GOVERNMENT OF TAMIL NADU

ہائر سیکنڈری سال اول

HIGHER SECONDARY FIRST YEAR

ریاضی

جلد - II

MATHEMATICS

VOLUME - II

(URDU MEDIUM)

Department of School Education

Untouchability is Inhuman and a Crime

11th-Maths-Vol2-Front Matter_Urdu Medium.indd 1 21-02-2023 16:34:58

Government of Tamil Nadu

First Edition - 2022

Revised Edition - 2023

Reprint - 2024

(Published under new syllabus)

Content Creation

State Council of Educational
Research and Training

© SCERT 2022

Printing & Publishing

Tamil NaduTextbook and Educational
Services Corporation

www.textbooksonline.tn.nic.in

11th-Maths-Vol2-Front Matter_Urdu Medium.indd 2 21-02-2023 16:34:58

مضامین CONTENTS

ریاضی جلد - II

		صفحہ نمبر	مہینہ
باب 7 - میٹرکس اور مقطعہ			
7.1	تعارف	1	
7.2	میٹرکس	2	آکتوبر
7.3	مقطعہ	20	
باب 8 - سمتیہ الجبراء			
8.1	تعارف	47	
8.2	عددیہ اور سمتیے	49	
8.3	سمتیہ کی نمائندگی اور سمتیے کے اقسام	49	
8.4	سمتیائی الجبراء	51	
8.5	مقامی سمتیے	56	آکتوبر
8.6	سمتیے کو اجزاء میں تقسیم کرنا	60	
8.7	سمت کوسائن اور سمت نسبت	63	
8.8	سمتیہ کا حاصل ضرب	69	
باب 9 - تفرقی احصا۔ حدیں اور مسلسل			
9.1	تعارف	86	
9.2	حدیں	88	نومبر
9.3	مسلسل	118	
باب 10 - تفرقی احصا- تفرقی اور تفرقی کے طریقے			
10.1	تعارف	135	
10.2	مشتقات کا تصور	136	نومبر
10.3	تفرقی اور مسلسل	144	
10.4	تفرقی کے اصول	148	

11th-Maths-Vol2-Front Matter_Urdu Medium.indd 3 21-02-2023 16:34:59

باب 11 - تکملہ احصا			
11.1	تعارف	182	
11.2	نیوٹن-لیب نیز تکملہ	184	
11.3	تکمیل کا بنیادی اصول	186	
11.4	تکملہ کی شکل $f(ax+b)$	188	ڈسمبر
11.5	تکملہ کی خصوصیات	190	
11.6	آسان اطلاقات	192	
11.7	تکمیل کے طریقے	196	
باب 12 - امکانی نظریہ کا تعارف			
12.1	تعارف	232	
12.2	بنیادی تعاریفیں	232	
12.3	محدود نظیری عرصہ	234	
12.4	امکانات	237	
12.5	امکان پر چند بنیادی مسئلے	247	ڈسمبر
12.6	شرطی امکان	251	
12.7	موقع کا کُل امکان	259	
12.8	بائیس کا نظریہ	261	
جوابات		271	
لغت		281	
حوالہ کے لئے کتابیں		283	

061IV

E-book

DIYA1

Assessment

11th-Maths-Vol2-Front Matter_Urdu Medium.indd 4 21-02-2023 16:34:59

باب 7

میٹرکس اور مقطعہ
(Matrices and Determinants)

"ریاضی عقل کی موسیقی ہے"

۔ سلورسٹر

7.1 تعارف (Introduction)

میٹرکس اور مقطعہ کی ابتداء دوسری صدی قبل مسیح میں ہوتی ہے۔ حالانکہ نشانات چوتھی صدی کے اختتام تک نہیں تھا کہ خیالات دوبارہ ظاہر ہوئے اور واقعی ترقی ہوئی۔ یہ کوئی حیران کن بات نہیں ہے کہ میٹرکس اور مقطعہ کی شروعات خطی مساوات کے نظام کے مطالعے کے ذریعے پیدا ہونی چاہئے یا بلیوں نے ان مسائل کا مطالعہ کیا جو بیک وقت خطی مساوات کا باعث بنا اور ان میں سے کچھ مٹی کے گولیوں میں محفوظ ہیں جو اب تک زندہ ہیں۔

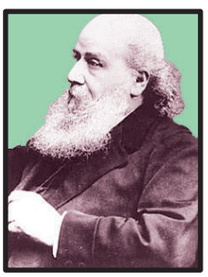


"میٹرکس" کے نظریہ کا ارتقاء حل کرنے کے لئے پختہ اور آسان طریقوں کو حاصل کرنے کی کوششوں کا نتیجہ ہے۔ خطی مساوات کا آغاز ہندسی اشیاء کی تبدیلیوں کے مطالعہ سے ہوا۔ 1850 میں، جیمز جوزف سلویسٹر ایک انگریزی ریاضی دان اور وکیل تھا جس سے لفظ "میٹرکس" (کا مطلب ہے ماں۔ کولن کی لغت M $\overline{a}$ ter :اصل میں لاطینی سے) کی بنیاد کی۔ میٹرکس اب ریاضی کا ایک طاقتور ترین آلہ ہے۔

عام طور پر، ایک میٹرکس اشیاء کی ایک مستطیلی صف بندی کے سوا کچھ نہیں ہے۔ ان میٹرکس کو روز مرہ کی استعمالات میں دیدیکھا جاسکتا ہے جہاں ہم فوجی پریڈ یا اسکول اسمبلی یا پودوں کی نمائندگی میں استعمال کرتے ہیں۔

لفظ "مقطعہ" کو سب سے پہلے کارل یف گاڈس نے تحقیقی ریاضی میں تیار کی (1801)دو درجی شکلوں کا مطالعہ کرنے پر، لیکن تصور جدید دور کے مقطعہ کی طرح نہیں ہے۔ اسی کام میں گاؤس نے مربعی شکلوں کے ضریبوں کو مستطیلی شکلوں میں اظہار کیا جہاں میٹرکس ضرب کی تشکیل ہوئی۔

یہ وہ کچی تھا (1812) میں جنہوں نے اپنے جدید معنوں میں مقطعہ کو استعمال کیا اور اس کا تفصیل سے مطالعہ کیا۔ انہوں نے پہلے نتائج کی ملامت کی، اپنے ہی خاص مخیف اور شریک نتائج دئے۔ یہ آرتھر کیلی تھے جنہوں نے میٹرکس کے الجبراء کی ترقی میں کثرت سے شرکت کئے اور انہوں



سل وسٹر
(1814 - 1897)



07_11th-Maths-Vol2-Unit7_UM.indd 1 21-02-2023 16:11:22

نے 1841 میں مقطعہ کا نظریہ بھی شائع کئے۔ان کے مکالمے میں انہوں نے سرنی کے دونوں طرف دو عمودی لکیریں استعمال کئے جو کہ مقطعہ کو ظاہر کرتی ہے۔ یہ وہ اشارہ ہے جو اب معیاری ہوگیا ہے۔

1858 میں "میٹرکس کے نظریہ پر یادداشت" شائع کئے جو میٹرکس کی پہلا خلاصہ تعریف پر مشتمل تھا۔ انہوں نے دکھایا کہ ضریبوں کی ترتیب کے پہلے مربعی شکلوں اور خطی تبدیلیوں کا مطالعہ اس کے عمومی تصورات کے معاملات تھے۔ وہ ہمارے کام کافی حد تک آسان بناتے ہیں جب کہ د وسرے سیدھے طریقے سے موازنہ کیا جائے جس میں تکلیف دہ گنتی شامل ہوتی ہے۔ ریاضی دان جیمز جوزف سلوسٹر (1897 - 1814)، ولیم روون ہیملٹن (1865 – 1805) اور وَرتھر کیلی (1895 – 1821) نے میٹرکس نظریہ کی ترقیم میں اہم کردار ادا کیا۔ انگریزی ریاضی د ان کلکس 1913 میں میٹرکس کے لئے جدید قوسین کا استعمال کرنے والا پہلا شخص تھا۔ میٹرکس کا علم نہ صرف ریاضی کے شاخوں میں بلکہ سائنس، جینیات، معاشیات، سماجیات، جدید نفسیات اور صنعتی انتظام کے دیگر شعبوں میں بھی ضروری ہے۔

میٹرکس خطی مساوات کے نظام میں ضریبوں کی نمائندگی کے لئے بھی کار آمد ہیں۔ کمپیوٹر کے الکٹرانک سائفٹویر پروگراموں میں میٹرکس کے عمل اور اشارے استعمال کئے جاتے ہیں جو کہ کاروبار کے مختلف شعبوں جیسے بٹجٹ،فروخت کی نظام، لاگت کا تخمینہ اور سائنس میں جو تجربات کے نتائج کا تجربہ کرتے ہیں، وغیرہ

دلچسپ بات یہ ہے کہ کئی ہندسی عمل جیسے طیارے کے ذریعہ بڑھاؤ، گھومنا اور عکاسی کرنا بھی میٹرکس کے ذریعے ریاضی سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ ماہرین معاشیات جو سوشیل اکاؤنٹنگ، ان پٹ اور آؤٹ پٹ جدولوں اور انٹر انڈسٹری اکنامکس کے مطالعہ میں میٹرکس کا استعمال کرتے ہیں۔ الکٹریکل انجینئرنگ میں مواصلاتی نظریہ اور نیٹ ورک تجزیہ میں بھی میٹرکس کا استعمال کیا جاتا ہے وہ رمزیات میں بھی استعمال ہوتے ہیں۔

اس باب میں اب ہم سب سے پہلے میٹرکس اور اس کے مختلف خصوصیات پر بحث کریں گے پھر ہم مقطعہ، بنیادی خصوصیات کمتر اور ہم ضربی وغیرہ سیکھیں گے۔ اب ہم بحث کو صرف مقطعہ کے درجے 3 تک محدود کرتے ہیں۔

سیکھنے کے مقاصد (Learning Objectives)

اس باب کی تکمیل ہر طلباء سے توقع کی جاسکتی ہے کہ

- مشکل مسائل سادہ انداز میں میٹرک کے لحاظ سے غور کرسکتے ہیں۔
- میٹرک کی مختلف اقسام اور میٹرکس کے الجبراء کو سمجھنا
- مقطعہ، قیمتوں کو بذریعہ پھیلانا اور مقطعہ خصوصیات کو محسوس کرنا
- مثلث کا رقبہ اور تین نقطوں کے ہم خط معلوم کرنے میں میٹرکس اور مقطعہ کے تصورات کا استعمال

7.2 میٹرکس (Matrices)

اعداد کی مستطیلی ترتیب جو صفوں اور قطاروں میں قوسین کے اندر بند ہے میٹرکس کہلاتی ہے۔

عام طور پر ایک میٹرکس کے اندراجات حقیقی یا پیچیدہ نمبر یا ایک متغیر کے افعال ہوسکتے ہیں (جیسے) کثیر المثال و مثلثی افعال یا ان کا مجموعہ یا زیادہ متغیرات یا کوئی دوسری شئے۔

میٹرکس کو ایک تنہا حروف تہجی سے ظاہر کیا جاتا ہے جیسے۔ A, B, X, Y اعداد جو میٹرکس بناتے ہیں میٹرکس کی اندراج یا عناصر کہلاتے ہیں۔

میٹرکس کی عام شکل (General form of a matrix)

ایک میٹرکس A جس کی m صفیں اور n قطاریں ہیں کی شکل ہے جہاں A جس کی m صفیں اور n قطاریں ہیں کی شکل ہے

$$A = [a_{ij}]_{m\times n}\ , 1 \le i \le m, 1 \le j \le n$$

07_11th-Maths-Vol2-Unit7_UM.indd 2 21-02-2023 16:11:22

یعنی

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}=\begin{array}{c} \text{قطاریں } n \\ \text{1 قطار} \quad \text{2 قطار} \quad j \text{ قطار} \quad n \text{ قطار} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{1j} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2j} & a_{2n} \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{ij} & a_{in} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mj} & a_{mn} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{صف } 1 \\ \leftarrow \text{صف } 2 \\ \leftarrow \text{صف } i \\ \leftarrow \text{صف } m \end{array} \quad \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\\a\end{array}}\right\downarrow \text{صفیں } m$$

غور کریں m اور n جمی طبعی عدد ہے۔

میٹرکس کی چند مثالیں ہیں۔

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 5 & -7 \\ 3.4 & \frac{1}{2} & \sqrt{2} \\ e^2 & -3 & 4 \\ \sqrt{5} & 2 & a \end{bmatrix} \text{ اور } B=\begin{bmatrix} 7 & -9 & 1.2 & 0 \\ \sin\frac{x}{4} & 2 & x^2 & 4 \\ \cos\frac{x}{2} & 1 & 3 & -6 \end{bmatrix} \quad A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 5 \\ 9 & -8 & 6 \end{bmatrix}$$

میٹرکس میں ہر افقی ترتیب اس میٹرکس کی **صف** کہلاتی ہے۔ میٹرکس میں ہر انتخابی ترتیب اس میٹرکس کی **قطار** کہلاتی ہے۔ A میں 3 صفوں اور 3 قطار ہیں B میں 3 صف اور 4 قطار ہیں اور C میں 4 صف اور3 قطار ہیں۔

تعریف 7.1

اگر میٹرکس A میں m صفیں اور n قطاریں ہوں تو ہم کہتے ہیں کہ A کا **درجہ** $m \times n$ (read as m by n) پڑھتے ہیں۔

جہاں $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ میٹرکس $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ کے **عناصر** ہیں اوپر کی میٹرکس کو اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں جہاں a_{ij} i ویں صف اور j ویں قطار کے میٹرکس کا عنصر $(i,j)^{\text{th}}$ ہے۔ اسے اس طرح لکھا جاتا ہے $[a_{i1} \;\; a_{i2} \;\; \ldots \;\; a_{in}]$ اور $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$

اب ہم روزانہ کو آسان بنانے کے لئے میٹرکس کی نمائندگی اور مسائل تعمیر کا تصور کریں گے۔

مثال 7.1

ایک طالب علم کے مختلف مضامین اور مختلف امتحانات میں حاصل کردہ نمبروں پر غور کریں، انہیں جدولی شکل میں دکھایا گیا ہے

	ٹمل	انگریزی	ریاضی	سائنس	سماجی سائنس
امتحان 1	48	71	80	62	55
امتحان 2	70	68	91	73	60
امتحان 3	77	84	95	82	62

یہ جدول مندرجۂ بالا معلومات کو حساب کی شکل میں پیش کرتا ہے۔ تیسری صف اور دوسرے قطار میں اندراج کی کس چیز کی نمائندگی کرتا ہے؟

07_11th-Maths-Vol2-Unit7_UM.indd 3 21-02-2023 16:11:23

اوپر کی معلومات کو 3×5 میٹرکس A کی شکل میں ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

$$A = \begin{bmatrix} 48 & 71 & 80 & 62 & 55 \\ 70 & 68 & 91 & 73 & 60 \\ 77 & \mathbf{84} & 95 & 82 & 62 \end{bmatrix}.$$

تیسری صف میں مشترکہ اندراج 84 اور میٹرکس میں دوسرا قطار انگریزی امتحان 3 میں طالب علم کے حاصل کردہ نمبر کی نمائندگی کرتا ہے

مثال 7.1

فرض کرو کہ ایک میٹرکس میں 12 عناصر ہیں۔ اس کے ممکنہ درجے کیا ہیں؟ اگر اس کے پاس 7 عناصر ہو تو کیا ہوگا؟

حل

عناصر کی تعداد صف کی تعداد اور خطار کالموں کی تعداد کی پیداوار ہے۔ لہٰذا ہمیں طبی اعداد کے تمام ترتیب دار جوڑی ملیں گ گے جن کی حاصل ضرب 12 ہے۔ اس طرح میٹرکس کے تمام ممکنہ احکامات 1×12، 12×1، 2×6، 6×2، 3×4، اور 4×3 ہیں۔

چونکہ 7 عدد اولی ہے۔ میٹرکس کے صرف ممکنہ درجہ 1×7 اور 7×1 ہیں۔

مثال 7.2

3×2 میٹرکس کی تصنیف کیجئے جہاں $(i, j)^{\text{th}}$ عناصر دیا گیا ہے

$$a_{ij} = \frac{\sqrt{3}}{2}|2i - 3j| \quad (1 \le i \le 2,\ 1 \le j \le 3)$$

حل

عام طور پر 3 x 2 میٹرکس اس طرح ظاہر کیا ہے $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$

a_{ij} کے خوف کی تعریف سے ہمارے پاس ہے $a_{11} = \frac{\sqrt{3}}{2}|2-3| = \frac{\sqrt{3}}{2}$

اور اسی طرح دوسری میٹرکس A کی اندراج ظاہر کرسکتے ہیں۔ میٹرکس $A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 2\sqrt{3} & \frac{7\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} & \frac{5\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

7.2.1 میٹرکس کے اقسام (Types of Matrices)

صف، قطار، صفر میٹرکس

تعریف 7.2

ایک میٹرکس کو صف میٹرکس کہا جاتا ہے اگر وہ صرف ایک صف رکھتا ہے

مثال کے طور پر $A = [A]_{1\times4} = [1 \quad 0 \quad -1.1 \quad \sqrt{2}]$ صف میٹرکس عام طور پر $A = [a_{ij}]_{1\times n} = [a_{1j}]_{1\times n}$ صف میٹرکس کا درجہ $1\times n$ ہے۔

تعریف 7.3

ایک میٹرکس کو قطار میٹرکس کہا جاتا ہے اگر وہ صرف ایک قطار رکھتا ہے۔

مثال کے طور پر $[A]_{4\times1}=\begin{bmatrix}x+1\\x^2\\3x\\4\end{bmatrix}$

قطار میٹرکس عام طور پر $A=[a_{ij}]_{m\times1}=[a_{i1}]_{m\times1}$ قطار میٹرکس کا درجہ $m\times1$ ہے

تعریف 7.4

$A=[a_{ij}]_{m\times n}$ ایک میٹرکس معدوم میٹرکس یا صفر میٹرکس کہلاتا ہے اگر اس کے تمام عناصر صفر ہیں اور اس کو 0 سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

اگر $a_{ij}=0$ جنگ سے $1\le j\le n$ اور $1\le i\le m$

مثال کے طور پر $[0],\ \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ اور $\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ صفر مٹرکس کا درجہ $1\times1,\ 3\times3$ اور 2×4 ہے۔

میٹرکس A کو غیر صفر میٹرکس کہا جاتا ہے، اگر A کے اندراجات میں سے کم از کم ایک غیر صفر ہو.

مربع، وتر، اکائی اور سہ رخی حسابات

تعریف 7.5

تعریف: ایک میٹرکس جس میں صفوں اور قطاروں کی تعداد مساوی ہو مربع میٹرکس کہلاتا ہے یعنی حساب درجہ $n\times n$ کا موازنہ ایک مربع حساب درجہ n کہلاتا ہے۔

مثال کے طور پر $A=\begin{bmatrix}a&b&c\\d&c&f\\g&h&l\end{bmatrix}$ ایک مربع میٹرکس درجہ 3

تعریف 7.6

$A=[a_{ij}]_{n\times n}$ $a_{11},a_{22},a_{33},\ldots,a_{nn}$ کو پرنسپل وتر کہا جاتا ہے یا صرف وتر یا اہم وتر یا معروف وتر عناصر کہتے ہیں۔

تعریف 7.7

$A=[a_{ij}]_{n\times n}$ ایک مربع میٹرکس جس میں اولین وتر کے اوپر اور نیچے کے تمام عناصر صفر ہوں تو وہ وتر میٹرکس کہلاتا ہے۔ اگر $a_{ij}=0$ جب بھی $i\ne j$.

اس طرح، ایک وتر میٹرکس میں مرکزی وتر کے ساتھ اندراجات کے علاوہ تمام اندراجات صفر ہیں۔

مثال کے طور پر $A=\begin{bmatrix}2.5&0&0\\0&\sqrt{3}&0\\0&0&0.5\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}r&0\\0&s\end{bmatrix}$ اور $C=[6]$

$D=\begin{bmatrix}a_{11}&0&0&\cdots&0\\0&a_{22}&0&\cdots&0\\0&0&a_{33}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&\cdots&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}$

ایک وتر میٹرکس درجہ 1، 2، 3 اور n کہتے ہیں۔

کیا صفر میٹرکس ایک وتر میٹرکس ہے؟

تعریف 7.8

ایک وتر میٹرکس جس میں اولین وتر کے عناصر مساوی ہوں اسکیلر میٹرکس کہلاتا ہے

07_11th-Maths-Vol2-Unit7_UM.indd 5 21-02-2023 16:11:25

ایک مربع میٹرکس $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ ایک اسکیلر میٹرکس ہے۔ اگر $a_{ij}=\begin{cases}c & \text{اگر } i=j\\ 0 & \text{اگر } i\neq j\end{cases}$

c ایک سے دو عدد

$$A=\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\end{bmatrix}، B=\begin{bmatrix}-5 & 0\\ 0 & -5\end{bmatrix}، C=\begin{bmatrix}\sqrt{3}\end{bmatrix} \text{ اور, } D=\begin{bmatrix}c & 0 & \cdots & 0\\ 0 & c & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & c\end{bmatrix}\begin{matrix}R_1\\ R_2\\ \\ R_n\end{matrix}$$

ایک اسکیلر میٹرکس درجہ 3، 2، 1 اور n ہیں

کوئی صفر میٹرکس کو اسکیلر میٹرکس 0 کہلاتا ہے۔

تعریف 7.9

ایک و تر میٹرکس جس میں تمام اولین وتر کے اندراج 1 ہیں۔ اکائی میٹرکس کہلاتا ہے۔ ایک n درجہ والے اکائی میٹرکس کو I_n سے ظاہر کیا جاتا $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ ہے۔ ایک مربع میٹرکس $a_{ij}=\begin{cases}1 & \text{اگر } i=j\\ 0 & \text{اگر } i\neq j\end{cases}$ کو اکائی میٹرکس کہلاتا ہے۔

اگر مثال کے طور پر $I_1=[1]$، $I_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$، $I_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ اور $I_n=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{matrix}R_1\\ R_2\\ \\ R_n\end{matrix}$

ایک اکائی میٹرکس درجہ 1، 2، 3 اور n کے ہیں۔

نوٹ 7.1

اکائی میٹرکس اسکیلر میٹرکس کی ایک مثال ہے

دو قسم کے اوپری ٹرنکیٹ میٹرکس یعنی اپر ٹرنکیٹ اور پراپر ٹکیٹ میٹرکس

تعریف 7.10

ایک مربع میٹرکس کو اوپری مثلثی میٹرکس کہا جاتا ہے اگر مرکزی وتر کے نیچے تمام عناصر صفر ہوں۔

اس طرح، مربع میٹرکس $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ ایک بلائی سہ رخی میٹرکس کہا جاتا ہے اگر $i>j$ کے لیے $a_{ij}=0$۔

مثال کے طور پر،

$\begin{bmatrix}4 & 3 & 0\\ 0 & 7 & 8\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}-5 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ اور $\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & a_{nn}\end{bmatrix}$ یہ اوپری سہ رخی میٹرکس ہے۔

تعریف 7.11

ایک مربع میٹرکس کو نچلی مثلثی میٹرکس کہا جاتا ہے۔ اگر مرکزی وتر کے اوپر تمام عناصر صفر ہوں۔ زیادہ واضح طور پر ایک مربع میٹرکس کہا جاتا ہے کہ کم سہ رخی میٹرکس ہے۔

تمام آل سہ رخی میٹرکس $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ $a_{ij}=0$ کے لیے $i<j$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ اور } \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}، \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 8 & -5 & 7 \end{bmatrix}، \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

تعریف 7.12

ایک مربع میٹرکس جس میں یا تو اوپر یا نیچے مثلثی ہو تو مثلثی میٹرکس کہا جاتا ہے

مشاہدہ کریں کہ ایک مربع میٹرکس جو بالائی اور نچلے سہ رخی دونوں بیک وقت ایک وتر میٹرکس نکلے گا۔

7.2.2 میٹرکس کی ہمواری (Equality of Matrices)

تعریف 7.13

دو میٹرکس $A=[a_{ij}]$ اور $B=[b_{ij}]$ ہمواری ہیں ($A = B$ کے طور پر لکھا گیا ہے) اگر اور صرف اگر

(i) A اور B دونوں ایک ہی ترتیب کے ہوں

(ii) متعلقہ اندراجات برابر ہیں A اور B کے لئے یعنی $a_{ij}=b_{ij}$ تمام i اور j کے لئے

مثال کے طور پر اگر

$$\begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \text{ ہوں تو } v=\frac{3}{5} \text{ اور } x=2.5, y=-1, u=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

تعریف 7.14

دو میٹرکس A اور B کو غیر مساوی کہا جاتا ہے۔ اگر تعریف 7.13 کی حالت (i) یا (ii) میں سے کوئی ایک نہ ہو

مثال کے طور پر $\begin{bmatrix} 8 & -5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ مساوی نہیں ہیں اور $\begin{bmatrix} 5 & -8 \\ 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ اس کا درجہ مساوی نہیں ہے

مثال 7.3

x، y، a اور b معلوم کیجئے اگر $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 5 & -5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x+4y & 6 & x-2y \\ a+b & 2a-b & -3 \end{bmatrix}$

حل

چونکہ دو میٹرکس کے احکامات ایک جیسے ہیں وہ برابر ہیں اگر اور صرف اگر کمیا انداجات برابر ہوں اس طرح متعلقہ عناصر کا اندازہ کرنے سے ہم حاصل کرتے ہیں

$3x + 4y = 2$، $x - 2y = 4$، $a + b = 5$ اور $2a - b = -5$

حل کرنے سے حاصل کریں $x = 2$، $y = -2$، $a = 0$ اور $b = 5$

07_11th-Maths-Vol2-Unit7_UM.indd 7 21-02-2023 16:11:29

7.2.3 میٹرکس پر الجبری عمل (Algebraic Operations on Matrices)

میٹرکس پر بنیادی عمل ہیں

(1) اسکیلر سے میٹرکس کا ضرب

(2) دو میٹرکس کا جمع اور تفریق اور

(3) دو میٹرکس کا ضرب

میٹرکس کو دوسرے میٹرکس سے تقسیم کرنے کوئی تصور نہیں ہے اور اس طرح آپریشن $\frac{A}{B}$ جہاں A اور B دونوں میٹرکس ہیں، کی وضاحت نہیں کی گئی ہے۔

(1) اسکیلر سے میٹرکس کا ضرب

دیئے گئے میٹرکس $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $kA=[b_{ij}]_{m\times n}$ اور اسکیلر k j i ہم ایک نیا میٹرکس کی تعریف کریں گے۔ $b_{ij}=ka_{ij}$

مثال کے طور پر $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$، ہو تو $kA=\begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \end{bmatrix}$

خاص طور پر اگر $k=-1$ ہو تو $-A=[-a_{ij}]_{m\times n}$ ایک A

(2) دو میٹرکس کا جمع اور تفریق

اگر A اور B ا ایک ہی ترتیب کے دو میٹرکس ہیں تو ان کی رقم $A+B$ سے ظاہر ہوتی ہے۔ پھر ایک ہے، اس ترتیب سے A اور B کی متعلقہ اندراجات کو شامل کرکے حاصل کیا گیا ہے

زیادہ واضح طور پر اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ اور $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ دو میٹرکس ہیں تو A اور B کا مجموعہ $A+B$ دیا گیا میٹرکس کی طرف سے

$A+B=[c_{ij}]_{m\times n}$ جہاں $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ i. اور j کے لیے

اس طرح گھٹاؤ $A-B$ کی تعریف $A-B=A+(-1)B$.

یعنی جہاں $A-B=[d_{ij}]_{m\times n}$ جہاں $d_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$ $\forall$ i اور j کے لئے ($\forall$ علامت ہو یا کے لئے ظاہر کرتی ہے تمام)

نوٹ 7.2

(i) اگر A اور B ایک ہی ترتیب کے نہیں ہیں تو $A+B$ اور $A-B$ متعین نہیں ہیں۔

(ii) اضافے اور گھٹاؤ کو میٹرکس کی کسی بھی محدود تعداد تک بڑھایا جاسکتا ہے۔

مثال 7.4

محسوب کرو $A+B$ اور $A-B$ اگر

$$A=\begin{bmatrix} 4 & \sqrt{5} & 7 \\ -1 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \text{ اور } B=\begin{bmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{5} & 7.3 \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

حل

حاصل جمع اور تفریق میٹرکس کی تعریف سے

$$A+B=\begin{bmatrix} 4+\sqrt{3} & 2\sqrt{5} & 14.3 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \text{ اور } A-B=\begin{bmatrix} 4-\sqrt{3} & 0 & -0.3 \\ -2 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

07_11th-Maths-Vol2-Unit7_UM.indd 8 21-02-2023 16:11:31

مثال 7.5

$A + B + C$ کی حاصل جمع معلوم کرو اگر A، B، C کی طرف سے دیا گیا ہے

$$A = \begin{bmatrix} \sin^2\theta & 1 \\ \cot^2\theta & 0 \end{bmatrix}، \quad B = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & 0 \\ -\text{cosec}^2\theta & 1 \end{bmatrix} \text{ اور } C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

حل

میٹرکس کی حاصل جمع کی تعریف سے

$$A+B+C = \begin{bmatrix} \sin^2\theta+\cos^2\theta+0 & 1+0-1 \\ \cot^2\theta-\text{cosec}^2\theta-1 & 0+1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال 7.6

$3B + 4C - D$ کی جانچ کیجئے اگر B، C اور D دیا گیا ہے

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}، \quad C = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}، \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 5 & 6 & -5 \end{bmatrix}$$

حل

$$3B+4C-D = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 0 \\ 3 & -3 & 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -8 & 12 \\ -4 & 0 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -4 & 1 \\ -5 & -6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 13 \\ -6 & -9 & 28 \end{bmatrix}.$$

مثال 7.7

مختصر کیجئے

$$\sec\theta \begin{bmatrix} \sec\theta & \tan\theta \\ \tan\theta & \sec\theta \end{bmatrix} - \tan\theta \begin{bmatrix} \tan\theta & \sec\theta \\ \sec\theta & \tan\theta \end{bmatrix}$$

حل

اگر ہم A کی طرف سے دئے گئے اظہار کی نشاندہی کرتے ہیں تو اسکیلر ضرب اصول کا استعمال کرتے ہوئے ہم حاصل کرتے ہیں

$$A = \begin{bmatrix} \sec^2\theta & \sec\theta\tan\theta \\ \sec\theta\tan\theta & \sec^2\theta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tan^2\theta & \tan\theta\sec\theta \\ \sec\theta\tan\theta & \tan^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

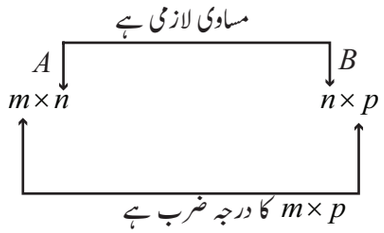
(3) میٹریسس کی ضرب

تعریف 7.15

میٹرکس A اور میٹرکس B کے ساتھ ضرب کے لئے سازگار سمجھا جاتا ہے اگر A صفوں B کی قطاروں کی تعداد کے برابر ہو۔

اگر $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ اور $B = [b_{ij}]_{n\times p}$ دو دیا گیا میٹرکس ہو تو میٹرکس کی ضرب A اور B کو اس طرح دیا گیا ہے AB درجہ $m \times p$

AB کا درجہ $m \times p$ = (A کی صفوں کی تعداد) × (B کے قطاروں کی تعداد) مساوی ہونا چاہئے۔



07_11th-Maths-Vol2-Unit7_UM.indd 9 21-02-2023 16:11:32

اگر $A=[a_1 \quad a_2 \quad \ldots \quad a_n]_{1\times n}$ اور $B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$ ہو تو AB ایک میٹرکس درجہ 1×1 جو ایک واحد صفر دیتا ہے جس کی طرف سے

$$AB=[a_1 \quad a_2 \quad \ldots \quad a_n]\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}=[a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n]=\left[\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right].$$ وضاحت کی گئی ہے۔

مثال کے طور پر،

$$[1 \quad 2 \quad 3]\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}=[1(-2)+2(3)+3(5)]=[-2+6+15]=[19].$$

عام طور پر

اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ اور $B=[b_{ij}]_{n\times p}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}$ تو

$$AB=\begin{bmatrix} \overrightarrow{a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}\downarrow$$

اس کے ضرب $AB=[c_{ij}]_{m\times p}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix}$،

جہاں $c_{ij}=[a_{i1} \quad a_{i2} \quad \ldots \quad a_{in}]\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$، چنانچہ c_{ij} ایک عنصر ہے۔

مثال 7.8

اگر $A=\begin{bmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{bmatrix}$ ہو تو A^2 محسوب کرو۔

حل

$$A^2=AA=\begin{bmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

07_11th-Maths-Vol2-Unit7_UM.indd 10 21-02-2023 16:11:32

جہاں $c_{11} = \begin{bmatrix}0 & c & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\c\\b\end{bmatrix} = 0\cdot 0 + c\cdot c + b\cdot b = c^2 + b^2$ دوسرے عناصر c_{ij} شاید گنتی اسی طرح آخر میں ہم آسانی سے حاصل کرتے ہیں

$$A^2 = \begin{bmatrix}0+c^2+b^2 & 0+0+ab & 0+ac+0\\ 0+0+ab & c^2+0+a^2 & bc+0+0\\ 0+ac+0 & bc+0+0 & b^2+a^2+0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b^2+c^2 & ab & ac\\ ab & c^2+a^2 & bc\\ ac & bc & a^2+b^2\end{bmatrix}.$$

مثال 7.9

x کے لئے حل کرو اگر O

$$\begin{bmatrix}x & 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ -1 & -4 & 1\\ -1 & -1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\2\\1\end{bmatrix} = O$$

حل

$$\begin{bmatrix}x & 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ -1 & -4 & 1\\ -1 & -1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\2\\1\end{bmatrix} = O$$

یعنی، $\begin{bmatrix}x-2+1 & x-8+1 & 2x+2+2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\2\\1\end{bmatrix} = O$

$$\begin{bmatrix}x-1 & x-7 & 2x+4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\2\\1\end{bmatrix} = O$$

$$x(x-1)+2(x-7)+1(2x+4) = 0$$

$$x^2+3x-10 = 0 \Rightarrow x = -5, 2.$$

نوٹ 7.3

ہمارے پاس مندرجہ ذیل اہم مشاہدات ہیں

(1) اگر $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ اور $B = [b_{ij}]_{n\times p}$ اور $m \neq p$ ہو تو مصنوعات کی وضاحت کی گئی ہے لیکن BA نہیں AB

(2) حقیقی اعداد کی بنیادی خصوصیات یعنی

$$ab = ba \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$$

$$ab = ac \Rightarrow b = c \;\forall\; a,b,c \in \mathbb{R},\; a \neq 0$$

$$ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ or } b = 0 \;\forall\; a,b \in \mathbb{R}.$$

کیا ہم ان پر میٹرکس میں بھی بحث کرسکتے ہیں؟

(i) AB اور BA کی تعریف یہاں تک کہ اگر لازمی طور پر درست نہیں $AB = BA$ گئی ہے تو ہے

مثال کے طور پر ہم غور کرتے ہیں

$$A = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix} \text{ اور } B = \begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{bmatrix}$$

07_11th-Maths-Vol2-Unit7_UM.indd 11 21-02-2023 16:11:33

اور اس کا مشاہدہ کریں $AB \neq BA$ جب سے

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \text{ اور } BA = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

اس معاملہ میں ہم لکھتے ہیں کہ A اور B سفر نہیں کرتے

(ضرب کے حوالے سے) اس کا مشاہدہ کریں $AB = BA$ یہ بھی ممکن ہے مثال کے طور پر

اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ ہو تو $AB = BA = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

اس معاملہ میں ہم کہتے ہیں کہ A اور B ضرب کے حوالے سے سفر کرتے ہیں۔

(ii) منسوخی خصوصیت میٹرکس ضرب کے لئے $A \neq O$، B اور C ایک ہی ترتیب کے تین مربع میٹرکس کی $n \times n$ with $n > 1$

پھر $CA = BA$ کا مطلب $C = B$ نہیں ہے۔ اور $AC = AB$ کا مطلب CB نہیں ہے۔

ان حقائق کے سادہ مقابلے کے طور پر ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ مثال کے طور پر

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مگر $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

(iii) $AB = O$، $A \neq O$ اور $B \neq O$ یہ ممکن ہے کہ ضروری نہیں $AB = O$ کے ساتھ مساوی طور پر ہو۔ مندرجہ ذیل تعلقات $A = O$ یا $B = O$ کہ یاتو، اس حقیقت کو ظاہر کرتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(3) عام طور پر کسی بھی دو میٹرکس A اور B کے لئے جو کہ اضافے اور ضرب کے لئے مطابقت رکھتے ہیں۔ نیچے دی گئی کارروائیوں کے لئے ہمارے پاس

- $(A \pm B)^2$ ضرورت نہیں کے برابر ہوتے $A^2 \pm 2AB + B^2$
- $(A+B)(A-B)$. ضرورت نہیں کے برابر ہوتے $A^2 - B^2$

مثال 7.10

اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ہو تو BA اور AB معلوم کرو اگر یہ موجود ہیں۔

حل

A کا درجہ 3×3 اور B کا درجہ 3×2 ہو تو BA کا درجہ 3×2 ہے۔ A اور B مصنوعات BA کے لئے آرام دہ ہے۔ $C = BA$

$c_{11} =$ (A کی پہلی صف) (B کی پہلی قطار)

$$\Leftarrow \quad c_{11} = [1 \quad -1 \quad 2]\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1+1+2 = 4,$$ چنانچہ c_{11} ایک عنصر ہے۔

چونکہ $c_{12} = 0, c_{21} = 0, c_{22} = 13, c_{31} = 7, c_{32} = 5$

اسی طرح $AB = C = [c_{ij}] = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 13 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$

ضرب BA موجود نہیں ہے، کیونکہ B کی قطار کی تعداد A کی صفوں کی تعداد سے مساوی نہیں ہیں۔

مثال 7.11

ایک پھل دکان کیپر گفٹ پیکجز کی 3 مختلف اقسام تیار کرتا ہے۔ پیک I - میں 6 سیب ہیں، 3 سنتری اور 3 انار۔ پیک II میں 5 سیب، 4 سنترہ اور 4 انار اور پیک III میں 6 سیب، 6 سنترہ اور 6 انار شامل ہیں۔ ایک سیب، ایک سنترہ اور ایک انار کی قیمت بالترتیب ₹30، ₹15 اور ₹45 ہے۔ پھلوں کے ہر پیک کی تیاری کی قیمت کیا ہے؟

حل

$$\text{قیمت میٹرکس } A = [30 \quad 15 \quad 45], \qquad \text{پھل میٹرکس } B = \begin{matrix} \\ \text{سیب} \\ \text{سنترہ} \\ \text{انار} \end{matrix} \begin{matrix} \text{P-I} & \text{P-II} & \text{P-III} \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 6 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

پیکیز کی قیمت کمپیوٹنگ AB سے حاصل کی جاتی ہے یعنی، ہر شئے کی قیمت کو A (لاگت میٹرکس 4) میں B (فروٹ میٹرکس B) میں اشیاء کی تعداد کے ساتھ ضرب دے کر

$$AB = [30 \quad 15 \quad 45] \begin{bmatrix} 6 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} = [360 \quad 390 \quad 540]$$

540 ₹ قیمت II-پیک ,390 ₹ قیمت II-پیک ,360 ₹ قیمت I-پیک

7.2.4 میٹرکس کی جمع، اسکیلر ضرب اور میٹرک کی ضرب کی خصوصیات۔

(Properties of Matrix Addition, Scalar Multiplication and Product of Matrices)

کو ایک ہی ترتیب کے تین میٹرکس A، Bاور C ہونے دیں جو کہ اضافے کے لئے مطابقت پذیر ہوں۔ دو اسکیلر ہوں۔ پھر ہمارے پاس درج b،a اور ذیل ہیں

(1) $A + B$ ایک ہی ترتیب کا میٹرکس حاصل کرتا ہے

(2) $A + B = B + A$ (میٹرکس کا اضافہ متبادلت ہیں)

(3) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (میٹرکس کا اضافہ مربوطی ہیں)

(4) $A + O = O + A = A$ (O ایک اضافی شناخت ہیں)

(5) $A + (-A) = O = (-A) + A$ ($-A$ کا اضافی الٹا A ہیں)

(6) $(a + b)A = aA + bA$ اور $a(A + B) = aA + aB$

(7) $a(bA) = (ab)A$, $1A = A$ اور $0A = O$

میٹرکس کی ضرب کی خصوصیات (Properties of matrix multiplication)

ہمارے پاس میٹرکس کی الجبری خصوصیات کا استعمال کرتے ہوئے

- اگر A، B اور C بالترتیب $m \times n$, $n \times p$ اور $p \times q$ کے تین میٹرکس ہیں اور پھر $A(BC)$ اور $(AB)C$ ایک ہی ترتیب کی میٹرکس $m \times q$ ہیں اور

$A(BC) = (AB)C$ (میٹرکس ضرب شراکت دار)

07_11th-Maths-Vol2-Unit7_UM.indd 13 21-02-2023 16:11:36

- اگر A، Bاور C تین میٹرکس کے درجے $m \times n, n \times p$ اور $n \times p$ بالترتیب ہو تو $A(B + C)$ اور $AB + AC$ مساوی میٹرکس کے درجے $m \times p$ اور
(میٹرکس ضرب کو تقسیم کرنے کے علاوہ چھوڑ دیا گیا ہے)۔ $A(B + C) = AB + AC$
- اگر A، B اور C تین میٹرکس کے درجے $m \times n, m \times n$ اور $n \times p$ بالترتیب ہو تو $(A + B)C$ اور $AC + BC$ مساوی میٹرکس کے درجے $m \times p$ اور $(A + B)C = AC + BC$ (میٹرکس ضرب اضافے پر صحیح تقسیم ہے۔
- اگر A، B دو میٹرکس کے درجے $m \times n$, اور $n \times p$ بالترتیب اور $\alpha(AB) = A(\alpha B) = (\alpha A)B$ ایک اسکیلر ہو تو میٹرکس کا درجہ $m \times p$ ہے۔
- اگر I ایک اکائی میٹرکس ہو تو $AI = IA = A$ (I ایک ضربی مماثلت)

7.2.5 میٹرکس پر ٹرانسپوز کا عمل اور اس کی خصوصیات
(Operation of Transpose of a Matrix and its Properties)

تعریف 7.16

میٹرکس A کا *ٹرانسپوز*، میٹرکس A کے صفوں اور قطارو کے رد و بدل سے حاصل ہوتا ہے اور اس کو (Aٹرانسپورٹ یا A^T ٹرانسپوز کی طرح پر ہیں) سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

عام، $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ طور پر، $A^T = [b_{ij}]_{n \times m}$ ہو تو $b_{ij} = a_{ji}$ جس میں (i, j) کے لئے A^T is a_{ji}.

مثال کے طور پر

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 4 \\ -8 & 0 & 0.2 \end{bmatrix} \text{ وت } A^T = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ \sqrt{2} & 0 \\ 4 & 0.2 \end{bmatrix}$$

ہم ٹرانسپوز پر چند بنیادی نتائج بیان کرتے ہیں جن کے ثبوت سیدھے آگے ہیں۔ کوئی دو میٹرکس A اور B کی موزوں درجہ جہاں

(i) $(A^T)^T = A$ (ii) $(kA)^T = kA^T$ (کہاں k کوئی اسکیلر)

(iii) $(A+B)^T = A^T + B^T$ (iv) $(AB)^T = B^T A^T$ (ٹرانسپوز پر الٹا اصول)

مثال 7.12

اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ہو تو ثابت کیجئے

(i) $(AB)^T = B^T A^T$ (ii) $(A+B)^T = A^T + B^T$ (iii) $(A-B)^T = A^T - B^T$ (iv) $(3A)^T = 3A^T$

حل

(i) $$AB = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 2 & 22 \\ -2 & 9 & 9 \\ 7 & 1 & 14 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^T = \begin{bmatrix} 16 & -2 & 7 \\ 2 & 9 & 1 \\ 22 & 9 & 14 \end{bmatrix} \quad \ldots (1)$$

07_11th-Maths-Vol2-Unit7_UM.indd 14 21-02-2023 16:11:37

$$B^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix},\ A^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B^T A^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -2 & 7 \\ 2 & 9 & 1 \\ 22 & 9 & 14 \end{bmatrix} \quad \ldots (2)$$

(1) اور (2) میں، $(AB)^T = B^T A^T$

(ii) $$A + B = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 3 & 0 & 9 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(A + B)^T = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 7 & 0 & 5 \\ 1 & 9 & 3 \end{bmatrix} \quad \ldots(3)$$

$$A^T + B^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 7 & 0 & 5 \\ 1 & 9 & 3 \end{bmatrix} \quad \ldots (4)$$

(3) اور (4) میں، $(A+B)^T = A^T + B^T$

(iii) $$A - B = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A - B)^T = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \ldots (5)$$

$$A^T - B^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \ldots (6)$$

(5) اور (6) میں، $(A-B)^T = A^T - B^T$

(iv) $$3A = \begin{bmatrix} 12 & 18 & 6 \\ 0 & 3 & 15 \\ 0 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(3A)^T = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 18 & 3 & 9 \\ 6 & 15 & 6 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} = 3(A^T)\ .$$

07_11th-Maths-Vol2-Unit7_UM.indd 15 21-02-2023 16:11:38

7.2.6 سڑول اور سکیو سڑول میٹرکس (Symmetric and Skew-symmetric Matrices)

تعریف 7.17

ایک مربع میٹرکس A کو سڑول (**Symmetric**) کہا جاتا ہے۔ اگر $A^T = A$ یہ ہے

کہ $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ ایک سڑول میٹرکس $a_{ij}=a_{ji}$ ہے تو i اور j کے لیے

مثال کے $A=\begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -6 & 8 & 5 \\ 9 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ طور پر ایک سڑول میٹرکس چنانچہ

اس کا مشاہدہ کریں، A^T کے ٹرانسپوز میٹرکس A کو دیے۔ یہ ہے کہ $\left(A^T\right)^T = A$

تعریف 7.18

ایک مربع میٹرکس A کو سکیو سڑول (**Skew-symmetric**) کہا جاتا ہے۔ اگر $A^T = -A$

اگر $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ ایک سکیو سڑول میٹرکس ہو تو $a_{ij}=-a_{ji}$ سب i اور j کے لئے

اب اگر ہم ڈالیں $i=j$ تو $2a_{ii}=0$ یا $a_{ii}=0$ سب کے لئے i اس کا مطلب یہ ہے کہ سکیو سمسیٹر کس کے تمام وتر کے عناصر صفر ہیں۔

مثال کے طور پر $A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ ایک سکیو سڑول میٹرکس $A^T=-A$ چنانچہ

یہ نوٹ کرنا دلچسپ ہے کہ کوئی بھی مربع میٹرکس سڑول اور سکیو سڑول میٹرکس کا مجموعہ لکھا جاسکتا ہے۔

مسئلہ 7.1

ایک سڑول A میٹرکس اور $A-A^T$ ایک سکیو سڑول میٹرکس $A+A^T$ ہے۔

ثبوت :

فرض کرو کہ $B=A+A^T$

$$B^T = (A+A^T)^T = A^T+(A^T)^T = A^T+A = A+A^T = B.$$

ایک سڑول $A+A^T$ میٹرکس

اگلا ہم اجازت دیتے ہیں $C=A-A^T$ پھر ہم اسے دیکھتے ہیں

$$C^T=(A+(-A^T))^T = A^T+(-A^T)^T = A^T-(A^T)^T = A^T-A=-(A-A^T)=-C$$

$A-A^T$ اایک سکیو سڑول میٹرکس ہیں ■

مسئلہ 7.2

کوئی مربع میٹرکس ایک سڑول میٹرکس اور سکیو سڑول میٹرکس کے مجموعہ کے طور پر اظہار کیا جاسکتا ہے

ثبوت :

A ایک مربع میٹرکس ہو تو یہ لکھ سکتا ہے

$$A=\frac{1}{2}(A+A^T)+\frac{1}{2}(A-A^T).$$

مسئلہ 7.1 سے، یہ اس کی پیروی کرتا ہے $(A+A^T)$ اور $(A-A^T)$ ایک سڑول $\frac{1}{2}(A+A^T)$ اور $\frac{1}{2}(A-A^T)$ سکیوسڑول میٹرکس بالترتیب ہے چنانچہ $(kA)^T=kA^T$ یہ اسی کی پیروی کرتا ہے۔ ایک سڑول اور سکیو سڑول میٹرکس بالترتیب ہیں۔اب مطلوبہ نتیجہ سامنے آتا ہے۔ ■

07_11th-Maths-Vol2-Unit7_UM.indd 16 21-02-2023 16:11:39

نوٹ 7.4

ایک میٹرکس جو دونوں سڑول اور سکیو سڑول ہے ایک صفر میٹرکس ہے۔

مثال 7.13

میٹرکس $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ -6 & 8 & 3\\ -4 & 6 & 5\end{bmatrix}$ کو سکیو سڑول میٹرکس کے مجموعے کے طور پر ظاہر کیجئے۔

حل

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ -6 & 8 & 3\\ -4 & 6 & 5\end{bmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{bmatrix}1 & -6 & -4\\ 3 & 8 & 6\\ 5 & 3 & 5\end{bmatrix}$$

فرض کرو کہ $P=\frac{1}{2}(A+A^T)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & -3 & 1\\ -3 & 16 & 9\\ 1 & 9 & 10\end{bmatrix}$

اب $P^T=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & -3 & 1\\ -3 & 16 & 9\\ 1 & 9 & 10\end{bmatrix}=P$

اس طرح، $P=\frac{1}{2}(A+A^T)$ ایک سڑول میٹرکس ہے۔

فرض کرو کہ $Q=\frac{1}{2}(A-A^T)$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 9 & 9\\ -9 & 0 & -3\\ -9 & 3 & 0\end{bmatrix}$$

تو $Q^T=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & -9 & -9\\ 9 & 0 & 3\\ 9 & -3 & 0\end{bmatrix}=-Q$

اس طرح، $Q=\frac{1}{2}(A-A^T)$ ایک سکیو سڑول میٹرکس ہے۔

$$A=P+Q=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & -3 & 1\\ -3 & 16 & 9\\ 1 & 9 & 10\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 9 & 9\\ -9 & 0 & -3\\ -9 & 3 & 0\end{bmatrix}$$

اس طرح میٹرکس A کو سڑول اسر سکیو سڑول میٹرکس سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

مشق 7.1

1۔ $m\times n$ میٹرکس $A=[a_{ij}]$ کی تصنیف کریں، جہاں a_{ij} اس طرح دیا گیا ہے

(i) $m=2,n=3$ جہاں $a_{ij}=\frac{(i-2j)^2}{2}$ (ii) $m=3,n=4$ جہاں $a_{ij}=\frac{|3i-4j|}{4}$

07_11th-Maths-Vol2-Unit7_UM.indd 17 21-02-2023 16:11:40

2۔ p، q، r اور s کے قیمت معلوم کیجئے اگر

$$\begin{bmatrix} p^2-1 & 0 & -31-q^3 \\ 7 & r+1 & 9 \\ -2 & 8 & s-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 7 & \frac{3}{2} & 9 \\ -2 & 8 & -\pi \end{bmatrix}.$$

3۔ $x+y$ کی قیمت معلوم کیجئے اگر $\begin{bmatrix} 2x+y & 4x \\ 5x-7 & 4x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 7y-13 \\ y & x+6 \end{bmatrix}$

4۔ میٹرکس A اور B کا تعین کریں اگر

$A-2B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 8 \\ -2 & 1 & -7 \end{bmatrix}$ اور $2A-B+\begin{bmatrix} 6 & -6 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 0$ مطمئن ہو۔

5۔ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ہو تو A^4 معلوم کیجئے۔

6۔ غور کریں ایک میٹرکس $A_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

(i) ثابت کرو $A_\alpha\ A_\beta = A_{(\alpha+\beta)}$۔

(ii) $A_\alpha + A_\alpha^T = I$ مطمئن حالت کی تمام ممکنہ حقیقی قیمت α تلاش کریں۔

7۔ اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & x \end{bmatrix}$ اور اس طرح کہ، $(A-2I)(A-3I) = O$ ہو تو x کی قیمت معلوم کیجئے۔

8۔ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & -1 \end{bmatrix}$ ہو تو ثابت کرو کہ A^2 ایک اکائی میٹرکس ہے۔

9۔ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ اور $A^3-6A^2+7A+kI = O$ ہو تو k کی قیمت معلوم کرو۔

10 ہر ایک صورتوں میں درج ذیل شرائط کو پورا کرنے والے میٹرکس کی مثالیں دیں۔

(i) A اور B اس طرح کہ $AB \neq BA$

(ii) A اور B اس طرح کہ $AB = O = BA$، $A \neq O$ اور $B \neq O$

(iii) A اور B اس طرح کہ $AB = O$ اور $BA \neq O$

11۔ ثابت کرو $f(x)f(y) = f(x+y)$ جہاں $f(x) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ہے۔

12۔ اگر A ایک مربع میٹرکس ہے جہاں $A^2 = A$ تو $7A - (I + A)^3$ کی قیمت معلوم کیجئے۔

13۔ خصوصیات کی تصدیق کریں $A(B + C) = AB + AC$ جہاں A، B اور C میٹرکس دئے گئے ہیں۔

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}، \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ اور } C = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

07_11th-Maths-Vol2-Unit7_UM.indd 18 21-02-2023 16:11:40

14۔ میٹرکس A معلوم کیجئے جو میٹرکس تعلق $A\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7 & -8 & -9\\ 2 & 4 & 6\end{bmatrix}$ کو مطمئن کرتا ہے۔

15۔ اگر $A^T=\begin{bmatrix}4 & 5\\ -1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ اور $B=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 7 & 5 & -2\end{bmatrix}$ مندرجہ ذیل ثابت کرو۔

(i) $(A+B)^T=A^T+B^T=B^T+A^T$ (ii) $(A-B)^T=A^T-B^T$ (iii) $(B^T)^T=B$

16۔ اگر A ایک 3×4 میٹرکس اور B ایک میٹرکس اس طرح کہ دونوں A^TB اور BA^T تعریف کی گئی ہے، میٹرکس B کی درجہ کیا ہے؟

17۔ درج ذیل میٹرکس کو سڑول (Symmetric) اور سکیو سڑول (Skew-symmetric) میٹرکس کے مجموعہ کے طور پر ظاہر کیجئے۔

(i) $\begin{bmatrix}4 & -2\\ 3 & -5\end{bmatrix}$ اور (ii) $\begin{bmatrix}3 & 3 & -1\\ -2 & -2 & 1\\ -4 & -5 & 2\end{bmatrix}$

18۔ میٹرکس A معلوم کیجئے اس طرح کہ $\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\\ -3 & 4\end{bmatrix}A^T=\begin{bmatrix}-1 & -8 & -10\\ 1 & 2 & -5\\ 9 & 22 & 15\end{bmatrix}$

19۔ اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ x & 2 & y\end{bmatrix}$ ایک میٹرکس جہاں $AA^T=9I$ ہے تو x اور y کی قیمت معلوم کیجئے۔

20۔ (i) x کی قیمت معلوم کیجئے جب $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\ -1 & 0 & x^3\\ 2 & -3 & 0\end{bmatrix}$ ایک سڑول میٹرکس ہے۔

(ii) اگر $\begin{bmatrix}0 & p & 3\\ 2 & q^2 & -1\\ r & 1 & 0\end{bmatrix}$ ایک سکیو سڑول p، q اور r کی قیمت معلوم کیجئے۔

21۔ ایک میٹرکس $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ کی تصنیف کیجیے جہاں $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ ہے۔ بتائیں کہ A ایک سڑول یا سکیو سڑول میٹرکس ہے۔

22۔ A اور B دونوں سڑول میٹرکس ثابت کرنا کہ $AB=BA$ صرف اور صرف اس صورت میں AB سڑول میٹرکس ہے۔

23۔ اگر A اور B مساوی د رجے کے سڑول میٹرکس ہیں ثابت کرو کہ

(i) $AB+BA$ ایک سڑول میٹرکس ہے

(ii) $AB-BA$ ایک سکیو سڑول میٹرکس ہے

24۔ گری دار میوے اور مصالحے کی دکان میں ایک دکاندار کا جو، کشمش اور بادام پیک کا گفٹ پیک بناتا ہے۔

پیک I میں 100 گرام کاجو، 100 گرام کشمشاور 50 گرام بادام ہوتے ہیں۔

پیک IIمیں 200 گرام کاجو، 100 گرام کشمش اور 100 گرام بادام ہوتے ہیں۔

پیک IIIمیں 250 گرام کاجو، 250 گرام کشمش اور 150 گرام بادام ہوتے ہیں۔

50 گرام کاجو کی قیمت ₹ 50، 50 گرام کشمش کی قیمت ₹ 10 ار 50 گرام بادام کی قیمت ₹ 60 ہے۔ ہر گفٹ پیک کی قیمت کیا ہے؟

07_11th-Maths-Vol2-Unit7_UM.indd 19 21-02-2023 16:11:42

7.3 مقطعہ (Determinants)

ہر ایک مربع میٹرکس $A = [a_{ij}]$ درجہ n، ہم ایک اعداد کو جوڑ سکتے ہیں اسے میٹرکس کے مقطعہ ہوتے ہیں۔

اگر $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ ہو تو A کے مقطعہ $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ اس طرح لکھا جاتا ہے

نوٹ 7.5

(i) مقطعہ والوں کی وضاحت صرف مربع میٹرکس کے لئے کی جاسکتی ہے۔

(ii) ایک مربع میٹرکس A کے لئے $|A|$ بطور A کا مقطع پڑھا جاتا ہے

(iii) میٹرکس صرف ایک نمائندگی ہے جب کہ مقطعہ ایک میٹرکس کی قیمت ہے

7.3.1 مختلف درجوں کے میٹرکس کی مقطعہ (Determinants of Matrices of different order)

درجہ 1 کے میٹرکس کا مقطعہ (Determinant of a matrix of order 1)

فرض کرو کے $A = [a]$ درجہ 1 کا میٹرکس ہو پھر A کا مقطعہ 'a'

درجہ 2 کے میٹرکس کا مقطعہ (Determinant of a matrix of order 2)

فرض کرو کے $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ درجہ 2 کا میٹرکس بنیں۔ پھر A کا مقطعہ کی

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\ a_{22} - a_{21}\ a_{12}.$$

مثال 7.14

معلوم کرو (i) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$

حل

(i) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = (2 \times 2) - (-1 \times 4) = 4 + 4 = 8$

(ii) $\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = (\cos\theta\cos\theta) - (-\sin\theta\sin\theta) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

درجہ 3 کے میٹرکس کا مقطعہ (Determinant of a matrix of order 3)

ہم 3×3 میٹرکس کے مقطعہ کو اندراجات کے ساتھ حقیقی اعداد یا حقیقی قیمت تفاعلات کے طور پر $\mathbb{R}$ پر متعین کرتے ہیں اور اس کی خصوصیات کا مطالعہ کرتے ہیں اور بعض متعین کاروں کی تشخیص کے مختلف طریقوں پر تبادلہ خیال کرتے ہیں۔

تعریف 7.19

آیئے $A = [a_{ij}]_{3\times3}$ درجہ 3 کا دیا ہوا مربع میٹرکس ہے اختیاری عنصر a_{ij} کا کم تر (Minor) i^{th} قطار اور j^{th} صف کو حذف کرکے حاصل کیا جانے والا عامل ہے جس میں عنصر a_{ij} کھڑا ہے۔ a_{ij} کے کم تر کو عام طور پر M_{ij} سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

07_11th-Maths-Vol2-Unit7_UM.indd 20 21-02-2023 16:11:43

تعریف 7.20

ہم ضربی (Cofactor) ایک کم تر علامت ہے۔ a_{ij} کا ہم ضربی عام طور پر A_{ij} سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اور اس کی وضاحت $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ کی طرح کی جاتی ہے۔

مثال کے طور پر $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ کے ذریعہ بیان کردہ 3×3 میٹرکس پر غور کریں۔

پھر عناصر کے کم تر اور ہم ضربی مندرجہ ذیل a_{11}، a_{12}، a_{13} دیے گئے ہیں۔

(i) a_{11} کا کم تر $\quad M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}$

a_{11} کا ہم ضربی $\quad A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}$

(ii) a_{12} کا کم تر $\quad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}$

a_{12} کا ہم ضربی $\quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23})$

(iii) a_{13} کا کم تر $\quad M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}$

a_{13} کا ہم ضربی $\quad A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}$

نتیجہ 7.1 (لیپلیس کی توسیع) (Laplace Expansion)

دی گئی میٹرکس $A = [a_{ij}]_{3\times3}$ کے لئے پہلی صف کی عناصر کی پیداوار کا مجموعہ ہے جس کے متعلقہ ہم ضربی A کا مقطعہ کرتے ہیں۔

یعنی $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$.

اس کو کم تروں کا استعمال کرتے ہوئے بھی گھمایا جاسکتا ہے۔ یعنی $|A| = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$

کسی قطار یا صف کے ساتھ توسیع کرکے اس کا تعین کیا جاسکتا ہے اور یہ نوٹ کرنا ضروری ہے کہ تمام صورتوں میں قدر یکساں رہتی ہے۔

مثال کے طور پر

$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$ $\quad R_1$ کے ساتھ توسیع ہے۔

$|A| = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$ $\quad R_2$ کے ساتھ توسیع ہے۔

$|A| = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$ $\quad C_1$ کے ساتھ توسیع ہے۔

مثال 7.15

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & -5 & 6 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ ۔ AB دریافت کریں کہ $|A|$ کسی A کا تمام کمتر اور ہم ضربوں کا محسوب کیجئے اور $|A|$ معلوم کیجئے ۔ اگر بھی صف یا قطار کے ساتھ توسیع غیر تبدیل شدہ کہا ہے

07_11th-Maths-Vol2-Unit7_UM.indd 21 21-02-2023 16:11:43

حل

کم تر:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -10 - 30 = -40$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 18 = 26$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 20 - 15 = 5$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 10 = 16$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 9 = 14$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = 18 - 10 = 8$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6 + 8 = 14$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -5 - 12 = -17$$

ہم ضربی:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}(-40) = -40$$
$$A_{12} = (-1)^{1+2}(+26) = -26$$
$$A_{13} = (-1)^{1+3}(5) = 5$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1}(16) = -16$$
$$A_{22} = (-1)^{2+2}(-4) = -4$$
$$A_{23} = (-1)^{2+3}(14) = -14$$
$$A_{31} = (-1)^{3+1}(8) = 8$$
$$A_{32} = (-1)^{3+2}(14) = -14$$
$$A_{33} = (-1)^{3+3}(-17) = -17$$

R_1 کے ساتھ ساتھ توسیع

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \ .$$

$$|A| = 1(-40) + (3)(-26) + (-2)(5) = -128 \ . \qquad \ldots (3)$$

C_1 کے ساتھ ساتھ توسیع

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} \ .$$

07_11th-Maths-Vol2-Unit7_UM.indd 22 21-02-2023 16:11:44

$$= 1(-40) + 4(-16) + -3(8) = -128 \quad \ldots (4)$$

(3) اور (4) سے ہمارے پاس ہے۔

R_1 کو پھیلا کر حاصل کیا گیا $|A|$ کے ساتھ پھیلانے کے برابر C_1 ہے

سارس رول (فرانسیسی ریاضی دان پیئر فریڈیک سارس کے نام سے منسوب) **کا استعمال کرتے ہوئے درجہ 3 مقطعہ کی تشخیص**

4OUB7

فرض کرو کے $A = [a_{ij}]_{3\times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

میٹرکس A کے اندراجات درج ذیل کے طور پر لکھیں

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

پھر $|A|$ کا حساب مندرجہ ذیل ہے

$$|A| = \left[a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}\right] - \left[a_{33}a_{21}a_{12} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{31}a_{22}a_{13}\right]$$

مثال 7.16

معلوم کیجئے $|A|$ اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\alpha & 0 & \sin\beta \\ \cos\alpha & -\sin\beta & 0 \end{bmatrix}$

حل

$$\begin{vmatrix} 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\alpha & 0 & \sin\beta \\ \cos\alpha & -\sin\beta & 0 \end{vmatrix} = 0M_{11} - \sin\alpha M_{12} + \cos\alpha M_{13}$$

$$= 0 - \sin\alpha(0 - \cos\alpha\sin\beta) + \cos\alpha(-\sin\alpha\sin\beta - 0) = 0.$$

مثال 7.17

$|A|$ سارس اصول کا استعمال کرتے ہوئے محسوب کریں اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 6 \end{bmatrix}$

حل

$$\begin{array}{ccccc} 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 5 & -2 & 6 & 5 & -2 \end{array}$$

$$|A| = \left[3(-1)(6) + 4(2)(5) + 1(0)(-2)\right] - \left[5(-1)(1) + (-2)(2)3 + 6(0)(4)\right]$$

$$= [-18 + 40 + 0] - [-5 - 12 + 0] = 22 + 17 = 39.$$

نوٹ 7.6

آسان حساب کے لئے ہم ایک قطار یا صف کے ساتھ مقطعہ کو بڑھادیتے ہیں جس میں زیادہ سے زیادہ صفر ہوتے ہیں۔

07_11th-Maths-Vol2-Unit7_UM.indd 23 21-02-2023 16:11:45

درجہ n، $n \geq 4$ کے مربع میٹرکس کا مقطعہ (Determinant of square matrix of order n), $n \geq 4$

مقطعہ کے تصور کو درجے n، $n \geq 4$ کے مربع میٹرکس کے معاملے تک بڑھایا جاسکتا ہے۔ فرض کرو کے $A = [a_{ij}]_{n \times n}, n \geq 4$.

اگر ہم $A = [a_{ij}]_{n \times m}$ کے میٹرکس سے قطار i اور صف j کو حذف کرتے ہیں تو ہم درجہ $(n-1)$ کا مقطعہ کرتے ہیں جیسے عنصر a_{ij} کا کمتر عناصر کی تعریف M_{ij} کہا جاتا ہے۔ ہم اس کم تر کو ایم دی ہم ضربی سے ظاہر کرتے ہیں $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

نتیجہ 7.2

دئے گئے مربع میٹرکس $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ درجہ n کے عناصر کی مصنوعات کا مجموعہ۔ ان کے متعلقہ Cofactors کے ساتھ قطار A کا مقطعہ ہے۔ یعنی

ایسا ہی $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}$

جہاں A_{ij}، $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}$

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j},$$

جہاں A_{1j}، A_{1j} جے جو فیکٹر کو ظاہر کرتا ہے a_{1j} اور $M_{1j}, a_{1j}, j = 1, 2, \ldots, n$ کے کم تر کو ظاہر کرتا ہے۔ ■

نوٹ 7.7

(i) اگر $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ پھر A کا مقطعہ بھی $\det(A)$ یا $\det A$ یا Δ کے طور پر بیان کیا جاسکتا ہے۔

(ii) کسی بھی صف یا قطار کا استعمال کرکے اس کی گنتی کی جاسکتی ہے۔

7.3.2 مقطعہ کی خصوصیات (Properties of Determinants)

ہم تشخیص کو آسان بنانے کے لئے مقطعہ والوں کی مندرجہ ذیل خصوصیات میں سے ایک یا زیادہ کو استعمال کرسکتے ہیں فیصلہ کرنے والوں کی۔

خصوصیت 1

اگر میٹرکس کی قطاریں صف اور صف میں تبدیل ہوجائیں تو میٹرکس کا مقطعہ تبدیل نہیں ہوتا۔ قطاروں میں یعنی $|A| = |A^T|$

چونکہ صف وار توسیع قطار وار توسیع کی طرح ہے، نتیجہ اچھا ہے

خصوصیت 2

اگر کسی عامل کی کوئی دو قطاریں / صف آپس میں بدل جاتے ہیں، تو مقطعہ نشان میں تبدیل ہوجاتے ہیں لیکن اس کی مطلق قیمت غیر تبدیل ہوتی رہتی ہے۔

تصدیق:

فرض کرو کہ $|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$

فرض کرو کہ $|A_1| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$ (چونکہ $R_2 \leftrightarrow R_3$)

$= a_1(b_3c_2 - b_2c_3) - b_1(a_3c_2 - a_2c_3) + c_1(a_3b_2 - a_2b_3)$

$$= -a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + b_1(a_2c_3 - a_3c_2) - c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$$
$$= -[a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)]$$
$$= -|A|$$

$|A_1| = -|A|$ اس طرح جائیداد کی تصدیق ہوتی ہے ■

خصوصیت 3

اگر n میٹرکس A کی قطاروں (صفوں) کے تبادلے ہوتے ہیں تو نتیجے کے میٹرکس کا مقطعہ $(-1)^n |A|$

خصوصیت 4

اگر میٹرکس کی دو قطاریں (صفیں) یکساں ہوں تو اس کا مقطعہ صفر ہے۔

تصدیق:

$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$ ساتھ 2 اور 3 قطاریں ایک جیسی ہیں

دوسری اور تیسری قطاروں کو بدلتے ہوئے ہمیں $-|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = |A|$

$\Rightarrow 2|A| = 0 \Rightarrow |A| = 0.$ ■

خصوصیت 5

اگر میٹرکس A کی ایک قطار (صف) A کی دوسری قطر (یا صف) کا اسکیلر ملٹیپل ہے تو اس کا مقطعہ صفر ہے۔

نوٹ 7.8

(i) اگر قطار یا صف کے تمام اندراجات صفر ہیں تو مقطعہ صفر ہے

(ii) سہ رخی میٹرکس کا مقطعہ پرنسپل وتر عناصر کی پیداوار سے حاصل کیا جاتا ہے

خصوصیت 6

اگر میٹرکس کی ایک قطار (یا صف) میں ہر عنصر کو اسکیلر k سے ضرب دیا جاتا ہے تو مقطعہنده کو اسی اسکیلر k سے ضرب دیا جاتا ہے

تصدیق:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ فرض کرو کہ

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ فرض کرو کہ

$$= ka_1(b_2c_3 - b_3c_2) - kb_1(a_2c_3 - a_3c_2) + kc_1(a_2b_3 - a_3b_2) = k|A|$$

$$= k[a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)] = k|A|$$

$\Rightarrow |A_1| = k|A|.$ ■

07_11th-Maths-Vol2-Unit7_UM.indd 25 21-02-2023 16:11:46

نوٹ 7.9

اگر A ایک مربع میٹرکس درجہ n ہو تو

(i) $|AB| = |A||B|$

(ii) اگر $AB = 0$ پھر یا تو $|A| = 0$ یا $|B| = 0$۔

(iii) $|A^n| = (|A|)^n$

خصوصیت 7

اگر ایک قطار (یا صف) کے ہر صفر کو دو یا اس سے زیادہ مدت کے مجموعے کے طور پر ظاہر کیا جاتا ہے تو پورے عامل کو دو یا زیادہ سے زیادہ مقطعہ والوں کے مجموعے کے طور پر ظاہر کیا جاتا ہے۔

یعنی، $\begin{vmatrix} m_1 & b_1 & c_1 \\ m_2 & b_2 & c_2 \\ m_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+m_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+m_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+m_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

تعریف:

پہلا قطار توسیع لے کر اس کی آسانی سے تصدیق کی جاسکتی ہے۔

$$\text{LHS} = (a_1+m_1)(b_2c_3-b_3c_2)-(a_2+m_2)(b_1c_3-b_3c_1)+(a_3+m_3)(b_1c_2-b_2c_1)$$

$$= a_1(b_2c_3-b_3c_2)-a_2(b_1c_3-b_3c_1)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)+m_1(b_2c_3-b_3c_2)-m_2(b_1c_3-b_3c_1)$$

$$+m_3(b_1c_2-b_2c_1)$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_1 & b_1 & c_1 \\ m_2 & b_2 & c_2 \\ m_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \text{RHS}.$$

□

خصوصیت 8

اگر کسی مقطعہ کی کسی بھی قطار (صف) کے ہر عنصر میں ایک یا زیادہ قطاروں (صفوں) کی متعلقہ اندراجات کے مساوی ضربوں کو شامل یا گھٹا دیا جائے تو پھر مقطعہ کی قدر میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی

تعریف:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ فرض کرو کہ

$$|A_1| = \begin{vmatrix} a_1+pa_2+qa_3 & b_1+pb_2+qb_3 & c_1+pc_2+qc_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ اور

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} pa_2 & pb_2 & pc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} qa_3 & qb_3 & qc_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ { خصوصیت 7 کو استعمال کرکے کے

$$|A_1| = |A| + p\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + q\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

07_11th-Maths-Vol2-Unit7_UM.indd 26 21-02-2023 16:11:47

$|A_1| = |A| + p(0) + q(0) = |A|$ (خصوصیت 4 کا استعمال کرتے ہوئے)

لہٰذا $|A_1| = |A|$

یہ خصوصیت کسی بھی مقررہ قطار یا صف سے آزاد ہے۔ ■

مثال 7.18

اگر a, b, c اور x مثبت حقیقی اعداد ہیں، پھر اسے ثابت کرو $\begin{vmatrix} (a^x+a^{-x})^2 & (a^x-a^{-x})^2 & 1 \\ (b^x+b^{-x})^2 & (b^x-b^{-x})^2 & 1 \\ (c^x+c^{-x})^2 & (c^x-c^{-x})^2 & 1 \end{vmatrix}$ صفر ہے

حل

$C_1 \to C_1 - C_2$ درخواست دے رہا ہے, $\begin{vmatrix} 4 & (a^x-a^{-x})^2 & 1 \\ 4 & (b^x-b^{-x})^2 & 1 \\ 4 & (c^x-c^{-x})^2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ ہم نے حاصل کیا چونکہ C_1 اور C_3 متناسب ہے

مثال 7.19

مقطعہ کو توسیع کے بغیر ثابت کیجئے $|B| = 2|A|$

جہاں $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \\ a+b & b+c & c+a \end{bmatrix}$

حل

$$|B| = \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & 2(a+b+c) & 2(a+b+c) \\ c+a & a+b & b+c \\ a+b & b+c & c+a \end{vmatrix} \quad (R_1 \to R_1 + R_2 + R_3) \text{ ہمارے پاس ہے}$$

$$= 2\begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ c+a & a+b & b+c \\ a+b & b+c & c+a \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ -b & -c & -a \\ -c & -a & -b \end{vmatrix} \quad (R_2 \to R_2 - R_1 \text{ اور } R_3 \to R_3 - R_1)$$

$$= 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ -b & -c & -a \\ -c & -a & -b \end{vmatrix} (R_1 \to R_1 + R_2 + R_3)$$

$$= 2(-1)^2\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

$$= 2|A|.$$

07_11th-Maths-Vol2-Unit7_UM.indd 27 21-02-2023 16:11:47

مثال 7.20

قیمت معلوم کرو $\begin{vmatrix} 2014 & 2017 & 0 \\ 2020 & 2023 & 1 \\ 2023 & 2026 & 0 \end{vmatrix}$

حل

$$\begin{vmatrix} 2014 & 2017 & 0 \\ 2020 & 2023 & 1 \\ 2023 & 2026 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2014 & 2017-2014 & 0 \\ 2020 & 2023-2020 & 1 \\ 2023 & 2026-2023 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2014 & 3 & 0 \\ 2020 & 3 & 1 \\ 2023 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2014 & 1 & 0 \\ 2020 & 1 & 1 \\ 2023 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -3(2014 - 2023) = -3(-9) = 27.$$

مثال 7.21

x کی قیمت معلوم کرو اگر $\begin{vmatrix} x-1 & x & x-2 \\ 0 & x-2 & x-3 \\ 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix} = 0$

حل

چونکہ پرنسپل وتر کے نیچے تمام اندراجات صفر ہیں اس لئے مقطعہ کی قدر ہے $(x-1)(x-2)(x-3) = 0$ جو دیتا ہے $x = 1, 2, 3$

مثال 7.22

ثابت کرو کہ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)$

حل

$C_3 \to C_3 - C_1$ ، $C_2 \to C_2 - C_1$ استعمال کرنے سے، ہمیں ملتا ہے

$$\text{LHS} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & y-x & z-x \\ x^2 & y^2-x^2 & z^2-x^2 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 1 \\ x^2 & y+x & z+x \end{vmatrix}$$

$$= (y-x)(z-x)[(z+x)-(y+x)] .$$

$$= (y-x)(z-x)(z-y) .$$

$$= (x-y)(y-z)(z-x) = \text{RHS}.$$

مشق 7.2

1۔ مقطعہ کو توسیع کے بغیر ثابت کیجئے $\begin{vmatrix} s & a^2 & b^2+c^2 \\ s & b^2 & c^2+a^2 \\ s & c^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix} = 0$

2۔ بتائیے $\begin{vmatrix} b+c & bc & b^2c^2 \\ c+a & ca & c^2a^2 \\ a+b & ab & a^2b^2 \end{vmatrix} = 0$

07_11th-Maths-Vol2-Unit7_UM.indd 28 21-02-2023 16:11:48

3۔ ثابت کرو $\begin{vmatrix} a^2 & bc & ac+c^2 \\ a^2+ab & b^2 & ac \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$

4۔ ثابت کرو $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

5۔ ثابت کرو $\begin{vmatrix} \sec^2\theta & \tan^2\theta & 1 \\ \tan^2\theta & \sec^2\theta & -1 \\ 38 & 36 & 2 \end{vmatrix} = 0$.

6۔ بتائیے $\begin{vmatrix} x+2a & y+2b & z+2c \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$

7۔ سکیو سمیٹریک میٹرکس کی عمومی 3×3 شکل لکھیں اور ثابت کریں کہ اس کا تعین کرنا ہے 0 والا

8۔ اگر $\begin{vmatrix} a & b & a\alpha+b \\ b & c & b\alpha+c \\ a\alpha+b & b\alpha+c & 0 \end{vmatrix} = 0$

ثابت کرو کہ a, b, c ایک $G.P.$ میں ہوں یا α کی جڑی $ax^2 + 2bx + c = 0$ ہے۔

9۔ ثابت کرو $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2-bc \\ 1 & b & b^2-ca \\ 1 & c & c^2-ab \end{vmatrix} = 0$

10۔ اگر p^{th}, q^{th}, a, b, c اور r^{th} ویں رقم $A.P$ کے ہو تو $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ کی قیمت معلوم کرو

11۔ بتائیے $\begin{vmatrix} a^2+x^2 & ab & ac \\ ab & b^2+x^2 & bc \\ ac & bc & c^2+x^2 \end{vmatrix}$ x^4 سے تقسیم ہے

12۔ اگر a, b, c سب مثبت ہیں اور p^{th}, q^{th} اور r^{th} ویں رقم $G.P$ ہیں بتائیے۔ $\begin{vmatrix} \log a & p & 1 \\ \log b & q & 1 \\ \log c & r & 1 \end{vmatrix} = 0$.

13۔ کی قیمت معلوم کیجئے اگر $x, y, z \neq 1$. $\begin{vmatrix} 1 & \log_x y & \log_x z \\ \log_y x & 1 & \log_y z \\ \log_z x & \log_z y & 1 \end{vmatrix}$

07_11th-Maths-Vol2-Unit7_UM.indd 29 21-02-2023 16:11:48

14۔ اگر $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \alpha \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$، $\sum_{k=1}^{n} \det(A^k) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$

51۔ عزم کو بڑھائے بغیر مندرجہ ذیل کا اندازہ کریں۔

(i) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 6x & 9x & 12x \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ z & x & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

61۔ اگر A ایک مربع میٹرکس اور $|A| = 2$ کی قیمت معلوم $|AA^T|$ کرو۔

17۔ اگر A اور B مربع میٹرکس درجہ 3 اس طرح کہ $|A| = -1$ اور $|B| = 3$ کی قیمت معلوم $|3AB|$ کیجئے۔

18۔ اگر $\lambda = -2$ ہو تو $\begin{vmatrix} 0 & 2\lambda & 1 \\ \lambda^2 & 0 & 3\lambda^2+1 \\ -1 & 6\lambda-1 & 0 \end{vmatrix}$ کی قیمت کا تعین کریں۔

19۔ $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 20 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & 2x & 5x^2 \end{vmatrix} = 0.$ مساوات کے جذور کا تعین کریں۔

20۔ $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ اور $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & -5 \end{bmatrix}$ کے لئے اس کی تصدیق کریں $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \\ 9 & 7 & 5 \end{bmatrix}$

21۔ $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ دوسری صف کے عناصر ہم ضریبز کا استعمال کرتے ہوئے $|A|$ کا اندازہ کریں۔

7.3.3 مقطعہ کے لیے ضربی مسئلہ کا اطلاق (Application of Factor Theorem to Determinants) 7

مسئلہ 7.3 (جزوی مسئلہ)

اگر x میں میٹرکس A کے ہر ایک عنصر ایک کثیر رقمی ہے اور اگر $x = a$ کے لیے $|A|$ صفر ہوجاتا ہے تو $|A|$ کا جزوی $(x - a)$ ہے۔

نوٹ 7.10

(i) یہ نظریہ بہت مفید ہے جب ہمیں "عوامل" کی شکل میں مقطعہ کی قدر حاصل کرنی ہوگی

(ii) اگر ہم $|A|$ کے لئے b کو a کے عوض بدل دیتے ہیں تو، اس کی قطار یا صف میں سے کوئی دو ایک جیسی ہوجاتی ہیں تو وہ $|A|$ اور اس لئے عوامل کے مطابق $(a - b)$ کا عنصر ہے۔

(iii) اگر قطاریں (صف) درجہ n $(n \geq r)$ کے تعین میں ایک جیسی ہیں، جب ہم $x = a$ ڈالتے ہیں تو $(x - a)^{r-1}$ کا ایک $|A|$ عنصر ہے۔

(iv) ایک مربع میٹرکس یا اس کا مقطعہ، کہا جاتا ہے کہ اگر چکری سمتری شکل میں ہو اگر ہر قطار پہلی قطار سے متغیرات کو تبدیل کرکے حاصل کی جائے۔

(v) اگر مقطعہ چلمک I توازن کی شکل عوامل کی مصنوعات کی m میں ہے اور اگر ڈگری (متبادل کے ذریعے حاصل کردہ) اور معروف وتر عناصر کی مصنوعات کی ڈگری کے درمیان فرق ہے اور اگر

(1) m صفر ہے، پھر مطلوبہ عنصر ایک مستقل k ہے۔

07_11th-Maths-Vol2-Unit7_UM.indd 30 21-02-2023 16:11:49

(2) m ایک ہے، پھر مطلوبہ عنصر ایک مستقل $k(a+b+c)$ اور

(3) m دو ہے، پھر مطلوبہ عنصر ایک مستقل $k(a^2+b^2+c^2)+l\,(ab+bc+ca)$

مثال 7.23

جزوی مسئلہ کا استعمال کرتے ہوئے ثابت کیجئے کہ $\begin{vmatrix} x+1 & 3 & 5 \\ 2 & x+2 & 5 \\ 2 & 3 & x+4 \end{vmatrix} = (x-1)^2(x+9)$

حل

فرض کرو کے $|A| = \begin{vmatrix} x+1 & 3 & 5 \\ 2 & x+2 & 5 \\ 2 & 3 & x+4 \end{vmatrix}$

ڈالنا، $x=1$ ہم نے حاصل کیا $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$

چونکہ تمام قطاریں ایک جیسی ہیں $(x-1)^2$ کا ایک عنصر $|A|$ ہے۔

ڈالنا $x=-9$ ہم نے $|A|$ حاصل کیا $|A| = \begin{vmatrix} -8 & 3 & 5 \\ 2 & -7 & 5 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 0$

اس لئے $|A|$ کا ایک عنصر $(x+9)$ ہے۔ (چونکہ $C_1 \to C_1+C_2+C_3$)

ضرب $(x-1)^2\,(x+9)$ کا ایک عنصر $|A|$ ہے۔ اب مقطعہ x میں ایک مکعبی کثیر الجہتی ہے

چونکہ بقیہ صفر مسلسل 'k' ہونا چاہئے

چونکہ $\begin{vmatrix} x+1 & 3 & 5 \\ 2 & x+2 & 5 \\ 2 & 3 & x+4 \end{vmatrix} = k(x-1)^2(x+9).$

دونوں طرف x^3 ٹرم کے برابر، ہم حاصل کرتے ہیں $k=1$ ۔ اس طرح $|A| = (x-1)^2\,(x+9)$

مثال 7.24

ثابت کیجئے $\begin{vmatrix} 1 & x^2 & x^3 \\ 1 & y^2 & y^3 \\ 1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix} = (x-y)\,(y-z)\,(z-x)\,(xy+yz+zx)$

حل

فرض کرو کے $|A| = \begin{vmatrix} 1 & x^2 & x^3 \\ 1 & y^2 & y^3 \\ 1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix}.$

ڈالنا $x=y$ دیتا ہے $|A| = \begin{vmatrix} 1 & y^2 & y^3 \\ 1 & y^2 & y^3 \\ 1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix} = 0$ (چونکہ $R_1 \equiv R_2$)

چونکہ $(x-y)$ ایک عنصر ہے۔

07_11th-Maths-Vol2-Unit7_UM.indd 31 21-02-2023 16:11:49

دیا گیا عامل x، y اور z میں مدور سڑول شکل میں ہے چونکہ $(y-z)$ اور $(z-x)$ بھی ایک عنصر ہے۔

$(x-y)(y-z)(z-x)$ کے عوامل کی مصنوعات کی ڈگری 3 ہے۔ اور $1\times y^2\times z^3$ کے عوامل کی مصنوعات کی ڈگری 5 ہے۔

لہٰذا $k(x^2+y^2+z^2)+\ell(xy+yz+zx)$ دوسرا عنصر ہے۔

اس طرح $\begin{vmatrix}1 & x^2 & x^3\\ 1 & y^2 & y^3\\ 1 & z^2 & z^3\end{vmatrix} = [k(x^2+y^2+z^2)+\ell(xy+yz+zx)]\times(x-y)(y-z)(z-x)$.

ڈالنا $x=0$، $y=1$ اور $z=2$ ہم نے حاصل کیا

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 8\end{vmatrix} = \big[k(0+1+4)+\ell(0+2+0)\big](-1)(1-2)(2-0)$$

$$(8-4) = [(5k+2\ell)](-1)(-1)(2) \quad \Leftarrow$$

$$(1)\ \ldots \qquad 4 = 10k+4\ell \Rightarrow 5k+2\ell = 2.$$

ڈالنا $x=0$، $y=-1$ اور $z=1$ ہم نے حاصل کیا

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix} = [k(2)+\ell(-1)](1)(-2)(1)$$

$$[(2k-\ell)(-2)] = 2 \quad \Leftarrow$$

$$(2)\ \ldots \qquad 2k-\ell = -1.$$

(1) اور (2) کو حل کرنا، $k=0$، $\ell=1$ ہم نے حاصل کیا

چونکہ $\begin{vmatrix}1 & x^2 & x^3\\ 1 & y^2 & y^3\\ 1 & z^2 & z^3\end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx)$

مثال 7.25

ثابت کرو کہ $|A| = \begin{vmatrix}(q+r)^2 & p^2 & p^2\\ q^2 & (r+p)^2 & q^2\\ r^2 & r^2 & (p+q)^2\end{vmatrix} = 2pqr\ (p+q+r)^3$.

حل

$$|A| = \begin{vmatrix}(q+r)^2 & 0 & 0\\ q^2 & r^2 & q^2\\ r^2 & r^2 & q^2\end{vmatrix} = 0$$ لینا $p=0$ ہم حاصل کیا

چونکہ $(p-0)$ ہم نے حاصل کیا۔ یہ ہے کہ p ایک عنصر ہے۔

$|A|$ جب سے p, q, r میں سائکلک سڈول شکل میں ہے اور اس لئے qاورr بھی عنصر ہیں

ڈالنا $p+q+r=0 \Leftarrow q+r=-p$،

اور $p+q=-r$ جب سے صفوں ایک جیسے ہیں $|A| = \begin{vmatrix} p^2 & p^2 & p^2 \\ q^2 & q^2 & q^2 \\ r^2 & r^2 & r^2 \end{vmatrix} = 0$

چونکہ $(p+q+r)^2$ کا ایک عنصر $|A|$ ہے۔

$pqr\,(p+q+r)^2$ کی حاصل شدہ عنصر کی ڈگری 5 ہے۔ $|A|$ کی ڈگری 6 ہے

چونکہ مطلوبہ عنصر $k\,(p+q+r)$ ہے۔

$$\begin{vmatrix} (q+r)^2 & p^2 & p^2 \\ q^2 & (r+p)^2 & q^2 \\ r^2 & r^2 & (p+q)^2 \end{vmatrix} = k(p+q+r)\,(p+q+r)^2 \times pqr$$

$p=1, q=1, c=1$ لینے سے، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = k(1+1+1)^3\ (1)\ (1)\ (1)\,.$$

$$4(16-1)-1(4-1)+1(1-4)=27k$$

$$60-3-3=27\,k \implies k=2.$$

$$|A| = 2pqr\,(p+q+r)^3.$$

مثال 7.26

ABC ایک مثلث میں اگر $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1+\sin A & 1+\sin B & 1+\sin C \\ \sin A(1+\sin A) & \sin B(1+\sin B) & \sin C(1+\sin C) \end{vmatrix} = 0,$

ہو تو ثابت کرو ΔABC ایک مساوی الساقین مثلث ہے

حل

ڈال $\sin A = \sin B$ کر ہم حاصل کیا

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1+\sin A & 1+\sin A & 1+\sin C \\ \sin A(1+\sin A) & \sin A(1+\sin A) & \sin C(1+\sin C) \end{vmatrix} = 0$$

یہ ہے کہ $\sin A = \sin B$ ڈال کر ہم یہ دیکھتے ہیں، دی گئی مساوات مطمئن ہے

اس طرح $\sin B = \sin C$ اور $\sin C = \sin A$ ڈال کر دیا گیا مساوات مطمئن ہے۔

اس طرح ہمارے پاس $A = B$ یا $B = C$ یا $C = A$ ہے۔ تمام معاملات میں کم از کم دو زاویئے برابر ہیں۔ اس طرح مثلث ایک مساوی الساقین مثلث ہے۔

07_11th-Maths-Vol2-Unit7_UM.indd 33 21-02-2023 16:11:52

مشق 7.3

جزوی مسئلہ کا استعمال کرتے ہوئے درج ذیل مسائل کو حل کریں

(1) ثابت کرو $\begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix} = (x-a)^2(x+2a)$

(2) ثابت کرو $\begin{vmatrix} b+c & a-c & a-b \\ b-c & c+a & b-a \\ c-b & c-a & a+b \end{vmatrix} = 8abc$

(3) حل کیجئے $\begin{vmatrix} x+a & b & c \\ a & x+b & c \\ a & b & x+c \end{vmatrix} = 0$

(4) ثابت کرو $\begin{vmatrix} b+c & a & a^2 \\ c+a & b & b^2 \\ a+b & c & c^2 \end{vmatrix} = (a+b+c)\,(a-b)\,(b-c)\,(c-a)$

(5) حل کیجئے $\begin{vmatrix} 4-x & 4+x & 4+x \\ 4+x & 4-x & 4+x \\ 4+x & 4+x & 4-x \end{vmatrix} = 0$

(6) ثابت کرو $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)$

7.3.4 مقطعہ کے ضرب (Product of Determinants)

دو میٹرکس کو ضرب دیتے ہوئے "قطار بہ صف" قاعدے پر عمل کیا جاسکتا ہے۔ قطاروں اور صفوں کے تبادلے کا عمل مقطعہ والے کی قدر کو متاثر نہیں کرے گا (بذریعہ خصوصیت 1) لہذا ہم دو عاملوں کے ضرب کے لئے درج ذیل طریقۂ کار کو بھی بناسکتے ہیں

(i) صف از قطار ضرب اصول

(ii) صف بہ صف ضرب اصول

(iii) قطار از قطار ضرب اصول

(iv) قطار از صف ضرب اصول

نوٹ 7.11

(i) اگر A اور B ایک ہی ترتیب کے مربع میٹرکس ہیں تو $|AB| = |A|\,|B|$ رکھتا ہے

(ii) میٹرکس میں، اگر چہ $AB \neq BA$ عام طور پر ہمارے پاس ہمیشہ $|AB| = |BA|$ ہوتا ہے

مثال 7.27

تصدیق کریں کہ $|AB| = |A|\,|B|$ اگر $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

حل

$$AB = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\theta+\sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta-\sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta-\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta+\sin^2\theta \end{bmatrix}$$

(1) ... $$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |AB| = 1.$$

$$|A| = \cos^2\theta+\sin^2\theta = 1.$$

$$|B| = \cos^2\theta+\sin^2\theta = 1.$$

(2) ... $$|A|\,|B| = 1.$$

(1) اور (2) سے، $|AB| = |A|\,|B|$

مثال 7.28

$$\begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ac & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix}$$ ثابت کرو،

حل

$$\text{LHS} = \begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}.$$

$$= \begin{vmatrix} 0+c^2+b^2 & 0+0+ab & 0+ac+0 \\ 0+0+ab & c^2+0+a^2 & bc+0+0 \\ 0+ac+0 & bc+0+0 & b^2+a^2+0 \end{vmatrix}.$$

$$= \begin{vmatrix} c^2+b^2 & ab & ac \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ac & bc & b^2+a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ac & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix} = \text{RHS}.$$

مثال 7.29

$$\begin{vmatrix} 2bc-a^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 2ca-b^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab-c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}^2$$ ثابت کرو،

حل

$$\text{RHS} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}.$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \times (-1) \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \quad [R_2 \leftrightarrow R_3 \text{ مقطعہ } 2^{nd} \text{ میں}]$$

07_11th-Maths-Vol2-Unit7_UM.indd 35 21-02-2023 16:11:53

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}.$$

صف از قطار بندی کا طریقہ

$$= \begin{vmatrix} -a^2+bc+cb & -ab+ab+c^2 & -ac+b^2+ac \\ -ab+c^2+ab & -b^2+ac+ac & -bc+bc+a^2 \\ -ac+ac+b^2 & -bc+a^2+bc & -c^2+ab+ab \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2bc-a^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 2ca-b^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab-c^2 \end{vmatrix} = \text{RHS}.$$

مثال 7.30

ثابت کرو $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1-2x^2 & -x^2 & -x^2 \\ -x^2 & -1 & x^2-2x \\ -x^2 & x^2-2x & -1 \end{vmatrix}$.

حل

$$\text{LHS} = \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix}.$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix} \times (-1)\,(-1) \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ -x & -1 & -x \\ -x & -x & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ -x & -1 & -x \\ -x & -x & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-x^2-x^2 & x-x-x^2 & x-x^2-x \\ x-x-x^2 & x^2-1-x^2 & x^2-x-x \\ x-x^2-x & x^2-x-x & x^2-x^2-1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-2x^2 & -x^2 & -x^2 \\ -x^2 & -1 & x^2-2x \\ -x^2 & x^2-2x & -1 \end{vmatrix}.$$

$$= \text{R.H.S.}$$

7.3.5 مقطعہ اور ہم ضربی کا مقطعہ کے درمیانی تعلق
(Relation between a Determinant and its Cofactor Determinant)

فرض کرو کے $|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

فرض کرو کے $|A|$ میں a_1, b_1, c_1 کا ہم ضربی $A_1, B_1, C_1, \ldots$ ہے۔

اس لئے ہم ضربی کا مقطعہ ہ ے $|A| = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1$ $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$

اس طرح $|A| = a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3$ اور $|A| = a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2$

نوٹ کریں کہ کسی بھی قطار (یا صف) کے عناصر کی ان کی متعلقہ ہم ضربی کے ساتھ پید اہونے والی ر قم کا تعین عامل کی قیمت ہے۔

$$a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2 = -a_1\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_1\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - c_1\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$ ب ا

$$= -a_1(b_1c_3 - b_3c_1) + b_1(a_1c_3 - a_3c_1) - c_1(a_1b_3 - a_3b_1)$$

$$= a_1b_1c_3 + a_1b_3c_1 + a_1b_1c_3 - a_3b_1c_1 - a_1b_3c_1 + a_3b_1c_1 = 0$$

اسی طرح ہم نے حاصل کیا

$$a_1A_3 + b_1B_3 + c_1C_3 = 0 \;;\; a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1 = 0 \;;$$

$$a_2A_3 + b_2B_3 + c_2C_3 = 0 \;;\; a_3A_1 + b_3B_1 + c_3C_1 = 0 \text{ اور } a_3A_2 + b_3B_2 + c_3C_2 = 0.$$

نوٹ 7.12

اگر کسی قطار (یا صف) کے عناصر کو کسی دوسری صف (یا قطار) کے متعلقہ ہم ضربی سے ضرب دیا جائے تو ان کے ر قم صفر

مثال 7.31

اگر a_1, b_1, c_1 کا ہم ضربی بل ترتیب A_1, B_1, C_1 ہے، $i = 1$ سے 3

$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$، ثابت کرو $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = |A|^2$.

حل

ضرب پر غور کریں $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1 & a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2 & a_1A_3 + b_1B_3 + c_1C_3 \\ a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1 & a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2 & a_2A_3 + b_2B_3 + c_2C_3 \\ a_3A_1 + b_3B_1 + c_3C_1 & a_3A_2 + b_3B_2 + c_3C_2 & a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{vmatrix} = |A|^3$$

یعنی، $|A| \times \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = |A|^3$.

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = |A|^2 \;.$$

07_11th-Maths-Vol2-Unit7_UM.indd 37 21-02-2023 16:11:53

7.3.6 مثلث کا رقبہ (Area of a Triangle)

ہم جانتے ہیں کہ ایک مثلث کا رقبہ جس کی راس (x_1, y_1)، (x_2, y_2) اور (x_3, y_3) ہے مطلق قیمت کے برابر ہے

$$\frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3).$$

یہ اظہار ایک متعین کی شکل میں مطلق قیمت کے طور پر لکھا جاسکتا ہے

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

مثال 7.32

اگر مثلث کا رقبہ جن کے راس کے ساتھ $(-3, 0)$، $(3, 0)$ اور $(0, k)$ 9 مربع یونٹ ہے، k کی قیمت معلوم کیجئے

مثلث کا رقبہ = کی مطلق قیمت $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$

حل

$$9 = \left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix}\right| = \left|\frac{1}{2}(-k)(-3-3)\right|$$

$\Leftarrow |k| = 3$ اور لہٰذا $k = \pm 3$۔

نوٹ 7.13

تین نقاط سے بننے والے مثلث کا رقبہ صفر ہے اگر اور صرف، اس صورت میں جب تین نقاط کالینیئر ہوں۔ نیز، ہم قارئین کو یاد دلاتے ہیں کہ مقطعہ منفی ہوسکتا ہے جب کہ علاقہ ہمیشہ غیر منفی ہوتا ہے۔

مثال 7.33

مثلث کا رقبہ معلوم کیجئے جس کے راسیں $(-2, -3)$، $(3, 2)$ اور $(-1, -8)$

حل

مثلث کا رقبہ $= \left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|$.

$$\left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -8 & 1 \end{vmatrix}\right| = \left|\frac{1}{2}(-20+12-22)\right| = |-15| = 15$$

اور چنانچہ مثلث کا رقبہ 15 مربع اکائیاں۔

مثال 7.34

بتائیے کہ ذیل کے نقط $(a, b+c)$، $(b, c+a)$ اور $(c, a+b)$ ہم خط ہیں۔

07_11th-Maths-Vol2-Unit7_UM.indd 38 21-02-2023 16:11:53

حل

$|A| = \begin{vmatrix} a & b+c & 1 \\ b & c+a & 1 \\ c & a+b & 1 \end{vmatrix} = 0$ دیے گئے نکات کو خطی ثابت کرنے کے لئے ثابت کرنا کافی ہے۔

کا اطلاق، ہم اس کا نتیجہ نکالتے ہیں $C_1 \to C_1 + C_2$

$$|A| = \begin{vmatrix} a+b+c & b+c & 1 \\ a+b+c & c+a & 1 \\ a+b+c & a+b & 1 \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b+c & 1 \\ 1 & c+a & 1 \\ 1 & a+b & 1 \end{vmatrix} = (a+b+c)\times 0 = 0$$

جو ظاہر کرتا ہے کہ دیے گئے نقاط کالینئر ہیں

7.3.7 واحد اور غیر واحد میٹرکس (Singular and non-singular Matrices)

تعریف 7.21

ت ایک مربع میٹرکس A کو واحد کہا جاتا ہے اگر $|A| = 0$ ایک مربع میٹرکس A کو غیر واحد کہا جاتا ہے۔ اگر $|A| \neq 0$

مثال کے طور پر، $A = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ایک واحد میٹرکس ہے، جب سے

$$|A| = 3(1-1) - 8(-4+4) + 1(-4+4) = 0.$$

اگر $B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -3 & 0 & 5 \\ 5 & 4 & -7 \end{bmatrix}$ ہو تو $|B| = 2(0-20) - (-3)(-42-4) + 5(30-0) = -28 \neq 0$

اس طرح B ایک غیر واحد میٹرکس ہے

نوٹ 7.14

اگر A اور B غیر واحد میٹرکس اسی ترتیب کے ہو تو AB اور BA بھی غیر واحد میٹرکس ہیں کیونکہ $|AB| = |A|\,|B| = |BA|$

مشق 7.4

1۔ مثلث کا رقبہ معلوم کیجئے جن کی راسیں (0,0)، (1,2) اور (4,3) ہیں۔

2۔ اگر $(k,2)$، $(2,4)$ اور $(3,2)$ مثلث کے راسیں ہیں جن کے رقبہ 4 مربع اکائی ہو تو k کی قیمت طے کریں۔

3۔ واحد اور غیر واحد میٹرکس کی شناخت کریں

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 0 & a-b & k \\ b-a & 0 & 5 \\ -k & -5 & 0 \end{bmatrix}$

07_11th-Maths-Vol2-Unit7_UM.indd 39 21-02-2023 16:11:53

4۔ a اور b کے قیمت طے کریں تاکہ مندرجۂ ذیل میٹرکس واحد ہوں ۔

$$A=\begin{bmatrix}7 & 3\\ -2 & a\end{bmatrix}\quad \text{(i)} \qquad B=\begin{bmatrix}b-1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 4\end{bmatrix}\quad \text{(ii)}$$

5۔ اگر $\cos 2\theta = 0$ ہو تو $\begin{vmatrix}0 & \cos\theta & \sin\theta\\ \cos\theta & \sin\theta & 0\\ \sin\theta & 0 & \cos\theta\end{vmatrix}^2$ معلوم کریں۔

6۔ ضرب کی قیمت معلوم کیجئے $\begin{vmatrix}\log_3 64 & \log_4 3\\ \log_3 8 & \log_4 9\end{vmatrix} \times \begin{vmatrix}\log_2 3 & \log_8 3\\ \log_3 4 & \log_3 4\end{vmatrix}$



مشق 7.5

کثیر انتخابی سوالات سے مناسب جواب منتخب کیجئے

(1) اگر $a_{ij}=\frac{1}{2}(3i-2j)$ اور $A=[a_{ij}]_{2\times 2}$ ہے

$\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 2\\ -\frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}$ (1) $\quad \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ (2) $\quad \begin{bmatrix}2 & 2\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ (3) $\quad \begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ (4)

(2) میٹرکس x کیا ہونا چاہئے، اگر $2X+\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 8\\ 7 & 2\end{bmatrix}$ ؟

$\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ (1) $\quad \begin{bmatrix}1 & -3\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ (2) $\quad \begin{bmatrix}2 & 6\\ 4 & -2\end{bmatrix}$ (3) $\quad \begin{bmatrix}2 & -6\\ 4 & -2\end{bmatrix}$ (4)

(3) ذیل میں سے کون سا صحیح نہیں ہے $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$

(1) اسکیلر میٹرکس (2) اوپری سہ رخی میٹرکس

(3) وتر میٹرکس (4) کم سہ رخی میٹرکس

(4) اگر A اور B دو میٹرکس اس طرح کہ $A+B$ اور AB دونوں کی تعریف کی گئی ہے

(1) A اور B دو میٹرکس ہیں جو ضروری نہیں کہ ایک ہی د رجہ کے ہوں

(2) A اور B ایک ہی درجہ کے مربع میٹرکس

(3) قطار وں A کی تعداد اور صفوں B کی تعداد مساوی ہیں

(4) $A=B$

(5) اگر $A=\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ -1 & -\lambda\end{bmatrix}$ ہو تو $A^2=O$, λ کی کس قیمت میں ہوگا؟

0 (1) $\quad \pm 1$ (2) $\quad -1$ (3) $\quad 1$ (4)

07_11th-Maths-Vol2-Unit7_UM.indd 40 21-02-2023 16:11:54

(6) اگر $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}a & 1\\ b & -1\end{bmatrix}$ اور $(A+B)^2=A^2+B^2$ ہو تو a اور b کے قیمت ہے

(1) $a=4,\ b=1$ (2) $a=1,\ b=4$ (3) $a=0,\ b=4$ (4) $a=2,\ b=4$

(7) اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ a & 2 & b\end{bmatrix}$ ایک میٹرکس ہے جو مساوات $AA^T=9I$ کو کی شرط پوری کرتا ہے جہاں I ایک 3×3 تماثل میٹرکس ہو تو ترتیب وار جوڑی (a,b) کے برابر ہے

(1) $(2,-1)$ (2) $(-2,1)$ (3) $(2,1)$ (4) $(-2,-1)$

(8) اگر A ایک مربع میٹرکس ہو تو ذیل میں کونسا سڑول نہیں ہے؟

(1) $A+A^T$ (2) AA^T (3) A^TA (4) $A-A^T$

(9) اگر A اور B، D درجہ n کے سڑول میٹرکس ہیں جہاں $(A\neq B)$ ہو تو

(1) $A+B$ ایک سکیو سڑول (2) $A+B$ ایک سڑول

(3) $A+B$ ایک وتر میٹرکس (4) $A+B$ ایک صفر میٹرکس

(10) اگر $A=\begin{bmatrix}a & x\\ y & a\end{bmatrix}$ اور اگر $xy=1$ ہو تو $\det(A\,A^T)$ مساوی ہیں

(1) $(a-1)^2$ (2) $(a^2+1)^2$ (3) a^2-1 (4) $(a^2-1)^2$

(11) x کی قیمت جس کے لئے میٹرکس $A=\begin{bmatrix}e^{x-2} & e^{7+x}\\ e^{2+x} & e^{2x+3}\end{bmatrix}$ واحد ہے

(1) 9 (2) 8 (3) 7 (4) 6

(12) اگر نقطہ $(x,-2)$، $(5,2)$، $(8,8)$ ہم خطی ہو تو x کی قیمت

(1) -3 (2) $\frac{1}{3}$ (3) 1 (4) 3

(13) اگر $\begin{vmatrix}2a & x_1 & y_1\\ 2b & x_2 & y_2\\ 2c & x_3 & y_3\end{vmatrix}=\frac{abc}{2}\neq 0$ ہو و مثلث کا رقبہ بتائیے جس کے راسیں $\left(\frac{x_1}{a},\frac{y_1}{a}\right)$، $\left(\frac{x_2}{b},\frac{y_2}{b}\right)$، $\left(\frac{x_3}{c},\frac{y_3}{c}\right)$

(1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{1}{4}abc$ (3) $\frac{1}{8}$ (4) $\frac{1}{8}abc$

(14) اگر مربع میٹرکس $\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & -\alpha\end{bmatrix}$ درجہ 2 کے اکائی میٹرکس ہو تو α، β اور γ رشتہ مطمئن کرنا چاہئے

(1) $1+\alpha^2+\beta\gamma=0$ (2) $1-\alpha^2-\beta\gamma=0$

(3) $1-\alpha^2+\beta\gamma=0$ (4) $1+\alpha^2-\beta\gamma=0$

07_11th-Maths-Vol2-Unit7_UM.indd 41 21-02-2023 16:11:54

(15) اگر $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix}$ ہو تو $\begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ kx & ky & kz \\ kp & kq & kr \end{vmatrix}$

Δ (1) $\quad k\Delta$ (2) $\quad 3k\Delta$ (3) $\quad k^3\Delta$ (4)

(16) مساوات کی جذر $\begin{vmatrix} 3-x & -6 & 3 \\ -6 & 3-x & 3 \\ 3 & 3 & -6-x \end{vmatrix} = 0$ ہے

6 (1) $\quad 3$ (2) $\quad 0$ (3) $\quad -6$ (4)

(17) $A = \begin{bmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{bmatrix}$ کے مقطعہ کی قیمت

$-2abc$ (1) $\quad abc$ (2) $\quad 0$ (3) $\quad a^2+b^2+c^2$ (4)

(18) اگر x_1، x_2، x_3 کے ساتھ ساتھ y_1، y_2، y_3 ہندسی سلسلہ میں ایک ہی عام تناسب کے ساتھ تو اس کے نقاط (x_1, y_1)، (x_2, y_2)، (x_3, y_3) ہیں۔

1۔ متوازی مثلث کی راسیں

2۔ دائیں مثلث قائمۃالزاویہ کے راسیں

3۔ مثلث قائمۃالزاویہ مثلث مساوی الساقین کے راسیں

4۔ ہم خط

(19) اگر $\lfloor . \rfloor$ سب سے بڑا عدد ظاہر کرتا ہے جو زیر غور حقیقی اعداد سے کم یا اس کے برابر ہے اور $-1 \le x < 0$، $0 \le y < 1$، $1 \le z < 2$ ہو تو مقطعہ کی قیمت $\begin{vmatrix} \lfloor x \rfloor + 1 & \lfloor y \rfloor & \lfloor z \rfloor \\ \lfloor x \rfloor & \lfloor y \rfloor + 1 & \lfloor z \rfloor \\ \lfloor x \rfloor & \lfloor y \rfloor & \lfloor z \rfloor + 1 \end{vmatrix}$

$\lfloor z \rfloor$ (1) $\quad \lfloor y \rfloor$ (2) $\quad \lfloor x \rfloor$ (3) $\quad \lfloor x \rfloor + 1$ (4)

(20) اگر $a \ne b$، b، $c \ne 0$ $\begin{vmatrix} a & 2b & 2c \\ 3 & b & c \\ 4 & a & b \end{vmatrix} = 0$ کو مطمئن کرنا ہو تو $abc =$ ؟

$a+b+c$ (1) $\quad 0$ (2) $\quad b^3$ (3) $\quad ab+bc$ (4)

(21) اگر $A = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ اور $B = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 8 \end{vmatrix}$

$B = 4A$ (1) $\quad B = -4A$ (2) $\quad B = -A$ (3) $\quad B = 6A$ (4)

07_11th-Maths-Vol2-Unit7_UM.indd 42 21-02-2023 16:11:55

(22) اگر A ایک n درجہ سکیو سڑول اور C ایک درجہ $n \times 1$ کا قطار میٹرکس ہو تو $C^T AC$ ہے

(1) درجہ n کا ایک تماثل میٹرکس (2) درجہ 1 کا ایک تماثل میٹرکس

(3) درجہ 1 کا صفر میٹرکس (4) درجہ 2 کاایک تماثل میٹرکس

(23) A میٹرکس جو مساوات $\begin{bmatrix}1 & 3\\0 & 1\end{bmatrix}A=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & -1\end{bmatrix}$ کو مطمئن کرتا ہے

(1) $\begin{bmatrix}1 & 4\\-1 & 0\end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix}1 & -4\\1 & 0\end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix}1 & 4\\0 & -1\end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix}1 & -4\\1 & 1\end{bmatrix}$

(24) اگر $A+I=\begin{bmatrix}3 & -2\\4 & 1\end{bmatrix}$ ہو تو $(A+I)(A-I)$ کا مساوی

(1) $\begin{bmatrix}-5 & -4\\8 & -9\end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix}-5 & 4\\-8 & 9\end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix}5 & 4\\8 & 9\end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix}-5 & -4\\-8 & -9\end{bmatrix}$

(25) اگر A اور B ایک ہی درجہ کے دو سڑول میٹرکس ہو تو ذیل میں کون سا بیان صحیح نہیں ہیں؟

(1) $A+B$ ایک سڑول میٹرکس (2) AB ایک سڑول میٹرکس

(3) $AB=(BA)^T$ (4) $A^TB=AB^T$

خلاصہ (SUMMARY)

اس باب میں ہم نے یہ معلومات حاصل کی ہیں

- اعداد کی $\mathbb{R}$ مستطیلی ترتیب جو صفوں اور قطاروں میں قوسین کے اندر بند ہے $\mathbb{R}$ میٹرکس کہلاتے ہیں
- ایک میٹرکس میں m صفیں اور n قطاریں ہوں تو، اس میٹرکس کا درجہ $m \times n$ ہے۔
- ایک میٹرکس $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ کہا جاتا ہے۔

مربع میٹرکس اگر $m = n$

صف میٹرکس اگر $m = 1$

قطار میٹرکس اگر $n = 1$

صفر میٹرکس اگر $a_{ij}=0 \forall i$ اور j

وتر میٹرکس اگر $m = n$ اور $a_{ij} = 0 \forall i \neq j$ اور

اسکیلر میٹرکس اگر $m = n$ اور $a_{ij} = 0 \forall i \neq j$ اور $a_{ii} = \lambda$ اور i

اکائی یا تماثل میٹرکس اگر $m = n$ اور $a_{ij} = 0$ اور $i \neq j$ اور $a_{ii} = 1 \forall i$

اوپری سہ رخی میٹرکس اگر $m = n$ اور $a_{ij} = 0 \ \forall \ i > j$

نچلی سہ رخی میٹرکس اگر $m = n$ اور $a_{ij} = 0 \ \forall \ i < j$

- میٹرکس $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ اور $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ مساوی کہلاتا ہے اگر i اور j
- اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ اور $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ ہو تو $A+B=[c_{ij}]_{m\times n}$ جہاں $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$
- اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ اور λ ایک اسکیلر ہو تو $\lambda A=[\lambda a_{ij}]_{m\times n}$
- $-A=(-1)A$

07_11th-Maths-Vol2-Unit7_UM.indd 43 21-02-2023 16:12:04

- $A + B = B + A$
- $A - B = A + (-1)B$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$ جہاں A، B اور C ایک ہی درجہ کے ہیں
- $A(BC) = (AB)C$ (i) $\quad A(B+C) = AB+AC$ (ii) $\quad (A+B)C = AC+BC$ (iii)
- میٹرکس کا ٹرانسپوز (ٹرانسپوز میٹرکس): میٹرکس A ٹرانسپوز و میٹرکس A^T کہ صفوں اور قطاروں کے رد و بدل سے حاصل ہوتا ہے اور اس کو (Aٹراسپوز یا A^T ٹرانسپوز سے تعبیر کیا جاتا ہے۔
$(AB)^T = B^T A^T$ (iv) ، $(A+B)^T = A^T + B^T$ (iii) ، $(kA)^T = kA^T$ (ii) ، $(A^T)^T = A$ (i)
- ایک مربع میٹرکس A کہا جاتا ہے
(i) $A^T = A$ اگر سڈول اور (ii) $A^T = -A$ اگر سکیو سڈول
- کوئی مربع میٹرکس ایک سڑول میٹرکس اور سکیو سڑول میٹرکس کے مجموعہ کے طور پر اظہار کیا جاسکتا ہے
- سکیو سمسیٹر کس کے تمام وتر کے عناصر صفر ہیں۔
- کوئی مربع میٹرکس A جے لئے $A + A^T$ سڈول میٹرکس اور $A - A^T$ ایک سکیو سڈول میٹرکس ہے، اور $A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$
- مقطعہ کی وضاحت صرف مربع میٹرکس کے لئے ہوتی ہے
- $|A^T| = |A|$
- $|AB| = |A||B|$ جہاں A اور B ایک ہی درجہ کی مربع میٹرکس ہیں
- اگر $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ہو تو $|kA| = k^n |A|$، جہاں k ایک اسکیلر ہے۔
- مربع میٹرکس A کا مقطعہ کسی بھی صف کے عناصر کی مصنوعات کا مجموعہ ہے یا (قطار) اس کے متعلقہ ہم ضربی کے ساتھ مثال کے طور پر $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$
- اگر کسی قطار یا صف کے عناصر کو کسید وسری قطار یا صف کے فیکٹر سے ضرب دی جائے پھر ان کی رقم صفر ہے۔مثال کے طور پر $a_{11}A_{13} + a_{12}A_{23} + a_{13}A_{33} = 0$
- اگر اس کے تمام قطاریں اس کے صف سے بدل جائیں تو مقطعہ قدر میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی۔
- اگر قطار یا صف کے تمام عناصر صفر ہیں تو مقطعہ صفر ہے۔
- اگر کسی عامل کی کوئی دو قطاریں / صف آپس میں بدل جاتے ہیں، تو مقطعہ نشان میں تبدیل ہوجاتے ہیں لیکن اس کی مطلق قیمت غیر تبدیل ہوتی رہتی ہے۔
- اگر میٹرکس کی دو قطاریں (صفیں) یکساں ہوں تو اس کا مقطعہ صفر ہے۔
- اگر قطار یا صف کے ہر عنصر کو مسلسل k سے ضرب دیا جاتا ہے،تو مقطعہ کو ضرب مل جاتی ہے۔
- اگر کسی بھی قطار (صف) میں ہر عنصر r شرائط کا مجموعہ ہے، تو مقطعہ کو r عزم کے مجموعہ کے طور پر ظاہر کیا جاسکتا ہے۔
- فارم کے قطار (R_i) آپریشن کے تحت ایک مقطعہ غیر تبدیل شدہ رہتا ہے۔ $R_i + \alpha R_j + \beta R_k (j,k \neq i)$ (یا) قطار (C_i) آپریشن کے تحت $C_i + \alpha C_j + \beta C_k (j,k \neq i)$ جہاں α, β ایک اسکیلر ہیں
- **فیکٹر تھیورم (Factor theorem)** : اگر $|A|$ کا ہر صفر x میں ایک کثیر المثال ہے اور اگر $|A|$ کے لئے غائب ہوجاتا ہے $x = a$، پھر $x - a$ ایک عنصر ہے $|A|$ کا
- مثلث کا رقبہ جن کی راسیں (x_1, y_1)، (x_2, y_2)، (x_3, y_3) مطلق قیمت کی طرف سے دیا جاتا ہے $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ اگر رقبہ صفر ہو تو 3 نقطے ہم خط (Collinear) ہیں۔
- ایک مربع میٹرکس A جو واحد کہلاتا ہے۔ اگر $|A| = 0$ اور غیر واحد کہلاتا ہے اگر $|A| \neq 0$

07_11th-Maths-Vol2-Unit7_UM.indd 44 21-02-2023 16:12:12

ICT CORNER 7(a)

میٹرکس اور مقطعہ



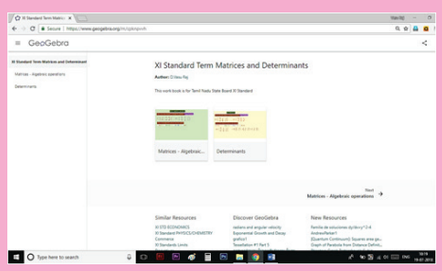
متوقع نتائج

مرحلہ: 1

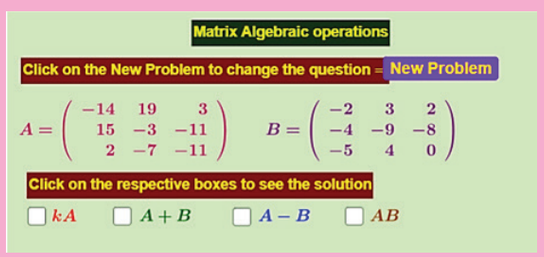
براؤزر کھولیں اور دئے گئے URL لنک ٹیپ کیجئے (یا) QR کوڈ کو اسکین کیجئے۔" میٹرکس اور مقطہ" جیوجبرا (GeoGebra) نامی ورک بک کھلے گا۔ اس میں آپ کے سبق سے متعلق کی ورک شیٹیں ہیں۔

مرحلہ:2

ورک شٹ "میٹرکس-الجبرائی اعمال" کو منتخب کریں دیے گئے اعمال پر کام کریں اور متعلقہ جوابات کی تصدیق کے لیے چیک ڈبے کو منتخب کریں۔



مرحلہ: 1



مرحلہ:2

Browse in the link:

Matrices and Determinants: https://ggbm.at/cpknpvvh

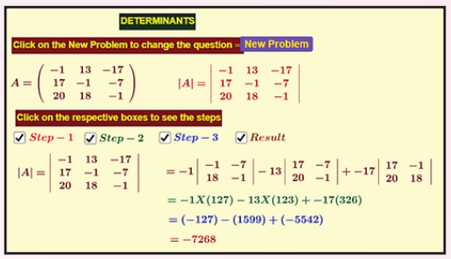
MC601

07_11th-Maths-Vol2-Unit7_UM.indd 45 21-02-2023 16:12:13

ICT CORNER 7(b)

میٹرکس اور مقطعہ

متوقع نتائج

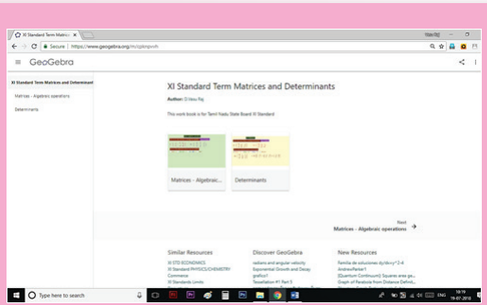


مرحلہ: 1

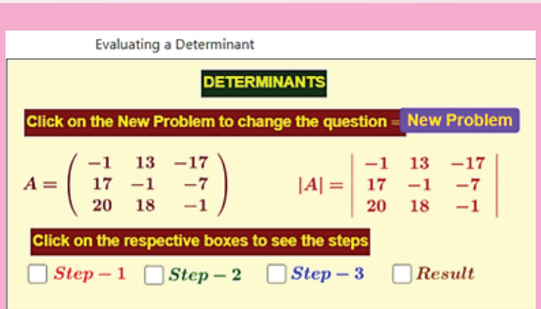
براؤزر کھولیں اور دئے گئے URLلنک ٹیپ کیجئے (یا) QR کوڈ کو اسکین کیجئے۔"میٹرکس اور مقطہ"
جیوجبرا (GeoGebra) نامی ورک بک کھلے گا۔ اس میں آپ کے سبق سے متعلق کی ورک شیٹیں ہیں۔

مرحلہ:2

ورک شیٹ "مقطعہ" کو منتخب کریں، دئے گئے میٹرکس کے لئے مقطعہ کا اندازہ کریں اور مراحل کی تصدیق کے لئے چیک ڈبے کا منتخب کریں۔
نیاسوال حاصل کرنے کے لئے « نیا مسئلہ » پر کلک کریں۔



مرحلہ: 1



مرحلہ:2

Browse in the link:

Matrices and Determinants: https://ggbm.at/cpknpvvh

07_11th-Maths-Vol2-Unit7_UM.indd 46 21-02-2023 16:12:14

باب 8

سمتیہ الجبراء
(Vector Algebra)

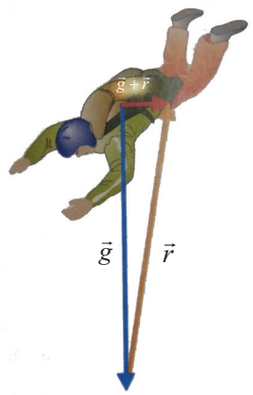
"زمین پر انسان سے بڑھکر کر کوئی چیز نہیں
"انسان کے لئے دماغ سے بڑھ کر کوئی چیز نہیں.

ہیملٹن

8.1 تعارف (Introduction)



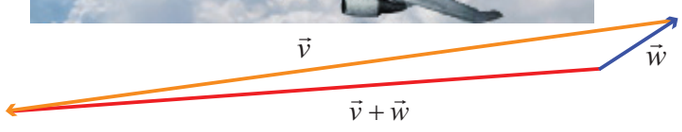
ہوائی جہاز چلانے والے پائلٹ کو ہوائی جہاز کا راستہ، اس کے سرخی، ہوا کی رفتار اور زمینی رفتار کے بارے میں جاننا ضروری ہے۔ ہوائی جہاز براہ راست اپنی منزل کی طرف جانے کی ضرورت ہو تو، ہوائی جہاز کو ایک زاویہ پر ہوا میں آگے بڑھنا چاہئے تاکہ ہوا بالکل برعکس ہو۔ اگر کوئی رہنمائی کمپیوٹر (Navigation Computer) دستیاب ہو تو اس طرح کے حساب کو جلد اور درست کیا جاسکتا ہے۔ اگر رہنمائی کمپیوٹر کی قابل رسائی نہ ہو تو، پائلٹ کو سمتیہ کی علم کے ساتھ ایک کیلکولیٹر کے ذریعے پنسل اور کاغذ پر انحصار کرنا پڑتا ہے۔ لہذا سمتیہ اور ان کے اعمال کے تفہیم کی بہت اہمیت ہوتی ہے۔



فضائی چھلانگ کے دوران کسی خاص موڑ پر دو اہم قوتیں عمل میں آتے ہیں۔ پہلی قوت تو قوت جاذبہ $(\vec{g})$ کے عمودی نیچے کی جانب اور دوسری قوت کی مزاحمت $(\vec{r})$ کو بڑھاتے ہوئے کسی سمت پر عمل کرے گی۔ چنانچہ اسکائی ڈائیور (Sky diver) پر کام کرنے والی کل قوت کیا ہے؟ اس کا جواب $\vec{g}+\vec{r}$ ہوگا۔ (کیسے؟)

اگر ہوائی جہاز کی رفتار $\vec{v}$ اور ہوا کی رفتار $\vec{w}$ کے طور پر لی جائے تو ہوائی جہاز کی سمتی رفتار کیا ہے؟ اس کا جواب $\vec{v}+\vec{w}$ ہوگا۔ ہوائی جہاز کا سربراہ کس سمت پر ہونا چاہئے تاکہ طیارے کو مغرب کی طرف اڑایا جاسکے؟







یہ آلہ زمین، ہوا اور پانی کی سفر کی رہنمائی کے لئے بنائی گئی ہے۔ یہ آلہ سمتیہ کی **(global positioning system** (GPS)) سرگرمیوں کے ذریعہ کام کرتا ہے۔

08_11th-Maths-Vol2-Unit8_UM.indd 47 21-02-2023 16:23:40

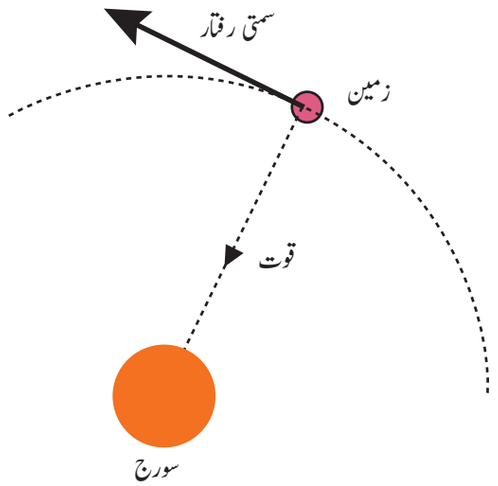


ہیملٹن
(1805 - 1865)

سمتیہ کے تصور کی ترقی جرمن ریاضی دان H.G. گراسمن (**H.G. Grassmann** (1809 - 1877)) اور آئرش ریاضیہ دان W.R. ہیملٹن (**W.R. Hamilton** (1805 – 1865)) سے متاثر ہوا جب کہ ہیملٹن نے اعلیٰ عہدوں پر ہوتے ہوے بھی وہ ایک سکنڈری اسکول کے استاد ہی رہے۔

امریکی ریاضی دان J.B گبس (**J.B. Gibbs** (1839 - 1903)) اور انگلینڈ کے ریاضی دان Q. ہیوی سائیڈ (**Q.Heaviside** (1850 - 1925)) دونوں نے چوتھائی احصا (Quaternion Calculus) اور کارتیسی علم ہندسہ (Cartesian Geometry) کی خاص خصوصیات کو متحد کرکے بڑے پیمانے پر کئے۔ اسی سے سمتیہ الجبراء اور سمتیہ کا تجربہ کا نظریہ موجودہ استعمال میں آیا۔ جو پہلے پہل گبس (Gibbs) ریاضی دان ایل یونیورسٹی میں اپنے طالب علموں کو لیکچر دیا اسی کی انکشاف ہے۔ کلفورڈ (**Clifford** (1845 – 1879)) اپنی کتاب حرکیات کے عناصر (**Elements of Dynamics** (1878)) میں د و چوتھائی کے ضرب کو مختلف سمتیہ کے ضرب کے طور پر، یعنی عددیہ ضرب اور سمتیہ ضرب کی شکل میں بتایا۔ لفظ سمتیہ (Vector) کی تعریف ہیملٹن نے لاطینی لفظ سے کی تھی جس کا مطلب ہے 'لے جانا' (**To carry**) اور گراسمن کی نظریاتی توسیع کے ذریعہ سمتیہ کا تصور تیار ہوا۔





جلد ہی احساس ہوگیا کہ علم ہندسہ اور طبیعیات میں بہت سارے نظریات کے نتیجے کے مطالعہ کیلے سمتیہ ایک مثالی آلہ ہوگا۔ لاگو ریاضی (Applied Mathematics) اور طبعیات میں سمتیہ کا نظریہ ایک جدید زبان ہے اور وہ ریاضیاتی دلچسپی میں اپنی اپنی حیثیت برقرار رکھتے ہیں۔

سیکھنے کے مقاصد (Learning Objectives)

اس باب کے اختتام پر طلباء ذیل کو جاننے کے قابل ہوں گے

- علم ہندسہ اور طبیعیات کے مسائل کے مطالعہ کرنے کو سمتیہ کو ایک آلہ کی طرح استعمال کرنا
- عددیہ کو سمتیہ سے شناخت کریں
- مختلف قسم کے سمتیہ اور سمتیہ الجبراء کو سمجھیں گے۔
- علم ہندسہ سے سمتیہ کے دو ابعادی اور تین ابعادی شکلوں کو سمجھیں گے۔
- سمتیہ الجبراء میں میٹرکس (Matrix) کے مسائل کے استعمال کی تعریف کریں گے
- ایک منفرد خصوصیات کے طور پر بالترتیب عددیہ ضرب اور سمتیہ ضرب کے قیمت کو عددیہ اور سمتیہ کا تصور کر سکیں گے۔

08_11th-Maths-Vol2-Unit8_UM.indd 48 21-02-2023 16:23:41

8.2 عددیے اور سمتیے (Scalars and Vectors)

تعریف 8.1

عددیہ ایک مقدار ہے جو اس کی قدر سے تعین کیا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر فاصلہ، لمبائی، رفتار، درجۂ حرارت، وولٹیج، کمیت، دباؤ، کام اور کثافت، وغیرہ۔

تعریف 8.2

سمتیہ ایک مقدار ہے جو اس کی قدر اور اس کی سمت دونوں سے متعین ہوتی ہے۔ لہذا یہ ایک سمت دار قطاع خط ہے۔

مثال کے طور پر قوت، ہٹاؤ اور رفتار (جو حرکت کی رفتار اور سمت بتاتا ہے) یہ سب سمتیہ ہیں۔

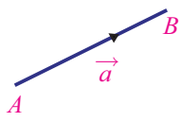
ہم سمتیہ کو تیر کے ساتھ انگریزی کے چھوٹے حروفوں میں ظاہر کرتے ہیں۔ دو ابعادی سمتیہ کو $\mathbb{R}^2$ میں ایک سمت دار قطاع خط اور تین ابعادی سمتیہ کو $\mathbb{R}^3$ میں ایک سمت دار قطع خط کی شکل ظاہر کرتے ہیں۔

8.3 سمتیہ کی نمائندگی اور سمتیوں کی قسمیں (Representation of a vector and types of vectors)

سمتیہ میں دم اور نوک ہوتا ہے۔ تصویر 8.1 پر غور کریں۔

تعریف 8.3

نقطہ A جہاں دم کا حصہ شروع ہوتا ہے وہ ابتدائی نقطہ اور نوک نقطہ B جہاں اس کا آخر $\vec{a}$ ہوتا ہے وہ آخری نقطہ کہلاتا ہے۔ سمتیہ کا ابتدائی نقطہ ہی سمتیہ کو مبدا نقطہ کی طرح لیا جاتا ہے۔



8.1 خاکہ

ابتدائی نقطہ A ہی $\vec{a}$ کا اصلی نقطہ ہے اور آخری نقطہ B مستقل کے بعد اس کا مقام ہوگا۔

قطاع خط AB کی لمبائی کو سمتیہ کی لمبائی یا سمتیہ $\vec{a}$ کی قدر کہا جاتا ہے اور اس کو $|\vec{a}|$ سے نشاندہی کی جاتی ہے۔

غیر مستقیم خط AB کو $\vec{a}$ سمتیہ کی حمایت کہا جاتا ہے۔

ایک غیر سمت دار سادہ خط اور سمت دار قطاع خط کے درمیانی فرق کے لئے ہم سمتیہ کو تیر کے ساتھ $\overrightarrow{AB}$ یا $\vec{a}$ لکھتے ہیں۔ تو AB ایک قطاع خط ہے۔

تعریف 8.4

اگر ہم آزادانہ انداز سے مبدا پر نقطئی سمتیہ مناسبت کریں، تو وہ مفت سمتیہ ہوگا جب کہ کسی مخصوص مقام پر مبدہ ہے تو وہ تشخیص سمتیہ کہلائے گا۔

سمتیہ کے ضرب تک ہم مفت سمتیہ کا ہی معاہدہ کریں گے۔ تشخیص سمتیہ کو خط مستقیم کی مساوات کو اخذ کے لئے مشتمل کریں گے۔

تعریف 8.5

ہم ابتدائی سمتیہ کے ابتدائی نقطہ یکساں (ایک ہی) ہوتا ہے۔ دوسری طرف ہم انتہائی سمتیہ کا بھی یکساں آخری نقطہ ہوتا ہے۔

08_11th-Maths-Vol2-Unit8_UM.indd 49 21-02-2023 16:23:41

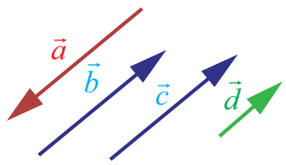
تعریف 8.6

دو یا دو سے زیادہ سمتیہ کو ہم خط یا متوازی کہتے ہیں۔اگر وہ ایک ہی خطی حرکت میں ہوں یا ایک دوسرے کے متوازی ہوں۔

دو یا دو سے زیادہ سمتیہ کو ہم مسطوی سمتیہ کہتے ہیں جب کہ وہ دونوں ایک ہی سطح پر متوازی ہوں۔

تعریف 8.7

دو سمتیہ کو مساوی کہتے ہیں جب کہ اس کے دونوں کے سمت اور قدر یکساں ہوں۔



8.2 خاکہ

دو برابر سمتیہ کے لئے یکساں (ایک ہی) ابتدائی نقطہ اور آخری نقطہ رہنا ضروری نہیں۔ مثال کے طور پر شکل 8.2 میں $\vec{b}$ اور $\vec{c}$ کے یکساں لمبائی اور مساوی سمت ہونے پر وہ برابر سمتیہ ہیں۔ جب کہ $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کی لمبائی یکساں ہونے پر ان کے سمت برعکس ہیں،وہ غیر مساوی سمتیہ ہیں۔ $\vec{c}$ اور $\vec{d}$ غیر مساوی ہیں کیونکہ ایک ہی سمت پر ہونے پر بھی لمبائی میں فرق ہے۔

تعریف 8.8

صفر سمتیہ جس کی قدر صفر ہوتی ہے اور $\vec{0}$ سے ظاہر کرتے ہیں اسے کوئی بھی سمت دی جاسکتی ہے۔

یعنی، ایک سمتیہ جس کے ابتدائی اور آخری نقاط آپس میں ملتے ہیں ایک صفر سمتیہ کہلاتا ہے۔ صفر سمتیہ کو خالی سمتیہ بھی کہا جاتا ہے۔

ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ صفر سمتیہ کے ابتدایی اور آخر نقاط ایک جیسے ہیں۔ صفر سمتیہ کو خالی سمتیہ بھی کہا جاتا ہے

ایک سمتیہ جس کی قدر اکائی ہے(یعنی 1 اکائی) اکائی سمتیہ کہلاتا ہے۔ $\vec{a}$ کی سمت پر موجودہ اکائی سمتیہ کو $\hat{a}$ (پڑھیں 'a cap' or 'a hat') سے ظاہر کرتے ہیں۔ واضح طور پر $|\hat{a}| = 1$ ہوگا۔

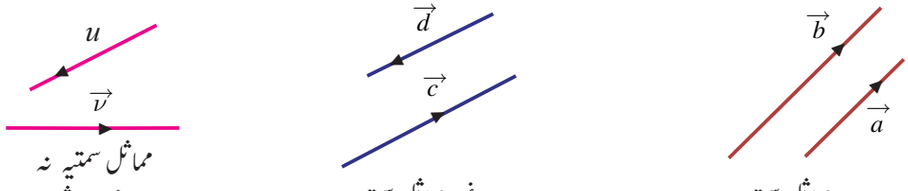
ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ بہت سے لامحدود سمتیہ ہیں اور اس وجہ سے لامحدود طور پر بہت سے یہ اکائی سمتیہ ہیں۔ حقیقت میں، ان کے ہر سمت پر ایک اکائی سمتیہ ہوگا۔

ہر ایک غیر صفری سمتیہ کو $\vec{a}$ کی سمت پر موجودہ اکائی سمتیہ سے ضرب کرسکتے $\vec{a}$ ہیں۔ اس کا عددیہ اس سمتیہ کی قدر ہوگا۔

چنانچہ کسی بھی سمتیہ کے لئے $\vec{a} = |\vec{a}|\,\hat{a}$ لکھ سکتے ہیں جہاں $\hat{a}$ سے مراد اکائی سمتیہ ہے جو $\vec{a}$ کے سمتیہ کے ساتھ ہے۔ واضح طور پر غیر صفری کے لئے $\hat{a} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ ہوگا۔

تعریف 8.9

ایک ہی سمت پر ہونے والے دو سمتیے کو مماثل سمتیہ کہا جاتا ہے اور ایک دوسرے کے برعکس (مخالف) سمتوں پر ہونے والے دو سمتیے کو غیر مماثل سمتیے کہتے ہیں



مماثل سمتیہ نہ ہی غیر مماثل

غیر مماثل سمتیہ

مماثل سمتیہ

8.3 خاکہ

08_11th-Maths-Vol2-Unit8_UM.indd 50 21-02-2023 16:23:42

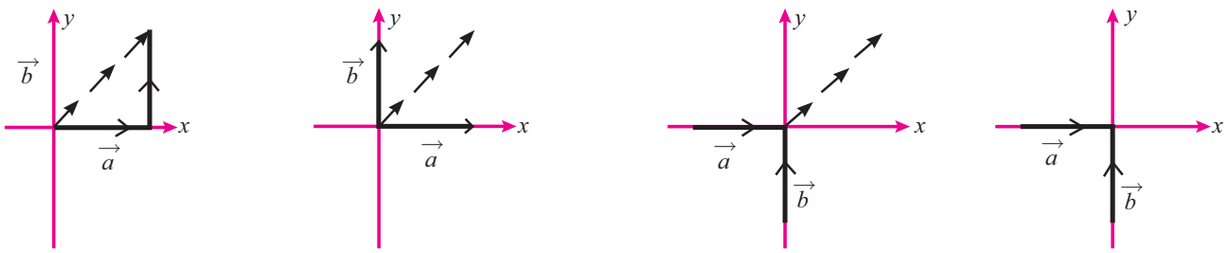
ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ دئے گئے دو سمتیے مماثل یا غیر مماثل ہوں تاکہ ان کے براہ راست خطوط بھی ایک دوسرے کے متوازی ہوں۔ دئے گئے جوڑی سمتیے میں نہ ہی مماثل یا نہ ہی غیر مماثل ہیں۔

8.4 سمتیائی الجبراء (Algebra of Vectors)

ہم نے حقیقی اعداد اور ماترس (میٹرکس) (Matrices) پر بنیادی الجبریائی عمل کا مطالعہ کیا ہے۔ اس طرح ہم نے سمتیوں پر کچھ عملوں کا مطالعہ کیا۔ اب چلئے ہم دیکھتے ہیں کہ کس طرح سمتیوں کو جمع کرنا، ایک سمتیہ سے دوسری سمتیہ کی تفریق اور ایک عدیہ سے سمتیہ کو ضرب کی جاتی ہے۔

8.4.1 سمتیوں کی جمع (Addition of Vectors)

آئیے ہم دیکھیں کہ دو سمتیوں کی حاصل جمع کو دو طریقے میں وضاحت کرنے پر بھی جواب یکساں ہی حاصل ہوگا۔ فرض کرو کہ اکائی وزنی ایک چیز کو مبدا $(0,0)$ پر $\mathbb{R}^2$ میں رکھتے ہیں۔ اس کے سائز کو ایک نقطہ سے فرض کریں۔ فرض کریں کہ اکائی قدر والے دو قوتیں $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ مثبت سمتوں میں بالترتیب x- محور اور y- محور پر تعامل کریں گے۔ (شکل۔ 8.4) اب آسانی سے اندازہ لگا سکتے ہیں کہ اس شئے X- محور کے $45°$ سمت پر شکل 8.5 میں اشارے کی طرح قدم پڑے گی۔ قوت $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ سمتیہ $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کے مساوی ہے جو شکل 8.6 میں اشارہ اشارہ کیا گیا ہے۔ ہم سوچ سکتے ہیں کہ قوتیں شکل 8.4 میں شےء کو ڈھکیلتے ہیں اور شکل 8.6 میں شےء کو کھینچتی ہیں۔



8.4 خاکہ 8.5 خاکہ 8.6 خاکہ 8.7 خاکہ

ہمارے سامنے اگلا سوال آتا ہے کہ "یہ کب تک چلے گا؟"۔ پھر ہم فرض کرتے ہیں کہ ایک قوت کے بعد دوسری قوت عمل میں ہوں۔ قوت $\vec{a}$ x- محور کے ساتھ 1 اکائی ہٹنا پڑے گا تو وہ شئے $(0, 0)$ سے $(1, 1)$ تک حرکت کرے گی۔ اب قوت $\vec{b}$ پر اس شئے کو عمودی طور پر $(1, 0)$ سے $(1, 1)$ تک حرکت کرے گا۔ آخر میں شئے $(1, 1)$ پر واقع ہوگا (شکل 8.7)۔ اس طرح دو سمتیوں کی مجموعی کو سمت $(0, 0)$ سے $(1, 1)$ کے سمت میں $(0, 0)$ اور $(1, 1)$ کو جوڑنے والی قطاع خط کے طور پر واضح کیا جاتا ہے۔

اب اوپر کے صورت حال سے ہم فرض کریں کہ قوت $\vec{a}$ کی قدر 1 کے بجائے 2 ہے۔ (شکل 8.8) ہے۔ اب آسانی سے یہ اندازہ لگا سکتے ہیں کہ اس چیز کی حرکت x محور کی قریب ہوگی جو (شکل 8.9) میں اشارہ کیا گیا ہے اور نقطہ (2,1) پر ہی شئے کی حرکت کا اندازہ لگا سکتے ہیں۔ اس طرح دو سمتیوں کی مجموعی کو $(0, 0)$ سے $(2,1)$ کی سمت پر $(0, 0)$ اور $(2,1)$ کو جوڑنے والی قطاع خط کے طور پر اشارہ کیا جاتا ہے۔



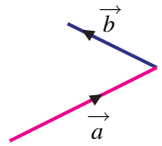
8.8 خاکہ 8.9 خاکہ

اوپر کے دو صورت حال سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ دونوں قوتوں کی سمتیں۔ ایک دوسرے کے عمودی ہیں۔ عام طور پر قوتیں عمودی ہونے کی ضرورت نہیں۔ تاہم ایک کے بعد ایک قوت کو جمع کرنا ممکن ہے۔ مثال کے طور پر دو قوتیں $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کو شکل 8.10 میں اشارہ کیا گیا ہے۔

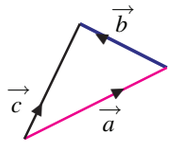
08_11th-Maths-Vol2-Unit8_UM.indd 51 21-02-2023 16:23:42



8.10 خاکہ



8.11 خاکہ

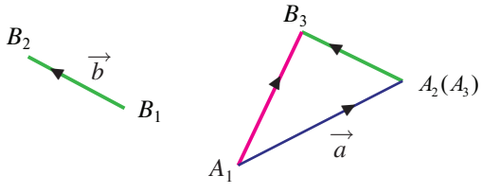


8.12 خاکہ

$\vec{b}$ کو ابتدائی نقطہ اور $\vec{a}$ کو آخری نقطہ کی مانند لانے پر (شکل 8.11)، ہم ان دو قوتوں کا نتیجہ حاصل کر سکتے ہیں (شکل 8.12 دیکھیں)۔ یہ ہمیں سمتیوں کی جمع کی وضاحت میں حوصلہ افزائی بڑھاتا ہے۔

سمتیہ مجموعہ کا مثلثی قانون (Triangle law of addition)

فرض کرو کہ $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ دو سمتیہ ہیں۔فرض کریں کہ $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کا ابتدائی نقاط بالترتیب A_1 اور B_1 ہوں اور اخری نقاط بالترتیب A_2 اور B_2 ہوں۔



8.13 خاکہ

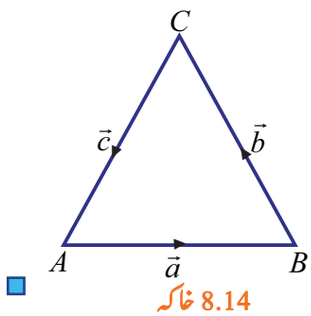
B_1B_2 کے متوازی A_3B_3 کھینچیے جس سے $A_3B_3 = B_1B_2$ ہو گا پھر سمتیہ $\overrightarrow{A_1B_3}$ کو $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کے مجموعوں کے طور پر بیان کیا جاتا ہے اور اسے و $\vec{a}+\vec{b}$ سے ظاہر کرتے ہیں ۔اسے اس طرح دوبارہ بیان کیا جاسکتا ہے

تعریف 8.10 (سمتیہ مجموعہ کا مثلثی قانون)

اگر دو سمتیوں کے قدر اور سمت کو ایک مثلث کے د و ترتیبی ضلعوں سے اشارہ کیا جائے تو ان کی حاصل جمع کو مثلث کی مخالف قطار یں لئے گئے تیسرے ضلعے سے نشان زد کرسکتے ہیں۔

نتائج 8.1

اگر $\vec{a}$، $\vec{b}$ اور $\vec{c}$ ایک مثلث کے ترتیب میں موجودہ ضلعے ہو تو $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ ہو گا



8.14 خاکہ

ثبوت:

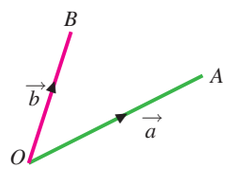
فرض کرو $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$, اور $\overrightarrow{CA} = \vec{c}$

اب $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

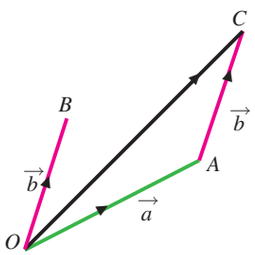
چنانچہ نتیجہ ثابت کیا گیا

سمتیہ کی جمع کا متوازی الاضلاع قانون (Parallelogram law of vector addition)

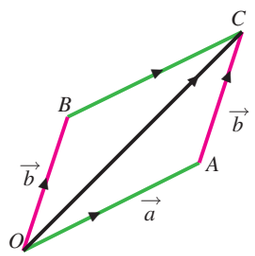
فرض کرو کہ $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ دو سمتیہ ہیں۔ یہ فرض کرتے ہوئے دونوں سمتیہ کے ابتدایی نقاط ایک جیسے ہیں ۔ آیے تعریف 8.7 کے مطابق حاصل جمع معلوم کریں۔ AاورB کے آخری نقطے $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ ہیں (شکل 8.15)۔ $\vec{a}+\vec{b}$، کو اخذ کرنے کے لئے ہم OB کے متوازی AC کھینچیں جو $OB = AC$ ہو گا۔ $\overrightarrow{OC}$ ہی حاصل جمع کا مطلوبہ ہے (شکل 8.16)۔ ہم مشاہدہ کریں تو OA اور BC متوازی ہوں گے (شکل 8.17)۔



8.15 خاکہ



8.16 خاکہ



8.17 خاکہ

08_11th-Maths-Vol2-Unit8_UM.indd 52 21-02-2023 16:23:44

یکساں ابتدائی نقطے والے دو سمتیے کی جمع کو اخذ کرنے کے لئے، اس قسم کا متوازی الاضلاع کا شکل کریں تاکہ جس میں متصلہ ضلعوں کے سمتیے کا حاصل جمع کو وتر ظاہر کرتا ہے۔یہاں تک کہ ان کے یکساں ابتدائی نقطہ نہ ہونے پر بھی، ایک مناسبت سمت ہٹانے سے ان کے مساوی ابتدائی نقطہ بناسکتے ہیں۔ یہ ہمیں مندرجہ ذیل تعریف 8.11 کی طرف لے جاتا ہے۔

فرض کرو کہ ایک کی ابتدائی نقطہ O کے ساتھ $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ دو سمتیں لیں ۔ فرض کرو کہ A اور B کا آخری نقطہ بلترتیب $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ ہے۔

متوازی الاضلاع $OACB$ مکمل کریں۔ پھر $\overrightarrow{OC}$ ہی سمتیہ $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کا حاصل جمع ہے۔

تعریف 8.11 (جمع کا متوازی الاضلاع قانون)

ایک متوازی الاضلاع $OABC$ اگر $\overrightarrow{OA}$ اور $\overrightarrow{OB}$ متصلہ ضلعوں کی نمائندگی کریں، تو وتر $\overrightarrow{OC}$ ہی ان کی حاصل جمع کی نمائندگی کرتا ہے۔ (شکل 8.17 دیکھیں)

ہمارے پاس مندرجہ بالا دو قسم کی تعریفیں ہونے پر بھی وہ د ونوں یکساں اور مساوی ہیں۔ تعریف 8.10 میں سمتیہ کی مجموعی مثلثی قانون اور تعریف 8.11 سے متوازی الاضلاع کا مجموعی قانون کی وضاحت کی ہے۔

میں ABC دو $\overrightarrow{AB}$ اور $\overrightarrow{BC}$ متصلہ ہو تو ان کی حاصل جمع کی نمائندگی سے مثلث کے تیسرے ضلعے $\overrightarrow{AC}$ سے ظاہر ہوگا

8.4.2 دو سمتیوں کے درمیانی فرق (Difference between two Vectors)

آئیے ہم ایک سمتیے سے دوسری سمتیہ کی تفریق کس طرح کرنا دیکھیں۔

تعریف 8.12

ایک سمتیہ $\vec{a}$ ہو تو اس کی معکوس کی نمائندگی $-\vec{a}$ (منفی) سے کیا جاتا ہے جس کی قدر $\vec{a}$ اور سمتیہ کے مخالف $\vec{a}$ ہے۔

اس بات کو ذہن نشین کرلیجئے کہ اگر $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ہو تو $\overrightarrow{BA} = -\vec{a}$ ہے۔

دو سمتیے کے درمیانی فرق کا علم ہندسہ سے تشریح (Geometrical interpretation of difference between two vectors)

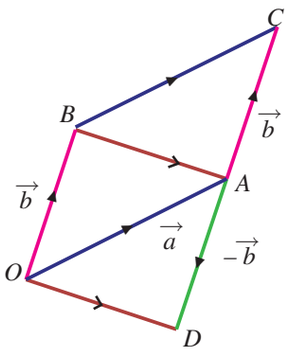
سمتیہ $\vec{a}$ کے ا بتدائی اور آخری نقاط بالترتیب P اور Q لیجئے۔ سمتیہ $\vec{b}$ کے ابتدائی اور آخری نقاط P اور Q لیجئے۔دونوں سمتیوں کی قدریں P اور Q کو جوڑنے والے قطا خط کی لمبائی ہے تو ان کی قدریں ایک جیسی ہے۔ مگر ان کی سمت واقع مخالف ہیں۔ اس لئے $\vec{b}$ کی قیمت $-\vec{a}$ کے مساوی ہوگا۔

اگر دو سمتیہ $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ ہو تو $\vec{a}$ اور $-\vec{b}$ کا حاصل جمع سمت $\vec{a}-\vec{b}$ سے اظہار کیا جاتا ہے۔ یعنی $\vec{a}+(-\vec{b})$۔

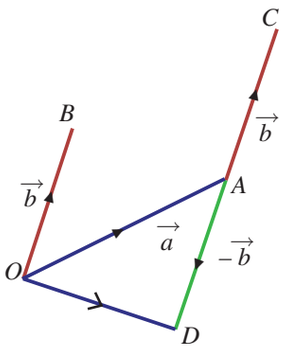
ہم علم ہندسہ کی مدد سے $\vec{a}-\vec{b}$ سمتیہ کو دیکھ سکتے ہیں۔ فرض کرو کے سمتیہ $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ بالترتیب $\overrightarrow{OA}$ اور $\overrightarrow{OB}$ کی نمائندگی کرتا ہے (شکل 8.18)۔ AC کے متوازی OB کھینچئے۔ جبکہ $AC = OB$ ہو تو $\vec{b}$ کی قیمت $\overrightarrow{AC}$ کے برابر ہوگا۔ $CA = AD$ کے مطابق CA کو D- تک کھینچئے۔اب $\overrightarrow{AD}$ سے مراد $-\vec{b}$ ہے۔ چنانچہ $\vec{a}+(-\vec{b}) = \overrightarrow{OD}$ تو $\vec{a}-\vec{b} = \overrightarrow{OD}$ (شکل 8.19)

ہم متوازی الاضلاع $OACB$ کو مکمل کریں۔ ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ جب BA اور OD متوازی اور مساوی ہیں۔ لہذا $\overrightarrow{BA}$ سمتیہ $\overrightarrow{OD}$ برابر سمتیہ ہیں۔ فرض کرو کہ $\overrightarrow{BA}$ سے مراد $\vec{a}-\vec{b}$ ہے۔ متوازی الاضلاع $OACB$ کے متصلہ ضلع $\overrightarrow{OA}$ اور $\overrightarrow{OB}$ بالترتیب $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ ہو تو،ا س کا وتر $\overrightarrow{BA}$ سمتیہ $\vec{a}-\vec{b}$ کی نمائندگی کرتا ہے۔ (شکل 8.20) ہم پہلے ہی جانتے ہیں کہ وتر $\overrightarrow{OC}$ سے مراد سمتیہ $\vec{a}+\vec{b}$ ہے۔

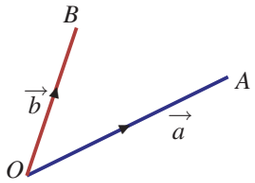
08_11th-Maths-Vol2-Unit8_UM.indd 53 14-03-2023 15:17:05



8.20 خاکہ



8.19 خاکہ



8.18 خاکہ

چنانچہ، اگر $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ متوازی الاضلاع کے متصلہ ہو تو اس کے وتر $\vec{a}+\vec{b}$ اور $\vec{a}-\vec{b}$ ہوں گے۔

8.4.3 سمتیہ کی عددیہ سے ضرب (Scalar multiplication of a vector)

اب ہم دیکھتے ہیں کہ سمتیہ کو ایک عددیہ سے کس طرح ضرب دیا جائے۔

فرض کرو کہ $\vec{a}$ ایک سمتیہ ہے اور m ایک عددیہ ہے تو $m\vec{a}$ سے مراد سمتیہ $\vec{a}$ سے عددیہ m کا عددیہ ضرب ہوگا۔

فرض کرو کہ اگر m صفر ہو تو $m\vec{a}$ کی قدر 0 ہے لہذا $m\vec{a}$ صفر سمتیہ ہوگا۔ اگر m مثبت ہو تو $\vec{a}$ اور $m\vec{a}$ دونوں یکساں سمت پر ہوں گے اور اگر m منفی ہو تو $\vec{a}$ اور $m\vec{a}$ کے مخالف سمت پر ہوگا۔اس طرح اگر m مثبت ہو تو $\vec{a}$ اور $m\vec{a}$ مماثل سمتیہ اوراگر m منفی ہو تو غیر مماثل سمتیہ ہوگا۔ $m\vec{a}$ کی قدر $|m\vec{a}| = |m||\vec{a}|$ ہے۔

تعریف 8.13

اگر دو سمتیہ $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ متوازی ہو ایک عددیہ λ کے لئے $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ ہوگا۔ اگر $\lambda > 0$ ہو تو یکساں سمت پر اور $\lambda < 0$ ہو تو مخالف سمت پر ہوگا۔

8.4.4 چند خصوصیات اور نتائج (Some properties and results)



کوئی بھی دو سمتیے $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ عددیہ m اور n کے لئے

(i) $m(n\vec{a}) = mn(\vec{a}) = n(m\vec{a})$

(ii) $(m+n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$

(iii) $m(\vec{a}+\vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$

نتیجہ 8.2

سمتیہ کا جمع مربوطی ہوگا۔

کوئی تین سمتیہ $\vec{a}$، $\vec{b}$ اور $\vec{c}$ کے لئے،

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}).$$

نتیجہ 8.3

کسی بھی سمتیہ $\vec{a}$ کے لئے $\vec{a}+\vec{0} = \vec{0}+\vec{a} = \vec{a}$،

نتیجہ 8.4

کسی بھی سمتیہ $\vec{a}$ کے لئے $\vec{a}+(-\vec{a}) = (-\vec{a})+\vec{a} = \vec{0}$

اس نتیجہ سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ ہر سمتیہ کا بھی ایک جمعی معکوس ہوتا ہے۔

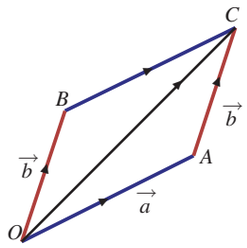
نتیجہ 8.5

سمتیہ کی جمع ایک تقلیبی ہے۔

ثبوت:

فرض کیجئے کہ دو سمتیے $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ ہیں۔ فرض کیجئے کہ $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ ، $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$۔

متصلہ ضلع $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ سے متوازی الاضلاع $OACB$ کو مکمل $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کیجئے۔ سمتیہ $\overrightarrow{OB}$ اور $\overrightarrow{AC}$ مساوی قدر اور یکساں سمت ہیں، اس لئے $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AC}$ ہوگا۔ اس طرح کے



8.21 خاکہ

$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}.$$

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC},$$

$$\vec{b} + \vec{a} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}.$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.$$

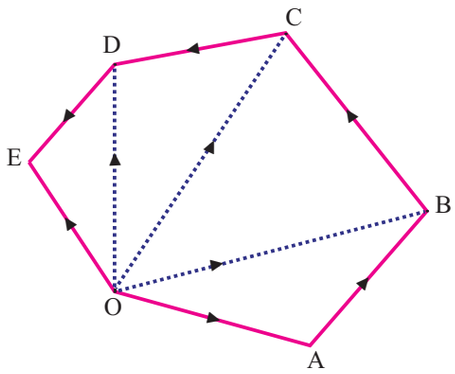
چنانچہ

سمتیہ کی جمع کا کثیر اضلاع اصول: (Polygon law of addition)

دیے گئے شکل 8.22 سے کوئی 5 سمتیے $\overrightarrow{OA}$ ، $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{CD}$ اور $\overrightarrow{DE}$ لیجئے۔

نوٹ کریں کہ ہر ایک سمتیہ پچھلے سمتیہ کے آخری نقطہ سے نکالا گیا ہے۔

مثلثی قانون سے،



8.22 خاکہ

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} \quad ; \quad \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} \quad ; \quad \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OE}$$

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OE}.$$

اس طرح تمام سمتیوں کا جمع وہ ہے جو پہلے سمتیہ کی ابتدائی نقطے کو اختتامی سمتیہ کے آخری نقطہ سے جوڑتا ہے۔ ہم اسے سمتیہ کی جمع کا کثیر اضلاع اصول کہتے ہیں۔

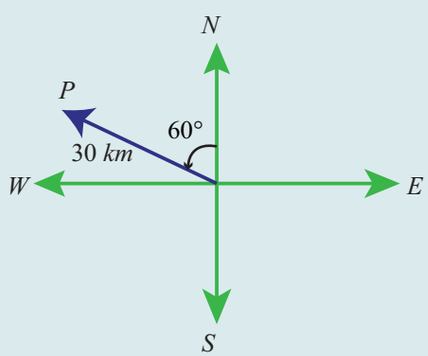
مثال 8.1

ترسیمات (گراف) کی مدد سے ہٹاؤ (displacement) کو ظاہر کرو۔

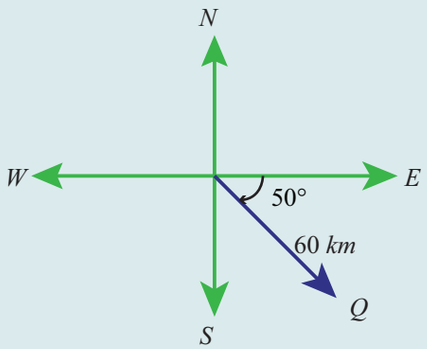
(i) 30 کلومیٹر کو $60°$ شمال کا مغرب

(ii) 60 کلومیٹر کو $50°$ مشرق کا جنوب

حل



8.23 خاکہ



8.24 خاکہ

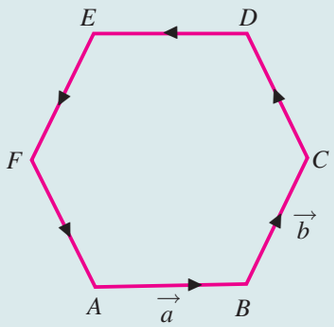
08_11th-Maths-Vol2-Unit8_UM.indd 55 21-02-2023 16:23:49

مثال 8.2

اگر $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کسی باقاعدہ مسدس کے دو متصلہ ہو تو دوسرے ضلعے کے سمتیہ کو معلوم کیجئے۔

حل

فرض کریں کہ باقاعدہ مسدس کے راسیں A، B، C، D، E اور F ہو۔



8.25 خاکہ

فرض کرو کہ $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ اور $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$

ہم ذیل کے باقاعدہ مسدس کے خصوصیات کو استعمال کریں

(i) AB، CF اور ED متوازی ہیں اور BC، AD اور EF بھی متوازی ہیں

(ii) CF کی لمبائی AB کا دگنا اور AD کی لمبائی BC کا دگنا ہے۔

AB اور DE متوازی ہیں، لمبائی مساوی اور مخالف سمت ہیں۔

اس لئے

$$\overrightarrow{DE} = -\vec{a}\ .$$

خطوط AB اور CF متوازی اور مخالف سمت ہیں ۔ یعنی

$$\overrightarrow{CF} = -2\vec{a}.$$

اسی طرح $\overrightarrow{EF} = -\vec{b}$ اور $\overrightarrow{AD} = 2\vec{b}$.

ہمارے پاس چونکہ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}.$$

ہمارے پاس چونکہ $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$

$$\vec{a} + \vec{b} + \overrightarrow{CD} = 2\vec{b}.$$

اس لئے $\overrightarrow{CD} = 2\vec{b} - (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{b} - \vec{a}.$

ہمارے پاس جبکہ $\overrightarrow{FA} = -\overrightarrow{CD}$،

$$\overrightarrow{FA} = \vec{a} - \vec{b}.$$

اسی طرح دئے ضلعے $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ اور $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ کے مطابق $\overrightarrow{CD} = \vec{b} - \vec{a}$، $\overrightarrow{DE} = -\vec{a}$، $\overrightarrow{EF} = -\vec{b}$ اور $\overrightarrow{FA} = \vec{a} - \vec{b}$ حاصل ہوں گے۔

8.5 مقامی سمتیے (Position vectors)

تعریف 8.14

O کو مبدا مانیں اور ایک نقطہ P (سطحی یا سہ ابعادی خلا میں) پر غور کیجئے۔اب $\overrightarrow{OP}$ نقطہ P کا O کی مناسبت سے مقامی سمتیہ ہے۔

سمتیہ اور مقامی سمتیہ کی تعلق کو ذیل کے طریقہ سے تشریح کرسکتے ہیں۔

نتیجہ 8.6

فرض کرو کہ O مبدا ہے اور A اور B دو نقطے ہیں۔اب $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ جہاں $\overrightarrow{OA}$ اور $\overrightarrow{OB}$ بالترتیب A اور B کے مقامی سمتیہ ہیں

ثبوت:

ہم جانتے ہیں کہ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$. اسی طرح $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ ہوگا۔

08_11th-Maths-Vol2-Unit8_UM.indd 56 21-02-2023 16:23:51

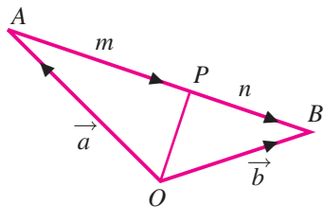
مسئلہ 8.1 سکشن فارمولہ (ضابطہ)۔اندرونی طور پر تقسیم (Section Formula - Internal Division)

مان لیجئے کہ O مبدا ہے اور A اور B دو نقاط ہیں۔ جب کہ نقطہ P قطع خط AB کو $m:n$ نسبت میں اندرونی طور پر تقسیم کرتا ہے۔ اگر $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ دونوں بالترتیب A اور B کے مقامی سمتیہ ہو تو P کا مقامی $\overrightarrow{OP}$ دیا گیا ہے

$$\overrightarrow{OP} = \frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{n+m}.$$

ثبوت:

چونکہ O مبدا اور A اور B کے مقامی سمتیہ بالترتیب $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ ہو



خاکہ 8.26

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ اور $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

$\overrightarrow{OP} = \vec{r}$

جب قطع خط AB کو $m:n$ نسبت میں اندرونی طرف پر P تقسیم کریں تو

$$\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|} = \frac{m}{n}$$

$$n|\overrightarrow{AP}| = m|\overrightarrow{PB}|. \qquad \text{لہذا}$$

مگر سمتیہ $\overrightarrow{AP}$ اور $\overrightarrow{PB}$ ہم سمت ہو

$$n\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{PB}. \qquad (8.1)$$

مگر $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA} = \vec{r}-\vec{a}$ اور $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP} = \vec{b}-\vec{r}$

ان کو 8.1 میں درج کرنے سے

$$n(\vec{r}-\vec{a}) = m(\vec{b}-\vec{r}) \qquad \text{لہذا}$$

$$(n+m)\vec{r} = n\vec{a}+m\vec{b}.$$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{n+m}. \qquad \text{اس طرح}$$

مسئلہ 8.2 سکشن فارمولہ۔ بیرونی طریقہ پر تقسیم (بغیر ثبوت کے) (Section Formula - External Division (Without proof))

مان لیجئے O مبدا A اور B دو نقاط ہیں اور نقطہ P قطع خط AB کو $m:n$ کی نسبت پر بیرونی طریقہ پر تقسیم کرتا ہے۔ $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ بالترتیب A اور B کے مقامی سمتیہ ہو تو P کا مقامی سمتیہ $\overrightarrow{OP}$ دیا گیا ہے

$$\overrightarrow{OP} = \frac{n\vec{a}-m\vec{b}}{n-m}.$$

نوٹ 8.1

مسئلہ 8.1 میں سے $m=n=1$ درج کریں تو ملانے والی خط AB کا درمیانی نقطہ پر مقامی سمتیہ $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$ ہے۔ جہاں $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ بالترتیب A اور B کے مقامی سمتیہ ہیں۔

اوپر کے مسئلہ سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ تینوں نقطے ہم خطی اختیار کریں گے۔

08_11th-Maths-Vol2-Unit8_UM.indd 57 21-02-2023 16:23:52

نتیجہ 8.7

$\vec{a}$، $\vec{b}$ اور $\vec{c}$ کو مقامی سمتیہ رکھنے والے نقاط A، B اور C ہم خطی اختیار کرنے کے لئے ضروری اور کافی شرط یہ ہے کہ x، y، z کے تمام حقیقی اعداد صفر کے بغیر $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{0}$ اور $x+y+z=0$ کے جیسا ہونا چاہئے

مثال 8.3

نقاط A اور B کے مقامی سمتیے $2\vec{a}+4\vec{b}$ اور $2\vec{a}-8\vec{b}$ ہو تو قطاع خط A اور B کو 1:3 نسبت پر اندرونی اور بیرونی طریقے سے تقسیم کرنے والا نقطہ کا مقامی سمتیہ معلوم کیجئے۔

حل

O کو مبدا بنائیں

$\overrightarrow{OA}=2\vec{a}+4\vec{b}$ اور $\overrightarrow{OB}=2\vec{a}-8\vec{b}$. دیا گیا ہے

فرض کریں کہ C اور D نقاط بالترتیب قطاع خط AB کو 1:3 کی تناسب سے اندرونی اور بیرونی طرف منقسم ہیں۔

$$\overrightarrow{OC}=\frac{3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{3+1}=\frac{3(2\vec{a}+4\vec{b})+(2\vec{a}-8\vec{b})}{4}=2\vec{a}+\vec{b}.$$

$$\text{اس لئے } \overrightarrow{OD}=\frac{3\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}}{3-1}=\frac{3(2\vec{a}+4\vec{b})-(2\vec{a}-8\vec{b})}{2}=2\vec{a}+10\vec{b}.$$

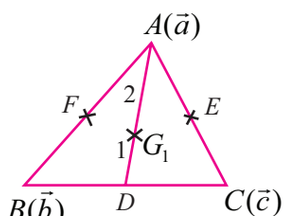
ہم جانتے ہیں کہ ایک مثلث کا وسطی خط، وہ خط کا ٹکڑا ہے جو مقابل ضلع کے راس اور درمیانی نقطہ کو ملاتا ہے۔ ہندسی مرکز ہر وسطی خط کو 2:1 کی نسبت میں اندرونی طرف تقسیم کرتا ہے۔

مسئلہ 8.3

ایک مثلث کے وسطی خطوط متراکز ہوتے ہیں۔

ثبوت:

مثلث ABC میں ضلع BC، CA اور AB کے درمیانی نقطے بالترتیب E, D اور F لیجئے۔ ہمیں ثابت کرنا ہے کہ وسطی خطوط AD، BE اور CF متراکز ہوتے ہیں۔



خاکہ 8.27

O- مبدا کے ساتھ نقاط A، B، C کے مقامی سمتیہ بالترتیب $\vec{a}$، $\vec{b}$، $\vec{c}$ لیجئے۔

E, D اور F کے مقامی سمتیہ بالترتیب

$$\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2},\frac{\vec{c}+\vec{a}}{2},\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$$

خط AD کو 2:1 کی نسبت پر اندرونی تقسیم کرنے والا نقطہ G_1 ہو تو

$$G_1 \text{ کا مقامی سمتیہ } =\frac{1\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OD}}{1+2}$$

$$\overrightarrow{OG_1}=\frac{1\vec{a}+2\left(\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)}{3}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3} \qquad (1)$$

خط BE کو 2:1 کی نسبت پر اندرونی تقسیم کرنے والا نقطہ G_2 ہو تو

$$\overrightarrow{OG_2}=\frac{1\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OE}}{1+2}$$

08_11th-Maths-Vol2-Unit8_UM.indd 58 21-02-2023 16:23:53

$$\overrightarrow{OG_2} = \frac{1\vec{b} + 2\left(\frac{\vec{c}+\vec{a}}{2}\right)}{3} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}. \qquad (2)$$

اسی طرح خط CF کو 2:1 کی نسبت پر اندرونی تقسیم کرنے والا نقط G_3 ہ ہو

$$\overrightarrow{OG_3} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3} \qquad (3)$$

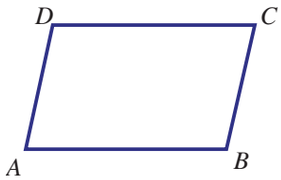
(1)، (2) اور (3) سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ G_1، G_2، G_3 مقامی سمتیے مساوی ہیں، چنانچہ وہ مختلف نقاط نہیں۔اس کا عام نقطہ G ہے۔

اس لئے ایک مثلث کے تین وسطی خطوط G میں متراکز ہوتے ہیں۔ ■

مسئلہ 8.4

ایک چار ضلعی کو متوازی الاضلاع ہونے کے لئے ضروری اور کافی شرط یہ ہے کہ ان کے وتریں ایک دوسرے کو ناصف ہو۔

ثبوت:



8.28 خاکہ

A، B، C اور D راسیں والے چار ضلعی کے وتریں AC اور BD لیجئے۔ O مبدا کے حوالے سے راسیں A، B، C اور D کے مقامی سمتیہ بالترتیب $\vec{a}$، $\vec{b}$، $\vec{c}$ اور $\vec{d}$ ہو۔

فرض کرو کہ چار ضلعی $ABCD$ ایک متوازی الاضلاع ہے۔ تو

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} \Rightarrow \vec{b} - \vec{a} = \vec{c} - \vec{d} \Rightarrow \vec{b} + \vec{d} = \vec{a} + \vec{c}$$

اور لہذا $$\frac{\vec{b}+\vec{d}}{2} = \frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}$$

اس سے یہ ظاہر ہوتاہے کہ AC اور BD کے درمیانی نقاط کے مقامی سمتیے مساوی ہیں۔یعنی کہ وتریں ایک دوسرے سے ناصف ہیں۔

برعکس سے،چار ضلعی وتریں ایک دوسرے کے ناصف ہو تو وتر AC اور وترBD کے درمیانی نقاط کے مقامی سمتیے مساوی ہوں گے۔ اسی طرح

$$\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2} = \frac{\vec{b}+\vec{d}}{2} \Rightarrow \vec{a}+\vec{c} = \vec{b}+\vec{d} \Rightarrow \vec{c}-\vec{d} = \vec{b}-\vec{a}.$$

اس سے $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ اور $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ ظاہر ہوتا ہے۔ واقعی AB کے متوازی DC ہوگا۔ $\vec{a}+\vec{c} = \vec{b}+\vec{d}$ سے ہم دیکھتے ہیں $\vec{a}-\vec{d} = \vec{b}-\vec{c}$ جو AD کے متوازی BC ہوگا۔ چنانچہ $ABCD$ ایک متوازی الاضلاع ہے۔ ■

مشق 8.1

1۔ گراف کے ذریعہ ہٹاؤ کی نمائندگی کیجئے۔

(i) سمر،45 کو 30° مشرق سے شمال (ii) کلومیٹر 80 کو 60° مغرب سے جنوب

2۔ ثابت کیجئے کہ سمتیہ B پر تفاعل R کو سٹ V سے مراد ' $\vec{a}$ R $\vec{b}$ اگر $\vec{a} = \vec{b}$ ' کی طرح کی جائیں تو وہ B پر مساوی تفاعل V رکھے گا۔

3۔ A اور B کے مقامی سمتیے $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ ہو تو AB قطاع خط تین مساوی حصوں میں تقسیم کرنے والے نقاط کے مقامی سمتیے کو $\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}$ اور $\frac{\vec{b}+2\vec{a}}{3}$ کی طرح ثابت کرو۔

08_11th-Maths-Vol2-Unit8_UM.indd 59 21-02-2023 16:23:54

4۔ ثابت کیجئے کہ مثلث ABC میں AB اور AC کے درمیانی نقطے بالترتیب D اور E ہو تو $\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$ ہو

5۔ ثابت کیجئے کہ مثلث دونوں ضلعوں کے درمیانی نقطے کو ملانے والی خط، تیسرے ضلعے کے مساوی اور تیسرے ضلعے کی نصف لمبائی رکھتی ہے۔

6۔ ثابت کیجئے کہ ایک چار ضلعی کے ضلعوں کے درمیانی نقطے کو ملانے والے خطوط سے ایک متوازی الاضلاع بنتا ہے۔

7۔ اگر ایک متوازی الاضلاع کے ایک ضلع $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ ایک وتر ہو تو، اس کے دوسرے ضلعے اور دوسرے وتر کو معلوم کیجئے۔

8۔ ثابت کیجئے اگر $\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{QO}+\overrightarrow{OR}$ ہو تو، P، Q، R، ہم خطی نقاط ہیں۔

9۔ ثابت کیجئے مثلث ABC میں ضلعہ BC کا درمیانی نقطہ D ہو تو ہوگا۔

10۔ ثابت کیجئے مثلث ABC کا ہندسی مرکز G ہو تو $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ ہوگا۔

11۔ ثابت کیجئے کہ مثلث کے راسیں A، B، C اور BC, CA اور AB کے درمیانی نقطے D، E اور F ہو تو $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$. ہے۔

12۔ ثابت کیجئے کہ اگر چار ضلعی $ABCD$ میں AC اور BD کے درمیانی نقطے E اور F ہو تو $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=4\overrightarrow{EF}$

8.6 سمتیہ کو اجزاء میں تقسیم کرنا (Resolution of Vectors)

سمتیہ کے اجزاء کو کسی بھی محدود جہتوں سے تقسیم کیا جاتا ہے۔ لیکن ہم جہاں دو یا تین جہتوں میں تقسیم کرنا دیکھیں گے۔

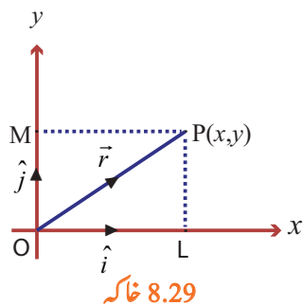
8.6.1 دو جہتوں میں سمتیہ کو اجزاء میں تقسیم کرنا (Resolution of a vector in two dimension)

مسئلہ 8.5

فرض کرو کے $\hat{i}$ اور $\hat{j}$ بالترتیب مثبت x- محور اورم y- محور کے مبدا O کو ابتدائی نقطہ کے مانند رکھنے والے اکائی سمتیے ہیں۔ سطح پر $\overrightarrow{OP}$ P کا مقامی سمتیہ $\overrightarrow{OP}$ ہو تو اسے، منفرد طور پر

$\overrightarrow{OP} = x\hat{i}+y\hat{j}$ سے حقیقی عدد x اور y کے طور پر لکھا جاتا ہے۔ مزید $|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{x^2+y^2}$ ہے۔

ثابت:



خاکہ 8.29

فرض کرو کہ P کے محدودی نقطے P (x,y) سے x اور y کے عمودی خط کے قدمی نقطے (foots of the perpendicular points) L اور M ہو تو $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{LP}=\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{OM}$۔

چونکہ $\hat{i}$ اور $\hat{j}$ اکائی سمتیہ ہیں، ہمارے پاس $\overrightarrow{OM}=y\hat{j}$ اور $\overrightarrow{OL}=x\hat{i}$ ہے۔

اس لئے $\overrightarrow{OP} = x\hat{i}+y\hat{j}$

اگر $\overrightarrow{OP}=\vec{r}$ تو $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}$

اس کے مفرد خصوصیت کو ثابت کرنے کے لئے مان لیجئے کہ $x_1\hat{i}+y_1\hat{j}$ اور $x_2\hat{i}+y_2\hat{j}$ سے نشان دہی کرنے والا P ہے۔ تو

$$x_1\hat{i}+y_1\hat{j} = x_2\hat{i}+y_2\hat{j}.$$

$$(x_1-x_2)\hat{i}-(y_2-y_1)\hat{j}=\vec{0} \Rightarrow x_1-x_2=0, y_2-y_1=0$$

یعنی $x_1=x_2$ اور $y_1=y_2$ سے منفرد خصوصیات ظاہر ہوتا ہے۔

08_11th-Maths-Vol2-Unit8_UM.indd 60 21-02-2023 16:23:55

مثلث OLP میں $OP^2 = OL^2 + LP^2$ اسی لئے $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

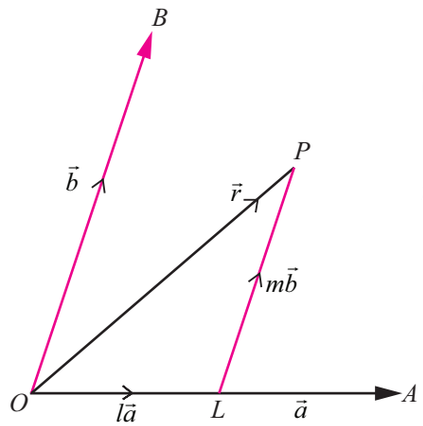
چنانچہ $|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

ہم مشاہدہ کرسکتے ہیں کہ محور x اور محور y کے مثبت سمت پر اکائی سمتیے $\hat{i}$ اور $\hat{j}$ ہو تو نقطہ (6,4) کا مقامی سمتیہ کو $6\hat{i} + 4\hat{j}$ کی طرح صرف ایک ہی طریقہ سے لکھ سکتے ہیں۔ □

نتیجہ 8.8

اگر $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ ایک سطحی کے دوغیر ہم خطی سمتیہ ہو ،تو سطحی کے کسی سمتیہ کو ایک منفرد طور پر $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کے درجی امتزاج کے طور پر لکھا جا سکتا ہے ، یعنی سطحی میں کوئی بھی سمتیہ کچھ عددیہ l اور m کے لئے $l\vec{a} + m\vec{b}$ کی شکل کا ہو تا ہے

ثابت:



8.30 خاکہ

فرض کرو کے $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$، $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ اور کوئی بھی سمتیہ $\vec{r}$ کے ساتھ $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ ہم مستوی ہیں۔

OB کے متوازی خط PL کھینچئے۔ جس سے $\overrightarrow{LP} = m\vec{b}$ اور $\overrightarrow{OL} = l\vec{a}$ کسی l اور m کے لیے۔

اب $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{LP}$

یعنی، $\vec{r} = l\vec{a} + m\vec{b}$

لہذا اگر $\vec{r}$، $\vec{a}$، $\vec{b}$ ہم مستوی ہو تو $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کا یک درجی امتزاج $\vec{r}$ ہے۔ □

نوٹ 8.2

اگر کوئی تین غیر ہم خطی نقاط ہم مستوی ہوں تو، کسی ایک سمتیہ کو دوسرے سمتوں کے یک د رجی امتزاج سے لکھ سکتے ہیں۔اس نتیجہ کا برعکس بھی سچ ہے۔

نتیجہ 8.9

اگر $\vec{a}$، $\vec{b}$ اور $\vec{c}$ تینوں سمتیہ ایک سطح پر واقع غیر ہم مستوی سمتیہ ہو تو،اس سطح پر موجود ہو کسی بھی سمتیہ کو $l\vec{a} + m\vec{b} + n\vec{c}$ کی منفرد شکل میں لکھ سکتے ہیں جہاں l، m اور n عددیہ ہو۔

تعریف 8.15

فرض کیجئے کہ x اور y کے مثبت سمت پر واقع اکائی سمتیہ $\hat{i}$ اور $\hat{j}$ بالترتیب ہیں۔ اسی سطح پر سمتیہ $\vec{r}$ لیجئے تو $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ جہاں x اور y حقیقی اعداد ہیں۔یہاں $x\hat{i}$ اور $y\hat{j}$ بالترتیب x اور y کے دو جہتی عناصر ہیں۔ لہذا $\vec{r}$ میں $x\hat{i}$ اور $y\hat{j}$ کو مستطیلی اجزاء بھی کہا جاتا ہے۔

دو جہتی عناصر پر ہم نے زیر بحث کی اس سے تین جہتی عناصر کو بڑھاسکتے ہیں۔

8.6.2 تین جہتوں میں سمتیہ کی اجزاء (Resolution of a vector in three dimension)

مسئلہ 8.6

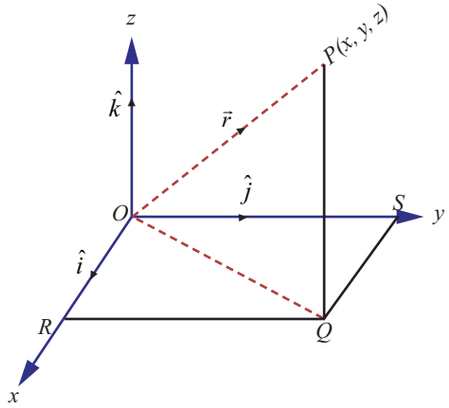
مبدا کو ابتدائی نقطہ، مثبت سمت پر x، y اور z کے اکائی سمتیہ بالترتیب $\hat{i}$، $\hat{j}$ اور $\hat{k}$ لیتے ہیں۔ اس سطح پر P کا مقامی سمتیہ $\overrightarrow{OP}$ ہے۔ اس سطح پر P کا مقامی سمتیہ $\overrightarrow{OP} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ہے۔ $\overrightarrow{OP}$ کی منفرد شکل جہاں x، y اور z حقیقی اعداد ہیں ۔ مزید $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

ثابت:

اگر نقطہ 'P' کے محدود (x, y, z) ہے۔ مان لیجئے کہ yx-سطح پر P سے کھینچا ہوا عمودی خط کا قدمی نقطہ Q ہو۔ x اور y محور پر Q سے کھینچا ہوا عمودی خط کا قدمی نقطہ بالترتیب R اور S ہو۔ اگر $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$ ۔

08_11th-Maths-Vol2-Unit8_UM.indd 61 21-02-2023 16:23:56

جہاں $OR = x$ $OS = y$ اور $QP = z$



خاکہ 8.31

اس $\overrightarrow{OR} = x\hat{i},\ \overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{OS} = y\hat{j},$ and

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QP} = x\hat{i} + y\,\hat{j} + z\hat{k}\,.$$

یعنی $\overrightarrow{OP} = \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

اس $\overrightarrow{OP}$ سمتیہ کو تین جہتوں میں مبدا O کے حوالے سے P کا مقامی سمتیہ کہا جاتا ہے۔

مثلث ORQ میں

$OQ^2 = OR^2 + RQ^2$ (کیسے؟)

اور مثلث OQP میں

$$OP^2 = OQ^2 + QP^2.$$

$$OP^2 = OQ^2 + QP^2 = OR^2 + RQ^2 + QP^2 = x^2 + y^2 + z^2$$ اس لئے

مزید $|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ یعنی کہ $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

دو نقاط کو ملانے والے سمتیہ کے اجزاء (Components of vector joining two points)

آیئے ہم (x_1, y_1) اور (x_2, y_2) نقاط کو ملانے والے خط کے سمتیہ کا اجزاء دیکھیں۔

نقاط A اور B کو (x_1, y_1) اور (x_2, y_2) لیا گیا۔ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP}$ ہے۔ نقطہ P $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ بن جاتا ہے۔ ابھی $\overrightarrow{OP}$ ہے۔ کی اجزاء $(x_2 - x_1)\hat{i}$ اور $(y_2 - y_1)\hat{j}$. ہے۔ لہذا x-محور اور y-محور کے سمت پر $\overrightarrow{AB}$ کا اجزاء $(x_2 - x_1)\hat{i}$ اور $(y_2 - y_1)\hat{j}$ ہے۔

اسی طرح $A\ (x_1, y_1, z_1)$ اور $B\ (x_2, y_2, z_2)$ ہو تو x، y اور z کے محور پر $\overrightarrow{AB}$ کا اجزاء $(x_2 - x_1)\hat{i}$، $(y_2 - y_1)\hat{j}$ اور $(z_2 - z_1)\hat{k}$ ہے۔

8.6.3 ایک سمتیہ کی ماتر کس کے ذریعہ نمائندگی (Matrix representation of a vector)

تین اجزاء والے سمتیہ کو قطار ماترس یا کالم ماترس میں بالترتیب $(x، y، z)$ کا اجزا $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ اور ہے۔

کسی بھی سمتیہ $\vec{A} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ اور $\vec{A} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k} = [a_1\ \ a_2\ \ a_3]\begin{bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{bmatrix}$ حاصل ہوتا ہے۔

لہذا سمتیوں کی جمع اور ایک سمتیہ کی عددیہ سے ضرب دونوں مندرجہ ذیل کی وضاحت کی گئی ہے۔

اگر $\vec{A} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ اور $\vec{B} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ ہو تو نتیجہ میں $\vec{A} + \vec{B} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{bmatrix}$

$\vec{A} + \vec{B} = (a_1 + b_1)\hat{i} + (a_2 + b_2)\hat{j} + (a_3 + b_3)\hat{k}$ حاصل ہوگا

اس کے علاوہ $k\vec{A} = k$ یعنی کہ $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ ka_3 \end{bmatrix}$

08_11th-Maths-Vol2-Unit8_UM.indd 62 21-02-2023 16:23:57

$$k\vec{A} = ka_1\hat{i} + ka_2\hat{j} + ka_3\hat{k}$$

$k \in \mathbb{R}$ کے لئے اگر $k > 1$ ہو تو اضافہ ہوتا، اگر $0 < k < 1$ ہو تو کمی ہوتا اور $k = 0$ ہو تو صفر سمتیہ $\overrightarrow{OA} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k} = \vec{0}$ حاصل ہوتا ہے۔

نتیجہ 8.10

سمتیوں کی جمع کے متبادل اور مربوطی خصوصیات، عددیہ ضرب کے تقسیم کی خصوصیات کو استعمال کرکے مندرجہ ذیل کو ثابت کرسکتے ہیں۔

اگر $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$، $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ اور اگر m ایک عددیہ ہو تو

(i) $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\hat{i} + (a_2 + b_2)\hat{j} + (a_3 + b_3)\hat{k}$

(ii) $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1)\hat{i} + (a_2 - b_2)\hat{j} + (a_3 - b_3)\hat{k}$

(iii) $m\vec{a} = ma_1\hat{i} + ma_2\hat{j} + ma_3\hat{k}$ and

(iv) $\vec{a} = \vec{b}$ صرف اور صرف $a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,$ and $a_3 = b_3.$

مثال 8.4

$5\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ کی سمتیہ میں اکائی سمتیہ معلوم کیجئے۔

حل

سمتیہ $\vec{a}$ کی سمت میں اکائی سمتیہ $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ دیا گیا ہے۔ سمتیہ $5\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ کی سمت میں اکائی سمتیہ

$$\frac{5\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}}{|5\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}|} = \frac{5\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}}{\sqrt{5^2 + 3^2 + 4^2}} = \frac{5\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}}{\sqrt{50}}.$$

نوٹ 8.3

سمتیہ $5\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ کے مخالف سمت پر مزید اکائی سمتیہ $-\frac{5\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}}{\sqrt{50}}$ ہے۔

8.7 سمت کوسائن اور سمت نسبت (Direction Cosines and Direction Ratios)

فرض کرو کے P کو محددی (x, y, z) کے ساتھ سطحی میں ایک نقطہ اور مبداء سے فاصلہ r بنائے۔ P سے x، y اور z محوروں کو کھینچا گیا عمودی خط کے قدمی نقطے بالترتیب R، S اور T لیجئے تو

$$\angle PRO = \angle PSO = \angle PTO = 90°.$$

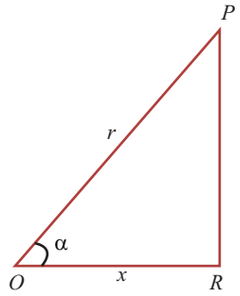
$$OR = x,\ OS = y,\ OT = z \text{ اور } OP = r.$$

(شکل دیکھ کر $\angle PRO = \angle PSO = \angle PTO = 90°$ بطور تصور کرنا مشکل ہے۔ کیونکہ محوروں P سے محوروں کے عمودی خطوط کو سہ جہتی ماڈل میں آسانی دکھایا جاسکتا ہے۔)

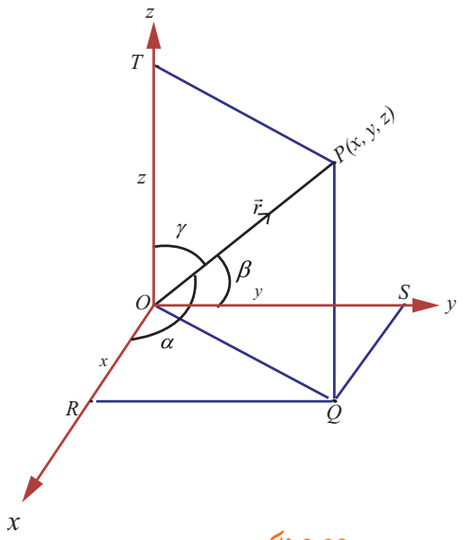
فرض کرو کے α، β، γ کو سمتیہ $\overrightarrow{OP}$ کے ذریعے بلترتیب مثبت x، y اور z محور کے ساتھ بنایا گیا زاویہ سمجھیں

$$\angle POR = \alpha,\ \angle POS = \beta \text{ اور } \angle POT = \gamma. \text{ یعنی}$$

08_11th-Maths-Vol2-Unit8_UM.indd 63 21-02-2023 16:23:58



8.33 خاکہ



8.32 خاکہ

ΔOPR میں $\angle PRO = 90°$، $\angle POR = \alpha$، $OR = x$ اور $OP = r$ ۔ لہذا

$$\cos\alpha = \frac{OR}{OP} = \frac{x}{r}.$$

اس طرح ہم معلوم کر سکتے ہیں $\cos\beta = \frac{y}{r}$ اور $\cos\gamma = \frac{z}{r}$

یہاں $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$ کے سمت زاویے α، β، γ ہیں اور $\overrightarrow{OP} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ سمت کو سائن $\cos\alpha$، $\cos\beta$، $\cos\gamma$ ہوگا۔ اسی طرح

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ کا **سمت کو سائن** $\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right)$ ہے۔ جہاں $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$۔

سمت کو سائن کے تناسب رکھنے والے کسی بھی تین اعداد کو اس سمتیہ کی **سمت تناسب** کہتے ہیں۔ اس لئے سمتیہ کے سمت تناسب واحد نہیں ہوتا۔ ایک سمتیہ کے لئے لامحدود سمت تناسب ہوگا۔

مشاہدہ:

(i) دئے گئے غیر صفری سمتیہ کے لئے سمتی تناسب اور سمت کے سائن حاصل کیا جاتا ہے۔

(ii) دئے گئے سمتی تناسب سے ہم اس سمت کو حاصل نہیں کر سکتے۔

(iii) دئے گئے سمتی کوسائن سے ہم اس سمت کو حاصل نہیں کر سکتے۔

(vi) دئے گئے سمتیہ کے لئے مرتب سمتی کوسائن ہی سمتی تناسب سے بنتا ہے۔

(v) ایک سمتیہ کو حاصل کرنے کے لئے اس کا عددیہ اور سمتی کوسائن یا سمتی تناسب درکار ہے۔

نوٹ 8.4

مان لیجئے کہ $\overrightarrow{OP}$ سمتیہ کا ابتدائی نقطہ مبدا ہو۔اگر ایک سمتیہ کی ابتدائی نقطہ مبدا نہ ہو تو مبدا کو ابتدائی نقطہ مانتے ہوئے اسی عددیہ کا سمتیہ کو نقشہ کہاجاتا ہے۔ برابر سمتیہ کا نظریہ سے دونوں برابر سمت کو سائن رکھتے ہیں۔ اس طرح ہم کسی بھی سمتیہ کا سمت کو سائن معلوم کر سکتے ہیں۔

نتیجہ 8.11

اگر کسی نقطہ پر مقامی سمتیہ $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ اور α، β، γ کے سمت زاویے $\vec{r}$ اور ہو تو

(i) $\vec{r}$ کا سمت کو سائن کے کامل مربع کا حاصل جمع 1 ہے۔

08_11th-Maths-Vol2-Unit8_UM.indd 64 21-02-2023 16:23:59

(ii) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2$

(iii) $\vec{r}$ کے سمت کو سائن $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$، $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$، $\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ ہو گا۔

(vi) اگر سمتیہ کا سمتی کو سائن l، m، n ہو تو $l^2+m^2+n^2=1$ ہے۔ اس نتیجہ کا برعکس بھی سچ ہے۔

(v) کسی بھی اکائی سمتیہ کو $\cos\alpha\hat{i}+\cos\beta\hat{j}+\cos\gamma\hat{k}$ کی طرح لکھ سکتے ہیں۔

ثابت:

(i) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}+\frac{z^2}{r^2}=\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2}=\frac{r^2}{r^2}=1$

(ii)، (iii)، (vi) اور (v) یہ مشق کے لئے رہ گئے ہیں۔

مثال 8.5

ذیل کے سمتیوں کے سمت تناسب اور سمتی کو سائن معلوم کیجئے۔

(i) $3\hat{i}+4\hat{j}-6\hat{k}$ (ii) $3\hat{i}-4\hat{k}$

حل

(i) سمتیہ $3\hat{i}+4\hat{j}-6\hat{k}$ کا سمت تناسب 3، 4، 6- ہیں۔

سمتی کو سائن $\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}$ جہاں $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ہے۔

اس طرح $\frac{3}{\sqrt{61}}$، $\frac{4}{\sqrt{61}}$، $\frac{-6}{\sqrt{61}}$ سمت کو سائن ہیں۔

(ii) سمتیہ $3\hat{i}-4\hat{k}$ کا سمت تناسب 3، 0، 4- ہیں۔

اسی طرح $\frac{3}{5}$، 0، $\frac{-4}{5}$ سمتی کو سائن ہیں۔

مثال 8.6

(i) سمت تناسب 2-، 3، 6 والے سمتیہ کا سمت کو سائن معلوم کیجئے۔

(ii) کیا $30°$، $45°$، $60°$ ایک سمتیہ کا سمت زاویہ ہو گا؟

(iii) اگر $A(2,3,1)$ اور $B(3,-1,2)$ ہو تو $\overrightarrow{AB}$ کا سمت کو سائن معلوم کیجئے۔

(vi) نقاط $(2,3,1)$ اور $(3,-1,2)$ جو ملانے والے خط کے سمت کو سائن معلوم کیجئے۔

(v) 2، 3، 6 کو سمت تناسب اور عدد یہ 5 رکھنے والے سمتیہ کو معلوم کیجئے۔

حل

(i) سمت کو سائن $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$، $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$، $\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ ہیں

یعنی، $\frac{2}{7}$، $\frac{3}{7}$، $\frac{-6}{7}$

(ii) مطلوبہ حالات $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

یہاں $\alpha=30°$، $\beta=45°$، $\gamma=60°$

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\neq 1$.

چنانچہ یہ کسی بھی سمتیہ کے سمتی کو سائن نہیں بن سکتے۔

08_11th-Maths-Vol2-Unit8_UM.indd 65 21-02-2023 16:23:59

(iii) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}$

$\frac{1}{\sqrt{18}}, \frac{-4}{\sqrt{18}}, \frac{1}{\sqrt{18}}$ سمتی کو سائن ہیں۔

(iv) نقاط $A(2,3,1)$ اور $B(3,-1,2)$ لیجئے۔ $\overrightarrow{AB}$ کے سمت کو سائن $\frac{1}{\sqrt{18}}, \frac{-4}{\sqrt{18}}, \frac{1}{\sqrt{18}}$ ہیں۔ البتہ، کسی بھی نقطہ کو ابتدائی نقطہ کی طرح لیجئے۔اس کے برعکس سمت پر سمت تناسب دیکھیں۔اس لئے کہ ہمیں $\frac{-1}{\sqrt{18}}, \frac{4}{\sqrt{18}}, \frac{-1}{\sqrt{18}}$ ایک اور سٹ سمتی کو سائن حاصل ہوتا ہے۔

(v) سمتی کو سائن $\frac{2}{7}$، $\frac{3}{7}$، $\frac{6}{7}$ ہے۔

$\frac{2}{7}\hat{i} + \frac{3}{7}\hat{j} + \frac{6}{7}\hat{k}$. اکائی سمتیہ ہے۔

$\frac{5}{7}(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$ مطلوبہ سمتیہ ہوگا۔

مثال 8.7

ثابت کیجئے کہ $2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$، $3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ اور $6\hat{i} - 5\hat{j} + 7\hat{k}$ کے مقامی سمتیہ رکھنے والے نقاط ہم خطی ہیں۔

حل

فرض کرو کے O مبدا ہے، $\overrightarrow{OA}$، $\overrightarrow{OB}$ اور $\overrightarrow{OC}$ بالترتیب $2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$، $3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ اور $6\hat{i} - 5\hat{j} + 7\hat{k}$ لیجئے۔ تو

$$\overrightarrow{AB} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k} \quad \text{اور} \quad \overrightarrow{AC} = 4\hat{i} - 8\hat{j} + 12\hat{k}.$$

اس لئے $\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AB}$ ہے۔ اسی سے $\overrightarrow{AB}$ اور $\overrightarrow{AC}$ متوازی ہیں۔ ان کے عام نقطہ A ہے۔ چنانچہ یہ تینوں نقطے ہم خط ہوتے ہیں۔

تبادل طریقہ (Alternative method)

مان لیجئے O مبدا ہے۔

$$\overrightarrow{OA} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}, \overrightarrow{OB} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k} \text{ and } \overrightarrow{OC} = 6\hat{i} - 5\hat{j} + 7\hat{k}$$

$$\overrightarrow{AB} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k} \; ; \; \overrightarrow{BC} = 3\hat{i} - 6\hat{j} + 9\hat{k} \; ; \; \overrightarrow{CA} = -4\hat{i} + 8\hat{j} - 12\hat{k}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{14} \; ; \; \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{126} = 3\sqrt{14} \; ; \; \left|\overrightarrow{CA}\right| = \sqrt{224} = 4\sqrt{14}.$$

چنانچہ، $AC = AB + BC$

لہذا A، B، C ایک خط پر مبنی ہیں۔ یعنی کہ دئے گئے نقاط ہم خطی ہیں۔

مثال 8.8

سمتیہ $4\hat{i} - 3\hat{j} + 10\hat{k}$ کے متوازی اور قدر 5 کی مقامی سمتیہ کا نقطہ معلوم کیجئے۔

حل

فرض کرو کے $\vec{a}$ کی طرح $4\hat{i} - 3\hat{j} + 10\hat{k}$ لیجئے۔

08_11th-Maths-Vol2-Unit8_UM.indd 66 21-02-2023 16:24:00

سمت $\hat{a}$ پر اکائی سمتیہ $\vec{a}$ سے $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ مراد $\frac{4\hat{i}-3\hat{j}+10\hat{k}}{5\sqrt{5}}$ یعنی کہ قدر $4\hat{i}-3\hat{j}+10\hat{k}$ اور 5

$5\left(\frac{4\hat{i}-3\hat{j}+10\hat{k}}{5\sqrt{5}}\right)=\frac{4\hat{i}}{\sqrt{5}}-\frac{3}{\sqrt{5}}\hat{j}+2\sqrt{5}\,\hat{k}$ کے متوازی سمتیہ ہوگا۔

چنانچہ مطلوبہ نقطہ $\left(\frac{4}{\sqrt{5}},-\frac{3}{\sqrt{5}},2\sqrt{5}\right)$ ہے۔

مثال 8.9

$2\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}$، $4\hat{i}+\hat{j}+9\hat{k}$ اور $10\hat{i}-\hat{j}+6\hat{k}$ کے مقامی سمتیہ رکھنے والے نقاط سے قائمۃالزاویہ بنتا ہے۔

حل

O مبدا رکھنے والے A، B، C نقاط کے مقامی سمتیے لیا گیا ہے۔

یعنی کہ $\overrightarrow{OA}=2\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}$, $\overrightarrow{OB}=4\hat{i}+\hat{j}+9\hat{k}$ اور $\overrightarrow{OC}=10\hat{i}-\hat{j}+6\hat{k}$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(4\hat{i}+\hat{j}+9\hat{k})-(2\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k})=2\hat{i}-3\hat{j}+6\hat{k}.$$

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2+(-3)^2+6^2}=\sqrt{4+9+36}=7$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(10\hat{i}-\hat{j}+6\hat{k})-(4\hat{i}+\hat{j}+9\hat{k})=6\hat{i}-2\hat{j}-3\hat{k}.$$

$$BC = |\overrightarrow{BC}|=\sqrt{6^2+(-2)^2+(-3)^2}=\sqrt{36+4+9}=7$$

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}=(2\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k})-(10\hat{i}-\hat{j}+6\hat{k})=-8\hat{i}+5\hat{j}-3\hat{k}.$$

$$CA = |\overrightarrow{CA}| =\sqrt{(-8)^2+5^2+(-3)^2}=\sqrt{64+25+9}=\sqrt{98}$$

$$BC^2 = 49,\ CA^2=98,\ AB^2=49.$$

$$CA^2 = BC^2+AB^2.$$

چنانچہ دیے گئے نقاط سے واضح طور پر مثلث قائمۃالزاویہ بنتا ہے۔

مثال 8.10

ثابت کیجئے کہ سمتیہ $5\hat{i}+6\hat{j}+7\hat{k}$، $7\hat{i}-8\hat{j}+9\hat{k}$، $3\hat{i}+20\hat{j}+5\hat{k}$ ہم مستوی ہیں۔

حل

فرض کرو کہ $5\hat{i}+6\hat{j}+7\hat{k} = s(7\hat{i}-8\hat{j}+9\hat{k})+t(3\hat{i}+20\hat{j}+5\hat{k})$

اجزاء کے مساوات سے، ہمارے پاس ہے

$$\begin{aligned} 7s+3t &= 5\\ -8s+20t &= 6\\ 9s+5t &= 7 \end{aligned}$$

پہلے دو مساوات کو حل کرنے سے $s=t=\frac{1}{2}$ حاصل ہوتا ہے۔ یہ تیسرے مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔

چنانچہ ایک سمتیہ کو دو سمتیوں کے یک درجی امتزاج میں لکھ سکتے ہیں۔اس لئے دیے گئے سمتیے ہم مستوی ہیں (Coplanar)

08_11th-Maths-Vol2-Unit8_UM.indd 67 21-02-2023 16:24:01

مشق 8.2

1۔ جانچ کریں کہ درج ذیل کے تناسب کچھ سمتیہ کی سمتی کو سائن ہیں یا نہیں۔

(i) $\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ (iii) $\frac{4}{3}, 0, \frac{3}{4}$

2۔ دئے گئے سمت تناسب والے سمتیہ کی سمتی کو سائن تلاش کیجئے۔

(i) $1, 2, 3$ (ii) $3, -1, 3$ (iii) $0, 0, 7$

3۔ درج ذیل سمتیہ کے لئے سمت کو سائن اور سمت تناسب تلاش کریں۔

(i) $3\hat{i} - 4\hat{j} + 8\hat{k}$ (ii) $3\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ (iii) $\hat{j}$

(iv) $5\hat{i} - 3\hat{j} - 48\hat{k}$ (v) $3\hat{i} - 3\hat{k} + 4\hat{j}$ (vi) $\hat{i} - \hat{k}$

4۔ نقاط $(1, 0, 0)$، $(0, 1, 0)$ اور $(0, 0, 1)$ کو جوڑ کر ایک مثلث بنتا ہے۔ وسطی لمبائی کی سمتی کو سائن محسوب کریں۔

5۔ اگر $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{\sqrt{2}}$، a کچھ سمتیہ کے سمتی کو سائن ہو تو a کو معلوم کیجئے۔

6۔ نقاط $(1, 0, 0)$ اور $(0, 1, 0)$ ملانے والے خط کے سمتی تناسب $(a\ ,\ a+b\ ,\ a+b+c)$ ہو تو a, b, c کی قیمت معلوم کیجئے۔

7۔ ثابت کیجئے کہ سمتیہ $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$، $3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$ $\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$ مثلث قائمۃالزاویہ بناتے ہیں۔

8۔ اگر سمتیہ $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 9\hat{k}$ اور $\vec{b} = \hat{i} + \lambda\hat{j} + 3\hat{k}$ متوازی ہو تو کی λ قیمت معلوم کیجئے۔

9۔ ثابت کیجئے کہ ذیل کے سمتیہ ہم مستوی (Coplanar) ہیں۔

(i) $\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k},\ -2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k},\ -\hat{j} + 2\hat{k}$

(ii) $2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k},\ \hat{i} - \hat{j},\ 7\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$

10۔ ثابت کیجئے کہ وہ نقاط جن کے مقامی سمتیے $-\hat{j} - \hat{k},\ 4\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k},\ 3\hat{i} + 9\hat{j} + 4\hat{k}$ اور $-4\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k}$ ہم مستوی ہیں۔

11۔ اگر $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$، $\vec{b} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - 5\hat{k}$، اور $\vec{c} = -3\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ ہو تو ذیل کے سمتیہ کے قدر اور سمت کو سائن معلوم کیجئے۔ (i) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ (ii) $3\vec{a} - 2\vec{b} + 5\vec{c}$

12۔ اگر ایک مثلث کے راسوں کے مقامی سمتیہ $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$، $3\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$ اور $-2\hat{i} + 3\hat{j} - 7\hat{k}$ ہو تو اس مثلث کا احاطہ دریافت کیجئے۔

13۔ اگر $3\vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c}$ ہو تو سمتیہ $\vec{a} = 3\hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k}$، $\vec{b} = -2\hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k}$ اور $\vec{c} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ کا متوازی اکائی سمتیہ معلوم کیجئے۔

14۔ مقامی سمتیہ $\vec{a}$، $\vec{b}$، $\vec{c}$ کے تین نقاط $2\vec{a} - 7\vec{b} + 5\vec{c} = \vec{0}$ کو مطمئن کرتا ہے۔ ثابت کیجئے کہ وہ ہم خطی نقاط ہیں؟

15۔ نقاط P, Q, R, S کے مقامی سمتیہ بالترتیب $i + j + k$، $2\hat{i} + 5\hat{j}$، $3\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ اور $\hat{i} - 6\hat{j} - \hat{k}$ ہیں۔ ثابت کیجئے کہ PQ کا متوازی RS ہے۔

61۔ m کی قیمت معلوم کیجئے جو $m(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ ایک اکائی سمتیہ ہے۔

71۔ ثابت کیجئے کہ نقاط $A(1, 1, 1)$، $B(1, 2, 3)$ اور $C(2, -1, 1)$ ایک مثلث مساوی الساقین کے راس ہیں۔

08_11th-Maths-Vol2-Unit8_UM.indd 68 21-02-2023 16:24:02

8.8 سمتیوں کا ضرب (Product of Vectors)

ہم ابھی تک دو سمتیوں کی جمع، ایک سمتیہ سے دوسرے سمتیہ کی تفریق اور ایک سمتیہ کو عددیہ سے کس طرح ضرب کرنا دیکھ چکے ہیں۔ اب ہم دو سمتیوں کا حاصل ضرب کا مطالعہ کریں گے۔ سمتیوں کے ضرب میں دو طریقے ہیں۔

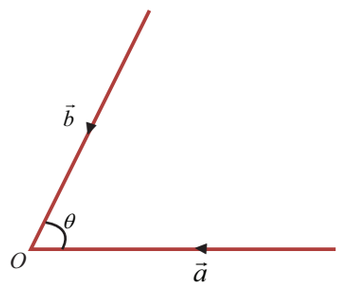
(i) عددیہ (یا نقطہ) حاصل ضرب

(ii) سمتیہ (یا کراس) حاصل ضرب

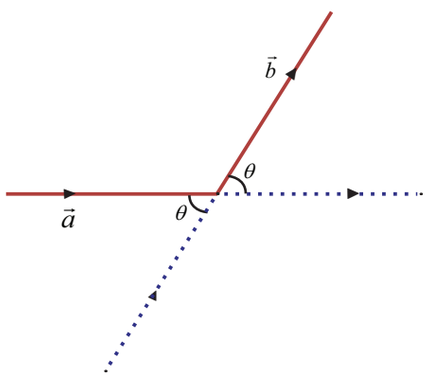
ان ضرب کو حاصل کرنے کے لئے دو سمتیوں کا درمیانی زاویہ درکار ہے۔

8.8.1 دو سمتیوں کا درمیانی زاویہ (Angle between two vectors)

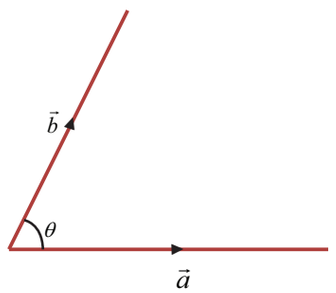
مان لیجئے سمتیے $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کی نمائندگی بالترتیب $\overrightarrow{OA}$ اور $\overrightarrow{OB}$ کرتے ہیں۔ $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ دو سمتیوں کے درمیانی زاویہ سے مراد ان کے دو سمتیوں کے درمیانی زاویہ ہے۔ یہ سمتیں ارتکاز مقام سے اکھٹا (جمع) (شکل 8.34) ہوں گے۔ یا جدا (وسیع) (شکل 8.36) ہوں گے۔



شکل 8.34



شکل 8.35



شکل 8.36

نوٹ کریں کہ، اگر θ دو سمتیوں کے درمیانی زاویہ O ہو تو $0 \leq \theta \leq \pi$

جب $\theta = 0$ یا π ہو تو سمتیہ یعنی متوازی ہوتے ہیں۔

اگر دو سمتیہ (شکل 8.35) کی طرح، جمع یا وسیع نہ ہو تو ایک سمتیہ کی لمبائی کو بڑھا کر اکھٹا یا وسیع کرکے درمیانیز اویہ کو حاصل کرتے ہیں۔

8.8.2 عددیہ حاصل ضرب: (Scalar product)

تعریف 8.16

دو غیر صفری سمتیوں $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کے درمیانی زاویہ θ ہو۔ (شکل 8.34) جو کہ عددیہ ضرب یا نقطہ ضرب $\vec{a} \cdot \vec{b}$ سے ظاہر کرکے اس طرح بیان کیا گیا $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ ہے۔

چنانچہ، $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ محسوب کرنے سے حقیقی عدد ملتا ہے۔اس لئے عددیہ حاصل ضرب کہتے ہیں۔اس کے درمیان میں نقطہ (.) کی استعمال کرنے سے نقطہ حاصل ضرب بھی کہتے ہیں۔

عددیہ حاصل ضرب کا علم ہندسی تشریح: (ایک سمتیہ پر دوسرے سمتی تطلیل)

مان لیجئے $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$، $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ اور θ کا درمیانی زاویہ $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ ہے۔

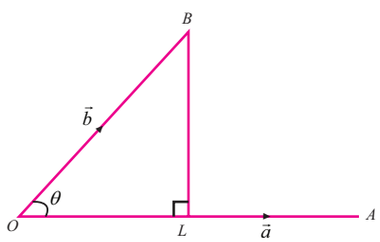
OA کا عمود BL ہے۔ مثلث قائمۃالزاویہ OLB میں

$$\cos\theta = \frac{OL}{OB}$$

$$OL = OB\cos\theta = |\vec{b}|\cos\theta$$

مگر $\vec{b}$ میں $\vec{a}$ کی تطلیل OL ہے

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = |\vec{a}|(OL)$$



شکل 8.37

08_11th-Maths-Vol2-Unit8_UM.indd 69 14-03-2023 15:18:41

اسی طرح $\vec{a}$ میں $\vec{b}$ (تطلیل $\vec{b}$ اور $\vec{a}$) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|$

اسی طرح $\vec{b}$ میں $\vec{a}$ کی تطلیل $=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$

اسی طرح میں $\vec{b}$ میں $\vec{a}$ $=\dfrac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{|\vec{b}|}$

8.8.3 عددیہ حاصل ضرب کے خصوصیات (Properties of Scalar Product)

(i) دو سمتیوں کا عددیہ حاصل ضرب متبادلہ ہے۔

عام تعریف کے ساتھ $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=|\vec{b}||\vec{a}|\cos\theta=\vec{b}\cdot\vec{a}$

یعنی کسی بھی سمتیہ $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کے لئے $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

(ii) عددیہ حاصل ضرب کی نوعیت

ہم جانتے ہیں کہ $0\le\theta\le\pi$

اگر $\theta=0$ ہو تو $\vec{a}\cdot\vec{b}=ab$ (دونوں سمتیے متوازی اور یکساں سمت میں ہیں $\Leftarrow\theta=0$)

اگر $\theta=\pi$ ہو تو $\vec{a}\cdot\vec{b}=-ab$ (دونوں سمتیے متوازی اور مخالف سمت پر ہوں گے $\Leftarrow\theta=\pi$)۔

اگر $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ ہو تو $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ (دونوں سمتیے ایک دوسرے کے عمود ہیں $\Leftarrow\theta=\dfrac{\pi}{2}$)۔

اگر $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ ہو تو $\cos\theta$ مثبت اور اس لئے $\vec{a}\cdot\vec{b}$ مثبت ہوگا۔

اگر $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ ہو تو $\cos\theta$ منفی اور اس لئے $\vec{a}\cdot\vec{b}$ منفی ہوگا۔

یعنی $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ہے۔
$$\begin{cases}>0 & \text{کے لئے } 0\le\theta<\pi/2\\ 0 & \text{کے لئے } \theta=\pi/2\\ <0 & \text{کے لئے } \pi/2<\theta\le\pi\end{cases}$$

(iii) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftarrow|\vec{a}|=0$ یا $|\vec{b}|=0$ یا $\theta=\dfrac{\pi}{2}$

(iv) کسی دو غیر صفر سمتیہ $\vec{a}$ اور $\vec{b}$، $\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}$ کے لئے کا عمود $\vec{b}$ ہے۔

(v) $\vec{a}\cdot\vec{a}$ کی نمائندگی کے مختلف طریقے

$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2=(\vec{a})^2=\vec{a}^2=a^2$

مسائل کو حل کرکے وقت یہ نمائندگی ضروری ہے۔

(vi) $\hat{i}\cdot\hat{i}=\hat{j}\cdot\hat{j}=\hat{k}\cdot\hat{k}=1$ اور $\hat{i}\cdot\hat{j}=\hat{j}\cdot\hat{k}=\hat{k}\cdot\hat{i}=0$ (کیسے؟)

(vii) کسی دو عددیہ λ اور μ کے لئے

$\lambda\vec{a}\cdot\mu\vec{b}=\lambda\mu(\vec{a}\cdot\vec{b})=(\lambda\mu\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\mu\vec{b})$

(viii) سمتیہ کی جمع پر عددیہ حاصل ضرب کی تقسیمی خصوصیات درست ہے۔ یعنی

$\vec{a}$، $\vec{b}$، $\vec{c}$ کوئی بھی تین سمتیہ کے لئے

(بائیں تقسیم) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

(دائیں تقسیم) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

اور

$\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}$ اور $(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{c}$

اسے کسی بھی سمتیہ کی تعداد تک بڑھایا جا سکتا ہے۔

08_11th-Maths-Vol2-Unit8_UM.indd 70 21-02-2023 16:24:05

(ix) سمتیہ کے ضابطہ

$$(\vec{a}+\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}$$
$$(\vec{a}-\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$$
$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = |\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$$

ثابت:

(iii) خصوصیات 3 سے

$$(\vec{a}+\vec{b})^2 = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

اسی طرح دوسرے کو بھی ثابت کرسکتے ہیں۔

(x) دو سمتیہ عددیہ حاصل ضرب کے لئے عملی کلیہ

فرض کرو کہ $\vec{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ اور $\vec{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= (a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k})\cdot(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k})\\ &= a_1b_1(\hat{i}\cdot\hat{i})+a_1b_2(\hat{i}\cdot\hat{j})+a_1b_3(\hat{i}\cdot\hat{k})\\ &\quad +a_2b_1(\hat{j}\cdot\hat{i})+a_2b_2(\hat{j}\cdot\hat{j})+a_2b_3(\hat{j}\cdot\hat{k})+a_3b_1(\hat{k}\cdot\hat{i})+a_3b_2(\hat{k}\cdot\hat{j})+a_3b_3(\hat{k}\cdot\hat{k})\\ &= a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.\end{aligned}$$

لہٰذا، عددیہ حاصل ضرب سے مراد دو سمتی عددوں کے متعلقہ عددی سر کے حاصل ضرب کا مساوی ہے۔

(xi) $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کا درمیانی زاویہ ہو تو $\theta=\cos^{-1}\left[\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}\right]$.

(xii) کوئی بھی دو سمتیہ $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کے لئے $|\vec{a}+\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$. ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ اگر $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ مثلث کے دو ضلعے $\vec{a}+\vec{b}$ ہو تو اس کا حاصل جمع $|\vec{a}|+|\vec{b}|\ge|\vec{a}+\vec{b}|$ اس مثلث کا تیسرا ضلعہ ہوگا۔ مثلث کے اضلاع کی خصوصیات سے

(xiii) کوئی دو سمتیہ $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کے لئے $|\vec{a}\cdot\vec{b}|\le|\vec{a}||\vec{b}|$

اگر کہ کوئی ایک صفر سمتیہ ہو تو، دونوں مساوی ہیں۔اگرچہ دونوں غیر صفری سمتیہ ہو تو

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

یعنی کہ $\dfrac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|} = |\cos\theta|\le 1$

$$\Rightarrow |\vec{a}\cdot\vec{b}| \le |\vec{a}||\vec{b}|.$$

مثال 8.11

ذیل کے لئے $\vec{a}\cdot\vec{b}$ معلوم کیجئے۔

(i) $\vec{a}=\hat{i}-\hat{j}+5\hat{k}$ اور $\vec{a}=\hat{i}-\hat{j}+5\hat{k}$

(ii) $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کی نمائندگی کرنے والے نقاط $(2,3,-1)$ اور $(-1,2,3)$

حل

(i) $\vec{a}\cdot\vec{b} = (\hat{i}-\hat{j}+5\hat{k})\cdot(3\hat{i}-2\hat{k}) = (1)(3)+(-1)(0)+(5)(-2) = 3-10 = -7$

(ii) $\vec{a}=2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}$ اور $\vec{b}=-\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (2)(-1)+(3)(2)+(-1)(3) = -2+6-3 = 1.$$

08_11th-Maths-Vol2-Unit8_UM.indd 71 21-02-2023 16:24:06

مثال 8.12

اگر $(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})$ ہو تو $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$ اور $\vec{b}=3\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ کیجئے

حل

$$(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b}) = 2\vec{a}\cdot\vec{a}+5\vec{a}\cdot\vec{b}-3\vec{b}\cdot\vec{b} = 2(1+1+4)+5(3+2-2)-3(9+4+1) = -15\,.$$

مثال 8.13

اگر $\vec{a}=2\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$، $\vec{b}=-\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ اور $\vec{c}=3\hat{i}+\hat{j}$ ہو اور $\vec{a}+\lambda\vec{b}$ سے عمود ہے تو $\vec{c}$ کی قیمت معلوم λ کیجئے۔

حل

$$\begin{aligned}(\vec{a}+\lambda\vec{b})\cdot\vec{c}=0 \;&\Rightarrow\; \vec{a}\cdot\vec{c}+\lambda\vec{b}\cdot\vec{c}=0\\ &\Rightarrow (6+2)+\lambda\,(-3+2)=0\\ &\Rightarrow \lambda=8.\end{aligned}$$

مثال 8.14

اگر $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$ ہو تو ثابت کرو کے $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ عمود ہیں۔

حل

$$\begin{aligned}|\vec{a}+\vec{b}| &= |\vec{a}-\vec{b}|\\ |\vec{a}+\vec{b}|^2 &= |\vec{a}-\vec{b}|^2\\ |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b} &= |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}\\ \Rightarrow\quad 4\vec{a}\cdot\vec{b} &= 0\\ \vec{a}\cdot\vec{b} &= 0\end{aligned}$$

چنانچہ $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ عمودی ہیں۔

مثال 8.15

$\vec{r}$ کوئی بھی سمتیہ $\vec{r}=(\vec{r}\cdot\hat{i})\,\hat{i}+(\vec{r}\cdot\hat{j})\hat{j}+(\vec{r}\cdot\hat{k})\hat{k}$ کے لئے ثابت کیجئے کہ

حل

فرض کرو کہ $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$

$$\begin{aligned}\vec{r}\cdot\hat{i} &= \left(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}\right)\cdot\hat{i}=x\\ \vec{r}\cdot\hat{j} &= \left(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}\right)\cdot\hat{j}=y\\ \vec{r}\cdot\hat{k} &= \left(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}\right)\cdot\hat{k}=z\end{aligned}$$

$$(\vec{r}\cdot\hat{i})\,\hat{i}+(\vec{r}\cdot\hat{j})\hat{j}+(\vec{r}\cdot\hat{k})\hat{k}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}=\vec{r}$$

اس طرح، $\vec{r}=(\vec{r}\cdot\hat{i})\hat{i}+(\vec{r}\cdot\hat{j})\hat{j}+(\vec{r}\cdot\hat{k})\hat{k}$

مثال 8.16

سمتیہ $5\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$ اور $6\hat{i}-8\hat{j}-\hat{k}$ کے درمیانی زاویہ معلوم کیجئے۔

حل

فرض کرو کہ $\vec{a}=5\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$ اور $\vec{b}=6\hat{i}-8\hat{j}-\hat{k}$

لیا گیا ہے کے درمیانی زاویہ θ ہے۔

08_11th-Maths-Vol2-Unit8_UM.indd 72 21-02-2023 16:24:07

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{30-24-4}{\sqrt{50}\sqrt{101}} = \frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{101}} \quad \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left[\frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{101}}\right].$$

مثال 8.17

اگر نقاط A، B، C اور D بالترتیب $(4,-3,0), (7,-5,-1), (-2,1,3), (0,2,5)$ ہو تو $\overrightarrow{CD}$ میں $\overrightarrow{AB}$ کی تطلیل معلوم کیجئے۔

حل

O مبدا لیا گیا ہے۔

لہذا $\overrightarrow{OA} = 4\hat{i} - 3\hat{j}$، $\overrightarrow{OB} = 7\hat{i} - 5\hat{j} - \hat{k}$، $\overrightarrow{OC} = -2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$، $\overrightarrow{OD} = 2\hat{j} + 5\hat{k}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = 3\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$، $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = 2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$

اس لئے $\overrightarrow{AB}$ پر $\overrightarrow{CD}$ کی تطلیل ہے۔ $\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CD}|} = \dfrac{6-2-2}{3} = \dfrac{2}{3}$

مثال 8.18

اگر $\vec{a}$، $\vec{b}$ اور $\vec{c}$ سمتیہ $\vec{a} - \sqrt{3}\,\vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ سے مطمئن کرتا ہے تو $\vec{a}$ اور $\vec{c}$ کا درمیانی زاویہ معلوم کیجئے۔

حل

مان لیجئے کہ θ کا درمیانی زاویہ $\vec{a}$ اور $\vec{c}$ ہے۔

$$\begin{aligned}
\vec{a} - \sqrt{3}\,\vec{b} + \vec{c} &= \vec{0} \\
\Rightarrow \quad |(\vec{a}+\vec{c})| &= |\sqrt{3}\,\vec{b}| \\
\Rightarrow \quad |\vec{a}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{c}|\cos\theta &= 3|\vec{b}|^2 \\
\Rightarrow \quad 1 + 1 + (2)(1)(1)\cos\theta &= 3(1) \\
\Rightarrow \quad \cos\theta &= \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

مثال 8.19

ثابت کیجئے کہ کہ نقاط $(4,-3,1)$، $(2,-4,5)$ اور $(1,-1,0)$ ایک مثلث قائمۃالزاویہ بناتا ہے۔

حل

عام طور پر یہ نقاط ایک مثلث بناتے ہیں۔ ایک زاویہ $\dfrac{\pi}{2}$ ثابت کرنا کافی ہے۔ اس لئے ان کے ضلعوں کو تلاش کریں۔

مان لیجئے کہ O مبدا اور A، B اور C بالترتیب $(4,-3,1)$، $(2,-4,5)$ اور $(1,-1,0)$ ہے۔

$$\overrightarrow{OA} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}, \quad \overrightarrow{OB} = 2\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}, \quad \overrightarrow{OC} = \hat{i} - \hat{j}$$

اسی طرح $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = -2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$

واضح طور پر $\overrightarrow{BC} = -\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$; $\overrightarrow{CA} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA} = 0$$

اس طرح ایک زاویہ ہے، $\dfrac{\pi}{2}$ لہذا وہ ثلث قائمہ الزاویہ بناتے ہیں۔

08_11th-Maths-Vol2-Unit8_UM.indd 73 21-02-2023 16:24:08

نوٹ 8.5

فرض کریں کہ تین ضلعے سمتیہ کی شکل میں دئے گئے ہیں۔ ثابت کیجئے کہ

(i) سمتیوں کی حاصل جمع $\vec{0}$ یا دو سمتیوں کی حاصل ضرب تیسرے ضلع کے برابر ہے، تو مثلث کو قائم کریں۔

(ii) مثلث قائمۃالزاویہ کا ایک زاویہ $\frac{\pi}{2}$ ہو تو کوئی دو سمتیوں کا نقطہ حاصل ضرب 0 ہے۔

مشق 8.3

1۔ $\vec{a}.\vec{b}$ معلوم کیجئے جب،

(i) $\vec{a}=\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ اور $\vec{b}=3\hat{i}-4\hat{j}-2\hat{k}$ (ii) $\vec{a}=2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ اور $\vec{b}=6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$

2۔ ذیل کے سمتیہ $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ عمود ہے تو λ کی قیمت معلوم کیجئے۔

(i) $\vec{a}=2\hat{i}+\lambda\hat{j}+\hat{k}$ اور $\vec{b}=\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$ (ii) $\vec{a}=2\hat{i}+4\hat{j}-\hat{k}$ اور $\vec{b}=3\hat{i}-2\hat{j}+\lambda\hat{k}$.

3۔ اگر سمتیہ $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کے لئے ہو تو $|\vec{a}|=10,|\vec{b}|=15$ اور $\vec{a}\cdot\vec{b}=75\sqrt{2}$ ہو تو درمیانی $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ زاویہ معلوم کیجئے۔

4۔ ذیل کے سمتیوں کا درمیانی زاویہ معلوم کیجئے۔

(i) $2\hat{i}+3\hat{j}-6\hat{k}$ اور $6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$ (ii) $\hat{i}-\hat{j}$ اور $\hat{j}-\hat{k}$

5۔ اگر $\vec{a}$، $\vec{b}$، $\vec{c}$ سمتیہ کے لئے $\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ اور $|\vec{a}|=3,|\vec{b}|=4,|\vec{c}|=7$ ہو تو $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کے درمیانی زاویہ معلوم کیجئے۔

6۔ ثابت کیجئے کہ $\vec{a}=2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k}$، $\vec{b}=6\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$، اور $\vec{c}=3\hat{i}-6\hat{j}+2\hat{k}$ ایک دوسرے کے عمود ہے۔

7۔ ثابت کیجئے کہ $-\hat{i}-2\hat{j}-6\hat{k}$، $2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$، اور $-\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k}$ ایک قائم مثلث بناتا ہے۔

8۔ اگر $|\vec{a}|=5,\ |\vec{b}|=6,\ |\vec{c}|=7$ اور $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ دریافت $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$ کیجئے۔

9۔ ثابت کیجئے کہ (2, – 1, 3)، (4, 3, 1) اور (3, 1, 2) ہم خطی نقاط ہیں۔

10۔ اگر $\vec{a}$، $\vec{b}$ اکائی سمتیہ اوردرمیانی زاویہ ہو تو θ ذیل کو ثابت کیجئے۔

(i) $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}|\vec{a}-\vec{b}|$ (ii) $\cos\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}|\vec{a}+\vec{b}|$ (iii) $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{|\vec{a}-\vec{b}|}{|\vec{a}+\vec{b}|}$.

11۔ تین سمتیہ $\vec{a}$، $\vec{b}$، $\vec{c}$ اس طرح کہ $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=4,\ |\vec{c}|=5$ اور ہر ایک سمتیہ دوسرے دو سمتیوں کے حاصل جمع کا عمود ہو تو $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$ معلوم کیجئے۔

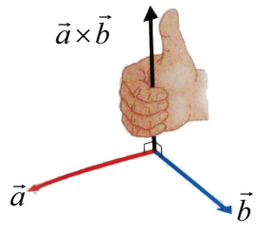
12۔ سمتیہ $\hat{i}+3\hat{j}+7\hat{k}$ کا سمتیہ $2\hat{i}+6\hat{j}+3\hat{k}$ پر تظلیل معلوم کیجئے۔

13۔ سمتیہ λ کا سمتیہ پر $\vec{a}=\lambda\hat{i}+\hat{j}+4\hat{k}$ تظلیل 4 اکائیاں ہو تو $\vec{b}=2\hat{i}+6\hat{j}+3\hat{k}$ کی قیمت معلوم کیجئے۔

14۔ تین سمتیہ $\vec{a}$، $\vec{b}$ اور $\vec{c}$ اس طرح کہ $|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=3,|\vec{c}|=4$ اور $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ ہو تو $4\vec{a}\cdot\vec{b}+3\vec{b}\cdot\vec{c}+3\vec{c}\cdot\vec{a}$ دریافت کیجئے۔

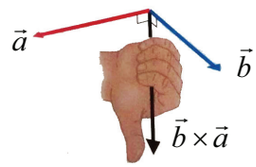
8.8.4 سمتیہ کا حاصل ضرب (Vector Product)

دو سمتیوں کا سمتیہ حاصل ضرب کی وضاحت کے لئے دائیں ہاتھ کا نظام اور بائیں ہاتھ کا نظام درکار ہے۔



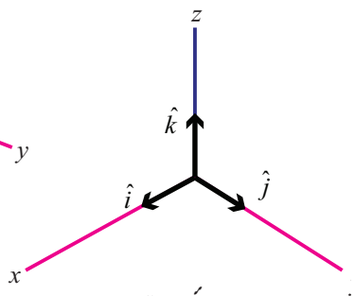
دائیں ہاتھ کے انگلیوں کو $\vec{a}$ کے ساتھ رکھتے ہوئے، انگلیوں کو $\vec{a}$ سے $\vec{b}$ کی طرف گردشی سمت میں گھماؤ (زاویہ $180°$ سے کم نہ ہو) اب انگوٹھا $\vec{a}\times\vec{b}$ اشارہ کرتا ہے۔ اب دائیں ہاتھ کے قانون سے $\vec{b}\times\vec{a}$ کا سمت سمت کا مخالف $\vec{a}\times\vec{b}$ ہے۔ (شکل 8.38 دیکھیں)

مزید ہم $\vec{a}$ کی سمت میں $\vec{b}$ زاویہ $\theta(<\pi)$ پر گھمائی جاتی ہے۔ سمت $\vec{a}\times\vec{b}$ دائیں ہاتھ کا قانون کی سمت میں پیچ آگے کی طرف بڑھتا ہے۔



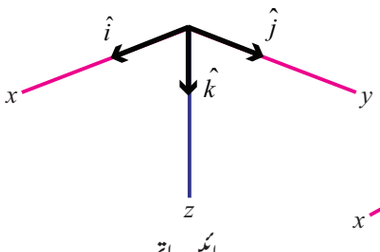
شکل 8.38

ایک کارتیسی محدودی سے دائیں ہاتھ کا نظام بنتا ہے تو شکل 8.39 کی طرح محوروں کے مثبت سمتوں پر $\hat{i}$، $\hat{j}$، $\hat{k}$ اکائی سمتیہ بنتا ہے۔ اگر چہ سمت شکل 8.40 کی طرح ہو تو $\hat{k}$ اسے بائیں ہاتھ کا نظام کہتے ہیں۔



دائیں ہاتھ

شکل 8.39



بائیں ہاتھ

شکل 8.40



دائیں ہاتھ

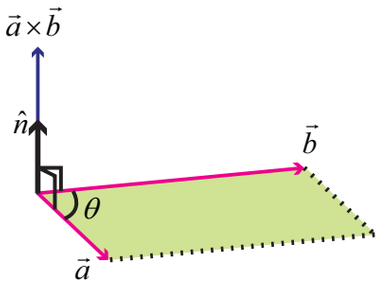
شکل 8.41



بائیں ہاتھ

شکل 8.42

تعریف 8.17



شکل 8.43

دو غیر صفر سمتیوں $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کا سمتیہ کا حاصل ضرب $\vec{a}\times\vec{b}$ سے ظاہر کیا گیا ہے جیسا کہ اس طرح بیان کیا گیا ہے

$$\vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n},$$

جہاں $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کے درمیانی زاویہ θ ہے۔

جہاں $\vec{a}$، $\vec{b}$، $\hat{n}$ ایک سیدھے ہاتھ کا قانون بناتے ہیں۔

$\vec{a}\times\vec{b}$ سے مراد عددیہ $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ سمت $\hat{n}$ پر بننے والا سمتیہ ہے۔ صرف یہی نہیں، سمتیہ $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کے مسطح کے عمود میں $\vec{a}\times\vec{b}$ بنتا ہے۔

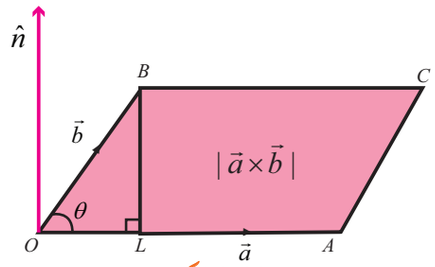
نوٹ 8.6

(i) $\hat{n}$ کی سمت کو محسوب کرنے کی ترتیب درکار ہے۔

(ii) سمتیہ حاصل ضرب سے ایک سمتیہ ملتا ہے۔اسی ضرب کے لئے '$\times$' علامت استعمال کرتے ہیں۔اس لئے اسے کراس حاصل ضرب کہتے ہیں۔

08_11th-Maths-Vol2-Unit8_UM.indd 75 21-02-2023 16:24:11

سمتیہ حاصل ضرب کا علم ہندسی تشریح: (Geometrical interpretation of vector product)



شکل 8.44

فرض کیجئے کہ متوازی الاضلاع $OACB$ کے متصلہ ضلعے $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ اور $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ ہو۔
لیا گیا $|\underline{AOB}=\theta$
شکل 8.44 سے

$$\sin\theta = \frac{BL}{OB}$$

$$BL = (OB)\sin\theta = |\vec{b}|\sin\theta$$

اس سے $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta = |\vec{a}|(BL)$

متوازی لاضلاع $OACB$ کا رقبہ = (قاعدہ) (اونچائی) =

اس طرح $\vec{a}\times\vec{b}$ کا عددیہ متصلہ $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ ضلعے $\hat{n}$ والے متوازی الاضلاع کا رقبہ کے برابر ہے $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ اس کا سمت صرف مشتمل مسطح کے عمود ہی نہیں بلکہ $\vec{a}$، $\vec{b}$، $\hat{n}$ دائیں ہاتھ کا نظام بھی بناتا ہے۔

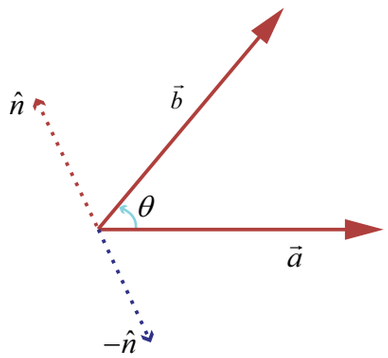
اس طرح، $|\vec{a}\times\vec{b}|$ = متوازی الاضلاع کا رقبہ جس کے متصلہ ضلع $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ ہو

متوازی الاضلاع $OACB$ کے رقبہ کا نصف سے ہم مثلث OAC کے رقبہ کو تلاش کرتے ہیں۔

تلاش کیجئے / کریں۔

$\vec{a}$ اور $\vec{b} = \frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$ متصلہ ضلعے کے مثلث کا رقبہ

8.8.5 خصوصیات (Properties)



شکل 8.45

(i) سمتیہ حاصل ضرب متبادلہ نہیں ہے۔

تعریف سے

$$\vec{b}\times\vec{a} = |\vec{b}||\vec{a}|\sin\theta(-\hat{n})$$

$\vec{b}$، $\vec{a}$، $-\vec{n}$ دائیں ہاتھ کا نظام بنائیں گے۔

$$= -|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}$$

$$= -(\vec{a}\times\vec{b})$$

اس لئے سمتیہ حاصل ضرب متبادلہ نہیں ہے۔

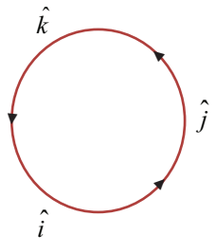
(ii) اگر دو سمتیے ہم خطی یا متوازی ہو تو $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ ہے۔ (کیسے؟)

مگر $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0} \Rightarrow \vec{a}=\vec{0}$ متوازی یا $\vec{b}=\vec{0}$ یا $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ متوازی ہے

(iii) کوئی دو غیر صفر سمتیہ $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کے لئے $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{b}$ اور $\vec{a}$ متوازی ہے

تلاش کریں: (Deduction)

$$\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$$



شکل 8.46

(iv) باہمی عمود اکائی سمتیوں $\hat{i}$، $\hat{j}$ اور $\hat{k}$ کے لئے (جو دائیں ہاتھ کا نظام بناتے ہیں) مندرجہ ذیل نتیجے حاصل ہوتے ہیں

یہ صاف ہے کہ

$$\hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{k} = \vec{0}$$

$$\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k}\ ;\ \hat{j}\times\hat{k}=\hat{i}\ ;\ \hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$$

$$\hat{j}\times\hat{i}=-\hat{k}\ ;\ \hat{k}\times\hat{j}=-\hat{i}\ ;\ \hat{i}\times\hat{k}=-\hat{j}$$ (کیسے؟)

08_11th-Maths-Vol2-Unit8_UM.indd 76 21-02-2023 16:24:13

(v) اگر $\theta = \frac{\pi}{2}$ ہو تو، تب $\vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\hat{n}$ ہے۔

(vi) کوئی دو عددیہ m اور n کے لئے

$$m\vec{a}\times n\vec{b} = mn(\vec{a}\times\vec{b}) = (mn\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(mn\vec{b}) = n\vec{a}\times m\vec{b} .$$

(vii) جمع پر سمتیہ حاصل ضرب کی تقسیمی خصوصیت درست ہے۔

یعنی کہ
$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{a}\times\vec{c})$$
$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = (\vec{a}\times\vec{c})+(\vec{b}\times\vec{c}).$$

اسے صرف تفریق کو ہی نہیں بلکہ دو سے زیادہ سمتیوں کے لئے بھی بڑھا سکتے ہیں۔

یعنی کہ،
$$\vec{a}\times(\vec{b}-\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})-(\vec{a}\times\vec{c})$$
$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}) = (\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{a}\times\vec{c})+(\vec{a}\times\vec{d})..$$

(viii) کر اس حاصل ضرب کا قانون

$$\vec{a} = a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k} , \quad \vec{b} = b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k} .$$
$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b} &= (a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}) \times (b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}) \\ &= a_1b_1(\hat{i}\times\hat{i})+a_1b_2(\hat{i}\times\hat{j})+a_1b_3(\hat{i}\times\hat{k})+a_2b_1(\hat{j}\times\hat{i}) \\ &\quad +a_2b_2(\hat{j}\times\hat{j})+a_2b_3(\hat{j}\times\hat{k})+a_3b_1(\hat{k}\times\hat{i})+a_3b_2(\hat{k}\times\hat{j})+a_3b_3(\hat{k}\times\hat{k}) \\ &= (a_2b_3-a_3b_2)\hat{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\hat{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\hat{k}\end{aligned}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} .$$

(ix) اگر θ اور کا درمیانی زاویہ $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ ہو تو $\theta = \sin^{-1}\left[\frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right]$ ہے۔

(اس کا ثبوت مشق کے لئے چھوڑ دیا گیا ہے)

نوٹ 8.7

اس میں θ ہمیشہ زاویہ حادہ ہوتا ہے۔چونکہ سمتیہ کا حاصل ضرب استعمال کرکے درمیانی زاویہ محسوب کریں تو زاویہ حادہ ہی حاصل ہوگا۔ اس لئے زاویہ کی احتساب کرنے کو نقطہ حاصل ضرب کا طریقہ بہتر ہے۔ اس سے θ کا مقام جان سکتے ہیں۔

(x) $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کے عمودی اکائی سمتیے $\pm\hat{n} = \pm\frac{(\vec{a}\times\vec{b})}{|\vec{a}\times\vec{b}|}$ ہے (کیسے؟)

λ عددیہ والے سمتیے، $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ دونوں سے عمودی ہو تو $\pm\lambda\hat{n} = \pm\lambda\frac{(\vec{a}\times\vec{b})}{|\vec{a}\times\vec{b}|}$

مثال 8.20

اگر $\vec{a} = 3\hat{i}+4\hat{j}$ اور $\vec{b} = \hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ ہو تو $|\vec{a}\times\vec{b}|$ معلوم کیجئے۔

حل

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i}(4-0)-\hat{j}(3-0)+\hat{k}(3-4) = 4\hat{i}-3\hat{j}-\hat{k} .$$
$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |4\vec{i}-3\vec{j}-\vec{k}| = \sqrt{16+9+1} = \sqrt{26} .$$

08_11th-Maths-Vol2-Unit8_UM.indd 77 21-02-2023 16:24:14

مثال 8.21

اگر $\vec{a}=-3\hat{i}+4\hat{j}-7\hat{k}$ اور $\vec{b}=6\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ ہو تو ذیل کے تصدیق کریں

(i) $\vec{a}$ اور $\vec{a}\times\vec{b}$ ایک دوسرے کا عمود ہے۔

(ii) $\vec{b}$ اور $\vec{a}\times\vec{b}$ ایک دوسرے کا عمود ہے

حل

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\-3&4&-7\\6&2&-3\end{vmatrix}=\hat{i}(-12+14)-\hat{j}(9+42)+\hat{k}(-6-24)\ =\ 2\hat{i}-51\hat{j}-30\hat{k}$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})\ =\ (-3\hat{i}+4\hat{j}-7\hat{k})\cdot(2\hat{i}-51\hat{j}-30\hat{k})\ =\ -6-204+210=0\ .\quad\text{(i)}$$

چنانچہ $\vec{a}$ اور $\vec{a}\times\vec{b}$ ایک دوسرے کا عمود ہے

$$\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})\ =\ (6\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})\cdot(2\hat{i}-51\hat{j}-30\hat{k})\ =12-102+90\ =0.\qquad\text{(ii)}$$

چنانچہ $\vec{b}$ اور $\vec{a}\times\vec{b}$ ایک دوسرے کا عمود ہے۔

مثال 8.22

اگر $\vec{a}=4\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$ اور $\vec{b}=-2\hat{i}+j-2\hat{k}$ سمتیوں کے عمود سے قدر 6 رکھنے والے سمتیے معلوم کیجئے۔

حل

$$\vec{a}\times\vec{b}\ =\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\4&-1&3\\-2&1&-2\end{vmatrix}=\hat{i}(2-3)-\hat{j}(-8+6)+\hat{k}(4-2)\ =\ -\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}$$

$\vec{a}$ اور $\vec{b}$ عمودی اکائی سمتیے $\pm\dfrac{(\vec{a}\times\vec{b})}{|\vec{a}\times\vec{b}|}=\pm\left[\dfrac{-\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}}{3}\right]$

$\vec{a}$ اور $\vec{b}$ عمودی 6 عددیہ والے سمتیے $\pm2(-\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k})$

مثال 8.23

سمتیہ $\vec{a}=2\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$ اور $\vec{b}=4\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}$ کے درمیانی سائن اور کو سائن قیمتیں معلوم کیجئے:

حل

فرض کیجئے کہ θ کا درمیانی زاویہ $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ ہو

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\ =(2\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k})\cdot(4\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k})\ =\ 8-2+6=12$$

$$|\vec{a}|\ =|2\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}|=\sqrt{14}\quad;\quad|\vec{b}|\ =|4\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}|=\sqrt{24}$$

$$\cos\theta\ =\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{12}{\sqrt{14}\sqrt{24}}=\sqrt{\frac{3}{7}}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}\ =\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\2&1&3\\4&-2&2\end{vmatrix}=\hat{i}(2+6)-\hat{j}(4-12)+\hat{k}(-4-4)\ =\ 8\hat{i}+8\hat{j}-8\hat{k}$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}|\ =|8\hat{i}+8\hat{j}-8\hat{k}|\ =\ 8\sqrt{3}$$

$$\sin\theta\ =\frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}\ =\frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{14}\sqrt{24}}=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{7}\sqrt{12}}=\frac{2}{\sqrt{7}}.$$

مثال 8.24

ایک متوازی الاضلاع کا رقبہ معلوم کیجئے جس کے متصلہ اضلاع $\vec{a}=3\hat{i}+\hat{j}+4\hat{k}$ اور $\vec{b}=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ سے دئے گئے ہیں۔

حل

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\3&1&4\\1&-1&1\end{vmatrix}=\hat{i}(1+4)-\hat{j}(3-4)+\hat{k}(-3-1)=5\hat{i}+\hat{j}-4\hat{k}\ .$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|5\hat{i}+\hat{j}-4\hat{k}|=\sqrt{42}$$

چنانچہ متوازی الاضلاع کا رقبہ $\sqrt{42}$ مربع اکائیاں ہے۔

مثال 8.25

کسی بھی دو سمتیہ $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کے لئے ثابت کیجئے کہ $|\vec{a}\times\vec{b}|^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=|\vec{a}|^2\ |\vec{b}|^2$

حل

ہم جانتے ہیں کہ $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ اور $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

$$|\vec{a}\times\vec{b}|^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=|\vec{a}|^2\ |\vec{b}|^2\sin^2\theta+|\vec{a}|^2\ |\vec{b}|^2\cos^2\theta$$

$$=|\vec{a}|^2\ |\vec{b}|^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=|\vec{a}|^2\ |\vec{b}|^2\ .$$

مثال 8.26

ایک مثلث کا رقبہ معلوم کیجئے جس کے راس نقاط $A(1,0,0)$، $B(0,1,0)$ اور $C(0,0,1)$ ہیں۔

حل

آئیے ہم مثلث کے دو اضلاع تلاش کریں۔

$$\overrightarrow{AB}=-\hat{i}+\hat{j}\ ;\ \overrightarrow{AC}=-\hat{i}+\hat{k}$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\-1&1&0\\-1&0&1\end{vmatrix}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$$

$$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{3}$$

مثلث ABC کا رقبہ $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{\sqrt{3}}{2}$

نوٹ 8.8

$\overrightarrow{AB}$ اور $\overrightarrow{AC}$ کے بجائے، کوئی بھی دو اضلاع لے سکتے ہیں۔

مشق 8.4

1۔ اگر $\vec{a}=2\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$ اور $\vec{b}=3\hat{i}+5\hat{j}-2\hat{k}$ ہو تو $\vec{a}\times\vec{b}$ معلوم کیجئے۔

2۔ ثابت کیجئے کہ $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}+\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}+\vec{b})=\vec{0}$

3۔ ایک سمتیہ معلوم کیجئے جس کی قدر $10\sqrt{3}$ اکائی ہے اور وہ سمتیوں $\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ اور $\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$ کے نتیجہ عمودی ہے۔

4۔ ہر ایک سمتی $\vec{a}+\vec{b}$ اور $\vec{a}-\vec{b}$ کے لئے ایک اکائی عمودی سمتیہ معلوم کیجئے جہاں $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ اور $\vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ ہے۔

08_11th-Maths-Vol2-Unit8_UM.indd 79 21-02-2023 16:24:16

5۔ ایک متوازی الاضلاع کا رقبہ معلوم کیجئے جس کے متصلہ اضلاع $\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ اور $3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ ہو۔

6۔ ایک مثلث کا رقبہ معلوم کیجئے کہ جس کے راس نقاط
$A(3,-1,2)$، $B(1,-1,-3)$ اور $C(4,-3,1)$ ہیں۔

7۔ اگر مثلث ABC کے راس نقاط A،B،C کے مقامی سمتیہ بالترتیب $\vec{a}$، $\vec{b}$، $\vec{c}$ ہو تو، ثابت کیجئے کہ مثلث ABC کا رقبہ $\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}|$ ہے۔اسی سے نقاب کے ہم خطی کے شرط کو بھی تخفیف کریں۔

8۔ ثابت کیجئے کہ $|\vec{a}\times\hat{i}|^2+|\vec{a}\times\hat{j}|^2+|\vec{a}\times\hat{k}|^2=2|\vec{a}|^2$ $\vec{a}$ کسی بھی سمتیہ کے لئے

9۔ فرض کرو کہ $\vec{a}$، $\vec{b}$، $\vec{c}$ اکائی سمتیہ ہوں تاکہ $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=0$ اور درمیانی زاویہ $\frac{\pi}{3}$ ہو تو، ثابت کیجئے کہ $\vec{a}=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}(\vec{b}\times\vec{c})$ ہے۔

10۔ سمتیہ $2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ اور $\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ کے درمیانی زاویہ کو سمتیہ حاصل ضرب کے استعمال سے معلوم کیجئے۔

T2R1Y

مشق 8.5

دئے گئے چار متبادل جوابات میں سے صحیح یا سب سے مناسب جواب کا انتخاب کیجئے۔

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CD}$ کی قیمت

(1) $\overrightarrow{AD}$ (2) $\overrightarrow{CA}$ (3) $\vec{0}$ (4) $-\overrightarrow{AD}$

(2) اگر $\vec{a}+2\vec{b}$ اور $3\vec{a}+m\vec{b}$ متوازی ہو تو، m کی قیمت

(1) 3 (2) $\frac{1}{3}$ (3) 6 (4) $\frac{1}{6}$

(3) $\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ اور $\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ کے حاصل جمع کا نتیجہ کا متوازی اکائی سمتیہ

(1) $\frac{\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}}{\sqrt{5}}$ (2) $\frac{2\hat{i}+\hat{j}}{\sqrt{5}}$ (3) $\frac{2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}}{\sqrt{5}}$ (4) $\frac{2\hat{i}-\hat{j}}{\sqrt{5}}$

(4) ایک سمتیہ $\overrightarrow{OP}$ بالترتیب x اور $y-$ محور کی مثبت سمت کے ساتھ $60°$ اور $45°$ بناتی ہے۔ پھر $\overrightarrow{OP}$ اور z محور کے درمیان زاویہ ہے۔

(1) $45°$ (2) $60°$ (3) $90°$ (4) $30°$

(5) $\overrightarrow{BA}=3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ اور B کا مقامی سمتیہ $\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}$ ہو تو A کا مقامی سمتیہ

(1) $4\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ (2) $4\hat{i}+5\hat{j}$ (3) $4\hat{i}$ (4) $-4\hat{i}$

(6) ایک سمتیہ محوروں کے ساتھ مساوی زاویہ بناتا ہے تو اس زاویہ

(1) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ (2) $\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ (3) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (4) $\cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

08_11th-Maths-Vol2-Unit8_UM.indd 80 21-02-2023 16:24:17

(7) سمتیہ $\vec{a}-\vec{b}$، $\vec{b}-\vec{c}$، $\vec{c}-\vec{a}$

(1) ایک دوسرے کے متوازی ہے (2) اکائی سمتیے

(3) ایک دوسرے کا عمود ہے (4) ہم مستوی سمتیے

(8) اگر $ABCD$ متوازی اضلاع ہو تو $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}$ مساوی ہے

(1) $2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$ (2) $4\overrightarrow{AC}$ (3) $4\overrightarrow{BD}$ (4) $\vec{0}$

(9) متصلہ اضلاع والے $ABCD$۔

$\vec{a}$ اور $\vec{b}$ متوازی الاضلاع $\vec{a}+\vec{b}$ کا ایک وتر ہو تو دوسرا وتر $\overrightarrow{BD}$ ہے

(1) $\vec{a}-\vec{b}$ (2) $\vec{b}-\vec{a}$ (3) $\vec{a}+\vec{b}$ (4) $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

(10) A اور B کے مقامی سمتیہ $\vec{a}$، $\vec{b}$ ہو تو ذیل کے مقامی سمتیوں کا کون سا نقطہ خط AB پر ہے۔

(1) $\vec{a}+\vec{b}$ (2) $\frac{2\vec{a}-\vec{b}}{2}$ (3) $\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$ (4) $\frac{\vec{a}-\vec{b}}{3}$

(11) اگر، $\vec{a}$، $\vec{b}$، $\vec{c}$، A تینوں ایک خطی نقاط کے مقامی سمتیہ ہو تو ذیل میں کون سا درست ہے؟

(1) $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$ (2) $2\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$ (3) $\vec{b}=\vec{c}+\vec{a}$ (4) $4\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$

(12) اگر $\vec{r}=\frac{9\vec{a}+7\vec{b}}{16}$ نقطہ P جس کا $\vec{r}$ مقامی سمتیہ جو نقاط کو ملانے والے خط کو $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ تقسیمی نسبت

(1) 7 : 9 اندرونی طور پر (2) 9 : 7 اندرونی طور پر

(3) 7 : 9 بیرونی طور پر (4) 9 : 7 بیرونی طور پر

(13) اگر $\lambda\hat{i}+2\lambda\hat{j}+2\lambda\hat{k}$ ایک اکائی سمتیہ ہو تو، λ کی قیمت

(1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{4}$ (3) $\frac{1}{9}$ (4) $\frac{1}{2}$

(14) ایک مثلث کے راس نقاط کے مقامی سمتیے $3\hat{i}+4\hat{j}-4\hat{k}$ اور $2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$ ہیں۔ اگر ہندسی مرکز کا مقامی سمتیہ $\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ ہو تو تیسرے راس نقطہ کا مقامی سمتیہ ہے۔

(1) $-2\hat{i}-\hat{j}+9\hat{k}$ (2) $-2\hat{i}-\hat{j}-6\hat{k}$ (3) $2\hat{i}-\hat{j}+6\hat{k}$ (4) $-2\hat{i}+\hat{j}+6\hat{k}$

(15) اگر $|\vec{a}+\vec{b}|=60$، $|\vec{a}-\vec{b}|=40$ اور $|\vec{b}|=46$ ہو تو $|\vec{a}|$ کی قیمت

(1) 42 (2) 12 (3) 22 (4) 32

(16) اگر $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کے یکساں قدر ہے، ان کے درمیانی زاویہ $60°$ ہے اور عددیہ حاصل ضرب $\frac{1}{2}$ ہو تو $|\vec{a}|$ کی قیمت

(1) 2 (2) 3 (3) 7 (4) 1

(71) اگر $\vec{a}=(\sin\theta)\hat{i}+(\cos\theta)\hat{j}$ اور $\vec{b}=\hat{i}-\sqrt{3}\hat{j}+2\hat{k}$ عمود ہے $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ تو کی قیمت

(1) $\frac{\pi}{3}$ (2) $\frac{\pi}{6}$ (3) $\frac{\pi}{4}$ (4) $\frac{\pi}{2}$

08_11th-Maths-Vol2-Unit8_UM.indd 81 21-02-2023 16:24:19

(18) اگر $|\vec{a}|=13$، $|\vec{b}|=5$ اور $\vec{a}\cdot\vec{b}=60°$ ہو تو $|\vec{a}\times\vec{b}|$ کی قیمت

25 (4) 45 (3) 35 (2) 15 (1)

(19) $\theta=120°$ زاویہ پر سمتیہ $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ مائل ہیں اگر $|\vec{a}|=1$، $|b|=2$ تو $[(\vec{a}+3\vec{b})\times(3\vec{a}-\vec{b})]^2$ مساوی ہے

300 (4) 325 (3) (2) 275 225 (1)

(20) اگر $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کی قدر 2 اور درمیانی زویہ $60°$ ہو تو $\vec{a}$ اور $\vec{a}+\vec{b}$ کا درمیانی زاویہ ہے۔

90° (4) 45° (3) 60° (2) 30° (1)

(21) اگر $\hat{i}+3\hat{j}+\lambda\hat{k}$ میں $5\hat{i}-\hat{j}-3\hat{k}$ کی تطلیل اور $\hat{i}+3\hat{j}+\lambda\hat{k}$ میں $5\hat{i}-\hat{j}-3\hat{k}$ کی تطلیل مساوی ہو تو λ کی قیمت ہے۔

±1 (4) ± 5 (3) ± 3 (2) ± 4 (1)

(22) سمتیہ $\hat{i}+5\hat{j}-7\hat{k}$ کا ابتدائی اور آخری نقاط $(1,2,4)$ اور $(3-3\lambda,-2)$ ہو تو λ کی قیمت

$\frac{5}{3}$ (4) $-\frac{5}{3}$ (3) $-\frac{7}{3}$ (2) $\frac{7}{3}$ (1)

(23) اگر $10\hat{i}+3\hat{j}$، $12\hat{i}-5\hat{j}$ اور $a\hat{i}+11\hat{j}$ مقامی سمتیے کے نقاط ہم خطی ہو تو a کی قیمت

8 (4) 5 (3) 3 (2) 6 (1)

(24) اگر $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$، $\vec{b}=2\hat{i}+x\hat{j}+\hat{k}$، $\vec{c}=\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}$ اور $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=70$ ہو تو x کی قیمت

10 (4) 26 (3) 7 (2) 5 (1)

(25) اگر $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کے درمیانی زاویہ $\frac{\pi}{6}$، $\vec{a}=\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}$، $|\vec{b}|=5$ ہو تو دونوں سمتیوں کے متصل ضلعوں سے بننے والے مثلث کا رقبہ

$\frac{17}{4}$ (4) $\frac{3}{4}$ (3) $\frac{15}{4}$ (2) $\frac{7}{4}$ (1)

خلاصہ (SUMMARY)

اس باب میں ہم نے درج ذیل کا علم حاصل کیا ہے۔

- عددیہ ایک مقدار ہے جو اس کی قدر سے متعین ہے۔
- سمتیہ ایک مقدار ہے جو اس کی قدر اور اس کی سمت دونوں سے متعین ہے۔
- اگر ہم آزادانہ انداز سے مبدہ پر نقطۂ سمتیہ مناسبت کریں تو وہ مفت سمتیہ ہوگا جب کہ کسی مخصوص مقام پر مبدہ ہو تو وہ تشخیص سمتیہ کہلاتا ہے۔
- دو یا دو سے زیادہ سمتیہ کو ہم مستوی کہتے ہیں جب کہ وہ دونوں ایک ہی سطح پر یا متوازی ہوں۔
- دو سمتیہ کو مساوی سمتیہ کہتے ہیں اگر وہ دونوں کے سمت اور قدر یکساں ہوں۔
- جس سمتیہ کی قدر 0 ہے وہ صفر سمتیہ کہلاتا ہے۔
- جس سمتیہ کی قدر 1 ہے وہ اکائی سمتیہ کہلاتا ہے۔

08_11th-Maths-Vol2-Unit8_UM.indd 82 21-02-2023 16:24:20

- ایک $\vec{a}$ سمتیہ اور m ایک عددیہ ہے تو $m\vec{a}$ سے مراد سمتیہ $\vec{a}$ سے عددیہ m کا عددیہ ضرب ہے۔
- دو سمتیہ $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ متوازی اگر $\vec{a}=\lambda\vec{b}$ جہاں λ ایک عددیہ ہے۔
- $\vec{a}$، $\vec{b}$ اور $\vec{c}$ مثلث کے متصلہ اضلاع ہو تو $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ ہے۔
- سمتیوں کی جمع تلازم ہے۔
- $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$, $\vec{a}$ کسی بھی سمتیہ کے لئے
- $\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$. $\vec{a}$ کسی بھی سمتیہ کے لئے
- سمتیوں کی جمع ایک متبادلہ ہے۔
- اگر دو سمتیوں کے قدر اور سمت کو ایک مثلث کے دو ترتیبی ضلعوں سے اشارہ کیا جائے تو،ان کی حاصل جمع کو مثلث کی مخالف قطار میں لئے گئے تیسرے ضلعے سے نشان زد کرسکتے ہیں۔ یہ جمع کا متوازی الاضلاع قانون ہے۔
- اگر متوازی الاضلاع $OABC$ میں اگر $\overrightarrow{OA}$ اور $\overrightarrow{OB}$ متصلہ ضلعوں کی نمائندگی کریں تو وتر ان کی حاصل جمع کی نمائندگی $\overrightarrow{OC}$ کرتا ہے۔ یہ جمع کا متوازی الاضلاع قانون ہے۔
- اگر α، β، γ سمت زاویئے ہو تو $\cos\alpha$، $\cos\beta$، $\cos\gamma$ سمت کو سائن ہوں گے۔
- سمتیہ کے سمت $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ نسبتیں z,y,x ہیں۔
- اگر $\vec{a}$، $\vec{b}$ اور $\vec{c}$ خلا میں کوئی تین غیر مستوی سمتیے ہو تو خلا میں کسی بھی سمتیہ کو ایک منفرد انداز میں $l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}$ کی طور پر لکھا جاسکتا ہے۔
- کسی بھی نقطہ پر مقامی سمتیہ اور α، β، γ کے سمت زاویئے $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ ہو تو $\vec{r}$

(i) $\vec{r}$ کا سمتی کو سائن کے کامل مربع کا مجموعہ 1 ہے

(ii) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2$.

(iii) $\vec{r}$ کے سمتی کو سائن $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

(iv) اگر l,m,n سمتی کو سائن ہو تو $l^2+m^2+n^2=1$ ہے۔

(v) $\cos\alpha\hat{i}+\cos\beta\hat{j}+\cos\gamma\hat{k}$ کسی بھی اکائی سمتیہ کو کی طرح لکھ سکتے ہیں۔

- $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ سمتیوں کا عددیہ حاصل ضرب $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ ہے

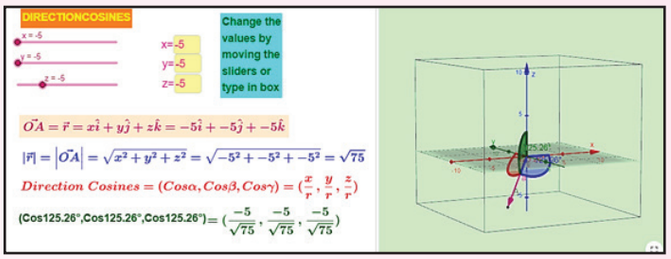
- متیوں کا سمتیہ حاصل ضرب کو $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ نشاندہی کے $\vec{a}\times\vec{b}$ ساتھ اس طرح دیا گیا $\vec{a}\times\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}$, ہے۔ جہاں $\vec{a}$ اور $\vec{b}, 0\le\theta\le\pi$ کا درمیانی زویہ ہے۔، یہاں $\vec{a}$، $\vec{b}$، $\hat{n}$ مختص محوروں کا دائیں ہاتھ کا نظام بناتے ہیں۔

08_11th-Maths-Vol2-Unit8_UM.indd 83 21-02-2023 16:24:22

ICT CORNER 8(a)

سمتیہ الجبراء

متوقع نتائج



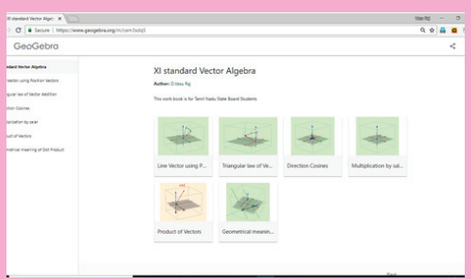
مرحلہ: 1

براؤزر کھولیں اور دئے گئے URL لنک ٹیپ کیجئے (یا) QR کوڈ کو اسکین کیجئے۔" XI الجبرائی سمتیہ" جیوجبرا (GeoGebra) نامی ورک بک کھلے گا۔ اس میں آپ کے سبق سے متعلق کی ورک شیٹیں ہیں۔

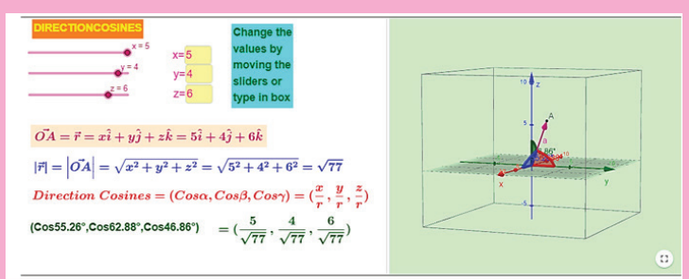
مرحلہ:2

ورک شیٹ "سمتی کوسائن" کو منتخب کریں ۔ 3D نمائیدگی دائیں طرف پائی جاتی ہے۔آپ مختلف مقام دیکھنے کے لئے موض پر دائیں کلک کرکے 3D تصویر کو گھماسکتے ہیں۔

آپ سمتیہ کو تبدیل کرنے کے لئے سلائیڈ کو منتقل کرسکتے ہیں یا x ، y اور z کی قیمتیں داخل کرسکتے ہیں۔



مرحلہ: 1



مرحلہ:2

Browse in the link:

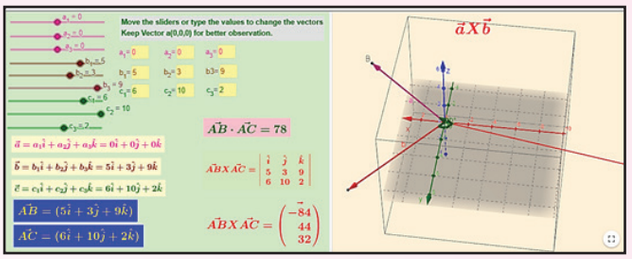
XI Standard Vector Algebra: https://ggbm.at/cem3sdq5

08_11th-Maths-Vol2-Unit8_UM.indd 84 21-02-2023 16:24:25

ICT CORNER 8(b)

سمتیہ الجبراء

متوقع نتائج



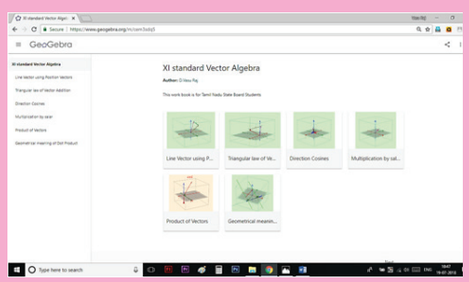
مرحلہ: 1

براؤزر کھولیں اور دئے گئے URL لنک ٹیپ کیجئے (یا) QR کوڈ کو اسکین کیجئے۔ " XI الجبرائی سمتیہ" جیوجبرا (GeoGebra) نامی ورک بک کھلے گا۔ اس میں آپ کے سبق سے متعلق کی ورک شیٹیں ہیں۔

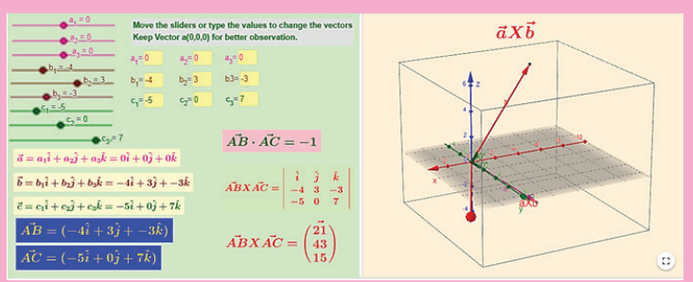
مرحلہ:2

ورک شیٹ "سمتی کا حاصل ضرب" کو منتخب کریں ۔ 3D نمائیدگی دائیں طرف پائی جاتی ہے۔آپ مختلف مقام دیکھنے کے لئے موض پر دائیں کلک کرکے3D تصویر کو گھماسکتے ہیں۔

آپ سمتیہ کو تبدیل کرنے کے لئے سلائیڈ کو منتقل کرسکتے ہیں یا x ، y اور z کی قیمتیں داخل کرسکتے ہیں۔(واضح تقسیم کے لئے a_1 ، a_2 اور a_3 کی قیمتوں کو تبدیل نہ کریں۔ $ABXAC$ کے لئے، اجزاء عمودی طور پر دئے گئے ہیں)



مرحلہ: 1



مرحلہ:2

Browse in the link:

XI Standard Vector Algebra: https://ggbm.at/cem3sdq5

08_11th-Maths-Vol2-Unit8_UM.indd 85 21-02-2023 16:24:26

باب 9

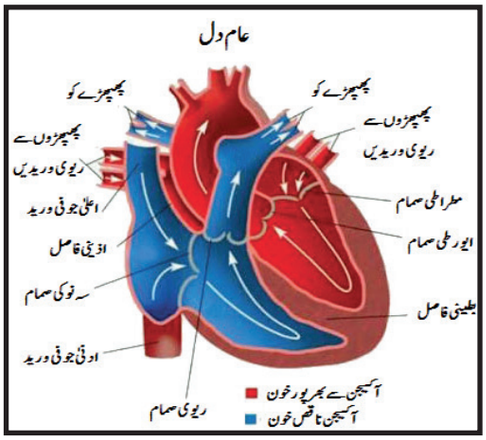
تفرقی احصا ۔ حدیں اور مسلسل
(Differential Calculus - Limits and Continuity)

"آدمی چلے جاتے ہیں ، مگر ان کے اعمال باقی رہتے ہیں "

آگسٹن لوئس کاچی

9.1 تعارف (Introduction)

احصا تبدیلی کی شرح کے متعلق ہے۔ تبدیلی کی شرح تمام سائنس میں پائے جاتے ہیں ۔ایک ریاضی دان کسی منحنی پر خط مستقیم کے انحراف کی تبدیلی کی شرح کی پیمائش کرنے میں دلچسپی رکھتا ہے جب کہ ایک طبیعیات دان نقل مکانی کی تبدیلی کی شرح اور چلتی شئے کی رفتار جاننے میں دلچسپی رکھتا ہے۔ ایک کیمیاءدان رد عمل کی شرح جاننا چاہتا ہے جس کے نتیجے میں ایک یا ایک سے زیادہ مادے (جسے حاصل شدہ شئے کہاجاتا ہے) اور ایک یا ایک سے زیادہ ابتداء ہونے والے مواد (جسے رد عمل کہاجاتا ہے) واقع ہوتے ہیں۔

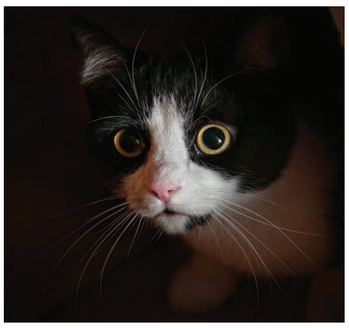


ایک ماہر حیاتیات کا تجزیہ کسی بھی اوقات پر جانوروں کی آبادی یا پودوں کی آبادی میں تبدیلی جاننا چاہتا ہے اور وہ یہ بھی جاننا چاہتا ہے کہ شرح جس میں خون کی نالی سے خون بہتا ہے ،جیسا کہ ورید یا شریان اور نالی/ شریان کا وہ حصہ جس میں یہ بہاؤ کم ہو یا زیادہ ہو۔

ایک ماہر اقتصادیات معمولی مانگ، معمولی آمدنی، اور معمولی منافع کا بھی مطالعہ کرتے ہیں، جو اس مانگ، محصول اور منافع کے افعال کی تبدیلی کی شرح (یعنی مشتقات) سے اخذ کیے جاتے ہیں۔

ایک ماہر ارضیات پگھلی ہوئی چٹان کا گھنے والا جسم ارد گرد کی چٹانوں میں گرمی کی ترسیل سے ٹھنڈا ہونے کی شرح کو جاننے میں دلچسپی رکھتا ہے۔

ایک انجینئر حوض کے اندر یا باہر پانی کے بہاؤ کی شرح کو جاننا چاہتا ہے۔ ایک شہری جغرافیہ دان شہر کی توسیع کے ساتھ شہر میں آبادی کی کثافت کی تبدیلی کی شرح میں دلچسپی رکھتا ہے۔ ایک ماہر موسمیات کا تعلق اونچائی کے حوالے سے ماحولیاتی دباؤ کی تبدیلی کی شرح سے ہے۔



نفسیات میں، نظریہ سیکھنے میں دلچسپی رکھنے والے نام و نہاد سیکھنے کے منحنی کا مطالعہ کریں جو تربیت کے وقت کی حیثیت سے کسی کی مہارت سیکھنے کی کارگردگی کو ترسیم کریں ۔ خاص طور پر دلچسپی وہ شرح ہے جس میں وقت گزرنے کے ساتھ ساتھ کارگردگی میں بہتری ہوتی ہے۔



09_11th-Maths-Vol2-Unit9_UM.indd 86 21-02-2023 16:09:26

جب ہم اندھیرے کمرے میں داخل ہوتے ہیں، تو ہماری آنکھیں اپنے پتلی کے جسامت کو بڑھا کر روشنی کی کمی کے مطابق تبدیل کرلیتا ہے ، جس سے زیادہ روشنی آنکھوں میں داخل ہو سکتی ہے اور ہمارے اردگرد موجود چیزوں کو دیکھنے میں آسانی ہوتی ہے۔ ایک مشاہدہ روشن کمرے میں جب ہم داخل ہوتے ہیں تو ہمارے آنکھوں کی عدسے گھٹتی ہے تاکہ روشنی آنکھوں میں کم قیمت پر گذرنے چونکہ زیادہ روشنی سے آنکھوں کی دیکھنے کی نظام میں کمی نہ ہو۔ نظام محققین اس طرح کے نظام کی مطالعہ حدود سے کرتے ہیں۔

طبیعیات میں سمتی رفتار ،کثافت، بجلی ، قوت اور درجہ حرارت ؛کیمیائی میں رد عمل کی شرح اور دباؤ ، حیاتیات یں نشونما کی شرح اور خون کی رفتار، معاشیات میں اصلی قیمت اور اصلی نفع ، ارضیات میں حرارت کی بہاؤ ، نفسیات میں کارگردگی کی ترقی کی شرح- ان تمام صورتوں میں ایک ہی ریاضیاتی تصور جو مشتق ہے۔

ایک مثال جس کی حقیقت یہ ہے کہ ریاضی کی طاقت کا ایک حصہ اس کی تجریدی حیثیت میں ہے ۔ایک واحد خلاصہ ریاضی کا تصور (جیسے مشتق) سائنس میں سے ہر ایک میں مختلف ترجمانی کرسکتا ہے ۔ جب ہم ریاضی کی تصور کی خصوصیات کو تیار کرتے ہیں تو ہم ان نتائج کو تمام علوم میں لاگو کرسکتے ہیں ۔ یہ ہر ایک میدان میں خصوصی تصورات کی خصوصیات تیار ی کرنے سے کہیں زیادہ موثر ہے۔

قدیم ماضی کی سب سے بڑی تخلیق ۔ یوکلیڈین جیومٹری(علم ہندسہ) تھی۔اس یادگار کام کو قریب دو ہزار سال بعد احصا کی دریافت ہونے تک اہمیت کا حامل نہیں کیا گیا تھا۔

احصا کو سترھویں صدی کے آخری سہ ماہی میں انگلینڈ کے سر اسحاق نیوٹن (1642 - 1727) اور جرمنی میں گوٹ فرائیڈ ولیم لب نٹس (1646 - 1716)نے آزادانہ طور پر تخلیق کیا تھا۔

نیوٹن کی دلچسپی ریاضی میں اس وقت ریاضی کے د و عظیم کتابوں کی مطالعے سے شروع ہوئی ۔ وہ ان عظیم سائنسدانوں کے کام یوکلیڈ کے عنصر اور ڈس کارٹیو کے لاجیومیٹرک سے بھی واقف ہوئے جس میں گلیلیو اور فرمٹ بھی شامل تھے۔

1664 کے آخر تک ، نیوٹن ایسے لگے کہ اس وقت کے تمام ریاضیاتی علوم میں مہارت حاصل کرلی تھی اور اس کے ساتھ انھوں نے اور بھی اضافہ کرلیا۔ 1665 میں انھوں نے یہ مطالعہ شروع کیا کہ شرح کی تبدیلی یا موڑ جیسے فاصلہ یا درجہ حرارت جو مسلسل مختلف ہوتے یں۔ جس کا نتیجہ آج ہم تفرقی احصا کے نام سے پڑھتے ہیں ۔ موجوہ دور میں علم ر یاضی سیکھنے والے اسحاق نیوٹن کے کندھے پر کھڑے ہیں۔



آگسٹن لوئس کاچی
(1857 - 1789)

لب نٹس کے بہت ریاضی مقالعہ "ایکٹاایروڈیٹورم (Acta Eruditorum)" نامی جرنل میں شائع ہوئے جس کی بنیاد انھوں نے 2861میں رکھی تھی ۔اس جرنل میں احصا پر ان کا کام شامل تھا جس کی وجہ سے نیوٹن کے ساتھ اس بات پر اختلاف پیدا ہوا کہ کس نے احصا کو پہلی مرتبہ دریافت کیا۔

لب نٹس وہ پہلا شخص تھا جنھوں نے احصا پر اہم نتائج شائع کئے تھے۔ اور انھوں نے ہی احصا کی علامتوں کا استعمال کیا تھا جواب معیاری بن چکا ہے۔

1789 میں پیرس میں پیدا ہونے والے آگسٹن لوئس کاچی (1789 - 1857) کو انیسویں صدی کے پہلے نصف کا سب سے نمایاں ریاضیاتی تجزیہ کار سمجھا جاتا تھا ۔ احصا میں کاچی کا بہت بڑا خدمت رہا۔ 1829 میں اپنی کتاب "**Lecons le calcul differential**" میں انھونے شرح کی معقول حد تک واضح تعریف دی اور وہ پہلے شخص تھے جنہوں نے مشتق کو خارج قسمت کی فرق کی شرح کے طور پر بیان کیا۔

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad .$$

کارل وئیرس ٹراس (1815 - 1897) ایک جرمن ریاضی دان نے شرح ، مسلسل اور تفرق کے تصورات کی قطعی تعریف ($\delta - \in$ تعریف) دی

احصا کیا ہے؟

احصا مقدار کی تبدیلی کے تناسب کی ریاضی ہے ۔ یہ مماسوں کی خط ، میلان ، رقبے حجم، لمبائیوں کے خطے، ہندسی مرکز، میلان اور متعدد دیگر تصورات کے بھی ریاضی ہیں جس نے سائنسدانوں ،ا نجینئروں اور معاشی ماہرین کو حقیقی زندگی کے حالات سے نمونے کے قابل بنادیا ہے۔

اگرچہ سمتی رفتاریں ، اسراع ، مماس کے خطوط ، میلان ، وغیرہ ریاضی قبل احصا سے متعلق ہے۔اور وہاں ریاضی کے قبل احصا اور احصا کے درمیان بنیادی فرق ہے۔ریاضی قبل احصا زیادہ مستحکم ہے جبکہ احصا زیادہ متحرک ہے ۔یہاں کچھ مثالیں ہیں

- ایک مستقل ر فتار سے سفر کرنے والی ایک شئے ریاضی قبل احصا کے ساتھ تجزیہ کیا جاسکتا ہے ۔اسراع کرنے والے شئے کی رفتار کا تجزیہ کرنے کے لئے آپ کو احصا کی ضرورت ہے۔
- خط کے میلان کا تجزیہ ریاضی قبل احصا سے کیا جاسکتا ہے۔ منحنی کا میلان معلوم کرنے کے لئے آپ کو احصا کی ضرورت ہے۔

09_11th-Maths-Vol2-Unit9_UM.indd 87 21-02-2023 16:09:27

- ایک دائرے سے مماس کاایک خط تجزیہ کرنے کے لئے ریاضی قبل احصا سے کیا جاسکتا ہے۔ عام ترسیموں میں خطوں کے مماسوں کو تجزیہ کرنے کے لئے آپ کو احصا کی ضرورت ہے۔
- مستطیل کا رقبہ تجزیہ کرنے کے لئے ریاضی قبل احصا سے کیا جاسکتا ہے ۔عام منحنی کے اندر رقبے کے تجزیہ کرنے کے لئے احصا کی ضرورت ہے۔

ان حالات میں ہر ایک میں ایک ہی عام علمی حرکت ہے، ایک حد کے عمل کے استعمال کے ذریعے ریاضی قبل احصا کی اصلاح کی ہے ۔لہٰذا احصا کیا ہے؟ کے سوال کے جواب دینا کا ایک طریقہ یہ کہتا ہے کہ احصا ایک ‹‹ حد مشین » جس میں تین مراحل شامل ہیں ۔ پہلا مرحلہ ریاضی قبل احصا جیسے خط کا میلان یا مستطیل کا رقبہ۔ دوسرا مرحلہ حد عمل ہے اور تیسرا مرحلہ ایک نیا احصا کا ضابطہ عمل جیسے مشتق یا تکملہ ہے۔

ریاضی قبل احصا	⟸	حد عمل	⟸	احصا

یہ تنبیہ کیا جاتا ہے کہ جو لوگ احصا سیکھنے کی کوشش کرتے ہیں گویا یہ نئے عمل کے بنائے ضابطوں کا مجموعہ ہے ۔ وہ بہت زیادہ سمجھ بوجھ ، خود اعتمادی اور مطمئن سے محروم ہوجائیں گے۔

سیکھنے کے مقاصد (Learning Objectives)

اس سبق کے اختتام پر ، طلباء سے امید کرسکتے ہیں کہ

- حدوں کی توقیع /ہندسی عمل کے ذریعے مسلسل کی تصور کریں۔
- حددوں کی منصوبے/ روز مرہ زندگی کے کار گردگی میں مسلسل کا تعلق
- احصا کے دل اور روح کے طور پر حد / مسلسل کو ملانا
- حدوں کو سمجھیں / ایک اپریشن کے طور پر مسلسل(آپریٹر) کی پیمائش کے لئے مقدار بتانا/ طبعی دنیا میں ہونے والی تبدیلیوں کو ریاضی میں بدلنا
- حقیقی زندگی سے متعلق حالات کی تشریح کے ذریعے حد / تسلسل کے تصور کو ٹھوس بنائیں۔

9.2 حدیں (Limits)

9.2.1 حدوں کو محسوب کرنا (The calculation of limits)

حد کا عام تصور، جس پر ہم اس باب میں بڑے پیمانے پر بحث کریں گے، احصا اور جدید ریاضی میں مرکزی کردار ادا کرتا ہے۔ اگرچہ ریاضی تین ہزار سال پرانی ہے لیکن انیسویں میں عظیم فرانسیسی آگسٹن لوئس کاچی اور کارل وئیرس ٹراس کے یادگار کام کے بعد ہی واقعی حدود کی تصور سمجھ میں آئی۔

اس حصے میں ہم حدوں کی تعریف اور حدوں کو کیسے محسوب کیا جاتا ہے دیکھیں گے۔

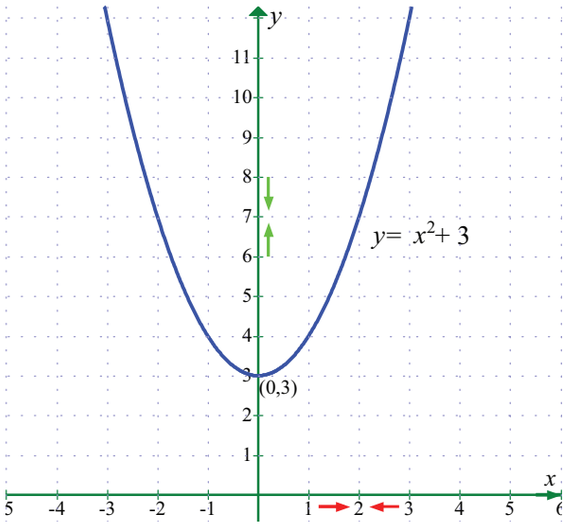
تشریح 9.1

تفاعل $y = f(x) = x^2 + 3$ کو غور سے دیکھنے پر نوٹ کریں کہ f ایک تفاعل ہے جو $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ہے۔

آئیے ہم $x = 2$ کے قریب اس تفاعل کی رویے کی تحقیقات کریں ۔ ہم دو مجموعے کے کی قیمتوں کو استعمال کریں : پہلا مجموعہ 2 کے دائیں (2 سے کم قیمت) کو نقطہ نظر کریں اور دوسرا مجموعہ 2 کے بائیں جانب (2 سے بڑا قیمت) مندرجہ ذیل جدول سے نقطہ نظر کریں۔

	x کو 2 کے بائیں جانب نقطہ نظر							x کو 2 کے دائیں جانب نقطہ نظر						
x	1.7	1.9	1.95	1.99	1.999	1.9999	2	2.0001	2.001	2.01	2.05	2.1	2.3
$f(x)$	5.89	6.61	6.8025	6.9601	6.99601	6.99960001	7	7.0040001	7.004001	7.0401	7.2025	7.41	8.29

09_11th-Maths-Vol2-Unit9_UM.indd 88 21-02-2023 16:09:27



9.1 خاکہ

x جدول سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ جیسے ہی $x = 2$، $f(x) = x^2 + 3$ عدد 2 کے قریب اتا ہے ، عدد 7 کے قریب ہوجاتا ہے۔ $f(x)$ یہ حیرت کی بات نہیں ہے کیونکہ اب ہم $x = 2$ پر کو معلوم کرتے ہیں تو ہمیں $f(2) = 2^2 + 3 = 7$ ملتا ہے۔

ہم $x = 2$ پر $x^2 + 3$ کی تشخیص نہیں کرسکتے۔

یعنی جب $f(x)$ کا نقطہ 2 کے دائیں(2 سے بڑھ کر) یا بائیں (2 سے کم)، تفاعلی قیمت دونوں جانب سے 7 کے قریب پہنچ رہی ہے۔ یعنی جب کی قیمت 2 کے قریب ہو تو کی قیمت 7 کے قریب ہوگی۔ مندرجہ بالا صورت حال کو مختصر شکل میں بیان کیا گیا ہے۔

جب کی قیمت بائیں طرف سے 2 کے قریب پہنچتا ہے تو کی قیمت بائیں حد سے 7 کے قریب پہنچتا ہے۔ اسی طرح جب کی قیمت دائیں طرف سے 2 کے قریب پہنچتا ہے تو $f(x)$ کی قیمت دائیں حد سے 7 کے قریب پہنچتا ہے اور لکھیں

$f(x) \to 7$ جبکہ $x \to 2^-$ اور $f(x) \to 7$ جبکہ $x \to 2^+$ (یا)

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 7$ اور $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 7$.

نوٹ یہ بھی کریں کہ $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 7 = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ ۔عام قیمت کو ایسے لکھیں $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 7$

ہم یہ بھی غور کریں کہ حد یقینی حقیقی عدد ہے ۔ یہاں، یقینی کے معنی جو $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ اور $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ مساوی ہیں اور $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ انفرادی حقیقی عدد ہے۔

جو شکل 9.1 میں $x \to 2$ سے $f(x) = x^2 + 3$ کارویہ مذکورہ بالا بحث کے ہندسی اہمیت کی وضاحت کرتا ہے۔

تشریح 9.2

دوسرا، ناطق تفاعل $f(x) = \dfrac{16 - x^2}{4 + x}$ کو دیکھیں ۔

اس تفاعل کا علاقہ $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$ ہے اگر چہ $f(-4)$ غیر انکار ، بہرحال -4 کے قریب کی کسی بھی کی قیمت سے $f(x)$ کو محسوب کرسکتے ہیں۔کیونکہ علامتیں $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{16 - x^2}{4 + x}$ کہتا ہے کہ ہم غور کرتے ہیں کہ کی قیمت -4 کے قریب ہے لیکن -4 سے مساوی نہیں ہے۔

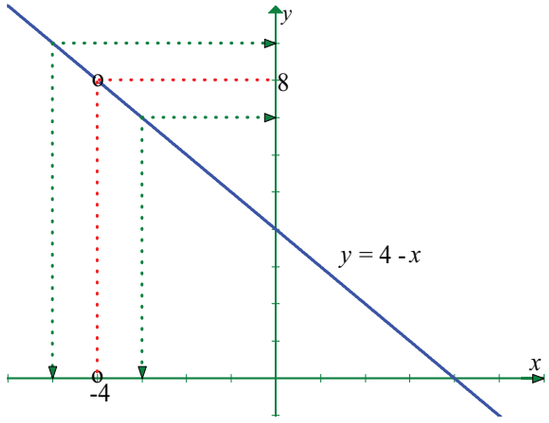
$f(x)$	$(x > -4)$ $(x \to -4^+)$	$f(x)$	$(x < -4)$ $(x \to -4^-)$
7.9	-3.9	8.1	-4.1
7.99	-3.99	8.01	-4.01
7.999	-3.999	8.001	-4.001

09_11th-Maths-Vol2-Unit9_UM.indd 89 21-02-2023 16:09:30

جب $x \neq -4$ ہوں $f(x)$ کو اخراج سے مختصر کرسکتے ہیں۔

$$f(x) = \frac{16-x^2}{4+x}$$

$$= \frac{(4+x)(4-x)}{(4+x)} = 4 - x.$$



9.2 خاکہ

$f(x)$ کا ترسیم اصلی طور پر $y = 4 - x$ کا ترسیم ہے، لیکن نقاط $x = -4$ پر کے ترسیم پر ایک سوراخ جو $x = -4$ کے متوازی ہے۔ جیسے جیسے x کی قیمت -4 کے قریب ہوتا جاتا ہے جس کی نمائندگی x-محور پر دو تیروالے سروں سے ہوتی ہے، y- محور پر تیر کے دو سر بیک وقت عدد 8 کے قریب ہوتے جاتے ہیں۔

یہاں، نوٹ کریں

$$\lim_{x\to -4} f(x) = \lim_{x\to -4} \frac{16-x^2}{4+x} = 8 \text{ اور لہذا } \lim_{x\to -4^-} f(x) = 8 = \lim_{x\to -4^+} f(x)$$

تشریح 9.2 میں، نوٹ کریں کہ تفاعل کی وضاحت $x = -4$ پر نہیں کی گئی ہے اور پھر بھی $f(x)$ ایک حد تک پہنچتا ہوا دیکھائی دیتا ہے۔ جیسے ہی x کی قیمت -4 کے قریب آتا ہے۔ ایسا اکثر ہوتا ہے، اور یہ سمجھنا ضروری ہے کہ $x = -4$ پر $f(x)$ کی موجودگی یا غیر موجودگی کا $f(x)$ کے حد کی وجود پر کوئی اثر نہیں ہوتا۔ جبکہ x کی قیمت -4 کے قریب آتا ہے۔

تشریح 9.3

اب ہم فرض کریں کہ تفاعل جو تشریح 9.1 اور 9.2 کے مختلف ہوں

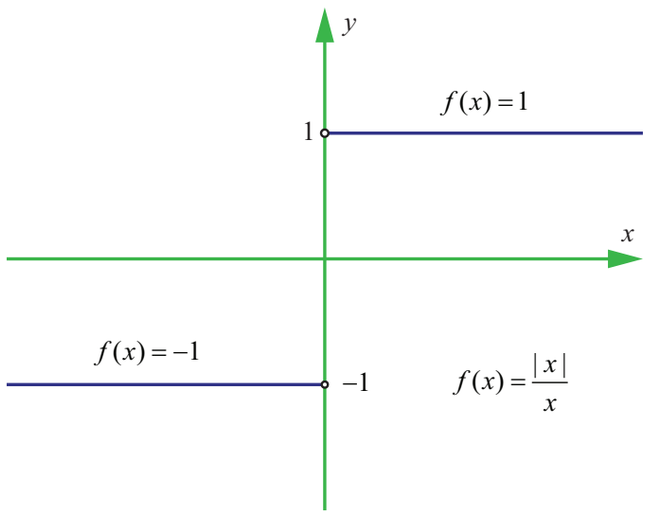
فرض کریں کہ $f(x) = \frac{|x|}{x}$

$x = 0$ اس تفاعل کے علاقہ (Domain) سے تعلق نہیں رکھتا ہے $\mathbb{R} \setminus \{0\}$۔اس تفاعل کی ترسیم پر غور کریں۔کوئی بھی x کے مثبت قیمتوں کے لئے دیکھ سکتے ہیں

$$\frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = +1 \quad \text{اور}$$

x منفی قیمت کے لئے $\frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$

اس کا مطلب یہ ہے کہ اس سے کوئی فرق پڑھتا کہ کی قیمت 0 سے کتنا قریب آتا ہے (0 کے قریبی قیمت)، مثبت اور منفی دونوں x کی قیمتیں ہوں گی جو $f(x) = 1$ اور $f(x) = -1$ حاصل کرتی ہے۔



9.3 خاکہ

یعنی $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$ اور $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +1$

جس کا مطلب یہ ہے کہ حد موجود نہیں ہے۔ بلاشبہ x کی دوسری قیمت کے لئے ایک حد ہوتی ہے۔

مثال کے طور پر $\lim_{x\to 2^-} \frac{|x|}{x} = 1$ اور $\lim_{x\to 2^+} \frac{|x|}{x} = 1$

09_11th-Maths-Vol2-Unit9_UM.indd 90 21-02-2023 16:09:31

اسی طرح $\lim_{x\to 3^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 3^-}\frac{-x}{x}=-1$

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 3^+}\frac{-x}{x}=-1$$

اگر چہ، کوئی حقیقی عدد $x_0\neq 0$، $\lim_{x\to x_0^-}\frac{|x|}{x}=-1=\lim_{x\to x_0^+}\frac{|x|}{x}$ اگر $x_0<0$ اور

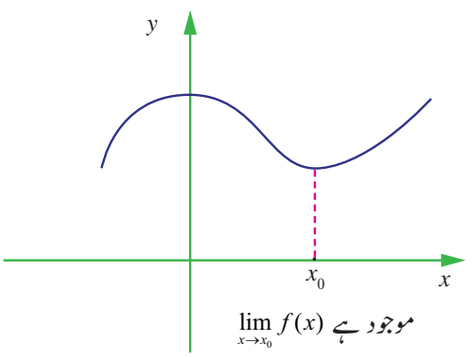
$$x_0>0 \text{ اگر } \lim_{x\to x_0^-}\frac{|x|}{x}=1=\lim_{x\to x_0^+}\frac{|x|}{x}$$

پڑھنے والے خاص توجہ دیں کہ مشاہدہ کرنے پر تشریح 9.1 سے 9.3 تک کے درمیان منعکس ہوتی ہے ۔ تشریح 9.1 میں تفاعل $f(x)=x^2+3$ کی وضاحت $x=2$ پر کی گئی ہے۔ یعنی، 2 کا تعلق کے علاقے سے ہے۔یعنی $\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$ ۔ تشریح 9.2 میں تفاعل کی وضاحت $x=-4$ پر نہیں کی گئی ہے۔ سابقہ صورت میں ہم کہتے ہیں کہ $\lim_{x\to 2}f(x)$ کی حد موجود ہے کیونکہ x کی قیمت 2 کے قریب آجاتا ہے تو اس کا مطلب یہ ہے کہ $\lim_{x\to 2^-}f(x)$ اور $\lim_{x\to 2^+}f(x)$ ایک منفرد حقیقی عدد کے قریب آجاتاہے۔بعد کے صورت میں، اگرچہ $\lim_{x\to -4}f(x)$ کی وضاحت $x=-4$ پر نہیں کی گئی ہے،کیونکہ x کی قیمت4-کے قریب ہوتا جاتا ہے ۔تشریح 9.3 میں ، $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ کی غیر موجودگی کا مطلب یہ ہے کہ ایک طرفہ حدود $\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}$ اور $\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}$ مختلف ہیں۔جیسے کے کافی حد تک 0 کے قریب ہوجاتا ہے۔ ان مشاہدات کی روشنی سے حد (limit) کے بارے میں بارے میں ایک الہامی تصور کیا جاسکتا ہے۔

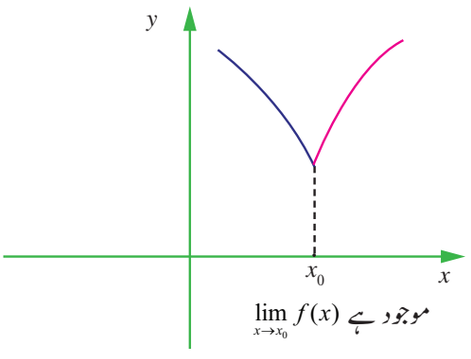
تعریف 9.1

فرض کریں I جو کھلا وقفہ $x_0\in\mathbb{R}$ پر مشتمل ہے۔ فرض کریں $f:I\to\mathbb{R}$ تو ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ L جو $f(x)$ کا حد ہے جیسے ہی x کی قیمت کے x_0 قریب آتا ہے تو علامتی طور پر لکھ سکتے ہیں۔ اگر جب بھی ہی x دونوں طرف سے x_0 $(x\neq x_0)$ کے کافی قریب ہوجاتا ہے تو $f(x)$ کی قیمت L کے کافی قریب ہوجاتاہے۔

ذیل کے (شکل 9.4 اور 9.5) ترسیم مذکورہ بیان کرتا ہے۔



9.4 خاکہ



9.5 خاکہ

9.2.2 ایک طرفہ کی حدود (One sided limits)

تعریف 9.2

ہم کہتے ہیں کہ $f(x)$ بائیں طرف کی حد جبکہ x کی قیمت x_0 کے قریب آتی ہے تو وہ l_1 کے مساوی ہیں (یا $f(x)$ کی حد ، جب x بائیں سے x_0 کے قریب پہنچتی ہے)۔ اگر ہم x کی قیمت x_0 کے قریب اور x_0 سے کم لینے پر $f(x)$ کی قیمت کو اختیاری طور پر l_1 کے قریب کرسکتے ہیں۔ اس کو علامتی طور پر اس طرح لکھ سکتے ہیں

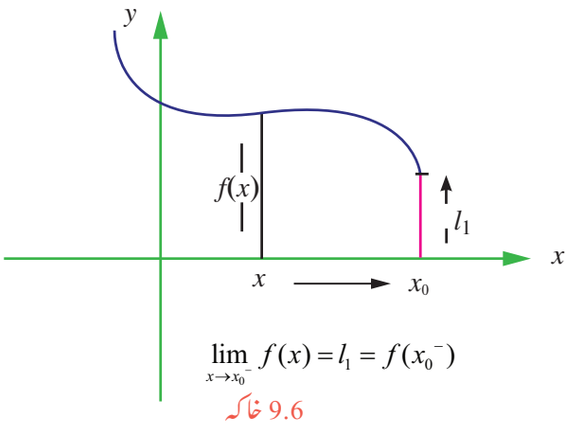
اسی طرح ، ہم دائیں طرف کی حد کی تعریف کرتے ہیں

تعریف 9.3

ہم کہتے ہیں کہ $f(x)$ *دائیں طرف کی حد* جبکہ x کی قیمت x_0 کے قریب آتی ہے تو وہ l_2 کے مساوی ہیں (یا $f(x)$ کی حد، جب x دائیں سے x_0 کے قریب پہنچتی ہے)۔ اگر ہم x کی قیمت x_0 کے قریب اور x_0 سے کم لینے پر $f(x)$ کی قیمت کو اختیاری طور پر l_2 کے قریب کرسکتے ہیں۔ اس کو علامتی طور پر اس طرح لکھ سکتے ہیں

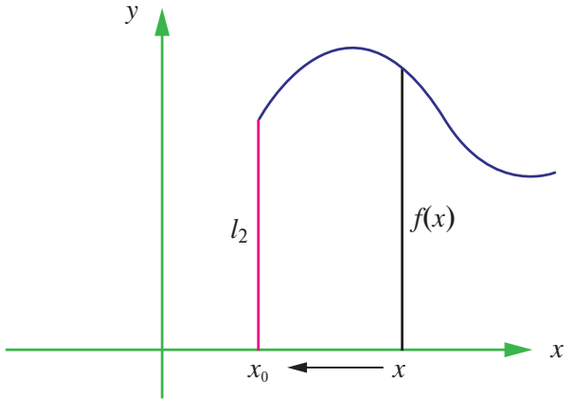
لہذا یہ علامتیں $x \to x_0^-$ اور $x \to x_0^+$ جس کا مطلب بالترتیب صرف $x < x_0$ اور $x > x_0$ پر غور کرسکتے ہیں۔

یہ تعارفیں مندرجۂ ذیل خاکہ 6.9 سے 9.9 کی تشریح ہیں۔



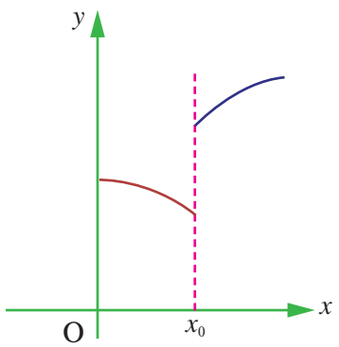
$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_1 = f(x_0^-)$

9.6 خاکہ



$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_2 = f(x_0^+)$

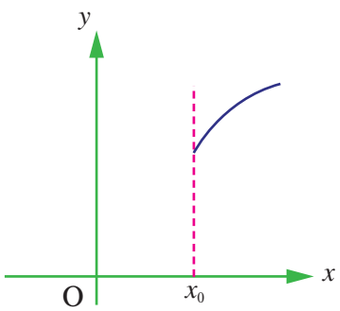
9.7 خاکہ



$\lim_{x \to x_0} f(x)$ غیر موجود ہے

9.8 خاکہ

(مختلف قیمتیں حاصل کی جاسکتی ہیں کیونکہ x_0 کو بائیں اور دائیں طرف سے رابطہ کیا جاتا ہے)



$\lim_{x \to x_0} f(x)$ غیر موجود ہے

9.9 خاکہ

(x_0 کے بائیں طرف تفاعل کی وضاحت نہیں کی گئی ہے)

مذکورہ بالا بحث سے ہم نتیجہ اخذ کرسکتے ہیں کہ $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ موجود ہے اگر مندرجۂ ذیل واقع ہیں

i. $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ موجود

ii. $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ موجود اور

iii. $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$

ایک طرفہ حدود کی تعارف سے اور $f(x)$ کی حد سے ہمیں مندرجۂ ذیل حاصل ہے۔

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ اگر $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$.

09_11th-Maths-Vol2-Unit9_UM.indd 92 21-02-2023 16:09:32

لہذا ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ $\lim_{x\to x_0} f(x)$ موجود ہے ، یہ سمجھا جاتا ہے کہ ایک منفرد حقیقی عدد L ہے۔ اگر مندرجہ بالا شرائط میں سے کوئی ایک بھی ناکام ہوجاتی ہے تو ہم کہتے ہیں ، $f(x)$ کی حد غیر موجود ہے جیسے ہی x کی قیمت x_0 کے قریب پہنچتی ہے۔

ہم تبصرہ کر سکتے ہیں کہ ایک طرفہ حد ود کی موجوگی حدود کی موجدگی سے کمزور ہے۔ $h>0$ کے لیے ،

$$f(x_0^-)=\lim_{h\to 0} f(x_0-h) \text{ اور } f(x_0^+)=\lim_{h\to 0} f(x_0+h).$$

نوٹ کریں کہ $f(x_0^-)$ اور $f(x_0^+)$ دائیں اور بائیں محدود قیمتیں مشتمل ہیں کھڑا کرتی ہیں۔ مگر تفاعل $x=x_0$ پر $f(x_0)$ کی قیمتیں ہیں

مثال 9.1

محسوب کیجئے $\lim_{x\to 0} |x|$

حل

باب 1 کے نظر ثانی سے

یعنی $$|x|=\begin{cases}-x & \text{if } x<0\\ 0 & \text{if } x=0\\ x & \text{if } x>0\end{cases}$$

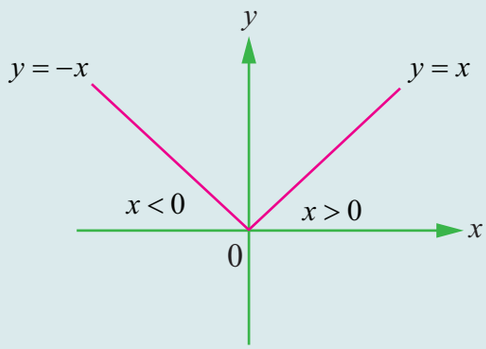
اگر $x>0$ ہو تو $|x|=x$، جو 0 پر پہنچتا ہے

$x\to 0$ جبکہ 0 دائیں طرف سے ہے، یعنی $\lim_{x\to 0^+}|x|=0$

اگر $x<0$ ہو تو $|x|=-x$، جو 0 پر پہنچتا ہے۔ جبکہ $x\to 0$ کے 0 بائیں طرف سے $\lim_{x\to 0^-}|x|=0$ ہے۔ تو

یعنی $\lim_{x\to 0^-}|x|=0=\lim_{x\to 0^+}|x|$

لہذا $\lim_{x\to 0}|x|=0.$



9.10 خاکہ

مثال 9.2

تفاعل پر غور کریں $f(x)=\sqrt{x}\ ,\ x\geq 0$

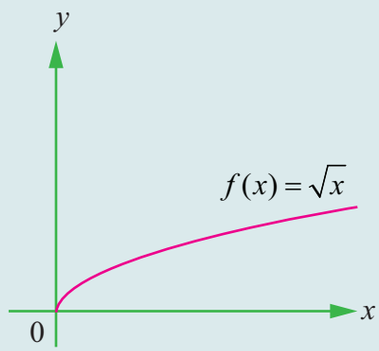
کیا $\lim_{x\to 0} f(x)$ موجود ہے؟

حل

$f(x)=\sqrt{x}$ نہیں ۔یہاں تک کہ $x<0$ کی وضاحت کے لئے نہیں ہے۔

لہذا جب $x\to 0^-$ ، $\lim_{x\to 0^-}\sqrt{x}$ غیر موجود ہے

البتہ $\lim_{x\to 0^-}\sqrt{x}$ لہذا $\lim_{x\to 0}\sqrt{x}$ غیر موجود ہے۔



9.11 خاکہ

کیا $\lim_{x\to 0^-}\log x$ وجود ہے؟

جواب کے لئے $\log x$ کی ترسیم دیکھیں

09_11th-Maths-Vol2-Unit9_UM.indd 93 21-02-2023 16:09:37

مثال 9.3

$\lim_{x\to 2^-}\lfloor x\rfloor$ اور $\lim_{x\to 2^+}\lfloor x\rfloor$ قیمتیں معلوم کرو۔

حل

اعلیٰ سالم تفاعل $f(x)=\lfloor x\rfloor$ کی وضاحت سے چھوٹا یا مساوی اعلیٰ سالم عدد x ہے۔

اس تفاعل کی ترسیم (خاکہ 1.25) سے یہ واضح ہے کہ $\lim_{x\to 2^-}\lfloor x\rfloor=1$ اور $\lim_{x\to 2^+}\lfloor x\rfloor=2$

مزید یہ کہ n، کسی بھی سالم عدد کے لئے $\lim_{x\to n^-}\lfloor x\rfloor=n-1$ اور $\lim_{x\to n^+}\lfloor x\rfloor=n$ ۔

کیا $\lim_{x\to n}\lceil x\rceil=f(x)$ موجود ہے؟ جواب کے لئے $\lceil x\rceil$ کی (خاکہ 1.26) ترسیم دیکھیں۔

مثال 9.4

فرض کریں $f(x)=\begin{cases}x+1, & x>0\\ x-1, & x<0\end{cases}$

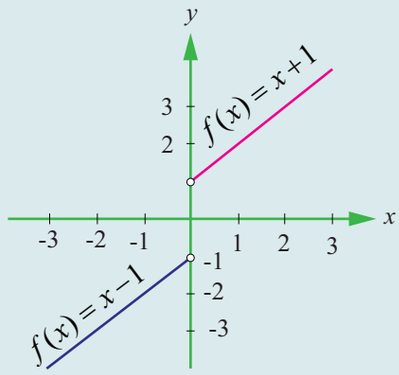
کے حد کی موجودگی $x\to 0$ کی تصدیق کیجئے۔

حل

تفاعل کو خاکہ 9.12 میں ترسیم کیا گیا ہے۔

واضح طور پر $\lim_{x\to 0^-}f(x)=-1$ اور $\lim_{x\to 0^+}f(x)=1$ چونکہ یہ حدود مختلف ہیں۔

$\lim_{x\to 0}f(x)$ غیر موجود ہے



9.12 خاکہ

مثال 9.5

جانچ کیجئے کہ $\lim_{x\to -5}f(x)$ موجود یا غیر موجود، جہاں $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x+5|}{x+5}, & x\neq -5 \text{ کے لئے}\\ 0, & x=-5 \text{ کے لئے}\end{cases}$

حل

(i) $f(-5^-)$

$x<-5,\ |x+5|=-(x+5)$ کے لئے

یعنی $f(-5^-)=\lim_{x\to -5^-}\dfrac{-(x+5)}{(x+5)}=-1$

(ii) $f(-5^+)$

$x>-5,\ |x+5|=(x+5)$ کے لئے

یعنی $f(-5^+)=\lim_{x\to -5^+}\dfrac{(x+5)}{(x+5)}=1$

نوٹ کریں، $f(-5^+)\neq f(-5^-)$ لہذا حد غیر موجود ہے

09_11th-Maths-Vol2-Unit9_UM.indd 94 21-02-2023 16:09:37

مثال 9.6

حد کی موجودگی کی جانچ کریں، $\lim_{x\to 1}\frac{4|x-1|+x-1}{|x-1|}$، $x\neq 1$.

حل

$x>1$ کے لئے، $|x-1|=x-1$ اور $f(1^+)=\lim_{x\to 1^+}\frac{4(x-1)+x-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{5(x-1)}{(x-1)}=5$

$x<1$ کے لئے، $|x-1|=-(x-1)$ اور $f(1^-)=\lim_{x\to 1^-}\frac{-4(x-1)+(x-1)}{-(x-1)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{3(x-1)}{(x-1)}=3$

یعنی $f(1^-)\neq f(1^+)$ اور لہٰذا حد غیر موجود ہیں

مشق 9.1

مسائل 1-6 میں، جدول کا استعمال کرتے ہوئے حد کی قیمت کا اندازہ لگائیں۔

(1) $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-x-2}$

x	1.9	1.99	1.999	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	0.344820	0.33444	0.33344	0.333222	0.33222	0.332258

(2) $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}$

x	1.9	1.99	1.999	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	0.25641	0.25062	0.250062	0.24993	0.24937	0.24390

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}$

x	-0.1	-0.01	-0.001	0.001	0.01	0.1
f(x)	0.2911	0.2891	0.2886	0.2886	0.2885	0.28631

(4) $\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{1-x}-2}{x+3}$

x	-3.1	-3.01	-3.00	-2.999	-2.99	-2.9
$f(x)$	-0.24845	-0.24984	-0.24998	-0.25001	-0.25015	-0.25158

(5) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$

x	-0.1	-0.01	-0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	0.99833	0.99998	0.99999	0.99999	0.99998	0.99833

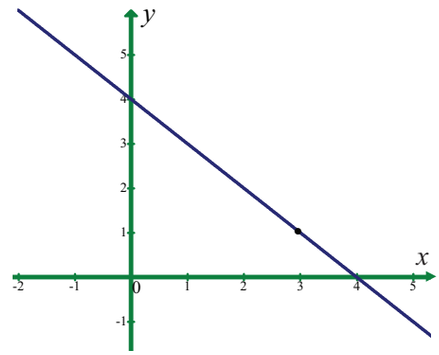
(6) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}$

x	-0.1	-0.01	-0.001	0.0001	0.01	0.1
$f(x)$	0.04995	0.0049999	0.0004999	–0.0004999	–0.004999	–0.04995

09_11th-Maths-Vol2-Unit9_UM.indd 95 21-02-2023 16:09:38

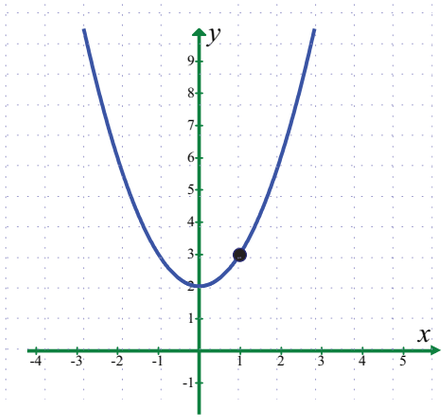
مشق کے مسائل 7 - 15 میں، ترسیم کو استعمال کرکے حدود معلوم کریں(اگر یہ موجود ہے)۔ اگر حد غیر وجود ہو تو،اس کی وضاحت کریں ؟

(7) $\lim_{x\to 3}(4-x)$



خاکہ 9.13

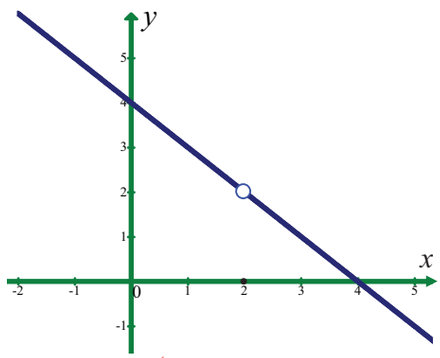
(8) $\lim_{x\to 1}(x^2+2)$



خاکہ 9.14

(9) $\lim_{x\to 2} f(x)$

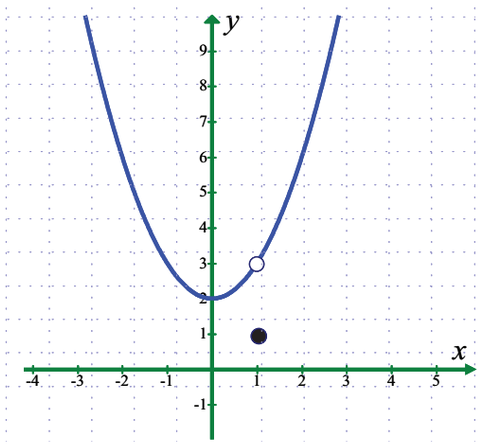
جہاں $f(x)=\begin{cases}4-x, & x\neq 2\\ 0, & x=2\end{cases}$



خاکہ 9.15

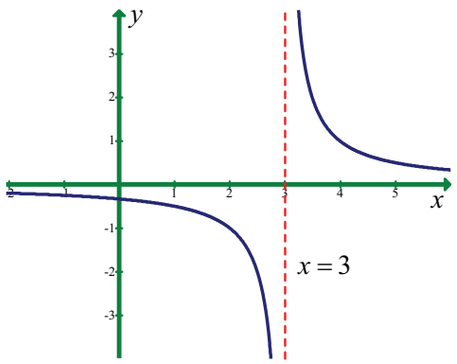
(10) $\lim_{x\to 1} f(x)$

جہاں $f(x)=\begin{cases}x^2+2, & x\neq 1\\ 1, & x=1\end{cases}$



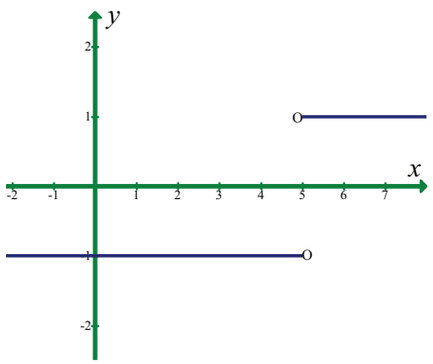
خاکہ 9.16

(11) $\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-3}$



خاکہ 9.17

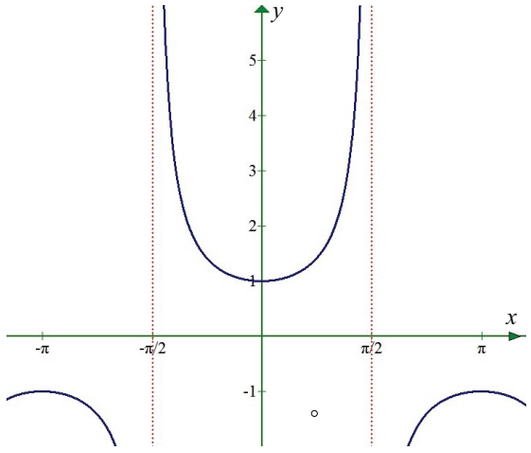
(12) $\lim_{x\to 5}\frac{|x-5|}{x-5}$



خاکہ 9.18

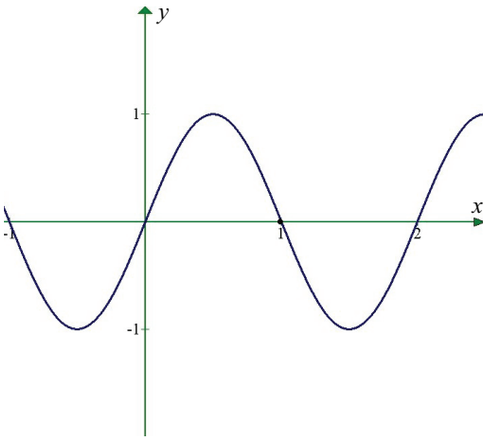
09_11th-Maths-Vol2-Unit9_UM.indd 96 21-02-2023 16:09:39

$\lim_{x\to 1} \sin \pi x$ (13)



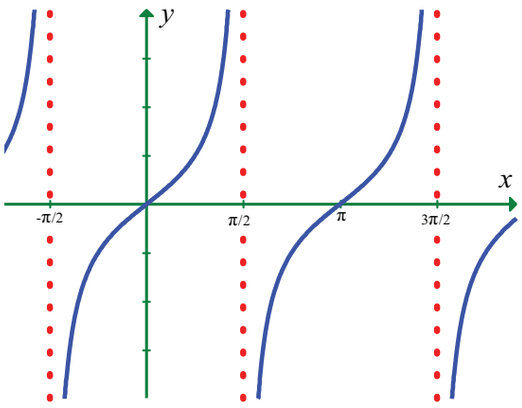
9.19 خاکہ

$\lim_{x\to 0} \sec x$ (14)



9.20 خاکہ

$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \tan x$ (15)



9.21 خاکہ

f کی ترسیم کا خاکہ بنائے، پھر x_0 کی قیمتوں کو نشاندہی کریں جس کا $\lim_{x\to x_0} f(x)$ موجود ہوں۔

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 2 \\ 8-2x, & 2 < x < 4 \\ 4, & x \ge 4 \end{cases} \quad (16)$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0 \\ 1-\cos x, & 0 \le x \le \pi \\ \cos x, & x > \pi \end{cases} \quad (17)$$

(81) تفاعل f کی ترسیم کا خاکہ بنائے جو دی گئی قیمتوں کو مطمئن کرتا ہے:

(i) $f(0)$ غیر واضح ہے

$\lim_{x\to 0} f(x) = 4$

$f(2) = 6$

$\lim_{x\to 2} f(x) = 3$

(ii) $f(-2) = 0$

$f(2) = 0$

$\lim_{x\to -2} f(x) = 0$

$\lim_{x\to 2} f(x)$ غیر موجود ہے

09_11th-Maths-Vol2-Unit9_UM.indd 97 21-02-2023 16:09:39

(19) علامت $\lim_{x\to 8} f(x) = 25$ کے مطلب کا مختصر وضاحت کریں۔

(20) اگر $f(2) = 4$ ہے، کیا آپ $f(x)$ کی حد کے بارے میں کچھ x نتیجہ اخذ کرسکتے ہیں جبکہ x کی قیمت 2 کے قریب پہنچتا ہے۔

(21) اگر $f(x)$ کی حد 4 ہو جبکہ x کی قیمت 2 کے قریب پہنچتا ہے۔ کیا آپ $f(2)$ کے بارے میں کچھ اخذ کرسکتے ہیں اس کی وضاحت کریں۔

(22) محسوب کریں: $f(3^-)$ اور $f(3^+)$ معلوم کریں اگر یہ $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$ موجود ہو۔

(23) $\lim_{x\to 1} f(x)$ کی موجدگی کی وضاحت کرو، جہاں $f(x) = \begin{cases} \frac{|x-1|}{x-1}, & \text{کے لئے } x \neq 1 \\ 0, & \text{کے لئے } x = 1 \end{cases}$

9.2.3 حدوں پر نظریات (Theorems on limits)

پچھلے حصّہ میں غیر رسمی بحث کا مقصد حد کے موجودگی یا غیر موجودگی کی الہامی گرفت حاصل کرناتھا۔ تاہم، عملی قیمتوں کے ترسیم یا جدول کی بنیاد پر کسی حد کے موجدوگی کے بارے میں کسی نتیجے پر پہنچنا ہر صورت میں نہ تو مطلوب ہے اور نہ ہی عملی۔ ہمیں کسی حد تک میکانیکی انداز میں کسی حد کا اندازہ کرنے، یا اس کے عدم موجودگی کو سمجھ نے کے قابل ہونا چاہیے۔ اس حصّے میں جن نظریات پر غور کریں گے وہ اس طرح کہ ذرائع کو قائم کرتے ہیں۔ان نظریات کے ثبوت زیادہ تکنیکی ہیں اور اس نصابی کتاب کے دائرہ کار سے باہر ہیں۔

تشریح 1.9 میں، ہم نے یہ نتیجہ اخذ $\lim_{x\to 2}(x^2+3) = 2^2+3 = 7$ کیا۔ یعنی جب کی قیمت 2 کے قریب پہنچتا ہے تو $f(x) = x^2+3$ کی $f(x)$ حد کی تشخیص $x = 2$ پر مساوی ہے۔ [یعنی $f(2)$]۔ تاہم تشخیص کا یہ عمل، جیسا کہ پہلے بتایاگیا، ہمیشہ کام نہیں کریگا کیونکہ $f(x)$ کی وضاحت بھی x_0 پر نہیں کی جاسکتی ہے۔ بہرحال، یہ درست ہے کہ f ایک کثیر رقمی ہے، تو یہ ہمیشہ تشخیص کے ذریعے حد کا حساب لگانا ممکن ہے۔

مسئلہ 9.1

فرض کریں کہ $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ ایک کثیر رقمی ہے، جہاں $a_0, a_1, \cdots, a_n$ حقیقی اعداد ہیں اور n ایک مقررہ مثبت عدد ہو تو

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \cdots + a_nx_0^n = P(x_0).$$

مثال 9.7

$\lim_{x\to 3}(x^3 - 2x + 6)$. قیمت معلوم کرو۔

حل

$P(x) = x^3 - 2x + 6$ ایک کثیر رقمی ہے

لہذا $\lim_{x\to 3} P(x) = P(3) = 3^3 - 2\times 3 + 6 = 27$

مثال 9.8

کسی بھی حقیقی عدد x_0 کے لئے $\lim_{x\to x_0}(5)$ کی قیمت معلوم کرو۔

حل

$f(x) = 5$ ایک کثیر رقمی ہے (درجہ 0 ہے)

لہذا $\lim_{x\to x_0}(5) = f(x_0) = 5$

ایک مستقل تفاعل کا حد مستقل ہے۔

09_11th-Maths-Vol2-Unit9_UM.indd 98 21-02-2023 16:09:40

مسئلہ 9.2

فرض کریں کہ I ایک کھلا وقفہ ہے۔ جس میں $x_0 \in$. ہے۔

فرض کریں $f, g : I \to$.

فرض کریں کہ c ایک مستقل اور حدود $\lim_{x\to x_0} f(x)$ اور $\lim_{x\to x_0} g(x)$ موجود ہیں۔ تو $\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)], \lim_{x\to x_0}(cf(x))$،

$\lim_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]$، $\lim_{x\to x_0}[f(x)g(x)]$ اور $g(x)\neq 0$، $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ سبوجود ہیں۔ مزید یہ کہ،

(i) $\lim_{x\to x_0} cf(x) = c\lim_{x\to x_0} f(x)$،

(ii) $\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x)$

(iii) $\lim_{x\to x_0}[f(x).g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) . \lim_{x\to x_0} g(x)$ اور

(iv) $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$، فراہم $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$.

ان نتائج کو تفاعلات کے کسی بھی محدود تعداد تک بڑایا جاسکتا ہے۔ □

مثال 9.9

محسوب کرو: (i) $\lim_{x\to 8}(5x)$ (ii) $\lim_{x\to -2}\left(-\frac{3}{2}x\right)$

حل

(i) $\lim_{x\to 8}(5x) = 5\lim_{x\to 8}(x) = 5\times 8 = 40$

(ii) $\lim_{x\to -2}\left(-\frac{3}{2}x\right) = -\frac{3}{2}\lim_{x\to -2}(x) = \left(-\frac{3}{2}\right)(-2) = 3$

مثال 9.10

محسوب کرو $\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2+x}{x}+4x^3+3\right]$

حل

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2+x}{x}+4x^3+3\right] = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+x}{x}\right) + \lim_{x\to 0}(4x^3+3)$$

$$= \lim_{x\to 0}(x+1) + \lim_{x\to 0}(4x^3+3)$$

$$= (0+1)+(0+3)$$

$$= 4.$$

09_11th-Maths-Vol2-Unit9_UM.indd 99 21-02-2023 16:09:42

مثال 9.11

محسوب کرو $\lim_{x\to -1}(x^2-3)^{10}$

حل

$$\lim_{x\to -1}(x^2-3) = 1-3 = -2.$$

اس لئے, $\lim_{x\to -1}(x^2-3)^{10} = \lim_{x\to -1}(x^2-3)\,(x^2-3)...(x^2-3)$ (10 مرتبہ)

$$= \lim_{x\to -1}(x^2-3)\lim_{x\to -1}(x^2-3)...\lim_{x\to -1}(x^2-3) \text{ (10 مرتبہ)}$$

$$= \left[\lim_{x\to -1}(x^2-3)\right]^{10} = (-2)^{10} = 2^{10} = 1024.$$

نوٹ کریں $\lim_{x\to -1}(x^2-3)^{10} = \left[\lim_{x\to -1}(x^2-3)\right]^{10}$.

مسئلہ 9.3

اگر $\lim_{x\to x_0} f(x)$ موجود ہو تو $\lim_{x\to x_0}[f(x)]^n$ موجود ہے اور $\lim_{x\to x_0}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right]^n$

مثال 9.12

محسوب کرو۔ $\lim_{x\to -2}(x^3-3x+6)\ (-x^2+15)$

حل

$$\lim_{x\to -2}(x^3-3x+6) = (-2)^3 - 3(-2) + 6 = -8+6+6 = 4$$

$$\lim_{x\to -2}(-x^2+15) = -(-2)^2 + 15 = -4+15 = 11$$

$$\lim_{x\to -2}(x^3-3x+6)\,(-x^2+15) = \lim_{x\to -2}(x^3-3x+6)\lim_{x\to -2}(-x^2+15) = 4\times 11 = 44.$$

مثال 9.13

محسوب کرو۔ $\lim_{x\to 3}\dfrac{(x^2-6x+5)}{x^3-8x+7}$.

حل

$$\lim_{x\to 3}(x^2-6x+5) = 3^2 - 6\times 3 + 5 = -4$$

$$\lim_{x\to 3}(x^3-8x+7) = 3^3 - 8\times 3 + 7 = 10 \neq 0.$$

اس لئے، $\lim_{x\to 3}\dfrac{(x^2-6x+5)}{x^3-8x+7} = \dfrac{\lim_{x\to 3}(x^2-6x+5)}{\lim_{x\to 3}(x^3-8x+7)} = \dfrac{-4}{10} = -\dfrac{2}{5}$

احتیاط

اگر $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ خارج قسمت کے لئے اس حد کا نظریہ استعمال نہ کریں۔

09_11th-Maths-Vol2-Unit9_UM.indd 100 21-02-2023 16:09:42

مثال 9.14

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ حسوب کریں۔

حل

یہاں $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$ ۔ ایسی صورتوں میں، شمار کنندہ کو ناطق بناتے ہیں۔

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(1)}{\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{1}{2}.$$

مثال 9.15

$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$ معلوم کریں

حل

ہم فوری طور پر خارج قسمت کا مسئلہ کو لاگو نہیں کرسکتے ۔ الجبرائی تکنیک کو استعمال کر کے شمار کنندہ کو ناطق اپنائے۔

$$\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}=\frac{\left(\sqrt{t^2+9}-3\right)\left(\sqrt{t^2+9}+3\right)}{t^2\left(\sqrt{t^2+9}+3\right)}=\frac{t^2+9-9}{t^2\left(\sqrt{t^2+9}+3\right)}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{t^2\sqrt{t^2+9}+3}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\sqrt{t^2+9}+3}=\frac{1}{\sqrt{9}+3}=\frac{1}{6}.$$

مسئلہ 9.4

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$ ۔

ثبوت

ہم جانتے ہیں کہ $x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\cdots+xa^{n-2}+a^{n-1})$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}&=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\cdots+xa^{n-2}+a^{n-1})}{(x-a)}\\&=\lim_{x\to a}(x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\cdots+xa^{n-2}+a^{n-1})\\&=a^{n-1}+a^{n-1}+\cdots+a^{n-1}\ (\text{مرتبہ } n)\\\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}&=na^{n-1}.\end{aligned}$$

یہ کسی بھی ناطق عدد n کے لئے بھی درست ہے۔ □

مثال 9.16

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$ محسوب کرو۔

حل

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1^3}{x-1}=3(1)^{3-1}=3\ .$$

09_11th-Maths-Vol2-Unit9_UM.indd 101 21-02-2023 16:09:43

مثال 9.17

$\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{\sqrt{t}-1}{t-1}$ محسوب کرو۔

حل

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{t}-1}{t-1}=\lim_{x\to 1}\frac{t^{\frac{1}{2}}-1^{\frac{1}{2}}}{t-1}=\frac{1}{2}(1)^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}.$$

مثال 9.18

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2+x)^5-2^5}{x}$ معلوم کرو

حل

$y=2+x$ درج کریں تاکہ $y\to 2$ جبکہ $x\to 0$ ہو۔

لہذا، $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2+x)^5-2^5}{x}=\lim\limits_{y\to 2}\dfrac{y^5-2^5}{y-2}=5(2^4)=80$

مثال 9.19

مثبت سالم عدد n کو معلوم کریں تاکہ $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^n-3^n}{x-3}=27$۔

حل

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^n-3^n}{x-3}=n.3^{n-1}=27$$

یعنی $n.3^{n-1}=3\times 3^2=3\times 3^{3-1}\Rightarrow n=3$

مثال 9.20

a اور b کی درمیان تعلق معلوم کریں اگر $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$ موجود ہے جہاں

حل

$$\lim_{x\to 3^-}f(x)=9a-4b+1$$

$\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=3a+b$۔اب حد کا وجود ہمیں پابند کرتا ہے۔

$$\lim_{x\to 3^-}f(x)=\lim_{x\to 3^+}f(x).$$

$$\Rightarrow\ 9a-4b+1=3a+b$$

$$\Rightarrow\ 6a-5b+1=0.$$

مشق 9.2

درج ذیل محدود کی قیمتیں معلوم کرو:

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x-2}$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$، m اور n سالم عدد ہیں۔

(3) $\lim\limits_{\sqrt{x}\to 3}\dfrac{x^2-81}{\sqrt{x}-3}$

(4) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}, x>0$

(5) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{x-5}$

$\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}$ (6)

$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-x^2}{1-\sqrt{x}}$ (7)

$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$ (8)

$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ (9)

$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{7+x^3}-\sqrt{3+x^2}}{x-1}$ (10)

$\lim_{x\to 2}\frac{2-\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4-x}}$ (11)

$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ (12)

$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-1}{x^2}$ (13)

$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$ (14)

$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}(a>b)$ (15)

9.2.4 لامتناہی حدود اور لامتناہی پر حدود (Infinite limits and limits at infinity)

لامتناہی حدود

فرض کریں $f=\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ کی تعاریف $f(x)=\frac{1}{x^2}$ ہے۔

فرض کریں کہ $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$ کو محسوب کرنے کے لئے مسئلے پر غور کریں۔

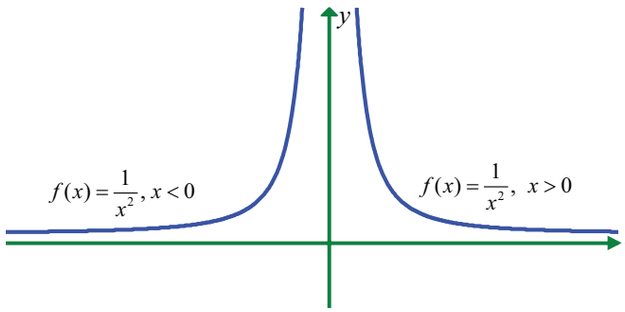
مندرجۂ ذیل جدول سے $\frac{1}{x^2}$ کی قیمت 0 کے قریب دیتا ہے۔

$x\to 0^+$			$x\to 0^-$		
x	x^2	$\frac{1}{x^2}$	x	x^2	$\frac{1}{x^2}$
1	1	1	−1	1	1
0.5	0.25	4	− 0.5	0.25	4
0.1	0.01	100	− 0.1	0.01	100
0.01	0.0001	10,000	− .01	0.0001	10,000
0.001	0.000001	10,00,000	− 0.001	0.000001	10,00,000
0.0001	0.00000001	10,00,00,000	− 0.0001	0.00000001	10,00,00,000

جدول کی قیمتیں ہمیں بتاتی ہیں کہ جیسے جیسے x کی قیمت 0 کے قریب آتا ہے، $f(x)=\frac{1}{x^2}$ بڑھتا جاتا ہے۔ درحقیقت $\frac{1}{x^2}$ بغیر کسی شرط کے بڑھتا ہے کیونکہ x دونوں طرف سے 0 کے قریب پہنچتا ہے۔ اس صورت حال میں ہم کہتے ہیں کہ جب x کی قیمت صفر کے قریب پہنچتا ہے تو $f(x)$ لامتناہی کی طرف جاتا ہے اور $\frac{1}{x^2}\to\infty$ کو $x\to 0^-$ کی طرح اور $\frac{1}{x^2}\to\infty$ کو $x\to 0^+$ کی طرح لکھتے ہیں اور لہذا $\frac{1}{x^2}\to\infty$، $x\to 0$ کی طرح ہے۔

09_11th-Maths-Vol2-Unit9_UM.indd 103 21-02-2023 16:09:44

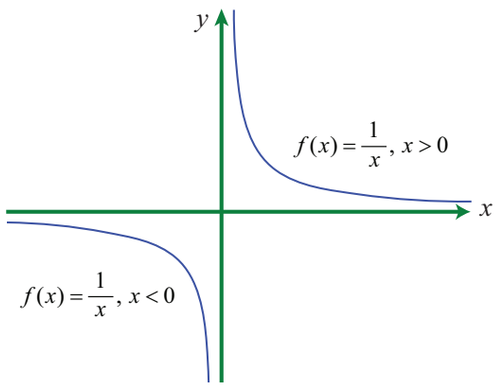
ہندسی طور پر، $x = 0$ یعنی $y-$ محور کے منحنی کا عمودی متقارب ہے جو $f(x) = \frac{1}{x^2}$ کی نمائندگی کرتا ہے۔



9.22 خاکہ

تفاعل $f(x) = \frac{1}{x^2}$ کا ترسیم خاکہ 9.22 میں دکھایا گیا ہے۔

یاد رکھیں کہ حد لامتناہی ہے اوراس طرح $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$ غی ر موجود ۔ طلباء کو متنبہ کیا جاتا ہے کہ $f(x) = \frac{1}{x^2}$ کے اس رویے کی علامت∞ ہے اور یہ کوئی نئ عدد نہیں ہے۔



9.23 خاکہ

اسی طرح اگر ہم دیکھیں $f(x) = \frac{1}{x}$ ،

یہ دیکھنا آسان ہے کہ، $\frac{1}{x} \to -\infty$ جبکہ $x \to 0^-$ اور $\frac{1}{x} \to -\infty$ جبکہ $x \to 0^+$

جو ہندسی طور پر $f(x) = \frac{1}{x}$ کے ترسیم سے واضح ہے (خاکہ 9.23)

عام طور پر ہمارے پاس مند رجہ ذیل الہامی تعارفیں ہیں۔

تعریف 9.4

دئے گئے $M > 0$ کے لئے، کھلے وقفے (M, ∞) کو ∞ کا قریبی (neighbourhood) کہاجاتا ہے۔ اس طرح، دئے گئے $K < 0$ کے لئے ، $(K, -\infty)$ کے کھلے وقفوں کو $-\infty$ کا قریبی کہا جاتاہے۔

تعریف 9.5

ہم کہتے ہیں ،جب کی x قیمت x_0 کے قریب پہنچتا ہے تو $f(x) \to \infty$ اور اگر دئے گئے مثبت عدد کے لئے قریبی ہے جب x_0 کا قریبی x ہوتا ہے $f(x) > M$ ۔ یعنی، $f(x) \in (M, \infty)$ ۔

اس طرح جب x کی قیمت x_0 کے قریب ہوتا ہے تو $f(x) \to -\infty$ ، اگر دئے گئے $K < 0$ کے لئے x_0 قریبی ہے جیسے کہ x_0 کا قریبی x ہو، $f(x) < K$ ۔ یعنی، $f(x) \in (-\infty, K)$ ۔

اس صورت حال کو علامتی طور پر بیان کرنے کے لئے ہم لکھتے ہیں۔

$f(x) \to \infty$ جبکہ $x \to x_0$

$f(x) \to -\infty$ جبکہ $x \to x_0$

$f(x) \to \infty$ جبکہ $x \to x_0^-$

$f(x) \to -\infty$ جبکہ $x \to x_0^+$

اور $f(x) \to \infty$ جبکہ $x \to x_0^+$

$f(x) \to -\infty$ جبکہ $x \to x_0^-$

لامتناہی حدود کہلاتی ہے۔ اگر مندرجہ بالا شرائط میں سے کوئی ایک ہوتو حد $x = x_0$ ایک $f(x)$ کے ترسیم کے لئے **عمودی متقارب** ہے۔

09_11th-Maths-Vol2-Unit9_UM.indd 104 21-02-2023 16:09:45

مثال 9.21

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{(x^2+x^3)}$ محسوب کرو

حل

کوئی بھی 0 (دونوں طرف سے) کے قریب x کی قیمتوں کو جدول کر سکتا ہے اور یہ نتیجہ اخذ کر سکتا ہے کہ $f(x)=\dfrac{1}{(x^2+x^3)}$ بغیر کسی شرط کے بڑھتا ہے اور اس لئے $f(x)\to\infty$ جبکہ $x\to 0$

جدول بنائے بغیر حد کا حساب لگانے کے لئے، ہم پہلے شمارکنندہ اور قطب نما کو x^2 سے تقسیم کرتے ہیں۔ یہ تقسیم ہو سکتی ہے، جو حد کو محسوب کرنے پر $x\neq 0$ اور اس طرح $x^2\neq 0$ ہے۔ ہمارے پاس ہے

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2+x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2+x^3}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to 0}(1+x)}.$$

اب $\dfrac{1}{x^2}\to\infty$ جبکہ $x\to 0$ اور $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)=1$

اس طرح شمارکنندہ بغیر کسی شرط کے بڑھتا ہے اور نسب نما '1' کے قریب پہنچتا ہے، اس کا مطلب یہ ہے کہ $\dfrac{1}{(x^2+x^3)}$ لامتناہی کے طرف جاتا ہے۔

یہ مثال بتاتی ہے کہ کس طرح ایک مشکل حساب کو چند الجبرائی سلجھاؤ سے بہت آسان بنایا جا سکتا ہے۔

مثال 9.22

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{(x-2)^3}$ قیمت معلوم کرو۔

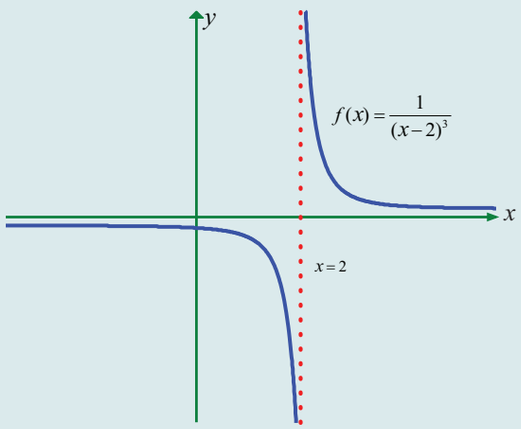
حل

ترسیم سے $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^3}$،

واضح طور، $\dfrac{1}{(x-2)^3}\to-\infty$ جبکہ $x\to 2^-$ اور

$\dfrac{1}{(x-2)^3}\to\infty$ جبکہ $x\to 2^+$

لہذا حد غیر موجود ہے۔



9.24 خاکہ

عام طور پر

(i) اگر n ایک مثبت جفت سالم عدد ہے تو

$\dfrac{1}{(x-a)^n}\to\infty$ جبکہ $x\to a$

$\dfrac{1}{(x-a)^n}\to\infty$ جبکہ $x\to a^-$

$\dfrac{1}{(x-a)^n}\to\infty$ جبکہ $x\to a^+$

خط $x=a$ ایک عمودی علامت بن جاتی ہے۔

(ii) n طاق مثبت سالم عدد ہے تو

$\dfrac{1}{(x-a)^n}\to-\infty$ جبکہ $x\to a^-$

$\dfrac{1}{(x-a)^n}\to+\infty$ جبکہ $x\to a^+$

09_11th-Maths-Vol2-Unit9_UM.indd 105 21-02-2023 16:09:46

9.2.5 لامتناہی پر حدود (Limits at infinity)

پچھلے حصّے میں ہم نے لامتناہی اور عمودی علامات کی چھان بین کی۔ جہاں ہم نے x کو ایک محدود تک پہنچنے دیا اور نتیجہ یہ نکلا کہ y کی قسمیں اختیار طور پر بڑھی ہوگئی (اعلیٰ مثبت یااعلیٰ منفی)۔ اس حصہ میں ، ہم x کو اختیار ی طور پر بڑابننے دیتے ہیں (مثبت یاامنفی) اور دیکھتے ہیں y کہ کیا ہوتا ہے۔

آئے $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ کے رویے کی چھان بین کرتے ہوئے شروع کرتے ہیں جو

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ سے وضاحت کی گئی ہے جبکہ x بڑا ہوجاتا ہے۔

ہم جدول سے تفاعل کی قیمت معلوم کرسکتے ہیں

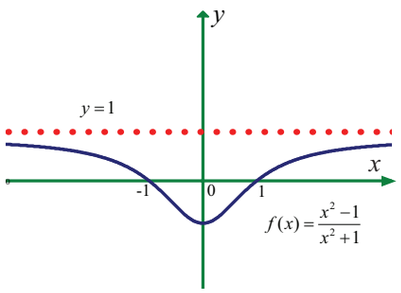
x	$f(x)$
0	-1
±1	0
±2	0.6000000
±3	0.800000
±4	0.882353
±5	0.923077
±10	0.980198
±50	0.999200
±100	0.999800
±1000	0.999998

جب x بڑا سے بڑا ہوجاتاہے(اعلیٰ مثبت یااعلیٰ منفی)آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $f(x)$ کی قیمت '1' کے قریب آجاتی ہے۔ درحقیقت ، ایسا لگتا ہے کہ ہم x کو کافی بڑا لے کر $f(x)$ کی قیمتوں کو '1' کے قریب کرسکتے ہیں۔ اس صورت حال کا اظہار علامتی طور تحریر کے ذریعے کیا جاتاہے۔

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}=1.$$

اگر ہم ترسیم کو دیکھیں

ہندسی طور پر (خاکہ 9.25 دیکھیں) یہ صورت حال بھی ہمیں اس کئی طرف لے جاتی ہے۔



خاکہ 9.25

تعریف 9.6

خط $y=l$ کو منحنی $y=f(x)$ کی **افقی متقارب** کہاجاتا ہے اگر

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=l$ یا $\lim_{x\to+\infty}f(x)=l$ ۔

تشریح 9.4

اگر $f:\mathbb{R}\to\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ کی تعارف $f(x)=\tan^{-1}x$ ہے تو

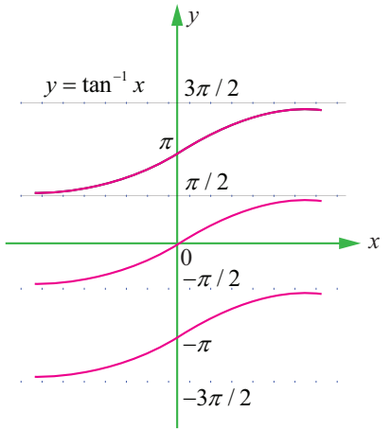
$\lim_{x\to\infty}f(x)$ اور $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ معلوم کریں۔

حل

اگر ہم $y=\tan^{-1}x$ کی ترسیم کو دیکھیں

$$\lim_{x\to-\infty}\tan^{-1}x=-\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\tan^{-1}x=\frac{\pi}{2}.$$



خاکہ 9.26

09_11th-Maths-Vol2-Unit9_UM.indd 106 21-02-2023 16:09:48

تشریح 9.5

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-2x+3}{x^2+4x+4}$ محسوب کرو۔

حل

اگر ہم اس حد کو شمار کرنے کے لئے حد کے نظریات کو استعمال کرنے کی کوشش کرسکتے ہیں تو ہم درج ذیل حالات میں ختم ہوتے ہیں۔

$x\to\infty$ جبکہ $\left(2x^2-2x+3\right)\to\infty$

$x\to\infty$ جبکہ $\left(x^2+4x+4\right)\to\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2-2x+3}{x^2+4x+4}\right)=\dfrac{\infty}{\infty}$ جیسے غیر متعین (indeterminate) شکل کہا جاتا ہے۔

لیکن اصلی حساب اور جدول مندرجہ ذیل دیتا ہے:

x	$2x^2-2x+3$	x^2+4x+4	$\dfrac{2x^2-2x+3}{x^2+4x+4}$
1	3	9	0.3333
10	183	144	1.27083
100	19803	10404	1.90340
1000	1998003	1004004	1.99003
10000	199980003	100040004	1.99900

جدول کی قیمتیں ظاہر کرتی ہیں کہ جیسے جیسے x کافی بڑا ہوجاتا ہے، $f(x)$ کی قیمت 2 کے قریب ہوتا جاتا ہے۔یعنی،

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-2x+3}{x^2+4x+4}$۔

اتفاق سے ہم شمارکنندہ اور نسب نما کو سے تقسیم کرکے مسئلہ کو آسان بنا سکتے x^2 ہیں۔ ہمارے پاس

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-2x+3}{x^2+4x+4}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}\right)$$

$$=\frac{2-0+0}{1+0+0}\quad\left(\text{چونکہ } x\to\infty \text{ جبکہ } \frac{1}{x}\to 0\text{ ، } x\to\infty \text{ جبکہ } \frac{1}{x^2}\to 0\right)$$

$$=2.$$

نوٹ کریں کہ شمار کنندہ ار نصب نما دونوں عبارتوں کے درجے مساوی ہیں۔

عام طور پر، ناطق عبارتوں کی حددوجبکہ $x\to\pm\infty$ ہو تو پہلے شمارکنندہ اور نصب نما دونوں کو کی سب بڑی قوتی عدد جو نسب نما میں پائی جاتی ہے اور اس کے تقسیم کرکے حاسل کیا جاتا ہے اور پھر شمارکنندہ اور نصب نما دونوں کو $x\to\infty$ (یا $x\to-\infty$) کے طور پر حد کا حساب لگایاجاتاہے۔

مثال 9.23

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x+3}{(5x^2+1)}$ محسوب کیجئے۔

09_11th-Maths-Vol2-Unit9_UM.indd 107 21-02-2023 16:09:48

حل

x^2 سے تقسیم کرنے پر

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x+3}{(5x^2+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{5+\frac{1}{x^2}}\to\infty$$

یعنی $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x+3}{(5x^2+1)}\to\infty$ ، جبکہ $x\to\infty$

دوسرے لفظ میں ، حد غیر موجود ہے۔

نوٹ کریں کہ شمار کنندہ کی درجہ نصب نما سے بڑھ کر ہے۔

مثال 9.24

$\lim_{x\to\infty}\frac{1-x^3}{3x+2}$ محسوب کرو۔

حل

x سے تقسیم کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{1-x^3}{3x+2}=\frac{\frac{1}{x}-x^2}{3+\frac{2}{x}}\to-\infty \quad \text{جبکہ} \quad x\to\infty$$

لہذا حد غیر وجود ہے

9.2.6 ناطق تفاعلات کا حدود (Limits of rational functions)

اگر $R(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ اور کثیر رقمی $p(x)$ کا درجہ $q(x)$ کے درجہ سے بڑھ کر ہے، تو

$\frac{p(x)}{q(x)}\to+\infty$ یا $-\infty$ جبکہ $x\to\infty$۔

اگر $q(x)$ کا درجہ $p(x)$ درجہ سے بڑھ ہے ، تو

$$\lim_{x\to\infty}\frac{p(x)}{q(x)}=0.$$

آخر میں، اگر $p(x)$ کا درجہ کے $q(x)$ درجہ سے مساوی ہے، تو

$$\lim_{x\to\infty}\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{p(x)\text{ میں اعلی قوت }x\text{ کا سر عدد}}{q(x)\text{ میں اعلی قوت }x\text{ کا سر عدد}}$$

تبصرہ (Remark)

ہم اس بات پر دوبارہ زور دیتے ہیں کہ $f(x)\to\infty$ جبکہ $x\to a$ ، $f(x)\to-\infty$ جبکہ $x\to a$ اور $f(x)\to\infty$ جبکہ $x\to\infty$ ، $f(x)\to-\infty$ جبکہ $x\to\infty$ جس کا مطلب حدود غیر موجود ہے ۔ علامت ∞ کسی عدد کی نمائندگی نہیں کرتی ہے اور اسے ایک عدد کے طور پر نہیں سمجھا جائے۔

09_11th-Maths-Vol2-Unit9_UM.indd 108 21-02-2023 16:09:50

9.2.7 حدوں کے اطلاق (Applications of limits)

مثال 9.25

شراب جسم سے پھیپھڑوں ، گردوں اور جگر میں کیمیائی عمل کے ذریعے خارج ہوتا ہے۔معتدل ارتکاز کی سطح پر ،شراب کو بنانے کا زیادہ رکام جگر کرتا ہے ۔شراب کا 5% سے کم، پھیپھڑوں اور گردوں سے خارج ہوتا ہے ۔شرح r جس پر جگر کے عمل سے شراب کو رد عمل کرتاہے اس کا تعلق خون کے شراب کا ارتکاز x سے ہوتا ہے جو کہ کچھ مثبت استحکام α اور β کے لئے $r(x)=\frac{\alpha x}{(x+\beta)}$ کا ناطق تفاعل کی عام شکل ہے ۔شراب کو ہٹانے کی ممکن شرح کو معلوم کریں۔

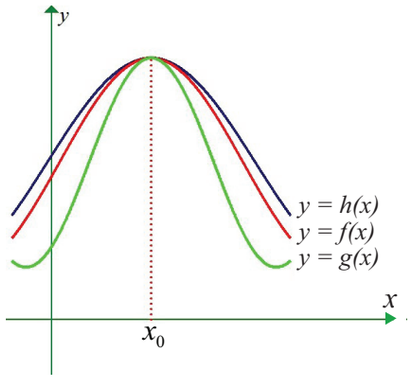
حل

جیسے جیسے شراب کا ارتکاز بڑھتا ہے ہٹانے کی شرح بڑھ جاتی ہے۔

لہذا، زیادہ خارج ہونے کی ممکن شرح $=\lim_{x\to\infty} r(x)$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha x}{x+\beta}=\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha}{\left(1+\frac{\beta}{x}\right)}=\alpha.$$

9.2.8 سینڈوِچ مسئلہ (Sandwich Theorem)



9.27 خاکہ

سینڈوچ مسئلہ کو نچوڑ مسئلہ کے نام سے بھی جانا جاتا ہے ۔ جیسا کہ خاکہ 9.27 میں دکھایاگیا ہے ،اگر x_0 کے قریب تمام x کے لئے $g(x)$ اور $h(x)$ کے درمیان $f(x)$ کو نچوڑیا سینڈوچ کہاجاتا ہے، اور اگر ہم جانتے ہیں کہ تفاعل g اور h کی ایک مشترکہ حد l ہے جبکہ $x\to x_0$ ہو، اس کی وجہ یہ ہے کہ f بھی l کے قریب پہنچتا ہے جبکہ $x\to x_0$ ہے۔

مسئلہ 9.5 (سینڈوِچ مسئلہ)

اگر $f,g,h:I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ اس طرح کہ $g(x)\le f(x)\le h(x)$ جو I میں کوجود کے حذف شدہ قریبی میں تمام x کے لئے اور اگر

$\lim_{x\to x_0} g(x)=\lim_{x\to x_0} h(x)=l$ ، تو $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$

مثال 9.26

آئن سٹن کے مسئلہ کی تعلق کے مطابق ، حرکت والے جسم کی کمیت m اور سمتی رفتار v جو $m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$، جہاں m_0 ابتدائی کمیت اور c روشنی کی رفتار ہے۔ m معلوم کرو جبکہ $v\to c^-$ ہے۔ بائیں ہاتھ کی حد کیوں ضروری ہے؟

حل

$$\lim_{v\to c^-}(m)=\lim_{v\to c^-}\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{m_0}{\sqrt{\lim_{v\to c^-}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}}$$

$h>0$ کے لئے، $c-h<v<c$ ۔ یہ واضح کرتا ہے، $(c-h)^2<v^2<c^2$ ۔

یعنی، $\frac{(c-h)^2}{c^2}<\frac{v^2}{c^2}<1$ ۔ یعنی، $\lim_{h\to0}\frac{(c-h)^2}{c^2}<\lim_{h\to0}\frac{v^2}{c^2}<\lim_{h\to0}1$

09_11th-Maths-Vol2-Unit9_UM.indd 109 21-02-2023 16:09:53

یعنی، $1 < \lim_{h\to 0}\frac{v^2}{c^2} < 1$ ۔ $1 < \lim_{v\to c^-}\frac{v^2}{c^2} < 1$ ۔ سینڈوچ مسئلہ کے ذریعے $\lim_{v\to c^-} = 1$ ۔

لہذا، $\lim_{v\to c^-}(m) \to \infty$

یعنی ، کمیت بہت بڑا قیمت (لامحدود) ہو جاتا ہے جبکہ $v \to c^-$

بائیں ہاتھ کی حد ضروری ہے ۔ ورنہ $1-\frac{v^2}{c^2} < 0$ جبکہ $v \to c^+$ بناتا ہے اور ہم کمیت کو معلوم نہیں کر سکتے۔

مثال 9.27

گرنے والی شئے کیسمتی رفتار ft/sec کو نمونہ کے ذریعے $r(t) = -\sqrt{\frac{32}{k}}\frac{1-e^{-2t\sqrt{32k}}}{1+e^{-2t\sqrt{32k}}}$ دیا گیا ہے ،جہاں k ایک مستقل جو شئے کی شکل اور ناپ پر منحصر ہے اور ہوا کی کثافت پر منحصر ہے ۔ شئے کی محدود سمتی رفتار معلوم کریں ۔ یعنی، $\lim_{t\to\infty} r(t)$ معلوم کریں۔

حل

$$\lim_{t\to\infty} r(t) = \lim_{t\to\infty} -\sqrt{\frac{32}{k}}\frac{1-e^{-2t\sqrt{32k}}}{1+e^{-2t\sqrt{32k}}}$$

$$= -\sqrt{\frac{32}{k}}\lim_{t\to\infty}\frac{1-e^{-2t\sqrt{32k}}}{1+e^{-2t\sqrt{32k}}}$$

$$= -\sqrt{\frac{32}{k}}\frac{(1-0)}{(1+0)} = -\sqrt{\frac{32}{k}}\ \text{ft/sec.}$$

مثال 9.28

فرض کرو کہ جانور کی آنکھ کے دیدے کی قطر دیا گیا $f(x) = \frac{160x^{-0.4}+90}{4x^{-0.4}+15}$ ہے ۔ جہاں x روشنی کی شدت اور $f(x)$، mm ہے۔ دیدے کی قطر معلوم کرو کہ (a) کم روشنی (b) زیادہ روشنی۔

حل

(a) کم روشنی حاصل کرنے کے لئے تفاعل کی حد معلوم کریں جب $x \to 0^+$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{160x^{-0.4}+90}{4x^{-0.4}+15} = \lim_{x\to 0^+}\frac{160+90x^{0.4}}{4+15x^{0.4}}$$

$$= \frac{160}{4} = 40\text{mm}\ .$$

(b) زیادہ روشنی کرنے کے لئے، تفاعل کی حد معلوم کریں کہ جب $x \to \infty$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{160x^{-0.4}+90}{4x^{-0.4}+15} = \frac{90}{15} = 6\text{mm}$$

یعنی دیدے کو 6 mm ناپنے کے حدود سے روشنی کی شدت بڑھ ہوگی۔

09_11th-Maths-Vol2-Unit9_UM.indd 110 21-02-2023 16:09:55

مشق 9.3

(1) (a) بائیں اور دائیں حدود معلوم کرو $f(x)=\dfrac{x^2-4}{(x^2+4x+4)(x+3)}$ جبکہ $x=-2$

(b) $f(x)=\tan x$ جبکہ $x=\dfrac{\pi}{2}$

درج ذیل کی قیمتیں معلوم کرو

(2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2(x^2-6x+9)}$ (3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{2x+11}{x^2+x-6}$ (4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$ (6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3}$ (7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$

(8) ثابت کرو کہ

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{3n^2+7n+2}=\dfrac{1}{6}$ (ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+\ldots+(3n)^2}{(1+2+\ldots+5n)(2n+3)}=\dfrac{9}{25}$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{3.4}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}=1$

(9) ماہی گیری کی سائنس میں ایک اہم مسئلہ یہ ہے کہ اس وقت مچھلیوں کی تعداد کا اندازہ لگایا جاتا ہے اور معلومات کے تولیدی مدت کے دوران ندیوں میں واپس ہونے والی بالغ مچھلیوں کو محسوب کرنا ہے۔ S انڈے دینے کے تیار مچھلیاں بورٹن ہولٹ کے تولیدی تفاعل $R(S)=\dfrac{S}{(\alpha S+\beta)}$ سے جہاں α اور β مثبت مستقل ہے، ثابت کریں کہ اس تفاعل سے پکڑے جانے والے مچھلیوں کی تعداد جب کہ تولید کے لئے تیار مچھلیوں کی تعداد کا مستقل تقریباً بڑھتا ہوا ہو گا

(10) فرض کرو کہ ایک ٹینک میں 5000 لیٹر خالص پانی ہے۔ برائن (زیادہ نمکین پانی) کو تحلیل کرنے کے لئے 03 گرام نمک کو فی لیٹر پانی میں ایک منٹ میں 52 لیٹر پانی کے شرح سے ٹینک میں پمپ کیا جاتا ہے۔ t منٹ کے بعد میں (گرام پر لیٹر) نمک کے پانی کا تحلیل کو $C(t)=\dfrac{30t}{200+t}$ سے اظہار کریں تو $t\to\infty$ پر تحلیل کب پائے گا؟

مثال 9.29

$\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ قیمت معلوم کرو۔

حل

ہم جانتے ہیں کہ $-1\le\sin\dfrac{1}{x}\le 1\Rightarrow -x^2\le x^2\sin\dfrac{1}{x}\le x^2$

لینے پر $g(x)=-x^2, f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}; h(x)=x^2$

اور $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}(-x^2)=0$ تو

09_11th-Maths-Vol2-Unit9_UM.indd 111 21-02-2023 16:09:56

$$\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0}(x^2) = 0\,.$$

سینڈوچ مسئلہ سے

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

اگر ہم حد کے نظریات کو لاگو کرنے کا سہارا لیتے تو ہم غلط نتیجہ اخذ کرسکتے تھے۔یعنی

$$\lim_{x\to 0} x^2\left(\sin\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}(x^2)\lim_{x\to 0}\left(\sin\frac{1}{x}\right)$$

اب $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ غیر موجود ہے، $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ لہذا $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ہمیں مشکل میں لے جاتا ہے۔

نوٹ کریں کہ، اگر $a \le f(x) \le a$، تو $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$.

مثال 9.30

$\lim_{x\to 0}\sin x = 0$ ثابت کرو۔

حل

چونکہ $-x \le \sin x \le x$ تمام $x \ge 0$ کے لئے

$$\lim_{x\to 0}(-x) = 0 \quad \text{اور}$$

$$\lim_{x\to 0}(x) = 0.$$

سینڈوچ مسئلہ سے

$$\lim_{x\to 0}\sin x = 0.$$

مثال 9.31

$\lim_{x\to 0^+} x\left[\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{2}{x}\right\rfloor + \cdots + \left\lfloor\frac{15}{x}\right\rfloor\right] = 120$ ثابت کرو۔

حل

$$\frac{1}{x} - 1 \le \left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor \le \frac{1}{x} + 1$$

$$\frac{2}{x} - 1 \le \left\lfloor\frac{2}{x}\right\rfloor \le \frac{2}{x} + 1$$

$$\vdots$$

$$\frac{15}{x} - 1 \le \left\lfloor\frac{15}{x}\right\rfloor \le \frac{15}{x} + 1$$

جمع کرنے سے، ہمیں،

$$\frac{120}{x} - 15 \le \left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{2}{x}\right\rfloor + \cdots + \left\lfloor\frac{15}{x}\right\rfloor \le \frac{120}{x} + 15$$

$$120 - 15x \le x\left[\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{2}{x}\right\rfloor + \cdots + \left\lfloor\frac{15}{x}\right\rfloor\right] \le 120 + 15x$$

09_11th-Maths-Vol2-Unit9_UM.indd 112 21-02-2023 16:09:59

$$\lim_{x\to 0^+}(120-15x) \le \lim_{x\to 0^+} x\left[\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2}{x}\right\rfloor+\cdots+\left\lfloor\frac{15}{x}\right\rfloor\right] \le \lim_{x\to 0^+}(120+15x)$$

$$120 \le \lim_{x\to 0^+} x\left[\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2}{x}\right\rfloor+\cdots+\left\lfloor\frac{15}{x}\right\rfloor\right] \le 120$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\left[\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2}{x}\right\rfloor+\cdots+\left\lfloor\frac{15}{x}\right\rfloor\right] = 120\,.$$

9.2.9 دو مخصوص علم مثلث کے حدود (Two special Trigonometrical limits)

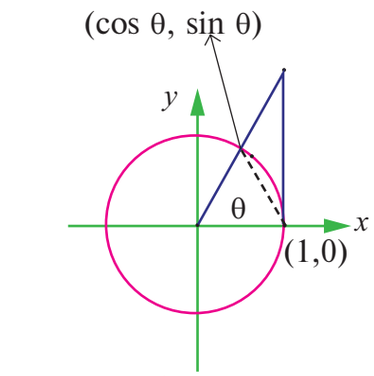
نتیجہ 9.1

(a) $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ (b) $\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta}=0$

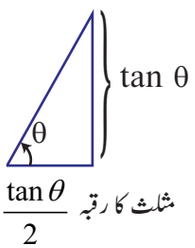
ثبوت

ہم قاطع دائرے سے نتیجہ کو ثابت کرسکتے ہیں ۔

فرض کریں کہ دائرے کا مرکز (0,0) اور نصف قطر 1 ہے ۔ د ائرے میں کوئی نقطہ $P(\cos\theta, \sin\theta)$

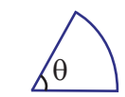


9.28 خاکہ



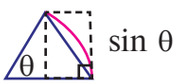
$\frac{\tan\theta}{2}$ مثلث کا رقبہ

9.29 خاکہ



$\frac{\theta}{2}$ قطاع دائرے کا رقبہ

9.30 خاکہ



$\frac{\sin\theta}{2}$ مثلث کا رقبہ

9.31 خاکہ

رقبہ کے خواص سے $\frac{\tan\theta}{2} \ge \frac{\theta}{2} \ge \frac{\sin\theta}{2}$

ہر ایک عبارتوں کو $\frac{2}{\sin\theta}$ ضرب سے $1 \ge \frac{\theta}{\sin\theta} \ge \frac{1}{\cos\theta}$ حاصل ہوتا ہے اور معکوس کرنے سے $\cos\theta \le \frac{\sin\theta}{\theta} \le 1$

کیونکہ $\cos(-\theta)=\cos\theta$ اور $\frac{\sin(-\theta)}{-\theta}=\frac{\sin\theta}{\theta}$ ۔ کوئی یہ نتیجہ اخذ کرسکتا ہے کہ ہم مساوات کھلے وقفے $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ میں تمام غیر صفر θ کے لئے درست ہے۔

- ہم جانتے ہیں $\lim_{\theta\to 0}\cos\theta=1;\lim_{\theta\to 0}(1)=1$ اور سٹیذوچ مسئلہ کو استعمال کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$

(b) $\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta}=0$

$$1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

09_11th-Maths-Vol2-Unit9_UM.indd 113 21-02-2023 16:10:00

$$\frac{1-\cos\theta}{\theta} = \left(\sin\frac{\theta}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta} = \lim_{\theta\to 0}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right).\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)$$ لہٰذا،

$$= 0 \times 1 = 0.$$

9.2.10 چند مخصوص دوسرے حدود (Some important other limits)

نتیجہ 9.2

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

ثبوت

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$$ (تواتر اور سلسلہ میں)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\ldots\right)=1.$$

نتیجہ 9.3

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\log a,\ a>0$$

ثبوت

ہم جانتے ہیں کہ a^x ، $\log_a x$ ایک دوسرے کے معکوس ہیں۔

چونکہ $\log f(x)$ کا معکوس $\exp(f(x)),\quad \exp(\log f(x))=f(x).$ ہے۔

$a^x = \exp(\log a^x)$ لہٰذا،

$= e^{x\log a}$

$\frac{a^x-1}{x} = \frac{e^{x\log a}-1}{x\log a}\times\log a$ لہٰذا،

$y = x\log a \to 0$ ، $x\to 0$ جب

$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}\times\log a = \log a\lim_{y\to 0}\left(\frac{e^y-1}{y}\right)=\log a$ لہٰذا،

$(\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ چونکہ)

09_11th-Maths-Vol2-Unit9_UM.indd 114 21-02-2023 16:10:03

نتیجہ 9.4

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1.$$

ثبوت

لین $\log(1+x) = y$

اور $x\to 0$ جبکہ $y\to 0$ تو

$$1+x = e^y$$

$$x = e^y-1$$

لہٰذا،

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{e^y-1}$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{1}{\left(\frac{e^y-1}{y}\right)}=\frac{1}{1}=1.$$

□

بغیر ثبوت کے چند مخصوص حدود

نتیجہ 9.5 سے 9.9

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x}{x}=1 \quad (5)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x}{x}=1 \quad (6)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \quad (7)$$ موجود ہے اور اس کا حد e ہے۔

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e \quad (8)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=e^k \quad (9)$$

اس عدد کو e جو مساوراتی عدد کے طور پر بھی جانا جاتا ہے کہ e کبھی بھی $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ شکل کی کثیراتی (الجبرائی) مساوات مطمئن نہیں کر سکتا۔

مثال 9.32

$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{2\operatorname{cosec} x}$ قیمت معلوم کرو۔

حل

فرض کریں کہ $\sin x=\frac{1}{y}$

جب $x\to 0$، $y\to\infty$ اور

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{2\operatorname{cosec} x} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{2y}=\left[\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^2=e^2.$$

مثال 9.33

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^x$ قیمت معلوم کرو۔

حل

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2+4}{x-2}\right)^{x-2+2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-2}\right)^{(x-2)+2}$$

فرض کرو $y = x-2$ ، جبکہ $x \to \infty$ ، $y \to \infty$ اور (فرض کرو $y = x-2$ ، تو جب $x \to \infty$ ، $y \to \infty$)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^x = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{y+2} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{y}.\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{2}$$

$$= e^4.1 = e^4 .$$

مثال 9.34

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{4\sqrt{2}-(\cos x+\sin x)^5}{1-\sin 2x}$ قیمت معلوم کرو۔

حل

$$\frac{4\sqrt{2}-(\cos x+\sin x)^5}{1-\sin 2x} = \frac{2^{\frac{5}{2}}-\left[(\cos x+\sin x)^2\right]^{\frac{5}{2}}}{1-\sin 2x}$$

$$= \frac{2^{\frac{5}{2}}-(1+\sin 2x)^{\frac{5}{2}}}{2-(1+\sin 2x)}$$

$$= \frac{2^{\frac{5}{2}}-(1+\sin 2x)^{\frac{5}{2}}}{2-(1+\sin 2x)}$$

لہذا،

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{2^{\frac{5}{2}}-[(\cos x+\sin x)^2]^{5/2}}{2-[1+\sin 2x]} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{2^{\frac{5}{2}}-\left[1+\sin 2x)\right]^{\frac{5}{2}}}{2-(1+\sin 2x)}$$

لیں $y = 1+\sin 2x$ ۔ جبکہ $x \to \frac{\pi}{4}$ ، $y \to 2$

$$= \lim_{y\to 2} \frac{2^{\frac{5}{2}}-y^{\frac{5}{2}}}{2-y}$$

$$= \frac{5}{2}.2^{\frac{5}{2}-1} = \frac{5}{2}\times 2^{\frac{3}{2}} = 5\sqrt{2} .$$

مثال 9.35

کیا درج ذیل تفاعلات کی حدود $x \to 0$ پر موجود ہیں؟ اپنے جواب کی وضاحت کریں۔

(i) $\dfrac{\sin|x|}{x}$ (ii) $\dfrac{\sin x}{|x|}$ (iii) $\dfrac{x\lfloor x\rfloor}{\sin|x|}$ (iv) $\dfrac{\sin\left(x-\lfloor x\rfloor\right)}{x-\lfloor x\rfloor}$

حل

(i)
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(-x)}{x} & \text{if } -1<x<0 \\ \dfrac{\sin x}{x} & \text{if } 0<x<1 \end{cases}$$

لہذا، $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1$ اور $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +1$.

09_11th-Maths-Vol2-Unit9_UM.indd 116 21-02-2023 16:10:06

چونکہ حد غیر موجود ہے۔ نوٹ کریں $f(0^-) \neq f(0^+)$

$$\frac{\sin x}{|x|} = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{-x} & \text{if } -1 < x < 0 \\ \dfrac{\sin x}{x} & \text{if } 0 < x < 1 \end{cases} \quad \text{(ii)}$$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1$ لہٰذا،

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$

چونکہ حد غیر موجود ہے۔

$$f(x) = \frac{x\lfloor x \rfloor}{\sin|x|} = \begin{cases} \dfrac{-x}{\sin(-x)} & \text{if } -1 < x < 0 \\ \dfrac{x.0}{\sin x} & \text{if } 0 < x < 1 \end{cases} \quad \text{(iii)}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{x}{\sin x} & \text{if } -1 < x < 0 \\ 0 & \text{if } 0 < x < 1 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +1$ لہٰذا،

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0.$

چونکہ حد غیر موجود ہے۔

$$\frac{\sin\left(x-\lfloor x \rfloor\right)}{x-\lfloor x \rfloor} = \begin{cases} \dfrac{\sin(x-(-1))}{x-(-1)} & \text{if } -1 < x < 0 \\ \dfrac{\sin(x-0)}{x-0} & \text{if } 0 < x < 1 \end{cases} \quad \text{(iv)}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x+1)}{(x+1)} & \text{if } -1 < x < 0 \\ \dfrac{\sin x}{x} & \text{if } 0 < x < 1 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \dfrac{\sin 1}{1} = \sin 1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1.$

چونکہ حد غیر موجود ہے۔

مشق 9.4

درج ذیل حدود کی قسمیں معلوم کرو:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{7x}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/3x}$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{\frac{m}{x}}$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)^{8x^2+3}$

09_11th-Maths-Vol2-Unit9_UM.indd 117 21-02-2023 16:10:07

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x+2} \quad (5)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin^3\left(\frac{x}{2}\right)}{x^3} \quad (6)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x} \quad (7)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan 2x}{\sin 5x} \quad (8)$$

$$\lim_{\alpha\to0}\frac{\sin(\alpha^n)}{(\sin\alpha)^m} \quad (9)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x} \quad (10)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+b^2}-b} \quad (11)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{2\arcsin x}{3x} \quad (12)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2} \quad (13)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan 2x}{x} \quad (14)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{2^x-3^x}{x} \quad (15)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{3^x-1}{\sqrt{x+1}-1} \quad (16)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{x\sin 2x} \quad (17)$$

$$\lim_{x\to\infty}x\left[3^{\frac{1}{x}}+1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)-e^{\frac{1}{x}}\right] \quad (18)$$

$$\lim_{x\to\infty}\{x[\log(x+a)-\log(x)]\} \quad (19)$$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 3x}{\sin 2x} \quad (20)$$

$$\lim_{x\to\pi}(1+\sin x)^{2\operatorname{cosec} x} \quad (21)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x} \quad (22)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\tan x} \quad (23)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x \quad (24)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x} \quad (25)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x} \quad (26)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3} \quad (27)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3} \quad (28)$$

9.3 مسلسل (Continuity)

تفاعل کے رویے میں ایک اہم خصوصیات وہ خصوصیات ہے جسے مسلسل کہا جاتا ہے۔ یہ ریاضیاتی طور پر فطرت میں ہمارے مشاہدہ کردہ بہت سے مظاہر کی عمومی خصوصیات کی عکاسی کرتا ہے، مثال کے طور پر، ہم گرم کرنے پر ایک چھڑی کے مسلسل پھیلاؤ کی بات کرتے ہیں، مسلسل نشونما کا ، کسی جاندار کا، کسی بہاؤ کا، یا ماحول کے درجہ حرارت میں مسلسل تغیر وغیرہ۔

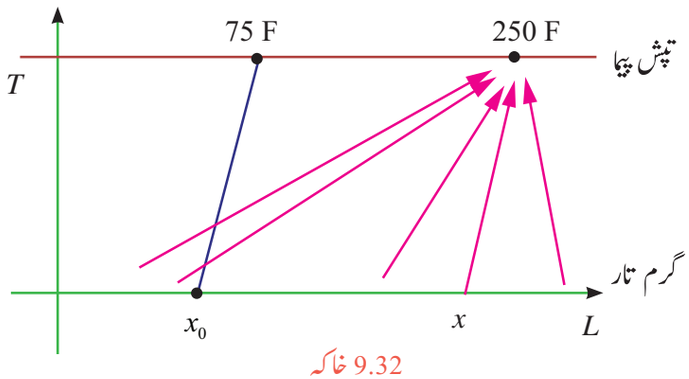
تفاعل میں مسلسل کا خیال "ترسیم میں کوئی وقفہ نہیں" کے ہندسی تصور سے نکلتا ہے ۔ در حقیقت یہ نام خود لاطینی کنٹی نیوٹر سے ماخوذ ہے ۔ "ایک ساتھ لٹکنا" بہرحال، "ترسیم میں کو ئی وقفہ نہیں" ی ا" ایک ساتھ لٹکنا" کے تفاعل کے تجزیہ پر تصور کو لاگو کرنے کا نقطہ نظر سے اس مناسب سے، مسلسل کے معنی میں بصیرت حاصل کرنے کے لئے ترسیم کے قبل ازوقت استعمال کو سخت گمراہ کن قرار دیاجاتاہے۔ تاہم ، ہم بعد میں سمجھیں گے کہ وقفہ والے علاقے کے تفاعلات کے لئے، مسلسل کا مطلب بنیادی طور پر یہ ہے کہ ترسیم کو پنسل کے نقطہ کو اٹھائے بغیر پیچھا کیا جاسکتا ہے۔

رویہ کا مناسب اور موثر طریقہ جو ہمیں تصور کو کام کرنے کی اجازت دیتاہے وہ ہے مسلسل کو حد کے ساتھ جوڑنا۔ آسان الفاظ میں، مسلسل کی خاصیت رکھنے کا مطلب »سازگارحد ہوتا« ہوگا۔ مسلسل کے تصور کے حد کے لحاظ سے واضع کرنے کے لئے ہمیں اپنی توجہ ایک نقطہ پر مرکوز کرنی

09_11th-Maths-Vol2-Unit9_UM.indd 118 21-02-2023 16:10:07

چاہئے۔ مسلسل اور حد دونوں بنیادی طور پر ایک نقطہ پر بیان کئے گئے تصورات ہیں ، لیکن مسلسل ایک عالمی کردار کو نقطہ وار طریقے سے حاصل کرتا ہے۔

حوصلہ افزائی کے لئے ،درج ذیل جسمانی صورت حاصل پر غور کریں ۔ تپش پیما T دئی گئی برقی تار L کے ساتھ درجہ حرات کی پیمائش کرتا ہے۔



9.32 خاکہ

برقی تا L پر ایک نقطہ x پر تپش پیما T میں درجہ حرارت کی نگارش $t(x)$ تفویض کی گئی ہے۔ فرض کریں، خیالات کو ٹھیک کرنے کے لئے درجہ حرارت کی ریکاڈنگ ایک جیسی ہوتی ہے، $250°F$ جیسا کہ کوئی برقی تار L کے ساتھ جلتاہے جب تک کہ L پر ایک نقطہ x_0 نہ پہنچ جائے۔

پھر فرض کریں کہ x_0 پر درجہ حرارت اچانک کمرے کے درجہ حرارت کے قریب گرجاتاہے، $75°F$ کہیں۔ گویا ایک موصلیت x_0 پر ہو، لیکن x_0 کے آگے تصور کریں کہ $250°F$ کی نگارش دوبارہ دیکھی گئی ہے۔ تفاعل کے اشارے میں ہم یہ فرض کررہے ہیں

$$t(x)=\begin{cases}250°F & \text{اگر} \quad x \neq x_0\\ 75°F & \text{اگر} \quad x = x_0\end{cases}$$

اس طرح نقطہ x_0 واحد نقطہ کے طور پر کھڑا ہوتا ہے۔ "واحد" کا مطلب "خصوصی" یا "غیر معمولی" ہے۔ درجہ حرارت کو نگارش کی حد کا تجزیہ کرتے ہوئے ہمیں یہ کہنا چاہئے کہ x سے x_0 کے نقطہ نظر کا $t(x_0)$ سے متعلقہ $t(x)$ کی قیمتوں کے نقطہ نظر پر کوئی اثر نہیں تھا۔ مختصراً، x_0 پر اچھال لگتی ہے۔ اس طرح ہمیں یہ کہنے کی طرف راغب کیا جائے گا کہ درجہ حرارت کے فعل میں "x_0 پر مسلسل کی کمی ہے"۔ اس کے لئے ہمیں توقع ہوگی کہ $t(x_0)$ کی قیمت ہوگی $250°F$ کیونکہ x کی قریبی قیمتیں x_0 کو $t(x)=250°F$ میں دکھایاگیا ہے۔ اب ہم مسلسل کے تصور کو خلاصہ کرتے ہیں، اور مطالبہ کرتے ہیں کہ تصاویر "قریب" ہوں جب "تپش خیال" قریب ہوں۔ ہماری مثال میں گرم برقی تار پر نقاط پیش خیال تھے، جبکہ درجہ حرارت کی نگارش اس سے متعلقہ خیال تھے۔

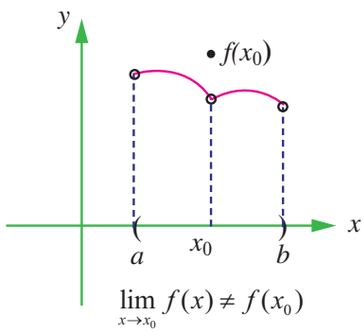
طلباء کو مسلسل کے کمی کے متضاد خیال پر غور کرتے ہوئے مسلسل کے الہامی خیال پر غور کرنا چاہئے، یا اس سے زیادہ مخص "غیر مسلسل" جیسا کہ اچانک تبدیلیوں کے ہر روز کے تجربات میں ظاہر ہوتا ہے جس کا عنوان "پھر اچانک!" ہوسکتا ہے۔ کچھ جو آسانی سے ذہن میں آجاتے ہیں ذیل میں تفاعل کے ساتھ درج ہیں جو کہ ریاضی کے نمونوں سے مطابقت رکھتے ہیں۔

(1) روشن کرنا : وقت کے تفاعل کے طور پر روشنی کی شدت
(2) گاڑی کا تصادم : وقت کے تفاعل کے طور پر رفتار
(3) ریڈیو کو بند کرنا : وقت کے تفاعل کے طور پر آواز کی شدت
(4) غبارے کا پھوٹنا : داخلی ہوا کا نصف قطر کے تفاعل کے طور پر
(5) رسی کا کٹنا : تنگی جو لمبائی کی تفاعل ہے
(6) ڈاک کی قیمت : ڈاک جو وزن کی تفاعل ہے
(7) تنخواہ کا جزیہ : جزیہ کی شرح جو قابل ٹیکس آمدنی کی تفاعل
(8) عمر کی گنتی سالوں میں : وقت کے تفاعل کے طور پر تمام سالوں میں عمر
(9) انشورنش پریمیم کی قیمت: عمر کے تفاعل کے طور پر پریمیم

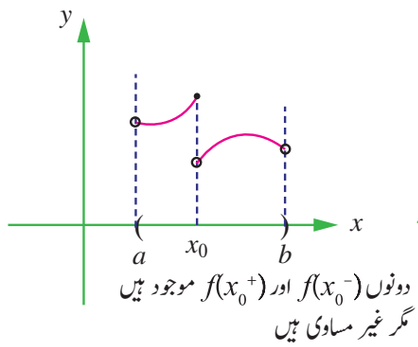
09_11th-Maths-Vol2-Unit9_UM.indd 119 21-02-2023 16:10:08

دراصل، مثال (1)- (5) بالکل درست نہیں ہیں ۔ مثال کے طور پر ،ر وشنی کی شدت شفاف لیکن صفر کی روشنی سے مثبت روشنی تک مسلسل گذرتی ہے۔ درحقیقت فطت غیر مسلسل سے نفر کرتی نظر آتی ہے۔دوسری طرف (9) - (6) درحقیقت غیر مسلسل ہیں اور بعض مقامات پر واقعی اچھال دکھاتے ہیں۔

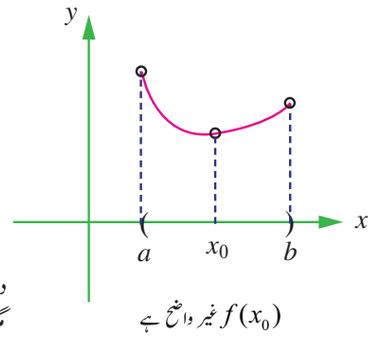
طلباء کو مشورہ دیا جاتا ہے کہ وہ مسلسل کی ریاضیاتی تعریف جو روزمرہ کی زبان میں مسلسل کے معنی کے ساتھ قریب سے مطابقت رکھتی ہے۔ ایک مسلسل عمل وہ ہے جو آہستہ آہستہ ہوتا ہے بغیر کسی رکاوٹ یا اچانک تبدیلی کے یعنی کوئی سوراخ ،اُچھال یا خلا نہیں ہے ۔ مندرجۂ ذیل شکل x کی قیمتوں کی نشاندہی کرتی ہے جس پر تفاعل f کا ترسیم مسلسل نہیں ہے۔ وقفہ (a,b) کے دیگر تمام نقاط پر f کا ترسیم بلاتعطل (uninterrupted) اور مسلسل ہے۔



9.35 خاکہ



9.34 خاکہ



9.33 خاکہ

مندرجہ بالا ترسیم (9.35 سے 9.33) کو دیکھیں، تین شرائط موجود ہیں جن کے لئے f کا ترسیم $x = x_0$ پر مسلسلنہیں ہے۔
ایسا معلوم ہوتا ہے کہ $x = x_0$ پر مسلسل کو درج ذیل تین شرائط میں سے کسی ایک کے ذریعے تباہ کیا جاسکتا ہے۔

(1) تفاعل کی وضاحت $x = x_0$ پر نہیں کی گئی ہے۔

(2) $f(x)$ کی حد $x = x_0$ پر موجود نہیں ہے۔

(3) $f(x)$ کی حد $x = x_0$ پر موجود ہے لیکن، یہ $f(x_0)$ کے مساوی نہیں ہے۔

اب ہم تشریح مثالوں کو دیکھتے ہیں

تشریح 9.6

(1) $f(x) = x^2+3$ (2) $f(x) = \dfrac{16-x^2}{4+x}$

(i) جیسے $x \to 2$ ، یک طرفہ حدود ہیں

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 7$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 7$$

اور لہذا $\lim_{x\to 2} f(x) = 7$ اور مزید یہ کہ $f(2)$ کی تعریف کی گئی ہے اور $f(2) = 7 = \lim_{x\to 2} f(x)$ ۔اس صورت میں $f(x)$ جو $x = 2$ پر مسلسل ہے۔

(ii) ایک طرف کی حد ود ہیں : $\lim_{x\to -4^-} f(x) = 8$

$$\lim_{x\to -4^+} f(x) = 8$$

اور لہذا $\lim_{x\to -4} f(x) = 8$ مگر $f(-4)$ غیر موجود ہے۔

09_11th-Maths-Vol2-Unit9_UM.indd 120 21-02-2023 16:10:09

نوٹ کریں کہ اگر چہ $\lim_{x\to -4} f(x)$ موجود ہے، تفاعل کی قیمت -4 میں، یعنی $f(-4)$ کی وضاحت نہیں کی گئی ہے۔ اس طرح $f(-4)$ کے وجود کا $\lim_{x\to -4} f(x)$ کے وجود پر کوئی اثر نہیں ہے۔

اب ہم ظاہری طور پر مسلسل کی وضاحت کرتے ہیں۔

تعریف 9.7

فرض کرو کہ $\mathbb{R}$ میں ایک کھلا وقفہ I ہے جس x_0 میں بھی ہے۔ فرض کرو کہ $f : I \to \mathbb{R}$ ہے۔ پھر f کو x_0 پر مسلسل کہا جاتا ہے اگر اسے اس نقطہ کے قریبی (neighbourhood) بیان کیا گیا ہو اور اگر اس تفاعل کی حد، جیسا کہ آزاد متغیر x کی قیمت x_0 کے طرف جاتا ہے، موجود اور $x = x_0$ پر تفاعل کی قیمت مساوی ہے۔

اس طرح $x = x_0$ پر ایک تفاعل $f(x)$ کے مسلسل کے لئے تین ضروریات کو پورا کرنا ہوگا:

(i) $f(x)$ کی وضاحت x_0 کے قریبی میں ہونی چاہئے(یعنی $f(x_0)$ موجود ہے)؛

(ii) $\lim_{x\to x_0} f(x)$ موجود ہے۔

(iii) $f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)$

شرط(iii)کو $\lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x_0+\Delta x) - f(x_0)\right] = 0$ کے طور پر اصلاح کیاجاسکتا ہے اور x_0 پر f کے مسلسل کو اس طرح دوبارہ بیان کیاجاسکتا ہے:

تعریف 9.8

ایک تفاعل $y = f(x)$ کو ایک نقطہ x_0 (یا $x = x_0$ پر) پر مسلسل کیا جاتا ہے، اگر اسے x_0 کے کسی قریبی میں بیان کیا گیا ہو اور اگر $\lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x_0+\Delta x) - f(x_0)\right] = 0$

شرط(iii)کو $\lim_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right)$ کے شکل میں بھی درج کیا جاسکتا ہے۔اس طرح، اگر حد کی علامت اور تفاعل کی علامت کو متبادل کریں ، یہ تفاعل حدوں کی قیمت کا بحث سے تسلسل ہے۔

9.3.1 ایک نقطے پر مسلسل تفاعل کی مثالیں (Examples of functions Continuous at a point)

(1) ہر ایک نقطہ $\mathbb{R}$ پر مستقل تفاعل مسلسل ہے۔

فرض کریں $f(x) = k$ ، $k \in \mathbb{R}$ مستقل ہے۔ اگر $x_0 \in \mathbb{R}$ ، تو $f(x_0) = k$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(k) = k$$

(2) مثبت سالم اعداد سے قوت تفاعل مسلسل ہیں $\mathbb{R}$ ہر ایک نقطہ پر،

اگر $f(x) = x^n$ ، f کا علاقہ $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ اور $\lim_{x\to x_0} x^n = x_0^{\,n}$ ، حد کے مسئلہ سے $x_0 \in \mathbb{R}$

(3) کثیر رقمی تفاعلات، $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,\ a \neq 0$

$\mathbb{R}$ کا ہر ایک نقطہ پر مسلسل ہے۔ حد کے مسئلے سے،

$$\lim_{x\to x_0} p(x) = a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x_0 + a_n = p(x_0).$$

09_11th-Maths-Vol2-Unit9_UM.indd 121 21-02-2023 16:10:10

(4) کثیر رقمی کے خارج قیمت یعنی ناطق تفاعل کی شکل

$R(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ ، ہر نقطہ پر مسلسل ہے جہاں $q(x) \neq 0$ ، اور

$$\lim_{x \to x_0} R(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{p(x)}{q(x)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to x_0} p(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} q(x)} = \frac{p(x_0)}{q(x_0)} = R(x_0)\,.$$

(5) دائری تفاعل $\sin x$ اور $\cos x$ اپنے علاقے کے ہر نقاط پر مسلسل ہیں۔ چونکہ $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ ، $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$

$\lim\limits_{x \to x_0} co\,s\, x = \cos x_0$

نتیجتاً، $\tan x$ ، $\cot x$ ، $\cos ecx$ ، $\sec x$ اپنے مناسب علاقے پر حدود کے الجبرا میں متواتر اور خارج قسمت کے اصولوں کے پیش نظر مسلسل رہتے ہیں۔

(6) n ویں جذر کے تفاعل $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ اپنے مناسب علاقے میں مسلسل ہیں چونکہ $\lim\limits_{x \to x_0} \left(x^{\frac{1}{n}} \right) = x_0^{\frac{1}{n}}$

معکوسی تفاعل $f(x) = \dfrac{1}{x}$ کی وضاحت 0 پر نہیں کی گئی ہے اور اس لئے یہ 0 پر مسلسل نہیں ہے۔ یہ $\mathbb{R}$-$\{0\}$ کہ ہر نقطہ پر مسلسل ہے۔

(8) $$h(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0 \\ x^2+1, & x > 0 \end{cases}$$

h کا علاقہ تمام حقیقی اعداد اور

$$\lim_{x \to 0^-} h(x) = \lim_{x \to 0^-} (x+1) = 1 = h(0)$$

$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = \lim_{x \to 0^+} (x^2+1) = 1 = h(0)\,.$$

لہذا $x = 0$ پر $h(x)$ مسلسل ہے۔

درحقیقت ، $(-\infty, 0)$ کے ہر نقطہ اور $(0, -\infty)$ کے ہر نقطہ پر $h(x)$ مسلسل ہے اور اس لئے پورے $(-\infty, \infty)$ پر $h(x)$ مسلسل ہے۔

(9) $x = 0$ پر سب سے بڑا سالم اعداد تفاعل $f(x) = \lfloor x \rfloor$ مسلسل نہیں ہے۔

$$\lim_{x \to 0^-} \lfloor x \rfloor = -1 \quad \text{اور}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \lfloor x \rfloor = 0 \quad \text{کے لئے}$$

یہ ہر ایک سالم اعداد نقطہ پر غیر مسلسل ہے۔ حقیقت میں،

$$\lim_{x \to n^-} \lfloor x \rfloor = n-1 \quad \text{اور}$$

$$\lim_{x \to n^+} \lfloor x \rfloor = n$$

09_11th-Maths-Vol2-Unit9_UM.indd 122 21-02-2023 16:10:11

(10) ماڈولس تفاعل

$$f(x)=|x|=\begin{cases}-x & \text{if } x<0\\ 0 & \text{if } x=0\\ x & \text{if } x>0\end{cases}$$

حقیقی خط $\mathbb{R}$ کے تمام نقاط پر مسلسل ہے۔

خاص طور پر ،

$$\lim_{x\to 0^-}|x|=\lim_{x\to 0^-}(-x)=0$$

اور $\lim_{x\to 0^+}|x|=\lim_{x\to 0^+}(x)=0$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=0=\lim_{x\to 0^+}f(x)=0=f(0).$$

(11) $\mathbb{R}$ میں تفاعل $f(x)=e^x$ مسلسل ہے۔

(12) $(0,\infty)$ میں لاگرتمی تفاعل $f(x)=\log x(x>0)$ مسلسل ہے۔

9.3.2 مسلسل تفاعل کا الجبراء (Algebra of continuous functions)

اگر x_0 پر f اور g مسلسل ہوں تو

(1) $x=x_0$ پر $f+g$ مسلسل ہو گا

(2) $x=x_0$ پر $f-g$ مسلسل ہو گا

(3) $x=x_0$ پر $f.g$ مسلسل ہو گا اور

(4) $x=x_0$ پر $\frac{f}{g}$ مسلسل ہو گا $(g(x)\neq 0)$

(5) مسلسل پر مرکب تفاعل مسئلہ

اگر $g(x_0)$ پر f مسلسل ہو اور x_0 پر g مسلسل ہو تو x_0 پر fog مسلسل ہو گا۔

ایک بند وقفہ پر مسلسل

تعریف 9.9

ایک بند وقفہ $[a,b]$ پر ایک تفاعل $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ کو مسلسل کہا جاتا ہے اگر یہ کھلا وقفہ (a,b) پر مسلسل ہو اور

$$f(x)=f(a) \text{ اور } \lim_{x\to b^-}f(x)=f(b)$$

یعنی، تفاعل f دائیں سے a پر مسلسل ہے اور b پر بائیں سے مسلسل ہے، اور ہر نقطہ $x_0\in(a,b)$ پر مسلسل ہے۔

تشریح 9.7

$f(x)=\sqrt{1-x^2}$ کے مسلسل پر بحث کریں۔

f کی وضاحت سے اس کا علاقہ بند وقفہ $[-1,1]$ ہے۔

(f کی وضاحت کی گئی ہے اگر $1-x^2\geq 0$)

کسی بھی نقطہ $c\in(-1,1)$ کے لئے

09_11th-Maths-Vol2-Unit9_UM.indd 123 21-02-2023 16:10:12

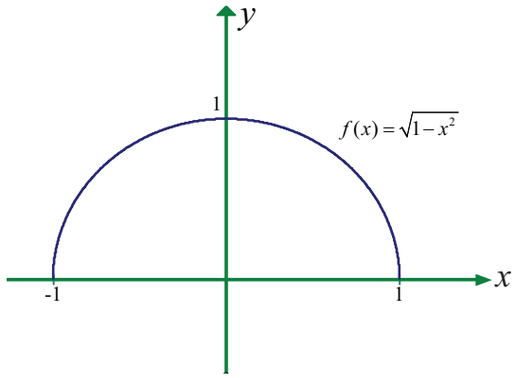
$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c}\sqrt{1-x^2} = \left[\lim_{x\to c}(1-x^2)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= (1-c^2)^{\frac{1}{2}} = f(c).$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+}(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = 0 = f(1).$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \left[\lim_{x\to -1^-}(1-x^2)\right]^{\frac{1}{2}} = 0 = f(-1).$$

لہذا f پر $[-1,1]$ مسلسل ہے۔ کوئی بھی اس مسئلے کو مرکب تفاعل مسئلہ کا استعمال کرتے ہوئے حل کرسکتا ہے۔



9.36 خاکہ

مثال 9.36

اسوقفہ (وقفے) کی وضاحت کریں جس پر ہر تفاعل مسلسل ہے۔

(i) $f(x) = \tan x$

(ii) $$g(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

(iii) $$h(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

حل

(i) $f(x) = \tan x$ غیر واضح ہے $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ ، $n \in Z$ پر مماس تفاعل

باقی تمام نقاط پر یہ مسلسل ہے، لہذا، $f(x) = \tan x$ کھلے وقفوں میں ہر ایک پر مسلسل ہے۔

$$\ldots\left(-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right),\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right),\ldots$$

(ii) $\mathbb{R}$ کے تمام نقاط پر $y = \frac{1}{x}$ تفاعل مسلسل ہے سوائے $x = 0$ کے، جہاں یہ غیر واضح ہے۔

تفاعل $g(x) = \sin\frac{1}{x}$ تمام نقاط پر مسلسل ہے سوائے $x = 0$ کے جہاں $\lim_{x\to 0} g(x)$ غیر موجود ہے۔ لہذا، $(-\infty, 0)$ اور $(0,\infty)$ پر g مسلسل ہے۔

(iii) حقیقی خط $\mathbb{R} = (-\infty,\infty)$ کے تمام نقاط پر تفاعل $h(x)$ کی وضاحت کی گئی ہے؛ کسی $x_0 \neq 0$ کے لئے،

$$\lim_{x\to x_0} h(x) = \left(\lim_{x\to x_0} x\sin\frac{1}{x}\right)$$

$$= x_0\sin\frac{1}{x_0} = h(x_0)$$

$x_0 = 0$ کے لئے،

$$h(x) = x.\sin\frac{1}{x}$$

$$\square\, x \leq x\sin\frac{1}{x} \leq x$$

09_11th-Maths-Vol2-Unit9_UM.indd 124 21-02-2023 16:10:13

$$g(x) = -x, f(x) = x\sin\frac{1}{x}, h(x) = x$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0,\ \lim_{x\to 0} h(x) = 0$$

اور $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$ ہے۔

سینڈوچ مسئلہ سے

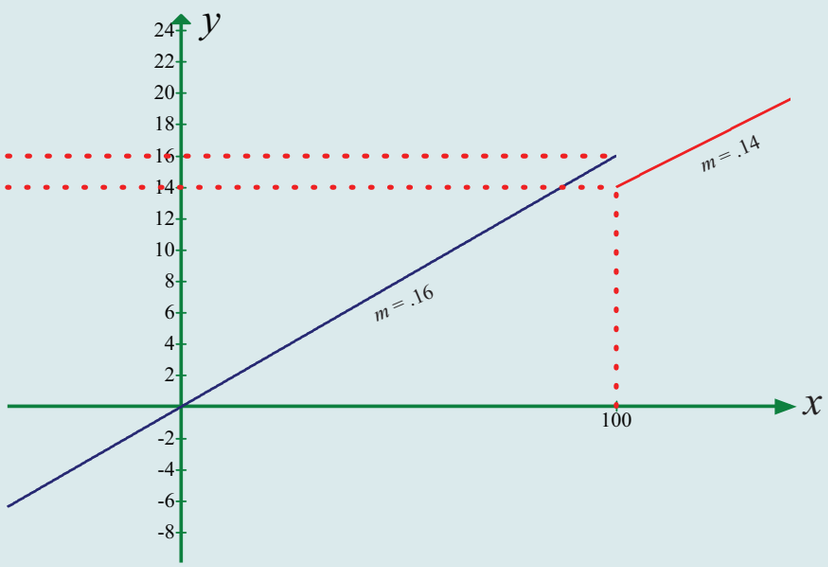
$$\lim_{x\to 0}\left(x\ \sin\frac{1}{x}\right) = 0 = h(0).$$

لہذا $h(x)$ پوری حقیقی خط پر مسلسل ہے۔

مثال 9.37

ایک ٹماٹر کے تاجر (wholesaler) کو پتہ چلتا ہے کہ نئے کٹے ہوئے ٹماٹر کی قیمت ₹ 0.16 فی کلو ہے اگر وہ روزنہ 100 کلو سے کم خریدتا ہے ۔ تاہم ، اگر وہ روزانہ کم از کم 100 کلو گرام خرید تا ہے تو قیمت ₹ 0.14 روپئے فی کلو تک گرجاتی ہے ۔ کل قیمتی تفاعل معلوم کریں اور جب خریداری 100 کلو گرام ہو تو قیمت پر جانچ کریں۔

حل



9.37 خاکہ

فرض کرو کہ x کو روزانہ خریدے گئے کلو گرام کی تعداد اور C قیمت کو ظاہر کرتا ہے تو

$$C(x) = \begin{cases} 0.16x, & \text{اگر } 0 \le x < 100 \\ 0.14x, & \text{اگر } x \ge 100 \end{cases}.$$

اس تفاعل کا خاکہ 9.37 میں دکھایا گیا ہے۔

$x = 100$ یہ غیر مسلسل ہے چونکہ $\lim_{x\to 100^-} C(x) = 16$ اور $\lim_{x\to 100^+} C(x) = 14$

نوٹ کریں کہ $C(100)$، اس طرح، $\lim_{x\to 100^-} C(x) = 16 \neq 14 = \lim_{x\to 100^+} C(x) = 14$

یہ بھی نوٹ کریں کہ تفاعل ایک محدود قیمت 14 سے دوسری محدود قیمت 16 پر اُچھال لگاتا ہے۔

09_11th-Maths-Vol2-Unit9_UM.indd 125 21-02-2023 16:10:14

9.3.3 چند مخصوص دوسرے حدود (Removable and Jump Discontinuities)

آیئے درج ذیل تفاعل کو دیکھتے ہیں:

(i) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$

(ii) $g(x)=C(x)$ ، جہاں $C(x)$ جیسا کہ مثال 9.38 میں بیان کیا گیا ہے۔ تفاعل $f(x)$ کی وضاحت حقیقی خط کے تمام نقاط پر ہوتی ہے سوائے $x=0$ کے۔ یعنی $f(0)$ غیر واضح ہے، مگر $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ موجود ہے۔ اگر ہم تفاعل $f(x)$ کو دوبارہ اس طرح وضاحت کرتے ہیں

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

h کی وضاحت حقیقی خط کے تمام نقاط پر کی گئی ہے۔ مزید یہ کہ، $x=0$ پر h مسلسل ہے چونکہ

$$\lim_{x\to 0}h(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1=h(0).$$

نوٹ کریں کہ $h(x)=f(x)$ ، $x\neq 0$ کے لئے البتہ $x=0$ پر اصلی تفاعل $f(x)$ غیر مسلسل ہے، دوبارہ متعین تفاعل 0 پر مسلسل ہو گا۔ یعنی، ہم تفاعل کی نئی تعریف کر کے غیر مسلسل کو دور کرسکتے ہیں۔ اس طرح کہ غیر مسلسل نقاط کو نکالنے والے غیر مسلسل کہا جاتا ہے۔ مثال ہمیں درج ذیل کی طرف لے جاتی ہے۔

تعریف 9.10

ایک تفاعل f ایک وقفہ $I\subseteq\mathbb{R}$ پر وضاحت کی گئی ہے جو $x_0\in I$ پر نکالنے والا غیر مسلسل (removable discontinuity) ہے اگر ایک تفاعل $h:I\to\mathbb{R}$ اس طرح کہ $h(x)=\begin{cases}f(x), & \text{اگر } x\neq x_0\\ \lim\limits_{x\to x_0}f(x), & \text{اگر } x=x_0\end{cases}$ ہے

نوٹ کریں کہ نکالنے والا غیر مسلسل کے لئے، $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ کی غیر موجود گی ضروری ہے۔

اب اگر ہم تفاعل $g(x)=C(x)$ کا جائزہ لیں (مثال 9.38 دیکھیں)، البتہ اس کی تعریف $(0,\infty)$ کے تمام نقاط پر کی گئی ہے، $\lim\limits_{x\to 100}g(x)$ غیر موجود ہے اور اس کی اونچائی $\lim\limits_{x\to 100^+}g(x)-\lim\limits_{x\to 100^-}g(x)=16-14=2$ کی اچھال جو محدود ہے۔ چونکہ $\lim\limits_{x\to 100}g(x)$ غیر موجود ہے، یہ $x=100$ پر غیر مسلسل ہے۔ اس طرح ہمارے پاس درج ذیل ہیں:

تعریف 9.11

فرض کرو کہ تفاعل f ایک وقفہ $I\subseteq\mathbb{R}$ پر وضاحت کریں تو $x_0\in I$ پر f کو اچھال غیر مسلسل (jump discontinuity) کہا جاتا ہے اگر f کی وضاحت x_0 پر ہے۔ ۔

$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ اور $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ موجود ہیں مگر

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)\neq\lim_{x\to x_0^+}f(x)$$

09_11th-Maths-Vol2-Unit9_UM.indd 126 21-02-2023 16:10:15

مثال 9.38

جانچ کریں کہ اگر $\mathbb{R}$ میں f کی وضاحت $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & \text{اگر } x\neq 0 \\ 0, & \text{اگر } x=0 \end{cases}$ مسلسل ہے۔

حل

سینڈوچ مسئلہ سے $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\frac{1}{x}=0$ اور $f(x)$ کی تعریف سے $f(0)=0$ ۔ لہذا یہ پر مسلسل ہے۔ دیگر قیمتوں کے لئے $x=0$، یہ واضح طور پر مسلسل ہے اور اس لئے $\mathbb{R}$ میں مسلسل ہے۔

مشق 9.5

(1) ثابت کروکہ $\mathbb{R}$ کے تمام نقاط پر $f(x)=x^2+3x-5$ مسلسل ہیں۔

(2) مندرجہ ذیل کے مسلسل کا جائزہ لیں:

(i) $x+\sin x$ (ii) $x^2\cos x$ (iii) $e^x\tan x$

(iv) $e^{2x}+x^2$ (v) $x.\ln x$ (vi) $\frac{\sin x}{x^2}$

(vii) $\frac{x^2-16}{x+4}$ (viii) $|x+2|+|x-1|$ (ix) $\frac{|x-2|}{|x+1|}$

(x) $\cot x+\tan x$

(3) تفاعل f کے غیر مسلسل کے نقاط معلوم کریں، جہاں

(i) $f(x)=\begin{cases} 4x+5, & \text{اگر } x\leq 3 \\ 4x-5, & \text{اگر } x>3 \end{cases}$ (ii) $f(x)=\begin{cases} x+2, & \text{اگر } x\geq 2 \\ x^2, & \text{اگر } x<2 \end{cases}$

(iii) $f(x)=\begin{cases} x^3-3, & \text{اگر } x\leq 2 \\ x^2+1, & \text{اگر } x>2 \end{cases}$ (iv) $f(x)=\begin{cases} \sin x, & 0\leq x\leq \frac{\pi}{4} \\ \cos x, & \frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2} \end{cases}$

(4) دئے گئے نقطہ x_0 پر آپ کے جواب کی وجوہات کا حوالہ دیتے ہوئے دریافت کریں کہ دیا گیا تفاعل مسلسل ہے یا غیر مسلسل ہے:

(i) $x_0=1,\ f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x\neq 1 \\ 2, & x=1 \end{cases}$ (ii) $x_0=3,\ f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3}, & \text{اگر } x\neq 3 \\ 5, & \text{اگر } x=3 \end{cases}$

(5) ثابت کریں کہ $(-\infty,\infty)$ میں تفاعل $\begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1}, & \text{اگر } x\neq 1 \\ 3, & \text{اگر } x=1 \end{cases}$ مسلسل ہے۔

(6) α کے کسی قیمت کے لئے $x=1$ پر تفاعل $f(x)=\begin{cases} \frac{x^4-1}{x-1}, & \text{اگر } x\neq 1 \\ \alpha, & \text{اگر } x=1 \end{cases}$ مسلسل ہے؟

09_11th-Maths-Vol2-Unit9_UM.indd 127 21-02-2023 16:10:16

(7) فرض کرو کہ $f(x)=\begin{cases}0, & \text{اگر } x<0\\ x^2, & \text{اگر } 0\le x<2\\ 4, & \text{اگر } x\ge 2\end{cases}$، تفاعل کی ترسیم کیجیے۔ ثابت کریں کہ $f(x)$ پر $(-\infty,\infty)$ مسلسل ہے۔

(8) $f(3)$ کے ساتھ اگر f اور g مسلسل تفاعل ہوں اور $\lim_{x\to 3}[2f(x)-g(x)]=4$، $g(3)$ معلوم کریں۔

(9) وہ نقاط معلوم کریں جن پر f غیر مسلسل ہے۔ ان نقاط میں سے کسی پر f دائیں ہے، بائیں ہے، مسلسل ہے یا ان میں کوئی بھی مسلسل نہیں ہے؟ f کی ترسیم کا خاکہ کھینچیے۔

(i) $f(x)=\begin{cases}2x+1, & \text{اگر } x\le -1\\ 3x & \text{اگر } -1<x<1\\ 2x-1, & \text{اگر } x\ge 1\end{cases}$ (ii) $f(x)=\begin{cases}(x-1)^3, & \text{اگر } x<0\\ (x+1)^3, & \text{اگر } x\ge 0\end{cases}$

(10) ایک تفاعل f کی وضاحت اس طرح کی گئی ہے:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{کے لئے } x<0;\\ x & \text{کے لئے } 0\le x<1;\\ -x^2+4x-2 & \text{کے لئے } 1\le x<3;\\ 4-x & \text{کے لئے } x\ge 3\end{cases}$$

کیا یہ تفاعل مسلسل ہے؟

(11) مندرجہ ذیل میں کونسا تفاعل $x=x_0$ پر نکالنے والا غیر مسلسل ہے؟اگر غیر مسلسل نکالنے والا ہے، ایک تفاعل g معلوم کریں جو $x\ne x_0$ کے لئے f کی متفق ہو اور $\mathbb{R}$ پر مسلسل ہو۔

(i) $f(x)=\dfrac{x^2-2x-8}{x+2},\ x_0=-2.$

(ii) $f(x)=\dfrac{x^3+64}{x+4},\ x_0=-4$

(iii) $f(x)=\dfrac{3-\sqrt{x}}{9-x},\quad x_0=9$

(12) مستقل b معلوم کریں جو g کو $(-\infty,\infty)$ پر مسلسل بناتا ہے۔

$$g(x)=\begin{cases}x^2-b^2 & \text{اگر } x<4\\ bx+20 & \text{اگر } x\ge 4\end{cases}$$

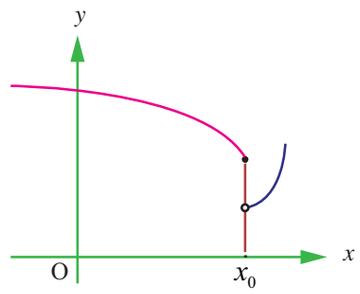
(13) تفاعل $f(x)=x\sin\dfrac{\pi}{x}$ پر غور کریں۔ تفاعل کو ہر جگہ مسلسل بنانے کے لئے ہمی ں $f(0)$ کو کاکیا قیمت دینی چاہئے؟

(14) تفاعل $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$ کی وضاحت $x=1$ پر نہیں کی گئی ہے۔ $f(x)$ کو $x=1$ پر مسلسل بنانے کے لئے ہمیں $f(1)$ کو کیا قیمت دینی چاہئے؟

09_11th-Maths-Vol2-Unit9_UM.indd 128 21-02-2023 16:10:17

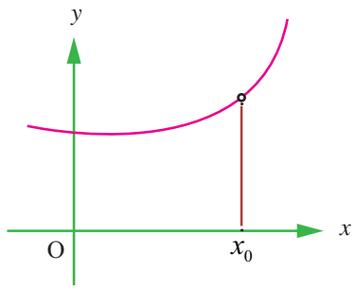
(15) درج ذیل ترسیم میں سے ہر ایک کے لئے $x = x_0$ پر مسلسل کو کیسے مٹایا جاسکتا ہے اس کی وضاحت کریں۔

(a)



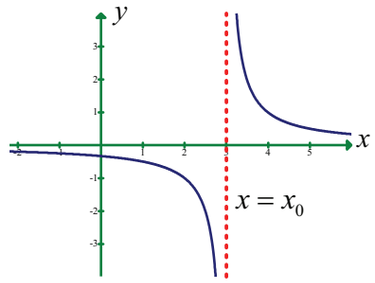
شکل 9.38

(b)



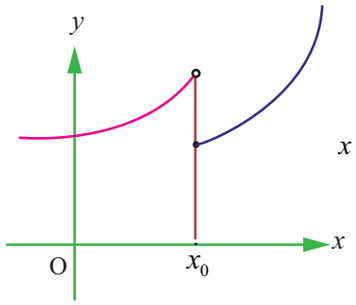
شکل 9.39

(c)



شکل 9.40

(d)



شکل 9.41

مشق 9.6

دیے گئے چار حل میں سے صحیح یا سب سے مناسب جواب کا انتخاب کریں۔

(1) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$

1 (1) 0 (2) ∞ (3) $-\infty$ (4)

(2) $\lim_{x\to\pi/2} \frac{2x-\pi}{\cos x}$

2 (1) 1 (2) −2 (3) 0 (4)

(3) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$

0 (1) 1 (2) $\sqrt{2}$ (3) (4) غیر موجود ہے

(4) $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\sqrt{\theta}}{\sqrt{\sin\theta}}$

1 (1) − 1 (2) 0 (3) 2 (4)

(5) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+5x+3}{x^2+x+3}\right)^x$ ہے

e^4 (1) e^2 (2) e^3 (3) 1 (4)

09_11th-Maths-Vol2-Unit9_UM.indd 129 21-02-2023 16:10:19

(6) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{2x+1}=$

1 (1) 0 (2) -1 (3) $\frac{1}{2}$ (4)

(7) $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}=$

$\log ab$ (1) $\log\left(\frac{a}{b}\right)$ (2) $\log\left(\frac{b}{a}\right)$ (3) $\frac{a}{b}$ (4)

(8) $\lim_{x\to 0}\frac{8^x-4^x-2^x+1^x}{x^2}=$

$2\log 2$ (1) $2(\log 2)^2$ (2) $\log 2$ (3) $3\log 2$ (4)

(9) اگر $f(x)=x(-1)^{\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor}$ ، $x\le 0$ تو $\lim_{x\to 0} f(x)$ کی قیمت مساوی ہے۔

-1 (1) 0 (2) 2 (3) 4 (4)

(10) $\lim_{x\to 3}\lfloor x\rfloor=$

2 (1) 3 (2) (3)غیر موجود ہے 0 (4)

(11) فرض کریں کہ تفاعل f کی وضاحت $f(x)=\begin{cases}3x & 0\le x\le 1\\ -3x+5 & 1<x\le 2\end{cases}$ ، تو

(1) $\lim_{x\to 1} f(x)=1$ (2) $\lim_{x\to 1} f(x)=3$

(3) $\lim_{x\to 1} f(x)=2$ (4) $\lim_{x\to 1} f(x)$ غیر موجود ہے

(12) اگر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ کی وضاحت $f(x)=\lfloor x-3\rfloor+|x-4|$ سے کی گئی ہے جو $x\in\mathbb{R}$ کے لئے، تو $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ کی قیمت مساوی ہے

-2 (1) -1 (2) 0 (3) 1 (4)

(13) $\lim_{x\to 0}\frac{xe^x-\sin x}{x}$

1 (1) 2 (2) 3 (3) 0 (4)

(14) اگر $\lim_{x\to 0}\frac{\sin px}{\tan 3x}=4$، تو p کی قیمت ہے

6 (1) 9 (2) 12 (3) 4 (4)

(15) $\lim_{\alpha\to\pi/4}\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\alpha-\frac{\pi}{4}}$ ہے

(4) 2 (3) 1 (2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (1) $\sqrt{2}$

(16) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\ldots+\frac{n}{n^2}\right)$ ہے

$\frac{1}{2}$ (1) 0 (2) 1 (3) ∞ (4)

09_11th-Maths-Vol2-Unit9_UM.indd 130 21-02-2023 16:10:22

(17) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{x}=$

1 (1) e (2) $\frac{1}{e}$ (3) 0 (4)

(18) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-e^{x}}{\tan x-x}=$

1 (1) e (2) $\frac{1}{2}$ (3) 0 (4)

(19) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{x^2}}$ کی قیمت ہے

1 (1) -1 (2) 0 (3) (4) حد غیر موجود ہے

(20) $\lim_{x\to k^-} x-\lfloor x\rfloor$ کی قیمت، جہاں k ایک سالم عدد ہو

-1 (1) 1 (2) 0 (3) 2 (4)

(21) $x=\frac{3}{2}$ پر تفاعل $f(x)=\frac{|2x-3|}{2x-3}$ ہے

(1) مسلسل (2) مسلسل غیر (3) یقینی تفر (4) صفر غیر

(22) فرض کریں کہ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ کی وضاحت $f(x)=\begin{cases}x & x \text{ غیر ناطق ہے}\\ 1-x & x \text{ ناطق ہے}\end{cases}$ سے کی گئی ہے تو f ہے،

(1) $x=\frac{1}{2}$ پر غیر مسلسل ہے (2) $x=\frac{1}{2}$ پر مسلسل ہے

(3) ہر جگہ مسلسل ہے (4) ہر جگہ غیر مسلسل

(23) تفاعل $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x^2+1} & x\neq -1\\ P & x=-1\end{cases}$ کی وضاحت $x=-1$ پر نہیں کی گئی ہے۔ $f(-1)$ کی قیمت معلوم کریں تاکہ اس قیمت کے ذریعے توسیع شدہ تفاعل مسلسل ہے

(1) $\frac{2}{3}$ (2) $-\frac{2}{3}$ (3) 1 (4) 0

(24) فرض کریں کہ $[2, 5]$ میں f ایک مسلسل تفاعل ہے۔ اگر f تمام x اور $f(3)=12$ کے لئے صرف ناطق کی قیمت لیتا ہے تو

(1) $\frac{f(3)+f(4.5)}{7.5}$ (2) 12 (3) 17.5 (4) $\frac{f(4.5)-f(3)}{1.5}$

(25) فرض کریں کہ تفاعل f کی وضاحت $f(x)=\frac{x-|x|}{x}$ کے لئے $x\neq 0$ اور $f(0)=2$۔ تو f ہے

(1) مسلسل کہیں نہیں (2) ہر جگہ مسلسل

(3) $x=1$ کے علاوہ تمام x کے لئے مسلسل (4) $x=0$ کے علاوہ تمام x پر مسلسل

09_11th-Maths-Vol2-Unit9_UM.indd 131 21-02-2023 16:10:24

خلاصہ (SUMMARY)

اس باب میں ہم نے درجہ ذیل کا علم حاصل کیا ہے

- ایک تفاعل $y = f(x)$ کی حد جیسے ہیں x کی قیمت x_0 کی نچلی قیمتوں سے x_0 کی طرف پہنچتا ہے۔
- ایک تفاعل $y = f(x)$ کی حد جیسے ہیں x کی قیمت x_0 کی اعلیٰ قیمتوں سے x_0 کی طرف پہنچتا ہے۔
- کسی تفاعل کے حد جیسے ہی x کی قیمت x_0 کے قریب پہنچتا ہے، x_0 کے حذف شدہ قریبی میں موجود ہے اگر صرف اس صرت میں

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ کا مطلب یہ بھی ہے کہ $f(x)$ کی قیمت L میں بدل جاتا ہے کیونکہ جب x کی قیمت x_0 کے دونوں طرف سے کے قریب آتا ہے سوائے $x = x_0$ کے۔
- اگر $\lim_{x \to x_0} f(x)$ اور $\lim_{x \to x_0} g(x)$ موجود ہیں تو

(i) $$\lim_{x \to x_0} \left[f(x) \pm g(x) \right] = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$$

(ii) $$\lim_{x \to x_0} \left[f(x).g(x) \right] = \lim_{x \to x_0} f(x). \lim_{x \to x_0} g(x)$$

(iii) $$\lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}$$ اگر $g(x) \neq 0$ اور $\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$

- $f(x)$ کی حد جب x کی قیمت x_0 کے قریب پہنچتا ہے تو موجود نہیں ہے اور اگر یاتو $f(x) \to \pm\infty$ جیسے ہیں $x \to x_0^-$ یا $f(x) \to \pm\infty$ جیسے ہیں $x \to x_0^+$ یا $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = I_1 \neq I_2 = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$
- $+\infty$ کا قریبی (M, ∞) ہے، $M > 0$

$-\infty$ کا قریبی $(-\infty, K)$ ہے، $K < 0$

- اگر $f(x) \to \pm\infty$ جیسے ہی $x \to x_0$ تو $x = x_0$ ایک عمودی متقارب ہو گا۔
- خط $y = l_1$ (یا l_2) منحنی $y = f(x)$ کی افقی متقارب ہے اگر یا تو $f(x) \to l_1$ جیسے ہر $x \to \infty$ یا $f(x) \to l_2$ جیسے $x \to -\infty$
- x_0 پر $f(x)$ مسلسل ہے اگر صرف اور صرف

(i) $$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

(ii) $$\lim_{\triangle x \to 0} \left[f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) \right] = 0$$

(iii) $$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x \right)$$

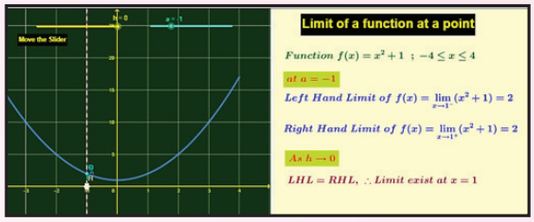
- اچھال اور نکلنے والے غیر مسلسل

09_11th-Maths-Vol2-Unit9_UM.indd 132 21-02-2023 16:10:25

ICT CORNER 9(a)

تفرقی احصا ۔ حدیں اور مسلسل

متوقع نتائج



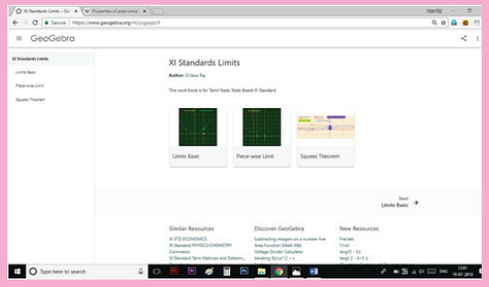
مرحلہ: 1

براؤزر کھولیں اور دئے گئے URL لنک ٹیپ کیجئے (یا) QR کوڈ کو اسکین کیجئے۔ "XI جماعت حدود" جیوجبرا(GeoGebra) نامی ورک بک کھلے گا۔ اس میں آپ کے سبق سے متعلق کی ورک شیٹیں ہیں۔

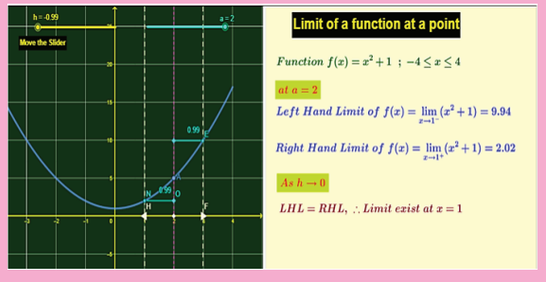
مرحلہ:2

"حدود بنیادی" والے ورک شیٹ کو منتخب کریں۔ ایک مسلسل تفاعل دیاجاتاہے۔ آپ سلائی ڈ "a" کو حرکت دیکر مطلوبہ مقام پر حد کا انتخاب کرسکتے ہیں۔پھر سلائیڈ "h" کو حرکت دیکر $f(h)$ کو جانچ کرنے کے لئے خطوط کو $x = h$ (ایک نقطہ کے قریب ترین) بائیں اور دائیں دونوں طرف منتقل کریں۔

اس کا موازنہ کتاب میں دی گئی تعریف سے کریں۔



مرحلہ: 1



مرحلہ:2

Browse in the link:

Matrices and Determinants: https://ggbm.at/cpknpvvh

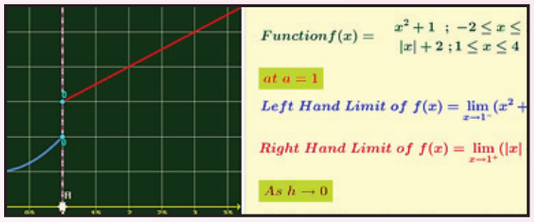
B60VK

09_11th-Maths-Vol2-Unit9_UM.indd 133 21-02-2023 16:10:27

ICT CORNER 9(b)

تفرقی احصا ۔ حدیں اور مسلسل

متوقع نتائج

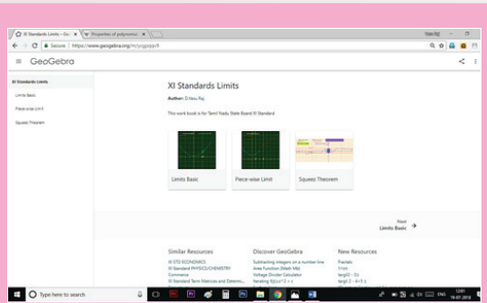


مرحلہ: 1

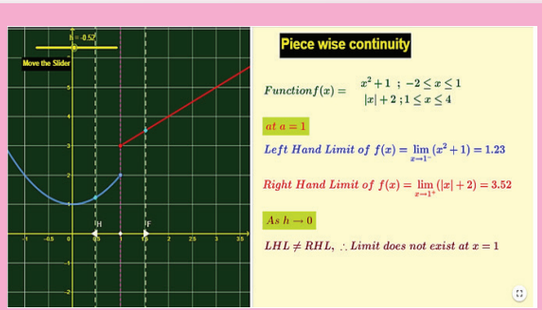
براؤزر کھولیں اور دئے گئے URL لنک ٹیپ کیجئے (یا) QR کوڈ کو اسکین کیجئے۔ "XI جماعت حدود" جیوجبرا (GeoGebra) نامی ورک بک کھلے گا۔ اس میں آپ کے سبق سے متعلق کی ورک شیٹیں ہیں۔

مرحلہ:2

ورک شیٹ "ٹکڑاوار حد" کو منتخب کریں۔ ٹکڑاوار تفاعل دیا گیا ہے۔ سلائیڈ "h" کو حرکت دیکر $f(h)$ کو جانچ کرنے کے لئے خطوط کو $x = h$ (ایک نقطہ کے قریب ترین) بائیں اور دائیں دونوں طرف منتقل کریں۔ اس کا موازنہ کتاب میں دی گئی تعریف سے کریں۔



مرحلہ: 1



مرحلہ:2

Browse in the link:

Matrices and Determinants: https://ggbm.at/cpknpvvh

BY9N6

09_11th-Maths-Vol2-Unit9_UM.indd 134 21-02-2023 16:10:28

تفرقی کالکولس
تفرقی اور تفرقی کے طریقے
(Differential Calculus- Differentiability and Methods of Differentiation)

باب **10**

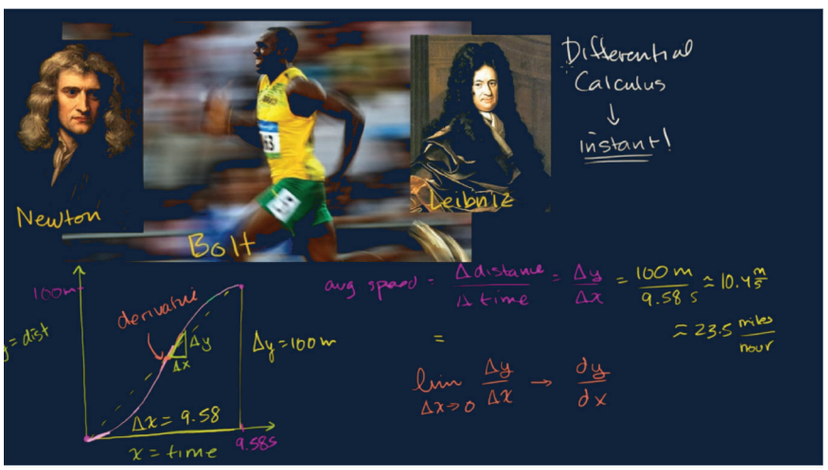
V4S9PB

"اپنی ضرورت کے مطابق لے لو" جو کرنا ہے کرو، تمہیں وہی ملے گا جو تم چاہتے ہو۔
۔ لبنیڈز

10.1 تعارف (Introduction)

اس سبق میں ہم مشتق کے تصور اور اس سے جڑے کے تصورات پر بحث کریں گے اور حقیقی زندگی کے مسائل کو حل کرنے کے اوزار تیار کریں گے۔ اس سلسلے میں، آئیے اوسط رفتار کے درج مسئلہ کو دیکھتے ہیں۔

عام طور پر ہر ایک کے پاس رفتار یا اسراع کا ایک بدیہی تصور ہوتا ہے جس کی شرح ایک خاص طوالت میں طے کردو فاصلہ ہے۔ کہہ سکتے ہیں ایک بس فی گھنٹے میں 60 Km کا فاصلہ طے کرتی ہے ۔بس کی اوسط رفتار فی گھنٹہ /کلومیٹر 60 ہونی چاہئے ۔ بلاشبہ بس کی رفتار کوفی گھنٹہ /کلومیٹر 60 کی شرح سے برقرار رکھنا مشکل ہے۔کیونکہ شہروں میں بس کی رفتار سست اور کار کے مقابلے اس کی رفتار ہوسکتی ہے ۔ دوسرے لفظوں میں،رفتار وقت کے ساتھ بدلتی رہتی ہے ۔اگر ایک بس کمپنی کا شیڈول یہ مطالبہ کرتا ہے کہ بس فی گھنٹے میں گھنٹہ /کلومیٹر 60 کے فاصلے سے ایک شہر سے د وسرے شہر کو سفر طئے کرے تو ڈرائیور جانتا ہے کہ اس کو فطری طور پر رفتار میں تلافی کرنی ہوگی۔ یا سفر کے د وسرے مقامات پر اس سے زیادہ رفتار لینی ہوگی یہ جانتے ہوئے کہ اوسط رفتار گھنٹہ /کلومیٹر 60 ہے۔ تاہم اس سوال کاجواب ہم نہیں دے سکتے۔کہ ایک خاص لمحے میں بس کی رفتار کیا ہے؟



حسین بولٹ کی اوسط اسراع رفتار

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\text{100 میٹر}}{\text{9.58 سکنڈ}}=10.4$$

(حسین بولٹ کی موجودہ رفتار کیا ہے۔ ← کالکولس) سکنڈر میٹر

عام طور کسی حرکت کرنے والی شئے کی اوسط رفتار یا اسراع کو وقت کی شرح سے مندرجۂ ذیل سے تعارف کرسکتے ہیں۔

$$v_{ave}=\frac{\text{طے کرنے کا وقت}}{\text{طے کردہ فاصلہ}}$$

ایک رنرپر غور کریں جو ایک گھنٹے میں 15 منٹ (گھنٹے 1.25) کے گزرے ہوئے وقت میں 10 کلومیٹر کی دوڑ مکمل کرتا ہے۔ اس ریس کے لئے رنر کی اوسط رفتار یا اوسط اسراع

$v_{ave}=\frac{10}{1.25}=8$ ہوگی

مگر فرض کریں کہ رنر کی آدھے فاصلے پر دوڑ کی رفتارv- کو خصوصاً محسوب کرنا ہے ۔ 0 گھنٹہ اور 0.5 گھنٹہ کے د رمیان دوڑکافاصلہ 5 Km ہو تو گھنٹہ /کلومیٹر $v_{ave}=\frac{5}{0.5}=10$

10_11th-Maths-Vol2-Unit10_UM.indd 135 21-02-2023 15:08:09

ایک بار پھر یہ تعداد وکئی پیمانہ نہیں ہے یا ضروری طور پر اتنا اچھا اشارہ نہیں ہے ۔ فوری شرح v جس پر دوڑنے والا دوڑ میں 0.5 h کو آگے بڑھ رہا ہے ،اگر ہم اس شرح کو 0.6 h پر تعین کرتے ہیں تو رنر ابتدائی لائن سے7.5کلومیٹر دور ہے پھر اوسط رفتار 0 h سے 0.6 h تک ہے۔

$$v_{ave} = \frac{5.7-5}{0.6-0.5} = 7km/h$$



گالفریڈ ولہیلم لینیڈز
(1646 - 1716)

مؤخر الذکر شرح v کا زیادہ حقیقت پسندانہ پیمانہ ہے ۔" سکڑ کر " وقت کا وقفہ 0.5 h اور اس وقت کے درمیان جو 5 کلومیٹر کے قریب ایک ناپے ہوئے مقام سے مطابقت رکھتاہے ۔ ہم توقع کرسکتے ہیں کہ 0.5 h وقت پر رنر کی رفتار کا بھی بہتر تخمینہ حاصل کرسکتے ہیں ۔

رفتار تلاش کرنے کا یہ مسئلہ ہمیں تجزیاتی مساوات کی نمائندگی کرنے والے عام ریاضیاتی ماڈل سے ماخوذ تلاش کرنے کے عمومی مسئلے سے نمٹنے کی طرف لے جاتا ہے ۔ $y = f(x)$ اس کے نتیجے میں ، ہم مندرجہ ذیل مقاصد کے حصول کی طرف بڑھیں گے اور پھر مشتقات کا تجزیہ کریں گے۔

سیکھنے کے مقاصد (Learning Objectives)

اس باب کی تکمیل پر طلباء سے توقع کرسکتے ہیں کہ

- خارج قسمت کی حد کے طورپر مشتق کا تصور حاصل کریں۔
- مشتق کے تصور کو ہندسی طورپر دیکھیں۔
- مشتق کی تبدیلیوں کی پیمائش کے عمل کو اس کے طور پر سمجھیں۔
- منحنی خطوط مماسوں کی میلان ر تبدیلی کی شرح ناپنے کے لئے بطورِ آلہ مشتق کو احساس کریں۔
- تفرقی کے مختلف طریقوں کو سمجھیں
- روز مرہ حقیقی زندگی کے مسائل کو حل کرنے کے لئے کالکولس کو بطور آلہ استعمال کریں۔

10.2 مشتقات کا تصور (The concept of derivative)

کالکوس چار بڑے مسائل سے نکلا جن پر ریاضی دان سترویں صدی کے دوران کام کررہے تھے۔

(1) مماس خط کا مسئلہ

(2) رفتار اور اسراع کا مسئلہ

(3) کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ کامسئلہ

(4) رقبہ کا مسئلہ

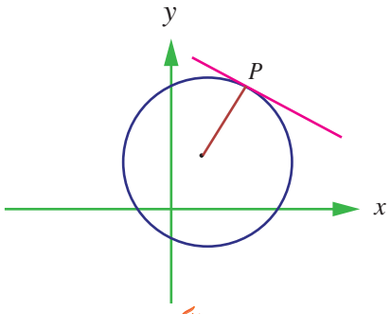
اوپر دئے گئے حسابوں میں (1) اور (2) پر ہم اس باب میں بحث کریں گے اور بقیہ دو مسائل کو بعد کے باب میں نمٹایا گیا ہے۔

10.2.1 مماس خط کا مسئلہ (The tangent line problem)

یہ کہنے کا کیا مطلب ہے کہ ایک خط کسی نقطہ پر ایک منحنی خط کی مماس ہے؟ ایک دائرے کے لئے ، ایک نقطہ P پر مماس خط وہ خط ہے جو اس نقطہ P پر نصف قطری خط سے عمود ہے جیسا کہ نقشہ 10.1 میں دکھایا گیا ہے۔

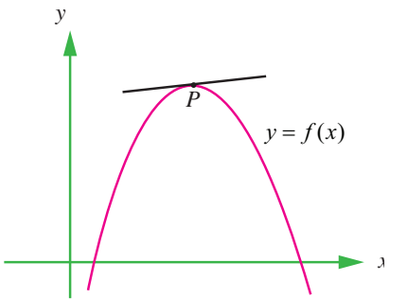
10_11th-Maths-Vol2-Unit10_UM.indd 136 21-02-2023 15:08:09

عام منحنی خط میں ،چونکہ ، مسئلہ بہت مشکل ہے ۔ مثال کے طور پر ، آپ مندرجۂ ذیل اعداد و شمار 10.2 سے 10.4 میں دکھائی گئی مماس کے خطوں کو کیسے وضاحت کریں گے۔

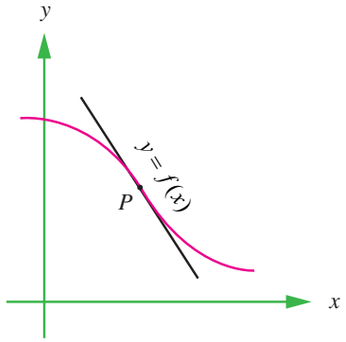


10.1 خاکہ

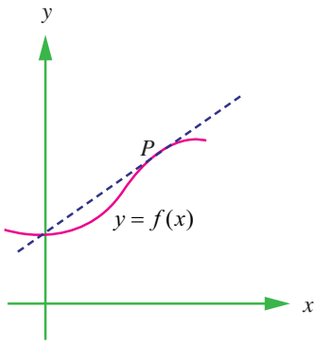
آپ کہہ سکتے ہیں کہ ایک خط ایک نقطہ پر ایک منحنی کو مماس ہے اگرچہ کہ مس کرجائے ۔ لیکن نقطہ Pپر سے منحنی کو قطع نہ کرے۔ یہ تعریف پہلی منحنی کے لئے کام کرے گا(شکل 10.2) لیکن دوسرے کے لئے نہیں (شکل 10.3) یا آپ یہ کہہ سکتے ہیں کہ ایک خط ایک منحنی کو مماس ہے۔اگر خط ایک نقطہ پر منحنی کو مس کرتی یا قطع کرتی ہے ۔ یہ تعریف ایک دائرے کے لئے کام کرے گی مگر زیادہ عام منحنی خطوط کے لئے نہیں ، جیسا کہ تیسری منحنی (شکل 1) سے دکھتا ہے۔



10.2 خاکہ



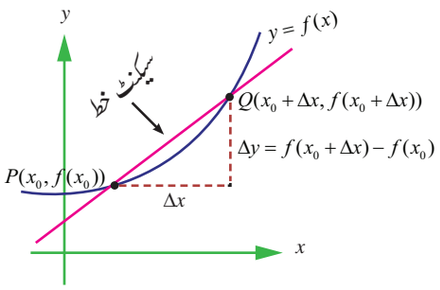
10.3 خاکہ



10.4 خاکہ

بنیادی طور پر، ایک نقطہ P پر مماس خط ڈھونڈنے کا مسئلہ ایک نقطہ P پر مماس خط کی ڈھلوان ڈھونڈنے کے مسئلے پر ابلتا ہے۔ آپ اس میلان کا تخمینہ لگا سکتے ہیں ایک سیکنٹ خط کا استعمال کرتے ہوئے (Point of tangents) اور منحنی پر دوسرا نقطہ جیسا کہ شکل 10.5 میں دکھایا گیا ہے ۔ معلوم کرسکتے ہیں۔

فرض کریں کہ $P(x_0, f(x_0))$ ایک نقطہ مماسی اور $Q(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ دوسرا نقطہ ہوں



10.5 خاکہ

دو نقطوں سے گذرتے ہوئے سیکنٹ خط کا میلان ضابطہ میں درج کرنے پر

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_{sec} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{(x_0 + \Delta x) - x_0} = \frac{y \text{ میں تبدیلی}}{x \text{ میں تبدیلی}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

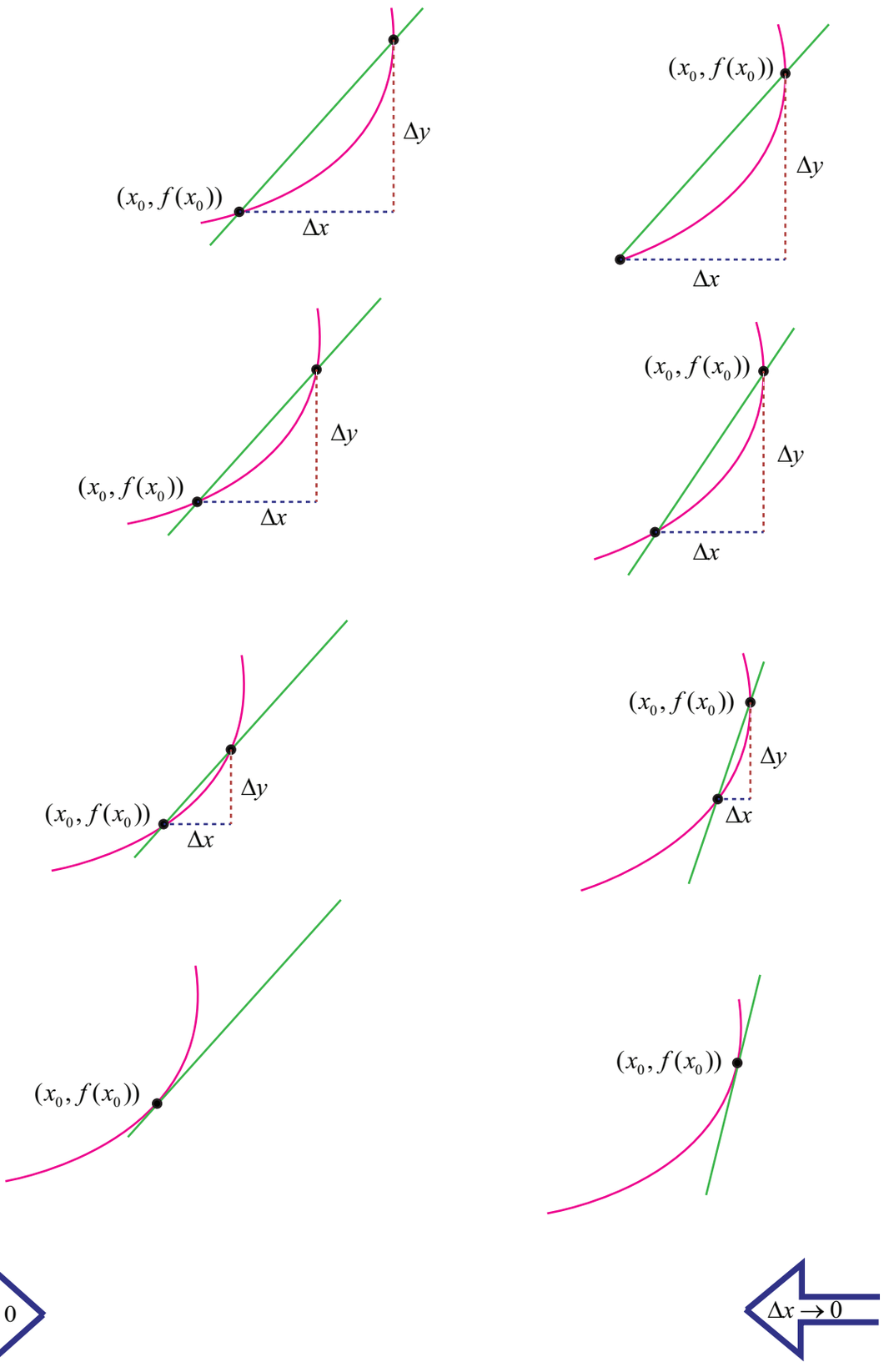
یعنی $m_{sec} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ چونکہ سیکنٹ خط کا میلان ہے۔

مساوات کے دائیں جانب فرق خارج قسمت، نسب نما Δx کو x میں تبدیلی (x کی بڑھتی) اور شمار کنندہ $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ کو y میں تبدیلی کہتے ہیں۔

اس طریقہ کار کی خوبصورتی یہ ہے کہ آپ مماس خط کے میلان کو زیادہ سے زیادہ درست تخمینہ حاصل کرسکتے ہیں اور نقطہ مماسی کے قریب اور قریب نقطہ کا منتخب کرسکتے ہیں۔

10_11th-Maths-Vol2-Unit10_UM.indd 137 21-02-2023 15:08:10

مماس خط کا تخمینہ



شکل 10.6 سے 10.13

10_11th-Maths-Vol2-Unit10_UM.indd 138 21-02-2023 15:08:10

تشریح 10.1

فرض کریں کہ ہم مماس خط کے میلان کو $f(x) = x^2$ کی ترسیم میں $(1,1)$ نقطہ پر تلاش کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔

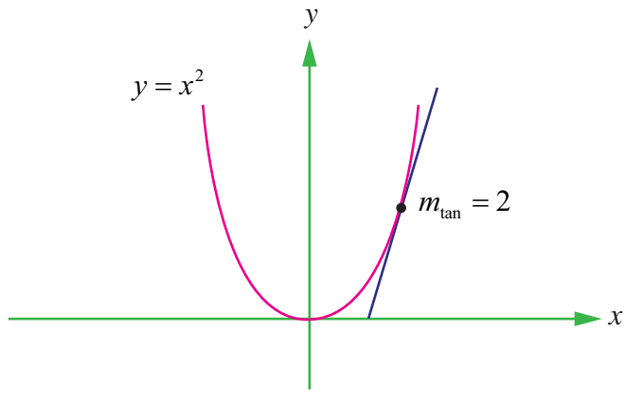
شروعات میں فرض کرلیں $\Delta x = 0.1$ لے لیں اور قطع خط کا میلان $(1,1)$ اور $((1.1, (1.1)^2))$ کے ذریعے معلوم کریں

$$f(1.1) = (1.1)^2 = 1.21 \quad \text{(i)}$$

$$\Delta y = f(1.1) - f(1) \quad \text{(ii)}$$

$$= 1.21 - 1 = 0.21$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0.21}{0.1} = 2.1 \quad \text{(iii)}$$



10.14 خاکہ

یکے بعد دیگر قیمتوں کو 1 کے دائیں اور بائیں جانب مندرجۂ ذیل جدول میں درج کرنے پر

$\Delta y / \Delta x$	Δy	$f(1+\Delta x)$	$f(1)$	$1+\Delta x$	Δx
2.1	0.21	1.21	1	1.1	0.1
2.01	1.0201	1.0201	1	1.01	0.01
2.001	0.002001	1.002001	1	1.001	0.001
1.9	– 0.19	0.81	1	0.9	– 0.1
1.99	– 0.0199	0.9801	1	0.99	– 0.01
1.999	– 0.001999	0.998001	1	0.999	– 0.001

واضح طور پر $\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$; $\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$

یہ ظاہر کرتا ہے کہ $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$

لہذا مماس خط کی میلان کو نقطہ $(1,1)$ سے ترسیم $y = x^2$ پر درج کرنے سے $m_{\tan} = 2$ ملتا ہے۔

شکل 10.6 سے 10.13 کی بنیاد پر، تشریح 10.1 سے، اور ہماری ذہنی اظہار ، ہمیں یہ کہنے کا اشارہ کی جاتا ہے کہ تفاعل $y = f(x)$ کی ترسیم میں مماس خط L نقطہ P پر ہے تو L ایسا ہونا ضروری ہے کہ خط جو کہ PQ کا قاطع حد ہے جو P اور Q سے گزرتی ہے جیسا کہ $P(\Delta x \to 0)$ $\to Q$ اس کے $m_{\tan}$ علاوہ L کا میلان حدوں کی قیمتوں کی $\Delta x \to 0$ قیمت $m_{\sec}$ ہونی چاہئے جس کی فہرست مندرجۂ ذیل ہے۔

تعریف 10.1 (میلان m کے ساتھ مماس خط)

فرض کریں کہ f کا تعارف کھلے وقفے جس میں x_0 اور f کی حد وجود ہوں تو میلان m کے ساتھ

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = m_{\tan}$ سے گزرنے والی خط نقطہ $(x_0, f(x_0))$ پر f کے ترسیم کی مماس خط ہے۔

$(x_0, f(x_0))$ پر مماس خط کے میلان کو اس نقطہ پر منحنی خط کا مماس بھی کہا جاتا ہے

تعارف سے مراد یعنی اگر ترسیم ایک نقطہ $(x_0, f(x_0))$ پر مماس خط کو تسلیم کرتا ہے تو یہ منفرد ہے چونکہ ایک نقطہ اور میلان کیلے خط سے متعین ہے۔

10_11th-Maths-Vol2-Unit10_UM.indd 139 21-02-2023 15:08:11

تعارف کے شرطوں کو 4 مرحلوں سے محسوب کرسکتے ہیں ۔

(i) x_0 پر f کی تشخیص $f(x_0)$: $x_0 + \Delta x$ اور $f(x_0 + \Delta x)$

(ii) محسوب Δy : $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

(iii) Δy کو $\Delta x\ (\neq 0)$ سے تقسیم : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

(iv) حد کو محسوب کریں جیسا کہ $\Delta x \to 0 (\neq 0) : m_{\tan} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

تشریح 10.1 میں ترسیم کے میلان کی محسوب کرنے کے لئے تعریفوں کا استعمال کرتے ہوئے سہولت فراہم کی جاسکتی ہے۔

(i) $f(1) = 1^2 = 1.$ ہر کوئی $\Delta x \neq 0$

$$f(1 + \Delta x) = (1 + \Delta x)^2 = 1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2$$

(ii) $$\Delta y = f(1 + \Delta x) - f(1) = 2\Delta x + (\Delta x)^2 = \Delta x\,(2 + \Delta x)$$

(iii) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2 + \Delta x)}{\Delta x}$$
$$= 2 + \Delta x\ .$$

(iv) $$m_{\tan} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2 + \Delta x) = 2 + 0 = 2\ .$$

مثال 10.1

کوئی بھی نقطہ $(x_0, f(x_0))$ پر ترسیم $f(x) = 7x + 5$ کے لئے مماس خط کا میلان معلوم کیجئے۔

حل

مرحلہ (i) $f(x_0) = 7x_0 + 5$

ہرکوئی $\Delta x \neq 0$ ،

$$f(x_0 + \Delta x) = 7(x_0 + \Delta x) + 5$$
$$= 7x_0 + 7\Delta x + 5$$

مرحلہ (ii)
$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$
$$= (7x_0 + 7\Delta x + 5) - (7x_0 + 5)$$
$$= 7\Delta x$$

مرحلہ (iii)
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 7$$

چونکہ ،کوئی بھی نقطہ پر ترسیم ہمیں $f(x) = 7x + 5$ کے لئے ،

مرحلہ (iv)
$$m_{\tan} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} (7)$$
$$= 7.$$

غور کریں کہ خطی ترسیم کے لئے $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ مستقل ہے ۔ نہ تو x_0 پر اور نہ ہی Δx کی زیادتی پر منحصر ہے۔

10_11th-Maths-Vol2-Unit10_UM.indd 140 21-02-2023 15:08:13

مثال 10.2

نقطہ $(5, f(5))$ پر ترسیم $f(x) = -5x^2 + 7x$ کے لئے مماس خط کا میلان معلوم کیجئے

حل

مرحلہ (i) $f(5) = -5(5)^2 + 7 \times 5 = -125 + 35 = -90$

ہر کوئی $\Delta x \neq 0$،

$$f(5 + \Delta x) = -5(5 + \Delta x)^2 + 7(5 + \Delta x) = -90 - 43\Delta x - 5(\Delta x)^2.$$

مرحلہ (ii) $\Delta y = f(5 + \Delta x) - f(5)$

$$= -90 - 43\Delta x - 5(\Delta x)^2 + 90 = -43\Delta x - 5(\Delta x)^2$$

$$= \Delta x\,[-43 - 5\Delta x].$$

مرحلہ (iii) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -43 - 5\Delta x$

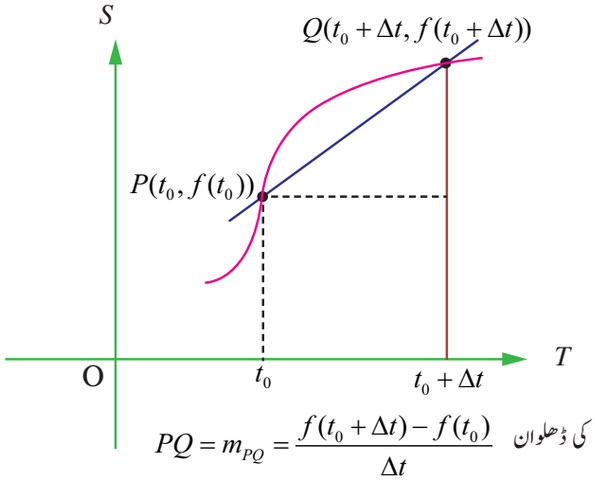
مرحلہ (iv) $m_{\tan} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -43.$

10.2.2 خط مستقیمی حرکت کی رفتار (Velocity of Rectilinear motion)

فرض کریں کہ حرکت کے مساوات $s = f(t)$ کے مطابق ایک شئے خط مستقیم میں حرکت کرتی ہے، جہاں t وقت پر مبدا سے گذرنے والی شئے کا فاصلہ s (براہ راست فاصلہ) لیں۔ تفاعل f جو حرکت کو واضح کرتا ہے اسے **مقامی تفاعل** (**Position function**) کہا جاتا ہے۔ وقت کے وقفے $t = t_0$ سے $t = t_0 + \Delta t$، تبدیلی کی کیفیت $f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$ ہے۔ اس دوران وقفے میں اوسط رفتار

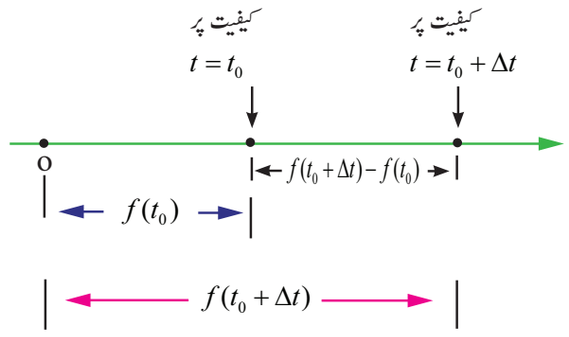
$$\frac{\text{فاصلہ}}{\text{وقت}} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} = \frac{s \text{ میں تبدیلی}}{t \text{ میں تبدیلی}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

جو قاطع خط PQ میں مساوی میلان رکھتے ہیں۔ نقشہ 10.16 میں دکھایا گیا ہے۔

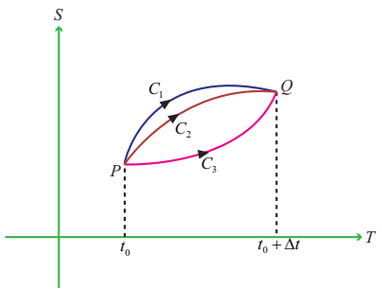


$PQ = m_{PQ} = \dfrac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$ کی ڈھلوان

10.16 خاکہ



10.15 خاکہ



10.17 خاکہ

اس دوران وقفہ Δt میں (t_0 سے $t_0 + \Delta t$) کے مساوی دوری (گزر گیا) طے کرنے پر حرکت کی مختلف قسمیں ہوں گی۔ اس مثال کو ترسیم کی مدد سے سطح پر P اور Q نقطوں کے د یہ منحنیاں ترسیم میں دئے گئے رمیان کئی قسم کی منحنی خطیں $C_1, C_2, C_3 \ldots$ بناسکتے ہیں۔ وقت کے وقفے میں مختلف حرکات ہیں۔ تمام حرکات کے لئے مساوی اوسط رفتار $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ ہے۔

10_11th-Maths-Vol2-Unit10_UM.indd 141 21-02-2023 15:08:13

اب فرض کریں کہ ہم کم اور کم وقت کے وقفوں میں $[t_0,\ t_0 + \Delta t]$ اوسط رفتاروں کا حساب لگاتے ہیں۔ دوسرے لفظوں میں فرض کریں کہ ہم Δt کو 0 تک پہنچنے دیتے ہیں تو ہم ر فتار کا تعارف (یافوری رفتار) وقت $v(t_0)$ پر یوں $t = t_0$ لیں جب کہ اوسط رفتار کی حدیں یوں ہوں گیں۔

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

اس کے معنی $t = t_0$ وقت میں ر فتار P پر مماس خط کے میلان کے برابر ہو گا۔

تشریح 10.2

خلاء میں آزادانہ طور پر گرنے والے جسم کا طے کردہ فاصلہ s اور نزول کا وقت t متغیر ہیں ۔وہ ایک دوسرے پر منحصر ہیں۔ اس انحصار کو آزادانہ طور پر گرنے والے کلیے سے اظہار کرسکتے ہیں۔

$s = \frac{1}{2} gt^2$ (ابتدائی ر فتار کی غیر حاضری)، g قوت کشش کی مستقل ہے



مرحلہ (i) $f(t_0 + \Delta t) = \frac{1}{2} g(t_0 + \Delta t)^2 = \frac{1}{2} g\left(t_0^2 + 2t_0 \Delta t + (\Delta t)^2\right)$

مرحلہ (ii)
$$\begin{aligned} \Delta s &= f(t_0 + \Delta t) - f(t_0) \\ &= \frac{1}{2} g\left[(t_0^2 + 2t_0 \Delta t + (\Delta t)^2\right] - \frac{1}{2} gt_0^2 \\ &= g\ \Delta t\left[t_0 + \frac{1}{2} \Delta t\right] \end{aligned}$$

مرحلہ (iii) $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{g\ \Delta t\left[t_0 + \frac{1}{2} \Delta t\right]}{\Delta t} = g\left[t_0 + \frac{1}{2} \Delta t\right]$

مرحلہ (iv) $v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = gt_0.$

اس سے یہ واضح ہے کہ مکمل طور پر رفتار کا تعارف فوری t_0 سے ہوتا ہے ۔ یہ حرکت کے وقت کے متناسب ہے (آزادانہ طور پر)

10.2.3 ایک تفاعل کا مشتق (The derivative of a Function)

اب ہم کالکولس کے مطالعہ میں ایک اہم موڑ پر پہنچ چکے ہیں ۔ مماس خط کے میلان کا تعارف (یا) میں استعمال حد کا تعارف (یا)آزادانہ گرنے والے جسم کے فوری رفتار کو استعمال کرکے تفرقی کے دو بنیادی عملوں میں سے ایک کی تعریف کرسکتے ہیں۔

تعریف 10.2

فرض کریں کہ f کا تعارف ایک کھلے وقفہ $I \subseteq \mathbb{R}$ میں واقع نقطہ x_0 پر مشتمل ہے اور فرض کریں $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ کا وجود ہے تو f کو x_0 پر تفرقی کہا جاتا ہے x_0 اور f کا مشتق $f'(x_0)$ ظاہر کیا جاتا ہے اور اس طرحدیا جاتا ہے

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

تمام کے x لئے جن کے حد موجود ہوں۔

$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ ، x کا تفاعل ہے۔

10_11th-Maths-Vol2-Unit10_UM.indd 142 21-02-2023 15:08:14

یقینی طور پر دیکھ سکتے ہیں کہ x کے تفاعل کا مشتق بھی x کا تفاعل ہے ۔ یہ "نیا" تفاعل نقطہ پر f کی ترسیم سے $(x, f(x))$ مماس خط کا میلان دیتا ہے۔ اس نقطہ پر ترسیم سے مماس خط حاصل ہو

مشتق کے تفاعل کو حاصل کرنے کا طریقہ **تفرق** کہلاتا ہے۔ ایک تفاعل x پر اس وقت **تفرق** ہے جب کہ اس کا مشتق x پر وجود ہو اور **کھلے وقفے (a, b)** میں اس وقت تفرق ہے جب کہ ہر ایک نقطہ (a, b) میں تفرق ہو۔

کے حاصل ، جس کو 'f prime of x' (یا) 'f dash of x' کے طور پر بھی پڑھا جاتا ہے ۔ دیگر اشارے $y = f(x)$ مشتق کو اخذ کرنے کے لئے استعمال کئے جاتے ہیں۔ سب سے زیادہ استعمال ہونے والے عام اشارے یہ ہیں

$$f'(x), \frac{dy}{dx}, y', \frac{d}{dx}[f(x)], D_x[y]$$

یہاں y_1 یا Dy یا D تفرق عامل ہے۔ یا $\frac{d}{dx}$

اشارہ $\frac{dy}{dx}$ کو ایسے پڑھا جاتا ہے ۔ "x کے حوالے سے y" کا مشتق یا مختصراً "$dy - dx$" یا "*Dee y Dee x*" یا "*Dee Dee x of y*" مگر یہ بھی واضح کیا جاتا کہ $\frac{dy}{dx}$ کو خارج قسمت $dy \div dx$ اور "*dy by dx*" سے حوالہ نہ بنائیں ۔ اس نشانی $\frac{dy}{dx}$ کو **لیبنڈز** نشانی کہا جاتا ہے۔

10.2.4 ایک طرفی مشتقیں (دائیں ہاتھ اور بائیں ہاتھ جانب کی مشتقیں)
(One sided derivatives (left hand and right hand derivatives))

کوئی ایک تفاعل $y = f(x)$ کا تعارف کھلے وقفے (a, b) میں جس میں x_0 نقطہ پر $x = x_0$ پر f کے لئے دائیں ہاتھ اور بائیں ہاتھ کے مشتق بالترتیب واضح ہیں $f'(x_0^-)$ اور $f'(x_0^+)$, اس کو یوں تعارف کرسکتے ہیں۔

$$f'(x_0^-) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

اور $f'(x_0^+) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ بشرط یہ کہ حدیں وجود میں ہوں

یعنی یہ تفاعل دائیں اور بائیں جانب سے تفرق ہے ۔ x_0 پر تفاعل $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ کی حدیں موجود ہوں تو

یوں پیچھا کرتا ہے کہ وجود ہے جب کہ صرف اور صرف اگر دونوں $f'(x_0^-) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ اور

$f'(x_0^+) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ وجود اور $f'(x_0^-) = f'(x_0^+)$ ہوں ۔

لہذا $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ صرف اور صرف $f'(x_0^-) = f'(x_0^+)$ ہوں۔

اگر ان میں سے کوئی ایک شرط ناکام ہو تو f x_0 پر غیر تفرق ہے۔

کے $h = \Delta x > 0$ لحاظ سے،

$$f'(x_0^+) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{اور}$$

$$f'(x_0^-) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h} .$$

10_11th-Maths-Vol2-Unit10_UM.indd 143 21-02-2023 15:08:16

تعریف 10.3

ایک تفاعل بند وقفہ $[a,b]$ میں اس وقت تفرقی ہے جب کہ کھلے وقفہ (a,b) میں اور خاتمہ نقطے a اور b پر تفرقی ہو۔

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}, \quad h>0$$

$$f'(b) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(b+\Delta x)-f(b)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(b-h)-f(b)}{-h}, \quad h>0.$$

$x = x_0$ پر f تفرقی ہے تو $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ہے۔ جہاں $x = x_0 + \Delta x$ اور $\Delta x \to 0$ کے متماثل $x \to x_0$ ہے۔
یہ متبادل طریقہ چند بار محسوب کرنے میں زیادہ آسان ہے۔

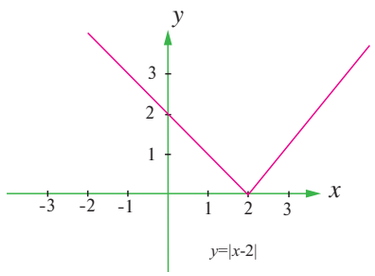
بطور سہولت، اگر ہم یہ فرض کریں کہ $h = \Delta x$ تو $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ جب فراہم کی گئی حد وجود ہوں۔

10.3 تفرقی اور مسلسل (Differentiability and Continuity)

تشریح 10.3

$x = 2$ پر تفاعل $f(x) = |x-2|$ کا تفرقی ٹسٹ کیجئے

حل



خاکہ 10.18

ہم جانتے ہیں کہ $x = 2$ پر تفاعل مسلسل ہے

$$f'(2^-) = \lim_{x \to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \quad \text{مگر}$$

$$= \lim_{x \to 2^-} \frac{|x-2|-0}{x-2}$$

$$= \lim_{x \to 2^-} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{-(x-2)}{(x-2)} = -1 \quad \text{اور}$$

$$f'(2^+) = \lim_{x \to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{|x-2|-0}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{(x-2)}{(x-2)} = 1$$

چونکہ ایک طرف کی تفرقی $f'(2^-)$ اور $f'(2^+)$ غیر مساوی ہے $f'(2)$ غیر وجود ہے یعنی، $x = 2$ پر f غیر تفرقی ہے ۔ دوسرے نقاط پر تفاعل تفرقی ہے۔

اگر $x_0 \neq 2$ اور کوئی نقطہ ہو تو

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{|x-x_0|}{x-x_0} = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x > x_0 \\ -1 & \text{اگر } x < x_0 \end{cases}$$

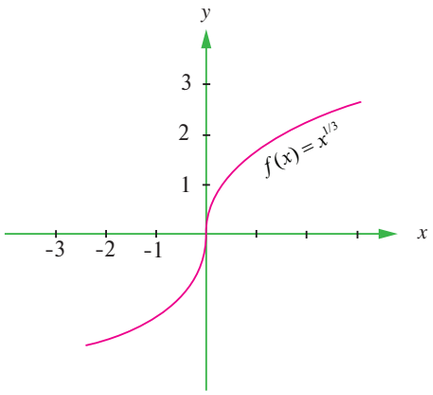
لہذا $$f'(2) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x > 2 \\ -1 & \text{اگر } x < 2 \end{cases}$$

درحقیقت یہ ہے کہ $f'(2)$ وجود نہیں ہے۔ ہندسی طور پر $y = |x-2|$ یہ حقیقت ظاہر ہوتی ہے کہ منحنی کے لئے $(2,0)$ پر مماس خط نہیں ہے اور یہ بھی نوٹ کریں کہ $(2,0)$ پر منحنی کا تیز کنارہ ہے۔

10_11th-Maths-Vol2-Unit10_UM.indd 144 14-03-2023 15:33:33

تشریح 10.4

$x = 0$ پر $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ کے تفرقی کا امتحان لیجئے



10.19 خاکہ

حل

فرض کریں کہ $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ صاف طور پر، اس تفاعل کی ترسیم میں کوئی سوراخ (یا ٹوٹا ہوا) نہیں ہے اور لہذا یہ اس کے علاقے کے ہر ایک نقطہ پر مسلسل ہے۔

فرض کریں کہ $f'(0)$ وجود ہونے کا جائزہ لیں۔

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^{\frac{1}{3}}-0}{x}$$ اب

$$= \lim_{x\to 0} x^{\frac{-2}{3}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} \to \infty$$

لہذا $x = 0$ پر تفاعل غیر تفرقی ہے۔ شکل 10.19 سے، مزید ہم یہ نتیجہ اخذ کرسکتے ہیں کہ مماس خط $x = 0$ پر عمود ہے۔اس لئے $x = 0$ پر f غیر تفرقی ہے۔

اگر ایک تفاعل ایک نقطہ پر مسلسل ہو تو یہ ضروری نہیں کہ وہ تفاعل اس نقطہ پر تفرقی ہو۔

مثال 10.3

ثابت کریں کہ سب سے بڑا سالم تفاعل $f(x) = \lfloor x \rfloor$ کوئی سالم عدد کے لئے تفرقی نہیں ہے

حل

سب سے بڑا سالم تفاعل $f(x) = \lfloor x \rfloor$ ہر ایک سالم نقطے n پر غیر مسلسل ہے،چونکہ $\lim_{x\to n^-}\lfloor x \rfloor = n-1$ اور $\lim_{x\to n^+}\lfloor x \rfloor = n$ ہے۔

لہذا $f'(n)$ غیر وجود ہے۔

آپ دوسرے نقطے پر اس تفاعل کے تفرقی کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟

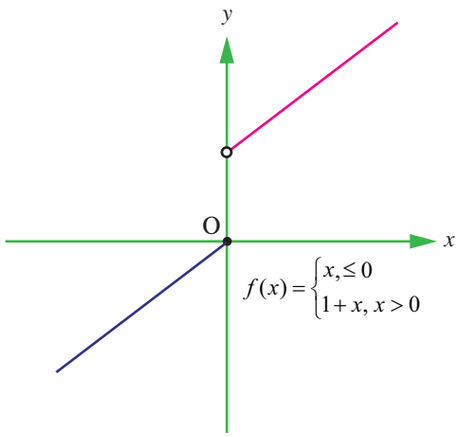
تشریح 10.5

فرض کریں کہ $f(x) = \begin{cases} x & x \le 0 \\ 1+x & x > 0 \end{cases}$

ہوں تو $f'(0)$ محسوب کریں اگر وجود ہو؟

حل

کھینچی ہوئی ترسیم پر غور کریں



10.20 خاکہ

$$f'(0^-) = \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$f'(0^-) = \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

10_11th-Maths-Vol2-Unit10_UM.indd 145 21-02-2023 15:08:22

$$f'(0^+) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{1+\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \left(1+\frac{1}{\Delta x}\right) \to \infty$$

لہذا $f'(0)$ غیر وجود ہے۔

یہاں ہم مشاہدہ کرسکتے ہیں کہ f کی ترسیم میں $x = 0$ پر چھلانگ ہے یعنی $x = 0$ ایک غیر مسلسل چھلانگ ہے۔

اوپر دئے گئے تشریح اور مثالوں کے خلاصے سے مندرجۂ ذیل نتائج اخذ کرسکتے ہیں۔

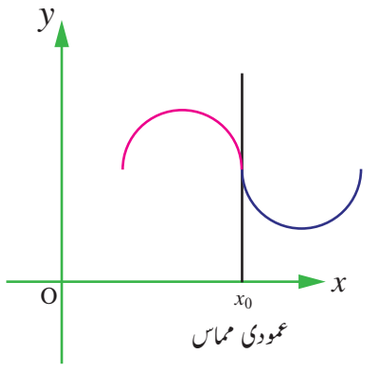
(f کے علاقے کے تعلق سے) ایک تفاعل f کوئی ایک نقطہ x_0 پر غیر تفرقی ہے۔ اگر مندرجۂ ذیل حالات پیش آئیں۔

(i) x_0 پر f کی عمودی مماس ہے۔

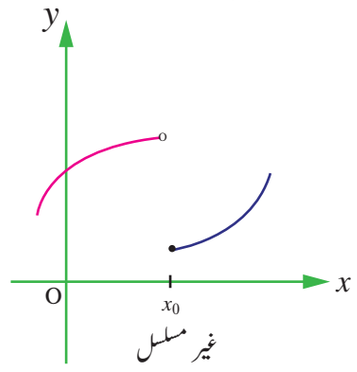
(ii) f کی ترسیم x_0 پر ایک نقطہ پر آتا ہے۔ (یا تو تیز دھار $\vee$ یا تیز چوٹی $\wedge$)

(iii) x_0 پر f غیر مسلسل ہے۔

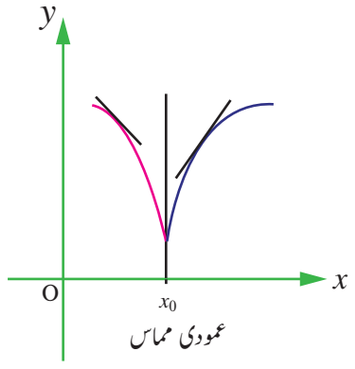
ایک تفاعل مندرجۂ ذیل صورت حال میں تفرقی سے ناکام ہے۔



خاکہ 10.23



خاکہ 10.22



خاکہ 10.21

ہم تشریح 10.3 اور 10.4 دیکھیں ہیں کہ تفاعل $f(x) = |x-2|$ اور $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ بالترتیب $x = 2$ اور $x = 0$ پر تسلسل ہیں مگر وہاں غیر تفرقی ہیں، جب کہ مثال 10.3 اور تشریح 10.5 سے، تفاعل $f(x) = \lfloor x \rfloor$ اور $f(x) = \begin{cases} x & x \le 0 \\ 1+x & x > 0 \end{cases}$ بالترتیب غیر تسلسل ہیں۔ ہر ایک سالم عدد $x = n$ اور $x = 0$ کے بالترتیب غیر تفرقی بھی ہیں۔ مذکورہ بالا دلیل کو کثیف اور بیان کیا جاتا ہے کہ : **غیر مسلسل کا مطلب غیر تفرقی ہے۔**

مسئلہ 10.1 (تفرقی کا مطلب مسلسل ہے)

نقط $x = x_0$ کا پر اگر f تفریقی ہے تو x_0 پر f مسلسل ہوگا

ثبوت

فرض کرو کہ نقط x_0 پر مشتمل وقفہ (a, b) پر $f(x)$ کو ایک تفریقی تفاعل ہونے دے تو $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ موجود ہے جس کے معنی $f'(x_0)$ ایک منفرد حقیقی عدد ہے

اب $\lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0+\Delta x)-f(x_0)] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \times \Delta x$

10_11th-Maths-Vol2-Unit10_UM.indd 146 21-02-2023 15:08:23

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\right] \times \lim_{\Delta x \to 0}(\Delta x)$$

$$= f'(x_0) \times 0 = 0 .$$

یہ واضح کرتا ہے کہ $x = x_0$ پر f مسلسل ہے

■

پہلا پرنسپل سے مشتق

مشتقات کی تعریف میں بیان کردہ شرائط کا استعمال کرتے ہوئے کسی فعل کے مشتقات کو تلاش کرنے کے عمل کو پہلے اصول سے مشتق کہا جاتا ہے۔

مشق 10.1

(1) پہلے اصول کے استعمال سے مندرجۂ ذیل تفاعلوں کے مشتقات معلوم کیجئے

(i) $f(x) = 6$ (ii) $f(x) = -4x + 7$ (iii) $f(x) = -x^2 + 2$

(2) مندرجۂ ذیل تفاعلوں (اگر وجود ہوں) کا $x = 1$ پر دائیں اور بائیں جانب سے مشتقات معلوم کیجئے؟ کیا یہ تفاعلات $x = 1$ پر تفرقی ہیں؟

(i) $f(x) = |x-1|$ (ii) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ (iii) $f(x) = \begin{cases} x, & x \le 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$

(3) تعین کریں کہ مندرجۂ ذیل تفاعلیں اشارہ کردہ قیمتوں پر تفرقی ہیں۔

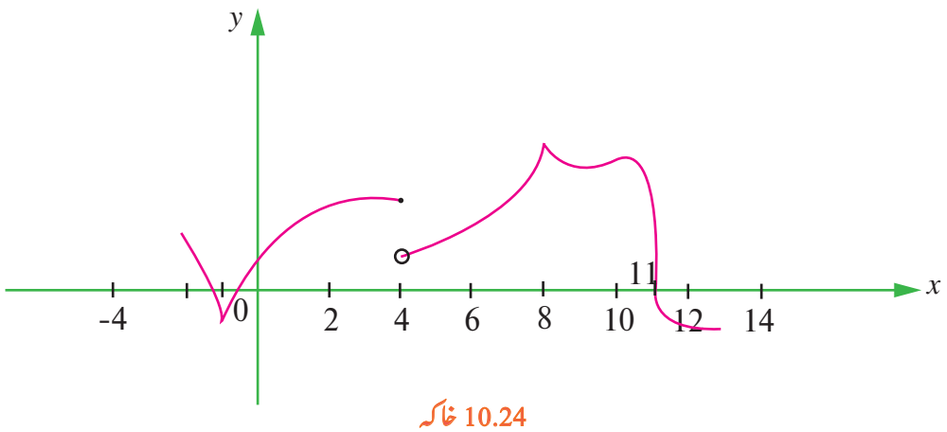
(i) $f(x) = x\,|x|$ پر $x = 0$ (ii) $f(x) = |x^2 - 1|$ پر $x = 1$

(iii) $f(x) = |x| + |x-1|$ پر $x = 0,\ 1$ (iv) $f(x) = \sin|x|$ پر $x = 0$

(4) ثابت کریں کہ مندرجۂ ذیل تفاعلیں اشارہ کردہ x کی قیمت میں غیر تفرقی ہیں۔

(i) $f(x) = \begin{cases} -x+2, & x \le 2 \\ 2x-4, & x > 2 \end{cases}$; $x = 2$ (ii) $f(x) = \begin{cases} 3x, & x < 0 \\ -4x, & x \ge 0 \end{cases}$ ' $x = 0$

(5) f کی ترسیم نیچے دکھائی گئی ہے ۔ وجوہات سے ثابت کریں کہ x کی قیمت (عددیں) جس پر f غیر تفرقی ہے ۔



خاکہ 10.24

(6) اگر $f(x) = |x+100| + x^2$ ہو تو $f'(-100)$ کے وجود کا ٹسٹ کیجئے۔

(7) خاکہ بنا کر $\mathbb{R}$ میں تفاعلوں کے تفرقی کی جانچ کریں

(i) $|\sin x|$ (ii) $|\cos x|$

10_11th-Maths-Vol2-Unit10_UM.indd 147 21-02-2023 15:08:24

10.4 تفرقی کے اصول (Differentiation Rules)

اگر f ایک حقیقی تغیر کا حقیقی قیمت تفاعل ہے جس کا تعارف کھلے وقفے I میں ہو اور اگر $y = f(x)$ ایک تفرقی تفاعل x کے لئے ہو، تو $\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ ہے۔ عام طور پر پہلے اصول کا استعمال کرتے ہوئے ہوئے اس طرح کے براہ راست مشتقات کو ڈھونڈنا زیادہ تر مقدمات میں انتہائی محنت طلب اور مشکل عمل ہے ۔ لیکن ہم جانتے ہیں کہ ، ایک بار اور سب کے لئے ، تمام بنیادی عنصری تفاعل کے مشتقات ، تفرقی کے اصول کے ساتھ مل کر الجبرائی تفاعل اور تفاعل کی تفاعل ، ہم پر کوئی بھی فاعل عنصر کے مشتق کو معلوم کرسکتے ہیں ۔ کسی بھی عنصر کے مشتق کو ہر بار حد کے عمل کو انجام دئے بغیر حاصل کرسکتے ہیں ۔ لہذا تفرقی کے عمل کو تفاعل کی ہر درجے میں خود کار بنایا جاسکتا ہے جو ہمیں تشویش دیتے ہیں۔

اب ہم اپنی توجہ کو تفرقی کے اصول کی بناء حاصل جمع ، حاصل ضرب اور خارج قسمت سے مبذول کرسکتے ہیں۔

مسئلہ 10.2

دو یا (دو سے ز یادہ) تفرقی تفاعلات کے مشتق کا حاصل جمع ان مشتقوں کے مجموعے کے برابر ہے ۔ یعنی، اگر u اور v دو تفرقی تفاعلات ہوں تو $\boxed{\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{d}{dx}u + \frac{d}{dx}v}$

ثبوت

فرض کریں کہ u اور v دو حقیقی قیمت والے تفاعل ہیں جن کا تعارف اور تفرقی کھلے وقفے $I \subseteq \mathbb{R}$ میں ہوں اور فرض کریں کہ $y = u + v$ تو $y = f(x)$ ایک تفاعل ہے جس کی تعریف I میں ہے اور مفروضے سے

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}$$

$v'(x)$ موجود $\quad \frac{dv}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}$

اب $\quad f(x+\Delta x) = u(x+\Delta x) + v(x+\Delta x)$

$$f(x+\Delta x) - f(x) = u(x+\Delta x) - u(x) + v(x+\Delta x) - v(x).$$

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}.$$

جس کا مطالعہ $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}$.

یعنی، $\quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = u'(x) + v'(x)$

یعنی، $\quad f'(x) = u'(x) + v'(x)$

یا $\quad (u+v)'(x) = u'(x) + v'(x)$

یعنی، $\boxed{\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{d}{dx}u + \frac{d}{dx}v}$ □

جس کو محدود تفرقی تفاعل $u_1, u_2, \ldots, u_n$ اور $(u_1 + u_2 + \ldots + u_n)' = u_1' + u_2' + \ldots + u_n'$ تک بڑھایا جاسکتا ہے

10_11th-Maths-Vol2-Unit10_UM.indd 148 21-02-2023 15:08:24

مسئلہ 10.3

فرض کریں کہ u اور n دو تفرقی تفاعلات ہیں تو $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

ثبوت

فرض کریں کہ u اور v دیئے گئے دو تفرقی تفاعلات ہیں اس لئے

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} = \frac{du}{dx} \text{ اور } \lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x} = \frac{dv}{dx}.$$

چونکہ $y = f(x) = u.v$

اور $f(x+\Delta x) = u(x+\Delta x)\, v(x+\Delta x)$ تو

$$f(x+\Delta x) - f(x) = u(x+\Delta x)\, v(x+\Delta x) - u(x).v(x)$$

$$= v(x+\Delta x)\,\big[u(x+\Delta x)-u(x)\big] + u(x)\big[v(x+\Delta x)-v(x)\big].$$

جس کا مختصر $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = u(x)\frac{\big[v(x+\Delta x)-v(x)\big]}{\Delta x} + v(x+\Delta x)\frac{\big[u(x+\Delta x)-u(x)\big]}{\Delta x}$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = u(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0} v(x+\Delta x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}$$

$$= u(x)v'(x) + v(x)u'(x) \quad \left(\lim_{\Delta x\to 0} v(x+\Delta x) = v(x)\right.$$ چونکہ v مسلسل ہے۔

یعنی، $f'(x) = \boxed{\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}}$

(یا) $\boxed{(uv)' = uv' + vu'}$

اسی طرح، $(uvw)' = uvw' + uv'w + u'vw$

جس کو محدود تفرقی تفاعلات u_1، u_2، ..... u_n تک بڑھایا جاسکتا ہے۔اشارے کو استعمال کرکے

$$(u_1.u_2...,u_n)' = u_1u_2...u_{n-1}u_n' + u_1u_2...u_{n-1}'u_n + \cdots + u_1'u_2\cdots u_n.$$

مسئلہ 10.4 (تقسیمی اصول)

فرض کریں کہ u اور v دو تفرقی تفاعلات ہیں $v(x)\neq 0$ کے ساتھ تو $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

ثبوت

فرض کریں کہ $y = f(x) = \frac{u}{v}$، u اور v کے تفرقی تفاعلات ہیں اور جہاں $v(x)\neq 0$ ہے۔

اب $f(x+\Delta x) = \frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}$

جس کا مختصر، $f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}$

$$= \frac{v(x)u(x+\Delta x) - u(x)v(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)v(x)}.$$

10_11th-Maths-Vol2-Unit10_UM.indd 149 21-02-2023 15:08:29

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\dfrac{v(x)\left[u(x+\Delta x)-u(x)\right]}{\Delta x} - \dfrac{u(x)\left[v(x+\Delta x-v(x)\right]}{\Delta x}}{v(x+\Delta x)v(x)}$$ جس کا مختصر،

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{v(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} - u(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}}{v(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)}$$ جس کا مختصر،

$$= \frac{v(x)u'(x)-u(x)v'(x)}{v(x)v(x)} \qquad \left(\because \lim_{\Delta x\to 0} v(x+\Delta x)=v(x)\right)$$

$$f'(x) = \frac{v(x)u'(x)-u(x)v'(x)}{\left[v(x)\right]^2}$$ جس کا مختصر،

$$\frac{d}{dx}(f) = \frac{vu'-uv'}{v^2}$$ یعنی،

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\dfrac{du}{dx}-u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}}$$ (یا)

مسئلہ 10.5 (زنجیر اصول ، مرکب تفاعل اصول یا تفاعلوں کے تفاعل کا اصول)

(Chain Rule / Composite Function Rule or Function of a Function Rule)

فرض کریں کہ $y=f(u)$ ایک u کا تفاعل ہے اس لحاظ سے فرض کریں کہ $u=g(x)$ ایک x کے تفاعل ہے اس طرح کہ $y=f\left(g(x)\right)=(fog)(x)$. ت $\frac{d}{dx}(f(g(x))=f'(g(x))g'(x)$ و

ثبوت

اوپر دئے گئے تفاعل میں $u=g(x)$ کو اندرونی تفاعل کہتے ہیں اور f کو بیرونی تفاعل کہتے ہیں ۔ نوٹ کریں کہ بالآخر y، x کا تفاعل ہے۔

اب $\Delta u = g(x+\Delta x)-g(x)$

لہذا، $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\times\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u}\times\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$

نوٹ کریں کہ جب کہ $\Delta u\to 0$ as $\Delta x\to 0$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\times\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$ چنانچہ،

$$= \lim_{\Delta u\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\right).\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

$$= \lim_{\Delta u\to 0}\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u}\times\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$

$$= f'(u)\times u'(x)$$

$$= f'\left(g(x)\right)g'(x)$$ (یا) $\boxed{\frac{d}{dx}\left(f(g(x))=f'\left(g(x)\right)g'(x)\right.}$.

10_11th-Maths-Vol2-Unit10_UM.indd 150 21-02-2023 15:08:30

چنانچہ، کسی تفاعل کے تفاعل $y = f\left(g(x)\right)$ کو تفرق کرنے کے لئے، ہمیں دلیل $g(x) = u$ کو تغیر u کو (**Intermediate argument**) متوسط دلیل کے طور پر جانا جاتا ہے۔ تفاعل کا مشتق لینا ہو گا اور اندرونی تفاعل $g(x)$ کے مشتق کو ضرب دینا ہو گا۔

مسئلہ 10.6

فرض کریں کہ $f(x)$ ایک تفرقی تفاعل ہے اور فرض کریں کہ $y = k\,f(x),$ $k \neq 0$، تو $\dfrac{d}{dx}(k\,f(x)) = k\,\dfrac{d}{dx}\,f(x).$

ثبوت

چونکہ f تفرقی ہے $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x)$

$$\begin{aligned}
y &= h(x) = k\,f(x) \quad \text{فرض کریں کہ}\\
h(x+\Delta x) &= k\,f(x+\Delta x)\\
h(x+\Delta x)-h(x) &= kf(x+\Delta x)-k\,f(x)\\
&= k\left[f(x+\Delta x)-f(x)\right].\\
\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x} &= k\,\frac{\left[f(x+\Delta x)-f(x)\right]}{\Delta x}.\\
\lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x\to 0} k\,\frac{\left[f(x+\Delta x)-f(x)\right]}{\Delta x} \quad \text{جس کا مختصر،}\\
&= k\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[f(x+\Delta x)-f(x)\right]}{\Delta x}\\
&= kf'(x) = k\,\frac{d}{dx}f(x)\\
\frac{d}{dx}\big(h(x)\big) &= k\,\frac{d}{dx}f(x).
\end{aligned}$$

لہذا $\boxed{\dfrac{d}{dx}\big(kf(x)\big) = k\,\dfrac{d}{dx}f(x)}$

10.4.1 بنیادی ابتدائی تفاعلات کے مشتقات (Derivatives of basic elementary functions)

اب ہم تمام بنیادی ابتدائی تفاعلات کے مشتقات کو معلوم کریں گے ۔ ہم مستقل تفاعل سے شروع کرتے ہیں۔

(1) مستقل تفاعل کا مشتق صفر ہے۔

فرض کریں کہ $y = f(x) = k$ جہاں k مستقل ہے

$$\begin{aligned}
f(x+\Delta x) &= k \quad \text{اور}\\
f(x+\Delta x)-f(x) &= k-k = 0. \quad \text{تو،}\\
\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} &= 0 \quad \text{جس کا مختصر،}\\
\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} &= 0 \quad \text{جس کا مختصر،}
\end{aligned}$$

10_11th-Maths-Vol2-Unit10_UM.indd 151 21-02-2023 15:08:33

یعنی، $f'(x) = 0$

(یا) $\boxed{\frac{d}{dx}(k)=0}$.

(2) قوت تفاعل $y = x^n$، $n > 0$ ایک سالم عدد ہے۔

فرض کریں کہ $f(x) = x^n$

اور $f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^n$، تو

$$f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^n - x^n.$$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{(x+\Delta x)-x}$$ جس کا مختصر،

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{(x+\Delta x)-x}$$ جس کا مختصر،

$$= \lim_{y\to x}\frac{y^n - x^n}{y-x} = nx^{n-1},\ y\to x \text{ as } \Delta x\to 0.$$ جہاں $y = x+\Delta x$ اور

$$\frac{d}{dx}f(x) = nx^{n-1}$$ (یا) $\boxed{\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}}$ لہٰذا،

نتیجہ 10.1

جب $n=\frac{p}{q},(p,q)=1,\ \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{p}{q}}\right)=\frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}$

نتیجہ 10.2

ہر کوئی حقیقی عدد x کے لئے α، $\frac{d}{dx}(x^\alpha)=\alpha x^{\alpha-1}$

مثال کے طور پر

(1) $\frac{d}{dx}(5) = 0$ چونکہ 5 مستقل ہے۔

(2) $\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2,$ قوت تفاعل اصول سے

(3) $\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}.$ قوت تفاعل اصول سے

(4) $\frac{d}{dx}\left(x^{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1},$ قوت تفاعل اصول سے

(5) $\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}},(x\neq 0)$ قوت تفاعل اصول سے

(6) $\frac{d}{dx}(100x^9) = 100\frac{d}{dx}(x^9) = 100\times 9x^{9-1} = 900x^8$ مسئلہ 10.6 سے

10_11th-Maths-Vol2-Unit10_UM.indd 152 21-02-2023 15:08:35

(3) لوگارتھمی تفاعل کا مشتق :

x کے قدرتی لوگارتھم کو $\log_e x$ (یا) $\log x$ (یا) $\ln x$ سے اظہار کرسکتے ہیں۔

فرض کریں کہ $y = f(x) = \log x$

اب $f(x+\Delta x) = \log(x+\Delta x)$

$$f(x+\Delta x) - f(x) = \log(x+\Delta x) - \log x$$

$$= \log\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right).$$

$$= \log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right).$$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}.$$

ہم جانتے ہیں کہ $\lim_{\alpha\to 0}\frac{\log(1+\alpha k)}{\alpha} = k\lim_{\alpha\to 0}\frac{\log(1+k\alpha)}{k\alpha} = k$

لہٰذا، $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{x}$

یعنی، $\boxed{\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}}$.

نتیجہ 10.3

اگر $y = f(x) = \log_a x$ تو $f'(x) = \frac{1}{(\log a)x}$

ہم جانتے ہیں $f(x) = \log_a x = \log_a e \times \log_e x = (\log_a e)\log x$

لہٰذا، $\frac{d}{dx}(f(x)) = \frac{d}{dx}(\log_a e \times \log x)$

(مستقل ضربی اصول سے) $= (\log_a e)\frac{d}{dx}(\log x)$

$= \log_a e.\frac{1}{x}$ (یا) $\frac{1}{(\log a)x}$.

(4) قوت نما تفاعل کے مشتق

فرض کریں کہ $y = a^x$

تو $f(x+\Delta x) - f(x) = a^{x+\Delta x} - a^x$

اور $= a^x(a^{\Delta x} - 1)$

10_11th-Maths-Vol2-Unit10_UM.indd 153 21-02-2023 15:08:36

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = a^x\left(\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}\right).$$

ہم جانتے ہیں کہ $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = \log a$

لہٰذا، $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}\right)$

$$= a^x \times \log a$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \log a} \quad \text{(یا)}$$

خاص طور پر، $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \log e$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(e^x) = e^x}.$$

(5) علم مثلث تفاعلات کے مشتقات

(i) Sine تفاعل $\sin x$

فرض کریں کہ $y = f(x) = \sin x$

تو، $f(x+\Delta x) = \sin(x+\Delta x)$ اور

$$f(x+\Delta x)-f(x) = \sin(x+\Delta x)-\sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{x}{2}\right).$$

اب $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$

جس کا مختصر، $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}.\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$

$= 1 \times \cos x$ (چونکہ $\cos x$ مسلسل ہے $\lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\Delta x) = \cos x$).

$= \cos x$

یعنی، $\boxed{\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x}$

10_11th-Maths-Vol2-Unit10_UM.indd 154 21-02-2023 15:08:39

(ii) Cosine تفاعل $\cos x$

فرض کریں کہ $y = \cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

تو، $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

فرض کریں کہ $u = x+\frac{\pi}{2}$

$\frac{du}{dx} = 1+0=1$

لہذا، $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin u) = \frac{d}{dx}(\sin u)\frac{du}{dx}$ (زنجیر چین اصول سے)

$= \cos u \times 1 = \cos u = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x.$

یعنی، $\boxed{\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x}$

(iii) Tangent تفاعل $\tan x$

فرض کریں کہ $y = f(x) = \tan x$

$= \frac{\sin x}{\cos x}$

یعنی، $\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)$

$= \frac{\cos x \frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}$ (تقسیمی اصول سے)

$= \frac{\cos x(\cos x) - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$

$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$

$= \frac{1}{\cos^2 x}.$

$\boxed{\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x}.$

(iv) Secant تفاعل $\sec x$

فرض کریں کہ $y = \sec x = \frac{1}{\cos x} = (\cos x)^{-1}$

10_11th-Maths-Vol2-Unit10_UM.indd 155 21-02-2023 15:08:40

تو $\frac{dy}{dx} = (-1)(\cos x)^{-2}(-\sin x)$ (چین اصول سے)

$= \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x}.\frac{\sin x}{\cos x} = \sec x.\tan x$.

چنانچہ، $\boxed{\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x}$

(v) Cosecant تفاعل cosec x

فرض کریں کہ $y = \text{cosec}\, x = \frac{1}{\sin x} = (\sin x)^{-1}$

$\frac{dy}{dx} = (-1)(\sin x)^{-2}(\cos x)$ (چین اصول سے) زنجیر

$= -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin x}.\frac{\cos x}{\sin x} = -\text{cosec}\, x \cot x$.

چنانچہ، $\boxed{\frac{d}{dx}(\text{cosec} x) = -\text{cosec} x \cot x}$

(vi) Cotangent تفاعل cot x

فرض کریں کہ $y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)$

$= \frac{\sin x \frac{d}{dx}(\cos x) - \cos x \frac{d}{dx}(\sin x)}{\sin^2 x}$

$= \frac{\sin x(-\sin x) - \cos x(\cos x)}{\sin^2 x}$

$= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\text{cosec}^2 x$ چنانچہ،

چنانچہ، $\boxed{\frac{d}{dx}(\cot x) = -\text{cosec}^2 x}$

(6) معکوس علم مثلث تفاعلات کے مشتقات

(i) $\sin^{-1}x$ (یا) arcsin x کا مشتق

فرض کریں کہ $y = f(x) = \sin^{-1} x$

تو $y + \Delta y = f(x + \Delta x) = \sin^{-1}(x + \Delta x)$

جس کا مختصر اور $x = \sin y$

10_11th-Maths-Vol2-Unit10_UM.indd 156 21-02-2023 15:08:43

$$x + \Delta x = \sin(y + \Delta y).$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\sin(y+\Delta y) - \sin y} = \frac{1}{\frac{\sin(y+\Delta y)-\sin y}{\Delta y}}$$ لہٰذا،

As $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ also, so that

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\frac{\sin(y+\Delta y)-\sin y}{\Delta y}}$$

$$= \frac{1}{\cos y}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

چنانچہ، $\boxed{\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

(ii) $\arccos x$ کا مشتق (یا) $\cos^{-1} x$

ہم متماثل جانتے ہیں

$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}.$$

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x + \cos^{-1} x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$ جس کا مختصر،

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) + \frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = 0$$ جس کا مختصر،

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = 0$$ لہٰذا،

$\boxed{\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$ (یا)

(iii) $\arctan x$ کا مشتق (یا) $\tan^{-1} x$

(1)... فرض کریں کہ $y = f(x) = \tan^{-1} x$

(2)... جس کا مختصر، $y + \Delta y = f(x + \Delta x) = \tan^{-1}(x + \Delta x)$

اور $x = \tan y$

$$x + \Delta x = \tan(y + \Delta y)$$

10_11th-Maths-Vol2-Unit10_UM.indd 157 21-02-2023 15:08:44

جس کا مختصر، $\Delta x = \tan(y + \Delta y) - \tan y$

لہٰذا، $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{\tan(y+\Delta y) - \tan y}$

$$= \frac{1}{\dfrac{\tan(y+\Delta y) - \tan y}{\Delta y}}.$$

چونکہ $\Delta x \to 0$، $\Delta y \to 0$ اس لحاظ سے،

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\tan(y+\Delta y) - \tan y}{\Delta y}} = \frac{1}{\dfrac{d}{dy}(\tan y)}$$

$$= \frac{1}{\sec^2 y}$$

$$= \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

چنانچہ، $\boxed{\dfrac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \dfrac{1}{1+x^2}}$

(iv) arccot x کا مشتق (یا) $\cot^{-1} x$

ہم متماثل جانتے ہیں کہ

$$\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2}.$$

جس کا مختصر، $\dfrac{d}{dx}(\tan^{-1} x + \cot^{-1} x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

جس کا مختصر، $\dfrac{d}{dx}(\tan^{-1} x) + \dfrac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = 0$

چنانچہ، $\dfrac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = -\dfrac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$

چنانچہ، $\boxed{\dfrac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = -\dfrac{1}{1+x^2}}$

(v) arcsec x کا مشتق (یا) $\boxed{\dfrac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}}$.

(vi) arccosec x کا مشتق (یا) $\boxed{\dfrac{d}{dx}(\text{cosec}^{-1} x) = \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}}$

(v) اور (vi) کی ثبوتیں مشق کے لئے چھوڑ دی گئی ہے۔

10_11th-Maths-Vol2-Unit10_UM.indd 158 21-02-2023 15:08:47

مثال 10.7

x کے احترام سے مندرجۂ ذیل کی تفرق کیجئے

(i) $y = x^3 + 5x^2 + 3x + 7$ (ii) $y = e^x + \sin x + 2$

(iii) $y = 4\text{cosec } x - \log x - 2e^x$ (iv) $y = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2$ (v) $y = xe^x \log x$

(vi) $y = \frac{\cos x}{x^3}$ (vii) $y = \frac{\log x}{e^x}$

(viii) معلوم کریں $f'(3)$ اور $f'(5)$ اگر $f(x) = |x - 4|$ ہوں

حل

(i) $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 10x + 3.$

(ii) $\frac{dy}{dx} = e^x + \cos x$

(iii) $\frac{dy}{dx} = -4 \text{ cosec } x.\cot x - \frac{1}{x} - 2e^x.$

(iv) $y = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = x^2 + x^{-2} - 2$

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 2x^{-2-1} = 2x - \frac{2}{x^3}.$$

(v) $$\frac{dy}{dx} = xe^x\left(\frac{1}{x}\right) + e^x.\log x(1) + x\log x(e^x)$$

$$= e^x + e^x \log x + xe^x \log x = e^x(1 + \log x + x\log x).$$

(vi) $y = \frac{\cos x}{x^3}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3(-\sin x) - \cos x(3x^2)}{x^6} = \frac{-x^2(x\sin x + 3\cos x)}{x^6} = -\frac{(x\sin x + 3\cos x)}{x^4}.$$

(vii) $y = \frac{\log x}{e^x} = e^{-x}.\log x$

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x}\left(\frac{1}{x}\right) + \log x(e^{-x})(-1)$$

$$= e^{-x}\left[\frac{1}{x} - \log x\right].$$

(viii) $$f(x) = |x - 4| = \begin{cases} -(x-4) & ; \ x < 4 \\ (x-4) & ; \ x \geq 4 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{اگر } x < 4 \\ +1 & \text{اگر } x \geq 4 \end{cases}$$

لہٰذا $f'(3) = -1$

$f'(5) = 1$.

10_11th-Maths-Vol2-Unit10_UM.indd 159 21-02-2023 15:08:49

مشق 10.2

متعلقہ آزادانہ متغیر کے حوالہ سے درج ذیل تفاعلوں کے مشتقات معلوم کریں

(1) $f(x) = x - 3\sin x$
(2) $y = \sin x + \cos x$
(3) $f(x) = x \sin x$
(4) $y = \cos x - 2\tan x$
(5) $g(t) = t^3 \cos t$
(6) $g(t) = 4\sec t + \tan t$
(7) $y = e^x \sin x$
(8) $y = \dfrac{\tan x}{x}$
(9) $y = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$
(10) $y = \dfrac{x}{\sin x + \cos x}$
(11) $y = \dfrac{\tan x - 1}{\sec x}$
(12) $y = \dfrac{\sin x}{x^2}$
(13) $y = \tan\theta(\sin\theta + \cos\theta)$
(14) $y = \operatorname{cosec} x \cdot \cot x$
(15) $y = x \sin x \cos x$
(16) $y = e^{-x} \cdot \log x$
(17) $y = (x^2+5)\log(1+x)e^{-3x}$
(18) $y = \sin x°$
(19) $y = \log_{10} x$
(20) $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ تفاعل کا خاکہ بنائیے اگر $f'(x)$ ہوں۔

10.4.2 زنجیر کے اصول کی مثالیں (Examples on Chain Rule)

مثال 10.8

معلوم کریں $F'(x)$ اگر $F(x) = \sqrt{x^2+1}$

حل

لیں، $u = g(x) = x^2 + 1$ اور $f(u) = \sqrt{u}$

$$\therefore F(x) = (fog)(x) = f(g(x))$$

چونکہ $f'(u) = \dfrac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$ اور

$$g'(x) = 2x,$$

ہمیں حاصل ہو $F'(x) = f'(g(x))g'(x)$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}.2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

مثال 10.9

تفرق کیجئے (i) $y = \sin(x^2)$ (ii) $y = \sin^2 x$

حل

(i) بیرونی تفاعل تفاعل ہے اور اندرونی تفاعل مربع تفاعل ہے۔

فرض کریں کہ $u = x^2$

یعنی، $y = \sin u$

چنانچہ، $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \times \dfrac{du}{dx}$

10_11th-Maths-Vol2-Unit10_UM.indd 160 21-02-2023 15:08:50

$$= \cos u \times (2x)$$
$$= \cos(x^2).2x$$
$$= 2x\cos(x^2).$$

(ii) $u = \sin x$

تو، $y = u^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$ اور

$$= 2u \times \cos x$$
$$= 2\sin x \,.\, \cos x$$
$$= \sin 2x.$$

مثال 10.10

تفرق کیجئے $y = (x^3 - 1)^{100}$

حل

لیں، تاکہ $u = x^3 - 1$

$$y = u^{100}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$ اور

$$= 100u^{100-1} \times (3x^2 - 0)$$
$$= 100(x^3 - 1)^{99} \times 3x^2$$
$$= 300x^2(x^3 - 1)^{99}.$$

مثال 10.11

مثال $f'(x)$ معلوم کریں ہوں $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + x + 1}}$

حل

پہلے ہم لکھیں: $f(x) = (x^2 + x + 1)^{\frac{-1}{3}}$

پھر، $f'(x) = -\frac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{\frac{-1}{3}-1} \frac{d}{dx}(x^2 + x + 1)$

$$= -\frac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{\frac{-4}{3}} \times (2x + 1)$$

$$= -\frac{1}{3}(2x + 1)(x^2 + x + 1)^{\frac{-4}{3}}.$$

مثال 10.12

تفاعل کا مشتق معلوم کیجئے $g(t) = \left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^9$

حل

$$g'(t) = 9\left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^{9-1} \frac{d}{dt}\left(\frac{t-2}{2t+1}\right)$$

10_11th-Maths-Vol2-Unit10_UM.indd 161 21-02-2023 15:08:50

$$= 9\left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^8\left[\frac{(2t+1)\frac{d}{dt}(t-2)-(t-2)\frac{d}{dt}(2t+1)}{(2t+1)^2}\right]$$

$$= 9\left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^8\left[\frac{(2t+1)\times 1-(t-2)\times 2}{(2t+1)^2}\right]$$

$$= 9\left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^8\left[\frac{2t+1-2t+4}{(2t+1)^2}\right]$$

$$= \frac{45(t-2)^8}{(2t+1)^{10}}\ .$$

مثال 10.13

تفرق رکیں $(2x+1)^5\ (x^3-x+1)^4$

حل

$y = (2x+1)^5\ (x^3-x+1)^4$ فرض کریں کہ

$u = 2x+1\ ;\ v = x^3-x+1$ لیں، تاکہ

$y = u^5\ .\ v^4$

$$\frac{dy}{dx} = u^5.\frac{d}{dx}(v^4)+v^4\frac{d}{dx}(u^5)$$ (ضربی اصول سے)

$$= u^5.4v^{4-1}\frac{dv}{dx}+v^4.5u^{5-1}\frac{du}{dx}$$ (زنجیر اصول سے)

$$= 4u^5.v^3\times(3x^2-1)+5v^4u^4\times 2$$

$$= 4(2x+1)^5(x^3-x+1)^3(3x^2-1)+10(x^3-x+1)^4(2x+1)^4$$

$$= (2x+1)^4(x^3-x+1)^3\left[4(2x+1)(3x^2-1)+10(x^3-x+1)\right]$$

$$= 2(2x+1)^4(x^3-x+1)^3(17x^3+6x^2-9x+3)\ .$$

مثال 10.14

تفرق کیجئے $y = e^{\sin x}$.

حل

$u = \sin x$ لیں، تاکہ

$y = e^u$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(e^u)}{du}\times\frac{du}{dx} = e^u\times\cos x = \cos x\ e^{\sin x}.$$

مثال 10.15

تفرق کیجئے 2^x.

حل

فرض کریں کہ $y = 2^x = e^{x\log 2}$

10_11th-Maths-Vol2-Unit10_UM.indd 162 21-02-2023 15:08:51

لیں، تاکہ $u = (\log 2)x$

$$y = e^u$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = e^u \times \log 2 = \log 2\, e^{x \log 2}$$

$$= (\log 2)2^x.$$

کے تفرقی ضابطے کو استعمال کرکے a^x، ہر کوئی براہ راست تفرقی معلوم کرسکتے ہیں۔

مثال 10.16

اگر $y = \tan^{-1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ ہے تو y' معلوم کریں

حل

$$y = \tan^{-1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

فرض کریں کہ $t = \frac{1+x}{1-x}$، تو

$$y = \tan^{-1} t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dt}(\tan^{-1} t).\frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{1}{1+t^2} \cdot \frac{(1-x).1-(1+x)(-1)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2} = \frac{1}{1+x^2}\ .$$

مشق 10.3

درجۂ ذیل کے تفرقی کیجئے

(1) $y = (x^2+4x+6)^5$ (2) $y = \tan 3x$ (3) $y = \cos(\tan x)$

(4) $y = \sqrt[3]{1+x^3}$ (5) $y = e^{\sqrt{x}}$ (6) $y = \sin(e^x)$

(7) $F(x) = (x^3+4x)^7$ (8) $h(t) = \left(t - \frac{1}{t}\right)^{\frac{3}{2}}$ (9) $f(t) = \sqrt[3]{1+\tan t}$

(10) $y = \cos(a^3+x^3)$ (11) $y = e^{-mx}$ (12) $y = 4\sec 5x$

(13) $y = (2x-5)^4(8x^2-5)^{-3}$ (14) $y = (x^2+1)\sqrt[3]{x^2+2}$ (15) $y = xe^{-x^2}$

(16) $s(t) = \sqrt[4]{\frac{t^3+1}{t^3-1}}$ (17) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{7-3x}}$ (18) $y = \tan(\cos x)$

(19) $y = \frac{\sin^2 x}{\cos x}$ (20) $y = 5^{\frac{-1}{x}}$ (21) $y = \sqrt{1+2\tan x}$

10_11th-Maths-Vol2-Unit10_UM.indd 163 21-02-2023 15:08:51

$y=\sin^3 x+\cos^3 x$ (22) $\quad y=\sin^2(\cos kx)$ (23) $\quad y=(1+\cos^2 x)^6$ (24)

$y=\dfrac{e^{3x}}{1+e^x}$ (25) $\quad y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$ (26) $\quad y=e^{x\cos x}$ (27)

$y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ (28) $\quad y=\sin\left(\tan\left(\sqrt{\sin x}\right)\right)$ (29) $\quad y=\sin^{-1}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ (30)

10.4.3 مضمر تفریق (Implicit Differentiation)

ایک تفاعل جس میں منحصر متغیر کا اظہار مکمل طور پر آزا متغیر x کے لحاظ سے کیا جاتا ہے ۔ یعنی ، $y=f(x)$ کوایک **واضح تفاعل** کہاجاتاہے ۔ مثال کے طور پر، $y=\dfrac{1}{2}x^3-1$ ایک **واضح تفاعل** ہے جب کہ متماثل مساوات $2y-x^3+2=0$ و مضمر تفاعل سے تعارف کیا جاتا ہے (یا) y کو x کے **مضمر تفاعل** سے تعارف کیا جاتا ہے

اب ، جیساکہ ہم جانتے ہیں کہ مساوات

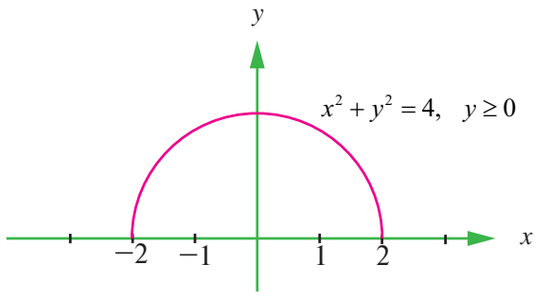
$$x^2+y^2=4 \quad (1)$$

مرکز مبدا پر اور نصف قطر 2 کے ساتھ دائرہ کو بیان کرتا ہے۔ مساوات (i) تفاعل نہیں ہے کیونکہ x کے کسی بھی انتخاب کے لئے وقفہ y $-2<x<2$ کی دو قیمتیں مطابقت رکھتے ہیں یعنی

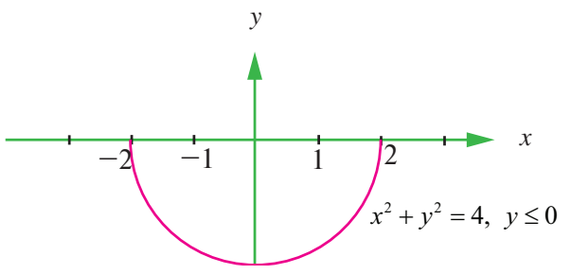
$$f(x)=\sqrt{4-x^2},-2\le x\le 2 \quad (2)$$

$$g(x)=-\sqrt{4-x^2},-2\le x\le 2 \quad (3)$$

(2) دائرے (i) کے اوپر نصف کی نمائندگی کرتا ہے اور (3) دائرے (1) کے نچلے نصف کی نمائندگی کرتا ہے۔دائرے کے اوپر آدھے یا نچلے آدھے حصوں کو غور کرنے پر ہمیں تفاعل حاصل ہوتا ہے ۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ وقفہ میں (i) کم از کم x کے دو مضمر تفاعلوں کی وضاحت $-2\le x\le 2$ کرسکتے ہیں۔



10.25 خاکہ



10.26 خاکہ

دونوں مساواتوں کو غور کریں

وقفہ $-2\le x\le 2$ میں $x^2+[f(x)]^2=4$ اور $x^2+[g(x)]^2=4$ متماثل ہیں

عام طور پر،اگر ایک مساوات $F(x,y)=0$ کسی وقفہ میں تفاعل f کی مضمری طور پر وضاحت کرتا ہے تو $F(x,f(x))=0$ ہیں وقفہ میں ایک شناخت ہے۔ f کی ترسیم مساوات $F(x,y)=0$ کے ترسیم کا ایک حصہ (یا کل) ہے۔

اور اس کے باوجود بھی x کے احترام سے y کو حل کرنا ممکن نہیں ہے۔ البتہ، چند مرحلوں میں ہم مشتق $\dfrac{dy}{dx}$ کا تعین اس عمل کے ذریعے کرسکتے ہیں جس کو **مضمر تفریق** ہے۔ یہ عمل x کے احترام سے مساوات کے دونوں جانب تفرقی کرنے کے لئے، تفرقی کے اصولوں کا استعمال کرتے ہوئے

10_11th-Maths-Vol2-Unit10_UM.indd 164 21-02-2023 15:08:53

اور پھر $\frac{dy}{dx}$ کے حل کرنے پر مشتمل ہے۔چونکہ ہم y کے بارے میں سوچتے ہیں کہ دی گئی مساوات کے ذریعے تفرقی تفاعل طے کیا جاتا ہے جب کہ تفاعلوں کی قوت اصول کی شکل ، زنجیر اصول سے نتیجہ اخذ کیا جاتا ہے۔ ایک $x^4 + x^2y^3 - y^5 = 2x+1$ زیادہ پیچیدہ مساوات جیسے x محور کے مناسب محدود وقفے پر کئی مضمر تفاعل کو تعین کر سکتا ہے

$\frac{d}{dx}(y^n) = n\,y^{n-1}\frac{dy}{dx}$, جہاں n سالم ہے۔

مثال 10.17

معلوم کیجئے $\frac{dy}{dx}$ اگر $x^2 + y^2 = 1$ ہے۔

حل

مساوات کے دونوں جانب تفرقی کرنے پر ہمیں

$$\frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(1)$$

$$2x+2y\frac{dy}{dx} = 0$$

مشق کے نتیجہ کو حل کرنے پر

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

مثال 10.18

$x = 1$ کے مطابق نقطوں پر $x^2 + y^2 = 4$ کے ترسیم میں مماس خطوں کے میلان معلوم کیجئے

حل

$x = 1$ کو درج کرنے پر دئے گئے مساوات کے حاصل $y^2 = 3$ (یا) $y = \pm\sqrt{3}$

چونکہ $\left(1,\sqrt{3}\right)$ اور $\left(1,-\sqrt{3}\right)$ پر مماس خط ہیں ۔ حالانکہ $\left(1,\sqrt{3}\right)$ اور $\left(1,-\sqrt{3}\right)$ کے نقطے ترسیم میں دو مضمر تفاعل ہیں ، ہمیں ہر نقطہ کی صحیح میلان ملی۔

$$\frac{dy}{dx}\,at\left(1,\sqrt{3}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{اور} \quad \frac{dy}{dx} \text{ ہمیں } \left(1,-\sqrt{3}\right) = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

مثال 10.19

اگر $x^4 + x^2y^3 - y^5 = 2x+1$ ہو تو $\frac{dy}{dx}$ معلوم کریں

حل

مضمر طور پر تفرقی کرنے سے، ہمیں

$$\frac{d}{dx}(x^4)+\frac{d}{dx}(x^2y^3)-\frac{d}{dx}(y^5) = \frac{d}{dx}(2x+1)$$

10_11th-Maths-Vol2-Unit10_UM.indd 165 21-02-2023 15:08:54

$$4x^3 + x^2\left(3y^2\frac{dy}{dx}\right) + (2x)y^3 - 5y^4\frac{dy}{dx} = 2 + 0 \quad \text{جس کا مختصراً،}$$

$$4x^3 + 3x^2y^2\frac{dy}{dx} + 2xy^3 - 5y^4\frac{dy}{dx} = 2 \quad \text{جس کا مختصراً،}$$

$$(3x^2y^2 - 5y^4)\frac{dy}{dx} = 2 - 4x^3 - 2xy^3 \quad \text{جس کا مختصراً،}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 - 4x^3 - 2xy^3}{3x^2y^2 - 5y^4} \quad \text{(یا)}$$

مثال 10.20

اگر $\sin y = y\cos 2x$ ہو تو $\frac{dy}{dx}$ معلوم کریں۔

حل

ہمیں $\sin y = y\cos 2x$

$$\frac{d}{dx}\sin y = \frac{d}{dx}(y\cos 2x) \quad \text{تفرق لینے پر،}$$

$$\cos y\frac{dy}{dx} = y(-2\sin 2x) + \cos 2x\frac{dy}{dx} \quad \text{یعنی،}$$

$$(\cos y - \cos 2x)\frac{dy}{dx} = -2y\sin 2x \quad \text{جس کا مختصراً،}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2y\sin 2x}{\cos y - \cos 2x} \quad \text{(یا)}$$

10.4.4 لوگار تھمی تفریق (Logarithmic Differentiation)

تفرق کے اصولوں اور بنیادی ابتدائی تفاعلات کے مشتقات کو استعمال کرتے ہوئے ،اب ہم خود بخود کسی بھی ابتدائی تفاعل کے مشتقات کو معلوم کرسکتے ہیں ۔سوائے ایک قسم کے ، تفاعل $y = x^x$ جس کی آسان ترین نمائندگی ہے۔اس طرح کے تفاعل کو قوت نما کے طور پر اظہار کیا جاتا ہے اور عام طور پر کوئی بھی تفاعل کو قوت کے طور پر لکھا جاتا ہے۔ جس کا قاعدہ اور قوت دونوں آزاد متغیر پر منحصر ہوتے ہیں۔

عمومی اصولوں سے قوت نما تفاعلوں $y = x^x$ کے مشتقوں کو معلوم کرنے کے لئے ، ہم د ونوں طرف لوگار تھم لیتے ہیں

$$\log y = x\log x,\ x > 0$$

چونکہ یہ متماثل ہے ، بائیں ہاتھ کے مشتق کا لازمی طور پر دائیں ہاتھ کے مشتق مساوی ہونا ضروری ہے۔ x کے ا حترام سے تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے (اس حقیقت کو ذہن میں رکھتے ہوئے بائیں ہاتھ طرف تفاعل کی تفاعل ہے)

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \log x + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = y(\log x + 1) = x^x(\log x + 1) \quad \text{لہذا}$$

10_11th-Maths-Vol2-Unit10_UM.indd 166 21-02-2023 15:08:55

اس عمل میں پہلے تفاعل $f(x)$ (قاعدہ e سے) کی لوگارتھم لیکر، پھر تفرق کرنے کو **لوگارتھمی تفریق** کہتے ہیں اور نتیجتاً

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\log f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}}.$$

کو $f(x)$ کا لوگارتھمی مشتق کہا جاتا ہے۔

اس طریقے کے فائدے یہ ہیں کہ پیچیدہ تفاعلات کے مشتقات کے محسوب کرنے میں مشتمل ضرب، تقسیم اور قوتوں کو لوگارتھم لینے سے مختصر کرسکتے ہیں۔

مثال 10.21

$y = \sqrt{x^2+4}\,.\,\sin^2 x\,.2^x$ کا مشتق معلوم کیجئے

حل

لوگارتھم کے اصول کی بنیاد پر دونوں جانب لوگرتھم لینے سے، ہمیں

$$\log y = \frac{1}{2}\log(x^2+4) + 2\log(\sin x) + x\log(2).$$ مختصراً،

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+4} + 2.\frac{\cos x}{\sin x} + \log 2$$ جس کا مختصراً،

$$= \frac{x}{x^2+4} + 2\cot x + \log 2$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = y\left(\frac{x}{x^2+4} + 2\cot x + \log 2\right)$$ لہذا،

مثال 10.22

تفرق کریں $y = \dfrac{x^{\frac{3}{4}}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$

حل

مساوات کے دونوں جانب لوگرتھم لینے پر اور لوگارتھمی اصول کے استعمال سے ہمیں،

$$\log y = \frac{3}{4}\log x + \frac{1}{2}\log(x^2+1) - 5\log(3x+2).$$

مضمر تفرق سے

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{4x} + \frac{1}{2}\frac{2x}{(x^2+1)} - \frac{5\times 3}{3x+2}$$

$$= \frac{3}{4x} + \frac{x}{(x^2+1)} - \frac{15}{3x+2}$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{x^{\frac{3}{4}}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}\left[\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}\right]$$ لہذا،

10_11th-Maths-Vol2-Unit10_UM.indd 167 21-02-2023 15:08:56

لوگارتھمی تفریق کے مرحلے

(1) مساوات $y = f(x)$ کے دونوں جانب قدرتی لوگارتھم لیں اور لوگرتھمی کلیہ کے استعمال سے مختصر کریں

(2) x کے احترام سے مضمر تفرق کریں

(3) نتیجتاً y' مساوات y کو حل کریں

عام طور پر یہاں قوت اور قاعدے کے چار مرحلے ہوتے ہیں

(1) $\frac{d}{dx}(a^b) = 0$ (a اور b مستقل ہیں)

(2) $\frac{d}{dx}[f(x)]^b = b[f(x)]^{b-1} f'(x)$

(3) $\frac{d}{dx}[a^{g(x)}] = a^{g(x)}(\log a)g'(x)$

(4) $\frac{d}{dx}[f(x)]^{g(x)} = [f(x)]^{g(x)}\left[\frac{g(x)f'(x)}{f(x)} + \log f(x).g'(x)\right]$

مثال 10.23

تفرق کریں $y = x^{\sqrt{x}}$

حل

لوگارتھم لیں

$$\log y = \sqrt{x}\log x$$

مضمر تفرق کریں

$$\frac{y'}{y} = \sqrt{x}.\frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}.\log x$$

$$= \frac{\log x + 2}{2\sqrt{x}}$$

لہٰذا، $\frac{d}{dx}(x^{\sqrt{x}}) = y' = x^{\sqrt{x}}\left(\frac{\log x + 2}{2\sqrt{x}}\right)$

10.4.5 اندراج کا طریقہ (Substitution method)

یہ عمل تفرق کے لئے بہت مفید کارآمد ہے ۔ خاص طور پر جس میں معکوس علم مثلث تفاعلات شامل ہوں۔

فرض کریں کہ $f(x) = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$

اس تفاعل کے لئے $f'(x)$ کو تفاعل کے تفاعل اصول معلوم کرسکتے ہیں مگر محنت کشش ہے۔البتہ ہم اندراج طریقہ استعمال کرسکتے ہیں۔

10_11th-Maths-Vol2-Unit10_UM.indd 168 21-02-2023 15:08:56

لیں $x = \tan\theta$.

پھر $\frac{2x}{1-x^2} = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \tan 2\theta$ اور

$$f(x) = \tan^{-1}(\tan 2\theta) = 2\theta$$
$$= 2\tan^{-1}x$$
$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2}.$$

مثال 10.24

اگر $y = \tan^{-1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ ہوں تو y' معلوم کریں

حل

فرض کریں کہ $x = \tan\theta$

پھر $\frac{1+x}{1-x} = \frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta} = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)$

$$\tan^{-1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\right] = \frac{\pi}{4}+\theta = \frac{\pi}{4}+\tan^{-1}x$$
$$y = \frac{\pi}{4}+\tan^{-1}x$$
$$y' = \frac{1}{1+x^2}.$$

مثال 10.25

$f(x) = \cos^{-1}(4x^3-3x)$ اگر $f'(x)$ معلوم کریں

حل

فرض کریں کہ $x = \cos\theta$

پھر $4x^3-3x = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = \cos 3\theta$ اور

$$f(x) = \cos^{-1}(\cos 3\theta) = 3\theta = 3\cos^{-1}x$$
$$f'(x) = 3\left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{-3}{\sqrt{1-x^2}}$$ لہٰذا،

10.4.6 طفیلی مساوات کی تعارف سے متغیرات کے مشتقات:

(Derivatives of variables defined by parametric equations)

فرض کریں کہ مساوات $x = f(t)$ اور $y = g(t)$

یہ مساواتیں x اور y متغیر ان کے درمیان تعلق دیتے ہیں۔ t کی قیمت کچھ علاقہ $[a, b]$ میں دی گئی ہو تو۔

ہم x اور y کو معلوم کرسکتے ہیں۔ اگر دو متغیرات x اور y کو ایک مابین تعارف (معاون) متغیر t کے تفاعل کے طور پر الگ الگ بیان کیا جائے ۔ تو x اور y کے مابین ایک عملی تعلقات کی و ضاحت طفیلیاں اور تعاون متغیرات کو طفیلی قدر کہا جاتا ہے۔

10_11th-Maths-Vol2-Unit10_UM.indd 169 21-02-2023 15:08:57

معاون متغیر t کی موجودگی کے بغیر x اور y کے درمیان براہ راست تعلق دھونڈنے کے عمل کو '**طفیلی کی خارج**" کہاجاتاہے۔سوال یہ ہے کہ طفیلی مساوات سے کیوں ہم نمٹیں کیونکہ ایک یا دو سے زیادہ متغیرات کو ایک ہی متغیر t میں کم کیا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر ،دائرے کی مساوات جس کا مرکز $(0, 0)$ اور نصف قطر r کے لئے $x^2 + y^2 = r^2$ x اور y کے درمیان ایک تعلق کی وضاحت کرتا ہے۔ اور مساوات $x = r\cos t$ ، $y = r\sin t$ طفیلی مساوات ہیں۔

اس کے برخلاف ، اگر ہم t کو خارج کریں تو ہمیں $x^2 + y^2 = r^2$ حاصل ہے۔

اگر y کو x کا تفاعل سمجھا جائے تو $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{g'(t)}{f'(t)}$.

اگر x کو y کا تفاعل سمجھا جائے تو x کا مشتق y کے احترام سے

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}} = \frac{f'(t)}{g'(t)}.$$

دائرے کے مرحلہ میں ، تو $\dfrac{dy}{dx}$ دائرے کے مماس کا میلان ہوگا یعنی

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{r\cos t}{-r\sin t} = -\cot t \ .$$

مثال 10.26

$\dfrac{dy}{dx}$ معلوم کریں جب کہ $x = at^2$ ، $y = 2at$ ، $t \neq 0$

حل

ہمارے پاس ہے $x = at^2 \ ; \ y = 2at$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{2a}{2at} = \frac{1}{t}.$$

مثال 10.27

$\dfrac{dy}{dx}$ معلوم کیجئے جب کہ $x = a(t - \sin t)$ ، $y = a(1 - \cos t)$ ہے۔

حل

ہمارے پاس ہے $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$

اب، $\dfrac{dx}{dt} = a(1 - \cos t) \ ; \ \dfrac{dy}{dt} = a\sin t$

لہذا، $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \dfrac{\sin t}{(1-\cos t)}$

10_11th-Maths-Vol2-Unit10_UM.indd 170 21-02-2023 15:08:57

10.4.7 ایک تفاعل کے احترام سے دوسرے تفاعل کی تفرق:
(Differentiation of one function with respect to another function)

اگر $y = f(x)$ تفرق ہوں تو y کا مشتق x کے احترام سے

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} .$$

اگر f اور g تفرق تفاعل x کے ہوں اور اگر $\frac{dg}{dx} = g'(x) \neq 0$ ہوں تو،

$$\frac{df}{dg} = \frac{\frac{df}{dx}}{\frac{dg}{dx}} = \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

مثال 10.28

x^x کے مشتق کو $x \log x$ کے احترام سے معلوم کیجئے۔

حل

لیں $u = x^x, v = x\log x$

$$\log u = x\log x$$

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = x.\frac{1}{x} + 1.\log x = 1 + \log x$$

$$\frac{du}{dx} = u(1+\log x) = x^x(1+\log x)$$

$$\frac{dv}{dx} = 1+\log x$$

$$\frac{d(x^x)}{d(x\log x)} = \frac{du}{dv} = \frac{\frac{du}{dx}}{\frac{dv}{dx}} = x^x .$$

لیں نوٹ کریں کہ جب g ایک $g(x) = x$ تفاعل ہوں تو $\frac{df}{dg}$ کم کرتی ہے کہ $\frac{df}{dx} = f'(x)$

مثال 10.29

مشتق $\tan^{-1}(1+x^2)$ کو x^2+x+1 کے احترام سے معلوم کیجئے

حل

فرض کریں کہ $f(x) = \tan^{-1}(1+x^2)$

$$g(x) = x^2+x+1$$

$$\frac{df}{dg} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$f'(x) = \frac{2x}{\left(x^4+2x^2+2\right)}$$

$$g'(x) = 2x+1$$

$$\frac{df}{dg} = \frac{2x}{(2x+1)(x^4+2x^2+2)}.$$

مثال 10.30

$\sin(ax^2+bx+c)$ $\cos(lx^2+mx+n)$ کے احترام سے تفرق کریں

حل:

$u = \sin(ax^2+bx+c)$ فرض کریں کہ

$$v = \cos(lx^2+mx+n)$$

$$\frac{du}{dv} = \frac{u'(x)}{v'(x)}$$

$$u'(x) = \cos(ax^2+bx+c)(2ax+b)$$

$$v'(x) = -\sin(lx^2+mx+n)(2lx+m)$$

$$\frac{du}{dv} = \frac{u'(x)}{v'(x)} = \frac{(2ax+b)\cos(ax^2+bx+c)}{-(2lx+m)\sin(lx^2+mx+n)}.$$

10.4.8 ۔ اعلیٰ درجے کے مشتقات (Higher order Derivatives)

اگر $s = s(t)$ کسی شئے کی پوزیشن تفاعل (نقل مکانی) ہے جو خط مستقیم پر حرکت کرتی ہے، ہم جانتے ہیں کہ اس کے پہلے مشتق کی عام جسمانی تشریح ہے رفتار $v(t)$ جو وقت کی تفاعل کے طور پر ہے۔

$$v(t) = s'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}.$$

وقت کے حوالے سے رفتار کی تبدیلی کی فوری شرح کو شئے کا اسراع $a(t)$ کہا جاتا ہے ۔ پھر اسراع تفاعل رفتار تفاعل سے ماخوذ ہے اور اسی وجہ سے پوزیشن تفاعل کا دوسرا مشتق ہے۔

$$a(t) = v'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}$$

$$= \frac{d}{dt}(v(t))$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2s}{dt^2} = s''(t)$$

یعنی ، اگر f تفاعل x کے لئے تفرق ہو،تو اس کا پہلا مشتق ترسیم $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ پر مماس کی میلان کے طور پر ایک بہت ہی سادہ ہندسی تشریح $y = f(x)$ ہے ۔ چونکہ f' بھی x کا تفاعل ہے۔ f' کے لئے اس کا خاص مشتق ہے اور اگر وہ وجود ہو جس کا اظہار $(f')' = f''$ کو

$$f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}.$$

$$= \frac{d}{dx}(f'(x)) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)$$

10_11th-Maths-Vol2-Unit10_UM.indd 172 21-02-2023 15:08:58

$$= \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$D^2 f(x) = D^2 y = y_2 = y''$$ دیگر اشارے ہیں

ہم دوسرے مشتق کی تشریح کو شرح کی تبدیلی کی شرح سے تعبیر کرسکتے ہیں ۔ لیکن اس کی ہندسی تشریح اتنی سادہ نہیں ہے ۔ تاہم د وسرا مشتق کی ترسیم کے گھماؤ کے نصف قطر کے $f''(x)$ د رمیان ایک قریبی تعلق موجود ہے جسے آپ اعلیٰ درجے میں $y = f(x)$ سیکھیں گے۔

اسی طرح، اگر f'' موجود ہو ، یہ تفرقی ہوسکتا ہے یانہیں ،اگر ہو تو مشتق f'' کو f کا تیسرا تفرقی کہا جاتا ہے اور اس کو ایسے اظہار کیاجاتا ہے۔

$$f'''(x) = \frac{d^3 y}{dx^3} = y''' = y_3.$$

ہم جسمانی طور پر تیسرے مشتق کی تشریح کرسکتے ہیں ۔ جب تفاعل شئے کا پوزیشن تفاعل $f(t)$ ہو جو خط مستقیم کے ساتھ حرکت کرے۔ کیونکہ $s''' = (s'')' = a'(t)$ پوزیشن تفاعل کا تیسرا تفرقی اسراع تفاعل کا تفرقی ہے جسے جرک (جھٹکا) کہا جاتا ہے۔

$$j = \frac{da}{dt} = \frac{d^3 s}{dt^3}.$$

یعنی جرکی (جھٹکا) جو اسراع کی شرح کی تبدیلی ہے۔

اس کا مناسب نام رکھا گیا ہے کیونکہ ایک بڑ اجھٹکا سے مطلب جو تیز رفتار میں تبدیلی، جو کسی گاڑی میں اچانک حرکت کے سبب سے بنتی ہے۔

مثال 10.31

اگر $y = x^3 - 6x^2 - 5x + 3$ ہوں تو y' ، y'' اور y''' معلوم کیجئے۔

حل

$$y = x^3 - 6x^2 - 5x + 3$$

$$y' = 3x^2 - 12x - 5 \quad \text{اور}$$

$$y'' = 6x - 12$$

$$y''' = 6.$$

مثال 10.32

y''' معلوم کریں اگر $y = \frac{1}{x}$ ہے

حل

$$y = \frac{1}{x} = x^{-1} \quad \text{ہمیں حاصل}$$

$$y' = -1x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$y'' = (-1)(-2)x^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{x^3}.$$

10_11th-Maths-Vol2-Unit10_UM.indd 173 21-02-2023 15:08:59

$$y''' = (-1)(-2)(-3)x^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{x^4} \quad \text{اور}$$

مثال 10.33

اگر $f(x) = x\cos x$ ہوں تو f'' معلوم کیجئے

حل

$$f(x) = x\cos x. \quad \text{ہمیں}$$
$$f'(x) = -x\sin x + \cos x \quad \text{اب}$$
$$f''(x) = -(x\cos x + \sin x) - \sin x \quad \text{اور}$$
$$= -x\cos x - 2\sin x.$$

مثال 10.34

y'' معلوم کریں جب کہ $x^4 + y^4 = 16$ ہے

حل

ہمیں، $x^4 + y^4 = 16$

y مضمر تفرق سے $\quad 4x^3 + 4y^3 y' = 0$

y' کو حل کرنے حاصل

$$y' = -\frac{x^3}{y^3}.$$

y'' کو معلوم کرنے کے لئے مساوات y' کو تقسیمی اصول سے تفرق کریں اور یاد رکھیں کہ y تفاعل ہے x کے لئے

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{-x^3}{y^3}\right) = \frac{-\left[y^3\frac{d}{dx}(x^3) - x^3\frac{d}{dx}(y^3)\right]}{(y^3)^2}$$
$$= -\frac{\left[y^3.3x^2 - x^3(3y^2y')\right]}{y^6}$$
$$= -\frac{3x^2y^3 - 3x^3y^2\left(-\frac{x^3}{y^3}\right)}{y^6}$$
$$= -\frac{3(x^2y^4 + x^6)}{y^7} = \frac{-3x^2[x^4 + y^4]}{y^7}$$
$$= \frac{-3x^2(16)}{y^7} = \frac{-48x^2}{y^7}.$$

مثال 10.35

دوسرے درجے کی تفرق معلوم کریں۔ اگر x اور y دئے گئے ہیں ج

$$x = a\cos t$$
$$y = a\sin t.$$

10_11th-Maths-Vol2-Unit10_UM.indd 174 21-02-2023 15:08:59

حل

x کے احترام سے مضمر تفرق کرنے پر، ہمیں

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a\cos t}{-a\sin t} = -\frac{\cos t}{\sin t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{-\cos t}{\sin t}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{-\cos t}{\sin t}\right)\frac{dt}{dx} = -[-\text{cosec}^2 t]\times\frac{1}{x'(t)}$$

$$= \text{cosec}^2 t \times \frac{1}{-a\sin t}$$

$$= -\frac{\cos ec^3 t}{a}.$$

مثال 10.36

$\frac{d^2y}{dx^2}$ معلوم کیجئے اگر $x^2 + y^2 = 4$ ہے

حل

ہمیں حاصل $x^2 + y^2 = 4$

یوں پہلے $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

لہذا، تقسیمی اصول سے

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$= -\frac{y.1 - x.\frac{dy}{dx}}{y^2}$$

$$= -\frac{y - x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2}$$

$$= -\frac{x^2 + y^2}{y^3} = -\frac{4}{y^3}.$$

10_11th-Maths-Vol2-Unit10_UM.indd 175 21-02-2023 15:08:59

مشق 10.4

درج ذیل (1-18) کے لئے تفرق معلوم کریں

(1) $y = x^{\cos x}$

(2) $y = x^{\log x} + (\log x)^x$

(3) $\sqrt{xy} = e^{(x-y)}$

(4) $x^y = y^x$

(5) $(\cos x)^{\log x}$

(6) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

(7) $\sqrt{x^2 + y^2} = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

(8) $\tan(x+y) + \tan(x-y) = x$

(9) اگر $\cos(xy) = x$ ہوں، ثابت کریں کہ $\frac{dy}{dx} = \frac{-(1 + y\sin(xy))}{x\sin xy}$

(10) $\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

(11) $\tan^{-1}\left(\frac{6x}{1-9x^2}\right)$

(12) $\cos\left(2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$

(13) $x = a\cos^3 t \ ; \ y = a\sin^3 t$

(14) $x = a(\cos t + t\sin t) \ ; \ y = a(\sin t - t\cos t)$

(15) $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, y = \frac{2t}{1+t^2}$

(16) $\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

(17) $\sin^{-1}(3x - 4x^3)$

(18) $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}\right)$

(19) $\sin x^2$ کے احترام سے x^2 کی تفرق کیجئے

(20) $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ کے احترام سے $\tan^{-1} x$ کی تفرق کیجئے

(21) اگر $u = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ اور $v = \tan^{-1} x$، معلوم کریں۔ $\frac{du}{dv}$

(22) $\tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)$ کے احترام سے $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)$ کی تفرق معلوم کریں

(23) اگر $y = \sin^{-1} x$ ہوں تو y'' معلوم کیجئے

(24) اگر $y = e^{\tan^{-1} x}$، ہوں تو، ثابت کریں کہ $(1+x^2)y'' + (2x-1)y' = 0$

(25) اگر $y = \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$ ہوں تو ثابت کریں کہ $(1-x^2)y_2 - 3xy_1 - y = 0.$

(26) اگر $x = a(\theta + \sin\theta)$ $y = a(1 - \cos\theta)$ ہوں تو ثابت کریں جب کہ $\theta = \frac{\pi}{2}, y'' = \frac{1}{a}$ ہے۔

(27) اگر $\sin y = x\sin(a+y)$ تو، ثابت کریں کہ $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$، $a \neq n\pi$.

(28) اگر $y = (\cos^{-1} x)^2$ ہوں توثابت کریں کہ $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - 2 = 0$ ہے اور یوں ہی y_2 معلوم کریں جب کہ $x = 0$ ہے۔

10_11th-Maths-Vol2-Unit10_UM.indd 176 21-02-2023 15:09:03

R9X61

مشق 10.5

دیے گئے چار متبادلوں میں سے صحیح یا مناسب جواب کا انتخاب کریں

(1) $\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{\pi}\sin x^\circ\right)$ کے لئے

(1) $\frac{\pi}{180}\cos x^\circ$ (2) $\frac{1}{90}\cos x^\circ$ (3) $\frac{\pi}{90}\cos x^\circ$ (4) $\frac{2}{\pi}\cos x^\circ$

(2) اگر $y = f(x^2+2)$ اور $f'(3)=5$ ہو تو $\frac{dy}{dx}$ کے لئے $x=1$

(1) 5 (2) 25 (3) 15 (4) 10

(3) اگر $y=\frac{1}{4}u^4$ ، $u=\frac{2}{3}x^3+5$ ہو تو $\frac{dy}{dx}$

(1) $\frac{1}{27}x^2(2x^3+15)^3$ (2) $\frac{2}{27}x(2x^3+5)^3$

(3) $\frac{2}{27}x^2(2x^3+15)^3$ (4) $-\frac{2}{27}x(2x^3+5)^3$

(4) اگر $f(x)=x^2-3x$ ہو تو، نقطے جس پر $f(x)=f'(x)$ ہیں

(1) دونوں مثبت سالم عددیں (2) دونوں منفی سالم عددیں

(3) دونوں غیر ناطق (4) ایک ناطق اور دوسرا غیر ناطق

(5) اگر $y=\frac{1}{a-z}$ ہو تو، $\frac{dz}{dy}$ تو

(1) $(a-z)^2$ (2) $-(z-a)^2$ (3) $(z+a)^2$ (4) $-(z+a)^2$

(6) اگر $y=\cos(\sin x^2)$ ہو تو $\frac{dy}{dx}$ پر جو $x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

(1) -2 (2) 2 (3) $-2\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (4) 0

(7) اگر $y=mx+c$ اور $f(0)=f'(0)=1$ ہوں تو $f(2)$ کے لئے

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) -3

(8) اگر $f(x)=x\tan^{-1}x$ ہوں، تو $f'(1)$ کے لئے

(1) $1+\frac{\pi}{4}$ (2) $\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$ (3) $\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$ (4) 2

(9) $\frac{d}{dx}(e^{x+5\log x})$ کے لئے

(1) $e^x.x^4(x+5)$ (2) $e^x.x(x+5)$ (3) $e^x+\frac{5}{x}$ (4) $e^x-\frac{5}{x}$

(10) اگر $(ax-5)e^{3x}$ پر مشتق $x=0$ کی قیمت -13 ہوں، تو a کی قیمت جو

(1) 8 (2) -2 (3) 5 (4) 2

10_11th-Maths-Vol2-Unit10_UM.indd 177 21-02-2023 15:09:04

(11) اگر $x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ ، $y=\frac{2t}{1+t^2}$ ہو تو، $\frac{dy}{dx}$ تو

(1) $-\frac{y}{x}$ (2) $\frac{y}{x}$ (3) $-\frac{x}{y}$ (4) $\frac{x}{y}$

(12) اگر $x=a\sin\theta$ اور $y=b\cos\theta$ ہو تو، $\frac{d^2y}{dx^2}$ تو

(1) $\frac{a}{b^2}\sec^2\theta$ (2) $-\frac{b}{a}\sec^2\theta$ (3) $-\frac{b}{a^2}\sec^3\theta$ (4) $-\frac{b^2}{a^2}\sec^3\theta$

(13) $\log_{10}x$ کے احترام سے $\log_x 10$ کی تفرقی ضریب

(1) 1 (2) $-(\log_{10}x)^2$ (3) $(\log_x 10)^2$ (4) $\frac{x^2}{100}$

(14) اگر $f(x)=x+2$ ، تو $f'(f(x))$ جو $x=4$ پر

(1) 8 (2) 1 (3) 4 (4) 5

(15) اگر $y=\frac{(1-x)^2}{x^2}$ ، $\frac{dy}{dx}$ تو x کے لئے

(1) $\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}$ (2) $-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}$ (3) $-\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^3}$ (4) $-\frac{2}{x^3}+\frac{2}{x^2}$

(16) اگر $pv=81$ ہوں تو، $\frac{dp}{dv}$ پر $v=9$ کی قیمت

(1) 1 (2) – 1 (3) 2 (4) –2

(17) اگر $f(x)=\begin{cases}x-5 & \text{if } x\le 1\\ 4x^2-9 & \text{if } 1<x<2\\ 3x+4 & \text{if } x\ge 2\end{cases}$ ہوں تو $x=2$ پر $f(x)$ کے

(1) 0 (2) 2 (3) 3 (4) 4

(18) دیا گیا $f'(a)$ وجود ہے، تو $\lim_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}$ کے لئے

(1) $f(a)-af'(a)$ (2) $f'(a)$ (3) $-f'(a)$ (4) $f(a)+af'(a)$

(19) اگر $f(x)=\begin{cases}x+1, & \text{when } x<2\\ 2x-1 & \text{when } x\ge 2\end{cases}$ ہوں تو $f'(2)$ کے لئے

(1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) غیر وجود

(20) اگر $g(x)=(x^2+2x+1)f(x)$ اور $f(0)=5$ اور $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-5}{x}=4$ ہوں تو $g'(0)$ کے لئے

(1) 20 (2) 14 (3) 18 (4) 12

10_11th-Maths-Vol2-Unit10_UM.indd 178 21-02-2023 15:09:05

(21) اگر $f(x)=\begin{cases}x+2, & -1<x<3\\ 5 & x=3\\ 8-x & x>3\end{cases}$ تو $x=3$ پر $f'(x)$ کے لئے

(1) 1 (2) -1 (3) 0 (4) غیر وجود

(22) $x=-3$ پر مشتق $f(x)=x|x|$ کے لئے

(1) 6 (2) -6 (3) غیر وجود (4) 0

(23) اگر $f(x)=\begin{cases}2a-x, & \text{for } -a<x<a\\ 3x-2a & \text{for } x\geq a\end{cases}$ تو مندرجۂ ذیل میں کون سا صحیح ہے؟

(1) $x=a$ پر $f(x)$ غیر تفرقی ہے (2) $x=a$ پر $f(x)$ غیر تسلسل ہے

(3) $\mathbb{R}$ میں تمام x کے لئے $f(x)$ تسلسل ہے (4) $f(x)$ تمام $x\geq a$ کے لئے تفرقی ہے۔

(24) اگر دوسری جگہ $f(x)=\begin{cases}ax^2-b, & -1<x<1\\ \dfrac{1}{|x|}, & \text{elsewhere}\end{cases}$ ہو $x=1$ پر تفرقی ہوں تو،

(1) $a=\frac{1}{2},\ b=\frac{-3}{2}$ (2) $a=\frac{-1}{2},\ b=\frac{3}{2}$ (3) $a=-\frac{1}{2},\ b=-\frac{3}{2}$ (4) $a=\frac{1}{2},\ b=\frac{3}{2}$

(25) $\mathbb{R}$ میں نقطوں کی تعداد جو تعامل $f(x)=|x-1|+|x-3|+\sin x$ غیر تفرقی ہونے کے لئے

(1) 3 (2) 2 (3) 1 (4) 4

خلاصہ (SUMMARY)

اس سبق میں ہم نے مطالعہ کیا

- مشتق جو شرح کی تبدیلی ہے۔ اگر $y=f(x)$ ہو تو y کی مشق x کے احترام سے x_0 پرفراہم شدہ حد وجود ہوں جہاں $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ وجود کا مطلب ہے

ایک منفرد حقیقی عدد ہے۔

- مشتق $y=f(x)$ جو $x=x_0$ پر. $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}=f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

- کے مشتق کی ہندسی معنی یوں ہے کہ منحنی کو $y=f(x)$ پر مماس ک h میلان. $y=f(x)$ at $(x,f(x))$ ہے۔

- مشتق $s=f(t)$ کے جسمانی معنی t کے احترام سے فاصلے میں تبدیلی ہے یعنی ر فتار، د وسرا مشتق اسراع ہے اور تیسرا مشتق جھٹکا ہے۔

- $y=f(x)$ کا غیر تسلسل جو $x=x_0$ پر حاصل $f(x)$ کا مختصر غیر تفرقی $x=x_0$ پر ہے۔

10_11th-Maths-Vol2-Unit10_UM.indd 179 21-02-2023 15:09:06

- $x = x_0$ پر $y = f(x)$ کے مشتق کی عدم موجودگی کا مطلب یہ ہے $y = f(x)$ کا گراف مماس کو $(x_0, f(x_0))$ پر تسلیم کرنے میں ناکام ہے۔
- ہندسی طور پر، اگر ترسیم $y = f(x)$ کے $x = x_0$ جو caps $(\wedge)$ یا cups $(\vee)$ پر داخلہ لیں تو مشتق $x = x_0$ پر غیر وجود ہو گا۔
- مشتق کو عمل کے طور پر سمجھنا چاہئے۔ قوائد کے مجموعے کے طور پر نہیں
- تفرق سے مراد تسلسل ہے مگر اس کا مقابل صحیح نہیں ہے۔
- جمع ، تفریق، ضرب اور تفرقی تفاعلوں کا مرکب تفرقی ہے اور دو تفرقی تفاعل کا تقسیم تفرقی ہے جہاں پر اس کا تعارف ہے۔

$$\frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x) \quad \text{(i)}$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f(x)\frac{dg}{dx} + g(x)\frac{df}{dx} \quad \text{(ii)}$$

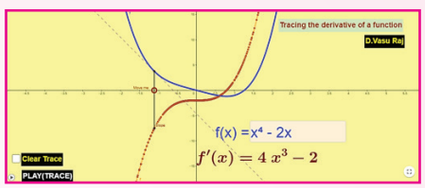
$$\frac{d}{dx}((fog)(x)) = f'(g(x))g'(x) \quad \text{(iii)}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad \text{(iv)}$$ جہاں $g(x) \neq 0$

ICT CORNER 10(a)

تفرقی کالکولس

متوقع نتائج

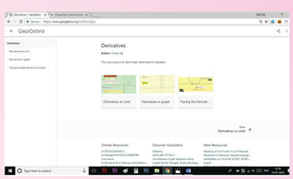


مرحلہ 1:

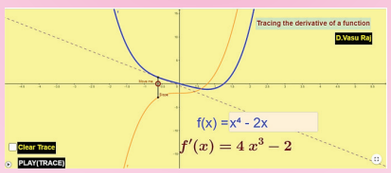
براؤزر کھولیں اور نیچے دئے گئے لنک کو ٹائپ کریں (یا) QR کوڈ کو اسکین کریں ۔
جیوجرا ورک بک "مشتقات" کھلے گا۔ اپنے اسباب کے متعلق بہت سارے ورک شیٹ ملیں گیں۔

مرحلہ 2:

ورک شیٹ مشتقات کے تفاعلوں کو ڈھونڈنا کو چنئے ۔ آپ $f(x)$ - تفاعل کے ہر کوئی باکس میں داخل ہوسکتے ہیں ۔ آپ نیلے رنگ میں تفاعلوں کو اور زردی رنگ میں مشتقات کو دیکھ سکتے ہیں ۔ مشتق (x پر میلان، x) کے ہر ایک نقطہ کی میلان سے مشتقوں کو معلوم کرسکتے ہیں $f(x)$



مرحلہ 1



مرحلہ 2

YCNFJ

Browse in the link:

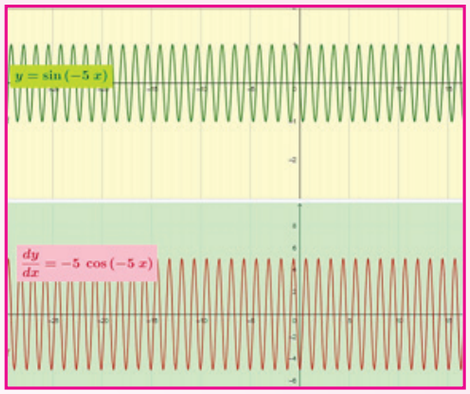
Derivatives: https://ggbm.at/fk3w5g8y

10_11th-Maths-Vol2-Unit10_UM.indd 180 21-02-2023 15:09:06

ICT CORNER 10(b)

تفرقی کا لکولس

متوقع نتائج



مرحلہ 1:

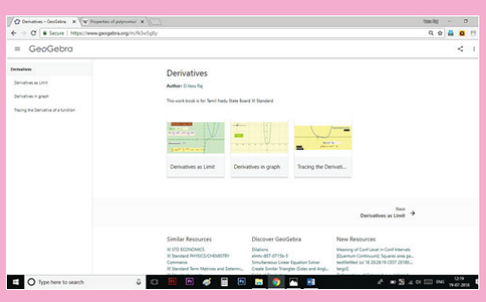
براؤزر کھولیں اور نیچے دئے گئے لنک کو ٹائپ کریں (یا) QR کوڈ کو اسکین کریں ۔

جیوجیرا ورک بک "مشتقات" کھلے گا ۔ اپنے اسباب سے متعلق بہت سارے ورک شیٹ ملیں گیں۔

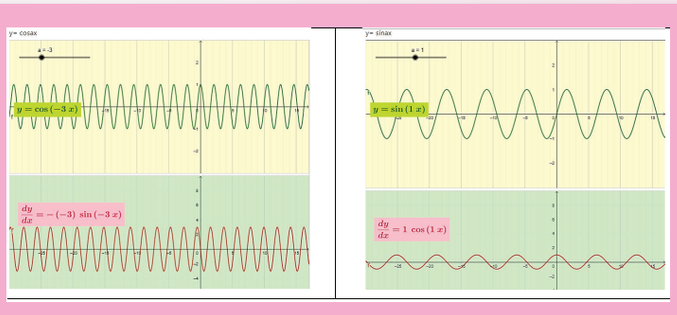
مرحلہ 2:

ورک شیٹ ترسیم میں مشتقات چنے ۔ چند بنیادی تفاعل اور مشتقات ایک دوسرے کے نتیجے دئے گئے ہیں۔

آپ "a" کی قیمت میں تبدیل کرکے سلیڈر کو حرکت دیں اور غور کریں کہ ہر ایک تفاعل اور مشتقات میں تبدیل ہوگی۔



مرحلہ 1



مرحلہ 2

Browse in the link:

Derivatives: https://ggbm.at/fk3w5g8y

10_11th-Maths-Vol2-Unit10_UM.indd 181 21-02-2023 15:09:07

باب 11

تکملہ احصا
(Integral Calculus)

یہ قابل توجہ ہے کہ علامت دریافت کرنے میں مدد کرتا ہے۔
یہ، انتہائی حیرت انگیز انداز میں دماغی مشقت کو کم کرتا ہے۔

- گاٹ فریڈ ولہم لب نٹس

11.1 تعارف (Introduction)


لب نٹس


نیوٹن

گاٹ فریڈ ولہم لب نٹس (1646-1716) اور سر اسحاق نیوٹن(1643-1727) نے 17 ویں صدی کے وسط میں آزادانہ طور پر احصا (calculus) کا دریافت کیا۔ لب نٹس، ایک جرمن فلسفی، ریاضی دان اور سیاسی مشیر تھا۔ اہم بات یہ ہے کہ یہ دونوں طبیعیات اور تجزیہ کار دونوں ہی میں ماہر تھے۔ تفریق اور تکملہ احصا ایک مشہور آزاد موجد تھا۔ سر اسحاق نیوٹن نے ایک مقام پر ایک لمحے میں اضافے پر غور کرکے ایک منحنی کے تحت رقبہ کے لئے اظہار خیال پیدا کیا تھا۔ درحقیقت احصا کا بنیادی نظریہ ان کے حساب سے ہی بنایا گیا تھا۔ ان کا کام اور دریافتیں صرف ریاضی تک ہی محدود نہیں تھا انھوں نے بصریات اور جاذبیت میں بھی نظریات تیار کئے۔

تفریق اور تکمیل کے بغیر کوئی بھی دنیا کا تصور نہیں کرسکتا۔ اس صدی میں، ہم نے ریاضی کے ان دو بنیادی اجزاء کی ذہین استعمال کی وجہ سے قابل ذکر سائنسی ترقی دیکھی ہے۔ طبیعیات، فلکیات، انجنیئرنگ، کیمیاء، ارضیات، حیاتیات اور سماجی سائنس میں پائے جانے والے مختلف قسم کے مسائل کا حل معلوم کرنے کے لئے احصا ناگزیر آلے کے طور پر کام کرتے ہیں۔

احصا بنیادی طور پر دو ہندسی مسائل سے معاملہ کرتا ہے۔

(i) منحنی پر مس کرنے والے خط کا میلان معلوم کرنے کے مسئلے کا مطالعہ محدود عمل کے ذریعہ کیا جاتا ہے۔ جیسے تفریق کے نام سے مانا جاتا ہے۔ اور

(ii) کسی منحنی کے خطہ کا رقبہ معلوم کرنے کے مسئلے کو تکمیل نامی ایک اور محدود عمل سے مطالعہ کیا جاتا ہے۔

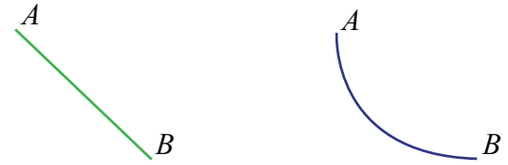
ابواب 9 اور 10 میں ہم نے تفریقی احصا کا مطالعہ کیا ہے۔ اس باب میں ہمیں تکمیل کے کچھ بنیادی اصولوں کا مطالعہ کریں۔

ذیل میں واضع کچھ آسان حالات پر غور کریں۔

صورت حال 1: (Situation 1)

ایک مستوی میں دو نقاط A اور B کے درمیاں سب سے کم فاصلہ قطاع خط جو خط مستقیم A اور B میں شامل ہوتا ہے۔ فرض کریں کے دونقاط A اور B کو ملانے والی خط کو معلوم کرنے کی ضرورت ہے جو عمودی خط پر واقع نہیں جیسا کہ ایک متحرک ذرہ مختصر وقت میں (کم سے کم وقت) A سے B تک اس خط پر نیچے پھسل جاتا ہے۔ ہم میں سے بہت سوں کا خیال ہے کہ خاکہ 11.1 (a) میں سب سے کم فاصلہ طے کرنے میں کم وقت ہوگا۔

11_11th-Maths-Vol2-Unit11_UM.indd 182 21-02-2023 15:09:57



A اور B کے درمیان مختصر فاصلہ والا راستہ

11.1 (a) خاکہ

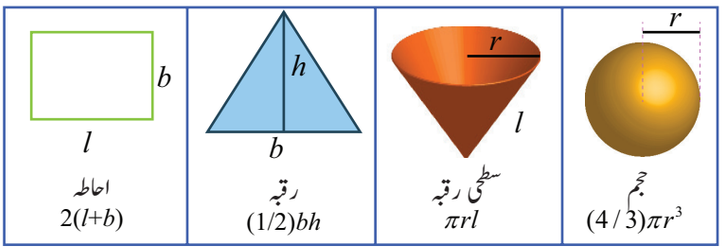
A اور B کے درمیان سب سے کم وقت کا راستہ

11.1 (b) خاکہ

یقینی طور پر یہ راستہ نقاط A اور B میں شامل ہونے والا سب سے کم وقت والا راستہ نہیں ہے، کیونکہ خط مستقیم (خاکہ 11.1 (a)) میں حرکت کی سمتی رفتار نسبتاً سُست ہو جبکہ یہ منحنی A کے قریب ڈھلوان ہے(خاکہ 11.1 (b))۔ حالانکہ یہ راستہ لمبا ہوجاتا ہے، فاصلے کا کافی حصّہ زیادہ رفتار سے ڈھانپ لیا جائے گا۔ اس مسئلے کا حل تکملہ احصا کے ذریعے معلوم کیا جاتا ہے۔ اس کو براسیڑوکوں (Brachistochrone) مسئلہ کہاجاتاہے جو تکملہ آلے کے ذریعے تغیر کے احصا کا مطالعہ شروع کرتا ہے۔

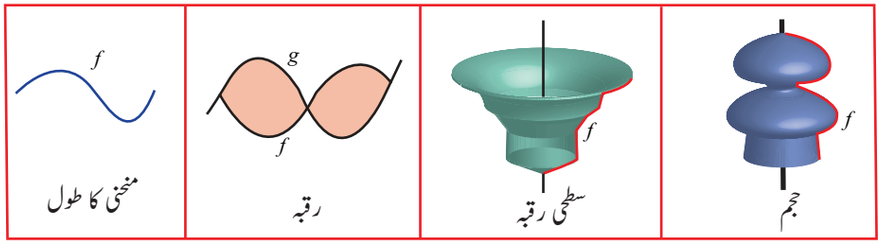
صورت حال 2: (Situation 2)

ابتدائی ہندسی میں معلوم کردہ ضابطوں کا استعمال کر کے نیچے دئے گئے باقاعدہ نمونوں کی پیمائش کو معلوم کرنے کے بارے میں ہم پہلے ہی پڑھ چکے ہیں۔



11.2 (a) خاکہ

تفاعلات کے ذریعے دئے گئے مندرجہ ذیل نمونوں کی پیمائش کیسے کی جاسکتی ہے؟



11.2 (b) خاکہ

حالانکہ یہ مسئلے مشکل دکھائی دیتی ہے، لیکن تکملہ احصا اسے بغیر کسی دشواری کے حل کرتا ہے۔

صورت حال 3: (Situation 3)



11.3 خاکہ

ایک خاص لمحے میں ، ایک طالب علم کو اپنی تیز رفتار موٹر سائیکل کو روکنے کی ضرورت ہے تاکہ اس سے 40 میٹر دور فاصلے کے آڑ کی ٹکراؤ سے بچ سکیں۔ فوری طورپر اس نے $8\ m/s^2$ کی شرح سے موٹر سائیکل کی رفتار کو بریک لگا کر سُست (اسراع) کردیا۔ اگر موٹر سائیکل $24\ m/s$ کی رفتار سے آگے بڑھ رہی ہے، جب بریک لگایاجائے تو کیا یہ ٹکراؤ سے پہلے رُک جائے گی؟

مندرجہ ذیل مسائل بھی دیکھیں جو ہماری زندگی میں قدرتی طور پر پائے جاتے ہیں۔

11_11th-Maths-Vol2-Unit11_UM.indd 183 21-02-2023 15:09:58

- ایک سیارچے(satellite) کو اوپر کی جانب بھیجنے کے لئے کس رفتار کی آگ کا استعمال کرنا چاہئے تاکہ وہ کبھی زمین پر واپس نہ آئے؟
- سب سے چھوٹی مدوری پتی (circular disc) کا نصف قطر کیا ہے جو دیے ہوئے احاطہ P میں ہر مثلث مساوی اساقین کو ڈھانپ سکیں۔
- اگر نصف قطر r والے سوراخ کو وسط میں ڈِرل کیا جائے تاکہ نصف قطر $2r$ والے ٹھوس کرۂ سے مواد کی کیا مقدار کو ہٹایا جاتا ہے؟
- اگر بیکٹریا کا دباؤ موجود مقدار کے متناسب شرع سے بڑھتا ہے اور اگر آبادی ایک گھنٹے میں دُگنی ہوجاتی ہے تو دو گھنٹے کے آخر میں اس میں کتنا اضافہ ہوگا؟

تکمیل مندرجہ بالا سارے مسائل کا جواب دے گا۔

سیکھنے کے مقاصد (Learning Objectives)

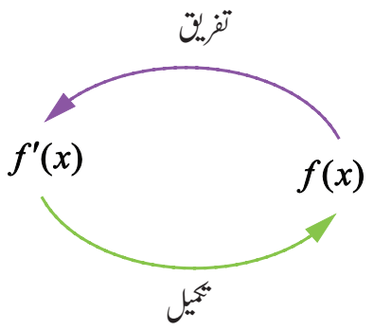
اس باب کے اختتام پر طلباء سے توقع کی جاتی ہے

- تفریق کے عمل کو برعکس کرنے کے نتیجے میں غیر معین تکملہ کی تعریف کو سمجھیں
- بعض ابتدائی تفاعلات کی حاصل جمع ، تفریق اور مستقل ضربوں کے غیر معین تکملہ معلوم کرنا
- مخلوط تفاعلات (composite functions) کے غیر معین تکملہ معلوم کرنے کے لئے مناسب طریقے کا استعمال کرنا۔
- جب تفاعل میں تبدیلی کی شرح دی جاتی ہے، تو تکمیل کا اطلاق کرکے تفاعل کا معلوم کرنا

11.2 نیوٹن-لیب نیز تکملہ (Newton-Leibnitz Integral)

تکمیل احصا بنیادی طور پر غیر معین تکملہ اور معین تکملہ میں تقسیم کیاجاتاہے۔ اس باب میں، ہم غیر معین تکملہ ، اس کے مشتق (Derivation) سے کسی تفاعل کو حاصل کرنے کے عمل کا مطالعہ کرتے ہیں۔

ہم پہلے سے ہی معکوس کے عمل سے واقف ہیں۔ $(+,-), (\times,\div), \left((\,)^n, \sqrt[n]{\ }\right)$ یہ چند معکوس عمل کے جوڑی ہیں ۔ اس طرح تفریق اور تکمیل $(d, \int)$ بھی معکوس کے عمل ہیں۔ اس حصّے میں ہم تفریق معکوس عمل کو ترقی کرتے ہیں جسے مخالف تفریق (Anti-differentiation) کہتے ہیں۔



11.4 خاکہ

تعریف 11.1

وقفہ I پر ایک تفاعل $f(x)$ کا مخالف مشتق (نیوٹن – لیب نیز یا ابتدائی) ایک تفاعل $F(x)$ کہاجاتاہے، اگر

$F'(x) = f(x)$، I میں x کی ہر قیمت کے لئے

11_11th-Maths-Vol2-Unit11_UM.indd 184 21-02-2023 15:09:59

تشریح 11.1

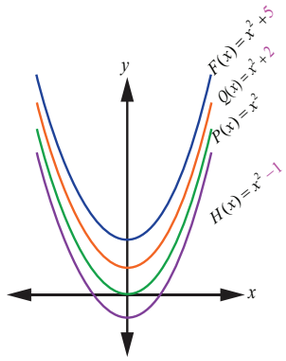
اگر $F(x) = x^2 + 5$ ہو تو

$$F'(x) = 2x$$

اس طرح اگر $f(x)$ کی تعریف

$f(x) = 2x$ ہوتو

ہم کہتے ہیں کہ $F(x)$ کا مشتق $f(x)$ ہے اور $f(x)$ کا مخالف مشتق $F(x)$ ہے



11.5 خاکہ

مندرجہ ذیل جدول پر غور کریں

$F(x)$	$F'(x) = f(x)$	$f(x) = 2x$ مخالف مشتق کا
$P(x) = x^2 + 0$ $Q(x) = x^2 + 2$ $H(x) = x^2 - 1$	$P'(x) = 2x$ $Q'(x) = 2x$ $H'(x) = 2x$ } $f(x) = 2x$	$F(x) = x^2 + ?$

ہم دیکھ سکتے ہیں کہ $F(x)$، $P(x)$، $Q(x)$ اور $H(x)$ کا مشق $f(x)$ ہے، لیکن اس کے برعکس $f(x) = 2x$ کا مخالف مشتق منفرد نہیں ہے۔ یعنی $f(x)$ کا مخالف مشتق لامتناہی متعدی تفاعلات کا ایک خاندان ہے۔

مسئلہ 11.1

اگروقفہ I پرایک تفاعل $f(x)$ کا خاص مخالف مشتق $F(x)$ ہو تو $f(x)$ کا ہر مخالف مشتق وقفہ I پر دیاگیا ہے،

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

جہاں c کو اختیاری مستقل کہا جاتاہے اور وقفہ I پر $f(x)$ کا تمام مخالف مشتق c کو خاص قیمت منسوب کرکے حاصل کیاجاسکتا ہے۔

تفاعل $f(x)$ کو تکمیل کہا جاتا ہے

dx میں متغیر x کو تکمیل کا متغیر یا تکملہ کہاجاتا ہے۔

تکملہ کے معلوم کرنے کے عمل کو تکمیل یا مخالف تفریق کہاجاتا ہے(نیوٹن –لیب نیز تکملہ)۔

اس عجیب تکملہ کی علامت $\int$ ایک لمبی S (جیسے Σ) میں پیدا ہوتا ہے۔ جس کا مطلب حاصل جمع ہے۔

اکثر اطلاقات جس میں تفریق شامل ہو تو اس کی مطلوب یہ ہوتی ہے کہ وہ ایک خاص تکملہ کی مخالف مشتق معلوم کرنے میں کچھ ایسی شرائط کو پوری کرتاہے جس کو ابتدائی یا حد کی شرائط کہتے ہیں۔

مثال کے طور پر، اگر $\frac{dy}{dx}$ پر مشتمل ایک مساوات کے ساتھ ساتھ ابتدائی شرائط دی گئی ہو جو $y = y_1$ جب $x = x_1$ ہوتو اس کے بعد تمام مخالف مشتق کا سٹ مل جاتا ہے، اگر x اور y کو x_1 اور y_1 سے تبدیل کیاجاتا ہے تو اختیاری مستقل ایک خاص قیمت کا تعین کیاجاتا ہے۔ c کی اس قیمت کے ساتھ ایک خاص مخالف مشتق حاصل کیا جاتا ہے۔

تشریح 11.2

فرض کرو کہ ہم کسی خاص مخالف مشتق کو معلوم کرنا چاہتے ہیں جو مساوات $\frac{dy}{dx} = 2x$ کو مطمئن کرتا ہے۔

11_11th-Maths-Vol2-Unit11_UM.indd 185 21-02-2023 15:10:01

جب $x = 2$، $y = 10$ اور ابتدائی شرائط

دی گئی مساوات سے

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$
$$y = \int 2x\,dx$$
$$y = x^2 + c$$

مندرجہ بالا مساوات میں ہم $y = 10$ کا متبادل بناتے ہیں جب $x = 2$ ہو تو

$$10 = 2^2 + c \;\Rightarrow\; c = 6$$

جب یہ قیمت متبادل کرتے ہیں تو ہم حاصل کرتے ہیں

$$y = x^2 + 6$$

جو خاص طور پر مخالف مشتق کو مطلوبہ دیتا ہے۔

11.3 تکمیل کا بنیادی اصول (Basic Rules of Integration)

معیاری نتائج (Standard results):

چونکہ تکمیل کا معکوس عمل ہی تفریق ہے۔ ذیل میں دئے گئے بنیادی تکمیل کے ضابطوں کو براہ راست پچھلے باب سے متعلقہ مشتق ضابطوں سے اخذ کیا جاسکتا ہے۔

مشتق	مخالف مشتق
$\frac{d}{dx}(c) = 0$، جہاں c ایک مستقل ہے	$\int 0\,dx = c$، جہاں c ایک مستقل ہے
$\frac{d}{dx}(kx) = k$، جہاں k ایک مستقل ہے	$\int k\,dx = kx + c$، جہاں c ایک مستقل ہے
$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$، (قوت کا قاعدہ)
$\frac{d}{dx}(\log x) = \left(\frac{1}{x}\right)$	$\int \frac{1}{x}\,dx = \log\lvert x\rvert + c$
$\frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$	$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$
$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$	$\int \cos x\,dx = \sin x + c$
$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$

11_11th-Maths-Vol2-Unit11_UM.indd 186 21-02-2023 15:10:02

$\frac{d}{dx}(-\cot x) = \operatorname{cosec}^2 x$	$\int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = -\cot x + c$
$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$	$\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + c$
$\frac{d}{dx}(-\operatorname{cosec} x) = \operatorname{cosec} x \cot x$	$\int \operatorname{cosec} x \cot x\, dx = -\operatorname{cosec} x + c$
$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$	$\int e^x dx = e^x + c$
$\frac{d}{dx}\left(\frac{a^x}{\log a}\right) = a^x$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + c$
$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c$
$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + c$

مثال 11.1

x کے تعلق سے مندرجہ ذیل کی تکمیل کیجئے:

(i) x^{10} (ii) $\frac{1}{x^{10}}$ (iii) $\sqrt{x}$ (iv) $\frac{1}{\sqrt{x}}$

حل

(i) ہم جانتے ہیں $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1.$

$n = 10$ درج کرنے سے، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\int x^{10} dx = \frac{x^{10+1}}{10+1} + c = \frac{x^{11}}{11} + c$$

(ii) $$\int \frac{1}{x^{10}} dx = \int x^{-10} dx = \frac{x^{-10+1}}{-10+1} + c = -\frac{1}{9x^9} + c$$

(iii) $$\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c$$

(iv) $$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = 2\sqrt{x} + c$$

11_11th-Maths-Vol2-Unit11_UM.indd 187 21-02-2023 15:10:04

مثال 11.2

x کے تعلق سے مندرجہ ذیل کی تکمیل کیجئے:

(i) $\frac{1}{\cos^2 x}$ (ii) $\frac{\cot x}{\sin x}$ (iii) $\frac{\sin x}{\cos^2 x}$ (iv) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

حل

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x\, dx = \tan x + c \quad \text{(i)}$$

$$\int \frac{\cot x}{\sin x} dx = \int \operatorname{cosec} x \cot x\, dx = -\operatorname{cosec} x + c \quad \text{(ii)}$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} . \frac{1}{\cos x} dx = \int \tan x \sec x\, dx = \sec x + c \quad \text{(iii)}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c \quad \text{(iv)}$$

مثال 11.3

x کے تعلق سے مندرجہ ذیل کی تکمیل کیجئے:

(i) $\frac{1}{e^{-x}}$ (ii) $\frac{x^2}{x^3}$ (iii) $\frac{1}{x^3}$ (iv) $\frac{1}{1+x^2}$

حل

$$\int \frac{1}{e^{-x}} dx = \int e^x dx = e^x + c \quad \text{(i)}$$

$$\int \frac{x^2}{x^3} dx = \int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c \quad \text{(ii)}$$

$$\int \frac{1}{x^3} dx = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + c = -\frac{1}{2x^2} + c \quad \text{(iii)}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + c \quad \text{(iv)}$$

مشق 11.1

x کے تعلق سے مندرجہ ذیل کی تکمیل کیجئے:

(1) (i) x^{11} (ii) $\frac{1}{x^7}$ (iii) $\sqrt[3]{x^4}$ (iv) $(x^5)^{\frac{1}{8}}$

(2) (i) $\frac{1}{\sin^2 x}$ (ii) $\frac{\tan x}{\cos x}$ (iii) $\frac{\cos x}{\sin^2 x}$ (iv) $\frac{1}{\cos^2 x}$

(3) (i) 12^3 (ii) $\frac{x^{24}}{x^{25}}$ (iii) e^x

(4) (i) $(1+x^2)^{-1}$ (ii) $\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$

11.4 تکملہ کی شکل $\int f(ax+b)dx$ (Integrals of the Form)

ہم جانتے ہیں

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{(x-a)^{10}}{10}\right] = (x-a)^9 \Rightarrow \int (x-a)^9 dx = \frac{(x-a)^{10}}{10} + c$$

$$\frac{d}{dx}[\sin(x+k)] = \cos(x+k) \Rightarrow \int \cos(x+k)dx = \sin(x+k) + c$$

11_11th-Maths-Vol2-Unit11_UM.indd 188 21-02-2023 15:10:06

یہ واضح ہے کہ جب بھی مستقل کو آزاد متغیر x کے ساتھ جمع یا تفریق کیاجاتاہے تو بنیادی ضابطے مساوی رہتے ہیں۔

مگر

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{l}(e^{lx+m})\right] = e^{lx+m} \Rightarrow \int e^{lx+m}dx = \frac{1}{l}e^{(lx+m)} + c$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{a}\sin(ax+b)]\right] = \cos(ax+b) \Rightarrow \int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + c$$

یہاں ، اگر کسی مستقل کو آزاد متغیر x سے ضرب کیاجاتا ہے، تو x کے سرعدد کے ذریعے تقسیم کرنے کے بعد اس بنیادی ضابطے کا استعمال کیاجاسکتا ہے۔

یعنی اگر $\int f(x)dx = g(x) + c$، تو $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}g(ax+b) + c$

مندرجہ بالا ضابطہ متبادل کے طریقے کو استعمال کرکے بھی حاصل کیاجاسکتاہے، جس کا بعد میں مطالعہ کیاجائے گا۔

مثال 11.4

x کے تعلق سے مندرجہ ذیل کی قیمت کیجئے:

(i) $\int (4x+5)^6\,dx$ (ii) $\int \sqrt{(15-2x)}\,dx$ (iii) $\int \frac{1}{(3x+7)^4}dx$

حل

(i) $$\int (4x+5)^6\,dx = \frac{1}{4}\frac{(4x+5)^{6+1}}{6+1} = \frac{(4x+5)^7}{28} + c$$

(ii) $$\int \sqrt{(15-2x)}\,dx = \int (15-2x)^{\frac{1}{2}}\,dx = \left(\frac{1}{-2}\right)\frac{(15-2x)^{\frac{1}{2}+1}}{(1/2)+1} = -\frac{(15-2x)^{\frac{3}{2}}}{3} + c$$

(iii) $$\int \frac{1}{(3x+7)^4}dx = \int (3x+7)^{-4}\,dx = \frac{1}{3}\frac{(3x+7)^{-4+1}}{-4+1} = -\frac{1}{9(3x+7)^3} + c$$

مثال 11.5

x کے تعلق سے مندرجہ ذیل کی تکمیل کیجئے:

(i) $\sin(2x + 4)$ (ii) $\sec^2(3+4x)$ (iii) $\operatorname{cosec}(ax+b)\cot(ax+b)$

حل

(i) $$\int \sin(2x + 4)\,dx = \left(\frac{1}{2}\right)(-\cos(2x+4)) + c = -\frac{1}{2}\cos(2x+4) + c$$

(ii) $$\int \sec^2(3+4x)\,dx = \frac{1}{4}\tan(3+4x) + c$$

(iii) $$\int \operatorname{cosec}(ax+b)\cot(ax+b)\,dx = \left(\frac{1}{a}\right)(-\operatorname{cosec}(ax+b)) + c = -\frac{1}{a}\operatorname{cosec}(ax+b) + c$$

مثال 11.6

x کے تعلق سے مندرجہ ذیل کی تکمیل کیجئے:

(i) e^{3x} (ii) e^{5-4x} (iii) $\frac{1}{(3x-2)}$ (iv) $\frac{1}{(5-4x)}$

حل

(i) $$\int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x} + c$$ (ii) $$\int e^{5-4x}\,dx = -\frac{e^{5-4x}}{4} + c$$

11_11th-Maths-Vol2-Unit11_UM.indd 189 21-02-2023 15:10:11

$$\int \frac{1}{(3x-2)}dx = \frac{1}{3}\log|(3x-2)|+c \quad \text{(iii)} \qquad \int \frac{1}{(5-4x)}dx = -\frac{1}{4}\log|(5-4x)|+c \quad \text{(iv)}$$

مثال 11.7

x کے تعلق سے مندرجہ ذیل کی تکمیل کیجئے:

$$\frac{1}{1+(2x)^2} \quad \text{(i)} \qquad \frac{1}{\sqrt{1-(9x)^2}} \quad \text{(ii)} \qquad \frac{1}{\sqrt{1-25x^2}} \quad \text{(iii)}$$

حل

$$\int \frac{1}{1+(2x)^2}dx = \frac{1}{2}\tan^{-1}(2x)+c \quad \text{(i)} \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-(9x)^2}}dx = \frac{1}{9}\sin^{-1}(9x)+c \quad \text{(ii)}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-25x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}}dx = \frac{1}{5}\sin^{-1}(5x)+c \quad \text{(iii)}$$

مشق 11.2

x کے تعلق سے مندرجہ ذیل کے تفاعلات کی تکمیل کیجئے:

(1) (i) $(x+5)^6$ (ii) $\frac{1}{(2-3x)^4}$ (iii) $\sqrt{3x+2}$

(2) (i) $\sin 3x$ (ii) $\cos(5-11x)$ (iii) $\operatorname{cosec}^2(5x-7)$

(3) (i) e^{3x-6} (ii) e^{8-7x} (iii) $\frac{1}{6-4x}$

(4) (i) $\sec^2\frac{x}{5}$ (ii) $\operatorname{cosec}(5x+3)\cot(5x+3)$ (iii) $\sec(2-15x)\tan(2-15x)$

(5) (i) $\frac{1}{\sqrt{1-(4x)^2}}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{1-81x^2}}$ (iii) $\frac{1}{1+36x^2}$

11.5 تکملہ کی خصوصیات (Properties of Integrals)

(1) اگر k کوئی مستقل ہو، تو $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

(2) $\int (f_1(x)\pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$

نوٹ 11.1

مندرجہ بالا دو خصوصیات کو مشترکہ اور توسیع کے طور پر

$$\int (k_1f_1(x)\pm k_2f_2(x)\pm k_3f_3(x)\pm\cdots\pm k_nf_n(x))\,dx$$

$$= k_1\int f_1(x)dx \pm k_2\int f_2(x)dx \pm k_3\int f_3(x)dx \pm\cdots\pm k_n\int f_n(x)dx.$$

یعنی، ایک محدود تعداد میں تفاعلات کی خطی مجموعہ کا تکملہ ان کے تکملہ کے خطی مجموعہ کے برابر ہے۔

مثال 11.8

x کے تعلق سے مندرجہ ذیل کی تکمیل کیجئے:

$$5x^4 \quad \text{(i)} \qquad 5x^2-4+\frac{7}{x}+\frac{2}{\sqrt{x}} \quad \text{(ii)} \qquad 2\cos x-4\sin x+5\sec^2 x+\operatorname{cosec}^2 x \quad \text{(iii)}$$

حل

(i) $\int 5x^4 dx = 5\int x^4 dx = 5\frac{x^{4+1}}{4+1} = 5\frac{x^5}{5} = x^5 + c.$

(ii) $\int\left(5x^2 - 4 + \frac{7}{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx = 5\int x^2 dx - 4\int dx + 7\int \frac{1}{x}dx + 2\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

$= 5\frac{x^{2+1}}{2+1} - 4x + 7\log|x| + 2\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c$

$= \frac{5}{3}x^3 - 4x + 7\log|x| + 4\sqrt{x} + c$

(iii) $\int(2\cos x - 4\sin x + 5\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x)dx$

$= 2\int \cos x\,dx - 4\int \sin x\,dx + 5\int \sec^2 x\,dx + \int \operatorname{cosec}^2 x\,dx$

$= 2\sin x + 4\cos x + 5\tan x - \cot x + c$

مثال 11.9

مندرجہ ذیل کی قیمت معلوم کرو:

(i) $\frac{12}{(4x-5)^3} + \frac{6}{3x+2} + 16e^{4x+3}$ (ii) $\frac{15}{\sqrt{5x-4}} - 8\cot(4x+2)\operatorname{cosec}(4x+2)$

حل

(i) $\int\left(\frac{12}{(4x-5)^3} + \frac{6}{3x+2} + 16e^{4x+3}\right)dx$

$= 12\int \frac{1}{(4x-5)^3}dx + 6\int \frac{1}{3x+2}dx + 16\int e^{4x+3}dx$

$= 12\left(\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{2(4x-5)^2}\right) + 6\left(\frac{1}{3}\right)\log|3x+2| + 16\left(\frac{1}{4}\right)e^{4x+3} + c$

$= -\frac{3}{2(4x-5)^2} + 2\log|3x+2| + 4e^{4x+3} + c.$

(ii) $\int\left(\frac{15}{\sqrt{5x-4}} - 8\cot(4x+2)\operatorname{cosec}(4x+2)\right)dx$

$= 15\int \frac{1}{\sqrt{5x-4}}dx - 8\int \cot(4x+2)\operatorname{cosec}(4x+2)\,dx$

$= 15\left(\frac{1}{5}\right)(2\sqrt{5x-4}) - 8\left(\frac{1}{4}\right)(-\operatorname{cosec}(4x+2)) + c$

$= 6\sqrt{5x-4} + 2\operatorname{cosec}(4x+2) + c.$

مشق 11.3

x کے تعلق سے مندرجہ ذیل کی تکمیل کیجئے:

(1) $(x+4)^5+\frac{5}{(2-5x)^4}-\operatorname{cosec}^2(3x-1)$

(2) $4\cos(5-2x)+9e^{3x-6}+\frac{24}{6-4x}$

(3) $\sec^2\frac{x}{5}+18\cos 2x+10\sec(5x+3)\tan(5x+3)$

(4) $\frac{8}{\sqrt{1-(4x)^2}}+\frac{27}{\sqrt{1-9x^2}}-\frac{15}{1+25x^2}$

(5) $\frac{6}{1+(3x+2)^2}-\frac{12}{\sqrt{1-(3-4x)^2}}$

(6) $\frac{1}{3}\cos\left(\frac{x}{3}-4\right)+\frac{7}{7x+9}+e^{\frac{x}{5}+3}$

11.6 آسان اطلاقات (Simple applications)

اب تک اس حصّے میں ہم تکمیل کے متغیر کو x کے طور پر استعمال کرتے رہے ہیں۔ اطلاقات کے معاملے میں ، مختلف متغیر کا استعمال کرنا اکثر آسان ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر حرکت کے مساوات میں آزاد متغیر وقت ہے اور تکمیل کا متغیر t ہے۔

اس حصّے میں ہم اس بات پر بحث کرتے ہیں کہ کسی چیز کی مقام اور سمت رفتار معلوم کرنے کے لئے کس طرح تکمیل کا استعمال کیاجاتاہے، اس کی اسراع اور اسی طرح کے مسائل کو دیتے ہوئے ریاضی طور پر ، اس کا مطلب یہ کے کہ، کسی تفاعل کے مشتق کے ساتھ شروع ہو۔ ہمیں اصل تفاعل ڈھونڈناچاہیئے۔ بہت سے عام لفظ جو مشتق کا نشاندہی کرتے ہیں جیسے شرح، نشونما، تحلیل، معمولی، تبدیلی، اختلاف، اضافہ، گھٹاؤ، وغیرہ۔

مثال 11.10

اگر $f'(x)=3x^2-4x+5$ اور $f(1)=3$، تو $f(x)$ معلوم کیجئے۔

حل

دیا گیا ہے $f'(x)=\frac{d}{dx}(f(x))=3x^2-4x+5$

x کے تعلق سے دونوں جانب تکمیل کرنے سے ، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\int f'(x)\,dx=\int(3x^2-4x+5)\,dx$$

$$f(x)=x^3-2x^2+5x+c$$

تکمیل کا مستقل c کو تعین کرنے کے لئے ، ہمیں دی گئی معلومات $f(1)=3$ کا استعمال کرنا ہوگا۔

$$f(1)=3\Rightarrow\ 3=(1)^3-2(1)^2+5(1)+c\Rightarrow c=-1$$

اس طرح $f(x)=x^3-2x^2+5x-1$

مثال 11.11

ایک ریل گاڑی مدورائی جنکشن سے کوئمبتور کی طرف شام 3 بجے (وقت $t=0$) سمتی رفتار $v(t)=20t+50$ کلومیٹر فی گھنٹہ کے ساتھ شروع ہوئی، جہاں t کو گھنٹوں میں پیمائش کی جاتی ہے۔ شام 5 بجے تک ریل گاڑی کے طے کردہ فاصلہ معلوم کرو۔

حل

احصا اصطلاع میں، سمتی رفتار $v=\frac{ds}{dt}$ وقت کے ساتھ مقام کی تبدیلی کی شرح ہے، جہاں s فاصلہ ہے۔ ریل گاڑی کی سمتی رفتار دی گئی ہے۔

$$v(t)=20t+50$$

لہذا، $\frac{ds}{dt} = 20t + 50$

فاصلہ کی تفاعل s معلوم کرنے کے لئے ہم مشتق تفاعل کا تکمیل کریں گے۔

یعنی $s = \int (20t + 50)\, dt$

$$s = 10t^2 + 50t + c$$

ریل گاڑی کا طے کردہ فاصلہ صفر ہے جب وقت صفر ہے۔۔ آئیے ہم اس ابتدائی شرائط $s = 0$ کو $t = 0$ پر استعمال کرکے تکمیل کے مستقل یعنی c کی قیمت تعین کریں۔

$$\Rightarrow s = 10t^2 + 50t + c \quad \Rightarrow c = 0$$

لہذا، $s = 10t^2 + 50t$

2 گھنٹے میں (5pm-3pm) ریل گاڑی سے طے کردہ فاصلہ معلوم کرنے کے لئے مندرجہ بالا مساوات میں $t = 2$ کو درج کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$s = 10(2)^2 + 50(2) = 140 \text{ km}$$

مثال 11.12

اونچائی h سمر کے تعلق سے ایک شخص کا وزن w کلوگرام میں تبدیلی کی شرح سے تقریباً $\frac{dw}{dh} = 4.364 \times 10^{-5} h^2$ دی گئی ہے۔ اونچائی کے تفاعل کے طور پر وزن معلوم کرو۔ اس شخص کا وزن بھی معلوم کریں جس کی اونچائی 150 سمر ہے۔

حل

اونچائی کے تعلق سے وزن میں تبدیلی کی شرح ہے

$$\frac{dw}{dh} = 4.364 \times 10^{-5} h^2$$

$$w = \int 4.364 \times 10^{-5} h^2 \, dh$$

$$w = 4.364 \times 10^{-5} \left(\frac{h^3}{3}\right) + c$$

کوئی بھی واضح طور پر سمجھ سکتاہے کہ اونچائی صفر ہونے پر کسی شخص کا وزن صفر ہوتا ہے

آئیے ہم مندرجہ بالا مساوات میں ابتدائی شرائط $w = 0, h = 0$ کو پر درج کرکے تکمیل کی مستقل c کی قیمت معلوم کریں۔

$$w = 4.364 \times 10^{-5} \left(\frac{h^3}{3}\right) + c \Rightarrow c = 0$$

ایک شخص کا وزن اور اونچائی کے درمیان مطلوبہ تعلق ہے

$$w = 4.364 \times 10^{-5} \left(\frac{h^3}{3}\right)$$

جب اونچائی h =150cm ہے

$$w = 4.364 \times 10^{-5} \left(\frac{150^3}{3}\right)$$

11_11th-Maths-Vol2-Unit11_UM.indd 193 21-02-2023 15:10:19

جب اونچائی $h = 150\text{cm}$، وزن (تقریباً) $w = 49kg$ ہے۔
لہذا، اس شخص کا وزن 49 kg ہے جس کے اونچائی $h = 150\text{cm}$ ہے۔

مثال 11.13

ایک درخت اس طرح بڑھ رہاہے کہ، t- سالوں کے بعد اُس کی اونچائی ہر سال $\frac{18}{\sqrt{t}}$ کی شرح سے بڑھ رہی ہے۔ فرض کریں کہ جب $t = 0$، اونچائی 5 cm ہے

(i) 4 سال بعد درخت کی اونچائی معلوم کرو۔

(ii) کتنے سالوں کے بعد اونچائی 149 cm ہوگی؟

حل

t- وقت کے تعلق سے اونچائی h کی تبدیلی کی شرح جو t کے تعلق سے مشتق ہے۔

لہذا، $$\frac{dh}{dt} = \frac{18}{\sqrt{t}} = 18t^{-\frac{1}{2}}$$

اونچائی کے عام اظہار حاصل کرنے کے لئے، t کے تعلق سے مندرجہ بالا مساوات کی تکمیل کریں۔

$$h = \int 18t^{-\frac{1}{2}}dt = 18(2t^{\frac{1}{2}}) + c = 36\sqrt{t} + c$$

دیا گیا ہے جب $t = 0$، اونچائی $h = 5$ cm

$$5 = 0 + c \Rightarrow c = 5$$

$$h = 36\sqrt{t} + 5.$$

(i) 4 سال بعد درخت کی اونچائی معلوم کرنا۔

جب $t = 4$ سال

$$h = 36\sqrt{t} + 5 \Rightarrow h = 36\sqrt{4} + 5 = 77$$

4 سال بعد درخت کی اونچائی 77 cm ہے۔

(ii) جب $h = 149\text{cm}$

$$h = 36\sqrt{t} + 5 \Rightarrow 149 = 36\sqrt{t} + 5$$

$$\sqrt{t} = \frac{149 - 5}{36} = 4 \Rightarrow t = 16$$

اس طرح 16 سال کے بعد درخت کی اونچائی 149 cm ہوگی۔

مثال 11.14



ایک خاص لمحے میں، ایک طالب علم کو اپنی تیز رفتار موٹر سائیکل کو روکنے کی ضرورت ہے تاکہ اس سے 40 میٹر دور فاصلے کے آڑ کی ٹکراؤ سے بچ سکیں۔ فوری طورپر اس نے $8\ \text{m/s}^2$ کی شرح سے موٹر سائیکل کی رفتار کو بریک لگا کر سُست (منفی اسراع) کردیا۔ اگر موٹر سائیکل $24\ \text{m/s}$ کی رفتار سے آگے بڑھ رہی ہے، جب بریک لگایاجائے تو کیا یہ ٹکراؤ سے پہلے رُک جائے گی؟

حل

فرض کرو کہ a اسراع ہے، v کار کی سمتی رفتار ہے اور s فاصلہ ہو۔

11_11th-Maths-Vol2-Unit11_UM.indd 194 21-02-2023 15:10:24

بیان کئے ہوئے احصا اصطلاح میں، $v = \frac{ds}{dt}$ سمت رفتار، وقت کے ساتھ مقام میں تبدیلی کی شرح ہے اور اسراع $a = \frac{dv}{dt}$، وقت کے ساتھ سمتی رفتار کی تبدیلی کی شرح ہے۔

اسراع منفی ہوگی کیونکہ اگر آپ حرکت کے سمت کو مثبت بناتے ہیں تو، پھر ایسی موٹر سائیکل کے لئے جو سمت ہورہی ہے، اس کا اسراع اس کی حرکت (منفی اسراع) کے مخالف سمت میں مبنی ہوگی۔

دیا گیا ہے کہ کار کی پسماندگی $8\ \text{m/s}^2$ ہے۔

لہذا، $a = \frac{dv}{dt} = -8\ \text{meter/second}^2.$

لہذا، $v = \int a\,dt = \int -8dt = -8t + c_1$

$v = -8t + c_1.$

جب بریک لگائے جاتے ہیں۔

$v = 24\text{m/s}$ اور $t = 0$

لہذا، $24 = -8(0) + c_1 \Rightarrow c_1 = 24$

لہذا، $v = -8t + 24.$

یعنی $\frac{ds}{dt} = -8t + 24.$

فاصلہ معلوم کرنا ضروری ہے، سمتی رفتار نہیں، لہذا ترتیب میں مزید تکمیل کی ضرورت ہے۔

$$s = \int v\,dt = \int (-8t + 24)dt$$

$$s = -4t^2 + 24t + c_2$$

c_2 معلوم کرنے کے لئے، رکنے والے فاصلے کی پیمائش s کہاں اور کب کی جاتی ہے، بریک لگائے جاتے ہیں تاکہ $t = 0$، $s = 0$

$$s = -4t^2 + 24t + c_2 \Rightarrow 0 = -4(0)^2 + 24(0) + c_2 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$s = -4t^2 + 24t$$

اگر ہمیں بریک لگنے کا وقت معلوم ہوتا تو رکنے والے فاصلے s کا اندازہ کیا جاسکتا ہے۔ رفتار بیان سے وقت کا تعین کیا جاسکتا ہے۔

$v = 0$، ہونے پر موٹر سائیکل رک جاتی ہے۔ $v = -8t + 24 \Leftarrow 0 = -8t + 24 \Leftarrow t = 3$

جب $t = 3$ ہو تو ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$s = -4t^2 + 24t \Rightarrow s = -4(3)^2 + 24(3)$$

$$s = 36\ \text{metres} < 40\ \text{metres}$$

موٹر سائیکل رکاوٹ سے 4 میٹر کے فاصلہ پر رکتی ہے۔

مشق 11.4

(1) اگر $f'(x) = 4x - 5$ اور $f(2) = 1$، تو $f(x)$ معلوم کیجئے۔

(2) اگر $f'(x) = 9x^2 - 6x$ اور $f(0) = -3$، تو $f(x)$ معلوم کیجئے۔

(3) اگر $f''(x) = 12x - 6$ اور $f(1) = 30$، تو $f(x)$ معلوم کیجئے۔

11_11th-Maths-Vol2-Unit11_UM.indd 195 21-02-2023 15:10:30

(4) ایک گیند جس کی ابتدائی سمتی رفتار $39.2\ m/s$ کے ساتھ زمین سے عمودی طور پر اوپر کی طرف پھینک دی جاتی ہے۔ اگر صرف قوت پر غور کیاجائے تو اسراع بوجہ بجاذبہ کی طرف منسوب ہے تو معلوم کرو

(i) گیند کو زمین پر آنے میں کتنا وقت ہوگا ؟

(ii) کس رفتار سے یہ زمین پر ٹکرائے گا ؟ اور

(iii) گیند کی بلندی کتنی اوپر ہوگی ؟

(5) ایک زخم اس طرح سے ٹھیک ہورہاہے کہ اتوار کے دن سے t دنوں تک زخم کا رقبہ $-\frac{6}{(t+2)^2}\ cm^2$ فی دن ہے۔ جہاں $0 < t \leq 8$ کی شرح سے کم ہورہاہے۔ اگر پیر کے دن اس زخم کا رقبہ $1.4\ cm^2$ تھا۔

(i) اتوار کو زخم کا رقبہ کیا ہوگا؟

(ii) اگر اس شرح سے بھر تا رہاتو جمعرات کے دن زخم کا متوقع رقبہ کتنا ہے؟

11.7 تکمیل کے طریقے (Methods of Integration)

تکمیل اتنا آسان نہیں جتنا تفریق ہے۔ یہ اپنی نوعیت کی وجہ سے سب سے پہلے ہے۔ کسی دئے ہوئے تفاعل سے مشتق معلوم کرنے میں اس حقیقت کی مدد کی جاتی ہے کہ تفریق خود ایک تعمیری کردار کی حامل ہے۔ ایک مشتق آسانی کے طور پر بیان کیاجاتاہے۔

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

فرض کیجئے کہ ہم کو $\log x$ کا مشتق معلوم کرنے کے لئے کہاگیاہے، ہم تمام تفصیلات جانتے ہیں کہ نتیجہ حاصل کرنے کے لئے کس طرح آگے بڑھنا ہے۔

جب ہمیں $\log x$ کا تکملہ معلوم کرنے کے لئے کہاگیا ہے۔ ہمارے پاس کوئی تعمیری طریقہ نہیں ہے تاکہ تکمیل معلوم کرے یایہاں تک کہ شروعات کیسی کی جائے۔

تفریق کے صورت میں ہم ان کے مختلف مجموعوں سے مشتق معلوم کرنے کے کئ تفاعلات میں تفریق کے اصول کو استعمال کرتے ہیں کہ، ان کے حاصل جمع ، ضرب، تقسیم پذیر اور تفاعلات کی ترکیب وغیرہ۔

نظریہ تکمیل میں ایسے بہت کم قواعد دستیاب ہیں اور ان کی اطلاق محدود ہے۔لیکن تکمیل کے ان طریقوں کی اہمیت بہت عظیم ہے۔

ہر معاملے میں ایک فرد کو سب سے مناسب طریقہ کا انتخاب کرنا اور اس کو انتہائی آسان شکل میں استعمال کرنا سیکھنا چاہئے۔ یہ مہارت صرف طویل مشق کے بعد حاصل کی جاسکتی ہے۔

ہم نے پہلے یہ تکمیل کی دو اہم خصوصیات دیکھی ہیں۔ تکمیل کے چار اہم طریقے مندرجہ ذیل ہیں۔

(1) جمع یا تفریق میں تحلیل کے ذریعے تکمیل

(2) متبادل کے ذریعے تکمیل

(3) بالحصص کے ذریعے تکمیل

(4) متواتر تخفیف کے ذریعے تکمیل

یہاں ہم تکمیل کے صرف تین طریقوں پر بحث کرتے ہیں اور دوسرے اعلیٰ جماعتوں میں پڑھیں گے۔

11_11th-Maths-Vol2-Unit11_UM.indd 196 21-02-2023 15:10:31

11.7.1 تحلیل کا طریقہ (Decomposition method)

بعض اوقات یہ دئے ہوئے تفاعل کو براہ راست تکمیل کرنا بہت مشکل ہوتا ہے۔ لیکن اسے تحلیل کرنے کے بعد تفاعلات کی تعداد کا جمع یا تفریق کو تکمیل کیا جاسکتا ہے جس کا تکملہ پہلے ہی معلوم ہے۔

مثال کے طور پر $\left(1-x^3\right)^2$، $\frac{x^2-x+1}{x^3}$، $\cos 5x \sin 3x$، $\cos^3 x$، $\frac{e^{2x}-1}{e^x}$، تکمیل کرنے کے لئے براہ راست ضابطہ نہیں ہیں۔ لیکن ان تفاعلات کو جمع یا تفریق کے تفاعلات سے تحلیل کیا جاسکتاہے۔ جن کے انفرادی تکملہ معلوم ہیں۔ زیادہ تر معاملات میں دئے گئے تکمیل میں سے کوئی بھی ایک الجبرائی، علم مثلث یا سریعی شکل اور بعض اوقات ان تفاعلات کا مجموعہ ہوگا۔

مثال 11.15

x کے تعلق سے مندرجہ ذیل کی تکمیل کیجئے:

(i) $\left(1-x^3\right)^2$ (ii) $\frac{x^2-x+1}{x^3}$

حل

(i)
$$\begin{aligned}\int\left(1-x^3\right)^2 dx &= \int(1-2x^3+x^6)dx \\ &= \int dx - 2\int x^3 dx + \int x^6 dx \\ &= x-\frac{x^4}{2}+\frac{x^7}{7}+c.\end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned}\int\frac{x^2-x+1}{x^3}dx &= \int\left(\frac{x^2}{x^3}-\frac{x}{x^3}+\frac{1}{x^3}\right)dx \\ &= \int\frac{1}{x}dx-\int\frac{1}{x^2}dx+\int\frac{1}{x^3}dx. \\ \int\frac{x^2-x+1}{x^3}dx &= \log|x|+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+c.\end{aligned}$$

مثال 11.16

x کے تعلق سے مندرجہ ذیل کی تکمیل کیجئے:

(i) $\cos 5x \sin 3x$ (ii) $\cos^3 x$

حل

(i)
$$\begin{aligned}\int\cos 5x\sin 3x\,dx &= \frac{1}{2}\int 2\cos 5x\sin 3x\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int(\sin 8x-\sin 2x)\,dx \\ \int\cos 5x\sin 3x\,dx &= \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 8x}{8}+\frac{\cos 2x}{2}\right)+c.\end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned}\int\cos^3 x\,dx &= \frac{1}{4}\int(3\cos x+\cos 3x)\,dx \\ &= \frac{1}{4}\left(3\sin x+\frac{\sin 3x}{3}\right)+c\end{aligned}$$

11_11th-Maths-Vol2-Unit11_UM.indd 197 21-02-2023 15:10:33

مثال 11.17

x کے تعلق سے مندرجہ ذیل کی تکمیل کیجئے:

(i) $\frac{e^{2x}-1}{e^x}$ (ii) $e^{3x}\left(e^{2x}-1\right)$

حل

(i)
$$\int \frac{e^{2x}-1}{e^x}dx = \int\left(\frac{e^{2x}}{e^x}-\frac{1}{e^x}\right)dx$$
$$= \int\left(e^x-e^{-x}\right)dx = e^x+e^{-x}+c.$$

(ii)
$$\int e^{3x}\left(e^{2x}-1\right)dx = \int\left(e^{5x}-e^{3x}\right)dx = \frac{e^{5x}}{5}-\frac{e^{3x}}{3}+c.$$

مثال 11.18

$\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$ کی قیمت معلوم کرو:

حل

$$\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$$
$$= \int \frac{1}{\cos^2 x}dx+\int \frac{1}{\sin^2 x}dx$$
$$= \int \sec^2 x dx+\int \operatorname{cosec}^2 x dx$$
$$= \tan x-\cot x+c.$$

مثال 11.19

$\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx$ کی قیمت معلوم کرو:

حل

$$\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx = \int\left(\frac{\sin x}{1+\sin x}\right)\left(\frac{1-\sin x}{1-\sin x}\right)dx$$
$$= \int \frac{\sin x-\sin^2 x}{1-\sin^2 x}dx = \int \frac{\sin x-\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx-\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx$$
$$= \int \tan x\sec x dx-\int \tan^2 x dx$$
$$= \int \tan x\sec x dx-\int (\sec^2 x-1)dx$$
$$= \sec x-\tan x+x+c.$$

مثال 11.20

$\int \sqrt{1+\cos 2x}\,dx$ کی قیمت معلوم کرو:

حل

$$\int \sqrt{1+\cos 2x}\,dx = \int \sqrt{2\cos^2 x}\,dx = \sqrt{2}\int \cos x dx = \sqrt{2}\sin x+c$$

11_11th-Maths-Vol2-Unit11_UM.indd 198 21-02-2023 15:10:33

مثال 11.21

$\int \frac{(x-1)^2}{x^3+x}dx$ کی قیمت معلوم کرو:

حل

$$\begin{aligned}\int \frac{(x-1)^2}{x^3+x}dx &= \int \frac{x^2+1-2x}{x(x^2+1)}dx \\ &= \int\left(\frac{(x^2+1)}{x(x^2+1)}-\frac{2x}{x(x^2+1)}\right)dx \\ &= \int \frac{1}{x}dx-2\int \frac{1}{1+x^2}dx \\ &= \log|x|-2\tan^{-1}x+c.\end{aligned}$$

مثال 11.22

$\int(\tan x+\cot x)^2\,dx$ کی قیمت معلوم کرو:

حل

$$\begin{aligned}\int(\tan x+\cot x)^2\,dx &= \int[\tan^2 x+2\tan x\cot x+\cot^2 x]\,dx \\ &= \int[(\sec^2 x-1)+2+(\operatorname{cosec}^2 x-1)]dx \\ &= \int(\sec^2 x+\operatorname{cosec}^2 x)\,dx \\ &= \tan x+(-\cot x)+c \\ &= \tan x-\cot x+c.\end{aligned}$$

مثال 11.23

$\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}dx$ کی قیمت معلوم کرو:

حل

$$\begin{aligned}\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}dx &= \int \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx=\int \tan^2\frac{x}{2}dx \\ &= \int\left(\sec^2\frac{x}{2}-1\right)dx=\frac{\tan\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}}-x+c \\ &= 2\tan\frac{x}{2}-x+c.\end{aligned}$$

مثال 11.24

$\int\sqrt{1+\sin 2x}\,dx.$ کی قیمت معلوم کرو:

حل

$$\int\sqrt{1+\sin 2x}\,dx = \int\sqrt{(\cos^2 x+\sin^2 x)+(2\sin x\cos x)}\,dx$$

$$= \int \sqrt{(\cos x + \sin x)^2}\, dx = \int (\cos x + \sin x) dx$$

$$= \sin x - \cos x + c$$

مثال 11.25

$\int \frac{x^3+2}{x-1} dx$ کی قیمت معلوم کرو:

حل

$$\int \frac{x^3+2}{x-1} dx = \int \frac{x^3-1+3}{x-1} dx = \int \left(\frac{x^3-1}{x-1} + \frac{3}{x-1} \right) dx$$

$$= \int \left[\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} + \frac{3}{x-1} \right] dx$$

$$= \int \left(x^2 + x + 1 + \frac{3}{x-1} \right) dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + 3\log|(x-1)| + c.$$

مثال 11.26

(i) $\int a^x e^x dx$ (ii) $\int e^{x\log 2} e^x\, dx$. کی قیمت معلوم کرو:

حل

$$\int a^x e^x dx = \int (ae)^x dx = \frac{(ae)^x}{\log(ae)} + c \qquad \text{(i)}$$

$$\int e^{x\log 2} e^x dx = \int e^{\log 2^x} e^x dx = \int 2^x e^x dx \qquad \text{(ii)}$$

$$= \int (2e)^x dx = \frac{(2e)^x}{\log(2e)} + c.$$

مثال 11.27

$\int (x-3)\sqrt{x+2}\, dx.$ کی قیمت معلوم کرو:

حل

$$\int (x-3)\sqrt{x+2}\, dx = \int (x+2-5)\sqrt{x+2}\, dx$$

$$= \int (x+2)\sqrt{x+2}\, dx - 5\int \sqrt{x+2}\, dx$$

$$= \int (x+2)^{\frac{3}{2}} dx - 5\int (x+2)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{(x+2)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 5\frac{(x+2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{5}(x+2)^{\frac{5}{2}} - \frac{10}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}} + c.$$

11_11th-Maths-Vol2-Unit11_UM.indd 200 21-02-2023 15:10:34

مثال 11.28

$\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}dx$ کی قیمت معلوم کرو:

حل

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\left[\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}\right]dx$$

$$= \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x+1}^2\right)-\left(\sqrt{x}\right)^2}dx$$

$$= \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{x+1-x}dx = \int\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)dx$$

$$= \int \sqrt{x+1}dx - \int \sqrt{x}dx = \int (x+1)^{\frac{1}{2}}dx - \int x^{\frac{1}{2}}dx$$

$$= \frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{3}\left[(x+1)^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}}\right] + c.$$

11.7.2 جزوی کسروں کے ذریعے تحلیل (Decomposition by Partial Fractions)

تکمیل کی قیمت معلوم کرنے کا ایک اہم طریقہ جزوی کسر ہے۔ اگر تکمیل ایک الجبرائی کسر کی شکل میں ہے اور تکمیل کی قیمت آسان طریقوں سے معلوم نہیں کیا جاسکتا، تو تکمیل معلوم کرنے سے پہلے اس کسر کو جزوی کسروں میں ظاہر کرنے کی ضرورت ہے۔ ہم فرض کریں گے کہ ہمارے پاس ایک ناطق تفاعل $\frac{p(x)}{q(x)}$، $\left(q(x)\neq 0\right)$ ہے جس میں درجۂ $p(x)$ < درجۂ $q(x)$۔ اگر یہ صورت نہ ہونے پر، ہم ہمیشہ طویل تقسیم کرسکتے ہیں۔

مثال 11.29

(i) $\int \frac{3x+7}{x^2-3x+2}dx$ (ii) $\int \frac{x+3}{(x+2)^2(x+1)}dx$. کے قیمت معلوم کرو:

حل

(i) $$\int \frac{3x+7}{x^2-3x+2}dx = \int \frac{13}{x-2}dx - \int \frac{10}{x-1}dx$$
$$= 13\log|x-2| - 10\log|x-1| + c$$

{ جزوی کسروں سے حل کرنا }

(ii) $$\int \frac{x+3}{(x+2)^2(x+1)}dx = \int \frac{-2}{x+2}dx - \int \frac{1}{(x+2)^2}dx + \int \frac{2}{x+1}dx$$
$$= -2\int \frac{1}{x+2}dx - \int \frac{1}{(x+2)^2}dx + 2\int \frac{1}{x+1}dx$$
$$= -2\log|x+2| - \int (x+2)^{-2}dx + 2\log|x+1| + c$$
$$= -2\log|x+2| + \frac{1}{x+2} + 2\log|x+1| + c.$$

{ جزوی کسروں سے حل کرنا }

11_11th-Maths-Vol2-Unit11_UM.indd 201 21-02-2023 15:10:38

مشق 11.5

x کے تعلق سے مندرجہ ذیل تفاعلات کی تکمیل کیجئے:

(1) $\frac{x^3+4x^2-3x+2}{x^2}$ (2) $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$ (3) $(2x-5)(36+4x)$

(4) $\cot^2 x+\tan^2 x$ (5) $\frac{\cos 2x-\cos 2\alpha}{\cos x-\cos\alpha}$ (6) $\frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}$

(7) $\frac{3+4\cos x}{\sin^2 x}$ (8) $\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$ (9) $\frac{\sin 4x}{\sin x}$

(10) $\cos 3x\cos 2x$ (11) $\sin^2 5x$ (12) $\frac{1+\cos 4x}{\cot x-\tan x}$

(13) $e^{x\log a}e^x$ (14) $(3x+4)\sqrt{3x+7}$ (15) $\frac{8^{1+x}+4^{1-x}}{2^x}$

(16) $\frac{1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x-4}}$ (17) $\frac{x+1}{(x+2)(x+3)}$ (18) $\frac{1}{(x-1)(x+2)^2}$

(19) $\frac{3x-9}{(x-1)(x+2)(x^2+1)}$ (20) $\frac{x^3}{(x-1)(x-2)}$

11.7.3 متبادل کا طریقہ (یا) متغیر کی تبدیلی: (Method of substitution or change of variable)

تکمیل میں متبادل کا طریقہ اور تفریق میں تفاعل کا مشتق معلوم کرنا دونوں ایک جیسے ہیں۔ کسی مناسب متبادل کا استعمال کرکے، تکمیل کی متغیر کو نئے متغیر میں تبدیل کردیا گیا ہے جو آسانی سے تکمیل ہوجائے گا۔

ہم جانتے ہیں کہ، اگر x کا ایک تفاعل u ہو تو $\frac{du}{dx}=u'$.

لہذا ہم لکھ سکتے ہیں۔ $\int f(u)u'dx=\int f(u)du$

اس طرح $\int f[g(x)]g'(x)dx=\int f(u)du$، جہاں $u=g(x)$

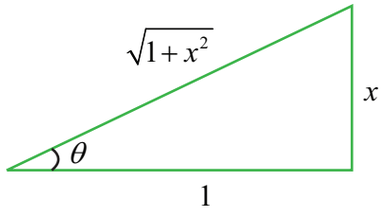
مندرجہ ذیل بالا طریقہ کار کی کامیابی مناسب متبادل کے انتخاب پر منحصر ہے یا تو $x=\phi(u)$ یا $u=g(x)$

نوٹ 11.2

تکمیل کے متغیر کا متبادل علم مثلث کے تفاعل میں ہیں۔ اس کے لئے دوبارہ متبادل قیمت معلوم کرنے کے لئے کچا خاکہ کا استعمال کریں۔

فرض کریں کہ تکمیل کے متغیر x کو $x=\tan\theta$ کے طور پر تبدیل کیا گیا ہے۔ تکمیل کے بعد فرض کریں کہ حل $\sec\theta+\operatorname{cosec}\theta$ ہے۔

مثال کے طور پر، اگر $x=\tan\theta$ ہو تو خاکہ کے ذریعے سے



$$\operatorname{cosec}\theta=\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right),$$

$$\sec\theta=\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{1}\right)$$

تو $\sec\theta+\operatorname{cosec}\theta=\sqrt{1+x^2}+\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)$

11_11th-Maths-Vol2-Unit11_UM.indd 202 21-02-2023 15:10:41

مثال 11.30

x کے تعلق سے مندرجہ ذیل کی تکمیل کیجئے:

$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$ (i) $\quad \int e^{-x^2}x\,dx$ (ii) $\quad \int \frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx$ (iii)

$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$ (iv) $\quad \int x(a-x)^8\,dx$ (v)

حل

$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$ (i)

$1+x^2=u$, درج کریں، تو $2x\,dx=du$

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx = \int \sqrt{u}\,du$$

$$= \int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+c = \frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+c\,.$$

$\int e^{-x^2}xdx$ (ii)

$1+x^2=u$, درج کریں، تو $2x\,dx=du$

$$\int e^{-x^2}x\,dx = \int e^{-u}\frac{du}{2} \quad \text{لہذا،}$$

$$= \frac{1}{2}\int e^{-u}du = \frac{1}{2}(-e^{-u})+c = -\frac{1}{2}e^{-u}+c = -\frac{1}{2}e^{-x^2}+c.$$

$\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx$ (iii)

$1+\cos x=u$, درج کریں، تو $\sin x\,dx=du$

$$\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx = \int \frac{-du}{u} = -\log|u|+c = -\log|1+\cos x|+c. \quad \text{لہذا،}$$

$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$ (iv)

$x=\tan u$, درج کریں، تو $dx=\sec^2 u\,du$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int \frac{\sec^2 u}{1+\tan^2 u}\,du = \int \frac{\sec^2 u}{\sec^2 u}\,du = \int du = u+c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1}x+c.$$

$\int x(a-x)^8\,dx$ (v)

$u=a-x$ درج کریں، تو $du=-dx$

$$\int x(a-x)^8\,dx = \int x(a-x)^8\,dx$$

$$= \int (a-u)(u)^8(-du)$$

$$= \int \left(-a(u)^8+u^9\right)du$$

11_11th-Maths-Vol2-Unit11_UM.indd 203 21-02-2023 15:10:48

$$= \int u^9 du - a\int u^8 du$$

$$= \frac{u^{10}}{10} - a\frac{u^9}{9} + c$$

$$\int x(a-x)^8\, dx = \frac{(a-x)^{10}}{10} - \frac{a(a-x)^9}{9} + c.$$

11.7.4 اہم نتائج (Important Results)

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)| + c \qquad (1)$$

$$\int f'(x)[f(x)]^n dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1 \qquad (2)$$

ثبوت

(1) اگر $I = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$

$f(x) = u$ درج کریں، تو $f'(x)dx = du$

اس طرح، $I = \int \frac{du}{u} = \log|u| + c$

لہٰذا $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)| + c.$

(2) اگر $I = \int f'(x)[f(x)]^n dx$

$f(x) = u$ درج کریں، تو $f'(x)dx = du$

اس طرح، $I = \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$

لہٰذا $\int f'(x)[f(x)]^n dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c.$

مثال 11.31

x کے تعلق سے مندرجہ ذیل کی تکمیل کیجئے:

(i) $\int \tan x\, dx$ (ii) $\int \cot x\, dx$ (iii) $\int \operatorname{cosec} x\, dx$ (iv) $\int \sec x\, dx$

حل

(i) اگر $I = \int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$

$\cos x = u$ درج کریں، تو $-\sin x\, dx = du$

اس طرح، $I = \int -\frac{1}{u} du = -\log|u| + c = -\log|\cos x| + c = \log|\sec x| + c.$

(ii) اگر $I = \int \cot x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$

$\sin x = u$ درج کریں، تو $\cos x\, dx = du$

اس طرح، $I = \int \frac{1}{u} du = \log|u| + c = \log|\sin x| + c$

11_11th-Maths-Vol2-Unit11_UM.indd 204 21-02-2023 15:10:55

(iii) اگر $I = \int \operatorname{cosec} x dx = \dfrac{\int \operatorname{cosec} x(\operatorname{cosec} x - \cot x)}{\operatorname{cosec} x - \cot x} dx$

$$= \int \frac{\operatorname{cosec}^2 x - \operatorname{cosec} x \cot x}{\operatorname{cosec} x - \cot x} dx$$

درج کریں، $\operatorname{cosec} x - \cot x = u$.

تو $(\operatorname{cosec}^2 x - \operatorname{cosec} x \cot x) dx = du$

اس طرح، $I = \int \frac{1}{u} du = \log|u| + c = \log|\operatorname{cosec} x - \cot x| + c$.

(iv) اگر $I = \int \sec x dx = \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} dx$

درج کریں، $\sec x + \tan x = u$

تو $(\sec^2 x + \sec x \tan x) dx = du$

اس طرح، $I = \int \frac{1}{u} du = \log|u| + c = \log|\sec x + \tan x| + c$

لہٰذا، $\int \sec x dx = \log|\sec x + \tan x| + c$.

اس طرح معیاری نتائج درج ذیل ہیں۔

$\int \tan x \, dx = \log\|\sec x\| + c$	(1)
$\int \cot x \, dx = \log\|\sin x\| + c$	(2)
$\int \operatorname{cosec} x \, dx = \log\|\operatorname{cosec} x - \cot x\| + c$	(3)
$\int \sec x \, dx = \log\|\sec x + \tan x\| + c$	(4)

مثال 11.32

x کے تعلق سے مندرجہ ذیل کی تکمیل کیجئے:

(i) $\int \frac{2x+4}{x^2+4x+6} dx$ (ii) $\int \frac{e^x}{e^x - 1} dx$ (iii) $\int \frac{1}{x \log x} dx$

(iv) $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} dx$ (v) $\int \frac{\cos 2x}{(\sin x + \cos x)^2} dx$

حل

(i) اگر $I = \int \frac{2x+4}{x^2+4x+6} dx$

درج کریں، $x^2 + 4x + 6 = u$.

تو $(2x+4) dx = du$

اس طرح، $I = \int \frac{du}{u} = \log|u| + c = \log|x^2 + 4x + 6| + c$

لہٰذا، $\int \frac{2x+4}{x^2+4x+6} dx = \log|x^2 + 4x + 6| + c$.

11_11th-Maths-Vol2-Unit11_UM.indd 205 21-02-2023 15:11:00

(ii) اگر $I = \int \frac{e^x}{e^x - 1} dx$

درج کریں، $e^x - 1 = u$ تو $e^x dx = du$

اس طرح، $I = \int \frac{du}{u} = \log|u| + c = \log|e^x - 1| + c$

لہٰذا، $\int \frac{e^x}{e^x - 1} dx = \log|e^x - 1| + c$

(iii) اگر $I = \int \frac{1}{x \log x} dx$

درج کریں، $\log x = u$ تو $\frac{1}{x} dx = du$

اس طرح، $I = \int \frac{du}{u} = \log|u| + c = \log|\log x| + c$

لہٰذا، $\int \frac{1}{x \log x} dx = \log|\log x| + c$

(iv) اگر $I = \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} dx$

درج کریں، $\sin x - \cos x = u$ تو $(\cos x + \sin x)\, dx = du$

اس طرح، $I = \int \frac{du}{u} = \log|u| + c = \log|\sin x - \cos x| + c$

لہٰذا، $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} dx = \log|\sin x - \cos x| + c$

(v) اگر $I = \int \frac{\cos 2x}{(\sin x + \cos x)^2} dx = \int \frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} dx$

درج کریں، $1 + \sin 2x = u$ تو $2 \cos 2x\, dx = du$

اس طرح، $I = \int \frac{du}{2u} = \frac{1}{2} \log|u| + c = \frac{1}{2} \log|1 + \sin 2x| + c$

مشق 11.6

x کے تعلق سے مندرجہ ذیل تفاعلات کی تکمیل کیجئے:

(1) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ (2) $\frac{x^2}{1+x^6}$ (3) $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ (4) $\frac{10x^9 + 10^x \log_e 10}{10^x + x^{10}}$

(5) $\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ (6) $\frac{\cot x}{\log(\sin x)}$ (7) $\frac{\operatorname{cosec} x}{\log\left(\tan\frac{x}{2}\right)}$ (8) $\frac{\sin 2x}{a^2 + b^2 \sin^2 x}$

(9) $\frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$ (10) $\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ (11) $\frac{1}{x \log x \log(\log x)}$ (12) $\alpha\beta x^{\alpha-1} e^{-\beta x^\alpha}$

(13) $\tan x \sqrt{\sec x}$ (14) $x(1-x)^{17}$ (15) $\sin^5 x \cos^3 x$ (16) $\frac{\cos x}{\cos(x-a)}$

11_11th-Maths-Vol2-Unit11_UM.indd 206 21-02-2023 15:11:05

11.7.5 بالحصص کے ذریعہ تکمیل (Integration by parts)

بالحصص کے ذریعے تکمیل کا طریقہ عام طور پر تکمیل معلوم کرنے کے لئے استعمال کیاجاتاہے۔ جب تکمیل دو مختلف اقسام کے تفاعل یا ایک واحد لوگارتمی تفاعل یا ایک واحد معکوس علم مثلث کا تفاعل یا ایک ایسا تفاعل جو براہ راست تکمیل نہیں ہوتاہے۔ دو تفاعل کی ضرب کے مشتق کے ضابطے سے ہم تکمیل کامفید طریقہ حاصل کرتے ہیں۔

اگر u اور v دو تفریقی تفاعل ہوں ہمارے پاس

$$d(uv) = vdu + udv$$

$$udv = d(uv) - vdu$$

تکمیل کرنے سے

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$\int udv$ ایک دوسرا تکملہ $\int vdu$ کے طورپر ہے اور تکملہ $\int udv$ کے لئے اختتام اظہار نہیں دیتا ہے۔ یہ صرف ضرب $u\,dv$ کو تکمیل کرنے کے لئے مسئلے کو جزوی طور پر حل کرتاہے۔ اس لئے "جزوی تکمیل" کی اصطلاح کئی یورپی ممالک میں استعمال ہوئی ہے۔ اصطلاح "بالحصص کے ذریعے تکمیل" بہت سے دوسرے ممالک کے ساتھ ساتھ ہمارے اپنے ملکوں میں استعمال ہوتی ہے۔

اس طریقے کی کامیابی u کے مناسب انتخاب پر منحصر ہے۔

(i) اگر تکمیل میں ضابطہ سے براہ راست کوئی غیر تکمیلی تفاعل ہوتا ہے۔جیسے $\log x$، $\tan^{-1} x$، وغیرہ۔ ہمیں ان غیر تکمیلی تفاعل کو بطور u اور دوسرا dv کے طور پر لیناہوگا۔

(ii) اگر تکمیل میں تکمیلی تفاعل دونوں شامل ہیں اور ان میں ایک x^n ہے(جہاں n ایک مثبت سالم ہے) تو پھر $u = x^n$ لیں۔

(iii) دوسرے صورتوں میں u کا انتخاب کرنا ہماری اختیار پر ہے۔

مثال 11.33

x کے تعلق سے مندرجہ ذیل کی تکمیل کیجئے:

(i) $\int xe^x dx$ (ii) $\int x\cos x\,dx$ (iii) $\int \log x\,dx$ (iv) $\int \sin^{-1} x\,dx$

حل

(i) اگر $I = \int xe^x dx$

کیونکہ x ایک الجبرائی تفاعل ہے اور e^x ایک سریعی تفاعل ہے۔

اگر $u = x$ لیں، تو $du = dx$ ہے

$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$

بالحصص کے ذریعے تکمیل استعمال کرنے سے ہمیں حاصل ہوگا۔

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\Rightarrow \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx$$

اس طرح، $\int xe^x dx = xe^x - e^x + c$

(ii) اگر $I = \int x\cos x\,dx$

کیونکہ x ایک الجبرائی تفاعل ہے اور $\cos x$ ایک علم مثلث تفاعل ہے۔

11_11th-Maths-Vol2-Unit11_UM.indd 207 21-02-2023 15:11:08

اگر $u = x$ لیں، تو $du = dx$ ہے

$dv = \cos x\,dx \Rightarrow v = \sin x$

بالحصص کے ذریعے تکمیل کا استعمال کرنے سے ہمیں حاصل ہوا،

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\Rightarrow \int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx$$

$$\Rightarrow \int x\cos x\,dx = x\sin x + \cos x + c$$

(iii) اگر $I = \int \log x\,dx$

$u = \log x$ لیں، تو $du = \frac{1}{x}dx$ ہے

$dv = dx \Rightarrow v = x$

بالحصص کے ذریعے تکمیل کا استعمال کرنے سے ہمیں حاصل ہوا،

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\Rightarrow \int \log x\,dx = x\log x - \int x\frac{1}{x}dx$$

$$\Rightarrow \int \log x\,dx = x\log x - x + c$$

(iv) اگر $I = \int \sin^{-1} x\,dx$

$u = \sin^{-1}(x), dv = dx$

تو $du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, v = x$

$$\int \sin^{-1} x dx = x\sin^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$\int \sin^{-1} x dx = x\sin^{-1} x + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}}, \text{where } t = 1-x^2$$

$$= x\sin^{-1} x + \sqrt{t} + c$$

$$= x\sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + c$$

مثال 11.34

$\int \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)dx$ کی قیمت معلوم کرو:

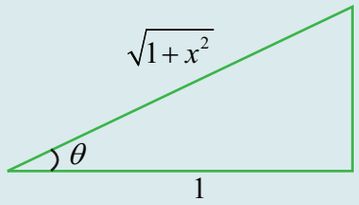
حل

اگر $I = \int \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)dx$

x درج کرنے سے $= \tan\theta \Rightarrow dx = \sec^2\theta\,d\theta$

لہذا، $I = \int \tan^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\right)\sec^2\theta\,d\theta$

11_11th-Maths-Vol2-Unit11_UM.indd 208 21-02-2023 15:11:09



$$\tan\theta = x$$
$$\sec\theta = \sqrt{1+x^2}$$

$$= \int \tan^{-1}(\tan 2\theta)\sec^2\theta\, d\theta$$
$$= \int 2\theta\sec^2\theta\, d\theta$$
$$= 2\int(\theta)(\sec^2\theta\, d\theta)$$

بالحصص کے ذریعے تکمیل کا استعمال کرکے

$$I = 2\left[\theta\tan\theta - \int\tan\theta d\theta\right]$$
$$= 2(\theta\tan\theta - \log|\sec\theta|) + c$$

$$\int \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)dx = 2x\tan^{-1}x - 2\log|\sqrt{1+x^2}| + c$$

11.7.6 بالحصص کے ذریعے تکمیل کا برنولی ضابطہ (Bernoulli's formula for Integration by Parts)

اگر u اور v متغیر x کے تفاعلات ہیں تو برنولی اصول ہے۔

$$\int udv = uv - u'v_1 + u''v_2 - \cdots$$

جہاں u'، u''، u''' ..... u کے متواتر مشتق ہیں اور

dv کے متواتر تکملہ v، v_1، v_2، v_3،... ہیں

برنولی ضابطہ بہت فائدہ مند طریقہ سے استعمال ہوتا ہے، جب $u = x^n$ ہو (n ایک مثبت سالم)

ہمیں درج ذیل مسئلوں کے حل کو معلوم کرنے کے لئے دو یا زیادہ بار بالحصص کے ذریعے تکمیل کا استعمال کرنا ہوگا۔ اس صورت میں برنولی ضابطہ آسانی سے حل کرنے میں مدد کرتا ہے۔

مثال 11.34

x کے تعلق سے مندرجہ ذیل کی تکمیل کیجئے:

(i) x^2e^{5x} (ii) $x^3\cos x$ (iii) x^3e^{-x}

حل

(i) $\int x^2e^{5x}dx$

برنولی ضابطہ استعمال کرنے سے

	$dv = e^{5x}dx$
$u = x^2$	$v = \frac{e^{5x}}{5}$
$u' = 2x$	$v_1 = \frac{e^{5x}}{5^2}$
$u'' = 2$	$v_2 = \frac{e^{5x}}{5^3}$
$u''' = 0$	$v_3 = \frac{e^{5x}}{5^4}$

$$\int udv = uv - u'v_1 + u''v_2 - \cdots$$

$$\int x^2e^{5x}\,dx = (x^2)\left(\frac{e^{5x}}{5}\right) - (2x)\left(\frac{e^{5x}}{5^2}\right) + (2)\left(\frac{e^{5x}}{5^3}\right) - (0)\left(\frac{e^{5x}}{5^4}\right) + 0 + \cdots + 0 + c$$

$$= \frac{x^2e^{5x}}{5} - \frac{2xe^{5x}}{25} + \frac{2e^{5x}}{125} + c.$$

(ii) $\int x^3\cos x\,dx$

برنولی ضابطہ استعمال کرنے سے

	$dv = \cos x\,dx$
$u = x^3,$	$v = \sin x$
$u' = 3x,^2$	$v_1 = -\cos x$
$u'' = 6x,$	$v_2 = -\sin x$
$u''' = 6,$	$v_3 = \cos x$

$$\int udv = uv - u'v_1 + u''v_2 - \cdots$$

$$\int x^3\cos x\,dx = (x^3)(\sin x) - (3x^2)(-\cos x) + (6x)(-\sin x) - (6)(\cos x) + c$$
$$= x^3\sin x + 3x^2\cos x - 6x\sin x - 6\cos x + c.$$

11_11th-Maths-Vol2-Unit11_UM.indd 209 21-02-2023 15:11:13

(iii) $\int x^3 e^{-x} dx$

برنولی ضابطہ استعمال کرنے سے

$$\int u dv = uv - u'v_1 + u''v_2 - \cdots$$

	$dv = e^{-x}dx$
$u = x^3,$	$v = -e^{-x}$
$u' = 3x^2,$	$v_1 = +e^{-x}$
$u'' = 6x,$	$v_2 = -e^{-x}$
$u''' = 6,$	$v_3 = e^{-x}$

$$\int x^3 e^{-x}\,dx = (x^3)(-e^{-x}) - (3x^2)(e^{-x}) + (6x)(-e^{-x}) - (6)(e^{-x}) + c$$
$$= -x^3 e^{-x} - 3x^2 e^{-x} - 6xe^{-x} - 6e^{-x} + c.$$

مشق 11.7

x کے تعلق سے مندرجہ ذیل تفاعلات کی تکمیل کیجئے:

(1) (i) $9xe^{3x}$ (ii) $x\sin 3x$ (iii) $25xe^{-5x}$ (iv) $x\sec x\tan x$

(2) (i) $x\log x$ (ii) $27\,x^2e^{3x}$ (iii) $x^2\cos x$ (iv) $x^3\sin x$

(3) (i) $\dfrac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$ (ii) $x^5e^{x^2}$ (iii) $\tan^{-1}\left(\dfrac{8x}{1-16x^2}\right)$ (iv) $\sin^{-1}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$

11.7.8 تکملہ کی شکل (i) (Integrals of the form) $\int e^{ax}\sin bx\,dx$ (ii) $\int e^{ax}\cos bx\,dx$

مندرجہ ذیل مثالیں واضح کرتی ہیں کہ کچھ تکمیل ہیں جن کا تکملہ ہمیشہ کے لئے جاری رہتا ہے جب بھی ہم $e^{ax}\cos bx$ یا $e^{ax}\sin bx$ شکل والے تفاعل کو تکمیل کرتے ہیں تو ہمیں بالحصص کے ذریعے تکمیل کا اصول دوبار استعمال کرنا ہوگا تاکہ دونوں طرف سے ایک جیسا تکمیل کو حل کیا جاسکے۔

نتیجہ 11.1

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\sin bx - b\cos bx] + c \qquad \text{(i)}$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\cos bx + b\sin bx] + c \qquad \text{(ii)}$$

ثبوت : (i)

اگر $I = \int e^{ax}\sin bx\,dx$

$u = \sin bx$ لیں، $du = b\cos bx\,dx$

$dv = e^{ax}; v = \dfrac{e^{ax}}{a},$

بالحصص کے ذریعے تکمیل کا استعمال کرنے سے، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$I = \frac{e^{ax}}{a}\sin bx - \int \frac{e^{ax}}{a} b\cos bx\,dx$$

$$I = \frac{e^{ax}}{a}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx$$

$u = \cos bx$ لیں، $du = -b\sin bx\,dx$

$dv = e^{ax}; v = \dfrac{e^{ax}}{a},$

دوبارہ بالحصص کے ذریعے تکمیل کا استعمال کرنے سے، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$I = \frac{e^{ax}}{a}\sin bx - \frac{b}{a}\left[\frac{e^{ax}}{a}\cos bx + \int \frac{e^{ax}}{a} b\sin bx\,dx\right]$$

11_11th-Maths-Vol2-Unit11_UM.indd 210 21-02-2023 15:11:14

$$I = \frac{e^{ax}}{a}\sin bx - \frac{b}{a}\frac{e^{ax}}{a}\cos bx - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin bx\,dx$$

$$I = \frac{e^{ax}}{a}\sin bx - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos bx - \frac{b^2}{a^2}I$$

$$\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)I = \frac{ae^{ax}\sin bx - be^{ax}\cos bx}{a^2}$$

$$\left(\frac{a^2+b^2}{a^2}\right)I = \frac{e^{ax}[a\sin bx - b\cos bx]}{a^2}$$

$$I = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\sin bx - b\cos bx] + c \quad \text{لہذا،}$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\sin bx - b\cos bx] + c \quad \text{لہذا،}$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\cos bx + b\sin bx] + c \quad \text{اس طرح،}$$

$$\boxed{\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\sin bx - b\cos bx] + c}$$

$$\boxed{\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\cos bx + b\sin bx] + c}$$

احتیاط (Caution)

مخصوص تکملہ پر بالخصص کے ذریعے تکمیل کا استعمال کرنے میں u اور dv کے لئے انتخاب کی جوڑی کو ایک بار ابتدائی طور پر فرض کر لیا جائے کہ دائیں جانب میں متواتر تکمیل کو برقرار رکھا جائے (اوپر کے دو مثال دیکھیں)۔ انتخاب کردہ جوڑی متبادلہ نہیں ہونا چاہئے۔

مثال 11.36

مندرجہ ذیل کی تکملہ کی قیمت معلوم کیجئے:

(i) $\int e^{3x}\cos 2x\,dx$ (ii) $\int e^{-5x}\sin 3x\,dx$

حل

(i) $\int e^{3x}\cos 2x\,dx$

ضابطہ کو استعمال کرکے

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\cos bx + b\sin bx] + c$$

$a = 3$ اور $b = 2$ کے لئے، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\int e^{3x}\cos 2x\,dx = \left(\frac{e^{3x}}{3^2+2^2}\right)(3\cos 2x + 2\sin 2x) + c$$

$$= \left(\frac{e^{3x}}{13}\right)(3\cos 2x + 2\sin 2x) + c.$$

11_11th-Maths-Vol2-Unit11_UM.indd 211 21-02-2023 15:11:14

$\int e^{-5x} \sin 3x \, dx$ (ii)

ضابطہ کو استعمال کرکے

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a \sin bx - b \cos bx] + c$$

$a = -5$ ، $b = 3$ کے لئے، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\int e^{-5x} \sin 3x \, dx = \left(\frac{e^{-5x}}{(-5)^2+3^2}\right)(-5 \sin 3x - 3 \cos 3x) + c$$

$$\int e^{-5x} \sin 3x \, dx = -\left(\frac{e^{-5x}}{34}\right)(5 \sin 3x + 3 \cos 3x) + c$$

مشق 11.8

x کے تعلق سے مندرجہ ذیل کی تکملہ کیجئے:

(1) $e^{ax} \cos bx$ (i) $e^{2x} \sin x$ (ii) $e^{-x} \cos 2x$ (iii)

(2) $e^{-3x} \sin 2x$ (i) $e^{-4x} \sin 2x$ (ii) $e^{-3x} \cos x$ (iii)

نتیجہ 11.2

$$\int e^x [f(x) + f'(x)]dx = e^x f(x) + c$$

ثبوت :

$$I = \int e^x [f(x) + f'(x)]dx \quad \text{فرض کرو}$$

$$= \int e^x f(x)dx + \int e^x f'(x)dx$$

پہلا تکملہ میں $u = f(x)$; $du = f'(x)\,dx$ لیں

$dv = e^x; v = e^x$,

$I = e^x f(x) - \int e^x f'(x)dx + \int e^x f'(x)dx + c$ اس طرح،

$I = e^x f(x) + c.$ لہذا،

مثال 11.37

مندرجہ ذیل تکملہ کی قیمت معلوم کرو:

(i) $\int e^x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx$ (ii) $\int e^x (\sin x + \cos x)\, dx$ (iii) $\int e^x \left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2 dx$

حل

(i) $I = \int e^x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx$ فرض کرو

$f(x) = \frac{1}{x}$ لیں، تو $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$

11_11th-Maths-Vol2-Unit11_UM.indd 212 21-02-2023 15:11:16

یہ $\int e^x[f(x)+f'(x)]dx$ اس طرح کی شکل میں ہے۔

$$\int e^x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx = e^x\frac{1}{x}+c.$$

(ii) فرض کرو $I = \int e^x(\sin x+\cos x)\,dx$

لیں، تو $f(x) = \sin x$ $f'(x) = \cos x$

یہ $\int e^x[f(x)+f'(x)]\,dx$ اس طرح کی شکل میں ہے۔

$$\int e^x(\sin x+\cos x)\,dx = e^x\sin x+c.$$

(iii) $\int e^x\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2 dx$

فرض کرو $I = \int e^x\frac{(1-x)^2}{(1+x^2)^2}dx$

$$= \int e^x\frac{(1+x^2-2x)}{(1+x^2)^2}dx$$

$$= \int e^x\left(\frac{1}{(1+x^2)}-\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right)dx$$

اگر $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)}$ تو $f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$

Using $\int e^x\left(f(x)+f'(x)\right)dx = e^x f(x)+c$

$$\int e^x\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2 dx = \int e^x\left(\frac{1}{(1+x^2)}-\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right)dx = e^x\frac{1}{(1+x^2)}+c.$$

مشق 11.9

x کے تعلق سے مندرجہ ذیل کی تکملہ کیجئے:

(1) $e^x(\tan x+\log\sec x)$ (2) $e^x\left(\frac{x-1}{2x^2}\right)$ (3) $e^x\sec x(1+\tan x)$

(4) $e^x\left(\frac{2+\sin 2x}{1+\cos 2x}\right)$ (5) $e^{\tan^{-1}x}\left(\frac{1+x+x^2}{1+x^2}\right)$ (6) $\frac{\log x}{(1+\log x)^2}$

11.7.9 ناطق الجبرائی تفاعلات کا تکمیل (Integration of Rational Algebraic Functions)

اس حصّے میں ہم اس بات پر بحث کرنے جارہے ہیں کہ ناطق الجبرائی تفاعلوں کو اس طرح تکمیل کیا جائے جس کے شمارکنندہ اور نسب نما میں x کے کچھ مثبت قوتی اختیارات کے ساتھ مستقل سر عدد ہوتے ہیں۔

11_11th-Maths-Vol2-Unit11_UM.indd 213 21-02-2023 15:11:18

قسم-I

شکل کے تکملے $\int \frac{dx}{a^2 \pm x^2}, \int \frac{dx}{x^2 - a^2}, \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}}, \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + c \quad \text{(i)}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c \quad \text{(ii)}$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + c \quad \text{(iii)}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + c \quad \text{(iv)}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \log \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + c \quad \text{(v)}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \log \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + c \quad \text{(vi)}$$

ثبوت

(i) اگر $I = \int \frac{dx}{a^2 - x^2}$.

$$= \int \frac{dx}{(a-x)(a+x)}$$

جزوی حصوں میں حل کرنا

$$= \frac{1}{2a} \int \left[\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right] dx$$

$$= \frac{1}{2a} \left[\log |a+x| - \log |a-x| \right] + c$$

$$= \frac{1}{2a} \log \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + c$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + c$$

(ii) اگر $I = \int \frac{dx}{x^2 - a^2}$.

$$= \int \frac{dx}{(x-a)(x+a)}$$

جزوی حصوں میں حل کرنا

$$= \frac{1}{2a} \int \left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right] dx$$

11_11th-Maths-Vol2-Unit11_UM.indd 214 21-02-2023 15:11:20

$$= \frac{1}{2a}[\log|x-a| - \log|x+a|] + c$$

$$= \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c \quad \text{لہذا}$$

$$I = \int \frac{dx}{a^2+x^2} \quad \text{فرض کرو} \qquad \text{(iii)}$$

$x = a\tan\theta \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{x}{a}$ درج کرنے سے

$$dx = a\sec^2\theta$$

$$I = \int \frac{a\sec^2\theta}{a^2+a^2\tan^2\theta}d\theta = \int \frac{a\sec^2\theta}{a^2(1+\tan^2\theta)}d\theta = \int \frac{a\sec^2\theta}{a^2\sec^2\theta}d\theta = \frac{1}{a}\int d\theta$$

$$= \frac{1}{a}\theta + c = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c \quad \text{لہذا}$$

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad \text{فرض کرو} \qquad \text{(iv)}$$

$x = a\sin\theta \Rightarrow \theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ درج کرنے سے

$$dx = a\cos\theta$$

$$I = \int \frac{a\cos\theta}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}}d\theta = \int \frac{a\cos\theta}{\sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)}}d\theta = \int \frac{a\cos\theta}{a\cos\theta}d\theta = \int d\theta$$

$$= \theta + c = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c \quad \text{لہذا}$$

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} \quad \text{فرض کرو} \qquad \text{(v)}$$

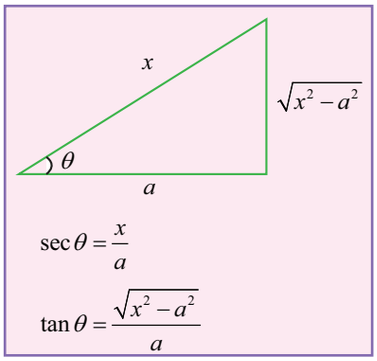
$x = a\sec\theta \Rightarrow \theta = \sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ درج کرنے سے

$$dx = a\sec\theta\tan\theta d\theta$$

$$I = \int \frac{a\sec\theta\tan\theta}{\sqrt{a^2\sec^2\theta-a^2}}d\theta = \int \frac{a\sec\theta\tan\theta}{\sqrt{a^2(\sec^2\theta-1)}}d\theta = \int \frac{a\sec\theta\tan\theta}{a\tan\theta}d\theta = \int \sec\theta d\theta$$

$$= \log|\sec\theta + \tan\theta| + c$$

11_11th-Maths-Vol2-Unit11_UM.indd 215 21-02-2023 15:11:22



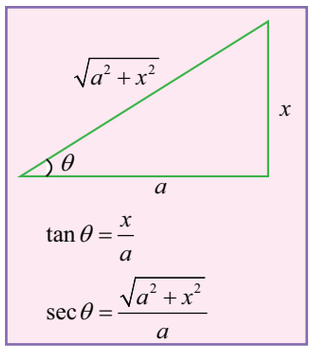
$$= \log\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+c$$

$$= \log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|-\log a+c$$

$$= \log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c_1 \quad \text{جہاں} \quad c_1=c-\log a$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c_1 \quad \text{لہذا}$$

(vi) $I = \int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$ فرض کرو



$$x = a\tan\theta \Rightarrow \theta=\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$dx = a\sec^2\theta d\theta$$

$$I = \int\frac{a\sec^2\theta}{\sqrt{a^2\tan^2\theta+a^2}}d\theta=\int\frac{a\sec^2\theta}{\sqrt{a^2(\tan^2\theta+1)}}d\theta$$

$$= \int\frac{a\sec^2\theta}{a\sec\theta}d\theta=\int\sec\theta d\theta$$

$$= \log|\sec\theta+\tan\theta|+c$$

$$= \log\left|\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+1}\right|+c$$

$$= \log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|-\log a+c$$

$$= \log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+c_1 \quad \text{جہاں} \quad c_1=c-\log a$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+c_1$$

تبصرہ (Remark) : a^2-x^2، a^2+x^2 اور x^2-a^2 کے تفاعلات کے طور پر دئے گئے تکمیل کے درج ذیل کے مفید متبادل کو یاد رکھیں۔

متبادل	دیا گیا
$x=a\sin\theta$	a^2-x^2
$x=a\tan\theta$	a^2+x^2
$x=a\sec\theta$	x^2-a^2

11_11th-Maths-Vol2-Unit11_UM.indd 216 21-02-2023 15:11:27

مثال 11.38

مندرجہ ذیل تکملہ کی قیمت معلوم کرو:

$\int \frac{1}{(x-2)^2+1}dx$ (i) $\int \frac{x^2}{x^2+5}dx$ (ii) $\int \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}dx$ (iii) $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2-25}}dx$ (iv)

حل

$$I = \int \frac{1}{(x-2)^2+1}dx = \int \frac{1}{(x-2)^2+1^2}dx \quad \text{فرض کرو} \qquad \text{(i)}$$

$x-2=t \Rightarrow dx = dt$ درج کرنے سے

$$I = \int \frac{1}{t^2+1^2}dt = \tan^{-1}(t)+c = \tan^{-1}(x-2)+c \quad \text{اس طرح}$$

$$I = \int \frac{x^2}{x^2+5}dx \quad \text{فرض کرو} \qquad \text{(ii)}$$

$$= \int \frac{x^2+5-5}{x^2+5}dx = \int\left(1-\frac{5}{x^2+5}\right)dx = \int dx - \int \frac{5}{x^2+5}dx$$

$$= x-5\int \frac{1}{x^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}dx$$

$$= x-5\frac{1}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)+c$$

$$I = x-\sqrt{5}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)+c$$

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1+(2x)^2}}dx \quad \text{فرض کرو} \qquad \text{(iii)}$$

$2x = t \Rightarrow 2\,dx = dt \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt$ درج کرنے سے

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1^2+t^2}}dt \quad \text{اس طرح}$$

$$I = \frac{1}{2}\log\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|+c = \frac{1}{2}\log\left|2x+\sqrt{(2x)^2+1}\right|+c$$

$$I = \frac{1}{2}\log\left|2x+\sqrt{4x^2+1}\right|+c$$

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{4x^2-25}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{(2x)^2-25}}dx \quad \text{فرض کرو} \qquad \text{(iv)}$$

$2x = t \Rightarrow 2\,dx = dt \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt$ درج کرنے سے

11_11th-Maths-Vol2-Unit11_UM.indd 217 21-02-2023 15:11:27

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t^2-5^2}}\,dt \quad \text{اس طرح،}$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|t+\sqrt{t^2-5^2}\right|+c$$

$$I = \frac{1}{2}\log\left|2x+\sqrt{4x^2-25}\right|+c$$

قسم- II

تکملہ کی شکل $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ اور $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$

پہلے ہم ax^2+bx+c کو دو مربع رقموں کے جمع یا تفریق کے طور پر ظاہر کرتے ہیں یعنی، قسم I کے شکلوں میں سے کوئی ایک ax^2+bx+c کو دو مربع رقموں کی جمع یا تفریق کے طور پر ظاہر کرنے کے لئے درج ذیل اصول استعمال کیاجاتاہے۔

(1) x^2 کے سر عدد کو ایک بنائے

(2) x کے سر عدد کی نصف کے مربع کو جمع اور تفریق کر کے مربع کو مکمل کرنا۔

$$ax^2+bx+c = a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right] \quad \text{یعنی،}$$

$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$$

مثال 11.39

مندرجہ ذیل کی تکملہ کی قیمت معلوم کیجئے:

(i) $\int \frac{1}{x^2-2x+5}\,dx$ (ii) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+12x+11}}\,dx$ (iii) $\int \frac{1}{\sqrt{12+4x-x^2}}\,dx$

حل

(i)
$$\int \frac{1}{x^2-2x+5}\,dx = \int \frac{1}{x^2-2(1)x+(1)^2+4}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{(x-1)^2+2^2}\,dx$$

$$\int \frac{1}{x^2-2x+5}\,dx = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right)+c$$

(ii)
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+12x+11}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x+6)^2-25}}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{(x+6)^2-5^2}}\,dx$$

$$= \log\left|x+6+\sqrt{(x+6)^2-5^2}\right|+c$$

11_11th-Maths-Vol2-Unit11_UM.indd 218 21-02-2023 15:11:29

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+12x+11}}dx = \log\left|x+6+\sqrt{x^2+12x+11}\right|+c \quad \text{لہذا،}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{12+4x-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{12-(x^2-4x)}}dx \qquad \text{(iii)}$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{12-\{(x-2)^2-4\}}}dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{4^2-(x-2)^2}}dx$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{(x-2)}{4}\right)+c$$

مشق 11.10

مندرجہ ذیل کی تکملہ کی قیمت معلوم کیجئے:

(1) (i) $\frac{1}{4-x^2}$ (ii) $\frac{1}{25-4x^2}$ (iii) $\frac{1}{9x^2-4}$

(2) (i) $\frac{1}{6x-7-x^2}$ (ii) $\frac{1}{(x+1)^2-25}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{x^2+4x+2}}$

(3) (i) $\frac{1}{\sqrt{(2+x)^2-1}}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{x^2-4x+5}}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{9+8x-x^2}}$

قسم- III

تکملہ کی شکل $\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx$ اور $\int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

مندرجہ بالا تکملہ کی قیمت معلوم کرنے کے لئے پہلے ہم لکھتے ہیں

$$px+q = A\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c)+B$$

$$px+q = A(2ax+b)+B$$

x کے دونوں طرف کی ایک جیسے قوتوں کی سراعداد کو مساوی کرتے ہوئے، A اور B کی قیمتیں معلوم کریں۔

(i) دیا گیا پہلا تکملہ اس طرح سے لکھا جاسکتا ہے۔

$$\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{A(2ax+b)+B}{ax^2+bx+c}dx$$

$$= A\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx + B\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$$

(پہلا تکملہ $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$ اس شکل کا ہے)

$$= A\log|ax^2+bx+c| + B\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$$

دائیں طرف کی دوسری رقم کا اندازہ پچھلی اقسام کا استعمال کرتے ہوئے کیا جاسکتا ہے۔

11_11th-Maths-Vol2-Unit11_UM.indd 219 21-02-2023 15:11:29

(ii) دیا گیا دوسرا تکملہ اس طرح سے لکھا جاسکتا ہے۔

$$\int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \int \frac{A(2ax+b)+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

$$= A\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx + B\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

(پہلا تکملہ $\int f'(x)[f(x)]^n dx$ اس شکل کا ہے)

$$= A\left(2\sqrt{ax^2+bx+c}\right) + B\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

دائیں طرف کی دوسری رقم کا اندازہ پچھلی اقسام کا استعمال کرتے ہوئے کیا جاسکتا ہے۔

مثال 11.40

مندرجہ ذیل کی تکملہ کی قیمت معلوم کیجئے:

$\int \frac{3x+5}{x^2+4x+7}dx$ (i) $\int \frac{x+1}{x^2-3x+1}dx$ (ii) $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$ (iii) $\int \frac{5x-7}{\sqrt{3x-x^2-2}}dx$ (iv)

حل

(i) فرض کرو $I = \int \frac{3x+5}{x^2+4x+7}dx$

$$3x+5 = A\frac{d}{dx}(x^2+4x+7)+B$$

$$3x+5 = A(2x+4)+B$$

ایک جیسے رقم کے سر اعداد کا موازنہ سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$2A = 3 \Rightarrow A = \frac{3}{2}; 4A+B = 5 \Rightarrow B = -1$$

$$I = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+4)-1}{x^2+4x+7}dx$$

$$I = \frac{3}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+7}dx - \int \frac{1}{x^2+4x+7}dx$$

$$= \frac{3}{2}\log\left|x^2+4x+7\right| - \int \frac{1}{(x+2)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}dx$$

$$= \frac{3}{2}\log\left|x^2+4x+7\right| - \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right)+c$$

(ii) فرض کرو $I = \int \frac{x+1}{x^2-3x+1}dx$

$$x+1 = A\frac{d}{dx}(x^2-3x+1)+B$$

11_11th-Maths-Vol2-Unit11_UM.indd 220 21-02-2023 15:11:30

$$x+1 = A(2x-3)+B$$

ایک جیسے رقم کے سر اعداد کا موازنہ سے، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}; -3A + B = 1 \Rightarrow B = \frac{5}{2}$$

$$I = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-3)+\frac{5}{2}}{x^2-3x+1}dx$$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{2x-3}{x^2-3x+1}dx + \frac{5}{2}\int \frac{1}{x^2-3x+1}dx$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|x^2-3x+1\right| + \frac{5}{2}\int \frac{1}{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}dx$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|x^2-3x+1\right| + \frac{5}{2}\frac{1}{2\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)}\log\left|\frac{x-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{x-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}\right| + c$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|x^2-3x+1\right| + \frac{\sqrt{5}}{2}\log\left|\frac{2x-3-\sqrt{5}}{2x-3+\sqrt{5}}\right| + c$$

$$I = \int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+x+1}}dx \quad \text{فرض کرو} \qquad \text{(iii)}$$

$$2x+3 = A\frac{d}{dx}(x^2+x+1)+B$$

$$2x+3 = A(2x+1)+B$$

ایک جیسے رقم کے سر اعداد کا موازنہ سے، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$2A = 2 \Rightarrow A = 1; \quad A+B = 3 \Rightarrow B = 2$$

$$I = \int \frac{(2x+1)+2}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$$

$$I = \int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx + 2\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$$

$$= 2\sqrt{x^2+x+1} + 2\int \frac{1}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}dx$$

$$= 2\sqrt{x^2+x+1}+2\log\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right|+c$$

$$I = 2\sqrt{x^2+x+1}+2\log\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|+c \quad \text{لہذا،}$$

$$\int \frac{5x-7}{\sqrt{3x-x^2-2}}dx \quad \text{(iv)}$$

$$5x-7 = A\frac{d}{dx}(3x-x^2-2)+B$$

$$5x-7 = A(3-2x)+B$$

ایک جیسے رقم کے سر اعداد کا موازنہ سے، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$-2A = 5 \Rightarrow A = -\frac{5}{2}; 3A+B = -7 \Rightarrow B = \frac{1}{2}$$

$$I = \int \frac{\frac{-5}{2}(3-2x)+\frac{1}{2}}{\sqrt{3x-x^2+2}}dx$$

$$I = -\frac{5}{2}\int \frac{3-2x}{\sqrt{3x-x^2+2}}dx+\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{3x-x^2+2}}dx$$

$$= \left(-\frac{5}{2}\right)2\sqrt{3x-x^2+2}+\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}}dx$$

$$= -5\sqrt{3x-x^2+2}+\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x-\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{17}}{2}}\right)+c$$

$$I = -5\sqrt{3x-x^2+2}+\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2x-3}{\sqrt{17}}\right)+c \quad \text{اس طرح،}$$

مشق 11.11

x کے تعلق سے مندرجہ ذیل کی تکملہ کیجئے:

(1) (i) $\frac{2x-3}{x^2+4x-12}$ (ii) $\frac{5x-2}{2+2x+x^2}$ (iii) $\frac{3x+1}{2x^2-2x+3}$

(2) (i) $\frac{2x+1}{\sqrt{9+4x-x^2}}$ (ii) $\frac{x+2}{\sqrt{x^2-1}}$ (iii) $\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+4x+1}}$

11_11th-Maths-Vol2-Unit11_UM.indd 222 21-02-2023 15:11:33

قسم- IV

$\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx$ اور $\int \sqrt{a^2 \pm x^2}\,dx$ تکملہ کی شکل a dx

نتیجہ 11.3

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c \qquad (1)$$

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\log\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + c \qquad (2)$$

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\log\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + c \qquad (3)$$

ثبوت :

(1) $I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ فرض کرو

$u = \sqrt{a^2 - x^2}$ لیں ، تو du dx

$$du = \frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}}dx$$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

بالحصص کے ذریعے تکملہ کو استعمال کرنے سے، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\Rightarrow I = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{-x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{a^2 - x^2 - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \left(\frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{(-a^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)dx$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx + \int \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - I + a^2 \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx$$

$$2I = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

لہذا، $$I = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

اس طرح ہم دوسرے دو نتائج کو ثابت کرسکتے ہیں۔

نوٹ 11.3

مندرجہ بالا مسائل کو متبادل $x = a\sin\theta$ کے ذریعے حل کیا جاسکتا ہے۔

مثال 11.41

مندرجہ ذیل کی قیمتیں معلوم کیجئے:

(i) $\int \sqrt{4 - x^2}\,dx$ (ii) $\int \sqrt{25x^2 - 9}\,dx$ (iii) $\int \sqrt{x^2 + x + 1}\,dx$ (iv) $\int \sqrt{(x-3)(5-x)}\,dx$

11_11th-Maths-Vol2-Unit11_UM.indd 223 21-02-2023 15:11:36

حل

$I = \int \sqrt{4-x^2}\,dx$ فرض کرو (i)

$= \int \sqrt{2^2-x^2}\,dx$

$= \frac{x}{2}\sqrt{2^2-x^2} + \frac{2^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$

$I = \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + 2\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$ لہذا،

$I = \int \sqrt{25x^2-9}\,dx$ فرض کرو (ii)

$= \int \sqrt{(5x)^2-3^2}\,dx$

$= \frac{1}{5}\left[\frac{5x}{2}\sqrt{(5x)^2-3^2} - \frac{3^2}{2}\log\left|5x+\sqrt{(5x)^2-3^2}\right|\right] + c$

$I = \frac{1}{5}\left[\frac{5x}{2}\sqrt{25x^2-9} - \frac{9}{2}\log\left|5x+\sqrt{25x^2-9}\right|\right] + c$ لہذا،

$I = \int \sqrt{x^2+x+1}\,dx$ فرض کرو (iii)

$= \int \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,dx$

$= \frac{x+\frac{1}{2}}{2}\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2}\log\left|\left[x+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right]\right| + c$

$I = \frac{2x+1}{4}\sqrt{x^2+x+1} + \frac{3}{8}\log\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right| + c$ لہذا،

$I = \int \sqrt{(x-3)(5-x)}\,dx$ فرض کرو (iv)

$= \int \sqrt{8x-x^2-15}\,dx$

$= \int \sqrt{1^2-(x-4)^2}\,dx$

$= \frac{x-4}{2}\sqrt{1^2-(x-4)^2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x-4}{1}\right) + c$

$I = \frac{x-4}{2}\sqrt{8x-x^2-15} + \frac{1}{2}\sin^{-1}(x-4) + c$ لہذا،

11_11th-Maths-Vol2-Unit11_UM.indd 224 21-02-2023 15:11:36

مشق 11.12

x کے تعلق سے مندرجہ ذیل تفاعلات کی تکمیل کیجئے:

(1) (i) $\sqrt{x^2+2x+10}$ (ii) $\sqrt{x^2-2x-3}$ (iii) $\sqrt{(6-x)(x-4)}$

(2) (i) $\sqrt{9-(2x+5)^2}$ (ii) $\sqrt{81+(2x+1)^2}$ (iii) $\sqrt{(x+1)^2-4}$



مشق 11.13

دیے گئے چار متبادلات میں صحیح جواب منتخب کریں۔

(1) اگر $\int f(x)dx = g(x)+c$، تو $\int f(x)g'(x)dx$

(1) $\int (f(x))^2 dx$ (2) $\int f(x)g(x)dx$ (3) $\int f'(x)g(x)dx$ (4) $\int (g(x))^2 dx$

(2) اگر $\int \frac{3^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx = k\ (3^{\frac{1}{x}})+c$ ہو، تو k کی قیمت ہے۔

(1) $\log 3$ (2) $-\log 3$ (3) $-\frac{1}{\log 3}$ (4) $\frac{1}{\log 3}$

(3) اگر $\int f'(x)e^{x^2}dx = (x-1)e^{x^2}+c$ ہو، تو $f(x)$ ہے

(1) $2x^3-\frac{x^2}{2}+x+c$ (2) $\frac{x^3}{2}+3x^2+4x+c$ (3) x^3+4x^2+6x+c (4) $\frac{2x^3}{3}-x^2+x+c$

(4) کسی بھی نقطہ (x, y) پر منحنی کا ڈھلوان (میلان) $\frac{x^2-4}{x^2}$ ہے۔ اگر منحنی نقطہ $(2, 7)$ سے گزرتا ہے، تو منحنی کے مساوات ہے۔

(1) $y = x+\frac{4}{x}+3$ (2) $y = x+\frac{4}{x}+4$ (3) $y = x^2+3x+4$ (4) $y = x^2-3x+6$

(5) $\int \frac{e^x(1+x)}{\cos^2(xe^x)}\ dx$ ہے

(1) $\cot(xe^x)+c$ (2) $\sec(xe^x)+c$ (3) $\tan(xe^x)+c$ (4) $\cos(xe^x)+c$

(6) $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\sin 2x}dx$ ہے

(1) $\sqrt{\tan x}+c$ (2) $2\sqrt{\tan x}+c$ (3) $\frac{1}{2}\sqrt{\tan x}+c$ (4) $\frac{1}{4}\sqrt{\tan x}+c$

(7) $\int \sin^3 x dx$ ہے

(1) $\frac{-3}{4}\cos x-\frac{\cos 3x}{12}+c$ (2) $\frac{3}{4}\cos x+\frac{\cos 3x}{12}+c$

(3) $\frac{-3}{4}\cos x+\frac{\cos 3x}{12}+c$ (4) $\frac{-3}{4}\sin x-\frac{\sin 3x}{12}+c$

(8) $\int \frac{e^{6\log x}-e^{5\log x}}{e^{4\log x}-e^{3\log x}}dx$ ہے

(1) $x+c$ (2) $\frac{x^3}{3}+c$ (3) $\frac{3}{x^3}+c$ (4) $\frac{1}{x^2}+c$

11_11th-Maths-Vol2-Unit11_UM.indd 225 21-02-2023 15:11:40

$\int \frac{\sec x}{\sqrt{\cos 2x}} dx$ ہے (9)

$\sin^{-1}(\tan x)+c$ (4) $\tan^{-1}(\cos x)+c$ (3) $2\sin^{-1}(\tan x)+c$ (2) $\tan^{-1}(\sin x)+c$ (1)

$\int \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}}\, dx$ ہے (10)

$-\frac{x^2}{2}+c$ (4) $\frac{x^2}{2}+c$ (3) $2x^2+c$ (2) x^2+c (1)

$\int 2^{3x+5} dx$ ہے (11)

$\frac{2^{3x+5}}{3\log 2}+c$ (4) $\frac{2^{3x+5}}{2\log 3}+c$ (3) $\frac{2^{3x+5}}{2\log(3x+5)}+c$ (2) $\frac{3(2^{3x+5})}{\log 2}+c$ (1)

$\int \frac{\sin^8 x-\cos^8 x}{1-2\sin^2 x\cos^2 x}\, dx$ ہے (12)

$-\frac{1}{2}\cos 2x+c$ (4) $\frac{1}{2}\cos 2x+c$ (3) $-\frac{1}{2}\sin 2x+c$ (2) $\frac{1}{2}\sin 2x+c$ (1)

$\int \frac{e^x(x^2\tan^{-1}x+\tan^{-1}x+1)}{x^2+1}\, dx$ ہے (13)

$e^x\tan^{-1}x+c$ (4) $e^x\frac{(\tan^{-1}x)^2}{2}+c$ (3) $\tan^{-1}(e^x)+c$ (2) $e^x\tan^{-1}(x+1)+c$ (1)

$\int \frac{x^2+\cos^2 x}{x^2+1}\operatorname{cosec}^2 x dx$ ہے (14)

$-\cot x+\tan^{-1}x+c$ (2) $\cot x+\sin^{-1}x+c$ (1)

$-\cot x-\tan^{-1}x+c$ (4) $-\tan x+\cot^{-1}x+c$ (3)

$\int x^2\cos x\, dx$ ہے (15)

$x^2\sin x-2x\cos x-2\sin x+c$ (2) $x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+c$ (1)

$-x^2\sin x-2x\cos x+2\sin x+c$ (4) $-x^2\sin x+2x\cos x+2\sin x+c$ (3)

$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$ ہے (16)

$\sin^{-1}x-\sqrt{1-x^2}+c$ (2) $\sqrt{1-x^2}+\sin^{-1}x+c$ (1)

$\sqrt{1-x^2}+\log\left|x+\sqrt{1-x^2}\right|+c$ (4) $\log\left|x+\sqrt{1-x^2}\right|-\sqrt{1-x^2}+c$ (3)

$\int \frac{dx}{e^x-1}$ ہے (17)

$\log|e^x|+\log|e^x-1|+c$ (2) $\log|e^x|-\log|e^x-1|+c$ (1)

$\log|e^x-1|-\log|e^x|+c$ (3) $\log|e^x+1|-\log|e^x|+c$ (4)

11_11th-Maths-Vol2-Unit11_UM.indd 226 21-02-2023 15:11:48

ہے $\int e^{-4x}\cos x\,dx$ (18)

(1) $\frac{e^{-4x}}{17}[4\cos x-\sin x]+c$

(2) $\frac{e^{-4x}}{17}[-4\cos x+\sin x]+c$

(3) $\frac{e^{-4x}}{17}[4\cos x+\sin x]+c$

(4) $\frac{e^{-4x}}{17}[-4\cos x-\sin x]+c$

ہے $\int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x-1}dx$ (19)

(1) $2\log\left|\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right|+c$

(2) $\log\left|\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right|+c$

(3) $\frac{1}{2}\log\left|\frac{\tan x+1}{\tan x-1}\right|+c$

(4) $\frac{1}{2}\log\left|\frac{\tan x-1}{\tan x+1}\right|+c$

ہے $\int e^{-7x}\sin 5x\,dx$ (20)

(1) $\frac{e^{-7x}}{74}[-7\sin 5x-5\cos 5x]+c$

(2) $\frac{e^{-7x}}{74}[7\sin 5x+5\cos 5x]+c$

(3) $\frac{e^{-7x}}{74}[7\sin 5x-5\cos 5x]+c$

(4) $\frac{e^{-7x}}{74}[-7\sin 5x+5\cos 5x]+c$

ہے $\int x^2 e^{\frac{x}{2}}dx$ (21)

(1) $x^2e^{\frac{x}{2}}-4xe^{\frac{x}{2}}-8e^{\frac{x}{2}}+c$

(2) $2x^2e^{\frac{x}{2}}-8xe^{\frac{x}{2}}-16e^{\frac{x}{2}}+c$

(3) $2x^2e^{\frac{x}{2}}-8xe^{\frac{x}{2}}+16e^{\frac{x}{2}}+c$

(4) $x^2\frac{e^{\frac{x}{2}}}{2}-\frac{xe^{\frac{x}{2}}}{4}+\frac{e^{\frac{x}{2}}}{8}+c$

ہے $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2-1}}dx$ (22)

(1) $\sqrt{x^2-1}-2\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+c$

(2) $\sin^{-1}x-2\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+c$

(3) $2\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|-\sin^{-1}x+c$

(4) $\sqrt{x^2-1}+2\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+c$

ہے $\int \frac{1}{x\sqrt{(\log x)^2-5}}dx$ (23)

(1) $\log\left|x+\sqrt{x^2-5}\right|+c$

(2) $\log\left|\log x+\sqrt{\log x-5}\right|+c$

(3) $\log\left|\log x+\sqrt{(\log x)^2-5}\right|+c$

(4) $\log\left|\log x-\sqrt{(\log x)^2-5}\right|+c$

ہے $\int \sin\sqrt{x}dx$ (24)

(1) $2\left(-\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+\sin\sqrt{x}\right)+c$

(2) $2\left(-\sqrt{x}\cos\sqrt{x}-\sin\sqrt{x}\right)+c$

(3) $2\left(-\sqrt{x}\sin\sqrt{x}-\cos\sqrt{x}\right)+c$

(4) $2\left(-\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}\right)+c$

ہے $\int e^{\sqrt{x}}dx$ (25)

(1) $2\sqrt{x}(1-e^{\sqrt{x}})+c$

(2) $2\sqrt{x}(e^{\sqrt{x}}-1)+c$

(3) $2e^{\sqrt{x}}(1-\sqrt{x})+c$

(4) $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+c$

خلاصہ (SUMMARY)

مشتق	مخالف مشتق
$\frac{d}{dx}(c)=0$، جہاں c ایک مستقل ہے	$\int 0\,dx=c$، جہاں c ایک مستقل ہے
$\frac{d}{dx}(kx)=k$، جہاں k ایک مستقل ہے	$\int k\,dx=kx+c$، جہاں c ایک مستقل ہے
$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)=x^n$	$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c, \quad n\neq -1$، (قوت کا قاعدہ)
$\frac{d}{dx}\log x=\left(\frac{1}{x}\right)$	$\int\frac{1}{x}\,dx=\log\lvert x\rvert+c$
$\frac{d}{dx}(-\cos x)=\sin x$	$\int\sin x\,dx=-\cos x+c$
$\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$	$\int\cos x\,dx=\sin x+c$
$\frac{d}{dx}(\tan x)=\sec^2 x$	$\int\sec^2 x\,dx=\tan x+c$
$\frac{d}{dx}(-\cot x)=\operatorname{cosec}^2 x$	$\int\operatorname{cosec}^2 x\,dx=-\cot x+c$
$\frac{d}{dx}(\sec x)=\sec x\tan x$	$\int\sec x\tan x\,dx=\sec x+c$
$\frac{d}{dx}(-\operatorname{cosec} x)=\operatorname{cosec} x\cot x$	$\int\operatorname{cosec} x\cot x\,dx=-\operatorname{cosec} x+c$
$\frac{d}{dx}(e^x)=e^x$	$\int e^x dx=e^x+c$
$\frac{d}{dx}\left(\frac{a^x}{\log a}\right)=a^x$	$\int a^x dx=\frac{a^x}{\log a}+c$
$\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\sin^{-1}x+c$
$\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)=\frac{1}{1+x^2}$	$\int\frac{1}{1+x^2}dx=\tan^{-1}x+c$

11_11th-Maths-Vol2-Unit11_UM.indd 228 21-02-2023 15:11:57

(1)	اگر k کوئی مستقل ہو، تو $\int kf(x)dx = k\int f(x)\,dx$
(2)	$\int (f_1(x) \pm f_2(x))\,dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$

اگر $\int f(x)\,dx = g(x)+c$، تو $\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\,g(ax+b)+c$

(1)	$\int \tan x\,dx = \log\lvert\sec x\rvert + c$
(2)	$\int \cot x\,dx = \log\lvert\sin x\rvert + c$
(3)	$\int cosecx\,dx = \log\lvert\text{cosec}\,x - \cot x\rvert + c$
(4)	$\int \sec x\,dx = \log\lvert\sec x + \tan x\rvert + c$

بالحصص کے ذریعے تکمیل کا برنولی ضابطہ

اگر u اور v متغیر x کے تفاعلات ہیں تو برنولی اصول ہے۔

$$\int udv = uv - u'v_1 + u''v_2 + \ldots$$

جہاں u'، u''، u''' ..... u کے متواتر مشتق ہیں اور

dv کے متواتر تکملہ v، v_1، v_2، v_3...ہیں

$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\sin bx - b\cos bx] + c$
$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\cos bx + b\sin bx] + c$

$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\log\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert + c$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$
$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + c$	$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log\left\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\right\rvert + c$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \log\left\lvert x+\sqrt{x^2+a^2}\right\rvert + c$

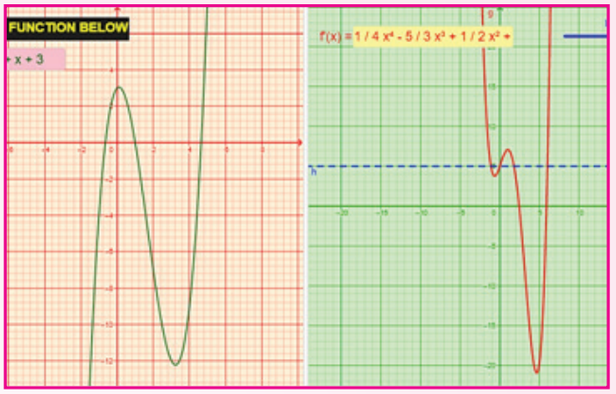
$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$
$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\log\left\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\right\rvert + c$
$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\log\left\lvert x+\sqrt{x^2+a^2}\right\rvert + c$

11_11th-Maths-Vol2-Unit11_UM.indd 229 21-02-2023 15:12:03

ICT CORNER 11(a)

تکملہ احصا

متوقع نتائج

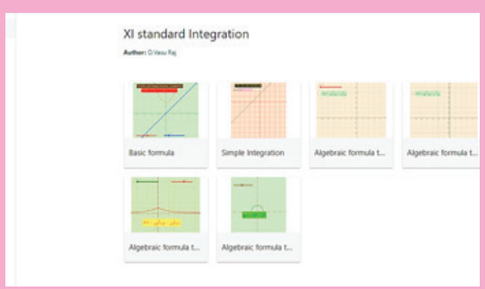


مرحلہ 1:

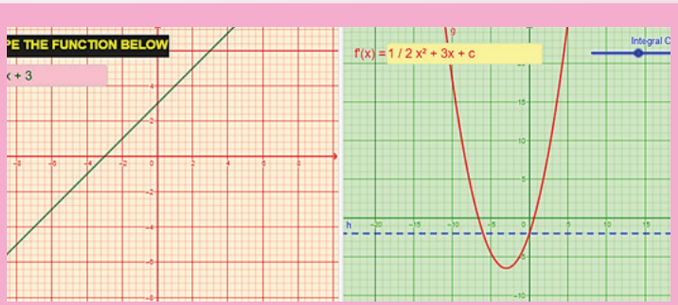
براؤزر کھولیں اور دئے گئے URL لنک ٹیپ کیجئے (یا) QR کوڈ کو اسکین کیجئے۔ "XI تکملہ احصا" جیوجبرا (GeoGebra) نامی ورک بک کھلے گا۔ اس میں آپ کے سبق سے متعلق کی ورک شیٹیں

مرحلہ 2:

ورک شیٹ "آسان تکملہ" کو منتخب کریں ۔ آپ $f(x)$ ڈبے میں کوئی بھی تفاعل درج کرسکتے ہیں۔ $f(x)$ کا بائیں جانب ظاہر ہوگا اور تکمیلی تفاعل دائیں جانب ظاہر ہوگا(نوٹ: کے لئے درج کریں) تکمیل میں مستقل قیمت کو تبدیل کرنے کے لئے سلائیڈر "تکمیلی مستقل" کو منتقل کریں۔



مرحلہ 1



مرحلہ 2

Browse in the link:

XI standard Integration: https://ggbm.at/c63hdegc

LC8NQ

11_11th-Maths-Vol2-Unit11_UM.indd 230 21-02-2023 15:12:05

ICT CORNER 11(b)

تکملہ احصا

متوقع نتائج

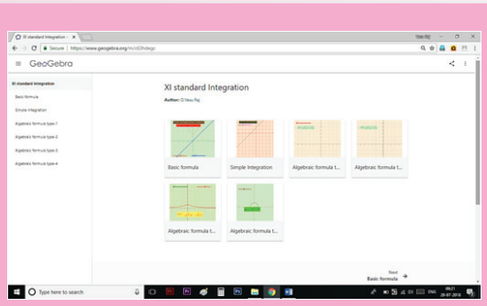


مرحلہ 1:

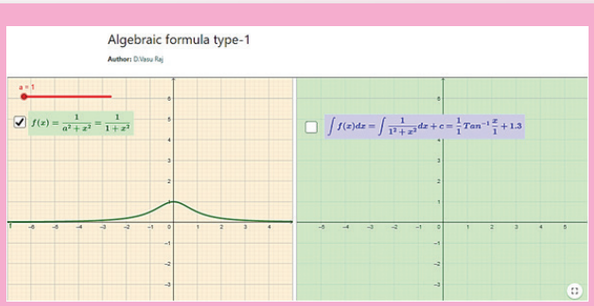
براؤزر کھولیں اور دئے گئے URL لنک ٹیپ کیجئے (یا) QR کوڈ کو اسکین کیجئے۔ "XI تکملہ احصا" جیوجبرا (GeoGebra) نامی ورک بک کھلے گا۔ اس میں آپ کے سبق سے متعلق کی ورک شیٹیں ہیں۔

مرحلہ 2:

ورک شیٹ "الجبریک قسم-" کو منتخب کریں۔بائیں طرف دئے گئے تفاعل کا ترسیم اور تفاعل کا تکملہ دائیں طرف ظاہر ہوتا ہے۔ ترسیم دیکھنے کے لئے دونوں پر کلک کریں۔ آپ قیمت کو تبدیل کرنے کے لئے سلائیڈ "a" کو منتقل کرسکتے ہیں۔ الجبری اقسام کو اس طرح گروہ کیا گیا ہے کہ 4 اقسام دیگر تین الجبری اقسام کو کھولتی ہیں اور مشاہدہ کرتی ہیں۔



مرحلہ 1



مرحلہ 2

Browse in the link:

XI standard Integration: https://ggbm.at/c63hdegc

11_11th-Maths-Vol2-Unit11_UM.indd 231 21-02-2023 15:12:05

باب 12

امکانی نظریہ کا تعارف
(Introduction to Probability Theory)

زندگی کے سب سے اہم سوالات، درحقیقت، زیادہ تر حصّے کے لئے، واقع صرف امکانی مسائل ہیں۔
پیری- سائمن لے پلیس



لے پلیس
1749-1827

12.1 تعارف (Introduction)

1654 میں ایک جواری کا تنازعہ دو مشہور فرانسی ریاضی دانوں کی طرف سے امکان کا ایک ریاضیاتی نظریہ تخلیق کرنے کا باعث بنا، بلیز پاسکل اور پیئر ڈی فرمٹ۔ امکاناتی نظریے کی بنیادی اصول پاسکل اور فرمٹ نے پہلے بار مرتب کئے۔ ایک وسیع تحقیق کے بعد، لے پلیس نے اپنا یادگار کام 1812 میں شائع کیا۔ اور امکانی نظریہ کی بنیاد رکھی۔ شماریات میں، امکان کی بیشین(Bayesian) تشریح بنیادی طور پر لے پلیس نے تیار کی تھی۔

امکانی کا موضوع جدید دنیا کے بہت سے پہلوؤں میں دیکھا جاتا ہے۔ کھیل کا مطالعہ کرنے کے ایک طریقے کے طور پر اس کی آغاز سے، امکانی ریاضی کی ایک طاقتور اور وسیع پیمانے پر قابل اطلاق شاخ میں شامل ہے۔ امکانات کے استعمال لائف انشورنس پر یمیم کے تعین سے لے کر انتخابی نتائج کی پیشن گوئی تک ، گیس میں سالمے (Molecules) کے رویے کی تفصیل تک۔ اس کی افادیت ایک اچھی وجہ ہے کہ امکانات کا مطالعہ اسکول کی نصابی کتاب کے راستے میں ملاہے۔ لفظ "امکان" کی تشریح میں مترادفات شامل ہیں جیسے موقع ، ممکن، شاید، ممکنہ، مشکلات، غیر یقینی صورت حال، پھیلاؤ، خطرہ، توقع، وغیرہ۔

ہماری پوری دینا غیر یقینی صورت حال سے بھری ہوئی ہے۔ ہم ہر روز غیر یقینی صورت حال سے متاثر ہونے والے فیصلے کرتے ہیں۔ غیر یقینی کی پیمائش کرنے کے لئے ہم ریاضی کی ایک شاخ کا رُخ کرتے ہیں جسے امکانی نظریہ کہتے ہیں۔امکان اس ممکنہ کا ایک پیمانہ ہے کہ کوئی واقعہ پیش آئے گا۔

سیکھنے کے مقاصد (Learning Objectives)

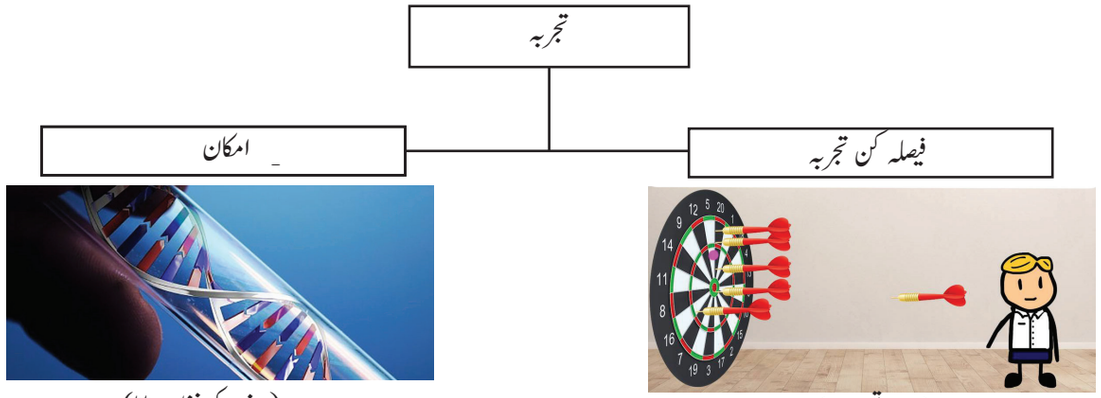
اس باب کے اختتام پر طلباء سے توقع کی جاتی ہے

- امکان کے قدیم نظریہ اور امکان کے محوری نقطہ نظر کو سمجھیں۔
- باہمی اخراج، باہمی اندراج اور مکمل واقعات کو سمجھیں۔
- مشروط امکان اور آزاد مواقع کے تصوارت کو سمجھیں۔
- بائیس کا نظریہ لاگو کریں۔
- روز مرہ کی زندگی میں امکانی نظریہ کا اطلاق کریں۔

12.2 بنیادی تعاریفیں (Basic definitions)

اس سے پہلے کہ ہم امکانی نظریہ کا مطالعہ کریں، آئیے ہم پچھلی جماعتوں کی کلاسوں میں پہلے سے زیر مطالعہ بعض اصطلاحات کی تعریف کو یاد کرتے ہیں جو کثرت سے استعمال ہوتی ہیں۔

12_11th-Maths-Vol2-Unit12_UM.indd 232 21-02-2023 15:13:26



تعریف 12.1

ایک تجربہ کو ایک عمل کے طور پر بیان کیاجاتاہے جس کے لئے اس کا نتیجہ اچھی طرح واقع کیا جاتاہے۔

تعریف 12.2

فیصلہ کن تجربہ ایک ایسا تجربہ ہے جس کے نتائج کی پیشن گوئی کچھ مخصوص، مثالی حالات میں کی جاسکتی ہے۔

تعریف 12.3

سریعی تجربہ (یا غیر فیصلہ کن) ایک تجربہ ہے۔

(i) جس کے تمام ممکنہ نتائج پہلے سے معلوم ہوتے ہیں۔

(ii) جس کا ہر نتیجہ پہلے سے پیشن گوئی کرنا ممکن نہیں ہے، اور

(iii) یکساں حالات میں دوہرایا جاسکتا ہے

سریعی تجربات کے مثالیں ہیں : ایک پانسہ کو 'پھینکا' جاتاہے، ایک سکہ کو 'اچھالا' جاتا ہے ۔

تعریف 12.4

ایک آسان موقع (ابتدائی واقع یا نظیری نقطہ) سریعی تجربہ کا سب سے بنیادی ممکنہ نتیجہ ہے اور اسے مزید تحلیل نہیں کیا جاسکتا ہے۔

تعریف 12.5

ایک نظیری عرصہ سریعی متغیر کے تمام ممکنہ نتائج کا مجموعہ ہے۔ نظیری عرصہ میں ہر نقطہ ایک ابتدائی واقعہ ہے۔

12.1 تشریح (Illustration)

(1) (i) اگر ایک پانسہ کو پھینکا جا تاہے، تو نظیری عرصہ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

(ii) ایک سکہ کو اچھالاجاتاہے، تو نظیری عرصہ $S = \{H, T\}$.

(2) (i) فرض کریں کہ ہم ایک سکّے کو اس وقت تک اچھالا جائے جب تک کہ سرنہ مل جائے۔ کوئی پہلے سے کہہ نہیں سکتا کہ کتنے اچھال درکار ہونگےاور اس طرح نظیری عرصہ بھی $S = \{H, TH, TTH, TTTH, ...\}$ ایک لامحدود سٹ ہے۔

(ii) کاونٹر میں ریل گاڑی کی ٹکٹ خریدنے کے منتظر مسافروں کی تعداد سے وابستہ نظری عرصہ $S=\{0,1,2,...\}$

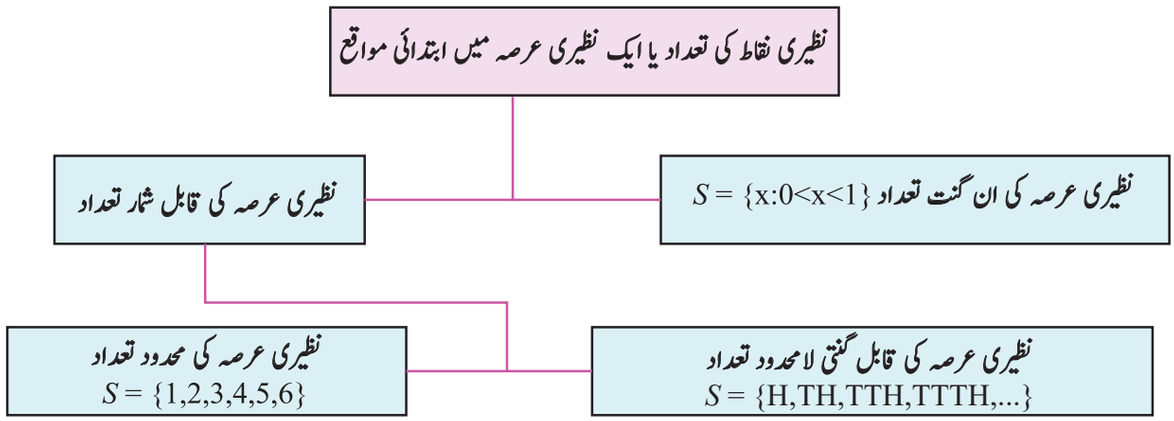
(3) (i) اگر تجربہ سریعی طور پر 0 اور 1، کے درمیان منتخب کرنے پر مشتمل ہیں تو نظری عرصہ $S = \{ x: 0< x <1\}$

(ii) ٹیوب لائٹ کی زندگی کی لمبائی (t گھنٹوں میں) کے لئے نظیری عرصہ $S = \{ t: 0 < t<1000\}$

12_11th-Maths-Vol2-Unit12_UM.indd 233 21-02-2023 15:13:28

(2) اور (3) سے، کسی کو دو قسم کے لامحدود سیٹوں میں فرق کرنے کی ضرورت ہے، جہاں ایک قسم دوسری سے نمایاں طور پر "بڑی" ہوتی ہے۔ خاص طور پر، (2) میں S کو قابل گنتی لامحدود کہا جاتا ہے، جبکہ (3) میں S کو ان گنت لامحدود کہا جاتا ہے۔ حقیقت یہ ہے کہ کوئی قابل گنتی لامحدود سٹ کے عناصر کی فہرست بناسکتا ہے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ سٹ کو طبعی اعداد $\mathbb{N}$ کے ساتھ ایک تا ایک مطابقت میں رکھا جاسکتا ہے۔ دوسری طرف، آپ عناصر کو ان گنت سٹ میں درج نہیں کرسکتے۔

مندرجہ بالا مثال سے، کوئی سمجھ سکتا ہے کہ نظیری عرصہ ابتدائی تواقع کی قابل شمار یا ان گنت تعداد پر مشتمل ہوسکتی ہے۔



12.3 محدود نظیری عرصہ (Finite sample space)

اس حصّہ میں ہم اپنے نظیری عرصہ کو محدود کرتے ہیں جن میں زیادہ سے زیادہ محدود تعداد میں نقاط ہوتی ہے۔

مواقع کے اقسام (Types of events)

آؤ ہم مواقع کی کچھ اہم اقسام کی وضاحت کرتے ہیں جو اس باب میں کثرت سے استعمال ہوتے ہیں

- یقینی موقع
- ناممکن موقع
- متمم موقع
- باہمی اخراج کرنے والے موقع
- باہم اندراج کرنے والے موقع
- مکمل موقع
- مساوی وقوع پذیری موقع
- آزاد موقع (امکانات کے تصورات سیکھنے کے بعد وضاحت کی گئی)

تعریف 12.6

جب نظیری عرصہ محدود ہو، نظیری عرصہ کا کوئی تحتی سٹ ایک موقع ہے۔ یعنی، نظیری عرصہ کے قوتی سٹ $\mathscr{P}(S)$ کے تمام عناصر کو مواقع کے طور پر بیان کیا گیا ہے۔ ایک موقع نظیر نقاط یا ابتدائی مواقع کا مجموعہ ہے۔

نظیری عرصہ S کو یقینی موقع کہا جاتا ہے۔ S میں خالی سٹ $\varnothing$ کو ناممکن موقع کہا جاتا ہے۔

تعریف 12.7

ہر موقع A کے لئے، ایک اور موقع سے مطابقت رکھتا ہے۔ جسے $\overline{A}$ کا متمم موقع کہا جاتا ہے۔ اسے بھی موقع کہا جاتا ہے "A" نہیں۔

12.2 تشریح (Illustration)

فرض کرو کہ نظیری عرصہ S دیا گیا ہے $S = \{1,2,3,4\}$

S کے تمام ممکنہ تحتی سٹ (S کا قوتی سٹ) کا سٹ $\mathscr{P}(S)$ ہونے دیں۔

$$\mathscr{P}(S) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\},$$
$$\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$$

12_11th-Maths-Vol2-Unit12_UM.indd 234 21-02-2023 15:13:28

(i) $\mathscr{P}(S)$ کے تمام عناصر مواقع ہیں۔

(ii) $\varnothing$ ایک ناممکن موقع ہے۔

(iii) $\{4\},\{3\},\{2\},\{1\}$، ایک آسان مواقع یا ابتدائی مواقع ہیں۔

(vi) $\{1, 2, 3, 4\}$ ایک یقینی مواقع ہیں

تعریف 12.8

دو مواقع بیک وقت نہیں ہوسکتے ہیں تو اسے **باہمی اخراج مواقع** کہتے ہیں $A_1, A_2, A_3, ..., A_k$ باہمی اخراج ہیں جس کا مطلب $A_i \cap A_j = \varnothing$ کے لئے، $i \neq j$ i

تعریف 12.9

دو مواقع **باہمی اندارج** ہوتے ہیں جب دونوں بیک وقت ہوسکتے ہیں

$A_1, A_2, A_3, ..., A_k$ باہمی اندارج ہیں۔ جس کا مطلب ہے $A_i \cap A_j \neq \varnothing$ کے لئے، $i \neq j$ ہے۔

12.3 تشریح (Illustration)

جب ہم پانسہ کو پھینکے جاتے ہیں نظیری عرصہ $S = \{1,2,3,4,5,6\}$

(i) کیونکہ $\{1, 3\} \cap \{2, 4, 5, 6\} = \varnothing$, مواقع $\{1,3\}$ اور $\{2, 4,5,6\}$ باہمی اخراج مواقع ہیں

(ii) مواقع $\{2,3,5\},\{1,6,\}$ باہمی اخراج ہیں

(iii) مواقع $\{5,6\},\{2,3,5\}$ باہمی اندراج ہیں، کیونکہ $\{2, 3, 5\} \cap \{5, 6\} = \{5\} \neq \varnothing$

تعریف 12.10

$A_1, A_2, A_3, ..., A_k$ کو **مکمل مواقع** کہاجاتاہے۔ اگر، $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_k = S$ ۔

تعریف 12.11

$A_1, A_2, A_3, ..., A_k$ کو **باہمی اخراج** اور **مکمل مواقع** کہاجاتاہے اگر

(i) $A_i \cap A_j = \varnothing$ کے لئے، $i \neq j$ i ہے j۔ (ii) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_k = S$

12.4 تشریح (Illustration)

جب ایک پانسہ پھینکا جاتاہے۔ $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ نظیری عرصہ

چند مواقع $\{6\},\{4,6\},\{1,3,5\},\{2,3\}$ اور $\{1,5\}$ یہ ہیں۔

(i) کیونکہ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{2, 3\} \cup \{1, 3, 5\} \cup \{4, 6\}$ (S نظیری عرصہ)، $\{2,3\},\{1,3,5\},\{4,6\}$ مواقع مکمل مواقع ہیں۔

(ii) اسی طرح $\{4,6\},\{2,3\}$ اور $\{1,5\}$ بھی مکمل مواقع ہیں۔

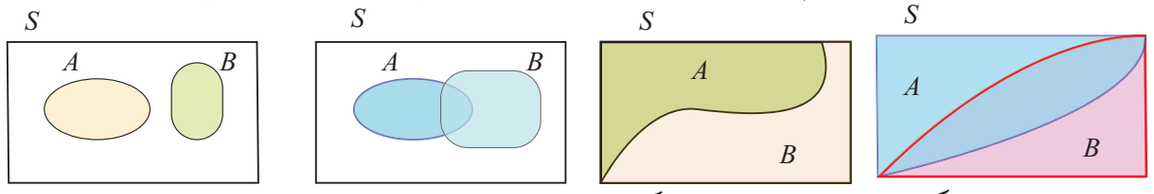
(iii) $\{6\},\{4,6\},\{1,3,5\}$ اور $\{1,5\}$ مکمل مواقع نہیں ہیں۔

($\{1, 3, 5\} \cup \{4, 6\} \cup \{6\} \cup \{1, 5\} \neq S$ کیونکہ)

(vi) $\{4,6\},\{2,3\}$ اور $\{1,5\}$ باہمی اخراج اور مکمل مواقع ہیں، کیونکہ

$\{2,3\} \cap \{4,6\} = \varnothing, \{2,3\} \cap \{1,5\} = \varnothing, \{4,6\} \cap \{1,5\} = \varnothing$ اور $S = \{1, 5\} \cup \{4, 6\} \cup \{2, 3\}$

نظیری عرصہ سے وابستہ مواقع کے اقسام کو ون نقشہ کے لحاظ سے دیکھنا آسان ہے، جیسا کہ ذیل میں بیان کیا گیا۔



A اور B باہمی اخراج ہیں | A اور B باہمی اندراج ہیں | A اور B باہمی اخراج اور مکمل ہیں | A اور B باہمی اندراج اور مکمل ہیں

12_11th-Maths-Vol2-Unit12_UM.indd 235 21-02-2023 15:13:29

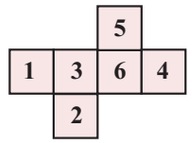
تعریف 12.12

ایک جیسا موقعہ واقع ہونے کے مواقع کو مساوی وقوع پذیری مواقع کہتے ہیں۔

مساوی وقوع پذیری مواقع کے مثال: فرض کرو ایک پانسہ کو پھینکا جاتا ہے۔

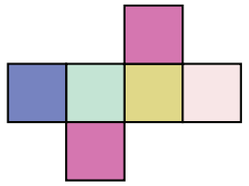
چہرے پر عدد	1	2	3	4	5	6
واقع ہونے کا امکان	1	1	1	1	1	1





غیر مساوی وقوع پذیری مواقع کے مثال: خاکہ میں دیا گیا ایک رنگ والا پانسہ کو پھینکا جاتا ہے۔

چہرے پر رنگ					
واقع ہونے کا امکان	1	1	1	2	1





اس طرح، فرض کریں کہ اگر ہم ایک سکہ کو اُچھالتے ہیں تو، سر یا پشت ملنے کے مواقع مساوی وقوع پذیری ہیں۔

نظیری عرصہ کو معلوم کرنے کے طریقے (Methods to find sample space)

12.5 تشریح (Illustration)

دو سکوں کو اچھالا جاتا ہے، نظیری عرصہ ہے۔

(i) $S = \{H,T\} \times \{H,T\} = \{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$ یا $S = \{H,T\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$

(ii) اگر ایک سکہ اور ایک پانسہ کو بیک وقت پھینکا جاتا ہے تو نظیری عرصہ ہے

$S = \{H,T\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$ = $\{H1,H2,H3,H4,H5,H6,T1,T2,T3,T4,T5,T6\}$

یا

$S = \{(H,1),(H,2),(H,3),(H,4),(H,5),(H,6),(T,1),(T,2),(T,3),(T,4),(T,5),(T,6)\}$.

نیز سکّے اور پانسے کے نتائج کے ترتیب کو آپس میں بدل سکتے ہیں۔مندرجہ ذیل جدول کچھ سریعی تجربات کے لئے نظیری عرصہ دیتا ہے۔

سریعی متغیر	نتائج کی کل تعداد	نظیری عرصہ
ایک سکہ کو اچھالنا	$2^1 = 2$	$\{H,\ T\}$
دو سکوں کو اچھالنا	$2^2 = 4$	$\{HH,\ HT,\ TH,\ TT\}$
تین سکوں کو اچھالنا	$2^3 = 8$	$\{HHH,\ HHT,\ HTH,\ THH,\ HTT,\ THT,\ TTH,\ TTT\}$
پانسہ کو پھینکنا	$6^1 = 6$	$\{1,\ 2,3,\ 4,\ 5,6\}$
دو پانسہ کو پھینکنا یا سکے کو دومرتبہ پھینکنا	$6^2 = 36$	$\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),$ $(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),$ $(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),$ $(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),$ $(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),$ $(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$
52 تاش کے پتوں میں سے ایک پتے کا اٹھانا	$52^1 = 52$	دل سرخ رنگ میں ♥ A 2 3 4 5 6 7 8 9 10 J Q K ڈائمنڈ سرخ رنگ میں ♦ A 2 3 4 5 6 7 8 9 10 J Q K پان سیاہ رنگ میں ♠ A 2 3 4 5 6 7 8 9 10 J Q K پھول سیاہ رنگ میں ♣ A 2 3 4 5 6 7 8 9 10 J Q K

12_11th-Maths-Vol2-Unit12_UM.indd 236 21-02-2023 15:13:30

علامتیں (Notations)

فرض کرو کہ A اور B مواقع ہیں۔

(i) $A \cup B$ کا مطلب A یا B یا دونوں مواقع ہیں۔

(ii) $A \cap B$ کا مطلب A اور B کا بیک وقت واقع ہونا۔
$A \cap B$ کو AB کے طور پر لکھاجاسکتاہے۔

(iii) $\overline{A}$ یا A' یا A^c کا مطلب A واقع نہیں ہوتاہوں۔

(iv) $(A \cap \overline{B})$ کا مطلب صرف A واقع ہوں۔

ترجیح : وہ علم جو نظریاتی گھٹاؤ یا قیاس کرنے سے پہلے ہو، تجربہ یا مشاہدہ سے نہیں۔

12.4 امکانات (Probability)

12.4.1 امکان کی قدیم تعریف (ایک ترجیح)
(مساوی وقوع پذیری میں برنولی کا اصول)

پچھلا : وہ علم جو تجربہ یا مشاہدہ سے پہلے ہو۔

اس پہلے کے جماعتوں میں ہم نے امکان کی تعدد (پچھلا) کی تعریف کا مطالعہ کیا ہے اور مسائل حل ہوگئے ہیں۔ اب آیئے امکانی نظریہ کے محوری نقطہ نظر کی بنیادی باتیں سیکھیں۔

قدیم نظریاتی کا بنیادی مفروضہ یہ کہ سریعی تجربہ کی نتائج مساوی وقوع پذیری ہوتے ہیں۔ اگر n مکمل ہوں، ایک تجربہ کے باہمی اخراج اور مساوی وقوع پذیر نتائج اور ان میں سے m، موقع A کے لئے سازگار ہے تو A کے ریاضیاتی امکان کو $\frac{m}{n}$ نسبت سے تعبیر کیا گیاہے۔ دوسرے الفاظ میں،

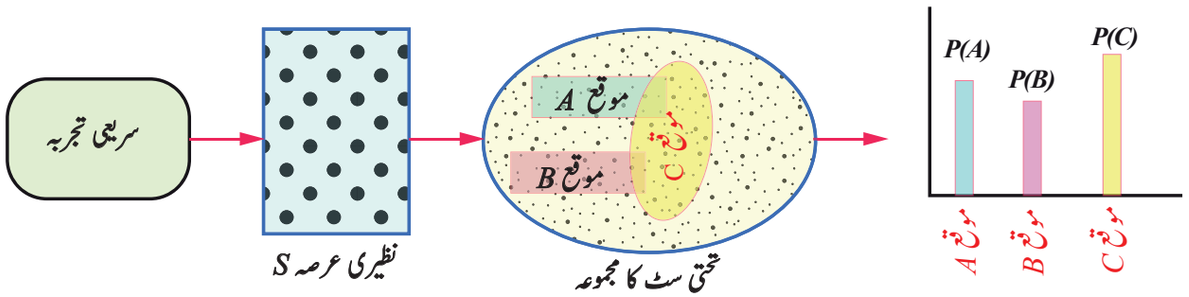
$$P(A) = \frac{m}{n}$$

تعریف 12.13

فرض کرو کے S کو سریعی تجربہ سے وابستہ نظیری عرصہ ہونے دیں اور A ایک موقع ہو۔ فرض کریں کہ $n(S)$ اور $n(A)$ بالترتیب S اور A کے عناصر کی تعداد ہیں۔تو موقع A کے امکان کو اس طرح دیاگیا ہے۔

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{A \text{ کے لیے سازگار صورتوں کی تعداد}}{S \text{ میں صورتوں کی مکمل تعداد}}$$

ہر امکانی سانچہ (probabilistic model) میں ایک بنیادی عمل شامل ہوتا ہے جو مندرجہ ذیل تصویر میں دکھایاگیا ہے۔



امکان کی قدیم تعریف اس کے اطلاق میں صرف ان حالات تک محدود ہے۔جہاں ممکنہ نتائج کی ایک محدود تعداد موجود ہو۔ اس نے بنیادی طور پر منفصل مواقع پر غور کیا اور اس کے طریقے بنیادی طور پر مشترکہ تھے۔ یہ اسے کچھ اہم سریعی تجربات کے لئے ناقابل قرار دیتا ہے جیسے ایک سکہ اُچھالا جائے جب تک کہ سر ظاہر نہ ہو جو کہ نتائج کے لامحدود سٹ کے امکان کو پرواز دیتاہے۔

12_11th-Maths-Vol2-Unit12_UM.indd 237 21-02-2023 15:13:31



N.A. کولموگوروف

امکان کی قدیم میں اس قسم حدود امکان کی جدید تعریف کے ارتقاء کا باعث بنی جو سٹ کے تصور پر مبنی ہے۔ یہ ایک محوری نقطہ نظر کے طور پر جاناجاتاہے۔

جدید امکانی نظریاتی کے بنیادیں روسی ریاضی دان آندرے نیکولائیوچ کولموگوروف (Andrey Nikolayevich Kolmogorov) نے رکھی تھی۔ جنہوں نے رچرڈ وان مئی سس کے متعارف کردہ نظری عرصہ کہ تصور کو جوڑا اور نظریہ کی پیمائش کی اور 1933 میں امکانی نظریہ کے لئے اپنا محوری نظام پیش کیا۔ ہم N.A. کولموگوروف کی طرف سے تجویزکردہ محوری نقطہ نظر کو متعارف کراتے ہیں۔ اس کی بنیاد پر، امکانی نظریہ کا جدید نظریہ کو منطقی طور پر کامل ڈھانچہ بنانا ممکن ہے۔ امکان کا قدیم نظریہ محوری امکان کی ایک خاص صورت ہے۔ محور اصولوں کا ایک مجموعہ ہے جو کہ امکانات کے نظریات کو ثابت کرنے لئے استعمال کیا جاسکتا ہے۔

12.4.2 امکان کے لئے نقطہ نظر (Axiomatic approach to Probability)

امکان کے محور (Axioms of probability)

فرض کروکہ S ایک محدود نظیری عرصہ ہو۔ فرض کرو $\mathscr{P}(S)$ ایک قسم کے مواقع ہیں۔ اور فرض کرو کہ P کو $\mathscr{P}(S)$ پر تعین کردہ ایک حقیقی اعداد تفاعل ہونے دیں۔ تو $P(A)$ موقع A کا امکانی تفاعل کہلاتاہے، جب درج ذیل محورات گرفت میں ہوں:

$[P_1]$	کسی بھی موقع A کے لئے،	$P(A) \geq 0$	(غیر منفی محور)
$[P_2]$	کسی بھی دو باہمی اخراج مواقع کے لئے	$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$	(جمع کا محور)
$[P_3]$	یقینی موقع کے لئے	$P(S) = 1$	(مجموعی محور)

نوٹ 12.1

(i) $0 \leq P(A) \leq 1$

(ii) اگر $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ نظیری عرصہ S میں باہمی اخراج مواقع کے طور پر ہیں تو

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots + P(A_n)$$

محدود امکانی عرصوں میں نظریات(بغیر ثبوت)

جب نتائج مساوی وقوع پذیر ہوں تو مسئلہ 12.1 لاگو ہوتا ہے، ورنہ مسئلہ 12.2 لاگو ہوتا ہے۔

مسئلہ 12.1

فرض کرو کہ S ایک نظیری عرصہ ہو اور S کے کسی تحتی سٹ A ہوں،اور $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ تو $P(A)$ امکان کی محوریں $[P_1]$، $[P_2]$ اور $[P_3]$ کو پورا کرتاہے۔

مسئلہ 12.2

فرض کرو کہ S ایک محدود نظیری عرصہ $S = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ لیں۔ S میں ہر نقطہ a_i کو ایک حقیقی عدد مقرر کرکے ایک محدود امکان کی عرصہ حاصل کی جاتی ہے۔ p_i کو a_i کا امکان کہاجاتاہے، جو مندرجہ ذیل خصوصیات کو مطمئن کرتاہے:

(i) ہر ایک $p_i \geq 0$ (ii) p_i کا حاصل جمع 1 ہے، یعنی $\sum p_i = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_1 = 1$

اگر موقع A کے امکان $P(A)$, کو A میں نقاط کے امکانات کا حاصل جمع کہاجاتاہے تو تفاعل $P(A)$, امکانی $[P_1]$، $[P_2]$اور $[P_3]$ کے محور کو مطمئن کرتاہے۔

نوٹ: بعض اوقات ایک محدود نظیری عرصہ میں نقاط اور ان کے مقرر کردہ امکانات کو جدول کی شکل میں مندرجہ ذیل دیاجاتاہے۔

نتائج	a_1	a_2	a_3	...	a_n
امکان	p_1	p_2	p_3	...	p_n

12_11th-Maths-Vol2-Unit12_UM.indd 238 21-02-2023 15:13:34

ایک نمونہ کے بارے میں کچھ عام فہم قیاس سے شروع ہونے والے امکانی اصولوں کی تشکیل کا ایک مثال ہے۔

12.6 تشریح (Illustration)

(1) چلئے $S=\{1,2,3\}$. لیں۔ فرض کریں کہ S کا قوتی سٹ $\mathscr{P}(S)$ ہے اور $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$ ہو

تو $P(\{1\})=\frac{1}{3}, P(\{2\})=\frac{1}{3}$, اور $P(\{3\})=\frac{1}{3}$

امکانات $[P_1]$، $[P_2]$اور $[P_3]$ کے محور کو مطمئن کرتا ہے۔یہاں تمام نتائج مساوی وقوع پذیری ہیں۔

(2) چلئے $S=\{1,2,3\}$ لیں۔ فرض کریں کہ S کا قوتی سٹ $\mathscr{P}(S)$ ہے۔

اگر S کا موقع A میں امکان $P(A)$, کو A کے نقاط کی امکانات کا حاصل جمع تعین کرتا ہے

تو $P(\{1\})=\frac{1}{2}, P(\{2\})=\frac{1}{4}, P(\{3\})=\frac{1}{4}$,

جو امکانات $[P_1]$، $[P_2]$اور $[P_3]$ کے محور کو مطمئن کرتا ہے۔

(3) چلئے $S=\{1,2,3\}$ لیں۔ فرض کریں کہ S کا قوتی سٹ ہے۔اگر امکان $P(A)$ کو اگر S کے موقع A میں امکان $P(A)$ کو A کے نقاط کی امکانات کا حاصل جمع کرتا ہے

تو $P(\{1\})=0, P(\{2\})=\frac{1}{\sqrt{2}}$ اور $P(\{3\})=1-\frac{1}{\sqrt{2}}$

جو امکانات $[P_1]$، $[P_2]$اور $[P_3]$ کے اوپر دئے ہوئے محوروں کو مطمئن کرتا ہے۔

(2) اور (3) میں، نتائج مساوی وقوع پذیر ی نہیں ہیں۔

نوٹ 12.2

غیر ناطق اعداد بھی امکانات کے طور پر کام کرسکتے ہیں۔

جماعتوں کی سرگرمی: ہر طالب علم ایک سکہ 10 مرتبہ اچھالتا ہے ۔

محسوب کرو $p=\frac{\text{واقع ہونے والی سروں کی تعداد}}{10}$

سروں سے اچھال کا مجموعی تناسب معلوم کریں جیسے جیسے اچھال کی تعداد بڑھتی ہے، $p\to\frac{1}{2}$

مثال 12.1

اگر کسی تجربہ کے ٹھیک تین ممکنہ باہمی اخراج کے نتائج A، B اور C ہیں۔ ہر ایک صورت میں جائزہ لے کہ کیا امکانی تقویض ممکن ہے۔

(i) $P(A)=\frac{4}{7}$, $P(B)=\frac{1}{7}$, $P(C)=\frac{2}{7}$.

(ii) $P(A)=\frac{2}{5}$, $P(B)=\frac{1}{5}$, $P(C)=\frac{3}{5}$.

(iii) $P(A)=0.3$, $P(B)=0.9$, $P(C)=-0.2$.

(iv) $P(A)=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $P(B)=1-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $P(C)=0$.

(v) $P(A)=0.421$, $P(B)=0.527$ $P(C)=0.042$.

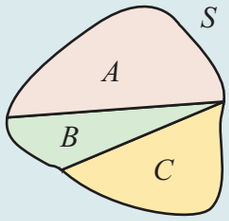
12_11th-Maths-Vol2-Unit12_UM.indd 239 21-02-2023 15:13:35

حل

کیونکہ تجربہ ٹھیک 3 ممکنہ باہمی اخراج نتائج A، B اور C ہیں، وہ مکمل مواقع ہونی چاہئے۔

$$\Rightarrow S = A \cup B \cup C$$

لہذا، امکانات کے محور سے $P(A) \geq 0$، $P(B) \geq 0$، $P(C) \geq 0$ اور $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) = P(S) = 1$



(i) دیاگیاہے $P(A) = \frac{4}{7} \geq 0$، $P(B) = \frac{1}{7} \geq 0$ اور $P(C) = \frac{2}{7} \geq 0$

نیز $P(S) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{4}{7} + \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = 1$

لہذا، امکان کی تفویض ممکن ہے۔

(ii) دیاگیاہے $P(A) = \frac{2}{5} \geq 0$، $P(B) = \frac{1}{5} \geq 0$ اور $P(C) = \frac{3}{5} \geq 0$

مگر $P(S) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{6}{5} > 1$

لہذا یہ تفویض ممکن نہیں ہے۔

(iii) کیونکہ $P(C) = -0.2$ ایک منفی ہے، یہ تفویض ممکن نہیں ہے

(iv) یہ تفویض ممکن ہے کیونکہ

$P(A) = \frac{1}{\sqrt{3}} \geq 0$، $P(B) = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \geq 0$ اور $P(C) = 0 \geq 0$

$P(S) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{1}{\sqrt{3}} + 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + 0 = 1$

(v) اگر چہ $P(A) = 0.421 \geq 0$، $P(B) = 0.527 \geq 0$ اور $P(C) = 0.042 \geq 0$

امکان کا حاصل جمع

$P(S) = P(A) + P(B) + P(C) = 0.421 + 0.527 + 0.042 = 0.990 < 1$

لہذا، یہ تفویض ممکن نہیں ہے۔

مثال 12.2

ایک سالم عدد کو پہلے دس مثبت سالم اعداد سے سریعی طور پر منتخب کیاجاتاہے۔ امکان معلوم کرو کے (i) ایک جفت عدد ہو (ii) 3 کا ضریب ہو

حل

نظیری عدصہ

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$، $n(S) = 10$ ہے

فرض کرو کہ A جفت عدد منتخب کرنے کا موقع اور

B تین کے ضریب کا ایک سالم عدد منتخب کرنے کا موقع

$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$، $n(A) = 5$

$B = \{3, 6, 9\}$، $n(B) = 3$

12_11th-Maths-Vol2-Unit12_UM.indd 240 21-02-2023 15:13:39

P (جفت عدد کا انتخاب) $= P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}.$

P (تین کے ضریب کا ایک سالم عدد کا انتخاب) $= P(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)} = \dfrac{3}{10}.$

مثال 12.3

تین سکّے بیک وقت اچھالے جاتے ہیں (i) ٹھیک ایک سر (ii) کم از کم ایک سر (iii) زیادہ سے زیادہ ایک سر، حاصل کرنے کا امکان معلوم کرو۔

حل

ایک سکہ تین بار اچھالا جاتا ہے = نوٹ کریں کہ تین سکے بیک وقت اچھالے جاتے ہیں۔

نظیری عرصہ $S = \{H,T\} \times \{H,T\} \times \{H,T\}$

$\{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$، $n(S) = 8$

فرض کریں کہ A ٹھیک ایک سر حاصل ہونے کا موقع، B کم از کم ایک سر حاصل ہونے کا موقع ہو اور C زیادہ سے زیادہ ایک سر حاصل ہونے کا موقع ہو۔

$A = \{HTT, THT, TTH\};\ n(A) = 3$

$B = \{HTT, THT, TTH, HHT, HTH, THH, HHH\};\ n(B) = 7$

$C = \{TTT, HTT, THT, TTH\};\ n(C) = 4$

لہذا، مطلوبہ امکانات ہیں

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{8} \qquad \text{(i)}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{7}{8} \qquad \text{(ii)}$$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \qquad \text{(iii)}$$



نوٹ 12.3

جب نظیری عرصہ میں عناصر کی تعداد کافی کم ہوتی ہے تو ہم مواقع میں موجود عناصر کو انگلی کی گنتی سے حل کرسکتے ہیں۔ لیکن جب عناصر کی تعداد گننے کے لئے بہت زیادہ ہوتو تالیفیات (combinatorics) مسائل کو حل کرنے میں ہماری مدد کرتا ہے۔

مندرجہ ذیل مسئلہ کے لئے، تالیفیات کا استعمال نظیری عرصہ اور مواقع کے عناصر کی تعداد کو معلوم کرنے کے لئے کہاجاتا ہے۔

مثال 12.4

فرض کرو کہ 10 سکّوں کو اچھالا جاتا ہے۔ (i) ٹھیک دو سر (ii) زیادہ سے زیادہ دو سر (iii) کم از کم دو سر، حاصل ہونے کا امکان معلوم کرو۔

حل

ایک سکہ دس بار اچھالا جاتا ہے = 10 سکوں کو بیک وقت اچھالا جاتا ہے

فرض کروہ کہ S نظیری عرصہ ہے

یعنی $S = \overbrace{\{H,T\} \times \{H,T\} \times \{H,T\} \times \cdots \times \{H,T\}}^{10 \text{ مرتبہ}}$

12_11th-Maths-Vol2-Unit12_UM.indd 241 21-02-2023 15:13:44

فرض کرو کہ A ٹھیک دو سر حاصل ہونے کا موقع ،

B زیادہ سے زیادہ دو مرتبہ سر حاصل ہونے کا موقع، اور

C کم از کم دو سر حاصل ہونے کا موقع

جب 10 سکّوں کو اچھالا جاتا ہے۔ نظیری عرصوں میں عناصر کی تعداد $2^n = 2^{10} = 1024$ ہے۔

$$n(S) = 1024$$

$$n(A) = {}^{10}C_2 = 45$$

$$n(B) = {}^{10}C_0 + {}^{10}C_1 + {}^{10}C_2 = 1 + 10 + 45 = 56$$

$$n(C) = {}^{10}C_2 + {}^{10}C_3 + {}^{10}C_4 + \cdots + {}^{10}C_{10}$$

$$= n(S) - ({}^{10}C_0 + {}^{10}C_1) = 1024 - 11 = 1013$$

مطلوبہ امکانات ہیں

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{45}{1024} \qquad \text{(i)}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{56}{1024} = \frac{7}{128} \qquad \text{(ii)}$$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{1013}{1024}. \qquad \text{(iii)}$$

مثال 12.5

فرض کرو کہ ایک پانسہ کو پھینکا جاتا ہے۔

(i) ایک جفت عدد (ii) تین کا ضریب ، حاصل کرنے کا امکان معلوم کرو۔

حل

فرض کرو کہ S نظیری عرصہ ہے،

A جفت حاصل کرنے کا موقع،

B تین کا ضریب حاصل کرنے کا موقع،

لہذا،

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad \Rightarrow n(S) = 6$$

$$A = \{2, 4, 6\} \quad \Rightarrow n(A) = 3$$

$$B = \{3, 6\} \quad \Rightarrow n(B) = 2$$

مطلوبہ امکانات ہیں

(i) P (جفت عدد کا حاصل کرنا) $= P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

(ii) P (تین کا ضریب حاصل کرنا) $= P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

12_11th-Maths-Vol2-Unit12_UM.indd 242 21-02-2023 15:13:44

مثال 12.6

جب ایک جوڑی پانسہ کو پھینکا جاتا ہے تو حاصل جمع

(i) 7 (ii) 7 یا 9 (iii) 7 یا 12، حاصل کرنے کا امکانات معلوم کریں۔

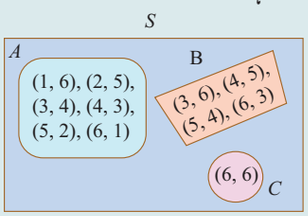
حل

نظیری عرصہ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$S = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),$$
$$(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),$$
$$(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),$$
$$(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),$$
$$(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),$$
$$(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

ممکنہ نتائج کی تعداد $= 6^2 = 36 = n(S)$

فرض کرو کہ A حاصل جمع 7 ملنے کا موقع، B حاصل جمع 9 ملنے کا موقع اور C حاصل جمع 12 ملنے کا موقع ہے۔ تو



$$A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\} \Rightarrow n(A) = 6$$
$$B = \{(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)\} \Rightarrow n(B) = 4$$
$$C = \{(6,6)\} \Rightarrow n(C) = 1$$

(i) P (حاصل جمع 7 کا ملنا) $= P(A)$

$$= \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(ii) P (حاصل جمع 7 یا 9 کا ملنا) $= P(A$ یا $B) = P(A \cup B)$

$$= P(A) + P(B)$$

(A اور B باہمی اخراج ہیں، یعنی $A \cap B = \varnothing$)

$$= \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{36} + \frac{4}{36} = \frac{5}{18}$$

(iii) P (حاصل جمع 7 یا 12 کا ملنا) $= P(A$ یا $C) = P(A \cup C)$

$= P(A) + P(C)$ (A اور C باہمی اخراج ہیں)

$$= \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{6}{36} + \frac{1}{36} = \frac{7}{36}.$$

مثال 12.7



اس سال FIDE (والڈ شطرنج فیڈریشن) کپ جیت نے کے لئے تین افراد X، Y اور Z شطرنج کے مقابلے میں کھیلنے جارہے ہیں۔ X کی جیت Y کے جیت سے تین گناہ زیادہ ہے اور Y کی جیت Z کی جیت سے دو گناہ زیادہ ہے۔ کپ جیت نے کے لئے X، Y اور Z کا متعلقہ امکان معلوم کرو۔

حل

A، B اور C کو اس سال X، Y اور Z کے ذریعے بالترتیب FIDE کپ جیت نے کا موقع ہونے دیں۔

12_11th-Maths-Vol2-Unit12_UM.indd 243 21-02-2023 15:13:44

دیا گیا ہے کہ X کی جیت Y کی جیت سے تین گنا زیادہ ہے۔

$$A : B :: 3 : 1. \quad (1)$$

Y کی جیت Z کی جیت سے دو گناہ زیادہ ہے۔

$$B : C :: 2 : 1 \quad (2)$$

(1) اور (2) میں

$$A : B : C :: 6 : 2 : 1$$

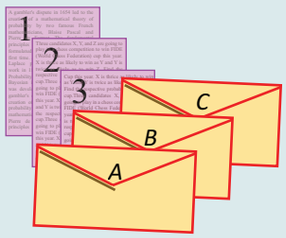
$A = 6k$، $B = 2k$، $C = k$، جہاں k متناسب مستقل ہے۔

فرد X کپ جیت نے کا امکان ہے $P(A) = \frac{6k}{9k} = \frac{2}{3}$

فرد Y کپ جیت نے کا امکان ہے $P(B) = \frac{2k}{9k} = \frac{2}{9}$ اور

فرد Z کپ جیت نے کا امکان ہے $P(C) = \frac{k}{9k} = \frac{1}{9}$.

مثال 12.8



تین خطوط تین مختلف افراد کو لکھے گئے ہیں اور تین لفافوں پر پتے بھی لکھے گئے ہیں۔ پتوں کو دیکھے بغیر کیا امکان ہے۔ (i)ٹھیک ایک خط صحیح لفافہ میں جاتاہے اور(ii) خطوط میں سے کوئی بھی صحیح لفافوں میں نہیں جاتاہے؟

حل

فرض کرو کہ A، B اور C لفافوں کی نشاندہی کریں ۔اور 1، 2 اور 3 متعلقہ خطوط کی نشاندہی کریں۔

لفافوں میں ڈالے گئے خطوط کا مختلف مجموعہ جدول میں دیا گیا ہے۔

فرض کرو کہ C_i کو مواقع کے نتائج کی نشاندہی کرنے دیں۔

فرض کرو کہ X صرف ایک صحیح لفافے میں خط ڈالنے کا موقع ہے۔

فرض کرو کہ Y کسی بھی صحیح لفافوں میں خطوط نہیں ڈالنے کا موقع ہے۔

نتائج

لفافے	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6
A	1	1	2	2	3	3
B	2	3	1	3	1	2
C	3	2	3	1	2	1

$$S = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\}, \quad n(S) = 6$$

$$X = \{c_2, c_3, c_6\}, \quad n(X) = 3$$

$$Y = \{c_4, c_5\} \quad n(Y) = 2$$

$$P(X) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad P(Y) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

مثال 12.9

فرض کرو کہ میٹرکس $M = \begin{bmatrix} x & y \\ z & 1 \end{bmatrix}$ ۔ اگر x، y اور z سٹ $\{1, 2, 3\}$ سے سریعی طور پر منتخب کئے جاتے ہیں، اور تکرار کی اجازت ہے (یعنی، $x = y = z$)۔اس بات کا کیا امکان ہے دیا گیا میٹر کس ایک نادر میٹرکس ہے؟

12_11th-Maths-Vol2-Unit12_UM.indd 244 21-02-2023 15:13:46

حل

اگر دیا گیا میٹر کس M نادر ہو تو،

$$\begin{vmatrix} x & y \\ z & 1 \end{vmatrix} = 0$$

یعنی $x - yz = 0$

لہذا، (x, y, z) کے منتخب کرنے کے ممکنہ طریقے

(کہتے ہیں) $A = \{(1,1,1),(2,1,2),(2,2,1),(3,1,3),(3,3,1)\}$

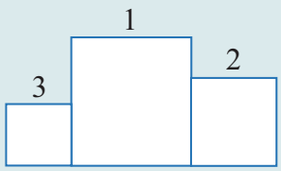
ساز گار صورتوں کی تعداد $n(A) = 5$

صورتوں کی کل تعداد ہے $n(S) = 3^3 = 27$

دیا گیا میٹر کس کا امکان ایک نادر میٹر کس ہے

$$p = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{27}$$

مثال 12.10



ایک کھیل کے مقابلے میں ، جیت نے والوں کے لئے تین لکڑی کے مراحل کی ترتیب دی گئی ہے جیسا کہ خاکہ میں دیا گیا ہے۔ منتخب کرنے کے لئے چھ مختلف رنگ دستیاب ہیں اور لکڑی کے تین درجہ کو اس طرح پینٹ کیا جاتا ہے کہ ان میں سے کوئی دو رنگ ایک جیسا نہ ہو۔ سب سے چھوٹا درجہ کو سرخ میں پینٹ کیا جانے کا امکان معلوم کرو، جہاں سرخ چھ رنگوں میں سے ایک ہے۔

حل

فرض کرو کہ نظیری عرصہ S ہے اور A سب سے چھوٹا درجہ سرخ رنگ میں پینٹ کئے جانے کا موقع ہے۔

	6	6	3
$n(S)$	6	5	4
$n(A)$	5	4	سرخ

$$n(S) = {}^6P_3 = 6 \times 5 \times 4 = 120$$

$$n(A) = 5 \times 4 = 20$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}.$$

12.4.3 مشکلات (ODDS)

مشکلات کا لفظ اکثر امکانات اور شماریات میں استعمال ہوتا ہے۔ مشکلات موقع A کے حق میں ہونے والے امکانات کو اس کے خلاف ہونے والے امکانات سے متعلق کرتی ہیں۔ فرض کریں کہ 'a' اُن طریقوں کی تعداد کی نمائندگی کرتا ہے جن سے کوئی موقع پیش آسکتا ہے اور 'b' اُن طریقوں کی تعداد کی نمائندگی کرتا ہے جن سے موقع ناکام ہوسکتا ہے۔

موقع A کے مشکلات $a : b$ ایک موقع کے حق میں اور

$$P(A) = \frac{a}{a+b}$$

12_11th-Maths-Vol2-Unit12_UM.indd 245 21-02-2023 15:13:46

مزید، یہ نوٹ کیاجاسکتاہے کہ مشکلات $a : b$ کس موقع کے حق میں ہیں جیسا کہ یہ کہناہے کہ مشکلات $b : a$ موقع کے خلاف ہیں۔

اگر کسی موقع کا امکان p ہے، تو اس کے واقع ہونے کے حق میں مشکلات p سے $(1-p)$ اور اس کے خلاف ہونے والی مشکلات $(1-p)$ سے p ہیں۔

تشریح 12.7

فرض کرو کہ ایک پانسہ کو پھینکاجاتاہے۔

فرض کرو کہ S ایک نظیری عرصہ اور A عدد 5 حاصل ہونے کا موقع ہے۔

$n(S) = 6$، $n(A) = 1$ اور $n(\bar{A}) = 5$

اس کی توصیع اس طرح کی جاسکتی ہے

A کے خلاف مشکلات ہے، $\frac{1}{5}$ (یا) 1:5 A کے حق میں مشکلات ہیں $\frac{5}{1}$ (یا) 5:1

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(A)+n(\bar{A})} = \frac{1}{5+1} = \frac{1}{6} = \frac{n(A)}{n(S)}$$ اور

فرض کریں کہ B ایک ایسا موقع ہے کہ B کے حق میں مشکلات 3:5 ہو، تو $P(B) = \frac{3}{8}$

فرض کریں کہ C ایک ایسا موقع ہے کہ C کے خلاف مشکلات 4:11 ہو، تو $P(C) = \frac{11}{15}$

مثال 12.11

ایک آدمی کے جیب میں 2 دس روپئے کے نوٹ، 4 سوروپئے کے نوٹ اور 6 پانچ سو روپئے کے نوٹ ہیں ۔ اگر2 نوٹ سریعی طور پر لئے جاتے ہیں تو دونوں نوٹ سو روپئے کے حق میں کیا مشکلات ہیں اور اس کا امکان کیا ہے۔

حل

فرض کرو کہ S نظیری عرصہ ہے اور A سو روپئے کے دو نوٹ لینے کا موقع ہے۔

لہذا، $n(S) = 12c_2 = 66$، $n(A) = 4c_2 = 6$ اور $n(\bar{A}) = 66 - 6 = 60$

لہذا، A کے حق میں مشکلات 60 :6 ہیں

یعنی، A کے حق میں مشکلات 10 :1 ہیں اور $P(A) = \frac{1}{11}$

مشق 12.1 (EXERCISE)

(1) ایک تجربہ میں چار ممکنہ باہمی اخراج اور مکمل نتائج A، B، C اور D ہیں۔ جائزہ لیں کہ درج ذیل کی امکانات کی تفویض ممکن ہے۔

(i) $P(A) = 0.15,\quad P(B) = 0.30,\quad P(C) = 0.43,\quad P(D) = 0.12$

(ii) $P(A) = 0.22,\quad P(B) = 0.38,\quad P(C) = 0.16,\quad P(D) = 0.34$

(iii) $P(A) = \frac{2}{5},\quad P(B) = \frac{3}{5},\quad P(C) = -\frac{1}{5},\quad P(D) = \frac{1}{5}$

(2) اگر دو سکے کو بیک وقت اچھالاجاتاہے تو حاصل ہونے کا امکان معلوم کرو۔

(i) ایک سر اورایک پشت (ii) زیادہ سے زیادہ دو پشت

(3) ایک ڈبے میں 5آم اور 4 سیب ہیں۔ اگر دو پھلوں کو سریعی طور منتخب کیا جائے تو (i) ایک آم اور دوسرا سیب (ii) دونوں ایک ہی قسم کے ہونے کا امکان معلوم کرو۔

12_11th-Maths-Vol2-Unit12_UM.indd 246 21-02-2023 15:13:47

(4) اس کا کیا امکان ہے

(i) غیر لیپ سال (ii) لیپ سال میں 35 اتوار ہونی چاہئے۔

(5) آٹھ سکوں کو ایک وقت اچھالے جاتے ہیں تو حاصل ہونے کا امکان معلوم کرو۔

(i) ٹھیک دو پشت (ii) کم سے کم دو پشت (iii) زیادہ سے زیادہ دو پشت

(6) ایک سالم عدد کو پہلے 100 مثبت سالم اعداد سے سریعی طور پر منتخب کیا جاتا ہے۔ اس کا کیا امکان ہے کہ منتخب کردہ سالم عدد ایک عدد اولی یا 8 کا ضریب ہے؟

(7) ایک بیگ میں 7 سرخ اور 4 سیاہ گیندیں ہیں۔ 3 گیندیں سریعی طور پر منتخب کیاجاتاہے

(i)سب سرخ ہوں (ii) ایک سرخ اور دو سیاہ، حاصل ہونے کا امکان معلوم کرو۔

(8) 52 تاش کے پتوں میں ایک پتہ کو نکالاجاتاہے۔ اس کا کیا امکان ہے

(i) A یا راجہ کا پتہ (ii) پتہ 6 یا اس سے چھوٹا (iii) پتہ رانی ہے یا تو 9

(9) ایک کرکٹ کلب میں 16 کھلاڑی ہوتے ہیں جن میں سے صرف 5 گیند بازی کرسکتے ہیں۔ اس کا کیا امکان ہے کہ 11 کھلاڑیوں کی ٹیم میں کم از کم 3 گیند باز منتخب کئے جائے۔

(10) (i) موقع A کے واقع ہونے کی مشکلات 5 سے 7 ہو تو $P(A)$ معلوم کرو۔

(ii) فرض کرو $P(B) = \frac{2}{5}$ ۔ موقع B سےواقع ہونے والے مشکلات کا اظہار کریں۔

12.5 امکان پر چند بنیادی مسئلے (Some basic Theorems on Probability)

آخری حصوں میں حل ہونے والے مسائل باہمی خصوصی مواقع سے متعلق ہیں تو ہم $P(A \text{ or } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ کا ضابطہ استعمال کیاہے۔مگر جب مواقع باہمی اندراج ہوتے ہیں تو جمعی کے محور $(A \cap B)$ شمار دگنا ہوتا ہے۔

ہمارے پاس مواقع کا ایک الگ ضابطہ ہے جب وہ باہمی اندراج ہوں۔

امکانی نظریہ کی ترقی میں، تمام نتائج براہ راست یا بالواسطہ طور پر صرف امکانات کے محور کا استعمال کرتے ہوئے حاصل کئے جاتے ہیں۔

مسئلہ 12.3

ناممکن موقع کا امکان صفر ہے۔ یعنی

$$\boxed{P(\varnothing) = 0}$$

ثبوت

ناممکن موقع کوئی نظیری نقطہ پر مشتمل نہیں ہے۔

لہذا، $S \cup \varnothing = S$

$P(S \cup \varnothing) = P(S)$

$P(S) + P(\varnothing) = P(S)$ (کیونکہ S اور $\varnothing$ باہمی اخراج ہیں)

$P(\varnothing) = 0$ □

مثال 12.12

عدد 7 حاصل ہونے کا امکان معلوم کریں جب ایک پانسہ کو پھینکا جائے۔

حل

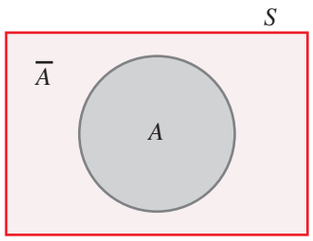
عدد 7 حاصل کرنے کا موقع ایک ناممکن موقع ہے۔ لہذا، $n(7 \text{ حاصل کرنا}) = 0$

12_11th-Maths-Vol2-Unit12_UM.indd 247 21-02-2023 15:13:50

مسئلہ 12.4

اگر A کا متمم موقع $\overline{A}$ ہو تو

$$\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$$



ثبوت

فرض کریں کہ S نظیری عرصہ ہے، ہمارے پاس

$$A \cup \overline{A} = S$$

$$P(A \cup \overline{A}) = P(S)$$

$$P(A) + P(\overline{A}) = P(S) \quad \text{(کیونکہ } A \text{ اور } \overline{A} \text{ باہمی اخراج ہیں)}$$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) \text{ یا } P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

مثال 12.13

9 سکّوں کو ایک بار اچھالا جاتا ہے، کم از کم دو سر حاصل کرنے کا امکان معلوم کریں۔

حل

فرض کریں S نظیری عرصہ ہے اور A کم از کم 2 سر حاصل ہونے کا موقع ہے۔

لہٰذا، موقع $\overline{A}$ سے مراد ہے، زیادہ سے زیادہ ایک سر حاصل کرنا۔

$$n(\overline{A}) = 9C_0 + 9C_1 = 1 + 9 = 10 \text{ ، } n(S) = 2^9 = 512$$

$$P(\overline{A}) = \frac{10}{512} = \frac{5}{256}$$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{5}{256} = \frac{251}{256}$$

$\sum_{r=0}^{1} 9C_r$ کا حساب لگانا آسان ہے
$\sum_{r=2}^{9} 9C_r$ کے مقابلے میں

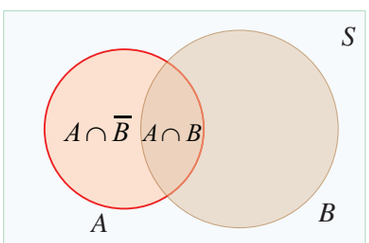
مسئلہ 12.5

اگر A اور B کوئی دو مواقع ہیں اور B کا متمم موقع $\overline{B}$ ہے تو

$$\boxed{P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)}$$

ثبوت

واضح طور پر خاکہ سے



$$(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) = A$$

$$P\left[(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)\right] = P(A)$$

$$P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B) = P(A)$$

$(A \cap \overline{B})$ اور $(A \cap B)$ باہمی اخراج ہیں) (کیونکہ

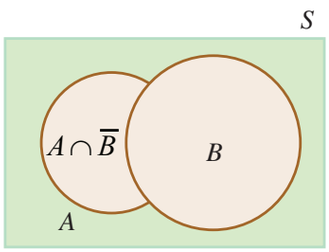
$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

12_11th-Maths-Vol2-Unit12_UM.indd 248 21-02-2023 15:13:51

مسئلہ 12.6 (امکان میں جمع کا مسئلہ)

اگر A اور B کوئی دو مواقع ہیں، تو

$$\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$$



ثبوت

خاکہ سے

$$A\cup B = (A\cap\overline{B})\cup B$$

$$P(A\cup B) = P\left[(A\cap\overline{B})\cup B\right]$$

$$= P(A\cap\overline{B})+P(B) \quad (\text{کیونکہ } (A\cap\overline{B}) \text{ اور } B \text{ باہمی اخراج ہیں})$$

$$= [P(A)-P(A\cap B)]+P(B)$$

$$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) \quad \text{لہذا،}$$

■

نوٹ 12.4

مذکورہ نظریے کو کسی بھی 3 مواقع تک بڑھایاجاسکتا ہے۔

$$P(A\cup B\cup C) = \{P(A)+P(B)+P(C)\} \quad \text{(i)}$$

$$-\{P(A\cap B)+P(B\cap C)+P(C\cap A)\}+P(A\cap B\cap C)\}$$

$$P(A\cup B\cup C)=1-P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}) \quad \text{(ii)}$$

مثال 12.14

دیا گیا ہے $P(A)=0.52$، $P(B)=0.43$، اور $P(A\cap B)=0.24$ ، ہوتو معلوم کرو

(i) $P(A\cap\overline{B})$ (ii) $P(A\cup B)$ (iii) $P(\overline{A}\cap\overline{B})$ (iv) $P(\overline{A}\cup\overline{B})$

حل

$$P(A\cap\overline{B}) = P(A)-P(A\cap B) \quad \text{(i)}$$

$$= 0.52-0.24=0.28$$

$$P(A\cap\overline{B}) = 0.28.$$

$$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) \quad \text{(ii)}$$

$$= 0.52+0.43-0.24$$

$$P(A\cup B) = 0.71.$$

$$P(\overline{A}\cap\overline{B}) = P(\overline{A\cup B}) \quad \text{(iii)} \quad (\text{ڈی مارگن اصول سے})$$

$$= 1-P(A\cup B)$$

$$= 1-0.71=0.29.$$

$$P(\overline{A}\cup\overline{B}) = P(\overline{A\cap B}) \quad \text{(iv)} \quad (\text{ڈی مارگن اصول سے})$$

$$= 1-P(A\cap B)=1-0.24$$

$$= 0.76.$$

12_11th-Maths-Vol2-Unit12_UM.indd 249 21-02-2023 15:13:53

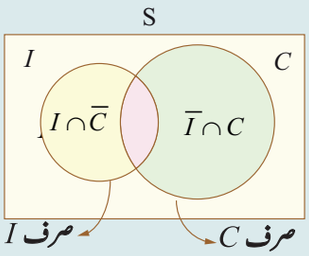
مثال 12.15

ایک لڑکی مسابقتی امتحان کی تیاری کررہی ہو اسے ریاستی حکومت کی ملازمت ملنے کا امکان 0.12 ہے، اسے مرکزی حکومت کی ملازمت ملنے کا امکان 0.25 ہے اور اسے دونوں ملنے کا امکان 0.07 ہے۔ اس کا امکان معلوم کرو (i) اسے کم از کم دو ملازمتوں میں سے ایک ملے گی (ii) اسے دو ملازمتوں میں سے صرف ایک ملے گی۔

حل

فرض کرو کہ I ریاستی حکومت کی ملازمت ملنے کا موقع ہوں اور C مرکزی حکومت کی ملازمت ملنے کا موقع ہوں

دیا گیا ہے $P(I) = 0.12$، $P(C) = 0.25$ اور $P(I \cap C) = 0.07$



$$P(\text{کم از کم دو ملازمتوں میں سے ایک}) = P(I \text{ or } C) = P(I \cup C) \qquad (i)$$
$$= P(I) + P(C) - P(I \cap C)$$
$$= 0.12 + 0.25 - 0.07 = 0.30$$

$$P(\text{دو ملازمتوں میں سے صرف ایک}) = P[I \text{ صرف یا } C \text{ صرف}] \qquad (ii)$$
$$= P(I \cap \overline{C}) + P(\overline{I} \cap C)$$
$$= \{P(I) - P(I \cap C)\} + \{P(C) - P(I \cap C)\}$$
$$= \{0.12 - 0.07\} + \{0.25 - 0.07\}$$
$$= 0.23.$$

12.2 مشق (EXERCISE)

(1) اگر A اور B باہمی اخراج مواقع ہوں، $P(A) = \frac{3}{8}$ اور $P(B) = \frac{1}{8}$ ، تو معلوم کرو

(i) $P(\overline{A})$ (ii) $P(A \cup B)$ (iii) $P(\overline{A} \cap B)$ (iv) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$

(2) اگر A اور B کوئی ایک سریعی تجربہ سے منسلک دو مواقع ہیں جس کے لئے $P(A) = 0.35$، $P(A \text{ or } B) = 0.85$ اور $P(A \text{ and } B) = 0.15$۔ معلوم کرو

(i) $P(B$ صرف$)$ (ii) $P(\overline{B})$ (iii) $P(A$ صرف$)$

(3) ایک پانسہ دوبار پھینکا جاتاہے۔ فرض کرو کہ A پہلے پانسہ میں عدد 5 ظاہر ہونے کا موقع ہے اور B دوسرے پانسہ میں عدد 5 ظاہر ہونے کا موقع ہے۔ $P(A \cup B)$ معلوم کرو۔

(4) ایک موقع کے واقع ہونے کا امکان 0.5 اور B کے مواقع ہونے کا امکان 0.3 ہے۔ اگر A اور B باہمی اخراج مواقع ہو، تو

(i) $P(A \cup B)$ (ii) $P(A \cap \overline{B})$ (iii) $P(\overline{A} \cap B)$ کا امکان معلوم کرو۔

(5) ایک شہر میں دو فائر انجن آزادنہ طور پر کام کررہے ہیں۔ ضرورت پڑھنے پر فائر انجن دستیاب ہونے کا امکان 0.96 ہے۔

(i) اس کا کیا امکان ہے کہ ضرورت پڑھنے پر فائر انجن دستیاب ہو؟

(ii) اس کا کیا امکان ہے کہ ضرورت کے وقت دونوں فائر انجن دستیاب نہ ہوں؟

(6) ایک نئے ریلوے پُل کو اس کے ڈیزائن کے لئے انعام ملنے کا امکان 0.48 ہے، اسے مواد کے موثر استعمال پر انعام ملنے کا امکان 0.36 ہے اور یہ دونوں کے لئے انعام ملنے کا امکان 0.2 ہے۔ اس کا کیا امکان ہے کہ (i) اسے دو میں سے کم از کم ایک ملے گا (ii) اسے صرف ایک انعام ملے گا۔

12_11th-Maths-Vol2-Unit12_UM.indd 250 21-02-2023 15:13:54

12.6 شرطی امکان (Conditional Probability)

تشریح 12.8

شرطی امکان کے تصور کے سمجھنے کے لئے درج ذیل مثال پر غور کریں۔

فرض کرو کہ پانسہ کو ایک مرتبہ پھینکا جاتا ہے تو نظیری عرصہ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ۔ اب ہم دو سوال پوچھ سکتے ہیں۔

س1: 2 سے بڑا طاق عدد حاصل کرنے کا کیا امکان ہے؟

س2: اگر پانسہ ایک طاق عدد کو ظاہر کرتا ہے ، تو اس کا کیا امکان ہے کہ یہ 2 سے بڑھ کر ہے؟

صورت 1

1	2
3	4
5	6

2 سے بڑھ کر ایک طاق عدد حاصل کرنے کا موقع $\{3, 5\}$ ہے۔

فرض کرو کہ 2 سے بڑھ کر ایک طاق عدد حاصل کرنے کا امکان P_1 ہے۔

$$P_1 = \frac{n(\{3,5\})}{n(\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\})} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

صورت 2

1	2
3	4
5	6

'اگر پانسہ ایک طاق عدد ظاہر کرتا ہے' اس کا مطلب ہے کہ ہم اپنے نظیری عرصہ S کو صرف طاق عدد پر مشتمل تحتی سٹ تک محدود کرتے ہیں۔

یعنی $S_1 = \{1, 3, 5\}$ ۔ پھر ہماری دلچسپی یہ ہے کہ 2 سے زیادہ طاق عدد ملنے کے موقع کا امکان معلوم کریں۔ فرض کرو کہ یہ P_2 ہے۔

$$P_2 = \frac{n(\{3,5\})}{n(\{\ 1,\ 3,\ 5\})} = \frac{2}{3}$$

مندرجہ بالا دو صورتوں میں سازگار مواقع ایک جیسے ہیں، مگر مکمل نتائج کی تعداد مختلف ہے۔ صورت 2 میں، ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ ہم نے پہلے نظیری عرصہ پر ایک شرط عائد کی ہے اور پھر امکان معلوم کرنے کو کہا۔ اس قسم کے امکان کو شرطی امکان کہاجاتا ہے۔

یہ بطور نظیری عرصہ استعمال کرکے لکھاجاسکتا ہے۔

$$P_2 = \frac{\frac{n(\{3,5\})}{n(\{1,2,3,4,5,6\})}}{\frac{n(\{1,3,5\})}{n(\{1,2,3,4,5,6\})}} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3}$$

اہم نوٹ: امکان اور شرطی امکان کے لئے نظیری عرصہ ایک جیسا ہے۔

تعریف 12.14

شرطی امکان A پر موقع B کا انحصار $P(B/A)$ کے ذریعے اس صورت میں ظاہر کیاجاتا ہے جہاں واقع A پہلے سے ہی معلوم ہوچکا ہو اور اس کی تعریف اس طرح سے دی گئی ہے۔

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}، \text{ فراہم کردہ } P(A) \neq 0$$

اسی طرح،

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}، P(B) \neq 0$$

مثال 12.16

اگر $P(A) = 0.6$ ، $P(B) = 0.5$ اور $P(A \cap B) = 0.2$

معلوم کرو (i) $P(A/B)$ (ii) $P(\overline{A}/B)$ (iii) $P(A/\overline{B})$.

12_11th-Maths-Vol2-Unit12_UM.indd 251 21-02-2023 15:13:56

حل

دیا گیا ہے $P(A) = 0.6$ ، $P(B) = 0.5$ اور $P(A \cap B) = 0.2$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.2}{0.5} = \frac{2}{5} \qquad \text{(i)}$$

$$P(\overline{A}/B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} \qquad \text{(ii)}$$

$$= \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{0.5 - 0.2}{0.5} = \frac{0.3}{0.5} = \frac{3}{5}.$$

$$P(A/\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} \qquad \text{(iii)}$$

$$= \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)}$$

$$= \frac{0.6 - 0.2}{1 - 0.5} = \frac{0.4}{0.5} = \frac{4}{5}$$

نوٹ 12.5

$$P(A/B) + P(\overline{A}/B) = 1$$

مثال 12.17

ایک پانسہ کو پھینکا جاتا ہے۔ اگر اس میں طاق عدد ظاہر ہوں تو عدد 5 حاصل ہونے کا امکان معلوم کرو۔

حل

نظیری عرصہ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

فرض کرو کہ A پانسہ میں ایک طاق عدد ظاہر ہونے کا موقع ہے۔

فرض کرو کہ B عدد 5 حاصل ہونے کا موقع ہے۔

تو $A = \{1, 3, 5\}$، $B = \{5\}$ اور $A \cap B = \{5\}$

لہذا، $P(A) = \frac{3}{6}$ اور $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

$P(B/A) =$ (پانسہ میں ایک طاق عدد ظاہر ہو/عدد 5 حاصل ہونا)

$$= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}}$$

$$P(B/A) = \frac{1}{3}.$$

12_11th-Maths-Vol2-Unit12_UM.indd 252 21-02-2023 15:13:58

شرطی امکان کی تعریف کو دوبارہ لکھتے ہوئے، ہمیں امکان پر ضرب کا نظریہ ملتا ہے۔

مسئلہ 12.7

(امکان پر ضرب کا نظریہ)

دو مواقع A اور B کے بیک وقت ہونے کا امکان بذریعہ دیا گیا ہے

$$P(A \cap B) = P(A/B)P(B)$$

یا

$$P(A \cap B) = P(B/A)P(A)$$

12.6.1 آزاد مواقع (Independent Events)

مواقع کو آزاد کہا جاتا ہے۔ اگر کسی ایک موقع کا واقع یا غیر واقع ہونا دوسرے مواقع کے واقع یا غیر واقع کے امکان کو متاثر نہیں کرتا۔

تعریف 12.15

دو مواقع A اور B کو آزاد کہا جاتا ہے صرف اور صرف اگر

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

نوٹ 12.6

(1) یہ تعریف ٹھیک اس کے برابر ہے۔

$P(A/B) = P(A)$ اگر $P(B) > 0$

$P(B/A) = P(B)$ اگر $P(A) > 0$

(2) مواقع $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ باہمی طور پر آزاد ہیں اگر

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \cdots \cdot P(A_n)$$

مسئلہ 12.8

اگر A اور B آزاد ہو تو

(i) $\overline{A}$ اور B آزاد ہیں

(ii) A اور $\overline{B}$ آزاد ہیں

(iii) $\overline{A}$ اور $\overline{B}$ بھی آزاد ہیں

ثبوت

(i) ثابت کریں کہ $\overline{A}$ اور B آزاد ہیں

چونکہ A اور B کو آزاد ہیں

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot (PB)$$

ثابت کریں کہ $\overline{A}$ اور $\overline{B}$ آزاد ہیں ۔ہمیں ثابت کرنا ہے

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B})$$

ڈی مارگن کے اصول سے

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P\left(\overline{A \cup B}\right)$$

$$= 1 - P(A \cup B)$$

12_11th-Maths-Vol2-Unit12_UM.indd 253 21-02-2023 15:13:58

$$= 1-\{P(A)+P(B)-P(A\cap B)\}$$

$$= 1-P(A)-P(B)+P(A)\cdot P(B)$$

$$= (1-P(A))(1-P(B))$$

$$= P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})$$

اس طرح $\overline{A}$ اور $\overline{B}$ آزاد ہیں

اسی طرح (ii) اور (iii) کو بھی ثابت کرسکتے ہیں۔ ■

مثال 12.18

52 تاش کے پتوں میں سے 2 پتے کو تسلسل طور پر نکالے جاتے ہیں۔ اس بات کا امکان معلوم کرو کریں کہ دونوں جیک پتے ہوں جبکہ پہلا نکلا ہوا پتہ (i) واپس گڈی پر رکھاجاتاہے (ii) واپس گڈی پر نہیں رکھا جاتا۔

حل

فرض کریں A پہلا نکالا ہوا پتہ میں جیک ہونے کاموقع ہے

B دوسرا نکالا ہوا پتہ میں جیک ہونے کاموقع ہے

صورت 1

نکالاہوا پتہ واپس گڈی پر رکھاجاتاہے

$$n(A) = 4 \quad (\text{جیک})$$

$$n(B) = 4 \quad (\text{جیک})$$

$$n(S) = 52 \quad \text{اور} \quad (\text{کل})$$

واضح طور پر موقع A اور موقع B کے واقع ہونے کے امکانات کو متاثر نہیں کرے گا اور اس لئے اور آزاد ہیں

$$P(A\cap B) = P(A)\,.\,P(B)$$

$$P(A) = \frac{4}{52}\ ,\ P(B)=\frac{4}{52}$$

$$P(A\cap B) = P(A)\ \ P(B)$$

$$= \frac{4}{52}\ .\ \frac{4}{52}$$

$$= \frac{1}{169}\ .$$

صورت 2

نکالاہوا پتہ واپس گڈی پر نہیں رکھاجاتاہے

جب پتہ پہلی بار نکالنے پر، کل 52 تاش کے پتے اور 4 جیک ہیں۔ کیونکہ پہلی مرتبہ نکالا ہوا جیک دوبارہ واپس نہیں رکھا گیا ہے، پتہ دوسری بار نکالنے پر کل 51 تاش کے پتے اور 3 جیک ہیں۔ لہذا، موقع A موقع B کے واقع ہونے کے امکانات کو متاثر کرتا ہے۔

اس لئے A اور B آزاد نہیں ہیں، یعنی A اور B منحصر مواقع ہیں۔

$$P(A\cap B) = P(A)\,.\,P(B/A) \quad \text{لہذا،}$$

$$P(A) = \frac{4}{52}$$

12_11th-Maths-Vol2-Unit12_UM.indd 254 21-02-2023 15:13:59

$$P(B/A) = \frac{3}{51}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

$$= \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51}$$

$$= \frac{1}{221}$$

مثال 12.19

ایک سکہ کو دومرتبہ اچھالا جاتا ہے۔ مواقع E اور F کی وضاحت مندرجہ ذیل ہیں۔

E= پہلی اچھال پر سر، F= دوسری اچھال پر سر معلوم کرو

(i) $P(E \cup F)$ (ii) $P(E / F)$

(iii) $P(\overline{E} / F)$ (iv) کیا مواقع E اور F آزاد ہیں؟

حل

نظیری عرصہ ہے $S = \{H, T\} \times \{H, T\}$

$$S = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$$

$$E = \{(H, H), (H, T)\} \text{ اور}$$

$$F = \{(H, H), (T, H)\}$$

$$E \cup F = \{(H, H), (H, T), (T, H)\}$$

$$E \cap F = \{(H, H)\}$$

(i) $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$ یا $\left(= \frac{n(E \cup F)}{n(S)}\right)$

$$= \frac{2}{4} + \frac{2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} .$$

(ii) $$P(E / F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{(1/4)}{(2/4)} = \frac{1}{2}$$

(iii) $$P(\overline{E} / F) = \frac{P(\overline{E} \cap F)}{P(F)}$$

$$= \frac{P(F) - P(E \cap F)}{P(F)}$$

$$= \frac{(2/4) - (1/4)}{(2/4)}$$

$$= \frac{1}{2}$$

(iv) کیا مواقع E اور F آزاد ہیں؟

12_11th-Maths-Vol2-Unit12_UM.indd 255 21-02-2023 15:14:00

$P(E \cap F) = \frac{1}{4}$ ہمارے پاس ہے

$$P(E) = \frac{2}{4}, \quad P(F) = \frac{2}{4}$$

$$P(E)\,P(F) = \frac{2}{4}.\frac{2}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad P(E \cap F) = P(E)\,.\,P(F)$$

لہذا، E اور F آزاد مواقع ہیں

نوٹ 12.7

آزاد مواقع امکان کی خصوصیات ہے۔ لیکن باہمی اخراجیت ایک سٹ نظریاتی خصوصیات ہے۔ لہذا، آزاد مواقع کو ان کے امکانات سے پہچاناجاسکتا ہے اور باہمی اخراج مواقع کو ان کے مواقع سے پہچاناجاسکتاہے۔

مسئلہ 12.9

فرض کرو A اور B دو مواقع ہوں۔ اس طرح کہ $P(A) \neq 0, P(B) \neq 0$ ۔

(1) اگر A اور B باہمی اخراج ہو تووہ آزاد نہیں ہوسکتے

(2) اگر A اور B آزاد ہوں تو وہ باہمی اخراج نہیں ہوسکتے (بغیر ثبوت)

مثال 12.20

اگر A اور B دو آزاد مواقع ہوں۔ اس طرح کہ

$P(A) = 0.4$ اور $P(A \cup B) = 0.9$، $P(B)$ معلوم کرو۔

حل

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A).P(B) \quad (\text{کیونکہ } A \text{ اور } B \text{ آزاد ہیں})$$

$$\text{یعنی} \quad 0.9 = 0.4 + P(B) - (0.4)\,P(B)$$

$$0.9 - 0.4 = (1 - 0.4)\,P(B)$$

$$\text{لہذا،} \quad P(B) = \frac{5}{6}$$

مثال 12.21



طیارہ شکن بندوق (anti-aircraft gun) دشمن کے ہوائی جہاز پر زیادہ سے زیادہ چار گولیاں چلا سکتا ہے جو اس سے دور جارہاہے۔ پہلے، دوسرے، تیسرے اور چوتھے گولی چلانے کے لئے ہوائی جہاز کو مارنے کا امکان بالترتیب0.2، 0.4، 0.2 اور 0.1 ہیں۔ اس کا امکان معلوم کریں جو بندوق ہوائی جہاز کو مارا جائے۔

حل

فرض کریں کہ H_1، H_2، H_3 اور H_4 بالترتیب پہلے، دوسرے، تیسرے اور چوتھے گولی چلانے میں طیارہ شکن بندوق سے ہوائی جہاز کو مارنے کے مواقع ہیں۔

فرض کرو کہ H ہوائی جہاز کو طیارہ شکن بندوق سے مارنے کا موقع ہے۔ لہذا، $\bar{H}$ وہ موقع ہے جس میں ہوائی جہاز کو نہیں ماراگیا۔ دیاگیا ہے

$$P(H_1) = 0.2 \quad \Rightarrow P(\bar{H}_1) = 1 - P(H_1) = 0.8$$

$$P(H_2) = 0.4 \quad \Rightarrow P(\overline{H}_2) = 1 - P(H_2) = 0.6$$

$$P(H_3) = 0.2 \quad \Rightarrow P(\overline{H}_3) = 1 - P(H_3) = 0.8$$

$$P(H_4) = 0.1 \quad \Rightarrow P(\overline{H}_4) = 1 - P(H_4) = 0.9$$

ہوائی جہاز کو بندوق سے مارنے کا امکان ہے

$$P(H) = 1 - P(\overline{H}) = 1 - P(\overline{H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4})$$

$$= 1 - P\left(\overline{H}_1 \cap \overline{H}_2 \cap \overline{H}_3 \cap \overline{H}_4\right)$$

$$= 1 - P(\overline{H}_1)P(\overline{H}_2)P(\overline{H}_3)P(\overline{H}_4)$$

$$= 1 - (0.8)(0.6)(0.8)(0.9) = 1 - 0.3456$$

$$P(H) = 0.6544$$

مثال 12.22

70 فیصد صورتوں میں X سچ بولتا ہے اور 90 فیصد صورتوں میں Y سچ بولتا ہے۔ اس بات کا کیا امکان ہے کہ وہ ایک ہی حقیقت بیان کرتے ہوئے ایک دوسرے سے تضاد (contradict) ہوں؟

حل

فرض کرو X سچ بولنے کا موقع A ہے، Y سچ بولنے کا موقع B ہے

لہذا، X سچ نہیں بولنے کا موقع $\overline{A}$ ہے اور Y سچ نہیں بولنے کا موقع $\overline{B}$ ہے

فرض کرو کہ دونوں ایک دوسرے سے تضاد ہونے کے موقع C ہے۔

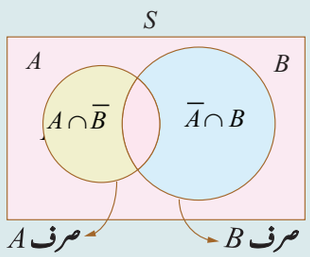
دیا گیا ہے

$$P(A) = 0.70 \quad \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0.30$$

$$P(B) = 0.90 \quad \Rightarrow P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 0.10$$

$C =$ (A سچ بولتا ہے اور B سچ نہیں بولتا یا B سچ بولتا ہے اور A سچ نہیں بولتا)

$C = [(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)]$ (خاکہ دیکھیں)



چونکہ $(A \cap \overline{B})$ اور $(\overline{A} \cap B)$ باہمی اخراج ہیں،

$$P(C) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B)$$

$$= P(A)\,P(\overline{B}) + P(\overline{A})\,P(B)$$

(کیونکہ A اور B آزاد موقع ہیں، A اور $\overline{B}$ بھی آزاد موقع ہیں)

$$= (0.70)\ (0.10) + (0.30)\ (0.90)$$

$$= 0.070 + 0.270 = 0.34$$

$$P(C) = 0.34$$

12_11th-Maths-Vol2-Unit12_UM.indd 257 21-02-2023 15:14:02

مثال 12.23

ایک شہر کی ایک مرکزی سڑک پر 4 چوراہے ہیں جن میں ٹریفک لائٹس میں ہر ٹرافک لائٹ بالترتیب 0.4 اور 0.6 کے امکان کے ساتھ ٹرافک کھولتی اور بند کرتی ہیں۔ درج ذیل امکان کی تعین کیجئے

(i) ایک کاربغیر رُکے پہلا چوراہے سے گزرتی ہے

(ii) ایک کار بغیر رُکے پہلے دوچوراہے سے گزرتی ہے

(iii) ایک کار تمام چوراہے سے گزرتی ہے، تیسرے چوراہے پر رکھتی ہے

(iv) ایک کار تمام چوراہے سے گزرتی ہے، ٹھیک ایک چوراہے پر رکھتی ہے

حل

فرض کرو کہ A_i ایک موقع ہے جو ٹرافک لائٹ i th چوراہے پر کھلتی ہے، $i= 1, 2, 3, 4.$ کے لئے

فرض کرو کہ B_i ایک موقع ہے جو ٹرافک لائٹ i th چوراہے پر کھلتی ہے، $i= 1, 2, 3, 4.$ کے لئے

تمام ٹرافک لائٹس آزاد ہیں

لہذا A_i اور B_i تمام آزاد مواقع ہیں، $i= 1, 2, 3, 4.$ کے لئے

دیا گیا ہے

$$P(A_i) = 0.4,\ i = 1, 2, 3, 4$$

$$P(B_i) = 0.6,\ i = 1, 2, 3, 4$$

(i) ایک کار بغیر رُکے پہلا چوراہے سے گزرنے کا امکان

$$P(A_1) = 0.4$$

(ii) ایک کار بغیر رُکے پہلے دوچوراہے سے گزرنے کا امکان

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1A_2) = (0.4)(0.4) = 0.16$$

(iii) ایک کار تمام چوراہے سے گزرتی ہے، تیسرے چوراہے پر رکھنے کا امکان

$$P(A_1 \cap A_2 \cap B_3 \cap A_4) = P(A_1A_2B_3A_4) = (0.4)(0.4)(0.6)(0.4) = 0.0384$$

(iv) ایک کار تمام چوراہے سے گزرتی ہے، ٹھیک ایک چوراہے پر رکھنے کا امکان

$$P(B_1A_2A_3A_4 \cup A_1B_2A_3A_4 \cup A_1A_2B_3A_4 \cup A_1A_2A_3B_4)$$

$$= P(B_1A_2A_3A_4) + P(A_1B_2A_3A_4) + P(A_1A_2B_3A_4) + P(A_1A_2A_3B_4)$$

$$= 4(0.4)(0.4)(0.6)(0.4) = 4(0.0384) = 0.1536$$

12.3 مشق (EXERCISE)

(1) کیا ایک ساتھ دو مواقع باہمی اخراج اور آزاد ہوسکتے ہیں؟

(2) اگر A اور B دو مواقع ہیں۔ اس طرح کہ $P(A \cup B) = 0.7$، $P(A \cap B) = 0.2$ اور $P(B) = 0.5$، تو ثابت کرو کہ A اور B آزاد ہیں۔

(3) اگر A اور B دو آزاد مواقع ہیں اس طرح کہ $P(A \cup B) = 0.6$، $P(A) = 0.2$، تو $P(B)$ معلوم کرو۔

(4) اگر $P(A) = 0.5$، $P(B) = 0.8$ اور $P(B/A) = 0.8$، تو $P(A / B)$ اور $P(A \cup B)$ معلوم کرو۔

(5) اگردو مواقع A اور B کے لئے $P(A) = \frac{3}{4}$، $P(B) = \frac{2}{5}$، اور $A \cup B = S$ (نظیری عرصہ)، شرطی امکان معلوم کریں۔

(6) ریاضی میں ایک مسئلہ تین طالب علم کو دیا جاتا ہے جن کے حل کرنے کا امکان $\frac{1}{3}$، $\frac{1}{4}$ اور $\frac{1}{5}$ ہیں۔ (i) اس مسئلے کے حل کرنے کا کیا امکان ہے (ii) اس بات کا کیا امکان ہے کہ ان میں سے کوئی ایک اسے حل کرلے گا۔

(7) پیٹرول سے بھری گاڈی کا تیل کی تبدیلی ضرورت کا امکان 0.30 ہے۔ اسے نئے آئل فلٹر کی ضرورت کا امکان 0.40 ہے اور تیل اور فلٹر دونوں کو تبدیل کرنے کی ضرورت کا امکان 0.15 ہے۔

(i) اگر تیل کو تبدیل کرنا تھا تو اس بات کا کیا امکان ہے کہ نئے آئل فلٹر کی ضرورت ہے۔

(ii) اگر نئے آئل فلٹر کی ضرورت ہے تو اس بات کیا امکان ہے کہ تیل کو تبدیل کیا جائے۔

(8) ایک تھیلی میں 5 سفید اور 3 سیاہ گیندیں ہیں۔ ایک اور تھیلی میں 4 سفید اور 6 سیاہ گیندیں ہیں۔ اگر ہر تھیلی سے ایک گیند نکالی جائے،تو امکان معلوم کریں کہ (i) دونوں سفید ہیں (ii) دونوں سیاہ ہیں (iii) ایک سفید اور ایک سیاہ۔

(9) ایک جماعت میں دوتہائی طلباء لڑکے اور باقی لڑکیاں ہیں۔ یہ معلوم ہے کہ لڑکی کا پہلا درجہ حاصل کرنے کا امکان 0.85 اور لڑکوں کا 0.70 ہے۔ اس امکان کو معلوم کریں کہ ایک طالب علم جو سریعی طور پر منتخب کیا گیا ہے وہ پہلی درجہ کے نمبر حاصل کریگا۔

(10) دیا گیا ہے $P(A) = 0.4$ اور $P(A \cup B) = 0.7$، $P(B)$ معلوم کرو اگر

(i) A اور B باہمی اخراج ہیں (ii) A اور B آزاد مواقع ہیں

(iii) $P(A / B) = 0.4$ (iv) $P(B / A) = 0.5$

(11) ایک سال سریعی طور پر منتخب کیا جاتا ہے۔ اس کا کیا امکان ہے کہ

(i) اس میں 53 اتوار ہوتے ہیں (ii) یہ ایک لیپ سال ہے جس میں 53 اتوار ہوتے ہیں

(12) فرض کریں کہ ایک ہدف کو نشانہ لگانے کے لئے 4 شاٹس میں سے 3 مرتبہ شخص X، 5 شاٹس میں 4 مرتبہ شخص Y اور 3 شاٹس میں 2 مرتبہ شخص Z صحیح نشانہ لگاتے ہیں۔ انھوں نے بیک وقت ایک مرتبہ فائر کیا۔نشانے کو ٹھیک 2 مار سے نقصان پہنچانے کا کیا امکان ہے۔

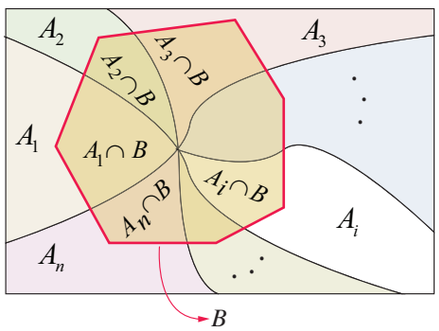
12.7 موقع کا کُل امکان (Total Probability of an event)

مسئلہ 12.10 (موقع کا کُل امکان)

اگر A_1، A_2، A_3،...، A_n باہمی اخراج اور مکمل مواقع ہیں اور S میں B کوئی بھی موقع ہے تو موقع کا کل امکان کہلاتا ہے اور

$$P(B) = P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2) + \cdots + P(A_n).P(B/A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(B/A_i)$$

ثبوت



چونکہ میں کوئی بھی موقع ہے،یہاں خاکہ سے دکھایا گیا ہے

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B) \cup \cdots (A_n \cap B)$$

چونکہ A_1، A_2، A_3،...، A_n باہمی اخراج ہیں،

$(A_1 \cap B), (A_2 \cap B), (A_3 \cap B), \cdots, (A_n \cap B)$ بھی باہمی اخراج ہیں

لہذا

$$P(B) = P\left[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B)\right]$$

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B)$$

$$P(B) = P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2) + \cdots + P(A_n).P(B/A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(B/A_i).$$

مندرجہ ذیل مسائل کو حل کرنے کے لئے ایک موقع کا کل امکان کے اصول کو استعمال کرتے ہیں۔

12_11th-Maths-Vol2-Unit12_UM.indd 259 21-02-2023 15:14:06

مثال 12.24

کوذا- I میں 8 سرخ اور 4 نیلی گیندیں ہیں اور کوذا- II میں 5 سرخ اور 10 نیلی گیندیں ہیں۔ ایک کوذے کو سریعی طور پر منتخب کیا جاتا ہے اور اس سے 2 گیندیں نکالی جاتی ہیں۔ اس کا کیا امکان ہے کہ دونوں گیندیں سرخ ہوں۔

حل

	سرخ گیندیں	نیلی گیند	کل
کوذا-I	8	4	12
کوذا-II	5	10	15
کل	13	14	27

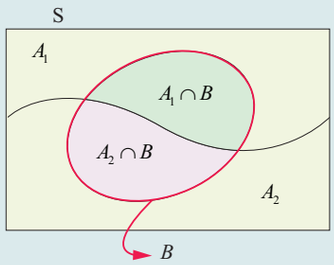
فرض کریں A_1 کوکوذا-I کو منتخب کرنے کا موقع ہے اور A_2 کو ذا- II کو منتخب کرنے کا موقع ہے۔

فرض کریں کہ B دو سرخ گیندیں منتخب کرنے کا موقع ہے۔

ہمیں موقع کا کل امکان معلوم کرنا ہوگا۔ یعنی $P(B)$

واضح طور A_1 اور A_2 باہمی اخراج اور مکمل مواقع ہیں۔

ہمارے پاس ہے



$$P(A_1) = \frac{1}{2}, \quad P(B/A_1) = \frac{8c_2}{12c_2} = \frac{14}{33}$$

$$P(A_2) = \frac{1}{2}, \quad P(B/A_2) = \frac{5c_2}{15c_2} = \frac{2}{21}$$

ہم جانتے ہیں

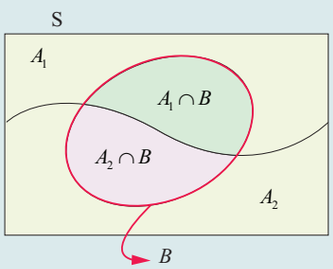
$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2)$$

$$P(B) = \frac{1}{2}.\frac{14}{33} + \frac{1}{2}.\frac{2}{21} = \frac{20}{77}.$$

مثال 12.25

ایک کارخانے میں دو مشین I اور II ہیں۔ مشین- I کی پیداوار کی 40% اشیاء تیار کرتی ہے ۔ مشین- II 60% اشیاء تیار کرتی ہے۔ مزید یہ کہ مشین- I کی طرف سے تیار کردہ 4% اشیاء ناقص ہیں اور مشین- II کی طرف تیار کردہ 5% اشیاءناقص ہیں۔ اگر ایک شئے کو سریعی طور پر انتخاب کیا جائے تو ناقص شئے آنے کا امکان معلوم کریں۔

حل



فرض کریں کہ A_1 مشین- I کے تیار کردہ اشیاء کا موقع ہے A_2 مشین- II کے تیار کردہ اشیاء کا موقع ہے۔ فرض کریں B ناقص شئے کو انتخاب کرنے کا موقع ہے۔

ہمیں موقع B کا کل امکان معلوم کرنا ہوگا۔ یعنی، $P(B)$

واضح طور پر A_1 اور A_2 باہمی اخراج اور مکمل مواقع ہیں ۔

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2)$$ الہذ

ہمارے پاس ہے

$$P(A_1) = 0.40, \quad P(B/A_1) = 0.04,$$

$$P(A_2) = 0.60, \quad P(B/A_2) = 0.05$$

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2)$$

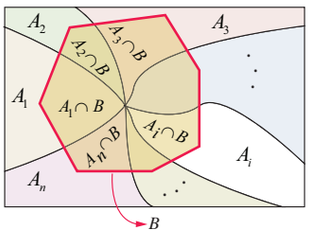
$$= (0.40)(0.04) + (0.60)(0.05)$$

$$= 0.046.$$

12.8 بائیس کا نظری (Bayes' Theorem)


1702-1761

تھامس بائس ایک انگریزی شماریات دان، فلسفی اور پریس بیٹیرین کے وزیر تھے۔ جو کہ ایک نظریہ کا مخصوص معاملہ واضح کرنے کے لئے جانا جاتا ہے۔بائیس طریقہ سابقہ امکانات اور شرطی امکان کو بائس کے اصول کے ذریعہ موخر امکان سے جوڑنے کے بنیادی اصول سے پیدا ہوتے ہیں۔ بائیس امکان ایک نام ہے جو امکانات کی متعدد متعلقہ تشریحات کے طور پر دیاجاتا ہے۔ جیسا کہ ایک علمی اعتماد – عقائد کی طاقت، مفروضات وغیرہ، بجائے تعدد کے۔



مسئلہ 12.11 (بائس کا نظریہ)

اگر A_1، A_2، A_3،...، A_n باہمی اخراج اور مکمل مواقع ہیں اس طرح کہ

$P(Ai) > 0, \quad i = 1,2,3,....n$ اور B کو ئی بھی موقع ہے جس میں $P(B) > 0$، تو

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i)\, P(B / A_i)}{P(A_1)\, P(B / A_1) + P(A_2)\, P(B / A_2) + \cdots + P(A_n)\, P(B / A_n)}$$



ثبوت

B کے کل امکان کا اصول سے ہمارے پاس ہے

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B / A_1) + P(A_2) \cdot P(B / A_2) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B / A_n)$$

اور ضرب کا نظریہ سے $P(A_i \cap B) = P(B/A_i)P(A_i)$

شرطی امکان کی تعریف کی رُو سے

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

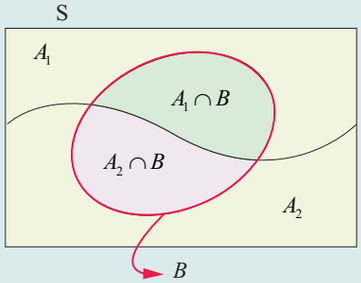
$$P(A_i / B) = \frac{P(B/A_i)P(A_i)}{P(A_1) \cdot P(B / A_1) + P(A_2) \cdot P(B / A_2) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B / A_n)}$$ (ضابطہ کے استعمال سے)

مندرجہ بالا ضابطہ $P(A_i / B)$ اور $P(B / A_i)$ کے درمیان کا تعلق بتاتا ہے۔ □

مثال 12.26

ایک کارخانے میں دو مشینیں I اور II ہیں۔ مشین- I کی کل پیداوار کی 40% اشیاء تیار کرتی ہے ۔ مشین- II 60% اشیاء تیار کرتی ہے۔ مزید یہ کہ مشین-I کی طرف سے تیار کردہ 4% اشیاء ناقص ہیں اور مشین- II کی طرف تیار کردہ 5% اشیاءناقص ہیں۔ اگر ایک شئے کو سریعی طور پر انتخاب کیا جاتا ہے ۔ اگر انتخاب کردہ شئے ناقص ہے تو، اس امکان کو معلوم کریں کہ یہ مشین- II کے ذریعے تیار کیا گیا ہے۔
(پچھلی مثال دیکھیں، سوالات کا موازنہ کریں)

حل



فرض کریں کہ A_1 مشین- I کے تیار کردہ اشیاء کا موقع ہے A_2 مشین- II کے تیارکردہ اشیاء کا موقع ہے۔ فرض کریں B ناقص شئے کو انتخاب کرنے کا موقع ہے۔اب ہم سے شرطی امکان $P(A_2/B)$ معلوم کرنے کو کہا گیا ہے۔ چونکہ A_1، A_2 باہمی اخراج اور مکمل مواقع ہیں، بائس نظریہ کے مطابق

$$P(A_2 / B) = \frac{P(A_2)\, P(B / A_2)}{P(A_1)\, P(B / A_1) + P(A_2)\, P(B / A_2)}$$

ہمارے پاس ہے

$$P(A_1) = 0.40, \quad P(B/A_1) = 0.04$$

$$P(A_2) = 0.60, \quad P(B/A_2) = 0.05$$

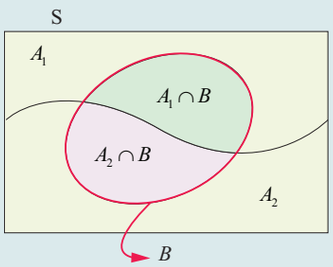
$$P(A_2/B) = \frac{P(A_2)\,P(B/A_2)}{P(A_1)\,P(B/A_1) + P(A_2)\,P(B/A_2)}$$

$$P(A_2/B) = \frac{(0.60)(0.05)}{(0.40)(0.04)+(0.60)(0.05)} = \frac{15}{23}.$$

مثال 12.27

ایک تعمیراتی کارخانہ 2 ایکزیکیٹو انجینئروں کو ملازمت دیتی ہے۔ انجینئر I-کارخانے میں 60% کام کرتا ہے۔ انجینئر II-کارخانے میں 40% کام کرتا ہے۔ یہ ماضی کے تجربہ سے معلوم ہوتا ہے کہ جب انجینئرI- کام کرتا ہے تو غلطی کا امکان 0.03 ہوتا ہے، جبکہ انجینئر II-کے کام میں غلطی کا امکان 0.04 ہے۔ فرض کریں کہ کام میں کوئی سنگین غلطی واقع ہوئی ہے ۔ اندازہ لگائیں کہ کس انجینئر نے اس کام کو کیا ہوگا۔

حل



فرض کریں کہ A_1 اور A_2 کارخانے کے انجینئرI- اور انجینئر - II کی طرف سے کئے گئے کام کا موقع ہے۔ فرض کرو کہ کام میں غلطی واقع ہونے کا موقع ہے۔

ہمیں شرطی امکان $P(A_1/B)$ اور $P(A_2/B)$ سے ان کے کام میں ان کے غلطیوں کا موازنہ کرنہ ہوگا۔

دی گئی معلومات سے ہمارے پاس ہے

$$P(A_1) = 0.60, \quad P(B/A_1) = 0.03$$
$$P(A_2) = 0.40, \quad P(B/A_2) = 0.04$$

A_1 اور A_2 باہمی اخراج اور مکمل مواقع ہیں۔

بائیس نظریہ کو استعمال کرنے سے

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1)\,P(B/A_1)}{P(A_1)\,P(B/A_1) + P(A_2)\,P(B/A_2)}$$

$$= \frac{(0.60)(0.03)}{(0.60)(0.03)+(0.40)(0.04)}$$

$$P(A_1/B) = \frac{9}{17}.$$

$$P(A_2/B) = \frac{P(A_2)\,P(B/A_2)}{P(A_1)\,P(B/A_1) + P(A_2)\,P(B/A_2)}$$

$$P(A_2/B) = \frac{(0.40)(0.04)}{(0.60)(0.03)+(0.40)(0.04)}$$

$$P(A_2/B) = \frac{8}{17}.$$

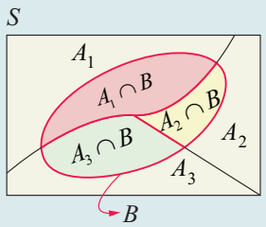
چونکہ $P(A_1/B) > P(A_2/B)$ ، انجینئر I-کے ذریعے غلطی کا امکان انجینئر - II کے غلطی کے امکان سے زیادہ ہے، لہذا کوئی اندازہ لگاسکتا ہے کہ سنگین غلطی انجینئر I-نے کی ہوگی۔

12_11th-Maths-Vol2-Unit12_UM.indd 262 21-02-2023 15:14:10

مثال 12.28

X، Y اور Z کسی مخصوص کارخانے کے منیجر بنے کا امکان 4 : 2 : 3 ہیں۔ اگر X، Y اور Z منیجر بن جائے تو بونس سکیم متعارف کردئے جانے کا امکان بالترتیب 0.3، 0.5 اور 0.4 ہیں۔ اگر بونس اسکیم کو متعارف کرائی گئی ہے، تو اس بات کا کیا امکان ہے کہ Z کو منیجر مقرر کیا گیا؟

حل



فرض کریں کہ A_1، A_2 اور A_3 بالترتیب X، Y اور Z کارخانے کا منیجر بننے کے مواقع ہیں۔ فرض کریں B بونس اسکیم کو متعارف کرنے کا موقع ہے۔

ہمیں شرطی امکان $P(A_3 / B)$ کو معلوم کرنا ہوگا۔

چونکہ A_1، A_2 اور A_3 باہمی اخراج اور مکمل مواقع ہیں۔ بائیس نظریہ کو استعمال کرنے سے

$$P(A_3 / B) = \frac{P(A_3)\,P(B / A_3)}{P(A_1)\,P(B / A_1) + P(A_2)\,P(B / A_2) + P(A_3)\,P(B / A_3)}$$

ہمارے پاس

$$P(A_1) = \frac{4}{9}, \quad P(B / A_1) = 0.3$$

$$P(A_2) = \frac{2}{9}, \quad P(B / A_2) = 0.5$$

$$P(A_3) = \frac{3}{9}, \quad P(B / A_3) = 0.4$$

$$P(A_3 / B) = \frac{P(A_3)\,P(B / A_3)}{P(A_1)\,P(B / A_1) + P(A_2)\,P(B / A_2) + P(A_3)\,P(B / A_3)}$$

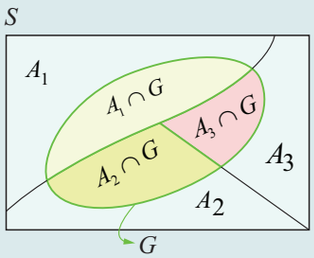
$$P(A_3 / B) = \frac{\left(\frac{3}{9}\right)(0.4)}{\left(\frac{4}{9}\right)(0.3) + \left(\frac{2}{9}\right)(0.5) + \left(\frac{3}{9}\right)(0.4)}$$

$$= \frac{12}{34} = \frac{6}{17}.$$

مثال 12.29

ایک مشاورتی فرم (consulting firm) تین ایجنسیوں سے ایجنسی L سے 50%، ایجنسی M سے 30% اور ایجنسی N سے 20% کے طور پر کار کو کرایہ پر لیتی ہے۔ اگر L سے 90% کاریں، M سے 70% کاریں اور N سے 60% کاریں اچھی حالت میں ہیں (i) اس کا کیا امکان ہے کہ فرم کو اچھی حالت میں کار ملیں گی؟ (ii) اگر ایک کار اچھی حالت میں ہو تو اس کا کیا امکان ہے کہ یہ ایجنسی N سے آئی ہو؟

حل



فرض کریں کہ A_1، A_2 اور A_3 کاریں بالترتیب L، M اور N ایجنسیوں سے کرایوں پر لینے کا مواقع ہیں۔

فرض کرو کہ G اچھی حالت پر کار ملنے کا موقع ہے۔

ہمیں معلوم کرنا ہے

(i) موقع G کا کل امکان یعنی، $P(G)$

12_11th-Maths-Vol2-Unit12_UM.indd 263 21-02-2023 15:14:11

(ii) شرطی امکان معلوم کریں جبکہ G دیا گیا ہے، $P(A_3 / G)$

ہمارے پاس

$$P(A_1) = 0.50, \quad P(G / A_1) = 0.90$$

$$P(A_2) = 0.30, \quad P(G / A_2) = 0.70$$

$$P(A_3) = 0.20, \quad P(G / A_3) = 0.60.$$

(i) چونکہ A_1، A_2 اور A_3 باہمی اخراج اور مکمل مواقع ہیں۔ S اور G میں ایک موقع ہے تو موقع کا کل امکان $P(G)$ ہے۔

$$P(G) = P(A_1)\, P(G / A_1) + P(A_2)\, P(G / A_2) + P(A_3)\, P(G / A_3)$$

$$P(G) = (0.50)(0.90) + (0.30)(0.70) + (0.20)\ (0.60)$$

$$P(G) = 0.78.$$

(ii) شرطی امکان A_3، جبکہ G دیا گیا $P(A_3 / G)$ ہے

بائیس نظریہ کے ذریعے

$$P(A_3 / G) = \frac{P(A_3)\, P(G / A_3)}{P(A_1)\, P(G / A_1) + P(A_2)\, P(G / A_2) + P(A_3)\, P(G / A_3)}$$

$$P(A_3 / G) = \frac{(0.20)(0.60)}{(0.50)(0.90) + (0.30)(0.70) + (0.20)\ (0.60)}$$

$$= \frac{2}{13}.$$

12.4 مشق (EXERCISE)

(1) ایک کارخانے میں دو مشینیں I اور II ہیں۔ مشین- I کی پیداوار 60% اشیاء تیار کرتی ہے ۔ مشین- II 40% اشیاء تیار کرتی ہے۔ مزید یہ کہ مشین- I کی طرف سے تیار کردہ 2% اشیاء ناقص ہیں اور مشین- II کی طرف تیار کردہ 4% اشیاءناقص ہیں۔ اگر ایک شئے کو سریعی طور پر انتخاب کیا جائے تو ناقص شئے آنے کا امکان معلوم کریں۔

(2) دو مشابہ کوزے میں بالترتیب 6 سیاہ اور 4 سرخ گیندیں ، 2 سیاہ اور2 سرخ گیندیں ہیں۔ایک کوزے کو سریعی طور پر منتخب کرکے ایک گیند کو نکالی جاتی ہے۔ (i) اس کا امکان معلوم کریں یہ سیاہ گیند ہے (ii) اگر گیند سیاہ ہو تو، اس کا کیا امکان ہے کہ یہ پہلے کوزے سے ہے۔

(3) ایک فرم (firm) تین کارخانے X، Y اور Z کے ذریعے PVC پائپ تیار کرتی ہے۔ تین فرموں X، Y اور Z کی روزانہ پیداوار کا حجم بالترتیب 2000 اکائیاں، 3000 اکائیاں اور 5000 اکائیاں ہیں۔ یہ ماضی کے تجربہ سے معلوم ہوتا ہے کہ کارخانہ X سے 3%، کارخانہ Y سے 4% اور کارخانہ Z سے 2% پیداوار ناقص ہیں۔ ایک پائپ کو ایک دن کی کل پیداوار سے سریعی طور پر منتخب کیا جاتاہے،

(i) اس کا کیا امکان ہے کہ منتخب کردہ پائپ ناقص ہے۔

(ii) اگر منتخب کردہ پائپ ناقص ہے، تو اس کا کیا امکان ہے کہ یہ کارخانہ Y کے ذریعے تیار کیا گیا ہے؟

12_11th-Maths-Vol2-Unit12_UM.indd 264 21-02-2023 15:14:12

(4) اگر A، B اور C کسی مخصوص کارخانے کے مینیجر بننے کا امکان 5 : 3 : 2 ہیں۔ اگر A، B اور C مینیجر بن جائے تو دفتر کے کینٹین کو بہتر بنانے کا امکان بالترتیب 0.5، 0.4 اور 0.3 ہیں۔ اگر دفتر کے کینٹین کو بہتر بنایا گیا ہے، اس کا کیا امکان ہے کہ B کو مینیجر مقرر گیا گیا؟

(5) ایک اشتہاری ایگزیکیٹو پرائم ٹائم کے اوقات میں شادی شدہ مردوں اور عورتوں کی ٹیلی ویژن دیکھنے کی عادات کا مطالعہ کررہاہے۔ ماضی کے دیکھنے کے ریکارڈ کے بنیاد پر اس نے طے کیا ہے کہ پرائم ٹائم کے دوران بیویاں 60% وقت ٹیلی ویژن دیکھتی ہیں، یہ بھی طے کیا گیا ہے کہ جب بیوی ٹیلی ویژن دیکھ رہی ہو تو 40% وقت شوہر بھی دیکھ رہا ہے۔ جب بیوی ٹیلی ویژن نہیں دیکھ رہی ہو تی تو 30% وقت شوہر ٹیلی ویژن دیکھتاہے۔ اس کا کیا امکان ہے کہ (i) شوہر پرائم ٹائم کے دوران ٹیلی ویژن دیکھ رہا ہے، (ii) اگر شوہر ٹیلی ویژن دیکھ رہا ہے تو بیوی بھی ٹیلی ویژن دیکھ رہی ہے۔

1L3TC

12.5 مشق (EXERCISE)

دیے گئے چار متبادلات میں صحیح جواب منتخب کریں

(1) 3 مرد، 2 خواتین اور 4 بچوں کے گروہ سے 4 افراد کو سرسری طور پر منتخب کیا جاتا ہے، ان میں سے ٹھیک 2 بچے ہونے کا امکان ہے

(1) $\frac{3}{4}$ (2) $\frac{10}{23}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{10}{21}$

(2) سٹ $\{1,2,3,...,20\}$ سے ایک عدد منتخب کیا گیا ہے۔ منتخب کردہ عدد 3 یا 4 سے تقسیم ہونے کا امکان ہے۔

(1) $\frac{2}{5}$ (2) $\frac{1}{8}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{2}{3}$

(3) A، B اور C ایک نشانہ کو بیک وقت لیکن آزادنہ طورپر مارنے کی کوشش کرتے ہیں۔نشانہ کو مارنے کے لئے اُن کے امکانات بالترتیب $\frac{3}{4}$، $\frac{1}{2}$، $\frac{5}{8}$ ہیں۔ نشانہ A یا B سے ماراجائے اور C سے نہیں مارنے کا امکان ہے

(1) $\frac{21}{64}$ (2) $\frac{7}{32}$ (3) $\frac{9}{64}$ (4) $\frac{7}{8}$

(4) اگر A اور B کوئی مواقع ہیں، تو ان میں سے ٹھیک ایک واقع ہونے کا امکان ہے۔

(1) $P(A\cup\overline{B})+P(\overline{A}\cup B)$ (2) $P(A\cap\overline{B})+P(\overline{A}\cap B)$

(3) $P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ (4) $P(A)+P(B)+2P(A\cap B)$

(5) فرض کریں کہ A اور B دو مواقع ہیں اس طرح کہ $P\left(\overline{A\cup B}\right)=\frac{1}{6}$، $P\left(A\cap B\right)=\frac{1}{4}$ اور $P\left(\overline{A}\right)=\frac{1}{4}$ تو موقع A اور B ہیں۔

(1) آزاد ہیں مگر مساوی وقوع پذیر نہیں (2) مساوی وقوع پذیر مگر آزاد نہیں

(3) باہمی اندراج اور منحصر ہیں (4) آزاد اور مساوی وقوع پذیر ہیں

(6) بارہ اشیاء پر مشتمل ایک مجموعہ سے دو اشیاء کا انتخاب کیا جاتاہے جن میں سے 4 ناقص ہیں، تو کم از کم ایک شئے ناقص ہونے کا امکان ہے

(1) $\frac{19}{33}$ (2) $\frac{17}{33}$ (3) $\frac{23}{33}$ (4) $\frac{13}{33}$

12_11th-Maths-Vol2-Unit12_UM.indd 265 21-02-2023 15:14:12

(7) ایک آدمی کے جیب میں 3 پچاس روپئے کے نوٹ، 4 سوروپئے کے نوٹ اور 6 پانچ سو روپئے کے نوٹ ہیں۔ اگر دونوٹوں کو سریعی طور پر لیا جاتاہے، دونوں نوٹ سو روپئے ہونے کے حق میں کیا مشکلات ہیں؟

1:13 (4) 13:1 (3) 12:1 (2) 1:12 (1)

(8) ایک حرف لفظ 'ASSISTANT' سے سریعی طور پر لیاجاتاہے اور دوسرا حرف لفظ 'STATISTICS' سے سریعی طور پر لیاجاتاہے۔ منتخب کردہ حرف ایک جیسے ہونے کا امکان ہے

$\frac{19}{90}$ (4) $\frac{29}{90}$ (3) $\frac{17}{90}$ (2) $\frac{7}{45}$ (1)

(9) درجہ 2 کے تمام میٹرکس کے سٹ سے سریعی طور پر ایک میٹرکس جس کے عناصر صرف 0 یا 1 ہیں انتخاب کیا جاتا ہے۔منتخب کردہ میٹرکس کا مقطعہ غیر صفر ہونے کا امکان ہے

$\frac{5}{8}$ (4) $\frac{1}{4}$ (3) $\frac{3}{8}$ (2) $\frac{3}{16}$ (1)

(10) ایک تھیلی میں 5 سفید اور 3 سیاہ گیندیں ہیں۔ پانچ گیندیں بغیر واپس کے لگاتار نکالے جاتے ہیں۔ وہ ایک کے بعد دوسرا مختلف رنگوں کے ہونے کا امکان ہے

$\frac{9}{14}$ (4) $\frac{1}{14}$ (3) $\frac{5}{14}$ (2) $\frac{3}{14}$ (1)

(11) اگر A اور B دو مواقع ہیں اس طرح کے $A \subset B$ اور $P(B) \neq 0$، تو مندرجہ ذیل میں سے کونسا متبادل صحیح ہے؟

$P(A/B) = \frac{P(A)}{P(B)}$ (1) $P(A/B) < P(A)$ (2)

$P(A/B) \geq P(A)$ (3) $P(A/B) > P(B)$ (4)

(12) ایک تھیلی میں 6 نیلی، 2 سفید اور 7 سیاہ گیندیں ہیں۔ اگر دو گیندیں بیک وقت نکالے جاتے ہیں تو دونوں کے مختلف رنگ ہونے کا امکان ہے

$\frac{73}{105}$ (4) $\frac{64}{105}$ (3) $\frac{71}{105}$ (2) $\frac{68}{105}$ (1)

(13) اگر X اور Y دو مواقع ہیں اس طرح کہ $P(X/Y) = \frac{1}{2}$، $P(Y/X) = \frac{1}{3}$ اور $P(X \cap Y) = \frac{1}{6}$، تو $P(X \cup Y)$ ہے

$\frac{2}{3}$ (1) $\frac{1}{6}$ (3) $\frac{2}{5}$ (2) $\frac{1}{3}$ (1)

(14) اگر کوذے میں 5 سرخ اور 5 سیاہ گیندیں ہیں ایک گیند کو سریعی طور پر نکالاجاتاہے۔ اس کا رنگ نوٹ کرکے اس کو کوذے میں واپس کردیاجاتا ہے۔ مزید یہ کہ نوٹ کی گئی رنگ کا دو اضافی گیندیں کوذے میں ڈال دی جاتی ہے اور پھر ایک گیند سریعی طور پر نکالی جاتی ہے ۔ دوسری گیند نکالنے پر سرسرخ رنگ حاصل ہونے کا امکان ہے

$\frac{1}{4}$ (4) $\frac{7}{12}$ (3) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{5}{12}$ (1)

(15) پہلے 100 طبعی اعداد میں سے ایک عدد x کو سریعی طور پر منتخب کیا جاتاہے۔ فرض کریں کہ A ایک اعداد کا موقع ہے جو $\frac{(x-10)(x-50)}{x-30} \geq 0$ کو مطمئن کرتا ہے۔ تو $P(A)$ ہے

0.70 (4) 0.71 (3) 0.51 (2) 0.20 (1)

12_11th-Maths-Vol2-Unit12_UM.indd 266 21-02-2023 15:14:20

(16) اگر دو مواقع A اور B آزاد ہیں۔ اس طرح کہ $P(A)=0.35$ اور $P(A\cup B)=0.6$ ہوتو $P(B)$ ہے

$\frac{7}{13}$ (4) $\frac{4}{13}$ (3) $\frac{1}{13}$ (2) $\frac{5}{13}$ (1)

(17) اگر دو مواقع A اور B ہیں۔اس طرح کہ $P(\overline{A})=\frac{3}{10}$ اور $P(A\cap\overline{B})=\frac{1}{2}$، تو $P(A\cap B)$ ہے

$\frac{1}{5}$ (4) $\frac{1}{4}$ (3) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{2}$ (1)

(18) اگر A اور B دو مواقع ہوں اس طرح کہ $P(A)=0.4$، $P(B)=0.8$ اور $P(B/A)=0.6$ تو $P(\overline{A}\cap B)$ ہے

0.66 (4) 0.56 (3) 0.24 (2) 0.96 (1)

(19) تین مواقع A، B اور C ہیں۔ جن میں سے صرف ایک ہی موقع ہوسکتا ہے اگر مشکلات A کے خلاف 7 سے 4 ہیں اور B کے خلاف 5 سے 3 ہیں، تو C کے خلاف مشکلات ہے

88: 23 (4) 23: 88 (3) 65: 23 (2) 23: 65 (1)

(20) اگر a اور b کو سٹ $\{1,2,3,4\}$ سے متبادل کے ساتھ سریعی طور پر منتخب کرتے ہیں تو پھر مساوات کی حقیقی جذر $x^2+ax+b=0$ کا امکان ہے

$\frac{11}{16}$ (4) $\frac{7}{16}$ (3) $\frac{5}{16}$ (2) $\frac{3}{16}$ (1)

(21) یہ دیاگیا ہے کہ مواقع A اور B اس طرح ہیں کہ $P(A)=\frac{1}{4}$، $P(A/B)=\frac{1}{2}$ اور $P(B/A)=\frac{2}{3}$ ۔ تو $P(B)$ ہے

$\frac{1}{2}$ (4) $\frac{2}{3}$ (3) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{6}$ (1)

(22) ایک مخصوص کالج میں 4% لڑکے اور 1% لڑکیاں 1.8 میٹر سے لمبے ہیں۔ مزید 60% طالبات لڑکیاں ہیں۔ اگر ایک طلباء کو سریعی طور پر منتخب کیا جاتاہے اور وہ 1.8 میٹر سے زیادہ لمبا ہے تو وہ طالب علم لڑکی ہونے کا امکان ہے؟

$\frac{7}{11}$ (4) $\frac{5}{11}$ (3) $\frac{3}{11}$ (2) $\frac{2}{11}$ (1)

(23) 10 سکوں کو اچھالاجاتاہے، کم از کم 8 سر حاصل ہونے کا امکان ہے

$\frac{7}{128}$ (4) $\frac{7}{16}$ (3) $\frac{7}{32}$ (2) $\frac{7}{64}$ (1)

(24) دو مواقع A اور B کے امکان بالترتیب 0.3 اور 0.6 ہے۔ A اور B دونوں بیک وقت واقع ہونے کا امکان 0.18 ہے۔ A اور B نہ ہونے کا امکانات ہے

0.28 (4) 0.42 (3) 0.72 (2) 0.1 (1)

(25) اگر m ایک عدد ہے اس طرح کہ $m\le 5$، تو دو درجی مساوات $2x^2+2mx+m+1=0$ حقیقی جذور ہونے کا امکان ہے

$\frac{4}{5}$ (4) $\frac{3}{5}$ (3) $\frac{2}{5}$ (2) $\frac{1}{5}$ (1)

12_11th-Maths-Vol2-Unit12_UM.indd 267 21-02-2023 15:14:25

خلاصہ (SUMMARY)

فرض کرو کے S کو سریعی تجربہ سے وابستہ نظیری عرصہ ہونے دیں اور A ایک موقع ہو۔

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{(A \text{ سازگار صورتوں کی تعداد})}{(S \text{ میں صورتوں کی مکمل تعداد})}$$

امکان کے محور

دیا گیا ہے S ایک محدود نظیری عرصہ ہے اور S میں A ایک موقع ہے۔ ہم $P(A)$، A کا امکانی تفاعل کی تعریف کریں جو مندرجہ تین محوروں کو مطمئن کرتے ہوں۔

(1) $P(A) \geq 0$

(2) اگر A اور B دو باہمی اخراج مواقع ہیں، تو $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(3) $P(S) = 1$

ناممکن موقع کا امکان صفر ہے۔ یعنی $\boxed{P(\varnothing) = 0}$

اگر A اور B کوئی دو مواقع ہیں اور B کا متمم موقع $\overline{B}$ ہے تو

$$\boxed{P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)}$$

اگر A اور B کوئی دو مواقع ہیں، تو

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

شرطی امکان A پر موقع B کا انحصار $P(B/A)$ کے ذریعے اس صورت میں ظاہر کیا جاتا ہے جہاں واقع A پہلے سے ہی معلوم ہو چکا ہو اور اس کی تعریف اس طرح سے دی گئی ہے۔

$$\boxed{P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}، \text{ فراہم } P(A) \neq 0}$$

$$\boxed{P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}، \text{ فراہم } P(B) \neq 0}$$

دو مواقع A اور B کے بیک وقت ہونے کا امکان بذریعہ دیا گیا ہے

$$\boxed{P(A \cap B) = P(B/A)P(A) \quad \text{یا} \quad P(A \cap B) = P(A/B)P(B)}$$

دو مواقع A اور B کو آزاد کہا جاتا ہے صرف اور صرف اگر

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B)}$$

کُل امکان

اگر A_1، A_2، A_3،...، A_n باہمی اخراج اور مکمل مواقع ہیں اور S میں B کوئی بھی موقع ہے تو موقع B کا کل امکان $P(B)$ کہلاتا ہے اور

$$\boxed{P(B) = P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2) + \cdots + P(A_n).P(B/A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(B/A_i)}$$

بائس کا نظریہ

اگر A_1، A_2، A_3،...، A_n باہمی اخراج $P(A_i) > 0,\ i = 1, 2, 3, \ldots . n$ اور B مکمل مواقع ہیں اس طرح کہ اور کوئی بھی موقع ہے جس میں $P(B) > 0$، تو

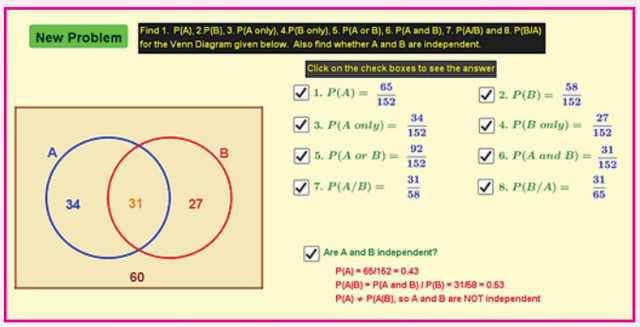
$$\boxed{P(A_i/B) = \frac{P(A_i)\,P(B/A_i)}{P(A_1)\,P(B/A_1) + P(A_2)\,P(B/A_2) + \ldots + P(A_n)\,P(B/A_n)}}$$

12_11th-Maths-Vol2-Unit12_UM.indd 268 21-02-2023 15:14:25

ICT CORNER 12(a)

امکانی نظریہ کا تعارف

متوقع نتائج

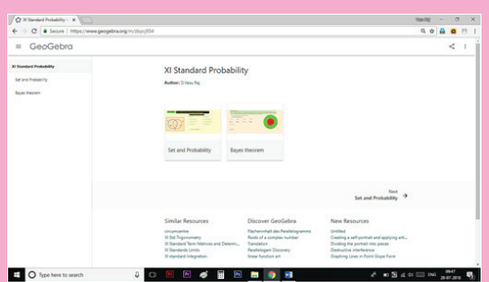


مرحلہ 1

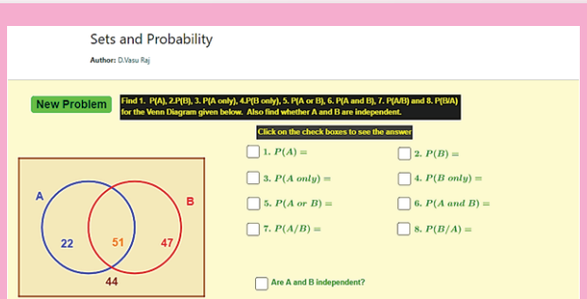
براؤزر کھولیں اور دئے گئے URL لنک ٹیپ کیجئے (یا) QR کوڈ کو اسکین کیجئے۔ "XI تکملہ احصا" جیوجبرا (GeoGebra) نامی ورک بک کھلے گا۔ اس میں آپ کے سبق سے متعلق کی ورک شیٹیں ہیں۔

مرحلہ 2

ورک شیٹ "مجموعہ اور امکانی نظریہ" کو منتخب کریں۔ آپ "نئی مسئلہ" پر کلک کر کے سوال کو تبدیل کر سکتے ہیں۔ امکانات پر کام کریں اور اپنے جواب معلوم کرنے کے لئے، جواب دیکھنے کے لیے متعلقہ چیک ڈبے پر کلک کریں۔



مرحلہ 1



مرحلہ 2

Browse in the link:

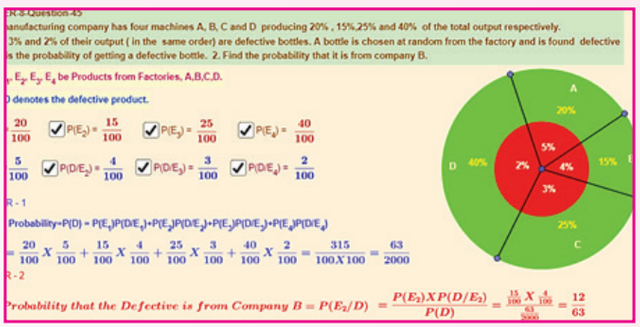
XI standard Probability: https://ggbm.at/zbpcj934

12_11th-Maths-Vol2-Unit12_UM.indd 269 21-02-2023 15:14:26

ICT CORNER 12(b)

امکانی نظریہ کا تعارف

متوقع نتائج

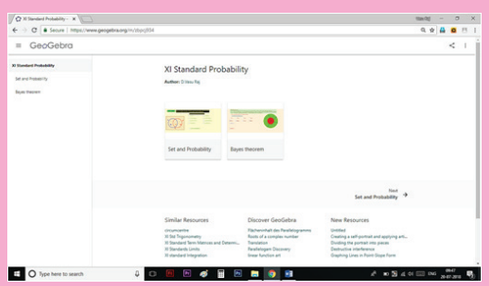


مرحلہ 1

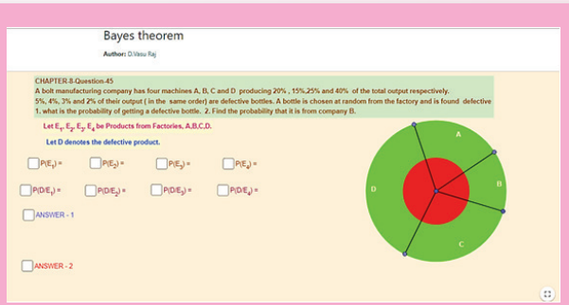
براؤزر کھولیں اور دئے گئے URL لنک ٹیپ کیجئے (یا) QR کوڈ کو اسکین کیجئے۔ "XI تکملہ احصا" جیوجبرا (GeoGebra) نامی ورک بک کھلے گا۔ اس میں آپ کے سبق سے متعلق کی ورک شیٹیں ہیں۔

مرحلہ 2

ورک شیٹ "بائس کا نظریہ" کو منتخب کریں ۔ ایک مثال دی جاتی ہے جیسا کہ دیا گیا ہے مرحلہ وار امکانات پر کام کریں۔ اپنا جواب معلوم کرنے لئے متعلقہ چیک ڈبے پر کلک کریں۔



مرحلہ 1



مرحلہ 2

Browse in the link:

XI standard Probability: https://ggbm.at/zbpcj934

AYF8G

12_11th-Maths-Vol2-Unit12_UM.indd 270 21-02-2023 15:14:26

جوابات (ANSWERS)

مشق 7.1

(1) (i) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 9 & 25\\ 0 & 4 & 16\end{bmatrix}$ (ii) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & 5 & 9 & 13\\ 2 & 2 & 6 & 10\\ 5 & 1 & 3 & 7\end{bmatrix}$ (2) $\pm\sqrt{2}, -3, \frac{1}{2}, 1-\pi$

(3) 5 (4) $A=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-15 & 10 & -8\\ 10 & -5 & 5\end{bmatrix}$, $B=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-12 & 2 & -16\\ 8 & -4 & 13\end{bmatrix}$

(5) $A^4=\begin{bmatrix}1 & 4a\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ (6) (ii) $\alpha=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}, n\in\mathbb{Z}$ (7) $x=1$

(9) $k=2$ (12) $-I$ (14) $A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & 0\end{bmatrix}$ (16) 3×4

(18) $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 12\\ -5 & 0\end{bmatrix}$ (19) $x=-2,\ y=-1$ (20) (i) $x=3^{\frac{1}{3}}$ (ii) $p=-2, q=0, r=-3$

(21) $A=\begin{bmatrix}0 & -1 & -2\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$, سکیو سٹرول (24) پیک I - ₹ 180, پیک II - ₹ 340, پیک III - ₹ 480

مشق 7.2

(10) 0 (13) 0 (15) (i) 0 (ii) 0 (16) 4

(17) -81 (18) (19) $-1, 2$ (21) 7

مشق 7.3

(3) $x=0$ (2 کثرت), $x=-(a+b+c)$ (5) $x=0$ (2 کثرت), $x=-12$

مشق 7.4

(1) 2.5 sq.units (2) $k=-1, 7$ (3) (i) واحد (ii) غیر واحد (iii) واحد

(4) (i) $a=-\frac{6}{7}$ (ii) $b=\frac{49}{8}$ (5) $\frac{1}{2}$ (6) 6

مشق 7.5

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
2	1	1	2	2	2	4	4	2	4	2	4	3	2	4
(16)	(17)	(18)	(19)	(20)	(21)	(22)	(23)	(24)	(25)					
3	3	4	1	3	2	3	3	1	2					

مشق 8.1

(7) $\vec{b}-2\vec{a}$ اور دوسرے وتر $\vec{b}-\vec{a}, -\vec{a}, \vec{a}-\vec{b}$ دوسرے ضلع

11th_Maths-Vol2-Answer_Urdu Medium.indd 271 21-02-2023 15:15:32

مشق 8.2

(1) (i) سمت کو سایں نہیں (ii) سمت کو سایں (iii) سمت کو سایں نہیں

(2) (i) $\left(\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}}\right)$ (ii) $\left(\frac{3}{\sqrt{19}},\frac{-1}{\sqrt{19}},\frac{3}{\sqrt{19}}\right)$ (iii) (0, 0, 1)

(3) (i) $\left(\frac{3}{\sqrt{89}},\frac{-4}{\sqrt{89}},\frac{8}{\sqrt{89}}\right)$, $(3,-4,8)$ (ii) $\left(\frac{3}{\sqrt{11}},\frac{1}{\sqrt{11}},\frac{1}{\sqrt{11}}\right)$, $(3,1,1)$

(iii) (0, 1, 0) اور (0, 1, 0) (iv) $\left(\frac{5}{\sqrt{2338}},\frac{-3}{\sqrt{2338}},\frac{-48}{\sqrt{2338}}\right)$ اور $(5,-3-48)$

(v) $\left(\frac{3}{\sqrt{34}},\frac{4}{\sqrt{34}},\frac{-3}{\sqrt{34}}\right)$ اور $(3,4,-3)$ (vi) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ اور $(1,0,-1)$

(4) $\left(\frac{-2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ اور $\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$

(5) $a=\pm\frac{1}{2}$ (6) $a=-1,b=2,c=-1$, or $a=1,b=-2,c=1$ (8) $\lambda=\frac{2}{3}$

(11) (i) $\sqrt{41},\left(\frac{2}{\sqrt{41}},\frac{1}{\sqrt{41}},\frac{-6}{\sqrt{41}}\right)$ (ii) $\sqrt{1123},\left(\frac{-15}{\sqrt{1123}},\frac{27}{\sqrt{1123}},\frac{13}{\sqrt{1123}}\right)$

(12) $\sqrt{44}+\sqrt{218}+\sqrt{110}$ (13) $\frac{1}{\sqrt{398}}(17\hat{i}-3\hat{j}-10\hat{k})$

(14) ہاں (16) $m=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

مشق 8.3

(1) (i) 9 (ii) 4 (2) (i) $\lambda=\frac{5}{2}$ (ii) $\lambda=-2$ (3) $\theta=\frac{\pi}{4}$

(4) (i) $\theta=\cos^{-1}\left(\frac{-9}{49}\right)$ (ii) $\theta=\frac{2\pi}{3}$ (5) $\theta=\frac{2\pi}{3}$ (8) -55

(11) $5\sqrt{2}$ (12) $\frac{41}{7}$ (13) 5 (14) -42

مشق 8.4

(1) $\sqrt{507}$ (3) $\frac{\pm10\sqrt{3}}{\sqrt{35}}(5\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k})$ (4) $\pm\frac{(-\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})}{\sqrt{6}}$

(5) $8\sqrt{3}$ sq. units (6) $\frac{1}{2}\sqrt{165}$ sq. units (10) $\frac{\pi}{3}$

مشق 8.5

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
3	3	4	2	2	3	4	4	2	3	2	1	1	1	3
(16)	(17)	(18)	(19)	(20)	(21)	(22)	(23)	(24)	(25)					
4	1	4	4	1	3	2	4	3	2					

11th_Maths-Vol2-Answer_Urdu Medium.indd 272 21-02-2023 15:15:33

مشق 9.1

(1) $\simeq 0.\overline{3}$ (2) $\simeq 0.25$ (3) $\frac{1}{2\sqrt{3}} \simeq 0.288$ (4) $\simeq 0.25$

(5) $\simeq 1$ (6) $\simeq 0$ (7) 1 (8) 3

(9) 2 (10) 3 (11) غیر موجود ہے (12) غیر موجود ہے

(13) 0 (14) 1 (15) غیر موجود ہے

(16) $x_0 = 4$ کے سوائے (17) $x_0 = \pi$ کے سوائے (19) $f(8^-) = f(8^+) = 25$

(20) نہیں (21) $f(2)$ کا نتیجہ اخذ نہیں کیا جا سکتا (22) 6, 6 (23) غیر موجود ہے

مشق 9.2

(1) 32 (2) $\frac{m}{n}$ (3) 108 (4) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

(5) $\frac{1}{6}$ (6) $-\frac{1}{4}$ (7) 3 (8) 4

(9) $\frac{1}{2}$ (10) $-\frac{1}{4}$ (11) $-\frac{3}{4}\sqrt[3]{4}$ (12) 0

(13) $f(x) \to -\infty$ as $x \to 0$ (حد غیر موجود ہے) (14) $\frac{1}{4}$ (15) $\frac{1}{4a\sqrt{a-b}}$

مشق 9.3

(1) (i) $f(-2) \to \infty$ as $x \to -2^-$, $f(-2) \to -\infty$ as $x \to -2^+$

(ii) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) \to \infty$ as $x \to \frac{\pi}{2}^-$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) \to -\infty$ as $x \to \frac{\pi}{2}^+$

(2) $f(3) \to -\infty$ as $x \to 3^-$, $f(3) \to \infty$ as $x \to 3^+$ (3) $f(x) \to \infty$ as $x \to \infty$

(4) 0 (5) $f(x) \to \infty$ as $x \to \infty$ (6) -1 (7) $\frac{1}{4}$

(9) $\frac{1}{\alpha}$ (10) 30

مشق 9.4

(1) e^7 (2) $e^{\frac{1}{3}}$ (3) 1 (4) $\frac{1}{e^8}$ (5) e^3

(6) $\frac{1}{8}$ (7) $\frac{\alpha}{\beta}$ (8) $\frac{2}{5}$ (9) $\begin{cases} 1 & \text{if } m = n \\ 0 & \text{if } m > n \\ f(\alpha) \to \infty \text{ as } \alpha \to 0 & \text{if } m < n \end{cases}$

(10) $2\cos a$ (11) $\frac{b}{a}$ (12) $\frac{2}{3}$ (13) $\frac{1}{2}$ (14) 2

(15) $\log\frac{2}{3}$ (16) $\log 9$ (17) $\frac{1}{2}$ (18) $\log 3 - 1$ (19) a

(20) $-\frac{3}{2}$ (21) e^2 (22) $\frac{1}{4\sqrt{2}}$ (23) 1 (24) e^2

(25) 2 (26) $a - b$ (27) $\frac{1}{2}$ (28) $\frac{1}{2}$

11th_Maths-Vol2-Answer_Urdu Medium.indd 273 21-02-2023 15:15:40

9.5 مشق

(2) (i) تمام $x \in \mathbb{R}$ کے لیے مسلسل ہے (ii) $\mathbb{R}$ پر مسلسل ہے

(iii) تمام $x \in \mathbb{R} - (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in z$ کے لیے مسلسل ہے (iv) تمام $x \in \mathbb{R}$ کے لیے مسلسل ہے

(v) $(0, \infty)$ کے لیے مسلسل ہے (vi) تمام $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ کے لیے مسلسل ہے

(vii) تمام $x \in \mathbb{R} - \{-4\}$ کے لیے مسلسل ہے (viii) تمام $x \in \mathbb{R}$ کے لیے مسلسل ہے

(ix) تمام $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ کے لیے مسلسل ہے (x) تمام $x \in \mathbb{R} - \frac{n\pi}{2}, n \in z$ کے لیے مسلسل ہے

(3) (i) $x = 3$ پر غیر مسلسل ہیں (ii) تمام $x \in \mathbb{R}$ کے لیے مسلسل ہے

(iii) تمام $x \in \mathbb{R}$ کے لیے مسلسل ہے (iv) تمام $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ کے لیے مسلسل ہے

(4) (i) $x_0 = 1$ پر مسلسل ہے (ii) $x_0 = 3$ پر غیر مسلسل ہیں

(6) $\alpha = 4$ (8) 6

(9) (i) $x = 1$ پر غیر مسلسل ہیں (ii) $x = 0$ پر غیر مسلسل ہیں

(10) $x = 0, 1, 3$ پر مسلسل ہے

(11) (i) $x = -2$ پر نکالنے والا غیر مسلسل $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 8}{x+2} & \text{if} \quad x \neq -2 \\ -6 & \text{if} \quad x = -2 \end{cases}$

(ii) $x = -4$ پر نکالنے والا غیر مسلسل $g(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 64}{x+4} & \text{if} \quad x \neq -4 \\ 48 & \text{if} \quad x = -4 \end{cases}$

(iii) $x = 9$ پر نکالنے والا غیر مسلسل $g(x) = \begin{cases} \frac{3 - \sqrt{x}}{9 - x} & \text{if} \quad x \neq 9 \\ \frac{1}{6} & \text{if} \quad x = 9 \end{cases}$

(12) -2 (13) $f(0) = 0$ (14) $f(1) = \frac{2}{3}$

9.6 مشق

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
2	3	4	1	1	4	2	2	2	3	4	3	4	3	1
(16)	(17)	(18)	(19)	(20)	(21)	(22)	(23)	(24)	(25)					
1	1	1	4	2	2	2	2	2	4					

10.1 مشق

(1) (i) 0 (ii) -4 (iii) $-2x$

(2) (i) $f'(1^-) = -1, f'(1^+) = 1$, غیر تفریقی ہے (ii) $f'(x) \to -\infty$ as $x \to 1^-$, غیر تفریقی ہے

(iii) $f'(1^-) = 1, f'(1^+) = 2$, غیر تفریقی ہے

(3) (i) تفریقی ہے (ii) غیر تفریقی ہے

(iii) غیر تفریقی ہے (iv) غیر تفریقی ہے

(5) $x = -1$ اور $x = 8$ پر کپ

11th_Maths-Vol2-Answer_Urdu Medium.indd 274 21-02-2023 15:15:43

$x=11,$ پر مماس عمودی ہے , $x=4$ پر غیر مسلسل ہیں

(6) غیر موجود ہے

(7) (i) $x=n\pi, n\in z$ پر غیر تفریقی ہے (ii) $x=(2n+1)\frac{\pi}{2}, n\in z$ پر غیر تفریقی ہے

مشق 10.2

(1) $1-3\cos x$ (2) $\cos x-\sin x$ (3) $x\cos x+\sin x$

(4) $-\sin x-2\sec^2 x$ (5) $3t^2\cos t-t^3\sin t$ (6) $4\sec t\tan t+\sec^2 t$

(7) $e^x(\cos x+\sin x)$ (8) $\frac{x\sec^2 x-\tan x}{x^2}$ (9) $\frac{1}{1+\cos x}$

(10) $\frac{(1-x)\cos x+(1+x)\sin x}{(\sin x+\cos x)^2}$ (11) $\cos x+\sin x$ (12) $\frac{x\cos x-2\sin x}{x^3}$

(13) $\tan\theta\sec\theta+\cos\theta+\sin\theta$ (14) $-\frac{(1+\cos^2 x)}{\sin^3 x}$ (15) $x\cos 2x+\sin x\cos x$

(16) $e^{-x}\left[\frac{1}{x}-\log x\right]$ (17) $e^{-3x}\left[-3(x^2+5)\log(1+x)+\frac{x^2+5}{1+x}+2x\log(1+x)\right]$

(18) $\frac{\pi}{180}\cos\frac{\pi}{180}x$ (19) $\frac{\log_{10} e}{x}$

مشق 10.3

(1) $5(2x+4)(x^2+4x+6)^4$ (2) $3\sec^2 3x$ (3) $-\sec^2 x\sin(\tan x)$

(4) $x^2(1+x^3)^{-\frac{2}{3}}$ (5) $\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$ (6) $e^x\cos(e^x)$

(7) $7(3x^2+4)(x^3+4x)^6$ (8) $\frac{3}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)$ (9) $\frac{1}{3}\sec^2 t(1+\tan t)^{-\frac{2}{3}}$

(10) $-3x^2\sin(a^3+x^3)$ (11) $-my$ (12) $20\sec 5x\tan 5x$

(13) $\frac{8(2x-5)^3}{(8x^2-5)^4}[-4x^2+30x-5]$ (14) $\frac{8x^3+14x}{3(x^2+2)^{\frac{2}{3}}}$ (15) $e^{-x^2}[1-2x^2]$

(16) $-\frac{3t^2}{2(t^3+1)^{\frac{3}{4}}(t^3-1)^{\frac{5}{4}}}$ (17) $\frac{14-3x}{2(7-3x)\sqrt{7-3x}}$ (18) $-\sin x\sec^2(\cos x)$

(19) $\sin x(1+\sec^2 x)$ (20) $\frac{5^{-\frac{1}{x}}(\log 5)}{x^2}$ (21) $\frac{\sec^2 x}{\sqrt{1+2\tan x}}$

(22) $3\sin x\cos x(\sin x-\cos x)$ (23) $-k\sin kx\sin(2\cos kx)$ (24) $-6\sin 2x(1+\cos^2 x)^5$

(25) $\frac{3e^{3x}+2e^{4x}}{(1+e^x)^2}$ (26) $\frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ (27) $e^{x\cos x}[\cos x-x\sin x]$

11th_Maths-Vol2-Answer_Urdu Medium.indd 275 21-02-2023 15:15:46

(28) $\dfrac{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}+2\sqrt{x}+1}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$ (29) $\dfrac{\cos\left(\tan\sqrt{\sin x}\right)\sec^2\left(\sqrt{\sin x}\right)\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$ (30) $\dfrac{-2}{1+x^2}$

مشق 10.4

(1) $x^{\cos x}\left(\dfrac{\cos x}{x}-\sin x\log x\right)$ (2) $x^{\log x}\left(\dfrac{2\log x}{x}\right)+(\log x)^x\left[\dfrac{1}{\log x}+\log(\log x)\right]$

(3) $\dfrac{y(2x-1)}{x(1+2y)}$ (4) $\dfrac{y(x\log y-y)}{x(y\log x-x)}$ (5) $(\cos x)^{\log x}\left[\dfrac{\log(\cos x)}{x}-\tan x\log x\right]$

(6) $-\dfrac{b^2x}{a^2y}$ (7) $\dfrac{x\sqrt{x^2+y^2}+y}{x-y\sqrt{x^2+y^2}}$ (8) $\dfrac{1-\sec^2(x+y)-\sec^2(x-y)}{\sec^2(x+y)-\sec^2(x-y)}$

(10) $\dfrac{1}{2}$ (11) $\dfrac{6}{1+9x^2}$ (12) 1 (13) $-\tan t$

(14) $\tan t$ (15) $\dfrac{t^2-1}{2t}$ (16) $\dfrac{2}{1+x^2}$ (17) $\dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}}$

(18) 1 (19) $\cos x^2$ (20) 2 (21) $\dfrac{1}{2}$

(22) -1 (23) $\dfrac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

مشق 10.5

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
2	4	3	3	1	4	3	2	1	4	3	3	2	2	4
(16)	(17)	(18)	(19)	(20)	(21)	(22)	(23)	(24)	(25)					
2	3	1	4	2	4	1	1	3	2					

مشق 11.1

(1) (i) $\dfrac{x^{12}}{12}+c$ (ii) $-\dfrac{1}{6x^6}+c$ (iii) $\dfrac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}+c$ (iv) $\dfrac{8}{13}x^{\frac{13}{8}}+c$

(2) (i) $-\cot x+c$ (ii) $\sec x+c$ (iii) $-\text{cosec}x+c$ (iv) $\tan x+c$

(3) (i) 12^3x+c (ii) $\log|x|+c$ (iii) e^x+c

(4) (i) $\tan^{-1}x+c$ (ii) $\sin^{-1}x+c$

مشق 11.2

(1) (i) $\dfrac{(x+5)^7}{7}+c$ (ii) $\dfrac{1}{9(2-3x)^3}+c$ (iii) $\dfrac{2}{9}(3x+2)^{\frac{3}{2}}+c$

(2) (i) $\dfrac{-\cos 3x}{3}+c$ (ii) $-\dfrac{\sin(5-11x)+c}{11}$ (iii) $-\dfrac{\cot(5x-7)}{5}+c$

(3) (i) $\dfrac{1}{3}e^{3x-6}+c$ (ii) $-\dfrac{e^{8-7x}}{7}+c$ (iii) $-\dfrac{1}{4}\log|6-4x|+c$

11th_Maths-Vol2-Answer_Urdu Medium.indd 276 21-02-2023 15:15:50

(4) (i) $5\tan\frac{x}{5}+c$ (ii) $-\frac{1}{5}\operatorname{cosec}(5x+3)+c$ (iii) $-\frac{1}{15}\sec(2-15x)+c$

(5) (i) $\frac{1}{4}\sin^{-1}(4x)+c$ (ii) $\frac{1}{9}\sin^{-1}(9x)+c$ (iii) $\frac{1}{6}\tan^{-1}(6x)+c$

مشق 11.3

(1) $\frac{(x+4)^6}{6}+\frac{1}{3(2-5x)^3}+\frac{\cot(3x-1)}{3}+c$ (2) $-2\sin(5-2x)+3e^{3x-6}-6\log|6-4x|+c$

(3) $5\tan\frac{x}{5}+9\sin 2x+2\sec(5x+3)+c$ (4) $2\sin^{-1}(4x)+9\sin^{-1}(3x)-3\tan^{-1}(5x)+c$

(5) $2\tan^{-1}(3x+2)+3\sin^{-1}(3-4x)+c$ (6) $\sin\left(\frac{x}{3}-4\right)+\log|7x+9|+5e^{\frac{x}{5}+3}+c$

مشق 11.4

(1) $2x^2-5x+3$ (2) $3(x^3-x^2-1)$ (3) $2x^3-3x^2+5x+26$

(4) (i) 8 seconds (ii) 39.2 m/sec (iii) 78.4 m/sec

(5) (i) 2.4 sq.cm (ii) 0.4 sq.cm

مشق 11.5

(1) $\frac{x^2}{2}+4x-3\log|x|-\frac{2}{x}+c$ (2) $\frac{x^2}{2}+\log|x|+2x+c$ (3) $\frac{8x^3}{3}+26x^2-180x+c$

(4) $\tan x-\cot x-2x+c$ (5) $2[\sin x+x\cos\alpha]+c$ (6) $-2\operatorname{cosec}2x+c$

(7) $-3\cot x-4\operatorname{cosec}x+c$ (8) $x-\sin x+c$ (9) $2\left[\frac{\sin 3x}{3}+\sin x\right]+c$

(10) $\frac{1}{2}\left[\frac{\sin 5x}{5}+\sin x\right]+c$ (11) $\frac{1}{2}\left[x-\frac{\sin 10x}{10}\right]+c$ (12) $-\frac{1}{8}\cos 4x+c$

(13) $\frac{(ae)^x}{\log(ae)}+c$ (14) $\frac{2}{15}(3x+7)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}(3x+7)^{\frac{3}{2}}+c$

(15) $\frac{2^{2x+2}}{\log 2}-\frac{2^{2-3x}}{3\log 2}+c$ (16) $\frac{2}{21}[(x+3)^{\frac{3}{2}}+(x-4)^{\frac{3}{2}}]+c$

(17) $2\log|x+3|-\log|x+2|+c$ (18) $\frac{1}{9}\log|x-1|-\frac{1}{9}\log|x+2|+\frac{1}{3(x+2)}+c$

(19) $\log\left|\frac{x+2}{x-1}\right|+3\tan^{-1}x+c$ (20) $\frac{x^2}{2}+3x-\log|x-1|+8\log|x-2|+c$

مشق 11.6

(1) $\sqrt{1+x^2}+c$ (2) $\frac{1}{3}\tan^{-1}(x^3)+c$ (3) $\log|e^x+e^{-x}|+c$

(4) $\log|10^x+x^{10}|+c$ (5) $-2\cos\sqrt{x}+c$ (6) $\log|\log(\sin x)|+c$

11th_Maths-Vol2-Answer_Urdu Medium.indd 277 21-02-2023 15:15:51

(7) $\log\left|\log\left(\tan\frac{x}{2}\right)\right|+c$ (8) $\frac{1}{b^2}\log|a^2+b^2\sin^2 x|+c$ (9) $\frac{(\sin^{-1}x)^2}{2}+c$

(10) $(1+\sqrt{x})^2-4(1+\sqrt{x})+2\log\left|1+\sqrt{x}\right|+c$ (11) $\log|\log(\log x)|+c$

(12) $-e^{-\beta x^{\alpha}}+c$ (13) $2\sqrt{\sec x}+c$ (14) $\frac{(1-x)^{19}}{19}-\frac{(1-x)^{18}}{18}+c$

(15) $\frac{\sin^6 x}{6}-\frac{\sin^8 x}{8}+c$ (16) $(x-a)\cos a-\sin a\log|\sec(x-a)|+c$

مشق 11.7

(1) (i) $e^{3x}[3x-1]+c$ (ii) $-\frac{x\cos 3x}{3}+\frac{\sin 3x}{9}+c$

(iii) $-e^{-5x}[5x+1]+c$ (iv) $x\sec x-\log|\sec x+\tan x|+c$

(2) (i) $\frac{x^2\log|x|}{2}-\frac{x^2}{4}+c$ (ii) $e^{3x}[9x^2-6x+2]+c$

(iii) $x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+c$ (iv) $-x^3\cos x+3x^2\sin x+6x\cos x-6\sin x+c$

(3) (i) $-\sin^{-1}x\sqrt{1-x^2}+x+c$ (ii) $\frac{1}{2}e^{x^2}[x^4-2x^2+2]+c$

(iii) $\frac{1}{2}\left[4x\tan^{-1}4x-\log\left|\sqrt{1+16x^2}\right|\right]+c$ (iv) $2\left[x\tan^{-1}x-\log\left|\sqrt{1+x^2}\right|\right]+c$

مشق 11.8

(1) (i) $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\cos bx+b\sin bx]+c$ (ii) $\frac{e^{2x}}{5}[2\sin x-\cos x]+c$

(iii) $\frac{e^{-x}}{5}[2\sin 2x-\cos 2x]+c$

(2) (i) $-\frac{e^{-3x}}{13}[3\sin 2x+2\cos 2x]+c$ (ii) $-\frac{e^{-4x}}{10}[2\sin 2x+\cos 2x]+c$

(iii) $\frac{e^{-3x}}{10}[\sin x-3\cos x]+c$

مشق 11.9

(1) $e^x\log|\sec x|+c$ (2) $\frac{e^x}{2x}+c$ (3) $e^x\sec x+c$

(4) $e^x\tan x+c$ (5) $xe^{\tan^{-1}x}+c$ (6) $\frac{x}{1+\log|x|}+c$

11th_Maths-Vol2-Answer_Urdu Medium.indd 278 21-02-2023 15:15:52

مشق 11.10

(1) (i) $\frac{1}{4}\log\left|\frac{2+x}{2-x}\right|+c$ (ii) $\frac{1}{20}\log\left|\frac{5+2x}{5-2x}\right|+c$ (iii) $\frac{1}{12}\log\left|\frac{3x-2}{3x+2}\right|+c$

(2) (i) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left|\frac{\sqrt{2}-3+x}{\sqrt{2}+3-x}\right|+c$ (ii) $\frac{1}{10}\log\left|\frac{x-4}{x+6}\right|+c$ (iii) $\log\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+2}\right|+c$

(3) (i) $\log\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2-1}\right|+c$ (ii) $\log\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+5}\right|+c$ (iii) $\sin^{-1}\left(\frac{x-4}{5}\right)+c$

مشق 11.11

(1) (i) $\log\ |x^2+4x-12|-\frac{7}{8}\log\left|\frac{x-2}{x+6}\right|+c$ (ii) $\frac{5}{2}\log|x^2+2x+2|-7\tan^{-1}(x+1)+c$

(iii) $\frac{3}{4}\log|2x^2-2x+3|+\frac{\sqrt{5}}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right)+c$

(2) (i) $5\sin^{-1}\frac{x-2}{\sqrt{13}}-2\sqrt{9+4x-x^2}+c$ (ii) $\sqrt{x^2-1}+2\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+c$

(iii) $2\sqrt{x^2+4x+1}-\log\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+1}\right|+c$

مشق 11.12

(1) (i) $\frac{x+1}{2}\sqrt{x^2+2x+10}+\frac{9}{2}\log\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+10}\right|+c$

(ii) $\frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x-3}-2\log\left|x-1+\sqrt{x^2-2x-3}\right|+c$

(iii) $\frac{x-5}{2}\sqrt{10x-x^2-24}+\frac{1}{2}\sin^{-1}(x-5)+c$

(2) (i) $\frac{1}{4}\left[(2x+5)\sqrt{9-(2x+5)^2}+9\sin^{-1}\left(\frac{2x+5}{3}\right)\right]+c$

(ii) $\frac{1}{4}\left[(2x+1)\sqrt{81+(2x+1)^2}+81\log\left|2x+1+\sqrt{81+(2x+1)^2}\right|\right]+c$

(iii) $\frac{x+1}{2}\sqrt{(x+1)^2-4}+2\log\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2-4}\right|+c$

مشق 11.13

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
1	3	4	1	3	1	3	2	4	3	4	2	4	4	1
(16)	(17)	(18)	(19)	(20)	(21)	(22)	(23)	(24)	(25)					
1	3	2	4	1	3	4	3	1	4					

11th_Maths-Vol2-Answer_Urdu Medium.indd 279 21-02-2023 15:15:54

مشق 12.1

(1) (i) تفویض ہے (ii) تفویض نہیں (iii) تفویض نہیں

(2) (i) $\frac{1}{2}$ (ii) 1 (3) (i) $\frac{5}{9}$ (ii) $\frac{4}{9}$ (4) (i) $\frac{1}{7}$ (ii) $\frac{2}{7}$ (5)(i) $\frac{7}{64}$ (ii) $\frac{247}{256}$ (iii) $\frac{37}{256}$

(6) $\frac{37}{100}$ (7) (i) $\frac{7}{33}$ (ii) $\frac{14}{55}$ (8) (i) $\frac{2}{13}$ (ii) $\frac{5}{13}$ (iii) $\frac{2}{13}$

(9) $\frac{627}{728}$ (10) (i) $\frac{5}{12}$ (ii) 2 to 3

مشق 12.2

(1) (i) $\frac{5}{8}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii)) $\frac{1}{8}$ (iv) 1 (2) (i) 0.50 (ii) 0.35 (iii) 0.20

(3) $\frac{11}{36}$ (4) (i) 0.8 (ii) 0.5 (iii) 0.3

(5) (i) 0.9984 (ii) 0.0016 (6) (i) 0.64 (ii) 0.44

مشق 12.3

(1) نہیں (3) 0.5 (4) (i) 0.5 (ii) 0.9

(5) $\frac{3}{8}$ (6) (i) $\frac{3}{5}$ (ii) $\frac{13}{30}$ (7) (i) 0.5 (ii) 0.375

(8) (i) $\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{9}{40}$ (iii) $\frac{21}{40}$ (9) 0.75

(10) (i) 0.3 (ii) 0.5 (iii) 0.5 (iv) 0.5 (11) (i) $\frac{5}{28}$ (ii) $\frac{1}{14}$ (12) $\frac{13}{30}$

مشق 12.4

(1) 0.028(2) (i) $\frac{11}{20}$ (ii) $\frac{6}{11}$ (3) (i) $\frac{7}{250}$ (ii) $\frac{3}{7}$

(4) $\frac{15}{41}$ (5) (i) $\frac{9}{25}$ (ii) $\frac{2}{3}$

مشق 12.5

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
4	3	1	2	2	1	1	4	2	3	3	1	4	2	3
(16)	(17)	(18)	(19)	(20)	(21)	(22)	(23)	(24)	(25)					
1	4	3	2	3	2	2	4	4	3					

11th_Maths-Vol2-Answer_Urdu Medium.indd 280 21-02-2023 15:15:55

لغت (GLOSSARY)

CHAPTER 7
MATRICES and DETERMINANTS
باب 7 - میٹرکس اور مقطعہ

matrix	میٹرکس
order	درجہ
row matrix	صف میٹرکس
column matrix	قطار میٹرکس
zero matrix	صفر میٹرکس
null matrix	خالی میٹرکس
square matrix	مربع میٹرکس
diagonal matrix	وتر میٹرکس
unit matrix	اکائی میٹرکس
triangular matrix	سہ رخی میٹرکس
upper triangular matrix	اوپری سہ رخی میٹرکس
lower triangular matrix	نچلی سہ رخی میٹرکس
principal diagonal	پرنسپل وتر
scalar matrix	اسکیلر میٹرکس
conformable	سازگار
commutative property	خصوصیت متبادل
associative property	خصوصیت مربوطی
identity property	خصوصیت متماثل
inverse property	خصوصیت کی معکوس
distributive property	خصوصیت تقسیم کی
symmetric	سڑول
skew-symmetric	سیکو سڑول
determinant	مقطعہ
singular matrix	واحد میٹرکس
non-singular matrix	غیر واحد میٹرکس

CHAPTER 8
VECTOR ALGEBRA
باب 8 - سمتیہ الجبراء

vector	سمتیہ
initial point	ابتدائی نقطہ
terminal point	آخری نقطہ
support of the vector	سمتیہ کی حمایت
free vector	مفت سمتیہ
localised vector	تشخیص سمتیہ
co-initial vectors	ابتدائی یکساں
co-terminal vectors	انتہائی یکساں
collinear vectors	ہم خط
parallel vectors	متوازی
coplanar vectors	ہم مسطوی
equal vectors	مساوی سمتیہ
zero vector	صفر سمتیہ
unit vector	اکائی سمتیہ
like vectors	مماثل سمتیہ
unlike vectors	غیر مماثل سمتیہ
scalar multiplication	عددیہ سے ضرب
position vector	مقامی سمتیہ
section formula	سکشن ضابطہ
resolution of vector	سمتیہ کو اجزاء میں تقسیم کرنا
direction cosines	سمت کو سائن
direction ratios	سمت نسبت
scalar product	عددیہ حاصل ضرب
vector product	سمتیہ حاصل ضرب

CHAPTER 9
DIFFERENTIAL CALCULUS - LIMITS AND CONTINUITY
باب 9 - تفرقی احصاء حدیں اور مسلسل

calculus	احصا
limit	حد
one sided limit	ایک طرفہ حد
left hand limit	بائیں ہاتھ کی حد
right hand limit	دائیں طرف کی حد
infinite limit	لامتناہی حد
limit at infinity	لامتناہی پر حد
vertical asymptote	عمودی متقارب
horizontal asymptote	افقی متقارب
Sandwich theorem	سینڈوِچ مسئلہ

11th_Maths-Vol2-Glossary_Urdu Medium.indd 281 21-02-2023 15:17:13

continuity	مسلسل
discontinuity	غیر مسلسل
removable discontinuity	نکالنے والا غیر مسلسل
jump discontinuity	اچھال غیر مسلسل

CHAPTER 10
DIFFERENTIAL CALCULUS - DIFFERENTIABILITY AND METHODS OF DIFFERENTIATION

باب 10 - تفرقی احصا- تفرقی اور تفرقی کے طریقے

analytic equation	محددی مساوات
derivative	مشتق
velocity	سمتی رفتار
acceleration	اسراع
jerk	جھٹکا
tangency	مماسی
difference quotient	فرق خارج قسمت
secant line	سیکنٹ خط
tangent line	مماس خط
slope of the curve	منحنی کا میلان
rectilinear motion	خط مستقیمی حرکت
position function	مقامی تفاعل
differentiable	تفرقی
differentiation	تفرقی
left hand derivative	بائیں ہاتھ جانب کی مشتق
right hand derivative	دائیں ہاتھ جانب کی مشتق
non-differentiability	غیر تفرقی
quotient rule	تقسیمی اصول
chain rule	زنجیر اصول
composite functions rule	مرکب تفاعل اصول
function of a function rule	تفاعلوں کے تفاعل کا اصول
intermediate argument	متوسط دلیل
implicit differentiation	مضمر تفریق
explicit differentiation	واضح تفریق
parametric differentiation	طفیلی تفریق
higher order derivative	اعلیٰ درجے کے مشتقات

CHAPTER 11
INTEGRAL CALCULUS

باب 11 - تکملہ احصا

integrand	تکمیل
integrator	تکملہ
anti-derivative	مخالف مشتق
indefinite integral	غیر معین تکملہ

CHAPTER 12 INTRODUCTION TO PROBABILITY THEORY

باب 12 - امکانی نظریہ کا تعارف

experiment	جربہ
deterministic experiment	فیصلہ کن تجربہ
random experiment	سریعی تجربہ
event	موقع
sure event or certain event	یقینی موقع
impossible event	ناممکن موقع
exhaustive event	مکمل مواقع
sample space	نظیری عرصہ
mutually exclusive events	باہمی اخراج مواقع
equally likely events	مساوی وقوع پذیری مواقع
conditional probability	شرطی امکان
independent events	آزاد مواقع

11th_Maths-Vol2-Glossary_Urdu Medium.indd 282 21-02-2023 15:17:14

(BOOKS FOR REFERENCE) حوالہ کے لئے کتابیں

(1) Elements of Linear Algebra– P.M.Cohn , Springer

(2) Theory and Problems of Matrices – Frank Ayres, Schaum's Outline series

(3) Topics in Algebra, I.N. Herstein, Vikas Publishing Company.

(4) Vector Algebra, Schaum's Outline series.

(5) Differential and Integral Calculus, N. Piskunov, Mir Publsihers, Moscow.

(6) Elementary Treatise on the Calculus, George A. Gibson, Macmillan & Co. New York.

(7) Elementary Calculus, Vol. I, V.I. Smirnov, Addison – Wesley Publish Company, Inc.

(8) Calculus (Volume 1 and II), Tom. M. Apostol, John Wiley Publications.

(9) Calculus and Analytical Geometry,

George B.Thomas and Ross L. Finney (Ninth edition) Addison-Wesley.

(10) Calculus Early Transcendentals – George B.Thomas JR., Joel Hass, Christopher Heil, Maurice D.Weir, Pearson

(11) Advanced Engineering Mathematics- Erwin Kreyszig – Wiley India(P) Ltd.

(12) Calculus, Robert T.Smith, Roland B.Minton, McGraw Hill Education(India) Private Limited.

(13) Mathematical Analysis, S.C. Malik, Wiley Eastern Ltd.

(14) Methods of Real Analysis, Richard R. Goldberg, Oxford and IBH Publishing Company, New Delhi.

(15) Theory and Problems of Probability, Random Variables and Random Processes, Hwei P. Hsu, Schaum's Outline series

(16) Mathematical Statistics, John E. Freund and Ronald D. Walpole, Prentice Hall of India.

(17) Mathematical Statistics, Saxena and Kapoor

11th_Maths-Vol2-Glossary_Urdu Medium.indd 283 21-02-2023 15:17:14

Class 11 - Mathematics - Volume 2 - Urdu Medium

Text Book Translators and Reviewers ریاضی برائے گیارویں جماعت

Academic Coordinator & Head

Dr. Mrs. S. Shameem,
Deputy Director, SCERT,
Chennai.

Reviewer and Coordinator

A. Sheema Akthar,
Head Mistress, Govt. Hr. Sec. School
Nagavedu, Ranipet Dt. - 631002

Translators

V.K. Masiha Tanzeem,
B.T. Asst., Hasnath-E-Jaria
Girls Hr, Sec, School, Ambur – 635802

N. Shama Sulthana,
B.T. Asst., Municipal Urdu Middle School,
Fort, Dharmapuri– 636701

K. Anser Basha,
B.T. Asst., Anaikar Oriental (Arabic)
Hr, Sec, School, Ambur – 635802

A. Sheema Akthar,
Head Mistress, Govt. Hr. Sec. School
Nagavedu, Ranipet Dt. - 631002

T.H. Mohamed Younus,
P.G. Asst., Islamiah Boys Hr, Sec, School,
Melvisharam–632509

G. Ashraf Ali,
B.T. Asst., Islamiah Boys Hr, Sec, School,
Melvisharam – 632509

تعلیمی سربراہ اور معاون

ڈاکٹر ایس شمیم صاحبہ
، ڈپٹی ڈائریکٹر ، ایس سی ای آر ٹی
چنئی۔

نظر ثانی اور معاون

اے شیما اختر
ہیڈ مسٹرس،جی ہیچ یس یس، ناگویڈ،رانی پیٹ – 631002

مترجمین

وی. کی. مسیحا تنظیم
بی۔ ٹی۔ اسسٹنٹ، حسناتھ ای جریا گرلز ہائر سیکنڈری اسکول
آمبور – 635802

شمع سلطانہ۔ین
بی۔ ٹی۔ اسسٹنٹ، **منسپل اردو میڈل سکول،**
فورٹ، درما پوری – 636701

کے انصر باشاہ
بی۔ ٹی۔ اسسٹنٹ ، آنیکار اورینٹل(عربی) ہائیر سکنڈری اسکول
آمبور – 635802

اے شیما اختر
ہیڈ مسٹرس،جی ہیچ یس یس، ناگویڈ،رانی پیٹ – 631002

ٹی۔ ایچ۔ محمد یونس
پی۔جی ۔اسسٹنٹ ، اسلامیہ بالیس ہائیر سکنڈری اسکول
میل وشارم – 632509

اشرف علی۔جی
بی۔ ٹی۔ اسسٹنٹ، اسلامیہ بالیس ہائیر سکنڈری اسکول
میل وشارم۔ 632509

Layout
B.Yogesh, Chennai
S. Santhosh Kumar, Thiruvarur

Typing
S.K. Anwar Ahmed,
Siddiqua graphic, Chennai

Inhouse -QC
V. Sridhar

Coordinator
Ramesh Munisamy

EMIS Technology Team

R.M. Satheesh
State Coordinator Technical,
TN EMIS, Samagra Shiksha.

K.P. Sathya Narayana
IT Consultant,
TN EMIS, Samagra Shikaha.

R. Arun Maruthi Selvan
Technical Project Consultant,
TN EMIS, Samagra Shiksha.

This book has been printed on 80 G.S.M. Elegant Maplitho Paper.

Printed by Web Offset at :

11th_Maths-Vol2-Glossary_Urdu Medium.indd 284 21-02-2023 15:17:14