی سلسلہ (Infinite Arithmetico-Geometric Series)

- حسابیہ ہندسی سلسلہ $\Sigma((a + (n-1)d))r^{n-1}$ کا حاصل جمع اس طرح دیا گیا ہے۔

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a}{1-r} + \frac{dr}{(1-r)^2}$$

$-1 < r < 1$ کے لئے

11 maths v1 unit 5 UM binomial
Monday, September 05, 2022 8:17:10 PM

مثال 5.19 حاصل جمع معلوم کیجئے۔ $1+\frac{4}{5}+\frac{7}{25}+\frac{10}{125}+\cdots.$

حل: یہاں a=1 ، d=3 اور $r = 1/5$ ہے۔

$$\begin{aligned} S_\infty &= \frac{a}{1-r}+\frac{dr}{(1-r)^2} \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{5}}+\frac{3\times\frac{1}{5}}{(1-\frac{1}{5})^2} \\ &= \frac{5}{4}+\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{25}{16}\right) \\ &= \frac{35}{16} \end{aligned}$$

5.6.4۔ لامحدود سلسلوں کے لئے دور بینی حاصل جمع (Telescopic summation for Infinite series)

ہم نے حصہ 5.5.2 میں دور بین کے حاصل جمع کی تکنیک کا استعمال کرتے ہوئے ایک محدود سلسلے کی ارقام کے بارے میں تبادلہ خیال کیا تھا۔ یہی بات لامحدود سلسلوں پر بھی لاگو ہوتی ہے۔

مثال 5.20 معلوم کیجئے۔ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+5n+6}$.

حل: فرض کرو کہ دئے گئے سلسلہ کی n ویں a^n ہے۔ پھر $a_n = \frac{1}{n^2+5n+6}$ ہوگا۔ جزوی کسور کو استعمال کر کے ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$a_n = \frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}.$$

فرض کرو کہ دئے گئے سلسلہ کی ابتدائی n رقموں کا حاصل جمع دور بینی حاصل جمع s_n ہے۔ پھر

$$s_n = a_1+a_2+\cdots+a_n = \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right) = \frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}.$$

لیکن جیسا کہ n لامحدود کی طرف جاتا ہے۔ $\frac{1}{n+3}$ صفر کی طرف جاتا ہے اور لہذا $\frac{1}{3}$ کی طرف $\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}$ جاتا ہے۔

دوسرے الفاظ میں $\frac{1}{3}$ کی طرف s_n جاتا ہے۔ لہٰذا $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+5n+6} = \frac{1}{3}$

5.6.5 دورکنی سلسلے (Binomial series)

ہندسی سلسلوں کی بحث میں ہم نے دیکھا ہے کہ

$$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-\cdots, \quad \frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots \quad \text{اور} \quad \frac{1}{1-2x} = 1+2x+4x^2+\cdots$$

x کی کچھ مناسب قیمتوں کے لئے ہے۔ لیکن جملوں $\frac{1}{1+x}, \frac{1}{1-x}$ اور $\frac{1}{1-2x}$ کو اس طرح بھی لکھا جا سکتا ہے

$(1+x)^{-1}$، $(1-x)^{-1}$ اور $(1-2x)^{-1}$ ۔ یہ ہمیں منفی قوت نمائیں رکھنے کا ممکن تجویز کرتا ہے۔ یعنی $(1+x)$ اور $(1-x)$ منفی قوتیں $(1-x), (1+x)$ وغیرہ کے لئے۔ یہ ممکن ہے۔ ہمارے پاس کوئی قوت، مثبت یا منفی، سالم یا ناطق، یہاں تک کہ ہمارے پاس $(1+x)$ کے لئے قوت

11 maths v1 unit 5 UM binomial
Monday, September 05, 2022 8:17:10 PM

غیر ناطق بھی ہوسکتی ہے۔ مثبت سالم قوتوں کے لئے ہم پہلے ہی دورکنی مسئلہ کو ثابت کر چکے ہیں (مسئلہ 5.1) ۔ اب ہم ناطق قوت کے لئے دورکنی مسئلہ بیان کرتے ہیں۔

ناطق قوت کے لئے دورکنی مسئلہ (Binomial theorem for Rational Exponent)

مسئلہ 5.4: (ناطق قوت نما کے لئے دورکنی مسئلہ) کسی بھی ناطق عدد n کے لئے

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

تمام حقیقی اعداد x کے لئے $|x| < 1$ کی شرط کو پورا کرتا ہے۔

چونکہ ثبوت میں اعلیٰ ریاضیاتی تصورات شامل ہیں۔ آیئے بغیر ثبوت کے نظریئے کو فرض کریں اور کچھ خاص معاملات دیکھیں اور کچھ مسائل حل کریں۔ مسئلہ میں

(1) x کو $-x$ سے بدلنے پر ہمیں ملتا ہے۔

$$(1-x)^n = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots \qquad (|x| < 1)$$

(2) n کو $-n$ سے بدلنے پر ہمیں ملتا ہے۔

$$(1+x)^{-n} = 1 + (-n)x + \frac{(-n)(-n-1)}{2!}x^2 + \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

لہذا

$$(1+x)^{-n} = 1 - nx + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3 + \cdots \qquad (|x| < 1)$$

(3) x اور n کو $-x$ اور $-n$ سے بدلنے پر ہمیں ملتا ہے۔

$$(1-x)^{-n} = 1 + nx + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3 + \cdots \qquad (|x| < 1)$$

اگرچہ ہم نے واضح طور پر ذکر کیا ہے کہ مسئلہ میں n ایک ناطق عدد ہے۔ ہم میں سے کچھ عام ناطق عدد کی جگہ n استعمال کرنے میں ہچکچا سکتے ہیں۔ لہذا ہم ناطق عدد کی نمائندگی $\frac{p}{q}(q \neq 0)$ کا استعمال کرتے ہوئے مسئلہ دیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
(1+x)^{\frac{p}{q}} &= 1 + \frac{p}{q}x + \frac{\frac{p}{q}(\frac{p}{q}-1)}{2!}x^2 + \frac{\frac{p}{q}(\frac{p}{q}-1)(\frac{p}{q}-2)}{3!}x^3 + \cdots \\
&= 1 + \frac{p}{q}x + \frac{p(p-q)}{q^2 2!}x^2 + \frac{p(p-q)(p-2q)}{q^3 3!}x^3 + \cdots \qquad (|x| < 1) \\
(1-x)^{\frac{p}{q}} &= 1 - \frac{p}{q}x + \frac{p(p-q)}{q^2 2!}x^2 - \frac{p(p-q)(p-2q)}{q^3 3!}x^3 + \cdots \qquad (|x| < 1)
\end{aligned}$$

اگرچہ مسئلہ $(1+x)^n$ کو محسوب کرنے کے لئے ایک ضابطہ دیتا ہے۔ حساب کرنے کا، عددی مسائل کو جلدی حل کرنے کے لئے ہمیں یاد رکھنا چاہئے اور کچھ توسیع براہ راست لکھنے کے قابل ہونا چاہئے۔ اس طرح کی ہر توسیع میں ضریب کا مشاہدہ مسائل کے حل میں بہت مددگار ثابت ہوگا۔ آیئے ان میں سے کچھ کی فہرست بنائیں (خود کوشش کریں۔)

1. $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$
2. $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$
3. $(1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 + \cdots$
4. $(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - 6x^5 + \cdots$

تمام پھیلاؤ صرف اس وقت درست ہیں جب $|x| < 1$ ہے۔

11 maths v1 unit 5 UM binomial
Monday, September 05, 2022 8:17:11 PM

مثال 5.21 $|x| < 1$ کے لئے $(1+x)^{\frac{2}{3}}$ رقموں تک پھیلایئے۔

حل : یہاں $n = \frac{2}{3}$

$$\begin{aligned}
\frac{n(n-1)}{2!} &= \frac{\frac{2}{3}(\frac{2}{3}-1)}{2!} \\
&= \frac{\frac{2}{3}(\frac{-1}{3})}{2} \\
&= \frac{-1}{9} \\
\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} &= \frac{\frac{2}{3}(\frac{2}{3}-1)(\frac{2}{3}-2)}{3!} \\
&= \frac{\frac{2}{3}(\frac{-1}{3})(\frac{-4}{3})}{6} \\
&= \frac{4}{81}
\end{aligned}$$

لہٰذا

$$(1+x)^{\frac{2}{3}} = 1 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{81}x^3 + \cdots$$

مثال 5.22 $\frac{1}{(1+3x)^2}$ کو x کی قوتوں میں پھیلایئے۔ x پر ایسی شرط معلوم کریں جس کے لئے یہ پھیلاؤ درست ہو۔

حل: اگر ہم $3x = y$ لیتے ہیں، پھر

$$\frac{1}{(1+3x)^2} = \frac{1}{(1+y)^2}.$$

اب $\frac{1}{(1+y)^2}$ کو دوركنی مسئلہ کو استعمال کر کے y کی قوتوں میں پھیلا سکتے ہیں۔ یہ پھیلاؤ درست y کی صرف ان قیمتوں کے لئے، جن کے لئے $|y| < 1$ کی شرط کو پورا کرتا ہے۔

y کو $3x$ سے تبدیل کرنے پر ہمیں $\frac{1}{(1+3x)^2}$ کا پھیلاؤ حاصل ہوتا ہے۔ یہ پھیلاؤ درست ہے صرف x کی ان قیمتوں کے لئے، جن کے لئے $|3x| < 1$ کی شرط کو پورا کرتا ہے۔ یعنی یہ پھیلاؤ درست ہے صرف x کی ان قیمتوں کے لئے، جو $|x| < \frac{1}{3}$ کی شرط کو پورا کرتا ہے۔

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1+3x)^2} &= (1+3x)^{-2} \\
&= 1 - 2(3x) + \frac{2(2+1)}{2!}(3x)^2 - \frac{2(2+1)(2+2)}{3!}(3x)^3 \\
&\quad + \frac{2(2+1)(2+2)(2+3)}{4!}(3x)^4 - \cdots
\end{aligned}$$

لہٰذا

$$\frac{1}{(1+3x)^2} = 1 - 6x + 27x^2 - 108x^3 + 405x^4 - \cdots, |x| < \frac{1}{3}.$$

100 95 75 25 5 0

11 maths v1 unit 5 UM binomial
Monday, September 05, 2022 8:17:11 PM

مثال 5.23 $\frac{1}{(3+2x)^2}$ کو x کی قوتوں میں پھیلایئے۔ x پر ایسی شرط معلوم کریں جن کے لئے یہ پھیلاؤ درست ہو۔

حل: (واضح طور پر ہمیں $(1+x)^{-2}$ کے پھیلاؤ کو استعمال کرنا ہوگا۔ لہذا ہمیں $3\left(1+\frac{2x}{3}\right)$ (3+2x) کو کی طرح لکھنا ہے اور آگے بڑھنا ہے)۔

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(3+2x)^2} &= \frac{1}{3^2\left(1+\frac{2x}{3}\right)^2} \\
&= \frac{1}{9}\left(1+\frac{2x}{3}\right)^{-2} \\
&= \frac{1}{9}(1+y)^{-2} \qquad \left(\text{where } \frac{2x}{3}=y\right) \\
&= \frac{1}{9}(1-2y+3y^2-4y^3+5y^4-\cdots), if |y|<1 \\
&= \frac{1}{9}\left(1-2\left(\frac{2x}{3}\right)+3\left(\frac{2x}{3}\right)^2-4\left(\frac{2x}{3}\right)^3+5\left(\frac{2x}{3}\right)^4-\cdots\right), |\frac{2x}{3}|<1 \\
&= \frac{1}{9}\left(1-\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}x^2-\frac{32}{27}x^3+\frac{80}{81}x^4-\cdots\right) \\
\frac{1}{(3+2x)^2} &= \frac{1}{9}-\frac{4}{27}x+\frac{4}{27}x^2-\frac{32}{243}x^3+\frac{80}{729}x^4-\cdots, |x|<\frac{3}{2} \qquad \text{لہذا}
\end{aligned}$$

یہ پھیلاؤ درست ہے اگر $|y|<1$ ہے۔ لہذا یہ پھیلاؤ درست ہے اگر $|x|<\frac{3}{2}$ ہے۔

دو رکنی مسئلہ استعمال کرتے ہوئے ہے کسی بھی مثبت عدد کے لئے ہم جذر المربع، جذر المکعب معلوم کر سکتے ہیں۔ آیئے اس طرح کا ایک حساب دیکھیں گے۔

مثال 5.24 $\sqrt[3]{65}$. معلوم کیجئے۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ $|x|<1$ کے لئے

$$(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\ldots$$

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{65} &= 65^{\frac{1}{3}} \\
&= (64+1)^{\frac{1}{3}} \\
&= 64^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{3}} \\
&= 4\left(1+\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

11 maths v1 unit 5 UM binomial
Monday, September 05, 2022 8:17:11 PM

$$
\begin{aligned}
&= 4\left(1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{64}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\times\left(\frac{1}{64}\right)^2+\cdots\right)\\
&= 4+\frac{1}{48}-4\times\frac{1}{9}\times\frac{1}{64}\times\frac{1}{64}+\cdots\\
&= 4+\frac{1}{48}-\frac{1}{9216}+\cdots \qquad \left(\text{چونکہ } \frac{1}{9216}+\cdots \text{ ، یہ بہت چھوٹا ہے}\right)\\
&\approx 4+0.02\\
\sqrt[3]{65} &= 4.02 \qquad \text{تقریباً}
\end{aligned}
$$

مثال 5.25 ثابت کیجئے کہ جب x بڑا ہے تو $\sqrt[3]{x^3+7}-\sqrt[3]{x^3+4}$ تقریباً $\frac{1}{x^2}$ کے مساوی ہے۔

حل:

$$
\begin{aligned}
\sqrt[3]{x^3+7} &= (x^3+7)^{\frac{1}{3}}\\
&= \left[x^3\left(1+\frac{7}{x^3}\right)\right]^{\frac{1}{3}}, \qquad \left(\text{چونکہ } x \text{ بڑا ہے } \left|\frac{7}{x^3}\right|<1\right)\\
&= x\left(1+\frac{7}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}\\
&= x\left(1+\frac{1}{3}\times\frac{7}{x^3}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(\frac{7}{x^3}\right)^2+\cdots\right)\\
&= x\left(1+\frac{7}{3}\times\frac{1}{x^3}-\frac{49}{9}\times\frac{1}{x^6}+\cdots\right)\\
&= x+\frac{7}{3}\times\frac{1}{x^2}-\frac{49}{9}\times\frac{1}{x^5}+\cdots\\
\sqrt[3]{x^3+4} &= (x^3+4)^{\frac{1}{3}}\\
&= \left[x^3\left(1+\frac{4}{x^3}\right)\right]^{\frac{1}{3}}\\
&= x\left(1+\frac{4}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} \qquad \left(\left|\frac{4}{x^3}\right|<1\right)\\
&= x\left(1+\frac{1}{3}\times\frac{4}{x^3}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(\frac{4}{x^3}\right)^2+\cdots\right)\\
&= x+\frac{4}{3}\times\frac{1}{x^2}-\frac{16}{9}\times\frac{1}{x^5}+\cdots
\end{aligned}
$$

چونکہ x بڑا ہے $\frac{1}{x}$ بہت چھوٹا ہے اور لہذا $\frac{1}{x}$ کی اعلیٰ قوتیں نہ ہونے کے برابر (negligible) ہیں۔اس طرح

چنانچہ $\sqrt[3]{x^3+7}=x+\frac{7}{3}\times\frac{1}{x^2}$ اور $\sqrt[3]{x^3+4}=x+\frac{4}{3}\times\frac{1}{x^2}$.

$$
\sqrt[3]{x^3+7}-\sqrt[3]{x^3+4} = \left(x+\frac{7}{3}\times\frac{1}{x^2}\right)-\left(x+\frac{4}{3}\times\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{x^2}
$$

11 maths v1 unit 5 UM binomial
Monday, September 05, 2022 8:17:11 PM

تمام حقیقی اعداد n کے لئے دورکنی مسئلہ صحیح ہے۔ مثال کے طور پر جب $n = \sqrt{2}$ ہمارے پاس ہے۔

$$(1+x)^{\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{2!}x^2 + \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-2)}{3!}x^3 + \cdots, \quad |x| < 1.$$

5.6.6۔ قوت نمائی سلسلے: (Exponential Series)

سلسلے $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ کو قوت نمائی سلسلے کہتے ہیں۔ یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ سلسلہ x کی تمام قیمتوں کو مرکوز (converges) کر لیتی ہے۔

کسی بھی حقیقی عدد n کے لئے، $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, x جس میں

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots.$$

ہمارے پاس ہے۔

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \tag{5.1}$$

x کی تمام قیمتوں کے لئے۔ x کی جگہ پر (5.1) میں $-x$ لینے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots. \tag{5.2}$$

خاص طور پر

$$\frac{1}{e} = e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots.$$

(5.1) اور (5.2) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \qquad \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

خاص طور پر ہمارے پاس ہے

$$\frac{e + e^{-1}}{2} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + \cdots \quad \text{اور} \quad \frac{e - e^{-1}}{2} = \frac{1}{1!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \cdots$$

(5.1) میں x کی جگہ پر $2x$ لینے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$e^{2x} = 1 + \frac{2x}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \cdots.$$

مختصر کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ

$$e^{2x} = 1 + \frac{2x}{1!} + \frac{4x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \frac{16x^4}{4!} + \cdots.$$

11 maths v1 unit 5 UM binomial
Monday, September 05, 2022 8:17:12 PM

5.6.7۔ لوگارتمی سلسلے (Logarithmic series)

سلسلے $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ کو لوگارتمی سلسلہ کہتے ہیں۔ یہ سلسلہ x کی تمام قیمتوں کے لئے مرکوز (Converge) کر لیتی ہے جو $|x|<1$ کی شرط کو پورا کرتا ہے۔ $x=1$ کے لئے بھی یہ سلسلہ مرکوز ہوتا ہے۔

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$

x کی تمام قیمتوں کے لئے، سلسلہ $\log(1+x)$ کا حاصل جمع، تمام شرائط کو پورا کرتا ہے۔ لہٰذا

$$\log(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots$$

x کی تمام قیمتوں کے لئے $|x|<1$ کی شرط کو پورا کرتا ہے۔

x کی جگہ پر $-x$ لینے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

x کی تمام قیمتوں کے لئے $|x|<1$ کی شرط کو پورا کرتا ہے۔

اب $\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\log(1+x)-\log(1-x)$ اس کو استعمال کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right]$$

فرض کریں کہ ہم ایک سلسلہ میں $\log(1+2x)$ لکھنا چاہتے ہیں تو، پھر ہم $2x$ کو y سے بدل سکتے ہیں اور پھیلاؤ کو استعمال کر سکتے ہیں۔

$$\log(1+y)=y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}+\cdots$$

y کی تمام قیمتوں کے لئے $|x|<1$ کی شرط کو پورا کرتا ہے۔ لیکن اگر $|y|<1$ ہے، تب $|2x|<1$ اور لہٰذا $|x|<\frac{1}{2}$۔

$$\log(1+2x)=2x-\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^3}{3}-\frac{(2x)^4}{4}+\cdots.$$

لہٰذا x کی تمام قیمتوں کے لئے $|x|<\frac{1}{2}$ کی شرط کو پورا کرتی ہے، $\log(1+2x)=2x-\frac{4x^2}{2}+\frac{8x^3}{3}-\frac{16x^4}{4}+\cdots$ ہے۔

مشق 5.4

1۔ درج ذیل کو x کی بڑھتی ہوئی قوتوں میں پھیلایئے اور x کے لئے ایسی شرط معلوم کریں، جس کے لئے دورکنی مسئلہ درست ہے۔

(i) $\frac{1}{5+x}$ (ii) $\frac{2}{(3+4x)^2}$ (iii) $(5+x^2)^{\frac{2}{3}}$ (iv) $(x+2)^{-\frac{2}{3}}$

2۔ $\sqrt[3]{1001}$ کی تقریبی قیمت (approximately) معلوم کیجئے۔ (دو اعشاریہ مقام تک)

3۔ ثابت کیجئے کہ $\sqrt[3]{x^3+6}-\sqrt[3]{x^3+3}$ تقریباً $\frac{1}{x^2}$ کے مساوی ہے۔ جب x بہت بڑا ہو۔

4۔ ثابت کیجئے کہ $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ تقریباً $1-x+\frac{x^2}{2}$ کے مساوی ہے۔ جب x بہت چھوٹا ہو۔

5۔ قوت نمائی سلسلوں کی ابتدائی 6 رقموں کو لکھئے۔ (i) e^{5x} (ii) e^{-2x} (iii) $e^{\frac{1}{2}x}$.

6۔ لوگارتمی سلسلوں کے ابتدائی 4 رقموں کو لکھئے۔

(i) $\log(1+4x)$ (ii) $\log(1-2x)$ (iii) $\log\left(\frac{1+3x}{1-3x}\right)$ (iv) $\log\left(\frac{1-2x}{1+2x}\right)$

ان وقفوں کو معلوم کیجئے، جن پر پھیلاؤ درست ہے۔

7۔ اگر $y=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots$. ہو تو بتایئے کہ $x=y-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}-\frac{y^4}{4!}+\cdots$. ہے۔

8۔ p یا q کے مقابلے میں اگر $p-q$ چھوٹا ہے، تو بتایئے کہ $\sqrt[n]{\frac{p}{q}}\simeq\frac{(n+1)p+(n-1)q}{(n-1)p+(n+1)q}$۔ لہٰذا $\sqrt[8]{\frac{15}{16}}$. معلوم کیجئے۔

9۔ $\frac{3-4x+x^2}{e^{2x}}$ کے پھیلاؤ میں x^4 کا ضریب معلوم کیجئے۔

10۔ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\left(\frac{1}{9^{n-1}}+\frac{1}{9^{2n-1}}\right)$. کی قیمت معلوم کیجئے۔

11 maths v1 unit 5 UM binomial
Monday, September 05, 2022 8:17:12 PM

مشق 5.5

صحیح یا مناسب جواب منتخب کریں۔

1۔ $2+4+6+\cdots+2n$ کی قیمت یہ ہے۔

(1) $\frac{n(n-1)}{2}$ (2) $\frac{n(n+1)}{2}$ (3) $\frac{2n(2n+1)}{2}$ (4) $n(n+1)$

2۔ $(2+2x)^{10}$ میں x^6 کا ضریب یہ ہے۔

(1) ${}^{10}\mathrm{C}_6$ (2) 2^6 (3) ${}^{10}\mathrm{C}_6\,2^6$ (4) ${}^{10}\mathrm{C}_6\,2^{10}$.

3۔ $(2x+3y)^{20}$ کے پھیلاؤ میں x^8y^{12} کا ضریب یہ ہے۔

(1) 0 (2) $2^8 3^{12}$ (3) $2^8 3^{12} + 2^{12} 3^8$ (4) ${}^{20}\mathrm{C}_8\,2^8 3^{12}$.

4۔ اگر تمام ممکنہ r کے لئے ${}^n\mathrm{C}_{10} > {}^n\mathrm{C}_r$ ہے تو n کی قیمت ہے۔

(1) 10 (2) 21 (3) 19 (4) 20.

5۔ اگر دو اعداد کا حسابی اوسط a اور ہندسی اوسط g ہے تو

(1) $a \le g$ (2) $a \ge g$ (3) $a = g$ (4) $a > g$.

6۔ اگر $(1+x^2)^2\,(1+x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + x^{n+4}$ اور اگر a_0, a_1, a_2 حسابی سلسلہ میں ہیں تو پھر n یہ ہے

(1) 1 (2) 5 (3) 2 (4) 4.

7۔ اگر a, 8 ,b حسابی سلسلہ (AP) میں ہیں، a , 4, b ہندسی سلسلہ (GP) میں ہیں اور a, x, b ہم آہنگی سلسلے (HP) میں ہیں، تو پھر n یہ ہے۔

(1) 2 (2) 1 (3) 4 (4) 16.

8۔ $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}, \cdots$ سلسلہ ایک سلسلہ بناتا ہے۔

(1) AP (2) GP (3) HP (4) AGP.

9۔ دو مثبت اعداد، جن کا AM اور GM بالترتیب 16,8 ہیں، ان کا HM یہ ہے۔

(1) 10 (2) 6 (3) 5 (4) 4.

10۔ اگر s_n کسی AP کی n ارقام کا حاصل جمع کو ظاہر کرتا ہے، جس کا مشترک فرق 4 ہے، تو $S_n - 2S_{n-1} + S_{n-2}$ کی قیمت یہ ہے۔
is

(1) d (2) 2d (3) 4d (4) d^2.

11۔ جب 38^{15} کو 13 سے تقسیم کیا جائے تو باقی یہ ہے۔

(1) 12 (2) 1 (3) 11 (4) 5.

12۔ سلسلہ $1, 2, 4, 7, 11, \cdots$ کی n ویں رقم ہے۔

(1) n^3+3n^2+2n (2) n^3-3n^2+3n (3) $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ (4) $\frac{n^2-n+2}{2}$.

13۔ سلسلہ $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \cdots$ کی n رقموں تک کا حاصل جمع یہ ہے۔

(1) $\sqrt{2n+1}$ (2) $\frac{\sqrt{2n+1}}{2}$ (3) $\sqrt{2n+1}-1$ (4) $\frac{\sqrt{2n+1}-1}{2}$.

14۔ سلسلہ $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \cdots$ کی n ویں رقم ہے۔

(1) $2^n - n - 1$ (2) $1 - 2^{-n}$ (3) $2^{-n} + n - 1$ (4) 2^{n-1}.

15۔ سلسلہ $\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{32} + \cdots$ n رقموں تک کا حاصل جمع یہ ہے۔

(1) $\frac{n(n+1)}{2}$ (2) $2n(n+1)$ (3) $\frac{n(n+1)}{\sqrt{2}}$ (4) 1.

11 maths v1 unit 5 UM binomial
Monday, September 05, 2022 8:17:12 PM

16۔ سلسلہ $\frac{1}{2}+\frac{7}{4}+\frac{13}{8}+\frac{19}{16}+\cdots$ کی قیمت ہے۔

(1) 14 (2) 7 (3) 4 (4) 6.

17۔ ایک لامحدود GP کا حاصل جمع 18 ہے۔ اگر پہلی رقم 6 ہے تو مشترک نسبت یہ ہے۔

(1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{2}{3}$ (3) $\frac{1}{6}$ (4) $\frac{3}{4}$.

18۔ سلسلہ e^{-2x} میں x^5 کا ضریب یہ ہے۔

(1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{3}{2}$ (3) $\frac{-4}{15}$ (4) $\frac{4}{15}$.

19۔ $\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{6!}+\cdots$ کی قیمت یہ ہے۔

(1) $\frac{e^2+1}{2e}$ (2) $\frac{(e+1)^2}{2e}$ (3) $\frac{(e-1)^2}{2e}$ (4) $\frac{e^2-1}{2e}$.

20۔ $1-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2-\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots$ کی قیمت یہ ہے۔

(1) $\log\left(\frac{5}{3}\right)$ (2) $\frac{3}{2}\log\left(\frac{5}{3}\right)$ (3) $\frac{5}{3}\log\left(\frac{5}{3}\right)$ (4) $\frac{2}{3}\log\left(\frac{2}{3}\right)$.

خلاصہ (Summary)

اس باب میں ہم نے یہ معلومات حاصل کیں۔

- کسی بھی $n \in \mathbb{N}$, کے لئے دورکنی مسئلہ
- $(a+b)^n = {}^n\mathrm{C}_0\, a^n b^0 + {}^n\mathrm{C}_1\, a^{n-1}b^1 + \cdots + {}^n\mathrm{C}_n\, a^0 b^n.$
- ${}^n\mathrm{C}_0 + {}^n\mathrm{C}_1 + \cdots + {}^n\mathrm{C}_n = 2^n.$
- ${}^n\mathrm{C}_1 + {}^n\mathrm{C}_3 + + {}^n\mathrm{C}_5 \cdots + = {}^n\mathrm{C}_0 + {}^n\mathrm{C}_2 + + {}^n\mathrm{C}_4 \cdots + = 2^{n-1}$
- $AM \geq GM \geq HM$
- ایک AP کی n ویں رقم اس طرح دی گئی ہے۔ $T_n = a+(n-1)d$
- GP کی n ویں رقم اس طرح دی گئی ہے۔ $T_n = ar^{n-1}$
- AGP کی n ویں رقم اس طرح دی گئی ہے۔ $T_n = (a+(n-1)d)r^{n-1}$
- کسی بھی مثبت اعداد a اور b کے لئے ہمارے پاس ہے

$$\mathrm{AM} = \frac{a+b}{2},\ \mathrm{GM} = \sqrt{ab},\ \mathrm{HM} = \frac{2ab}{a+b}.$$

- AP کے ابتدائی n رقموں کا حاصل جمع اس طرح دیا گیا ہے۔ $S_n = \frac{n}{2}(2a+(n-1)d)$
- GP کے ابتدائی رقموں کا حاصل جمع اس طرح دیا گیا ہے۔ $\mathrm{r} \neq 1$ کے لئے $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$
- AGP کے ابتدائی n رقموں کا حاصل جمع اس طرح دیا گیا ہے۔ $\mathrm{r} \neq 1$ کے لئے

$$S_n = \frac{a-(a+(n-1)d)r^n}{1-r} + dr\left(\frac{1-r^{n-1}}{(1-r)^2}\right)$$

- $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$
- $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

11 maths v1 unit 5 UM binomial
Monday, September 05, 2022 8:17:13 PM

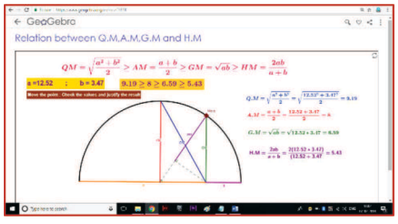
- $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
- فیبونا کی تواتر $1, 1, 2, 3, 5, \ldots$
- ناطق قوت نما کے لئے دورکنی مسئلہ

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

- تمام حقیقی عدد x کے لئے $|x| < 1$ کی شرط کو پورا کرتا ہے۔
- $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$
- $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$
- $(1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 + \cdots$
- $(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - 6x^5 + \cdots$
- $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$.
- $e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$.
- $\frac{e^x+e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$ اور $\frac{e^x-e^{-x}}{2} = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$

- تمام x کی قیمتوں کے لئے $|x| < 1$ کی شرط کو پورا کرتا ہے۔ $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$
- تمام x کی قیمتوں کے لئے $|x| < 1$ کی شرط کو پورا کرتا ہے۔ $\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots$
- تمام x کی قیمتوں کے لئے $|x| < 1$ کی شرط کو پورا کرتا ہے۔ $\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right]$

5(a) - کارنر ICT



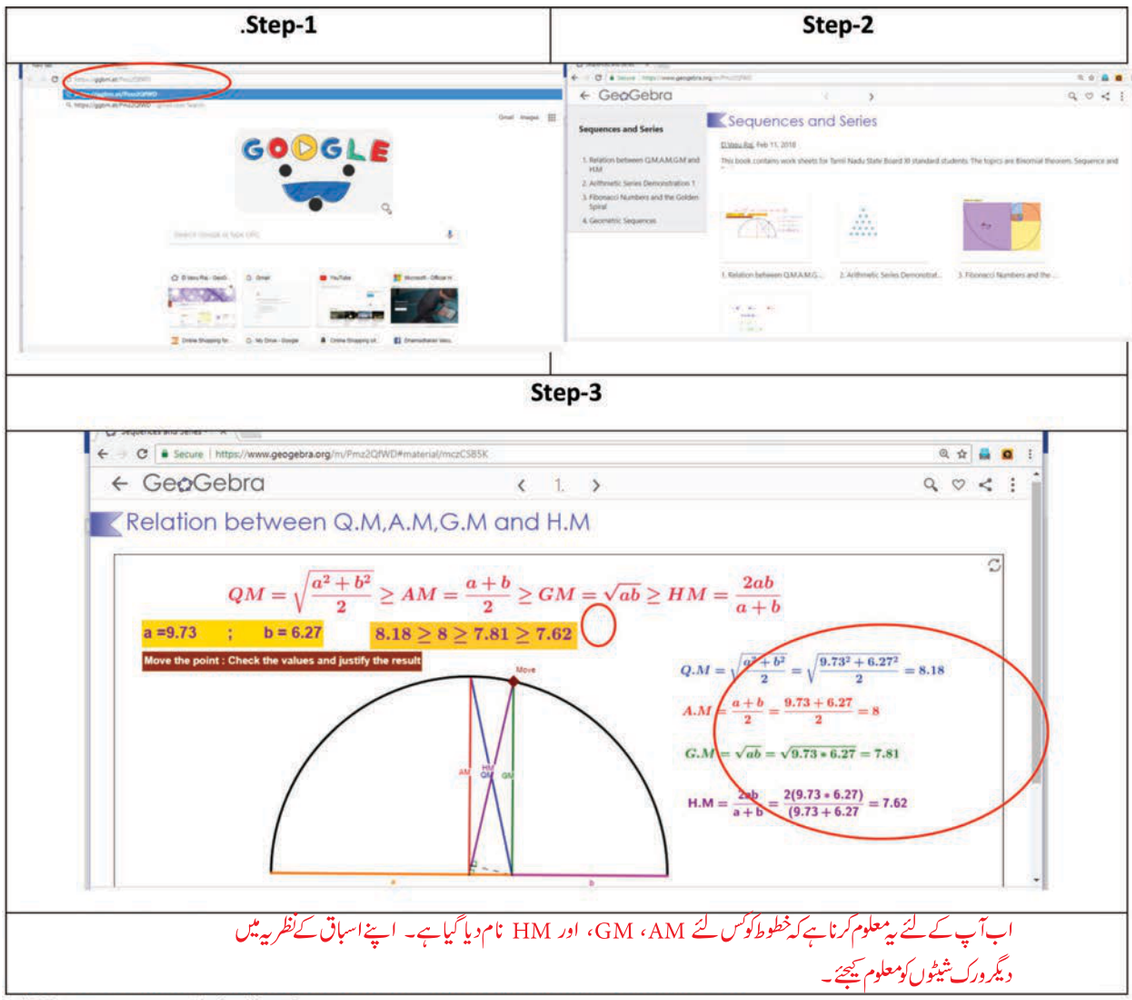
متوقع نتیجہ ⇐

مرحلہ 1 : براؤزر کھولئے، دئے گئے URL کو ٹائپ کیجئے یا دئے گئے QR کوڈ کو اسکین کیجئے۔

مرحلہ 2 : sequence and series work book کھلے گا۔ اس ورک بک میں بعض ورک شیٹس دئے گئے ہیں۔
Relation between Q.M., A.M, G.M. and H.M نامی ورک شیٹ کا انتخاب کیجئے۔

مرحلہ 3 : متغیر a اور b کے لئے تمام اوسط کے ضابطہ آپ کے پاس ہوں گے۔ Move نامی نقطہ کو ہٹایئے اور دیکھئے کہ
کس طرح a اور b کی قیمتوں کے لئے کس طرح اوسط کی قیمتیں بدلتی ہیں۔

234
Monday, November 07, 2022 8:50:52 PM



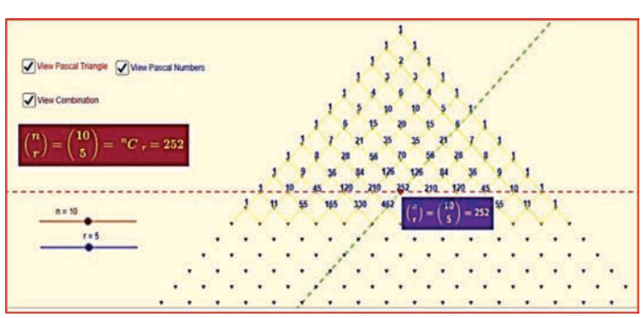
اب آپ کے لئے یہ معلوم کرنا ہے کہ خطوط کو کس لئے AM، GM، اور HM نام دیا گیا ہے۔ اپنے اسباق کے نظریہ میں دیگر ورک شیٹوں کو معلوم کیجئے۔

*Pictures are only indicatives.

Browse in the link Sequence and Series:
https://ggbm.at/Pmz2QfWDor Scan the QR Code.

6A8NQ

ICT CORNER-5(b)



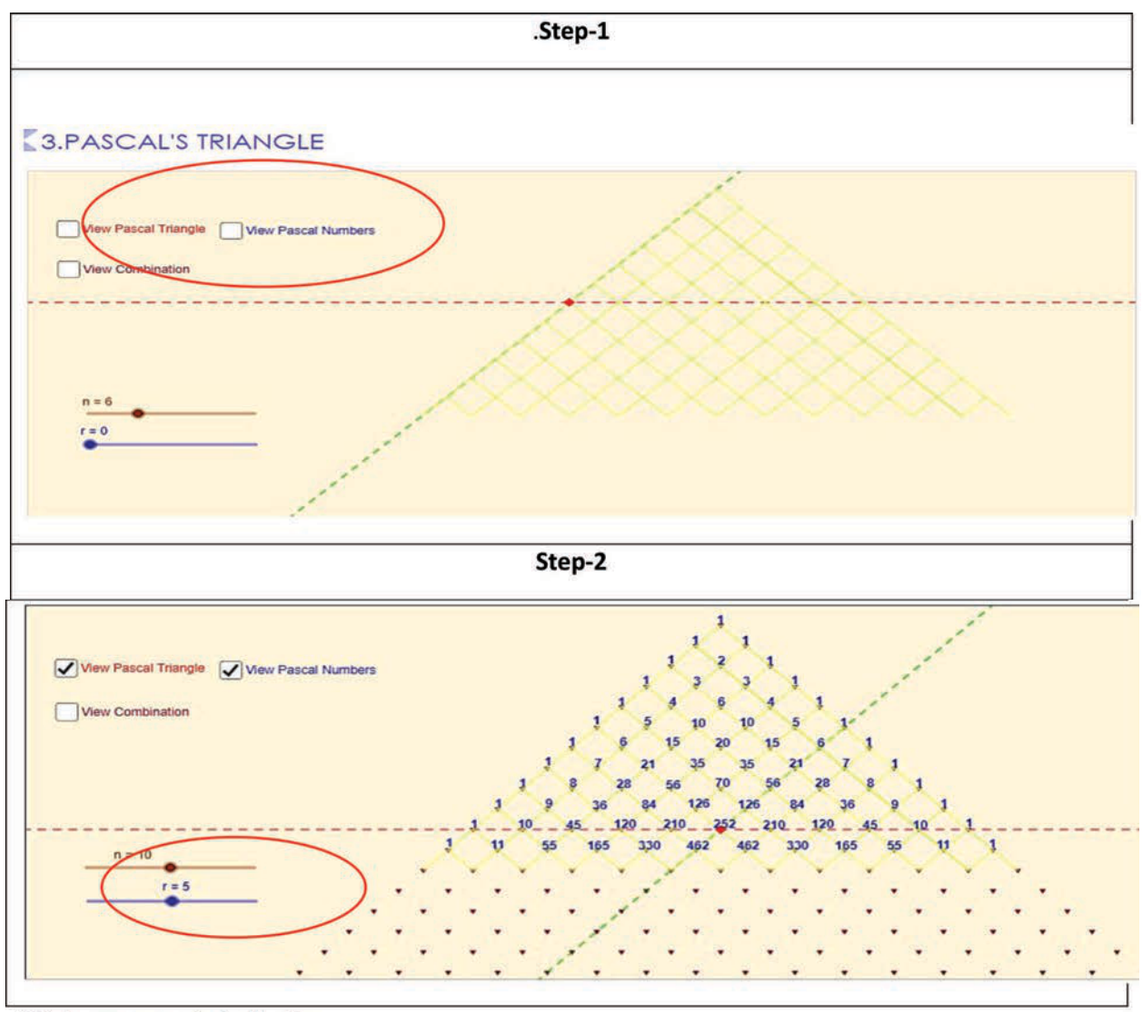
متوقع نتیجہ ⇐

11 maths v1 unit 5 UM binomial
Monday, September 05, 2022 8:17:14 PM

مرحلہ 1 : براؤزر کھولئے، دئے گئے URL کو ٹائپ کیجئے یا دئے گئے QR کوڈ کو اسکین کیجئے۔PASCALS TRIANGLE
نامی جیوجبرا ورک شیٹ کھلے گا۔ تم اس میں پاسکل کے مثلث کی ترتیب کو دیکھو گے۔

View pascal triangle، View Pascal's numbers اور View combination نامی چیک باکس دکھائی دیں گے۔

مرحلہ 2 : View Pascal's numbers میں n اور r سلائڈر کو حرکت دیجئے۔ سرخ رنگ کا نقطہ اعداد کے اوپر ہٹے گا۔ کسی ایک عدد پر رکھ کر View calculation میں جا کر combinatorial working دیکھئے۔ اب پاسکل کے اعداد کے ساتھ حسابات کا موازنہ کیجئے۔



*Pictures are only indicatives.

Browse in the link Sequence and Series:
https://ggbm.at/QNga4HQdor Scan the QR Code.

11 maths v1 unit 5 UM binomial
Monday, September 05, 2022 8:17:14 PM

دوابعادی تحلیلی جیومٹری
(Two Dimensional Analytical Geometry)

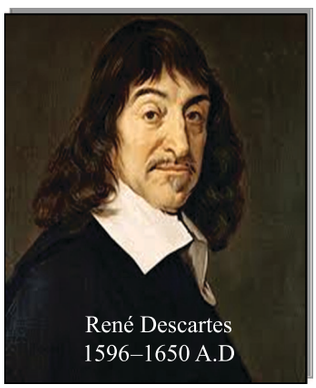
6

DT5W6

"My powers are ordinary. Only my application brings me success ".

Sir Isaac Newton

6.1 تعارف :



رینی ڈیکارٹے
(1596-1650 AD)

فرانکوئس ویٹے (1540-1603) نے سب سے پہلے ترتیبی الجبریائی ترقیم کا تعارف کیا اور مساوات کے کلیہ پر تعاون کیا۔ دوفرانسیسی ریاضی دان، فسلفہ دان رینی ڈسکارٹس (Rene Descartes) اور پیری ڈی فرماٹ (Pierre de Fermat) نے علم ہندسوی ماسکہ کے مطالعہ کے لئے فرانکوئس ویٹے کے الجبراء کو اپناتے ہوئے 1630ء میں علیحدہ علیحدہ تحلیلی جیومٹری دریافت کیا۔ ڈسکارٹس نے تحلیلی جیومٹری کو بطور ''الجبریائی ضابطوں کو دیکھنے کا طریقہ'' قائم کیا اور محددی نظام کو بطور ''مسطح پر نقاط کے مقام کو دریافت کرنے کا آلہ'' انکشاف کیا۔ ان کے اصل کارنامہ الجبراء اور جیومٹری کے درمیانی خلاء کو پُر کرنا تھا۔ الجبراء کے حوالے سے، انہوں نے یہ تفصیل سے سمجھایا کہ کس طرح سے الجبریائی مساوات کو جیومٹری کے شکلوں کو استعمال کر کے ظاہر کیا جاسکتا ہے اور انہیں سمجھایا جاسکتا ہے۔ تحلیلی جیومٹری ڈسکائس اور فرماٹ کا ایک عظیم انکشاف ہے۔ کارتیسی جیومٹری، تحلیلی جیومٹری کا متبادلہ اصطلاح انہیں کے نام پر رکھا گیا۔

17ویں صدی سے، علم ریاضی دوسمتوں میں ترقی کررہا ہے: خالص (Pure) اور عملی (Applied)۔ 17ویں صدی میں مطالعہ شدہ عملی ریاضی کے پہلے میدانوں میں سے ایک خط مستقیم پر ایک شئے کی حرکت تھا۔ خط مستقیم ترسیمات تجارت، اقتصادیت، سماجی سائنس، طبعیات اور علم طِب جیسے مختلف میدانوں میں استعمال کئے جاسکتے ہیں۔ خلیل ترین خط کا حساب جیومٹری کے بنیادیات میں ایک اعلیٰ اور تاریخی اعتبار سے اہم رول رکھتا ہے۔

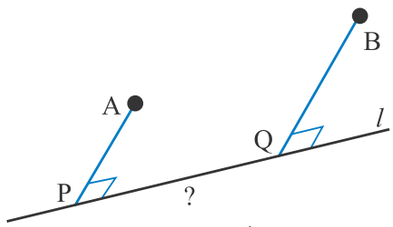
حقیقی زندگی سے متعلق ایک مسئلہ دیا گیا ہے، ہمارا کام علم ریاضی کی زبان کو استعمال کر کے اس مسئلے کو فارمولے کی شکل ظاہر کرنا ہے۔ علم ریاضی کے نمونوں کی تصنیف میں کئی تکنک استعمال ہوتے ہیں۔ آیئے دیکھیں کہ کس طرح سے دیئے گئے اطلاع کے ایک مجموعہ سے خطی مساوات (نمونے) تصنیف کئے جاتے ہیں اور انہیں مناسب ریاضی تکنک کو استعمال کر کے حل کئے جاتے ہیں۔ حقیقی دنیا کہ چند سادہ حسابات پر غور کرتے ہیں جیسے کہ نیچے بتائے گئے ہیں۔

حقیقی زندگی کی صورتِ حال 6.1 : جب ایک طالب علم اپنے گھر سے 6 km کی اوسط رفتار سے پیدل چلتا ہے۔ تو اپنے اسکول کو اسکول شروع ہونے سے دس منٹ پہلے پہنچتا ہے۔ جب اس کی اوسط رفتار 4 kmph ہوتو، وہ اپنے اسکول کو پانچ منٹ دیر پہنچتا ہے۔ اگر وہ اسکول کو روزانہ 8.00 a.m پر پیدل چلنا شروع کرتا ہوتو i۔ گھر اور اسکول کا درمیانی فاصلہ ii۔ ٹھیک وقت پر اسکول پہنچنے کے لئے کم از کم اوسط رفتار اور اسکول پہنچنے کے لئے درکار وقت iii۔ اسکول شروع ہونے کا وقت iv۔ اس کے پیدل راستے کے خطوط مستقیم کی جوڑی (دو خطوط مستقیم کی مشترکہ مساوات) کسی طرح معلوم کریں۔

حقیقی زندگی کی صورت حال 6.2 : فرض کیجئے کہ حکومت دو دیہاتوں
مثال کے طور پر A اور B کو بہتر بجلی مہیا کرنے کے لئے ایک نئے برقی قوتی

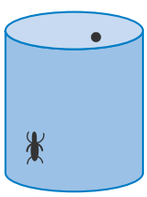
11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:24 PM

ترسیل کے سب اسٹیشن کھڑا کرنا چاہتی ہے۔ یہ سب اسٹیشن ایک خط l پر ہو۔ خط l پر عمود کے قدم P اور Q سے دیہات A اور B کے فاصلے بالترتیب 3 km اور 5 km ہیں۔ P اور Q کا درمیانی فاصلہ 6 km ہے۔ قوتی خانہ سے دو دیہاتوں (یا دو سڑکیں جو دیہاتوں اور قوتی خانہ) کو ملانے کے لئے مطلوبہ تار کی کم ترین لمبائی کیسے معلوم کریں اور قوتی خانے اور دیہاتوں کو ملانے والے خطوط (یا سڑکوں) کے تار کی مساوات کیسے معلوم کریں۔



خاکہ 6.1

حقیقی زندگی کی صورت حال 6.3 : ایک کھوکھلا استوانی برتن لیجئے، جس کا محیط 24 cm اور اونچائی 10 cm ہو۔ اس کے قاعدے سے برتن کے باہر 4 cm اوپر ایک چیونٹی بیٹھی ہے۔ اوپر سے 3 cm نیچے، برتن کے اندر شکل کے لحاظ سے چونٹی کے مقابل شہد کا ایک قطرہ ہے۔ شہد حاصل کرنے کے لئے اس چونٹی کو کتنا کم ترین فاصلہ طے کرنے کی ضرورت ہے؟ یہاں ایک تصویر ہے جو چیونٹی اور شہد کے مقام کی تشریح کرتی ہے۔


خاکہ 6.2

حقیقی زندگی کی صورت حال 6.4 : کسی مخصوص قسم کی سی ڈی CD کی مطلوبہ تعداد 22000 اکائیاں ہے، جبکہ ایک اکائی (Unit) کی قیمت 8 ₹ ہے۔ خریدار اس CD کو 30 ₹ یا اس سے زیادہ اکائی قیمت پر نہیں خریدے گا۔ تو دوسری طرف کارخانہ دار (Manufacturer) کسی بھی CD کو 6 ₹ یا اس سے کم قیمت میں فروخت نہیں کرے گا۔ بہر حال، اگر اس کی قیمت 14 ₹ ہو تو کارخانہ دار 24000 اکائیاں فراہم کر سکتا ہے۔ فرض کیجئے کہ مانگ شدہ مقدار اور فراہم کردہ مقدار خطی سے قیمت کے متناسب ہے۔ **i**۔ مانگ (Demand) کی مساوات **ii**۔ فراہمی (Supply) کی مساوات **iii**۔ مارکٹ کی ہم وزنی مقدار اور قیمت **iv**۔ مانگ اور مہیا کی مقدار جب اس کی قیمت 10 ₹ ہے۔

اوپر بیان کردہ ہر ایک مسئلہ کے لئے خط مستقیم کی مساوات نہ صرف حل کے ایک مخصوص صورتِ حال کو حال کرتی ہے۔ بلکہ اس کے ذریعے سے ہمیں مزید جانکاری حاصل کرنے میں بھی مدد ملتی ہے۔ اس کے بعد، اس باب میں ہم خطوط مستقیم کے تصورات کو استعمال کر کے ان اقسام کے مسئلوں کو حل کرنے کی کوشش کریں۔ خط مستقیم کو سمجھنے کے لئے ہمیں اس کے چند بنیادی تصورات سے واقف ہونا چاہئے۔ چلئے انہیں تفصیل سے بحث کریں۔

سیکھنے کے مقاصد : اس باب کے اختتام پر طلباء ذیل کے مقاصد حاصل کریں گے۔

- مختلف شکلوں میں خط کی مساوات۔
- دیئے گئے دو خطوط کے متوازی یا عمودی ہونے کی جانچ۔
- دیئے گئے خط سے دیئے گئے ایک نقطے کا فاصلہ اور دو متوازی خطوط کا فاصلہ۔
- دیئے گئے شرط کے لئے خطوط مستقیم کا قبیلہ۔
- خطوط مستقیم کی جوڑی، ان کا درمیانی زاویہ اور زاویائی ناصف کی مساوات۔

MOF58

6.2 ایک نقطے کا طریق (Locus of a point)

تعریف 6.1 نقطہ کسی مستوی سطح پر ایک ٹھیک مقام ہے۔

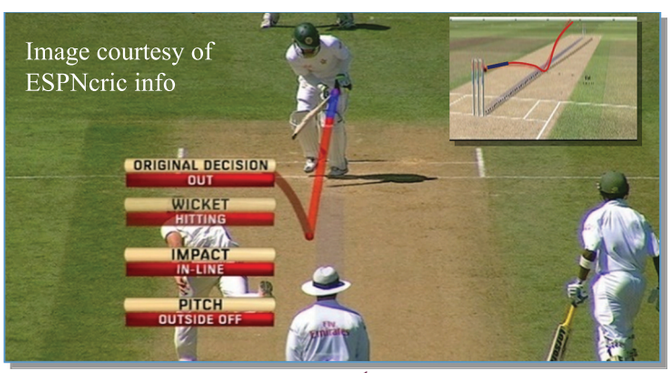
238
Monday, November 07, 2022 8:44:14 PM

یہ سمجھنا ضروری ہے کہ نقطہ کوئی شئے نہیں ہے بلکہ ایک مقام ہے۔ہم ایک نقطے کے مقام کو ایک ڈاٹ(dot) سے ظاہر کرتے ہیں۔مستوی تحلیلی جیومٹری میں، نقاط کو حقیقی اعداد کے ترتیب وار جوڑیوں سے وضاحت کیا جاتا ہے۔مثال کے طور پر مخصی نظام (x,y) کے لحاظ سے۔

عام طور پر،افقی خط x محور کہلاتا ہے اور عمودی خط y محور کہلاتا ہے۔ان دونوں محوروں کا تقاطع مبداء کہلاتا ہے۔مستوی میں کسی بھی نقط P کے مقام کو اعداد کے ایک ہی واحد ترتیب وار جوڑی (x,y) سے نشاندہی کی جاسکتی ہے۔یہاں نقطہ P اور x محور کے درمیانی فاصلے کو x اور نقطہ P اور y محور کے درمیانی فاصلے کو y سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ غور کیجئے کہ اگر x منفی ہو تو یہ y محور کے بائیں واقع ہوتا ہے۔اسی طرح سے،اگر y منفی ہو تو یہ x محور کے نیچے واقع ہوتا ہے۔استعمالات کے دوران، x اور y کے علاوہ، دوسرے حروف اکثر استعمال کئے جاتے ہیں،افقی اور عمودی سمتوں میں مختلف پیمائش منتخب کئے جاتے ہیں۔

تعریف 6.2 مخصوص شرائط کے تحت ایک متحرک نقطے کے ذریعے کھینچے گئے راستے کو اس نقطے کا طریق کہتے ہیں۔متبادل طور پر،ایک جیومٹری اصول کے تحت جب ایک نقطہ حرکت کرتا ہے اس کے راستے کو طریق کہتے ہیں۔طریق کے جمع کو طریق ہی loci کہیں گے۔

ذیل کی تشریح سے طریق کی چند صورتِ حال اور اس کے مختلف استعمالات واضح ہوتے ہیں۔

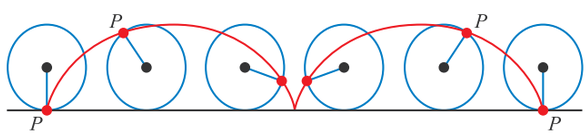


خاکہ 6.3

تشریح 6.1 : کرکٹ میں، جب بؤلر (bowler) گیند پھینکتا ہے تو،گیند کے ذریعے کھینچے گئے راستہ اس گیند کا طریق ہے۔ جب کبھی بیٹس من اور فیلڈرس کے درمیان LBW کے فیصلے کے دوران جھگڑا ہوتا ہے،تو ایک تیسرے امپائر کے ذریعے،کھلاڑیوں کے نظر ثانی کے مطالبہ پر اس پیچیدگی کو گیند اسٹمپس سے ٹکراتا ہے یا نہیں،اب بیٹس من کے پیروں سے گذرتے ہوئے گیند کے آگے کے راستے کا نقشہ بھی کھینچا جاسکتا ہے۔ رسمی دھیمی حرکت یا تیز نگاہی کے لئے تیسرے امپائر کے مشورہ پر ممکن فیصلہ کیا جائے گا۔اس طریقہ کو عالمی کرکٹ میں عموماً منظوری دی گئی ہے۔

تشریح 6.2 فرض کیجئے کہ P ایک دائرہ نما پہیے کے کنارے (محیط) پر ایک نقطہ ہے،جب یہ دائرہ بغیر پھسلے ایک خط مستقیم پر لڑھکتا ہے تو، کنارے پر نقطہ P کا طریق خاکے میں دکھایا گیا۔اس نقطے P سے کھینچا گیا راستہ مستدیر (Cycloid) کہلاتا ہے۔(اس دائرے کے اندر ایک نقطہ لیتے ہوئے خود کوشش کیجئے۔) وب سائٹ web site: www.mathworld.wolfram.com سے منحنی کے نام معلوم کیجئے۔

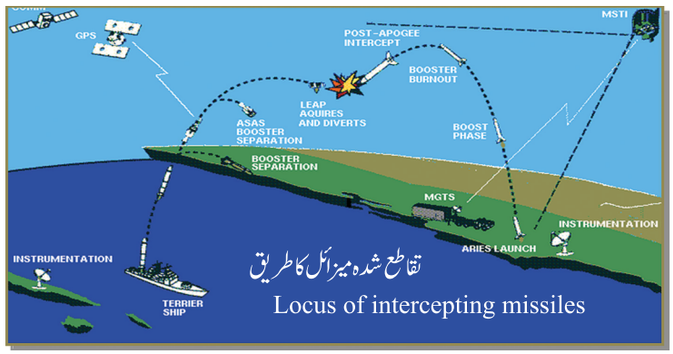
https://www.geogebra.org/b/bd2ADu2I



خاکہ 6.4

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:25 PM

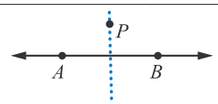
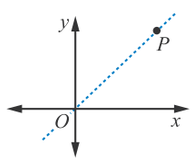
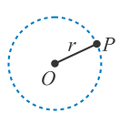
تشریح 6.3 ایک میزائل فوجی جہاز سے حملہ کے لئے پھینکا جاتا ہے اور ایک دوسرا میزائل زمین سے پہلے کے میزائل کو روکنے کے لئے پھینکا جاتا ہے۔ان کے طریقہ (loci) کو خاکہ میں دکھایا گیا ہے۔



خاکہ 6.5

کئی جنگوں میں میزائلوں کے طریق بہت اہم رول ادا کرتے ہیں۔ خلیج جنگ (2/ آگسٹ 1990-28 رفروری1991) کے دوران،عراق نے اسرائیلی شہروں پر اسکڈ میزائلوں سے حملہ کیا تو اسرائیل اپنے پیٹریٹ میزائلوں سے دشمن میزائلوں کو مار گرایا۔ ایک مصنوئی سیارہ یا خلائی شٹل کو کامیابی سا اڑانے کے لئے ،خلائی تحقیق میں طریق کا معلوم کرنا ایک پیچیدہ رول ہوتا ہے۔

دو متغیرات x اور y میں ایک مساوات عام طور سے x اور y کے حقیقی اعداد کے لامحدود کئی جوڑی سے مطمئن ہوگا۔اس طرح کی ہر جوڑی اس مساوات کا حقیقی حل کہلاتا ہے۔ اس مساوات کا ہر حقیقی حل کا اپنا ترسیم ہوگا۔ اس طرح کے تمام ترسیمات کا ذخیرہ دئے گئے اس مساوات کا طریق کہلاتا ہے۔ ذیل کے جدول میں علم ریاضی کے چند اہم طریق کو دکھایا گیا ہے۔

راستے کا نام	ترسیم Graph	دئے گئے شرط کے تحت متحرک نقطہ P
قطاع خط AB کا عمودی ناصف	 خاکہ 6.6	ایک نقطہ P اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو سا کن نقاط A اور B سے مساوی فاصلہ رکھتا ہے۔
زاویہ $\angle xoy$ کا زاویائی ناصف	 خاکہ 6.7	ایک نقطہ P اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو سا کن خطوط OX اور OY سے مساوی فاصلہ رکھتا ہے۔
دائرہ	 خاکہ 6.8	ایک نقطہ P ایک سا کن نقطہ O سے مساوی فاصلہ رکھتا ہے۔

آیئے اب ہم ان نقاط کے طریق معلوم کرنے کے راستوں پر بحث کریں۔طریق کی مساوات وہ تعلق ہے جو راستہ پر ٹھیک طور پر واقع شدہ تمام نقاط کے مخصوص کے درمیان وجود میں آتا ہے۔

ایک نقطے کے طریق کی مساوات معلوم کرنے کا طریقہ (Procedure for finding the equation of the locus of a point)

i) اگر ہم ایک نقطہ P کے طریق کی مساوات معلوم کر رہے ہیں تو، P کے لئے محدودوں کو مقرر کرتے ہیں، مثال کے طور پر (h,k) سے P تک

ii) دئے گئے شرائط کو معلوم پیمائشوں اور نا معلوم پیمائشوں کے لحاظ سے مساوات کی طرح ظاہر کرتے ہیں۔

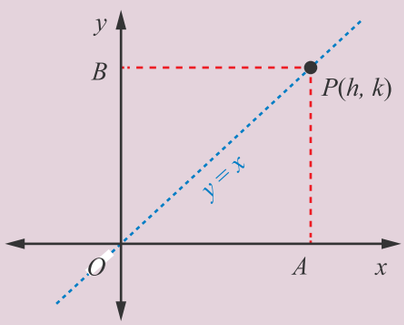
iii) مقداروں کو خارج کیجئے، اس طرح کہ جوابی مساوات میں صرف h اور k معلوم شدہ پیمائشیں ہوں۔

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:26 PM

(iv) جوابی مساوات میں h کے لئے x اور k کے لئے y تبدیل کیجئے۔ جوابی مساوات نقطہ P کے طریق کی مساوات ہے۔

مثال 6.1 : ایک نقطے کا طریق معلوم کیجئے۔ جو اس طرح حرکت کرتا ہے کہ محور سے اس نقطے کا فاصلہ y محور سے اس کا فاصلہ مساوی ہے۔

حل: فرض کیجئے کہ طریق پر ایک نقطہ $P(h,k)$ ہے۔



خاکہ 6.9

فرض کیجئے کہ A اور B بالترتیب x محور اور y محور پر نقطہ P سے کھینچے گئے عمود کے قدم ہیں۔

لہٰذا، P یہ ہے۔ $P \text{ is } (OA, OB) = (BP, AP) = (h, k)$

دیا گیا ہے AP = BP

$$\Rightarrow k = h$$

h اور k کو بدلتے ہوئے $h = x$ اور $k = y$ میں تبدیل کرتے ہیں۔

P کا طریق $y = x$ ہے، مبداء سے گذرنے والا ایک خط ہے۔

مثال 6.2 : نقطہ $\left(ct, \frac{c}{t}\right)$ کے ذریعے کھینچا گیا راستہ معلوم کیجئے، یہاں $t \neq 0$ پیمائش ہے اور c ایک مستقل ہے۔

حل: فرض کیجئے کہ طریق پر ایک نقطہ $P(h,k)$ ہے۔ دئے گئے اطلاع سے، ہمارے پاس $h = ct$ اور $k = \frac{c}{t}$ ہے۔

t کو خارج کرنے کے لئے، ان دونوں مساوات کے حاصل ضرب لینے پر

$$(h)\,(k) = (ct)\left(\frac{c}{t}\right) \quad \Rightarrow \quad hk = c^2$$

لہٰذا، درکار طریق $xy = c^2$ ہے۔

مثال 6.3 :

ایک نقطہ P کا طریق معلوم کیجئے، جو اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو ساکن نقاط A(1,0) اور B(5,0) سے اس نقطے کا فاصلہ ہمیشہ مساوی ہو۔

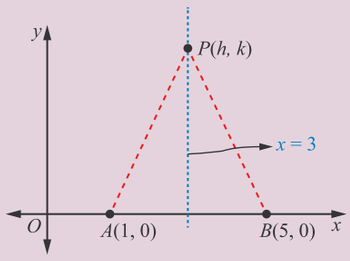
حل: دیا گیا ہے کہ A(1,0) اور B (5,0)

فرض کیجئے کہ درکار راستے پر ایک نقطہ $P(h,k)$ ہے۔

دئے گئے اطلاع سے ہمارے پاس AP = BP ہے۔

یعنی

$$\sqrt{(h-1)^2 + (k-0)^2} = \sqrt{(h-5)^2 + (k-0)^2} \Rightarrow h = 3$$



خاکہ 6.10

لہٰذا، P کا طریق x = 3 ہے، جو y محور کے متوازی ایک خط مستقیم ہے۔

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:26 PM

مثال 6.4 : اگر θ ایک پیمائش ہے، ایک متحرک نقطے کا طریق معلوم کیجئے۔ جس کا مختص $(a \sec\theta, b \tan\theta)$ ہیں۔

حل : فرض کیجئے کہ درکار راستے پر ایک نقطہ $P(h,k)$ ہے۔ دیئے گئے اطلاع سے ہمارے پاس ہے۔

$$h = a\sec\theta \qquad k = b\tan\theta$$
$$\Rightarrow \frac{h}{a} = \sec\theta \text{ اور } \frac{k}{b} = \tan\theta$$

پیمائش θ کو خارج کرنے کے لئے، مربع کرتے ہوئے تفریق کرنے پر، ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\left(\frac{h}{a}\right)^2 - \left(\frac{k}{b}\right)^2 = \sec^2\theta - \tan^2\theta$$
$$\left(\frac{h}{a}\right)^2 - \left(\frac{k}{b}\right)^2 = 1$$

لہٰذا، دیئے گئے نقطے کا طریق یہ ہے۔

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

https://www.geogebra.org/geometry

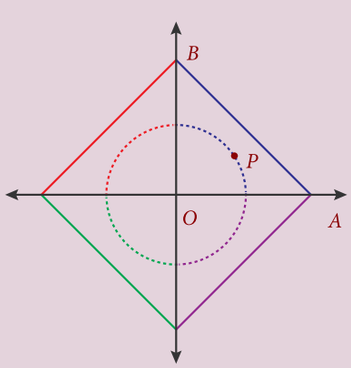
جب کبھی پیمائش علم ہندسوی شکل میں ہوں، تو θ کو خارج کرنے کے لئے ان علم ہندسوی تماثلات کو استعمال کریں۔

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1,\ \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1,\ \operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1.$$

مثال 6.5 : 6 اکائیاں لمبائی والی ایک سلاخ x اور y محوروں پر اس کے کناروں بالترتیب A اور B کے بل پھسلتی ہے۔ اگر مبداء O ہے، تو ΔOAB کے ہندسی مرکز کا طریق معلوم کیجئے۔

حل: فرض کیجئے کہ نقاط A, O اور B کے مختص بالترتیب (0,0) , (a,0) اور (0,b) ہیں۔

غور کیجئے کہ نقاط A اور B متحرک نقاط ہیں۔



خاکہ 6.11

فرض کیجئے کہ ΔOAB کا ہندسی مرکز (h,k) ہے۔

ΔOAB کا ہندسی مرکز یہ ہے۔

$$\left(\frac{0+a+0}{3}, \frac{0+0+b}{3}\right) (= h,k).$$

$$\frac{a}{3} = h \Rightarrow a = 3h, \qquad \frac{b}{3} = k \Rightarrow b = 3k$$

مثلث قائمہ ΔOAB سے $OA^2 + OB^2 = AB^2$

$$(3h)^2 + (3k)^2 = (6)^2 \Rightarrow h^2 + k^2 = 4$$

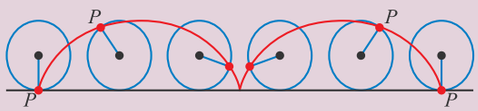
(h,k) کا طریق ایک دائرہ، یہ ہے۔ $x^2 + y^2 = 4.$

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:27 PM

مثال 6.6 : اگر θ ایک پیمائش ہے، تو ایک متحرک نقطے کے طریق کی مساوات معلوم کیجئے جس کے مختص ہیں۔

$$(a(\theta - \sin\theta)\,,\ \ a(1-\cos\theta)).$$

حل : فرض کیجئے کہ P (h,k) درکار راستے پر ایک نقطہ ہے۔ دیئے گئے اطلاع سے ہمارے پاس



خاکہ 6.12

$$h = a(\theta - \sin\theta) \qquad (6.1)$$
$$k = a(1-\cos\theta) \qquad (6.2)$$

چلئے ہم مساوات (6.2) سے θ اور Sin θ کی قیمت معلوم کرتے ہیں۔

$$k = a(1-\cos\theta)$$

$$\cos\theta = \frac{a-k}{a} \ \Rightarrow\ \theta = \cos^{-1}\left(\frac{a-k}{a}\right) \quad \text{اور} \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{2ak-k^2}}{a}$$

(6.1) میں اوپر کے قیمتوں کو بدلنے پر، ہمیں $h = a\cos^{-1}$ حاصل ہوتا ہے۔

$$h = a\cos^{-1}\left(\frac{a-k}{a}\right) - \sqrt{2ak-k^2}$$

(h,k) کا طریق یہ ہے۔ $\qquad x = a\cos^{-1}\left(\frac{a-y}{a}\right) - \sqrt{2ay-y^2} \qquad (6.3)$

https://www.geogebra.org/b/bd2ADu2I#material/zCKMj8kE

اوپر دیئے گئے پیمائشی شکل کو کارتیسی شکل میں تبدیل کرنے کے باوجود، چند صورتوں میں کارتیسی شکل سے پیمائشی شکل سے حل کرنے کے لئے زیادہ استعمال ہو سکتے ہیں۔

مشق 6.1

1۔ P کا طریق معلوم کیجئے، اگر α کی تمام قیمتوں کے لئے، متحرک نقطہ P کے محدد یہ ہیں۔

$(i)\ (9\cos\alpha\,,\ 9\sin\alpha)\ \ (ii)\ (9\cos\alpha\,,\ 6\sin\alpha).$

2۔ ایک نقطہ P کا طریق معلوم کیجئے جو (i) x محور سے دو اکائیاں مستقل فاصلے پر حرکت کرتا ہے۔
(ii) y محور سے تین اکائیاں مستقل فاصلے پر حرکت کرتا ہے۔

3۔ اگر θ ایک پیمائش، ایک متحرک نقطے کے طریق کی مساوات معلوم کیجئے۔ جس کے محدد یں $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$ ہیں۔

4۔ k اور b کی قیمت معلوم کیجئے، اگر نقاط P(−3,1) اور Q (2,b) کے طریق $x^2 - 5x + ky = 0$ پر واقع ہیں۔

5۔ 8 اکائیوں والی ایک سیدھی سلاخ ہمیشہ x اور y محوروں پر اس کے کناروں بالترتیب A اور B کے بل پھسلتی ہے۔ قطاع خط AB کے درمیانی نقطے کا طریق معلوم کیجئے۔

6۔ ایک نقطے طریق کی مساوات معلوم کیجئے۔ اس طرح کے نقاط (3,5), (1,−1) سے اس کے فاصلے کے مربعوں کا حاصل جمع 20 کے مساوی ہے۔

7۔ نقطہ P کے طریق کی مساوات معلوم کیجئے۔ اس طرح کہ نقاط A(1,−6) اور B(4,−2) کو ملانے قطاع خط AB پر زاویہ قائمہ بناتا ہے۔

8۔ اگر O مبداء ہے اور $y^2 = 4x$ پر ایک متغیر نقطہ R ہے، تو قطاع خط AB کے درمیانی نقطے کے طریق کی مساوات معلوم کیجئے۔

9۔ ایک متحرک نقطہ P کے محدد یں $\left(\frac{a}{2}(\text{cosec}\theta + \sin\theta)\ ,\ \frac{b}{2}(\text{cosec}\theta - \sin\theta)\right)$ ہیں، یہاں θ ایک پیمائشی متغیر ہے۔ ثابت کیجئے کہ P کے طریق کی مساوات $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ ہے۔

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:27 PM

10۔ اگر P(2,–7) ایک دیا گیا نقطہ ہے، اور تو $2x^2 + 9y^2 = 18$ پر ایک نقطہ Q ہو تو، PQ کے درمیانی نقطے کے طریق کی مساوات معلوم کیجئے۔

11۔ اگر x محور پر R ایک نقطہ ہے اور y محور پر P ایک نقطہ ہے اور RQ پر ایک متغیر نقطہ ہے اس طرح کہ $PQ = a$, $RP = b$ ہوں، تو P کے طریق کی مساوات معلوم کیجئے۔

12۔ اگر نقاط P(6,2) اور Q(–2,1) ایک ΔPQR کے راسیں ہیں اور R، طریق $y = x^2 - 3x + 4$ پر ایک نقطہ ہے، تو ΔPQR کے ہندسی مرکز کے طریق کی مساوات معلوم کیجئے۔

13۔ اگر $x^2 + y^2 + 4x - 3y + 7 = 0$ کے طریق پر Q ایک نقطہ ہے، تو P کے طریق کی مساوات معلوم کیجئے، جو قطاع OQ کو بیرونی جانب 3 : 4 کی نسبت پر تقسیم کرتا ہے، جہاں O مبداء ہے۔

14۔ x محور سے 3 اکائیاں اور نقطہ (5,1) سے 5 اکائیاں فاصلے رکھنے والے نقاط کے طریق پر نقاط معلوم کیجئے۔

15۔ نقاط (4,0) اور (–4,0) سے ایک متحرک نقطے کے فاصلے کا حاصل جمع ہمیشہ 10 اکائیاں ہے۔ متحرک نقطے کے طریق کی مساوات معلوم کیجئے۔

6.3 خطوط مستقیم (Straight lines)

ابتدائی الجبراء کے اصولوں کو استعمال کر کے خطّی مساوات کو کئی مختلف شکلوں میں دوبارہ لکھ سکتے ہیں۔ ان مساوات کو اکثر ''خط مستقیم کی مساوات'' کہتے ہیں۔ عام شکل میں خطی مساوات کو اس طرح لکھا جاتا ہے۔

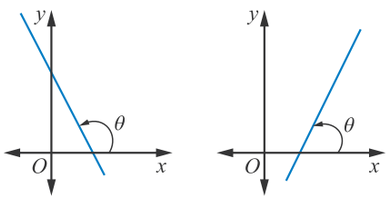
$$ax + by + c = 0 \qquad (6.4)$$

یہاں a اور b دونوں صفر نہیں ہیں۔ یہ نام ''خطی'' (linear) ایک حقیقت سے آیا ہے۔ وہ یہ کہ اس طرح کے ایک مساوات کے حل کا مجموعہ مستوی میں ایک خط مستقیم بنتا ہے۔ اس باب میں ''خط'' سے خط مستقیم مراد ہے بجز اس کے کہ کوئی اور وضاحت کی گئی ہو۔

ایک خط کی مساوات کو لکھنے کے کئی طریقے ہیں جو ایک شکل سے دوسری شکل میں حسابی طریقوں کے ذریعے تبدیل کیا جا سکتا ہے۔ ان شکلوں کو عام طور پر سے خط کے بارے میں اطلاع (معطیات) کے قسم کے لحاظ سے نام دیا جاتا ہے۔ جو اس شکل کے لکھنے میں پیش آتی ہے۔ چند اہم معطیات نقاط، میلان اور مقطوعہ ہیں۔

6.3.1 زاویہ جھکاؤ اور میلان کے درمیان تعلق (The relationship between the angle of inclination and slope)

تعریف 6.3 ایک خط مستقیم کا زاویہ جھکاؤ، وہ زاویہ ہے مثال کے طور پر θ، جو اس خط اور x محور سے بنتا ہے، اسے گھڑی کی مخالف سمت (مثبت) میں پیائش کیا جاتا ہے۔



خاکہ 6.13

تعریف 6.4 خط مستقیم کا میلان یا ڈھلوان وہ عدد ہے جو اس کی ''سمت اور ڈھلوان (گہرائی)'' کی پیائش کرتا ہے۔

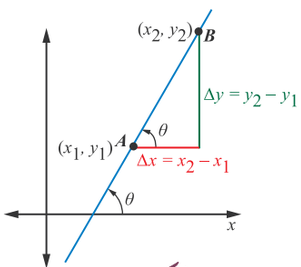
x اور y محوریں رکھنے والے مستوی میں ایک خط کا میلان، عام طور پر حرف سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس کو کئی طریقوں سے پیائش کر سکتے ہیں جیسا کہ نیچے دیا گیا ہے:

i۔ جب θ ، x محور کے خط کا زاویہ جھکاؤ ہو تو، اسے میلان سے گھڑی کے مخالف سمت میں پیائش کیا جائے گا۔

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:28 PM

$$m = \tan\theta.$$

جب $\theta \Leftarrow \frac{\pi}{2}$ تو $m = \tan\frac{\pi}{2}$ غیر واضح ہے۔



خاکہ 6.14

ii۔ جب خط کوئی دو نقاط (x_1, y_1) اور (x_2, y_2) ہوں،
جس میں $x_2 \neq x_1$ ہو، تو y محددوں کے میلان کی تبدیلی تقسیم x محدد کی نظیری تبدیلی ہے۔ اس کو ذیل کے مساوات سے وضاحت کیا جاتا ہے۔

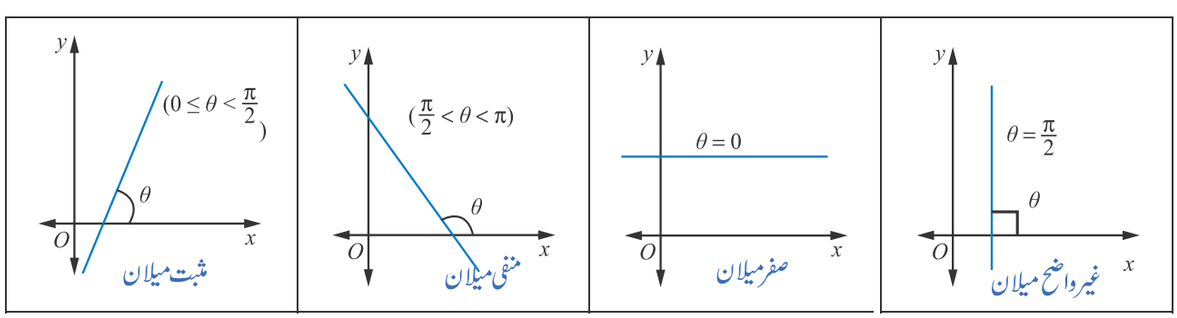
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{عمودی تبدیلی}}{\text{افقی تبدیلی}}$$

iii۔ جب خطی مساوات کی عام شکل $ax + by + c = 0$ دی گئی ہو، تو خط کا میلان یہ ہے۔

$$m = -\frac{a}{b}, \quad b \neq 0.$$

m غیر واضح ہے، جب $b = 0$ ہے۔

ایک خط کا میلان مثبت یا منفی یا صفر یا غیر واضح ہے جیسا کہ نیچے بتایا گیا ہے۔



x تبدیل نہیں ہوتا y تبدیل ہوتا ہے	x کے بڑھنے پر y تبدیل نہیں ہوتا	x کے بڑھنے پر y کم ہوتا ہے	x کے بڑھنے پر y بڑھتا ہے

خاکہ 6.15

تعریف 6.5 ایک مستوی میں تین یا زیادہ نقاط ہم خط کہلاتے ہیں، اگر یہ نقاط ایک ہی خط مستقیم پر واقع ہوں۔

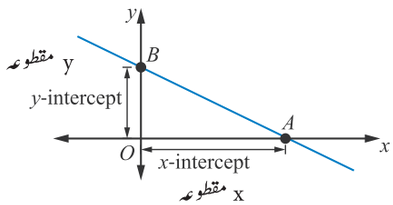
فرض کیجئے کہ A , B اور C ایک مستوی میں کوئی تین نقاط ہیں۔ اگر BC یا AC کا میلان AB کے میلان کے مساوی ہوتا ہے تو یہ نقاط ہم خط ہیں۔

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:28 PM

6.3.2 خط کا مقطوعہ (Intercepts of a line)

تعریف 6.6

ایک خط کا مقطوعہ، وہ نقطہ ہے جس پر وہ خط x محور یا y محور سے گذرتا ہے۔



خاکہ 6.16

x مقطوعہ وہ نقطہ ہے، جہاں y کی قیمت صفر ہے، اور y مقطوعہ وہ نقطہ ہے جہاں x کی قیمت صفر ہے۔

لہٰذا، خط کے مقطوعہ، وہ نقاط ہیں، جہاں وہ خط افقی اور عمودی محوروں سے تقاطع یا گذرتا ہے۔

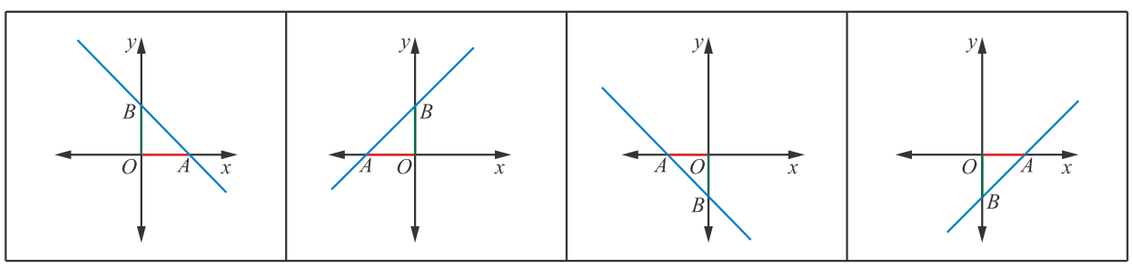
لہٰذا یہ واضح ہے کہ

i۔ y محور کی مساوات $x = 0$ ہے۔

ii۔ x محور کی مساوات $x = 0$ ہے۔

خاکہ میں OA ، x مقطوعہ اور OB ، y مقطوعہ ہے۔

x اور y مقطوعات کے مختلف اقسام:



x مقطوعہ مثبت y مقطوعہ منفی	x مقطوعہ منفی y مقطوعہ منفی	x مقطوعہ منفی y مقطوعہ مثبت	x مقطوعہ مثبت y مقطوعہ مثبت

خاکہ 6.17

ہم نقاط، میلان اور مقطوعے کی تعریف اور ان کے بارے میں تفصیلی جانکاری سیکھ چکے ہیں۔

6.3.3 ایک خط مستقیم کے مساوات کی مختلف شکلیں (Different forms of an equation of a straight line)

ایک خط مستقیم کی مساوات کو واحد طور پر معلوم کرنے کے لئے دو شرائط کافی ہیں۔ میلان، مقطوعے اور نقاط میں سے کسی دو جانکاری کے مجموعہ کو استعمال کرتے ہوئے، ہم مختلف اقسام کے خطوط مستقیم کی تشکیل کر سکتے ہیں جیسا کہ

i۔ میلان اور مقطوعی شکل

ii۔ نقطہ اور میلان کی شکل

iii۔ دو نقاط کی شکل

iv۔ مقطوعات کی شکل اور دو زائد مخصوص اقسام یہ ہیں۔

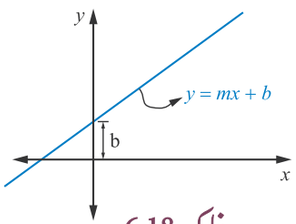
v۔ عمودی (نارمل) شکل

vi۔ پیرائشی شکل

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:28 PM

آیئے اب ہم تفاعل کے ترقیم کو استعمال کرتے ہوئے دو مقداروں کے درمیانی تعلق کو وضاحت کرنے کے ایک اہم طریقے پر نظر ڈالتے ہیں۔

i۔ میلان اور مقطوعی شکل



خاکہ 6.18

متناسب خطی تفاعلات کو $y = mx$ کی شکل میں لکھ سکتے ہیں۔ یہاں m خط کا میلان ہے۔
غیر متناسب خطی تفاعلات کو اس شکل میں لکھ سکتے ہیں۔

$$y = m x + b, \quad b \neq 0 \qquad (6.5)$$

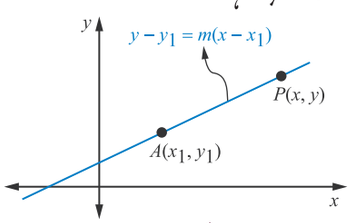
اس کو ایک خط مستقیم کا میلان، مقطوعی شکل کہتے ہیں کیونکہ m میلان ہے اور b ، y مقطوعہ ہے۔

(1) جب $b = 0$ اور $m \neq 0$ ہو تو یہ خط مبداء سے گذرتا ہے اور اس کی مساوات $y = mx$ ہے۔

(2) جب $b = 0$ اور $m = 0$ ہو، تو یہ خط x محور سے منطبق ہوتا ہے اور اس کی مساوات $y = 0$ ہے۔

(3) جب $b \neq 0$ اور $m = 0$ ہو تو یہ خط x محور کے متوازی ہوتا ہے اور اس کی مساوات $y = b$ ہے۔

ii۔ نقطہ-میلان شکل (Point - slope form)



خاکہ 6.19

فرض کیجئے کہ خط کا میلان m ہے اور $A(x_1,y_1)$ اس خط پر ایک دیا گیا نقطہ ہے۔
فرض کیجئے کہ $P(x,y)$ دیئے گئے خط پر A کے علاوہ ایک اور نقطہ ہے۔ $A(x_1,y_1)$ اور $P(x,y)$ کو ملانے والے خط کا میلان اس طرح دیا جاتا ہے۔ $m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$

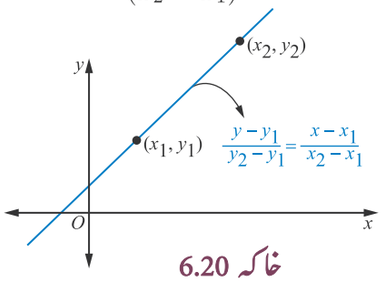
$$\Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1), \qquad (6.6)$$

جیسے نقطہ - مقطوعی شکل کہتے ہیں۔

چونکہ، y محور کے متوازی خطوط کے لئے میلان m غیر واضح ہے، مساوات کے نقطہ-میلان کی شکل سے y محور کے متوازی $A(x_1,y_1)$ سے گذرنے والے خط کی مساوات حاصل نہیں ہوگا۔ حالانکہ اس سے کوئی دشواری نہیں ہے، چونکہ اس طرح کے کسی خط کے لئے اس خط پر کسی بھی نقطے کا حدف x_1 ہے۔ لہٰذا، اس طرح کے خط کی مساوات $x = x_1$ ہے۔

iii۔ دو نقاط کی شکل (Two points form)

اگر (x_1,y_1) اور (x_2,y_2) خط پر کوئی دو نقاط ہیں، جہاں $x_1 \neq x_2$ اور $y_1 \neq y_2$ ہو تو میلان $m = \dfrac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$ ہے۔



خاکہ 6.20

نقطہ - میلان شکل کو استعمال کرتے ہوئے ہمیں یہ مساوات حاصل ہوتی ہے۔

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

اوپر کی مساوات کو دوبارہ لکھنے پر، ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \qquad (6.7)$$

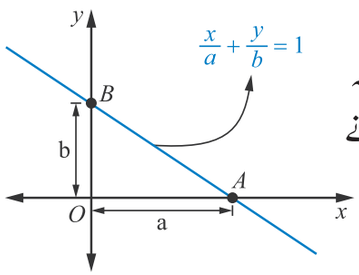
یہ مساوات دو نقاط کی شکل کہلاتا ہے۔

دو نقاط شکل کو مقطعہ (Determinant) کے لحاظ سے بھی ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0.$$

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:28 PM

iv۔ مقطوعے کی شکل (Intercepts form)



خاکہ 6.21

اگر x محور اور y محور پر ایک خط کے مقطوعے معلوم ہوں تو مقطوعوں کو استعمال کرتے ہوئے بھی خط کی مساوات معلوم کر سکتے ہی۔ مان لیجئے کہ x مقطوعہ OA= a اور y مقطوعہ OB=b ہیں۔ یہاں a اور b غیر صفر ہوں تو دو نقاط A(a,0) اور B(0,b) سے گذرنے والے خط کی مساوات

$$\frac{y-0}{b-0} = \frac{x-a}{0-a}$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b} = 1 \qquad (6.8)$$

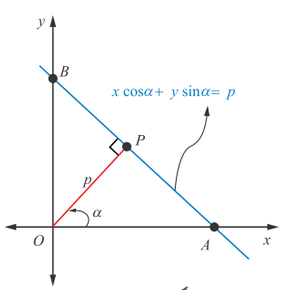
اوپر کی مساوات مقطوعی شکل کہلاتی ہے۔

مبداء پر گذرنے والے خطوط یا جو خطوط افقی یا عمودی یا a یا b پر غیر صفری شرط کو پامال کرتے ہوں تو انہیں اس شکل میں ظاہر نہیں کیا جا سکتا۔

v۔ عمادی (نارمل) شکل (Normal form)

فرض کیجئے کہ A اور B خط سے بنائے گئے مقطوعے ہیں۔

فرض کیجئے کہ P مبداء سے خط AB کو کھینچے گئے عماد OP کی لمبائی ہے، جو x محور سے زاویہ α بناتا ہے۔



خاکہ 6.22

قائم مثلث ΔOPA, میں $\frac{OP}{OA} = \cos\alpha$

قائم مثلث ΔOPB, میں $\frac{OP}{OB} = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$

$$\Rightarrow \frac{1}{OA} = \frac{\cos\alpha}{p}$$

اور $\frac{1}{OB} = \frac{\sin\alpha}{p}$

مقطوعی شکل میں اوپر کے معطیات کو استعمال کرتے ہوئے

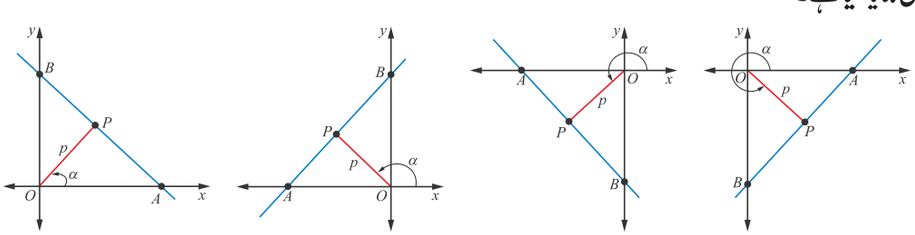
$$\frac{x}{OA}+\frac{y}{OB} = 1$$

ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $\frac{x\cos\alpha}{p}+\frac{y\sin\alpha}{p} = 1$

$$\Rightarrow x\cos\alpha + y\sin\alpha = p \qquad (6.9)$$

اس کو مساوات کی عمادی شکل کہا جاتا ہے۔

اگر p خط کے تمام مقامات میں مثبت ہے اور اگر α کو ہمیشہ x محور کے مثبت سمت سے پیمائش کی جائے تو یہ مساوات ہر صورت حال میں درست ہے جیسا کہ شکل میں بتایا گیا ہے۔



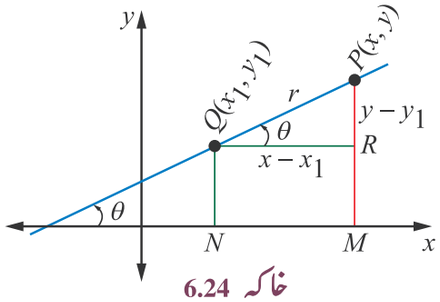
خاکہ 6.23

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:29 PM

vi۔ پیائشی شکل: (Parametric form)

ایک خط مستقیم کی پیائشی شکل $x = ar + x_1$ اور $y = br + y_1$ کی شکل ہے۔
یہاں a اور b مستقل ہیں اور r ایک پیائش ہے۔

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = r, (a \neq 0, \quad b \neq 0).$$



خاکہ 6.24

مان لیجئے کہ ہمارے پاس نقطہ $Q(x_1,y_1)$ سے گذرنے والے اور x محور سے زاویہ θ بنانے والے خط کی مساوات ہے۔ فرض کیجئے کہ Q سے فاصلے r پر اس خط پر ایک نقطہ P(x,y) ہے۔ QR کا عمود PM اور x محور کے عمود Q اور P سے بالترتیب QN اور PM کھینچئے۔
قائم مثلث QRP سے

$$x - x_1 = QR = PQ \cos\theta = r\cos\theta$$

لہٰذا، $$\frac{x - x_1}{\cos\theta} = r \quad (6.10)$$

اسی طرح سے $y - y_1 = RP = QP \sin\theta = r\sin\theta$

$$\Rightarrow \frac{y - y_1}{\sin\theta} = r \quad (6.11)$$

6.10 اور 6.11 سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{x - x_1}{\cos\theta} = \frac{y - y_1}{\sin\theta} = r \quad (6.12)$$

یہاں پیائش r ، خط پر کسی نقطہ (x,y) اور (x_1,y_1) کا درمیانی فاصلہ ہے۔ اس کو خط کا متشاکل یا پیائشی شکل کہتے ہیں۔

اس خط پر کسی نقطے کا محدد کی طرح سے لکھ سکتے ہیں۔ $(x_1 + r\cos\theta\ ,\ y_1 + r\sin\theta)$
واضح طور پر اس نقطے کا محدد r کی قیمت کے تابع ہوتا ہے۔ اس متغیر r کو پیائش کہتے ہیں۔ چونکہ r ان مساوات کا پیائش ہے،
یہ خط کے پیائشی مساوات کہلاتے ہیں۔ $x = x_1 + r\cos\theta,\ y = y_1 + r\sin\theta$
خط پر دئے گئے نقطہ کے ایک جانب واقع تمام نقاط کے لئے r کی قیمت مثبت ہے اور خط
پر دئے گئے نقطہ کے دوسرے جانب واقع تمام نقاط کے لئے r کی قیمت منفی ہے۔

vii۔ **خط مستقیم کے مساوات کی عام شکل** یہ ہے۔
$ax + by + c = 0,$ جس میں a , b اور c تمام غیر صفری ہیں۔

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:29 PM

نیچے دئے گئے جدول میں دئے گئے اطلاعات کے متعلق خط مستقیم کے اقسام کا خلاصہ کیا گیا ہے۔

شمار عدد	دئے گئے اطلاعات	خطوط مستقیم کی مساوات
1	میلان m اور y مقطوعہ (b)	$y = mx + b$
2	میلان m اور نقطہ (x_1,y_1)	$y - y_1 = m(x - x_1)$
3	دونقاط (x_1,y_1) اور (x_2,y_2)	$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$
4	x مقطوعہ (a) اور y مقطوعہ (b)	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$
5	عمادکی لمبائی P اور زاویہ (α)	$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$
6	پیمائشی شکل : پیمائشی r	$\frac{x - x_1}{\cos\theta} = \frac{y - y_1}{\sin\theta} = r$
7	عام مساوات	$ax + by + c = 0$

اگر ہمارے پاس دو مقداریں ہوں تو ہر ایک کو ایک متغیر کے ذریعہ ظاہر کر سکتے ہیں۔ اگر ایک متغیر کے تبدیلی کی شرح دوسرے متغیر کے لحاظ سے ایک مستقل ہو تو ان کے درمیان کا تعلق خطی ہے۔

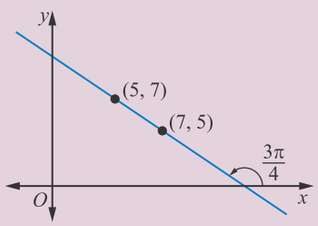
خطی مساوات میں، ایک کو غیر تابع اور دوسرے کو تابع متغیر انتخاب کرنا طبعی حقیقت کو ظاہر کرتا ہے یا ہمارے تصور کے آسانی ہوگا۔ غیر تابع متغیر عام طور پر افقی محور (x محور پر اور تابع متغیر عمودی محور (y محور) پر مرتسم کیا جاتا ہے۔ یعنی x کی قیمتیں ہمیشہ غیر تابع اور y کی قیمتیں ہمیشہ تابع ہوتے ہیں۔

دونوں محوروں میں عددی پیمائش یکساں ہونا ضروری نہیں۔ درحقیقت، کئی استعمالات میں مختلف مقداروں کو x اور y کے ذریعے ظاہر کئے جاتے ہیں۔ مثال کے طور پر، x کو فروخت کردہ موبائل فون کی تعداد کے لئے ظاہر کو سکتے ہیں اور y کو اس تجارت کے کل محاصل کے لئے ظاہر کر سکتے ہیں۔ ان صورتوں میں مختلف مقداروں کو ظاہر کرنے کے لئے مختلف پیمائشی عدد کو منتخب کرنا اکثر مفید ہوتا ہے۔ حالانکہ دونوں عددی پیمائشی کے صفر دو ابھاری محددی نظام کے مبداء پر ہوں۔

دئے گئے اطلاعات سے، خطوط مستقیم کے تصورات کو استعمال کرتے ہوئے حل کرنے کے لئے، ہمیں اوپر دئے گئے چھ مساوات میں سے کسی ایک مناسب مساوات کا انتخاب کرنا چاہئے۔

مثال 6.7 : نقاط (5,7) اور (7,5) سے گذرنے والے خط مستقیم کا میلان معلوم کیجئے۔ اس کے علاوہ x محور سے اس خط کے زاویہ میلان بھی معلوم کیجئے۔

حل : فرض کیجئے کہ (x_1,y_1) اور (x_2,y_2) بالترتیب (5,7) اور (7,5) ہیں۔ فرض کیجئے کہ θ محور سے اس خط کے زاویہ میلان ہے۔



خاکہ 6.25

خط کا میلان $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 7}{7 - 5} = -1$

ہمیں معلوم کہ $m = \tan\theta$

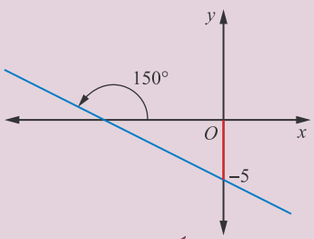
یعنی $\tan\theta = -1 \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4} \text{ or } 135°$

میلان اور x محور سے خط کا زاویہ میلان بالترتیب m= -1 اور $\theta = \frac{3\pi}{4}$ ہے۔

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:29 PM

مثال 6.8 : خط مستقیم کی مساوات معلوم کیجئے، جو y محور کے منفی سمت سے 5 کا مقطوعہ قطع کرتا ہے اور y محور سے زاویہ $150°$ بناتا ہے۔

حل: دیا گیا ہے کہ منفی y مقطوعہ 5 ہے۔ یعنی $b = -5$ اور $\theta = 150°$



خاکہ 6.26

میلان $m = \tan 150° = \tan(180° - 30°) = -\tan 30° = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

مساوات کی میلان اور مقطوعی شکل $y = mx + b.$

یعنی $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x - 5$

$x + \sqrt{3}y + 5\sqrt{3} = 0$

مثال 6.9 : ثابت کیجئے کہ نقاط $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$, $(1, -1)$ اور $\left(2, -\frac{1}{2}\right)$ ہم خط ہیں۔

حل: فرض کیجئے کہ نقاط بالترتیب $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$, $(1, -1)$ اور $\left(2, -\frac{1}{2}\right)$ ہیں۔

AB کا میلان $\frac{-1 + \frac{3}{2}}{1 - 0} = \frac{1}{2}$

BC کا میلان $\frac{-\frac{1}{2} + 1}{2 - 1} = \frac{1}{2}$

غرض AB کا میلان BC کے میلان کے مساوی ہے۔

چنانچہ A, B اور C ایک ہی خط پر واقع ہیں۔

اگر ایک متغیر کے تبدیلی کی شرح دوسرے متغیر کے لحاظ سے ایک مستقل ہو تو تبدیلی کی اس مستقل شرح کو بطور میلان لیا جا سکتا ہے۔ (جیسے رفتار، مستقل بڑھوتری، مستقل گھٹوتری...)۔ اس کے علاوہ خطوط مستقیم کے مساوات محددی محوروں کے تابع ہوتے ہیں کہ کیسے ہم اس کی وضاحت کرتے ہیں۔ غرض حقیقی دینوی مسائل میں مساوات متماثل ہونا ضروری نہیں، بلکہ راستہ اور فاصلہ ہمیشہ یکساں ہوگا۔

مثال 6.10 : پامبن پُل آبنائے پاک پر تعمیر کیا گیا ہے۔ جو تقریباً 2065 m لمبائی والا ایک ریلوے پُل ہے، جو رامیسورم کے جزیرہ گاؤں کو منڈپم سے جوڑتی ہے۔ اس پل پر ٹرین کے لئے صرف 12.5 m/s کے یکساں رفتار کی پابندی لگائی گئی ہے۔ اگر 560 m لمبائی والی ٹرین منڈپم سے پل کی طرف ابتدائی نقطے سے شروع ہوتی ہے تو

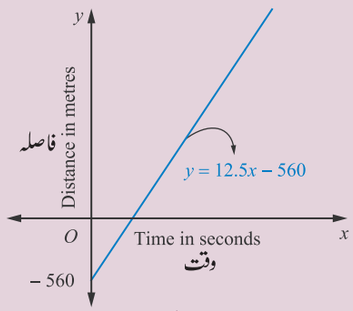
i۔ ٹرین کے حرکت کے لئے ایک مساوات معلوم کیجئے۔

ii۔ انجن کب اس جزیرے کو چھوئے گی؟

iii۔ آخری ڈبہ کب پل کے ابتدائی نقطے سے گذرے گا ؟

iv۔ پل سے گذرنے کے لئے ٹرین سے لیا گیا وقت کتنا ہے ؟

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:30 PM



خاکہ 6.27

حل: فرض کیجئے کہ x محور وقت (سکنڈوں میں) ہے، y محور میٹروں میں فاصلہ ہے۔
فرض کیجئے کہ انجن مبداء O پر ہے۔لہٰذا ٹرین کی لمبائی منفی y مقطوعہ ہے۔
یکساں رفتار 12.5 m/s ٹرین کے حرکت کا میلان ہے۔

$$\left(\text{رفتار} = \frac{\text{فاصلہ}}{\text{وقت}}\right)$$

چونکہ ہمیں میلان اور y مقطوعہ دیا گیا ہے، خط کی مساوات یہ ہے۔

$$y = mx + b \qquad (6.13)$$

i۔ ٹرین کے حرکت کی مساوات، جب m = 12.5 اور b = –560 ہوتو

$$y = 12.5x - 560$$

ii۔ جب انجن پل کے دوسرے جانب (جزیرہ) کو چھوتی ہے۔

$$y = 2065 \text{ اور } b = 0$$
$$2065 = 12.5x$$
$$x = 165.2 \text{ seconds.}$$

iii۔ جب y = 0 آخری ڈبہ پل کے ابتدائی نقطے سے گذرتا ہے۔

$$0 = 12.5x - 560$$
$$x = 44.8 \text{ seconds.}$$

$$2065 = 12.5x - 560$$
$$x = 210 \text{ seconds.}$$

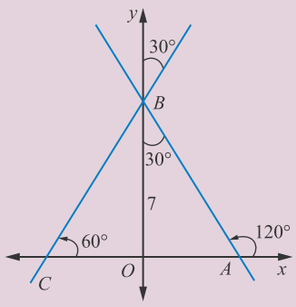
iv۔ جب y = 2065، پل سے گذرنے کے لئے ٹرین سے لیا گیا وقت یہ ہے۔

ٹرین کے آخری ڈبہ کو مبداء مان کر خط مستقیم کی مساوات معلوم کر سکتے ہیں۔یہ مساوات اوپر کے مساوات کے متماثل ہونا ضروری نہیں، مگر ٹرین کے راستے کا نقشہ، فاصلہ، وقت وغیرہ یکساں ہوں گے۔کوشش کیجئے)

مثال 6.11 :
خطوط مستقیم کی مساوات معلوم کیجئے جو y مقطوعہ 7 اور y محور اور اس خط کا درمیانی زاویہ 30° بناتے ہیں۔

حل : محور سے زاویہ بنانے والے دو خطوط مستقیم ہیں۔ خاکے سے، یہ بات واضح ہے کہ یہ دو خطوط 30° محور سے زاویے اور جاتے ہیں۔

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:30 PM



خاکہ 6.28

خاکہ سے یہ واضح ہے کہ x محور پر دو خطوط 60° اور 120° زاویے بناتے ہیں۔

فرض کیجئے کہ m_1 ، $\tan 60° = \sqrt{3}$ اور m_2 ، $\tan 120°$ ہے۔

$$= \tan(180° - 60°) = -\tan 60° = -\sqrt{3}$$

$m_1 = \sqrt{3}, m_2 = -\sqrt{3}$ اور $b = 7$

خطوط کے مساوات $y = m_1x + b$ اور $y = m_2x + b$

$y = \sqrt{3}x + 7$ اور $y = -\sqrt{3}x + 7$

جب کبھی دو نقاط دئے گئے ہوں، دو نقاط کی شکل یا نقطہ اور میلان کی شکل کو اختیار کر سکتے ہیں۔ اس کے علاوہ جب دو مقطوعات دئے گئے ہوں۔ مقطوعات کی شکل یا دو نقاط کو اختیار کر سکتے ہیں۔ ذیل کی مثال، 5 ویں باب میں تواتر اور سلسلوں کے تصورات کو استعمال کرتے ہوئے حل کیا گیا ہے۔ آیئے اس مسئلے کو خطوط مستقیم کے تصورات کو استعمال کر کے حل کریں۔

مثال 6.12 : ایک حسابی تواتر کی ساتویں رقم 30 ہے اور دسویں رقم 21 ہے۔

i۔ اس AP کے پہلے کے تین ارقام معلوم کیجئے۔

ii۔ اس کی کونسی رقم صفر ہے (اگر موجود ہو تو)۔

iii۔ خط مستقیم کے میلان اور A.P. کے مشترک فرق کے درمیان تعلق معلوم کیجئے۔

حل: چونکہ حسابی تواتر میں مستقل بڑھوتری یا گھٹوتری ہوتی ہے، یہ ایک خطی تفاعل ہے۔ فرض کیجئے کہ x محور رقموں کی تعداد ہے، اوپر y محور رقم کی قیمت ہے۔ فرض کیجئے کہ (x_1, y_1) اور (x_2, y_2) بالترتیب (7,30) اور (10,21) ہیں، مساوات کو استعمال کرتے ہوئے۔

ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 30 = \frac{21 - 30}{10 - 7}(x - 7)$$

$$y = -3x + 51 \qquad (6.14)$$

i۔ مساوات (??) میں x = 1, 2, 3 بدلتے ہوئے، ہم AP کے پہلے کے تین رقمیں 48، 45 اور 42 حاصل کرتے ہیں۔

ii۔ مساوات y = 0 میں y = 0 بدلتے ہوئے ہم یہ حاصل کرتے ہیں۔

$$0 = -3x + 51 \quad \Rightarrow x = 17.$$

یعنی AP کی سترہویں رقم صفر ہے۔

iii۔ واضح طور پر خط کا میلان −3، اس AP کے مشترک فرق کے مساوی ہے۔

اس مثال سے، خط کا میلان AP کے مشترک فرق کے مساوی ہے (اس کو ثابت کرنے کی کوشش کیجئے)۔

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:30 PM

مثال 6.13 : کسی مخصوص قسم کی CD کے مانگ کی مطلوبہ تعداد 22,000 ہے، جبکہ ایک اکائی کی قیمت ₹8 ہے۔خریدار اس سی ڈی کو ₹30 یا اس سے زیادہ اکائی قیمت پر نہیں خریدے گا، تو دوسری طرف کارخانہ دار(manufacturer) کوئی بھی سی ڈی کو ₹6 یا اس سے کم قیمت میں فروخت نہیں کرے گا۔ بہرحال، اگر اس کی قیمت ₹14 ہوتو کارخانہ دار 24,000 مہیا کرسکتا ہے۔فرض کیجئے کہ درکار مقدار اور مہیا کردہ مقدار خطی لحاظ سے قیمت کے متناسب ہے۔

i۔ مانگ کی مساوات۔ ii۔ فراہمی کی مساوات

iii۔ مارکٹ کی ہم وزنی مقدار اور قیمت iv۔ مانگ اور فراہمی کی مقدار جب اس کی قیمت ₹10 ہے۔

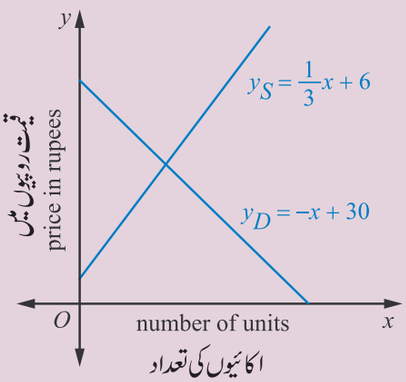
حل: فرض کیجئے کہ x محور ہزاروں میں اکائیاں کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے اور y محور روپیوں میں فی اکائی قیمت کو ظاہر کرتا ہے۔

i۔ مانگ کے تفاعل کے لئے، فرض کیجئے کہ (x_1,y_1) اور (x_2,y_2) بالترتیب (22,8) اور (0,30) ہیں۔

دونقاط کے شکل کے لئے، مانگ کا تفاعل یہ ہے۔

$$\frac{y-8}{30-8} = \frac{x-22}{0-22}$$

$$\Rightarrow y_D = -x+30 \quad \text{(مانگ کا تفاعل)}$$



خاکہ 6.29

ii۔ فراہمی کے تفاعل کے لئے، فرض کیجئے کہ (x_1,y_1) اور (x_2,y_2) بالترتیب (0,6) اور (24,14) ہیں۔

دونقاط کے شکل کو استعمال کرنے پر، ہمیں فراہمی کا تفاعل اس طرح حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{y-6}{14-6} = \frac{x-0}{24-0}$$

$$y_S = \frac{1}{3}x + 6 \quad \text{(فراہمی کا تفاعل)}$$

iii۔ توازنی کاروبار پر مانگ، فراہمی کے مساوی ہوتا

$$y_D = y_S \quad \Rightarrow -x+30 = \frac{1}{3}x+6$$

یعنی $x = 18$ اور $y = 12$. ہے۔

توازنی کاروبار 12 ہے، مقدار کی تعداد 18000 اکائیاں ہیں۔

iv۔ جب قیمت $y = 10$ ہو، تو مانگ کے تفاعل $y_D = -x + 30$ سے ہمیں $x = 20$ حاصل ہوتا ہے۔

یعنی، مانگ 20,000 اکائیاں ہے۔

اسی طرح سے، فراہمی کے تفاعل $y_S = \frac{1}{3}x + 6$ سے ہمیں $x = 12$ حاصل ہوتا ہے۔

چنانچہ، فراہمی 12,000 اکائیاں ہیں۔

مثال 6.14 : خط مستقیم کی مساوات معلوم کیجئے۔ جو $(-1, 1)$ سے گذرتا ہے اور مساوی مقطوعہ قطع کرتا ہے۔مگر دونوں محوروں میں مخالف نشانیاں رکھتے ہیں۔

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:31 PM

حل : فرض کیجئے کہ محوروں سے قطع کردہ مقطوعے a اور −a ہیں۔

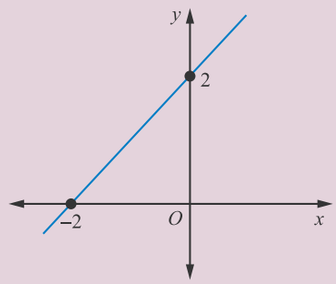
خط کی مساوات کی شکل

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{a} = 1 \Rightarrow x - y = a.$$

چونکہ یہ $(-1, 1)$ سے گذرتا ہے۔

$$\Rightarrow (-1) - (1) = a \Rightarrow a = -2$$

خط کی مساوات یہ ہے۔ $x - y + 2 = 0.$



خاکہ 6.30

مثال 6.15 : L منفی میلان والا ایک خط مستقیم نقطہ (9,4) سے گذرتا ہے اور مثبت محددی محوروں پر نقاط P اور Q پر قطع کرتا ہے، جیسے جیسے L تبدیل ہوتا ہے، |OP| + |OQ| کا کم ترین قیمت معلوم کیجئے، یہاں O مبداء ہے۔

حل: فرض کیجئے کہ خط L کا میلان m ہے۔ چونکہ یہ خط نقطہ (9,4) سے گذرتا ہے، خط L کی مساوات $y - 4 = m\,(x-9)$ ہے۔

نقاط P اور Q بالترتیب $(9 - \frac{4}{m},\ 0)$ اور $(0,\ 4 - 9m)$ ہیں۔

$$\begin{aligned}
(m<0)\ |OP| + |OQ| &= \left|9 - \frac{4}{m}\right| + |4 - 9m| \quad (\ m = -k,\ k > 0 \text{ لیجئے} \qquad m < 0\ ) \\
&= \left|9 + \frac{4}{k}\right| + |4 + 9k| \\
&= (9 + \frac{4}{k}) + (4 + 9k) \quad \text{(تمام رقمیں مثبت ہیں)} \\
&= (4 + 9) + (\frac{4}{K} + 9K) \\
&\geq 13 + 2\sqrt{\frac{4}{K} \times 9K} \quad \text{(ہندسی اوسط} \geq \text{حسابی اوسط)} \\
|OP| + |OQ| &\geq 25
\end{aligned}$$

لہٰذا |OP| + |OQ| کی کم ترین حقیقی قیمت 25 ہے۔

مثال 6.16 : مبداء سے ایک خط کو کھینچے گئے عمود کی لمبائی 12 ہے اور یہ x محور کے مثبت سمت سے زاویہ 150° بناتا ہے۔ خط کی مساوات معلوم کیجئے۔

حل: یہاں، $p = 12$ اور $\alpha = 150°$ ہے۔ اس لئے درکار خط کے مساوات کی شکل

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$$

یعنی $x\cos 150° + y\sin 150° = 12$

$$\Rightarrow \sqrt{3}x - y + 24 = 0$$

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:31 PM

مثال 6.17 : محددی محوروں سے ایک خط کے ذریعے سے بنے ہوئے مثلث کا رقبہ 36 مربع اکائیاں ہے۔ خط کی مساوات معلوم کیجئے اگر مبداء سے اس خط کو کھینچا گیا عمود محور کے مثبت سے زاویہ $45°$ بناتا ہے۔

حل: فرض کیجئے کہ مبداء سے درکار خط کو کھینچے گئے عمود کی لمبائی ہے۔

یہ عمود x محور سے $45°$ بناتا ہے۔

درکار خط کی مساوات کی شکل

$$\begin{aligned} x\cos\alpha + y\sin\alpha &= p \\ \Rightarrow x\cos 45° + y\sin 45° &= p \\ \Rightarrow x + y &= \sqrt{2}p \end{aligned}$$

یہ مساوات محددی محوروں کو $A(\sqrt{2}p, 0)$ اور $B(0, \sqrt{2}p)$ پر قطع کرتی ہے۔

ΔOAB کا رقبہ یہ ہے۔

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{2}p \times \sqrt{2}p = 36 \quad \Rightarrow p = 6 \quad (\because p \text{ مثبت ہے})$$

لہٰذا، درکار خط کی مساوات یہ ہے۔

$$x + y = 6\sqrt{2}$$

مثال 6.18 : خطوط کی مساوات معلوم کیجئے جو x محور سے زاویہ $60°$ بناتے ہیں اور خط $x - y + 3 = 0$ کے ہم راہ، نقطہ (4,7) سے $5\sqrt{2}$ اکائیاں کے فاصلے پر ہیں۔

حل: خط $x - y + 3 = 0$ کے ڈھلوان کا زاویہ $45°$ ہے اور اس خط پر ایک نقطہ (4,7) ہے۔

پیمائش شکل کے استعمال کرتے ہوئے۔ (Using parametric form)

$$\frac{x - x_1}{\cos\theta} = \frac{y - y_1}{\sin\theta} = r,$$

اوپر کی مساوات کو اس طرح سے لکھ سکتے ہیں۔

$$\frac{x-4}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{y-7}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \pm 5\sqrt{2}$$ ((4,7) کے دونوں جانب $r = \pm 5\sqrt{2}$ کے فاصلہ پر)

یعنی $x - 4 = y - 7 = \pm 5.$

(4,7) کے دونوں جانب $5\sqrt{2}$ اکائیاں کے فاصلے پر خطوط پر نقاط $(4+5, 7+5)$ اور $(4-5, 7-5)$ ہیں۔

خطوط پر نقاط (9,12) اور (–1,2) ہیں اور دیا گیا میلان $m = \tan 60° = \sqrt{3}$ ہے۔

لہٰذا، درکار مساوات، میلان اور نقطہ شکل کو استعمال کرنے پر ہمیں

$\sqrt{3}x - y + (12 - 9\sqrt{3}) = 0$ اور $\sqrt{3}x - y + (2 + \sqrt{3}) = 0$ حاصل ہوتا ہے۔

6.3.4 عام شکل سے دوسری شکلیں: (General form to other forms)

$Ax + By + C = 0$، جس میں A, B اور C حقیقی اعداد ہیں۔ A اور B بیک وقت صفر کے مساوی نہیں ہو سکتے، کو عام شکل کے A, B اور C کے لحاظ سے دوسرے شکلوں میں ظاہر کر سکتے ہیں۔

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:31 PM

i۔ میلان اور مقطوعی شکل (Slope and intercept form) $(B \neq 0)$: دی گئی مساوات کو اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \quad \Rightarrow \quad \text{میلان} = -\frac{A}{B} \quad \text{اور} \quad \text{مقطوعہ y} = -\frac{C}{B}$$

ii۔ مقطوعات کی شکل (Intercepts form) : دی گئی مساوات کو اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$\frac{x}{\left(-\frac{C}{A}\right)} + \frac{y}{\left(-\frac{C}{B}\right)} = 1 \quad \text{(A, B اور C تمام غیر صفری ہیں)}$$

مقطوعی شکل سے موازنہ کرنے پر، ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے۔

$$(a) = \frac{-C}{A} \text{ مقطوعہ x} \quad \text{اور} \quad (b) = \frac{-C}{B} \text{ مقطوعہ y}$$

iii۔ عمادی شکل (Normal form) : یہاں A اور B صفر کے مساوی نہیں ہیں۔ $Ax + By + C = 0$ سے $x \cos\theta + y \sin\theta = p$ کے ساتھ موازنہ کرنے پر ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{-A}{\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{-B}{\sqrt{A^2+B^2}}y = \frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

یہاں $\cos\alpha = \frac{-A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \sin\alpha = \frac{-B}{\sqrt{A^2+B^2}}$ اور $p = \frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

مثال 6.19 : مساوات $\sqrt{3}x - y + 4 = 0$ کو ذیل کی معادل شکل میں ظاہر کیجئے۔

i۔ میلان اور مقطوعہ شکل ii۔ مقطوعی شکل iii۔ عمادی شکل

حل: i۔ میلان اور مقطوعی شکل (Slope and intercept form)

یہ دیا گیا ہے کہ

$$\sqrt{3}x - y + 4 = 0$$
$$\Rightarrow y = \sqrt{3}x + 4 \qquad (6.15)$$

اوپر کی مساوات کو مساوات $y = mx + b$ سے موازنہ کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{میلان} = \sqrt{3} \quad \text{اور} \quad \text{مقطوعہ y} = 4$$

ii۔ مقطوعی شکل (Intercept form)

$$\sqrt{3}x - y + 4 = 0 \Rightarrow \sqrt{3}x - y = -4$$
$$\frac{-\sqrt{3}}{4}x + \frac{y}{4} = 1$$

یعنی

$$\frac{x}{\left(-\frac{4}{\sqrt{3}}\right)} + \frac{y}{4} = 1 \qquad (6.16)$$

اوپر کی مساوات کے ساتھ مساوات $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ کا موازنہ کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{x مقطوعہ} = -\frac{4}{\sqrt{3}} \quad \text{اور} \quad \text{y مقطوعہ} = 4$$

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:31 PM

iii۔ عمادی شکل (Normal form)

$$\sqrt{3}x - y + 4 = 0$$
$$(-\sqrt{3})x + y = 4, \qquad (6.17)$$

اوپر کی مساوات کو مساوات $Ax + By + C = 0$ سے موازنہ کرنے پر

یہاں $A = -\sqrt{3}$ اور $B = 1, \sqrt{A^2 + B^2} = 2$

چنانچہ اوپر کی مساوات کو 2 سے تقسیم کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{-\sqrt{3}x}{2} + \frac{y}{2} = 2 \qquad (6.18)$$

اوپر کی مساوات کو مساوات $x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$ سے موازنہ کرنے پر

اگر ہم $\cos\alpha = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ اور $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ اور $p = 2$ لیں تو

$\Leftarrow \alpha = 150° = \frac{5\pi}{6}$ اور عمادی لمبائی $(p) = 2$ ہے۔

عمادی شکل ہے۔ $x \cos\frac{5\pi}{6} + y \sin\frac{5\pi}{6} = 2$

دیئے گئے مساوات کو درکار شکل میں ظاہر کرنے کے، کبھی کبھار یکساں ارقام کے سراعداد کے متناسب کے خصوصیت کو استعمال کرنا زیادہ آسان ہے۔

مثال 6.20 : $\sqrt{3}x + y + 4 = 0$ کو عمادی شکل میں دوبارہ لکھئے۔

حل :

درکار مساوات کی شکل $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$

دی گئی شکل $-\sqrt{3}x - y = 4$ (کیونکہ p ہمیشہ مثبت ہے)

چونکہ یہ دونوں ایک ہی مساوات کو ظاہر کرتے ہیں، سراعداد متناسب ہیں۔ ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\cos\alpha}{-\sqrt{3}} = \frac{\sin\alpha}{-1} = \frac{p}{4}$$

$$\frac{\cos\alpha}{-\sqrt{3}} = \frac{\sin\alpha}{-1} = \frac{p}{4} = \frac{\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}}{\sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\alpha = \frac{-\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\alpha = \frac{-1}{2} \text{ and } p = \frac{4}{2}$$

$$\alpha = 210° = \frac{7\pi}{6} \text{ and } p = 2$$

مساوات کی عمادی شکل یہ ہے۔ $x \cos\frac{7\pi}{6} + y \sin\frac{7\pi}{6} = 2$

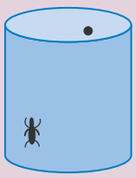
(کمپونڈو اور ڈیوئیڈنڈو میں جب کبھی ایک رقم کو مربع ہٹایا جاتا ہے، تو اس کا جذرالمربع بھی ہٹادیا جاتا ہے۔)

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:32 PM

ایک منحنی سطح پر دو نقاط کے درمیان خلیل ترین راستہ معلوم کرنا اکثر مشکل ہوسکتا ہے۔ حالانکہ، ایک استوانے سطح پر راستے کی لمبائی تبدیلی نہیں ہوتی اگر منحنی سطح سیدھا ہو۔ ذیل کے مسئلہ کے لئے، کھوکھلا استوانہ کو کھولتے ہوئے اسے سیدھا کر کے ایک مستطیل بنا لیتے ہیں، ایک انعکاس سے ہمیں چونٹی کا راستہ معلوم ہوتا ہے۔

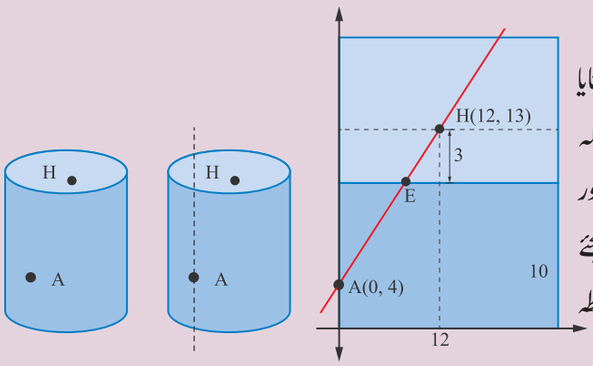
مثال 6.21 :

ایک کھوکھلا استوانی برتن لیجئے، جس کا محیط 24 cm اور اونچائی 10 cm ہو۔ اس کے قاعدے سے برتن کے باہر 4 cm اوپر ایک چیونٹی بیٹھی ہے۔ اوپر سے 3 cm نیچے، برتن کے اندر شکل کے لحاظ سے چیونٹی کے مقابل شہد کا ایک قطرہ ہے۔ (i) شہد حاصل کرنے کے لئے اس چیونٹی کو کتنا کم ترین فاصلہ طے کرنے کی ضرورت ہے؟ (ii) چیونٹی کو طے کردہ فاصلہ کی مساوات کیا ہے؟ (iii) استوانہ میں چیونٹی کہاں سے داخل ہوگی؟



خاکہ 6.31

یہاں ایک تصویر ہے، جو چیونٹی اور شہد کے مقام کی تشریح کرتی ہے۔



خاکہ 6.32

حل : کھوکھلے استوانے کو کھولتے ہوئے اسے سیدھا کر کے مستطیل بنایا جاتا ہے اور ایک انعکاس سے ہمیں چیونٹی کا راستہ معلوم ہوتا ہے، جیسا کہ اس خاکے میں بنایا گیا ہے۔ فرض کیجئے کہ قاعدہ کا خط x میں محور ہے اور A کے ذریعے عمودی خط (چیونٹی کا ابتدائی مقام) y محور ہے۔ فرض کیجئے کہ E شہد کے قطرے کا مقام ہے اور برتن کے اندر چیونٹی کا داخلی نقطہ ہے۔ دئے گئے اطلاعات سے ہمارے پاس ہے۔

فرض کیجئے $A(x_1, y_1)$ اور $H(x_2, y_2)$ بالترتیب (0,4) اور (12,13) ہیں۔

i۔ A اور H کا قلیل ترین فاصلہ

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$$

شہد حاصل کرنے کے لئے چیونٹی کو 15 cm فاصلہ طے کرنے کی ضرورت ہے۔

ii۔ راستہ AH کی مساوات یہ ہے۔

$$\frac{y-4}{13-4} = \frac{x-0}{12-0}$$

$$y = 0.75x + 4 \qquad (6.19)$$

iii۔ داخلی نقطے E سے

$$y = 10 \Rightarrow x = 8$$

$$E = (8,\ 10)$$

مبداء کو مختلف مقامات پر لیتے ہوئے، مساوات کے مختلف شکل حاصل کر سکتے ہیں، مگر راستہ اور فاصلہ اوپر کی طرح سے یکساں ہوں گے۔

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:32 PM

مشق 6.2

1) خطوط کی مساوات معلوم کیجئے جو نقطہ (1,1) سے گذرتے ہوں۔

(i) y مقطوعہ (−4) کے ساتھ (ii) میلان 2 کے ساتھ۔

(iii) اور (−2,3) (iv) اور مبداء سے عمود x محور سے زاویہ 60° بناتا ہے۔

2) اگر دو محوروں کے درمیان ایک قطاع خط کا وسطی نقطہ P(r,e) ہے تو ثابت کیجئے کہ $\frac{x}{r}+\frac{y}{c}=2$.

3) خط کی مساوات معلوم کیجئے جو نقطہ (1,5) سے گذرتا ہے اور محددی محوروں کو 3:10 کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

4) اگر مبداء سے ایک خط کے عمود کی لمبائی p ہے، جس کے محوروں پر مقطوعات بالترتیب a اور b ہوں تو

ثابت کیجئے کہ $\frac{1}{p^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$

5) پانی کا عام نقطہ جوش 100°C یا 212°F ہے اور پانی کا نقطہ انجماد 0°C یا 32°F ہے۔

(i) C اور F کے درمیان خطی تعلق معلوم کیجئے۔

6) ایک مقام P سے ایک نشانہ پر ضرب لگانے کے لئے ایک شئے کو مستقل رفتار سے اڑایا جاتا ہے۔ 15 ویں سکنڈ پر یہ نشانہ سے 1400 m دور تھا اور 18 ویں سکنڈ پر 800 m دور تھا۔ معلوم کیجئے (i) مقام اور نشانہ کے درمیان فاصلہ

(ii) 15 سکنڈوں میں اس شئے کا طے کردہ فاصلہ (iii) نشانے پر ضرب لگانے کے لئے درکار وقت

7) سال 2005 اور 2010 میں ایک شہر کی آبادی بالترتیب 1,35,000 اور 1,45,000 ہے۔ سال 2015 میں تقریبی آبادی معلوم کیجئے۔ (فرض کیجئے کہ آبادی میں اضافہ مستقل ہے)۔

8) خط کی مساوات معلوم کیجئے، اگر مبداء سے عمود x محور سے 30° زاویہ بناتا ہے اور اس کی لمبائی 12 ہے۔

9) خط مستقیم کی مساوات معلوم کیجئے جو (8,3) سے گذرتا ہے اور مقطوعات کا حاصل جمع 1 ہے۔

10) (i) میلان کا تصور (ii) ایک خط مستقیم اور (iii) کسی دوسرے طریقے سے ثابت کیجئے کہ نقاط (1,3)، (2,1) اور $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$ ہم خط ہیں۔

11) ایک خط مستقیم نقطہ A(1,2) سے گذرتا ہے اور میلان $\frac{5}{12}$ ہے۔ خط پر نقاط معلوم کیجئے جو A سے 13 اکائیوں کے فاصلے پر ہیں۔

12) 150 m لمبائی والی ٹرین 12.5 m/s کے مستقل رفتار سے حرکت کرتی ہے۔ (i) ٹرین کے حرکت کی مساوات

(ii) ایک کھمبے سے گذرنے کا وقت (iii) 850m لمبائی والے پل سے گذرنے کا وقت معلوم کیجئے۔

13) چھت میں ایک کانٹے سے ایک کمانی جڑی ہوئی ہے۔ اس کو پھیلانے کے لئے کئی مختلف وزن اس کمانی سے لگائے گئے اور ہر وقت اس کمانی کی کل لمبائی کی پیمائش ذیل جدول میں دی گئی ہے۔

وزن (کلوگرام)	Weight (kg)	2	4	5	8
طول (سم)	Length (cm)	3	4	4.5	6

(i) نتائج کو ظاہر کرنے والی ترسیم کھینچئے۔ (ii) کمانی کی لمبائی اور اس پر وزن کے نسبت کی مساوات معلوم کیجئے۔

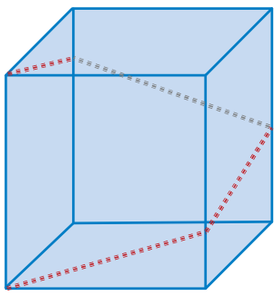
(iii) کمانی کی اصل لمبائی کیا ہے؟ (iv) اگر کمانی کو 9 cm کو لمبائی کو پھیلانا ہو تو اس پر کتنا وزن لگانا چاہئے؟

(v) کمانی کی لمبائی کیا ہوگی, جب اس پر 6 کلوگرام کا وزن لگایا گیا ہو۔

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:32 PM

14) ایک خاندان پکوان کے لئے 14.2 kg وزن کا LPG cylinder استعمال کر رہا ہے۔(کل وزن 29.5 kg ہے، جس میں خالی استوانے کا وزن 15.3 kg شامل ہے)۔اگر اس مستقل شرح سے استعمال کیا جائے تو 24 دنوں تک رہتا ہے۔اس کے بعد نئے استوانے سے تبدیل کر لیتے ہیں۔ (i) استوانے میں گیس کی مقدار اور دنوں کی نسبت کی مساوات معلوم کیجئے۔(ii) پہلے 92 دنوں کے لئے ترسیم کھینچئے۔

15) ایک شاپنگ مال میں 720×800×800 اکائیوں کے ابعاد کا ایک مکعب نما ہال ہے، جس میں ایک برقی سیڑھی (Escalator) کی سہولت راستے میں تعمیر کرنے کی ضرورت ہے۔جیسا کہ اس خاکے میں نقاطی خط میں بتایا گیا ہے۔ (i) سیڑھی کی کم از کم کل لمبائی (ii) اس سیڑھی کے رخ کے تبدیلی ہونے کی لمبائیاں (iii) مڑنے کے نقاط پر سیڑھی کا میلان معلوم کیجئے۔



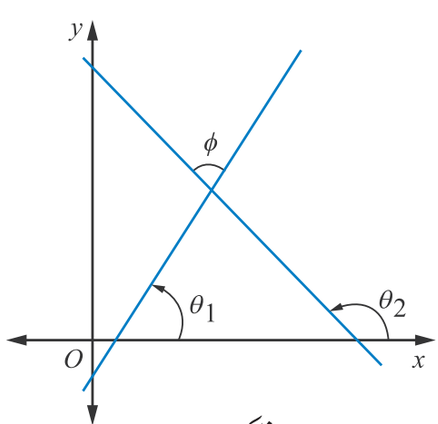
خاکہ 6.33

6.4 دو خطوط مستقیم کے درمیان زاویہ (Angle between two straight lines)

ایک مستوی میں دو خطوط مستقیم یا تو متوازی یا منطبق یا قطع کرتے ہوں گے۔عام طور پر جب دو خطوط مستقیم ایک دوسرے کو قطع کرتے ہو، تو نقطہ، تقاطع پر دو زاویے بناتے، ہیں۔ایک زاویہ حادّہ اور دوسرا زاویہ منفرجہ یا مساوی۔یہ دونوں زاویے ایک دوسرے کے مکملہ زاویے (حاصل جمع) ہوں گے۔تعریف کے ذریعے، جب ہم 'دو خطوط مستقیم کے درمیان زاویہ' کہیں تو اس کا مطلب دو خطوط کے درمیان زاویہ حادّہ ہے۔

فرض کیجئے کہ $y = m_1x + c_1$ اور $y = m_2x + c_2$

خطوطِ مستقیم کے دو مساوات ہیں اور فرض کیجئے کہ یہ دو خطوط x محور سے زاویے θ_1 اور θ_2 بناتے ہیں۔



خاکہ 6.34

تو $m_1 = \tan\theta_1$ اور

$m_2 = \tan\theta_2$

اگر ϕ (فائی) ان دونوں خطوط مستقیم کا درمیانی زاویہ ہو تو

$$\phi = \theta_2 - \theta_1 \Rightarrow \tan\phi = \tan(\theta_2 - \theta_1)$$

$$\Rightarrow \tan\phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2m_1}$$

$$\Rightarrow \phi = \tan^{-1}\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2m_1}$$

اگر $\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2m_1}$ مثبت ہو تو ϕ زاویہ حادّہ ہے اور اگر یہ منفی ہو تو دو خطوط کے درمیان ϕ زاویہ منفرجہ ہے۔لہٰذا، ϕ زاویہ حادہ یہ ہے۔ $\tan^{-1}\left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2m_1}\right|$

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:33 PM

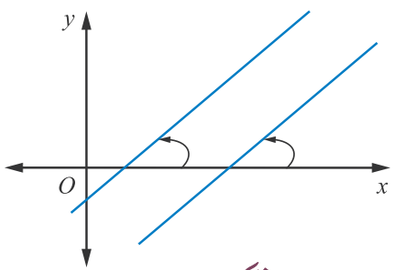
6.4.1 متوازی خطوط کے لئے شرط (Condition for Parallel lines)

ایک ہی مستوی میں خطوط جو ایک دوسرے کو قطع نہیں کرتے ہوں، وہ متوازی خطوط کہلاتے ہیں۔

فرض کیجئے کہ $y = m_1x + c_1$ اور $y = m_2x + c_2$ دو خطوط مستقیم کے مساوات ہیں۔

اگر یہ دو خطوط متوازی ہوں، تو خطوط کا درمیانی زاویہ صفر ہے یا π (پئی) ہے۔

اگر خطوط کا درمیانی زاویہ ϕ (فئی) ہو تو $\phi = 0$ ہے۔



خاکہ 6.35

$$\Rightarrow \tan\phi = 0$$

$$\Rightarrow \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2m_1} = 0 \Rightarrow m_2 - m_1 = 0 \Rightarrow m_2 = m_1$$

یعنی متوازی خطوط یکساں میلان رکھتے ہیں۔ اگر دو غیر عمودی خطوط یکساں میلان رکھتے ہوں، تو یہ متوازی ہیں۔ تمام عمودی خطوط متوازی ہیں۔

اگر دو خطوط کے مساوات عام شکل $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ اور $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ میں ہوں، تو خطوط کے متوازی ہونے کی شرط یہ ہے۔

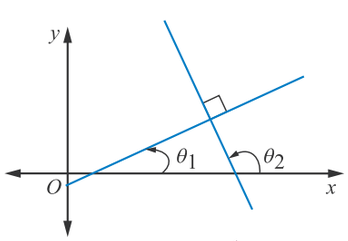
$$a_1b_2 = a_2b_1 \quad \text{یا} \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

i۔ $ax + by + c = 0$ کے متوازی خطوط $ax + by = k$. کی شکل میں ہوتے ہیں۔

ii۔ $ax + by + c = 0$ کے متوازی خطوط جو نقطہ (x_1, y_1) سے گذرتے ہوں تو ان کی مساوات $ax + by = ax_1 + by_1$ ہے۔

6.4.2 عمودی ہونے کے لئے شرط (Condition for perpendicular lines)

اگر خطوط $y = m_1x + c_1$ اور $y = m_2x + c_2$ عمودی ہوں تو ان خطوط کا درمیانی زاویہ $\frac{\pi}{2}$ ہے۔ اگر خطوط کا درمیانی زاویہ ϕ ہو تو



خاکہ 6.36

$$\tan\phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2m_1} \Rightarrow \cot\phi = \frac{1 + m_2m_1}{m_2 - m_1}$$

$$\cot\frac{\pi}{2} = \frac{1 + m_2m_1}{m_2 - m_1} \Rightarrow 1 + m_1m_2 = 0$$

$$\Rightarrow m_1m_2 = -1$$

اگر دو خطوط کے مساوات عام شکل $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ اور $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ میں ہوں، تو خطوط کے عمودی ہونے کی شرط یہ ہے۔ $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$

i۔ $ax + by + c = 0$ کے عمودی خطوط $bx - ay = k$ کی شکل میں ہوتے ہیں۔

ii۔ $ax + by + c = 0$ کے عمودی خطوط جو نقطہ (x_1, y_1) سے گذرتے ہوں تو ان کی درکار مساوات $bx - ay = bx_1 - ay_1$

خطوط کی شکل	متوازی ہونے کے لئے شرط	عمودی ہونے کے لئے شرط
$y = m_1x + c_1$ اور $y = m_2x + c_2$	$m_2 = m_1$	$m_1m_2 = -1$
$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ اور $a_2x + b_2y + c_2 = 0$	$a_1b_2 = a_2b_1$	$a_1a_2 + b_1b_2 = 0$

Untitled-2
Wednesday, October 19, 2022 9:04:34 PM

اہم نوٹ: اگر $m_1.m_2 = -1$ ہوتو دوخطوط عمودی ہیں۔مگراس کا برعکس درست نہیں، کیونکہ خطوط محوروں کے متوازی ہوتے ہیں،اس نتیجے کو استعمال نہیں کرسکتے،اگر چہ کہ وہ خطوط عمودی ہوں۔

6.4.3 ایک خط مستقیم کے لحاظ سے ایک نقطے کا مقام (Position of a point with respect to a straight line)

کوئی بھی خط $ax + by + c = 0 \ (c \neq 0)$ مکمل مستوی کو دوحصوں میں تقسیم کرتا ہے۔

i۔ وہ حصہ جس میں مبداء ہوخط کا مبداء کے جانب کا حصہ کہلاتا ہے اور

ii۔ وہ حصہ جس میں مبداء نہ ہوخط کا غیر مبداء کے جانب کا حصہ کہلاتا ہے۔

ایک نقطہ $P(x_1,y_1)$ کے مبداء کے جانب یا غیر مبداء کے جانب ہے، جیسا کہ $ax + by + c = 0 \ (c \neq 0)$ اور $ax_1 + by_1 + c$ یکساں نشان یا مخالف نشان کے ہیں۔

اگر $c > 0$ ہوتو $P(x_1,y_1)$ خط $ax_1 + by_1 + c$ کے مبداء کی جانب یا غیر مبداء کی جانب ہے جیسا کہ مثبت ہے یا منفی۔

مساوات $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ اور $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ کو اس طرح دوبارہ لکھنے کے بعد،

i۔ اگر $c_1 > 0$ اور $c_2 > 0$ دونوں $a_1a_2 + b_1b_2 < 0$ ہوتو ان کا درمیانی زاویہ حادہ ہے۔

ii۔ $a_1a_2 + b_1b_2 > 0$ ہو،تو ان کا درمیانی زاویہ منفرجہ ہے۔

6.4.4 فاصلے کے ضابطے (Distance formulas)

آیئے ذیل کے درمیان فاصلہ معلوم کرنے کے ضابطے انکشاف کرتے ہیں۔

i۔ دونقاط ii۔ ایک نقطے سے ایک خط iii۔ دومتوازی خطوط

i۔ دونقاط (x_1,y_1) اور (x_2,y_2) کا درمیانی فاصلہ اس ضابطے سے دیا جاتا ہے۔

$$D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

اوپر کا ضابطے پہلے ہی چھوٹی جماعت میں ثابت کرچکے ہیں۔

ii۔ ایک نقطہ $P(x_1,y_1)$ سے ایک خط $ax + by + c = 0$ کا فاصلہ یہ ہے۔ $\left|\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$

ثبوت : فرض کیجئے کہ AB دیا گیا خط ہے۔

$$ax + by + c = 0 \qquad (6.20)$$

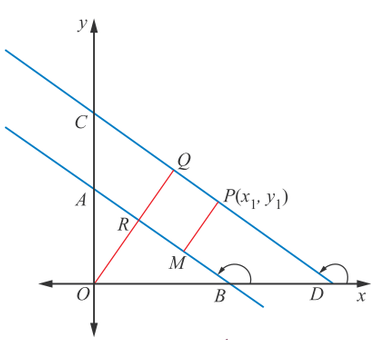
دیا گیا نقطہ $P(x_1,y_1)$ ہے۔

CD کے متوازی P کے ذریعے ایک خط AB کھینچئے اور $P(x_1,y_1)$ سے AB کا عمود کھینچئے اور M سے ملایئے۔اس کے علاوہ مبداء سے AB کا عمود کھینچئے جو R پر اور CD سے R پر ملتا ہو۔

فرض کیجئے کہ $\angle AOR = \alpha$

لہٰذا خط AB کی عمادی شکل یہ ہے۔

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p \qquad (6.21)$$



خاکہ 6.37

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:33 PM

چونکہ مساوات 6.20 اور 6.21 ایک ہی مساوات کو ظاہر کرتے ہیں۔ یکساں ارقام کے سر اعداد متناسب ہیں۔

$$\frac{\cos\alpha}{a}=\frac{\sin\alpha}{b}=\frac{p}{-c}\Rightarrow\frac{\cos\alpha}{a}=\frac{\sin\alpha}{b}=\frac{p}{-c}=\frac{\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\cos\alpha=\frac{\pm a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\alpha=\frac{\pm b}{\sqrt{a^2+b^2}}\quad \text{اور}\quad p=\frac{\mp c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

CD کی عمادی مساوات $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p'$ (6.22)

چونکہ یہ $P(x_1,y_1)$, (6.22) $\Rightarrow\ p'=x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha$ سے گزرتا ہے۔

درکار فاصلہ $=|PM|=|QR|=|OQ-OR|=|p'-p|$

$=|(x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha)-p|$

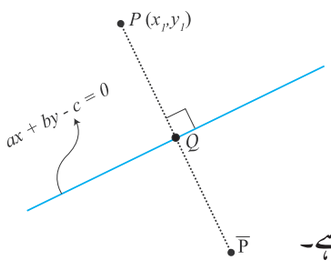
$=\left|\pm\frac{ax_1}{\sqrt{a^2+b^2}}\pm\frac{by_1}{\sqrt{a^2+b^2}}\pm\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|=\left|\pm\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$

درکار فاصلہ $=\left|\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$

iii۔ دو متوازی خطوط کا درمیانی فاصلہ $a_1x+b_1y+c_1=0$ اور $a_1x+b_1y+c_2=0$ ہے۔

اس کو اوپر کے نتیجے میں نقطہ (x_1,y_1) کو بطور مبداء لیتے ہوئے ثابت کر سکتے ہیں۔

$$D=\frac{|c_2-c_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



خاکہ 6.38

- قریب ترین نقطہ Q کا محدد (عمود کا قدم) (پیمائشی شکل استعمال کرتے ہوئے) نقطہ $P(x_1,y_1)$ سے خط $ax+by+c=0$ سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=-\frac{(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2}$$

- خط $ax+by+c=0$ کے لحاظ سے نقطہ $P(x_1,y_1)$ کے خیال کا محدد اس طرح دیا جاتا ہے۔

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=-\frac{2(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2}\qquad (6.24)$$

مثال 6.22 : خط $3x+4y=7$ کے ایک متوازی خط اور ایک عمودی خط کے مساوات معلوم کیجئے جو نقطہ (1,2) سے گذرتے ہوں۔

حل: $3x+4y=7$ کے متوازی خط کی شکل $x+4y=3x_1+4y_1$ ہے۔

فرض کیجئے کہ (x_1,y_1) , (1,2) ہے۔

$$\Rightarrow 3x+4y=3(1)+4(2)$$
$$3x+4y=11$$

$3x+4y=7$ کے عمودی خط کی شکل یہ ہے۔

$$4x-3y=4x_1-3y_1$$

یہاں $(x_1,y_1)=(1,2)$

$$\Rightarrow 4x-3y=4(1)-3(2)$$
$$4x-3y=-2$$

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:34 PM

$\therefore$ متوازی اور عمودی خطوط بالترتیب ہیں۔

$$3x + 4y = 11$$
$$4x - 3y = -2$$

مثال 6.23 : فاصلہ معلوم کیجئے۔

i۔ نقاط (5,4) اور (2,0) کے درمیان

ii۔ نقاط (1,2) سے خط $5x + 12y - 3 = 0$ تک

iii۔ متوازی خطوط $3x + 4y = 12$ اور $6x + 8y + 1 = 0$ کے درمیان

حل: i۔ نقاط $(x_1, y_1) = (5,4)$ اور $(x_2, y_2) = (2,0)$ کا درمیانی فاصلہ

$$D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{3^2 + 4^2}$$
$$D = 5$$

ii۔ نقاط (x_1, y_1) سے خط $ax + by + c = 0$ تک کا درمیانی فاصلہ

$$D = \left| \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

چنانچہ نقاط (1,2) سے خط $5x + 12y - 3 = 0$ تک کا درمیانی فاصلہ یہ ہے۔

$$D = \left| \frac{5(1) + 12(2) - 3}{\sqrt{5^2 + 12^2}} \right|$$
$$D = 2$$

iii۔ دو متوازی خطوط $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ اور $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ کا درمیانی فاصلہ یہ ہے۔

$$D = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}$$

دیئے گئے خطوط کو اس طرح $3x + 4y - 12 = 0$ اور $3x + 4y + \frac{1}{2} = 0$ لکھ سکتے ہیں۔

یہاں $a_1 = 3, b_1 = 4, c_1 = -12, c_2 = \frac{1}{2}$

$$D = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a_2^1 + b_2^1}} = \left| \frac{-12 - \frac{1}{2}}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \right| = \frac{25}{2 \times 5} = 2.5$$ اکائیاں

مثال 6.24 : مبداء سے خط $2x + y = 5$ پر قریب ترین نقطہ معلوم کیجئے۔

حل: درکار نقطہ مبداء سے خط پر کھینچے گئے عمود کا قدم $2x + y = 5$ ہے۔ مبداء کے ذریعے دیئے گئے کا عمودی خط $x - 2y = 0$ ہے۔ مساوات $2x + y = 5$ اور $x - 2y = 0$ کا حل کرنے پر ہمیں $x = 2$ اور $y = 1$ حاصل ہوتا ہے۔ چنانچہ مبداء سے خط پر قریب ترین نقطہ (2,1) ہے۔

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:34 PM

متبادل طریقہ

ضابطہ (6.23) کو استعمال کرتے ہوئے۔

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=-\frac{(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2}$$

$$\frac{x-0}{2}=\frac{y-0}{1}=-\frac{(2(0)+1(0)-5)}{2^2+1^2}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2}=\frac{y}{1}=1\Rightarrow(2,\,1)$$

مثال 6.25 : خطوط $3x+4y+2=0$ اور $5x+12y-5=0$ کے درمیان زاویہ حادّہ کے ناصف کی مساوات معلوم کیجئے۔

زاویہ حادّہ کے ناصف کی مساوات معلوم کیجئے۔

حل: آیئے پہلے ہم دونوں مساوات میں مستقل رقم کو مثبت بنائیں گے۔ دیئے گئے مساوات کا زاوئی ناصف ہیں۔

$$\frac{3x+4y+2}{\sqrt{3^2+4^2}}=\pm\frac{-5x-12y+5}{\sqrt{5^2+12^2}}$$ (خطوط سے متحرک نقطہ ہم فاصلہ ہوتا ہے۔)

چونکہ $a_1a_2+b_1b_2=-15-48<0$ ، خطوط کے درمیان زاویہ حادّہ کے ناصف کی مساوات یہ ہے۔

$$\frac{3x+4y+2}{5}=+\frac{-5x-12y+5}{13}\Rightarrow 64x+112y+1=0$$

مثال 6.26 : خط $x+y=5$ پر نقاط معلوم کیجئے جو خط $4x+3y-12=0$ سے 2 اکائیاں فاصلے پر واقع ہیں۔

حل: خط $x+y=5$ پر کوئی نقطہ، $x=t$ اور $y=5-t$ ہے۔

$(t, 5-t)$ سے خط $4x+3y-12=0$ کا فاصلہ 2 اکائیاں دیا گیا ہے۔

$$\therefore \frac{4(t)+3(5-t)-12}{\sqrt{4^2+3^2}}=2$$

$$\Rightarrow \frac{|t+3|}{5}=2$$

$$\Rightarrow t+3=\pm 10\Rightarrow t=-13,\ t=7$$

$\therefore$ نقاط $(-13,18)$ اور $(7, -2)$ ہیں۔

مثال 6.27 : ایک ساکن نقطہ (6,8) سے ایک خط مستقیم گذرتا ہے۔ مبداء O سے اس خط کو کھینچے گئے عمود کے قدم کا طریق معلوم کیجئے۔

حل: فرض کیجئے کہ نقطہ (x_1, y_1) ، (6,8) ہے اور درکار طریق پر ایک نقطہ P(h,k) ہے۔

ساکن نقطہ (x_1, y_1) سے گذرنے والے خطوط مستقیم کے مساوات کا نظام سے ہے۔

$$y-y_1=m(x-x_1)\ \Rightarrow\ y-8=m(x-6) \qquad (6.25)$$

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:34 PM

چونکہ OP خط 6.25 کا عمود ہے۔

$$m \times \left(\frac{k-0}{h-0}\right) = -1 \Rightarrow m = -\frac{h}{k}$$

$$\Rightarrow k - 8 = -\frac{h}{k}(h-6)$$

$$\Rightarrow k\,(k-8) = -h(h-6) \Rightarrow h^2 + k^2 - 6h - 8k = 0$$

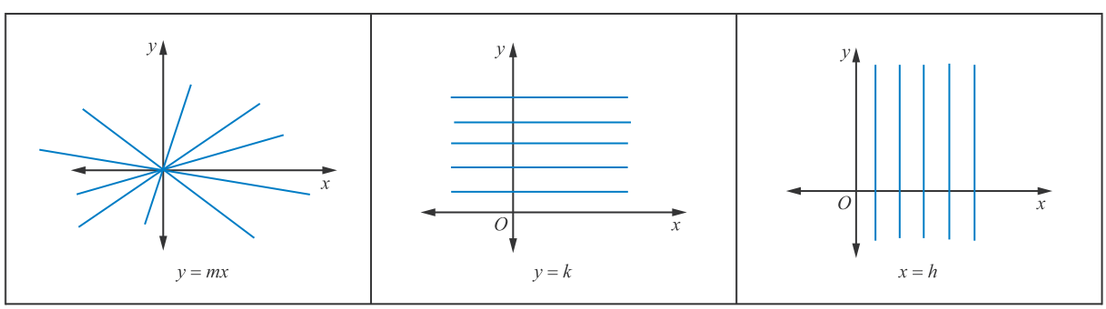
اسی طرح $P(h,k)$ اور 6.25 پر واقع ہے۔

$P(h,k)$ کا طریق یہ ہے۔ $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$

یہ نتیجہ اس حقیقت جو کہ نصف دائرے پر زاویہ زاویہ قائمہ ہے، سے ثابت ہوتا ہے۔

6.4.5 خطوط کا قبیلہ (Family of lines)

تمام خطوط ایک مخصوص شرط اختیار کرتے ہیں۔ خطوط کا قبیلہ کہلاتے ہیں۔ ذیل کی مثال خطوط مستقیم کے چند قبیلے کو ظاہر کرتے ہیں۔ (یہاں، m, h اور k اختیاری مستقل ہیں)۔



خاکہ 6.39

ایسا ہوسکتا ہے کہ خط مستقیم کی مساوات $ax + by + c = 0$ میں تین اختیاری مستقل ہیں۔ حقیقت میں، یہ اس طرح نہیں ہے۔ اس کو b سے یا a سے تقسیم کرنے پر،، جو بھی غیر صفر ہو)۔ ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{a}{b}x + y + \frac{c}{b} = 0,$$

جس کو اس طرح لکھ سکتے ہیں۔ $Ax + y + C = 0$ جس میں $A = \frac{a}{b}$ اور $C = \frac{c}{b}$

اوپر کی مساوات کو میلان اور مقطوعی شکل کی طرح سے لکھ سکتے ہیں اور ان اختیاری مستقل کی تعداد کو آگے کم نہیں کر سکتے ہیں۔ اور ان اختیاری مستقل کی تعداد کو آگے کم نہیں کر سکتے۔ غرض، ہر خط مستقیم کی مساوات میں دو اختیاری مستقل ہوتے ہیں۔ بالآخر ایک خط مستقیم کے مساوات کی واحد طور پر معلوم کرنے کے لئے دو شرائط کی ضرورت ہے۔

ایک شرط سے دو اختیاری مستقل کے درمیان خطی تعلق حاصل ہوتا ہے اور چنانچہ ہر ایک اختیاری مستقل سے دوسرا مستقل معلوم ہوتا ہے۔ لہٰذا خطوط جو ایک شرط کو پوری کرتے ہیں ایک اختیاری مستقل رکھتے ہیں۔ اس طرح کے خطوط کا نظام ایک پیمائشی خطوط کا قبیلہ کہلاتا ہے اور غیر معلوم اختیاری مستقل پیمائش کہلاتا ہے۔

آیئے اب ہم $y = mx + b$ کو استعمال کر کے، خطوط مستقیم کے قبیلوں کے تین اقسام پر بحث کریں۔ پہلے کے دو اقسام ایک پیمائشی قبیلے اور تیسرا قسم دو پیمائشی قبیلہ ہے۔

i۔ جب m ایک اختیاری ہے اور b ایک ساکن مستقل ہے۔ ii۔ جب b ایک اختیاری ہے اور m ایک ساکن مستقل ہے۔

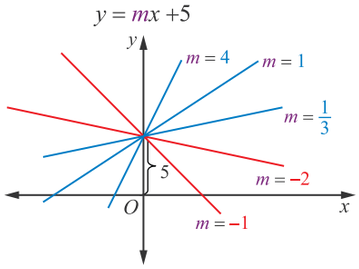
iii۔ جب m اور b دونوں اختیاری ہیں۔

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:35 PM

6.4.6 ایک پیمائشی قبیلے (One parameter families)

i۔ جب m ایک اختیاری اور b ایک ساکن مستقل ہے۔

آیئے m کو اختیاری مستقل اور b کو ایک ساکن مستقل مثال کے طور پر $b = 5$ مانتے ہوئے خط $y = mx + b$ کے لئے خطوط مستقیم کی مساوات کا قبیلہ معلوم کریں۔ لہٰذا، m کے مختلف حقیقی قیمتوں کے لئے، یہ مساوات 5 اکائیاں y مقطوعہ والے خطوط کے قبیلے کے ظاہر کرتا ہے۔ اس قبیلے کے چند اراکین کے خاکے میں دیکھایا گیا ہے۔ مثلاً اس نقشے میں میلان m کی قیمتیں $-1, -2, \frac{1}{3}, 1$ اور 4 ہیں۔



خاکہ 6.40

مثال 6.28 : خطوط $y = mx + 2$ کے قبیلہ میں خطوط مستقیم کے مساوات معلوم کیجئے، جس میں m اور خطوط $2x + 3y = 10$ کا نقطہ تقاطع کا x محدد سالم اعداد ہیں۔

حل : خط $y = mx + 2$ کے قبیلے کے لئے خطوط مستقیم کے مساوات معلوم کرنے کے لئے، ہمیں پیمائش m کی قیمتیں معلوم کرنا چاہئے۔

خطوط $y = mx + 2$ اور $2x + 3y = 10$ کا نقطۂ تقاطع ہے۔

$$\left(\frac{4}{3m+2}, \frac{10m+4}{3m+2}\right)$$

یہ دیا گیا ہے کہ میلان m اور x محدد سالم اعداد ہیں۔

$\therefore \frac{4}{3m+2}$ ایک سالم عدد ہے $\Leftarrow 3m+2$، $(\pm 4, \pm 2, \pm 1)$ 4 کا مقسوم علیہ ہے

$\therefore 3m+2 = \pm 1, \quad 3m+2 = \pm 2, \quad 3m+2 = \pm 4$ یہاں m ایک سالم عدد ہے۔

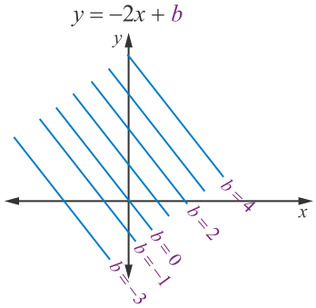
$m = \{-2, -1, 0\}$ حل کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

مساوات $y = -2x + 2, y = -x + 2$ اور $y = 2$ ہیں۔

ii۔ جب b ایک اختیاری اور m ایک ساکن مستقل ہے۔

جیسا کہ اوپر بحث کئے تھے، فرض کیجئے کہ b اختیاری مستقل ہے اور m ایک ساکن مستقل ہے جیسے $m = -2$۔ مثال کے طور پر مساوات $y = mx + b$ سے $y = -2x + b$ بنتا ہے b کے مختلف حقیقی قیمتوں کے لئے، میلان 2- والے خطوط کا قبیلہ حاصل ہوسکتا ہے۔ اس قبیلے کے چند اراکین کو خاکے میں بتایا گیا ہے۔ مثلاً، اس نقشے میں b کی قیمتیں $3, 2, 1, 0, -1, -3$ اور 4 ہیں۔

متوازی خطوط اور عمودی خطوط کے قبیلے کے دو خصوصی صورت حال نیچے دئے گئے ہیں۔



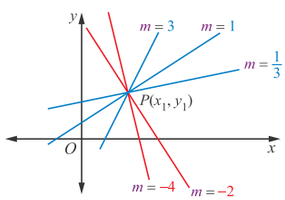
خاکہ 6.41

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:35 PM

متوازی خطوط کا قبیلہ : $ax + by + c = 0$ کے متوازی خطوط کا قبیلہ $ax + by + \lambda = 0$ کی شکل کا ہوتا ہے۔ مختلف λ (لیمبڈا کہا جاتا ہے) قیمتوں کے لئے، ہمیں $ax + by + c = 0$ کے متوازی مختلف خطوط حاصل ہوتے ہیں۔

عمودی خطوط کا قبیلہ : $ax + by + c = 0$ کے عمودی خطوط کا قبیلہ $bx - ay + \lambda = 0$ کی شکل کا ہوتا ہے۔ مختلف λ کی قیمتوں کے لئے، ہمیں $ax + by + c = 0$ کے عمودی مختلف خطوط حاصل ہوتے ہیں۔

6.4.7 دو پیمائشی قبائل (Two parameters families)

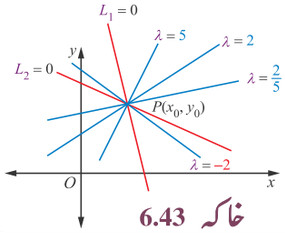


خاکہ 6.42

iii۔ جب m اور b دونوں اختیاری ہوں۔

فرض کیجئے کہ m اور b ، $y = mx + b$ میں اختیاری مستقل ہیں، ترسیم میں آسانی سے قبیلے کو دیکھ نہیں سکتے۔ مگر m کے مختلف حقیقی قیمتوں کے لئے چند صورت حال جیسے $y - y_1 = m(x - x_1)$ ، خطوط کے قبیلے کو دیکھ سکتے ہیں۔ فرض کیجئے کہ میلان m کے -2 ، -4 ، $\frac{1}{3}$ ، 1 اور 3 خطوط ہیں، جو ساکن نقطہ (x_1, y_1) سے گذرتے ہیں سوائے عمودی خط $x = x_1$ کے جیسا کے نقشے میں بتایا گیا ہے۔

6.4.8 دئے گئے دو خطوط کے نقطۂ تقاطع سے گذرنے والے خطوط مستقیم کے مساوات کا قبیلہ
(The family of equation of straight lines through the point of intersection of the two given lines)



خاکہ 6.43

فرض کیجئے کہ $L_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1 = 0$ اور $L_2 \equiv a_2x + b_2y + c_2 = 0$ دئے گئے دو خطوط کے مساوات ہیں۔ اوپر کے خطوط کے نقطۂ تقاطع سے گذرنے والے خطوط مستقیم کے مساوات کا قبیلہ $L1 + \lambda L2 = 0$ ہے، یہاں λ ایک پیمائش ہے۔ یعنی، λ کے مختلف حقیقی قیمتوں کے لئے ہمیں مختلف مساوات حاصل ہوتے ہیں۔

مثال 6.29 : خطوط $3x + 2y + 5 = 0$ اور $3x - 4y + 6 = 0$ کے نقطۂ تقاطع اور نقطہ $(1,1)$ سے گذرنے والے خط کی مساوات معلوم کیجئے۔

حل : خطوط کے تقاطع سے گذرنے والے خط مستقیم کے مساوات کے قبیلہ کی شکل یہ ہے۔

$$(a_1x + b_1y + c_1) + \lambda(a_2x + b_2y + c_2) = 0$$

یعنی $$(3x + 2y + 5) + \lambda(3x - 4y + 6) = 0$$

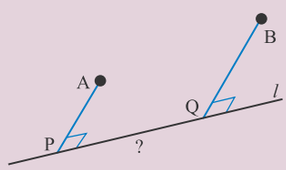
چونکہ درکار مساوات نقط $(1,1)$ سے گذرتا ہے، یہ نقطہ اوپر کی مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔

لہٰذا، $$\{3 + 2(1) + 5\} + \lambda\{3(1) - 4(1) + 6\} = 0 \Rightarrow \lambda = -2$$

اوپر کی مساوات میں $\lambda = -2$ کو بدلنے پر، ہمیں درکار مساوات $3x - 10y + 7 = 0$ حاصل ہوتی ہے۔

(اوپر کے مسئلے کو دو نقاط کی شکل استعمال کر کے تصدیق کیجئے۔)

مثال 6.30 : فرض کیجئے کہ حکومت دو دیہاتوں مثال کے طور پر A اور B کو بہتر بجلی مہیا کرنے کے لئے ایک نئے برقی قوتی ترسیل l کے سب اسٹیشن کھڑا کرنا چاہتی ہے۔ یہ سب اسٹیشن ایک خط پر ہو۔ خط l پر عمود کے قدم P اور Q سے دیہات A اور B کے فاصلے بالترتیب 3 km اور 5 km ہیں۔ P اور Q کا درمیانی فاصلہ 6 km ہے۔



خاکہ 6.44

(i) قوتی خانہ سے دو دیہاتوں کو ملانے کے لئے مطلوبہ تار کی کم ترین لمبائی معلوم کیجئے۔

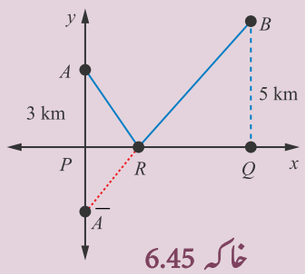
(ii) قوتی خانہ سے دو دیہاتوں کو ملانے والے تار کی مساوات معلوم کیجئے۔ (انعکاس کے اصول کے ساتھ جانکاری کو استعمال کرتے ہوئے اس مسئلے اس حل تک پہنچ سکتے ہیں۔)

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:35 PM

حل: آسانی کے لئے PQ کوبطور x محور، PA کوبطور y محوراور P کومبداء لیجئے (رواجی مبداء O کے بجائے)۔

لہٰذا، محددیں P(0,0)، A(0,3) اور B(6,5) ہیں۔ اگر x محور پر A کا خیال $\overline{A}$ ہے۔ $\overline{A}$ ہوتو (0,–3) ہے۔

درکارخط R اور x محورکانقطۂ تقاطع $\overline{AB}$ ہے۔



خاکہ 6.45

AR اور BR تار(سڑک) کے راستے ہیں۔

تارکی کم ترین لمبائی $AR + BR = BR + R\overline{A} =$

$$B\overline{A} = \sqrt{(6-0)^2 + (5+3)^2} = 10\,\text{km}$$

خط $\overline{AB}$ کی مساوات $y - (-3) = \frac{5-(-3)}{6-0}(x-0)$ ہے۔

$$4x - 3y = 9$$

جب $y = 0, R \text{ is } \left(\frac{9}{4}, 0\right)$

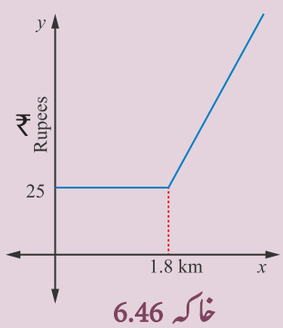
یعنی سب اسٹیشن P سے 2.25 km کے فاصلے پر ہونا چاہئے۔

AR کی مساوات 4x + 3y = 9 ہے۔

RA اور RB کے تار کے خطوط (سڑکوں) کی مساوات 4x – 3y = 9 اور 4x + 3y = 9 ہیں۔

مثال 6.31 : ایک کرایئے کے کار کی کمپنی 1.8 km تک کے لئے ایک متعین کرایہ ₹ 25 لیتی ہے اوراس کے ساتھ جتنا فاصلہ طے کیا جاتا ہے۔ اس کا کرایہ ₹ 12 فی کلومیٹر ہوتا ہے۔ قیمت y اور کلومیٹر x کی تعداد کے درمیان تعلق کی مساوات معلوم کیجئے۔اس کے علاوہ 15 کلومیٹر فاصلہ کے لئے کرایہ معلوم کیجئے۔

حل: دیا گیا ہے کہ 1.8 km تک کے لئے متعین کرایہ ₹ 25 ہے۔



خاکہ 6.46

نظیری مساوات یہ ہے۔

$$y = 25, \quad 0 \le x \le 1.8$$

اس کے علاوہ 1.8 کلومیٹر کے بعد جتنا میٹر طے کرے گا۔اس کا کرایہ ₹ 12 فی کلومیٹر ہوگا۔

نظیری مساوات یہ ہے۔

$$y = 25 + 12\,(x - 1.8)\,, \quad x > 1.8 \qquad (6.27)$$

6.26 اور 6.27 کی اجتماعی مساوات سے، ہمارے پاس ہے۔

$$y = \begin{cases} 25, & 0 \le x \le 1.8 \\ 25 + 12(x - 1.8), & x > 1.8 \end{cases} \qquad (6.28)$$

جب x = 15 ہو، 6.27 سے، ہمیں 15 کلومیٹر کے طے کرنے کے لئے کرایہ ₹ 183.40 ہے۔

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:36 PM



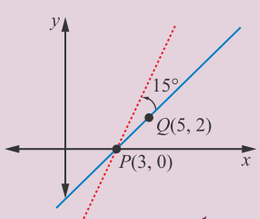
اگر تم اپنے موبائل فون سے ایک کرائے کی ٹیکسی بک کرنے کے لئے رابطہ کرتے ہو تو وہ خود بخود تمہارے اطراف کے پہلے دستیاب ٹیکسی سے رابطہ ہوتا ہے۔ اگر چہ کہ تم جہاں کہیں بھی ہوں جب تک کہ وہاں ٹیکسی کی خدمت دستیاب ہو۔ مقام معلوم کرنے اور سفر کرنے کے لئے کسی قسم کا مختص نظام استعمال کیا جاتا ہے۔

مثال 6.32 : اگر دو نقاط (3,0) اور (5,2) کو ملانے والے خط کو نقطہ (3,0) پر زاویہ 15° سے گھڑی کی مخالف سمت پر گھمایا جاتا ہے، تو نئے مقام میں اس خط کی مساوات معلوم کیجئے۔

حل : فرض کیجئے کہ P(3,0) اور Q(5,2) دئے گئے نقاط ہیں۔

خط PQ کے ڈھلوان کا زاویہ $\Rightarrow$ PQ کا میلان $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 1$

$$= \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4} = 45°$$



خاکہ 6.47

$\therefore$ نئے مقام میں اس خط کا میلان

$m = \tan(45° + 15°) \Rightarrow$ میلان $= \tan(60°) = (\sqrt{3})$

$\therefore$ (3,0) سے گذرنے اور میلان $\sqrt{3}$ والے خط مستقیم کی مساوات یہ ہے۔

$$y - 0 = \sqrt{3}(x - 3)$$
$$\sqrt{3}x - y - 3\sqrt{3} = 0$$

مشق 6.3

1۔ ثابت کیجئے کہ خطوط $3x + 2y + 9 = 0$ اور $12x + 8y - 15 = 0$ متوازی خطوط ہیں۔

2۔ خط مستقیم کی مساوات معلوم کیجئے جو $5x - 4y + 3 = 0$ کے متوازی ہے اور جس کا x مقطوعہ 3 ہے۔

3۔ خط $4x + 3y + 4 = 0$ اور نقطہ (i) (−2,4) ، (ii) (7, −3) کا درمیانی فاصلہ کیجئے۔

4۔ خطوط کی مساوات معلوم کیجئے، جو نقطہ (1,−1) سے گذرتے ہوں اور (i) $x + 3y - 4 = 0$ کے متوازی ہوں۔

(ii) $3x + 4y = 6$ کے عمودی ہوں۔

5۔ اگر (−4,7) معین کا ایک راس ہو اور اگر اس کے ایک وتر کی مساوات $5x - y + 7 = 0$ ہو تو دوسرے وتر کی مساوات معلوم کیجئے۔

6۔ خطوط کی مساوات معلوم کیجئے، جو خطوط $4x - y + 3 = 0$ اور $5x + 2y + 7 = 0$ کے نقطۂ تقاطع سے گذرتے ہوں اور

(i) نقطہ (−1,2) سے گذرتے ہوں اور (ii) $x - y + 5 = 0$ کے متوازی ہوں۔

(iii) $x - 2y + 1 = 0$ کے عمودی ہوں۔

7۔ دو خطوط مستقیم کے مساوات معلوم کیجئے جو خط $12x + 5y + 2 = 0$ کے متوازی ہوں اور نقطہ $x - 2y + 1 = 0$ سے اکائی فاصلے پر ہوں

8۔ خطوط مستقیم کے مساوات معلوم کیجئے، جو خط $3x + 4y - 6 = 0$ کے عمودی ہوں اور (2,1) سے 4 اکائیوں کے فاصلے پر ہو۔

9۔ خط مستقیم کی مساوات معلوم کیجئے۔ جو $2x + 3y = 10$ کے متوازی ہو اور اس طرح کہ محوروں پر اس کے مقطوعات کا حاصل جمع 15 ہو۔

10۔ نقطہ (−10, −2) سے خط $x + y - 2 = 0$ کے عمود کی لمبائی اور عمود کے قدم کے مختص معلوم کیجئے۔

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:36 PM

11۔ اگر مبداء سے خطوط مستقیم p_1 اور p_2 کے عمود کی لمبائیاں $x \sec\theta + y \operatorname{cosec}\theta = 2a$ اور $x\cos\theta - y\sin\theta = a\cos 2\theta$ ہوں تو ثابت کیجئے کہ $p_1^2 + p_2^2 = a^2$

12۔ متوازی خطوط کا درمیانی فاصلہ معلوم کیجئے۔
(i) $12x + 5y + 7 = 0$ اور $12x + 5y = 7$
(ii) $6x - 8y - 15 = 0$ اور $3x - 4y + 5 = 0$.

13۔ خطوط مستقیم کا قبیلہ معلوم کیجئے۔ (i) عمودی (ii) $3x + 4y - 12 = 0$ کے متوازی

14۔ اگر دو نقاط A(2,0) اور B(3,1) کو ملانے والے خط کو A پر زاویہ 15° سے گھڑی کی مخالف سمت پر گھمایا جاتا ہے تو نئے مقام میں اس خط کی مساوات معلوم کیجئے۔

15۔ نقطہ (1,2) سے نکلنے والے روشنی کی ایک شعاع x محور پر نقطہ A پر منعکس ہوتی ہے اور یہ نقطہ (5,3) سے گذرتی ہے، تو نقطہ کے محد د معلوم کیجئے۔

16۔ $5x = y + 7$ کے عمودی ایک خط کھینچا جاتا ہے۔ خط کی مساوات معلوم کیجئے۔ اگر مخصی محوروں اور اس خط سے بننے والے مثلث کا رقبہ 10 مربع اکائیاں ہیں۔

17۔ خط $x + 2y - 9 = 0$ پر نقطہ (–2,3) کا خیال معلوم کیجئے۔

18۔ ایک نقل عکسی دوکان (Photocopy store) پہلے 10 صفحوں کی قیمت ₹1.50 فی کاپی ہے اور 10ویں سے زائد کاپی کی قیمت فی کاپی ₹1.50 ہے۔ فرض کیجئے کہ x کاپیوں کی تعداد ہے اور نقل عکسی کی کل قیمت ہے۔ (i) قیمت کی ترسیم کھینچئے، جیسے جیسے x کی تعداد 0 سے 50 کاپیاں ہوتا ہے۔ (ii) 40 کاپیاں نکالنے کی قیمت معلوم کیجئے۔

19۔ خطوط کے قبیلے میں خطوط مستقیم کے کم از کم دو مساوات معلوم کیجئے جس میں $y = 5x + b$ اور b اور ان خطوط کے نقطۂ تقاطع کا x محد د، سالم اعداد ہیں۔

20۔ خط $y = mx - 3$ کے قبیلے میں خطوط مستقیم کے تمام مساوات معلوم کیجئے جس میں m اور $x - y = 6$ اور ان خطوط کا نقطہ تقاطع کا x محد د، سالم اعداد ہیں۔

6.5 خطوط مستقیم کی جوڑی (Pair of Straight lines)

دو یا دو سے زائد خطوط کے مساوات کو درجہ ایک سے زیادہ والے ایک مساوات کے ذریعے ایک ساتھ ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ جیسا کہ ہم دیکھتے ہیں کہ x اور y میں ایک خطی مساوات ایک خط مستقیم کو ظاہر کرتی ہے۔ دو خطی مساوات کا حاصل ضرب دو خطوط مستقیم کو ظاہر کرتا ہے۔ یعنی خطوط مستقیم کی ایک جوڑی ہے کو ظاہر کرتا ہے، یعنی خطوط مستقیم کی ایک جوڑی کو ظاہر کرتا ہے۔ چنانچہ، ہم خطوط مستقیم کی جوڑی کو x اور y میں دو درجی مساوات کی طرح سے مطالعہ کرتے ہیں۔

فرض کیجئے کہ $L_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1 = 0$ اور $L_2 \equiv a_2x + b_2y + c_2 = 0$ دو خطوط مستقیم کے انفرادی مساوات ہیں۔ L_1 خط پر ایک نقطہ $P(x_1,y_1)$ ہے، تو یہ مساوات $L_1=0$ کو مطمئن کرتا ہے۔ اسی طرح سے، اگر L_2 خط پر $P(x_1,y_1)$ نقطہ ہے تو $L_1=0$ یا $L_2=0$ پر واقع ہوتا ہے۔ $P(x_1,y_1)$ مساوات $(L_1)(L_2) = 0$ کو مطمئن کرتا ہے اور دوسرا کوئی بھی نقطہ $L_1 \cdot L_2 = 0$ کو مطمئن نہیں کرتا۔ لہٰذا مساوات $L_1 \cdot L_2 = 0$ خطوط مستقیم $L_1=0$ اور $L_2=0$ کی جوڑی کو ظاہر کرتی ہے۔

مثال کے طور پر، دو مساوات لیجئے۔

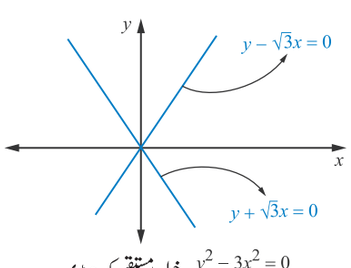
$y - \sqrt{3}x = 0$ اور $y + \sqrt{3}x = 0$.

اوپر کے دو مساوات مبداء سے گذرنے والے دو خطوط مستقیم کو ظاہر کرتے ہیں۔

جن کا میلان بالترتیب $\sqrt{3}$ اور $-\sqrt{3}$ ہیں۔

اوپر کے مساوات کو ملانے پر، ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے۔ $\left(y + \sqrt{3}x\right)\left(y - \sqrt{3}x\right) = 0$

$\Rightarrow y^2 - 3x^2 = 0$ خطوط مستقیم کی جوڑی کو ظاہر کرتی ہے۔



خطوط مستقیم کی جوڑی $y^2 - 3x^2 = 0$

خاکہ 6.48

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:37 PM

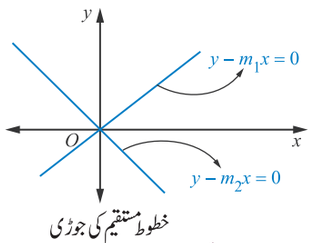
6.5.1 مبداء سے گذرنے والے خطوط کی جوڑی (Pair of lines passing through the origin)

پہلے ہم ایک آسان صورتِ حال پر غور کریں گے۔ اس جوڑی کے دونوں خطوط مبداء سے گذرتے ہیں۔ غرض، ان کے مساوات اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$y - m_1 x = 0$$
$$y - m_2 x = 0$$

ان دو خطوط کے مساوات مجموعہ یہ ہے۔

$$(y - m_1 x)(y - m_2 x) = 0 \qquad (6.29)$$
$$y^2 - (m_1 + m_2) xy + m_1 m_2 x^2 = 0$$



خطوط مستقیم کی جوڑی

خاکہ 6.49

اوپر کی مساوات سے یہ تجویز ملتی ہے کہ مبداء سے گذرنے اور میلان m_1 اور m_2 والے خطوط مستقیم کی ایک جوڑی کی عام مساوات دو درجی متجانس $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ہے۔ جس کا مطلب ہر رقم کا درجہ 2 ہے۔

متجانس مساوات کی نوعیت یہ بتاتی ہے کہ خطوط مبداء سے گذرتے ہیں۔ یا نہیں۔

مثال 6.33 : مساوات $5x^2 + 6xy + y^2 = 0$ کو جُدا کیجئے۔

حل: ہم اس مساوات کو سیدھے اس طرح اجزائے ضربی میں تحلیل کرتے ہیں۔

$$5x^2 + 6xy + y^2 = 0$$
$$5x^2 + 5xy + xy + y^2 = 0$$
$$5x(x + y) + y(x + y) = 0$$
$$(5x + y)(x + y) = 0$$

اس طرح یہ خطوط $5x + y = 0,\ x + y = 0$ ہے۔

متبادلہ طریقہ : چونکہ دی گئی مساوات متجانس مساوات ہے، دی گئی مساوات کو تقسیم کیجئے۔

$$5x^2 + 6xy + y^2 = 0 \text{ by } x^2$$

ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $5 + 6\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0$

(متجانس مساوات کے لئے خطوط کا میلان) $\frac{y}{x} = m$ درج کرنے پر

اوپر کی مساوات $m^2 + 6m + 5 = 0$ بنتی ہے۔

اجزائے ضربی میں تحلیل کرنے پر، ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے۔

$$(m + 1)(m + 5) = 0$$
$$\Rightarrow m = -1,\ m = -5$$
$$\Rightarrow \frac{y}{x} = -1,\ \frac{y}{x} = -5$$

یعنی، خطوط یہ ہیں $x + y = 0,\quad 5x + y = 0$

مثال 6.34 : اگر وجود میں آتا ہو تو، مساوات $2x^2 + 2xy + y^2 = 0$ کو جُدا کرتے ہوئے خطوط مستقیم معلوم کیجئے۔

حل: چونکہ دی گئی مساوات متجانس مساوات ہے، دی گئی مساوات $2x^2 + 2xy + y^2 = 0$ کو x^2 سے تقسیم کرتے ہوئے $\frac{y}{x} = m$ کو درج کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $m^2 + 2m + 2 = 0$

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:37 PM

کی قیمت غیر حقیقی (پیچیدہ عدد) ہیں۔لہٰذا،اس مجموعہ مساوات $2x^2 + 2xy + y^2 = 0$ میں کوئی خط موجود نہیں ہیں۔
بسا اوقات ہم یہ کہتے ہیں کہ یہ مساوات مجازی (خیالی) خطوط کو ظاہر کرتی ہے۔
غور کیجئے کہ کل مستوی میں، صرف (0,0) اس مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔

6.5.2 خطوط مستقیم کی جوڑی کے درمیان زاویہ: (Angle between pair of straight lines)

مبداء سے گذرنے والے خطوط مستقیم کی جوڑی کی مساوات کو لیجئے۔

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0 \qquad (6.30)$$

فرض کیجئے کہ m_1 اور m_2 ان دو خطوط کے میلان ہیں۔

(6.30) کو x^2 سے تقسیم کرکے $\frac{y}{x} = m$ درج کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$bm^2 + 2hm + a = 0 \quad ,$$

m میں اس مساوات کے جذر m_1 اور m_2 ہوں گے۔

غرض $m_1+m_2 = \frac{-2h}{b}$ اور $m_1m_2 = \frac{a}{b}$

اگر دو خطوط کے درمیانی زاویہ θ ہو تو

$$\begin{aligned}
\tan\theta &= \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2m_1}\right| \\
&= \left|\frac{\sqrt{(m_1 + m_2)^2 - 4m_1m_2}}{1 + m_2m_1}\right| \\
&= \left|\frac{\sqrt{\left(\frac{-2h}{b}\right)^2 - 4\frac{a}{b}}}{1 + \frac{a}{b}}\right| \\
\tan\theta &= \left|\frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}\right|
\end{aligned}$$

اس ضابطے سے نتیجے میں، ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ

1۔ خطوط حقیقی اور مختلف ہوتے ہیں، اگر m_1 اور m_2 حقیقی اور مختلف ہوں، یعنی اگر $h^2-ab > 0$ ہو۔

2۔ خطوط حقیقی اور منطبق ہوتے ہیں، اگر m_1 اور m_2 حقیقی اور مساوی ہوں، یعنی، اگر $h^2-ab = 0$ ہو۔

3۔ خطوط غیر حقیقی (خیالی) ہوتے ہیں، اگر m_1 اور m_2 غیر حقیقی ہوں، یعنی اگر $h^2-ab < 0$ ہو۔

اس کے علاوہ، ہم یہ دیکھتے ہیں کہ (6.30) سے ظاہر کئے گئے خطوط متوازی ہیں، (چونکہ یہ دونوں مبداء سے گذرتے ہیں، خطوط منطبق خطوط ہیں)

اگر $\tan\theta = 0$ ہو تو $h^2-ab = 0$ اور عمودی اگر $\cot\theta = 0$ یعنی $a + b = 0$ ہوں۔

خطوط مستقیم کی جوڑی	متوازی ہونے کے لئے شرط	عمودی ہونے کے لئے شرط
$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$	$h^2 - ab = 0,$	$a + b = 0$

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:37 PM

مثال 6.35 مبداء سے گذرنے والے اور خطوط کی جوڑی کے عمودی خطوط کے جوڑی $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ کی مساوات معلوم کیجئے۔

حل: فرض کیجئے کہ m_1 اور m_2 ان دو خطوط کے میلان ہیں۔

$$y - m_1x = 0 \text{ and } y - m_2x = 0 \qquad (6.31)$$

ان دو خطوط کی مجموعی مساوات یہ ہے

$$\begin{aligned}(y - m_1x)(y - m_2x) &= 0\\ y^2 - (m_1 + m_2)xy + m_1m_2x^2 &= 0 \qquad (6.32)\end{aligned}$$

دیا گیا ہے کہ

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0 \qquad (6.33)$$

$$m_1m_2 = \frac{a}{b} \qquad (6.34)$$

اور $m_1 + m_2 = \frac{-2h}{b}$,

خطوط جو (6.31) کے عمودی ہیں

$$y + \frac{1}{m_1}x = 0 \quad \text{and} \quad y + \frac{1}{m_2}x = 0$$

مجموعی مساوات یہ ہے

$$\begin{aligned}(m_1y + x)(m_2y + x) &= 0\\ m_1m_2y^2 + (m_1 + m_2)xy + x^2 &= 0\end{aligned}$$

$\frac{a}{b}y^2 - \frac{2h}{b}xy + x^2 = 0$ (6.34) کو استعمال کر کے .....

درکار مساوات یہ ہے۔ $ay^2 - 2hxy + bx^2 = 0 \qquad (6.35)$

6.5.3 خطوط $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ کے درمیانی زاویے کے ناصفوں کی مساوات

(Equation of the bisectors of the angle between the lines $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$)

فرض کیجئے کہ دو خطوط مستقیم کی مساوات $y - m_1x = 0$ اور $y - m_2x = 0$ ہیں۔

$$m_1m_2 = \frac{a}{b} \quad \text{اور} \quad \therefore\ m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b}$$

ہمیں معلوم ہے کہ ناصفوں کی مساوات نقاط کا طریق ہے اس طرح کہ ان نقاط سے دو خطوط مستقیم کو کھینچے گئے عمود مساوی ہوتے ہیں۔

فرض کیجئے P(p,q) ناصفوں کے طریق پر ایک نقطہ ہے۔

P(p,q) سے خط $y - m_1x = 0$ کا عمود P(p,q) سے خط $y - m_2x = 0$ کے عمود کے مساوی ہے۔

$$\pm\frac{q - m_1p}{\sqrt{1 + m_1^2}} = \pm\frac{q - m_2p}{\sqrt{1 + m_2^2}}$$

یعنی $(q - m_1p)^2(1 + m_2^2) = (q - m_2p)^2(1 + m_1^2)$,

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:37 PM

$$p^2 - q^2 = 2pq\left(\frac{1 - m_1m_2}{m_1 + m_2}\right)$$ مختصر کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\Rightarrow p^2 - q^2 = 2pq\left(\frac{1 - \frac{a}{b}}{-\frac{2h}{b}}\right)$$

یعنی $$\frac{p^2 - q^2}{a - b} = \frac{pq}{h}$$

$\therefore$ P(p,q) کا طریق یہ ہے۔ $$\frac{x^2 - y^2}{a - b} = \frac{xy}{h} \qquad (6.36)$$

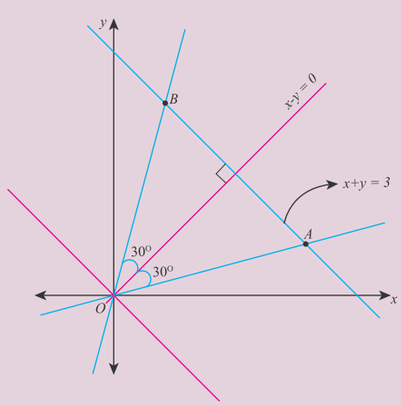
مثال 6.36 : ثابت کیجئے کہ خطوط مستقیم $x^2 - 4xy + y^2 = 0$ اور $x + y = 3$ ایک مثلث مساوی الاضلاع بناتے ہیں۔

حل: فرض کیجئے کہ خط $x + y = 3$ ، خط کی جوڑی $x^2 - 4xy + y^2 = 0$ کو A اور B پر قطع کرتا ہے۔

خطوط $x^2 - 4xy + y^2 = 0$ کا درمیانی زاویہ یہ ہے۔

زاویہ AOB کا زاویائی ناصف اس طرح دیا جاتا ہے۔

$$\tan\theta = \left|\frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}\right| = \frac{2\sqrt{4 - 1}}{2} = \sqrt{3}$$
$$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\sqrt{3} = 60^\circ$$



خاکہ 6.50

$$\frac{x^2 - y^2}{a - b} = \frac{xy}{h}$$
$$\Rightarrow x^2 - y^2 = 0$$
$$\Rightarrow x + y = 0 \quad \text{اور} \quad x - y = 0$$

زاویائی ناصف $x - y = 0$ دیے گئے خط کو AB کے ذریعے عمودی ہے۔

یعنی ΔOAB . $x + y = 3 \Rightarrow$ مساوی الساقین ہے

$$\Rightarrow \angle ABO = \angle BAO = 60^\circ$$

لہٰذا دیے گئے خطوط ایک مثلث مساوی الاضلاع بناتے ہیں۔

مثال 6.37 اگر خطوط کی جوڑی $x^2 - 2cxy - y^2 = 0$ اور $x^2 - 2dxy - y^2 = 0$ سے ظاہر کیا جاتا ہے، اس طرح کہ ہر ایک جوڑی دوسرے جوڑی کے درمیانی زاویے کو نصف کرتا ہے تو ثابت کیجئے کہ $cd = -1$

حل: دیے گئے خطوط مستقیم کی جوڑی یہ ہے۔

$$x^2 - 2cxy - y^2 = 0 \qquad (6.37)$$
$$x^2 - 2dxy - y^2 = 0 \qquad (6.38)$$

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:38 PM

(6.37) کے زاویائی ناصف کی مساوات یہ ہے۔

$$\frac{x^2 - y^2}{2} = \frac{xy}{-c}$$

$$\Rightarrow \quad cx^2 + 2xy - cy^2 = 0 \tag{6.39}$$

دیا گیا ہے کہ (6.37) کا زاویائی ناصف (6.38) ہے۔ چنانچہ مساوات

$$x^2 - 2dxy - y^2 = 0$$
$$cx^2 + 2xy - cy^2 = 0$$

6.37 کے زاویائی ناصف کی مساوات ہی کی طرح نمائندگی کرتے ہیں۔

اوپر کے دو مساوات کے یکساں رقموں کو موازنہ کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{1}{c} = \frac{-2d}{2} = \frac{-1}{-c}$$
$$\Rightarrow \quad cd = -1$$

6.5.4 خطوط مستقیم کے جوڑی کی عام شکل (General form of pair of straight lines)

آیئے دو اختیاری خطوط کے مساوات $l_1x + m_1y + n_1 = 0$ اور $l_2x + m_2y + n_2 = 0$ پر غور کرتے ہیں۔

دونوں مساوات کو شامل (ضرب) کرنے پر

$$(l_1x + m_1y + n_1)(l_2x + m_2y + n_2) = 0$$

اگر ہم اوپر کے دو اجزائے ضربی کو ایک ساتھ ضرب کرنے پر، ہمیں خطوط مستقیم کے جوڑی کے مساوات کی عام شکل اس طرح حاصل ہوتا ہے۔

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \tag{6.40}$$

اوپر کی مساوات دو درجی غیر متجانس مساوات (non homogenous equation of degree 2) ہے۔

جس میں
$$a = l_1l_2 \qquad 2g = l_1n_2 + l_2n_1$$
$$b = m_1m_2 \qquad 2f = m_1n_2 + m_2n_1$$
$$c = n_1n_2 \qquad 2h = l_1m_2 + l_2m_1$$

شکل (6.40) کی مساوات ہمیشہ خطوط مستقیم کی جوڑی کو ظاہر کرے گی،

بشرطیکہ اس کو $l_1x + m_1y + n_1 = 0$ اور $l_2x + m_2y + n_2 = 0$ شکل کے دو اجزائے ضربی میں تحلیل ممکن ہو۔

شرط یہ ہے کہ عام دو درجی مساوات $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ خطوط مستقیم کے جوڑی کو ظاہر کرے۔

آیئے خطوط مستقیم کی جوڑی کی مساوات $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ کو x میں دو درجی مساوات کی طرح دوبارہ ترتیب دیں، ہمارے پاس ہے

$$ax^2 + 2(hy + g)x + (by^2 + 2fy + c) = 0$$

$$x = \frac{-(hy + g) \pm \sqrt{(hy + g)^2 - a(by^2 + 2fy + c)}}{a}$$

$$ax + hy + g = \pm\sqrt{(hy + g)^2 - a(by^2 + 2fy + c)}$$

یعنی $\quad ax + hy + g = \pm\sqrt{(h^2 - ab)y^2 + 2(gh - af)y + g^2 - ac}$,

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:38 PM

چونکہ اوپر کی ہر ایک مساوات ایک خط مستقیم کو ظاہر کرتی ہے، وہ x اور y میں ایک درجی مساوات ہونا چاہئے۔ لہٰذا، نشانی کے تحت یہ جملہ ایک کامل مربع ہونا چاہئے اور اس کے لئے شرط یہ ہے۔

$$4(gh - af)^2 - 4(h^2 - ab)(g^2 - ac) = 0$$

مختصر کرکے a سے تقسیم کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے،

$$, \quad abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0$$ (مقطعہ (Determinant) کا پھیلاؤ اگلے باب میں سیکھیں گے)

ثبوت کے بغیر نتائج

i۔ مساوات $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ سے ظاہر کئے گئے دو خطوط مستقیم متوازی ہیں،
اگر $\frac{a}{h} = \frac{h}{b} = \frac{g}{f}$ یا $bg^2 = af^2$

ii۔ اگر $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ متوازی خطوط مستقیم کے جوڑی کو ظاہر کریں، تو

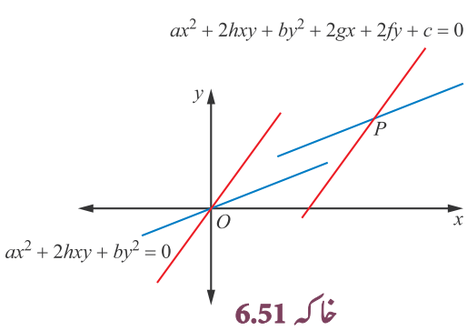
$2\sqrt{\frac{(g^2 - ac)}{a(a+b)}}$ یا $2\sqrt{\frac{(f^2 - bc)}{b(a+b)}}$ ان کا درمیانی فاصلہ یہ ہے۔

خطوط مستقیم کے جوڑی کے مساوات کے درمیان تعلق

(The relationship between the equations of pair of straight lines)

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0 \quad (6.41)$$

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0) \quad (6.42)$$



خاکہ 6.51

اوپر کے خطوط مستقیم کے جوڑی 6.41 اور 6.42 کا میلان صرف
x^2 , xy اور y^2 کے سر اعداد پر منحصر ہوتے ہیں۔

i۔ اگر مساوات $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$
خطوط مستقیم کے ایک جوڑی کو ظاہر کرتی ہے، تو
$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ پہلے جوڑی کے متوازی مبداء سے گذرنے والے خطوط مستقیم کی ایک جوڑی کو ظاہر کرتی ہے۔
(6.41) کا نقطۂ تقاطع $(0, 0)$ ہے۔ اور (6.42) کا نقطۂ تقاطع یہ ہے۔

$$P\left(\frac{hf - bg}{ab - h^2}, \quad \frac{gh - af}{ab - h^2}\right)$$

ii۔ اگر مساوات $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ سے ظاہر کئے گئے خطوط مستقیم کا درمیانی زاویہ θ ہے تو
اس کی قیمت $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ سے ظاہر کئے گئے دو خطوط کے درمیانی زاویہ کے قیمت کے مساوی ہوگی۔

$$\text{غرض } \theta = \tan^{-1}\left|\frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}\right|$$

iii۔ اگر مساوات سے ظاہر کئے گئے دو خطوط زاویہ قائمہ پر ہوں، تو $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ سے ظاہر کئے گئے
دو خطوط $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ بھی زاویہ قائمہ پر ہیں اور شرط $a + b = 0$ ہے۔

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:38 PM

مثال 6.38 : اگر مساوات $\lambda x^2 - 10xy + 12y^2 + 5x - 16y - 3 = 0$ خطوط مستقیم کی ایک جوڑی کو ظاہر کرتی ہے، معلوم کیجئے۔

i۔ λ کی قیمت اور خطوط کے جُدا مساوات ii۔ خطوط کا نقطۂ تقاطع iii۔ خطوط کا درمیانی زاویہ

حل :

i۔ عام مساوات یہ ہے۔ $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

دی گئی مساوات $\lambda x^2 - 10xy + 12y^2 + 5x - 16y - 3 = 0$

دی گئی مساوات کو دی گئی دو درجی مساوات سے موازنہ کرنے پر، ہمارے پاس یہ ہے

$$a = \lambda, b = 12, c = -3, h = -5, g = \frac{5}{2}, f = -8$$

اب خطوط مستقیم کے جوڑی کی شرط پر عمل کرنے پر

$$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$$

یعنی $\lambda(12)(-3) + 2(-8)\left(\frac{5}{2}\right)(-5) - \lambda(-8)^2 - 12\left(\frac{5}{2}\right)^2 - (-3)(-5)^2 = 0$

$\Rightarrow -36\lambda + 200 - 64\lambda - 75 + 75 = 0, \quad \Rightarrow \lambda = 2$

$\therefore$ مساوات یہ ہے۔ $2x^2 - 10xy + 12y^2 + 5x - 16y - 3 = 0.$

آیئے پہلے ہم اوپر کے مساوات کے دو درجہ والے رقموں کو اجزائے ضربی میں تحلیل کریں، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$2x^2 - 10xy + 12y^2 \equiv (x - 2y)(2x - 6y)$$

$$\therefore\ 2x^2 - 10xy + 12y^2 + 5x - 16y - 3 \equiv (x - 2y + c_1)(2x - 6y + c_2)$$

یکساں رقموں کو مساوی کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$2c_1 + c_2 = 5, \quad 3c_1 + c_2 = 8, \quad c_1c_2 = -3$$

پہلی دو مساوات کو حل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $c_1 = 3, c_2 = -1.$

$\therefore$ خطوط کے جُدا مساوات $x - 2y + 3 = 0$ اور $2x - 6y - 1 = 0$ ہیں۔

ii۔ خطوط کا نقطۂ تقاطع خطوط کے دو مساوات کو حل کرنے کے ذریعے دیا جاتا ہے تو ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$(x, y) = \left(-10, -\frac{7}{2}\right)\left(\text{یا ضابطہ کو استعمال کریں } \left(\frac{hf - bg}{ab - h^2}, \frac{hg - af}{ab - h^2}\right)\right)$$

iii۔ خطوط کا درمیانی زاویہ اس طرح دیا جاتا ہے۔ $\tan\theta = \left|\frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}\right|$

$$= \frac{2\sqrt{25 - 24}}{2 + 12} = \frac{1}{7}$$

$$\therefore\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$$

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:39 PM

مثال 6.39 : جب ایک طالب علم اپنے گھر سے 6 کلومیٹر فی گھنٹہ کی اوسط رفتار سے پیدل چلتا ہے، تو اپنے اسکول کو اسکول شروع ہونے سے دس منٹ پہلے پہنچتا ہے۔ جب اس کی اوسط رفتار 4 کلومیٹر فی گھنٹہ ہو تو، وہ اپنے اسکول کو پانچ منٹ دیر سے پہنچتا ہے۔ اگر وہ اسکول کو روزانہ صبح 8.00 بجے پیدل چلنا شروع کرتا ہو تو i۔ گھر اور اسکول کا درمیانی فاصلہ ii۔ ٹھیک وقت ہر اسکول پہنچنے کے لئے کم از کم اوسط رفتار اور اسکول پہنچنے کے لئے درکار وقت iii۔ اسکول کے گیٹ بند ہونے کا وقت iv۔ اس کے پیدل راستے کے خطوط مستقیم کی جوڑی معلوم کیجئے۔

حل: فرض کیجئے کہ x محور گھنٹیوں میں وقت ہے اور y محور کلومیٹر میں فاصلہ ہے۔

دیئے گئے اطلاعات سے، ہمارے پاس ہے

$$y = 6(x - \frac{10}{60}) \Rightarrow y = 6x - 1 \qquad (6.43)$$

$$y = 4(x + \frac{5}{60}) \Rightarrow y = 4x + \frac{1}{3} \qquad (6.44)$$

اوپر کے دو مساوات کو حل کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $(x, y) = \left(\frac{2}{3}, 3\right)$

$$x = \frac{2}{3} \text{ گھنٹہ} \quad = 40 \text{ منٹ} \quad , \; y = 3 \text{ km}$$

i۔ گھر اور اسکول کا درمیانی فاصلہ 3 کلومیٹر ہے۔

ii۔ اس کے اسکول تک کے پیدل راستے کے خطوط مستقیم کی جوڑی یہ ہے۔

$$\frac{60}{40} \times 3 = 4.5 \text{ kmph}$$

اس سے لیا گیا وقت $\frac{2}{3}$ گھنٹہ یا 40 منٹ ہے۔

iii۔ اسکول کا گیٹ 8.40 a.m. پر بند ہو جاتا ہے۔

iv۔ اسکول کے راستہ میں چلنے کی متوازی خط مستقیم کی جوڑی یہ ہے۔

$$(6x - y - 1)\left(4x - y + \frac{1}{3}\right) = 0$$

$$72x^2 - 30xy + 3y^2 - 6x + 2y - 1 = 0 \qquad (6.45)$$

اس سائٹ کو استعمال کر کے ترسیم کھینچئے۔ https://www.geogebra.org/graphing
https://www.geogebra.org/m/fhS6HUtP

مثال 6.40 : اگر $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ کے خطوط مستقیم کا ایک خط $px + qy = 0$ کے عمودی ہو تو ثابت کیجئے کہ $ap^2 + 2hpq + bq^2 = 0.$

حل: فرض کیجئے کہ m_1 اور m_2 خطوط مستقیم کی جوڑی $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ کے میلان ہیں اور کا میلان m ہے۔

لہٰذا، $m_1 m_2 = \frac{a}{b}$, $m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b}$ اور $m = -\frac{p}{q}$

چونکہ، $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ کے خطوط مستقیم کا ایک خط $px + qy = 0$ کے عمودی ہے۔

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:39 PM

$$
\begin{aligned}
m\,m_1 = -1 \quad &\text{یا} \quad m\,m_2 = -1 \\
\Rightarrow \quad (m\,m_1 + 1) = 0 \quad &\text{یا} \quad (m\,m_2 + 1) = 0 \\
\Rightarrow \quad (m\,m_1 + 1)(m\,m_2 + 1) &= 0 \\
\Rightarrow \quad (m_1 m_2)m^2 + (m_1 + m_2)m + 1 &= 0 \\
\Rightarrow \quad \left(\frac{a}{b}\right)\left(-\frac{p}{q}\right)^2 + \left(-\frac{2h}{b}\right)\left(-\frac{p}{q}\right) + 1 &= 0 \\
\Rightarrow \quad ap^2 + 2hpq + bq^2 &= 0
\end{aligned}
$$

مبداء سے گذرنے والے خطوط مستقیم کی جوڑی دودرجی متجانس مساوات ہے۔

مثال 6.41 : ثابت کیجئے کہ مبداء $3x - 2y + 2 = 0$ اور $3x^2 + 5xy - 2y^2 + 4x + 5y = 0$ کے نقاط تقاطع کو ملانے والے خطوط مستقیم زاویہ قائمہ پر ہیں۔

حل: مبداءاوردئے گئے مساوات کے نقاط تقاطع کوملانے والے خطوط مستقیم دودرجی متجانس مساوات ہے۔

مرحلوں کواپناتے ہوئے $3x^2 + 5xy - 2y^2 + 4x + 5y = 0$ اور $3x - 2y + 2 = 0$ کومتجانس بناتے ہیں۔

$$
\frac{(3x - 2y)}{-2} = 1 \quad \text{اور} \quad 3x^2 + 5xy - 2y^2 + (4x + 5y)(1) = 0
$$

$$
3x^2 + 5xy - 2y^2 + (4x + 5y)\left(\frac{3x - 2y}{-2}\right) = 0
$$

$$
(-2)(3x^2 + 5xy - 2y^2) + (4x + 5y)(3x - 2y) = 0
$$

مختصر کرنے پرہمیں حاصل ہوتاہے۔ $2x^2 - xy - 2y^2 = 0. \quad \Rightarrow a = 2,\ b = -2 \Rightarrow a + b = 0$

چونکہ x^2 اور y^2 کے سراعداد کا حاصل جمع صفر کے مساوی ہے، یہ خطوط زاویہ قائمہ پر ہیں۔

مشق 6.4

1۔ خطوط مستقیم کا مجموعہ مساوات معلوم کیجئے، جن کے جُدا مساوات $x - 2y - 3 = 0$ اور $x + y + 5 = 0$ ہیں۔

2۔ ثابت کیجئے کہ $4x^2 + 4xy + y^2 - 6x - 3y - 4 = 0$ متوازی خطوط کے ایک جوڑی ظاہر کرتی ہے۔

3۔ ثابت کیجئے کہ $2x^2 + 3xy - 2y^2 + 3x + y + 1 = 0$ عمودی خطوط کی ایک جوڑی کوظاہر کرتی ہے۔

4۔ ثابت کیجئے کہ مساوات $2x^2 - xy - 3y^2 - 6x + 19y - 20 = 0$ تقاطع خطوط کے ایک جوڑی کوظاہر کرتی ہے۔

مزید یہ ثابت کیجئے کہ ان کا درمیانی زاویہ $\tan^{-1}(5)$ ہے۔

5۔ ثابت کیجئے مبداء سے گذرنے والے خطوط مستقیم، ان میں سے ہرایک خط مستقیم سے زاویہ α بناتی ہے۔

وہ $y = x$ is $x^2 - 2xy\ \sec 2\alpha + y^2 = 0$ ہے۔

6۔ نقطہ $(1,3)$ سے گذرنے والے خطوط مستقیم کے جوڑی کی مساوات معلوم کیجئے جوخطوط $2x - 3y + 1 = 0$ اور $5x + y - 3 = 0$ کے عمودی ہے۔

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:39 PM

7۔ ذیل کے خطوط مستقیم کے جوڑی کے جُدا مساوات معلوم کیجئے۔

(i) $3x^2 + 2xy - y^2 = 0$
(ii) $6(x-1)^2 + 5(x-1)(y-2) - 4(y-2)^2 = 0$
(iii) $2x^2 - xy - 3y^2 - 6x + 19y - 20 = 0$

8۔ خطوط مستقیم $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ میں سے ایک میلان دوسرے کا دُگنا ہے، ثابت کیجئے کہ $8h^2 = 9\,ab$

9۔ خطوط مستقیم $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ میں سے ایک کا میلان دوسرے کا تِگنا ہے، ثابت کیجئے کہ $3h^2 = 4\,ab$

10۔ ایک ΔOPQ خطوط مستقیم $x^2 - 4xy + y^2 = 0$ اور خط PQ سے بنا ہے۔ PQ کی مساوات $x + y - 2 = 0$ ہے۔ مبداء سے کھینچے گئے ΔOPQ کے وسطی خط O کی مساوات معلوم کیجئے۔

11۔ p اور q معلوم کیجئے، اگر ذیل کی مساوات عمودی خطوط کے ایک جوڑی کو ظاہر کرتی ہے۔

$$6x^2 + 5xy - py^2 + 7x + qy - 5 = 0$$

12۔ k کی قیمت معلوم کیجئے، اگر ذیل کی مساوات خطوط مستقیم کی ایک جوڑی کو ظاہر کرتی ہے

$12x^2 + 7xy - 12y^2 - x + 7y + k = 0$ معلوم کیجئے کہ یہ خطوط متوازی ہیں یا تقاطع خطوط ہیں۔

13۔ k کی کونسی قیمت کے لئے $12x^2 + 2kxy + 2y^2 + 11x - 5y + 2 = 0$ دو خطوط مستقیم کو ظاہر کرتی ہے۔

14۔ ثابت کیجئے کہ مساوات $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 12x + 16y - 12 = 0$ متوازی خطوط کے جوڑی کو ظاہر کرتی ہے۔ ان کا درمیانی فاصلہ معلوم کیجئے۔

15۔ ثابت کیجئے کہ مساوات $4x^2 + 4xy + y^2 - 6x - 3y - 4 = 0$ متوازی خطوط کے جوڑی کو ظاہر کرتی ہے۔ ان کا درمیانی فاصلہ معلوم کیجئے۔

16۔ ثابت کیجئے $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ سے دئے گئے خطوط مستقیم میں سے ایک خط محد دمحوروں کے درمیانی زاویے کو نصف کرتی ہے۔ اگر $(a+b)^2 = 4h^2$

17۔ اگر خطوط مستقیم کی جوڑی $x^2 - 2kxy - y^2 = 0$ خطوط مستقیم کے جوڑی $x^2 - 2lxy - y^2 = 0$ کے درمیانی زاویے کو نصف کرتی ہے۔ ثابت کیجئے کہ دوسری جوڑی بھی پہلی جوڑی کے درمیانی زاویے کو نصف کرتا ہے۔

18۔ ثابت کیجئے کہ مبداء اور $3x^2 + 5xy - 3y^2 + 2x + 3y = 0$ اور $3x - 2y - 1 = 0$ کے نقطۂ تقاطع کو ملانے والے خطوط مستقیم زاویہ قائمہ پر ہیں۔

مشق 6.5

صحیح یا زیادہ مناسب جواب کا انتخاب کیجئے۔

1۔ نقطہ کے طریق کی مساوات y محور سے جس کا فاصلہ مبداء سے اس نقطے کے فاصلے کا آدھا ہے۔

(1) $x^2 + 3y^2 = 0$ (2) $x^2 - 3y^2 = 0$ (3) $3x^2 + y^2 = 0$ (4) $3x^2 - y^2 = 0$

2۔ ذیل میں کونسا $(at^2, 2at)$ کے طریق کی مساوات ہے ؟

(1) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (3) $x^2 + y^2 = a^2$ (4) $y^2 = 4ax$

3۔ ذیل کا کونسا نقطہ $3x^2 + 3y^2 - 8x - 12y + 17 = 0$ کے طریق پر واقع ہے۔

(1) $(0,0)$ (2) $(-2,3)$ (3) $(1,2)$ (4) $(0,-1)$

4۔ اگر نقطہ (8,–5) طریق $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = k$ پر واقع ہو تو k کی قیمت ہے۔

(1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 3

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:40 PM

5۔ نقاط (2,3) اور (−1,4) کوملانے والے خط مستقیم جو نقطہ (α , β) سے گذرتا ہے ,اگر

(1) $\alpha + 2\beta = 7$ (2) $3\alpha + \beta = 9$ (3) $\alpha + 3\beta = 11$ (4) $3\alpha + \beta = 11$

6۔ خط کا میلان جو خط $3x - y = -5$ سے زاویہ $45°$ بناتا ہے۔

(1) $1, -1$ (2) $\frac{1}{2}, -2$ (3) $1, \frac{1}{2}$ (4) $2, -\frac{1}{2}$

7۔ خط مستقیم کی مساوات جو پہلے ربع میں محد دمحوروں سے احاطہ $4 + 2\sqrt{2}$ والا مثلث مساوی الساقین بناتا ہے۔

(1) $x + y + 2 = 0$ (2) $x + y - 2 = 0$ (3) $x + y - \sqrt{2} = 0$ (4) $x + y + \sqrt{2} = 0$

8۔ ایک چار ضلعی کے چار راستوں کے محد د ترتیب وار $(-2,4)$, $(-1,2)$, $(1,2)$ اور $(2,4)$ ہیں۔اس سے گذرنے والا راس $(-1,2)$ جو چار ضلعی کو مساوی رقبوں میں تقسیم کرتا ہے، وہ خط یہ ہے۔

(1) $x + 1 = 0$ (2) $x + y = 1$ (3) $x + y + 3 = 0$ (4) $x - y + 3 = 0$

9۔ $(1,2)$ اور $(3,4)$ کوملانے والے قطاع خط کے عمودی ناصف کے محد دمحوروں کے مقطوعے یہ ہیں۔

(1) $5, -5$ (2) $5, 5$ (3) $5, 3$ (4) $5, -4$

10۔ خط کی مساوات جس کا میلان 2 ہے اور مبداء سے عمود کی لمبائی $\sqrt{5}$ کے مساوی ہے وہ یہ ہے۔

(1) $x - 2y = \sqrt{5}$ (2) $2x - y = \sqrt{5}$ (3) $2x - y = 5$ (4) $x - 2y - 5 = 0$

11۔ خط $x - y = 0$ کا عمود محد دمحوروں سے ایک مثلث بناتا ہے۔اگر مثلث کا رقبہ 5 مربع اکائیاں ہو تو خط کی مساوات یہ ہے۔

(1) $x + 5y \pm 5\sqrt{2} = 0$ (2) $x - 5y \pm 5\sqrt{2} = 0$ (3) $5x + y \pm 5\sqrt{2} = 0$ (4) $5x - y \pm 5\sqrt{2} = 0$

12۔ خط $x - y + 5 = 0$ کے عمودی مستقیم کی مساوات، جو y محور دیئے گئے خط کے نقطہ تقاطع سے گزرتا ہے۔

(1) $x - y - 5 = 0$ (2) $x + y - 5 = 0$ (3) $x + y + 5 = 0$ (4) $x + y + 10 = 0$

13۔ اگر ایک چار ضلعی کے راس $(2,3)$ کے قاعدے کی مساوات $x + y = 2$ ہو تو ایک ضلع کی لمبائی

(1) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ (2) 6 (3) $\sqrt{6}$ (4) $3\sqrt{2}$

14۔ خط $(p + 2q)x + (p - 3q)y = p - q$ مختلف p اور q کی قیمتوں کے لئے ذیل کے نقطہ سے گذرتا ہے۔

(1) $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ (2) $\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$ (3) $\left(\frac{3}{5}, \frac{3}{5}\right)$ (4) $\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$

15۔ خط $2x - 3y = 5$ پر جو نقطہ $(1,2)$ اور $(3,4)$ سے ہم فاصلے پر ہے۔ وہ

(1) $(7, 3)$ (2) $(4, 1)$ (3) $(1, -1)$ (4) $(-2, 3)$

16۔ خط $y = -x$ پر نقطہ $(2,3)$ کا خیال

(1) $(-3, -2)$ (2) $(-3, 2)$ (3) $(-2, -3)$ (4) $(3, 2)$

17۔ مبداء سے خط $\frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1$ کے $\perp$ کی لمبائی

(1) $\frac{11}{5}$ (2) $\frac{5}{12}$ (3) $\frac{12}{5}$ (4) $-\frac{5}{12}$

18۔ نقطہ $(1,3)$ اور $2x - 3y + 1 = 0$ کے عمودی خط مستقیم کا y مقطوعہ یہ ہے۔

(1) $\frac{3}{2}$ (2) $\frac{9}{2}$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{2}{9}$

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:40 PM

19۔ اگر دو خطوط مستقیم $x+(2k-7)y+3=0$ اور $3kx+9y-5=0$ عمودی ہوں تو k کی قیمت

(1) $k=3$ (2) $k=\frac{1}{3}$ (3) $k=\frac{2}{3}$ (4) $k=\frac{3}{2}$

20۔ اگر ایک راس مبداء پر ہے اور اس کا ایک ضلع خط $4x+3y-20=0$ کے ہم راہ ہو تو مربع کا رقبہ۔

(1) 20 sq. units (2) 16 sq. units (3) 25 sq. units (4) 4 sq.units

21۔ اگر مساوات $6x^2+41xy-7y^2=0$ سے ظاہر کئے گئے خطوط x محور سے زاویہ α اور β بناتے ہیں تو

(1) $-\frac{6}{7}$ (2) $\frac{6}{7}$ (3) $-\frac{7}{6}$ (4) $\frac{7}{6}$

22۔ خطوط $x^2-4y^2=0$ اور $x=a$ سے بننے والا مثلث کا رقبہ

(1) $2a^2$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$ (3) $\frac{1}{2}a^2$ (4) $\frac{2}{\sqrt{3}}a^2$

23۔ اگر $6x^2-xy+4cy^2=0$ سے دئے گئے خطوط کا ایک خط $3x+4y=0$ ہے تو c اس کے مساوی ہے۔

(1) -3 (2) -1 (3) 3 (4) 1

24۔ خطوط $x^2-xy-6y^2=0$ کا درمیانی زاویۂ حادہ θ ہے، تو $\frac{2\cos\theta+3\sin\theta}{4\sin\theta+5\cos\theta}$ یہ ہے۔

(1) 1 (2) $-\frac{1}{9}$ (3) $\frac{5}{9}$ (4) $\frac{1}{9}$

25۔ $x^2+2xy\cot\theta-y^2=0$ سے دئے گئے خطوط کی ایک مساوات

(1) $x-y\cot\theta=0$ (2) $x+y\tan\theta=0$ (3) $x\cos\theta+y(\sin\theta+1)=0$

(4) $x\sin\theta+y(\cos\theta+1)=0$

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:40 PM

Summary خلاصہ

اطلاعات کے مطابق خطوط مستقیم کے اقسام

S.No	دیئے گئے اطلاعات	خطوط کی مساوات
1	میلان (m) اور y مقطوعہ (b)	$y = mx + b$
2	میلان (m) اور نقطہ (x_1,y_1)	$y - y_1 = m(x - x_1)$
3	دونقاط (x_1,y_1) اور (x_2,y_2)	$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$
4	xمقطوعہ (a) اور yمقطوعہ (b)	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$
5	عمادکی لمبائی (p) ، زاویہ (α)	$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$
6	پیمائشی شکل، پیمائش r -	$\frac{x - x_1}{\cos\theta} = \frac{y - y_1}{\sin\theta} = r$
7	عام مساوات	$ax + by + c = 0$

خطوط کی شکل	متوازی ہونے کے شرط	عمودی ہونے کے لئے شرط
$y = m_1x + c_1$ اور $y = m_2x + c_2$	$m_2 = m_1$	$m_1m_2 = -1$
$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ $a_2x + b_2y + c_2 = 0$	$a_1b_2 = a_2b_1$	$a_1a_2 + b_1b_2 = 0$

$ax_1 + by_1 + c$ اور c یکساں نشان یا مخالف نشان کے لحاظ سے خط $ax + by + c = 0\ (c \neq 0)$ پر ایک نقطہ $P(x_1,y_1)$ مبداء کے جانب یا غیر مبداء کی جانب ہے۔

دونقاط (x_1,y_1) اور (x_2,y_2) کا درمیانی فاصلہ ضابطہ

$D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ سے دیا جاتا ہے۔

ایک نقطہ $P(x_1, y_1)$ سے خط $ax + by + c = 0$ کا فاصلہ $\left|\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$ ہے۔

دو متوازی خطوط $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ اور $a_1x + b_1y + c_2 = 0$ کا درمیانی فاصلہ $\frac{|c_2 - c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ہے۔

خط $ax + by + c = 0$ کے متوازی خط جو نقطہ (x_1,y_1) سے گذرتا ہے وہ $ax + by = ax_1 + by_1$ ہے اور اس کا عمودی خط $bx - ay = bx_1 - ay_1$ ہے۔

285
Monday, November 07, 2022 8:40:03 PM

خط $ax + by + c = 0$ کے لحاظ سے نقطہ (x_1, y_1) کے خیال کا محدد اس خط سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = -\frac{2(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2}$$

عمودی ہونے کے لئے شرط	متوازی ہونے کے لئے شرط	خطوط مستقیم کی جوڑی
$a + b = 0$	$h^2 - ab = 0,$	$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$

خطوط $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ کے درمیانی زویہ کے ناصف کی مساوات یہ ہے۔

$$\frac{x^2 - y^2}{a - b} = \frac{xy}{h}$$

عام دودرجی مساوات $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ خطوط مستقیم کی ایک جوڑی کو ظاہر کرنے کے لئے شرط

$$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$$

i۔ ان کا درمیانی زاویہ $\theta = \tan^{-1}\left|\frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}\right|$ اگر $a + b = 0$ ہو تو خطوط عمودی ہیں۔

ii۔ نقطۂ تقاطع یہ ہے۔

$$P\left(\frac{hf - bg}{ab - h^2}, \quad \frac{gh - af}{ab - h^2}\right)$$

iii۔ مساوات $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ سے ظاہر کئے گئے دو خطوط مستقیم متوازی ہیں،

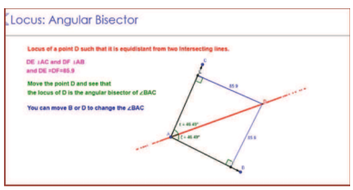
اگر $bg^2 = af^2$ $\frac{a}{h} = \frac{h}{b} = \frac{g}{f}$

iv۔ اگر $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ متوازی خطوط مستقیم کی جوڑی کو ظاہر کرتے ہیں تو ان کا درمیانی فاصلہ یہ ہوگا۔

$$2\sqrt{\frac{(g^2 - ac)}{a(a + b)}} \qquad 2\sqrt{\frac{(f^2 - bc)}{b(a + b)}}$$

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:40 PM

ICT کارنر - 6(a)



مطلوبہ نتائج ⇐

مرحلہ - 1

براؤزر کھولئے اور نیچے دئے گے URL لنک ٹائپ کیجئے یا QR کوڈ کو اسکین کیجئے۔

مرحلہ - 2

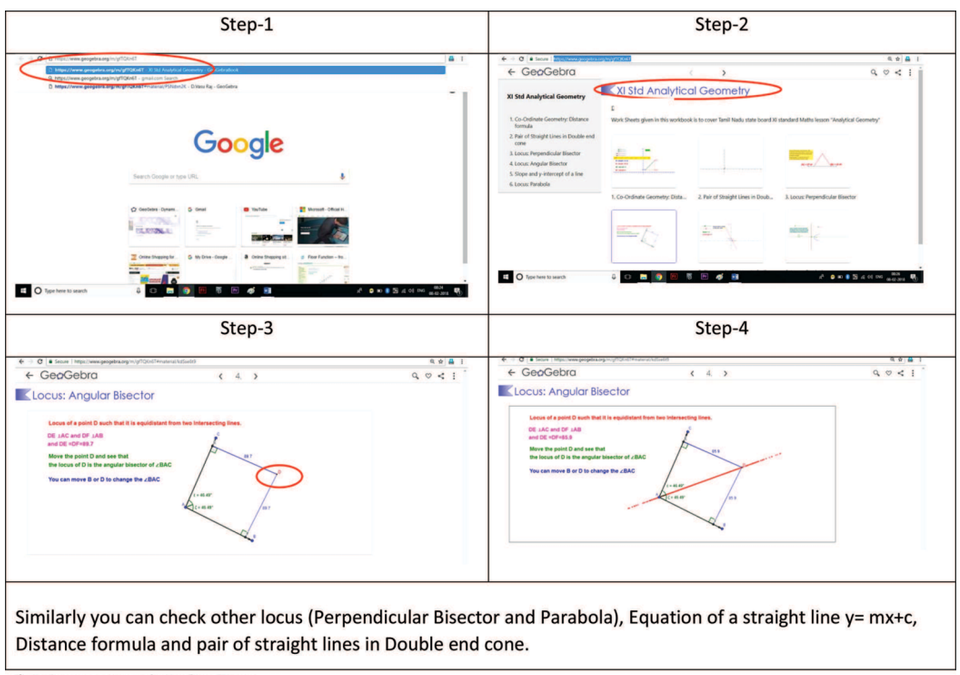
XI STD Analytical Geometry نامی Geogebra ورک بک کھلے گا۔ اس میں 5 سے زائد ورک شیٹ ہیں۔
تمہارا مطلوبہ ورک شیٹ منتخب کیجئے۔ مثال کے طور پر Locus : Angular Bisector کا انتخاب کیجئے۔

مرحلہ - 3

طریق : زاویائی ناصف ورک شیٹ کھلے گا۔ اس صفحے میں نقطہ D کا طریق دیکھنے کے لئے نقطہ D کو حرکت دیجئے۔

مرحلہ - 4

نقطہ D کو اس طرح حرکت دیجئے اس طرح سے کہ دو ساکن خطوط سے اس کا فاصلہ مساوی ہوں۔ طریق کے لئے دلیل پیش کیجئے۔



Similarly you can check other locus (Perpendicular Bisector and Parabola), Equation of a straight line y= mx+c, Distance formula and pair of straight lines in Double end cone.

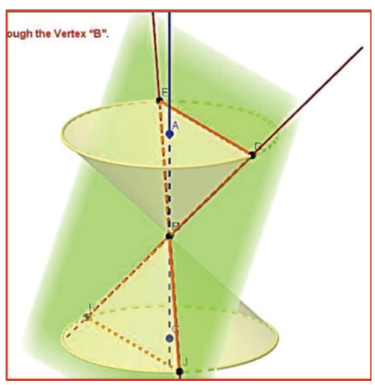
*Pictures are only indicatives.

Browse in the link
Analytical Geometry GeoGebra Workbook: https://ggbm.at/QNaNghJZ

6X30B

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:41 PM

6(b) - کارنر ICT



مطلوبہ نتائج ⇐

مرحلہ-1

براؤزر کھولئے اور نیچے دئے گئے URL کو ٹائپ کیجئے (یا) QR کوڈ کو اسکین کیجئے۔

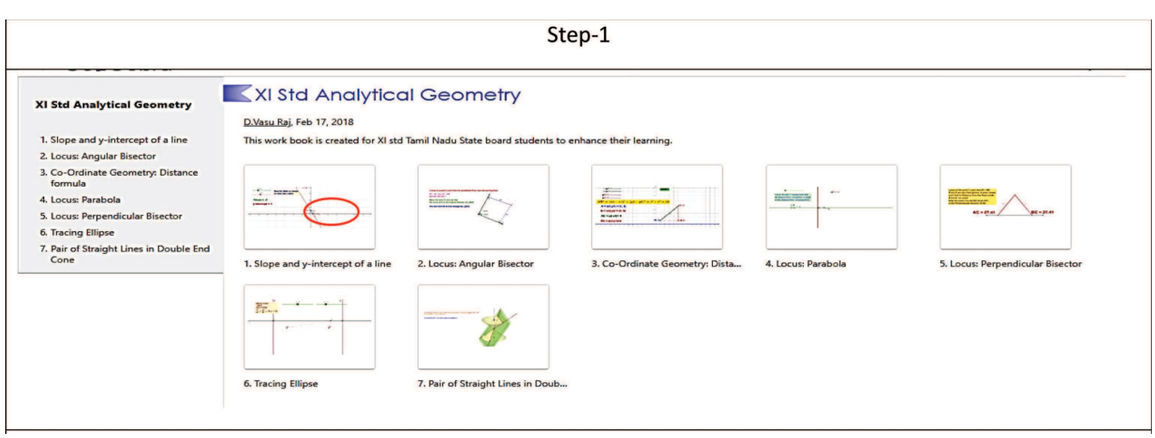
مرحلہ-2

XI STD Analytical Geometry نامی Geogebra ورک بک کھلے گا۔ اس میں 7 سے زائد ورک شیٹ ہیں۔

مثال کے طور پر Pair of straight line in double end cond کا انتخاب کیجئے۔

مرحلہ-3

ایک مستوی دوہرا اختتامی مخروط کو اس کے کناروں پر 4 نقاط پر کاٹتا ہے اور یہ راس سے گذرتا ہے۔ اب اگر تم نقطہ E یا D کو پکڑتے ہوئے اسے حرکت دیں تو مستوی حرکت کرتی ہے۔ کسی بھی مقام پر تم مشاہدہ کر سکتے ہو، تمہیں خط مستقیم کی جوڑی حاصل ہوگی۔

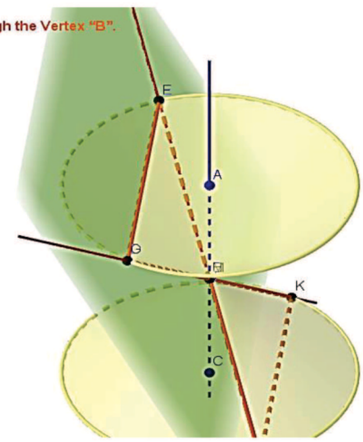


11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:42 PM

Step-2

Pair of Straight lines is formed in a double end cone only when a plane pass through the Vertex "B".
EJ and GK form a pair of straight lines.

Move the Figure in all direction to visualise the pair of straight lines



*Pictures are only indicatives.

Browse in the link
Analytical Geometry GeoGebra Workbook: https://ggbm.at/QNaNghJZ

IW2JR

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:42 PM

Answers جوابات

Exercise 1.1 مشق 1.1

(1) (i) $\{2,3,5,7\}$ (ii) $\{1\}$ (iii) $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ (iv) $\{-5\}$

(2) $\{x \in \mathbb{R}: x^2 = 1\}$

(3) (i) محدود (ii) لامحدود (iii) لامحدود (iv) لامحدود (v) لامحدود

(5) صحیح نہیں (6) 0 (7) 128 (8) $\{0,1,2,3\}$

(9) $A = \{x, y, z\}$ اور $B = \{1,2\}$ (10) $\{(-1,0),(-1,1),(0,2),(1,2)\}$

Exercise 1.2 مشق 1.2

i۔ انعکاس: متشاکل نہیں، متعدی۔ ii۔ انعکاس نہیں، متشاکل، متعدی نہیں۔

iii۔ انعکاسی، متشاکل نہیں، متعدی نہیں۔ iv۔ انعکاسی، متشاکل

v۔ ایک خالی مجموعہ ہے، انعکاسی نہیں، متشاکل، متعدی

(2) (i) (c,c) اور (d,d) (ii) (c,a)

(iii) کچھ بھی شامل نہیں۔ (iv) $(c,c),(d,d),(c,a)$ شامل کرنا چاہئے۔

5۔ (3) (i) (c,c) (ii) (c,a) (iii) کچھ بھی نہیں (iv) (c,c) اور (c,a)

6۔ (5) $\{(3,8),(6,6),(9,4),(12,2)\}$; انعکاسی نہیں، متشاکل نہیں، متعدی، ایک معادل تعلق نہیں۔

7۔ (7) $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(4,1),$
$(4,2),(5,1)\}$; انعکاسی نہیں، متشاکل، متعدی نہیں، معادل نہیں۔

(8) $\{(a,a),(b,b),(c,c)\}$ سب سے چھوٹا مجموعہ ہے۔ ; سب سے بڑا مجموعہ $A \times A$ ہے۔

Exercise 1.3 مشق 1.3

(1) جی ہاں، معکوس ایک تفاعل نہیں۔

(2) $f(-4) = 8,\ f(1) = 0,\ f(-2) = 6,\ f(7) = 0,\ f(0) = 0$

(3) $f(-3) = 1,\ f(5) = 38,\ f(2) = 1,\ f(-1) = -5,\ f(0) = -3$

(4) (i) ایک تفاعل، ایک، ایک نہیں اور برون نہیں۔ (ii) ایک تفاعل نہیں۔

(5) (i) $\{(1,a),(2,a),(3,a),(4,a)\}$ (ii) ممکن نہیں (iii) ممکن نہیں

(iv) $\{(1,a),(2,b),(3,c),(4,d)\}$

(6) $\mathbb{R} - \{n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}\}, n \in \mathbb{Z}$ (7) $\emptyset$

(8) $(-\infty, -\frac{1}{3}] \cup [1, \infty)$ (9) $\mathbb{R} - \{0\}, \mathbb{R} - \{0\}$

(10) x کے لئے $(f \circ g) = \mathbf{O}, (g \circ f) = \mathbf{O}$ (12) تمام $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{3}$ (13) $x > 0$

(15) جملہ لاگت $= 0.43m + 50$, ہوائی کرایہ ₹738

(16) $(A+S)(x) = 55,000 + 0.09x$, خاندان کی کل آمدنی = ₹14,05,000

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:43 PM

(17) $(g \circ f)(\mathrm{x}) = 62.115x$

(18) ایک دن کی آمدنی $= (200 - x)x$; جملہ لاگت $= 100(200 - x)$;

جملہ منافع $= (200 - x)x - 100(200 - x)$ روپیوں میں

(19) $f^{-1}(\mathrm{x}) = \dfrac{9x}{5} + 32$ $(20) f^{-1}(\mathrm{x}) = \dfrac{x+4}{3}$

Exercise 1.5 مشق 1.5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
(3)	(2)	(4)	(1)	(1)	(4)	(2)	(2)	(3)	(2)	(2)	(3)	(3)	(2)	(4)

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
(3)	(4)	(3)	(2)	(4)	(4)	(1)	(4)	(2)	(3)

Exercise 2.1 مشق 2.1

(1) $\sqrt{7} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $-\dfrac{1}{4} \in \mathbb{Q}$, $0 \in \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$,

$3.14 \in \mathbb{Q}$, $4 \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, $\dfrac{22}{7} \in \mathbb{Q}$

(3) yes, $4 + \sqrt{3}$, $2 + \sqrt{3}$ (4) yes, $2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}$ (5) $\dfrac{1}{2^{1001}}$

Exercise 2.2 مشق 2.2

(1)(i) $-4 < x < 10$ (ii) $\mathbb{R}$ (iii) $\dfrac{11}{3} \leq x \leq \dfrac{13}{3}$ (iv) $-7 < x < 7$

(2) $\left(-\infty, \dfrac{5}{12}\right) \cup \left(\dfrac{7}{12}, \infty\right)$ (3) $\left(-\infty, \dfrac{-7}{3}\right] \cup \left[\dfrac{7}{3}, \infty\right)$ (4) $-\dfrac{15}{2} \leq x \leq \dfrac{11}{2}$

(5) $-\dfrac{3}{10} < x < \dfrac{7}{10}$ (6) کوئی حل نہیں

Exercise 2.3 مشق 2.2

(1)(i) $[-1, 4)$ (ii) $[-3, 5]$ (iii) $(-\infty, 3)$ (iv) $(-\infty, 5)$

(2)(i) $1, 2, 3, 4$ (ii) $, \ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$

(3)(i) $\left(-\infty, -\dfrac{9}{2}\right]$ (ii) $, \ldots -7, -6, -5$ (iii) کوئی حل نہیں

(5) 93 (6) 120 l اور 300 l کے درمیان (7) $(11, 13), (13, 15), (15, 17), (17, 19)$

(8) $t = 9$ سکنڈ $, 11$ سکنڈ (9) 10 گھنٹوں سے کم (10) ₹21,000 سے کم یا ₹33,000 سے زیادہ

Exercise 2.4 مشق 2.4

(1) $x^2 - 4x - 21 = 0$ (2) $-\dfrac{2}{5}(x^2 - 2x - 4)$ (3) $x^2 + \dfrac{\sqrt{2}}{3}x + \dfrac{1}{3} = 0$

(6) (i) $b = 0$ (ii) $3b^2 = 16ac$ (iii) $c = a$

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:43 PM

(8) (i) حقیقی اور واضح (ii) حقیقی اور واضح (iii) حقیقی اور واضح

(9) (i) قطاع نہیں کرتے (ii) دو نقاط پر قطاع کرتے ہیں (iii) صرف ایک نقطہ پر مس کرتے ہیں

(10) $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2$

Exercise 2.5 مشق 2.5

(1) $\left[-3,\frac{5}{2}\right]$ (2) $[1,2]$

Exercise 2.6 مشق 2.6

(1) $-\frac{5}{2}$ اور $\frac{5}{2}$ (2) $\frac{3+\sqrt{53}}{2}$ اور $\frac{3-\sqrt{53}}{2}$ (3) $x=\pm 2$ (4) $x=-\frac{3}{5}$ or -1

Exercise 2.7 مشق 2.7

(1) $(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$ (2) $a=5$

Exercise 2.8 مشق 2.8

(1) $(0,1)\cup(2,\infty)$ (2) $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)\cup(2,4)$ (3) $(-3,-2]\cup[2,5)$

Exercise 2.9 مشق 2.9

(1) $\frac{1}{2a(x-a)}-\frac{1}{2a(x+a)}$

(2) $\frac{7}{3(x-2)}+\frac{2}{3(x+1)}$

(3) $\frac{1}{6(x-1)}+\frac{2}{15(x+2)}+\frac{-3x+1}{10(x^2+1)}$

(4) $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-1)^3}$

(5) $\frac{1}{2(x^2-1)}-\frac{2}{2(x^2+1)}$

(6) $\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2+1}$

(7) $1+\frac{13}{x-3}-\frac{7}{x-2}$

(8) $x+\frac{9}{x+2}-\frac{13}{x+3}$

(9) $-\frac{14}{9(x+1)}-\frac{11}{3(x+1)^2}+\frac{14}{9(x-2)}$

(10) $\frac{4}{x+1}+\frac{2x-3}{x^2+1}$

(11) $2+\left(\frac{2}{x+3}-\frac{1}{x-1}\right)$

(12) $\frac{3}{x+1}+\frac{4-3x}{x^2+1}$

Exercise 2.11 مشق 2.11

(1)(i) 25 (ii) $\frac{1}{8}$ (iii) $\frac{1}{100}$ (iv) $\frac{1}{9}$ (v) $\frac{1}{3}$

(2) 8 (3) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (4) $\frac{1}{2}$ (5) 2

100 95 75 25 5 0

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:43 PM

(6) $\dfrac{21+7\sqrt{2}+3\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{7}$ (7) 5 (8) $\dfrac{2+2\sqrt{6}}{5}$

Exercise 2.12 مشق 2.12

(1) $\log_b y = x$, $(0,\infty)$, $(-\infty,\infty)$

(2) $\dfrac{5}{6}$ (3) 64 (4) 2 (11) $2\sqrt{2}$ (12) -10

Exercise 2.13 مشق 2.13

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
(2)	(1)	(2)	(3)	(2)	(2)	(3)	(1)	(2)	(2)	(2)	(3)	(3)	(2)	(3)
16	17	18	19	20										
(1)	(3)	(1)	(1)	(4)										

Exercise 3.1 مشق 3.1

(1)(i) پہلا ربع (ii) دوسرا ربع (iii) چوتھا ربع (iv) چوتھا ربع
(v) دوسرا ربع

(2)(i) 35° (ii) 165° (iii) 70° (iv) 90° (v) 270° (8) $k \in [-1,1]$

(9) $\sec\theta = \dfrac{p^2+1}{2p}$; $\tan\theta = \dfrac{p^2-1}{2p}$; $\sin\theta = \dfrac{p^2-1}{p^2+1}$ (12) $\left(c^2+bd\right)^2 = (ad+cb)^2 + \left(ac-b^2\right)^2$

Exercise 3.2

(1)(i) $\dfrac{\pi}{6}$ (ii) $\dfrac{3\pi}{4}$ ریڈیان (iii) $-\dfrac{41\pi}{36}$ ریڈیان (iv) $\dfrac{5\pi}{6}$ ریڈیان (v) $\dfrac{11\pi}{6}$ ریڈیان

(2)(i) 60° (ii) 20° (iii) 72° (iv) 420° (v) 200°

(3) $r \approx 31.82$ meters (4) $s = \dfrac{20\pi}{3} = 20.92$cm (5) $\theta = 12°36'$ (6) $s = 7.16$feet

(7) $r_1 : r_2 = 5 : 4$

(8) قطاع دائرہ کا زاویہ $\approx 65°27'16''$ (9) 6000° (10) 14° (11) $\dfrac{3\pi}{4}$

Exercise 3.3 مشق 3.3

(1)(i) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (ii) $-\dfrac{1}{2}$ (iii) $\dfrac{1}{2}$ (iv) $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (v) $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (vi) $\sqrt{3}$ (vii) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\sin\theta = \dfrac{2\sqrt{6}}{7}$; $\cos\theta = \dfrac{5}{7}$; $\tan\theta = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$;
$\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{7}{2\sqrt{6}}$; $\sec\theta = \dfrac{7}{5}$; $\cot\theta = \dfrac{5}{2\sqrt{6}}$

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:43 PM

$$(3)(\text{i})\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2};\ \text{cosec}\ \theta = -\frac{2}{\sqrt{3}};\ \sec\theta = -2;\ \tan\theta = \sqrt{3};\ \cot\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$(\text{ii})\ \sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{3};\ \text{cosec}\ \theta = \frac{3}{\sqrt{5}};\ \sec\theta = \frac{3}{2};\ \tan\theta = \frac{\sqrt{5}}{2};\ \cot\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$(\text{iii})\ \cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3};\ \text{cosec}\ \theta = -\frac{3}{2};\ \sec\theta = \frac{3}{\sqrt{5}};\ \tan\theta = -\frac{2}{\sqrt{5}};\ \cot\theta = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$(\text{iv})\ \sec\theta = -\sqrt{5};\ \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}};\ \cot\theta = -\frac{1}{2};\ \sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}};\ \text{cosec}\ \theta = \frac{\sqrt{5}}{2};$$

$$(\text{v})\ \cos\theta = \frac{5}{13};\ \sin\theta = -\frac{12}{13};\ \text{cosec}\ \theta = -\frac{13}{12};\ \tan\theta = -\frac{12}{5};\ \cot\theta = -\frac{5}{12};$$

$(5)\ \theta = 60°, 120°, 240°, 300°,$

Exercise 3.4 3.4 مشق

$$(1)(\text{i})\ \sin(x+y) = \frac{220}{221}\quad (\text{ii})\ \cos(x-y) = \frac{171}{221}\quad (\text{iii})\ \tan(x+y) = \frac{220}{21}$$

$$(2)(\text{i})\ \sin(A+B) = \frac{187}{205}\quad (\text{ii})\ \cos(A-B) = \frac{156}{205}\quad (3)\ \cos(x-y) = \frac{4}{5}$$

$$(4)\quad \sin(x-y) = -\frac{87}{425}\quad (5)\ \cos 105° = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}};\quad \sin 105° = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}};$$

$$\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right) = -(2+\sqrt{3})$$

$(7)\ \ 4x^2 - 2\sqrt{6}x + 1 = 0\ \ (16)\ \ 0\ \ (22)\ \ 1\ \ (24)\ \ \frac{2}{11}$

Exercise 3.5 3.5 مشق

$$(1)(\text{i})\ \frac{161}{289}\quad (\text{ii})\ -\frac{7}{25}\quad (\text{iii})\ \frac{3713}{4225}\quad (2)(\text{i})\ \frac{2\sqrt{3}}{5},\ \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

Exercise 3.6 3.6 مشق

$$(1)(\text{i})\ \frac{1}{2}[\sin 63° + \sin 7°]\quad (\text{ii})\ \frac{1}{2}[\sin 6x + \sin 2x]\quad (\text{iii})\ \frac{1}{2}[\sin 12\theta + \sin 8\theta]$$

$$(\text{iv})\ \frac{1}{2}[\cos 7\theta + \cos 3\theta]\quad (\text{v})\ \frac{1}{2}[\cos\theta - \cos 9\theta]\quad (2)(\text{i})\ 2\cos 55°\sin 20°$$

$$(\text{ii})\ 2\cos 40°\cos 25°\quad (\text{iii})\ 2\sin 45°\cos 5°\quad (\text{iv})\ 2\sin 55°\sin 20°$$

Exercise 3.8 3.8 مشق

$$(1)(\text{i})\ \theta = -\frac{\pi}{4};\ \theta = n\pi + (-1)^n\left(-\frac{\pi}{4}\right).\quad n \in \mathbb{Z}$$

$$(\text{ii})\ \theta = \frac{\pi}{6};\quad \theta = n\pi + \frac{\pi}{6},\quad n \in \mathbb{Z}$$

$$(\text{iii})\ \theta = -\frac{\pi}{6};\ \theta = n\pi + \left(\frac{-\pi}{6}\right),\quad n\ \in \mathbb{Z}$$

$$(2)(\text{i})\ x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\quad (\text{ii})\ x = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \pi$$

$$(\text{iii})\ x = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\quad (\text{iv})\ x = 0, \pi$$

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:43 PM

(3)(i) $x = (2n+1)\frac{\pi}{6}$ or $x = \frac{n\pi}{2} + (-1)^n \frac{\pi}{12}$, $n \in \mathbb{Z}$

(ii) $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$ or $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2}$ $n \in \mathbb{Z}$

(iii) $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{4}$ or $\theta = 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

(iv) $\theta = \frac{n\pi}{3}$ or $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$

(v) $\theta = 2n\pi$ or $\theta = \frac{2n\pi}{3} + \left(\frac{-\pi}{6}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$

(vi) $\theta = (8n+1)\frac{\pi}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$

(vii) $\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$

(viii) $\theta = 2n\pi - \frac{\pi}{2} \pm \frac{2\pi}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$

(ix) $\theta = \frac{n\pi}{3} + \frac{\pi}{18}$, $n \in \mathbb{Z}$

(x) $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{10}$, $n \in \mathbb{Z}$

(xi) $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ $n \in \mathbb{Z}$

Exercise 3.9 مشق 3.9

(2) $\angle A = 75°$ (9) $40m, 40m, 40m$ (10) $4m,\ 4m,\ 4m$ and $4\sqrt{3}\ sq.meter.$

Exercise 3.10 مشق 3.10

(1) اس طرح کا مثلث نہیں پایا جاتا (3) $\angle A = 15°, \angle B = 105°$ (7) $\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}$ km (8) $2\sqrt{13}$ km

(9) $3 + \sqrt{73}$ km (10) 7 km

(11) جملہ لاگت 155800 اور احاطہ $180 + 20\sqrt{27}$ قدم

(12) $x = 100$ km (13) $\sqrt{5 - 2\sqrt{2}}$ km

(14) $2\sqrt{6} + 2\sqrt{3} + 6$ km (15) $AB = 10\sqrt{3}$ km

Exercise 3.11 مشق 3.11

(1)(i) $\theta = \frac{\pi}{4}$ (ii) $\theta = \frac{\pi}{6}$ (iii) $\theta = -\frac{\pi}{2}$ (iv) $\theta = \frac{3\pi}{4}$ (v) $\theta = \frac{\pi}{3}$

Exercise 3.12 مشق 3.12

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
(4)	(1)	(1)	(1)	(4)	(4)	(1)	(2)	(4)	(2)	(3)	(2)	(3)	(3)	(2)
16	17	18	19	20										
(4)	(1)	(1)	(1)	(1)										

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:43 PM

Exercise 4.1 مشق 4.1

(1)(i) 17 (ii) 6 (iii) 20 (iv) 720 (v) 120

(2)(i) 151200 (ii) 24 (3)(i) 12 (ii) 24 (4)(i) 64 (ii) 24

(5)(i) 90 (ii) 64 (6)(i) 144 (ii) 80 (7)(i) 48 (ii) 90

(8)(i) 9000 (ii) 4536 (iii) 4464 (9)(i) 36 (ii) 60 (10) 13

(11) 400 (12)(i) 42 (ii) 78 (13)(i) 4^6 (ii) 3^{10} (iii) 10^{12}

(14)(i) 720 (ii) 144 (iii) 4 iv)(144 (v) 220 (vi) $(n+3)(n+2)$

(15)(i) 15 (ii) 120 (iii) $\frac{n(n-1)}{2}$ 16.(i) 4 (ii) 100

Exercise 4.2 مشق 4.2

(1) 10 (2) 4 (3)(i) 336 (ii) 172800 (4) 720

(5)(i) 4^{10} (ii) $3^4 \times 5^6$ (iii) 11! (6)(i) 4^5 (ii) 15^5

(7) 144 (8)(i) 14! (ii) $9! \times 6!$ (iii) $8! \times {}^9P_6$ (9) 34650

(10) 1260 (11) 6912 (12) 60 (13)(i) 2^8 (ii) 28

(14)(i) 43200 (ii) 151200 (iii) 19807200 (iv) 151200 (15)(i) 180

(ii) 60 (iii) 30 (16)(i) 379 (ii) 135 (17) 120, NIGHT

(18) 7 (19) 399960 (20) 571956

Exercise 4.3 مشق 4.3

(1) 1 (2) 3 (3) 10, 3 (6) 20

(9) (i) ${}^{14}C_7 = 3432$ (ii) ${}^{15}C_2 = 105$ (iii) ${}^{20}C_2 = 190$ (iv) ${}^{100}C_5$ (v) ${}^5C_3 \times {}^4C_2 \times {}^2C_1 = 120$

(10) (i) $2^4 = 16$ (ii) $2^5 = 32$ (iii) 2^n

(11) (i) ${}^{25}C_3$ (ii) ${}^{25}P_3$

(12) ${}^{10}P_2 \times {}^8C_4 = 6300$ (13)(i) ${}^{10}C_3 = 120$ (ii) ${}^{10}C_5 = 252$

(14) ${}^5C_2 \times {}^{20}C_3 = 11400$ (i) ${}^4C_1 \times {}^{20}C_3 = 4560$ (ii) ${}^5C_2 \times {}^{19}C_3 = 9690$

(15) ${}^7C_3 = 35$ (16) 4512 (17) 546 (18)(i) 280 (ii) 336 (iii) 736

(19) 485 (20) 64 (21) 2454

(22) ${}^{15}C_3 = 455$ (23) 364 (24)(i) 50 (ii) 161 (25) 15

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:43 PM

Exercise 4.5 مشق 4.5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
(2)	(2)	(1)	(2)	(4)	(2)	(1)	(4)	(2)	(2)	(3)	(4)	(2)	(3)	(1)

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
(4)	(2)	(3)	(4)	(3)	(2)	(2)	(2)	(1)	(2)

Exercise 5.1 مشق 5.1

(1)(i) $8x^6 - 36x^3 + 54 - \dfrac{27}{x^3}$ (ii) $2[16x^8 + 216x^4(1-x^2) + 81(1-x^2)^2]$

(2)(i) 108243216 (ii) 96059601 (iii) 4782969

(3) $(1.01)^{10^6} > 10000$ (4) 10 (5) رقم ممکن نہیں x^6 ، 15

(6) 26235 (7) $-\dfrac{40}{27}$ (8) $'01'$

(13) $n = 15$ (14) $n = 55$ (15) $n = 7$ or 14

Exercise 5.2 مشق 5.2

(1)(i) G.P (ii) ان میں سے کوئی بھی نہیں (iii) G.P

(iv) ان میں سے کوئی بھی نہیں (v) ان میں سے کوئی بھی نہیں (vi) ان میں سے کوئی بھی نہیں (vii) A.G.P

(2)(i) $2, 2, 4, 4, 6, 6\ldots,$ (ii) $1, 2, 3, 5, 8, 13\ldots,$ (iii) $1, 2, 3, 6, 11, 20\ldots,$

(3)(i) $a_n = \begin{cases} n+1 & \text{اگر } n \text{ طاق ہو تو} \\ n & \text{اگر } n \text{ جفت ہو تو} \end{cases}$ (ii) $a_n = \dfrac{n}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ (iii) $a_n = \dfrac{2n-1}{2n}, \forall n \in \mathbb{N}$

(iv) $a_n = \begin{cases} 7-n & \text{اگر } n \text{ طاق ہو تو} \\ 8+n & \text{اگر } n \text{ جفت ہو تو} \end{cases}$

(4) $12, 18, 27$ (5) $t_n = \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{(n+1)^2}$ (8) $5, 45$

Exercise 5.3 مشق 5.3

(1) $a = \dfrac{133}{25}, d = -\dfrac{2}{75}, S_{20} = \dfrac{304}{3}$ (2) $S_{17} = 527$

(3)(i) $S_n = \dfrac{8}{81}[10(10^n - 1) - 9n]$ (ii) $S_n = \dfrac{6}{81}[10(10^n - 1) - 9n]$

(4) $S_n = \dfrac{4}{9}(4^n - 1) - \dfrac{n}{3}$ (5) $\dfrac{3n-2}{3^{n-1}}, \dfrac{3^n - (3n-2)}{2 \cdot 3^{n-1}} + \dfrac{3^{n-1} - 1}{4 \cdot 3^{n-3}}$

(6) $n = 15$ (8) 20 months (9) 2480 metres (10) $120, 480, 30(2)^n$

(11) $500\left(\dfrac{11}{10}\right)^{10} = 1296.87$ (12) 15th day

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:44 PM

Exercise 5.4 مشق 5.4

(1)(i) $\frac{1}{5}\left[1-\frac{x}{5}+\frac{x^2}{25}-\frac{x^3}{125}+\ldots\right]$ $|x|<5$

(ii) $\frac{2}{9}\left[1-2\left(\frac{4x}{3}\right)+3\left(\frac{4x}{3}\right)^2-4\left(\frac{4x}{3}\right)^3+\ldots\right]$ $|x|<\frac{3}{4}$

(iii) $5^{\left(\frac{2}{3}\right)}\left[1+\frac{2}{15}(x)^2-\frac{1}{225}x^4+\frac{4}{81\times 125}x^6+\ldots\right]$ $x^2<5$

(iv) $2^{\left(-\frac{2}{3}\right)}\left[1-\frac{x}{3}+\frac{5}{36}x^2-\frac{5}{81}x^3+\ldots\right]$ $|x|<2$

(2) $(1001)^{\left(\frac{1}{3}\right)} \approx 10.00333$

(5)(i) $1+5x+\frac{25x^2}{2}+\frac{125x^3}{6}+\frac{625x^4}{24}+\frac{625x^5}{24}+\ldots$

(ii) $1-2x+2x^2-\frac{4x^3}{3}+\frac{2x^4}{3}-\frac{4x^5}{15}+\ldots$

(iii) $1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{48}x^3+\frac{1}{384}x^4+\ldots$

(6)(i) $4x-8x^2+\frac{64x^3}{3}-\frac{64x^4}{3}+\ldots$ for $|x|<\frac{1}{4}$

(ii) $-2x-\frac{4x^2}{2}-\frac{8x^3}{3}-\frac{16x^4}{4}-\ldots$ for $|x|<\frac{1}{2}$

(iii) $2[3x+\frac{27x^3}{3}+\frac{243x^5}{5}+\frac{2187x^7}{7}+\ldots]$ for $|x|<\frac{1}{3}$

(iv) $-2[2x+\frac{8x^3}{3}+\frac{32x^5}{5}+\frac{128x^7}{7}+\ldots]$ for $|x|<\frac{1}{2}$

(8) $\left(\frac{15}{16}\right)^{\frac{1}{8}}\simeq 0.99196$ (9) $\frac{28}{3}$ (10) $\frac{1}{2}\log_e^{10}$

Exercise 5.5 مشق 5.5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
(4)	(4)	(4)	(4)	(2)	(3)	(1)	(3)	(4)	(1)	(1)	(4)	(4)	(2)	(3)
16	17	18	19	20										
(2)	(2)	(3)	(3)	(2)										

Exercise 6.1 مشق 6.1

(1)(i) $x^2+y^2=81$ (ii) $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}=1$ (2)(i) $y=\pm 2$ (ii) $x=\pm 3$

(3) $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ (4) $k=-24,\quad b=-\frac{1}{4}$ (5) $x^2+y^2=16$

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:44 PM

(6) $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 8 = 0$ (7) $x^2 + y^2 - 5x + 8y + 16 = 0$

(8) $y^2 = 2x$ (10) $8x^2 + 36y^2 - 16x + 252y + 431 = 0$

(11) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (12) $9x^2 - 33x - 3y + 35 = 0$

(13) $x^2 + y^2 - 12x + 9y + 63 = 0$ (14) $(5 - \sqrt{21}, 3), (5 + \sqrt{21}, 3), (8, -3), (2, -3)$

(15) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

Exercise 6.2 6.2 مشق

(1)(i) $y = 5x - 4$ (ii) $3x - y = 2$ iii) $2x + 3y = 5$ (iv) $x + \sqrt{3}y = (1 + \sqrt{3})$

(3) $10x + 3y = 25$

(5)(i) $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ (or) $F = \frac{9}{5}C + 32$ (ii) $C = 37°$ (iii) $F = 100.4°$

(6)(i) 4400metre (ii) $D = 3000$metre (iii) $T = 22 seconds$ (7) $P = 1, 55, 000$

(8) $\sqrt{(3)}x + y = 24$ (9) $3x - 4y = 12, x - 2y = 2$ (11) $(13, 7), (-11, -3)$

(12)(i) $y = 12.5x - 150$ (ii) 12seconds (iii) 80seconds

(13)(ii) $x - 2y + 4 = 0$ (iii) $2cm$ (iv) $14kg$ (v) $5cm$

(14)(i) $y = -\frac{71}{120}x + 14.2, \quad 0 \leq x \leq 24$

(ii) $y = f(x)$ ایک دوری تفاعل ہے، جس کا دور 24 ہے۔ $f(x) = f(x + 24)$

(15)(i) کم سے کم لمبائی 3280 میٹر

(ii) 18، 360 اور 540 اکائیاں

(iii) ہر مڑنے والے نقطہ کا میلان $\frac{9}{40}$ ہے۔

Exercise 6.3 6.3 مشق

(2) $5x - 4y - 15 = 0$ (3)(i) $\frac{8}{5}$ (ii) $\frac{23}{5}$

(4)(i) $x + 3y + 2 = 0$ (ii) $4x - 3y - 7 = 0$ (5) $x + 5y - 31 = 0$

(6)(i) $x + 1 = 0$ (ii) $x - y = 0$ iii) $2x + y + 3 = 0$

(7) $12x + 5y + 6 = 0$, اور $12x + 5y - 20 = 0$ (8) $x + 3y + 15 = 0$,

$4x - 3y - 25 = 0$ (9) $2x + 3y - 18 = 0$ (10) $\sqrt{2}$, اور $(-3, 5)$

(12) (i)$\frac{14}{13}$, (ii)$\frac{5}{2}$ (13)(i) $4x - 3y + k = 0, k \in \mathbb{R}$ (ii) $3x + 4y + k_1 = 0, k_1 \in \mathbb{R}$

(14) $\sqrt{3}x - y - 2\sqrt{3} = 0$ (15) $A\left(\frac{13}{5}, 0\right)$ (16) $x + 5y = \pm 10$

(17) $(0, 7)$ (18)(i) $y = \begin{cases} 1.50x, & 0 \leq x \leq 10 \\ x + 5, & x > 10 \end{cases}$ (ii) ₹45

(19) $y = 5x - 7, \quad y = 5x + 10$

(20) $y + 3 = 0$, $2x + y + 3 = 0$, اور $2x - y - 3 = 0$

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:44 PM

Exercise 6.4 6.4 مشق

(1) $x^2 - xy - 2y^2 + 2x - 13y - 15 = 0$

(6) $3x^2 - 13xy - 10y^2 + 33x + 73y - 126 = 0$ (7)(i) $x + y = 0, 3x - y = 0$

(ii) $3x + 4y - 11 = 0, 2x - y = 0$ (iii) $x + y - 5 = 0, 2x - 3y + 4 = 0$

(10) $y = x$

(11) $p = 6, q = 17$(or) $-\frac{67}{6}$ (12) $k = -1$

(13) $k = -5$(or) $-\frac{35}{4}$ (14) $\frac{8}{5}$ (15) $\sqrt{5}$

Exercise 6.5 6.5 مشق

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
(4)	(4)	(3)	(4)	(3)	(2)	(2)	(4)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)	(4)	(2)
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25					
(1)	(3)	(2)	(1)	(2)	(1)	(3)	(1)	(3)	(4)					

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:44 PM

Glossary

لغت اصطلاحات

Chapter 1 Sets, Relations and Functions

باب 1 : سٹ، تعلقات اور تفاعلات



absolute value function or modulus function	مطلق قیمت یا ماڈولس تفاعل
basic relations	بنیادی تعلقات
bijective function	دوطرفہ تفاعل
cardinality	رئیسی (شماری عدد)
closed interval	بندوقفہ
co-domain	معاون علاقہ
composition of functions	تفاعل کی ترکیب
constant	مستقلہ
constant function	مستقل تفاعل
dependent variable	منحصر متغیر
dilation	پھیلاؤ
disjoint set	غیر منسلک سٹ
domain	علاقہ
empty relation	خالی تعلق
empty set or void set	خالی مجموعہ
equivalence relation	معادل تعلق
even function	جفت تفاعل
exponential function	قوتی تفاعل
extreme relations	اعلیٰ تفاعل
finite set	محدود سٹ
greatest integer function	اعلیٰ سالمی تفاعل
horizontal line test	افقی خط کی جانچ
identity function	مساوی تفاعل
image	خاکہ
improper subset	غیر واجب تحتی مجموعہ
independent variable	غیر منحصر متغیر
infinite set	لامحدود سٹ
inverse	معکوس
invertible	معکوسی

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:44 PM

linear function	خطی تفاعل
logarithmic function	لوگارتمی تفاعل
odd function	طاق تفاعل
one-to-one function	ایک-ایک تفاعل
onto function	آن ٹو تفاعل
open interval	آزاد وقفہ
power set	قوتی سٹ
pre-image	پیش خیال
proper subset	واجب تحتی مجموعہ
range	حد
rational function	ناطق تفاعل
real line	حقیقی خط
real-valued function	حقیقی قیمت والا تفاعل
reciprocal function	مقلوبی تفاعل
reflection	انعکاس
reflexive relation	انعکاسی تفاعل
set difference	سٹ کا فرق
signum function	علامتی تفاعل
singleton set	یک عنصری سٹ
smallest integer function	ادنی سالمی عدد کا تفاعل
step functions	مرحلہ وار تفاعل
subset	تحتی مجموعہ
symmetric difference	متشاکل فرق
transitive relation	انتقالی تعلق
translation	منتقلی
trivial subset	سادہ/ ادنی تحتی مجموعہ
union of sets	سٹوں کا اتحاد
universal relation	عالم گیری تعلق
variable	متغیر
vertical line test	عمودی خط کی جانچ

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:44 PM

zero function	صفری تفاعل
set	مجموعہ
super set	اعلیٰ مجموعہ

Chapter 2 Basic Algebra باب - 2 بنیادی الجبرا

conjugate	زوجی
discriminant	ممیّز
division algorithm	تقسیمی الگورتم
exponents	قوت نما
inequality	نامساوات
partial fraction	جزوی کسر
polynomial expression	کثیر رقمی جملہ
quartic	چار درجی
quintic	پانچ درجی
radical	اصلیہ
rational inequality	ناطقی نامساوات
remainder theorem	مسئلہ باقی

Chapter 3 Trigonometry باب - 3 علم مثلث

allied angles	متحدہ/منسلک زاویے
angles in standard position	معیاری مقامات پر زاویے
altitude of a triangle	مثلث کا ارتفاع
centesimal system	سوواں نظام
chord	قطاع خط
circular system	دائری نظام
circum centre	حائط مرکز
circum circle	حائط دائرہ
circum radius	حائط نصف قطر
complementary angles	تکمیلی زاویے
compound angles	مرکب زاویے
conjugate angles	زوجی زاویے

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:45 PM

general solution	عام حل
interval	وقفہ
inverse trigonometric functions	علم مثلث کے معکوس تفاعلات
periodicity	دَوریت
power reducing identities	قوت نما کو کم کرنے والے تماثلات
principal solution	اصلی حل
projection	اظہار
quadrant	ربع
radian	ریڈیان
sector	قطاع دائرہ
sub-multiple angles	تحتی ضعفی زاویے
supplementary angles	مکملہ زاویے
trigonometric identities	علم مثلث کے تماثلات
trigonometric ratios	علم مثلث کی نسبتیں

Chapter 4 – Combinatorics and Mathematical Induction — باب- 4 تالیفیات اور حسابی امالیت

cryptography	رمزیات
factorial	ضربیہ
heptagon	سات ضلعوں والا
inclusion-exclusion	خارج-داخل
inductive step	امالی مرحلہ
mathematical induction	حسابی امالیت
pentagon	مخمس
permutation	مبادلہ
polygon	کثیر ضلعی
product rule	ضربی اصول
string method	تعمیری طریقہ
sum rule	حاصل جمع کا طریقہ

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:45 PM

arithmetic mean	حسابی اوسط
arithmetic progression	حسابی تواتر
arithmetic series	حسابی سلسلہ
arithmetico–geometric progression	حسابی-ہندسی تواتر
arithmetico–geometric series	حسابی-سلسلہ
binomial coefficients	دورقمی ضریب
binomial expansion	دورقمی پھیلاؤ
binomial series	دورقمی سلسلہ
binomial theorem	دورقمی مسئلہ
common difference	عام فرق/مشترک فرق
common ratio	مشترک نسبت
convergent series	انفراجی سلسلہ
exponential series	قوت نمائی سلسلہ
finite sequence	محدود تواتر
finite series	محدود سلسلہ
geometric mean	ہندسی اوسط
geometric progression	ہندسی تواتر
geometric series	ہندسی سلسلہ
harmonic mean	ہم آہنگی اوسط
harmonic progression	ہم آہنگی سلسلہ
infinite sequence	لامحدود تواتر
infinite series	لامحدود سلسلہ
initial term	ابتدائی رقم
logarithmic series	لوگارتمی سلسلہ
partial sum	جزوی حاصل جمع
rational exponent	ناطق قوت نما
telescopic summation	دور بینی حاصل جمع

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:45 PM

Chapter 6 Two Dimensional Analytical Geometry

باب -6 دوابعادی تحلیلی جیومٹری

angle of inclination	زاویہ میلان/ جھکاؤ
arbitrary constant	اختیاری مستقل
bisector	ناصف
equilibrium	توازن
fixed constant	ثابت مستقل
fixed point	ثابت نقطہ
general form	عام شکل
homogenous equation	ہم متجانس مساوات
intercept	مقطوعہ
locus	طریق/ راستہ
negative intercept	منفی مقطوعہ
negative slope	منفی میلان
non–homogenous equation	غیر متجانس مساوات
normal form	عام/عمودی شکل
parameter	پیمائش
parametric form	پیمائشی شکل
positive intercept	مثبت مقطوعہ
positive slope	مثبت میلان
symmetry	تشاکل
two point form	دونقاطی شکل

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:45 PM

Books for Reference : کتب حوالہ جات

1. **Advanced Mathematics** - Merilyn Ryan S.S.J, Marvin E. Doublet, Mona Fabricant Theoran D. Rockhill, Prentice Hall
2. **Higher Algebra** - Bernard and Child.
3. **Higher algebra** - Hall and Knight.
4. **Algebra and Trigonometry** - Marshall D. Hestenes, Richard O. Hill, Jr.
5. **A semester course in Trigonometry** - Marcel B Finan, Ar Kansas Tech University, U.S.A.,
6. **Trigonometry** - S.L.Loney
7. **Discrete and Combinatorial Mathematics**, by Ralph P. Grimaldi, Pearson Education Asia,
8. **Discrete Mathematics with Applications**, by Thomas Koshy, Elsevier
9. **Discrete Mathematics and its Applications with Combinatorics and Graph theory**, by Kenneth , H, Rosen, Tata McGraw Hill Education Private Limited , 6th Edition
10. **Calculus** - James Stewart.
11. **Calculus** - Robert T.Smith, Roland B. Minton, McGraw Hill
12. **Calculus and Analytical Geometry**, George B.Thomas and Ross L. Finney (Ninth edition) Addison-Wesley.
13. **Differential and Integral Calculus**, N. Piskunov, Mir Publsihers, Moscow.
14. **Analytical Geometry for beginers**, The straight line and circle Vol-I by Thomas Grenfele Vyvyan Classic Reprint Series.
15. **Analytical Geometry** (The straight line and circle) Arthur Le Sueur – Google books.

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:45 PM

Mathematics - Volume I - Class XI (Urdu Medium) -
List of Translators and Reviewer

حساب حصہ - 1 گیارھویں جماعت

Academic Head and Co-ordinator:

Dr. Mrs. S. Shameem,
Deputy Director, SCERT, Chennai.

تعلیمی سربراہ اور معاون

ڈاکٹر مسز لیس۔شمیم
ڈپٹی ڈائرکٹر، یس.سی.ای.آر.ٹی، چنئی۔

Translators :

A. Sadiq Mohammed
B.T. Asst., Municipal Old Muslim Girls' Middle School, Tirupattur, Tirupattur District.

Rizwan Ahmed
B.T. Asst., Mazharul Uloom Hr.Sec.School, Ambur, Tirupattur District.

M. Md. Nasir
B.T. Asst., Mazharul Uloom Hr.Sec.School, Ambur, Tirupattur District.

H. Hafeezur Rahman
B.T. Asst., Govt. Muslim Muslim High School, Vaniyambadi, Tirupattur District

Aasif Ahmed
B.T. Asst., Muslim Hr. Sec. School, V Vellore, Vellore District.

A. Haseena Begum,
P.G. Asst., Govt. Hr. Sec. School, Hosur, Krishnagiri District.

Reviewer

Mohamed Jaweed Akram,
P.G. Asst., Islamiah Boys' Hr. Sec. School, Vaniyambadi, Tirupattur Dt.

مترجمین

اے۔صادق محمد
بی.ٹی.اسسٹنٹ، منسپل اولڈ مسلم گرلس مڈل اسکول، ترپاتور

رضوان احمد
بی.ٹی.اسسٹنٹ، مظہرالعلوم ہائرسکنڈری اسکول، آمبور، ضلع ترپاتور

یم۔محمد ناصر
بی.ٹی.اسسٹنٹ، مظہرالعلوم ہائرسکنڈری اسکول، آمبور، ضلع ترپاتور

ہچ۔حفیظ الرحمٰن
بی.ٹی.اسسٹنٹ، گورنمنٹ مسلم منسپل ہائی اسکول، وانم باڑی۔ضلع ترپاتور

آصف احمد
بی.ٹی.اسسٹنٹ، گورنمنٹ مسلم ہائرسکنڈری اسکول، ویلور، ضلع ویلور

اے۔حسینہ بیگم
پی.جی.اسسٹنٹ، گورنمنٹ ہائرسکنڈری اسکول، ہسور، ضلع کرشن گری

نظرثانی

محمد جاوید اکرم
پی.جی.اسسٹنٹ، اسلامیہ بائز ہائرسکنڈری اسکول، وانم باڑی۔

Co-ordinators :

Dr. Mani
Principal, DIET, Ranipet District.

M. Suresh Kumar
Lecturer, DIET Ranipet

A. Sivakumar
Lecturer, DIET Ranipet

معاونین

ڈاکٹر منی
پرنسپل، DIET، رانی پیٹ، ضلع رانی پیٹ۔

یم.سریش کمار
اسسٹنٹ پروفیسر، DIET، رانی پیٹ

اے۔ سوا کمار
اسسٹنٹ پروفیسر، DIET، رانی پیٹ

Co-ordination
Ramesh Munisamy

ترتیب وتزئین

تاج پرنٹرس ، وانم باڑی۔

Urdu DTP and Layout
TAJ Printers, Vaniyambadi

This book has been printed on 80 GSM Elegant Maplitho paper

Printed by Offset at :

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:46 PM

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:46 PM

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:46 PM

NOTES

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:46 PM

11 maths v1 unit 6 UM Two dimensional analytical
Wednesday, September 28, 2022 6:39:46 PM