GOVERNMENT OF TAMIL NADU

ہائر سکنڈری سال اوّل

HIGHER SECONDARY FIRST YEAR

طبیعیات

PHYSICS

جِلد 1

VOLUME - I

(URDU MEDIUM)

Department of School Education

Untouchability is Inhuman and a Crime

11 physics 1. nature of physical
Tuesday, February 01, 2022 8:57:50 PM

Government of Tamil Nadu

First Edition - 2022

Reprint - 2023, 2024

(Published Under New Syllabus)

Content Creation

State Council of Educational
Research and Training

© SCERT 2022

Printing & Publishing

Tamil NaduTextbook and Educational
Services Corporation

www.textbooksonline.tn.nic.in

11 physics 1. nature of physical
Tuesday, February 01, 2022 8:57:51 PM

CONTENTS مضامین

PHYSICS طبیعیات

اکائی	عنوان	TITLE	صفحہ نمبر	مہینہ
1	طبیعی دنیا کی فطرت اور پیمائش	Nature of Physical World and Measurement	01	جون
2	حرکیات	Kinematics	41	جون-جولائی
3	حرکت کے کلیے	Laws of motion	105	جولائی-اگست
4	کام، توانائی اور طاقت	Work, Energy and Power	167	اگست
5	ذرات اور سخت اجسام کے نظام کی حرکت	Motion of System of Particles and Rigid Bodies	208	ستمبر
	ضمیمہ 1	Appendix 1	266	
	ضمیمہ 2	Appendix 2	290	
	ضمیمہ 3	Appendix 3	297	
	ضمیمہ 4	Appendix 4	298	
	اصطلاحات (لغت)	Glossary	300	

5G7F8

E-book

6UAQJ

Assessment

11 physics 1. nature of physical
Tuesday, February 01, 2022 8:57:51 PM

HOW TO USE THE BOOK

Scope of Physics
- Awareness on higher learning -courses, institutions and required competitive exams
- Financial assistance possible to help students to climb academic ladder

Learning Objectives:
- Overview of the unit
- Gives clarity on the goals and intention of the topics



- Additional facts related to the topics covered to facilitate curiosity driven learning

Example problems
- To ensure understanding, problems/illustrations are given at every stage before advancing to next level



- Visual representation of concepts with illustrations
- Videos, animations, and tutorials


ICT
- To harness the digital skills to class room learning and experimenting

Summary
- Recap of salient points of the lesson

Concept Map
- Schematic outline of salient learning of the unit

Evaluation
- Evaluate students' understanding and get them acquainted with the application of physical concepts to numerical and conceptual questions

Books for Reference
- List of relevant books for further reading

Solved examples
- Numerical/conceptual questions are solved to enable students to tackle standard problems in mechanics in appendix 1

Competitive Exam corner
- Model Questions - To motivate students aspiring to take up competitive examinations such as NEET, JEE, Physics Olympiad, JIPMER etc

Appendix
- Additional information including the chronological development of physics is provided

Glossary
- Scientific terms frequently used with their Tamil equivalents

Physics learning - Correct method

- The correct way to learn is to understand the concept, express the same in the language of mathematics which are equations.
- Each equation conveys the meaning of a phenomena or relationship between various parameters in the equations. Such relationship can be diagrammatically expressed as graphs.
- This interlink should be clear in mind while going through the entire text.

Value addition of the book

- Mathematical topics such as vectors, differentiation and integration are essential to understand and express physical phenomena.
- Inclusion of these topics and usage of vector notation wherever necessary is the salient feature of this book.
- Becoming familiar with vector notations and basic mathematics for physics will solve a lot of difficulty currently faced by students pursuing higher education in engineering, technology and science disciplines.

11 physics 1. nature of physical
Tuesday, February 01, 2022 8:57:51 PM

11 physics 1. nature of physical
Tuesday, February 01, 2022 8:57:53 PM

Scope of Physics - Higher Education



Exams

- JEE-Joint Entrance Examination
- Physics Olympiad Exam
- NEET- National Eligibility and Entrance Test
- NEST- National Entrance Screening Test
- AIEEE- All India Engineering Entrance Exam
- AIIMS- All India Institute of Medical Science (Entrance Examination)
- JIPMER- Jawaharlal institute of Postgraduate Medical Education and Research (Entrance Examination)
- KVPY- Kishore Vaigyanik Protsahan Yojana
- JAM- Joint Admission Test
- TIFR GS - Tata Institute of Fundamental Research Graduate School Admissions Examination
- JEST- Joint Entrance Screening Test
- NET- National Eligibility Test (CSIR and UGC)
- GATE-Graduate Aptitude Test in Engineering
- ICAR -AIEEA-Indian Council of Agricultural Research All India Entrance Examination



After completing +2

- B.Sc (Physics)
- Integrated M.Sc (Physics) (Central Universities)
- Integrated M.Sc (in Central Research Institutes through NEST and KVPY with stipend)
- B.Sc./B.S./B.Stat./B.Math./M.S. in Mathematics, Chemistry and Biology. (KVPY)
- B.E/B.Tech/ B.Arch (JEE, AIEEE in IITs and NITs) MBBS/ B.D.S/B.Pharm (NEET, JIPMER, AIIMS)
- B.Sc. (Agriculture) (ICAR -AIEEA)
- Dual Degree Program BS & MS (JEE, JEST in IITs and IISERs)
- B.Sc (Hospitality administration)
- B.Sc (Optoelectronics)
- B.Sc (Optometry)
- B.Tech (Optics and Optoelectronics)





After completing undergraduate course in Physics (B.Sc Physics)

- M.Sc. (Physics) (In Central and State Universities and Colleges)
- M.Sc. Physics (JAM in IISc ,IITs and NITs)
- M.Sc. (In State and Central Universities)
- Medical Physics
- Materials Science
- Energy
- Earth Sciences
- Space science
- Oceanography
- Remote sensing
- Electronics
- Photonics
- Optoelectronics
- Acoustics
- Applied electronics
- Astronomy and Astrophysics
- Nanoscience and Nanotechnology
- Biostatistics
- Bio informatics
- Vacuum sciences

11 physics 1. nature of physical
Tuesday, February 01, 2022 8:57:53 PM

Opportunities after B.Sc. Physics



Jobs in Government Sector

- Indian Forest Services
- Scientist Job in ISRO, DRDO, CSIR labs
- Union Public Service Commission
- Staff selection commission
- Indian Defence services etc.
- Public sector Bank
- State PCS
- Grade III & Compiler Post
- Tax Assistant
- Statistical Investigator
- Combined Higher Secondary
- Combined Graduate Level Exam etc.



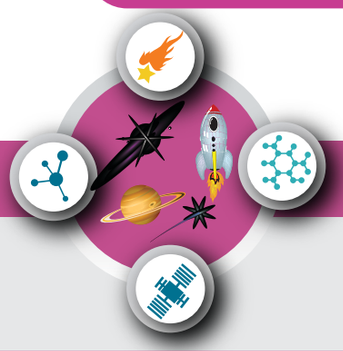
Financial assistance to pursue higher education

Scholarships for graduate and post graduate courses

- International Olympiad: for getting stipend for Higher Education in Science and Mathematics
- DST – INSPIRE Scholarships (for UG and PG)
- DST – INSPIRE Fellowships (for Ph.D)
- UGC National Fellowship (for Ph.D)
- Indira Gandhi Fellowship for Single girl child (for UG and PG)
- Moulana Azad Fellowship for minorities (for Ph.D)
- In addition various fellowships for SC/ST/PWD, OBC etc are available.
- Visit website of University Grants Commission (UGC) and Department of Science and Technology (DST)

11 physics 1. nature of physical
Tuesday, February 01, 2022 8:57:55 PM

Institutes in india to pursue research in physics



After completing Post Graduate course in Physics (M.Sc Physics)

Topics of Research

- Quantum Physics and Quantum Optics
- Astrophysics, Astronomy
- String theory, Quantum gravity
- Mathematical Physics, Statistical Mechanics
- Quantum Field Theory
- Particle Physics and Quantum Thermodynamics
- Quantum information theory
- Condensed Matter Physics, Materials Science
- Electro magnetic Theory
- Black Holes, Cosmology
- Crystal Growth, Crystallography
- Spectroscopy, Atomic, Molecular and Optical Physics
- Nano Science and Nanotechnology
- Energy and Environment Studies
- Biophysics, Medical Physics
- Cryptography, Spintronics
- Optics and Photonics
- Meteorology and Atmospheric Science

Research Institutions in various areas of science

Name of the Institution	Website
Indian Institute of Science (IISc) Bangalore	www.iisc.ac.in
Raman Research Institute (RRI) Bangalore	www.rri.res.in
Institute of Mathematical Sciences (IMSc) Chennai	www.imsc.res.in
Indian Association for Cultivation of Science (IACS) Calcutta	www.iacs.res.in
Chennai Mathematical Institute (CMI) Chennai	www.cmi.ac.in
Tata Institute of Fundamental Research (TIFR) Mumbai	www.tifr.res.in
Bhaba Atomic Research centre (BARC) Mumbai	www.barc.gov.in
SN Bose centre Basic Natural science Calcutta	www.bose.res.in
Indian Institute of Space Science and Technology (IIST) Trivandrum	www.iist.ac.in
Physics Research Laboratory (PRL) Ahmedabad	www.prl.res.in
Indian Institute of Astrophysics (IIA) Bangalore	www.iiap.res.in
Institute of Physics (IOP) Bhubaneswar	www.iopb.res.in
Institute for Plasma Research (IPR) Gujarat	www.ipr.res.in
Inter university centre for Astronomy and Astrophysics (IUCAA) Pune	www.iucaa.in
Indira Gandhi centre for Atomic Research (IGCAR), Kalpakkam	www.igcar.gov.in
Hyderabad central university, Hyderabad	www.uohyd.ac.in
Delhi University, Delhi	www.du.ac.in
Mumbai University, Mumbai	www.mu.ac.in
SavithiribaiPhule Pune university, Pune	www.unipune.ac.in
National Institute of Science Education and Research (NISER), Bhubaneshwar	www.niser.ac.in
IISER Educational Institutions	www.iiseradmission.in
Indian Institute of Technology in various places (IIT's)	www.iitm.ac.in
National Institute of Technology (NITs)	www.nitt.edu
Jawaharlal Nehru University (JNU)	www.jnu.ac.in
Central Universities	www.ugc.ac.in
State Universities	https://www.ugc.ac.in
CSIR – Academy (National laboratories, Delhi, Hyderabad, Trivandrum, Chennai, Calcutta etc)	

11 physics 1. nature of physical
Tuesday, February 01, 2022 8:57:55 PM

اکائی
1

طبیعی دنیا کی فطرت اور پیمائش

Nature of Physics World and Measurement

"Education is not the learning of facts, but the training of the mind to think" – **Albert Einstein**

'' تعلیم حقائق کے جاننے کا نام نہیں ہے بلکہ ذہن کو سوچنے کی مشق کرانے کا نام ہے''۔ البرٹ ائن سٹائن

سیکھنے کے مقاصد:

اس اکائی کے ذریعہ طلباء ان باتوں کو سیکھ پائیں گے

- طبیعیات میں کی گئی انکشافات سے پیدا ہونے والی خوشیاں
- طبیعی مقداروں کی اہمیت
- اکائیوں کے مختلف نظامات
- طبیعی پیمائشوں میں ہونے والی غلطیاں اور اصلاحات
- ملحوظ ہندسوں Significant figures کی اہمیت
- طبیعی مقداروں کی یکسانیت معلوم کرنے میں ابعاد کا استعمال

KEZWC

1.1 سائنس۔ تعارف:

لفظ سائنس لاطینی زبان کے لفظ Scientia سے اخذ کیا گیا ہے جس کا مطلب '' معلوم کرنے '' کے ہیں۔ ٹمل زبان میں اسے அறிவியல் کہا جاتا ہے جس کا مطلب '' حقیقت معلوم کرنا'' ہے۔ انسانی دماغ ہمیشہ مختلف باتوں کو جاننے میں لگا رہتا ہے۔ مثلاً فطرت میں پائے جانے والے چمکدار فلکی اجسام، موسموں کی دوری تبدیلی، قوس قزح کا نظارہ وغیرہ۔ تجسسی ذہن ان چیزوں کی معنی خیز ساختوں اور تعلقات کی کھوج میں لگا رہتا ہے۔ آج کی جدید سائنس اور ٹکنالوجی فطرت کو سمجھنے کی ایک شاخسانہ ہے۔ مشاہدات، تجربات اور منطقی دلائل کے ذریعہ معلومات حاصل کرنے کا منظّم نظام ہی سائنس ہے۔ سائنس کی وہ شاخ جو غیر جان دار اشیاء پر بحث کرتی ہے۔ طبیعی سائنس (طبیعیات) اور کیمیاء) کہلاتی ہے اور وہ شاخ جو جاندار اشیاء سے متعلق بحث کرتی ہے حیاتیاتی سائنس (نباتیات، حیوانیات وغیرہ) کہلاتی ہے۔

قدرتی واردات سے متعلق دلچسپی پیدا کرنے والے مشاہدات ہی سے سائنس کا آغاز ہوا ہے۔ لفظ سائنس انیسویں صدی ہی میں نامزد کیا گیا تھا۔ اس سے پہلے اس کا نام قدرتی فلسفہ رکھا گیا تھا اور قدیم تہذیب نے فلکیات، کیمیاء، انسانی فعلیات اور زراعت سے متعلق جانکاری حاصل کر چکی تھی۔ جب لکھنے کا کوئی نظام نہیں تھا، اس وقت وہ اپنی معلومات کو آپسی بات چیت ہی کے ذریعہ پھیلاتے تھے، فلکیات سے لے کر میدان طب (Medicine) تک سب سے پہل کرنے والوں میں مصری لوگ تھے۔ ہندوستان میں بھی وادیٔ سندھ کی تہذیب میں قبل تاریخی (pre-historic) انسانی کارروائیوں 3300-1300 ق م (BCE) میں سائنسی اور حسابی برتری حاصل رہی ہے۔

11 physics 1. nature of physical
Tuesday, February 01, 2022 8:57:56 PM

ہندوستانی آئین کے حصہ IV، دفعہ 51 A(h) کے تحت، ہر ہندوستانی شہری کی یہ ذمہ داری ہے کہ وہ اپنے اندر سائنسی جذبہ، انسانیت اور تحقیقی اور اصلاحی جذبہ لئے ہوئے ہو۔ یہی ہماری سائنسی تعلیم کا مقصد ہے۔

1.1.1 سائنسی طریقہ: (The scientific method)

قدرتی کارروائیوں کے مطالعہ میں قدم بہ قدم آگے بڑھنا اور جن اصولوں سے وہ کارروائیاں عمل پیرا ہوتی ہیں ان کے لئے کلیے قائم کرنا ہی سائنسی طریقہ کہلاتا ہے۔ کوئی بھی سائنسی طریقے میں عام طور پر مندرجۂ ذیل خصوصیات پائی جاتی ہیں۔

(i) باترتیب مشاہدہ

(ii) باقابو تجربات

(iii) معیاری اور مقداری وجوہات کا بیان

(iv) حسابی نمونہ

(v) پیشن گوئی اور نظریات کی تصدیق یا تکذیب

مثال:

فرض کیجئے کہ ایک دھاتی سلاخ گرم کی جارہی ہے۔ جب اس کے ایک کنارے کو گرم کیا جاتا ہے تو اس کے دوسرے کنارے پر محسوس ہوتی ہے۔ اس مشاہدے پر مندرجۂ ذیل سوالات کئے جاسکتے ہیں۔

(a) جب سلاخ گرم کی جاتی ہے تو اس کے اندر کیا ہوتا ہے؟

(b) حرارت دوسرے کنارے تک کیسے پہنچتی ہے؟

(c) کیا یہ اثر تمام اشیاء کے لئے درست ہے؟

(d) اگر شئے کے ذریعہ حرارت بہتی ہے تو کیا اس کا نظارہ ممکن ہے؟

ان سوالات کے جوابات معلوم کرنے کا مرحلہ ہی سائنسی تحقیق ہے۔

حرارت کے بنیادی افعال اکائی 8 میں بیان کئے گئے ہیں۔

کیا تم جانتے ہو؟

اصطلاح طبیعیات کا تعارف 350 ق م میں ارسطو نے کروایا تھا۔

1.2 طبیعیات: تعارف:

لفظ " Physics " (طبیعیات) لاطینی لفظ "Fusis " سے اخذ کیا گیا ہے جس کے معنی فطرت کے ہیں۔ طبیعیات میں فطرت اور فطری کارروائیوں پر بحث و مباحثہ کیا جاتا ہے۔ لہذا طبیعیات کو تمام سائنسی شاخوں کی اہم ترین بنیاد مانا جاتا ہے۔

طبیعیات کے مطالعہ میں Unification (باہمیت) اور Reductionism (تخفیف) دو اہم طریقہ ہوتے ہیں۔ مختلف طبیعی افعال کو بہت ہی مختصراً اصولوں اور ضوابط کے ذریعہ وضاحت کرنا باہمیت یا متحد کرنے کا عمل ہے۔ مثال کے طور پر نیوٹن کا کائناتی جاذباتی کلیہ (ملاحظہ ہو اکائی ۔ 6) زمین کی طرف گرنے والے آزاد اجسام کی حرکت، ان تمام کی وضاحت کرتے ہوئے فطرت کے بنیادی قوتوں کو متحد کرتا ہے۔

ایک عیاں بینی (macroscopic) نظام کو اس کے خور بینی اجزاء کی بنیاد پر وضاحت کرنے کا عمل تخفیف یا reductionism کہلاتا ہے۔ مثال کے طور پر حرحرکیات (Thermodynamics) (ملاحظہ ہو اکائی ۔ 8) کو بڑے نظامات کی عیاں بینی خصوصیات جیسی تپش، انقطاع توانائی (entropy) وغیرہ کی وضاحت کے لئے تیار کیا گیا تھا۔ ان جیسی خصوصیات کی تشریح بڑے نظامات کے سالماتی (خوردبینی) اجزاء کے لحاظ سے، فعلی نظریہ (Kinetic theory) (اکائی 9) اور ماسکونی میکانیات کے ذریعہ کی جاتی ہے۔

11 physics 1. nature of physical
Tuesday, February 01, 2022 8:57:56 PM

1.2.1 طبیعیات کی شاخیں:

طبیعیات ایک بنیادی سائنس کے طور پر فطرت کے قوانین کی وضاحت کرنے میں مدد کرتی ہے۔ وہ اپنے بیانات کا اظہار حسابی طور پر کرتی ہے۔ قدیم زمانے میں لوگ فطرت کے ساتھ زندگی گذارتے تھے۔ ان کے طور طریقے فطرت کے ساتھ مربوط (جڑے ہوئے) تھے۔ وہ ستاروں اور دیگر فلکی اجسام کی حرکت کی مدد سے کئی اشارات سمجھ سکتے تھے۔ وہ آسمان کو دیکھ کر فصل بونے اور کاٹنے کے وقت کا پتہ لگا لیتے تھے۔ چنانچہ فلکیات اور ریاضیات ہی پہلے پہل بننے والی شاخیں تھیں۔ Apendix A1.1 میں تاریخی طور پر طبیعیات کی مختلف شاخوں کی ترقی کے مرحلے بتائے گئے ہیں۔ خاکہ 1.1 میں طبیعیات کی مختلف شاخوں کا تصوری اظہار کیا گیا ہے۔ جدول 1.1 میں مختلف جگہوں میں ان شاخوں کے استعمالات بتائے گئے ہیں۔

جدید۔ کوانٹم طبیعیات۔ غیر اضافی (Non-Relativistic)، اضافی (Relativistic) جوہری طبیعیات، سالماتی طبیعیات، نیو کلیائی (مرکزائی) طبیعیات۔ مکثف (Condensed) مادّہ کی طبیعیات۔ اس کتاب (جلد 1 اور جلد 2) کے اہم پہلوؤں کی بنیادی اصولوں پر بحث کی گئی ہے۔ اکائی 1 سے 6 تک میکانیات، اعلیٰ توانائی کی طبیعیات کا احاطہ کیا گیا ہے۔ اس کتاب کی پہلی اکائی میں طبیعیات کی ترقی پر گفتگو کرتے ہوئے اس کے بنیادی عناصر جیسے پیمائش، اکائیاں وغیرہ پر بحث کی گئی ہے۔ دوسری اکائی میں طبیعی اصول اور انہیں لاگو کرنے والے کلیوں کی اہمیت اور اثرات کو اظہار کرنے کے لئے درکار بنیادی ریاضیات پیش کی گئی ہے۔ تیسری اکائی میں بہت ہی منظّم ترتیب میں نیوٹن کے حرکت کے بنیادی کلیوں کے لحاظ سے انشاء پر عمل پیرا ہونے والی قوتوں کے اثرات کا تذکرہ کیا گیا ہے۔ چوتھی اکائی میں میکانیات دنیا کی تشخیص کی بنیادی پہلوئیں جسے کام اور توانائی پیش کی گئی

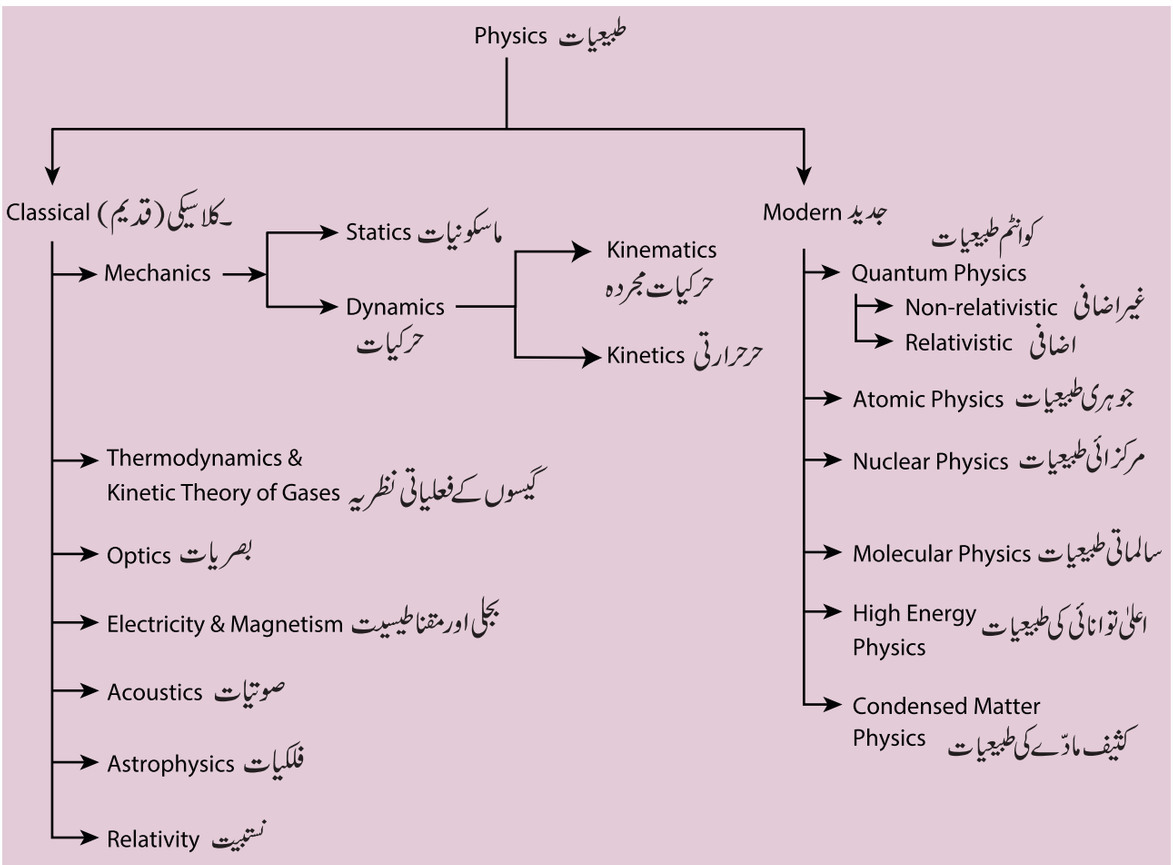


Figure 1.1 Branches of Physics

خاکہ 1.1۔ طبیعیات کی شاخیں۔

11 physics 1. nature of physical
Tuesday, February 01, 2022 8:57:57 PM

جدول۔ 1.1 طبیعیات کی شاخیں:

کلاسیکی یا روایتی طبیعیات : اس سے مراد، وہ روایتی طبیعیات ہے، جس کی شناخت اور ترقی بیسویں صدی کی شروعات سے پہلے کی گئی تھی۔

شاخ		اہم پہلو
(1)	کلاسیکی میکانیات	: حالت سکون یا حالت حرکت پر اجسام پر عمل آور ہونے والی قوتوں کا مطالعہ
(2)	حرارتی میکانیات	: حرارت اور توانائی کی دیگر قسموں کے درمیانی تعلقات کا مطالعہ
(3)	بصریات	: روشنی کا مطالعہ
(4)	بجلی اور مقناطیسیت	: بجلی اور مقناطیسیت اور ان کے مابین تعلقات کا مطالعہ
(5)	صوتیات	: آواز یا صوتی موجوں کی پیائش اور پھیلاؤ کا مطالعہ
(6)	فلکیات یا فلکی طبیعیات:	طبیعیات کی وہ شاخ جو فلکی اجسام کے مطالعہ پر بحث کرتی ہے۔
(7)	نسبتی (Relativity)	نظریاتی طبیعیات کی شاخوں میں سے ایک ہے جو خاص طور پر مختلف طریقوں سے حرکت کرنے والی اشیاء کے لحاظ سے خلاء وقت اور توانائی کے درمیانی تعلقات پر بحث کرتی ہے۔

جدید طبیعیات : بیسویں صدی کی شروعات کے بعد نمایاں ہونے والی طبیعی ترقیاں مراد ہیں۔

(1)	کوانٹم میکانیات*	: جوہر اور اجزائے جوہر کی سطح پر فطری کاروائیوں کا بغور مطالعہ
(2)	جوہری طبیعیات	: طبیعیات کی وہ شاخ جو جوہر کی ساخت اور خصوصیات سے متعلق بحث کرتی ہے۔
(3)	مرکزائی طبیعیات	: طبیعیات کی وہ شاخ جو جوہری مرکزوں کی ساخت، خصوصیات اور تعاملات پر بحث کرتی ہے۔
(4)	مکثف مادے کی طبیعیات	: مکثوف اشیاء کی خصوصیات کا مطالعہ (ٹھوس) مائعات اور وہ جو، ان کے مابین ہیں اور کثیف گیس) اس کی کئی شاخیں ہیں، جو مزید شاخوں میں بٹی ہوئی ہیں، جیسے نینو سائنس، فوٹونکس وغیرہ۔ اس میں مادّی سائنس کی بنیادی باتوں کا احاطہ کیا گیا، جس کا مقصد بہترین خصوصیات والی نت نئی مفید ترین اشیاء کا تیار کرنا ہے۔
(5)	اعلیٰ توانائی کی طبیعیات:	ذرات کی فطرت کا مطالعہ

* کوانٹم میکانیات، ایک وسیع ترین طریقۂ کار ہے اس کے ذریعہ سے بھی کلاسیکی نتائج کی تجدید کی جاسکتی ہے۔ تم اس کے متعلق مزید تفصیلات اعلیٰ تعلیم کے دوران جان سکتے ہو۔

ہے۔ پانچویں اکائی میں سخت اجسام (Rigid bodies) کی میکانیت سے بحث کرتی ہے۔ (بہتر طریقے سے سمجھنے کے لئے اکائی 3 اور 4 میں بڑی اشیاء کو بھی نقطوی اشیاء کے طور پر قیاس کیا گیا ہے)۔

چھٹویں اکائی میں قوت جاذبہ اور اس کے اثرات پر روشنی ڈالی گئی ہے۔ ساتویں اکائی میں طبیعیات کی قدیم شاخیں جیسی مادے کی مختلف خصوصیات کا تذکرہ کیا گیا ہے۔ آٹھویں اور نویں اکائیوں میں حرارت کے اثرات اور اس سے متعلق تحقیقات کا ذخیرہ جمع کیا گیا ہے۔ بالآخر دسویں اور گیارھویں اکائیوں میں اہتزازات اور موجی حرکت سے متعلق معلومات فراہم کی گئی ہیں۔

11 physics 1. nature of physical
Tuesday, February 01, 2022 8:57:57 PM

1.2.2 طبیعیات کا دائرہ عمل اور بروئے کار لانے کا عمل
(Scope and excitement of physics)

طبیعیات کی انکشافات دو طرح کی ہیں۔ حاثاتی انکشافات اور باقاعدہ پیشین گوئی اور سوچ بوجھ کے بعد تجربہ خانہ میں تحقیق کئے گئے انکشافات۔ مثال کے طور پر مقناطیس کا انکشاف حادثاتی طور پر ہوا تھا مگر مقناطیس کی عجیب صفتوں کی وجہ نظریاتی طور پر بعد میں معلوم کی گئیں ان تحقیقات کی مدد سے مقناطیسیت کی بنیاد پڑی۔ ان معلومات کی بناء پر تجربہ خانوں میں مصنوعی مقناطیس بنائے گئے۔ ٹیکنالوجی اور طب کی ترقیات میں طبیعیاتی کی نظریاتی پیشن گوئیوں کا ایک اہم کردار رہا ہے۔ مثال کے طور پر البرٹ ائن سٹائن کی مشہور مساوات $E=mc^2$، 1905ء میں کی گئی ایک نظریاتی پیشن گوئی تھی اور اسے 1932ء میں Cockcroft اور Walton نے تجرباتی طور پر صحیح ثابت کیا تھا۔ مطلوبہ استعمالات کے لئے عین مناسب اشیاء کی شناخت کرنے کے لئے جدید مجازی اور محاسبہ (computation) کی مدد سے ظاہر کی جانے والی نظریاتی پیشین گوئیاں بکثرت استعمال ہوتی ہیں دواساز صنعت گاہیں نئی دوائیں بنانے کے لئے اس طریقۂ کار کو بہت مؤثر طریقہ سے استعمال کرتی ہیں۔ اعضاء کی تبدیلی (Organ Replacement) کے لئے مناسب حیاتیاتی اشیاء کی شناخت، جعلی اعضاء بنانے سے پہلے طبیعات کی کوانٹمی نسخوں کی مدد سے کرلی جاتی ہے۔ لہذا نظریات اور تجربات ساتھ ساتھ چلتے ہیں۔

چونکہ طبیعیات میں مختلف طبیعی مقداروں (طول، کمیت، وقت، قوت وغیرہ) کے قدروں کی مختلف حدود پائے جاتے ہیں اس میں وسیع گنجائش (Scope) پائی جاتی ہے۔ یہ بہت بڑی مقداریں والے نظامات جیسے فلکیاتی افعال پر بھی بحث کرتی ہے۔ اور بہت ہی چھوٹی مقدار والے الکٹرٹان اور پروٹانوں پر بھی بحث کرتی ہے۔

- **وقت کی پیائشی حد:**

فلکیاتی پیمانے سے لے کر خوردبینی پیمانوں تک، 10^{18} سکنڈ سے 10^{-22} سکنڈ تک

- **کمیتوں کی حد:**

وزنی اشیاء سے الکٹران تک 10^{55} کلوگرام (معلوم شدہ کائنات کی کمیت) سے 10^{-31} کلوگرام (الکٹران کی کمیت) تک (ایک الکٹران کی حقیقی کمیت 9.11×10^{-31} کلوگرام ہے)۔

- طبیعیات کا مطالعہ بصیرت افروز (معلوماتی) ہی نہیں بلکہ کئی طریقوں سے بہت ہی دلچسپ بھی ہوتا ہے۔

- بنیادی اصولوں اور کلیوں کی ایک چھوٹی سی تعداد بھی متفرق طبیعی افعال کی وضاحت کرسکتی ہے۔ طبیعی کلیوں کی بنیاد پر مفید ترین اشیاء کے نت نئے نمونے بنائے جاسکتے ہیں۔

- مثال کے طور پر

(i) روبوٹکس کا استعمال

(ii) زمین پر سے کنٹرول کرتے ہوئے چاند اور قریب ترین سیاروں کا سفر

(iii) طبی سائنس میں ٹکنالوجی کی ہونے والی ترقیاں وغیرہ۔

- نئے نئے مشکل ترین تجربات کو انجام دیتے ہوئے فطرت کے حقائق کا پردہ فاش کرنا اور موجودہ نظریات کی تصدیق یا تکذیب کرنا۔

- قدرتی افعال کے جوہات کی کھوج لگانا اور سمجھنا۔ مثلاً گرہن کیوں ہوتا ہے یا آگ کی موجودگی میں حرارت کیوں محسوس کی جاتی ہے یا یہ کہ ہوائیں چلنے کے کیا اسباب ہیں وغیرہ۔ دنیا کی جدید ٹکنالوجی کے اس دور میں طبیعیات ہی تمام انجینئرنگ اور ٹیکنیکی تعلیم کی بنیادی جزء ہے جس کی وضاحت ریاضیاتی آلات کی مدد سے کی جاتی ہے۔

65BWH

11 physics 1. nature of physical
Tuesday, February 01, 2022 8:57:58 PM

1.3 ٹکنالوجی اور سماج سے متعلق طبیعیات:
(Physics in relation to technology and society)

عملی مقاصد کے لئے طبیعیات کے اصولوں کا مناسب استعمال ہی ٹیکنالوجی ہے یعنی مختلف میدانات میں عملی مقاصد کے لئے مفید مصنوعات کی ایجاد یا تیاری کرنے یا مسائل کو حل کرنے کے لئے طبیعی علم کا استعمال کرنا ٹکنالوجی کہلاتا ہے۔ چنانچہ طبیعیات اور ٹکنالوجی یہ دونوں مل کر سماج کو براہ راست یا بلا راست متاثر کر سکتے ہیں۔

مثال کے طور پر

(i) برق اور مقناطیسیت کے بنیادی کلیوں نے بے تار مواصلاتی ٹکنالوجی کے انکشاف کا باعث بنے جو کہ اپنے مؤثر مواصلات کی بدولت دنیا کے طویل فاصلوں کو کمترین کر چکی ہے۔

(ii) خلاء میں سیارچوں کو لانچ کر کے مواصلاتی نظام میں انقلاب برپا ہوا ہے۔

(iii) مائکرو الکٹرانکس ، لیزرس ، کمپیوٹر ، اعلیٰ موصلیت اور نیوکلیائی توانائی نے انسانوں کی سوچ اور طرز زندگی کو جامع طور پر تبدیل کر دیا ہے۔

طبیعیات چونکہ بذات خود ایک بنیادی سائنس ہے، دیگر تمام سائنسوں کی ترقی میں اہم رول ادا کرتی ہے۔

چند مثالیں مندرجۂ ذیل ہیں۔

(i) کیمیاء سے متعلق طبیعیات:

طبیعیات میں ہم جوہر کی ساخت ، تابکاری ، X رے کے انکسار وغیرہ کا مطالعہ کرتے ہیں۔ ان مطالعوں کی مدد سے کیمیاء دانوں نے عناصر کو ان کے جوہری عدد کی بنیاد پر دوری جدول میں ترتیب دی ہے۔ اس کے علاوہ گرفت کی فطرت، کیمیائی بندش معلوم کرنے اور پیچیدہ کیمیائی ساختوں کو سمجھنے میں بھی مدد حاصل ہوئی۔ اس طرح سے ان کے مابین شاخیں جیسی طبیعی کیمیاء اور کوانٹم کیمیاء یہاں اہم کردار ادا کرتی ہیں۔

(2) حیاتیات سے متعلق طبیعیات، طبیعیات کی بنیادی اصولوں کی مدد سے بنائے گئے خوردبین کے بغیر حیاتیات کا مطالعہ ناممکن ہے۔ الکٹران خوردبین کے انکشاف سے خلیہ کی ساخت بھی دیکھی جا سکتی ہے ۔X رے اور نیوٹران انکساری کی مدد سے نیوکلیائی ترشوں کی ساختیں سمجھی جاتی ہیں جو زندگی کے وسیع مرحلوں کو قابو میں رکھتی ہیں۔ کینسر (سرطان) اور دیگر امراض کے علاج کے لئے ریڈیو تھراپی میں تابکار ہم جاؤں کا استعمال کیا جاتا ہے۔ جدید دور سے حیاتیاتی مرحلوں کا مطالعہ طبیعی نقطۂ نظر سے کیا جا رہا ہے۔

(3) ریاضیات سے متعلق طبیعیات:

طبیعیات ایک مقداری سائنس ہے ۔ یہ ریاضیات سے گہرا تعلق رکھتی ہے اور اسے اپنی ترقی کے لئے ایک آلہ کی طرح استعمال کرتی ہے۔

(4) فلکیات سے متعلق طبیعیات : آسمان میں سیاروں اور دیگر فلکی اجسام کی حرکت کے مطالعے کے لئے فلکیاتی دوربینوں کا استعمال کیا جاتا ہے ۔ اشعاعی دوربین کی مدد سے ماہرین فلکیات ، کائنات کی بعیدی مقامات کا مشاہدہ کرتے ہیں۔ کائنات کے مطالعے طبیعی اصولوں کی مدد سے کئے جاتے ہیں۔

(5) ارضیات سے متعلق طبیعیات: انکساری طریقۂ کار کی مدد سے مختلف چٹانوں کی قلوی ساختوں کا مطالعہ کیا جاتا ہے۔ تابکاری کی مدد سے زمین کی اور چٹانوں اور آثار قدیمہ کی عمروں کا پتہ لگایا جاتا ہے۔

(6) بحریات سے متعلق طبیعیات:

ماہرین بحریات، سمندروں کے طبیعیاتی اور کیمیائی افعال کو سمجھنا چاہتے ہیں۔ وہ تپش، نمکینیت برقی رو کی رفتار، گیسوں کی نفوذ پذیری یا بہاؤ، کیمیائی اجزاء جیسی خصوصی مقداروں کی پیمائش کرتے ہیں۔

11 physics 1. nature of physical
Tuesday, February 01, 2022 8:57:58 PM

(7) نفسیات سے متعلق طبیعیات:

تمام نفسیاتی تعاملات ایک طبیعی مرحلے سے اخذ کئے جاسکتے ہیں۔neurotransmitters کی حرکتیں انتشار اور سالمی حرکت کی طبیعی خصوصیات سے قابو پاتے ہیں ۔ ہمارے دماغ کی کارگردگی، ہماری بنیادی سوچ، ذرہ کی دوہری فطرت سے تعلق رکھتی ہے۔

طبیعیات کو ایک مؤثر آلہ کی طرح استعمال کرتے ہوئے فطرت صحیح سائنس کی تعلیم دیتی ہے ۔سائنس اور ٹیکنالوجی کا استعمال ایک متوازن طریقہ سے کرنا چاہئے ۔کہیں ایسا نہ ہو کہ اس کے غلط استعمال سے سائنس کے سمجھانے والی فطرت ہی کا خاتمہ ہوجائے اور یہ خود ایک ہتھیار بن کر رہ جائے۔عالمی گرماؤ اور ٹکنالوجی کے دیگر منفی اثرات کو جانچنا پڑے گا۔محفوظ سائنس اور ٹکنالوجی کا صحیح اور مناسب استعمال ہی اس صدی کی اہم ضرورت ہے۔

طبیعیات میں اعلیٰ تعلیم حاصل کرنے کے جو میدانات اور مواقع ہیں اور اس کے لئے جو مختلف تعلیمی وظیفے Fellowships دئے جاتے ہیں ان کی تفصیلات کتاب کے شروع میں دی گئی ہیں۔

8TULO

1.4 پیمائش : (Measurement)

جب آپ اس کی پیمائش کرسکتے ہو جس کے بارے میں آپ بات کرتے ہیں اور اس کا اظہار اعداد میں کرسکتے ہو تو یقیناً آپ اس کے بارے میں کچھ نہ کچھ جانتے ہی ہیں مگر جب تم اسے تعداد میں ظاہر نہ کرسکو تو آپ کا علم بہت کم اور نا کافی ہے۔ لارڈ کیلون

کسی بھی طبیعی مقدار کو اس کی معیاری اکائی کے ساتھ موازنہ کرنا ہی پیمائش کہلاتا ہے۔

پیمائش تمام سائنسی مطالعات اور تجربات کی بنیاد ہوتی ہے ۔ یہ ہمارے روز مرہ زندگی میں اہم کردار ادا کرتی ہے ۔طبیعیات ایک مقداری سائنس ہے اور ماہرین طبیعیات ہمیشہ ایسے اعداد کا استعمال کرتے ہیں جو طبیعی مقداروں کی پیمائش ہوتی ہیں۔

1.4.1 طبیعی مقدار کی تعریف:

وہ مقداریں جن کی پیمائش کی جاسکتی ہے اور جن کی بنیاد پر طبیعیات کے واضح کئے جاتے ہیں۔طبیعی مقداریں کہلاتی ہیں ۔لمبائی (طول)،کمیت، وقت،قوت،توانائی وغیرہ ان کی چند مثالیں ہیں۔

1.4.2 طبیعی مقداروں کے اقسام:

طبیعی مقداروں کو دو قسموں میں درجہ بند کیا گیا ہے وہ یہ ہیں ۔ بنیادی مقداریں اور حاصل کردہ مقداریں۔

وہ مقداریں جن کو کسی دوسری طبیعی مقدار میں ظاہر نہیں کیا جاسکتا، بنیادی مقداریں کہلاتی ہیں وہ یہ ہیں طول، کمیت ،وقت، برقی رو، تپش، روشنی کی شدت اور شئے کی مقدار۔

وہ مقداریں جنہیں دوسری طبیعی مقداروں میں ظاہر کیا جاسکتا ہے ۔حاصل کردہ مقداریں کہلاتی ہیں ۔مثلاً رقبہ، حجم ،سمتی رفتار، اسراع، قوت وغیرہ۔

11 physics 1. nature of physical
Tuesday, February 01, 2022 8:57:59 PM

1.4.3 اکائی کی تعریف اور اس کے اقسام:

پیمائش کا مرحلہ درحقیقت موازنہ کرنے کا ایک مرحلہ ہے۔ایک مقدار کی پیمائش کے لئے ہمیشہ اسے کسی معیاری حوالے کے ساتھ موازنہ کرتے ہیں۔مثال کے طور پر جب ہم یہ کہتے ہیں کہ رسی 10 میٹر لمبی ہے تو اس کا مطلب یہ ہے کہ وہ اس شئے سے 10 گنا لمبی ہے جس کی حاصل کردہ لمبائی (طول) ایک میٹر قرار دی گئی ہے۔اس قسم کے معیار کو مقدار کی اکائی کہتے ہیں۔یہاں ایک میٹر، مقدار ''طول'' کی اکائی ہے۔

کسی مقدار کی بے قاعدہ طور پر منتخب کی گئی معیاری پیمائش جو عالمی طور پر مقبول ہو چکی ہے، اس مقدار کی اکائی (unit) کہلاتی ہے۔

وہ اکائیاں جن سے بنیادی مقداروں کی پیمائش کی جاتی ہے، بنیادی اکائیاں کہلاتی ہیں اور دیگر تمام طبیعی مقداروں کی پیمائشی اکائیاں جنہیں بنیادی اکائیوں سے ضرب یا تقسیم سے حاصل کیا جاتا ہے حاصل کردہ اکائیاں کہلاتی ہیں۔

1.4.4 مختلف اقسام کے پیمائشی نظام:

(Different types of measurement systems)

اکائیوں کا ایک مکمل مجموعہ جو تمام قسموں کی بنیادی اور حاصل کردہ مقداروں کی پیمائش میں استعمال ہوتا ہے، اکائیوں کا نظام کہلاتا ہے۔۔ میکانیات میں عام طور پر استعمال ہونے والے اکائیوں کے نظام کو یہاں پیش کیا گیا ہے۔

(i) f.p.s نظام، انگریزوں کی انجینری نظام اکائی ہے جو قدم (Foot)، پاؤنڈ (Pound) اور سکنڈ کو بالترتیب طول کمیت اور وقت کی پیمائش میں بنیادی اکائیوں کے طور پر استعمال کرتا ہے۔

(ii) f.g.s نظام، گاسین (Gaussian) نظام ہے جو سمر، گرام اور سکنڈ کو بالترتیب طول، کمیت اور وقت کی پیمائش میں بنیادی اکائیوں کے طور پر استعمال کرتا ہے۔

(iii) m.k.s نظام، طول کمیت اور وقت کی پیمائش کے لئے بنیادی اکائیوں کے طور پر، میٹر، کلوگرام اور سکنڈ کا استعمال کرتا ہے۔



cgs ، mks ، اور SI ۔
یہ تمام اکائیوں کے میٹرک یا عشری نظام ہیں۔
fps نظام ایک میٹرک نظام نہیں ہے۔

1.4.5 SI اکائی کا نظام:

(SI Unit System)

دنیا بھر میں سائنسدانوں اور انجینر وں کے ذریعہ عام طور پر استعمال ہونے والی اکائیوں کا نظام میٹرک نظام کہلاتا ہے۔مگر، 1960 سے یہ اتفاقی طور پر بین الاقوامی نظام یا SI (International system) سے جانا جاتا ہے۔(SI، اس کے فرانسیسی نام Systeme International کا مختص ہے)۔1971 میں وزن اور پیمائش کے لئے منعقد کئے گئے جنرل کانفرس کے ذریعہ ایس اکائیوں کی معیاری علامات، اکائیاں اور مختص بنائی گئیں اور انہیں سائنسی، ٹکنیکی، صنعتی اور تجارتی کاموں میں استعمال کرنے کی ترغیب دلائی گئی۔SI نظام کی خصوصیات یہ ہیں۔

(i) یہ نظام، ایک طبیعی مقدار کے لئے صرف ایک ہی اکائی کا استعمال کرتا ہے جس کا مطلب یہ ہے کہ یہ ایک ناطق نظام اکائی ہے۔

(ii) اس نظام میں، تمام حاصل کردہ اکائیوں کو بنیادی اور جزوی، اکائیوں سے بآسانی حاصل کیا جاسکتا ہے۔یعنی یہ ایک مربوط (Coherent) نظام اکائی بھی ہے۔

11 physics 1. nature of physical
Tuesday, February 01, 2022 8:58:00 PM

(iii) یہ ایک میٹرک نظام ہے، یعنی ان کے ضاربوں اور زیر ضاربوں کو 10 کی قوتوں سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

SI نظام میں سات بنیادی اکائیاں پائی جاتی ہیں جیسا کہ جدول 1.2 میں پیش کیا گیا ہے۔

MTU03

جدول 1.2۔ SI نظام کی بنیادی مقداریں اور اکائیاں

بنیادی مقدار	SI اکائی		
	اکائی	علامت	تعریف
لمبائی (طول)	میٹر	m	سکنڈ میں خلا کے ذریعہ روشنی سے طے کردہ فاصلہ ہی ایک میٹر ہے۔ (1983)
کمیت	کلوگرام	kg	ایک کلوگرام، اس خاص استوانہ کی کمیت ہے جو پلیٹنم اریڈیم (Platinum-Iridium) کی بھرت (جس کی اونچائی اس کے قطر کے برابر ہے) سے بنا ہوا ہے۔ اور فرانس میں پیرس کے قریب Serves پر International Bureau of weights and measures میں رکھا ہوا ہے۔ (1901)
وقت	سکنڈ	s	ایک سکنڈ، (Cesium-13) کے جوہر کا دو انتہائی صاف درجوں کے درمیان کی منتقلی سے متعلق اشعاعیت کے 9192631770 دوروں کا وقفہ ہے۔ (1967)
برقی رو	ایمپیر	A	ایک ایمپیر وہ مستقل برقی رو ہے جو خلاء میں ایک دوسرے سے ایک میٹر کے فاصلے پر رکھے گئے دو انتہائی لمبے سیدھے متوازی تاروں میں برقرار رکھنے پر ان کے درمیان فی اکائی طول میں 2×10^{-7} N/m کی قوت پیدا کرتی ہے۔ (1948)
تپش	کیلون	K	ایک کیلون، پانی کا تہری نقطہ* (triple point of water) کے تھرموڈائنامک درجۂ حرارت کے $\left(\frac{1}{273.16}\right)$ واں حصہ کے برابر ہوتا ہے۔ (1967)
شئے (مادّہ) کی مقدار	مول	mol	ایک مول، شئے کی وہ مقدار ہے، جس میں اتنے بنیادی اجزاء ہوتے ہیں، جتنے کہ کاربن-12 کے جوہر کے ہم جا کے 12 گرام (0.012Kg) میں موجود ہوتے ہیں۔ (1971)
روشنی کی شدت	کینڈلا	cd	ایک کینڈلا، ایک دی گئی سمت میں روشنی کے اس ذریعہ کی شدت ہے، جو 5.4×10^{14} Hz تعدد کی یک رنگی شعاع خارج کرتی ہے اور اس سمت میں اس کے پاس $\frac{1}{683}$ watt/steradian کی ایک شعاعی شدت (radiant intensity) ہوتی ہے۔ (1979)

*پانی کا تہری (triple) نقطہ، وہ تپش ہے جس پر سیر شدہ بخارات، خالص پانی اور پگھلتے ہوئے برف کا توازن یکساں ہوتا ہے۔ اسے تھرموڈائنامک درجۂ حرارت بھی کہتے ہیں۔ پانی کے تہری نقطہ کی تپش 273.16K ہے۔

11 physics 1. nature of physical
Tuesday, February 01, 2022 8:58:00 PM

جدول 1.3 میں چند حاصل کردہ مقداریں اور ان کی اکائیاں پیش کی گئی ہیں۔

Table 1.3 Derived Quantities and their Units — جدول 1.3 حاصل کردہ مقداریں اور ان کی اکائیاں

Physical quantity طبیعی مقدار	Expression اظہار	Unit اکائی
Plane angle مسطح زاویہ	arc / radius قوس/نصف قطر	rad
Solid angle ٹھوس زاویہ	surface area/radius^2 سطحی رقبہ/مربع نصف قطر	sr
Area رقبہ	length × breadth چوڑائی × لمبائی	m^2
Volume حجم	area × height اونچائی × رقبہ	m^3
Velocity سمتی رفتار	displacement / time ہٹاؤ / وقت	$m\ s^{-1}$
Acceleration اسراع	velocity / time سمتی رفتار / وقت	$m\ s^{-2}$
Angular velocity زاویائی سمتی رفتار	angular displacement / time زاویائی ہٹاؤ / وقت	$rad\ s^{-1}$
Angular acceleration زاویائی اسراع	angular velocity / time زاویائی سمتی رفتار / وقت	$rad\ s^{-2}$
Density کثافت	mass / volume کمیت/حجم	$kg\ m^{-3}$
Linear momentum خطی معیار حرکت	mass × velocity کمیت × سمتی رفتار	$kg\ m\ s^{-1}$
Moment of inertia جمود کی حرکت	mass × (distance)^2 کمیت × (فاصلہ)^2	$kg\ m^2$
Force قوت	mass × acceleration کمیت × اسراع	$kg\ m\ s^{-2}$ or N
Pressure دباؤ	force / area قوت/رقبہ	$N\ m^{-2}$ or Pa
Energy (work) توانائی (کام)	force × distance قوت / فاصلہ	N m or J
Power طاقت	Work / time کام / وقت	$J\ s^{-1}$ or watt (W)
Impulse دھکا	force × time قوت × وقت	N s
Surface tension سطحی تناؤ	force / length قوت/لمبائی	$N\ m^{-1}$
Moment of force (torque) قوت کی حرکت (قوت گردشہ)	force × distance قوت × فاصلہ	N m
Electric charge برقی بار	current × time برقی رو × وقت	A s or C
Current density برقی رو کی کثافت	current / area برقی رو / رقبہ	$A\ m^{-2}$
Magnetic induction مقناطیسی امالیت	force / (current × length)	$N\ A^{-1}\ m^{-1}$ or tesla
Force constant قوت کا مستقلہ	force / displacement قوت/(برقی رو × لمبائی) قوت/ہٹاؤ	$N\ m^{-1}$
Plank's constant پلانک کا مستقلہ	energy of photon / frequency فوٹان کی توانائی/تعدد	J s
Specific heat (S) نوعی حرارت (S)	heat energy / (mass × temperature)	$J\ kg^{-1}\ K^{-1}$
Boltzmann constant (k) بولٹزمین کا مستقلہ (K)	energy/temperature حرارتی توانائی (کمیت × تپش) توانائی/تپش	$J\ K^{-1}$

11 physics 1. nature of physical
Tuesday, February 01, 2022 8:58:00 PM

غور کیجئے :

π radian $= 180°$

$$1 \text{ radian} = \frac{180°}{\pi} = \frac{180° \times 7}{22} = 57.27°$$

اس کے علاوہ $1°$ (قوس کا درجہ) $= 60'$ (قوس کے منٹ)

اور $1'$ (قوس کا منٹ) $= 60''$ (قوس کے سکنڈ)

Relations between radian, degree and minutes:

ریڈیان، درجہ اور منٹ کے درمیانی تعلقات

$$1° = \frac{\pi}{180} \text{ rad} = 1.745 \times 10^{-2} \text{ rad}$$

$$\therefore 1' = \frac{1°}{60} = \frac{1.745 \times 10^{-2}}{60} = 2.908 \times 10^{-4} rad$$
$$\approx 2.91 \times 10^{-4} rad$$

$$\therefore 1'' = \frac{1°}{3600} = \frac{1.745 \times 10^{-2}}{3600} = 4.847 \times 10^{-6} rad$$
$$\approx 4.85 \times 10^{-6} rad$$

1.5 بنیادی مقداروں کی پیمائش: (Measurement of basic quantities)

1.5.1 طول (لمبائی) کی پیمائش: (Measurement of length)

طبیعیات میں لمبائی کا تصور روز مرہ زندگی میں فاصلے کے تصور کے ساتھ ملتا جلتا ہے۔ لمبائی کی تعریف یوں کی جاتی ہے کہ یہ خلاء میں کسی بھی دو نقطوں کا درمیانی فاصلہ ہے۔ اشیاء مختلف جسامت والی ہوتی ہیں۔ مثال کے طور پر بڑی اشیاء جیسے کہکشائیں ہوتی ہیں۔ مثال کے طور پر بڑی اشیاء جیسے کہکشائیں، ستارے، سورج، زمین، چاند وغیرہ اور ان کے درمیانی فاصلے ایک Macrocosm بناتے ہیں۔

ریڈین (The Radian) (rad)

ایک دائرے کے نصف قطر کے مساوی لمبائی رکھنے والے اسی دائرے کی ایک منحنی سے مرکز پر محکوم زاویہ ہی ایک ریڈین ہے

اسٹریڈین (The Steradian) (sr)

ایک کرہ کے مربع نصف قطر کے مساوی رقبے رکھنے والے اسی کرے کی ایک سطح سے کرے کے مرکز پر محکوم ٹھوس زاویہ (Solid angle) (Subtended) ایک Steradian کہلاتا ہے۔

اس سے مراد ایک بڑی دنیا ہے جس کی اشیاء اور فاصلے دونوں بہت بڑے ہوتے ہیں۔ اس کے برعکس اشیاء جیسے سالمے، جوہریں، پروٹان، نیوٹران، الکٹران بیکٹر یا وغیرہ اور ان کے مابین فاصلے Microcosm تعمیر کرتے ہیں جس سے مراد ایک چھوٹی سی دنیا ہے جس میں دونوں اشیاء اور فاصلے چھوٹے چھوٹے ہوتے ہیں۔

10^{-5} سے 10^{2} کی حد تک کے فاصلے براہ راست ناپے جاسکتے ہیں۔ مثال کے طور پر ایک میٹر اسکیل کے ذریعہ سے 1m تک، ورنیر پیما کے ذریعہ 10^{-4} تک اور ایک خردہ پیما کے ذریعہ 10^{-5} تک، اور اسی طرح دیگر پیمائشیں کی جاسکتی ہیں۔ لیکن اب بتائے گئے کسی بھی طریقے سے جوہری اور فلکی فاصلوں کی پیمائش نہیں کی جا سکتی۔ لہذا بہت چھوٹے اور بہت بڑے فاصلوں کی پیمائش کے لئے بلا راست طریقے بنائے اور استعمال کئے جاتے ہیں۔ جدول 1.4 میں 10 کی قوتوں (مثبت اور منفی) کی ایک فہرست پیش کی گئی ہے۔ اس میں ہر قوت کے سابقے بھی بتائے گئے ہیں۔ ان سابقوں کو ان کی لمبائی اور کمیت کے اکائیوں کے ساتھ استعمال کیا جاتا ہے۔

1995 میں سطحی (مسطح) اور ٹھوس زاویے کی جزوی مقداروں کو حاصل کردہ مقداروں میں تبدیل کر دیا گیا تھا (GCWM)۔

11 physics 1. nature of physical
Tuesday, February 01, 2022 8:58:01 PM

Table 1.4 Prefixes for Powers of Ten — جدول 1.4۔ 10 کی قوتوں کے سابقے:

Multiple ضارب	Prefix سابقے	Symbol علامت	Sub multiple زیرضارب	Prefix سابقے	Symbol علامت
10^{1}	deca	da	10^{-1}	deci	d
10^{2}	hecto	h	10^{-2}	centi	c
10^{3}	kilo	k	10^{-3}	milli	m
10^{6}	mega	M	10^{-6}	micro	μ
10^{9}	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{12}	tera	T	10^{-12}	pico	p
10^{15}	peta	P	10^{-15}	femto	f
10^{18}	exa	E	10^{-18}	atto	a
10^{21}	zetta	Z	10^{-21}	zepto	z
10^{24}	yotta	Y	10^{-24}	yocto	y

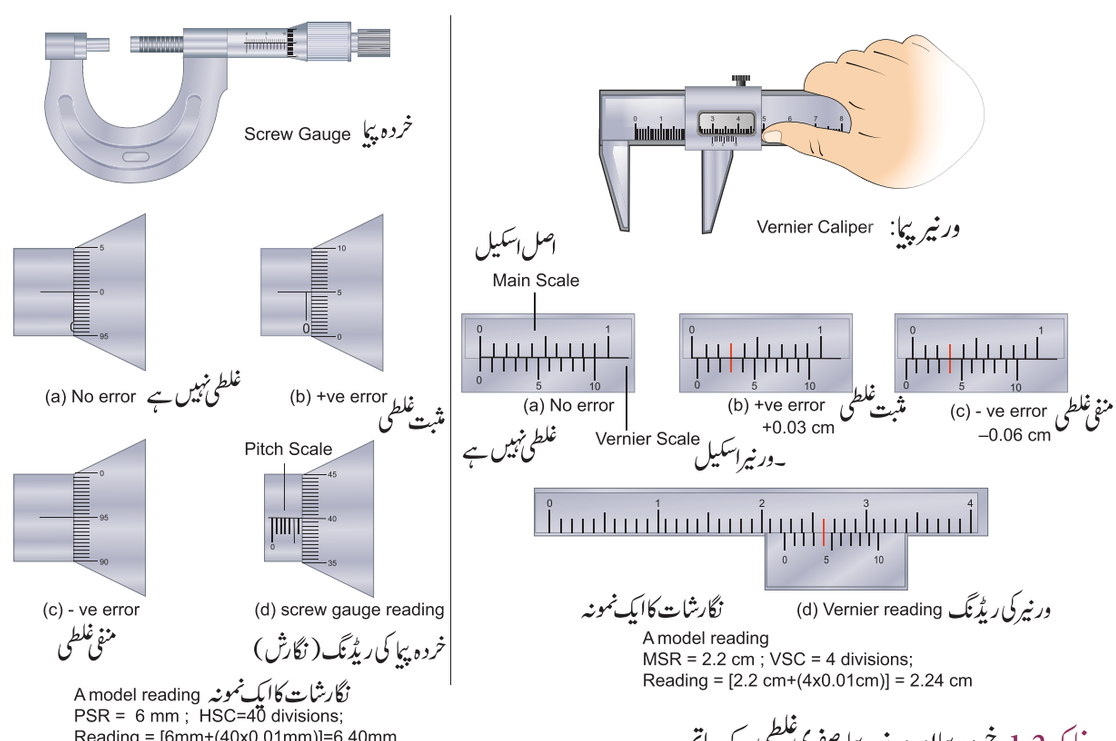
(i) چھوٹے فاصلوں کی پیمائش:

خردہ پیما اور ورنیر پیما :

خردہ پیما: (Screw gauge) خردہ پیما ایک آلہ ہے جو 50mm کی حد تک اشیاء کے ابعاد کی درست پیمائش کرسکتا ہے۔ ایک پیچ کی دائری حرکت سے ہونے والی خطی حرکت کی تکبیر (magnification) ہی اس آلے کا اصول ہے۔ خردہ پیما کا شمار اقل 0.01cm ہے۔

ورنیر پیما: (Vernier callipers)

کسی شئے کے سوراخ کے نصف قطر یا اس سوراخ کی گہرائی جیسی ابعاد کی پیمائش میں بہت زیادہ استعمال ہونے والا آلہ ورنیر پیما ہے۔ ورنیر پیمانے کا شمار اقل 0.01 cm ہے۔



خاکہ 1.2۔ خردہ پیما اور ورنیر پیما، صفری غلطی کے ساتھ

11 physics 1. nature of physical
Tuesday, February 01, 2022 8:58:01 PM

(ii) بڑے فاصلوں کی پیمائش:

طویل فاصلے جیسے کسی درخت کی اونچائی، زمین سے چاند یا کسی سیارے کی دوری وغیرہ کی پیمائش کے لئے چند خاص طریقے اپنائے جاتے ہیں ۔ مثلثی (triangulation) طریقہ وغیرہ کی مدد سے طویل فاصلے متعین کئے جاتے ہیں۔

کسی مطلوبہ شئے کی اونچائی معلوم کرنے کے لئے مثلثی طریقہ:

فرض کیجئے کہ جس درخت پر یا ٹاور کی اونچائی معلوم کرنی ہو، اس کی اونچائی AB=h ہے ۔فرض کیجئے کہ C ایک مقام ہے جو B سے x فاصلے پر ہے۔C پر ایک range finder رکھئے اور اس کا زاویہ فراز $\angle ACB=\theta$ معلوم کیجئے جیسا کہ خاکہ 1.3 میں بتایا گیا ہے۔

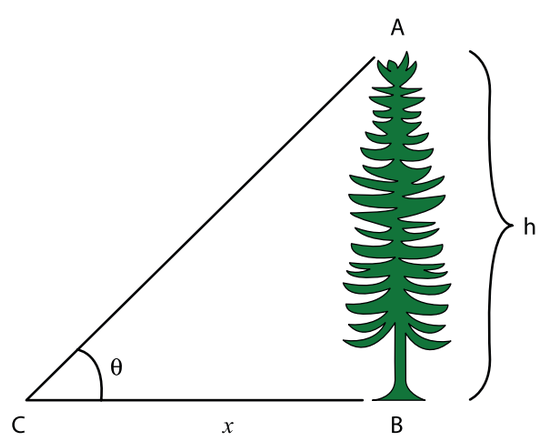
مثلث قائمۃ الزاویہ ABC کی مدد سے

$$\tan\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{h}{x}$$

(یا)

اونچائی $\text{height } h = x \tan\theta$

x فاصلہ معلوم کرکے، اونچائی 'h' متعین کی جاسکتی ہے



خاکہ 1.3۔ مثلثی طریقہ (Triangulation method)

مختلف اشیاء کی لمبائیوں کی حد اور ترتیب (order) کی فہرست جدول 1.5 میں پیش کی گئی ہے۔

مثال 1.1

زمین پر کسی نقطے سے ایک درخت کے اوپری حصہ تک کا زاویہ فراز 60° معلوم ہوتا ہے۔اس مقام سے درخت تک کا فاصلہ 50 میٹر ہے۔ درخت کی اونچائی معلوم کیجئے۔

حل:

زاویہ $\text{Angle } \theta = 60°$

درخت اور اس نقطہ کا درمیانی فاصلہ $x = 50 \text{ m}$ ہے۔

درخت کی اونچائی $(h) = ?$

مثلثی طریقہ سے $\tan\theta = \frac{h}{x}$

$$\begin{aligned} h &= x \tan\theta \\ &= 50 \times \tan 60° \\ &= 50 \times 1.732 \\ h &= 86.6 \text{ m} \end{aligned}$$

درخت کی اونچائی 86.6 m ہے۔

اختلاف منظر کا طریقہ (Parallax method)

اس طریقہ سے بہت ہی طویل فاصلے جیسے زمین سے کسی سیارے یا ستارے کے فاصلے وغیرہ کو معلوم کیا جاتا ہے۔ جب کوئی شئے دو مختلف مقامات سے دیکھی جاتی ہے تو اس شئے کے پس منظر کے لحاظ سے اس شئے کے مقام کی مجازی تبدیلی کے لئے دیا گیا نام اختلاف منظر Parallax ہے۔ دو مقامات (مشاہدے کے دو نقاط) کا درمیانی فاصلہ basis (b), کہلاتا ہے۔ O مقام پر کوئی بھی ایک شئے فرض کر لیجئے۔(خاکہ 1.4)

فرض کیجئے کہ L اور R مشاہدہ کرنے والے کی بائیں اور دائیں آنکھ کے بالترتیب مقامات ظاہر کرتے ہیں۔

دائیں آنکھ بند کرکے بائیں آنکھ (یا) سے وہ شئے (O) دیکھی جاتی ہے اور پھر وہی شئے (O) بائیں آنکھ بند کرکے دائیں آنکھ (R) سے دیکھی جاتی ہے۔

11 physics 1. nature of physical
Tuesday, February 01, 2022 8:58:02 PM

خاکہ 1.4 میں بائیں اور دائیں آنکھوں سے شئے تک کے مقامات کے لئے LO اور RO خطوط کھینچے گئے ہیں۔ یہ دو خطوط نقطہ O پر ایک زاویہ 'θ' بناتے ہیں۔ یہ زاویہ θ ، اختلاف منظر کا زاویہ (parallax angle) کہلاتا ہے۔

'OL' اور OR کو ایک دائرے کے نصف قطر (x) تسلیم کر لئے جاتے ہیں۔ فلکیاتی محاسبوں کے لئے LR=b (basis) کے اس فاصلے کو دائرے کے قوس (Arc) کی طرح لے لیا جاتا ہے تو پھر

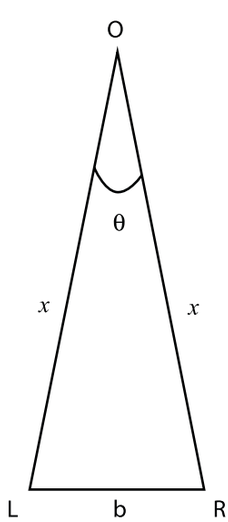
$$OL = OR = x$$

$$\text{as } LR = b$$

$$\theta = \frac{b}{x}$$

b اور θ کو معلوم کر کے x کا محاسبہ کر لیا جاتا ہے جو تقریباً شئے اور محاسبہ کرنے والے تک کے فاصلے کے برابر ہوتا ہے۔

اگر وہ شئے چاند یا کوئی قریبی ستارہ ہو تو اس کے طویل فلکی فاصلے کی وجہ سے وہ زاویہ θ بہت ہی چھوٹا ہوگا۔ ایسے معاملے میں زمین پر مشاہدہ کرنے کے مقامات دور دور ہونا چاہئے۔



خاکہ 1.4۔ اختلاف منظر کا طریقہ (Parallax method)

زمین سے چاند کے فاصلے کا تعین:

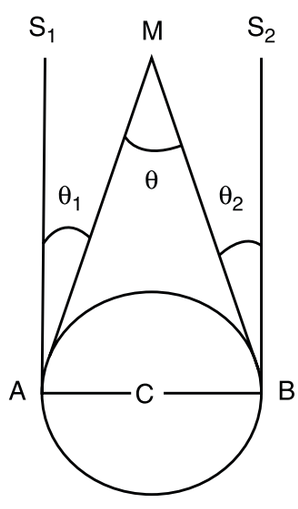
خاکہ 1.5 میں C زمین کا مرکز ہے۔ A اور B زمین کی سطح پر قطری طور پر ایک دوسرے کے مقابل نقاط ہیں۔ A اور B سے، چند بعیدی ستاروں کے لحاظ سے چاند کے اختلاف منظر کے زاویے بالترتیب θ_1 اور θ_2 ہیں، جو ایک فلکی دوربین کی مدد سے معلوم کر لئے جاتے ہیں۔ لہذا زمین کے ساتھ چاند کا کل اختلاف منظر جو دو نقاط کو ملاتا (subtended) ہے۔

$$\angle AMB = \theta_1 + \theta_2 = \theta$$

$\theta = \frac{AB}{AM}$; AM≈MC اگر θ کو ریڈین میں ناپا جائے تو پھر (AM تقریباً MC کے مساوی ہوگا)۔

$$\theta = \frac{AB}{MC} \text{ یا } MC = \frac{AB}{\theta}$$

AB اور θ کی قیمتیں معلوم کر کے ہم چاند اور زمین کا درمیانی فاصلہ MC معلوم کر سکتے ہیں۔



خاکہ 1.5۔ اختلاف منظر کا طریقہ۔
زمین سے چاند کے فاصلے کا تعین

مثال 1.2

چاند سطحی خط (base link) پر 1°55' کے زاوئے پر ملنے والا زاویہ ہے اور وہ خط زمین کے قطر کے مساوی ہے۔ زمین سے چاند تک کا فاصلہ کیا ہے؟ (زمین کا نصف قطر 6.4×10^6 m) ہے۔

11 physics 1. nature of physical
Tuesday, February 01, 2022 8:58:02 PM

حل:

زاویہ $\theta = 1^\circ\ 55' = 115'$

$= (115 \times 60)'' \times (4.85 \times 10^{-6})$ rad

$= 3.34 \times 10^{-2}$ rad

چونکہ $1'' = 4.85 \times 10^{-6}$ rad

زمین کا نصف قطر خاکہ 1.5 کی مدد سے، زمین کا قطر AB ہے جو 6.4×10^6 m ہے۔

زمین کا قطر $(b) = 2 \times 6.4 \times 10^6 m$

زمین سے چاند کا فاصلہ $= x$?

$$x = \frac{b}{\theta} = \frac{2 \times 6.4 \times 10^6}{3.34 \times 10^{-2}}$$

$$x = 3.83 \times 10^8 \text{m}$$

ریڈار کا طریقہ (RADAR method)

لفظ ریڈار RADAR کی اصطلاح یہ ہے۔

RAdio Detection And Ranging۔ایک ریڈار کے ذریعہ مریخ جیسے کسی قریبی سیارے کا ٹھیک فاصلہ معلوم کیا جاسکتا ہے۔ اس طریقۂ کار میں ریڈار کے ٹرانس مٹروں کے ذریعہ شعاعی موجیں بھیجی جاتی ہیں، جو سیارے سے منعکس ہو کر حصول کنندہ (Receiver) کے ذریعہ حاصل کی جاتی ہیں۔ شعاعوں کے بھیجے جانے اور حاصل ہونے کے درمیانی وقفہ (t) کی پیائش کی جاتی اور سیارے کا فاصلہ یوں معلوم کیا جاتا ہے۔

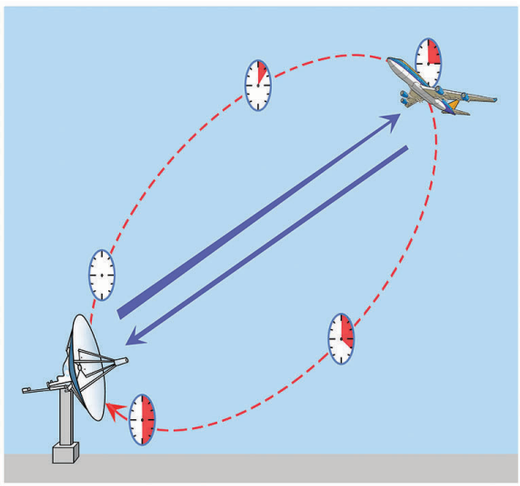
$$\text{رفتار} = \frac{\text{طے کردہ فاصلہ}}{\text{لیا گیا وقت}}$$

(رفتار کی وضاحت اکائی 2 میں کی گئی ہے)

ریڈیو موجوں کی رفتار × وقفہ = فاصلہ (d)

$$d = \frac{v \times t}{2}$$

جہاں v ریڈیو موج کی رفتار ہے۔ چونکہ یہ لیا گیا وقفہ موجوں کے جانے اور آنے کا وقفہ ہے جس میں موج دو مرتبہ یہ فاصلہ طے کرتی ہے۔ اسے 2 سے تقسیم کرلیا جاتا ہے تاکہ شئے کا اصل فاصلہ حاصل ہوسکے۔ یہ طریقہ زمین سے اڑتے ہوئے ہوائی جہاز تک کی اونچائی معلوم کرنے کے لئے بھی استعمال کیا جاسکتا ہے۔



خاکہ 1.6۔ ریڈار طریقہ:

مثال 1.3

ایک سیارے کی طرف ایک ریڈار سگنل بھیجا جاتا ہے جس کی گونج 7 منٹ کے بعد حاصل کی جاتی ہے۔ اگر اس سیارے اور زمین کا درمیانی فاصلہ 6.3×10^{10} m ہے تو سگنل کی رفتار معلوم کیجئے

حل:

سیارے اور زمین کا درمیانی فاصلہ $d = 6.3 \times 10^{10}$ m ہے۔

وقت $t = 7$ منٹ $= 7 \times 60$ s.

سگنل کی رفتار $v = ?$

سگنل کی رفتار

$$v = \frac{2d}{t} = \frac{2 \times 6.3 \times 10^{10}}{7 \times 60} = 3 \times 10^8 ms^{-1}$$

11 physics 1. nature of physical
Tuesday, February 01, 2022 8:58:02 PM

جدول 1.5 لمبائیوں کی حداور قوت Range and Order of Lengths

اشیاء کی جسامت اور فاصلے	لمبائی (m)
دیکھی جاسکنے والی کائنات (اُفق) تک کا فاصلہ	10^{26}
Andromeda کہکشاں تک کا فاصلہ	10^{22}
ہمارے کہکشاں کی جسامت	10^{21}
(سورج کے علاوہ) زمین سے قریب ترین ستارے تک کا فاصلہ	10^{16}
پلوٹو کی مدار کا اوسط نصف قطر	10^{12}
زمین سے سورج تک کا فاصلہ	10^{11}
زمین سے چاند تک کا فاصلہ	10^{8}
زمین کا نصف قطر	10^{7}
سمندری سطح سے ماؤنٹ ایوریسٹ کی اونچائی	10^{4}
فٹ بال کے ایک میدان کی لمبائی	10^{2}
کاغذ کی موٹائی	10^{-4}
خون کے ایک سرخ خلیے کا قطر	10^{-5}
روشنی کا موجی طول	10^{-7}
ایک وائرس کی لمبائی	10^{-8}
ہائڈروجن کے جوہر کا قطر	10^{-10}
جوہری مرکزے کی جسامت	10^{-14}
ایک پروٹان کا قطر	10^{-15}

Some Common Practical Units چند عام عملی اکائیاں:

(i) Fermi = 1 fm = 10^{-15} m فیرمی

(ii) 1 angstrom = 1 Å = 10^{-10} m آنگسٹرام

(iii) 1 nanometer = 1 nm = 10^{-9} m نینومیٹر

(iv) 1 micron = 1μm = 10^{-6} m مائکران

(v) 1 Light year (Distance travelled by light in vacuum in one year) 1 Light Year = 9.467×10^{15} m نوری سال

(vi) 1 astronomical unit (the mean distance of the Earth from the Sun) 1 AU = 1.496×10^{11} m فلکیاتی اکائی

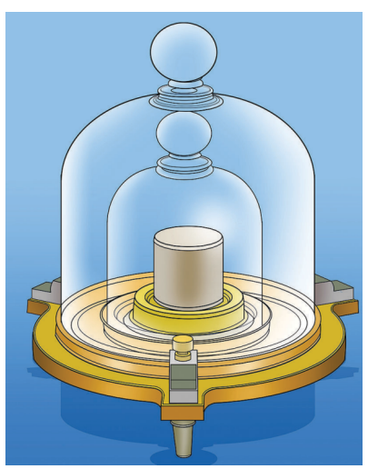
(vii) 1 parsec (Parallactic second) (Distance at which an arc of length 1 AU subtends an angle of 1 second of arc) پارسیک

1 parsec = 3.08×10^{16} m = 3.26 light year پارسیک = نوری سال

کیا تم جانتے ہو؟

کلوگرام کے تعین کرنے میں استعمال ہونے والے استوانے کو کیوں پلاٹنم۔اریڈیم کی بھرت سے بنایا گیا ہے۔

اس کی وجہ یہ ہے کہ پلاٹنم اریڈیم کی بھرت ماحول اور وقت کے اعتبار سے سب سے کم متاثر (تعامل) ہوتا ہے۔



خاکہ 1.7۔ کمیت کا ایک کلوگرام کا عالمی معیار، ایک پلاٹنم۔اریڈیم (9:1)۔ استوانہ کی اونچائی اور قطر 3.9 سمر

چندرسیکھر کی حد (Chandra sekhar limit) (CSL)، کمیت کی سب سے بڑی عملی اکائی ہے۔

1CSL = سورج کی کمیت کے 1.4 گنا ہوتی ہے

وقت کی سب سے چھوٹی عملی اکائی Shake ہے۔

1 Shake = 10^{-8} s

11 physics 1. nature of physical
Tuesday, February 01, 2022 8:58:03 PM

1.5.2 کمیت کی پیمائش (Measurement of Mass)

کمیت مادہ کی ایک خصوصیت ہے۔ وہ جسم کی تپش، دباؤ اور خلاء میں اس کے مقام پر منحصر نہیں ہوتی ہے۔ کسی شئے میں موجود مادہ کی مقدار کمیت کہلاتی ہے۔ کمیت کی SI اکائی کلوگرام (kg) ہے۔ اس سبق میں جن اشیاء کی کمیتوں کا ہم مطالعہ کریں گے ان کی ایک وسیع حد ہے۔ ان متفرقات میں ایک چھوٹے سے الکٹران کی کمیت (9.11×10^{-31} kg) سے لے کر معلوم شدہ کائنات کی اعلیٰ کمیت ($=10^{55}$ kg) تک موجود ہیں۔ جدول 1.6 میں مختلف اشیاء کی کمیتوں کی قوتوں کا ذکر کیا گیا ہے۔

عام طور پر کمیتیں کلوگرام کی اکائی میں ایک عام ترازو کی مدد سے معلوم کی جاتی ہیں جیسا کہ سودے کی دوکان وغیرہ میں استعمال کیا جاتا ہے۔ سیارے، ستارے، وغیرہ جیسی اشیاء کی اعلیٰ کمیتوں کی پیمائش

جدول 1.6۔ کمیتوں کی وسعت

Object شئے	Order of mass (kg) کمیتوں کی ترتیب
Electron الکٹران	10^{-30}
Proton or Neutron پروٹان یا نیوٹران	10^{-27}
Uranium atom یورنیم کا جوہر	10^{-25}
Red blood corpuscle خون کے سرخ جسیمے	10^{-14}
A cell ایک خلیہ	10^{-10}
Dust particle غبار کا ذرہ	10^{-9}
Raindrop بارش کا قطرہ	10^{-6}
Mosquito مچھر	10^{-5}
Grape انگور	10^{-3}
Frog مینڈک	10^{-1}
Human انسان	10^{2}
Car کار	10^{3}
Ship جہاز	10^{5}
Moon چاند	10^{23}
Earth زمین	10^{25}
Sun سورج	10^{30}
Milky way دودھیا راستہ	10^{41}
Observable Universe نظر آنے والی کائنات	10^{55}

کے لئے ہم جاذبی طریقے استعمال کرتے ہیں۔ جوہری یا زیر جوہری ذرات کی چھوٹی کمیتوں کی پیمائش کے لئے ہم ایک mass spectrograph کا استعمال کرتے ہیں۔

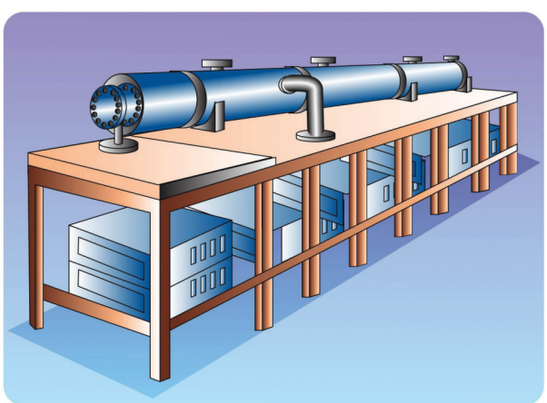
عام طور پر استعمال ہونے والے چند ترازو یہ ہیں۔ عام ترازو۔ کمانی دار ترازو، الکٹرانک ترازو وغیرہ۔

1.5.3 وقتی وقفوں کی پیمائش: (Measurement of time intervals)

> وقت مساوی طور پر آگے بہتا رہتا ہے۔ سر اسحاق نیوٹن
>
> "وقت وہی ہے جو ایک گھڑی دکھاتی ہے۔" البرٹ ائن سٹائن

ایک گھڑی، وقتی وقفوں کی پیمائش کے لئے استعمال کی جاتی ہے۔ وقت کا ایک جوہری معیار، سیشیم کے ایک جوہر میں پیدا ہونے والے دوری اہتزاز پر منحصر ہے۔ بعد میں ترقی پانے والی گھڑیوں میں برقی اہتزاز کنندے، الکٹرانک اہتزاز کنندے، شمسی گھڑیاں، کوارٹز قلمی گھڑی، جوہری گھڑی، بنیادی ذرات کا زوال (Decay) تابکار زوال (radioactive dating) وغیرہ شامل ہیں۔

جدول 1.7 میں وقتی وقفوں کی جدول بندی کی گئی ہے۔



خاکہ 1.8 جوہری گھڑی جو سیشیم کے جوہروں سے ہونے والی اشعاعیت کی بنیاد پر وقت کا اظہار کرتی ہے، ایک سال میں ایک سکنڈ کے تین ملین واں حصہ تک درست وقت بتاتی ہے۔

11 physics 1. nature of physical
Tuesday, February 01, 2022 8:58:03 PM

Table 1.7 Order of Time Intervals

جدول 1.7۔ وقتی وقفوں کی قوت

Event واقعہ	Order of time interval (s) وقفے کی ترتیب	
Lifespan of the most unstable particle	سب سے زیادہ غیر مستحکم ذرہ کی مدت حیات	10^{-24}
Time taken by light to cross a distance of nuclear size	مرکزے کی جسامت کے فاصلے کو پار کرنے کے لئے روشنی سے لیا گیا وقت	10^{-22}
Period of X-rays	X۔رے کا وقت دوران	10^{-19}
Time period of electron in hydrogen atom	ہائیڈروجن کے جوہر میں الکٹران کا وقت دوران	10^{-15}
Period of visible light waves	نظر آنے والی روشنی کی موجوں کا وقت دوران	10^{-15}
Time taken by visible light to cross through a window pane	کھڑکی کے شیشے کو پار لگانے میں روشنی سے لیا جانے والا وقت	10^{-8}
Lifetime of an excited state of an atom	ایک جوہر کی مشتعل حالت (Excited state) کی مدت حیات	10^{-8}
Period of radio waves	تابکار شعاعوں کا وقت دوران	10^{-6}
Time period of audible sound waves	قابل سماعت صوتی موجوں کا وقت دوران	10^{-3}
Wink of an eye	پل جھپکنے کا وقفہ	10^{-1}
Time interval between two successive heart beats	دل کی دو متواتر دھڑکنوں کا درمیانی وقفہ	10^{0}
Travel time of light from Moon to Earth	چاند سے زمین تک پہنچنے میں روشنی سے لیا جانے والا وقت	10^{0}
Travel time of light from Sun to Earth	سورج سے زمین تک پہنچنے میں روشنی سے لیا جانے والا وقت	10^{2}
Halflife time of a free neutron	ایک آزاد نیوٹران کا وقفۂ دوران	10^{3}
Time period of a satellite	ایک سیارچے کا وقفۂ دوران	10^{4}
Time period of rotation of Earth around its axis (one day)	زمین کا اپنے محور کے اطراف گھومنے کا وقت دوران (ایک دن)	10^{5}
Time period of revolution of Earth around the Sun (one year)	زمین کا سورج کے اطراف چکر لگانے کا وقت دوران (ایک سال)	10^{7}
Average life of a human being	ایک انسان کی اوسط مدت حیات	10^{9}
Age of Egyptian pyramids	مصری اہراموں کی عمر	10^{11}
Age of Universe	کائنات کی عمر	10^{17}

1.6 غلطیوں کا نظریہ : (Theory of errors)

تمام تجرباتی سائنس اور ٹیکنالوجی کی بنیاد پیمائش ہی ہے۔ کسی بھی پیمائش سے حاصل ہونے والے نتیجے میں کوئی نہ کوئی کمی پیشی ہو ہی جاتی ہے۔ اسی کوتاہی کو غلطی کہتے ہیں۔ پیمائش کی گئی مقداروں کی مدد سے کئے جانے والے کسی محاسبے سے غلطی آسکتی ہے۔ کسی بھی تجربے میں بالکل ٹھیک پیمائش کرنا بہت ہی مشکل بات ہے۔ پیمائشوں کے دوران درستگی (accuracy) اور باقاعدگی (Predision) نامی دو اصطلاحات استعمال کئے جاتے ہیں اور اس مرحلے پر پیمائش نمایاں نظر آتی ہے۔ درستگی سے پتہ چلتا ہے کہ ہم ٹھیک قیمت سے کتنے قریب یا دور ہیں اور باقاعدگی سے یہ پتہ چلتا ہے کہ ہم نے کس حد تک بہترین انداز سے پیمائش کی۔



ہندوستان کی نئی دہلی میں واقع
The National Physical Laboratory
کو طول، کمیت اور وقت وغیرہ اکائیوں کی دیکھ بھال اور ترقی کی ذمہ داری سونپی گئی ہے۔

11 physics 1. nature of physical
Tuesday, February 01, 2022 8:58:04 PM

1.6.1 درستگی اور باقاعدگی: (Accuracy and precision)

فرض کر لیجئے کہ آپ کی حقیقی اونچائی "9 '5 ہے۔ آپ پہلے ایک گز کے پیمانے (Yard Stick) سے اپنی اونچائی کی پیمائش کرنا چاہتے ہیں، اور اس میں آپ کی اونچائی "0 '5 دکھائی دیتی ہے ۔ چونکہ آپ کی پیمائش درست نہیں ہے۔ آپ دوبارہ ایک لیزر گز کے پیمانے سے اونچائی کی پیمائش کرنے لگتے ہیں اور اس بار "9 '5 کی قیمت حاصل کر لیتے ہیں۔ اب آپ کی پیمائش درست ہے۔ یہ صحیح قیمت نظریاتی قیمت بھی کہلاتی ہے۔ ہر استعمال کے لئے درستگی کی حد مختلف ہو اکرتی ہے۔ بہت ہی درست ڈیٹا کا احاطہ کر کے اس کا خلاصہ کرنا بہت ہی مشکل ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر اگر آپ اپنی اونچائی کو ایک گز کے پیمانے سے مسلسل "0 '5 حاصل کرتے ہوں تو آپ کی پیمائشیں باقاعدہ (Precise) بن جاتی ہیں ۔ باقاعدگی کے حدود بھی مختلف استعمالات کے لحاظ سے ایک بڑی حد تک تغیر پاتے ہیں ۔ انجینئرنگ کے پراجکٹس جیسے سڑکوں یا افادیت کی تعمیر میں ایک انچ (an inch) کے دسویں حصے کی ایک ملی میٹر کی معلومات تک بھی پیمائش کی باقاعدگی کی ضرورت پڑتی ہے۔

اگر ایک پیمائش باقاعدہ ہے تو اس کا یہ مطلب نہیں کہ یہ بالکل درست بھی ہو۔ بہر حال اگر پیمائش لگاتار درست اور ایک جیسی ہو تو وہ بھی باقاعدہ کہلائے گی۔

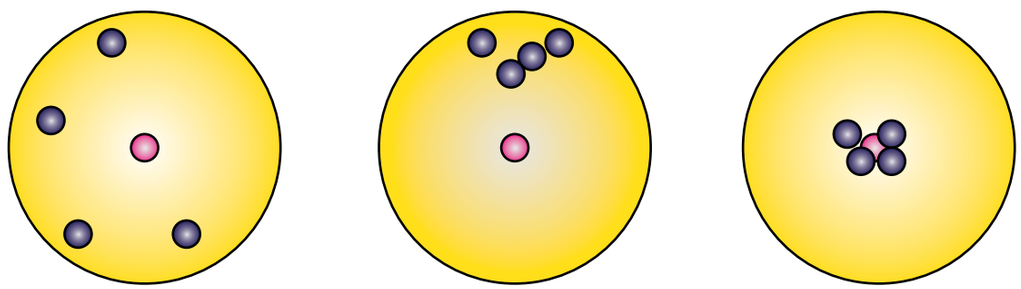
مثال کے طور پر اگر ایک عمارت کے باہر کسی بار تپش پیما سے ناپی گئی تپش 40°C ہے اور باہر کی حقیقی تپش بھی 40°C ہی ہے، تو وہ تپش پیما بالکل درست ہے۔ اگر وہ تپش بھی 40°C ہی ہے تو وہ تپش پیما بالکل درست ہے۔ اگر وہ تپش پیما ہر مرتبہ درست پیمائش ہی درج کرا رہا ہے تو وہ باقاعدہ بھی ہے۔

ایک اور مثال پر غور کیجئے ۔ ایک تپش پیما کے ذریعہ ایک ریفریجریٹر سے مسلسل لی گئی تپش کی پیمائش کچھ یوں ہے۔ 10.4°C, 10.2°C ، 10.1°C ، 10.3°C ، 10.1°C ، 10.2°C ، 10.1°C ۔ بہر حال اگر اس کے اندر کی حقیقی تپش 9°C ہے تو ہم کہیں گے کہ تپش ہی درست نہیں ہے (وہ صحیح قیمت سے ایک درجہ زیادہ بتا رہا ہے) مگر چونکہ اس سے پیمائش کی گئی تمام قیمتیں 10°C کے بہت قریب ہیں، لہذا وہ تپش پیما باقاعدہ ہے۔

نظر آنے والی ایک مثال:

نشانہ بازی ایک اچھی مثال ہے جو درستگی اور باقاعدگی کے درمیان کے فرق کی وضاحت کرتی ہے۔ خاکہ 1.9(a) میں اس کے مرکز میں پھینکے گئے مرکزی نقطہ (bull's eye) کے آس پاس دور دور لگے ہوئے ہیں۔ لہذا یہ نشانے نہ ہی درست ہیں اور نہ ہی باقاعدہ ہیں۔

خاکے 1.9(b) میں تمام نشانے ایک ودسرے سے قریب تو لگے ہیں مگر مرکزی نقطہ پر نہیں ہیں۔ لہذا یہ نشانے باقاعدہ کہلائیں گے، مگر درست نہیں کہلائیں گے۔ خاکہ 1.9(c) میں تمام نشانے ایک دوسرے کے قریب بھی ہیں اور درمیانی نقطہ پر بھی ہیں۔ لہذا تمام نشانے درست اور باقاعدہ کہلائیں گے۔



(a) Not accurate Not precise — نہ درست نہ باقاعدہ

(b) Not accurate Precise — درست نہیں مگر باقاعدہ

(c) Accurate Precise — درست اور باقاعدہ

خاکہ 1.9۔ درستگی اور باقاعدگی کی ایک بصری مثال:

11 physics 1. nature of physical
Tuesday, February 01, 2022 8:58:05 PM

ایک حسابی مثال: A numerical example

فرض کیجئے کسی شئے کی لمبائی تقریبا 5.678 سم ہے ۔ ایک تجربے میں کم ازکم 0.1 سم ظاہر کرنے والے ایک پیمائشی آلہ سے اس کی لمبائی 5.5 سم بتائی جارہی ہے ۔ ایک اور تجربے میں ایک دوسرے آلے کی مدد سے جو کم ازکم 0.01 سم کی درستگی رکھتا ہو۔اس کی لمبائی 5.38 سم معلوم ہوتی ہے۔ پہلے تجربے میں حاصل ہونے والی قیمت زیادہ درست ہے کیونکہ وہ قیمت حقیقی قیمت کے بہت قریب ہے مگر اس کی قاعدگی کم ہے۔لیکن اس کے برعکس دوسری پیمائش کی درستگی کم ہے۔جب کہ اس میں قاعدگی زیادہ پائی جاتی ہے۔

1.6.2 پیمائش میں ہونے والی غلطیاں: (Errors in Measurement)

پیمائش کے دوران ہونے والی کمی پیشی غلطی کہلاتی ہے۔اتفاقی یا بے ترتیب غلطی ، ترتیب وار یا منظّم غلطی اور مجموعی یا کلی غلطی ، تین ممکنہ غلطیاں ہیں۔

(i) ترتیب وار یا منظّم غلطی (Systematic error)

ترتیب وار غلطیاں دوبارہ پیدا کی جانے والی وہ غیر درستگیاں ہیں جو ایک ہی سمت میں لگاتار وارد ہوتے ہیں۔تجربے کے دوران کل تجربہ میں کوئی مسئلہ درپیش ہو تو ایسی غلطیاں پیدا ہوتی ہیں۔ترتیب وار غلطیوں کو یوں درجہ بند کیا جاتا ہے۔

(1) آلاتی غلطیاں:

آلہ بناتے وقت اگر اس کی نشاندہیاں برابر نہ بنائی گئی ہوں تو آلاتی غلطیاں پیدا ہوسکتی ہیں ۔اگر کوئی پیمائش ایک ایسی میٹر اسکیل سے کی جارہی ہو جس کا ایک کنارا بوسیدہ ہوگیا ہو تو حاصل کردہ نتیجہ میں غلطی آسکتی ہے۔مناسب آلات کا استعمال کرکے اس قسم کی غلطیوں سے بچ سکتے ہیں۔

(2) تجرباتی طریقے یا ٹکنیک میں ادھورا پن:

اس قسم کی غلطیاں تجرباتی انتظام میں موجود کمی پیشی کی وجہ سے ہوتی ہے۔مثال کے طور پر کیلوری میٹر کے ساتھ تجربہ کرتے وقت اگر مجوزیت ٹھیک نہ ہو تو شعاعیں ضائع ہوسکتی ہیں۔ اس کے نتیجہ میں غلطی پیدا ہوتی ہے ۔اس قسم کی غلطیوں سے باز رہنے کے لئے ان کمی پیشیوں کو دور کرنا چاہئے۔

(3) ذاتی غلطی (Personal errors)

ایسی غلطیاں تجربہ کرنے والوں کے طرف سے انفرادی طور پر تجربہ کرنے والوں کے طرف سے انفرادی طور پر تجربہ کی شروعات ٹھیک طور سے نہ کرنے پر یا تجربہ کو ہدایات کے مطابق مشاہدہ نہ کرنے کی وجہ سے پیدا ہوتی ہیں۔

(4) بیرونی اسباب کی وجہ سے غلطیاں:

تجربہ کے دوران بیرونی حالات کی تبدیلیوں سے بھی پیمائش میں غلطی پیدا ہوسکتی ہے۔مثال کے طور پر، تپش، نمی یا دباؤ کی تبدیلی کی وجہ سے پیمائش کے نتائج میں اثر پڑسکتا ہے۔

(5) شمار اقل کی غلطی: (Least count error)

کسی آلہ سے پیمائش کی جانے والی سب سے چھوٹی قیمت شمار اقل کہلاتی ہے اور اس پیمائش کی غلطی شمار اقل کی غلطی ہوتی ہے۔آلہ کی بے ترتیبی ہی اس غلطی کا سبب ہے۔اعلی قاعدگی رکھنے والے آلات کے استعمال سے شمار اقل کی غلطی سے بچا جاسکتا ہے۔

(ii) اتفاقی یا بے ترتیب غلطیاں: (Random errors)

تجرباتی حالات میں بے ترتیب یا غیر متوقع تبدیلیوں کی وجہ سے ایسی غلطیاں پیدا ہوسکتی ہیں ، جیسے دباؤ، تپش یا وولٹیج سپلائی وغیرہ کی تبدیلی، مشاہدہ کرنے والوں کی بے توجہی کی وجہ سے بھی ایسی غلطی لاحق ہوسکتی ہے۔اتفاقی غلطی کی کبھی موقع کی غلطی (Chance error) بھی کہتے ہیں۔اگر کسی شخص سے تجربہ کو بار بار دہرائے جانے کے باجود ہر مرتبہ مختلف ریڈنگ حاصل ہو رہی ہو تو انفرادی غلطی پیدا ہوتی ہے۔ مثال کے طور پر، فرض کیجئے کہ ایک خردہ پیما کی مدد سے ایک تار کی موٹائی ناپی جارہی ہے ۔مختلف جانچ کے لئے مختلف نتیجے حاصل کئے جاسکتے ہیں ۔ایسے معاملے میں زیادہ تعداد کی پیمائش کی جاتی ہے اور پھر ان نتائج کا حسابی اوسط معلوم کرلیا جاتا ہے۔

11 physics 1. nature of physical
Tuesday, February 01, 2022 8:58:05 PM

اگر ایک تجربہ میں 'N' تعداد کی ریڈنگ حاصل کی گئی ہوں اور ریڈنگ $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots\ldots a_n$ ہوں تو پھر ان کا حسابی اوسط یہ ہوگا۔

$$a_m = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots\ldots a_n}{n} \quad (1.1)$$

یا

$$a_m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \quad (1.2)$$

عام طور پر ایسی حسابی اوسط کو سب سے بہتر ممکنہ درست قیمت کے طور پر لے لیا جاتا ہے۔

جدول 1.8۔ میں تجرباتی غلطیوں کو کم کرنے کے طریقے مثالوں کے ساتھ پیش کئے گئے ہیں۔

(iii) مجموعی یا کلی غلطی (Gross error)

ایک مشاہدہ نگار کی لاپرواہی کی وجہ سے پیدا ہونے والی غلطی مجموعی یا کلی غلطی کہلاتی ہے۔ مثال کے طور پر

(i) آلہ کو ٹھیک ترتیب دئے بغیر ہی نگارشات کو پڑھ لینا۔

(ii) غلطیوں کے ذرائع پر یا اور ہدایات پر توجہ نہ دینا یا غلط طریقے سے مشاہدے کرنا وغیرہ۔

(iii) غلط مشاہدات (نتائج) درج کرنا

(iv) حسابات میں مشاہدات کی غلط قیمتوں کا استعمال کرنا

اس قسم کی غلطیوں سے بچے رہنے کے لئے مشاہدہ نگار کی پوری توجہ ضروری ہے۔

Table 1.8 Minimizing Experimental Error — جدول 1.8۔ تجرباتی غلطیوں کو کم کرنے کے طریقے

غلطی کی قسم	مثال	اسے کس طرح کم کیا جائے
اتفاقی غلطی (Random error)	فرض کیجئے کہ آپ کسی ایک ہی ترازو کا استعمال کرکے 3 مرتبہ ایک انگوٹھی کی کمیت کی پیمائش کرتے ہیں۔ اور تھوڑے سے فرق کے ساتھ قیمتیں اس طرح حاصل کرتے ہیں۔ 15.44g، 15.42g، 15.46g۔	مزید دیٹا حاصل کیجئے، یکے بعد دیگرے مشاہدات سے اتفاقی غلطی معلوم کی جاسکتی ہے اور زیادہ تعداد کی مشاہدات کی اوسط معلوم کرکے اس غلطی کو کم کیا جاسکتا ہے۔
ترتیب وار غلطی (Systematic error)	فرض کیجئے کہ آپ جسے پیمائشی فیتہ (tape) کا استعمال کرتے ہیں، وہ کپڑے سے بنا ہوا ہے اور برسوں سے استعمال کی وجہ سے وہ تھوڑا سا پھول گیا ہے (اس کے نتیجہ میں لمبائیوں کی صحیح پیمائش حاصل نہیں ہو رہی ہے)	ترتیب وار غلطیوں کو معلوم کرنا مشکل ہوتا ہے اور وہ یکے بعد دیگرے مشاہدات سے معلوم نہیں کئے جاسکتے۔ کیونکہ یہ اس سے حاصل ہونے والا کل ڈیٹا ایک ہی سمت میں یعنی یکساں معلوم ہوتا ہے (یا تو قیمت بہت اعلیٰ معلوم ہوتی ہے یا بہت ہی کم معلوم ہوتی ہے)

11 physics 1. nature of physical
Tuesday, February 01, 2022 8:58:06 PM

1.6.3 غلطیوں کا تجزیہ (Error analysis)

(i) مطلق غلطی (Absolute error)

کسی مقدار کی پیمائش کی گئی قیمت اور اصل قیمت کے درمیانی فرق کی قدر (magnitude)، مطلق غلطی (absolute error) کہلاتی ہے ۔اگر ایک تجربہ میں کسی مقدار 'a' کی کی گئی پیمائش $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_n$ ہوں تو ان قیمتوں کا حسابی اوسط مقدار کی اصل قیمت (a_m) کہلاتا ہے۔

$$a_m = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_n}{n} \text{ or}$$

$$a_m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

پیمائش کی گئی قیمتوں میں موجود مطلق غلطی یوں پیش کی جاتی ہے۔

$$|\Delta a_1| = |a_m - a_1|$$
$$|\Delta a_2| = |a_m - a_2|$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$|\Delta a_n| = |a_m - a_n|$$

(ii) اوسط مطلق غلطی (Mean Absolute error)

تمام پیمائشوں میں پائی جانے والی مطلق غلطیوں کا حسابی اوسط، اوسط مطلق غلطی کہلاتا ہے۔

$$\Delta a_m = \frac{|\Delta a_1| + |\Delta a_2| + |\Delta a_3| + \ldots\ldots + |\Delta a_n|}{n}$$

$$\text{or} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |\Delta a_i|$$

اگر اصل قیمت a_m ہو اور Δa_m اوسط مطلق غلطی ہوتے تو پھر مقدار کی قدر $a_m + \Delta a_m$ اور $a_m - \Delta a_m$ کے درمیان ہوگی۔

(iii) نسبتی غلطی: (Relative error)

اصل (اوسط) قیمت کے ساتھ اوسط مطلق غلطی کی نسبت نسبتی غلطی کہلاتی ہے، اسے کسری غلطی (Fractional error) بھی کہا جاتا ہے۔ لہذا

$$\text{نسبتی غلطی} = \frac{\text{اوسط مطلق غلطی}}{\text{اوسط قیمت}}$$

$$= \frac{\Delta a_m}{a_m}$$

نسبتی غلطی یہ ظاہر کرتی ہے کہ یہ پیمائش کی جانے والی شے کے مقابلہ میں مطلق غلطی کتنی بڑی ہے ۔مثال کے طور پر ایک ڈرائیور کا Speedometer یہ بتا رہا ہے کہ اس کی کار $60\ km\ h^{-1}$ کی رفتار سے چل رہی ہے جب کہ حقیقت میں وہ $62\ km\ h^{-1}$ کی رفتار سے چل رہی ہے تو پھر Speedometer کی مطلق غلطی $62-60\ km\ h^{-1} = 2\ km\ h^{-1}$ ہے۔

پیمائش کی نسبتی غلطی $2km\ h^{-1} / 60\ km\ h^{-1} = 0.033$ ہے۔

(iv) فیصدی غلطی: فیصد میں ظاہر کی جانے والی نسبتی غلطی

فیصدی غلطی (Percentage error) کہلاتی ہے۔

$$\text{فیصدی غلطی} = \frac{\Delta a_m}{a_m} \times 100\%$$

فیصدی غلطی اگر صفر کے قریب ہے تو اس کا مطلب پیمائش اصل قیمت کے بہت قریب ہوتی ہے جو کہ بہتر اور قابل قبول ہے۔ ہمیشہ یہ جاننا ضروری ہے کہ ہونے والی غلطی، آلہ کی کارگردگی کی وجہ سے ہوتی ہے یا تجربہ میں کی جانے والی کوتاہیوں سے ہوتی ہے۔

مثال 1.4

ایک تجربہ میں مسلسل کی گئی سلسلہ وار پیمائشوں میں، ایک سادہ رقاص کے اہتزاز کا وقت دوران کی ریڈنگ اس طرح معلوم کی گئی،

2.63s، 2.56s، 2.42 s، 2.71s اور 2.80s

11 physics 1. nature of physical
Tuesday, February 01, 2022 8:58:06 PM

محسوب کیجئے۔(i) اہتزاز کے وقفہ دوران کی اوسط قیمت
(ii) ہر پیمائش میں موجود مطلق غلطی (iii) اوسط مطلق غلطی
(iv) نسبتی غلطی (v) فیصدی غلطی
ٹھیک طریقہ سے نتیجہ کا اظہار کیجئے۔

حل:

$$t_1 = 2.63\,s,\ t_2 = 2.56\,s,\ t_3 = 2.42\,s,$$
$$t_4 = 2.71\,s,\ t_5 = 2.80\,s$$

(i) $$T_m = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5}{5}$$
$$= \frac{2.63 + 2.56 + 2.42 + 2.71 + 2.80}{5}$$
$$T_m = \frac{13.12}{5} = 2.624s$$
$$T_m = 2.62s$$

(اعشاریہ کے دوسرے مقام تک مختص کردیا گیا ہے)

(ii) مطلق غلطی $|\Delta T| = |T_m - t|$

$$|\Delta T_1| = |2.62 - 2.63| = +0.01s$$
$$|\Delta T_2| = |2.62 - 2.56| = +0.06s$$
$$|\Delta T_3| = |2.62 - 2.42| = +0.20s$$
$$|\Delta T_4| = |2.62 - 2.71| = +0.09s$$
$$|\Delta T_5| = |2.62 - 2.80| = +0.18s$$

(iii) اوسط مطلق غلطی $= \frac{\Sigma|\Delta T_i|}{n}$

$$\Delta T_m = \frac{0.01 + 0.06 + 0.20 + 0.09 + 0.18}{5}$$

$$\Delta T_m = \frac{0.54}{5} = 0.108s = 0.11s$$

(اعشاریہ کے دوسرے مقام تک مختص کردیا گیا ہے)

(iv) نسبتی غلطی

$$S_T = \frac{\Delta T_m}{T_m} = \frac{0.11}{2.62} = 0.0\ 419$$
$$S_T = 0.04$$

(v) فیصدی غلطی میں $T = 0.04 \times 100\% = 4\%$

(vi) سادہ رقاص کا وقفۂ دوران

$$T = (2.62 \pm 0.11)\ s$$

1.6.4 غلطیوں کا پھیلاؤ (بڑھنا) (Propagation of errors)

ایک تجربہ کے آخری محاسبہ میں، پیمائش کی گئی کئی مقداریں حصہ لے سکتی ہیں۔ ریڈنگ حاصل کرنے کے لئے مختلف قسم کے پیمائشی آلات استعمال ہوئے ہوں گے تو پھر ہم مجموعی طور پر مختلف مقداروں کی پیمائش میں ہونے والی غلطیوں پر نظر رکھنا پڑے گا۔

آخری نتیجہ میں موجود غلطی

(i) انفرادی پیمائشوں کی غلطیاں

(ii) آخری نتیجہ حاصل کرنے کے لئے کئے گئے حسابی حل کا طریقۂ کار، پر منحصر ہوتی ہے۔

چنانچہ ہمیں غلطیوں کو جمع کرنے کا طریقہ معلوم رہنا چاہئے۔

مختلف حسابی کارروائیوں میں غلطیوں کے مجموعے یا پھیلاؤ کی ممکن صورتیں ذیل میں بحث کی گئی ہیں۔

(i) دو مقداروں کے حاصل جمع میں غلطی (Error in the sum of two quantities)

فرض کیجئے کہ A اور B نامی دو مقداروں میں موجود مطلق غلطیاں بالترتیب ΔA اور ΔB ہیں تو۔ پھر

$A = A \pm \Delta A$ کی پیمائش کی گئی قیمت

$B = B \pm \Delta B$ کی پیمائش کی گئی قیمت

فرض کیجئے کہ ان کا حاصل جمع $Z = A + B$ ہے۔

11 physics 1. nature of physical
Tuesday, February 01, 2022 8:58:06 PM

پھر Z میں موجود غلطی ΔZ اس طرح ہوگی۔

$$Z \pm \Delta Z = (A \pm \Delta A) + (B \pm \Delta B)$$
$$= (A + B) \pm (\Delta A + \Delta B)$$
$$= Z \pm (\Delta A + \Delta B)$$
$$\text{(or)} \quad \Delta Z = \Delta A + \Delta B \qquad (1.3)$$

دو مقداروں کے حاصل جمع میں ممکنہ سب سے زیادہ غلطی انفرادی مقداروں میں موجود مطلق غلطیوں کے مجموعے کے برابر ہوتی ہے۔

مثال 1.5

دو مزاحمتیں

$R_1 = (100 \pm 3)\ \Omega,\ R_2 = (150 \pm 2)\ \Omega$

سلسلہ وار جڑے ہوئے ہیں ان کی معادل مزاحمت معلوم کیجئے۔

حل:

$$R_1 = 100 \pm 3\Omega;\ R_2 = 150 \pm 2\Omega$$

معادل مزاحمت Equivalent resistance $R = ?$

معادل مزاحمت Equivalent resistance $R = R_1 + R_2$

$$= (100 \pm 3) + (150 \pm 2)$$
$$= (100 + 150) \pm (3 + 2)$$
$$R = (250 \pm 5)\ \Omega$$

(ii) دو مقداروں کے فرق میں موجود غلطی
(Errors in the difference of two quantities)

فرض کیجئے دو مقداروں A اور B میں موجود مطلق غلطیاں بالترتیب ΔA اور ΔB ہیں، تو

A کی پیمائش کی گئی قیمت $A = A \pm \Delta A$

B کی پیمائش کی گئی قیمت $B = B \pm \Delta B$

فرض کیجئے کہ ان کا حاصل جمع $Z = A - B$ ہے۔

پھر Z میں موجود غلطی ΔZ اس طرح ہوگی۔

$$Z \pm \Delta Z = (A \pm \Delta A) - (B \pm \Delta B)$$
$$= (A - B) \pm \Delta A \mp \Delta B$$
$$= Z \pm \Delta A \mp \Delta B$$
$$\text{(or)} \quad \Delta Z = \Delta A + \Delta B \qquad (1.4)$$

دو مقداروں کے فرق میں موجود ممکنہ سب سے زیادہ غلطی انفرادی مقداروں میں موجود مطلق غلطیوں کے مجموعے کے برابر ہوتی ہے۔

مثال 1.6

ایک تپش پیما سے ناپی گئی دو اجسام کی تپش ہیں۔

$t_1 = (20 + 0.5)°C,\ t_2 = (50 \pm 0.5)°C.$

تپش کے فرق اور ان کے اندر موجود غلطی محسوب کیجئے

حل:

$t_1 = (20 \pm 0.5)°C \qquad t_2 = (50 \pm 0.5)°C$

تپش کا فرق

$t = t_2 - t_1 = (50 \pm 0.5) - (20 \pm 0.5)°C$

مساوات (1.4) کی مدد سے

$$= (50 - 20) \pm (0.5 + 0.5)$$
$$t = (30 \pm 1)°C$$

(iii) دو مقداروں کے حاصل ضرب میں موجود غلطی
(Errors in the product of two quantities)

فرض کیجئے کہ A اور B دو مقداروں میں موجود مطلق غلطیاں بالترتیب ΔA اور ΔB ہیں۔ فرض کیجئے ان کا حاصل ضرب $Z = AB$ ہے۔ Z میں موجود غلطی ΔZ اس طرح ہوگی۔

$$Z \pm \Delta Z = (A \pm \Delta A)(B \pm \Delta B)$$
$$= (AB) \pm (A\,\Delta B) \pm (B\,\Delta A) \pm (\Delta A \,.\, \Delta B)$$

L.H.S کو Z سے اور R.H.S کو AB سے تقسیم کرنے پر ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$1 \pm \frac{\Delta Z}{Z} = 1 \pm \frac{\Delta B}{B} \pm \frac{\Delta A}{A} \pm \frac{\Delta A}{A} \cdot \frac{\Delta B}{B}$$

11 physics 1. nature of physical
Tuesday, February 01, 2022 8:58:07 PM

ΔA /A, ΔB / B

دونوں بہت چھوٹی قیمتیں ہیں۔ان کے حاصل ضرب $\frac{\Delta A}{A}.\frac{\Delta B}{B}$ کونظر انداز کردیا جاسکتا ہے۔ Z میں موجود سب سے زیادہ کسری غلطی یہ ہے۔

$$\frac{\Delta Z}{Z} = \pm\left(\frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B}\right) \qquad (1.5)$$

دو مقداروں کے حاصل ضرب میں موجود ممکنہ سب سے زیادہ کسری غلطی انفرادی مقداروں میں موجود کسری غلطیوں کے مجموعے کے برابر ہوتی ہے۔

(Appendix A1.2 میں متبادل طریقہ بتایا گیا ہے)

مثال 1.7

ایک مستطیل کی لمبائی اور چوڑائی بالترتیب (5.7 ± 0.1) اور (3.4 ± 0.2) ہے۔ مستطیل کا رقبہ، غلطی کے حدود کے ساتھ معلوم کیجئے۔

حل:

لمبائی $\text{Length } \ell = (5.7 \pm 0.1)\text{ cm}$

چوڑائی $\text{Breadth } b = (3.4 \pm 0.2)\text{ cm}$

غلطی کے حدود کے ساتھ رقبہ $= A \pm \Delta A = ?$

رقبہ $A = \ell \times b = 5.7 \times 3.4 = 19.38 = 19.4\text{ cm}^2$

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta b}{b}$$

$$\Delta A = \left(\frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta b}{b}\right)A$$

$$\Delta A = \left(\frac{0.1}{5.7} + \frac{0.2}{3.4}\right)19.4$$

$$= (0.0175+0.0588) \times 19.4$$

$$= 1.48 = 1.5$$

غلطی کی حد کے ساتھ مستطیل کا رقبہ

$A = (19.4\pm1.5)\text{ cm}^2$

(iv) دو مقداروں کی تقسیم یا خارج قسمت میں غلطی
(Error in the division or quotient of two quantities)

فرض کیجئے کہ A اور B دو مقداروں میں موجود مطلق غلطیاں بالترتیب ΔA اور ΔB ہیں۔

فرض کیجئے خارج قسمت $Z = \frac{A}{B}$ ہے۔

Z میں موجود غلطی ΔZ اس طرح دی گئی ہے۔

$$Z \pm \Delta Z = \frac{A \pm \Delta A}{B \pm \Delta B} = \frac{A\left(1 \pm \frac{\Delta A}{A}\right)}{B\left(1 \pm \frac{\Delta B}{B}\right)}$$

$$= \frac{A}{B}\left(1 \pm \frac{\Delta A}{A}\right)\left(1 \pm \frac{\Delta B}{B}\right)^{-1}$$

$$\text{or } Z \pm \Delta Z = Z\left(1 \pm \frac{\Delta A}{A}\right)\left(1 \mp \frac{\Delta B}{B}\right)$$

[جب $x<<1$ ہے تو $(1+x)^n \approx 1+nx$ کو استعمال کرکے]

دونوں طرف Z سے تقسیم کرکے ہم حاصل کرتے ہیں

$$1 \pm \frac{\Delta Z}{Z} = \left(1 \pm \frac{\Delta A}{A}\right)\left(1 \mp \frac{\Delta B}{B}\right)$$

$$= 1 \pm \frac{\Delta A}{A} \mp \frac{\Delta B}{B} \pm \frac{\Delta A}{A}.\frac{\Delta B}{B}$$

چونکہ رقمیں $\Delta A/A$ اور $\Delta B/B$ بہت چھوٹے ہیں ان کے حاصل ضرب کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔

Z میں موجود سب سے زیادہ کسری غلطی یوں پیش کی جاتی ہے۔

$$\frac{\Delta Z}{Z} = \left(\frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B}\right) \qquad (1.6)$$

دو مقداروں کی خارج قسمت میں موجود سب سے زیادہ کسری غلطی ان کی انفرادی کسری غلطیوں کے مجموعے کے برابر ہوتی ہے۔

Appendix A1.2 میں متبادل طریقہ پیش کیا گیا ہے

11 physics 1. nature of physical
Tuesday, February 01, 2022 8:58:07 PM

مثال 1.18

ایک تار کے آر پار کا وولٹیج (100 ± 5)V ہے، اور اس کے ذریعہ بہنے والی برقی رو (10 ± 0.2)A ہے۔ تار کی مزاحمت معلوم کیجئے۔

حل:

وولٹیج Voltage $V = (100 \pm 5)V$

برقی رو Current $I = (10 \pm 0.2)$ A

مزاحمت Resistance $R = ?$

پھر مزاحمت R، اوم کے کلیہ کی مدد سے پیش کیا جاتا ہے۔

$$R = \frac{V}{I}$$

$$= \frac{100}{10} = 10\Omega$$

$$\frac{\Delta R}{R} = \left(\frac{\Delta V}{V} + \frac{\Delta I}{I}\right)$$

$$\Delta R = \left(\frac{\Delta V}{V} + \frac{\Delta I}{I}\right)R$$

$$= \left(\frac{5}{100} + \frac{0.2}{10}\right)10$$

$$= (0.05 + 0.02)10$$

$$= 0.07 \times 10 = 0.7$$

مزاحمت R یہ ہے۔ $= (10 \pm 0.7)\Omega$

(v) ایک مقدار کی طاقت میں غلطی

Error in the power of a quantity

A کی n ویں طاقت کا تصور کیجئے۔ $Z = A^n$

Z میں موجود غلطی ΔZ یوں پیش کی جاتی ہے۔

$$Z \pm \Delta Z = (A \pm \Delta A)^n = A^n\left(1 \pm \frac{\Delta A}{A}\right)^n$$

$$= Z\left(1 \pm n\frac{\Delta A}{A}\right)$$

[جب $x \ll 1$ ہے تو $(1+x)^n \approx 1+nx$,] بقیہ اصطلاحات کو نظر انداز کرتے ہوئے، دونوں طرف Z سے تقسیم کرنے پر ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$1 \pm \frac{\Delta Z}{Z} = 1 \pm n\frac{\Delta A}{A} \; or$$

$$\frac{\Delta Z}{Z} = n.\frac{\Delta A}{A} \qquad (1.7)$$

ایک مقدار کی n ویں قوت میں موجود کسری غلطی اس مقدار میں موجود کسری غلطی کے n گنا برابر ہوتی ہے۔

عام اصول : اگر $Z = \frac{A^p B^q}{C^r}$ ہو تو Z میں موجود سب سے زیادہ غلطی یہ ہوگی۔

$$\frac{\Delta Z}{Z} = p\frac{\Delta A}{A} + q\frac{\Delta B}{B} + r\frac{\Delta C}{C}$$

Z میں موجود فیصدی غلطی یوں پیش کی جائے گی۔

$$\frac{\Delta Z}{Z} \times 100 = p\frac{\Delta A}{A} \times 100 + q\frac{\Delta B}{B} \times 100 + r\frac{\Delta C}{C} \times 100$$

مثال 1.9

ایک طبیعی مقدار $x = \frac{a^2 b^3}{c\sqrt{d}}$ یوں پیش کی جاتی ہے۔

اگر a، b، c اور d میں موجود پیمائش کی فیصدی غلطیاں بالترتیب 4%، 2%، 3% اور 1% ہوں تو پھر x کے محاسبے میں فیصدی غلطی معلوم کیجئے۔ (NEET 2013)

حل:

دیا گیا ہے $x = \frac{a^2 b^3}{c\sqrt{d}}$

x میں موجود فیصدی غلطی یوں پیش کی جاتی ہے۔

11 physics 1. nature of physical
Tuesday, February 01, 2022 8:58:07 PM

$$\frac{\Delta x}{x}\times 100 = 2\frac{\Delta a}{a}\times 100 + 3\frac{\Delta b}{b}\times 100 + \frac{\Delta c}{c}\times 100 + \frac{1}{2}\frac{\Delta d}{d}\times 100$$

$$= (2\times 4\%) + (3\times 2\%) + (1\times 3\%) + (\tfrac{1}{2}\times 1\%)$$

$$= 8\% + 6\% + 3\% + 0.5\%$$

$x = 17.5\%$ میں موجود فیصدی غلطی

1.7 معنی خیز ہندسے (Significant Figures)

1.7.1 معنی خیز ہندسے ۔ تعریف اور اصول (Definition and Rules of Significant Figures)

فرض کیجئے کہ ہم کسی تین طلباء کو ایک میٹر اسکیل کی مدد سے ایک لکڑی کی پیمائش کرنے کو کہتے ہیں۔(ایک میٹر اسکیل کا شمار اقل 1 ملی میٹر یا 0.1 سمر ہے)۔اس لئے پیمائش کا نتیجہ (لکڑی کی لمبائی) کچھ اس طرح حاصل ہوسکتا ہے، 7.20 سمر یا 7.23 سمر۔نوٹ کیجئے کہ تینوں طلباء نے پہلے دونوں ہندسوں کی پیمائش (یقین کے ساتھ) ٹھیک کیا ہے۔مگر آخری ہندسہ فرداً فرداً تبدیل ہوا ہے۔اس لئے اس میں معنی خیز ہندسوں کی تعداد 3 ہے، جو پیمائش (مقدار) کے ساتھ ساتھ استعمال شدہ آلہ کی باقاعدگی کو بھی ظاہر کرتا ہے۔چنانچہ معنی خیز ہندسہ یا معنی خیز عدد 3 ہے۔ اس کی تعریف یوں کی جاتی ہے کہ یہ ان معنی خیز ہندسوں کی تعداد ہے۔جس میں یقینی طور پر معلوم شدہ اعداد اور پہلا غیر یقینی عدد موجود ہو۔

مثالیں :

عدد 1 2 1 . 2 3 میں 5 معنی خیز ہندسے ہیں۔ عدد 1.2 میں 2 معنی خیز ہندسے ہیں، عدد 0.123 میں 3 معنی خیز ہندسے ہیں، 0.1230 کا معنی خیز عدد 4 ہے۔0.0123 کا معنی خیز عدد 3 ہے

1230 کے لئے معنی خیز عدد 3 ہے۔1230 (اعشاریہ کے ساتھ) کے لئے معنی خیز عدد 4 ہے اور 20000000 کے لئے معنی خیز عدد 1 ہے، (کیونکہ $20000000 = 2\times 10^7$ میں صرف ایک معنی خیز عدد (یعنی '2' موجود ہے)۔

طبعی پیمائش میں اگر شئے کی لمبائی $l = 1230\text{m}$ ہو تو l کے لئے معنی خیز عدد 4 ہے۔

جدول 1.9 میں معنی خیز ہندسوں کو گننے کے قوانین بتائے گئے ہیں۔

مثال 1.10

مندرجۂ ذیل میں معنی خیز ہندسوں کی تعداد بیان کیجئے۔

i) 600800 iv) 5213.0

ii) 400 v) $2.65\times 10^{24}\,m$

iii) 0.007 vi) 0.0006032

حل: (i) چار (ii) ایک (iii) ایک

(iv) پانچ (v) تین (vi) چار

1.7.2 عدد کو مختص کرنا (Rounding off)

آج کل حسابات کو حل کرنے کے لئے کیلکولیٹروں کا بکثرت استعمال کیا جاتا ہے۔ کیلکولیٹر سے دئے جانے والے نتیجے میں کئی ہندسے ہوتے ہیں۔کسی بھی معاملہ میں، حاصل شدہ نتیجہ میں اس سے زیادہ معنی خیز ہندسے نہ ہوں، جتنے کہ محاسبے میں استعمال ہونے والے ڈیٹا میں موجود ہوں۔محاسبے کے نتیجہ میں اگر ایک سے زیادہ غیر یقینی عدد ہو تو اسے مختص کردیا جاتا ہے۔عدد کو مختص کرنے کے قوانین جدول 1.10 میں بتائے گئے ہیں۔

مثال 1.11

دئے گئے اشاروں کے مطابق مندرجۂ ذیل اعداد کو مختص (Round off) کیجئے۔

(i) 18.35 ، 3 ہندسے تک

(ii) 19.45 ، 3 ہندسے تک

(iii) 101.55×10^6 ، 4 ہندسے تک

(iv) 248337 ، 3 ہندسے تک

(v) 12.653 ، 3 ہندسے تک

11 physics 1. nature of physical
Tuesday, February 01, 2022 8:58:08 PM

جدول 1.9۔ معنی خیز ہندسوں کو گننے کے اصول (Rules for counting Significant figures)

اصول	مثال
(i) تمام غیر صفری ہندسے معنی خیز ہیں۔	1342 میں چار معنی خیز ہندسے ہیں۔
(ii) دو غیر صفری کے درمیان موجود تمام صفر معنی خیز ہیں۔	2008 میں چار معنی خیز ہندسے ہیں۔
(iii) وہ تمام صفر جو ایک غیر صفری عدد کے دائیں طرف موجود ہوں۔ مگر اعشاریہ کے بائیں طرف ہوں، معنی خیز ہیں۔	30700. میں پانچ معنی خیز ہندسے ہیں۔
(iv) (a) بغیر اعشاریہ والے عدد کے لئے آخر میں موجود صفر (صفرات) معنی خیز نہیں ہیں۔	(a) 30700 میں 3 معنی خیز ہندسے ہیں۔
(b) کسی پیائش کے ذریعہ حاصل ہونے والے تمام صفر معنی خیز ہوتے ہیں۔	(b) 30700 m میں پانچ معنی خیز ہندسے ہیں۔
(v) اگر عدد صفر سے چھوٹا ہو تو اعشاریہ کے دائیں طرف مگر پہلے غیر صفری عدد کے بائیں طرف آنے والا (والے) صفر غیر معنی خیز ہوتے ہیں۔	0.00345 میں تین معنی خیز ہندسے ہیں۔
(vi) ایک اعشاریہ کے بعد اور غیر صفری ہندسے کے دائیں طرف آنے والے تمام صفر معنی خیز ہوتے ہیں	40.00 میں چار معنی خیز ہندسے ہیں اور 0.030400 میں پانچ معنی خیز ہندسے ہیں اور
(vii) معنی خیز ہندسوں کی تعداد استعمال کئے گئے نظام اکائی پر منحصر نہیں ہوتی	1.53 cm، 0.0153m، 0.0000153km، ان تمام میں تین معنی خیز ہندسے ہیں۔

نوٹ 1: تضریبی یا تکسیری عوامل جو نہ تو مختص کئے گئے اعداد ہیں اور نہ ہی وہ کسی پیائش کا اظہار کرتے ہیں۔ عین عدد ہوتے ہیں اور حالات کے مطابق ان کے کئی معنی خیز ہندسے ہو سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر دائرے کا احاطہ $s = 2\pi r$ ہے۔ یہاں عوامل 2 عین عدد ہے۔ اسے ضرورت کے مطابق 2.0، 2.00 یا 2.000 وغیرہ لکھا جا سکتا ہے۔

نوٹ 2: معنی خیز ہندسوں کے تعین کرنے میں 10 کی قوت کا کوئی تعلق نہیں ہے۔ مثال کے طور پر

$x = 5.70\ \text{m} = 5.70 \times 10^{2}\ \text{cm} = 5.70 \times 10^{3}\ \text{mm} = 5.70 \times 10^{-3}\ \text{km}$. ہر معاملے میں معنی خیز ہندسوں کی تعداد تین ہے۔

جدول : 1.10 عدد کو مختص کرنے کے اصول (Rules for rounding off)

اصول	مثال
(i) اگر چھوڑا جانے والا ہندسہ 5 سے چھوٹا ہو تو اس سے پہلے کے ہندسے کو تبدیل نہیں کریں گے۔	(i) 7.3.2 کو مختص کر کے 7.3 لکھا جائے گا۔
	(ii) 8.94 کو مختص کر کے 8.9 بنایا جائے گا۔
(ii) اگر چھوڑا جانے والا ہندسہ 5 سے بڑا ہو تو اس سے پہلے کے ہندسے میں ایک (1) جمع کر دیا جاتا ہے۔	(i) 17.26 کو مختص کر کے 17.3 بنایا جائے گا۔
	(ii) 11.89 کو مختص کر کے 11.9 بنایا جائے گا۔
(iii) اگر چھوڑا جانے والا ہندسہ 5 ہو اور اس کے بعد غیر صفری ہندسے موجود ہوں تو اس سے پہلے والا ہندسے میں 1 کا اضافہ کیا جائے گا۔	(i) 7.352 کو اس کے پہلے کسر پر مختص کرنے پر 7.4 ہو جاتا ہے۔
	(ii) 18.159 کو اس کے پہلے کسر تک مختص کرنے پر 18.2 لکھا جائے گا۔
(iv) اگر چھوڑا جانے ولا ہندسہ 5 ہو یا 5 کے بعد کے ہندسے صفر ہوں تو، اس سے پہلے والے عدد کے جفت ہونے پر اس میں کوئی تبدیلی نہیں ہوگی۔	(i) 3.45 کو مختص کرنے سے وہ 3.4 ہو جاتا ہے۔
	(ii) 8.250 کو مختص کرنے سے وہ 8.2 ہو جاتا ہے۔
(v) اگر چھوڑا جانے والا ہندسہ 5 ہو یا 5 کے بعد کے ہندسے صفر ہوں تو اس سے پہلے والے عدد کے طاق ہونے پر اس میں 1 کا اضافہ کر لیا جائے گا۔	(i) 3.35 کو مختص کرنے سے وہ 3.4 ہو جاتا ہے۔
	(ii) 8.350 کو مختص کرنے سے وہ 8.4 ہو جاتا ہے۔

11 physics 1. nature of physical
Tuesday, February 01, 2022 8:58:08 PM

حل :

i) 18.4 ii) 19.4 iii) 101.6×10^6
iv) 248000 v) 12.7

1.7.3 معنی خیز ہندسوں کے ساتھ حسابی کارروائیاں
(Arithmetical operations with significant figures)

(i) جمع اور تفریق:

جمع اور تفریق

میں، حاصل شدہ نتیجہ میں اعشاریہ کے بعد اتنے ہی ہندسے ہونا چاہئے جتنے کہ سب سے کم اعشاریہ رکھنے والے اصل عدد کے پاس ہوں۔

مثال :

1۔ $3.1 + 1.780 + 2.046 = 6.926$

یہاں اعشاریہ کے بعد معنی خیز ہندسوں کی سب سے کم تعداد ایک ہے۔لہذا نتیجہ 6.9 ہوگا۔

2۔ $12.637 - 2.42 = 10.217$

یہاں اعشاریہ کے بعد معنی خیز ہندسوں کی سب سے کم تعداد دو ہے لہذا نتیجہ 10.22 ہوگا۔

(ii) ضرب اور تقسیم:

ضرب اور تقسیم میں، حاصل شدہ نتیجہ میں اتنے ہی معنی خیز ہندسے ہونا چاہئے جتنے کہ سب سے کم معنی خیز ہندسے رکھنے والے اصل عدد کے پاس ہوں۔

مثال:

1۔ $1.21 \times 36.72 = 44.4312 = 44.4$

یہاں پیمائشی قیمتوں (اصل عدد) میں معنی خیز ہندسے کی سب سے کم تعداد تین ہے۔لہذا حاصل شدہ نتیجے کو تین معنی خیز ہندسوں تک مختص کرکے 44.4 لکھا جائے گا۔

2۔ $36.72 \div 1.2 = 30.6 = 31$

یہاں پیمائشی قیمتوں میں معنی خیز ہندسوں کی سب سے کم تعداد دو ہے۔ لہٰذا حاصل شدہ نتیجے کو دو معنی خیز ہندسوں تک مختص کرکے 31 لکھا جائے گا

1.8 ابعادی تجزیہ: (Dimensional Analysis)

1.8.1 طبیعی مقداروں کے ابعاد
(Dimensions of physical quantities)

میکانیات میں ہم کمیت، وقت، لمبائی، حجم، اسراع وغیرہ جیسی طبیعی مقداروں کا استعمال کرتے ہیں جنہیں تین آزاد بنیادی مقداروں سے ظاہر کیا جاسکتا ہے جیسے L , M اور T۔اس لئے ایک طبیعی مقدار کے بُعد (dimension) کی تعریف یوں کی جاتی ہے کہ یہ کوئی بھی طبیعی مقدار ہے جو ایسی بنیادی مقداروں کے لحاظ سے ظاہر کی جاتی ہو جن کی قوت (Power) طبیعی مقدر کے ابعاد کو ظاہر کرتی ہو۔ایک طبیعی مقدار کی ابعاد کو ظاہر کرنے کے لئے استعمال ہونے والی علامت [ ] ہے۔(یعنی مربع نما بریکیٹ کے اندر ظاہر کی جانے والی طبیعی مقدار) مثال کے طور پر [طول] کا مطلب لمبائی کی ابعاد (رقبہ) کا مطلب رقبہ کی ابعاد وغیرہ۔طول کی ابعاد کو بنیادی مقداروں کے لحاظ سے اسی طرح ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

[طول] $[\text{length}] = M^0 LT^0 = L$

اسی طرح [رقبہ] $[\text{area}] = M^0 L^2 T^0 = L^2$

اسی طرح [حجم] $[\text{volume}] = M^0 L^3 T^0 = L^3$

نوٹ کیجئے کہ ان تمام معاملات میں، بنیادی مقدار L وہی ہے مگر اس کی قوت مختلف ہے جس کا مطلب یہ ہے کہ ان کے ابعاد مختلف ہیں۔ایک خالص عدد کے لئے بنیادی مقدار کی قوت صفر ہوتی ہے۔ مثال کے طور پر عدد 2 اور L لیجئے جس کا کوئی بُعد نہیں ہے۔اس کا اظہار اس طرح کیا جائے گا۔

$\Rightarrow [2] = M^0 L^0 T^0$ (بے ابعاد)

آیئے ہم کچھ اور طبیعی مقداروں کے ابعاد لکھیں۔

رفتار $s = \dfrac{\text{فاصلہ}}{\text{لیا گیا وقت}} \Rightarrow [s] = \dfrac{L}{T} = LT^{-1}$

سمتی رفتار $\vec{v} = \dfrac{\text{ہٹاؤ}}{\text{لیا گیا وقت}} \Rightarrow [\vec{v}] = \dfrac{L}{T} = LT^{-1}$

11 physics 1. nature of physical
Tuesday, February 01, 2022 8:58:09 PM

نوٹ کیجئے کہ رفتار ایک عددی مقدار ہے اور سمتی رفتار ایک سمتی مقدار ہے (عددی مقدار اور سمتی رفتار کے بارے میں اکائی 2 میں بحث کی گئی ہے)۔ مگر دونوں کا ابعادی ضابطہ مساوی ہوتا ہے۔

$$\vec{a} = \frac{\text{سمتی رفتار}}{\text{لیا گیا وقت}} \Rightarrow [\vec{a}] = \frac{LT^{-1}}{T} = LT^{-2}$$ ، اسراع

فی اکائی وقت سمتی رفتار ہی اسراع ہے۔

خطی معیار حرکت یا معیار حرکت

$$[\vec{p}] = m\vec{v} \Rightarrow [\vec{p}] = MLT^{-1}$$

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow [\vec{F}] = MLT^{-2} = \frac{\text{معیار حرکت}}{\text{وقت}}$$ ، قوت

قوت کی کسی بھی قسم کے لئے یہی ابعاد صحیح نکلیں گے۔ صرف چار قسم کی قوتیں ہیں جو فطرت میں پائے جاتے ہیں۔ وہ یہ ہیں۔ مضبوط وقت، برق مقناطیسی قوت، کمزور قوت اور قوت جاذبہ، علاوہ ازیں رگڑ کی قوت، مرکز مائل قوت، مرکز جو قوت بھی ہیں۔ ان تمام کی ابعاد MLT^{-2} ہے۔

$$\vec{I} = \vec{F}t \Rightarrow [\vec{I}] = MLT^{-1}$$ ، دھکا

= معیار حرکت کے ابعاد

خطی معیار حرکت کی حرکت زاویائی معیار حرکت ہے۔

(اکائی 5 میں اس کا تذکرہ کیا گیا ہے)

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \Rightarrow [\vec{L}] = ML^2T^{-1}$$ زاویائی معیاری حرکت

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} \Rightarrow [W] = ML^2T^{-2}$$ کیا گیا کام

$$KE = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow [KE] = \left[\frac{1}{2}\right][m]\ [v^2]$$ توانائی بالفعل

کیونکہ عدد $\frac{1}{2}$ بے ابعاد ہے، توانائی بالفعل کی ابعاد

$[KE] = [m][v^2] = ML^2T^{-2}$ ہے۔ اس طرح توانائی بالقواہ کی ابعاد حاصل کرنے کے لئے، آیئے ہم جاذبی توانائی بالقواہ پر غور کریں۔ $PE = mgh \Rightarrow [PE] = [m][g][h]$ جس میں m، ذرہ کی کمیت، g اسراع بوجہ جاذبہ اور h زمینی سطح سے اونچائی ہے۔

لہذا $[PE] = [m][g][h] = ML^2T^{-2}$ چنانچہ توانائی کی کسی بھی قسم (جیسے اندرونی توانائی، کل توانائی وغیرہ) کے لئے ابعاد یہی ہے۔ $[Energy] = ML^2T^{-2}$ [توانائی]

قوت کی حرکت (Moment of Force) قوت گدشہ

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow [\vec{\tau}] = ML^2T^{-2}$$

(torque) کہلاتی ہے۔ (τ ایک یونانی حرف ہے اسے ٹو (tau) پڑھنا چاہئے)۔ نوٹ کیجئے کہ قوت گدشہ اور توانائی دو مختلف طبیعی مقدار ہونے کے باجود ان کے ابعاد ایک جیسے ہی ہیں۔ اس کے علاوہ ان میں سے ایک (توانائی) عددی مقدار ہے۔ جب کہ دوسری مقدار (قوت گدشہ) ایک سمتی مقدار ہے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ یہ ضروری نہیں کہ ابعادی طور پر ایک جیسے نظر آنے والی طبیعی مقداریں، ایک جیسی ہی رہیں۔

نوٹ

(1) ہم طبیعیات میں مختلف مواقع پر لفظ Dimensions سے دوچار ہوتے ہیں۔ یہ لفظ ایک سے زیادہ معنوں کے لئے استعمال ہوتا ہے جس سے طلباء اصطلاح dimension کا مطلب سمجھنے میں شک میں پڑ جاتے ہیں۔ اس لئے آیئے ہم یہ معلوم کریں کہ طبیعیات میں یہ لفظ کہاں اور کس معنی میں استعمال ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر طبیعیات میں اس قسم کے اصطلاحات دیکھے جاسکتے ہیں۔ dimension of energy، motion in one dimension، اور dimention of atom وغیرہ۔ یاد رکھیں کہ اگر کسی طبیعی مقدار کے ساتھ یہ لفظ آتا ہے تو اس کا مطلب یہ کسی طبیعی مقدار کو اس کی بنیادی مقدار کے لحاظ سے اس کی قوت کو ظاہر کر رہا ہے۔ اگر یہ لفظ حرکت کے ساتھ استعمال کیا جاتا ہے جیسے motion in one dimension یا motion in two dimensions یا motion in three dimensions تو یہاں پر خلاء کے ابعاد کے معنوں میں استعمال ہوتا ہے۔ اسی طرح dimension of atom کا مطلب جوہر کی جسامت ہے۔ لہذا اس سے پتہ چلتا ہے کہ یہ لفظ اکیلے پن میں کوئی معنی نہیں رکھتا۔ اس کے حقیقی معنوں کو اس کے ساتھ لکھی جانے والی اصطلاحات کی مدد سے سمجھا جاسکتا ہے۔

(2) تمام مثلثاتی (trignometric) تفاعل (Function) جیسے $\sin\theta$, $\cos\theta$ وغیرہ غیر ابعادی ہوتے ہیں (یعنی θ غیر ابعادی ہوتا ہے)، exponential (قوتی) عوامل e^x اور Logarithmic عوامل $\ln x$ بھی غیر ابعادی ہوتے ہیں (x غیر ابعادی ہی ہونا چاہئے) فرض کیجئے کہ ہم کسی ایک عوامل کو سلسلہ وار پھیلاؤ (series expansion) میں (متعین یا غیر متعین) (Finite or infinite) طور پر پھیلاتے ہیں جیسے $x^0, x^1, x^2, \ldots$ تو پھر x ایک غیر ابعادی مقدار ہونا چاہئے۔

11 physics 1. nature of physical
Tuesday, February 01, 2022 8:58:09 PM

جدول 1.11۔ ابعادی ضابطہ (Dimensional Formula)

Physical quantity طبیعی مقدار	Expression وضاحت	Dimensional formula ابعادی ضابطہ	
Area (Rectangle) رقبہ (مستطیل)	length × breadth	لمبائی × چوڑائی	$[L^2]$
Volume حجم	Area × height	رقبہ × اونچائی	$[L^3]$
Density کثافت	mass / volume	کمیت / حجم	$[ML^{-3}]$
Velocity سمتی رفتار	displacement/time	ہٹاؤ / وقت	$[LT^{-1}]$
Acceleration اسراع	velocity / time	سمتی رفتار / وقت	$[LT^{-2}]$
Momentum معیارِحرکت	mass × velocity	کمیت × سمتی رفتار	$[MLT^{-1}]$
Force قوت	mass × acceleration	کمیت × اسراع	$[MLT^{-2}]$
Work کام	force × distance	قوت × فاصلہ	$[ML^2T^{-2}]$
Power طاقت	work / time	کام / وقت	$[ML^2T^{-3}]$
Energy توانائی	Work	کام	$[ML^2T^{-2}]$
Impulse دھکا	force × time	قوت × وقت	$[MLT^{-1}]$
Radius of gyration گردش کا نصف قطر	Distance	فاصلہ	$[L]$
Pressure (or) stress دباؤ (یا) زور	force / area	قوت/رقبہ	$[ML^{-1}T^{-2}]$
Surface tension سطحی تناؤ	force / length	قوت/لمبائی	$[MT^{-2}]$
Frequency تعدد	1 / time period	1/ وقفہ دوران	$[T^{-1}]$
Moment of Inertia جمود کی حرکت	mass × (distance)^2	کمیت × مربع فاصلہ	$[ML^2]$
Moment of force (or torque) قوت کی حرکت (یا قوت گردشہ)	force × distance	قوت × فاصلہ	$[ML^2T^{-2}]$
Angular velocity زاویائی سمتی رتار	angular displacement / time	زاویائی ہٹاؤ/ وقت	$[T^{-1}]$
Angular acceleration زاویائی اسراع	angular velocity / time	زاویائی سمتی رفتار/ وقت	$[T^{-2}]$
Angular momentum زاویائی معیارِحرکت	linear momentum × distance	خطی معیارِحرکت/ فاصلہ	$[ML^2T^{-1}]$
Co-efficient of Elasticity لچکداری کی شرح قدر	stress/strain	زور/کھنچاؤ	$[ML^{-1}T^{-2}]$
Co-efficient of viscosity لزوجیت کی شرح قدر	$\frac{(\text{force} \times \text{distance})}{(\text{area} \times \text{velocity})}$	(قوت×فاصلہ)/(رقبہ×سمتی رفتار)	$[ML^{-1}T^{-1}]$
Surface energy سطحی توانائی	work / area	کام/رقبہ	$[MT^{-2}]$
Heat capacity حرارتی گنجائش	heat energy / temperature	حرارتی توانائی/تپش	$[ML^2T^{-2}K^{-1}]$
Charge برقی بار	current × time	برقی رو × وقت	$[AT]$
Magnetic induction مقناطیسی امالیت	force / (current × length)	قوت/(برقی رو×لمبائی)	$[MT^{-2}A^{-1}]$
Force constant قوت کی مستقلہ	force / displacement	قوت/ہٹاؤ	$[MT^{-2}]$
Gravitational constant جاذبی مستقلہ	$\frac{[\text{force} \times (\text{distance})^2]}{(\text{mass})^2}$	(قوت × مربع فاصلہ)/(مربع کمیت)	$[M^{-1}L^3T^{-2}]$
Planck's constant پلانک کی مستقلہ	energy / frequency	توانائی/تعدد	$[ML^2T^{-1}]$
Faraday constant فیرڈے کی مستقلہ	avogadro constant × elementary charge	اووگیڈرو مستقلہ × ابتدائی بار	$[AT\ mol^{-1}]$
Boltzmann constant بولٹزمین کی مستقلہ	energy / temperature	توانائی/تپش	$[ML^2\ T^{-2}\ K^{-1}]$

11 physics 1. nature of physical
Tuesday, February 01, 2022 8:58:10 PM

1.8.2 ابعادی مقداریں، غیر ابعادی مقداریں، یکسانیت کا اصول
(Dimensional quantities, Dimensionless quantities, Principles of Homogeneity)

ابعاد کی بنیاد پر ہم مقداروں کو چار قسموں میں بھی درجہ بند کر سکتے ہیں۔

(i) ابعادی متغیرات: Dimensional variables

طبیعی مقداریں جو ابعاد رکھتی ہیں اور مختلف قیمتیں رکھتی ہیں ابعادی متغیرات کہلاتی ہیں۔ چند مثالیں یہ ہیں۔ لمبائی، سمتی رفتار اور اسراع، وغیرہ۔

(2) غیر ابعادی متغیرات: Dimensionless variables

طبیعی مقداریں جن کی ابعاد تو نہیں ہوتیں مگر قیمتیں مختلف ہوتی ہیں غیر ابعادی متغیرات کہلاتی ہیں۔ نوعی جاذبہ، کھنچاؤ (strain)، انعطاف نما وغیرہ اس کی چند مثالیں ہیں۔

(3) ابعادی مستقلہ: Dimensional Constant

طبیعی مقداریں جو ابعاد رکھتی ہیں اور مستقل قیمتیں رکھتی ہیں، ابعادی مستقلہ کہلاتی ہیں۔ جاذبی مستقلہ، پلانک کی مستقلہ وغیرہ اس کی چند مثالیں ہیں۔

(4) غیر ابعادی مستقلہ:

Dimensionless Constant

طبیعی مقداریں جو ابعاد تو نہیں رکھتیں مگر مستقل قیمتیں رکھتی ہیں، غیر ابعادی مستقلہ کہلاتی ہیں۔

π , e (Euler کا عدد)، اعداد ، وغیرہ اس کی چند مثالیں ہیں۔

ابعاد کی یکسانیت کا اصول:
(Principle of homogeneity of dimensions)

ابعاد کی یکسانیت کا اصول یہ بیان کرتا ہے کہ ایک طبیعی وضاحت میں موجود تمام اصطلاحات کے ابعاد یکساں ہونا چاہئے۔ مثال کے طور پر طبیعی وضاحت $v^2 = u^2+2as$ میں u^2, v^2 ، اور $2as$ کے ابعاد یکساں ہیں۔ اور وہ $[L^2 T^{-2}]$ کے برابر ہیں۔

1.8.3 ابعادی تجزیہ کے طریقہ کے اطلاقات اور حد بندیاں
(Application and limitations of the method of Dimensional Analysis)

یہ طریقہ اس لئے استعمال کیا جاتا ہے۔

(i) ایک طبیعی مقدر کو اکائیوں کے ایک نظام سے دوسرے نظام میں تبدیل کرنے

(ii) ایک دی گئی طبیعی مساوات کی ابعادی تصحیح جانچنے

(iii) مختلف طبیعی مقداروں کے درمیان تعلقات قائم کرنے

(i) ایک طبیعی مقدار کو اکائیوں کے ایک نظام سے دوسرے نظام میں تبدیل کرنے

یہ اس حقیقت پر مبنی ہے کہ حسابی قیمتیں (n) اور اس کی متعلقہ اکائی (u) کا حاصل ضرب $n\,[u]$ ایک مستقلہ ہے۔ یا

$$n_1[u_1] = n_2[u_2].$$

ایک طبیعی مقدار کا تصور کیجئے جس کی کمیت میں 'a' لمبائی میں 'b' اور وقت میں 'c' ابعاد موجود ہیں۔ اگر ایک نظام میں موجود بنیادی اکائیاں بالترتیب M_1، L_1 اور T_1 اور دوسرے نظام میں M_2، L_2 اور T_2 ہوں تو پھر ہم لکھ سکتے ہیں۔

$$n_1 [M_1^a L_1^b T_1^c] = n_2 [M_2^a L_2^b T_2^c]$$

لہذا، اس طرح سے ہم طبیعی مقدار کی ایک حسابی قیمت کو اکائیوں کے ایک نظام میں دوسرے نظام میں تبدیل کیا ہے۔

مثال 1.12

پارہ کے 76 سم دباؤ کو ابعادی طریقہ استعمال کرتے ہوئے NM^{-2} میں تبدیل کیجئے۔

حل:

CGS نظام میں پارہ کا 76 سم دباؤ =

$76\times13.6\times980$ dyne فی مربع سم کے برابر ہوتا ہے۔

دباؤ P کا ابعادی ضابطہ $[ML^{-1}T^{-2}]$ ہے۔

11 physics 1. nature of physical
Tuesday, February 01, 2022 8:58:10 PM

$$P_1\left[M_1^{\,a}L_1^{\,b}T_1^{\,c}\right]=P_2\left[M_2^{\,a}L_2^{\,b}T_2^{\,c}\right]$$

ہمارے پاس ہے

$$P_2=P_1\left[\frac{M_1}{M_2}\right]^a\left[\frac{L_1}{L_2}\right]^b\left[\frac{T_1}{T_2}\right]^c$$

$M_1 = 1g,\ M_2 = 1kg$

$L_1 = 1\ cm,\ L_2 = 1m$

$T_1 = 1\ s,\ T_2 = 1s$

چونکہ

$a = 1,\ b = -1,\ \text{and}\ c = -2$

تو

$$P_2 = 76\times13.6\times980\left[\frac{1g}{1kg}\right]^1\left[\frac{1cm}{1m}\right]^{-1}\left[\frac{1s}{1s}\right]^{-2}$$

$$=76\times13.6\times980\left[\frac{10^{-3}kg}{1kg}\right]^1\left[\frac{10^{-2}m}{1m}\right]^{-1}\left[\frac{1s}{1s}\right]^{-2}$$

$$= 76\times13.6\times980\times[10^{-3}]\times10^2$$

$$P_2 = 1.01\times10^5\ Nm^{-2}$$

مثال 1.13

اگر SI نظام اکائی میں کائناتی جاذبی مستقلہ کی قیمت

$6.6\text{x}10^{-11}\ Nm^2\ kg^{-2}$

ہوتو CGS نظام اکائی میں اس کی قیمت معلوم کیجئے۔

حل :

فرض کیجئے کہ SI نظام میں جاذبی مستقلہ G_{SI} ہے اور CGS نظام میں G_{cgs} ہے تو پھر

$$G_{SI} = 6.6\times10^{-11}Nm^2kg^{-2}$$

$G_{cgs} = ?$

$$n_2 = n_1\left[\frac{M_1}{M_2}\right]^a\left[\frac{L_1}{L_2}\right]^b\left[\frac{T_1}{T_2}\right]^c$$

$$G_{cgs} = G_{SI}\left[\frac{M_1}{M_2}\right]^a\left[\frac{L_1}{L_2}\right]^b\left[\frac{T_1}{T_2}\right]^c$$

$M_1 = 1\ kg \quad L_1 = 1m \quad T_1 = 1s$

$M_2 = 1\ g \quad L_2 = 1\ cm \quad T_2 = 1s$

G کے لئے ابعادی ضابطہ یہ ہے۔ $M^{-1}L^3T^{-2}$

$a = -1\ b = 3\ \text{and}\ c = -2$

$$G_{cgs} = 6.6\times10^{-11}\left[\frac{1kg}{1g}\right]^{-1}\left[\frac{1m}{1cm}\right]^3\left[\frac{1s}{1s}\right]^{-2}$$

$$= 6.6\times10^{-11}\left[\frac{1kg}{10^{-3}kg}\right]^{-1}\left[\frac{1m}{10^{-2}m}\right]^3\left[\frac{1s}{1s}\right]^{-2}$$

$$= 6.6\times10^{-11}\times10^{-3}\text{x}\ 10^6\times1$$

$$G_{cgs} = 6.6\times10^{-8}\ dyne\ cm^2\ g^{-2}$$

(ii) یہ جانچنے کے لئے کہ ایک دی گئی طبیعی مساوات ابعادی طور پر صحیح ہے کہ نہیں۔

آیئے ہم حرکت کی مساوات $v=u+at$ کو لیں۔

دونوں طرف ابعادی ضابطوں کا استعمال کرتے ہوئے

$$[LT^{-1}] = [LT^{-1}] + [LT^{-2}]\ [T]$$

$$[LT^{-1}] = [LT^{-1}] + [LT^{-1}]$$

(صرف یکساں ابعاد والی مقداروں کو جمع کیا جاسکتا ہے)

ہم دیکھ سکتے ہیں کہ دونوں طرف ایک جیسے ابعاد پائے جاتے ہیں۔

لہذا مساوات ابعادی طور پر صحیح ہے۔

مثال 1.14

ابعادی تجزیہ کا طریقہ استعمال کرتے ہوئے

مساوات $\frac{1}{2}mv^2 = mgh$ کی ابعادی درستگی کا جائزہ لیجئے۔

11 physics 1. nature of physical
Tuesday, February 01, 2022 8:58:11 PM

حل:

$\frac{1}{2}mv^2$ کے لئے ابعادی ضابطہ یہ ہے۔

$$\frac{1}{2}mv^2 = [M][LT^{-1}]^2 = [ML^2T^{-2}]$$

mgh کے لئے ابعادی ضابطہ یہ ہے۔

$$mgh = [M][LT^{-2}][L] = [ML^2T^{-2}]$$
$$[ML^2T^{-2}] = [ML^2T^{-2}]$$

دونوں طرف کے حصے ابعادی طور پر یکساں ہیں۔

لہذا مساوات $\frac{1}{2}mv^2 = mgh$ ابعادی طور پر درست ہے۔

(iii) مختلف طبیعی مقداروں کے درمیان تعلق قائم کرنے کے لئے

اگر طبیعی مقدار Q ،مقداریں Q_1، Q_2، Q_3 پر منحصر ہوتی ہے یعنی Q_1، Q_2، Q_3 کے تناسب میں ہے تو پھر

$$Q \propto Q_1^{\,a}\, Q_2^{\,b}\, Q_3^{\,c}$$
$$Q = k\, Q_1^{\,a}\, Q_2^{\,b}\, Q_3^{\,c}$$

جہاں K ایک غیر ابعادی مستقلہ ہے، جب Q_1، Q_2، Q_3 کے ابعادی ضابطے حل کئے جاتے ہیں تو یکسانیت کے اصول کے لحاظ سے L،M اور T کی قوتوں کو مساوات کے دونوں طرف مساوی بنایا جاتا ہے۔اس طرح سے ہم a،b،c کی قیمتیں حاصل کرتے ہیں۔

مثال 1.15

ایک سادہ رقاص کے وقفۂ دوران T کے لئے مساوات اخذ کیجئے۔وقفہ دوران T (i) لٹکن (bob) کی کمیت 'm' (ii) رقاص کی لمبائی 'l' اور اس مقام کی قوت جاذبہ ' g ' کی وجہ سے پیدا ہونے والا اسراع جہاں وہ رقاص لٹکایا گیا ہے، ان تینوں پر منحصر ہوتا ہے۔
(مستقلہ $K = 2\pi$)

حل:

$$T \propto m^a l^b g^c$$
$$T = km^a l^b g^c$$

یہاں K بے ابعاد مستقلہ ہے۔اوپر کی مساوات کو ابعاد کے ساتھ دوبارہ لکھتے ہوئے

$$[T^1] = [M^a]\,[L^b]\,[LT^{-2}]^c$$
$$[M^0L^0T^1] = [M^a\, L^{b+c}\, T^{-2c}]$$

دونوں طرف L،M اور T کی قوتوں کا موازنہ کرتے ہوئے

$a=0,\ b+c=0,\ -2c=1$

a اور b , c کو حل کرنے سے $a=0$ ، $b = ½$ اور $c = -½$

اوپر کی مساوات کی مدد سے $T = k.\ m^0\, \ell^{1/2}\, g^{-1/2}$

$$T = k\left(\frac{\ell}{g}\right)^{1/2} = k\sqrt{\ell/g}$$

لہذا $k = 2\pi$, تجرباتی طور پر $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$

ابعادی تجزیہ کی خامیاں:

Limitations of Dimensional analysis

(1) یہ طریقہ $1, 2, \ldots\ldots\pi,$ e (Euler کا عدد) وغیرہ جیسے بے ابعاد مستقلوں کے بارے میں کوئی معلومات فراہم نہیں کرتا۔

(2) یہ طریقہ یہ متعین نہیں کرسکتا ہے کہ دی گئی مقدار سمتی ہے یا قدری ہے۔

(3) یہ طریقہ مثلثاتی، پھیلاؤ (exponential) اور لوگارتھمی تفاعل کے لئے موزوں نہیں ہے۔

(4) اسے تین سے زیادہ طبیعی مقداریں رکھنے والی ایک مساوات میں استعمال نہیں کیا جاسکتا۔

(5) یہ طریقہ صرف یہ جان سکتا ہے کہ دی گئی طبیعی، مساوات ابعادی طور پر صحیح ہے یا نہیں مگر، اس سے یہ نہیں جانا جاسکتا ہے کہ وہ مساوات پورے طور سے درست ہے یا نہیں۔

مثال کے طور پر، ابعادی تجزیہ کے ذریعہ $s = ut + \frac{1}{3}at^2$ کی مساوات بھی ابعادی طور پر درست ہی معلوم ہوتی ہے جب کہ اصل مساوات کچھ اس طرح ہے $s = ut + \frac{1}{2}at^2$

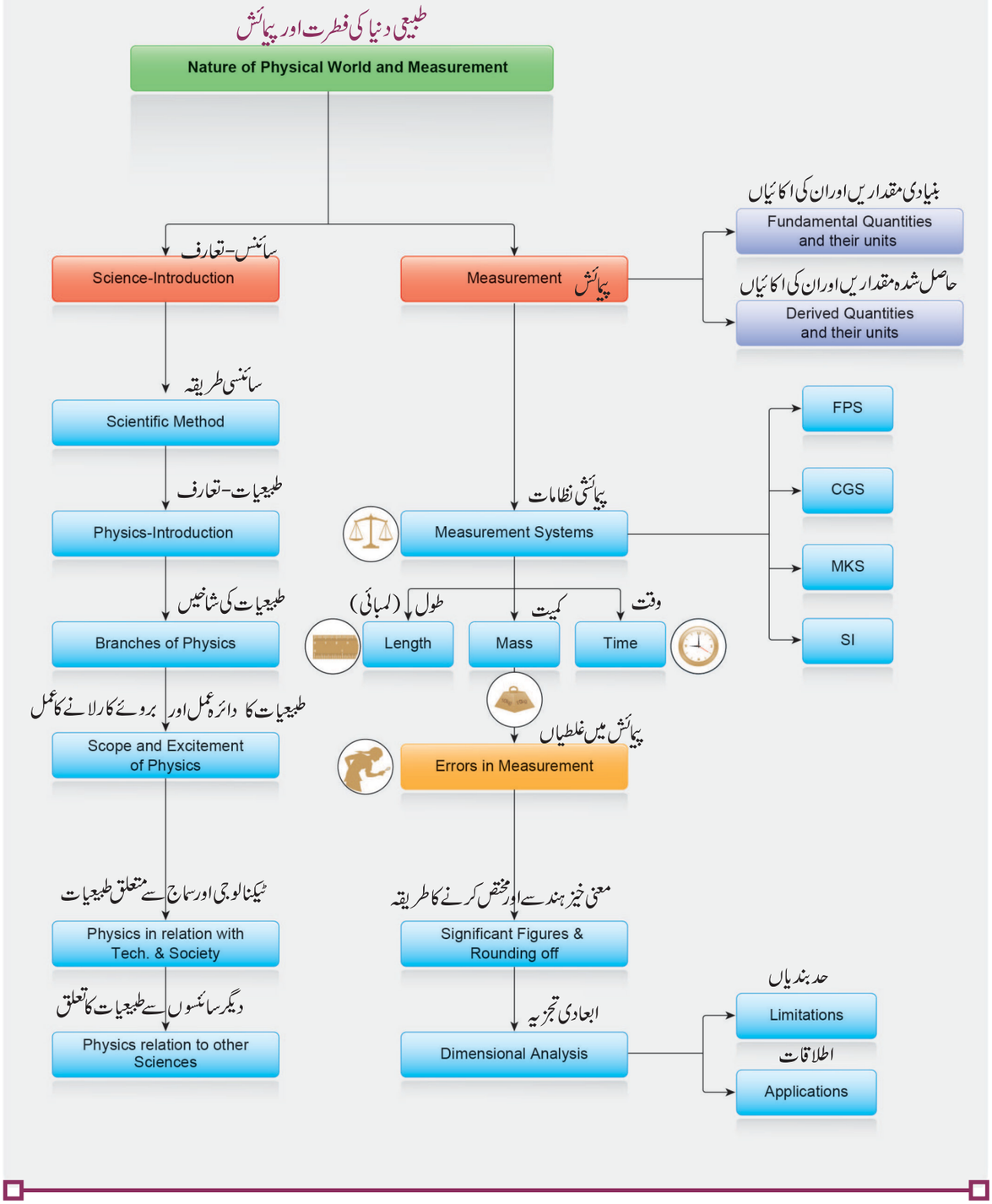
11 physics 1. nature of physical
Tuesday, February 01, 2022 8:58:11 PM

SUMMARY خلاصہ

- طبیعیات ایک تجرباتی سائنس ہے جس میں کی جانے والی پیمائش اکائیوں میں ظاہر کی جاتی ہیں۔
- تمام طبیعی مقداروں کی ایک قدر (جسامت) اور ایک اکائی ہوتی ہے۔
- طول، کمیت، وقت، تپش، برقی رو، شئے کی مقدار اور روشنی کی حدت رشدت کی SI اکائی بالترتیب میٹر، کلوگرام، سکنڈ، کیلون، ایمپیر، مول اور کینڈیلا ہے۔
- ان بنیادی اکائیوں کے لحاظ سے تمام میکانیکی، برقی مقناطیسی اور حرارتی مقداروں کی اکائیاں اخذ کی جاتی ہیں۔
- چھوٹی لمبائیوں کے معاملات میں خردہ پیما اور ورنیر پیما کے طریقے استعمال کئے جاتے ہیں۔
- طویل فاصلوں کے معاملے میں لمبائی کی پیمائش کے لئے اختلاف منظر Parallax یا RADAR کے طریقے استعمال کئے جاتے ہیں۔
- کسی پیمائش میں موجود کمی پیشی غلطی (error) کہلاتی ہے۔ ایک پیمائش کی درستگی، اس بات کی پیمائش ہے کہ پیمائشی کی گئی قیمت، مقدار کی اصل قیمت سے کتنی قربت رکھتی ہے۔ ہر درست پیمائش باقاعدہ ہوتی ہے مگر ہر باقاعدہ پیمائش کا درست پایا جانا ضروری نہیں ہے۔
- جب دو یا دو سے زیادہ مقداریں جمع یا تفریق کی جاتی ہیں تو، حاصل شدہ نتیجہ کی باقاعدگی انفرادی مقداروں کی کم ترین قاعدگی کے لحاظ سے ہوگی۔ جب مقداریں ضرب یا تقسیم کی جاتی ہیں تو حاصل شدہ نتیجہ میں اتنے ہی معنی خیز ہندسے ہوتے ہیں جتنے کہ انفرادی مقدار کے کم ترین معنی خیز ہندسے ہوں۔
- ابعادی تجزیہ، مساوات کی پائیداری کی تیز جائزہ کے لئے استعمال ہوتا ہے۔ جب بھی مقداریں جمع، تفریق یا موازنہ کئے جائیں تو ان میں مساوی ابعاد کا پایا جانا ضروری ہے۔ ابعادی لحاظ سے درست مساوات بھی ایک صحیح مساوات نہ بھی ہوسکتی ہے مگر ہر درست مساوات کبھی ایک صحیح مساوات نہیں بھی ہوسکتی ہے مگر ہر صحیح مساوات کا ابعادی لحاظ سے صحیح ہونا ضروری ہے۔

11 physics 1. nature of physical
Tuesday, February 01, 2022 8:58:11 PM

CONCEPT MAP نظریاتی نقشہ



11 physics 1. nature of physical
Tuesday, February 01, 2022 8:58:12 PM

I۔ کثیر انتخابی سوالات:

(1) بنیادی طبیعی مستقلات میں کا ایک جزو $\frac{hc}{G}$ سے ہے۔ اس جزو کی اکائی ہے۔

a) kg^2 b) m^3
c) s^{-1} d) m

(2) اگر نصف قطر کی پیمائش میں 2% غلطی ہو تو پھر کرہ کے حجم کے تعین کرنے میں غلطی کی مقدار ہوگی۔

a) 8% b) 2%
c) 4% d) 6%

(3) اگر ایک اہتزاز کرنے والے رقاص کے وقفۂ دوران اور لمبائی میں بالترتیب 1% اور 3% غلطیاں ہوں تو پھر اسراع بوجہ جاذبہ کی پیمائش میں غلطی کی مقدار یہ ہوگی۔[AMPMT 2008 سے متعلق]

a) 4%
b) 5%
c) 6%
d) 7%

(4) ایک جسم کی پیمائش کی گئی لمبائی 3.51m ہے، اگر درستگی 0.01m ہو تو پیمائش میں فیصدی غلطی کی مقدار یہ ہے۔

a) 351% b) 1%
c) 0.28% d) 0.035%

(5)۔ مندرجۂ ذیل اعداد میں کس میں سب سے زیادہ معنی خیز ہندسے ہیں؟

a) 0.007 m^2
b) 2.64×10^{24} kg
c) 0.0006032 m^2
d) 6.3200 J

(6) اگر $\pi = 3.14$ ہو تو π^2 کی قیمت یہ ہوگی۔

a) 9.8596 b) 9.860
c) 9.86 d) 9.937

(7) عدد 19.95 کو مختص (round off) کر کے تین معنی خیز اعداد (significant numbers) میں تبدیل کیجئے۔

a) 19.9 b) 20.0
c) 20.1 d) 19.5

(8) مندرجۂ ذیل طبیعی مقداروں کی کون سی جوڑی مساوی ابعاد رکھتی ہے؟

a) قوت اور طاقت
b) گدشہ (torque) اور توانائی
c) گدشہ (torque) اور طاقت
d) قوت اور گدشہ (torque)

(9) Planck کی مستقلہ 'h' کا ابعادی ضابطہ یہ ہے۔
[JEE Main, NEET]

a) $[ML^2T^{-1}]$ b) $[ML^2T^{-3}]$
c) $[MLT^{-1}]$ d) $[ML^3T^{-3}]$

(10) وقفہ پر ایک ذرہ کی سمتی رفتار v، $v = at + bt^2$ کی مساوات سے پیش کی جاتی ہے۔ b کے ابعاد یہ ہیں۔

a) [L] b) $[LT^{-1}]$
c) $[LT^{-2}]$ d) $[LT^{-3}]$

(11) جاذبی مستقلہ G کے لئے ابعادی ضابطہ

a) $[ML^3T^{-2}]$ b) $[M^{-1}L^3T^{-2}]$
c) $[M^{-1}L^{-3}T^{-2}]$ d) $[ML^{-3}T^2]$

Untitled-1
Tuesday, June 28, 2022 4:34:03 PM

(12) اکائیوں کے CGS نظام میں ایک شئے کی کثافت $4\ gcm^{-3}$ ہے۔ اکائیوں کے اس نظام میں جس میں لمبائی کی اکائی 10 سم اور کمیت کی اکائی 100 گرام ہے۔ اس شئے کی کثافت کی قیمت یہ ہوگی۔

a) 0.04 b) 0.4
c) 40 d) 400

(13) اگر قوت، مربع سمتی رفتار کے تناسب میں ہو تو پھر تناسبی مستقلہ کے ابعاد [JEE-2000]

a) $[MLT^0]$ b) $[MLT^{-1}]$
c) $[ML^{-2}T]$ d) $[ML^{-1}T^0]$

(14) $\left(\mu_0\varepsilon_0\right)^{-\frac{1}{2}}$ کا بُعد (dimension) یہ ہے۔
[Main AIPMT 2011]

(a) لمبائی (b) وقت
(c) سمتی رفتار (d) قوت

(15) Planck کا مستقلہ (h) خلاء میں روشنی کی رفتار (c) اور نیوٹن کے جاذبی مستقلہ (G) کو تین بنیادی مستقلات کے طور پر لیا جاتا ہے۔ مندرجۂ ذیل کس مجموعے میں لمبائی کے ابعاد پائے جاتے ہیں؟
[NEET 2016(Phase II)]

(a) $\frac{\sqrt{hG}}{c^{\frac{3}{2}}}$ (b) $\frac{\sqrt{hG}}{c^{\frac{5}{2}}}$

(c) $\sqrt{\frac{hc}{G}}$ (d) $\sqrt{\frac{Gc}{h^{\frac{3}{2}}}}$

II۔ مختصر جوابات لکھئے۔

1۔ طبیعی مقداروں کے اقسام کی مختصر وضاحت کیجئے۔

2۔ اختلاف منظر Parallax طریقے کی مدد سے چاند کے قطر کی پیمائش آپ کس طرح کروگے؟

3۔ معنی خیز ہندسوں (significant figures) کے تعین کرنے کے قوانین تحریر کیجئے۔

4۔ ابعادی تجزیہ (dimensional analysis) کی خامیاں کیا ہیں؟

5۔ باقاعدگی اور درستگی (accuracy and precision) کی تعریف کیجئے۔ ایک مثال کے ساتھ واضح کیجئے۔

III۔ تفصیلی جوابات لکھئے:

1۔ (i) چھوٹے فاصلوں کی پیمائش میں خردہ پیما اور ورنیر پیما کے استعمال کی وضاحت کیجئے۔

(ii) طویل فاصلوں کی پیمائش کے لئے مثلثی طریقہ اور ریڈار طریقے پر ایک نوٹ لکھئے۔

2۔ غلطیوں کے مختلف اقسام کی تفصیلی وضاحت کیجئے۔

3۔ غلطیوں کے پھیلاؤ (propogation of errors) سے آپ کی کیا مراد ہے؟
جمع اور ضرب میں غلطیوں کے پھیلاؤ کی وضاحت کیجئے۔

4۔ مندرجۂ ذیل پر مختصر نوٹس لکھئے۔

(a) اکائی (Unit)

(b) مختص کرنا (Rounding off)

(c) بے ابعاد مقداریں (Dimensionless quantities)

5۔ ابعاد کی یکسانیت کے اصول کی وضاحت کیجئے۔ اس کے کیا استعمالات ہیں؟ مثال پیش کیجئے۔

جوابات:

Answers:

1) a	2) d	3) d	4) c
5) d	6) c	7) b	8) b
9) a	10) d	11) b	12) c
13) d	14) c	15) a	

Untitled-1
Tuesday, June 28, 2022 4:34:03 PM

IV۔حسابی مسئلے:

(1) سونار (SONAR) سے لیس ایک آب دوز جہاز میں Pulse کے پیدا ہونے اور دشمن کے آب دوز پر سے اس کی گونج حاصل ہونے کے درمیان دیکھا گیا وقفہ 80s ہے۔اگر پانی میں آواز کی رفتار $1460\ ms^{-1}$ ہے تو دشمن کے آب دوز جہاز کا فاصلہ کتنا ہوگا؟
(جواب 58.40 km)

(2) دائرے کا نصف قطر 3.12 m ہے۔معنی خیز ہندسے (Significant figures) کے لحاظ سے دائرہ کا رقبہ محسوب کیجئے۔
(جواب:30.6 مربع میٹر)

(3) اگر ہم یہ تصور کریں کہ مرتعش شدہ تار کے تعدد γ کا انحصار
(i) پہنچائی گئی قوت (F) (ii) لمبائی (l)
(iii) کمیت فی اکائی لمبائی (m)
پر ہے تو پھر ابعادی تجزیہ کی مدد سے ثابت کیجئے کہ $\gamma \propto \frac{1}{l}\sqrt{\frac{F}{m}}$

(related to JIPMER 2001)

(4) زمین سے مشتری 824.7 ملین کلومیٹر فاصلے پر ہے۔ اس کے زاویائی قطر کی پیمائش تقریباً "35.72 ہے۔مشتری کا قطر معلوم کیجئے۔
جواب Ans: $(1.428 \times 10^5\ km)$

(5) ایک سادہ رقاص کی لمبائی کی گئی، پیمائش کی قیمت 2 ملی میٹر کی درستگی کے ساتھ 20 سم ہے۔50 اہتزازات کے لئے پیمائش کی گئی قیمت 1 سکنڈ کی کمی بیشی کے ساتھ 40 سکنڈ ہے۔اوپر کی پیمائش کی مدد سے اسراع بوجہ جاذبہ ' g ' کے تعین کرنے میں فیصدی درستگی معلوم کیجئے۔ (جواب:% 6)

BOOKS FOR REFERENCE :کتب حوالہ

1. Karen Cummings, Priscilla Laws, Edward Redish, Patrick Cooney, Understanding Physics, Wiley India Pvt LTd, 2nd Edition 2007.
2. Sears and Zemansky's, College Physics, Pearson Educatoin Ltd,10th Edition, 2016.
3. Halliday. D and Resnick.R, Physics. Part-I, Wiley Easter, New Delhi
4. Sanjay Moreshwar Wagh and Dilip Abasaheb Deshpande, Essentials of Physics Volume I, PHI learning Pvt Ltd, New Delhi. 2013.
5. James S. Walker , Physics, Addison-Wesley Publishers, 4th Edition

11 physics 1. nature of physical
Tuesday, February 01, 2022 8:58:13 PM

ICT CORNER

Screw Gauge and Vernier Caliper خردہ پیما اور ورنیر پیما

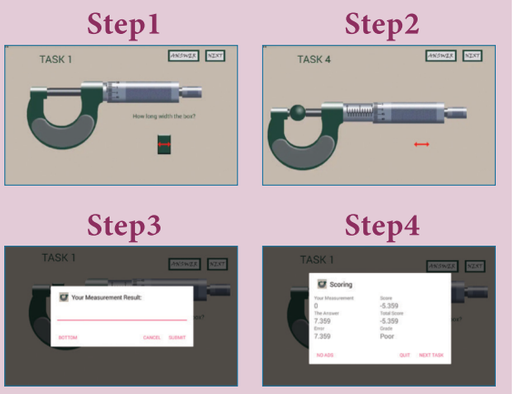
خوشی خوشی پیمائش کیجئے۔

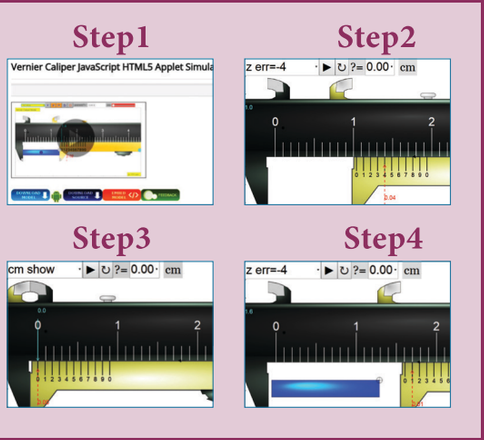
مرحلے:

- نیچے بتائے گئے لنک یا QR کوڈ کی مدد سے اپلی کیشن کا استعمال کیجئے
- دی گئی شئے کا قطر/موٹائی کی پیمائش کرنے کے لئے شئے کو پیچ اور کمانی کے درمیان رکھئے جیسا کہ اسے رکھنا چاہئے پیچ کو درست کر کے شئے کو ٹھیک طریقے سے رکھ سکتے ہیں۔
- جوابی بٹن کو دبا کر T۔اپنی پیمائش کا نتیجہ دیکھ سکتے ہیں۔اس میں آپ اپنی پیمائش کی گئی قیمت بھرتی کیجئے اور Submit کا بٹن دبائیے۔اس طریقے سے آپ جانچ سکتے ہیں کہ آپ کی پیمائش درست ہے یا نہیں۔
- Next کا بٹن دبا کر آپ مختلف اشیاء کا قطر معلوم کر سکتے ہیں۔

مرحلے:

- ورنیر پیما کے مجازی صفحے پر پہنچنے کے لئے نیچے دئے گئے URL کا استعمال کیجئے۔ Play کا بٹن دبا کر کاروائی کے صفحے پر پہنچئے۔
- اکائی کا انتخاب کیجئے اور اسکیل کے اوپر کے drop down کی مدد سے صفری غلطی کی جانچ پڑتال کیجئے
- ثانوی اسکیل پر کلک کیجئے اور اسے ڈریگ کرتے ہوئے نیلے رنگ کی شئے کوان کے درمیان رکھئے۔اس کی پیمائش کیجئے اور اسکیل کے اوپر موجود جواب کے خانے میں پیمائش درج کیجئے
- شئے کی جسامت کو نیلی شئے کے کنارے پر کلک کرتے ہوئے ڈریگ کر کے تبدیل کیجئے اور ورنیر پیما کی مدد سے اس کی پیمائش کی مشق کیجئے۔





Screw Gauge stimulation URL: خردہ پیما کے عملی صفحے کا URL

https://play.google.com/store/apps/details?id=com.priantos.screwgaugegames&hl=en

Vernier caliper stimulation URL: ورنیر کے عملی صفحے کا URL

http://iwant2study.org/ospsg/index.php/interactive-resources/physics/01-measurements/5-vernier-caliper#faqnoanchor

* Pictures are indicative only.

* If browser requires, allow **Flash Player** or **Java Script** to load the page.

11 physics 1. nature of physical
Tuesday, February 01, 2022 8:58:14 PM

اکائی
2

حرکیات KINEMATICS

All the laws of nature are written in the language of mathematics– Galileo

سیکھنے کے مقاصد:

اس سبق میں طلباء ان باتوں کو سمجھ سکیں گے

- حرکت کی مختلف قسمیں (خطی، گردشی اور اہتزازی)
- اشیاء کی حرکت کی وضاحت کرنے کے لئے حوالاتی فریم کی ضرورت
- سمتئے، قدرئے کے معنی اور ان کی خصوصیات
- طبیعیات میں سمتی اور قدری ماحصل کا کردار
- تفرق (differentiation) اور مربوطیت یا احصاء (integration) سے متعلق بنیادی باتیں۔
- ہٹاؤ اور فاصلہ کی علامات اور وقت کے ساتھ ان کا تغیر
- رفتار، سمتی رفتار اور اسراع کی علامات اور ان کی ترسیمات
- نسبتی سمتی رفتار کی علامت
- مستقل اسراع کے لئے حرکت کی حرکیاتی مساوات
- قوت کشش کے تحت اشیاء کی حرکت کے مختلف اقسام کا تجزیہ
- ریڈین (Radians) اور درجے (degreees)
- یکساں دائری حرکت، مرکز جو اسراع اور مرکز جو قوت

2.1 تعارف

طبیعیات، بنیادی طور پر یہ ایک تجرباتی سائنس ہے اور وہ دو ستونوں پر ٹھہری ہوتی ہے، تجربات اور ریاضیات دو ہزار تین سو سال پہلے ہی سے یونانی لائبریرین Eratosthene نے زمین کے نصف قطر کی پیائش کر چکا تھا، جب کہ بہت لمبے عرصے کے بعد ہی یعنی بیسویں صدی کے شروعات ہی میں جوہر کی جسامت معلوم کی گئی۔ حرکت، طبیعیات میں مرکزی پہلو رکھتی ہے۔ خوردبینی سطح (جوہروں کے اندر) سے لے کر عیاں بینی اور کہکشائی سطح (سیاروں کے نظام اور اس سے زیادہ) تک تمام سطحوں پر حرکت پائی جاتی ہے۔ مختصراً، ساری کائنات مختلف قسم کی حرکات سے کارفرما ہے۔ حرکت کی مختلف قسموں کا مطالعہ ریاضیات کی زبان کی مدد سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

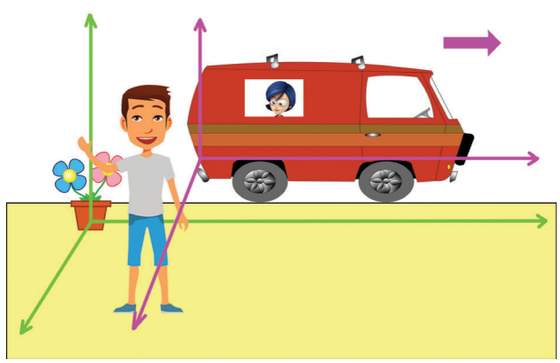
اشیاء کیسے حرکت کرتی ہیں؟ وہ کتنی تیزی سے یا آہستگی سے حرکت کرتی ہیں؟ مثال کے طور پر جب ایک دوڑ کے مقابلے میں دس کھلاڑی دوڑتے ہیں تو ان میں سے ہر کھلاڑی ایک ہی انداز سے دوڑ نہیں لگاتے۔ ان کی کارفرمائی کے معیار کو تیز ترین، تیز تر، اوسط، سست، سست ترین جیسے الفاظ سے درج نہیں کیا جاسکتا۔ اس کی مقدار بتانا ضروری ہے۔ مقدار بتانے کا مطلب ہر کھلاڑی کو اس کے حرکت کے لحاظ سے جوڑنا ہے۔ ان اعداد کا موازنہ کرنے سے کوئی بھی یہ جائزہ لے سکتا ہے کہ کس کے مقابلے میں کون کس طرح دوڑ لگاتا ہے۔ اس اکائی میں سمت اور قدر کے لحاظ سے حرکت کا جائزہ لینے کے لئے درکار ریاضیات کا احاطہ کیا گیا ہے۔

11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:22 PM

حرکیات، میکانیات کی ایک شاخ ہے جو قوت کا لحاظ کئے بغیر اشیاء کی حرکت پر بحث کرتی ہے۔ لفظ Kinematics یونانی زبان کے لفظ "Kinema" سے بنایا گیا ہے جس کا مطلب حرکت ہے۔

2.2 حالت سکون اور حرکت کا مفہوم:
(Concept of rest and motion)

مندرجۂ ذیل صراحت (خاکہ 2.1) کے ذریعہ حالت سکون اور حرکت کے تصور کو بخوبی سمجھا جاتا ہے۔ حرکت کرنے والی ایک بس میں بیٹھا ہوا ایک شخص اس کے ساتھ سفر کرنے والوں کے لحاظ سے حالت سکون میں ہوتا ہے۔ اگر بس کے باہر والے شخص کے لحاظ سے وہ حالت حرکت میں ہوتا ہے، حالت سکون اور حالت حرکت کا تصور، حوالاتی سانچے کے لحاظ ہی سے معنی خیز ہوتا ہے۔ لہذا حالت سکون اور حرکت کو سمجھنے کے لئے ہمیں ایک مناسب مقررہ حوالاتی سانچہ کی ضرورت ہے۔

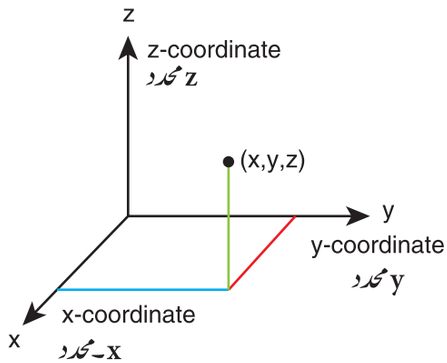


خاکہ 2.1۔ حوالاتی سانچہ یا فریم

حوالاتی سانچہ (Frame of Reference)

اگر ہم کسی ہم محدد کے نظام کا تصور کریں اور اس کی مناسبت سے شئے کے مقام کی وضاحت کی جائے تو ایسا ہم محددی نظام (Coordinate system) حوالاتی سانچہ کہلاتا ہے۔

وقت کے کسی بھی دئے گئے وقفے میں، مقامی محددات (x,y,z) (یعنی x، y اور z محورات کے تحت ایک شئے کے دئے گئے مقام کے فاصلے) کی بنیاد پر جس حوالاتی سانچہ کے لحاظ سے شئے کے مقام کی وضاحت کی جاتی ہے۔ کارتیسی ہم محدد نظام کہلاتا ہے۔ جیسا کہ خاکہ 2.2 میں دکھایا گیا ہے۔

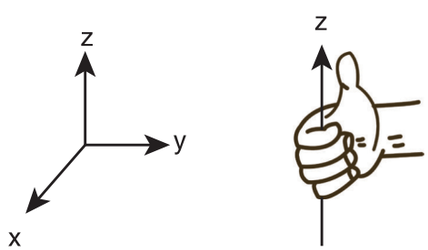


خاکہ 2.2۔ کارتیسی ہم محدد نظام

یہ غور کرنے کی بات ہے کہ اگر x,y اور z محورات غیر ساعتی سمت میں کھینچے جائیں تو ایسا ہم محدد نظام دائیں ہاتھ والا کارتیسی ہم محددی نظام کہلاتا ہے جیسا کہ خاکہ 2.3 میں بتایا گیا ہے۔

دائیں ہاتھ کا محددی نظام:
(Right handed coordinate system)

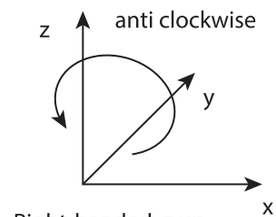
اپنی انگلیوں کو مثبت x محور کی سمت میں رکھئے اور انہیں y محور کی سمت کی طرف گھمایئے۔ آپ کا انگوٹھا z محور کی سمت کی طرف رخ کرے گا۔



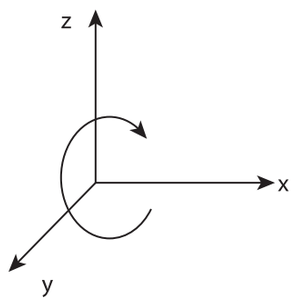
خاکہ 2.3 دائیں ہاتھ کا محددی نظام

مندرجۂ ذیل خاکہ 2.4 دائیں اور بائیں ہاتھ کے محددی نظامات کے درمیانی فرق کی وضاحت کرتا ہے۔

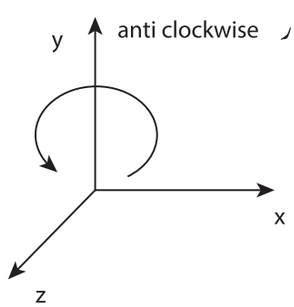
11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:23 PM



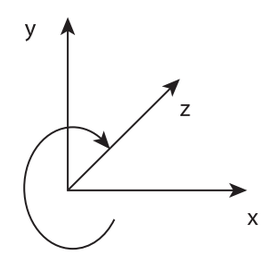
Right-handed, z up
دائیں ہاتھ والا z اوپر



Left-handed, z up
بائیں ہاتھ والا z اوپر



Right-handed, y up
دائیں ہاتھ والا y اوپر



Left-handed, y up
بائیں ہاتھ والا y اوپر

خاکہ 2.4 دائیں اور بائیں ہاتھ والے محددی نظامات

نقطوی کمیت: (Point mass)

متعین کمیت رکھنے والی ایک شئے کی حرکت کو واضح کرنے کے لئے نقطوی کمیت کے تصور کی ضرورت پڑتی ہے اور وہ بہت مفید ہے۔ آیئے ہم یہ تصور کریں کہ کسی شئے کی کمیت ایک نقطہ پر مرکوز ہوتی ہے تو پھر یہی تصوری کمیت نقطوی کمیت کہلاتی ہے۔اس کی کوئی اندرونی ساخت جیسے شکل اور جسامت نہیں ہوتی۔ ریاضیاتی طور پر نقطوی کمیت، صفری ابعاد کے ساتھ متعین کمیت رکھتی ہے۔ حالانکہ حقیقت میں نقطوی کمیت کا وجود تو نہیں ہے مگر اس تصور کے ذریعہ حسابی مسئلے بآسانی حل کر لئے جاتے ہیں۔ یہ غور کرنے کی بات ہے کہ اصطلاح ''نقطوی کمیت'' ایک نسبتی اصطلاح ہے۔ یہ حوالاتی سانچے کے لحاظ اور ہم جس حرکت کی جانچ کرتے ہیں۔اس کے لحاظ سے معنی خیز بنتی ہے۔

مثالیں:

- سورج کے لحاظ سے زمین کی حرکت کا جائزہ لینے کے لئے زمین کو ایک نقطوی کمیت کی طرح برتاؤ کرنا چاہئے۔ یہ اس لئے کہ زمین کی جسامت کے مقابلے میں سورج اور زمین کا درمیانی فاصلہ بہت بڑا ہے۔
- اگر ہم ایک چھوٹا سا پتھر یا اس جیسی کوئی چیز کو ہوا میں پھینکتے ہیں تو اس کی حرکت کا جائزہ لینے کے لئے اس کو ایک نقطوی کمیت کی طرح تصور کر لیں اس لئے کہ وہ خلاء میں حرکت کر رہا ہے۔اس پتھر کی جسامت اس سے کئے جانے والے سفر کے فاصلے کے مقابلے میں بہت چھوٹی ہوتی ہے۔

حرکت کے اقسام:

ہماری روزمرہ زندگی میں حرکت کے مندرجۂ ذیل اقسام دیکھے جاتے ہیں۔

(a) خطی حرکت: (Linear motion)

کوئی شئے اگر ایک سیدھے راستے پر حرکت کرتی ہے تو کہا جائے گا کہ وہ خطی حرکت میں ہے۔

مثالیں:

- ایک سیدھے ٹریک پر دوڑنے والا کھلاڑی
- زمین پر اوپر سے نیچے کی طرف عمودی طور پر گرنے والا کوئی ذرہ

(b) دائری حرکت: (Cirular motion)

کسی دائری راستے پر ایک شئے کی حرکت دائری حرکت کہلاتی ہے۔

مثالیں:

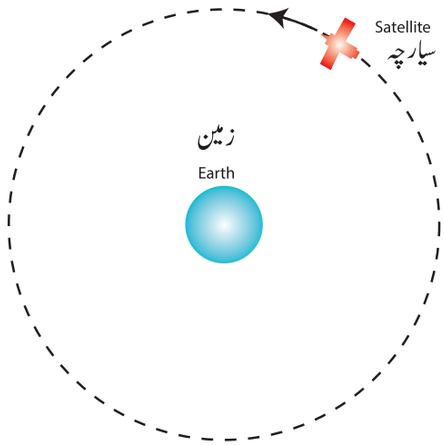
- دھاگے سے باندھ کر گھمائے جانے والے پتھر کی حرکت

11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:23 PM

- زمین کے اطراف ایک سیارچے کی حرکت

ان دونوں دائری حرکتوں کو خاکہ 2.5 میں بتایا گیا ہے۔





خاکہ 2.5۔ دائری حرکت کی مثالیں

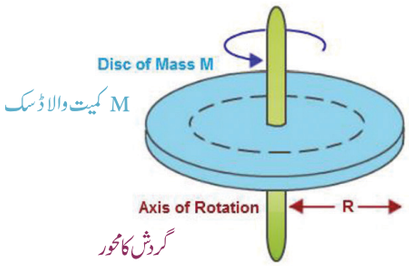
(c) گردشی حرکت: (Rotational Motion)

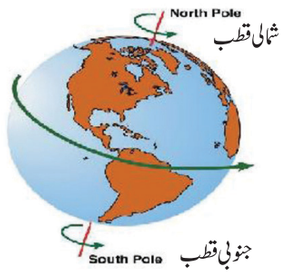
اگر کوئی شئے کسی محور کے تحت گردشی حرکت کرتی ہے تو وہ حرکت ''گردش'' (rotation) کہلاتی ہے۔ گردش کے دوران شئے میں موجود ہر نقطہ (سوائے ان نقاط کے جو محور پر موجود ہوں) اس محور کے تحت ایک دائری راستہ قائم کرتا ہے۔

مثالیں:

- کسی ڈیسک کے مرکز کے ذریعہ گزرنے والے محور کے تحت اس ڈسک کی گردش
- اپنے محور کے تحت زمین کی گردش

ان دو گردشی حرکتوں کو خاکہ 2.6 میں بتایا گیا ہے۔





خاکہ 2.6 گردشی حرکت کی مثالیں

(d) ارتعاشی حرکت: (Vibratory Motion)

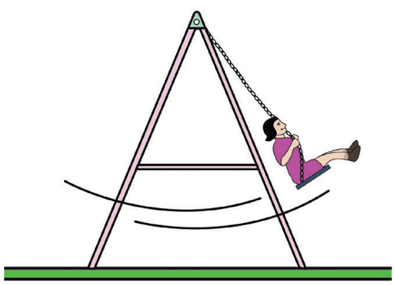
اگر کوئی شئے یا ذرہ کسی مقررہ نقطہ کے تحت آگے اور پیچھے کی حرکت کرتے رہتی ہے تو کہا جائے گا کہ وہ ارتعاشی حرکت میں ہے۔ اسے اہتزازی حرکت (Oscillatory motion) بھی کہا جاتا ہے۔

مثالیں:

- ایک گٹار پر تار کے ارتعاشات
- ایک جھولے کی حرکت

ان حرکتوں کو خاکہ 2.7 میں ظاہر کیا گیا ہے۔





خاکہ 2.7۔ ارتعاشی حرکت کی مثالیں

11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:24 PM

بیضوی اور مرغولہ نما حرکتیں بھی حرکت کی دیگر ممکنہ اقسام ہیں

ایک، دو اور تین ابعاد میں حرکت:
(Motion in one, two and three dimensions)

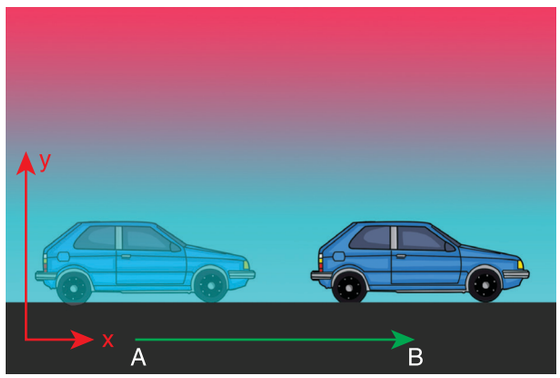
فرض کیجئے کہ خلاء میں کسی ذرہ کے مقام کو x,y اور z نامی مستطیلی محددات (Co-ordinates) کے لحاظ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ جب یہ محددات وقت کے ساتھ ساتھ تبدیل ہوتے ہیں تو کہا جائے گا کہ شئے حرکت کر رہی ہے۔ بہرحال یہ ضروری نہیں ہے کہ بیک وقت، وقت کے ساتھ تینوں محددات تبدیل ہوں اگر وقت کے ساتھ کوئی ایک یا دو محدد بھی اگر تبدیل ہو جائے تو کہا جائے گا کہ وہ ذرہ حالت حرکت ہی میں ہے، پھر ہمیں مندرجۂ ذیل درجہ بندی حاصل ہوتی ہے۔

(i) ایک بعد میں حرکت (یا) ایک بعدی حرکت

ایک سیدھی خط کے تحت کسی ذرہ کی حرکت یک بعدی حرکت کہلاتی ہے۔

یہ حرکت کبھی خط مستقیمی حرکت یا خطی حرکت بھی کہلاتی ہے۔ اس حرکت میں شئے کے مقام کو ظاہر کرنے والا تین مستطیلی محددات میں سے صرف ایک محدد ہی وقت کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے۔

مثال کے طور پر اگر ایک کار x سمت میں مقام A سے مقام B تک حرکت کرتی ہے جیسا کہ خاکہ 2.8 میں بتایا گیا ہے تو پھر صرف X محدد ہی میں تغیر دیکھا جا سکتا ہے۔



خاکہ 2.8 ایک ہی بُعد کے تحت ایک جسم کی حرکت

مثالیں:

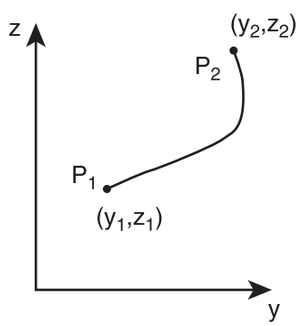
- ایک سیدھی ریلوے پٹری کے تحت ایک ریل گاڑی کی حرکت:
- قوت کشش کے تحت زمین کے قریب سے آزادانہ طور پر گرنے والی ایک شئے۔

(ii) دو ابعاد میں حرکت:

اگر کسی سطح میں ایک ذرہ کسی دائری راستے کے تحت حرکت کرتا ہے تو ایسی حرکت دو ابعادی حرکت کہلائے گی۔

ایسی حرکت میں شئے کی حرکت کو ظاہر کرنے والے تین مستطیلی محددات میں سے دو محددات وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے ہیں۔

مثال کے طور پر جب کوئی شئے y-z سطح میں حرکت کرتی ہے تو، z تغیر نہیں پاتا جب کہ y اور x تغیر پاتے ہیں جیسا کہ خاکہ 2.9 میں بتایا گیا ہے۔



خاکہ 2.9۔ دو ابعاد کے تحت ایک ذرہ کی حرکت

مثالیں:

- ایک کیرم بورڈ پر کسی کائن کی حرکت
- کسی کمرے کی سطح پر رینگنے والے کیڑے کی حرکت

(iii) تین ابعاد میں حرکت:

عام سہ ابعادی خلاء میں حرکت کرنے والے جسم میں سہ ابعادی حرکت پائی جاتی ہے۔

اس حرکت میں شئے کے مقام کو ظاہر کرنے والے تینوں محددات وقت کے لحاظ سے تبدیل ہوتے ہیں۔ جب کوئی شئے سہ ابعادی حرکت کرتی ہے تو x، y اور z تینوں محددات تغیر پاتے ہیں۔

11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:25 PM

مثالیں:

- آسمان میں اڑنے والا ایک پرندہ
- گیس کے ایک سالمہ کی بے ترتیب حرکت
- ہوا چلتے وقت کسی پتنگ کی اڑان

2.3 سمتی الجبرا کے بنیادی تصورات:
(Elementary concepts of vector algebra)

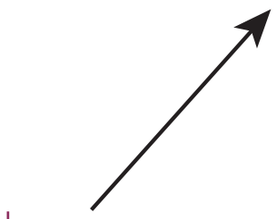
طبیعیات میں چند مقداریں صرف قدر رکھتے ہیں، جب کہ چند مقداریں قدر اور سمت دونوں رکھتے ہیں۔ ان طبیعی مقدروں کو سمجھنے کے لئے سمتیوں اور قدریوں (Vectors and Scalars) کو جاننا بہت ضروری ہے۔

قدریہ (Scalar):

یہ ایک خصوصیت ہے جس کی وضاحت صرف قدر کے ذریعہ کی جاسکتی ہے۔ طبیعیات میں بہت سی مقداریں قدریوں سے واضح کی جاسکتی ہیں۔ مثالیں: فاصلہ، کمیت، تپش، رفتار اور توانائی۔

سمتیہ (Vector):

یہ ایک خصوصیت ہے جس کی وضاحت قدر اور سمت دونوں سے کی جاتی ہے۔ ہندسی طور پر سمتیہ ایک نشان کردہ خطی ٹکڑا ہے، جیسا کہ خاکہ 2.10 میں بتایا گیا ہے۔ طبیعیات میں چند مقداریں ہیں جو صرف سمتیوں کے ذریعہ واضح کی جاسکتی ہیں۔



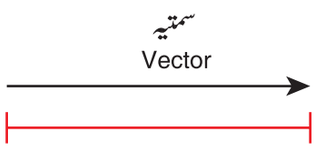
خاکہ 2.10 ایک سمتیہ کی ہندسی نمائندگی

مثالیں:

قوت، سمتی رفتار، ہٹاؤ، مقامی سمتیہ، اسراع، خطی معیار حرکت اور زاویائی معیار حرکت۔

2.3.1 ایک سمتیہ کی قدر
(Magnitude of a vector)

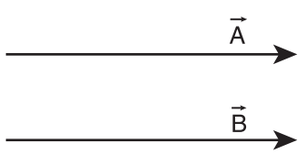
سمتیہ کی لمبائی۔ سمتیہ کی قدر کہلاتی ہے۔ وہ ہمیشہ ایک مثبت مقدار ہوتی ہے۔ کبھی کبھی ایک سمتیہ کی قدر ''عمود'' (Norm) بھی کہلاتی ہے۔ ایک سمتیہ $|\vec{A}|$ یا صرف A سے ظاہر کی جاتی ہے۔



خاکہ 2.11 ایک سمتیہ کی قدر

2.3.2 سمتیوں کے مختلف اقسام
(Different types of Vectors)

(1) مساوی سمتیے (Equal vectors): جب سمتیے $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ کی قدر مساوی ہوتی ہے اور ان کی ایک ہی سمت ہوتی ہے اور وہ ایک ہی طبیعی مقدار کو ظاہر کرتی ہیں تو وہ دونوں مساوی سمتیے کہلائیں گی۔

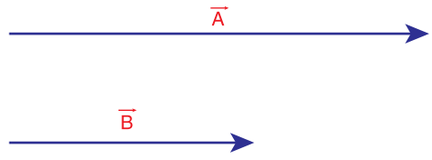


خاکہ 2.12 مساوی سمتیوں کی ہندسی نمائندگی

(a) ہم خطی سمتیے (Collinear vetors): وہ سمتیے جو ایک ہی خط کے تحت عمل آور ہوتے ہیں ہم خطی سمتیے کہلاتے ہیں۔ ان کا درمیانی زاویہ 0° یا 180° ہوسکتا ہے۔

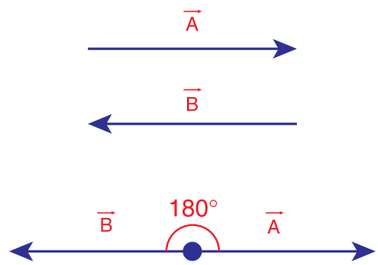
(i) متوازی سمتیے (Parallel vectors) اگر دو سمتیے $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ ایک ہی خط یا متوازی خطوط کے تحت ایک ہی سمت میں عمل آور ہوتے ہیں تو ان کا درمیانی زاویہ 0° ہے (خاکہ 2.13) اور وہ متوازی سمتیے کہلاتے ہیں۔

11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:25 PM



خاکہ 2.13۔ متوازی سمتیوں کی ہندسی نمائندگی

(ii) ضد متوازی سمتیے: (Anti parallel vectors) اگر دو سمتیے $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ ایک ہی خط یا متوازی خطوط کے تحت مخالف سمت میں عمل آور ہوتے ہیں تو وہ غیر متوازی خطوط کے تحت مخالف سمت میں عمل آور ہوتے ہیں تو وہ غیر متوازی سمتیے کہلاتے ہیں اور ان کا درمیانی زاویہ 180° ہوتا ہے۔(خاکہ 2.14)



خاکہ 2.14۔ غیر متوازی سمتیوں کی ہندسی نمائندگی:

(2) اکائی سمتیہ (Unit vector) : سمتیہ جو اس کی قدر کے ذریعہ تقسیم پایا گیا ہو۔ایک اکائی سمتیہ کہلاتا ہے۔$\vec{A}$ کے لئے ظاہر کیا جانے والا اکائی سمتیہ $\hat{A}$ ہے (جسے A کیپ یا A ہیٹ پڑھا جاتا ہے)۔اس کی قدر اکائی Unity یا ایک کے برابر ہوتی ہے۔

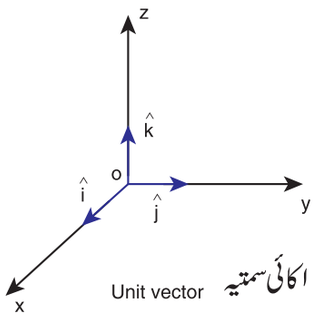
چونکہ $\hat{A}=\frac{\vec{A}}{A}$ ہے، ہم $\vec{A}=A\hat{A}$ لکھ سکتے ہیں۔

لہذا، ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ اکائی سمتیہ، سمتی مقدار کی صرف سمت کی نوعیت ظاہر کرتا ہے۔

(3) مستقیم زاویہ والے اکائی سمتیے:
(Orthogonal Unit vectors)

فرض کیجئے کہ $\hat{i}$, $\hat{j}$ اور $\hat{k}$ تین اکائی سمتیے ہیں، جو بالترتیب x محور، y محور اور z محور کے تحت سمتوں کی نوعیت بیان کرتے ہیں۔

یہ تینوں اکائی سمتیے ایک دوسرے کے عمود میں ہوتے ہیں اور ان میں سے کسی بھی دو کا درمیانی زاویہ 90° ہے ، مستقیم زاویہ $\hat{i}$, $\hat{j}$ اور $\hat{k}$ (orthogonal) اکائی سمتیوں کی مثالیں ہیں۔ دو سمتیے جو ایک دوسرے کے عمود میں پائے جاتے ہیں، جیسا کہ خاکہ 2.15 میں بتائے گئے ہیں۔ مستقیم زاویہ کے سمتیے (Orthogonal vector) کہلاتے ہیں۔



خاکہ 2.15۔ مستقیم زاویہ کے اکائی سمتیے

2.3.3 سمتیوں کو جمع کرنا (Addition of Vectors)

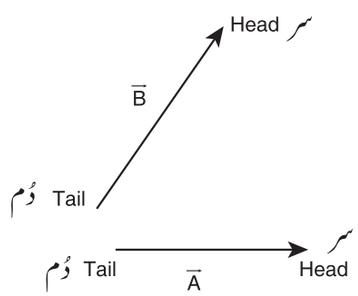
چونکہ سمتیوں میں قدر اور سمت دونوں پائے جاتے ہیں، انہیں عام الجبرائی طریقے سے جمع نہیں کیا جاسکتا۔لہذا، سمتیوں کو سمتیائی الجبرا Vector Algebra کہلانے والے چند قوانین کی مدد سے ہندسی طور پر یا تجزیاتی طور پر جمع کیا جاسکتا ہے۔ایک دوسرے پر رکھے گئے دو سمتیوں کے مجموعے (حاصل جمع) کو حاصل کرنے کے لئے ہم

(i) جمع کرنے کا مثلثی قانون کا طریقہ یا

(ii) سمتیوں کے متوازی الاضلاع کے قانون کا استعمال کرتے ہیں۔

جمع کرنے کا مثلثی قانون کا طریقہ
(Triangular law of addition method)

$\vec{A}$ اور $\vec{B}$ دو سمتیوں کو فرض کیجئے جیسا کہ خاکہ 2.16 میں بتایا گیا ہے۔

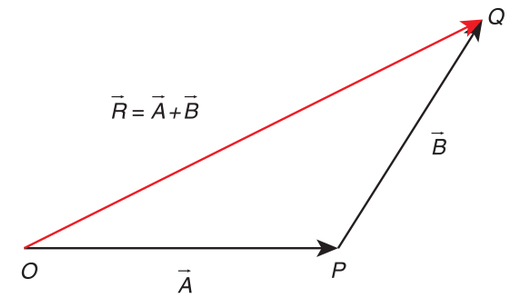


خاکہ 2.16 سمتیوں کے سر اور دُم

11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:26 PM

دوسمتیوں کے مجموعے کو معلوم کرنے کے لئے ہم مندرجۂ ذیل طریقے سے مثلثی قانون کا استعمال کرتے ہیں۔

دوسمتیوں $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ کو ان کی اصلی حالت میں ایک مثلث کے دو متصل ضلعوں میں ترتیب دیجئے۔تو پھر ان کا مجموعہ مثلث کے معکوس ترتیب میں بنائے گئے تیسرے ضلعے سے پیش کیا جاتا ہے جیسا کہ خاکہ 2.17 میں بتایا گیا ہے۔



خاکہ 2.17۔ جمع کرنے کا مثلثی قانون

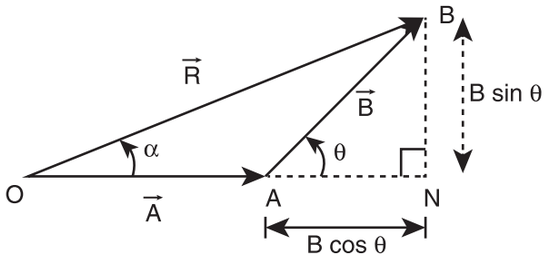
اس کی مزید وضاحت یوں کی جاسکتی ہے کہ پہلے سمتیہ $\vec{A}$ کے سرے کو دوسرے سمتیے $\vec{B}$ کی دُم سے جوڑ دیا جاتا ہے،فرض کیجئے کہ $\vec{A}$ اور B کا درمیانی زاویہ θ ہے، تو پھر سمتیہ $\vec{A}$ کی دم سے $\vec{B}$ کے سرے کو جوڑنے والی سمتیہ $\vec{R}$ ہی مجموعی سمتیہ ہے۔ ہندسی طور پر (مجموعہ) کی قدر $\vec{R}$ کی لمبائی (OQ) سے دی جاتی ہے اور اس کی سمت $\vec{R}$ اور $\vec{A}$ کے درمیانی زاویے کے تحت ہوتی ہے۔لہذا ہم لکھ سکتے ہیں کہ. $\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}$ ہے۔

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}$$

(1) حاصلی (مجموعی) سمتیہ کی قدر
(Magnitude of resultant vector)

حاصلی سمتیہ کی قدر اور سمت کا تعین اس طریقے سے کیا جاتا ہے۔

خاکہ 2.18 کی مدد سے،مثلث ABN کا تصور کیجئے جو ضلع OA کے اضافے سے حاصل یا گیا ہے۔ ABN ایک مثلث قائمہ الزاویہ ہے۔



خاکہ 2.18 جمع کرنے کے مثلثی قانون کے ذریعہ حاصلی سمتیہ اور اس کی سمت

خاکہ 2.18 کی مدد سے

$$\text{اور}\quad \cos\theta=\frac{AN}{B}\therefore AN=B\cos\theta$$

$$\sin\theta=\frac{BN}{B}\quad\therefore BN=B\sin\theta$$

ΔOBN کے لئے ہم رکھتے ہیں $OB^2=ON^2+BN^2$

$$\Rightarrow R^2=(A+B\cos\theta)^2+(B\ \sin\theta)^2$$
$$\Rightarrow R^2=A^2+B^2\cos^2\theta+2AB\cos\theta+B^2\sin^2\theta$$
$$\Rightarrow R^2=A^2+B^2\left(cos^2\theta+sin^2\theta\right)+2AB\cos\theta$$
$$\Rightarrow R=\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos\theta}$$

جو $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ کے ماحصل کی قدر ہے۔

(2) حاصل سمتیہ کی سمت
(Direction of resultant vectors)

اگر $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ کا درمیانی زاویہ α ہے تو پھر

$$\left|\vec{A}+\vec{B}\right|=\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos\theta}\quad(2.1)$$

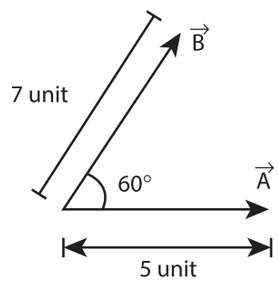
اگر $\vec{A}$ کے ساتھ α کا زاویہ بناتا ہے تو $\vec{R}$ پھر ΔOBN میں

$$\tan\alpha=\frac{BN}{ON}=\frac{BN}{OA+AN}$$
$$\tan\alpha=\frac{B\sin\theta}{A+B\cos\theta}$$
$$\Rightarrow\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{B\sin\theta}{A+B\cos\theta}\right)$$

11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:26 PM

مثال 2.1

5 اکائیاں اور 7 اکائیاں رکھنے والی دوسمتیے $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ ایک دوسرے کے ساتھ 60° کا زویہ بناتے ہیں۔ سمتیہ $\vec{A}$ کے لحاظ سے حاصل سمتیہ کی قدر اور سمت معلوم کیجئے۔

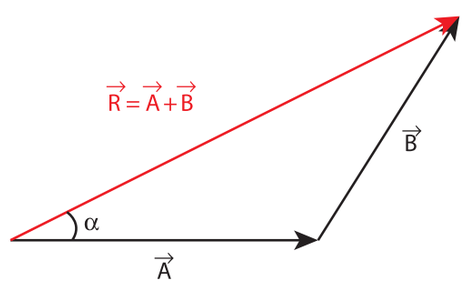


حل:

جمع کرنے کے مثلثی قانون کا استعمال کرتے ہوئے۔ حاصلی سمتیہ اسی طرح پیش کی جاتی ہے۔

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$$

جیسا کہ نیچے کے خاکہ میں بتایا گیا ہے۔



حاصلی سمتیہ $\vec{R}$ کی قدر یہ ہے۔

$$R = |\vec{R}| = \sqrt{5^2 + 7^2 + 2\times5\times7\cos60^\circ}$$

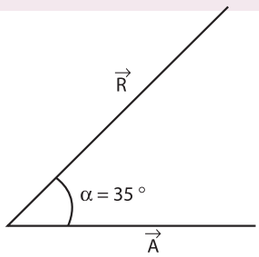
$$R = \sqrt{25 + 49 + \frac{70\times1}{2}} = \sqrt{109}\ units$$

$\vec{R}$ اور $\vec{A}$ کا درمیانی زاویہ α یوں پیش کیا جاتا ہے۔

$$\tan\alpha = \frac{B\sin\theta}{A + B\cos\theta} \qquad (2.2)$$

$$\tan\alpha = \frac{7\times\sin60^\circ}{5+7\cos60^\circ} = \frac{7\sqrt{3}}{10+7} = \frac{7\sqrt{3}}{17} \cong 0.713$$

$$\therefore \alpha \cong 35^\circ$$



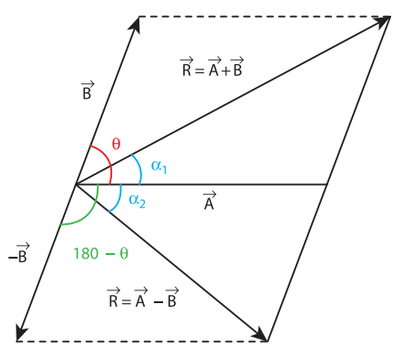
نوٹ

دوسمتیوں کی مجموعی سمتیہ اور مجموعہ کا زاویہ معلوم کرنے کا ایک اور طریقہ، جمع کرنے کے متوازی الاضلاع کے قانون (parallelogram law of Vector addition) کا طریقہ ہے۔ اسے appendix 2.1 میں پیش کیا گیا ہے۔

2.3.4 سمتیوں کی تفریق: (Subtraction of ve ctors)

چونکہ سمتیوں میں قدر اور سمت دونوں پائے جاتے ہیں، انہیں عام الجبریائی طریقے سے تفریق نہیں کیا جاسکتا۔ لہذا ان کی تفریق ہندسی طور پر یا تجزیائی طور پر (Analytically) کی جاتی ہے۔ آیئے ہم خاکہ 2.19 کی مدد سے ہندسی طور پر دوسمتیوں کی تفریق کے بارے میں بحث کریں گے۔

دوغیر صفری سمتیے $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ کے لئے جو ایک دوسرے سے زاویہ θ پر رکھے گئے ہیں، ان کا فرق $\vec{A}-\vec{B}$ یوں حاصل کیا جاتا ہے۔ خاکہ 2.19 میں بتائے گئے طریقے کے مطابق سب سے پہلے $-\vec{B}$ حاصل کیا جاتا ہے۔ $\vec{A}$ اور $-\vec{B}$ کا درمیانی زاویہ $180-\theta$ ہے۔



خاکہ 2.19 سمتیوں کی تفریق

11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:26 PM

$\vec{A}-\vec{B}$ کا فرق بالکل $\vec{A}$ اور $-\vec{B}$ کے مجموعے کے برابر ہوتا ہے۔

ہم لکھ سکتے ہیں $\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+\left(-\vec{B}\right)$ اور مساوات (2.1) کی مدد سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\left|\vec{A}-\vec{B}\right|=\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos(180-\theta)} \quad (2.3)$$

چونکہ $\cos\left(180-\theta\right)=-\cos\theta$ ہے، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\Rightarrow\left|\vec{A}-\vec{B}\right|=\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\theta} \quad (2.4)$$

دوبارہ خاکہ 2.19 کی مدد سے اور مساوات (2.2) ہی کی طرح ایک اور مساوات کے استعمال سے ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$\tan\alpha_2=\frac{B\sin\left(180^\circ-\theta\right)}{A+B\cos\left(180^\circ-\theta\right)} \quad (2.5)$$

مگر $\sin\left(180^\circ-\theta\right)=\sin\theta$ ہے، اس لئے ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$\Rightarrow\tan\alpha_2=\frac{B\sin\theta}{A-B\cos\theta} \quad (2.6)$$

لہذا، فرق $\vec{A}-\vec{B}$ ایک سمتیہ ہے جس میں قدر اور سمت دونوں ہوتے ہیں جو بالترتیب مساوات 2.4 اور 2.6 کے ذریعہ بتائے گئے ہیں۔

مثال 2.2

5 اکائیاں اور 7 اکائیاں بالترتیب قدر اور رکھنے والے دو سمتیے $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ ایک دوسرے کے ساتھ 60° کا زاویہ بناتے ہیں۔ فرق کی سمتیہ $\vec{A}-\vec{B}$ کی قدر اور $\vec{A}$ کے لحاظ سے اس کی سمت معلوم کیجئے۔

حل:

مساوات (2.4) کی مدد سے

$$\left|\vec{A}-\vec{B}\right|=\sqrt{5^2+7^2-2\times5\times7\cos60^\circ}$$

$$=\sqrt{25+49-35}=\sqrt{39} \quad \text{اکائیاں}$$

$\vec{A}-\vec{B}$ کے لحاظ سے $\vec{A}$ کا بننے والا زاویہ

$$\tan\alpha_2=\frac{7\sin60^\circ}{5-7\cos60^\circ}=\frac{7\sqrt{3}}{10-7}=\frac{7}{\sqrt{3}}=4.041$$

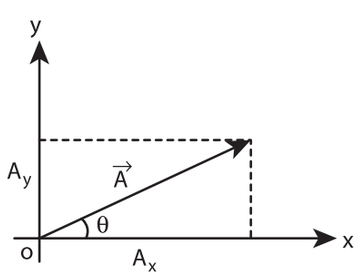
$$\alpha_2=\tan^{-1}\left(4.041\right)\cong76^\circ$$

2.4 ایک سمتیہ کے اجزاء
(Components of a vector)

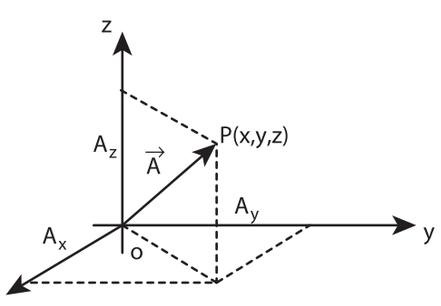
کارتیسی محددات (Cartesian coordinate) کے نظام میں کسی بھی سمتیہ $\vec{A}$ کو x، y اور z سمتیوں کے تحت تین اجزاء میں ثبت کر سکتے ہیں۔ اسے خاکہ 2.20 میں بتایا گیا ہے۔

سہ ابعادی محددات کا ایک نظام تصور کیجئے۔ اس لحاظ سے ایک سمتیہ کو اس کی جزوی شکل میں اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$\vec{A}=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}$$



دوابعادی کارتیسی محددات کا ایک نظام



سہ ابعادی کارتیسی محددات کا ایک نظام

خاکہ 2.20 دوابعاد اور سہ ابعاد میں، ایک سمتیہ کے اجزاء

11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:27 PM

یہاں Ax, $\vec{A}$ کا x-جزء ہے، Ay, $\vec{A}$ کا y-جزء ہے، اور Az, $\vec{A}$ کا z-جزء ہے۔

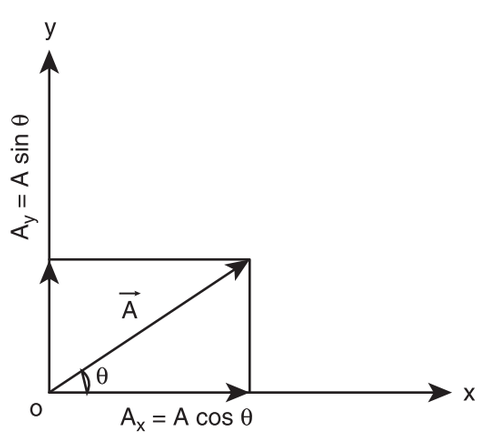
دوابعادی کارتیسی محددات کے ایک نظام (جسے خاکہ 2.20 میں بتایا گیا ہے) میں، سمتیہ $\vec{A}$ اس طرح ظاہر کی جاتی ہے۔

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j}$$

اگر $\vec{A}$، X. محور کے ساتھ θ کا زاویہ بناتا ہے اور A_x اور A_y بالترتیب x- محور اور y- محور کے تحت $\vec{A}$ کے اجزاء ہیں تو پھر خاکہ 2.21 کے مطابق

$$A_x = A\cos\theta, \quad A_y = A\sin\theta$$

جہاں 'A' سمتیہ $\vec{A}$، $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$ کی قدر (لمبائی) ہے۔



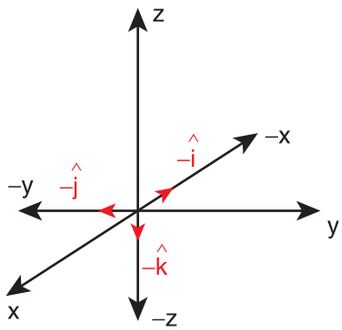
خاکہ 2.21 ایک سمتیہ کا اظہار

مثال 2.3

منفی x- سمت، منفی y- سمت اور منفی z- سمت کے تحت کون سے اکائی سمتیے پائے جاتے ہیں؟

حل:

مندرجۂ ذیل خاکہ میں بتائے گئے طریقے کے مطابق منفی سمتوں کے تحت اکائی سمتیے بتائے جاسکتے ہیں۔ پھر ہم رکھتے ہیں۔



منفی x سمت کے تحت پائی جانے والی اکائی سمتیہ = $-\hat{i}$

منفی y سمت کے تحت پائی جانے والی اکائی سمتیہ = $-\hat{j}$

منفی z سمت کے تحت پائی جانے والی اکائی سمتیہ = $-\hat{k}$

2.4.1 اجزاء کی مدد سے سمتیوں کا جمع کیا جانا
(Vector addition using components)

پچھلے حصہ میں ہم نے ہندسی طریقوں سے دو سمتیوں کو جمع یا تفریق کرنے کے بارے میں سیکھا تھا۔ مگر جیسے ہی ہم ایک محداتی نظام کا انتخاب کرتے ہیں تو سمتیوں کا جمع کرنا یا تفریق کرنا اور بھی آسان بن جاتا ہے۔

کارتیسی محددات کے ایک نظام میں دو سمتیے $\vec{A}$ اور $\vec{B}$، اس طرح ظاہر کئے جاسکتے ہیں۔

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$
$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$$

پھر دو سمتیوں کی جمع بندی ان کے متعلقہ x,y اور z اجزاء کو جمع کرنے کے برابر ہوتی ہے۔

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\,\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} + (A_z + B_z)\,\hat{k}$$

اسی طرح دو سمتیوں کی تفریق ان کے متعلقہ x, y اور z اجزاء کو تفریق کرنے کے برابر ہوتی ہے۔

11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:27 PM

$$\vec{A}-\vec{B}=\left(A_x-B_x\right)\hat{i}+\left(A_y-B_y\right)\hat{j}+\left(A_z-B_z\right)\hat{k}$$

اوپر کے قوانین، دو سمتیوں کو جمع کرنے یا تفریق کرنے کا ایک تجزیاتی طریقہ فراہم کرتے ہیں۔

مثال 2.4

دو سمتیے $\vec{A}$ اور $\vec{B}$، ان کی جزوی شکلوں میں $\vec{A}=5\hat{i}+7\hat{j}-4\hat{k}$ اور $\vec{B}=6\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$ کی طرح دی گئی ہیں۔ معلوم کیجئے۔ $\vec{A}+\vec{B},\quad \vec{B}+\vec{A},\quad \vec{A}-\vec{B},\ \vec{B}-\vec{A}$

حل:

$$\vec{A}+\vec{B}=(5\hat{i}+7\hat{j}-4\hat{k})+(6\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k})$$
$$=11\hat{i}+10\hat{j}-2\hat{k}$$
$$\vec{B}+\vec{A}=(6\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k})+(5\hat{i}+7\hat{j}-4\hat{k})$$
$$=(6+5)\hat{i}+(3+7)\hat{j}+(2-4)\hat{k}$$
$$=11\hat{i}+10\hat{j}-2\hat{k}$$
$$\vec{A}-\vec{B}=(5\hat{i}+7\hat{j}-4\hat{k})-(6\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k})$$
$$=-\hat{i}+4\hat{j}-6\hat{k}$$
$$\vec{B}-\vec{A}=\hat{i}-4\hat{j}+6\hat{k}$$

نوٹ کیجئے کہ سمتیے $\vec{A}+\vec{B}$ اور $\vec{B}+\vec{A}$ کی طرح دونوں برابر ہیں اور سمتیے $\vec{A}-\vec{B}$ اور $\vec{B}-\vec{A}$ ایک دوسری کی مخالف ہیں۔

نوٹ

اجزاء کی مدد سے سمتیوں کی جمع بندی، منتخب کئے جانے والے محدداتی نظام پر منحصر ہوتی ہے، مگر دو سمتیوں کو جمع کرنے یا تفریق کرنے کا ہندسی طریقہ استعمال کئے جانے والے محدداتی نظام پر منحصر نہیں ہوتا۔

2.5 ایک قدریہ سے سمتیہ کو ضرب کرنا
(Multiplication of Vector by a Scalar)

ایک قدریہ λ سے ضرب کی جانے والی ایک سمتیہ $\vec{A}$ ایک اور سمتیہ $\lambda\vec{A}$ بناتی ہے۔ اگر λ ایک مثبت عدد ہے تو $\lambda\vec{A}$ بھی $\vec{A}$ کی سمت ہی میں ہوگی اور اگر λ ایک منفی عدد ہو تو $\lambda\vec{A}$ بھی $\vec{A}$ کی مخالف سمت میں ہوگی۔

مثال 2.5

دیا گیا ہے $\vec{A}=2\hat{i}+3\hat{j}$ تو $3\vec{A}$ کیا ہوگا؟

حل:

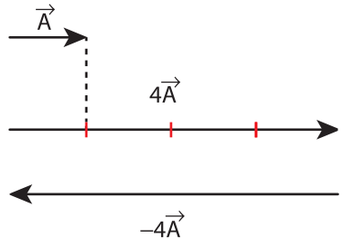
$$3\vec{A}=3\left(2\hat{i}+3\hat{j}\right)=6\hat{i}+9\hat{j}$$

سمتیہ $3\vec{A}$ سمتیہ $\vec{A}$ ہی کی سمت میں ہوگی۔

مثال 2.6

مندرجۂ ذیل خاکہ میں $\vec{A}$ ایک سمتیہ بتائی گئی ہے۔
$4\vec{A}$ اور $-4\vec{A}$ معلوم کیجئے۔

حل:



طبیعیات میں چند سمتی مقداروں کو، دیگر سمتی مقداروں کی عددی مقدار (قدریہ) کے حاصل ضرب کے طور پر واضح کیا جاتا ہے۔
مثال کے طور پر
(1) قوت $\vec{F}=m\vec{a}$ ہے۔ یہاں کمیت m ایک عددی مقدار (قدریہ) ہے اور $\vec{a}$ اسراع ہے۔ چونکہ m ہمیشہ ایک مثبت قدریہ ہے، قوت کی سمت ہمیشہ اسراع ہی کی سمت میں ہوتی ہے۔

11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:27 PM

(2) خطی معیارحرکت $\vec{P} = m\vec{v}$ ہے۔ یہاں v سمتی رفتار ہے ۔ خطی معیارحرکت کی سمت بھی سمتی رفتار ہی کی سمت میں ہوتی ہے۔

(3) قوت $\vec{F} = q\vec{E}$ یہاں برقی بار 'q' ایک قدریہ ہےاور E برقی میدان $\vec{F}$ ہے۔چونکہ بار مثبت یا منفی ہوتا ہے، اس کی مناسبت سے قوت کی سمت یا تو $\vec{E}$ کی سمت میں ہوتی ہے یا اس $\vec{E}$ کی مخالف سمت میں ہوتی ہے۔

2.5.1 دوسمتیوں کا قدری حاصل ضرب
(Scalar Product of Two vectors)

تعارف:

دوسمتیوں کا قدری حاصل ضرب (یا نقطوی حاصل ضرب dot product) کی تعریف یوں کی جاتی ہے کہ یہ دونوں سمتیوں کی قدریں اوران کے درمیانی زاویے کے Cosine کا حاصل ضرب ہے۔

لہذا اگر $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ دوسمتیے ہوں اوران کا درمیانی زاویہ θ ہوتو ان کے قدری حاصل ضرب کی تعریف $\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$ کی طرح کی جاتی ہے۔یہاں A اور B کی قدریں $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ ہیں۔

خصوصیات:

(i) مقدارحاصل ضرب $\vec{A}\cdot\vec{B}$ ہمیشہ ایک قدری مقدار ہوتی ہے۔ اگران سمتیوں کے درمیان زاویۂ حادہ (یعنی $\theta < 90°$) پایا جاتا ہو، تو وہ مقدار مثبت ہوگی اوران کے درمیان زاویۂ منفرجہ (یعنی $90° < \theta < 180°$) پایا جاتا ہو، تو وہ مقدار منفی ہوگی۔

(ii) قدری حاصل ضرب (Scalar product) متبادل (Commutative) ہوتا ہے، یعنی

$$\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$$

(iii) سمتیے، تقسیمی کلیے کی اتباع کرتے ہیں، یعنی

$$\vec{A}.\left(\vec{B}+\vec{C}\right) = \vec{A}.\vec{B} + \vec{A}.\vec{C}$$

(iv) سمتیوں کا درمیانی زاویہ یہ ہے۔

$$\theta = \cos^{-1}\left[\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB}\right]$$

(v) جب $\cos\theta = 1$ ہوتو یعنی $\theta = 0°$ جب سمتیے متوازی ہوتو ان دوسمتیوں کا قدری حاصل ضرب سب سے زیادہ ہوگا۔

$$(\vec{A}\cdot\vec{B})_{max} = AB$$

(vi) جب $\cos\theta = -1$ یعنی $\theta = 180°$ ہوتو دوسمتیوں کا حاصل ضرب سب سے کم ہوگا۔

$(\vec{A}\cdot\vec{B})_{min} = -AB$ ، جب سمتیے ضدمتوازی ہوں۔

(vii) اگر دوسمتیے $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ ہوتو ایک دوسرے کے عمودی ہوں تو، پھران کا قدری حاصل ضرب $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$ ہے۔کیونکہ $\cos 90° = 0$ ہے تو پھر دونوں سمتیے $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ **mutually orthogonal** یعنی آپسی زاویہ مستقیم کہلائیں گے۔

(viii) ایک سمتیہ کا اسی سمتیہ سے کیا جانے والا قدری حاصل ضرب خود-نقطوی (Self- dot) حاصل ضرب کہلاتا ہےاوروہ

$\left(\vec{A}\right)^2 = \vec{A}\cdot\vec{A} = AA\cos\theta = A^2$ کے طور پر

پیش کیا جاتا ہے۔یہاں زاویہ $\theta = 0°$ ہے۔سمتیہ A کی قدر یا عمود (norm) یہ ہے۔

$$\vec{A} \text{ is } \left|\vec{A}\right| = A = \sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}}$$

(ix) ایک اکائی سمتیہ $\hat{n}$ کے معاملے میں ہے۔

$$\hat{n}\cdot\hat{n} = 1 \times 1 \times \cos 0 = 1$$

مثال کے طور پر $\hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1$

(x) زاویہ مستقیم کی اکائی سمتیے $\hat{i}$, $\hat{j}$ اور $\hat{k}$ کے معاملے میں

$$\hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{i} = 1\cdot 1\cos 90° = 0$$

(xi) اجزاء کے لحاظ سے $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ کے قدری حاصل ضرب کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})\cdot\left(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}\right)$$
$$= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

اس کے ساتھ بقیہ تمام اصطلاحات صفر ہوتے ہیں۔

سمتیہ $\left|\vec{A}\right|$ کی قدر اس طرح پیش کی جاتی ہے۔

$$\left|\vec{A}\right| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:28 PM

مثال 2.17

$\vec{A} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}$ اور $\vec{B} = \hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$ دو سمتیے دیے گئے ہیں۔ ان کا کا حاصل ضرب $\vec{A}.\vec{B}$، $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ کی قدریں معلوم کیجئے۔ ان کا درمیانی زاویہ کیا ہے؟

حل:

$$\vec{A}.\vec{B} = 2 + 12 + 30 = 44$$

اکائیاں $A = \sqrt{4+16+25} = \sqrt{45}$ قدر

اکائیاں $B = \sqrt{1+9+36} = \sqrt{46}$ قدر

دو سمتیوں کا درمیانی زاویہ یوں پیش کیا جاتا ہے۔

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{A}.\vec{B}}{AB}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{44}{\sqrt{45\times 46}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{44}{45.49}\right)$$

$$= \cos^{-1}(0.967)$$

$$\therefore \theta \cong 15^\circ$$

مثال 2.8

جانچئے کہ کیا ذیل میں دیے گئے سمتیے زاویہ مستقیم میں (orthogonal) ہیں۔

i) $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$ اور $\vec{B} = 4\hat{i} - 5\hat{j}$

ii) $\vec{C} = 5\hat{i} + 2\hat{j}$ اور $\vec{D} = 2\hat{i} - 5\hat{j}$

حل:

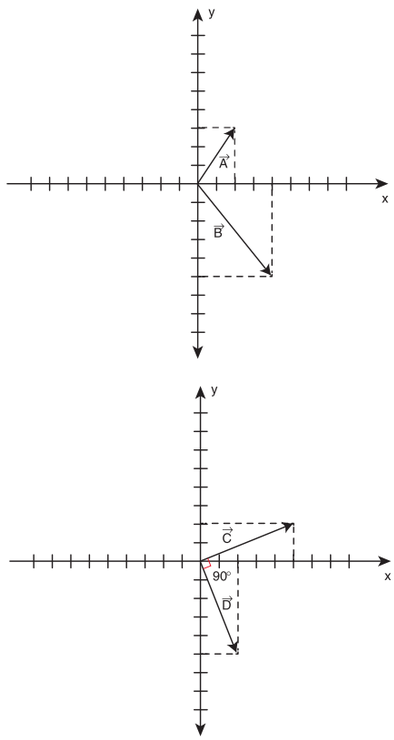
$$\vec{A}.\vec{B} = 8 - 15 = -7 \neq 0$$

لہذا $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ ایک دوسرے کے زاویہ مستقیم میں نہیں ہیں

$$\vec{C}.\vec{D} = 10 - 10 = 0$$

لہذا $\vec{C}$ اور $\vec{D}$ ایک دوسرے کے زاویہ مستقیم میں ہیں۔

$\vec{C}$ اور $\vec{D}$ کا ایک دوسرے کا زاویہ مستقیم میں ہونا، ہندسی طور پر بھی بتایا جاسکتا ہے۔ اسے مندرجۂ ذیل خاکہ میں بتایا گیا ہے۔



طبیعیات میں کسی شئے کو کسی چھوٹے ہٹاؤ $d\vec{r}$ کے ذریعہ حرکت کروانے کے لئے ایک قوت $\vec{F}$ سے کئے جانے والے کام کی تعریف یوں کی جاتی ہے۔

$$W = \vec{F}.d\vec{r}$$
$$W = F\ dr\ \cos\theta$$

کیا گیا کام، بنیادی طور پر قوت کی سمتیے اور ہٹاؤ کی سمتیے کا قدری حاصل ضرب ہے۔ کئے گئے کام کے علاوہ دیگر طبیعی مقداریں بھی قدری ضربی حاصلات کے ذریعہ واضح کی جاتی ہیں۔

نوٹ

یکساں دائری حرکت میں، مرکز مائل قوت ہٹاؤ کے عمودی ہوتی ہے۔ لہذا اس قوت سے کیا جانے والا کام صفر ہوتا ہے۔

11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:28 PM

2.5.2 دوسمتیوں کے سمتی حاصل ضرب
(The vector product of two vectors)

تعریف دوسمتیوں کے سمتی حاصل ضرب یا ترچھا حاصل ضرب (Cross product) کی تعریف یوں کی جاتی ہے کہ یہ دوسمتیوں کی قدریں اوران کے درمیانی زاویہ کے sine کے حاصل ضرب کے برابر مقدار رکھنے والی ایک اور سمتیہ ہے۔ سمتی حاصل ضرب کی سمت دو سمتیوں کو رکھنے والی سطح کے عمودی ہوتی ہے جو دائیں ہاتھ کے پیچ کے کلیے (یا) دائیں ہاتھ کے انگوٹھے کے کلیے کے مطابق ہوتی ہے۔ (خاکہ 2.22)

لہذا، اگر $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ دوسمتیے ہوں، تو پھر ان کے سمتی حاصل ضرب $\vec{A}\times\vec{B}$ کو کی طرح لکھا جاتا ہے جو کہ ایک سمتیہ $\vec{C}$ ہے اس کا تعین یوں کیا جاتا ہے۔

$$\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}=(AB\sin\theta)\hat{n}$$

$\vec{A}\times\vec{B}$ کی سمت $\hat{n}$، یعنی $\vec{C}$ سمتیوں کو رکھنے والی سطح کے عمودی ہوتی ہے اور وہ A (پہلی سمتیہ) سے B (دوسری سمتیہ) تک ان کے درمیان ایک چھوٹے سے زاویہ کے ساتھ گھمانے والے دائیں ہاتھ کے پیچ (right handed screw) کے آگے بڑھنے کے معنی میں ہوتی ہے۔ لہذا اگر ایک دائیں ہاتھ کے پیچ کو جس کا محور $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ سے بننے والی سطح کے عمودی ہے، ان کے درمیان موجود ایک چھوٹے سے زاویے کے ساتھ تک گھمایا جائے تو پھر پیچ جس سمت میں آگے بڑھتا ہے وہ سمت $\vec{A}\times\vec{B}$ یعنی $\vec{C}$ کی سمت کو ظاہر کرتی ہے۔ خاکہ 2.22 میں اس کا نمونہ پیش کیا گیا ہے۔

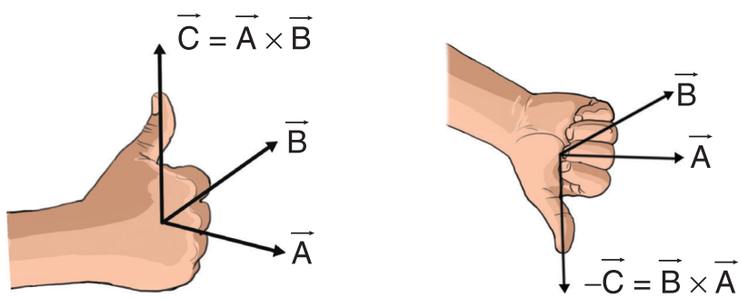
نوٹ

دائیں ہاتھ کے قانون کے مطابق اگر دائیں ہاتھ کے انگلیوں کی انحنا شئے کی گردش کا فہم فراہم کرتی ہے تو پھر انگلیوں کی انحنا کے عمودی طور پر کھڑا کیا گیا ہے۔ انگوٹھا ما حصل کی $\vec{C}$ سمت کی نمائندگی کرتا ہے۔

سمتی حاصل ضرب (ترچھا حاصل ضرب) ("Cross" product) (Vector product)

$\vec{A}$ اور $\vec{B}$ کا سمتی حاصل ضرب جسے $\vec{A}\times\vec{B}$ لکھا جاتا ہے، ایک تیسرا سمتیہ $\vec{C}$ پیدا کرتا ہے۔

$$\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta\,\hat{n} \qquad -\vec{C}=\vec{B}\times\vec{A}$$



$$\vec{A}\times\vec{B}=-(\vec{B}\times\vec{A})$$

خاکہ 2.72 دوسمتیوں کا سمتی حاصل ضرب

11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:28 PM

CR070

سمتی (ترچھے) حاصل ضرب کی خصوصیات:
(Properties of vectors (cross) product)

(i) دوسمتیوں کا سمتی حاصل ضرب ہمیشہ ایک اور سمتیہ ہوتا ہے، جو جس کی سمت، ان دو سمتوں کو رکھنے والی سطح کے عمودی ہوتی ہے۔ یعنی $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ دونوں کے زاویہ مستقیم میں ہوتی ہے۔ چاہے $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ آپس میں ایک دوسرے کے زاویہ مستقیم میں ہوں یا نہ ہوں۔

(ii) دوسمتوں کا سمتی حاصل ضرب متبادل (Commutative) نہیں ہوگا۔ یعنی $\vec{A}\times\vec{B} \neq \vec{B}\times\vec{A}$ مگر $\vec{A}\times\vec{B} = -[\vec{B}\times\vec{A}]$ ہوتا ہے۔

یہاں قابل لحاظ نکتہ یہ ہے کہ
$|\vec{A}\times\vec{B}| = |\vec{B}\times\vec{A}| = AB \sin\theta$ یعنی $\vec{A}\times\vec{B}$ اور $\vec{B}\times\vec{A}$ کے سمتی حاصلات ضرب کے معاملے میں قدریں مساوی ہوتی ہیں، مگر سمت ایک دوسرے کے مخالف ہوتی ہے۔

(iii) جب $\sin\theta = 1$ یعنی $\theta = 90°$ ، ہو تو سمتی حاصل ضرب کی مقدار سب سے زیادہ ہوتی ہے، یعنی اس حالت میں $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ ایک دوسرے کے زاویہ مستقیم میں (orthogonal) ہوں گے۔

$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)_{max} = AB\hat{n}$$

(iv) جب $|\sin\theta| = 0$، یعنی $180°$ یا $\theta=0°$ ہو تو دو غیر صفری سمتیوں کا سمتی حاصل ضرب کم ترین ہوگا۔

$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)_{min} = 0$$

یعنی اگر سمتیے ایک دسرے کے متوازی یا ضد متوازی ہوں تو دو غیر صفری سمتیوں کا سمتی حاصل ضرب منقطع ہو جائے گا۔

(v) خود۔ترچھا (Self-cross) حاصل ضرب، یعنی ایک سمتیہ کا خود اسی کے ساتھ کیا جانے والا حاصل ضرب خالی سمتیہ (Null vector) ہے۔

$$\vec{A}\times\vec{A} = AA\sin 0°\hat{n} = \vec{0}.$$

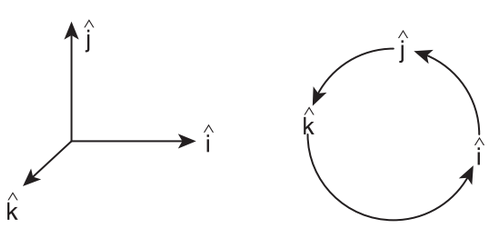
طبیعیات میں خالی سمتیہ 0 کو صفر کے طور پر ظاہر کیا جاتا ہے۔

(vi) اسی طرح اکائی سمتیوں کے خود سمتی حاصل ضرب بھی صفر ہیں۔

$$\hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{k} = \vec{0}$$

(vii) زاویہ مستقیم والی (orthogonal) اکائی سمتیوں کے معاملے میں $\hat{i}$, $\hat{j}$ اور $\hat{k}$ دائیں ہاتھ کے پیچ کے قانون کے مطابق ہوتے ہیں۔

$$\hat{i}\times\hat{j} = \hat{k},\ \hat{j}\times\hat{k} = \hat{i}\ and\ \hat{k}\times\hat{i} = \hat{j}$$



اس کے علاوہ، چونکہ ترچھا حاصل ضرب متبادل (Commutative) نہیں ہوتے ہیں۔

$$\hat{j}\times\hat{i} = -\hat{k}, \hat{k}\times\hat{j} = -\hat{i}$$
$$\hat{i}\times\hat{k} = -\hat{j} \quad \text{اور}$$

(viii) اجزاء کے لحاظ سے $\vec{A}$ اور $\vec{B}$، دو سمتیوں کا سمتی حاصل ضرب یہ ہے۔

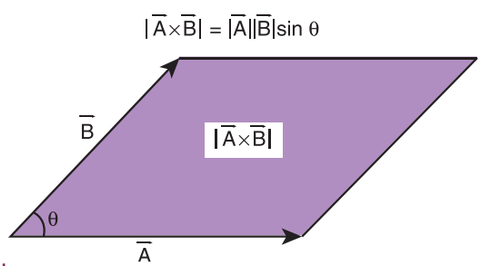
$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:29 PM

$$= \hat{i}\left(A_y B_z - A_z B_y\right) + \hat{j}\left(A_z B_x - A_x B_z\right) + \hat{k}\left(A_x B_y - A_y B_x\right)$$

نوٹ کیجئے کہ $\hat{j}$ ویں $(\hat{j}^{th})$ جز میں موجود تضریب کا درجہ $\hat{i}$ ویں اور $\hat{k}$ ویں اجزاء سے مختلف ہوتا ہے۔

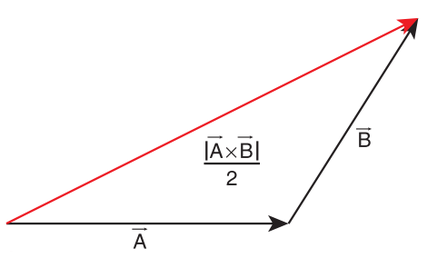
(ix) اگر $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ دو سمتیے، ایک متوازی الاضلاع میں دو متصل ضلعے تعمیر کرتے ہیں تو پھر $\vec{A} \times \vec{B}$ کی قدر اس متوازی الاضلاع کا رقبہ فراہم کرے گی، جیسا کہ خاکہ 2.23 میں ترسیمی طور پر بتایا گیا ہے۔



خاکہ 2.23 متوازی الاضلاع کا رقبہ

(x) چونکہ ہم ایک متوازی الاضلاع کو دو مساوی مثلثوں میں تقسیم کر سکتے ہیں۔ ایک مثلث کا رقبہ، ½|A×B|، جس کے ضلعے $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ ہیں۔ اسے خاکہ 2.24 میں بتایا گیا ہے۔

(جب ہم اکائی 6 میں Kepler کے خلیوں کا مطالعہ کریں گے تو، یہ معلومات حاصل کریں گے)۔



خاکہ 2.24۔ مثلث کا رقبہ

طبیعیات میں استعمال ہونے والی بہت سی مقداریں سمتی حاصلات ضرب کے طور پر واضح کی جاتی ہیں۔ خاص طور پر قوت گدشہ، زاویائی معیار حرکت جیسے گردشی اثرات کی نمائندگی کرنے والی طبیعی، مقداریں سمتی حاصلات ضرب کے ذریعہ متعین کی جاتی ہیں۔

مثالیں:

(i) قوت گدشہ $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ جہاں $\vec{F}$ قوت ہے اور جب $\vec{r}$ ایک ذرہ کی مقامی سمتیہ ہے۔

(ii) زاویائی معیار حرکت $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ جہاں $\vec{p}$ خطی معیار حرکت ہے۔

(iii) خطی سمتی رفتار $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ جہاں $\vec{\omega}$ زاویائی سمتی رفتار ہے۔

مثال 2.9

دو سمتیے اس طرح دئے گئے ہیں۔ $\vec{r} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$ اور $\vec{F} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$. حاصلی سمتیہ $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ معلوم کیجئے۔

حل :

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\vec{\tau} = (12 - (-10))\hat{i} + (15 - 8)\hat{j} + (-4 - 9)\hat{k}$$

$$\vec{\tau} = 22\hat{i} + 7\hat{j} - 13\hat{k}$$

2.5.3 سمتیوں کے اجزاء کی خصوصیات
(Properties of the components of vectors)

اگر دو سمتیے $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ مساوی ہوں، تو ان کے انفرادی اجزاء بھی مساوی ہوتے ہیں۔

فرض کیجئے $A = B$ ہے۔ تو

$$A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$

یعنی $A_x = B_x,\ A_y = B_y,\ A_z = B_z$

11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:29 PM

مثال 2.10

مندرجۂ ذیل سمتی مساوات کے لئے اجزاء کا موازنہ کیجئے۔

a) $\vec{F} = m\vec{a}$ یہاں m ایک مثبت عدد ہے۔

b) $\vec{p} = 0$

حل:

صورت حال(a)

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k} = ma_x\hat{i} + ma_y\hat{j} + ma_z\hat{k}$$

اجزاء کو موازنہ کرنے پر ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$F_x = ma_x, F_y = ma_y, F_z = ma_z$$

اس سے یہ اخذ کیا جاسکتا ہے کہ ایک سمتی مساوات تین قدری مساوات کے متوازن ہے۔

صورت حال(b)

$$\vec{p} = 0$$

$$p_x\hat{i} + p_y\hat{j} + p_z\hat{k} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$$

اجزاء کو موازنہ کرنے پر ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$p_x = 0, p_y = 0, p_z = 0$$

مثال 2.11

دی گئی سمتی مساوات سے T کی قیمت متعین کیجئے۔

$$5\hat{j} - T\hat{j} = 6\hat{j} + 3T\hat{j}$$

حل:

دونوں طرف اجزاء کا موازنہ کرنے سے ہم یہ لکھ سکتے ہیں۔

$$5 - 6 = 3T + T$$

$$-1 = 4T$$

$$T = -\frac{1}{4}$$

مثال 2.12

دی گئی سمتی مساوات $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{F}_4$ کے اجزاء کا موازنہ کیجئے۔

حل:

یہ تمام سمتیوں کو کارتیسی محددات کے نظام کے لحاظ سے، x y اور z اجزاء میں حل کر سکتے ہیں۔

جیسے ہی ہم اجزاء کا تعین کر لیتے ہیں تو ہم x اجزاء کو دونوں طرف، y اجزاء کو دونوں طرف اور z اجزاء کو مساوات کے دونوں طرف موازنہ کر سکتے ہیں اور پھر حاصل کر سکتے ہیں۔

$$F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = F_{4x}$$

$$F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = F_{4y}$$

$$F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} = F_{4z}$$

2.6 مقامی سمتیہ (Position Vector)

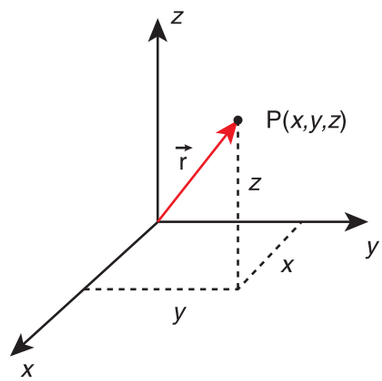
یہ ایک سمتیہ ہے جو جو کسی حوالاتی سانچہ یا محدداتی نظام کے لحاظ سے، کسی بھی وقفے پر ایک ذرہ کے مقام کا تعین کرتی ہے۔

ایک نقطہ P پر ذرہ کی مقامی سمتیہ $\vec{r}$ اس طرح پیش کی جاتی ہے۔

11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:29 PM

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

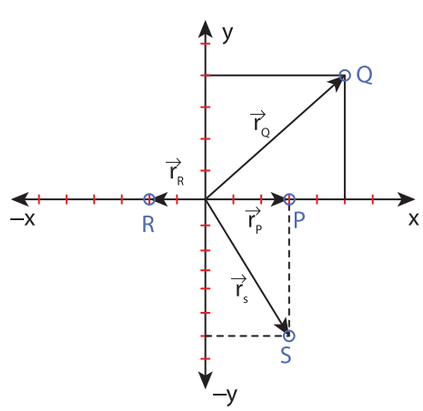
جہاں $\vec{r}$ کے اجزاء x، y اور z ہیں۔ خاکہ 2.25 مقامی سمتیہ $\vec{r}$ کو ظاہر کرتا ہے۔



خاکہ 2.25 کارتیسی محددات کے نظام میں مقامی سمتیہ

مثال 2.13

P، Q، R، S نقاط پر موجود، مندرجۂ ذیل ذرات کے لئے مقامی سمتیوں کا تعین کیجئے۔



حل:

P نقطہ کے لئے سمتیہ یہ ہے۔

$$\vec{r}_P = 3\hat{i}$$

Q ۔ نقطہ کے لئے۔سمتیہ یہ ہے۔

$$\vec{r}_Q = 5\hat{i} + 4\hat{j}$$

R ۔ نقطہ کے لئے۔سمتیہ یہ ہے۔

$$\vec{r}_R = -2\hat{i}$$

S ۔ نقطہ کے لئے۔سمتیہ یہ ہے۔

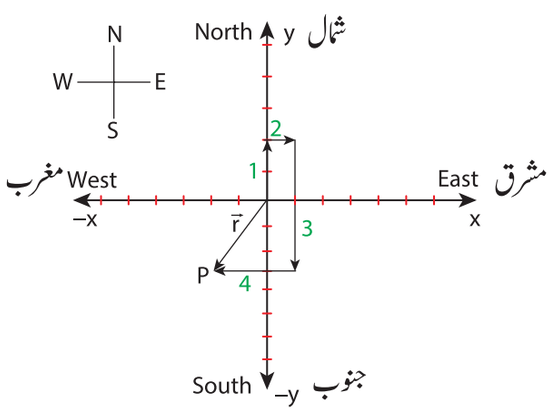
$$\vec{r}_s = 3\hat{i} - 6\hat{j}$$

مثال 2.14

ایک شخص جو شروعات میں حالت سکون پر تھا، 2 میٹر شمال کی جانب پھر 1 میٹر مشرق کی جانب پھر 5 میٹر جنوب کی جانب اور 3 میٹر مغرب کی جانب چلتا ہے۔ اس ٹرپ کے اختتام پر اس شخص کا مقام بتایئے۔

حل:

جیسا کہ خاکہ میں بتایا گیا ہے۔ مثبت x- محور کو مشرقی سمت کے طور پر اور مثبت y- محور کو شمال کے طور پر لے لیا جاتا ہے۔



ٹرپ کے بعد وہ شخص P نقطہ پر پہنچتا ہے جس کی مقامی سمتیہ یوں پیش کی جاتی ہے۔

$$\vec{r} = -2\hat{i} - 3\hat{j}$$

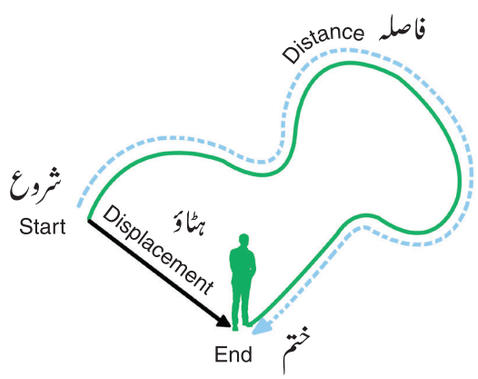
ہٹاؤ کی سمت جنوب-مغربی ہے۔

11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:30 PM

2.7 فاصلہ اور ہٹاؤ
(Distance and Displacement)

حرکت کے دوران ایک دئے گئے وقفے میں کسی شئے سے طے کردہ حقیقی راستے کی لمبائی ہی **فاصلہ** ہے۔ یہ ایک مثبت قدری مقدار ہے۔

ایک دئے گئے وقت میں شئے کے ابتدائی اور انتہائی مقام کا درمیانی فرق **ہٹاؤ** ہے۔اس کی تعریف اس طرح بھی کی جاسکتی ہے کہ یہ دئے گئے وقفہ میں شئے کے دو مقامات کا کم ترین درمیانی فاصلہ ہے اور اس کی سمت شئے کے ابتدائی مقام سے انتہائی مقام کی طرف ہوتی ہے۔ خاکہ 2.26 ہٹاؤ اور فاصلے کے درمیانی فرق کا نمونہ پیش کرتا ہے۔

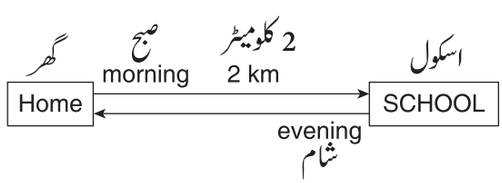


خاکہ 2.26 فاصلہ اور ہٹاؤ

مثال 2.15

تصور کیجئے کہ آپ کا اسکول آپ کے گھر سے 2 کلومیٹر دوری پر ہے۔ صبح میں آپ اسکول جاتے ہیں اور شام میں گھر لوٹ جاتے ہیں۔ اس کل سفر میں آپ سے طے کیا گیا فاصلہ اور ہٹاؤ کتنا ہے؟

حل:

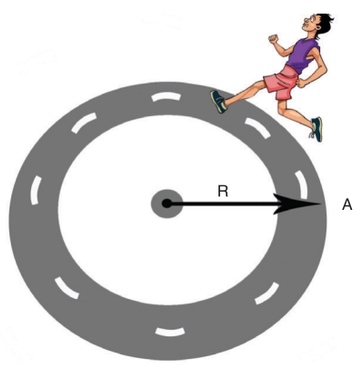


آپ سے طے کیا گیا ہٹاؤ صفر ہے کیونکہ آپ کا ابتدائی مقام اور آخری مقام دونوں وہی ہے۔
مگر طے کردہ فاصلہ 4 کلومیٹر ہے۔

مثال 2.66

ایک کھلاڑی 50 میٹر کے ایک دائری ٹریک پر 3 دَور مکمل کرتا ہے۔اس سے طے کیا گیا کل فاصلہ اور ہٹاؤ کا محاسبہ کیجئے۔

حل:



ٹریک کا احاطہ × 3 = کھلاڑی سے طے کردہ کل فاصلہ

فاصلہ Distance $= 3 \times 2\pi \times 50\ m$

$= 300\pi\ m$ (or)

فاصلہ Distance $\approx 300 \times 3.14 \approx 942\ m$

طے کردہ ہٹاؤ صفر ہے کیونکہ کھلاڑی تین دَور دوڑنے کے بعد بھی اپنے ابتدائی مقام ہی پر موجود ہے۔

2.7.1 کارتیسی محدداتی نظام میں ہٹاؤ کی سمتیہ:
(Displacement vector in Cartesian Coordinate system)

مقامی سمتیہ کے لحاظ سے ہٹاؤ کی سمتیہ اس طرح پیش کی جاتی ہے۔آیئے ہم فرض کریں کہ ایک ذرہ، مقامی سمتیہ $\vec{r}_1 = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$ رکھنے والے ایک مقام P_1 سے

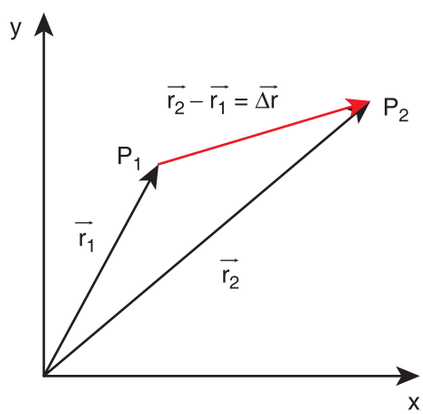
11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:30 PM

مقام P_2 جس کی مقامی سمتیہ $\vec{r}_2 = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$ ہے۔

ہٹاؤ کی سمتیہ یوں پیش کی جاتی ہے۔

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$
$$= (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}.$$

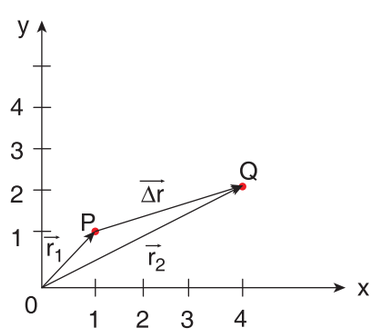
اس ہٹاؤ کو خاکہ 2.27 میں بھی بتایا گیا ہے۔



خاکہ 2.27 ہٹاؤ کی سمتیہ

مثال 2.17

P اور Q تک حرکت کرنے والے ایک ذرہ کے لئے ہٹاؤ کی سمتیہ محسوب کیجئے، جیسا کہ نیچے دیا گیا ہے۔
ہٹاؤ کے قدر کو محسوب کیجئے۔



حل :

$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ کے ساتھ ہٹاؤ کی سمتیہ یہ ہے۔

$$\vec{r}_1 = \hat{i} + \hat{j} \quad \text{اور} \quad \vec{r}_2 = 4\hat{i} + 2\hat{j}$$
$$\therefore \Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \left(4\hat{i} + 2\hat{j}\right) - \left(\hat{i} + \hat{j}\right)$$
$$= (4-1)\hat{i} + (2-1)\hat{j}$$
$$\therefore \Delta\vec{r} = 3\hat{i} + \hat{j}$$

ہٹاؤ کی سمتیہ کی قدر

$$\Delta r = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} \text{ unit.}$$

نوٹ

(i) ایک دئے گئے وقت میں حرکت کرتی ہوئی ایک شئے سے طے کردہ فاصلہ کبھی بھی منفی یا صفر نہیں ہوسکتا بلکہ ہمیشہ ایک مثبت قیمت ہی رکھے گا۔

(2) ایک دئے گئے وقفہ میں شئے کا ہٹاؤ، مثبت، منفی یا صفر بھی ہوسکتا ہے۔

(3) ایک شئے کا ہٹاؤ اس سے طے کردہ فاصلہ سے کم یا برابر ہوسکتا ہے۔ طے کردہ فاصلہ سے زیادہ نہیں ہوسکتا۔

(4) ایک شئے سے طے کئے جانے والے، دو مقامات کے درمیانی فاصلے کی ایک سے زیادہ قیمتیں حاصل کی جاسکتی ہیں مگر ان کے درمیان ہٹاؤ کی قدر کی صرف ایک ہی قیمت پائی جاتی ہے۔

2.8 تفرقی احصاء (Differential calculus)

ایک تفاعل کا مفہوم (The Concept of a Function)

1) ریاضیات میں کسی طبیعی مقدار کی نمائندگی ایک تفاعل (Function) سے کی جاتی ہے۔ تپش T کی مثال ہی کو لے لیجئے۔ ہم جانتے ہیں کہ ہمارے اطراف کی تپش دن بھر تبدیل ہوتے رہتی ہے وہ زوال آفتاب تک بڑھتے رہتی ہے اور شام میں کم ہونے لگتی ہے۔

11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:30 PM

't' وقت پر تپش T کی ایک مخصوص قیمت ہوتی ہے۔اس تغیر کو ریاضیاتی طور پر 'T(t)' کی اصطلاح سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اسے اس طرح پڑھنا چاہئے۔''وقت کے تفاعل کے طور پر تپش''

(Temperature as a Function of time) اس کا مطلب یہ ہے کہ اگر وقت کی قیمت دے دی جائے تو وہ تفاعل T (t)، میں دئے گئے وقت 't' پر تپش کی قیمت کی وضاحت کرے گا، اسی طرح x سمت میں حرکت کرنے والی ایک بس کے مقام کو X(t) سے ظاہر کیا جاسکتا ہے اور اسے وقت کے تفاعل کے طور پر 'x' کہتے ہیں۔ یہاں 'x'، x محدد کی نمائندگی کرتا ہے۔

مثال:

ایک تفاعل $f(x) = x^2$ کا تصور کیجئے۔کبھی کبھی اسے $y = x^2$ کے طور پر بھی ظاہر کیا جاتا ہے۔ یہاں y منحصر متغیر کہلاتا ہے اور x غیر منحصر متغیر کہلاتا ہے۔اس کا مطلب یہ ہے کہ x کے تبدیل ہونے پر y بھی تبدیل ہوتا ہے۔ایک مرتبہ اگر کوئی طبیعی مقدار کسی تفاعل سے ظاہر کردی جاتی ہے تو پھر کوئی بھی شخص وقت یا کوئی بھی غیر منحصر مغیر کے ساتھ ہونے والے تغیرات کا مطالعہ کرسکتا ہے۔جس پر وہ مقدار منحصر ہے۔، احصاء (calculus) ریاضیات کی ایک شاخ ہے جو کسی مقدار کی تبدیلی کے جانچ میں استعمال ہوتی ہے۔

اگر ایک تفاعل y= f(x) کے طور پر پیش کیا جاتا ہے تو پھر dy/dx، x کے لحاظ سے y کے مشتق (حاصل) (derivative) کو ظاہر کرتا ہے۔ریاضیاتی طور پر یہ x کی مختلف مسلسل قیمتوں کے لئے، x میں ہونے والی تبدیلی کے لحاظ سے y کے تغیر کو ظاہر کرتا ہے۔

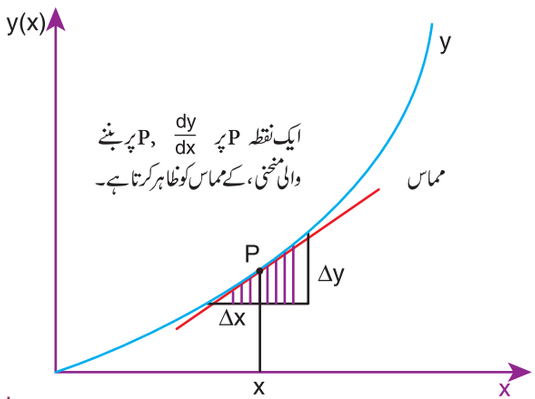
ریاضیاتی طور پر مشتق dy/dx کی تعریف اس طرح کی جاتی ہے۔

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$\frac{dy}{dx}$ اس حد کو ظاہر کرتا ہے جو کہ مقدار $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ سے Δx tends to zero (صفر کی طرف مائل ہوجانے) کے طور پر حاصل کیا جاتا ہے۔

خاکہ 2.28 میں اسے ترسیمی طور پر ظاہر کیا گیا ہے۔



خاکہ 2.28 ایک تفاعل کا حاصل

مثال 2.18

تفاعل $y = x^2$ فرض کیجئے نقطہ $x = 2$ پر، حد کے تصور کا استعمال کرتے ہوئے مشتق $\frac{dy}{dx}$ معلوم کیجئے۔

حل:

آیئے یہ اس طرح کے دو نقاط فرض کریں۔

اگر ہم $x_1 = 2$ اور $x_2 = 3$ ، تو $y_1 = 4$ اور $y_2 = 9$ ہوگا۔ یہاں $\Delta x = 1$ اور $\Delta y = 5$

تو $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9-4}{3-2} = 5$

اگر ہم $x_1 = 2$ اور $x_2 = 2.5$ ، تو $y_1 = 4$ اور $y_2 = (2.5)^2 = 6.25$ ہوگا۔

یہاں $\Delta x = 0.5 = \frac{1}{2}$ اور $y = 2.25$

تو $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6.25-4}{0.5} = 4.5$

11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:31 PM

اگر ہم $x_1 = 2$ اور $x_2 = 2.25$ ، تو $y_1 = 4$ اور $y_2 = 5.0625$ ہوگا۔

یہاں پر $\Delta x = 0.25 = \frac{1}{4}$, $\Delta y = 1.0625$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5.0625-4}{0.25} = \frac{(5.0625-4)}{\frac{1}{4}}$$
$$= 4(5.0625-4) = 4.25$$

اگر ہم $x_1 = 2$ اور $x_2 = 2.1$ ، تو $y_1 = 4$ اور $y_2 = 4.41$ ہوگا۔

یہاں پر $\Delta x = 0.1 = \frac{1}{10}$ اور

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(4.41-4)}{\frac{1}{10}} = 10(4.41-4) = 4.1$$

ان نتائج کی جدول بندی یوں کی جاتی ہے۔

x_1	x_2	Δx	y_1	y_2	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
2	2.25	0.25	4	5.0625	4.25
2	2.1	0.1	4	4.41	4.1
2	2.01	0.01	4	4.0401	4.01
2	2.001	0.001	4	4.004001	4.001
2	2.0001	0.0001	4	4.00040001	4.0001

اوپر کے جدول سے مندرجۂ ذیل باتیں اخذ کی جاسکتی ہیں۔

- جیسے جیسے Δx ،صفر کی طرف مائل ہوتا ہے $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ کی قیمت عدد 4 سے دی جانے والی حد کی طرف بڑھتی ہے۔
- ایک نقطہ $x = 2$ پر مشتق $\frac{dy}{dx} = 4$ ہے۔
- یہاں یہ بتانا ضروری ہے کہ $\Delta x \to 0$ کا مطلب $\Delta x = 0$ تو نہیں ہے۔

یہ اس لئے کہ اگر ہم $\Delta x = 0$ کو حل کرتے ہیں،
تو $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ کی قیمت غیر متعین ہوجاتی ہے۔
عام طور پر ہم تفاعل $y = x^2$ کے مشتق کو اس طرح حاصل کرسکتے ہیں۔

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x}$$
$$= \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x = 2x$$

مندرجۂ ذیل جدول، طبیعیات میں استعمال ہونے والے چند عام تفاعل کے مشتقات (حاصلات) کو ظاہر کرتا ہے۔

Function تفاعل	Derivative مشتق (حاصل)
$y = x$	$dy/dx = 1$
$y = x^2$	$dy/dx = 2x$
$y = x^3$	$dy/dx = 3x^2$
$y = x^n$	$dy/dx = nx^{n-1}$
$y = \sin x$	$dy/dx = \cos x$
$y = \cos x$	$dy/dx = -\sin x$
$y =$ constant	$dy/dx = 0$
$y = AB$ مستقلہ	$\frac{dy}{dx} = A\left(\frac{dB}{dx}\right) + \left(\frac{dA}{dx}\right)B$

طبیعیات میں سمتی رفتار، رفتار اور اسراع یہ تمام وقت 't' کے لحاظ سے مشتقات (حاصل کردہ) ہیں۔ اس کے بارے میں ہم اگلے حصہ میں پڑھیں گے۔

مثال 2.19

وقت 't' کے لحاظ سے تفاعل $x = A_0 + A_1 t + A_2 t^2$ کے مشتق معلوم کیجئے، جہاں A_0 اور A_1، اور A_2 مستقلات ہیں۔

حل:

نوٹ کیجئے کہ یہاں 't' غیر منحصر متغیر اور 'x' منحصر متغیر ہے۔

11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:31 PM

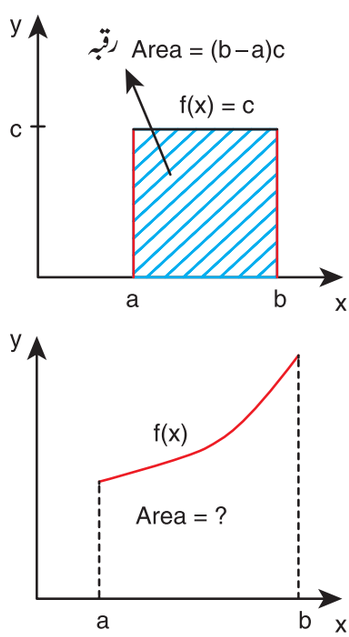
درکار مشتق یہ ہے $dx/dt = 0 + A_1 + 2A_2 t$

دوسرا مشتق یہ ہے $d^2x/dt^2 = 2A_2$

2.9 احصائے تکملات (مربوطی احصاء)
(Integral calculus)

تکمیلیت (یا) مربوطیت (Integration) رقبہ معلوم کرنے کا ایک مرحلہ ہے۔ چند ہندسی شکلوں کا رقبہ ہم براہ راست معلوم کر سکتے ہیں، مگر غیر متعین شکلوں کا رقبہ معلوم کرنے کے لئے مربوطیت (یا) تکمیلیت کا طریقہ استعمال کیا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر ایک مستطیل اور ایک غیر متعین منحنی شکل کے رقبوں پر غور کیجئے جیسا کہ خاکہ 2.29 میں بتایا گیا ہے۔

مستطیل کے رقبہ کو A = چوڑائی × لمبائی = (b–a)c کے طور پر حاصل کرلیا جاتا ہے۔



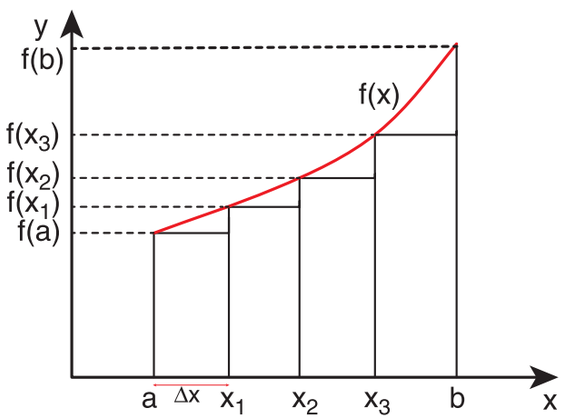
خاکہ 2.29 مستطیل اور غیر متعین شکل کا رقبہ

مگر f(x) سے دئے گئے غیر متعین منحنی کی شکل کا رقبہ معلوم کرنے کے لئے ہم اس رقبہ کو مستطیلی ٹکڑوں میں تقسیم کر دیتے ہیں جیسا کہ خاکہ 2.30 میں بتایا گیا ہے۔

منحنی کے نچلے حصہ کا رقبہ، ہر مستطیلی ٹکڑے کے رقبوں کے مجموعے کے تقریباً برابر ہوتا ہے۔

اسے اس طرح پیش کیا جاتا ہے۔

$$A \approx f(a)\,\Delta x + f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + f(x_3)\Delta x$$



خاکہ 2.30 مستطیلی ٹکڑے کے استعمال سے منحنی کے نچلے حصے کا رقبہ

جہاں $f(a)$ تفاعل، $x=a$ پر $f(x)$ کی قیمت ہے۔ $x = x_1$ کے لئے $f(x)$ کی قیمت $f(x_1)$ ہے، اور اسی طرح یہ سلسلہ جاری رہتا ہے۔

جیسے جیسے ہم ان ٹکڑوں کی تعداد کو بڑھاتے جاتے ہیں، ہمیں رقبہ کی اور درست قیمت حاصل ہوتی ہے۔ اگر منحنی کے نچلے رقبے کو N ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں تو منحنی کا نچلا رقبہ یوں پیش کیا جائے گا۔

$$A = \sum_{n=1}^{N} f(x_n)\,\Delta x$$

جب یہ تعداد لامحدود (infinity) بن جاتی ہے $N \to \infty$

تو وہ مجموعہ ایک مربوطیہ (integral) بن جاتا ہے۔

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

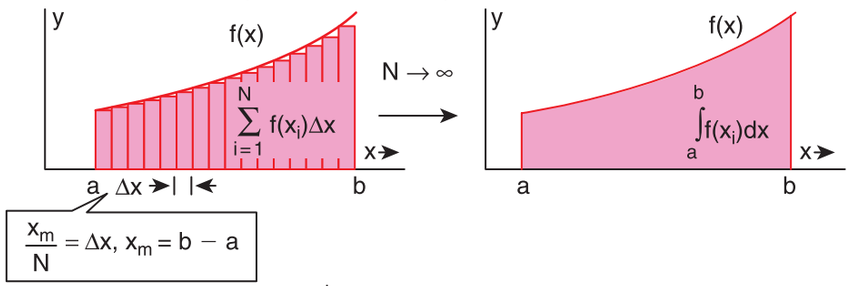
نوٹ : جیسا کہ $N \to \infty,\ \Delta x \to 0$

یہ مربوطیت منحنی f (x) کے کل نچلے حصے کا رقبہ پیش کرے گی۔

اسے خاکہ 2.31 میں بتایا گیا ہے۔

11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:32 PM

$\Delta x \to 0$ کی حد کے طور پر مجموعہ ایک مربوطیہ بن جاتا ہے۔



رقبہ $\text{Area} = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\Delta x$

خاکہ 2.31 حاصل جمع اور مربوطیت کا تعلق

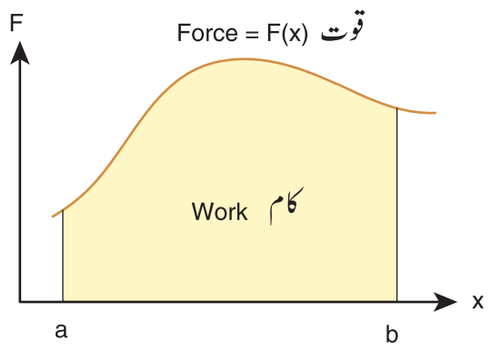
مثالیں

طبیعیات میں کسی شئے کو ابعادی طور پر ایک مقام 'a' سے 'b' تک ہٹانے کے لئے ایک قوت $F(x)$ کے ذریعہ اس پر کئے گئے کام کو یوں پیش کیا جاتا ہے۔

$$W = \int_a^b F(x)\,dx$$

(یہاں چونکہ حرکت یک بُعدی ہے، یہاں قدری اشیاء کی ضرورت نہیں پڑتی)۔

(1) خاکہ 2.32 میں بتائی گئی ترسیم کے مطابق قوت، ہٹاؤ کی ترمیم کا نچلا رقبہ ہی کیا گیا کام ہے۔

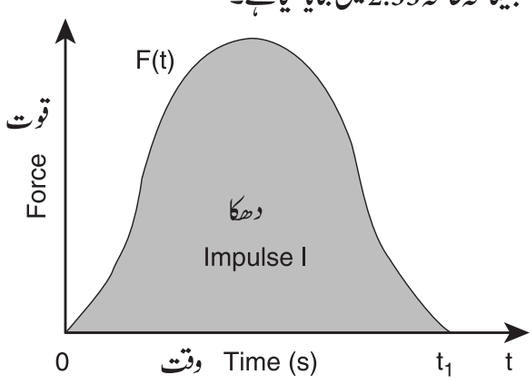


خاکہ 2.30 قوت سے کیا گیا کام

(2) وقت کے ایک وقفے میں قوت سے دیا گیا دھکا، $t = 0$ سے $t = t_1$ تک کے وقفے کے حساب سے معلوم کیا جاتا ہے۔

دھکا $\text{Impulse } I = \int_0^{t_1} F dt$

قوت کا تفاعل $F(t)$-t ترسیم کا نچلا رقبہ، دھکا کو ظاہر کرتا ہے، جیسا کہ خاکہ 2.33 میں بتایا گیا ہے۔



خاکہ 2.33 ایک قوت کا دھکا

اوسط سمتی رفتار: (Average velocity)

ایک ذرہ کا تصور کیجئے جو شروع میں مقامی سمتیہ $\vec{r}_1$ والے ایک نقطہ P پر ہے۔ وقت کے ایک وقفے Δt میں، وہ ذرہ مقامی سمتیہ $\vec{r}_2$ رکھنے والے ایک نقطہ Q پر چلا جاتا ہے۔ ہٹاؤ کی سمتیہ $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ ہے۔ اسے خاکہ 2.34 میں بتایا گیا ہے۔

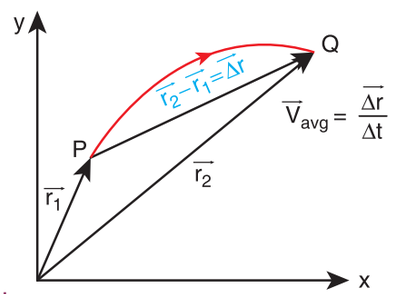
11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:32 PM

اوسط سمتی رفتار کی تعریف یوں کی جاتی ہے کہ، یہ ہٹاؤ کی سمتیہ کا اس سے متعلقہ وقتی وقفے کے ساتھ نسبت ہے۔

$$\vec{v}_{avg} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

یہ ایک سمتی مقدار ہے۔ اوسط سمتی رفتار کی سمت ہٹاؤ کی سمتیہ $(\Delta \vec{r})$ کی سمت میں ہوتی ہے۔

خاکہ 2.34 میں اسے بھی بتایا گیا ہے۔



خاکہ 2.34 اوسط سمتی رفتار

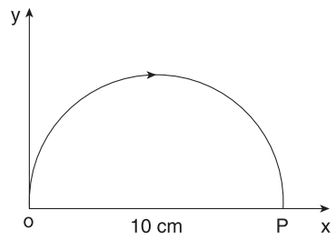
اوسط رفتار (Average speed)

اوسط رفتار کی تعریف یوں کی جاتی ہے کہ یہ ایک دیے گئے وقفے میں ایک ذرہ سے طے کئے جانے والے کل فاصلے کی نسبت ہے۔

$$\text{اوسط رفتار} = \frac{\text{راستے کی کل لمبائی}}{\text{کل وقت}}$$

مثال 2.20

ایک نصف دائری راستے میں حرکت کرتی ہوئی ایک شئے کا تصور کیجئے، جو 5 سکنڈ میں 'O' نقطہ سے P نقطہ تک پہنچتی ہے، جیسا کہ نیچے دیے گئے خاکہ میں بتایا گیا ہے۔ اوسط سمتی رفتار اور اوسط رفتار معلوم کیجئے۔



حل:

$$\text{اوسط سمتی رفتار} \quad \vec{v}_{avg} = \frac{\vec{r}_P - \vec{r}_O}{\Delta t}$$

یہاں $\Delta t = 5\ s$

$$\vec{r}_O = 0, \vec{r}_P = 10\hat{i}$$

$$\vec{v}_{avg} = \frac{10\hat{i}\ cm}{5\ s} = 2\hat{i}\ cm\ s^{-1}.$$

اوسط سمتی رفتار، مثبت x کی سمت میں ہے۔

$$\text{اوسط سمتی رفتار} = \frac{\text{راستہ کی کل لمبائی (راستہ نصف دائری ہے)}}{\text{لیا گیا وقت}}$$

$$= \frac{5\pi\ cm}{5\ s} = \pi\ cm\ s^{-1} \approx 3.14\ cm\ s^{-1}$$

نوٹ کیجئے کہ اوسط رفتار کی مقدار، اوسط سمتی رفتار کی قدر سے زیادہ ہے۔

بروقتہ (فوری) سمتی رفتار (یا) سمتی رفتار
(Instantaneous velocity of velocity)

بر وقتہ سمتی رفتار جسے سادہ طور پر سمتی رفتار کہتے ہیں، اس کی تعریف یوں کی جاتی ہے کہ یہ t وقت پر جانچے گئے اوسط سمتی رفتار کی حدی قیمت (Limiting value) $\Delta x \to 0$ ہے۔

بالفاظ دیگر سمتی رفتار، وقت کے لحاظ سے مقامی سمتیہ کی تبدیلی کی شرح کے برابر ہوتی ہے۔

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

جزوی طور پر یہ سمتی رفتار کچھ اس طرح ہوتی ہے۔

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}\right)$$

$$= \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}.$$

یہاں $\frac{dx}{dt} = v_x = x$ سمتی رفتار کا جز

11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:32 PM

$$\frac{dy}{dt} = v_y = y - \text{سمتی رفتار کا جزء}$$

$$\frac{dz}{dt} = v_z = z - \text{سمتی رفتار کا جزء}$$

سمتی رفتار v کی قدر، رفتار کہلاتی ہے اور وہ یوں پیش کی جاتی ہے۔

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

رفتار ہمیشہ ایک مثبت قدر یہ ہوتی ہے۔ رفتار کی اکائی بھی میٹر فی سکنڈ ہے۔

مثال 2.21

ایک ذرہ کی مقامی سمتیہ دی گئی ہے۔

$\vec{r} = 2t\,\hat{i} + 3\,t^2\,\hat{j} - 5\,\hat{k}.$

(a) کسی بھی وقفہ t پر ذرہ کی سمتی رفتار اور رفتار معلوم کیجئے۔

(b) وقفہ t=2s پر ذرہ کی سمتی رفتار اور رفتار معلوم کیجئے۔

حل:

سمتی رفتار $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2\hat{i} + 6t\hat{j}$

رفتار $v(t) = \sqrt{2^2 + (6t)^2}\ ms^{-1}$

$t = 2$ s پر ذرہ کی سمتی رفتار

$$\vec{v}(2sec) = 2\hat{i} + 12\hat{j}$$

$t = 2$ s پر ذرہ کی رفتار

$$v(2\,s) = \sqrt{2^2 + 12^2} = \sqrt{4 + 144}$$
$$= \sqrt{148} \approx 12.16\,m\,s^{-1}$$

نوٹ کیجئے کہ ذرہ کے اجزائے سمتی رفتار x اور y کی سمتوں کے ماتحت ہیں۔ Z سمت میں شئے کی مقامی قیمت مستقل (5−) ہے، جو وقت پر غیر منحصر ہے۔ لہذا سمتی رفتار کے لئے کوئی z− جزء نہیں ہے۔

مثال 2.22

نیچے A, B اور C تین ذرات کی سمتی رفتار دی گئی ہے۔
کون سا ذرہ سب سے تیز سفر کرتا ہے ؟

$$\overrightarrow{v_A} = 3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$$
$$\overrightarrow{v_B} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$$
$$\overrightarrow{v_C} = 5\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$$

حل:

ہم جانتے ہیں کہ رفتار، سمتی رفتار کی قدری مقدار ہے۔ لہذا

A کی رفتار $= \left|\overrightarrow{v_A}\right| = \sqrt{(3)^2 + (-5)^2 + (2)^2}$
$= \sqrt{9 + 25 + 4} = \sqrt{38}\ \text{m s}^{-1}$

B کی رفتار $= \left|\overrightarrow{v_B}\right| = \sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (3)^2}$
$= \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}\ \text{m s}^{-1}$

C کی رفتار $= \left|\overrightarrow{v_C}\right| = \sqrt{(5)^2 + (3)^2 + (4)^2}$
$= \sqrt{25 + 9 + 16} = \sqrt{50}\ \text{m s}^{-1}$

ذرہ C میں سب سے تیز رفتار پائی جاتی ہے۔

$$\sqrt{50} > \sqrt{38} > \sqrt{14}$$

مثال 2.23

دو کاریں، $\vec{v}_1 = 10\,m\,s^{-1}$ اور $\vec{v}_2 = 10\,m\,s^{-1}$ کی بالترتیب سمتی رفتاروں کے ساتھ، مشرق اور مغرب کی طرف سفر کر رہی ہیں۔ ان کاروں کی رفتاریں کیا ہیں؟

حل:

دونوں کاروں میں سمتی رفتار کی قدری مقدار مساوی ہے۔ اس سے پتہ چلتا ہے کہ ان کی سمتی رفتاروں کے مختلف سمتوں کے باوجود دونوں

11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:32 PM

کاریں مساوی رفتار کے ساتھ سفر کر رہی ہیں۔ رفتار حرکت کی سمت ظاہر نہیں کر سکتی۔



رفتار پیما (Speedometer)

معیار حرکت: (Momentum)

ایک ذرہ کی خطی معیار حرکت یا سادہ طور پر معیار حرکت کی تعریف یوں کی جاتی ہے کہ یہ کمیت اور سمتی رفتار کا حاصل ضرب ہے۔ اسے $\vec{p}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ معیار حرکت بھی ایک سمتی مقدار ہے۔

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

معیار حرکت کی سمت بھی سمتی رفتار کی سمت ہی میں ہوتی ہے۔ اور معیار حرکت کی قدری مقدار ذرہ کی کمیت اور رفتار کے حاصل ضرب کے برابر ہوتی ہے۔

$$p = mv$$

معیار حرکت کو اس کے اجزائی شکل میں اس طرح لکھا جا سکتا ہے۔

$$p_x\hat{i} + p_y\hat{j} + p_z\hat{k} = mv_x\hat{i} + mv_y\hat{j} + mv_z\hat{k}$$

یہاں $p_x = x$، معیار حرکت کا x جزء ہے، جو mv_x کے برابر ہے۔

یہاں $p_y = y$، معیار حرکت کا y جزء ہے، جو mv_y کے برابر ہے۔

یہاں $p_z = z$، معیار حرکت کا z جزء ہے، جو mv_z کے برابر ہے۔

ایک ذرہ کی معیار حرکت، نیوٹن کے کلیوں میں بہت ہی اہم کردار ادا کرتی ہے۔ مندرجۂ ذیل مثال سے معیار حرکت کی طبیعی اہمیت کو بخوبی سمجھا جا سکتا ہے۔

ایک تتلی اور پتھر کا تصور کیجئے جو $5\ ms^{-1}$ کی مساوی سمتی رفتار کے ساتھ آپ کی طرف حرکت کر رہے ہیں۔ اگر یہ دونوں آپ کے جسم سے ٹکرا دیں تو ان کے اثرات ایک جیسے نہیں ہوں گے۔ یہ اثرات صرف سمتی رفتار پر منحصر نہیں ہوتے بلکہ ان کی کمیتوں پر بھی منحصر ہوتے ہیں۔ تتلی کے مقابلے میں پتھر کی کمیت زیادہ ہوتی ہے، لہذا اس کی معیار حرکت بھی تتلی کے مقابلے میں زیادہ ہوتی ہے۔ یہ معیار حرکت ہی ہے جو شئے کی حرکت کی حالت کی وضاحت کرنے میں اہم کردار ادا کرتی ہے۔

معیار حرکت کی اکائی $kg\ ms^{-1}$ ہے۔

مثال 2.24

ایک ہی رفتار $10\ ms^{-1}$ سے حرکت کرنے والی، دو کمیتیں $10\ g$ اور $1\ kg$ ہے۔ فرض کیجئے، ان کی معیار حرکت کی قدر محسوب کیجئے۔

حل: ہم استعمال کرتے ہیں۔ $p = mv$

$10\ g = 0.01\ kg$ کمیت کے لئے

$$p = 0.01 \times 10 = 0.1\ kg\ m\ s^{-1}$$

$1\ kg$ کمیت کے لئے

$$p = 1 \times 10 = 10\ kg\ m\ s^{-1}$$

لہذا، دونوں کمیتوں کی رفتار مساوی رہنے کے باوجود وزن دار کمیت کی معیار حرکت ہلکی کمیت کی معیار حرکت سے 100 گنا زیادہ ہے۔

2.10 یک بُعدی حرکت (Motion along one dimension)

2.10.1 اوسط سمتی رفتار (Average velocity)

اگر ایک ذرہ ایک بُعد (dimension) فرض کیجئے x سمت) میں حرکت کرتا ہے تو پھر

$$\text{اوسط سمتی رفتار} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}.$$

11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:33 PM

اوسط سمتی رفتار بھی ایک سمتی مقدار ہے۔ مگر یک بُعدی (one dimension) میں ہمارے پاس صرف دو سمتیں (مثبت x سمت اور منفی x سمت) ہی پائی جاتی ہیں۔ اس لئے ہم سمت کو ظاہر کرنے کے لئے مثبت اور منفی علامت کا استعمال کرتے ہیں۔

بروقتہ (فوری) (instantaneous) سمتی رفتار یا سمتی رفتار کی تعریف یوں کی جاتی ہے۔

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

ترسیمی طور پر مقام وقت کی ترسیم کا ڈھلاؤ، ذرہ کی سمتی رفتار فراہم کرے گا۔ اسی طرح اگر سمتی رفتار۔ وقت کی ترسیم دی گئی ہو تو منحنی کے نچلے حصے کا رقبہ معلوم کر کے فاصلہ اور ہٹاؤ کا تعین کیا جا سکتا ہے۔ اس کی وضاحت نیچے کی گئی ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ سمتی رفتار یوں پیش کی جاتی ہے۔ $\frac{dx}{dt} = v$

لہذا ہم یہ لکھ سکتے ہیں۔ $dx = v\,dt$

طرفین کو مربوط کرنے پر ہم حاصل کر سکتے ہیں۔

$$\int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{t_1}^{t_2} v\,dt .$$

جیسا کہ پہلے بھی دیکھا گیا، مربوطیت، دی گئی منحنی کے نچلے رقبہ کے مساوی ہوتی ہے۔ لہذا اصطلاح $\int_{t_1}^{t_2} v\,dt$ وقت کے ایک تفاعل کے طور پر منحنی v کے نچلے رقبہ کو ظاہر کرتی ہے۔

چونکہ مربوطیت کا بائیں طرف کا حصہ، ذرہ کے ذریعہ t_1 سے t_2 تک کے وقت میں طے کیا گیا ہٹاؤ کو ظاہر کرتا ہے۔ سمتی رفتار۔ وقت کی ترسیم کا نچلا رقبہ، ذرہ کا ہٹاؤ فراہم کرے گا۔ اگر رقبہ منفی ہو تو اس کا مطلب یہ ہے کہ ہٹاؤ منفی ہے۔ لہذا وہ ذرہ منفی سمت میں سفر کیا ہے۔ اسے نیچے خاکہ 2.35 میں بتایا گیا ہے۔

مثال 2.25

ایک ذرہ x- محور کے تحت اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اس کا محدد (Co-ordinate)، مساوات $x = 2 - 5t + 6t^2$ کے مطابق کے لحاظ سے تغیر پاتا ہے۔ ذرہ کی ابتدائی سمتی رفتار کیا ہے؟

حل:

$$x = 2 - 5t + 6t^2$$

سمتی رفتار $\quad v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(2 - 5t + 6t^2)$

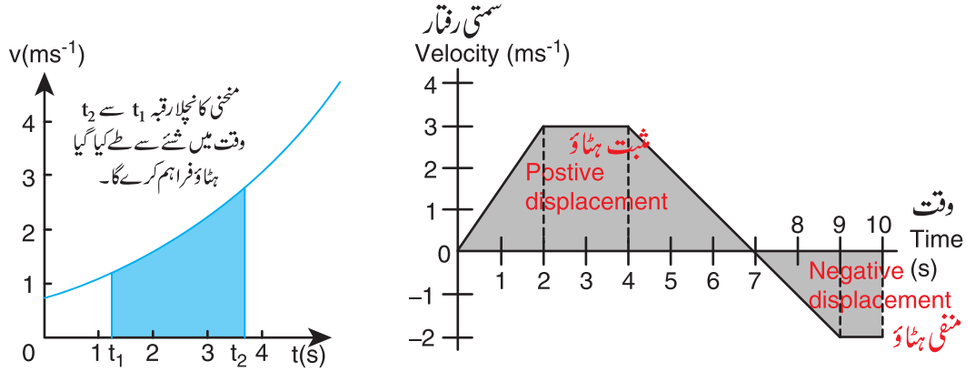
$$\text{or } v = -5 + 12t$$

ابتدائی سمتی رفتار کے لئے $\quad t = 0$

ابتدائی سمتی رفتار $= -5 \text{ms}^{-1}$

منفی علامت یہ ظاہر کرتی ہے کہ $t = 0$ وقفے پر ذرہ کی سمتی رفتار منفی x- سمت کے مطابق ہے۔

$$\text{اوسط رفتار} = \frac{\text{راستے کی کل لمبائی}}{\text{کل وقتی وقفہ}}$$



خاکہ 2.35 سمتی رفتار۔ وقت کی ترسیم میں ہٹاؤ

11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:33 PM

2.10.2 ایک اور دو ابعادی حرکت میں نسبتی سمتی رفتار
(Relative Velocity in one and Two Dimentional Motion)

جب دو اشیاء A اور B مختلف سمتی رفتاروں کے ساتھ حرکت کر رہی ہوتی ہیں، تو دوسری شئے B کے لحاظ سے پہلی شئے A کی سمتی رفتار B کے لحاظ سے A کی نسبتی سمتی رفتار کہلاتی ہے۔

صورت حال 1:

A اور B دو اشیاء فرض کیجئے جو V_A اور V_B کی مساوی سمتی رفتاروں کے ساتھ، زمین کے لحاظ سے ایک ہی سمت $\vec{V}_A$ ، $\vec{V}_B$ میں ایک سیدھے راستے کے تحت حرکت کر رہے ہیں۔

شئے B کے لحاظ سے شئے A کی نسبتی سمتی رفتار یہ ہے۔

$$\vec{V}_{AB} = \vec{V}_A - \vec{V}_B$$

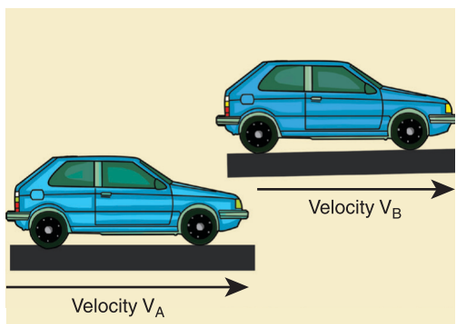
شئے A کے لحاظ سے شئے B کی نسبتی سمتی رفتار یہ ہے۔

$$\vec{V}_{BA} = \vec{V}_B - \vec{V}_A$$

لہذا، اگر دو اشیاء ایک ہی سمت میں حرکت کر رہے ہوں تو ایک شئے کے لحاظ سے دوسری شئے کی نسبتی سمتی رفتار دو سمتی رفتاروں کی قدر کے فرق کے برابر ہوتی ہے۔

مثال 2.26

فرض کیجئے دو کاریں A اور B متوازی سڑکوں پر، ایک ہی سمت میں، زمین کے لحاظ سے یکساں سمتی رفتاروں کے ساتھ حرکت کر رہی ہیں۔ فرض کیجئے کہ A اور B کی سمتی رفتاریں بالترتیب $35\ km\ h^{-1}$ مشرقی جانب اور $40\ km\ h^{-1}$ مشرقی جانب ہیں۔ کار A کے لحاظ سے کار B کی نسبتی رفتار کیا ہے؟



حل:

کار A کے لحاظ سے کار B کی نسبتی سمتی رفتار یہ ہے۔

$\vec{v}_{BA} = \vec{v}_B - \vec{v}_A = 5\ km\ h^{-1}$ مشرق کی طرف

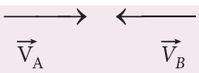
اسی طرح کار A کے لحاظ سے کار B کی نسبتی سمتی رفتار کیا ہے۔

$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B = 5\ km\ h^{-1}$ مغرب کی طرف

کار A میں بیٹھے ہوئے مسافر کے لئے کار B مشرق کی جانب $5\ km\ h^{-1}$ کی سمتی رفتار سے سفر کرتی ہوئی نظر آئے گی اور اسی طرح کار B میں بیٹھے ہوئے ایک مسافر کے لئے، کار A، مغرب کی جانب 5 کلومیٹر فی گھنٹہ کی سمتی رفتار سے سفر کرتی ہوئی نظر آئے گی۔

صورت حال 2:

ایک ہی سیدھے سڑک مگر مخالف سمتوں پر، V_A اور V_B سمتی رفتاروں کے ساتھ حرکت کرنے والی دو اشیاء کا تصور کیجئے۔



شئے B کے لحاظ سے شئے A کی نسبتی سمتی رفتار یہ ہے۔

$$\vec{V}_{AB} = \vec{V}_A - (-\vec{V}_B) = \vec{V}_A + \vec{V}_B$$

شئے A کے لحاظ سے B کی نسبتی سمتی رفتار یہ ہے۔

$$\vec{V}_{BA} = -\vec{V}_B - \vec{V}_A = -(\vec{V}_A + \vec{V}_B)$$

لہذا، اگر دو اشیاء ایک دوسرے کی مخالف سمتوں پر حرکت کر رہی ہیں تو ان میں سے ایک دوسرے کے لحاظ سے ایک دوسرے کی نسبتی سمتی رفتار ان کی سمتی رفتاروں کے قدر کے مجموعے کے برابر ہوتی ہے۔

صورت حال 3 :

سمتی رفتاریں $\vec{v}_A$ اور $\vec{v}_B$ کا تصور کیجئے جو ان کی سمتوں کے درمیانی زاویے θ پر ہیں۔

B کے لحاظ سے A کی نسبتی سمتی رفتار یہ ہے۔

$$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$$

11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:34 PM

پھر V_{AB} کی قدر اور سمت یوں پیش کی جاتی ہے۔

$$v_{AB} = \sqrt{v_A^2 + v_B^2 - 2\, v_A v_B \cos\theta}$$ اور

$$\tan\beta = \frac{v_B \sin\theta}{v_A - v_B \cos\theta}$$

(یہاں $\vec{v}_{AB}$ اور $\vec{v}_B$ کا درمیانی زاویہ β ہے۔)

(i) جب $\theta = 0°$ ہو تو اجسام ایک ہی سمت میں متوازی سیدھی خطوط میں حرکت کرتے ہیں۔

ہمیں $\vec{v}_A$ کی سمت میں $V_{AB} = (V_A - V_B)$ حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح $\vec{v}_B$ کی سمت میں $V_{BA} = (V_B - V_A)$ حاصل ہوتا ہے۔

(ii) جب $\theta = 180°$ ہو تو اجسام مخالف سمتوں میں متوازی سیدھی خطوط میں حرکت کرتے ہیں۔

ہم $V_{AB} = (V_A + V_B)$ کی سمت میں $\vec{v}_A$ رکھتے ہیں۔

اسی طرح $V_{BA} = (V_B + V_A)$ کی سمت میں $\vec{v}_B$ رکھتے ہیں۔

(iii) اگر دو اجسام ایک دوسرے کے زاویۂ قائمہ پر حرکت کرتے ہیں تو پھر $\theta = 90°$ ہوگا۔ B کے لحاظ سے A کی نسبتی سمتی رفتار کی قدر یہ ہوگی۔

$$B = v_{AB} = \sqrt{v_A^2 + v_B^2}$$

(iv) فرض کیجئے کہ ایک شخص $\vec{V}_M$ سمتی رفتار کے ساتھ افقی طور پر حرکت کر رہا ہے۔ فرض کیجئے کہ $\vec{V}_R$ سمتی رفتار کے ساتھ عمودی طور پر بارش ہو رہی ہے تو پھر اس شخص کے لحاظ سے بارش کی نسبتی سمتی رفتار یہ ہوگی۔ (خاکہ 2.36)

$$\vec{V}_{RM} = \vec{V}_R - \vec{V}_M$$

جس کی قدر یہ ہے۔

$$V_{RM} = \sqrt{V_R^2 + V_M^2}$$

اور اس کی سمت عمودی طور پر $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{V_M}{V_R}\right)$ ہوگی جیسا کہ خاکہ 2.36 میں بتایا گیا ہے۔

اس شخص کو اپنے آپ کو بارش سے بچانے کے لئے چھتری کو عمود کے ساتھ θ کے زاویے پر تھامنا پڑے گا۔

مثال 2.27

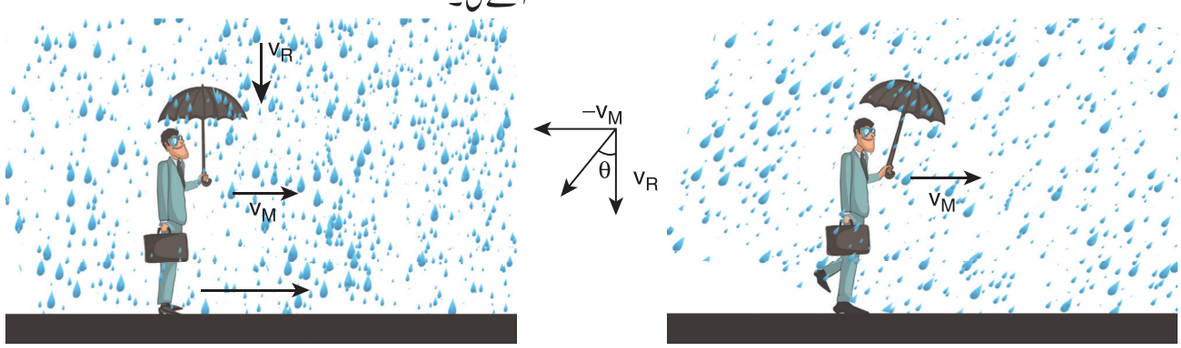
فرض کیجئے کہ دو ریل گاڑیاں A اور B متوازی پٹریوں پر مگر مخالف سمتوں میں، یکساں سمتی رفتاروں کے ساتھ حرکت کر رہی ہیں۔ فرض کیجئے کہ ریل گاڑی A کی سمتی رفتار مشرقی جانب $40\ km\ h^{-1}$ ہے، اور B کی سمتی رفتار مغربی جانب $40\ km\ h^{-1}$ ہے۔ ریل گاڑیوں کی نسبتی سمتی رفتاریں معلوم کیجئے۔

حل:

B کے لحاظ سے A کی نسبتی سمتی رفتار مشرقی جانب

$v_{AB} = 80\ km\ h^{-1}$ ہے۔

لہذا ریل گاڑی A میں بیٹھے ہوئے ایک مسافر کو ریل گاڑی B مشرق کی جانب $80\ km\ h^{-1}$ کی رفتار سے سفر کرتی ہوئی نظر آئے گی۔



خاکہ 2.36 بارش کے لحاظ سے چھتری کا زاویہ

11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:35 PM

A کے لحاظ سے B کی نسبتی سمتی رفتار مغربی جانب یہ ہے۔

$$V_{BA} = 80 \text{ km h}^{-1}$$

لہذا ریل گاڑی B میں بیٹھے ہوئے ایک مسافر کو ریل گاڑی A مغربی جانب 80 km h^{-1} کی رفتار سے سفر کرتی ہوئی محسوس ہوگی۔

مثال 2.28

دو ریل گاڑیاں A اور B کا تصور کیجئے جو متوازی پٹریوں پر ایک ہی سمت میں یکساں سمتی رفتاروں کے ساتھ حرکت کر رہے ہیں۔ فرض کیجئے کہ ہر گاڑی کی سمتی رفتار مشرقی جانب 50 km h^{-1} ہے۔ ان ریلوں کی نسبتی سمتی رفتاریں معلوم کیجئے۔

حل :

A کے لحاظ سے B کی نسبتی سمتی رفتار

$$v_{BA} = v_B - v_A$$
$$= 50 \text{ km h}^{-1} + (-50) \text{ km h}^{-1}$$
$$= 0 \text{ km h}^{-1}$$

اسی طرح B کے لحاظ سے A کی نسبتی سمتی رفتار v_{AB} بھی صفر ہے۔

لہذا ایک دوسرے کے لحاظ سے دونوں اس طرح محسوس ہوں گے کہ وہ حالت سکون میں ہیں۔

مثال 2.29

36 km h^{-1} کی رفتار سے چلنے والی ایک ریل گاڑی کی ایک کھڑکی کے قریب بیٹھا ہوا لڑکا، مخالف سمت میں 18 km h^{-1} کی رفتار سے چلنے والی گاڑی کو کتنے وقفے تک دیکھ سکتا ہے؟ آہستہ چلنے والی ریل کی لمبائی 90 میٹر ہے۔

حل:

لڑکے کے لحاظ سے آہستہ چلنے والی ریل گاڑی کی نسبتی سمتی رفتار

$$= (36 + 18) \text{ km h}^{-1} = 54 \text{ km h}^{-1}$$
$$= 54 \times \frac{5}{18} \text{ m s}^{-1} = 15 \text{ m s}^{-1}$$

چونکہ وہ لڑکا ریل کی مکمل لمبائی کا مشاہدہ کرے گا۔ اس لئے مکمل ریل گاڑی کو دیکھنے کے لئے لیا جانے والا وقت کچھ اس طرح معلوم کر سکتے ہیں۔

ہمارے پاس ہے $15 = \frac{90}{t}$

or $t = \frac{90}{15} = 6 \text{ s}$

مثال 2.30

ایک تیرنے والے کی رفتار ندی کے بہنے کے رخ میں 12 km h^{-1} ہے، ندی کے بہاؤ کی مخالف سمت میں اس کی رفتار 6 km h^{-1} ہے۔ ٹھہرے ہوئے پانی میں اس کے تیرنے کی رفتار اور ندی کے بہنے کی سمتی رفتار معلوم کیجئے۔

حل:

فرض کرو کہ زمین کے لحاظ سے v_s اور v_r بالترتیب تیرنے والے اور ندی کی سمتی رفتاروں کو ظاہر کرتے ہیں۔

$$v_s + v_r = 12 \quad (1)$$

اور

$$v_s - v_r = 6 \quad (2)$$

مساوات (1) اور (2) کو جمع کرنے سے

$2v_s = 12 + 6 = 18 \text{ km h}^{-1}$ یا $v_s = 9 \text{ km h}^{-1}$

مساوات (1) کی مدد سے

$9 + v_r = 12$ or $v_r = 3 \text{ km h}^{-1}$

ٹھہرے ہوئے پانی میں اس شخص کی رفتار 9 km h^{-1} اور ندی کی رفتار 3 km h^{-1} اور بہتی ندی میں تیرنے والے کی کل سمتی رفتار 12 km h^{-1} ہے۔

پُراسراع حرکت (Accelerated Motion)

ایک شئے کی غیر یکساں حرکت کے دوران، لمحہ بہ لمحہ شئے کی سمتی رفتار تبدیل ہوتی رہتی ہے یعنی شئے کی سمتی رفتار مستقل نہیں رہتی بلکہ وقت کے ساتھ ساتھ تبدیل ہوتی رہتی ہے۔ اس قسم کی حرکت پراسراع حرکت (accelerated motion) کہلاتی ہے۔

11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:36 PM

(i) پر اسراع حرکت میں شئے کی سمتی رفتار کی تبدیلی فی اکائی وقت کے لئے یکساں (مستقل) رہتی ہے تو پھر وہ یکساں اسراعی حرکت کرنے والی شئے کہلائے گی۔

(ii) دوسری طرف فی اکائی وقت میں ہونے والی سمتی رفتار کی تبدیلی مختلف اوقات پر مختلف ہو تو کہا جائے گا کہ وہ شئے غیر یکساں اسراعی حرکت کے ساتھ حرکت کر رہی ہے۔

اوسط اسراع (Average Acceleration)

اگر ایک شئے اس کی سمتی رفتار کو وقت کے ایک وقفے $\Delta t = t_2 - t_1$ میں $\vec{v}_1$ سے $\vec{v}_2$ میں تبدیل کرتی ہے، تو پھر اس کی اوسط اسراع کی تعریف یوں کی جاتی ہے کہ وہ وقتی وقفہ $\Delta t = t_2 - t_1$ میں کے ساتھ سمتی رفتار میں ہونے والی تبدیلی کی نسبت ہے۔

$$\vec{a}_{avg} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

اوسط اسراع ایک سمتی مقدار ہے جس کی سمت سمتیہ $\Delta \vec{v}$ کے مطابق ہوتی ہے۔

بروقتی (فوری) اسراع (Instantaneous Acceleration)

عام طور پر اوسط اسراع، لئے گئے کل وقفے کے حساب سے سمتی رفتار کی تبدیلی فراہم کرتی ہے۔ وہ کسی بروقتہ (Instant) وقت پر اسراع کی قیمت فراہم نہیں کرتی۔

کسی ذرہ کی بروقت اسراع یا 't' وقت پر اس کی اسراع، (بروقت) پر سمتی رفتار میں ہونے والی تبدیلی کی نسبت Δt ہے، جب Δt صفر کا رخ کرتا ہے۔

$$\text{اسراع } \vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

بالفاظ دیگر، کسی وقت t پر ایک ذرہ کی اسراع، سمتی رفتار کی تبدیلی کی شرح کے برابر ہوتی ہے۔

(i) اسراع ایک سمتی مقدار ہے۔ اس کی SI اکائی میٹر فی مربع سکنڈ ms^{-2} ہے، اور اس کا ابعادی ضابطہ $M^0L^1T^{-2}$ ہے۔

(ii) اگر سمتی رفتار میں اضافہ ہو رہا ہے تو اسراع مثبت ہوگی، اور اگر سمتی رفتار میں کمی ہو رہی ہے تو اسراع منفی ہوگی۔ اس مخالف اسراع کو منفی اسراع (retardation) یا تعویق (deceleration) بھی کہا جاتا ہے۔

اجزاء کے لحاظ سے ہم اسراع کو اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

لہذا $a_x = \frac{dv_x}{dt}, a_y = \frac{dv_y}{dt}, a_z = \frac{dv_z}{dt}$

بروقتی اسراع کے اجزاء ہیں۔

چونکہ سمتی رفتار کا ہر جزء، متعلقہ محدد کا مآخذ ہے، ہم a_x ، a_y اور a_z اجزاء کو اس طرح واضح کر سکتے ہیں۔

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{d^2z}{dt^2}$$

پھر اسراعی سمتیہ $\vec{a}$ خود اس طرح لکھی جائے گی۔

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

چنانچہ اسراع، وقت کے لحاظ سے مقامی سمتیہ کی دوسرے درجہ کی مآخذ ہوگی۔

ترسیمی طور پر اسراع، سمتی رفتار اور وقت کے درمیان کھینچی گئی ترسیم کا ڈھلاؤ ہے۔ اسی طرح اگر اسراع اور وقت کے درمیان ترسیم کھینچی جائے تو ترسیم کے نیچے رقبہ کی مدد سے سمتی رفتار معلوم کر لی جا سکتی ہے۔

$\frac{dv}{dt} = a$ کی مدد سے ہم رکھتے ہیں، $dv = a\,dt$ اس لئے

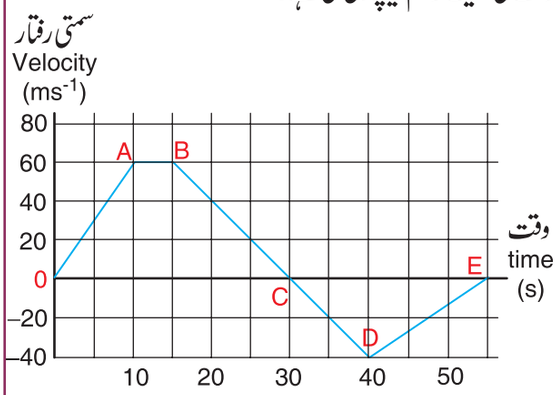
$$v = \int_{t_1}^{t_2} a\,dt$$

یہ ایک ابتدائی وقت t_1 اور انتہائی وقت t_2 کے لئے ہے۔

11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:36 PM

مثال 2.31

x- سمت میں حرکت کرنے والے ایک ذرہ کے لئے سمتی رفتار وقت کی ایک ترسیم نیچے دی گئی ہے۔



سمتی رفتار وقت کی ایک ترسیم

(a) 0 سے 55 سکنڈ تک ہونے والی حرکت کو مقداری طور پر پیش کیجئے

(b) 0 سے 40 سکنڈ تک طے کردہ فاصلہ اور ہٹاؤ معلوم کیجئے۔

(c) t= 5s پر اور t=20s پر اسراع معلوم کیجئے۔

حل:

(a) O سے A تک : 0 s سے 10 s تک :

t = 0 s پر ذرہ کی سمتی رفتار صفر ہے۔

t>0 پر ذرہ کی سمتی رفتار صفر ہے۔

t>0 پر ذرہ کی سمتی رفتار مثبت ہے اور وہ مثبت x سمت میں حرکت کرتی ہے۔ 0 s سے 10 s تک میلان (ڈھلاؤ) $\left(\frac{dv}{dt}\right)$ مثبت ہے، جو شئے کے پر اسراع ہونے کو بتاتی ہے۔ چنانچہ اس وقفے کے دوران سمتی رفتار بڑھ رہی ہے۔

A سے B تک : (10 s سے 15 s تک):

10 s سے 15 s تک سمتی رفتار 60 فی سکنڈ پر مستقل ہے۔ اس وقفے کے دوران اسراع صفر ہے۔ مگر شئے X سمت میں مسلسل حرکت کر رہی ہے۔

B سے C تک : (15 s سے 30 s تک)

(15 s سے 30 s تک) میلان منفی ہے یعنی سمتی رفتار گھٹ رہی ہے۔ مگر شئے مثبت سمت ہی میں حرکت کر رہی ہے۔

t=30 s پر سمتی رفتار صفر پیدا ہو جاتی ہے، اور t = 30 s وقتی طور پر وہ شئے حالت سکون اختیار کر لیتی ہے۔

C سے D تک : (30 s سے 40s تک)

(30s سے 40s تک) سمتی رفتار منفی ہے۔ یہ اس بات کی علامت ہے کہ شئے منفی c سمت میں حرکت کرنا شروع کر دی ہے۔ سمتی رفتار کی قدر انتہا تک پہنچ چکی ہے۔

D سے E تک (40s سے 55s تک)

40s سے 55s تک سمتی رفتار منفی ہی ہے، مگر $-40\ ms^{-1}$ سے مثبت کی طرف بڑھنا شروع ہو گئی ہے۔ t= 55s پر شئے کی سمتی رفتار صفر ہو جاتی ہے اور ذرہ حالت سکون اختیار کر لیتا ہے۔

(b) 0s سے 40s تک کی منحنی کا کل نچلا رقبہ ہٹاؤ فراہم کرے گا یہاں O سے C تک کا رقبہ مثبت x - سمت کی طرف کی گئی حرکت کو ظاہر کرتا ہے اور C سے D کا رقبہ منفی x- سمت کی طرف کی گئی حرکت کو ظاہر کرتا ہے۔

0s سے 10s تک ذرہ سے طے کیا گیا ہٹاؤ:

$$= \frac{1}{2}\times 10\times 60 = 300\,m$$

10s سے 15s تک ذرہ سے طے کیا گیا ہٹاؤ:

$$= 60\times 5 = 300\ \text{m}$$

15s سے 30s تک ذرہ سے طے کیا گیا ہٹاؤ:

$$= \frac{1}{2}\times 15\times 60 = 450\,m$$

30s سے 40s تک ذرہ سے طے کیا گیا ہٹاؤ:

$$= \frac{1}{2}\times 10\times(-40) = -200\,m.$$

یہاں منفی علامت یہ ظاہر کرتی ہے کہ شئے منفی x سمت میں 20 کلومیٹر کا سفر طے کی ہے۔

11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:36 PM

0 s سے 40 s تک کا کل ہٹاؤ اس طرح پیش کیا جاتا ہے۔

300 m + 300 m + 450 m − 200 m
= +850 m.

لہذا، ذرہ کا کل ہٹاؤ مثبت x- سمت کی طرف ہے۔

ذرہ کے ذریعہ 0s سے 40s تک طے کیا گیا کل فاصلہ یہ ہے۔
= 300 + 300 + 450 + 200 = 1250 m.

(c) اسراع، سمتی رفتار۔وقت کی ترسیم کے میلان سے پیش کیا جاتا ہے۔ پہلے 10 سکنڈ میں سمتی رفتار میں ایک مستقل میلان (مستقل اسراع) موجود ہے اس سے معلوم ہوتا ہے کہ اسراع $v_1 = 0$ سے $v_2 = 60\ \text{ms}^{-1}$ تک ہے۔

لہذا $a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$ سے یہ حاصل ہوتا ہے۔

$$a = \frac{60 - 0}{10 - 0} = 6\,m\,s^{-2}$$

اس کے بعد 10 سے 15 سکنڈ کے درمیان کوئی میلان نہیں ہے۔لہذا اسراع صفر ہے۔

اس کے بعد 15s سے 30s تک مستقل منفی ڈھلاؤ (میلان) موجود ہے۔اس معاملہ میں $v_1 = 0$ سے $v_2 = 60\ \text{ms}^{-1}$ ہے۔ اس لئے t=20 پر اسراع یوں پیش کیا جاتا ہے۔

$$a = \frac{0 - 60}{30 - 15} = -4\,m\,s^{-2}$$

یہاں منفی علامت یہ ظاہر کرتی ہے کہ ذرہ میں منفی اسراع پائی جاتی ہے۔

مثال 2.32

اگر ایک ذرہ کی مقامی سمتیہ یوں دی جائے
$\vec{r} = 3t^2\hat{i} + 5t\hat{j} + 4\hat{k}$ تو معلوم کیجئے۔

(a) t= 3s پر ذرہ کی سمتی رفتار

(b) t= 3s پر ذرہ کی رفتار

(c) 3s3s پر ذرہ کی اسراع

حل:

(a) سمتی رفتار $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$

ہم حاصل کرتے ہیں $\vec{v}(t) = 6t\hat{i} + 5\hat{j}$

سمتی رفتار میں صرف دو اجزاء موجود ہیں $v_x = 6t$

جو وقت t پر منحصر ہے اور $v_y = 5$ جو وقت پر غیر منحصر ہے۔

t = 3 s پر سمتی رفتار یہ ہے۔ $\vec{v}(3) = 18\hat{i} + 5\hat{j}$

(b) t = 3 s پر رفتار یہ ہے۔ $v = \sqrt{18^2 + 5^2} = \sqrt{349} \approx 18.68\,m\,s^{-1}$

(c) اسراع $\vec{a}$ یہ ہے۔ $\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 6\hat{i}$

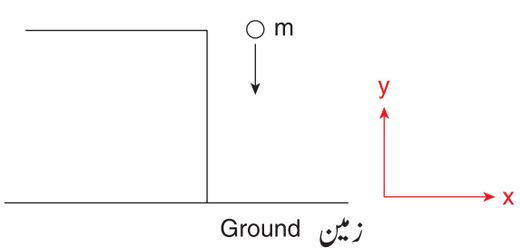
اسراع میں صرف x- جز موجود ہے۔نوٹ کیجئے کہ اسراع یہاں وقت t پر غیر منحصر ہے جس کا مطلب a مستقلہ ہے۔ t= 3s پر بھی اس کی وہی قیمت $\vec{a} = 6\hat{i}$ ہے۔اس معاملہ میں سمتی رفتار غیر یکساں اور اسراع یکساں مستقل ہے۔

مثال 2.33

ایک شئے عمودی طور پر نیچے پھینکی گئی ہے۔ شئے سے محسوس کی جانے والی اسراع معلوم کیجئے۔

حل:

ہم جانتے ہیں کہ جب کوئی شئے زمین کی جانب گرتی ہے تو وہ نیچے کی جانب اسراع بوجہ جاذبہ $g = 9.8\ \text{m s}^{-2}$ محسوس کرتی ہے۔ ہم خاکہ میں بتائے گئے طریقہ کے مطابق محدداتی نظام کا انتخاب کر سکتے ہیں۔



11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:37 PM

اسراع منفی y- سمت کی جانب ہے۔

$$\vec{a} = g\left(-\hat{j}\right) = -g\hat{j}$$

نوٹ

آسانی کے لئے کبھی کبھی ہم نچلی جانب کو مثبت Y محور کے طور پر تصور کر لیتے ہیں ۔ چونکہ عمودی طور پر گرنے والی شئے نیچے کی جانب پر اسراع ہو جاتی ہے ،اس سمت میں g کی قیمت مثبت کو مان لیا جاتا ہے(a=g)

2.10.3 احصائی طریقہ سے یکساں پُر اسراع حرکت کی مساوات
(Equations of Uniformly accelerated Motion by Calculus Method)

ایک شئے کا تصور کیجئے، جو ایک سیدھے راستے میں یکساں یا مستقل اسراع کے ساتھ حرکت کر رہی ہو۔فرض کیجئے کہ وقت t= 0 پر اس شئے کی سمتی رفتار u ہے اور t وقت پر اس شئے کی سمتی رفتار v ہے۔

سمتی رفتار-وقت کا تعلق (Velocity-time relation)

(i) کسی بھی وقفے پر شئے کی اسراع، وقت کے لحاظ سے سمتی رفتار کے پہلے ماحصل سے پیش کی جاتی ہے۔

$$a = \frac{dv}{dt} \text{ or } dv = a\,dt$$

دونوں طرف اس شرط پر مربوط (تکمیلیت) کرتے ہیں کہ جیسے جیسے وقت صفر سے t میں تبدیل ہوتا ہے۔سمتی رفتار u سے v میں تبدیل ہوتی ہے۔ یکساں اسراع کے لئے

$$\int_u^v dv = \int_0^t a\,dt = a\int_0^t dt \Rightarrow [v]_u^v = a[t]_0^t$$
$$v - u = at \quad (or) \quad v = u + at \qquad \rightarrow (2.7)$$

نوٹ

اگر، ' a ' ، ' t ' وقت پر منحصر ہو تو اسے مربوطیت سے باہر نہیں لایا جا سکتا۔

ہٹاؤ-وقت کا تعلق (Displacement-time Relation)

(ii) شئے کی سمتی رفتار وقت کے لحاظ سے ہٹاؤ کے پہلے ماحصل سے پیش کی جاتی ہے۔

$$v = \frac{ds}{dt} \text{ or } ds = v\,dt$$

اور چونکہ $v = u + at$,

ہم حاصل کرتے ہیں $ds = (u + at)\,dt$

تصور کیجئے کہ وقت t= 0 پر، وہ شئے مبدا سے نکلنا شروع ہوئی ہے۔بعد میں t وقت پر، شئے کا ہٹاؤ s ہے،اس کے بعد یہ تصور کرتے ہوئے کہ اسراع وقت پر غیر منحصر ہے ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$\int_0^s ds = \int_0^t u\,dt + \int_o^t at\,dt \quad (or) \quad s = ut + \frac{1}{2}at^2 \quad (2.8)$$

سمتی رفتار۔ہٹاؤ کا تعلق
(Velocity-displacement Relation)

(iii) اسراع، وقت کے لحاظ سے سمتی رفتار کے پہلے ماحصل سے پیش کی جاتی ہے۔

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds}v$$

(چونکہ $\frac{ds}{dt} = v$) ، جہاں s طے کردہ ہٹاؤ ہے۔

$a = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(v^2)$ اسے دوبارہ اس طرح لکھا جاتا ہے۔

(یا) $ds = \frac{1}{2a}d(v^2)$

اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے کہ جب سمتی رفتار u سے v میں تبدیل ہوتی ہے تو ہٹاؤ 0 سے s میں تبدیل ہوتا ہے، اوپر کی مساوات کو مربوط کرنے پر ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$\int_0^s ds = \int_u^v \frac{1}{2a}d\left(v^2\right)$$

11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:37 PM

$$\therefore s = \frac{1}{2a}\left(v^2 - u^2\right)$$

$$\therefore v^2 = u^2 + 2as \qquad (2.9)$$

ہم ہٹاؤ s کا تعین، ابتدائی سمتی رفتار u اور حتمی سمتی رفتار v کے لحاظ سے بھی کر سکتے ہیں۔

مساوات 2.7 کی مدد سے ہم لکھ سکتے ہیں کہ

$$at = v - u$$

اسے مساوات 2.8 میں حل کرنے پر، ہم حاصل کرتے ہیں

$$s = ut + \frac{1}{2}\left(v - u\right)t$$

$$s = \frac{\left(u + v\right)t}{2} \qquad (2.10)$$

مساوات (2.7)، (2.8)، (2.9) اور (2.10) حرکت کی حرکیاتی مساوات (Kinematic equations of motion) کہلاتی ہیں اور ان کے بے شمار عملی استعمالات پائے جاتے ہیں۔

حرکیاتی مساوات (Kinematic Equations)

$$v = u + at$$

$$s = ut + \frac{1}{2}at^2$$

$$v^2 = u^2 + 2as$$

$$s = \frac{\left(u + v\right)t}{2}$$

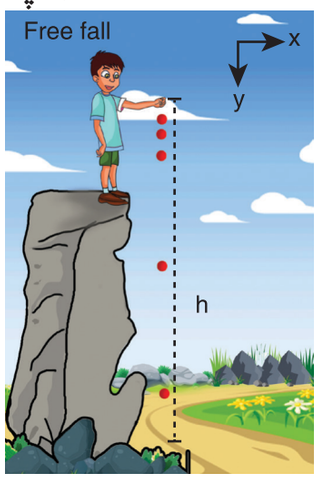
یہ غور کرنا ضروری ہے کہ یہ تمام حرکیاتی مساوات اسی وقت درست ہیں جب کہ حرکت ایک سیدھے راستے میں مستقل اسراع کے ساتھ ہو رہی ہو۔ دائری اور اہتزازی حرکت کے لئے یہ مساوات استعمال نہیں ہوتیں۔

جاذبہ کے تحت حرکت کی مساوات:
(Equations of motion under gravity)

مستقل اسراع کے ساتھ ایک سیدھے راستے پر حرکت کی ایک مثال، زمین کی سطح کے قریب ایک شئے کی حرکت ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ زمین کی سطح کے قریب اسراع بوجہ جاذبہ 'g' مستقل ہوتی ہے۔ اس اسراع کے تحت، پہلے بتائی گئی حرکیاتی مساوات کی مدد سے تمام سیدھے خطی حرکات کو بخوبی سمجھا جا سکتا ہے۔

معاملہ (i) 'h' کی اونچائی سے گرنے والی ایک شئے:

آزادانہ طور پر گرنا



خاکہ 2.37 ایک شئے کا آزادانہ طور پر گرنا۔

m کمیت کی ایک شئے کا تصور کیجئے جو 'h' اونچائی سے گر رہی ہو۔ فرض کر لیجئے کہ وہاں ہوا کی کوئی مزاحمت نہیں ہے۔ آسانی کے لئے آیئے ہم نچلی جانبی حرکت کو مثبت Y - محور کی سمت کا انتخاب کر لیں، جیسا کہ خاکہ 2.37 میں بتایا گیا ہے۔ وہ شئے اسراع بوجہ جاذبہ 'g' سے دوچار رہتی ہے جو کہ زمینی سطح کے قریب مستقل ہوتی ہے۔ ہم اس کی حرکت کی وضاحت کرنے کے لئے حرکیاتی مساوات کا استعمال کر سکتے ہیں۔ ہمارے پاس موجود ہے۔

اسراع $\vec{a} = g\hat{j}$

اجزاء کو موازنہ کرنے پر ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$a_x = 0, a_z = 0, a_y = g$$

آسانی کے لئے ہم ان اجزاء کو اس طرح لے لیں۔ $a_y = a = g$

11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:38 PM

اگر ایک شئے ' u ' ابتدائی سمتی رفتار کے ساتھ نیچے کی جانب جس کی سمت یہاں منفی y - محور ہے، پھینکی جاتی ہے تو پھر کسی بھی وقت ' t ' پر اس ذرہ کی سمتی رفتار اور مقام یوں پیش کیا جاتا ہے۔

$$v = u + gt \qquad (2.11)$$

$$y = ut + \frac{1}{2}gt^2 \qquad (2.12)$$

جب وہ ذرہ پہاڑ کی چوٹی سے y دوری پر ہو تو، اس کی رفتار کا مربع یہ ہے۔

$$v^2 = u^2 + 2gy \qquad (2.13)$$

فرض کیجئے کہ وہ ذرہ حالت سکون سے شروع ہوتا ہے۔

پھر $u = 0$ ہے۔

تو پھر کسی وقت t پر سمتی رفتار v ، اس کا مربع v^2 اور اس ذرہ کے مقام کو یوں پیش کیا جاتا ہے۔ (پہاڑ کی چوٹی سے ایک نقطہ y کے لئے)

$$v = gt \qquad (2.14)$$

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \qquad (2.15)$$

$$v^2 = 2gy \qquad (2.16)$$

زمین تک پہنچنے کے لئے ذرہ سے لیا گیا وقت $(t = T)$ (جس کے لئے $y = h$)، مساوات (2.15) کی مدد سے پیش کیا جاتا ہے۔

$$h = \frac{1}{2}gT^2 \qquad (2.17)$$

$$T = \sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad (2.18)$$

مساوات (2.18) سے پتہ چلتا ہے کہ اونچائی (h)، زیادہ ہو تو ذرہ زمین تک پہنچنے کے لئے زیادہ وقت (T) لیتا ہے۔ کم اونچائی (h) کے لئے وہ کم وقت لگاتا ہے۔

مساوات (2.16) کی مدد سے ہم ذرہ کے، زمین پر پہنچتے وقت اس کی جو رفتار ہوگی (y=h) اس کا محاسبہ کر سکتے ہیں، چنانچہ ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$v_{ground} = \sqrt{2gh} \qquad (2.19)$$

اوپر کی مساوات سے ہمیں پتہ چلتا ہے کہ زیادہ اونچائی (h) سے گرنے والے جسم کی رفتار زمین تک پہنچتے وقت بہت زیادہ ہوتی ہے۔

ایک چھوٹی سی اونچائی ($h << R$) سے خالص جاذبی قوت کے تحت زمین کی طرف گرنے والے ایک جسم کی حرکت آزادانہ طور پر گرنا (free fall) کہلاتا ہے۔ (یہاں R زمین کا نصف قطر ہے)

مثال 2.34

ایک لوہے کا گولا اور ایک پر (feather) دونوں، 10 میٹر کی اونچائی سے گر رہے ہیں۔

(a) لوہے کی گیند اور پر کو زمین تک پہنچنے کے لئے کتنا وقت لگے گا؟

(b) جب زمین کی سطح پر پہنچتے وقت لوہے کی گیند اور پر کی سمتی رفتاریں کیا ہوں گی؟ (ہوا کی مزاحمت کو نظر انداز کر دیجئے اور $g = 9.8\ ms^{-2}$ لے لیجئے)۔

حل:

چونکہ حرکیاتی مساوات شئے کی کمیت پر غیر منحصر ہیں، مساوات 2.8 کے مطابق لوہے کی گیند اور پر دونوں سے زمین تک پہنچنے کے لئے لیا جانے والا وقت مساوی ہی ہوگا۔ اسے یوں پیش کیا جاتا ہے۔

$$T = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2\times10}{10}} = \sqrt{2}\,s \approx 1.414\,s$$

لہذا دونوں لوہے کی گیند اور ہر ایک ہی وقت میں زمین کی سطح پر پہنچتے ہیں۔

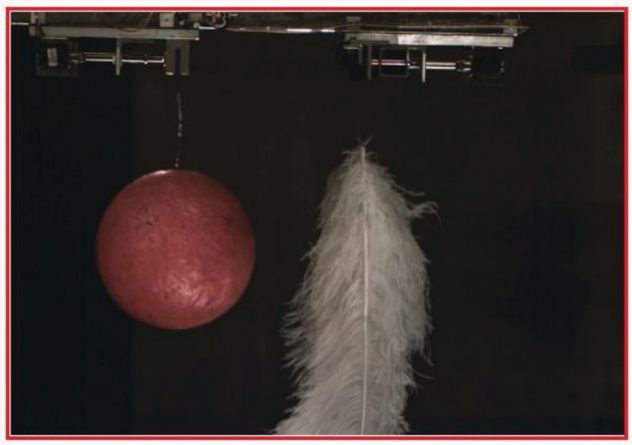
11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:38 PM

مساوات (2.19) کی اتباع کرتے ہوئے لوہے کی گیند اور پر دونوں زمین کو ایک ہی رفتار کے ساتھ پہنچتے ہیں ۔اسے یوں پیش کیا جاتا ہے۔

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 10 \times 10}$$
$$= \sqrt{200}\, m\, s^{-1} \approx 14.14\, m\, s^{-1}$$

DML67

گلیلیو ،اس نتیجہ پر پہنچا کہ خلاء میں تمام اشیاء یکساں اسراع ' g ' کے ساتھ گرتے ہیں اور زمین کی سطح کو ایک ہی وقت پر پہنچتے ہیں۔



https://www.youtube.com/watch?v=E43-CfukEgs&t=5s

مثال 2.35

کیا یہ ممکن ہے کہ حرکیاتی مساوات کا استعمال کرتے ہوئے کسی کنویں کی گہرائی کو ناپا جا سکے؟



ایک بے آب کنویں کا تصور کیجئے ،جس کی گہرائی ' d ' ہو۔ایک چھوٹی سی شئے (مثلاً لیمو وغیرہ) اور ایک روک گھڑی لے لیجئے ۔ لیمو گراتے وقت روک گھڑی کو آن کر دیجئے ۔جیسے ہی وہ لیمو کنویں کی گہرائی کو چھوتا ہے گھڑی آف کر دیجئے ۔ نیچے تک پہنچنے کے لئے لیمو سے لیا گیا وقت نوٹ کیجئے اور اسے t سے ظاہر کیجئے ۔

چونکہ لیمو کی ابتدائی سمتی رفتار $u = 0$ ہے اور اسراع بوجہ جاذبہ g کل کنویں میں مستقل ہے۔ہم مشکل اسراع کے لئے حرکت کی مساوات کا استعمال کر سکتے ہیں۔

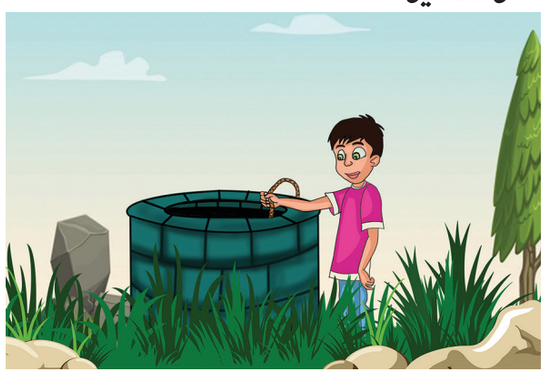
$$s = ut + \frac{1}{2}at^2$$

چونکہ $u = 0,\ s = d,\ a = g$ (چونکہ ہم Y - محور کو نچلی جانب منتخب کرتے ہیں) تو پھر

11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:39 PM

$$d = \frac{1}{2} gt^2$$

$g = 9.8\ ms^{-2}$، اس قیمت کو حل کرنے پر ہم کنویں کی گہرائی حاصل کر سکتے ہیں۔



اس محاسبے میں ہونے والی کوتاہی کا اندازہ لگانے کے لئے ہم کنویں کی گہرائی ناپنے کا ایک اور طریقہ بھی اپنا سکتے ہیں۔ ایک لمبی رسی لیجئے اور اسے کنویں کے اندر اس طرح چھوڑیئے کہ وہ کنویں کی تہہ کو چھونے لگے۔ رسی کی وہاں تک کی لمبائی کنویں کی ٹھیک گہرائی ($d_{correct}$) بتاتی ہے۔ پھر

$$\text{غلطی} = d_{correct} - d$$

$$\text{نسبتی غلطی} = \frac{d_{correct} - d}{d_{correct}}$$

$$\text{نسبتی غلطی کی فیصد} = \frac{d_{correct} - d}{d_{correct}} \times 100$$

اگر کوئی غلطی آتی ہے تو اس کی وجہ کیا ہو سکتی ہے؟

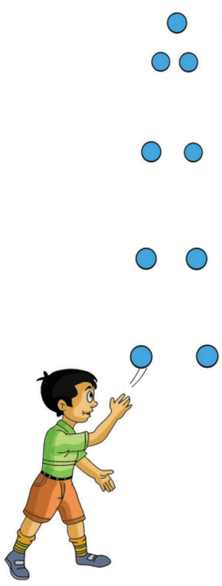
اس تجربہ کو مختلف کمیتوں کی مدد سے دہرایئے اور ہر مرتبہ $d_{correct}$ پیمائش کے ساتھ اپنے نتیجہ کا موازنہ کیجئے۔

نوٹ

اگر کنویں میں پانی موجود ہو تو اس طریقہ کی مدد سے پانی کی سطح تک کنویں کی گہرائی معلوم کر سکتے ہیں۔

معاملہ (ii) اوپر کی جانب عمودی طور پر پھینکا گیا ایک جسم:

m کمیت والی ایک شئے کا تصور کیجئے جو ' u ' ابتدائی سمتی رفتار کے ساتھ اوپر کی جانب پھینکی گئی ہو۔ آیئے ہم ہوا کی مزاحمت کو نظر انداز کر دیں۔ اس معاملے میں عمودی سمت کے لئے مثبت y - محور کا انتخاب کرتے ہیں جیسا کہ خاکہ 2.38 میں بتایا گیا ہے تو پھر اسراع $a = -g$ ہوگا (ہوا کی رگڑ کو رد کر دیجئے) اور g کی سمت منفی y سمت میں ہوتی ہے۔ اس حرکت کے لئے حرکیاتی مساوات یہ ہیں۔



خاکہ 2.38۔ عمودی طور پر اچھالی گئی ایک شئے

کسی بھی وقت t پر، شئے کی سمتی رفتار اور مقام یوں پیش ہوتے ہیں۔

$$v = u - gt \qquad (2.20)$$

$$s = ut - \frac{1}{2} gt^2 \qquad (2.21)$$

کسی مقام y (اس نقطہ سے جہاں سے وہ شئے پھینکی گئی ہے) پر شئے کی سمتی رفتار یہ ہے۔

$$v^2 = u^2 - 2gy \qquad (2.22)$$

11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:40 PM

مثال 2.36

بریک استعمال کرتے وقت، ریل گاڑی $54\ km\ h^{-1}$ کی رفتار سے چل رہی تھی۔ وہ 225 m کے فاصلے کے اندر حالت سکون میں آ گئی۔ ریل گاڑی میں جو منفی اسراع پیدا ہوئی، اس کا محاسبہ کیجئے۔

حل: شئے کی انتہائی سمتی رفتار $v=0$

شئے کی ابتدائی سمتی رفتار

$$u = 54 \times \frac{5}{18}\ m\,s^{-1} = 15\ m\,s^{-1}$$

$$S = 225\ m$$

منفی اسراع (تعویق) (retardation) ہمیشہ شئے کی سمتی رفتار کی مخالف ہوتی ہے۔

$$v^2 = u^2 - 2aS$$

$$0 = (15)^2 - 2a\,(225)$$

$$450\ a = 225$$

$$a = \frac{225}{450}\ ms^{-2} = 0.5\ ms^{-2}$$

چنانچہ منفی اسراع (retardation) $= 0.5\ m\,s^{-2}$

2.11 غلیلیہ کی حرکت (پروجکٹائل)
(Projectile Motion)

2.11.1 Introduction

جب کوئی شئے کچھ ابتدائی سمتی رفتار کے ساتھ ہوا میں پھینکی جاتی ہے (صرف اوپر ہی نہیں) اور پھر اسے صرف قوت جاذبہ کے حوالے حرکت کرنے کے لئے چھوڑ دیا جاتا ہے تو ایسی شئے غلیلیہ (پروجکٹائل) کہلاتی ہے، اس شئے سے بننے والا غلیلیہ کا راستہ (trajectory) کہلاتا ہے۔

پروجکٹائل کی چند مثالیں یہ ہیں :

(1) حرکت کرتی ہوئی ریل گاڑی کی کھڑکی سے گرائی گئی ایک شئے

(2) بندوق سے چلائی گئی ایک گولی

(3) کسی سمت میں پھینکی گئی ایک گیند

(4) ایک کھلاڑی سے پھینکا گیا گولا (Shotput) یا javelin

(5) ایک پانی کے ٹینک کے نچلے حصے کے سوراخ سے نکلنے والے پانی کی دھار

یہ دیکھا گیا ہے کہ ایک پروجیکٹائل (غلیلیہ) دو سمتی رفتاروں کے مجموعی اثر کے تحت حرکت کرتا ہے۔

(i) افقی سمت میں موجود یکساں سمتی رفتار جو ہوائی مزاحمت کے نہ ہونے پر تبدیل نہیں ہوتی۔

(ii) عمودی سمت میں یکساں تبدیل ہونے والی سمتی رفتار (یعنی بڑھتی ہوئی یا گھٹتی ہوئی)۔

پروجیکٹائل حرکت کی دو قسمیں پائی جاتی ہیں۔

(i) افقی سمت میں ابتدائی سمتی رفتار کے ساتھ بھیجا جانے ولا پروجکٹائل (افقی طور پر پھینکنا) (Horizontal Projection)

(ii) افق سے کچھ زاویے پر ابتدائی سمتی رفتار کے ساتھ بھیجا جانے والا پروجیکٹائل (زاویائی طور پر پھینکنا) (Angular Projection)

ایک پروجکٹائل (غلیلیہ) کی حرکت کا مطالعہ کرنے کے لئے آیئے ہم تصور کرلیں کہ

(i) ہوائی مزاحمت نظر انداز کردی جاتی ہے۔

(ii) زمین کی گردش اور زمین کے انحناء کی وجہ سے پیدا ہونے والا اثر انظر انداز کردیا جاتا ہے۔

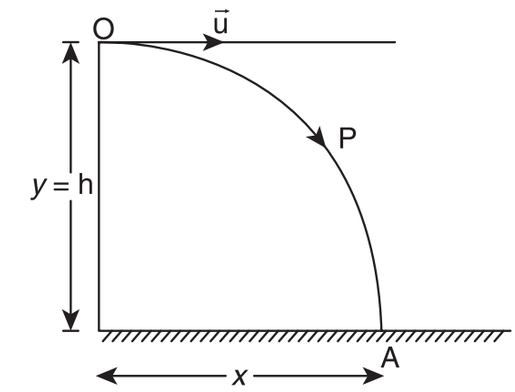
(iii) پروجکٹائل کی حرکت کے تمام نقاط پر اسراع بوجہ جاذبہ قدر اور سمت میں مستقل ہی رہتی ہے۔

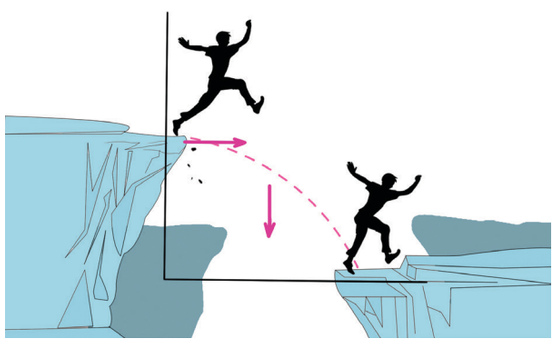
2.11.2 افقی پھینک میں پروجکٹائل
(Projectile in horizontal projection)

ایک پروجکٹائل کا تصور کیجئے، ایک گیند ہی فرض کر لیجئے، جو 'h' اونچائی والے ایک ٹاور (tower) کے اوپر سے 'u' ابتدائی سمتی رفتار کے ساتھ افقی طور پر پھینکا گیا ہو (خاکہ 2.39)

جیسے جیسے گیند حرکت کرتی ہے وہ اپنی یکساں افقی سمتی رفتار u کی وجہ سے ایک افقی فاصلہ طے کرتی ہے اور

11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:40 PM





خاکہ 2.39 افقی پھینک (Horizontal projection)

وہ مستقل اسراع بوجہ جاذبہ 'g' کی وجہ سے ایک عمودی نچلا فاصلہ بھی طے کرتی ہے۔ لہذا، مجموعی اثر کے تحت وہ گیند راستہ OPA کے ساتھ چلتی ہے۔ یہ حرکت ایک دو-ابعادی سطح میں ہوتی ہے۔ فرض کیجئے کہ گیند زمین کے A مقام پر t وقت میں پہنچتی ہے، پھر گیند سے طے کیا گیا افقی فاصلہ $x(t) = x$ ہے اور طے کیا گیا عمودی فاصلہ $y(t) = y$

ہم حرکیاتی مساوات کو x- سمت اور y- سمت کے تحت علاحدہ طور پر استعمال کر سکتے ہیں۔ چونکہ یہ دو ابعادی حرکت ہے۔ سمتی رفتار میں افقی جزء u_x اور عمودی جزء u_y دونوں موجود ہوں گے۔

افقی سمت کے تحت حرکت:

Motion along horizontal direction

شئے میں x سمت میں کوئی اسراع نہیں پائی جاتی۔ اس لئے ابتدائی سمتی رفتار u_x کل حرکت میں مستقل ہی رہتی ہے۔

t وقت پر پروجکٹائل کے ذریعہ طے کیا جانے والا فاصلہ اس مساوات سے پیش کیا جاتا ہے۔

$$x = u_x t + \frac{1}{2} a t^2$$

چونکہ x سمت میں a= o ہے، ہم رکھتے ہیں۔

$$x = u_x t \qquad (2.23)$$

نچلی سمت کے تحت حرکت:

یہاں u_y=0 ہے (ابتدائی سمتی رفتار میں نیچے کی جانب کوئی جز نہیں ہے)، a=g (ہم مثبت y محور کو نیچے کی جانب منتخب کرتے ہیں) اور t وقت پر y فاصلہ طے ہوتا ہے۔

چنانچہ اس مساوات کی مدد سے $y = u_y t + \frac{1}{2} a t^2$, ہم حاصل کرتے ہیں

$$y = \frac{1}{2} g t^2 \qquad (2.24)$$

مساوات (2.23) کی مدد سے 't' کی قیمت کو مساوات (2.24) میں حل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$y = \frac{1}{2} g \frac{x^2}{u_x^{\,2}} = \left(\frac{g}{2u_x^{\,2}} \right) x^2$$

$$y = Kx^2 \qquad (2.25)$$

جہاں $K = \frac{g}{2u_x^2}$ ایک مستقلہ ہے۔

مساوات (2.25) ایک Parabola کی مساوات ہے۔

چنانچہ پروجکٹائل (غلیلیہ) سے اپنایا گیا راستہ ایک خط مکافی Parabola ہوتا ہے (خاکہ 2.39 میں بتائی گئی منحنی OPA)

(1) اڑان کا وقت (Time of Flight)

اپنا راستہ طے کرنے کے لئے یا زمین پر ٹکر کھانے کے لئے پروجکٹائل سے لیا جانے والا وقت اڑان کا وقت کہلاتا ہے۔

ایک ٹاور اور پروجیکٹال کی مثال پر غور کریجئے۔ فرض کیجئے کہ ٹاور کی اونچائی ' h ' ہے۔ فرض کیجئے کہ ٹاور سے افقی طور پر پھینکے گئے پروجیکٹائل سے، زمین سے ٹکرانے کے لئے لیا گیا وقت T ہے۔

11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:41 PM

ہم جانتے ہیں کہ عمودی حرکت کے لئے یہ مساوات ہے۔

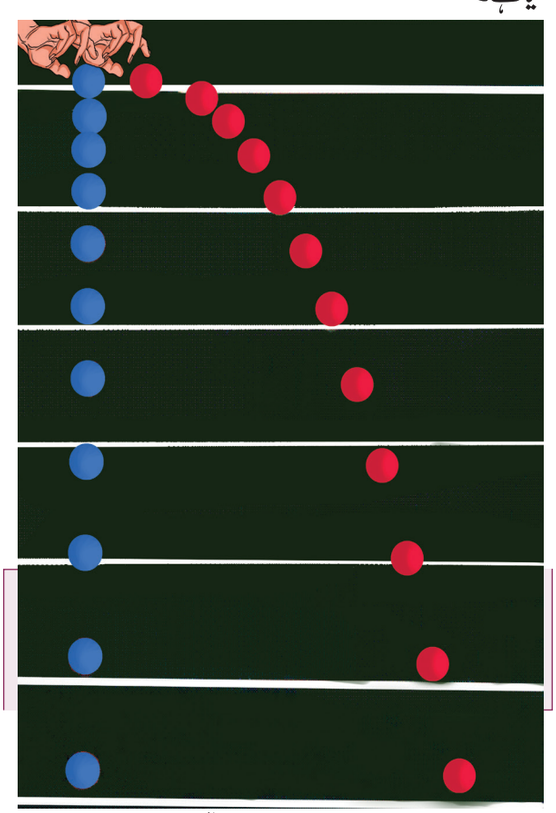
$$s_y = u_y t + \frac{1}{2} a t^2$$ یہاں

$$s_y = h,\ t = T,\ u_y = 0$$

(یعنی کوئی ابتدائی عمودی سمتی رفتار نہیں ہے) پھر

$$h = \frac{1}{2} g T^2 \quad \text{یا} \quad T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

لہذا پروجکٹائل کی حرکت کے اڑان کا وقت ٹاور کی اونچائی ہی پر منحصر ہے اور وہ پھینک کی افقی سمتی رفتار پر منحصر نہیں ہے۔ اگر ایک ہی وقت میں ایک گیند کو عمودی طور پر آزادانہ طور پر گرایا جائے اور ایک اور گیند کو افقی سمتی رفتار کے ساتھ گرایا جائے تو دونوں گیندیں ایک ہی وقت پر زمین پر پہنچیں گی۔ اس کا نمونہ خاکہ 2.40 میں پیش کیا گیا ہے۔



خاکہ 2.40 دو اشیاء سے مساوی وقفوں میں عمودی طور پر طے کیا گیا فاصلے یکساں ہے۔

(2) افقی حد: (Horizontal Range)

ایک پروجیکٹائل کے ذریعہ، ٹاور کے نچلے حصے سے لے کر زمین پر ٹکرانے تک، احاطہ کیا جانے والا فاصلہ افقی حد (horizontal range) کہلاتا ہے۔ افقی حرکت کے لئے ہمارے پاس موجود ہے۔

$$s_x = u_x t + \frac{1}{2} a t^2 .$$

یہاں s_x=R (حد)، $u_x = u$، a = 0 (کوئی افقی اسراع نہیں ہے)۔ اڑان کا وقت T ہے، تو افقی حد = uT ہے۔

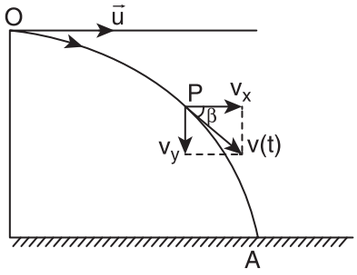
چونکہ $T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ اڑان کا وقت ہے، ہم اسے حل کرتے ہیں

اور ہم شئے کی افقی حد کو اس طرح حاصل کرتے ہیں۔ $R = u\sqrt{\frac{2h}{g}}$

اوپر کی مساوات یہ بتاتی ہے کہ حد R ابتدائی سمتی رفتار u کے راست تناسب اور اسراع بوجہ جاذبہ 'g' کے بلا راست تناسب میں ہے۔

(3) ماحصل سمتی رفتار (Resultant Velocity) (کسی بھی وقت میں پروجکٹائل کی سمتی رفتار)

کسی وقفہ t پر، پروجکٹائل میں x- محور اور y - محور دونوں کے تحت سمتی رفتار کے اجزاء پائے جاتے ہیں۔ ان دو اجزاء کا مجموعہ اس وقفے پر پروجکٹائل کی مجموعی سمتی رفتار فراہم کرتا ہے جیسا کہ خاکہ 2.41 میں بتایا گیا ہے۔



خاکہ 2.41 دو اجزاء میں حل شدہ سمتی رفتار

کسی وقفہ 't' پر افقی x- محور کے تحت سمتی رفتار کا جزء ہے۔

$$v_x = u_x + a_x t$$

چونکہ $u_x = u, a_x = 0$ ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$v_x = u \qquad \rightarrow (2.26)$$

11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:42 PM

عمودی سمت y- (محور) کے تحت سمتی رفتار کا جزیہ ہے۔

$$v_y = u_y + a_y t$$

چونکہ $u_y = 0, a_y = g$ ، ہم حاصل کرتے ہیں

$$v_y = gt \qquad \rightarrow (2.27)$$

چنانچہ کسی وقفہ میں شئے کی سمتی رفتار یہ ہے۔

$$\vec{v} = u\hat{i} + gt\hat{j}$$

چنانچہ کسی وقفہ t میں شئے کی رفتاریوں پیش ہوتی ہے۔

$$\therefore \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$
$$v = \sqrt{u^2 + g^2t^2}$$

(4) زمین پر ٹکراتے وقت پروجکٹائل (غلیلیہ) کی رفتار:
(Speed of the projectile when it hits the ground)

h اونچائی والے ٹاور کے اوپر سے افقی طور پر پھینکا گیا پروجیکٹائل (غلیلیہ) پھینکے جانے کے بعد جب زمین سے ٹکراتا ہے، اڑان کا وقت یہ ہے۔

$$T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$



(a) ترچھے طور پر تھامے گئے ایک پائپ سے نکلتا ہوا پانی

پروجکٹائل کی سمتی رفتار کے افقی جزء میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی۔

یعنی $v_x = u$

T وقت پر پروجکٹائل کی سمتی رفتار کا عمودی جز یہ ہے۔

$$v_y = gT = g\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh}$$

زمین پر ٹکراتے وقت پروجکٹائل کی رفتار یہ ہے۔

$$v = \sqrt{u^2 + 2gh}$$

2.11.3

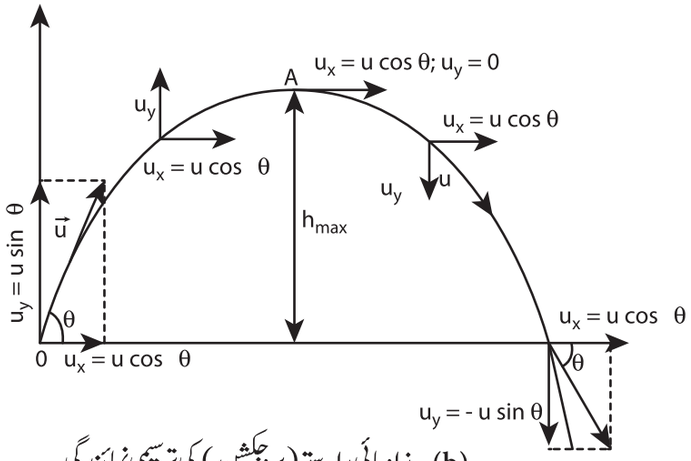
ایک زاویائی پھینک کے تحت پروجکٹائل
(Projectile under an angular projection)

غلیلیہ کی یہ حرکت اس وقت نمودار ہوتی ہے، جب ابتدائی سمتی رفتار افقی نہ ہو، بلکہ عمود کے ساتھ کچھ زاویہ پر ہو جیسا کہ خاکہ 2.42 میں بتایا گیا ہے۔

(ترچھا پروجیکٹائل) (Oblique Projectile)

مثالیں:

- ترچھے طور پر تھامے گئے ایک پائپ سے نکلتا ہوا پانی
- جنگ کے ایک میدان میں چلایا گیا گولا (Cannon)



(b) زاویائی راستے (پروجکشن) کی ترسیمی نمائندگی

خاکہ 2.42 پروجکٹائل کی حرکت

11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:42 PM

افق کے ساتھ θ کے زاویے پر $\vec{u}$ ابتدائی سمتی رفتار کے ساتھ پھینکی گئی ایک شئے کا تصور کیجئے۔ خاکے 2.42 اور 2.43 ملاحظہ کیجئے۔

$$\vec{u} = u_x \hat{i} + u_y \hat{j}$$

پھر، جہاں $u_x = u \cos\theta$ سمتی رفتار کا افقی جزء ہے اور $u_y = u \sin\theta$ عمودی جزء ہے۔

چونکہ اسراع بجہ جاذبہ ہے۔ عمودی جز u_y کی سمت کی مخالف سمت میں ہے، یہ جزء پروجکٹائل کی انتہائی اونچائی پر آہستہ آہستہ صفر تک کم ہوتا چلا جائے گا۔ اس کی انتہائی اونچائی پر وہی جاذبی قوت شئے کو کھینچنے لگے گی تاکہ وہ نچلی حرکت کرے اور زمین پر گرے۔ کل حرکت کے دوران x سمت میں کوئی اسراع نہیں پائی جاتی۔ اس لئے سمتی رفتار کا افقی جز $u_x = u \cos\theta$ مستقل پن رہتا ہے یہاں تک کہ وہ شئے زمین پر پہنچ نہ جائے۔

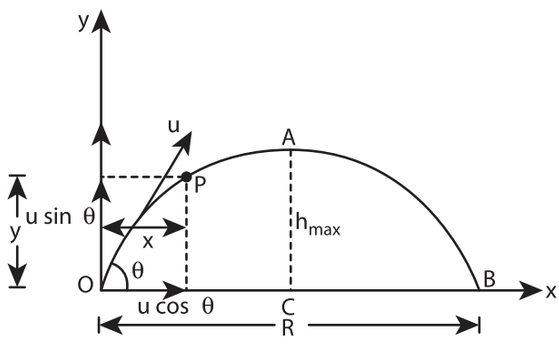
چنانچہ 't' وقت کے بعد افقی حرکت کے تحت سمتی رفتار

$$v_x = u_x + a_x t = u_x = u\cos\theta$$

t وقت میں پروجیکٹائل سے طے کیا گیا افقی فاصلہ یہ ہے۔

$$s_x = u_x t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

یہاں $s_x = x,\ u_x = u\cos\theta,\ a_x = 0$



خاکہ 2.43 جزوی طور پر حل شدہ ابتدائی سمتی رفتار

لہذا

$$x = u\cos\theta . t \quad \text{or} \quad t = \frac{x}{u\cos\theta} \qquad (2.28)$$

اس کے بعد عمودی حرکت کے لئے $v_y = u_y + a_y t$

یہاں $u_y = u\sin\theta,\ a_y = -g$

(اسراع بجہ جاذبہ حرکت کی مخالف میں عمل پیرا ہوتی ہے)

چنانچہ $v_y = u\sin\theta - gt \qquad (2.29)$

اسی وقت t میں پروجیکٹائل سے طے کیا گیا عمودی فاصلہ یہ ہے۔

$$s_y = u_y t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

یہاں $s_y = y,\ u_y = u\sin\theta,\ a_y = -g$ پھر

مساوات (2.28) کے ذریعہ 't' کی قیمت کو مساوات

$$y = u\sin\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (2.30)$$

(2.30) میں حل کرنے پر ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$y = u\sin\theta \frac{x}{u\cos\theta} - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{u^2\cos^2\theta}$$

$$y = x\tan\theta - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{u^2\cos^2\theta} \qquad (2.31)$$

لہذا پروجکٹائل سے اپنایا گیا راستہ ایک خط مکافی parabola ہے۔

انتہائی اونچائی (Maximum height) (h_{max})

دوران سفر ایک پروجیکٹائل کے ذریعہ طے کیا گیا سب سے زیادہ عمودی فاصلہ انتہائی اونچائی کہلاتا ہے۔ اس کا تعین یوں کیا جاتا ہے۔

حرکت عمودی حصہ کے لئے

$$v_y^2 = u_y^2 + 2a_y s$$

یہاں $u_y = u\sin\theta,\ a_y = -g,\ s = h_{max}$ اور

انتہائی اونچائی پر $v_y = 0$ ہے۔

11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:42 PM

اس لئے

$$0 = u^2 \sin^2\theta - 2gh_{max}$$

$$\text{Or } h_{max} = \frac{u^2 \sin^2\theta}{2g} \qquad (2.32)$$

اُڑان کا وقت (Time of flight) (T_f)

پھینکے گئے نقطہ سے افقی سطح پر ٹکرانے تک غلیلیہ سے لیا گیا وقت اڑان کا وقت کہلاتا ہے۔

اڑان کا یہ وقت ، نقطہ O سے نقطہ A کے ذریعہ نقطہ B تک پروجکٹائل کے ذریعہ لیا گیا وقت ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ $s_y = u_y t + \frac{1}{2} a_y t^2$

یہاں $s_y = y = 0$ (y سمت میں کل ہٹاؤ صفر ہے)

پھر $u_y = u\sin\theta, a_y = -g, t = T_f$

یہاں $0 = u\sin\theta\, T_f - \frac{1}{2} g T_f^2$

$$T_f = 2u\frac{\sin\theta}{g}$$

اُفقی حد (Horizontal Range) (R)

پھینک کے نقطے اور افقی سطح کا وہ مقام جہاں پروجکٹائل گرتا ہے، ان کا سب سے زیادہ درمیانی فاصلہ افقی حد Horizontal Range (R) کہلاتا ہے۔ اسے آسانی سے معلوم کرلیا جاتا ہے۔ چونکہ ابتدائی سمتی رفتار کا افقی جزو ایسے ہی باقی رہتا ہے۔ ہم یہ لکھ سکتے ہیں۔

حد (R) = اڑان کا وقت × سمتی رفتار کا افقی جزو

$$= u\cos\theta \times T_f$$

$$R = u\cos\theta \times \frac{2u\sin\theta}{g} = \frac{2u^2 \sin\theta\cos\theta}{g}$$

$$\therefore R = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g} \qquad (2.33)$$

افقی حد، ابتدائی رفتار (u) اور پھینک کے زاویہ (θ) کے sine پر براہ راست منحصر ہوتی ہے۔ وہ اسراع بوجہ جاذبہ 'g' پر بلا راست منحصر ہے۔

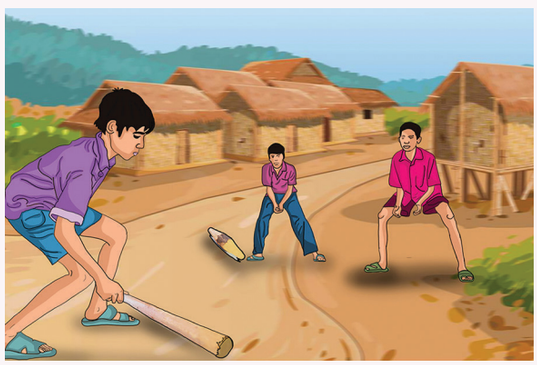
ایک دی گئی ابتدائی رفتار u کے لئے، سب سے زیادہ ممکنہ حد، اس وقت ہوسکتی ہے جب Sin2θ کی قیمت سب سے زیادہ ہو Sin2θ = 1۔ اس سے معلوم ہوتا ہے۔ $2\theta = \pi/2$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \qquad \text{یا}$$

اس کا مطلب یہ ہے کہ کہ اگر شئے افق کے لحاظ سے 45 درجے کے زاویے سے پھینکی جاتی ہے تو اس سے سب زیادہ حد طے کی جاتی ہے، جو یوں پیش ہے۔

$$R_{max} = \frac{u^2}{g} \qquad (2.34)$$

پروجکٹائل کی حرکت ! Projectile motion



تمل ناڈو میں گلّی ڈنڈا ایک دلچسپ روایتی کھیل ہے۔ جب گلّی کو ڈنڈے سے مارا جاتا ہے، تو گلّی سے اپنایا جانے والا راستہ خط مکافی Parabolic ہوتا ہے۔

GLN42

11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:43 PM

مثال 2.37

(فرض کیجئے کہ ایک شئے افق کے ساتھ کے $\pi/4$ زاویے پر $10\ m\ s^{-1}$ کی ابتدائی رفتار کے ساتھ پھینکی گئی ہے۔اس سے طے کی جانے والی حد کیا ہے،فرض کرو کہ اگر وہی شئے چاند میں اسی طرح پھینکی جائے تو کیا اس حد میں کوئی فرق پڑے گا؟ اگر ہاں تو فرق بتایئے۔

(چاند میں اسراع بوجہ جاذبہ $g_{moon} = \frac{1}{6}\ g$ ہے)

حل:

پروجکٹائل کی حرکت میں شئے کی حد اس طرح دی جاتی ہے۔

$$R = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g}$$

$$\theta = \pi/4 \quad u = v_0 = 10 m\ s^{-1}$$

$$\therefore R_{earth} = \frac{(10)^2 \sin \pi/2}{9.8} = 100/9.8$$

$$R_{earth} = 10.20\ m \qquad \text{(تقریباً 10 میٹر)}$$

اگر وہی شئے چاند میں اسی طرح پھینکی جائے تو اس کی حد بڑھ جائے گی کیونکہ چاند پر اسراع بوجہ جاذبہ زمین کے مقابلے میں کم ہے۔

$$g_{moon} = \frac{g}{6}$$

$$R_{moon} = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g_{moon}} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g/6}$$

$$\therefore R_{moon} = 6R_{earth}$$

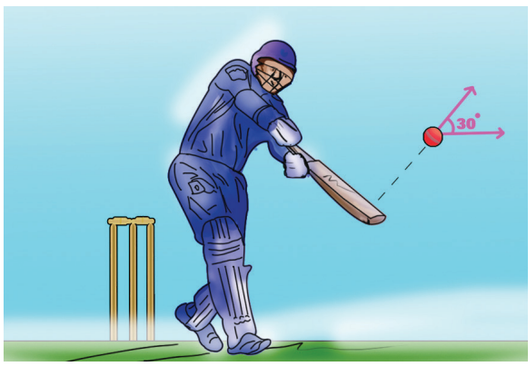
$$R_{moon} = 6 \times 10.20 = 61.20\ m$$

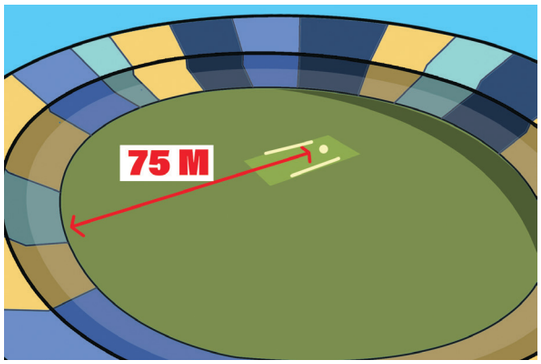
(تقریباً 60 میٹر)

چاند پر حاصل کی جانے والی حد زمین کے مقابلے میں تقریباً چھ گنا زیادہ ہوگی۔

مثال 2.38

کرکٹ کے کھیل میں ایک بلے باز گیند کو اس طرح مارتا ہے کہ گیند افق کے ساتھ 30° کا زاویہ بناتے ہوئے $30\ m\ s^{-1}$ کی رفتار سے چلنے لگتی ہے، جیسا کہ خاکہ میں بتایا گیا ہے۔کرکٹ کے میدان کے حد کی خط (boundary line) بلہ باز سے 75 میٹر کی دوری پر ہے۔کیا وہ گیند چھکہ کے لئے جائے گی؟ (ہوائی مزاحمت کو نظر انداز کر دیجئے اور اسراع بوجہ جاذبہ 'g' کی قیمت $g = 10\ ms^{-2}$ تصور کر لیجئے۔)





حل:

ہوا میں کرکٹ گیند کی حرکت ضرور ایک پروجکٹائل کی حرکت ہوتی ہے جیسا کہ ہم نے پہلے دیکھا تھا، ایک پروجیکٹائل کی حرکت حد (افقی حد) اس طرح پیش کی جاتی ہے

$$R = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g}$$

ابتدائی رفتار $u = 30\ m\ s^{-1}$

پروجکٹائل کا زاویہ $\theta = 30^\circ$

11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:43 PM

کرکٹ کی گیند سے طے کیا جانے والا افقی فاصلہ

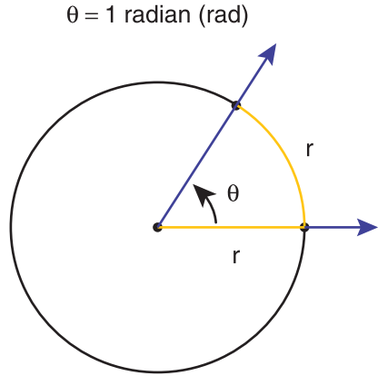
$$R = \frac{(30)^2 \times \sin 60°}{10} = \frac{900 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{10} = 77.94\,m$$

یہ فاصلہ حدی خط کے فاصلے سے زیادہ ہے۔ لہذا گیند اس خط کو پار کرتے ہوئے چھکہ کے لئے جائے گی۔

2.11.4 درجے اور ریڈین کا تعارف
(Introduction to Degrees and Radians)

زاویوں کی پیمائش میں کئی ممکنہ اکائیاں استعمال کی جاتی ہیں، مگر درجے اور ریڈین ہی عام طور پر استعمال ہونے والی اکائیاں ہیں۔ رقبہ، حجم اور دائروں کا احاطہ اور کروں کا سطحی رقبہ کے لئے ریڈین کا استعمال کیا جاتا ہے۔

ریڈین (Radian)، ایک دائرے کے مرکز پر ایک دائری منحنی سے بننے والے سطحی زاویے کی وضاحت کرتا ہے۔ اس کی تعریف یوں کی جاتی ہے کہ یہ منحنی کے نصف قطر سے تقسیم کی گئی منحنی کی لمبائی ہے۔ دائرے کے نصف قطر کے برابر لمبائی رکھنے والی منحنی سے اس دائرے کے مرکز پر بننے والا زاویہ ایک ریڈین ہے۔ اسے خاکہ 2.44 میں بتایا گیا ہے۔



خاکہ 2.44 ایک ریڈین (زرد رنگ میں بتایا گیا ہے)

درجہ (degree) پیمائش کی اکائی ہے جو ایک زاوئے کی جسامت کے تعین کرنے میں استعمال کی جاتی ہے۔ جب ایک دائرے میں ایک زاویہ پوری طرح چکر لگاتا ہے تو اس سے احاطہ کیا جانے والا کل زاویہ $360°$ کے برابر ہوتا ہے۔ لہذا ایک دائرے میں $360°$ ہوتے ہیں۔ ریڈین کے لحاظ سے، مکمل دائرے میں 2π ریڈین ہوتے ہیں۔

لہذا ہم اس طرح لکھتے ہیں $360° = 2\pi \ radians$

$$1 \text{ ریڈین} = \frac{180}{\pi} \text{ degrees}$$

جس کا مطلب $1 \text{ rad} \cong 57.27°$

مثال 2.39

خاکے میں بتائے گئے بیل گاڑی کے پہیے کے لکڑے کے دو قریبی اسپوک (Spokes) کا درمیانی زاویہ θ معلوم کیجئے۔ زاویہ کو درجے اور ریڈین دونوں میں معلوم کیجئے۔



حل:

مکمل پہیہ، اپنے مرکز پر 2π ریڈین لئے ہوئے ہے۔

پہیے کو 12 حصوں (قوسوں) سے تقسیم کیا گیا ہے۔

اس لئے ایک منحنی کے ذریعہ مرکز سے بننے والا زاویہ

مرکز پر زاویہ $\theta = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$

چنانچہ $\pi \ rad = 180°, \ \frac{\pi}{6}$ radian

لکڑے کے دو قریبی اسپوک کا درمیانی زاویہ مرکز پر 30 درجہ ہے۔

11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:44 PM

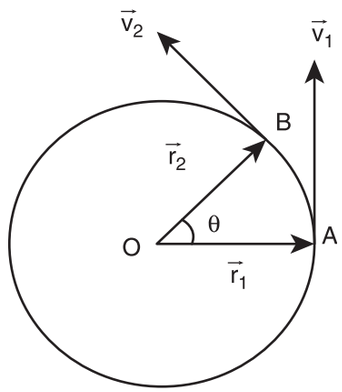
نوٹ

عدد π طبیعیات اور ریاضیات دونوں میں ایک اہم کردار ادا کرتا ہے۔ یہ ایک غیر ناطق عدد ہے جسے متعین کسری قسم میں ظاہر نہیں کیا جاسکتا۔ البتہ ہم $\pi \approx 3.14$ یا $\frac{22}{7}$ کو اس کی قریبی مقدار کی طرح اندازاً ظاہر کرسکتے ہیں۔ مگر ہمیں نہیں بھولنا چاہئے کہ 3.14 یا $\frac{22}{7}$ کے مساوی π نہیں ہے، بلکہ وہ صرف ایک اندازہ ہی ہے۔

2.11.5 زاویائی ہٹاؤ (Angular Displacement)

ایک شئے کا تصور کیجئے جو r نصف قطر والے ایک دائرے میں ایک نقطہ O کے اطراف چکر لگاتی ہے۔

فرض کیجئے کہ ایک وقت $t = 0$ پر شئے کا مقام A ہے اور تھوڑی دیر t کے بعد اس کا مقام B ہے۔



خاکہ 2.45 زاویائی ہٹاؤ

تو

ایک دئے گئے وقت میں گردش کے محور (یا مرکز 'O') کے تحت شئے کے ذریعہ واضح ہونے والا زاویہ زاویائی ہٹاؤ کہلاتا ہے۔

یعنی زاویائی ہٹاؤ $= \angle AOB = \theta$

زاویائی ہٹاؤ کی اکائی ریڈین ہے۔

زاویائی ہٹاؤ (θ) ریڈین میں، منحنی کی لمبائی S، (AB) اور نصف قطر r سے اس طرح مناسبت رکھتا ہے۔

$$\theta = \frac{S}{r}, \quad \text{or} \quad S = r\theta$$

زاویائی سمتی رفتار (ω) (Angular Velocity)

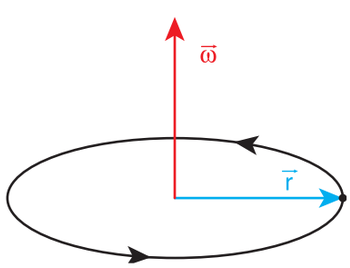
زاویائی ہٹاؤ کی تبدیلی کی شرح زاویائی سمتی رفتار کہلاتی ہے۔

اگر t وقت میں ہونے والا زاویائی ہٹاؤ θ ہے تو پھر زاویائی سمتی رفتار ω یہ ہے۔

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

زاویائی سمتی رفتار کی اکائی، ریڈین فی سکنڈ ($rad\ s^{-1}$) ہے۔

زاویائی سمتی رفتار کی سمت گردشی محور کے ساتھ دائیں ہاتھ کے قانون کے مطابق ہوتی ہے۔ اسے خاکہ 2.46 میں بتایا گیا ہے۔



خاکہ 2.46 زاویائی سمتی رفتار کی سمت

(i) زاویائی اسراع (α) (Angular acceleration)

زاویائی سمتی رفتار کی تبدیلی کی شرح زاویائی اسراع کہلاتی ہے۔

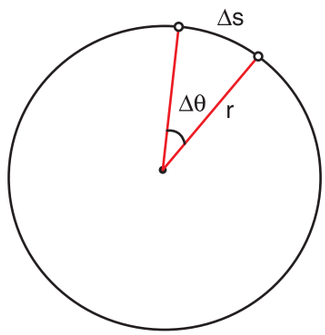
$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

زاویائی اسراع بھی ایک سمتی مقدار ہے۔ لیکن یہ ضروری نہیں کہ اس کی سمت زاویائی سمتی رفتار کی سمت کے مطابق ہی ہو۔

11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:44 PM

مماسی اسراع (Tangential acceleration)

فرض کیجئے کہ ایک شئے r نصف قطر والے ایک دائرے، کے ساتھ حرکت کر رہی ہے۔ ایک وقت Δt میں، وہ شئے ایک منحنی کا فاصلہ Δs طے کرتی ہے جیسا کہ خاکہ 2.47 میں بتایا گیا ہے۔ اس سے بننے والا متعلقہ زاویہ $\Delta\theta$ ہے۔



خاکہ 2.47 دائری حرکت

Δs کو $\Delta\theta$ کے لحاظ سے اس طرح سے لکھا جا سکتا ہے۔

$$\Delta s = r\Delta\theta \qquad (2.35)$$

ایک وقت Δt میں، ہم رکھتے ہیں۔

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = r\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad (2.36)$$

حد $\Delta t \to 0$ میں اوپر کی مساوات اس طرح بن جاتی ہے۔

$$\frac{ds}{dt} = r\omega \qquad (2.37)$$

یہاں $\frac{ds}{dt}$ خطی رفتار (v) ہے جو دائرے کے ساتھ مماسی ہوتی ہے اور ω زاویائی رفتار ہے۔ اس لئے مساوات (2.37) اس طرح ہو جاتی ہے۔??? (2.38)

$$v = r\omega \qquad (2.38)$$

جو خطی رفتار اور زاویائی رفتار کے درمیان مناسبت فراہم کرتی ہے۔

نوٹ

خطی سمتی رفتار v کی سمت دائرے سے مماسی ہوتی ہے جب کہ زاویائی سمتی فتار $\vec{\omega}$ کی سمت گردشی محور کے ساتھ ہوتی ہے۔ نصف قطر بھی ایک سمتیہ $\vec{r}$ کے طور پر ظاہر کیا جاتا ہے، جس کی سمت اشعاعی طور پر دائرے کے مرکز سے دائرے کی طرف ہوتی ہے۔

مساوات (2.38) صرف دائری حرکت کی حد تک ہی درست ہے۔ عام طور پر خطی اور زاویائی سمتی رفتار کا تعلق یوں پیش کیا جاتا ہے۔

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad (2.39)$$

دائری حرکت کے لئے مساوات 2.39 مختص ہو کر (2.38) بن جاتی ہے کیونکہ $\vec{\omega}$ اور $\vec{r}$ ایک دوسرے کے عمودی ہوتے ہیں۔

مساوات (2.38) کو وقت کے لحاظ سے تفرق (differentiate) کرنے پر ہم حاصل کرتے ہیں۔
(چونکہ r مستقل ہے)

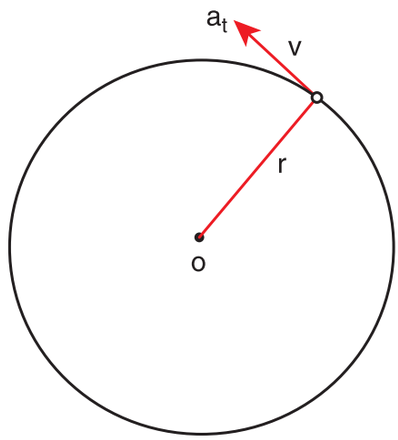
$$\frac{dv}{dt} = \frac{rd\omega}{dt} = r\alpha \qquad (2.40)$$

یہاں $\frac{dv}{dt}$ مماسی اسراع ہے اور وہ a_1 سے ظاہر کی جاتی ہے۔ $\frac{d\omega}{dt}$ زاویائی اسراع α ہے۔ پھر مساوات (2.39) یوں ہو جاتی ہے۔

$$a_t = r\alpha \qquad (2.41)$$

دائری حرکت میں ایک شئے سے محسوس کی جانے والی مماسی اسراع a_t کا نمونہ خاکہ 2.48 میں بتایا گیا ہے۔

11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:45 PM

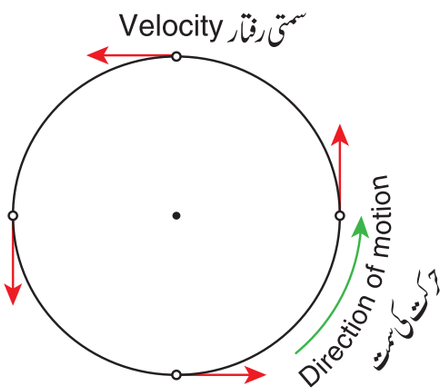


خاکہ 2.48 مماسی اسراع

نوٹ کیجئے کہ مماسی اسراع خطی سمتی رفتار کی سمت میں ہوتی ہے۔

2.11.6 دائری حرکت (Circular motion)

جب ایک نقطوی شئے ایک دائری راستے میں ایک مستقل رفتار کے ساتھ حرکت کرتی ہے تو وہ وقت کے مساوی وقفوں میں دائرے کے احاطے پر مساوی فاصلے طے کرتی ہے، تو یہ کہا جائے گا کہ وہ شئے یکساں دائری حرکت میں ہے۔ اسے خاکہ 2.49 میں بتایا گیا ہے۔



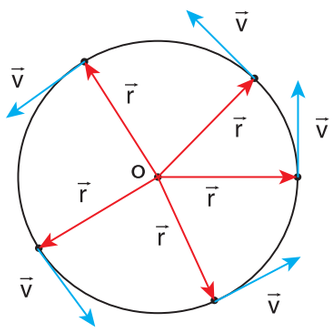
خاکہ 2.49 یکساں دائری حرکت

یکساں دائری حرکت میں رفتار تو یکساں رہتی ہے، مگر سمتی رفتار مسلسل تبدیل ہوتی رہتی ہے۔ طبیعی طور پر اس سے معلوم ہوتا ہے کہ سمتی رفتار کی سمتیہ کی قدر مستقل رہتی ہے، اور صرف اس کی سمت لگاتار تبدیل ہوتی رہتی ہے۔

اگر سمتی رفتار، دائری حرکت کے دوران، رفتار اور سمت دونوں میں تبدیل ہوتی ہو تو ہم غیر یکساں دائری حرکت حاصل کرتے

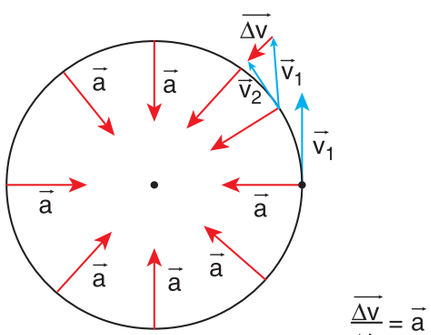
مرکز جو (یا) مرکز مائل اسراع (Centripetal acceleration)

جیسا کہ پہلے دیکھا گیا، یکساں دائری حرکت میں سمتی رفتار کی سمتیہ اپنی قدر (رفتار) کو تبدیل کئے بغیر سمت بدلتے رہتی ہے، جیسا کہ خاکہ 2.50 میں بتایا گیا ہے۔



خاکہ 2.50 یکساں دائری حرکت میں سمتی رفتار

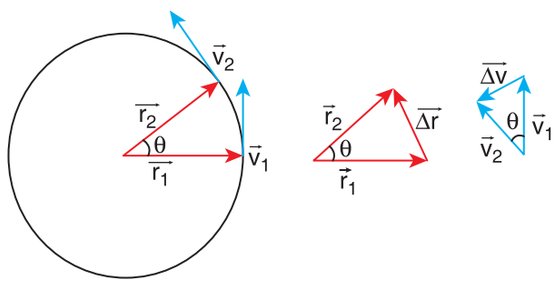
نوٹ کیجئے کہ سمتی رفتار کے سمتیے کی لمبائی (نیلے رنگ) حرکت کے دوران تبدیل نہیں ہوتی جس سے معلوم ہوتا ہے کہ رفتار مستقل رہی ہے۔ باوجود یہ کہ سمتی رفتار دائرے میں ہر نقطہ پر مماسی ہے، اسراع، دائرے کے مرکز کی طرف عمل پیرا ہوتا ہے اسے مرکز مائل اسراع کہا جاتا ہے۔ وہ ہمیشہ دائرے کے مرکز کی طرف رخ کئے ہوئے ہوتی ہے ۔اسے خاکہ 2.51 میں بتایا گیا ہے۔



خاکہ 2.51 مرکز مائل اسراع

11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:45 PM

وہ مرکز جو اسراع، مقام اور سمتی رفتار کے سمتیوں کی درمیانی معمولی ہندسی مناسبت سے اخذ کی جاتی ہے۔
(خاکہ 2.48 یا 2.50)



خاکہ 2.52 مقامی اور سمتی رفتاری سمتیوں کے درمیان ہندسی مناسبت

فرض کیجئے کہ مقام اور سمتی رفتار کے سمتیے وقت کے ایک چھوٹے سے وقفے Δt میں اتنا ہی زاویہ θ میں تبدیل ہوتے ہیں جیسا کہ خاکہ 2.52 میں بتایا گیا ہے۔ یکساں دائری حرکت کے لئے $r = |\vec{r}_1| = |\vec{r}_2|$ اور $v = |\vec{v}_1| = |\vec{v}_2|$۔ اگر وہ شئے مقامی سمتیہ $\vec{r}_1$ سے $\vec{r}_2$ تک حرکت کرتی ہے تو ہٹاؤ یہ ہوگا۔ $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ اور سمتی رفتار کی تبدیلی $\vec{v}_1$ سے $\vec{v}_2$ یوں دی جائے گی۔
$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ ہٹاؤ کی قدریں Δr اور Δv مندرجۂ ذیل مناسبت کو مطمئن کرتی ہیں۔

$$\frac{\Delta r}{r} = -\frac{\Delta v}{v} = \theta$$

یہاں منفی علامت یہ ظاہر کرتی ہے کہ Δv اشعاعی طور پر اندرونی طور پر دائرے کی مرکز کی طرف سمت بند ہے۔

$$\Delta v = -v\left(\frac{\Delta r}{r}\right)$$

تو

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{v}{r}\left(\frac{\Delta r}{\Delta t}\right) = -\frac{v^2}{r}$$

یکساں دائری حرکت کے لئے $v = \omega r$ ہے جہاں ω مرکز کے تحت شئے کی زاویائی سمتی رفتار ہے،

تو پھر مرکز مائل اسراع اس طرح لکھی جاسکتی ہے۔

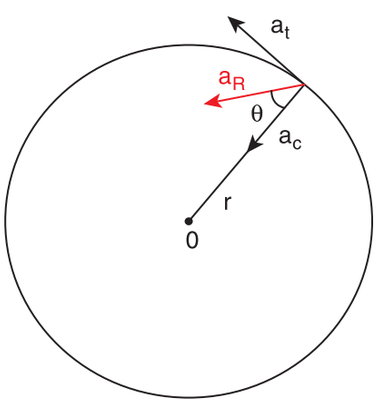
$$a = -\omega^2 r$$

نوٹ

مرکز مائل اسراع کی قدر، یکساں دائری حرکت کے لئے مستقل رہتی ہے، مگر حرکت کے دوران مرکز مائل اسراع مستقل نہیں ہوتی بلکہ حرکت کے دوران مختلف سمتیں لیتے رہتی ہے۔

غیر یکساں دائری حرکت:
(Non uniform circular motion)

دائری حرکت میں اگر شئے کی رفتار مستقل نہ ہو تو، اسی حرکت غیر یکساں دائری حرکت ہوتی ہے۔ مثال کے طور پر ایک دھاگے سے بندھا ہوا، ایک گولا (bob) جب عمودی دائرے میں حرکت کرتا ہے تو ہر وقت گولے کی حرکت یکساں نہیں ہوتی۔ جب بھی دائری حرکت میں رفتار یکساں نہ ہوتی ہو تو، شئے میں مرکز مائل اسراع کے ساتھ ساتھ مماسی اسراع بھی پائی جائے گی، جیسا کہ خاکہ 2.53 میں بتایا گیا ہے۔



خاکہ 2.53 غیر یکساں دائری حرکت میں مجموعی اسراع (a_R)

مرکز مائل اور مماسی اسراع کے سمتی مجموعے کے ذریعہ مجموعی اسراع حاصل کی جاتی ہے۔

11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:45 PM

چونکہ مرکز مائل اسراع $\frac{v^2}{r}$ ہے، اس مجموعی اسراع کی قدر یوں پیش کی جاتی ہے۔

$$a_R = \sqrt{a_t^2 + \left(\frac{v^2}{r}\right)^2}\ .$$

یہ مجموعی اسراع نصف قطری سمتیہ کے ساتھ θ کا ایک زاویہ بناتی ہے جیسا کہ خاکہ 2.53 میں بتایا گیا ہے۔

یہ زاویہ اس کے ذریعہ پیش کیا جاتا ہے۔ $\tan\theta = \frac{a_t}{\left(v^2/r\right)}$

مثال 2.40

ایک شئے 10 میٹر نصف قطر والے ایک دائرے میں حرکت کرتی ہے۔اس کی خطی رفتار $v = 3t$ سے پیش کی جاتی ہے جس میں t سکنڈ میں اور v ، ms^{-1} میں ہے۔

(a) t=2s پر مرکز مائل اور مماسی اسراع معلوم کیجئے۔

(b) مجموعی اسراع اور نصف قطری سمتیہ کا درمیانی زاویہ معلوم کیجئے۔

حل :

t=2s پر خطی رفتار یہ ہے۔

$$v = 3t = 6\,m\,s^{-1}$$

t = 2s پر مرکز مائل اسراع یہ ہے۔

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{(6)^2}{10} = 3.6\,m\,s^{-2}$$

مماسی اسراع یہ ہے۔ $a_t = \frac{dv}{dt} = 3\,m\,s^{-2}$

مجموعی اسراع اور نصف قطری سمتیہ کا درمیانی زاویہ یوں پیش کیا جاتا ہے۔

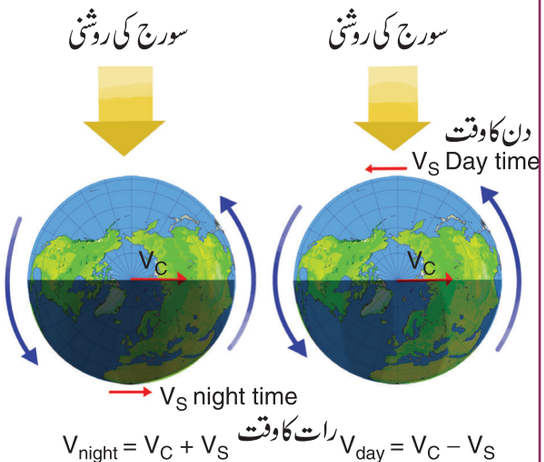
$$\tan\theta = \frac{a_t}{a_c} = \frac{3}{3.6} = 0.833$$

$\theta = \tan^{-1}(0.833) = 0.69$ radian ریڈین

$\theta = 0.69 \times 57.27° \approx 40°$ درجے کے لحاظ سے

کیا ہم سورج کے لحاظ سے دن اور رات دونوں میں ایک ہی رفتار کے ساتھ حرکت کر رہے ہیں؟

زمین سورج کے اطراف ایک گردشی مدار پر چکر لگاتی ہے۔آیئے سورج کے لحاظ سے زمین کے مرکز کی سمتی رفتار کو v_c کے طور پر مخصوص کریں۔یہ v_c سورج کے اطراف زمین کی بیضوی حرکت کی وجہ سے ہے۔ہم جانتے ہیں کہ زمین بیک وقت اپنی ہی محور پر گردش (Spinning) بھی کرتی ہے۔اس گردش کی وجہ سے زمین کی سطح پر موجود تمام اشیاء، زمین کی گردشی محور کے لحاظ سے $(\vec{v}_s)$ سمتی رفتار کے ساتھ دائری حرکت کر رہے ہوتے ہیں۔ رات میں $\vec{v}_c$ اور $\vec{v}_s$ دونوں یا تو ایک ہی سمت میں ہوتی ہیں، یا ایک دوسرے سے زاویہ حادہ پر ہوتے ہیں۔اس لئے رات کے وقت، سورج کے لحاظ سے زمین کی سطح پر موجود کسی شئے کی سمتی رفتار $\vec{v}_{night} = \vec{v}_c + \vec{v}_s$ ہے۔ دن کے وقت، $\vec{v}_c$ اور $\vec{v}_s$ یا تو مخالف سمت میں ہوتی ہیں یا ایک دوسرے سے منفرجہ الزاویہ پر ہوتے ہیں۔اس لئے دن میں سورج کے لحاظ سے زمین کی سطح پر موجود کسی شئے کی سمتی رفتار $\vec{v}_{day} = \vec{v}_c - \vec{v}_s$. ہے۔ اس سے ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ زمین کی سطح پر موجود کوئی بھی شئے سورج کے لحاظ سے دن کے مقابلے میں رات میں تیزی سے سفر کرتی ہے۔ زمین کی گردش کی وجہ سے اس طرح واقع ہوتا ہے



11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:46 PM

دائری حرکت کے حرکیاتی مساوات
(Kinematic Equations of Circular motion)

اگر ایک شئے مستقل زاویائی اسراع کے ساتھ دائری حرکت میں ہو تو، خطی حرکت کے لئے موجود مساوات کے مطابق اس حرکت کے لئے بھی ہم حرکیاتی مساوات اخذ کر سکتے ہیں۔

آیئے ہم فرض کریں کہ ایک شئے ω_0 ابتدائی زاویاتی سمتی رفتار کے ساتھ ایک دائری حرکت کر رہی ہے۔ وقت کے ایک وقفہ t کے بعد وہ شئے ایک آخری زاویائی سمتی رفتار α اختیار کر لیتی ہے۔ اس وقفہ کے دوران وہ کا ایک زاویائی ہٹاؤ طے کرتی ہے۔ زاویائی سمتی رفتار میں تبدیلی کی وجہ سے ایک زاویائی اسراع وہاں پائی جائے گی۔

حصہ 2.4.3 میں دیکھے گئے مندرجۂ ذیل میں دئے گئے خطی حرکت کے لئے حرکیاتی مساوات کی مدد سے دائری حرکت کے لئے حرکیاتی مساوات آسانی سے لکھی جا سکتی ہیں۔

خطی ہٹاؤ (s) کو زاویائی ہٹاؤ (θ) سے تبدیل کر دیا جاتا ہے۔

سمتی رفتار (v) کو زاویائی سمتی رفتار (ω) سے تبدیل کر دیا جاتا ہے۔

اسراع (a) کو زاویائی اسراع (α) سے تبدیل کر دیا جاتا ہے۔

ابتدائی سمتی رفتار (u) کو سمتی رفتار (ω_0) سے تبدیل کر دیا جاتا ہے۔

اس طریقۂ کار سے بننے والے دائری حرکت کے لئے حرکیاتی مساوات نیچے دئے گئے جدول میں پیش کئے گئے ہیں۔

زاویائی حرکت کے لئے حرکیاتی مساوات	خطی حرکت کے لئے حرکیاتی مساوات
$\omega = \omega_0 + \alpha t$	$v = u + at$
$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	$s = ut + \frac{1}{2}at^2$
$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$	$v^2 = u^2 + 2as$
$\theta = \frac{(\omega_0 + \omega)}{2} t$	$s = \frac{(v + u)}{2} t$

نوٹ

خطی حرکت کے لئے حرکیاتی مساوات اسی وقت درست ہیں، جب اسراع مستقل ہو۔ اسی طرح زاویائی حرکت کے لئے حرکیاتی مساوات اسی وقت درست ہیں جب زاویائی اسراع مستقل ہو۔

مثال 2.41

ایک شئے $a = 0.2\ rad\ s^{-2}$ کی اسراع کے ساتھ دائری حرکت میں ہے۔

(a) 5 سکنڈ کے بعد شئے سے بنایا گیا زاویائی ہٹاؤ کیا ہے؟

(b) $t = 5s$ پر زاویائی سمتی رفتار کیا ہے؟ تصور کر لیجئے کہ ابتدائی زاویائی سمتی رفتار صفر ہے۔

حل:

چونکہ ابتدائی زاویائی سمتی رفتار صفر ہے $(\omega_0 = 0)$۔

شئے سے بنایا جانے والا زاویائی ہٹاؤ یوں پیش کیا جاتا ہے۔

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\theta = \frac{1}{2} \times 2 \times 10^{-1} \times 25 = 2.5\ rad$$

درجے کے لحاظ سے

$$\theta = 2.5 \times 57.27° \approx 143°$$

11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:46 PM

SUMMARY خلاصہ:

- حالت سکون یا حرکت کی تعریف، کسی حوالاتی سانچے کے لحاظ سے کی جاتی ہے۔
- طبیعیات میں اشیاء کی حرکت کی وضاحت کرنے کے لئے روایتی طور پر ہم ایک دائیں ہاتھ والے کارتیسی محدداتی نظام کی اتباع کرتے ہیں۔
- خطی حرکت کی وضاحت کے لئے نقطوی کمیت کا تصور استعمال کیا جاتا ہے۔
- سمتیہ ایک مقدار ہے جس میں قدر اور سمت دونوں موجود ہوتے ہیں۔ قدر یہ میں صرف قدر پائی جاتی ہے۔
- ایک سمتیے کی لمبائی سمتیہ کی قدر یا عمود (norm) کہلاتی ہے۔
- ایک کارتیسی محداداتی نظام میں اکائی سمتیے ایک دوسرے کے زاویہ مستقیم (Orthogonal) یا قائمی ہوتے ہیں۔
- سمتیے یا تو مثلثی قانون مجموعہ یا متوازی الاضلاع کے قانون مجموعہ کی مدد سے جمع کئے جاسکتے ہیں۔
- کارتیسی محداداتی نظام کے لحاظ سے کسی بھی سمتیہ کو تین اجزاء میں تقسیم کر سکتے ہیں۔
- ایک سمتیہ $\vec{A}$ کی قدر یا قائمہ کو یوں پیش کیا جاتا ہے۔ $\left|\vec{A}\right| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$
- اگر دو سمتیے مساوی ہوں تو ان کے متعلقہ انفرادی اجزاء بھی علاحدہ طور پر مساوی ہی ہوں گے۔
- ایک کارتیسی محدداتی نظام کے لحاظ سے ایک شئے کے مقامی سمتیہ یوں پیش کی جاتی ہے۔ $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$
- دو سمتیوں کے قدری حاصل ضرب کی تعریف یوں کی جاتی ہے۔ $\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$ ($\vec{A}$ اور $\vec{B}$ کا درمیانی زاویہ θ ہے)
- دو سمتیوں کے سمتی حاصل ضرب کی تعریف یوں کی جاتی ہے۔ $\vec{A}\times\vec{B} = (AB\sin\theta)\hat{n}$ ۔ n کی سمت دائیں ہاتھ کے انگوٹھے کے قانون یا دائیں ہاتھ کے کارک پیچ کے قانون کی مدد سے معلوم کی جاسکتی ہے۔
- طبیعیات میں مختلف موضوعات کی وضاحت کے لئے سمتی اور قدری حاصلات ضرب کا استعمال کیا جاتا ہے۔
- شئے کے ذریعہ طے کئے گئے، راستے کی کل لمبائی فاصلہ ہے اور ہٹاؤ، آخری اور ابتدائی مقامات کا درمیانی فرق ہے۔ فاصلہ ایک قدری مقدار ہے اور ہٹاؤ سمتی مقدار ہے۔
- اوسط سمتی رفتار کی تعریف اس طرح کی جاتی ہے۔ $\vec{v}_{avg} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ اور بروقتہ سمتی رفتار کی تعریف اس طرح کی جاتی ہے $\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$
  اوسط سمتی رفتار اور بروقتہ سمتی رفتار دونوں سمتی مقداریں ہیں۔
- معیار حرکت کی تعریف اس طرح کی جاتی ہے۔ $\vec{p} = m\vec{v}$

11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:47 PM

SUMMARY (*cont*)

- اوسط اسراع کی تعریف یوں کی جاتی ہے $\vec{a}_{avg} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$

  اور بروقتہ اوسط اسراع کی تعریف اس طرح کی جاتی ہے۔ $\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

- مستقل اسراع کے لئے، کسی شئے کی حرکت کا جائزہ لینے کے لئے حرکیاتی مساوات کا استعمال کیا جاسکتا ہے۔

- پروجیکٹائل کی حرکت میں، جس کے لئے اسراع یکساں ہو، شئے سے اختیار کیا جانے والا راستہ Parabola ہے۔

- پروجکٹائل حرکت میں انتہائی اونچائی اور شئے کی حد، اسراع بوجہ جاذبہ 'g' پر بلا راست منحصر ہے۔

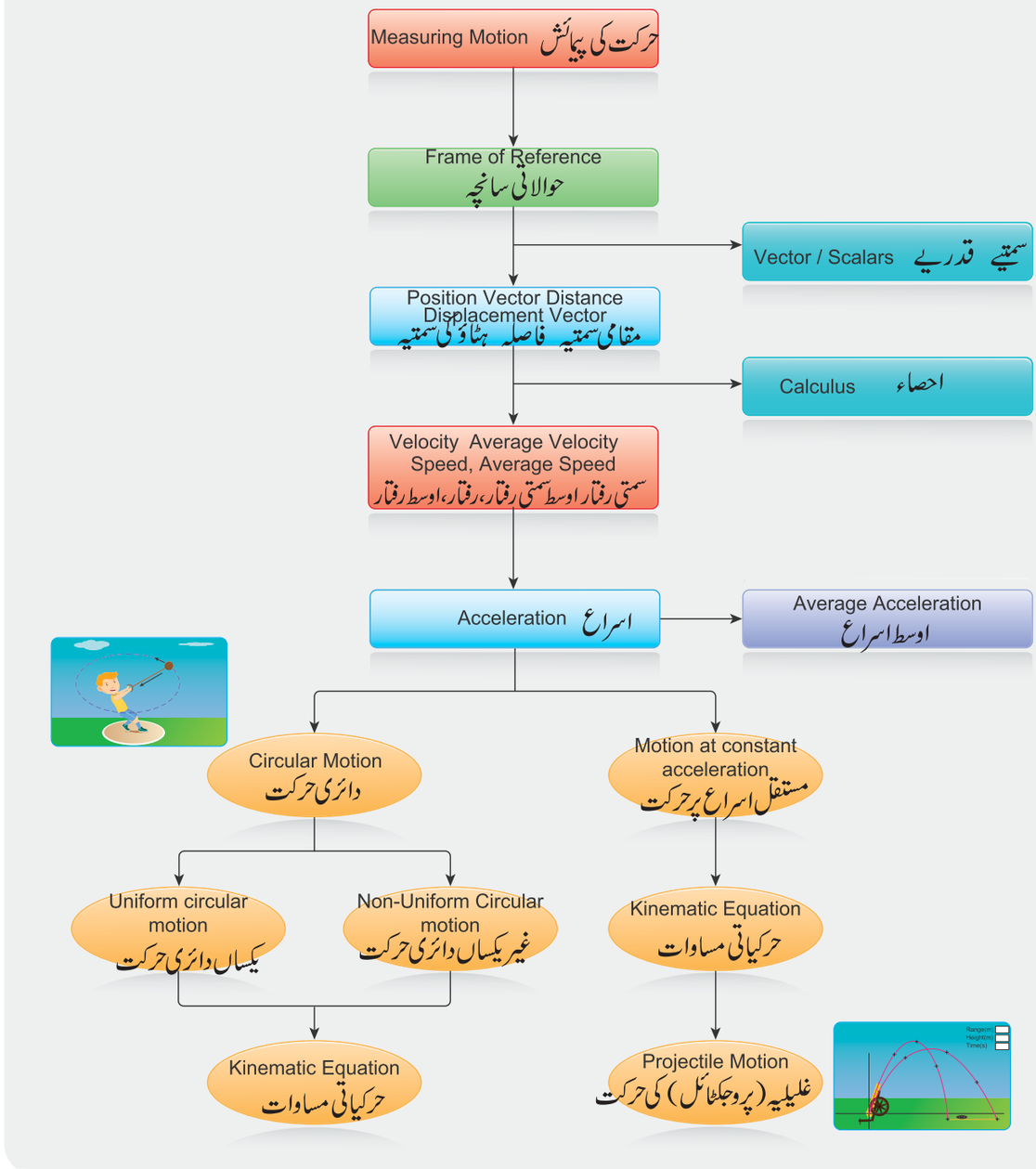
- شئے کے زاویاتی ہٹاؤ کی تعریف یوں کی جاتی ہے۔ $\theta = \frac{s}{r}$ اور زاویائی رفتار یہ ہے۔ $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt}$

- خطی سمتی رفتار اور زاویائی سمتی رفتار کی مناسبت یوں پیش کی جاتی ہے۔ $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

- مرکز مائل اسراع اس طرح دی جاتی ہے $a_c = -\frac{v^2}{r}$ یا $-\omega^2 r$ اور وہ ہمیشہ دائرے کے مرکز کی طرف سمت بند ہوتی ہے۔

11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:47 PM

CONCEPT MAP نظریاتی نقشہ



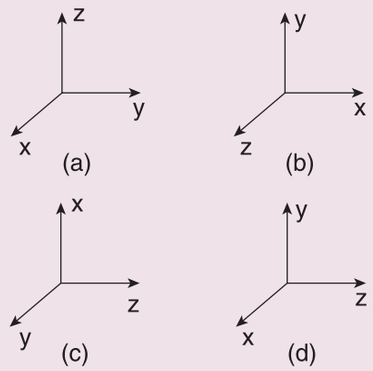
11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:47 PM

EVALUATION محاسبہ

FM6B3

I۔ کثیر انتخابی سوالات:

1۔ مندرجۂ ذیل کارتیسی محدداتی نظامات میں سے طبیعیات میں کس کی اتباع نہیں کی جاتی؟



2۔ مندرجۂ ذیل میں اکائی سمتیہ کی شناخت کیجئے۔

(a) $\hat{i}+\hat{j}$ (b) $\frac{i}{\sqrt{2}}$

(c) $\hat{k}-\frac{\hat{j}}{\sqrt{2}}$ (d) $\frac{\hat{i}+\hat{j}}{\sqrt{2}}$

3۔ مندرجۂ ذیل طبیعی مقداروں میں سے کس کی نمائندگی ایک قدریہ سے نہیں کی جاسکتی؟

(a) کمیت (b) لمبائی

(c) معیارحرکت (d) اسراع کی قدر

4۔ m_1 اور m_2 کمیتوں والی دو اشیاء بلاترتیب h_1 اور h_2 اونچائیوں سے گرتی ہیں۔ جب وہ زمین سے ٹکراتے ہیں تو ان کی معیارات حرکت کی نسبت یہ ہے۔ (AIPMT 2012)

(a) $\sqrt{\frac{h_1}{h_2}}$ (b) $\sqrt{\frac{m_1h_1}{m_2h_2}}$

(c) $\frac{m_1}{m_2}\sqrt{\frac{h_1}{h_2}}$ (d) $\frac{m_1}{m_2}$

5۔ ایک شئے میں منفی سمتی رفتار اور منفی اسراع ہو تو، اس کی رفتار

(a) بڑھتی ہے (b) گھٹتی ہے

(c) یوں ہی رہتی ہے (d) صفر ہے

6۔ اگر سمتی رفتار $\vec{v}=2\hat{i}+t^2\hat{j}-9\vec{k}$ ہو تو t=0.5s پر اسراع کی قدر یہ ہے۔

(a) 1m s^{-2} (b) 2 m s^{-2}

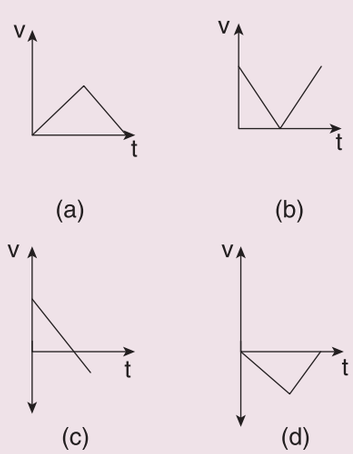
(c) zero (d) -1 m s^{-2}

7۔ عمارت کے اوپر سے ایک شئے کے گرائے جانے پر وہ شئے t=4s پر زمین پر پہنچتی ہے۔ عمارت کی بلندی یہ ہے (ہوائی مزاحمت نظر انداز کردی جائے گی)۔ ($g = 9.8\ ms^{-2}$)

(a) 77.3 m (b) 78.4 m

(c) 80.5 m (d) 79.2 m

8۔ ایک گیند، v سمتی رفتار کے ساتھ عمودی طور پر اوپر اچھالی جاتی ہے، وہ t وقت میں زمین پر واپس آتی ہے۔ کون سی v-t ترسیم صحیح حرکت بتاتی ہے؟ (NSEP 00-01)

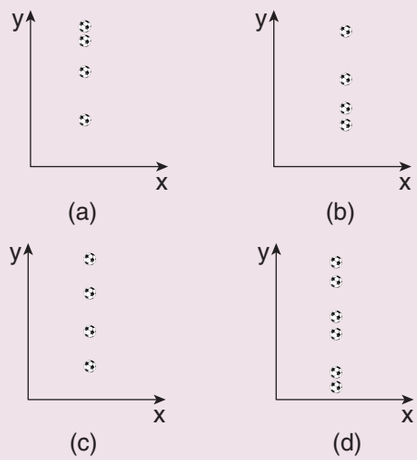


9۔ اگر ایک شئے عمودی طور پر نیچے چھوڑی جاتی ہے اور ایک اور شئے اسی اونچائی سے افقی طور پر پھینکی جاتی ہے تو پھر کسی بھی وقفے پر دونوں اشیاء سے طے کئے جانے والے عمودی فاصلے کی نسبت یہ ہے۔

11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:47 PM

(a) 1 (b) 2
(c) 4 (d) 0.5

10۔ ایک گیند کو کچھ اونچائی سے زمین کی طرف گرایا جارہا ہے۔ مندرجۂ ذیل میں سے کون سا خاکہ گیند کی حرکت کی صحیح وضاحت کرتا ہے؟



11۔ اگر ایک شئے ساعتی سمت میں xy سطح میں یکساں دائری حرکت کرتی ہے تو پھر زاویائی سمتی رفتار اس رخ میں ہوگی۔

(a) +y سمت
(b) + z سمت
(c) -z سمت
(d) -x سمت

12۔ اگر ایک شئے یکساں دائری حرکت انجام دے رہی ہے، تو اس سے متعلق صحیح بیان کا انتخاب کیجئے۔ (NEET 2016)

(a) سمتی رفتار اور رفتار مستقل ہیں
(b) اسراع اور رفتار مستقل ہیں
(c) سمتی رفتار اور اسراع مستقل ہیں
(d) رفتار اور اسراع کی قدر مستقل ہیں

13۔ اگر ایک شئے زمین سے 'u' ابتدائی رفتار کے ساتھ عمودی طور پر اوپر اچھالی جاتی ہے تو پھر زمین پر واپس آنے کے لئے اس شئے سے لیا جانے والا وقت یہ ہے۔

(a) $\frac{u^2}{2g}$ (b) $\frac{u^2}{g}$
(c) $\frac{u}{2g}$ (d) $\frac{2u}{g}$

14۔ دو اشیاء افقی سمت کے لحاظ سے بالترتیب 30° اور 60° زاویوں پر پھینکی جاتی ہے۔ دونوں اشیاء کی حدود $R_{30°}$ اور $R_{60°}$ کے طور پر ظاہر کی جاتی ہیں۔ مندرجۂ ذیل میں سے ٹھیک مناسبت کا انتخاب کیجئے۔

(a) $R_{30^0} = R_{60^0}$
(b) $R_{30^0} = 4R_{60^0}$
(c) $R_{30^0} = \frac{R_{60^0}}{2}$
(d) $R_{30^0} = 2\ R_{60^0}$

15۔ ایک شئے ایک نامعلوم سیارے پر 50 میٹر کی اونچائی سے گرائی جاتی ہیں۔ وہ اس کی سطح تک 2 سکنڈ میں پہنچتی ہے۔ اس نامعلوم سیارے میں اسراع بوجہ جاذبہ یہ ہے۔

(a) g = 20 m s^{-2} (b) g = 25 m s^{-2}
(c) g = 15 m s^{-2} (d) g = 30 m s^{-2}

جوابات:

1) d	**2)** d	**3)** c	**4)** c	**5)** a
6) a	**7)** b	**8)** c	**9)** a	**10)** a
11) c	**12)** d	**13)** d	**14)** a	**15)** b

II۔ مختصر جوابات لکھئے:

1۔ کارتیسی محدداتی نظام (Cartesian coordinate system) سے کیا مراد ہے؟ واضح کیجئے۔
2۔ ایک سمتیہ کی تعریف کیجئے۔ مثالیں پیش کیجئے۔
3۔ ایک قدریہ کی تعریف کیجئے۔ مثالیں پیش کیجئے۔
4۔ دو سمتیوں کے درمیان کے قدری حاصل ضرب پر ایک مختصر نوٹ لکھئے۔

11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:48 PM

5۔ دوسمتیوں کے درمیان کے سمتی حاصل ضرب پر ایک مختصر نوٹ لکھئے۔

6۔ تم کس طرح اخذ کرتے ہو کہ دوسمتیے عمودی ہیں؟

7۔ فاصلہ اور ہٹاؤ کی تعریف کیجئے۔

8۔ سمتی رفتار اور رفتار کی تعریف کیجئے۔

9۔ اسراع کی تعریف کیجئے۔

10۔ سمتی رفتار اور اوسط سمتی رفتار کے درمیان فرق کیا ہے؟

11۔ ایک ریڈین کی تعریف کیجئے؟

12۔ زاویائی ہٹاؤ (angular displacement) اور زاویائی سمتی رفتار (angular velocity) کی تعریف کیجئے۔

13۔ غیر یکساں دائری حرکت کسے کہتے ہیں؟

14۔ زاویائی حرکت کے لئے حرکیاتی مساوات لکھئے۔

15۔ غیر یکساں دائری حرکت میں مجموعی اسراع اور نصف قطری سمتیہ سے بنائے جانے والے زاویے کے لئے مساوات تحریر کیجئے۔

III۔ تفصیلی جوابات لکھئے۔

1۔ جمع کرنے کے مثلثی قانون کی تفصیلی وضاحت کیجئے۔

2۔ قدری اور سمتی حاصلات ضرب کی خصوصیات پر بحث کیجئے۔

3۔ مستقل اسراع کے لئے حرکت کی حرکیاتی مساوات اخذ کیجئے۔

4۔ (a) عمودی طور پر گرتی ہوئی (b) عمودی طور پر پھینکی گئی شئے کے لئے حرکت کی مساوات اخذ کیجئے۔

5۔ افقی سمت کے لحاظ سے ایک ترچھے زاویے پر پھینکی گئی شئے سے اپنائی جانے والی انتہائی اونچائی اور حد کے لئے حرکت کی مساوات اخذ کیجئے۔

6۔ مرکز مائل اسراع کے لئے مساوات اخذ کیجئے۔

7۔ غیر یکساں دائری حرکت میں مجموعی اسراع کے لئے مساوات اخذ کیجئے

IV۔ حسابی مسئلے

1۔ ایک شئے کی مقامی سمتیے کی لمبائی 1 میٹر ہے اور وہ x - محور کے ساتھ 30° کا زویہ بناتی ہے۔ مقامی سمتیے کے x اور y اجزاء کی لمبائیاں معلوم کیجئے۔

[Ans: $l_x = \frac{\sqrt{3}}{2}, l_y = 0.5$]

2۔ ایک شئے $\vec{r}_1 = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ مقام سے $\vec{r}_2 = \hat{i} + 2\hat{j}$ مقام کو پہنچ گئی ہے۔ ہٹاؤ کی سمتیہ $(\Delta\vec{r})$ معلوم کیجئے اور ایک دوابعادی کارتیسی محدادتی نظام میں $\vec{r}_1$، $\vec{r}_2$ اور $\Delta\vec{r}$ سمتیوں کا نقشہ کھینچئے۔

[Ans: $\Delta\vec{r} = -2\hat{i} - 2\hat{j}$]

3۔ اس شئے کی اوسط سمتی رفتار معلوم کیجئے جس کی مقامی سمتیہ 5 سکنڈ کے وقفے میں $\vec{r}_1 = 5\hat{i} + 6\hat{j}$ سے $\vec{r}_2 = 2\hat{i} + 3\hat{j}$ میں تبدیل ہوتی ہے

[Ans: $\vec{v}_{avg} = -\frac{3}{5}\left(\hat{i} + \hat{j}\right)$]

4۔ $\vec{r} = 3\hat{i} + 2\hat{j}$ سمتہ یہ کو ایک اکائی سمتیہ میں تبدیل کیجئے۔

[Ans: $\hat{r} = \frac{\left(3\hat{i} + 2\hat{j}\right)}{\sqrt{13}}$]

5۔ $\vec{A} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ اور $\vec{B} = 5\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ دی جانے والی دوسمتیوں کے سمتی حاصل ضرب کے مجموعے کیا ہیں؟

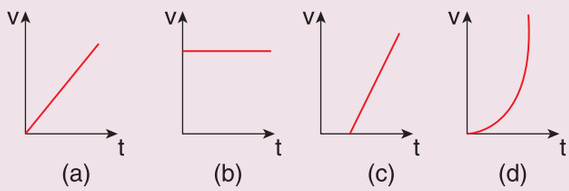
[Ans: $5\hat{i} + 21\hat{j} + 22\hat{k}$

6۔ ایک شئے ایسے زاویے پر ہے کہ اس کی حداس کی انتہائی اونچائی سے چوگنی ہے۔ شئے کی پھینک یا پروجیکشن کا زاویہ کیا ہے؟

[Ans: $\theta = 45^\circ$]

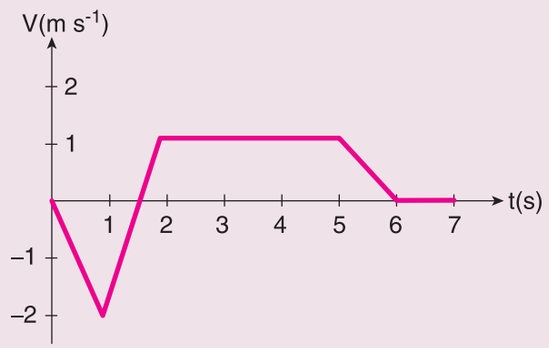
11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:48 PM

7۔ مندرجۂ ذیل ترسیمات ۔سمتی رفتار۔وقت کی ترسیمات ظاہر کرتی ہے۔شناخت کیجئے کہ ہرترسیم میں ایک شئے کی حرکت کی کون سی قسم ہے۔



[Ans: (a) مستقل $= \vec{a}$
(b) مستقل $= \vec{v}$
(c) مگر پہلے کی بہ نسبت زیادہ $= \vec{a}$
(d) متغیر $= \vec{a}$]

8۔ مندرجۂ ذیل سمتی رفتار۔وقت کی ترسیم x سمت میں حرکت کرنے والی ایک شئے کی نمائندگی کرتی ہے۔ 0 سکنڈ سے 7 سکنڈ تک اس کی حرکت کا جائزہ لیجئے۔0 سے 2 سکنڈ تک اس شئے سے طے کیا جانے والا ہٹاؤ اور فاصلہ کا محاسبہ کیجئے۔



[Ans: فاصلہ =1.75 m, ہٹاؤ = -1.25 m]

9۔ ایک شئے افقی سمت کے لحاظ سے θ کے زاویے پر پھینکی جاتی ہے اوپر کی حرکت کے لئے مناسب جوڑ لگایئے۔

(a) v_x کم ہوتی ہے، بڑھتی ہے۔
(b) v_y مستقل رہتی ہے۔
(c) اسراع - تبدیل ہوتی ہے۔
(d) مقامی سمتیہ نچلی جانب رہتی ہے۔

جواب (a) v_x مستقل رہتی ہے۔
(b) v_y کم ہوتی ہے، بڑھتی ہے۔
(c) اسراع نچلی جانب رہتی ہے۔
(d) مقامی سمتیہ تبدیل ہوتی ہے۔

10۔ پانی کا ایک چشمہ اپنے اطراف ہر طرف پانی چھڑکتا ہے۔اگر چشمے سے نکلنے والے پانی کی رفتار v ہوتو چشمے کے اطراف بھیگنے والی زمین کا کل رقبہ معلوم کیجئے۔

[Ans: Area $= \frac{\pi v^4}{g^2}$]

11۔ مندرجۂ ذیل جدول ایک شئے کی حد فراہم کرتی ہے جب وہ مختلف سیاروں میں پھینکی جاتی ہے۔تمام اشیاء افق کے ساتھ ایک ہی زاویے پر ایک ہی ابتدائی رفتار کے ساتھ پھینکی جاتی ہیں۔ان سیاروں کو ان کی اسراع بوجہ جاذبہ کے لحاظ سے بڑھتی ہوئی ترتیب میں لکھئے۔ (g کی قیمت)

Planet		Range
Jupiter	مشتری	50 m
Earth	زمین	75 m
Mars	مریخ	90 m
Mercury	عطارد	95 m

جواب : $g_{jupiter}$ بڑا ہے اور $g_{mercury}$ چھوٹا ہے۔

12۔ سمتئے A اور B کا مجموعہ سمتیہ A کے عمودی ہے اور اس کی قدر سمتیہ B کی نصف قدر کے برابر ہے۔A اور B کا درمیانی زاویہ یہ ہے۔

a) 30° b) 45°
c) 150° d) 120°

[Ans: $\theta = 150°$]

13۔ مندرجۂ ذیل سمتی مساوات کے لئے اجزاء کا موازنہ کیجئے۔

11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:49 PM

a) $T\hat{j} - mg\hat{j} = ma\hat{j}$ b) $\vec{T} + \vec{F} = \vec{A} + \vec{B}$

c) $\vec{T} - \vec{F} = \vec{A} - \vec{B}$ d) $T\hat{j} + mg\hat{j} = ma\hat{j}$

[Ans: (a) $T - mg = ma$

(b) $T_x + F_x = A_x + B_x$ etc.]

14۔ مثلث کا زاویہ معلوم کیجئے، جس کے دو ضلعے یوں پیش کئے گئے ہیں۔

$\vec{A} = 5\hat{i} - 3\hat{j}, \vec{B} = 4\hat{i} + 6\hat{j}$

جواب: (رقبہ 21= مربع اکائیاں)

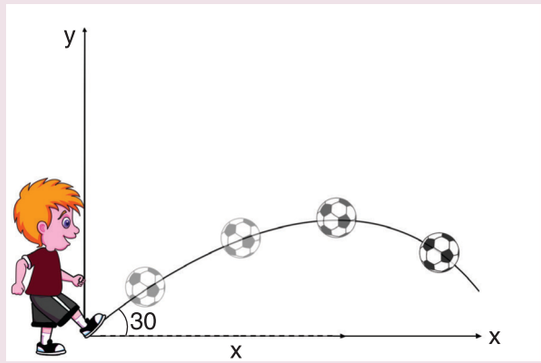
15۔ اگر زمین 24 گھنٹوں میں ایک گردش مکمل کرتی ہے تو ایک گھنٹے میں زمین سے کئے جانے والے زاویائی ہٹاؤ کی مقدار کیا ہے؟ اپنے جواب کو ریڈین اور درجے دونوں میں ظاہر کیجئے۔

[Ans: $\theta = 15° or \frac{\pi}{12}$]

16۔ ایک شئے $5ms^{-1}$ کی ابتدائی رفتار کے ساتھ $30°$ پروجیکشن کے زاویے پر پھینکی جاتی ہے۔ شئے سے طے کی جانے والی اونچائی اور حد کیا ہے؟

[Ans: اونچائی $\coloneqq 0.318$ m حد $= 2.21$ m]

17۔ فٹ بال کا ایک کھلاڑی افقی سطح کے ساتھ $30°$ کے زاویے پر گیند کو 20 میٹر فی سکنڈ کی رفتار میں مارتا ہے، جیسا کہ خاکہ میں بتایا گیا ہے۔ گول کا کھمبا اس سے 40 میٹر دوری پر ہے۔ معلوم کیجئے کہ کیا وہ گیند گول کے کھمبے تک پہنچ پائے گی یا نہیں۔



(جواب: وہ گیند گول کے کھمبے تک نہیں پہنچ پائے گی۔

حد=35.5m)

18۔ اگر ایک شئے 100 میٹر اونچی عمارت سے $10\ ms^{-1}$ کی ابتدائی رفتار کے ساتھ افقی طور پر پھینکی جاتی ہے تو شئے سے طے کیا جانے والا افقی فاصلہ کیا ہے؟ (جواب R=45m)

19۔ ایک شئے $\frac{\pi}{12}$ ریڈین فی سکنڈ کی زاویائی رفتار کے ساتھ یکساں دائری حرکت انجام دے رہی ہے۔ t= 0 پر وہ شئے زاویہ $\theta = 0$ پر شروع ہوتی ہے۔

4s بعد شئے کا زاویائی ہٹاؤ کیا ہے؟ (جواب : 60°)

20۔ تصور کیجئے کہ x- محور مشرق کی، y- محور شمال کی اور z- محور عمودی طور پر اوپر کی جانب کی نمائندگی کرتی ہے۔

مندرجۂ ذیل نقاط کی نمائندگی کرنے والے سمتیے بتائیے۔

(a) 5 میٹر شمالی مشرق اور 2 میٹر اوپر

(b) 4 میٹر جنوبی مشرق اور 3 میٹر اوپر

(c) 2 میٹر شمالی مغرب اور 4 میٹر اوپر

[Ans: (a) $\frac{5(\hat{i}+\hat{j})}{\sqrt{2}} + 2\hat{k}$ (b) $\frac{4(\hat{i}-\hat{j})}{\sqrt{2}} + 3\hat{k}$

(c) $(-\hat{i}+\hat{j})\sqrt{2} + 4\hat{k}$]

21۔ چاند زمین کے اطراف تقریباً 27 دنوں میں ایک چکر مکمل کرتا ہے۔ چاند سے ایک دن میں بنایا جانے والا زاویہ کتنا ہے؟

[Ans: 13°3']

22۔ m کمیت والی ایک شئے میں $a = 0.2\ rad\ s^{-2}$ کی زاویائی اسراع پائی جاتی ہے۔ 3 سکنڈ کے بعد اس شئے سے طے کیا جانے والا زاویائی ہٹاؤ کتنا ہے؟ (تصور کر لیجئے کہ شئے صفر زاویہ اور صفر زاویائی سمتی رفتار کے ساتھ شروع ہوئی)

[Ans: 0.9 rad or 51°]

11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:49 PM

BOOKS FOR REFERENCE

کتب حوالہ:

1. Charles Kittel, Walter Knight, Malvin Ruderman, Carl Helmholtz and Moyer, *Mechanics,* 2nd edition, Mc Graw Hill Pvt Ltd,
2. A.P.French, *Newtonian Mechanics,* Viva-Norton Student edition
3. SomnathDatta, *Mechanics,* Pearson Publication
4. H.C.Verma, *Concepts of physics* volume 1 and Volume 2, Bharati Bhawan Publishers
5. Serway and Jewett, *Physics for scientist and Engineers with modern physics*, Brook/Coole publishers, Eighth edition
6. Halliday, Resnick & Walker, *Fundamentals of Physics*, Wiley Publishers, 10th edition

11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:49 PM



ICT CORNER

Projectile motion غلیلیہ (پروجکٹائل) کی حرکت:



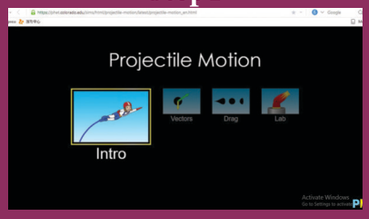
ہدف پر نشانہ بنایئے :

اس کارروائی کے ذریعہ آپ سمتی رفتار کے تغیرات اور پروجیکشن یا پھینک کے مختلف زاویے اور حد کو سمجھیں گے۔

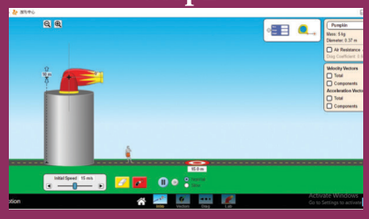
مرحلے:

- دیئے گئے URL کو ٹائپ کیجئے یا QR کوڈ اسکین کیجئے۔ آپ PhET کے مجازی صفحے پر "Projectile Motion" دیکھ سکتے ہیں۔ Intro پر کلک کیجئے تا کہ آپ کارروائی کی ابتداء کر سکیں۔
- سرخ رنگ کے شوٹ بٹن پر کلک کیجئے۔ Cannon سے گیند پھینک کر نشانہ بازی کیجئے۔
- استوانہ کی اونچائی کو تبدیل کرنے کے لئے 'up and down' بٹن پر ڈریگ کیجئے۔ دائیں اور بائیں بٹن دبا کر Cannon گیند کی رفتار تبدیل کیجئے۔
- نشانہ کے ڈبے کو ڈریگ کیجئے اور وقت، حد اور اونچائی ناپنے کے لئے اسے ثبت کیجئے۔ Cannon سے لمبائی ناپنے کے لئے میٹر فیتہ کو ڈریگ کیجئے۔ دائیں طرف اوپر کے حصے پر، سمتی رفتار اور اسراع کے سمتیوں کو جاننے کے لئے متعلقہ ڈبوں پر نشان دہی کیجئے۔

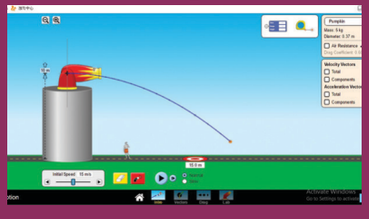
Step1



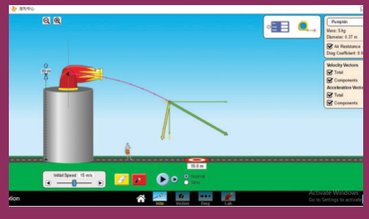
Step2



Step3



Step4



Timeline Project's URL:

https://phet.colorado.edu/sims/html/projectile-motion/latest/projectile-motion_en.html

* Pictures are indicative only.

* If browser requires, allow **Flash Player** or **Java Script** to load the page.

11 physics 2. kinematics
Tuesday, February 01, 2022 9:12:50 PM

اکائی
3

حرکت کے کلیے

LAWS OF MOTION

"In the beginning there was a mechanics" – Von Laue

سیکھنے کے مقاصد:

اس اکائی میں طلباء یہ سیکھ سکیں گے۔

- نیوٹن کے کلیے
- نیوٹن کے کلیوں کے درمیان منطقی تعلق
- آزاد شئے کا نقشہ اور متعلقہ مسئلے
- کلیہ بقائے معیار حرکت
- رگڑ کی قوتوں کا کردار
- مرکز مائل اور مرکز گریز قوتیں
- مرکز گریز قوت کا مبدا

AWX3Z

3.1 تعارف

کائنات کی ہر شئے ہر دوسری شئے کے ساتھ تعلق قائم کرتی ہے۔ ٹھنڈی ہوا درخت کے ساتھ تعلق قائم کرتی ہے اور درخت زمین کے ساتھ۔ غرض تمام انواع فطرت کے ساتھ تعلق جوڑے رکھتی ہیں مگر فطرت کے ساتھ انسان کے تعلقات دیگر جانوروں کی طرح نہیں ہوتے۔ انسانی تعلقات میں ایک اور معیار کا اضافہ ہوتا ہے۔ ہم فطرت سے یوں ہی تعلقات قائم نہیں کرتے بلکہ ہم فطری کارروائیوں کو سمجھنے اور انہیں سائنسی لحاظ سے وضاحت کرنے میں کوشاں رہتے ہیں۔

انسانی تاریخ میں سب سے زیادہ چونکا دینے والا سائنسی سوال، اشیاء کی حرکت کے بارے میں تھا۔ اشیاء کس طرح حرکت کرتی ہیں اور اشیاء کیوں حرکت کرتی ہیں؟ تعجب کی بات یہ ہے کہ یہی آسان سوالات قدیم تہذیب سے اکیسویں صدی کے جدید ترقی یافتہ ٹکنالوجی کی تبدیلی کا سبب بنے۔

کھینچے جانے یا ڈھکیلے جانے پر اشیاء حرکت کرتی ہیں۔ مثال کے طور پر اگر ایک کتاب حالت سکون میں ہے تو وہ اس وقت تک حرکت نہیں کرسکتی جب تک کہ اس پر کوئی قوت عمل پیرا نہ ہوجائے۔ بالفاظ دیگر کسی شئے کو حرکت کرانے کے لئے اس پر ایک قوت کا عمل آور ہونا ضروری ہے۔ تقریباً 2500 سال پہلے مشہور فلسفی ارسطو نے کہا تھا کہ ''قوت ہی حرکت پیدا کرتی ہے۔'' یہ کہاوت عام سمجھ بوجھ کی بنیاد پر تھی، مگر عام سمجھ بوجھ کی بنیاد پر کوئی بھی سائنسی جواب نہیں دیا جاسکتا۔ اس کو تو تجرباتی ثبوت و مقدار کے ساتھ مدلل دیا جانا چاہئے۔

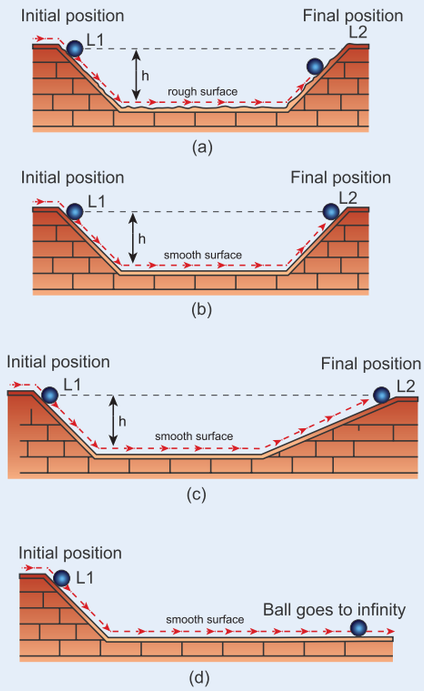
15 ویں صدی میں گیلی لیو نے ارسطو کے بیان کو آزمانے کے لئے مسلسل کئی تجربات کئے۔ انہوں نے بتایا کہ حرکت کو برقرار رکھنے کے لئے قوت کی ضرورت نہیں پڑتی۔

گیلی لیو نے مندرجۂ ذیل آسان تجربہ کی مدد سے خود اپنے خیال کو پیش کیا جب ایک گیند کسی ڈھلوان سطح کے اوپر سے آتی ہے تو نیچے آنے کے بعد وہ تھوڑی دور حرکت کرتی ہے اور حرکت کرتی ہوئی ڈھلاؤ کے زاویے کے مساوی مقدار والی ایک اور ڈھلوان سطح پر چڑھتی ہے

11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:01 PM

جیسا کہ خاکہ 3.1(a) میں بتایا گیا ہے۔ دونوں ڈھلوان سطحوں کے چمکیلے پن کو بڑھانے سے، وہ گیند دوسری ڈھلوان سطح (L1) میں تقریباً اتنی ہی اونچائی پر پہنچتی ہے جتنی کہ وہ پہلی ڈھلوان سطح (L1) پر سے چھوڑی گئی تھی (خاکہ 3.1 (b))

نفاست (smoothness) کو برقرار رکھتے ہوئے اب دوسری سطح کے ڈھلاؤ کے زاویئے کو تبدیل کیا جاتا ہے اور یہ مشاہدہ کیا جاتا ہے کہ جب ڈھلاؤ کے زاویئے کو کم کیا جاتا ہے تو وہ گیند اسی مقدار کی اونچائی تک پہنچنے کے لئے زیادہ دور سفر کرتی ہے (خاکہ 3.1 c)۔ جب ڈھلاؤ کے زاویئے کو صفر بنا دیا جاتا ہے تو وہ گیند ہمیشہ کے لئے افقی سطح پر حرکت کرنے لگتی ہے۔



خاکہ 3.1 دوسری سطح کے ساتھ گیلی لیو کا تجربہ
(a) پہلے کے بقدر ڈھلوان کا زاویہ
(b) زیادہ نفاست کے ساتھ
(c) کم ڈھلوان کے زاویہ کے ساتھ
(d) صفر ڈھلوان کے زاویہ کے ساتھ

(خاکہ 3.1 (d)) اگر ارسطو کی بات صحیح ہوتی تو اس کی افقی سمت میں کسی بھی قوت کے عمل پیرا نہ ہونے کی وجہ سے وہ گیند دوسری ڈھلوان سطح پر چڑھ نہیں سکتی تھی چاہے۔ اس سطح کے چمکیلے پن کو کتنا ہی کیوں نہ بڑھا دیا جائے۔ اس آسان تجربے کی مدد سے گلیلیو نے یہ ثابت کیا کہ حرکت کو برقرار رکھنے کے لئے قوت درکار نہیں ہوتی۔ کسی قوت کا شئے پر عمل نہ ہونے کے باوجود وہ شئے حالت حرکت پر برقرار رہ سکتی ہے۔

اس سے ہمیں یہ پتہ چلتا ہے کہ ارسطو نے حرکت کا تعلق قوت سے جوڑا تھا جب کہ گلیلیو نے حرکت اور قوت کو بے تعلق کر دیا۔

3.2 نیوٹن کے کلیے
(Newton's laws)

نیوٹن نے حرکت پر گیلی لیو، Kepler اور Copernicus جیسے دیگر سائنسدانوں کے خیالات کا جائزہ لیا اور تین کلیوں کی شکل میں حرکت سے متعلق اور گہرے خیالات پیش کئے۔

3.2.1 نیوٹن کا پہلا کلیہ:
(Newton's First Law)

ہر شئے اپنی حالت سکون یا یکساں حرکت کی حالت (مستقل سمتی رفتار) کو اس وقت تک برقرار رکھتی ہے جب تک کہ کوئی بیرونی قوت اس پر عمل نہ کرے۔

اشیاء کی یہ ناقابلیت جو انہیں اپنی حالت سکون یا یکساں حرکت کی حالت کو اپنے آپ بدلنے نہیں دیتی، جمود کہلاتی ہے۔ جمود کا مطلب اپنی حالت کو تبدیل کرنے کی مزاحمت ہے۔ حالات کے اعتبار سے جمود کی تین قسمیں ہو سکتی ہیں۔

(1) جمود سکون: (Inertia of rest)

جب ایک رکی ہوئی بس حرکت کرنے لگتی ہے تو مسافر اچانک پیچھے کی طرف ایک ڈھکیل محسوس کرتے ہیں۔ جمود کی وجہ سے (ایک مسافر کا) جسم اپنی حالت سکون ہی میں رہنے کی کوشش کرتا ہے،

11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:01 PM



خاکہ 3.2 جمودسکون کی وجہ سے مسافر پیچھے کی طرف ایک ڈھکیل محسوس کرتے ہیں

جب کہ بس آگے حرکت کرنے لگتی ہے۔ایسا لگتا ہے کہ وہ پیچھے کی طرف ڈھکیلے جارہے ہوں جیسا کہ خاکہ 3.2 میں بتایا گیا ہے۔ شئے کی وہ نا قابلیت جو اسے حالت سکون کو بدلنے نہیں دیتی، جمودسکون کہلاتی ہے۔

(2) جمودحرکت: (Inertia of motion)

جب بس حرکت کررہی ہوتی ہے اور اچانک بریک لگایا جاتا ہے تو مسافر آگے کی صفوں سے ٹکرانے لگتے ہیں۔اس معاملہ میں بس کے رک جانے کے باوجود (مسافر کا) جسم، جمود کی خصوصیت کی وجہ سے آگے کی جانب حرکت جاری رکھا ہوتا ہے جیسا کہ خاکہ 3.3 میں بتایا گیا ہے۔ شئے کی وہ نا قابلیت جو اسے یکساں حرکت کی حالت (مستقل رفتار) کو اپنے آپ بدلنے سے روکے رکھتی ہے جمودحرکت کہلاتی ہے۔



خاکہ 3.3 جمودحرکت کی وجہ سے مسافر آگے کی جانب

(3) جمودسمت: (Inertia of direction)

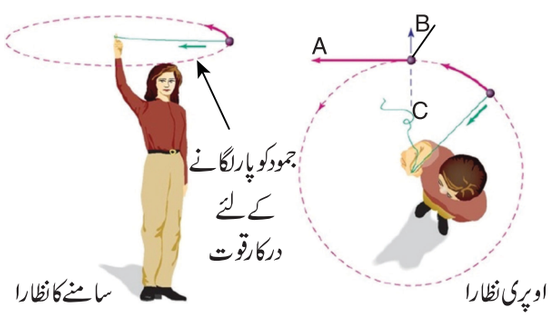
دھاگے سے بندھے ہوئے ایک پتھر کو اگر گھماتے گھماتے اچانک چھوڑ دیا جاتا ہے یا دھاگا کاٹ دیا جاتا ہے تو وہ اپنی دائری حرکت کو جاری رکھنے کے بجائے، دائری راستے کے مماسی طور پر حرکت کرنے لگتا ہے جیسا کہ خاکہ 3.4 میں بتایا گیا ہے۔اس کی وجہ یہ ہے کہ جب تک کوئی بیرونی قوت شئے پر عمل نہ کرے، وہ شئے اپنی حرکت کی سمت کو خود بخود تبدیل نہیں کرسکتی۔ شئے کی وہ نا قابلیت جو اسے اپنی حرکت کی سمت کو اپنے آپ بدلنے سے روکے رکھتی ہے جمودسمت کہلاتی ہے۔

جب ہم کہتے ہیں کہ کوئی شئے حالت سکون میں ہے یا ایک مستقل سمتی رفتار کے ساتھ حرکت کررہی ہے تو وہ اسی وقت معنی خیز ہے، جب کسی حوالاتی سانچے (Reference Frame) کے لحاظ سے اس کی وضاحت کی جائے۔طبیعیات میں، کسی بھی قسم کی حرکت کو حوالاتی سانچے کے لحاظ سے ذکر کرنا ضروری ہے۔

یہ غور کرنے کی بات ہے کہ نیوٹن کا پہلا کلیہ جمودی سانچے (Inertial Frame) کہلانے والے چند مخصوص حوالاتی سانچوں ہی میں درست ٹھہرتا ہے۔حقیقت میں نیوٹن کا پہلا کلیہ ایک جمودی سانچے کی تعریف بیان کرتا ہے۔

D7IGF

گیند کے اس مقام میں ہونے پر اگر دھاگے کو چھوڑ دیا جائے تو وہ سیدھے A کی طرف جاتا ہے اور B کی طرف نہیں جاتا اور نہ ہی C کی طرف جاتا ہے۔



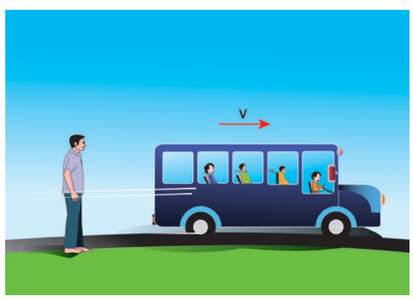
خاکہ 3.4 جمودسمت کی وجہ سے ایک پتھر دائری راستے کے مماسی طور پر حرکت کرتا ہے۔

11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:02 PM

جمودی سانچے (Inertial Frames)

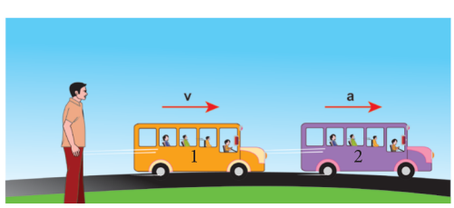
اگر ایک شئے تمام قوتوں سے آزاد ہے تو پھر وہ جمودی سانچوں سے دیکھے جانے پر یا تو مستقل سمتی رفتار کے ساتھ حرکت کر رہی ہوتی ہے یا پھر حالت سکون میں رہتی ہے۔ لہذا وہاں سانچوں کی چند مخصوص جوڑیاں پائی جاتی ہیں جن میں اگر ایک شئے کوئی قوت محسوس نہ کرتی ہو تو وہ مستقل سمتی رفتار کے ساتھ حرکت کر رہی ہوتی ہے یا حالت سکون میں رہتی ہے۔ مگر ہمیں کس طرح پتہ چلے گا کہ ایک شئے قوت محسوس کر رہی ہوتی ہے یا نہیں؟ زمین میں موجود تمام اشیاء جاذبی قوت محسوس کرتی ہیں۔ ایک نمونے کے طور پر، اگر کوئی شئے ایک گہرے خلاء میں (دوسری شئے سے بہت ہی دور) ہے تو نیوٹن کا پہلا کلیہ ایسے معاملہ میں شاید ہی درست ٹھہرے گا۔ ایسے گہرے خلاء کو ایک جمودی سانچے کے طور پر برتا جا سکتا ہے مگر عملی طور پر اس طرح کے گہرے خلاء کو پہنچنا اور نیوٹن کے پہلے کلیے کو آزمانا ممکن نہیں ہے۔

تمام عملی تجربات کے لئے ہم زمین کو ایک جمودی سانچے کی طرح اپنا سکتے ہیں کیونکہ ایک لیبوریٹری میں موجود میز پر رکھی گئی ایک شئے ہمیشہ حالت سکون میں نظر آتی ہے۔ چونکہ اس شئے پر افقی طور پر کوئی قوت عمل پیرا نہیں ہوتی، اس میں افقی سمت میں کسی قسم کی اسراع پیدا نہیں ہوتی۔ اس لئے تمام طبیعی تجربات اور محاسبات کے لئے تجربہ گاہ کو ایک جمودی سانچ کے طور پر اپنایا جا سکتا ہے۔ ان نتائج پر پہنچنے کے لئے، ہم صرف شئے کی افقی حرکت ہی کی جانچ کرتے ہیں چونکہ وہاں اس پر افقی سمت میں کوئی قوت عمل پیرا نہیں ہوتی۔ ہم (نچلی جانبی جاذبی قوت اور اوپر کی جانب کی عمودی قوت،) یہ دو قوتیں جو شئے پر عمودی سمت میں عمل پیرا ہو کر کل قوت کو صفر بنا دیتی ہیں، ان کی حرکت کا جائزہ عمودی سمت میں نہیں لینا چاہئے۔ نیوٹن کا پہلا کلیہ، کسی قوت میں غیر موجودگی میں اشیاء کی حرکت سے بحث کرتا ہے، جب کہ کل صفری قوت کے تحت حرکت پر بحث نہیں کرتا۔ فرض کیجئے کہ ایک ریل گاڑی کسی جمودی سانچے کے لحاظ سے مستقل سمتی رفتار کے ساتھ حرکت کر رہی ہے، تو پھر اس جمودی سانچے کے (ریل گاڑی کے باہر) میں حالت سکون پر موجود ایک شئے (ریل گاڑی) کے اندر سے دیکھے جانے پر) ریل گاڑی کے لحاظ سے مستقل رفتار کے ساتھ حرکت کرتی ہوئی دکھائی دیتی ہے۔ اس لئے ریل گاڑی کو بطور جمودی سانچہ اپنایا جا سکتا ہے۔ تمام جمودی سانچے ایک دوسرے کے لحاظ سے مستقل سمتی رفتار کے ساتھ حرکت کر رہے ہوتے ہیں۔ اگر ایک شئے ایک جمودی سانچے میں حالت سکون میں نظر آتی ہے تو وہی شئے دوسرے جمودی سانچے کے لحاظ سے حرکت کرتی ہوئی نظر آ سکتی ہے۔ مثال کے طور پر خاکہ 3.5 میں چونکہ کار زمین پر (حالت سکون میں) کھڑے ہوئے شخص کے لحاظ سے مستقل سمتی رفتار کے ساتھ حرکت کر رہی ہے، دونوں سانچے (کار کے اور زمین کے لحاظ سے) جمودی سانچے ہیں۔



خاکہ 3.5 شخص اور گاڑی جمودی سانچے ہیں

فرض کیجئے کہ ریل گاڑی کے اندر رکھی گئی ایک صاف میز پر موجود ایک شئے حالت سکون پر رہتی ہے اور اگر ریل گاڑی اچانک اسراع پاتی ہے (جسے شاید ہم محسوس نہیں کرتے)، اس شئے پر کوئی قوت عمل نہ کرنے کے باوجود وہ شئے پیچھے کی جانب اسراع پاتے ہوئے نظر آتی ہے۔ قوت کے ذریعہ عمل پیرا نہ ہونے کے باوجود شئے اگر اسراع پانے لگتی ہے تو یہ نیوٹن کے پہلے کلیہ کی صاف خلاف ورزی ہوئی۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ جب ریل گاڑی اسراع پا رہی ہوتی ہے تو وہ ایک جمودی سانچہ نہیں ہوتی۔ مثال کے طور پر خاکہ 3.6 یہ ظاہر کرتا ہے کہ کار 2 ایک غیر جمودی سانچہ ہے۔ چونکہ وہ زمین کے لحاظ سے اسراع سے ساتھ حرکت کرتی ہے۔



خاکہ 3.6 کار 2 ایک غیر جمودی سانچہ ہے۔

11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:03 PM

اس قسم کے پر اسراع سانچے، غیر جمودی سانچے کہلاتے ہیں۔ گردش کرنے والا ایک سانچہ بھی، غیر جمودی سانچہ ہی ہوتا ہے کیونکہ گردش کو اسراع درکار ہوتی ہے۔اس لحاظ سے، زمین چونکہ گردش بھی کرتی ہے اور مداری حرکت بھی کرتی ہے، وہ حقیقی طور پر ایک جمودی سانچہ نہیں ہوتی۔مگر زمین کے یہ گردشی اثرات ہماری روزمرہ زندگی میں ملوث حرکات کے لئے نظر انداز کرنے کے قابل ہوتے ہیں۔مثال کے طور پر جب طبیعیات کے تجربہ گاہ میں کوئی چیز پھینکی جاتی ہے، یا ایک سادہ رقاص کا وقفۂ دوران معلوم کیا جاتا ہے تو اس پر زمین کا گردشی اثر نہ کے برابر ہوتا ہے۔اس لحاظ سے زمین کو ایک جمودی سانچے کے لحاظ سے لے لیا جاسکتا ہے مگر اسی وقت سیارچوں کی حرکت اور زمین کے اطراف کے بادلی ترتیب وغیرہ کو جانچنے کے لئے زمین کو جمودی سانچے کے لحاظ سے برتا نہیں جاسکتا کیونکہ بادلی ترتیب اور سیارچوں کی حرکت پر اس کی خود کی گردش کا ایک مضبوط اثر پڑتا ہے۔

3.2.2 نیوٹن کا دوسرا کلیہ
(Newton's second law)

ایک شئے پر عمل پیرا ہونے والی قوت اس کی معیار حرکت کی تبدیلی کی شرح کے برابر ہوتی ہے۔

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (3.1)$$

آسان الفاظ میں، جب ایک شئے کی معیار حرکت تبدیل ہوتی ہے وہاں ضرور کوئی قوت اس پر عمل کررہی ہوتی ہے۔ شئے کی معیار حرکت کی تعریف اس طرح کی جاتی ہے۔ $\vec{p} = m\vec{v}$ بہت سے معاملات میں حرکت کے دوران شئے کی کمیت مستقل طور پر برقرار رہتی ہے۔ ایسے معاملات میں اوپر کی مساوات مزید آسان شکل اختیار کرلیتی ہے۔

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}.$$

$$\vec{F} = m\vec{a}. \qquad (3.2)$$

اوپر کی مساوات اس حقیقت سے واقف کرواتی ہے کہ اگر جسم پر ایک اسراع a ہے تو پھر وہاں ضرور کوئی قوت اس پر عمل کررہی ہوتی ہے۔اس سے پتہ چلتا ہے کہ جب سمتی رفتار میں تبدیلی واقع ہوتی ہے تو وہاں ضرور کوئی قوت اس شئے پر عمل کررہی ہوتی ہے۔قوت اور اسراع ہمیشہ ایک ہی سمت میں ہوا کرتی ہیں۔ نیوٹن کا دوسرا کلیہ ارسطو کے حرکت، کے تصور کا ایک نمونہ ہے۔ نیوٹن کے مطابق، قوت حرکت کا سبب نہیں ہوتی بلکہ وہ صرف حرکت میں تبدیلی پیدا کرتی ہے۔ یہ غور کرنا ضروری ہے کہ صرف جمودی سانچوں ہی میں نیوٹن کا دوسرا کلیہ درست ٹھہرتا ہے۔غیر جمودی سانچوں میں نیوٹن کے دوسرے کلیے کو اسی شکل میں استعمال نہیں کیا جاسکتا۔اس میں کچھ ترمیم ضروری ہے۔

SI نظام اکائی میں، قوت کی اکائی نیوٹن میں ناپی جاتی ہے اور اسے N کی علامت سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

ایک نیوٹن کی تعریف اس طرح کی جاتی ہے کہ یہ، ایک کلوگرام والے ایک جسم میں قوت کی سمت میں $1\ ms^{-2}$ کا اسراع پیدا کرنے کے لئے درکار قوت کی مقدار ہے۔

پھسلنے والی شئے پر ارسطو بالمقابل نیوٹن کا نقطہ نظر:

حصہ 3.1 میں ڈھلوان سطح پر بحث کئے گئے تجربے کے لئے نیوٹن کا دوسرا کلیہ صحیح وضاحت فراہم کرتا ہے۔عام معاملات میں جہاں رگڑ نظر انداز نہ کی جاسکتی ہو۔جیسے ہی شئے ڈھلوان سطح کے نیچے پہنچتی ہے (خاکہ 3.1)، وہ کچھ دور سفر کرنے کے بعد رکتی ہے۔غور کیجئے کہ وہ اس لئے رکتی ہے کہ وہاں رگڑ کی ایک قوت اس کی سمتی رفتار کی مخالف سمت میں عمل کررہی ہوتی ہے۔رگڑ کی یہی قوت وہ قوت ہے جو شئے کی سمتی رفتار کو صفر تک گھٹا دیتی ہے اور شئے کو روک دیتی ہے۔ارسطو کے تصور کے مطابق نیچے آنے والی شئے اس لئے رک جاتی ہے کہ اسے چلانے والی کوئی قوت اس پر عمل نہیں کررہی ہے بالخصوص انہوں نے شئے پر عمل کرنے والی رگڑ کی قوت کا لحاظ نہیں کیا۔

11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:04 PM

3.2.3 نیوٹن کا تیسرا کلیہ
(Newton's Third Law)

خاکہ (a)3.8 پر غور کیجئے کہ جب بھی شئے 1 شئے، 2 پر ایک قوت ($\vec{F}_{21}$) ڈالتی ہے تو شئے 2 بھی شئے I پر مساوی اور مخالف قوت ($\vec{F}_{12}$) ڈالتی ہے۔ یہ قوتیں دو اشیاء کو جمع کرنے والی خط کے ساتھ ہونا چاہئے۔

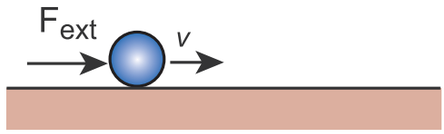
$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

نیوٹن کا تیسرا کلیہ، یہ دلالت کرتا ہے کہ وہ دو قوتیں مساوی اور مخالف جوڑیوں کی طرح ہوتی ہیں۔ فطرت میں ایک اکیلی یا الگ تھلگ قوت نہیں پائی جاسکتی۔ نیوٹن کا تیسرا کلیہ یہ بیان کرتا ہے کہ ہر عمل کے لئے ایک مساوی اور مخالف ردعمل ہوتا ہے۔ یہاں، عمل اور ردعمل کی قوتوں کی جوڑی ایک ہی جسم پر عمل نہیں کرتی بلکہ دو مختلف اجسام پر عمل پیرا ہوتی ہے۔ دونوں میں سے کسی بھی ایک کو قوت عمل کہہ سکتے ہیں اور دوسرے کو قوت ردعمل کہہ سکتے ہیں۔ نیوٹن کا تیسرا کلیہ دونوں جمودی اور غیر جمودی سانچوں میں درست ٹھہرتا ہے۔

یہ عمل۔ ردعمل کی قوتیں سبب اور اثر کی قوتیں نہیں ہیں۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ جب بھی شئے 1، شئے 2 پر ایک قوت ڈالتی ہے تو بر وقت شئے 2، شئے I پر مساوی اور مخالف قوت ڈالتی ہے۔

ارسطو (Aristotle)

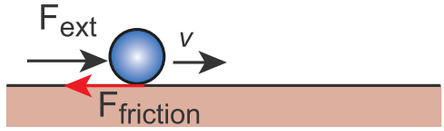
ایک شئے کو مستقل سمتی رفتار v کے ساتھ حرکت کرنے کے لئے بیرونی قوت کا عمل درکار ہے۔



کل قوت = F_{ext}

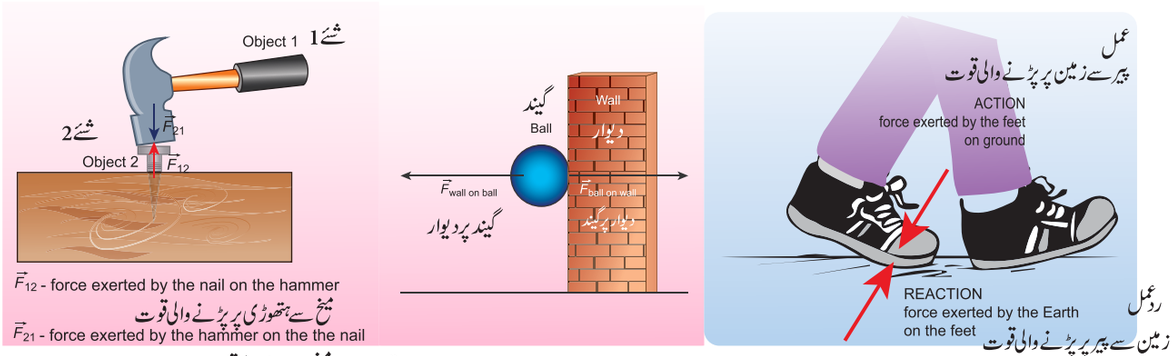
گیلی لیو اور نیوٹن

جب شئے مستقل سمتی رفتار v کے ساتھ حرکت کرتی ہے تو اس پر کلی قوت صفر ہوتی ہے۔



کل قوت = صفر

خاکہ 3.7 ارسطو، گیلی لیو اور نیوٹن کا نقطۂ نظر



(a) ہتھوڑی سے میخ پر پڑنے والی قوت (b) (c)

خاکہ 3.8 نیوٹن کے تیسرے کلیے کا عملی نمونہ

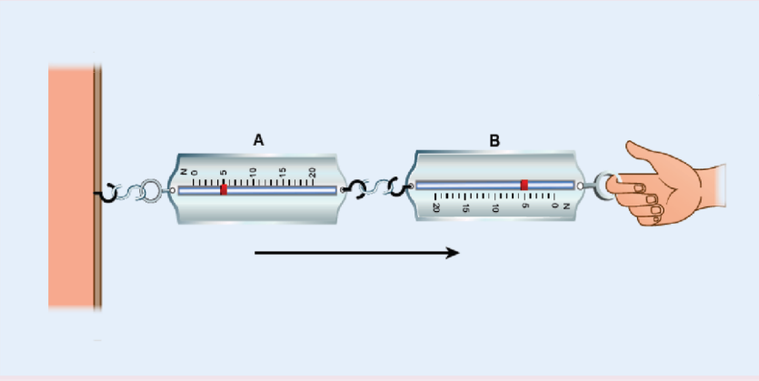
(a) ہتھوڑی اور میخ (b) دیوار پر اچھلتی ہوئی ایک گیند (c) رگڑ کے ساتھ زمین پر چلنا

11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:05 PM

کارروائی

نیوٹن کے تیسرے کلیے کی تصدیق

خاکے کے مطابق دو کمانی دار ترازو جمع کیجئے۔ ایک کنارے کو کسی سخت شئے پر، لگائیے اور دوسرے کنارے کو آزاد چھوڑ دیجئے، جسے ہاتھ سے کھینچا جا سکے۔



آزاد کنارے کو کچھ قوت کے ساتھ کھینچئے اور دونوں ترازوؤں پر ریڈنگ نوٹ کیجئے۔ اس عمل کو کئی مرتبہ دہرائیے۔

نوٹ

کمانی دار ترازو A میں بتائی جانے والی ریڈنگ، کمانی دار ترازو B سے دی جانے والی قوت کی وجہ سے ہے۔ کمانی دار ترازو B میں بتائی جانے والی کمانی دار ترازو A سے دی جانے والی قوت کی وجہ سے ہے۔ نوٹ کیجئے کہ نیوٹن کے تیسرے کلیے کے مطابق دونوں ریڈنگ مساوی ہیں۔

3.2.4 نیوٹن کے کلیوں پر مباحثے
(Discussion on Newton's Laws)

(1) نیوٹن کے کلیے سمتی کلیے ہیں۔ مساوات $F = ma$ ایک سمتی مساوات ہے اور وہ بالخصوص تین قدری مساوات کے برابر ہے۔ کارتیسی محددات میں، یہ مساوات اس طرح لکھی جا سکتی ہے۔

$$F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k} = ma_x\hat{i} + ma_y\hat{j} + ma_z\hat{k}.$$

دونوں طرف موازنہ کرنے پر یہ تین قدری مساوات حاصل ہوتی ہیں۔

$F_x = ma_x$، x سمت کے ساتھ اسراع صرف x سمت کے ساتھ عمل کرنے والی قوت کے جزء پر ہی منحصر ہوتی ہے۔

$F_y = ma_y$، y سمت کے ساتھ اسراع صرف y سمت کے ساتھ عمل کرنے والی قوت کے جزء پر ہی منحصر ہوتی ہے۔

$F_y = ma_y$، z سمت کے ساتھ اسراع صرف z سمت کے ساتھ عمل کرنے والی قوت کے جزء پر ہی منحصر ہوتی ہے۔

اوپر کی مساوات کی مدد سے ہم یہ سمجھ سکتے ہیں کہ y سمت کے تحت عمل کرنے والی قوت x سمت کے تحت کی اسراع کو تبدیل نہیں کر سکتی۔ اسی طرح F_z ، a_y اور a_x پر اثر نہیں ڈال سکتی۔ حسابی مسئلوں کو حل کرنے کے لئے یہ سمجھنا ضروری ہے۔

(2) t وقت پر جسم سے محسوس کی جانے والی اسراع، اس قوت پر منحصر ہوتی ہے، جو اس وقت جسم پر ہی عمل پیرا ہوتی ہے۔ t وقت سے پہلے وہ جسم پر عمل پیرا ہونے والی قوت پر منحصر نہیں ہوتی۔ اسے یوں ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:05 PM

$$\vec{F}(t) = m\vec{a}(t)$$

شئے کی اسراع قوت کی پچھلی تاریخ پر منحصر نہیں ہوتی۔ مثال کے طور پر جب ایک تیز رفتار Bowler یا ایک Spin Bowler گیند کو بلہ باز کی طرف پھینکتا ہے تو گیند کھلاڑی کے ہاتھ سے نکل جانے کے بعد وہ صرف جاذبی قوت اور ہوائی رگڑ کی قوت ہی سے دوچار ہوتی ہے۔ گیند کی اسراع اس پر منحصر نہیں ہے کہ گیند کس طرح (آہستہ یا تیز رفتار سے پھینکی گئی۔

(3) عموماً، ایک قوت کی سمت، حرکت کی سمت سے مختلف ہوسکتی ہے، حالانکہ، چند معاملات میں شئے بھی قوت ہی کی سمت میں حرکت کرنے لگتی ہے۔ اس طرح ہمیشہ نہیں ہوتا، چند مثالیں نیچے دی گئی ہیں۔

معاملہ 1 :

ایک ہی سمت میں قوت اور حرکت:

جب ایک سیب زمین کی طرف گرتا ہے تو سیب کی حرکت کی سمت (سمتی رفتار کی سمت) اور قوت کی سمت دونوں ایک ہی نچلی جانبی ہوتی ہے، جیسا کہ خاکہ 3.9(a) میں بتایا گیا ہے۔

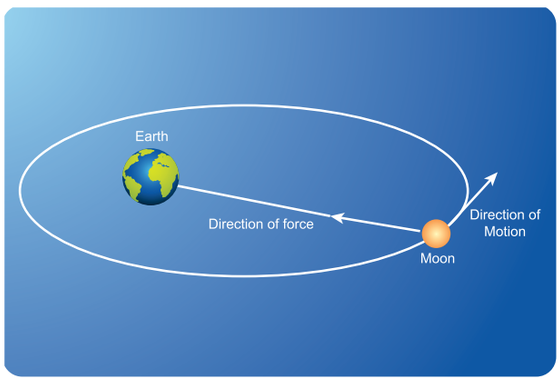


خاکہ 3.9(a) ایک ہی سمت میں قوت اور حرکت۔

معاملہ (2) :

قوت اور حرکت ایک ہی سمت میں نہیں ہیں۔

چاند زمین کی جانب ایک قوت سے دوچار ہوتا ہے، مگر وہ حقیقت میں ایک بیضوی مدار پر حرکت کرتا ہے۔ اس معاملے میں قوت کی سمت حرکت کی سمت سے بالکل ہی مختلف ہے، جیسا کہ خاکہ 3.9(b) میں بتایا گیا ہے۔

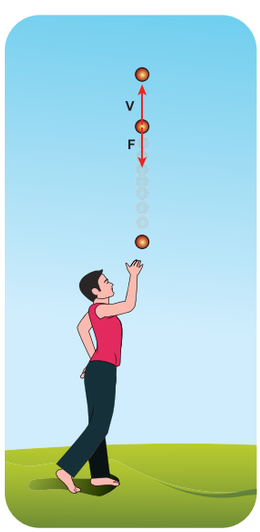


خاکہ 3.9(b) چاند زمین کے اطراف بیضوی مدار میں چکر لگا رہا ہے

معاملہ 3

مخالف سمت میں قوت اور حرکت:

جب ایک شئے عمودی طور پر اوپر اچھالی جاتی ہے تو حرکت کی سمت اوپر کی جانب ہوتی ہے اور جاذبی قوت نیچے کی جانب عمل پیرا ہوتی ہے جیسا کہ خاکہ 3.9(c) میں بتایا گیا ہے۔



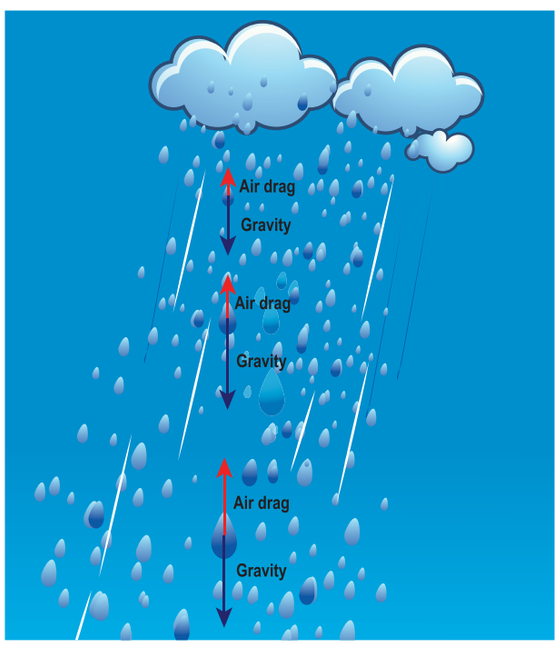
خاکہ (c) (3.9)
مخالف سمت میں قوت اور حرکت

11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:06 PM

معاملہ 4

کل قوت صفر ہے مگر پھر بھی حرکت ہوتی ہے

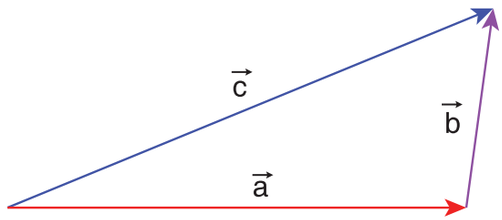
جب بارش کا ایک قطرہ بادل سے جدا ہوجاتا ہے تو وہ نچلی جانبی جاذبی قوت اور عمودی جانبی ہوائی ڈھکیل کی قوت، دونوں سے دوچار ہوتا ہے جیسے جیسے وہ زمین کی طرف اترتا ہے اوپری جانب ہوائی ڈھکیل کی قوت بڑھتی جاتی ہے اور کچھ دیر بعد اوپری جانب ہوائی ڈھکیل کی نچلی جانبی جاذبی قوت کو منقطع کردیتی ہے پھر اس کے بعد وہ قطرہ ایک مستقل سمتی رفتار کے ساتھ حرکت کرتا ہے یہاں تک کہ وہ زمین تک پہنچ جاتا ہے۔ لہذا وہ قطرہ، صفری کلی قوت۔ نتیجتاً صفری اسراع کے ساتھ مگر غیر صفری terminal velocity (گرتے ہوئے جسم کی انتہائی سمتی رفتار) کے ساتھ آتا ہے۔ اسے خاکہ 3.9(d) میں بتایا گیا ہے۔



خاکہ 3.9(b)۔ صفری کل قوت اور غیر صفری ٹرمنل سمتی رفتار

(4) اگر ایک ہی جسم پر کئی قوتیں $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3 \ldots \vec{F}_n$ عمل پیرا ہوتی ہیں تو پھر کل قوت $(\vec{F}_{net})$ انفرادی قوتوں کے سمتیائی مجموعے (Vectorial Sum) کے برابر ہوتی ہے۔ ان کی مجموعی قوت اسراع فراہم کرتی ہے۔

$$\vec{F}_{net} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots + \vec{F}_n$$



قوتوں کی سمتیائی جمع $\vec{a} + \vec{b}$ مجموعہ $\vec{c}$ فراہم کرتی ہے

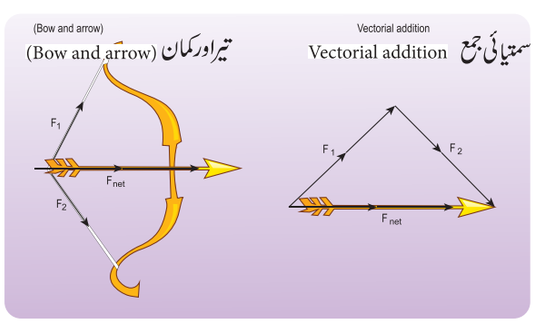
خاکہ 3.10 قوتوں کا سمتیائی مجموعہ

اس معاملہ کے لئے نیوٹن کا دوسرا کلیہ یہ ہے۔

$$\vec{F}_{net} = m\vec{a}$$

اس معاملہ میں اسراع کی سمت کل قوت کی سمت میں ہوتی ہے۔

مثال : تیر اور کمان



خاکہ 3.11۔ کمان اور تیر - کل قوت تیر پر ہے

(5) نیوٹن کے دوسرے کلیے کو مندرجۂ ذیل طریقے سے بھی لکھ سکتے ہیں۔ چونکہ اسراع جسم کے مقامی سمتیے کی دوسرے درجہ کی ماحصل ہے $\left(\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)$ جسم پر کی قوت یہ ہے۔

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:06 PM

اس اظہار کی مدد سے ہم یہ اخذ کر سکتے ہیں کہ نیوٹن کا دوسرا کلیہ بنیادی طور پر ایک دوسرے درجے کی معمولی تفرقی مساوات ہے اور جب بھی مقامی سمتیہ کا دوسرا ماحصل صفر نہ ہو تو وہاں جسم پر ضرور کوئی قوت عمل کر رہی ہوتی ہے۔

(6) اگر جسم پر کوئی قوت عمل پیرا نہ ہو تو نیوٹن کا دوسرا کلیہ $m\frac{d\vec{v}}{dt}=0$.

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ مستقلہ $\vec{v}=$ ہے۔ بنیادی طور پر یہ نیوٹن کا پہلا کلیہ ہی ہے۔ اس سے پتہ چلتا ہے کہ دوسرا کلیہ پہلے کلیہ کے مطابق ہے۔ بہرحال یہ سمجھنا نہیں چاہئے کہ جب شئے پر قوت عمل پیرا نہ ہو تو دوسرے کلیہ کو مختص کر کے پہلا کلیہ بنا دیا جاتا ہے۔ نیوٹن کے پہلے اور دوسرے کلیے ایک دوسرے سے الگ ہی ہیں۔ وہ ایک دوسرے کے مطابق اور متواتر ضرور ہیں مگر ایک کو دوسرے سے اخذ نہیں کیا جا سکتا۔

(7) نیوٹن کا دوسرا کلیہ سبب اور اثر کی مناسبت ہے۔ قوت سبب ہے اور اسراع اثر ہے۔ روایتی طور پر اثر کو مساوات کے بائیں طرف اور سبب کو دائیں طرف لکھنا چاہئے۔ اس لئے نیوٹن کے دوسرے کلیے کو لکھنے کی صحیح ترتیب یہ ہے۔

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F} \quad \text{یا} \quad m\vec{a}=\vec{F}$$

3.3 نیوٹن کے کلیوں کے استعمالات
(Application of Newton's Laws)

3.3.1 آزاد جسم کا نقشہ (Free body diagram)

آزاد جسم کا نقشہ ایک سادہ آلہ ہے جس سے نیوٹن کے کلیوں کی مدد سے شئے کی حرکت کا جائزہ لینے میں مدد ملتی ہے۔

آزاد جسم کا نقشہ. بنانے میں مندرجۂ ذیل ترتیب وار مرحلے اپنائے جاتے ہیں۔

(1) شئے پر عمل پیرا ہونے والی قوتوں کی شناخت کیجئے۔

(2) شئے کی نمائندگی ایک نقطہ کے طور پر کیجئے۔

(3) شئے پر عمل پیرا ہونے والی قوتوں کی نمائندگی کرنے والی سمتیوں کا خاکہ کھینچئے۔

جب ہم ایک شئے یا ایک نظام کے لئے آزاد جسم کا نقشہ کھینچتے ہیں تو جسم سے دی جانے والی قوتوں کو آزاد جسم کے نقشے میں شمار نہیں کرنا چاہئے۔

مثال 3.1

m کمیت کی ایک کتاب میز پر رکھی گئی ہے۔

(1) کتاب پر عمل پیرا ہونے والی قوتیں کیا کیا ہیں؟

(2) کتاب سے عمل پیرا ہونے والی قوتیں کیا کیا ہیں؟

(3) کتاب کے لئے آزاد جسم کا نقشہ بنائیے۔

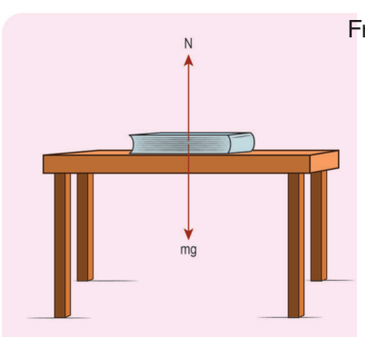
حل

کتاب پر دو قوتیں عمل پیرا ہوتے ہیں۔

(i) جاذبی قوت (mg) کتاب پر نچلی جانب عمل کر رہی ہوتی ہے۔

(ii) عمودی مسی قوت (N) جو کتاب پر اوپری جانب میز کی سطح سے برآمد ہوتی ہے۔ جیسا کہ خاکہ میں بتایا گیا ہے۔

آزاد جسم کا نقشہ
Free body diagram





نوٹ

آزاد جسم کے نقشے میں چونکہ عمودی قوت اور جاذبی قوت کی قدریں مساوی ہیں ان دونوں سمتیوں کی لمبائیاں بھی مساوی ہیں۔

11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:07 PM

(2) نیوٹن کے تیسرے کلیے کے مطابق کتاب سے دو ردعملی قوتیں برآمد ہوتی ہیں۔

(i) کتاب سے زمین پر مساوی اور مخالف قوت (mg) اوپر کی جانب برآمد ہوتی ہے۔

(ii) کتاب سے میز کی سطح پر مساوی اور مخالف عمودی قوت (N) نیچے کی جانب برآمد ہوتی ہے۔

نوٹ

یہاں اس بات پر سخت توجہ درکار ہے کہ نیوٹن کے تیسرے کلیہ کو اپناتے وقت یہ تصور کرنا غلط ہے کہ زمین سے دی جانے والی قوت جاذبہ اور اس کے مساوی اور مخالف ردعملی عمودی قوت کی وجہ سے میز پر رکھی گئی کتاب حالت سکون پر ہے عملی اور ردعملی قوتیں کبھی بھی ایک ہی جسم پر عمل پیرا نہیں ہوتیں۔

(3) کتاب کا آزاد جسمانی نقشہ خاکہ میں بتایا گیا ہے۔

مثال 3.2

اگر 2.5kg اور 100kg کمیت والی دو اشیاء 5N کی مساوی قوت سے دو چار ہوتی ہیں تو ان میں ہر ایک سے محسوس کی جانے والی اسراع کیا ہوگی۔

حل:

نیوٹن کے دوسرے کلیے کی مدد سے (قدری شکل میں)

$$F = ma$$

2.5kg کمیت والی شئے کے لئے، اسراع یہ ہے

$$a = \frac{F}{m} = \frac{5}{2.5} = 2\ m\ s^{-2}$$

100kg کمیت والی شئے کے لئے، اسراع یہ ہے

$$a = \frac{F}{m} = \frac{5}{100} = 0.05\ m\ s^{-2}$$

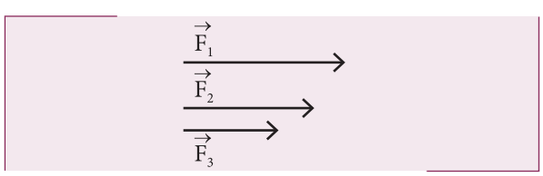
نوٹ

حالانکہ دونوں اشیاء پر مساوی قوت عمل پیرا ہوتی ہے۔ ہر شئے سے محسوس کی جانے والی اسراع مختلف ہے۔ اسراع کمیت پر بلا راست منحصر ہوتی ہے۔ ایک ہی قوت کے لئے زیادہ کمیت والی شئے کم اسراع محسوس کرتی ہے جب کہ کم کمیت والی شئے زیادہ اسراع محسوس کی کرتی ہے۔

جب ایک سیب گرتا ہے، وہ زمین کی جاذبی قوت سے دو چار ہوتا ہے۔ نیوٹن کے تیسرے کلیے کے مطابق، سیب زمین پر مساوی اور مخالف قوت برآمد کرتا ہے۔ حالانکہ دونوں زمین اور سیب مساوی قوت ہی سے دوچار ہوتے ہیں، ان کی اسراع مختلف ہوتی ہے۔ سیب کے مقابلے میں زمین کی کمیت بہت ہی زیادہ ہے۔ اس لئے ایک سیب زیادہ اسراع پاتا ہے اور زمین نہ کے برابر اسراع محسوس کرتی ہے۔ چونکہ اسراع نہ کے برابر ہوتی ہے۔ سیب کے گرنے پر زمین ٹھہری ہوئی ہی نظر آتی ہے۔

مثال 3.3

نیچے بتائی گئی تین قوتوں $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ میں سے سب سے بڑی قوت کون سی ہے؟



حل:

قوت ایک سمتیہ ہے اور اس سمتیہ کی قدر اس کی لمبائی سے ظاہر کی جاتی ہے۔ یہاں $\vec{F}_1$ کی لمبائی دیگر دو قوتوں سے زیادہ ہے۔ لہذا $\vec{F}_1$ ہی تینوں میں سب سے بڑی قوت ہے۔

11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:07 PM

مثال 3.4

درخت پر لٹکتے ہوئے ایک آم کے لئے نیوٹن کے دوسرے کلیے کا استعمال کیجئے۔ (آم کی کمیت 400 گرام ہے)

حل:

نیوٹن کے کلیے استعمال کرنے سے پہلے مندرجۂ ذیل باتوں کی اتباع کرنی چاہئے۔

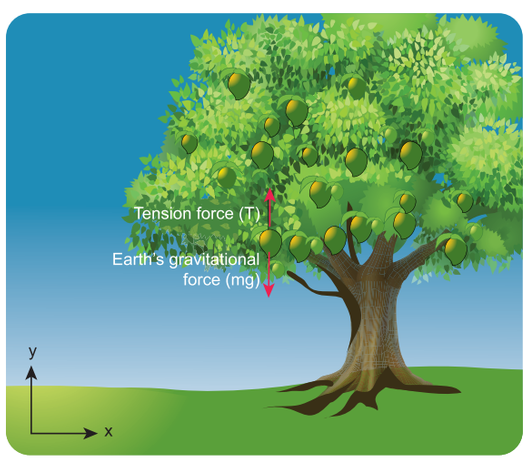
(1) مسئلے کو جانچنے کے لئے ایک مناسب جمودی محدداتی نظام کا انتخاب کیجئے۔ بہت سے معاملات کے لئے ہم زمین کو جمودی محدداتی نظام کے طور پر منتخب کر سکتے ہیں۔

(2) جس نظام پر نیوٹن کا کلیہ آزمایا جا رہا ہو اس نظام کی شناخت کیجئے۔ وہ نظام ایک اکیلی شئے یا ایک سے زیادہ اشیاء ہو سکتا ہے۔

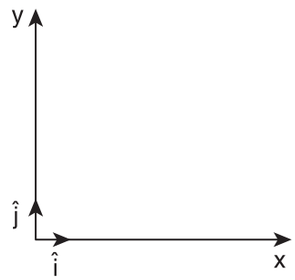
(3) آزاد جسمانی خاکہ بنائیے۔

(4) جیسے ہی نظام پر عمل پیرا ہونے والی قوتوں کی شناخت ہو جائے اور آزاد جسمانی نقشہ کھینچ لیا جائے تو نیوٹن کے کلیے کا استعمال کیجئے۔ مساوات کے بائیں طرف، نظام پر عمل پیرا ہونے والی قوتوں کو سمتی اظہار میں لکھئے اور اسے مساوات کے دائیں طرف کے حصے سے موازنہ کیجئے جو کہ کمیت اور اسراع کا حاصل ضرب ہے۔ یہاں اسراع بھی سمتی اظہار ہی میں ہونا چاہئے۔

(5) اگر اسراع دی گئی ہو تو قوت معلوم کرنا چاہئے اور اگر قوت دی گئی ہو تو اسراع کا محاسبہ کرنا چاہئے۔



اوپر کی باتوں کو اپناتے ہوئے ہم خاکے کے مطابق زمین پر جمودی محدداتی نظام ثبت کرتے ہیں۔

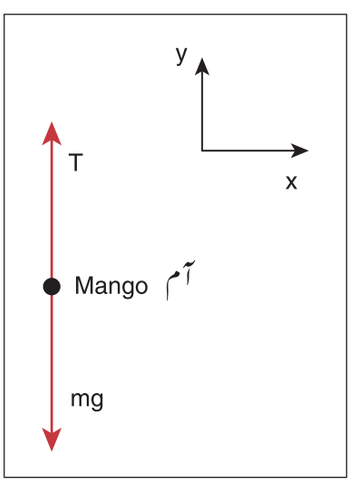


آم کے درخت پر عمل پیرا ہونے والی قوتیں یہ ہیں۔

(i) زمین سے آم پر منفی y- محور کے تحت نچلی سمت میں جاذبی قوت عمل پیرا ہوتی ہے۔

(ii) (آم سے لگی ہوئی ڈنڈی میں موجود) تناؤ مثبت y- محور کی جانب عمل پیرا ہوتا ہے۔

آم کے لئے آزاد جسمانی نقشہ خاکہ میں بتایا گیا ہے۔



$$\vec{F}_g = mg\left(-\hat{j}\right) = -mg\hat{j}$$

یہاں mg جاذبی قوت کی قدر ہے اور $\left(-\hat{j}\right)$ منفی y سمت میں اکائی سمتیہ کی نمائندگی کرتی ہے۔

$$\vec{T} = T\hat{j}$$

11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:09 PM

یہاں T تناؤ کی قوت کی قدر اور (j) مثبت Y سمت میں اکائی سمتیے کو ظاہر کرتا ہے

$$\vec{F}_{net} = \vec{F}_g + \vec{T} = -mg\hat{j} + T\hat{j} = (T - mg)\ \hat{j}$$

نیوٹن کے دوسرے کلیے کی مدد سے $\vec{F}_{net} = m\vec{a}$

چونکہ آم ہمارے (جمودی محدداتی نظام) لحاظ سے حالت سکون پر ہے، اسراع صفر ہے۔ $(\vec{a} = 0)$

اس لئے

$$\vec{F}_{net} = m\vec{a} = 0$$

$$(T - mg)\ \hat{j} = 0$$

اوپر کی مساوات کی دونوں طرف کے اجزاء کا موازنہ کرنے پر ہم حاصل کرتے ہیں۔ $T - mg = 0$

اس لئے آم پر عمل پیرا ہونے والی تناؤ کی قوت $T=mg$ کے طور پر پیش کی جاتی ہے۔

آم کی کمیت $m = 400g$ اور $g = 9.8\ m\ s^{-2}$ ہے۔

آم پر عمل پیرا ہونے والا تناؤ یہ ہے۔

$$T = 0.4 \times 9.8 = 3.92\ \text{N}$$

مثال 3.5

ایک شخص زمین کے لحاظ سے ایک مستقل سمتی رفتار $\vec{v}$ کے ساتھ ایک گاڑی چلاتا ہے اور دوسرا شخص زمین کے لحاظ سے $\vec{a}$ اسراع کے ساتھ اپنی گاڑی کو پر اسراع بناتا ہے۔ ان میں سے کون زمین پر کھڑے ہو کر دیکھنے والے کے لحاظ سے نیوٹن کے دوسرے کلیہ کو اپناتا ہے؟

حل:

دوسرا شخص نیوٹن کا دوسرا کلیہ نہیں اپنا سکتا کیونکہ وہ زمین کے لحاظ سے $\vec{a}$ اسراع کے ساتھ حرکت کرتا ہے۔ (وہ جمودی سانچے میں نہیں ہے) مگر پہلا شخص نیوٹن کے دوسرے کلیے کو اپنا سکتا ہے۔ کیونکہ وہ زمین کے لحاظ سے ایک مستقل سمتی رفتار کے ساتھ حرکت کر رہا ہے۔ (وہ جمودی سانچے میں ہے)

مثال 3.6

ایک ذرہ کی مقامی سمتیہ یوں پیش کی جاتی ہے۔

$$\vec{r} = 3t\hat{i} + 5t^2\hat{j} + 7\hat{k}.$$

وہ سمت معلوم کیجئے جس میں وہ ذرہ کل قوت محسوس کرتا ہے؟

حل:

ذرہ کی سمتی رفتار

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(3t)\ \hat{i} + \frac{d}{dt}(5t^2)\ \hat{j} + \frac{d}{dt}(7)\ \hat{k}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = 3\hat{i} + 10t\hat{j}$$

ذرہ کی سمتی اسراع

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 10\hat{j}$$

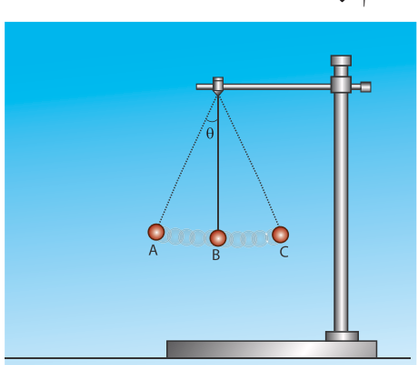
یہاں ذرہ صرف مثبت y سمت ہی میں اسراع رکھتا ہے۔ نیوٹن کے دوسرے کلیے کے مطابق، کل قوت بھی مثبت y سمت میں عمل پیرا ہونا چاہئے۔ اس کے علاوہ وہ ذرہ مثبت x سمت میں مستقل سمتی رفتار رکھتا ہے اور z سمت میں اس کی کوئی رفتار ہی نہیں ہے۔ چنانچہ x یا z سمت کے ساتھ کوئی کل قوت نہیں ہے۔

مثال 3.7

ایک ایستادہ (stand) سے لٹکے ہوئے دھاگے سے بندھا ہوا ایک گولے کا تصور کیجئے۔ وہ خاکے میں بتائے گئے طریقے کے مطابق اہتزاز کرتا ہے۔

(a) گولے پر عمل پیرا ہونے والی قوتوں کی شناخت کیجئے۔

(b) گولے سے محسوس کی جانے والی اسراع کی مقدار معلوم کیجئے۔



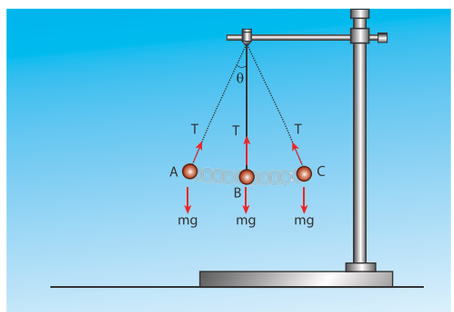
11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:09 PM

حل:

گولے پر دو قوتیں عمل پیرا ہوتی ہیں۔

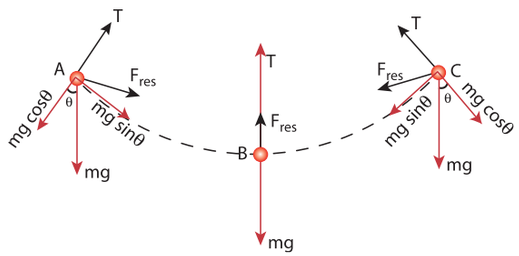
(i) نچلی سمت میں عمل کرنے والی جاذبی قوت (mg)

(ii) اس گولے کے دھاگے سے برآمد ہونے والا تناؤ (T) جس کا مقام T کی سمت کا تعین کرتا ہے جیسا کہ خاکہ میں بتایا گیا ہے۔



گولا ایک دائری منحنی میں حرکت کرتا ہے جیسا کہ اوپر کے خاکے میں بتایا گیا ہے۔ لہذا اس میں مرکز مائل اسراع پائی جاتی ہے۔ نقطہ A اور C پر وہ گولا وقتی طور پر حالت سکون اختیار کرتا ہے اور پھر جب وہ نقطہ B کی طرف حرکت کرتا ہے تو اس کی سمتی رفتار بڑھ جاتی ہے۔ لہذا وہاں منحنی کے ساتھ ایک مماسی اسراع ہوتی ہے۔

جاذبی قوت کو دو اجزاء (mg cosθ , mg sinθ) کے طور پر حل کیا جاسکتا ہے، جیسا کہ نیچے بتایا گیا ہے۔

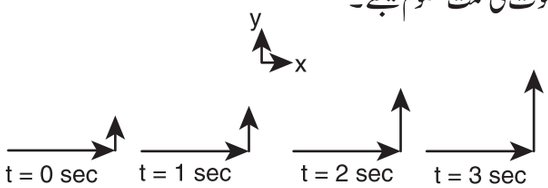


نوٹ

نوٹ کیجئے کہ گولا مجموعی قوت کی سمت میں حرکت نہیں کرتا ہے۔ نقطے A اور C پر تناؤ $T=mg\cos\theta$ ہے۔ دیگر دوسرے نقاط پر تناؤ، $mg\cos\theta$ سے زیادہ ہے، چونکہ اس میں غیر صفری مرکز مائل اسراع موجود ہے۔ نقطہ B پر مجموعی قوت دھاگے کے ساتھ اوپر کی جانب عمل پیرا ہوتی ہے۔ یہ ایک غیر یکساں دائری حرکت کی ایک مثال ہے کیونکہ گولے میں مرکز مائل اور مماسی دونوں اسراع پائی جاتی ہیں۔

مثال 3.8

ایک سطح (Plane) میں حرکت کرنے والی ایک شئے کی سمتی رفتار مندرجۂ ذیل خاکہ کے ذریعہ دی گئی ہے، شئے پر عمل پیرا ہونے والی قوت کی سمت معلوم کیجئے۔



حل:

شئے کی سمتی رفتار یہ ہے $\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}.$

جیسا کہ خاکہ میں بتایا گیا ہے، وہ شئے xy سطح میں حرکت کر رہی ہے، z سمت میں کوئی حرکت نہیں ہے۔ اس کے z سمت میں سمتی رفتار صفر ہے ($v_z = 0$) x شئے کی سمتی رفتار میں جزء (v_x) اور y جزء (v_y) موجود ہیں۔ خاکہ کی مدد سے جب وقت t=0 سے t=3sec تک بڑھتا ہے۔ y سمت میں سمتیہ کی لمبائی تبدیل ہوتی ہے (بڑھتی ہے)۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ سمتی رفتار کا y جزء (v_y) وقت کے لحاظ سے بڑھ رہا ہے۔ نیوٹن کے دوسرے کلیے کے مطابق، اگر وقت کے لحاظ سے سمتی رفتار تبدیل ہوتی ہے تو اس میں اسراع پائی جاتی ہے۔ اس معاملے میں شئے میں y سمت میں اسراع پائی جاتی ہے، چونکہ سمتی رفتار کا y جزء تبدیل ہوتا ہے، اس لئے وہ شئے y سمت میں قوت محسوس کرتی ہے۔ سمتیہ کی لمبائی x سمت میں تبدیل نہیں ہوتی۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ x سمت میں شئے کی سمتی رفتار مستقل ہے۔ اس لئے x سمت میں صفری کل قوت ہے یا کوئی قوت عمل نہیں کر رہی ہے۔

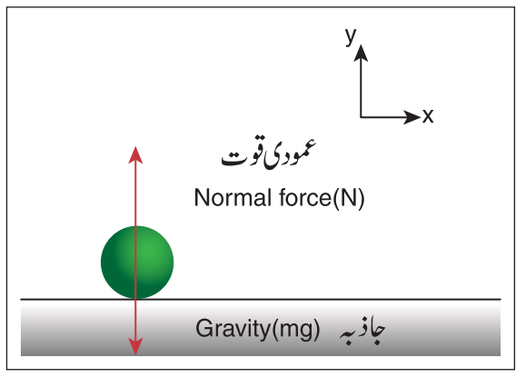
مثال 3.9

زمین پر موجود ایک پرسکون شئے کے لئے نیوٹن کے دوسرے کلیے کو آزمایئے اور نتیجے کا جائزہ لیجئے۔

حل:

شئے، زمین (جمودی محدداتی نظام) کے لحاظ سے حالت سکون پر ہے۔ دو قوتیں ہیں جو یہاں شئے پر عمل پیرا ہوتی ہیں۔

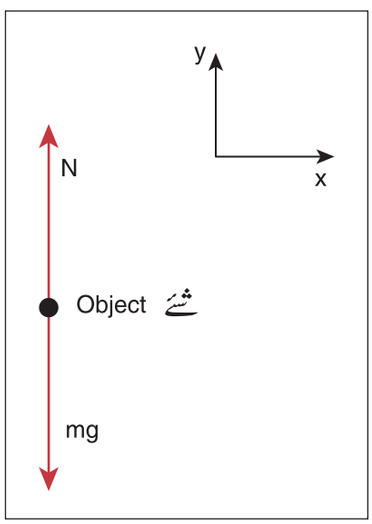
11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:10 PM



(i) نچلی جانبی قوت جاذبہ (منفی y-سمت)

(ii) اوپری جانب زمین کی سطح سے دی جانے والی عمودی قوت (مثبت y سمت)

اس شئے کے لئے آزاد جسمانی خاکہ یہ ہے۔



$$\vec{F}_g = -mg\hat{j}$$
$$\vec{N} = N\hat{j}$$

کل قوت $\vec{F}_{net} = -mg\hat{j} + N\hat{j}$

مگر گیند پر اسراع نہیں پایا گیا ہے۔لہٰذا $\vec{a} = 0$

نیوٹن کے دوسرے کلیے کا استعمال کرتے ہوئے $(\vec{F}_{net} = m\vec{a})$

چونکہ $\vec{a} = 0, \vec{F}_{net} = -mg\hat{j} + N\hat{j}$

$$(-mg + N)\hat{j} = 0$$

مساوات کے دونوں طرف اجزاء کا موازنہ کرتے ہوئے، ہم حاصل کرتے ہیں

$$-mg + N = 0$$
$$N = mg$$

ہم اس نتیجہ پر پہنچ سکتے ہیں کہ اگر ایک شئے حالت سکون پر ہے تو عمودی قوت کی مقدار جاذبہ کے بالکل برابر ہوتی ہے۔

مثال 3.10

2 kg کمیت والی ایک شئے $\vec{F}_1 = 5\hat{i} + 8\hat{j} + 7\hat{k}$ اور $\vec{F}_2 = 3\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}$. دو قوتوں سے دوچار ہوتی ہے۔ اس شئے کی اسراع کیا ہے؟

حل:

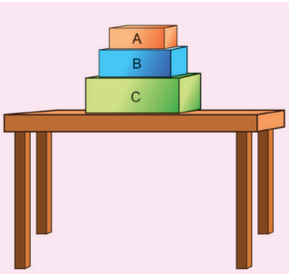
ہم نیوٹن کے دوسرے کلیے $\vec{F}_{net} = m\vec{a}$ کا استعمال کرتے ہیں، جس میں $\vec{F}_{net} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. ہے۔اوپر کی مساوات سے اسراع یہ ہے۔

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{net}}{m} \quad \text{جس میں}$$

$$\vec{F}_{net} = (5+3)\hat{i} + (8-4)\hat{j} + (7+3)\hat{k}$$
$$\vec{F}_{net} = 8\hat{i} + 4\hat{j} + 10\hat{k}$$
$$\vec{a} = \left(\frac{8}{2}\right)\hat{i} + \left(\frac{4}{2}\right)\hat{j} + \left(\frac{10}{2}\right)\hat{k}$$
$$\vec{a} = 4\hat{i} + 2\hat{j} + 5\hat{k}$$

مثال 3.11

خاکے میں بتائے گئے A، B اور C بلاکوں پر عمل پیرا ہونے والی قوتوں کی شناخت کیجئے۔



11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:10 PM

حل :

بلاک A پر موجود قوتیں :

(i) زمین سے برآمد ہونے والی نچلی جاذبی قوت $(m_A g)$

(ii) بلاک B سے برآمد ہونے والی اوپری جانب کی عمودی قوت B (N_B)

بلاک A کے لئے آزاد جسمانی نقشہ مندرجۂ ذیل خاکہ میں بتایا گیا ہے۔

بلاک A پر قوت



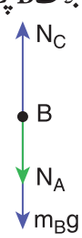
بلاک B پر موجود قوتیں :

(i) زمین سے برآمد ہونے والی نچلی جانبی جاذبی قوت $(m_B g)$

(ii) بلاک A زمین سے برآمد ہونے والی نچلی جانبی جاذبی قوت (N_A)

(iii) بلاک C سے برآمد ہونے والی اوپری جانب کی عمودی قوت (N_C)

بلاک B پر قوت



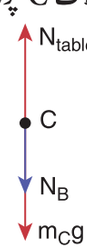
بلاک C پر موجود قوتیں :

(i) زمین سے برآمد ہونے والی نچلی جانبی جاذبی قوتیں $(m_C g)$

(ii) بلاک B زمین سے برآمد ہونے والی نچلی جانبی جاذبی قوت (N_B)

(iii) میز سے برآمد ہونے والی اوپری جانب کی عمودی قوت (N_{table})

بلاک C پر قوت



مثال 3.12

گھوڑے سے لگی ایک گاڑی کا تصور کیجئے جو شروع میں حالت سکون میں ہے۔ اگر گھوڑا آگے کی جانب چلنے لگتا ہے تو گاڑی بھی آگے کی سمت میں اسراع پانے لگتی ہے ۔ گاڑی کو گھوڑا اگر F_h قوت کے ساتھ آگے کی جانب کھینچتا ہے تو، نیوٹن کے تیسرے کلیے کے مطابق وہ گاڑی بھی گھوڑے کو مساوی اور مخالف قوت $F_c=F_h$ کے ساتھ پیچھے کی جانب کھینچتی ہے تو پھر'' گاڑی + گھوڑا'' پر کل قوت صفر ہے۔ اس کے باوجود'' گاڑی + گھوڑا '' ہی کیوں اسراع پاتے ہیں اور آگے بڑھنے لگتے ہیں؟

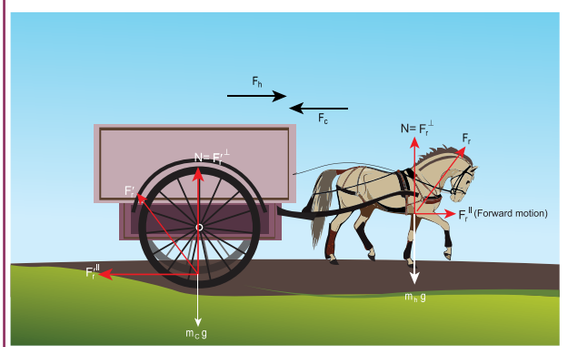
حل:

نیوٹن کے دوسرے اور تیسرے کلیوں کے غلط استعمال سے ایسا معمہ پیش آتا ہے ۔ نیوٹن کے کلیوں کو اپنانے سے پہلے ہمیں یہ طے کرنا ہوگا کہ '' کون سا نظام پایا جاتا ہے''۔ جب نظام کی شناخت کر لی جاتی ہے تو پھر نظام پر بھی عمل پیرا ہونے والی کل قوتوں کی شناخت کرنا ممکن ہو جاتا ہے۔ ہم نظام سے برآمد ہونے والی قوت کو نہیں دیکھنا چاہئے۔ اگر اس نظام پر ایک غیر متوازن قوت عمل پیرا ہو رہی ہے تو اس شئے میں مجموعی قوت کی سمت میں اسراع ضرور پائی جائے گی۔ ان باتوں کی اتباع کر کے ہم گھوڑا اور گاڑی کی حرکت کا جائزہ لیں گے۔

اگر ہم '' گھوڑا + گاڑی'' کو ایک '' نظام'' طے کرتے ہیں تو ہم گھوڑے سے گاڑی پر برآمد ہونے والی قوت یا گاڑی سے گھوڑے پر برآمد ہونے والی قوت کا لحاظ نہیں کرنا چاہئے ۔ یہ دونوں اندرونی قوتیں ہیں جو ایک دوسرے پر عمل آور ہوتی ہیں۔ نیوٹن کے تیسرے کلیے کے تحت، ایک نظام پر عمل آور ہونے والی کل اندرونی قوت صفر ہوتی ہے اور وہ اس نظام کو پر اسراع نہیں کر سکتی ۔ نظام کی اسراع تو کسی بیرونی قوت کے سبب پیدا ہوتی ہے۔ اس معاملے میں سڑک سے نظام پر برآمد ہونے والی قوت ہی بیرونی قوت ہے۔ نظام پر عمل پیرا ہونے والی تمام قوتوں کا لحاظ کئے بغیر یہ سمجھ لینا بالکل غلط ہے کہ نظام (گاڑی + گھوڑا) پر عمل پیرا ہونے والی کل قوت صفر ہے۔ سڑک ، '' گاڑی اور گھوڑے'' کو اسراع کے ساتھ آگے کی جانب کھینچ رہی ہے۔

11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:10 PM

چونکہ، یہاں اس نظام پر ایک بیرونی قوت عمل کررہی ہے، یہاں نیوٹن کے دوسرے کلیے کا استعمال کرنا چاہئے ، نہ کہ نیوٹن کے تیسرے کلیے کا استعمال مندرجۂ ذیل خاکہ اس کی نمائندگی کرتا ہے۔



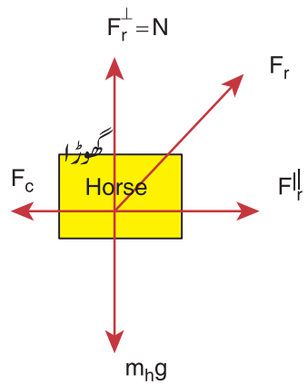
اگر ہم گھوڑے کو ایک نظام سمجھیں گے تو گھوڑے پر تین قوتیں عمل کررہی ہوتی ہیں۔

(i) نچلی جانبی قوت جاذبہ $(m_h g)$

(ii) سڑک سے برآمد ہونے والی قوت (F_r)

(iii) گاڑی سے برآمد ہونے والی پچھلی جانبی قوت (F_c)

اسے مندرجۂ ذیل خاکہ میں بتایا گیا ہے۔



F_r – سڑک سے گھوڑے پر برآمد ہونے والی قوت

F_c – گھوڑے سے سڑک پر برآمد ہونے والی قوت

$F_r^{\perp}$ – $F_r = N$ کا عمودی جزء

F_r^{II} – F_r کا متوازی جزء جس کی وجہ سے آگے کی حرکت ہوتی ہے

سڑک سے برآمد ہونے والی قوت کو متوازی اور عمودی اجزاء کے طور پر لے لیا جاسکتا ہے۔عمودی جزء نچلی جانبی جاذبی قوت کو متوازن کرتا ہے۔اس میں آگے کی سمت کے ساتھ متوازی جزء ہوتا ہے۔وہ پچھلی جانبی قوت (F_c) سے زیادہ ہوتا ہے۔اس لئے وہاں کل قوت آگے کی سمت کے ساتھ ہوتی ہے جس کی وجہ سے گھوڑا آگے کی جانب حرکت کرتا ہے۔

اگر ہم گاڑی کو ایک نظام مانتے ہیں تو گاڑی پر تین قوتیں عمل پیرا ہوتی ہیں۔

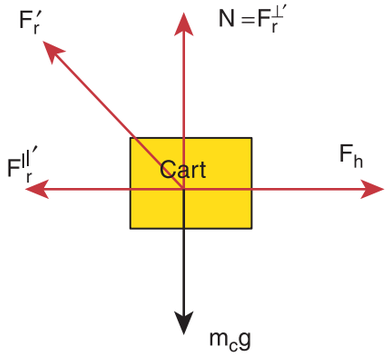
(i) نچلی جانبی جاذبی قوت $(m_c g)$

(ii) سڑک سے برآمد ہونے والی قوت (F_r)

(iii) گھوڑے سے برآمد ہونے والی قوت (F_h)

اسے خاکہ میں بتایا گیا ہے۔

گاڑی پر قوت



گاڑی سڑک سے برآمد ہونے والی قوت $(\overrightarrow{F_r'})$ کو متوازی اور عمودی اجزاء کے طور پر حل کیا جاسکتا ہے۔عمودی جز نچلی جانبی جاذبہ $(m_c g)$ کو منقطع کردیتا ہے۔متوازی جز پچھلی جانب عمل پیرا ہوتا ہے اور گھوڑے سے برآمد ہونے والی قوت $(\overrightarrow{F_h})$ آگے کی جانب عمل پیرا ہوتی ہے۔ قوت $(\overrightarrow{F_h})$ مخالف سمت میں عمل پیرا ہونے والے متوازی جز سے زیادہ ہے۔اس لئے یہاں آگے کی جانب ایک کلی غیر متوازن قوت پائی جاتی ہے جو گاڑی میں آگے کی جانب اسراع پیدا کرتی ہے۔

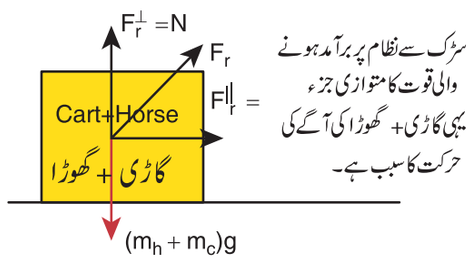
11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:11 PM

اگر ہم گاڑی + گھوڑا کو ایک نظام کے طور پر لیتے ہیں تو پھر اس نظام پر سو قوتیں عمل پیرا ہوتی ہیں۔

(i) نچلی جانبی جاذبی قوت $(m_h + m_c)g$

(ii) سڑک سے نظام پر برآمد ہونے والی قوت (F_r)

اسے مندرجۂ ذیل خاکہ میں بتایا گیا ہے۔



سڑک سے نظام پر برآمد ہونے والی قوت کا متوازی جزء یہی گاڑی + گھوڑا کی آگے کی حرکت کا سبب ہے۔

(iii) اس معاملہ میں سڑک سے نظام (گاڑی + گھوڑا) پر برآمد ہونے والی قوت (F_r) کو متوازی اور عمودی اجزاء میں حل کرتے ہیں۔ عمودی جزء وہ عمودی قوت ہے جو جاذبی قوت $(m_h + m_c)g$ کو منقطع کر دیتی ہے۔ قوت کا متوازی جزء متوازن نہیں ہے۔ لہذا نظام (گاڑی + گھوڑا) اسراع پاتا ہے اور اس قوت کی وجہ سے آگے کی جانب حرکت کرنے لگتا ہے۔

مثال 3.13

ایک شئے کے مقام کی نمائندگی یوں کی جاتی ہے۔

$$y = ut - \frac{1}{2}gt^2.$$

(a) اس شئے پر عمل پیرا ہونے والی قوت کیا ہے؟

(b) شئے کی معیار حرکت معلوم کیجئے۔

حل:

قوت معلوم کرنے کے لئے ہمیں شئے سے محسوس کی جانے والی اسراع کو معلوم کرنا ہوگا۔

اسراع یوں پیش کی جاتی ہے۔ $a = \frac{d^2y}{dt^2}$

(یا) $a = \frac{dv}{dt}$

یہاں

v = سمت میں شئے کی سمتی رفتار ہے۔

$$v = \frac{dy}{dt} = u - gt$$

شئے کی معیار حرکت = $mv = m(u-gt)$.

$$a = \frac{dv}{dt} = -g$$

شئے پر عمل پیرا ہونے والی قوت یوں پیش کی جاتی ہے۔

$F = ma = -mg$

منفی علامت یہ ظاہر کرتی ہے کہ قوت منفی y سمت پر عمل کر رہی ہے۔ یہ بالکل وہی قوت ہے جو شئے پر پروجیکٹائل کی حرکت میں عمل پیرا ہوتی ہے۔

3.3.2 ایک ڈھلوان سطح میں حرکت کرتی ہوئی شئے
(Particle moving in an inclined plane)

جب m کمیت کی ایک شئے θ زاویہ والی ایک بے رگڑ ڈھلوان سطح پر سے پھسلتی ہے، جیسا کہ خاکہ 3.12 میں بتایا گیا ہے، اس پر عمل کرنے والی قوتیں ان کا تعین کرتی ہیں۔

(a) شئے کی اسراع

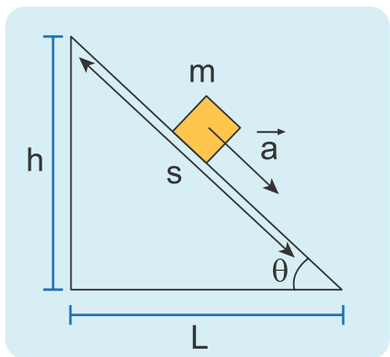
(b) شئے کی رفتار جب وہ تہہ کو پہنچتی ہے۔

شئے پر عمل پذیر قوتیں یہ ہیں۔

(i) نچلی جانبی قوت جاذبہ (mg)

(ii) ڈھلوان سطح کے عمود پر عمودی قوت (N)

11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:11 PM



خاکہ 3.12 ڈھلوان سطح پر حرکت کرنے والی ایک شئے

آزاد جسمانی خاکہ بنانے کے لئے بلاک کو ایک نقطوی کمیت کے طور پر فرض کرلیا جائے (خاکہ 3.13(a))۔ چونکہ حرکت ڈھلوان سطح پر ہوتی ہے ہمیں ڈھلوان سطح کے متوازی محددا تی نظام کا انتخاب کرنا پڑے گا جیسا کہ خاکہ (b) 3.13 میں بتایا گیا ہے۔

جاذبی قوت mg کو متوازی جزء $mg\sin\theta$ ڈھلوان سطح کے ساتھ اور عمودی جزء $mg\cos\theta$ ڈھلوان سطح کے طور پر لے لیا جاتا ہے۔ (خاکہ 3.13(b))

نوٹ کیجئے کہ سطح کے عمود سے جاذبی قوت (mg) کے ذریعہ بتایا گیا زاویہ ڈھلاؤ کے زاویے θ کے برابر ہوتا ہے، جیسا کہ خاکہ 3.13(c) میں بتایا گیا ہے۔

مثلث ABC میں کل زاویہ
ہے $90° + \theta + \theta_1 = 180°$
اوپر کی مساوات سے
$\theta_1 = 180° - 90° - \theta = 90° - \theta$
خاکہ کی مدد سے
$\theta_2 + \theta_1 = 90°$
اس لئے
$\theta_2 = 90° - \theta_1 = 90° - (90° - \theta)$
یہ دیا گیا ہے
$\theta_2 = \theta$

y- سمت میں کوئی حرکت (اسراع) نہیں ہے۔ y سمت میں نیوٹن کے دوسرے کلیے کا استعمال کرتے ہوئے

$$-mg\cos\theta\hat{j} + N\hat{j} = 0 \quad \text{(اسراع نہیں ہے)}$$

دونوں طرف کے اجزاء کا موازنہ کرتے ہوئے

$$N - mg\cos\theta = 0$$

$$N = mg\cos\theta$$

سطح کے ذریعہ برآمد ہونے والی عمودی قوت (N) کی قدر $mg\cos\theta$ کے برابر ہوتی ہے۔

وہ شئے (اسراع کے ساتھ) x سمت میں پھسلتی ہے۔
نیوٹن کے کلیے کو x سمت میں استعمال کرتے ہوئے

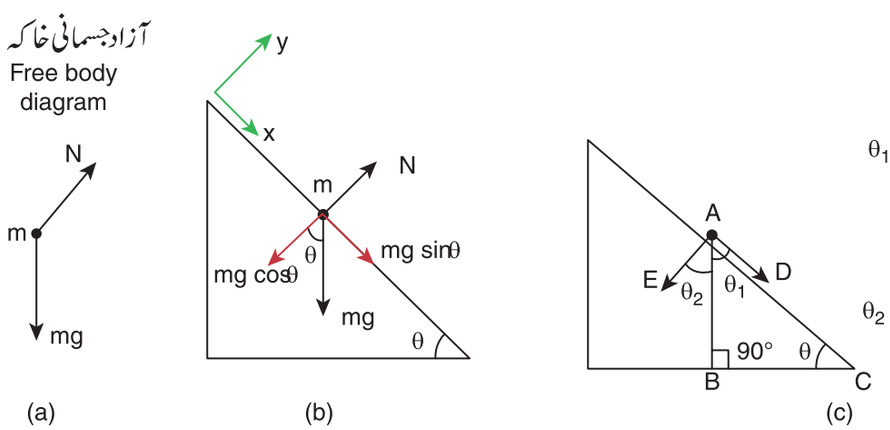
$$mg\sin\theta\hat{i} = ma\hat{i}$$

دونوں طرف کے اجزاء کا موازنہ کرتے ہوئے ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$mg\sin\theta = ma$$

پھسلنے والی شئے کی اسراع یہ ہے۔

$$a = g\ sin\theta$$



خاکہ 3.13 (a) آزاد جسم کا خاکہ (b) متوازی اور عمودی اجزاء میں حل کی گئی mg (c) زاویہ θ کے برابر ہے۔

11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:12 PM

نوٹ کیجئے کہ اسراع ڈھلاؤ کے زاویے θ پر منحصر ہوتی ہے۔ اگر زاویہ θ ہو تو بلاک عمودی طور پر $a = g$ مقدار کی اسراع کے ساتھ حرکت کرے گا۔

نیوٹن کی حرکیاتی مساوات کو استعمال کر کے شئے کی تہہ تک پہنچنے کی رفتار معلوم کی جاتی ہے۔ کل حرکت کے دوران اسراع مستقل رہتی ہے۔

$$v^2 = u^2 + 2as \qquad \text{x سمت کے ساتھ} \qquad (3.3)$$

اسراع $g \sin\theta$ کے برابر ہوتی ہے۔ چونکہ وہ حالت سکون سے شروع ہوتی ہے، ابتدائی سمتی رفتار (u) صفر کے برابر ہوتی ہے۔

یہاں s ڈھلوان سطح کی لمبائی ہے۔

(مساوات 3.3 کی مدد سے) نیچے پہنچنے پر شئے کی رفتار (v)

$$v = \sqrt{2sg\ sin\theta} \qquad (3.4)$$

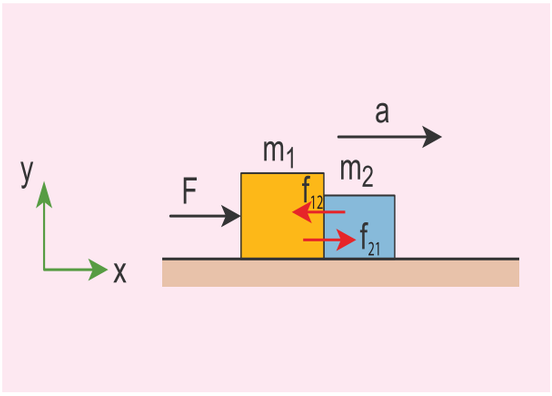
نوٹ

یہاں ہم ڈھلوان سطح کے لحاظ سے محدداتی نظام کا انتخاب کرتے ہیں۔ اگر ہم افقی سطح کا متوازی محدداتی نظام کا بھی انتخاب کرتے ہیں تو تب بھی ہمیں یہی نتیجہ حاصل ہوگا مگر محاسبہ کرتے وقت بہت پیچیدگی کا سامنا کرنا پڑے گا اس لئے دیئے گئے مسئلے کے لئے مناسب جمودی محدداتی نظام کا انتخاب کرنا بھی بہت ضروری ہے۔

3.3.3 ایک افقی سطح پر دو اشیاء کا جوڑ

(Two bodies in contact on a horizontal surface)

m_1 اور m_2 کمیت $(m_1 > m_2)$ کے دو بلاک کا تصور کیجئے، جو ایک نفیس، افقی بے رگڑ سطح پر ایک دوسرے سے لگا کر رکھے گئے ہیں، جیسا کہ خاکہ 3.14 میں بتایا گیا ہے۔



خاکہ 3.14۔ (a) ایک نفیس، افقی بے رگڑ سطح پر ایک دوسرے سے لگا کر رکھے گئے m_1 اور m_2 کمیت والے دو بلاک $(m_1 > m_2)$

ایک افقی قوت F کی مدد سے دونوں بلاک 'a' اسراع کے ساتھ بیک وقت قوت کی سمت میں حرکت کرنے لگتے ہیں۔

اسراع $\vec{a}$ معلوم کرنے کے لئے اسی نظام (ملی جلی کمیت $(m = m_1 + m_2)$ کے لئے نیوٹن کے دوسرے کلیے کا استعمال کرنا چاہئے۔

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

اگر ہم ان دو کمیتوں کی حرکت کا انتخاب مثبت x سمت کے ساتھ کرتے ہیں تو

$$F\hat{i} = ma\hat{i}$$

اوپر کی مساوات کے دونوں طرف اجزاء کا موازنہ کرنے پر

$$F = ma \qquad \text{جہاں} \quad m = m_1 + m_2$$

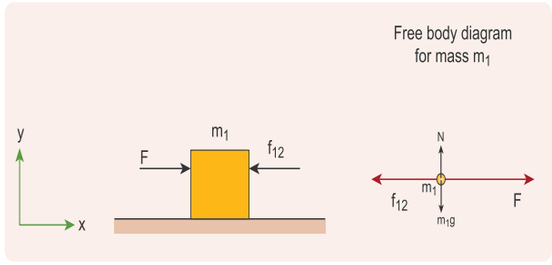
اس نظام کی اسراع یوں پیش کی جاتی ہے۔

$$\therefore a = \frac{F}{m_1 + m_2} \qquad (3.5)$$

11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:12 PM

بلاک m_1 سے بلاک m_2 پر اپنی حرکت کی وجہ سے برآمد ہونے والی قوت مس کی قوت $(\vec{f}_{21})$ (Contact force) کہلاتی ہے۔ نیوٹن کے تیسرے کلیے کے مطابق بلاک m_2 بلاک m_1 پر ایک مساوی اور مخالف ردعمل کی قوت $(\vec{f}_{12})$ برآمد کرے گا۔

خاکہ 3.14(b) بلاک m_1 کا آزاد جسمانی نقشہ ظاہر کرتا ہے۔



خاکہ 3.14(b) بلاک m_1 کا آزاد جسمانی نقشہ

$$\therefore F\hat{i} - f_{12}\hat{i} = m_1 a\hat{i}$$

اوپر کی مساوات کے دونوں طرف اجزاء کا موازنہ کرنے پر ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$F - f_{12} = m_1 a$$

$$f_{12} = F - m_1 a \qquad (3.6)$$

مساوات (3.5) کی مدد سے اسراع کی قیمت کو مساوات (3.6) میں حل کرنے پر ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$f_{12} = F - m_1\left(\frac{F}{m_1 + m_2}\right)$$

$$f_{12} = F\left[1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right]$$

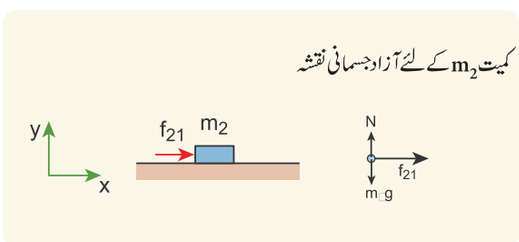
$$f_{12} = \frac{Fm_2}{m_1 + m_2} \qquad (3.7)$$

مساوات (3.7) یہ بتاتی ہے کہ مسی قوت کی قدر کمیت m_2 پر منحصر ہے جو ردعمل کی قوت فراہم کرتی ہے۔ نوٹ کیجئے کہ یہ قوت منفی x سمت پر عمل پیرا ہو رہی ہے۔

سمتیاتی اظہار میں m_1 کمیت پر ردعمل کی قوت اس طرح پیش کی جاتی ہے۔

$$\vec{f}_{12} = -\frac{Fm_2}{m_1 + m_2}\hat{i}$$

کمیت m_2 کے لئے x سمت میں صرف ایک ہی قوت عمل پیرا ہوتی ہے اور وہ $\vec{f}_{21}$ سے ظاہر کی جاتی ہے۔ یہ قوت کمیت m_1 سے برآمد ہوتی ہے۔ خاکہ 3.14(c) میں کمیت m_2 کے لئے آزاد جسمانی نقشہ بتایا گیا ہے۔



خاکہ 3.14(c) کمیت m_2 کے لئے آزاد جسمانی نقشہ

کمیت m_2 کے لئے نیوٹن کے دوسرے کلیہ کا استعمال کرتے ہوئے

$$f_{21}\hat{i} = m_2 a\hat{i}$$

اوپر کی مساوات کی دونوں طرف کے اجزاء کا موازنہ کرنے پر

$$f_{21} = m_2 a \qquad (3.8)$$

مساوات (3.5) کی مدد سے اسراع کی قیمت کو مساوات (3.8) میں حل کرنے پر ہم حاصل کرتے ہیں

$$f_{21} = \frac{Fm_2}{m_1 + m_2}$$

اس معاملے میں تماسی قوت یہ ہے۔

$$f_{21} = \frac{Fm_2}{m_1 + m_2}$$

اس قوت کی سمت مثبت x سمت کے ساتھ ہے۔

11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:12 PM

سمتیاتی اظہار (Vector Notation) میں m_2 کمیت پر، m_1 کمیت سے عمل پیرا ہونے والی قوت یہ ہے۔

$$\vec{f}_{21} = \frac{Fm_2}{m_1 + m_2}\hat{i}$$

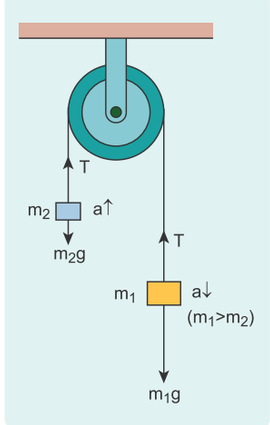
نوٹ کیجئے کہ $\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}$ ہے جو نیوٹن کے تیسرے کلیے کی تصدیق کرتی ہے۔

3.3.4 جڑے ہوئے اجسام کی حرکت: (Motion of connected bodies)

جب اشیاء ڈوریوں سے جڑی ہوتی ہیں اور ان پر عموی طور پر یا افقی طور پر یا ڈھلوان سطح کے ساتھ کوئی قوت F عمل پیرا ہوتی ہے تو وہ قوت ڈوری پر ایک تناؤ T پیدا کرتی ہے جو ایک حد تک اسراع کو متاثر کرتا ہے۔ آیئے ہم اس سے متعلق مختلف معاملات پر بحث کریں۔

معاملہ 1: عمودی حرکت (Vertical Motion)

m_1 اور m_2 کمیتوں والے دو بلاک ($m_1 > m_2$) فرض کیجئے جو ایک چرخی سے گذرنے والی ایک ہلکی اور نہ کھینچے جانے والی ڈوری سے جڑے ہوئے ہوں جیسا کہ خاکہ 3.15 میں بتایا گیا ہے۔

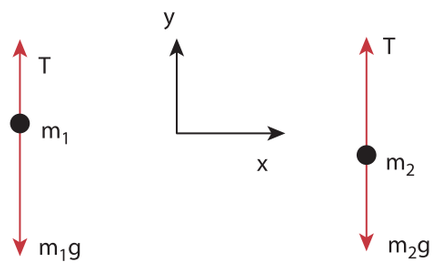


خاکہ 3.15۔ ایک چرخی سے گذرنے والی ڈوری سے جڑے ہوئے دو بلاک ۔

فرض کیجئے کہ ڈوری میں موجود تناؤ T اور اسراع a ہے۔ جب اس نظام کو آزاد کیا جاتا ہے تو دونوں بلاک حرکت کرنے لگتے ہیں۔ m_2 عمودی طور پر اوپر حرکت کرتا ہے اور m_1 اسی اسراع a کے ساتھ عمودی طور پر نیچے حرکت کرتا ہے۔ کمیت m_2 کو اوپر اٹھانے میں m_1 کمیت پر عمل کرنے والی جاذبی قوت $m_1 g$ استعمال ہوتی ہے۔

اوپری جانبی سمت y سمت کے طور پر منتخب کی جاتی ہے۔ دونوں کمیتوں کے آزاد جسمانی نقشے خاکہ 3.16 میں بتائے گئے ہیں۔

آزاد جسمانی خاکہ Free body diagram



خاکہ 3.16 m_1 اور m_2 کمیتوں کے آزاد جسمانی نقشے

m_2 کمیت کے لئے نیوٹن کے دوسرے کلیے کا استعمال کرنے پر

$$T\hat{j} - m_2 g\hat{j} = m_2 a\hat{j}$$

اوپر کی مساوات کی بائیں طرف کا حصہ وہ کل قوت ہے جو m_2 پر عمل پیرا ہوتی ہے اور دائیں طرف کا حصہ m_2، y سمت میں کی کمیت اور اسراع کا حاصل ضرب ہے۔

دونوں طرف اجزاء کا موازنہ کرنے پر ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$T - m_2 g = m_2 a \qquad (3.9)$$

اسی طرح m_1 کمیت کے لئے نیوٹن کے دوسرے کلیے کا استعمال کرنے پر

$$T\hat{j} - m_1 g\hat{j} = -m_1 a\hat{j}$$

جب کمیت m_1 نیچے کی حرکت کرتی ہے $(-\hat{j})$ اس کی اسراع $(-\hat{j})$ کے ساتھ ہوتی ہے۔

11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:13 PM

دونوں طرف کے اجزاء کا موازنہ کرنے پر ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$T - m_1 g = -m_1 a$$

$$m_1 g - T = m_1 a \qquad (3.10)$$

مساوات (3.9) اور (3.10) کو جمع کرنے پر ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$m_1 g - m_2 g = m_1 a + m_2 a$$

$$(m_1 - m_2)\, g = (m_1 + m_2) a \qquad (3.11)$$

(3.11) مساوات (3.11) کی مدد سے دونوں کمیتوں کی اسراع یہ ہے

$$a = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) g \qquad (3.12)$$

اگر دونوں کمیتیں مساوی ہوں ($m_1 = m_2$) تو مساوات (3.12) کی مدد سے

$$a = 0$$

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر دونوں کمیتیں مساوی ہوں تو وہاں کوئی اسراع نہیں ہوگی اور وہ نظام کلی طور پر حالت سکون میں ہوگا۔

ڈوری پر عمل پیرا ہونے والے تناؤ کا محاسبہ کرنے کے لئے مساوات (3.9) میں مساوات (3.12) کے اسراع کو حل کیجئے۔

$$T - m_2 g = m_2 \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) g$$

$$T = m_2 g + m_2 \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) g \qquad (3.13)$$

مساوات (3.13) کے دائیں طرف موجود $m_2 g$ کو مشترک (Common) بناتے ہوئے

$$T = m_2 g \left(1 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)$$

$$T = m_2 g \left(\frac{m_1 + m_2 + m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)$$

$$T = \left(\frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right) g$$

مساوات (3.12) اسراع کی قدر فراہم کرتی ہے۔

m_1 کمیت کے لئے اسراع کی سمتیہ یوں پیش کی جاتی ہے۔

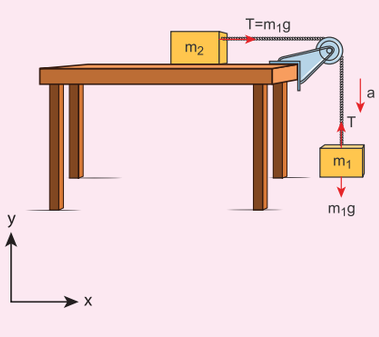
$$\vec{a} = -\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) g\, \hat{j}$$

m_2 کمیت کے لئے اسراع کی سمتیہ یوں پیش کی جاتی ہے۔

$$\vec{a} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) g\, \hat{j}$$

معاملہ 2 : افقی حرکت (Horizontal Motion)

اس معاملہ میں m_2 کمیت کو افقی میز پر رکھا جاتا ہے اور m_1 کمیت کو ایک ڈوری اور چھوٹی سی چرخی کے ذریعہ لٹکا دیا جاتا ہے جیسا کہ خاکہ 3.17 میں بتایا گیا ہے۔ فرض کر لیجئے کہ سطح پر کسی قسم کی رگڑ موجود نہیں ہے۔



خاکہ 3.17۔ افقی حرکت میں بلاک

11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:13 PM

چونکہ دونوں بلاک نہ کھنچے جانے والی ڈوری سے جڑے ہوئے ہیں۔ اگر کمیت m_1 اسراع a کے ساتھ نیچے کی جانب حرکت کرتی ہے تو کمیت m_2 بھی اسی اسراع a کے ساتھ افقی جانب حرکت کرتی ہے۔

کمیت m_2 پر عمل پیرا ہونے والی قوتیں یہ ہیں۔

(i) نچلی جانبی جاذبی قوت $(m_2 g)$

(ii) سطح سے برآمد ہونے والی اوپری جانبی عمودی قوت (N)

(iii) ڈوری سے دیا جانے والا افقی تناؤ (T)

کمیت m_1 پر عمل پیرا ہونے والی قوتیں یہ ہیں

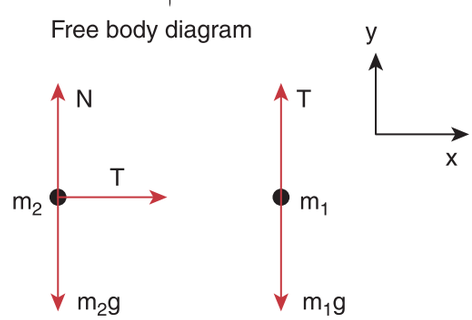
(i) نچلی جانبی قوت $(m_1 g)$

(ii) اوپری جانبی تناؤ (T)

دونوں کمیتوں کے لئے آزاد جسمانی نقشے خاکہ 3.18 میں بتائے گئے ہیں۔

آزاد جسم کا نقشہ

Free body diagram



خاکہ 3.18 m_1 اور m_2 کمیتوں کے لئے آزاد جسمانی نقشے

m_1 کے لئے نیوٹن کے دوسرے کلیے کا استعمال کرنے سے

$$T\hat{j} - m_1 g\hat{j} = -m_1 a\hat{j} \qquad (\text{y سمت کے ساتھ})$$

اوپر کی مساوات کے دونوں طرف کے اجزاء کا موازنہ کرنے پر

$$T - m_1 g = -m_1 a \qquad (3.14)$$

m_2 کے لئے نیوٹن کے دوسرے کلیے کا استعمال کرتے ہوئے

$$T\hat{i} = m_2 a\hat{i} \qquad (\text{x سمت کے ساتھ})$$

اوپر کی مساوات کی دونوں طرف کے اجزاء کا موازنہ کرنے پر

$$T = m_2 a \qquad (3.15)$$

m_2 کے لئے y سمت کے ساتھ کوئی اسراع نہیں ہے۔

$$N\hat{j} - m_2 g\hat{j} = 0$$

اوپر کی مساوات کی دونوں طرف کے اجزاء کا موازنہ کرنے پر

$$N - m_2 g = 0$$

$$N = m_2 g \qquad (3.16)$$

مساوات (3.15) کو (3.14) میں حل کرنے پر ہم تناؤ (T) معلوم کر سکتے ہیں۔

$$m_2 a - m_1 g = -m_1 a$$

$$m_2 a + m_1 a = m_1 g$$

$$a = \frac{m_1}{m_1 + m_2} g \qquad (3.17)$$

مساوات (3.17) کو (3.15) میں حل کرنے سے ہم ڈوری میں موجود تناؤ کو حاصل کر سکتے ہیں۔

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \qquad (3.18)$$

دونوں معاملات میں حرکت کا موازنہ کرنے پر، یہ صاف ظاہر ہوتا ہے کہ افقی حرکت کے لئے ڈوری میں موجود تناؤ وہی ڈوری اور کمیتوں کے سیٹ کے لئے عمودی حرکت کی تناؤ کا نصف حصہ ہی ہے۔

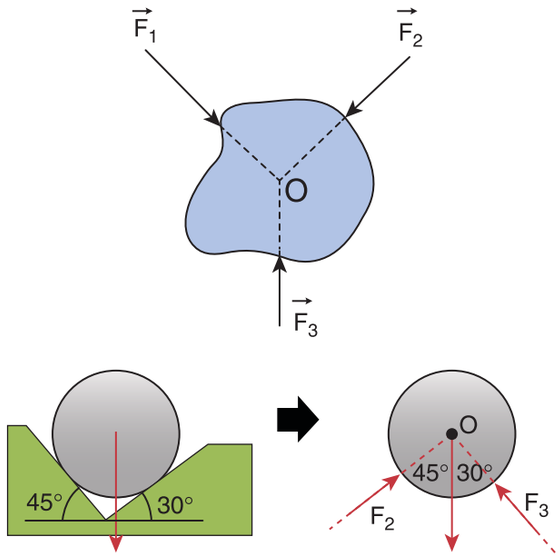
یہ نتیجہ صنعت گاہوں میں بڑی اہمیت کا حامل ہے۔ Conveyor belts (افقی حرکت) میں استعمال ہونے والی رسیاں Cranes اور Lifts (عمودی حرکت) کی رسیوں سے زیادہ عرصے تک کام کرتی ہیں۔

11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:13 PM

3.3.5 متفق قوتیں اور لیمی کا نظریہ
(Concurrent forces and Lami's Theorem)

قوتوں کا مجموعہ اس وقت متفق (Concurrent) کہلائے گا جب قوتوں کے خطوط ایک عام نقطہ کی طرف عمل پیرا ہوتے ہیں۔ خاکہ 3.19 متفق قوتوں کے نمونے پیش کرتا ہے۔

متفق قوتوں کا ایک ہی سطح پر پایا جانا ضروری نہیں ہے۔ اگر وہ ایک ہی سطح پر پائی جاتی ہیں تو پھر وہ متفق ہونے کے علاوہ ہم سطح قوتیں (Coplanar) بھی کہلاتی ہیں۔



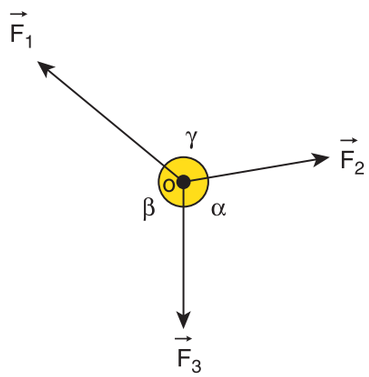
خاکہ 3.19۔ متفق قوتیں

3.4 لیمی کا نظریہ (Lami's Theorem)

اگر تین متفق اور ہم سطحی قوتوں کا نظام توازنت میں ہے تو Lami کا نظریہ یہ بیان کرتا ہے کہ نظام کی ہر قوت کی قدر دوسری دو قوتوں کے درمیانی زاویے کے sine کے تناسب میں ہوتی ہے۔ تناسبی مستقلہ تینوں قوتوں کے لئے برابر ہوتی ہے۔

آیئے ہم تین ہم سطحی اور متفق قوتیں $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ اور $\vec{F}_3$ کا تصور کریں، جو ایک عام نقطہ O پر عمل کرتی ہیں جیسا کہ خاکہ 3.20 میں بتایا گیا ہے۔

اگر وہ نقطہ توازنت (equilibrium) پر ہے تو Lami کے نظریے کے مطابق



خاکہ 3.20 O پر عمل پیرا ہونے والی تین متفق اور ہم سطحی قوتیں $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ اور $\vec{F}_3$

$$|\vec{F}_1| \propto \sin\alpha$$

$$|\vec{F}_2| \propto \sin\beta$$

$$|\vec{F}_3| \propto \sin\gamma$$

چنانچہ

$$\frac{|\vec{F}_1|}{\sin\alpha} = \frac{|\vec{F}_2|}{\sin\beta} = \frac{|\vec{F}_3|}{\sin\gamma} \qquad (3.19)$$

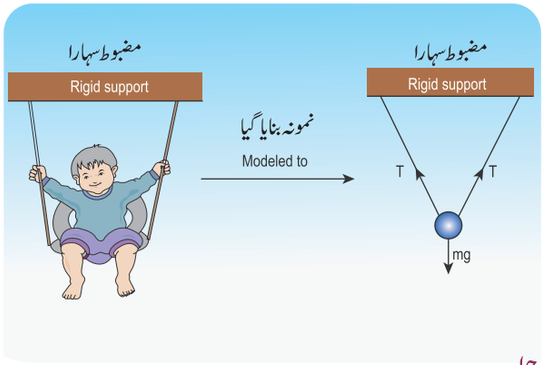
اشیاء جو ماسکونی توازنت (Static equilibrium) میں ہوتی ہیں۔ ان پر عمل پیرا ہونے والی قوتوں کا جائزہ لینے کے لئے Lami کا نظریہ استعمال ہوتا ہے۔

Lami کا نظریہ کا استعمال:
Application of Lami's Theorem

مثال 3.14

ایک بچہ ایک جھولے میں کھیل رہا ہے جو دو ہم شکل زنجیروں سے لٹکا ہوا ہے۔ فرض کیجئے کہ وہ حالت سکون پر ہے۔ بچے پر عمل پیرا ہونے والی قوتوں کی شناخت کیجئے۔ Lami کا نظریہ استعمال کیجئے اور زنجیر پر عمل پیرا ہونے والا تناؤ دریافت کیجئے۔

11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:14 PM



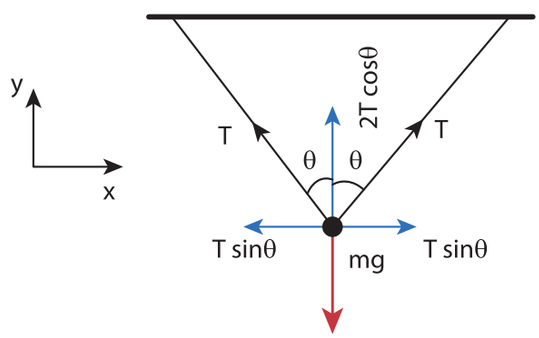
حل:

بچہ اور زنجیروں کا نمونہ ایک شئے اور دو ڈوریوں کے طور پر بنالیا جاتا ہے جیسا کہ خاکہ میں بتایا گیا ہے ۔ بچہ ہر تین قوتیں عمل پیرا ہوتی ہیں۔

(i) منفی y سمت کے ساتھ نچلی جانبی جاذبی قوت (mg)

(ii) دو ڈوریوں کے ساتھ تناؤ (T) (کی جوڑی)

یہ تین قوتیں ہم سطحی بھی ہیں اور متفق (ہم نقطہ) بھی ہیں جیسا کہ مندرجۂ ذیل خاکہ میں بتایا گیا ہے۔



Lami کے نظریے کی مدد سے

$$\frac{T}{\sin(180-\theta)} = \frac{T}{\sin(180-\theta)} = \frac{mg}{\sin(2\theta)}$$

چونکہ $\sin(180-\theta) = \sin\theta$

اور $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$

ہم حاصل کرتے ہیں۔ $\frac{T}{\sin\theta} = \frac{mg}{2\sin\theta\cos\theta}$

اس کی مدد سے ہر ڈوری پر موجود تناؤ یہ ہے۔ $T = \frac{mg}{2\cos\theta}$.

نوٹ

جب $\theta = 0°$ ہو تو وہ ڈوریاں عمودی ہوتی ہیں اور ہر ڈوری پر تناؤ $T = \frac{mg}{2}$ ہے۔

3.5 کل خطی معیار حرکت کی بقا کا کلیہ (Law of conservation of total Linear Momentum)

فطرت میں بقائی کلیے ایک اہم کردار ادا کرتے ہیں۔ بقائی کلیوں کی مدد سے حرکت پذیر اشیاء کی حرکیات کا مؤثر جائزہ لیا جاسکتا ہے۔ میکانیات میں تین بقائی کلیے پائے جاتے ہیں۔ بقائے کل توانائی، بقائے کل خطی معیار حرکت اور بقائے زاویائی معیار حرکت، نیوٹن کے دوسرے اور تیسرے کلیے کو جمع کر کے ہم کلیہ بقائے کل خطی معیار حرکت کا موازنہ کر سکتے ہیں۔

جب دو اشیاء ایک دوسرے سے ملتی ہیں، وہ ایک دوسرے پر مساوی اور مخالف قوتیں برآمد کرتی ہیں۔ نیوٹن کے تیسرے کلیے کے مطابق شئے 1 شئے 2 پر $\vec{F}_{21}$ قوت برآمد کرتی ہے اور شئے 2 پر قوت $\vec{F}_{12}$ برآمد کرتی ہے۔

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \qquad (3.20)$$

اشیاء کی معیار حرکت کے لحاظ سے ہر شئے پر قوت (نیوٹن کا دوسرا کلیہ) کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔

$$\vec{F}_{12} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} \quad \text{and} \quad \vec{F}_{21} = \frac{d\vec{p}_2}{dt}. \qquad (3.21)$$

11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:14 PM

یہاں $\vec{p}_1$ شئے 1 کی معیارحرکت ہے جو شئے 2 سے برآمد ہونے والی قوت $\vec{F}_{12}$ کی وجہ سے تبدیل ہوتی ہے۔اسی طرح شئے 2 کی معیارحرکت $\vec{p}_2$ ہے۔یہ شئے 1 سے برآمد ہونے والی $\vec{F}_{21}$ کی وجہ سے تبدیل ہوتی ہے۔

مساوات (3.21) کو مساوات 3.20 میں حل کیجئے۔

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt} \qquad (3.22)$$

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = 0 \qquad (3.23)$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0$$

اس سے پتہ چلتا ہے کہ $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 =$ (ہمیشہ) مستقل سمتیہ ہے۔

دو اشیاء کی کل خطی معیارحرکت $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$ اسے اس نظام کی کل خطی معیارحرکت $(\vec{p}_{tot} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2)$ بھی کہا جاتا ہے۔یہاں دو اشیاء اس نظام کو بناتے ہیں اس کی مدد سے کلیہ بقائے خطی حرکت اس طرح بیان کیا جاسکتا ہے۔

اگر ایک نظام میں بیرونی قوتیں عمل نہ کر رہی ہوں، تو پھر اس نظام کی کل خطی معیارحرکت $(\vec{p}_{tot})$ ہمیشہ ایک مستقل سمتیہ ہوتی ہے۔ بالفاظ دیگر ایک نظام کی خطی معیارحرکت ہر وقت بقائی ہوتی ہے۔یہاں لفظ بقاء کا مطلب یہ ہے کہ $\vec{p}_1$ اور $\vec{p}_2$ تبدیل ہوسکتے ہیں۔اس طرح سے کہ ان کا مجموعہ $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$ ایک مستقل سمتیہ ہی ہوتا ہے۔

قوتیں $\vec{F}_{12}$ اور $\vec{F}_{21}$ اس نظام کی اندرونی قوتیں کہلاتی ہیں، کیونکہ وہ صرف دو اشیاء کے درمیان ہی عمل پیرا ہوتی ہیں۔ان دو اشیاء پر باہر کی طرف سے کوئی (بیرونی) قوت عمل پیرا نہیں ہوتی ۔ایسے معاملے میں اس نظام کی کل خطی معیارحرکت بقائی یا ایک مستقل سمتیہ ہوتی ہے۔

مثال 3.15

مندرجۂ ذیل نظامات پر عمل پیرا ہونے والی اندرونی اور بیرونی قوتوں کی شناخت کیجئے۔ (a) صرف زمین ایک نظام کی طرح

(b) زمین اور سورج ایک نظام کی طرح

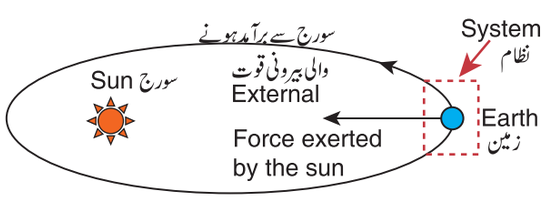
(c) چلتے وقت ہمارا جسم ایک نظام کی طرح

(d) ہمارا جسم + زمین ایک نظام کی طرح

حل:

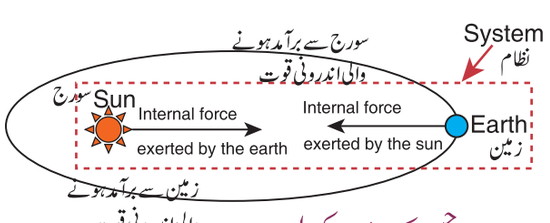
(a) صرف زمین ایک نظام کی طرح
(Earth alone as a system)

سورج کی جاذبی کشش کی وجہ سے زمین سورج کے اطراف چکر لگاتی ہے۔اگر ہم زمین کو ایک نظام کی طرح تصور کریں تو سورج کی جاذبی قوت ہی بیرونی قوت ہے۔اگر ہم چاند کا لحاظ کریں تو وہ بھی زمین پر ایک بیرونی قوت درآمد کرتا ہے۔



(b) (زمین + سورج) ایک نظام کی طرح
(Earth + sun) as a system)

اس معاملہ میں دو اندرونی قوتیں پائی جاتی ہیں جو عمل اور ردعمل کی جوڑی بناتی ہیں۔ زمین پر سورج سے برآمد ہونے والی جاذبی قوت اور سورج سے زمین پر برآمد ہونے والی جاذبی قوت۔

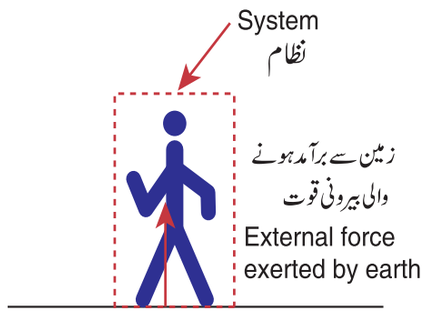


(c) ہمارا جسم ایک نظام کی طرح
(Our body as a system)

چلتے وقت ہم زمین پر ایک قوت برآمد کرتے ہیں اور زمین ہم پر ایک مساوی اور مخالف قوت برآمد کرتی ہے۔اگر صرف ہمارے جسم کو ایک نظام مانا جائے تو زمین سے ہم پر عمل پیرا ہونے والی قوت

11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:14 PM

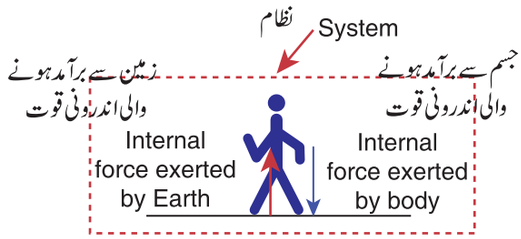
بیرونی مانی جائے گی۔



ہمارا جسم ایک نظام کی طرح Our body as a system

(d) (ہمارا جسم + زمین) ایک نظام کی طرح
((Our body + Earth) as a system)

اس معاملہ میں دو اندرونی قوتیں اس نظام میں پائی جاتی ہیں۔ پہلی قوت وہ ہے جو ہمارے جسم سے زمین پر برآمد ہوتی ہے اور دوسری مساوی اور مخالف قوت ہے جو زمین سے ہمارے جسم پر برآمد ہوتی ہے



(ہمارا جسم + زمین) ایک نظام کی طرح

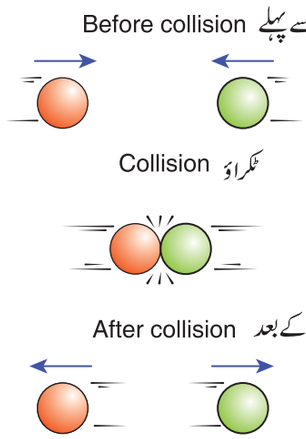
کلیہ بقائے معیار حرکت کا مطلب:

(1) کلیہ بقائے معیار حرکت ایک سمتی کلیہ ہے۔ وہ کلیہ یہ بتاتا ہے کہ کل خطی معیار حرکت کی قدر اور سمت مستقل ہوتی ہیں۔ چند معاملات میں کل معیار حرکت صفر بھی ہوسکتی ہے۔

(2) ایک شئے کی حرکت کو جانچنے کے لئے یا تو ہم نیوٹن کے دوسرے کلیے کا استعمال کر سکتے ہیں یا پھر ہم کلیہ بقائے معیار حرکت کا استعمال کر سکتے ہیں۔ نیوٹن کا دوسرا کلیہ ستعمال کرتے وقت اس میں ملوث قوتوں کا اظہار کرنا پڑتا ہے۔

حقیقی حالات میں ان قوتوں کا اظہار کرنا مشکل ہے۔ مگر بقائے خطی معیار حرکت میں عمل پیرا ہونے والی قوتوں کی نوعیت کی ضرورت ہی نہیں پڑتی۔ اس لئے یہ آسان ہے اور بڑی اہمیت کا حامل بھی ہے۔

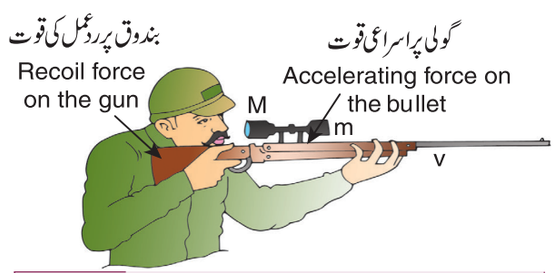
مثال کے طور پر جب دو اشیاء ٹکراتی ہیں، تو ان دونوں سے ایک دوسرے پر برآمد ہونے والی قوتوں کی وضاحت کرنا مشکل ہے مگر ٹکراؤ کے دوران بقائے خطی معیار حرکت کا استعمال کرنا آسان ہے۔



دو اشیاء کا ٹکراؤ Collision of two particles

مثالیں:

■ بندوق چلانے کا تصور کیجئے۔ یہاں بندوق + گولی ہی نظام ہے۔ شروع میں بندوق اور گولی حالت سکون میں ہوتے ہیں، لہذا اس نظام کی کل خطی معیار حرکت صفر ہوتی ہے۔ فرض کیجئے کہ گولی چلانے سے پہلے گولی کی معیار حرکت $\vec{p}_1$ ہے اور بندوق کی معیار حرکت $\vec{p}_2$ ہے۔ چونکہ دونوں شروعات میں حالت سکون پر ہیں۔



$$\vec{p}_1 = 0, \vec{p}_2 = 0.$$

11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:15 PM

گولی چلانے سے پہلے کل معیار حرکت صفر ہے۔

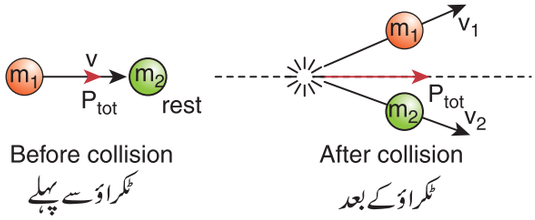
$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0.$$

کلیہ بقائے خطی معیار حرکت کے مطابق گولی چلانے کے بعد بھی کل خطی معیار حرکت صفر ہی ہونا چاہئے۔

جب گولی چلائی جاتی ہے، گولی پر بندوق سے آگے کی جانب ایک قوت برآمد ہوتی ہے۔ اب گولی کی معیار حرکت $\vec{p}_1$ سے $\vec{p}_1'$ میں تبدیل ہوجاتی ہے۔ اس نظام کی کل خطی معیار حرکت کو باقی رکھنے کے لئے بندوق کی معیار حرکت بھی $\vec{p}_2$ سے $\vec{p}_2'$ میں تبدیل ہوجانا چاہئے۔ خطی معیار حرکت کی بقاء کی وجہ سے $\vec{p}_1' + \vec{p}_2' = 0$ ہے۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ $\vec{p}_1' = -\vec{p}_2'$ بندوق کی معیار حرکت، گولی کی معیار حرکت کے بالکل مساوی ہے مگر مخالف سمت میں ہے۔ اسی وجہ سے گولی چلانے کے فوراً بعد بندوق $(-\vec{p}_2')$ کی معیار حرکت کے ساتھ پیچھے کی جانب حرکت کرتی ہے۔ اسے ردعملی معیار حرکت (Recoil Momentum) کہتے ہیں۔ یہ کل خطی معیار حرکت کی بقاء کی ایک مثال ہے۔

S8G1X

■ دو اشیاء کا تصور کیجئے پہلی شئے حالت سکون میں ہے، اور دوسری شئے پہلی شئے کی جانب حرکت کررہی ہے (جو کہ حالت سکون میں ہے)، وہ ٹکر کھاتی ہیں اور ٹکراؤ کے بعد بے ترتیب سمتوں میں حرکت کرنے لگتی ہیں۔ اس معاملے میں ٹکراؤ سے پہلے، اس نظام کی کل خطی معیار حرکت، شروع سے حرکت کرنے والی شئے کی (ابتدائی) خطی معیار حرکت کے برابر ہے۔ معیار حرکت کی بقاء کے مطابق ٹکراؤ کے بعد بھی کل خطی معیار حرکت آگے کی جانب ہی ہونی چاہئے۔ مندرجۂ ذیل خاکہ اس کی وضاحت کرتا ہے۔



حصہ 4.4 میں یہ بیان اور وضاحت کے ساتھ آیا ہے۔ غور کرنے کی بات یہ ہے کہ ٹکراؤ سے پہلے اور ٹکراؤ کے بعد کل معیار حرکت ایک ہی سمت میں رخ کرتی ہے۔ اس سے بآسانی سمجھ میں آتا ہے کہ ٹکراؤ کے پہلے اور بعد میں کل خطی معیار حرکت مستقل ہی رہتی ہے۔ ٹکراؤ کے دوران ہر شئے ایک دوسرے پر قوت برآمد کرتی ہے۔ چونکہ دو اشیاء یک نظام کی طرح تصور کی جاتی ہیں، یہ قوتیں صرف اندرونی ہیں اور کل خطی معیار حرکت کو اندرونی قوتوں سے تبدیل نہیں کیا جاسکتا۔

3.5.1 دھکا (Impulse)

اگر ایک بہت بڑی قوت ایک شئے پر بہت تھوڑے سے وقفے کے لئے عمل پیرا ہوتی ہے تو وہ قوت، دھکا یا دھکے کی قوت impulsive force کہلاتی ہے۔

اگر ایک قوت (F) ایک شئے پر وقت کے بہت تھوڑے سے وقفے (Δt) میں عمل پیرا ہوتی ہے، تو نیوٹن کے دوسرے کلیے کی قدری شکل کی مدد سے

$$F dt = dp$$

ایک ابتدائی وقت t_i سے انتہائی وقت t_f تک کے وقفے کے ساتھ احصاء/مربوط (integrate) کرنے پر، ہم حاصل کرتے ہیں

$$\int_i^f dp = \int_{t_i}^{t_f} F\, dt$$

$$p_f - p_i = \int_{t_i}^{t_f} F\, dt$$

$p_i =$ وقت t_i پر شئے کی ابتدائی معیار حرکت

$p_f =$ وقت t_f پر شئے کی انتہائی معیار حرکت

11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:15 PM

$p_f - p_i = \Delta p$ وقتی وقفہ کے دوران شئے کی معیار حرکت میں ہونے والی تبدیلی ہے۔ $t_f - t_i = \Delta t$

احصاء $\int_{t_i}^{t_f} F\,dt = J$ دھکا کہلاتی ہے اور وہ شئے کی معیار حرکت میں ہونے والی تبدیلی کے برابر ہوتا ہے۔

اگر وقتی وقفے کے دوران قوت مستقل ہو تو پھر

$$\int_{t_i}^{t_f} F\,dt = F\int_{t_i}^{t_f} dt = F\left(t_f - t_i\right) = F\Delta t$$

$$F\,\Delta t = \Delta p \qquad (3.24)$$

مساوات (3.24) دھکا۔معیار حرکت کی مساوات کہلاتی ہے۔

ایک مستقل قوت کے لئے دھکا یوں ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

$J = F\Delta t$ اور وہ وقتی وقفہ Δt میں شئے کی معیار حرکت میں ہونے والی تبدیلی (Δp) کے برابر ہوتا ہے۔

دھکا ایک سمتی مقدار ہے اور اس کی اکائی Ns ہے۔

وقت کے ایک چھوٹے سے وقفے میں شئے پر عمل کی گئی اوسط قوت کی تعریف یوں کی جاتی ہے۔

$$F_{avg} = \frac{\Delta p}{\Delta t} \qquad (3.25)$$

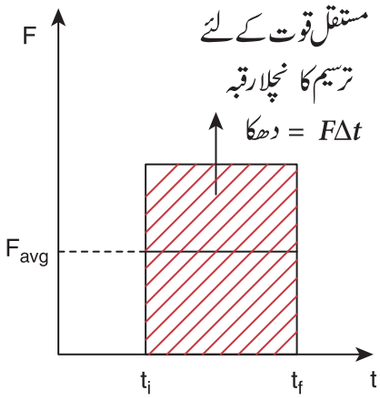
مساوات (3.25) کی مدد سے اگر Δt چھوٹا ہو تو شئے پر عمل کرنے والی اوسط قوت بڑی ہوتی ہے۔ جب بھی شئے کی معیار حرکت بڑی تیزی سے تبدیل ہوتی ہے اوسط قوت بڑھ جاتی ہے۔

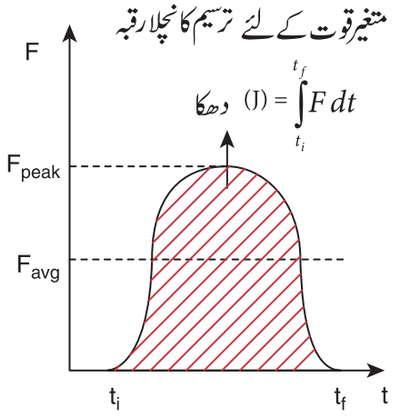
اوسط قوت کے لحاظ سے بھی دھکا کو لکھا جاسکتا ہے چونکہ Δp ہی شئے کی معیار حرکت میں ہونے والی تبدیلی ہے اور وہ دھکا (J) کے برابر ہوتی ہے۔

$$J = F_{avg}\Delta t \qquad (3.26)$$

ہم رکھتے ہیں۔

خاکہ 3.21 میں مستقل قوت کا دھکا اور متغیر قوت کا دھکا، ان دونوں کی ترسیمی نمائندگی کی گئی ہے۔





خاکہ 3.21 مستقل قوت کا دھکا اور متغیر قوت کا دھکا

وضاحتیں :

1۔ کرکٹ کا کھلاڑی جب گیند کو پکڑتا ہے تو وہ اپنے ہاتھ کو گیند کی حرکت کی سمت میں آہستہ سے کھینچ لیتا ہے، کیوں؟

اگر وہ گیند کو پکڑتے ہی اپنے ہاتھوں کو روک لیتا ہے تو گیند بڑی تیزی سے حالت سکون اختیار کرتا ہے۔اس کا مطلب یہ ہوا کہ گیند کی معیار حرکت کو بڑی تیزی سے حالت سکون میں لایا گیا ہے۔اس لئے جسم پر عمل کرنے والی اوسط قوت بہت زیادہ ہوگی۔

11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:16 PM

اس سے زیادہ اوسط قوت کی وجہ سے ہاتھوں میں چوٹ لگ جائے گی ۔ چوٹ لگنے سے بچنے کے لئے کھلاڑی گیند کو آہستہ سے حالت سکون میں لاتا ہے۔



2۔ جب کوئی کار حادثے کا شکار ہوتی ہے اس کی معیار حرکت بہت ہی تھوڑے سے وقت میں بڑی تیزی سے گھٹنے لگتی ہے، چونکہ اس سے کار میں بیٹھے ہوئے مسافر ایک بڑی قوت سے دوچار ہوں گے، یہ ان کے لئے بہت ہی خطرناک ہوتی ہے ۔اس مہلک صدمہ سے حفاظت کے لئے کار میں ایسی ہوائی تھیلیاں بنائی گئی ہوتی ہیں کہ ان کی مدد سے حادثے کے دوران مسافروں کی معیار حرکت آہستہ سے کم ہوتی ہے جس سے ان پر عمل پیرا ہونے والی اوسط قوت کم ہو جاتی ہے۔

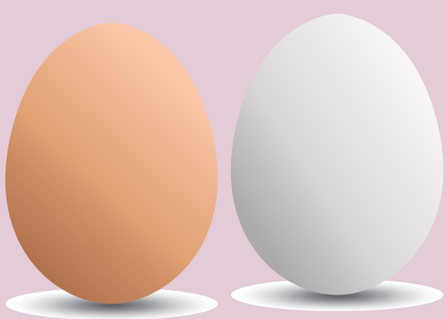


3۔ موٹر گاڑیوں میں ثبت کئے ہوئے صدمہ گیر (Shock absorbers) بھی وہی رول ادا کرتے ہیں جو کار میں رکھی گئی ہوائی تھیلیاں کرتی ہیں ۔گاڑی چلاتے وقت جب سڑک پر کوئی گڑھا ہوتا ہے تو اچانک گاڑی میں ایک قوت منتقل ہوتی ہے ۔صدمہ گیر، گاڑی چلانے والے کے لئے اس قوت کی منتقلی کے وقت کو بڑھا دیتا ہے۔بغیر صدمہ گیر والی گاڑیاں اس قوت کی منتقلی کے وقت کو نہ بڑھانے کی وجہ سے جسم کو نقصان پہنچا سکتی ہیں۔

4۔ ریت پر کودنے کے مقابلے میں کانکریٹ سمنٹ کی زمین پر کودنا زیادہ خطرناک ہے ۔ریت میں کانکریٹ سمنٹ کی زمین کے مقابلے میں جسم کو آہستہ سے حالت سکون پر لاتی ہے، جس سے جسم سے محسوس کی جانے والی وسط قوت کم ہو جاتی ہے۔

KLURW

دھکا: (Impulse)



اگر ایک انڈا پھینکا جائے تو کیا آپ اسے توڑے بغیر حفاظت سے پکڑ سکتے ہیں؟ کیسے؟

مثال 3.16

$15\ m\ s^{-1}$ کی رفتار سے حرکت کرتی ہوئی 10 kg کمیت والی ایک شئے، دیوار سے ٹکراتی ہے، اور

(a) 0.03 سکنڈ

(b) 10 سکنڈ

کے اندر حالت سکون میں آتی ہے۔

11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:16 PM

ان دونوں معاملات میں دھکا اور شئے پر عمل پیرا ہونے والی اوسط قوت کا محاسبہ کیجئے۔

حل:

شئے کی ابتدائی معیار حرکت =

$$p_i = 10 \times 15 = 150\ k\,gm\,s^{-1}$$

شئے کی انتہائی معیار حرکت = $p_f = 0$

$$\Delta p = 150 - 0 = 150\ kg\ ms^{-1}$$

(a) دھکا $J = \Delta p = 150\,N\,s.$

(b) دھکا $J = \Delta p = 150\,N\,s$

(a) اوسط قوت $F_{avg} = \dfrac{\Delta p}{\Delta t} = \dfrac{150}{0.03} = 5000\,N$

(b) اوسط قوت $F_{avg} = \dfrac{150}{10} = 15\,N$

ہم دیکھتے ہیں کہ دونوں معاملات میں دھکا یکساں ہے، مگر اوسط قوت مختلف ہے۔

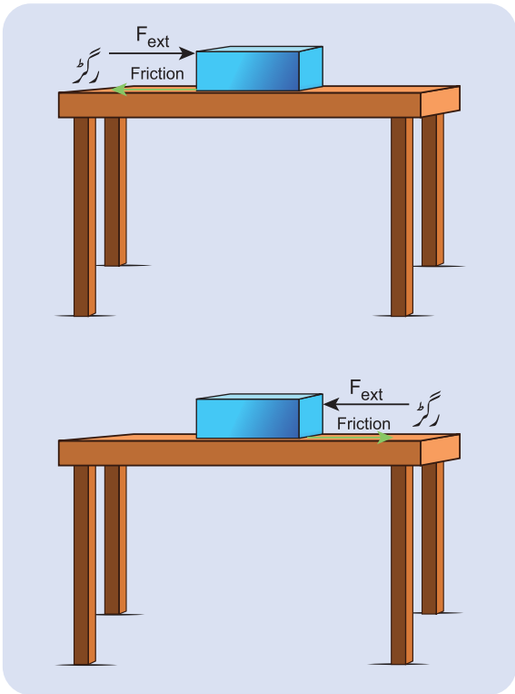
3.6 رگڑ (Friction)

3.6.1 تعارف:

اگر ہم میز پر رکھی گئی ایک پرسکون شئے پر افقی سمت میں بہت معمولی قوت لگاتے ہیں تو وہ شئے حرکت نہیں کرتی۔ شئے پر سطح کے ذریعہ برآمد ہونے والی مخالف قوت کی وجہ سے جو اس کی حرکت کی مزاحمت کرتی ہے، اس طرح ہوتا ہے۔ یہ قوت رگڑ کی قوت کہلاتی ہے جو ہمیشہ، شئے اور وہ سطح جس پر شئے رکھی گئی ہے، اس کے درمیان کی متعلقہ حرکت کی مزاحمت کرتی ہے۔ اگر بھیجی جانے والی قوت بڑھادی جائے تو ایک حد پار کرنے کے بعد وہ شئے حرکت کرنے لگتی ہے۔

نسبتی حرکت: (Relative Motion)

جب ایک شئے پر سطح کے متوازی طور پر ایک قوت بھیجی جاتی ہے تو وہ قوت اس سطح کے لحاظ سے شئے کو حرکت کرانے کی کوشش کرتی ہے۔



خاکہ 3.22۔ رگڑ کی قوت

یہ متعلقہ حرکت، شئے پر سطح سے برآمد ہونے والی رگڑ کی قوت سے مخالفت کی جاتی ہے جو بھیجی گئی قوت کی مخالف سمت میں ہوتی ہے۔ رگڑ کی قوت ہمیشہ شئے پر اس سطح کے متوازی طور پر عمل پیرا ہوتی ہے جس پر وہ شئے رکھی گئی ہے، رگڑ کی دو قسمیں ہوتی ہیں۔

(1) ساکن رگڑ اور

(2) حرکی رگڑ

3.6.2 ساکن رگڑ (Static Friction) ($\vec{f}_s$)

ساکن رگڑ وہ قوت ہے جو سطح پر موجود شئے کی حرکت کی ابتداء کی مخالفت کرتی ہے۔ شئے جب سطح پر حالت سکون میں ہوتی ہے، اس پر صرف دو قوتیں عمل پیرا ہوتی ہیں۔ وہ نچلی جانبی جاذبی قوت اور اوپری عمودی قوت ہیں۔ شئے پر ان دونوں کی مجموعی قوت صفر ہوتی ہے۔ اس کے نتیجے میں وہ شئے حالت سکون میں رہتی ہے جیسا کہ خاکہ 3.23 میں بتایا گیا ہے۔

جس سطح پر شئے حالت سکون میں رکھی گئی ہے اس کے متوازی طور پر اگر اس شئے پر کوئی بیرونی قوت F_{ext} بھیجی جائے تو وہ سطح اس شئے کو حرکت کرنے سے روکے رکھنے کے لئے ایک مساوی اور مخالف قوت

11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:17 PM

اس شئے پر برآمد کرتی ہے۔اس سے پتہ چلتا ہے کہ بیرونی قوت اور رگڑ کی قوت، دونوں بالکل مساوی اور مخالف ہیں۔ چنانچہ سطح کے متوازی طور پر کوئی حرکت نمودار نہیں ہوتی۔

مگر جب بیرونی قوت کو ایک حد سے زیادہ بڑھا دیا جائے تو وہ سطح شئے پر پڑنے والی بیرونی قوت کے برابر کی مخالف، رگڑ کی قوت فراہم نہیں کرسکتی۔ پھر وہ شئے پھسلنا شروع کر دیتی ہے۔ یہی وہ انتہائی ساکن رگڑ ہے جو سطح سے برآمد ہوسکتی ہے۔ تجرباتی طور پر یہ دیکھا گیا ہے کہ ساکن رگڑ کی قوت کی قدر f_s مندرجۂ ذیل حسابی مساوات کو مطمئن کرتی ہے۔

$$0 \le f_s \le \mu_s N, \qquad (3.27)$$

جہاں μ_s ساکن رگڑ کا تعاونی عدد ہے۔ وہ مس ہونے والی سطحوں کی فطرت پر منحصر ہوتا ہے۔ N، سطح سے جسم پر برآمد ہونے والی عمودی قوت ہے اور وہ کبھی کبھی mg کے برابر ہوتی ہے۔ مگر اس کا mg کے برابر ہونا ہمیشہ ضروری نہیں ہے۔

مساوات (3.27) یہ بتاتی ہے کہ ساکن رگڑ کی قوت کی قیمت صفر سے لے کر $\mu_s N$ تک ہوسکتی ہے۔

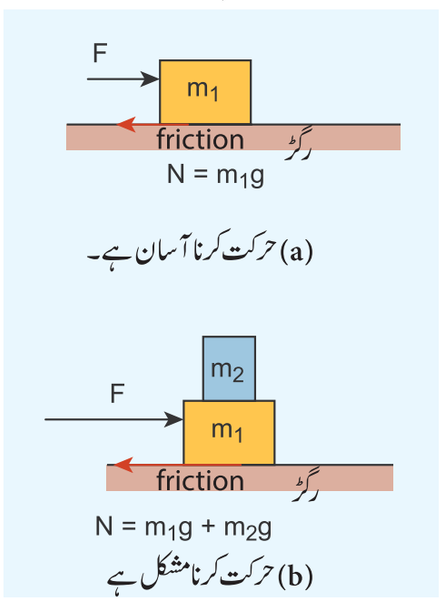
اگر وہ شئے حالت سکون پر ہے اور اس پر کوئی بیرونی قوت نہیں بھیجی جارہی ہے تو اس شئے پر عمل پیرا ہونے والی رگڑ کی قوت صفر ہوتی ہے۔ $(f_s = 0)$

اگر شئے حالت سکون پر ہے اور وہاں ایک بیرونی قوت سطح کے متوازی سمت میں اس پر عمل کر رہی ہے تو پھر شئے ہر عمل پیرا ہونے والی رگڑ کی قوت اس پر بھیجی جانے والی بیرونی قوت کے بالکل مساوی ہوتی ہے۔ $(f_s = F_{ext})$

مگر ساکن رگڑ f_s ، اب بھی $\mu_s N$ سے کم ہی ہوتی ہے۔

جب بھی شئے پھسلنا شروع ہوتی ہے، اس وقت شئے پر عمل پیرا ہونے والی ساکن رگڑ (f_s) اپنی انتہا کو پہنچتی ہے۔

ساکن یا حرکی (جس کے بارے میں ہم بعد میں مطالعہ کریں گے) رگڑیں شئے پر عمل کرنے والی عمودی قوت پر منحصر ہوتی ہیں۔ اگر وہ شئے اوپر سے بہت زور سے دابی جارہی ہے تو اس شئے پر عمل کرنے والی عمودی قوت بڑھ جاتی ہے۔ اس کے نتیجے میں اس شئے کا حرکت کرنا اور مشکل ہوجاتا ہے۔ اسے خاکہ 3.23(a) اور (b) میں بتایا گیا ہے۔ ساکن رگڑ مس ہونے والے رقبے پر منحصر نہیں ہوتا۔



خاکہ 3.23۔ ساکن رگڑ اور حرکی رگڑ
(a) حرکت کرنا آسان ہے
(b) حرکت کرنا مشکل ہے۔

مثال 3.17

فرض کیجئے کہ 2 kg کمیت والی ایک شئے زمین پر حالت سکون میں ہے۔ شئے اور زمین کی درمیانی رگڑ کی قوت کا شرح قدر (تعاونی عدد) $\mu_s = 0.8$ ہے۔ اس شئے کو حرکت کروانے کے لئے درکار قوت کی مقدار کیا ہے ؟

حل :

چونکہ شئے حالت سکون پر ہے، شئے سے محسوس کی جانے والی جاذبی قوت = زمین سے برآمد ہونے والی عمودی قوت کے مساوی ہوتی ہے۔

$$N = mg$$

11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:17 PM

ساکن رگڑ کی انتہائی قوت

$$f_s^{max} = \mu_s N = \mu_s mg$$

$$f_s^{max} = 0.8 \times 2 \times 9.8 = 15.68\,N$$

چنانچہ شئے کو حرکت کروانے کے لئے ، بیرونی قوت کی مقدار ساکن رگڑ کی انتہائی قوت سے زیادہ ہونا چاہئے۔

$$F_{ext} > 15.68\,N$$

مثال 3.18

50kg کمیت والی ایک شئے کا تصور کیجئے جو زمین پر حالت سکون میں رکھی گئی ہے۔اس پر 5N کی ایک قوت بھیجی جارہی ہے مگر وہ حرکت نہیں کررہی ہے، شئے پر عمل پیرا ہونے والی رگڑ کی قوت کی مقدار کیا ہے؟

حل:

جب ایک شئے حالت سکون پر ہوتی ہے تو بیرونی قوت اور ساکن رگڑ کی قوت مساوی اور مخالف ہوتی ہیں ۔ ان قوتوں کی قدریں مساوی ہوتی ہیں، $f_s = F_{ext}$

چنانچہ شئے پر عمل پیرا ہونے والی ساکن رگڑ کی قوت

$$f_s = 5N.$$

رگڑ کی قوت کی سمت بیرونی قوت F_{ext} کی سمت کی مخالف سمت میں ہوتی ہے۔

مثال 3.19

7 kg اور 5 kg کمیت والے دو اجسام ایک ہلکی ڈوری سے بندھے ہوئے ہیں جو میز کے کنارے پر ثبت شدہ ایک بے رگڑ چرخی سے گزرتی ہے ۔سطحوں (جسم اور میز) کے درمیان موجود ساکن رگڑ کا تعاونی عدد 0.9 ہے۔کیا سطح پر رکھی گئی کمیت $m_1 = 7kg$ حرکت کرے گی؟ اگر نہیں تو m_1 کو حرکت کرانے کے لئے m_2 میں رکھی جانے والی کمیت کی مقدار کیا ہونا چاہئے۔

حل:

جیسا کہ خاکہ میں بتایا گیا ہے، چار قوتیں ہیں، جو کمیت m_1 پر عمل پیرا ہورہی ہیں۔

(a) منفی y سمت کے ساتھ نچلی جانبی جاذبی قوت $(m_1 g)$

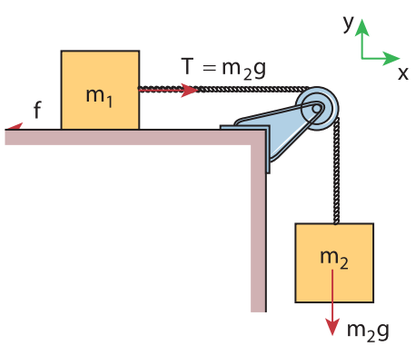
(b) مثبت y سمت کے ساتھ اوپری جاذبی عمودی قوت N

(c) مثبت x سمت کے ساتھ m_2 کمیت کی وجہ سے تناؤ کی قوت

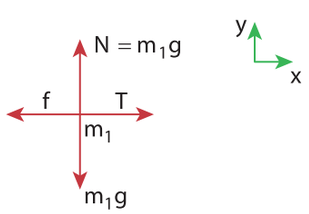
(d) نفی x سمت کے ساتھ رگڑ کی قوت

چونکہ کمیت m_1 میں کوئی عمودی حرکت نہیں ہے۔

$$m_1 g = N$$



m_1 کمیت کے لئے آزاد جسمانی نقشہ



یہ جانچنے کے لئے کہ m_1 کمیت پذیر حرکت کرتی ہے یا نہیں؟ m_1 کمیت پر میز سے برآمد ہونے والی انتہائی رگڑ کی قوت کو معلوم کریں گے۔ اگر m_1 کمیت پر موجود تناؤ اس انتہائی رگڑ کی قوت سے زیادہ ہو تو شئے حرکت کرے گی۔

$$f_s^{max} = \mu_s N = \mu_s m_1 g$$

$$f_s^{max} = 0.9 \times 7 \times 9.8 = 61.74\ N$$

11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:18 PM

تناؤ $T = m_2 g = 5 \times 9.8 = 49\ N$

$$T < f_s^{max}$$

m_1 کمیت پر عمل کرنے والا تناؤ انتہائی رگڑ کی قوت سے کم ہے، اس لئے شئے حرکت نہیں کرے گی۔

m_1 کمیت کی شئے کے حرکت کرنے کے لئے، $T > f_s^{max}$,

جہاں $T = m_2 g$

$$m_2 = \frac{\mu_s m_1 g}{g} = \mu_s m_1$$

$$m_2 = 0.9 \times 7 = 6.3\ kg$$

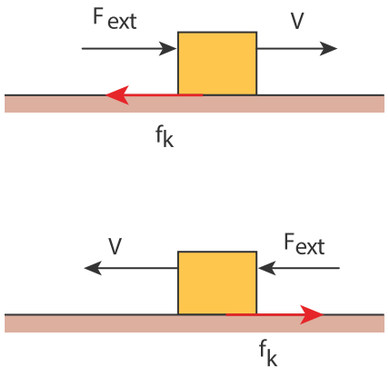
اگر m_2 کمیت 6.3kg سے زیادہ ہو تو m_1 کمیت پھسلنا شروع کرے گی۔ نوٹ کیجئے کہ، اگر سطح پر رگڑ ہی نہ ہو تو 1 kg کی m_2 کمیت پر بھی کمیت m_1 حرکت کرنے لگے گی۔ جدول 3.1 میں اشیاء کی مخصوص جوڑیوں کے لئے ساکن رگڑ کے تعاونی عدد کی قیمتیں پیش کی گئی ہیں۔ نوٹ کیجئے کہ برف اور برف کی جوڑی کی ساکن رگڑ کے تعاونی عدد کی قیمت بہت کم ہے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ برف کا ایک ٹکڑا برف کے دوسرے ٹکڑے پر سے آسانی سے حرکت کرسکتا ہے۔

جدول 3.1 اشیاء کی جوڑیوں کے لئے، ساکن رگڑ کا تعاونی عدد (شرح قدر)

شئے	ساکن رگڑ کا تعاونی عدد (شرح قدر)
شیشہ اور شیشہ	1.0
برف اور برف	0.10
اسٹیل اور اسٹیل	0.75
لکڑا اور لکڑا	0.35
ربڑ کا ٹائر اور سوکھی کانکریٹ سڑک	1.0
ربڑ کا ٹائر اور گیلی سڑک	0.7

3.6.3 فعلی رگڑ (Kinetic Friction)

اگر شئے پر عمل کرنے والی بیرونی قوت، ساکن رگڑ کی انتہائی قوت سے زیادہ ہو تو شئے حرکت کرنے لگتی ہے۔ جب کوئی شئے پھسلنے یا حرکت کرنے لگتی ہے تو وہ سطح ایک رگڑ کی قوت برآمد کرتی ہے جو فعلی رگڑ (Kinetic Friction) کہلاتی ہے جسے پھسلنے والی رگڑ $\vec{f}_k$ (Sliding friction) یا حرکی رگڑ (dynamic friction) بھی کہتے ہیں۔ ایک شئے کو مستقل سمتی رفتار کے ساتھ حرکت کروانے کے لئے ہمیں ایک ایسی قوت لگانی پڑتی ہے جس کی قدر فعل یا حرکی رگڑ کی قدر کے مساوی اور سمت اس کی سمت کے مخالف ہوتی ہے۔



خاکہ 3.24 فعلی رگڑ

تجرباتی طور پر یہ دیکھا گیا تھا کہ فعلی یا حرکی رگڑ کے قدر اس تعلق کو مطمئن کرتی ہے۔

$$f_k = \mu_k N \qquad (3.28)$$

جہاں μ_k فعلی رگڑ کا تعاونی عدد ہے اور N، شئے پر عمل پیرا ہونے والی عمودی قوت ہے۔

$$\mu_k < \mu_s \qquad \text{اور}$$

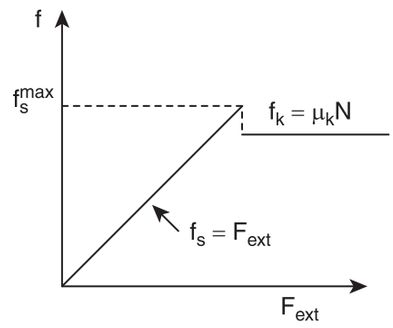
اس سے پتہ چلتا ہے کہ حرکت کا شروع کرنا حرکت کو برقرار رکھنے سے زیادہ مشکل کام ہے۔ ساکن اور فعلی رگڑ کی خصوصیات جدول 3.2 میں پیش کی گئی ہیں۔

11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:18 PM

جدول 3.2۔ ساکن اور فعلی رگڑ کی اہم خصوصیات:

ساکن رگڑ Static friction	حرکی یا فعلی رگڑ Kinetic friction
یہ حرکت کی شروعات کی مخالفت کرتی ہے۔	یہ سطح کے لحاظ سے شئے کی متعلقہ حرکت کی مخالفت کرتی ہے۔
مس ہونے والی سطح کے رقبے پر منحصر نہیں ہوتی۔	یہ بھی مس ہونے والی سطح کے رقبے پر منحصر نہیں ہوتی ہے۔
μ_s باہم مس ہونے والی اشیاء کی فطرت پر منحصر ہوتا ہے۔	μ_k اشیاء کی فطرت اور سطح کی تپش پر منحصر ہوتا ہے۔
بھیجی گئی قوت کی مقدار پر منحصر ہوتی ہے۔	بھیجی جانے والی قوت کی مقدار پر منحصر نہیں ہوتی ہے۔
اس کی قیمت صفر سے $\mu_s N$ تک ہوسکتی ہے۔	اس کی قیمت کبھی صفر نہیں ہوسکتی اور ہمیشہ $\mu_k N$ کے برابر ہوتی ہے، چاہے رفتار کچھ بھی ہو۔ ($v < 10\ ms^{-1}$ درست ہے)
$f_s^{max} > f_k$	اس کی قیمت ساکن رگڑ کی انتہائی قیمت سے کم ہی ہوتی ہے۔
$\mu_s > \mu_k$	فعلی رگڑ کا تعاونی عدد، ساکن رگڑ کے تعاونی عدد سے کم ہوتا ہے۔

بھیجی جانے والی بیرونی قوت کے ساتھ ساکن رگڑ اور فعلی رگڑ، ان دونوں قوتوں کے تغیرات کو ترسیمی طور پر خاکہ 3.25 میں بتایا گیا ہے۔



خاکہ 3.25 بھیجی گئی بیرونی قوت کے ساتھ ساکن اور فعلی رگڑ کی قوتوں کا تغیر

خاکہ 3.25 یہ بتاتا ہے کہ بھیجی جانے والی قوت کے ساتھ، ساکن رگڑ خطی طور پر بڑھتی جاتی ہے، یہاں تک کہ وہ اپنی انتہا تک پہنچ جاتی ہے۔ جب شئے حرکت کرنا شروع کرتی ہے تو پھر فعلی رگڑ کی قیمت ساکن رگڑ کی انتہائی قیمت سے تھوڑی کم ہوجاتی ہے۔ نوٹ کیجئے کہ فعلی رگڑ مستقل ہوتی ہے اور وہ بھیجی جانے والی قوت پر منحصر نہیں ہوتی۔

نوٹ

یہ تعلقی مساوات $f_s = \mu_s N$ ایک سمتی تعلق نہیں ہے۔ یہ اس لئے کہ عمودی قوت N اور f_s ایک ہی سمت میں نہیں ہیں۔ حالانکہ f_s کی قیمت عمودی قوت N کے μ_s گنا برابر ہوتی ہے۔ فعلی رگڑ کے معاملہ میں بھی ایسا ہی ہوتا ہے۔

3.6.4 ایک شئے کو باحرکت بنانے کے لئے ڈھکیلنا یا کھینچنا؟ کون سا آسان ہے؟

(To move an object - push or pull? Which is easier?)

جب کوئی شئے ایک بے ترتیب زاویہ $\left(0 \text{ سے } \frac{\pi}{2} \text{ تک}\right)$ ڈھکیل جاتی ہے، تو بھیجی جانے والی قوت F کو، سطح $F \sin\theta$ کے متوازی طور پر اور $F \cos\theta$ سطح کے عمودی طور پر ان دو اجزاء کے طور پر حل کیا جاسکتا ہے جیسا کہ خاکہ 3.26 میں بتایا گیا ہے۔ شئے پر عمل پیرا ہونے والی کل نچلی جانبی قوت $mg + F\cos\theta$ ہے۔ اس سے پتہ چلتا ہے کہ شئے پر عمل کرنے والی عمودی قوت بڑھتی ہے۔ چونکہ وہاں عمودی طور پر کوئی اسراع نہیں پائی جاتی ہے، عمودی قوت N اس کے برابر ہوتی ہے۔

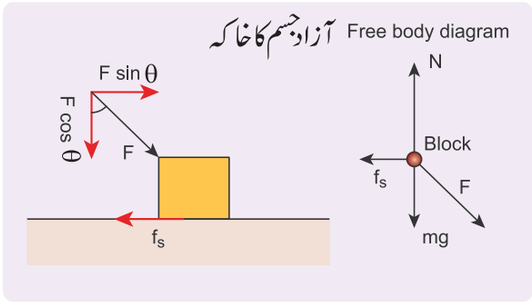
11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:19 PM

$$N_{push} = mg + F\cos\theta \qquad (3.29)$$

اس کے نتیجے میں ساکن رگڑ کی انتہائی قیمت بھی بڑھ جاتی ہے اور وہ اس کے برابر ہوتی ہے۔

$$f_s^{max} = \mu_s N_{push} = \mu_s \left(mg + F\cos\theta \right) \qquad (3.30)$$

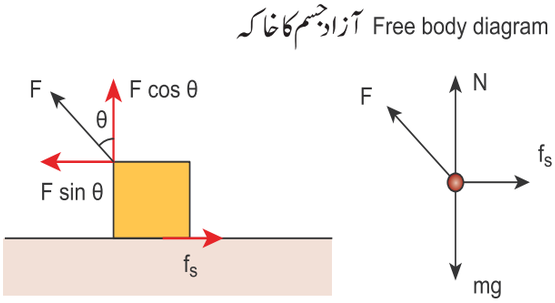
مساوات (3.30) یہ بتاتی ہے کہ ایک شئے کو حرکت میں لانے کے لئے اسے زیادہ قوت سے ڈھکیلنا پڑتا ہے۔



خاکہ 3.26 ایک شئے θ زاویہ پر ڈھکیلی جارہی ہے۔

جب ایک شئے θ زاویہ پر کھینچی جاتی ہے تو عمل پیرا ہونے والی قوت کو دو اجزاء پر مشتمل کیا جاتا ہے جیسا کہ خاکہ 3.27 میں بتایا گیا ہے۔ شئے پر عمل پیرا ہونے والی کل نچلی جانبی قوت یہ ہے۔

$$N_{pull} = mg - F\cos\theta \qquad (3.31)$$

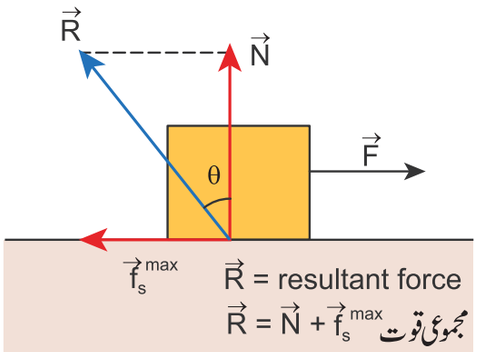


خاکہ 3.27۔ ایک شئے θ زاویہ پر کھینچی جارہی ہے

مساوات (3.31) یہ بتاتی ہے کہ عمودی قوت N_{push} سے کم ہے۔ مساوات (2.29) اور (3.31) سے یہ پتہ چلتا ہے کہ کسی شئے کو حرکت میں لانے کے لئے اس کو ڈھکیلنے سے بھی کھینچنا ہی بہت آسان عمل ہے۔

3.6.5 رگڑ کا زاویہ: (Angle of Friction)

رگڑ کے زاویے کی تعریف یوں کی جاتی ہے کہ یہ عمودی قوت (N) اور عمودی قوت اور انتہائی رگڑ کی قوت (f_s^{max}) کی مجموعی قوت (R) کا درمیانی زاویہ ہے۔



خاکہ 3.28 رگڑ کا زاویہ

خاکہ 3.28 میں مجموعی قوت یہ ہے۔

$$R = \sqrt{\left(f_s^{max}\right)^2 + N^2}$$

$$\tan\theta = \frac{f_s^{max}}{N} \qquad (3.32)$$

مگر رگڑ کی مساوات سے جب $f_s^{max} = \mu_s N$ ہو تو پھسلنے لگتی ہے۔

$$\frac{f_s^{max}}{N} = \mu_s \qquad (3.33)$$ یا جب

مساوات (3.32) اور (3.33) کی مدد سے ساکن رگڑ کا تعاونی عدد (شرح قدر) (سرعدد)

$$\mu_s = \tan\theta \qquad (3.34)$$

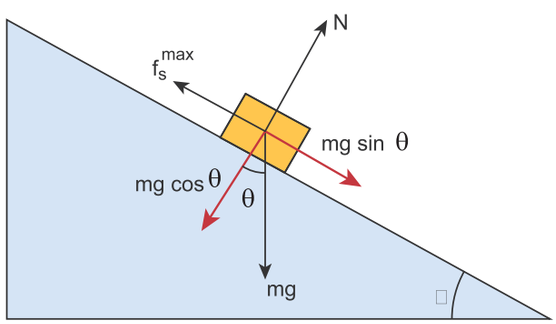
11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:19 PM

ساکن رگڑ کا تعاونی عدد (سر عدد) رگڑ کے زاویے کے tangent یعنی مماس کے برابر ہوتا ہے۔

GBV47

3.6.6 پھسلاؤ یا سکونی زاویہ (زاویہ استوار) (Angle of Repose)

ایک ڈھلوان (میلان) سطح کا تصور کیجئے، جس پر کوئی شئے رکھی گئی ہو، جیسا کہ خاکہ 3.29 میں بتایا گیا ہے۔ فرض کیجئے کہ یہ ڈھلوان سطح افق کے ساتھ کا زاویہ بناتی ہے۔ θ کی چھوٹی قیمتوں کے لئے شئے نہیں پھسلے گی، جب θ کی قیمت بڑھنے لگتی ہے تو کی ایک مخصوص قیمت پر شئے پھسلنا شروع کر دیتی ہے۔ θ کی یہ قیمت پھسلاؤ کا زاویہ یا angle of repose کہلاتی ہے۔ لہذا، پھسلاؤ کا زویہ، افق کے ساتھ ڈھلوان سطح کا وہ زاویہ ہے، جس پر ایک شئے پھسلنا شروع کرتی ہے۔



خاکہ 3.29۔ پھسلاؤ کا زاویہ

آیئے ہم یہاں عمل پیرا ہونے والا مختلف قوتوں پر غور کریں۔ جاذبی قوت mg کو ڈھلوانی سطح کے متوازی $(mg \sin \theta)$ اور عمودی $(mg \cos \theta)$ اجزاء پر مشتمل کر لیا جاتا ہے۔

قوت کا وہ جزء جو ڈھلوانی سطح کے متوازی ہے $(mg \sin \theta)$ شئے کو نچلی حرکت کروانے کی کوشش کرتا ہے۔

قوت کا وہ جزء جو ڈھلوان سطح کے عمودی ہے $(mg \cos \theta)$ عمودی قوت (N) کے ذریعہ توازنت پا لیتا ہے۔

$$N = mg \cos\theta$$

جب شئے حرکت کرنا شروع کرتی ہے، ساکن رگڑ اپنی انتہائی قیمت پر پہنچتی ہے۔

$$f_s = f_s^{max} = \mu_s N = \mu_s mg \cos\theta \qquad (3.35)$$

یہ رگڑ بھی اس تعاملات کو مطمئن کرتی ہے۔

$$f_s^{max} = mg \sin\theta \qquad (3.36)$$

مساوات (3.35) اور (3.36) کو تقسیم کرنے پر ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$\mu_s = \sin\theta / \cos\theta$$

رگڑ کے زاویے کی تعریف کی مدد سے ہم یہ بھی جانتے ہیں کہ

$$\tan\theta = \mu_s, \qquad (3.37)$$

جس میں θ رگڑ کا زاویہ ہے۔

لہذا پھسلاؤ کا زاویہ ایسا ہی ہے جیسا کہ رگڑ کا زاویہ ہوتا ہے۔ مگر ان کا درمیانی فرق یہ ہے کہ پھسلاؤ کے زاویہ سے مراد صرف ڈھلوان سطحیں ہوتی ہیں اور رگڑ کا زاویہ کسی بھی قسم کی سطح کے لئے استعمال کیا جا سکتا ہے۔

11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:19 PM

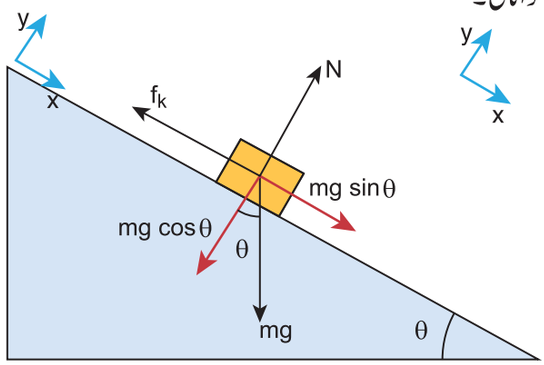
مثال 3.20

m کمیت والا ایک بلاک 60° زاویہ والی ایک ڈھلوان سطح پر ایک اسراع $\frac{g}{2}$ کے ساتھ پھسلتا ہے۔ فعلی رگڑ کا تعاونی عدد معلوم کیجئے۔

حل:

چونکہ یہاں بلاک حرکت کر رہا ہے یہاں فعلی رگڑ عمل پیرا ہوتی ہے۔

کمیت پر عمل پیرا ہونے والی قوتیں یہ ہیں۔ سطح کے عمود میں عمودی قوت، نچلی جانبی جاذبی قوت اور سطح f_k کے ساتھ فعلی توانائی۔



x سمت کے ساتھ

$$mg\sin\theta - f_k = ma$$

مگر $a = g/2$

$$mg\sin 60° - f_k = mg/2$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}mg - f_k = mg/2$$

$$f_k = mg\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$f_K = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)mg$$

چونکہ عمودی قوت $mg\cos\theta$ کے ذریعہ پوری طرح توازنت پالیتی ہے، یہاں y سمت میں کوئی حرکت نہیں ہوتی۔

$$mg\cos\theta = N = mg/2$$

$$f_K = \mu_K N = \mu_K\, mg/2$$

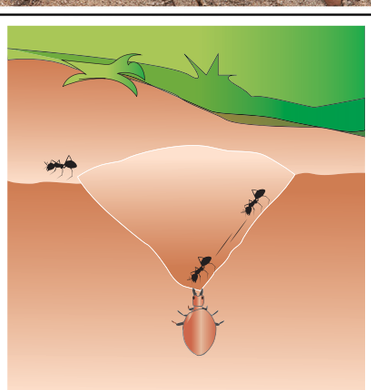
$$\mu_K = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)mg}{\frac{mg}{2}}$$

$$\mu_K = \sqrt{3} - 1$$

3.6.7 پھسلاؤ کے زاویے کے استعمالات: (Application of Angle of Repose)

1۔ پردار کیڑے، مٹی کے شنکھے (مخروطی شکلیں) اس طرح بناتے ہیں کہ جب کوئی مکوڑا شنکھے کے کنارے پر پہنچتا ہے تو، وہ اس کی تہہ تک پھسلنے لگتا ہے جہاں کیڑا خود چھپا ہوا ہوتا ہے۔ مٹی کے شنکھے کے ڈھلاؤ کا زاویہ، پھسلاؤ کے زاویے کے برابر بنادیا جاتا ہے۔ اسے خاکہ 3.30 میں بتایا گیا ہے۔





خاکہ 3.30 پردار کیڑوں کے مٹی کے شنکھے

2۔ بچے پھسلوان تختوں (Sliding board) پر بڑی خواہش سے کھیلتے ہیں۔ پھسلوان تختوں کے ڈھلاؤ کا زاویہ، اگر پھسلاؤ کے زاویے

11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:20 PM

سے زیادہ ہوتو پھسلنا بہت آسان ہوتا ہے۔ایسے ہی اگر ڈھلاؤ کا زاویہ پھسلاؤ کے زاویہ سے بہت زیادہ ہوتو پھسلنے والے بڑی تیزی کے ساتھ نیچے پہنچ کر زخمی ہو سکتے ہیں۔

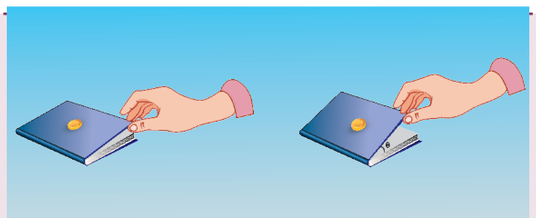


خاکہ 3.31۔ پھسلوان تختہ

کارروائی

رگڑ کے سرا عداد کی پیمائش
(Measuring the Coefficients of Friction)

سخت جلد والی ایک نوٹ بک اور ایک سکہ لیجئے۔ سکے کو نوٹ بک کے اوپر رکھئے، نوٹ بک کے Cover کو خاکہ کے مطابق ایک ڈھلاؤ کے طور پر رکھ دیجئے۔ دیگر صفحات کے لحاظ سے Cover کے ڈھلاؤ کے زاویے کو آہستہ آہستہ بڑھائیے۔ ڈھلاؤ کا زاویہ جب پھسلاؤ کے زاویے کو پہنچتا ہے تو کتاب کی جاذبی قوت کا متوازی جزء ($mg \sin\theta$) رگڑ کی قوت کے برابر ہو جاتا ہے اور وہ سکہ پھسلنے لگتا ہے۔ ڈھلاؤ کے زاویے کی پیمائش کیجئے اور اس کا tangent معلوم کر لیجئے۔ یہ Cover کی سطح اور سکہ کے درمیان موجود ساکن رگڑ کا تعاونی عدد فراہم کرتا ہے۔ اسی تجربے کو eraser جیسی دیگر اشیاء کے ساتھ دہرائیے



تا کہ آپ یہ جان سکیں کہ ساکن رگڑ کا تعاونی عدد معاملہ بہ معاملہ کے لئے مختلف ہوتا ہے۔

نوٹ

پھسلاؤ کے نقطہ پر $\tan\theta_s = \mu_s$

فعلی رگڑ کے تعاونی عدد کی پیمائش کے لئے، شئے کے پھسلنے کے دوران کتاب کے ڈھلاؤ کو اس طرح کم کیجئے کہ سکہ/eraser یکساں سمتی رفتار کے ساتھ حرکت کر سکے۔ اب زاویے کی پیمائش کیجئے، جس سے فعلی رگڑ کا تعاونی عدد یوں معلوم کیا جا سکتا ہے۔

$$\mu_K = \tan\theta_k$$

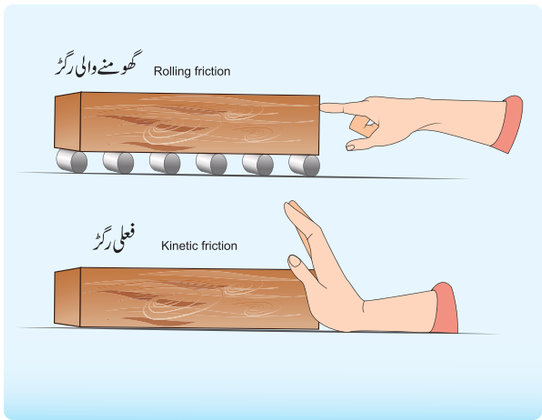
مشاہدہ کیجئے کہ $\theta_k < \theta_s$ ہے۔

3.6.8 گھومتی رگڑ (Rolling Friction)

پہیے کا انکشاف، انسانی تہذیب میں ایک نہایت اہم کردار ادا کرتا ہے۔ اس کا ایک اہم استعمال یہ بھی ہے کہ بڑے بڑے سوٹ کیس بھی پہیوں کے ذریعہ بڑی آسانی سے کھینچ کر لے جا سکتے ہیں۔ سامان کو پہیوں کی مدد سے کھینچ کر لے جانا اٹھا کر لے جانے سے بہت آسان ہوتا ہے، مگر پہیے گھومنے والی حرکت کے ذریعہ سطح پر حرکت کرتے ہیں۔ گھومنے والی حرکت میں جب ایک پہیہ سطح پر حرکت کرتا ہے۔ سطح سے مس ہونے والا نقطہ ہمیشہ حالت سکون پر رہتا ہے۔ چونکہ سطح سے مس ہونے والا نقطہ ہمیشہ حالت سکون پر رہتا ہے۔ پہیہ اور سطح کے درمیان کوئی متعلقہ حرکت نہیں ہوتی۔ لہذا رگڑ کی قوت بہت ہی کم ہو جاتی ہے۔ اس کے برعکس اگر کوئی شئے بغیر پہیوں کے حرکت کرتی ہے تو شئے اور سطح

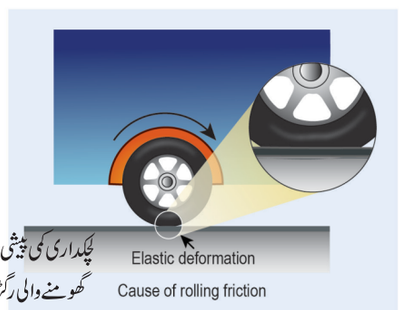
11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:21 PM

کے درمیان ایک متعلقہ حرکت ہوتی ہے۔اس کے نتیجہ میں رگڑ کی قوت بڑھ جاتی ہے۔اس کی وجہ سے شئے کو ہٹانا بہت مشکل ہوتا ہے۔خاکہ 3.32 گھومنے والی اور فعلی رگڑ کے درمیانی فرق کو ظاہر کرتا ہے۔



خاکہ 3.32۔ گھومنے والی اور فعلی رگڑ

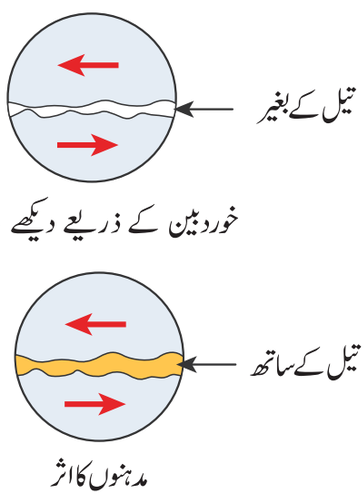
گھومنے کے خالص اور مثالی نمونے میں، سطح کے ساتھ مس ہونے والے نقطے کی حرکت، حالت سکون میں ہونا چاہئے مگر عملی طور پر ایسا نہیں ہوتا۔مس ہونے والے نقطہ پر سطح کی لچکداری کی فطرت کی وجہ سے سطح یا پہیہ کے اس نقطے پر کچھ کمی زیادتی ہوجاتی ہے جیسا کہ خاکہ 3.33 میں بتایا گیا ہے۔اس کمی زیادتی کی وجہ سے وہاں پہیے اور سطح کے درمیان کم مقدار کی رگڑ پائی جاتی ہے ۔ یہ رگڑ گھومنے والی رگڑ rolling friction کہلاتی ہے۔درحقیقت گھومنے والی رگڑ فعلی رگڑ سے بہت ہی کم ہوتی ہے۔



خاکہ 3.33۔ گھومنے والی رگڑ

3.6.9 رگڑ کو کم کرنے کے طریقے:
(Methods to reduce friction)

رگڑ کی قوت کے مثبت اور منفی دونوں اثرات پائے جاتے ہیں۔ چند معاملات میں یہ بہت ہی ضروری ہوتی ہے۔ ہمارا چلنا پھرنا رگڑ کی قوت ہی کی وجہ سے ممکن ہے۔گاڑیاں (سائیکل، کار) پہیے اور سڑک کے درمیان موجود رگڑ کی قوت ہی کی وجہ سے حرکت کرسکتی ہیں۔ بریک کے نظام میں فعلی رگڑ اہم کردار ادا کرتی ہے۔جیسا کہ ہم پہلے دیکھ چکے ہیں کہ جب بھی دو سطحوں کے درمیان متعلقہ حرکت ہوتی ہے وہاں رگڑ کی قوت پائی جاتی ہے۔ صنعت گاہوں میں استعمال ہونے والی بڑی گاڑیوں میں مشین کے مختلف حصوں کی درمیانی متعلقہ حرکت، بے ضرورت حرارت پیدا کرتی ہے۔ جو اس کی کارگردگی کو کم کردیتی ہے۔ اس فعلی رگڑ کو کم کرنے کے لئے چکنائیاں (مدہن) (lubricants) استعمال کی جاتی ہیں جیسا کہ خاکہ 3.34 میں بتایا گیا ہے۔

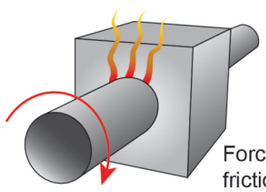


خاکہ 3.34۔ مدہن کی مدد سے فعلی رگڑ کو کم کرنا

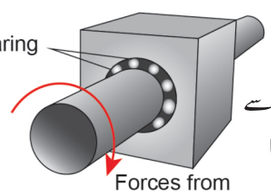
بال بیرنگ (Ball bearings) مشینوں میں فعلی رگڑ کو کم کرنے کا ایک اور مؤثر طریقہ کار ہے (خاکہ 3.35) اگر دو سطحوں کے درمیان باریک گولیاں (Ball bearings) ثبت کردی جاتی ہیں تو وہاں متعلقہ حرکت کے دوران فعلی رگڑ کے بجائے گھومنے والی رگڑ ہی عمل میں آتی ہے، جیسا کہ ہم نے پہلے بھی دیکھا، گھومنے والی رگڑ فعلی رگڑ سے بہت ہی کم ہوتی ہے۔

11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:21 PM

مشینیں کئی سالوں تک ٹوٹنے پھوٹنے سے محفوظ رہتی ہیں۔



فعلی رگڑ سے پیدا ہونے والی قوتیں نسبتاً بڑی ہوتی ہے۔
Forces from kinetic friction are relatively large



گھومنے والی یا گردشی رگڑ سے پیدا ہونے والی قوتیں نسبتاً بہت چھوٹی ہوتی ہیں۔
Forces from rolling friction are much smaller

خاکہ 3.35 باریک گیندوں کی مدد سے فعلی رگڑ کو کم کرنا۔

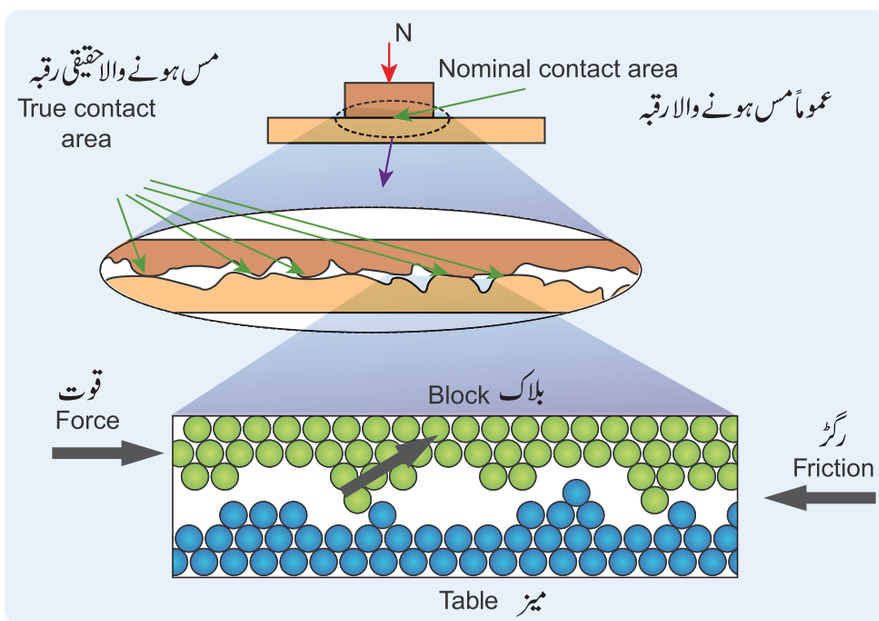
نیوٹن اور گیلی لیو کے زمانے میں رگڑ کی قوت کو بھی جاذبی قوت ہی کی طرح ایک قدرتی قوت سمجھا جاتا تھا۔ مگر بیسوی صدی میں جوہر، پروٹان اور الکٹران وغیرہ کی سمجھ بوجھ کے بعد یہ تصور بدل گیا۔

حقیقت میں رگڑ کی قوت دو سطحوں پر موجود جوہروں کے درمیان کی برق مقناطیسی قوت ہے۔ خوردبینی سطح پر مشاہدے کئے جانے پر پتہ چلتا ہے کہ بہت ہی نفیس اور چمکیلی سطحوں پر بھی نشیب و فراز پائے جاتے ہیں جیسا کہ خاکہ 3.36 میں بتایا گیا ہے۔

غور کرنے کے نکات

جب آپ پانی چھڑکے ہوئے ٹائلس پر چلتے ہیں تو پھسلنے لگتے ہیں۔ ایسا کیوں ہوتا ہے؟



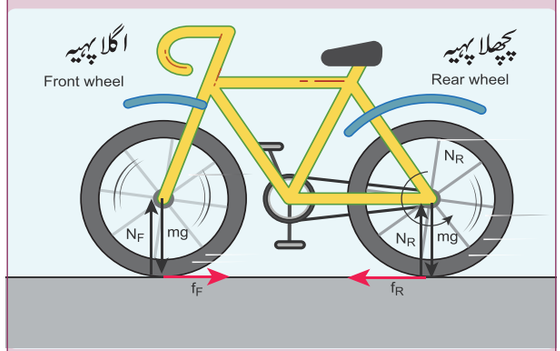


خاکہ 3.36 خوردبینی سطح پر سطحوں میں پائی جانے والی کمی پیشیاں

11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:22 PM

ایک سائیکل کی حرکت میں قوت رگڑ

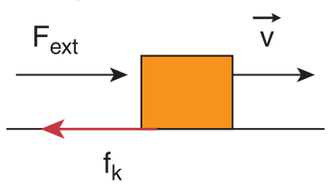
جب ایک سائیکل آگے کی جانب حرکت کرتی ہے تو اس کے اگلے پچھلے پہیوں میں رگڑ کی قوت سمت کیا ہوتی ہے؟



جب ہم ایک سائیکل چلاتے ہیں تو ہم (زمین) کی سطح کو پیچھے ڈھکیلنے کی کوشش کرتے ہیں اور پیچھے کے پہیے میں مس ہونے والے نقطے کی سمتی رفتار کی سمت پیچھے کی طرف ہوتی ہے۔ اس لئے رگڑ کی قوت پچھلے پہیے کو آگے کی طرف ڈھکیلتی ہے۔ مگر اگلا پہیہ چونکہ پچھلے پہیے کے ساتھ ایک سخت سانچے سے جڑا ہوتا ہے، پچھلے پہیے کی آگے کی حرکت اگلے پہیے کو آگے کی جانب ڈھکیلتی ہے۔ اس لئے اس کی قوت رگڑ پیچھے کی طرف عمل پیرا ہوتی ہے۔ یاد رکھئے دونوں رگڑ کی قوتیں ساکن رگڑ ہی سے تعلق رکھتی ہیں نہ کہ فعلی رگڑ سے۔ اگر پہیہ پھسلنے لگتا ہے (بریک وغیرہ کے دوران گھسنے لگتا ہے) تو فعلی رگڑ عمل میں آتی ہے۔ اس کے علاوہ گردشی (گھومنے والی) رگڑ بھی دونوں پہیوں پر پچھلی جانب عمل پیرا ہوتی ہے۔

مثال 3.21

ایک شئے کا تصور کیجئے جو ایک مستقل سمتی رفتار کے ساتھ ایک افقی سطح پر حرکت کر رہی ہو۔ شئے کی حرکت کو مستقل سمتی رفتار کے ساتھ برقرار رکھنے کے لئے شئے پر ایک بیرونی قوت بھیجی جاتی ہے۔ شئے پر عمل پیرا ہونے والی کل قوت کیا ہے؟



حل:

اگر کوئی شئے ایک مستقل سمتی رفتار کے ساتھ حرکت کرتی ہے تو اس میں کوئی اسراع نہیں پائی جاتی۔ نیوٹن کے دوسرے کلیے کے مطابق، شئے پر کوئی کل قوت عمل پیرا نہیں ہوتی، بیرونی قوت فعلی رگڑ کے ذریعہ توازنت پالیتی ہے۔

نوٹ

اس کا یہ مطلب نہیں کہ شئے پر کوئی بھی قوت عمل نہیں کرتی۔ حقیقت میں شئے پر دو قوتیں عمل کر رہی ہوتی ہیں۔ شئے پر عمل پیرا ہونے والی مجموعی قوت ہی صفر ہوتی ہے۔

3.7 دائری حرکت کی حرکیات: (Dynamics of Circular Motion)

پچھلے حصوں میں ہم نے دیکھا کہ نیوٹن کے کلیوں کی مدد سے خطی حرکت کی جانچ کس طرح کی جاتی ہے۔ چونکہ ہم اپنی روزمرہ کی زندگی میں دائری حرکت سے بھی دوچار ہوتے رہتے ہیں، یہ جاننا بھی ضروری ہوگا کہ نیوٹن کے کلیوں کو دائری حرکت پر کس طرح استعمال کرنا چاہئے۔، ایک شئے بیرونی قوت کے ساتھ یا بیرونی قوت کے بغیر بھی خطی حرکت میں رہ سکتی ہے۔ لیکن جب دائری حرکت ہوتی ہے تو وہاں شئے پر ضرور کوئی نہ کوئی قوت عمل کر رہی ہوتی ہے۔ دائری حرکت کے لئے نیوٹن کا پہلا کلیہ استعمال ہی نہیں ہوتا۔ بالفاظ دیگر قوت کے بغیر فطرت میں دائری حرکت کا پایا جانا ممکن ہی نہیں ہے۔ ایک قوت ایک شئے کی سمتی رفتار کو تین طریقوں سے تبدیل کر سکتی ہے۔

1۔ سمتی رفتار کی سمت کو تبدیل کئے بغیر سمتی رفتار کی قدر تبدیل کی جاسکتی ہے۔ اس معاملے میں شئے ایک ہی سمت میں حرکت کرے گی مگر اسراع کے ساتھ حرکت کرے گی۔

مثالیں:

عمودی طور پر گرنے والی ایک شئے، ایک سیدھی سڑک پر اسراع کے ساتھ حرکت کرنے والی ایک موٹر گاڑی۔

11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:23 PM

(2) حرکت کی قدر (رفتار) کو تبدیل کئے بغیر صرف سمت کو تبدیل کیا جاسکتا ہے۔اس طرح اگر لگاتار رہوتا رہے تو اسے ہم یکساں دائری حرکت کہتے ہیں۔

(3) حرکت کی قدر (رفتار سمتی رفتار) اور سمت دونوں تبدیل کی جاسکتی ہیں۔اس طرح اگر مسلسل ہوتا ہے تو ایسی حرکت غیر یکساں دائری حرکت کہلاتی ہے۔مثال کے طور پر ایک جھولے کی حرکت یا سادہ رقاص، سورج کے اطراف سیاروں کی بیضوی حرکت وغیرہ۔

اس حصے میں ہم یکساں دائری حرکت اور غیر یکساں دائری حرکت پر بحث کریں گے

3.7.1 مرکز مائل (مرکز جو) قوت:

(Centripetal Force)

اگر ایک شئے یکساں دائری حرکت میں ہے تو اس دائرے کے مرکز کی طرف ضرور ایک مرکز مائل اسراع پائی جائے گی۔اگر وہاں اسراع پائی جاتی ہے تو ایک جمودی سانچے کے لحاظ سے ضرور اس پر کوئی قوت عمل کر رہی ہوتی ہے۔یہ قوت مرکز مائل قوت یا Centripetal Force کہلاتی ہے۔

جب کہ ہم نے اکائی 2 میں دیکھا، دائری حرکت میں ایک شئے کی مرکز مائل اسراع $a = \frac{v^2}{r}$ کے ذریعہ دی جاتی ہے اور وہ دائرے کے مرکز کی طرف عمل پیرا ہوتی ہے۔نیوٹن کے دوسرے کلیے کے تحت، مرکز مائل قوت یوں پیش کی جاتی ہے۔

$$F_{cp} = m a_{cp} = \frac{mv^2}{r}$$

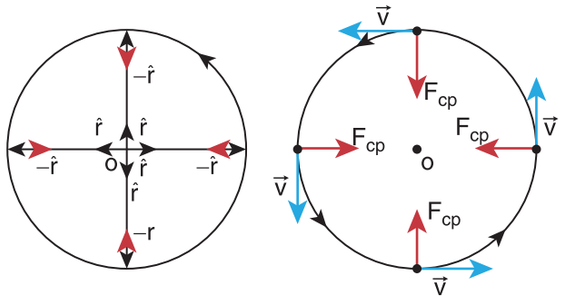
لفظ مرکز مائل قوت کا مطلب، مرکز کو طلب کرنے والی قوت (Centre seeking force) یا مرکز جو قوت ہے۔

سمتیہ اظہار میں $\vec{F}_{cp} = -\frac{mv^2}{r}\hat{r}$

یکساں دائری حرکت کے لئے

$$\vec{F}_{cp} = -m\omega^2 r\,\hat{r}$$

سمت $-\hat{r}$ دائرے کے مرکز کی طرف رخ کرتی ہے جو کہ مرکز مائل قوت کی سمت ہوتی ہے جیسا کہ خاکہ 3.38 میں بتایا گیا ہے۔



خاکہ 3.38 مرکز مائل قوت

یہ غور کرنا ضروری ہے کہ مرکز مائل قوت جاذبی قوت یا کمانی کی قوت کی طرح دیگر قوت نہیں ہے، بلکہ یوں کہا جاسکتا ہے کہ وہ مرکز کی طرف عمل پیرا ہونے والی ایک قوت ہے۔مرکز مائل قوت کا مبدا، جاذبی قوت، ڈوری کا تناؤ، رگڑ کی قوت یا کولوم کی قوت وغیرہ کچھ بھی ہوسکتا ہے۔ان میں سے کوئی بھی قوت مرکز مائل قوت کی طرح عمل پیرا ہوسکتی ہے۔

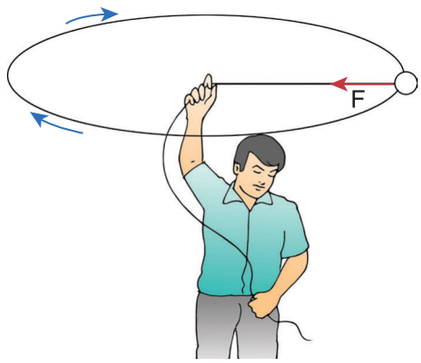
(1) ایک ڈوری سے بندھے ہوئے پتھر کی دائری حرکت کے معاملے میں، ڈوری پر بننے والے تناؤ کی قوت کے ذریعہ شئے پر مرکز مائل قوت مہیا کی جاتی ہے۔تفریحی پارک میں ہونے والی دائری حرکت میں، لوہے کی رسیوں پر بننے والے تناؤ کے ذریعہ مرکز مائل قوت پیدا ہوتی ہے۔

(2) زمین کے اطراف سیارچوں کی حرکت میں سیارچوں پر زمین کی جاذبی قوت کے ذریعہ مرکز مائل قوت فراہم کی جاتی ہے۔سیارچوں کی حرکت کے لئے نیوٹن کا دوسرا کلیہ یہ ہے۔

$$F = \text{زمین کی جاذبی قوت} = \frac{mv^2}{r}$$

جہاں r زمین کے مرکز سے سیارچے تک کا فاصلہ ہے

11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:24 PM

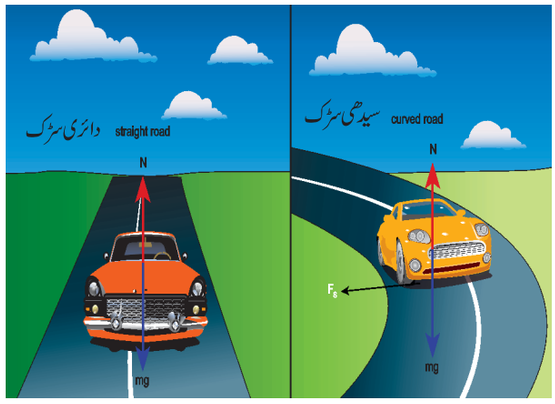




خاکہ 3.39 اشیاء کی دائری (گھومنے والی) حرکت

m سیارچے کی کمیت ہے، اور
V سیارچے کی رفتار ہے۔

(3) جب ایک کار ایک دائری راستے پر سفر کر رہی ہوتی ہے تو سڑک اور ٹائروں کے درمیان کی قوت رگڑ، مرکز مائل قوت فراہم کرتی ہے۔



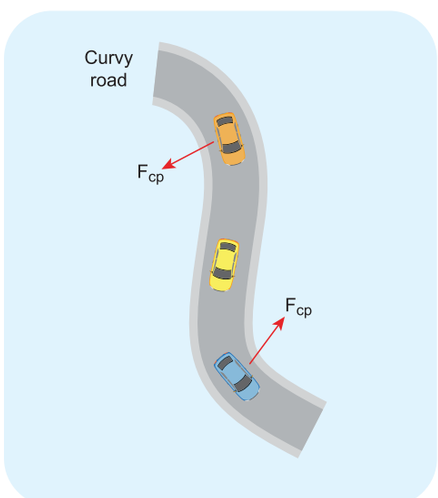
خاکہ 3.40 دائری سڑک پر ایک کار

اس معاملہ کے لئے نیوٹن کا دوسرا کلیہ کچھ اس طرح ہوگا

$$\text{رگڑ کی قوت} = \frac{mv^2}{r}$$

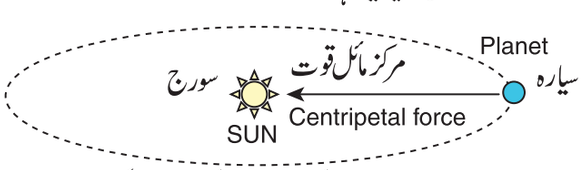
جس میں m = کار کی کمیت
v۔ کار کی رفتار اور
r سڑک کے انحناء کا نصف قطر ہے۔

ایک کار ایک منحنی نما راستے پر بھی اگر سفر کرتی ہے تو وہ مرکز مائل قوت سے دوچار ہوتی ہے جو سطح اور کار کے ٹائر کی درمیانی قوت رگڑ سے فراہم کی جاتی ہے۔ اسے خاکہ 3.41 میں بتایا گیا ہے۔



خاکہ 3.41 سڑک اور ٹائر کی درمیانی قوت رگڑ کی وجہ سے مرکز مائل قوت

(4) جب سیارے سورج کے اطراف چکر لگاتے ہیں تو وہ سورج کے مرکز کی طرف ایک مرکز مائل قوت محسوس کرتے ہیں یہاں سورج کی قوت جاذبہ سیاروں پر مرکز مائل قوت کی طرح عمل پیرا ہوتی ہے جیسا کہ خاکہ 3.42 میں بتایا گیا ہے۔



خاکہ 3.42 سورج کی جاذبہ قوت کی وجہ سے چکر لگانے والے سیاروں پر مرکز مائل قوت

11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:24 PM

اس حرکت کے لئے نیوٹن کا دوسرا کلیہ یہ ہے۔

$$\text{سیارے پر سورج کی جاذبی قوت} = \frac{mv^2}{r}$$

مثال 3.22

اگر ایک ڈوری سے بندھا ہوا، 25 گرام کمیت والا ایک پتھر کی رفتار کے ساتھ 3 میٹر نصف قطر والی ایک دائری حرکت کرتا ہے تو پتھر پر عمل کرنے والے تناؤ کی قوت کی قدر معلوم کیجئے۔

حل:

$$F_{cp} = \frac{mv^2}{r}$$

$$F_{cp} = \frac{\frac{1}{4}\times(2)^2}{3} = 0.333 \text{ N.}$$

مثال 3.23

چاند زمین کے اطراف تقریباً ایک دائری راستہ میں 27.3 دنوں میں ایک مرتبہ چکر لگاتا ہے۔ چاند سے محسوس کی جانے والی مرکز مائل قوت کا محاسبہ کیجئے۔ (زمین کا نصف قطر 6.4×10^6 m ہے)

حل:

مرکز مائل اسراع اس طرح دی گئی ہے۔ $a = \frac{v^2}{r}$

یہ مساوات واضح طور پر چاند کی رفتار پر منحصر ہے جو کہ غیر متبادل (Non trivial) ہے۔ ہم اس ضابطے کے تحت کام کر سکتے ہیں

$$\omega^2 R_m = a_m$$

جس میں a_m زمین کی جاذبی قوت کی وجہ سے چاند کی مرکز مائل اسراع ہے۔

ω زاویائی سمتی رفتار ہے اور

R_m زمین اور چاند کا درمیانی فاصلہ ہے، جو زمین کے نصف قطر کا 60 گنا ہے۔

$$R_m = 60R = 60\times6.4\times10^6 = 384\times10^6\ m$$

جیسا کہ ہم جانتے ہیں کہ زاویائی سمتی رفتار $\omega = \frac{2\pi}{T}$

اور $T = 27.3 \text{ days} = 27.3 \times 24 \times 60 \times 60 \text{ second} = 2.358 \times 10^6 \text{ sec}$

ان قیمتوں کو اسراع معلوم کرنے کے لئے ضابطہ میں حل کرنے سے

$$a_m = \frac{\left(4\pi^2\right)\left(384\times10^6\right)}{\left(2.358\times10^6\right)^2} = 0.00272 \text{ m s}^{-2}$$

زمین کی طرف چاند کی مرکز مائل اسراع 0.00272 m s^{-2} ہے۔

نوٹ

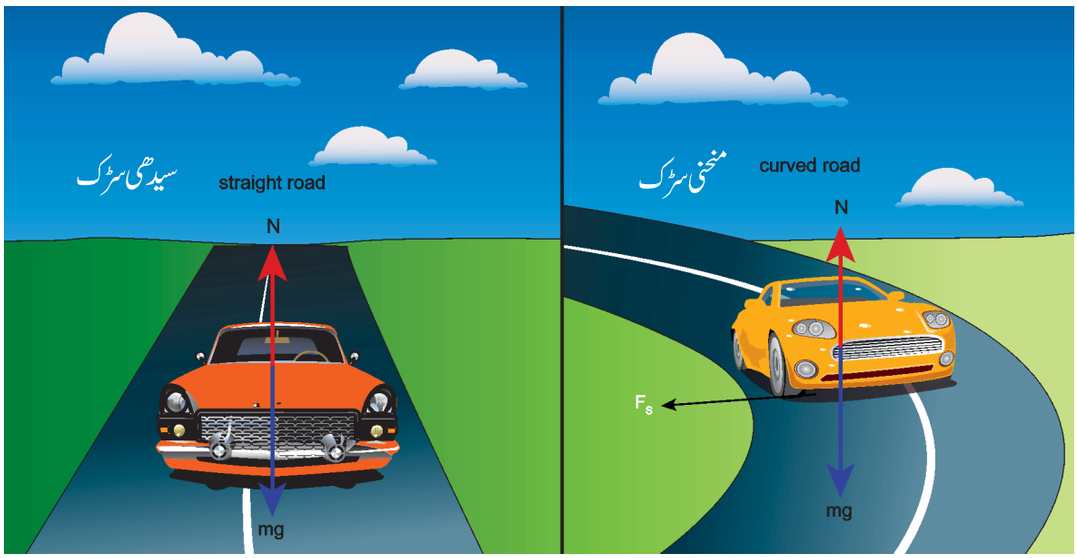
یہ نتیجہ خود نیوٹن کے ذریعہ معلوم کیا گیا تھا۔
اکائی 6 میں ہم اس قیمت کا استعمال کریں گے۔

3.7.2 ہموار دائری سڑک پر گاڑی
(Vehicle on a leveled circular road)

جب ایک گاڑی ایک دائری راستے میں سفر کرتی ہے، تو ضرور اس پر ایک مرکز مائل قوت عمل کر رہی ہوتی ہے۔ یہ مرکز مائل قوت، سڑک اور ٹائر کے درمیان موجود قوت رگڑ سے فراہم کی جاتی ہے۔ فرض کیجئے کہ m کمیت والی ایک گاڑی 'v' رفتار کے ساتھ 'r' نصف قطر کے ایک دائری راستے پر سفر کر رہی ہے۔ جب وہ گاڑی حرکت کرتی ہے تو تین قوتیں اس پر عمل پیرا ہوتی ہیں، جیسا کہ خاکہ 3.43 میں بتایا گیا ہے۔

1) نچلی جانبی جاذبی قوت (mg)
2) اوپری جانبی عمودی قوت (N)
3) سڑک کے ساتھ افقی طور پر اندرونی جانب عمل پیرا ہونے والی قوت رگڑ (F_s)

11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:25 PM



خاکہ 3.43۔ ہموار دائری سڑک پر چلتی ہوئی گاڑی پر عمل پیرا ہونے والی قوتیں

فرض کیجئے کہ سڑک افقی ہے تو پھر جاذبی قوت اور عمودی قوت بالکل مساوی اور مخالف ہوتی ہیں ۔ مرکز مائل قوت، ٹائر اور سطح کی درمیانی قوت F_s ساکن رگڑ کے ذریعہ مہیا کی جاتی ہے جو دائری راستے کے مرکز کی جانب عمل پیرا ہوتی ہے۔

$$\frac{mv^2}{r} = F_s$$

جیسا کہ ہم پچھلے حصے میں پڑھ چکے، ساکن رگڑ صفر سے ایک انتہائی قیمت تک پہنچتی ہے۔

$$F_s \leq \mu_s mg.$$

یہاں دو شرائط ممکن ہیں۔

a) اگر $\frac{mv^2}{r} \leq \mu_s mg$ یا $\mu_s \geq \frac{v^2}{rg}$ یا $v \leq \sqrt{\mu_s rg}$

(حفاظتی موڑ)

ساکن رگڑ مطلوبہ مرکز مائل قوت فراہم کرنے کے قابل ہوسکتا ہے تاکہ سڑک پر کار کو موڑ سکے۔ اس لئے ٹائر اور سڑک کی سطح کے درمیان موجود ساکن رگڑ کا تعاونی عدد یہ تعین کرتا ہے کہ کار کو محفوظ طریقے سے موڑنے کے لئے اس کی کتنی انتہائی رفتار رہ سکتی ہے۔

b) اگر $\frac{mv^2}{r} > \mu_s mg$ یا $\mu_s < \frac{v^2}{rg}$ (لڑھکنا)

اگر ساکن رگڑ، گاڑی کو موڑنے کے لئے مطلوبہ مرکز مائل قوت فراہم نہ کرے تو گاڑی لڑھکنا شروع ہوجائے گی۔

مثال 3.24

10 میٹر نصف قطر والی ایک دائری سڑک کا تصور کیجئے، جس کے ساکن رگڑ کا تعاونی عدد (سرعدد) 0.81 ہے۔ تین کار سے (A، B اور C) بالترتیب $7\ ms^{-1}$، $8\ ms^{-1}$ اور $10\ ms^{-1}$ کی رفتار کے ساتھ اس میں سفر کر رہی ہیں۔ سڑک کا دائری سطح پر حرکت کرتے وقت ان میں سے کون سی کار لڑھک جائے گی؟

$(g = 10\ ms^{-1})$

حل:

محفوظ موڑ کی شرط کی مدد سے گاڑی کی رفتار (v) سے کم یا مساوی ہونا چاہئے۔ $\sqrt{\mu_s rg}$

11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:25 PM

$$v \le \sqrt{\mu_s rg}$$

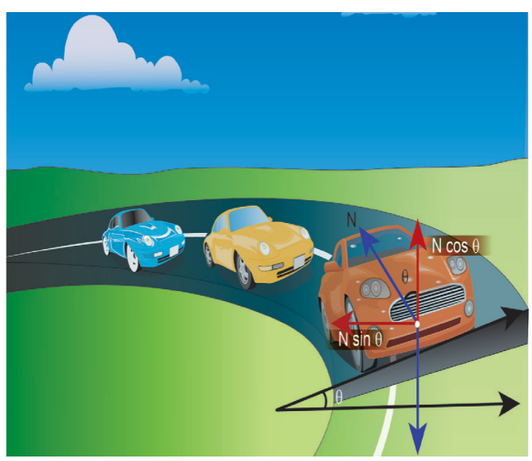
$$\sqrt{\mu_s rg} = \sqrt{0.81 \times 10 \times 10} = 9\, m s^{-1}$$

کار C کے لئے $\sqrt{\mu_s rg}$ کی قیمت v سے چھوٹی ہے۔

کار A، B اور C کی رفتاریں بالترتیب $7\ ms^{-1}$، $8\ ms^{-1}$ اور $10\ ms^{-1}$ ہیں۔ کار A اور B محفوظ موڑ لیں گے۔ مگر رفتار والی کار C، موڑ لیتے وقت محفوظ موڑ کی رفتار پار کر دیتی ہے۔ لہذا وہ کار لڑھک جائے گی

3.7.3 سڑکوں کا چڑھاؤ (ترچھاؤ) (Banking of Tracks)

ایک ہموار دائری سڑک میں گاڑیوں کا لڑھکنا ساکن رگڑ کے تعاونی عدد (μ_s) پر منحصر ہوتا ہے۔ ساکن رگڑ کا تعاونی عدد سطح کی فطرت پر منحصر ہوتا ہے، جس کی ایک انتہائی حد کی قیمت ہوتی ہے۔ اس مسئلے سے بچنے کے لئے عموماً سڑک کے بیرونی کنارے کو اندرونی کنارے کے مقابلے میں تھوڑا سا اونچا (ترچھا) کر دیا جاتا ہے، جیسا کہ خاکہ 3.44 میں بتایا گیا ہے۔ اسے banking of roads یا سڑکوں کا چڑھاؤ یا ترچھاؤ کہا جاتا ہے۔ اس سے ایک ڈھلاؤ کا تعارف ہوتا ہے اور وہ زاویہ چڑھاؤ کا زاویہ (banking angle) کہلاتا ہے۔



خاکہ 3.44 لڑھکنے سے بچانے کے لئے سڑک کے بیرونی کنارے کو تھوڑا سا اونچا کر دیا جاتا ہے۔

فرض کیجئے کہ سڑک کی سطح افقی سطح کے ساتھ θ کا زاویہ بناتی ہے تو پھر عمودی قوت عمود کے ساتھ اسی مقدار کا ایک زاویہ θ بناتی ہے۔

جب ایک کار موڑ لیتی ہے تو اس پر دو قوتیں عمل پیرا ہوتی ہیں۔

(a) (نچلی جانبی) جاذبی قوت، mg

(b) (سطح کے عمودی طور پر) عمودی قوت N

ہم عمودی قوت کو دو اجزاء پر مشتمل کر سکتے ہیں۔

$N \sin\theta$ اور $N \cos\theta$ جیسا کہ خاکہ 3.46 میں بتایا گیا ہے۔

$N \cos\theta$ جزء نچلی جانبی جاذبی قوت mg کو متوازی کر دیتا ہے اور $N \cos\theta$ مطلوبہ مرکز مائل اسراع فراہم کرتا ہے۔

نیوٹن کے دوسرے کلیے کی مدد سے

$$N\cos\theta = mg$$

$$N\sin\theta = \frac{mv^2}{r}$$

ان مساوات کو تقسیم کرنے پر ہم حاصل کر سکتے ہیں۔ $\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$

$$v = \sqrt{rg\tan\theta}$$

چڑھاؤ (banking) کا زاویہ θ اور سڑک یا روڈ کے انحنا کا نصف قطر، موڑ پر کار کی محفوظ رفتار کا تعین کرتے ہیں۔ اگر کار کی رفتار اس محفوظ رفتار کو پار کر دیتی ہے تو وہ باہر کی طرف جھکنا شروع کر دیتی ہے، مگر قوت رگڑ اثر انداز ہوتی ہے اور ایک اضافی مرکز مائل قوت فراہم کرتی ہے تا کہ بیرونی جانب جھکنے سے بچ سکے۔ اسی طرح اگر کار کی رفتار محفوظ رفتار سے تھوڑی کم ہو تو وہ اندرونی جانب جھکنے لگتی ہے اور رگڑ کی قوت عمل میں آتی ہے جو مرکز مائل قوت کو کم کرتی ہے تا کہ اندرونی جھکاؤ سے بچ سکے۔ بہرحال اگر گاڑی کی رفتار محفوظ رفتار سے کافی زیادہ ہو تو رگڑ کی قوت گاڑی کو جھکنے اور پھسلنے سے بچا نہیں سکتی۔

11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:26 PM

مثال 3.25

20 میٹر نصف قطر والی ایک دائری سڑک کا تصور کیجئے جو 15 درجے کے زاویے سے ایک طرف چڑھائی گئی ہے۔اس سڑک پر محفوظ طریقے سے موڑ لینے کے لئے کار کی رفتار کتنی ہونی چاہئے؟

حل:

$$v = \sqrt{(rg\tan)\theta} = \sqrt{20 \times 9.8 \times \tan 15^\circ}$$

$$= \sqrt{20 \times 9.8 \times 0.26} = 7.1 \text{ m s}^{-1}$$

اس سڑک پر کار کے لئے محفوظ رفتار 7.1 ms^{-1} ہے۔

3.7.4

مرکز گریز قوت: (Centrifugal Force)

دائری حرکت کا جائزہ دو مختلف حوالاتی سانچوں سے لیا جاتا ہے۔ پہلا عمودی سانچہ ہے (جو یا تو حالت سکون میں ہے یا حالت حرکت میں) جہاں نیوٹن کے کلیوں کی اتباع ہوتی ہے۔دوسرا گردش کرنے والا حوالاتی سانچہ جو ایک غیر جمودی حوالاتی سانچہ ہے۔ کیونکہ وہ پر اسراع ہوتا ہے۔ جب ہم ان حوالاتی سانچوں سے دائری حرکت کا جائزہ لیتے ہیں تو حالات بالکل ہی مختلف ہوتے ہیں ۔ گردشی حوالاتی سانچہ میں نیوٹن کے پہلے اور دوسرے کلیے کا استعمال کرنے کے لئے ہمیں مرکز گریز قوت کہلانے والی ایک کاذب قوت (Pseudo force) کو شامل کرنا پڑتا ہے۔ یہ مرکز گریز قوت گردشی سانچوں کے لحاظ سے شئے پر عمل کرتی ہوئی نظر آتی ہے۔مرکز گریز قوت کے تصور کو سمجھنے کے لئے آیئے ہم ایک مخصوص معاملہ کو لیں اور بحث کریں جیسا کہ نیچے پیش ہے۔

ایک ڈوری سے بندھے ہوئے پتھر کی گردشی حرکت کا تصور کیجئے۔ فرض کیجئے کہ جمودی سانچے (حالت سکون پر) کے اندر پتھر میں ω زاویائی سمتی رفتار پائی جاتی ہے ۔اگر اس پتھر کی حرکت کا مشاہدہ ایک ایسے سانچے سے کیا جائے جو اسی زاویائی رفتار ω کے ساتھ حرکت کرتا ہے تو پھر وہ پتھر ساکن نظر آئے گا۔

اس سے پتہ چلتا ہے کہ اندرونی مرکز مائل قوت $-m\omega^2 r$ کے علاوہ اس کی مساوی اور مخالف مقدار $+m\omega^2 r$ کی ایک قوت بیرونی طور پر پتھر پر عمل پیرا ہوتی ہے۔ اس لئے ایک گردشی سانچہ میں پتھر پر عمل پیرا ہونے والی مجموعی قوت صفر ہوتی ہے۔$(-m\omega^2 r + m\omega^2 r = 0)$

یہ باہری جانبی قوت $m\omega^2 r$ + مرکز گریز (Centrifugal) قوت کہلاتی ہے۔ مرکز گریز سے مراد مرکز سے دور بھاگنا ہے۔نوٹ کیجئے کہ مرکز گریز قوت ایک شئے پر صرف اسی وقت عمل پیرا ہوتی ہوئی نظر آتی ہے۔ جب ہم اس کی حرکت کو ایک گردشی سانچے سے جانچتے ہیں۔ایک جمودی سانچے کے لحاظ سے اس میں صرف مرکز مائل قوت ہوتی ہے جو پتھر سے بنی ہوئی ڈوری کے تناؤ سے دی جاتی ہے۔اس وجہ سے مرکز گریز قوت کو ایک کاذب قوت (Pseudo Force) کہتے ہیں۔ کاذب قوت کا کوئی مبدا نہیں ہوتا۔ یہ تصور کئے جانے والے سانچے کی غیر جمودی فطرت کی وجہ سے ابھرتی ہے۔ جب ایک گردشی حوالاتی سانچہ کے لحاظ سے دائری حرکت کے حسابات حل کئے جاتے ہیں تو شئے کا آزاد جسمانی خاکہ کھینچتے وقت، مرکز گریز قوت کو ضرور شامل کرنا ہی پڑتا ہے جیسا کہ خاکہ 3.45 میں بتایا گیا ہے۔

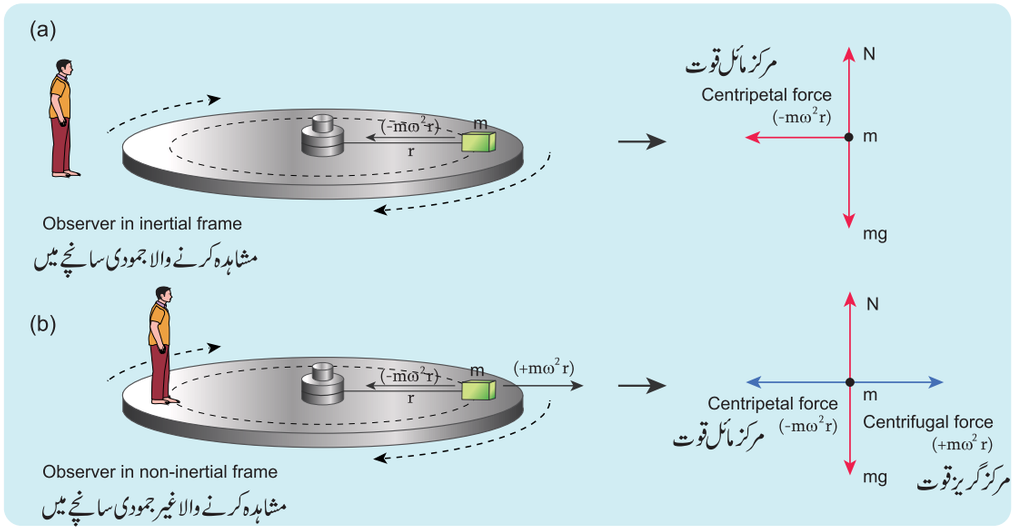
3.7.5

مرکز گریز قوت کے اثرات:

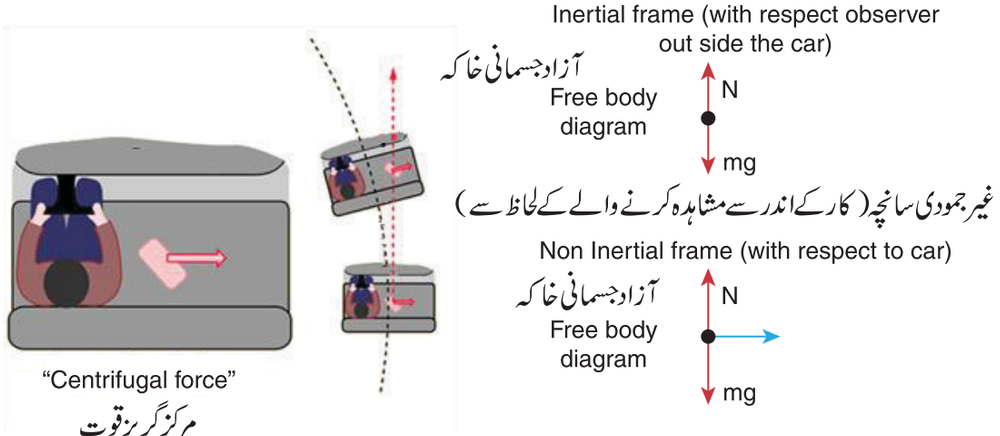
(Effects of Centrifugal Force)

حالانکہ مرکز گریز قوت ایک کاذب قوت ہے مگر اس کے اثرات حقیقی ہیں۔ جب ایک کار ایک منحنی نما راستے میں موڑ لیتی ہے۔کار میں بیٹھا ہوا شخص بیرونی جانب ایک قوت محسوس کرتا ہے جو اس شخص کو باہر کی طرف ڈھکیلتی ہے۔ یہ باہری جانبی قوت مرکز گریز قوت کہلاتی ہے۔ اگر اس شخص کے اور کرسی کے درمیان کافی مقدار کی رگڑ ہو تو وہ اسے باہر حرکت کرنے سے بچا سکتی ہے۔ جب ایک سیدھی راہ میں چلنے والی ایک کار اچانک موڑ لیتی ہے۔کار سے غیر ثبت شدہ اشیاء ان کی جمود سمت کی وجہ سے اپنی خطی حرکت میں برقرار رہنے کی کوشش کرتی ہیں۔ جب اس کا مشاہدہ ایک جمودی سانچے سے کیا جاتا ہے تو یہ ایک سیدھے خط کی طرح معلوم ہوتی ہے جیسا کہ خاکہ 3.46 میں بتایا گیا ہے مگر جب اسے گردشی سانچے سے دیکھا جاتا ہے تو وہ باہر کی طرف حرکت کرتے ہوئے محسوس ہوتی ہے۔

11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:26 PM



خاکہ 3.45۔ مرکز گریز قوت کو شامل کرتے ہوئے شئے کا آزاد جسمانی خاکہ



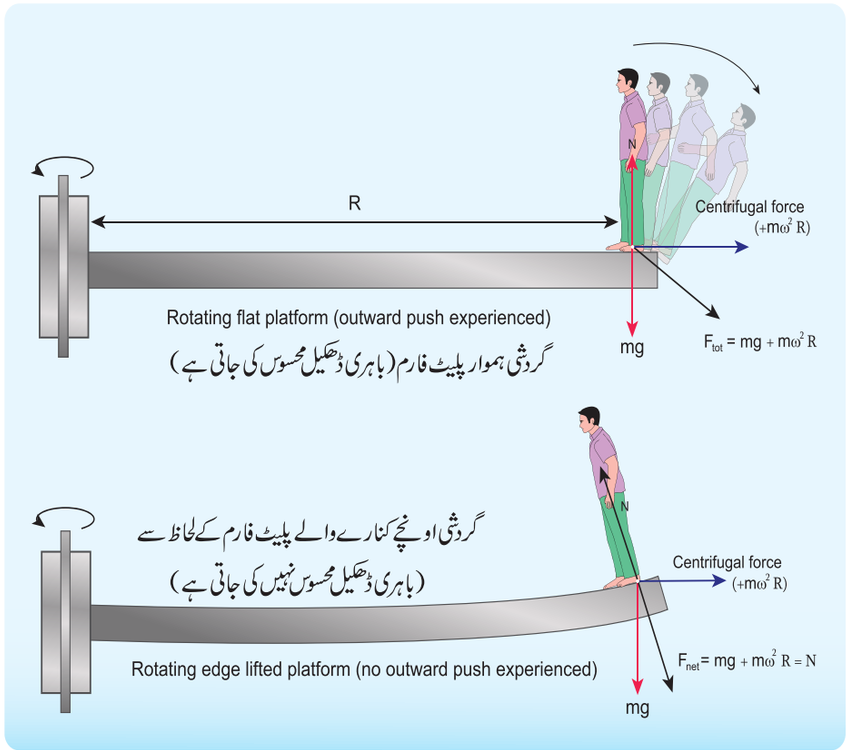
خاکہ 3.46۔ مرکز گریز قوت کے اثرات

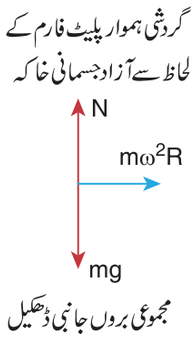
ایک گردشی پلیٹ فارم پر کھڑا ہوا ایک شخص ایک بروں جانبی مرکز گریز قوت محسوس کرتا ہے اور ایسا لگتا ہے کہ وہ پلیٹ فارم سے باہر کی طرف ڈھکیلا جا رہا ہو۔ اکثر مرتبہ پلیٹ فارم اور شخص کی درمیانی رگڑ ناکافی ہوتی ہے کہ بروں جانبی ڈھکیل سے بچا جا سکے۔ اس مسئلے کو حل کرنے کے لئے پلیٹ فارم کے بیرونی کنارے عام طور پر تھوڑے سے اوپر چڑھا دئے جاتے ہیں جس سے اس شخص پر ایک عمودی قوت برآمد ہوتی ہے جو اس شخص کو گرنے سے محفوظ رکھتی ہے جیسا کہ خاکہ 3.47 میں بتایا گیا ہے۔

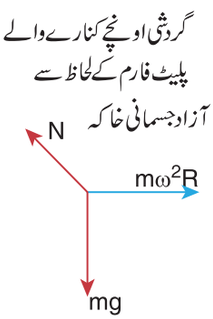
ہوشیار!

بس میں سفر کرتے وقت کھلے دروازے یا سیڑھیوں کے قریب کھڑا ہونا بہت ہی خطرناک ہے۔ جب بس کسی منحنی راستے میں اچانک موڑ لیتی ہے تو مرکز گریز قوت کی وجہ سے وہ شخص باہر کی طرف ڈھکیلا جاتا ہے۔ حالانکہ مرکز گریز قوت ایک کاذب قوت ہی ہے۔ مگر اس کے اثرات حقیقی ہوتے ہیں۔

11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:27 PM







خاکہ 3.47۔ گردشی پلیٹ فارم میں بروں جانبی مرکز گریز قوت

3.7.6 زمین کی گردش کی وجہ سے مرکز گریز قوت (Centrifugal Force due to rotation of the Earth)

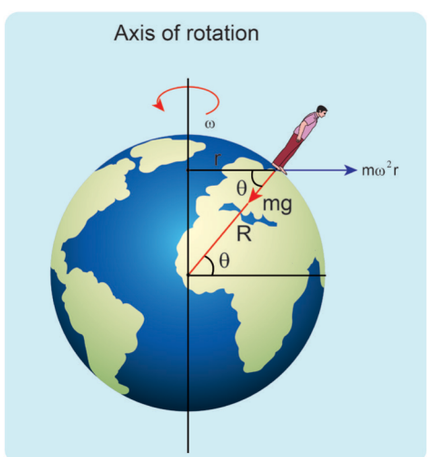
حالانکہ زمین ایک جمودی سانچے کی طرح برتی جاتی ہے۔ حقیقت میں اس طرح نہیں ہوتی۔ زمین اپنی محور کے ساتھ ω کی زاویائی سمتی رفتار کے ساتھ گردش کر رہی ہے۔ زمین کی سطح پر موجود (گردشی سانچہ) کوئی بھی شئے ایک مرکز گریز قوت سے دوچار ہوتی ہے۔ یہ مرکز گریز قوت گردشی محور سے بالکل مخالف سمت میں عمل کرتے ہوئے معلوم ہوتی ہے۔ اسے خاکہ 3.48 میں بتایا گیا ہے۔

زمین کی سطح پر کھڑے ہوئے ایک شخص پر کی مرکز گریز قوت یہ ہے

$$F_{cf} = m\omega^2 r$$

جہاں r گردشی محور سے اس شخص تک کا عمودی فاصلہ ہے، جیسا کہ خاکہ 3.48 میں بتایا گیا ہے، مثلث زاویہ قائمہ کی مدد سے فاصلہ $r = R \cos \theta$ ہے۔

یہاں R = زمین کا نصف قطر ہے اور
θ زمین کا ارض البلد (Latitude) ہے جہاں وہ شخص کھڑا ہے۔



خاکہ 3.48۔ زمین کی سطح پر کھڑے ہوئے شخص پر عمل پیرا ہونے والی مرکز گریز قوت

11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:27 PM

مثال 3.26

مدراس میں کھڑے ہوئے 60 kg کمیت والے ایک شخص سے محسوس کی جانے والی مرکز گریز قوت کا محاسبہ کیجئے۔ (دیا گیا ہے کہ چنئی کا ارض البلد $13°$ ہے۔)

حل:

مرکز گریز قوت اس طرح دی جاتی ہے۔

$$F_c = m\omega^2 R\cos\theta$$

ω = زمین کی زاویائی سمتی رفتار $= \frac{2\pi}{T}$ یہ ہے۔

جہاں T زمین کا وقفہ دوران (24 گھنٹے) ہے۔

$$\omega = \frac{2\pi}{24\times60\times60} = \frac{2\pi}{86400}$$
$$= 7.268\times10^{-5}\, radsec^{-1}$$

زمین کا نصف قطر $R = 6400\ \text{Km} = 6400\times10^3\ \text{m}$

چنئی کا ارض البلد $= 13°$

$$F_{cf} = 60\times\left(7.268\times10^{-5}\right)^2\times6400\times10^3 \times\cos(13°) = 1.9678\,N$$

60 کلوگرام کمیت والا شخص تقریباً 2 نیوٹن کی مرکز گریز قوت سے دوچار ہوتا ہے، مگر زمین کی قوت جاذبہ کی وجہ سے 60kg والا ایک شخص mg = 60×9.8=588 N مقدار کی ایک قوت محسوس کرتا ہے۔ یہ قوت مرکز گریز قوت سے بہت ہی زیادہ ہے۔

3.7.7 مرکز مائل قوت بالمقابل مرکز گریز قوت: (Centripetal Force Versus Centrifugal Force)

جدول 3.4 میں مرکز مائل قوت اور مرکز گریز قوت کی اہم خصوصیات کا موازنہ کیا گیا ہے۔

جدول 3.4۔ مرکز مائل قوت اور مرکز گریز قوت کی اہم خصوصیات:

مرکز مائل قوت Centripetal force	مرکز گریز قوت Centrifugal force
یہ ایک حقیقی قوت ہے جو جسم پر، جاذبی قوت، ڈوری کے تناؤ، عمودی قوت وغیرہ جیسی بیرونی قوتوں کے ذریعہ برآمد ہوتی ہے۔	یہ ایک کاذب قوت یا ایک مجازی قوت ہے جو جاذبی قوت، تناؤ کی قوت یا عمودی قوت وغیرہ کے ذریعہ نمودار نہیں ہوسکتی۔
دونوں جمودی اور غیر جمودی سانچوں میں عمل پیرا ہوتی ہے۔	صرف گردشی سانچوں (غیر جمودی سانچوں) ہی میں عمل پیرا ہوتی ہے۔
یہ دائری حرکت میں گردشی محور یا دائرے کے مرکز کی طرف عمل پیرا ہوتی ہے۔	کاذب قوت ہے مگر حقیقی اثرات رکھتی ہے۔
$\lvert F_{cp}\rvert = m\omega^2 r = \frac{mv^2}{r}$	$\lvert F_{cf}\rvert = m\omega^2 r = \frac{mv^2}{r}$
حقیقی قوت ہے اور حقیقی اثرات رکھتی ہے۔	مرکز گریز قوت کا مبدا جمود ہے۔ یہ تعامل سے نمودار نہیں ہوتی ہے۔ ایک جمودی سانچے میں ہونے والی شئے کی جمودی حرکت، گردشی سانچے میں مرکز گریز قوت کی طرح نظر آتی ہے۔
مرکز مائل قوت کا مبدا دو اشیاء کا درمیانی تعامل ہے۔	جمودی سانچوں میں مرکز گریز قوت نہیں ہوتی۔
جمودی سانچوں میں آزاد جسمانی خاکے کھینچتے وقت مرکز مائل قوت کو شامل کرنا چاہئے۔	گردشی سانچوں میں آزاد جسمانی خاکہ کھینچتے وقت، مرکز مائل قوت اور مرکز گریز قوت دونوں قوتوں کو شامل کرنا چاہئے۔

11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:28 PM

SUMMARY خلاصہ

- حرکت کے بارے میں ارسطو کا تصور : حرکت کو برقرار رکھنے کے لئے قوت کی ضرورت ہے۔
- حرکت کے بارے میں گیلی لیو کا تصور: حرکت کو برقرار رکھنے کے لئے قوت کی ضرورت نہیں ہے۔
- کمیت شئے کے جمود کی پیمائش ہے۔
- نیوٹن کا پہلا کلیہ یہ بیان کرتا ہے کہ بیرونی قوت کی غیر حاضری میں ایک جسم اپنی حرکت یا حالت سکون کو برقرار رکھتا ہے۔
- نیوٹن کا دوسرا کلیہ یہ بیان کرتا ہے کہ جسم کی معیار حرکت کو تبدیل کرنے کے لئے بیرونی قوت درکار ہے۔
  حسابی طور پر اس کی تعریف یوں کی جاتی ہے۔ $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$
- نیوٹن کے پہلے اور دوسرے دونوں کلیے صرف جمودی سانچوں ہی میں درست رہتے ہیں۔
- جمودی سانچہ وہ ہے جس میں شئے پر اگر کوئی قوت نہ ہو تو وہ شئے ایک مستقل سمتی رفتار پر حرکت کرتی ہے۔
- نیوٹن کا تیسرا کلیہ یہ بیان کرتا ہے کہ ہر ایک قوت کے لئے ایک مساوی اور مخالف قوت پائی جاتی ہے اور ایسی قوتوں کی ایک جوڑی عمل اور ردعمل کی جوڑی کہلاتی ہے۔
  - ایک شئے کے لئے آزاد جسمانی خاکہ کھینچنے کے لئے
  - شئے کو دیگر اشیاء سے الگ کیجئے اور اس پر عمل کرنے والی قوتوں کی شناخت کیجئے
  - اس شئے سے برآمد ہونے والی قوت کا لحاظ نہیں کرنا چاہئے
  - ہر سمت میں نیوٹن کے دوسرے کلیہ کا استعمال کیجئے
- اشیاء کے ایک مجموعے (نظام) پر اگر کوئی مجموعی بیرونی قوت عمل پیرا نہ ہوتی ہے تو اشیاء کے مجموعے (نظام) کی مجموعی معیار حرکت ایک مستقل سمتیہ ہوتی ہے۔
- نظام میں عمل پیرا ہونے والی اندرونی قوتیں نظام کی کل معیار حرکت کو تبدیل نہیں کرسکتیں۔
- لیمی کا نظریہ یہ بیان کرتا ہے کہ اگر متفق قوتوں کے تحت ایک شئے توازنت میں ہے تو ہر قوت کی متعلقہ مخالف زاوئے کے Sine کے ساتھ کی نسبت مساوی ہوتی ہے۔
- ایک جسم پر عمل پیرا ہونے ولا دھکا شئے کی معیار حرکت کی تبدیل کے برابر ہوتا ہے۔
- جب بھی شئے پر ایک چھوٹے سے وقفے کے لئے قوت عمل پیرا ہوتی ہے تو قوت کا محاسبہ کرنا مشکل ہوتا ہے، مگر دھکے کا محاسبہ کیا جاسکتا ہے۔
- ساکن رگڑ ایک قوت ہے جو ہمیشہ ساکن شئے کو حرکت کرانے میں مخالفت کرتی ہے۔ اس کی قیمت صفر سے $\mu_s N$ تک ہوسکتی ہے۔ اگر بیرونی قوت کی قیمت $\mu_s N$ سے زیادہ ہو تو شئے حرکت کرنے لگتی ہے۔
- جب شئے حرکت کرنے لگتی ہے تو فعلی رگڑ عمل میں آتی ہے۔ ایک شئے کو مستقل سمتی رفتار کے ساتھ حرکت کروانے کے لئے ایک بیرونی قوت درکار ہوتی ہے تاکہ فعلی رگڑ کے اثر کو روک سکے۔ فعلی رگڑ $\mu_k N$. ہے۔
- گردشی رگڑ ساکن اور فعلی رگڑ سے بہت ہی کم ہوتی ہے۔ یہی وجہ ہے کہ ایک شئے کو حرکت کرانے کے لئے اس کے نیچے پہیے لگائے جاتے ہیں۔ مثال : پہیے لگے ہوئے سوٹ کیس.

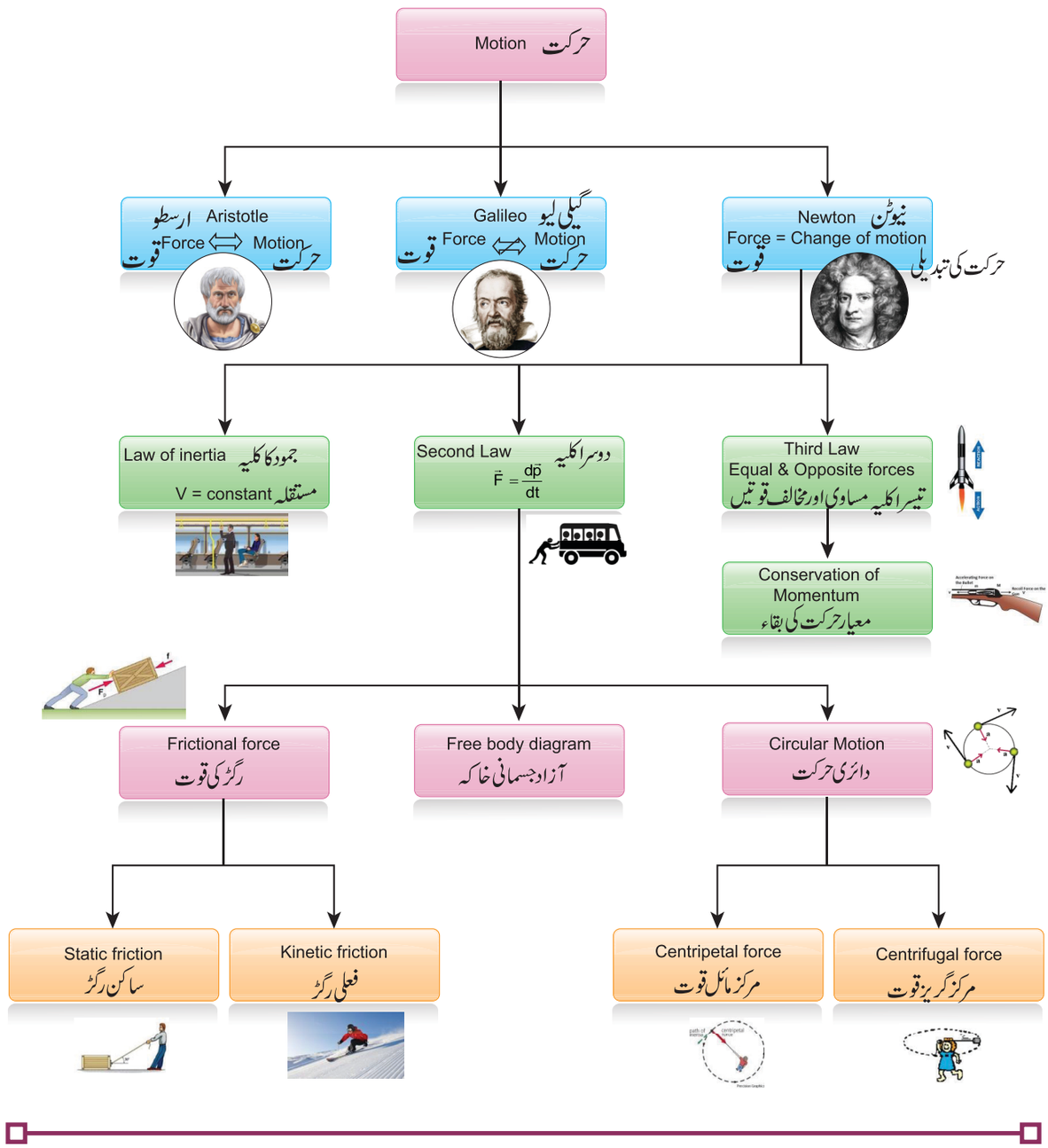
11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:28 PM

SUMMARY (*cont*) خلاصہ (جاری)

- رگڑ کا مبدا، ایک دوسرے کے ساتھ مس ہونے والی دو سطحوں کے درمیانی جوہروں کی برق مقناطیسی تعامل ہے۔
- جب بھی کسی منحنی کے ساتھ حرکت ہوتی ہے، وہاں منحنی کے مرکز کی طرف ضرور ایک مرکز مائل قوت عمل پیرا ہوتی ہے، یکساں دائری حرکت میں ایک مرکز مائل قوت عمل پیرا ہوتی ہے۔ یکساں دائری حرکت میں
- مرکز مائل قوت دائرے کے مرکز پر عمل پیرا ہوتی ہے۔
- مرکز مائل قوت ایک علاحدہ فطری قوت نہیں ہے، کوئی بھی قوت مرکز مائل قوت کی طرح عمل پیرا ہوسکتی ہے۔ سیاروں کی حرکت میں، سورج کی جاذبی قوت، مرکز مائل قوت کی طرح عمل پیرا ہوتی ہے۔ ڈوری سے بندھے ہوئے پتھر کی دائری حرکت میں مرکز مائل قوت ڈوری سے دی جاتی ہے۔ جب چاند زمین کے اطراف چکر لگاتا ہے تو وہ زمین کی جاذبی قوت کو مرکز مائل قوت کی طرح محسوس کرتا ہے۔
- مرکز گریز قوت اُس وقت نمودار ہوتی ہے، جب حرکت کا جائزہ گردشی سانچے سے لیا جاتا ہے۔ یہ ایک کاذب قوت ہے۔ گردشی سانچے میں شئے کی جمودی حرکت مرکز گریز قوت کی طرح معلوم ہوتی ہے۔
- مرکز مائل و مرکز گریز قوتوں کی قدر $m\omega^2 r$ ہے۔ مگر مرکز مائل قوت دائری حرکت کے مرکز کی جانب عمل پیرا ہوتی ہے اور مرکز گریز قوت مرکز مائل قوت کی مخالف سمت میں عمل پیرا ہوتی ہے۔

11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:28 PM

CONCEPT MAP نظریاتی نقشہ:



11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:29 PM

EVALUATION محاسبہ

I۔ کثیر انتخابی سوالات:

1۔ جب ایک کار ایک منحنی راستے میں اچانک بائیں موڑ لیتی ہے تو اندر بیٹھے مسافر اس وجہ سے دائیں طرف ڈھکیلے جاتے ہیں۔

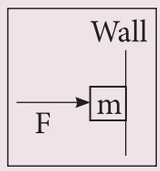
(a) جمود سمت

(b) جمود حرکت

(c) جمود سکون

(d) جمود کی غیر حاضری

2۔ جیسا کہ خاکہ میں بتایا گیا ہے، m کمیت والی ایک شئے افقی قوت F کے بھیجے جانے پر ایک عمودی دیوار پر ٹھہری ہوئی ہے۔ قوت کی کم سے کم قیمت یہ ہے۔ (IIT JEE 1994)



(a) mg سے کم

(b) mg کے مساوی

(c) mg سے زیادہ

(d) تعین نہیں کیا جا سکتا

3۔ ایک گاڑی مثبت x- سمت کے تحت حرکت کر رہی ہے، اگر اچانک بریک لگائی جائے تو

(a) گاڑی پر عمل پیرا ہونے والی قوت رگڑ منفی x سمت کے تحت ہوگی۔

(b) گاڑی پر عمل پیرا ہونے والی قوت رگڑ مثبت x سمت کے تحت ہوگی۔

(c) گاڑی پر کوئی بھی رگڑ کی قوت عمل پیرا نہیں ہوتی۔

(d) رگڑ کی قوت نیچے کی جانب عمل پیرا ہوتی ہے۔

4۔ ایک کتاب اس میز پر حالت سکون میں رکھی گئی ہے، جو اس کتاب پر ایک عمودی قوت برآمد کرتی ہے۔ اگر اس قوت کو ردعملی قوت کے طور پر تسلیم کر لیا جائے تو نیوٹن کے تیسرے کلیے کے مطابق عملی قوت کیا ہوگی؟

(a) زمین سے کتاب پر برآمد ہونے والی جاذبی قوت

(b) کتاب سے زمین پر برآمد ہونے والی جاذبی قوت

(c) کتاب سے زمین پر برآمد ہونے والی عمودی قوت

(d) ان میں سے کوئی بھی نہیں۔

5۔ دو کمیتیں m_1 اور m_2 ایک ہی قوت محسوس کرتی ہیں جب کہ $m_1<m_2$ ہے۔ ان کی اسراع $\frac{a_1}{a_2}$ کی نسبت یہ ہے۔

(a) 1

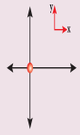
(b) 1 سے کم

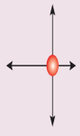
(c) 1 سے زیادہ

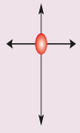
(d) تمام کے تمام معاملے

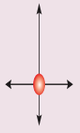
6۔ منفی y- سمت کے ساتھ مجموعی اسراع دو چار ہونے والی ایک شئے کے لئے مناسب آزاد جسمانی خاکہ کا انتخاب کیجئے۔

(تیر کا ہر نشان نظام پر نظام پر عمل پیرا ہونے والی قوت کی نمائندگی کرتا ہے)

a) 

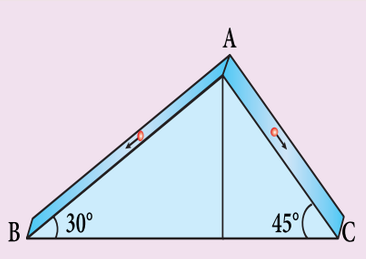
b) 

c) 

d) 

7۔ دوہری نفیس ڈھلوان سطح (خاکہ میں بتائی گئی ہے) پر پھسلنے والی ایک شئے سے محسوس ہوتی ہے۔

11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:29 PM



(a) راستہ AB کے تحت زیادہ اسراع

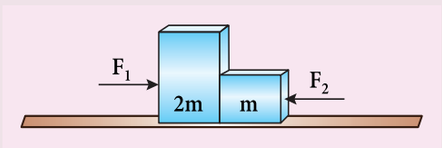
(b) دونوں راستوں میں ایک ہی اسراع

(c) راستہ AC کے تحت زیادہ اسراع

(d) دونوں راستوں میں کوئی اسراع نہیں

8۔ ایک نفیس افقی سطح پر m اور $2m$ کمیت والے دو بلاک رکھے گئے ہیں جیسا کہ خاکہ میں بتایا گیا ہے۔ پہلے معاملے میں بائیں طرف سے صرف ایک قوت F_1 بھیجی جاتی ہے۔اس کے بعد دائیں طرف سے صرف ایک قوت F_2 بھیجی جاتی ہے۔اگر دو بلاک کے مس ہونے والی سطح پر عمل پیرا ہونے والی قوتیں دونوں معاملات میں مساوی ہوں تو پھر $F_1 : F_2$ یہ ہے۔

(Physics Olympiad 2016)



(a) 1:1 (b) 1:2

(c) 2:1 (d) 1:3

9۔ مستقل رفتار کے ساتھ حرکت کرنے والی شئے پر عمل پیرا ہونے والی قوت یہ ہے۔

(a) ہمیشہ صفر ہے۔

(b) صفر ہونا ضروری نہیں ہے۔

(c) ہمیشہ غیر صفری ہوتی ہے۔

(d) کچھ کہا نہیں جا سکتا۔

10۔ m کمیت والی ایک شئے θ زاویہ والی ایک ڈھلوان سطح پر حرکت کرنا شروع کرتی ہے۔ڈھلوان سطح کی ساکن رگڑ کا تعاونی عدد μ_s ہے۔ اس کمیت سے محسوس کی جانے والی انتہائی ساکن رگڑ یہ ہے۔

(a) mg

(b) $\mu_s mg$

(c) $\mu_s mg \sin\theta$

(d) $\mu_s mg \cos\theta$

11۔ جب شئے ایک کھردری سطح پر ایک مستقل سمتی رفتار کے ساتھ سفر کر رہی ہے تو

(a) شئے پر مجموعی قوت صفر ہوتی ہے۔

(b) شئے پر کوئی قوت عمل نہیں کرتی۔

(c) صرف بیرونی قوت شئے پر عمل کرتی ہے۔

(d) صرف فعلی رگڑ شئے پر عمل کرتی ہے۔

12۔ جب ایک شئے ایک ڈھلوان کھردری سطح پر حالت سکون میں ہوتی ہے تو

(a) شئے پر عمل کرنے والی ساکن رگڑ اور فعلی رگڑ صفر ہے۔

(b) ساکن رگڑ صفر ہوتی ہے مگر فعلی رگڑ صفر نہیں ہوتی۔

(c) ساکن رگڑ صفر نہیں ہوتی اور فعلی رگڑ صفر ہوتی ہے۔

(d) ساکن رگڑ اور فعلی رگڑ دونوں صفر نہیں ہوتیں۔

13۔ مرکز گریز قوت برآمد ہوتی ہوئی محسوس ہوتی ہے۔

(a) صرف جمودی سانچوں میں

(b) صرف گردشی سانچوں میں

(c) کسی بھی پر اسراع سانچے میں

(d) دونوں جمودی اور غیر جمودی سانچوں میں

11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:30 PM

14۔ مندرجۂ ذیل میں سے صحیح بیان کا انتخاب کیجئے۔

(a) مرکز گریز اور مرکز مائل قوتیں عمل اور ردعمل جوڑیاں ہیں

(b) مرکز مائل قوت ایک فطری قوت ہے

(c) مرکز گریز قوت جاذبی قوت سے نمودار ہوتی ہے

(d) ایک دائری حرکت میں مرکز مائل قوت دائرے کے مرکز کی طرف اور مرکز گریز قوت سے دوری کی طرف عمل پیرا ہوتی ہے۔

15۔ اگر ایک شخص قطب سے خط استوا کی طرف حرکت کر رہا ہو تو اس پر عمل پیرا ہونے والی مرکز گریز قوت

(a) بڑھتی ہے

(b) کم ہوتی ہے

(c) تبدیل نہیں ہوتی

(d) بڑھتی ہے پھر گھٹتی ہے

جوابات :

1) a	**2)** c	**3)** a	**4)** c	**5)** c
6) c	**7)** b	**8)** c	**9)** b	**10)** d
11) a	**12)** c	**13)** b	**14)** d	**15)** a

II۔ مختصر جوابات کے سوالات:

1۔ جمود کے تصور کی وضاحت کیجئے۔ جمود، جمود سکوت اور جمود سمت، ہر ایک کے لئے دو مثالیں تحریر کیجئے۔

2۔ نیوٹن کا دوسرا کلیہ بیان کیجئے۔

3۔ ایک نیوٹن کی تعریف کیجئے

4۔ ثابت کیجئے کہ دھکا، معیار حرکت کی تبدیلی ہے۔

5۔ آزاد جسمانی نقشے کی مدد سے بتائیے کہ کسی شئی کا کھینچنا اس کے ڈھکیلنے سے آسان ہے۔

6۔ رگڑ کی مختلف قسمیں بیان کیجئے۔ رگڑ کو کم کرنے کے چند طریقے تجویز کیجئے۔

7۔ ''کاذب قوت''(Pseudo force) کا کیا مطلب ہے؟

8۔ ساکن اور فعلی رگڑ کی تجرباتی کلیے بیان کیجئے۔

9۔ نیوٹن کا تیسرا کلیہ بیان کیجئے

10۔ جمودی سانچے (inertial frames) کیا ہیں؟

11۔ کس شرط کے تحت ایک کار ایک ہموار دائری سڑک پر لڑھک سکتی ہے؟

III۔ تفصیلی جواب کے سوالات۔

1۔ کلیہ بقائے خطی معیار حرکت کی تصدیق کیجئے۔ اس کا استعمال کرتے ہوئے، ایک بندوق سے گولی چلائی جانے پر اس بندوق کی ردعملی سمتی رفتار معلوم کیجئے۔

2۔ متفق قوتیں (concurrent forces) کیا ہیں؟ لیمی کا نظریہ بیان کیجئے۔

3۔ (i) عمودی حرکت اور (ii) افقی حرکت میں، ایک ڈوری کے ذریعہ جڑے ہوئے بلاکوں کی حرکت کی وضاحت کیجئے۔

4۔ رگڑ کے مبدا کی وضاحت مختصر طور پر کیجئے۔ بتائیے کہ ایک ڈھلوان سطح میں، رگڑ کا زاویہ پھسلاؤ کے زاویے (angle of repose) کے برابر ہوتا ہے۔

5۔ نیوٹن کے تین کلیے بیان کیجئے اور ان کی اہمیت پر بحث کیجئے۔

6۔ مرکز مائل (centripetal) اور مرکز گریز (centrifugal) قوتوں کی مشابہتوں اور فرق کی وضاحت کیجئے۔

7۔ مناسب مثالوں کے ساتھ مرکز گریز قوت کی مختصر وضاحت کیجئے۔

8۔ گھومنے والی رگڑ (rolling friction) کی مختصر وضاحت کیجئے۔

9۔ پھسلاؤ کے زاویئے (angle of repose) کی پیمائش کے طریقے کی تشریح کیجئے۔

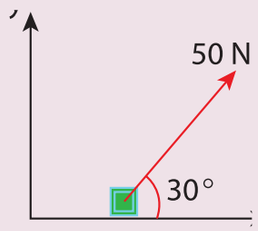
10۔ سڑکوں کے ایک طرفہ چڑھاؤ (banking) کی اہمیت واضح کیجئے۔

11۔ زمین کی جانب چاند کی مرکز مائل اسراع کا محاسبہ کیجئے۔

11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:30 PM

حسابی مسئلے: (Numerical problems)

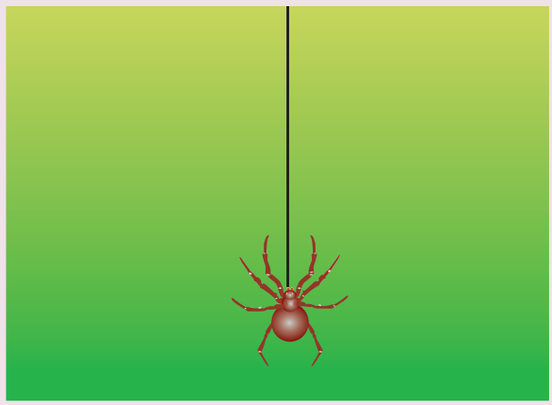
1۔ 20kg کمیت والی ایک شئے پر 50N کی ایک قوت عمل پیرا ہوتی ہے جیسا کہ خاکہ میں بتایا گیا ہے۔ x اور y سمتوں میں شئے کی اسراع معلوم کیجئے۔



Ans: a_x=2.165 ms^{-2}; a_y=1.25 ms^{-2}

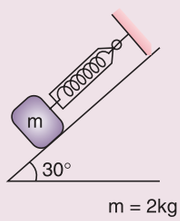
2۔ 50 گرام کمیت والی ایک مٹری، لکڑی کے جالے کی ایک تار سے لٹکی ہوئی ہے جیسا کہ خاکہ میں بتایا گیا ہے۔ تار پر موجود تناؤ کیا ہے؟

Ans: T=0.49N



3۔ کمانی دار ترازو میں بتائی جانے والی ریڈنگ کیا ہے؟





Ans: Zero, 9.8 N

4۔ ایک میز پر طبیعیات کی کتابیں ایک دوسرے کے اوپر اس ترتیب سے جوڑی گئی ہیں: گیارھویں جماعت، جلد 1 اور جلد 2 ہے: بارھویں جماعت جلد 1 اور جلد 2

(a) ہر کتاب پر عمل پیرا ہونے والی قوتوں کی شناخت کیجئے اور آزاد جسمانی خاکہ کھینچئے۔

(b) ہر کتاب سے دوسری کتاب پر برآمد ہونے والی قوتوں کی شناخت کیجئے۔

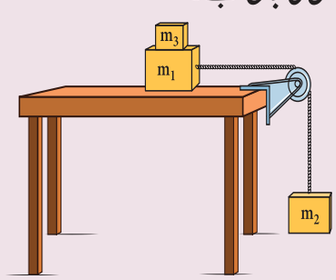
5۔ ایک ڈوری سے بندھا ہوا ایک گولا آگے اور پیچھے اہتزاز کر رہا ہے۔ گولے پر عمل پیرا ہونے والی قوتوں کو ان کے اجزاء پر مشتمل کیجئے۔ ایک زاویہ θ پر گولے سے محسوس کی جانے والی اسراع کیا ہے؟

جواب: مماسی اسراع = $g \sin\theta$

مرکز مائل اسراع = $\frac{(T-mg\cos\theta)}{m}$.

6۔ m_1 اور m_2 نامی دو کمیتیں ایک تار سے جڑی ہوئی ہیں جو میز کے کنارے ثبت کئے گئے بے رگڑ چرخی سے گزرتی ہیں، جیسا کہ خاکہ میں بتایا گیا ہے۔ میز کے ساتھ m_1 کمیت کی ساکن رگڑ کا تعاونی عدد μ_s ہے۔ m_1 کو پھسلنے سے بچانے کے لئے اس پر رکھی جانے والی کم از کم m_3 کمیت دریافت کیجئے۔

اگر m_1 = 15 kg، m_2=10 kg، m_3=25 kg اور μ_s = 0.2 ہو تو اس کی جانچ کیجئے۔



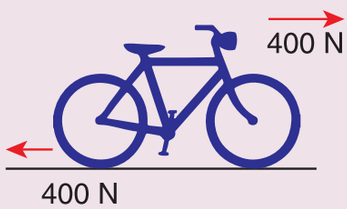
جواب: $m_3 = \frac{m_2}{\mu_s} - m_1$ مجموعی کمیتیں m_1+m_2 پھسل جائیں گی۔

7۔ خاکہ 1 اور 2 میں بتائی گئی 25kg کمیت والی سائیکل کی اسراع دریافت کیجئے۔

جواب : صفر

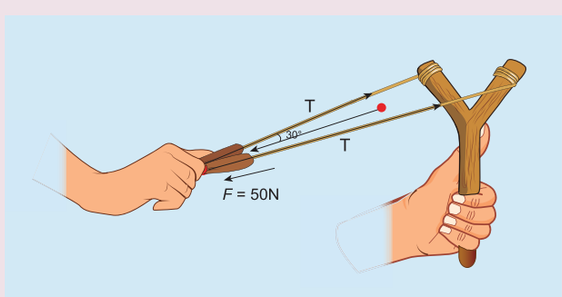
11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:30 PM





Ans: a=4 ms^{-2}, zero

8۔ غلیل پر لیمی کا نظریہ استعمال کیجئے اور ہر تار پر موجود تناؤ کا محاسبہ کیجئے۔



Ans: T= 28.868N.

9۔ فٹ بال کا ایک کھلاڑی 0.8kg کی گیند کو لات مارتا ہے اور اس میں $12\ ms^{-1}$ کی ایک سمتی رفتار منتقل کرتا ہے۔ پیر اور گیند کو لگنے کا وقف صرف ایک سکنڈ کا ساٹھواں حصہ ہے۔ لات مارنے کی اوسط قوت معلوم کیجئے۔

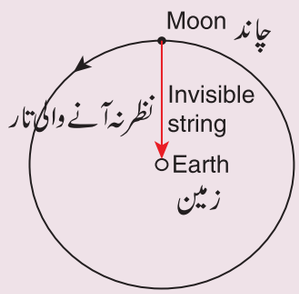
جواب : 576N

10۔ 2kg کمیت والا ایک پتھر 1m لمبائی والی ایک ڈوری سے جڑا ہوا ہے۔ وہ ڈوری 200N تک کے تناؤ کو سنبھال سکتی ہے۔ گردشی حرکت کے دوران وہ پتھر انتہائی رفتار اختیار کر سکتا ہے؟

11۔ تصور کیجئے کہ زمین اور چاند کی درمیانی جاذبی قوت ایک نظر نہ آنے والی ڈوری عطا کر رہی ہے جو چاند اور زمین کے درمیان موجود ہے۔ زمین کی مرکز مائل قوت کی وجہ سے نظر نہ آنے والی اس تار میں موجود تناؤ کی مقدار کیا ہے؟

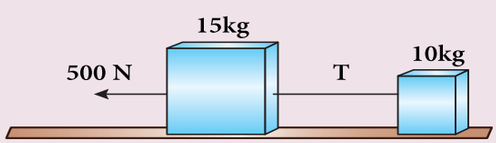
چاند کی کمیت = 7.34×10^{22} kg,

چاند اور زمین کا درمیانی فاصلہ = 3.84×10^{8} m



12۔ 15kg اور 10 kg کمیت والے دو اجسام، ایک ہلکی تار سے جوڑ کر ایک چکیلی سطح پر رکھے گئے ہیں۔ جیسا کہ خاکہ میں بتایا گیا ہے۔ 15kg کے جسم پر F=500N کی ایک افقی قوت بھیجی جاتی ہے۔ تار پر عمل پیرا ہونے والا تناؤ معلوم کیجئے۔

جواب : T=200N



13۔ لوگ اکثر یہ کہتے ہیں کہ ہر عمل کے لئے ایک متوازن (equivalant) مخالف ردعمل ہوتا ہے۔ یہاں وہ عمل سے انسان کا عمل مراد لیتے ہیں۔ کیا انسانی اعمال پر نیوٹن کے تیسرے کلیہ کا استعمال کرنا درست ہے؟ نیوٹن کے تیسرے کلیے میں عمل سے کیا مراد ہے؟ نیوٹن کے کلیوں کی بنیاد پر اپنا جواز اور مباحثے پیش کیجئے۔

جواب : نیوٹن کے تیسرے کلیے کو انسان کی صرف ایسی کارروائیوں پر استعمال کر سکتے ہیں جن میں طبیعی قوت حصہ لیتی ہے۔ انسان کی نفسیاتی اعمال یا خیالات پر نیوٹن کے تیسرے کلیے کو استعمال نہیں کر سکتے۔

11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:31 PM

14۔ 10m انحنا کا نصف قطر رکھنے والی ایک دائری سڑک پر ایک کار 50ms-1 کی سمتی رفتار کے ساتھ ایک موڑ لیتی ہے۔ کار کے اندر بیٹھے ہوئے 60kg کمیت والے ایک شخص سے محسوس کی جانے والی مرکز گریز قوت کا محاسبہ کیجئے۔

Ans: 15,000 N

15۔ سطح پر ایک لمبی لکڑی پڑی ہوئی ہے۔ ایک شخص اس لکڑی سے 10m دوری پر کھڑا ہے۔ 0.5kg کمیت والی ایک شئے کو اس لکڑی پر مارنے کے لئے اس شئے کو (افقی طور پر) کم از کم کتنی رفتار سے پھینکنا پڑے گا؟ (تصور کیجئے کہ فعلی رگڑ کا تعاونی عدد 0.7 ہے)

Ans: 11.71 ms^{-1}

BOOKS FOR REFERENCE کتب حوالہ:

1. Charles Kittel, Walter Knight, Malvin Ruderman, Carl Helmholtz and Moyer, *Mechanics,* 2nd edition, Mc Graw Hill Pvt Ltd,
2. A.P.French, *Newtonian Mechanics,* Viva-Norton Student edition
3. SomnathDatta, *Mechanics,* Pearson Publication
4. H.C.Verma, *Concepts of physics* volume 1 and Volume 2, Bharati Bhawan Publishers
5. Serway and Jewett, *Physics for scientist and Engineers with modern physics*, Brook/Coole publishers, Eighth edition
6. Halliday, Resnick & Walker, *Fundamentals of Physics*, Wiley Publishers, 10th edition

11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:31 PM

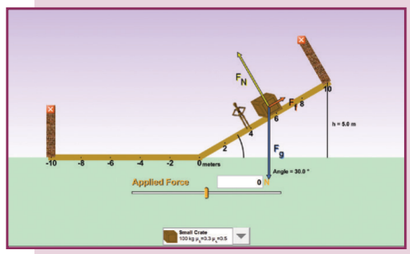
ICT CORNER

ICT کارنر

Force and motion

قوت اور حرکت

اس کارروائی کے ذریعہ آپ
قوت اور حرکت کو سمجھ پائیں گے۔



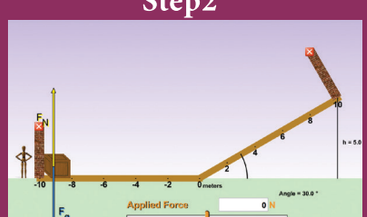
مرحلے:

- براؤزر کھولئے اور دئے گئے URL کو ٹائپ کیجئے تا کہ قوت اور حرکت پر PhET نقل کھول سکے۔
  java applet کو کھولنے کے لئے OK دبایئے۔
- تبدیلی کا مشاہدہ کرنے کے لئے دی جانے والی قوتوں کا انتخاب کیجئے۔
- شئے کے مقام کو تبدیل کرتے ہوئے، ڈھلوان سطح (ramp) کے زاویے کی تبدیلی کا مشاہدہ کیجئے۔
- وزن کو تبدیل کر کے بھی آپ قوت اور ڈھلوان سطح (ramp) کے زاویے کی تبدیلی کا مشاہدہ کر سکتے ہیں۔

Step1



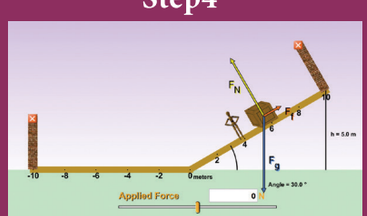
Step2



Step3



Step4



PhET simulation's URL:

https://phet.colorado.edu/en/simulation/ramp-forces-and-motion

* Pictures are indicative only.

* If browser requires, allow **Flash Player** or **Java Script** to load the page.

BG1H9

11 physics 3. laws of motion
Wednesday, January 12, 2022 2:16:32 PM

اکائی
4

کام، توانائی اور طاقت

WORK, ENERGY AND POWER

"Matter is Energy. Energy is Light. We are all Light Beings." – Albert Einstein

سیکھنے کے مقاصد:

اس اکائی میں طلباء یہ سیکھ پائیں گے۔

- کام کی تعریف
- ایک مستقل اور ایک متغیر قوت کے ذریعہ کیا گیا کام
- توانائی کی مختلف قسمیں
- کلیہ بقائے توانائی
- عمودی دائری حرکت
- طاقت کی تعریف
- ٹکروں کی مختلف قسمیں

8GPTA

4.1 تعارف

روزمرہ زندگی کے مختلف مرحلوں میں لفظ کام کا استعمال کیا جاتا ہے۔ اس سے طبیعی کام اور دماغی کام دونوں مراد ہیں۔ درحقیقت کوئی بھی کارروائی عام طور پر کام کہلاتی ہے۔ مگر طبیعیات میں اصطلاح کام کو ایک مخصوص تعریف کے ساتھ ایک طبیعی مقدار کے طور پر استعمال کیا جاتا ہے۔ اگر ایک جسم پر قوت کے عمل سے پیدا ہونے سے وہ جسم اپنی جگہ سے ہٹ جائے تو کہا جائے گا کہ کام کیا گیا ہے۔ کام کرنے کے لئے توانائی درکار ہے۔ سادہ الفاظ میں اگر کہا جائے تو کام کرنے کی قابلیت توانائی کہلاتی ہے۔ لہذا کام اور توانائی متوازن ہوتے ہیں اور ایک ہی ابعاد رکھتے ہیں، طبیعیات میں توانائی مختلف قسموں میں پائی جاتی ہے جیسے میکانکی، برقی، حرارتی، نیوکلیائی وغیرہ وغیرہ۔ کئی مشینیں توانائی کی ایک قسم استعمال کر کے اسے دوسری شکل میں فراہم کرتی ہیں۔ اس سبق میں ہم خاص طور پر میکانیکی توانائی اور اس کی دو قسمیں توانائی بالفعل اور توانائی بالقواہ پر روشنی ڈالیں گے۔ اس ترتیب وار بحث میں آنے والی ایک اور مقدار کئے جانے والے کام کی شرح یا پہنچائی گئی توانائی کی شرح ہے۔ کئے گئے کام کی شرح طاقت کہلاتی ہے۔ کرکٹ میں ایک زور دار مار سے مراد گیند کو ایک تیز شرح سے مارنا ہے۔ یہ سبق کام، توانائی اور طاقت کہلانے والی ان تین طبیعی مقداروں کو اچھی طرح سمجھنے اور ان کی طبیعی اہمیت جاننے میں ہماری مدد کرتا ہے۔

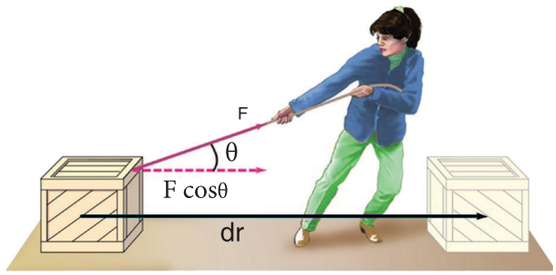
4.1.1 کام (Work)

ایک جسم پر عمل کرنے والی ایک قوت $(\vec{F})$ فرض کیجئے جو اسے ایک ہٹاؤ کے ساتھ کسی سمت $(d\vec{r})$ میں ہٹا دیتی ہے جیسا کہ خاکہ 4.1 میں بتایا گیا ہے۔

جسم پر قوت کے ذریعہ کئے گئے کام (W) کی مساوات ریاضیاتی طور پر اس طرح لکھی جاسکتی ہے۔

$$W = \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad (4.1)$$

11 physics 4. work energy and power
Thursday, January 13, 2022 9:14:19 AM



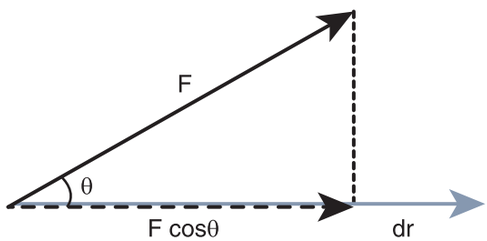
خاکہ 4.1۔ ایک قوت کے ذریعہ کیا گیا کام

یہاں حاصل ضرب $\vec{F} \cdot d\vec{r}$، ایک قدری حاصل ضرب (یا نقطوی حاصل ضرب dot product) ہے۔ دو سمتیوں کا قدری حاصل ضرب ایک قدر یہ ہوتا ہے۔ (ملاحظہ ہو حصہ 2.5.1)۔ لہذا کیا گیا کام ایک قدری مقدار ہے۔ اس میں صرف قدر پائی جاتی ہے اور سمت نہیں پائی جاتی۔ اکائیوں کے SI نظام میں کئے گئے کام کی اکائی Nm یا جول (J) ہے۔ اس کا ابعادی ضابطہ $[ML^2T^2]$ ہے۔
مساوات (4.1) یوں بھی لکھی جاسکتی ہے۔

$$W = F\, dr \cos\theta \qquad (4.2)$$

جو خاکہ 4.2 (چونکہ $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\theta$) کی مدد سے محسوس کی جاسکتی ہے، جس میں θ بھیجی گئی قوت اور جسم کے ہٹاؤ کا درمیانی فاصلہ ہے۔

قوت کے ذریعہ کیا جانے والا کام قوت (F)، ہٹاؤ (dr) اور ان کا درمیانی زاویہ (θ) پر منحصر ہوتا ہے۔



$w = (F\cos\theta)dr$

خاکہ 4.2۔ کئے گئے کام کا محاسبہ

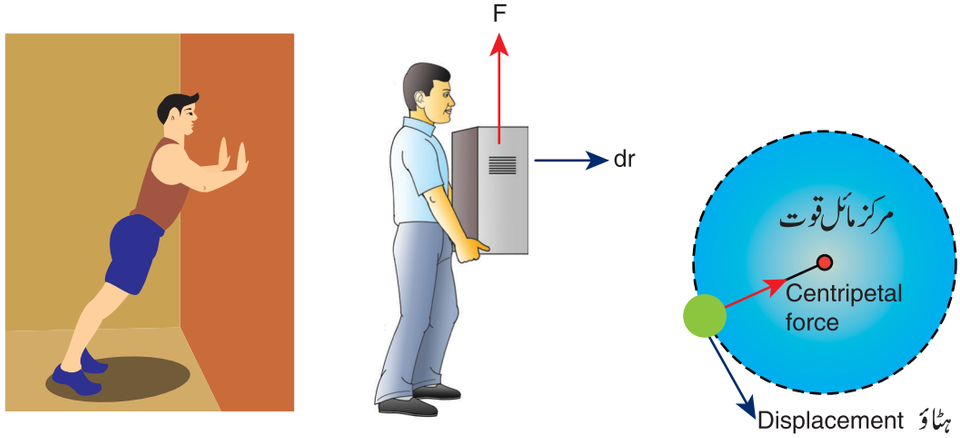
مندرجۂ ذیل معاملات میں کیا گیا کام صفر ہے۔

(i) جب قوت صفر ہو (F=0)

مثال کے طور پر ایک نفیس بے رگڑ افقی سطح پر حرکت کرنے والا ایک جسم حرکت کرتا ہی رہے گا۔ چونکہ اس سطح کے ساتھ اس پر کوئی قوت (یہاں تک کہ رگڑ بھی) عمل نہیں کر رہی ہے (یہ ایک مثالی حالت ہے)۔

(ii) جب ہٹاؤ صفر ہو (dr=0)

مثال کے طور پر جب ایک مضبوط دیوار پر قوت لگائی جاتی ہے تو اس میں کسی قسم کا ہٹاؤ پیدا نہیں ہوتا۔ لہذا کیا گیا کام صفر ہے جیسا کہ خاکہ 4.3(a) میں بتایا گیا ہے۔



خاکہ 4.3۔ مختلف معاملات میں صفر کے برابر کئے گئے کام

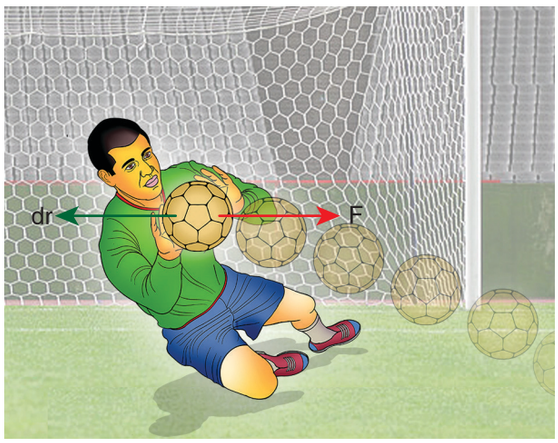
11 physics 4. work energy and power
Thursday, January 13, 2022 9:14:20 AM

(iii) جب قوت اور ہٹاؤ ایک دوسرے کے عمود میں ہوں ($\theta=90°$)

جب کوئی شئے افقی سمت پر حرکت کرتی ہے، جاذبی قوت (mg) اس شئے پر کوئی کام نہیں کرتی، کیونکہ وہ اس کے ہٹاؤ کے ساتھ زاویۂ قائمہ پر عمل کر رہی ہوتی ہے جیسا کہ خاکہ 4.3(b) میں بتایا گیا ہے۔ دائری حرکت میں مرکز مائل قوت بھی دائرہ پر حرکت کرنے والی شئے پر کوئی کام نہیں کرتی، کیونکہ وہ اس کے ہٹاؤ کے عمودی ہوتی ہے جیسا کہ خاکہ 4.3(c) میں بتایا گیا ہے۔

ایک دی گئی قوت (F) اور ہٹاؤ (dr) کے لئے ان کا درمیانی زاویہ θ ہی کئے گئے کام کی قیمت کا تعین کرتا ہے جیسا کہ جدول 4.1 میں جدول بند کیا گیا ہے۔

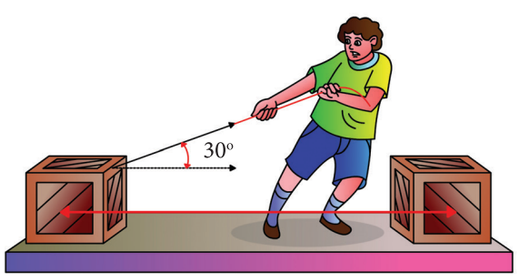
ایک قوت سے کئے جانے والے منفی کام کی کئی مثالیں پائی جاتی ہیں۔ فٹ بال کے کھیل میں گول کیپر اپنی طرف آتی ہوئی گیند کو اس طرح سے قوت لگا کر پکڑتا ہے کہ لگائی گئی قوت گیند کی حرکت کی مخالف سمت میں ہوتی ہے یہاں تک کہ گیند اس کے ہاتھوں میں رک جاتی ہے۔ قوت لگانے کے دوران وہ ایک منفی کام انجام دیتا ہے، جیسا کہ خاکہ 4.4 میں بتایا گیا ہے۔ منفی کام کے بہت سے معاملات کے بارے میں ہم اس سبق کے اگلے حصوں میں بحث کریں گے۔



خاکہ 4.4۔ کیا گیا منفی کام

مثال 4.1

ایک ڈبہ کو 25N کی ایک قوت کے ساتھ کھینچا جاتا ہے تاکہ 15m کا ایک ہٹاؤ پیدا کر سکے۔ اگر قوت اور ہٹاؤ کا درمیانی زاویہ $30°$ ہو تو قوت سے کیا گیا کام معلوم کیجئے۔



حل:

قوت $F = 25\ N$

ہٹاؤ, $dr = 15\ m$

F اور dr کا درمیانی زاویہ $\theta = 30°$

جدول 4.1۔ زاویہ (θ) اور کام کی فطرت

Angle (θ) زاویہ	cosθ	Work کام
$\theta = 0°$	1	Positive, Maximum مثبت، سب سے زیادہ
$0 < \theta < 90°$ (acute) زاویۂ حادہ	$0 < \cos\theta < 1$	Positive مثبت
$\theta = 90°$ (right angle) زاویۂ قائمہ	0	Zero صفر
$90° < \theta < 180°$ زاویۂ منفرجہ	$-1 < \cos\theta < 0$	Negative منفی
$\theta = 180°$	-1	Negative, Maximum منفی، سب سے زیادہ

11 physics 4. work energy and power
Thursday, January 13, 2022 9:14:20 AM

کیا گیا کام , $W = F\,dr\cos\theta$

$$W = 25\times15\times\cos30^\circ = 25\times15\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$W = 324.76\ \text{J}$$

4.1.2 ایک مستقل قوت سے کیا گیا کام

(Work done by a constant force)

جب ایک جسم پر ایک مستقل قوت F عمل کرتی ہے تو اس قوت سے پیدا ہونے والا چھوٹا والے چھوٹے ہٹاؤ dr سے کیا گیا چھوٹا کام (dW) اس تعاملات کے ذریعہ پیش کیا جاتا ہے۔

$$dW = (F\cos\theta)\,dr \qquad (4.3)$$

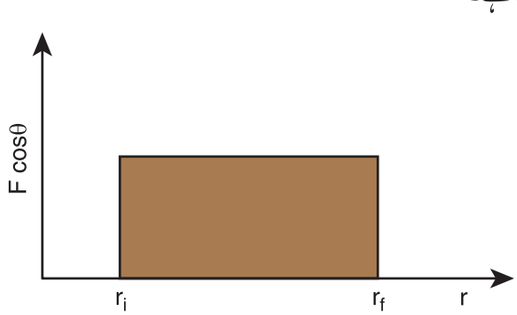
ابتدائی مقام r_i سے انتہائی مقام r_f تک ہٹاؤ کے پیدا کرنے میں کیا گیا کل کام یہ ہے۔

$$W = \int_{r_i}^{r_f} dW \qquad (4.4)$$

$$W = \int_{r_i}^{r_f} (F\cos\theta)\,dr = (F\cos\theta)\int_{r_i}^{r_f} dr =$$

$$(F\cos\theta)(r_f - r_i) \qquad (4.5)$$

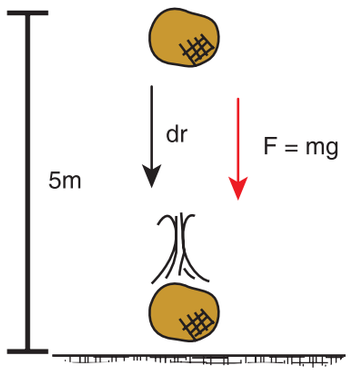
ایک مستقل قوت سے کئے گئے کام کی ترسیمی نمائندگی خاکہ 4.5 میں کی گئی ہے۔ ترسیم کا نچلا رقبہ مستقل قوت سے کئے گئے کام کو ظاہر کرتا ہے۔



خاکہ 4.5۔ مستقل قوت سے کیا گیا کام

مثال 4.2

2kg کمیت والی ایک شئے 5 m اونچائی سے زمین پر گرتی ہے، جاذبی قوت کے ذریعہ اس شئے پر کئے گئے کام کی مقدار کیا ہے؟ (ہوائی مزاحمت کو نظر انداز کر دیجئے: $g=10\ ms^{-2}$ لے لیجئے)



حل:

اس معاملہ میں شئے پر عمل پیرا ہونے والی قوت نچلی جانبی جاذبی قوت mg ہے۔ یہ ایک مستقل قوت ہے۔

جاذبی قوت سے کیا گیا کام یہ ہے۔

$$W = \int_{r_i}^{r_f} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$W = (F\cos\theta)\int_{r_i}^{r_f} dr = (mg\cos\theta)\,(r_f - r_i).$$

شئے بھی نیچے کی جانب حرکت کرتی ہے جو کہ جاذبی قوت کی سمت ہے۔

$(\vec{F} = m\vec{g})$ جیسا کہ خاکہ میں بتایا گیا ہے۔

لہذا ان کا درمیانی زاویہ $\theta = 0^\circ;\ \cos0^\circ = 1$ ہے

اور ہٹاؤ $(r_f - r_i) = 5\,\text{m}$ ہے۔

$$W = mg(r_f - r_i)$$

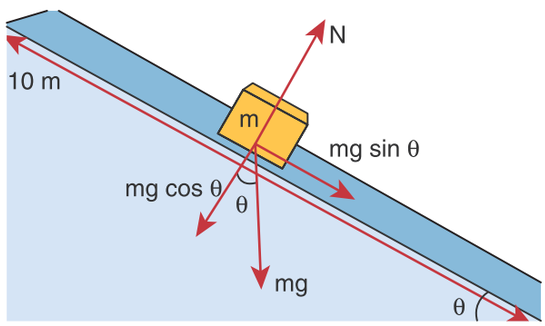
$$W = 2\times10\times5 = 100\ \text{J}$$

شئے پر جاذبی قوت کے ذریعہ کیا گیا کام مثبت ہے۔

11 physics 4. work energy and power
Thursday, January 13, 2022 9:14:21 AM

مثال 4.3

$m=1\ Kg$ کمیت والی ایک شئے ایک بے رگڑ ڈھلوان سطح (سطح مائل) میں اوپر سے نیچے پھسل رہی ہے جس کے ڈھلاؤ کا زاویہ $\theta = 30°$ ہے۔ اور اس ڈھلوان سطح کی لمبائی $10m$ ہے، جیسا کہ خاکہ میں بتایا گیا ہے۔ شئے پر جاذبی قوت اور عمودی قوت کے ذریعہ کئے گئے کام کا محاسبہ کیجئے۔ تصور کر لیجئے کہ اسراع بوجہ جاذبہ $g = 10\ ms^{-2}$ ہے۔



حل:

ہم نے پچھلے سبق میں محاسبہ کیا کہ ڈھلوان سطح کے میں شئے سے محسوس کی جانے والی اسراع $g \sin\theta$ ہے۔

نیوٹن کے دوسرے کلیے کے مطابق ڈھلوان سطح تحت کمیت پر عمل پیرا ہونے والی قوت $F = mg \sin\theta$ ہے۔ نوٹ کیجئے کہ یہ قوت کمیت کی کل حرکت کے دوران مستقل رہتی ہے۔

جاذبی قوت $(mg \sin\theta)$ کے متوازی جزء سے کیا گیا کام یوں پیش کیا جاتا ہے۔

$$W = \vec{F}.d\vec{r} = Fdr\cos\phi$$

جہاں قوت ϕ اور حرکت کی سمت (dr) کا درمیانی زاویہ ہے۔ اس معاملے میں قوت $(mg \sin\theta)$ اور ہٹاؤ (dr) ایک ہی سمت میں ہیں۔ یہاں $\phi = 0$ اور $\cos\phi = 1$ ہے۔

$$W = F\,dr = (mg\ \sin\theta)\ (dr)$$

$(dr =$ ڈھلوان سطح کی لمبائی $)$

$$W = 1 \times 10 \times \sin(30°) \times 10 = 100 \times \frac{1}{2} = 50\ J$$

جزء $mg\cos\theta$ اور عمودی قوت N، شئے کی حرکت کی عمودی سمت میں ہیں، اس لئے وہ کوئی کام انجام نہیں دیتے۔

مثال 4.4

اگر $2kg$ کمیت والی ایک شئے زمین سے اوپر پھینکے جانے پر وہ $5m$ کی اونچائی تک جاتی ہے اور دوبارہ زمین پر گرتی ہے (ہوا کی مزاحمت کو نظر انداز کرتے ہوئے) معلوم کیجئے۔

(a) جب شئے $5m$ کی اونچائی تک پہنچتی ہے تو جاذبی قوت سے کیا گیا کام

(b) جب شئے واپس زمین کو آتی ہے تو جاذبی قوت سے کیا گیا کام

(c) جاذبی قوت کے ذریعہ اوپری جانب اور نچلی جانب کیا گیا کل کام معلوم کیجئے اور حاصل کردہ نتیجے کی طبیعی اہمیت بیان کیجئے۔

حل:

جب شئے اوپر جاتی ہے، ہٹاؤ اوپری جانب رخ کرتا ہے جب کہ شئے پر عمل پیرا ہونے والی جاذبی قوت نیچے کی طرف رخ کرتی ہے۔ چنانچہ جاذبی قوت اور شئے کے ہٹاؤ کا درمیانی زاویہ $180°$ ہے۔

(a) اوپری سمت میں جاذبی قوت کے ذریعہ کیا گیا کام

دیا گیا ہے کہ

$$F = mg \quad \text{اور} \quad dr = 5m$$

$$W_{up} = Fdr\ cos\theta = mgdr\ \cos 180°$$

$$W_{up} = 2 \times 10 \times 5 \times (-1) = -100 \text{ joule.}$$

$$[\cos 180° = -1]$$

11 physics 4. work energy and power
Thursday, January 13, 2022 9:14:21 AM

(b) جب شئے واپس گرتی ہے، جاذبی قوت اور شئے کا ہٹاؤ، دونوں ایک ہی سمت میں ہوتے ہیں۔اس سے پتہ چلتا ہے کی جاذبی قوت اور شئے کے ہٹاؤ کا درمیانی زاویہ 0° ہے۔

$$W_{down} = Fdr\cos 0°$$
$$W_{down} = 2\times 10\times 5\times (1) = 100 \text{ joule}$$
$$[\cos 0° = 1]$$

(c) کل سفر (اوپری اور نچلی حرکت) میں جاذبہ سے کیا گیا کل کام

$$W_{total} = W_{up} + W_{down}$$
$$= -100 \text{ joule} + 100 \text{ joule} = 0$$

اس سے پتہ چلتا ہے کہ قوت جاذبہ شئے پر کوئی توانائی منتقل نہیں کرتی ۔ جب شئے اوپر پھینکی جاتی ہے تو، توانائی ایک بیرونی ذریعہ سے شئے میں منتقل ہوتی ہے، جس کا مطلب یہ ہے کہ شئے میں کچھ توانائی جمع ہوگئی ہے۔ جیسے ہی وہ شئے واپس لوٹتی ہے اور زمین سے ٹکراتی ہے تو شئے سے جمع کی گئی توانائی زمین کی سطح پر منتقل ہوجاتی ہے۔ (یعنی زمین کو پہنچادی جاتی ہے)۔

مثال 4.5

ایک وزن اٹھانے والا پہلوان 250 Weight Lifter Kg کمیت کو 5000N قوت کے ساتھ 5 میٹر کی اونچائی تک اٹھاتا ہے۔ (a) وزن اٹھانے والے سے کیا گیا کام معلوم کیجئے۔

(b) جاذبی قوت سے کیا گیا کام معلوم کیجئے۔

(c) شئے پر کیا گیا کل کام بتائیے۔

حل:

(a) جب وزن اٹھانے والا کمیت کو اٹھاتا ہے، تو قوت اور ہٹاؤ ایک ہی سمت میں ہوتے ہیں جس کا مطلب یہ ہے کہ ان کا درمیانی زاویہ $\theta = 0°$ ہے۔ چنانچہ وزن اٹھانے والے سے کیا گیا کام

$$W_{\text{weight lifter}} = F_w h\ \cos\theta = F_w h\left(\cos 0^0\right)$$
$$= 5000\times 5\times (1) = 25{,}000 \text{ joule} = 25 \text{ kJ}$$

(b) وزن اٹھانے والا جب کمیت کو اوپر اٹھاتا ہے کو جاذبہ نچلی جانب عمل پیرا ہوتی ہے جس کا مطلب یہ ہے کہ قوت اور ہٹاؤ مخالف سمت میں ہیں، چنانچہ ان کا درمیانی زاویہ $\theta = 180°$ ہے۔

$$W_{\text{gravity}} = F_g h\ \cos\theta = mgh\left(\cos 180^0\right)$$
$$= 250\times 10\times 5\times (-1)$$
$$= -12{,}500 \text{ joule} = -12.5 \text{ kJ}$$

(c) شئے پر کیا گیا کل کام یا کل کام:

$$W_{net} = W_{\text{weight lifter}} + W_{gravity}$$
$$= 25 \text{ kJ} - 12.5 \text{ kJ} = +12.5 \text{ kJ}$$

4.1.3 متغیر قوت سے کیا گیا کام:

(Work done by a variable force)

جب کسی جسم پر ایک متغیر قوت F کا جزء عمل پیرا ہوتا ہے، اس قوت سے پیدا ہونے والے چھوٹے سے ہٹاؤ dr کے ذریعہ کیا گیا چھوٹا سا کام (dW) اس تعلق کے ذریعہ پیش کیا جاتا ہے۔

$$dW = (F\cos\theta)\, dr$$

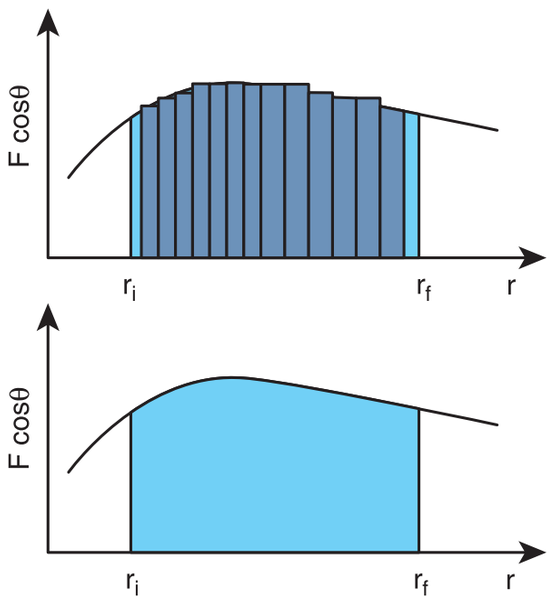
($F\cos\theta$ متغیر قوت F کا جزء ہے)

جس میں F اور θ متغیرات ہیں۔ ابتدائی مقام r_i سے r_f کے انتہائی مقام تک کے ایک ہٹاؤ کے لئے کئے گئے کل کام کے اس مساوات کے ذریعہ پیش کیا جاتا ہے۔

$$W = \int_{r_i}^{r_f} dW = \int_{r_i}^{r_f} F\cos\theta\ dr \qquad (4.6)$$

ایک متغیر قوت کے ذریعہ کئے گئے کام کی ترسیمی نمائندگی خاکہ 4.6 میں کی گئی ہے۔ ترسیم کا نچلا رقبہ، متغیر قوت سے کئے گئے کام کی نمائندگی کرتا ہے۔

11 physics 4. work energy and power
Thursday, January 13, 2022 9:14:21 AM



خاکہ 4.6۔ ایک متغیر قوت سے کیا گیا کام

مثال 4.6

ایک متغیر قوت $F = k\,x^2$ ایک شئے پر عمل کرتی ہے جو کہ ابتداء میں حالت سکون میں ہے $x = 0$ سے $x = 4\text{m}$ تک شئے کے ہٹاؤ کے دوران، اس قوت سے کیا گیا کام معلوم کیجئے۔

(تصور کیجئے کہ مستقلہ $k = 1\ \text{N m}^{-2}$ ہے)

حل:

کیا گیا کام

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx = k\int_0^4 x^2 dx = \frac{64}{3}\ \text{N m}$$

4.2 توانائی (Energy)

کام کرنے کی قابلیت توانائی کہلاتی ہے۔ بالفاظ دیگر کیا گیا کام توانائی کا اظہار ہوتا ہے۔ اسی لئے کام اور توانائی کے ایک ہی ابعاد پائے جاتے ہیں $[\text{ML}^2\text{T}^{-2}]$۔

Work ⇔ Energy کام ⇔ توانائی

توانائی کا ایک اہم پہلو یہ ہے کہ ایک الگ تھلگ نظام کے لئے، ہر قسم کی توانائی کا مجموعہ یعنی کسی بھی مرحلے میں کل توانائی مساوی ہوتی ہے۔ چاہے کتنی ہی اندرونی تبدیلیاں کیوں نہ ہو جائے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ ایک طرف جو توانائی غائب ہوتی ہوئی نظر آتی ہے، وہی توانائی کسی اور شکل میں دوبارہ نظر آنے لگتی ہے۔ اسی کو کلیہ بقائے توانائی کہتے ہیں۔ اس سبق میں صرف میکانیکی توانائی ہی پر ہم بحث کریں گے۔

میکانکی توانائی کو وسیع معنوں میں دو قسموں میں درجہ بند کیا جاتا ہے۔

(1) توانائی بالفعل

(2) توانائی بالقوہ

اپنی حرکت کی وجہ سے ایک جسم میں موجود توانائی، فعلی توانائی یا، توانائی بالفعل، (Kinetic energy) کہلاتی ہے۔

اپنی حالت کی وجہ سے ایک جسم میں موجود توانائی، توانائی بالقواہ Potential Energy کہلاتی ہے۔

توانائی کی SI اکائی وہی ہے جو دئے گئے کام کی ہے یعنی Nm (یا) جول (J)۔ توانائی کی ابعاد بھی وہی ہے جو کئے گئے کام کی ہے۔ اسے $[\text{ML}^2\text{T}^{-2}]$ سے پیش کیا جاتا ہے۔ توانائی کی دیگر اکائیاں اور SI نظام میں ان کی مساوی قیمتیں جدول 4.2 میں پیش کی گئی ہیں۔

جدول 4.2 توانائی کی دیگر اکائیوں کا معادل SI قیمت

Unit اکائی	Equivalent in joule جول میں اس کا معادل
1 erg (CGS unit) 1 ارگ (CGS اکائی)	10^{-7} J
1 electron volt (eV) 1 الکٹران وولٹ (eV)	$1.6\text{x}10^{-19}$ J
1 calorie (cal) 1 کیلوری (Cal)	4.186 J
1 kilowatt hour (kWh) 1 کلوواٹ گھنٹہ (kWh)	$3.6\text{x}10^{6}$ J

11 physics 4. work energy and power
Thursday, January 13, 2022 9:14:22 AM

4.2.1 توانائی بالفعل (Potential energy)

اپنی حرکت کی وجہ سے ایک جسم میں موجود توانائی، توانائی بالفعل کہلاتی ہے۔ تمام باحرکت اشیاء میں توانائی بالفعل پائی جاتی ہے۔ باحرکت جسم میں کام کرنے کی قابلیت پائی جاتی ہے۔ مثال کے طور پر ایک میخ پر حالت سکون پر رکھی گئی ایک ہتھوڑی اس میخ کو لکڑے کے اندر نہیں ڈھکیلتی جب کہ اسی ہتھوڑی سے اس میخ پر ضرب لگانے سے وہ میخ لکڑے میں داخل ہوتی ہے جیسا کہ خاکہ 4.7 میں بتایا گیا ہے۔ ایک باحرکت جسم کے، حالت سکون میں آنے سے پہلے، وہ جتنا کام انجام دے سکتی ہے اس کی مدد سے توانائی بالفعل کی پیمائش کی جاتی ہے۔ حرکت پذیر جسم سے کئے جانے والے کام کی مقدار، جسم کی کمیت اور اس کی سمتی رفتار کی قدر، ان دونوں پر منحصر ہوتی ہے۔ وہ جسم جو حالت حرکت میں نہیں ہے، اپنے اندر توانائی بالفعل نہیں رکھتا۔

4.2.2 کام اور توانائی بالفعل کا نظریہ (Work Kinetic Energy Theorem)

کام اور توانائی ادل بدل کے مصداق ہیں۔ توانائی بالفعل کے معاملہ میں بھی ایسا ہی ہوتا ہے۔ اس کو ثابت کرنے کے لئے آیئے ہم ایک بے رگڑ افقی سطح پر حالت سکون میں رکھے گئے m کمیت والے ایک جسم کا تصور کریں۔

ایک ہی سمت میں ہونے والے ہٹاؤ (s) کے لئے مستقل قوت (F) سے کیا گیا کام (W) یہ ہے۔

$$W = Fs \qquad (4.7)$$

مستقل قوت اس مساوات سے پیش کی جاتی ہے۔

$$F = ma \qquad (4.8)$$

حرکت کی تیسری مساوات (ملاحظہ کیجئے حصہ 2.10.3) کچھ اس طرح لکھی جاسکتی ہے۔

$$v^2 = u^2 + 2as$$
$$a = \frac{v^2 - u^2}{2s}$$

مساوات (4.8) میں a کی قیمت حل کرتے ہوئے

$$F = m\left(\frac{v^2 - u^2}{2s}\right) \qquad (4.9)$$

مساوات (4.9) کو (4.7) میں حل کرتے ہوئے

$$W = m\left(\frac{v^2}{2s}s\right) - m\left(\frac{u^2}{2s}s\right)$$
$$W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mu^2 \qquad (4.10)$$

توانائی بالفعل کے لئے مساوات

اوپر کی مساوات میں اصطلاح سمتی رفتار (v) کے ساتھ حرکت کرنے والے m کمیت کے جسم کی توانائی بالفعل ہے۔

$$\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

$$KE = \frac{1}{2}mv^2 \qquad (4.11)$$

ایک جسم کی توانائی بالفعل ہمیشہ مثبت ہوتی ہے۔

مساوات (4.10) اور (4.11) کی مدد سے

$$\Delta KE = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mu^2 \qquad (4.12)$$
$$\text{Thus, } W = \Delta KE$$



خاکہ 4.7۔ توانائی بالفعل کا عملی اظہار

11 physics 4. work energy and power
Thursday, January 13, 2022 9:14:22 AM

مساوات (4.12) کے دائیں حصے (RHS) کا اظہار جسم کی فعلی توانائی کی تبدیلی (ΔKE) ہے۔

اس سے پتہ چلتا ہے کہ قوت کے ذریعہ جسم پر کیا گیا کام جسم کی توانائی بالفعل کو تبدیل کرتا ہے۔ اسے کام اور توانائی بالفعل کا نظریہ کہتے ہیں۔

کام - توانائی کے نظریہ سے مندرجۂ ذیل مؤاخذات حاصل ہوتے ہیں۔

(1) اگر قوت کے ذریعہ ایک جسم پر کیا گیا کام مثبت ہو تو اس کی توانائی بالفعل بڑھتی ہے۔

(2) اگر قوت کے ذریعہ ایک جسم پر کیا گیا کام منفی ہو تو اس کی توانائی بالفعل گھٹتی ہے۔

(3) اگر قوت کے ذریعہ ایک جسم پر کوئی کام ہی نہ کیا گیا ہو تو اس کی توانائی بالفعل میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی، جس کا مطلب یہ ہے کہ جسم ایک مستقل رفتار کے ساتھ حرکت کیا ہے بشرطیکہ اس کی کمیت بھی مستقل ہو۔

4.2.3 معیار حرکت اور توانائی بالفعل کا تعلق:
(Relation between Momentum and Kinetic Energy)

m کمیت والے ایک جسم کا تصور کیجئے جو $\vec{v}$ سمتی رفتار کے ساتھ حرکت کر رہا ہے۔ پھر اس کی معیار حرکت $\vec{p} = m\vec{v}$ ہے اور اس کی توانائی بالفعل $KE = \frac{1}{2}mv^2$ ہے۔

$$KE = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\vec{v}.\vec{v}) \quad (4.13)$$

مساوات (4.13) کے شمار کنندہ (numerator) اور نسب نما (Denominator) دونوں کو کمیت m سے ضرب کرنے پر

$$KE = \frac{1}{2}\frac{m^2(\vec{v}.\vec{v})}{m}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(m\vec{v}).(m\vec{v})}{m} \quad [\vec{p} = m\vec{v}]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\vec{p}.\vec{p}}{m}$$

$$= \frac{p^2}{2m}$$

$$KE = \frac{p^2}{2m} \quad (4.14)$$

جہاں $|\vec{p}|$ معیار حرکت کی قدر ہے۔ معیار حرکت کی قدر اس طرح حاصل کی جاسکتی ہے۔

$$|\vec{p}| = p = \sqrt{2m\,(KE)} \quad (4.15)$$

نوٹ کیجئے کہ اگر توانائی بالفعل اور کمیت دی گئی ہیں تو صرف معیار حرکت کی قدر ہی کا محاسبہ کیا جاسکتا ہے مگر معیار حرکت کی سمت کا پتہ نہیں لگایا جاسکتا۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ توانائی بالفعل اور کمیت قدریے ہوتے ہیں۔

مثال 4.7

2 kg اور 4 kg کمیت والی دو اشیاء $20\ kg\ m\ s^{-1}$ کی مساوی معیار حرکت کے ساتھ حرکت کر رہی ہیں۔

(a) کیا ان کی توانائی بالفعل یکساں ہوگی؟

(b) کیا ان کی رفتار یکساں ہوگی؟

حل:

(a) کمیت کی توانائی بالفعل یوں دی جاتی ہے۔

$$KE = \frac{p^2}{2m}$$

2 kg کمیت کی شئے کے لئے، توانائی بالفعل یہ ہے۔

$$KE_1 = \frac{(20)^2}{2\times 2} = \frac{400}{4} = 100\,J$$

11 physics 4. work energy and power
Thursday, January 13, 2022 9:14:23 AM

4 kg کمیت کی شئے کے لئے توانائی بالفعل یہ ہے۔

$$KE_2 = \frac{(20)^2}{2\times 4} = \frac{400}{8} = 50\,J$$

غور کیجئے کہ $KE_1 \neq KE_2$ یعنی دونوں میں مساوی معیار حرکت رہنے کے باوجود دونوں کمیتوں کی توانائی بالفعل مساوی نہیں ہے۔ وزنی شئے کی توانائی بالفعل ہلکی شئے کی فعلی توانائی سے کم ہے۔ یہ اس لئے ہے کہ ایک دی گئی معیار حرکت کے لئے توانائی بالفعل کمیت کے بلا راست تناسب میں ہوا کرتی ہے۔

$$(KE \propto \frac{1}{m})$$

(b) چونکہ معیار حرکت $p = mv$ ہے، دونوں اشیاء یکساں رفتار کی نہیں ہوں گی۔

4.2.4 توانائی بالقواہ (Potential energy)

ایک جسم توانائی بالقواہ اس کی حالت اور اس کے اطراف و اکناف کے لحاظ سے اس کی تشکیل سے جڑی ہوئی ہے۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ ایک جسم کی حالت اور تشکیل پر اس جسم پر عمل پیرا ہونے والی مختلف قوتیں بھی منحصر ہوتی ہیں۔

ایک نقطہ P پر ایک شئے کی توانائی بالقواہ کی تعریف اس طرح کی جاتی ہے کہ یہ ایک شئے کو مستقل سمتی رفتار کے ساتھ نقطہ O (ابتدائی مقام) سے نقطہ P (انتہائی مقام) تک حرکت کرانے کے لئے ایک بیرونی قوت سے کئے گئے کام کی مقدار ہے۔ ابتدائی نقطہ O پر توانائی بالقواہ کو صفر کے طور پر لے لیا جا سکتا ہے۔

ریاضیاتی طور پر توانائی بالقواہ کی تعریف یوں کی جاتی ہے۔

$$U = \int \vec{F}_a . d\vec{r} \qquad (4.16)$$

جہاں احصاء (Integration) کی حد ابتدائی مقام نقطہ O سے انتہائی مقام نقطہ P تک ہے۔

ہمارے پاس مختلف قسم کی توانائی بالقواہ پائی جاتی ہیں۔ ہر قسم ایک مخصوص قوت سے جڑی ہوئی ہے۔ مثال کے طور پر

(i) جاذبی قوت کی وجہ سے جسم میں موجود توانائی بالقواہ جاذبی توانائی بالقواہ کو پیدا کرتی ہے۔

(ii) کمانی کی قوت اور اس جیسی دوسری قوتوں کی وجہ سے پیدا ہونے والی توانائی لچکدار توانائی بالقواہ کا سبب بنتی ہے۔

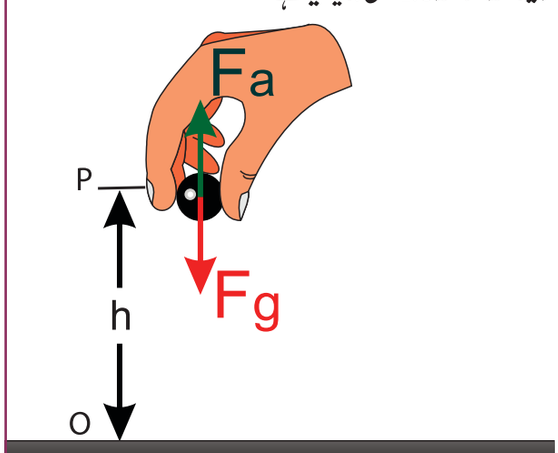
(iii) برقی باروں پر برق سکونی قوت کی وجہ سے پیدا ہونے والی توانائی برق سکونی توانائی بالقواہ کو جنم دیتی ہے۔

ہم حصہ 4.2.7 میں بقائی قوتوں سے متعلق مزید معلومات حاصل کریں گے۔ اب ہم جاذبی توانائی بالقواہ اور لچکدار توانائی بالقواہ پر مزید بحث کریں گے۔

4.2.5 زمین کی سطح کے قریب توانائی بالقواہ (Potential energy near the surface of the earth)

زمین سے کچھ اونچائی پر، ایک شئے میں موجود جاذبی توانائی بالقواہ (U)، اس شئے کو ایک مستقل سمتی رفتار کے ساتھ زمین سے اس اونچائی h تک لے جانے کے لئے درکار کام کی مقدار کے برابر ہوتی ہے۔

آیئے ہم m کمیت کے ایک جسم کا تصور کریں جو زمین سے h اونچائی تک جاذبی قوت کے خلاف لے جایا گیا ہے، جیسا کہ خاکہ 4.8 میں بتایا گیا ہے۔



خاکہ 4.8۔ جاذبی توانائی بالقواہ

جسم پر عمل پیرا ہونے والی جاذبی قوت $\vec{F}_g$ یہ ہے۔

$$\vec{F}_g = -\text{mg}\,\hat{j}$$

(چونکہ قوت y سمت میں ہے، اکائی سمتیہ $\hat{j}$ استعمال کی گئی ہے)۔ یہاں منفی علامت یہ ظاہر کرتی ہے کہ قوت $\vec{F}_a$ عمودی طور پر نیچے کی جانب عمل کر رہی ہے۔ شئے کے بغیر اسراع (یا مستقل سمتی رفتار) کے ساتھ

11 physics 4. work energy and power
Thursday, January 13, 2022 9:14:23 AM

حرکت کرانے کے لئے شئے پر جاذبی قوت کے قدر کی مساوی مگر مخالف ایک بیرونی قوت $\vec{F}_g$ بھیجی جانی چاہئے یعنی $\vec{F}_a = -\vec{F}_g$

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ $\vec{F}_a = +mg\,\hat{j}$ مثبت علامت یہ ظاہر کرتی ہے کہ بھیجی گئی قوت عمودی طور پر اوپر کی جانب رخ کر رہی ہے۔ لہذا، جب ایک جسم اوپر اٹھایا جاتا ہے تو اس کی سمتی رفتار تبدیل ہوئے بغیر رہتی ہے اور لہذا اس کی توانائی بالفعل بھی مستقل رہتی ہے۔

زمین سے کچھ اونچائی h پر ایک شئے میں موجود جاذبی توانائی بالقواہ (U) اس شئے کو زمین سے اس اونچائی h تک لے جانے کے لئے درکار کام کی مقدار کے برابر ہوتی ہے۔

$$U = \int \vec{F}_a . d\vec{r} = \int_0^h \left|\vec{F}_a\right| \left|d\vec{r}\right| \cos\theta \quad (4.17)$$

چونکہ ہٹاؤ اور بھیجی گئی قوت دونوں اوپری جانب ہی میں ہیں، ان کا درمیانی زاویہ $\theta = 0°$ ہے۔ لہذا $\cos 0° = 1$ اور

$$\left|d\vec{r}\right| = dr \quad \text{اور} \quad \left|\vec{F}_a\right| = mg$$

$$U = mg\int_0^h dr \quad (4.18)$$

$$U = mg\left[r\right]_0^h = mgh \quad (4.19)$$

غور کیجئے کہ شئے میں ذخیرہ اندوز ہونے والی توانائی بالقواہ کی تعریف اس بیرونی قوت سے کئے گئے کام کے ذریعہ کی جاتی ہے جو کہ مثبت ہے۔ طبیعی طور پر اس سے پتہ چلتا ہے کہ ذریعہ جو بیرونی قوت بھیجتا ہے، وہ ذریعہ شئے میں توانائی منتقل کرتا ہے جو بعد میں توانائی بالقواہ کے طور پر ذخیرہ اندوز ہوجاتی ہے۔ اگر وہ شئے h اونچائی سے نیچے گرنے کے لئے چھوڑ دی جاتی ہے تو ذخیرہ اندوز توانائی بالقواہ توانائی بالفعل میں تبدیل ہوجاتی ہے۔

نوٹ

- جب شئے پر بیرونی قوت عمل کر رہی ہو تو وہ شئے صفر اسراع (مستقل سمتی رفتار) کے ساتھ کس طرح حرکت کر سکتی ہے؟

یہ اس وقت ممکن ہے جب ایک اور قوت اس بیرونی قوت کے بالکل مساوی اور مخالف طور پر عمل کرتی ہو۔ وہ دونوں ایک دوسرے کو منقطع کر دیتی ہیں اور مجموعی قوت صفر ہوجاتی ہے اور وہ شئے بغیر اسراع کے ساتھ حرکت کرتی ہے۔

- جب ہم توانائی بالقواہ کی تعریف کرتے ہیں تو شئے کو حرکت کراتے وقت مستقل سمتی رفتار کا ہونا کیوں ضروری ہے؟

اگر شئے مستقل سمتی رفتار سے حرکت نہیں کرتی ہے تو اس میں ابتدائی اور آخری مقامات پر مختلف سمتی رفتاریں پائی جائیں گی۔ کام - توانائی بالفعل کے نظریے کے مطابق، وہ بیرونی قوت کچھ توانائی بالفعل برآمد کرے گی مگر ہم توانائی بالقواہ کا تعلق جاذبی قوت، کمانی کی قوت اور کولوم کی قوت سے جوڑتے ہیں۔ اس لئے جب شئے ابتدائی مقام سے انتہائی مقام تک لے جائی جاتی ہے تو یہ ضروری ہے کہ بیرونی ذریعہ کسی قسم کی توانائی بالفعل برآمد نہ کرے۔

مثال 4.8

2 kg کمیت والی ایک شئے زمین سے sm اونچائی پر لے جائی جاتی ہے۔ $(g = 10\ ms^{-2})$

(a) شئے میں ذخیرہ اندوز ہونے والی توانائی بالقواہ دریافت کیجئے۔

(b) یہ توانائی بالقواہ کہاں سے آتی ہے؟

(c) اس کمیت کو اس اونچائی تک لانے کے لئے کون سی بیرونی قوت کا اس پر عمل کرنا ضروری ہے۔

(d) شئے کے 'h' اونچائی تک لے جاتے وقت اس پر عمل پیرا ہونے والی مجموعی قوت کیا ہے؟

11 physics 4. work energy and power
Thursday, January 13, 2022 9:14:24 AM

حل :

(a) توانائی بالقواہ

$$U = mgh = 2\times10\times5 = 100\ \text{J}$$

یہاں مثبت علامت یہ ظاہر کرتی ہے کہ کمیت پر توانائی ذخیرہ اندوز ہوگئی ہے

(b) یہ توانائی بالقواہ، اس بیرونی ذریعہ سے مستقل ہوتی ہے جو کمیت پر قوت برآمد کرتی ہے۔

(c) بھیجی جانے والی بیرونی قوت $\vec{F}_a$ جو شئے کو 5 m اونچائی تک لے جاتی ہے، یہ ہے $\vec{F}_a = -\vec{F}_g$

$$\vec{F}_a = -\left(-mg\,\hat{j}\right) = mg\,\hat{j}$$

جہاں $\hat{j}$ عمودی طور پر اوپری سمت کے ساتھ اکائی سمتیہ کی نشاندہی کرتا ہے۔

(d) توانائی بالقواہ کی تعریف کی مدد سے، شئے کو مستقل سمتی رفتار کے ساتھ ہی حرکت کرنا چاہئے۔ اس لئے شئے پر عمل پیرا ہونے والی کل قوت صفر ہے۔

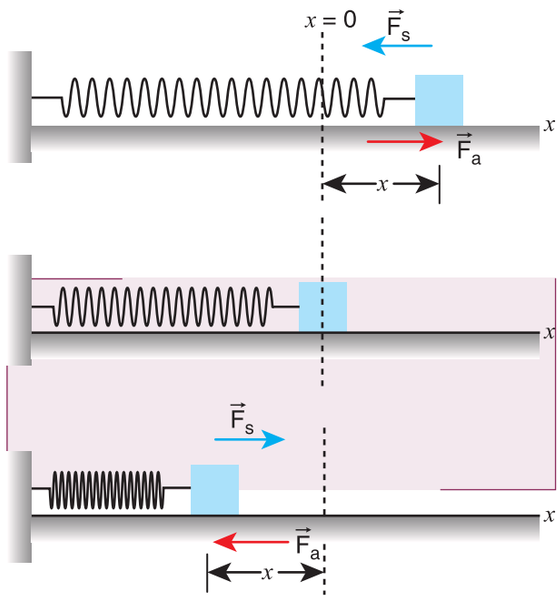
$$\vec{F}_g + \vec{F}_a = 0$$

4.2.6 لچکدار توانائی بالقواہ
(Elastic Potential energy)

جب ایک کمانی (spring) کھینچی جاتی ہے تو وہ ایک ردعملی قوت پیدا کرلیتی ہے۔ ایک کمانی کو کھینچ کر یا داب کر اس کی شکل کو تبدیل کرنے والی قوت کی وجہ کمانی میں بننے والی توانائی بالقواہ لچکدار توانائی بالقواہ کہلاتی ہے۔ کمانی کی ردعملی قوت کے خلاف بھیجی گئی قوت سے کیا گیا کام، کمانی میں لچکدار توانائی بالقواہ کے طور پر ذخیرہ اندوز ہوتی ہے۔

ایک کمانی اور کمیت کے نظام کا تصور کیجئے۔ فرض کیجئے کہ ایک کمیت m ایک نفیس افقی میز پر پڑی ہے جیسا کہ خاکہ میں بتایا گیا ہے۔

یہاں $x=0$ ہی توازنی حالت ہے۔ کمانی کا ایک سرا ایک ثابت دیوار سے جوڑ دیا جاتا ہے اور دوسرا سرا، کمیت سے جوڑا جاتا ہے۔



خاکہ 4.9۔ کمانی کی توانائی بالقواہ (لچکدار توانائی بالقواہ)

جب تک کمانی توازنی حالت میں باقی رہتی ہے۔ اس کی توانائی بالقواہ صفر ہی رہتی ہے۔ اب ایک بیرونی قوت $\vec{F}_a$ لگائی جاتی ہے تاکہ وہ کمانی قوت کی سمت میں ایک فاصلہ x کے ساتھ تانی جاسکے۔

اب کمانی میں ایک ردعملی قوت $\vec{F}_s$ پیدا ہوجاتی ہے جو کمیت کو اس کے اصلی مقام میں لانے کی کوشش کرتی ہے۔ یہ بھیجی گئی قوت اور کمانی کی قوت قدر میں مساوی مگر سمت میں مخالف ہوتی ہیں، یعنی۔

$$\vec{F}_a = -\vec{F}_s$$

ہوک (Hooke) کے کلیے کے مطابق کمانی میں پیدا ہونے والی ردعملی قوت یہ ہے۔

$$\vec{F}_s = -k\vec{x} \qquad (4.20)$$

اوپر کی مساوات میں منفی علامت یہ ظاہر کرتی ہے کہ کمانی کی قوت ہمیشہ ہٹاؤ $\vec{x}$ کی مخالف ہوتی ہے اور k قوت کی مستقلہ ہے۔ چنانچہ دی گئی قوت $\vec{F}_a = +k\vec{x}$ ہے۔

11 physics 4. work energy and power
Thursday, January 13, 2022 9:14:24 AM

مثبت علامت یہ ظاہر کرتی ہے کہ بھیجی گئی قوت ہٹاؤ $\vec{x}$ کی سمت میں ہے۔ کمانی کی قوت، متغیر کی قوت کی ایک مثال ہے چونکہ وہ ہٹاؤ $\vec{x}$ پر منحصر ہوتا ہے۔ فرض کیجئے کہ کمانی ایک چھوٹے سے فاصلے $d\vec{x}$ تک کھینچی گئی ہے۔ کمانی کو $\vec{x}$ ہٹاؤ تک کھینچنے کے لئے اس پر بھیجی گئی قوت سے کیا گیا کام لچکدار توانائی بالقواہ کے طور پر ذخیرہ اندوز ہوتا ہے۔

$$U = \int \vec{F}_a . d\vec{r} = \int_0^x |\vec{F}_a| \, |d\vec{r}| \cos\theta$$
$$= \int_0^x F_a \, dx \cos\theta \qquad (4.21)$$

بھیجی گئی قوت $\vec{F}_a$ اور ہٹاؤ $d\vec{r}$ (یعنی یہاں dx) دونوں ایک ہی سمت میں ہیں۔ چونکہ ابتدائی حالت کو توازنی حالت یا اوسط حالت کے طور پر لیا گیا ہے، $x=0$ ہی احصاء (integration) کی ادنی حد (lower limit) ہے۔

$$U = \int_0^x kx\,dx \qquad (4.22)$$

$$U = k\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^x \qquad (4.23)$$

$$U = \frac{1}{2}kx^2 \qquad (4.24)$$

اگر ابتدائی حالت صفر نہیں ہو اور اگر کمیت کا مقام x_i سے x_f میں تبدیل ہوگی، تو پھر لچکدار توانائی بالقواہ یہ ہے۔

$$U = \frac{1}{2}k\left(x_f^2 - x_i^2\right) \qquad (4.25)$$

مساوات (4.24) اور (4.25) کی مدد سے ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ ایک کھینچی ہوئی کمانی کی توانائی بالقواہ، قوت کی مستقلہ k اور کھنچاؤ یا داب (elongation or compression) x پر منحصر ہوتی ہے۔

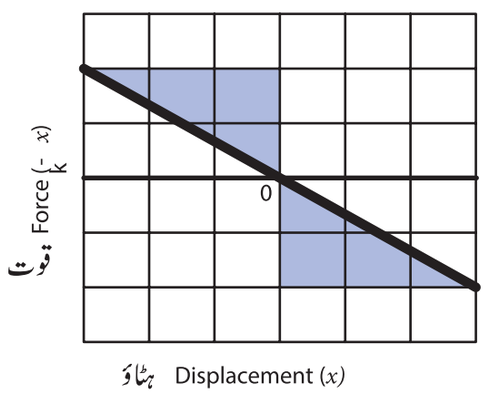
نوٹ

کمانی میں ذخیرہ اندوز ہونے والی توانائی اس سے جڑی کمیت پر منحصر نہیں ہوتی۔

ایک کمانی کے لئے قوت اور ہٹاؤ کی ترسیم

چونکہ کمانی کی ردعملی قوت اور ہٹاؤ خطی طور پر $F = -kx$ کی مناسبت رکھتے ہیں اور دونوں سمتی طور پر مخالفت رکھتے ہیں، F اور x کی ترسیم ایک سیدھا خط ہے، جو صرف دوسرے اور چوتھے ربع (quadrant) میں پھولتی ہے، جیسا کہ خاکہ 4.10 میں بتایا گیا ہے۔ لچکدار توانائی بالقواہ کا محاسبہ F–x کی ایک ترسیم کی مدد سے بآسانی کیا جاسکتا ہے۔ رنگین رقبہ (مثلث) کمانی کی قوت سے کیا گیا کام ہے۔

$$\text{رقبہ} = \frac{1}{2}\,(\text{قاعدہ}) \times (\text{اونچائی}) = \frac{1}{2} \times (x) \times (kx).$$
$$= \frac{1}{2}kx^2$$

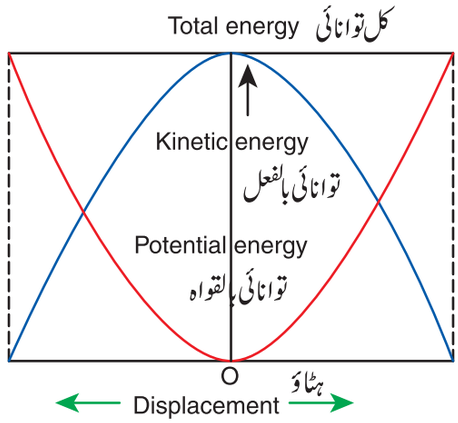


خاکہ 4.10 ایک کمانی کے لئے قوت اور ہٹاؤ کی ترسیم

11 physics 4. work energy and power
Thursday, January 13, 2022 9:14:25 AM

ایک کمانی کے لئے توانائی بالقواہ اور ہٹاؤ کی ترسیم

ایک دابی ہوئی یا تانی گئی کمانی اپنی ذخیرہ اندوز توانائی بالقواہ کو اس سے جڑی ہوئی کمیت کی توانائی بالفعل میں منتقل کرتی ہے۔ خاکہ 4.11 میں توانائی بالقواہ اور ہٹاؤ کی درمیانی ترسیم بتائی گئی ہے۔



خاکہ 4.11 توانائی بالقواہ اور ہٹاؤ کی درمیانی ترسیم۔ ایک کمانی اور کمیت کے نظام کے لئے

ایک بے رگڑ ماحول میں توانائی فعلی سے قواہی اور قواہی سے فعلی میں اس طرح منتقل ہوتی رہتی ہے کہ اس نظام کی کل توانائی مستقل ہی رہتی ہے۔ اوسط مقام پر

$$\Delta KE = \Delta U \qquad (4.26)$$

مثال 4.9

فرض کیجئے کہ A اور B کی طرح دو کمانیاں ہیں۔ $k_A > k_B$ اگر وہ ایک ہی قوت سے تانی جائیں تو کس کمانی پر زیادہ کام کیا جانا پڑے گا؟

حل:

$$F = k_A x_A = k_B x_B$$

$$x_A = \frac{F}{k_A}; \quad x_B = \frac{F}{k_B}$$

کمانیوں پر کیا گیا کام ان میں توانائی بالقواہ کے طور پر ذخیرہ اندوز ہوتا ہے۔

$$U_A = \frac{1}{2} k_A x_A^2 \; ; \quad U_B = \frac{1}{2} k_B x_B^2$$

$$\frac{U_A}{U_B} = \frac{k_A x_A^2}{k_B x_B^2} = \frac{k_A \left(\frac{F}{k_A}\right)^2}{k_B \left(\frac{F}{k_B}\right)^2} = \frac{\frac{1}{k_A}}{\frac{1}{k_B}}$$

$$\frac{U_A}{U_B} = \frac{k_B}{k_A}$$

$k_A > k_B$ سے یہ پتہ چلتا ہے کہ $U_B > U_A$۔

لہذا A سے B پر زیادہ کام کیا جانا پڑے گا۔

مثال 4.10

ایک کمانی کو ایک بھیجی گئی قوت کے ذریعہ اس کے توازنی مقام سے 25 سم تک تانا گیا ہے اور اس سے m کمیت کا ایک جسم جڑا ہوا ہے۔

(a) کمانی۔کمیت کے نظام میں ذخیرہ اندوز ہونے والی توانائی بالقواہ دریافت کیجئے۔

(b) تنائے جانے میں کمانی کی قوت سے کیا گیا کام کیا ہے؟

(c) فرض کیجئے کہ اگر اس کمانی کو وہی 25 سم سے دابا جائے تو ذخیرہ اندوز ہونے والی توانائی بالفعل دریافت کیجئے اور دابنے کے دوران کمانی کی قوت سے کیا گیا کام بھی معلوم کیجئے (کمانی کی مستقلہ $k = 0.1 \text{ N m}^{-1}$ ہے۔)

حل :

کمانی کا مستقلہ $k = 0.1 \text{ N m}^{-1}$

ہٹاؤ $x = 25 \text{ cm} = 0.25 \text{ m}$

(a) کمانی میں ذخیرہ اندوز ہونے والی توانائی بالقواہ یوں پیش کی جاتی ہے۔

$$U = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} \times 0.1 \times (0.25)^2 = 0.0031 \text{J}$$

11 physics 4. work energy and power
Thursday, January 13, 2022 9:14:25 AM

(b) کمانی کی قوت $\vec{F}_s$ سے کیا گیا کام W_s اس طرح پیش کیا گیا ہے۔

$$W_s = \int_0^x \vec{F}_s \cdot d\vec{r} = \int_0^x \left(-k\,x\hat{i}\right)\cdot\left(dx\,\hat{i}\right)$$

کمانی کی قوت $\vec{F}_s$ منفی x سمت میں عمل کرتی ہے جب کہ تناؤ (elongation) مثبت x سمت کی طرف عمل کرتا ہے۔

$$W_s = \int_0^x (-kx)\,dx = -\frac{1}{2}kx^2$$

$$W_s = -\frac{1}{2}\times 0.1\times(0.25)^2 = -0.0031\,J$$

غور کیجئے کہ توانائی بالقواہ کی تعریف، بیرونی ذریعہ سے کئے جانے والے کام کے ذریعہ کی جاتی ہے۔ توانائی بالقواہ میں موجود مثبت علامت یہ ظاہر کرتی ہے کہ توانائی، ذریعہ سے شئے میں منتقل ہوگئی ہے مگر چونکہ ردعملی قوت ہٹاؤ کی سمت کی مخالف سمت میں ہے، اس معاملے میں ردعملی قوت سے کیا گیا کام منفی ہے۔

(c) دباؤ (Compression) کے دوران بھی شئے میں ذخیرہ اندوز ہونے والی توانائی بالقواہ بھی اتنی ہی ہوتی ہے۔

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = 0.0031\,J.$$

دابنے کے دوران کمانی کی ردعملی کی قوت سے کیا گیا کام اس طرح دیا جاتا ہے۔

$$W_s = \int_0^x \vec{F}_s.d\vec{r} = \int_0^x \left(k\,x\,\hat{i}\right).\left(-dx\,\hat{i}\right)$$

دابنے کے معاملے میں کمانی کی ردعملی قوت مثبت x - سمت کی طرف عمل پیرا ہوتی ہے اور ہٹاؤ منفی x-سمت کی طرف ہوتا ہے۔

$$W_s = \int_0^x (-kx)\,dx = -\frac{1}{2}kx^2 = -0.0031\,J$$

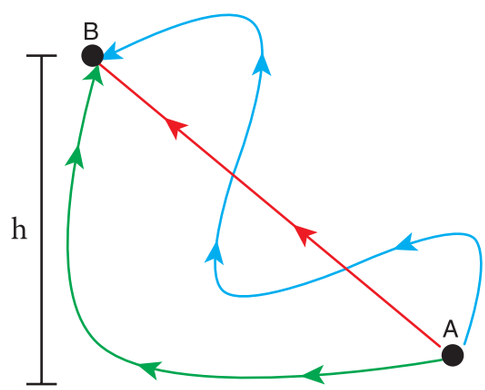
4.2.7 بقائی اور غیر بقائی قوتیں
(Conservative and Non-Conservative Forces)

بقائی قوت (Conservative force)

جسم کو حرکت کرانے میں قوت سے یا قوت کے خلاف کیا گیا کام اگر صرف شئے کی ابتدائی اور انتہائی مقامات پر منحصر ہے۔ ابتدائی اور انتہائی مقامت کے درمیانی راستے کی فطرت پر منحصر نہیں ہے، تو ایسی قوت بقائی کہلائے گی۔

آیئے ہم زمین کے ایک نقطہ A پر ایک شئے کا تصور کریں۔ اسے زمین کی سطح سے ایک اونچائی h تک ایک اور مقام B پر تین راستوں سے لے جایا جاسکتا ہے، جیسا کہ خاکہ 4.12 میں بتایا گیا ہے۔

راستہ چاہے جیسا بھی ہو، جب تک ابتدائی اور انتہائی مقامات یکساں ہوں، تب تک جاذبی قوت کے خلاف ایک ہی کام کیا گیا ہے۔ اسی وجہ سے جاذبی قوت ایک بقائی قوت کہلاتی ہے۔ بقائی قوت توانائی بالقواہ کے منفی میلان (gradient) (اتار چڑھاؤ) کے برابر ہوتی ہے۔ یک ابعادی معاملہ میں



خاکہ 4.12۔ بقائی قوت

$$F_x = -\frac{dU}{dx} \qquad (4.27)$$

لچکدار کمانی کی قوت، برق سکونی قوت مقناطیسی قوت، جاذبی قوت وغیرہ بقائی قوت کی مثالیں ہیں۔

11 physics 4. work energy and power
Thursday, January 13, 2022 9:14:25 AM

جدول 4.3 بقائی اور غیر بقائی قوتوں کا موازنہ

عدد شمار	بقائی قوتیں Non-conservative forces	غیر بقائی قوتیں Conservative forces
1۔	کام راستے پر غیر منحصر ہے۔	کام راستے پر منحصر ہے۔
2۔	ایک راؤنڈ ٹرپ میں کیا گیا کام صفر ہے۔	راؤنڈ ٹرپ (round trip) میں کیا گیا کام صفر نہیں ہے۔
3۔	کل توانائی مستقل رہتی ہے ۔	حرارتی توانائی کے طور پر توانائی بٹ جاتی ہے۔
4۔	کیا گیا کام مکمل طور پر رجعی recoverable ہوتا ہے۔	کیا گیا کام مکمل طور پر رجعی نہیں ہوتا۔
5۔	قوت توانائی بالقواہ کا منفی میلان ہے۔	ایسی کوئی مناسبت نہیں پائی جاتی۔

غیر بقائی قوت (Non-conservative force)

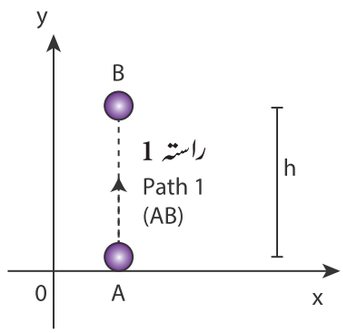
ایک قوت غیر بقائی اس وقت کہلاتی ہے، جب اس قوت سے یا اس کے خلاف جسم کی حرکت کرانے میں کیا گیا کام انتہائی اور ابتدائی مقامات کے درمیانی راستے پر منحصر ہوتا ہے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ کئے گئے کام کی قیمت مختلف راستوں میں مختلف ہوتی ہے۔

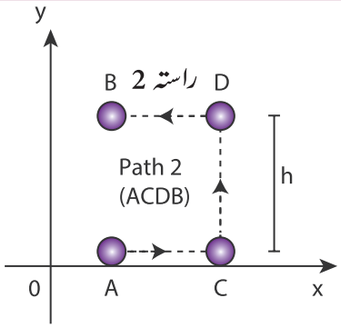
1) رگڑ کی قوتیں غیر بقائی قوتیں ہوتی ہیں کیونکہ رگڑ کے خلاف کیا جانے والا کام ہٹائے گئے جسم کے راستے کی لمبائی پر منحصر ہے۔

2) ہوائی مزاحمت کی وجہ سے بننے والی قوت، گاڑھے پن (لزوجیت) (Viscous) کی قوت وغیرہ بھی غیر بقائی قوتیں ہوتی ہیں۔ چونکہ ان قوتوں سے یا ان کے خلاف کیا گیا کام حرکت کی سمتی رفتار پر منحصر ہوتا ہے۔

مثال 4.11

مندرجۂ ذیل معاملات کے لئے جاذبی قوت سے کئے گئے کام کا محاسبہ کیجئے۔





حل :

قوت $\vec{F} = mg\left(-\hat{j}\right) = -mg\hat{j}$

ہٹاؤ کی سمتیہ $d\vec{r} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j}$

(چونکہ ہٹاؤ دو ابعادوں میں ہوتا ہے،
اکائی سمتیے $\hat{i}$ اور $\hat{j}$ استعمال کئے جاتے ہیں)

(a) چونکہ حرکت صرف عمودی ہے، افقی ہٹاؤ کا جز dx صفر ہے۔
لہذا (h فاصلہ کا) راستہ 1 کے ساتھ قوت سے کیا گیا کام یہ ہے۔

$$W_{\text{path 1}} = \int_A^B \vec{F}.d\vec{r} = \int_A^B \left(-mg\hat{j}\right).\left(dy\,\hat{j}\right)$$

$$= -mg\int_0^h dy = -mgh$$

راستہ 2 کے لئے کل کیا گیا کام یہ ہے۔

$$W_{\text{path 2}} = \int_A^B \vec{F}.d\vec{r} = \int_A^C \vec{F}.d\vec{r} + \int_C^D \vec{F}.d\vec{r} + \int_D^B \vec{F}.d\vec{r}$$

11 physics 4. work energy and power
Thursday, January 13, 2022 9:14:26 AM

مگر

$$\int_A^C \vec{F}.d\vec{r} = \int_A^C \left(-mg\hat{j}\right).\left(dx\hat{i}\right) = 0$$

$$\int_C^D \vec{F}.d\vec{r} = \int_C^D \left(-mg\hat{j}\right).\left(dy\hat{j}\right)$$

$$= -mg\int_0^h dy = -mgh$$

$$\int_D^B \vec{F}.d\vec{r} = \int_D^B \left(-mg\hat{j}\right).\left(-dx\hat{i}\right) = 0$$

چنانچہ راستہ 2 کے تحت قوت کے ذریعہ کیا گیا کل کام یہ ہے۔

$$W_{\text{path 2}} = \int_A^B \vec{F}.d\vec{r} = -mgh$$

غور کیجئے کہ بقائی قوت سے کیا گیا کام راستے پر غیر منحصر ہے۔

مثال 4.12

2kg کمیت والی ایک شئے کا تصور کیجئے جو 20N کی ایک بیرونی قوت کے ذریعہ فعلی رگڑ کا تعاونی عدد 0.9 رکھنے والی ایک سطح میں 10m کے فاصلے تک ہٹائی گئی ہے۔ بیرونی قوت اور فعلی رگڑ سے کیا جانے والا کام معلوم کیجئے۔ نتیجے سے متعلق اپنے خیال کا اظہار کیجئے۔ (فرض کیجئے کہ $g = 10\ ms^{-2}$ ہے۔

حل:

جب ایک شئے افقی سطح پر حرکت کرتی ہے تو، وہ دو قوتیں محسوس کرتی ہے۔

(a) بیرونی قوت $F_{ext} = 20\ N$

(b) فعلی رگڑ $f_k = \mu_k mg = 0.9\times(2)\times 10 = 18\,N$

بیرونی قوت سے کیا گیا کام

$$W_{ext} = F\,d = 20\times 10 = 200\,J$$

فعلی رگڑ کی قوت سے کیا گیا کام

$$W_k = f_k d = (-18)\times 10 = -180\ J.$$

یہاں منفی علامت یہ ظاہر کرتی ہے کہ فعلی رگڑ کی قوت ہٹاؤ کی سمت کی مخالف ہے۔

شئے پر کیا گیا کل کام

$$W_{total} = W_{ext} + W_k = 200\ J - 180\ J = 20\ J.$$

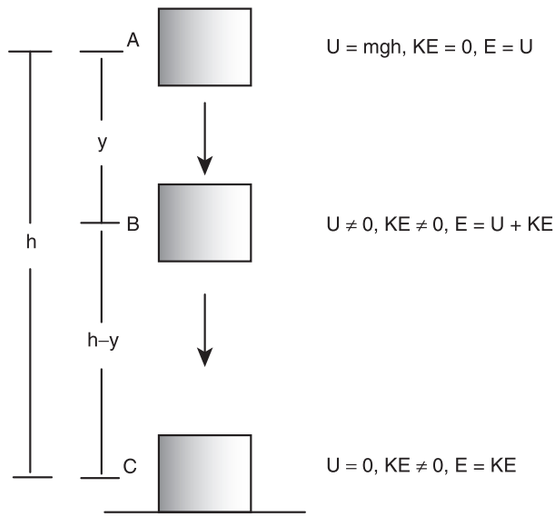
چونکہ رگڑ ایک غیر بقائی قوت ہے۔ بیرونی قوت سے دی گئی 200 J کے مقدار میں 180 J کھو گئی ہے اور اسے دوبارہ حاصل نہیں کیا جا سکتا۔

4.2.8 بقائے توانائی کا کلیہ
(Law of conservation of energy)

جب ایک شئے اوپر پھینکی جاتی ہے تو اس کی توانائی بالفعل کم ہوتی ہے اور توانائی بالقواہ بڑھتی جاتی ہے (ہوائی مزاحمت نظر انداز کرنے پر) جب وہ انتہائی اونچائی کے نقطہ پر پہنچتی ہے تو اس کی توانائی مکمل طور پر قواہی ہوتی ہے۔ اسی طرح جب وہ شئے نیچے گرنے لگتی ہے تو اس کی توانائی بالفعل بڑھتی جاتی ہے جب کہ اس کی توانائی بالقواہ گھٹتی جاتی ہے۔ جب وہ زمین کو چھوتی ہے تو اس میں موجود توانائی کلی طور پر فعلی ہوتی ہے۔ درمیانی نقاط پر موجود توانائی فعلی اور قواہی، دونوں کا مجموعہ ہوتی ہے جیسا کہ خاکہ 4.13 میں بتایا گیا ہے۔ جب وہ شئے زمین پر پہنچتی ہے تو اس کی توانائی بالفعل مکمل طور پر توانائی کی دوسری قسم جیسے آواز، حرارت، روشنی یا شئے کی شکل کی تبدیلی وغیرہ میں بٹ جاتی ہے۔

اس مثال میں ہر نقطہ پر توانائی کی منتقلی ہوتی ہے۔ توانائی بالفعل اور توانائی بالقواہ کا حاصل جمع یعنی کل میکانیکی توانائی ہمیشہ مستقل رہتی ہے جس سے پتہ چلتا ہے کہ توانائی بقائی ہے۔ اسی کو کلیہ بقائے توانائی کے طور پر بیان کیا جاتا ہے۔

11 physics 4. work energy and power
Thursday, January 13, 2022 9:14:26 AM



خاکہ 4.13 بقائے توانائی

بقائے توانائی کا کلیہ یہ بیان کرتا ہے کہ ''توانائی نہ تو پیدا کی جاسکتی ہے اور نہ ہی ختم کی جاسکتی ہے، بلکہ توانائی کو ایک قسم سے دوسرے قسم میں تبدیل کیا جاسکتا ہے۔ اس کے باوجود ایک الگ تھلگ نظام کی کل توانائی مستقل ہی رہتی ہے۔''

خاکہ 4.13 یہ بتاتا ہے کہ اگر ایک شئے h اونچائی سے حالت سکون سے شروع ہوتی ہے تو اس کی کل توانائی خالص طور پر توانائی بالقواہ (U=mgh) ہوتی ہے اور اس کی توانائی بالفعل (KE)، h پر صفر ہوتی ہے۔

جب وہ شئے کچھ فاصلہ y پر پہنچتی ہے تو، توانائی بالقواہ اور توانائی بالفعل صفر نہیں ہوتیں۔ جب کہ کل توانائی اتنی ہی رہتی ہے جتنی کہ h اونچائی پر موجود تھی۔ جب وہ شئے زمین کو چھونے کے قریب ہوتی ہے تو، اس کی توانائی بالقواہ صفر ہو جاتی ہے اور کل توانائی مکمل طور پر توانائی بالفعل بن جاتی ہے۔

مثال 4.13

$1kg$ کمیت والی ایک شئے h= 10m اونچائی سے گر رہی ہے۔ معلوم کیجئے۔

(a) h=10m پر شئے کی کل توانائی

(b) h=4m پر پہنچتے وقت شئے کی توانائی بالقواہ

(c) h=4m پر پہنچتے وقت شئے کی توانائی بالفعل

(d) جب شئے زمین سے ٹکراتی ہے تو اس کی رفتار کیا ہوگی؟

(تصور کر لیجئے کہ $g = 10\ ms^{-2}$ ہے۔)

حل:

(a) جاذبی قوت ایک بقائی قوت ہے۔ اس لئے تمام حرکت کے دوران کل توانائی E مستقل ہوتی ہے۔ h=10m پر، کل توانائی خالص توانائی بالقواہ ہوتی ہے۔

$$E = U = mgh = 1 \times 10 \times 10 = 100\ \text{J}$$

(b) h=4m پر شئے کی توانائی بالقواہ یہ ہے۔

$$U = mgh = 1 \times 10 \times 4 = 40\,\text{J}$$

(c) h=4m پر شئے کی توانائی بالفعل یہ ہے۔

مکمل حرکت کے دوران چونکہ کل توانائی مستقل ہوتی ہے، توانائی بالفعل یہاں یہ ہوگی۔

$$KE = E - U = 100 - 40 = 60\,\text{J}$$

اس کے علاوہ، 4 m کی اونچائی پر شئے کی سمتی رفتار کی مدد سے بھی اس کی توانائی بالفعل معلوم کی جاسکتی ہے۔ 4m کی اونچائی پر شئے 6m تک گر چکی ہوتی ہے۔ حرکت کی مساوات کی مدد سے 6m تک گرنے کے بعد کی سمتی رفتار معلوم کی جاسکتی ہے۔

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 10 \times 6} = \sqrt{120}\ \text{m s}^{-1};$$

$$v^2 = 120$$

توانائی بالفعل یہ ہے

$$KE = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 1 \times 120 = 60\,\text{J}$$

(d) جب شئے زمین سے ٹکرانے کے بالکل قریب ہوتی ہے تو اس میں موجود توانائی کل طور پر توانائی بالفعل ہوتی ہے اور توانائی بالقواہ U=0 ہوتی ہے۔

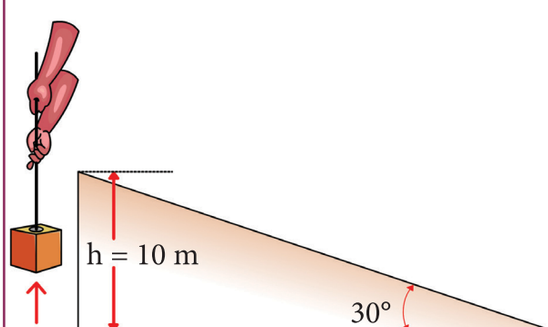
11 physics 4. work energy and power
Thursday, January 13, 2022 9:14:27 AM

$$E = KE = \frac{1}{2}mv^2 = 100\ J$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}KE} = \sqrt{\frac{2}{1}\times 100} = \sqrt{200} \approx 14.12\ m\ s^{-1}$$

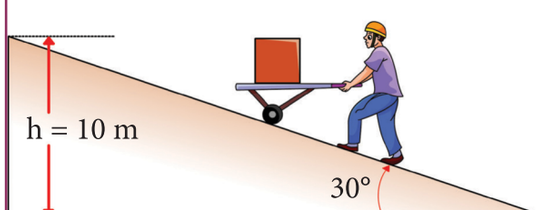
مثال 4.14

100 kg کا ایک جسم دومختلف طریقوں سے 10m اونچائی تک لے جایا جاتا ہے، جیسا کہ خاکہ میں بتایا گیا ہے۔ دونوں معاملات میں جاذبہ سے کیا گیا کام کیا ہے؟ ایک شئے کو ایک ڈھلوان (سطح مائل) کے ذریعہ لے جانا کیوں آسان ہوتا ہے؟



Path (1) straight up

راستہ (1) سیدھے اوپر



راستہ (2) ڈھلوان سطح کے ذریعے

حل:

m = 100 kg, h = 10 m

راستہ (1) کے ساتھ

شئے کو 10m کی اونچائی تک لے جانے کے لئے کم از کم درکار قوت F_1 جاذبی قوت کے برابر ہونی چاہئے۔

$$F_1 = mg = 100 \times 10 = 1000\ N$$

پہلے راستے پر ہٹایا گیا فاصلہ h=10m ہے۔

پہلے راستہ پر کیا گیا کام یہ ہے۔

$$W = F\ h = 1000 \times 10 = 10,000\ J$$

راستہ (2) کے ساتھ:

ڈھلوان سطح (مائل سطح) کے معاملہ میں، شئے کو اوپر لے جانے کے لئے درکار قوت F_2، mg کے برابر نہیں ہوتی، بلکہ وہ $mg \sin\theta$ کے برابر ہوتی ہے۔ $(mg \sin\theta < mg)$

یہاں زاویہ $\theta = 30°$ ہے۔

چنانچہ $F_2 = mg \sin\theta = 100 \times 10 \times \sin 30° = 100 \times 10 \times 0.5 = 500\ N$

لہذا $(mg \sin\theta < mg)$

ڈھلوان سطح (مائل سطح) کے ساتھ طے کیا گیا راستہ کی لمبائی

$$l = \frac{h}{\sin 30°} = \frac{10}{0.5} = 20\,m$$

ڈھلوان سطح (مائل سطح) (2) کے ذریعہ شئے پر کیا گیا کام

$$W - F_2 l = 500 \times 20 = 10,000\ J$$

چونکہ جاذبی قوت ایک بقائی قوت ہے، جاذبہ سے شئے پر کیا گیا کام لئے گئے راستہ پر منحصر نہیں ہوتا۔

دونوں راستوں میں جاذبی قوت سے کیا گیا کام 10,000 جول ہے۔

راستہ (1) کے ساتھ: کم فاصلہ طے کرنے کے لئے جاذبہ کے خلاف زیادہ قوت لگانی پڑتی ہے۔

راستہ (2) کے ساتھ: زیادہ فاصلہ طے کرنے کے لئے جذبہ کے خلاف کم قوت لگانی پڑتی ہے۔

چونکہ ڈھلوان سطح (مائل سطح) کے ذریعہ لگائی جانے والی قوت کم ہوتی ہے، ڈھلوان سطح (مائل سطح) کے راستے سے شئے کو لے جانا بہت آسان ہوتا ہے۔

11 physics 4. work energy and power
Thursday, January 13, 2022 9:14:27 AM

مثال 4.15

m کمیت والی ایک شئے v_0 کی ابتدائی سمتی رفتار کے ساتھ اچھالی جاتی ہے۔ h اونچائی پر رفتار معلوم کیجئے۔

حل:

چونکہ جاذبی قوت بقائی ہوتی ہے، کل حرکت کے دوران کل توانائی کی بقاء ہوتی ہے۔

	Initial ابتدائی	Final انتہائی
Kinetic energy توانائی بالفعل	$\frac{1}{2}mv_0^2$	$\frac{1}{2}mv^2$
Potential energy توانائی بالقواہ	0	mgh
Total energy کل توانائی	$\frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_0^2$	$\frac{1}{2}mv^2 + mgh$

h اونچائی پر توانائی بالقواہ، توانائی بالفعل اور کل توانائی کی قیمتیں ناپی جاتی ہیں۔

کلیہ بقائے توانائی کی مدد سے، ابتدائی اور انتہائی توانائیاں یکساں ہوتی ہیں۔

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$$

$$v_0^2 = v^2 + 2gh$$

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gh}$$

نوٹ کیجئے کہ حصہ (2.11.2) میں Calculus کے طریقے کی بنیاد پر حرکت کی مساوات کا استعمال کرتے ہوئے اسی طرح کا نتیجہ حاصل کیا گیا تھا۔ بہرحال توانائی کی بقاء کے طریقے کے ذریعہ اس کا محاسبہ کرنا Calculus کے طریقے سے بہت آسان ہے۔

مثال 4.16

ایک کمانی سے جڑی 2 kg کمیت والی ایک شئے اپنی توازنی مقام سے $x = 10\text{m}$ کے ایک فاصلے تک ہٹائی جاتی ہے۔ کمانی کا مستقلہ $k = 1\ \text{N m}^{-1}$ ہے، اور فرض کر لیجئے کہ وہ سطح بے رگڑ سطح ہے۔

(a) جب وہ کمیت توازنی مقام پار کرتی ہے تو اس کی رفتار کیا ہوگی؟

(b) جب وہ شئے متوازن مقام اور $x = \pm\ 10\ \text{m}$ کے انتہائی مقامات پر پہنچتی ہے تو اس پر کون سی قوت عمل کرتی ہے؟

حل:

(a) چونکہ کمانی کی قوت ایک بقائی قوت ہے، کل توانائی ایک مستقلہ ہے۔ $x=10\text{m}$ پر کل توانائی قوت ہے۔ کلی طور پر توانائی بالقواہ ہی ہوتی ہے۔

$$E = U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\times(1)\times(10)^2 = 50\ \text{J}$$

جب وہ کمیت توازنی مقام ($x=0$) سے گزرتی ہے تو توانائی بالقواہ

$$U = \frac{1}{2}\times 1\times(0) = 0\ \text{J}$$

اس حالت میں کل توانائی خالص فعلی ہوتی ہے۔

$$E = KE = \frac{1}{2}mv^2 = 50\,\text{J}$$

رفتار یہ ہے۔

$$v = \sqrt{\frac{2KE}{m}} = \sqrt{\frac{2\times 50}{2}} = \sqrt{50}\ ms^{-1} \approx 7.07\ ms^{-1}$$

11 physics 4. work energy and power
Thursday, January 13, 2022 9:14:27 AM

(b) چونکہ کمانی کی ردعملی قوت $F = -kx$ ہے، جب شئے توازنی مقام سے گزرتی ہے تو وہ کوئی قوت محسوس نہیں کرتی، نوٹ کیجئے کہ توازنی مقام پر شئے سے تیز رفتار میں ہوتی ہے۔ جب وہ شئے $x = +10$ m (تناؤ) پر ہوتی ہے تو قوت $F = -kx$ ہوتی ہے۔

$$F = -(1)(10) = -10 \text{ N.}$$

یہاں منفی علامت یہ ظاہر کرتی ہے کہ قوت توازنت کی طرف رخ کررہی ہے یعنی منفی x- محور کی طرف اور جب شئے $x = -10$ m (دبی ہوئی ہوتی ہے) پر ہوتی ہے تو وہ

$$F = -(1)(-10) = +10 \text{ N.}$$

قوت محسوس کرتی ہے۔ یہاں مثبت علامت یہ ظاہر کرتی ہے کہ قوت مثبت x محور کے تحت ہے۔

$x = \pm 10$m پر وہ شئے وقتی طور پر حالت سکون اختیار کرتی ہے۔ حالانکہ وہ ان دونوں مقامات پر ایک انتہائی قوت سے دو چار ہوتی ہے۔

4.2.9 عمودی دائرہ میں ہونے والی حرکت:
Motion in a vertical circle

تصور کیجئے کہ m کمیت کا ایک جسم ایک بے وزن اور غیر لچکدار ڈوری کے ایک کنارے سے بندھا ہوا ہے، اس ڈوری کا دوسرا کنارا ثبت کردیا گیا ہے۔ فرض کیجئے کہ وہ جسم عمودی سطح میں دائری حرکت کررہا ہے۔ ڈوری کی لمبائی اس دائری راستے کا نصف قطر ($\vec{r}$) بن جاتی ہے۔ (خاکہ 4.14)

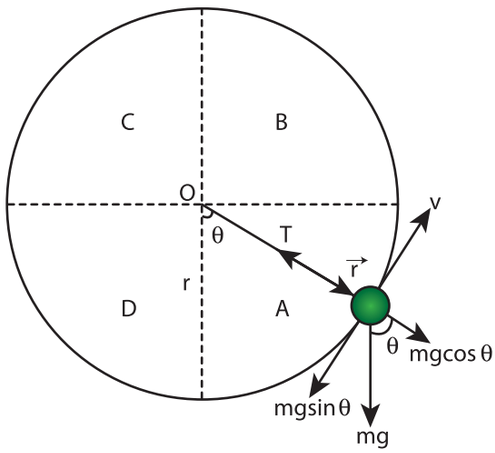
آیئے ہم اس مقام پر آزاد جسمانی خاکہ (FBD) بناتے ہوئے اس جسم کی حرکت پر بحث کریں جہاں مقامی سمتیہ ($\vec{r}$) نچلی عمودی سمت کے ساتھ θ کا ایک زاویہ بناتی ہے اور اس کی بروقتہ سمتی رفتار خاکہ 4.14 میں بتائی گئی ہے۔

یہاں کمیت پر دو قوتیں عمل پیرا ہوتی ہیں۔

1۔ نچلی جانبی جاذبی قوت 2۔ ڈوری کے ساتھ موجود تناؤ

کمیت پر نیوٹن کے دوسرے کلیہ کا استعمال کرتے ہوئے، مماسی سمت میں

$$mg\sin\theta = m a_t$$
$$mg\sin\theta = -m\left(\frac{dv}{dt}\right) \qquad (4.28)$$



خاکہ 4.14 عمودی دائرے میں حرکت

جہاں $a_t = -\frac{dv}{dt}$ مماسی منفی اسراع (تعویق) (retardation) ہے۔

اشعاعی (radial) سمت میں

$$T - mg\cos\theta = m a_r$$
$$T - mg\cos\theta = \frac{mv^2}{r} \qquad (4.29)$$

جہاں $a_r = \frac{v^2}{r}$ مرکز مائل اسراع ہے

حرکت کو بہتر طریقے سے سمجھنے کے لئے، اس دائرے کو A,B,C,D نامی چار حصوں میں تقسیم کرلیا جاسکتا ہے۔ ان دو مساوات، کی مدد سے ان چار اہم حقیقتوں کو سمجھنا ضروری ہے۔

(i) θ کی تمام قیمتوں کے لئے سوائے ($g \sin\theta$) کمیت میں مماسی اسراع (سوائے $\theta = 0°$) پائی جاتی ہے۔ اس سے صاف طور پر پتہ چلتا ہے کہ عمودی دائری حرکت ایک یکساں دائری حرکت نہیں ہے۔

(ii) مساوات (4.28) اور (4.29) سے یہ بھی پتہ چلتا ہے کہ چونکہ کل حرکت کے دوران سمتی رفتار کی قدر مستقل نہیں ہے، ڈوری کا تناؤ بھی مستقل نہیں ہے۔

11 physics 4. work energy and power
Thursday, January 13, 2022 9:14:28 AM

(iii) مساوات (4.29)، $T = mg\cos\theta + \frac{mv^2}{r}$

دائرے کے A اور D حصوں میں یہ واضح کرتی ہے کہ

$\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ کے لئے } \cos\theta \text{ مثبت ہے}\right)$

اصطلاح $\cos\theta$ ہمیشہ صفر سے زیادہ ہوتی ہے۔لہذا سمتی رفتار کے ختم ہونے پر بھی تناؤ ختم نہیں ہوسکتا۔

(iv) مساوات (4.29) $\frac{mv^2}{r} = T - mg\cos\theta;$

مزید وضاحت کرتی ہے کہ دائرے کے B اور C حصوں میں

$\left(\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \text{ کے لئے } \cos\theta \text{ منفی ہے}\right)$

دوسری اصطلاح ہمیشہ صفر سے بڑی ہوتی ہے۔لہذا تناؤ کے ختم ہونے پر بھی سمتی رفتار ختم نہیں ہوتی۔

عمودی دائرے میں ہونے والی حرکت سے متعلق مسئلوں کو حل کرتے وقت ان نکات کو ذہن میں رکھنا چاہئے۔

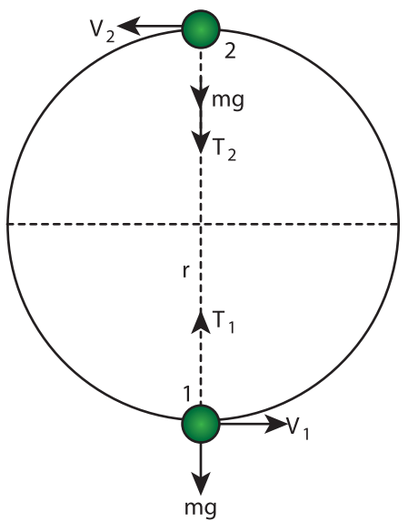
اس سے متعلق مزید جائزہ لینے کے لئے، آیئے ہم صرف دو نقاط پر غور کریں، سب سے ادنی نقطہ 1 اور سب سے اعلیٰ نقطی 2 جیسا کہ خاکہ 4.15 میں بتایا گیا ہے۔فرض کیجئے کہ سب سے ادنیٰ نقطہ 1 پر شئے کی سمتی رفتار $\vec{v}_1$ اور سب سے اعلیٰ نقطہ 2 پر $\vec{v}_2$ اور دوسرے نقطوں پر $\vec{v}$ ہوتی ہے۔فرض کیجئے کہ ڈوری کا تناؤ سے سب سے ادنی نقطہ پر $\vec{T}_1$، سب سے اعلیٰ نقطہ 2 پر $\vec{T}_2$ اور دیگر تمام نقطوں پر $\vec{T}$ ہے۔ ہر نقطے پر تناؤ مرکز کی طرف ہی رخ کرتا ہے۔کلیہ بقائے توانائی کا استعمال کرتے ہوئے ان دو نقاط پر تناؤ اور سمتی رفتاروں کو معلوم کیا جاسکتا ہے۔

ادنیٰ ترین نقطہ (1) کے لئے

جب جسم ادنی ترین نقطہ (1) پر ہوتا ہے، دو قوتیں اس پر عمل پیرا ہوتی ہیں۔جاذبی قوت $m\vec{g}$ جو شئے پر (عمودی طور پر نچلی جانب) عمل پیرا ہوتی ہے اور دوسری قوت تناؤ $\vec{T}_1$ جو عمودی طور پر اوپری جانب عمل پیرا ہوتی ہے اور مساوات (4.29) کی مدد سے ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$T_1 - mg = \frac{mv_1^2}{r} \qquad (4.30)$$

$$T_1 = \frac{mv_1^2}{r} + mg \qquad (4.31)$$



خاکہ 4.15 ادنیٰ ترین اور اعلیٰ ترین نقاط کے لئے بتائی گئی ہے عمودی دائرے میں ہونے والی حرکت

اعلیٰ ترین نقطہ (2) کے لئے

اعلیٰ ترین نقطہ (2) پر، دونوں جاذبی قوت $m\vec{g}$ اور تناؤ $\vec{T}_2$ نیچے کی جانب ہی عمل پیرا ہوتے ہیں، یعنی دوبارہ مرکز ہی کی جانب عمل پیرا ہوتے ہیں۔

$$T_2 + mg = \frac{mv_2^2}{r} \qquad (4.32)$$

$$T_2 = \frac{mv_2^2}{r} - mg \qquad (4.33)$$

مساوات (4.32) اور (4.33) کی مدد سے یہ سمجھا جاسکتا ہے کہ $T_1 > T_2$ کا درمیانی فرق مساوات (4.33) کو مساوات (4.31) سے تفریق کرکے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ $T_1 - T_2$

11 physics 4. work energy and power
Thursday, January 13, 2022 9:14:28 AM

$$T_1 - T_2 = \frac{mv_1^2}{r} + mg - \left(\frac{mv_2^2}{r} - mg\right)$$

$$= \frac{mv_1^2}{r} + mg - \frac{mv_2^2}{r} + mg$$

$$T_1 - T_2 = \frac{m}{r}\left[v_1^2 - v_2^2\right] + 2mg \qquad (4.34)$$

دونوں نقاط 1 اور 2 پر اصطلاح $\left[v_1^2 - v_2^2\right]$ کی قیمت، کلیہ بقائے توانائی کے استعمال سے بآسانی معلوم کرلی جاسکتی ہے۔

نوٹ

کمیت پر تناؤ سے کوئی کام نہیں کیا جاتا کیونکہ حرکت کی سمت اور تناؤ ہمیشہ ایک دوسرے کے عمودی ہوتے ہیں۔ جاذبی قوت کمیت پر کام کرتی ہے اس لئے کہ وہ ایک بقائی قوت ہے اور کل حرکت کے دوران کمیت کی کل توانائی کی بقاء ہوتی ہے۔

نقطہ 1 پر کل توانائی (E_1)، نقطہ 2 پر موجود کل توانائی (E_2) کے برابر ہوتی ہے۔

$$E_1 = E_2 \qquad (4.35)$$

نقطہ 1 پر توانائی بالقوہ $U_1 = 0$ ہے۔

(نقطہ 1 کو حوالہ بناتے ہوئے)

نقطہ 1 پر توانائی بالفعل $KE_1 = \frac{1}{2}mv_1^2$

نقطہ 1 پر کل توانائی بالفعل

$$E_1 = U_1 + KE_1 = 0 + \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_1^2$$

اسی طرح نقطہ 2 پر توانائی بالقوہ $U_2 = mg\,(2r)$

(نقطہ 1 سے نقطہ 2 تک اونچائی 2r ہے)

نقطہ 2 پر توانائی بالفعل $KE_2 = \frac{1}{2}mv_2^2$

نقطہ 2 پر کل توانائی بالفعل

$$E_2 = U_2 + KE_2 = 2\,mg\,r + \frac{1}{2}mv_2^2$$

مساوات (4.35) میں دیئے گئے کلیہ بقائے توانائی کی مدد سے، ہم حاصل کرتے ہیں،

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = 2mgr + \frac{1}{2}mv_2^2$$

دوبارہ ترتیب دینے پر

$$\frac{1}{2}m\left(v_1^2 - v_2^2\right) = 2mgr$$

$$v_1^2 - v_2^2 = 4gr \qquad (4.36)$$

مساوات (4.36) کو مساوات (4.34) میں حل کرنے پر ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$T_1 - T_2 = \frac{m}{r}\left[4gr\right] + 2mg$$

چنانچہ تناؤ میں موجود فرق یہ ہے۔

$$T_1 - T_2 = 6\,mg \qquad (4.37)$$

اعلیٰ ترین نقطہ (2) پر کم از کم رفتار

اعلیٰ ترین نقطہ (2) پر شئے میں ایک کم از کم رفتار ہونا چاہئے، ورنہ وہ ڈوری نقطہ 2 پر پہنچنے سے پہلے ہی ڈھیلی ہوجائے گی اور وہ شئے دائری لوپ نہیں بنا سکے گی۔ اس کم ترین رفتار کو معلوم کرنے کے لئے آیئے ہم مساوات (4.33) میں تناؤ کو $T_2 = 0$ لے لیں۔

$$0 = \frac{mv_2^2}{r} - mg$$

$$\frac{mv_2^2}{r} = mg$$

$$v_2^2 = rg$$

$$v_2 = \sqrt{gr} \qquad (4.38)$$

11 physics 4. work energy and power
Thursday, January 13, 2022 9:14:29 AM

دائری راستے میں باقی رہنے کے لئے نقطہ 2 میں شئے کی رفتار
کم ازکم $v_2 \geq \sqrt{gr}$ ضرور ہونا چاہیئے۔

ادنیٰ ترین نقطہ 1 پر کم ازکم رفتار

نقطہ (2) پر کم ازکم رفتار $\left(v_2 = \sqrt{g\ r}\right)$ کو برقرار رکھنے کے لئے نقطہ (1) پر بھی کم ایک کم ازکم رفتار ہونا چاہئے۔

مساوات (4.36) کا استعمال کرتے ہوئے ہم نقطہ (1) پر بھی ایک کم ازکم رفتار ہونا چاہئے۔

$$v_1^2 - v_2^2 = 4gr$$

مساوات (4.38) کو (4.36) میں حل کرنے پر،

$$v_1^2 - gr = 4gr$$

$$v_1^2 = 5gr$$

$$v_1 = \sqrt{5gr} \qquad (4.39)$$

دائری راستے میں باقی رہنے کے لئے نقطہ 1 پر شئے کی رفتار
کم ازکم $v_1 \geq \sqrt{5gr}$ ضرور ہونا چاہئے۔

مساوات (4.38) اور (4.39) کی مدد سے یہ صاف طور پر ظاہر ہوتا ہے کہ ادنیٰ ترین نقطہ (1) پر کی کم ازکم رفتار اعلیٰ ترین نقطہ 2 کی کم ازکم رفتار سے $\sqrt{5}$ گنا زیادہ ہونی چاہئے تا کہ وہ جسم دائرہ کو چھوڑے بغیر گھومتی رہے۔

مثال 4.17

رسی سے بندھی ہوئی بالٹی میں موجود پانی 0.5m نصف قطر والے ایک عمودی دائرے میں گھوم رہا ہے۔ ادنیٰ ترین نقطہ پر کم ازکم رفتار معلوم کیجئے جس سے کہ کل حرکت کے دوران پانی اس میں سے نیچے گرنے نہ پائے۔ $(g = 10\ ms^{-2})$

حل:

دائرہ کا نصف قطر، $r = 0.5m$

اعلیٰ ترین نقطہ پر درکار کم ازکم رفتار

$$v_2 = \sqrt{gr} = \sqrt{10 \times 0.5} = \sqrt{5}\ ms^{-1}$$

ادنیٰ ترین نقطہ پر درکار کم ازکم رفتار

$$v_1 = \sqrt{5gr} = \sqrt{5} \times \sqrt{gr} = \sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5\ ms^{-1}$$

7MX58

4.3 طاقت (Power)

4.3.1 طاقت کی تعریف

طاقت، کام کے تیزی سے کئے جانے یا آہستہ کئے جانے کی ایک پیمائش ہے۔ طاقت کی تعریف یوں کی جاتی ہے کہ یہ کئے گئے کام یا پہنچائی گئی توانائی کی شرح ہے۔

$$\text{طاقت } (P) = \frac{\text{کیا گیا کام } (W)}{\text{لیا گیا وقت } (t)}$$

$$P = \frac{W}{t}$$

اوسط طاقت (Average Power)

اوسط طاقت (P_{av}) کی تعریف یوں کی جاتی ہے کہ یہ کل کئے گئے کل کام کے ساتھ لئے گئے کل وقت کی نسبت ہے۔

$$P_{av} = \frac{\text{کیا گیا کل کام}}{\text{لیا گیا کل وقت}}$$

11 physics 4. work energy and power
Thursday, January 13, 2022 9:14:29 AM

بروقتی طاقت (Instantaneous Power)

بروقتہ طاقت (P_{inst}) کی تعریف یوں کی جاتی ہے کہ یہ ایک وقفہ (جیسے وقتی وقفہ صفر کی طرف بڑھتا ہے) پر پہنچائی گئی طاقت ہے۔

$$P_{inst} = \frac{dW}{dt}$$

4.3.2 طاقت کی اکائی (Unit of Power)

طاقت ایک قدری مقدار ہے اس کی ابعاد $[ML^2T^{-3}]$ ہے۔ طاقت کی SI اکائی واٹ (Watt) ہے، جو بھاپ کی انجن ایجاد کرنے والے سائنس دان James Watt کے نام سے موسوم ہے۔ ایک واٹ کی تعریف یوں کی جاتی ہے کہ یہ ایک سکنڈ میں ایک جول کیا گیا کام انجام دینے والی طاقت ہے ($1\ W = 1\ J\ s^{-1}$)

کلوواٹ (kW)، میگاواٹ (MW) اور گیگاواٹ (GW) اس کی اعلیٰ اکائیاں ہیں۔

$$1kW = 1000\ W = 10^3\ watt$$
$$1MW = 10^6\ watt$$
$$1GW = 10^9\ watt$$

تجارتی طور پر اب بھی انجنوں اور چند آٹوموبائیل کے لئے ایک قدیم اکائی استعمال کی جاتی ہے جو horse power (hp) سے جانی جاتی ہے۔ ہم اس کے ذریعہ horse power کو واٹ (W) میں تبدیل کر سکتے ہیں۔

$$1\ hp = 746\ W$$

تمام برقی آلات پر واٹ کی اکائی میں ان کی طاقت کو ریٹنگ چھپی ہوئی ہوتی ہے۔ 100 واٹ کے ایک بلب ایک سکنڈ میں 100 جول کی برقی توانائی استعمال کرتی ہے۔ جول میں ناپی جانے والی توانائی، واٹ میں طاقت اور سکنڈ میں وقت کے لحاظ سے اس طرح لکھی جاتی ہے۔ $1\ J = 1\ W\ s$ ۔ جب برقی آلات کئی گھنٹوں تک استعمال کئے جاتے ہیں تو وہ توانائی کی ایک بڑی مقدار استعمال کرتے ہیں۔ اگر ہم برقی توانائی کی پیمائش چھوٹی سی اکائی واٹ سکنڈ (Ws) میں کریں گے تو بڑی بڑی عددی مقداروں کا سامنا کرنا پڑے گا۔ لہذا برقی توانائی کو کلوواٹ گھنٹہ (kWh) کہلانے والی اکائی سے ناپا جاتا ہے۔

$$1\ \text{electrical unit} = 1\ kWh = 1 \times (10^3\ W) \times (3600\ s)$$
برقی اکائی 1
$$1\ \text{electrical unit} = 3600 \times 10^3\ W\ s$$
$$1\ \text{electrical unit} = 3.6 \times 10^6\ J$$
برقی اکائی 1
$$1\ kWh = 3.6 \times 10^6\ J$$

استعمال کی جانے والی برقی توانائی کے لئے کی اکائیوں ہی میں برقی بل (Electricity bills) تیار کی جاتی ہیں۔

(نوٹ: kWh توانائی ہی کی اکائی ہے، نہ کہ طاقت کی)

مثال 4.18

جب 75 W کا ایک پنکھا ایک مہینے (30 دنوں) کے لئے روزانہ 8 گھنٹے استعمال کیا جاتا ہے تو، اس سے استعمال کی گئی توانائی کا محاسبہ برقی اکائیوں میں کیجئے۔

حل:

Solution

طاقت , $P = 75\ W$

استعمال کا وقت $t = 8$ گھنٹے × 30 دن = 240 گھنٹے

استعمال کی گئی توانائی ''طاقت اور استعمال کئے گئے وقت'' کا حاصل ضرب ہے۔

11 physics 4. work energy and power
Thursday, January 13, 2022 9:14:29 AM

برقی توانائی = طاقت × استعمال کا وقت = P × t

= 75 واٹ × 240 گھنٹے

= 18000 واٹ گھنٹے

= 18 kilowatt hour = 18 kWh

1 kWh = 1 برقی اکائی

18 = برقی توانائی یونٹ

کیا آپ جانتے ہو؟

بتی والے بلب 1000 گھنٹوں کے لئے جلتے ہیں۔ CFL بلب 6000 گھنٹوں تک استعمال ہوتے ہیں، مگر LED بلب 50000 گھنٹوں تک (روزانہ 5.5 گھنٹوں کے حساب سے 25 سال تک) جلتے ہیں۔

4.3.3 طاقت اور سمتی رفتار کے درمیان تعلق

(Relation between power and velocity)

ایک ہٹاؤ $d\vec{r}$ کے لئے ایک قوت $\vec{F}$ سے کیا گیا کام یہ ہے۔

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad (4.40)$$

مساوات (4.40) کے بائیں حصے کو اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں۔

$$W = \int dW = \int \frac{dW}{dt} dt$$

dt سے ضرب کر کے تقسیم کرنے پر (4.41)

چونکہ سمتی رفتار $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$; $d\vec{r} = \vec{v}\, dt$ یہ ہے۔

مساوات (4.40) کے دائیں حصے کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے۔

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int \left(\vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right) dt = \int \left(\vec{F} \cdot \vec{v} \right) dt \quad \left[\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \right] \qquad (4.42)$$

مساوات (4.41) اور (4.42) کو مساوات (4.42) میں حل کرنے پر، ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$\int \frac{dW}{dt} dt = \int \left(\vec{F} \cdot \vec{v} \right) dt$$

$$\int \left(\frac{dW}{dt} - \vec{F} \cdot \vec{v} \right) dt = 0$$

یہ مساوات dt کے کسی بھی قیمت کے لئے درست ہوتی ہے۔ اس سے یہ پتہ چلتا ہے کہ بریکیٹ کے اندر موجود اصطلاح کی قیمت صفر کے برابر ہونی چاہئے۔ یعنی

$$\frac{dW}{dt} - \vec{F} \cdot \vec{v} = 0$$

(یا)

$$\frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = P \qquad (4.43)$$

مثال 4.19

1250 kg کی ایک گاڑی ایک سیدھے ہموار راستے پر 500 N کی ایک بیرونی مزاحمتی قوت کے خلاف $0.2\ m^{-2}$ کی ایک اسراع کے ساتھ چلائی جا رہی ہے۔ اگر گاڑی کی سمتی رفتار $30\ ms^{-1}$ ہو تو گاڑی کے انجن سے پہنچائی جانے والی طاقت معلوم کیجئے۔

حل:

گاڑی کے انجن کو مزاحمتی قوت کے خلاف کام کرنا چاہئے اور گاڑی کو اسراع کے ساتھ حرکت کروانا چاہئے۔ چنانچہ گاڑی کی انجن سے پہنچائی جانے والی طاقت یہ ہے۔

طاقت = (مزاحمتی قوت + کمیت × اسراع) (سمتی رفتار)

$$P = \vec{F}_{-tot} \cdot \vec{v} = (F_{resistive} + F)\vec{v}$$

$$P = \vec{F}_{tot} \cdot \vec{v} = (F_{resistive} + ma)\vec{v}$$

$$= (500\ N + (1250\ kg) \times (0.2\ ms^{-2}))\ (30\ ms^{-1}) = 22.5\ kW$$

11 physics 4. work energy and power
Thursday, January 13, 2022 9:14:30 AM

4.4 ٹکراؤ یا تصادم (Collisions)

ٹکراؤ یا تصادم ایک عام عمل ہے جو ہر ہمیشہ ہمارے اطراف ہوتا رہتا ہے۔ مثال، کیرم (Carrom) بلیاڈس (Billiards)، ماربلس وغیرہ۔ دو اجسام کے درمیان طبیعی طور پر مس ہو کر یا بغیر مس ہوئے بھی ٹکریں واقع ہو سکتے ہیں۔

ٹکراؤ کے تمام مرحلوں میں خطی معیار حرکت کے بقاء ہوتی ہے۔ جب دو اجسام ٹکراتے ہیں تو ٹکراؤ کے وقفے (Δt) کے دوران ان کے درمیان عمل پیرا ہونے والی آپسی دھکے کی قوتیں ان کی متعلقہ معیار حرکت میں تبدیلی پیدا کرتی ہیں۔ یعنی پہلا جسم دوسرے جسم پر ایک قوت $\vec{F}_{21}$ برآمد کرتا ہے۔ نیوٹن کے دوسرے کلیے کے مطابق دوسرا جسم پہلے جسم پر ایک قوت $\vec{F}_{12}$ برآمد کرتا ہے۔ اس کی وجہ سے پہلے جسم اور دوسرے جسم میں بالترتیب $\Delta\vec{p}_1$ اور $\Delta\vec{p}_2$ مقدار کی تبدیلی بھی ان کی معیار حرکت میں پیدا ہوتی ہے۔ اب یہ تعلقات اس طرح لکھے جا سکتے ہیں۔

$$\Delta\vec{p}_1 = \vec{F}_{12}\Delta t \qquad (4.44)$$

$$\Delta\vec{p}_2 = \vec{F}_{21}\Delta t \qquad (4.45)$$

مساوات (4.44) اور (4.45) کو جمع کرنے پر ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$\Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = \vec{F}_{12}\Delta t + \vec{F}_{21}\Delta t = \left(\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}\right)\Delta t$$

نیوٹن کے تیسرے کلیے کے مطابق $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

$$\Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = 0$$

$$\Delta\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2\right) = 0$$

دونوں طرف Δt سے تقسیم کرنے پر اور $\Delta t \to 0$ کو حد کے طور پر لینے پر، ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2\right)}{\Delta t} = \frac{d\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2\right)}{dt} = 0$$

اوپر کی مساوات یہ بتاتی ہے کہ کل خطی معیار حرکت ایک بقائی مقدار (Conserved quantity) ہوتی ہے۔

نوٹ: معیار حرکت ایک سمتی مقدار ہے۔ لہذا ٹکراؤ میں انفرادی اجسام کی کل معیار حرکت کو معلوم کرنے کے لئے سمتی جمع (Vector Addition) کو اپنانا ضروری ہے۔

4.4.1 ٹکراؤ کے اقسام: (Types of collisions)

کسی ٹکراؤ یا تصادم کے مرحلے میں، کل خطی معیار حرکت اور کل توانائی کی بقاء ہمیشہ ہوتی ہے جب کہ کل توانائی بالفعل کا بقائی ہونا ہمیشہ ضروری نہیں ہے۔ ابتدائی توانائی بالفعل کا کچھ حصہ توانائی کی دیگر قسموں میں منتقل ہو جاتی ہے۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ ٹکراؤ کی وجہ سے عام طور پر، اشیاء کی ٹوٹ پھوٹ یا شکل کی تبدیلی، یا حرارت، آواز یا روشنی وغیرہ کا پیدا ہونا ان جیسے اثرات واقع ہوتے ہیں۔ ان اثرات کو مدنظر رکھتے ہوئے ہم ٹکراؤ کے اقسام کو اس طرح درجہ بند کرتے ہیں۔

(a) لچکدار ٹکراؤ Elastic Collision

(b) غیر لچکدار ٹکراؤ In Elastic Collision

(a) لچکدار ٹکراؤ : Elastic collision

ایک ٹکراؤ میں اگر اجسام کی کل ابتدائی توانائی بالفعل (ٹکراؤ سے پہلے) اجسام کی کل انتہائی توانائی بالفعل (ٹکراؤ کے بعد) کے مساوی ہو تو یہ ٹکراؤ لچکدار ٹکراؤ کہلاتا ہے۔ یعنی

ٹکراؤ سے پہلے کی کل توانائی بالفعل = ٹکراؤ کے بعد کی کل توانائی بالفعل

(b) غیر لچکدار ٹکراؤ : Inelastic collision

ایک ٹکراؤ میں اگر ٹکراؤ سے پہلے کی کل توانائی بالفعل ٹکراؤ کے بعد کی کل توانائی بالفعل کے مساوی نہ ہو تو پھر ایسی ٹکر غیر لچکدار ٹکر کہلاتی ہے۔

11 physics 4. work energy and power
Thursday, January 13, 2022 9:14:30 AM

ٹکراؤ سے پہلے کی کل توانائی بالفعل ≠ ٹکراؤ کے بعد کی کل توانائی بالفعل

(ٹکراؤ سے پہلے کی کل توانائی بالفعل)

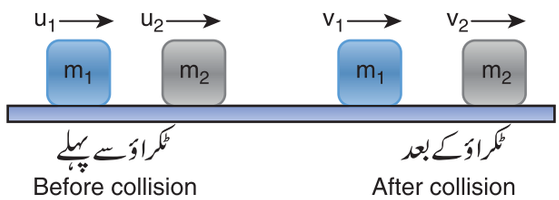
– (ٹکراؤ کے بعد کی کل توانائی بالفعل)

ΔQ = (ٹکراؤ کے دوران توانائی کا نقصان) =

حالانکہ کل توانائی بالفعل کی بقاء نہیں ہوتی، مگر پھر بھی کل توانائی کی بقاء ہوتی ہے۔ یہ اس لئے کہ کل توانائی میں توانائی بالفعل کی اصطلاح کے علاوہ ΔQ بھی پائی جاتی ہے جو ٹکراؤ کے دوران عمل پیرا ہونے والے تمام نقصانات اپنے اندر لی ہوئی ہوتی ہے۔ نوٹ کیجئے کہ ٹکراؤ کے دوران فعلی توانائی میں ہونے والا نقصان، آواز، حرارت وغیرہ جیسی دوسری قسم کی توانائیوں میں منتقل ہوجاتا ہے۔ اس کے علاوہ اگر ٹکرانے والے دو اجسام ٹکراؤ کے بعد ایک دوسرے سے لگ جاتے ہیں تو ایسا ٹکراؤ کبھی کبھی ہی واقع ہوتا ہے، مثال کے طور پر جب چکنی مٹی کا مسالہ (یا ببل گم) ایک چلتی ہوئی گاڑی پر پھینکا جاتا ہے تو وہ چلتی ہوئی گاڑی سے چپک جاتا ہے اور وہ دونوں ایک ہی رفتار سے چلنے لگتے ہیں۔

4.4.2 ایک بعد (dimension) میں لچکدار ٹکراؤ

m_1 اور m_2 کمیتوں والے دو لچکدار اجسام کا تصور کیجئے، جو ایک بے رگڑ افقی سطح پر ایک سیدھیخط میں حرکت کررہے ہیں جیسا کہ خاکہ 4.16 میں بتایا گیا ہے۔



خاکہ 4.16 ایک بعد میں لچکدار ٹکراؤ

کمیت Mass	ابتدائی رفتار Initial velocity	انتہائی رفتار Final velocity
Mass m_1	u_1	v_1
Mass m_2	u_2	v_2

ٹکراؤ کے واقع ہونے کے لئے ہم تصور کرتے ہیں کہ m_1 کمیت والی شئے m_2 کمیت والی شئے سے تیز رفتار کے ساتھ حرکت کررہی ہے یعنی $u_1 > u_2$ ہے۔ لچکدار ٹکراؤ کے لئے ٹکراؤ سے پہلے اور ٹکراؤ کے بعد اجسام کی کل خطی معیار حرکت اور توانائی بالفعل مساوی ہونی چاہئے۔

جدول 4.4۔ لچکدار اور غیر لچکدار ٹکراؤ کا موازنہ

نمبر شمارہ	لچکدار ٹکراؤ	غیر لچکدار ٹکراؤ
1۔	کل معیار حرکت کی بقاء ہوتی ہے۔	کل معیار حرکت کی بقاء ہوتی ہے۔
2۔	کل توانائی بالفعل کی بقاء ہوتی ہے۔	کل توانائی بالفعل کی بقاء نہیں ہوتی۔
3۔	حصہ لینے والی توانائیاں بقائی ہوتی ہیں۔	حصہ لینے والی توانائیاں غیر بقائی ہوتی ہیں۔
4۔	میکانیکی توانائی تقسیم نہیں ہوتی۔	میکانیکی توانائی، حرارت روشنی، آواز وغیرہ میں منقسم ہوتی ہیں۔

11 physics 4. work energy and power
Thursday, January 13, 2022 9:14:31 AM

	m_1 کمیت کی معیار حرکت	m_2 کمیت کی معیار حرکت	Total linear momentum کل معیار حرکت
Before collision ٹکراؤ سے پہلے	$p_{i1} = m_1 u_1$	$p_{i2} = m_2 u_2$	$p_i = p_{i1} + p_{i2}$ $p_i = m_1 u_1 + m_2 u_2$
After collision ٹکراؤ کے بعد	$p_{f1} = m_1 v_1$	$p_{f2} = m_2 v_2$	$p_f = p_{f1} + p_{f2}$ $p_f = m_1 v_1 + m_2 v_2$

کلیہ بقائے معیار حرکت کی مدد سے،

ٹکراؤ کے بعد کی کل معیار حرکت (P_f) = ٹکراؤ سے پہلے کی کل معیار حرکت (P_i)

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad (4.46)$$

$$\text{Or} \quad m_1 (u_1 - v_1) = m_2 (v_2 - u_2) \quad (4.47)$$

مزید یہ کہ

	m_1 کمیت کی توانائی بالفعل	m_2 کمیت کی توانائی بالفعل	Total kinetic energy کل توانائی بالفعل
Before collision ٹکراؤ سے پہلے	$KE_{i1} = \frac{1}{2} m_1 u_1^2$	$KE_{i2} = \frac{1}{2} m_2 u_2^2$	$KE_i = KE_{i1} + KE_{i2}$ $KE_i = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2$
After collision ٹکراؤ کے بعد	$KE_{f1} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$	$KE_{f2} = \frac{1}{2} m_2 v_2^2$	$KE_f = KE_{f1} + KE_{f2}$ $KE_f = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$

لچکدار ٹکراؤ کے لئے

ٹکراؤ کے بعد کی کل توانائی بالفعل (KE_f) = ٹکراؤ سے پہلے کی کل توانائی بالفعل (KE_i)

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad (4.48)$$

اصطلاحات کو مختصر کر کے دوبارہ ترتیب دینے کے بعد

$$m_1 (u_1^2 - v_1^2) = m_2 (v_2^2 - u_2^2)$$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, کا ضابطہ استعمال کرتے ہوئے ہم اوپر کی مساوات کو دوبارہ اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$m_1 (u_1 + v_1)(u_1 - v_1) = m_2 (v_2 + u_2)(v_2 - u_2) \quad (4.49)$$

مساوات (4.49) کو (4.47) سے تقسیم کرنے پر ہم حاصل کرتے ہیں

11 physics 4. work energy and power
Thursday, January 13, 2022 9:14:31 AM

$$\frac{m_1(u_1+v_1)(u_1-v_1)}{m_1(u_1-v_1)} = \frac{m_2(v_2+u_2)(v_2-u_2)}{m_2(v_2-u_2)}$$

$$u_1+v_1 = v_2+u_2$$

$$u_1-u_2 = v_2-v_1 \quad \text{دوبارہ ترتیب دینے پر} \quad (4.50)$$

مساوات (4.50) کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔

$$u_1-u_2 = -(v_1-v_2)$$

اس کا مطلب یہ ہے کہ کسی بھی لچکدار سروں کے ٹکراؤ کے لئے، ٹکراؤ کے بعد دونوں اجسام کی متعلقہ رفتار کی قدر ٹکراؤ سے پہلے کی مقدار کے بقدر ہوتی ہے، مگر مخالف سمت میں ہوتی ہے۔ مزید غور کیجئے کہ، یہ نتیجہ کمیت پر غیر منحصر ہے۔

v_1 اور v_2 کے لئے اوپر کی مساوات کو دوبارہ لکھنے پر

$$v_1 = v_2+u_2-u_1 \quad (4.51)$$

یا

$$v_2 = u_1+v_1-u_2 \quad (4.52)$$

انتہائی سمتی رفتاریں v_1 اور v_2 معلوم کرنے کے لئے

مساوات (4.52) کو مساوات (4.47) میں حل کرنے پر کی انتہائی سمتی رفتار حاصل ہوتی ہے۔

$$m_1(u_1-v_1) = m_2(u_1+v_1-u_2-u_2)$$

$$m_1(u_1-v_1) = m_2(u_1+v_1-2u_2)$$

$$m_1u_1-m_1v_1 = m_2u_1+m_2v_1-2m_2u_2$$

$$m_1u_1-m_2u_1+2m_2u_2 = m_1v_1+m_2v_1$$

$$(m_1-m_2)u_1+2m_2u_2 = (m_1+m_2)v_1$$

$$\text{or } v_1 = \left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)u_1+\left(\frac{2m_2}{m_1+m_2}\right)u_2 \quad (4.53)$$

اسی طرح مساوات (4.51) کو مساوات (4.47) اور مساوات 4.53 کو مساوات 4.52 میں حل کرنے پر m_2 کی انتہائی سمتی رفتار حاصل ہوتی ہے۔

$$v_2 = \left(\frac{2m_1}{m_1+m_2}\right)u_1+\left(\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\right)u_2 \quad (4.54)$$

صورت حال 1 :

جب دونوں اجسام کی کمیت مساوی ہو یعنی $m_1 = m_2$

$$\text{مساوات (4.53)} \Rightarrow v_1 = (0)\ u_1+\left(\frac{2m_2}{2m_2}\right)u_2$$

$$v_1 = u_2 \quad (4.55)$$

$$\text{مساوات (4.54)} \Rightarrow v_2 = \left(\frac{2m_1}{2m_1}\right)u_1+(0)\ u_2$$

$$v_2 = u_1 \quad (4.56)$$

مساوات (4.55) اور (4.56) یہ بتاتی ہیں کہ یک بعدی لچکدار ٹکراؤ میں، مساوی کمیت والے دو اجسام جب ٹکراتے ہیں تو دونوں کی سمتی رفتاریں ایک دوسری میں منتقل (ادل بدل) ہوجاتی ہیں۔

صورت حال 2 :

جب دونوں اجسام کی کمیت مساوی ہو یعنی $m_1 = m_2$ دوسرا جسم (جو عام طور پر ٹارگیٹ یا نشانہ کہلاتا ہے) حالت سکون پر ہو۔

$(u_2 = 0)$

مساوات (4.53) اور (4.54) میں $m_1 = m_2$ اور $u_2 = 0$ کو حل کرنے پر ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$\text{مساوات (4.53) کی مدد سے} \Rightarrow v_1 = 0 \quad (4.57)$$

$$\text{مساوات (4.54) کی مدد سے} \Rightarrow v_2 = u_1 \quad (4.58)$$

مساوات (4.57) اور (4.58) یہ بتاتی ہیں کہ ٹکراؤ کے بعد پہلا جسم حالت سکون اختیار کر لیتا ہے

11 physics 4. work energy and power
Thursday, January 13, 2022 9:14:31 AM

اور دوسرا جسم پہلے کی ابتدائی سمتی رفتار کے ساتھ حرکت کرنے لگتا ہے۔

صورت حال 3 :

اگر پہلا جسم دوسرے سے بہت ہی ہلکا ہو

$$\left(m_1 \ll m_2, \frac{m_1}{m_2} \ll 1\right)$$ تو پھر ان کی نسبت $\frac{m_1}{m_2} \approx 0$

ہوگی اور اگر نشانہ حالت سکون پر بھی ہو تو $(u_2 = 0)$

تو مساوات (4.53) کے شمار عدد اور نسب نما denominator کو m_2 سے تقسیم کرتے ہوئے ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$v_1 = \left(\frac{\frac{m_1}{m_2} - 1}{\frac{m_1}{m_2} + 1}\right) u_1 + \left(\frac{2}{\frac{m_1}{m_2} + 1}\right)(0)$$

$$v_1 = \left(\frac{0-1}{0+1}\right) u_1$$

$$v_1 = -u_1 \qquad (4.59)$$

اسی طرح مساوات (4.54) کے شمار کنندہ اور نسب نما کو m_2 سے تقسیم کرنے پر، ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$v_2 = \left(\frac{2\frac{m_1}{m_2}}{\frac{m_1}{m_2} + 1}\right) u_1 + \left(\frac{1 - \frac{m_1}{m_2}}{\frac{m_1}{m_2} + 1}\right)(0)$$

$$v_2 = (0)\, u_1 + \left(\frac{1 - \frac{m_1}{m_2}}{\frac{m_1}{m_2} + 1}\right)(0)$$

$$v_2 = 0 \qquad (4.60)$$

مساوات (4.59) یہ بتاتی ہے کہ پہلا جسم جو کہ ہلکا ہے ٹکراؤ کے بعد مخالف سمت میں اسی ابتدائی سمتی رفتار کے ساتھ واپس لوٹ جاتی ہے۔ چونکہ اس میں منفی علامت موجود ہے۔ مساوات (4.60) یہ بتاتی ہے کہ دوسرا جسم جو کہ کمیت میں وزنی ہے، ٹکراؤ کے بعد حالت سکون میں برقرار رہتا ہے۔ مثال کے طور پر اگر ایک گیند کو ایک ثبت شدہ دیوار پر پھینکا جاتا ہے تو وہ گیند ٹکرانے کے بعد پھینکی گئی رفتار ہی میں مگر مخالف سمت میں واپس لوٹتی ہے۔

صورت حال 4 :

دوسرا جسم، پہلے جسم سے بہت ہی ہلکا ہو

$$\left(m_2 \ll m_1, \frac{m_2}{m_1} \ll 1\right)$$ تو پھر ان کی نسبت

$\frac{m_2}{m_1} \approx 0$ ہوگی اور اگر نشانہ حالت سکون پر ہو $(u_2 = 0)$ تو پھر

مساوات (4.53) کے شمار کنندہ اور نسب نما کو m_1 سے تقسیم کرنے پر ہم حاصل کرتے ہیں

$$v_1 = \left(\frac{1 - \frac{m_2}{m_1}}{1 + \frac{m_2}{m_1}}\right) u_1 + \left(\frac{2\frac{m_2}{m_1}}{1 + \frac{m_2}{m_1}}\right)(0)$$

$$v_1 = \left(\frac{1-0}{1+0}\right) u_1 + \left(\frac{0}{1+0}\right)(0)$$

$$v_1 = u_1 \qquad (4.61)$$

اسی طرح مساوات (4.54) کے شمار کنندہ اور نسب نما کو m_1 سے تقسیم کرنے پر ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$v_2 = \left(\frac{2}{1 + \frac{m_2}{m_1}}\right) u_1 + \left(\frac{\frac{m_2}{m_1} - 1}{1 + \frac{m_2}{m_1}}\right)(0)$$

$$v_2 = \left(\frac{2}{1+0}\right) u_1$$

$$v_2 = 2u_1 \qquad (4.62)$$

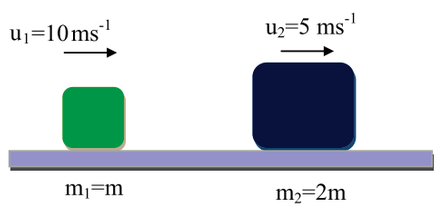
11 physics 4. work energy and power
Thursday, January 13, 2022 9:14:31 AM

مساوات (4.61) یہ بتاتی ہے کہ پہلا جسم جو کہ وزنی ہے اسی ابتدائی رفتار کے ساتھ اپنی حرکت جاری رکھتا ہے۔ مساوات (4.62) یہ مشورہ فراہم کرتی ہے کہ دوسرا جسم، جو کہ ہلکا ہے پہلے جسم کے ابتدائی رفتار سے دوگنی رفتار کے ساتھ حرکت کرنے لگتا ہے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ ہلکا جسم ٹکراؤ کے مقام سے دور پھینک دیا جاتا ہے۔

مثال 4.20

$10\ ms^{-1}$ کی رفتار سے حرکت کرنے والی ایک ہلکی شئے ایک دوسری شئے سے ٹکراتی ہے، جس کی کمیت اس سے دوگنی ہے اور وہ اسی سمت میں اس کی نصف رفتار سے چل رہی ہے۔ فرض کیجئے کہ یہ ٹکراؤ یک بعدی ٹکراؤ ہے۔ ٹکراؤ کے بعد دونوں اشیاء کی رفتار کیا ہوگی؟

حل:



فرض کیجئے کہ پہلے جسم کی کمیت m ہے جو $u_1 = 10\ ms^{-1}$ کی ایک ابتدائی سمتی رفتار کے ساتھ حرکت کر رہی ہے۔ چنانچہ دوسری جسم کی کمیت 2m ہے اور اس کی ابتدائی رفتار ہے۔

$$u_2 = \frac{1}{2}u_1 = \frac{1}{2}(10)\ m\ s^{-1}$$

پھر مساوات (4.53) اور مساوات (4.54) کی مدد سے اجسام کی انتہائی سمتی رفتاریں، معلوم کی جاسکتی ہیں۔

$$v_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)u_1 + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)u_2$$

$$v_1 = \left(\frac{m - 2m}{m + 2m}\right)10 + \left(\frac{2\times 2m}{m + 2m}\right)5$$

$$v_1 = -\left(\frac{1}{3}\right)10 + \left(\frac{4}{3}\right)5 = \frac{-10+20}{3} = \frac{10}{3}$$

$$v_1 = 3.33\ ms^{-1}$$

$$v_2 = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)u_1 + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)u_2$$

$$v_2 = \left(\frac{2m}{m + 2m}\right)10 + \left(\frac{2m - m}{m + 2m}\right)5$$

$$v_2 = \left(\frac{2}{3}\right)10 + \left(\frac{1}{3}\right)5 = \frac{20+5}{3} = \frac{25}{3}$$

$$v_2 = 8.33\ ms^{-1}$$

چونکہ دونوں رفتاریں v_1 اور v_2 مثبت ہیں، وہ بالترتیب $3.33\ ms^{-1}$ اور $8.33\ ms^{-1}$ کی سمتی رفتاروں کے ساتھ اسی رخ میں حرکت کرتے ہیں۔

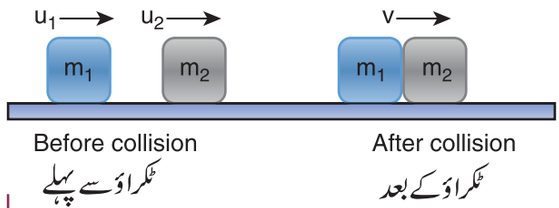
4.4.3 کامل غیر لچکدار ٹکراؤ: (Perfect Inelastic collision)

ایک کامل غیر لچکدار یا مکمل غیر لچکدار ٹکراؤ میں اشیاء ٹکراؤ کے بعد ایک دوسرے سے مستقل طور پر چپک جاتی ہیں اور ایک ہی سمتی رفتار کے ساتھ حرکت کرتی ہیں۔ فرض کیجئے کہ m_1 اور m_2 کمیت والی دو اشیاء بالترتیب u_1 اور u_2 کی ابتدائی سمتی رفتاروں کے ساتھ حرکت کر رہی ہیں۔ کامل غیر لچک دار ٹکراؤ کے بعد دونوں اشیاء ایک ہی سمتی رفتار v کے ساتھ حرکت کرنے لگتی ہیں جیسا کہ خاکہ (4.17) میں بتایا گیا ہے۔

چونکہ ٹکراؤ کے دوران خطی معیار حرکت کی بقاء ہوتی ہے۔

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = (m_1 + m_2)\ v$$

11 physics 4. work energy and power
Thursday, January 13, 2022 9:14:32 AM



خاکہ 4.17: یک بعدی کامل غیر لچکدار ٹکراؤ

	Velocity سمتی رفتار		Linear momentum خطی معیار حرکت	
	ابتدائی	انتہائی	ابتدائی	انتہائی
Mass m_1 کمیت	u_1	v	m_1u_1	m_1v
Mass m_2 کمیت	u_2	v	m_2u_2	m_2v
	Total جملہ		$m_1u_1 + m_2u_2$	$(m_1+m_2)\,v$

عام سمتی رفتار اس مساوات کے ذریعہ معلوم کی جاسکتی ہے۔

$$v = \frac{m_1u_1 + m_2u_2}{(m_1 + m_2)} \qquad (4.63)$$

مثال 4.21

50 گرام کمیت والی ایک گولی 450 گرام کمیت والی ایک لٹکتی ہوئی شئے پر نیچے سے چلائی جاتی ہے۔ وہ شئے گولی کو اپنے اندر رکھتے ہوئے 1.8m کی اونچائی تک اٹھتی ہے۔ گولی کی رفتار معلوم کیجئے۔ ($g = 10\ ms^{-2}$ لے لیجئے۔)

حل:

$m_1 = 50\ g = 0.05\ kg;\quad m_2 = 450\ g = 0.45\ kg$



گولی کی رفتار u_1 ہے۔ دوسری شئے حالت سکون ($u_2=0$) پر ہے۔ فرض کیجئے کہ شئے پر گولی چلانے کے بعد دونوں کی عام رفتار v ہے۔

$$v = \frac{m_1u_1 + m_2u_2}{(m_1 + m_2)}$$

$$v = \frac{0.05u_1 + (0.45\times 0)}{(0.05+0.45)} = \frac{0.05}{0.50}u_1$$

یہ ملی جلی سمتی رفتار گولی اور شئے کے مجموعے کی اوپری عمودی حرکت کے لئے ابتدائی سمتی رفتار ہے۔ حرکت کی دوسری مساوات کی مدد سے

$$v = \sqrt{2gh}$$
$$v = \sqrt{2\times 10\times 1.8} = \sqrt{36}$$
$$v = 6\,ms^{-1}$$

اس قیمت کو اوپر کی مساوات میں حل کرنے پر، u_1 کی قیمت اس طرح حاصل کی جاتی ہے۔

$$6 = \frac{0.05}{0.50}u_1 \quad (یا) \quad u_1 = \frac{0.50}{0.05}\times 6 = 10\times 6$$

$$u_1 = 60\,ms^{-1}$$

4.4.4 کامل غیر لچکدار ٹکراؤ میں توانائی بالفعل کا نقصان

(Loss of Kinetic energy in perfect inelastic collision)

کامل غیر لچکدار ٹکراؤ میں ٹکراؤ کے دوران توانائی بالفعل میں ہونے والا نقصان آواز، حرارت، گرمی، روشنی وغیرہ جیسی توانائی کی دیگر اقسام میں منتقل ہوجاتا ہے۔ فرض کیجئے KE_i ٹکراؤ سے پہلے کی کل توانائی بالفعل ہے اور KE_f ٹکراؤ کے بعد کی کل توانائی بالفعل ہے۔

ٹکراؤ کے پہلے کی کل توانائی بالفعل یہ ہے۔

11 physics 4. work energy and power
Thursday, January 13, 2022 9:14:32 AM

$$KE_i = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 \qquad (4.64)$$

ٹکراؤ کے بعد کی کل توانائی بالفعل

$$KE_f = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\,v^2 \qquad (4.65)$$

پھر توانائی بالفعل کا نقصان یہ ہے۔

$\Delta Q = KE_i - KE_f$ KE کا نقصان

$$\Delta Q = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\,v^2 \qquad (4.66)$$

مساوات (4.63) کو (4.66) میں حل کرنے پر اور (v کو

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

کے الجبرائی ضابطے سے پھیلاتے ہوئے) مختصر کرنے پر ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$\text{Loss of KE, } \Delta Q = \frac{1}{2}\left(\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\right)(u_1 - u_2)^2 \qquad (4.67)$$

4.4.5 بحالی کا تعاونی عدد (سرعدد) (e)
(Co-efficient of restitution) (COR)

فرض کیجئے کہ ہر زمین پر ربڑ کی ایک گیند اور پلاسٹک کی ایک گیند ڈالتے ہیں۔ ربڑ کی گیند پلاسٹک سے زیادہ اچھلنے لگتی ہے۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ ایک لچکدار شئے کی توانائی بالفعل کا نقصان ایک پلاسٹک گیند کی توانائی بالفعل کے نقصان سے کم ہوتا ہے۔ ☆ دو اجسام کے ٹکراؤ کے بعد موجود توانائی بالفعل کی مقدار، عام طور پر ایک بے ابعاد عدد کے ذریعہ ناپی جاسکتی ہے جسے بحالی کا تعاونی عدد یا بحالی کا سرعدد (COR) کہتے ہیں۔

اس کی تعریف یوں کی جاسکتی ہے کہ یہ ٹکراؤ کے بعد، جدائی کی سمتی رفتار کے ساتھ (نسبتی سمتی رفتار) relative velocity اور جدائی کی سمتی رفتار (ٹکراؤ کے بعد) کی نسبت ہے۔

$$e = \frac{\text{جدائی کی سمتی رفتار (ٹکراؤ کے بعد)}}{\text{قریب ہونے والی سمتی متعلقہ رفتار (ٹکراؤ سے پہلے)}} = \frac{(v_2 - v_1)}{(u_1 - u_2)} \qquad (4.68)$$

ایک لچکدار ٹکراؤ میں، ہم دیکھ پاتے ہیں کہ جدائی کی سمتی رفتار قربت کی سمتی رفتار کے برابر ہوتی ہے، یعنی

$$(u_1 - u_2) = (v_2 - v_1) \rightarrow e = \frac{(v_2 - v_1)}{(u_1 - u_2)} = 1$$

اس سے پتہ چلتا ہے کہ ایک لچکدار ٹکراؤ کے لئے بحالی کا تعاونی عدد $e = 1$ ہے۔ طبیعی طور پر اس کا مطلب یہ ہے کہ ٹکراؤ کے بعد اس میں توانائی بالفعل کا کوئی نقصان نہیں ہوا ہے۔ اس لئے وہ جسم اسی توانائی بالفعل کے ساتھ اچھلتا ہے جو عام طور پر کامل لچکدار کہلاتا ہے۔

کسی حقیقی ٹکراؤ کے مسئلے میں، ٹکراؤ کی وجہ سے اس میں توانائی بالفعل کا تھوڑا نقصان ہوگا، جس کا مطلب یہ ہے کہ e ہمیشہ Unity نہیں ہوتا۔ اگر گیند مکمل طور پر پلاسٹک ہو تو وہ دوبارہ نہیں اچھلے گی اور چنانچہ ان کی جدائی کی سمتی رفتار ٹکراؤ کے بعد صفر ہوجائے گی۔ لہذا، بحالی کا تعاونی عدد، $e = 0$ ہوگا۔

عام طور پر ایک شئے کے لئے بحالی کا تعاونی عدد $0<e<1$ کے درمیانی ہوتا ہے۔ $0 < e < 1$

مثال 4.22

اگر ایک لچکدار ٹکراؤ میں مساوی کمیتوں کی جن میں سے ایک ساکن حالت پر ہے، سمتی رفتاروں کی نسبت $\frac{v_1}{v_2} = \frac{1-e}{1+e}$ ہے۔

حل:

$$e = \frac{\text{جدائی کی سمتی رفتار (ٹکراؤ کے بعد)}}{\text{قریب ہونے والی سمتی رفتار (ٹکراؤ سے پہلے)}}$$

11 physics 4. work energy and power
Thursday, January 13, 2022 9:14:33 AM

$$= \frac{(v_2 - v_1)}{(u_1 - u_2)} = \frac{(v_2 - v_1)}{(u_1 - 0)} = \frac{(v_2 - v_1)}{u_1}$$

$$\Rightarrow v_2 - v_1 = e\,u_1 \qquad (1)$$

کلیہ بقائے خطی معیار حرکت کے استعمال سے

$$m\,u_1 = m\,v_1 + m\,v_2 \Rightarrow u_1 = v_1 + v_2 \quad (2)$$

u_1 کے لئے مساوات (2) کو (1) میں حل کرنے پر ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$v_2 - v_1 = e(v_1 + v_2)$$

مختصر کرنے پر ہم حاصل کرتے ہیں۔

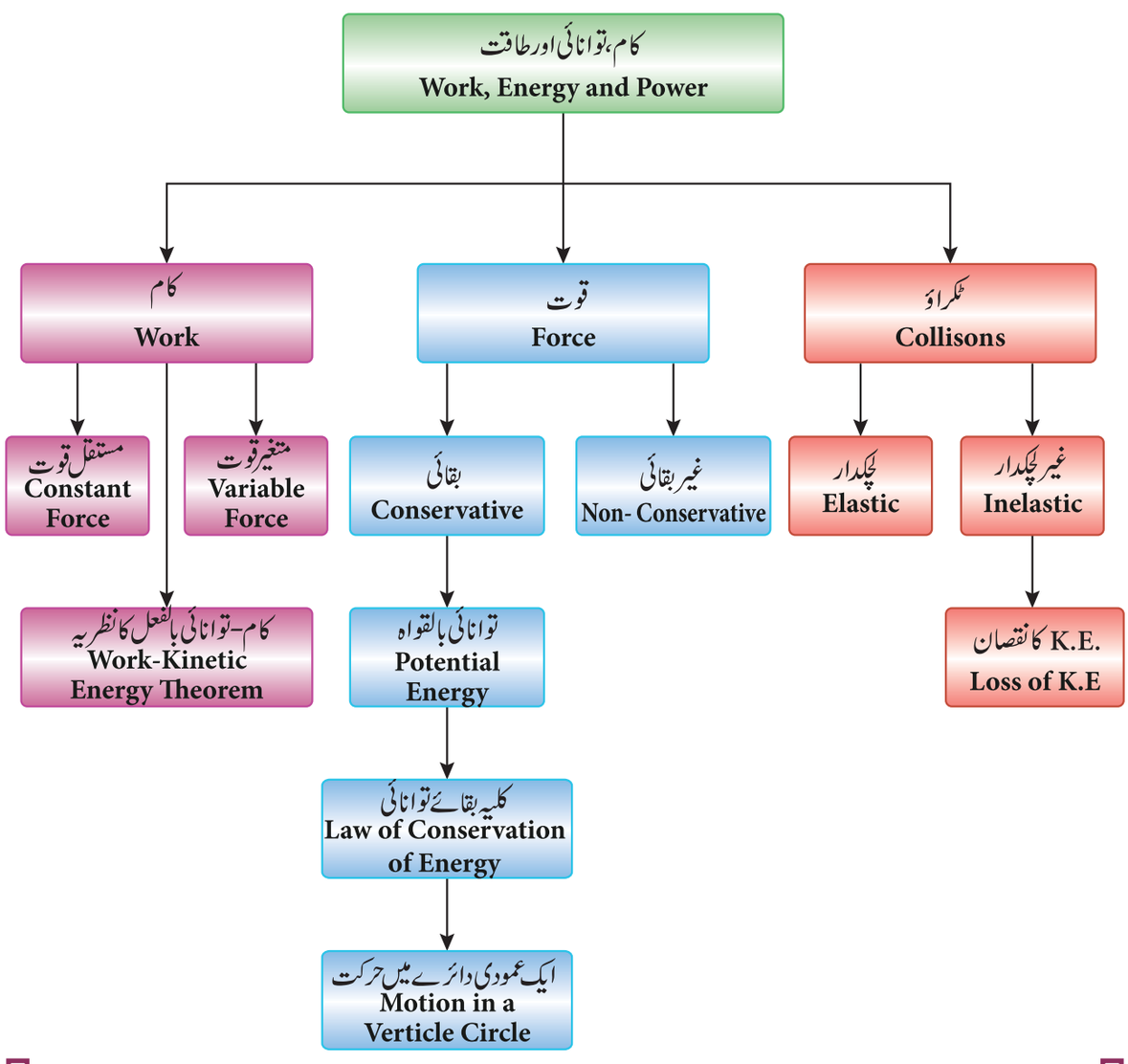
$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{1-e}{1+e}$$

SUMMARY خلاصہ

- جب ایک شئے پر عمل پیرا ہونے والی قوت $\vec{F}$ سے $d\vec{r}$ کا ہٹاؤ فراہم کرتی ہے، تو قوت سے کیا گیا کام (W) یہ ہے۔
  $W = F.d\vec{r} = Fdr\cos\theta.$
- متغیر قوت سے کئے جانے والے کام کی تعریف یوں کی جاتی ہے۔ $\int_i^f \vec{F}.d\vec{r}$
- کام۔ توانائی بالفعل کا نظریہ: شئے پر ایک قوت کے ذریعہ کیا جانے والا کام، اس شئے کی توانائی بالفعل کی تبدیلی کے برابر ہوتا ہے۔
- توانائی بالفعل کی تعریف خطی معیار حرکت کے لحاظ سے بھی کی جاسکتی ہے جو اس طرح دی جاتی ہے $K.E = \frac{p^2}{2m}$.
- ایک نقطہ P پر توانائی بالقواہ کی تعریف یوں کی جاسکتی ہے کہ یہ ایک شئے کو کچھ حوالاتی O مقام سے P مقام تک یکساں سمتی رفتار کے ساتھ ہٹانے کے لئے درکار کام کی مقدار ہے۔ اسے یوں پیش کیا جاتا ہے۔ $U = \int_O^P \vec{F}_{ext}.d\vec{r}$
  حوالاتی مقام کی صفری توانائی بالقواہ کے طور پر لیا جاسکتا ہے۔
- ایک اونچائی h پر جاذبی بالقواہ یوں پیش کی جاتی ہے $U = mgh$ اگر تناؤ یا دباؤ x ہو تو، کمانی کی توانائی بالقواہ یوں پیش کی جاتی ہے۔
  $U = \frac{1}{2}kx^2$ یہاں k کمانی کا مستقلہ ہے۔
- ایک بند راستہ کے اطراف ایک بقائی قوت سے کیا گیا کام صفر ہے اور ایک غیر بقائی قوت کے لئے یہ صفر نہیں ہوتا۔
- جاذبی قوت، کمانی کی قوت اور کولوم کی قوت، یہ تمام بقائی قوتیں ہیں مگر رگڑ کی قوت غیر بقائی ہے۔
- بقائی قوت کے میدان میں، شئے کی کل توانائی بقائی ہوتی ہے۔
- ایک عمودی دائری حرکت میں، دائری راستہ کو مکمل کرنے کے لئے کمیت سے کم از کم درکار رفتار $\sqrt{5gr}$ ہے۔ جہاں r دائرہ کا نصف قطر ہے
- طاقت کی تعریف یوں کی جاتی ہے کہ یہ کئے گئے کام کی شرح یا پہنچائی گئی توانائی ہے۔ یہ $P = \frac{W}{t} = \vec{F}.\vec{v}$ کے برابر ہوتی ہے۔
- لچکدار اور غیر لچکدار، دونوں ٹکراؤوں کے لئے کل خطی معیار حرکت ہمیشہ بقائی ہوتی ہے۔
- لچکدر ٹکراؤ میں نظام کی توانائی بالفعل کی بقاء ہوتی ہے۔
- بحالی کا تعاونی عدد توانائی $= \frac{\text{جدائی کی سمتی رفتار (ٹکراؤ کے بعد)}}{\text{قریب ہونے والی سمتی رفتار (ٹکراؤ سے پہلے)}}$

11 physics 4. work energy and power
Thursday, January 13, 2022 9:14:33 AM

CONCEPT MAP نظریاتی نقشہ



11 physics 4. work energy and power
Thursday, January 13, 2022 9:14:33 AM

I۔ کثیر انتخابی سوالات:

1۔ 1kg کمیت والی ایک شئے پر $(2\hat{i}+\hat{j})$ N مقدار کی ایک یکساں قوت عمل آور ہوتی ہے۔ وہ شئے m $(3j+k)$ مقام سے m $(5\hat{i}+3\hat{j})$ مقام تک ہٹ جاتی ہے ۔ قوت کے ذریعہ شئے پر کیا گیا کام یہ ہے۔

(AIPMT model 2013)

(a) 9 J (b) 6 J
(c) 10 J (d) 12 J

2۔ 1kg کمیت والی ایک گیند اور 2kg کمیت والی ایک گیند 80m اونچائی والی ایک عمارت سے گرائی جاتی ہے۔ زمین کی طرف 40m کی گرانی کے بعد ان کی توانائی بالفعل کی نسبت یہ ہوگی۔

(AIPMT model 2004)

(a) $\sqrt{2}:1$ (b) $1:\sqrt{2}$
(c) $2:1$ (d) $1:2$

3۔ 1kg کمیت والا ایک جسم $20\ ms^{-1}$ کی سمتی رفتار کے ساتھ اوپر پھینکا جاتا ہے۔ وہ 18 m کی اونچائی طے کرنے کے بعد وقتی طور پر حالت سکون اختیار کرتا ہے ۔ ہوائی رگڑ کی وجہ سے توانائی کا کتنا نقصان ہوا ہے؟ ($g=10ms^{-2}$) لے لیجئے (AIPMT 2009)

(a) 20 J (b) 30 J
(c) 40 J (d) 10 J

4۔ ایک انجن ایک نالی (پائپ) کے ذریعہ لگاتار پانی پمپ کر رہی ہے۔ پانی، نالی کو v سمتی رفتار کے ساتھ چھوڑتا ہے اور پانی کے جٹ (jet) کی فی اکائی لمبائی کمیت m ہوتی ہے۔ وہ شرح کیا ہے جس پر پانی کو، توانائی بالفعل پہنچائی جا رہی ہے؟ (AIPMT 2009)

(a) $\frac{1}{2}mv^3$ (b) mv^3
(c) $\frac{3}{2}mv^2$ (d) $\frac{5}{2}mv^2$

5۔ 4m کمیت والی ایک جسم xy سطح پر حالت سکون پر پڑا ہے۔ وہ اچانک تین ٹکڑوں میں پھٹ جاتا ہے m کمیت والے دو ٹکڑے مساوی رفتار v کے ساتھ ایک دوسرے کے عمودی طور پر جاتے ہیں۔ دھماکے کی وجہ سے پیدا ہونے والی کل توانائی بالفعل یہ ہے۔

(AIPMT 2014)

(a) mv^2 (b) $\frac{3}{2}mv^2$
(c) $2mv^2$ (d) $4mv^2$

6۔ ایک نظام کی توانائی بالقوہ بڑھتی ہے، اگر کام

(a) بقائی قوت کے خلاف نظام سے کیا گیا ہے
(b) غیر بقائی قوت کے خلاف نظام سے کیا گیا ہے
(c) بقائی قوت کے ذریعہ نظام پر کیا گیا ہے
(d) غیر بقائی قوت کے ذریعہ نظام پر کیا گیا ہے

7۔ m کمیت والے جسم کو R نصف قطر والے ایک عمودی دائرے میں مکمل چکر لگانے کے لئے داخلہ کے وقت اس کی کم از کم درکار سمتی رفتار کیا ہونی چاہئے ؟

(a) $\sqrt{2gR}$ (b) $\sqrt{3gR}$
(c) $\sqrt{5gR}$ (d) $\sqrt{gR}$

8۔ ایک بند راستے کے لئے ایک بقائی قوت سے کیا گیا کام

(a) ہمیشہ منفی ہوتا ہے
(b) صفر ہے
(c) ہمیشہ مثبت ہوتا ہے
(d) کچھ کہا نہیں جا سکتا

D5PQK

11 physics 4. work energy and power
Thursday, January 13, 2022 9:14:34 AM

9۔ اگر شئے کی خطی معیار حرکت 0.1% کے ذریعہ بڑھائی جاتی ہے تو پھر توانائی بالفعل اس طرح بڑھے گی۔

(a) 0.1 %　　(b) 0.2%

(c) 0.4%　　(d) 0.01%

10۔ اگر شئے کی توانائی بالقواہ $\alpha - \frac{\beta}{2}x^2$ ہے، تو پھر شئے سے محسوس کی جانے والی قوت یہ ہے۔

(a) $F = \frac{\beta}{2}x^2$　　(b) $F = \beta x$

(c) $F = -\beta x$　　(d) $F = -\frac{\beta}{2}x^2$

11۔ ہوائی چکی کا ایک جنریٹر، ہوائی توانائی کو برقی توانائی میں تبدیل کرتا ہے ہے، تصور کر لیجئے کہ وہ جنریٹر، اس کے پتوں پر پڑنے والی ہوائی توانائی کی ایک مقررہ کسر کو برقی توانائی میں تبدیل کرتا ہے۔ ہوائی رفتار v کے لئے برقی طاقت کا ماحصل (Output)، اس کے تناسب میں ہوگا۔

(a) v　　(b) v^2

(c) v^3　　(d) v^4

12۔ دو مساوی کمیتیں m_1 اور m_2 ایک ہی سیدھے خط کے ساتھ بالترتیب $5\ ms^{-1}$ اور $-9\ ms^{-1}$ کی سمتی رفتار سے حرکت کر رہی ہیں۔ اگر ٹکراؤ لچکدار ہو تو ٹکراؤ کے بعد m_1 اور m_2 کی سمتی رفتاریں بالترتیب یہ ہوں گی۔

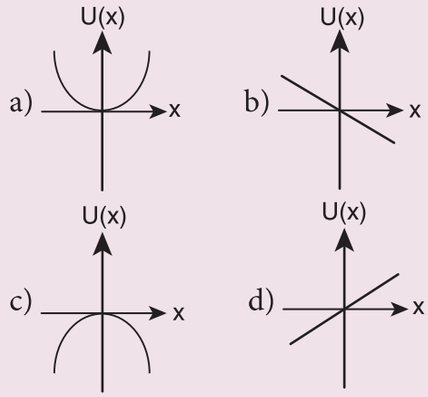
(a) $-4\ ms^{-1}$ and $10\ ms^{-1}$

(b) $10\ ms^{-1}$ and $0\ ms^{-1}$

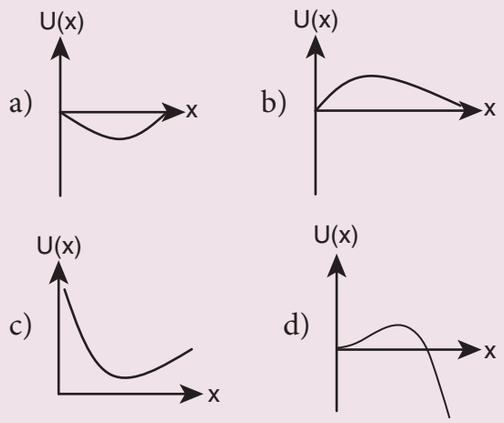
(c) $-9\ ms^{-1}$ and $5\ ms^{-1}$

(d) $5\ ms^{-1}$ and $1\ ms^{-1}$

13۔ ایک شئے مبدا پر رکھی گئی ہے اور اس پر ایک قوت $F=kx$ عمل کر رہی ہے (جہاں k ایک مثبت مستقلہ ہے)۔ اگر $U(0) = 0$ ہو تو $U(x)$ بالمقابل x کی ترسیم (جہاں 'U' توانائی بالقواہ کا عوامل ہے) یہ ہوگی۔ (IIT 2004)



14۔ ایک شئے جسے x- محور ساتھ حرکت کروایا جا رہا ہے، اسی سمت میں ایک قوت سے منسلک ہے جو مبدا سے شئے تک کے x فاصلے کے ساتھ $F(x) = -kx + ax^3$ کے طور پر متغیر ہوتی ہے۔ یہاں k اور a مثبت مستقلات ہیں، $x \geq 0$ کے لئے شئے کی توانائی بالقواہ کی عواملی قسم $U(x)$ یہ ہے۔ (IIT 2002)



15۔ قوت کی مستقلہ k رکھنے والی ایک کمانی دو ٹکڑوں میں اس طرح کاٹی جاتی ہے کہ ایک کی لمبائی دوسری سے دوگنی ہے تو پھر لمبے ٹکڑے میں قوت کی مستقلہ کی مقدار یہ ہوگی۔

(a) $\frac{2}{3}k$　　(b) $\frac{3}{2}k$

(c) $3k$　　(d) $6k$

جوابات :

1) c	**2)** d	**3)** a	**4)** a	**5)** b
6) a	**7)** c	**8)** b	**9)** b	**10)** b
11) c	**12)** c	**13)** c	**14)** d	**15)** b

11 physics 4. work energy and power
Thursday, January 13, 2022 9:14:34 AM

II۔ مختصر جوابات دیجئے:

1۔ واضح کیجئے کہ طبیعیات میں کام کی تعریف اس کے عام فہم سے کس طرح مختلف ہے؟

2۔ توانائی بالقواہ کی مختلف قسمیں تحریر کیجئے۔ ضابطوں کی وضاحت کیجئے۔

3۔ بقائی اور غیر بقائی قوتوں کے درمیان تفریق کیجئے۔ ہر ایک کی دو مثالیں پیش کیجئے۔

4۔ لچکدار اور غیر لچکدار ٹکراؤں کی خصوصیات بیان کیجئے۔

5۔ مندرجۂ ذیل کی تعریف کیجئے۔

(a) بحالی کا تعاونی عدد (سرعدد)

(b) طاقت

(c) کلیہ بقائے توانائی

(d) غیر لچکدار ٹکراؤ میں توانائی بالفعل کا نقصان

III۔ تفصیلی جوابات دیجئے۔

1۔ ایک مستقل قوت سے کئے جانے والے کام اور ایک متغیر قوت سے کئے جانے والے کام کے درمیانی فرق کی وضاحت ترسیموں کی مدد سے کیجئے۔

2۔ کام-توانائی کا اصول بیان کیجئے اور اس کی وضاحت کیجئے۔ اس کی تین مثالیں بتایئے۔

3۔ طاقت اور سمتی رفتار کے لئے مساوات اخذ کیجئے۔ ان کی چند مثالیں بیان کیجئے۔

4۔ یک بعدی لچکدار ٹکراؤ کے لئے مساوات اخذ کیجئے اور مختلف معاملات پر بحث کیجئے۔

5۔ غیر لچکدار ٹکراؤ کیا ہے؟ یہ لچکدار ٹکراؤ سے کس طرح مختلف ہے؟ غیر لچکدار ٹکراؤ کے لئے روزمرہ زندگی میں پیش آنے والی چند مثالیں بتایئے۔

IV۔ حسابی مسئلے: (Numerical problems)

1۔ 2kg کے ایک وزن کو 10 m کی اونچائی تک اٹھانے کے لئے 30N کی ایک قوت سے کئے گئے کام کا محاسبہ کیجئے۔

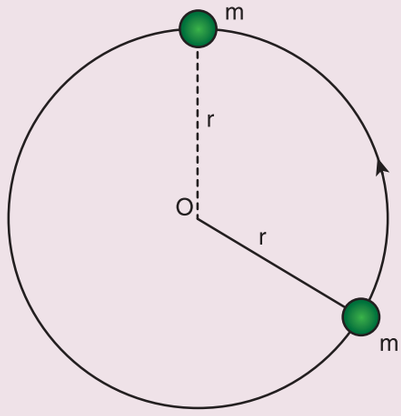
$(g=10\ ms^{-2})$ جواب : 300 J

2۔ $5\ ms^{-1}$ کی سمتی رفتار والی ایک گیند ایک نفیس افقی سطح پر اس کے عمود کے ساتھ 60° کے زاویے پر گرنے لگتی ہے۔ اگر بحالی کا تعاونی عدد (سرعدد) 0.5 ہے تو ٹکراؤ کے بعد سمتی رفتار اور سمت معلوم کیجئے۔

(جواب: $v = 4.51\ m\ s^{-1}$)

3۔ m کمیت والا ایک گولا r لمبائی اور نظر انداز کے قابل کمیت والی سلاخ کے ایک کنارے سے جڑا ہوا ہے۔ سلاخ کا دوسرا سرا مرکز 'O' پر اس طرح ثبت ہے کہ وہ آزادطور پر گھوم سکے جیسا کہ خاکہ میں بتایا گیا ہے۔ شئے کو دائرے کے اوپر تک لے جانے کے لئے اس میں کتنی ابتدائی رفتار دی جانی چاہئے۔
(اشارہ: بقائے توانائی کا کلیہ استعمال کیجئے) کیا یہ رفتار حصہ 4.2.9 میں حاصل کی گئی رفتار سے زیادہ ہے یا کم ہے؟

(جواب: $v = \sqrt{4gr}\ m\ s^{-1}$)



11 physics 4. work energy and power
Thursday, January 13, 2022 9:14:34 AM

4۔ دو مختلف نامعلوم کمیتیں A اور B ٹکراتی ہیں۔ A ابتداء میں حالت سکون پر ہے جب کہ B میں رفتار ہے۔ ٹکراؤ کے بعد B کی رفتار v/2 ہوجاتی ہے اور وہ اس کی حرکت کی اصلی سمت سے زاویہ قائمہ پر چلنے لگتی ہے۔ ٹکراؤ کے بعد A کی حرکت کا زاویہ معلوم کیجئے۔

جواب: $\theta = 26° 33'$

5۔ 20 گرام کی ایک گولی 5 kg کمیت والے ایک رقاص سے ٹکراتی ہے۔ رقاص کی کمیت کا مرکز 10 سمر کے ایک عمودی فاصلے تک چڑھتا ہے۔ اگر وہ گولی رقاص کے اندر گھس جاتی ہے تو اس کی بتدائی رفتار معلوم کیجئے۔

جواب: $v = 351.4 ms^{-1}$

BOOKS FOR REFERENCE

کتب حوالہ:

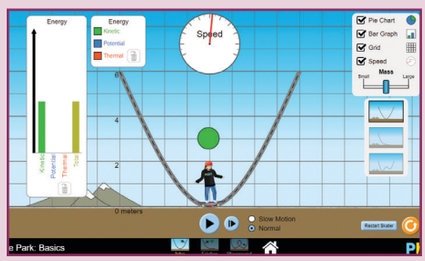
1. Charles Kittel, Walter Knight, Malvin Ruderman, Carl Helmholtz and Moyer, *Mechanics,* 2nd edition, Mc Graw Hill Pvt Ltd,
2. A.P.French, *Newtonian Mechanics,* Viva-Norton Student edition
3. Somnath Datta, *Mechanics,* Pearson Publication
4. H.C.Verma, *Concepts of physics* volume 1 and Volume 2, Bharati Bhawan Publishers
5. Serway and Jewett, *Physics for scientist and Engineers with modern physics*, Brook/ Coole publishers, Eighth edition
6. Paul Tipler and Gene Mosca, *Physics for scientist and engineers with modern physics*, Sixth edition, W.H. freeman and Company.

11 physics 4. work energy and power
Thursday, January 13, 2022 9:14:34 AM

ICT CORNER

Energy Skate توانائی کا پھسلاؤ

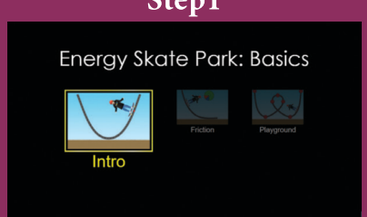
اس کارروائی کے ذریعہ آپ توانائی بالقواہ اور توانائی بالفعل کے بارے میں سمجھ سکیں گے۔



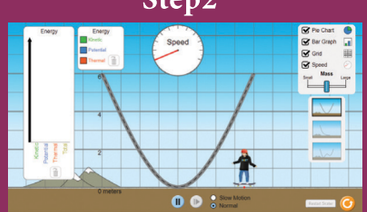
مرحلے:

- براؤزر کھولئے اور کام طاقت اور توانائی پر مجازینہ کے صفحے کو کھولنے کے لئے دئے گئے URL کو ٹائپ کیجئے
- توانائی بالفعل اور توانائی بالقواہ کی تبدیلی کا مشاہدہ کرنے کے لئے اونچائی کا انتخاب کیجئے۔
- کمیت کو تبدیل کر کے بھی آپ تبدیلی کا مشاہدہ کر سکتے ہیں۔
- آپ خود اپنی اختیاری رگڑ یا میدان بنا سکتے ہیں تا کہ توانائی بالفعل اور توانائی بالقواہ کی تبدیلی کا مشاہدہ کر سکے۔

Step1



Step2



Step3



Step4



PhET simulation's URL:

https://phet.colorado.edu/en/simulation/energy-skate-park

*Pictures are indicative only.

*If browser requires, allow **Flash Player** or **Java Script** to load the page.

TDSWA

11 physics 4. work energy and power
Thursday, January 13, 2022 9:14:35 AM

اکائی
5

ذرات اور سخت اجسام کے نظام کی حرکت

(Motion of system of particles and rigid bodies)

"In nature, we have to deal not with material points but with material bodies ... – Max Planck

سیکھنے کے مقاصد:

اس اکائی کے ذریعہ طلباء ان باتوں سے اجاگر ہوں گے

- ذرات کے مختلف نظامات میں کمیت کے مرکز کی مطابقت
- گردشی حرکت میں قوت گدشہ اور زاویائی معیار حرکت
- مناسب مثالوں کے ساتھ توازنات کے اقسام
- مختلف سخت اجسام کی جمود کی حرکت
- سخت اجسام کی گردش کی حرکیات
- گردشی حرکت اور مستقیمی (tranlational) حرکت میں فرق کرنا
- لڑھکنے، پھسلنے اور کھسکنے (Sliding) والی حرکتیں

5.1 تعارف

ہم اپنی روزمرہ زندگی میں جن اشیاء کا سامنا کرتے ہیں ان میں سے اکثر کثیر تعداد کے ذرات رکھتے ہیں۔ پچھلی اکائیوں میں ہم اجسام کی جسامت اور شکل کا لحاظ کئے بغیر ہم نے ان کی حرکت کا مطالعہ کیا۔ اب تک ہم نے بڑے سے بڑے جسم کو بھی نقطوی شئے کے طور پر ہی تصور کیا تھا۔ اس حصے میں ہم اجسام کی جسامت اور شکل کو اہمیت دیں گے۔ حقیقت میں یہ اجسام بے شمار ذرات سے بنے ہوتے ہیں۔ جب ایسا کوئی جسم حرکت کرتا ہے تو ہم اس طرح تصور کریں گے کہ بے شمار ذرات کا مجموعہ کلی طور پر حرکت کر رہا ہے۔ ذرات کے ایسے ایک نظام سے بحث کرنے کے لئے ہم کمیتی مرکز کے تصور کا تعارف کرواتے ہیں۔

ان بڑے اجسام پر عمل پیرا ہونے والی قوتوں کو اندرونی اور بیرونی قوتوں میں تقسیم کیا جاتا ہے۔ اندرونی قوتیں وہ قوتیں ہیں جو اس جسم کو بنانے والے ذرات کے مابین، اس نظام کے اندر ہی اندر عمل پیرا ہوتی ہیں۔ بیرونی قوتیں وہ قوتیں ہیں جو اس نظام کے باہر سے اس کے ذرات پر عمل پیرا ہوتی ہیں۔ اس اکائی میں ہم ذرات کے ایسے نظام پر بحث کریں گے جو مختلف قسم کے سخت اجسام بناتے ہیں۔ ایک سخت جسم وہ کہلاتا ہے جو کسی بیرونی قوت کے عمل پیرا ہونے پر بھی اپنی متعین اور ثابت شکل کو تبدیل نہ کرتا ہو۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ بیرونی قوت کے بھیجے جانے پر بھی ایک سخت جسم میں اندرونی جوہری فاصلے تبدیل نہیں ہوتے۔ بہرحال زندگی کے حقیقی مرحلوں میں ہم ایسے مثالی سخت اجسام نہیں دیکھ پاتے کیونکہ بیرونی قوت کی وجہ سے ان اجسام کی شکل یا جسامت کچھ نہ کچھ تبدیل ہوجاتی ہے۔ ہم یہاں جن سخت اجسام کا مطالعہ کرنے والے ہیں ان کے بارے میں ہم یہ تصور کرلیں گے کہ وہ تبدیلیاں نظر انداز کی جاسکتی ہیں۔ غیر سخت اجسام میں پیدا ہونے والی تبدیلیوں کے بارے میں ہم علاحدہ طور پر اکائی 7 میں ٹھوس اشیاء کی لچکداری کے تحت مطالعہ کریں گے۔

11 physics 5. motion of systems
Tuesday, February 01, 2022 9:15:22 PM

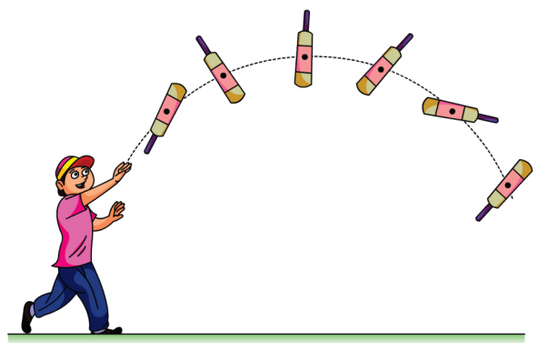
5.1.1 کمیتی مرکز (Centre of mass)

جب کوئی سخت جسم حرکت کرتا ہے تو یہ ضروری نہیں ہے کہ اس جسم کو بنانے والے تمام ذرات ایک ہی راستہ اختیار کریں۔ حرکت کی قسم کے اعتبار سے جسم کے مختلف ذرات مختلف راستے اختیار کر سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر جب کسی سطح پر ایک پہیہ گھومنے لگتا ہے۔ پہیے کے مرکزی نقطے کا راستہ اس کے دیگر نقطوں کے راستوں سے مختلف ہوتا ہے۔ اس اکائی میں ہم سخت اجسام کی خطی حرکت، گردشی حرکت اور خطی اور گردشی حرکتوں کی مجموعی حرکت پر تفصیلی بحث کریں گے۔

5.1.2 ایک سخت جسم کا کمیتی مرکز:

(Centre of mass of a Rigid Body)

جب کوئی وزن دار شئے (مثلاً ایک بلا (bat)) کو ہوا میں کسی زاوئے پر پھینکا جاتا ہے، جیسا کہ خاکہ 5.1 میں بتایا گیا ہے، تو کیا اس جسم کے تمام نقاط مکافی Parabola ہی کے مانند راستہ اختیار کرتے ہیں، حقیقت میں ایک ہی نقطہ اس قسم کا خط مکافی کا راستہ اختیار کرتا ہے اور بقیہ تمام نقاط مختلف راستے اختیار کرتے ہیں۔



خاکہ 5.1۔ کمیتی مرکز۔ مکافی کا راستہ اختیار کرتے ہوئے

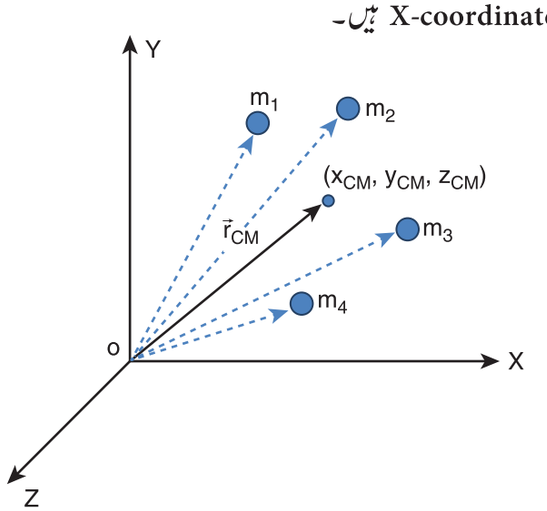
وہ ایک نقطہ جو مکافی راستہ اختیار کرتا ہے بہت ہی مخصوص ہوتا ہے، اس جسم کا کمیتی مرکز Centre of mass یا (CM) کہلاتا ہے۔ اس کی حرکت، پھینکے گئے ایک اکیلے نقطے کی حرکت کی طرح ہوتی ہے۔ ایک جسم کے کمیتی مرکز کی تعریف یوں کی جاتی ہے کہ یہ جسم کا وہ نقطہ ہے جہاں اس کی کل کمیت مرکوز ہوتے ہوئے محسوس ہوتی ہے۔ لہذا یہ نقطہ کل جسم کی نمائندگی کر سکتا ہے۔

ان اجسام کے لئے جن کی کمیت مساوی طور پر پھیلی ہوئی ہوتی ہے اور متعین شکل لئے ہوتے ہیں، کمیتی مرکز، ان اجسام کے ہندسی مرکز (geometric centre) ہی پر ہوتا ہے۔ مثلاً ایک دائرے اور کرہ کے لئے، ان کے مرکز پر ہی کمیتی مرکز بھی ہوتا ہے۔ ایک مربع اور مستطیل کے لئے، ان کے وتروں کے قطاع ہونے کے مقام پر اور ایک مکعب اور مکعب نما کے لئے وہ ان اجسام کے وتروں کے قطاع ہونے والے مقام پر ہوتا ہے۔ دوسرے اجسام کے لئے بھی کمیتی مرکز کے مقام کو چند مخصوص طریقوں سے معلوم کرنا پڑتا ہے۔ کمیتی مرکز جسم کے بہت ہی اندر ہی موجود ہوسکتا ہے اور چند معاملات میں جسم کے باہر بھی ہوسکتا ہے

5.1.3 پھیلی ہوئی نقطوی کمیتوں کا کمیتی مرکز

(Centre of Mass for distributed point masses)

نقطوی کمیت، (فرض کیا گیا) ایک قیاسی نقطوی ذرہ ہے جس میں غیر صفری کمیت تو ہوتی ہے مگر جسامت اور شکل نہیں ہوتی۔ n تعداد والے نقطوی کمیتیں جیسے $m_1, m_2, m_3 \ldots m_n$ کے ایک مجموعے کے لئے کمیتی مرکز کو معلوم کرنے لئے ہمیں سب سے پہلے ایک مبدا اور ایک مناسب محددا تی نظام منتخب کرنا پڑے گا، جیسا کہ خاکہ 5.2 میں بتایا گیا ہے۔ $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ فرض کیجئے کہ X سمت میں ان نقطوی کمیتوں کے مقامات کے محددات X-coordinates ہیں۔



خاکہ 5.2۔ پھیلی ہوئی نقطوی کمیتوں کا کمیتی مرکز

11 physics 5. motion of systems
Tuesday, February 01, 2022 9:15:22 PM

کمیتی مرکز کا x۔محدد (x-Coordinate) کے لئے یہ مساوات ہے۔

$$x_{CM} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}$$

جہاں $\sum m_i$ تمام ذرات کی کل کمیت $\left(\sum m_i = M\right)$ ہے۔ لہذا

$$x_{CM} = \frac{\sum m_i x_i}{M} \qquad (5.1)$$

اسی طرح پھیلی ہوئی ان نقطوی کمیتوں کے لئے کمیتی مرکز کے x اور y محددات بھی ہم معلوم کرسکتے ہیں جیسا کہ خاکہ (5.2) میں نشاندہی کی گئی ہے۔

$$y_{CM} = \frac{\sum m_i y_i}{M} \qquad (5.2)$$

$$z_{CM} = \frac{\sum m_i z_i}{M} \qquad (5.3)$$

لہذا ایک کارتیسی نظام میں ان نقطوی کمیتوں کا کمیتی مرکز کا مقام $(x_{CM},\ y_{CM},\ z_{CM})$ ہے۔ عام طور پر کمیتی مرکز کے مقام کو سمتی طریقے میں یوں لکھا جاسکتا ہے۔

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M} \qquad (5.4)$$

جہاں $\vec{r}_{CM} = x_{CM}\hat{i} + y_{CM}\hat{j} + z_{CM}\hat{k}$ کمیتی مرکز کی مقامی سمتیہ ہے $\vec{r}_i = x_i\hat{i} + y_i\hat{j} + z_i\hat{k}$ پھیلی ہوئی نقطوی کمیت کی مقامی سمتیہ (Position vector) ہے جہاں $\hat{i}, \hat{j}$ اور $\hat{k}$ بالترتیب X، Y اور Z محوروں میں اکائی سمتیے ہیں۔

5.1.4 دو نقطوی کمیتوں کا کمیتی مرکز:
(Centre of mass of two point Masses)

کمیتی مرکز کے لئے موجود مساوات کے ساتھ آیئے ہم m_1 اور m_2 نامی دو نقطوی کمیتوں کا کمیتی مرکز معلوم کریں جو x محور پر بالترتیب x_1 اور x_2 مقامات پر ہیں۔ اس معاملے کے لئے، محدداتی نظام کے انتخاب کی بنیاد پر ہم مندرجۂ ذیل تین طریقوں میں کمیتی مرکز کے مقام کا اظہار کرسکتے ہیں۔

(i) جب کمیت مثبت x محور پر ہوں:

مبدا کو من مانی طور پر اس طرح لیا جاتا ہے کہ m_1 اور m_2 کمیتیں مثبت x محور پر x_1 اور x_2 مقامات پر ہوں جیسا کہ خاکہ 5.3، (a) میں بتایا گیا ہے۔ کمیتی مرکز بھی مثبت x محور ہی پر x_{CM} کے مقام پر ہوگا جیسے اس مساوات کے ذریعہ پیش کیا جاسکتا ہے۔

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

(ii) جب مبدا کمیتوں میں سے کسی ایک سے مل جاتا ہے

اگر محدداتی نظام کے مبدا کو کسی ایک کمیت سے ملا دیا جائے، جیسا کہ خاکہ 5.3 (b) میں بتایا گیا ہے تو اس محاسبے کو مختص کیا جاسکتا ہے۔ جب مبدا نقطوی کمیت m_1 سے ملتا ہے تو اس کا مقام x_1 صفر ہوتا ہے۔ (یعنی $X_1=O$) پھر

$$x_{CM} = \frac{m_1(0) + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

اس مساوات کو مزید مختصر اس طرح کیا جاتا ہے۔

$$x_{CM} = \frac{m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

(iii) جب مبدا کمیت مرکز ہی کے مطابق ہوجائے

اگر محدداتی نظام کے مبدا کو کمیتی مرکز کے مطابق کردیا جائے تو پھر $xcm = 0$ ہوگا اور کمیت m_1 منفی x محور پر پائی جائے جیسا کہ

11 physics 5. motion of systems
Tuesday, February 01, 2022 9:15:23 PM

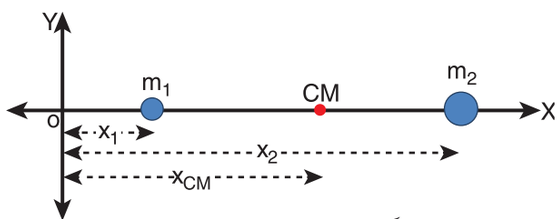
خاکہ 5.3 (c) میں بتایا گیا ہے۔لہذا اس کا مقام x_1 منفی ہوگا۔ (یعنی $(-x_1)$)

$$0 = \frac{m_1(-x) + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

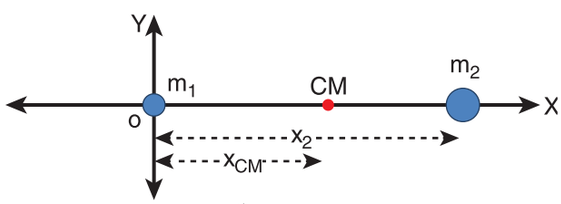
$$0 = m_1(-x) + m_2 x_2$$

$$m_1 x_1 = m_2 x_2$$

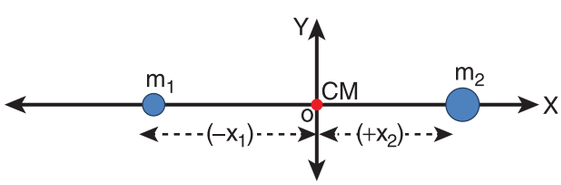
اوپر دی گئی مساوات معیارِ اثر کا اصول Principle of moment) کہلاتی ہے۔ہم حصہ 5.3.3 میں اس سے متعلق مزید معلومات حاصل کریں گے۔



(a) جب کمیتی مثبت x محور پر ہوں۔



(b) جب مبدا کمیتوں میں سے کسی ایک کے مطابق ہو



(c) جب مبدا کمیتی مرکز کے مطابق ہو

خاکہ 5.3۔ مبدا کی تبدیلی سے تعین پانے والا دو نقطوی کمیتوں کا کمیتی مرکز

مثال 5.1:

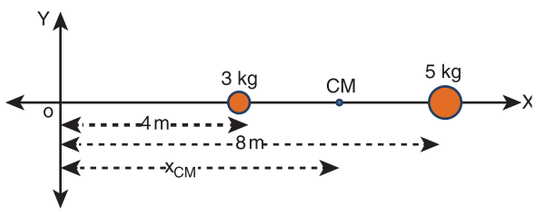
3kg اور 5kg کی دو کمیتیں x- محور پر مبدا سے 4m اور 8m کے فاصلے پر ہیں۔(i) مبدا سے اور (ii) 3Kg کمیت سے، ان دو نقطوی کمیتوں کے کمیتی مرکز کا مقام بتایئے۔

حل:

دیا گیا ہے m_1=3Kg اور m_2=5kg

(i) مبدا سے کمیتی مرکز معلوم کرنے کے لئے

نقطوی کمیتیں x محور کے ساتھ مبدا سے x_1=4m اور x_2=8m کے مقامات پر ہیں۔



مساوات 5.4 کی مدد سے کمیتی مرکز xcm حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

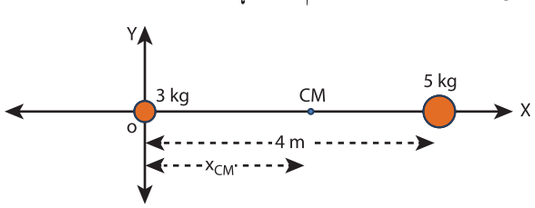
$$x_{CM} = \frac{(3\times 4) + (5\times 8)}{3+5}$$

$$x_{CM} = \frac{12+40}{8} = \frac{52}{8} = 6.5\,m$$

کمیت مرکز x محور پر مبدا سے 6.5m پر قائم ہے۔

(ii) 3kg کمیت سے کمیتی مرکز معلوم کرنے کے لئے

مبدا کو x محور کے تحت 3kg کمیت کے مقام پر منتقل کرلیا جاتا ہے۔منتقل شدہ مبدا سے 3kg نقطوی کمیت کا مقام صفر ہے $(x_1=0)$ اور 5kg نقطوی کمیت کا مقام 4m ہے، $(x_2 = 4m)$



11 physics 5. motion of systems
Tuesday, February 01, 2022 9:15:23 PM

$$x_{CM} = \frac{(3\times 0)+(5\times 4)}{3+5}$$

$$x_{CM} = \frac{0+20}{8} = \frac{20}{8} = 2.5\,m$$

کمیتی مرکز x محور پر 3kg نقطوی کمیت سے 2.5m کے فاصلے پر (اور 5kg نقطوی کمیت سے 1.5m کے فاصلے پر) واقع ہے۔

- یہ نتیجہ یہ بتاتا ہے کہ کمیتی مرکز بڑی کمیت کے قریب قائم رہتا ہے
- اگر مبدا کو کمیتی مرکز پر منتقل کر دیا جاتا ہے تو پھر معیار اثر کا اصول صحیح ٹھہرتا ہے۔

$$m_1x_1 = m_2x_2;\ 3\times 2.5 = 5\times 1.5;\ 7.5 = 7.5$$

جب ہم پہلے معاملے (i) کو دوسرے معاملے (ii) کے ساتھ موازنہ کرتے ہیں تو 3kg کمیت سے x_{CM} =2.5m کا وہ نتیجہ (3kg کمیت کے مقام) 4m کو 6.5m، جہاں معاملہ (i) میں کمیتی مرکز قائم تھا، وہاں سے تفریق کر کے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔

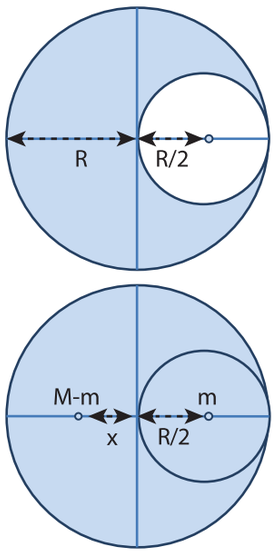
مثال 5.2

R نصف قطر والے ایک مساوی ڈسک سے، $\frac{R}{2}$ نصف قطر والا ایک چھوٹا ڈسک کاٹ کر نکال دیا جاتا ہے جیسا کہ خاکہ میں بتایا گیا ہے ڈسک کے بقیہ حصے کا کمیتی مرکز معلوم کیجئے۔

حل:

آیئے ہم فرض کر لیں کہ بغیر کٹائی والے مکمل ڈسک کی کمیت M ہے اس کا کمیتی مرکز اس ڈسک کے ہندسی مرکز پر واقع ہوگا جہاں مبدا ملتا ہے۔

فرض کیجئے کہ کاٹ کر نکال لئے گئے چھوٹے ڈسک کی کمیت m ہے اور اس کا کمیتی مرکز مبدا کے داہنی طرف $\frac{R}{2}$ کے ایک مقام پر واقع ہے جیسا کہ خاکہ میں بتایا گیا ہے۔



لہذا ڈسک کا بقیہ حصہ مبدا کے بائیں طرف ہی، کہہ لیجئے ایک فاصلہ x پر اپنا کمیتی مرکز رکھتا ہوگا۔ ہم معیار اثر کے اصول کی مدد سے یہ لکھ سکتے ہیں کہ

$$(M-m)\,x = (m)\,\frac{R}{2}$$

$$x = \left(\frac{m}{(M-m)}\right)\frac{R}{2}$$

اگر σ سطحی کمیتی کثافت (یعنی کمیت فی اکائی سطحی رقبہ)

$\sigma = \frac{M}{\pi R^2}$ ہو تو پھر چھوٹے ڈسک کی کمیت m یہ ہے۔

سطحی رقبہ × سطحی کمیتی کثافت = m

$$m = \sigma\times\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2$$

$$m = \left(\frac{M}{\pi R^2}\right)\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{M}{\pi R^2}\,\pi\,\frac{R^2}{4} = \frac{M}{4}$$

اس مساوات میں x کے لئے m کو حل کرنے پر

$$x = \frac{\frac{M}{4}}{\left(M-\frac{M}{4}\right)}\times\frac{R}{2} = \frac{\frac{M}{4}}{\left(\frac{3M}{4}\right)}\times\frac{R}{2}$$

$$x = \frac{R}{6}$$

11 physics 5. motion of systems
Tuesday, February 01, 2022 9:15:23 PM

بقیہ حصے کا کمیتی مرکز اس ڈسک کے مرکز کے بائیں حصے میں $\frac{R}{6}$ فاصلے پر ہوگا۔

■ اگر اس چھوٹے ڈسک کو بڑے ڈسک کے ہندسی مرکز سے نکالا جائے تو اس کے بقیہ حصے کا کمیتی مرکز کہاں پایا جائے گا؟

مثال 5.3

10 kg اور 5kg والے دو نقطوی کمیتوں کے مقامی سمتیے بالترتیب $(-3\hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k})$ m اور $(3\hat{i}+6\hat{j}+5\hat{k})$ m ہیں۔ کمیتی مرکز کا مقام بتائیے۔

حل :

$$m_1 = 10\,kg$$

$$m_2 = 5\,kg$$

$$\vec{r}_1 = (-3\hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k})\,m$$

$$\vec{r}_2 = (3\hat{i}+6\hat{j}+5\hat{k})\,m$$

$$\vec{r} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}$$

$$\therefore \vec{r} = \frac{10(-3\hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k}) + 5(3\hat{i}+6\hat{j}+5\hat{k})}{10+5}$$

$$= \frac{-30\hat{i}+20\hat{j}+40\hat{k}+15\hat{i}+30\hat{j}+25\hat{k}}{15}$$

$$= \frac{-15\hat{i}+50\hat{j}+65\hat{k}}{15}$$

$$\vec{r} = \left(-\hat{i}+\frac{10}{3}\hat{j}+\frac{13}{3}\hat{k}\right) m$$

کمیتی مرکز $\vec{r}$ مقام پر واقع ہے۔

5.1.5 کمیت کے مساوی پھیلاؤ کے لئے کمیتی مرکز

(Centre of mass for uniform distribution of mass)

ایک وزن دار شئے میں اگر کمیت مساوی طور پر پھیلی ہوئی ہو تو اس جسم کی ایک چھوٹی سی کمیت (Δm) کو ایک نقطوی کمیت کے طور پر لیا ئے گا اور اس قسم کے بقیہ تمام نقطوی کمیتوں کے مجموعہ حاصل لیا جائے گا تا کہ کمیتی مرکز کے محددات کے لئے مساوات حاصل کر سکیں۔

$$x_{CM} = \frac{\sum(\Delta m)_i\, x_i}{\sum \Delta m_i}$$

$$y_{CM} = \frac{\sum(\Delta m)_i\, y_i}{\sum \Delta m_i} \qquad (5.5)$$

$$z_{CM} = \frac{\sum(\Delta m)_i\, z_i}{\sum \Delta m_i}$$

دوسری طرف اگر ، لی جانے والی چھوٹی کمیت ، infinitesimally* (بہت ہی) چھوٹی (dm) ہو تو پھر ان مجموعوں کو مربوطیت یا احصاء (integrations) کے ذریعہ تبدیل کر لیا جائے گا۔

$$x_{cm} = \frac{\int x\,dm}{\int dm}$$

$$y_{cm} = \frac{\int y\,dm}{\int dm} \qquad (5.6)$$

$$z_{cm} = \frac{\int z\,dm}{\int dm}$$

مثال 5.4 :

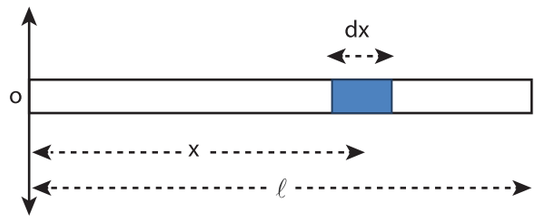
m کمیت اور ℓ لمبائی والی ایک مساوی سلاخ کا کمیتی مرکز بتائیے۔

حل:

M کمیت اور ℓ لمبائی والی ایک سلاخ کا تصور کیجئے جس کا ایک کنارا مبدا سے ملتا ہے جیسا کہ خاکہ میں بتایا گیا ہے۔ اس سلاخ کو x - محور کے ساتھ رکھا جاتا ہے۔

* بہت ہی چھوٹی مقدار کو Infinitesimal مقدار کہا جاتا ہے۔

11 physics 5. motion of systems
Tuesday, February 01, 2022 9:15:23 PM



اس سلاخ کے کمیتی مرکز کو معلوم کرنے کے لئے ہم مبدا سے x فاصلے پر ایک بہت ہی چھوٹے کمیتی حصے dx کو لیتے ہیں جس کی لمبائی dx ہوتی ہے۔

λ سلاخ کی خطی کمیتی کثافت (یعنی کمیت فی اکائی لمبائی)

ہے۔ $\lambda = \frac{M}{\ell}$

چھوٹے سے حصے (dm) کی کمیت یہ ہے۔

$$dm = \frac{M}{\ell} dx$$

اب ہم اس کمیتی تقسیم کے لئے کمیتی مرکز کی مساوات لکھ سکتے ہیں۔

$$x_{CM} = \frac{\int x dm}{\int dm}$$

$$x_{CM} = \frac{\int_0^{\ell} x\left(\frac{M}{\ell} dx\right)}{M} = \frac{1}{\ell}\int_0^{\ell} x dx$$

$$= \frac{1}{\ell}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{1} = \frac{1}{\ell}\left(\frac{\ell^2}{2}\right)$$

$$x_{CM} = \frac{\ell}{2}$$

چونکہ $\frac{\ell}{2}$ مقام سلاخ کا ہندسی مرکز ہے، یہ طے کیا جاتا ہے کہ اس مساوی سلاخ کا کمیتی مرکز اس کے ہندسی مرکز ہی پر قائم ہے

5.1.6 کمیتی مرکز کی حرکت
(Motion of Centre of Mass)

جب کوئی سخت جسم حرکت کرتا ہے تو اس کا کمیتی مرکز بھی اس کے ساتھ حرکت کرنے لگے گا۔ کمیتی مرکز کی سمتی رفتار (v_{CM}) اور اسراع (a_{CM}) جیسی حرکیاتی مقداروں کے لئے ہم، کمیتی مرکز کے مقام کی مساوات کو وقت کے لحاظ سے بالترتیب پہلی اور دوسری مرتبہ تفرقہ (یعنی differentiate) کرتے ہیں۔ آسانی کے لئے آیئے ہم حرکت کو صرف x سمت ہی میں لے لیں۔

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{x}_{CM}}{dt} = \frac{\sum m_i\left(\frac{d\vec{x}_i}{dt}\right)}{\sum m_i}$$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{\sum m_i} \qquad (5.7)$$

$$\vec{a}_{CM} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{x}_{CM}}{dt}\right) = \left(\frac{d\vec{v}_{CM}}{dt}\right) = \frac{\sum m_i\left(\frac{d\vec{v}_i}{dt}\right)}{\sum m_i}$$

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{a}_i}{\sum m_i} \qquad (5.8)$$

بیرونی قوت کی غیر موجودگی میں (یعنی $\vec{F}_{ext} = 0$) ایک نظام کے انفرادی سخت اجسام، صرف اندرونی قوتوں کی وجہ سے اپنا مقام بدل سکتے یا حرکت کر سکتے ہیں۔ اس کی وجہ سے کمیتی مرکز کے مقام میں تبدیلی نہیں آئے گی۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ کمیتی مرکز یا تو حالت سکون میں ہوگا یا مساوی حرکت میں ہوگا۔ لہذا، جب کمیتی مرکز حالت سکون پر ہو تو $\vec{v}_{CM}$ صفر ہوگی اور کمیتی مرکز اگر یکساں حرکت میں وہ تو مستقلہ ہوگی۔ ($\vec{v}_{CM} = 0$ or $\vec{v}_{CM}$ = مستقلہ)

وہاں کمیتی مرکز کی کوئی اسراع نہیں ہوگی
($\vec{a}_{CM} = 0$)

11 physics 5. motion of systems
Tuesday, February 01, 2022 9:15:24 PM

مساوات (5.7)اور (5.8) کی مدد سے

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{\sum m_i} = 0 \text{ (or) } \vec{v}_{CM} = \text{مستقلہ}$$

اس سے معلوم ہوتا ہے

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{a}_i}{\sum m_i} = 0$$

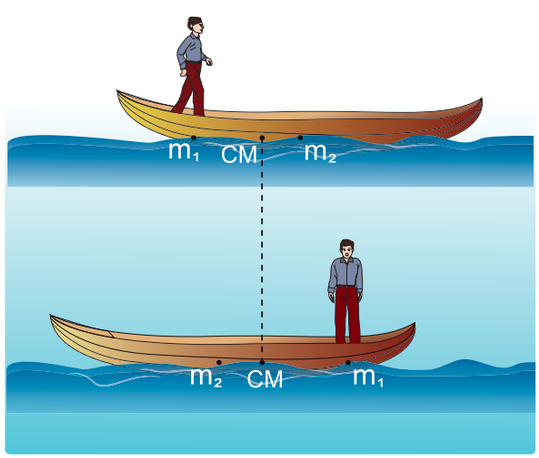
یہاں، اب بھی انفرادی ذرات اندرونی قوتوں کی وجہ سے اپنی اپنی سمتی رفتاروں اور اسراعات کے ساتھ حرکت کر سکتے ہیں۔

بیرونی قوت کی موجودگی میں (یعنی $\vec{F}_{ext} \neq 0$) اس نظام کا کمیتی مرکز اسراع پائے گا جیسا کہ مندرجۂ ذیل مساوات میں بتایا گیا ہے۔

$$\vec{F}_{ext} = \left(\sum m_i\right) \vec{a}_{CM}; \quad \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{CM}; \quad \vec{a}_{CM} = \frac{\vec{F}_{ext}}{M}$$

مثال 5.5

50kg کمیت والا ایک شخص، ٹھہرے ہوئے پانی پر تیرنے والی 300kg کمیت والی کشتی کے ایک کنارے پر کھڑا ہے۔ زمین پر کھڑے ہوئے ایک ساکن شخص کے لحاظ سے وہ شخص $2\ ms^{-1}$ کی ایک مستقل سمتی رفتار کے ساتھ کشتی کے دوسرے کنارے کی طرف چلتا ہے۔
(a) زمین پر ٹھہرے ہوئے ساکن شخص کے لحاظ سے (b) کشتی میں چلنے والے شخص کے لحاظ سے اس کشتی کی سمتی رفتار کیا ہوگی؟



(دیا گیا ہے: کشتی اور اس شخص کے درمیان رگڑ پائی جاتی ہے مگر پانی اور کشتی کے درمیان کوئی رگڑ نہیں ہے)

حل:

کشتی پر سوار شخص کی کمیت (m_1) یہ ہے $m_1 = 50kg$

کشتی پر سوار کی کمیت (m_2) یہ ہے $m_2 = 300kg$

زمین پر کھڑے ہوئے ساکن شخص کے لحاظ سے:

وہ شخص $v_1 = 2ms^{-1}$ کی سمتی رفتار کے ساتھ حرکت کرتا ہے اور وہ کشتی V_2 کی ایک سمتی رفتار کے ساتھ حرکت کرتی ہے۔
(جسے ہمیں معلوم کرنا ہے)

(i) زمین پر ٹھہرے ہوئے ساکن شخص کے لحاظ سے کشتی کے سمتی رفتار کا تعین کرنے کے لئے

چونکہ اس نظام پر کوئی بیرونی قوت عمل نہیں کر رہی ہے، وہ شخص اور کشتی رگڑ کی وجہ سے حرکت کرتے ہیں جو کہ کشتی - شخص کے اس نظام میں ایک اندرونی قوت ہے۔ لہذا کمیتی مرکز کی سمتی رفتار صفر ہے۔

($v_{CM} = 0$) مساوات 5.7 کو استعمال کرتے ہوئے

$$0 = \frac{\sum m_i v_i}{\sum m_i} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

$$0 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

$$-m_2 v_2 = m_1 v_1$$

$$v_2 = -\frac{m_1}{m_2} v_1$$

$$v_2 = -\frac{50}{300} \times 2 = -\frac{100}{300}$$

$$v_2 = -0.33\ m\ s^{-1}$$

جواب میں موجود منفی علامت یہ ظاہر کرتی ہے کہ زمین پر ٹھہرے ہوئے شخص کو وہ کشتی اس پر سوار ہو کر چلنے والے شخص کی مخالف سمت میں حرکت کرتی ہوئی نظر آتی ہے۔

(ii) چلنے والے شخص کے لحاظ سے کشتی کی سمتی رفتار کا تعین کرنے کے لئے:

ہم متعلقہ (نسبتی) سمتی رفتار کو یوں معلوم کر سکتے ہیں۔

$$v_{21} = v_2 - v_1$$

11 physics 5. motion of systems
Tuesday, February 01, 2022 9:15:24 PM

جہاں V_{21} چلتے ہوئے شخص کے لحاظ سے اس کشتی کی نسبتی سمتی رفتار ہے۔

$$v_{21} = (-0.33) - (2)$$
$$v_{21} = -2.33\,ms^{-1}$$

جواب میں موجود منفی علامت یہ ظاہر کرتی ہے کہ چلتے ہوئے شخص کے لئے وہ کشتی اس کی مخالف سمت میں حرکت کرتی دکھائی دیتی ہے۔

- زمین پر ٹھہرے ہوئے شخص کے لحاظ سے کشتی کی نسبتی سمتی رفتار کی قدر سے کشتی میں چلنے والے شخص کے لحاظ سے کشتی کی نسبتی سمتی رفتار کی قدر سے زیادہ ہوتی ہے۔
- دونوں جوابات میں موجود منفی علامت، زمین پر موجود ساکن شخص اور کشتی پر چلنے والے شخص ان دنوں کے لحاظ سے کشتی کی مخالفت سمت ظاہر کرتی ہے۔

دھماکوں میں کمیتی مرکز:
(Centre of mass in Explosions)

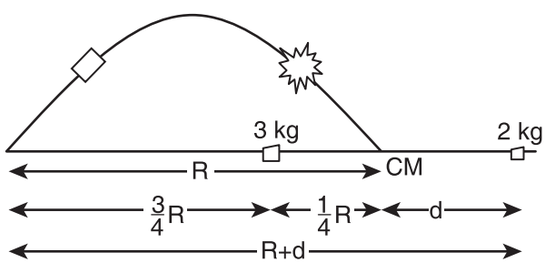
کئی مرتبہ سخت اشیاء کو چھوٹے ٹکڑوں میں توڑ پھوڑ دیا جاتا ہے۔اگر یہ دھماکہ (ٹوٹ پھوٹ) ایک ساکن یا حرکت پذیر جسم کی اندرونی قوتوں کی وجہ سے ہوتا ہے، تو کمیتی مرکز کی حالت متاثر نہیں ہوتی۔ وہ اپنی حالت سکون یا حالت حرکت ہی میں قائم رہتا ہے مگر ٹکڑوں کی حرکیاتی مقداریں متاثر ہوتی ہیں۔ اگر وہ ٹوٹ پھوٹ یا دھماکہ بیرونی ذریعہ سے ہو تو پھر کمیتی مرکز اور ٹکڑے دونوں کی حرکیاتی مقداریں متاثر ہوتی ہیں۔

مثال 5.6

5kg کمیت والا ایک غلیلیہ، اپنی حرکت کے دوران اپنے آپ دو ٹکڑوں میں پھٹ جاتا ہے۔غلیلیہ کے 3kg کمیت کا ایک ٹکڑا پھینک کی حد R کے تین چوتھائی حصے پر گر جاتا ہے۔دوسرا ٹکڑا کہاں گرے گا؟

حل:

یہ اپنے آپ ہونے والا دھماکہ ہے جس میں کسی بیرونی قوت کی مداخلت نہیں ہے؟ دھماکے کے بعد پھینکے جانے والے راستے پر وہ ٹکڑے نہ چلنے کے باوجود ان کا کمیتی مرکز اپنے غلیلیہ (Projectiles) کا راستہ برقرار رکھے گا۔ٹکڑے زمین پر گرنے کے بعد ان کا کمیتی مرکز پھینکے گئے مقام سے غلیلیہ کے حد R فاصلے پر موجود ہوگا جیسا کہ خاکہ میں بتایا گیا ہے۔



اگر مبدا کو کمیتی مرکز کے انتہائی مقام پر ثبت کیا جاتا ہے تو حرکیات کا اصول صحیح ثابت ہوتا ہے۔

$$m_1 x_1 = m_2 x_2$$

جہاں $m_1 = 3\ kg,\ m_2 = 2\ kg,\ x_1 = \frac{1}{4}R$
x2 کی قیمت d ہے۔

$$3 \times \frac{1}{4}R = 2 \times d;$$
$$d = \frac{3}{8}R$$

2kg کمیت والے ٹکڑے کی پہنچ کا مقام اور پھینکے جانے والے مقام کا درمیانی فاصلہ R+d ہے۔

$$R + d = R + \frac{3}{8}R = \frac{11}{8}R = 1.375R$$

دوسرا ٹکڑا، پھینکے جانے والے مقام سے 1.375R کے فاصلے پر گرتا ہے (یہاں R پھینک یعنی غلیلیہ کی حد ہے)

11 physics 5. motion of systems
Tuesday, February 01, 2022 9:15:25 PM

5.2 قوت گردشہ اور زاویائی معیارِ حرکت
(Torque and Angular Momentum)

جب کسی جسم پر ایک کل قوت عمل کرتی ہے، وہ بھیجی جانے والی قوت کی سمت میں خطی حرکت پیدا کرتی ہے۔ اگر وہ جسم کسی نقطے یا محور سے جو جڑا ہوا ہوتا ہے تو ایسی قوت اس جسم کو گھمانے لگتی ہے، جو (گھماؤ) کے جسم کے اس نقطہ پر منحصر ہوتا ہے جہاں قوت عمل پیرا ہوتی ہے۔ قوت کی یہ قابلیت جو ایک جسم میں گردشی حرکت پیدا کرتی ہے، قوت گردشہ (torque) یا قوت کا معیارِ حرکت (moment of Force) کہلاتی ہے۔ اس قسم کی بے شمار مثالیں ہماری روز مرہ زندگی میں دیکھی جاسکتی ہیں۔ دروازوں کا کھلنا اور بند ہونا، ایک اسپینر (Spanner) یا Wrench کی مدد سے کسی نٹ (nut) کو گھمانا وغیرہ، اس کی چند مثالیں ہیں۔



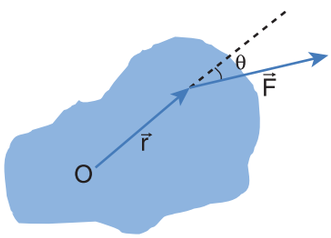
گردش کی مقدار، قوت کی قدر، اس کی سمت اور قوت پڑنے والے مقام اور ثبت شدہ نقطہ کے درمیانی فاصلے پر منحصر ہے۔ جب قوت گردشہ ایک جسم میں گردشی حرکت پیدا کرتی ہے تو اس کی زاویائی معیار حرکت وقت کے لحاظ سے تبدیل ہوتے رہتی ہے اس حصہ میں ہم قوت گردشہ اور سخت اجسام پر اس کے اثرات کے بارے میں سیکھیں گے۔

5.2.1 قوت گردشہ کی تعریف:
(Definition of Torque)

قوت گردشہ کی تعریف یوں کی جاتی ہے کہ یہ گردش کا ایک نقطہ یا ایک محور کے تحت بھیجی جانے والی بیرونی قوت کی معیار حرکت (moment of Force) ہے۔ قوت گردشہ کے لئے مساوات یہ ہے۔

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (5.9)$$

جہاں $\vec{r}$ اس نقطہ کی مقامی سمتیہ ہے، جہاں جسم پر قوت $\vec{F}$ عمل پیرا ہوتی ہے، جیسا کہ خاکہ 5.4 میں بتایا گیا ہے۔



خاکہ 5.4 ایک سخت جسم پر قوت گردشہ

یہاں $\vec{r}$ اور $\vec{F}$ کا حاصل ضرب سمتی حاصل ضرب (Vector Product) یا ترچھا حاصل ضرب (Crossproduct) کہلاتا ہے۔ دو سمتیوں کے سمتی حاصل ضرب سے ایک اور سمتیہ حاصل ہوتی ہے، جو اِن دونوں سمتیوں کے عمودی ہوتی ہے (ملاحظہ ہو، حصہ 2.5.2) لہذا قوت گردشہ $(\vec{\tau})$ ایک سمتی مقدار ہے۔

قوت گردشہ میں $r F \sin\theta$ کی قدر پائی جاتی ہے اور اس کی سمت $\vec{r}$ اور $\vec{F}$ کے عمودی ہوتی ہے۔ اس کی اکائی Nm ہے۔

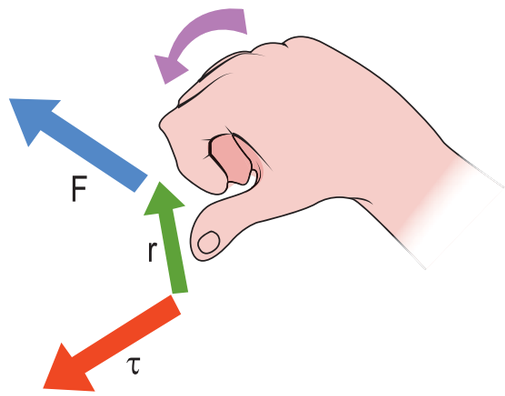
$$\vec{\tau} = (rF\sin\theta)\,\hat{n} \qquad (5.10)$$

یہاں θ $\vec{r}$ اور $\vec{F}$ کا درمیانی زاویہ ہے، اور $\hat{n}$ قوت گردشہ کی سمت میں $\vec{\tau}$ اکائی سمتیہ ہے۔ قوت گردشہ $(\vec{\tau})$ کبھی کبھی کاذب سمتیہ (Pseudo vector) بھی کہا جاتا ہے کیونکہ اس کے وجود کے لئے r اور F نامی دیگر دو سمتیوں کی ضرورت ہوتی ہے۔

قوت گردشہ کی سمت دائیں ہاتھ کے کلیے کی مدد سے معلوم کی جاتی ہے۔ وہ قانون یہ بیان کرتا ہے کہ اگر دائیں ہاتھ کی ہتھیلی کو قوت کے رخ کی جانب کرتے ہوئے اس کی انگلیوں کو مقامی سمتیہ کے ساتھ جب بند کر لئے جائیں تو کھلا ہوا انگوٹھا قوت گردشہ کی سمت کو ظاہر کرتا ہے۔ اسے خاکہ 5.5 میں بتایا گیا ہے۔

قوت گردشہ کی سمت ہمیں، اس سے پیدا ہونے والی گردش کی قسم کو جاننے میں مدد کرتی ہے۔ مثال کے طور پر قوت گردشہ کی سمت کاغذ کے باہر ہو تو پھر قوت گردشہ سے پیدا ہونے والی گردش غیر ساعتی ہوتی ہے۔

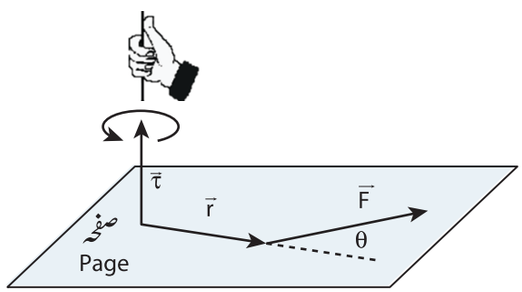
11 physics 5. motion of systems
Tuesday, February 01, 2022 9:15:25 PM



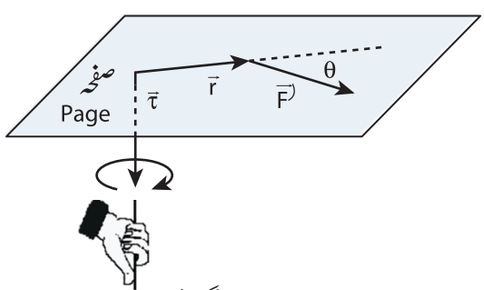
خاکہ 5.5 دائیں ہاتھ کے قانون کی مدد سے قوت گردشہ کی سمت

دوسری بہت سے معاملات میں قوت گردشہ کی سمت اور قدر طرف اگر قوت گردشہ کی سمت کاغذ کے اندرونی جانب ہوتو پھر قوت گردشہ سے پیدا ہونے والی گردش ساعتی ہوتی ہے، جیسا کہ خاکہ 5.6 میں بتایا گیا ہے۔

اکثر صورتوں میں قوت گردشہ کی سمت اور قدر الگ معلوم ہوتی ہے۔



a) غیر ساعت وار گردش



b) ساعت وار گردش

خاکہ 5.6 قوت گردشہ کی سمت اور گردش کی قسم

سمت کے لئے ہم سمتی قانون (Vector rule) یا دائیں ہاتھ کا قانون استعمال کرتے ہیں۔ قدر کے لئے ہم اس طرح قدری قسم استعمال کرتے ہیں۔

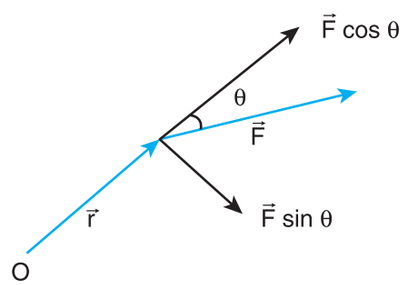
$$\tau = r\ F\ \sin\theta \qquad (5.11)$$

ہم مندرجۂ ذیل طریقے سے $\sin\theta$ کو r یا F کے ساتھ ملا کر دو مختلف طریقوں سے قوت گردشہ کی قدر کے لئے مساوات لکھ سکتے ہیں۔

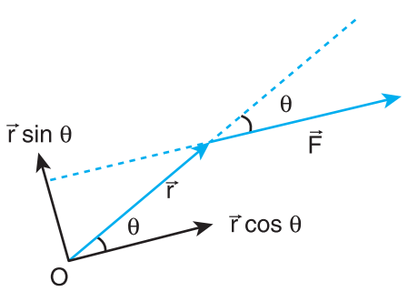
$$\tau = r\left(F\ \sin\theta\right) = r \times \left(F \perp\right) \qquad (5.12)$$

$$\tau = \left(r\ \sin\theta\right) F = \left(r \perp\right) \times F \qquad (5.13)$$

یہاں F کے عمودی موجود $\vec{r}$ کا جزء $(F \sin\theta)$ ہے۔ اسی طرح $\vec{r}$ کے عمودی موجود $\vec{F}$ کا جز $(r \sin\theta)$ ہے۔ یہ دونوں معاملات خاکہ (5.7) میں بتائے گئے ہیں۔



(a) $\tau = r\ (F \sin\theta) = r(F\perp)$



(b) $\tau = (r \sin\theta)\ F = (r\perp)F$

خاکہ 5.7 قوت گردشہ کو معلوم کرنے کے دو طریقے

11 physics 5. motion of systems
Tuesday, February 01, 2022 9:15:26 PM

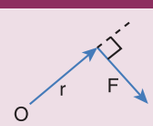
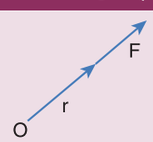
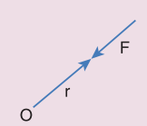
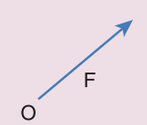
$\vec{r}$ اور $\vec{F}$ کے درمیانی زاویہ θ کی بنیاد پر قوت گردشہ کی مختلف قسمیں ہوتی ہیں۔

جب $\vec{r}$ اور $\vec{F}$ ایک دوسرے کے عمود میں ہوتے ہیں قوت گردشہ سب سے زیادہ ہوتی ہے یعنی جب $\theta = 90^\circ$ اور $\sin 90^\circ = 1$ ہے۔ لہذا $\tau_{max} = rF$

جب $\vec{r}$ اور $\vec{F}$ متوازی یا مخالف متوازی ہوتے ہیں تو قوت گردشہ صفر ہوتی ہے۔ اگر متوازی ہوں تو $\theta = 0^\circ$ اور $\sin 0^\circ = 0$ ہے، اور اگر مخالف متوازی ہوں تو $\theta = 180^\circ$ اور $\sin 180^\circ = 0.$ ہے۔ لہذا $\tau = 0$ ہے۔

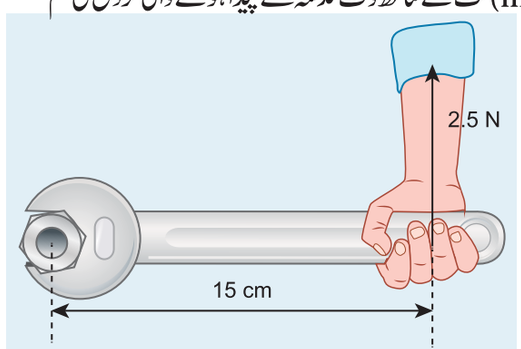
اگر قوت ثابت مقام کے نقطے پر عمل کرتی ہے تو بھی قوت گردشہ صفر ہو جاتی ہے۔ یعنی $\vec{r} = 0$ ہو تو $\tau = 0$ ہے ۔ بتائے گئے مختلف معاملات جدول 5.1 میں پیش کئے گئے ہیں۔

جدول 5.1 مختلف معاملات کے لئے τ کی قیمت

 $\theta = 90^\circ;\ \tau_{max} = rF$	 $\theta = 0^\circ; \tau = 0$
 $\theta = 180^\circ; \tau = 0$	 $r = 0; \tau = 0$

مثال 5.7

خاکہ کے مطابق، بھیجی جانے والی قوت اگر اسپینر کے ہینڈل کے عمودی ہو تو معلوم کیجئے۔ (i) نٹ کے مرکز کے ساتھ قوت سے برآمد ہونے والی قوت گردشہ (ii) قوت گردشہ کی سمت اور (iii) نٹ کے ساتھ قوت گردشہ سے پیدا ہونے والی گردش کی قسم

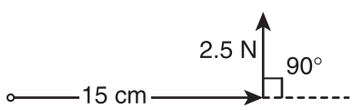


حل:

اسپینر کے بازو کی لمبائی $= 15\ \text{cm}$
$= 15\times10^{-2}\text{m}$

قوت $F = 2.5\ \text{N}$

$\vec{r}$ اور $\vec{F}$ کا درمیانی زاویہ $\theta = 90^\circ$



(i) قوت گردشہ $\tau = rF\ \sin\theta$

$$\tau = 15\times10^{-2}\times2.5\times\sin(90^\circ)$$
[یہاں $\sin 90^\circ = 1$]
$$\tau = 37.5\times10^{-2}\ \text{N m}$$

(ii) دائیں ہاتھ کے قانون کے مطابق قوت گردشہ کا رخ صفحے کے باہر کی جانب ہے۔

(iii) قوت گردشہ سے پیدا ہونے والی گردش کی قسم غیر ساعت وار ہے۔

مثال 5.8

$(4\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k})\text{N}$ کی ایک قوت ایک نقطہ پر بھیجی جاتی ہے جس کی مقامی سمتیہ $(7\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k})\ \text{m}$ ہے۔ مبدا کے تحت اس قوت سے پیدا ہونے والی قوت گردشہ معلوم کیجئے

حل:

$$\vec{r} = 7\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$$
$$\vec{F} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$$

قوت گردشہ $\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F}$

$$\vec{\tau} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 7 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\vec{\tau} = \hat{i}(20-6) - \hat{j}(35+8) + \hat{k}(-21-16)$$
$$\vec{\tau} = (14\hat{i} - 43\hat{j} - 37\hat{k})\ \text{N m}$$

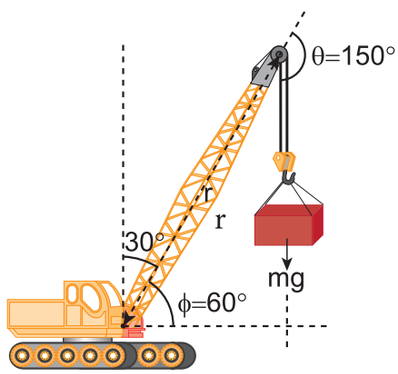
11 physics 5. motion of systems
Tuesday, February 01, 2022 9:15:26 PM

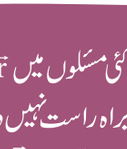
مثال 5.9

ایک کرین (Crane) میں 20m لمبائی والا ایک بازو ہے، جو عمود کے ساتھ 30° زاویہ پر جھکا ہوا ہے۔ وہ اپنے بازو کے اوپری کنارے سے لٹکی ہوئی 2 ٹن کمیت کو اٹھاتا ہے۔ کرین کا بازو کنٹینر (Container) کے جس نقطہ پر ثبت ہے، کنٹینر پر اس نقطہ کے تحت قوت جاذبہ سے پیدا ہونے والی قوت گردشہ معلوم کیجئے۔

[دیا گیا ہے۔ 1 ٹن =1000Kg): بازو کے وزن کو نظر انداز کیجئے. $g = 10\ ms^{-2}$]

حل:





کئی مسئلوں میں $\vec{r}$ اور $\vec{F}$ کا درمیانی زاویہ θ کو براہ راست نہیں دیا جاتا۔ لہذا طلباء اس کے عادی ہوجائیں کہ وہ ہمیشہ $\vec{r}$ اور $\vec{F}$ کے درمیانی زاویے کی شناخت کریں اور اسے θ سے نشاندہی کریں۔ اس ترتیب کے دیگر زاویوں کو ϕ , β , α وغیرہ سے ظاہر کرسکتے ہیں۔

لٹکاؤ کے نقطے پر موجود قوت $\vec{F}$ لٹکتی ہوئی کمیت (کے وزن) کی وجہ سے ہے۔

$$F = mg = 2 \times 1000 \times 10 = 20000\ N;$$
بازو کی لمبائی $r = 20\ m$,

ہم اس مسئلے کو تین مختلف طریقوں سے حل کرسکتے ہیں۔

طریقہ I:

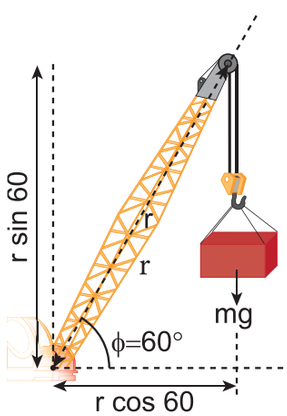
بازو کی لمبائی $\vec{r}$ اور قوت $\vec{F}$ کا درمیانی زاویہ (θ) ہے۔

بازو کے ثابت نقطہ کے تحت قوت گردشہ (τ) یہ ہے۔

$$\tau = r\,F\,\sin\theta$$
$$\tau = 20 \times 20000 \times \sin\left(150^\circ\right)$$
$$= 400000 \times \sin\left(90^\circ + 60^\circ\right)$$
$$[\text{here, } \sin\left(90^\circ + \theta\right) = \cos\theta]$$
$$= 400000 \times \cos\left(60^\circ\right)$$
$$= 400000 \times \frac{1}{2} \quad \left[\cos 60^\circ = \frac{1}{2}\right]$$
$$= 200000\ N\,m$$
$$\tau = 2 \times 10^5\ N\,m$$

طریقہ II

آیئے ہم قوت اور اس نقطے کا عمودی فاصلہ لے لیں جہاں وہ بازو کرین سے جڑا ہوا ہے۔

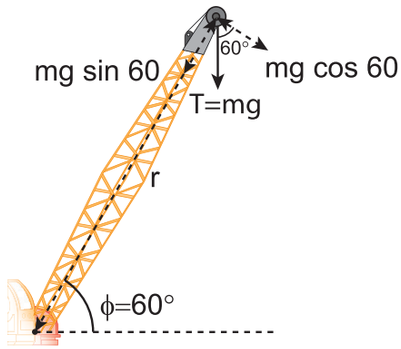


$$\tau = (r \perp) F$$
$$\tau = r\cos\phi\ mg$$
$$\tau = 20 \times \cos 60^\circ \times 20000$$
$$= 20 \times \frac{1}{2} \times 20000$$
$$= 200000\ Nm$$
$$\tau = 2 \times 10^5\ Nm$$

طریقہ III

آیئے ہم فاصلہ کو ثابت نقطہ اور عمودی قوت سے لے لیں۔

11 physics 5. motion of systems
Tuesday, February 01, 2022 9:15:26 PM

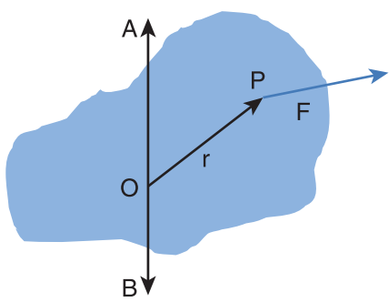


$$\tau = r(F \perp)$$
$$\tau = r\,mg\,\cos\phi$$
$$\tau = 20 \times 20000 \times \cos 60^{\circ}$$
$$= 20 \times 20000 \times \frac{1}{2}$$
$$= 200000\ \text{Nm}$$
$$\tau = 2 \times 10^{5}\ \text{Nm}$$

یہ تمام طریقے ایک ہی جواب فراہم کرتے ہیں۔

5.2.2 کسی محور کے تحت قوت گردشہ
(Torque about an Axis)

پچھلے حصوں میں ہم نے ایک نقطے کے تحت قوت گردشہ کے بارے میں پڑھا تھا۔اس حصے میں ہم ایک محور کے تحت قوت گردشہ کے بارے میں پڑھیں گے۔آیئے ہم یہ تصور کرلیں کہ ایک سخت جسم ایک محور کے تحت گردش کرنے کے قابل ہے جیسا کہ خاکہ 5.8 میں بتایا گیا ہے۔فرض کیجئے کہ ایک قوت F اس سخت جسم کے ایک نقطہ P پر عمل پیرا ہوتی ہے۔قوت سطح پر نہ بھی ہوسکتی ہے (یعنی قوت کا رخ کہیں سے بھی ہوسکتا ہے) ہم مبدا O کو AB محور کے کسی بھی نقطے پر لے سکتے ہیں۔



خاکہ 5.8 ایک محور کے تحت قوت گردشہ



تمل ناڈو کو بچوں سے کھیلے جانے والے تخلیقی اور ایجادی روایتی کھیلوں کے لئے جانا جاتا ہے۔ایسا ہی ایک مشہور کھیل (سلی) (சில்லி) یا (سلوکوڈو) (சில்லுக்கோடு) ہے۔اس میں ایک مستطیلی جگہ ہوتی ہے، جس کے مزید حصے کئے گئے ہوتے ہیں، جیسا کہ خاکہ میں بتایا گیا ہے۔کھیلنے والوں کو ان مستطیلوں کے ذریعہ اچھلتے ہوئے گزرنا پڑتا ہے۔ اس طرح کھیلتے وقت بچے کبھی ایک طرف گرنے لگتے ہیں۔

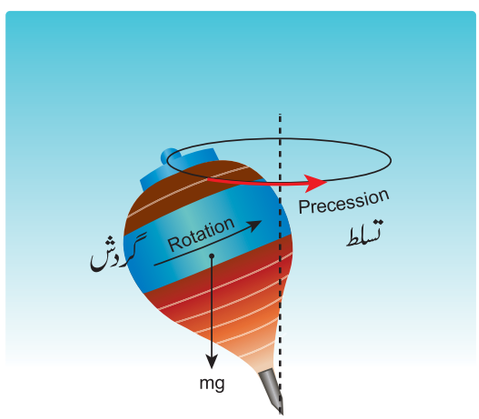
اس کی وجہ کیا ہے؟

فطری طور پر جسم وہ حالت اختیار کرتا ہے جس میں وہ اس پر عمل پیرا ہونے والی جاذبی قوت (mg) اور عمودی قوت (N) کو توازن میں رکھتا ہے اور قوت گردشہ کو تعدیل (nullify) کرتا ہے۔اگر جسم سیدھا رہنے کے بجائے جھک جائے تو قوتیں مختلف خطوط میں عمل پیرا ہوتی ہے جس سے ایک کلی قوت گردشہ پیدا ہوتی ہے جس سے کھلاڑی گر جاتا ہے۔

11 physics 5. motion of systems
Tuesday, February 01, 2022 9:15:27 PM

O کے تحت قوت $\vec{F}$ کی قوت گردشہ $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ ہے۔محور کے تحت قوت گردشہ کا جزء،محور کے تحت $\vec{F}$ کی قوت گردشہ ہے۔اسے معلوم کرنے کے لئے سب سے پہلے ہمیں سمتیہ $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ کو معلوم کرنا پڑے گا اور پھر τ اور AB کا درمیانی زاویہ ϕ معلوم کرنا پڑے گا۔ (یہاں یہ یاد رکھئے کی قوت $\vec{F}$ سطح APB پر نہیں ہے) AB کے تحت قوت گردشہ کا متوازی جزء ہی AB کے تحت قوت گردشہ ہے جو $|\vec{r} \times \vec{F}| \cos \phi$ ہے اور AB محور کی عمودی قوت گردشہ $|\vec{r} \times \vec{F}| \sin \phi$ ہے۔

محور کے تحت موجود قوت گردشہ اس کے تحت شئے کو گردش کرائے گی اور محور کی عمودی قوت گردشہ گردشی محور کو گھمائے گی۔ جب ایک سخت جسم پر بیک وقت یہ دونوں قوت گردشہ عمل پیرا ہوتی ہیں تو اس شئے میں تسلط (Precession) پایا جاتا ہے۔ہم ایک گھماتے ہوئے لٹو کا مشاہدہ کرتے ہوئے یہ دیکھ سکتے ہیں کہ وہ سکونت اختیار کرنے سے پہلے تسلطی حرکت کرتا ہے جیسا کہ خاکہ 5.9 میں بتایا گیا ہے۔



خاکہ 5.9 گردش کرتے ہوئے لٹو کا تسلط (Precession)

تسلط کا مطالعہ ہائیر سکنڈری کے طبیعیات کے کورس کے احاطے سے باہر ہے۔لہذا یہ تصور کرلیا جاتا ہے کہ وہاں گردشہ کی قوتوں کے عمودی اثر کو قطاع کرنے والے امور پائے جاتے ہیں یہاں تک کہ محور کے ثابت مقام کو برقرار رکھا جاتا ہے۔ چنانچہ قوت گردشہ کے عمودی اجزاء کو محاسبے میں نہیں لینا چاہئے۔

اس کے بعد سے ہم سخت اجسام پر قوت گرشہ کے محاسبوں کے لئے

(1) صرف ان قوت کا لحاظ کریں گے جو محور کے عمودی سطحوں پر گرتی ہیں (اور محور سے قطاع نہیں کرتیں)۔

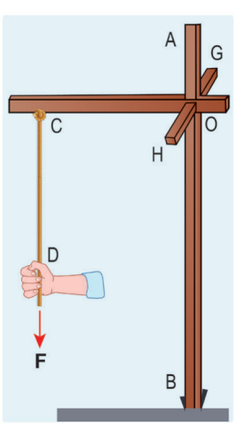
(2) مقامی سمتیوں کا لحاظ کریں گے جو محور کے عمودی ہوتی ہیں۔

نوٹ

- محور کی متوازی قوتیں گردشی محور کے عمود میں قوت گردشہ پیدا کرتی ہیں اور انہیں حساب میں نہیں لیا جائے گا۔
- قوتیں جو محور کو قطع کرتی (محور کے ذریعہ گزرتی) ہیں قوت گردشہ پیدا نہیں کرسکتیں چونکہ $r = 0$ ہے۔
- محور کے تحت موجود مقامی سمتیے محور کے عمودی طور پر قوت گردشہ پیدا کرتی ہیں اور انہیں حساب میں نہیں لیا جائے گا۔

مثال 5.10

AB، OC اور GH نامی تین باہم عمودی ستونوں کو جوڑ کر ایک ساخت بنائی گئی ہے جو زمین سے جوڑ دی گئی ہے۔جیسا کہ خاکہ میں بتایا گیا ہے۔نقطہ C میں ایک رسی باندھ دی گئی ہے اور اس کے آزاد کنارے D کو ایک قوت F کے ساتھ کھینچا جاتا ہے۔قوت کے ذریعہ پیدا ہونے والی قوت گردشہ کی قدر اور سمت معلوم کیجئے۔



(i) نقاط O، C، D اور B کے تحت

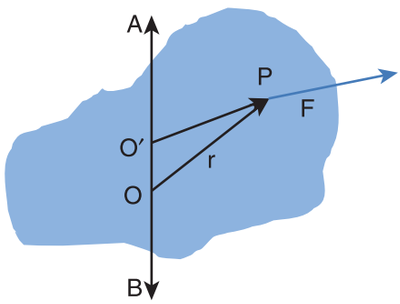
(ii) محور CD، OC، AB اور GH کے تحت

11 physics 5. motion of systems
Tuesday, February 01, 2022 9:15:27 PM

حل: (i) نقطہ E کے تحت قوت گدشہ صفر ہے۔
($\vec{F}$ چونکہ E کے ذریعہ گزرتی ہے)
نقطہ D کے تحت قوت گدشہ صفر ہے۔
($\vec{F}$ چونکہ D کے ذریعہ گزرتی ہے)
نقطہ O کے تحت قوت گدشہ $(\overrightarrow{OE}\times\vec{F})$ ہے،
جو AB اور CD محوروں کے عمود میں ہے۔
نقطہ B کے تحت قوت گدشہ $(\overrightarrow{BE}\times\vec{F})$ ہے،
جو محور AB اور CD محوروں کے عمود میں ہے۔
(ii) محور DE کے تحت قوت گدشہ صفر ہے۔
($\vec{F}$ چونکہ DE کے متوازی ہے)
محور CD کے تحت قوت گدشہ صفر ہے۔
($\vec{F}$ چونکہ CD کو قطع کرتی ہے)
محور AB کے تحت قوت گدشہ صفر ہے۔
($\vec{F}$ چونکہ AB کے متوازی ہے)
محور BG کے تحت قوت گدشہ صفر ہے۔
($\vec{F}$ چونکہ BG کو قطع کرتی ہے)

ایک محور کے تحت ایک قوت کی قوت گدشہ اس وقت تک مبدا کے انتخاب پر منحصر نہیں ہوتی، جب تک کہ مبدا کو خود محور پر منتخب کیا جائے۔ اسے نیچے بتائے گئے طریقے سے پیش کیا جاسکتا ہے۔

فرض کیجئے کہ O محور AB پر موجود مبدا ہے، جو کہ ایک سخت جسم کا گردشی محور ہے۔ F قوت ہے جو نقطہ P پر عمل پیرا ہوتی ہے۔ اب محور کے کسی بھی مقام پر بھی ایک اور نقطہ 'O کا انتخاب کیجئے جیسا کہ خاکہ 5.10 میں بتایا گیا ہے۔



خاکہ 5.10 کسی محور کے تحت قوت گدشہ مبدا پر منحصر نہیں ہوتی



خاکے میں بتائے گئے گھانے میں (جسے تمل زبان میں மரச்செக்கு) کہا جاتا ہے۔ قوت گدشہ کے سمت کی شناخت کیجئے۔

Untitled-2
Tuesday, June 28, 2022 6:30:35 PM

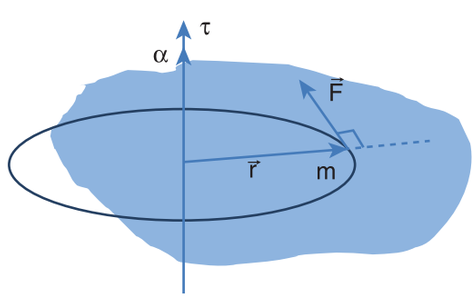
O' کے تحت F کی قوت گردشہ یہ ہے۔

$$\overrightarrow{O'P}\times\vec{F}=\left(\overrightarrow{O'O}+\overrightarrow{OP}\right)\times\vec{F}$$
$$=\left(\overrightarrow{O'O}\times\vec{F}\right)+\left(\overrightarrow{OP}\times\vec{F}\right)$$

چونکہ $\overrightarrow{O'O}\times\vec{F}$ کے عمودی $\overrightarrow{O'O}$ ہے۔اس اصطلاح میں AB کے تحت کوئی جز نہیں ہوگا۔لہذا $\overrightarrow{O'P}\times\vec{F}$ کا جزء $\overrightarrow{OP}\times\vec{F}$ کے برابر ہوگا۔

5.2.3 قوت گردشہ اور زاویائی اسراع
(Torque and Angular Acceleration)

آیئے ہم ایک سخت جسم کا تصور کریں جو ایک ثابت محور کے تحت گردش کرتا ہو۔اس جسم میں موجود ایک نقطوی کمیت ایک ثابت محور کے تحت ایک دائری حرکت انجام دیتی ہے جیسا کہ خاکہ 5.11 میں بتایا گیا ہے۔نقطوی کمیت پر عمل کرنے والی ایک مماسی قوت $\vec{F}$ اس گردش کے لئے مطلوبہ قوت گردشہ پیدا کرتی ہے۔ یہ قوت $\vec{F}$ نقطوی کمیت کی مقامی سمتیہ $\vec{r}$ کے عمودی ہوتی ہے۔



خاکہ 5.11 قوت گردشہ اور زاویائی اسراع

محور کے تحت کمیتی نقطہ m پر قوت کے ذریعہ پیدا ہونے والی قوت گردشہ اس طرح لکھی جاسکتی ہے۔

$$\tau=rF\sin 90^\circ=rF \qquad \left[\because \sin 90^\circ=1\right]$$
$$\tau=rma \qquad \left[\because (F=ma)\right]$$
$$\tau=rmr\alpha=mr^2\alpha \qquad \left[\because (a=r\alpha)\right]$$

$$\tau=\left(mr^2\right)\alpha \qquad (5.14)$$

لہذا،نقطوی کمیت پر عمل پیرا ہونے والی قوت کی قوت گردشہ اس نقطوی کمیت پر میں گردشی محور کے تحت ایک زاویائی اسراع (α) پیدا کرتی ہے۔

سمتیہ کی ترقیم (Vector notation) میں

$$\vec{\tau}=\left(mr^2\right)\vec{\alpha} \qquad (5.15)$$

τ اور α کی سمتیں گردشی محور کے تحت ہوتی ہیں۔اگر τ کی سمت α کی سمت میں ہوتو،وہ زاویائی اسراع پیدا کرتی ہے۔دوسری طرف اگر τ کی سمت α کی سمت کے مخالف ہوتو وہ نقطوی کمیت میں زاویائی منفی اسراع پیدا کرتی ہے۔

مساوات 5.14 اور 5.15 میں موجود اصطلاح mr^2 نقطوی کمیت کی جمود کی حرکت (I) کہلاتی ہے۔ایک سخت جسم اس قسم کی کئی نقطوی کمیتوں سے بنا ہوتا ہے۔لہذا ایک سخت جسم کی جمود حرکت (معیار جمود) (Moment of Inertia) اس جسم کو تعمیر کرنے والی تمام نقطوی کمیتوں کی انفرادی جمودی حرکت کا مجموعہ $\left(I=\sum m_i r_i^2\right)$ ہے۔لہذا،اس سخت جسم کے لئے قوت گردشہ کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے

$$\vec{\tau}=\left(\sum m_i r_i^2\right)\vec{\alpha} \qquad (5.16)$$
$$\vec{\tau}=I\vec{\alpha} \qquad (5.17)$$

ہم حصہ 5.4 میں مختلف شکلوں والے اجسام کے لئے جمودی حرکت اور اس کی اہمیت کے بارے میں مزید معلومات حاصل کریں گے۔

5.2.4 زاویائی معیار حرکت
(Angular Momentum)

گردشی حرکت میں موجود زاویائی معیار حرکت،خطی حرکت میں موجود خطی معیار حرکت کے برابر ہوتی ہے۔ایک نقطوی کمیت کی زاویائی معیار حرکت کی تعریف یوں کی جاتی ہے کہ وہ اس کی خطی معیار حرکت کی

11 physics 5. motion of systems
Tuesday, February 01, 2022 9:15:28 PM

حرکت (moment) ہے۔ بالفاظ دیگر، کسی نقطہ یا محور کے لحاظ سے ایک مقام $\vec{r}$ پر ایک خطی معیار حرکت $\vec{P}$ رکھنے والی ایک نقطوی کمیت کی زاویائی معیار حرکت $\vec{L}$ کو حسابی طور پر یوں لکھا جاتا ہے۔

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \qquad (5.18)$$

زاویائی معیار حرکت کی قدر اس طرح لکھی جا سکتی ہے۔

$$L = r\,p\sin\theta \qquad (5.19)$$

جہاں $\vec{r}$ اور $\vec{p}$ کا درمیانی زاویہ θ ہے۔ $\vec{L}$ اس سطح کے عمودی ہوتی ہے، جہاں $\vec{r}$ اور $\vec{p}$ موجود ہوتے ہیں، جیسا کہ ہم نے قوت گردشہ کے معاملہ میں لکھا تھا، یہاں بھی ہم $\sin\theta$ کو $\vec{r}$ یا $\vec{p}$ سے منسلک کر سکتے ہیں۔

$$L = r\left(p\sin\theta\right) = r\left(p_{\perp}\right) \qquad (5.20)$$

$$L = \left(r\sin\theta\right)p = \left(r_{\perp}\right)p \qquad (5.21)$$

جہاں $p_{\perp}$ خطی معیار حرکت P کا جز ہے جو r کے عمودی ہے اور $r_{\perp}$ مقام r کا جزء ہے، جو P کے عمودی ہے۔

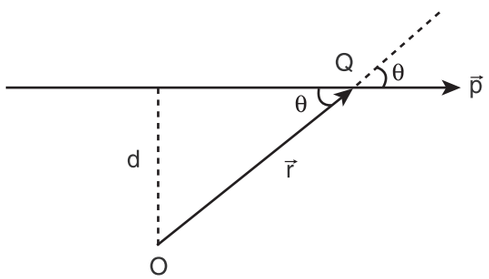
اگر زاویائی معیار حرکت $(L=0)$ ہو اور اگر خطی معیار حرکت صفر ہو $(P=0)$ یا اگر وہ ذرہ مبدا پر ہو $(r=0)$ یا اگر $\vec{r}$ اور $\vec{p}$ ایک دوسرے کے متوازی یا مخالف متوازی ہوں $(\theta=0°\text{ or }180°)$ ہو تو زاویائی معیار حرکت صفر $(L=0)$ ہوتی ہے۔

ایک غلط فہمی بہت مشہور ہے کہ زاویائی معیار حرکت ایک مقدار ہے، جو صرف گردشی حرکت سے منسلک ہے۔ یہ صحیح نہیں ہے۔ زاویائی معیار حرکت، خطی حرکت کرنے والے اجسام سے بھی جڑی ہوئی ہے۔ آیئے ہم مندرجۂ ذیل مثال کے ذریعہ اسے سمجھیں۔

مثال 5.11

کمیت (m) والا ایک جسم ایک مستقل سمتی رفتار (v) کے ساتھ حرکت کر رہا ہے۔ ثابت کیجئے کہ کل حرکت کے دوران کسی نقطہ کے تحت اس کی زاویائی معیار حرکت مستقل ہوتی ہے۔

حل:



فرض کیجئے کہ m کمیت والا وہ ذرہ ایک مستقل سمتی رفتار v کے ساتھ حرکت کر رہا ہے۔ چونکہ وہ ایک مستقل سمتی رفتار کے ساتھ حرکت کر رہا ہے، اس کا راستہ ایک سیدھا خط ہے۔ اس کی معیار حرکت $\left(\vec{p} = m\vec{v}\right)$ کی سمت بھی اسی راستے کے ساتھ ہوگی۔ آیئے ہم راستے سے ایک عمودی فاصلہ (d) پر ایک مبدا 'O' ثبت کریں۔ ایک مخصوص وقت پر Q مقام پر پہنچنے والے اس ذرہ کو ایک مقامی سمتیہ $\left(\vec{r} = \overrightarrow{OQ}\right)$ سے جڑ سکتے ہیں۔

$\vec{r}$ اور $\vec{p}$ کے درمیانی زاویے کو θ کے طور پر لے لیجئے، اس وقفے پر اس ذرہ کی زاویائی معیار حرکت کی قدر یہ ہے۔

$$L = OQ\,p\sin\theta = OQ\,mv\sin\theta = mv\left(OQ\sin\theta\right)$$

اصطلاح $(OQ\sin\theta)$، مبدا اور وہ خط جس کے ساتھ کمیت حرکت کر رہی ہے، اس خط کا درمیانی عمودی فاصلہ ہے۔ لہذا مبدا کے تحت اس ذرہ کی زاویائی معیار حرکت یہ ہے۔

$$L = mvd$$

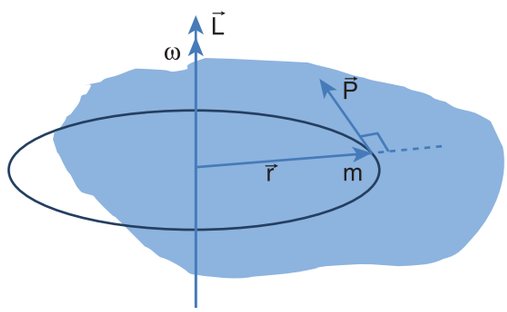
اوپر دی گئی مساوات میں زاویائی معیار حرکت L کے لئے زاویہ θ موجود ہی نہیں ہے چونکہ معیار حرکت $(p=mv)$ اور عمودی فاصلہ d دونوں مستقلات ہیں، ذرہ کی زاویائی معیار حرکت بھی

11 physics 5. motion of systems
Tuesday, February 01, 2022 9:15:29 PM

مستقلہ ہے۔لہذا زاویائی معیارحرکت خطی حرکت والے اجسام کے ساتھ بھی منسلک ہے ۔ اگر ذرہ کا سیدھا راستہ، مبدا کے ذریعہ گذرتا ہے تو پھر زاویائی معیار حرکت صفر ہوتی ہے جو خود ایک مستقلہ ہی ہے۔

5.2.5 زاویہ معیارحرکت اورزاویائی سمتی رفتار
(Angular Momentum andAngular velocity)

آیئے ہم ایک سخت جسم کا تصور کریں جو ایک ثابت محور کے تحت گردش کرتا ہے ۔اس ثابت محور کے تحت، جس میں موجود ایک نقطوی کمیت m ایک دائری حرکت انجام دیتی ہے جیسا کہ خاکہ 5.12 میں بتایا گیا ہے۔



خاکہ 5.12 زاویائی معیارحرکت اور زاویائی سمتی رفتار

نقطوی کمیت m گردشی معیار سے r فاصلے پر ہے۔کسی بھی وقت پر اس کی خطی معیارحرکت اس دائری راستے کے مماسی ہوتی ہے تو پھر زاویائی معیارحرکت $\vec{L}$ $\vec{r}$ اور $\vec{P}$ کے عمودی ہوتی ہے۔لہذا وہ گردشی محور کی طرف سمت بند ہوتی ہے۔اس معاملے میں $\vec{r}$ اور $\vec{P}$ کا درمیانی زاویہ $\theta = 90°$ ہے۔اس زاویائی معیارِحرکت $\vec{L}$ کی قدر اس طرح لکھی جاسکتی ہے۔

$$L = r\,mv\sin 90^\circ = r\,mv$$

جہاں خطی سمتی رفتار v ہے۔خطی سمتی رفتار v اور ایک دائری حرکت میں موجود زاویائی سمتی رفتار ω کا درمیانی تعلق $v=r\omega$ ہے۔

$$L = rmr\omega$$
$$L = (mr)^2\ \omega \qquad (5.22)$$

L اور ω کی سمتیں گردشی محور کے ساتھ ہوتی ہیں ۔اوپر کی مساوات سمتیائی اظہار میں اس طرح لکھی جاسکتی ہیں۔

$$\vec{L} = (mr)^2\ \vec{\omega} \qquad (5.23)$$

جیسا کہ پہلے بحث کی گئی، مساوات 5.22 اور 5.23 میں موجود اصطلاح mr^2 نقطوی کمیت کی جمودی حرکت (moment of Inertia) I ہے۔ ایک سخت جسم اس قسم کی کئی نقطوی کمیتوں سے بنا ہوتا ہے۔ لہذا ایک سخت جسم کی جمودی حرکت اس جسم کو تعمیر کرنے والی تمام نقطوی کمیتوں کی انفرادی جمودی حرکتوں کا حاصل جمع ہے۔لہٰذا سخت جسم کی زاویائی معیارحرکت $\left(I = \sum m_i r_i^2\right)$ اس طرح لکھی جاسکتی ہے۔

$$\vec{L} = \left(\sum m_i r_i^2\right)\vec{\omega} \qquad (5.24)$$
$$\vec{L} = I\vec{\omega} \qquad (5.25)$$

جمودی حرکت (I) کا مطالعہ حصہ 5.4 کے لئے مخصوص کر دیا گیا ہے۔

5.2.6 قوت گردشہ اورزاویائی معیارحرکت:
(Torque and Angular Momentum)

ہمارے پاس ایک سخت جسم کی زاویائی معیارحرکت کی قدر کے لئے $L= I\omega$ کی مساوات موجود ہے۔ ایک سخت جسم پر قوت گردشہ کی قدر کے لئے مساوات $\tau = I\alpha$ ہے۔

ہم قوت گردشہ کے لئے اس مساوات کو مزید اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$\tau = I\frac{d\omega}{dt} \quad \because \left(\alpha = \frac{d\omega}{dt}\right) \qquad (5.26)$$

11 physics 5. motion of systems
Tuesday, February 01, 2022 9:15:29 PM

جہاں ω زاویائی سمتی رفتار اور α زاویائی اسراع ہے۔ ہم مساوات 5.26 کو اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں۔

$$\tau = \frac{d(I\omega)}{dt}$$

$$\tau = \frac{dL}{dt} \qquad (5.27)$$

اوپر کی مساوات یہ بتاتی ہے کہ ایک محور پر ثبت شدہ ایک سخت جسم پر بیرونی قوت گدشہ، اس جسم میں اس محور کے تحت زاویائی معیار حرکت کی شرح پیدا کرتی ہے۔ یہ گردشی حرکت میں نیوٹن کا دوسرا کلیہ ہے کیونکہ یہ $F = \frac{dp}{dt}$ شکل میں ہے جو خطی حرکت کے لئے صحیح ثابت ہوتی ہے۔

زاویائی معیار حرکت کی بقاء:
(Conservation of Angular Momentum)

اوپر کی مساوات سے ہم اس نتیجے پر پہنچ سکتے ہیں کہ بیرونی قوت گدشہ کی غیر موجودگی میں ذرات کے نظام یا سخت جسم کی زاویائی معیار حرکت کی بقاء ہوتی ہے۔

اگر $\tau = 0$ ہو تو پھر $\frac{dL}{dt} = 0$ ہے۔ L مستقلہ ہے۔

اوپر کی مساوات، کلیہ بقاء زاویائی معیار حرکت کہلاتی ہے۔ ہم اس کلیہ سے متعلق مزید جانکاری حصہ 5.5 میں حاصل کریں گے۔

5.3 سخت اجسام کی توازنیت:
(Equilibrium of Rigid Bodies)

ایک میز پر، جب ایک جسم حرکت کئے بغیر حالت سکون پر ہوتا ہے تو ہم یہ کہتے ہیں کہ اس جسم پر کوئی قوت عمل نہیں کر رہی ہے۔ حقیقت میں یہ خیال غلط ہے کیونکہ وہاں اس جسم پر نچلی جانب جاذبی قوت عمل کر رہی ہوتی ہے اور اس جسم پر میز کے ذریعہ اوپری جانب عمودی قوت عمل کر رہی ہوتی ہے اور یہ دونوں قوتیں ایک دوسری کو رد کر دیتی ہیں اور اس لئے وہاں اس جسم پر کوئی کل قوت عمل نہیں کرتی۔

''جسم پر کوئی قوت عمل نہیں کرتی'' اور ''جسم پر کوئی کل قوت عمل نہیں کرتی'' ان دو جملوں میں بہت بڑا فرق پایا جاتا ہے۔ یہی بحث قوت گدشہ یا قوت کی حرکت کے لحاظ سے گردشی حالات کے لئے مناسب معلوم ہوتی ہے۔

جب ایک سخت جسم کی خطی معیار حرکت اور زاویائی معیار حرکت مستقل ہوں تو کہا جائے گا کہ وہ جسم میکانکی توازنیت میں ہے۔

جب خطی معیار حرکت مستقل رہتی ہے تو جسم پر عمل کرنے والی کل قوت صفر ہوتی ہے۔

$$\vec{F}_{net} = 0 \qquad (5.28)$$

اس حالت میں یہ کہا جائے گا کہ وہ جسم خطی توازنیت میں ہے۔ اس سے پتہ چلتا ہے کہ جسم پر مختلف سمتوں میں عمل کرنے والی مختلف قوتوں $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3 \ldots$ کا سمتی مجموعہ صفر ہے۔

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots + \vec{F}_n = 0 \qquad (5.29)$$

اگر اس جسم پر $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3 \ldots$ قوتیں مختلف سمتوں میں عمل پیرا ہوتی ہوں تو ہم انہیں افقی اجزاء ور عمودی اجزاء کے طور پر لیں گے اور پھر ان کے مجموعے کو اس کی مناسب سمت میں لیں گے۔ اس معاملے میں افقی اور عمودی دونوں توازنتیں (equilibria) ممکن ہیں۔

اسی طرح جب زاویائی معیار حرکت مستقل رہتی ہے تو جسم پر عمل کرنے والی کل قوت گدشہ صفر ہوتی ہے۔

$$\vec{\tau}_{net} = 0 \qquad (5.30)$$

اس حالت کے تحت، یہ کہا جائے گا کہ وہ جسم گردشی توازنت میں ہے۔ اس جسم پر گردش کے مختلف احساسات پیدا کرنے والی مختلف گدشہ کی قوتوں $\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2, \vec{\tau}_3 \ldots$ کا سمتی مجموعہ صفر ہوتا ہے۔

11 physics 5. motion of systems
Tuesday, February 01, 2022 9:15:30 PM

$$\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3 + \cdots + \vec{\tau}_n = 0 \qquad (5.31)$$

لہذا ہم یہ بھی طے کر سکتے ہیں کہ جب ایک سخت جسم پر عمل پیرا ہونے والی کل قوت اور کل قوت گدشہ صفر ہوتی ہے تو وہ جسم میکانیکی توازنت میں ہوتا ہے۔

$$\vec{F}_{net} = 0 \text{ and } \vec{\tau}_{net} = 0 \qquad (5.32)$$

چونکہ قوتیں اور گدشہ کی قوتیں سمتی مقداریں ہیں، ان کی سمتوں کو مناسب روایتی علامت کے ساتھ لینا ضروری ہے۔

5.3.1 توازنیت کے اقسام: (Types of equilibrium)

اوپر کے مباحثوں کی بنیاد پر، ہم اس نتیجے پر پہنچتے ہیں کہ مختلف حالات کی بنیاد پر توازنیت کے مختلف اقسام ممکن قرار پاتے ہیں۔ انہیں جدول 5.2 میں محیط کیا گیا ہے۔

جدول 5.2۔ توازنیت کے مختلف اقسام اور ان کے حالات

توازنیت کی قسم	حالات
خطی توازنیت (translational equilibrium)	■ خطی معیار حرکت مستقل ہوتی ہے۔ ■ کل قوت صفر ہوتی ہے۔
گردشی توازنیت (Rotational equilibrium)	■ زاویائی معیار حرکت مستقل ہوتی ہے۔ ■ کل قوت گدشہ صفر ہوتی ہے۔
ساکن توازنیت (Static equilibrium)	■ خطی معیار حرکت اور زاویائی معیار حرکت صفر ہوتی ہیں۔ ■ کل قوت اور کل قوت گدشہ صفر ہوتی ہیں۔
حرکی توازنیت (Dynamic equilibrium)	■ خطی معیار حرکت اور زاویائی معیار حرکت مستقل ہوتی ہیں۔ ■ کل قوت اور کل قوت گدشہ صفر ہوتی ہیں۔
متوازن توازنیت (مستحکم توازنت) (Stable equilibrium)	■ خطی معیار حرکت اور زاویائی معیار حرکت صفر ہوتی ہیں۔ ■ تھوڑا سا خلل پیدا کر کے چھوڑے جانے پر وہ جسم دوبارہ توازنت اختیار کرنے کی کوشش کرتا ہے ■ توازنیت سے خلل پانے پر اس جسم کا کمیتی مرکز کچھ اعلیٰ مقام پر ہٹ جاتا ہے۔ ■ جسم کی توانائی بالقواہ کم ہوتی ہے جو کہ جسم کے خلل پڑ جانے پر بڑھ جاتی ہے۔
غیر مستحکم یا غیر متوازن توازنیت (Unstable equilibrium)	■ خطی معیار حرکت اور زاویائی معیار حرکت صفر ہوتی ہیں۔ ■ تھوڑا سا خلل پیدا کر کے چھوڑے جانے پر، وہ جسم دوبارہ توازنت حاصل نہیں کر سکتا۔ ■ توازنیت سے خلل پانے پر اس جسم کا کمیتی مرکز کچھ ادنیٰ مقام پر ہٹ جاتا ہے۔ ■ جسم کی توانائی بالقواہ کم نہیں ہوتی جو کہ جسم کے خلل پانے پر کم ہونے لگتی ہے۔
معادل توازنت (neutral equilibrium)	■ خطی معیار حرکت اور زاویائی معیار حرکت صفر ہوتی ہیں۔ ■ تھوڑے خلل پیدا کر کے چھوڑے جانے پر، وہ جسم اسی توازنت پر برقرار رہتا ہے۔ ■ توازنیت سے خلل پانے پر بھی اس جسم کا کمیتی مرکز اعلیٰ یا ادنیٰ مقام پر نہیں ہٹتا۔ ■ خلل پانے کے باوجود اس کی توانائی بالقواہ یوں ہی برقرار رہتی ہے۔

11 physics 5. motion of systems
Tuesday, February 01, 2022 9:15:30 PM

مثال 5.12

عابد اور عادل 10m لمبائی اور 28kg کمیت والے ایک لکڑے کو لے جاتے ہیں جو کہ لگ بھگ مساوی موٹائی والا ہے۔ وہ اسے اس کے کناروں سے بالترتیب 1m اور 2m پر تھامتے ہیں۔ ان دونوں میں سے کون اس لکڑے کا زیادہ بوجھ ڈھوتا ہے۔ $(g=10ms^{-2})$

حل:

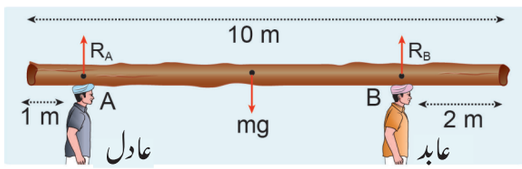
آیئے ہم یہ تصور کریں کہ وہ لکڑا میکانیکی توازنیت میں ہے۔ لہذا اس لکڑے پر عمل کرنے والی قوت اور کل قوت گردشہ صفر ہونا چاہئے۔ جاذبی قوت لکڑے کے کمیتی مرکز پر نیچے کی جانب عمل کرتی ہے وہ A اور B مقام پر عابد اور عادل سے پہنچائی جانے والی اوپری جانبی ردعمل کی R_A اور R_B کی عمودی قوتوں کے ذریعہ منقطع ہوجاتی ہے۔ ردعمل کی یہی قوتیں ان سے اٹھائے جانے والے بوجھ ہیں۔

ان دونوں سے اٹھایا جانے والا کل وزن $W = mg = 28 \times 10 = 280\ N$ ہونا چاہئے۔ ان سے علاحدہ طور پر اٹھائے جانے والے وزن ہی ردعمل کی قوتیں ہیں۔ آیئے ہم لکڑے کا آزاد جسمانی خاکہ بنا کر اس پر عمل پیرا ہونے والی تمام قوتوں کو بتائیں۔

خطی توازنت (translational equilibrium) کے لئے:

لکڑے پر عمل پیرا ہونے والی کل قوت صفر ہونی چاہئے۔

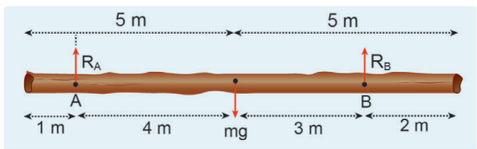
$$R_A + (-mg) + R_B = 0$$



یہاں R_A اور R_B قوتوں کو مثبت لیا جاتا ہے۔ چونکہ وہ اوپری جانب عمل پیرا ہوتی ہے۔ نچلی جانب عمل پیرا ہونے والی جاذبی قوت کو منفی لے لیا جاتا ہے۔

$$R_A + R_B = mg$$

گردشی توازنیت (rotational equilibrium) کے لئے:



لکڑے پر عمل پیرا ہونے والی کل قوت گردشہ صفر ہونی چاہئے۔ حساب کی آسانی کے لئے ہم لکڑے پر نقطہ A کے تحت تمام قوتوں سے بننے والی قوت گردشہ کو لے سکتے ہیں۔ یہ قوتیں فاصلوں کے عمودی ہوتی ہیں۔ لہذا

$$(0R_A) + (-4mg) + (7R_B) = 0.$$

یہاں ردعملی قوت R_A کوئی قوت گردشہ نہیں پیدا کرسکتی کیونکہ ردعملی قوتیں حوالاتی نقطہ A کے ذریعہ گذرتی ہیں۔ mg قوت کی قوت گردشہ، نقطہ A کے تحت ایک ساعتی موڑ پیدا کرتی ہے جسے منفی لیا جاتا ہے اور R_B قوت کی قوت گردشہ نقطہ A کے تحت غیر ساعتی موڑ پیدا کرتی ہے جسے مثبت لے لیا جاتا ہے۔

$$7R_B = 4mg$$

$$R_B = \frac{4}{7}mg$$

$$R_B = \frac{4}{7} \times 28 \times 10 = 160\ N$$

اوپر کی مساوات پر R_B کی قیمت کو حل کرنے ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$R_A = mg - R_B$$

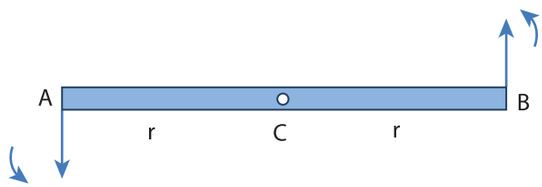
$$R_A = 28 \times 10 - 160 = 280 - 160 = 120\ N$$

چونکہ R_B کی قیمت R_A سے زیادہ ہے۔ یہ فیصلہ کیا جاتا ہے کہ عادل عابد سے زیادہ بوجھ اٹھا رہا ہے، وہ جو کمیتی مرکز کے قریب ہوتا ہے زیادہ وزن اٹھاتا ہے۔

11 physics 5. motion of systems
Tuesday, February 01, 2022 9:15:31 PM

5.3.2 جفتہ (Couple)

ایک پتلی مساوی سلاخ AB کا تصور کیجئے۔اس کا کمیتی مرکز اس کا مرکزی نقطہ C پر موجود ہے۔فرض کیجئے کہ اس سلاخ کے A اور B دونوں کے عمودی طور پر دو قوتیں پہنچائی جاتی ہیں، جو قدر میں مساوی مگر سمت میں مخالف ہوتی ہیں۔وہ دو قوتیں ایک فاصلہ 2r سے جدا کی گئی ہیں، جیسا کہ خاکہ 5.13 میں بتایا گیا ہے۔



خاکہ 5.13 جفتہ

چونکہ وہ دو مساوی قوتیں سمت میں مخالف ہیں، وہ ایک دوسری کو منقطع کر دیتی ہیں اور سلاخ پر عمل پیرا ہونے والی کل قوت صفر ہوتی ہے۔ اب وہ سلاخ خطی توازنت میں ہوتی ہے۔لیکن وہ سلاخ گردشی توازنت میں نہیں ہوتی۔آیئے ہم یہ دیکھیں کہ وہ کس طرح گردشی توازنت میں نہیں ہوتی ہے۔مرکزی نقطہ C کے لحاظ سے کنارے A پر بھیجی گئی قوت کی حرکت ایک غیر ساعتی گردش پیدا کرتی ہے، اسی طرح کنارے B پر بھیجی گئی قوت کی حرکت بھی ایک غیر ساعتی گردش پیدا کرتی ہے۔دونوں قوتوں کی حرکتیں سلاخ میں ایک ہی گردش کا احساس پیدا کرتی ہیں۔ لہذا وہ سلاخ خطی توازنت میں رہنے کے باوجود ایک گردشی حرکت یا موڑ اختیار کرتی ہیں۔

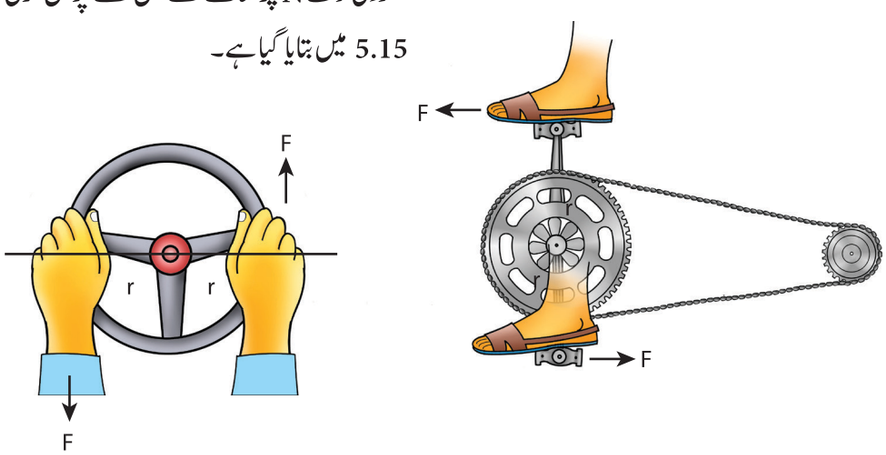
موڑنے کا اثر پیدا کرنے والی قوتوں کی ایک جوڑی، جو قدر میں مساوی ہو مگر سمت میں مخالف ہو اور ایک عمودی فاصلے سے اس طرح جدا کی گئی ہو کہ ان کے عملی خطوط قطاع نہیں ہوتیں ہو جفتہ یا Couple کہلاتی ہے۔ہم اپنی روزمرہ کی کارروائیوں میں کئی جفتوں سے دوچار ہوتے ہیں جیسا کہ خاکہ 5.14 میں بتایا گیا ہے۔

نوٹ

ایسے معاملات بھی پائے جاتے ہیں جن میں دو قوتیں ایک دوسرے کو منقطع نہیں کرتیں۔اگر وہ دو قوتیں مساوی نہ ہوں یا ان قوتوں کی سمت عین مخالف نہ ہوں تو اس جسم میں گردشی حرکت کے ساتھ ساتھ خطی حرکت بھی پائی جائے گی۔

5.3.3 معیارِ اثر کا اصول: (Principle of Moments)

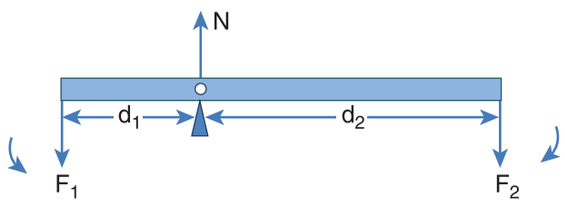
نظر انداز کے قابل کمیت رکھنے والی ایک ہلکی سلاخ کا تصور کیجئے جو اس کی لمبائی کے ساتھ ایک نقطہ پر چڑھائی گئی ہے۔فرض کیجئے کہ چڑھائے گئے نقطے F_1 اور F_2 کے فاصلوں میں اس کے دونوں کناروں پر d_1 اور d_2 دو متوازی قوتیں عمل پیرا ہوتی ہیں اور اس کے ردعمل کی عمودی قوت N چڑھائے گئے اس نقطے پر عمل کرتی ہے جیسا کہ خاکہ 5.15 میں بتایا گیا ہے۔



خاکہ 5.14 جفتہ کا گردشی اثر

11 physics 5. motion of systems
Tuesday, February 01, 2022 9:15:31 PM

اگر اس سلاخ کو افقی طور پر برقرار رہنا ہو تو دو خطی اور گردشی توازنیت پر ہونا چاہئے۔ پھر دونوں کل قوت اور کل قوت گدشہ صفر ہونا چاہئے۔



خاکہ 5.15 معیار اثر کا اصول

خطی توازنت کے لئے، کل قوت کا صفر ہونا ضروری ہے۔

$$-F_1 + N - F_2 = 0$$

$$N = F_1 + F_2$$

گردشی توازنت کے لئے کل قوت کا گدشہ کا صفر ہونا ضروری ہے۔

$$d_1F_1 - d_2F_2 = 0$$

$$d_1F_1 = d_2F_2 \qquad (5.33)$$

اوپر کی مساوات معیار اثر کے اصول کی نمائندگی کرتی ہے۔ یہ اصول $d_1 = d_2 ; F_1 = F_2$ کی شرط کے ساتھ اشیاء کے تولنے کے لئے استعمال ہونے والے کمانی دار ترازو میں استعمال ہوتا ہے۔ ہم مساوات 5.33 کو دوبارہ اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{d_2}{d_1} \qquad (5.34)$$

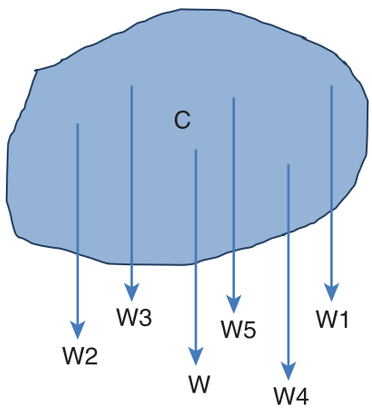
اگر F_1 بوجھ (load) ہو اور F_2 ہماری کوشش (effort) ہو اور جب $d_1 < d_2$ ہو تو ہمیں فائدہ حاصل ہوتا ہے۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ $F_1 > F_2$ ہے۔ لہذا ہم ایک چھوٹی سی کوشش سے ایک بڑا بوجھ اٹھا سکتے ہیں۔ نسبت $\left(\frac{d_2}{d_1}\right)$ ایک سادہ بیرمکا میکانیکی فائدہ کہلاتی ہے۔ چڑھایا ہوا نقطہ نصاب (Fulcrum) کہلاتا ہے۔

میکانیکی فائدہ
Mechanical Advantage $(MA) = \frac{d_2}{d_1}$ (5.35)

بہت سی سادہ مشینیں پائی جاتی ہیں جو اوپر بتائے گئے اصول پر کام کرتی ہیں۔

5.3.4 مرکز جاذبہ (Centre of Gravity)

ہر سخت جسم کئی نقطوی کمیتوں سے بنا ہوتا ہے۔ اس قسم کی نقطوی کمیتیں زمین کے مرکز کی طرف جاذبی قوت محسوس کرتی ہیں۔ چونکہ زمین کی جسامت ہمارے روزمرہ زندگی میں استعمال ہونے والے سخت اجسام کی جسامت سے بہت ہی زیادہ ہوتی ہے، یہ قوتیں نیچے کی جانب متوازنی طور پر عمل پیرا ہوتی ہوئی نظر آتی ہیں جیسا کہ خاکہ 5.16 میں بتایا گیا ہے۔

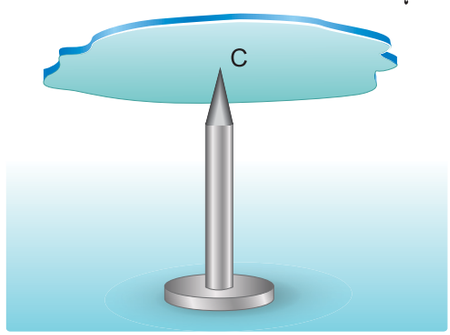


خاکہ 5.16۔ جاذبہ کا مرکز

ان متوازی قوتوں کا مجموعہ ہمیشہ ایک نقطہ کے ذریعہ عمل پیر اہوتا ہے۔ وہ نقطہ (زمین کے لحاظ سے) اس جسم کا جاذبی مرکز کہلاتا ہے۔ ایک جسم کا جاذبی مرکز وہ نقطہ ہے جس پر اس جسم کی حالت اور ترکیب کا لحاظ کئے بغیر اس کا پورا وزن پڑتا ہے۔ جب ایک سخت جسم کے آر پار کی جاذبی قوت مساوی ہوتی ہے تو اس جسم کا کمیتی مرکز اور جاذبی مرکز قطاع ہونے لگتے ہیں۔ جاذبی میدان کے بارے میں اکائی 6 میں پڑھیں گے۔

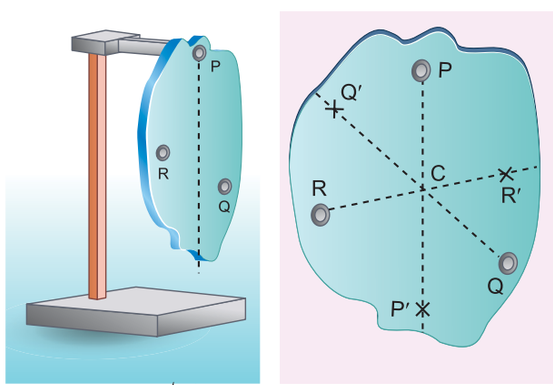
11 physics 5. motion of systems
Tuesday, February 01, 2022 9:15:32 PM

ہم ایک بے ترتیب شکل والے ایک مساوی ورق کے جاذبی مرکز کا تعین بھی آزمائشی تجربات (trial and error) کے ذریعہ اسے مختلف نقاط پر چڑھا کر، کر سکتے ہیں۔ وہ ورق افقی طور پر برقرار رہتا ہے جب وہ اس نقطہ پر چڑھایا جاتا ہے جہاں کل جاذبی قوت عمل پیر اہوتی ہے، جو کہ اس کا جاذبی مرکز ہوتا ہے، جیسا کہ خاکہ 5.17 میں بتایا گیا ہے۔ جب کوئی سخت جسم اس کے جاذبی مرکز پر ٹھہرا ہوتا ہے تو اس جسم کی تمام نقطوی کمیتوں پر عمل پیرا ہونے والی گدشہ کی قوتوں کا مجموعہ صفر ہو جاتا ہے۔ اس کے علاوہ اس کا وہ وزن اس چول (Pivot) کے ذریعہ برآمد ہونے والی ردعمل کی عمودی قوت کے ذریعہ توازن پالیتا ہے۔ وہ جسم ساکن توازنت اختیار کر لیتا ہے اور اسی لئے وہ افقی طور پر برقرار رہتا ہے۔



خاکہ 5.17۔ چول کے طریقے سے
مسطح ورق کے مرکز جاذبہ کو تعین کرنا

ایک بے ترتیب ورق کے جاذبی مرکز کے تعین کا ایک اور طریقہ بھی پایا جاتا ہے۔ اگر ہم اس ورق کو P، Q اور R جیسے مختلف نقاط کے ذریعہ لٹکائیں جیسا کہ خاکہ 5.18 میں بتایا گیا ہے،

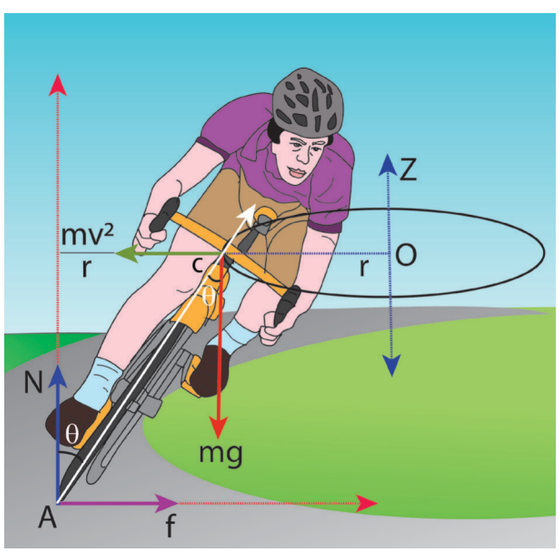


خاکہ 5.18 لٹکانے کی طریقے سے مسطح ورق کے
مرکز جاذبہ کو تعین کرنا

تو عمودی خطوط PP' ، QQ' ، RR' یہ تمام کے تمام جاذبی مرکز کے ذریعہ گذرتی ہیں۔ یہاں لٹکائے جانے والے نقطے پر عمل پیرا ہونے والی یہ ردعمل کی قوت اور جاذبی مرکز پر عمل پیرا ہونے والی جاذبی قوت ایک دوسرے کو منقطع کرتی ہیں اور ان سے بننے والی گدشہ کی قوتیں بھی ایک دوسرے کو منقطع کرتی ہیں۔

5.3.5 منحنیوں میں سائیکل چلانے والوں کا جھک جانا: (Bending of Cyclist in curves)

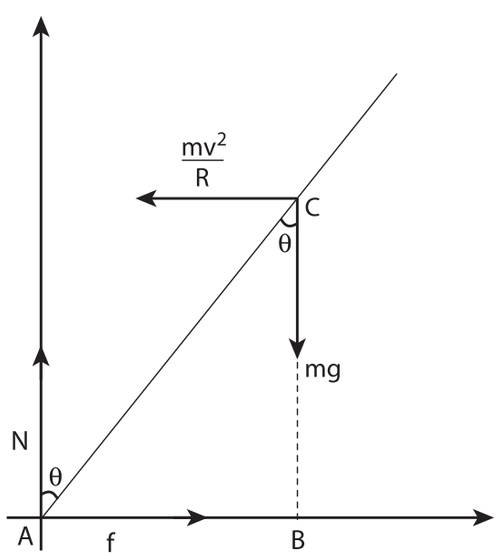
ایک سائیکل سوار کا تصور کیجئے جو ایک رفتار v کے ساتھ r نصف قطر والے ایک دائری مسطح (not banked) سڑک پر اپنا راستہ طے کر رہا ہے۔ سائیکل اور سائیکل سوار دونوں کو m کمیت والا ایک ہی نظام تصور کیا جاتا ہے۔ اس نظام کا جاذبی مرکز C ہے اور وہ r نصف قطر والے ایک دائرے میں چلتا ہے جس کا مرکز O پر ہے۔ آیئے ہم خط OC کو x محور کے طور پر منتخب کر لیں اور O کے ذریعہ گذرنے والی عمودی خط کو Z- محور کے طور پر لیں، جیسا کہ خاکہ 5.19 میں بتایا گیا ہے۔



خاکہ 5.19۔ سائیکل سوار کا جھکنا

11 physics 5. motion of systems
Tuesday, February 01, 2022 9:15:33 PM

وہ نظام ایک سانچے کے طور پر Z محور کے تحت گھومتا ہے۔اس گردشی سانچے میں وہ نظام حالت سکون پر ہے۔گردش کرنے والے حوالاتی سانچے میں مسئلوں کو حل کرنے کے لئے ہمیں چاہئے کہ اس نظام پر ایک مرکز گریز قوت (کاذب قوت) کا استعمال کرے جو $\frac{mv^2}{r}$ ہوگی۔ یہ قوت جاذبی مرکز کے ذریعہ عمل پیرا ہوگی۔اس نظام پر عمل پیرا ہونے والی قوتیں یہ ہیں (i) جاذبی قوت (mg) (ii) عمودی قوت (N) (iii) رگڑ کی قوت (f) اور (iv) مرکز گریز قوت $\left(\frac{mv^2}{r}\right)$۔ چونکہ وہ نظام گردشی حوالاتی سانچے میں توازنت پر قائم ہے۔کل بیرونی قوت اور کل بیرونی قوت گدشہ صفر ہونا چاہئے۔ آیئے ہم گدشہ کی تمام قوتوں کو مقام A کے تحت تصور کریں جیسا کہ خاکہ 5.20 میں بتایا گیا ہے۔



خاکہ 5.20 موڑ میں سائیکل سوار کے لئے قوت کے خاکے

گردشی توازنیت کے لئے

$$\vec{\tau}_{net} = 0$$

نقطہ A کے تحت جاذبی قوت کی وجہ سے بننے والی قوت گدشہ (mg AB) ہے جو ایک ساعت وار موڑ پیدا کرتی ہے جسے منفی مانا جاتا ہے۔ مرکز گریز قوت کی وجہ سے بننے والی قوت گدشہ $\left(\frac{mv^2}{r}BC\right)$ ہے جو ایک غیر ساعت وار موڑ پیدا کرتی ہے جسے مثبت قرار دیا جاتا ہے

$$-mg\,AB + \frac{mv^2}{r}BC = 0$$

$$mg\,AB = \frac{mv^2}{r}BC$$

ΔABC کی مدد سے

$AB = AC\sin\theta$ اور $BC = AC\cos\theta$

$$mg\,AC\,\sin\theta = \frac{mv^2}{r}AC\cos\theta$$

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v^2}{rg}\right) \qquad (5.36)$$

v سمتی رفتار پر r نصف قطر والے ایک ہموار دائری سڑک طے کرتے ہوئے، توازنیت پر برقرار رہنے کے لئے ایک سائیکل سوار کو چاہئے کہ وہ اوپر دی گئی مساوات کے مطابق اپنے آپ کو گرنے سے بچائے رکھنے کے لئے) عمود سے θ کے ایک زاویئے کے ذریعہ جھک جانا چاہئے۔

مثال 5.13

$20\ ms^{-1}$ کی رفتار والا ایک سائیکل سوار ایک دائری راستہ طے کرتے وقت عمود کے ساتھ $30°$ زاویہ کے ذریعہ جھکتا ہے۔ اس دائری راستے کا نصف قطر کیا ہے (دیا گیا ہے $g=10ms^{-2}$)

11 physics 5. motion of systems
Tuesday, February 01, 2022 9:15:33 PM

حل :

سائیکل سوار کی رفتار $v = 20\ m\ s^{-1}$,

عمود کے ساتھ جھکاؤ کا زاویہ $\theta = 30^o$,

جھکاؤ کے زاویہ کے لئے مساوات $\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$,

نصف قطر کے لئے اوپر کی مساوات کو دوبارہ لکھنے پر $r = \frac{v^2}{\tan\theta\, g}$

قیمت کو بھرتی کرنے پر

$$r = \frac{(20^{\ 2})}{(\tan 30^\circ)\times 10} = \frac{20\times 20}{(\tan 30^\circ)\times 10}$$

$$= \frac{400}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\times 10}$$

$$r = (\sqrt{3})\times 40 = 1.732\times 40$$

$$r = 69.28\,m$$

5.4 جمود کا معیارِ اثر: (Moment of Inertia)

سخت اجسام (جنہیں بڑے اجسام مانا جاتا ہے) کے لئے قوت گدشہ اور معیار حرکت کے لئے موجود مساوات میں ہم نے ایک اصطلاح $\sum m_i r_i^2$ کو دیکھا تھا۔ یہ مقدار اس بڑے جسم کے جمود کا معیارِ اثر (I) کہلاتی ہے۔ ثابت محور سے r_1 فاصلے پر موجود ایک نقطوی کمیت m_1 کے لئے جمود کے معیار اثر کے طور پر پیش کی جاتی ہے۔

$m_i r_i^2$

نقطوی کمیت کے لئے جمود کا معیار اثر یہ ہے۔

$$I = m_i r_i^2 \qquad (5.37)$$

بڑی شئے کے لئے جمود کا معیار اثر یہ ہے۔

$$I = \sum m_i r_i^2 \qquad (5.38)$$

خطی حرکت میں کمیت، جمود کی ایک پیائش ہوتی ہے، اسی طرح گردشی حرکت میں جمود کا معیار اثر، گردشی جمود کی ایک پیائش ہوتی ہے۔

جمود کی حرکت کی اکائی $kg\ m^2$ ہے۔ اس کا ابعاد ML^2 ہے۔ عام طور پر کمیت، مادے کی ایک غیر متغیر مقدار ہے (سوائے روشنی کے بالمقابل حرکت کے لئے) مگر ایک جسم کے جمود کا معیار اثر ایک غیر متغیر مقدار نہیں ہے۔ وہ صرف جسم کی کمیت ہی پر منحصر نہیں ہوتی بلکہ جس طریقے پر وہ کمیت گردشی محور کے اطراف پھیلی ہوتی ہے اس پر بھی منحصر ہوتی ہے۔

مساوی طور پر پھیلی ہوئی ایک کمیت کی جمود کا معیار اثر معلوم کرنے کے لئے، ہمیں ایک بہت ہی چھوٹی کمیت (dm) کو ایک نقطوی کمیت کے طور پر لینا پڑے گا اور ایک محور کے لحاظ سے اس کا مقام (r) لیا جائے گا۔ اس نقطوی کمیت کے جمود کے معیار اثر کو اب اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔

$$dI = (dm)\, r^2 \qquad (5.39)$$

اوپر کی مساوات کو مربوط یا احصاء کرنے پر ہم کل بڑی شئے کے جمود کا معیار اثر حاصل کرتے ہیں۔

$$I = \int dI = \int (dm)\, r^2$$

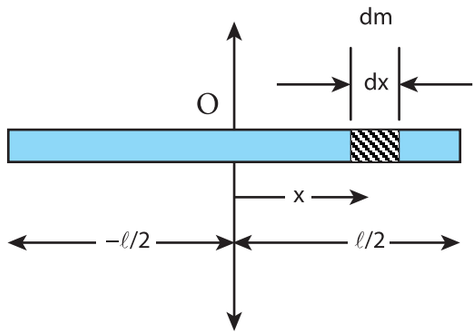
$$I = \int r^2 dm \qquad (5.40)$$

ہم اوپر کی مساوات استعمال کر کے ہماری پسند کی عام بڑی اشیاء جیسے سلاخ، انگوٹھی، ڈسک (تھالی نما)، کرہ وغیرہ کے جمود کے معیار اثر کا تعین کر سکتے ہیں۔

5.4.1 ایک مساوی سلاخ کے جمود کا معیار اثر: moment of inertia of a uniform rod

آیئے ہم (M) کمیت اور (*l*) لمبائی والی ایک مساوی سلاخ کا تصور کریں جیسا کہ خاکہ 5.21 میں بتایا گیا ہے۔ آیئے ہم اس سلاخ کی اس محور کے تحت جمود کے معیار اثر کی مساوات معلوم کریں جو کمیتی مرکز کے ذریعہ گزرتی ہے اور اس سلاخ کے عمودی ہے۔ سب سے پہلے

11 physics 5. motion of systems
Tuesday, February 01, 2022 9:15:33 PM



خاکہ 5.21 ایک مساوی جسامت والی سلاخ کے جمود کا معیار اثر

محدداتی نظام کے لئے ایک مبدا کو ثبت کرنا ہوگا۔ اس طرح سے کہ وہ کمیتی مرکز سے میل کھاتا ہو۔ وہ سلاخ اب x محور کے تحت ہوتی ہے۔ ہم مبدا سے ایک فاصلہ (x) پر ایک بہت ہی چھوٹی کمیت (dm) لیتے ہیں۔ اس محور کے تحت اس کمیت (dm) کے جمود کا معیار اثر یہ ہے۔

$$dI = (dm)x^2$$

چونکہ وہ کمیت مساوی طور پر پھیلی ہوئی ہے، فی اکائی لمبائی (λ) سلاخ کی کمیت $\lambda = \frac{M}{\ell}$ ہے۔

بہت ہی چھوٹی لمبائی کی کمیت (dm) یہ ہے۔

$$dm = \lambda\, dx = \frac{M}{\ell}dx$$

dI کو مربوط یا احصاء (Integrate) کرکے کل سلاخ کے جمود کا معیار اثر (I) معلوم کیا جاسکتا ہے۔

$$I = \int dI = \int (dm)\ x^2 = \int \left(\frac{M}{\ell}dx\right)x^2$$

$$I = \frac{M}{\ell}\int x^2 dx$$

چونکہ وہ کمیت مبدا کے دونوں طرف پھیلی ہوئی ہے، احصاء کے لئے حدود (Limits for integration) $-\ell/2$ سے $\ell/2$ تک کے حدود لئے جاتے ہیں۔

$$I = \frac{M}{\ell}\int_{-\ell/2}^{\ell/2} x^2 dx = \frac{M}{\ell}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\ell/2}^{\ell/2}$$

$$I = \frac{M}{\ell}\left[\frac{\ell^3}{24} - \left(-\frac{\ell^3}{24}\right)\right] = \frac{M}{\ell}\left[\frac{\ell^3}{24} + \frac{\ell^3}{24}\right]$$

$$I = \frac{M}{\ell}\left[2\left(\frac{\ell^3}{24}\right)\right]$$

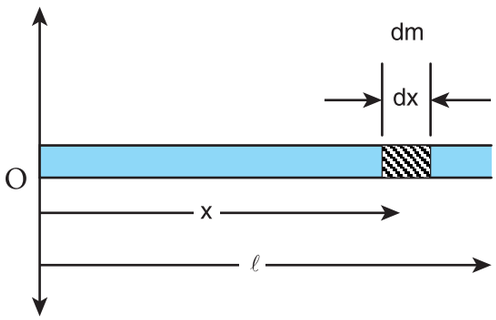
$$I = \frac{1}{12}M\ell^2 \qquad (5.41)$$

مثال 5.14

اس محور کے تحت ایک مساوی سلاخ کے جمود کا معیار اثر معلوم کیجئے، جو اس سلاخ کے عمودی ہو اور اس سلاخ کے کسی ایک کنارے کو چھوتا ہو۔

حل:

ہم اوپر کی مساوات کی مدد سے اس سلاخ کے جمود کا معیار اثر معلوم کرسکتے ہیں۔ اب مبدا کو سلاخ کے بائیں جانب ثبت کرتے ہیں اور اس کے حدود کو O سے ℓ تک اٹھانا چاہئے۔



$$I = \frac{M}{\ell}\int_0^{\ell} x^2 dx = \frac{M}{\ell}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\ell} = \frac{M}{\ell}\left[\frac{\ell^3}{3}\right]$$

$$I = \frac{1}{3}M\ell^2$$

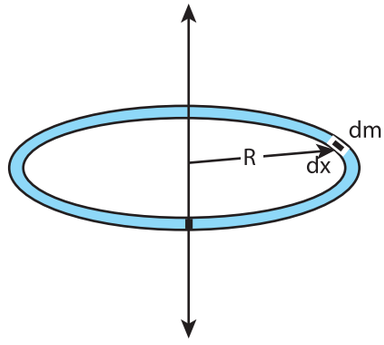
11 physics 5. motion of systems
Tuesday, February 01, 2022 9:15:34 PM

نوٹ

اسی سلاخ کی جمود کا معیار اثر، مختلف حوالاتی محورات (reference axes) کے لئے مختلف ہوتی ہے۔ حوالاتی محورات شئے کے باہر بھی ہوسکتی ہیں۔ ہمارے پاس مختلف محورات کے تحت جمود کا معیار اثر معلوم کرنے کے لئے دو مفید نظریات موجود ہیں۔ ہم ان نظریات کے بارے میں حصہ 5.4.5 میں معلوم کریں گے۔

5.4.2 ایک مساوی حلقے کے جمود کا معیار اثر
(Moment of Inertia of a Uniform Ring)

آیئے ہم M کمیت اور R نصف قطر والے ایک مساوی حلقے کا تصور کریں۔ اس کی سطح کے عمودی طور پر اور اس کے مرکز کے ذریعہ گزرنے والے ایک محور کے تحت، اس حلقے کی جمود کا معیارِ اثر معلوم کرنے کے لئے، آیئے ہم اس حلقے کی چھوٹی سی لمبائی (dx) والی ایک بہت ہی چھوٹی کمیت (dm) لے لیں۔ یہ حصہ (dm) اس حلقے کے محور سے اس کا نصف قطر ہے جیسا کہ خاکہ 5.22 میں بتایا گیا ہے۔



خاکہ 5.22 ایک مساوی حلقے کی جمود کا معیار اثر

اس چھوٹی کمیت (dm) کے جمود کا معیار اثر (dI) یہ ہے۔

$$dI = (dm)\ R^2$$

اس حلقے کی لمبائی اس کا احاطہ ($2\pi r$) ہے۔ چونکہ وہ کمیت مساوی طور پر پھیلی ہوئی ہے۔ فی اکائی لمبائی کمیت (λ) یہ ہے۔

$$\lambda = \frac{\text{کمیت}}{\text{لمبائی}} = \frac{M}{2\pi r}$$

اس بہت ہی چھوٹی لمبائی والے حصے کی کمیت (dm) ہے۔

$$\lambda\ dx = \frac{M}{2\pi r}\ dx$$

اب اس مکمل حلقے کے جمود کا معیارِ اثر (I) یہ ہے۔

$$I = \int dI = \int (dm)\ R^2 = \int \left(\frac{M}{2\pi R}\, dx\right) R^2$$

$$I = \frac{MR}{2\pi}\int dx$$

کے حلقے کی مکمل لمبائی کا احاطہ کرنے کے لئے احصاء (انٹگریشن) حدود کو 0 سے $2\pi r$ تک لئے جاتے ہیں۔

$$I = \frac{MR}{2\pi}\int_0^{2\pi R} dx$$

$$I = \frac{MR}{2\pi}\left[x\right]_0^{2\pi R} = \frac{MR}{2\pi}\left[2\pi R - 0\right]$$

$$I = MR^2 \qquad (5.42)$$

5.4.3 ایک مساوی ڈسک (تھالی) کے جمود کا معیارِ اثر:
(Moment of Inertia of a Uniform Disc)

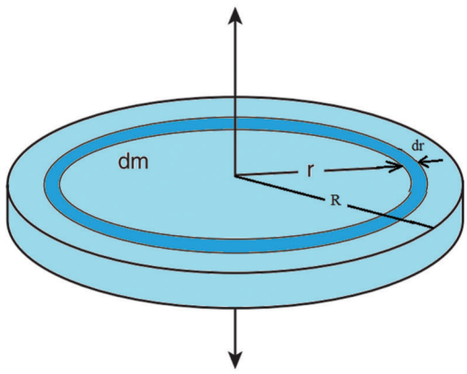
M کمیت اور R نصف قطر والا ایک ڈسک (تھالی) تصور کیجئے۔ یہ ڈسک کئی بہت ہی چھوٹے حلقوں سے بنا ہوتا ہے جیسا کہ خاکہ 5.23 میں بتایا گیا ہے۔ ایسے ہی ایک چھوٹے سے حلقے کو لیجئے جس کی کمیت (dm)، موٹائی (dr) اور نصف قطر (r) ہو۔ اس چھوٹے سے حلقے کی جمود کا معیارِ اثر (dI) یہ ہے۔

$$dI = (dm)\ r^2$$

چونکہ کمیت مساوی طور پر پھیلی ہوئی ہے۔

$$\sigma = \frac{\text{کمیت}}{\text{رقبہ}} = \frac{M}{\pi R^2}$$ فی اکائی رقبہ کمیت یہ ہے۔

11 physics 5. motion of systems
Tuesday, February 01, 2022 9:15:34 PM



خاکہ 5.23 ایک مساوی ڈسک کے جمود کا معیارِ اثر

اس بہت ہی چھوٹے سے حلقے کی کمیت یہ ہے۔

$$dm = \sigma 2\pi r dr = \frac{M}{\pi R^2} 2\pi r dr$$

جہاں پر رقم $(2\pi r dr)$ اس حلقوی حصے کا رقبہ ہے۔
$(2\pi r)$ لمبائی ہے اور dr اس کی موٹائی ہے۔

$$dm = \frac{2M}{R^2} r dr$$

$$dI = \frac{2M}{R^2} r^3 dr$$

مکمل ڈسک کے جمود کا معیارِ اثر (I) یہ ہے۔

$$I = \int dI$$

$$I = \int_0^R \frac{2M}{R^2} r^3 dr = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr$$

$$I = \frac{2M}{R^2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{2M}{R^2} \left[\frac{R^4}{4} - 0 \right]$$

$$I = \frac{1}{2} MR^2 \qquad (5.43)$$

5.4.4 چکر یا گردش کا نصف قطر (Radius of Gyration)

کمیت کی مساوی تقسیم اور متعین شکل والی بڑی اشیاء کے لئے۔ ایک محور کے تحت موجود، جمود کی حرکت کی مساوات، ان کی کل کمیت اور ہندسی خصوصیات جیسے نصف قطر، لمبائی، چوڑائی جن سے کہ ان اشیاء کی شکل اور جسامت کا تعین ہوتا ہے، (وہ مساوات) ان تمام کا احاطہ کرتی ہے، مگر ہمیں جمود کی حرکت کے لئے ایک ایسی مساوات کی ضرورت ہے جو نہ صرف اشیاء کی کمیت، شکل اور جسامت کا لحاظ کرتی ہو بلکہ اس کے گردشی محور کی ترکیب کا بھی لحاظ رکھتی ہو۔ ویسی ایک مساوات اس طرح عام ہونا چاہئے کہ وہ غیر متعین شکل اور کمیت کا غیر مساوی پھیلاؤ رکھنے والی اشیاء کے لئے بھی استعمال ہو سکے۔ جمود کی حرکت کے لئے وہ عام مساوات یوں پیش کی جاتی ہے۔

$$I = MK^2 \qquad (5.44)$$

جہاں M شئے کی کل کمیت ہے اور K چکر یا گردش کا نصف قطر کہلاتا ہے۔

ایک شئے کی گردش کا نصف قطر، گردشی محور سے، اس ہم وزن نقطوی کمیت کا عمودی فاصلہ ہے، جو اسی شئے کی مساوی کمیت رکھتی ہو اور مساوی جمود کی حرکت رکھتی ہو۔

چونکہ گردش کا نصف قطر ایک فاصلہ ہے۔ اس کی اکائی میٹر m ہے۔ اس کا بُعد (dimension) (L) ہے۔

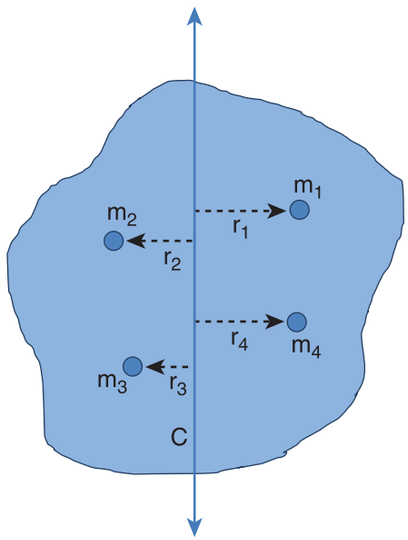
یہ مانا جاتا ہے کہ کسی محور کے لحاظ سے گردش کرتا ہوا ایک سخت جسم نامی نقطوی کمیتوں $m_1, m_2, m_3, \ldots m_n$ سے بنا ہوتا ہے جو بالترتیب کے عمودی فاصلے (یا مقامات) $r_1, r_2, r_3 \ldots r_n$ پر ہوتے ہیں، جیسا کہ خاکہ 5.24 میں بتایا گیا ہے۔

اس شئے کی جمود کا معیارِ اثر اس طرح لکھی جا سکتی ہے۔

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \cdots + m_n r_n^2$$

اگر ہم انفرادی کمیتوں کی تمام n عدد کو مساوی سمجھیں۔

11 physics 5. motion of systems
Tuesday, February 01, 2022 9:15:35 PM



خاکہ 5.24 گردش کا نصف قطر

$$m = m_1 = m_2 = m_3 = \ldots = m_n$$

تو

$$I = mr_1^2 + mr_2^2 + mr_3^2 + \cdots + mr_n^2$$
$$= m\left(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \right)\cdots + r_n^2$$
$$= nm\left(\frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \cdots + r_n^2}{n}\right)$$
$$I = MK^2$$

جہاں nm، ایک جسم کی کل کمیت M ہے اور K گردش یا چکر کا نصف قطر ہے۔

$$K = \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \cdots + r_n^2}{n}} \qquad (5.45)$$

گردش کے نصف قطر کی مساوات یہ نشاندہی کرتی ہے کہ وہ اس گردشی محور سے ان ذرات کا اوسط مربع کا جذر (root mean square) (rms) کا فاصلہ ہے۔

حقیقت میں کسی بھی شئے کی جمودی حرکت کو $I=MK^2$ کی شکل میں ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

مثال کے طور پر آیئے ہم M کمیت اور l لمبائی والی ایک مساوی سلاخ کی جمود کی حرکت ہی کو لے لیں۔اس کے کمیتی مرکز سے گزرنے والی ایک عمودی محور کے لحاظ سے اس کی جمود کی حرکت یہ ہے۔

$$I = \frac{1}{12}M\ell^2$$

$I = MK^2$ گردش کے نصف قطر کے لحاظ سے

لہذا $MK^2 = \frac{1}{12}M\ell^2$

$$K^2 = \frac{1}{12}\ell^2$$

$$K = \frac{1}{\sqrt{12}}\ell \text{ or } K = \frac{1}{2\sqrt{3}}\ell \text{ or } K = (0.289)\ell$$

مثال 5.15

M کمیت اور R نصف قطر والا ایک ڈسک، اس کے کمیتی مرکز کے ذریعہ اس کے عمودی طور پر گذرنے والی ایک محور کے تحت گردش کررہا ہے۔اس ڈسک کی گردش کا نصف قطر معلوم کیجئے۔

حل:

ڈسک کے عمودی طور پر اور اس کے کمیتی مرکز کے ذریعہ گذرنے والی محور کے تحت اس ڈسک کے جمود کا معیارِ اثر یہ ہے۔

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

$I = MK^2$ گردش کے نصف قطر کے لحاظ سے

لہذا $MK^2 = \frac{1}{2}MR^2; \quad K^2 = \frac{1}{2}R^2$

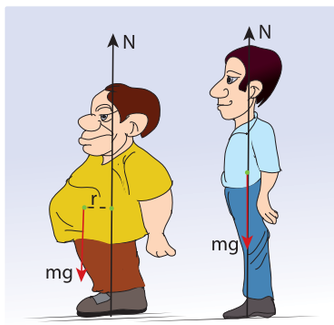
$$K = \frac{1}{\sqrt{2}}R \text{ or } K = \frac{1}{1.414}R \text{ or } K = (0.707)R$$

ہم ایک سلاخ اور ایک ڈسک کے معاملات سے اس نتیجے پر پہنچ سکتے ہیں کہ ایک سخت جسم کی گردش کا نصف قطر ہمیشہ ہندسی خصوصیت جیسے لمبائی، چوڑائی، نصف قطر یا ایک مثبت ہندسی قیمت سے ان کے ساتھ ضرب کیا گیا ان کا ایک ہندسی مجموعہ ہوتا ہے۔

11 physics 5. motion of systems
Tuesday, February 01, 2022 9:15:35 PM

کیا تم جانتے ہو؟

موٹاپا، قوت گدشہ اور جمود کا معیارِ اثر
Obesity, torque and Moment of Inertia!



موٹاپا اور اس سے جڑی ہوئی پریشانیاں جیسے کمر کا درد، جوڑوں کا درد، وغیرہ جس کے کمیتی مرکز کے ہٹ جانے کی وجہ سے ہوتی ہیں ۔ کمیتی مرکز کے اس ہٹاؤ کی وجہ سے جسم پر عمل پیرا ہونے والی غیر متوازن قوت گدشہ ان امراض کا سبب بنتی ہے ۔ چونکہ کمیت جسم کے مرکز سے دور پھیلی ہوئی ہوتی ہے جمود کے معیارِ اثر کی مقدار زیادہ ہوتی ہے اور گردش بھی مشکل سے ہو پاتی ہے۔

5.4.5 جمود کے معیارِ اثر کے نظریات:
(Theorems of Moment of Inertia)

چونکہ جمود کی حرکت، گردشی محور کے علاوہ، اس محور کے تحت جسم کی زاویائی ترتیب پر بھی منحصر ہوتی ہے، ایک ہی جسم کے لئے اس کی قیمت، مختلف محوروں کے لئے مختلف ہوتی ہے۔ گردشی محور کی تبدیلی کی صورت حال کو سنبھالنے کے لئے ہمارے پاس دو اہم نظریات ہیں۔

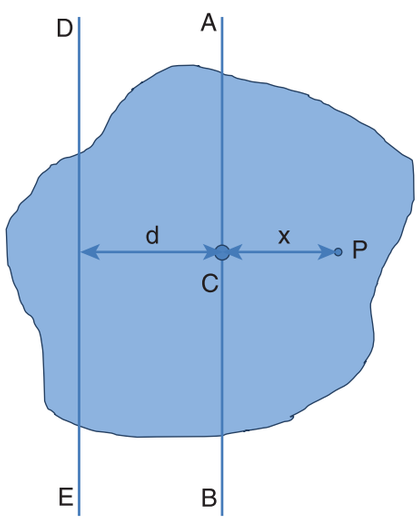
(i) متوازنی محور کا نظریہ (Parallel axis theorem)

متوازنی محور کا نظریہ یہ بیان کرتا ہے کہ کسی بھی محور کے تحت ایک جسم کے جمود کی حرکت، اس کے کمیتی مرکز سے گذرنے والے متوازی محور کے تحت اس کی جمود کی حرکت اور جسم کی کمیت اور ان دو محورات کے درمیان موجود عمودی فاصلے کے مربع کا حاصل ضرب، ان دونوں کے حاصل جمع کے برابر ہوتی ہے۔

اگر M کمیت والے جسم کے کمیتی مرکز سے گزرنے والی محور کے تحت، اس جسم کے جمود کا معیارِ اثر، I_c ہو تو پھر اس محور سے d فاصلے پر موجود جمود ایک متوازی محور کے تحت موجود جمود کا معیارِ اثر اس مساوات کے ذریعہ پیش کی جاتی ہے۔

$$I = I_C + Md^2 \qquad (5.46)$$

آیئے ہم ایک سخت جسم کا تصور کریں جیسا کہ خاکہ 5.25 میں بتایا گیا ہے۔ اس کے مرکزی کمیت سے گزرنے والی محور AB کے تحت اس کی جمود کی حرکت Ic ہے۔ DE ایک اور محور ہے جو AB کے متوازی ہے اور اس سے 'd' عمودی فاصلے پر ہے۔ ہم Ic کے لحاظ سے I کے لئے ایک مساوات حاصل کرنے کی کوشش کریں گے۔ اس کے لئے آیئے ہم اس جسم کے کمیتی مرکز سے x فاصلے پر موجود مقام P پر ایک نقطوی کمیت m کا تصور کریں۔



خاکہ 5.25 متوازی محور کا نظریہ

محور DE کے تحت اس نقطوی کمیت کے عمود کا معیار اثر $m(x+d)^2$ ہے۔

محور DE کے تحت، اس کل جسم کی جمود کا معیارِ اثر اوپر کی مساوات کا حاصل جمع (Summation) ہے۔

$$I = \sum m(x+d)^2$$

11 physics 5. motion of systems
Tuesday, February 01, 2022 9:15:35 PM

اس مساوات کو مزید اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$I = \sum m\left(x^2 + d^2 + 2xd\right)$$

$$I = \sum\left(mx^2 + md^2 + 2dmx\right)$$

$$I = \sum mx^2 + \sum md^2 + 2d\sum mx$$

یہاں $\sum mx^2$ جسم کے کمیتی مرکز کے تحت اس کے جمود کا معیارِ اثر ہے۔ لہذا

$$I_C = \sum mx^2$$

رقم $\sum mx = 0$ ہے۔ کیونکہ x، محور AB کے لحاظ سے مثبت اور منفی دونوں قیمتیں لے سکتی ہے۔ لہذا مجموعیت $\left(\sum mx\right)$ صفر ہو جائے گی۔

اس لئے $I = I_C + \sum md^2 = I_C + \left(\sum m\right)d^2$

یہاں $\sum m$ شئے $\left(\sum m = M\right)$ کی کل کمیت M ہے۔

$$I = I_C + Md^2$$

لہذا، متوازی محور کا نظریہ صحیح ثابت ہوتا ہے۔

(ii) عمودی محور کا نظریہ:
(Perpendicular Axis Theorem)

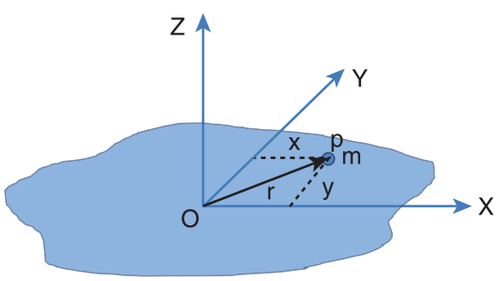
عمودی محور کا یہ نظریہ صرف مسطح (Plane) ورق نما اشیاء کے لئے صحیح ثابت ہوتا ہے۔

وہ نظریہ یہ بیان کرتا ہے کہ ایک مسطح ورق نما جسم کی سطح کی عمودی محور کے تحت اس جسم کی جمود کی حرکت، اس جسم کی سطح پر پڑی ہوئی دو عمودی محورات کے تحت جمود کی حرکتوں کے حاصل جمع کے برابر ہوتی ہے۔ اس طرح سے کہ وہ تینوں محورات باہم عمودی ہوتی ہیں اور ایک عام نقطہ رکھتی ہیں۔

فرض کیجئے کہ X اور Y اس مسطح ورق نما شئے کی سطح پر پڑی ہوئی دو محور ہیں اور Z اس شئے کی سطح کا عمودی محور ہے۔ اگر X اور Y محورات کے تحت اس جسم کی جمود کے معیارِ اثر بالترتیب Ix اور Iy ہوں اور Z محور کے تحت جمود کا معیار اثر Iz ہو تو عمودی محور کے نظریے کو یوں پیش کیا جا سکتا ہے۔

$$I_Z = I_X + I_Y \qquad (5.47)$$

اس نظریے کو ثابت کرنے کرنے کے لئے آیئے ہم نظر انداز کے قابل کی موٹائی رکھنے والی ایک ورق نما مسطح شئے کا تصور کریں، جو مبدا O پر پڑی ہے۔ فرض کیجئے کہ x اور y محورات اس کی سطح پر ہیں اور z محور اس کی سطح کے عمودی موجود ہے جیسا کہ خاکہ 5.26 میں بتایا گیا ہے۔ فرض کیجئے کہ وہ ورق نما شئے m کمیت والے کثیر ذرات سے بنی ہوئی ہے۔ آیئے ہم اس میں سے ایک ذرہ کو لیں جو P مقام پر ہے اور اس میں O سے r فاصلے پر (x,y) محددات پائے جاتے ہیں۔



خاکہ 5.26 عمودی محور کا نظریہ

Z-محور کے تحت ذرہ کی جمود کا معیار اثر mr^2 ہے۔

اوپر کی مساوات کا حاصل جمع (Summation)، Z محور کے تحت اس کل ورق کے جمود کا معیار اثر فراہم کرتی ہے۔

$$I_Z = \sum mr^2$$

یہاں $r^2 = x^2 + y^2$

تو $I_Z = \sum m\left(x^2 + y^2\right)$

$$I_Z = \sum mx^2 + \sum my^2$$

اوپر کی مساوات میں اصطلاح $\sum mx^2$، y محور کے تحت، اس جسم کے جمود کا معیار اثر ہے اور

11 physics 5. motion of systems
Tuesday, February 01, 2022 9:15:36 PM

اسی طرح اصطلاح $\sum my^2$ ، x محور کے تحت اس جسم کی جمود کی حرکت ہے۔ لہذا

$$I_X = \sum my^2 \quad \text{and} \quad I_Y = \sum mx^2$$

I_Z میں ان قیمتوں کو درج کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$I_Z = I_X + I_Y$$

لہذا عمودی محور کا نظریہ ثابت کیا گیا۔

مثال 5.16

مندرجۂ ذیل محورات کے تحت 3kg کمیت اور 50cm نصف قطر والے ایک ڈسک (تھالی) کی جمود کا معیار اثر معلوم کیجئے۔

(i) تھالی کی سطح کے عمودی اور اس کے مرکز سے گزرنے والا محور

(ii) تھالی کی سطح کے عمودی وراس کے مرکز سے کنارے کو چھونے والا محور

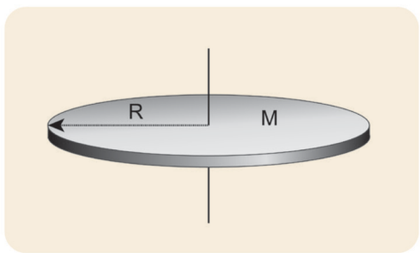
(ii) تھالی کی سطح پر پڑی ہوئی اور اس کے مرکز سے گزرنے والا محور

حل:

کمیت $M = 3Kg$; نصف قطر $R = 50cm$

$50\times10^{-2}\ m = 0.5\ km$

(i) ڈسک کے مرکز سے گزرنے والی اور ڈسک کی سطح کی عمودی محور کے تحت اس ڈسک کی جمود کا معیار اثر (I) یہ ہے۔

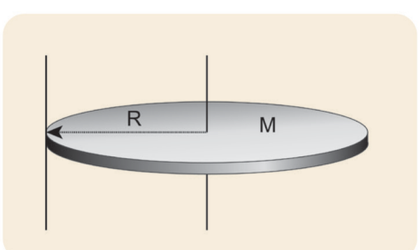


$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

$$I = \frac{1}{2}\times 3\times (0.5)^2 = 0.5\times 3\times 0.5\times 0.5$$

$$I = 0.375\,kg\,m^2$$

(ii) ڈسک کے کنارے کو چھونے والی اور ڈسک کی سطح کی عمودی محور کے تحت اس ڈسک کے جمود کی حرکت یہ ہے ۔



$$I = I_C + Md^2$$

جہاں $I_C = \frac{1}{2}MR^2$ اور $d = R$

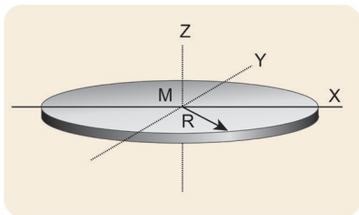
$$I = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$$

$$I = \frac{3}{2}\times 3\times (0.5)^2 = 1.5\times 3\times 0.5\times 0.5$$

$$I = 1.125\,kg\,m^2$$

11 physics 5. motion of systems
Tuesday, February 01, 2022 9:15:36 PM

(iii) ڈسک کے مرکز سے گزرنے والی اور ڈسک کی سطح پر پڑی ہوئی محور کے تحت اس ڈسک کی جمود کا معیار اثر یہ ہے۔



$$I_Z = I_X + I_Y$$

جس میں $I_X = I_Y = I$ اور $I_Z = \frac{1}{2}MR^2$

$$I_Z = 2I;\ I = \frac{1}{2}I_Z$$

$$I = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{4}MR^2$$

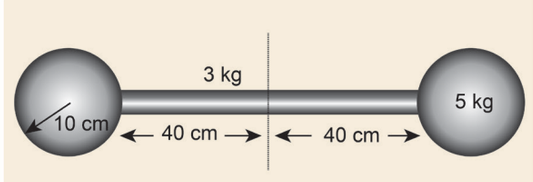
$$I = \frac{1}{4}\times 3\times(0.5)^2 = 0.25\times 3\times 0.5\times 0.5$$

$$I = 0.1875\,\text{kg m}^2$$

- اوپر کی محورات میں سے کس محور کے تحت ڈسک کو گھمانا آسان ہے؟
- ڈسک کو ایک ایسی محور کے تحت گھمانا آسان ہے جس کی جمود کی حرکت کی قیمت کم ہوتی ہو۔ لہذا وہ تیسرے معاملے کی محور ہے۔

مثال 5.17

خاکے کے مطابق ایک باریک سلاخ سے جڑے ہوئے دو مساوی ٹھوس کروں کی دی گئی ساخت کے ہندسی مرکز کے تحت جمود کی حرکت معلوم کیجئے۔



حل:

یہ ساخت تین اشیاء سے بنی ہوئی ہے۔ ایک باریک سلاخ اور دو ٹھوس کرے۔

سلاخ کی کمیت $M = 3\text{kg}$ ہے اور سلاخ کی کل لمبائی $l = 80\text{cm} = 0.8\text{m}$ ہے۔

سلاخ کے کمیتی مرکز کے تحت اس کے جمود کا معیار اثر یہ ہے۔

$$I_{rod} = \frac{1}{12}M\ell^2$$

$$I_{rod} = \frac{1}{12}\times 3\times(0.8)^2 = \frac{1}{4}\times 0.64$$

$$I_{rod} = 0.16\,\text{kg m}^2$$

کرہ کی کمیت $M=5\text{ kg}$ ہے اور اس کرے کا نصف قطر $R= 10\text{cm}=0.1\text{m}$ ہے۔

کرہ کے کمیتی مرکز کے تحت اس کے جمود کا معیار اثر یہ ہے۔

$$I_C = \frac{2}{5}MR^2$$

ساخت کے ہندسی مرکز کے تحت کرہ کے جمود کا معیار اثر یہ ہے۔

$$I_{sph} = I_C + Md^2$$

جہاں $d = 40\text{ cm} + 10\text{ cm} = 50\text{ cm} = 0.5\text{ m}$

$$I_{sph} = \frac{2}{5}MR^2 + Md^2$$

$$I_{sph} = \frac{2}{5}\times 5\times(0.1)^2 + 5\times(0.5)^2$$

$$I_{sph} = (2\times 0.01) + (5\times 0.25) = 0.02 + 1.25$$

$$I_{sph} = 1.27\,\text{kg m}^2$$

چونکہ اس ساخت میں ایک سلاخ اور دو مساوی ٹھوس کرے پائے جاتے ہیں، ہم اس دئے گئے ہندسی ساخت کی جمود کا معیار اثر (I) کو اس طرح لکھ سکتے ہیں۔ $I = I_{rod} + (2\times I_{sph})$

$$I = (0.16) + (2\times 1.27) = 0.16 + 2.54$$

$$I = 2.7\,\text{kg m}^2$$

5.4.6 مختلف اجسام کی جمود کا معیار اثر

مختلف محورات کے تحت مختلف اجسام کی جمود کا معیار اثر جدول 5.3 میں پیش کی گئی ہے

11 physics 5. motion of systems
Tuesday, February 01, 2022 9:15:37 PM

5.5 گردشی حرکیات (Rotational Dynamics)

حصہ 5.2 میں قوت گردشہ، زاویائی اسراع، زاویائی معیار حرکت، زاویائی سمتی رفتار اور جمود کا معیار اثر کے باہمی تعلقات دیکھے گئے۔ اسی کو جاری رکھتے ہوئے ہم اس حصے میں، سخت اجسام کی گردشی حرکت میں پائی جانے والی حرکیاتی مقداریں جیسے کام، توانائی بالفعل وغیرہ کے باہمی تعلقات کے بارے میں معلوم کریں گے۔ آخر میں خطی اور گردشی مقداروں کا موازنہ ایک جدول کے ذریعہ پیش کیا گیا ہے۔

5.5.1 سخت اجسام پر قوت گردشہ کا اثر: (Effect of Torque on rigid bodies)

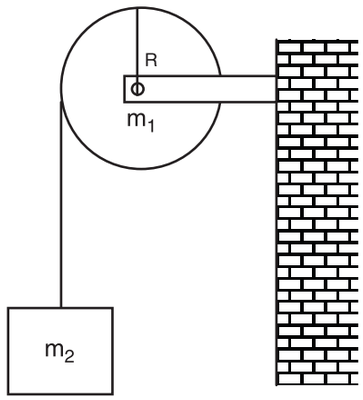
ایک سخت جسم کے گردشی محور کے تحت، اگر اس میں غیر صفری بیرونی قوت گردشہ (τ) ہو تو اس میں اس محور کے تحت ایک زاویائی اسراع (α) پائی جائے گی۔ قوت گردشہ اور زاویائی اسراع کی درمیانی قدری مساوات یہ ہے۔

$$\tau = I\alpha \qquad (5.48)$$

جہاں I سخت جسم کے جمود کا معیار اثر ہے۔ گردشی حرکت میں پائی جانے والی قوت گردشہ خطی حرکت میں پائی جانے والی قوت کے برابر ہوتی ہے۔

مثال 5.18

500kg کمیت اور 10 cm نصف قطر والا ایک ڈسک ایک ثابت محور کے تحت آزادانہ طور پر گھوم سکتا ہے، جیسا کہ خاکہ میں بتایا گیا ہے۔ اس کے اطراف ایک پتلی اور غیر لچکدار ڈوری سے کئی چکر گھمائے گئے ہیں اور اس کے آزاد کنارے پر 100g کمیت والا ایک جسم لٹکا دیا گیا ہے۔ اس کمیت کی اسراع معلوم کیجئے (دیا گیا ہے کہ وہ ڈوری اس ڈسک کو گھماتی ہے اور وہ ڈسک کے اوپر سے نہیں پھسلتی۔ $g = 10\ ms^{-2}$)



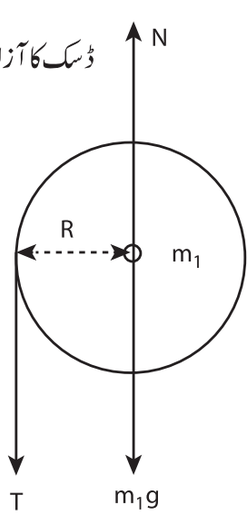
حل:

فرض کیجئے کہ ڈسک کی کمیت m_1 ہے اور اس کا نصف قطر R ہے۔ لٹکے ہوئے جسم کی کمیت m_2 ہے۔

$$m_1 = 500\ g = 500\times10^{-3}\ kg = 0.5\ kg$$
$$m_2 = 100\ g = 100\times10^{-3}\ kg = 0.1\ kg$$
$$R = 10\ cm = 10\times10^{-2}\ m = 0.1\ m$$

چونکہ وہ ہلکی غیر لچکدار ڈوری، ڈسک کے اطراف کئی چکروں کے ساتھ لپیٹی گئی ہے، وہ اس پر پھسلے بغیر اسے گھمانے لگتی ہے۔ m_2 کے خطی اسراع اور m_1 کی مماسی اسراع مساوی ہوگی۔ آیئے ہم m_1 اور m_2 کا آزاد جسمانی خاکہ (free body diagram) (FBD) علاحدہ علاحدہ طور پر بنائیں۔

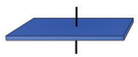
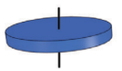
ڈسک کا آزاد جسمانی نقشہ:



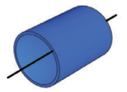
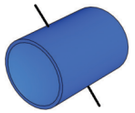
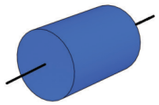
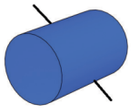
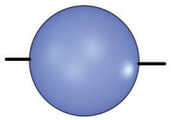
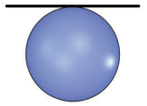
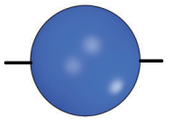
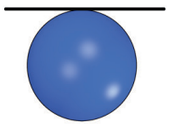
11 physics 5. motion of systems
Tuesday, February 01, 2022 9:15:37 PM

Table 5.3 Moment of Inertia of Different Rigid Bodies

جدول 5.3۔ مختلف سخت اجسام کی جمود کی حرکت:

شمارہ نمبر No.	Object شئے	About an axis ایک محور کے تحت	خاکہ Diagram	جمود کا معیار اثر Moment of Inertia (I) kg m²	گردش کا نصف قطر Radius of Gyration (K)	نسبت Ratio $\left(\frac{K^2}{R^2}\right)$
1.	باریک مساوی سلاخ کمیت=M لمبائی=l	مرکز کے ذریعہ گذرنے والی اور لمبائی کے عمودی		$\frac{1}{12}M\ell^2$	$\frac{\ell}{\sqrt{12}}$	--
		ایک کنارے کو چھونے والی اور لمبائی کے عمودی		$\frac{1}{3}M\ell^2$	$\frac{\ell}{\sqrt{3}}$	
2.	باریک مساوی مستطیل نما ورق کمیت=M لمبائی = l چوڑائی= b	مرکز کے ذریعہ گذرنے والی اور ورق کی سطح کے عمودی		$\frac{1}{12}M(\ell^2+b^2)$	$\sqrt{\frac{(\ell^2+b^2)}{12}}$	--
3.	باریک مساوی حلقہ کمیت =M نصف قطر =R	مرکز کے ذریعہ گذرنے والی اور سطح کے عمودی		MR^2	R	1
		کنارے کو چھونے والی اور سطح کے عمودی (عمودی مماس)		$2MR^2$	$\left(\sqrt{2}\right)R$	2
		مرکز سے گذرنے والی، سطح پر پڑی ہوئی (قطر کے ساتھ)		$\frac{1}{2}MR^2$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)R$	$\frac{1}{2}$
		سطح کے متوازی طور پر کنارے کو چھونے والی (متوازی مماس)		$\frac{3}{2}MR^2$	$\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)R$	$\frac{3}{2}$
4.	باریک مساوی ڈسک کمیت = M نصف قطر=R	مرکز کے ذریعہ گذرنے والی اور سطح کے عمودی		$\frac{1}{2}MR^2$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)R$	$\frac{1}{2}$
		کنارے کو چھونے والی اور سطح کے عمودی (سطح کی عمودی مماس)		$\frac{3}{2}MR^2$	$\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)R$	$\frac{3}{2}$
		مرکز سے گذرنے والی، سطح پر پڑی ہوئی (قطر کے ساتھ)		$\frac{1}{4}MR^2$	$\left(\frac{1}{2}\right)R$	$\frac{1}{4}$
		سطح کے متوازی طور پر کنارے کو چھونے والی (سطح کی متوازی مماس)		$\frac{5}{4}MR^2$	$\left(\sqrt{\frac{5}{4}}\right)R$	$\frac{5}{4}$

11 physics 5. motion of systems
Tuesday, February 01, 2022 9:15:38 PM

5.	باریک مساوی کھوکھلا استوانہ: کمیت= m لمبائی=L، نصف قطر=R	مرکز سے گذرنے والی اور استوانے کی محور کے ساتھ		MR^2	R	1
		مرکز سے گذرنے والی اور استوانے کی لمبائی کے عمودی		$M\left(\frac{R^2}{2}+\frac{\ell^2}{12}\right)$	$\sqrt{\frac{R^2}{2}+\frac{\ell^2}{12}}$	- -
6.	مساوی ٹھوس استوانہ نصف قطر=R کمیت = m لمبائی = L	مرکز سے گذرنے والی اور استوانہ کے محور کے ساتھ		$\frac{1}{2}MR^2$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)R$	$\frac{1}{2}$
		مرکز سے گذرنے والی اور استوانے کی لمبائی کے عمودی		$M\left(\frac{R^2}{4}+\frac{\ell^2}{12}\right)$	$\sqrt{\frac{R^2}{4}+\frac{\ell^2}{12}}$	- -
7.	باریک کھوکھلا کرہ (پتلا کروی خانہ) کمیت=M نصف قطر=R	مرکز سے گذرنے والی (قطر کے ساتھ)		$\frac{2}{3}MR^2$	$\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)R$	$\frac{2}{3}$
		کنارہ کو چھونے والی (مماس)		$\frac{5}{3}MR^2$	$\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)R$	$\frac{5}{3}$
8.	مساوی ٹھوس کرہ کمیت=M؛ نصف قطر=R	مرکز سے گذرنے والی (قطر کے ساتھ)		$\frac{2}{5}MR^2$	$\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)R$	$\frac{2}{5}$
		کنارے کو چھونے والی (مماس)		$\frac{7}{5}MR^2$	$\left(\sqrt{\frac{7}{5}}\right)R$	$\frac{7}{5}$

11 physics 5. motion of systems
Tuesday, February 01, 2022 9:15:38 PM

اس کی جاذبی قوت (m_1g) نیچے کی جانب عمل پیرا ہوتی ہے اور اس کے مرکز پر ثابت پکڑ (Support) کے ذریعہ برآمد ہونے والی عمودی قوت (N) اوپری جانب عمل کرتی ہے۔ کنارے پر تناؤ T نیچے کی جانب عمل کرتا ہے۔ جاذبی قوت (m_1g) اور عمودی قوت (N) ایک $m_1g = N$ دوسرے کو منقطع کر دیتی ہیں۔

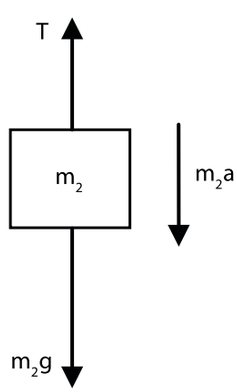
تناؤ T ایک قوت گردشہ (RT) پیدا کرتا ہے، جو ڈسک میں $\left(\alpha = \frac{a}{R}\right)$ کی زاویائی اسراع کے ساتھ ایک گردشی حرکت پیدا کرتی ہے۔ یہاں 'a' ڈسک کے کنارے پر موجود ایک نقطہ کی خطی اسراع ہے۔ اگر ڈسک کے جمود کی حرکت I اور اس کی گردش کا نصف قطر K ہو تو پھر ۔

$$RT = I\alpha; \quad RT = \left(m_1K^2\right)\frac{a}{R}$$

$$T = \left(m_1K^2\right)\frac{a}{R^2}$$

جسم کا آزاد جسمانی نقشہ: (FBD of the body)

اس کی جاذبی قوت (m_2g) نچلی جانب عمل کرتی ہے اور تناؤ T اوپری جانب عمل کرتا ہے چونکہ ($T < m_2g$) ہے۔ وہاں اس پر نچلی جانب ایک مجموعی قوت (m_2a) عمل کرتی ہے۔



$$m_2g - T = m_2a$$

ڈسک کے لئے موجود مساوات کی مدد سے T کے لئے اس قیمت کو حل کرنے پر

$$m_2g - \left(m_1K^2\right)\frac{a}{R^2} = m_2a$$

$$m_2g = \left(m_1K^2\right)\frac{a}{R^2} + m_2a$$

$$m_2g = \left[\left(m_1\frac{K^2}{R^2}\right) + m_2\right]a$$

$$a = \frac{m_2}{\left[\left(m_1\frac{K^2}{R^2}\right) + m_2\right]}g$$

ایک ڈسک کے لئے جو اس کے مرکز کے ذریعہ گذرنے والی اور اس کی سطح کے ایک عمودی محور کے تحت جملہ $\left(\frac{K^2}{R^2}\right)$ کی قیمت $\frac{K^2}{R^2} = \frac{1}{2}$ ہے۔ (ملاحظہ فرمائیے ۔ جدول 5.3)

اب اسراع کے لئے موجود مساوات مزید مختصر ہو جاتی ہے۔

$$a = \frac{m_2}{\left[\left(\frac{m_1}{2}\right) + m_2\right]}g; \quad a = \frac{2m_2}{\left[m_1 + 2m_2\right]}g$$

قیمتوں کو حل کرنے پر

$$a = \frac{2\times0.1}{\left[0.5+0.2\right]}\times10 = \frac{0.2}{0.7}\times10$$

$$a = 2.857\,m\,s^{-2}$$

5.5.2 زاویائی معیار حرکت کی بقاء: (Conservation of Angular Momentum)

جب گردش کرنے والے ایک سخت جسم پر کوئی بھی بیرونی قوت گردشہ عمل نہ کرتی ہے، تو اس سخت جسم کی کل زاویائی معیار حرکت کی بقاء ہوتی ہے، اسے کلیہ بقائے زاویائی معیار حرکت کہا جاتا ہے۔

11 physics 5. motion of systems
Tuesday, February 01, 2022 9:15:38 PM

$$\tau = \frac{dL}{dt}$$

اگر $\tau = 0$ ہوتو پھر $L =$ (5.49)

چونکہ زاویائی معیار حرکت $L = I\omega$ ہے، ابتدائی اور انتہائی حالات کے لئے زاویائی معیار حرکت کی بقاء کو مزید اس طرح لکھا جا سکتا ہے۔

$$I\omega = \text{مستقلہ} \quad \text{(or)} \quad I_i\omega_i = I_f\omega_f \qquad (5.50)$$

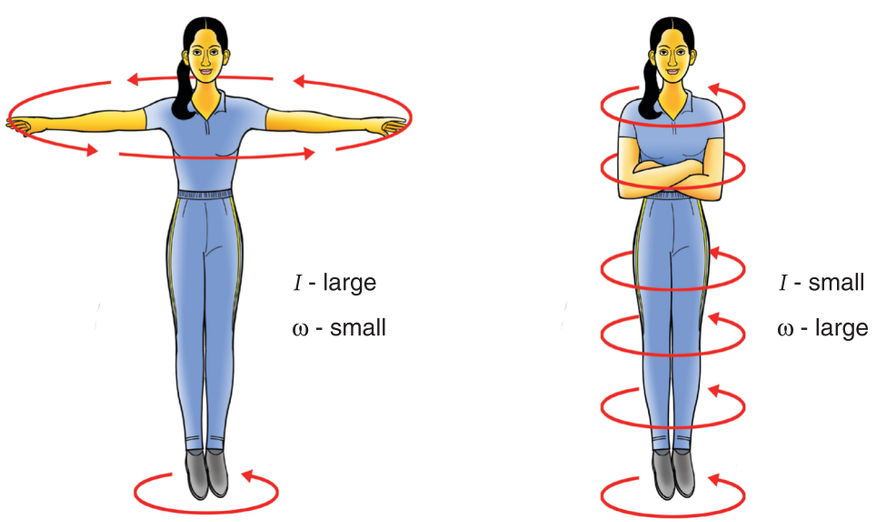
اوپر کی مساوات یہ بتاتی ہیں کہ جب I بڑھتی ہے تو ω کم ہوتی ہے اور عین اس کے برعکس بھی ہوتا ہے تا کہ زاویائی معیار حرکت کو مستقل رکھ سکے۔

ایسے کئی حالات ہیں جہاں کلیہ بقائے زاویائی معیار حرکت کا استعمال ہوتا ہے۔ایسی ہی ایک مثال برف میں ناچنے والوں کی ہے جیسا کہ خاکہ 5.27 میں بتایا گیا ہے۔ناچنے والے جب ہاتھوں کو پھیلا کر رکھتے ہیں تو آہستہ رفتار کے ساتھ گھومتے ہیں مگر جب وہ ہاتھوں کو جسم کے قریب رکھتے ہیں تو وہ تیزی سے گھومنے لگتے ہیں۔ہاتھوں کا، جسم سے دور پھیلائے رکھنے کا عمل جمود کا معیار اثر کو بڑھا دیتا ہے جس سے زاویائی سمتی رفتار کم ہوجاتی ہے اور نتیجتاً گردش آہستہ ہوجاتی ہے۔ اس کے برخلاف جب ہاتھ جسم کے قریب کر لئے جاتے ہیں تو جمود کی معیار اثر کم ہوجاتی ہے جس سے زاویائی سمتی رفتار بڑھ جاتی ہے جس کے نتیجے میں گردش تیز ہوجاتی ہے۔

خاکہ 5.28 کے مطابق ایک غوطہ باز ہوا میں چھلانگ لگاتے ہی اپنے جسم کو موڑ لیتا ہے تا کہ جمود کا معیار اثر کو کم کردے جس کی وجہ سے اسے ہوا میں پلٹیوں کی تعداد بڑھانے میں مدد ملتی ہے۔



خاکہ 5.28 ایک غوطہ باز کے لئے زاویائی معیار حرکت کی بقاء



خاکہ 5.27 برف میں ناچنے والی کے لئے زاویائی معیار حرکت کی بقاء

11 physics 5. motion of systems
Tuesday, February 01, 2022 9:15:39 PM

مثال 5.19

ایک سرکس (Circus) میں ایک جوکر، w زاویائی سمتی رفتار کے ساتھ گردش کرنے والی ایک گردشی میز پر اپنے ہاتھوں کو پھیلائے ہوئے کھڑا ہے۔ وہ اپنے ہاتھوں کو جسم سے اس قدر قریب کرتا ہے کہ اس کے جمود کا معیار اثر حقیقی قیمت سے گھٹ کر ایک تہائی ہو جاتی ہے۔ اس کی نئی زاویائی سمتی رفتار معلوم کیجئے۔
(دیا گیا ہے): بتائی گئی صورت حال میں گردشی میز پر کوئی بیرونی قوت گدشہ نہیں ہے)۔

حل:

فرض کیجئے کہ ہاتھوں کو پھیلا کر رکھتے وقت جوکر کی جمود کا معیار اثر 'I' ہے چونکہ جوکر اور اس گردشی میز پر کوئی بیرونی قوت گدشہ عمل نہیں کر رہی ہے، اس کی کل زاویائی معیار حرکت کی بقاء ہوتی ہے۔
ہم اس مساوات کو لکھ سکتے ہیں۔

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f$$

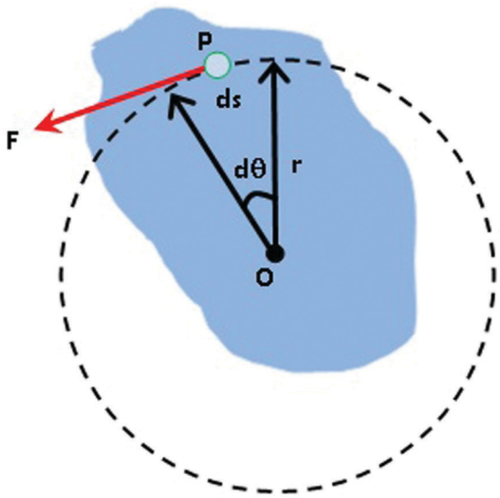
$$I_i\,\omega_i = \frac{1}{3}I_i\,\omega_f \qquad \left(\because I_f = \frac{1}{3}I_i\right)$$

$$\omega_f = 3\omega_i$$

اوپر کا نتیجہ یہ بتاتا ہے کہ حتمی زاویائی سمتی رفتار، ابتدائی زاویائی سمتی رفتار سے تگنی ہے۔

5.5.3 قوت گدشہ سے کیا گیا کام
(Work Done by Torque)

آیئے ہم ایک سخت جسم کا تصور کریں جو ایک ثابت محور کے تحت گردش کر رہا ہے۔ خاکہ 5.29، جسم پر موجود ایک نقطہ P کو بتاتا ہے، جو کاغذ کی سطح کی ایک عمودی محور کے تحت گھوم رہا ہے۔ اس جسم پر ایک مماسی قوت بھیجی جاتی ہے۔
وہ اس جسم پر ایک چھوٹا سا ہٹاؤ پیدا کرتی ہے۔ قوت سے کیا گیا کام (dw) یہ ہے۔



خاکہ 5.29 قوت گدشہ سے کیا گیا کام

$$dw = F\,ds$$

چونکہ فاصلہ ds گردشی زاویہ dθ اور نصف قطر r کا تعلق اس مساوات کے ذریعہ پیش کیا جاتا ہے۔

$$ds = r\,d\theta$$

اب کئے گئے کام کی مساوات اس طرح بن جاتی ہے۔

$$dw = F\,ds; \quad dw = F\,r\,d\theta$$

یہ جملہ جسم پر قوت کے ذریعہ پیدا ہونے والی قوت τ گدشہ $F\,r$ ہے۔

$$dw = \tau\,d\theta \qquad (5.51)$$

یہ مساوات اس بیرونی اس قوت گدشہ سے کئے گئے کام کو ظاہر کرتی ہے، جو ایک زاویہ کے ذریعہ ایک ثابت محور کے تحت گھومتے ہوئے جسم پر عمل کرتی ہے۔

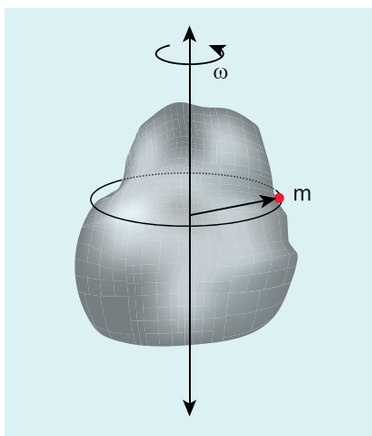
خطی حرکت میں کئے گئے کام کے لئے متعلقہ مساوات یہ ہے۔

$$dw = F\,ds$$

11 physics 5. motion of systems
Tuesday, February 01, 2022 9:15:40 PM

5.5.4 گردش میں موجود توانائی بالفعل
(Kinetic energy in Rotation)

فرض کیجئے کہ ایک سخت جسم کسی محور کے تحت زاویائی سمتی رفتار ω کے ساتھ گردش کر رہا ہے جیسا کہ خاکہ 5.30 میں بتایا گیا ہے۔ اس جسم کے ہر ذرہ میں، گردشی محور اور ان کے مقامی فاصلوں کی بنیاد پر، مساوی زاویائی سمتی رفتار ω اور مختلف سمتی رفتاریں پائی جائیں گی۔



خاکہ 5.30 گردش میں موجود توانائی بالفعل

آیئے ہم ایک ذرہ کا انتخاب کریں، جو گردشی محور سے r_1 فاصلے پر ہے اور اس کی کمیت m_1 ہے۔ اس میں ایک مماسی سمتی رفتار v_1 پائی جاتی ہے، جو اس مساوات سے پیش کی جاتی ہے۔ $v = r_1 \omega$

اس ذرہ کی توانائی بالفعل KE_i یہ ہے۔

$$KE_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

اس مساوات کو زاویائی سمتی رفتار کے ساتھ لکھنے پر ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$KE_i = \frac{1}{2} m_i (r_i \omega)^2 = \frac{1}{2} (m_i r_i^2) \omega^2$$

کل جسم کی توانائی بالفعل کے لئے جو کہ اس قسم کے کئی ذرات سے بنا ہوا ہے۔ اس مساوات کا حاصل جمع (summation) اس طرح لکھا جاتا ہے۔

$$KE = \frac{1}{2} \left(\sum m_i r_i^2 \right) \omega^2$$

جہاں جملہ $\sum m_i r_i^2$ اس مکمل جسم کی جمود کا معیار اثر I ہے۔

$$I = \sum m_i r_i^2$$

لہذا گردشی حرکت میں اس سخت جسم کی توانائی بالفعل کے لئے مساوات یہ ہے۔

$$KE = \frac{1}{2} I \omega^2 \qquad (5.52)$$

یہ مساوات خطی حرکت میں پائی جانے والی توانائی بالفعل کے لئے موجود مساوات سے ملتی جلتی ہے۔

$$KE = \frac{1}{2} M v^2$$

گردشی توانائی بالفعل اور زاویائی معیار حرکت کا درمیانی تعلق:

فرض کیجئے کہ I جمود کی حرکت رکھنے والا ایک سخت جسم ایک زاویائی سمتی رفتار ω کے ساتھ گردش کر رہا ہے۔

ایک سخت جسم کی زاویائی معیار حرکت $L = I\omega$ ہے۔

ایک سخت جسم کی زاویائی توانائی بالفعل $KE = \frac{1}{2} I\omega^2$ ہے۔

اوپر کی مساوات کے شمار کنندہ اور نسب نما کے ساتھ I کو ضرب کرنے پر ہم L اور KE کے درمیان اس طرح کا ایک تعلق حاصل کرتے ہیں۔

$$KE = \frac{1}{2} \frac{I^2 \omega^2}{I} = \frac{1}{2} \frac{(I\omega)^2}{I}$$

$$KE = \frac{L^2}{2I} \qquad (5.53)$$

مثال 5.20

9 kg کمیت اور 3m نصف قطر والے ایک حلقے کی گردشی توانائی بالفعل معلوم کیجئے، جو اس کی سطح کے عمودی طور پر اور اس کے مرکز سے گزرنے والی ایک محور کے تحت 240 rpm کے ساتھ گردش کر رہا ہے۔ (rpm، گردشی رفتار کی ایک اکائی ہے جس کا مطلب، ایک منٹ میں ہونے والی گردشیں ہیں)۔

11 physics 5. motion of systems
Tuesday, February 01, 2022 9:15:40 PM

حل:

گردشی توانائی بالفعل یہ ہے۔ $KE = \frac{1}{2} I\omega^2$

اس حلقے کی جمود کا معیار اثر $I = MR^2$ ہے۔

$$I = 9 \times 3^2 = 9 \times 9 = 81\,kg\,m^2$$

اس حلقے کی زاویائی رفتار یہ ہے۔

$$\omega = 240\,rpm = \frac{240 \times 2\pi}{60}\,rad\,s^{-1}$$

$$KE = \frac{1}{2} \times 81 \times \left(\frac{240 \times 2\pi}{60}\right)^2 = \frac{1}{2} \times 81 \times (8\pi)^2$$

$$KE = \frac{1}{2} \times 81 \times 64 \times (\pi)^2 = 2592 \times (\pi)^2$$

$$KE \approx 25920\,J \quad \because (\pi)^2 \approx 10$$

$$KE = 25.920\,kJ$$

5.5.5 قوت گردشہ سے پہنچائی جانے والی طاقت: (Power delivered by Torque)

فی اکائی وقت میں کیا جانے والا کام ہی پہنچائی جانے والی طاقت ہے۔ اگر ہم کئے گئے کام کے لئے موجود مساوات کو وقت کے لحاظ سے تفریق (differentiate) کریں تو ہم بروقتہ طاقت (P) (instantaneous Power) حاصل کرتے ہیں۔

$$P = \frac{dw}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt} \quad \because (dw = \tau d\theta)$$

$$P = \tau\omega \qquad (5.54)$$

خطی حرکت میں پہنچائی جانے والی بروقتہ طاقت کے لئے اس سے ملتی جلتی مساوات یہ ہے۔

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

5.5.6 خطی اور گردشی مقداروں کا موازنہ (Comparison of Translational and Rotational Quantities)

گردشی حرکت میں موجود مقداروں کی کئی مساوات خطی حرکت میں موجود مقداروں کی مساوات سے ملتی جلتی ہیں۔ جدول 5.4 میں خطی توازنت کے ساتھ گردشی اصطلاحات کا موازنہ کیا گیا ہے۔

جدول 5.4: خطی اور گردشی مقداروں کا موازنہ

نمبر شمارہ	Translational Motion خطی حرکت	ایک ثابت محور کے تحت گردشی حرکت
1	Displacement, x ہٹاؤ	Angular displacement, θ زاویائی ہٹاؤ
2	Time, t وقت	Time, t وقت
3	Velocity, $v = \frac{dx}{dt}$ سمتی رفتار	Angular velocity, $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ زاویائی سمتی رفتار
4	Acceleration, $a = \frac{dv}{dt}$ اسراع	Angular acceleration, $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ زاویائی اسراع
5	Mass, m کمیت	Moment of inertia, I جمود کا معیار اثر
6	Force, F = ma قوت	Torque, $\tau = I\,\alpha$ قوت گردشہ
7	Linear momentum, p = mv خطی معیار حرکت	Angular momentum, L = Iω زاویائی معیار حرکت
8	Impulse, $F\,\Delta t = \Delta p$ دھکا	Angular impulse, $\tau\Delta t = \Delta L$ زاویائی دھکا
9	Work done, w = F s کیا گیا کام	Work done, $w = \tau\,\theta$ کیا گیا کام
10	Kinetic energy, $KE = \frac{1}{2} m v^2$ توانائی بالفعل	Kinetic energy, $KE = \frac{1}{2} I\omega^2$ توانائی بالفعل
11	Power, P = F v طاقت	Power, $P = \tau\omega$ طاقت

11 physics 5. motion of systems
Tuesday, February 01, 2022 9:15:40 PM

5.6 لڑھکنے والی حرکت (Rolling motion)

لڑھکنے والی حرکت روزمرہ زندگی میں سب سے زیادہ دیکھی جانے والی عمومی حرکت ہے پہیے کی حرکت اس کی ایک مثال ہے۔ حلقے، ڈسک، کرے جیسی گول اشیاء لڑھکنے کے لئے بہت مناسب ہوتی ہیں۔

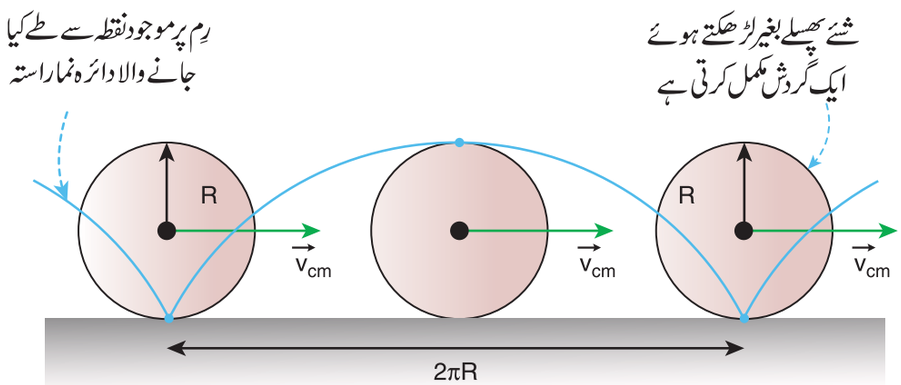
آیئے ہم ایک افقی سطح پر لڑھکتے ہوئے ایک ڈسک کا مطالعہ کریں۔اس ڈسک کے کنارے پر موجود ایک نقطہ P کا تصور کیجئے۔ لڑھکتے وقت مرکز کی جانب نقطہ خطی ہٹاؤ پاتا ہے، اور کمیت کے مرکز کی جانب سے گردشی حرکت پاتا ہے۔

5.6.1 خطی اور گردشی حرکت کو جمع کرنا (Combination of Translation and Rotation)

آیئے ہم یہ دیکھیں کہ ایک خطی حرکت اور گردشی حرکت کا تعلق کس طرح پایا جاتا ہے۔ اگر لڑھکنے والی اس شئے کا نصف قطر R ہو تو، ایک مکمل گردش میں، اس کا کمیتی مرکز $2\pi R$ (اس کا احاطہ) کا ہٹاؤ پاتا ہے۔ ہر کوئی یہ مان سکتا ہے کہ ایک مکمل گردش ہونے کے بعد $2\pi R$، نہ صرف اس شئے کا کمیتی مرکز، بلکہ اس شئے پر موجود تمام نقاط کے برابر کا ہٹاؤ پاتے ہیں۔ ان کا درمیانی فرق صرف اتنا ہے کہ کا ہٹاؤ حاصل کرنے کے لئے، کمیتی مرکز ایک سیدھا راستہ اختیار کرتا ہے، جب کہ اس شئے کے دیگر تمام نقاط ہٹاؤ پانے کے لئے مختلف راستے اختیار کرتے ہیں جن میں خطی اور گردشی دونوں کی مجموعی حرکت پائی جاتی ہے۔ خاص کر کنارے پر موجود نقطہ ایک دائرہ نما (cycloid) راستہ اختیار کرتا ہے جیسا کہ خاکہ 5.31 میں بتایا گیا ہے۔



چونکہ کمیتی مرکز صرف ایک خطی راستہ اختیار کرتا ہے اس کی سمتی رفتار V_{CM} صرف خطی (Translational) سمتی رفتار ($V_{CM}=V_{TRANS}$) V_{TRANS} ہوتی ہے۔ دیگر تمام نقاط میں دو سمتی رفتاریں پائی جاتی ہیں۔ ایک وہی خطی سمتی رفتار (جو کمیتی مرکز کی سمتی رفتار کے بھی مساوی ہے) اور دوسری گردشی (rotational) سمتی رفتار ($V_{ROT} = r\omega$) V_{ROT} یہاں r کمیتی نقطے اور اس نقطے کا درمیانی فاصلہ ہے، اور ω زاویائی سمتی رفتار ہے۔ گردشی سمتی رفتار V_{ROT} کمیتی مرکز سے بروقتہ مقامی سمتیے کی عمودی ہوتی ہے، جیسا کہ خاکہ 5.32(a) میں بتایا گیا ہے۔ ان دو سمتی رفتاروں کا حاصل v (resultant) ہے۔ جیسا کہ خاکہ 5.32(b) میں بتایا گیا ہے۔ جس سطح میں وہ شئے لڑھکتی ہے، وہ مجموعی سمتی رفتار v اس سطح سے مس ہونے والے نقطے سے مقامی سمتیہ کے عمودی ہوتی ہے۔



خاکہ 5.31۔ لڑھکاؤ خطی اور گردشی حرکت کا مجموعہ ہے۔

11 physics 5. motion of systems
Tuesday, February 01, 2022 9:15:41 PM

آیئے اب ہم مس ہونے والے نقطے کو اہمیت دیں ۔ خالص لڑھکاؤ میں، لڑھکنے والی شئے کا نقطہ جو سطح کے ساتھ مس ہوتا ہو، وقتی طور پر حالت سکون اختیار کرتا ہے ۔ یہی معاملہ لڑھکنے والی شئے کے کنارے پر موجود ہر نقطہ کے ساتھ ہوتا ہے ۔ جیسے جیسے لڑھکنے کا عمل آگے بڑھتا ہے، کنارے پر موجود تمام نقاط یکے بعد دیگرے سطح سے مس ہوتے ہیں ۔ مس ہونے والے وقت پر وقتی سکونت حاصل کرتے ہیں اور پھر دائری راستہ اختیار کرتے ہیں جیسا کہ پہلے ہی بتایا گیا ہے ۔

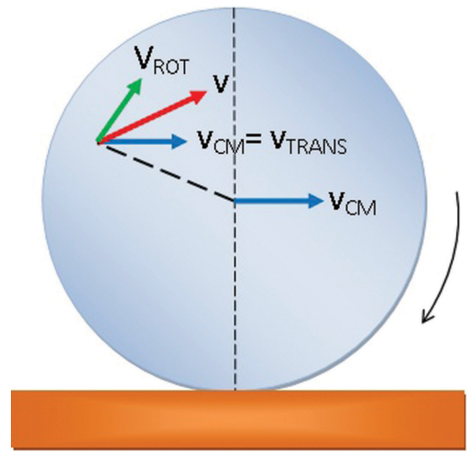
لہذا ہم خالص لڑھکاؤ کو دو مختلف طریقوں سے فرض کر سکتے ہیں ۔

(i) کمیتی مرکز کے تحت خطی حرکت اور گردشی حرکت کی مجموعیت

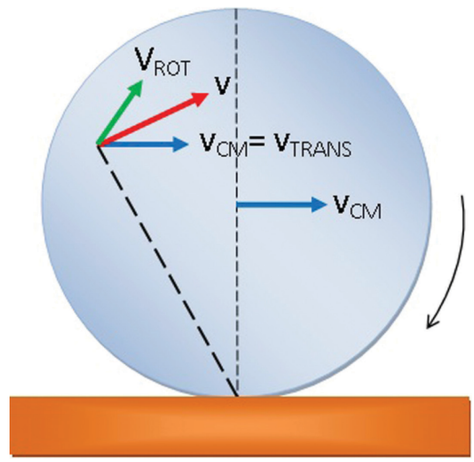
(یا)

(ii) مس ہونے والے نقطے کے تحت وقتی (momentary) گردشی حرکت

چونکہ خالص لڑھکاؤ میں مس ہونے والا نقطہ وقتی طور پر ساکن ہوتا ہے ۔ اس کی مجموعی سمتی رفتار صفر ہو جاتی ہے (v=0) ۔ مثال کے طور پر خاکہ 5.33 میں، مس ہونے والے نقطے V_{TRANS} پر آگے کی جانب (دائیں طرف) ہے اور V_{ROT} پیچھے کی جانب (بائیں طرف) ہے ۔

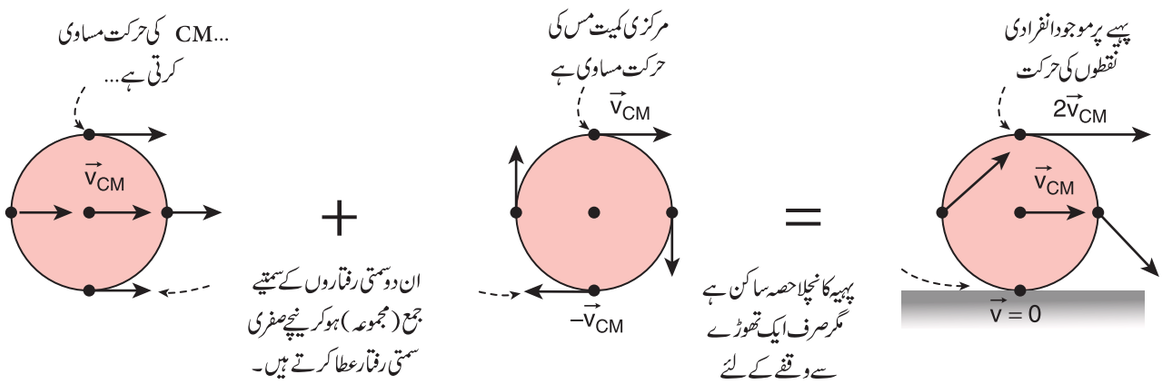


(a) کمیتی مرکز کے لحاظ سے



(b) مس ہونے والے نقطے کے لحاظ سے

خاکہ 5.32۔ ایک نقطہ پر مجموعی سمتی رفتار



خاکہ 5.33۔ خالص لڑھکاؤ میں، مس ہونے والا نقطہ ساکن ہوتا ہے

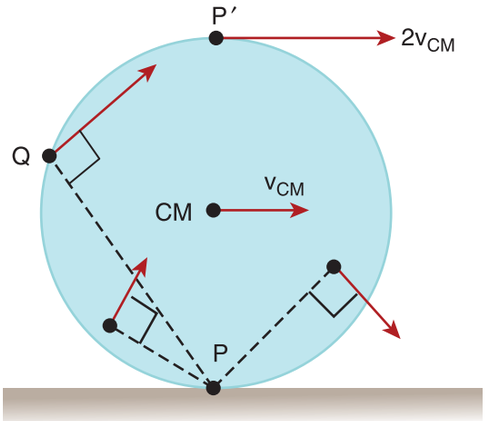
11 physics 5. motion of systems
Tuesday, February 01, 2022 9:15:42 PM

اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ V_{TRANS} اور V_{ROT} قدر میں مساوی ہوتے ہیں اور سمت میں مخالف ہوتے ہیں۔ $(V = V_{TRANS} - V_{ROT} = 0)$۔ لہذا ہم اس نتیجے پر پہنچ پاتے ہیں کہ خالص لڑھکاؤ میں، کنارے پر موجود تمام نقاط کے لئے V_{TRANS} اور V_{ROT} مساوی ہوتے ہیں۔ $(V_{TRANS}=V_{ROT})$۔ چونکہ $V_{TRANS}=V_{CM}$ اور $V_{ROT} = R\omega$ ہیں، خالص لڑھکاؤ میں ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$v_{CM} = R\,\omega \qquad (5.55)$$

مساوات 5.55 کی مخصوص خصوصیت کو ہمیں یاد رکھنا چاہئے، وہ یہ کہ گردشی حرکت میں $v = r\omega$ کی مساوات کے تحت r کی قیمت صفر رہنے کی وجہ سے مرکزی نقطہ میں کوئی سمتی رفتار نہیں ہوتی، مگر لڑھکنے والی حرکت میں، مساوات 5.55 کے ذریعہ یہ معلوم ہوتا ہے کہ مرکزی نقطہ میں V_{CM} مقدار کی ایک سمتی رفتار پائی جاتی ہے۔

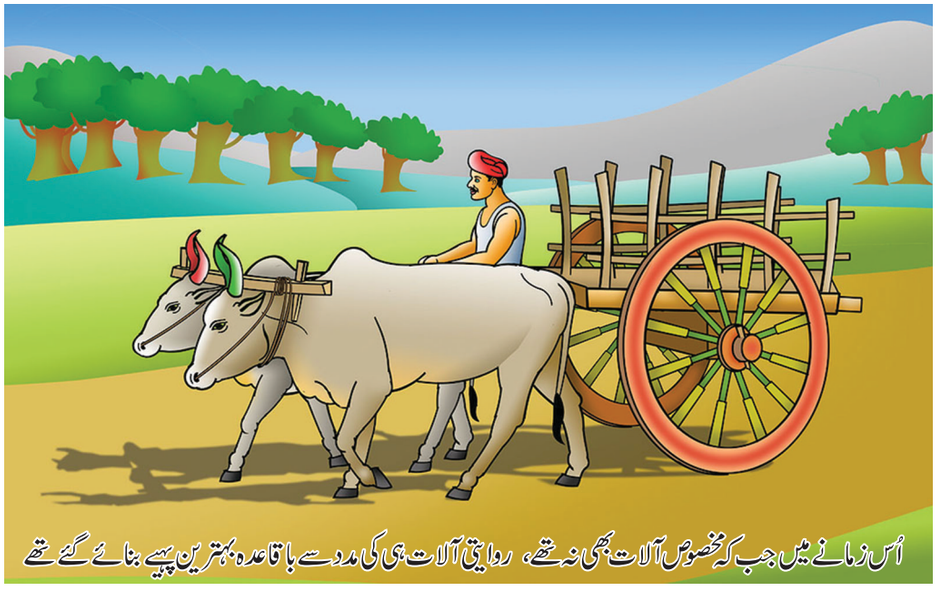
سب سے اوپری نقطہ کے لئے V_{TRANS} اور V_{ROT} دونوں سمتی رفتاریں قدر میں مساوی ہوتی ہیں اور ایک ہی سمت میں (دائیں جانب) ہوتی ہیں۔ لہذا مجموعی سمتی رفتار v ان دو سمتی رفتاروں کا حاصل جمع ہوتی ہے، $V = V_{TRANS} + V_{ROT}$۔ ایک اور شکل میں یہ $V = 2V_{CM}$ ہوگی، جیسا کہ خاکہ 5.34 میں بتایا گیا ہے۔



خاکہ 5.34 خالص لڑھکاؤ میں مختلف نقطوں کی سمتی رفتار

5.6.2 پھسلنا اور سرکنا (Slipping and Sliding)

کسی بھی ایسی سطح پر، جس کی رگڑ کا تعاونی عدد صفر سے زیادہ ہے، $(\mu > 0)$ ایک گول شئے جب حرکت کرتی ہے تو وہ اس پر لڑھکنے کی کوشش کرتی ہے۔ لڑھکنے والی حرکت میں مدد کرنے والی رگڑ لڑھکاؤ کی رگڑ (rolling friction) کہلاتی ہے۔ خالص لڑھکاؤ میں، سطح کے ساتھ مس ہونے والے نقطے کی کوئی متعلقہ حرکت نہیں ہوتی۔ جب لڑھکنے والی شئے کی رفتار بڑھتی یا گھٹتی ہے تو اسے اسراعی بننا چاہئے یا منفی اسراعی بننا چاہئے۔

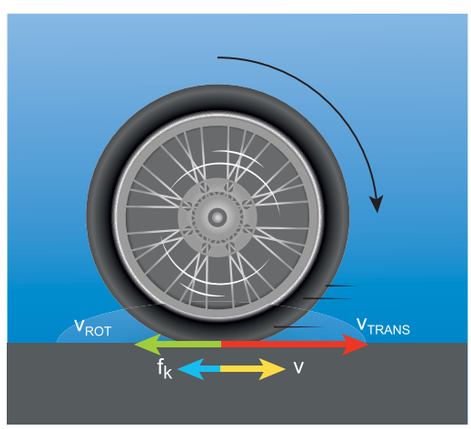

اُس زمانے میں جب کہ مخصوص آلات بھی نہ تھے، روایتی آلات ہی کی مدد سے باقاعدہ بہترین پہیے بنائے گئے تھے

11 physics 5. motion of systems
Tuesday, February 01, 2022 9:15:42 PM

اس طرح جب اچانک ہونے لگتا ہے تو شئے پھسلنے یا سرکنے لگتی ہے۔

سرکنا (Sliding)

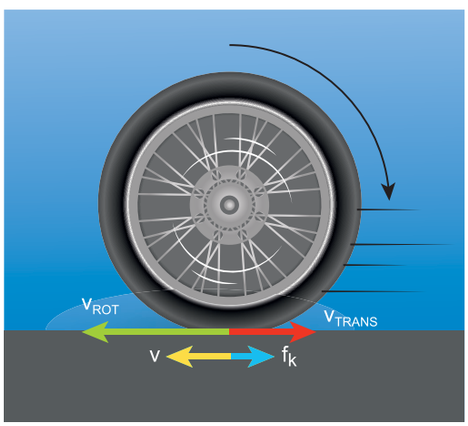
جب $(V_{CM} > R\omega)$ یا $(V_{TRANS} > V_{ROT})$ ہو تو سرکنے کا عمل واقع ہوتا ہے۔ خطی حرکت گردش سے بڑھ جاتی ہے۔ جب حرکت کرنے والی گاڑیوں میں اچانک بریک لگایا جاتا ہے یا وہ گاڑی پھسلنے والی سڑک پر داخل ہو جاتی ہے تو اس قسم کی حرکت نمودار ہوتی ہے ۔ اس صورت حال میں مس ہونے والے نقطے میں V_{TRANS} کی مقدار V_{ROT} سے زیادہ ہوتی ہے۔ لہذا، اس میں آگے کی سمت والی مجموعی سمتی رفتار v پائی جاتی ہے جیسا کہ خاکہ 5.35 میں بتایا گیا ہے۔ فعلی رگڑ کی قوت (f_k) متعلقہ حرکت کی مخالفت کرتی ہے۔ لہذا وہ متعلقہ سمتی رفتار کی مخالف سمت میں عمل کرتی ہے۔ یہ رگڑ کی قوت خطی سمتی رفتار کو گھٹاتی ہے اور گردشی سمتی رفتار کو بڑھاتی ہے یہاں تک کہ وہ مساوی ہو جاتی ہیں اور وہ شئے خالص لڑھکنے پر برقرار ہو جاتی ہے۔ سرکنے کے عمل کو آگے کی جانب ہونے والا پھسلاؤ بھی کہا جاتا ہے۔



خاکہ 5.35 سرکنا

پھسلنا (Slipping)

جب $(V_{CM} < R\omega)$ یا $(V_{TRANS} < V_{ROT})$ ہو تو پھسلاؤ کا عمل نمودار ہوتا ہے۔ گردش خطی حرکت سے بڑھ جاتی ہے۔ جب گاڑی کو ساکن حالت سے اچانک چلانا شروع کرتے ہوں یا گاڑی جب کیچڑ وغیرہ میں پھنس جاتی ہے تو اس قسم کا عمل واقع ہوتا ہے اس صورت حال میں ہونے والے نقطے میں V_{ROT} کی مقدار V_{TRANS} سے زیادہ ہو جاتی ہے۔ لہذا اس میں پیچھے کی سمت والی مجموعی سمتی رفتار v پائی جاتی ہے جیسا کہ خاکہ 5.36 میں بتایا گیا ہے۔ فعلی رگڑ کی قوت (f_k) متعلقہ حرکت کی مخالفت کرتی ہے۔ لہذا وہ متعلقہ سمتی رفتار کی مخالف سمت میں عمل کرتی ہے۔ یہ رگڑ کی قوت گردشی سمتی رفتار کو گھٹاتی ہے اور خطی سمتی رفتار کو بڑھاتی ہے یہاں تک کہ وہ مساوی ہو جاتی ہیں اور وہ شئے خالص لڑھکنے پر برقرار ہو جاتی ہے۔ پھسلنے کے عمل کو کبھی کبھی پیچھے کی جانب ہونے والا سرکاؤ بھی کہا جاتا ہے۔



خاکہ 5.36 پھسلاؤ

NGF7T

مثال 5.21

ایک لڑھکتے ہوئے پہیے میں اس کے کمیتی مرکز کی سمتی رفتار $5\ ms^{-1}$ ہے۔ اگر اس کا نصف قطر 1.5m اور اس کی زاویائی سمتی رفتار $3\ rad\ s^{-1}$ ہو تو پھر یہ جانچئے کہ وہ خالص لڑھکاؤ میں ہے یا نہیں۔

11 physics 5. motion of systems
Tuesday, February 01, 2022 9:15:43 PM

حل: خطی سمتی رفتار (V_{TRANS}) یا کمیتی مرکز کی سمتی رفتار $v = 5\ ms^{-1}$ ؛ نصف قطر $R = 1.5m$ ہے اور زاویائی سمتی رفتار $\omega = 3\ rad\ s^{-1}$ ہے۔

گردشی سمتی رفتار $V_{ROT} = R\omega$

$$v_{ROT} = 1.5 \times 3$$

$$v_{ROT} = 4.5\ m\ s^{-1}$$

چونکہ $V_{CM} > R\omega$ ہے یا $(V_{TRANS} > R\omega)$ ہے۔ وہ شئے خالص لڑھکاؤ میں نہیں ہے، بلکہ اس میں سرکنے کا عمل واقع ہو رہا ہے۔

5.6.3 خالص لڑھکاؤ میں توانائی بالفعل
(Kinetic energy in pure rolling)

عام طور پر خالص لڑھکاؤ، خطی اور گردشی حرکت کا مجموعہ ہے۔ ہم کل توانائی بالفعل (KE) کو اس طرح لکھ سکتے ہیں کہ یہ خطی حرکت کی وجہ سے بننے والی توانائی بالفعل (KE_{TRANS}) اور گردشی حرکت کی وجہ سے پیدا ہونے والی توانائی بالفعل (KE_{ROT}) کا حاصل جمع ہے۔

$$KE = KE_{TRANS} + KE_{ROT} \qquad (5.56)$$

اگر لڑھکنے والی شئے کی کمیت M ہو، کمیتی مرکز کی سمتی رفتار V_{CM} ہو، کمیتی مرکز کے تحت اس کے جمود کا معیار اثر I_{CM} ہو اور زاویائی سمتی رفتار ω ہو تو پھر

$$KE = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 \qquad (5.57)$$

کمیتی مرکز کو حوالہ بنا کر:
With centre of mass as reference:

ایک لڑھکتی ہوئی شئے کی جمود کا معیار اثر (I_{CM}) ہے، کمیتی مرکز کے تحت $I_{CM} = MK^2$ اور $V_{CM} = R\omega$ ہے۔ یہاں K گردش کا نصف قطر ہے۔

$$KE = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}\left(MK^2\right)\frac{v_{CM}^2}{R^2}$$

$$KE = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2\left(\frac{K^2}{R^2}\right) \qquad (5.58)$$

$$KE = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2\left(1 + \frac{K^2}{R^2}\right) \qquad (5.59)$$

مس ہونے والے نقطے کو حوالہ بنا کر
With point of contact as reference:

ہم مس ہونے والے نقطے کے لحاظ سے وقتی گردش کو لے کر بھی اس مساوات کے نتیجے پر پہنچ سکتے ہیں۔ (لڑھکاؤ کے مطالعے کا ایک اور طریقہ) اگر ہم مس ہونے والے نقطے کو 'O' کے طور پر لیں تو پھر

$$KE = \frac{1}{2}I_o\omega^2$$

یہاں I_O، مس ہونے والے نقطے کے تحت شئے کے جمود کا معیار اثر ہے۔ متوازی محور کے نظریے کی مدد سے $Io = I_{CM} + MR^2$ ہے، اسے مزید اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں۔

$I_o = MK^2 + MR^2$ کے ساتھ یا $V_{CM} = R\omega$

$$\omega = \frac{V_{CM}}{R}$$

چونکہ مساوات 5.59 اور 5.60 یکساں ہیں۔ یہ دوبارہ ثابت ہوتا ہے کہ خالص لڑھکاؤ سے متعلق حسابات،

$$KE = \frac{1}{2}\left(MK^2 + MR^2\right)\frac{v_{CM}^2}{R^2}$$

$$KE = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2\left(1 + \frac{K^2}{R^2}\right) \qquad (5.60)$$

11 physics 5. motion of systems
Tuesday, February 01, 2022 9:15:43 PM

مندرجۂ ذیل معاملات میں سے کسی ایک کا لحاظ کر کے حل کئے جاسکتے ہیں۔

(i) کمیتی مرکز کے تحت خطی حرکت اور گردشی حرکت کا مجموعہ (یا)

(ii) مس ہونے والے نقطے کے تحت وقتی گردشی حرکت

مثال 5.22

ایک ٹھوس کرہ خالص طور پر لڑھک رہا ہے۔ گردشی توانائی بالفعل کے ساتھ اس کی خطی توانائی بالفعل کی نسبت کیا ہے؟

حل:

خالص لڑھکاؤ میں کل توانائی بالفعل کے لئے یہ مساوات ہے۔

$$KE = KE_{TRANS} + KE_{ROT}$$

مساوات 5.58 اور 5.59 کے مطابق کسی بھی شئے کی کل توانائی کے لئے

$$KE = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2\left(\frac{K^2}{R^2}\right)$$

$$KE = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2\left(1+\frac{K^2}{R^2}\right)$$

پھر

$$\frac{1}{2}Mv_{CM}^2\left(1+\frac{K^2}{R^2}\right) = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2\left(\frac{K^2}{R^2}\right)$$

اوپر کی مساوات یہ رائے پیش کرتی ہے کہ خالص لڑھکاؤ میں کل توانائی بالفعل، خطی توانائی بالفعل اور گردشی توانائی بالفعل کی نسبت یوں پیش کی جاتی ہے۔

$$KE : KE_{TRANS} : KE_{ROT} :: \left(1+\frac{K^2}{R^2}\right) : 1 : \left(\frac{K^2}{R^2}\right)$$

یہاں پر $KE_{TRANS} : KE_{ROT} :: 1 : \left(\frac{K^2}{R^2}\right)$

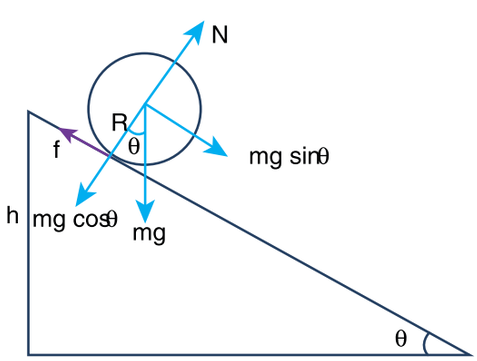
ایک ٹھوس کرہ کے لئے $\frac{K^2}{R^2} = \frac{2}{5}$

تو $KE_{TRANS} : KE_{ROT} :: 1 : \frac{2}{5}$

$$KE_{TRANS} : KE_{ROT} :: 5 : 2$$

5.6.4 ڈھلوان سطح پر لڑھکاؤ (Rolling on inclined plane)

آیئے ہم یہ تصور کریں کہ m کمیت اور R نصف قطر والی ایک گول شئے، ایک ڈھلوان سطح پر پھسلے بغیر لڑھک رہی ہے۔ جیسا کہ خاکہ 5.37 میں بتایا گیا ہے۔ ڈھلوان سطح کے ساتھ اس شئے پر دو قوتیں عمل پیرا ہوتی ہیں۔ ایک جاذبی قوت کا جزء (mg sin θ) ہے اور دوسری ساکن رگڑ کی قوت (f) ہے۔ جاذبی قوت کا دوسرا جزء (mg cos θ) سطح سے برآمد ہونے والی عمودی قوت (N) کے ذریعہ منقطع ہوجاتا ہے. چونکہ حرکت ڈھلاؤ کے ساتھ ہورہی ہے، ہم شئے کے آزاد جسمانی نقشہ (FBD) کی مدد سے حرکت کے لئے مساوات لکھ سکتے ہیں۔



خاکہ 5.37 ڈھلوان سطح پر لڑھکاؤ

11 physics 5. motion of systems
Tuesday, February 01, 2022 9:15:44 PM

خطی حرکت کے لئے $(mg \sin \theta)$ معاون قوت ہے اور f مخالف قوت ہے۔

$$mg \sin\theta - f = ma \qquad (5.61)$$

گردشی حرکت کے لئے، آیئے ہم شئے کے مرکز کے لحاظ سے قوت گدشہ کو فرض کریں تو پھر $(mg \sin \theta)$ قوت گدشہ پیدا نہیں کرسکتی، کیونکہ وہ اس کے ذریعہ سے گذرتی ہے مگر رگڑ کی قوت f، ایک مقدار R_f کی قوت گدشہ بنا سکتی ہے۔

$$Rf = I\alpha$$

مساوات $a = r\alpha$ اور جمود کی حرکت $I = mK^2$ کا استعمال کرتے ہوئے، ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$Rf = mK^2 \frac{a}{R}; \quad f = ma\left(\frac{K^2}{R^2}\right)$$

اب مساوات (5.61) اس طرح بن جاتی ہے۔

$$mg \sin\theta - ma\left(\frac{K^2}{R^2}\right) = ma$$

$$mg \sin\theta = ma + ma\left(\frac{K^2}{R^2}\right)$$

$$a\left(1+\frac{K^2}{R^2}\right) = g \sin\theta$$

اسراع کے لئے اسے دوبارہ لکھنے پر ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$a = \frac{g \sin\theta}{\left(1+\frac{K^2}{R^2}\right)} \qquad (5.62)$$

ڈھلوان سطح کے لئے حرکت کی تیسری مساوات کا استعمال کرکے، لڑھکتی ہوئی شئے کی حتمی سمتی رفتار کے لئے بھی مساوات معلوم کرسکتے ہیں۔

$v^2 = u^2 + 2as$۔ اگر شئے ساکن حالت سے لڑھکنا شروع کرتی ہے تو $u=o$۔ جب ڈھلاؤ کی عمودی اونچائی h ہو تو ڈھلاؤ کی لمبائی s یہ ہے۔ $s = \frac{h}{\sin\theta}$

$$v^2 = 2\frac{g \sin\theta}{\left(1+\frac{K^2}{R^2}\right)}\left(\frac{h}{\sin\theta}\right) = \frac{2gh}{\left(1+\frac{K^2}{R^2}\right)}$$

جذر المربع حاصل کرنے پر

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{\left(1+\frac{K^2}{R^2}\right)}} \qquad (5.63)$$

حرکت کی پہلی مساوات کی مدد سے ڈھلوان سطح پر لڑھکنے کے لئے لیا گیا وقت بھی یوں معلوم رکسکتے ہیں $v= u+at$، ساکن حالت سے لڑھکنے شروع کرنے والی شئے کے لئے $u = 0$ ہو تو، پھر

$$t = \frac{v}{a}$$

$$t = \left(\sqrt{\frac{2gh}{\left(1+\frac{K^2}{R^2}\right)}}\right)\left(\frac{\left(1+\frac{K^2}{R^2}\right)}{g \sin\theta}\right)$$

$$t = \sqrt{\frac{2h\left(1+\frac{K^2}{R^2}\right)}{g \sin^2\theta}} \qquad (5.64)$$

یہ مساوات یہ بتاتی ہے کہ ایک دئے گئے ڈھلاؤ کے لئے، جس شئے کی گردش K کے نصف قطر کی مقدار سب سے کم ہوگی، وہ شئے سب سے پہلے ڈھلاؤ کے نچلے حصے تک پہنچ پائے گی۔

11 physics 5. motion of systems
Tuesday, February 01, 2022 9:15:44 PM

مثال 5.23

R نصف قطر والی چار گول اشیاء، ایک حلقہ، ایک ڈسک، ایک کھوکھلا کرہ اور ایک ٹھوس کرہ، ایک ہی وقت میں ایک ڈھلوان سطح پر لڑھکنا شروع کرتے ہیں۔ کون سی شئے سب سے پہلے نیچے پہنچے گی؟

حل:

حلقہ، ڈسک، کھوکھلا کرہ اور ٹھوس کرہ، ان تمام اشیاء کے لئے گردش کے نصف قطر K بالترتیب R، $\sqrt{\frac{1}{2}}R$, $\sqrt{\frac{2}{3}}R$ ، اور $\sqrt{\frac{2}{5}}R$ ہیں۔ (جدول (5.3) ملاحظہ فرمائیے)۔ ان گردش کے نصف قطروں K کی عددی یا ہندسی قیمتیں بالترتیب 1R، 0.707R، 0.816 R، اور 0.632R ہیں۔ مساوات 5.63 کے مطابق لڑھکنے کے لئے، لئے گئے وقت کی مساوات کے شمار کنندہ میں گردش کا نصف قطر K پایا جاتا ہے۔

$$t = \sqrt{\frac{2h\left(1+\frac{K^2}{R^2}\right)}{g\sin^2\theta}}$$

وہ شئے جس کے گردش کے نصف قطر K کی قیمت سب سے کم ہے۔ سب سے پہلے ڈھلوان سطح کے نیچے پہنچے گی۔ نیچے پہنچنے والی اشیاء کی ترتیب یہ ہوگی۔ پہلے، ٹھوس کرہ، اس کے بعد ڈسک، تیسرا، کھوکھلا کرہ اور سب سے آخر میں حلقہ۔



SUMMARY خلاصہ

- ایک سخت جسم وہ ہے جس میں مختلف ذرات کے درمیانی فاصلے مستقل طور پر برقرار رہتے ہیں۔
- کمیت کا مساوی پھیلاؤ رکھنے والے متعین شکل والے اجسام کے لئے کمیتی مرکز ہمیشہ ان کے ہندسی مرکز پر واقع ہوتا ہے۔
- کل قوت گدشہ سخت شئے میں گردشی حرکت پیدا کرتی ہے
- اگر ایک سخت جسم پر کل بیرونی قوت صفر ہو تو وہ جسم خطی توازنت پر ہوتا ہے اور اگر اس پر کل بیرونی قوت گدشہ صفر ہو تو وہ جسم گردشی توازنیت پر ہوتا ہے۔
- ایک بڑھے ہوئے جسم کا جاذبی مرکز وہ نقطہ ہے جہاں جسم پر کل جاذبی قوت گدشہ صفر ہوتی ہے۔
- اگر جسم پر عمل پیرا ہونے والی بیرونی قوت گدشہ صفر ہو تو گردشی محور کے ساتھ زاویائی معیار حرکت کا جز مستقل ہوتا ہے۔
- تمام خطی مقداروں کے لئے متوازن گردشی قیمتیں پائی جاتی ہیں۔
- لڑھکاؤ کی حرکت، خطی اور گردشی حرکت کی مجموعیت ہے۔
- لڑھکاؤ کے عمل کو، مس ہونے کے نقطے کے تحت ہونے والی وقتی گردش کے طور پر مانا جا سکتا ہے۔
- خالص لڑھکاؤ میں کل توانائی بالفعل، خطی اور گردشی حرکتوں کی فعلی توانائیوں کے حاصل جمع کے برابر ہوتی ہے۔
- سرکاؤ میں خطی حرکت کی مقدار گردشی حرکت سے زیادہ ہوتی ہے
- پھسلاؤ میں خطی حرکت کی مقدار خطی حرکت سے زیادہ ہوتی ہے۔

11 physics 5. motion of systems
Tuesday, February 01, 2022 9:15:44 PM

CONCEPT MAP نظریاتی نقشہ

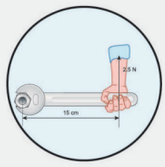
ذرات کے نظام اور سخت اجسام کی حرکت

Motion of System of Particles and Rigid Bodies



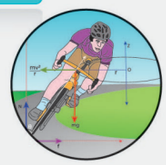
Center of Mass کمیتی مرکز

Torque قوت گردشہ
$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$



توازنت

Equilibrium
$F_{net} = 0; \tau_{net} = 0;$





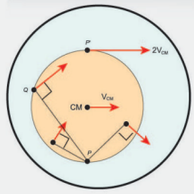
جمود کا معیار اثر

Moment of Inertia
$I = MR^2$

Dynamics of Rotation گردش کی حرکیات
$\tau = I \alpha$

لڑھکاؤ

Rolling
$V_{cm} = r\omega$



11 physics 5. motion of systems
Tuesday, February 01, 2022 9:15:45 PM

HSQ75

I۔ کثیر انتخابی سوالات:

(1) ذرات کے ایک نظام کا کمیتی مرکز اس ران پر منحصر نہیں ہوتا۔
(a) ذرات کے مقام
(b) ذرات کے درمیان نسبتی فاصلہ
(c) ذرات کی کمیتیں
(d) ذرہ پر عمل کرنے والی قوت
[AIPMT 1997, AIEEE 2004]

(2) ایک جفتہ (Couple) یہ پیدا کرتا ہے۔
(a) خالص گردش (b) خالص خطی حرکت
(c) گردش اور خطی حرکت (d) کوئی حرکت نہیں
[AIPMT 1997]

(3) مثبت x محور کے ایک متوازی خط کے ساتھ ایک ذرہ ایک مستقل سمتی رفتار کے ساتھ حرکت کر رہا ہے۔ اس کے مبدا کے لحاظ سے اس کی زاویائی معیار حرکت کی قدر
(a) صفر ہے (b) x کے ساتھ بڑھتی ہے
(c) x کے ساتھ کم ہوتی ہے (d) مستقل رہتی ہے
[IIT 2002]

(4) 3kg کمیت اور 40cm نصف قطر والے ایک کھوکھلے استوانے کے اطراف ایک رسی گھمائی گئی ہے۔ اگر اسی کو 30N کی ایک قوت سے کھینچا جائے تو استوانے کا زاویائی اسراع کیا ہوگا؟
(a) 0.25 rad s^{-2} (b) 25 rad s^{-2}
(c) 5 m s^{-2} (d) 25 m s^{-2}.
[NEET 2017]

(5) ایک استوانہ نما بند کنٹینر (Container) ادھورے طور پر پانی سے بھرا ہوا ہے جیسے ہی وہ کنٹینر ایک عمودی قطاع خط کے تحت ایک افقی سطح میں گھومتا ہے تو اس کے جمود کا معیار اثر
(a) بڑھتا ہے (b) کم ہوتا ہے
(c) مستقل رہتا ہے (d) گردشی سمت پر منحصر ہوتا ہے
[IIT 1998]

(6) ایک سخت جسم ایک زاویائی معیار حرکت L کے ساتھ گردش کرتا ہے۔ اگر اس کی توانائی بالفعل نصف کر دی جائے تو زاویائی معیار حرکت یوں ہو جاتی ہے۔
(a) L (b) L/2
(c) **2L** (d) $L/\sqrt{2}$
[AFMC 1998, AIPMT 2015]

(7) ایک ذرہ یکساں دائری حرکت کر رہا ہے اس کے تحت اس ذرہ کی زاویائی معیار حرکت کی بقاء ہوتی ہے۔
(a) دائرے کا مرکزی نقطہ
(b) دائرے کے احاطے پر موجود نقطہ
(c) دائرے کے اندر موجود کوئی بھی نقطہ
(d) دائرے کے باہر موجود کوئی بھی نقطہ
[IIT 2003]

(8) جب ایک کمیت، ایک سطح میں ایک ثابت نقطہ کے تحت گردش کرتی ہے تو، اس کی زاویائی معیار حرکت کی سمت اس کے ساتھ ہوتی ہے۔
(a) ایک خط جو گردشی سطح کے عمودی ہوتی ہے۔
(b) وہ خط جو گردشی سطح کے ساتھ 45° کا زاویہ بناتی ہے۔
(c) نصف قطر
(d) راستے کے مماس
[AIPMT 2012]

(9) مساوی جمود کی حرکت والے دو ڈسک اپنے مرکز سے گذرنے والی اور اپنی سطح کے عمودی، اپنی اپنی محور کے تحت ω_1 اور ω_2 زاویائی سمتی رفتاروں کے ساتھ گردش کر رہے ہیں، ان کو اس طرح آمنے

11 physics 5. motion of systems
Tuesday, February 01, 2022 9:15:45 PM

سامنے لایا جاتا ہے کہ ان کی گردشی محورات ایک دوسرے سے مل جاتی ہیں۔اس مرحلے کے دوران توانائی کے ہونے والے نقصان کے لئے مناسب وضاحت یہ ہے۔

(a) $\frac{1}{4}I(\omega_1-\omega_2)^2$ (b) $I(\omega_1-\omega_2)^2$

(c) $\frac{1}{8}I(\omega_1-\omega_2)^2$ (d) $\frac{1}{2}I(\omega_1-\omega_2)^2$

[NEET 2017]

(10) I_a مقدار کی جمود کا معیار اثر رکھنے والا ایک ڈسک، ایک افقی سطح میں اس کی ہم مرکز محور کے تحت ایک مستقل زاویائی رفتار w کے ساتھ گردش کر رہا ہے۔I_b جمود کا معیار اثر رکھنے والا ایک اور ڈسک جو ابتدا میں حالت سکون پر ہوتا ہے، ہم محور طور پر گھومنے والے ڈسک پر گرایا جاتا ہے۔اس کے بعد وہ دونوں ڈسک اسی مستقل زاویائی رفتار کے ساتھ گھومنے لگتے ہیں۔اس مرحلے میں رگڑ کی وجہ سے ہونے والا ،توانائی بالفعل کا نقصان یہ ہے۔

(a) $\frac{1}{2}\frac{I_b^{\,2}}{(I_a+I_b)}\omega^2$

(b) $\frac{I_b^{\,2}}{(I_a+I_b)}\omega^2$

(c) $\frac{(I_b-I_a)^2}{(I_a+I_b)}\omega^2$

(d) $\frac{1}{2}\frac{I_bI_b}{(I_a+I_b)}\omega^2$ [AIPMT 2001]

11۔ زاویہ θ کے ایک ڈھلاؤ میں ایک ٹھوس کرہ (کمیت M اور نصف قطر R) میں، پھسلے بغیر لڑھکنے کے لئے درکار راسراع اور لڑھکے بغیر پھسلنے کے لئے درکار راسراع کی درمیانی نسبت یہ ہے۔

(a) 5:7 (b)2:3 (c) 2:5 (d) 7:5

[AIPMT 2014]

12۔ R نصف قطر اور M کمیت والے ایک ڈسک سے R قطر والا ایک دائری ٹکڑا کاٹ لیا جاتا ہے، جس کا کنارا اس کے مرکز سے گذرتا ہے۔اس ڈسک کے ذریعہ گذرنے والی ایک عمودی محور کے تحت اس ڈسک کے بقیہ حصے کے جمود کی حرکت یہ ہوگی۔

(a) $15MR^2/32$ (b) $13MR^2/32$

(c) $11MR^2/32$ (d) $9MR^2/32$

[NEET 2016]

13۔ h عمودی اونچائی والے ایک ڈھلوان سطح پر، ایک ٹھوس کرہ حالت سکون سے، بغیر پھسلے لڑھکتا ہے۔نیچے پہنچنے پر اس کرہ کی رفتار یہ ہوگی۔

(a) $\sqrt{\frac{4}{3}gh}$ (b) $\sqrt{\frac{10}{7}gh}$

(c) $\sqrt{2gh}$ (d) $\sqrt{\frac{1}{2}gh}$

14۔ ایک افقی سطح پر لڑھکنے والی ایک پہیے کے مرکز کی رفتار v_0 ہے۔ گھیرے، پر موجود اس نقطہ کی رفتار کیا ہوگی، جو اس پہیے کے مرکز کے برابر کی سطح پر ہے۔

(a) صفر (b) v_o

(c) $\sqrt{2}\,v_o$ (d) $2v_o$

[PMT 1992, PMT 2003, IIT 2004]

15۔ M کمیت اور R نصف قطر والی ایک گول شئے ایک ڈھلوان سطح کے ساتھ پھسلے بغیر نیچے لڑھکتی ہے، رگڑ کی قوت

(a) توانائی بالفعل کو حرارت کے طور پر ضائع کرتی ہے

(b) گردشی حرکت کو کم کرتی ہے۔

(c) گردشی اور خطی حرکت کو کم کرتی ہے۔

(d) خطی حرکت کو گردشی حرکت میں تبدیل کرتی ہے۔

[PMT 2005]

Answers: جوابات:

1) d	2) a	3) d	4) b
5) a	6) d	7) a	8) a
9) a	10) d	11) a	12) b
13) b	14) c	15) d	

11 physics 5. motion of systems
Tuesday, February 01, 2022 9:15:46 PM

II۔ مختصر جواب کے سوالات

1۔ کمیتی مرکز کی تعریف کیجئے۔

2۔ دی گئی ہندسی ساختوں کے لئے کمیتی مرکز معلوم کیجئے۔

a) مثلث مساوی الاضلاع b) استوانہ

c) مربع

3۔ قوت گدشہ (torque) کی تعریف کیجئے اور اس کی اکائی بیان کیجئے۔

4۔ وہ کون سی شرائط ہیں جن میں قوت، قوت گدشہ (torque) پیدا نہیں کرسکتی؟

5۔ روزمرہ زندگی میں دیکھی جانے والی، قوت گدشہ (torque) کی دو مثالیں بیان کیجئے۔

6۔ قوت گدشہ (torque) اور زاویائی معیار حرکت (angular momentum) کے درمیان کیا تعلق ہے؟

7۔ توازنیت (equilibrium) کیا ہے؟

8۔ آپ مستحکم اور غیر مستحکم توازنیت (stable and unstable equilibrium) کے درمیان کس طرح فرق کر پائیں گے؟

9۔ ایک جفتہ (counple) کی وضاحت کیجئے۔

10۔ معیارِاثر کے اصول (Principle of moments) کو بیان کیجئے۔

11۔ مرکز جاذبہ (centre of gravity) کی وضاحت کیجئے۔

12۔ جمود کا معیار اثر (moment of inertia) کے کوئی دو طبیعی اہمیتیں بیان کیجئے۔

13۔ گردش کا محور (radius of gyration) کیا ہے؟

14۔ زاویائی معیار حرکت کی بقا (conservation of angular momentum) بیان کیجئے۔

15۔ (i) کمیت اور (ii) قوت

ان طبیعی مقداروں کے لئے گردشی معادلات (rotational equivalents) بیان کیجئے۔

16۔ خالص لڑھکاؤ (pure rolling) کے شرط کیا ہے؟

17۔ سرکنا (sliding) اور پھسلنا (slipping) کے درمیان کیا فرق ہے؟

III۔ تفصیلی جواب کے سوالات

1۔ مناسب مثالوں کے ساتھ توازنیت (equilibrium) کے اقسام کی وضاحت کیجئے۔

2۔ ایک غیر متعین شکل والے ورق کے جاذبی مرکز کو معلوم کرنے کے طریقے کی وضاحت کیجئے۔

3۔ ایک منحنی نما سڑک پر گذرتے وقت ایک سائیکل سوار (cyclist) کیوں جھک جاتا ہے؟ ایک دی گئی سمتی رفتار کے لئے جھکنے کے زاویے کے لئے مساوات اخذ کیجئے۔

4۔ ایک سلاخ کے مرکز اور اس کے عمود کے تحت اس کے جمود کے معیار اثر (moment of Inertia) کے لئے مساوات اخذ کیجئے۔

5۔ ایک یکساں حلقے کے مرکز کے ذریعہ گذرنے والی اور اس کی سطح کے عمودی محور کے تحت اس حلقے کی جمود کے معیار اثر (moment of Inertia) کے لئے مساوات اخذ کیجئے۔

6۔ ایک یکساں ڈسک کے مرکز کے ذریعہ گذرنے والی اور اس کی سطح کے عمودی محور کے تحت اس ڈسک کے جمود کے معیار اثر کے لئے مساوات اخذ کیجئے۔

7۔ مثال کے ساتھ زاویائی معیار حرکت کی بقاء پر بحث کیجئے۔

8۔ متوازی محور کا نظریہ بیان کیجئے اور ثابت کیجئے۔

9۔ عمودی محور کا نظریہ بیان کیجئے اور ثابت کیجئے۔

10۔ ڈھلوان سطح پر لڑھکاؤ سے متعلق بحث کیجئے اور اسراع کے لئے مساوات اخذ کیجئے۔

11 physics 5. motion of systems
Tuesday, February 01, 2022 9:15:46 PM

IV۔ حسابی مسئلے

1۔ 100g کمیت والے ایک مساوی ڈسک کا قطر 10 سم ہے۔ اگر وہ $20cms^{-1}$ کی سمتی رفتار کے ساتھ ایک افقی میز کے تحت لڑھک رہا ہو تو اس ڈسک کی کل توانائی کا محاسبہ کیجئے۔ (میز کی سطح کو حوالہ کے طور پر لے لیجئے)۔

جواب : 0.005

2۔ 5 اکائیوں والی کمیت کا ایک ذرہ $v = 3\sqrt{2}$ اکائیوں کی یک مساوی رفتار کے ساتھ $y= x+4$ خط کے ساتھ XOY سطح میں حرکت کر رہا ہے۔ زاویائی معیار حرکت کی قدر معلوم کیجئے

جواب: 60 اکائیاں

3۔ ایک اڑن پہیہ (Fly wheel)، ایک مساوی زاویائی اسراع کے ساتھ گردش کر رہا ہے۔ اگر اس کی زاویائی سمتی رفتار 10 سکنڈ میں 20π rad/s سے 40π rad/s تک بڑھتی ہے تو اس دوران ہونے والی گردشوں کی تعداد معلوم کیجئے۔

جواب : 150 گردشیں

4۔ m کمیت اور l لمبائی والی ایک مساوی سلاخ گردش کی اس محور کے ساتھ θ کا ایک مستقل زاویہ بناتی ہے جو اس سلاخ کے ایک کنارے سے گزرتی ہے۔ اس محور کے تحت اس کے جمود کی حرکت معلوم کیجئے۔

Ans: $\frac{1}{3}M\ell^2 \sin^2\theta$

5۔ 1 Kg اور 3Kg کمیتوں والے P اور Q دو ذرات، باہمی جاذبیت کے تحت حالت سکون سے ایک دوسرے کی طرف آگے بڑھنا شروع کرتے ہیں۔ ان کے کمیتی مرکز کی سمتی رفتار کیا ہے؟

جواب: صفر

6۔ ہائیڈروجن کے ایک سالمے کی، اس کے کمیتی مرکز سے گذرنے والی اور اندرونی جوہری فاصلہ کے عمودی محور کے تحت جمود کی حرکت معلوم کیجئے۔ دیا گیا ہے کہ ہائیڈروجن کے جوہر کی کمیت 1.7×10^{-27} kg ہے۔ اور اندرونی جوہری فاصلہ m 4×10^{-10} کے برابر ہے۔

جواب: 1.36×10^{-46} m²

11 physics 5. motion of systems
Tuesday, February 01, 2022 9:15:47 PM

BOOKS FOR REFERENCE کتب حوالہ:

1. Michael Nelkon and Philip Parker, Advanced Level Physics, 7th Edition, CBS Publishers & Distributers Pvt. Ltd, (2006).

2. David Halliday, Robert Resnick and Jearl Walker,Fundamentals of Physics, 6th Edition, John Wiley & Sons Inc., (2004).

3. H.C. Verma,Concepts of Physics [Part 1], 1st Edition, BharathiBhawan Publishers & Distributers Pvt. Ltd., (2008).

4. Igor Irodov, Problems in General Physics, 3rd Edition, Mir Publishers, Mascow, (2006).

5. Roger A. Freedman, Hugh D. Young, Sears and Zemansky's University Physics: Mechanics, 12th Edition, Pearson, (2011).

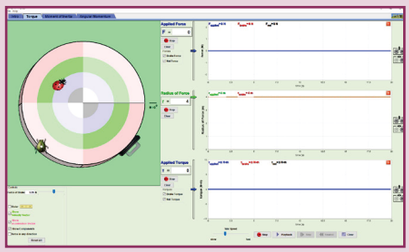
11 physics 5. motion of systems
Tuesday, February 01, 2022 9:15:47 PM

ICT CORNER

ICT Corner

Moment of inertia جمود کا معیار اثر

کس کو گھمانا مشکل ہوتا ہے
ایک دائری حلقہ کو یا ایک دائری ڈسک (تھالی) کو؟

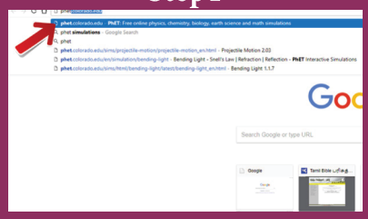


مرحلے:

- براؤزر کھولئے اور دئے گئے URL کو ٹائپ کیجئے تا کہ قوت گدشہ سے متعلق PhET کا مجازی صفحہ کھول سکے۔ تصویر کے لنک یا ڈاؤن لوڈ بٹن پر کلک کیجئے۔ ایک مرتبہ ڈاؤن لوڈ ہو جانے کے بعد جاوا ایپ لیٹ کو کھولنے کے لئے OK پر کلک کیجئے۔
- کمیت 0.1kg، باہری نصف قطر 4 میٹر (اندرونی نصف قطر=0) ان قیمتوں کو رکھ کر پلیٹ فارم سیٹ کیجئے۔ اب یہ ایک دائری ڈسک ہے۔ 'go' کے بٹن پر کلک کر کے جمود کی حرکت کی قیمت حاصل کیجئے۔
- کمیت اور نصف قطر کی قیمتوں کو درست کیجئے اور مشاہدہ کیجئے کہ درمیانی ترسیم میں جمود کی حرکت کس طرح تبدیل ہوتی ہے۔
- اندرونی اور بیرونی نصف قطر کو مساوی رکھئے (فرض کیجئے R = r = 4 m) اور کمیت کو 0.1kg رکھئے۔ اب وہ ایک دائری حلقہ بن جاتا ہے۔ محاسبہ کے لئے go کا بٹن دبایئے۔
- درمیانی ترسیم سے جمود کی حرکت کا مشاہدہ کیجئے۔ مساوی کمیت اور نصف قطر کے ساتھ ایک دائری ڈسک اور ایک دائری حلقے کی جمود کی حرکت کا موازنہ کیجئے۔

اشارہ : جمود کی حرکت اگر نسبتی طور پر بڑی ہو تو زاویائی سمت میں اسراع پیدا کرنا بہت مشکل ہو جاتا ہے۔

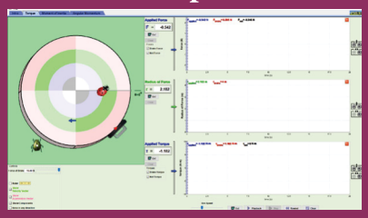
Step1



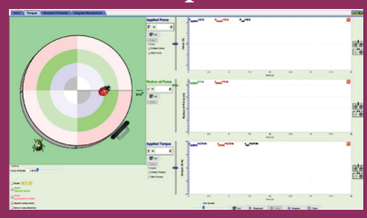
Step2



Step3



Step4



PhET simulation's URL:

https://phet.colorado.edu/en/simulation/torque

* Pictures are indicative only.

*If browser requires, allow Flash Player or Java Script to load the page.

11 physics 5. motion of systems
Tuesday, February 01, 2022 9:15:47 PM

APPENDIX 1 ضمیمہ - 1

SOLVED EXAMPLE UNIT-1

1. Find the dimensions of a and b in the formula $[P + \frac{a}{V^2}][V - b] = RT$ where P is pressure and V is the volume of the gas

Solution:

By the principle of homogeneity, a/V^2 is of the dimensions of pressure and b is of the dimensions of volume.

$$[a] = [\text{pressure}]\,[V^2] = [ML^{-1}T^{-2}]\,[L^6]$$
$$= [ML^5T^{-2}]$$
$$[b] = [V] = [L^3]$$

2. Show that $(P^{-5/6}\rho^{1/2}E^{1/3})$ is of the dimension of time. Here P is the pressure, ρ is the density and E is the energy of a bubble)

Solution:

Dimension of Pressure $= [ML^{-1}T^{-2}]$

Dimension of density $= [ML^{-3}]$

Dimension of Energy $= [ML^2T^{-2}]$

By substituting in the given equation,

$$= [ML^{-1}T^{-2}]^{-5/6}[ML^{-3}]^{1/2}[ML^2T^{-2}]^{1/3}$$
$$= M^{-5/6+1/2+1/3}L^{5/6-3/2+2/3}T^{5/3-2/3}$$
$$= M^0L^0T^1 = [T]$$

3. Find the dimensions of mass in terms of Energy, length and time

Solution:

Let the dimensions of Energy, Length and Time be $[E],[L],[T]$ respectively.

We know that Force = mass x acceleration

$$\text{Mass} = \frac{Force}{acceleration}$$
$$= \frac{Workdone\ (or)\ Energy}{acceleration \times displacement}$$
$$[m] = \frac{Energy}{[acceleration][displacement]}$$
$$= \frac{[E]}{[LT^{-2}][L]} = \frac{[E]}{L^2T^{-2}} = [EL^{-2}T^2]$$

4. A physical quantity Q is found to depend on quantities x,y,z obeying

11 physics 6 appendix
Tuesday, February 01, 2022 8:52:49 PM

relation $Q = \frac{x^2 y^3}{z^1}$. The percentage errors in x, y and z are 2%, 3% and 1% respectively. Find the percentage error in Q.

Solution:

$$\text{Let, } Q = \frac{x^2 y^3}{z}.$$

$$\text{It is given, } \frac{\Delta x}{x} = 2\% \quad \frac{\Delta y}{y} = 3\% \quad \frac{\Delta z}{z} = 1\%$$

$$\frac{\Delta Q}{Q} = 2\left(\frac{\Delta x}{x}\right) + 3\left(\frac{\Delta y}{y}\right) + 1\left(\frac{\Delta z}{z}\right)$$

$$= 2(2\%) + 3\,(3\%) + 1(1\%)$$

$$\frac{\Delta Q}{Q} = 4\% + 9\% + 1\% = 14\%$$

5. The mass and volume of a body are found to be 4±.03 kg and 5±.01 m^3 respectively. Then find the maximum possible percentage error in density.

Solution:

Mass m = 4 ± 0.03 kg (m + Δm)

Volume V = 5 ± .01 m^3 (V + ΔV)

Density = ?

$$\text{Error in mass} = \frac{\Delta m}{m} = \frac{0.03}{4} \times 100$$

$$= 0.75\%$$

$$\text{Error in volume} = \frac{\Delta V}{V} = \frac{0.01}{5} \times 100$$

$$= 0.2\%$$

$$\text{Density} = \frac{mass}{volume}.$$

Error in density = error in mass + error in volume

$$= 0.75\% + 0.2\% = 0.95\%$$

6. Using a Vernier Callipers, the length of a cylinder in different measurements is found to be 2.36 cm, 2.27 cm, 2.26 cm, 2.28 cm, 2.31 cm, 2.28 cm and 2.29 cm. Find the mean value, absolute error, the relative error and the percentage error of the cylinder.

Solution:

The given readings are 2.36 cm, 2.27 cm, 2.26 cm, 2.28 cm, 2.31 cm, 2.28 cm and 2.29 cm

$$\text{The Mean value } \bar{l} = \frac{2.36 + 2.27 + 2.26 + 2.28 + 2.31 + 2.28 + 2.29}{7}$$

$$\frac{16.05}{7} = 2.29 \text{ cm}$$

Absolute errors in the measurement are,

$$|\Delta l_1| = |2.29 - 2.36| = 0.07$$
$$|\Delta l_2| = |2.29 - 2.27| = 0.02$$
$$|\Delta l_3| = |2.29 - 2.26| = 0.03$$
$$|\Delta l_4| = |2.29 - 2.28| = 0.01$$
$$|\Delta l_5| = |2.29 - 2.31| = 0.02$$
$$|\Delta l_6| = |2.29 - 2.28| = 0.01$$
$$|\Delta l_7| = |2.29 - 2.29| = 0.00$$

Mean Absolute error

$$\Delta l_{mean} = \frac{0.07 + 0.02 + 0.03 + 0.01 + 0.02 + 0.01 + 0.00}{7}$$

$$= \frac{.16}{7} = .02$$

11 physics 6 appendix
Tuesday, February 01, 2022 8:52:49 PM

Relative error

$$= \frac{\Delta l mean}{\bar{l}} = \pm\frac{.02}{2.29} = \pm 8.7 \times 10^{-3}$$

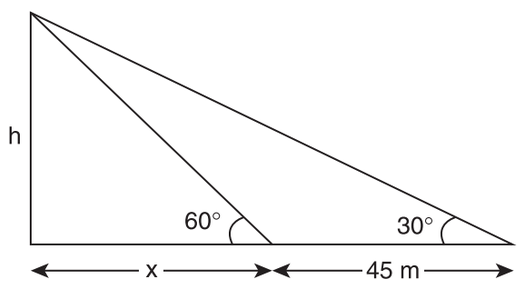
Percentage error $= \pm 8.7 \times 10^{-3} \times 100 =$

$0.87\% \times 100 = \pm(8.7 \times 10^{-1}) = 0.9\%$

7. The shadow of a pole standing on a level ground is found to be 45 m longer when the sun's altitude is 30° than when it was 60°. Determine the height of the pole. [Given $\sqrt{3} = 1.73$]

Solution:

Let the height of the pole be h.



Solution $\frac{x+45}{h} = \cot 30° \Rightarrow h = \frac{x+45}{\cot 30°}$

$\frac{x}{h} = \cot 60° \Rightarrow x = h\cot 60°$

Substituting the values of x in the above equation

$$h = \frac{h\cot 60° + 45}{\cot 30°}$$

$$h \cot 30° = h \cot 60° + 45$$

$$h(\cot 30° - \cot 60°) = 45$$

$$h = \frac{45}{\cot 30° - \cot 60°} = \frac{45}{\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}} = 38.97\ m$$

8. Calculate the number of times a human heart beats in the life of 100 years old man. Time of one heart beat = 0.8s.

Solution:

Life of the man = 100 years

100 years includes 76 normal years and 24 leap years

Total no of days $= 76 \times 365 + 24 \times 366$ = 36524 days

Number of seconds = 36524 × 24 × 3600 = 3.155 x 10^9 second

Number of heart beats =

$$\frac{Total\ no\ of\ Seconds}{Time\ period\ of\ heart\ beat}$$

$$= \frac{3.155 \times 10^9}{0.8s} = 3.94 \times 10^9$$

9. The parallax of a heavenly body measured from two points diametrically opposite on equator of earth is 2′. Calculate the distance of the heavenly body. [Given radius of the earth = 6400km] [1″ = 4.85 x 10^{-6} rad]

Solution:

Angle $\theta = 2^1 = 2$ x 60″ = 120″ = $120 \times 4.85 \times 10^{-6}$ rad

$$\theta = 5.82 \times 10^{-4}\ rad;$$

The distance of heavenly body

$$D = \frac{d}{\theta} = \frac{12800 \times 10^3}{5.82 \times 10^{-4}}$$

$$D = 2.19 \times 10^{10} m$$

11 physics 6 appendix
Tuesday, February 01, 2022 8:52:49 PM

10. Convert a velocity of 72 kmh^{-1} into m s^{-1} with the help of dimensional analysis.

Solution:

$n_1 = 72\ kmh^{-1}$ $\quad n_2 = ?\ m\ s^{-1}$

$L_1 = 1Km$ $\quad L_2 = 1m$

$T_1 = 1h$ $\quad T_2 = 1s$

$$n_2 = n_1\left[\frac{L_1}{L_2}\right]^a\left[\frac{T_1}{T_2}\right]^b$$

The dimensional formula for velocity is $[L\ T^{-1}]$

$a = 1\ b = -1$

$$n_2 = 72\left[\frac{1Km}{1m}\right]^1\left[\frac{1h}{1s}\right]^{-1}$$

$$n_2 = 72\left[\frac{1000m}{1m}\right]^1\left[\frac{3600s}{1s}\right]^{-1}$$

$= 72 \times 1000 \times 1/3600 = 20 m\ s^{-1}]$

$72\ kmh^{-1} = 20\ m\ s^{-1}$

11. Check the correctness of the following equation using dimensional analysis. Make a comment on it.

S = ut + 1/4 at^2 where s is the displacement, u is the initial velocity, t is the time and a is the acceleration produced.

Solution:

Dimension for distance s = [L]

Dimension for initial velocity

$v = [LT^{-1}]$

Dimension for time t = [T]

Dimension for acceleration

$a = [LT^{-2}]$

According to the principle of homogeneity,

Dimensions of LHS = Dimensions of RHS

Substituting the dimensions in the given formula

S = ut + 1/4 at^2, $\frac{1}{4}$ is a number. It has no dimensions

$[L] = [LT^{-1}]\ [T^1] + [LT^{-2}]\ [T^2]$

$[L] = [L] + [L]$

As the dimensional formula of LHS is same as that of RHS, the equation is dimensionally correct.

Comment:

But actually it is a ***wrong*** equation. We know that the equation of motion is $s = ut + 1/2\ at^2$

So, a dimensionally correct equation ***need not*** be the true (or) actual equation

But a true equation is ***always*** dimensionally correct.

12. Round - off the following numbers as indicated.

a) 17.234 to 3 digits

b) 3.996×10^5 to 3 digits

c) 3.6925×10^{-3} to 2 digits

d) 124783 to 5 digits.

Solution:

a) 17.2 b) 4.00×10^5

c) 3.7×10^{-3} d) 124780

13. Solve the following with regard to significant figures.

a) $\sqrt{4.5 - 3.31}$

b) $5.9 \times 10^5 - 2.3 \times 10^4$

11 physics 6 appendix
Tuesday, February 01, 2022 8:52:49 PM

c) 7.18 + 4.3

d) 6.5 + .0136

Solution:

a) Among the two, the least number of significant after decimal is one

$$\sqrt{4.5-3.31} = \sqrt{1.19} = 1.09$$

b) The number of minimum significant figures is 2

$$5.9\times10^5 - 2.3\times10^4$$
$$= 5.9\times10^5 - 0.23\times10^5$$
$$= 5.67\times10^5 = 5.7\times10^5$$

c) The lowest least number of significant digit after decimal is one

7.18 + 4.3 = 11.48 Rounding off we get 11.5

d) The lowest least number of significant digit after decimal is one

$$6.5 + .0136 = 6.5136 = 6.5$$

14. Arrive at Einstein's mass-energy relation by dimensional method ($E = mc^2$)

Solution:

Let us assume that the Energy E depends on mass m and velocity of light c.

$$E \alpha m^a c^b$$

$E = km^a c^b$ where K a constant

Dimensions of $E = [ML^2T^{-2}]$

Dimensions of m = [M]

Dimensions of $c = [LT^{-1}]$

Substituting the values in the above equation

$$[ML^2T^{-2}] = K\,[M]^a[LT^{-1}]^b$$

By equating the dimensions,

$$a = 1$$
$$b = 2$$
$$-b = -2$$
$$E = k.mc^2$$

The value of constant k = 1

$E = mc^2$ This is Einstein's mass energy relation

15. The velocity of a body is given by the equation $v = b/t + ct^2 + dt^3$. Find the dimensional formula for b.

Solution:

(b/t) should have the dimensions of velocity

b has the dimensions of (velocity x time)

$$[b] = [LT^{-1}][T] = [L] = [M^0L^1T^0]$$

16. The initial and final temperatures of a liquid in a container are observed to be $75.4 \pm 0.5°C$ and $56.8 \pm 0.2°C$. Find the fall in the temperature of the liquid.

Solution:

$t_1 = (75.4 \pm 0.5)°C$

$t_2 = (56.8 \pm 0.2)°C$

Fall in temperature = $(75.4 \pm 0.5°C) - (56.8 \pm 0.2°C)$

$$t = (18.6 \pm 0.7)°C$$

11 physics 6 appendix
Tuesday, February 01, 2022 8:52:50 PM

17. Two resistors of resistances R_1 = 150 ± 2 Ohm and R_2 = 220 ± 6 Ohm are connected in parallel combination. Calculate the equivalent resistance.

Hint: $\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

Solution:

The equivalent resistance of a parallel combination

$$R' = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$= \frac{150 \times 220}{150 + 220} = \frac{33000}{370} = 89.1\ Ohm$$

We know that, $\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

$$\frac{\Delta R'}{(R')^2} = \frac{\Delta R_1}{R_1^2} + \frac{\Delta R_2}{R_2^2}$$

$$\Delta R' = (R')^2 \frac{\Delta R_1}{R_1^2} + (R')^2 \frac{\Delta R_2}{R_2^2}$$

$$= \left(\frac{R'}{R_1}\right)^2 \Delta R_1 + \left(\frac{R'}{R_2}\right)^2 \Delta R_2$$

Substituting the value,

$$\Delta R' = \left[\frac{89.1}{150}\right]^2 \times 2 + \left[\frac{89.1}{220}\right]^2 \times 6$$

$$= 0.070 + 0.098 = 0.168$$

R' = 89.1 ±0.168 Ohm.

18. A capacitor of capacitance C = $3.0 \pm 0.1 \mu F$ is charged to a voltage of V = $18 \pm 0.4 Volt$. Calculate the charge Q [Use Q= CV]

Solution:

$(C + \Delta C) = (3.0 \pm 0.1)\ \mu f$

$(V + \Delta V) = (18 \pm 0.4)\ V$

$Q = CV$

$$Q = 3.0 \times 10^{-6} \times 18 = 54 \times 10^{-6}\ \text{coulomb}$$

$$\text{Error in C} = \frac{\Delta C}{C} \times 100$$

$$= \frac{0.1}{3} \times 100 = 3.3\%$$

$$\text{Error in V} = \frac{\Delta V}{V} \times 100$$

$$= \frac{0.4}{18} \times 100 = 2.2\%$$

Error in Q = Error in C + Error in V

= 3.3% + 2.2% =5.5%

$\therefore$ Charge $Q = (54 \times 10^{-6} \pm 5.5\%)$ coulomb

SOLVED EXAMPLE UNIT-2

1. The position vector for a particle is represented be $\vec{r} = 3t^2\hat{i} + 5t\hat{j} + 6\hat{k}$, find the velocity and speed of the particle at t = 3 sec?

Solution:

$$\vec{v} = \frac{\vec{dr}}{dt} = 6t\hat{i} + 5\hat{j}.$$

The velocity at any time '*t*' is given by $\vec{v} = 6t\hat{i} + 5\hat{j}.$

The magnitude of velocity is speed. The speed at any time '*t*' is then given by

11 physics 6 appendix
Tuesday, February 01, 2022 8:52:50 PM

$$\text{Speed} = \sqrt{(6t)^2 + 5^2} = \sqrt{36t^2 + 25}$$

Now the velocity at t = 3sec is given by

$$\vec{v} = 6(3)\,\hat{i} + 5\,\hat{j} = 18\hat{i} + 5\,\hat{j}.$$

and speed at t = 3 sec, is given by

$$\text{speed} = \sqrt{349}\ \ m s^{-1}$$

2. A gun is fired from a place which is at distance 1.2 km from a hill. The echo of the sound is heard back at the same place of firing after 8 second. Find the speed of sound.

Solution:

The echo will be heard when the sound reaches back at the place of firing. So, the total distance travelled by sound is 2 × 1.2 km = 2.4 km = 2400 m.

$$\text{speed} = \frac{2400\ \text{m}}{8s} = 300\ \text{m s}^{-1}$$

3. A train 100 m long is moving with a speed of 60 kmh^{-1}. In how many seconds will it cross a bridge of 1 km long?

Solution:

Total distance to be covered = 1 km + 100 m = 1100 m (including both bridge and time)

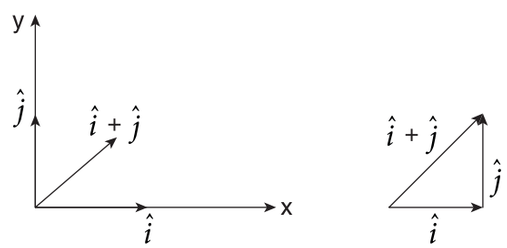
Then, Speed = 60 km h^{-1}

$$= 60 \times \frac{5}{18}\ \text{m s}^{-1} = \frac{150}{9}\ m s^{-1}$$

Then, Time taken to cover this distance = $\dfrac{1100}{150/9}$ s = 66 s

4. Draw the resultant direction of the two unit vectors $\hat{i}$ and $\hat{j}$. Use a 2-dimensional Cartesian co-ordinate system. Is $\hat{i} + \hat{j}$ a unit vector?

By using the triangular law of addition $\hat{i} + \hat{j}$ as shown in the following figure,



The definition of unit vector is $\hat{A}.\hat{A} = 1$

But here,

$$(\hat{i} + \hat{j}).(\hat{i} + \hat{j}) = \hat{i}.\hat{i} + \hat{i}.\hat{j} + \hat{j}.\hat{i} + \hat{j}.\hat{j}$$
$$= 1 + 0 + 0 + 1 = 2$$

So, $\hat{i} + \hat{j}$ is not a unit vector.

To make any vector to a unit vector, must divide the vector by its magnitude,

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

The norm of the vector $\hat{i} + \hat{j} = \sqrt{2}$.

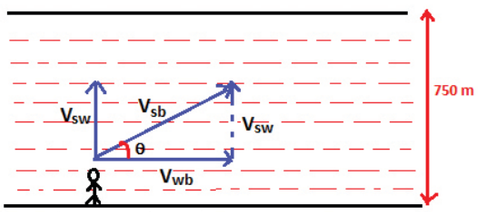
Hence, the unit vector is $\dfrac{\hat{i} + \hat{j}}{\sqrt{2}}$

5. A swimmer moves across the Cauvery river of 750 m wide. The velocity of the swimmer relative to water ($\vec{v}_{sw}$) is 1.5 m s^{-1} and directed perpendicular to the water current. The velocity of water relative to the bank ($\vec{v}_{wb}$) is 1 m s^{-1}. Calculate the
   (a) velocity of the swimmer with respect to the bank of the river ($\vec{v}_{sb}$).
   (b) time taken by the swimmer to cross the Cauvery river.

11 physics 6 appendix
Tuesday, February 01, 2022 8:52:50 PM

Solution:

(a) We can draw the following picture from the given data in the problem.



The velocity of the swimmer relative to the bank $\vec{v}_{sb} = \vec{v}_{sw} + \vec{v}_{wb}$

Since the swimmer travels in the perpendicular direction against the water current

The magnitude is given by

$$\left|\vec{v}_{sb}\right| = \sqrt{v_{sw}^2 + v_{wb}^2} =$$

$$\sqrt{1.5^2 + 1^2} = \sqrt{3.25}\, m\, s^{-1} \cong 1.802\, m\, s^{-1}$$

The direction of the swimmer relative to the bank is given by

$$tan\theta = \frac{v_{sw}}{v_{wb}} = \frac{1.5}{1} = 1.5$$

$$\theta = tan^{-1}(1.5) \approx 56°$$

(c) The time taken by the swimmer to cross the river is equal to the total distance covered by the swimmer with velocity 1.802 ms^{-1}.

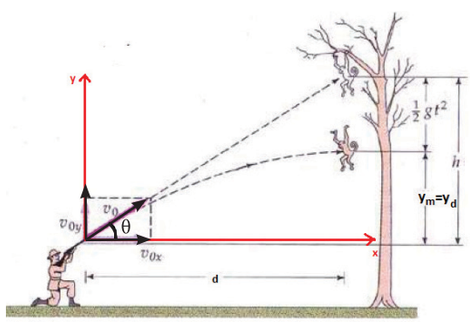
The total distance covered by him,

$$d = \frac{width\ of\ the\ river}{\sin 56^{\circ}} = \frac{750}{0.829} = 904.7\, m$$

The time taken by the swimmer,

$$T = \frac{d}{v_{sb}} = \frac{904.7}{1.802} \approx 502\, s$$

6. A monkey hangs on a tree. A hunter aims a gun at the monkey and fires the bullet with velocity v_0 which makes angle θ with horizontal direction. At the instant gun fires, monkey leaves the branch and falls straight down to escape from the bullet as shown in the figure. Will bullet hit the monkey or will the monkey escape the bullet? (ignore air resistance)



$$y_m = y_d = v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2 = h - \frac{1}{2}gt^2$$

As soon as the monkey begins to fall, it will have downward vertical motion with acceleration due to gravity g.

Its equation of motion at any time t is given by

$$y_m = h - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (1)$$

When the bullet comes out of the gun, it has both vertical and horizontal components of velocity given by

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta; v_{0y} = v_0 \sin\theta \qquad (2)$$

Let us assume the horizontal distance between the monkey and hunter is 'd'.

At time t, the horizontal distance travelled by the bullet $x = v_0 \cos\theta\, t$.

100
95
75
25
5
0
11 physics 6 appendix
Tuesday, February 01, 2022 8:52:50 PM

When the horizontal position of bullet, $x = d$, the time $d = v_{0x}T$. It implies that $T = d / v_{0x}$

At this time T, the vertical distance covered by the bullet is

$$y_b = v_{0y}T - \frac{1}{2}gT^2 = \frac{v_{0y}d}{v_{0x}} - \frac{1}{2}gT^2.$$

$$y_b = \frac{d\,v_0\,\sin\theta}{v_0\,\cos\theta} - \frac{1}{2}gT^2$$

$$= d\,\tan\theta - \frac{1}{2}gT^2 \qquad (3)$$

But from the figure we can write, $\tan\theta = \frac{h}{d}$.

$$h = d\,\tan\theta.$$

By substituting this in the equation (3), we get,

$$y_b = h - \frac{1}{2}gT^2 \qquad (4)$$

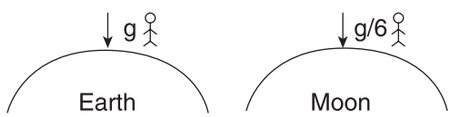
At this same time T, the vertical position of the monkey can be calculated from the equation (1)

$$y_m = h - \frac{1}{2}gT^2 \qquad (5)$$

Note that at the time T, the y coordinate of both monkey and bullet is same. It implies that the bullet will hit the monkey.

7. A three storey building of height 100 m is located on Earth and a similar building is also located on Moon. If two persons jump from the top of these buildings on Earth and Moon simultaneously, when they reach the ground, what will be their speed? (g = 10 m s^{-2})

Solution:



For both persons, the Kinematic equations are the same, with u = 0, a_e = g and $a_{moon} = \frac{g}{6}$. Then

$$a_e = g \text{ and } a_m = \frac{g}{6}$$

For a person on earth, $V_{earth} = \sqrt{2gh}$

$= \sqrt{2g100} = \sqrt{2\times10\times100}$

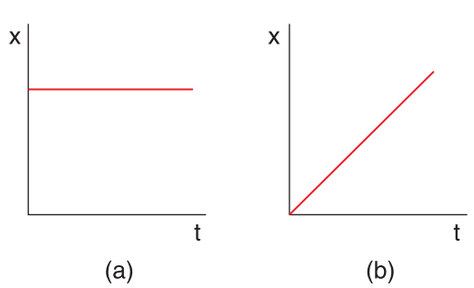
$Hence, V_{earth} = \sqrt{2000}\ m\ s^{-1}$ gives the velocity at the ground, on earth.

Similarly, for a person on the moon,

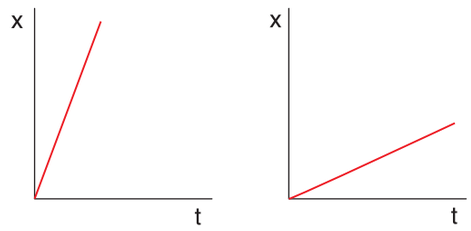
$$V_{moon} = \sqrt{\frac{2gh}{6}} = \frac{\sqrt{2000}}{\sqrt{6}}\ m\ s^{-1}$$

The person on earth reaches ground with greater velocity than the person on the moon

8. The following graphs represent position – time graphs. Arrange the graphs in ascending order of increasing speed.



11 physics 6 appendix
Tuesday, February 01, 2022 8:52:51 PM



(c) (d)

The slope in the position – time graph will give the speed of the particle.

In the graph (a) slope is zero. Graph (c) has higher slope than graphs (b) and (d). So we can arrange the speeds in ascending order as

$$v_a < v_d < v_b < v_c$$

SOLVED EXAMPLE UNIT-3

1. A body of mass 100 kg is moving with an acceleration of 50 cm s^{-2}. Calculate the force experienced by it.

Solution:

Mass m = 100 kg

Acceleration a = 50 cm s^{-2} = 0.5 m s^{-2}

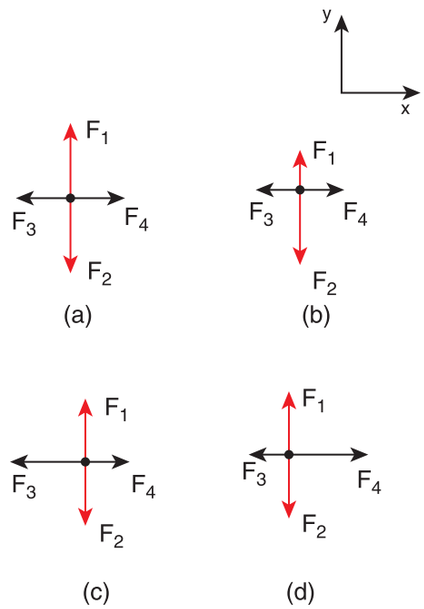
Using Newton's second law,

$$F = ma$$

$$F = 100 \text{ kg} \times 0.5 \text{ m s}^{-2} = 50 \text{ N}$$

2. Identify the free body diagram that represents the particle accelerating in positive *x* direction in the following.

The relative magnitude of forces should be indicated when the free body diagram for mass m is drawn.



Case (a):

The forces F_1 and F_2 have equal length but opposite direction. So net force along y-direction is zero. Since the force is zero, acceleration is also zero along Y-direction (Newton's second law). Similarly in the x direction, F_3 and F_4 have equal length and opposite in direction. So net force is zero in the x direction. So there is no acceleration in x direction.

Case (b):

The forces F_1 and F_2 are not equal in length and act opposite to each other. The figure (b) shows that there are unbalanced forces along the y-direction. So the particle has acceleration in the -y direction. The forces F_3 and F_4 are having equal length and act in opposite directions. So there is no net force along the x direction. So the particle has no acceleration in the x direction.

Case (c):

The forces F_1 and F_2 are equal in magnitude and act opposite to each

11 physics 6 appendix
Tuesday, February 01, 2022 8:52:51 PM

other. The net force is zero in y direction. So in y-direction there is no acceleration. The forces F_3 and F_4 are not equal in magnitude and F_3 is greater than F_4. So there is a net acceleration in negative x direction

Case (d):

The forces F_1 and F_2 are equal in magnitude and act opposite to each other. The net force is zero in y direction. So there is no acceleration in y-direction. The forces F_3 and F_4 are not equal in magnitude. The force F_4 is greater than the force F_3. So there is a net acceleration in the positive x direction.

3. A gun weighing 25 kg fires a bullet weighing 30 g with the speed of 200 ms^{-1}. What is the speed of recoil of the gun.

Solution:

Mass of the gun M = 25 kg
Mass of the bullet m = 30 g = 30×10^{-3} kg
Speed of bullet v = 200 m s^{-1}
Speed of gun V = ?
The motion is in one dimension.
As per law of conservation of momentum,

$$MV + mv = 0$$

$$V = \frac{-mv}{M}$$

$$V = \frac{-30 \times 10^{-3} \times 200}{25} = -240 \times 10^{-3} m s^{-1}$$

The negative sign shows that the gun moves in the opposite direction of the bullet. Further the magnitude of the recoil speed is very small compared to the bullet's speed.

4. A wooden box is lying on an inclined plane. What is the coefficient of friction if the box starts sliding when the angle of inclination is 45°.

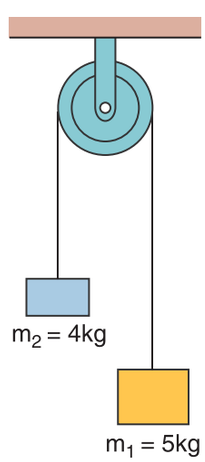
Solution:

Angle of inclination $\Theta = 45°$
∴ Coefficient of friction $\mu = \tan \Theta = \tan 45° = 1$

5. Two masses m_1 = 5 kg and m_2 = 4 kg tied to a string are hanging over a light frictionless pulley. What is the acceleration of each mass when left free to move? (g = 10 m s^{-2})

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \times g$$

$$= \frac{5-4}{5+4} \times 10 = \frac{1}{9} \times 10 = 1.1\ m s^{-2}$$



6. A block of mass m is pushed momentarily along a horizontal surface with an initial velocity u. If μ_k is the coefficient of kinetic friction between the object and surface, find the time at which the block comes to rest.

11 physics 6 appendix
Tuesday, February 01, 2022 8:52:51 PM

Solution:



When the block slides, the force acting on the block is kinetic friction which is equal to $f_k = \mu_k mg$

From Newton's second law $ma = -\mu_k mg$

The negative sign implies that force acts on the opposite direction of motion.

The acceleration of the block while sliding $a = -\mu_k g$.

The negative sign implies that the acceleration is in opposite direction of the velocity.

Note that the acceleration depends only on g and the coefficient of kinetic friction μ_k

We can apply the following kinematic equation

$$v = u + at$$

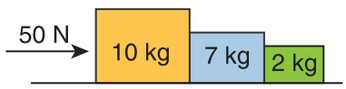
The final velocity is zero.

$$0 = u - \mu_k gt$$

$$t = \frac{u}{\mu_k g}$$

7. Three blocks of masses 10 kg, 7 kg and 2 kg are placed in contact with each other on a frictionless table. A force of 50 N is applied on the heaviest mass. What is the acceleration of the system?

Solution:



We know that

$$a = \left[\frac{F}{m_1 + m_2 + m_3}\right] = \frac{50N}{10kg + 7kg + 2kg}$$
$$= \frac{50}{19} = 2.63\, ms^{-2}$$

8. The coefficient of friction between a block and plane is $\frac{1}{\sqrt{3}}$. If the inclination of the plane gradually increases, at what angle will the object begin to slide?

Since the coefficient of friction is $\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\text{Tan}\,\Theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \Theta = 30°$$

9. Find the maximum speed at which a car can turn round a curve of 36 m radius on a level road. Given the coefficient of friction between the tyre and the road is 0.53.

Radius of the curve r = 36 m

Coefficient of friction μ = 0.53

Acceleration due to gravity g = 10 ms^{-2}

$$v_{max} = \sqrt{\mu rg} = \sqrt{0.53 \times 36 \times 10}$$
$$= 13.81\, ms^{-1}$$

10. Calculate the centripetal acceleration of the Earth which orbits around the

11 physics 6 appendix
Tuesday, February 01, 2022 8:52:51 PM

Sun. The Sun to Earth distance is appriximately 150 million km. (Assume the orbit of Earth to be circular)

The centripetal acceleration $a_c = \frac{v^2}{r}$

V - velocity of Earth around the orbit

r - radius of orbit or distance of Earth to Sun

Velocity of Earth is written in terms of angular velocity (ω) as

$$v = \omega r$$

By substituting in the centripetal acceleration formula, $a_c = \frac{\omega^2 r^2}{r} = \omega^2 r$

But $\omega = \frac{2\pi}{T}$ where T is time for the Earth to orbit around the sun, which is one year.

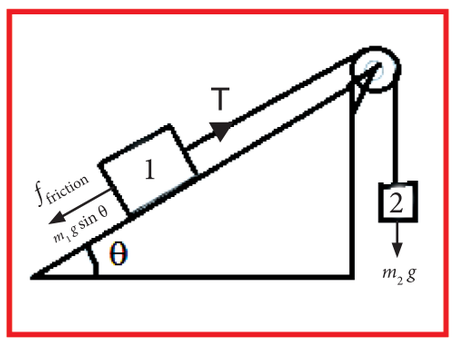
$$\text{T} = 365 \text{ days} = 365 \times 24 \times 60 \times 60$$
$$\text{s} = 3.1 \times 10^7 \, s$$

$$\omega = 2.02 \times 10^{-7} \, rad \; per \; sec$$

$$a_c = (2.02 \times 10^{-7})^2 \times (150 \times 10^9)$$

$$a_c = 6.12 \times 10^{-3} \, m s^{-2}$$

11. A block 1 of mass m_1, constrained to move along a plane inclined at an angle θ to the horizontal, is connected via a frictionless, massless and inextensible string that passes over a massless pulley, to a second block 2 of mass m_2. Assume the coefficient of static friction between the block and the inclined plane is μ_s and the coefficient of kinetic friction is μ_k



What is the relation between the masses of block 1 and block 2 such that the system just starts to slip?

Solution:

For all parts of this problem, it will be convenient to use different coordinate systems for the two different blocks. For block 1, take the positive x -direction to be up the incline, parallel to the plane, and the positive y -direction to be perpendicular to the plane, directed with a positive upward component. Take the positive direction of the position of block 2 to be downward.

The normal component N of the contact force between block 1 and the ramp will be

$$N = m_1 g \cos\theta \, . \qquad (1)$$

The net x -component of the force on block 1 is then

$$F_{1x} = T - f_{\text{friction}} - m_1 g \sin\theta \qquad (2)$$

where T is the tension in the string

For the just-slipping condition, the frictional force has magnitude

$$f_{\text{friction}} = \mu_s N = \mu_s m_1 g \cos\theta. \qquad (3)$$

The tension in the string is the gravitational force of the suspended mass,

11 physics 6 appendix
Tuesday, February 01, 2022 8:52:51 PM

$$T = m_2 g\,. \qquad (4)$$

For the just-slipping condition, the net force on block 1 must be zero. Equations (2), (3) and (4) gives

$0=m_2g-\mu_s m_1 g\cos\theta - m_1 g\sin\theta$

$m_2=m_1(\mu_s\cos\theta + sin\,\theta)$

12. Consider two objects of masses 5 kg and 20 kg which are initially at rest. A force 100 N is applied on the two objects for 5 second.

a) What is the momentum gained by each object after 5 s.
b) What is the speed gained by each object after 5 s.

Final momentum on each object $\Delta P = F\Delta t$ = 100X 5 = 500 kgms^{-1}

Final speed on the object of mass 5 kg = 500 /5 =100 m s^{-1}

Final speed on the object of mass 20 kg =500/20 =25 m s^{-1}

Note that momentum on each object is the same after 5 seconds but speed is not the same after 5 seconds. The heavier mass acquires lesser speed than the one with lower mass.

13. An object of mass 5 kg is initially at rest on the surface. The surface has coefficient of kinetic friction $\mu_k = 0.6$. What initial velocity must be given to the object so that it travels 10 m before coming to rest?

When the object moves on the surface it will experience three forces.

a) Downward gravitational force (mg)
b) Upward normal force (N)
c) Frictional force opposite to the motion of the object.

Since there is no motion along the vertical direction, magnitude of normal force is equal to the magnitude of gravitational force.

$$N = mg$$

Applying Newton's second law along the x direction

$$m\vec{a} = -\mu_k mg\hat{i}$$

The acceleration is $\vec{a} = -\mu_k mg\hat{i}$

Note that the acceleration is along the x direction since the frictional force acts along the negative x direction.

$$\text{Or} \quad a = -\mu_k g$$

Note that the acceleration is uniform during the entire motion. We can use Newton's kinematic equation to find the final velocity.

$$\text{Along the } x \text{ direction } v^2 = u^2 + 2as$$

Here v = final velocity and u = initial velocity to be given to travel a distance s.

In this problem s = 10 m

Since the particle comes to rest, the final velocity v = 0

$$0 = u^2 - 2\mu_k gs$$

$$u = \sqrt{2\mu_k gs}$$

$$u = \sqrt{2\times 0.6\times 9.8\times 10} = 10.8\ ms^{-1}$$

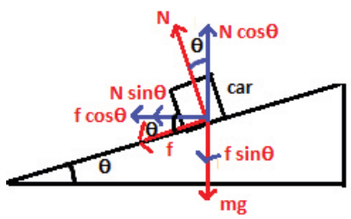
11 physics 6 appendix
Tuesday, February 01, 2022 8:52:52 PM

14. In the section 3.7.3 (Banking of road) we have not included the friction exerted by the road on the car. Suppose the coefficient of static friction between the car tyre and the surface of the road is μ_s, calculate the minimum speed with which the car can take safe turn?

When the car takes turn in the banked road, the following three forces act on the car.

(1) The gravitational force mg acting downwards
(2) The normal force N acting perpendicular to the surface of the road
(3) The static frictional force f acting on the car along the surface.

The following figure shows the forces acting on the horizontal and vertical direction.



When the car takes turn with the speed v, the centripetal force is exerted by horizontal component of normal force and static frictional force. It is given by

$$N\sin\theta + f\cos\theta = \frac{mv^2}{r} \qquad (1)$$

In the vertical direction, there is no acceleration. It implies that the vertical component of normal force is balanced by downward gravitational force and downward vertical component of frictional force. This can be expressed as

$$N\cos\theta = mg + f\sin\theta$$

Or
$$N\cos\theta - f\sin\theta = mg \qquad (2)$$

Diving the equation (1) by equation (2), we get

$$\frac{N\sin\theta + f\cos\theta}{N\cos\theta - f\sin\theta} = \frac{v^2}{rg} \qquad (3)$$

To calculate the maximum speed for the safe turn, we can use the maximum static friction is given by $f = \mu_s N$. By substituting this relation in equation (3), we get

$$\frac{N\sin\theta + \mu_s N\cos\theta}{N\cos\theta - \mu_s N\sin\theta} = \frac{v_{max}^{\ 2}}{rg}$$

By simplifying this equation,

$$\frac{N\cos\theta\left\{\left(\frac{N\sin\theta}{N\cos\theta}\right) + \mu_s\right\}}{N\cos\theta\left(1 - \mu_s\frac{N\sin\theta}{N\cos\theta}\right)} = \frac{v_{max}^{\ 2}}{rg}$$

$$\frac{(\tan\theta + \mu_s)}{1 - \mu_s\tan\theta} = \frac{v_{max}^{\ 2}}{rg}$$

The Maximum speed for safe turn is given

by $v_{max} = \sqrt{rg\frac{(\tan\theta + \mu_s)}{(1 - \mu_s\tan\theta)}}$ (4)

Suppose we neglect the effect of friction ($\mu_s = 0$), then safe speed

$v_{safe} = \sqrt{rg\tan\theta}$ (5)

Note that the maximum speed with which the car takes safe turn is increased by friction (equation (4)). Suppose the car turns with speed $v < v_{safe}$, then the static friction acts up in the slope to prevent from inward skidding.

11 physics 6 appendix
Tuesday, February 01, 2022 8:52:52 PM

If the car turns with the speed little greater than, then the static friction acts down the slope to prevent outward skidding. But if the car turns with the speed much greater than v_{safe} then static friction cannot prevent from outward skidding.

SOLVED EXAMPLE UNIT-4

1. A force $\vec{F} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ N acts on a particle and displaces it through a distance $\vec{S} = 4\hat{i} + 6\hat{j}$ m. Calculate the work done.

Solution:

Force $\vec{F} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ N

Distance $\vec{S} = 4\hat{i} + 6\hat{j}$ m

Work done = $\vec{F} \cdot \vec{S} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}).(4\hat{i} + 6\hat{j})$

= 4+12+0 = 16 J

2. A particle moves along X- axis from x=0 to x=8 under the influence of a force given by F= $3x^2 - 4x + 5$. Find the work done in the process.

Solution:

Work done in moving a particle from x=0 to x=8 will be

$$W = \int_0^8 F dx = \int_0^8 (3x^2 - 4x + 5) dx$$

$$= \left[\frac{3x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 5x \right]_0^8$$

$$W = \left[3\frac{(8)^3}{3} - 4\left(\frac{8^2}{2}\right) + 40 \right]$$

$$= [512 - 128 + 40] = 424 J$$

3. A body of mass 10kg at rest is subjected to a force of 16N. Find the kinetic energy at the end of 10 s.

Solution:

Mass m = 10 kg

Force F = 16 N

time t = 10 s

$$a = F/m = \frac{16}{10} = 1.6 m s^{-2}$$

we know that, $v = u + at$

$$= 0 + 1.6 \times 10 = 16 \, m \, s^{-1}$$

Kinetic energy K.E = $\frac{1}{2} mv^2$

$$= \frac{1}{2} \times 10 \times 16 \times 16$$

$$= 1280 J$$

4. A body of mass 5kg is thrown up vertically with a kinetic energy of 1000 J. If acceleration due to gravity is 10 $m\,s^{-2}$, find the height at which the kinetic energy becomes half of the original value.

Solution:

Mass m = 5 kg

K.E E = 1000 J

g = 10 $m\,s^{-2}$

At a height 'h', mgh = $\frac{E}{2}$

$$5 \times 10 \times h = \frac{1000}{2}$$

$$h = \frac{500}{50} = 10 m$$

5. Two bodies of masses 60 kg and 30 kg moving in the same direction along straight line with velocity 40 cm s^{-1} and 30 cm s^{-1}

11 physics 6 appendix
Tuesday, February 01, 2022 8:52:52 PM

respectively suffer one dimensional elastic collision. Find their velocities after collision.

Solution:

Mass $m_1 = 60$ kg

Mass $m_2 = 30$ kg

$$V_1 = 40\ cms^{-1}$$

$$V_2 = 30\ cms^{-1}$$

Solution:

$$v_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)u_1 + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)u_2$$

$$v_2 = \frac{(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}u_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2}u_1$$

Substituting the values, we get,

$$v_1 = \frac{(60-30)}{90} \times 40 + \frac{2 \times 30}{90} \times 30$$

$$v_1 = \frac{1}{90}\ [1200 + 1800\ ]$$

$$= \frac{3000}{90} = 33.3 cms^{-1}$$

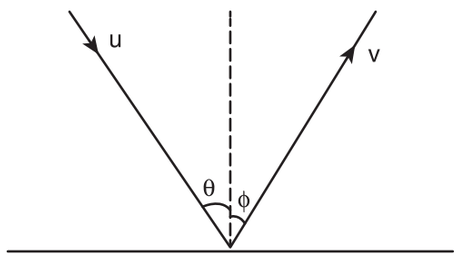
Likewise,

$$v_2 = \frac{(30-60)}{90} \times 30 + \frac{2 \times 60}{90} \times 40$$

$$v_2 = \frac{1}{90}[-900 + 4800]$$

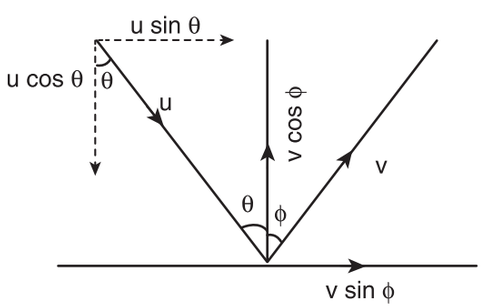
$$= \frac{3900}{90} = 43.3 cms^{-1}$$

6. A particle strikes a horizontal frictionless floor with a speed u at an angle θ with the vertical and rebounds with the speed v at an angle ϕ with the vertical. The coefficient of restitution between the particle and floor is e. What is the magnitude of v?



Solution:

Applying component of velocities,



The x - component of velocity is

$$u\sin\theta = v\sin\phi \qquad (1)$$

The magnitude of y – component of velocity is not same, therefore, using coefficient of restitution,

$$e = \frac{v\cos\varphi}{u\cos\theta} \qquad (2)$$

Squaring (1) and (2) and adding we get

$$v^2 \sin^2\varphi = u^2 \sin^2\theta$$

$$v^2 \cos^2\varphi = e^2u^2 \cos^2\theta$$

adding

$$v^2 = u^2 \sin^2\theta + e^2u^2 \cos^2\theta$$

$$\therefore v^2 = u^2\left[\sin^2\theta + e^2 \cos^2\theta\ \right]$$

$$v = u\sqrt{\sin^2\theta + e^2 \cos^2\theta}$$

11 physics 6 appendix
Tuesday, February 01, 2022 8:52:52 PM

7. A particle of mass m is fixed to one end of a light spring of force constant k and un-stretched length l. It is rotated with an angular velocity ω in horizontal circle. What will be the length increase in the spring?

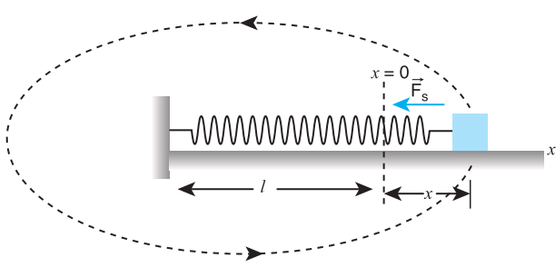
Solution:

Mass of particle = m

Force constant = k

Un-stretched length = l

Angular velocity = ω



Let 'x' be the increase in the length of the spring.

The new length = (l+x) = r

When the spring is rotated in a horizontal circle,

Spring force = centripetal force.

$$kx = m\omega^2(l+x)$$

$$x = \frac{m\omega^2 l}{k - m\omega^2}$$

8. A gun fires 8 bullets per second into a target X. If the mass of each bullet is 3 g and its speed 600 ms^{-1}, then calculate the power delivered by the bullets.

Solution:

Power = work done per second = total kinetic energy of 8 bullets per second

$$P = 8 \times (\text{kinetic energy of each bullet per second})$$

$$= 8 \times \frac{1}{2} \times \left(3 \times 10^{-3}\right) \times \left(600\right)^2$$

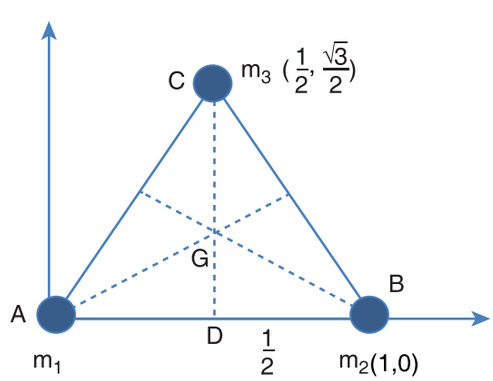
P = 4320 W

P = 4.320 kW

SOLVED EXAMPLE UNIT-5

1. Three particles of masses m_1 = 1 kg, m_2 = 2 kg and m_3 = 3 kg are placed at the corners of an equilateral triangle of side 1m as shown in Figure. Find the position of centre of mass.

Solution:



The centre of mass of an equilateral triangle lies at its geometrical centre G.

The positions of the mass m_1, m_2 and m_3 are at positions A, B and C as shown in the Figure.

From the given position of the masses, the coordinates of the masses m_1 and m_2 are easily marked as (0,0) and (1,0) respectively.

11 physics 6 appendix
Tuesday, February 01, 2022 8:52:52 PM

To find the position of m_3 the Pythagoras theorem is applied. As the ΔDBC is a right angle triangle,

$$BC^2 = CD^2 + DB^2$$
$$CD^2 = BC^2 - DB^2$$

$$CD^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$$
$$CD = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

The position of mass m_3 is

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ or } \left(0.5, 0.5\sqrt{3}\right)$$

X Coordinate of centre of mass,

$$x_{CM} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$x_{CM} = \frac{(1\times 0) + (2\times 1) + (3\times 0.5)}{1+2+3} = \frac{3.5}{6}$$
$$x_{CM} = \frac{7}{12}\text{ m}$$

Y Coordinate of centre of mass,

$$y_{CM} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$y_{CM} = \frac{(1\times 0) + (2\times 0) + (3\times 0.5\times \sqrt{3})}{1+2+3} = \frac{1.5\sqrt{3}}{6}$$
$$y_{CM} = \frac{\sqrt{3}}{4}\text{ m.}$$

∴ The coordinates of centre of mass G (x_{CM}, y_{CM}) is $\left(\frac{7}{12}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

2. An electron of mass $9\times10^{-31}\,kg$ revolves around a nucleus in a circular orbit of radius 0.53 Å. What is the angular momentum of the electron? (Velocity of electron is, $v = 2.2\times10^{6}\,m\,s^{-1}$)

Solution:

Mass of the electron, $m = 9\times10^{-31}\,kg$

Radius of the electron, r = 0.53 Å = $0.53\times10^{-10}\,m$

Velocity of the electron, v = $2.2\times10^{6}\,m\,s^{-1}$

Angular momentum of electron is, $L = I\,\omega$

Electron is considered as a point mass. Hence, its moment of inertia is, $I = m\,r^2$

The relation, $\omega = \frac{v}{r}$ could be used.

Angular momentum, $L = mr^2\times\frac{v}{r}$

$= mvr$

$$= 9.1\times10^{-31}\times2.2\times10^{6}\times0.53\times10^{-10}$$
$$L = 1.06\times10^{-34}\,kg\,m^2\,s^{-1}$$

3. A solid sphere of mass 20 kg and radius 0.25 m rotates about an axis passing through the centre. What is the angular momentum if the angular velocity is 5 rad s^{-1}

Solution:

Mass of the sphere, m = 20 kg

Radius r = 0.25 m

11 physics 6 appendix
Tuesday, February 01, 2022 8:52:53 PM

Angular velocity $\omega = 5$ rad s^{-1}

Solution:

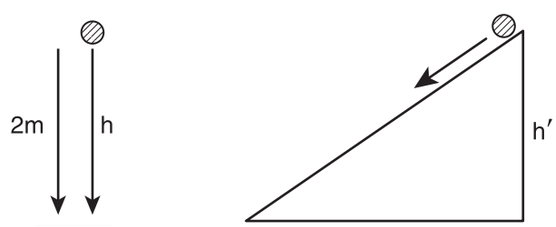
Angular momentum $L = I\omega = \frac{2}{5}mr^2\omega$

$$= \frac{2}{5} \times 20 \times (0.25)^2 \times 5 = 40 \times (0.0625) = 2.5$$

$$L = 2.5 \text{ kg m}^2\text{s}^{-1}$$

4. A solid cylinder when dropped from a height of 2 m acquires a velocity while reaching the ground. If the same cylinder is rolled down from the top of an inclined plane to reach the ground with same velocity, what must be the height of the inclined plane? Also compute the velocity.

Solution:



In the first case,

potential energy = kinetic energy

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

$$mg \times 2 = \frac{1}{2}mv^2 \qquad (1)$$

In second case,

potential energy = translational kinetic energy + rotational kinetic energy

$$mgh' = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$mgh' = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{mr^2}{2}\right)\left(\frac{v^2}{r^2}\right)$$

$$\therefore mgh' = \frac{3}{4}mv^2 \qquad (2)$$

Dividing (2) by (1),

$$\frac{mgh'}{mg \times 2} = \frac{\frac{3}{4}mv^2}{\frac{1}{2}mv^2} = \frac{3}{4} \times \frac{2}{1} = \frac{3}{2}$$

$$h' = 3\,m$$

From equation (1), $2mg = \frac{1}{2}mv^2$

$$v = \sqrt{4g} = 2\sqrt{g}$$

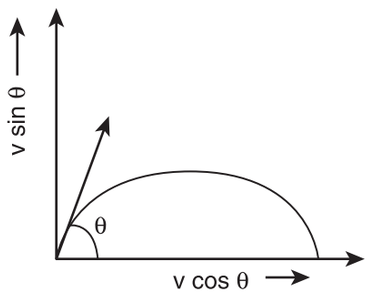
$$v = 2 \times \sqrt{9.81}$$

$$v = 6.3\,m\,s^{-1}$$

5. A small particle of mass m is projected with an initial velocity v at an angle θ with x axis in X-Y plane as shown in Figure. Find the angular momentum of the particle.

11 physics 6 appendix
Tuesday, February 01, 2022 8:52:53 PM

Solution:



Let the particle of mass m cross a horizontal distance x in time t.

Angular momentum $\vec{L} = \int \vec{\tau}\, dt$

But $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ and $\vec{F} = -mg\hat{j}$

$$\therefore \vec{\tau} = \left(x\hat{i} + \right)y\hat{j} \times \left(-mg\hat{j}\right)$$

$$\vec{\tau} = -mgx\left(\hat{i} \times \hat{j}\right) = -mgx\hat{k}$$

$$\vec{L} = -mg\int (xdt)\hat{k} = -mgv\cos\theta\left(\int tdt\right)\hat{k}$$

Let initial time t = 0 and final time t = t_f

$$\therefore \vec{L} = -mg\, v\cos\theta\left(\int_0^{t_f} tdt\right)\hat{k} = -\frac{1}{2}mgv\cos\theta\, t_f^2\ \hat{k}$$

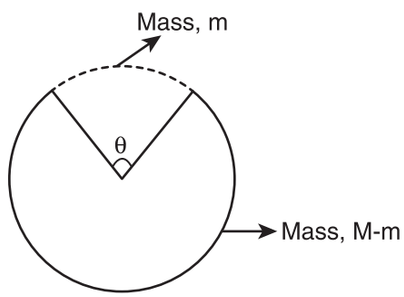
Negative sign indicates, $\vec{L}$ point inwards

6. From a complete ring of mass M and radius R, a sector angle θ is removed. What is the moment of inertia of the incomplete ring about axis passing through the centre of the ring and perpendicular to the plane of the ring?

Solution:

Let R be the radius of the ring and M be the total mass of the complete ring.

Let m be the mass of the section removed from the ring then, mass of the incomplete ring is M-m



Let us introduce a positive integer (n), such that, $n\theta = 360^\circ$, or $n = \frac{360^\circ}{\theta}$

$$mass\ of\ incomplete\ ring = M - m$$

$$m = \frac{M}{360} \times \theta$$

$$\therefore mass\ of\ incomplete\ ring = M - \frac{M}{360} \times \theta$$

$$mass\ of\ incomplete\ ring = M - \frac{M}{n} = M\frac{(n-1)}{n}$$

For example, *a) when* $\theta = 60^\circ$; $n = \frac{360^\circ}{60^\circ} = 6$

$$\therefore n - 1 = 5$$

$$\text{mass of incomplete ring} = \frac{5}{6}M$$

b) when $\theta = 30^\circ$, $n = \frac{360^\circ}{30^\circ} = 12$

$$n - 1 = 11$$

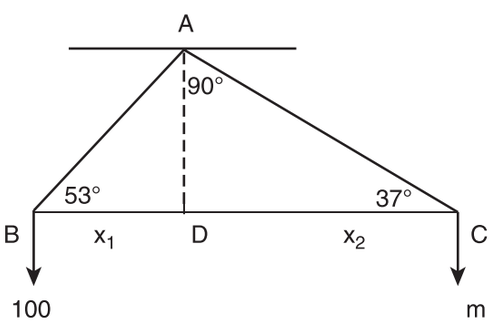
$$\text{mass of incomplete ring} = \frac{11}{12}M$$

11 physics 6 appendix
Tuesday, February 01, 2022 8:52:53 PM

The moment of inertia of the incomplete ring is, $I = M\frac{(n-1)}{n}R^2$

7. A massless right angled triangle is suspended with its right angle corner. A mass of 100 kg is suspended from another corner B which subtends an angle 53°. Find the mass m that should be suspended from other corner C so that BC (hypotenuse) remains horizontal.

Solution:



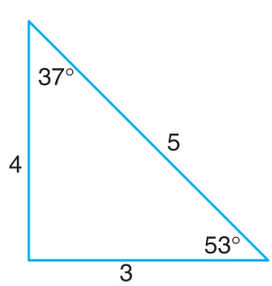
From the principle of moments,

$$100 \times g \times x_1 = m \times g \times x_2$$

$$100 \times \cos 53^\circ = m \times \cos 37^\circ \quad (1)$$

Where, x_1 and x_2 are the arm lengths.

The right angle triangle with angles 37°, 53° and 90° is a special triangle which has the respective sides in the ratio, 3:4:5 as shown in the diagram.



Substituting the values in equation (1),

$$100 \times \cos 53^\circ = m \times \cos 37^\circ$$

$$100 \times \frac{3}{5} = m \times \frac{4}{5}$$

$$m = 100 \times \frac{3}{4}$$

$$m = 75\,kg$$

8. If energy of 1000 J is spent in increasing the speed of a flywheel from 30 rpm to 720 rpm, find the moment of inertia of the wheel.

Solution:

$$\omega_1 = 30rpm = 2\pi \times \frac{30}{60} rads^{-1} = \pi \ rads$$

$$\omega_2 = 720rpm$$

$$= 2\pi \times \frac{720}{60} rads^{-1} = 24\pi \ rads$$

Change in kinetic energy,

$$\Delta KE = \frac{1}{2} I(\omega_2^{\,2} - \omega_1^{\,2})$$

$$I = \frac{2 \times \Delta KE}{(\omega_2^{\,2} - \omega_1^{\,2})} = \frac{2 \times 1000}{(24\pi)^2 - (\pi)^2}$$

$$I = \frac{2000}{25\pi \times 23\pi}$$

Remember:

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$I \approx 0.35 \text{ kg m}^2$ as $\pi^2 \approx 10$

9. Consider two cylinders with same radius and same mass. Let one of the cylinders be solid and another one be hollow. When subjected to same torque, which one among them gets more angular acceleration than the other?

11 physics 6 appendix
Tuesday, February 01, 2022 8:52:53 PM

Solution:

Moment of inertia of a solid cylinder about its axis $I_s = \frac{1}{2}MR^2$

Moment of inertia of a hollow cylinder about its axis $I_h = MR^2$

$$I_s = \frac{1}{2}I_h \text{ or } I_h = 2I_s$$

$$torque\ \tau = I\alpha$$

$$\alpha = \frac{\tau}{I}$$

$$\alpha_s = \frac{\tau}{I_s} \text{ and } \alpha_h = \frac{\tau}{I_h}$$

$$\alpha_s I_s = \alpha_h I_h \Rightarrow \alpha_s = \alpha_h \frac{I_h}{I_s}$$

Since, $I_h > I_s \Rightarrow \frac{I_h}{I_s} > 1$

$$\therefore \alpha_s > \alpha_h$$

For the same torque, a solid cylinder gets more acceleration than a hollow cylinder.

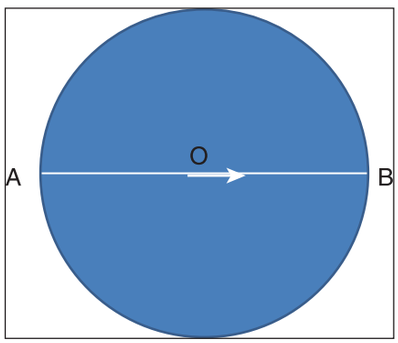
Note: **The above two cylinders must be made up of materials of different density. (Say why?)**

10. **A thin horizontal circular disc is rotating about a vertical axis passing through its centre. An insect goes from A to point B along its diameter as shown in Figure. Discuss how the angular speed of the circular disc changes?**

Solution:

As the disc is freely rotating, with the insect on it, the angular momentum of the system is conserved.

$$L = I\omega = \text{constant}$$



When the insect moves towards the centre (from A to O), the moment of inertia (I) decreases. Thus, the angular velocity (ω) increases. When it moves away from centre (from O to B), the moment of inertia (I) increases. Thus, the angular velocity (ω) decreases.

11. (i) What is the shape of the graph between $\sqrt{E_{kr}}$ and L? (E_{kr} is the rotational kinetic energy and L is angular momentum)

(ii) What information can you get from the slope of the graph?

(iii) You are given the graph of $\sqrt{E_{kr}}$ and L for two bodies A and B. Which one has more moment of inertia?

Solution:

i) We know that, Rotational kinetic Energy

$$E_{kr} = \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$= \frac{1}{2}I\omega \times \omega = \frac{1}{2}.L.\omega = \frac{1}{2}\frac{L^2}{I} \qquad \because L = I\omega,\ \omega = L/I$$

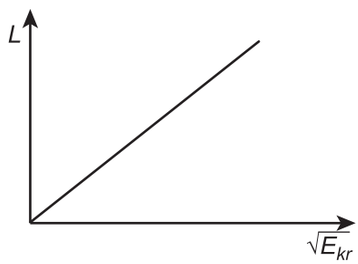
$$E_{kr} = \frac{L^2}{2I}$$

$$L^2 = 2IE_{kr}$$

$$L = \sqrt{2IE_{kr}} = \sqrt{2I}.\sqrt{E_{kr}}$$

11 physics 6 appendix
Tuesday, February 01, 2022 8:52:53 PM

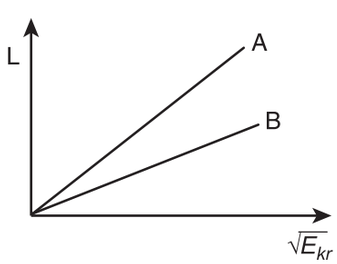
Graph of $\sqrt{E_{kr}}$ and L:



The shape of the graph is a straight line

ii) The slope of the graph gives the value of moment of inertia I.

iii) We know that the slope gives the value of moment of Inertia. The line A has higher slope and hence more moment of Inertia.



12. **Consider a thin uniform circular ring rolling down in an inclined plane without slipping. Compute the linear acceleration along the inclined plane if the angle of inclination is 45˚.**

Solution:

The linear acceleration along the inclined plane can be computed by

$$a = \frac{g\sin\theta}{1+\frac{K^2}{R^2}}$$

For a thin uniform circular ring, axis passing through its centre is $I = MR^2$

$$\therefore K^2 = R^2 \Rightarrow \frac{K^2}{R^2} = 1.$$

And the angle of inclination, θ = 45˚

$\Rightarrow (\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}})$

Hence,

$$a = \frac{\frac{g}{\sqrt{2}}}{1+1}$$

$$a = \frac{g}{2\sqrt{2}} ms^{-2}$$

COMPETITIVE EXAM CORNER



11 physics 6 appendix
Tuesday, February 01, 2022 8:52:53 PM

APPENDIX 2 ضمیمہ - 2

(Systematic Developments in Physics over Centuries)

جدول : A1.1 صدیوں میں طبیعیات میں ہوئی درجہ بدرجہ ترقیات	
سورج، ستارے، سیارے اور چاند کی حرکت کا مشاہدہ	تقریباً 3000 ق م (ابتدائی یونانی)
کائنات میں موجود ہر چیز تبدیل ہوتی ہے۔ ہمیشہ کے لئے کوئی بھی چیز اپنی مساوی حالت پر قائم نہیں رہتی۔ اسی سمجھ کی بناء پر 'وقت' کا تصور شروع ہوا۔	تقریباً 500 ق م (Heraclitus)
ہر شئے، چھوٹے چھوٹے غیر تقسیم پذیر عناصر سے بنی ہوئی ہیں جنہیں جوہریں کہا جاتا ہے۔ جوہریت کے نظریہ کی ترقی۔ مگر اس وقت یہ بس ایک قیاس تھا۔ کوئی تجرباتی ثبوت نہیں تھا۔	500 ق م کے آخر میں Leucippus اور Democritus
■ روزمرہ پیش آنے والے کاموں کے پیچھے، قدرتی کلیوں کا تصور ■ جاذبی قوت کا تصور، جاذبیت کے ساتھ حرکت کا تصور ■ چار عناصر کا نظریہ (ہر چیز زمین، پانی، آگ اور ہوا سے بنی ہے جو ایک دوسرے کے اندر منتقل ہونے کے قابل ہیں) ■ زمین کائنات کا مرکز ہے (قیاس) ■ شئے کو ہٹانے کے لئے قوت کی ضرورت ہے۔ ■ زمین کی طرف وزنی شئے ہلکی شئے سے بھی تیزی کے ساتھ گرتی ہے۔	تقریباً تیسری صدی ق م (ارسطو)
■ زمین ایک کرہ ہے۔ ■ زمین کے نصف قطر کی تقریباً درست پیمائش	240 ق م کے آس پاس (Eratosthenes)

11 physics 6 appendix
Tuesday, February 01, 2022 8:52:54 PM

صدیوں میں طبعیات میں ہوئی درجہ مدرجہ ترقیات (جاری) (SYstematic DeveloPments in PhYsics over Centuries)	
■ سورج، شمسی نظام کا مرکز ہے۔ (قیاس۔ تجرباتی ثبوت کے ساتھ ثابت نہیں کیا جا سکا) ■ زمین کا اپنی ہی محور کے ساتھ گردش کرنے کا تصور	تقریباً دوسری صدی ق م (Aristarchnus of Samos)
■ ماسکونیات (Hydrostatistics) کی بنیاد ■ بیرم کا تصور۔ ■ چرخیوں کے استعمال سے میکانیکی کام۔ ■ اچھال کا کلیہ جسے اصول ارشمدس کہا جاتا ہے۔ ■ عدد Pi کی پہلی درست قیمت	تقریباً دوسری صدی ق م (Seleucie) تقریباً 3ویں صدی ق م (ارشمیدس)
■ سیاروں اور ستاروں کی حرکت پر توجہ دی گئی۔ ■ سورج گرہن سے متعلق پیشن گوئی ہوئی۔ ■ زمین سے چاند، زمین سے سورج کے درمیانی فاصلوں کا محاسبہ۔ ■ فلکی مشاہدے درج کئے گئے۔	دوسری صدی ق م کے اختتام پر (ہپوکریٹس)
■ ارض مرکزی نمونہ (قیاس نہیں بلکہ برہنہ آنکھوں سے کئے جانے والے مشاہدات کی وضاحت) ■ سیاروں کے حرکت کی وضاحت (retrograde حرکت) ■ "Almagest" فلکیات پر پہلی کتاب	تقریباً 100ء (CE) (سن عیسوی) (Ptolemy)
■ اپنے ہی محور کے تحت زمین کی گردش کا تصور ■ صفر کا تصور ■ ریاضیات کا حصہ	5 ویں صدی عیسوی (Aryabhatta - India)
■ قدیم بصریات کی سمجھ ■ Ptolemy کے ڈیٹا سے بھی درست فلکیاتی جدول فلکیات کے خزانے پروردان	9 ویں صدی عیسوی ابن الہیثم۔ عربی
■ ساتویں صدی سے 14ویں صدی تک مسلم ممالک (عرب۔ فارس، ایران، وغیرہ) میں سائنس میں بڑی ترقی ہوئی۔	12 ویں صدی عیسوی ناصر الدین۔ فارسی۔ ماہر فلکیات (Nasir- al- Din)

11 physics 6 appendix
Tuesday, February 01, 2022 8:52:54 PM

صدیوں میں طبیعیات میں ہوئی درجہ بدرجہ ترقیات (جاری) (Systematic Developments in Physics over Centuries)

15ویں صدی عیسوی 1543ء کوپرنکس ٹیکوبراہی کپلر	■ کوپرنکس کا انقلاب ■ شمس مرکزی نمونہ (قیاس نہیں بلکہ Ptolemy کے ستاروں اور سیاروں کی حرکت کے نمونے سے بھی سادہ ترین نمونہ پیش کیا گیا) ■ درست فلکیاتی ڈیٹا ■ سیاروں کی حرکت کے کلیے
گیلی لیو گیلیلی (1564-1642)	■ جمود کا کلیہ ■ دوربینی مشاہدہ (جدید مشاہداتی فلکیات کے بانی) ■ مشتری کے چاندوں کے وقفۂ دوران کا محاسبہ ■ زمین چپٹی نہیں ہے ■ تمام اشیاء مساوی شرح کے ساتھ زمین پر گرتی ہیں۔ (ارسطو کی بحث کو غلط ثابت کیا گیا) ■ جمود کا کلیہ (حرکت کو برقرار رکھنے کے لئے قوت کی ضرورت نہیں پڑتی۔ ارسطو کی بحث کو غلط ثابت کیا گیا) ■ رقاص، ڈھلوان سطح والے تجربات ■ غلیلیہ (پروجیکٹائل) کی حرکت کا مطالعہ ■ ''باقاعدہ تجربات'' کا تعارف
رین ڈیکارٹ Rane Descarte (1596-1650)	■ کارتیسی محددات نظام کا تعارف ■ تجزیاتی علم ہندسہ
■ 17 اور 18 ویں صدی کی ترقیات	
اسحاق نیوٹن (1642- 1727)	■ حرکت کے کلیے ■ حرکت کا مقداری تصور ■ جاذبی قوت کا کلیہ ■ (احصائیت) Calculus کی ترقی Leibnitz پر غیر منحصر ■ جدید بصریات کے بانی (انعکاس، انتشار، منشور) ■ روشنی میں چھوٹے ذرات، جسیمے، یاریزے (corpuscules) پائے جاتے ہیں۔ ■ Kepler کے کلیوں کا مؤاخذہ ■ بہترین کتاب The Principia Mathematica (1687)
جدید بصریات کا باپ (Christian Huygens)	■ روشنی کا موجی نظریہ

11 physics 6 appendix
Tuesday, February 01, 2022 8:52:54 PM

صدیوں میں طبیعیات میں ہوئی درجہ بدرجہ ترقیات (جاری) (Systematic Developments in Physics over Centuries)

ولیم گلبرٹ (تقریباً 1600ء) Robert Boyle (1627-1691)ء اور Robert Hooke Daniel Bernoulli (1700-1782) رابرٹ ہوک Taylor De Alembert, Lagrange James Watt Coulomb کولوم	■ مقناطیسیت پر کام کیا گیا ■ گیسوں کے کردار ■ سیالیاتی حرکیات برنولی کا نظریہ (1734) ■ گیسوں کے فعلی نظریے کے قدیم تصورات ■ کمانی کی حرکت کا مطالعہ (ہوک کا کلیہ) ■ ڈوریوں کے ارتعاش کی تعدد کا مؤاخذہ (1714) ■ توانائی کے طریقے کی مدد سے نیوٹنی ■ میکانیات کی از سرنو ترتیب (لیگرینجین میکانیات) ■ بھاپ کے انجن کا انکشاف (1781) ■ باروں کے درمیان قوت (کولوم کا کلیہ)
19 ویں صدی کی ترقیات	
James Joule, Carnot Kelvin, Clausius James clark maxwell Boltzmann	■ حرارتی حرکیات (تھرموڈائینمکس) کے قدیم تصورات (1840s) ■ کیلوری کا نظریہ ■ حرارتی حرکیات کے کلیے (1850s) ■ گیسوں کا کردار، سمتی رفتار اور رفتار (1860) ■ ماسکونی میکانیات اور entropy کے ضابطے کی بنیاد (تقریباً 1870) ■ روشنی کی موجی فطرت۔ تجربات
Young and fresnel Oersted (اورسٹڈ) ایمپیر ولیم ہیملٹن مائیکل فیرڈے	■ برقی باروں کا کردار ■ برقی رو کا مقناطیسی اثر (1820s) ■ دو متوازنی برقی روؤں کی درمیانی قوت ■ اقل عمل (Leastaction) کا اصول ■ ہیملٹونی میکانیات (1821) ■ برقی طاقت کے موٹار، بجلی کی عملی نمائش
James Clerk Maxwell Tesla	■ برق مقناطیسیت کا نظریہ (1873) بجلی اور مقناطیسیت کی درمیانی برڈج ■ میکسویل کی مساوات: جدید ٹیکنالوجی کے لئے راستہ فراہم کریں ■ متبادل برقی رو

11 physics 6 appendix
Tuesday, February 01, 2022 8:52:55 PM

صدیوں میں طبیعیات میں ہوئی درجہ بدرجہ ترقیات (جاری) (Systematic Developments in Physics over Centuries)

■ بیسویں صدی کی ترقیات	
Max Planck (تقریباً 1900)	■ سیاہ جسم کی اشعاعیت کا مطالعہ
J.J. Thomson (جے جے تھامسن)	■ الکٹران کا انکشاف
ردھرفورڈ (1910s)	■ ردرفورڈ کا جوہری نمونہ
Marie Curie (1920-30)	■ تابکاری (radio activity) کا مطالعہ
البرٹ آئینسٹین	■ relativity کا مخصوص نظریہ، شعاعی برقی اثر، جوہر کا وجود (1905) ■ نیوٹن کے بعد طبیعیات کی ارتقاء ■ خلاء اور وقت کا جدید تصور ■ relativity کا عام نظریہ (20ویں صدی کا سب سے بڑا نظریہ) (1915) ■ حرارتی نوعی گنجائشوں کا مطالعہ
Niels Bohr	■ جوہروں کا مطالعہ
Schrodinger	■ بور کا دوہری نمونہ (1912)
Heisenberg	■ الکٹران، پروٹان کا کردار - Schrodinger کی مساوات
paul Dirac	■ Uncertainity غیر یقینی کیفیت کا اصول
Dirac, Feynman, Schwinger	■ کوانٹم میکانیات کی تشکیل
Gelman, Weinberg, Abdus Salam	■ کوانٹم میدان کے نظریے کی تشکیل- ذراتی طبیعیات، معیاری نمونہ،
	■ X-رے انکسار (1930s) - اشیاء کے سمجھنے کا راستہ ہموار کیا۔
سر۔سی۔وی۔رامن (ہندوستان)	■ رامن اثر
چندرسیکر (ہندوستانی نژاد)	■ ستاروں اور سیاہ سوراخوں کا مطالعہ
John Bardeen, walter Brattin	■ ٹرانسسٹر کا انکشاف (1947)
	■ ستاروں کی مدد سے ستاروں کی درجہ بندی (فلکی حرارتی حرکیات (Astro thermo dynamics)
William schokley	
Megnad saha (India)	■ ساہا راوں سازی کا ضابطہ (Saha ionization formula)
Eddington, Schwavchild	■ تکوینیات (Cosmology) کا میدان (1920)
Thomas Friedman	■ پھیلتی ہوئی کائنات کا نمونہ
Edwin Hubble	■ سرخ شفٹ (Redshift) کا انکشاف
	■ مادی سائنس کی بنیاد

11 physics 6 appendix
Tuesday, February 01, 2022 8:52:55 PM

- نینوٹیکنالوجی، کثیف (Condensed) مادے کی طبیعیات
- جاذبی موجیں، تاریک توانائی، تاریک مادہ String theory

APPENDIX A1.2 ضمیمہ - A1.2

(vi) دو مقداروں کی تقسیم میں ملوث غلطی

(تفرقی differentiation) طریقے کی مدد سے

فرض کیجئے $Z = \frac{A^n}{B^m}$

دونوں طرف لوگارتھم لینے سے

$$\log Z = \log A^n - \log B^m$$
$$\log Z = n \log A - m \log B$$

دونوں طرف تفرقہ (differentiate) کرنے سے، ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{dZ}{Z} = n\frac{dA}{A} - m\frac{dB}{B}$$

کسری غلطی کے لحاظ سے اسے اس طرح لکھا جا سکتا ہے۔

$$\pm\frac{\Delta Z}{Z} = \pm n\frac{\Delta A}{A} \mp m\frac{\Delta B}{B}$$

Z میں ہونے والی سب سے زیادہ ممکنہ نسبتی غلطی یوں پیش کی جاتی ہے

$$\frac{\Delta Z}{Z} = n\frac{\Delta A}{A} + m\frac{\Delta B}{B}$$

(vii) تین مقداروں کے حاصل ضرب میں ملوث غلطی

احصائیت (Calculus) کا طریقہ استعمال کر کے

فرض کیجئے۔ $u = x^m y^n Z^p$

دونوں طرف لوگارتھم لینے پر ہم حاصل کرتے ہیں

$$\log u = \log x^m + \log y^n + \log Z^p$$
$$\log u = m \log x + n \log y + p \log Z$$

دونوں طرف تفرقہ (differentiate) کرنے پر ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{du}{u} = m\frac{dx}{x} + n\frac{dy}{y} + p\frac{dz}{z}$$

کسری غلطی کے لحاظ سے اس مساوات کو اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$\pm\frac{\Delta u}{u} = \pm m\frac{\Delta x}{x} \pm n\frac{\Delta y}{y} \pm p\frac{\Delta z}{z}$$

APPENDIX A2.1 ضمیمہ - A2.1

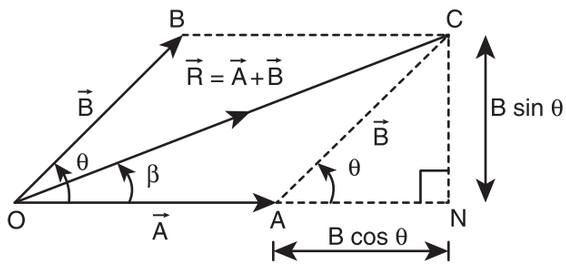
سمتی جمع کا متوازی الاضلاع کا کلیہ
Parallelogram Law of Vector Addition

اگر دو غیر صفری سمتیے $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ ایک متوازی لاضلاع کے دو متصل ضلعوں (Adjacent sides) سے ظاہر کئے جائیں تو ان کا حاصل اس متوازی الاضلاع کے وتر کے ذریعہ پیش کی جاتی ہے، جو ان دو سمتیوں کے قطاع ہونے والے نقطہ کے ذریعہ گزرتی ہے۔

نیچے دئے گئے خاکہ 2.19 پر غور کیجئے۔ یہاں $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ دو سمتیے کے زاویے θ پر ایک عام کنارے (Common tail) سے جڑے ہوئے ہیں۔ اس کے بعد متوازی الاضلاع OACB کی تعمیر کی جاتی

11 physics 6 appendix
Tuesday, February 01, 2022 8:52:55 PM

ہے۔ پھر وتر OC ہی وہ مجموعی سمتیہ $(\vec{R})$ (Resultant) ہے، جو اس عام کنارے ' O ' سے گزرتی ہے۔



خاکہ 2.19۔ متوازی الاضلاع کے طریقے سے مجموعی سمتیہ کی قدر

ہم اس کے بعد مجموعی سمتیہ کی قدر اور سمت معلوم کرتے ہیں۔

(i) قدر: (magnitude)

سب سے پہلے OA کو نقطہ N تک طویل کر دیں تا کہ ہم ON حاصل کر سکیں۔ پھر اس ON کے عمودی طور پر سے ایک خط CN کھینچی جاتی ہے تو پھر ONC ایک مثلث قائمۃ الزاویہ ہوتا ہے۔ اب ہم یہ لکھ سکتے ہیں۔

$$R^2 = ON^2 + CN^2$$

$$R^2 = (OA + AN)^2 + CN^2$$

$$\Rightarrow R^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta$$

$$\therefore R = |\vec{R}| = |\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$$

مخصوص معاملات:

جب $\theta = 0°$ ہو تو پھر $R = A+B$

جب $\theta = 180°$ ہو تو پھر $R = A-B$

جب $\theta = 90°$ ہو تو پھر $R = \sqrt{A^2 + B^2}$

(ii) سمت (Direction)

فرض کیجئے کہ سمتیہ $\vec{A}$ اور $\vec{R}$ کا درمیانی زاویہ β ہے۔ تو پھر

$$\tan\beta = \frac{CN}{ON} = \frac{B\sin\theta}{A + B\cos\theta}$$

11 physics 6 appendix
Tuesday, February 01, 2022 8:52:55 PM

APPENDIX 3 ضمیمہ - 3

احصاء (مربوطیت) (Integral) کے لئے چند اہم ضابطے

(1) $\int dx = x\,;\ \frac{d}{dx}(x) = 1$

(2) $\int x^n dx = \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right);\ \frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n$

(3) $\int cudx = c\int udx$ جہاں 'c' ایک مستقلہ ہے

(4) $\int (u \pm v \pm w)dx = \int udx \pm \int vdx \pm \int wdx$

(5) $\int \frac{1}{x}dx = \ln x + C$

(6) $\int e^x dx = e^x + C$

(7) $\int \cos\theta d\theta = \sin\theta + C$

(8) $\int \sin\theta d\theta = -\cos\theta + C$

تفرقی محاسبات (Differential calculus) کے چند اہم ضابطے

1. $\frac{d}{dx}(c) = 0,$ اگر c ایک مستقلہ ہو تو

2. اگر $y = cu$ ہو تو، جہاں c ایک مستقلہ ہے اور x کا ایک تفاعل u ہو تو

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}$$

3. اگر $y = u + v + w$ ہو، جہاں x کے تفاعل u، v، w اور x ہوں تو

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(u \pm v \pm w) = \frac{du}{ds} \pm \frac{dv}{dx} \pm \frac{dw}{dx}$$

4. اگر $y = x^n$ ہو، جس میں n ایک حقیقی (real) عدد ہو تو پھر

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

5. اگر $y = uv$ ہو جہاں u اور v، x کے تفاعل ہوں تو

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

6. اگر x کا ایک تفاعل y ہو تو $dy = \frac{dy}{dx}.dx$

7. $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

8. $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$

9. $\frac{d}{d\theta}(\sin\theta) = \cos\theta$

10. $\frac{d}{d\theta}(\cos\theta) = -\sin\theta$

11. اگر θ کا ایک مثلثی تفاعل (trigonometric function)، ہو اور t کا تفاعل θ ہو تو

$$\frac{d}{dt}(\sin\theta) = \cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\cos\theta) = -\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$

11 physics 6 appendix
Tuesday, February 01, 2022 8:52:56 PM

APPENDIX 4 ضمیمہ - 4

(THE GREEK ALPHABET) یونانی حروف

The Greek Alphabet یونانی حروف	Upper Case بڑے حروف (حروف جلی)	Lower Case چھوٹے حروف (حروف خفی)
Alpha	A	α
Beta	B	β
Gamma	Γ	γ
Delta	Δ	δ
Epsilon	E	ε
Zeta	Z	ζ
Eta	H	η
Theta	Θ	θ
Iota	I	ι
Kappa	K	κ
Lambda	Λ	λ
Mu	M	μ
Nu	N	ν
Xi	€	ξ
Omicron	O	o
Pi	∏	π
Rho	P	ρ
Sigma	Σ	σ
Tau	T	τ
Upsilon	Y	υ
Phi	Φ	ϕ
Chi	X	χ
Psi	Ψ	ψ
Omega	Ω	ω

11 physics 6 appendix
Tuesday, February 01, 2022 8:52:56 PM

SOME IMPORTANT CONSTANTS IN PHYSICS

طبیعیات کی چند اہم مستقلات

Name نام	Symbols علامات	Value قیمت
Speed of light in vacuum خلاء میں روشنی کی رفتار	c	2.9979×10^{8} m s^{-1}
Gravitational constant جاذبی مستقلہ	G	6.67×10^{-11} N m^{2} kg^{-2}
Acceleration due to gravity (sea level, at 45° latitude) اسراع بوجہ جاذبہ (سمندری سطح، 45° عرض البلد پر)	g	9.8 m s^{-2}
Planck constant پلانک کا مستقلہ	h	6.626×10^{-34} J s
Boltzmann constant بولٹزمین کی مستقلہ	k	1.38×10^{-23} J K^{-1}
Avogadro number اووگیڈرو عدد	N_A	6.023×10^{23} mol^{-1}
Universal gas constant گیس کی کائناتی مستقلہ	R	8.31 J mol^{-1} K^{-1}
Stefan – Boltmann constant کا مستقلہ Stefan- Boltmann	σ	5.67×10^{-8} W m^{-2} K^{-4}
Wien's constant کا مستقلہ Wien	b	2.898×10^{-3} m K
Permeability of free space آزاد خلاء کی نفوذ پذیری	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ H m^{-1}
Standard atmospheric pressure معیاری فضائی دباؤ	1 atm	1.013×10^{5} Pa

11 physics 6 appendix
Tuesday, February 01, 2022 8:52:56 PM

GLOSSARY سائنسی اصطلاحات (لغت)

2C06H

1.	Acceleration	-	اسراع
2.	Angular Momentum	-	زاویائی معیارحرکت
3.	Astro physics	-	فلکیاتی طبیعیات
4.	Average Velocity	-	اوسط سمتی رفتار
5.	Angular displacement	-	زاویائی ہٹاؤ
6.	Angular velocity	-	زاویائی سمتی رفتار
7.	Angular acceleration	-	زاویائی اسراع
8.	Angle of friction	-	رگڑ کا زاویہ
9.	Angle of repose	-	پھسلاؤ کا زاویہ
10.	Centripetal acceleration	-	مرکز مائل اسراع
11.	Circular Motion	-	دائری حرکت
12.	Concurrent forces	-	ہم مرکز قوتیں
13.	Coplanar force	-	ہم سطحی قوت
14.	Centripetal force	-	مرکز مائل (مرکز جو) قوت
15.	Centrifugal force	-	مرکز گریز قوت
16.	Coefficient of friction	-	رگڑ کی شرح قدر
17.	Centre of mass	-	کمیتی مرکز
18.	Couple	-	جفتہ
19.	Centre of gravity	-	جاذبی مرکز
20.	Circular Motion	-	دائری حرکت
21.	Collision	-	ٹکراؤ (تصادم)
22.	Conservative force	-	بقائی قوت
23.	Dimensional Analysis	-	ابعادی تجزیہ
24.	Displacement	-	ہٹاؤ
25.	Escape -Speed	-	فراری رفتار
26.	Elastic potential energy	-	لچکدار توانائی بالقواہ
27.	Elastic collision	-	لچکدار ٹکراؤ
28.	Free body diagram	-	آزاد جسمانی نقشہ
29.	Gravitational Constant	-	جاذبی مستقلہ
30.	Gravitational field	-	جاذبی میدان
31.	Gravitational potential	-	جاذبی قواہ
32.	Gravitational Potential energy	-	جاذبی توانائی بالقواہ
33.	Gross Error	-	مجموعی غلطی
34.	Geo stationary satellite	-	ارض ساکن سیارچہ
35.	Horizontal plane	-	افقی سطح
36.	Horse power	-	ہارس پاور (یا) گھوڑے کی طاقت۔

11 physics 6 appendix
Tuesday, February 01, 2022 8:52:57 PM

37.	Instantaneous Velocity	-	برقتی سمتی رفتار
38.	Inclined plane	-	ڈھلوان سطح (سطح مائل)
39.	Inertial frame	-	جمودی سانچہ
40.	Impulse	-	دھکا
41.	Instantaneous power	-	بروقتہ طاقت
42.	Kinetic friction	-	فعلی رگڑ
43.	Linear motion	-	خطی حرکت
44.	Linear density	-	خطی کثافت
45.	Linear momentum	-	خطی معیار حرکت
46.	Least Count error	-	شمار اقل کی غلطی
47.	Motion	-	حرکت
48.	Moment of inertia	-	جمود کا معیار اثر
49.	Non conservative force	-	غیر بقائی قوت
50.	Orbital speed	-	مداری رفتار
51.	One dimensional motion	-	یک بعدی حرکت
52.	accuracy	-	درستگی
53.	Parallax Method	-	اختلاف منظر
54.	Projectile	-	پروجکٹائل (غلیلیہ)
55.	Point mass	-	نقطوی کمیت
56.	Precison	-	بالکل صحیح (بالکل درست)
57.	Planetary Motion	-	سیاروں کی حرکت
58.	Polar satellite	-	قطبی سیارچہ
59.	Precession	-	استقبالی حرکت
60.	Pulley	-	چرخی
61.	Rolling	-	لڑھکنا/لڑھکاؤ
62.	Random error	-	کبھی کبھار (الل ٹپ) غلطی
63.	Rounding off	-	قریب کی قیمت تک لانا
64.	Rest	-	سکون/ساکن
65.	Retardation	-	منفی اسراع
66.	Relative velocity	-	نسبتی سمتی رفتار
67.	Range	-	حد/وسعت
68.	Rolling friction	-	لڑھکاؤ کی رگڑ
69.	Rigid body	-	سخت جسم
70.	Radius of gyration	-	گردش کا نصف قطر
71.	Rotational Motion	-	گردشی حرکت
72.	Spring Constant	-	کمانی کا مستقلہ
73.	Sliping	-	پھسلاؤ/پھسلنا
74.	Sliding	-	سرکاؤ/سرکنا
75.	Systematic error	-	منظم غلطی
76.	Static friction	-	ساکن رگڑ
77.	Significant Number	-	معنی خیز عدد
78.	Time of flight	-	اڑان کا وقت
79.	Torque	-	قوت گردشہ
80.	Translational Motion	-	خطی حرکت
81.	Tension	-	تناؤ
82.	Velocity	-	سمتی رفتار

11 physics 6 appendix
Tuesday, February 01, 2022 8:52:57 PM

LOGARITHM TABLE لوگارتمی جدول

											Mean Difference								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0.000	0.004	0.009	0.013	0.017	0.021	0.025	0.029	0.033	0.037	4	8	11	17	21	25	29	33	37
11	0.041	0.045	0.049	0.053	0.057	0.061	0.064	0.068	0.072	0.076	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0.079	0.083	0.086	0.090	0.093	0.097	0.100	0.104	0.107	0.111	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	0.114	0.117	0.121	0.124	0.127	0.130	0.134	0.137	0.140	0.143	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	0.146	0.149	0.152	0.155	0.158	0.161	0.164	0.167	0.170	0.173	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	0.176	0.179	0.182	0.185	0.188	0.190	0.193	0.196	0.199	0.201	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	0.204	0.207	0.210	0.212	0.215	0.217	0.220	0.223	0.225	0.228	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	0.230	0.233	0.236	0.238	0.241	0.243	0.246	0.248	0.250	0.253	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	0.255	0.258	0.260	0.262	0.265	0.267	0.270	0.272	0.274	0.276	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	0.279	0.281	0.283	0.286	0.288	0.290	0.292	0.294	0.297	0.299	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	0.301	0.303	0.305	0.307	0.310	0.312	0.314	0.316	0.318	0.320	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	0.322	0.324	0.326	0.328	0.330	0.332	0.334	0.336	0.338	0.340	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	0.342	0.344	0.346	0.348	0.350	0.352	0.354	0.356	0.358	0.360	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	0.362	0.364	0.365	0.367	0.369	0.371	0.373	0.375	0.377	0.378	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	0.380	0.382	0.384	0.386	0.387	0.389	0.391	0.393	0.394	0.396	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	0.398	0.400	0.401	0.403	0.405	0.407	0.408	0.410	0.412	0.413	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	0.415	0.417	0.418	0.420	0.422	0.423	0.425	0.427	0.428	0.430	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	0.431	0.433	0.435	0.436	0.438	0.439	0.441	0.442	0.444	0.446	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	0.447	0.449	0.450	0.452	0.453	0.455	0.456	0.458	0.459	0.461	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	0.462	0.464	0.465	0.467	0.468	0.470	0.471	0.473	0.474	0.476	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	0.477	0.479	0.480	0.481	0.483	0.484	0.486	0.487	0.489	0.490	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	0.491	0.493	0.494	0.496	0.497	0.498	0.500	0.501	0.502	0.504	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	0.505	0.507	0.508	0.509	0.511	0.512	0.513	0.515	0.516	0.517	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	0.519	0.520	0.521	0.522	0.524	0.525	0.526	0.528	0.529	0.530	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	0.531	0.533	0.534	0.535	0.537	0.538	0.539	0.540	0.542	0.543	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	0.544	0.545	0.547	0.548	0.549	0.550	0.551	0.553	0.554	0.555	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	0.556	0.558	0.559	0.560	0.561	0.562	0.563	0.565	0.566	0.567	1	2	3	5	6	7	8	10	11
37	0.568	0.569	0.571	0.572	0.573	0.574	0.575	0.576	0.577	0.579	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	0.580	0.581	0.582	0.583	0.584	0.585	0.587	0.588	0.589	0.590	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	0.591	0.592	0.593	0.594	0.595	0.597	0.598	0.599	0.600	0.601	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	0.602	0.603	0.604	0.605	0.606	0.607	0.609	0.610	0.611	0.612	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	0.613	0.614	0.615	0.616	0.617	0.618	0.619	0.620	0.621	0.622	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	0.623	0.624	0.625	0.626	0.627	0.628	0.629	0.630	0.631	0.632	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	0.633	0.634	0.635	0.636	0.637	0.638	0.639	0.640	0.641	0.642	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	0.643	0.644	0.645	0.646	0.647	0.648	0.649	0.650	0.651	0.652	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	0.653	0.654	0.655	0.656	0.657	0.658	0.659	0.660	0.661	0.662	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	0.663	0.664	0.665	0.666	0.667	0.667	0.668	0.669	0.670	0.671	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	0.672	0.673	0.674	0.675	0.676	0.677	0.678	0.679	0.679	0.680	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	0.681	0.682	0.683	0.684	0.685	0.686	0.687	0.688	0.688	0.689	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	0.690	0.691	0.692	0.693	0.694	0.695	0.695	0.696	0.697	0.698	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	0.699	0.700	0.701	0.702	0.702	0.703	0.704	0.705	0.706	0.707	1	2	3	4	4	5	6	7	8
51	0.708	0.708	0.709	0.710	0.711	0.712	0.713	0.713	0.714	0.715	1	2	3	4	4	5	6	7	8
52	0.716	0.717	0.718	0.719	0.719	0.720	0.721	0.722	0.723	0.723	1	2	2	4	4	5	6	7	7
53	0.724	0.725	0.726	0.727	0.728	0.728	0.729	0.730	0.731	0.732	1	2	2	4	4	5	6	6	7
54	0.732	0.733	0.734	0.735	0.736	0.736	0.737	0.738	0.739	0.740	1	2	2	4	4	5	6	6	7

100
95
75
25
5
0

11 physics 6 appendix
Tuesday, February 01, 2022 8:52:58 PM

LOGARITHM TABLE لوگارتمی جدول

											Mean Difference								
55	0.740	0.741	0.742	0.743	0.744	0.744	0.745	0.746	0.747	0.747	1	2	2	4	4	5	5	6	7
56	0.748	0.749	0.750	0.751	0.751	0.752	0.753	0.754	0.754	0.755	1	2	2	4	4	5	5	6	7
57	0.756	0.757	0.757	0.758	0.759	0.760	0.760	0.761	0.762	0.763	1	2	2	4	4	5	5	6	7
58	0.763	0.764	0.765	0.766	0.766	0.767	0.768	0.769	0.769	0.770	1	1	2	4	4	4	5	6	7
59	0.771	0.772	0.772	0.773	0.774	0.775	0.775	0.776	0.777	0.777	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	0.778	0.779	0.780	0.780	0.781	0.782	0.782	0.783	0.784	0.785	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	0.785	0.786	0.787	0.787	0.788	0.789	0.790	0.790	0.791	0.792	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	0.792	0.793	0.794	0.794	0.795	0.796	0.797	0.797	0.798	0.799	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	0.799	0.800	0.801	0.801	0.802	0.803	0.803	0.804	0.805	0.806	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	0.806	0.807	0.808	0.808	0.809	0.810	0.810	0.811	0.812	0.812	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	0.813	0.814	0.814	0.815	0.816	0.816	0.817	0.818	0.818	0.819	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	0.820	0.820	0.821	0.822	0.822	0.823	0.823	0.824	0.825	0.825	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	0.826	0.827	0.827	0.828	0.829	0.829	0.830	0.831	0.831	0.832	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	0.833	0.833	0.834	0.834	0.835	0.836	0.836	0.837	0.838	0.838	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	0.839	0.839	0.840	0.841	0.841	0.842	0.843	0.843	0.844	0.844	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	0.845	0.846	0.846	0.847	0.848	0.848	0.849	0.849	0.850	0.851	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	0.851	0.852	0.852	0.853	0.854	0.854	0.855	0.856	0.856	0.857	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	0.857	0.858	0.859	0.859	0.860	0.860	0.861	0.862	0.862	0.863	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	0.863	0.864	0.865	0.865	0.866	0.866	0.867	0.867	0.868	0.869	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	0.869	0.870	0.870	0.871	0.872	0.872	0.873	0.873	0.874	0.874	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	0.875	0.876	0.876	0.877	0.877	0.878	0.879	0.879	0.880	0.880	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	0.881	0.881	0.882	0.883	0.883	0.884	0.884	0.885	0.885	0.886	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	0.886	0.887	0.888	0.888	0.889	0.889	0.890	0.890	0.891	0.892	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	0.892	0.893	0.893	0.894	0.894	0.895	0.895	0.896	0.897	0.897	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	0.898	0.898	0.899	0.899	0.900	0.900	0.901	0.901	0.902	0.903	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	0.903	0.904	0.904	0.905	0.905	0.906	0.906	0.907	0.907	0.908	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	0.908	0.909	0.910	0.910	0.911	0.911	0.912	0.912	0.913	0.913	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	0.914	0.914	0.915	0.915	0.916	0.916	0.917	0.918	0.918	0.919	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	0.919	0.920	0.920	0.921	0.921	0.922	0.922	0.923	0.923	0.924	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	0.924	0.925	0.925	0.926	0.926	0.927	0.927	0.928	0.928	0.929	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	0.929	0.930	0.930	0.931	0.931	0.932	0.932	0.933	0.933	0.934	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	0.934	0.935	0.936	0.936	0.937	0.937	0.938	0.938	0.939	0.939	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	0.940	0.940	0.941	0.941	0.942	0.942	0.943	0.943	0.943	0.944	0	1	1	2	2	3	3	4	5
88	0.944	0.945	0.945	0.946	0.946	0.947	0.947	0.948	0.948	0.949	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	0.949	0.950	0.950	0.951	0.951	0.952	0.952	0.953	0.953	0.954	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	0.954	0.955	0.955	0.956	0.956	0.957	0.957	0.958	0.958	0.959	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	0.959	0.960	0.960	0.960	0.961	0.961	0.962	0.962	0.963	0.963	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	0.964	0.964	0.965	0.965	0.966	0.966	0.967	0.967	0.968	0.968	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	0.968	0.969	0.969	0.970	0.970	0.971	0.971	0.972	0.972	0.973	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	0.973	0.974	0.974	0.975	0.975	0.975	0.976	0.976	0.977	0.977	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	0.978	0.978	0.979	0.979	0.980	0.980	0.980	0.981	0.981	0.982	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	0.982	0.983	0.983	0.984	0.984	0.985	0.985	0.985	0.986	0.986	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	0.987	0.987	0.988	0.988	0.989	0.989	0.989	0.990	0.990	0.991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	0.991	0.992	0.992	0.993	0.993	0.993	0.994	0.994	0.995	0.995	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	0.996	0.996	0.997	0.997	0.997	0.998	0.998	0.999	0.999	1.000	0	1	1	2	2	3	3	3	4

11 physics 6 appendix
Tuesday, February 01, 2022 8:52:58 PM

ANTILOG TABLE ضدلوگارتمی جدول

											Mean Difference								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.00	1.000	1.002	1.005	1.007	1.009	1.012	1.014	1.016	1.019	1.021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
0.01	1.023	1.026	1.028	1.030	1.033	1.035	1.038	1.040	1.042	1.045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
0.02	1.047	1.050	1.052	1.054	1.057	1.059	1.062	1.064	1.067	1.069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
0.03	1.072	1.074	1.076	1.079	1.081	1.084	1.086	1.089	1.091	1.094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
0.04	1.096	1.099	1.102	1.104	1.107	1.109	1.112	1.114	1.117	1.119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
0.05	1.122	1.125	1.127	1.130	1.132	1.135	1.138	1.140	1.143	1.146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
0.06	1.148	1.151	1.153	1.156	1.159	1.161	1.164	1.167	1.169	1.172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
0.07	1.175	1.178	1.180	1.183	1.186	1.189	1.191	1.194	1.197	1.199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
0.08	1.202	1.205	1.208	1.211	1.213	1.216	1.219	1.222	1.225	1.227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
0.09	1.230	1.233	1.236	1.239	1.242	1.245	1.247	1.250	1.253	1.256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
0.10	1.259	1.262	1.265	1.268	1.271	1.274	1.276	1.279	1.282	1.285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
0.11	1.288	1.291	1.294	1.297	1.300	1.303	1.306	1.309	1.312	1.315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
0.12	1.318	1.321	1.324	1.327	1.330	1.334	1.337	1.340	1.343	1.346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
0.13	1.349	1.352	1.355	1.358	1.361	1.365	1.368	1.371	1.374	1.377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
0.14	1.380	1.384	1.387	1.390	1.393	1.396	1.400	1.403	1.406	1.409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
0.15	1.413	1.416	1.419	1.422	1.426	1.429	1.432	1.435	1.439	1.442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
0.16	1.445	1.449	1.452	1.455	1.459	1.462	1.466	1.469	1.472	1.476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
0.17	1.479	1.483	1.486	1.489	1.493	1.496	1.500	1.503	1.507	1.510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
0.18	1.514	1.517	1.521	1.524	1.528	1.531	1.535	1.538	1.542	1.545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
0.19	1.549	1.552	1.556	1.560	1.563	1.567	1.570	1.574	1.578	1.581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
0.20	1.585	1.589	1.592	1.596	1.600	1.603	1.607	1.611	1.614	1.618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
0.21	1.622	1.626	1.629	1.633	1.637	1.641	1.644	1.648	1.652	1.656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
0.22	1.660	1.663	1.667	1.671	1.675	1.679	1.683	1.687	1.690	1.694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
0.23	1.698	1.702	1.706	1.710	1.714	1.718	1.722	1.726	1.730	1.734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
0.24	1.738	1.742	1.746	1.750	1.754	1.758	1.762	1.766	1.770	1.774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
0.25	1.778	1.782	1.786	1.791	1.795	1.799	1.803	1.807	1.811	1.816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
0.26	1.820	1.824	1.828	1.832	1.837	1.841	1.845	1.849	1.854	1.858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
0.27	1.862	1.866	1.871	1.875	1.879	1.884	1.888	1.892	1.897	1.901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
0.28	1.905	1.910	1.914	1.919	1.923	1.928	1.932	1.936	1.941	1.945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
0.29	1.950	1.954	1.959	1.963	1.968	1.972	1.977	1.982	1.986	1.991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
0.30	1.995	2.000	2.004	2.009	2.014	2.018	2.023	2.028	2.032	2.037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
0.31	2.042	2.046	2.051	2.056	2.061	2.065	2.070	2.075	2.080	2.084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
0.32	2.089	2.094	2.099	2.104	2.109	2.113	2.118	2.123	2.128	2.133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
0.33	2.138	2.143	2.148	2.153	2.158	2.163	2.168	2.173	2.178	2.183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
0.34	2.188	2.193	2.198	2.203	2.208	2.213	2.218	2.223	2.228	2.234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
0.35	2.239	2.244	2.249	2.254	2.259	2.265	2.270	2.275	2.280	2.286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
0.36	2.291	2.296	2.301	2.307	2.312	2.317	2.323	2.328	2.333	2.339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
0.37	2.344	2.350	2.355	2.360	2.366	2.371	2.377	2.382	2.388	2.393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
0.38	2.399	2.404	2.410	2.415	2.421	2.427	2.432	2.438	2.443	2.449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
0.39	2.455	2.460	2.466	2.472	2.477	2.483	2.489	2.495	2.500	2.506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
0.40	2.512	2.518	2.523	2.529	2.535	2.541	2.547	2.553	2.559	2.564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
0.41	2.570	2.576	2.582	2.588	2.594	2.600	2.606	2.612	2.618	2.624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
0.42	2.630	2.636	2.642	2.649	2.655	2.661	2.667	2.673	2.679	2.685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
0.43	2.692	2.698	2.704	2.710	2.716	2.723	2.729	2.735	2.742	2.748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
0.44	2.754	2.761	2.767	2.773	2.780	2.786	2.793	2.799	2.805	2.812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
0.45	2.818	2.825	2.831	2.838	2.844	2.851	2.858	2.864	2.871	2.877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
0.46	2.884	2.891	2.897	2.904	2.911	2.917	2.924	2.931	2.938	2.944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
0.47	2.951	2.958	2.965	2.972	2.979	2.985	2.992	2.999	3.006	3.013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
0.48	3.020	3.027	3.034	3.041	3.048	3.055	3.062	3.069	3.076	3.083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
0.49	3.090	3.097	3.105	3.112	3.119	3.126	3.133	3.141	3.148	3.155	1	1	2	3	4	4	5	6	6

100
95
75
25
5
0

11 physics 6 appendix
Tuesday, February 01, 2022 8:52:59 PM

ANTILOG TABLE ضدلوگارتمی جدول

											Mean Difference								
0.50	3.162	3.170	3.177	3.184	3.192	3.199	3.206	3.214	3.221	3.228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
0.51	3.236	3.243	3.251	3.258	3.266	3.273	3.281	3.289	3.296	3.304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
0.52	3.311	3.319	3.327	3.334	3.342	3.350	3.357	3.365	3.373	3.381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
0.53	3.388	3.396	3.404	3.412	3.420	3.428	3.436	3.443	3.451	3.459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
0.54	3.467	3.475	3.483	3.491	3.499	3.508	3.516	3.524	3.532	3.540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
0.55	3.548	3.556	3.565	3.573	3.581	3.589	3.597	3.606	3.614	3.622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
0.56	3.631	3.639	3.648	3.656	3.664	3.673	3.681	3.690	3.698	3.707	1	2	2	3	4	5	6	7	8
0.57	3.715	3.724	3.733	3.741	3.750	3.758	3.767	3.776	3.784	3.793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
0.58	3.802	3.811	3.819	3.828	3.837	3.846	3.855	3.864	3.873	3.882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
0.59	3.890	3.899	3.908	3.917	3.926	3.936	3.945	3.954	3.963	3.972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
0.60	3.981	3.990	3.999	4.009	4.018	4.027	4.036	4.046	4.055	4.064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
0.61	4.074	4.083	4.093	4.102	4.111	4.121	4.130	4.140	4.150	4.159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.62	4.169	4.178	4.188	4.198	4.207	4.217	4.227	4.236	4.246	4.256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.63	4.266	4.276	4.285	4.295	4.305	4.315	4.325	4.335	4.345	4.355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.64	4.365	4.375	4.385	4.395	4.406	4.416	4.426	4.436	4.446	4.457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.65	4.467	4.477	4.487	4.498	4.508	4.519	4.529	4.539	4.550	4.560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.66	4.571	4.581	4.592	4.603	4.613	4.624	4.634	4.645	4.656	4.667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
0.67	4.677	4.688	4.699	4.710	4.721	4.732	4.742	4.753	4.764	4.775	1	2	3	4	5	7	7	9	10
0.68	4.786	4.797	4.808	4.819	4.831	4.842	4.853	4.864	4.875	4.887	1	2	3	4	5	7	8	9	10
0.69	4.898	4.909	4.920	4.932	4.943	4.955	4.966	4.977	4.989	5.000	1	2	3	4	5	7	8	9	10
0.70	5.012	5.023	5.035	5.047	5.058	5.070	5.082	5.093	5.105	5.117	1	2	3	4	5	7	8	9	11
0.71	5.129	5.140	5.152	5.164	5.176	5.188	5.200	5.212	5.224	5.236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
0.72	5.248	5.260	5.272	5.284	5.297	5.309	5.321	5.333	5.346	5.358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
0.73	5.370	5.383	5.395	5.408	5.420	5.433	5.445	5.458	5.470	5.483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
0.74	5.495	5.508	5.521	5.534	5.546	5.559	5.572	5.585	5.598	5.610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
0.75	5.623	5.636	5.649	5.662	5.675	5.689	5.702	5.715	5.728	5.741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
0.76	5.754	5.768	5.781	5.794	5.808	5.821	5.834	5.848	5.861	5.875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
0.77	5.888	5.902	5.916	5.929	5.943	5.957	5.970	5.984	5.998	6.012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
0.78	6.026	6.039	6.053	6.067	6.081	6.095	6.109	6.124	6.138	6.152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
0.79	6.166	6.180	6.194	6.209	6.223	6.237	6.252	6.266	6.281	6.295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
0.80	6.310	6.324	6.339	6.353	6.368	6.383	6.397	6.412	6.427	6.442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
0.81	6.457	6.471	6.486	6.501	6.516	6.531	6.546	6.561	6.577	6.592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
0.82	6.607	6.622	6.637	6.653	6.668	6.683	6.699	6.714	6.730	6.745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
0.83	6.761	6.776	6.792	6.808	6.823	6.839	6.855	6.871	6.887	6.902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
0.84	6.918	6.934	6.950	6.966	6.982	6.998	7.015	7.031	7.047	7.063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
0.85	7.079	7.096	7.112	7.129	7.145	7.161	7.178	7.194	7.211	7.228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
0.86	7.244	7.261	7.278	7.295	7.311	7.328	7.345	7.362	7.379	7.396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
0.87	7.413	7.430	7.447	7.464	7.482	7.499	7.516	7.534	7.551	7.568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
0.88	7.586	7.603	7.621	7.638	7.656	7.674	7.691	7.709	7.727	7.745	2	3	5	7	9	10	12	14	16
0.89	7.762	7.780	7.798	7.816	7.834	7.852	7.870	7.889	7.907	7.925	2	4	5	7	9	11	12	14	16
0.90	7.943	7.962	7.980	7.998	8.017	8.035	8.054	8.072	8.091	8.110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
0.91	8.128	8.147	8.166	8.185	8.204	8.222	8.241	8.260	8.279	8.299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
0.92	8.318	8.337	8.356	8.375	8.395	8.414	8.433	8.453	8.472	8.492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
0.93	8.511	8.531	8.551	8.570	8.590	8.610	8.630	8.650	8.670	8.690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
0.94	8.710	8.730	8.750	8.770	8.790	8.810	8.831	8.851	8.872	8.892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
0.95	8.913	8.933	8.954	8.974	8.995	9.016	9.036	9.057	9.078	9.099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
0.96	9.120	9.141	9.162	9.183	9.204	9.226	9.247	9.268	9.290	9.311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
0.97	9.333	9.354	9.376	9.397	9.419	9.441	9.462	9.484	9.506	9.528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
0.98	9.550	9.572	9.594	9.616	9.638	9.661	9.683	9.705	9.727	9.750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
0.99	9.772	9.795	9.817	9.840	9.863	9.886	9.908	9.931	9.954	9.977	2	5	7	9	11	14	16	18	20

100
95
75
25
5
0

11 physics 6 appendix
Tuesday, February 01, 2022 8:53:00 PM

NATURAL SINES قدرتی سائن

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0.0017453	0.0034907	0.0052360	0.0069813	0.0087265	0.010472	0.012217	0.013962	0.015707
1	0.017452	0.019197	0.020942	0.022687	0.024432	0.026177	0.027922	0.029666	0.031411	0.033155
2	0.034899	0.036644	0.038388	0.040132	0.041876	0.043619	0.045363	0.047106	0.04885	0.050593
3	0.052336	0.054079	0.055822	0.057564	0.059306	0.061049	0.062791	0.064532	0.066274	0.068015
4	0.069756	0.071497	0.073238	0.074979	0.076719	0.078459	0.080199	0.081939	0.083678	0.085417
5	0.087156	0.088894	0.090633	0.092371	0.094108	0.095846	0.097583	0.09932	0.101056	0.102793
6	0.104528	0.106264	0.107999	0.109734	0.111469	0.113203	0.114937	0.116671	0.118404	0.120137
7	0.121869	0.123601	0.125333	0.127065	0.128796	0.130526	0.132256	0.133986	0.135716	0.137445
8	0.139173	0.140901	0.142629	0.144356	0.146083	0.147809	0.149535	0.151261	0.152986	0.15471
9	0.156434	0.158158	0.159881	0.161604	0.163326	0.165048	0.166769	0.168489	0.170209	0.171929
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0.173648	0.175367	0.177085	0.178802	0.180519	0.182236	0.183951	0.185667	0.187381	0.189095
11	0.190809	0.192522	0.194234	0.195946	0.197657	0.199368	0.201078	0.202787	0.204496	0.206204
12	0.207912	0.209619	0.211325	0.21303	0.214735	0.21644	0.218143	0.219846	0.221548	0.22325
13	0.224951	0.226651	0.228351	0.23005	0.231748	0.233445	0.235142	0.236838	0.238533	0.240228
14	0.241922	0.243615	0.245307	0.246999	0.24869	0.25038	0.252069	0.253758	0.255446	0.257133
15	0.258819	0.260505	0.262189	0.263873	0.265556	0.267238	0.26892	0.2706	0.27228	0.273959
16	0.275637	0.277315	0.278991	0.280667	0.282341	0.284015	0.285688	0.287361	0.289032	0.290702
17	0.292372	0.29404	0.295708	0.297375	0.299041	0.300706	0.30237	0.304033	0.305695	0.307357
18	0.309017	0.310676	0.312335	0.313992	0.315649	0.317305	0.318959	0.320613	0.322266	0.323917
19	0.325568	0.327218	0.328867	0.330514	0.332161	0.333807	0.335452	0.337095	0.338738	0.34038
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
20	0.34202	0.34366	0.345298	0.346936	0.348572	0.350207	0.351842	0.353475	0.355107	0.356738
21	0.358368	0.359997	0.361625	0.363251	0.364877	0.366501	0.368125	0.369747	0.371368	0.372988
22	0.374607	0.376224	0.377841	0.379456	0.38107	0.382683	0.384295	0.385906	0.387516	0.389124
23	0.390731	0.392337	0.393942	0.395546	0.397148	0.398749	0.400349	0.401948	0.403545	0.405142
24	0.406737	0.40833	0.409923	0.411514	0.413104	0.414693	0.416281	0.417867	0.419452	0.421036
25	0.422618	0.424199	0.425779	0.427358	0.428935	0.430511	0.432086	0.433659	0.435231	0.436802
26	0.438371	0.439939	0.441506	0.443071	0.444635	0.446198	0.447759	0.449319	0.450878	0.452435
27	0.45399	0.455545	0.457098	0.45865	0.4602	0.461749	0.463296	0.464842	0.466387	0.46793
28	0.469472	0.471012	0.472551	0.474088	0.475624	0.477159	0.478692	0.480223	0.481754	0.483282
29	0.48481	0.486335	0.48786	0.489382	0.490904	0.492424	0.493942	0.495459	0.496974	0.498488
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
30	0.5	0.501511	0.50302	0.504528	0.506034	0.507538	0.509041	0.510543	0.512043	0.513541
31	0.515038	0.516533	0.518027	0.519519	0.52101	0.522499	0.523986	0.525472	0.526956	0.528438
32	0.529919	0.531399	0.532876	0.534352	0.535827	0.5373	0.538771	0.54024	0.541708	0.543174
33	0.544639	0.546102	0.547563	0.549023	0.550481	0.551937	0.553392	0.554844	0.556296	0.557745
34	0.559193	0.560639	0.562083	0.563526	0.564967	0.566406	0.567844	0.56928	0.570714	0.572146
35	0.573576	0.575005	0.576432	0.577858	0.579281	0.580703	0.582123	0.583541	0.584958	0.586372
36	0.587785	0.589196	0.590606	0.592013	0.593419	0.594823	0.596225	0.597625	0.599024	0.60042
37	0.601815	0.603208	0.604599	0.605988	0.607376	0.608761	0.610145	0.611527	0.612907	0.614285
38	0.615661	0.617036	0.618408	0.619779	0.621148	0.622515	0.62388	0.625243	0.626604	0.627963
39	0.62932	0.630676	0.632029	0.633381	0.634731	0.636078	0.637424	0.638768	0.64011	0.64145
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
40	0.642788	0.644124	0.645458	0.64679	0.64812	0.649448	0.650774	0.652098	0.653421	0.654741
41	0.656059	0.657375	0.658689	0.660002	0.661312	0.66262	0.663926	0.66523	0.666532	0.667833
42	0.669131	0.670427	0.671721	0.673013	0.674302	0.67559	0.676876	0.67816	0.679441	0.680721
43	0.681998	0.683274	0.684547	0.685818	0.687088	0.688355	0.68962	0.690882	0.692143	0.693402
44	0.694658	0.695913	0.697165	0.698415	0.699663	0.700909	0.702153	0.703395	0.704634	0.705872
45	0.707107	0.70834	0.709571	0.710799	0.712026	0.71325	0.714473	0.715693	0.716911	0.718126

100
95
75
25
5
0

11 physics 6 appendix
Tuesday, February 01, 2022 8:53:01 PM

NATURAL SINES قدرتی سائن

46	0.71934	0.720551	0.72176	0.722967	0.724172	0.725374	0.726575	0.727773	0.728969	0.730162
47	0.731354	0.732543	0.73373	0.734915	0.736097	0.737277	0.738455	0.739631	0.740805	0.741976
48	0.743145	0.744312	0.745476	0.746638	0.747798	0.748956	0.750111	0.751264	0.752415	0.753563
49	0.75471	0.755853	0.756995	0.758134	0.759271	0.760406	0.761538	0.762668	0.763796	0.764921
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	0.766044	0.767165	0.768284	0.7694	0.770513	0.771625	0.772734	0.77384	0.774944	0.776046
51	0.777146	0.778243	0.779338	0.78043	0.78152	0.782608	0.783693	0.784776	0.785857	0.786935
52	0.788011	0.789084	0.790155	0.791224	0.79229	0.793353	0.794415	0.795473	0.79653	0.797584
53	0.798636	0.799685	0.800731	0.801776	0.802817	0.803857	0.804894	0.805928	0.80696	0.80799
54	0.809017	0.810042	0.811064	0.812084	0.813101	0.814116	0.815128	0.816138	0.817145	0.81815
55	0.819152	0.820152	0.821149	0.822144	0.823136	0.824126	0.825113	0.826098	0.827081	0.82806
56	0.829038	0.830012	0.830984	0.831954	0.832921	0.833886	0.834848	0.835807	0.836764	0.837719
57	0.838671	0.83962	0.840567	0.841511	0.842452	0.843391	0.844328	0.845262	0.846193	0.847122
58	0.848048	0.848972	0.849893	0.850811	0.851727	0.85264	0.853551	0.854459	0.855364	0.856267
59	0.857167	0.858065	0.85896	0.859852	0.860742	0.861629	0.862514	0.863396	0.864275	0.865151
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
60	0.866025	0.866897	0.867765	0.868632	0.869495	0.870356	0.871214	0.872069	0.872922	0.873772
61	0.87462	0.875465	0.876307	0.877146	0.877983	0.878817	0.879649	0.880477	0.881303	0.882127
62	0.882948	0.883766	0.884581	0.885394	0.886204	0.887011	0.887815	0.888617	0.889416	0.890213
63	0.891007	0.891798	0.892586	0.893371	0.894154	0.894934	0.895712	0.896486	0.897258	0.898028
64	0.898794	0.899558	0.900319	0.901077	0.901833	0.902585	0.903335	0.904083	0.904827	0.905569
65	0.906308	0.907044	0.907777	0.908508	0.909236	0.909961	0.910684	0.911403	0.91212	0.912834
66	0.913545	0.914254	0.91496	0.915663	0.916363	0.91706	0.917755	0.918446	0.919135	0.919821
67	0.920505	0.921185	0.921863	0.922538	0.92321	0.92388	0.924546	0.92521	0.925871	0.926529
68	0.927184	0.927836	0.928486	0.929133	0.929776	0.930418	0.931056	0.931691	0.932324	0.932954
69	0.93358	0.934204	0.934826	0.935444	0.93606	0.936672	0.937282	0.937889	0.938493	0.939094
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
70	0.939693	0.940288	0.940881	0.941471	0.942057	0.942641	0.943223	0.943801	0.944376	0.944949
71	0.945519	0.946085	0.946649	0.94721	0.947768	0.948324	0.948876	0.949425	0.949972	0.950516
72	0.951057	0.951594	0.952129	0.952661	0.953191	0.953717	0.95424	0.954761	0.955278	0.955793
73	0.956305	0.956814	0.957319	0.957822	0.958323	0.95882	0.959314	0.959805	0.960294	0.960779
74	0.961262	0.961741	0.962218	0.962692	0.963163	0.96363	0.964095	0.964557	0.965016	0.965473
75	0.965926	0.966376	0.966823	0.967268	0.967709	0.968148	0.968583	0.969016	0.969445	0.969872
76	0.970296	0.970716	0.971134	0.971549	0.971961	0.97237	0.972776	0.973179	0.973579	0.973976
77	0.97437	0.974761	0.975149	0.975535	0.975917	0.976296	0.976672	0.977046	0.977416	0.977783
78	0.978148	0.978509	0.978867	0.979223	0.979575	0.979925	0.980271	0.980615	0.980955	0.981293
79	0.981627	0.981959	0.982287	0.982613	0.982935	0.983255	0.983571	0.983885	0.984196	0.984503
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
80	0.984808	0.985109	0.985408	0.985703	0.985996	0.986286	0.986572	0.986856	0.987136	0.987414
81	0.987688	0.98796	0.988228	0.988494	0.988756	0.989016	0.989272	0.989526	0.989776	0.990024
82	0.990268	0.990509	0.990748	0.990983	0.991216	0.991445	0.991671	0.991894	0.992115	0.992332
83	0.992546	0.992757	0.992966	0.993171	0.993373	0.993572	0.993768	0.993961	0.994151	0.994338
84	0.994522	0.994703	0.994881	0.995056	0.995227	0.995396	0.995562	0.995725	0.995884	0.996041
85	0.996195	0.996345	0.996493	0.996637	0.996779	0.996917	0.997053	0.997185	0.997314	0.997441
86	0.997564	0.997684	0.997801	0.997916	0.998027	0.998135	0.99824	0.998342	0.998441	0.998537
87	0.99863	0.998719	0.998806	0.99889	0.998971	0.999048	0.999123	0.999194	0.999263	0.999328
88	0.999391	0.99945	0.999507	0.99956	0.99961	0.999657	0.999701	0.999743	0.999781	0.999816
89	0.999848	0.999877	0.999903	0.999925	0.999945	0.999962	0.999976	0.999986	0.999994	0.999998
90	1	0.999998	0.999994	0.999986	0.999976	0.999962	0.999945	0.999925	0.999903	0.999877

100
95
75
25
5
0

11 physics 6 appendix
Tuesday, February 01, 2022 8:53:02 PM

NATURAL COSINES قدرتی کوسائن

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	0.999998	0.999994	0.999986	0.999976	0.999962	0.999945	0.999925	0.999903	0.999877
1	0.999848	0.999816	0.999781	0.999743	0.999701	0.999657	0.99961	0.99956	0.999507	0.99945
2	0.999391	0.999328	0.999263	0.999194	0.999123	0.999048	0.998971	0.99889	0.998806	0.998719
3	0.99863	0.998537	0.998441	0.998342	0.99824	0.998135	0.998027	0.997916	0.997801	0.997684
4	0.997564	0.997441	0.997314	0.997185	0.997053	0.996917	0.996779	0.996637	0.996493	0.996345
5	0.996195	0.996041	0.995884	0.995725	0.995562	0.995396	0.995227	0.995056	0.994881	0.994703
6	0.994522	0.994338	0.994151	0.993961	0.993768	0.993572	0.993373	0.993171	0.992966	0.992757
7	0.992546	0.992332	0.992115	0.991894	0.991671	0.991445	0.991216	0.990983	0.990748	0.990509
8	0.990268	0.990024	0.989776	0.989526	0.989272	0.989016	0.988756	0.988494	0.988228	0.98796
9	0.987688	0.987414	0.987136	0.986856	0.986572	0.986286	0.985996	0.985703	0.985408	0.985109
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0.984808	0.984503	0.984196	0.983885	0.983571	0.983255	0.982935	0.982613	0.982287	0.981959
11	0.981627	0.981293	0.980955	0.980615	0.980271	0.979925	0.979575	0.979223	0.978867	0.978509
12	0.978148	0.977783	0.977416	0.977046	0.976672	0.976296	0.975917	0.975535	0.975149	0.974761
13	0.97437	0.973976	0.973579	0.973179	0.972776	0.97237	0.971961	0.971549	0.971134	0.970716
14	0.970296	0.969872	0.969445	0.969016	0.968583	0.968148	0.967709	0.967268	0.966823	0.966376
15	0.965926	0.965473	0.965016	0.964557	0.964095	0.96363	0.963163	0.962692	0.962218	0.961741
16	0.961262	0.960779	0.960294	0.959805	0.959314	0.95882	0.958323	0.957822	0.957319	0.956814
17	0.956305	0.955793	0.955278	0.954761	0.95424	0.953717	0.953191	0.952661	0.952129	0.951594
18	0.951057	0.950516	0.949972	0.949425	0.948876	0.948324	0.947768	0.94721	0.946649	0.946085
19	0.945519	0.944949	0.944376	0.943801	0.943223	0.942641	0.942057	0.941471	0.940881	0.940288
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
20	0.939693	0.939094	0.938493	0.937889	0.937282	0.936672	0.93606	0.935444	0.934826	0.934204
21	0.93358	0.932954	0.932324	0.931691	0.931056	0.930418	0.929776	0.929133	0.928486	0.927836
22	0.927184	0.926529	0.925871	0.92521	0.924546	0.92388	0.92321	0.922538	0.921863	0.921185
23	0.920505	0.919821	0.919135	0.918446	0.917755	0.91706	0.916363	0.915663	0.91496	0.914254
24	0.913545	0.912834	0.91212	0.911403	0.910684	0.909961	0.909236	0.908508	0.907777	0.907044
25	0.906308	0.905569	0.904827	0.904083	0.903335	0.902585	0.901833	0.901077	0.900319	0.899558
26	0.898794	0.898028	0.897258	0.896486	0.895712	0.894934	0.894154	0.893371	0.892586	0.891798
27	0.891007	0.890213	0.889416	0.888617	0.887815	0.887011	0.886204	0.885394	0.884581	0.883766
28	0.882948	0.882127	0.881303	0.880477	0.879649	0.878817	0.877983	0.877146	0.876307	0.875465
29	0.87462	0.873772	0.872922	0.872069	0.871214	0.870356	0.869495	0.868632	0.867765	0.866897
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
30	0.866025	0.865151	0.864275	0.863396	0.862514	0.861629	0.860742	0.859852	0.85896	0.858065
31	0.857167	0.856267	0.855364	0.854459	0.853551	0.85264	0.851727	0.850811	0.849893	0.848972
32	0.848048	0.847122	0.846193	0.845262	0.844328	0.843391	0.842452	0.841511	0.840567	0.83962
33	0.838671	0.837719	0.836764	0.835807	0.834848	0.833886	0.832921	0.831954	0.830984	0.830012
34	0.829038	0.82806	0.827081	0.826098	0.825113	0.824126	0.823136	0.822144	0.821149	0.820152
35	0.819152	0.81815	0.817145	0.816138	0.815128	0.814116	0.813101	0.812084	0.811064	0.810042
36	0.809017	0.80799	0.80696	0.805928	0.804894	0.803857	0.802817	0.801776	0.800731	0.799685
37	0.798636	0.797584	0.79653	0.795473	0.794415	0.793353	0.79229	0.791224	0.790155	0.789084
38	0.788011	0.786935	0.785857	0.784776	0.783693	0.782608	0.78152	0.78043	0.779338	0.778243
39	0.777146	0.776046	0.774944	0.77384	0.772734	0.771625	0.770513	0.7694	0.768284	0.767165
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
40	0.766044	0.764921	0.763796	0.762668	0.761538	0.760406	0.759271	0.758134	0.756995	0.755853
41	0.75471	0.753563	0.752415	0.751264	0.750111	0.748956	0.747798	0.746638	0.745476	0.744312
42	0.743145	0.741976	0.740805	0.739631	0.738455	0.737277	0.736097	0.734915	0.73373	0.732543
43	0.731354	0.730162	0.728969	0.727773	0.726575	0.725374	0.724172	0.722967	0.72176	0.720551
44	0.71934	0.718126	0.716911	0.715693	0.714473	0.71325	0.712026	0.710799	0.709571	0.70834
45	0.707107	0.705872	0.704634	0.703395	0.702153	0.700909	0.699663	0.698415	0.697165	0.695913

100
95
75
25
5
0

11 physics 6 appendix
Tuesday, February 01, 2022 8:53:03 PM

NATURAL COSINES قدرتی کوسائن

46	0.694658	0.693402	0.692143	0.690882	0.68962	0.688355	0.687088	0.685818	0.684547	0.683274
47	0.681998	0.680721	0.679441	0.67816	0.676876	0.67559	0.674302	0.673013	0.671721	0.670427
48	0.669131	0.667833	0.666532	0.66523	0.663926	0.66262	0.661312	0.660002	0.658689	0.657375
49	0.656059	0.654741	0.653421	0.652098	0.650774	0.649448	0.64812	0.64679	0.645458	0.644124
x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
50	0.642788	0.64145	0.64011	0.638768	0.637424	0.636078	0.634731	0.633381	0.632029	0.630676
51	0.62932	0.627963	0.626604	0.625243	0.62388	0.622515	0.621148	0.619779	0.618408	0.617036
52	0.615661	0.614285	0.612907	0.611527	0.610145	0.608761	0.607376	0.605988	0.604599	0.603208
53	0.601815	0.60042	0.599024	0.597625	0.596225	0.594823	0.593419	0.592013	0.590606	0.589196
54	0.587785	0.586372	0.584958	0.583541	0.582123	0.580703	0.579281	0.577858	0.576432	0.575005
55	0.573576	0.572146	0.570714	0.56928	0.567844	0.566406	0.564967	0.563526	0.562083	0.560639
56	0.559193	0.557745	0.556296	0.554844	0.553392	0.551937	0.550481	0.549023	0.547563	0.546102
57	0.544639	0.543174	0.541708	0.54024	0.538771	0.5373	0.535827	0.534352	0.532876	0.531399
58	0.529919	0.528438	0.526956	0.525472	0.523986	0.522499	0.52101	0.519519	0.518027	0.516533
59	0.515038	0.513541	0.512043	0.510543	0.509041	0.507538	0.506034	0.504528	0.50302	0.501511
x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
60	0.5	0.498488	0.496974	0.495459	0.493942	0.492424	0.490904	0.489382	0.48786	0.486335
61	0.48481	0.483282	0.481754	0.480223	0.478692	0.477159	0.475624	0.474088	0.472551	0.471012
62	0.469472	0.46793	0.466387	0.464842	0.463296	0.461749	0.4602	0.45865	0.457098	0.455545
63	0.45399	0.452435	0.450878	0.449319	0.447759	0.446198	0.444635	0.443071	0.441506	0.439939
64	0.438371	0.436802	0.435231	0.433659	0.432086	0.430511	0.428935	0.427358	0.425779	0.424199
65	0.422618	0.421036	0.419452	0.417867	0.416281	0.414693	0.413104	0.411514	0.409923	0.40833
66	0.406737	0.405142	0.403545	0.401948	0.400349	0.398749	0.397148	0.395546	0.393942	0.392337
67	0.390731	0.389124	0.387516	0.385906	0.384295	0.382683	0.38107	0.379456	0.377841	0.376224
68	0.374607	0.372988	0.371368	0.369747	0.368125	0.366501	0.364877	0.363251	0.361625	0.359997
69	0.358368	0.356738	0.355107	0.353475	0.351842	0.350207	0.348572	0.346936	0.345298	0.34366
x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
70	0.34202	0.34038	0.338738	0.337095	0.335452	0.333807	0.332161	0.330514	0.328867	0.327218
71	0.325568	0.323917	0.322266	0.320613	0.318959	0.317305	0.315649	0.313992	0.312335	0.310676
72	0.309017	0.307357	0.305695	0.304033	0.30237	0.300706	0.299041	0.297375	0.295708	0.29404
73	0.292372	0.290702	0.289032	0.287361	0.285688	0.284015	0.282341	0.280667	0.278991	0.277315
74	0.275637	0.273959	0.27228	0.2706	0.26892	0.267238	0.265556	0.263873	0.262189	0.260505
75	0.258819	0.257133	0.255446	0.253758	0.252069	0.25038	0.24869	0.246999	0.245307	0.243615
76	0.241922	0.240228	0.238533	0.236838	0.235142	0.233445	0.231748	0.23005	0.228351	0.226651
77	0.224951	0.22325	0.221548	0.219846	0.218143	0.21644	0.214735	0.21303	0.211325	0.209619
78	0.207912	0.206204	0.204496	0.202787	0.201078	0.199368	0.197657	0.195946	0.194234	0.192522
79	0.190809	0.189095	0.187381	0.185667	0.183951	0.182236	0.180519	0.178802	0.177085	0.175367
x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
80	0.173648	0.171929	0.170209	0.168489	0.166769	0.165048	0.163326	0.161604	0.159881	0.158158
81	0.156434	0.15471	0.152986	0.151261	0.149535	0.147809	0.146083	0.144356	0.142629	0.140901
82	0.139173	0.137445	0.135716	0.133986	0.132256	0.130526	0.128796	0.127065	0.125333	0.123601
83	0.121869	0.120137	0.118404	0.116671	0.114937	0.113203	0.111469	0.109734	0.107999	0.106264
84	0.104528	0.102793	0.101056	0.09932	0.097583	0.095846	0.094108	0.092371	0.090633	0.088894
85	0.087156	0.085417	0.083678	0.081939	0.080199	0.078459	0.076719	0.074979	0.073238	0.071497
86	0.069756	0.068015	0.066274	0.064532	0.062791	0.061049	0.059306	0.057564	0.055822	0.054079
87	0.052336	0.050593	0.04885	0.047106	0.045363	0.043619	0.041876	0.040132	0.038388	0.036644
88	0.034899	0.033155	0.031411	0.029666	0.027922	0.026177	0.024432	0.022687	0.020942	0.019197
89	0.017452	0.015707	0.013962	0.012217	0.010472	0.0087265	0.0069813	0.0052360	0.0034907	0.0017453
90	0	0.0017453	0.0034907	0.0052360	0.0069813	0.0087265	0.010472	0.012217	0.013962	0.015707

11 physics 6 appendix
Tuesday, February 01, 2022 8:53:04 PM

NATURAL TANGENTS قدرتی مماس

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0.0017453	0.0034907	0.0052360	0.0069814	0.0087269	0.010472	0.012218	0.013964	0.015709
1	0.017455	0.019201	0.020947	0.022693	0.024439	0.026186	0.027933	0.029679	0.031426	0.033173
2	0.034921	0.036668	0.038416	0.040164	0.041912	0.043661	0.04541	0.047159	0.048908	0.050658
3	0.052408	0.054158	0.055909	0.05766	0.059411	0.061163	0.062915	0.064667	0.06642	0.068173
4	0.069927	0.071681	0.073435	0.07519	0.076946	0.078702	0.080458	0.082215	0.083972	0.08573
5	0.087489	0.089248	0.091007	0.092767	0.094528	0.096289	0.098051	0.099813	0.101576	0.10334
6	0.105104	0.106869	0.108635	0.110401	0.112168	0.113936	0.115704	0.117473	0.119243	0.121013
7	0.122785	0.124557	0.126329	0.128103	0.129877	0.131652	0.133428	0.135205	0.136983	0.138761
8	0.140541	0.142321	0.144102	0.145884	0.147667	0.149451	0.151236	0.153022	0.154808	0.156596
9	0.158384	0.160174	0.161965	0.163756	0.165549	0.167343	0.169137	0.170933	0.17273	0.174528
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0.176327	0.178127	0.179928	0.181731	0.183534	0.185339	0.187145	0.188952	0.19076	0.19257
11	0.19438	0.196192	0.198005	0.19982	0.201635	0.203452	0.205271	0.20709	0.208911	0.210733
12	0.212557	0.214381	0.216208	0.218035	0.219864	0.221695	0.223526	0.22536	0.227194	0.229031
13	0.230868	0.232707	0.234548	0.23639	0.238234	0.240079	0.241925	0.243774	0.245624	0.247475
14	0.249328	0.251183	0.253039	0.254897	0.256756	0.258618	0.26048	0.262345	0.264211	0.266079
15	0.267949	0.269821	0.271694	0.273569	0.275446	0.277325	0.279205	0.281087	0.282971	0.284857
16	0.286745	0.288635	0.290527	0.29242	0.294316	0.296213	0.298113	0.300014	0.301918	0.303823
17	0.305731	0.30764	0.309552	0.311465	0.313381	0.315299	0.317219	0.319141	0.321065	0.322991
18	0.32492	0.32685	0.328783	0.330718	0.332656	0.334595	0.336537	0.338481	0.340428	0.342377
19	0.344328	0.346281	0.348237	0.350195	0.352156	0.354119	0.356084	0.358052	0.360022	0.361995
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
20	0.36397	0.365948	0.367928	0.369911	0.371897	0.373885	0.375875	0.377869	0.379864	0.381863
21	0.383864	0.385868	0.387874	0.389884	0.391896	0.39391	0.395928	0.397948	0.399971	0.401997
22	0.404026	0.406058	0.408092	0.41013	0.41217	0.414214	0.41626	0.418309	0.420361	0.422417
23	0.424475	0.426536	0.428601	0.430668	0.432739	0.434812	0.436889	0.438969	0.441053	0.443139
24	0.445229	0.447322	0.449418	0.451517	0.45362	0.455726	0.457836	0.459949	0.462065	0.464185
25	0.466308	0.468434	0.470564	0.472698	0.474835	0.476976	0.47912	0.481267	0.483419	0.485574
26	0.487733	0.489895	0.492061	0.494231	0.496404	0.498582	0.500763	0.502948	0.505136	0.507329
27	0.509525	0.511726	0.51393	0.516138	0.518351	0.520567	0.522787	0.525012	0.52724	0.529473
28	0.531709	0.53395	0.536195	0.538445	0.540698	0.542956	0.545218	0.547484	0.549755	0.55203
29	0.554309	0.556593	0.558881	0.561174	0.563471	0.565773	0.568079	0.57039	0.572705	0.575026
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
30	0.57735	0.57968	0.582014	0.584353	0.586697	0.589045	0.591398	0.593757	0.59612	0.598488
31	0.600861	0.603239	0.605622	0.60801	0.610403	0.612801	0.615204	0.617613	0.620026	0.622445
32	0.624869	0.627299	0.629734	0.632174	0.634619	0.63707	0.639527	0.641989	0.644456	0.646929
33	0.649408	0.651892	0.654382	0.656877	0.659379	0.661886	0.664398	0.666917	0.669442	0.671972
34	0.674509	0.677051	0.679599	0.682154	0.684714	0.687281	0.689854	0.692433	0.695018	0.69761
35	0.700208	0.702812	0.705422	0.708039	0.710663	0.713293	0.71593	0.718573	0.721223	0.723879
36	0.726543	0.729213	0.731889	0.734573	0.737264	0.739961	0.742666	0.745377	0.748096	0.750821
37	0.753554	0.756294	0.759041	0.761796	0.764558	0.767327	0.770104	0.772888	0.77568	0.778479
38	0.781286	0.7841	0.786922	0.789752	0.79259	0.795436	0.79829	0.801151	0.804021	0.806898
39	0.809784	0.812678	0.81558	0.818491	0.821409	0.824336	0.827272	0.830216	0.833169	0.83613
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
40	0.8391	0.842078	0.845066	0.848062	0.851067	0.854081	0.857104	0.860136	0.863177	0.866227
41	0.869287	0.872356	0.875434	0.878521	0.881619	0.884725	0.887842	0.890967	0.894103	0.897249
42	0.900404	0.903569	0.906745	0.90993	0.913125	0.916331	0.919547	0.922773	0.92601	0.929257
43	0.932515	0.935783	0.939063	0.942352	0.945653	0.948965	0.952287	0.955621	0.958966	0.962322
44	0.965689	0.969067	0.972458	0.975859	0.979272	0.982697	0.986134	0.989582	0.993043	0.996515
45	1	1.0035	1.00701	1.01053	1.01406	1.01761	1.02117	1.02474	1.02832	1.03192

100
95
75
25
5
0

11 physics 6 appendix
Tuesday, February 01, 2022 8:53:05 PM

NATURAL TANGENTS قدرتی مماس

46	1.03553	1.03915	1.04279	1.04644	1.0501	1.05378	1.05747	1.06117	1.06489	1.06862
47	1.07237	1.07613	1.0799	1.08369	1.08749	1.09131	1.09514	1.09899	1.10285	1.10672
48	1.11061	1.11452	1.11844	1.12238	1.12633	1.13029	1.13428	1.13828	1.14229	1.14632
49	1.15037	1.15443	1.15851	1.16261	1.16672	1.17085	1.175	1.17916	1.18334	1.18754
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	1.19175	1.19599	1.20024	1.20451	1.20879	1.2131	1.21742	1.22176	1.22612	1.2305
51	1.2349	1.23931	1.24375	1.2482	1.25268	1.25717	1.26169	1.26622	1.27077	1.27535
52	1.27994	1.28456	1.28919	1.29385	1.29853	1.30323	1.30795	1.31269	1.31745	1.32224
53	1.32704	1.33187	1.33673	1.3416	1.3465	1.35142	1.35637	1.36134	1.36633	1.37134
54	1.37638	1.38145	1.38653	1.39165	1.39679	1.40195	1.40714	1.41235	1.41759	1.42286
55	1.42815	1.43347	1.43881	1.44418	1.44958	1.45501	1.46046	1.46595	1.47146	1.47699
56	1.48256	1.48816	1.49378	1.49944	1.50512	1.51084	1.51658	1.52235	1.52816	1.534
57	1.53986	1.54576	1.5517	1.55766	1.56366	1.56969	1.57575	1.58184	1.58797	1.59414
58	1.60033	1.60657	1.61283	1.61914	1.62548	1.63185	1.63826	1.64471	1.6512	1.65772
59	1.66428	1.67088	1.67752	1.68419	1.69091	1.69766	1.70446	1.71129	1.71817	1.72509
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
60	1.73205	1.73905	1.7461	1.75319	1.76032	1.76749	1.77471	1.78198	1.78929	1.79665
61	1.80405	1.8115	1.81899	1.82654	1.83413	1.84177	1.84946	1.8572	1.86499	1.87283
62	1.88073	1.88867	1.89667	1.90472	1.91282	1.92098	1.9292	1.93746	1.94579	1.95417
63	1.96261	1.97111	1.97966	1.98828	1.99695	2.00569	2.01449	2.02335	2.03227	2.04125
64	2.0503	2.05942	2.0686	2.07785	2.08716	2.09654	2.106	2.11552	2.12511	2.13477
65	2.14451	2.15432	2.1642	2.17416	2.18419	2.1943	2.20449	2.21475	2.2251	2.23553
66	2.24604	2.25663	2.2673	2.27806	2.28891	2.29984	2.31086	2.32197	2.33317	2.34447
67	2.35585	2.36733	2.37891	2.39058	2.40235	2.41421	2.42618	2.43825	2.45043	2.4627
68	2.47509	2.48758	2.50018	2.51289	2.52571	2.53865	2.5517	2.56487	2.57815	2.59156
69	2.60509	2.61874	2.63252	2.64642	2.66046	2.67462	2.68892	2.70335	2.71792	2.73263
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
70	2.74748	2.76247	2.77761	2.79289	2.80833	2.82391	2.83965	2.85555	2.87161	2.88783
71	2.90421	2.92076	2.93748	2.95437	2.97144	2.98868	3.00611	3.02372	3.04152	3.0595
72	3.07768	3.09606	3.11464	3.13341	3.1524	3.17159	3.191	3.21063	3.23048	3.25055
73	3.27085	3.29139	3.31216	3.33317	3.35443	3.37594	3.39771	3.41973	3.44202	3.46458
74	3.48741	3.51053	3.53393	3.55761	3.5816	3.60588	3.63048	3.65538	3.68061	3.70616
75	3.73205	3.75828	3.78485	3.81177	3.83906	3.86671	3.89474	3.92316	3.95196	3.98117
76	4.01078	4.04081	4.07127	4.10216	4.1335	4.1653	4.19756	4.2303	4.26352	4.29724
77	4.33148	4.36623	4.40152	4.43735	4.47374	4.51071	4.54826	4.58641	4.62518	4.66458
78	4.70463	4.74534	4.78673	4.82882	4.87162	4.91516	4.95945	5.00451	5.05037	5.09704
79	5.14455	5.19293	5.24218	5.29235	5.34345	5.39552	5.44857	5.50264	5.55777	5.61397
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
80	5.67128	5.72974	5.78938	5.85024	5.91236	5.97576	6.04051	6.10664	6.17419	6.24321
81	6.31375	6.38587	6.45961	6.53503	6.61219	6.69116	6.77199	6.85475	6.93952	7.02637
82	7.11537	7.20661	7.30018	7.39616	7.49465	7.59575	7.69957	7.80622	7.91582	8.02848
83	8.14435	8.26355	8.38625	8.51259	8.64275	8.77689	8.9152	9.05789	9.20516	9.35724
84	9.51436	9.6768	9.84482	10.0187	10.1988	10.3854	10.5789	10.7797	10.9882	11.2048
85	11.4301	11.6645	11.9087	12.1632	12.4288	12.7062	12.9962	13.2996	13.6174	13.9507
86	14.3007	14.6685	15.0557	15.4638	15.8945	16.3499	16.8319	17.3432	17.8863	18.4645
87	19.0811	19.7403	20.4465	21.2049	22.0217	22.9038	23.8593	24.8978	26.0307	27.2715
88	28.6363	30.1446	31.8205	33.6935	35.8006	38.1885	40.9174	44.0661	47.7395	52.0807
89	57.29	63.6567	71.6151	81.847	95.4895	114.589	143.237	190.984	286.478	572.957
90	∞									

11 physics 6 appendix
Tuesday, February 01, 2022 8:53:06 PM

State Council of Educational Research and Training, Chennai-6

Higher Secondary First Year Physics Volume 1

طبیعیات برائے ہائرسکنڈری سال اوّل - جلد I-

Academic Head and Co-ordinator :

Dr. Mrs. S. Shameem,
Deputy Director, SCERT, Chennai

Translators :

P. Siddeeq Ahmed
P.G. Asst. Islamiah Boys' HSS
Vaniyambadi. Tirupattur District.

Mohamed Jaweed Akram
P.G. Asst. Islamiah Boys' HSS
Vaniyambadi. Tirupattur District.

Syeda Raheemunnisa
B.T. Asst., Iqra Matriculation School,
Oomerabad, Vellore Dt.

M. Irshad Khan
B.T. Asst. Islamiah Boys' HSS
Vaniyambadi. Tirupattur District.

Reviewer

Syed Bilal Ahmed
B.T. Asst., Panchayat Urdu Middle School,
Jafarabad, Vaniyambadi,Tirupattur District.

Co-ordinators :

Dr. R. Anbazhagan,
Principal, DIET, Ranipet District.

M. Suresh Kumar,
Lecturer, DIET, Ranipet,

A. Siva Kumar,
Lecturer, DIET, Ranipet

Urdu DTP and Layout
TAJ Printers, Vaniyambadi.

Co-ordination
Ramesh Munisamy

تعلیمی سربراہ اور معاون

ڈاکٹر مسز لیس۔ شمیم
ڈپٹی ڈائرکٹر، ایس.سی.ای.آر.ٹی، چنئی۔

مترجمین

پی۔صدیق احمد
پی.جی.اسسٹنٹ، اسلامیہ بائس ہائرسکنڈری اسکول، وانم باڑی۔

محمد جاوید اکرم
پی.جی.اسسٹنٹ، اسلامیہ بائس ہائرسکنڈری اسکول، وانم باڑی، ضلع ترپاتور۔

سیدہ رحیم النساء
بی.ٹی.اسسٹنٹ، اقرا میٹریکولیشن اسکول، عمرآباد، ضلع ویلور۔

یم۔ارشاد خان
بی.ٹی.اسسٹنٹ، اسلامیہ بائس ہائرسکنڈری اسکول، وانم باڑی۔ ضلع ترپاتور۔

نظر ثانی

سید بلال احمد
بی.ٹی.اسسٹنٹ، پنچایت اردو مڈل اسکول، جعفرآباد، وانم باڑی۔ ضلع ترپاتور۔

معاونین

ڈاکٹر آر. انبوگن
پرنسپال، DIET، رانی پیٹ

یم.سریش کمار
اسسٹنٹ پروفیسر، DIET، رانی پیٹ

اے۔ سواکمار
اسسٹنٹ پروفیسر، DIET، رانی پیٹ

ترتیب وتزئین

تاج پرنٹرس ، وانم باڑی۔

This book has been printed on 80 G.S.M.
Elegant Maplitho paper.
Printed by offset at:

11 physics 6 appendix
Tuesday, February 01, 2022 8:53:07 PM