GOVERNMENT OF TAMIL NADU

ഹയർസെക്കന്ററി ഒന്നാം വർഷം

HIGHER SECONDARY FIRST YEAR

ഗണിതം

MATHEMATICS

വാല്യം - I

VOLUME - I

MALAYALAM MEDIUM

Department of School Education

Untouchability is Inhuman and a Crime

XI_Maths_Preliminary_V-1_Mal.indd 1 14-02-2023 16:59:46

Government of Tamil Nadu

First Edition - 2022

Revised Edition - 2023

Reprint - 2024

(Published under new syllabus)

Content Creation

State Council of Educational
Research and Training

© SCERT 2022

Printing & Publishing

Tamil Nadu Textbook and Educational
Services Corporation

www.textbooksonline.tn.nic.in

EE_Malayalam_FM.indd 2 03-01-2024 10:33:53

പുസ്തകം എങ്ങനെ ഉപയോഗിക്കാം

ഗണിതത്തിന്റെ സാധ്യതകൾ

- ഉന്നതവിദ്യാഭ്യാസത്തിന്റെ അവസരങ്ങൾ കോഴ്സുകൾ, സ്ഥാപനങ്ങൾ, മത്സര പരീക്ഷകൾ എന്നിവയെക്കുറിച്ചുള്ള അറിവു പകരുന്നു.
- വിദ്യാഭ്യാസ ശ്രേണിയിലേയ്ക്ക് കയറിപ്പറ്റുന്നതിന് സഹായിക്കും വിധം സാമ്പത്തിക സഹായത്തിനുള്ള സാധ്യത

പഠന ലക്ഷ്യങ്ങൾ

- യൂണിറ്റിലേയ്ക്കുള്ള തിരിഞ്ഞുനോട്ടം
- ഓരോ യൂണിറ്റിലേയും പഠന ലക്ഷ്യങ്ങളെ കുറിച്ചുള്ള വ്യക്തത വരുത്തൽ

നിങ്ങൾക്കറിയാമോ?

- ആഴത്തിലും വിശാലവുമായ പഠനത്തിന് ആവശ്യമായ കൂടുതൽ ആശയങ്ങൾ തിരയുന്നതിന് താത്പര്യം ജനിപ്പിക്കുവാൻ പാഠ ഭാഗവുമായി ബന്ധപ്പെടുത്തിയുള്ള അധിക വസ്തുതകൾ ഉൾപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു

ZNYP5

- ആശയങ്ങളെക്കുറിച്ചും തെളിവുകളെക്കുറിച്ചുമുള്ള കാഴ്ചപ്പാട്
- വീഡിയോകൾ, ആനിമേഷനുകൾ,, ട്യൂട്ടോറിയൽസ്.

ഐ.സി.റ്റി

- ആശയങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള ഒരു വിശകലനം വർദ്ധിപ്പിക്കൽ
- ആശയങ്ങളെക്കുറിച്ച് മനസ്സിലാക്കുന്നതിനുസ്സതും, അറിവ് മെച്ചപ്പെടുത്തുന്നതിനുമുള്ള ഒരു കാഴ്ചപ്പാട്.
- ഒരു യൂണിറ്റും മറ്റൊരു യൂണിറ്റും തമ്മിലുള്ള ആശയങ്ങൾ ബന്ധിപ്പിക്കൽ
- ക്ലാസ് റൂമിലുള്ള പ്രായോഗിക പഠനത്തിനുള്ള ഡിജിടൽ മികവ് ഉപയോഗിക്കൽ.

സംഗ്രഹം

- ഓരോ അധ്യായത്തിലെയും ആശയങ്ങളെക്കുറിച്ചും മുഖ്യവിവരങ്ങളെ കുറിച്ചുമുള്ള പുനരവലോകനം.

മൂല്യനിർണ്ണയം

- അഭ്യാസത്തിലെ ചോദ്യങ്ങൾ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നതിലൂടെ കുട്ടികൾക്ക് ലഭിക്കുന്ന അറിവ് പരിശോധിക്കൽ.

റഫറൻസ് ബുക്കുകൾ

- കൂടുതൽ അറിവ് കിട്ടുന്നതിനു വേണ്ടി വായിക്കുന്ന ബുക്കുകളുടെ എണ്ണം.

ഉയർന്ന ചിന്താഗതിക്കുള്ള സാധ്യത

- ഉന്നതമത്സര പരീക്ഷകളായ, ജെ.ഇ.ഇ മാത്സ് ഒളിമ്പ്യാഡ് എന്നിവയിലേയ്ക്ക് വേണ്ടി കുട്ടികളെ പരിശീലിപ്പിക്കുന്നതിനു വേണ്ടിയും അവയുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ചോദ്യങ്ങൾ ചെയ്തു പരിശീലിക്കുന്നതിനും ഇത്തരത്തിലുള്ള ബുക്കുകളിൽ അനുബന്ധപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട്

പദസൂചിക

- തിഴ്പദത്തിന് സമാനമായ ഗണിതപദങ്ങൾ

ഗണിതപഠനം

ശരിയായ പഠനം എന്നത് ആശയങ്ങളെ ആഴത്തിൽ മനസ്സിലാക്കി പഠിക്കുക എന്നതാണ്. ഓരോ അധ്യായം തുടങ്ങുന്നത് ആമുഖം, പഠനലക്ഷ്യം, സിദ്ധാന്തങ്ങൾ, ഫലങ്ങൾ, തെളിവുകൾ എന്നിവയോടു കൂടിയാണ്. ഇതിനെ തുടർന്ന് പരിഹരിക്കപ്പെട്ട പ്രശ്നങ്ങളും അഭ്യാസങ്ങളും ഇതുമായി ബന്ധപ്പെട്ട് പല തരത്തിലുണ്ട്. പ്രശ്നം നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നതിലൂടെ വിദ്യാർത്ഥിയുടെ കഴിവ് വർദ്ധിക്കാൻ സാധിക്കുന്നു. അതിനാൽ അധ്യാപകരുടെ പങ്ക് എന്നത് കുട്ടികളുടെ പ്രശ്നം പരിഹരിച്ചുകൊടുക്കുന്നതും അതുമായി ബന്ധപ്പെട്ട് പ്രശ്നങ്ങൾ സ്വന്തമായി ചെയ്യുന്നതിനും തയ്യാറാക്കുന്നു എന്നതാണ്. ഹയർസെക്കണ്ടറി പഠനത്തിന്റെ ഒന്നാം വർഷമെന്നത് ഉന്നത വിദ്യാഭ്യാസത്തിലേയ്ക്കുള്ള അടിസ്ഥാനമാണ്. അതിനാൽ ഈ പുസ്തകത്തിൽ ഊന്നൽ എൽകിയിട്ടുള്ള എല്ലാ ആശയങ്ങളക്കും അതിന്റേതായ പ്രാധാന്യം നൽകി കുട്ടികൾ മനസ്സിലാക്കേണ്ടതാണ്.

XI_Maths_Preliminary_V-1_Mal.indd 3 14-02-2023 16:59:46

ഉള്ളടക്കം

1	**ഗണങ്ങളും ബന്ധങ്ങളും, ഫലനങ്ങളും**	**1-66**	**ജൂൺ**
1.1	ആമുഖം	1	
1.2	ഗണങ്ങൾ	2	
1.3	കാർട്ടീഷ്യൻ ഗുണനം	6	
1.4	സ്ഥിരങ്ങളും, ചരങ്ങളും, ഇടവേളകളും സമീപസ്ഥലങ്ങളും	10	
1.5	ബന്ധങ്ങൾ	13	
1.6	ഫലനങ്ങൾ	26	
1.7	പരിവർത്തനങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ഫലനങ്ങളുടെ ഗ്രാഫിംഗ്	52	
2	**അടിസ്ഥാന ബീജഗണിതം**	**67-109**	**ജൂൺ/ജൂലൈ**
2.1	ആമുഖം	67	
2.2	വാസ്തവികസംഖ്യാ സമ്പ്രദായം	68	
2.3	കേവലമൂല്യം (മോഡ് മൂല്യം)	71	
2.4	രേഖീയ അസമവാക്യം	74	
2.5	ദ്വിഘാത ഫലനങ്ങൾ	76	
2.6	ബഹുപദ ഫലനങ്ങൾ	82	
2.7	പരിമേയ സംഖ്യാ ഫലനങ്ങൾ	88	
2.8	ഘാതാങ്കവും റാഡിക്കലും	94	
2.9	ലോഗരിതം	100	
2.10	ദൈനംദിന ജീവിതത്തിൽ ബഹുപദവ്യംജകത്തിന്റെ പങ്ക്	105	
3	**ത്രികോണമിതി**	**110-191**	**ജൂലൈ**
3.1	ആമുഖം	110	
3.2	അടിസ്ഥാന ഫലങ്ങളെ ഓർത്തെടുക്കൽ	111	
3.3	റേഡിയൻ അളവ്	118	
3.4	ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളും അവയുടെ സവിശേഷതകളും	122	
3.5	ത്രികോണമിതി സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ	134	
3.6	ത്രികോണമിതി സമീകരണങ്ങൾ	157	
3.7	ത്രികോണത്തിന്റെ ഗുണങ്ങൾ	167	
3.8	ത്രികോണത്തിന്റെ പ്രയോഗം	178	
3.9	വിപരീത ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങൾ	184	

XI_Maths_Preliminary_V-1_Mal.indd 4 14-02-2023 16:59:46

4	**സങ്കലനവും ഗണിതശാസ്ത്ര സമാഹാരവും**	**192-246**	**ജൂലൈ/ആഗസ്റ്റ്**
4.1	ആമുഖം	192	
4.2	എണ്ണലിന്റെ അടിസ്ഥാന തത്വങ്ങൾ	194	
4.3	ഘടക ഗുണിതം	202	
4.4	ക്രമപരിവർത്തനം	207	
4.5	സംയോജനം	221	
4.6	ഗണിതാഗമനം	232	
5	**ദ്വിപദ സിദ്ധാന്തം,അനുക്രമവും കൂടാതെ ശ്രേണിയും**	**247-285**	**ആഗസ്റ്റ്**
5.1	ആമുഖം	247	
5.2	ദ്വിപദ സിദ്ധാന്തം	248	
5.3	ദ്വിപദ സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ പ്രത്യേക തരങ്ങൾ	251	
5.4	പരിമിതശ്രേണി	256	
5.5	പരിമിത അനുക്രമം	265	
5.6	അനന്തമായ ശ്രേണികളും അനുക്രമങ്ങളും	269	
6	**ദ്വിമാന വിശ്ലേഷക ജ്യാമിതി**	**286-345**	**ആഗസ്റ്റ് / സെപ്റ്റംബർ**
6.1	ആമുഖം	286	
6.2	ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ ബിന്ദുപഥം	288	
6.3	നേർരേഖകൾ	294	
6.4	രണ്ടു നേർരേഖകൾക്കിടയിലുള്ള കോണം	314	
6.5	ഒരു ജോടി നേർരേഖകൾ	328	
	ഉത്തരങ്ങൾ	**346-355**	
	ഗണിതപദങ്ങൾ	**356-359**	

5SIKJ

E-book

4EK6X

Assessment

XI_Maths_Preliminary_V-1_Mal.indd 5 14-02-2023 16:59:46

EXAMS

Joint Entrance Examination (JEE) Main	
Purpose	For Admission in B. E./B. Tech., B. Arch., B. Planning
Eligibility	Class 12 pass (PCM)
Application Mode	Online
Source	http://jeemain.nic.in
JEE Advanced	
Purpose	Admission in UG programmes in IITs and ISM Dhanbad
Eligibility	Class 12 Pass (PCM)
Application Mode	Online
Source	http://jeeadv.iitd.ac.in/
Indian Maritime University Common Entrance Test	
Purpose	Admission in Diploma in Nautical Science (DNS) leading to BSc. (Nautical Science)
Eligibility	Class 12 (PCM)
Application Mode	By post
Source	www.imu.edu.in/index.php
Indian Navy B.Tech Entry Scheme	
Purpose	Admission in Indian Navy B.Tech course
Eligibility	Class 12 passed
Application Mode	Online
Source	www.nausena-bharti.nic.in/index.php

EXAMS

Indian Navy Sailors Recruitment	
Purpose	Admission in 24 weeks Basic training at INS Chilka followed by Professional training
Eligibility	Class 12 (Maths and Physics/Chem./Bio/Computer Sc.)
Application Mode	Online, By Post
Source	www.nausena-bharti.nic.in/index.php
Defence Indian Army Technical Entry Scheme (TES)	
Purpose	Technical Entry to Army
Eligibility	Class 12 PCM
Application Mode	Online
Source	www.joinindianarmy.nic.in/
National Defence Academy and Naval Academy Examination (I)	
Purpose	Admission to Army and Air Force wings of NDA and 4 years B. Tech course for the Indian Naval Academy Course (INAC)
Eligibility	Class 12 Passed
Application Mode	Online
Source	www.upsc.gov.in/

XI_Maths_Preliminary_V-1_Mal.indd 6 14-02-2023 16:59:47

XI_Maths_Preliminary_V-1_Mal.indd 7

ഹയർ സെക്കന്ററി പഠനം പൂർത്തിയാക്കിയശേഷമുള്ള സാധ്യത



EXAMS

- If you have aspiration to become a scientist/teacher, you can do degree course in mathematics in any college of your choice. Doing B.Sc., mathematics with your knowledge which acquired in XII standard mathematics will definitely elevate you to a better career.
- There are some institutions such as IIT's, IISc., ISI's and Anna University which admit students at XII Standard level for their Integrated Courses leading to the award of M.Sc., degree in mathematics/engineering/Statistics/ Computer Science .

  In Mathematics, the following degrees programmes are offered:

  - 3-year BSc
  - 3-year B. Math
  - 4-year B. Tech
  - 4-year Integrated B.Sc-B.Ed.
  - 4-year BS
  - 5-year Integrated M.Sc /MS

BITSAT
Purpose- For admission to Integrated First Degree Programmes in BITS Pilani, Goa & Hyderabad campuses.
National Aptitude Test in Architecture (NATA)
Purpose- Admission to B.Arch. program
Kishore Vaigyanik Protsahan Yojana (KVPY)
Purpose- Fellowship and admission to IISc Banglore in 4 year BS Degree
Indian Statistical Institute (ISI) Admission
Purpose-Admission in B Stat (Hons), B Math (Hons)
Chennai Mathematical Institute
Purpose- Admission in BSc (Hons) in Mathematics and Computer Science, BSc (Hons) in Mathematics and Physics



Job Opportunities

- You have acquired sufficient analytical still to appear for competitive examinations conducted by various organizations such as TNPSC, UPSC, BSRB, RSB.
- You are placed with better opportunity to get recruitment directly into some of the top Multi National Companies.
- You can plan to take up engineering degree course to acquire BE/B.TECH in any of the leading Technical Institutions/Universities/Engineering colleges. Institutions such as IIT's , IISc, NIT's conduct All India Level Entrance Examinations to admit students.

• Indian Forest Services	• Scientist Jobs in ISRO, DRDO, CSIR labs
• Union Public Service Commission	• Staff Selection Commission
• Indian Defense Services	• Public Sector Bank
• Tax Assistant	• Statistical Investigator
• Combined Graduate Level Exam	• Tamil Nadu Public Service Commission
• Teaching Profession	

14-02-2023 16:59:47

XI_Maths_Preliminary_V-1_Mal.indd 8

Scholarship and Research Opportunities



FINANCIAL ASSISTANCE

- **Scholarship for Graduate and Post – Graduate courses**
- **NTSE at the end of X (from class XI to Ph.D)**
- **International Olympiad: for getting stipend for Higher Education in Science and Mathematics**
- **DST – INSPIRE Scholarships (for UG and PG)**
- **DST – INSPIRE Fellowships (for Ph.D)**
- **UGC National Fellowships (for Ph.D)**
- **Indira Gandhi Fellowship for Single Girl Child (for UG and PG)**
- **Moulana Azad Fellowship for minorities (for Ph.D)**
- **In addition various fellowships for SC / ST / PWD / OBC etc are available. (Visit website of University Grants Commission (UGC) and Department of Science and Technology (DST))**
- **University Fellowships**
- **Tamil Nadu Collegiate Education fellowship.**



RESEARCH INSTITUTIONS

NAME OF THE INSTITUTION	WEBSITE
Indian Institute of Science (IISc) Bangalore	www.iisc.ac.in
Chennai Mathematical Institute (CMI) Chennaie	www.cmi.ac.in
Tata Institue of Fundamental Research (TIFR) Mumbai	www.tifr.res.in
Indian Institute of Space Science and Technology (IIST) Trivandrum	www.iist.ac.in
National Institute of Science Education and Research (NIS-ER)	www.niser.ac.in
Birla Institute of Technology and Science, Pilani	www.bits-pilani.ac.in
Indian Institute of Science Education and Research	www.iiseradmission.in
Anna University	https://www.annauniv.edu/
Indian Institute of Technology in various places (IIT's)	www.iitm.ac.in
National Institute of Technology (NITs)	www.nitt.edu
Central Universities	www.cucet.ac.in
State Universities	www.ugc.ac.in
Tamil Nadu agricultural University (tnau.ac.in)	tnau.ac.in
International Institute of Information Technology	www.iiit.ac.in
The Institute of Mathematical Sciences (IMSC) Chennai.	www.imsc.res.in
Hyderabad Central university, Hyderabad.	www.uohyd.ac.in
Delhi University, Delhi	www.du.ac.in
Mumbai University, Mumbai	www.mu.ac.in
Savithiri Bai Phule Pune University, Pune	www.unipune.ac.in

14-02-2023 16:59:48

അധ്യായം 1

ഗണങ്ങളും ബന്ധങ്ങളും, ഫലനങ്ങളും

"ഒരു കൂട്ടം സ്വയം ഒന്നായി ചിന്തിക്കാൻ അനുവദിക്കുന്ന നിരവധി ആണ് ഒരു ഗണം"

– കാന്റർ

R5CSW

1.1 ആമുഖം

ഗണിതശാസ്ത്രചിന്തയുടെ മുഖ്യധാരയിൽ ഗണങ്ങൾ, ബന്ധങ്ങൾ, പ്രവർത്തനങ്ങൾ എന്നിവയുടെ ആശയങ്ങൾ ഒരു അടിസ്ഥാന സ്ഥാനം വഹിക്കുന്നു. റഷ്യൻ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞൻ ലൂസിൻ ശരിയായി പറഞ്ഞതുപോലെ ഫലനങ്ങൾ എന്ന ആശയം പെട്ടെന്ന് ഉയർന്നുവന്നില്ല. ഇത് കാലക്രമേണ ആഴത്തിലുള്ള മാറ്റങ്ങൾക്ക് വിധേയമായി. ഗലീലിയോ (1564-1642) ഗ്രഹചലനങ്ങളെ കുറിച്ചുള്ള പഠനത്തിൽ ഒരു അളവിനെ മറ്റൊന്നിനെ ആശ്രയിക്കുന്നത് – വ്യക്തമായി ഉപയോഗിച്ചു. ജ്യാമിതീയമായി ഒരു വക്രത്താൽ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്ന രണ്ട് വേരിയബിളുകളിലെ ഒരു സമവാക്യം വേരിയബിൾ അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള ആശയത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നുവെന്ന് സെസ്കാർട്ട്സ്(1596-1650) വ്യക്തമായി പ്രസ്താവിച്ചു. 1673 കയ്യെഴുത്തു പ്രതിയിൽ "ഫലനം" എന്നവാക്ക് ലിബ്നിറ്റ്സ് (1646-1716) ഉപയോഗിച്ചു വ്യത്യാസപ്പെടുന്ന ഏത് അളവിനെയും ഇത് അർത്ഥമാക്കുന്നു. ഗോസിലെ വിദ്യാർത്ഥിയായ സിറിക്ലെറ്റ് (1805-1859) ഫലനത്തിന്റെ ആധുനിക "ഔപചാരിക" നിർവചനം നൽകിയത്, $y = f(x)$ എന്ന ചിഹ്നത്തോടൊപ്പമാണ്. ഇരുപതാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ഗണങ്ങളും സംഖ്യ അല്ലെങ്കിൽ അക്കങ്ങളല്ലാത്ത മൂല്യങ്ങളും തമ്മിലുള്ള പ്രത്യേകതയെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്ന എല്ലാ അനിയന്ത്രിതമായ കത്തിടപാടുകളും ഉൾപ്പെടുത്തുന്നതിനായി ഈ ആശയം വിപുലീകരിച്ചു.

ഗണസിദ്ധാന്തത്തിന്റെ വികാസത്തോടെ കാന്റർ (1845-1918) ഫലനത്തെക്കുറിച്ചുള്ള അദ്ദേഹത്തിന്റെ ആശയം വികസിച്ചുകൊണ്ടേയിരുന്നു.സാദൃശ്യം എന്ന സങ്കല്പത്തിൽ നിന്ന് ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞൻ ബന്ധത്തിന്റെ സങ്കല്പത്തിലേക്ക് നീങ്ങി. എന്നിരുന്നാലും ഇപ്പോൾ കണക്കുകൂട്ടൽ സിദ്ധാന്തത്തിൽ ഫലനത്തെ ഒരു ബന്ധമായിട്ടല്ല. മറിച്ച് ഒരു കമ്പ്യൂട്ടേഷണൽ നിയമമായിട്ടാണ് കാണുന്നത്. കൃത്യമബുദ്ധി വികസിപ്പിക്കുന്നതിന് അനുയോജ്യമായ രീതിയിൽ ഒരു ഫലനത്തിന്റെ ആധുനിക നിർവ്വചനം ആപേക്ഷികതയുടെ അടിസ്ഥാനത്തിലാണ് നൽകിയിരിക്കുന്നത്.

മുമ്പത്തെ ക്ലാസുകളിൽ ഞങ്ങൾ പഠിക്കുകയും – അവയിലെ യഥാർത്ഥ അക്കങ്ങളും ഗണിത പ്രവർത്തനങ്ങളും നന്നായി അറിയുകയും ചെയ്യുന്നു. വാസ്തവിക സംഖ്യാഗണങ്ങൾ, പെൻചിത്രങ്ങൾ, ഗണങ്ങളുടെ കാർട്ടിഷ്യൻ ഉല്പന്നം, ബന്ധങ്ങളുടെയും ഫലനങ്ങളുടെയും അടിസ്ഥാന നിർവചനങ്ങൾ എന്നിവയെക്കുറിച്ചും ഞങ്ങൾ പഠിച്ചു. മികച്ച ഗ്രാഹ്യത്തിനായി ഗണങ്ങളെക്കുറിച്ചും ഗണങ്ങളുടെ കാർട്ടിഷ്യൻ ഉല്പന്നങ്ങളെക്കുറിച്ചും ഞങ്ങൾ കൂടുതൽ ഓർമ്മിക്കുന്നു. ഈ അധ്യായത്തിൽ "ബന്ധങ്ങൾ", "ഫലനങ്ങൾ" എന്നിവയുടെ ഗണിതശാസ്ത്ര സങ്കല്പങ്ങളിലേക്കുള്ള ഒരു പുതിയ മുഖച്ഛായ ഞങ്ങൾ കാണുന്നു.



കാന്റർ
1845-1918

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 1 14-02-2023 16:40:19

പഠനലക്ഷ്യങ്ങൾ

ഈ അധ്യായം പൂർത്തിയാകുമ്പോൾ - വിദ്യാർത്ഥികൾ

- ഗണങ്ങളുടെയും കാർട്ടീഷ്യൻ ഉല്പന്നങ്ങളുടെയും - നിരവധി ഗുണങ്ങളെ പട്ടികപ്പെടുത്തുകയും പ്രവർത്തിക്കുകയും ചെയ്യുമെന്ന് പ്രതീക്ഷിക്കുന്നു;
- സ്ഥിരാംഗം, ചരങ്ങൾ, ഇടവേളകൾ, എന്നിവയുടെ - ആശയങ്ങൾ അറിയുക;
- വിവിധതരം ഫലനങ്ങളെക്കുറിച്ച് മനസ്സിലാക്കുക ആവശ്യമായ ഏതെങ്കിലും തരത്തിലുള്ള ബന്ധം സ്ഥാപിക്കുക
- വ്യത്യസ്തരീതികളിൽ ഫലനങ്ങളെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു;
- പ്രാഥമിക ഫലനങ്ങൾ, ഫലനങ്ങളുടെ തരങ്ങൾ, ഒരു ഫലനത്തിന്റെ വിപരീതം ഉൾപ്പെടെയുള്ള - ഫലനങ്ങളുടെ പ്രവർത്തനങ്ങൾ;
- ചില പ്രത്യേക പ്രവർത്തനങ്ങളുടെ ഗ്രാഫുകൾ - തിരിച്ചറിയുക;
- താരതമ്യേന സങ്കീർണ്ണമായ ചില ഫലനങ്ങളുടെ - ഗ്രാഫുകൾ ദൃശ്യവൽക്കരിക്കുകയും സ്കെച്ച് ചെയ്യുകയും ചെയ്യുക.

1.2 ഗണങ്ങൾ

മുൻപത്തെ ക്ലാസ്സുകളിൽ ഒരു ഗണം നന്നായി നിർവചിക്കപ്പെട്ട വസ്തുക്കളുടെ ഒരു ശേഖരമാണെന്ന് ഞങ്ങൾ കണ്ടു. ആധുനിക ഗണിത ശാസ്ത്രത്തിന്റെ നിർമ്മാണ ബ്ലോക്കുകളാണ് ഗണങ്ങൾ എന്നതിനാൽ ഗണങ്ങളുടെ ആശയങ്ങൾ ശ്രദ്ധാപൂർവ്വം പഠിക്കണം. ഇപ്പോൾ നന്നായി നിർവചിക്കപ്പെട്ടത് എന്ന പദം കുറച്ചുകൂടി ആഴത്തിൽ നോക്കുന്നു.

രണ്ട് പ്രസ്താവനകൾ പരിഗണിക്കുക:

(i) ഊട്ടി റോസ് പൂന്തോട്ടത്തിലെ എല്ലാ മനോഹരമായ പൂക്കളുടെ ശേഖരം.

(ii) തമിഴ്നാട്ടിലെ എല്ലാ വൃദ്ധന്മാരുടെയും ശേഖരം.

"മനോഹരമായ പൂക്കൾ", "വൃദ്ധന്മാർ" എന്നീ പദങ്ങൾ കൃത്യമായി നിർവചിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ല. സുന്ദരമായ പുഷ്പത്തെ നമുക്ക് മൂർച്ചയുള്ള രീതിയിൽ നിർവചിക്കാൻ കഴിയില്ല, കാരണം സൗന്ദര്യത്തിന് കൃത്യമായ നിർവചനം ഇല്ലാത്തതിനാൽ സൗന്ദര്യം ഓരോ വ്യക്തിക്കും, ഉള്ളടക്കത്തിനും - ഉള്ളടക്കത്തിനും വ്യത്യാസപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. "ഊട്ടി റോസ് പൂന്തോട്ടത്തിലെ എല്ലാ മനോഹരമായ പൂക്കളുടെയും ശേഖരം" പോലുള്ള പ്രസ്താവനകൾ ഞങ്ങൾ ഒരു ഗണമായി കണക്കാക്കരുത്. ഇപ്പോൾ, ഊട്ടി റോസ് പൂന്തോട്ടത്തിലെ എല്ലാ ചുവന്ന പുഷ്പങ്ങളുടെയും ശേഖരം ഒരു ഗണം എന്ന് പറയാൻ കഴിയുമോ? ഉത്തരം - അതെ എന്നാണ്.

60 വയസ്സ് പ്രായമുള്ള ഒരാളെ പ്രായമുള്ളവരായി കണക്കാക്കാം. മറ്റുള്ളവർ സമ്മതിച്ചേക്കില്ല. "വൃദ്ധന്മാർ" എന്നതിന് സവിശേഷതയായ ഒരു നിർവചനവുമില്ല. രണ്ടാമത്തെ പ്രസ്താവനയെ,

"70 വയസ്സിനു മുകളിലുള്ള തമിഴ്നാട്ടിലെ എല്ലാ പുരുഷന്മാരുടെയും ശേഖരം എന്ന് കൂടുതൽ വ്യക്തമാക്കാം"

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 2 14-02-2023 16:40:19

ഇപ്പോൾ, ശേഖരം പ്രായത്തിലെ കൃത്യത കാരണം ഒരു കൂട്ടമായി മാറുന്നു. അതിനാൽ ഒരു പ്രത്യേക വസ്തു(ഘടകം) അവയാണോ എന്ന് കൃത്യമായി തീരുമാനിക്കാൻ വിവരണം നമ്മെ സഹായിക്കുന്നു. അതിനാൽ ഗണം എന്നത് വസ്തുക്കളുടെ ഒരു പ്രത്യേക ശേഖരമാണ് നമ്മൾ കണ്ടതും പഠിച്ചതും ആയ $\in, \subset, \subseteq, \cup, \cap$ എന്നീ ചിഹ്നങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുക:

"A, B എന്നിവ രണ്ട് ഗണങ്ങളാണെങ്കിൽ, $A \in B$ എഴുതുന്നത് അർത്ഥവത്താണോ? എന്ന ചോദ്യത്തിൽ നിന്ന് നമുക്ക് ആരംഭിക്കാം"

ആദ്യകാഴ്ചയിൽ ഈ പറയുന്നതിലൂടെ അർത്ഥശൂന്യമാണ് എന്നു പറയാൻ വേണ്ടി, "$\in$ എന്ന ചിഹ്നം ഒരു ഘടകത്തിനും ഗണത്തിനുമിടയിൽ ഉപയോഗിക്കണം. അത് രണ്ട് ഗണങ്ങൾക്കിടയിൽ ഉപയോഗിക്കരുത്. പ്രസ്താവനയുടെ ആദ്യഭാഗം കുറിപ്പ് ശരിയാണെങ്കിലും രണ്ടാം ഭാഗം ശരിയല്ല. ഉദാഹരണത്തിന്, $A = \{1, 2\}$, $B = \{1,\{1,2\},3,4\}$ തുടർന്ന് $A \in B$ ഈ വിഭാഗത്തിൽ അത്തരം ചിഹ്നങ്ങളുടെ അർത്ഥം നമ്മൾ ആഴത്തിൽ ചർച്ച ചെയ്യുന്നു.

മുമ്പത്തെ ക്ലാസുകളിൽ നമ്മൾ പഠിച്ചതുപോലെ ഘടകങ്ങളില്ലാത്ത ഗണത്തെ **ശൂന്യഗണം** അല്ലെങ്കിൽ **അസാധുവായ ഗണം** എന്ന് വിളിക്കുന്നു. ഇത് സാധാരണയായി ϕ അല്ലെങ്കിൽ $\{\ \}$ എന്നീ രീതികളിൽ സൂചിപ്പിക്കാം. $A \subseteq B$ എന്നതുകൊണ്ട് അർത്ഥമാക്കുന്നത് ഗണം A യുടെ എല്ലാ ഘടകങ്ങളും ഗണം B–യും ഘടകങ്ങൾ ആണ്. ഈ സാഹചര്യത്തിൽ A എന്നത് B യുടെ ഒരു ഉപഗണമാണെന്നും B ഒരു സൂപ്പർഗണം എന്നും ഞങ്ങൾ പറയുന്നു. ഏതെങ്കിലും A, B എന്നീ രണ്ടു ഗണങ്ങൾക്ക്, $A \subseteq B$, $B \subseteq A$ ഉണ്ടെങ്കിൽ, രണ്ട് ഗണങ്ങളും തുല്യമാണ്. ഏതോരു A ഗണത്തിനും ശൂന്യ ഗണം O യും ഗണം A എല്ലായ്പ്പോഴും A യുടെ ഉപഗണങ്ങളായിരിക്കും ഈ രണ്ട് ഉപഗണങ്ങളെ നിസ്സാര ഉപഗണങ്ങൾ എന്നു വിളിക്കുന്നു. കൂടാതെ A എന്നത് B യുടെ ശരിയായ ഉപസെറ്റാണ്. B യുടെ ഉപഗണമാണ് A എങ്കിൽ $A \neq B$ ആയിരിക്കും. അതായത് A യുടെ എല്ലാ ഘടകങ്ങളും B യിൽ കാണും. കൂടാതെ A യിൽ ഇല്ലാത്ത കുറഞ്ഞത് ഒരു ഘടകമെങ്കിലും കാണും ശ്രദ്ധിക്കുക, എല്ലാ ഘടകങ്ങളും പോലെ A എന്നത് Aയുടെ ഒരു ഘടകമാണ്, അങ്ങനെ $A \subseteq A$ കിട്ടുന്നു. അങ്ങനെ, ഗണം അതിന്റെ തന്നെ ഒരു ഉപഗണമാണ്. ഈ ഉപഗണത്തിനെ അനുചിതമായ ഉപഗണം എന്ന് വിളിക്കുന്നു. മറ്റൊരു വിധത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ A യുടെ ഏതു ഗണത്തിനും A യുടെ അനുചിതമായ ഉപഗണമാണ്. ഇതിനെ $\mathbb{N} \subset \mathbb{W} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ എന്നറിയപ്പെടുന്നു. ഇവിടെ $\mathbb{N}$ സൂചിപ്പിക്കുന്നത് എല്ലാ സംഖ്യകളുടെയോ പോസിറ്റീവ് സംഖ്യകളുടെയോ ഗണമാണ്. $\mathbb{W}$ എല്ലാ നെഗറ്റീവ് അല്ലാത്തവയുടെയും ഗണത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. $\mathbb{Z}$ എല്ലാ സംഖ്യകളുടെ ഗണത്തെയും സൂചിപ്പിക്കുന്നു. $\mathbb{Q}$ എല്ലാ യുക്തി സഹസംഖ്യകളുടെ ഗണത്തെയും $\mathbb{R}$–എല്ലാ യഥാർത്ഥസംഖ്യകളുടെ ഗണത്തെയും സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ശ്രദ്ധിക്കുക എല്ലാ യുക്തിരഹിതമായ സംഖ്യകളുടെ ഗണവും $\mathbb{R}$–ന്റെ ഉപഗണമാണ് എന്നാൽ മറ്റേതൊരു ഗണത്തിന്റെയും പരാമർശം പരിമിതമാണ്.

A, B എന്നീ രണ്ടു ഗണങ്ങളുടെ യോഗത്തെ $A \cup B$ സൂചിപ്പിക്കുന്നതായും ഞങ്ങൾ മനസ്സിലാക്കി, നിർവചിക്കപ്പെടുന്നത്,

$A \cup B = \{x : x \in A$ അല്ലെങ്കിൽ $x \in B\}$

സംഗമം $A \cap B = \{x : x \in A$ ഉം $x \in B\}$

A, B ഗണങ്ങൾക്ക് പൊതു ഘടകമില്ല എങ്കിൽ അത് വിഛേദിക്കപ്പെടുന്നു അതായത് $A \cap B = \phi$ ആണെങ്കിൽ A യും B യും വിഛേദിക്കപ്പെടുന്നു.

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 3 14-02-2023 16:40:20

നമുക്ക് കുറച്ച് കുറിപ്പുകൾ കാണാം $\sum_{i=1}^{n} a_i$ പോലുള്ള കുറിപ്പുകൾ നമുക്ക് പരിചിതമാണ്. വാസ്തവത്തിൽ ഇത് $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ എന്നതിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. അതുപോലെ തന്നെ നമുക്ക് യഥാക്രമം $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ എന്നിവ സൂചിപ്പിക്കാൻ $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$, $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ എന്നീ കുറിപ്പുകൾ ഉപയോഗിക്കാം.

അതായത് ചില i - യ്ക്ക് $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x : x \in A_i$, ഓരോ i -യ്ക്കും $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x : x \in A_i$ കൂടുതൽ ഗണങ്ങളെക്കുറിച്ച് ചർച്ച ചെയ്യുമ്പോൾ ഈ അടയാളം ഉപയോഗപ്രദമാണ്.

A ഒരു ഗണമാണെങ്കിൽ A യുടെ എല്ലാ ഉപഗണങ്ങളുടെ ഗണത്തെ A യുടെ ഉപഗണങ്ങളുടെ ഗണം എന്ന് വിളിക്കുന്നു. ഇത് സാധാരണയായി അടയാളപ്പെടുന്നത് $\mathcal{P}(A)$ അതായത് $\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$ A -യുടെ ഘടകങ്ങളുടെ എണ്ണം n ആണെങ്കിൽ $\mathcal{P}(A)$ ലെ ഘടകങ്ങളുടെ എണ്ണം 2^n ആണ്.

ഇപ്പോൾ ഒരു ഗണത്തിന്റെ പൂരകത്തെ നിർവചിക്കാൻ സാർവത്രിക ഗണത്തിന്റെ ആശയത്തെക്കുറിച്ച് അറിയേണ്ടത് ആവശ്യമാണ്. സാധാരണയായി എല്ലാ ഗണങ്ങളും ഒരു ഗണിത ശാസ്ത്ര പ്രതിഭയിൽ പരിഗണനയിലുള്ളത് ചില നിശ്ചിത ഗണത്തിന്റെ സാർവത്രിക ഗണം എന്ന് വിളിക്കുന്നു. ഉദാഹരണത്തിന്, സാഹചര്യത്തെ ആശ്രയിച്ച്, അവിഭാജ്യ സംഖ്യകളുടെ ഗണത്തിന്, സാർവത്രിക ഗണം ഏതെങ്കിലും ഗണങ്ങളിൽ ഒന്നാക്കാം. അതിനാൽ $\mathbb{N}, \mathbb{W}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ എന്നീ ഗണങ്ങളിലൊന്ന് ആവശ്യകത അനുസരിച്ച് അവിഭാജ്യ സംഖ്യകളുടെ ഒരു സാർവത്രിക ഗണമായി കണക്കാക്കാം. സമസ്ത ഗണത്തെ സാധാരണയായി U കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

ഒരു ഗണത്തിന്റെ പൂരകത്തെ നിർവചിക്കുന്നതിന് ഞങ്ങൾ സമസ്തഗണം ഗണം കാണേണ്ടതുണ്ട്. സമസ്തഗണം U ന്റെ ഉപഗണം A എന്നിരിക്കട്ടെ, U യുമായി ബന്ധപ്പെട്ട് A യുടെ പൂരകത്തെ A' അല്ലെങ്കിൽ A^c എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം, അതിനാൽ $A' = \{x : x \in U$ ഉം $x \notin A\}$ എന്ന് നിർവചിക്കാം.

ഗണം A–യിൽ നിന്നും ഗണം B യിലേക്കുള്ള ഗണ വ്യത്യാസത്തെ $A-B$ അല്ലെങ്കിൽ $A \backslash B$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുകയും,

$A - B = \{a : a \in A$ ഉം $a \notin B\}$ നിർവചിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു.

ഇത് കുറിക്കു,

(i) $U - A = A'$ (ii) $A - A = \phi$ (iii) $\phi - A = \phi$ (iv) $A - \phi = A$ (v) $A - U = \phi$.

A, B എന്നീ രണ്ടു ഗണങ്ങളുടെ സമമിതി വ്യത്യാസത്തെ $A \Delta B$ കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കുകയും $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$ എന്ന് നിർവചിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു.

യഥാർത്ഥത്തിൽ $A \Delta B$ യിലെ ഘടകങ്ങൾ $A \cup B$ യുടെ ഘടകങ്ങളാണ് അവ $A \cap B$ -യിലെ ഘടകങ്ങളല്ല, അങ്ങനെ $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$.

ഗണം X ഒരു പരിമിത ഗണമാണെന്ന് പറയുന്നു, അവയ്ക്ക് $k \in \mathbb{N}$ ചില k ഘടകങ്ങൾ ഉണ്ടെങ്കിൽ, ഈ സാഹചര്യത്തിൽ പരിമിതഗണം X ന് കാർഡിലാനിറ്റി k ഉള്ളതാണെന്നും ഇതിനെ $n(X)$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഒരു ഗണം പരിമിതമല്ലെങ്കിൽ അത് അനന്തഗണമാണ്. അനന്തഗണം A യ്ക്ക് കാർഡിനാലിറ്റി അനന്തമാണ്. $n(A) = 1$ ആയാൽ അത് ഏകഗണമാണ്. അത് കുറിക്കുക, $n(\phi) = 0$, $n(\{\phi\}) = 1$ ആണെന്ന്.

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 4 14-02-2023 16:40:22

1.2.1 ഗണക്രിയകളുടെ സവിശേഷതകൾ

നമുക്ക് ചില സവിശേഷതകളെ കുറിക്കാം,

ക്രമവിനിമയ

(i) $A \cup B = B \cup A$ (ii) $A \cap B = B \cap A$

സംയോജന

(i) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (ii) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

വിതരണ

(i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

തിരിച്ചറിയൽ

(i) $A \cup \phi = A$ (ii) $A \cap U = A$

ടൈംവോട്ടൽ

(i) $A \cup A = A$ (ii) $A \cap A = A$

ആഗിരണം

(i) $A \cup (A \cap B) = A$ (ii) $A \cap (A \cup B) = A$

ഡിമോർഗൻ നിയമങ്ങൾ

(i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

(iii) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$ (iv) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

സമമിതി വ്യത്യാസം

(i) $A \Delta B = B \Delta A$ (ii) $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$

(iii) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

ശൂന്യഗണവും, സമസ്ത ഗണവും

(i) $\phi' = U$ (ii) $U' = \phi$

(iii) $A \cup A' = U$ (iv) $A \cap A' = \phi$

(v) $A \cup U = U$ (vi) $A \cap U = A$

കാർഡിനാലിറ്റിയിൽ

(i) ഏതെങ്കിലും രണ്ട് പരിമിത ഗണങ്ങൾക്ക് A, B
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

(ii) A, B എന്നിവ വിഭന്ന പരിമിത ഗണങ്ങൾ ആണെങ്കിൽ, $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 5 14-02-2023 16:40:24

(iii) ഏതെങ്കിലും മൂന്ന് പരിമിത ഗണങ്ങൾക്ക് A, B, C

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

1.3 കാർട്ടീഷ്യൻ ഗുണനം

ഗണങ്ങളുടെ കാർട്ടീഷ്യൻ ഗുണനം ഒരു കൂട്ടമല്ലാതെ മറ്റൊന്നുമല്ലെന്ന് ഞങ്ങൾ അറിയാം രണ്ട് ഗണങ്ങളുടെ കാർട്ടീഷ്യൻ ഗുണനം ഓർഡർ ചെയ്ത ജോഡികളുടെ ഒരു കൂട്ടമാണ്. അതേ സമയം മൂന്ന് സെറ്റ് ഗണങ്ങളുടെ കാർട്ടീഷ്യൻ ഗുണനം ട്രിപ്പിളുകളുടെ ഓർഡർ ആണ്.

സൂക്ഷ്മമായി A, B, C എന്നിവ ശൂന്യമല്ലാത്ത മൂന്ന് ഗണങ്ങളായിരിക്കട്ടെ. അപ്പോൾ കാർട്ടീഷ്യൻ ഗുണനം A യും B യും സൂചിപ്പിക്കുന്നത്, $A \times B$ എന്നാണ്. അതിനെ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത് $A \times B = \{(a,b): a \in A, b \in B\}$ അതുപോലെ, ഗുണനഫലം A, B, C യെ നിർവചിക്കുന്നത്,

$$A \times B \times C = \{(a,b,c): a \in A, b \in B, c \in C\}$$

അതായത്, $A \times A = \{(a,b): a,b \in A\}$

$A \times A = \{(a,a): a \in A\}$ ഇത് ശരിയാണെന്ന് പറയാൻ കഴിയുമോ?

ഗുണനഫലങ്ങളുടെ ഘടകങ്ങൾ ജോടികളാണെന്നത് പ്രധാനപ്പെട്ടതാണ്. ശൂന്യമല്ലാത്ത ഗണങ്ങൾക്ക് $A \times B \neq B \times A$, $A = B$ അല്ലെങ്കിൽ $A = B$ ആയാൽ മാത്രം $A \times B = B \times A$ വാസ്തവിക സംഖ്യകളുടെ ഗണത്തെ

$\mathbb{R}$ സൂചിപ്പിക്കുന്നു എന്ന് നമുക്ക് അറിയാം,

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y): x,y \in \mathbb{R}\}, \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y,z): x,y,z \in \mathbb{R}\}.$$

പ്രതീകാത്മകമായി $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ നെ $\mathbb{R}^2$ എന്നും $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ നെ $\mathbb{R}^3$ എന്നും പ്രതിനിധീകരിക്കാം. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ എന്നത് ക്രമജോഡികളുടെ ഗണവും $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ എന്നത് മൂന്ന് ഇരട്ടി ഗണങ്ങളുടെ ക്രമമാണ്.

$A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,4,6\}$ അതായത്

$A \times B = \{(1,2),(1,4),(1,6),(2,2),(2,4),(2,6),(3,2),(3,4),(3,6)\}$. ഇവിടെ $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ന്റെ ഉപഗണമാണ് $A \times B$.

$A \times B$-യിലെ ഘടകങ്ങളുടെ എണ്ണം A യിലെ ഘടകങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിന്റെയും B യിലെ ഘടകങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിന്റെയും ഗുണനമാണ്, അതായത് $n(A \times B) = n(A)\, n(B)$ A യും B യും ഒരു പരിമിതമാണെങ്കിൽ, A, B, C എന്നിവ പരിമിതമാണെങ്കിൽ $n(A \times B \times C) = n(A)\, n(B)\, n(C)$.

ഇനി പറയുന്ന $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ –ന്റെ ഉപഗണങ്ങളാണെന്ന് കാണാൻ എളുപ്പമാണ്.

(i) $\{(x,2x): x \in \mathbb{R}\}$ (ii) $\{(x,x^2): x \in \mathbb{R}\}$

(iii) $\{(x,\sqrt{x}): x$ നെഗറ്റീവ് അല്ലാത്ത വാസ്തവിക സംഖ്യയാണ്$\}$ (iv) $\{(x^2,x): x \in \mathbb{R}\}$.

(v) $\{(x,-\sqrt{x}): x$ നെഗറ്റീവ് അല്ലാത്ത വാസ്തവിക സംഖ്യയാണ്$\}$

ഉദാഹരണം 1.1 $A = \{x : x = 4n + 1, 2 \leq n \leq 5, n \in \mathbb{N}\}$ എങ്കിൽ, AAയുടെ ഉപഗണത്തിന്റെ എണ്ണം കണ്ടെത്തുക?

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 6 14-02-2023 16:40:26

നിർദ്ധാരണം:

$A = \{x : x = 4n + 1, n = 2,3,4,5\} = \{9,13,17,21\}$

അതായത് $n(A) = 4$. $n(\mathcal{P}(A)) = 2^4 = 16$ ഇത് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്,

ഉദാഹരണം 1.2 ഒരു പട്ടണത്തിലെ 5000 ആളുകളിൽ നടത്തിയ സർവേയിൽ, 45% ആളുകൾക്ക് ഭാഷ A അറിയാമെന്നും 25% പേർക്ക് ഭാഷ B അറിയാമെന്നും 5% പേർക്ക് ഭാഷ A യും B യും അറിയാമെന്നും 4% പേർക്ക് B, C ഭാഷകൾ അറിയാമെന്നും 4% പേർക്ക് A, C ഭാഷകൾ അറിയുന്നു. 3% ആളുകൾക്ക് മൂന്ന് ഭാഷകളും അറിയാമെങ്കിൽ ഭാഷ A മാത്രം അറിയുന്ന ആളുകളുടെ എണ്ണം കണ്ടെത്തുക?

നിർദ്ധാരണം:

വെൻചിത്രമോ അല്ലെങ്കിൽ കാർഡിനാലിറ്റിയുടെ സവിശേഷതകൾ ഉപയോഗിച്ചോ ഈ പ്രശ്നം പരിഹരിക്കാം.

(i) **കാർഡിനാലിറ്റി**

തന്നിട്ടുണ്ട് $n(A) = 5000$ -ന്റെ $45\% = 2250$.

അതുപോലെ,

$n(B) = 1250, n(C) = 500, n(A \cap B) = 250, n(B \cap C) = 200, n(C \cap A) = 200$

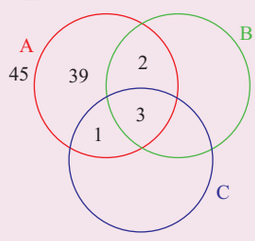
$n(A \cap B \cap C) = 150$.

A ഭാഷ മാത്രം അറിയാവുന്ന ആളുകളുടെ എണ്ണം

$$\begin{aligned} n(A \cap B' \cap C') &= n\{A \cap (B \cup C)'\} = n(A) - n\{A \cap (B \cup C)\} \\ &= n(A) - n(A \cap B) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C). \\ &= 2250 - 250 - 200 + 150 = 1950. \end{aligned}$$

അങ്ങനെ ആവശ്യമുള്ള വ്യക്തികളുടെ എണ്ണം 1950 ആകുന്നു.

(ii) **വെൻചിത്രം: ശതമാന ഉപയോഗിച്ച് നമ്മൾ വെൻചിത്രം വരയ്ക്കുന്നു**



ചിത്രം 1.1

ചിത്രം 1.1 ൽ, A ഭാഷമാത്രം അറിയാവുന്ന ആളുകളുടെ ശതമാനം 39 ആണ്.

അതുകൊണ്ട് വേണ്ടത്ര വ്യക്തികളുടെ എണ്ണം $5000 \times \frac{39}{100} = 1950$.

ഉദാഹരണം 1.3 $((A \cup B' \cup C) \cap (A \cap B' \cap C')) \cup ((A \cup B \cup C') \cap (B' \cap C')) = B' \cap C'$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 7 14-02-2023 16:40:27

നിർദ്ധാരണം:

$A \cap B' \cap C' \subseteq A \subseteq A \cup B' \cup C$ അതിനാൽ.

അതുകൊണ്ട് $(A \cup B' \cup C) \cap (A \cap B' \cap C') = A \cap B' \cap C'$.

കൂടെ $B' \cap C' \subseteq C' \subseteq A \cup B \cup C'$.

അതുകൊണ്ട് $(A \cup B \cup C') \cap (B' \cap C') = B' \cap C'$ ഇപ്പോൾ, $A \cap B' \cap C' \subseteq B' \cap C'$.

$((A \cup B' \cup C) \cap (A \cap B' \cap C')) \cup ((A \cup B \cup C') \cap (B' \cap C')) = B' \cap C'$

കുറിപ്പ് : മുകളിൽ പറഞ്ഞ കാര്യങ്ങളെ വെൻചിത്രം ഉപയോഗിച്ച് ലളിതമാക്കാൻ ശ്രമിക്കാം.

ഉദാഹരണം 1.4 $X = \{1,2,3,...,10\}$, $A = \{1,2,3,4,5\}$ എങ്കിൽ, $B \subseteq X$, X ഗണത്തിന്റെ എണ്ണം കണ്ടെത്തുക. അതിൽ $A - B = \{4\}$

നിർദ്ധാരണം:

എല്ലാ C ഉപഗണത്തിനും $\{6,7,8,9,10\}$, $B = C \cup \{1,2,3,5\}$ അപ്പോൾ $A - B = \{4\}$ വേറൊരു രീതിയിൽ, എല്ലാ C ഉപഗണത്തിനും $\{6,7,8,9,10\}$, നമുക്ക് അദ്വിതീയ ഗണം B ലഭിക്കുന്നു അതിനാൽ $2^5 = 32$.

ഉദാഹരണം 1.5 A, B രണ്ട് ഗണങ്ങളാൽ, $n(B-A) = 2\, n(A-B) = 4\, n(A \cap B)$,ൽ $n(A \cup B) = 14$ എങ്കിൽ, $n(\mathcal{P}(A))$ കണ്ടെത്തുക.

നിർദ്ധാരണം:

$n(\mathcal{P}(A))$ -കാണുന്നതിന് $n(A)$ ആവശ്യമാണ്.

$n(A \cap B) = k.$

$n(A-B) = 2k$ ഉം $n(B-A) = 4k$

ഇപ്പോൾ, $n(A \cup B) = n(A-B) + n(B-A) + n(A \cap B) = 7k$.

$n(A \cup B) = 14$ എന്ന് നൽകിയിട്ടുണ്ട്,

അതിനാൽ $7k = 14, k = 2$ അതുകൊണ്ട്.

$n(A-B) = 4, \quad n(B-A) = 8$.

$n(A) = n(A-B) + n(A \cap B)$ ആയാൽ $n(A) = 6$ എന്നും കിട്ടുന്നു.

അതിനാൽ, $n(\mathcal{P}(A)) = 2^6 = 64$.

ഉദാഹരണം 1.6 m, k ഘടകങ്ങളുള്ള രണ്ട് ഗണങ്ങൾ, രണ്ടാമത്തെ ഗണത്തിനെക്കാൾ 112 കൂടുത ലാണ് ഒന്നാമത്തെ ഗണത്തിന്റെ മൊത്തം ഉപഗണത്തിന്റെ എണ്ണമെങ്കിൽ, m, k എന്നിവയുടെ മൂല്യങ്ങൾ കണ്ടെത്തുക.

നിർദ്ധാരണം:

$n(A) = m$, $n(B) = k$ എന്നിങ്ങനെയുള്ള A, B എന്ന രണ്ട് ഗണങ്ങൾ എടുക്കുക. B യിൽ ഉള്ള തിനെക്കാൾ അധിക ഘടകങ്ങൾ A യിൽ ഉൾപ്പെടെയെങ്കിൽ നമുക്ക്, $m > k$. ആയിരിക്കും. തന്നിട്ടുള്ള സാഹചര്യങ്ങൾ വച്ച് $2^m - 2^k = 112$ എന്ന് നമുക്ക് കാണാൻ കഴിയും.

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 8 14-02-2023 16:40:29

$2^k(2^{m-k}-1) = 2^4 \times 7$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

ഒരേ ഒരു സാധ്യത ഇതാണ് $k = 4,\ 2^{m-k}-1 = 7$.

അതുകൊണ്ട് $m-k = 3, m = 7$.

ഉദാഹരണം 1.7 $n(A) = 10$, $n(A \cap B) = 3$ ആയാൽ, $n((A \cap B)' \cap A)$ -കാണുക.

നിർദ്ധാരണം :

$$(A \cap B)' \cap A = (A' \cup B') \cap A = (A' \cap A) \cup (B' \cap A) = \phi \cup (B' \cap A)$$

$$= (B' \cap A) = A - B.$$

$$n((A \cap B)' \cap A) = n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 7.$$

ഉദാഹരണം 1.8 $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{3,4,5,6\}$ എങ്കിൽ,
$n((A \cup B) \times (A \cap B) \times (A \Delta B))$ -കാണുക.

നിർദ്ധാരണം :

$n(A \cup B) = 6, n(A \cap B) = 2,\ n(A \Delta B) = 4$.

$$n((A \cup B) \times (A \cap B) \times (A \Delta B)) = n(A \cup B) \times n(A \cap B) \times n(A \Delta B)$$

$$= 6 \times 2 \times 4 = 48.$$

ഉദാഹരണം 1.9 A യുടെ ഉപഗണങ്ങളുടെ ഗണം, $P(A)$ ആയാൽ
$n(P(P(P(\phi))))$ -കണ്ടുപിടിക്കുക?

നിർദ്ധാരണം :

ഒരു ഘടകം ഉൾപ്പെടുന്ന എങ്കിൽ $P(\phi)$, 2^1 ഘടകങ്ങൾ ഉൾപ്പെടുന്നുവെങ്കിൽ $P(P(\phi))$, 2^2 ഘടകങ്ങൾ ഉൾപ്പെടുന്നുവെങ്കിൽ, $P(P(P(\phi)))$ അതായത് 4 ഘടകങ്ങൾ.

അഭ്യാസം 1.1

1. റോസ്റ്റർ രീതിയിൽ താഴെ തന്നിരിക്കുന്നവ എഴുതുക.
   (i) $\{x \in \mathbb{N} : x^2 < 121, x$ ന് അഭാജ്യസംഖ്യ$\}$.
   (ii) $(x-1)(x+1)(x^2-1) = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ എല്ലാം പോസിറ്റീവ് മൂലസംഖ്യകളുടെ ഗണം.
   (iii) $\{x \in \mathbb{N} : 4x + 9 < 52\}$.
   (iv) $\{x : \frac{x-4}{x+2} = 3, x \in \mathbb{R} - \{-2\}\}$.
2. ഗണം $\{-1, 1\}$ എന്നതിനെ ഗണം നിർമ്മാണ രീതിയിൽ എഴുതുക.
3. താഴെ പറയുന്ന ഗണങ്ങൾ പരിമിതമാണോ അല്ലെങ്കിൽ അനന്തമാണോ എന്ന് പ്രസ്താവിക്കുക.
   (i) $\{x \in \mathbb{N} : x$ ഇരട്ട അഭാജ്യസംഖ്യയാണ്$\}$.
   (ii) $\{x \in \mathbb{N} : x$ ഒറ്റ അഭാജ്യസംഖ്യയാണ്$\}$.

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 9 14-02-2023 16:40:31

(iii) $\{x \in \mathbb{Z} : x$ ന് ഇരട്ടയും 10 നെക്കാൾ കുറവാണ് $\}$.

(iv) $\{x \in \mathbb{R} : x$ ഒരു പരിമേയ സംഖ്യയാണ് $\}$.

(v) $\{x \in \mathbb{N} : x$ ഒരു പരിമേയ സംഖ്യയാണ് $\}$.

4. A, B, C എന്നീ അനുയോജ്യ-ഗണം സ്വീകരിച്ച് താഴെ പറയുന്ന ഫലങ്ങൾ പരിശോധിക്കുക.

(i) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

(ii) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

(iii) $(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B) \times (B \cap A)$.

(iv) $C - (B - A) = (C \cap A) \cup (C \cap B')$.

(v) $(B - A) \cap C = (B \cap C) - A = B \cap (C - A)$.

(vi) $(B - A) \cup C = (B \cup C) - (A - C)$.

5. താഴെ പറയുന്ന പ്രസ്താവനയുടെ സത്യം ന്യായീകരിക്കുക? "ഒരു ഗണത്തിന്റെ ഘടകം അതിന്റെ തന്നെ ഉപഗണം ഒരിക്കലുമാകാൻ കഴിയില്ല"

6. $n(\mathcal{P}(A)) = 1024, n(A \cup B) = 15$, $n(\mathcal{P}(B)) = 32$ ആയതിനാൽ, $n(A \cap B)$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

7. $n(A \cap B) = 3$, $n(A \cup B) = 10$ എന്നാൽ, $n(\mathcal{P}(A \Delta B))$ കണ്ടുപിടിക്കുക?

8. ഗണം A യ്ക്ക് $A \times A$ യിൽ 16 ഘടകങ്ങളും അതിൽ രണ്ട് ഘടകങ്ങൾ $(1, 3), (0, 2)$ നും ആണ്. A–യുടെ ഘടകങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

9. A, B എന്നിവ രണ്ടു ഗണങ്ങളും അതിൽ $n(A) = 3$, $n(B) = 2$, $A \times B$ യിൽ $(x,1), (y,2), (z,1)$ ആണെങ്കിൽ A യും B യും കണ്ടുപിടിക്കുക. (ഇവിടെ x, y, z വ്യത്യസ്ത ഘടകങ്ങളാണ്)

10. $A \times A$ യ്ക്ക് 16 ഘടകങ്ങൾ $S = \{(a,b) \in A \times A : a < b\}$; S യിലെ രണ്ടു ഘടകങ്ങളാണ് $(-1, 2)$, $(0, 1)$ എങ്കിൽ S ൽ അവശേഷിക്കുന്ന ഘടകങ്ങളെ കണ്ടുപിടിക്കുക.

1.4 സ്ഥിരങ്ങളും, ചരങ്ങളും, ഇടവേളകളും സമീപസ്ഥലങ്ങളും

നമ്മുടെ ചർച്ച തുടരുന്നതിന്, ചില മുൻവ്യവസ്ഥതകൾ അതായത് സ്ഥിരങ്ങൾ, ചരങ്ങൾ, സ്വാതന്ത്രചരങ്ങൾ, ആശ്രയ ചരങ്ങൾ, ഇടവേളകൾ, സമീപസ്ഥലങ്ങൾ എന്നിവ ആവശ്യമാണ്.

1.4.1 സ്ഥിരാങ്കങ്ങളും, ചരങ്ങളും

ഒരു ഗണിതപ്രക്രിയയിൽ ഉടനീളമാറ്റമില്ലാതെ തുടരുന്ന ഒരു അളവിനെ സ്ഥിരാങ്കം എന്ന് വിളിക്കുന്നു. ഒരു ഗണിത പ്രക്രിയയിൽ വ്യത്യാസപ്പെടുന്ന ഒരു അളവിനെ ചരങ്ങൾ എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

ചരങ്ങൾ ഒരു സ്വാതന്ത്ര ചരങ്ങളാകുന്നത് അത് മറ്റൊരു ചരത്തെയും ആശ്രയിക്കാതെ ഏക പക്ഷിയമായി(സ്വാതന്ത്ര്യമായി) മൂല്യം എടുക്കുമ്പോഴാണ്. അതേ സമയം അതിന്റെ മൂല്യം മറ്റ് ചരങ്ങളെ ആശ്രയിച്ച് ഇരിക്കുന്ന എങ്കിൽ അതിനെ ആശ്രയചരം എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 10 14-02-2023 16:40:32

ഒരു ത്രികോണം A യുടെ വിസ്തീർണ്ണം $A = \frac{1}{2}bh$ ഇവിടെ $\frac{1}{2}$ സ്ഥിരാങ്കവും A, b, h ഇവ ചരങ്ങളുമാണ്. കൂടാതെ b യും h യും സ്വാതന്ത്ര്യചരങ്ങളും A ആശ്രിത ചരവുമാണ്. ആശ്രിതവും സ്വാതന്ത്ര്യവുമായ പദങ്ങൾ ആപേക്ഷിക പദങ്ങളാണെന്ന കാര്യം നാം നോക്കേണ്ടതില്ല. ഉദാഹരണത്തിന് $x + y = 1$ എന്ന സമവാക്യത്തിൽ x, y ചരങ്ങളും 1 ന് സ്ഥിരവുമാണ്. ഏത് x, y ആണ് ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്നത് ഏതാണ് സ്വതന്ത്രമായിരിക്കുന്നത്? നമ്മൾ x നെ ഒരു സ്വാതന്ത്ര്യചരമായി കണക്കാക്കാവുന്നുവെങ്കിൽ y ആശ്രിതിമായി തീരുന്നു എന്നാൽ y യെ സ്വാതന്ത്ര്യചരമായി കണക്കാക്കിയാൽ x ന് സ്ഥിരമാകുന്നു. താഴെ പറയുന്ന ഉദാഹരണങ്ങൾ വീണ്ടും പരിഗണിക്കുക.

(i) ദീർഘചതുരത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം ; $A = lb$

(ii) വൃത്തത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം ; $A = \pi r^2$

(iii) ക്യൂബോയിഡിന്റെ വ്യാപ്തം; $V = lbh$

മുകളിൽ ഉള്ള ഉദാഹരണങ്ങളിൽ നിന്ന് b, h, l, r സ്വതന്ത്രചരങ്ങളാണെന്ന് നേരിട്ട് അനുമാനിക്കാം. A, V എന്നിവ ആശ്രിതചരങ്ങളും, π സ്ഥിരാങ്കവുമാണ്.

1.4.2 ഇടവേളകളും, സമീപസ്ഥലങ്ങളും

യഥാർത്ഥ സംഖ്യകളുടെ സമീകരണ $\mathbb{R}$ -നെ ഒരു വരിയിലെ ബിന്ദുക്കളായി പ്രതിനിധീകരിക്കാം. രേഖയിലെ ബിന്ദുക്കൾ ചിത്രം 1.2–ൽ സൂചിപ്പിക്കുന്നതുപോലെ ഒരു അദ്വിതീയ വാസ്തവിക സംഖ്യയുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. ഇതിന് അർത്ഥം ഏത് വാസ്തവിക സംഖ്യയേയും രേഖയിലെ ഒരു ബിന്ദുവായി തിരിച്ചറിയാൻ കഴിയുമെന്ന് ഞങ്ങൾ അർത്ഥമാക്കുന്നു. ഈ തിരിച്ചറിവ് ഉപയോഗിച്ച് രേഖയെ **വാസ്തവിക രേഖ** എന്ന് വിളിക്കുന്നു.



ചിത്രം 1.2

നമ്മൾ വലത്തേക്ക് മൂല്യം വർദ്ധിക്കുകയും, ഇടത്തേക്ക് പോകുമ്പോൾ കുറയുകയും ചെയ്യുന്നു. y-യുടെ ഇടത് വശത്ത് x കിടക്കുന്നുയെങ്കിൽ $x < y$ ആയിരിക്കും. ഒരുവരിയിൽ വിടവ് ഇല്ലാത്തതിനാൽ വാസ്തവിക സംഖ്യകൾ ഇടയിൽ നമുക്ക് അനന്തമായ നിരവധി വാസ്തവികസംഖ്യകളുണ്ട്.

നിർവചനം 1.1

$\mathbb{R}$ -ന്റെ ഒരു ഉപഗണം I ഇടവേളയാണെന്ന് പറയപ്പെടുന്നു, എങ്കിൽ

(i) I -ക്ക് കുറഞ്ഞത് രണ്ട് ഘടകങ്ങളെങ്കിലും അടങ്ങിയിരിക്കുന്നു.

(ii) $a, b \in I$ യും $a < c < b$ യും ആണെങ്കിൽ, $c \in I$ ആണ്.

ജ്യാമിതിയമായി; ഇടവേളകൾ, യഥാർത്ഥ രേഖയിലെ രശ്മിക്കും രേഖാഖണ്ഡത്തിനും യോജിക്കുന്നു.

ശ്രദ്ധിക്കുക, എല്ലാ എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെയും ഗണം, എല്ലാ നെഗറ്റീവ് അല്ലാത്ത സംഖ്യകളുടെ ഗണവും, എല്ലാ ഒറ്റ സംഖ്യകളുടെയും ഗണം, എല്ലാ ഇരട്ട സംഖ്യകളുടെയും ഗണം എല്ലാ അവിഭാജ്യ സംഖ്യകളുടെ ഗണം എന്നിവക്ക് ഇടവേളകളില്ല. വീണ്ടും നിരീക്ഷിച്ചാൽ, ഏതൊരു രണ്ട് വാസ്തവിക സംഖ്യകളും അനന്തമായ അനേകം വാസ്തവിക സംഖ്യകളും അനന്തമായ അനേകം വാസ്തവിക സംഖ്യകളാണ്. അതിനാൽ, മുകളിലുള്ള ഉദാഹരണങ്ങൾക്ക് ഇടവേളകളില്ല.

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 11 14-02-2023 16:40:33

താഴെ പറയുന്ന ഗണങ്ങൾ പരിശോധിക്കുക.

(i) എല്ലാ വാസ്തവിക സംഖ്യകളുടെയും ഗണം പൂജ്യത്തേക്കാൾ വലുതാണ്.

(ii) എല്ലാ വാസ്തവിക സംഖ്യകളുടെയും ഗണം 5-നേക്കാൾ കൂടുതലും 7നേക്കാൾ കുറവുമാണ്.

(iii) $1 \leq x \leq 3$ എന്നിങ്ങനെയുള്ള x- ന്റെ എല്ലാ വാസ്തവിക സംഖ്യകളുടെയും ഗണം.

(iv) $1 < x \leq 2$ എന്നിങ്ങനെയുള്ള x-ന്റെ എല്ലാ വാസ്തവിക സംഖ്യകളുടെയും ഗണം.

മുകളിലുള്ള നാലു ഗണങ്ങളും ഇടവേളകളാണ് പ്രത്യേകിച്ചും (i) അനന്തമായ ഇടവേളയും (ii), (iii), (iv) എന്നിവ പരിമിത ഇടവേളകളുമാണ്. "പരിമിത ഇടവേള" എന്ന പദത്തിന്റെ അർത്ഥ ഇടവേളയിൽ വളരെ യഥാർത്ഥ സംഖ്യകൾ മാത്രമേ ഉള്ളൂ എന്നല്ല, എന്നിരുന്നാലും രണ്ട് അറ്റങ്ങളും പരിമിത സംഖ്യകളാണ്. പരിമിതവും അനന്തവുമായ ഇടവേളകൾ അനന്തമായ ഗണങ്ങളാണ്. രേഖാഖണ്ഡങ്ങളുമായി പൊരുത്തപ്പെടുന്ന ഇടവേളകൾ പരിമിതമായ ഇടവേളകളാണ്.

ഇതിന്റെ അവസാന ബിന്ദുക്കൾ രണ്ടും അടങ്ങിയിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ ഒരു പരിമിത ഇടവേള അടയ്ക്കുകയും അതിന്റെ അവസാന ബിന്ദുക്കളൊന്നും അടങ്ങിയിട്ടില്ലെങ്കിൽ തുറക്കുകയും ചെയ്യും പ്രതീകാത്മകമായ മുകളിലുള്ള നാല് ഇടവേളകൾ $(0,\infty), (5,7), [1,3], (1,2]$ ഇങ്ങനെ സൂചിപ്പിക്കാം. പ്രതീകാത്മക രൂപത്തിനായി ഇടവേളകളെ സൂചിപ്പിക്കാൻ ഞങ്ങൾ സ്കയർ ബ്രായ്ക്കറ്റുകളും ഉപയോഗിച്ചുവെന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക. തുറന്ന ഇടവേളകളെ സൂചിപ്പിക്കാൻ ആവരണ ചിഹ്നവും '( )' (പരാൻതീസിസ്) ഉം അടുത്ത ഇടവേളയെ സൂചിപ്പിക്കാൻ സ്കയർ ബ്രാക്കറ്റും '[ ]' ഉപയോഗിക്കുന്നു. ആദ്യത്തെ രണ്ട് ഉദാഹരണങ്ങൾ തുറന്ന ഇടവേളകളാണ് മൂന്നാമത്തേത് ഒരു അടച്ച ഇടവേളയാണ്. നാലാമത്തേത് തുറന്നതോ അടഞ്ഞതോ അല്ല. അതായത്, ഒരറ്റം തുറന്നതും മറ്റേഅറ്റം അടഞ്ഞതുമാണ്.

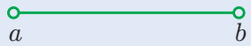
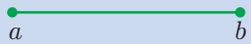
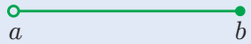
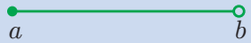
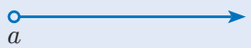
പ്രത്യേകിച്ചും $[1, 3]$, 1 ഉം 3 ഉം യഥാർത്ഥ സംഖ്യകൾക്കിടയിലും അടങ്ങിയിരിക്കുന്നു. ഇടവേള $(1, 3)$ ൽ 1, 3 എന്നിവ ഉൾക്കൊള്ളുന്നില്ല. പക്ഷേ അക്കങ്ങൾക്കിടയിലുള്ളതെല്ലാം ഉൾക്കൊള്ളുന്നു. ഇടവേള $(1, 2]$, 1 ഉൾപ്പെടുന്നില്ല എന്നാൽ 2 ഉൾപ്പെടുന്നു, പക്ഷേ, അക്കങ്ങൾക്കിടയിലുള്ളതെല്ലാം ഉൾക്കൊള്ളുന്നു.

∞ ഒരു സംഖ്യയല്ല. യഥാർത്ഥരേഖയുടെ അറ്റങ്ങൾ സൂചിപ്പിക്കാൻ $-\infty$, ∞ എന്നീ ചിഹ്നങ്ങൾ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. $(a,b), [a,b]$ എന്നിവ $\mathbb{R}$–ന്റെ ഉപഗണങ്ങളാണ്.

പലതരം ഇടവേളകൾ

പലതരം ഇടവേളകളുണ്ട് $a, b \in \mathbb{R}$ എന്നത് $a < b$ എന്നെടുത്താൽ, താഴെ പറയുന്ന പട്ടിക വിവിധതരം ഇടവേളകളാണെന്ന് വിവരിക്കുന്നു. ഒരു ബിന്ദുവിനെ നീക്കം ചെയ്താൽ ഒരു രേഖ വരയ്ക്കാൻ കഴിയില്ല. അതിനാൽ ബിന്ദു നീക്കം ചെയ്ത് സൂചിപ്പിക്കാൻ ഞങ്ങൾ ഒരു പൂരിപ്പിക്കാത്ത വൃത്തം "○" ഉപയോഗിക്കുന്നു. ബിന്ദു ഉൾപ്പെടുത്തി സൂചിപ്പിക്കുന്നതിന് പൂരിപ്പിച്ച വൃത്തം '●' ഉപയോഗിക്കുന്നു.

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 12 14-02-2023 16:40:33

ഇടവേള	കുറിപ്പ്	ഗണം	ചിത്രത്തോടെയുള്ള പ്രതിനിധീകരണം
പരിമിതം	(a,b)	$\{x : a < x < b\}$	
	$[a,b]$	$\{x : a \le x \le b\}$	
	$(a,\ b]$	$\{x : a < x \le b\}$	
	$[\ a,\ b)$	$\{x : a \le x < b\}$	
അനന്തം	(a, ∞)	$\{x : a < x < \infty\}$	
	$[a, \infty)$	$\{x : a \le x < \infty\}$	
	$(-\infty, b)$	$\{x : -\infty < x < b\}$	
	$(-\infty, b]$	$\{x : -\infty < x \le b\}$	
	$(-\infty, \infty)$ അല്ലെങ്കിൽ $\mathbb{R}$	$\{x : -\infty < x < \infty\}$ അല്ലെങ്കിൽ വാസ്തവിക സംഖ്യയുടെ ഗണം	

ഇനി പറയുന്ന ഇടവേളകൾ പ്രതീകാത്മക രൂപത്തിൽ എഴുതാൻ ശ്രമിക്കുക.

(i) $\{x : x \in \mathbb{R}, -2 \le x \le 0\}$ (ii) $\{x : x \in \mathbb{R}, 0 < x < 8\}$

(iii) $\{x : x \in \mathbb{R}, -8 < x \le -2\}$ (iv) $\{x : x \in \mathbb{R}, -5 \le x \le 9\}$

സമീപസ്ഥലം

'a' അടങ്ങുന്ന ഏതെങ്കിലും തുറന്ന ഇടവേളയാണ് a എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സമീപസ്ഥലം. പ്രത്യേകിച്ച 'ϵ' എന്നത് ഒരു പോസിറ്റീവ് സംഖ്യയാണെങ്കിൽ, സാധാരണയായി വളരെ ചെറുതാണെങ്കിൽ a യുടെ തുറന്ന ഇടവേളയാണ് $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ എന്ന സ്ഥലത്തിന്റെ സമീപ സ്ഥലം ഗണം $(a-\epsilon, a+\epsilon) - \{a\}$ 'a' യുടെ ഇല്ലാതാക്കിയ സമീപസ്ഥലം എന്നു വിളിക്കുന്നു. ഇതിനെ $0 < |x-a| < \epsilon$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു (ചിത്രം 1.3 നോക്കുക)



[ചിത്രം 1.3]

1.5 ബന്ധങ്ങൾ

ഗണങ്ങളുടെ കാർട്ടീഷ്യൻ ഉൽപ്പന്നങ്ങളിലൂടെ യഥാർത്ഥ ജീവിത ബോധം, ക്രിപ്റ്റോഗ്രാഫി, ജ്യാമിതി എന്നിവ ഉപയോഗിച്ച് വ്യത്യസ്ത വശങ്ങളിൽ "ബന്ധങ്ങൾ" എന്ന ആശയത്തെ സമീപിക്കാൻ സാധിക്കും.

നമ്മുടെ ദൈനംദിന ജീവിതത്തിൽ "അവൻ നിങ്ങളുമായി എങ്ങനെ ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു?" എന്നിങ്ങനെയുള്ള ചോദ്യങ്ങൾ കാണുവാൻ സാധിക്കും. സാധ്യമായ ചില ഉത്തരങ്ങൾ ഇവയാണ്,

(i) അവൻ എന്റെ പിതാവാണ്

(ii) അവൻ എന്റെ അധ്യാപകനാണ്

(iii) അവനും ഞാനുമായി ബന്ധമില്ല.

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 13 3/24/2023 11:23:45 AM

ഇതിൽ നിന്നും നമുക്ക് ഒരു കാര്യം മനസ്സിലാക്കാം. "റിലേഷൻഷിപ്പ്" എന്ന വാക്ക് ഒരു വ്യക്തിയെ മറ്റൊരു വ്യക്തിയുമായി ബന്ധിപ്പിക്കുന്നു. ഈ ആശയം വിപുലീകരിക്കുന്നിലൂടെ, ഗണിത ശാസ്ത്രത്തിൽ ബന്ധങ്ങളെ ഗണിതശാസ്ത്ര വസ്തുക്കളുമായി ബന്ധിപ്പിക്കുന്ന ഒന്നായി കണക്കാക്കുന്നു.

ഉദാഹരണങ്ങൾ:

(i) $\mathbb{N}$ ൽ m നെ n ാൽ വിഭജിച്ചാൽ m എന്ന സംഖ്യ n എന്ന നമ്പറുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു.

(ii) $x \leq y$ ആണെങ്കിൽ ഒരു വാസ്തവിക സംഖ്യ x, y–യെന്ന് വാസ്തവിക സംഖ്യയുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു.

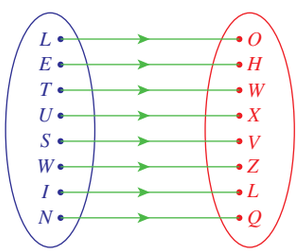
(iii) p എന്നത് L ൽ കിടക്കുന്നുവെങ്കിൽ, ഒരു ബിന്ദു p, ഒരു വരിയുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു.

(iv) X, S ന്റെ വിദ്യാർത്ഥിയാണെങ്കിൽ, ഒരു വിദ്യാർത്ഥി X ഒരു സ്കൂളുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു.

ചിത്രീകരണം 1.1 ക്രിപ്റ്റോഗ്രഫി : രഹസ്യാത്മം വിവരങ്ങൾ സുരക്ഷിതമായി സൂക്ഷിക്കാൻ നൂറ്റാണ്ടുകളായി ആളുകൾ സൈഫറുകളോ കോഡുകളോ ഉപയോഗിക്കുന്നു. സൈന്യത്തിനും ധനകാര്യ സ്ഥാപനങ്ങൾക്കും കമ്പ്യൂട്ടർ പ്രോഗ്രാമർമാർക്കും ഫലപ്രദമായ സൈഫറുകൾ അത്യാവശ്യമാണ്. ഈ സിഫറുകളെ കോഡിംഗ് സൃഷ്ടിക്കുന്നതിനും ഡീകോഡ് ചെയ്യുന്നതിനും ഉപയോഗിക്കുന്ന സാങ്കേതിക വിദ്യകളെ ക്രിപ്റ്റോഗ്രഫി എന്നു വിളിക്കുന്നു.

ഒരു സന്ദേശം കോഡ് ചെയ്യുന്നതിനുള്ള ആദ്യകാല രീതികളിലൊന്ന് ലളിതമായ പകരം വയ്ക്ക ലാണ് ഉദാഹരണത്തിന്, ഒരു സന്ദേശത്തിലെ ഓരോ അക്ഷരത്തിനും അക്ഷരമാലയിൽ മൂന്ന് സ്ഥലങ്ങൾ പിന്നീട് ദൃശ്യമാകുന്ന അക്ഷരം മാറ്റിസ്ഥാപിക്കാം.

ഈ കോഡിംഗ് സ്കീം ഉപയോഗിച്ച്, "LET US WIN", "OHW XV ZLQ" ആയിര മാറുന്നു. ജൂലിയസ് സീസറാണ് ഈ സ്കീം ഉപയോഗിച്ചത്, ഇതിനെ സീസർ സിഫർ എന്ന് വിളിക്കുന്നു. ഡീകോഡ് ചെയ്യുന്നതിന്, ഓരോ അക്ഷരത്തിനും മൂന്ന് സ്ഥാനത്തിന് മുമ്പായി പകരം വയ്ക്കുക. മാനസികശേഷി പരിശോധനകളിൽ ഈ ആശയം പലപ്പോഴും ഉപയോഗിക്കാറുണ്ട്. ചിത്രം 1.4 ൽ നൽകിയിരിക്കുന്നു പോലെ മുകളിലുള്ളവ ഒരു അമ്പടയാള രേഖയായി പ്രതിനിധീകരിക്കാം. ഓർഡർ ചെയ്ത ജോഡികളുടെ കൂട്ടമായി ഇതിനെ കാണാനാകും. $\{(L,O),(E,H),(T,W),(U,X),(S,V),(W,Z),(I,L),(N,Q)\}$



ചിത്രം 1.4

ഇത് കാർട്ടീഷ്യൻ ഉൽപ്പന്നമായ $C \times D$ യുടെ ഉപസെറ്റാണ് ഇവിടെ, $C = \{L,E,T,U,S,W,I,N\}$, $D = \{O,H,W,X,V,Z,L,Q\}$,

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 14 14-02-2023 16:40:36

നിങ്ങൾക്കറിയാമോ

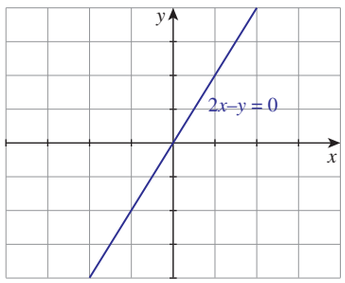


"KDUGZRUN" എന്നാൽ "HARDWORK" ആണെങ്കിൽ "DFKLHYHPHQW", "ACHIEVEMENT"–ആയി മാറുന്നു.

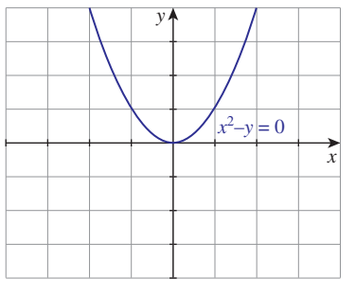
"ഇത് $f(x) = x - 3$ ആണോ ?".

ചിത്രീകരണം 1.2 ജ്യാമിതി : ഇനി പറയുന്ന മൂന്ന് സമവാക്യങ്ങൾ പരിഗണിക്കുക.

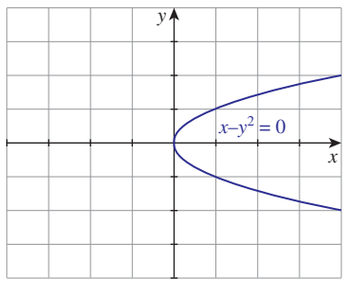
(i) $2x - y = 0$ (ii) $x^2 - y = 0$ (iii) $x - y^2 = 0$



ചിത്രം 1.5



ചിത്രം 1.6



ചിത്രം 1.7

(i) $2x - y = 0$

$2x - y = 0$ എന്ന സമവാക്യം ഒരു നേർരേഖയെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. $(1, 1), (3, 5), (4, 5)$ പോയിന്റുകൾ നേർരേഖയിൽ കിടക്കുന്നില്ലെങ്കിലും പോയിന്റുകൾ $(1, 2), (3, 6)$ അതിൽ കിടക്കുന്നു. x ഉം y ഉം തമ്മിലുള്ള വിശകലന ബന്ധം $y = 2x$ നൽകുന്നു. ഇവിടെ y ന്റെ മൂല്യങ്ങൾ x ന്റെ മൂല്യങ്ങളെ ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്നു. ഈ ആശ്രയത്വത്തെ സൂചിപ്പിക്കാൻ, $y=f(x)$ എന്ന് എഴുതുന്നു. നേർരേഖയിൽ കിടക്കുന്ന എല്ലാ പോയിന്റുകളുടെയും ഗണം $\{(x, 2x) : x \in \mathbb{R}\}$ ആയി നൽകിയിരിക്കുന്നു. ഇത് $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ന്റെ ഉപഗണമാണെന്ന് വ്യക്തമാണ് (ചിത്രം 1.5 കാണുക)

(ii) $x^2 - y = 0$

നമ്മൾ നേരത്തെ ചർച്ച ചെയ്തതുപോലെ x ഉം y ഉം തമ്മിലുള്ള ബന്ധം $y = x^2$ ആണ്. വക്രത്തിലെ എല്ലാ പോയിന്റുകളുടെയും ഗണം $\{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$ (ചിത്രം 1.6 കാണുക) വീണ്ടും ഇത് കാർട്ടീഷ്യൻ ഉൽപ്പന്നമായ $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ന്റെ ഉപഗണമാണ്.

(iii) $x - y^2 = 0$

മുകളിൽ പറഞ്ഞതുപോലെ x ഉം y ഉം തമ്മിലുള്ള ബന്ധം $y^2 = x$ അല്ലെങ്കിൽ $y = \pm\sqrt{x}, x \geq 0$, സമവാക്യം- വീണ്ടും ഇങ്ങനെയും എഴുതാം $y = +\sqrt{x}$ ഉം $y = -\sqrt{x}$ വക്രത്തിലെ എല്ലാ പോയിന്റുകളുടെയും ഗണം $\{(x, \sqrt{x})\}, \{(x, -\sqrt{x})\}$ എന്നീ സെറ്റുകളുടെ യൂണിയനാണ്, ഇവിടെ x ഒരു നെഗറ്റീവ് അല്ലാത്ത വാസ്തവികസംഖ്യയാണ്, കാർട്ടീഷ്യൻ ഉൽപ്പന്നമായ $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ന്റെ ഉപസെറ്റുകളാണ് (ചിത്രം 1.7 കാണുക).

മുകളിലുള്ള ഉദാഹരണങ്ങളിൽ നിന്ന് ഒരു ബന്ധം എന്താണെന്ന് മനസ്സിലാക്കാൻ സാധിക്കും. എന്നാൽ ഗണിത ശാസ്ത്രത്തിൽ, നമ്മൾ ഉപയോഗിക്കുന്ന ഓരോ സാങ്കേതിക പദത്തിനും കർശനമായ നിർവചനം നൽകേണ്ടതുണ്ട്. ഇനി നമുക്ക് "റിലേഷൻഷിപ്പ്" എന്ന പദം ഗണിതശാസ്ത്രപരമായി നിർവചിക്കാം. x , y.

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 15 14-02-2023 16:40:37

ബന്ധത്തിന്റെ നിർവചനം

$A = \{ p, q, r, s, t, u\}$ ഒരു കൂട്ടം വിദ്യാർത്ഥികളായിരിക്കുകയും $B = \{ X, Y, Z, W\}$ ഒരു കൂട്ടം സ്കൂളുകളായിരിക്കട്ടെ. ഇനിപ്പറയുന്ന ബന്ധം നമുക്ക് പരിഗണിക്കാം.

"a" എന്ന കുട്ടി S എന്ന സ്കൂളിൽ പഠിക്കുകയോ നേരത്തെ പഠിച്ചിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ, $a \in A$ കുട്ടി $S \in B$ സ്കൂളുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു.

നമുക്ക് അനുമാനിക്കാം,

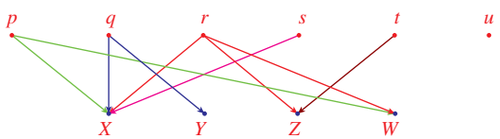
p, 'X' ൽ പഠിച്ചു, ഇപ്പോൾ 'W' ൽ പഠിക്കുന്നു, q, X -ൽ പഠിച്ചു ഇപ്പോൾ 'Y'–ൽ പഠിക്കുന്നു, r, X, W എന്നിവയിൽ പഠിച്ചു, ഇപ്പോൾ 'Z' -ൽ പഠിക്കുന്നു, ആദ്യം മുതൽ തന്നെ s, X ൽ പഠിക്കുന്നു, t, 'Z' ൽ പഠിച്ചു പക്ഷേ ഇപ്പോ ഒരു സ്കൂളിലും പഠിക്കുന്നില്ല, ഈ നാല് സ്കൂളുകളിലൊന്നിലും u പഠിച്ചിട്ടില്ല.

ഇവിടെ ബന്ധങ്ങൾ വ്യക്തമായി നൽകിയിട്ടുണ്ടെങ്കിലും, എല്ലായ്പ്പോഴും ഈ രീതിയിൽ ഒരു ബന്ധം അഥവാ ബന്ധം നൽകാൻ കഴിയില്ല. അതിനാൽ സമാന ബന്ധം പ്രകടിപ്പിക്കുന്നതിന് നമുക്ക് മറ്റ് ചില പ്രാതിനിധ്യങ്ങൾ പരീക്ഷിക്കാം.

(i) $p \quad p \quad q \quad q \quad r \quad r \quad r \quad s \quad t$

$X \quad W \quad X \quad Y \quad X \quad Z \quad W \quad X \quad Z$

(ii)



(iii) $\{(p, X), (p,W), (q,X),(q,Y),(r,X),(r, Z), (r, W), (s, X), (t, Z)\}$

(iv) $pRX, pRW, qRX, qRY, rRX, rRZ, rRW, sRX, tRZ$

ബന്ധത്തിന്റെ ഈ നാല് പ്രാതിനിധ്യങ്ങളിൽ, മൂന്നാമത്തേത് ഗണങ്ങളുടെ കാര്യത്തിൽ ഒരു ബന്ധം കൈകാര്യം ചെയ്യാൻ കൂടുതൽ സൗകര്യപ്രദവും സുഖകരവുമാണെന്ന് തോന്നുന്നു.

മൂന്നാമത്തെ പ്രാതിനിധ്യത്തിൽ നൽകിയിരിക്കുന്ന ഗണം കാർട്ടീഷ്യൻ ഉൽപ്പന്നമായ $A \times B$ യുടെ ഒരു ഉപഗണമാണ്. ചിത്രീകരണങ്ങൾ 1.1, 1.2 എന്നിവയിലും കാർട്ടീഷ്യൻ ഉൽപ്പന്നത്തിന്റെ ഉപഗണങ്ങൾ കാണുവാൻ സാധിക്കുക.

നിർവചനം 1.2

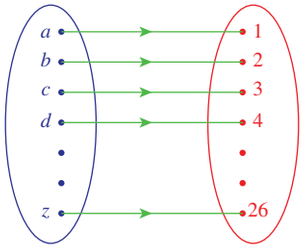
A, B എന്നിവ ശൂന്യമല്ലാത്ത രണ്ട് ഗണങ്ങളായിരിക്കട്ടെ. A - മുതൽ B -വരെയുള്ള ഒരു **ബന്ധം** (റിലേഷൻ) R നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത് A, B -എന്നിവയുടെ കാർട്ടീഷ്യൻ ഉൽപ്പന്നത്തിന്റെ ഉപഗണങ്ങളായിട്ടാണ്. പ്രതീകാത്മകമായി $R \subseteq A \times B$.

A-മുതൽ B- വരെയുള്ള ഒരു ബന്ധം B- മുതൽ A-വരെയുള്ള ബന്ധത്തിൽ നിന്ന് വ്യത്യസ്തമാണ്.

ഗണം $\{a \in A : (a, b) \in R$ ചിലരെ $b \in B\}$ ബന്ധത്തിന്റെ അഥവാ റിലേഷന്റെ ഡൊറ്റെയ്ൻ എന്ന് വിളിക്കുന്നു. ഗണം $\{ b \in B : (a, b) \in R$ ചിലരെ $a \in A\}$ റിലേഷന്റെ ശ്രേണി എന്ന് വിളിക്കുന്നു. അങ്ങനെ ആപേക്ഷിക R –ന്റെ ഡൊറ്റെയ്മൻ ഓർഡർ ചെയ്ത ജോഡികളുടെ എല്ലാ ആദ്യ കോർഡിനേറ്റുകളുടെയും ഒരു കൂട്ടം ആണ്, കൂടാതെ ആപേക്ഷിക R –ന്റെ ശ്രേണി ക്രമപ്പെടുത്തിയ ജോഡികളുടെ എല്ലാ രണ്ടാമത്തെ കോർഡിനേറ്റുകളുടെയും ഗണമാണ്.

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 16 14-02-2023 16:40:38

ചിത്രീകരണം 1.3 ചിത്രം 1.8 ലെ ചിത്രം പരിശോധിക്കുക.

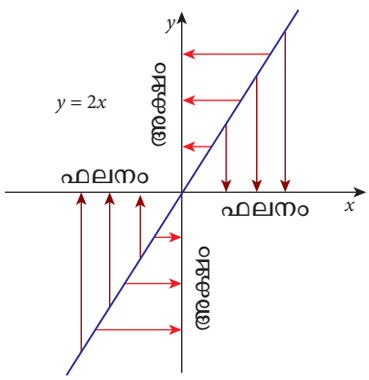


ചിത്രം 1.8

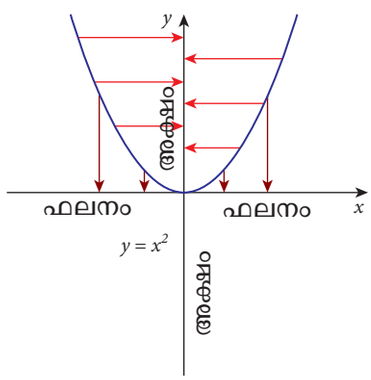
ഇവിടെ അക്ഷരമാല നിസർഗസംഖ്യകൾ അഥവാ എണ്ണൽസംഖ്യകളിലേക്ക് മാപ്പുചെയ്യുന്നു. ഓരോ അക്ഷരമാലയ്ക്കും എണ്ണൽസംഖ്യ നൽകുക എന്നതാണ് ലളിതമായ ഒരു സൈഫർ. ഇവിടെ a- നെ 1 പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു, b -നെ 2 പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു ....., z-നെ 26 പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. ഈ കത്തിടപാടുകൾ ഓർഡർ ചെയ്ത ജോഡികളുടെ ഗണമായി എഴുതാം $\{(a, 1), (b, 2), \ldots, (z, 26)\}$ ഓർഡർ ചെയ്ത ജോഡികളുടെ ഒരു കൂട്ടം ഒരു ബന്ധമാണ്. ബന്ധത്തിന്റെ ഡൊമെൻ $\{a, b, \ldots, z\}$ ഉം ശ്രേണി $\{1, 2, \ldots, 26\}$ യാണ്.

ചിത്രീകരണങ്ങൾ 1.1, 1.2 എന്നിവയിൽ ചർച്ച ചെയ്ത ബന്ധങ്ങൾ രണ്ട് ഗണങ്ങളുടെ കാർട്ടീഷ്യൻ ഉൽപ്പന്നത്തിന്റെ ഉപസെറ്റുകളിൽ അവസാനിക്കുന്നുവെന്ന് ഇപ്പോൾ ഞങ്ങൾ ഓർമ്മിക്കുന്നു. അതിനാൽ ഞങ്ങൾ ഇതുവരെ നടത്തിയ എല്ലാ ചർച്ചകളിലും ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്ന ബന്ധം എന്ന പദം നിർവചനം 1.2 ൽ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്ന ഗണിതശാസ്ത്ര പദ ബന്ധവുമായി യോജിക്കുന്നു.

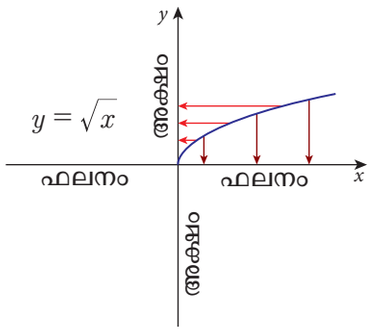
ചിത്രീകരണം 1.1 ൽ ചർച്ച ചെയ്ത ബന്ധത്തിന്റെ ഡൊമെയ്ൻ സെറ്റാണ് $\{L, E, T, U, S, W, I, N\}$, ശ്രേണി $\{O, H, W, X, V, Z, L, Q\}$ ചിത്രം 1.2 ൽ $2x - y = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിനായി ചർച്ച ചെയ്ത ബന്ധത്തിന്റെ ഡൊമെയ്നും ശ്രേണിയും $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ എന്നിവയാണ് (ചിത്രം 1.9 കാണുക). $x^2 - y = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്, ഡൊമെയ്ൻ $\mathbb{R}$ ഉം ശ്രേണി $[0, \infty)$ ഉം ആണ്. (ചിത്രം 1.10 കാണുക); മുന്നാമത്തെ സമവാക്യത്തിന്റെ കാര്യത്തിൽ $x - y^2 = 0$ ഡൊമെയ്ൻ $[0, \infty)$ ഉം ശ്രേണി $\mathbb{R}$ ആണ് (ചിത്രം 1.11 , 1.12 കാണുക)



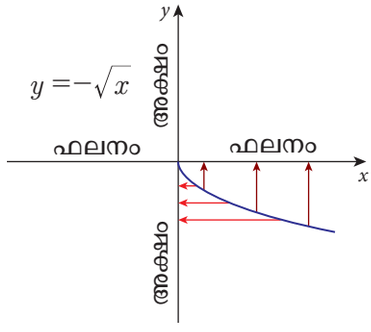
ചിത്രം 1.9



ചിത്രം 1.10



ചിത്രം 1.11



ചിത്രം 1.12

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 17 3/26/2023 5:44:58 PM

ശ്രദ്ധിക്കുക, ഒരു ബന്ധത്തിന്റെ ഡൊമെയ്ൻ കാർട്ടീഷ്യൻ ഉൽപ്പന്നത്തിലെ ആദ്യ സെറ്റിന്റെ ഉപസെറ്റാണ്, ശ്രേണി രണ്ടാമത്തെ സെറ്റിന്റെ ഉപസെറ്റാണ്. സാധാരണയായി ഞങ്ങൾ രണ്ടാമത്തെ സെറ്റിനെ ബന്ധത്തിന്റെ **കോ-ഡൊമെയ്ൻ** എന്ന് വിളിക്കുന്നു. അതിനാൽ ഒരു ഡൊമെയ്നിലെ ചില ഘടകങ്ങളുമായി ബന്ധപ്പെട്ട കോ-ഡൊമെയ്നിലെ എല്ലാ ഘടകങ്ങളുടെയും ശേഖരണമാണ് ഒരു ബന്ധത്തിന്റെ ശ്രേണി. ഒരു ബന്ധത്തിന്റെ വ്യാപ്തി കോ-ഡൊമെയ്നിന്റെ ഒരു ഉപസെറ്റാണെന്ന് നമുക്ക് ശ്രദ്ധിക്കാം.

ഏതൊരു സെറ്റിനും A ϕ, $A \times A$ എന്നിവ $A \times A$ യുടെ ഉപസെറ്റുകളാണ്. ഈ രണ്ട് ബന്ധങ്ങളെയും അങ്ങേയറ്റത്തെ, ബന്ധങ്ങൾ എന്ന് വിളിക്കുന്നു. നേരത്തെ പറഞ്ഞ ശൂന്യമായ ബന്ധവും പിന്നീടുള്ളത്, ഒരു സാർവത്രിക ബന്ധവുമാണ്.

ഡൊമെയ്ൻ, കോ-ഡൊമെയ്ൻ, ശ്രേണി എന്നിവയെക്കുറിച്ച് അടുത്ത വിഭാഗത്തിലെ ഫലനങ്ങളിൽ ചർച്ച ചെയ്യാം.

R എന്നത് A മുതൽ B വരെയുള്ള ഒരു ബന്ധമാണെങ്കിൽ $(x, y) \in R$ ആണെങ്കിൽ, ചിലപ്പോൾ ഞങ്ങൾ xRy എന്ന് എഴുതുന്നു. (ഇത് "x" എന്നത് "y" മായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു എന്നു വായിക്കുക) $(x, y) \notin R$, R ആണെങ്കിൽ, ചിലപ്പോൾ ഞങ്ങൾ എഴുതുന്നത് $x \not R y$ (ഇത് "x" എന്നത് "y" മായി ബന്ധപ്പെട്ടില്ല എന്ന് വായിക്കുക)

ഒരു ബന്ധത്തിന്റെ പൊതുവായ നിർവചനം ഒരു കൂട്ടത്തിൽ നിന്ന് മറ്റൊരു ഗണത്തിലേക്ക് നിർവചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ടെങ്കിലും, ഒരു ഗണത്തെ നിർവചിക്കപ്പെട്ട ബന്ധങ്ങൾ ഗണിതശാസ്ത്ര വീക്ഷണകോണിൽ കൂടുതൽ താൽപ്പര്യമുള്ളവയാണ്. അതായത്, ഡൊമെയ്നും കോ-ഡൊമെയ്നും ഒന്നായ ബന്ധങ്ങൾ കൂടുതൽ താൽപ്പര്യമുള്ളവയാണ്. അതിനാൽ നമുക്ക് ഒരു കൂട്ടത്തിൽ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്ന ബന്ധങ്ങളിൽ ശ്രദ്ധ കേന്ദ്രീകരിക്കാം.

1.5.1 ബന്ധങ്ങളുടെ തരം

ഇനിപറയുന്ന ഉദാഹരണങ്ങൾ പരിഗണിക്കുക.

(i) S-ൽ $S = \{1, 2, 3, 4\}$ $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 3)\}$ അനുവദിക്കുക.

(ii) $S = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ അനുവദിക്കുക. "m" "n" നെ ഹരിച്ചാൽ m എന്നത് n മായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു എന്ന് നിർവചിക്കുക.

(iii) $\mathbb{C}$ ഒരു സമതലത്തിലെ എല്ലാ വൃത്തങ്ങളുടെയും ഗണമായിരിക്കട്ടെ, "C -യുടെ ആരം C' -ആരം തുല്യമാണെങ്കിൽ, ഒരു വൃത്തം C എന്ന വൃത്തങ്ങളുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു C' എന്ന് നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നു.

(iv) എല്ലാ ആളുകളുടെയും S -സെറ്റിൽ "a എന്നത് b -യുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു, a, b യുടെ "സഹോദരനാണെങ്കിൽ" എന്ന് നിർവചിക്കുന്നു.

(v) S എല്ലാ ആളുകളുടെയും കൂട്ടമായിരിക്കട്ടെ. "അമ്മ " എന്ന നിയമം അനുസരിച്ച് S മായുള്ള ബന്ധം നിർവചിക്കുക..

രണ്ടാമത്തെ ഉദാഹരണത്തിൽ, ഓരോ സംഖ്യയും സ്വയം വിഭജിക്കുമ്പോൾ, "a, a യുമായ ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു എന്നത് എല്ലാം $a \in S$" മൂന്നാമത്തെ ബന്ധത്തിലും ഇത് ബാധകമാണ്. ആദ്യ ഉഹാരണത്തിൽ "a" "a"യുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു എന്നത് എല്ലാ $a \in S$ എന്നത് 2 ഉമായി ബന്ധ

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 18 14-02-2023 16:40:41

മില്ലാത്തതിനാൽ ശരിയല്ല.

"a, b യുമായി ബന്ധപ്പെട്ടതാണെങ്കിൽ, b, a യുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു എന്നത് മൂന്നാമത്തേതിൽ ശരിയാണെങ്കിലും രണ്ടാമത്തേതിൽ അല്ല എന്ന് കാണാൻ എളുപ്പമാണ്.

"a, b യുമായി ബന്ധപ്പെട്ടതാണെങ്കിൽ b, c യുമായി ബന്ധപ്പെട്ടതാണെങ്കിൽ, പിന്നെ a c യുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു എന്നത് രണ്ടാമത്തെയും മൂന്നാമത്തെയും ബന്ധങ്ങളിൽ ശരിയാണെന്നും എന്നാൽ അഞ്ചാമത്തേതല്ലെന്നും കാണുവാൻ സാധിക്കും.

ഈ സവിശേഷതകളും മറ്റ് ചില സവിശേഷതകളും ഗണിതശാസ്ത്ര ഘടനയിൽ വളരെയധികം പഠിക്കപ്പെടുന്നു. നമുക്ക് അവ ഇപ്പോൾ നിർവചിക്കാം.

നിർവചനം 1.3

S ശൂന്യമല്ലാത്ത ഏതെങ്കിലും ഗണമായിരിക്കട്ടെ. S Rമായി ഒരു ബന്ധമായിരിക്കട്ടെ,

- എല്ലാ $a \in S$ ലും "a" "a" യുമായി ബന്ധപ്പെട്ടതാണെങ്കിൽ R **റിഫ്ളെക്സിവ്** ആണെന്ന് പറയപ്പെടുന്നു.
- "a, b യുമായി ബന്ധപ്പെട്ടതാണെങ്കിൽ, b, a യുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നുവെന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നുവെങ്കിൽ R സമമിതിയാണെന്ന് പറയുന്നു.
- "a, b യുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു, b, c യുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു എന്നത് a, c യുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നുവെങ്കിൽ R **ട്രാൻസിറ്റീവ്** ആണെന്ന് പറയുന്നു.

ഈ മൂന്ന് ബന്ധങ്ങളെയും **അടിസ്ഥാന ബന്ധങ്ങൾ** എന്ന് വിളിക്കുന്നു. ഈ അടിസ്ഥാന ബന്ധങ്ങളുടെ നിർവചനങ്ങൾ മറ്റൊരു രൂപത്തിൽ നമുക്ക് തിരുത്തിയെഴുതാം.

S ശൂന്യമല്ലാത്ത ഏതെങ്കിലും ഗണമായിരിക്കട്ടെ. S മായി ഒരു ബന്ധമായിരിക്കട്ടെ R,

R എന്നാൽ,,

- $a \in S$ -ആണെങ്കിൽ, $(a,a) \in R$ റിഫ്ളെക്സിവാണ്;
- "$(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$" ആണെങ്കിൽ R- സമമിതിയാണ് ;
- "$(a, b),(b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$" ആണെങ്കിൽ R- ട്രാൻസിറ്റീവാണ്.

നിർവചനം 1.4

S ഏതെങ്കിലും സെറ്റ് ആകട്ടെ. S R, ലെ ഒരു ബന്ധം റിഫ്ളെക്സിവ്, സമമിതി, ട്രാൻസിറ്റീവ് ആണെങ്കിൽ ഇത് **തുല്യതാ ബന്ധമാണെന്ന്** പറയപ്പെടുന്നു.

ഇനിപറയുന്ന രണ്ട് ബന്ധങ്ങൾ നമ്മുക്ക് പരിചിന്തിക്കാം

(i) എല്ലാ ആളുകളുടെയും S_1 -എന്ന ഗണത്തിൽ, റൂൾ പ്രകാരം ഒരു ബന്ധം R_1 നിർവചിക്കുന്നത് "a, b-യുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു, a, b യുടെ സഹോദരനാണെങ്കിൽ".

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 19 14-02-2023 16:40:42

(ii) എല്ലാ പുരുഷന്മാരുടെ S_2 -ഗണത്തിൽ, R_2 എന്ന ബന്ധം നിർവചിക്കുക. "a, b-യുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു, a, b യുടെ സഹോദരനാണെങ്കിൽ.

S_1, S_2 എന്നിവയിലെ ബന്ധത്തെ നിർവചിക്കുന്ന നിയമങ്ങൾ ഒന്നുതന്നെയാണ്. എന്നാൽ ഗണങ്ങൾ സമാനമല്ല. R_1, എന്നത് S_1 ലെ ഒരു സമമിതി ബന്ധമല്ല, R_2, എന്നത് S_2 ലെ ഒരു സമമിതി ബന്ധമാണ്. ബന്ധത്തെ നിർവചിക്കുന്ന നിയമം മാത്രമല്ല, ബന്ധം നിർവചിച്ചിരിക്കുന്ന ഗണവും പ്രധാന മാണെന്ന് ഇത് കാണിക്കുന്നു. അതിനാൽ ഒരാൾ ഒരു ബന്ധത്തെ പരിഗണിക്കുമ്പോഴെല്ലാം, ആപേക്ഷി കതയും ബന്ധം നിർവചിച്ചിരിക്കുന്ന ഗണവും വ്യക്തമായി നൽകേണ്ടതുണ്ട്.

$\{1,2,3\}$ സെറ്റിൽ നിർവചിച്ചിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ; $\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2)\}$ റിഫ്ളെക്സിവ് ആണെന്ന കാര്യം ശ്രദ്ധിക്കുക; ഇത് റിഫ്ളെസ്കിവ് അല്ല $\{1,2,3,4\}$ എന്ന സെറ്റിൽ നിർവചിച്ചിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ,

ചിത്രീകരണം 1.4

1. $X = \{1, 2, 3, 4\}, R = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 3), (4, 4), (1, 2), (3, 1)\}$ എന്നിവ അനുവദിക്കുക. $(1, 1), (2, 2), (3, 3) (4, 4)$ എന്നിവയെല്ലാം R –ൽ ഉള്ളതിനാൽ, ഇത് റിഫ്ളെക് സിവ് ആണ്. ഓരോ ജോഡിയിലും $(a, b) \in R$ -ജോഡി (b, a) ഉം $\in R$ -ൽ ഉണ്ട്. അതിനാൽ R സമമിതിയാണ്. $(2, 1), (1, 3) \in R$ യും $(2,3) \notin R$ ഇതിൽ നമുക്ക് കാണുവാൻ സാധിക്കും R ട്രാൻസിറ്റീവ് അല്ലെന്നു അതിനാൽ R എന്നത് ഒരു തുല്യതാ ബന്ധമല്ല.

2. P എന്ന പോയിന്റ് എല്ലാ നേർരേഖകളുടെയും ഗണത്തെ സൂചിക്കാൻ അനുവദിക്കുക. l എന്നത് m ന് സമാന്തരമാണെങ്കിൽ P നെ $l\,R\,m$ നെ ആയി നിർവചിച്ചിരിക്കുന്ന ഒരു ബന്ധമായിരിക്കട്ടെ R ഈ ബന്ധം റിഫ്ളെക്സിവ്, സമമിതി, ട്രാൻസിറ്റീവ് എന്നിവയാണ്. അങ്ങനെ ഇത് ഒരു തുല്യതാ ബന്ധമാണ്.

3. ഒരു കുടുംബത്തിലെ കുട്ടികളും മുതിർന്നവരും അടങ്ങുന്ന ഒരു കൂട്ടമായിരിക്കട്ടെ. a, b യുടെ സഹോദരിയാണെങ്കിൽ aRb നിർവചിക്കുന്ന ബന്ധമായി R ആകട്ടെ. ഈ ബന്ധം ശ്രദ്ധാപൂർവം പരിശോധിക്കേണ്ടതുണ്ട്. ഒരു സ്ത്രീ സ്വയം സഹോദരിയല്ല. അതിനാൽ ഇത് റിഫ്ളെക്സിവ് അല്ല. ഇത് സമമിതിയും അല്ല. വ്യക്തമായും അത് ട്രാൻസിറ്റീവ് അല്ല. അതിനാൽ ഇത് ഒരു തുല്യതാ ബന്ധമല്ല. (പെൺകുട്ടികൾ മാത്രമുള്ള ഒരു സെറ്റിൽ സമാന ബന്ധം ഞങ്ങൾ പരിഗണിക്കുകയാ ണെങ്കിൽ, അത് സമമിതിയായിത്തീരുന്നു. ഈ സാഹചര്യത്തിൽ പോലും അത് ട്രാൻസിറ്റീവ് അല്ല)

4. എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെ ഗണത്തിൽ, $x + 2y = 21$ ആണെങ്കിൽ xRy നിർവചിച്ചിരിക്കുന്ന ബന്ധമായി R അനുവദിക്കുക. ബന്ധം വ്യക്തമായി എഴുതുന്നതാണ് നല്ലത്. ആപേക്ഷിക R ആണ് സെറ്റ് $\{(1,10),(3, 9), (5, 8),(7, 7), (9, 6), (11, 5), (13, 4), (15, 3),(17, 2), (19, 1)\}$, $(1, 1) \notin R$ ആയതുകൊണ്ട് റിഫ്ളെക്സിവ് അല്ല; $(1, 10) \in R$, $(10,1) \notin R$ അതുകൊണ്ട് സമമിതി അല്ല. $(3,9),(9,6) \in R$ പക്ഷേ $(3, 6) \notin R$, അതുകൊണ്ട് ഈ റിലേഷൻ ട്രാൻസിറ്റീവ് അല്ല.

5. $X = \{ 1, 2, 3, 4\}$, $R = \phi$ ഇവിടെ ϕ ശൂന്യമായ സെറ്റാണ്. $(1,1) \notin R$ ആയതുകൊണ്ട് ഇനി റിഫ്ളെക്സിവ് അല്ല. (x, y) എന്ന ജോഡി നമുക്ക് R ൽ കണ്ടെത്തുവാൻ കഴിയാത്തത് കൊണ്ട് $(y, x) \notin R$ ബന്ധം "സമമിതി അല്ല" അല്ല, അതിനാൽ ഇത് സമമിതിയാണ്, അതുപോലെ തന്നെ ഇത് ട്രാൻസിറ്റിവാണ് (പരിവർത്തനപരവുമാണ്).

6. സാർവത്രിക ബന്ധം എല്ലായ്പ്പോഴും ഒരു തുല്യതാ ബന്ധമാണ്.

7. ശൂന്യമായ ഒരു ബന്ധം സമമിതിയും പരിവർത്തനവും ആയി കണക്കാക്കാം.

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 20 14-02-2023 16:40:44

8. ഒരു ബന്ധത്തിൽ ഒരൊറ്റ ഘടകം അടങ്ങിയിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ, ഈ ബന്ധം ട്രാൻസിറ്റീവ് ആണ്.

ഇനി ചില പ്രത്യേക ബന്ധങ്ങളെക്കുറിച്ച് ചർച്ച ചെയ്യാം.

ഉദാഹരണം 1.10 $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), \ldots, (n, n)\}$ എന്ന ബന്ധം പരിശോധിക്കുക. മൂന്ന് അടിസ്ഥാന ബന്ധങ്ങൾക്കായി $S = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ സെറ്റിൽ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നു.

നിർദ്ധാരണം :

$a \in S$, $(a, a) \in R$ ആയതുകൊണ്ട്, R റിഫ്ളെക്സിവാണ്.

R ൽ ഒരു ജോഡി (a, b) ഇല്ല അതുകൊണ്ട് $(b, a) \notin R$ മറ്റൊരു വിധത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ, ഓരോ ജോഡിക്കും $(a, b) \in R$, (b, c) യും R എന്ന ബന്ധത്തിൽ ഉണ്ടെങ്കിൽ. R സമമിതിയാണ്. നമ്മുക്ക് R ൽ രണ്ട് ജോഡികൾ $(a, b), (b, c)$ കണ്ടെത്താനാവില്ല, അതിനാൽ $(a, c) \notin R$ അതിനാൽ "R ട്രാൻസിറ്റീവ് അല്ല" എന്ന പ്രസ്താവന ശരിയല്ല, അതിനാൽ "R ട്രാൻസിറ്റീവ് ആണ്" എന്ന പ്രസ്താവന ശരിയാണ്. അതിനാൽ R ട്രാൻസിറ്റീവ് ആണ്.

R റിഫ്ളെക്സിവ് ആയതിനാൽ, ഈ ബന്ധം ഒരു തുല്യതാ ബന്ധമാണ്.

തുടക്കം മുതൽ തന്നെ ഞങ്ങൾ എല്ലാ ബന്ധങ്ങളെയും ഒരേ അക്ഷരമായ R ൽ സൂചിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു. ബന്ധങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കാൻ നമുക്ക് ഗ്രീക്ക് അക്ഷരം ρ (*rho* എന്ന വായിക്കുക) ഉപയോഗിക്കാം. തുല്യതാ ബന്ധങ്ങളെ കൂടുതലും "$\sim$" ഇങ്ങനെയാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.

ഒരു ബന്ധം ആവശ്യമുള്ള തരത്തിലുള്ളതല്ലെങ്കിൽ ചില ജോഡികൾ ചേർക്കുന്നതിലൂടെയോ, ഇല്ലാതാക്കുന്നതിലൂടെയോ നമുക്ക് ആവശ്യമുള്ള തരത്തിൽ അത് നിർമ്മിക്കാൻ കഴിയും. ഇനിപ്പറയുന്ന ചോദ്യങ്ങളിൽ നമുക്ക് ഇത് ചെയ്യാം.

ഉദാഹരണം 1.11

$S = \{1, 2, 3\}$ യും $\rho = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (1, 3), (3, 1)\}$.

(i) ρ എന്നത് റിഫ്ളെക്സിവ് ആണോ? ഇല്ലെങ്കിൽ, കാരണം വ്യക്തമാക്കുക, ഒപ്പം റിഫ്ളെക്സിവ് ആക്കുന്നതിന് ρ യിലേക്ക് ഉള്ഡപ്പെടുത്തേണ്ട ഓർഡർ ചെയ്ത ജോഡികളുടെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ഗണം എഴുതുക.

(ii) ρ സമമിതിയാണോ? അല്ലെങ്കിൽ കാരണം വ്യക്തമാക്കുക, ρ യിലേക്ക് ഉൾപ്പെടുത്തേണ്ട ഓർഡർ ചെയ്ത ജോഡികളുടെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ എണ്ണം എഴുതുക, അങ്ങനെ അത് സമ മിതിയാക്കുകയും ഓർഡർ ചെയ്ത ജോഡികളുടെ എണ്ണം എണ്ണത്തിൽ നിന്ന് ഇല്ലാതാക്കു കയും അത് സമ്മതിയാക്കുകയും ചെയ്യുക.

(iii) ρ ട്രാൻസിറ്റീവ് ആണോ? ഇല്ലെങ്കിൽ, കാരണം വ്യക്തമാക്കുക ρ യിലേക്ക് ഉൾപ്പെടുത്തേണ്ട ഓർഡറുകളുടെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ എണ്ണം എഴുതുക, അങ്ങനെ അത് ട്രാൻസിറ്റീവ് ആക്കുകയും ρ യിൽ നിന്ന് എടുത്തുമാറ്റി അതിനെ ട്രാൻസിറ്റിവാകാൻ വേണ്ട ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ എണ്ണം എഴുതുക.

(iv) ρ ഒരു തുല്യതാ ബന്ധമാണോ? അല്ലെങ്കിൽ ρ യിലേക്ക് ഉൾപ്പെടുത്തേണ്ട ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ഓർഡർ ജോഡികൾ എഴുതുക, അങ്ങനെ ഇത് ഒരു തുല്യതാ ബന്ധമാക്കി മാറ്റുക.

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 21 14-02-2023 16:40:45

നിർദ്ധാരണം :

(i) ρ റിഫ്ലെക്സിവല്ല കാരണം $(3, 3)$ ρ യിൽ ഇല്ല. $(1, 1), (2, 2)$ യിൽ ഉള്ളത് കൊണ്ട് ഇനി അതിലേക്ക് $(3, 3)$ യും കൂടി ചേർത്താൽ മതി. അപ്പോൾ ഇത് റിഫ്ലെക്സിവാകും.

(ii) ρ സമമിതിയല്ല കാരണം $(1, 2)$ ρ (rho) യിലുണ്ട് എന്നാൽ $(2, 1)$ ρ യിൽ ഇല്ല. $(2, 1)$ എന്ന ജോഡി ρ യിൽ ചേർത്താൽ അത് സമമിതിയാകും. അല്ലെങ്കിൽ $(1, 2)$ എന്ന ജോടി ρ യിൽ നിന്നും എടുത്തുമാറ്റിയാലും മതി അത സമമിതിയാകും

(iii) ρ ട്രാൻസിറ്റീവ് അല്ല കാരണം $(3, 1), (1, 3)$ ρ യിൽ ഉണ്ട്, പക്ഷേ $(3, 3)$ എന്ന ജോടി ρ യിൽ ഇല്ല. ഇതിനെ ട്രാൻസിറ്റീവാക്കാൻ നമ്മൾ $(3, 3)$ എന്ന ജോടി ρ യിൽ ചേർക്കണം. $(3, 3)$ എന്ന ജോടി ρ യിൽ ചേർത്തു കഴിഞ്ഞാലും ഈ റിലേഷൻ/ ബന്ധം ട്രാൻസിറ്റീവാകുന്നില്ല. കാരണം $(3, 1), (1, 2)$ ρ യിലുണ്ട് എന്നാൽ $(3, 2)$ ρ യിൽ ഇല്ല. ഈ റിലേഷനെ ട്രാൻസിറ്റീവാക്കാൻ നമ്മൾ $(3, 2)$ എന്ന ജോഡിയെ ρ യിൽ ചേർക്കണം. അപ്പോൾ അത് ട്രാൻസിറ്റീവായി മാറും. ρ യിനെ ട്രാൻസിറ്റീവാക്കാൻ $(3, 3), (3, 2)$ എന്നിവയാണ് ചേർക്കേണ്ടത്. പക്ഷേ $(3, 1)$ എന്ന ജോടിയെ ρ യിൽ നിന്ന് മാറ്റിയാലും മതി അതിനെ ട്രാൻസിറ്റീവാക്കാൻ

(iv) നമ്മൾ നേരത്തെ കണ്ടത് പോലെ,

- ρ-നെ റിഫ്ലെസിവാക്കാൻ, നമ്മൾ (3, 3) -നെ ചേർക്കണം.
- ρ -നെ സമമിതിയാക്കാന, നമ്മൾ (2, 1) - എന്ന ജോഡിയെ ചേർക്കണം.
- ρ-ട്രാൻസിറ്റീവാകാൻ നമ്മൾ (3, 3), (3, 2) -എന്ന ജോഡി ചേർക്കണം.

ρ നെ ഒരു തുല്യതാ ബന്ധമാകണമെങ്കിൽ ചുവടെ കാണുന്ന എല്ലാജോഡികളും ചേർക്കണം

$\{(1, 1),(2, 2),(3, 3),(1, 2),(2, 1),(1, 3),(3, 1),(3, 2),(2, 3)\}$ എന്നാൽ ഈ റിലേഷൻ/ ബന്ധം ഒരു സമമിതിയല്ല, ഇതിനെ സമമിതിയാക്കാൻ $(2, 3)$ എന്ന ജോഡി ചേർക്കണം, കാരണം അവിടെ $(3, 2)$ എന്ന ജോടിയുള്ളത് കൊണ്ട് ഇപ്പോഴുള്ള പുതിയ ബന്ധം $\{(1, 1),(2, 2),(3, 3), (1, 2),(2, 1),(1, 3),(3, 1),(3, 2),(2, 3)\}$.

ഇവിടെ നമുക്ക് കാണുവാൻ സാധിക്കും. ഈ റിലേഷൻ/ബന്ധം റിഫ്ലെക്സിവ്, സമമിതി, ട്രാൻസിറ്റീവാണെന്ന്. അതുകൊണ്ട് ഇതിനെ തുല്യതാബന്ധം എന്നുപറയാം. ഈ റിലേഷനെ/ബന്ധത്തെ തുല്യതാ ബന്ധം ആക്കുവാൻ നമ്മൾ $(3, 3),(2,1),(3,2), (2, 3)$ എന്ന ജോടികൾ ചേർത്തു.

ഇനിപ്പറയുന്ന ഉദാഹരണത്തിലൂടെ ചില സവിശേഷതകളുള്ള ബന്ധങ്ങൾ എങ്ങനെ സൃഷ്ടിക്കാമെന്ന് ഇപ്പോ പഠിക്കാം.

ഉദാഹരണം 1.12 $A = \{0, 1, 2, 3\}$ ഇനിപ്പറയുന്ന തരത്തിലുള്ള ബന്ധങ്ങൾ A -യിൽ നിർമ്മിക്കുക.

(i) റിഫ്ലെക്സിവ് അല്ല, സമമിതി അല്ല, ട്രാൻസിറ്റീവ് അല്ല.

(ii) റിഫ്ലെക്സീവ് അല്ല, സമമിതി അല്ല, ട്രാൻസിറ്റീവ്.

(iii) റിഫ്ലെക്സീവ് അല്ല, സമമിതി, ട്രാൻസിറ്റീവ് അല്ല.

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 22 14-02-2023 16:40:46

(iv) റിഫ്ലെക്സീവ് അല്ല, സമമിതി, ട്രാൻസിറ്റീവ് അല്ല.

(v) റിഫ്ലെക്സീവ്, സമമിതിഅല്ല, ട്രാൻസിറ്റീവ്.

(vi) റിഫ്ലെക്സീവ്, സമമിതി അല്ല, ട്രാൻസിറ്റീവ് അല്ല

(vii) റിഫ്ലെക്സീവ്, സമമിതി, ട്രാൻസിറ്റീവ് അല്ല.

(viii) റിഫ്ലെക്സീവ്, സമമിതി, ട്രാൻസിറ്റീവ്

നിർദ്ധാരണം

(i) നമുക്ക് ജോഡി $(1, 2)$ഉപയോഗിച്ച് ബന്ധം "സമമിതികളല്ല" എന്ന ആക്കുകയും, ബന്ധം $\{(1, 2)\}$ പരിഗണിക്കുകയും ചെയ്യാം. ഇത് ട്രാൻസിറ്റീവാണ്. നമ്മൾ $(2, 3)$ ഉൾപ്പെടുത്തുകയും $(1, 3)$ ഉൾപ്പെടുത്താതിരിക്കുകയും ചെയ്താൽ, ഈ റിലേഷൻ ട്രാൻസിസ്റ്റീവല്ല. അതുകൊണ്ട് $\{(1,2),(2,3)\}$ എന്ന ബന്ധം റിഫ്ലെക്സിവ് അല്ല, സമമിതി അല്ല, ട്രാൻസിറ്റീവ് അല്ല. അതുപോലെ തന്നെ നമുക്ക് കൂടുതൽ ഉദാഹരണങ്ങൾ നിർമ്മിക്കാൻ കഴിയും.

(ii) $\{(1, 2)\}$ എന്ന ബന്ധം ആപേക്ഷികമാണെന്നും അഥവാ ട്രാൻസിറ്റീവാണെന്നും സമമിതിയല്ലെന്നും റിഫ്ലെക്സീവല്ലെന്നും ഇപ്പോൾ നമ്മൾ കണ്ടു.

(iii) അടുത്ത് നമുക്ക് $(1, 2)$ എന്നു ജോടി നോക്കാം. ഞങ്ങൾക്ക് സമമിതി ആവശ്യമുള്ളതിനാൽ, ഞങ്ങൾ ജോഡി $(2, 1)$ ഉൾപ്പെടുത്തണം. ഈ ഘട്ടത്തിൽ $(1, 1)$, $(2, 2)$ ഇവിടെ ഇല്ല, അതുകൊണ്ട് ഈ ബന്ധം ട്രാൻസിറ്റീവല്ല. അതുകൊണ്ട് $\{(1,2),(2,1)\}$ റിഫ്ലെകിസിവല്ല, സമമിതിയാണ്, ട്രാൻസിറ്റീവല്ല.

(iv) (iii) ൽ ചർച്ച ചെയ്ത ബന്ധത്തിലേക്ക് $(1, 1)$, $(2, 2)$ ജോഡികൾ ഉൾപ്പെടുത്തിയാൽ അത് പരിവർത്തനമാകും അഥവാ ട്രാൻസിറ്റീവാകും ഇപ്രകാരം $\{(1, 2), (2, 1), (1, 1), (2, 2)\}$ എന്നത് റിഫ്ലെക്സിവല്ല, പക്ഷേ ഇത് സമമിതിയാണ് അതുപോലെ തന്നെ ട്രാൻസിറ്റിവാണ്.

(v) $\{0, 1, 2, 3\}$ എന്ന ബന്ധം റിഫ്ലെക്സിവാകാൻ, അതിനു $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2,2)$, $(3, 3)$ എന്ന ജോഡികൾ ഉണ്ടായിരിക്കണം. ഭാഗ്യവശാൽ ഇത് സമമിതിയും പരിവർത്തനവും ആയി മാറുന്നു. അതിനാൽ, (i) എന്നതുപോലെ $(1, 2), (2, 3)$ എന്നിവ ചേർത്താൽ നമുക്ക് ആവശ്യമുള്ളത് കിട്ടും. അതിനാൽ $\{(0, 0), (1, 1),(2, 2),(3, 3),(1, 2),(2, 3)\}$ റിഫ്ലെക്സിവാണ്, പക്ഷേ സമമിതിയല്ല അതുപോലെ ട്രാൻസിറ്റിവല്ല.

(vi) ഇതുപോലെ തുടർന്ന് പോകുമ്പോൾ $\{(0, 0),(1, 1), (2, 2),(3, 3),(1, 2)\}$ എന്ന ബന്ധം ലഭിക്കും അത് റിഫ്ലെക്സിവാണ് ട്രാൻസിറ്റീവാണ് പക്ഷേ സമമിതിയല്ല.

(vii) മുകളിൽ കണ്ടതുപോലെ $\{(0, 0),(1, 1),(2, 2),(3, 3), (1, 2),(2, 3),(2, 1), (3, 2)\}$ എന്ന ബന്ധം കിട്ടും അത് റിഫ്ലെക്സിവാണ്, സമമിതിയാണ്, ട്രാൻസിറ്റീവല്ല.

(viii) $\{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3)\}$ എന്ന ബന്ധം റിഫ്ലെക്സിവാണ്, സമമിതിയാണ്, ട്രാൻസിറ്റീവാണ്.

ഉദാഹരണം 1.13 പൂർണ്ണസംഖ്യകളുടെ $\mathbb{Z}$ സെറ്റിൽ, $m - n$, 12 -ന്റെ ഗുണിതമാണെങ്കിൽ mRn നിർവചിക്കുക. R ന്റെ തുല്യതാബന്ധം തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$m - m = 0$, $0 = 0 \times 12$ എന്നിങ്ങനെ mRm, $\mathbb{R}$ റിഫ്ലെക്സിവ് ആണെന്ന് തെളിയിക്കുന്നു.

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 23 14-02-2023 16:40:47

mRn അനുവദിക്കുക. ചില സംഖ്യകൾക്കായി $m-n=12k$ അങ്ങനെ $n-m=12(-k)$. അതിനാൽ nRm, R സമമിതിയാണെന്ന് ഇത് കാണിക്കുന്നു. $k\in\mathbb{Z}$

mRn, nRp എന്നിവ അനുവദിക്കുക; $k,l\in\mathbb{Z}$ -ഉം ചില സംഖ്യകൾക്ക് $m-n=12k$, $n-p=12l$ അതിനാൽ $m-p=12(k+l)$. അതിനാൽ mRp. R ട്രാൻസിറ്റീവ് ആണെന്ന് ഇത് കാണിക്കുന്നു. അങ്ങനെ ഇത് ഒരു തുല്യതാ ബന്ധമാണ്.

സിദ്ധാന്തം 1.1 : m ഘടകങ്ങൾ അടങ്ങിയ ഒരു കൂട്ടത്തിൽ നിന്ന് n ഘടകങ്ങൾ അടങ്ങിയ ഒരു കൂട്ടത്തിലേക്കുള്ള ബന്ധങ്ങളുടെ എണ്ണം 2^{mn} ആണ്. പ്രത്യേകിച്ചു n ഘടകങ്ങൾ അടങ്ങിയ ഒരു കൂട്ടത്തിലെ ബന്ധങ്ങളുടെ എണ്ണം 2^{n^2} .

തെളിവ്

A, B എന്നിവ m ഉം n ഉം അടങ്ങിയ ഗണങ്ങളായിരിക്കട്ടെ. $A\times B$ -യിൽ mn ഘടകങ്ങളുണ്ട്. $A\times B$ ക്ക് 2^{mn} സബ്സെറ്റുകളും. $A\times B$ യുടെ ഓരോ ഉപസെറ്റും A–മുതൽ B–വരെയുള്ള ഒരു ബന്ധമായതിനാൽ m ഘടകങ്ങൾ, അടങ്ങിയ ഒരു കൂട്ടത്തിൽ നിന്ന് n ഘടകങ്ങൾ അടങ്ങിയ ഒരു കൂട്ടത്തിലേക്ക് 2^{mn} ബന്ധങ്ങളുണ്ട്. $A=B$ എടുക്കുമ്പോൾ n ഘടകങ്ങൾ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന ഒരു സെറ്റിലെ ബന്ധങ്ങളുടെ എണ്ണം 2^{n^2}.

കുറിപ്പ് : (i) n ഘടകങ്ങൾ അടങ്ങിയ ഒരു ഗണത്തിലെ റിഫ്ളെക്സിവ് ബന്ധങ്ങളുടെ എണ്ണം 2^{n^2-n}.

(ii) n ഘടകങ്ങൾ അടങ്ങുന്ന ഒരു ഗണത്തിലെ സമമിതി ബന്ധങ്ങളുടെ എണ്ണം $2^{\frac{(n^2+n)}{2}}$.

നിർവചനം 1.5

A- മുതൽ B- വരെയുടെ ബന്ധമാണെങ്കിൽ B- മുതൽ A- വരെ R^{-1} എന്നു ബന്ധം നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത് $R^{-1}=\{(b,a):(a,b)\in R\}$ ഇതിനെ R എന്ന ബന്ധത്തിന്റെ **വിപരീതം** എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണത്തിന്, $R=\{(1,a),(2,b),(2,c),(3,a)\}$ എന്നാൽ $R^{-1}=\{(a,1),(b,2),(c,2),(a,3)\}$ R - ന്റെ ഡൊമെയ്ൻ R^{-1} ന്റെ ശ്രേണിയായ മാറുകയും R - ന്റെ ശ്രേണി R^{-1} ന്റെ ഡൊമെയ്നായി മാറുകയും ചെയ്യുന്നത് കാണുവാൻ സാധിക്കും.



ഒരു സെറ്റിലെ ഒരു തുല്യതാ ബന്ധം അതിനെ അതിന്റെ-ഉപവിഭാഗങ്ങളുടെ (തുല്യതാ ക്ലാസുകളുടെ) ഡിയോജിറ്റ് യൂണിയനായി വിഘടിപ്പിക്കുന്നു. അത്തരമൊരു വിഘടനത്തെ പാർട്ടീഷ്യൻ എന്നുവിളിക്കുന്നു. ഇനിപ്പറയുന്ന ഉദാഹരണങ്ങളിൽ ഇത് വിശദീകരിച്ചിരിക്കുന്നു. $a,b\in\mathbb{Z}$, aRb എങ്കിൽ $a-b=3k$, ആണെങ്കിൽ മാത്രം $k\in\mathbb{Z}$ എന്നത് $\mathbb{Z}$- ന് തുല്യമായ ബന്ധമാണ്.

$$Z_0 = \{x\in\mathbb{Z}:x\mathrm{R}0\} \text{ എങ്കിൽ } Z_0=\{\ldots,-3,0,3,6,9,\ldots\}$$
$$Z_1 = \{x\in\mathbb{Z}:x\mathrm{R}1\} = \{\ldots,-2,1,4,7,10,\ldots\}$$
$$Z_2 = \{x\in\mathbb{Z}:x\mathrm{R}2\} = \{\ldots,-4,-1,2,5,8,\ldots\}$$

ഇപ്രകാരം Z_0 , Z_1 , Z_2 എല്ലാം ഡിജോയിറ്റ് ഉപസെറ്റുകളാണ്. $\mathbb{Z}=Z_0\cup Z_1\cup Z_2$

തന്നിരിക്കുന്ന പാർട്ടീഷനായ $S=S_1\cup S_2\cup\ldots\cup S_n$ ഒരു സെറ്റ് S വിച്ഛേദിക്കുന്ന ഉപസെറ്റുകളായി, $x,y\in S_i$ ആണെങ്കിൽ ഒരാൾക്ക് R നു S ന്റെ മേലിൽ xRy എന്നു തുല്യതാ ബന്ധം നിർമ്മിക്കാൻ കഴിയും. ഉയർന്ന ഗണിതത്തിലെ മിക്കവാറും എല്ലാ ശാഖകളിലും തുല്യതാ ബന്ധംഉപയോഗിക്കുന്നു.

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 24 14-02-2023 16:40:49

അഭ്യാസം 1.2

1. റിഫ്ലെക്സിവിറ്റി, സമമിതി, ട്രാൻസിറ്റിവിറ്റി എന്നിവയ്ക്കായി ഇനിപ്പറയുന്ന ബന്ധങ്ങളെക്കുറിച്ച് ചർച്ച ചെയ്യുക

   (i) എല്ലാ പോസിറ്റീവ് സംഖ്യകളുടെ ഗണത്തിലും നിർവചിച്ചിരിക്കുന്ന ബന്ധം R "$m,\ n$ നെ വിഭജിച്ചാൽ mRn".

   (ii) ഒരു പ്രതലത്തിലെ എല്ലാ നേർരേഖകളുടെയും ഗണത്തെ സൂചിപ്പിക്കാൻ P അനുവദിക്കുക R. എന്ന ബന്ധം നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത് "$l,\ m$– നു ലംബമാണെങ്കിൽ lRm" എന്നാണ്.

   (iii) ഒരു കുടുംബത്തിലെ എല്ലാ അംഗങ്ങളും അടങ്ങുന്ന ഒരു ഗണം A ആയിരിക്കട്ടെ. "a, b -യുടെ സഹോദരിയല്ലെങ്കിൽ aRb എന്നാണ് R എന്ന ബന്ധം നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത്.

   (iv) ഒരു കുടുംബത്തിലെ എല്ലാ വനിതാ അംഗങ്ങളും അടങ്ങുന്ന A എന്ന ഗണം ആയിരിക്കട്ടെ. ബന്ധം R നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത് "$a\ \ b$ -യുടെ സഹോദരിയല്ലെങ്കിൽ aRb" എന്നാണ്.

   (v) എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെ ഗണത്തിൽ R എന്നത് "$x + 2y = 1$ ആണെങ്കിൽ" xRy എന്ന് നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നു.

2. $X = \{a,b,c,d\}$, $R = \{(a,a),(b,b),(a,c)\}$ എന്നിവ അനുവദിക്കുന്നത് ചുവടെയുള്ളത് വരാൻ വേണ്ടി R - ൽ ഉൾപ്പെടുത്തേണ്ട ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ഓർഡർ ജോഡികളുടെ എണ്ണം എഴുതുക
   (i) റിഫ്ലെക്സിവ് (ii) സമമിതി (iii) ട്രാൻസിറ്റീവ് (iv) തുല്യത

3. $A = \{a,b,c\}$, $R = \{(a, a),(b, b),(a, c)\}$ എന്നിവ അനുവദിക്കുക ചുവടെയുള്ളത് വരാൻ വേണ്ടി R- ൽ ഉൾപ്പെടുത്തേണ്ട ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ഓർഡർ ജോഡികളുടെ എണ്ണം എഴുതുക
   (i) റിഫ്ലെക്സിവ് (ii) സമമിതി (iii) ട്രാൻസിറ്റീവ് (iv) തുല്യത

4. P ഒരു സമതലത്തിലെ എല്ലാ ത്രികോണങ്ങളുടെയും ഗണമായിരിക്കട്ടെ, "$a\ \ b$യ്ക്ക് സമാനമാണെങ്കിൽ P-നെ aRb" എന്ന് നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നു. R ഒരു തുല്യതാ ബന്ധമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

5. എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെ ഗണത്തിൽ $2a + 3b = 30$ എങ്കിൽ " aRb"നിർവചിച്ചിരിക്കുന്ന ബന്ധമായി R അനുവദിക്കുക. എല്ലാജോഡികളും പട്ടികപ്പെടുത്തിക്കൊണ്ട് ബന്ധം എഴുതുക. പരിശോധിക്കുക ഇത് ചുവടെയുള്ളത് ആണോ എന്ന (i) റിഫ്ലെക്സിവ് (ii) സമമിതി (iii) ട്രാൻസിറ്റീവ് (iv) തുല്യത.

6. "സൗഹൃദം" എന്ന ബന്ധം ചെന്നൈയിലെ എല്ലാ ആളുകളുടെയും ഗണത്തിന് തുല്യമായ ബന്ധമല്ലെന്ന് തെളിയിക്കുക.

7. എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെ ഗണത്തിൽ $a + b \leq 6$ ആണെങ്കിൽ aRb നിർവചിച്ചിരിക്കുന്ന ബന്ധമായി R അനുവദിക്കുക. എല്ലാ ജോഡികളും പട്ടികപ്പെടുത്തിക്കൊണ്ട് ബന്ധം എഴുതുക. ചുവടെയുള്ളത് ആണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക (i) റിഫ്ലെക്സിവ് (ii) സമമിതി (iii) ട്രാൻസിറ്റീവ് (iv) തുല്യത.

8. $A = \{a, b, c\}$ അനുവദിക്കുക. A-യിലെ ഏറ്റവും ചെറിയ കാർഡിനാലിറ്റിയുടെ തുല്യതാബന്ധം എന്താണ് ? A-ലെ ഏറ്റവും വലിയ കാർഡിനാലിറ്റിയുടെ തുല്യതാബന്ധം എന്താണ് ?

9. പൂർണ്ണസംഖ്യകളുടെ $\mathbb{Z}$ -സെറ്റിൽ, "$m-n$ നെ 7 കൊണ്ട് ഹരിക്കാമെങ്കിൽ mRn" നിർവചിക്കുക. R ഒരു തുല്യതാ ബന്ധമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 25 14-02-2023 16:40:50

1.6 ഫലനങ്ങൾ

ബഹിരാകാശത്ത് ഒരു കണിക ചലിക്കുന്നുവെന്ന് കരുതുക. ഭൗതിക കണങ്ങളെ ഒരു പോയിന്റായി ഞങ്ങൾ അനുമാനിക്കുന്നു. സമയം മാറുന്നതിനനുസരിച്ച്, കണിക അതിന്റെ സ്ഥാനം മാറ്റുന്നു. ഗണിത ശാസ്ത്രപരമായി ഏത് സമയത്തും പോയിന്റ് ത്രിമാന സ്ഥലത്ത് $\mathbb{R}^3$ സ്ഥാനം പിടിക്കുന്നു. സമയം 0 മുതൽ 1 വരെ വ്യത്യാസപ്പെടുന്നുവെന്ന് നമുക്ക് അനുമാനിക്കാം. അതിനാൽ കണത്തിന്റെ ചലനമോ പ്രവർത്തനമോ 0 മുതൽ 1 വരെയുള്ള ഏത് സമയത്തും t കണത്തിന്റെ സ്ഥാനം നിർണ്ണയിക്കുന്നു. മറ്റൊരു വിധത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ, ഓരോ $t \in [0,1]$ നും, കണത്തിന്റെ പ്രവർത്തനം $\mathbb{R}^3$ ൽ ഒരു പോയിന്റ് നൽകുന്നു. t എന്ന സമയത്ത് കണത്തിന്റെ സ്ഥാനം $f(t)$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം.

നമുക്ക് ലളിതമായ മറ്റൊരു ഉദാഹരണം നോക്കാം. $2x - y = 0$ എന്ന സമവാക്യം ഒരു നേർ രേഖയെ വിവരിക്കുന്നുവെന്ന് നമുക്കറിയാം. ഇവിടെ x ഒരു മൂല്യം കണക്കാക്കുമ്പോഴെല്ലാം y അതിനനുസരിച്ച് ചില മൂല്യം കണക്കാക്കുന്നു. y-യുടെ ചലനമോ പ്രവർത്തനമോ തീരുമാനിക്കുന്നത് x- ആണ്. നമുക്ക് $f(x)$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം. പ്രകൃതിയിൽ ഇതുപോലുള്ള നിരവധി സാഹചര്യങ്ങൾ നാം കണ്ടേക്കാം. പ്രകൃതി പ്രതിഭാസങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള പഠനത്തിൽ, ഒരു അളവിന്റെ വ്യതിയാനം മറ്റൊന്നിന്റെ വ്യതിയാനത്തെ ആശ്രയിച്ച് പരിഗണിക്കേണ്ടത് ആവശ്യമാണെന്ന് ഞങ്ങൾ കണ്ടെത്തി.

കണത്തിന്റെ സമയവും സ്ഥാനവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം x- അക്ഷരത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ y-അക്ഷരത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവുമായുള്ള ബന്ധം എന്നിവയും മറ്റ് പല ബന്ധങ്ങളും നാം ഫലനത്തിൽ വള രെക്കാലം പഠിക്കുന്നു. കാന്ററിന് മുമ്പ്, ഒരു ചരത്തിനെ മറ്റൊരു ചരവുമായി ബന്ധിപ്പിക്കുന്ന ഒരു റൂളായി ഫംഗ്ഷൻ എന്ന പദം നിർവചിക്കപ്പെടുന്നു. സെറ്റുകൾ എന്ന സങ്കല്പത്തിന്റെ വികാസത്തിനുശേഷം, ഒരു സെറ്റ് A ലെ ഓരോ ഘടകങ്ങളേയും ബന്ധിപ്പിക്കുന്ന ഒരു റൂളായി ഒരു ഫംഗ്ഷൻ നിർവചിക്കപ്പെടുന്നു. ഒരു സെറ്റ് B ലെ ഒരു അദ്വിതീയ ഘടകം എന്നിരുന്നാലും റൂൾ അസോസിയേറ്റ് എന്നീ പദങ്ങൾ ഗണിതശാസ്ത്ര പദാവലി ശരിയായി നിർവചിക്കപ്പെട്ടില്ല. ആധുനിക ഗണിതശാസ്ത്ര ത്തിൽ നമ്മൾ ഉപയോഗിക്കുന്ന ഓരോ പദവും ശരിയായി നിർവചിക്കേണ്ടതുണ്ട്. അതിനാൽ ഫംഗ്ഷനു കൾക്ക് ഒരു നിർവചനം നൽകിയിരിക്കുന്നത് ബന്ധങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചാണ്.

ഒരു കൂട്ടം വിദ്യാർത്ഥികൾ എഴുതിയ ഒരു പരീക്ഷ ചർച്ച ചെയ്യാൻ ഞങ്ങൾ ആഗ്രഹിക്കുന്നുവെന്ന് കരുതുക. ഇത് ഒരു ബന്ധമായി നാം കാണും.

ഒരു പരീക്ഷയ്ക്കായി ഹാജരായ വിദ്യാർത്ഥികളുടെ കൂട്ടമായിരിക്കട്ടെA, $B = \{0, 1, 2, 3, ..., 100\}$ സാധ്യമായ മാർക്കിന്റെ സെറ്റായിരിക്കട്ടെ. R– എന്ന ഒരു ബന്ധം ഞങ്ങൾ ഇനിപ്പറയുന്ന രീതിയിൽ നിർവചിക്കുന്നു.

ഒരു വിദ്യാർത്ഥി a മാർക്ക് b യുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്ന, a-യ്ക്ക് b-മാർക്കുകളാണ് പരീക്ഷയ്ക്ക് കിട്ടിയതെങ്കിൽ.

ഈ ഉദാഹരണത്തിൽ നിന്ന് ഇനിപ്പറയുന്നവ ഞങ്ങൾ നിരീക്ഷിക്കുന്നു.

- എല്ലാ വിദ്യാർത്ഥികൾക്കും മാർക്ക് ലഭിച്ചു. മറ്റൊരു വിധത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ, ഓരോ $a \in A$, നും $b \in B$ എന്ന ഘടകമുണ്ട്. അങ്ങനെ $(a, b) \in R$.
- ഒരു വിദ്യാർത്ഥിക്കും ഒരു പരിശോധയിലും രണ്ട് വ്യത്യസ്ത മാർക്ക് നേടാൻ കഴിയില്ല. മറ്റൊരു വിധത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ, ഓരോ $a \in A$, നും, തീർച്ചയായും ഒരു $b \in B$ മാത്രമേയുള്ളൂ $(a, b) \in R$. ഇത് മറ്റൊരു രീതിയിൽ കാണിക്കുവാൻ സാധിക്കും $(a, b), (a, c) \in R$ പിന്നെ $b = c$.

മേൽപ്പറഞ്ഞ രണ്ട് ഗുണങ്ങളുള്ള ബന്ധങ്ങൾ ഫംഗ്ഷനുകൾ എന്ന് വിളിക്കുന്നു. വളരെ പ്രധാനപ്പെട്ട ഒരു ബന്ധമാണ്. ബന്ധങ്ങളിലൂടെ ഒരു ഫംഗ്ഷന് കർശനമായ നിർവചനം നൽകാം.

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 26 14-02-2023 16:40:51

നിർവചനം 1.6

A, B എന്നിവ രണ്ട് ഗണങ്ങളായിരിക്കട്ടെ. ഇനിപ്പറയുന്നവയെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്നുവെങ്കിൽ, A– മുതൽ B–വരെയുള്ള f എന്ന ബന്ധം, $A \times B$ – യുടെ സബ്സെറ്റിനെ ഫംഗ്ഷൻ എന്നു വിളിക്കാം.

(i) എല്ലാ $a \in A$ -ക്കും $b \in B$ എന്ന ഘടകമുണ്ട്, അങ്ങനെ $(a, b) \in f$.

(ii) $(a, b) \in f$ ഉം $(a, c) \in f$ ഉം ആണെങ്കിൽ പിന്നെ $b = c$.

അതായത്, ഡൊമെയ്നിലെ ഓരോ ഘടകങ്ങളും ശ്രേണിയിലെ കൃത്യമായി ഒരു ഘടകത്തിലേക്ക് മാച്ചുചെയ്യുന്ന ഒരു ബന്ധമാണ് ഒരു ഫംഗ്ഷൻ.

A യെ f-ന്റെ **ഡൊമെയ്ൻ** എന്നും B നെ f-ന്റെ **കോഡൊമെയ്ൻ** എന്നും വിളിക്കുന്നു. $(a, b), f$-ൽ ആണെങ്കിൽ ഞങ്ങൾ $f(a)= b$ എന്ന് എഴുതുന്നു. b -എന്ന ഘടകത്തെ a -യുടെ **ഇമേജ്** എന്നും a-എന്ന ഘടകത്തെ b-യുടെ **പ്രീഇമേജ്** എന്നും $f(a)$ നെ a-യുടെ f-ന്റെ **മൂല്യം** എന്നും വിളിക്കുന്നു.

$\{$ചില $a \in A$ നുള്ള $b : (a, b) \in f\}$ നെ **ഫംഗ്ഷന്റെ ശ്രേണി** എന്ന് വിളിക്കുന്നു. B $\mathbb{R}$ -ന്റെ ഉപസെറ്റാണെങ്കിൽ, ഫംഗ്ഷൻ **യഥാർത്ഥ മൂല്യമുള്ള ഫലനമാണെന്ന്** ഞങ്ങൾ പറയുന്നു.

f, g എന്ന രണ്ട് ഫലനങ്ങൾ **തുല്യഫലനങ്ങൾ** എന്നു പറയണമെങ്കിൽ അവയുടെ മണ്ഡലങ്ങൾ തുല്യമായിരിക്കണം. കൂടാതെ മഡലത്തിലെ എല്ലാ a - യ്ക്കും $f(a) = g(a)$ ആയിരിക്കും..

f എന്നത് മണ്ഡലം A യ്ക്കും B സഹമണ്ഡലം ആയ ഒരു ഫലനമെങ്കിൽ, ഇങ്ങനെ നമുക്ക് എഴുതാം $f:A \to B$ (ഇത് വായിക്കുന്നത് f എന്നത്, A മുതൽ B വരെയുള്ള ഫലനം അല്ലെങ്കിൽ f എന്നത് A -യെ B -ആക്കി മാറ്റുന്നു എന്നാണ്). f എന്നത് മാപ് A -യെ B ആക്കിമാറ്റുന്നു എന്നും നമ്മൾ പറയുന്നു. $f(a) = b$ എങ്കിൽ f എന്നത് a -മാപ്പുകളെ b -യിലേക്ക് മാറ്റുചെയ്യുന്നു അല്ലെങ്കിൽ a യിൽ നിന്ന് b -യിലേക്ക് മാപ്പു ചെയ്യുന്നു എന്നും ഇത് തുടരുകയും ചെയ്യുന്നു..

ഒരു ഫലനത്തിന്റെ ശ്രേണി അതിന്റെ സഹമണ്ഡലത്തിലെ എല്ലാ ഘടകങ്ങളുടെയും ശേഖരമാണ് അതിന് മുൻചിത്രം ഉണ്ടായിരിക്കണം. വ്യക്തമായി പറഞ്ഞാൽ ഒരു ഫലനത്തിന്റെ ശ്രേണി സഹ മണ്ഡലത്തതിന്റെ ഉപഗണമാണ്. മണ്ഡലത്തിലെ എല്ലാ ഘടകങ്ങൾക്കും ഒരു ഇമേജ് ഉണ്ടായിരിക്കണം എന്നതാണ് ആദ്യത്തെ വ്യവസ്ഥ. ഇത് നിർവചിക്കാനുള്ള കാരണം ഇതാണ്. ഒരു ഗണം A മുതൽ ഗണം B വരെ R ഉണ്ടായിരിക്കണം. കാരണം ഇമേജുകളുള്ള A യുടെ എല്ലാ ഘടകങ്ങളുടെയും ഗണം എന്നു പറയുന്നതാണ്. മണ്ഡലത്തിലെ ഒരു ഘടകത്തിന് രണ്ടോ അതിലധികമോ ബിംബങ്ങൾ ഉണ്ടാകാൻ കഴിയില്ലെന്ന് പറയുന്നു. ഇനിപ്പറയുന്ന സംശയങ്ങൾ സ്വാഭാവികമായി ഉണ്ടാകാം.

- നിർവചനത്തിൽ a -യുടെ ബിംബത്തിനു "ദി" എന്ന ഡെഫനിറ്റ് ആർട്ടിക്കിൾ ഉപയോഗിക്കുന്നത് എന്തുകൊണ്ട്? കൂടാതെ, b -യുടെ പ്രതിബിംബത്തിന് "a" എന്ന ഇൻഡെഫനിറ്റ് ആർട്ടിക്കിൾ ഉപയോഗിക്കുന്നത് എന്തിന്?
- ഒരു ഘടകത്തിലെ മണ്ഡലത്തിന് രണ്ടോ അതിലധികമോ ബിംബങ്ങൾ കാണാൻ കഴിയില്ല എന്ന ഒരു പ്രസ്താവന നമുക്കുണ്ട്. "സഹമണ്ഡലത്തിലെ എല്ലാ ഘടകങ്ങൾക്കും ഒരു പ്രതി ബിംബം ഉണ്ടായിരിക്കും" എന്നതുപോലെ വേറെ എന്തെങ്കിലും നിബന്ധന ഉണ്ടോ? ഇല്ലെങ്കിൽ എന്തുകൊണ്ട്?
- ഒരു മണ്ഡലത്തിലെ ഒരു ഘടകത്തിന് രണ്ടോ അതിലധികമോ ബിംബങ്ങൾ കഴിയില്ല എന്ന ഒരു നിബന്ധന ഉണ്ട്. ഒരു ഘടകത്തിലെ സഹമണ്ഡലത്തിന് രണ്ടോ അതിലധികമോ പ്രതി ബിംബങ്ങൾക്ക് കഴിയില്ല എന്നതു പോലെ വേറെ എന്തെങ്കിലും നിബന്ധന ഉണ്ടോ? ഇല്ലെങ്കിൽ എന്തുകൊണ്ട് ?

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 27 14-02-2023 16:40:52

മണ്ഡലത്തിലെ ഒരു ഘടകത്തിന് കൃത്യമായി ഒരു ബിംബം ഉള്ളതിനാൽ സഹമണ്ഡലത്തിലെ ഒരു ഘടകത്തിന് ഒന്നിൽ കൂടുതൽ പ്രതിബിംബം ഉണ്ടായിരിക്കാം എന്ന് ഈ നിർവചനം പറയുന്നു. 'a' യുടെ ബിംബത്തിന് "ദി" എന്ന പ്രത്യേകലേഖനവും 'b' യുടെ പ്രതിബിംബത്തിനായി 'a' എന്ന അനിശ്ചിത ലേഖനവും ഉപയോഗിക്കുന്നു. മറ്റു രണ്ടു ചോദ്യങ്ങളിൽ ചോദിച്ചതു പോലെ വ്യവസ്ഥകൾ ഒന്നുമില്ല, അതിനുപിന്നിലെ കാരണം ഞങ്ങൾ മുകളിൽ പരിഗണിച്ച വിദ്യാർത്ഥികളുടെ മാർക്കിന്റെ പ്രശ്നത്തിൽ നിന്ന് മനസിലാക്കാം.

എല്ലാ ഫലനങ്ങളും ഒരു ബന്ധമാണ്, എന്നാൽ ഒരു ബന്ധവും ഒരു ഫലനം ആയിരിക്കേണ്ടതില്ലെന്ന് ഞങ്ങൾ നിരീക്ഷിക്കുക.

$f = \{ (a, 1), (b, 2), (c, 2), (d, 4)\}$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

f ഒരു ഫലനമാണോ ? ഇത് ഗണം $\{a, b, c, d\}$ -മുതൽ $\{1, 2, 4\}$ -ൽ നിന്നുള്ള ഫലനമാണ്. ഇത് $\{a, b, c, d, e\}$ -യിൽ നിന്നും $\{1, 2, 3, 4\}$ -എന്ന ഒരു ഫലനമല്ല എന്തെന്നാൽ e യ്ക്ക് ബിംബമൊന്നുമില്ല. ഇത് $\{a, b, c, d\}$ -യിൽ നിന്ന് $\{1, 2, 3, 5\}$ -വരെയുള്ള ഫലനമല്ല കാരണം ബിംബം d -യ്ക്ക് സഹമണ്ഡലത്തിൽ അല്ല. f എന്നത് $\{a, b, c, d\} \times \{1, 2, 3, 5\}$ -എന്നതിന്റെ ഉപഗണമല്ല അതിനാൽ നമ്മൾ ഒരു ഫലനം പരിഗണിക്കുമ്പോൾ മണ്ഡലവും സഹമണ്ഡലവും വ്യക്തമായി പ്രസ്താവിക്കണം.

ചിത്രീകരണം 1.1 -ൽ ചർച്ച ചെയ്തിരിക്കുന്ന ഫലനം മണ്ഡലം $\{ L, E, T, U, S, W, I, N \}$ ഉം സഹമണ്ഡലം $\{ O, H, W, X, V, Z, L, Q \}$ ആയിട്ടുള്ളതാണ്. ചിത്രീകരണം 1.3 ൽ ചർച്ച ചെയ്തിട്ടുള്ള ബന്ധം വീണ്ടും മണ്ഡലം $\{a, b, ..., z\}$ ഉം സഹമണ്ഡലം $\{1, 2, 3, ..., 26\}$ ആയ ഒരു ഫലനമാണ്.

ചിത്രീകരണം 1.2 ൽ ഞങ്ങൾ മൂന്ന് ബന്ധങ്ങളും ചർച്ചചെയ്തു. അതായത്.

(i) $y = 2x$ (ii) $y = x^2$ (iii) $y^2 = x$

വ്യക്തമായി പറഞ്ഞാൽ (i) ഉം (ii) ഉം ഫലനങ്ങളെങ്കിലും (iii) ഒരു ഫലനമല്ല $\mathbb{R}$ എന്നത് മണ്ഡലവും സഹമണ്ഡലവുമെങ്കിൽ (iii) ൽ ഒരേ x നുവേണ്ടി നിർവചനത്തിന് വിരുദ്ധമായ രണ്ട് y മൂല്യങ്ങൾ നമുക്കുണ്ട്. ഇതിനെ രണ്ട് ബന്ധങ്ങളായി വിഭജിക്കുകയാണെങ്കിൽ അതായത് $y = \sqrt{x}$ ഉം $y = -\sqrt{x}$ ഉം ആണ് പിന്നീട് ഈ രണ്ട് ഫലനങ്ങളും ഒരേ മണ്ഡലമായ നെഗറ്റീവ് അല്ലാത്ത യഥാർത്ഥ സംഖ്യകളും സഹമണ്ഡലങ്ങൾ യഥാക്രമം $[0, \infty)$, $(-\infty, 0]$ ആയിത്തീരുന്നു.

1.6.1 ഫലനത്തെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്ന വഴികൾ

(a) ഫലനത്തെ പട്ടികാരീതിയിലുള്ള പ്രതിനിധീകരണം

ഒരു മണ്ഡലത്തിന്റെ ഘടകങ്ങൾ $x_1, x_2, ..., x_n$ പോലെ പട്ടികപ്പെടുത്തുമ്പോൾ നമുക്ക് ഈ രീതി ഉപയോഗിക്കാം. ഇവിടെ $y_1, y_2, ..., y_n$ ഫലനങ്ങളുടെ മൂല്യങ്ങൾ ആണ്. ഇതിനെ ക്രമമായ രീതിയിൽ എഴുതിയിരിക്കുന്നത്.

X	x_1	x_2	...	x_n
Y	y_1	y_2	...	y_n

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 28 14-02-2023 16:40:54

(b) ഫലനത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് രീതിയിലുള്ള പ്രതിനിധീകരണം

മണ്ഡലവും, സഹ-മണ്ഡലവും $\mathbb{R}$-ന്റെ ഉപഗണങ്ങൾ ആയിരിക്കുമ്പോൾ മണ്ഡലത്തെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്ന x -അക്ഷവും സഹ-മണ്ഡലത്തെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്ന y-അക്ഷവും ഉപയോഗിച്ച് xy-യിൽ പ്രതിനിധീകരിക്കാം. ചിത്രീകരണം 1.2-യിലെ ഒന്നും, രണ്ടും കണക്കുകൾ യഥാക്രമം $f(x) = 2x,\ f(x) = x^2$ എന്നീ ഫലനങ്ങളെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു എന്ന് ശ്രദ്ധിക്കുക. സാധാരണയായി ചരം x നെ സ്വതന്ത്രചരമായും y യെ ആശ്രിതചരമായും കണക്കാക്കുന്നു. ചരം x നെ എന്നും $f(x)$-നെ മൂല്യം എന്നും വിളിക്കുന്നു.

(c) ഒരു ഫലനത്തിന്റെ അണലിറ്റിക്കൽ റിപ്റ്റർസന്റേഷൻ

f ഒരു വിശകലന പദപ്രയോഗത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന തരത്തിലുള്ള ഫലനബന്ധം $y=f(x)$ ആണെങ്കിൽ x ന്റെ y- പ്രതിനിധീകരിക്കുന്ന അല്ലെങ്കിൽ വിശകലനപരമായി നിർവചിക്കപ്പെടുന്നുവെന്ന് ഞങ്ങൾ പറയുന്നു.

$x^3 + 5,\ \frac{sinx + cosx}{x^2+1},\ logx + 5\sqrt{x}$ എന്നിവയാണ് വിശകലന പ്രയോഗങ്ങളുടെ ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ. അതായത്, ചില ഗണിത പ്രവർത്തനങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ചിഹ്നങ്ങളുടെ ഒരു ശ്രേണി, അക്കങ്ങൾ, സ്ഥിരാങ്കങ്ങൾ അല്ലെങ്കിൽ ചരങ്ങളുടെ അളവുകൾ എന്നിവ നിശ്ചയിക്കുന്ന അക്ഷരങ്ങൾ വിശകലനം ചെയ്യുന്നു.

(i) $y = \frac{x-1}{x+1}$ (ii) $y = \sqrt{9 - x^2}$ (iii) $y = sinx + cosx$ (iv) $A = \pi r^2$

വിശകലനമായി നിർവചിക്കുന്ന ഫലനങ്ങൾക്ക് ഉദാഹരണങ്ങളാണ്.

സ്വാഭാവികമായും മണ്ഡലങ്ങൾ കണ്ടെത്തുകയെന്നത് വിശകലനപരമായി എഴുത്ത് പ്രവർത്തനങ്ങളുടെ ഉപയോഗങ്ങളിലൊന്നാണ്. അതായത് വലതുവശത്തുള്ള വിശകലന പദപ്രയോഗങ്ങൾക്ക് ഒരു നിശ്ചിത മൂല്യമുള്ള x -ന്റെ മൂല്യങ്ങളുടെ വിശകലനം വിശകലനമായി പ്രതിനിധീകരിക്കുന്ന ഒരു ഫലനത്തിന്റെ നിർവചനത്തിന്റെ സ്വാഭാവിക മണ്ഡലമാണ്.

അങ്ങനെ, ഫലനത്തിന്റെ സ്വാഭാവിക മണ്ഡലമാണ്,

(i) $y = x^3 + 3, (-\infty, \infty)$ ആകുന്നു. (ii) $y = x^4 - 2, (-\infty, \infty)$ ആകുന്നു.

(iii) $y = \frac{x-1}{x+1}$, $\mathbb{R} - \{-1\}$ ആകുന്നു. (iv) $y = \sqrt{4 - x^2}, -2 \le x \le 2$ ആകുന്നു.

ഇപ്പോൾ ഓർക്കാം, ഫലനത്തിന്റെ മണ്ഡലങ്ങൾ

(i) $y=2x$ (ii) $y = x^2$

(iii) $y = +\sqrt{x}$ (iv) $y = -\sqrt{x}$

ഇവ മുൻപ് വിവരിച്ചപോലെ വിശകലന സ്വഭാവമുള്ളതാണ്.

ചിലപ്പോൾ, നമുക്ക് ഭാഗം തിരിച്ചുള്ള നിർവചിക്കപ്പെട്ട ഫലനങ്ങൾ കണ്ടേക്കാം. ഉദാഹരണത്തിന്, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ എന്ന ഫലനം നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത്, പരിഗണിക്കുക.

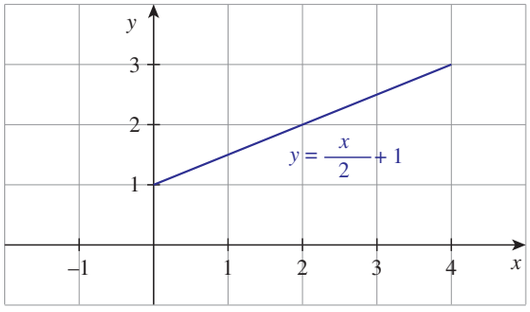
$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad -\infty < x \le -2 \\ 2x & ; \quad -2 < x \le 3 \\ x^2 & ; \quad 3 < x < \infty \end{cases}$$

x -ന്റെ മൂല്യത്തെ ആശ്രയിച്ച്, ഏത് ഘട്ടത്തിലും f-ന്റെ മൂല്യം കണ്ടെത്താൻ ഉപയോഗിക്കുന്ന സൂത്രം തെരഞ്ഞെടുക്കുക. ഏതൊരു യഥാർത്ഥ സംഖ്യയിലും f-ന്റെ മൂല്യം കണ്ടെത്തുന്നതിന്, ആദ്യം ഏത് ഇടവേളയിലാണ് x-എന്ന കണ്ടെത്തണം; തുടർന്ന് അനുബന്ധം സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിച്ച് ആഘട്ടത്തിൽ f-ന്റെ മൂല്യം കണ്ടെത്താൻ കഴിയും. $f(6)$-കണ്ടെത്തുന്നതിന് നമുക്ക് $3 \le x \le \infty$

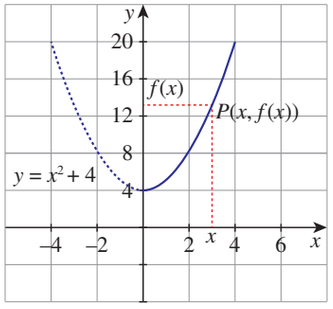
XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 29 14-02-2023 16:40:57

(അല്ലെങ്കിൽ $6 \in (3, 0)$) അറിയണം. അതിനാൽ ഞങ്ങൾ $f(x) = x^2$ എന്ന സമവാക്യം ഉപയോഗിക്കുകയും $f(6)=36$ കണ്ടെത്തുകയും ചെയ്യും. അതുപോലെ $f(-1) = -2, f(-5) = 0$ തുടർന്നു പോകുന്നു.

ഫലനം നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത് $\mathbb{R}$-ൽ നിന്നോ അല്ലെങ്കിൽ $\mathbb{R}$-ന്റെ ഒരു ഉപഗണത്തിലേക്കോ ആണെങ്കിൽ നമുക്ക് ഫലനത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കാൻ കഴിയും. ഉദാഹരണം f: $[0, 4] \to \mathbb{R}$ നെ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത് $f(x) = \frac{x}{2} + 1$ ആണെങ്കിൽ നമുക്ക് $\left(x, \frac{x}{2} + 1\right)$ എല്ലാ $x \in [0,4]$ ബിന്ദുക്കളും നമുക്ക് അടയാളപ്പെടുത്താം. അപ്പോൾ $(0, 1), (4, 3)$ എന്നിവ ചേരുന്ന ഒരു നേർരേഖാഖണ്ഡം നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നു. (ചിത്രം 1.13 നോക്കുക.)



ചിത്രം 1.13



ചിത്രം 1.14

മറ്റൊരു ഫലനം പരിഗണിക്കുക, $f(x) = x^2 + 4, x \geq 0$ ഈ ഫലനം അതിന്റെ ഗ്രാഫിൽ നൽകിയിരിക്കുന്നു. ചിത്രം 1.14 നോക്കുക.

x മണ്ഡലത്തിലെ ഒരു ബിന്ദു ആയിരിക്കട്ടെ. x ബിന്ദുവിലൂടെ നമുക്ക് ഒരു ലംബരേഖ വരയ്ക്കാം. P യിൽ ഈ വക്രം കാണപ്പെടുന്നു. P യിലെ വരച്ച തിരശ്ചീന രേഖ y അക്ഷവുമായി കണ്ടു മുട്ടുന്ന ബിന്ദു $f(x)$ ആണ്. സഹമണ്ഡലത്തിലെ ഒരു ബിന്ദു y വഴി തിരശ്ചീന രേഖകൾ വരച്ച് നമുക്ക് y യുടെ പ്രതിബിംബങ്ങൾ കണ്ടെത്താൻ കഴിയും.

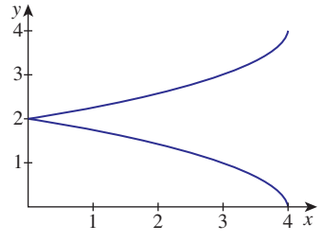
പ്രതലത്തിൽ വരച്ച ഏതെങ്കിലും ഒരു വക്രത്തെ $\mathbb{R}$-ൽ നിന്നും $\mathbb{R}$-ലേക്കുള്ള ഉപഗണത്തിന്റെ ഫലനമായി കണക്കാക്കാമെന്ന് നമുക്ക് പറയാനാകുമോ? ഇല്ല, നമുക്ക് കഴിയില്ല. ഇത് കണ്ടെത്താൻ ലളിതമായ ഒരു പരിശോധനയുണ്ട്.

ലംബരേഖാ പരിശോധന

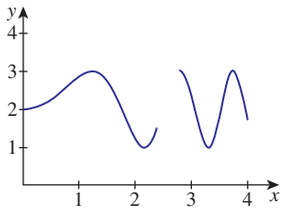
ഞങ്ങൾ മുകളിൽ സൂചിപ്പിച്ചതുപോലെ മണ്ഡലത്തിലെ ഏതു ബിന്ദുവിലൂടെയുമുള്ള ലംബരേഖ വക്രത്തിൽ ചിലത് കണ്ടുമുട്ടുന്നു. തുടർന്ന് ബിന്ദു y-നിർദ്ദേശാങ്കം $f(x)$ ആണ്. മണ്ഡലത്തിലെ ഒരു ബിന്ദു x ലൂടെയുള്ള ലംബരേഖ ഒന്നിലധികം ബിന്ദുക്കളിൽ വളഞ്ഞാൽ ഒരു x ന് $f(x)$ ഒന്നിൽ കൂടുതൽ മൂല്യം ലഭിക്കും. ഒരു ഫലനത്തിൽ ഇത് അനുവദനീയമല്ല. കൂടാതെ മണ്ഡലത്തിലെ x പോയിന്റിലൂടെയുള്ള ലംബരേഖ വക്രത പാലിക്കുന്നില്ലെങ്കിൽ x ന് ഒരു ചിത്രവും ഉണ്ടാകില്ല. ഒരു ഫലനത്തിലും ഇത് സാധ്യമല്ല. അതിൽ നമുക്ക് പറയാൻ കഴിയും.

"മണ്ഡലത്തിലെ ഒരു ബിന്ദു x ലൂടെയുള്ള ലംബരേഖ ഒന്നിലധികം ബിന്ദുക്കളിൽ വക്രം സന്ദർശിക്കുകയോ അല്ലെങ്കിൽ വക്രം പാലിക്കുന്നില്ലെങ്കിലോ, വക്രം ഒരു ഫലനത്തെ പ്രതിനിധീകരിക്കില്ല."

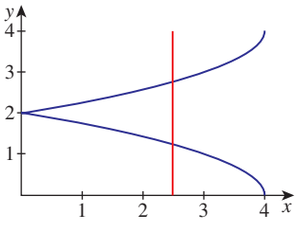
XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 30 14-02-2023 16:40:58



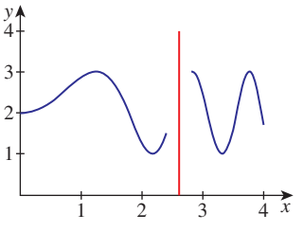
ചിത്രം 1.15



ചിത്രം 1.16



ചിത്രം 1.17



ചിത്രം 1.18

ചിത്രം 1.15 -ൽ സൂചിപ്പിച്ചിരിക്കുന്ന വക്രം [0, 4] -മുതൽ $\mathbb{R}$- വരെ, എന്തെന്നാൽ ഒരു ലംബരേഖ ഒന്നിലധികം ബിന്ദുക്കളിൽ വക്രത്തെ കണ്ടുമുട്ടുന്നു. (ചിത്രം 1.17 കാണുക)ചിത്രം 1.16 ൽ സൂചിപ്പിച്ചിരിക്കുന്ന വക്രം ഫലനം $[0, 4]$ മുതൽ $\mathbb{R}$-വരെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നില്ല. എന്തെന്നാൽ $x = 2.5$, $[0, 4]$ ൽ ഒരു ലംബരേഖ വരച്ചുകൊണ്ട് വക്രത്തെ കാണുന്നില്ല (ചിത്രം 1.18 കാണുക).

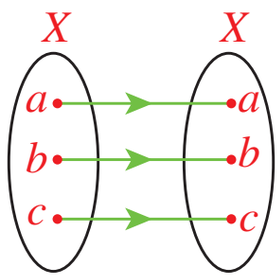
ഒരു ലംബരേഖ വരച്ചതിൽ കൂടെ നിശ്ചിത വക്രം ഒരു ഫലനത്തെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നുണ്ടോ എന്ന് പരിശോധിക്കുന്നതിനെ ലംബരേഖാ പരിശോധന അല്ലെങ്കിൽ ലളിതലംബരേഖാ പരിശോധന എന്നു വിളിക്കുന്നു.

ചിത്രം 1.2 ലെ മൂന്നാമത്തെ വക്രം $y^2 = x$ ലംബരേഖാ പരിശോധനയിൽ പരാജയപ്പെടുന്നു അതിനാൽ ഇത് $\mathbb{R}$ മുതൽ $\mathbb{R}$ വരെയുള്ള ഒരു ഫലനമല്ല.

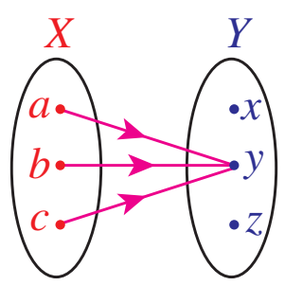
1.6.2 ചില പ്രാതമിക ഫലനങ്ങൾ

പതിവായി ഉപയോഗിക്കുന്ന ചില ഫലനങ്ങൾ പേരുകളാൽ അറിയപ്പെടുന്നു. അവയിൽ ചിലത് നമുക്ക് പട്ടികപ്പെടുത്താം.

(i) X ഏതെങ്കിലും ശൂന്യമല്ലാത്ത ഗണമായിരിക്കട്ടെ. ഫലനം $f: X \to X$ നിർവചിക്കുന്നത് എല്ലാ $x \in X$ യിനും $f(x) = x$ എന്നാണ്. ഇതിനെ **അനന്യഫലനം** എന്ന് വിളിക്കുന്നു. അല്ലെങ്കിൽ (ചിത്രം 1.19 നോക്കുക) ചിത്രം 1.19 ഇതിനെ I_X എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.



ചിത്രം 1.19

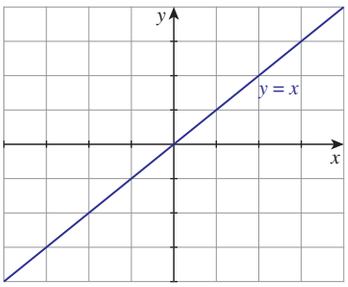


ചിത്രം 1.20

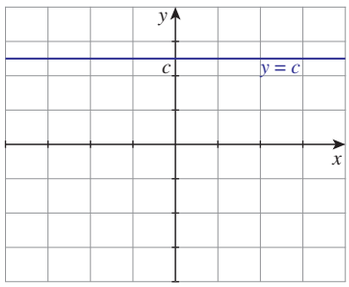
(ii) X, Y രണ്ട് ഗണങ്ങളായിരിക്കട്ടെ. Y-യുടെ ഒരു നിശ്ചിത ഘടകം c ആയിരിക്കട്ടെ. ഫലനം $f: X \to Y$ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത് എല്ലാ $f(x) = c$ ന് $x \in X$ എന്നാണ്. ഇതിനെ സ്ഥിരമായ ഫലനം എന്ന് വിളിക്കുന്നു. (ചിത്രം 1.20 കാണുക) മണ്ഡലം മുഴുവൻ x ന്റെ എല്ലാ മൂല്യങ്ങൾക്കും ഒരു സ്ഥിരമായ ഫലനത്തിന്റെ മൂല്യം ഉണ്ടായിരിക്കും.

X, Y എന്നിവ $\mathbb{R}$ ആയാൽ ചിത്രം 1.21, ചിത്രം 1.21 ൽ അനന്യ ഫലനത്തിന്റെ ഗ്രാഫും സ്ഥിര ഫലനവും നൽകിയിരിക്കുന്നു..

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 31 14-02-2023 16:41:00



ചിത്രം 1.21

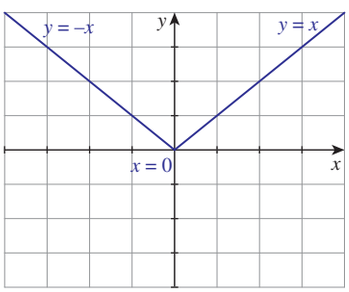


ചിത്രം 1.22

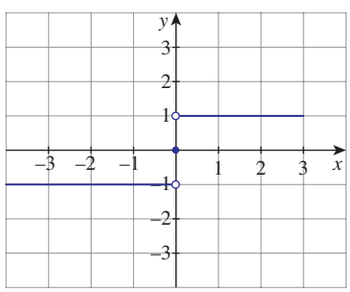
X ഏതെങ്കിലും ഗണമാണെങ്കിൽ സ്ഥിരഫലനം നിർവചിക്കപ്പെടുന്നത് എല്ലാ x നും $f(x) = 0$ എന്നാണ്. ഇതിനെ **പൂജ്യം ഫലനം** എന്നു വിളിക്കുന്നു. അതിനാൽ പൂജ്യം ഫലനം സ്ഥിരഫലനത്തിന്റെ ഒരു പ്രത്യേക അവസ്ഥയാണ് $x \in X$.

(iii) ഫലനം $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത് $f(x) = |x|$ എന്നാണ് ഇവിടെ $|x|$ എന്നത് x ന്റെ മോഡുലസ്സ് മൂല്യം അല്ലെങ്കിൽ x ന്റെ കേവല മൂല്യം ആണ്. ഇതിനെ **മോഡുലസ്സ് ഫലനം** അല്ലെങ്കിൽ **കേവല മൂല്യഫലനം** എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

$$|x| = \begin{cases} -x & ; \ x < 0 \\ 0 & ; \ x = 0 \\ x & ; \ x > 0 \end{cases} \text{ അഥവാ } |x| = \begin{cases} -x & ; \ x \leq 0 \\ x & ; \ x > 0 \end{cases} \text{ അഥവാ } |x| = \begin{cases} -x & ; \ x < 0 \\ x & ; \ x \geq 0 \end{cases}$$



ചിത്രം 1.23



ചിത്രം 1.24

(iv) ഫലനം $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ന്റെ നിർവചനം

$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & ; \ x \neq 0 \\ 0 & ; \ x = 0 \end{cases}$, എങ്കിൽ **സിഗ്നം ഫലനം** എന്ന് വിളിക്കുന്നു. ഈ ഫലനത്തെ sgn എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം (ചിത്രം 1.24 നോക്കുക).

(v) ഫലനം $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത് $f(x)$ പൂർണ്ണ സംഖ്യയെക്കാൾ കുറവോ, x -ന് തുല്യമോ ആയാൽ ഇതിനെ **ഇന്റഗ്രൽ വാർട്ട് ഫലം** എന്നോ വൻ പൂർണ്ണസംഖ്യ ഫലനമോ തറ ഫലനമോ വിളിക്കുന്നു. ഈ ഫലനത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നത് $\lfloor x \rfloor$ എന്നാണ് (ചിത്രം 1.25 നോക്കുക.).

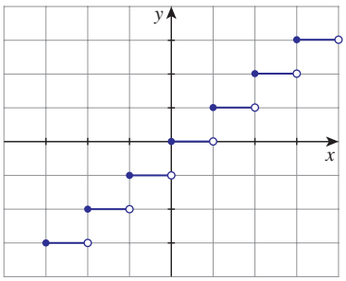
(vi) ഫലനം $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത് $f(x)$ ചെറിയ പൂർണ്ണ സംഖ്യയെക്കാൾ വലുതോ, x -ന് തുല്യമോ ആയാൽ ഇതിനെ ചെറിയ പൂർണ്ണ സംഖ്യ ഫലനമേതോ ceil (പരിധി ഫലനമെന്നോ വിളിക്കുന്നു. ഈ ഫലത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നത് $\lceil . \rceil$ എന്ത് എന്നാൽ അതായത് $\lceil x \rceil$ അത് $f(x)$ നെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഫലനം (v) നെയും (vi) നെയും വടിഫലനം എന്ന് വിളിക്കുന്നു. നമുക്ക് നോക്കാം.

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 32 3/26/2023 5:50:32 PM

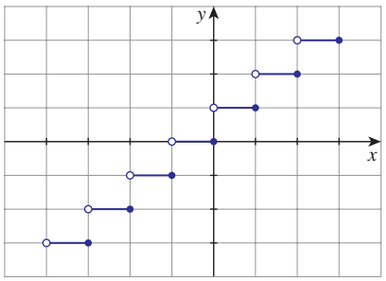
$\left[1\frac{1}{5}\right] = 1, [7.23] = 7, \left[-2\frac{1}{2}\right] = -3$ (-2 അല്ല), $[6] = 6, [-4] = -4$

$\left\lceil 1\frac{1}{5}\right\rceil = 2, \lceil 7.23\rceil = 8, \left\lceil -2\frac{1}{2}\right\rceil = -2$ (-3 അല്ല), $\lceil 6\rceil = 6, \lceil -4\rceil = -4$

ഈ ഫലനങ്ങളുടെ പേരുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം ഒരാൾ ശ്രദ്ധിച്ചേയ്ക്കാം. സൂചിപ്പിക്കുന്ന ചിഹ്നങ്ങൾ സാധാരണയായി ഉപയോഗിക്കുന്ന പദങ്ങളുടെ പരിധി, ഒരു മുറിയുടെ തറയും അവയുടെ ഗ്രാഫുകൾ എന്നിവ ചിത്രം 1.25, 1.26 നൽകിയിരിക്കുന്നു.



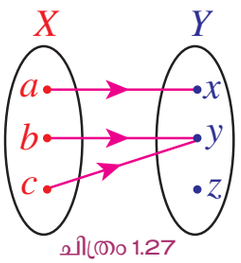
ചിത്രം 1.25



ചിത്രം 1.26

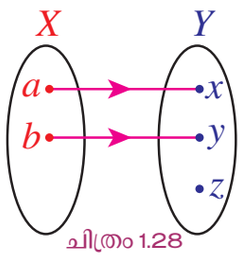
1.6.3 ഫലനങ്ങളുടെ തരങ്ങൾ

ആവശ്യം അനുസരിച്ച് ഫലനങ്ങളെ വിവിധമായി തരം തിരിക്കാമെങ്കിലും നമ്മൾ രണ്ട് അടിസ്ഥാന തരങ്ങളിൽ ശ്രദ്ധ കേന്ദ്രീകരിക്കുന്നു: **ഒൺ-ടു-ഒൺ ഫലനവും, -ടു ഫലനവും.**



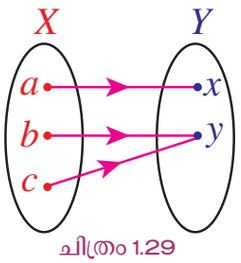
ചിത്രം 1.27

ചിത്രം 1.27, 1.28-ൽ നല്കിയിരിക്കുന്ന രണ്ട് ലളിതമായ ഫലനങ്ങൾ നോക്കാം. മണ്ഡലത്തിന്റെ രണ്ട് ഘടകങ്ങളായ b,c എന്നിവ ഒരേ ഘടകത്തിലേക്ക്, y മേപ്പ് ചെയ്യുന്നു. ചിത്രം 1.28 ൽ അങ്ങനെയല്ല രണ്ടാമത്തേതു പോലുള്ള ഫലനങ്ങൾ ഒൺ-ടു-ഒൺ ഫലനങ്ങൾക്ക് ഉദാഹരണമാണ്.



ചിത്രം 1.28

ചിത്രം 1.28, 1.29 എന്നിവയിൽ നൽകിയിരിക്കുന്ന രണ്ട് ഫലനങ്ങൾ. നോക്കാം ചിത്രം 1.28-ൽ സഹ-മണ്ഡലത്തിലെ z ഘടകത്തിന് പ്രതിബിംബമില്ല. അതേ സമയം ചിത്രം 1.29-ൽ അങ്ങനെയല്ല. ചിത്രം 1.29 പോലുള്ള ഫലനങ്ങൾ ഓൺ-ടു ഫലനങ്ങൾക്ക് ഉദാഹരണമാണ്. ഇപ്പോൾ നമ്മൾ ഒൺ-ടു-ഒൺ, ഓൺ-ടു ഫലനങ്ങൾ നിർവചിക്കുന്നു.



ചിത്രം 1.29

നിർവചനം 1.7

ഒരു ഫലനം $f: A \to B$, $x,y \in A, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ [അല്ലെങ്കിൽ തുല്യമായി $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$] ആണെങ്കിൽ ഫലനം ഒൺ-ടു-ഒൺ എന്ന് പറയുന്നു. ഒരു ഫലനം . $f: A \to B, b \in B$ എന്ന ഒരു ഘടകം $a \in A$ അതായത് $f(a) = b$ എന്നതിലേക്ക് ഒരു ഫലനം ഉണ്ടെങ്കിൽ അത് ഓൺ-ടു ആയിരിക്കും, അതായത് f–ന്റെ രംഗം ആകുന്നു B..

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 33 14-02-2023 16:41:04

ഒൺ-ടു-ഒൺ ഫലനത്തിന്റെ മറ്റൊരു പേരാണ് **ഇൻജക്ടീവ് ഫലനം**; ഓൺ-ടു ഫലത്തിന്റെ മറ്റൊരു പേരാണ് **സർജക്ടീവ് ഫലനം**. ഒരു ഫലനം $f: A \to B$ യ്ക്ക് ഒൺ-ടു-ഒൺ, ഓൺ-ടു എന്നീ രണ്ടു ഫലനങ്ങൾ ഉണ്ടെങ്കിൽ അത് ബൈജക്ടീവ് ആണെന്ന് പറയുന്നു.

$f: A \to B$ എന്ന ഫലനം ഒൺ-ടു-ഒൺ ആണെന്ന് തെളിയിക്കാൻ താഴെ പറയുന്നവയിൽ ഏതെങ്കിലും ഒന്ന് തെളിയിച്ചാൽ മതിയാകും.

- $x \neq y$ ആണെങ്കിൽ $f(x) \neq f(y)$ അല്ലെങ്കിൽ തുല്യമായി
- $f(x) = f(y)$ എങ്കിൽ, തുടർന്ന് $x = y$. .

ഓരോ അനന്യ ഫലനവും ഒൺ-ടു-ഒൺ മാത്രമല്ല ഓൺ-ടു ആണെന്ന് നിരീക്ഷിക്കാൻ എളുപ്പമാണ്. സഹ-മണ്ഡലം ഒരു ഘടകം മാത്രം അടങ്ങിയിട്ടില്ലെങ്കിൽ സ്ഥിരമായ ഫലനം ഓൺ-ടു ആകില്ല.

ലളിതമായ ചില പ്രധാന ഫലങ്ങളാണ് ഇനി പറയുന്ന പ്രസ്താവനകൾ.

A, B എന്നിവ m, n ഘടകങ്ങളുള്ള രണ്ട് ഗണങ്ങൾ ആയിരിക്കട്ടെ.

(i) $m > n$ എങ്കിൽ A -മുതൽ B -വരെ ഒൺ-ടു-ഒൺ ഫലനമില്ല.

(ii) A -മുതൽ B -വരെ ഒൺ-ടു-ഒൺ ഫലനമുണ്ടെങ്കിൽ, $m \leq n$

(iii) $m < n$ എങ്കിൽ A-മുതൽ B -വരെ ഓൺ-ടു-ഫലനങ്ങൾ ഒന്നുമില്ല.

(iv) A -മുതൽ B- വരെ ഓൺ-ടു ഫലനം ഉണ്ടെങ്കിൽ $m \geq n$.

(v) $m = n$ ആണെങ്കിൽ മാത്രം A -മുതൽ B -വരെ ഒരു ബൈജക്ഷൻ ഉണ്ട്.

(vi) $m \neq n$ ആണെങ്കിൽ മാത്രം A -മുതൽ B -വരെ ഒരു ബൈജക്ഷൻ ഒന്നുമില്ല.

കുറിപ്പ് : ഓൺ-ടു ഫലനമില്ലാത്തതിനെ ഇൻ-ടു ഫലനം എന്ന് വിളിക്കുന്നു. അതായത് ഫലനത്തിന്റെ രംഗം അതിന്റെ സഹ-മണ്ഡലത്തിന്റെ ശരിയായ ഉപഗണമാണ്.

ചില ചിത്രീകരണം നമുക്ക് നോക്കാം.

(i) $X = \{1, 2, 3, 4\}, Y = \{a, b, c, d, e\}, f = \{(1, a), (2, c), (3, e), (4, b)\}$.

ഈ ഫലനം ഒൺ-ടു-ഒൺ ആണ് ഓൺ-ടു അല്ല.

(ii) $X = \{1, 2, 3, 4\}, Y = \{a, b\}, \quad f = \{(1, a), (2, a), (3, a), (4, a)\}$.

ഈ ഫലനം ഒൺ-ടു-ഒൺ അല്ല, ഓൺ-ടു അല്ല.

(iii) $X = \{1, 2, 3, 4\}, Y = \{a\}$, $f = \{(1, a), (2, a), (3, a), (4, a)\}$.

ഈ ഫലനം ഒൺ-ടു-ഒൺ അല്ല എന്നാൽ ഓൺ-ടു ആണ്. മുമ്പത്തെ പോലെ (ii) ഈ ഫലനവും ഒരു പോലെ കാണുന്നു. ഫലനം ഓൺ-ടു ആണോ അല്ലയോ എന്ന് തീരുമാനിക്കുന്നതിൽ ഫലനത്തിന്റെ സഹ-മണ്ഡലത്തിന് വളരെ പ്രാധാന്യമുണ്ട്.

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 34 14-02-2023 16:41:06

(iv) $X = \{1, 2, 3, 4\}, Y = \{a, b, c, d, e\}$, $f = \{(1, a), (2, c), (3, b), (4, b)\}$.

ഈ ഫലനം ഒൺ-ടു-ഒൺനോ, ഓൺ-ടു വോ അല്ല.

(v) $X = \{1, 2, 3, 4\}, Y = \{a, b, c, d\}$, $f = \{(1, a), (2, c), (3, d), (4, b)\}$

ഈ ഫലനം ഒൺ-ടു-ഒൺ, ഓൺ-ടു ആണ്.

(vi) $X = \{1, 2, 3, 4\}, Y = \{a, b, c, d, e\}$, $f = \{(1, a), (2, c), (3, e)\}$

ഇത് ഒരു ഫലനമേയല്ല. ഒരു ബന്ധം ആണ്.

(vii) k ഘടകങ്ങളുള്ള ഒരു പരിമിതഗണം X എന്ന് ഇരിക്കട്ടെ. അപ്പോൾ X -മുതൽ $\{1, 2, 3, ..., k\}$ ഒരു ബൈജക്ഷൻ കിട്ടുന്നു.

അറിയപ്പെടുന്ന ചില ഗണങ്ങളിൽ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്ന ഫലനങ്ങൾ ഒരു സൂത്ര നിയമത്തിലൂടെ നമുക്ക് പരിഗണിക്കാം.

ഉദാഹരണം 1.14 താഴെ പറയുന്ന ഫലനങ്ങൾ ഒൺ-ടു-ഒൺ ആണോ ഓൺ-ടു ആണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക?

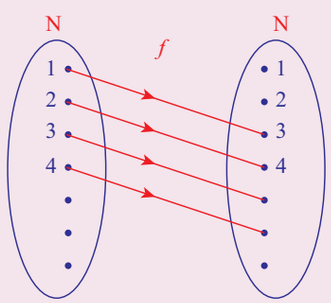
(i) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ നിർവചിക്കുന്നത് $f(n) = n + 2$.

(ii) $f: \mathbb{N} \cup \{-1, 0\} \to \mathbb{N}$ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത് $f(n) = n + 2$.

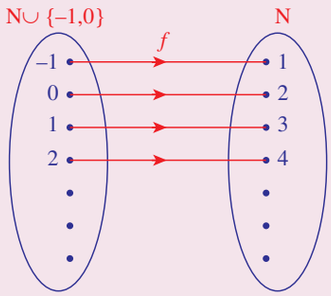
നിർദ്ധാരണം:

(i) $f(n) = f(m)$ എങ്കിൽ $n + 2 = m + 2$. അതിനാൽ $m = n$. അങ്ങനെ f ഒൺ-ടു-ഒൺ ആണ്. 1 ന് പ്രതിബിംബം ഇല്ലെങ്കിൽ ഈ ഫലനം ഓൺ-ടു-ഒൺ അല്ല. (ചിത്രം 1.30 നോക്കുക).

(ii) മുകളിൽ പറഞ്ഞതുപോലെ ഈ ഫലനം ഒൺ-ടു-ഒൺ ആണ്. m സഹമണ്ഡലത്തിൽ ആണെങ്കിൽ, $m - 2$ മണ്ഡലത്തിലും $f(m-2) = (m-2) + 2 = m$ അങ്ങനെ m ന് ഒരു പ്രതിബിംബം ഉണ്ട് അതിനാൽ ഈ ഫലനം ഓൺ-ടു ആണ് (ചിത്രം 1.31 നോക്കുക).



ചിത്രം 1.30



ചിത്രം 1.31

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 35 14-02-2023 16:41:08

കുറിപ്പ് : രണ്ടാമത്തെ ഫലനം **(ii)** ആദ്യ ഫലനത്തിന് **(i)** തുല്യമാണെന്ന് തോന്നുന്നു. എന്നാൽ മണ്ഡലങ്ങൾ വ്യത്യസ്തമാണ്. ഫലനം ഓൺ-ടു ആണോ അല്ലയോ എന്ന് തീരുമാനിക്കുന്നതിലും ഫലനത്തിന്റെ മണ്ഡലം പ്രധാനമാണെന്ന് ഇതിൽ നിന്ന് നമുക്ക് കാണാം. ഫലനം ഒൺ-ടു -ഒൺ ആണോ അല്ലയോ എന്ന് തീരുമാനിക്കുന്നതിൽ സഹ-മണ്ഡലത്തിന് പങ്കില്ല. എന്നാൽ ഫലനം ഓൺ-ടു ആണോ അല്ലയോ എന്ന് തീരുമാനിക്കേണ്ടത് പ്രധാനമാണ്.

ഉദാഹരണം 1.15 ഓൺ-ടു-ഓൺ നസ്സ്, ഓൺ-ടു നസ്സ് നും ഇനി പറയുന്ന ഫലനങ്ങൾ പരിശോധിക്കുക.

(i) $f:\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത് $f(n) = n^2$.

(ii) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത് $f(n) = n^2$.

നിർദ്ധാരണം

(i) $f(m) = f(n) \Rightarrow m^2 = n^2 \Rightarrow m = n$ മുതൽ $m, n \in \mathbb{N}$. അങ്ങനെ f ഒൺ-ടു-ഒൺ ആകുന്നു. എന്നാൽ സഹ-മണ്ഡലത്തിലെ പൂർണ്ണ ചതുര ഘടകങ്ങൾക്ക് പ്രതിബിംബങ്ങൾ ഇല്ല. അതിനാൽ അവ ഓൺ-ടു-അല്ല.

(ii) മണ്ഡലത്തിലെ വ്യത്യസ്ത ഘടകങ്ങൾക്ക് ഒരേ ബിംബങ്ങൾ ഉണ്ട് അതിനാൽ f–ഒൺ-ടു -ഒൺ അല്ല. വ്യക്തമായി f– ന്റെ രംഗം $\mathbb{R}$ ന്റെ യഥാർത്ഥ ഉപഗണമാണ്. അതിനാൽ ഇത് ഓൺ-ടു അല്ല.

ചിത്രീകരണം 1.1 ന് നമ്മളെ ഓർമ്മിപ്പിക്കുന്നു.

$C = \{ L, E, T, U, S, W, I, N \}$, $D = \{ O, H, W, X, V, Z, L, Q \}$ ഒൺ-ടു-ഒൺ, ഓൺ-ടു ഫലനങ്ങളാണ്,

$$f(L) = O, f(E) = H, f(T) = W, f(U) = X, f(S) = V, f(W) = Z, f(I) = L, f(N) = Q$$

ഈ വിവരണത്തിൽ ഫലനം $f:C \to D$, നിർവചിക്കുന്നത്.

ചിത്രീകരണം 1.3 ൽ ഫലനം $f:A \to \mathbb{N}$, നിർവചിക്കുന്നത് $f(a) = 1, f(b) = 2, f(c) = 3, f(z) = 26$ ഇവിടെ ഈ ഫലനം ഒൺ-ടു-ഒൺ ആണ്. $\mathbb{N}$-നെ സഹ-മണ്ഡലമായി എടുക്കുകയാണെങ്കിൽ ഓൺ-ടു ഫലനമല്ല. $\mathbb{N}$-നിന്ന് പകരം സഹ-മണ്ഡലം $\{1, 2, 3, \ldots, 26\}$ ആയി എടുക്കുകയാണെങ്കിൽ അത് അതിലേക്ക് മാറുന്നു.

ഉദാഹരണം 1.16 താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ഒൺ-ടു-ഒൺ നെസ്സ്, ഓൺ-ടു നെസ്സ് ആണെന്ന് പരിശോധിക്കുക.

(i) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ നിർവചിക്കുന്ന, $f(x) = \frac{1}{x}$

(ii) $f:\mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ നിർവചിക്കുന്ന $f(x) = \frac{1}{x}$

നിർദ്ധാരണം :

(i) ഇത് ഒരു ഫലനമല്ല, കാരണം $x = 0$ യ്ക്കായി $f(x)$ നിർവചിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ല.

(ii) ഈ ഫലനം ഒൺ-ടു-ഒൺ ആണ്. (സ്ഥിതീകരിക്കുക) എന്നാൽ $x = 0$ യ്ക്ക് പ്രതിബിംബം ഇല്ലാത്തതിനാൽ ഓൺ-ടു അല്ല.

കുറിപ്പ് : $\mathbb{R}–\{0\}$ രണ്ടാമത്തെ സഹ-മണ്ഡലമായി കണക്കാക്കുന്നു തുടർന്ന് f ഒരു ബൈജക്ഷയായി മാറുന്നു.

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 36 14-02-2023 16:41:11

ഉദാഹരണം 1.17 $f: \mathrm{R} - \{-1, 1\} \to \mathrm{R}$ നിർവചിക്കുന്നത് $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$, f എന്നത് ഒൺ-ടു-ഒൺ ആണോ അല്ലയോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം :

$f(x) = f(y)$ എന്ന അനുമാനത്തോടെ ആരംഭിക്കുക, അപ്പോൾ

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{y}{y^2-1}$$

$$\Rightarrow \quad x(y^2-1) = y(x^2-1)$$

$$\Rightarrow \quad xy^2 - x - yx^2 + y = 0$$

$$\Rightarrow \quad (y-x)(xy+1) = 0$$

$x = y$ അല്ലെങ്കിൽ $xy = -1$. ഇത് അർത്ഥമാകുന്നത് $xy = -1$ അതിനാൽ x, y എന്ന രണ്ട് സംഖ്യകൾ നമ്മൾ തിരഞ്ഞെടുക്കുമ്പോൾ $f(x) = f(y)$ ആകുന്നു.

$\left(2, -\frac{1}{2}\right), \left(7, -\frac{1}{7}\right), \left(-2, \frac{1}{2}\right)$ എന്നിവ അന്തമായ സാധ്യതമായ ജോടികളിൽ ചിലതാണ്, അതായത് $f(2) = f\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{2}{3}$ അതായത് എന്നത് $xy = -1$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നില്ല. അതിനാൽ ഇത് ഒൺ ഒൺ അല്ല.

ഉദാഹരണം 1.18 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ നിർവചിക്കുന്നത്, $f(x) = 2x^2 - 1$, 17, 4 -2 എന്നിവയുടെ പ്രതി-ബിംബങ്ങൾ കണ്ടെത്തുക?

നിർദ്ധാരണം :

17 -ന്റെ പ്രതി-ബിംബം കണ്ടെത്തുന്നതിന് $2x^2 - 1 = 17$ എന്ന സമവാക്യം നിർദ്ധാരണം ചെയ്യണം. ഈ സമവാക്യത്തിന്റെ രണ്ട് നിർദ്ധാരണങ്ങൾ 3 നും -3 നും f -നിന്ന് താഴെയുള്ള 17 -ന്റെ പ്രതിബിംബങ്ങളാണ്. $2x^2 - 1 = 4$ കിട്ടുന്നത് $\sqrt{\frac{5}{2}}$ மற்றும் $-\sqrt{\frac{5}{2}}$ ആണ് ഇത് 4 ന്റെ രണ്ട് പ്രതി-ബിംബങ്ങളാണ്., -2 -ന്റെ പ്രതി-ബിംബം കാണുന്നതിന് $2x^2 - 1 = -2$ എന്ന സമവാക്യം നിർദ്ധാരണം ചെയ്യണം. ഇത് കാണിക്കുന്നത് $x^2 = -\frac{1}{2}$ ഇതിന് $\mathbb{R}$ -ൽ ഒരു നിർദ്ധാരണവുമില്ല. കാരണം, ഒരു സംഖ്യയുടെ ചതുരം നെഗറ്റീവ് ആകാൻ കഴിയില്ല അതിനാൽ f - ന് കീഴേ -2 ന് പ്രതിബിംബം ഇല്ല.

ഉദാഹരണം 1.19 $f: [-2, 2] \to B$ നൽകുന്നത് $f(x) = 2x^3$ എന്നാൽ, f ഓൺ-ടു ആയിരിക്കുമ്പോൾ B കണ്ടെത്തുക.

നിർദ്ധാരണം :

ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ മൂല്യം $f(-2)$ അധിക മൂല്യം $f(2)$ ഉം ഇവ യഥാക്രമം $-16, 16$ ന് തുല്യമാണ്. അതിനാൽ $B = [-16, 16]$ ആകുന്നു f.

കുറിപ്പ് : $f(x) = 2x^3$ ഇടത് അറ്റത്ത് മൂല്യവും വലത് അറ്റത്ത് പരമാവധി മൂല്യവും കൈവരിക്കുന്നതായി (കൂടുതൽ അല്ലെങ്കിൽ കുറയുന്ന ഫലനങ്ങളായി ഒരാൾക്ക് പിന്നീടുള്ള അധ്യായങ്ങൾ പരാമർശിക്കാം) $[-2, 2]$ വർദ്ധിച്ച് കൊണ്ടിരിക്കുന്ന ഒരു ഫലനമാണ്.

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 37 14-02-2023 16:41:16

ഉദാഹരണം 1.20 $f(x) = x|x|$ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത് $[-2, 2]$ -ഫലനം ഒൺ-ടു-ഒൺ ആണോ അല്ലയോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക. ഒൺ-ടു-ഒൺ ആണോ അല്ലയോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക. ഒൺ-ടു-ഒൺ ആണെങ്കിൽ ഫലനം ബൈജക്ഷനായി മാറുന്ന അനുയോജ്യമായ സഹ-മണ്ഡലം കണ്ടെത്തുക.

നിർദ്ധാരണം :

$x, y \in [-2, 2]$ അതായത് $f(x) = f(y)$, $y = 0$ എങ്കിൽ, $x = 0$ അതിനാൽ $y \neq 0$ ആണെങ്കിൽ $x \neq 0$. ഇപ്പോൾ $x|x| = y|y|$, $f(x) = f(y)$ ആയാൽ ഇത് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്, $\frac{x}{y} = \frac{|y|}{|x|}$, $\frac{|y|}{|x|} > 0$, $\frac{x}{y} > 0$. ആണെങ്കിൽ x, y എന്നത് രണ്ടും പോസിറ്റീവോ അല്ലെങ്കിൽ രണ്ടും നെഗറ്റീവോ ആയിരിക്കും അതിനാൽ $x^2 = y^2$.

$f(x) = f(y)$ എങ്കിൽ നമുക്ക് $x^2 = y^2$, x, y രണ്ടും നെഗറ്റീവോ, രണ്ടും പോസിറ്റീവോ ആയിരിക്കും. $x = y$ ആണെങ്കിൽ മാത്രം ഇത് സാധ്യമാകുന്നു. അതിനാൽ f ഒൺ-ടു-ഒൺ ആകുന്നു. $f(x) = -x^2$, $x < 0$ ആകുമ്പോൾ, $x \geq 0$, ആകുമ്പോൾ $f(x) = x^2$.അതിനാൽ രംഗം $[-4, 4]$ ആണ്. അതിനാൽ $[-2, 2]$ മുതൽ $[-4, 4]$ വരെ f ബൈജക്ഷനാകുന്നു.

കുറിപ്പ് : $f(x) = x|x|$ എന്നത് വർദ്ധിച്ചുവരുന്ന ഫലനം.

തിരശ്ചീന പരിശോധന

ലംബരേഖാ പരിശോധനയ്ക്ക് സമാനമായി ഫലനം ഒൺ-ടു-ഒൺ, ഒൺ-ടു ഇവ അല്ലയോ എന്ന് പരിശോധിക്കാൻ ഞങ്ങൾക്ക് തിരശ്ചീന പരിശോധന എന്ന് വിളിക്കുന്ന ഒരു പരിശോധനയുണ്ട്. ഒരു ഫലനം തലത്തിൽ ഒരു വക്രമായി നൽകട്ടെ. സഹ-മണ്ഡലത്തിലെ ഒരു ബിന്ദു y വഴി തിരശ്ചീന രേഖ ചില ബിന്ദുക്കളിൽ വക്രം കണ്ടുമുട്ടുന്നു എങ്കിൽ എല്ലാ ബിന്ദുക്കളുടെയും x ഖണ്ഡം y -യ്ക്ക് ആയിയുള്ള പ്രതി-ബിംബം.

(i) സഹ-മണ്ഡലത്തിലെ ഒരു ബിന്ദു y വഴി തിരശ്ചീന രേഖ വക്രത പാലിക്കുന്നില്ലെങ്കിൽ y യ്ക്ക് പ്രതി-ബിംബം ഉണ്ടാകില്ല. അതിനാൽ ഫലനം ഓൺ-ടു അല്ല.

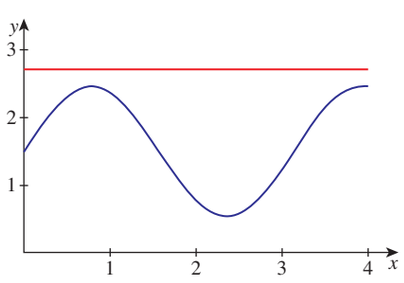
(ii) കുറഞ്ഞ് ഒരു ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള തിരശ്ചീന രേഖ ഒന്നിലധികം ബിന്ദുക്കളിൽ വക്രം സന്ദർശിക്കുന്നുവെങ്കിൽ ഫലനം ഒൺ-ടു-ഒൺ അല്ല.

(iii) രംഗത്തിലെ എല്ലാ y-യ്ക്കും, y വഴിയിലുള്ള തിരശ്ചീന രേഖ ഒരു ഘട്ടത്തിൽ മാത്രമേ വക്രതയുമായി യോജിക്കുന്നുള്ളൂ എങ്കിൽ ഫലനം ഒൺ-ടു-ഒൺ ആണ്.

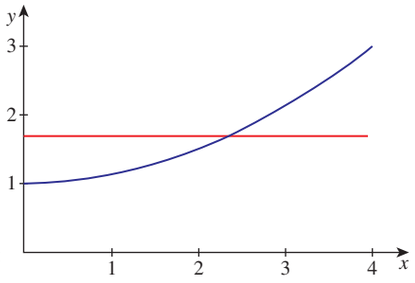
ഒരു വക്രത പ്രതിനിധാനം ചെയ്യുന്ന ഫലനം.

ഒൺ-ടു-ഒൺ ആണെങ്കിൽ എല്ലാ രംഗത്തിലുമുള്ള y-യ്ക്ക് മാത്രമാണെങ്കിൽ y-ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള തിരശ്ചീനരേഖ വക്രവുമായി കണ്ടുമുട്ടുന്നു. സഹ-മണ്ഡലത്തിലെ എല്ലാ y-യ്ക്കും മാത്രമാണെങ്കിൽ വക്രതൽ ആയിരിക്കും തിരശ്ചീനമായതിനാൽ ബിന്ദുലൂടെ ഞങ്ങൾ രേഖപ്പെടുത്തുന്നു.

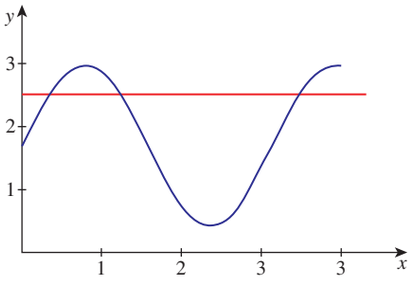
XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 38 14-02-2023 16:41:18



ചിത്രം 1.32



ചിത്രം 1.33



ചിത്രം 1.34

ചിത്രം 1.32 ൽ നൽകിയിരിക്കുന്ന വക്രം $[0, 4]$ ൽ നിന്നുള്ള ഒരു ഫലനത്തെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. ഇത് സഹ-മണ്ഡലത്തിൽ $[1, 3]$ അടങ്ങിയിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ അത് ഉൾക്കൊള്ളുന്നില്ല. ചിത്രം 1.33-ൽ നല്കിയിരിക്കുന്ന $[0, 4]$ മുതൽ $\mathbb{R}$-വരെയുള്ള ഒൺ-ടു-ഒൺ ഫലനത്തെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. ചിത്രം 1.34-ൽ നൽകിയിരിക്കുന്ന ഒരു വക്രം $[0, 4]$ മുതൽ $\mathbb{R}$-വരെയുള്ള ഒരു ഫലനത്തെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. ഇത് ഒൺ-ടു അല്ല.

തന്നിരിക്കുന്ന വക്രം ഒൺ-ടു-ഒൺ ഫലനമാണോ ഓൺ-ടു ഫലനമാണോ അല്ലയോ എന്ന് തിരശ്ചീന രേഖകളിലൂടെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നുവെങ്കിൽ തിരശ്ചീനരേഖ പരിശോധന അല്ലെങ്കിൽ ലളിത തിരശ്ചീന പരിശോധന എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

ചിത്രീകരണം 1.2 ചിത്രങ്ങൾ 1.5 മുതൽ 1.7 വരെ ചിത്രങ്ങൾ കൊണ്ട് ഇതെ പോലുള്ള ചിത്രങ്ങൾ കാണാം.

(i) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത് $f(x) = 2x$ ന് ഒൺ-ടു-ഒൺ, ഓൺ ടു ഫലനങ്ങളാണ്.

(ii) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത് $f(x) = x^2$ ഒൺ-ടു-ഒൺ, ഓൺ-ടു അല്ല.

(iii) $f:[0, \infty) \to \mathbb{R}$ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത് $f(x) = +\sqrt{x}$ ഒൺ-ടു-ഒൺ, ഓൺ-ടു ഫലനങ്ങളല്ല.

(iv) $f:[0, \infty) \to [0, \infty)$ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത് $f(x) = +\sqrt{x}$ ഒൺ-ടു-ഒൺ, ഓൺ-ടു ഫലനങ്ങളല്ല.

(v) $f:[0, \infty) \to \mathbb{R}$ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത് $f(x) = -\sqrt{x}$ ഒൺ-ടു-ഒൺ ആണ് എന്നാൽ, ഫലനമല്ല.

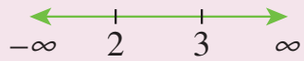
(vi) $f:[0, \infty) \to (-\infty, 0]$ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത് $f(x) = -\sqrt{x}$ ഒൺ-ടു-ഒൺ ആണ്. എന്നാൽ ഓൺ-ടു ഫലനമാണ്.

ഉദാഹരണം 1.21 $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ യഥാർത്ഥ മൂല്യവത്തായ ഫലനത്തിനായി സാധ്യതമായ ഏറ്റവും വലിയ മണ്ഡലം കണ്ടെത്തുക.

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 39 14-02-2023 16:41:21

നിർദ്ധാരണം :

മണ്ഡലത്തിലെ എല്ലാവർക്കുമായി $x^2 - 5x + 6$ $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ എന്നതിന്റെ വർഗ്ഗമൂലം നമ്മൾ കണ്ടെത്തുന്നു. ഇതിനായി നൽകിയിരിക്കുന്ന നടപടി ക്രമം വിൻ തുടരുക. $x^2 - 5x + 6 = 0$ നിർദ്ധാരണ ചെയ്യുമ്പോൾ നമുക്ക് $x = 2, 3$ ലഭിക്കുന്നു. ചിത്രം 1.35 ലെ എന്ന പോലെ സംഖ്യാരേഖ വരയ്ക്കുക.



ചിത്രം 1.35

ഇപ്പോൾ നമുക്ക് മൂന്ന് ഇടവേളകൾ ഉണ്ട്, $(-\infty, 2)$, $(2, 3)$, $(3, \infty)$.

(i) $(-\infty, 2)$-യെ ഏതെങ്കിലും ബിന്ദു എടുക്കുക, $x = 1$ -വ്യക്തമാക്കിയാൽ $x^2 - 5x + 6$ പോസിറ്റീവാണ്.

(ii) $(2, 3)$ - ലെ ഏതെങ്കിലും ബിന്ദു എടുക്കുക, $x = 2.5$ വ്യക്തമായി $x^2 - 5x + 6$ നെഗറ്റീവാണ്.

(iii) $(3, \infty)$ ഏതെങ്കിലും ബിന്ദു എടുക്കുക $x = 4$ വ്യക്തമായി $x^2 - 5x + 6$ പോസിറ്റീവാണ്.

എല്ലാ x-നും ഇടവേളകളിൽ $(-\infty, 2)$, $(3, \infty)$ ന് $x^2 - 5x + 6$ പോസിറ്റീവാണ്. $x = 2, 3$ ൽ $x^2 - 5x + 6$ മൂല്യം പൂജ്യമാണ്. അങ്ങനെ $\sqrt{x^2 - 5x + 6}$, x യിലെ എല്ലാ $(-\infty, 2]$, $[3, \infty)$ എന്ന് നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നു അതിനാൽ $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ ന്റെ മണ്ഡലം $(-\infty, 2] \cup [3, \infty)$.

ഉദാഹരണം 1.22 $f(x) = \dfrac{1}{1 - 2\cos x}$ ന്റെ മണ്ഡലം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം :

$1 - 2\cos x = 0$ ഒഴികേയുള്ള എല്ലാ $x \in \mathbb{R}$ ന്റെ ഫലനം നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നു. അതായത് $\cos x = \dfrac{1}{2}$ ഒഴികേ അതിനാൽ $x = 2n\pi \pm \dfrac{\pi}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$ ഒഴികേ, അതിനാൽ മണ്ഡലം $\mathbb{R} - \left\{2n\pi \pm \dfrac{\pi}{3}\right\}$, $n \in \mathbb{Z}$. x $f(x)$ x $f(x)$.

ഉദാഹരണം 1.23 $f(x) = \dfrac{1}{1 - 3\cos x}$ -ന്റെ രംഗം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം:

$$-1 \leq \cos x \leq 1.$$

$$\Rightarrow \quad -3 \leq -3\cos x \leq 3$$

$$\Rightarrow \quad 1-3 \leq 1-3\cos x \leq 1+3$$

$$\Rightarrow \quad -2 \leq 1-3\cos x \leq 4$$ വ്യുൽക്രമം എടുക്കുക, നമുക്ക്

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{1-3\cos x} \leq -\frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{1-3\cos x} \geq \frac{1}{4}$$

f -ന്റെ രംഗം $\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1}{4}, \infty\right)$

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 40 14-02-2023 16:41:30

ഉദാഹരണം 1.24 f $f(x)=\frac{\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{x^2-1}}$ ഉപയോഗിച്ച് യഥാർത്ഥ മൂല്യമുള്ള ഫലനത്തിന് സാധ്യതമായ ഏറ്റവും വലിയ മണ്ഡലം കണ്ടെത്തുക.

നിർദ്ധാരണം :

$x < -3$ അല്ലെങ്കിൽ $x > 3$ ആണെങ്കിൽ $9-x^2$ നേക്കാൾ വലുതായിരിക്കും അതിൽ $\sqrt{9-x^2}$ നെഗറ്റീവാകും. അതിനാൽ $\sqrt{9-x^2}$ $[-3, 3]$ കൂടാതെ ഒരു ഇടവേളയിൽ കിടക്കണം .

$x \geq -1, x \leq 1$ ആണെങ്കിൽ x^2-1 നെഗറ്റീവോ പൂജ്യമോ ആകും. ഇത് നെഗറ്റീവ് ആണെങ്കിൽ $\sqrt{x^2-1}$ ന് $\mathbb{R}$ ൽ വർഗ്ഗമൂലമില്ല. പൂജ്യമാണെങ്കിൽ f നിർവചിക്കപ്പെടുന്നില്ല. അതിനാൽ x പുറത്ത് കിടക്കണം $[-1, 1]$ അതായത് $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ നിർബന്ധമായും വേണം..

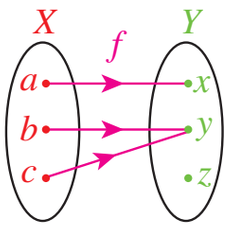
$\frac{\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{x^2-1}}$ ഇതിൽ x കിടക്കണം. ഈ രണ്ട് നിബന്ധനകളും സംയോജിപ്പിച്ച് $[-3, 3] \cap ((-\infty, -1) \cup (1, \infty))$ ആണ് f ന്റെ സാധ്യതമായ ഏറ്റവും വലിയ മണ്ഡലം അതായത് $[-3, -1) \cup (1, 3]$.

കുറിപ്പ് : ആവശ്യമായ മണ്ഡല ഇടവേള ലഭിക്കുന്നതിന് സംഖ്യാരേഖ വരയ്ക്കുകയും അടയാളപ്പെടുത്തുകയും ചെയ്യുക.

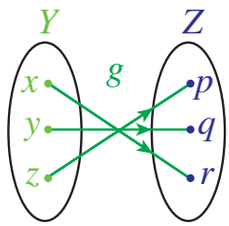
1.6.4 ഫലനത്തിന്റെ പ്രവർത്തനം

സംഗ്രഥനം

ചിത്രം 1.36, ചിത്രം 1.37 യിൽ f, g രണ്ട് ഫലനങ്ങൾ ഇരിക്കട്ടെ.

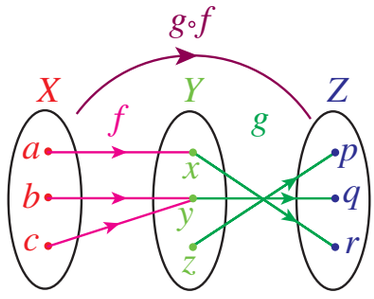


ചിത്രം 1.36



ചിത്രം 1.37

f-ന്റെ സഹ-മണ്ഡലവും g-യുടെ മണ്ഡലവും തുല്യമാണെന്ന് നമ്മൾ ശ്രദ്ധിക്കുന്നു. ചിത്രം 1.37 യെ g-വെട്ടിമാറ്റി ചിത്രം 1.36-ൽ ഒട്ടിക്കുന്നു. അപ്പോൾ മണ്ഡലം g-യിലെ Y-യെ സഹ-മണ്ഡലം Y-യിലെ f ആയി ഒട്ടിക്കുന്നു (ചിത്രം 1.38 നോക്കുക).



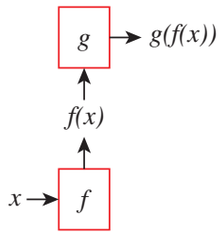
ചിത്രം 1.38

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 41 14-02-2023 16:41:32

ഇപ്പോൾ നമുക്ക് $h:X \longrightarrow Z$ എന്ന ഫലനം സ്വാഭാവിക രീതിയിൽ നിർവ്വചിക്കാം. h-നു കീഴിൽ a -യും ബിംബം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് നമ്മൾ f-യിനു കീഴിലുള്ള a-യുടെ ബിംബം കാണണം. ഇത് x ആണ്; g യ്ക്ക് താഴെയുള്ള x ന്റെ ബിംബം നമ്മൾ കാണുന്നു. അതായത് $h(a)=r$ അതുപോലെ $h(b)=q$, $h(c)=q$. എന്നിവ പ്രഖ്യാപിക്കുന്നു. ഈ രീതിയിൽ നമുക്ക് ഒരു പുതിയ ഫലനം h -നിർവചിക്കാൻ ഈ h -നെ g യുള്ള f -ന്റെ ഘടന എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

നിർവചനം 1.8

$f:X \to Y$, $g:Y \to Z$ എന്നിവ രണ്ട് ഫലനങ്ങളായിരിക്കട്ടെ. ഫലനം $h:X \to Z$ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത് $h(x)=g(f(x))$ എല്ലാ $x \in X$ ഇതിനെ f-യുള്ള g യുടെ ഘടനയെന്ന് വിളിക്കുന്നു. ഇതിനെ $g \circ f$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. (ഇത് g യുമായി f നെ സംയോജിതമായി വായിക്കുക) (ചിത്രം 1.38, 1.39 കാണുക).



ചിത്രം 1.39

f- ന്റെ രംഗത്തിന് Y യുടെ ആവശ്യമില്ല എന്ന് നമുക്ക് കുറിയക്കാം. $f:X \to Y_1$, $g:Y_2 \to Z$, $Y_1 \subseteq Y_2$ നിർവചിക്കാം. നമുക്ക് Y_2 വിനെ f- ന്റെ സഹ-മണ്ഡലമായി എടുത്ത് അതേ നിർവചനം ഉപയോഗിക്കാം. അതിനാൽ ഞങ്ങൾ $g \circ f$ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നു. g-യുടെ മണ്ഡലത്തിൽ f-ന്റെ രംഗം അടങ്ങിയിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ മാത്രം. $g \circ f$

ഉദാഹരണം 1.25 $f=\{(1,2),(3,4)(2,2)\}$, $g=\{(2,1),(3,1),(4,2)\}$ എങ്കിൽ, $g \circ f$ യും $f \circ g$ യും കണ്ടെത്തുക.

നിർദ്ധാരണം :

ഘടന നിർവചിക്കാമോ എന്ന് പരിശോധിക്കാൻ ഈ ഫലനങ്ങളുടെ മണ്ഡലവും, രംഗവും നമുക്ക് കണ്ടെത്താം. f-ന്റെ മണ്ഡലം $=\{1, 2, 3\}$, f-ന്റെ രംഗം $=\{2, 4\}$, g യുടെ മണ്ഡലം $=\{2, 3, 4\}$, g -യുടെ രംഗം = $\{1, 2\}$, f-ന്റെ രംഗം g-യുടെ മണ്ഡലത്തിൽ ഉൾപ്പെടുന്നുവെങ്കിൽ $g \circ f$ എന്ന് നമുക്ക് നിർവചിക്കാം; $g \circ f$ - ന് കീഴിൽ 1 -ന്റെ ബിംബം കണ്ടെത്തുന്നതിന്, ആദ്യവും നമ്മൾ f-യിന് താഴേയുള്ള 1-ന്റെ ബിംബവും g-യ്ക്ക് കീഴിലുള്ള അതിന്റെ ബിംബവും കണ്ടെത്തണം. f-ന് താഴെയുള്ള 1 ന്റെ ബിംബം 2 നും, g-യ്ക്ക് താഴേയുള്ള ബിംബം 1 നുമാണ് അതിനാൽ $(g \circ f)(1)=g(f(1))=g(2)=1$.

അതുപോലെ $(g \circ f)(2) = 1$, $(g \circ f)(3) = 2$. $g \circ f=\{(1,1),(2,1),(3,2)\}$. ഇതുപോലെ $f \circ g=\{(2,2),(3,2),(4,2)\}$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

ഉദാഹരണം 1.26 $f=\{(1,4),(2,5),(3,5)\}$, $g=\{(4,1),(5,2),(6,4)\}$, $g \circ f$ കാണുക? നിങ്ങൾക്ക് $f \circ g$ കാണുക?

നിർദ്ധാരണം :

വ്യക്തമായി $g \circ f = \{(1,1),(2,2),(3,2)\}$, $f \circ g$ യെ നിർവചിച്ചാൽ എന്ത് എന്നാൽ രംഗമായ $\{1, 2, 4\}$ f -ന്റെ മണ്ഡലമായ $\{1, 2, 3\}$ -ൽ ഉൾപ്പെടുന്നില്ല.

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 42 14-02-2023 16:41:34

ഉദാഹരണം 1.27 $\mathbb{R}$ -മുതൽ $\mathbb{R}$ -വരെയുള്ള രണ്ട് ഫലനങ്ങൾ f, g എന്നിവ ആയിരിക്കട്ടെ. ഇതിനെ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത് $f(x) = 3x - 4$, $g(x) = x^2 + 3$, $g \circ f$, $f \circ g$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം :

നമുക്ക് $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x - 4) = (3x - 4)^2 + 3 = 9x^2 - 24x + 19.$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 3) = 3(x^2 + 3) - 4 = 3x^2 + 5.$

കുറിപ്പ് : നമുക്ക് $g \circ f \neq f \circ g$ -ഉണ്ട്. അങ്ങനെ പ്രവർത്തനം ഫലനങ്ങളുടെ സംഗ്രഥനം പ്രവർത്തനം പൊതുവായതാണ് ക്രമമല്ല.

സിദ്ധാന്തം 1.2

$f: A \to B$, $g: B \to C$ എന്നീ രണ്ട് ഫലനങ്ങൾ. f യും g യും ഒൺ-ടു-ഒൺ $g \circ f$ ഒൺ-ടു-ഒൺ. ആണെങ്കിൽ

തെളിവ്

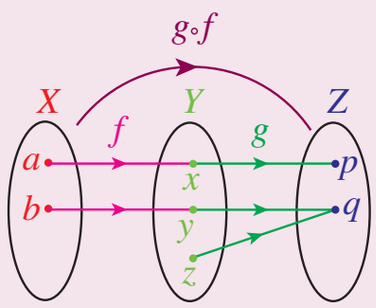
$x, y \in A$ യിൽ $x \neq y$ f ഒൺ-ടു-ഒൺ ആയാൽ $f(x) \neq f(y)$ ഒൺ-ടു-ഒൺ ആയാൽ $g(f(x)) \neq g(f(y))$ അതായത് $x \neq y \Rightarrow (g \circ f)(x) \neq (g \circ f)(y)$ അതുകൊണ്ട് $g \circ f$ ഒൺ-ടു-ഒൺ ആണ്.

ഉദാഹരണം 1.28 ഈ പ്രസ്താവന കാണിക്കുക. f, $g \circ f$ ഒൺ-ടു-ഒൺ ആയാൽ, g ഒൺ-ടു-ഒൺ ആകുന്നു. ശരിയല്ല.

നിർദ്ധാരണം

ഒരു പ്രസ്താവന ശരിയല്ലെന്ന് അവകാശപ്പെടുന്നതിലൂടെ ഞങ്ങൾ തെളിയിക്കേണ്ടതുണ്ട്. ചിത്രം 1.40-ൽ തന്നിട്ടുള്ള ചിത്രം പരിഗണിക്കു.

വ്യക്തമായി f, $g \circ f$ ഒൺ-ടു-ഒൺ ആണ്. എന്നാൽ g ഒൺ-ടു-ഒൺ അല്ല. മുകളിൽ പറഞ്ഞ ചിത്രത്തിലൂടെ ഈ പറഞ്ഞ പ്രസ്താവന ശരിയല്ലെന്ന് തെളിയിക്കുന്നു.



ചിത്രം 1.40

ഉദാഹരണം 1.29 $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ എന്നിവ നിർവചിക്കുന്നത് $f(x) = 2x - |x|$, $g(x) = 2x + |x|$ എങ്കിൽ $f \circ g$.

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 43 14-02-2023 16:41:35

നിർദ്ധാരണം

$|x| = \begin{cases} -x & ; \ x \leq 0 \\ x & ; \ x > 0 \end{cases}$ നമുക്ക് അറിയാം.

$$f(x) = \begin{cases} 2x-(-x) & ; \ x \leq 0 \\ 2x-x & ; \ x > 0 \end{cases}$$

ഏത് $$f(x) = \begin{cases} 3x & ; \ x \leq 0 \\ x & ; \ x > 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x+(-x) & ; \ x \leq 0 \\ 2x+x & ; \ x > 0 \end{cases}$$

അത് $$g(x) = \begin{cases} x & ; \ x \leq 0 \\ 3x & ; \ x > 0 \end{cases}$$

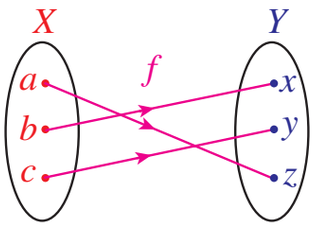
$x \leq 0$ എങ്കിൽ, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x) = 3x$.

$x > 0$ അനുവദിക്കുക. തുടർന്ന്, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x) = 3x$.

ഇപ്രകാരം $(f \circ g)(x) = 3x$ എല്ലാ x .

1.6.5 ഫലനത്തിന്റെ വിപരീതം

ചിത്രം 1.41 എന്ന സമവാക്യം അനുസരിച്ച് $f : X \to Y$ എന്ന ബൈജക്ഷൻ ഉണ്ടാകട്ടെ.



ചിത്രം 1.41

ഈ പ്രവർത്തനം ഒരു കണ്ണാടിയിൽ നോക്കിയാൽ നമുക്ക് Y- മുതൽ X- വരെ ഒരു ഫലനം ലഭിക്കുന്നു. ആ ഫലനത്തെ g എന്ന് വിളിക്കുന്നു. $g(x) = b, g(y) = c, g(z) = a$ ഈ ഫലനം നിർവചിച്ചിരിക്കുന്ന Y-മുതൽ X-വരെയുള്ള ഒരു ഫലനമാണ്.

f-ന്റെ വിപരീതത്തിനുള്ള ഒരു ഉദാഹരണമാണ് g ഇപ്പോൾ നമ്മൾ ഫലനത്തിന്റെ വിപരീതം നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നു.

നിർവചനം 1.9

$f : X \to Y$ ഒരു ബൈജക്ഷൻ ആകട്ടെ $g : Y \to X$ എന്ന ഫംഗ്ഷൻ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത് $g(y) = x$ എങ്കിൽ $f(x) = y$ എന്നത് f-ന്റെ വിപരീതം എന്ന് വിളിക്കുന്നു. അതിനെ f^{-1} സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

f എന്ന ഫലനം ഒരു വിപരീത ആണെങ്കിൽ, ഞങ്ങൾ **ഇൻവേർട്ടിബിൾ** എന്ന് പറയുന്നു. ഫലനങ്ങളെയും വിപരീതത്തിന്റെയും ഒരു നല്ല ബന്ധം ഉണ്ട്.

$f : X \to Y$ ഒരു ബൈജക്ഷനും $g : Y \to X$ അതിന്റെ വിപരീതവുമാകട്ടെ.

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 44 14-02-2023 16:41:37

X, Y എന്നിവയിൽ യഥാക്രമം I_X, I_Y എന്നിവ അനന്യ ഫലനങ്ങളും $g \circ f = I_X$, $f \circ g = I_Y$ മാത്രമല്ല.

$f : X \to Y$, $g : Y \to X$ എന്നീ ഫലനങ്ങളും $g \circ f = I_X$, $f \circ g = I_Y$ എന്നിങ്ങനെയുള്ള പ്രവർത്തനങ്ങളാണെങ്കിൽ, f, g എന്നിവ ബൈജക്ഷനുകളും അവ പരസ്പരം വിപരീതവുമാണ്; അതായത് $f^{-1} = g$, $g^{-1} = f$ ആയിരിക്കും.

മുകളിലുള്ള ചർച്ചകൾ ഉപയോഗിച്ച്, വിപരീതവും വിവരീതവുമായ പദങ്ങൾ ചില വിചിത്രമായ രീതിയിൽ നിർവചിക്കാം.

നിർവചനം 1.10

ഫലനം $f : X \to Y$ ഒരു ഫലനം നിലവിലുണ്ടെങ്കിൽ അത് വിപരീത ദിശയാണെന്ന് പറയപ്പെടുന്നു. $g : Y \to X$ അതായത് $g \circ f = I_X$, $f \circ g = I_Y$, X, Y എന്നിവയുടെ അനന്യ ഫലനം I_X, I_Y എന്നിവയാണ്. ഇതിൽ g-യെ f ന്റെ വിപരീതമെന്നും, g- യെ f^{-1} എന്നു സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

ചില ഫലനത്തിൽ ബൈജക്ഷ്യൂ ആണെന്ന് തെളിയിക്കാൻ ഈ ആശയം ഉപയോഗിച്ചേക്കാം.

f ഒരു ബൈജക്ഷനാണെങ്കിൽ $f^{-1}(y)$ എന്നത് f -ന് കീഴിലുള്ള y -യുടെ പ്രീ-ഇമേജ് മാത്രമാണ്. വിപരീതത്തിനെ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത് ബൈജക്ഷനു മാത്രമാണെന്ന് നമുക്ക് ശ്രദ്ധിക്കാം. f എന്നത് ഒന്നിൽ-നിന്നു-ഒന്ന് അല്ലെങ്കിൽ a, b എന്നിവ നിലനിൽക്കുന്നു. അതായത് $a \neq b$, $f(a) = f(b)$ $(= y$ എന്നിവ y യുടെ പ്രീ-ഇമേജുകൾ. ഈ മൂല്യം Y - ആയിരിക്കട്ടെ. അപ്പോൾ നമുക്ക് $f^{-1}(y)$ നിർവചിക്കാൻ കഴിയില്ല. കാരണം a, b എന്നിവ രണ്ടും f ന് കീഴിലാണ്, കാരണം f^{-1} - ന് y -യ്ക്ക് രണ്ട് വ്യത്യസ്ത മൂല്യങ്ങൾ കണക്കാക്കാനാവില്ല. f ഓൺ-ടൂ അല്ലെങ്കിൽ ഒരു പ്രീ ഇമേജ് ഇല്ലാതെ ഒരു y, Y യിൽ ഉണ്ടാകും. ഈ സാഹചര്യത്തിലും നമുക്ക് $f^{-1}(y)$ യ്ക്ക് ഒരു മൂല്യവും നൽകാനാവില്ല.

ഉദാഹരണത്തിന്, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ആണെങ്കിൽ $f = \{(1, 2), (2, 4), (3, 1), (4, 3)\}$. f-ന്റെ വിപരീത $\{1, 2, 3, 4\}$ നും f -ന്റെ റേഞ്ച് $\{(1, 3), (2, 1), (3, 4), (4, 2)\}$ ആയിരിക്കും.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ –എന്നതിന്റെ വിപരീത ഫലനങ്ങളും പ്രവർത്തന നിയമത്തിൽ കണ്ടുപിടിക്കുക

(i) $y = f(x)$ എഴുതുക;

(ii) y -യെ x -യിൽ എഴുതുക;

(iii) $f^{-1}(y)$ -എന്ന പദപ്രയോഗത്തെ y -യിൽ എഴുതാം ;

(iv) y -യെ x ആയി മാറ്റി സ്ഥാപിക്കുക.

ഉദാഹരണം 1.30 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ എന്നാൽ $f(x) = 2x - 3$ എന്ന് നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത് അതിൽ f ഒരു ബൈജക്ഷനും അതിന്റെ വിപരീതവും തെളിയിക്കുക.

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 45 14-02-2023 16:41:39

നിർദ്ധാരണം

രീതി – 1

ഒൺ-ടു-ഒൺ : $f(x)=f(y)$ അതിൽ, $2x-3 = 2y-3$; $2x = 2y$. $x=y$. $x=y$. അതിൽ, f എന്നത് ഒൺ-ടു-ഒൺ.

ഓൺ ടു : $y \in \mathbb{R}$, $x = \frac{y+3}{2}$, $f(x)=2\left(\frac{y+3}{2}\right)-3=y$, f അതായത് ഓൺടു. ഇതിൽ തന്നിട്ടുള്ള പ്രസ്താവന അനുസരിച്ച് തെളിയിക്കാം. f -ന്റെ റേഞ്ച് $\mathbb{R}$ (എങ്ങനെ?) അത് സഹമണ്ഡലത്തിന് തുല്യവും, f എന്നത് ഓൺ ടു ആണ്.

വിപരീതം : $y = 2x-3$ ഇതിൽ $y + 3 = 2x$ യും $x = \frac{y+3}{2}$ യും ആണെങ്കിൽ $f^{-1}(y)$ $= \frac{y+3}{2}$. ഇതിൽ y -യെ x -ആയി മാറ്റിസ്ഥാപിക്കുന്നു. എന്നാൽ $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$.

രീതി – 2

$y = 2x-3$ എന്നിരുന്നാലും $x = \frac{y+3}{2}$, $g(y) = \frac{y+3}{2}$.

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x-3) = \frac{(2x-3)+3}{2} = x$$

.
$$(f\circ g)(y) = f(g(y)) = f\left(\frac{y+3}{2}\right) = 2\left(\frac{y+3}{2}\right)-3 = y$$

ആകയാൽ, $g\circ f = I_X$, $f\circ g = I_Y$.

f യും g യും ബൈജക്ഷനും തമ്മിൽ വിപരീതമാണ്. എന്നാൽ f ബൈജക്ഷനുമാണ്, $f^{-1}(y)=\frac{y+3}{2}$. ഇതിൽ y -യെ x -ആയി മാറ്റി സ്ഥാപിച്ചാൽ, $f^{-1}(x)=\frac{x+3}{2}$.

1.6.6 ഫലനങ്ങളുടെ ബീജഗണിതം

സഹമണ്ഡലം $\mathbb{R}$ അല്ലെങ്കിൽ $\mathbb{R}$-ന്റെ ഒരു ഉപഗണം ഫലനത്തെ വാസ്തവിക ഫലനം എന്ന് വിളിക്കുന്നു. ഫലനങ്ങൾ യഥാർത്ഥ മൂല്യമുള്ളതാണെങ്കിൽ നമുക്ക് ഇപ്പോൾ നിരവധി പ്രവർത്തനങ്ങൾ നടത്താം.

f, g എന്നിവ യഥാർത്ഥ മൂല്യമുള്ള രണ്ട് ഫലനങ്ങൾ ആയിരിക്കട്ടെ. f, g എന്നിവയുടെ സങ്കലനം നിർവചിക്കാമോ? സ്വാഭാവികമായും ഒരു ഫലനമായി രണ്ടു ഫലനങ്ങളുടെ ആകെ തുക പ്രതീക്ഷിക്കാം. ഒരു x ബിന്ദുവിലെ $f+g$ -യുടെ മൂല്യം x, f, g – എന്നിവയുടെ മൂല്യങ്ങളുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കണം. അതിനാൽ ഒരു x ബിന്ദുവിൽ $f+g$ നിർവചിക്കാൻ $f(x)$ നും $g(x)$ നും എന്നിവ രണ്ട് അറിഞ്ഞിരിക്കണം. മറ്റൊരുവിധത്തിൽ x, f ന്റെ മണ്ഡലത്തിലും g - യുടെ മണ്ഡലത്തിലും ആയിരിക്കണം. $f+g$ -യുടെ സ്വാഭാവിക നിർവചനം $f(x)+g(x)$ ആണ്. അതിനാൽ, f, g എന്നിവയുടെ മണ്ഡലങ്ങൾ നിർവചിക്കണമെന്ന് ഒരു വ്യവസ്ഥ ഏർപ്പെടുത്തിയാൽ നമുക്ക് $f+g$ - എന്ന രീതിയിൽ നിർവചിക്കാം. അതുപോലെ തന്നെ യഥാർത്ഥ സംഖ്യകളുടെ ഗണം R -ൽ ലഭ്യമായ കുറയ്ക്കൽ, ഗുണനം നിരവധി ബീജഗണിത പ്രവർത്തനങ്ങൾ എന്നിവ നിർവചിക്കാം.

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 46 14-02-2023 16:41:43

നിർവചനം 1.11

X എന്നത് ഏതെങ്കിലും ഗണം ആകട്ടെ. X-ൽ നിർവചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുള്ള വാസ്തവിക മൂല്യമുള്ള ഫലനങ്ങളായി f, g എന്നിവ അനുവദിക്കുക. $x \in X$ എന്നത് എല്ലാത്തിനും നിർവചിച്ചിട്ടുണ്ട്,

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
- $(fg)(x) = f(x)g(x)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, ഇവിടെ $g(x) \neq 0$
- $(cf)(x) = cf(x)$, c ഒരു യഥാർത്ഥ സ്ഥിരാങ്കമാണ്.
- $(-f)(x) = -f(x)$

മണ്ഡലം ഏതെങ്കിലും ഗണം ആയിരിക്കാം, ഒരു കൂട്ടം അക്കങ്ങൾ അല്ല, ഉദാഹരണത്തിന് X ഒരു ക്ലാസ്സിലെ വിദ്യാർത്ഥികളുടെ ഗണമാണെങ്കിൽ രണ്ട് ടെസ്റ്റുകളിൽ നിന്ന് വിദ്യാർത്ഥികൾ നേടിയ മാർക്കിനെ f, g ഫലനം പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. എങ്കിൽ $f + g$ ഫലനം രണ്ട് ടെസ്റ്റുകളിലെ വിദ്യാർത്ഥികളുടെ ആകെ മാർക്കുകളെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. മുകളിൽ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്ന പ്രവർത്തനങ്ങളുടെ കൂട്ടിച്ചേർക്കൽ, കുറയ്ക്കൽ, ഗുണനം, വിഭജനം എന്നിവ താഴെ പറയുന്ന ഗുണ വിശേഷങ്ങൾ തൃപ്തിപ്പെടുന്നത് കാണാൻ എളുപ്പമാണ്.

- $(f + g) + h = f + (g + h)$
- $f + g = g + f$
- $\mathbf{0} + f = f + \mathbf{0}$ ഇവിടെ $\mathbf{0}$ എന്നത് പൂജ്യഫലനം, എല്ലാ x-നെയും $0(x) = 0$ എന്ന് നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നു.
- $f + (-f) = (-f) + f = \mathbf{0}$
- $f(g + h) = fg + fh$
- $(c_1 + c_2)f = c_1 f + c_2 f$ ഇവിടെ c_1 വും c_2 യും വാസ്തവിക സ്ഥിരാങ്കം.

ഈ പ്രവർത്തനങ്ങളുടെ കൂടുതൽ ഗുണവിശേഷതകൾ നമുക്ക് പട്ടികപ്പെടുത്താം. തെളിവുകൾ ലളിതമാണ്; എന്നിരുന്നാലും ഈ സവിശേഷതകൾ തെളിയിക്കാൻ കഴിയുന്ന ഒരു മാർഗ്ഗം കാണിക്കാം.

തെളിയിക്കുക $f(g + h) = fg + fh$ ഇത് തെളിയിക്കുന്നിന് x -ന്റെ എല്ലാ മണ്ഡലങ്ങളിലും $(f(g + h))(x) = (fg + fh)(x)$ എന്ന് തെളിയിക്കണം.

സിദ്ധാന്തം 1.3 f യും g യും വാസ്തവിക ഫലനങ്ങളുമാണെങ്കിൽ , $f(g + h) = fg + fh$ X .

തെളിവ്: $x \in X$ എന്നത് .

$$
\begin{aligned}
(f(g + h))(x) &= f(x)(g + h)(x) && \text{(ഗുണത്തിന്റെ നിർവചനം)} \\
&= f(x)[g(x) + h(x)] && \text{(കൂട്ടലിന്റെ നിർവചനം)} \\
&= f(x)g(x) + f(x)h(x) && \text{(യഥാർത്ഥമായ വിതരണക്ഷമത)}
\end{aligned}
$$

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 47 14-02-2023 16:41:47

$= (fg)(x) + (fh)(x)$ (ഗുണനത്തിന്റെ നിർവചനം)

$= (fg + fh)(x)$ (കൂട്ടലിന്റെ നിർവചനം)

ആയതിനാൽ, എല്ലാ $x \in X$, $(f(g + h))(x) = (fg + fh)(x)$.

അതുകൊണ്ട്, $f(g + h) = fg + fh$

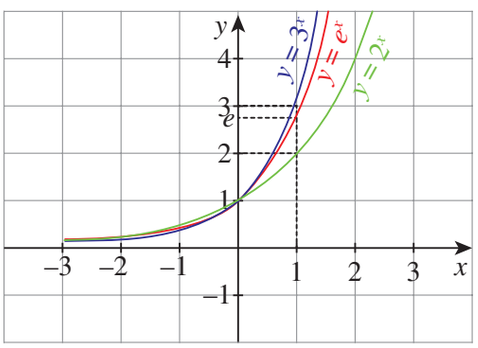
1.6.7 ചില പ്രത്യേക ഫലനങ്ങൾ

ഇതിൽ ചില പ്രത്യേക ഫലനങ്ങൾ നോക്കാം.

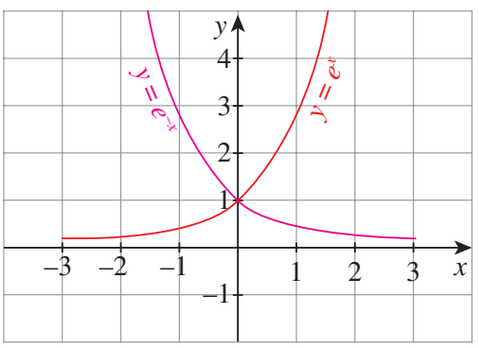
(i) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത് $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n$, a_i ഇവിടെ a_i എന്നത് സ്ഥിരാങ്കങ്ങളാണ് ഇതിനെ **പോളിനോമിയൽ ഫലനം** എന്ന് വിളിക്കുന്നു. ഫലനത്തെ നിർവഹിക്കുന്ന സമത്വത്തിന്റെ വലതുഭാഗം ഒരു പോളിനോമിയൽ ആയിരുന്നാൽ ഈ ഫലനത്തെ ഒരു പോളിനോമിയൽ ഫലനം എന്ന് വിളിക്കുന്നു. f .

(ii) ഫലനം $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ നെ $f(x) = ax + b$, എന്ന് നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നു. ഇവിടെ $a \neq 0$ യും b യും സ്ഥിരാങ്കങ്ങളാണ്. ഇതിനെ **ലീനിയർ ഫലനമെന്ന്** വിളിക്കുന്നു. രേഖീയമല്ലാത്ത ഒരു ഫലനത്തെ **രേഖീയമല്ലാത്ത ഫലനം** എന്ന് വിളിക്കുന്നു. വ്യക്തമായി ഒരു ലീനിയർ ഫലനം ഒരു പോളിനോമിയൽ ഫലമാണ് ഈ ഫലനത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് ഒരു നേർരേഖയാണ് ഒരു നേർരേഖയെ ലീനിയർ വക്രം എന്ന് വിളിക്കുന്നു. അതിനാൽ ഈ ഫലനത്തെ ഒരു ലിനിയർ ഫലനം എന്ന് വിളിക്കുന്നു (ഗണിത ശാസ്ത്രത്തിന്റെ ഉയർ പഠനത്തിലെ ലീനിയർ ഫലനങ്ങൾക്ക് വ്യത്യസ്ത നിർവചനങ്ങൾ കാണാം)

(iii) a ഒരു നെഗറ്റീവ് അല്ലാത്ത സ്ഥിരാങ്കമായിരിക്കട്ടെ. ഫലനം $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ നിർവചിച്ച ഫലനം $f(x) = a^x . a = 0, x \neq 0$ എങ്കിൽ ഫലനം പൂജ്യമായി മാറുകയും, $a = 1, x \neq 0$ എന്നും ഫലനം $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ എന്ന സ്ഥിരമായ ഫലനം $f(x) = a^x$ സും ആയിരിക്കും. (ചിത്രം 1.42, ചിത്രം 1.43 കാണുക) $a > 1$ ആയിരിക്കുമ്പോൾ $f(x) = a^x$ ഫലനത്തെ ഘാതഫലനങ്ങൾ എന്ന് വിളിക്കുന്നു. ഇത് കൂടാതെ, ഏതൊരു ഫലനത്തിന് x - "കൃതിയുള്ള"വയെ ഘാത ഫലനം എന്നു വിളിക്കുന്നു. $f(x) = 1$.



ചിത്രം 1.42

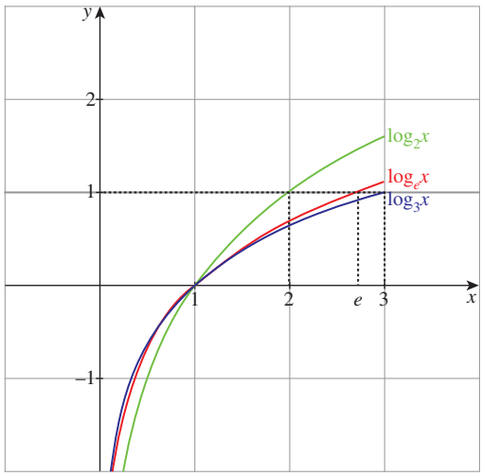


ചിത്രം 1.43

കുറിപ്പ് : കൂടാതെ 2 നും 3 നും ഇടയിലുള്ള പ്രത്യേക അപരിമേയ സംഖ്യയാണ് e തുടർന്നുള്ള അധ്യായങ്ങളിൽ നമ്മൾ കൂടുതൽ പഠിക്കും.

(iv) $a > 1$ ഒരു സ്ഥിരമായിരിക്കട്ടെ. ഫലനം $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത് $f(x) = \log_a x$ ഇതിനെ **ലോഗരിമിക് ഫലനം** എന്ന് വിളിക്കുന്നു. വാസ്തവത്തിൽ ഒരു ഘാതഫലനത്തിന്റെ വിപരീതം $f(x) = a^x$ -ന്റെ മണ്ഡലത്തെ ലോഗതിമിക് ഫലനം എന്ന് വിളിക്കുന്നു. (ചിത്രം 1.44 നോക്കുക).

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 48 14-02-2023 16:41:49



ചിത്രം 1.44

(v) യഥാർത്ഥ മൂല്യമുള്ള ഫലനം $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ എന്നതിൽ $p(x), q(x)$ എന്നിവ പോളിനോമികളായ $q(x) \neq 0$ യെ **പരിമേയ ഫലനം** എന്ന് വിളിക്കുന്നു. വാസ്തവത്തിൽ ഈ ഫലനത്തിന്റെ മണ്ഡലം നീക്കം ചെയ്യുന്നതിലൂടെ $\mathbb{R}$-യിൽ നിന്ന് ലഭിച്ച വാസ്തവിക സംഖ്യയാണ് $q(x) = 0$ f.

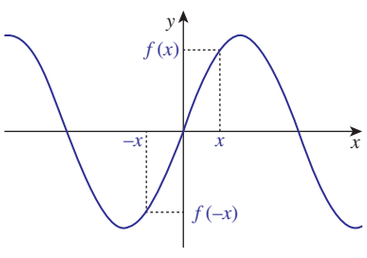
(vi) $f(x) \neq 0$ പോലുള്ള ഒരു യഥാർത്ഥ മൂല്യമുള്ള ഫലനമാണെങ്കിൽ അനുയോജ്യമായ മണ്ഡലത്തിന്റെ യഥാർത്ഥ മൂല്യമുള്ള ഫലനം $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ എന്നതിന് വ്യുൽക്രമഫലനം എന്ന് വിളിക്കുന്നു. $f(x) = 0$ എന്ന യഥാർത്ഥ സംഖ്യകൾ നീക്കം ചെയ്താൽ $\mathbb{R}$-യിൽ നിന്ന് ലഭിച്ച മണ്ഡലമാണ് g, ഉദാഹരണത്തിന് $f(x) = \frac{1}{x-1}$-യെ 1 ന്റെ സാധ്യതമായ മണ്ഡലമാണ് $\mathbb{R} - \{1\}$ f -.

ഫലനങ്ങളുടെ രണ്ട് വിഭാഗങ്ങൾ കൂടി നമുക്ക് കാണാം.

നിർവചനം 1.12

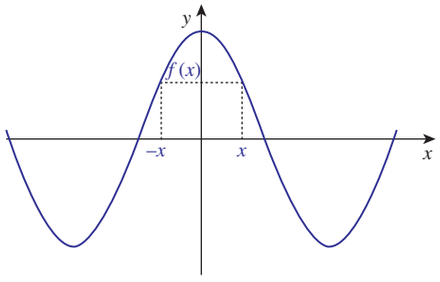
ഫലനം $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ എന്നത് ഒരു **ഒറ്റ ഫലനമാണ്** എല്ലാ $x \in \mathbb{R}$-നും $f(-x) = -f(x)$ ആണെങ്കിൽ, എല്ലാ $x \in \mathbb{R}$-ൽ $f(-x) = f(x)$ ആണെങ്കിൽ ഒരു **ഇരട്ട ഫലനമാണെന്ന്** പറയാം (ചിത്രം 1.45, 1.46 കാണുക).

ഒറ്റ ഫലനം



ചിത്രം 1.45

ഇരട്ട ഫലനം



ചിത്രം 1.46

ഫലനം നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത് $f(x) = x, f(x) = 2x$, $f(x) = x^3 + 2x$ എന്നിവ ഒറ്റ ഫലനത്തിന്റെ ഉദാഹരണങ്ങളാണ്. ഫലനം നിർവചിച്ചിരിക്കുന്ന $f(x) = x^2, f(x) = 3, f(x) = x^4 + x^2$, $f(x) = |x|$ എന്നിവ രണ്ട് ഫലനത്തിന്റെ ഉദാഹരണങ്ങളാണ്. ഫലനം സൂചിപ്പിക്കുന്നത് $f(x) = x + x^2$ ഇരട്ടയോ, ഒറ്റയോ അല്ല.

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 49 14-02-2023 16:41:52

താഴെ പറയുന്ന ഫലനങ്ങളെ തെളിയിക്കാൻ കഴിയും.

(i) രണ്ട് ഒറ്റ ഫലനങ്ങളുടെ തുക ഒരു ഒറ്റ ഫലനമായിരിക്കും.

(ii) രണ്ട് ഇരട്ട ഫലനങ്ങളുടെ തുക ഒരു ഇരട്ട ഫലനമായിരിക്കും.

(iii) രണ്ട് ഒറ്റ ഫലനങ്ങളുടെ ഗുണനം ഒരു ഒറ്റ ഫലനമായിരിക്കും.

(iv) രണ്ട് ഇരട്ട ഫലനങ്ങളുടെ ഗുണനം ഒരു ഇരട്ട ഫലനമായിരിക്കും.

(v) ഒറ്റ ഫലനങ്ങളുടെയും, ഇരട്ട ഫലനങ്ങളുടെയും ഗുണനം ഒരു ഒറ്റ ഫലനമായിരിക്കും.

(vi) ഒറ്റയും, ഇരട്ടയുമായ ഒരേ ഒരു ഫലനം പൂജ്യം ഫലനം മാത്രമാണ്.

(vii) ഒരു ഇരട്ട ഫലനത്തിന്റെയും പോസിറ്റീവ് സ്ഥിരാങ്കത്തെയും ഗുണനം ഒരു ഇരട്ട ഫലന മായിരിക്കും.

(viii) ഒരു ഇരട്ട ഫലനത്തിന്റെയും നെഗറ്റീവ് സ്ഥിരാങ്കത്തെയും ഗുണനം ഒരു ഇരട്ട ഫലന മായിരിക്കും.

(ix) ഒറ്റ ഫലനത്തിന്റെയും, സ്ഥിരാങ്കത്തിന്റെയും ഗുണനം ഒരു ഒറ്റ ഫലനമായിരിക്കും.

(x) ഒറ്റയോ, ഇരട്ടയോ ആയ ഫലനങ്ങളുണ്ട്

ഒറ്റയോ, ഇരട്ടയോ ആയ ഫലനങ്ങളുണ്ട്. മുകളിലുള്ള സവിശേഷങ്ങളിൽ ഒന്ന് നമുക്ക് തെളിയിക്കാം. മറ്റ് സവിശേഷതകൾ ഇതുപോലെ തെളിയിക്കാൻ കഴിയും.

സിദ്ധാന്തം 1.4 : ഒരു ഒറ്റ ഫലനത്തിന്റെ ഇരട്ട ഫലനത്തിന്റെയും ഗുണനം ഒരു ഒറ്റ ഫലനമായിരിക്കും.

തെളിവ് : f ഒരു ഫലനമായിരിക്കട്ടെ, g ഒരു ഇരട്ട ഫലനമായിരിക്കട്ടെ.

$h = fg$ ഇപ്പോൾ, $h(-x) = (fg)(-x) = f(-x)g(-x) = -f(x)g(x) = -h(x)$

ആയതിനാൽ, h ഒരു ഒറ്റ ഫലനം. ഇത് കാണിക്കുന്നത്, fg എന്നത് ഒരു ഒറ്റ ഫലനമാണ്.

കുറിപ്പ് : ഒരു ഫലനം ഒറ്റ അല്ലെങ്കിൽ ഒരു ഇരട്ട ഫലനമാണെന്ന് കരുതരുത്. ഒറ്റയോ ഇരട്ടയോ ആയ ധാരാളം ഫലനങ്ങളുണ്ട്..

അഭ്യാസം 1.3

1. ഒരു സ്കൂളിൽ 11 ക്ലാസ്സിലെ നാല് വിഭാഗങ്ങളായി 120 കുട്ടികൾ പഠിക്കുന്നുവെന്ന് കരുതുക. അതിൽ A വിദ്യാർത്ഥികളുടെ ഗണത്തെയും, B വിഭാഗങ്ങളുടെ ഗണത്തെയും സൂചിപ്പിക്കട്ടെ. A മുതൽ B വരെയുള്ള ഒരു ബന്ധം " വിദ്യാർത്ഥി x വിഭാഗത്തിൽപ്പെട്ടതാണെങ്കിൽ x യ്ക്ക് y യുമായി ബന്ധപ്പെട്ടതാണ് എന്ന് നിർവചിച്ചിരിക്കുക? ഈ ബന്ധം ഒരു ഫലനമാണോ? വിപരീത ബന്ധത്തെ കുറിച്ച് നിങ്ങൾക്ക് എന്ത് പറയാൻ കഴിയും? നിങ്ങളുടെ ഉത്തരം വിശദീകരിക്കുക.

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 50 14-02-2023 16:41:52

2. $f(x)=\begin{cases}-x+4 & ; \ -\infty < x \leq -3 \\ x+4 & ; \ -3 < x < -2 \\ x^2-x & ; \ -2 \leq x < 1 \\ x-x^2 & ; \ 1 \leq x < 7 \\ 0 & ; \ \text{അല്ലെങ്കിൽ}\end{cases}$

$-4, 1, -2, 7, 0$ എന്നീ f -ന്റെ മൂല്യങ്ങൾ എഴുതുക?.

3. $f(x)=\begin{cases}x^2+x-5 & ; \ x \in (-\infty, 0) \\ x^2+3x-2 & ; \ x \in (3, \infty) \\ x^2 & ; \ x \in (0, 2) \\ x^2-3 & ; \ \text{അല്ലെങ്കിൽ}\end{cases}$

$-3, 5, 2, -1, 0$ എന്നീ f–ന്റെ മൂല്യങ്ങൾ എഴുതുക?

4. ഇനി പറയുന്ന ബന്ധങ്ങൾ ഫലനങ്ങളാണോ അല്ലയോ എന്ന് പ്രസ്താവിക്കുക. ഇത് ഒറ്റ തവണയും, ഏകതത്വത്തിനും വേണ്ടിയുള്ള ഒരു പ്രവർത്തന പരിശോധനയാണെങ്കിൽ ഇത് ഫലനം അല്ലെങ്കിൽ എന്ത് കൊണ്ട് എന്ന് പറയുക?.

(i) $A = \{a, b, c\}, \quad f = \{(a, c), (b, c), (c, b)\}; \ (f{:}A \to A)$

(ii) $X = \{x, y, z\}, \quad f = \{(x, y), (x, z), (z, x)\}; (f{:}X \to X)$

5. $A = \{1, 2, 3, 4\}, \ B = \{a, b, c, d\}$, $A \to B$ -യിൽ നിന്ന് ഒരു ഫലനം നല്കുക.

(i) ഒന്നിൽ നിന്നു ഒന്നിലേക്ക് അല്ലെങ്കിൽ അതിലേക്ക്

(ii) ഒന്നിൽ നിന്നു മറ്റൊന്നിലേക്ക്

(iii) ഒന്നിൽ നിന്ന് മറ്റൊന്നിലേക്ക്.

(iv) ഒന്നിൽ നിന്നു ഒന്നിലേക്ക്

6. $\frac{1}{1-2sinx}$ എന്ന മണ്ലം കണ്ടുപിടിക്കുക?.

7. യഥാർത്ഥ മൂല്യമുള്ള ഫലനം $f(x)=\frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{x^2-9}}$ അതിന്റെ സാധ്യതമായ ഏറ്റവും വലിയ മണ്ഡലം കണ്ടെത്തുക?.

8. $\frac{1}{2cosx-1}$ എന്ന ഫലനത്തിന്റെ റേഞ്ച് കണ്ടുപിടിക്കുക?

9. $xy = -2$ എന്ന ബന്ധം അനുയോജ്യമായ മണ്ഡലത്തിനായുള്ള ഒരു ഫലനമാണ്. ഈ ഫലന ത്തിന്റെ മണ്ഡലവും, റേഞ്ചും കണ്ടുപിടിക്കുക?.

10. $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ നെ നിർവഹിച്ചിട്ടുള്ളത് ഫലനം $f(x) = |x| + x$ യും $g(x) = |x| - x$ യും ആയാൽ $g \circ f$, $f \circ g$ കണ്ടുപിടിക്കുക?

11. f, g, h എന്നിവ $\mathbb{R}$–ൽ നിർവഹിച്ചിരിക്കുന്ന യഥാർത്ഥ മൂല്യമുള്ള ഫലനങ്ങൾ ആണെങ്കിൽ $(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h$ എന്ന് തെളിയിക്കുക? നിങ്ങൾക്ക് $f \circ (g + h)$ അതിനെക്കുറിച്ച് പറയാൻ കഴിയുമോ? നിങ്ങളുടെ ഉത്തരം ന്യായീകരിക്കുക.

12. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ നിർവഹിച്ചിരിക്കുന്നത് $f(x) = 3x - 5$ ആണെങ്കിൽ f ഒരു ബൈജക്ഷനാണെന്ന് തെളിയിച്ച് അതിന്റെ വിപരീതം കണ്ടെത്തുക?

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 51 14-02-2023 16:41:56

13. ഒരു മനുഷ്യന്റെ പേശികളുടെ ശരീരഭാരം x -ന്റെ ഒരു പ്രവർത്തനമാണ് അത് $W(x) = 0.35x$ ആകാം. ഈ ഫലനത്തിന്റെ മണ്ഡലം കണ്ടെത്തുക? W.

14. ഒരു വസ്തു വീശുന്നതിന്റെ ദൂരം സമയത്തിന്റെ t ഒരു പ്രവർത്തനമാണ്. ഇത് $s(t) = -16t^2$ ആയി പ്രകടിപ്പിക്കാം. ഫലനം ഗ്രാഫ് ചെയ്ത് അത് ഒന്നിൽ-നിന്ന്-ഒന്നാണോ എന്ന് നിർണ്ണയിക്കുക?.

15. ഒരു നിർദിഷ്ട വഴിയിലെ വിമാന ചെലവിന്റെ ആകെ ചെലവ് അടിസ്ഥാന ചെലവായ C യും ഇന്ധന ചെലവായ S എന്നിവ ഉൾക്കൊള്ളുന്നു. മൈലേജ്, C, S കണക്കിലെടുത്ത് ഒരു ടിക്കറ്റിന്റെ മൊത്ത വിലയ്ക്കായി ഒരു ഫലനം നിർണ്ണയിക്കുക. ഒപ്പം രൂപയിൽ നിന്ന് അത് നേടുകയും ചെയ്യുക. C, S എന്നിവ മൈലേജ് m -ന്റെ പ്രവർത്തനങ്ങളാണ്. $C(m) = 0.4m + 50$, $S(m) = 0.03m$ പറയ്ക്കൽ 1600 മൈയിലുമാണ്.

16. $A(x) = 30,000 + 0.04x$ എന്ന ഫലനം ഉപയോഗിച്ച് വാർഷിക വരുമാനം പ്രതിനിധീകരിയ്ക്കാൻ കഴിയുന്ന ഒരു വിൽപനക്കാരൻ ഇവിടെ x എന്നത് അയാൾ വില്ക്കുന്ന വ്യാപാരത്തിന്റെ രൂപയുടെ മൂല്യമാണ്. അദ്ദേഹത്തിന്റെ മകനും വിൽപനയിലാണ്. അവന്റെ സമ്പാദ്യം $S(x) = 25,000 + 0.05x$ എന്ന ഫലനം പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. $(A + S)(x)$ കണ്ടെത്തി ഓരോരുത്തരും ₹$1,50,00,000$ വില വരുന്ന ചരക്കുകൾ വില്ക്കുകയാണെങ്കിൽ കുടുംബ വരുമാനം നിർണയിക്കുക?.

17. ഒരു നിശ്ചിത ദിവസം സിംഗപൂർ ഡോളറിനായി അമേരിക്കൻ ഡോളർ കൈമാറ്റം ചെയ്യുന്നതിനുള്ള പ്രവർത്തനം $f(x) = 1.23x$ ആണ്. ഇവിടെ x അമേരിക്കൻ ഡോളറിന്റെ എണ്ണത്തെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. അതെ ദിവസം തന്നെ സിംഗ്പൂർ ഡോളർ ഇന്ത്യൻ രൂപയിലേക്ക് കൈമാറ്റം ചെയ്യുന്ന ഫലനം $g(y) = 50.50y$, ആണ്. ഇവിടെ y എന്നത് സിംഗപൂർ ഡോളറിന്റെ എണ്ണത്തെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. ഇന്ത്യൻ രൂപയുടെ അമേരിക്കൻ ഡോളറിന്റെ വിനിമയ നിരക്ക് നല്കുന്ന ഒരു ഫലനം എഴുതുക..

18. ഒരു ചെറിയ റസ്റ്ററന്റിന്റെ ഉടമയ്ക്ക് ₹100 നിരക്കിൽ ഒരു പ്രത്യേക ഭക്ഷണം തയ്യാറാക്കാം. അദ്ദേഹം ഭക്ഷണത്തിന്റെ വില x രൂപ ആയി കണക്കാക്കുന്നുവെങ്കിൽ ഒരു സായാഹ്നത്തിൽ ആ വിലയ്ക്ക് ഭക്ഷണം ഓർഡർ ചെയ്യുന്ന ഉപഭോക്താക്കളുടെ എണ്ണം $D(x) = 200 - x$ ആണ്. x- ന്റെ പ്രവർത്തനങ്ങളായി ഈ ഭക്ഷണത്തിന്റെ ആകെ ചെലവും, ലാഭവും അദ്ദേഹത്തിന്റെ ദിവസം പ്രകടിപ്പിക്കുക?.

19. പേരൻഹിറ്റിൽ നിന്ന് സെയിൽറ്റ് താപനിലേക്ക് പരിവർത്തനം ചെയ്യുന്നതിനുള്ള സൂത്രവാക്യം $y = \frac{5x}{9} - \frac{160}{9}$ ഈ ഫലനത്തിന്റെ വിപരീതം കണ്ടെത്തി വിപരീതവും ഒരു ഫലനമാണോ എന്ന് തീരുമാനിക്കുക y -.

20. ഒരു ലളിതമായ സിപ്പർ സംഖ്യയെടുത്ത് അത് കോഡ് ചെയ്യുന്നു. ഫലനം $f(x) = 3x - 4$ ഉപയോഗിച്ച് ഈ പ്രവർത്തനം കണ്ടെത്തുക. വിപരീതവും ഒരു ഫലനമോ എന്ന് നിർണയിക്കുകയും $y = x$ (രേഖ വരച്ച് കൊണ്ട്) വരിയുടെ സമമിതി പരിശോധിക്കുക ചെയ്യുക?

1.7 പരിവർത്തനങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ഫലനങ്ങളുടെ ഗ്രാഫിംഗ്

ഒരു ചിത്രം ആയിരം വാക്കുകൾക്ക് മൂല്യമുള്ളതാണ്, അറിയപ്പെടുന്ന പഴഞ്ചൊല്ലാണ് ഇത്. ഞങ്ങൾ ഗ്രാഫ് ചെയ്യുന്ന ഒരു ഫലനത്തെക്കുറിച്ച് അറിയുന്നത് അതിന്റെ വിശകലനപരമായ പ്രകടനത്തേക്കാൾ ഞങ്ങളെ സഹായിക്കും. പോയിന്റുകൾ അടയാളപ്പെടുത്താതെ ഗ്രാഫുകൾ വേഗത്തിൽ വരയ്ക്കുന്നത് വിലമതിക്കാനാവാത്ത കഴിവാണ്. ചില അടിസ്ഥാനഫലനങ്ങളുടെ ആകൃതിയിലുള്ള പരിചയം സങ്കീർണ്ണ

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 52 14-02-2023 16:41:58

മായ ഫലനങ്ങൾ ഗ്രാഫ് ചെയ്യാൻ സഹായിക്കും. സമമിതിയുടെയും പരിവർത്തനങ്ങളുടെയും ധാരണയും ഉപയോഗവും പിന്നീട് - ഗ്രാഫിംഗ് കഴിവുകളെ ശക്തിപ്പെടുത്തും. ഈ വിഭാഗം കേവലം ഗ്രാഫുകളുടെ ഒരു ഡേറ്റാബേസ് അല്ലെ, ചില ഫലനങ്ങൾ ഗ്രാഫ് ചെയ്യുന്നതിന് ഞങ്ങൾ ചിലത് പഠിച്ചുവെന്ന് കരുതുക.

$y = 2\,sin(x-1) + 3$ എന്ന ഫലനം-വരയ്ക്കാനോ വക്രതവരയ്ക്കാനോ ഞങ്ങൾ - ആഗ്രഹിക്കുന്നുവെന്ന് കരുതുക. ഈ ഫലനത്തെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്ന വക്രം - വരയ്ക്കുന്നത് വളരെ ബുദ്ധിമുട്ടാണെന്ന് - തോന്നുന്നു. എന്നാൽ ഈ വിഭാഗത്തിലെ - ഉള്ളടക്കം മനസിലാക്കിയശേഷം വരയ്ക്കുന്നത് - വളരെ എളുപ്പമാണ്.

ഒരു ഗ്രാഫിന്റെ പകുതി ഒരു വരിയുമായി ബന്ധപ്പെട്ട മറ്റു പകുതിയുടെ ദർപ്പണ പ്രതിബിംബമാണെന്ന് നമുക്ക് അറിയാമെങ്കിൽ, അറിയപ്പെടുന്ന ഗ്രാഫ് ചില ദിശയിലേക്ക് നീക്കുന്നതിലൂടെ ഗ്രാഫ് നേടാൻ ആകും, തുടർന്ന് അറിയപ്പെടുന്ന ഒന്ന് ഉപയോഗിച്ച് നമുക്ക് പുതിയ വരയ്ക്കാം. മാത്രമല്ല അറിയപ്പെടുന്ന ഒന്ന് വലുതാക്കുകയോചുരുക്കുകയോ ചെയ്യുന്നതിലൂടെ ഒരു ഗ്രാഫ് നേടാൻ ആകുമെന്ന് നമുക്ക് അറിയാമെങ്കിൽ, അറിയപ്പെടുന്നവ ഉപയോഗിച്ച് നമുക്ക് പുതിയത് വരയ്ക്കാനും കഴിയും.

ഗ്രാഫിംഗിൽ ഇനി പറയുന്ന തരത്തിലുള്ള പരിവർത്തനങ്ങൾ വളരെ പ്രധാനപ്പെട്ട പങ്ക് വഹിക്കുന്നു.

(i) പ്രതിഫലനം

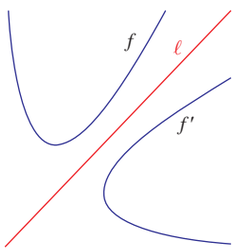
(ii) വിവർത്തനം

(iii) വിശാലമാക്കൽ അല്ലെങ്കിൽ ദീർഘീകരിക്കൽ

പ്രതിഫലനങ്ങളുടെയും, വിവർത്തനങ്ങളുടെയും കാര്യത്തിൽ അവ യഥാർത്ഥ ഗ്രാഫിന് സമാനമായ ഗ്രാഫുകൾ നിർമ്മിക്കുന്നു. അതായത് ഗ്രാഫിന്റെ വലിപ്പവും രൂപവും മാറുന്നില്ല, പക്ഷേ ദീർഘീകരിക്കലിൽ യഥാർത്ഥ ഗ്രാഫുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ആകൃതികളുള്ള ഗ്രാഫുകൾ ഇത് നിർമ്മിക്കുന്നു.

പ്രതിഫലനം

ഒരു രേഖ l-ലുമായി ബന്ധപ്പെട്ട് ഒരു ഫലനത്തിന്റെ ഗ്രാഫിന്റെ പ്രതിഫലനം l ന് സമ്മതിച്ച് സമമിതികളുള്ള ഗ്രാഫാണ്. ഒരു പ്രതിഫലനം ഗ്രാഫിന്റെ ദർപ്പണബിംബമാണ് ഇവിടെ l രേഖ പ്രതിഫലനത്തിന്റെ ദർപ്പണമാണ് (ചിത്രം 1.47 കാണുക) f' l f l.



ചിത്രം 1.47

l ലിനെ സംബന്ധിച്ചിടത്തോളം f-ന്റെ ദർപ്പണ ബിംബമാണ് f'. f - ന്റെ ഏതൊരു ബിന്ദുവിനും അനുബന്ധമായ പ്രതിരൂപം f'-ൽ കാണുന്നു. $y = f(x)$ന്റെ ചില ഉപയോഗമുള്ള പ്രതിഫലനങ്ങൾ ഇവയാണ്.

(i) x-അക്ഷത്തെക്കുറിച്ചുള്ള $y = f(x)$ ഗ്രാഫിന്റെ പ്രതിഫലനമാണ് ഗ്രാഫ് $y = -f(x)$.

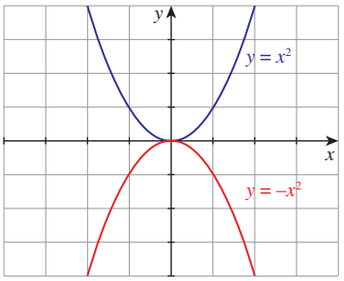
(ii) y - അക്ഷത്തെകുറിച്ചുള്ള $y = f(x)$ ഗ്രാഫിന്റെ പ്രതിഫലനാണ് ഗ്രാഫ് $y = f(-x)$

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 53 14-02-2023 16:41:59

(iii) $y = x$ എന്ന $y = f(x)$ ഗ്രാഫിന്റെ പ്രതിഫലനമാണ് ഗ്രാഫ് $y = f^{-1}(x)$.

ചിത്രീകരണം 1.5

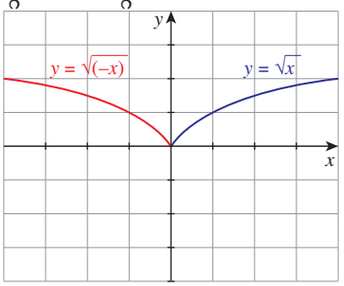
(i) $y = x^2$ (ii) $y = -x^2$ ഫലനങ്ങൾ പരിഗണിക്കാം.



ചിത്രം 1.48

$f(x) = x^2$, $-f(x) = -x^2$ എന്ന വക്രത്തിന്, x - അക്ഷത്തിനെക്കുറിച്ചുള്ള $y = x^2$ –ന്റെ പ്രതിഫലനമാണ് $y = -x^2$ [ചിത്രം 1.48 കാണുക].

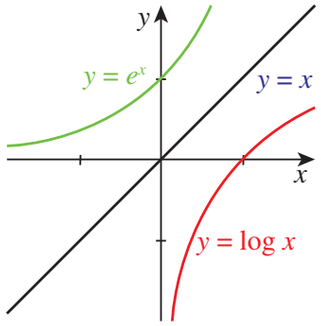
ചിത്രീകരണം 1.6 $y^2 = x$, $y^2 = -x$ ന്റെ പോസിറ്റീവ് ശാഖകൾ പരിഗണിക്കുക.



ചിത്രം 1.49

$f(x) = \sqrt{x}$ എന്ന വക്രത്തിന് നമുക്ക് $f(-x) = \sqrt{-x}$. ഉണ്ട്. അതിനാൽ $f(-x) = \sqrt{-x}$ ഇവിടെ $x < 0$, y-അക്ഷത്തെക്കുറിച്ചുള്ള $f(x) = \sqrt{x}$ ന്റെ പ്രതിഫലനമാണ് ഇത്. (ചിത്രം 1.49 കാണുക).

ചിത്രീകരണം 1.7 (i) $y = e^x$ (ii) $y = \log_e x$ ഫലനങ്ങൾ പരിഗണിക്കാം



ചിത്രം 1.50

$y = e^x$ എന്നത് $y = \log_e x$ ന്റെ വിപരീത ഫലനമാണെന്ന് നമുക്ക് അറിയാം. അതിനാൽ

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 54 14-02-2023 16:42:02

$y = x$ നെ കുറിച്ചുള്ള $y = \log_e x$ ന്റെ പ്രതിഫലനമാണ് $y = e^x$ (ചിത്രം 1.50 കാണുക)

വിവർത്തനം

ഒരു ഗ്രാഫിന്റെ വിവർത്തനം ഗ്രാഫിന്റെ ലംബമായതോ തിരശ്ചീനമായതോ ആയ മാറ്റമാണ്, അത് സമാനമായ ഗ്രാഫിനെ നിർമ്മിക്കുന്നു.

ഗ്രാഫ് $y = f(x)$ - $y = f(x + c)$, $c > 0$ എന്നിവ ഇടവശത്തേക്ക് മാറുന്നതിന് കാരണമാകുന്നു.

ഗ്രാഫ് $y = f(x - c)$, $c > 0$ എന്നിവ വലതുവശത്തേക്ക് മാറുന്നതിന് കാരണമാകുന്നു.

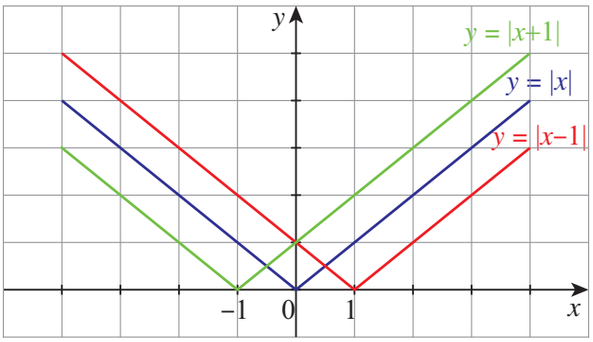
ഗ്രാഫ് $y = f(x)$ – $y = f(x) + d$, $d > 0$ എന്നിവ മുകളിലേക്ക് മാറുന്നതിന് കാരണമാകുന്നു.

$y = f(x) - d$, $d > 0$ എന്നിവ താഴേക്ക് മാറുന്നതിന് കാരണമാകുന്നു.

ചിത്രീകരണം 1.8

(i) $f(x) = |x|$ (ii) $f(x) = |x - 1|$ (iii) $f(x) = |x + 1|$

ഫലനങ്ങൾ പരിഗണിക്കാം.



ചിത്രം 1.51

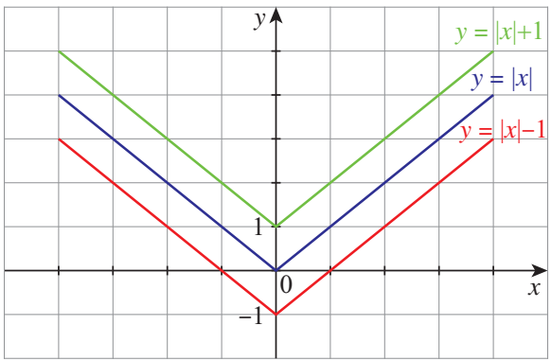
$f(x) = |x - 1|$ എന്ന ഗ്രാഫിന്റെ ഫലനം $f(x) = |x|$ ഒരു യൂണിറ്റിനായി വലതുവശത്തേക്ക് മാറുന്നു.

$f(x) = |x + 1|$ എന്ന ഗ്രാഫിന്റെ ഫലനം $f(x) = |x|$ ഒരു യൂണിറ്റിനായി ഇടതുവശത്തേക്ക് മാറുന്നു [ചിത്രം 1.51 കാണുക].

ചിത്രീകരണം 1.9

(i) $f(x) = |x|$ (ii) $f(x) = |x| - 1$ (iii) $f(x) = |x| + 1$

ഫലനങ്ങൾ പരിഗണിക്കാം.



ചിത്രം 1.52

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 55 14-02-2023 16:42:06

$f(x) = |x| - 1$ എന്ന ഗ്രാഫിന്റെ ഫലനം, $f(x) = |x|$ ഒരു യൂണിറ്റിനായി താഴേക്ക് മാറുന്നു.

$f(x) = |x| + 1$ എന്ന ഗ്രാഫിന്റെ ഫലനം, $f(x) = |x|$ ഒരു യൂണിറ്റിനായി മുകളിലേക്ക് മാറുന്നു (ചിത്രം 1.52 കാണുക).

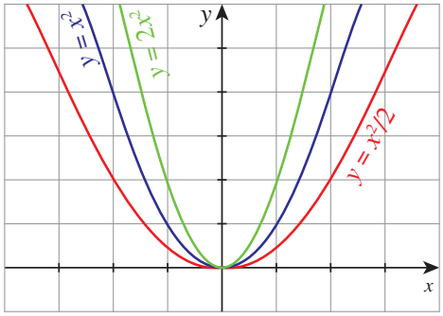
ദീർഘീകരിക്കൽ (ഡിലേഷൻ)

ദീർഘീകരിക്കൽ എന്നത് വക്രതാ നീട്ടുന്നതിനോ (വികസിപ്പിക്കുന്നിനോ) അല്ലെങ്കിൽ അമർത്തുക (ചുരുക്കുന്നതിനോ) കാരണമാകുന്ന ഒരു പരിവർത്തനമാണ്. ഒരു പോസിറ്റീവ് സ്ഥിരാങ്കം ഉപയോഗിച്ച് ഒരു ഫലനം ഗുണിച്ചാൽ അതിന്റെ ഗ്രാഫ് ലംബമായി നീട്ടുന്നു അല്ലെങ്കിൽ അമർത്തുന്നു, അതായത് ഗ്രാഫ് x - അക്ഷത്തിൽ നിന്ന് നീങ്ങുന്നു അല്ലെങ്കിൽ x -അക്ഷത്തിലേക്ക് നീങ്ങുന്നു. പോസിറ്റീവ് സ്ഥിരാങ്കം ഒന്നിൽ കൂടുതലാണെങ്കിൽ ഗ്രാഫ് x -അക്ഷത്തിൽ നിന്ന് അകന്നു പോകുന്നു. പോസിറ്റീവ് സ്ഥിരാങ്കം ഒന്നിൽ കുറവാണെങ്കിൽ ഗ്രാഫ് x -അക്ഷത്തിലേക്ക് നീങ്ങുന്നു x – y -x -y -.

ചിത്രീകരണം 1.10:

(i) $f(x) = x^2$ (ii) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ (iii) $f(x) = 2x^2$

ഫലനം പരിഗണിക്കാം.



ചിത്രം 1.53

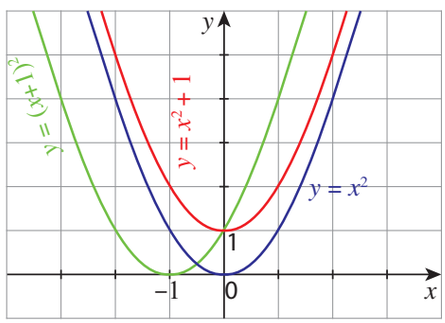
$f(x) = \frac{1}{2}x^2$, $f(x) = x^2$ -ഗ്രാഫിന്റെ പ്രതിഫലനത്തിന് കാരണമാകുന്നു. $f(x) = x^2$ ഗുണിത ഘടകം ഒന്നിൽ കുറവാണ് ആയതിനാൽ x - അക്ഷത്തിലേക്ക് വികസിക്കുന്നു. $\frac{1}{2}$.

$f(x) = 2x^2$, $f(x) = x^2$ ഗ്രാഫിന്റെ പ്രതിഫലനത്തിന് കാരണമാകുന്നു. $f(x) = 2x^2$, അതിന്റെ ഗുണന ഘടകം 2 ആയത് ഒന്നിനെക്കാൾ വലുത് അത് y അക്ഷത്തിൽ നിന്നും x അക്ഷത്തോട് ചലിക്കുന്നു.

ചിത്രീകരണം 1.11:

(i) $f(x) = x^2$ (ii) $f(x) = x^2 + 1$ (iii) $f(x) = (x + 1)^2$

ഫലനം പരിഗണിക്കാം.



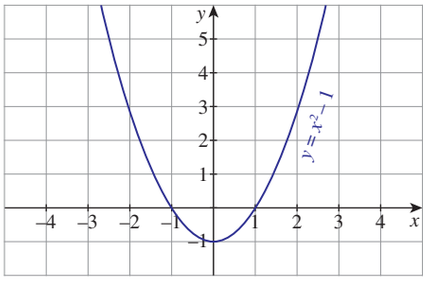
ചിത്രം 1.54

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 56 14-02-2023 16:42:08

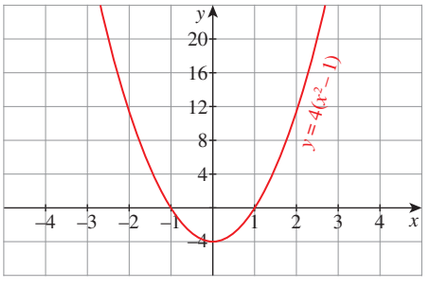
$f(x) = x^2 + 1$ ഗ്രാഫിന്റെ ഫലനം, $f(x) = x^2$ -ഒരു യൂണിറ്റായി മുകളിലേക്ക് മാറുന്നു.

$f(x) = (x + 1)^2$ ഗ്രാഫിന്റെ ഫലനം $f(x) = x^2$ -ഒരു യൂണാറ്റായി ഇടത്തേക്ക് മാറുന്നു. (ചിത്രം 1.54 കാണുക).

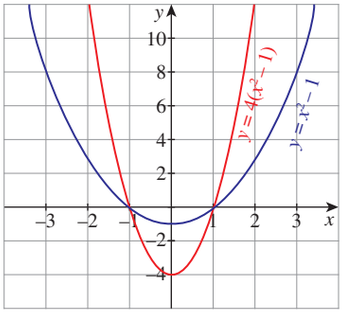
ചിത്രീകരണം 1.12: $y = x^2 - 1$, $y = 4(x^2 - 1)$, $y = (4x)^2 - 1$ എന്ന ഗ്രാഫുകളെ താരതമ്യപ്പെടുത്തുകയും, വ്യത്യാസപ്പെടുത്തുകയും ചെയ്യുക.



ചിത്രം 1.55



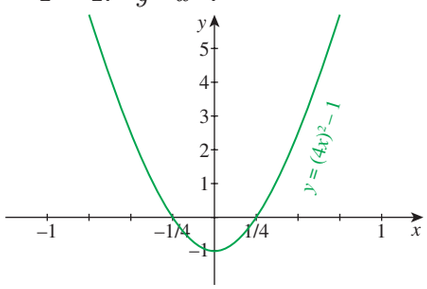
ചിത്രം 1.56



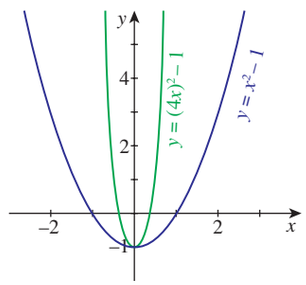
ചിത്രം 1.57

ചിത്രം 1.55, 1.56 y -അക്ഷത്തിലെ അളവുകളെ താരതമ്യം ചെയ്യുന്നവരെ ഇവ സമാനമായി കാണപ്പെടുന്നു. ചിത്രം 1.56 യിലെ അളവ് നാല് ഇരട്ടി വലുതാണ്. ഇത് യഥാർത്ഥ ഫലനത്തിന്റെ ഗുണത്തെ പ്രതിഭലിപ്പിക്കുന്നു. (ചിത്രം 1.55) ഒരേ അളവിൽ ഫലനങ്ങൾ അടയാളപ്പെടുത്തുമ്പോൾ പ്രഭാവം വ്യത്യസ്തമായി കാണപ്പെടുന്നു (ചിത്രം 1.57).

ചിത്രം 1.58-ൽ $y = (4x)^2 - 1$ എന്നതിന്റെ ഗ്രാഫ് കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. ചിത്രം 1.55, ചിത്രം 1.58 യിലെ വ്യത്യാസം കണ്ട് എത്താൻ നിങ്ങൾക്ക് കഴിയുമോ? ഈ സാഹചര്യത്തിൽ ഫലനത്തിലെ 4 ന്റെ അതേ ഘടകം ഉപയോഗിച്ച് x അളവ് ഇപ്പോൾ മാറിയിരിക്കുന്നു(ചിത്രം 1.58). ഇത് കാണുന്നതിന്, എതാർത്ത ഫലനത്തിലേക്ക് $x = 1$ എന്നതിനു പകരമായി $x = \frac{1}{4}$ $(4x)^2 - 1$ പകരം വയ്ക്കുന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക (ചിത്രം 1.55). ഒരേ സെറ്റ് അക്ഷങ്ങളിൽ അടയാളപ്പെടുത്തുമ്പോൾ (ചിത്രം 1.59) പോലെ പരാബോള $y = (4x)^2 - 1$ നെ കുറഞ്ഞതായി തോന്നുന്നു. ഇവിടെ വ്യത്യാസമാണെങ്കിൽ y -ആന്തര ഖണ്ഡം $1^2 - 1$. y - x -.



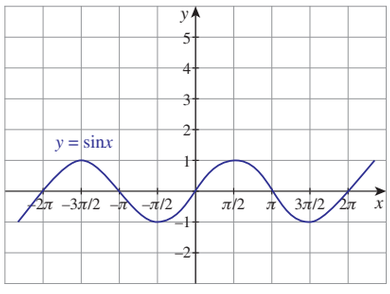
ചിത്രം 1.58



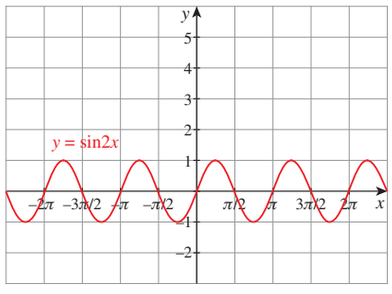
ചിത്രം 1.59

ചിത്രീകരണം 1.13

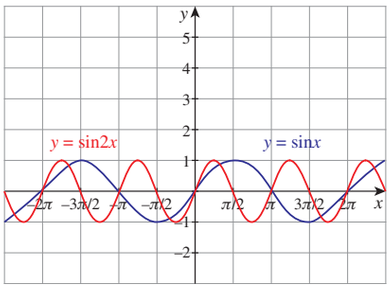
ചിത്രീകരണം 1.12 ഉപയോഗിച്ച് അതേ ആശയം ഉപയോഗിച്ച് $y = \sin x$; $y = \sin 2x$ എന്നിവയുടെ ഗ്രാഫുകളും അവയുടെ സംയോജിത ഗ്രാഫുകളും ചിത്രങ്ങൾ 1.60, 1.61, 1.62 എന്നിവ നൽകിയിരിക്കുന്നു.



ചിത്രം 1.60



ചിത്രം 1.61



ചിത്രം 1.62

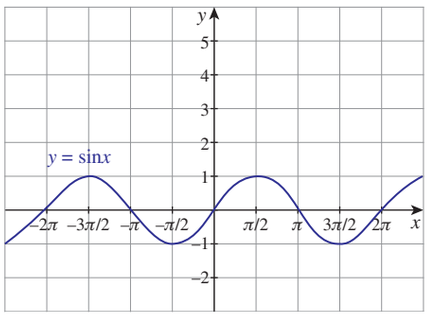
XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 57 14-02-2023 16:42:11

$\sin x$, $\sin 2x$ എന്നിവയുടെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞതും കൂടിയതുമായ മൂല്യങ്ങൾ തുല്യമാണ്. എന്നാൽ ഇവയ്ക്ക് വ്യത്യസ്ത x ആന്തരഖണ്ഡങ്ങളുണ്ട്. $y = \sin x$ എന്നതിനായുള്ള x ആന്തരഖണ്ഡങ്ങൾ $\pm n\pi$, യും $y = \sin 2x$ ന് $\pm \frac{1}{2}n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. ആണ്

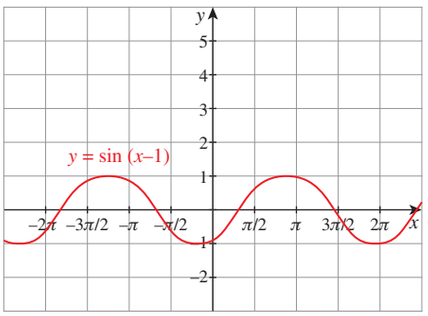
ഈ വിഭാഗത്തിന്റെ തുടക്കത്തിൽ $y = 2\sin(x-1) + 3$ എന്നതിന്റെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുന്നതിനെക്കുറിച്ച് ഞങ്ങൾ സംസാരിച്ചു. ഇപ്പോൾ ഞങ്ങൾ വക്രം വരയ്ക്കാൻ സജ്ജരാണ്, മാത്രമല്ല നമുക്ക് കൂടുതൽ സങ്കീർണ്ണവുമായ വക്രവും വരയ്ക്കാൻ കഴിയും. .

ചിത്രീകരണം 1.14 നമുക്ക് $y = 2\sin(x-1) + 3$ എന്നതിന്റെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കാം.

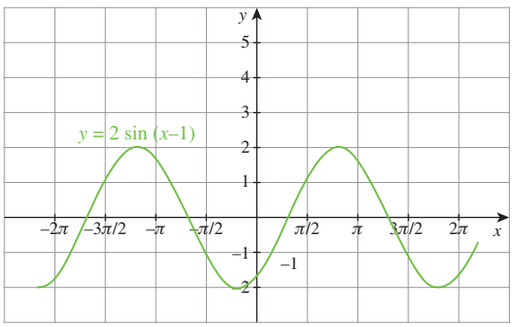
$y = \sin x$ യിൽ നിന്നും വക്രം നേടാൻ ആകുമെന്ന് വ്യക്തമാണ്. അതിനാൽ വിവർത്തനവും, ദീർഘീകരിക്കലും ഉപയോഗിച്ച് $y = \sin x$ ആദ്യം വരയ്ക്കുന്നു. അതിൽ നിന്ന് $y = \sin(x-1)$ വരയ്ക്കുന്നത് എളുപ്പമാണ്. എന്നിട്ട് $y = 2\sin(x-1)$ വരയ്ക്കുക. അവസാനമായി $y = 2\sin(x-1) + 3$ വരയ്ക്കുക (ചിത്രങ്ങൾ 1.63, 1.64, 1.65, 1.66 കാണുക).



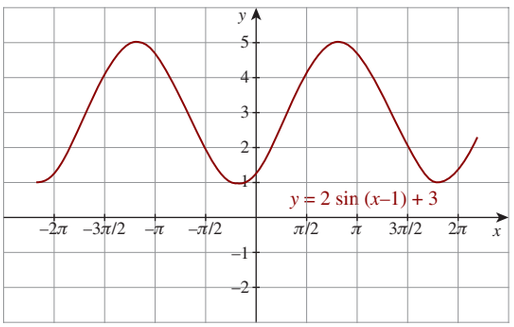
ചിത്രം 1.63



ചിത്രം 1.64



ചിത്രം 1.65



ചിത്രം 1.66

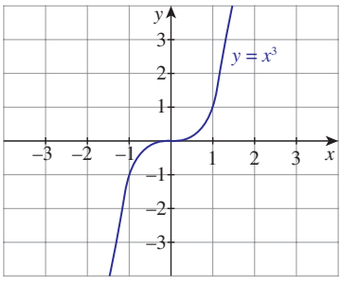
അഭ്യാസം 1.4

1. ചിത്രം 1.67 ൽ $y = x^3$ ന്റെ വക്രം നൽകിയിരിക്കുന്നു.

   (i) $y = -x^3$ (ii) $y = x^3 + 1$ (ii) $y = x^3 - 1$ (iv) $y = (x+1)^3$

   എന്നിവ ഒരേ അളവിൽ വരയ്ക്കുക

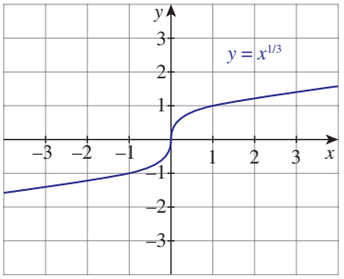
XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 58 14-02-2023 16:42:13



ചിത്രം 1.67

2. ചിത്രം 1.68 ൽ $y = x^{(\frac{1}{3})}$ എന്നിവ വരയ്ക്കുക.

(i) $y = -x^{(\frac{1}{3})}$ (ii) $y = x^{(\frac{1}{3})} + 1$ (iii) $y = x^{(\frac{1}{3})} - 1$ (iv) $y = (x+1)^{(\frac{1}{3})}$



ചിത്രം 1.68

3. ഫലനങ്ങൾ $f(x) = x^3$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$ എന്നിവയെ ഒരേ തലം ഉപയോഗിച്ച് ഗ്രാഫ് ചെയ്യുക. $f \circ g$ കണ്ടുപിടിച്ച് അതെ തലത്തിൽ ഗ്രാഫ് ചെയ്യുക. നിങ്ങളുടെ ഫലനങ്ങൾ വിശദീകരിക്കുക.

4. $y = x^2$ എന്ന ഗ്രാഫിൽ നിന്നും $y = 3(x-1)^2 + 5$ എന്ന ഫലനത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് നേടുന്നതിനുള്ള ഘട്ടങ്ങൾ എഴുതുക.

5. $y = \sin x$ എന്ന വക്രത്തിൽ നിന്ന്

(i) $y = \sin(-x)$ (ii) $y = -\sin(-x)$

(iii) $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ (iv) $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

എന്നീ ഫലനത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് കണ്ടെത്തുക. ((iii),(iv) ഇതി ഏതാണ് $\cos x$ (ത്രികോണമിതി കാണുക)

6. $y = x$ എന്ന വക്രത്തിൽ നിന്നും

(i) $y = -x$ (ii) $y = 2x$ (iii) $y = x + 1$

(iv) $y = \frac{1}{2}x + 1$ (v) $2x + y + 3 = 0$ വരയ്ക്കുക.

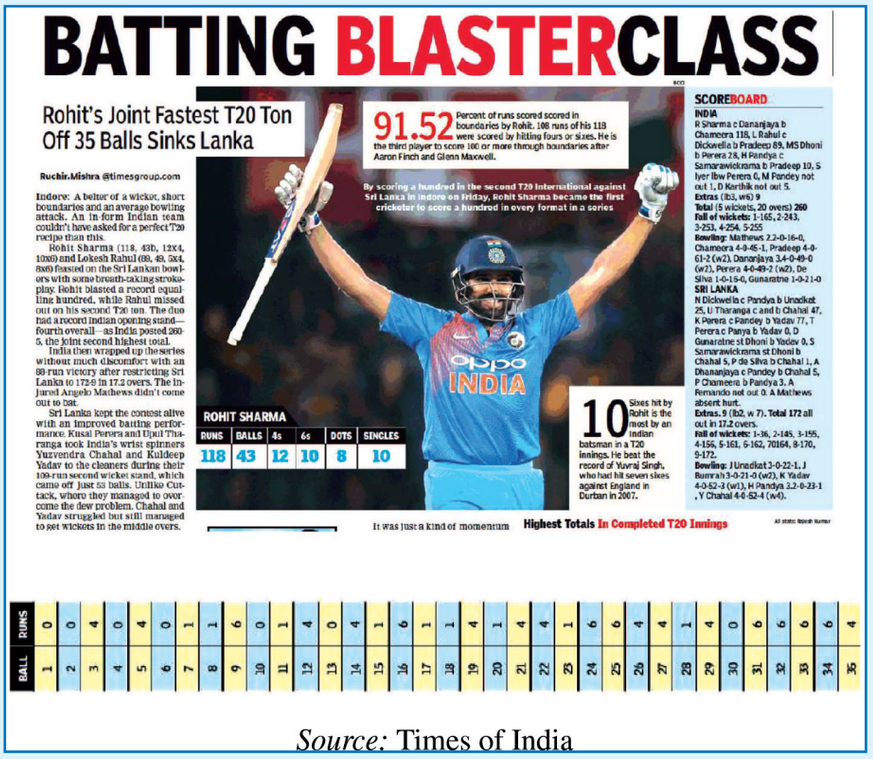
7. $y = |x|$ എന്ന വക്രത്തിൽ നിന്ന്

(i) $y = |x-1| + 1$ (ii) $y = |x+1| - 1$ (iii) $y = |x+2| + 3$ വരയ്ക്കുക.

8. $y = \sin x$ എന്ന വക്രത്തിൽ നിന്ന് $y = \sin|x|$ വരയ്ക്കുക [സൂചന $\sin(-x) = -\sin x$] .

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 59 14-02-2023 16:42:16

എന്തൊരു ആഘോഷം! എന്തൊരു ബന്ധം! എന്തൊരു ഫലനം!



BATTING BLASTERCLASS

Rohit's Joint Fastest T20 Ton Off 35 Balls Sinks Lanka

Ruchir.Mishra @timesgroup.com

Indore: A belter of a wicket, short boundaries and an average bowling attack. An in-form Indian team couldn't have asked for a perfect T20 recipe than this.

Rohit Sharma (118, 43b, 12x4, 10x6) and Lokesh Rahul (89, 49, 5x4, 8x6) feasted on the Sri Lankan bowlers with some breath-taking strokeplay. Rohit blasted a record equalling hundred, while Rahul missed out on his second T20 ton. The duo had a record Indian opening stand—fourth overall—as India posted 260-5, the joint second highest total.

India then wrapped up the series without much discomfort with an 88-run victory after restricting Sri Lanka to 172-9 in 17.2 overs. The injured Angelo Mathews didn't come out to bat.

Sri Lanka kept the contest alive with an improved batting performance. Kusal Perera and Upul Tharanga took India's wrist spinners Yuzvendra Chahal and Kuldeep Yadav to the cleaners during their 109-run second wicket stand, which came off just 53 balls. Unlike Cuttack, where they managed to overcome the dew problem, Chahal and Yadav struggled but still managed to get wickets in the middle overs.

91.52 Percent of runs scored scored in boundaries by Rohit. 108 runs of his 118 were scored by hitting fours or sizes. He is the third player to score 100 or more through boundaries after Aaron Finch and Glenn Maxwell.

By scoring a hundred in the second T20 International against Sri Lanka in Indore on Friday, Rohit Sharma became the first cricketer to score a hundred in every format in a series

ROHIT SHARMA

RUNS	BALLS	4s	6s	DOTS	SINGLES
118	43	12	10	8	10

10 Sixes hit by Rohit is the most by an Indian batsman in a T20 innings. He beat the record of Yuvraj Singh, who had hit seven sixes against England in Durban in 2007.

SCOREBOARD

INDIA
R Sharma c Dananjaya b Chameera 118, L Rahul c Dickwella b Pradeep 89, MS Dhoni b Perera 28, H Pandya c Samarawickrama b Pradeep 10, S Iyer lbw Perera 0, M Pandey not out 1, D Karthik not out 5.
Extras (lb3, wb) 9
Total (5 wickets, 20 overs) 260
Fall of wickets: 1-165, 2-243, 3-253, 4-254, 5-255
Bowling: Mathews 2.2-0-16-0, Chameera 4-0-45-1, Pradeep 4-0-61-2 (w2), Dananjaya 3.4-0-49-0 (w2), Perera 4-0-49-2 (w2), De Silva 1-0-15-0, Gunaratne 1-0-21-0

SRI LANKA
N Dickwella c Pandya b Unadkat 25, U Tharanga c and b Chahal 47, K Perera c Pandey b Yadav 77, T Perera c Panya b Yadav 0, D Gunaratne st Dhoni b Yadav 0, S Samarawickrama st Dhoni b Chahal 5, P de Silva b Chahal 1, A Dhananjaya c Pandey b Chahal 5, P Chameera b Pandya 3, A Fernando not out 0. A Mathews absent hurt.
Extras. 9 (lb2, w 7). Total 172 all out in 17.2 overs.
Fall of wickets: 1-36, 2-145, 3-155, 4-156, 5-161, 6-162, 70164, 8-170, 9-172.
Bowling: J Unadkat 3-0-22-1, J Bumrah 3-0-21-0 (w2), K Yadav 4-0-52-3 (w1), H Pandya 2.2-0-23-1 , Y Chahal 4-0-52-4 (w4).

All stats: Rohit Kumar

It was just a kind of momentum

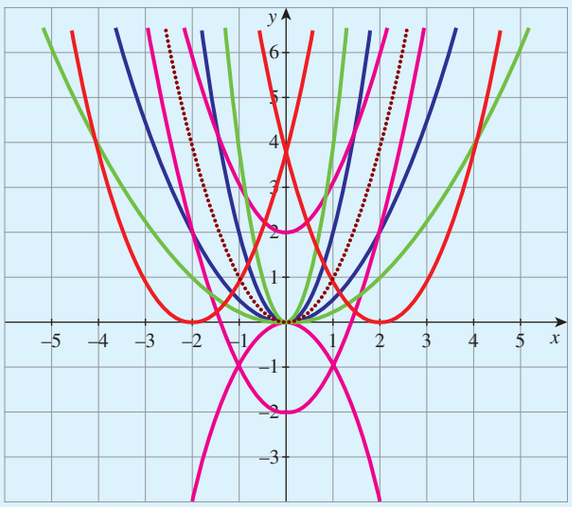
Highest Totals In Completed T20 Innings

BALL	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
RUNS	0	0	4	0	4	0	1	1	6	0	1	4	0	4	1	6	1	1	4	1	4	4	1	6	6	4	4	1	4	0	6	6	6	6	4

Source: Times of India

1. മുകളിലുള്ള വിവരണത്തെ വ്യാഖ്യാനിക്കുക
   (i) ഒരു ബന്ധം
   (ii) ഒരു ഫലനം
   (iii) ഓൺ-ടൂ ഫലനം
   (iv) നിങ്ങൾക്ക് വിവരത്തെ ഒന്നിൽ-നിന്ന്-ഒന്നായി നിർമ്മിക്കാൻ കഴിയുമോ? ഇല്ലെങ്കിൽ എന്തുകൊണ്ട്?

2. ചിത്രം 1.69 യിലെ വക്രങ്ങളും അളവ് കൊണ്ട് അടിസ്ഥാനവക്രത്തിന് (ടോഡ് ഇട്ട വരയുള്ള (ഗ്രാഫ്) $y = x^2$ എന്നതിന്റെ അനുബന്ധ സമവാക്യങ്ങളും തിരിച്ചറിയുക.



ചിത്രം 1.69

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 60 14-02-2023 16:42:16

അഭ്യാസം 1.5

ഏറ്റവും അനുയോജ്യമായതും, ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുത്തെഴുതുക

1. $A=\{(x,y): y=e^x, x\in\mathbb{R}\}, B=\{(x,y): y=e^{-x}, x\in\mathbb{R}\}$ എങ്കിൽ, $n(A\cap B)$ ആകുന്നു

   (1) ∞ (2) 0 (3) 1 (4) 2

2. $A=\{(x,y): y=\sin x, x\in\mathbb{R}\}$, $B=\{(x,y): y=\cos x, x\in\mathbb{R}\}$ എങ്കിൽ, $A\cap B$ -ഉൾപ്പെടുന്നത്

   (1) ഘടകങ്ങളൊന്നുമില്ല (2) അനന്തമായ അനേകം ഘടകങ്ങൾ

   (3) ഒരു ഘടകം മാത്രം (4) നിർണയിക്കാൻ കഴിയില്ല

3. ഒരു ബന്ധം R നെ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത് ഗണം $A = \{0, -1, 1, 2\}$ യിൽ $|x^2+y^2|\le 2$, xRy ആണെങ്കിൽ താഴെ പറയുന്നവയിൽ ഏതാണ് ശരിയായത്?

   (1) $R=\{(0,0),(0,-1),(0,1),(-1,0),(-1,1),(1,2),(1,0)\}$

   (2) $R^{-1}=\{(0,0),(0,-1),(0,1),(-1,0),(1,0)\}$

   (3) $R = \{0, -1, 1, 2\}$ ന്റെ മണ്ഡലം

   (4) $R = \{0, -1, 1\}$ ന്റെ രംഗം

4. $f(x)=|x-2|+|x+2|, x\in\mathbb{R}$ എങ്കിൽ,

   (1) $f(x)=\begin{cases}-2x & ; x\in(-\infty,-2]\\ 4 & ; x\in(-2,2]\\ 2x & ; x\in(2,\infty)\end{cases}$ (2) $f(x)=\begin{cases}2x & ; x\in(-\infty,-2]\\ 4 & ; x\in(-2,2]\\ -2x & ; x\in(2,\infty)\end{cases}$

   (3) $f(x)=\begin{cases}-2x & ; x\in(-\infty,-2]\\ -4 & ; x\in(-2,2]\\ 2x & ; x\in(2,\infty)\end{cases}$ (4) $f(x)=\begin{cases}-2x & ; x\in(-\infty,-2]\\ 2 & ; x\in(-2,2]\\ 2x & ; x\in(2,\infty)\end{cases}$

5. എല്ലാ വാസ്തവിക സംഖ്യകളുടെ ഗണം $\mathbb{R}$ ആയിരിക്കട്ടെ. തലം $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ –ന്റെ താഴെ പറയുന്ന ഉപഗണങ്ങൾ പരിഗണിക്കുക.

   $S=\{(x,y): y=x+1,\ 0<x<2\}$; $T=\{(x,y): x-y\in\mathbb{Z}\}$ ഒരു പൂർണ്ണസംഖ്യയാണ് അപ്പോൾ ഇനി പറയുന്നവയിൽ ഏതാണ് ശരി?

   (1) T ഒരു തുല്യതാബന്ധമാണ് എന്നാൽ, S ഒരു തുല്യതാബന്ധമല്ല.

   (2) S , T എന്നിവ തുല്യതാ ബന്ധമല്ല.

   (3) S, T എന്നിവ രണ്ടും തുല്യതാബന്ധമാണ്.

   (4) S ഒരു തുല്യതാബന്ധമാണ് എന്നാൽ, T ഒരു തുല്യതാബന്ധമല്ല.

6. A, B എന്നിവ ഒരു സാർവത്രികഗണം എണ്ണസംഖ്യകളുടെ ഗണം, $\mathbb{N}$ -ന്റെ ഉപഗണങ്ങൾ ആവട്ടെ എങ്കിൽ $A'\cup[(A\cap B)\cup B']$

   (1) A (2) A' (3) B (4) $\mathbb{N}$

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 61 14-02-2023 16:42:18

7. ഗണിതം, രസതന്ത്രം എന്നീ രണ്ടു വിഷയങ്ങൾ എടുക്കുന്ന വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം 70 ആണ്. ഗണിതത്തിൽ 10% വിദ്യാർത്ഥികൾ പ്രവേശിക്കുന്നു. രസതന്ത്രത്തിൽ 14% വിദ്യാർത്ഥികൾ പ്രവേശിക്കുന്നു. കുറഞ്ഞത് ഒരു വിഷയത്തിൽ പ്രവേശിക്കുന്ന വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം

(1) 1120 (2) 1130

(3) 1100 (4) വിവരങ്ങൾ അപര്യാപ്തമാണ്.

8. $n[(A\times B)\cap(A\times C)]=8$ **മറ്റും** $n(B\cap C)=2$ എങ്കിൽ, $n(A)$

(1) 6 (2) 4 (3) 8 (4) 16

9. $n(A)=2,\ n(B\cup C)=3$, എങ്കിൽ $n[(A\times B)\cup(A\times C)]$

(1) 2^3 (2) 3^2 (3) 6 (4) 5

10. A, B എന്നീ രണ്ടു ഗണങ്ങളുടെ പൊതുവായ 17 ഘടകങ്ങൾ ഉണ്ടെങ്കിൽ ഗണം $A\times B, B\times A$ യ്ക്ക് പൊതുവായ ഘടകങ്ങളുടെ എണ്ണം എത്ര?

(1) 2^{17} (2) 17^2 (3) 34 (4) വിവരങ്ങൾ അപര്യാപ്തമാണ്.

11. ശൂന്യമല്ലാത്ത A, B ഗണങ്ങൾക്ക്. $A\subset B$ ആണെങ്കിൽ $(A\times B)\cap(B\times A)=$ തുല്യമാണ്.

(1) $A\cap B$ (2) $A\times A$

(3) $B\times B$ (4) ഇത് ഒന്നുമല്ല.

12. 3 ഘടകങ്ങൾ അടങ്ങിയ ഒരു ഗണത്തിലെ ബന്ധങ്ങളുടെ എണ്ണം

(1) 9 (2) 81 (3) 512 (4) 1024

13. ഒന്നിൽ കൂടുതൽ ഘടകങ്ങളുള്ള ഒരു ഗണം X-യിലെ സാർവ്വക്രിത ബന്ധമായി R ആകട്ടെ അപ്പോൾ R ആകുന്നു

(1) പ്രതിഫലനമല്ല (2) സമമിതിയല്ല

(3) പ്രത്യക്ഷബന്ധങ്ങളെ കാണിക്കുന്നു (4) ഇത് ഒന്നുമല്ല

14. $X=\{1,2,3,4\},\ R=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(3,3),(2,1),(3,1),(1,4),(4,1)\}$ അപ്പോൾ R

(1) പ്രതിഫലനം (2) സമമിതിയല്ല

(3) പ്രത്യക്ഷബന്ധങ്ങളെ കാണിക്കുന്ന (4) തുല്യത

15. $\frac{1}{1-2\sin x}$ എന്ന ഫലനത്തിന്റെ രംഗം

(1) $(-\infty,-1)\cup\left(\frac{1}{3},\infty\right)$ (2) $\left(-1,\frac{1}{3}\right)$

(3) $\left[-1,\frac{1}{3}\right]$ (4) $(-\infty,-1]\cup\left[\frac{1}{3},\infty\right)$

16. $f(x)=|\,[x]-x\,|, x\in\mathbb{R}$ എന്ന ഫലനത്തിന്റെ രംഗം,

(1) $[0,1]$ (2) $[0,\infty)$ (3) $[0,1)$ (4) $(0,1)$

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 62 14-02-2023 16:42:19

17. മണ്ഡലവും, സഹ-മണ്ഡലവും തന്നിരുന്നാൽ $f(x)=x^2$ എന്ന നിയമം ഒരു ബൈജക്ഷനാണ്

(1) $\mathbb{R}, \mathbb{R}$ (2) $\mathbb{R}, (0, \infty)$ (3) $(0, \infty), \mathbb{R}$ (4) $[0, \infty), [0, \infty)$

18. m ഘടകങ്ങൾ അടങ്ങിയ ഒരു ഗണത്തിൽ നിന്ന് n ഘടകങ്ങൾ അടങ്ങിയ ഒരു ഗണത്തിലേക്കുള്ള സ്ഥിരമായ ഫലനങ്ങളുടെ എണ്ണം

(1) mn (2) m (3) n (4) $m+n$

19. $f(x)=\sin x$ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത് ഫലനം $f:[0,2\pi]\to[-1,1]$ ആണെങ്കിൽ,

(1) ഒന്നിൽ-നിന്ന്-ഒന്നിലേക്ക് (2) ഒന്നിൽ നിന്ന്-ഒന്ന് വരെ

(3) ബൈജക്ഷൻ (4) നിർവചിക്കാൻ കഴിയില്ല

20. ഫലനം $f:[-3,3]\to S$ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത് $f(x)=x^2$ ആണെങ്കിൽ, S എന്നത്

(1) $[-9, 9]$ (2) $\mathbb{R}$ (3) $[-3, 3]$ (4) $[0, 9]$

21. $X=\{1, 2, 3, 4\}, Y=\{a, b, c, d\}$, $f=\{(1, a), (4, b), (2, c),(3, d), (2, d)\}$ എങ്കിൽ f എന്നത്

(1) ഒൺ-ടു-ഒൺ ഫലനം (2) ഓൺ-ടു ഫലനം

(3) ഒൺ-ടു-ഒൺ അല്ലാത്ത ഫലനം (4) ഫലനമല്ല

22. $f(x)=\begin{cases} x & ; \quad x<1 \\ x^2 & ; \quad 1\le x\le 4 \\ 8\sqrt{x} & ; \quad x>4 \end{cases}$ എന്നതിന്റെ വിപരീതമാണ്

(1) $f^{-1}(x)=\begin{cases} x & ; \ x<1 \\ \sqrt{x} & ; \ 1\le x\le 16 \\ \frac{x^2}{64} & ; \ x>16 \end{cases}$ (2) $f^{-1}(x)=\begin{cases} -x & ; \ x<1 \\ \sqrt{x} & ; \ 1\le x\le 16 \\ \frac{x^2}{64} & ; \ x>16 \end{cases}$

(3) $f^{-1}(x)=\begin{cases} x^2 & ; \ x<1 \\ \sqrt{x} & ; \ 1\le x\le 16 \\ \frac{x^2}{64} & ; \ x>16 \end{cases}$ (4) $f^{-1}(x)=\begin{cases} 2x & ; \ x<1 \\ \sqrt{x} & ; \ 1\le x\le 16 \\ \frac{x^2}{8} & ; \ x>16 \end{cases}$

23. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$-നെ $f(x)=1-|x|$ എന്ന് നിർവചിച്ചാൽ f -ന്റെ രംഗം

(1) $\mathbb{R}$ (2) $(1, \infty)$ (3) $(-1, \infty)$ (4) $(-\infty, 1]$

24. ഫലനം $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$-നെ നിർവഹിക്കുന്നത് $f(x)=\sin x+\cos x$ ആകുന്നു f എന്നത്

(1) ഒറ്റ ഫലനം (2) ഒറ്റ ഫലനമോ, ഇരട്ടഫലനമോ അല്ല

(3) ഇരട്ട ഫലനം (4) ഒറ്റ ഫലനവും, ഇരട്ട ഫലനവും

25. ഫലനം $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ൽ $f(x)=\dfrac{(x^2+\cos x)(1+x^4)}{(x-\sin x)(2x-x^3)}+e^{-|x|}$ നിർവഹിച്ചിരിക്കുന്നത് f എന്നത്

(1) ഒറ്റ ഫലനം

(2) ഒറ്റഫലനമോ, ഇരട്ടഫലനമോ അല്ല

(3) ഇരട്ട ഫലനം

(4) ഒറ്റഫലനവും, ഇരട്ടഫലനവും.

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 63 14-02-2023 16:42:21

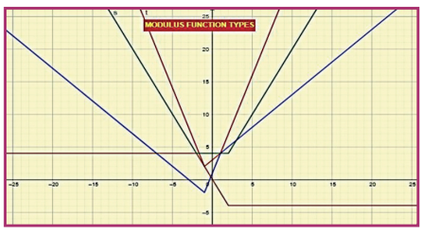
സംഗ്രഹം

ഈ അധ്യായത്തിൽ നേടിയ വിവരങ്ങൾ

- **ഗണം**
  - ഉപഗണം, സൂപ്പർ ഉപഗണം, നിസ്സാര ഉപഗണം, യഥാർത്ഥ ഉപഗണം, അനുചിത ഉപഗണം
  - ശൂന്യമായ ഗണം, ഘാതഗണം, സമസ്തഗണം, ഏകാംഗ ഗണം, പരിമിത ഗണം, അനന്ത ഗണം
  - ഒരു ഗണത്തിന്റെ കാർഡിനാലിറ്റി
  - യോഗം, സംഗമം, പൂരകം, ഗണത്തിന്റെ വ്യത്യാസം, സമമിതി വ്യത്യാസം
  - ഡി-മോർഗൻ നിയമങ്ങളുടെ സവിശേഷതകൾ
  - കാർട്ടീഷ്യൻ ഗുണനഫലം
- **ഇടവേളകൾ**
  - സ്ഥിരാങ്കം, ആശ്രിതവും, സ്വാതന്ത്ര്യവുമായ ചരങ്ങൾ
  - തുറന്നതും അടഞ്ഞതും, പരിമിതം, അനന്തവുമായ ഇടവേളകളും, സമീപസ്ഥലങ്ങളും
- **ബന്ധങ്ങൾ**
  - ബന്ധങ്ങളുടെ മണ്ഡലവും, രംഗവും
  - തീവ്രബന്ധങ്ങൾ (ശൂന്യവും, സമസ്തവും)
  - ഒരു ബന്ധത്തിന്റെ വിപരീതം
  - പ്രതിഫലനം, സമമിതി, പ്രത്യക്ഷ, തുല്യതാ ബന്ധങ്ങൾ
- **ഫലനങ്ങൾ**
  - നിർവചനം, മണ്ഡലം, സഹ-മണ്ഡലം, രംഗം, പ്രതിബിംബം, ബിംബം
  - പട്ടിക, രേഖീയം, വിശ്ലേഷകം, ഖണ്ഡങ്ങളായുള്ള പ്രതിനിധീകരിക്കൽ
  - അനന്യഫലനം, സ്ഥിരഫലനം, പൂജ്യഫലനം, കേവലവില ഫലനം, സിഗ്ധ ഫലനം.
  - വൻ പൂർണ്ണ ഫലനം, ചെറിയ പൂർണ്ണ ഫലനം
  - ഇൻജെക്റ്റീവ്, സർജക്ടീവ്, ബൈജക്ടീവ് ഫലനങ്ങൾ
  - ലംബപരീക്ഷണം, തിരശ്ചീല പരീക്ഷണം
  - ഫലനങ്ങളുടെ സംഗ്രഥനം, ഫലനങ്ങളുടെ വിപരീതം
  - വാസ്തവിക ഫലനങ്ങളുടെ സങ്കലനവും, ഗുണനവും
  - ബഹുപദ വ്യാജക ഫലനം, ലീനിയർ ഫലനം, ഘാത ഫലനം, ലോഗരിഥമിക് ഫലനം, പരിമേയ ഫലനം, വ്യുൽക്രമ ഫലനം
  - ഒറ്റ ഇരട്ട ഫലനം
- **ഫലനങ്ങളെ ഗ്രാഫ് ആക്കൽ**
  - പ്രതിഫലനം, വിവർത്തനം, വിപുലീകരണം
  - സങ്കീർണ്ണമായി തോന്നുന്ന ചില ഫലനങ്ങളുടെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കൽ

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 64 14-02-2023 16:42:21

ഐ.സി.റ്റി കോർണർ – 1 (എ)



പടി–1

ബ്രൗസർ തുറന്ന് താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന യു.ആർ.എൽ ലിങ്ക് ടൈപ്പ് ചെയ്യുക അല്ലെങ്കിൽ ക്യൂ.ആർ കോഡ് സ്കാൻ ചെയ്യുക..

പടി–2

"Graph of Special Functions" എന്ന പേരിൽ ഒരു വർക്ക് ബുക്ക് തുറക്കും ഫംഗ്ഷനുകളും ഗ്രാഫുമായി ബന്ധപ്പെട്ട 7 വർക്ക് ഷീറ്റുകൾ ഈ വർക്ക് ബുക്കിൽ നൽകിയിരിക്കുന്നു. "More Modulus Functions" എന്ന പേരിൽ ഒരു വർക്ക്ഷീറ്റ് തിരഞ്ഞെടുക്കുക.

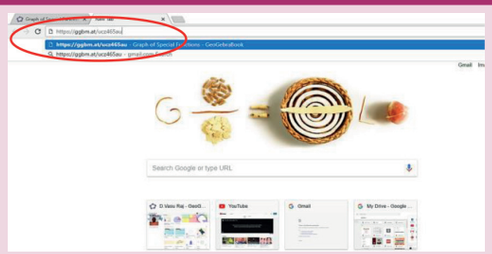
പടി–3

വർക്ക് ഷീറ്റിന്റെ വലതുവശത്ത് നിരവധി മോഡുലസ് ഫംഗ്ഷനുകൾക്കായി ചെക്ക് ബോക്സുകൾ ഉണ്ട്.

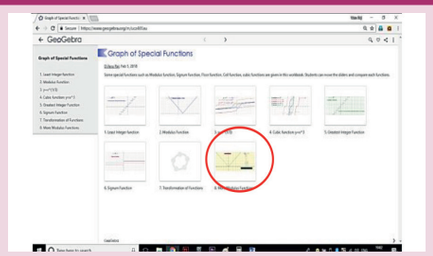
പടി–4

ഗ്രാഫ് കാണുന്നതിന് നിങ്ങൾക്ക് ഏത് ചെക്ക് ബോക്സിലും ക്ലിക്ക് ചെയ്യാം. ഇപ്പോൾ ഫംഗ്ഷൻ മാറ്റാൻ സ്ലൈഡർ "a" നീക്കുകയും നിരീക്ഷിക്കുകയും ചെയ്യുക.

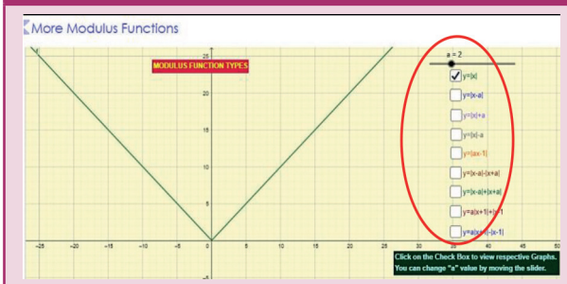
പടി–1



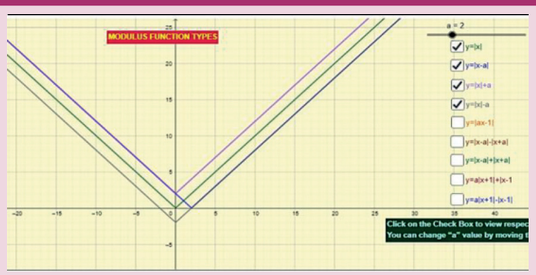
പടി–2



പടി–3



പടി–4



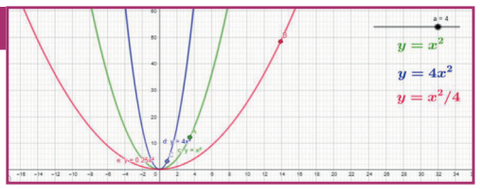
* തന്നിരിക്കുന്ന ലിങ്ക് ബ്രൗസ് ചെയ്യുക : https://ggbm.at/ucz465au

അല്ലെങ്കിൽ ക്യൂആർ കോഡ് സ്കാൻ ചെയ്യുക.

Y6QVC

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 65 14-02-2023 16:42:22

ഐ.സി.റ്റി കോർണർ – 1 (ബി)



പടി–1

ബ്രൗസർ തുറന്ന് താഴെകൊടുത്തിരിക്കുന്ന യൂആർഎൽ ലിങ്ക് ടൈപ്പ് ചെയ്യുക അല്ലെങ്കിൽ ക്യൂ ആർ കോഡ് സ്കാൻ ചെയ്യുക.

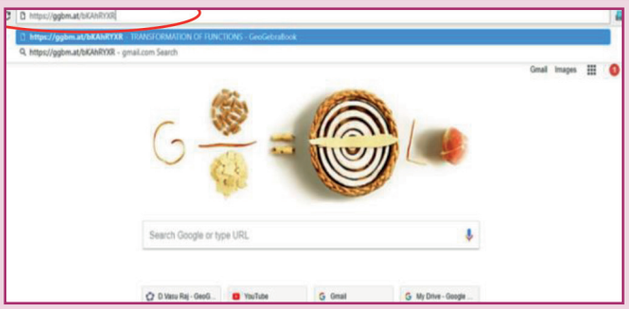
പടി–2

"TRANSFORMATION OF FUNCTIONS" എന്ന് വിളിക്കുന്ന ജിയോജിബ്ര വർക്ക് ബുക്ക് ദൃശ്യമാകും. അതിൽ നിങ്ങളുടെ പാഠവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട 10 വർക്ക് ഷീറ്റുകൾ ഉണ്ടായിരിക്കും.

പടി–3

വർക്ക് ഷീറ്റുകൾ ഓരോന്നായി തിരഞ്ഞെടുത്ത് പരിവർത്തനങ്ങൾ വിശകലനം ചെയ്യുക. 1. Translation, 2. Reflection, 3. Dilation കൂടാതെ സൈൻ ഫംഗ്ഷനുകളുടെ താരതമ്യത്തിനായി ഒരു വർക്ക് ഷീറ്റ് ഉണ്ട് നിങ്ങൾ ചെയ്യേണ്ടത് വർക്ക് ഷീറ്റിലെ സ്ലൈഡറുകൾ നീക്കി താരതമ്യം ചെയ്യുക.

പടി–1

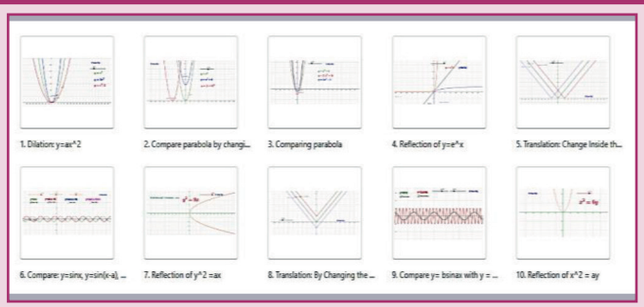


പടി–2

TRANSFORMATION OF FUNCTIONS

1. Dilation: y=ax^2
2. Compare parabola by changing x-coefficient and constant
3. Comparing parabola
4. Reflection of y=e^x
5. Translation: Change Inside the Modulus
6. Compare: y=sinx, y=sin(x-a), y=bsin(x-a), y=bsin(x-a)+c
7. Reflection of y^2 =ax
8. Translation: By Changing the constant.
9. Compare y= bsinax with y = sinx
10. Reflection of x^2 = ay

പടി–3



*തന്നിരിക്കുന്ന ലിങ്ക് ബ്രൗസ് ചെയ്യുക : https://ggbm.at/ucz465au
അല്ലെങ്കിൽ ക്യൂ ആർ കോഡ് സ്കാൻ ചെയ്യുക.

CM0UO

XI_Maths_Ch1_V-1_Malayalam.indd 66 14-02-2023 16:42:22

അദ്ധ്യായം **2**

അടിസ്ഥാന ബീജഗണിതം

ഞാൻ കാണുന്നു, എന്നാൽ വിശ്വസിക്കുന്നില്ല.

– റിച്ചാർഡ് ഡെട്രിക്കൈൻഡ്

2.1 ആമുഖം

അളവുകളെ ചിഹ്നങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് എഴുതി അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം വെളിപ്പെടുത്തുന്ന ഗണിതത്തിന്റെ ഒരു പ്രത്യേകശാഖയാണ് ബീജഗണിതം. ഈ ചിഹ്നങ്ങളെ ചരങ്ങൾ എന്ന് പറയുന്നു. ഈ ക്ലാസ്സിൽ ചരങ്ങൾ വാസ്തവിക സംഖ്യകളെ മാത്രം സൂചിപ്പിക്കുന്നു. സംഖ്യകളെപ്പോലെതന്നെ ചരങ്ങളും ഗണിത ക്രിയകൾ ചെയ്യുന്നതിലും ഉപയോഗിക്കുന്നതിലും മുഖ്യ പങ്ക് വഹിക്കുന്നു. ഒരു വ്യംഞ്ജകത്തിലെ ചരങ്ങൾക്ക് വാസ്തവിക സംഖ്യ പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ കിട്ടുന്നത് വാസ്തവിക സംഖ്യ ആയിരിക്കും. ഒരു അളവിനെയോ അല്ലെങ്കിൽ ഗണിതതത്വങ്ങളെയോ ചരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് എഴുതിയാൽ അതിൽ ചരങ്ങൾക്ക് ഒരു നിശ്ചിത സംഖ്യാമൂല്യങ്ങളെ പ്രതിസ്ഥാപിക്കാൻ സാധിക്കും. ഇത് ബീജഗണിതത്തെ ശക്തിയുള്ള ഉപാധിയായി മാറ്റുന്നു. ഇക്കാരണത്താൽ ഗണിതത്തിൽ മാത്രമല്ല മറ്റു പലശാഖകളിലും ദൈനംദിന ജീവിതത്തിലും ബീജഗണിതം വ്യാപകമായി ഉപയോഗിക്കപ്പെടുന്നു. എല്ലാ ഗണിതത്തിനും വാസ്തവികസംഖ്യകൾ അടിസ്ഥാനമാണ്. 19-ാം നൂറ്റാണ്ടിലാണ് വാസ്തവികാസംഖ്യാ സമ്പ്രദായത്തെക്കുറിച്ച് വ്യക്തമായ അറിവ് ലഭിച്ചത്. പരിമേയ സംഖ്യകളെ വിപുലീകരിക്കേണ്ടതിനുള്ള ആവശ്യകതയെ ഗണിത ചരിത്രത്തിന്റെ ആരംഭത്തിൽ തന്നെ മനസ്സിലാക്കിയിരുന്നു. പൈതഗോറസ്സ് ഗ്രൂപ്പ് $\sqrt{2}$ ഒരു പരിമേയ സംഖ്യയല്ല എന്ന് മനസ്സിലാക്കിയിരുന്നു. ക്രി.മു.ക്കും. വർഷങ്ങൾക്കു മുമ്പ് ഉണ്ടായ ശുൽഭാ അപരിമേയസംഖ്യാസമ്പ്രദായത്തെക്കുറിച്ച് സൂചിപ്പിച്ചിട്ടുണ്ട്. ആര്യഭട്ടാ (476 – 550) π യുടെ ഏകദേശമൂല്യം കണ്ടുപിടിച്ചിരുന്നു.

ഇന്ത്യൻഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞനായ ബ്രഹ്മഗുപ്ത (598-670), ഭാസ്ക്കരാചാര്യ (1114-1185) എന്നിവർ വാസ്തവിക സംഖ്യാസമ്പ്രദായം, ബീജഗണിതം എന്നിവയെക്കുറിച്ച് പഠിക്കാൻ വഹിച്ച പങ്ക് വളരെ വലുതാണ്. ധന, ഋണ മൂലങ്ങളുള്ള സാധാരണ ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന് ബ്രഹ്മ ഗുപ്ത നിർദ്ധാരണം കണ്ടുപിടിച്ചു. ഒന്നിൽ കൂടുതൽ അജ്ഞാതമൂല്യങ്ങളുള്ള ദ്വിഘാത സമീകരണങ്ങൾക്ക് ഭാസ്ക്കരാചാര്യർ ഋണ, അപരിമേയ നിർദ്ധാരണങ്ങളെ കണ്ടുപിടിച്ചു. ഏറ്റവും പ്രധാനപ്പെട്ട വാസ്തവിക സംഖ്യ 'പൂജ്യം' ഇന്ത്യാക്കാരുടെ സംഭാവനയാണ്.



റിച്ചാർഡ് ഡെട്രിക്കൈൻഡ് (1831-1916)

റെനി ഡെക്കാർടേ (1596 -1650) ബഹുപദവ്യംഞ്ജക സമവാക്യങ്ങളുടെ മൂലങ്ങളെ വ്യക്തമാക്കുമ്പോൾ സാങ്കൽപ്പിക മൂലങ്ങളെ വേർതിരിച്ച് കാണിക്കുന്നതിന് വാസ്തവം എന്ന പദത്തെ പരിചയപ്പെടുത്തി. റിച്ചാർഡ് ഡെട്രിക്കൈൻഡ് (1831-1916) വാസ്തവിക സംഖ്യകളുടെ നിർമ്മിതിയെ വളരെ വ്യക്തമായി രൂപപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട്.

XI_Maths_Ch-2_V-1_Malayalam.indd 67 14-02-2023 16:43:22

പഠനലക്ഷ്യങ്ങൾ

ഈ അദ്ധ്യായം പൂർത്തിയാക്കുമ്പോൾ വിദ്യാർത്ഥികൾ അറിയേണ്ടത്

- വാസ്തവിക സംഖ്യകളും അവയുടെ ഗുണങ്ങളും
- കേവലമൂല്യം, ബഹുപദവ്യംജ്ഞകം, ഘാതങ്ങൾ, റാഡിക്കലുകൾ, ലോഗരിതം ഈ ആശയങ്ങൾ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന ഒരു ചരത്തിൽ ഉള്ള ഫലനങ്ങൾ
- മുകളിൽ സൂചിപ്പിച്ച ഫലനങ്ങൾ ഉള്ള സമവാക്യങ്ങൾ, അസമവാക്യങ്ങൾ എങ്ങനെ പരിഹരിക്കാം?
- രണ്ടുചരങ്ങൾ ഉള്ള ലീനിയർ അസമവാക്യങ്ങളെ പരിഹരിക്കുന്നതെങ്ങനെ? അവ കാർട്ടീഷ്യൻ തലത്തിൽ ഗ്രാഫിക്കലായി പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നതെങ്ങനെ?.

2.2 വാസ്തവികസംഖ്യാ സമ്പ്രദായം

വാസ്തവികസംഖ്യകളുടെ ഉത്ഭവത്തെക്കുറിച്ച് ആദ്യം ഓർമ്മിക്കാം നിസ്സർസംഖ്യ $\mathbb{N}$-ൽ നിന്ന് ആരംഭിക്കാം.

2.2.1 പരിമേയ സംഖ്യകൾ

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ എന്നത് വസ്തുക്കളെ എണ്ണുന്നതിന് ആവശ്യമായ ഗണമാകുന്നു. ലാഭ-നഷ്ടങ്ങൾ കൈകാര്യം ചെയ്യുന്നതിന് $\mathbb{N}$-നെ പൂർണ്ണാങ്കസംഖ്യകളുടെ ഗണത്തിലേക്ക് $\mathbb{Z} = \{\cdots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$ വിപുലീകരിക്കപ്പെട്ടു. ഈ ഗണം നിസ്സർഗ്ഗസംഖ്യകൾ (ധനപൂർണ്ണസംഖ്യകൾ), പൂജ്യം, ഋണപൂർണ്ണസംഖ്യകൾ എന്നിവ ഉൾപ്പെട്ടതാണ്. $\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$ നെ ഋണമല്ലാത്ത പൂർണ്ണസംഖ്യകളുടെ ഗണം എന്നുപറയുന്നു. ഇവയെ $\mathbb{W}$ കൊണ്ട് കുറിക്കുന്നു. ഈ ഗണം നിസർഗ്ഗസംഖ്യാഗണത്തിലെ 0 എന്ന ഒരു സംഖ്യയാൽ വ്യത്യാസപ്പെടുന്നു.

ഒരു കേക്ക് അഞ്ച് സമഭാഗങ്ങളായി വിഭജിക്കുന്നുവെന്ന് സങ്കൽപ്പിക്കുക. അത് $5x = 1$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണം കാണുന്നതിന് സമമാകുന്നു. $\mathbb{Z}$ ൽ മാത്രം അതിന്റെ നിർദ്ധാരണം കാണാൻ സാധ്യമല്ല. അതിനാൽ അനുപാതങ്ങളുടെ ഗണമായ $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} / m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$ ഇതിലേക്ക് $\mathbb{Z}$ നെ വിപുലീകരിയ്ക്കാം. ഓരോ $\mathbb{Q}$ പരിമേയ സംഖ്യയാണ്.

$-5, \frac{-7}{3}, 0, \frac{22}{7}, 7, 12$ എന്നിവ പരിമേയ സംഖ്യകൾക്കു ചില ഉദാഹരണമാണ്.

പരിമേയസംഖ്യകൾ എന്നത് അവസാനിക്കുന്ന ദശമസംഖ്യകൾ അല്ലെങ്കിൽ അവസാനിക്കാത്ത ആവർത്തന ദശമ സംഖ്യകളെ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന സംഖ്യകളുടെ ഗണം എന്നത് മുൻക്ലാസ്സിൽ പഠിച്ചിട്ടുള്ളതാണ്. -5.0, $-2.333\cdots$, $\frac{25}{99} = 0.252525\cdots$, $\frac{2}{3} = 0.6666\cdots$, $7.14527836231231231\cdots$ എന്നിവ പരിമേയ സംഖ്യകൾക്കുള്ള ഉദാഹരണങ്ങളാണ്.

2.2.2 സംഖ്യാരേഖ

ഒരു സംഖ്യാരേഖയെ ഓർമ്മിക്കാം. ഇത് 0- യെ കേന്ദ്രമാക്കിക്കൊണ്ട്, അതിന്റെ വലതുവശത്ത് 1 കുറിയ്ക്കപ്പെട്ട തിരശ്ചീന രേഖയാകുന്നു. 0-യ്ക്കും 1-നും ഇടയിലുള്ള ദൂരം ഒരു യൂണിറ്റ് എന്ന് നിർവചിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഇപ്പോൾ 1-ന് വലതുവശം ഒരു യൂണിറ്റ് ദൂരത്തിൽ 2 നെ കുറിയ്ക്കാം. ഇതേവിധത്തിൽ x എന്ന

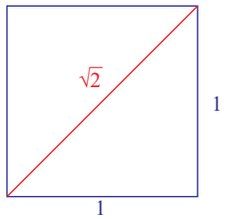
XI_Maths_Ch-2_V-1_Malayalam.indd 68 14-02-2023 16:43:23

ധനപരിമേയ സംഖ്യയെ 0-യിൽ നിന്ന് xയൂണിറ്റ് ദൂരത്തിൽ വലതുവശത്ത് ആ രേഖയിൽ കുറിയ്ക്കാം. ഈ വിധത്തിൽ ഋണപരിമേയസംഖ്യ $-r, r>0$ യെ 0-യുടെ ഇടതുവശം r യൂണിറ്റ് ദൂരത്തിൽ കുറിയ്ക്കാം. കൂടാതെ $x, y \in \mathbb{Q}$, $x<y$ എങ്കിൽ y യുടെ ഇടതുവശത്തിൽ x ഉണ്ടായിരിക്കും. കൂടാതെ $x<\frac{x+y}{2}<y$ അതുകൊണ്ട് വ്യത്യസ്ത പരിമേയ സംഖ്യകൾക്കിടയിൽ മറ്റൊരു പരിമേയസംഖ്യ ഉണ്ടായിരിക്കും.

ചോദ്യം:

സംഖ്യാരേഖ മുഴുവൻ നമ്മൾ പരിമേയ സംഖ്യകളാൽ നിറച്ചിരിക്കുകയാണോ ?

ഈ ചോദ്യത്തിനുള്ള ഉത്തരം ഇല്ല എന്നതാണ്. താഴെക്കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഉദാഹരണം കൊണ്ട് തെളിയിക്കാം. നീളം 1 യൂണിറ്റ് ഉള്ള ഒരു ചതുരം പരിഗണിക്കുക. പൈതഗോറസ്സിന്റെ സിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച് ചതുരത്തിന്റെ വികർണ്ണത്തിന്റെ നീളം $\sqrt{2}$ ആകുന്നു.



ചിത്രം 2.1

2.2.3 അപരിമേയ സംഖ്യകൾ

സിദ്ധാന്തം 2.1 $\sqrt{2}$ ഒരു പരിമേയ സംഖ്യയല്ല.

തെളിവ് : $\sqrt{2}$ ഒരു പരിമേയ സംഖ്യയെന്ന് സങ്കൽപ്പിക്കുക. $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$, ഇതിൽ m, n , എന്നിവ 1-നെക്കാൾ വലിയ പൊതുഘടകമില്ലാത്ത നിസ്സർഗ്ഗസംഖ്യകൾ ആകുന്നു. ഇപ്പോൾ, $m^2=2n^2$ ആയതുകൊണ്ട് m^2 എന്നത് ഒരു ഇരട്ടസംഖ്യയാകുന്നു. m ഉം ഒരു ഇരട്ടസംഖ്യയാകുന്നു. $m=2k$ എങ്കിൽ, $2n^2=4k^2$ ആയതുകൊണ്ട് $n^2=2k^2$ ആകുന്നു. അതുകൊണ്ട് n ഉം ഒരു ഇരട്ട സംഖ്യയാകുന്നു. ഈ വിധത്തിൽ m ഉം n ഉം പൊതുഘടകം 2 ഉള്ള ഇരട്ടസംഖ്യയായി മാറുന്നു. ഇതോടെ നമ്മുടെ അനുമാനം തെറ്റെന്ന് തെളിഞ്ഞും അതുകൊണ്ട് $\sqrt{2}$ എന്നത് അപരിമേയ സംഖ്യയാണ്.

പരാമർശിക്കുക :

(i) മുകളിലുള്ള തെളിവിൽനിന്നും നാം മനസ്സിലാക്കേണ്ടത് നമുക്ക് എന്താണോ തെളിയിക്കേണ്ടത് അതിന് വിപരീതം അനുമാനിച്ചിട്ട് ആ അനുമാനം തെറ്റ് എന്ന് തെളിയിക്കുന്നു. ഇതിനെ വൈരുദ്ധ്യ രീതിയിലെ തെളിയിക്കൽ എന്നുപറയുന്നു.

(ii) സംഖ്യാരേഖയിൽ പരിമേയ സംഖ്യകളെ കുറിയ്ക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളല്ലാതെ വേറെ ബിന്ദുക്കളും കാണുന്നു.

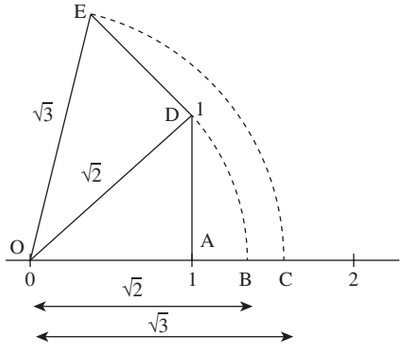
(iii) സംഖ്യാരേഖയിൽ പരിമേയ സംഖ്യകളാൽ കുറിയ്ക്കപ്പെടാത്ത ബിന്ദുക്കളെ അപരിമേയ സംഖ്യകൾ $\mathbb{Q}'$ എന്നു വിളിക്കുന്നു (ചിത്രം 1.2 സംഖ്യാരേഖയെ ശ്രദ്ധിക്കുക)

ഓരോ വാസ്തവിക സംഖ്യയും ഒരു പരിമേയ സംഖ്യ അല്ലെങ്കിൽ അപരിമേയസംഖ്യയായിരിക്കും. അല്ലാതെ രണ്ടും കൂടി ആകുക സാധ്യമല്ല. അതുകൊണ്ട് $R=Q\cup Q', Q\cap Q'=\phi$.

അവസാനിക്കുന്ന ദശാംശ സംഖ്യകളും അവസാനിക്കാത്ത ആവർത്തന ദശാംശ സംഖ്യകളും പരിമേയ സംഖ്യകളാണ്. ദശാംശരീതിയിൽ എഴുതുന്ന അപരിമേയ സംഖ്യകൾ അവസാനിക്കാത്ത ആവർത്തിക്കാത്ത ദശാംശസംഖ്യകളായിരിക്കും. $\mathbb{R}$ എന്ന വാസ്തവിക സംഖ്യാഗണത്തിലുള്ള സംഖ്യകളെ സംഖ്യാരേഖയിലുള്ള ബിന്ദുക്കളായി കണക്കാക്കാം. കൂടാതെ $x<y$ എങ്കിൽ y–യുടെ ഇടതുവശത്ത് x സ്ഥിതി ചെയ്യും

ഒരു സംഖ്യാരേഖയിൽ 2 കൂടാതെ 3–ന്റെ വർഗ്ഗമൂലങ്ങളെ കുറിയ്ക്കുന്നത് ചിത്രം 2.2–-ൽ കാണാം.

$\mathbb{N}\subset\mathbb{W}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$ എന്നറിയാം.



ചിത്രം 2.2

XI_Maths_Ch-2_V-1_Malayalam.indd 69 14-02-2023 16:43:24

അപരിമെയ സംഖ്യകളെ ദൈനംദിന ജീവിതത്തിൽ ചില സ്ഥലങ്ങളിൽ കാണാം. 2000 വർഷങ്ങൾക്ക് മുമ്പ് ഈജിപ്റ്റിലെയും കിഴക്കൻ പ്രദേശങ്ങളിലേയും ആൾക്കാർ ഏതൊരു വൃത്തത്തിന്റെയും ചുറ്റളവിന്റെയും വ്യാസത്തിന്റെയും അംശബന്ധം തുല്യമാണെന്ന് മനസ്സിലാക്കിയിരുന്നു. ഈ സ്ഥിരാങ്കം ഒരു അപരിമേയ സംഖ്യയാണെന്ന് 1967 ൽ ജോഹാൻഹെയ്ൻ റിച്ച് ലംബർട്ട് തെളിയിച്ചു. π ന്റെ മൂല്യം 3.141592654 (9 ദശാംശങ്ങൾ). വൃത്തത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം എന്നിവ കണ്ടു പിടിക്കുമ്പോൾ ഉപയോഗിക്കുന്ന $\frac{22}{7}$, 3.14 എന്നിവയും π യും ഏകദേശ മൂല്യങ്ങളാണ്.

കുറിപ്പ് : ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെയും അതിന്റെ വ്യാസത്തിന്റെയും അംശബന്ധമായ π ഒരു അപരിമേയ സംഖ്യയാകുന്നു.

ഗണിതത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനമായ വാസ്തവിക സംഖ്യാ സമ്പ്രദായത്തിന്റെ ഗുണങ്ങളെ ഓർമ്മിക്കാം.

2.2.4 വാസ്തവിക സംഖ്യകളുടെ ഗുണങ്ങൾ

(i) $a, b \in \mathbb{R}$ എങ്കിൽ $a + b \in \mathbb{R}$ കൂടാതെ $ab \in \mathbb{R}$ (രണ്ടു വാസ്തവിക സംഖ്യകളുടെ തുക ഒരു വാസ്തവിക സംഖ്യ. കൂടാതെ രണ്ടു വാസ്തവിക സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം ഒരു വാസ്തവിക സംഖ്യയാകുന്നു).

(ii) $a, b, c \in \mathbb{R}$ എങ്കിൽ $(a + b) + c = a + (b + c)$ കൂടാതെ $a(bc) = (ab)c$ (പരിമിധമായ വാസ്തവികസംഖ്യകളെ കൂട്ടുമ്പോഴും ഗുണിക്കുമ്പോഴും ക്രമം മാറ്റി കൂട്ടുകയോ ഗുണിക്കുകയോ ചെയ്യാം).

(iii) $a \in \mathbb{R}$ എങ്കിൽ, $a + 0 = a$ കൂടാതെ $a(1) = a$.

(iv) $a \in \mathbb{R}$ എങ്കിൽ, $a + (-a) = 0$ കൂടാതെ $b \in \mathbb{R} - \{0\}$, $b\left(\frac{1}{b}\right) = 1$.

(v) $a, b \in \mathbb{R}$ എങ്കിൽ $a + b = b + a$ കൂടാതെ $ab = ba$.

(vi) $a, b, c \in \mathbb{R}$ എങ്കിൽ, $a(b + c) = ab + ac$.

(vii) $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b \iff b - a > 0$.

(viii) $a \in \mathbb{R}$ എങ്കിൽ, $a^2 \geq 0$.

(ix) $a, b \in \mathbb{R}$ എങ്കിൽ താഴെ കാണുന്നവയിൽ ഒന്നുമാത്രമാണ് നിലനിൽക്കുന്നത് അതായത് $a = b$ അല്ലെങ്കിൽ $a < b$ അല്ലെങ്കിൽ $a > b$.

(x) $a, b \in \mathbb{R}$ കൂടാതെ $a < b$ എങ്കിൽ, $a + c < b + c$ ഇവിടെ, $c \in \mathbb{R}$.

(xi) $a, b \in \mathbb{R}$ കൂടാതെ $a < b$ എങ്കിൽ, $ax < bx$ ഇവിടെ, $x > 0$.

(xii) $a, b \in \mathbb{R}$ കൂടാതെ $a < b$ എങ്കിൽ, $ay > by$ ഇവിടെ, $y < 0$.

അഭ്യാസം 2.1

1. $\left\{\sqrt{7}, \frac{-1}{4}, 0, 3.14, 4, \frac{22}{7}\right\}$ ഓരോ സംഖ്യയേയും
$\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ അല്ലെങ്കിൽ $\mathbb{Z}$ എന്ന രീതിക്ക് തരം തിരിച്ചെഴുതുക.

XI_Maths_Ch-2_V-1_Malayalam.indd 70 14-02-2023 16:43:27

2. $\sqrt{3}$ അപരിമേയ സംഖ്യയാണെന്ന് തെളിയിക്കുക. (കുറിപ്പ് $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ന് പ്രയോജനപ്പെടുത്തിയ രീതി ഉപയോഗിക്കുക)

3. വ്യത്യാസം പരിമേയമായിട്ടുള്ള രണ്ട് വ്യത്യസ്ത അപരിമേയ സംഖ്യകൾ ഉണ്ടാകാനുള്ള സാധ്യതയുണ്ടോ? വിശകലനം ചെയ്യുക.

4. രണ്ടു അപരിമേയ സംഖ്യകളുടെ തുക പരിമേയ സംഖ്യ ആയിരിക്കത്തക്കവിധം രണ്ടു അപരിമേയ സംഖ്യകളെ കാണാൻ സാധിക്കുമോ??

5. $\frac{1}{2^{1000}}$-നെക്കാൾ ചെറിയ ധനസംഖ്യ കാണുക. വിശദീകരിക്കുക.

2.3 കേവലമൂല്യം (മോഡ് മൂല്യം)

2.3.1 നിർവ്വചനങ്ങളും സവിശേഷതകളും

$\mathbb{R}$-ൽ ഉള്ള ഓരോ അംഗവും സംഖ്യാരേഖയിലുള്ള ഓരോ ബിന്ദുക്കളോടും ക്രമജോടി ക്രമത്തിൽ ഒന്നിനോടൊന്ന് ബന്ധമുള്ളതായി നാം കണ്ടു. $x \in \mathbb{R}$ എങ്കിൽ x , $-x$ എന്നിവ 0-യിൽ നിന്ന് സമദൂരത്തിലാണ്. $a \in \mathbb{R}$ നും 0-യ്ക്കും ഇടയിലുള്ള ദൂരം a-യുടെ കേവലമൂല്യം എന്നു പറയുന്നു. കൂടാതെ ഇതിനെ $|a|$ എന്നു കുറിയ്ക്കാം.

$$\text{ഏത് } x \in \mathbb{R} \qquad |x| = \begin{cases} -x & x < 0 \quad \text{എങ്കിൽ} \\ x & x \geq 0 \quad \text{എങ്കിൽ എന്നെഴുതാം} \end{cases}$$

$|\cdot|$ എന്നത് $\mathbb{R}$-ൽ നിന്ന് $[0, \infty)$-ലേക്ക് ഫലനമായി നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നു. ഇതിന്റെ കേവല മൂല്യ ഫലനം ഗ്രാഫ് ആദ്യ അദ്ധ്യായത്തിൽ കാണാം.

കുറിപ്പ് : **(i)** എല്ലാ $x \in \mathbb{R}$ നും $|x| = |-x|$. കൂടാതെ $|x| = |y|$ എങ്കിൽ $x = y$ അല്ലെങ്കിൽ $x = -y$,

(ii) $|x - a| = r$ എങ്കിൽ $r \geq 0$ കൂടാതെ $x - a = r$ അല്ലെങ്കിൽ, $x - a = -r$.

2.3.2 കേവലമൂല്യങ്ങൾ ഉള്ള സമവാക്യങ്ങൾ

ഒരു സമവാക്യം അല്ലെങ്കിൽ അസമവാക്യത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണം a എന്ന വാസ്തവികസംഖ്യയെങ്കിൽ ആ പ്രസ്താവനയിലെ ചരങ്ങൾക്കുപകരം a യെ പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ ആ പ്രസ്താവന ശരിയായിരിക്കും.

അടുത്തതായി കേവലമൂല്യങ്ങൾ അടങ്ങിയ സമവാക്യങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണം കാണാം.

ഉദാഹരണം 2.1 നിർദ്ധാരണം കാണുക $|2x - 17| = 3$.

നിർദ്ധാരണം:

$$|2x - 17| = 3 \text{ എങ്കിൽ } 2x - 17 = \pm 3$$

$$\text{അതായത് } x = 10 \text{ അല്ലെങ്കിൽ } x = 7$$

XI_Maths_Ch-2_V-1_Malayalam.indd 71 14-02-2023 16:43:28

ഉദാഹരണം 2.2 നിർദ്ധാരണം കാണുക $3|x-2|+7=19$.

നിർദ്ധാരണം:

$$3|x-2|+7 = 19 \text{ എങ്കിൽ}$$

$$|x-2| = \frac{19-7}{3} = 4$$

അതായത്, $x-2 = 4$ അല്ലെങ്കിൽ $x-2=-4$

നിർദ്ധാരണങ്ങൾ $x = -2$ ഉം $x=6$ ഉം

ഉദാഹരണം 2.3 നിർദ്ധാരണം കാണുക: $|2x-3|=|x-5|$.

നിർദ്ധാരണം :

$|u|=|v|$ അല്ലെങ്കിൽ $u=v$ $\qquad$ $u=-v$.

$|2x-3|=|x-5| \Rightarrow 2x-3=x-5$ അല്ലെങ്കിൽ $2x-3=5-x$ രണ്ടു സമീകരണവും നിർദ്ധാരണം ചെയ്താൽ $x=-2, x=\frac{8}{3}$.

2.3.3 കേവലമൂല്യ തത്വങ്ങൾ

(i) $x,y\in\mathbb{R}, |y+x|=|x-y|$ ഏങ്കിൽ $xy=0$

(ii) ഏതൊരു $x,y\in\mathbb{R}$,നും $|xy|=|x|\,|y|$

(iii) $x,y\in\mathbb{R}$, $y\neq 0$ ഏങ്കിൽ $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$

(iv) $x,y\in\mathbb{R}$, ഏങ്കിൽ $|x+y| \leq |x|+|y|$.

2.3.4 കേവലമൂല്യങ്ങൾ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന അസമതവങ്ങൾ

ഇവിടെ കേവലമൂല്യങ്ങൾ ഉള്ള അസമതവത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണം കാണാം. ആദ്യം ലളിത അസമതവങ്ങളായ (i) $|x|<r$ കൂടാതെ (ii) $|x|>r$ എന്നിവയെ കാണാം.

(i) $|x|<r$ എങ്കിൽ $-r<x<r$ ഇവിടെ $r>0$, $|x|\geq 0$ x–ന്റെ അടയാളം ആശ്രയിച്ച് രണ്ട് സാധ്യതകളാണ് ഉള്ളത്.

നില 1

$x\geq 0$, എങ്കിൽ $|x|=x$, $|x|<r \Rightarrow x<r$

നില 2

$x<0$, എങ്കിൽ $|x|=-x$, $|x|<r \Rightarrow -x<r$

അതായത്, $x>-r$

$|x|<r$-ന് ആവശ്യമായതും തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്നതുമായ നിബന്ധന $-r<x<r$ അല്ലെങ്കിൽ $x\in(-r,r)$ ആകുന്നു.

XI_Maths_Ch-2_V-1_Malayalam.indd 72 14-02-2023 16:43:31

(ii) $|x| > r$ എന്നതിന് ആവശ്യമായതും തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്നതുമായ നിബന്ധന $x < -r$ അല്ലെങ്കിൽ$x > r$ എന്ന് തെളിയിക്കാം.

$|x| > r$ പരിഗണിക്കുക. $r < 0$ എങ്കിൽ ഓരോ $x \in \mathbb{R}$, ഈ അസമത്വത്തെ പൂർത്തീകരിക്കുന്നു.

$r \geq 0$, ആയിരുന്നാൽ രണ്ടു സാധ്യതകളാണ് പരിഗണിക്കാനുള്ളത്.

നില 1

$x \geq 0$ എങ്കിൽ $|x| = x > r$

നില 2

$x < 0$, എങ്കിൽ $|x| = -x > r$ അതായത്, $x < -r$

അതുകൊണ്ട് $|x| > r \Leftrightarrow x < -r$ അല്ലെങ്കിൽ $x > r$ അതായത് $x \in (-\infty, -r) \cup (r, \infty)$.

പരാമർശം :

(i) ഏതെങ്കിലും $a \in \mathbb{R}$, $|x - a| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x - a \leq r \Leftrightarrow x \in [a - r,\ a + r]$

(ii) ഏതെങ്കിലും $a \in \mathbb{R}$, $|x - a| \geq r$ ന് തുല്യമായിട്ടുള്ള $x - a \leq -r$ അല്ലെങ്കിൽ $x - a \geq r \Leftrightarrow x \in (-\infty,\ a - r] \cup [a + r,\ \infty)$.

ഉദാഹരണം 2.4 നിർദ്ധാരണം കാണുക: $|x - 9| < 2$

നിർദ്ധാരണം :

$|x - 9| < 2 \Rightarrow -2 < x - 9 < 2$ എങ്കിൽ, $7 < x < 11$.

ഉദാഹരണം 2.5 നിർദ്ധാരണം കാണുക : $\left|\frac{2}{x-4}\right| > 1,\ x \neq 4$.

നിർദ്ധാരണം :

തന്നിട്ടുള്ള അസമവാക്യത്തിൽ, നമുക്ക് കിട്ടുന്നത് $2 > |x - 4|$

അതായത്, $-2 < x - 4 < 2$, $x \neq 4$.

അസമവാക്യത്തിൽ മുഴുവനുമായി 4 കൂട്ടിയാൽ നമുക്ക് കിട്ടുന്നത്, $2 < x < 6$ കൂടാതെ $x \neq 4$. അതുകൊണ്ട് നിർദ്ധാരണഗണം, $(2,\ 4) \cup (4,\ 6)$.

അഭ്യാസം 2.2

1. x-ന്റെ നിർദ്ധാരം കാണുക.

(i) $|3 - x| < 7$ (ii) $|4x - 5| \geq -2$

XI_Maths_Ch-2_V-1_Malayalam.indd 73 14-02-2023 16:43:33

(iii) $\left|3-\frac{3}{4}x\right| \leq \frac{1}{4}$ (iv) $|x|-10<-3$

2. നിർദ്ധാരണം കാണുക $\frac{1}{|2x-1|}<6$-നിർദ്ധാരണം ഇടവേള ചിഹ്നത്തിൽ എഴുതുക.

3. നിർദ്ധാരണം കാണുക $-3|x|+5 \leq -2$–നിർദ്ധാരണം സംഖ്യാരേഖയിൽ കുറിയ്ക്കുക.

4. നിർദ്ധാരണം കാണുക $2|x+1|-6 \leq 7$–നിർദ്ധാരണം സംഖ്യാരേഖയിൽ കുറിയ്ക്കുക.

5. നിർദ്ധാരണം കാണുക : $\frac{1}{5}|10x-2|<1$.

6. നിർദ്ധാരണം കാണുക : $|5x-12|<-2$.

2.4 രേഖീയ അസമവാക്യം

$a, b \in \mathbb{R}$ എന്നീ സ്ഥിരാങ്കങ്ങളുള്ള $f(x)=ax+b$ എന്ന ഫലനം രേഖീയ ഫലനം എന്നത് ഓർമ്മിക്കാം. ഇതിന്റെ ഗ്രാഫ് ഒരു നേർരേഖ ആയതുകൊണ്ട് ഇതിനെ രേഖീയ ഫലനം എന്നു പറയുന്നു. ഇവിടെ a എന്നത് രേഖയുടെ ചെരിവ്(ചായ്വ്) ഉം b എന്നത് y അന്തഃഖണ്ഡവും ആകുന്നു. $a \neq 0$ എങ്കിൽ $f(x)=ax+b=0$ കൊടുത്ത് നിർദ്ധാരണം കണ്ടാൽ x-അന്തഃഖണ്ഡം $\frac{-b}{a}$ എന്നു കിട്ടുന്നു.

ചില അവസരങ്ങളിൽ രേഖീയ അസമവാക്യങ്ങളെ കണക്കിലെടുക്കേണ്ട ആവശ്യം വരുന്നു. ഉദാഹരണത്തിന് ഗോപുരത്തിന്റെ ഉയരം 50 അടിക്കു മുകളിൽ ഇല്ല എന്നു തെളിയിക്കണം. x എന്നത് "അടി"യിൽ കുറിയ്ക്കപ്പെട്ട ഗോപുരത്തിന്റെ ഉയരം എങ്കിൽ മേലെ ഉള്ള നിബന്ധന എഴുതുന്നത് $x \leq 50$.

ഉദാഹരണം 2.6 പ്രതിമാസ വൈദ്യുതി ഉപയോഗ ചാർജ്ജിന്റെ ഒരു ഭാഗം അടിസ്ഥാനവിലയും മറ്റേ ഭാഗം നാം ഉപയോഗിക്കുന്ന വൈദ്യുതിയുടെ യൂണിറ്റ് അനുസരിച്ച് മാറുന്നു എന്ന് കണക്കാക്കുക. വൈദ്യുതിയുടെ അടിസ്ഥാന വില ₹ 110 ഉം ഉപയോഗിക്കുന്ന വൈദ്യുതിയുടെ വില യൂണിറ്റ് ഒന്നിന് ₹4 ഈടാക്കുന്ന ഒരാൾ അയാളുടെ വൈദ്യുതി ചാർജ് ₹250-ന് താഴെയായിരിക്കണം എന്നാഗ്രഹിച്ചാൽ അയാളുടെ വൈദ്യുത ഉപയോഗം എത്ര യൂണിറ്റായിരിക്കും.

നിർദ്ധാരണം :

x എന്നത് ഉപയോഗപ്പെടുത്തിയ വൈദ്യുതിയുടെ അളവ് എന്നിരിക്കട്ടെ. ഇവിടെ $x \geq 0$ ഇപ്പോൾ വൈദ്യുതി ചാർജ് $110+4x$ ചാർജ്ജ് ₹ 250 താഴെ ആകണം അതുകൊണ്ട് ₹ $110+4x<$ ₹250 എന്ന അസമവാക്യത്തിന്റെ രീതിക്കായിരിക്കണം. അതായത് $4x<140$ എങ്കിൽ $0 \leq x < 35$. ഒരാൾ തന്റെ വൈദ്യുതിചാർജ് ₹ 250 ന് താഴെ ആയിരിക്കാൻ വൈദ്യുതി ഉപയോഗം 35 യൂണിറ്റിന് താഴെ ആയിരിക്കണം.

ഉദാഹരണം 2.7 നിർദ്ധാരണം കാണുക : $3x-5 \leq x+1$

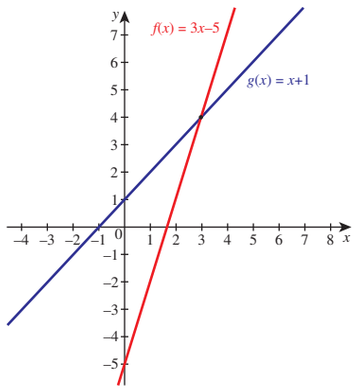
നിർദ്ധാരണം :

$3x-5 \leq x+1$ എന്നത് $2x \leq 6$ ആകുന്നു.

എങ്കിൽ, $x \leq 3$ അതായത് നിർദ്ധാരണം $(-\infty, 3]$ ആകുന്നു.

XI_Maths_Ch-2_V-1_Malayalam.indd 74 14-02-2023 16:43:35

കുറിപ്പ്: മുകളിലുള്ള അസമവാക്യങ്ങളെ നമുക്ക് ഗ്രാഫ് മുഖേന നിർദ്ധാരണം ചെയ്യാൻ സാധിക്കുന്നു. അതിന്, $f(x) = 3x - 5$, $g(x) = x + 1$ എന്നീ ഗ്രാഫുകൾ കണക്കിലെടുക്കാം (ചിത്രം 2.3 നോക്കുക) ഗ്രാഫ് g യ്ക്ക് പുറകിലായി വരുന്ന ഗ്രാഫ് f ന്റെ എല്ലാ x മൂല്യങ്ങളും കണ്ടുപിടിയ്ക്കാം



ചിത്രം 2.3

ഉദാഹരണം 2.8 താഴെ കാണുന്ന അസമവാക്യങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണം കാണുക:
$3x - 9 \geq 0$, $4x - 10 \leq 6$

നിർദ്ധാരണം :

$3x - 9 \geq 0 \Rightarrow 3x \geq 9$ ഇരുവശവും $\frac{1}{3}$ കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ $x \geq 3$.

അതേപോലെ, $4x - 10 \leq 6 \Rightarrow 4x \leq 16$ അതായത്, $x \leq 4$. $3x - 9 \geq 0$, $4x - 10 \leq 6$ എന്നിവയുടെ നിർദ്ധാരണം $[3, \infty)$, $(-\infty, 4]$-ഇവയുടെ പ്രതിഛേദഗണമാണ്. നിർദ്ധാരണം $[3, 4]$.

ഉദാഹരണം 2.9 ഒരു പെൺകുട്ടി 446 പേജുകളുള്ള ഒരു പുസ്തകം വായിക്കുന്നു. അവൾ ഇതിനകം 271 പേജുകൾ വായിച്ചു കഴിഞ്ഞു. ഒരാഴ്ചയ്ക്കുള്ളിൽ ഈ പുസ്തകം വായിച്ചു തീർക്കണമെങ്കിൽ ദിവസവും കുറഞ്ഞപക്ഷം എത്ര പേജുകൾ വായിക്കേണ്ടിവരും?

നിർദ്ധാരണം :

ദിവസവും വായിച്ചുതീർക്കേണ്ട പേജുകളുടെ എണ്ണം x എന്നെടുക്കാം. x പൂർത്തിയാക്കുന്ന അസമവാക്യം $7x + 271 \geq 446$ അതിൽ നിന്ന് $x \geq 25$ എന്ന് കിട്ടുന്നു. അതുകൊണ്ട് ആ പുസ്തകം ഒരാഴ്ചയ്ക്കുള്ളിൽ വായിച്ചു തീർക്കതാൻ ദിവസവും കുറഞ്ഞത് 25 പേജുകൾ വായിക്കേണ്ടതാണ്.

മേലെ ഉള്ള ഉദാഹരണങ്ങളിൽ നിന്ന് ഓരോ അസമവാക്യത്തിനും ഒന്നിൽ കൂടുതൽ നിർദ്ധാരണം കിട്ടുന്നു. സാധാരണയായി അസമവാക്യങ്ങൾക്കു നിർദ്ധാരണമായി ഒരു പരിസരം കിട്ടുന്നു.

അഭ്യാസം 2.3

1. താഴെകാണുന്ന അസമവാക്യങ്ങളെ ഇടവേള രീതിയിൽ എഴുതുക.

   (i) $x \geq -1$ കൂടാതെ $x < 4$ (ii) $x \leq 5$ കൂടാതെ $x \geq -3$

   (iii) $x < -1$ അല്ലെങ്കിൽ $x < 3$ (iv) $-2x > 0$ അല്ലെങ്കിൽ $3x - 4 < 11$

2. $23x < 100$-ന്റെ നിർദ്ധാരണം (i) $x \in \mathbb{N}$ (ii) $x \in \mathbb{Z}$ -ന് കാണുക.

XI_Maths_Ch-2_V-1_Malayalam.indd 75 14-02-2023 16:43:37

3. $-2x \geq 9$–ന്റെ നിർദ്ധാരണം (i) $x \in \mathbb{R}$ (ii) $x \in \mathbb{Z}$ (iii) $x \in \mathbb{N}$–കാണുക.

4. നിർദ്ധാരണം കാണുക (i) $\frac{3(x-2)}{5} \leq \frac{5(2-x)}{3}$ (ii) $\frac{5-x}{3} < \frac{x}{2} - 4$.

5. ഓരോ വിഷയത്തിനും പരമാവധി 100 മാർക്ക് വീതമുള്ളതിൽ 5 വിഷയങ്ങളുടെ മാർക്കുകളുടെ ശരാശരി 90 അല്ലെങ്കിൽ അതിനുമുകളിൽ അയാൽ ഗ്രേഡ് A ആകുന്നു. ഒരാൾ 4 വിഷയങ്ങളിൽ നേടിയ മാർക്കുകൾ 84, 87, 95, 91 എങ്കിൽ 5-ാമത്തെ വിഷയത്തിന് കുറഞ്ഞപക്ഷം എത്ര മാർക്ക് നേടിയാൽ ഗ്രേഡ് A കിട്ടും?

6. ഒരാൾ 12% അമ്ലം ചേർത്ത 600 ലിറ്റർ ലായനി വെച്ചിട്ടുണ്ട്. അതിന്റെകൂടെ ഇനി എത്ര ലിറ്റർ 30% അമ്ലലായനി ചേർത്താൽ 15% ത്തിനും 18% ത്തിനും ഇടയ്ക്കുള്ള അമ്ല ലായനി കിട്ടും?

7. 10 നെക്കാൾ വലിയ അടുത്തടുത്ത രണ്ടു ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ തുക 40-നെക്കാൾ കുറവായിരിക്കണമെങ്കിൽ ആ സംഖ്യകളുടെ എല്ലാ ജോഡികളും കാണുക.

8. ഭൂമിയിൽ നിന്ന് ഒരു മോഡൽ റോക്കറ്റ് വിക്ഷേപിക്കുന്നു. t സെക്കൻഡിനുശേഷം തറയിൽ നിന്ന് അതിന്റെ ഉയരം h ആയാൽ $h(t) = -5t^2 + 100t,\ 0 \leq t \leq 20$ എന്ന് കൊടുത്തിരുന്നാൽ റോക്കറ്റ് 495 അടി ഉയരത്തിൽ എത്താൻ എത്ര സമയമെടുക്കും?

9. ഒരു ജലകുഴൽ ജോലിക്ക് താഴെപറയുന്ന പദ്ധതിപ്രകാരം വേതനം നല്കുന്നു. ആദ്യ പദ്ധതിയിൽ ₹500 ഉം കൂടെ ഓരോ മണിക്കൂറിന് ₹70-ഉം കണക്കാക്കുന്നു. രണ്ടാമത്തെ പദ്ധതിയിൽ ഓരോ മണിക്കൂർ നേരത്തിലും ₹120 ഉം കൊടുക്കുന്നു. ഒരാൾ x-മണിക്കൂർ ജോലി ചെയ്യുന്നുവെങ്കിൽ x-ന്റെ ഏതു മൂല്യത്തിനാണ് ആദ്യപദ്ധതി പ്രകാരം അയാൾക്ക് മികച്ച വേതനം ലഭിച്ചത്?

10. A യും B യും ഒരേ ജോലിയാണ് ചെയ്യുന്നത്. എങ്കിലും അവരുടെ മാസശമ്പളം തമ്മിൽ ₹6000 രൂപയുടെ വ്യത്യാസം വരുന്നു. B യുടെ ശമ്പളം ₹27,000 എങ്കിൽ A യുടെ മാസ ശമ്പളത്തിന്റെ സാധ്യതകൾ കാണുക?

2.5 ദ്വിഘാത ഫലനങ്ങൾ

$z \in \mathbb{R}$ കൂടാതെ $n \in \mathbb{N}$-ന് $z^n = z \cdot z \cdot z \cdots z$ (n-തവണ) എന്നത് മുൻ ക്ലാസ്സുകളിൽ പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്.

$P(x) = ax^2 + bx + c$, (ഇവിടെ, $a, b, c \in \mathbb{R}$) സ്ഥിരാങ്കങ്ങൾ $a \neq 0$) എന്ന രീതിയിലുള്ള ഫലനം ദ്വിഘാതഫലനം എന്നു വിളിക്കുന്നു. $t \in \mathbb{R}$-ന്, $P(t) = 0$ എങ്കിൽ, t എന്നത് $P(x)$–ന്റെ ഒരു പൂജ്യമാകുന്നു.

2.5.1 ദ്വിഘാതസൂത്രം

സാധാരണയായി ദ്വിഘാതഫലനം $P(x) = ax^2 + bx + c$-ഇതിനെ $a(x-k)^2 + d$ എന്ന് എഴുതാൻ സാധിക്കുമോ? സാധിക്കും. ഇതിനെ പൂർണ്ണവർഗ്ഗമാക്കൽ രീതിയിൽ താഴെ തന്ന രീതിയിൽ എഴുതാം.

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

XI_Maths_Ch-2_V-1_Malayalam.indd 76 14-02-2023 16:43:38

$$= a\left(x^2 + 2x\frac{b}{2a} + \frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left(x^2 + 2x\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\frac{b^2}{4a^2} + c$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - b\frac{b}{2a} + c\right)$$

അതുകൊണ്ട്, $P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + P\left(\frac{-b}{2a}\right)$ ..... (1)

ഇപ്പോൾ, $P(x) = 0$ എന്ന് എടുക്കുമ്പോൾ നിർവചനം $P(x)$–ന്റെ x അന്തഃഖണ്ഡം കിട്ടുന്നു.

$P(x) = 0$ എങ്കിൽ, (1) -ൽ നിന്ന് കിട്ടുന്നത്, $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + P\left(\frac{-b}{2a}\right) = 0$.

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -P\left(\frac{-b}{2a}\right)$$

$$= -\left(\frac{-b^2 + 4ac}{4a}\right)$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

എങ്കിൽ, $x = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a}$ അല്ലെങ്കിൽ $x = \frac{-\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a}$

എങ്കിൽ, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

ഇതിനെ ദ്വിഘാത സൂത്രം എന്നു പറയുന്നു.

കുറിപ്പ്

(i) $u \geq 0$-യ്ക്ക് മാത്രം $\sqrt{u}$ ഒരു വാസ്തവികസംഖ്യ എന്ന് നിർവചിക്കുന്നു.

(ii) $\sqrt{u}$ എന്ന് എഴുതിയാൽ അത് ഋണമല്ലാത്ത മൂലത്തെ കുറിയ്ക്കും.

$b^2 - 4ac > 0$ എങ്കിൽ, $P(x) = 0$–യ്ക്ക് വ്യത്യസ്തമായ രണ്ടു വാസ്തവിക സംഖ്യകൾ നിർദ്ധാരണമാകുന്നു.

$b^2 - 4ac = 0$ എങ്കിൽ, രണ്ടു തുല്യമായ വാസ്തവിക സംഖ്യകൾ കിട്ടുന്നു.

കൂടാതെ, $b^2 - 4ac < 0$ എങ്കിൽ വാസ്തവികമൂല്യങ്ങൾ ഇല്ല.

അതുകൊണ്ട്, $b^2 - 4ac > 0$ എങ്കിൽ, x അക്ഷത്തിൽ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിൽ വക്രരേഖ ഛേദിക്കുന്നു.

$b^2 - 4ac = 0$ എങ്കിൽ, വക്രരേഖ x അക്ഷത്തിലെ ഒരേയൊരു ബിന്ദുവിൽ ഛേദിക്കുന്നു.

$b^2 - 4ac < 0$ എങ്കിൽ, വക്രരേഖ x അക്ഷത്തെ ഛേദിക്കുന്നേയില്ല.

$P(x) = ax^2 + bx + c$ എന്ന ദ്വിഘാത ഫലനത്തിന്റെ വിവേചകം $D = b^2 - 4ac$ എന്നതാണ്.

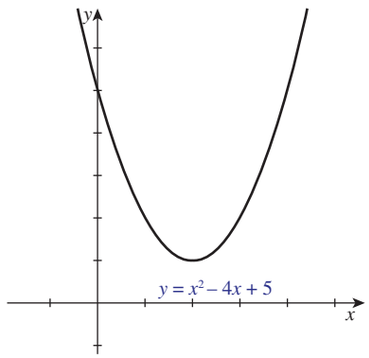
XI_Maths_Ch-2_V-1_Malayalam.indd 77 14-02-2023 16:43:41

കുറിപ്പ്: **(i)** α , β എന്നിവ $ax^2 + bx + c = 0$ യുടെ മൂലങ്ങൾ എങ്കിൽ $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$ കൂടാതെ $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ ആകുന്നു.

(ii) $b^2 - 4ac$ ഒരു ഋണസംഖ്യയെങ്കിൽ ദ്വിഘാത സമീകരണം $ax^2 + bx + c = 0$ന് വാസ്തവിക മൂലങ്ങൾ ഇല്ല. ഇവിടെ സാങ്കൽപ്പിക മൂലങ്ങളാണ് അതായത്. സങ്കീർണ്ണ മൂലങ്ങൾ അവ, $\alpha = \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$, $\beta = \frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$

ഇവിടെ, $i^2 = -1$ (അടുത്ത ക്ലാസ്സിൽ പഠിക്കാം)

(iii) ഉദാഹരണമായി, $y = x^2 - 4x + 5$ (ചിത്രം 2.4) എന്ന ഗ്രാഫിനെ നോക്കാം. ഈ ഗ്രാഫ് x-അക്ഷത്തെ ഛേദിക്കാത്തതിനാൽ, $x^2 - 4x + 5 = 0$–യ്ക്കു വാസ്തവികസംഖ്യ നിർദ്ധാരണമല്ല.



ചിത്രം 2.4

(iv) ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന്റെ മൂലങ്ങളുടെ സ്വഭാവം വിവേചകം $D = b^2 - 4ac$ ഇതിന്റെ ചിഹ്നം അടിസ്ഥാനപ്പെടുത്തി താഴത്തെപട്ടികയിൽ വിവരിക്കുന്നു.

വിവേചകം	മൂലങ്ങളുടെ സ്വഭാവം	പ്രാരബൊളവക്രരേഖ
ധനം	വാസ്തവികം, വ്യത്യസ്തം	x-അക്ഷത്തിൽ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിൽ സന്ധിക്കുന്നു
പൂജ്യം	വാസ്തവികം, തുല്യം	x-അക്ഷത്തിൽ ഒരു ബിന്ദുവിൽ സന്ധിക്കുന്നു.
ഋണം	വാസ്തവിക മൂലങ്ങൾ ഇല്ല	x-അക്ഷത്തിൽ സന്ധിക്കുന്നില്ല.

ഉദാഹരണം 2.10 ദ്വിഘാതസമീകരണം $x^2 - px + q = 0$ യുടെ മൂലങ്ങൾ a, b ആണെങ്കിൽ, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ യുടെ മൂല്യം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം :

a, b എന്നിവ $x^2 - px + q = 0$ യുടെ മൂലങ്ങളാണ്. എങ്കിൽ $a + b = p$ അതുപോലെ $ab = q$ ആകും.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = \frac{p}{q}$$

XI_Maths_Ch-2_V-1_Malayalam.indd 78 14-02-2023 16:43:42

ഉദാഹരണം 2.11 $x^2 - ax + a + 2 = 0$ എന്ന ദ്വിഘാതസമീകരണത്തിന് തുല്യ മൂലങ്ങളാണെങ്കിൽ a യുടെ എല്ലാ മൂലങ്ങളും കാണുക.

നിർദ്ധാരണം :

ദ്വിഘാത സമീകരണം $x^2 - ax + a + 2 = 0$ യ്ക്ക് തുല്യമൂലങ്ങളാണ്

അതുകൊണ്ട് വിവേചകം പൂജ്യം.

വിവേചകം, $D = b^2 - 4ac = a^2 - 4a - 8 = 0$

$$a = \frac{4 \pm \sqrt{48}}{2}$$

അതുകൊണ്ട് $a = 2 + \sqrt{12},\ 2 - \sqrt{12}.$

ഉദാഹരണം 2.12 $x^2 + |x - 1| = 1$ സമീകരണത്തിന് എത്ര നിർദ്ധാരണങ്ങൾ എന്നു കണ്ടു പിടിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം :

നില (1)

$x \geq 1$ ന്, $|x - 1| = x - 1.$

തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണത്തെ ലഘുവാക്കിയാൽ $x^2 + x - 2 = 0.$

ഘടകങ്ങളാക്കിയാൽ, $(x + 2)(x - 1) = 0 \Rightarrow x = -2$ അല്ലെങ്കിൽ 1.

എന്നാൽ, $x \geq 1$ അതുകൊണ്ട് $x = 1.$

നില (2)

$x < 1, |x - 1| = 1 - x.$

തന്നിട്ടുള്ള സമവാക്യം $x^2 + 1 - x = 1$.

എങ്കിൽ, $x(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0$ അല്ലെങ്കിൽ $x = 1.$

പക്ഷെ $x < 1$, അതുകൊണ്ട് $x = 0$ തിരഞ്ഞെടുക്കാം.

നിർദ്ധാരണ ഗണം $\{0, 1\}$ അതുകൊണ്ട് സമവാക്യത്തിന് രണ്ടു നിർദ്ധാരണങ്ങൾ ഉണ്ട്.

അഭ്യാസം 2.4

1. 7 , –3 മൂലങ്ങളുള്ള ദ്വിഘാതസമീകരണത്തെ കാണുക.
2. ദ്വിഘാതപോളിനോമിയലിന്റെ ഒരു പൂജ്യം $1 + \sqrt{5}$, $p(1) = 2$ എങ്കിൽ, ആ ദ്വിഘാത പോളിനോമിയൽ കാണുക.
3. $x^2 + \sqrt{2}x + 3 = 0$ എന്ന ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന്റെ മൂലങ്ങൾ α, β എങ്കിൽ $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$ പൂജ്യങ്ങളായ ദ്വിഘാത പോളിനോമിയൽ കാണുക.
4. $k(x - 1)^2 = 5x - 7$ എന്നതിന്റെ ഒരു മൂലം മറ്റേതിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാണ് എങ്കിൽ, $k = 2$ അല്ലെങ്കിൽ -25 എന്ന് തെളിയിക്കുക.
5. $2x^2 - (a + 1)x + a - 1 = 0$-യുടെ മൂലങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള വ്യത്യാസവും ഗുണനഫലവും സമമെങ്കിൽ, $a = 2$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

XI_Maths_Ch-2_V-1_Malayalam.indd 79 14-02-2023 16:43:44

6. $ax^2 + bx + c = 0$–യുടെ മൂലങ്ങൾ

   (i) ഒന്ന് മറ്റേ മൂലത്തിന്റെ വിപരീത ചിഹ്നം

   (ii) ഒരു മൂലം മറ്റേ മൂലത്തിന്റെ 3 മടങ്ങ്

   (iii) ഒരു മൂലം മറ്റേ മൂലത്തിന്റെ വ്യുൽക്രമം ഇവ ആയിരിക്കാനുള്ള നിബന്ധന കാണുക.

7. $x^2 - ax + b = 0$, $x^2 - ex + f = 0$ എന്നീ സമവാക്യങ്ങൾക്ക് ഒരു പൊതുമൂലം ഉണ്ട്. കൂടാതെ രണ്ടാമത്തെ സമവാക്യത്തിന് സമമായ മൂലങ്ങളാണ് ഉള്ളതെങ്കിൽ, $ae = 2(b + f)$ എന്നു തെളിക്കുക.

8. (i) $-x^2 + 3x + 1 = 0$ (ii) $4x^2 - x - 2 = 0$ (iii) $9x^2 + 5x = 0$ എന്നീ സമവാക്യങ്ങളുടെ മൂലങ്ങളുടെ സ്വഭാവം പരിശോധിക്കുക.

9. ഗ്രാഫിന്റെ സഹായമില്ലാതെ (i) $y = x^2 + x + 2$, (ii) $y = x^2 - 3x - 7$, (iii) $y = x^2 + 6x + 9$ എന്നിവ x– അക്ഷത്തെ ഛേദിക്കുമോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക. സന്ധിക്കുമെങ്കിൽ എത്ര ബിന്ദുക്കളിൽ

10. $f(x) = x^2 + 5x + 4$-നെ പൂർണ്ണ വർഗ്ഗമാക്കൽ രീതിയിൽ എഴുതുക.

2.5.2 ദ്വിഘാത അസമവാക്യങ്ങൾ

ഇവിടെ, $ax^2 + bx + c < 0$ അല്ലെങ്കിൽ $ax^2 + bx + c > 0$ എന്നീ അസമവാക്യങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണം കാണാം. ദ്വിഘാത അസമവാക്യങ്ങൾക്കു നിർദ്ധാരണം കാണേണ്ട നിലകൾ.

(i) ആദ്യം $ax^2 + bx + c = 0$-ന് നിർദ്ധാരണം കാണണം.

(ii) വാസ്തവിക സംഖ്യകളിൽ നിർദ്ധാരണം ഇല്ലെങ്കിൽ മുകളിലുള്ളവയിൽ ഒരു അസമവാക്യം എല്ലാ $x \in \mathbb{R}$-നും ശരിയായിരിക്കും.

(iii) വാസ്തവിക സംഖ്യകളിൽ നിർദ്ധാരണം ഉണ്ട്, എങ്കിൽ അത് നിർണ്ണായക ബിന്ദുക്കളാണ്. ആ ബിന്ദുക്കളെ സംഖ്യാരേഖയിൽ കുറിയ്ക്കുക.

(iv) ഈ നിർണ്ണായക ബിന്ദുക്കൾ സംഖ്യാരേഖയെ പൊതു അംഗമില്ലാത്ത ഇടവേളയായി (വിരാമങ്ങളായി) വിഭജിക്കുന്നു. (ഒരേ ഒരു നിർണ്ണായക ബിന്ദുവായിരിക്കാനും സാധ്യതയുണ്ട്)

(v) ഓരോ ഇടവേളയും പ്രതിനിധീകരിച്ച് ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദു എടുക്കേണ്ടതാണ്.

(vi) ആ ബിന്ദുക്കളെ അസമവാക്യത്തിൽ ഉള്ള ചരത്തിൽ പ്രതിസ്ഥാപിക്കേണ്ടതാണ്.

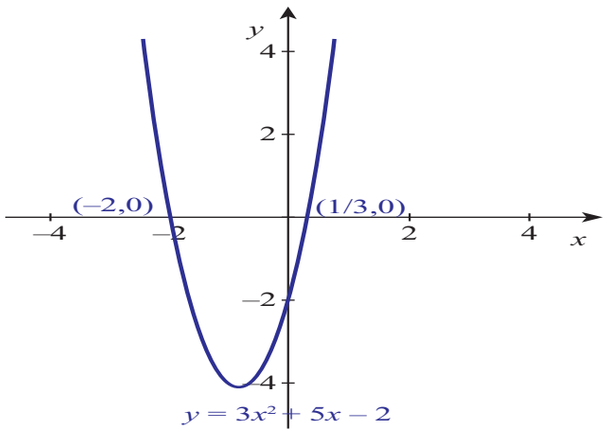
(vii) അസമവാക്യം തൃപ്തിപ്പെടുന്ന ഇടവേളയെ കാണുക.

ഉദാഹരണം 2.13 നിർദ്ധാരണം കാണുക: $3x^2 + 5x - 2 \leq 0$

നിർദ്ധാരണം :

ദ്വിഘാത സമീകരണത്തെ ഘടകങ്ങളാക്കുക $3(x + 2)\left(x - \frac{1}{3}\right) \leq 0$ ഒരു സംഖ്യാരേഖയിൽ നിർണ്ണായക ബിന്ദുക്കളായ -2, $\frac{1}{3}$ (ചിത്രം 2.5) എന്നിവ കുറിയ്ക്കുക. ഓരോ ഇടവേളയിൽ നിന്നും ഒരു ബിന്ദു എടുത്ത് $(x + 2)\left(x - \frac{1}{3}\right)$ ൽ പ്രതിസ്ഥാപിച്ച് ചിഹ്നം പരിശോധിക്കുക. പരിശോധിക്കുമ്പോൾ. കിട്ടുന്ന സംഖ്യയുടെ ചിഹ്നം എന്താണോ അതാണ് ഈ ഇടവേളയിൽ ഉള്ള എല്ലാ ബിന്ദുക്കളെയും പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന ചിഹ്നം (ഇല്ലെങ്കിൽ ഇടവേളയിൽ വേറൊരു നിർണ്ണായക ബിന്ദു ഉണ്ടായിരിക്കും). ഇത് താഴെ കാണുന്ന പട്ടികയിൽ നിന്ന് എളുപ്പത്തിൽ മനസ്സിലാക്കാം.

XI_Maths_Ch-2_V-1_Malayalam.indd 80 14-02-2023 16:43:46



ചിത്രം 2.5

ഇടവേള	$(x+2)$ –ന്റെ ചിഹ്നം	$\left(x-\frac{1}{3}\right)$–ന്റെ ചിഹ്നം	$3x^2+5x-2$ –ന്റെ ചിഹ്നം
$(-\infty, -2)$	–	–	+
$\left(-2, \frac{1}{3}\right)$	+	–	–
$\left(\frac{1}{3}, \infty\right)$	+	+	+

അതുകൊണ്ട് അസമവാക്യം പൂർത്തിയാക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ $\left[-2, \frac{1}{3}\right]$ ആകും.

ഉദാഹരണം 2.14 നിർദ്ധാരണം കാണുക : $\sqrt{x+14} < x+2$.

നിർദ്ധാരണം :

$\sqrt{x+14}$ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത് $x+14 \geq 0$ ആണ്.

$x \geq -14$ എന്നാൽ, $x+2 > 0$, അതായത് $x \geq -2$.

കൂടാതെ $(x+14) < (x+2)^2$. അതായത്, $x^2+3x-10 > 0$ അപ്പോൾ, $(x+5)(x-2) > 0$.

$x = -5$ കൂടാതെ $x = 2$ എന്നിവ നിർണ്ണായക ബിന്ദുക്കളായി എടുത്ത് സംഖ്യാരേഖയിൽ ഇടവേളകളെ ഏർപ്പെടുത്തി അവയിൽ നിന്ന് ബിന്ദുക്കളെ പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന നിർദ്ധാരണം $x < -5$ കൂടാതെ $x > 2$ ആകുന്നു. $x \geq -2$ എന്നാൽ അവയുടെ നിർദ്ധാരണം $x > 2$ ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം 2.15 $\sqrt{6-4x-x^2} = x+4$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം :

കൊടുത്തിട്ടുള്ള സമവാക്യം $(x+4) \geq 0$ കൂടാതെ $6-4x-x^2 = (x+4)^2$ എന്നതിന് സമാനമായതാണ്. അതുകൊണ്ട്, $x \geq -4$ കൂടാതെ $x^2+6x+5 = 0$.

ഇതിന്റെ നിർദ്ധാരണം, $x = -1, -5$

എന്നാൽ, $x = -1$ മാത്രം രണ്ടു നിബന്ധനകളെയും പൂർത്തിയാക്കുന്നു. അതുകൊണ്ട്, $x = -1$ ഒരു നിർദ്ധാരണമാണ്.

XI_Maths_Ch-2_V-1_Malayalam.indd 81 14-02-2023 16:43:48

അഭ്യാസം 2.5

1. നിർദ്ധാരണം കാണുക : $2x^2 + x - 15 \leq 0$.
2. നിർദ്ധാരണം കാണുക : $-x^2 + 3x - 2 \geq 0$.

2.6 ബഹുപദ ഫലനങ്ങൾ

ഇതുവരെ നാം പഠിച്ചത് രേഖീയ, ദ്വിഘാത ഫലനങ്ങളെ സംബന്ധിച്ചാണ്. ഈ ആശയങ്ങളെ ഒന്ന് വിശകലനം ചെയ്യാം. $a_i \in \mathbb{R},\ i = 0, 1, 2, \cdots, n$ ഇവിടെ വ്യംഞ്ജകം $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ നെ ചരം x ഓടുകൂടിയ ബഹുപദ വ്യംജ്ഞകം എന്നുപറയുന്നു. ഇവിടെ n ഒരു ഋണമല്ലാത്ത പൂർണ്ണാങ്കമാകുന്നു. $a_n \neq 0$ ആയിരിക്കുമ്പോൾ ബഹുപദ വ്യംഞ്ജകത്തിനെ കൃതി n ആകുന്നു. $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ എന്നിവ ബഹുപദവ്യംജകത്തിന്റെ ഗുണാങ്കങ്ങളാകുന്നു. a_0 എന്നത് സ്ഥിരാങ്കവും a_n പ്രധാന ഗുണനാങ്കം എന്നും പറയാം. (ഇത് പൂജ്യമാകരുത്)

ഇതിൽ നിന്ന് വ്യക്തമാകുന്നത്,

(i) $100x^7 - \pi x^5 + 20\sqrt{2}\,x^2 + 7x + 1.22$ എന്ന ബഹുപദവ്യംജ്ഞകത്തിന്റെ കൃതി 7

(ii) $(17x - 3)(x + 3)(2x - \sqrt{\pi})(x + 2.3)$ എന്ന ബഹുപദവ്യംജ്ഞകത്തിന്റെ കൃതി 4

(iii) $(x^2 + x + 1)(x^3 + 2x + 2)(x^5 - 5x + \sqrt{3})$ എന്ന ബഹുപദവ്യംജ്ഞകത്തിന്റെ കൃതി 10 ആകുന്നു.

x-ന് ഒരു നിശ്ചിത മൂല്യം $x = c$ എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്നത് $a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \cdots + a_1 c + a_0$ $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ എന്നത് $\mathbb{R}$ -ൽ നിന്ന് $\mathbb{R}$-ലേക്ക് നിർവചിക്കപ്പെട്ട ഒരു ബഹുപദവ്യംജ്ഞകം ആകുന്നു. ബഹുപദവ്യംജകവും ബഹുപദവ്യഞ്ജക ഫലനവും നമുക്ക് ഒന്നായിട്ട് തന്നെ കണക്കാക്കാം.

വ്യംജ്ഞകത്തിന്റെ കൃതി 1 എങ്കിൽ രേഖീയ വ്യംജ്ഞകം എന്നും കൃതി 2 എങ്കിൽ ദ്വിഘാത വ്യംജ്ഞകം എന്നും പറയാം. ത്രിഘാതവ്യംജകത്തിന്റെ കൃതി 3 ആയിരിക്കും.

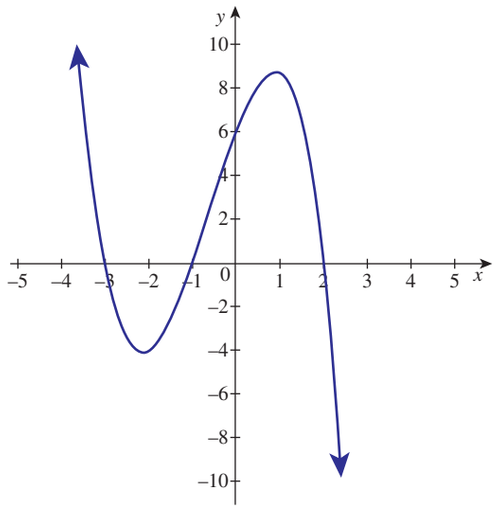
ഇതേപോലെ കൃതി 4, കൃതി 5 കൊണ്ടുള്ള ബഹുപദവ്യംജ്ഞകങ്ങൾ യഥാക്രമം ചതുർഘാത വ്യംജകം പഞ്ചഘാത വ്യംജ്ഞകം എന്നും പറയാം. ഒരു സ്ഥിരാങ്കത്തെ $(a \neq 0)$ കൃതി 0 വ്യംജ്ഞകമായി കരുതാം.

$f(x) = g(x),\ x \in \mathbb{R}$ എന്ന് കിട്ടുന്നതിന് ആവശ്യമായതും മതിയായതുമായ നിബന്ധന രണ്ടു ബഹുപദവ്യംജ്ഞകങ്ങളാണ്. അതായത്, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0,\ a_n \neq 0$ കൂടാതെ $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_0, b_m \neq 0$ എന്നിവ തുല്യമായിരിക്കേണ്ടതാണ്. ഇവയ്ക്ക് സമാന്തരമായി $n = m$ കൂടാതെ $a_k = b_k,\ k = 0, 1, 2, \cdots n$ ആകുന്നു.

രണ്ടു ബഹുപദവ്യംജ്ഞകങ്ങൾ കൊടുത്തിരുന്നാൽ അവയുടെ തുക, ഗുണനഫലം എന്നിവയെ കാണാൻ സാധിക്കും. ഉദാഹരണമായി, $P(x) = 2x^3 + 7x^2 - 5,\ Q(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + x + 1$ ഇവിടെ, $P(x) + Q(x) = x^4 + 8x^2 + x - 4$ (x-ന്റെ ഒരേ കൃതിയുള്ള ഗുണാങ്കങ്ങളെ കൂട്ടുമ്പോൾ കിട്ടുന്നു) കൂടാതെ, $P(x)Q(x) = 2x^7 + 3x^6 - 12x^5 + 4x^4 + 19x^3 + 2x^2 - 5x - 5$ എന്നതിനെ $P(x)$-ന്റെ ഓരോ പദവും $Q(x)$-ന്റെ പദത്തോട് ഗുണിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്നു.

XI_Maths_Ch-2_V-1_Malayalam.indd 82 14-02-2023 16:43:50

$P(x)Q(x)$–ന്റെ കൃതി, $P(x)$ ന്റെയും $Q(x)$ ന്റെയും കൃതികളുടെ തുകയ്ക്ക് സമമായിരിക്കും. $P(x)+Q(x)$ –ന്റെ കൃതി അവയുടെ കൃതിയിൽ ഏറ്റവും കൂടിയകൃതിയാക്കുന്നു. താഴെ കാണുന്ന ചിത്രം ത്രിഘാത വ്യംജ്ഞക ഫലനത്തെ കുറിയ്ക്കുന്നു.



ചിത്രം 2.6

$f(x)$, $g(x)$ എന്നിവ രണ്ടു ബഹുപദവ്യംജ്ഞകങ്ങൾ ഇവിടെ, $g(x) \neq 0$, $\frac{f(x)}{g(x)}$, $x \in \mathrm{R}$ എന്ന ഹരണഫലം ഒരു പരിമേയ ഫലനമാകും. സാധാരണയായി പരിമേയ വ്യംജ്ഞകം ബഹുപദവ്യംജ്ഞകം ആയിരിക്കണമെന്നില്ല.

2.6.1 ഹരണ അൽഗോരിതം

$f(x)$, $g(x)$ എന്നിവ രണ്ടു ബഹുപദവ്യംജ്ഞകങ്ങൾ $g(x)$ പൂജ്യമല്ലാത്ത ബഹുപദവ്യംജകം.

$f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ എന്ന വിധത്തിൽ $q(x)$, $r(x)$ എന്ന രണ്ട് ബഹുപദവ്യജ്ഞകങ്ങൾ കിട്ടുന്നു. ഇവിടെ, $r(x)$ ന്റെ കൃതി $g(x)$ ന്റെ കൃതിയെക്കാൾ ചെറുതാണ്. $q(x)$ എന്നത് ഹരണ വ്യംജ്ഞകവും $r(x)$ എന്നത് ശിഷ്ട വ്യംജ്ഞകവും എന്ന് കണക്കാക്കുന്നു. $r(x)$ ഒരു പൂജ്യമെങ്കിൽ, $g(x)$, $q(x)$ എന്നിവ $f(x)$ ന്റെ ഘടകമാകുന്നു. കൂടാതെ, $f(x) = q(x)g(x)$ ആകുന്നു.

പൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾക്കു പ്രയോജനപ്പെടുത്തുന്ന വിഭജന നിയമം ഇവിടെയും പ്രയോജനപ്പെടുന്നു.

$g(x) = x - a$, എങ്കിൽ ശിഷ്ടം $r(x)$–ന്റെ കൃതി പൂജ്യമാകുന്നു. അതുകൊണ്ട്, $r(x)$ ഒരു സ്ഥിര സംഖ്യയാകുന്നു. ആ സ്ഥിരസംഖ്യ കാണാൻ, $f(x) = (x-a)q(x) + c$ എന്നെഴുതി $x = a$ എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ, $c = f(a)$ എന്നു കിട്ടുന്നു.

ശിഷ്ടസിദ്ധാന്തം

ബഹുപദവ്യംജ്ഞകം $f(x)$ നെ $x - a$ ആൽ ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന ശിഷ്ടം $f(a)$ ആകുന്നു.

ശിഷ്ടം $c = f(a) = 0$ എന്ന് കിട്ടുന്നതിന് ആവശ്യമായതും മതിയായതുമായ നിബന്ധന $f(x)$–ന്റെ ഘടകം $x - a$ ആണ്.

XI_Maths_Ch-2_V-1_Malayalam.indd 83 14-02-2023 16:43:52

നിർവചനം 2.1

ഒരു വാസ്തവിക സംഖ്യ a എന്നത് $f(x)$ എന്ന ബഹുപദവ്യംജ്ഞകത്തിന്റെ പൂജ്യമാകണമെങ്കിൽ $f(a) = 0$ എന്ന് ലഭിക്കണം. $x - a$ എന്നത് $f(x)$–ന്റെ പൂജ്യം എങ്കിൽ, $x - a$ എന്നത് $f(x)$–ന്റെ ഒരു ഘടകമാകുന്നു.

സാധാരണയായി, $f(x) = (x - a)^k \cdot g(x)$, ഇവിടെ, $g(a) \neq 0$ എങ്കിൽ, a യെ ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്ന k യുടെ മൂല്യം. $f(x)$–ന്റെ കൃതിയെക്കാൾ ചെറുതായിരിക്കും. a എന്ന പൂജ്യത്തിന്റെ ആധിക്യം ആകുന്നു. k യുടെ മൂല്യം.

കുറിപ്പ്: (i) ഒരു ബഹുപദവ്യംജ്ഞകത്തിന്റെ കൃതി n എങ്കിൽ അതിന്റെ ഏറ്റവും കൂടിയ വാസ്തവിക പൂജ്യങ്ങൾ n ആകുന്നു. $P(x) = x^2 + 1$ എന്ന ബഹുപദവ്യംജ്ഞകത്തിന് വാസ്തവികമൂല്യം ഇല്ല.

(ii) പരിമേയസംഖ്യകൾ ഗുണാങ്കങ്ങളായി ഉള്ള ബഹുപദവ്യംജ്ഞകം $P(x)$ എന്നെടുക്കുക. $a + b\sqrt{p}$ ഇവിടെ $a, b \in Q$, P ഒരു അഭാജ്യസംഖ്യ ഇത് $p(x)$ ന്റെ ഒരു പൂജ്യമായിരുന്നാൽ അതിന്റെ വിപരീതം $a - b\sqrt{p}$ യും ഒരു പൂജ്യമായിരിക്കും.

ബഹുപദ വ്യംജ്ഞകത്തിനെ സംബന്ധിക്കുന്ന കണക്കുകളിൽ രണ്ടു മുഖ്യപ്രശ്നങ്ങൾ താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

(i) തന്നിട്ടുള്ള ബഹുപദവ്യംജ്ഞകത്തിന്റെ പൂജ്യങ്ങൾ കണ്ടുപിടിച്ച് ഏകഘാത ഘടകങ്ങളായി ബഹുപദവ്യംജ്ഞകത്തെ മാറ്റാം

(ii) ചില നിബന്ധനകൾ മുഖേന പൂജ്യങ്ങളെ പ്രയോജനപ്പെടുത്തി ബഹുപദവ്യംജ്ഞകത്തെ രൂപീകരിക്കൽ.

ബഹുപദവ്യംജ്ഞകത്തിന്റെ പൂജ്യങ്ങളെ കാണുന്നതിന് ചില സമയങ്ങളിൽ ബീജഗണിത സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ പ്രയോജനപ്പെടുത്തണം എന്നത് നാം അറിഞ്ഞതാണ്. സർവ്വസമവാക്യമെന്നാൽ എന്ത്?

മണ്ഡലത്തിൽ ഉള്ള എല്ലാ മൂല്യത്തിനും ഒരു സമവാക്യം വാസ്തവമെങ്കിൽ ആ സമവാക്യം സർവ്വ സമവാക്യം എന്നു പറയുന്നു.

മണ്ഡലത്തിലുള്ള ചില മൂല്യങ്ങൾക്കുമാത്രം സമവാക്യം വാസ്തവമെങ്കിൽ ആ സമവാക്യം നിബന്ധനയ്ക്കു ഉൾപ്പെട്ട സമവാക്യം എന്നു പറയുന്നു. താഴെ കാണുന്ന സർവ്വസമവാക്യങ്ങളെ ഓർമ്മിക്കാം.

2.6.2 പ്രധാനപ്പെട്ട സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ

$x, a, b \in \mathbb{R}$–ന്റെ എല്ലാ മൂല്യങ്ങൾക്കും താഴെ കാണുന്നവിധത്തിൽ നമുക്ക് കിട്ടുന്നു.

1. $(x + a)^3 = (x + a)^2(x + a) = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3 = x^3 + 3xa(x + a) + a^3$
2. $(x - b)^3 = x^3 - 3x^2b + 3xb^2 - b^3 = x^3 - 3xb(x - b) + b^3 (a = -b$ (1) –ൽ പ്രതിസ്ഥാപിക്കുക)
3. $x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - xa + a^2)$
4. $x^3 - b^3 = (x - b)(x^2 + xb + b^2), (a = -b,$ (3) –ൽ പ്രതിസ്ഥാപിക്കുക)
5. $x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + x^{n-k-1}a^k + \cdots + a^{n-1}),\ n \in \mathbb{N}$
6. $x^n + b^n = (x + b)(x^{n-1} - x^{n-2}b + \cdots + x^{n-k-1}(-b)^k + \cdots + (-b)^{n-1}),\ n \in \mathbb{N}$

XI_Maths_Ch-2_V-1_Malayalam.indd 84 14-02-2023 16:43:54

അഭ്യാസം 2.6

1. $f(x) = 4x^2 - 25$ എന്ന ബഹുപദവ്യംജ്ഞകത്തിന്റെ പൂജ്യങ്ങളെ കാണുക.
2. $x^3 - x^2 - 17x = 22$-ഒരു മൂല്യം $x = -2$ എങ്കിൽ മറ്റു മൂല്യങ്ങൾ കാണുക.
3. $x^4 = 16$-ന്റെ വാസ്തവിക മൂല്യങ്ങളെ കാണുക.
4. നിർദ്ധാരണം കാണുക: $(2x + 1)^2 - (3x + 2)^2 = 0$

അജ്ഞാത ഗുണാങ്കങ്ങളെ കണ്ടുപിടിക്കുന്നവിധം

തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചും അജ്ഞാത ഗുണാങ്കങ്ങളെ കണ്ടുപിടിക്കുന്ന രീതി ഉപയോഗിച്ചും ബഹുപദവ്യംജ്ഞകത്തിന്റെ നിർമ്മിതിയിൽ കേന്ദ്രീകരിയ്ക്കാം. തന്നിട്ടുള്ള നിബന്ധനകളനുസരിച്ച് ബഹുപദ വ്യംജ്ഞകത്തിന്റെ ഗുണാങ്കങ്ങളെ കണ്ടുപിടിക്കണം. രണ്ടു ബഹുപദവ്യംജ്ഞകങ്ങൾ തുല്യമായിരിക്കുന്നതിന് ആവശ്യമായതും മതിയായതുമായ നിബന്ധന അവയുടെ ചരങ്ങളുടെ ഘാതങ്ങൾ സമമായിട്ടുള്ള പദങ്ങളുടെ ഗുണാങ്കങ്ങൾ സമമായിരിക്കണം.

ഉദാഹരണം 2.16 $f(0) = 1$, $f(-2) = 0$ കൂടാതെ, $f(1) = 0$ ആയിട്ടുള്ള ദ്വിഘാത ബഹുപദ വ്യംഞ്ജകം $f(x)$ നെ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം :

ബഹുപദ വ്യംജ്ഞകത്തെ $f(x) = ax^2 + bx + c$ എന്നെടുക്കാം.

$$f(0) = a(0)^2 + b(0) + c = 1 \Rightarrow c = 1$$

$$f(-2) = 0,\ f(1) = 0.$$

ഇവയിൽ നിന്ന്, $4a - 2b + c = 0$ കൂടാതെ $a + b + c = 0$ എന്നിവ ലഭിക്കും.

$c = 1$ പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ, $4a - 2b = -1$ കൂടാതെ $a + b = -1$

രണ്ടു സമവാക്യങ്ങളെയും നിർദ്ധാരണം കാണുക, $a = b = -\frac{1}{2}$.

അതുകൊണ്ട്, $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$

കുറിപ്പ്: മേലെയുള്ള കണക്കുകൾക്കു മറ്റൊരു രീതിയിലും നിർദ്ധാരണം കാണാം. ഏതെങ്കിലും സ്ഥിരാങ്കം d ക്ക്, $x = -2, x = 1$, എന്നിവയെ പൂജ്യങ്ങളായി എടുത്ത് $f(x) = d(x + 2)(x - 1)$ എന്ന് എഴുതാം.

$f(0) = 1$ ഉപയോഗിച്ചാൽ കിട്ടുന്നത്, $-2d = 1$. അപ്പോൾ, $d = -\frac{1}{2}$.

അതുകൊണ്ട്, $f(x) = -\frac{1}{2}(x + 2)(x - 1) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$

ഉദാഹരണം 2.17 $x = \frac{2}{5}, 1 + \sqrt{3}$ എന്നീ പൂജ്യങ്ങൾ ഉള്ളതും $f(0) = -8$ എന്ന നിബന്ധനയെ പൂർത്തീകരിക്കുകയും ചെയ്യുന്ന പരിമേയ ഗുണാങ്കത്തോടു കൂടിയ ത്രിഘാത ബഹുപദ വ്യംജ്ഞകത്തെ കാണുക.

XI_Maths_Ch-2_V-1_Malayalam.indd 85 14-02-2023 16:43:56

നിർദ്ധാരണം :

$\frac{2}{5}$, $1+\sqrt{3}$ എന്നിവ $f(x)$–ന്റെ പൂജ്യങ്ങളാണ്. അതുകൊണ്ട് , $1-\sqrt{3}$ എന്നത് അതിന്റെ പൂജ്യമാകുന്നു.

അതുകൊണ്ട്, $f(x) = a\left(x-\frac{2}{5}\right)[(x-(1+\sqrt{3}))]\,[x-(1-\sqrt{3})]$

$= a\left(x-\frac{2}{5}\right)[(x-1)^2-3]$

$f(0) = -8$-യെ പ്രയോജനപ്പെടുത്തി, $\left(-\frac{2}{5}a\right)(-2) = -8$

അതുകൊണ്ട്, $a = -10.$

ആവശ്യമായ ത്രിഘാത ബഹുപദവ്യംഞ്ജകം,

$f(x) = (-10)\left(x-\frac{2}{5}\right)[x^2-2x-2]$

$= -10x^3+24x^2+12x-8$

ഉദാഹരണം 2.18 $f(x) = x^3-3px+2q$ എന്നതിനെ, $g(x) = x^2+2ax+a^2$ കൊണ്ട് ഹരണം സാധ്യമെങ്കിൽ, $ap+q=0$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം :

$f(x)$-ന്റെ കൃതി 3 എന്നും പ്രധാനഗുണാങ്കം 1 എന്നും അറിയുക. $f(x)$-നെ $g(x)$ വിഭജിക്കുന്നതിനാൽ,

$f(x) = (x+b)g(x),\ b\in\mathbb{R}$

അതുകൊണ്ട്, $x^3-3px+2q = (x+b)(x^2+2ax+a^2)$

രണ്ടുവശവും ഉള്ള ഒരേ ഘാത പദങ്ങളുടെ ഗുണാങ്കങ്ങളെ താരതമ്യപ്പെടുത്തിയാൽ കിട്ടുന്നത്

$2a+b=0,\ a^2+2ab=-3p$ കൂടാതെ $2q = ba^2$

അതുകൊണ്ട്, $b=-2a,\ p=a^2,\ q=-a^3$

$q = -a^3 = -a(a^2) = -ap$

ഇതിൽ നിന്ന് $ap+q=0$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

ഉദാഹരണം 2.19 അജ്ഞാത ഗുണാങ്ക രീതിയെ പ്രയോജനപ്പെടുത്തി

$1+2+3+\cdots(n-1)+n,\ \ n\in\mathbb{N}$–തുക കാണുക.

നിർദ്ധാരണം :

$S(n) = n+(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1$ എന്നെടുക്കുക.

$= n+(n-1)+(n-2)+\cdots+[n-(n-2)]+[n-(n-1)]$

$= n\left[1+\frac{n-1}{n}+\frac{n-2}{n}+\cdots+\frac{n-(n-2)}{n}+\frac{n-(n-1)}{n}\right]$

$\le n[1+1+\cdots+1]$ (എന്തെന്നാൽ, $\frac{n-1}{n}<1,\ \frac{n-2}{n}<1,\cdots$)

XI_Maths_Ch-2_V-1_Malayalam.indd 86 14-02-2023 16:43:59

അതുകൊണ്ട്, $S(n) \leq n^2$

$S(n) = a + bn + cn^2$ എന്നെടുക്കുക, $a, b, c \in \mathbb{R}$

$S(n+1) - S(n) = n + 1$

$a + b(n+1) + c(n+1)^2 - [a + bn + cn^2] = n + 1$

$b + 2cn + c = n + 1$

അതുകൊണ്ട്, $b + c = 1$ കൂടാതെ $2c = 1$, (ഒരേ ഘാതപദങ്ങളുടെ ഗുണാങ്കങ്ങൾ താരതമ്യം ചെയ്യുമ്പോൾ) $b = \frac{1}{2}$; $c = \frac{1}{2}$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

ഇവിടെ, $S(1) = 1 \Rightarrow a + b + c = 1 \Rightarrow a = 0 \quad (b + c = 1)$

അതുകൊണ്ട്, $S(n) = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 = \frac{n(n+1)}{2}, \ n \in \mathbb{N}$

ഉദാഹരണം 2.20 $(x-1)^3(x+1)^2(x+5) = 0$ എന്ന ബഹുപദ വ്യംജ്ഞകത്തിന്റെ പൂജ്യങ്ങളെ കാണുക. കൂടാതെ ഗുണന ആധിക്യം എഴുതുക.

നിർദ്ധാരണം :

$f(x) = (x-1)^3(x+1)^2(x+5) = 0$ എന്നെടുക്കുക.

ഇവിടെ, $x = 1, -1, -5$. മൂലം 1–ന്റെ ഗുണന ആധിക്യം 3, –1-ന്റെ ഗുണന ആധിക്യം 2 കൂടാതെ –5 ന്റെ ഗുണനആധിക്യം 1.

കുറിപ്പ്: മൂലത്തിന്റെ ഗുണനആധിക്യം **1** എങ്കിൽ അത് ലഘുമൂലം എന്നു പറയുന്നു.

ഉദാഹരണം 2.21 നിർദ്ധാരണം കാണുക. $x = \sqrt{x+20}, \ x \in \mathbb{R}$,

നിർദ്ധാരണം :

$x = \sqrt{x+20} \geq 0$ എന്ന് ആയിരിക്കുമ്പോൾ മാത്രം $\sqrt{x+20}$ -നെ നിർവചിക്കാൻ സാധിക്കും, നിർവ്വചനത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ $x = \sqrt{x+20} \geq 0$. അതുകൊണ്ട്, x ഒരു ധനസംഖ്യ ആണ്.

വർഗ്ഗം എടുത്താൽ കിട്ടുന്നത്, $x^2 = x + 20$

$x^2 - x - 20 = 0$

$(x-5)(x+4) = 0$

$x = 5, -4$

x ധനസംഖ്യ എന്നാൽ $x = 5$

ഉദാഹരണം 2.22 $x^2 - 6x + a = 0$ കൂടാതെ $x^2 - bx + 6 = 0$ എന്ന സമവാക്യങ്ങൾക്ക് ഒരു പൊതു മൂലമാണ് ഉള്ളത്. കൂടാതെ ആദ്യത്തെയും രണ്ടാമത്തെയും സമവാക്യങ്ങളുടെ അടുത്ത മൂലങ്ങൾ പൂർണ്ണാങ്കവും 4:3 എന്ന അംശബന്ധത്തിലും ആയിരിക്കും, എന്നാൽ പൊതുമൂലം കാണുക.

XI_Maths_Ch-2_V-1_Malayalam.indd 87 14-02-2023 16:44:01

നിർദ്ധാരണം :

പൊതുമൂലം α എന്നെടുക്കുക.

$$x^2 - 6x + a = 0\text{–മൂലങ്ങൾ } \alpha,\ 4\beta$$

$$x^2 - bx + 6 = 0\text{–മൂലങ്ങൾ } \alpha,\ 3\beta \text{ എന്നെടുക്കുക.}$$

അതുകൊണ്ട്, $4\alpha\beta = a$ കൂടാതെ $3\alpha\beta = 6 \Rightarrow \alpha\beta = 2$ കൂടാതെ $a = 8$.

$$x^2 - 6x + 8 = 0\text{–യുടെ മൂലങ്ങൾ } 2, 4$$

$$\alpha = 2 \text{ എങ്കിൽ, } \beta = 1$$

$$\alpha = 4 \text{ എങ്കിൽ, } \beta = \frac{1}{2} \text{ എന്നത് ഒരു പൂർണ്ണകമല്ല}$$

പൊതുമൂലം 2 ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം 2.23 $x^2 + px + 8 = 0$-യുടെ മൂലങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം 2 എങ്കിൽ p-യുടെ മൂല്യം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം :

$$x^2 + px + 8 = 0\text{-യുടെ മൂലങ്ങൾ } \alpha,\ \beta.$$

$$\alpha + \beta = -p,\ \alpha\beta = 8 \text{ കൂടാതെ } |\alpha - \beta| = 2$$

ഇപ്പോൾ, $(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (\alpha - \beta)^2 \Rightarrow p^2 - 32 = 4$

അതുകൊണ്ട്, $p = \pm 6$.

അഭ്യാസം 2.7

1. ഘടകങ്ങളാക്കുക: $x^4 + 1$. (**സൂചന**: വർഗ്ഗത്തെ പൂർണ്ണമാക്കൽ രീതിയിൽ ശ്രമിക്കുക)
2. $3x^3 + 8x^2 + 8x + a$ എന്ന ബഹുപദ വ്യംജ്ഞകത്തിന്റെ ഒരു ഘടകം $x^2 + x + 1$ എങ്കിൽ, a-യുടെ മൂല്യം കാണുക.

2.7 പരിമേയ സംഖ്യാ ഫലനങ്ങൾ

രണ്ട് ബഹുപദവ്യംജ്ഞകങ്ങൾ $P(x)$, $Q(x)$, $Q(x) \neq 0$, എന്നിവയുടെ അംശബന്ധത്തിനെ x-ലുള്ള പരിമേയ വ്യംഞ്ജകം എന്നു പറയുന്നു.

$\frac{2x+1}{x^2+x+1}$, $\frac{x^4+1}{x^2+1}$ കൂടാതെ $\frac{x^2+x}{x^2-5x+6}$ എന്നിവ പരിമേയ വ്യംജകങ്ങൾക്കു ചില ഉദാഹരണമാകുന്നു.

$P(x)$–ന്റെ കൃതി $Q(x)$–ന്റെ കൃതിക്ക് സമമായിട്ടോ അല്ലെങ്കിൽ അതിനെക്കാൾ കൂടുതലോ ആയിരുന്നാൽ $P(x) = f(x)\,Q(x) + r(x)$ എന്ന് എഴുതാം. ഇവിടെ, $r(x) = 0$ അല്ലെങ്കിൽ $r(x)$–ന്റെ കൃതി $Q(x)$–ന്റെ കൃതിയെക്കാൾ കുറവായിരിക്കും.

എങ്കിൽ, $$\frac{P(x)}{Q(x)} = f(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}$$

XI_Maths_Ch-2_V-1_Malayalam.indd 88 14-02-2023 16:44:03

2.7.1 പരിമേയസംഖ്യാ അസമവാക്യങ്ങൾ

ഉദാഹരണം 2.24 നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക: $\frac{x+1}{x+3} < 3$.

നിർദ്ധാരണം :

രണ്ടുവശവും 3 കുറയ്ക്കുക, $\frac{x+1}{x+3} - 3 < 0$

$$\frac{x+1-3(x+3)}{x+3} < 0$$

$$\frac{-2x-8}{x+3} < 0$$

$$\frac{x+4}{x+3} > 0$$

$x+4$, $x+3$, എന്നിവ, ഒന്നുകിൽ രണ്ടും ധനമായിരിക്കും. അല്ലെങ്കിൽ രണ്ടും ഋണമായിരിക്കും. എങ്കിൽ, $x+3$ കൂടാതെ $x+4$ എന്നിവയുടെ ചിഹ്നങ്ങൾ താഴെകാണുന്നവിധത്തിലായിരിക്കും.

x	$x+3$	$x+4$	$\frac{x+4}{x+3}$
$x<-4$	–	–	+
$-4<x<-3$	–	+	–
$x>-3$	+	+	+
$x=-4$	–	0	0

അതുകൊണ്ട് നിർദ്ധാരണഗണം $(-\infty, -4) \cup (-3, \infty)$ ആകുന്നു.

കുറിപ്പ്: സംഖ്യാരേഖയുടെ ഇടവേളയിൽ വിവിധ ഘടകങ്ങളുടെ ചിഹ്നങ്ങൾ കുറിച്ച് ഈ രീതിയിലുള്ള അസമവാക്യങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണം കാണാം.

അഭ്യാസം 2.8

1. $\frac{x^3(x-1)}{(x-2)} > 0$ എങ്കിൽ x–ന്റെ എല്ലാ മൂല്യങ്ങളും കാണുക.
2. $\frac{2x-3}{(x-2)(x-4)} < 0$ എന്ന അസമവാക്യത്തെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്ന x–ന്റെ എല്ലാ മൂല്യങ്ങളെയും കാണുക.
3. നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക: $\frac{x^2-4}{x^2-2x-15} \leq 0$

2.7.2 ഭാഗീക ഭിന്നങ്ങൾ

$\frac{f(x)}{g(x)}$ എന്ന പരിമേയ വ്യംഞ്ജകത്തിൽ $f(x)$–ന്റെ ഘാതം $g(x)$–ന്റെ ഘാതത്തെക്കാൾ കുറവാണ് എങ്കിൽ അത് ഒരു സാധാരണ ഭിന്നമാണ്. ഇവിടെ $g(x)$ ന് വാസ്തവിക മൂല്യങ്ങൾ ഇല്ലെങ്കിലും ഏകഘാതം കൂടാതെ ദ്വിഘാത ഘടകങ്ങളായി വേർപെടുത്താൻ സാധിക്കും. അതുകൊണ്ട്, $\frac{f(x)}{g(x)}$നെ എളിയ പദങ്ങൾ കൊണ്ട് മാറ്റി എഴുതാം. അതായത് പദങ്ങളുടെ തുക താഴെ വരുന്ന വിധത്തിൽ എഴുതാം.

XI_Maths_Ch-2_V-1_Malayalam.indd 89 14-02-2023 16:44:05

(i) $g(x)$-നെ $x-a$ വിഭജിക്കുമെങ്കിൽ, $\frac{A_1}{(x-a)}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-a)^k}$ എന്നെഴുതാം

(ii) ഇവിടെ x^2+ax+b–ന് വാസ്തവിക പൂജ്യങ്ങൾ ഇല്ലെങ്കിൽ. കൂടാതെ $g(x)$ നെ (x^2+ax+b) വിഭജിക്കുമെങ്കിൽ

$\frac{(B_1x+C_1)}{(x^2+ax+b)}+\frac{(B_2x+C_2)}{(x^2+ax+b)^2}+\cdots+\frac{(B_kx+C_k)}{(x^2+ax+b)^k}$ എന്ന് എഴുതാം. ഇതിനെ ഭാഗിക ഭിന്നങ്ങളുടെ തുകയായി മാറ്റപ്പെട്ട വ്യംജ്ഞകം എന്ന് വിളിക്കാം.

കുറിപ്പ്: കൊടുത്തിട്ടുള്ള പരിമേയ സംഖ്യാഫലനത്തിന് ഈ വിധത്തിൽ മാറ്റം വരുത്തിയ വ്യംഞ്ജകം അനന്യതാഗുണം ഉള്ളതാണ്. ഈ രീതി സമകലനത്തിന് നിർദ്ധാരണം കാണുന്നതിന് പ്രയോജനപ്പെടുന്നു. ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ കൊണ്ട് വിശദമായി പഠിക്കാം.

ഉദാഹരണം 2.25 ഭാഗിക ഭിന്നങ്ങളായി വിഭജിക്കുക $\frac{x}{(x+3)(x-4)}$.

നിർദ്ധാരണം :

$$\frac{x}{(x+3)(x-4)} = \frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-4}.$$

A യും B യും സ്ഥിരാങ്കം ഇപ്പോൾ

$$\frac{x}{(x+3)(x-4)} = \frac{A(x-4)+B(x+3)}{(x+3)(x-4)}$$

$$\Rightarrow \quad x = A(x-4)+B(x+3)$$

$x=4$ ആയാൽ, $B = \frac{4}{7}$

$x=-3$ ആയാൽ, $A = \frac{3}{7}$

ഇപ്പോൾ, $\frac{x}{(x+3)(x-4)} = \frac{3}{7(x+3)}+\frac{4}{7(x-4)}$

കുറിപ്പ്: ഛേദത്തിലെ എല്ലാ പൂജ്യങ്ങളും $\mathbb{R}$ ൽ ഉണ്ടായിരിക്കുകയും അവ വ്യത്യസ്തവുമായിരുന്താൽ പറഞ്ഞ രീതി പ്രയോജനപ്പെടുത്താം.

ഉദാഹരണം 2.26 ഭാഗികം ഭിന്നങ്ങളായി വിഭജിക്കുക : $\frac{2x}{(x^2+1)(x-1)}$.

നിർദ്ധാരണം :

ഇതിൽ, ഛേദത്തിലുള്ള ഒരു ഘടകം (x^2+1)–ന് വാസ്തവികസംഖ്യ മൂലം അല്ല.

$$\frac{2x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{A}{(x-1)}+\frac{Bx+C}{x^2+1},\ A, B, C \text{ സ്ഥിരാങ്കങ്ങൾ.}$$

$$2x = A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1).$$

$x=1$ എങ്കിൽ $A=1$,

$x=0$ എങ്കിൽ $A-C=0$, $A=C=1$

$x=-1$ എങ്കിൽ $2A-2(C-B)=-2 \Rightarrow B=-1$

$$\frac{2x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{1}{(x-1)}+\frac{1-x}{x^2+1}$$

XI_Maths_Ch-2_V-1_Malayalam.indd 90 14-02-2023 16:44:07

ഛേദത്തിൽ ഒന്നിൽ കൂടുതൽ ഗുണനആധിക്യം ഉള്ള വാസ്തവിക പൂജ്യങ്ങൾ ഉള്ള നിലയെ നമുക്ക് ഇപ്പോൾ പരിശോധിക്കാം.

ഉദാഹരണം 2.27 ഭാഗിക ഘടകങ്ങളാക്കുക : $\frac{x+1}{x^2(x-1)}$

തെളിവ് :

$$\frac{x+1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}.$$

ഇപ്പോൾ, $x+1 = Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2$

$x = 0$ ആയാൽ $B = -1$, $x = 1$ ആയാൽ $C = 2$

$x = -1$ ആയാൽ $2A - 2B + C = 0 \Rightarrow A = -2$ എന്ന് എടുത്താൽ

അതുകൊണ്ട്, $\frac{x+1}{x^2(x-1)} = \frac{-2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x-1}$

അഭ്യാസം 2.9

താഴെ കാണുന്ന പരിമേയ വ്യംഞ്ജകങ്ങളെ ഭാഗിക ഭിന്നങ്ങളായി വിഭജിക്കുക.

1. $\frac{1}{x^2 - a^2}$
2. $\frac{3x+1}{(x-2)(x+1)}$
3. $\frac{x}{(x^2+1)(x-1)(x+2)}$
4. $\frac{x}{(x-1)^3}$
5. $\frac{1}{x^4 - 1}$
6. $\frac{(x-1)^2}{x^3 + x}$
7. $\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 5x + 6}$
8. $\frac{x^3 + 2x + 1}{x^2 + 5x + 6}$
9. $\frac{x+12}{(x+1)^2(x-2)}$
10. $\frac{6x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 + x + 1}$
11. $\frac{2x^2 + 5x - 11}{x^2 + 2x - 3}$
12. $\frac{7+x}{(1+x)(1+x^2)}$

2.7.3 രേഖീയ അസമവാക്യങ്ങളെ ഗ്രാഫ് മുഖേന തെളിയിക്കൽ

$ax + by = c$ എന്ന ഒരു നേർരേഖാ കാർട്ടീഷ്യൻ തലത്തെ രണ്ടായി വിഭജിക്കുന്നു. ഓരോ ഭാഗവും ഒരു അർദ്ധതലമാകുന്നു. $x = c$ എന്ന ലംബരേഖ ഇടത്, വലുത് അർദ്ധ തലങ്ങളാൽ, $y = k$ എന്ന തിരശ്ചീനരേഖ മേൽ, കീഴ് അർദ്ധതലങ്ങളായി വിഭജിക്കുന്നു.

XI_Maths_Ch-2_V-1_Malayalam.indd 91 14-02-2023 16:44:09

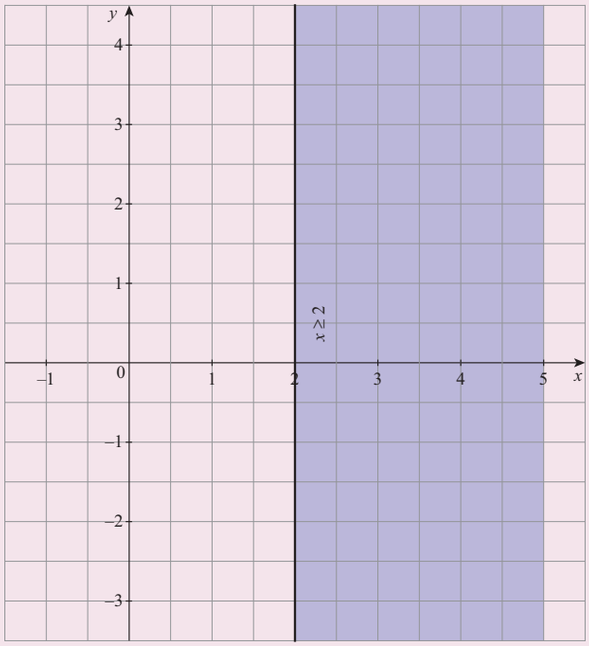
കാർട്ടീഷ്യൻ തലത്തിൽ ഉള്ളതും $ax + by = c$ യുടെ മേൽ ഇല്ലാത്തതുമായ ഒരു ബിന്ദു ആ രേഖ വിഭജിക്കുന്ന അർദ്ധതലങ്ങളിൽ ഏതെങ്കിലും ഒന്നിൽ മാത്രം കേന്ദ്രീകരിച്ച് $ax + by < c$, $ax + by > c$ എന്ന അസമവാക്യങ്ങളിൽ ഒന്നിനെമാത്രം പൂർത്തീകരിക്കുന്നു.

$ax + by < c$ എന്ന അസമവാക്യത്തെ കുറിക്കുന്ന അർദ്ധതലത്തെ കാണുന്നതിന് ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദു P-യെ അതിൽ പ്രതിസ്ഥാപിക്കണം. ആ സമവാക്യം പൂർത്തീകരിച്ചാൽ P എന്ന ബിന്ദു ആ അർദ്ധതലത്തിൽ അടങ്ങിയിട്ടുണ്ട് എന്ന് കരുതാം. പൂർത്തീകരിച്ചില്ല എങ്കിൽ ആ ബിന്ദു മറ്റേ അർദ്ധ തലത്തിലാണ് എന്ന് മനസ്സിലാക്കാം. $c \neq 0$ എങ്കിൽ p-യെ മൂലബിന്ദുവായി എടുക്കുന്നത് എളുപ്പമായിരിക്കും.

ഉദാഹരണം 2.28 $x \geq 2$ എന്ന അസമവാക്യം സൂചിപ്പിക്കുന്ന ഭാഗം നിഴലിട്ട് കാണിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം :

$x = 2$ എന്ന സമവാക്യത്തിനെ എടുക്കുക. അത് y അക്ഷത്തിൽ നിന്ന് 2 യൂണിറ്റ് ദൂരത്തിലും y അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായ രേഖയും ആകുന്നു. ഈ രേഖ കാർട്ടീഷ്യൻ തലത്തെ രണ്ടു ഭാഗങ്ങളായി പിരിക്കുന്നു. $(0,0)$-യെ സമവാക്യത്തിൽ പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ $0 \geq 2$ എന്നു കിട്ടുന്നു. ഇത് വാസ്തവമല്ല. അതുകൊണ്ട് മൂലബിന്ദു ഉൾപ്പെടാത്ത ഭാഗം $x \geq 2$ എന്ന അസമവാക്യത്തെ കുറിയ്ക്കുന്നു. ചിത്രത്തിൽ നിഴലിട്ട ഭാഗം അസമവാക്യത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണമാകുന്നു. $x \geq 2$ എന്ന് ആകയാൽ $x = 2$ എന്ന രേഖയിൻമേലുള്ള ബിന്ദുക്കളും അതിന്റെ നിർദ്ധാരണമാകുന്നു.

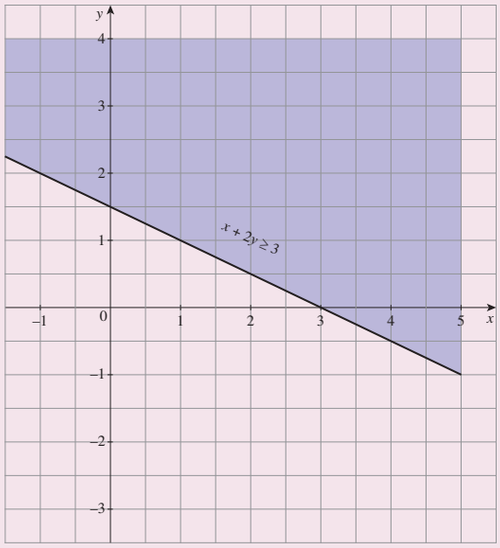


ഉദാഹരണം 2.29 $x + 2y > 3$ എന്ന അസമവാക്യം സൂചിപ്പിക്കുന്ന ഭാഗം നിഴലിട്ട് കാണിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$x + 2y = 3$ എന്ന രേഖ കാർട്ടീഷ്യൻ തലത്തെ രണ്ട് ഭാഗങ്ങളായി തിരിക്കുന്നു.

$x + 2y > 3$ സൂചിപ്പിക്കുന്ന അർദ്ധതലം കാണുന്നതിന് ഒരു ഭാഗത്തിലുള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദു പ്രതിസ്ഥാപിക്കേണ്ടതാണ്. അസമവാക്യത്തിൽ (0, 0)-യെ പ്രതിസ്ഥാപിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്നത് $0 > 3$ ആകുന്നു. ഇത് വാസ്തവമല്ല. അതുകൊണ്ട് മൂലബിന്ദു അടങ്ങാത്ത നിഴലിട്ട ഭാഗം അസമവാക്യത്തെ കുറിക്കുന്ന ഭാഗമാകുന്നു.



XI_Maths_Ch-2_V-1_Malayalam.indd 92 14-02-2023 16:44:10

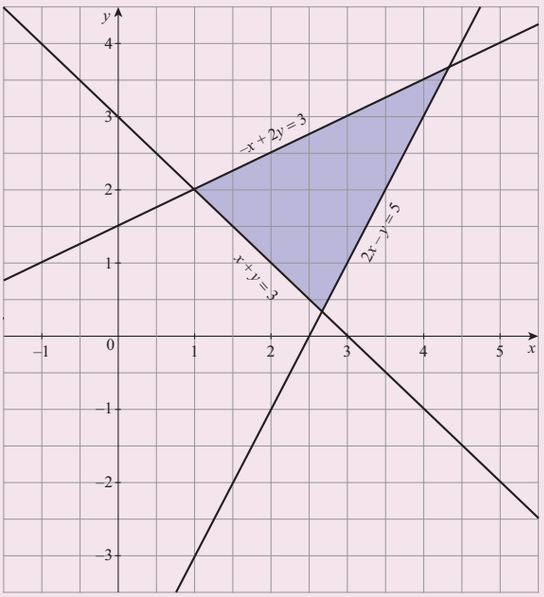
ഉദാഹരണം 2.30 $x + y \geq 3,\ 2x - y \leq 5$ കൂടാതെ $-x + 2y \leq 3$ എന്നീ അസമവാക്യങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണം ഗ്രാഫ് മുഖേന ചെയ്യുക.

നിർദ്ധാരണം :

രേഖയുടെ മേൽ ഉള്ള രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തിരിച്ചറിയാൻ സാധിച്ചാൽ ആ രേഖ വരയ്ക്കാൻ സാധിക്കും.

$x + y = 3$-ൽ (3, 0), (0, 3) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ അടങ്ങിയിരിക്കുന്നു എന്നുള്ളത് എളുപ്പത്തിൽ അറിയാൻ സാധിക്കും.

$x + y = 3,\ 2x - y = 5,\ -x + 2y = 3$ എന്നീ മൂന്നു രേഖകളും വരയ്ക്കുക..



ഇപ്പോൾ, (0, 0) $x + y \geq 3$-എന്ന അസമവാക്യത്തെ പൂർത്തീകരിക്കുന്നില്ല. അതുകൊണ്ട് (0, 0) അടങ്ങാത്ത $x + y = 3$ യുടെ അർദ്ധതലം $x + y \geq 3$ യുടെ നിർദ്ധാരണ ഗണമാകുന്നു.

ഇതുപോലെ, മൂലബിന്ദു ഉൾപ്പെടുന്ന $2x - y \leq 5$ ന്റെ അർദ്ധ തലം $2x - y \leq 5$ ന്റെ നിർദ്ധാരണ ഗണം ആകുന്നു.

കൂടാതെ, $-x + 2y \leq 3$ ന്റെ മൂലബിന്ദു അടങ്ങുന്ന അർദ്ധതലം $-x + 2y \leq 3$ യുടെ നിർദ്ധാരണ ഗണം ആകുന്നു.

മൂന്നു ഭാഗങ്ങൾക്കും പൊതുവായഭാഗം ഏകഘാത അസമവാക്യ ഗ്രൂപ്പിന്റെ നിർദ്ധാരണം ആകുന്നു.

അഭ്യാസം 2.10

താഴെ കാണുന്ന അസമവാക്യങ്ങൾ കുറിക്കുന്ന പ്രതലം കാണുക.

1. $x \leq 3y,\quad x \geq y.$
2. $y \geq 2x,\quad -2x + 3y \leq 6.$
3. $3x + 5y \geq 45,\quad x \geq 0, y \geq 0.$
4. $2x + 3y \leq 35,\quad y \geq 2,\ x \geq 5.$
5. $2x + 3y \leq 6,\quad x + 4y \leq 4,\quad x \geq 0,\quad y \geq 0.$
6. $x - 2y \geq 0,\quad 2x - y \leq -2,\quad x \geq 0,\quad y \geq 0.$
7. $2x + y \geq 8,\quad x + 2y \geq 8,\quad x + y \leq 6.$

XI_Maths_Ch-2_V-1_Malayalam.indd 93 14-02-2023 16:44:13

2.8 ഘാതാങ്കവും റാഡിക്കലും

ഘാതാങ്കത്തെക്കുറിച്ച് ആദ്യം പഠിക്കാം.

2.8.1 ഘാതാങ്കങ്ങൾ

$n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, എങ്കിൽ, $a^n = a \cdot a \cdots a$ (n തവണ) m ഒരു ഋണ പൂർണ്ണാങ്കവും കൂടാതെ വാസ്തവിക സംഖ്യയായ $a \neq 0$ എങ്കിൽ, $a^m = \dfrac{1}{a^{-m}}$.

ഏതൊരു $a \neq 0$–യ്ക്കും $\dfrac{a}{a} = a^{1-1} = a^0 = 1$ ആകുന്നു.

താഴെ കാണുന്ന ഗുണങ്ങളെ എളുപ്പത്തിൽ മനസ്സിലാക്കാം.

ഘാതാങ്കങ്ങളുടെ ഗുണങ്ങൾ

i. $m, n \in \mathbb{Z}$ കൂടാതെ, $a \neq 0$ എങ്കിൽ, $a^m a^n = a^{m+n}$

ii. $m, n \in \mathbb{Z}$ കൂടാതെ, $a \neq 0$ എങ്കിൽ, $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

2.8.2 വർഗ്ഗമൂലങ്ങൾ

ചോദ്യം:

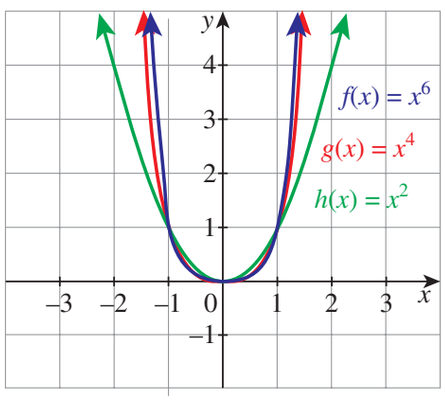
$a \neq 0$ ഉം, $r \in Q$–ഉം ആയാൽ a^r–നിർവചിക്കാൻ കഴിയുമോ?

ആദ്യം നമുക്ക് $r = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ എന്നത് പരിശോധിക്കാം.

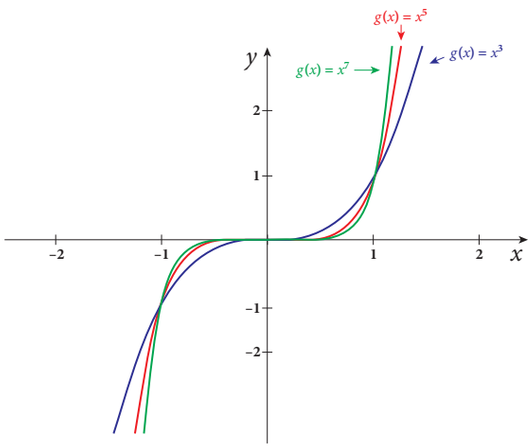
$y = a^{1/n}$ എന്ന് വരുന്നവിധത്തിൽ $y \in \mathbb{R}$ എന്നിരുന്നാൽ, $y^n = a$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

ഇത് അടിസ്ഥാനപരമായി $y = x^n$–ന്റെ (വ്യുൽക്രമ) ഫലനം കാണുന്നതിന് പ്രയോജനപ്പെടുന്നു. ഇവ വ്യക്തമായി അറിയാൻ താഴെകാണുന്ന ഗ്രാഫുകൾ പരിശോധിയ്ക്കാം.

(i) $f(x) = x^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$



(ii) $g(x) = x^{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$



മേലെ ഉള്ള ചിത്രങ്ങളിൽ നിന്ന്, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x^{2n+1}$ $n \in \mathbb{N}$ എന്നത് (1-1) ഉം ഓൺടുഫലനവും ആണ്. അതുകൊണ്ട്, $\mathbb{R}$–ൽ നിന്ന് $\mathbb{R}$–ലേക്ക് വ്യുൽക്രമ ഫലനം ഉണ്ട്. എന്നാൽ, $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $f(x) = x^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$, ഒരു ഓൺടു ഫലനമാണ്. എന്നാൽ (1-1) ഫലനമല്ല. എങ്കിൽപ്പോലും f ന്റെ മണ്ഡലത്തെ $[0, \infty)$ എന്ന്

XI_Maths_Ch-2_V-1_Malayalam.indd 94 14-02-2023 16:44:15

നിയന്ത്രിച്ചു നിറുത്തിയാൽ f എന്നത് *(1-1)* ഉം ഓൺടു ഉം ആകും. ഇത് ഒരു വാസ്തവിക സംഖ്യയുടെ n മൂലങ്ങൾ കാണുന്നതിന് പ്രയോജനപ്പെടുന്നു. ഇതിന് രണ്ടു നിലകൾ ഉണ്ട്.

നില 1: n ഒരു ഇരട്ടസംഖ്യയായിരുന്നാൽ.

$a < 0$ എങ്കിൽ, $y^n = a$ എന്നത് അർത്ഥശൂന്യമാണ്. അതുകൊണ്ട് , $a < 0$ എങ്കിൽ, y-നിലനിൽക്കില്ല.

$a > 0$ എന്ന് അനുമാനിച്ചാൽ. $x^n = a$ യുടെ ഒരു നിർദ്ധാരണം y എങ്കിൽ, $-y$ എന്നതും $x^n = a$ യുടെ നിർദ്ധാരണം ആകുന്നു.

നില 2: n ഒരു ഒറ്റസംഖ്യയെങ്കിൽമുകളിൽ പറഞ്ഞ പ്രശ്നങ്ങളൊന്നും ഇവിടെയില്ല

$y \in \mathbb{R}$–ന വിശിഷ്ടമായ് $x \in \mathbb{R}$ ഉണ്ടായിരിക്കുകയും $y = x^n$ ഉം ആയിരിക്കും.

മുകളിലുള്ള നിരീക്ഷണങ്ങളുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ വർഗ്ഗമൂലങ്ങളെ താഴെകാണുന്ന രീതിയിൽ നിർവ്വചിക്കാം.

നിർവചനം 2.2

(i) $n \in \mathbb{N}$, n ഒരു ഇരട്ടസംഖ്യ കൂടാതെ $b > 0$–യ്ക്ക് $a^n = b$ എന്ന് വരത്തക്കവിധം വിശിഷ്ടമായ $a > 0$ ഉണ്ടായിരിക്കും

(ii) $n \in \mathbb{N}$, n ഒരു ഒറ്റസംഖ്യ കൂടാതെ $b \in \mathbb{R}$, $a^n = b$ എന്ന് വരത്തക്കവിധം വിശിഷ്ടമായ $a \in \mathbb{R}$ ഉണ്ടായിരിക്കും.

രണ്ടിലും a, b–യുടെ n ാം മൂലം അഥവാ റാഡിക്കൽ എന്ന് വിളിക്കുന്നു. കൂടാതെ $b^{1/n}$ അല്ലെങ്കിൽ $\sqrt[n]{b}$ എന്നു അടയാളം കുറിക്കുന്നു.

കുറിപ്പ്: **(i)** $n = 2$ ആണെങ്കിൽ, n മൂലം ഇവിടെ വർഗ്ഗമൂലം ആകുന്നു. $n = 3$ എങ്കിൽ അത് ഘന മൂലം ആകുന്നു.

(ii) $x^2 = a^2$ സമവാക്യത്തിന് $x = a$ $x = -a$ എന്ന് രണ്ടുമൂലങ്ങൾ കിട്ടുന്നു. എന്നാൽ, $\sqrt{a^2} = |a|$.

(iii) ഓരോ പദങ്ങളെയും പ്രത്യേകം നിർവചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ മാത്രം മേലെകൊടുത്തിട്ടുള്ള ഘാതാങ്കങ്ങളുടെ ഗുണങ്ങൾ റാഡിക്കലുകൾക്കും യോജിക്കുന്നതാണ്.

(iv) $n \in \mathbb{N}$ കൂടാതെ $a \neq 0$ എങ്കിൽ,

$$(a^n)^{1/n} = \begin{cases} |a|, & n \text{ ഒരു ഇരട്ട സംഖ്യ എങ്കിൽ} \\ a \text{ എങ്കിൽ}, n \text{ ഒരു ഒറ്റസംഖ്യ എങ്കിൽ} \end{cases}$$

ഉദാഹരണമായി,

$\sqrt[4]{(-2)^4} = 16^{1/4} = 2$, $343^{1/3} = 7$ കൂടാതെ $(-1000)^{1/3} = -10$

പരിമേയ സംഖ്യ $r = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, കൂടാതെ, (m, n)–ന്റെ ഉ.സാ.ഘ. = 1 കൂടാതെ $a > 0$.

എങ്കിൽ, $a^r = a^{m/n} = (a^{1/n})^m$ എന്ന് നിർവചിക്കാം.

ഉദാഹരണമായി, $49^{3/2} = (49^{1/2})^3 = 7^3 = 343$. എന്നാൽ, $(-49)^{3/2}$–ന് വാസ്തവിക സംഖ്യാ സമ്പ്രദായത്തിൽ യാതൊരു അർത്ഥവുമില്ല. എന്തെന്നാൽ, $x^2 = (-49)^3$–പൂർത്തിചെയ്യുന്ന ഒരു വാസ്തവിക സംഖ്യ ഇല്ല.

XI_Maths_Ch-2_V-1_Malayalam.indd 95 14-02-2023 16:44:17

2.8.3 ഘാതാങ്ക ഫലനം

ഏതൊരു $a > 0$–യ്ക്കും $x \in \mathbb{R}$ നും a^x നെ നിർവ്വചിക്കാം. $a = 1$ എങ്കിൽ, $1^x = 1$ എന്ന് നിർവ്വചിക്കാം. അതുകൊണ്ട്, $x \in \mathbb{R}$ കൂടാതെ $0 < a \neq 1$ എന്നുള്ളപ്പോൾ a^x നെ കണക്കിലെടുക്കാം. ഇവിടെ, a^x എന്നത് ആധാരം a ഉള്ള ഘാതാങ്ക ഫലനമാകുന്നു. അതുപോലെ $a < 0$ കൂടാതെ $x = \frac{1}{m}$, $m \in \mathbb{N}$, ആണെങ്കിൽ പോലും, a^x നിർവ്വചിക്കപ്പെടില്ല. അതുകൊണ്ട്, $a > 0$ എന്നെടുക്കാം. അതുപോലെ, $x \in \mathbb{R}$–ന് $a^x > 0$.

ഘാതാങ്ക ഫലനങ്ങളുടെ ഗുണങ്ങൾ

എല്ലാ $a, b > 0$ കൂടാതെ $a \neq 1 \neq b$

(i) $a^{x+y} = a^x a^y$ എല്ലാ $x, y \in \mathbb{R}$

(ii) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ എല്ലാ $x, y \in \mathbb{R}$

(iii) $(a^x)^y = a^{xy}$ എല്ലാ $x, y \in \mathbb{R}$

(iv) $(ab)^x = a^x b^x$ എല്ലാ $x, y \in \mathbb{R}$

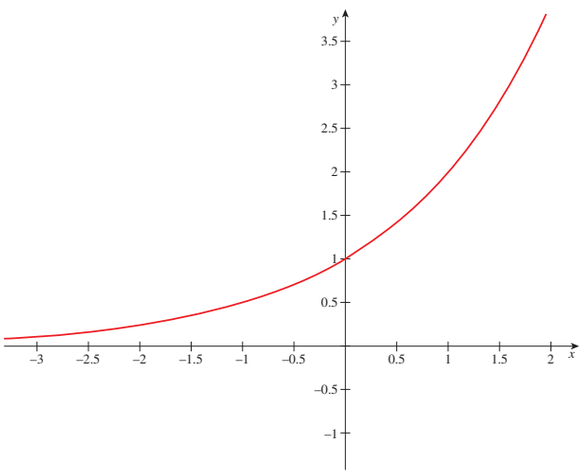
(v) $a^x = 1 \iff x = 0$

1. $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, $a = 2$ കണക്കിലെടുക്കാം

ഇപ്പോൾ, $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$. f ഒരു (1-1)കൂടാതെ ഓൺടു ഫലനം എന്ന് കാണിയ്ക്കാം.

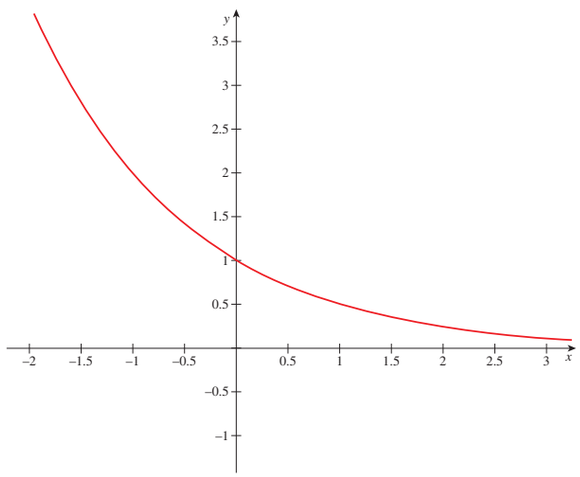
ഏതെങ്കിലും $u, v \in \mathbb{R}$–ന് $f(u) = f(v)$ എന്നെടുക്കാം. എങ്കിൽ, $2^u = 2^v \Rightarrow \frac{2^u}{2^v} = 1 \Rightarrow 2^{u-v} = 1$.

അതുകൊണ്ട്, $u - v = 0 \Rightarrow u = v$. f ഒരു (1-1) ഫലനം ആകുന്നു.



$f(x) = 2^x$

ചിത്രം 2.7



$f(x) = \frac{1}{2^x}$

ചിത്രം 2.8

XI_Maths_Ch-2_V-1_Malayalam.indd 96 14-02-2023 16:44:20

ഗ്രാഫിൽ നിന്ന് വ്യക്തമാണ് x ന്റെ മൂല്യം ഉയരുന്തോറും $f(x) = 2^x$–ന്റെ മൂല്യവും കൂടുന്നു കൂടാതെ f–ന്റെ രംഗം $(0, \infty)$ ആകുന്നു. ഇവിടെ, $2^0 = 1$ എല്ലാ $x > 0$–യ്ക്കും $2^x > 1$ എന്ന് കിട്ടുന്നു. കൂടാതെ $x < 0$–യ്ക്കും $2^x < 1$ എന്നും കിട്ടുന്നു. $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$. ഒരു ഓൺടു ഫലനം ആണ്.

2. $a = \frac{1}{2}$ എന്നെടുക്കുക. $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^x}, \quad x \in \mathbb{R}$.

ഗ്രാഫിൽ നിന്ന് വ്യക്തമാകുന്നത് x കൂടുമ്പോൾ, $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$–ന്റെ മൂല്യം കുറയുന്നു. കൂടാതെ $g(\mathbb{R}) = (0, \infty)$. കൂടാതെ, $g(0) = 1$ എല്ലാ $x < 0$–യ്ക്കും $g(x) > 1$ കൂടാതെ എല്ലാ $x > 0$–യ്ക്കും $g(x) < 1$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

പരാമർശം :

മുകളിൽ പറഞ്ഞവയിൽ നിന്ന് $f(x) = a^x$, എന്ന ഘാതാങ്കഫലനം ഏതൊരു ആധാരത്തിലും $0 < a \neq 1$ (1–1) ഉം ഓൺടുവുമായിരിക്കും. അതിന്റെ മണ്ഡലം $\mathbb{R}$ സഹമണ്ഡലം $(0, \infty)$ ആകുന്നു.

ഒരു പ്രത്യേക ഘാതാങ്കഫലനം

എല്ലാ ഘാതാങ്കഫലനത്തെക്കാൾ, $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ എന്ന ഫലനം പ്രാധാന്യമർഹിക്കുന്നു. എന്തെന്നാൽ ഇത്, ഗണിതം, ശാസ്ത്രം, മറ്റും സാമ്പത്തികം എന്നിവയിൽ പ്രയോജനപ്പെടുത്തുന്നു. e എന്നത് എന്ത്? താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള കൂട്ടുപലിശ കണക്ക് സ്ഥിരാങ്കം e-യുടെ മൂല്യത്തെ തരുന്നു.

വിവരണം

കൂട്ടുപലിശ : P മൂലധനം, $r = \frac{\text{പലിശ}}{100}$, n എന്നത് ഒരു വർഷത്തിൽ പലിശ കണക്കാക്കുന്നതിനെ കുറിയ്ക്കുന്നു t എന്നത് വർഷത്തെ കുറിക്കുന്നു. അതുകൊണ്ട്, $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ ഇത് t വർഷങ്ങളിൽ കിട്ടുന്ന മൊത്ത തുക കാണുന്ന സൂത്രം. $n = 4$ എങ്കിൽ അത് കാൽ വർഷത്തിന്റെ കൂട്ടുപലിശയാകുന്നു.

(അതായത്, 3 മാസത്തിലൊരിക്കൽ പലിശ കണക്കാക്കി അത് മുതലിനോട് (അസൽ) ചേർക്കുന്നു). $n = 12$ എങ്കിൽ മാസ കൂട്ടുപലിശയാകുന്നു. $n = 365$ എങ്കിൽ അത് ദിവസ കൂട്ടുപലിശയാകുന്നു. ഒരു മണിക്കൂറിന്റെയോ ഒരു നിമിഷത്തിന്റെയോ കൂട്ടുപലിശ കണക്കാക്കാൻ സാധിക്കും. p, r എന്നിവയ്ക്ക് മാറ്റം വരാതെകൂട്ടുപലിശ കണക്കാക്കുന്ന തവണ അധികരിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന മൊത്തതുക അധികരിക്കും എന്നത് നമുക്ക്അറിയാം. ആദ്യമായി $P = 1$, $r = 1$ കൂടാതെ $t = 1$ എന്ന് കരുതാം. $A_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ എന്ന് ലഭിയ്ക്കും. ഇവിടെ n വലുതാകുന്തോറും തുകയും എത്ര വലുതാകും എന്ന് നാം മനസ്സിലാക്കണം. അതുകൊണ്ട്, n = 10, 100, 10000, 100000, 100000000 എന്ന വെവ്വേറെ മൂല്യങ്ങൾക്ക് A യുടെ മൂല്യം പട്ടികയിൽ കാണാം.

n	10	100	10000	100000	100000000
A_n	2.593742460	2.704813829	2.718145927	2.718268237	2.718281815

XI_Maths_Ch-2_V-1_Malayalam.indd 97 14-02-2023 16:44:22

n–ന്റെ മൂല്യം അധികരിക്കുമ്പോൾ

A_n–ന്റെ മൂല്യം 2.718281815 . . . –യോടു അടുക്കുന്നു.

A_n ന്റെ മൂല്യം e – എന്ന് അപരിമേയ സംഖ്യയായ 2.718281815-യോട് അടുക്കുന്നു. അതുകൊണ്ട് കൂട്ടുപലിശയുടെ സൂത്രം $A = Pe^{rt}$ എന്ന് കണക്കാക്കാം.

ഇവിടെ പലിശനിരക്ക് r, മുതൽ P കൂടാതെ ഒരു വർഷത്തിന് t തവണ പലിശ കണക്കാക്കുന്നു. ഇത് ആവർത്തന കൂട്ടുപലിശ എന്ന് പറയാം.

ഉദാഹരണം 2.31 (i) ലഘൂകരിക്കുക $(x^{1/2}\ y^{-3})^{1/2}$, $x, y \geq 0$ (ii) ലഘൂകരിക്കുക $\sqrt{x^2 - 10x + 25}$

നിർദ്ധാരണം :

(i) $x, y \geq 0$ $\quad (x^{1/2}\ y^{-3})^{1/2} = \dfrac{x^{1/4}}{y^{3/2}}$

(ii) $\quad \sqrt{x^2 - 10x + 25} = \sqrt{(x-5)^2} = |x-5|$

കുറിപ്പ്: **(i)** $(x^{1/4})^4 = x$ പക്ഷെ, $(y^4)^{1/4} = |y|$.

x ഒരു ധനസംഖ്യ എങ്കിൽ മാത്രമേ, $x^{1/4}$ നിർവചിക്കപ്പെടുന്നുള്ളൂ. എന്നാൽ $y < 0$, ആണെങ്കിൽ പോലും y^4 നിർവചിക്കപ്പെടുന്നു. $(y^4)^{1/4}$ ഒരു ധനസംഖ്യയും അതിന്റെ നാലാം ഘാതം y^4 ന് തുല്യമാണ്. അപ്പോൾ.

(ii) $(x^8 \cdot y^4)^{1/4} = x^2|y|$

(iii) u, v, b പരിമേയസംഖ്യകൾ എന്നെടുക്കുക. b ഒരു ധനസംഖ്യ, അവയൊന്നും പരിമേയ സംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗങ്ങൾ അല്ല. അതുകൊണ്ട്, $u + v\sqrt{b}$, $u - v\sqrt{b}$ എന്നിവ കോൺജുഗേറ്റുകളാകുന്നു. $(u + v\sqrt{b})(u - v\sqrt{b}) = u^2 - bv^2$ എന്നത് പരിമേയമാണ്. ഒരു വ്യംജ്ഞകത്തിന്റെ ഛേദം $u + v\sqrt{b}$ എന്നിരുന്നാൽ $u - v\sqrt{b}$ കൊണ്ട് അംശവും ഛേദവും ഗുണിച്ചാൽ ഛേദത്തിൽ പരിമേയസംഖ്യകിട്ടുന്നു.

(iv) $(u\sqrt{a} - v\sqrt{b})\ (u\sqrt{a} + v\sqrt{b}) = u^2a - v^2b$ പ്രയോജനപ്പെടുത്തി, $u\sqrt{a} + v\sqrt{b}$ ഛേദത്തിലായിരിക്കുമ്പോൾ ലഘൂകരിക്കാം.

ഉദാഹരണം 2.32 $\dfrac{\sqrt{5}}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})}$ ഇതിന്റെ ഛേദത്തെ പരിമേയ സംഖ്യയാകുക.

നിർദ്ധാരണം :

ഛേദത്തെയും അംശത്തെയും $(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ കൊണ്ട് ഗുണിക്കുക,

$$\frac{\sqrt{5}}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})\ (\sqrt{6} - \sqrt{2})} = \frac{(\sqrt{30} - \sqrt{10})}{4}$$

XI_Maths_Ch-2_V-1_Malayalam.indd 98 14-02-2023 16:44:24

ഉദാഹരണം 2.33 $7-4\sqrt{3}$ വർഗ്ഗമൂലം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം :

$$\sqrt{7-4\sqrt{3}} = a+b\sqrt{3} \text{ എന്നെടുക്കുക.}$$

ഇവിടെ, a, b എന്നിവ പരിമേയസംഖ്യകൾ.

ഇരുവശവും വർഗ്ഗമാക്കുകയാണെങ്കിൽ,

$$7-4\sqrt{3} = a^2+3b^2+2ab\sqrt{3} \text{ എന്ന് കിട്ടുന്നു.}$$

അതുകൊണ്ട്, $a^2+3b^2 = 7$ കൂടാതെ $2ab=-4$

അതുകൊണ്ട്, $a = \frac{-2}{b}$

$a^2+3b^2 = 7$-ൽ നിന്ന്, $\left(\frac{-2}{b}\right)^2+3b^2=7$ എന്നെടുക്കും.

$\Rightarrow$ $\frac{4}{b^2}+3b^2 = 7$ അല്ലെങ്കിൽ $3b^4-7b^2+4=0$

b^2–ന് നിർദ്ധാരണം കാണുക, $b^2 = \frac{(7\pm\sqrt{49-48})}{6}$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

$\Rightarrow$ $b^2 = 1$ അല്ലെങ്കിൽ $b^2=\frac{4}{3}$

അതുകൊണ്ട്, $b = \pm 1$ അല്ലെങ്കിൽ $b=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$

b ഒരു പരിമേയ സംഖ്യ ആയതുകൊണ്ട്, $b=\pm 1$.

അപ്പോൾ, b–കൊണ്ട് ലഭിക്കുന്ന a–യുടെ മൂല്യങ്ങൾ ± 2 .

$\sqrt{7-4\sqrt{3}}>0$ എന്നതുകൊണ്ട്, $\sqrt{7-4\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

കുറിപ്പ്: u, v പരിമേയ സംഖ്യകളായ $u+v\sqrt{b}$ യുടെ വർഗ്ഗമൂലത്തെ, x, y എന്ന പരിമേയ സംഖ്യകൾ ഉള്ള $x+y\sqrt{b}$ എന്ന രൂപത്തിൽ എപ്പോഴും എഴുതാൻ കഴിയില്ല, ഉദാഹരണമായി $1+\sqrt{2}$ യുടെ വർഗ്ഗമൂലം a, b എന്നീ പരിമേയസംഖ്യകളോടു കൂടി $a+b\sqrt{2}$ രീതിയിൽ എഴുതാൻ സാധ്യമല്ല.

അഭ്യാസം 2.11

1. ലഘൂകരിക്കുക.

   (i) $(125)^{\frac{2}{3}}$ (ii) $16^{\frac{-3}{4}}$ (iii) $(-1000)^{\frac{-2}{3}}$

   (iv) $\left(3^{-6}\right)^{\frac{1}{3}}$ (v) $\frac{27^{\frac{-2}{3}}}{27^{\frac{-1}{3}}}$

2. മൂല്യം കാണുക : $\left(\left((256)^{-1/2}\right)^{-1/4}\right)^3$

XI_Maths_Ch-2_V-1_Malayalam.indd 99 14-02-2023 16:44:26

3. $(x^{1/2}+x^{-1/2})^2=\frac{9}{2}$ എങ്കിൽ, $x>1$–നു $(x^{1/2}-x^{-1/2})$–ന്റെ മൂല്യം കാണുക.

4. ചുരുക്കുക: $\frac{3^{2n}9^2 3^{-n}}{3^{3n}}=27$ ശേഷം n–ന്റെ മൂല്യം കാണുക.

5. ഗോളാകൃതിയിലുള്ള ജലസംഭരണിയുടെ വ്യാപ്തം $\frac{32\pi}{3}$ എങ്കിൽ വ്യാസാർദ്ധം കാണുക.

6. : $\frac{7+\sqrt{6}}{3-\sqrt{2}}$ ഛേദത്തെ പരിമേയമാക്കി ലഘൂകരിക്കുക

7. ലഘൂകരിക്കുക $\frac{1}{3-\sqrt{8}}-\frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}-2}$

8. $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ എങ്കിൽ, $\frac{x^2+1}{x^2-2}$–മൂല്യം കാണുക.

2.9 ലോഗരിതം

നമ്മൾ കണ്ടതാണ് $0<a\neq 1$ എന്ന ആധാരത്തിൽ ഘാതാങ്കഫലനം $f(x)=a^x$, $\mathbb{R}$ ൽ നിർവ്വഹിച്ചിട്ടുണ്ടെന്നും അതിന്റെ രംഗം $(0,\infty)$ ആണെന്നും അതുപോലെ തന്നെ $f(x)$ ഒരു ബൈജൂഷൻ ആണെന്നും അതിന് വ്യുൽക്രമം ഉണ്ടെന്നും. ഈ വ്യുൽക്രമ ഫലനത്തെ നമ്മൾ ലോഗരിതമിക് ഫലനം എന്ന് വിളിക്കുന്നു. അതിനെ $\log_a(\cdot)$ കൊണ്ട് അടയാളപ്പെടുത്തുന്നു. ഇതിനെ കുറിച്ച് പിന്നീട് ചർച്ച ചെയ്യാം. ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടത് $f(x)$, x നെ $y=a^x$ ലേക്ക് മാറ്റുകയാണെങ്കിൽ $\log_a(\cdot)$, y യെ x ലേക്ക് മാറ്റും.

അതായത് $y=a^x$ ഉം $\log_a y=x$ ഉം തുല്യമാണ്. ഇവിടെ $0<a\neq 1$.

ഉദാഹരണമായി $3^4=81$ ആയത് കൊണ്ട് $\log_3(81)=4$. മറ്റൊരു തരത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ ഒരു നിശ്ചിത a യ്ക്കും തന്നിട്ടുള്ള വാസ്തവിക സംഖ്യ y യ്ക്കും $a^x=y$ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്ന ഘാതാങ്കം x ലോഗതികം വഴി ലിയ്ക്കുന്നു. ഒരു കുറിപ്പിട്ട നിക്ഷേപം പ്രതീക്ഷിക്കുന്ന തുക കിട്ടുന്നതിന് എത്ര വർഷങ്ങൾ വേണ്ടിവരും ?എന്നതുപോലുള്ള ഇപ്പോൾ നടക്കുന്ന കണക്കുകളെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നതിന് സാധിക്കുന്നു. എളിയ, അല്ലെങ്കിൽ കഠിനമായ സംഖ്യകളെ ഗുണിക്കുന്നതിനും ലോഗരിതം പ്രയോജനപ്പെടുന്നു.

കുറിപ്പ്:

(i) ഘാതാങ്കഫലനം a^x എല്ലാ $.x\in\mathbb{R}$ നും നിർവ്വചിച്ചിട്ടുണ്ട്. മാത്രവുമല്ല $a^x>\mathbf{0}$ അതുകൊണ്ട് $\log_a(\cdot)$ എന്നത് ധനവാസ്തവിക സംഖ്യകൾക്ക് മാത്രമാണ് നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുള്ളത്.

(ii) ഏതൊരു ആധാരം a–യ്ക്കും $a^0=1$ അതിനാൽ ഏതൊരു ആധാരം a യ്ക്കും $\log_a(1)=0$ ആകുന്നു.

2.9.1. ലോഗരിഥത്തിന്റെ ഗുണങ്ങൾ

(i) $x\in(0,\infty)$, $a^{\log_a x}=x$ കൂടാതെ $\log_a(a^y)=y$. ഇവിടെ $y\in\mathbb{R}$.

(ii) $x,y>0$ എങ്കിൽ, $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$ (ഗുണന നിയമം)

(iii) $x,y>0$ എങ്കിൽ, $\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y$ (ഹരണ നിയമം)

(iv) $x>0, r\in\mathbb{R}$ എങ്കിൽ, $\log_a x^r=r\log_a x$ (ഘാതനിയമം)

(v) $x>0$ കൂടാതെ a,b, ആധാരങ്ങൾ എങ്കിൽ, $\log_b x=\frac{\log_a x}{\log_a b}$ (ആധാരമാറ്റ നിയമം)

XI_Maths_Ch-2_V-1_Malayalam.indd 100 14-02-2023 16:44:29

തെളിവ് :

ആധാരം a ഉള്ള ഘാതാങ്ക ഫലനവും കൂടാതെ ആധാരം a യുള്ള ലോഗരിഥമിക് ഫലനവും പരസ്പരം വ്യുൽക്രമത്തിലായതിനാൽ,

(i) നിർവ്വചന പ്രകാരം പിന്തുടരുന്നു

(ii) $x, y > 0$, $\log_a x = u$, $\log_a y = v$ കൂടാതെ $\log_a (xy) = w$ എന്നെടുക്കുക.

ഘാതാങ്ക ഫലനങ്ങളായി എഴുതുമ്പോൾ, $a^u = x$, $a^y = y$ കൂടാതെ $a^w = xy$

$$a^w = xy = a^u a^v = a^{u+v} \text{ അതുകൊണ്ട്, } w = u + v$$

അതുകൊണ്ട്, $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$.

(iii) $\log_a x = u$, $\log_a y = v$, കൂടാതെ $\log_a \frac{x}{y} = w$.

അതുകൊണ്ട്, $a^u = x$, $a^v = y$ കൂടാതെ $a^w = \frac{x}{y}$

അതുകൊണ്ട്, $a^w = \frac{x}{y} = \frac{a^u}{a^v} = a^{u-v} \Rightarrow w = u - v$

അപ്പോൾ ലഭിക്കുന്നത്, $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

(iv) $\log_a x = u$ എന്നെടുക്കുക.

അപ്പോൾ, $a^u = x$, $x^r = (a^u)^r = a^{ru}$

അപ്പോൾ, $\log_a x^r = ru = r \log_a x$

(v) $\log_b x = v$ എന്നെടുക്കുക. $b^v = x$.

രണ്ടുവശവും ആധാരം a ഉള്ള ലോഗരിതം എടുക്കുമ്പോൾ, $\log_a b^v = \log_a x$

ഘാതാങ്കനിയമത്തിൽ നിന്ന്, $\log_a b^v = v \log_a b$

അപ്പോൾ, $v \log_a b = \log_a x$

അപ്പോൾ, $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$, $b > 0$

പരാമർശം :

(i) $a = 10$–ന്റെ ലോഗരിഥ ഫലനം $\log_{10} x$ ആകുന്നു. ഇത് സാധാരണ ലോഗരിഥം എന്നു പറയുന്നു.

(ii) $a = e$ (ഒരു അപരിമേയ സംഖ്യ ഏകദേശ മൂല്യം 2.718) എങ്കിൽ, $\log_e x$ എന്നത് നേച്ചുറൽ ലോഗരിതം എന്നു പറയുന്നു. ഇത് $\ln x$ എന്ന് കുറിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. മേലെ കുറിപ്പിട്ട ലോഗരിതഫലനങ്ങൾ ശാസ്ത്രത്തിലും ഇൻജിനിയറിംഗിലും പ്രയോജനപ്പെടുന്നു. നേച്ചുറൽ ലോഗരിതം സാധാരണയായി കാണപ്പെടുന്നു. $\log_e x$–നെ $\log x$ എന്നും എഴുതാം.

(iii) $a = 2$ എങ്കിൽ ലോഗരിതമിക് ഫലനം $\log_2 x$ ഇതിനെ ബൈനറി ലോഗരിതം എന്നു പറയുന്നു. ഇത് കമ്പ്യൂട്ടർ സയൻസ് ശാഖയിൽ പ്രയോജനപ്പെടുന്നു.

XI_Maths_Ch-2_V-1_Malayalam.indd 101 14-02-2023 16:44:32

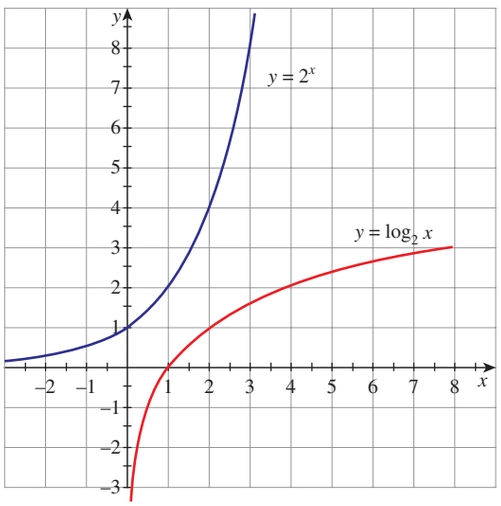
(iv) $\log_a 35 = \log_a(7 * 5) = \log_a 7 + \log_a 5$

$$\log_a \frac{50}{3} = \log_a 50 - \log_a 3$$

$$\log_a 22^x = x \log_a 22$$

$$\log_5 50 = \frac{\log_{10} 50}{\log_{10} 5}$$

(v) ലോഗരിതമിക് ഫലനം, ഘാതാങ്കഫലനം എന്നിവയുടെ ഗ്രാഫ് താഴെ കാണുന്നു.



ചിത്രം 2.9

ഉദാഹരണം 2.34 1728 നു ആധാരം $2\sqrt{3}$ ഉള്ള ലോഗരിതം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം :

$$\log_{2\sqrt{3}} 1728 = x \ .$$

അപ്പോൾ, $(2\sqrt{3})^x = 1728 = 2^6 3^3 = 2^6(\sqrt{3})^6$

അതുകൊണ്ട്, $(2\sqrt{3})^x = (2\sqrt{3})^6 \Rightarrow x = 6$ അതുകൊണ്ട്, $\log_{2\sqrt{3}} 1728 = 6$

ഉദാഹരണം 2.35 324 ന് ആധാരം a ഉള്ള ലോഗരിത മൂല്യം 4 എങ്കിൽ a-യുടെ മൂല്യം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം :

$\log_a 324 = 4$ എന്ന് കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

$a^4 = 324 = 3^4(\sqrt{2})^4$

അതുകൊണ്ട്, $a = 3\sqrt{2}$

XI_Maths_Ch-2_V-1_Malayalam.indd 102 14-02-2023 16:44:34

ഉദാഹരണം 2.36 $\log\frac{75}{16} - 2\log\frac{5}{9} + \log\frac{32}{243} = \log 2$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം :

ലോഗരിത നിയമങ്ങളെ പ്രയോജനപ്പെടുത്തിയാൽ,

$$\begin{aligned}\log\frac{75}{16} - 2\log\frac{5}{9} + \log\frac{32}{243} &= \log 75 - \log 16 - 2\log 5 + 2\log 9 + \log 32 - \log 243 \\ &\quad \text{(ഹരണ നിയമം അനുസരിച്ച്)} \\ &= \log 3 + \log 25 - \log 16 - \log 25 + \log 81 \\ &\qquad + \log 16 + \log 2 - \log 81 - \log 3 \\ &= \log 2\end{aligned}$$

ഉദാഹരണം 2.37 $\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x = \frac{7}{2}$ എങ്കിൽ, x ന്റെ വില കാണുക.

നിർദ്ധാരണം :

$x > 0$ എന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക.

$$\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x = \frac{7}{2} \Rightarrow \frac{1}{\log_x 2} + \frac{1}{\log_x 4} + \frac{1}{\log_x 16} = \frac{7}{2} \text{ (ആധാര മാറ്റ നിയമം)}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{4a} = \frac{7}{2}, \text{ ഇവിടെ } a = \log_x 2, \text{ അതായത്, } \frac{7}{4a} = \frac{7}{2}$$

$$a = \frac{1}{2} \text{ കൂടാതെ } \log_x 2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x^{1/2} = 2.$$

അതുകൊണ്ട്, $x = 2^2 = 4$

ഉദാഹരണം 2.38 നിർദ്ധാരണം കാണുക: $x^{\log_3 x} = 9$

നിർദ്ധാരണം :

$\log_3 x = y$ എന്നെടുക്കുക.

$x = 3^y$ കൂടാതെ $3^{y^2} = 9$

അതുകൊണ്ട്, $y^2 = 2,\ y = \sqrt{2},\ -\sqrt{2}$

$x = 3^{\sqrt{2}},\ 3^{-\sqrt{2}}$

ഉദാഹരണം 2.39 $\log_3 5 \log_{25} 27$ മൂല്യം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം :

$$\begin{aligned}\log_3 5 \log_{25} 27 &= \log_3 5 \log_{25} 3^3 \\ &= \log_3 5 \times 3 \log_{25} 3 \text{ (ഘാതാങ്ക നിയമം)} \\ &= 3\log_{25} 5 = \frac{3}{\log_5 25} = \frac{3}{2\log_5 5} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

XI_Maths_Ch-2_V-1_Malayalam.indd 103 14-02-2023 16:44:35

ഉദാഹരണം 2.40 $\log_{10}2 = 0.30103$, $\log_{10}3 = 0.47712$ (ഏകദേശ മൂല്യം) എങ്കിൽ, $2^8 \cdot 3^{12}$ ൽ എത്ര അക്കങ്ങൾ ഉണ്ട്? എന്നു കാണുക.

തെളിവ് :

$N = 2^8 3^{12}$–ഇതിന് $n+1$ അക്കങ്ങൾ ഉണ്ട് എന്നെടുക്കുക.

അപ്പോൾ N–നെ $10^n \times b$ എന്ന രീതിൽ എഴുതാം. ഇവിടെ $1 \le b < 10$.

ആധാരം 10 വരുന്ന ലോഗരിതം രണ്ടു വശവും എടുക്കുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്നത്,

$$\log_{10}N = \log(10^n b) = n\log 10 + \log b = n + \log b .$$

മറുവശത്ത് $\log_{10}N = \log 2^8 3^{12} = 8\log 2 + 12\log 3 = 8 \times 0.30103 + 12 \times 0.47712 = 8.13368$

അപ്പോൾ, $n + \log b = 8.13368$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

$1 \le b < 10$ എന്നതുകൊണ്ട് അക്കങ്ങളുടെ എണ്ണം 9.

അഭ്യാസം 2.12

1. $b > 0$ കൂടാതെ $b \neq 1$ എങ്കിൽ, $y = b^x$–നെ ലോഗരിതമിക് രൂപത്തിൽ എഴുതുക. കൂടാതെ ഈ ലോഗരിത ഫലനത്തിന്റെ മണ്ഡലവും രംഗവും എഴുതുക.

2. മൂല്യം കാണുക : $\log_9 27 - \log_{27} 9$

3. $\log_8 x + \log_4 x + \log_2 x = 11$–നിർദ്ധാരണം കാണുക.

4. $\log_4 2^{8x} = 2^{\log_2 8}$ –നിർദ്ധാരണം കാണുക.

5. $a^2 + b^2 = 7ab$ എങ്കിൽ, $\log\frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

6. $\log\frac{a^2}{bc} + \log\frac{b^2}{ca} + \log\frac{c^2}{ab} = 0$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

7. $\log_{10}2 + 16\log_{10}\frac{16}{15} + 12\log_{10}\frac{25}{24} + 7\log_{10}\frac{81}{80} = 1$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

8. $\log_{a^2}a \log_{b^2}b \log_{c^2}c = \frac{1}{8}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

9. $\log a + \log a^2 + \log a^3 + \cdots + \log a^n = \frac{n(n+1)}{2}\log a$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

10. $\frac{\log x}{y-z} = \frac{\log y}{z-x} = \frac{\log z}{x-y}$ എങ്കിൽ, $xyz = 1$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

11. $\log_2 x - 3\log_{1/2} x = 6$–നിർദ്ധാരണം കാണുക.

12. $\log_{5-x}(x^2 - 6x + 65) = 2$–നിർദ്ധാരണം കാണുക.

XI_Maths_Ch-2_V-1_Malayalam.indd 104 14-02-2023 16:44:37

2.10 ദൈനംദിന ജീവിതത്തിൽ ബഹുപദവ്യംജ്ഞകത്തിന്റെ പങ്ക്

ദൈനംദിന ജീവിതത്തിൽ ബീജഗണിതം പല തരത്തിൽ നമുക്ക് പ്രയോജനപ്പെടുന്നു. നിത്യജീവിതത്തിൽ സാമ്പത്തിക ബഡ്ജറ്റ് തയ്യാറാക്കുന്നതിന് ബീജഗണിതം പ്രയോജനപ്പെടുന്നു. ബാങ്കുകളിൽ പലിശ നിരക്ക് കണക്കാക്കുന്നതിനും കടം വാങ്ങുന്ന തുക തിരിച്ചടക്കേണ്ട തവണകളിലെ തുക കണക്കിടുന്നതിനും ബീജഗണിതം പ്രയോജനപ്പെടുന്നു. സാമ്പത്തിക വളർച്ചയുടെ പുരോഗതി മനസ്സിലാക്കുന്നതിന് ബീജഗണിതം പ്രയോജനപ്പെടുന്നു. ഒരാളുടെ ഉയരം, അമിതവണ്ണം എന്നിവ നിയന്ത്രിക്കുന്നതിനും ആവശ്യമായ ആഹാര ക്രമീകരണത്തിനും ബീജഗണിതം ഉപയോഗപ്പെടുന്നു. ഒരാളുടെ വയസ്സ്, ശരീര ഘടന എന്നിവയ്ക്കനുയോജ്യമായ മരുന്നുകൾ ക്രമീകരിക്കുന്നതിന് ആരോഗ്യപ്രവർത്തകർക്ക് ബീജഗണിതം പ്രയോജനപ്പെടുന്നു. റോഡുകൾ, പാലങ്ങൾ, ഗുഹകൾ നിർമ്മിക്കുന്നതിനും ഇൻജിനീയേഴ്സും കെട്ടിട നിർമ്മാണത്തിന് ആർകിടെക്സും ബീജഗണിതം പ്രയോജനപ്പെടുത്തുന്നു. ബീജഗണിതത്തിൽ ഓരോന്നും അളവുകൾ കൊണ്ട് കുറിയ്ക്കുന്നതിനാൽ അത് പ്രയോജനപ്പെടുത്തി തയ്യാറാക്കുന്നവയെല്ലാം തന്നെ ശരിയായ അംശബന്ധത്തിലായിരിക്കും. കംപ്യൂട്ടർ, ഫോൺ എന്നിവയിൽ ബീജഗണിതം ഉപയോഗപ്പെടുന്നു. ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ, മനുഷ്യരുടെ ചെവികൾക്ക് ഉൾക്കൊള്ളാൻ കഴിയുന്ന ശബ്ദത്തിന്റെ ശക്തി കണക്കാക്കാൻ പ്രയാസമേറിയതാണ്. (1 മുതൽ 1000) ശബ്ദത്തിന്റെ അളവുകളെ കണക്കാക്കുന്നതിന് ലോഗരിതം ഉപകരിക്കുന്നു. ഫോൺ കണ്ടുപിടിച്ച അലക്സാണ്ടർ ഗ്രഹാംബലിന്റെ ഓർമ്മയ്ക്കായി ചെവി കേൾക്കാനുള്ള ശക്തിക്ക് ടെസിമൽ എന്ന മാത്ര ഉപയോഗപ്പെടുത്തുന്നു.

ഇന്നത്തെ ലോകസംഖ്യയെ അടിസ്ഥാനമാക്കിക്കൊണ്ട് അതിന്റെ വർദ്ധനവ് ഘാതാങ്ക ഫലനത്തെ ബന്ധപ്പെടുത്തി ഏകദേശമൂല്യം കാണുക. റേഡീയോകൂീവ് കാർബൺ 14 എന്ന വസ്തു വിഘടിക്കുന്നത് ഘാതാങ്ക സൂത്രം അനുസരിച്ചാണ്.

അഭ്യാസം 2.13



ശരിയായ ഉത്തരം അല്ലെങ്കിൽ ഏറ്റവും ഉചിതമായ ഉത്തരം തിരഞ്ഞെടുക്കുക.

1. $|x+2| \leq 9$ എങ്കിൽ, x ഭാഗമായിരിക്കുന്ന ഇടവേള

   (1) $(-\infty, -7)$ (2) $[-11, 7]$

   (3) $(-\infty, -7) \cup [11, \infty)$ (4) $(-11, 7)$

2. x, y കൂടാതെ b എന്നിവ വാസ്തവിക സംഖ്യകൾ എന്ന് തന്നിരിക്കുന്നു കൂടാതെ $x < y$, $b > 0$ എങ്കിൽ,

   (1) $xb < yb$ (2) $xb > yb$ (3) $xb \leq yb$ (4) $\frac{x}{b} \geq \frac{y}{b}$

3. $\frac{|x-2|}{x-2} \geq 0$ എങ്കിൽ, x ഉൾപ്പെട്ടിരിക്കുന്ന ഇടവേള

   (1) $[2, \infty)$ (2) $(2, \infty)$ (3) $(-\infty, 2)$ (4) $(-2, \infty)$

4. $5x - 1 < 24$ കൂടാതെ $5x + 1 > -24$ എന്നിവയുടെ നിർദ്ധാരണം

   (1) $(4, 5)$ (2) $(-5, -4)$ (3) $(-5, 5)$ (4) $(-5, 4)$

5. $|x-1| \geq |x-3|$ ഈ അസമവാക്യത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണം കാണുക

   (1) $[0, 2]$ (2) $[2, \infty)$ (3) $(0, 2)$ (4) $(-\infty, 2)$

XI_Maths_Ch-2_V-1_Malayalam.indd 105 14-02-2023 16:44:38

6. $\log_{\sqrt{2}} 512$–മൂല്യം

(1) 16 (2) 18 (3) 9 (4) 12

7. $\log_3 \frac{1}{81}$–മൂല്യം

(1) – 2 (2) – 8 (3) – 4 (4) – 9

8. $\log_{\sqrt{x}} 0.25 = 4$ എങ്കിൽ, x–ന്റെ മൂല്യം

(1) 0.5 (2) 2.5 (3) 1.5 (4) 1.25

9. $\log_a b \log_b c \log_c a$–ന്റെ മൂല്യം

(1) 2 (2) 1 (3) 3 (4) 4

10. 343–ന്റെ ലോഗരിതം 3 എങ്കിൽ അതിന്റെ ആധാരം

(1) 5 (2) 7 (3) 6 (4) 9

11. $2x^2 + (a-3)x + 3a - 5 = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ മൂലങ്ങളുടെ തുക, കൂടാതെ ഗുണന ഫലനം എന്നിവ സമം എങ്കിൽ, a-യുടെ മൂല്യം

(1) 1 (2) 2 (3) 0 (4) 4

12. $x^2 - kx + 16 = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ മൂലങ്ങൾ a, b എന്നിവ $a^2 + b^2 = 32$-നെ പൂർത്തീകരിക്കുന്നു എങ്കിൽ, k–യുടെ മൂല്യം

(1) 10 (2) – 8 (3) – 8, 8 (4) 6

13. $x^2 + |x-1| = 1$–നിർദ്ധാരണങ്ങളുടെ എണ്ണം എത്ര?

(1) 1 (2) 0 (3) 2 (4) 3

14. $3x^2 - 5x - 7 = 0$–എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ മൂലങ്ങൾക്ക് സംഖ്യാപരമായി സമവും എന്നാൽ ചിഹ്നപരമായി വിപരീതവും ആയ മൂലങ്ങളെ കൊണ്ടുള്ള സമവാക്യം

(1) $3x^2 - 5x - 7 = 0$ (2) $3x^2 + 5x - 7 = 0$

(3) $3x^2 - 5x + 7 = 0$ (4) $3x^2 + x - 7 = 0$

15. $x^2 + ax + c = 0$–ന്റെ വാസ്തവിക മൂലങ്ങൾ 8, 2 ആകുന്നു. കൂടാതെ, $x^2 + dx + b = 0$–ന്റെ മൂലങ്ങൾ 3, 3 എങ്കിൽ, $x^2 + ax + b = 0$–മൂലങ്ങൾ

(1) 1, 2 (2) – 1, 1 (3) 9, 1 (4) – 1, 2

16. $x^2 - kx + c = 0$–ഇതിന്റെ വാസ്തവിക മൂലങ്ങൾ a, b എങ്കിൽ, $(a, 0)$ കൂടാതെ $(b, 0)$–ഇടയ്ക്കുള്ള ദൂരം

(1) $\sqrt{k^2 - 4c}$ (2) $\sqrt{4k^2 - c}$ (3) $\sqrt{4c - k^2}$ (4) $\sqrt{k - 8c}$

17. $\frac{kx}{(x+2)(x-1)} = \frac{2}{x+2} + \frac{1}{x-1}$ എങ്കിൽ, k–യുടെ മൂല്യം

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

XI_Maths_Ch-2_V-1_Malayalam.indd 106 14-02-2023 16:44:40

18. $\frac{1-2x}{3+2x-x^2} = \frac{A}{3-x} + \frac{B}{x+1}$ എങ്കിൽ, $A+B$–യുടെ മൂല്യം

(1) $\frac{-1}{2}$ (2) $\frac{-2}{3}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{2}{3}$

19. $(x+3)^4 + (x+5)^4 = 16$–ഇതിന്റെ മൂലങ്ങളുടെ എണ്ണം

(1) 4 (2) 2 (3) 3 (4) 0

20. $\log_3 11 \ \log_{11} 13 \ \log_{13} 15 \ \log_{15} 27 \ \log_{27} 81$–മൂല്യം കാണുക

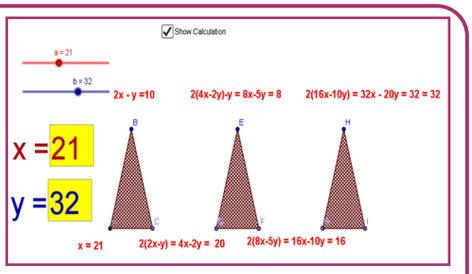
(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

പാഠച്ചുരുക്കം

- π , $\sqrt{p}$ (p ഒരു അഭാജ്യസംഖ്യ) എന്നിവ അപരിമേയ സംഖ്യകൾ.
- $|x-a| = r \iff r \geq 0$ കൂടാതെ $x - a = \pm r$.
- $|x-a| \leq r \iff -r \leq x-a \leq r$ അല്ലെങ്കിൽ $a-r \leq x \leq a+r$.
- $|x-a| > r \Longrightarrow x < a-r$ കൂടാതെ $x > a+r$ അല്ലെങ്കിൽ $x \in (-\infty,\ a-r) \cup (a+r,\ \infty)$
- പൊതുവായി അസമവാക്യങ്ങൾക്ക് ഒന്നിൽ കൂടുതൽ നിർദ്ധാരണം ഉണ്ട്.
- വിവേചകം $D = b^2 - 4ac$ എന്നത് $ax^2 + bx + c = 0$–എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ മൂലങ്ങളുടെ സ്വഭാവം വ്യക്തമാക്കുന്നു.
- ബഹുപദവ്യഞ്ജകം $f(x)$ ന്റെ ഒരു മൂലമാണ് a എങ്കിൽ $(x-a)$ അതിന്റെ ഘടകമായിരിക്കും
- $f(x)$–ന്റെ കൃതി $g(x)$–ന്റെ കൃതിയെക്കാൾ കുറവ് എങ്കിൽ, $\frac{f(x)}{g(x)}$–നെ അതിന്റെ ഭാഗിക ഭിന്നങ്ങളുടെ തുകയായി എഴുതാൻ സാധിക്കും.
- സാധാരണയായി ഘാതാങ്കഫലനവും ലോഗരിത ഫലനവും ഒന്നിനോടൊന്ന് വ്യുൽക്രമത്തിലാണ്.

XI_Maths_Ch-2_V-1_Malayalam.indd 107 14-02-2023 16:44:42

ഐ.സി.റ്റി കോർണർ – 2 (എ)



പടി–1

ബ്രൗസർ തുറന്ന് താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന യു ആർ എൽ ലിങ്ക് ടൈപ്പ് ചെയ്യുക അല്ലെങ്കിൽ ക്യൂആർ കോഡ് സ്കാൻ ചെയ്യുക.

പടി–2

"ഹിൽ ആന്റ് ഫ്ളവർ പസ്സിൽ" നന്ന ജിയോജീബ്ര പേജ് പ്രത്യക്ഷപ്പെടും.

പസിൽ വിശദാംശം:

(എ) നിങ്ങളുടെ കയ്യിൽ കുറച്ച് പൂക്കളുണ്ട്. നിങ്ങൾ കുന്നിൽ കയറുമ്പോഴും ഇറങ്ങുമ്പോഴും പൂക്കൾ ഇരട്ടിയ്ക്കും.

(ബി) ഓരോ കന്നിന്റെ മുകളിലും ദൈവത്തിന്റെ വിഗ്രഹമുണ്ട് ഇതിൽ പൂക്കൾ അർപ്പിക്കണം.

(സി) ഓരോ കുന്നിൻ മുകളിലും സ്ഥാപിച്ചിട്ടുള്ള വിഗ്രഹത്തിലും പൂക്കൾ അർപ്പിക്കണം. അവസാനം മൂന്നാമത്തെ കുന്നിന്റെ മുകളിലെത്തുമ്പോൾ നിങ്ങളുടെ കയ്യിലെ പൂക്കളെല്ലാം തന്നെ മൂന്ന് വിഗ്രഹങ്ങൾക്കും ഒരുപോലെ കിട്ടത്തക്കവിധം അർപ്പിക്കണം. എങ്കിൽ എത്ര പൂക്കൾ കയ്യിൽ കരുതണം? എത്ര പൂക്കൾ ഓരോ വിഗ്രഹത്തിലും അർപ്പിച്ചു?.

പടി–3

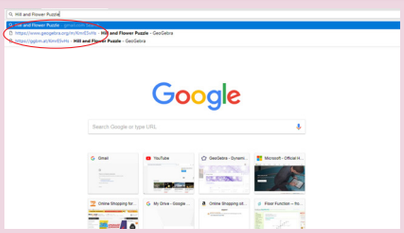
നിങ്ങൾ കററിൽ പൂക്കൾ X എന്നും വിഗ്രഹത്തിൽ അർപ്പിച്ച പൂക്കൾ Y എന്നും കരുതുക. പേജിൽ വരുന്ന സ്ലൈഡർ ക്രമീകരിക്കുക. പ്രശ്നത്തെക്കുറിച്ച് വെറുതേ ചിന്തിച്ച് കൊണ്ടിരുന്നാൽ മാത്രം പരിഹാരം സാധ്യമല്ല.

പടി–4

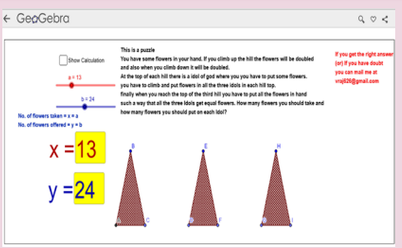
ബീജഗണിതത്തിന്റെ ആവശ്യകതയെക്കുറിച്ച് തിരിച്ചറിയാനുള്ള സമയമായി. ബീജഗണിതത്തിന്റെ ഉപയോഗത്തിനെ കുറിച്ച് ചിന്തിക്കുക. "ഷോ കാൽക്കുലേഷൻ" കാണുന്ന ബോക്സ് ക്ലിക്ക് ചെയ്യുക. ബീജ ഗണിത കണക്ക് കൂട്ടലിന്റെ ഓരോ ഘട്ടവും കാണാൻ സധിക്കും. ഈ പസ്സിൽ പരിഹരിക്കുന്ന സമവാക്യം നിങ്ങൾക്ക് ഇപ്പോൾ തിരിച്ചറിയേണ്ടി ഇരിക്കുന്നു.

കുറിപ്പ് : ഇതിന്റെ ഫലം അനുപാതത്തിലായിരിക്കും.

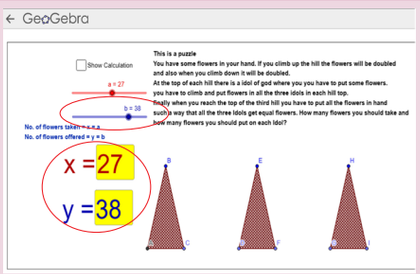
പടി–1



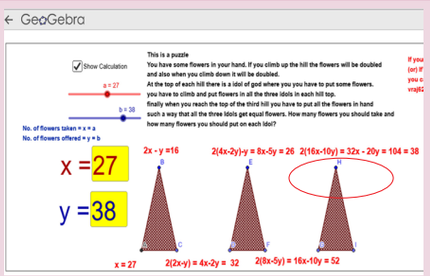
പടി–2



പടി–3



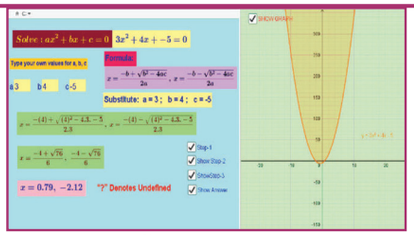
പടി–4



*ലിങ്ക് ഹിൽ ആന്റ് ഫ്ളവർ പസ്സിൽ : https://ggbm.at/KmrE5vHs ബ്രൗസ് ചെയ്യുക അല്ലെങ്കിൽ ക്യൂആർ കോഡ് സ്കാൻ ചെയ്യുക.

XI_Maths_Ch-2_V-1_Malayalam.indd 108 14-02-2023 16:44:43

ഐ.സി.റ്റി കോർണർ – 2 (ബി)



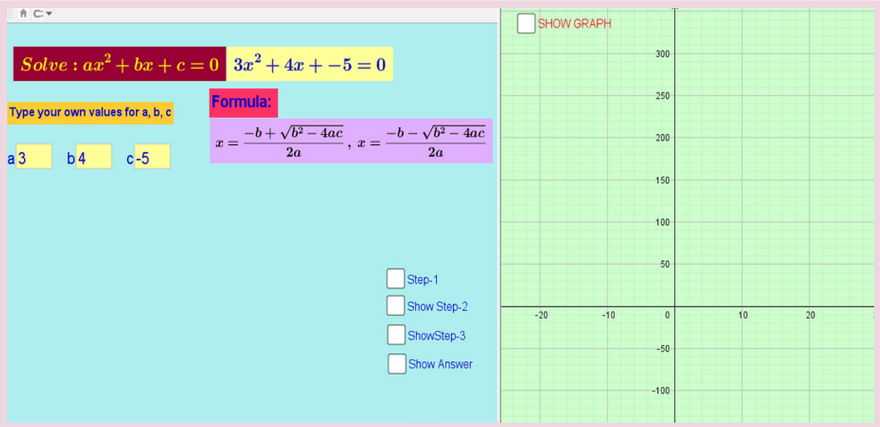
പടി–1

ബ്രൗസർ തുറന്ന് താഴെകൊടുത്തിരിക്കുന്ന യൂആർഎൽ ലിങ്ക് ടൈപ്പ് ചെയ്യുക അല്ലെങ്കിൽ ക്യൂ ആർ കോഡ് സ്കാൻ ചെയ്യുക "ഹൈ സ്കൂൾ ആൾജിബ്ര" എന്ന ജിയോജിബ്ര ബുക്ക് തുറക്കും ഇതിൽ നിരവധി വർക്ക്ഷീറ്റുകൾ ഉണ്ടായിരിക്കും. ഇതിൽ നിന്ന് നിങ്ങൾക്ക് ഇഷ്ടമുള്ളത് തിരഞ്ഞെടുക്കാം. ഉദാഹരണമായി "കോഡ്രാറ്റിക് ഇക്വേഷൻ" സൂത്രവാക്യമുപയോഗിച്ച് പരിഹരിക്കുന്നത് തിരഞ്ഞെടുക്കാം. അതിൽ 20 നും 20 നും ഇടയിലുള്ള ഏതൊരു മൂല്യവും a,b,c എന്നിവയ്ക്ക് നൽകാം. നിങ്ങൾ തന്നിരിക്കുന്ന സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിച്ച് തന്നെത്താൻ പരിഹരിക്കുക (നിർവ്വചിക്കാൻ സാധിക്കാത്ത ഉത്തരങ്ങളെ '?' കൊണ്ട് കുറിച്ചിരിക്കുന്നു)

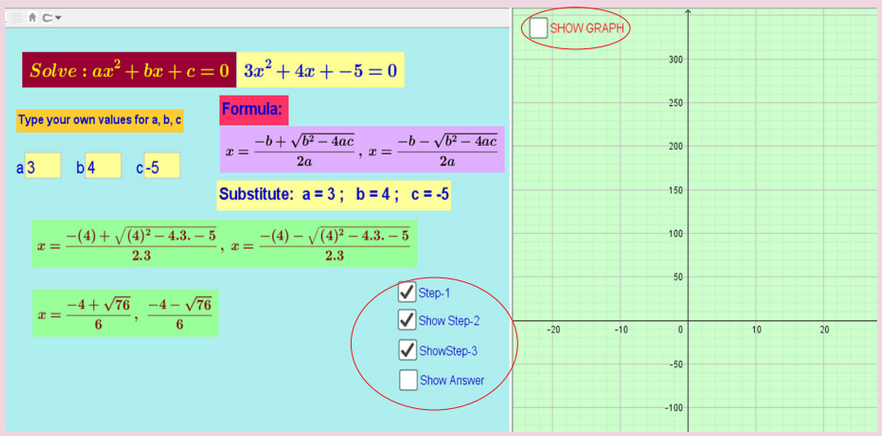
പടി–2

ഇനി ഉത്തരം ക്ലിക്ക് ചെയ്ത് പരിശോധിക്കാം. ചെക്ക് ചെയ്ത നോട്ടുകൾ ഓരോന്നായി ക്ലിക്ക് ചെയ്ത് ഓരോ ഘട്ടവും പരിശോധിയ്ക്കാം. അവസാനം അതിന്റെ ഗ്രാഫ് കാണുന്നതിനായി വലത് വശത്തുള്ള "ഷോ ഗ്രാഫ്" ക്ലിക്ക് ചെയ്യുക. ഗ്രാഫും നിങ്ങളുടെ ഉത്തരവും താരതമ്യം ചെയ്യുക. (വക്രം x –അക്ഷത്തെ എവിടെയാണോ ഖണ്ഡിക്കുന്നത് അതാണ് ഉത്തരം.

പടി–1



പടി–2



* ഹിൽ ആന്റ് ഫ്ളവർ പസ്സിൽ : https://ggbm.at/N4kX9QJq ബ്രൗസ് ചെയ്യുക. അല്ലെങ്കിൽ ക്യൂ ആർ കോഡ് സ്കാൻ ചെയ്യുക.

STHG1

XI_Maths_Ch-2_V-1_Malayalam.indd 109 14-02-2023 16:44:44

അധ്യായം **3**

ത്രികോണമിതി

എന്റെ സന്തോഷം ബഹിരാകാശത്ത് പൊങ്ങിക്കിടക്കുന്ന വസ്തുക്കളുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നതിനാൽ എന്റെ കാലുകൾ ഭൂമിയിൽ പതിഞ്ഞിട്ടില്ല.
– ടോളമി

OYMI3

3.1 ആമുഖം



അലക്സാണ്ട്രിയയിലെ ടോളമി
(ക്രി.പി 90–168)

ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളും കോണുകളും ഉൾപ്പെടുന്ന ബന്ധത്തെക്കുറിച്ച് പഠിക്കുന്ന ഗണിതശാസ്ത്രത്തിന്റെ ഒരു ശാഖയാണ് ത്രികോണമിതി എന്ന് പ്രാഥമികമായി പറയാം. ത്രികോണം എന്ന് അർത്ഥം വരുന്ന 'trigonon' കൂടാതെ അളവ് എന്ന് അർത്ഥം വരുന്ന 'metron' തുടങ്ങിയ ഗ്രീക്ക് വാക്കുകളിൽ നിന്നാണ് 'Trigonometry' (ത്രികോണമിതി) എന്ന വാക്ക് ഉത്ഭവിച്ചത്. അതിനാൽ ത്രികോണങ്ങളെ അളക്കുന്നതിനുള്ള പഠനമാണ് അക്ഷരാർത്ഥത്തിൽ ത്രികോണമിതി. അജ്ഞാതമായ ദൂരം നിർണ്ണയിക്കാൻ ഗ്രീക്ക് ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞർ ത്രികോണമിതി അനുപാതങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചിരുന്നു. ക്രി.മു (BCE) 20 പിരമിഡുകൾ നിർമ്മിക്കുന്നതിന് ഈജിപ്റ്റുകാർ ത്രികോണമിതിയുടെ ഒരു പ്രത്യേക രൂപം ഉപയോഗിച്ചു. സൂര്യന്റെയും ചന്ദ്രന്റെയും ദൂരം നിർണ്ണയിക്കാൻ അരിസ്റ്റാർക്കസ് (ക്രി.മു 310- 250) ത്രികോണമിതി ഉപയോഗിച്ചു.

ഭൂമിയുടെ ചുറ്റളവ് കണക്കാക്കിയ ആദ്യത്തെ വ്യക്തി ഇറാത്തോസ്തനീസ് (ക്രി.മു 276-195) ആണ്, ആ കാലയളവിലെ ഒരു സാധാരണ അളവുകോലായ സ്റ്റേഡിയ ഉപയോഗിച്ചുള്ള ഒരു അളക്കൽ സംവിധാനം പ്രയോഗിച്ചുകൊണ്ട് അദ്ദേഹം ഇത് കണക്കാക്കി. ഗ്രീക്ക് ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനായ ഹിപ്പാർക്കസ് (ക്രി.മു 190-120) ആണ് ത്രികോണമിതിയുടെ പൊതു തത്വങ്ങൾ രൂപപ്പെടുത്തിയത്, അദ്ദേഹത്തെ ത്രികോണമിതിയുടെ സ്ഥാപകനായി കണക്കാക്കപ്പെടുന്നു. അദ്ദേഹത്തിന്റെ ആശയങ്ങൾ അലക്സാണ്ട്രിയയിലെ ടോളമി (എ.ഡി. (CE) 90 – 168) ഉപയോഗിച്ചതിന്റെ ഫലമായി ഇത് ടോളമി ജ്യോതിശാസ്ത്ര സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ വികാസത്തിനിടയാക്കി. പുരാതനകാലത്തെ ത്രികോണമിതിയുടെ ഏറ്റവും പ്രധാനപ്പെട്ട വികാസം ഇന്ത്യയിലായിരുന്നു. ഇന്ത്യൻ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനും ജ്യോതിശാസ്ത്രജ്ഞനും ആയിരുന്ന ആര്യഭട്ട (എ.ഡി. (CE) 476 – 550) സൈൻ, കൊസൈൻ, വിപരീത കൊസൈൻ, വിപരീത സൈൻ, എന്നിവ നിർവ്വചിക്കുകയും ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണത്തിനുള്ള സൂത്രവാക്യം ഉൾക്കൊള്ളുന്ന 108 വാക്യരൂപത്തിലുള്ള ഗണിത ശാസ്ത്ര ഫലങ്ങൾ അദ്ദേഹം നൽകുകയും ചെയ്തു. ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞരായ ബ്രഹ്മഗുപ്തൻ(എ.ഡി. 598), ഭാസ്കര ഒന്നാമൻ (എ.ഡി. 600), ഭാസ്കര രണ്ടാമൻ (എ.ഡി. 1114) എന്നിവരാണ് ത്രികോണമിതിയുടെ വികാസത്തിന് ഗണ്യമായ സംഭാവന നൽകിയ ഇന്ത്യാക്കാർ.

ജോൺ ബെർണോളി(1667 – 1748), ലിയോണാർഡ് ഓയ്ലർ(1707 – 1783) എന്നിവരുടെ കൃതികളിലൂടെ ഗണിതശാസ്ത്രത്തിന്റെ ഒരു പ്രത്യേക ശാഖയായി ത്രികോണമിതി വികാസം പ്രാപിച്ചു. ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളെയും സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യാ കൃതികളെയും ബന്ധിപ്പിക്കുന്ന അടിസ്ഥാന ഫലങ്ങൾ ഓയ്ലർ സ്ഥാപിച്ചു. ത്രികോണമിതി ശ്രേണികളെ കുറിച്ചുള്ള പഠനത്തിന് ജോസഫ് ഫോറിയർ (1768 -1830)

XI_Maths_Ch3_V-1_Malayalam.indd 110 14-02-2023 16:45:36

പ്രധാന സംഭാവന നൽകിയിട്ടുണ്ട്. അദ്ദേഹത്തിന്റെ ഫ്യൂറിയർ ശ്രേണിയുടെ കണ്ടുപിടിത്തത്തിന് പ്രത്യേകിച്ചും വൈബ്രേഷൻ അനാലിസിസ്, ഇലക്ട്രിക്കൽ എഞ്ചിനീയറിംഗ്, ശബ്ദ ശാസ്ത്രം, പ്രകാശ ശാസ്ത്രം, സിഗ്നൽ പ്രോസസ്സിംഗ്, ഇമേജ് പ്രോസസ്സിംഗ് ക്വാണ്ടം മെക്കാനിക്സ് എന്നിവയിൽ ധാരാളം ആപ്ലിക്കേഷനുകൾ ഉണ്ട്. ആധുനിക കാലത്ത്, ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങൾ കോണളവുകളുടെ ഗണിത ഫലനങ്ങളായി വികസിപ്പിച്ചെടുക്കുന്നു, അതിലൂടെ ഗണിതശാസ്ത്രത്തിന്റെയും അതിന്റെ ആപ്ലിക്കേഷനുകളുടെയും എല്ലാ ശാഖകളിലും പലതരം ജ്യാമിതീയ, ബീജഗണിത ഗവേഷണങ്ങൾ നടക്കുന്നു. നമ്മുടെ കാറുകളിലും മൊബൈൽ ഫോണുകളിലുമുള്ള GPS സംവിധാനം ത്രികോണമിതി കണക്കു കൂട്ടലുകളെ അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ളതാണ്. ട്യൂമറുകൾ കണ്ടെത്തുന്നതിന് ഉപയോഗിക്കുന്ന CT, MRI പോലുള്ള നൂതന മെഡിക്കൽ സ്കാനിംഗ് പ്രക്രിയകളിൽ സൈൻ, കോസൈൻ ഫലനങ്ങൾ ഉൾപ്പെടുന്നു.

പഠനലക്ഷ്യങ്ങൾ

ഈ അധ്യായത്തിന്റെ അവസാനം വിദ്യാർത്ഥികൾ മനസ്സിലാക്കുമെന്ന് പ്രതീക്ഷിക്കുന്നത്.

- ന്യൂനകോണുകൾ ഉൾപ്പെടുന്നതിനാൽ മട്ടത്രികോണ ത്രികോണമിതി അനുപാതങ്ങളുടെ പരിമിതികൾ.
- ഒരു കോണിന്റെ റേഡിയൻ അളവിനെക്കുറിച്ചും ഡിഗ്രി അളവിനെക്കാൾ അതിനുള്ള നേട്ടത്തെക്കുറിച്ചും പഠിക്കേണ്ടതിന്റെ ആവശ്യകത.
- വാസ്തവിക സംഖ്യകളുടെ ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങൾ നിർവ്വചിക്കാൻ യൂണിറ്റ് വൃത്തം എങ്ങനെ ഉപയോഗിക്കുന്നു.
- വിവിധ ത്രികോണമിതി സർവ്വസമവാക്യങ്ങളും അവയുടെ ബന്ധങ്ങളും പ്രയോഗങ്ങളും.
- ഒരു ത്രികോണമിതി സമീകരണത്തിന്റെ പ്രധാന നിർദ്ധാരണവും പൊതു നിർദ്ധാരണവും.
- ത്രികോണമിതി സമീകരണങ്ങൾ എങ്ങനെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യാം.
- ത്രികോണങ്ങളുടെ സൈൻ നിയമവും കൊസൈൻ നിയമവും യഥാർത്ഥ ജീവിത സാഹചര്യങ്ങളിൽ അവയുടെ പ്രയോഗങ്ങളും.
- സൈൻ നിയമവും കൊസൈൻ നിയമവും ഉപയോഗിച്ച് ഒരു വിഷമഭുജ ത്രികോണത്തെ എങ്ങനെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യാം.
- ഹെറോൺ സൂത്രത്തിന്റെ പ്രയോഗം കൂടാതെ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഉന്നതി കാണാതെ അതിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം എങ്ങനെ കണക്കാക്കാം.
- വിപരീത ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളുടെയും അവയുടെ മണ്ഡലത്തിന്റെയും രംഗത്തിന്റെയും നിലനിൽപ്പ്.

മുൻ ക്ലാസ്സുകളിൽ ചർച്ച ചെയ്യപ്പെട്ടിട്ടുള്ള ന്യൂനകോണുകളും അവയുടെ സവിശേഷതകളും ഉപയോഗിച്ച് ത്രികോണമിതി അനുപാതങ്ങളുടെ അടിസ്ഥാന കാര്യങ്ങൾ നമുക്ക് ഓർത്തെടുക്കാം.

3.2 അടിസ്ഥാന ഫലങ്ങളെ ഓർത്തെടുക്കൽ

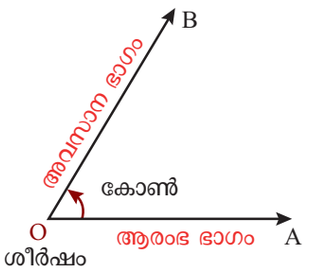
മുൻക്ലാസ്സുകളിൽ ഒരു മട്ടത്രികോണം ഉപയോഗിച്ച് നാം ത്രികോണമിതി അനുപാതങ്ങൾ പഠിക്കുകയും ന്യൂനകോണിന്റെ ത്രികോണമിതി സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ തെളിയിക്കുകയും ചെയ്തു. ഗ്രഹങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലം, പർവ്വത നിരകളുടെ ഉയരം, ഭൂമിയും സൂര്യനും പോലുള്ള വിദൂര വസ്തുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം, ഉയർന്ന കെട്ടിടങ്ങളുടെ ഉയരം, സൂപ്പർ സോണിക് ജെറ്റുകളുടെ വേഗത തുടങ്ങിയവ അളക്കുന്നത് അല്ലെങ്കിൽ കണക്കാക്കുന്നത് എങ്ങനെയെന്നത് ഒരു അത്ഭുതം തന്നെയാണ്. ന്യൂനകോണുകളിൽ

XI_Maths_Ch3_V-1_Malayalam.indd 111 14-02-2023 16:45:36

നിന്ന് ഉരുത്തിരിഞ്ഞ ത്രികോണമിതി അനുപാതങ്ങൾ പ്രയോഗിച്ച് അത്തരം ദൂരങ്ങളോ ഉയരങ്ങളോ കണക്കാക്കുന്നു എന്നതാണ് ശ്രദ്ധേയം. ഏതൊരു വാസ്തവിക സംഖ്യയ്ക്കും നിർവ്വചിച്ചിട്ടുള്ള ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങൾ ഗണിതശാസ്ത്രത്തിന്റെ എല്ലാ ശാഖകളും, പ്രത്യേകിച്ച്, കാൽക്കുലസിൽ വികസിപ്പിക്കുക എന്നതാണ് നമ്മുടെ ലക്ഷ്യം. ആദ്യമായി, ഒരു കോണിന്റെയും കോണിന്റെ ഡിഗ്രി അളവിന്റെയും നിർവ്വചനം നമുക്ക് ഓർമ്മിക്കാം.

3.2.1 കോണുകൾ

ചിത്രം 3.1 –ൽ കാണിച്ചിട്ടുള്ളതുപോലെ OA, OB എന്നീ രണ്ട് രശ്മികൾ O എന്ന പൊതുബിന്ദുവിനെ പങ്കിട്ടുകൊണ്ട് രൂപീകരിക്കുന്ന അളവാണ് കോൺ $\angle AOB$ പൊതു ബിന്ദു O യെ കോണിന്റെ ശീർഷം എന്നു വിളിക്കുന്നു.



ചിത്രം 3.1

OA എന്ന രശ്മിയെ ശീർഷം O കേന്ദ്രമാക്കി OB എന്ന സ്ഥാനത്തേക്ക്, തിരിച്ചാൽ OA, OB എന്നിവയെ യഥാക്രമം രൂപീകരിച്ച കോണിന്റെ ആരംഭവശം, അന്തിമവശം എന്നിങ്ങനെ വിളിക്കാം.

എതിർഘടികാര ദിശയിലുള്ള ഭ്രമണം ധന കോണും (ചിഹ്നം ധനം ആയ കോൺ) ഘടികാര ദിശയിലുള്ള ഭ്രമണം ഋണ കോണും (ചിഹ്നം ഋണം ആയ കോൺ) നിർമ്മിക്കുന്നു.

കുറിപ്പ് : OA-യെ പൂർവ്വസ്ഥാനത്തെത്തിക്കുന്ന എതിർഘടികാര ദിശയിലുള്ള (അല്ലെങ്കിൽ ഘടികാരദിശ) ഒരു മുഴു ഭ്രമണത്തെ സമ്പൂർണ്ണ ഭ്രമണം അല്ലെങ്കിൽ സമ്പൂർണ്ണ പ്രദക്ഷിണം എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

3.2.2 കോൺ അളവുകളുടെ വ്യത്യസ്ത സമ്പ്രദായങ്ങൾ

കോൺ അളക്കുന്നതിന് മൂന്ന് വ്യത്യസ്ത സമ്പ്രദായങ്ങൾ ഉണ്ട്,

(i) സെക്സാഗെസിമൽ സമ്പ്രദായം

ഒരു മട്ടകോണിനെ ഡിഗ്രി എന്നുവിളിക്കുന്ന 90 തുല്യഭാഗങ്ങളായി വിഭജിച്ചിരിക്കുന്ന ഏറ്റവും പ്രചാരത്തിലുള്ള അളവെടുക്കൽ സംവിധാനമാണ് സെക്സാഗെസിമൽ സമ്പ്രദായം. ഓരോ ഡിഗ്രിയും 60 തുല്യഭാഗങ്ങളായി മിനിറ്റ് എന്നും ഓരോ മിനിറ്റിനെയും 60 തുല്യ ഭാഗങ്ങളായി സെക്കന്റ് എന്നും തിരിച്ചിരിക്കുന്നു ഒരു ഡിഗ്രി, ഒരു മിനിറ്റ്, ഒരു സെക്കന്റ് എന്നിവയെ യഥാക്രമം 1°, $1'$, $1''$ എന്നിങ്ങനെയുള്ള ചിഹ്നങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

(ii) സെന്റെസിമൽ സമ്പ്രദായം

സെന്റെസിമൽ സമ്പ്രദായത്തിൽ, ഒരു മട്ടകോണിനെ ഗ്രേഡുകൾ എന്നുവിളിക്കുന്ന 100 തുല്യ ഭാഗങ്ങളായി വിഭജിച്ചിരിക്കുന്നു; ഓരോ ഗ്രേഡും 100 മിനിറ്റുകളായി വിഭജിച്ചിരിക്കുന്നു, ഓരോ മിനിറ്റും 100 സെക്കന്റുകളായി വിഭജിച്ചിരിക്കുന്നു, ഒരു ഗ്രേഡ് സൂചിപ്പിക്കാൻ 1^g എന്ന ചിഹ്നം ഉപയോഗിക്കുന്നു.

(iii) വൃത്താകാര സമ്പ്രദായം

വൃത്താകാര സമ്പ്രദായത്തിൽ, ആരം r ഉള്ള ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ചാപനീളം ഉപയോഗിച്ച് ഒരു കോണിന്റെ റേഡിയൻ അളവ് പരിചയപ്പെടുത്തുന്നു. ഗണിത ശാസ്ത്രത്തിന്റെ എല്ലാ ശാഖകളിലും ശാസ്ത്രത്തിന്റെ

XI_Maths_Ch3_V-1_Malayalam.indd 112 14-02-2023 16:45:36

മറ്റു പ്രയോഗങ്ങളിലും വൃത്താകാര സമ്പ്രദായം ഉപയോഗിക്കുന്നു. 1 റേഡിയൻ അളവ് സൂചിപ്പിക്കാൻ 1^c എന്ന ചിഹ്നം ഉപയോഗിക്കുന്നു.

3.2.3 ഡിഗ്രി അളവ്

കോണുകളുടെ അളവെടുക്കുന്നതിനുള്ള ഒരു യൂണിറ്റാണ് ഡിഗ്രി, ഇതിനെ ° എന്ന ചിഹ്നത്താൽ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. ഡിഗ്രികളിൽ നാം ഒരു പൂർണ്ണ ഭ്രമണത്തെ 360 തുല്യ ഭാഗങ്ങളായി വിഭജിക്കുന്നു, ഓരോ ഭാഗവും ഒരു ഡിഗ്രിയാണ്, ഇത് 1° കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. അങ്ങനെ 1° എന്നത് ഒരു പൂർണ്ണഭ്രമണത്തിന്റെ 1/360 ആണ്. ഒരു കോണിന്റെ ഏറ്റവും ചെറിയ ഒരു ഭാഗം അളക്കുന്നതിനും കോണുകളുടെ അളവിന്റെ കൃത്യതയ്ക്കും, മിനിറ്റും സെക്കന്റും ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഒരു മിനിറ്റ് (1′) ഒരു ഡിഗ്രിയുടെ (1/60) ഉം ഒരു സെക്കന്റ് (1″) ഒരു മിനിറ്റിന്റെ (1/60) ഉം (അല്ലെങ്കിൽ) (1/3600) ഡിഗ്രിയും ആണ്.

മികച്ചഗ്രാഹ്യത്തിനും ഉപയോഗത്തിനുമായി നമുക്ക് ഒരു ജോടി കോണുകളെ ഇനിപ്പറയുന്ന രീതിയിൽ തരംതിരിക്കാം.

(i) കൃത്യമായും തുല്യ അളവുകളുമുള്ള കോണുകളെ സർവ്വസമ കോണുകൾ എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

(ii) രണ്ട് കോണുകളുടെ അളവുകളുടെ തുക 90° ആണെങ്കിൽ അവയെ പൂരക കോണുകൾ എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

(iii) രണ്ട് കോണുകളുടെ അളവുകളുടെ തുക 180° ആണെങ്കിൽ അവയെ സംപൂരക കോണുകൾ എന്നുവിളിക്കുന്നു.

(iv) 0°-ക്കും 360°-ക്കും ഇടയിലുള്ള രണ്ട് കോണുകളുടെ തുക 360° ആയാൽ അത്തരം കോണുകൾ സംയോജകങ്ങൾ ആണെന്ന് പറയാം.

കുറിപ്പ് : (i) ഡിഗ്രി, മിനിറ്റ്, സെക്കന്റ് എന്നിവയുടെ ആശയം സമയത്തിന്റെ അളവെടുക്കൽ സംവിധാനത്തിന് സമമാണ്, ഇവിടെ ഒരു മണിക്കൂറിനെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്ന ഒരു ഡിഗ്രിയെക്കുറിച്ച് നമ്മൾ ചിന്തിക്കുന്നു.

(ii) തന്നിട്ടുള്ളവ നിരീക്ഷിക്കുക

$$59.0854° = 59° + 0.0854°$$

$$0.0854° = 0.0854° \times \frac{60'}{1°} = 5.124'$$

$$5.124' = 5' + 0.124'$$

$$0.124' = 0.124' \times \frac{60''}{1'} = 7.44''$$

അതിനാൽ, $59.0854° = 59°5'7.44''$

(iii) കൂടാതെ $34°51'35'' = 34.8597°$ ഉം

$90° - 36°18'47'' = 53°41'13''$ ഉം ആണ്

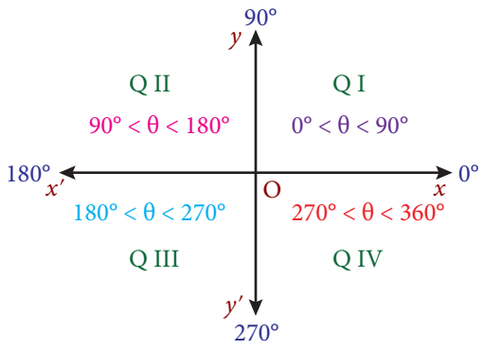
3.2.4 ശരിയായ സ്ഥാനത്തെ കോണുകൾ

ഒരു കോൺ ശരിയായസ്ഥാനത്താണെന്ന് പറയണമെങ്കിൽ അതിന്റെ ശീർഷം ആധാര ബിന്ദുവിലും ആരംഭവശം x-അക്ഷത്തിന്റെ ധന വശത്തും ആയിരിക്കണം.

XI_Maths_Ch3_V-1_Malayalam.indd 113 14-02-2023 16:45:37

ഒരു കോൺ ഒന്നാം ചതുർത്ഥാംശത്തിലാണെന്ന് പറയണമെങ്കിൽ, ശരിയായ സ്ഥാനത്താണെങ്കിൽ, അതിന്റെ അന്തിമവശം ഒന്നാം ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ ആയിരിക്കണം. അതുപോലെ മറ്റു മൂന്ന് ചതുർത്ഥാംശങ്ങളിലെയും കോണുകളെ നമുക്ക് നിർവ്വചിക്കാനാകും.

ശരിയായ സ്ഥാനത്തും അന്ത്യവശങ്ങൾ x-അക്ഷത്തിലോ y-അക്ഷത്തിലോ ആണെങ്കിൽ ആ കോണുകളെ ചതുർത്ഥാംശ കോണുകൾ എന്ന് വിളിക്കുന്നു. അതിനാൽ, 0°; 90°; 180°; 270°, 360° തുടങ്ങിയ കോണുകളെല്ലാം ചതുർത്ഥാംശ കോണുകളാണ്.



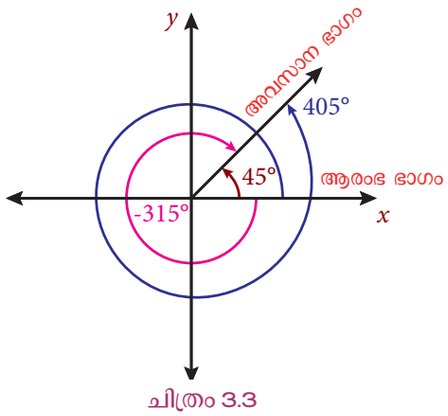
ചിത്രം 3.2

കുറിപ്പ് : ഒരു ചതുർത്ഥാംശ കോണിന്റെ ഡിഗ്രി അളവ് 90°-യുടെ ഗുണിതം ആയിരിക്കും.

3.2.5 കോടെർമിനൽ കോണുകൾ

എതിർഘടികാര ദിശയിൽ ഒരു രശ്മിയുടെ പൂർണ്ണ ഭ്രമണം 360° കോൺ അളവിന് കാരണമാകുന്നു. എതിർ ഘടികാര ദിശയിലുള്ള ഭ്രമണം തുടരുന്നതിലൂടെ, 360°-യിൽ കൂടുതലുള്ള കോണുകൾ നിർമ്മിക്കാൻ കഴിയും. ഭ്രമണ ഘടികാര ദിശയിലാണെങ്കിൽ, ഋണ കോണുകൾ നിർമ്മിക്കപ്പെടുന്നു.

57°, 417°, –303° എന്നീ കോണുകൾക്ക് ഒരേ ആരംഭവശവും ഒരേ അന്തിമവശവുമാണ്, എന്നാൽ വ്യത്യസ്ത അളവുകളിലുള്ള ഭ്രമണം ആയിരിക്കും, ഇത്തരം കോണുകളെ കോടെർമിനൽ കോണുകൾ എന്ന് വിളിക്കുന്നു. അതിനാൽ, ഒരേ അഗ്രവശങ്ങളുള്ള ശരിയായ സ്ഥാനത്തുള്ള കോണുകൾ കോടെർമിനൽ കോണുകളാണ്.



ചിത്രം 3.3

ആയതിനാൽ α, β എന്നിവ കോടെർമിനൽ കോണുകളാണെങ്കിൽ ഏതൊരു പൂർണ്ണാങ്കം k ക്കും $\beta = \alpha + k\,(360°)$ ആയിരിക്കും. കോടെർമിനൽ കോണുകൾ 360° യുടെ പൂർണ്ണാങ്ക ഗുണിതത്താൽ വ്യത്യാസപ്പെട്ടിരിക്കും.

ഉദാഹരണമായി, 417° ഉം –303° ഉം കോടെർമിനൽ ആണ്, കാരണം

$$417° - (-303°) = 720° = 2\,(360°).$$

കുറിപ്പ് : (i) 45°, – 315°, 405° എന്നിവ ഒരേ ചതുർത്ഥാംശത്തിലാണ് എന്നത് നിരീക്ഷിക്കുക..

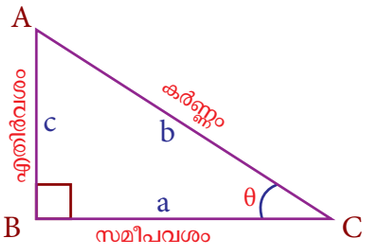
(ii) (30°, 390°), (280°, 1000°), (–85°, 275°) തന്നിട്ടുള്ള കോണുകളുടെ ജോടികൾ കോടെർമിനൽ കോണുകളാണ്.

XI_Maths_Ch3_V-1_Malayalam.indd 114 14-02-2023 16:45:37

3.2.6 ഒരു മട്ടത്രികോണം ഉപയോഗിച്ചുള്ള അടിസ്ഥാന ത്രികോണമിതി അനുപാതങ്ങൾ

ഒരു മട്ടത്രികോണം ABC യുടെ *a, b, c* നീളങ്ങളുള്ള മൂന്ന് വശങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ആറ് അനുപാതങ്ങൾ രൂപീകരിക്കാൻ കഴിയുമെന്ന് നമുക്കറിയാം. ഈ അനുപാതങ്ങൾ ആറ് അടിസ്ഥാന ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളുടെ നിർവ്വചനങ്ങളിലേക്ക് നയിക്കുമെന്നത് രസകരമായ ഒന്നാണ്.

ആദ്യം, ഒരു മട്ടത്രികോണത്തെ പരാമർശിച്ച് നിർവചിച്ചിരിക്കുന്ന ത്രികോണമിതി അനുപാതങ്ങൾ നമുക്ക് ഓർമ്മിക്കാം.



ചിത്രം 3.4

$$\sin\theta = \frac{\text{എതിർവശം}}{\text{കർണ്ണം}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{സമീപവശം}}{\text{കർണ്ണം}}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta},\ \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta},\ \text{cosec}\,\theta = \frac{1}{\sin\theta},\ \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$\sin\theta$, $\cos\theta$-എന്നിവയുടെ സഹായത്താൽ ബാക്കിയുള്ള ത്രികോണമിതി അംശബന്ധങ്ങൾ $\tan\theta$, $\cot\theta$ കൂടാതെ $\sin\theta$ തുടങ്ങിയ താഴെ പറയുന്ന ബന്ധങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കാം.

3.2.7 വ്യാപകമായി ഉപയോഗിക്കുന്ന കോണുകളുടെ ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളുടെ കൃത്യമായ മൂല്യങ്ങൾ

അറിയപ്പെടുന്ന കോണുകളിൽ ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളുടെ മൂല്യങ്ങൾ നമുക്ക് പട്ടികപ്പെടുത്താം.

θ	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ല

കുറിപ്പ് : (i) മുകളിൽ തന്നിട്ടുള്ള എല്ലാ വിലകളും കൃത്യമാണ്.

(ii) $\sin 30°$ ഉം $\cos 60°$ ഉം തുല്യമാണെന്ന് നമുക്ക് കാണാനാകും. കൂടാതെ $\sin 60°$ ഉം $\cos 30°$ ഉം തുല്യമാണ്.

(iii) കോസീക്കന്റ്, സീക്കന്റ്, കോടാൻജന്റ് തുടങ്ങിയ വ്യുൽക്രമ അനുപാതങ്ങളുടെ മൂല്യങ്ങൾ മുകളിലെ പട്ടിക ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടെത്താനാകും.

(iv) $\cos 90° = 0$ എന്ന ഫലത്തിൽ നിന്ന്, $\tan 90°$, $\sec 90°$ എന്നിവ നിർവ്വചിക്കാനാകില്ല.

(v) അതുപോലെ $\sin 0° = 0$ ൽ നിന്ന് $\cot 0°$, $\text{cosec}\,0°$ എന്നിവയും നിർവ്വചിക്കാൻ സാധിക്കില്ല.

XI_Maths_Ch3_V-1_Malayalam.indd 115 14-02-2023 16:45:38

3.2.8 അടിസ്ഥാന ത്രികോണമിതി സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ

ഒരു ബന്ധത്തെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്ന ത്രികോണമിതി സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ അതിന്റെ മണ്ഡലത്തിലെ സ്വീകാര്യമായ എല്ലാ മൂല്യങ്ങൾക്കും എല്ലായ്പോഴും ശരിയാണ്. ഉദാഹരണത്തിന്, $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ എന്നത് θ-യുടെ സ്വീകാര്യമായ എല്ലാ മൂല്യങ്ങൾക്കും ശരിയാണ്. അതിനാൽ ഇതൊരു സർവ്വസമവാക്യമാണ്. എന്നിരുന്നാലും, $\sin\theta = \frac{1}{2}$ ഒരു സർവ്വസമവാക്യമല്ല, കാരണം $\theta = 60°$ ആകുമ്പോൾ ബന്ധം പരാജയപ്പെടുന്നു. സങ്കീർണ്ണമായ വ്യഞ്ജകങ്ങളെ ലഘൂകരിക്കാൻ സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ നമ്മെ പ്രാപ്തമാക്കുന്നു. ത്രികോണമിതി സമീകരണങ്ങൾ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നതിന് ഉപയോഗിക്കുന്ന ത്രികോണമിതിയുടെ അടിസ്ഥാന ഉപകരണങ്ങളാണ് ഇവ. സർവ്വസമവാക്യങ്ങളുമായി പ്രവർത്തിക്കുക എന്നതിന്റെ ഏറ്റവും പ്രധാനപ്പെട്ട ഭാഗം, ബീജഗണിതത്തിൽ നിന്നുള്ള വിവിധ സാങ്കേതികവിദ്യകളുടെ സഹായത്തോടെ അവ കൈകാര്യം ചെയ്യുക എന്നതാണ്.

തന്നിരിക്കുന്ന ത്രികോണമിതിയുടെ അടിസ്ഥാന സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ (പൈതഗോറിയൻ സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ) നമുക്ക് ഓർമ്മിക്കാം

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1;\ \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1;\ \operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$$

കുറിപ്പ് : (i) $\sin^2\theta$ നെ സൂചിപ്പിക്കാൻ $(\sin\theta)^2$ ആണ് സർവസാധാരണയായി ഉപയോഗിക്കുന്നത്, ഇതുപോലെ തന്നെ മറ്റു ത്രികോണമിതി അനുപാതങ്ങളെയും എഴുതാം.

(ii) $\theta = 90°$ ആകുമ്പോൾ $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ എന്നത് അർത്ഥശൂന്യമാണ്. എന്നാൽ $\sec\theta$ യും $\tan\theta$ യും നിർവചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുള്ള θ-യുടെ എല്ലാ വിലകൾക്കും ഇത് ഒരു സർവസമവാക്യവും ശരിയുമാണ്. അതിനാൽ, ഒരു സർവസമവാക്യം എന്നത് അതിന്റെ മണ്ഡലത്തിലെ എല്ലാ വിലകൾക്കും ശരിയായിട്ടുള്ള ഒരു സമീകരണം ആണ്.

(iii) $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$ എന്ന് നാം എഴുതുമ്പോൾ, നാം മനസ്സിലാക്കേണ്ടത്, $1 + \cos\theta \neq 0$-ആയിട്ടുള്ള, θ-ള്ളയുടെ എല്ലാ വിലകൾക്കും ഈ വ്യഞ്ജകം സാധ്യമാണ്.

ഉദാഹരണം 3.1 തെളിയിക്കുക : $\frac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$.

നിർദ്ധാരണം :

$$\begin{aligned}\frac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1} &= \frac{\tan\theta + \sec\theta - (\sec^2\theta - \tan^2\theta)}{\tan\theta - \sec\theta + 1}\\ &= \frac{(\tan\theta + \sec\theta)[1 - (\sec\theta - \tan\theta)]}{\tan\theta - \sec\theta + 1}\\ &= \tan\theta + \sec\theta = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}.\end{aligned}$$

XI_Maths_Ch3_V-1_Malayalam.indd 116 14-02-2023 16:45:39

ഉദാഹരണം 3.2

തെളിയിക്കുക : $(\sec A - \operatorname{cosec} A)(1 + \tan A + \cot A) = \tan A \sec A - \cot A \operatorname{cosec} A$.

നിർദ്ധാരണം:

$$\text{ഇടത് വശം} = \left(\frac{1}{\cos A} - \frac{1}{\sin A}\right)\left[1 + \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{\sin A}\right]$$

$$= \frac{\sin^3 A - \cos^3 A}{\sin^2 A \cos^2 A} \quad \ldots\ldots \text{(i)}$$

$$\text{വലത് വശം} = \frac{\sin A}{\cos^2 A} - \frac{\cos A}{\sin^2 A} = \frac{\sin^3 A - \cos^3 A}{\sin^2 A \cos^2 A} \quad \ldots\ldots \text{(ii)}$$

(i) ൽ നിന്നും (ii) ൽ നിന്നും നമുക്കാവശ്യമുള്ള ഫലം ലഭിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം 3.3 $a\cos\theta = b$, $c\sin\theta = d$ എന്നിവയിൽ നിന്ന് θ-ഒഴിവാക്കുക, ഇവിടെ, a, b, c, d എന്നിവ സ്ഥിരാങ്കങ്ങളാണ്.

നിർദ്ധാരണം:

$ac\cos\theta = bc$, $ac\sin\theta = ad$ എന്നിവയുടെ വർഗ്ഗം കണ്ട് കൂട്ടിയാൽ,

$$a^2c^2 = b^2c^2 + a^2d^2 \text{ എന്ന് കിട്ടുന്നു.}$$

അഭ്യാസം 3.1

1. തന്നിട്ടുള്ള അളവുകളുള്ള കോണുകൾ ഏത് ചതുർത്ഥാംശത്തിലാണ് എന്ന് തിരിച്ചറിയുക.
   (i) 25° (ii) 825° (iii) – 55° (iv) 328° (v) – 230°
2. തന്നിട്ടുള്ള ഓരോ കോണുകളുടെയും 0° യുടെ അളവ് $0° \le \theta < 360°$-ആകുന്ന തരത്തിൽ കോടെർമിനൽ കോണുകൾ കാണുക.
   (i) 395° (ii) 525° (iii) 1150° (iv) – 270° (v) – 450°
3. $a\cos\theta - b\sin\theta = c$ എങ്കിൽ, $a\sin\theta + b\cos\theta = \pm\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$ എന്ന് കാണിക്കുക.
4. $\sin\theta + \cos\theta = m$ എങ്കിൽ, $\cos^6\theta + \sin^6\theta = \frac{4 - 3(m^2 - 1)^2}{4}$(ഇവിടെ $m^2 \le 2$).
   എന്ന് കാണിക്കുക.
5. $\frac{\cos^4\alpha}{\cos^2\beta} + \frac{\sin^4\alpha}{\sin^2\beta} = 1$ എങ്കിൽ,
   (i) $\sin^4\alpha + \sin^4\beta = 2\sin^2\alpha\sin^2\beta$ (ii) $\frac{\cos^4\beta}{\cos^2\alpha} + \frac{\sin^4\beta}{\sin^2\alpha} = 1$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.
6. $y = \frac{2\sin\alpha}{1 + \cos\alpha + \sin\alpha}$ എങ്കിൽ $\frac{1 - \cos\alpha + \sin\alpha}{1 + \sin\alpha} = y$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.
7. $x = \sum_{n=0}^{\infty}\cos^{2n}\theta$, $y = \sum_{n=0}^{\infty}\sin^{2n}\theta$, $z = \sum_{n=0}^{\infty}\cos^{2n}\theta\sin^{2n}\theta$ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, എങ്കിൽ, $xyz = x + y + z$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.
   [സൂചന : $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1 - x}$, $|x| < 1$-എന്ന സൂത്രം ഉപയോഗിക്കുക].

XI_Maths_Ch3_V-1_Malayalam.indd 117 14-02-2023 16:45:42

8. $\tan^2\theta = 1 - k^2$ എങ്കിൽ, $\sec\theta + \tan^3\theta \operatorname{cosec}\theta = (2 - k^2)^{3/2}$ എന്ന് കാണിക്കുക. കൂടാതെ ഈ ഫലത്തെ നിലനിർത്തുന്ന k യുടെ വിലകളും കാണുക.

9. $\sec\theta + \tan\theta = p$ എങ്കിൽ, $\sec\theta$, $\tan\theta$, $\sin\theta$ എന്നിവയുടെ മൂല്യം p യിൽ കാണുക.

10. $\cot\theta(1 + \sin\theta) = 4m$ ഉം $\cot\theta(1 - \sin\theta) = 4n$ ഉം ആണെങ്കിൽ, $(m^2 - n^2)^2 = mn$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

11. $\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta = a^3$ ഉം $\sec\theta - \cos\theta = b^3$ ആണെങ്കിൽ, $a^2b^2(a^2 + b^2) = 1$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

12. $a\sec\theta - c\tan\theta = b$, $b\sec\theta + d\tan\theta = c$ എന്നീ സമീകരണങ്ങളിൽ നിന്ന് θ ഒഴിവാക്കുക.

3.3 റേഡിയൻ അളവ്

തുടക്കത്തിൽ ത്രികോണമിതി അനുപാതങ്ങൾ നിർവ്വചിക്കാൻ മട്ടത്രികോണങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുകയും കോണുകൾ ഡിഗ്രിയിൽ അളക്കുകയും ചെയ്തു. എന്നാൽ ന്യൂനകോണുകൾ മാത്രം ഉൾപ്പെടുന്നതിനാൽ മട്ടത്രികോണങ്ങൾക്ക് പരിമിതികൾ ഉണ്ട്.

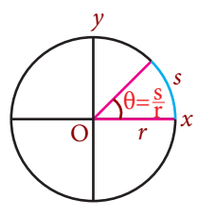
ഡിഗ്രിയിൽ ഒരു പൂർണ്ണ ഭ്രമണം 360°-എന്നതിന് തുല്യമാണ്. ആയിരക്കണക്കിന് വർഷങ്ങൾക്ക് മുമ്പ് ബാബിലോണിയക്കാർ 360 ദിനങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചിരുന്നു. ഒരു വർഷത്തിലെ ദിവസങ്ങളുടെ എണ്ണത്തെ അടിസ്ഥാനമാക്കി അവർ 360° തെരഞ്ഞെടുത്തിരിക്കാം. എന്നാൽ 30°, 45°, 60°, 90°, 180° എന്നിങ്ങനെയുള്ള ചെറിയ കോണുകളിലേക്ക് പ്രവേശിക്കുന്നതിനുള്ള നല്ല സവിശേഷത ഇതിന് ഉണ്ട്.



17-ാം നൂറ്റാണ്ടിൽ, ത്രികോണമിതിയുടെ പ്രയോഗം ഭൗതീക ശാസ്ത്രത്തിലേക്കും രസതന്ത്രത്തിലേക്കും വ്യാപിപ്പിച്ചു, അവിടെ ഇതിന് കോണുകളെക്കാൾ വാസ്തവികസംഖ്യകളുടെ ഗണം മണ്ഡലമായ ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളാണ് ആവശ്യമായിരുന്നത്. ഒരു യൂണിറ്റ് വൃത്തത്തിലെ ഒരു കോണും ചാപനീളവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം ഉപയോഗപ്പെടുത്തിയാണ് ഇത് സാധിച്ചത്. അത്തരമൊരു അളവിലുള്ള കോണിനെ റേഡിയൻ അളവ് എന്ന് വിളിക്കുന്നു. സൈദ്ധാന്തിക പ്രയോഗങ്ങൾക്ക്, കോൺ അളക്കുന്നതിനുള്ള ഏറ്റവും സാധാരണമായ സംവിധാനമാണ് റേഡിയൻ. കാൽക്കുലസ് ഉൾപ്പെടെ പല സാങ്കേതിക മേഖലകളിലും കോൺ അളക്കുന്നതിന് സാധാരണ ഉപയോഗിക്കുന്ന യൂണിറ്റാണ് റേഡിയൻ. കോണുകളുടെ റേഡിയൻ അളവുകളിൽ പ്രധാന പങ്കുവഹിക്കുന്നത് അപരിമേയ സംഖ്യ ആയ π ആണ്. ഒരു കോണിന്റെ റേഡിയൻ അളവെന്താണെന്ന് നമുക്ക് പരിചയപ്പെടാം.

നിർവചനം 3.1

ഒരു കോണിന്റെ റേഡിയൻ അളവ്, അത് നീളുന്ന ചാപനീളത്തിന്റെയും അത് കേന്ദ്രകോണായ വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധത്തിന്റെയും അനുപാതമാണ്.



ചിത്രം 3.5

'r' വ്യാസാർദ്ധമുള്ള ഒരു വൃത്തം പരിഗണിക്കുക. കേന്ദ്രകോണിന്റെ അളവ് θ ആയിട്ടുള്ള ചാപനീളം s ആയാൽ,

$$\text{എങ്കിൽ, } \theta = \frac{\text{ചാപനീളം}}{\text{വ്യാസാർദ്ധം}}$$

$$= \frac{s}{r} \text{ റേഡിയൻ}$$

$$\text{ആയതിനാൽ, } s = r\theta .$$

XI_Maths_Ch3_V-1_Malayalam.indd 118 14-02-2023 16:45:43

രീതി : (i) എല്ലാ വൃത്തങ്ങളും സദൃശമാണ്. അതിനാൽ, ഏതൊരു വൃത്തത്തിന്റെയും ഒരു കേന്ദ്ര കോണിന് അത് ഖണ്ഡിച്ച ചാപനീളത്തിന്റെയും വ്യാസാർദ്ധത്തിന്റെയും അനുപാതം സ്ഥിരാങ്കമാണ്.

(ii) $s = r$ ആകുമ്പോൾ, 1 റേഡിയൻ അളവുള്ള ഒരു കോൺ നമുക്ക് ലഭിക്കും. അതിനാൽ, ഒരു റേഡിയൻ എന്നത് ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ആരത്തിന് തുല്യമായ നീളമുള്ള ഒരു ചാപം വൃത്ത കേന്ദ്രത്തിലുണ്ടാക്കുന്ന കോണിന്റെ അളവാണ്.

(iii) s ഉം r ഉം ഒരേ യൂണിറ്റിലുള്ള നീളങ്ങൾ ആയതിനാൽ, θ യ്ക്ക് യൂണിറ്റില്ല, അതിനാൽ റേഡിയനെ സൂചിപ്പിക്കാൻ ഒരു അടയാളങ്ങളും നാം ഉപയോഗിക്കുന്നില്ല.

(iv) $s = r$ എങ്കിൽ $\theta = 1$ റേഡിയനും
$s = 2r$ എങ്കിൽ $\theta = 2$ റേഡിയനും ആയിരിക്കും.

അതിനാൽ, $s = kr$ എങ്കിൽ, $\theta = k$ റേഡിയൻ എന്ന് പൊതുവായി പറയാം. ആയതിനാൽ, ഒരു കോണിന്റെ റേഡിയൻ അളവ് നമ്മോടു പറയുന്നത് ഒരു വൃത്തത്തിൽ കേന്ദ്രകോൺ θ-യെ രൂപപ്പെടുത്തുന്ന വൃത്തഖണ്ഡഭാഗം ഒരു മുഴു വൃത്തമായി ചുറ്റി വരുന്നതിന് എത്ര വ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ ആവശ്യമാണ് എന്നതാണ്.

(v) കോണിന്റെ റേഡിയൻ അളവ് യൂണിറ്റ് വൃത്തത്തിന്റെ പരിധിയുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. റേഡിയൻ സമ്പ്രദായത്തിൽ, നാം ഒരു കോൺ അളക്കുന്നത്, കോണിന്റെ അവസാന വശം യൂണിറ്റ് വൃത്തത്തെ ഖണ്ഡിക്കുന്നിടത്ത് യൂണിറ്റ് വൃത്തത്തിന്റെ പരിധിയിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരം അളക്കുന്നതിലൂടെയാണ്.

3.3.1 ഡിഗ്രി, റേഡിയൻ അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം

കോൺ അളക്കുന്നതിന് ഡിഗ്രി, റേഡിയൻ എന്നീ അളവുകൾ നമുക്കുണ്ട്. ലളിതവും അവബോധജന്യവുമായ രീതിയിൽ നിർവചിക്കാൻ കഴിയുമെങ്കിൽ ഒരു അളവെടുക്കൽ യൂണിറ്റ് മറ്റൊന്നിനേക്കാൾ മികച്ചതാണ്. ഉദാഹരണത്തിന് താപനില അളക്കുന്നതിൽ, ഫാരൻ ഹീറ്റിനേക്കാൾ മികച്ചതാണ് സെൽഷ്യസ് യൂണിറ്റ്, കാരണം ജലത്തിന്റെ ഖരാങ്കവും തിളനിലയും 0°, 100° എന്നിവ ഉപയോഗിച്ച് സെൽഷ്യസ് നിർവ്വചിച്ചിട്ടുണ്ട്. പരിവർത്തനത്തിനും കണക്കുകൂട്ടലുകൾക്കും റേഡിയൻ അളവ് മികച്ചതാണ്. വിശകലനങ്ങൾക്ക് റേഡിയൻ അളവ് കൂടുതൽ സൗകര്യപ്രദമാണ്, അതേസമയം ആളുകൾ തമ്മിൽ ആശയവിനിമയം നടത്താൻ കൂടുതൽ സൗകര്യപ്രദമായത് കോണിന്റെ ഡിഗ്രി അളവാണ്. വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിൽ നിന്ന് ഉരുത്തിരിഞ്ഞ π യുടെ ബന്ധത്തെ ഗ്രീക്ക് ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞർ നിരീക്ഷിച്ചു. അങ്ങനെ, റേഡിയൻ അളവിൽ π നിർണ്ണായക പങ്ക് വഹിക്കുന്നു.

ഒരു യൂണിറ്റ് വൃത്തത്തിൽ, ഒരു പൂർണ്ണഭ്രമണം 360°-യെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. അതേസമയം, ഒരു പൂർണ്ണഭ്രമണം 2π റേഡിയനായി ബന്ധിപ്പിക്കുന്നു, ഇത് യൂണിറ്റ് വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന് തുല്യമാണ്. അങ്ങനെ ഇനിപ്പറയുന്ന ബന്ധങ്ങൾ നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നു.

$\therefore$ 2π റേഡിയൻ = 360° ഇത് ലഘൂകരിച്ചാൽ $\Rightarrow$ π റേഡിയൻ = 180°

അതിനാൽ, 1 റേഡിയൻ = $\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$ അല്ലെങ്കിൽ $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ റേഡിയൻ

ഇവിടെ, x റേഡിയൻ = $\left(\frac{180x}{\pi}\right)^\circ$ അല്ലെങ്കിൽ $x^\circ = \frac{\pi x}{180}$ റേഡിയൻ.

XI_Maths_Ch3_V-1_Malayalam.indd 119 14-02-2023 16:45:43

റേഡിയനിൽ ഉപയോഗിക്കുന്ന തോത് ഡിഗ്രിയിലെ തോതിനേക്കാൾ വളരെ ചെറുതാണെന്നത് നിരീക്ഷിക്കുക. ചെറിയ തോത് ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളുടെ ഗ്രാഫുകൾ കൂടുതൽ ദൃശ്യവും ഉപയോഗ യോഗ്യവുമാകുന്നു. മുകളിലുള്ള ബന്ധം റേഡിയനുകളെ ഡിഗ്രികളോ ഡിഗ്രികളെ റേഡിയനുകളോ ആക്കി മാറ്റുന്നതിനുള്ള ഒരു മാർഗ്ഗം നൽകുന്നു.

കുറിപ്പ് : (i) ഏതൊരു വൃത്തത്തിന്റെയും ചുറ്റളവും വ്യാസവും തമ്മിലുള്ള അനുപാതം ഒരു സ്ഥിരാങ്ക മായിരിക്കും. ഈ സ്ഥിരാങ്കത്തെ π എന്ന അപരിമേയ സംഖ്യ ഉപയോഗിച്ച് കുറിക്കുന്നു.

(ii) ഒരു യൂണിറ്റ് വൃത്തത്തിൽ P എന്ന ഒരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തി ഈ ബിന്ദു സംഖ്യാ രേഖയിൽ O-ൽ സ്പർശിക്കുന്ന രീതിയിൽ യൂണിറ്റ് വൃത്തത്തെ സംഖ്യാരേഖയിൽ സ്ഥാപിക്കുക. സംഖ്യാരേഖയിലൂടെ വൃത്തത്തെ ഉരുട്ടുക. വൃത്തം വലത്തേക്ക് ഉരുണ്ട് ഒരു പൂർണ്ണ ഭ്രമണം പൂർത്തിയാക്കുമ്പോൾ P എന്ന ബിന്ദു സംഖ്യാരേഖയിലെ 2π എന്ന സംഖ്യ യിൽ സ്പർശിക്കും.

(iii) കോൺ അളവിന്റെ യൂണിറ്റ് വ്യക്തമാക്കിയിട്ടില്ലെങ്കിൽ കോൺ റേഡിയനിലാണെന്ന് മനസ്സിലാക്കാം.

(iv) r വ്യാസാർദ്ധമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ഒരു സെക്ടർ പരിഗണിക്കുക. സെക്ടറിന്റെ കേന്ദ്ര കോൺ θ ആണെങ്കിൽ സെക്ടറിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം = $\begin{cases} \left(\frac{\pi r^2}{360^\circ}\right)\theta & \text{ഡിഗ്രി അളവിൽ} \\ \left(\frac{\pi r^2}{2\pi}\right)\theta = \frac{r^2\theta}{2} & \text{റേഡിയൻ അളവിൽ} \end{cases}$

റേഡിയൻ അളവിലുള്ള കണക്കുകൂട്ടൽ നടത്താൻ വളരെ എളുപ്പമാണെന്ന് വ്യക്തമാണ്.

(v) π യുടെയും $\frac{22}{7}$ ന്റെയും മൂല്യങ്ങൾ നാല് ദശാംശ സ്ഥാനങ്ങൾക്ക് കൃത്യമാക്കിയാൽ യഥാ ക്രമം 3.1416 ഉം 3.1429 ഉം ആണ്. അതിനാൽ, π യും $\frac{22}{7}$-ഉം കൃത്യമായി രണ്ട് ദശാംശ സ്ഥാനങ്ങൾക്ക് ഏകദേശം തുല്യമാണ്. ആയതിനാൽ, $\pi \approx \frac{22}{7}$

(vi) 1 റേഡിയൻ $\approx 57^\circ 17' 45''$ ഉം $1^\circ \approx 0.017453$ റേഡിയൻ

$1' = \left(\frac{\pi}{180 \times 60}\right)$ റേഡിയൻ ≈ 0.000291 റേഡിയൻ

$1'' = \left(\frac{\pi}{180 \times 60 \times 60}\right)$ റേഡിയൻ ≈ 0.000005 റേഡിയൻ

(vii) അറിയാവുന്ന ചില കോണുകളുടെ റേഡിയൻ അളവിന് തത്തുല്യമായ ഡിഗ്രി അളവുകൾ ചുവടെയുള്ള പട്ടികയിൽ തന്നിട്ടുണ്ട്.

റേഡിയൻ	0	1	0.017453	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ഡിഗ്രി	0°	$57^\circ 17' 45''$	1°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°

(viii) $\sin 90^\circ = 1$ ആണ് എന്നാൽ $\sin 90 \neq 1$ (റേഡിയൻ അളവ്)

ഉദാഹരണം 3.4 റേഡിയനിലേക്ക് മാറ്റുക. (i) 18° (ii) -108°.

നിർദ്ധാരണം:

$180^\circ = \pi$ റേഡിയൻ ആണ്. ഇതിൽ നിന്ന് $\Rightarrow 1^\circ = \frac{\pi}{180}$ റേഡിയൻ

(i) $18^\circ = \frac{\pi}{180} \times 18$ റേഡിയൻ $= \frac{\pi}{10}$ റേഡിയൻ

XI_Maths_Ch3_V-1_Malayalam.indd 120 14-02-2023 16:45:44

(ii) $-108^\circ = \frac{\pi}{180} \times (-108)$ റേഡിയൻ

$= -\frac{3\pi}{5}$ റേഡിയൻ

ഉദാഹരണം 3.5 റേഡിയനിൽ നിന്ന് ഡിഗ്രിയിലേക്ക് മാറ്റുക (i) $\frac{\pi}{5}$ റേഡിയൻ (ii) 6 റേഡിയൻ.

നിർദ്ധാരണം:

π റേഡിയൻ = 180° ആണെന്ന് നമുക്കറിയാം. അതിനാൽ,

(i) $\frac{\pi}{5}$ റേഡിയൻ $= \frac{180^\circ}{5} = 36^\circ$

(ii) 6 റേഡിയൻ $= \left(\frac{180}{\pi} \times 6\right)^\circ \approx \left(\frac{7 \times 180}{22} \times 6\right)^\circ$

$= \left(343\frac{7}{11}\right)^\circ$

ഉദാഹരണം 3.6 5 cm വ്യാസാർദ്ധമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിലെ 15° കേന്ദ്രകോണുള്ള ഒരു ചാപത്തിന്റെ നീളം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം:

r വ്യാസാർദ്ധമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിലെ θ കേന്ദ്രകോണുള്ള ഒരു ചാപത്തിന്റെ നീളം s എന്നെടുത്താൽ, $s = r\theta$

നമുക്കറിയാവുന്നത് $\theta = 15^\circ = 15 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{12}$ റേഡിയൻ

അതുകൊണ്ട് $s = r\theta \Rightarrow s = 5 \times \frac{\pi}{12} = \frac{5\pi}{12}$ സെ.മീ

കുറിപ്പ് : $r\,\theta$ എന്ന ഗുണനഫലത്തിൽ θ എല്ലായ്പ്പോഴും റേഡിയനിലായിരിക്കും.

ഉദാഹരണം 3.7 തുല്യനീളമുള്ള രണ്ട് വൃത്തങ്ങളിൽ ചാപങ്ങളുടെ കേന്ദ്ര കോണുകൾ 30° ഉം 80°-ഉം ആയാൽ, ആ വൃത്തങ്ങളുടെ വ്യാസാർദ്ധങ്ങളുടെ അനുപാതം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം:

തന്നിട്ടുള്ള രണ്ട് വൃത്തങ്ങളുടെ വ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ r_1 ഉം r_2 ഉം ചാപങ്ങളുടെ നീളം l ഉം ആയാൽ,

$\theta_1 = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$ റേഡിയൻ

$\theta_2 = 80^\circ = \frac{4\pi}{9}$ റേഡിയൻ

$l = r_1\theta_1 = r_2\theta_2$ എന്ന് നമുക്കറിയാം.

അതിനാൽ, $\frac{\pi}{6} r_1 = \frac{4\pi}{9} r_2$

$\frac{r_1}{r_2} = \frac{8}{3} \Rightarrow r_1 : r_2 = 8 : 3.$

XI_Maths_Ch3_V-1_Malayalam.indd 121 14-02-2023 16:45:45

അഭ്യാസം 3.2

1. തന്നിട്ടുള്ള ഓരോ കോണുകളെയും റേഡിയൻ അളവിൽ ആവിഷ്ക്കരിക്കുക.

   (i) $30°$ (ii) $135°$ (iii) $-205°$ (iv) $150°$ (v) $330°$

2. തന്നിട്ടുള്ള റേഡിയൻ അളവുകൾക്ക് തത്തുല്യമായ ഡിഗ്രി അളവുകൾ കാണുക.

   (i) $\frac{\pi}{3}$ (ii) $\frac{\pi}{9}$ (iii) $\frac{2\pi}{5}$ (iv) $\frac{7\pi}{3}$ (v) $\frac{10\pi}{9}$

3. ഒരു ഓട്ടക്കാരന് 1 കി.മീ തികയ്ക്കാൻ 5 പ്രാവശ്യം വൃത്താകാരമായ ഒരു ഓട്ടപ്പാതയിൽ ഓടണമെങ്കിൽ, വൃത്താകാര ഓട്ടപ്പാതയുടെ വ്യാസാർദ്ധം എന്തായിരിക്കും?

4. ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസം 40 സെ.മീ ഉം അതിലെ ഒരു ഞാണിന്റെ നീളം 20 സെ.മീ ആണ്. ഞാൺ നിർമ്മിക്കുന്ന ചെറിയ ചാപത്തിന്റെ നീളം കാണുക.

5. 100 സെ.മീ വ്യാസാർദ്ധമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിലെ, 22 സെ.മീ നീളമുള്ള ഒരു ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്ര കോൺ ഡിഗ്രി അളവിൽ കാണുക.

6. 10 അടി വ്യാസാർദ്ധമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിൽ, $\theta = 41°$ കേന്ദ്രകോണുള്ള ചാപത്തിന്റെ നീളം എന്താണ്.

7. രണ്ട് വൃത്തങ്ങളിൽ, ഒരേ നീളമുള്ള ഞാണുകൾ കേന്ദ്രത്തിൽ $60°$, $75°$ കോണുകൾ രൂപീകരിക്കുന്നു എങ്കിൽ, അവയുടെ വ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അനുപാതം കാണുക.

8. ഒരു വൃത്തത്തിലെ ഏതെങ്കിലുമൊരു സെക്ടറിന്റെ ചുറ്റളവ് അതേ വ്യാസാർദ്ധമുള്ള അർദ്ധ വൃത്തത്തിന്റെ ചാപത്തിന്റെ നീളത്തിന് തുല്യമാണ്. സെക്ടറിന്റെ കോണളവ് ഡിഗ്രി, മിനിറ്റ് സെക്കന്റിൽ സൂചിപ്പിക്കുക.

9. ഒരു വിമാനത്തിന്റെ പ്രൊപ്പല്ലർ മിനിറ്റിൽ 1000 പ്രാവശ്യം കറങ്ങുന്നു. 1 സെക്കന്റിൽ പ്രൊപ്പല്ലറിന്റെ അഗ്രത്തെ ഒരു ബിന്ദു എത്ര ഡിഗ്രി കറങ്ങുന്നു എന്ന് കാണുക.

10. 1500 മീ വ്യാസാർദ്ധമുള്ള ഒരു വൃത്താകാര ട്രാക്കിലൂടെ 66 കി.മീ/മണിക്കൂർ നിരക്കിൽ ഒരു തീവണ്ടി ചലിക്കുന്നു എങ്കിൽ 20 സെക്കന്റിൽ അത് സഞ്ചരിക്കുന്ന കോണളവ് എന്ത്.

11. 8 സെ.മീ വ്യാസാർദ്ധവും 6 സെ.മീ കനവുമുള്ള ഒരു വൃത്താകാര ലോഹ പാത്രത്തെ ഉരുക്കി 16 സെ.മീ വ്യാസാർദ്ധവും 6മി.മീ കനവുമുള്ള സെക്ടർ നിർമ്മിക്കുന്നു എങ്കിൽ ആ സെക്ടറിന്റെ കോണളവ് കാണുക.

3.4 ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളും അവയുടെ സവിശേഷതകളും

3.4.1 കാർട്ടീഷ്യൻ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങളിലുള്ള ഏതൊരു കോണിന്റെയും ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങൾ

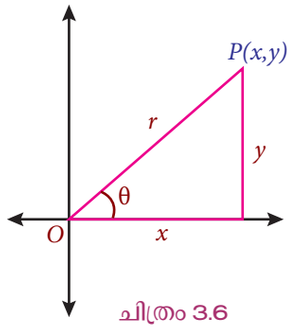
ന്യൂനകോണുകൾ ഉപയോഗിച്ചുള്ള ത്രികോണമിതി അനുപാതങ്ങളുടെ നിയമങ്ങൾ നാം താഴ്ന്ന ക്ലാസ്സുകളിൽ പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്. എന്നാൽ ന്യൂനകോണുകൾ അല്ലാത്ത നിരവധി കോണുകളിലൂടെ നാം കടന്നു പോകുന്നു. ന്യൂനകോൺ എന്ന ആശയത്തെ വിപുലീകരിച്ച് ഏതൊരു കോണിനും ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങൾ നമുക്ക് നിർവ്വചിക്കാം. റേഡിയൻ അളവിലുള്ള ഏതൊരു കോണിന്റെയും ത്രികോണമിതി അനുപാതങ്ങളെ ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങൾ എന്നുവിളിക്കുന്നു.

XI_Maths_Ch3_V-1_Malayalam.indd 122 14-02-2023 16:45:46

ശരിയായ സ്ഥാനത്തുള്ള ഒരു കോൺ θ-യുടെ അന്തിമവശത്തെ ആധാരബിന്ദുവല്ലാത്ത ഒരു ബിന്ദു $P(x, y)$ പരിഗണിക്കുക. $OP = r$ എന്നെടുത്താൽ.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

θ-യുടെ ആറ് ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളും ഇനിപ്പറയുന്ന രീതിയിൽ നിർവ്വചിക്കാം.



ചിത്രം 3.6

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \text{ കൂടാതെ } \cos\theta = \frac{x}{r}$$

ഇത് ഉപയോഗിച്ച്, നമുക്ക്,

$$\tan\theta = \frac{y}{x},\ x \neq 0; \quad \cot\theta = \frac{x}{y},\ y \neq 0;$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{y},\ y \neq 0; \quad \sec\theta = \frac{r}{x},\ x \neq 0 \text{ എന്നിവ എഴുതാം.}$$

കുറിപ്പ് : (i) $|x| \leq r$, $|y| \leq r$ ആയതിനാൽ $|\cos\theta| \leq 1$ ഉം $|\sin\theta| \leq 1$ ഉം നമുക്ക് ലഭിക്കും.

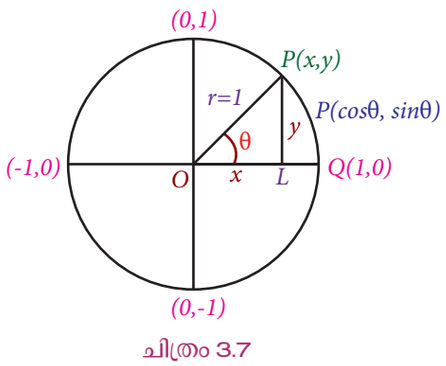
(ii) ന്യൂനകോണിന്റെ കാര്യത്തിൽ, മേൽപ്പറഞ്ഞ നിർവ്വചനങ്ങൾ മട്ടത്രികോണം ഉപയോഗിച്ചുള്ള നമ്മുടെ പഴയ നിർവ്വചനങ്ങൾക്ക് സമമാണ്.

(iii) $P(x, y)$ യുടെ അന്തിമവശത്തിലെ θ എന്ന ബിന്ദു ആയിരിക്കുന്ന ചതുർത്ഥാംശത്തിനനുസരിച്ച് ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങൾക്ക് ധനമോ ഋണമോ ആയിട്ടുള്ള വിലകൾ ഉണ്ടാകും.

(iv) മേൽപ്പറഞ്ഞ ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളുടെ നിർവ്വചനങ്ങൾ കോണിന്റെ അന്തിമവശത്തെ ബിന്ദുക്കളിൽ നിന്ന് സ്വതന്ത്രമാണ് (സമർത്ഥിക്കുക)

ചതുർത്ഥാംശകോണുകളുടെ ത്രികോണമിതി അനുപാതങ്ങൾ

ശരിയായ സ്ഥാനത്തുള്ള കോണിന്റെ അന്തിമവശം ഏതെങ്കിലും ഒരു അക്ഷത്തിൽ ആണെങ്കിൽ അത്തരം കോണിനെ ചതുർത്ഥാംശകോൺ എന്ന് വിളിക്കുന്നു. ചതുർത്ഥാംശ കോണുകളുടെ ത്രികോണമിതി അനുപാതങ്ങൾ നമുക്ക് കാണാം.



ചിത്രം 3.7

$x^2 + y^2 = 1$ എന്ന യൂണിറ്റ് വൃത്തം പരിഗണിക്കാം. യൂണിറ്റ് വൃത്തത്തെ കോൺ θ-യുടെ അന്തിമവശം ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദുവിനെ $P(x, y)$ എന്നെടുത്താൽ,

$$\cos\theta = \frac{x}{1} = x \ (p \text{ യുടെ } x \text{ നിർദ്ദേശാങ്കം})$$

$$\sin\theta = \frac{y}{1} = y \ (p \text{ യുടെ } y \text{ നിർദ്ദേശാങ്കം}) \text{ ഉം ആയിരിക്കും}$$

അതിനാൽ, യൂണിറ്റു വൃത്തത്തിലെ ഏതൊരു ബിന്ദു $P(x, y)$ടെയും നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ $P(\cos\theta, \sin\theta)$ ആണ്. ഈ രീതിയിൽ കോൺ θ-യുടെ അളവ് യൂണിറ്റ് വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു.

XI_Maths_Ch3_V-1_Malayalam.indd 123 14-02-2023 16:45:47

മേൽപ്പറഞ്ഞ വിശദീകരണങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ചതുർത്ഥാംശകോണുകളുടെ ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളുടെ മൂല്യങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുന്നത് എങ്ങനെ എന്ന് ചുവടെയുള്ള പട്ടിക വിവരിക്കുന്നു.

ചതുർത്ഥാംശ കോണുകളുടെ ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളുടെ യഥാർത്ഥ മൂല്യങ്ങൾ

ചതുർത്ഥാംശ കോൺ	യൂണിറ്റ് വൃത്തത്തിലെ അനുയോജ്യമായ ബിന്ദു $P(x,y) = P(\cos\theta,\ \sin\theta)$	കോസൈൻ വില $\cos\theta$	സൈൻ വില $\sin\theta$
$\theta = 0^\circ$	$(1,0) = (\cos 0^\circ, \sin 0^\circ)$	$\cos 0^\circ = 1$	$\sin 0^\circ = 0$
$\theta = 90^\circ$	$(0,1) = (\cos 90^\circ, \sin 90^\circ)$	$\cos 90^\circ = 0$	$\sin 90^\circ = 1$
$\theta = 180^\circ$	$(-1,0) = (\cos 180^\circ, \sin 180^\circ)$	$\cos 180^\circ = -1$	$\sin 180^\circ = 0$
$\theta = 270^\circ$	$(0,-1) = (\cos 270^\circ, \sin 270^\circ)$	$\cos 270^\circ = 0$	$\sin 270^\circ = -1$
$\theta = 360^\circ$	$(1,0) = (\cos 360^\circ, \sin 360^\circ)$	$\cos 360^\circ = 1$	$\sin 360^\circ = 0$

കുറിപ്പ് : (i) യൂണിറ്റ് വൃത്തത്തിലെ എല്ലാ ബിന്ദുക്കളുടെയും x, y-നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ -1 നും 1-നും ഇടയിലാണെന്നത് നിരീക്ഷിക്കുക. ആയതിനാൽ θ-യുടെ മൂല്യം എന്തുതന്നെ ആയിരുന്നാലും $-1 \le \cos\theta \le 1, -1 \le \sin\theta \le 1$ ആയിരിക്കും.

(ii) $\theta = 360^\circ$ ആയിരിക്കുമ്പോൾ, നാം ഒരു പൂർണ്ണ ഭ്രമണം പൂർത്തിയാക്കിയിരിക്കും. അങ്ങനെ, അന്തിമവശം ധന x അക്ഷവുമായി സംയോജിക്കുന്നു. ആയതിനാൽ, 0° ലും 360° ലും സൈനിന് തുല്യമൂല്യമായിരിക്കും. കൊസൈനും മറ്റു ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളും ഇതു തന്നെ പിന്തുടരുന്നു.

(iii) രണ്ട് കോണുകളുടെ വ്യത്യാസം 360° അല്ലെങ്കിൽ 2π-യുടെ പൂർണ്ണാങ്ക ഗുണിതം ആണെങ്കിൽ, ആ കോണുകളുടെ ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങൾക്ക് തുല്യമൂല്യം ഉണ്ടായിരിക്കും.

(iv) ചതുർത്ഥാംശ കോണുകളിലെ സൈനിന്റെയും കൊസൈനിന്റെയും മൂല്യങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച്, ഇനിപ്പറയുന്നവ നമുക്ക് ജ്യാമിതീയമായി സാമാന്യവൽക്കരിക്കാം.

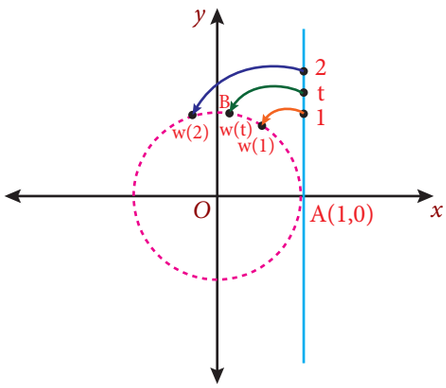
ചതുർത്ഥാംശ കോണിൽ	ന്യായീകരണം	സാമാന്യവൽക്കരണം
$\sin 0 = 0$ $\sin \pi = 0$	$\sin(0 + 2n\pi) = 0;\ n \in \mathbb{Z}$ $\sin(\pi + 2n\pi) = 0;\ n \in \mathbb{Z}$	$\sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = n\pi;\ n \in \mathbb{Z}$
$\cos\frac{\pi}{2} = 0$ $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 0;\ n \in \mathbb{Z}$ $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right) = 0;\ n \in \mathbb{Z}$	$\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$; $n \in \mathbb{Z}$
$\tan 0 = 0$ $\tan \pi = 0$	$\tan(0 + 2n\pi) = 0;\ n \in \mathbb{Z}$ $\tan(\pi + 2n\pi) = 0;\ n \in \mathbb{Z}$	$\tan\theta = 0 \Rightarrow \theta = n\pi;\ n \in \mathbb{Z}$

(v) $\cos\theta = 0$ ആകുമ്പോൾ $\tan\theta$ നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ല. അതുകൊണ്ട് $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$ ആകുമ്പോഴും $\tan\theta$ നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ല.

XI_Maths_Ch3_V-1_Malayalam.indd 124 14-02-2023 16:45:50

3.4.2 വാസ്തവിക സംഖ്യകളുടെ ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങൾ

കാൽക്കുലസ് ഉൾപ്പെടെയുള്ള ഉന്നത ഗണിതശാസ്ത്രത്തിലെ പ്രശ്നങ്ങളിലും ഭൗതീക ശാസ്ത്രത്തിലും രസതന്ത്രത്തിലുമുള്ള പ്രശ്നങ്ങളിലുമുള്ള ത്രികോണമിതിയുടെ പ്രയോഗങ്ങൾക്ക് ശാസ്ത്രജ്ഞന്മാർക്ക് വാസ്തവിക സംഖ്യകളുടെ ത്രികോണ മിതി ഫലനങ്ങൾ ആവശ്യമാണ്. ഒരു യൂണിറ്റ് വൃത്തത്തിൽ ഒരു വാസ്തവിക സംഖ്യയെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ഒരു കോണും ഒരു ചാപ നീളവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം കാണിച്ചാണ് ഇത് വിദഗ്ദ്ധമായി ചെയ്തിരിക്കുന്നത്.



ചിത്രം 3.8

ആധാരബിന്ദു കേന്ദ്രമായ ഒരു യൂണിറ്റ് വൃത്തം പരിഗണിക്കുക. യൂണിറ്റ് വൃത്തത്തിലെ A(1,0) എന്ന ബിന്ദുവിനെ പ്രതിനിധീകരി ക്കുന്ന കോണളവ് പൂജ്യ (റേഡിയൻ അളവിൽ)ത്തെ എടുക്കാം. A(1,0) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ യൂണിറ്റ് വൃത്തത്തിന് ഒരു സ്പർശരേഖ വരയ്ക്കുക. സ്പർശരേഖയിലെ ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ y നിർദ്ദേശാങ്കം t എന്ന ഒരു വാസ്തവിക സംഖ്യ എന്നെടുക്കുക.

ഓരോ വാസ്തവിക സംഖ്യ t ക്കും, AB എന്ന ചാപത്തിന്റെ നീളം t ക്ക് തുല്യമാകുന്ന വിധത്തിൽ യൂണിറ്റ് വൃത്തത്തിൽ $B(x, y)$ എന്ന ഒരു ബിന്ദു കാണുക. t ധനം എങ്കിൽ $B(x, y)$ എന്ന ബിന്ദു എതിർഘടികാരദിശ യിലും മറിച്ചാണെങ്കിൽ ഘടികാരദിശയിലും തിരഞ്ഞെടുക്കുക. AB എന്ന ചാപം കേന്ദ്രത്തിൽ ഉണ്ടാക്കുന്ന കോൺ θ എന്നെടുക്കാം. ഈ രീതിയിൽ യൂണിറ്റ് വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവുമായി ഒരു വാസ്തവിക സംഖ്യ t യെ ബന്ധിപ്പിക്കുന്ന $w(t)$ എന്ന ഒരു ഫലനം ഉണ്ട്. അത്തരമൊരു ഫലനത്തെ ആവരണഫലനം എന്ന് വിളിക്കുന്നു. അതിനാൽ $s = r\theta$ യിൽ നിന്ന് ചാപനീളം $t = \theta$ ലഭിക്കുന്നു.

ഇപ്പോൾ, $\sin t = \sin\theta$ എന്നും $\cos t = \cos\theta$ എന്നും നിർവ്വചിക്കുക.

$\sin t = \sin\theta = y$ എന്നും $\cos t = \cos\theta = x$, എന്നും വ്യക്തമാണ്.

$\sin\ t$ യും $\cos\ t$ യും ഉപയോഗിച്ച് വാസ്തവിക സംഖ്യയിലുള്ള മറ്റു ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങൾ നിർവ്വചിക്കാവുന്നതാണ്.

കുറിപ്പ് : (i) $B(x, y) = B(\cos t, \sin t)$ എന്നത് യൂണിറ്റ് വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവാണ്. അതിനാൽ ഏത് വാസ്തവിക സംഖ്യ t-ക്കും $-1 \leq \cos t \leq 1$ ഉം $-1 \leq \sin t \leq 1$ ഉം ആണ്.

(ii) ആവരണ ഫലനം $w(t)$ ഒരു വൃത്തത്തിന് ചുറ്റുമുള്ള ആവരണ രേഖയ്ക്ക് സമമാണ്.

(iii) ഒരു വാസ്തവിക സംഖ്യ t-യുടെ ഒരു ത്രികോണമിതി ഫലനത്തിന്റെ മൂല്യം t റേഡി യനിലുള്ള കോണിലുള്ള അതിന്റെ മൂല്യമാണ്.

(iv) കൃത്യമായ ഇടവേളകളിൽ സംഭവിക്കുന്ന തരംഗങ്ങൾ, ആന്ദോളനങ്ങൾ പോലുള്ള പ്രതിഭാസങ്ങളെ മാതൃകയാക്കാൻ വാസ്തവിക സംഖ്യകളുടെ ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു.

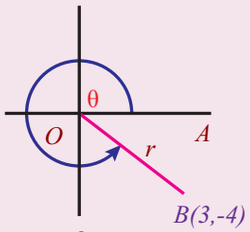
ഉദാഹരണം 3.8 ശരിയായ സ്ഥാനത്തുള്ള ഒരു കോൺ θ-യുടെ അന്തിമവശം $(3, -4)$ എന്ന ബിന്ദു വായി കടന്നുചെല്ലുന്നു. കോൺ θ-യുടെ ആറ് ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളുടെയും മൂല്യങ്ങൾ കാണുക.

XI_Maths_Ch3_V-1_Malayalam.indd 125 14-02-2023 16:45:51

നിർദ്ധാരണം:

$B(x, y) =$ $B(3, -4)$ എന്നും,

ശരിയായ സ്ഥാനത്തുള്ള കോൺ θ യുടെ ആരംഭവശം OA യും അന്തിമ വശം OB യും എന്നെടുത്താൽ. $\angle AOB = \theta$ യും θ നാലാം ചതുർത്ഥാംശത്തിലും ആയിരിക്കും. കൂടാതെ



ചിത്രം 3.9

$$OB = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$$

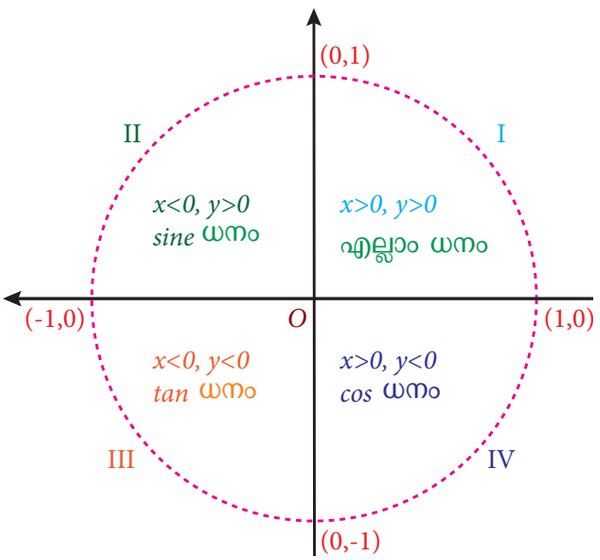
$x = 3, y = -4$ കൂടാതെ $r = 5$ എങ്കിൽ

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-4}{5};\ \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{3}{5};\ \tan\theta = \frac{y}{x} = -\frac{4}{3}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{y} = -\frac{5}{4};\ \sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{5}{3};\ \cot\theta = \frac{x}{y} = -\frac{3}{4}$$

ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളുടെ ചിഹ്നങ്ങൾ

ആധാരബിന്ദു കേന്ദ്രമായ ഒരു യൂണിറ്റ് വൃത്തം പരിഗണിക്കുക. θ-ശരിയായ സ്ഥാനത്താണെന്ന് കരുതുക. θ-എന്ന കോണിന് യോജിച്ച യൂണിറ്റ് വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദു $P(x, y)$ ആണെങ്കിൽ, $\cos\theta = x, \sin\theta = y$, $\tan\theta = \frac{y}{x}$ ആയിരിക്കും. P-ആയിരിക്കുന്ന ചതുർത്ഥാംശത്തിനനുസരിച്ച് x ന്റെയും y-യുടെയും മൂല്യങ്ങൾ ധനമോ ഋണമോ ആയിരിക്കും.



ചിത്രം 3.10

ഒന്നാം ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ

$$\cos\theta = x > 0 \text{ (ധനം)}$$

$$\sin\theta = y > 0 \text{ (ധനം)}$$

അതിനാൽ, $\sin\theta$ യും , $\cos\theta$ യും മാത്രമല്ല എല്ലാ ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളും ഒന്നാം ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ ധനം ആണ്.

രണ്ടാം ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ

$$\cos\theta = x < 0 \text{ (ഋണം)}$$

$$\sin\theta = y > 0 \text{ (ധനം)}$$

അതിനാൽ, $\sin\theta$ യും $\operatorname{cosec}\theta$ യും ധനവും മറ്റുള്ളവ ഋണവും ആണ്.

അതുപോലെ, മറ്റ് രണ്ട് ചതുർത്ഥാംശങ്ങളിലുമുള്ള ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളുടെ ചിഹ്നം നമുക്ക് കണ്ടുപിടിക്കാനാകും. മുകളിലുള്ള ചർച്ചകൾ ചിത്രം 3.10 ൽ നമുക്ക് വിശദീകരിക്കാം.

കുറിപ്പ് : വിവിധ ചതുർത്ഥാംശങ്ങളിലെ ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളുടെ ചിഹ്നങ്ങൾ ശ്ലോകം ഉപയോഗിച്ച് ഓർമ്മിക്കാം

"All Students Take Chocolate" (ASTC).

XI_Maths_Ch3_V-1_Malayalam.indd 126 14-02-2023 16:45:52

ഉദാഹരണം 3.9 $\sin\theta = \frac{3}{5}$ ഉം കോൺ θ രണ്ടാം ചതുർത്ഥാംശത്തിലും ആണെങ്കിൽ, മറ്റ് അഞ്ച് ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളുടെയും മൂല്യങ്ങൾ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \pm\sqrt{1-\sin^2\theta} = \pm\sqrt{1-\frac{9}{25}} = \pm\frac{4}{5}$$

അതിനാൽ, $\cos\theta = \frac{-4}{5}$ ആണ് എന്ന് നമുക്കറിയാം.

അതിനാൽ, രണ്ടാം ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ $\cos\theta$ ഋണം

$$\sin\theta = \frac{3}{5} \Rightarrow \operatorname{cosec}\theta = \frac{5}{3}$$

$$\cos\theta = -\frac{4}{5} \Rightarrow \sec\theta = -\frac{5}{4}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\frac{3}{4}$$

$$\cot\theta = -\frac{4}{3}$$

കുറിപ്പ് : $\sin\theta$ യും $\cos\theta$ യും അറിയാമെങ്കിൽ, വ്യുൽക്രമ സർവ്വസമവാക്യങ്ങളും ഭിന്ന സർവ്വസമവാക്യങ്ങളും ഉപയോഗിച്ച് മറ്റ് നാല് ത്രികോണമിതി മൂല്യങ്ങളും കാണാൻ സാധിക്കും. ഒരു ത്രികോണമിതി മൂല്യവും ചതുർത്ഥാംശവും അറിയാമെങ്കിൽ പൈതഗോറിയൻ സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് മറ്റു ത്രികോണമിതി മൂല്യങ്ങൾ കാണാൻ സാധിക്കും.

3.4.3. അനുബന്ധ കോണുകൾ

രണ്ട് കോണുകളുടെ തുകയോ വ്യത്യാസമോ $\frac{\pi}{2}$ റേഡിയന്റെ ഗുണിതങ്ങൾ ആണെങ്കിൽ അവ അനുബന്ധ കോണുകളായിരിക്കും. $\theta, -\theta, \frac{\pi}{2}\pm\theta, \pi\pm\theta, \frac{3\pi}{2}\pm\theta, \cdots$ എന്നിവയിൽ ഏത് രണ്ടു കോണുകളും അനുബന്ധ കോണുകളാണ്.

അപ്പോൾ $\theta, -\theta$ തുടങ്ങിയ അനുബന്ധ കോണുകൾ ഉള്ള ത്രികോണമിതി അനുപാതങ്ങൾ നമുക്ക് കാണാനാകും.

θ ഉപയോഗിച്ച് $(-\theta)$ യുടെ ത്രികോണമിതി അനുപാതങ്ങൾ

$\angle AOL = \theta$ യും $\angle AOM = -\theta$ ഉം എന്നെടുക്കാം. OL ലെ ഒരു ബിന്ദുവാണ് $P(a, b)$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

$OP = OP'$ ആവുന്ന തരത്തിൽ OM ൽ P' എന്ന ഒരു ബിന്ദു തെരഞ്ഞെടുക്കുക.

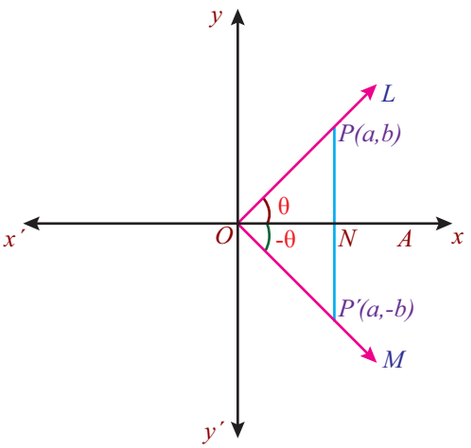
OA-യ്ക്ക് ലംബമായി PN-വരയ്ക്കുക, ഇത് OM നെ P'-ൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു.

$\angle AOP = \angle AOP'$ ഉം $\angle PON = \angle P'ON$ എന്നിരിക്കട്ടെ

XI_Maths_Ch3_V-1_Malayalam.indd 127 14-02-2023 16:45:54

ΔPON ഉം $\Delta P'ON$ ഉം സർവ്വസമമായിരിക്കും.

അതിനാൽ, PN = $P'N$ ഉം P'-എന്ന ബിന്ദു $P'(a, -b)$ ഉം ആകും.



ചിത്രം 3.11

ഇപ്പോൾ, ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളുടെ നിർവ്വചനത്തിൽ നിന്ന്

$$\sin\theta = \frac{b}{OP},\ \cos\theta = \frac{a}{OP},\quad \tan\theta = \frac{b}{a}$$

അതിനാൽ, $\sin(-\theta) = -\frac{b}{OP'} = -\frac{b}{OP} = -\sin\theta$ ഉം

$$\cos(-\theta) = \frac{a}{OP'} = \frac{a}{OP} = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta, \operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec}\theta$$

$\sec(-\theta) = \sec\theta$, $\cot(-\theta) = -\cot\theta$ ഉം ആയിരിക്കും

കുറിപ്പ് : (i) $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ യും $\cos(-\theta) = \cos\theta$ യും ആണ്. യൂണിറ്റ് വൃത്തം. x- അക്ഷത്തിന് അനുരൂപമെന്നതിൽ നിന്നാണ് ഈ വസ്തുതകൾ ലഭിക്കുന്നത്. x- അക്ഷത്തിന്റെ മറുവശത്താണെന്നത് ഒഴിച്ചാൽ കോൺ $-\theta$ കോൺ θ യ്ക്ക് സമമാണ്. (x, y) എന്ന ബിന്ദുവിനെ x അക്ഷത്തിന്റെ മറുവശത്തേക്ക് തള്ളി മാറ്റിയാൽ $(x, -y)$ എന്ന ബിന്ദുവായി മാറുന്നു, അതുകൊണ്ട് y നിർദ്ദേശാങ്കം ഋണമാകുകയും സൈൻ ഋണമാകുകയും ചെയ്യുന്നു. എന്നാൽ x നിർദ്ദേശാങ്കം മാറ്റമില്ലാതെ തുടരുന്നതുകൊണ്ട് കൊസൈൻ മാറുന്നില്ല.

(ii) ഒരു ത്രികോണമിതി ഫലനം ഒറ്റ ഫലനമാണോ ഇരട്ട ഫലനമാണോ എന്ന് നിർണ്ണയിക്കാൻ ഋണ കോൺ സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കാം.

ഉദാഹരണം 3.10 മൂല്യങ്ങൾ കാണുക : (i) $\sin(-45°)$ (ii) $\cos(-45°)$ (iii) $\cot(-45°)$

നിർദ്ധാരണം:

(i) $\sin(-45°) = -\sin(45°) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

(ii) $\cos(-45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(iii) $\cot(-45°) = -1$

കോണളവ് $(90° - \theta)$, $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ ആയിട്ടുള്ള ത്രികോണമിതി അനുപാതങ്ങൾ താഴ്ന്ന ക്ലാസ്സുകളിൽ നാം പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്. കോണളവ് $90° - \theta$യിലുള്ള ത്രികോണമിതി അനുപാതങ്ങൾ നമുക്ക് ഓർത്തെടുക്കാം.

$$\sin(90° - \theta) = \cos\theta, \qquad \cos(90° - \theta) = \sin\theta$$

$$\tan(90° - \theta) = \cot\theta, \qquad \operatorname{cosec}(90° - \theta) = \sec\theta$$

$$\sec(90° - \theta) = \operatorname{cosec}\theta, \qquad \cot(90° - \theta) = \tan\theta$$

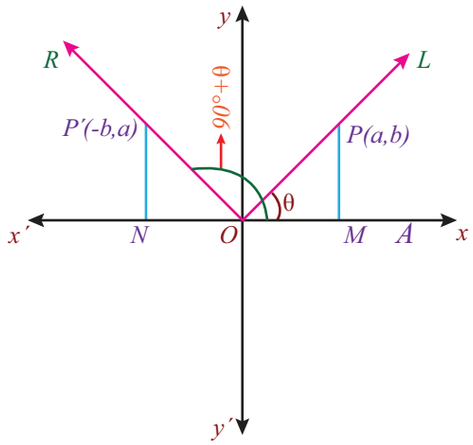
$(90° + \theta)$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ള ഒരു കോണിന് അനുയോജ്യമായ ത്രികോണമിതി അനുപാതങ്ങൾ ഇപ്പോൾ നമുക്ക് സ്ഥാപിക്കാം.

XI_Maths_Ch3_V-1_Malayalam.indd 128 14-02-2023 16:45:56

$(90° + \theta)$, $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ രൂപത്തിലുള്ള ഒരു കോണിന്റെ ത്രികോണമിതി അംശബന്ധങ്ങൾ).

$\angle AOL = \theta$, $\angle AOR = (90° + \theta)$ എന്ന് പരിഗണിക്കാം, OL ലെ ഒരു ബിന്ദു $P(a, b)$ എന്നെടുക്കാം, $OP = OP'$ ആകുന്ന രീതിയിൽ OR ൽ P' എന്ന ഒരു ബിന്ദു തിരഞ്ഞെടുക്കുക.

P യിൽ നിന്നും P' ൽ നിന്നും Ox ലേക്കും Ox' ലേക്കും PM, $P'N$ എന്നീ ലംബങ്ങൾ വരയ്ക്കുക.



ചിത്രം 3.12

അപ്പോൾ, $\angle AOP' = 90° + \theta$

ΔOPM ഉം $\Delta P'ON$ ഉം സർവ്വസമമാണെന്ന് വ്യക്തമാണ്.

$ON = MP$ യും $NP' = OM$ ഉം ആണ്.

ആയതിനാൽ, P യുടെയും P'ന്റെയും നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ യഥാക്രമം $P(a, b)$ യും $P'(-b, a)$ യും ആണ്. അപ്പോൾ,

$$\sin(90° + \theta) = \frac{P'\text{ന്റെ } y\text{-നിർദ്ദേശാങ്കം}}{OP} = \frac{a}{OP} = \cos\theta,$$

$$\cos(90° + \theta) = \frac{P'\text{ന്റെ } x\text{-നിർദ്ദേശാങ്കം}}{OP'} = \frac{-b}{OP} = -\sin\theta,$$

അങ്ങനെ, $\tan(90° + \theta) = -\cot\theta$, $\operatorname{cosec}(90° + \theta) = \sec\theta$,

$\sec(90° + \theta) = -\operatorname{cosec}\theta$, $\cot(90° + \theta) = -\tan\theta$

മറ്റ് അനുബന്ധ കോണുകളായ $\pi \pm \theta$, $\frac{3\pi}{2} \pm \theta$, $2\pi \pm \theta$ എന്നിവയുടെ ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളും ഇതേ രീതിയിൽ തന്നെ കാണാൻ കഴിയും.

മുകളിലുള്ള ഫലങ്ങൾ ഇനിപ്പറയുന്ന പട്ടികയിൽ സംഗ്രഹിക്കാം $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$.

	$-\theta$	$\frac{\pi}{2} - \theta$	$\frac{\pi}{2} + \theta$	$\pi - \theta$	$\pi + \theta$	$\frac{3\pi}{2} - \theta$	$\frac{3\pi}{2} + \theta$	$2\pi - \theta$	$2\pi + \theta$
sine	$-\sin\theta$	$\cos\theta$	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$-\sin\theta$	$-\cos\theta$	$-\cos\theta$	$-\sin\theta$	$\sin\theta$
cosine	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$-\sin\theta$	$-\cos\theta$	$-\cos\theta$	$-\sin\theta$	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\cos\theta$
tangent	$-\tan\theta$	$\cot\theta$	$-\cot\theta$	$-\tan\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$-\cot\theta$	$-\tan\theta$	$\tan\theta$

കുറിപ്പ് : (i) മുകളിലുള്ള പട്ടിക ഉപയോഗിച്ച് അനുയോജ്യമായ വ്യുൽക്രമ അനുപാതങ്ങൾ എഴുതാൻ സാധിക്കും.

(ii) $2n\frac{\pi}{2} \pm \theta$, $n \in \mathbb{Z}$ എന്നിവ അനുബന്ധ കോണുകൾ, അതായത് $\pm\theta, \pi \pm \theta, 2\pi \pm \theta$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ള കോണുകൾ എങ്കിൽ, ത്രികോണമിതി അനുപാതങ്ങൾക്ക് രൂപമാറ്റം സംഭവിക്കുന്നില്ല, . . .

XI_Maths_Ch3_V-1_Malayalam.indd 129 14-02-2023 16:45:59

(iii) $(2n+1)\frac{\pi}{2} \pm \theta,\ n \in \mathbb{Z}$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ള അനുബന്ധ കോണങ്ങൾ അതായത് $\frac{\pi}{2} \pm \theta,\ \frac{3\pi}{2} \pm \theta$ എന്നിവയുടെ ത്രികോണമിതി അംശബന്ധങ്ങൾക്ക് രൂപമാറ്റം സംഭവിച്ച് പൂരക അംശബന്ധങ്ങളായി മാറുന്നു. തുടക്കത്തിൽ 'co' ഇല്ലാത്ത ഫലനങ്ങൾക്ക് അവ ചേർക്കുകയും തുടക്കത്തിൽ 'co' ഉള്ള ഫലനങ്ങളിൽ അവ മാറ്റുകയും ചെയ്യുന്നു. ('sine' നെ 'cosine' എന്നും 'cosine' നെ 'sine' എന്നിങ്ങനെ ആയിത്തീരും).

(iv) ചിഹ്നം നിർണ്ണയിക്കുന്നതിനായി, ആദ്യം ചതുർത്ഥാംശം കണ്ടെത്തി **"ASTC"** എന്ന ചതുർത്ഥാംശ നിയമം അനുസരിച്ച് ഉചിതമായ ചിഹ്നം ചേർക്കുക. (+ അല്ലെങ്കിൽ – ചേർക്കണം).

ഉദാഹരണം 3.11 മൂല്യം കാണുക (i) $\sin 150°$ (ii) $\cos 135°$ (iii) $\tan 120°$.

നിർദ്ധാരണം:

(i) $\sin 150° = \sin(90° + 60°) = \cos(60°) = \frac{1}{2}$

(അല്ലെങ്കിൽ) $\sin 150° = \sin(180° - 30°) = \sin(30°) = \frac{1}{2}$

(ii) $\cos 135° = \cos(90° + 45°) = -\sin(45°) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

(അല്ലെങ്കിൽ) $\cos 135° = \cos(180° - 45°) = -\cos(45°) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

(iii) $\tan 120° = \tan(180° - 60°) = -\tan(60°) = -\sqrt{3}$

(അല്ലെങ്കിൽ) $\tan 120°$ യെ $\tan(90° + 30°)$ എന്നെഴുതി മൂല്യം കാണാം.

ഉദാഹരണം 3.12 മൂല്യം കാണുക (i) $\sin(765°)$ (ii) $\operatorname{cosec}(-1410°)$ (iii) $\cot\left(-\frac{15\pi}{4}\right)$.

നിർദ്ധാരണം:

(i) $\sin 765° = \sin(2 \times 360° + 45°) = \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(ii) $\operatorname{cosec}(-1410°) = -\operatorname{cosec}(1410°) = -\operatorname{cosec}(4 \times 360° - 30°)$

$= \operatorname{cosec} 30° = 2$

(iii) $\cot\left(\frac{-15\pi}{4}\right) = -\cot\left(\frac{15\pi}{4}\right) = -\cot\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cot\frac{\pi}{4} = 1.$

ഉദാഹരണം 3.13 തെളിയിക്കുക $\tan(315°)\cot(-405°) + \cot(495°)\tan(-585°) = 2$.

നിർദ്ധാരണം:

ഇടത് വശം $= \tan(360° - 45°)[-\cot(360° + 45°)] + \cot(360° + 135°)[-\tan(360° + 225°)]$

$= [-\tan 45°][-\cot 45°] + [-\tan 45°][-\tan 45°]$

$= (-1)(-1) + (-1)(-1) = 2.$

XI_Maths_Ch3_V-1_Malayalam.indd 130 14-02-2023 16:46:00

3.4.4 ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളുടെ ചില സ്വഭാവസവിശേഷതകൾ

ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങൾക്ക് ചില നല്ല സവിശേഷതകൾ ഉണ്ട്. ഉദാഹരണമായി,

(i) $\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$ ഉം $\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$ ഉം എന്ന അർത്ഥത്തിൽ സൈൻ ഫലനവും കൊസൈൻ ഫലനവും പരസ്പര പൂരകങ്ങളാണ്.

(ii) $\cos\theta$ യും $\sin\theta$ യും ഒരു യൂണിറ്റ് വൃത്തത്തിന്റെ ബിന്ദുക്കളുടെ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങളായിട്ട് കിട്ടുന്നതിനാൽ, അവ $-1 \le \cos\theta \le 1, -1 \le \sin\theta \le 1$ എന്നീ അസമതകളെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്നു. അതിനാൽ, $\cos\theta,\ \sin\theta \in [-1, 1]$.

(iii) കൃത്യമായ ഇടവേളകളിൽ ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളുടെ മൂല്യങ്ങൾ ആവർത്തിച്ചുവരുന്നു.

(iv) സൈൻ, കൊസൈൻ ഫലനങ്ങൾക്ക് ഒരു രസകരമായ സവിശേഷതയുണ്ട് അതെന്തെന്നാൽ, $\cos(-\theta) = \cos\theta$ യും $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ യും ആണ്.

അവസാനത്തെ രണ്ട് സവിശേഷതകൾ നമുക്ക് ചർച്ച ചെയ്യാം.

ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളുടെ ആനുകാലികത

ഏതൊരു ചെറിയ ധന സംഖ്യ p നിലനിൽക്കുമ്പോഴും മണ്ഡലത്തിലെ എല്ലാ x-നും $f(x + p) = f(x)$ ആണെങ്കിൽ f എന്ന ആ ഫലനം p അന്തരമുള്ള ഒരു ആനുകാലിക ഫലനമാണെന്ന് നമുക്കറിയാം.

ഉദാഹരണമായി,

$$\sin(x + 2n\pi) = \sin x,\ n \in \mathbb{Z},$$

അതിനാൽ, $\sin(x + 2\pi) = \sin(x + 4\pi) = \sin(x + 6\pi) = \cdots = \sin x.$

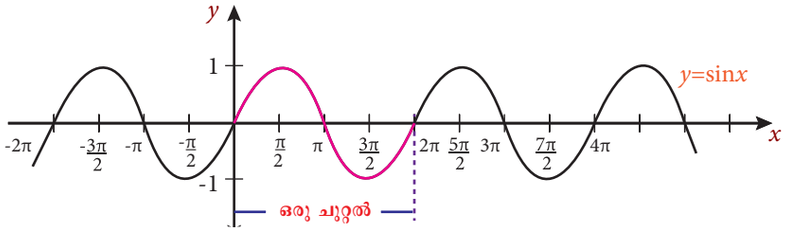
അതിനാൽ, 2π അന്തരമുള്ള ഒരു ആനുകാലിക ഫലനമാണ് $\sin x$.

അതുപോലെ, $\cos x$, $\operatorname{cosec} x$, $\sec x$ എന്നിവയും 2π അന്തരമുള്ള ആനുകാലിക ഫലനങ്ങളാണ്.

എന്നാൽ $\tan x$, $\cot x$ എന്നിവ π അന്തരമുള്ള ആനുകാലിക ഫലനങ്ങളാണ്.

$\sin x$, $\cos x$ എന്നിവയുടെ ആനുകാലികത അവയുടെ ഗ്രാഫ് ഉപയോഗിച്ച് വളരെ നന്നായി വീക്ഷിക്കാൻ കഴിയും.

(i) സൈൻ ഫലനത്തിന്റെ ഗ്രാഫ്



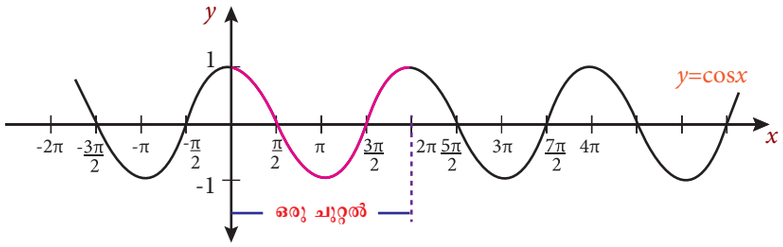
ചിത്രം 3.13 : $y = \sin x$

ഇവിടെ x സൂചിപ്പിക്കുന്നത് മാറുന്ന ഒരു കോണളവിനെയാണ്. തിരശ്ചീന അക്ഷത്തെ x- അക്ഷം എന്നും ലംബ അക്ഷത്തെ y- അക്ഷമെന്നും എടുക്കുന്നു. $y = \sin x$ എന്ന ഫലനത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് ചിത്രം 3.13 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. 2π അന്തരമുള്ള ആനുകാലിക ഫലനമാണിതെന്നത് ആദ്യം ശ്രദ്ധിക്കുക. ജ്യാമിതീയമായി ഇതിനർത്ഥം, നിങ്ങൾ വക്രത്തെ 2π ഇടത്തോട്ടോ വലത്തോട്ടോ നീക്കുകയാണെങ്കിൽ

XI_Maths_Ch3_V-1_Malayalam.indd 131 14-02-2023 16:46:02

വക്രം അതിന്റെ പൂർവ്വസ്ഥിതി കൈവരിക്കുന്നതായി കാണാം. രണ്ടാമതായി, ഗ്രാഫ് y- അക്ഷത്തിന്റെ ഒരു യൂണിറ്റിനുള്ളിൽ ആണെന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക. ഗ്രാഫ് ആനുകാലികമായി വർദ്ധിക്കുകയും കുറയുകയും ചെയ്യുന്നു. ഉദാഹരണത്തിന് $-\frac{\pi}{2}$ ൽ നിന്ന് $\frac{\pi}{2}$ ലേക്ക് വർദ്ധിക്കുകയും $\frac{\pi}{2}$ ൽ നിന്ന് $\frac{3\pi}{2}$ ലേക്ക് കുറയുകയും ചെയ്യുന്നു.

(ii) കൊസൈൻ ഫലനത്തിന്റെ ഗ്രാഫ്



ചിത്രം 3.14 : $y = \cos x$

$y = \cos x$ ന്റെ ഗ്രാഫ് നിരീക്ഷിച്ചാൽ, $\frac{\pi}{2}$ അളവ് ഇടത്തേയ്ക്ക് മാറുന്നതൊഴിച്ചാൽ അത് $y = \sin x$ ന്റെ ഗ്രാഫ് പോലെ ആയിരിക്കും. $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ എന്ന സർവ്വസമതയാണ് ഇതിന് കാരണം. ഗ്രാഫിൽ നിന്നും വളരെ എളുപ്പത്തിൽ മനസ്സിലാക്കാവുന്നത് $\cos x = \cos(-x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

കുറിപ്പ് : (i) ക്രമമായ പാറ്റേൺ ആവർത്തിക്കുന്നു എന്ന പ്രധാന കാരണത്താൽ സൈൻ, കൊസൈൻ ഫലനങ്ങൾ വളരെ ഉപയോഗപ്രദമാണ്. അവ ആനുകാലികമാണ്) ആനുകാലികമായി ആവർത്തിക്കുന്ന ധാരാളം വസ്തുതകൾ നമുക്കുചുറ്റും ഉണ്ട്. ഉദാഹരണമായി, സൂര്യന്റെ ഉദയാസ്തമനം, താഴോട്ടും മുകളിലോട്ടു മുള്ള സ്പ്രിംഗിന്റെ ചലനം, സമുദ്രത്തിലെ തിരമാലകൾ തുടങ്ങിയവയെല്ലാം സമയത്തിന്റെ കൃത്യമായ ഇടവേളകളിൽ ആവർത്തിക്കുന്നു. സൈൻ, കൊസൈൻ ഫലനങ്ങളുടെ സംയോജനത്തിലൂടെ എല്ലാ ആനുകാലിക സ്വഭാവങ്ങളും പഠിക്കാൻ കഴിയും.

(ii) ആനുകാലികമായി സംഭവിക്കുന്ന ആന്ദോളനങ്ങൾ, തരംഗങ്ങൾ, മറ്റ് പ്രതിഭാസങ്ങൾ എന്നിവ വിവരിക്കുന്നതിന് ആനുകാലിക ഫലനങ്ങൾ ശാസ്ത്രത്തിലുട നീളം ഉപയോഗിക്കുന്നു.

ഒറ്റ, ഇരട്ട ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങൾ

ചില പ്രത്യേക അനുരൂപങ്ങളെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്ന ഫലനങ്ങളാണ് ഒറ്റ, ഇരട്ട, ഫലനങ്ങൾ. ഒരു വാസ്തവിക ഫലനം $f(x)$ ഒരു ഇരട്ട ഫലനമാകണമെങ്കിൽ, എല്ലാ വാസ്തവിക സംഖ്യ x നും $f(-x) = f(x)$ ആവുകയും ഒരു ഒറ്റ ഫലനമാകണമെങ്കിൽ എല്ലാ വാസ്തവിക സംഖ്യ x നും $f(-x) = -f(x)$ ആവുകയും വേണം. അടിസ്ഥാന ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങൾ ബഹുപദവ്യംഞ്ജകം അല്ലാത്ത ഒറ്റ ഇരട്ട ഫലനങ്ങൾക്ക് ഉദാഹരണങ്ങളാണ്.

x ന്റെ എല്ലാ മൂല്യങ്ങൾക്കും $\cos(-x) = \cos x$ അതിനാൽ $\cos x$ ഒരു ഇരട്ടഫലനം ആണ്.

x ന്റെ എല്ലാ മൂല്യങ്ങൾക്കും $\sin(-x) = -\sin x$ അതിനാൽ $\sin(x)$ ഒരു ഒറ്റ ഫലനം ആണ്.

XI_Maths_Ch3_V-1_Malayalam.indd 132 14-02-2023 16:46:02

ഇതുകൂടാതെ $\sec x$ ഒരു ഇരട്ട ഫലനവും എന്നാൽ $\tan x$, $\operatorname{cosec} x$, $\cot x$ എന്നിവയെല്ലാം ഒറ്റ ഫലനങ്ങളുമാണ്. എന്നിരുന്നാലും $f(t) = t - \cos t$ ഒരു ഒറ്റഫലനമോ ഇരട്ട ഫലനമോ അല്ല (എന്തുകൊണ്ട്?)

ഉദാഹരണം 3.14 തന്നിട്ടുള്ളതിൽ ഏതെല്ലാം ഫലനങ്ങളാണ് ഒറ്റ, ഇരട്ട, രണ്ടുമല്ലാത്തത് എന്ന് കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) $\sin^2 x - 2\cos^2 x - \cos x$ (ii) $\sin(\cos(x))$ (iii) $\cos(\sin(x))$ (iv) $\sin x + \cos x$

തെളിവ്:

(i) $f(x) = \sin^2 x - 2\cos^2 x - \cos x$ എന്നിരിക്കട്ടെ,

$f(-x) = f(x)$ [എന്തെന്നാൽ, $\sin(-x) = -\sin x$ കൂടാതെ $\cos(-x) = \cos x$]

അതിനാൽ, $f(x)$ ഒരു ഇരട്ട ഫലനമാണ്.

(ii) $f(x) = \sin(\cos(x))$ എന്നിരിക്കട്ടെ,

$f(-x) = f(x)$, $f(x)$ ഒരു ഇരട്ട ഫലനമാണ്.

(iii) $f(x) = \cos(\sin(x))$, $f(-x) = f(x)$, അതിനാൽ, $f(x)$ ഒരു ഇരട്ട ഫലനമാണ്.

(iv) $f(x) = \sin x + \cos x$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$f(-x) \neq f(x)$ കൂടാതെ $f(-x) \neq -f(x)$

അതിനാൽ, $f(x) = \sin x + \cos x$ എന്നത് ഒറ്റയോ ഇരട്ടയോ അല്ലാത്ത ഫലനമാണ്.

കുറിപ്പ് : (i) പൊതുവായി, ഒരു ഫലനം ഇരട്ട ഫലനമാണെങ്കിൽ, y-അക്ഷത്തിന്റെ പ്രതിഫലനം എടുത്താൽ ഗ്രാഫിന് മാറ്റമുണ്ടായിരിക്കുന്നതല്ല. ഒരു ഫലനം ഒറ്റ ഫലനമാണെങ്കിൽ അത് മൂലബിന്ദുവിന് അനുരൂപ്യമായിരിക്കും.

(ii) ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളുടെ വിശകലനത്തിന് പ്രത്യേകിച്ച് സങ്കലന വ്യവകലന സൂത്രങ്ങളിൽ ഒറ്റ, ഇരട്ട ഫലനങ്ങളുടെ സവിശേഷതകൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു.

(iii) കാൽക്കുലസ്സിൽ നാം കാണുന്ന ഡെഫനിറ്റ് ഇന്റഗ്രലുകൾ കണക്കുകൂട്ടുന്നതിന് ഒറ്റ, ഇരട്ട ഫലനങ്ങളുടെ സവിശേഷതകൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു.

അഭ്യാസം 3.3

1. മൂല്യം കാണുക.

(i) $\sin(480°)$ (ii) $\sin(-1110°)$ (iii) $\cos(300°)$ (iv) $\tan(1050°)$

(v) $\cot(660°)$ (vi) $\tan\left(\frac{19\pi}{3}\right)$ (vii) $\sin\left(-\frac{11\pi}{3}\right)$

2. യഥാർത്ഥ സ്ഥാനത്തുള്ള θ-എന്ന ഒരു കോണിന്റെ അന്തിമവശത്തുള്ള ഒരു ബിന്ദുവാണ് $\left(\frac{5}{7}, \frac{2\sqrt{6}}{7}\right)$ കോൺ θ-യുടെ ത്രികോണമിതി ഫലന മൂല്യങ്ങൾ കാണുക.

XI_Maths_Ch3_V-1_Malayalam.indd 133 14-02-2023 16:46:03

3. തന്നിട്ടുള്ളവയുടെ മറ്റ് അഞ്ച് ത്രികോണമിതി ഫലന മൂല്യങ്ങൾ കാണുക.

(i) $\cos\theta = -\frac{1}{2}$, θ ചതുർത്ഥാംശം (III) ൽ.

(ii) $\cos\theta = \frac{2}{3}$, θ ചതുർത്ഥാംശം (I) ൽ.

(iii) $\sin\theta = -\frac{2}{3}$, θ ചതുർത്ഥാംശം (IV) ൽ.

(iv) $\tan\theta = -2$, θ ചതുർത്ഥാംശം (II) ൽ.

(v) $\sec\theta = \frac{13}{5}$, θ ചതുർത്ഥാംശം (IV) ൽ.

4. തെളിയിക്കുക : $\frac{\cot(180^\circ + \theta)\sin(90^\circ - \theta)\cos(-\theta)}{\sin(270^\circ + \theta)\tan(-\theta)\operatorname{cosec}(360^\circ + \theta)} = \cos^2\theta\cot\theta$.

5. $\sin^2\theta = \frac{3}{4}$ എന്ന സമീകരണം തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്ന 0° ക്കും 360° ക്കും ഇടയിലുള്ള എല്ലാ കോണുകളും കാണുക.

6. $\sin^2\frac{\pi}{18} + \sin^2\frac{\pi}{9} + \sin^2\frac{7\pi}{18} + \sin^2\frac{4\pi}{9} = 2$ തെളിയിക്കുക.

3.5 ത്രികോണമിതി സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ

3.5.1 തുക, വ്യത്യാസ സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ അല്ലെങ്കിൽ സംയുക്തകോൺ സൂത്രങ്ങൾ

ഇപ്പോൾ, സംയുക്ത കോണുകൾ രണ്ടോ അതിലധികമോ, കോണുകളുടെ ബീജഗണിത തുകയാണ്. $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $f(kx) = kf(x)$, (k ഒരു വാസ്തവിക സംഖ്യ) തുടങ്ങിയ ഫലന ബന്ധങ്ങളെ ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങൾ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്നില്ല. ഉദാഹരണത്തിന്, $\cos(\alpha+\beta) \neq \cos\alpha + \cos\beta$, $\sin(2\alpha) \neq 2\sin\alpha$, $\tan 3\alpha \neq 3\tan\alpha \cdots$ അതിനാൽ, $\sin(\alpha+\beta), \cos(\alpha+\beta), \cdots$ തുടങ്ങിയവയുടെ സൂത്രങ്ങൾ രൂപീകരിക്കേണ്ടതും അവ പ്രായോഗിക പ്രശ്നങ്ങളുടെ കണക്കുകൂട്ടലുകളിൽ ഉപയോഗിക്കേണ്ടതും നമുക്കാവശ്യമാണ്.

കർണ്ണപടലങ്ങളിൽ സമ്മർദ്ദം സൃഷ്ടിക്കുന്ന സ്പന്ദനങ്ങളാലാണ് സംഗീതം നിർമ്മിച്ചിട്ടുള്ളത്. സൈനുസോയിഡൽ ഗ്രാഫുകൾ ($y = \sin x$ അല്ലെങ്കിൽ $y = \cos x$ ന്റെ ഗ്രാഫുകൾ പോലെ തോന്നിക്കുന്ന), ഉപയോഗിച്ച് സംഗീത ടോണുകൾ രൂപപ്പെടുത്താം. ഒന്നിൽ കൂടുതൽ ടോണുകൾ വായിക്കുന്നതിന്റെ ഫലമായുണ്ടാകുന്ന മർദ്ദം അവയുടെ ഒറ്റയ്ക്കൊറ്റയ്ക്കുള്ള സമ്മർദ്ദങ്ങളുടെ ആകെത്തുകയ്ക്ക് തുല്യമാണ്. ഈ സന്ദർഭത്തിൽ തുക, വ്യത്യാസ ത്രികോണമിതി സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ ഒരു പ്രധാന പ്രയോഗമായി ഉപയോഗിക്കുന്നു. തുക, വ്യത്യാസ ത്രികോണമിതി സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ തരംഗങ്ങളുടെ വിശകലനത്തിന് സഹായകരമാണ്.

ആദ്യമായി നമുക്ക് രണ്ട് കോണുകളുടെ തുകയുടെ കൊസൈൻ സർവ്വസമവാക്യം തെളിയിക്കാം അതിനുശേഷം ഇതിൽ നിന്ന് മറ്റ് എല്ലാ തുക, വ്യത്യാസ സർവ്വസമവാക്യങ്ങളും തെളിയിക്കാം.

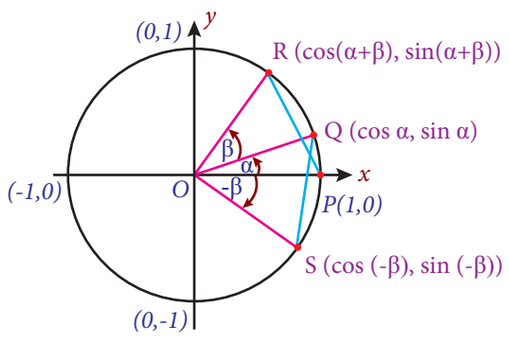
സർവ്വസമവാക്യം 3.1 : $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

തെളിവ് :

O-കേന്ദ്രമായുള്ള ഒരു യൂണിറ്റ് വൃത്തം പരിഗണിക്കുക. $P = P(1, 0)$ എന്നെടുക്കുക. ചിത്രം 3.15 ൽ കാണിച്ചിട്ടുള്ളതുപോലെ $\angle POQ = \alpha$, $\angle POR = \alpha + \beta$, $\angle POS = -\beta$ വരുന്ന വിധം യൂണിറ്റ് വൃത്തത്തിൽ

XI_Maths_Ch3_V-1_Malayalam.indd 134 14-02-2023 16:46:04

Q, R, S എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ പരിഗണിക്കുക. $\alpha, \alpha+\beta$, $-\beta$ എന്നീ കോണുകൾ ശരിയായ സ്ഥാനങ്ങളിലാണെന്ന് വ്യക്തമാണ്. അപ്പോൾ, Q, R, S എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ $Q(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $R(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))$ $S(\cos(-\beta), \sin(-\beta))$ എന്നെഴുതാം. ΔPOR, ΔSOQ എന്നിവ സർവ്വസമമാണ്. അതിനാൽ,



ചിത്രം 3.15

$PR = SQ$ ഉം $PR^2 = SQ^2$ ഉം ആയിരിക്കും.

അതിനാൽ,

$$[\cos(\alpha+\beta)-1]^2+\sin^2(\alpha+\beta) = [\cos\alpha-\cos(-\beta)]^2+[\sin\alpha-\sin(-\beta)]^2$$

$$-2\cos(\alpha+\beta)+2 = 2-2\cos\alpha\cos\beta+2\sin\alpha\sin\beta$$

ആയതിനാൽ, $$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

കുറിപ്പ് : (i) മുകളിലുള്ള തെളിവിൽ നിന്ന് വ്യാസാർദ്ധവും കേന്ദ്രകോണും ഉപയോഗിച്ച് ഒരു വൃത്തത്തിലെ രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം കണ്ടുപിടിക്കാനാകുമെന്നാണ് $PR = SQ$ പറയുന്നത്.

(ii) PR, SQ എന്നീ ചാപനീളങ്ങൾ കേന്ദ്രത്തിലുണ്ടാക്കുന്ന കോണുകൾ യഥാക്രമം $\alpha+\beta$, $\alpha+(-\beta)$ എന്നിവയാണ്. അതിനാൽ $PR = SQ$ ആണ്. അതിനാൽ $(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $(\cos(-\beta), \sin(-\beta))$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം $(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))$, $(1, 0)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലത്തിന് സമമാണ്.

(iii) മേൽപ്പറഞ്ഞ അനുമാനത്തിൽ നിന്ന് $0 \le \alpha < 2\pi$, $0 \le \beta < 2\pi$ സൈൻ, കൊസൈൻ എന്നിവയുടെ ആനുകാലികത കാരണം ഏതൊരു α യ്ക്കും β യ്ക്കും ഫലം കണ്ടെത്താനാകും.

സർവ്വസമവാക്യം 3.2 : $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

തെളിവ് :

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ ആണെന്ന് നമുക്കറിയാം,

അപ്പോൾ, $\cos(\alpha-\beta) = \cos[\alpha+(-\beta)] = \cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)$

അതിനാൽ, $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

കുറിപ്പ് : (i) $\alpha = \beta$ ആണെങ്കിൽ മുകളിലുള്ള സർവ്വസമവാക്യം $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha = 1$ ആയി ചുരുങ്ങുന്നു.

(ii) $\alpha = 0$ ഉം $\beta = x$ ഉം ആണെങ്കിൽ, $\cos(-x) = \cos x$ ഇത് കാണിക്കുന്നത് $\cos x$ ഒരു ഇരട്ട ഫലനമാണ് എന്നതാണ്.

XI_Maths_Ch3_V-1_Malayalam.indd 135 14-02-2023 16:46:06

സർവ്വസമവാക്യം 3.3 : $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

തെളിവ് :

$$\sin(\alpha+\beta) \quad = \quad \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right]$$

എന്നെഴുതി. സർവ്വസമവാക്യം 3.2–ഉപയോഗിച്ച് ഈ സൂത്രം തെളിയിക്കാവുന്നതാണ്.

കുറിപ്പ്: $\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$ ആണെങ്കിൽ മുകളിലുള്ള സർവ്വസമവാക്യം $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ ആയി ചുരുങ്ങുന്നു.

സർവ്വസമവാക്യം 3.4 : $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

തെളിവ് :

$\sin(\alpha-\beta) = \sin[\alpha+(-\beta)]$ എന്നെഴുതി സർവ്വസമവാക്യം 3.3 ഉപയോഗിച്ച് ഈ സൂത്രം തെളിയിക്കാവുന്നതാണ്.

കുറിപ്പ് : സൈനിന്റെയും കൊസൈനിന്റെയും തുക വ്യത്യാസ സൂത്രങ്ങളെ മാട്രിക്സ് രൂപത്തിൽ എഴുതാം.

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix}$$

സർവ്വസമവാക്യം 3.5 : $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

തെളിവ് :

$$\tan(\alpha+\beta) \quad = \quad \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

$$= \quad \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

സർവ്വസമവാക്യം 3.6 : $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

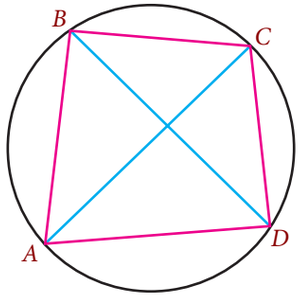
തെളിവ് :

$$\tan(\alpha-\beta) \quad = \quad \tan[\alpha+(-\beta)]$$

എന്നെഴുതി സർവ്വസമവാക്യം 3.5 ഉപയോഗിച്ച് ഈ ഫലനം നമുക്ക് തെളിയിക്കാം.

കുറിപ്പ് : (i) **ടോളമി** (CE 100-170) ഒരു കോണിന്റെ ഞാണിനെ ത്രികോണമിതി ഫലനമായി ഉപയോഗിച്ച് ഒരു സിദ്ധാന്തം തെളിയിച്ചു. ഒരു ചക്രീയ ചതുർഭുജത്തിൽ വികർണ്ണങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം എതിർ വശങ്ങളുടെ ഗുണനഫലങ്ങളുടെ തുകയ്ക്ക് തുല്യമാണ്. അതായത്, ഒരു ചക്രീയ ചതുർഭുജം $ABCD$ യിൽ,

$(AC)(BD) = (AB)(CD) + (AD)(BC)$ ആകുന്നു.



ചിത്രം 3.16

XI_Maths_Ch3_V-1_Malayalam.indd 136 14-02-2023 16:46:07

ഈ സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച്, തുക, വ്യത്യാസ സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ ഒരാൾക്ക് തെളിയിക്കാനാകും. ആയതിനാൽ, ഈ സർവ്വസമവാക്യങ്ങളെ ടോളമിതുക, വ്യത്യാസ സൂത്രങ്ങൾ എന്ന് അറിയപ്പെടുന്നു.

(ii) $\cos(\alpha \pm \beta) \neq \cos\alpha \pm \cos\beta$ എന്നത് നിരീക്ഷിക്കുക. ഇതുപോലെ, മറ്റു ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളും നമുക്ക് നിരീക്ഷിക്കാവുന്നതാണ്.

(iii) $\alpha = \beta$ ആകുമ്പോൾ, $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ യിൽ നിന്ന് $\sin 0 = 0$ നാം നേരത്തെ തന്നെ അംഗീകരിച്ചിട്ടുള്ളത് എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

(iv) $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\beta = \theta$ ആകുമ്പോൾ, $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ യിൽ നിന്ന് $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$ (നാം നേരത്തേ തന്നെ തെളിയിച്ചത്) ലഭിക്കുന്നു.

(v) തന്നിട്ടുള്ള ഒരു കോണിനെ സവിശേഷ കോണുകളിൽ രണ്ടെണ്ണത്തിന്റെ തുക അല്ലെങ്കിൽ വ്യത്യാസമായി പിരിച്ചെഴുതാൻ സാധിക്കുമെങ്കിൽ, അത്തരം കോണുകളുടെ ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളുടെ മൂല്യങ്ങൾ നമുക്ക് കാണാൻ സാധിക്കും. ഉദാഹരണത്തിന്, tan 75°-യെ tan (45° + 30°) എന്നും cos 135°-യെ cos (180° – 45°) എന്നും എഴുതി മൂല്യം കാണാൻ നമുക്ക് സാധിക്കും.

ഉദാഹരണം 3.15 മൂല്യങ്ങൾ കാണുക (i) cos 15° (ii) tan 165°.

നിർദ്ധാരണം:

(i) ഇപ്പോൾ $\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45°\cos 30° + \sin 45°\sin 30°$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

കൂടാതെ, $\sin 75° = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ എന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക (നിങ്ങൾ സ്വയം ശ്രമിക്കുക)

(ii) ഇപ്പോൾ, $\tan 165° = \tan(120° + 45°) = \frac{\tan 120° + \tan 45°}{1 - \tan 120°\tan 45°}$

എന്നാൽ, $\tan 120° = \tan(90° + 30°) = -\cot 30° = -\sqrt{3}$

കൂടാതെ $\tan 45° = 1$

അതിനാൽ, $\tan 165° = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$.

ഉദാഹരണം 3.16 $\sin x = \frac{4}{5}$ (ചതുർത്ഥാംശം I ൽ) ഉം $\cos y = -\frac{12}{13}$ (ചതുർത്ഥാംശം II ൽ) ഉം എങ്കിൽ,

(i) $\sin(x - y)$ (ii) $\cos(x - y)$ എന്നിവ കാണുക.

തെളിവ്:

$\sin x = \frac{4}{5}$ എന്ന് തന്നിട്ടുണ്ട്.

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x} = \pm\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \pm\frac{3}{5}$

ഒന്നാം ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ, $\cos x$ എല്ലായ്പോഴും ധനം ആണ്. അതിനാൽ, $\cos x = \frac{3}{5}$.

XI_Maths_Ch3_V-1_Malayalam.indd 137 14-02-2023 16:46:08

കൂടാതെ $\cos y = \frac{-12}{13}$ ചതുർത്ഥാംശം II ൽ ആണെന്ന് തന്നിട്ടുണ്ട്.

$$\sin y = \pm\sqrt{1-\cos^2 y}.$$

$$= \pm\sqrt{1-\frac{144}{169}} = \pm\frac{5}{13}$$

രണ്ടാം ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ, $\sin y$ എല്ലായ്പോഴും ധനം ആണ്. അതിനാൽ $\sin y = \frac{5}{13}$.

(i) $\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y = \frac{4}{5}\left(\frac{-12}{13}\right) - \frac{3}{5}\left(\frac{5}{13}\right) = -\frac{63}{65}$.

(ii) $\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y = \frac{3}{5}\left(\frac{-12}{13}\right) + \frac{4}{5}\left(\frac{5}{13}\right) = -\frac{16}{65}$.

ഉദാഹരണം 3.17 $\cos\left(\frac{3\pi}{4}+x\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{4}-x\right) = -\sqrt{2}\sin x$ തെളിയിക്കുക.

തെളിവ്:

ഇടതുവശം $= \cos\frac{3\pi}{4}\cos x - \sin\frac{3\pi}{4}\sin x - \cos\frac{3\pi}{4}\cos x - \sin\frac{3\pi}{4}\sin x$

$$= -2\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\sin x = -2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sin x = -\sqrt{2}\sin x$$

കുറിപ്പ് : $\cos(A+x) - \cos(A-x) = -2\sin A\sin x$ എന്നത് നിരീക്ഷിക്കുക.

ഉദാഹരണം 3.18 $A(9,12)$ എന്ന ബിന്ദു ഒരു തലത്തിൽ O എന്ന ആധാര ബിന്ദുവിന് ചുറ്റും എതിർ ഘടികാരദിശയിൽ $60°$ കറങ്ങി B എന്ന പുതിയ സ്ഥാനത്തെത്തുന്നു, B എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ കാണുക.

തെളിവ്:

$A(9,\ 12) = A(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ എന്നിരിക്കട്ടെ, ഇവിടെ $r = OA$ എങ്കിൽ.

$r\cos\theta = 9$ ഉം $r\sin\theta = 12$ ഉം ആയിരിക്കും.

അതിനാൽ $r^2 = 81 + 144 = 225 \Rightarrow r = 15$

ആയതിനാൽ, A എന്ന ബിന്ദുവിനെ $A(15\cos\theta,\ 15\sin\theta)$ എന്നെഴുതാം

അപ്പോൾ, B എന്ന ബിന്ദുവിനെ $B(15\cos(\theta+60°),\ 15\sin(\theta+60°))$ എന്നെഴുതാം

$$15\cos(\theta+60°) = 15(\cos\theta\cos 60° - \sin\theta\sin 60°)$$

$$= (15\cos\theta)\cos 60° - (15\sin\theta)\sin 60°$$

$$= 9\times\frac{1}{2} - 12\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}(3-4\sqrt{3})$$

അതുപോലെ, $15\sin(\theta+60°) = \frac{3}{2}(4+3\sqrt{3})$ ആണ്.

ആയതിനാൽ, B എന്ന ബിന്ദുവിനെ $B\left(\frac{3}{2}(3-4\sqrt{3}),\ \frac{3}{2}(4+3\sqrt{3})\right)$ എന്നെഴുതാം.

XI_Maths_Ch3_V-1_Malayalam.indd 138 14-02-2023 16:46:10

ഉദാഹരണം 3.19 ഒരു റിപ്പിൾ ടാങ്ക് രണ്ട് ജല തരംഗങ്ങൾ ഒരുമിച്ച് ചേർക്കുന്നതിന്റെ ഫലം പ്രകടമാക്കുന്നു. രണ്ട് തരംഗങ്ങളെയും $h = 8\cos t$, $h = 6\sin t$ എന്നിവ ഉപയോഗിച്ച് വരയ്ക്കാം, ഇവിടെ $t \in [0, 2\pi)$ സെക്കന്റിലും t എന്നത് നിശ്ചല ജലത്തിന് മുകളിലുള്ള മില്ലീമീറ്ററിലെ ഉയരവും ആണ്. കൂടിച്ചേരുന്നതിന്റെ ഫലമായുണ്ടാകുന്ന പരിണത തരംഗത്തിന്റെ പരമാവധി ഉയരവും അത് സംഭവിക്കുന്ന t യുടെ ഉയരവും കാണുക.

നിർദ്ധാരണം:

t സമയത്ത് പരിണത തരംഗത്തിന്റെ ഉയരം H എന്നിരിക്കട്ടെ. എങ്കിൽ H ന്റെ വില,

$$H = 8\cos t + 6\sin t$$

$$8\cos t + 6\sin t = k\cos(t - \alpha)$$

$$= k(\cos t\cos\alpha + \sin t\sin\alpha) \text{ എന്നെടുത്താൽ,}$$

ഇവിടെ, $k = 10$ ഉം $\tan\alpha = \frac{3}{4}$ ഉം ആയിരിക്കും

അതുകൊണ്ട്, $H = 10\cos(t - \alpha)$

അതിനാൽ, പരമാവധി ഉയരം H = 10 മി.മീ പരമാവധി ഉയരത്തിൽ വരുന്നത്

$t = \alpha$ ആകുമ്പോൾ ആണ്, ഇവിടെ $\tan\alpha = \frac{3}{4}$.

ഉദാഹരണം 3.20 വിപുലീകരിക്കുക (i) $\sin(A + B + C)$ (ii) $\tan(A + B + C)$.

നിർദ്ധാരണം:

(i) $\sin(A + B + C) = \sin[A + (B + C)]$

$$= \sin A\cos(B + C) + \cos A\sin(B + C)$$

$$= \sin A\cos B\cos C + \cos A\sin B\cos C + \cos A\cos B\sin C - \sin A\sin B\sin C$$

(ii) $\tan(A + B + C) = \tan[A + (B + C)]$

$$= \frac{\tan A + \tan(B + C)}{1 - \tan A\tan(B + C)} = \frac{\tan A + \dfrac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B\tan C}}{1 - \tan A\dfrac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B\tan C}}$$

$$= \frac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A\tan B\tan C}{1 - \tan A\tan B - \tan B\tan C - \tan C\tan A}$$

കുറിപ്പ്: (i) $A + B + C = 0, \pi$ ആണെങ്കിൽ, $\tan(A + B + C) = 0$ എന്ന് ലഭിക്കും.
അതുകൊണ്ട്, $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A\tan B\tan C$
വിഷമഭുജ ത്രികോണങ്ങളുടെ കാര്യത്തിലും ഈ ഫലം ശരിയാണ്.

(ii) $\tan(x - y) + \tan(y - z) + \tan(z - x) = \tan(x - y)\tan(y - z)\tan(z - x)$

(iii) $\tan 3A - \tan 2A - \tan A = \tan 3A + \tan(-2A) + \tan(-A) = \tan 3A\tan 2A\tan A$

(iv) $A + B + C = \frac{\pi}{2}$ എങ്കിൽ $\tan A\tan B + \tan B\tan C + \tan C\tan A = 1$ (എങ്ങനെ ?)

XI_Maths_Malayalam_Ch3A_V-1.indd 139 14-02-2023 16:47:55

അഭ്യാസം 3.4

1. $\sin x = \frac{15}{17}$ ഉം $\cos y = \frac{12}{13}$ ഉം, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $0 < y < \frac{\pi}{2}$ ആണെങ്കിൽ, തന്നിട്ടുള്ളവയുടെ മൂല്യം കാണുക. (i) $\sin(x + y)$ (ii) $\cos(x - y)$ (iii) $\tan(x + y)$.

2. $\sin A = \frac{3}{5}$ ഉം $\cos B = \frac{9}{41}$ ഉം $0 < A < \frac{\pi}{2}$, $0 < B < \frac{\pi}{2}$ ആണെങ്കിൽ, തന്നിട്ടുള്ളവയുടെ മൂല്യം കാണുക. (i) $\sin(A + B)$ (ii) $\cos(A - B)$.

3. $\cos x = -\frac{4}{5}$, $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ എന്നും $\sin y = -\frac{24}{25}$, $\pi < y < \frac{3\pi}{2}$ എന്നും തന്നിട്ടുണ്ട് $\cos(x - y)$ കാണുക.

4. $\sin x = \frac{8}{17}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ എന്നും $\cos y = -\frac{24}{25}$, $\pi < y < \frac{3\pi}{2}$ എന്നും തന്നിട്ടുണ്ട് $\sin(x - y)$ കാണുക.

5. (i) $\cos 105^\circ$ (ii) $\sin 105^\circ$ (iii) $\tan\frac{7\pi}{12}$ തന്നിട്ടുള്ളവയുടെ മൂല്യം കാണുക.

6. തെളിയിക്കുക: (i) $\cos(30^\circ + x) = \frac{\sqrt{3}\cos x - \sin x}{2}$ (ii) $\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$
   (iii) $\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$

7. $\sin 15^\circ$ ഉം $\cos 15^\circ$ ഉം മൂലങ്ങളായിട്ടുള്ള ദ്വിഘാത സമീകരണം കാണുക.

8. $\cos(A + B + C)$ യെ വിപുലീകരിക്കുക. എന്നിട്ട് $A + B + C = \frac{\pi}{2}$ എങ്കിൽ, $\cos A \cos B \cos C = \sin A \sin B \cos C + \sin B \sin C \cos A + \sin C \sin A \cos B$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

9. തെളിയിക്കുക (i) $\sin(45^\circ + \theta) - \sin(45^\circ - \theta) = \sqrt{2}\sin\theta$
   (ii) $\sin(30^\circ + \theta) + \cos(60^\circ + \theta) = \cos\theta$

10. $a\cos(x + y) = b\cos(x - y)$ എങ്കിൽ $(a + b)\tan x = (a - b)\cot y$ എന്ന് കാണിക്കുക.

11. തെളിയിക്കുക. $\sin 105^\circ + \cos 105^\circ = \cos 45^\circ$

12. തെളിയിക്കുക. $\sin 75^\circ - \sin 15^\circ = \cos 105^\circ + \cos 15^\circ$

13. തെളിയിക്കുക. $\tan 75^\circ + \cot 75^\circ = 4$

14. തെളിയിക്കുക. $\cos(A + B)\cos C - \cos(B + C)\cos A = \sin B \sin(C - A)$

15. തെളിയിക്കുക. $\sin(n + 1)\theta \sin(n - 1)\theta + \cos(n + 1)\theta \cos(n - 1)\theta = \cos 2\theta$, $n \in \mathbb{Z}$.

16. $x\cos\theta = y\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) = z\cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right)$ എങ്കിൽ $xy + yz + zx$ ന്റെ മൂല്യം കാണുക.

17. തെളിയിക്കുക. (i) $\sin(A + B)\sin(A - B) = \sin^2 A - \sin^2 B$
   (ii) $\cos(A + B)\cos(A - B) = \cos^2 A - \sin^2 B = \cos^2 B - \sin^2 A$
   (iii) $\sin^2(A + B) - \sin^2(A - B) = \sin 2A \sin 2B$
   (iv) $\cos 8\theta \cos 2\theta = \cos^2 5\theta - \sin^2 3\theta$

18. $\cos^2 A + \cos^2 B - 2\cos A \cos B \cos(A + B) = \sin^2(A + B)$ തെളിയിക്കുക.

XI_Maths_Malayalam_Ch3A_V-1.indd 140 14-02-2023 16:47:57

19. $\cos(\alpha-\beta)+\cos(\beta-\gamma)+\cos(\gamma-\alpha)=-\frac{3}{2}$ എങ്കിൽ
$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

20. (i) $\tan(45^\circ+A)=\frac{1+\tan A}{1-\tan A}$ (ii) $\tan(45^\circ-A)=\frac{1-\tan A}{1+\tan A}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

21. തെളിയിക്കുക. $\cot(A+B)=\frac{\cot A\cot B-1}{\cot A+\cot B}$

22. $\tan x=\frac{n}{n+1}$ ഉം $\tan y=\frac{1}{2n+1}$ ഉം ആണെങ്കിൽ, $\tan(x+y)$ കാണുക.

23. തെളിയിക്കുക. $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\tan\left(\frac{3\pi}{4}+\theta\right)=-1$

24. $\cot\alpha=\frac{1}{2},\ \alpha\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ ഉം $\sec\beta=-\frac{5}{3},\ \beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ എന്ന് തന്നിട്ടുണ്ട് $\tan(\alpha+\beta)$-യുടെ മൂല്യം കാണുക.

25. $\theta+\phi=\alpha$ ഉം $\tan\theta=k\tan\phi$ ഉം ആണെങ്കിൽ, $\sin(\theta-\phi)=\frac{k-1}{k+1}\sin\alpha$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

3.5.2 ബഹുഗുണ കോണുകളുടെയും ബഹുഭിന്നകോണുകളുടെയും സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ

1831 - ൽ മൈക്കൽ ഫാരഡെ, ഒരു കാന്തത്തിനടുത്ത് ഒരു വയർ കൊണ്ടുപോകുമ്പോൾ വയറിൽ ഒരു ചെറിയ വൈദ്യുതപ്രവാഹം ഉണ്ടാകുന്നുവെന്ന് കണ്ടെത്തി. ലോകമെമ്പാടുമുള്ള വീടുകൾക്കും സ്ഥാപനങ്ങൾക്കും കച്ചവട സംരംഭങ്ങൾക്കും ആവശ്യമായ വൈദ്യുതി നിർമ്മിക്കുന്നതിന് ഈ സവിശേഷത ഉപയോഗപ്പെടുത്തുന്നു. വലിയ വൈദ്യുതകാന്തങ്ങൾക്ക് സമീപം ആയിരക്കണക്കിന് വയറുകൾ തിരിക്കുന്നതിലൂടെ, വൻതോതിൽ വൈദ്യുതി ഉത്പാദിപ്പിക്കാൻ കഴിയും.

സിനുസോയിഡൽ ഗ്രാഫുകളും ഫലനങ്ങളും ഉപയോഗിച്ച് രൂപരേഖ തയ്യാറാക്കാൻ കഴിയുന്ന ഒരു അളവാണ് വോൾട്ടേജ്. വൈദ്യുതിയുടെയും മറ്റ് പ്രതിഭാസങ്ങളുടെയും രൂപരേഖ തയ്യാറാക്കാൻ ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളും ബഹുഗുണ കോണുകളോ ബഹുഭിന്ന കോണുകളോ ഉൾപ്പെടുന്ന സർവ്വസമ വാക്യങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു.

A എന്നത് ഒരു കോൺ ആണെങ്കിൽ $2A, 3A, \cdots$, എന്നിവയെ A–യുടെ **ബഹുഗുണ കോണുകൾ** എന്നും $\frac{A}{2}, \frac{A}{3}, \cdots$ എന്നിവയെ A-യുടെ **ബഹുഭിന്ന കോണുകൾ** എന്നും വിളിക്കുന്നു. ബഹുഗുണ കോണുകളുടെയും ബഹുഭിന്നകോണുകളുടെയും ത്രികോണമിതി അനുപാതങ്ങൾ നാം ചർച്ചചെയ്യുകയും ചില സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ രൂപീകരിക്കുകയും ചെയ്യുകയാണ് ഇവിടെ.

ഇരട്ട കോൺ സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ

തുകവ്യത്യാസ സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ എടുത്ത് അവയിൽ നിന്നുണ്ടാകുന്ന ചില അനന്തര ഫലങ്ങൾ നമുക്ക് പരിശോധിക്കാം. തുക സർവ്വസമവാക്യങ്ങളുടെ ഒരു പ്രത്യേകതമാണ് ഇരട്ട കോൺ സർവ്വസമ വാക്യങ്ങൾ. അതായത്, രണ്ട് കോണുകൾ തുല്യമാകുമ്പോൾ, തുക സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ ഇരട്ട കോൺ സർവ്വസമ വാക്യങ്ങളായി ചുരുങ്ങുന്നു. ത്രികോണമിതി സമവാക്യങ്ങൾ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നതിനും ത്രികോണമിതി സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ സമർത്ഥിക്കുന്നതിനും ഇവ ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഇതു കൂടാതെ ഹ്രസ്വസർവ്വസമവാക്യങ്ങളുടെ കൃതി കുറയുന്ന സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ രൂപീകരണത്തിന് ഇരട്ട കോൺ സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു. ത്രികോണമിതി വ്യഞ്ജകങ്ങളുടെ പരമാവധി അല്ലെങ്കിൽ കുറഞ്ഞ മൂല്യങ്ങൾ കണ്ടെത്താൻ ഇരട്ട കോൺ സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു.

XI_Maths_Malayalam_Ch3A_V-1.indd 141 14-02-2023 16:47:59

സർവ്വസമവാക്യം 3.7 : $\sin 2A = 2\sin A\cos A$

തെളിവ്

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ എന്ന് നമുക്കറിയാം.

$\alpha = \beta = A$ എന്നെടുത്താൽ,

$\sin(A+A) = \sin A\cos A + \sin A\cos A$ എന്ന് കിട്ടും

അതിനാൽ, $\sin 2A = 2\sin A\cos A$

കുറിപ്പ്: (i) $y = \sin 2x$ ഉം $y = 2\sin x$ ഉം വ്യത്യസ്തമാണ്. ഗ്രാഫ് വരച്ച് അവയുടെ വ്യത്യാസം തിരിച്ചറിയുക.

(ii) $\sin 2A = 2\sin A\cos A$ യുടെ പ്രയോഗം: തറയുടെ തിരശ്ചീന നിരപ്പിൽ നിന്ന് : α കോൺ അളവിൽ ഒരു വസ്തുവിനെ u വേഗതയിൽ എറിയുമ്പോൾ അത് തറയിൽ പതിക്കുന്നതിന് മുമ്പ് വരെ സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരം (പരിധി) കാണുന്നതിനുള്ള സൂത്രം $R = \frac{u^2\sin 2\alpha}{g}$.

$\alpha = \frac{\pi}{4}$ ആകുമ്പോൾ R-ന്റെ പരമാവധി മൂല്യം $\frac{u^2}{g}$ ലഭിക്കും എന്നത് വ്യക്തമാണ്.

(iii) $|\sin A\cos A| = \left|\frac{\sin 2A}{2}\right| \le \frac{1}{2}$

അതിനാൽ, $-\frac{1}{2} \le \sin A\cos A \le \frac{1}{2}$ ഇതിൽ നിന്ന്, $\sin A\cos A$- യുടെ പരമാവധി വില $A = \frac{\pi}{4}$ ആകുമ്പോൾ $\frac{1}{2}$ ആണെന്ന് നമുക്ക് അനുമാനിക്കാം .

ഉദാഹരണം 3.21 ഒരു കാൽ പന്തുകളിക്കാരന് 80 ..... ആദ്യപ്രവേഗത്തിൽ തറയിലുള്ള ഒരു പന്ത് തട്ടാനാകും. പന്ത് സഞ്ചരിക്കുന്നത് ഏത് കോണളവിലെന്നും സഞ്ചരിക്കുന്ന തിരശ്ചീന ദൂരവും കാണുക? ($g = 32$ എന്നെടുക്കുക).

നിർദ്ധാരണം :

തിരശ്ചീന ദൂരം R കാണുന്നതിനുള്ള സൂത്രം,

$$R = \frac{u^2\sin 2\alpha}{g} = \frac{(80\times 80)\sin 2\alpha}{32} = 10\times 20\sin 2\alpha$$

അതിനാൽ, പരമാവധി ദൂരം = 200 ആയിരിക്കും. ആയതിനാൽ, പരമാവധി ദൂരം സഞ്ചരിക്കാൻ പന്തിനെ അയാൾ $\alpha = 45^\circ$ കോണളവിൽ തട്ടണം.

സർവ്വസമവാക്യം 3.8 : $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

തെളിവ്

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ എന്ന് നമുക്കറിയാം

$\alpha = \beta = A$ എന്നെടുക്കുക

$\cos(A+A) = \cos A\cos A - \sin A\sin A$

$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

XI_Maths_Malayalam_Ch3A_V-1.indd 142 14-02-2023 16:48:01

കുറിപ്പ്: $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$ എന്ന സർവ്വസമവാക്യത്തിൽ നിന്ന്,

$\cos 2A = \cos^2 A - (1 - \cos^2 A) = 2\cos^2 A - 1$ എന്നും

$\cos 2A = (1 - \sin^2 A) - \sin^2 A = 1 - 2\sin^2 A$ എന്നും എഴുതുക.

സർവ്വസമവാക്യം 3.9 : $\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$

തെളിവ്

ഇപ്പോൾ, $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

$\alpha = \beta = A$ എന്നെടുക്കുക

$\tan(A + A) = \dfrac{\tan A + \tan A}{1 - \tan A\tan A}$ എന്ന് നമുക്ക് കിട്ടും.

അതിനാൽ, $\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$

സർവ്വസമവാക്യം 3.10 : $\sin 2A = \dfrac{2\tan A}{1 + \tan^2 A}$

തെളിവ്

$\sin 2A = 2\sin A\cos A$ നമുക്കറിയാവുന്നത്,

$= \dfrac{2\sin A\cos A}{\sin^2 A + \cos^2 A}$

$= \dfrac{\dfrac{2\sin A\cos A}{\cos^2 A}}{\dfrac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\cos^2 A}} = \dfrac{2\tan A}{1 + \tan^2 A}$

സർവ്വസമവാക്യം 3.11 : $\cos 2A = \dfrac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$

തെളിവ്

$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$ നമുക്കറിയാവുന്നത്,

$= \dfrac{\cos^2 A - \sin^2 A}{\cos^2 A + \sin^2 A}$

$= \dfrac{\dfrac{\cos^2 A - \sin^2 A}{\cos^2 A}}{\dfrac{\cos^2 A + \sin^2 A}{\cos^2 A}}$

അതിനാൽ, $\cos 2A = \dfrac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$

കൃതികുറയുന്ന സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ അല്ലെങ്കിൽ ഹ്രസ്വ സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ

സൈൻ, കൊസൈൻ, ടാൻജന്റ് തുടങ്ങിയവയുടെ കൃതികുറയുന്ന സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ ഇരട്ട കോൺ സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് കാണാനാകും. ഉദാഹരണത്തിന്,

$$\cos 2A = 2\cos^2 A - 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2 A = \frac{1 + \cos 2A}{2}$$

കൃതി കുറയുന്ന സർവ്വസമവാക്യങ്ങളുടെ പട്ടിക ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

കൃതി കുറയുന്ന സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ
$\sin^2 A = \frac{1 - \cos 2A}{2}, \quad \cos^2 A = \frac{1 + \cos 2A}{2}, \quad \tan^2 A = \frac{1 - \cos 2A}{1 + \cos 2A}$

കുറിപ്പ്: (i) കൃതി കുറയുന്ന സർവ്വസമവാക്യങ്ങളിൽ ഒരു വശത്തെ വർഗ്ഗത്തെ മറുവശത്ത് നമ്മൾ കൃതി 1 ആക്കി കുറയ്ക്കുന്നു..

(ii) കൊസൈനിന്റെ ഒന്നാംകൃതി ഉപയോഗിച്ച് സൈനിന്റെയോ കൊസൈനിന്റെയോ ഇരട്ട കൃതികൾ എഴുതാൻ കൃതികുറയൽ സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ നമ്മെ സഹായിക്കുന്നു. ഉദാഹരണത്തിന്, കൃതികുറയൽ സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ഒരാൾക്ക് വളരെ എളുപ്പത്തിൽ ചുവടെ തന്നിട്ടുള്ളവ തെളിയിക്കാനാകും., $\cos^4 x = \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$, $\sin^4 x = \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$ (ശ്രമിക്കുക)

(iii) ഉയർന്ന നിലകളിലുള്ള ഗണിതശാസ്ത്ര പ്രവർത്തനങ്ങൾക്ക് കൃതികുറയൽ സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ വളരെ പ്രധാന പങ്ക് വഹിക്കുന്നു.

ത്രികോണമിതി കോണുകളുടെ സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ

ഇരട്ട കോൺ സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ത്രികോണമിതി കോണുകളുടെ സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ നമുക്ക് നിർമ്മിക്കാനാകും.

സർവ്വസമവാക്യം 3.12 : $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$

തെളിവ്

$$\begin{aligned}
\sin 3A = \sin(2A + A) &= \sin 2A\cos A + \cos 2A \sin A \\
&= 2\sin A\cos^2 A + (1 - 2\sin^2 A)\sin A \\
&= 2\sin A(1 - \sin^2 A) + (1 - 2\sin^2 A)\sin A \\
&= 3\sin A - 4\sin^3 A
\end{aligned}$$

സർവ്വസമവാക്യം 3.13 : $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

തെളിവ്

$$\begin{aligned}
\cos 3A &= \cos(2A + A) = \cos 2A\cos A - \sin 2A \sin A \\
&= (2\cos^2 A - 1)\cos A - 2\sin A\cos A\sin A
\end{aligned}$$

XI_Maths_Malayalam_Ch3A_V-1.indd 144 14-02-2023 16:48:03

$$= (2\cos^2 A - 1)\cos A - 2\cos A(1 - \cos^2 A)$$

$$= 4\cos^3 A - 3\cos A$$

സർവ്വസമവാക്യം 3.14 : $\tan 3A = \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$

തെളിവ്

$$\tan 3A = \tan(2A + A) = \frac{\tan 2A + \tan A}{1 - \tan 2A \tan A} \text{ നമുക്കറിയാവുന്നത്}$$

$$= \frac{\dfrac{2\tan A}{1 - \tan^2 A} + \tan A}{1 - \dfrac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}\tan A} = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$$

ഇരട്ട, ത്രിഗുണിത കോണുകളുടെ സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ ചുവടെ തന്നിട്ടുണ്ട്

സൈൻ	കൊസൈൻ	ടാൻജന്റ്
$\sin 2A = 2\sin A\cos A$ $\sin 2A = \dfrac{2\tan A}{1 + \tan^2 A}$ $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$	$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$ $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$ $\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$ $\cos 2A = \dfrac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$ $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$	$\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$ $\tan 3A = \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$

അർദ്ധകോൺ സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ

അർദ്ധകോൺ സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ ഇരട്ടകോൺ സർവ്വസമവാക്യങ്ങളുമായി വളരെയടുത്ത ബന്ധം പുലർത്തുന്നു. ഒരു പ്രത്യേക കോൺ അളവിന്റെ പകുതി തന്നിരുന്നാൽ നമുക്ക് അർദ്ധ കോൺ സർവ്വസ മവാക്യങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കാം.

ഉദാഹരണത്തിന്, $\sin 15^\circ$ യുടെ വില കണക്കാക്കുന്നതിന് $\sin 15^\circ = \sin\dfrac{30^\circ}{2}$ എന്ന് എഴുതാം. ഇത്തര ത്തിലുള്ള കോണുകളുടെ മൂല്യം അർദ്ധ കോൺ സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ഒരാൾക്ക് കാണാൻ സാധിക്കുന്നു.

ഇരട്ട കോൺ സർവ്വസമവാക്യങ്ങളിൽ നാം $2A = \theta$ അല്ലെങ്കിൽ $A = \dfrac{\theta}{2}$ എന്ന് കൊടുത്താൽ കോണളവ് $\dfrac{\theta}{2}$ലുള്ള പുതിയ സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ നമുക്ക് ലഭിക്കും.

അർദ്ധകോൺ സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ ചുവടെതന്നിട്ടുള്ള പട്ടികയിലുള്ളതുപോലെ നമുക്കെഴുതാം.

ഇരട്ടകോൺ സർവ്വസമവാക്യം	അർദ്ധകോൺ സർവ്വസമവാക്യം
$\sin 2A = 2\sin A\cos A$	$\sin\theta = 2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$
$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$	$\cos\theta = \cos^2\dfrac{\theta}{2} - \sin^2\dfrac{\theta}{2}$
$\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$	$\cos\theta = 2\cos^2\dfrac{\theta}{2} - 1$
$\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$	$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\dfrac{\theta}{2}$

XI_Maths_Malayalam_Ch3A_V-1.indd 145 14-02-2023 16:48:04

$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$	$\tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$
$\sin 2A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$	$\sin\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$
$\cos 2A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$	$\cos\theta = \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$

കുറിപ്പ്: (i) വർഗ്ഗ ത്രികോണമിതി ഫലനത്തെ വർഗ്ഗമല്ലാത്ത ത്രികോണമിതി ഫലനമുപയോഗിച്ച് മാറ്റി സ്ഥാപിക്കാൻ അർദ്ധകോൺ സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ പലപ്പോഴും ഉപയോഗിക്കുന്നു.

(ii) ഒരു കോണിന്റെ കൊസൈൻ മൂല്യം അറിയാമെങ്കിൽ, ആ കോണിന്റെ പകുതിയുടെ സൈൻ, കൊസൈൻ മൂല്യങ്ങൾ കണ്ടെത്താൻ അർദ്ധകോൺ സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ നമ്മെ സഹായിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം 3.22 $\sin\left(22\frac{1}{2}^\circ\right)$ മൂല്യം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം :

$\cos\theta = 1-2\sin^2\frac{\theta}{2} \Rightarrow \sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$ നമുക്കറിയാവുന്നത്.

$\theta = 45^\circ$.

$\sin\frac{45^\circ}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 45^\circ}{2}}$ എന്നെടുത്താൽ, ($22\frac{1}{2}^\circ$ ഒന്നാം ചതുർത്ഥാംശത്തിലായതിനാൽ പോസിറ്റീവ് ചിഹ്നം മാത്രം എടുക്കാം)

അതിനാൽ, $\sin 22\frac{1}{2}^\circ = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

ഉദാഹരണം 3.23 $\sin\theta = \frac{12}{13}$, θ ആകുമ്പോഴുള്ള, $\sin 2\theta$ യുടെ മൂല്യം കാണുക, θ ഒന്നാം ചതുർത്ഥാംശത്തിലാണ്.

നിർദ്ധാരണം :

മട്ടത്രികോണം ഉപയോഗിച്ചാൽ, നമുക്ക് വളരെ എളുപ്പത്തിൽ $\cos\theta = \frac{5}{13}$, എന്ന് കാണാൻ സാധിക്കും.

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\left(\frac{12}{13}\right)\left(\frac{5}{13}\right) = \frac{120}{169}.$$

കുറിപ്പ്: ത്രികോണം നിർമ്മിക്കുന്നതിനു പകരം, $\cos\theta = \pm\sqrt{1-\sin^2\theta}$ എന്ന സൂത്രത്തിലെ $\cos\theta$ യുടെ മൂല്യവും നമുക്ക് ഉപയോഗിക്കാൻ സാധിക്കും.

XI_Maths_Malayalam_Ch3A_V-1.indd 146 14-02-2023 16:48:06

ഉദാഹരണം 3.24 തെളിയിക്കുക. $\sin 4A = 4\sin A\cos^3 A - 4\cos A\sin^3 A$

നിർദ്ധാരണം:

$$\begin{aligned} 4\sin A\cos^3 A - 4\cos A\sin^3 A &= 4\sin A\cos A(\cos^2 A - \sin^2 A) \\ &= 4\sin A\cos A\cos 2A = 2(2\sin A\cos A)\cos 2A \\ &= 2(\sin 2A)\cos 2A = \sin 4A \end{aligned}$$

ഉദാഹരണം 3.25 തെളിയിക്കുക. $\sin x = 2^{10}\sin\left(\frac{x}{2^{10}}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2^2}\right)\cdots\cos\left(\frac{x}{2^{10}}\right)$

നിർദ്ധാരണം:

$$\begin{aligned} \sin x &= 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\times 2\times\sin\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2} \\ &= 2^2\sin\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2} \end{aligned}$$

അർദ്ധകോൺ സൈൻ സൂത്രം ആവർത്തിച്ച് ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ, നമുക്ക് കിട്ടുന്നത്,

$$\sin x = 2^{10}\sin\left(\frac{x}{2^{10}}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2^2}\right)\cdots\cos\left(\frac{x}{2^{10}}\right)$$

കുറിപ്പ്: മുകളിലുള്ള ഫലം ഏത് പരിമിതി തവണകളിലേക്കും വിപുലീകരിക്കാൻ കഴിയും.

ഉദാഹരണം 3.26 തെളിയിക്കുക. $\dfrac{\sin\theta + \sin 2\theta}{1 + \cos\theta + \cos 2\theta} = \tan\theta$

നിർദ്ധാരണം :

$$\frac{\sin\theta + \sin 2\theta}{1 + \cos\theta + \cos 2\theta} = \frac{\sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta + (1 + \cos 2\theta)} = \frac{\sin\theta(1 + 2\cos\theta)}{\cos\theta(1 + 2\cos\theta)} = \tan\theta$$

ഉദാഹരണം 3.27 തെളിയിക്കുക. $1 - \frac{1}{2}\sin 2x = \dfrac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin x + \cos x}$

നിർദ്ധാരണം :

$$\begin{aligned} \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin x + \cos x} &= \frac{(\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x\cos x + \cos^2 x)}{\sin x + \cos x} \\ &= 1 - \sin x\cos x = 1 - \frac{1}{2}\sin 2x \end{aligned}$$

ഉദാഹരണം 3.28 $-\pi \le x \le \pi$ ഉം $\cos 2x = \sin x$ ആയിട്ടുള്ള x-കാണുക.

നിർദ്ധാരണം :

നമുക്ക് തന്നിട്ടുള്ള $\cos 2x = \sin x$ ൽ നിന്ന്.

$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

സമീകരണത്തിന്റെ മൂലങ്ങൾ $\sin x = \dfrac{-1 \pm 3}{4} = -1$ അല്ലെങ്കിൽ $\frac{1}{2}$ ആണ്.

XI_Maths_Malayalam_Ch3A_V-1.indd 147 14-02-2023 16:48:07

അപ്പോൾ, $\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

കൂടാതെ, $\sin x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$

അതിനാൽ, $x = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

ഉദാഹരണം 3.29 തന്നിട്ടുള്ളവയുടെ മൂല്യങ്ങൾ കാണുക.

(i) $\sin 18°$ (ii) $\cos 18°$ (iii) $\sin 72°$ (iv) $\cos 36°$ (v) $\sin 54°$

തെളിവ് :

(i) $\theta = 18°$ എന്നെടുത്താൽ.

$5\theta = 90°$

$3\theta + 2\theta = 90° \Rightarrow 2\theta = 90° - 3\theta$

$\sin 2\theta = \sin(90° - 3\theta) = \cos 3\theta$

$2\sin\theta\cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

കാരണം $\cos\theta = \cos 18° \neq 0$

$2\sin\theta = 4\cos^2\theta - 3 = 4(1 - \sin^2\theta) - 3$

$4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1 = 0$

$$\sin\theta = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(4)(-1)}}{2(4)} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

അതിനാൽ, $\sin 18° = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$ (പോസിറ്റീവ് ചിഹ്നം എടുക്കുക. എന്തുകൊണ്ട് ?)

(ii) $\cos 18° = \sqrt{1 - \sin^2 18°}$

$$= \sqrt{1 - \left[\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right]^2} = \frac{1}{4}\sqrt{16 - (5 + 1 - 2\sqrt{5})}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

(iii) $\sin 72° = \sin(90° - 18°) = \cos 18°$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

(iv) $\cos 36° = 1 - 2\sin^2 18° = 1 - 2\left[\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right]^2 = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$

(v) $\sin 54° = \sin(90° - 36°) = \cos 36° = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$

കുറിപ്പ്: $\sin 18° = \cos 72°$, $\cos 18° = \sin 72°$, $\cos 36° = \sin 54°$ എന്നിവ നിരീക്ഷിക്കുക.

ഉദാഹരണം 3.30 $\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\tan\frac{\phi}{2}$ എങ്കിൽ $\cos\phi = \frac{\cos\theta - a}{1 - a\cos\theta}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

XI_Maths_Malayalam_Ch3A_V-1.indd 148 3/24/2023 12:13:47 PM

നിർദ്ധാരണം :

അർദ്ധ കോൺ സർവ്വസമവാക്യത്തിൽ നിന്ന് നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നത്,

$$\cos\phi = \frac{1-\tan^2\frac{\phi}{2}}{1+\tan^2\frac{\phi}{2}} = \frac{1-\left(\frac{1+a}{1-a}\right)\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\left(\frac{1+a}{1-a}\right)\tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{\left(\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}\right)-a}{1-a\left(\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}\right)} = \frac{\cos\theta-a}{1-a\cos\theta}$$

ഉദാഹരണം 3.31 $\sqrt{3}\operatorname{cosec}20^\circ - \sec 20^\circ$ യുടെ മൂല്യം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം :

$$\sqrt{3}\operatorname{cosec}20^\circ - \sec 20^\circ = \frac{\sqrt{3}}{\sin 20^\circ} - \frac{1}{\cos 20^\circ} = 4\left[\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20^\circ - \frac{1}{2}\sin 20^\circ}{2\sin 20^\circ\cos 20^\circ}\right]$$

$$= 4\left[\frac{\sin 60^\circ\cos 20^\circ - \cos 60^\circ\sin 20^\circ}{\sin 40^\circ}\right] = 4$$

ഉദാഹരണം 3.32 തെളിയിക്കുക. $\cos A\cos 2A\cos 2^2A\cos 2^3A\cdots\cos 2^{n-1}A = \frac{\sin 2^nA}{2^n\sin A}$

നിർദ്ധാരണം :

$$\text{LHS} = \cos A\cos 2A\cos 2^2A\cos 2^3A\cdots\cos 2^{n-1}A$$

$$= \frac{1}{2\sin A}2\sin A\cos A\cos 2A\cos 2^2A\cos 2^3A\cdots\cos 2^{n-1}A$$

$$= \frac{1}{2\sin A}\sin 2A\cos 2A\cos 2^2A\cos 2^3A\cdots\cos 2^{n-1}A$$

$$= \frac{1}{2^2\sin A}\sin 4A\cos 2^2A\cos 2^3A\cdots\cos 2^{n-1}A$$

ഈ പ്രക്രിയ തുടർന്നാൽ, $= \frac{\sin 2^nA}{2^n\sin A}$

അഭ്യാസം 3.5

1. താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയിൽ A ഒന്നാം ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ ആകുമ്പോഴുള്ള $\cos 2A$-യുടെ മൂല്യം കാണുക..

   (i) $\cos A = \frac{15}{17}$ (ii) $\sin A = \frac{4}{5}$ (iii) $\tan A = \frac{16}{63}$

2. θ ഒരു ന്യൂനകോൺ ആണെങ്കിൽ, തന്നിട്ടുള്ളവ കാണുക,

   (i) $\sin\theta = \frac{1}{25}$ ആകുമ്പോൾ $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$

   (ii) $\sin\theta = \frac{8}{9}$ ആണെങ്കിൽ $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$-എന്ന് കാണിക്കുക.

3. $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$ ആണെങ്കിൽ $\cos 3\theta = \frac{1}{2}\left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right)$ എന്ന് കാണിക്കുക.

4. $\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$ തെളിയിക്കുക

5. $\sin 4\alpha = 4\tan\alpha\frac{1-\tan^2\alpha}{(1+\tan^2\alpha)^2}$ തെളിയിക്കുക.

6. $A + B = 45^\circ$ ആണെങ്കിൽ, $(1+\tan A)(1+\tan B) = 2$ എന്ന് കാണിക്കുക.

7. $(1+\tan 1^\circ)(1+\tan 2^\circ)(1+\tan 3^\circ)\cdots(1+\tan 44^\circ)$ എന്നത് 4 ന്റെ ഒരു ഗുണിതമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

8. $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right) = 2\tan 2\theta$ തെളിയിക്കുക.

9. $\cot\left(7\frac{1}{2}^\circ\right) = \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{6}$ തെളിയിക്കുക.

10. $(1+\sec 2\theta)(1+\sec 4\theta)\cdots(1+\sec 2^n\theta) = \tan 2^n\theta\cot\theta$ തെളിയിക്കുക.

11. $32(\sqrt{3})\sin\frac{\pi}{48}\cos\frac{\pi}{48}\cos\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{6} = 3$ തെളിയിക്കുക.

3.5.3 ഗുണനഫലത്തിൽ നിന്ന് തുകയും തുകയിൽ നിന്ന് ഗുണനഫലവും കാണുന്നതിനുള്ള സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ

ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളുടെ ചില പ്രയോഗങ്ങളിൽ ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളുടെ ഗുണനഫലത്തെ ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളുടെ തുകയോ വ്യത്യാസമോ ആയി എഴുതേണ്ടതായി വരുന്നു. കൊസൈൻ, സൈൻ ഫലനങ്ങളുടെ തുക വ്യത്യാസ സർവ്വസമവാക്യങ്ങളിൽ നടുവിലുള്ള ചിഹ്നം ഒഴികെ മറ്റു മാറ്റങ്ങളില്ല എന്നത് ആശ്ചര്യകരമാണ്.

അതുകൊണ്ട് അവയെ കൂട്ടിയോജിപ്പിച്ചാൽ ആകർഷകമായ സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ നമുക്ക് ലഭിക്കും. അതിനാൽ അവ ഉപയോഗിച്ച് ഗുണനഫലത്തെ തുകയായോ തുകയെ ഗുണനഫലമായോ വരുന്ന സാധ്യമായ നിരവധി സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ നമുക്ക് മാറ്റിയെഴുതാൻ സാധിക്കും.

$$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B \quad (3.1)$$

$$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B \quad (3.2)$$

$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B \quad (3.3)$$

$$\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B \quad (3.4)$$

മുകളിലുള്ള സർവ്വസമവാക്യങ്ങളിൽ നിന്ന്, ചുവടെ തന്നിട്ടുള്ള ഗുണനഫലത്തിൽ നിന്ന് തുകയിലേക്കുള്ള സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ നമുക്ക് വളരെ എളുപ്പത്തിൽ, അനുമാനിക്കാനാകും.

$$\sin A\cos B = \frac{1}{2}[\sin(A+B) + \sin(A-B)] \quad (3.5)$$

$$\cos A\sin B = \frac{1}{2}[\sin(A+B) - \sin(A-B)] \quad (3.6)$$

$$\cos A\cos B = \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)] \quad (3.7)$$

$$\sin A\sin B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)] \quad (3.8)$$

സൈനിന്റെയും കൊസൈനിന്റെയും ഗുണനഫലങ്ങളെ തുകയിലേക്ക് മാറ്റേണ്ടുന്ന സന്ദർഭങ്ങളിൽ മുകളിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ വളരെയധികം പ്രാധാന്യം അർഹിക്കുന്നു. ചില ഇന്റഗ്രലുകളുടെ മൂല്യനിർണ്ണയത്തിന് ഈ ആശയം വളരെ ഉപയോഗപ്രദമാണ്.

XI_Maths_Malayalam_Ch3A_V-1.indd 150 14-02-2023 16:48:12

തുകയിൽ നിന്ന് ഗുണനഫലത്തിന്റെ സർവ്വസമവാക്യം ലഭിക്കുന്നതിന്, $A+B=C$, $A-B=D$ എന്നിവയോ തത്തുല്യമായ $A=\frac{C+D}{2}$, $B=\frac{C-D}{2}$ എന്നിവയോ (3.5) മുതൽ (3.8) വരെയുള്ള ഗുണന ഫലത്തിൽ നിന്ന് തുകയിലേക്കുള്ള സർവ്വസമവാക്യങ്ങളിൽ പ്രതിസ്ഥാപിക്കണം. എങ്കിൽ, ഇനിപ്പറയുന്ന തുകയിൽ നിന്ന് ഗുണനഫലത്തിലേക്കുള്ള സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ നമുക്ക് ലഭിക്കും.

$$\sin C+\sin D = 2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2} \qquad (3.9)$$

$$\sin C-\sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2} \qquad (3.10)$$

$$\cos C+\cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2} \qquad (3.11)$$

$$\cos C-\cos D = 2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2} \qquad (3.12)$$

സർവ്വസമവാക്യം 3.15 : തെളിയിക്കുക. $\sin(60^\circ-A)\sin A\sin(60^\circ+A)=\frac{1}{4}\sin 3A$

തെളിവ്

$$\begin{aligned}\sin(60^\circ-A)\sin A\sin(60^\circ+A) &= \sin(60^\circ-A)\sin(60^\circ+A)\sin A\\ &= \frac{1}{2}[\cos 2A-\cos 120^\circ]\sin A\\ &= \frac{1}{2}\left[\cos 2A\sin A+\frac{1}{2}\sin A\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 3A\right]=\frac{1}{4}\sin 3A\end{aligned}$$

ഇതുപോലെ തുടർന്നുള്ള രണ്ട് പ്രധാന സർവ്വസമവാക്യങ്ങളും നമുക്ക് തെളിയിക്കാനാകും

സർവ്വസമവാക്യം 3.16 : $\cos(60^\circ-A)\cos A\cos(60^\circ+A)=\frac{1}{4}\cos 3A$

സർവ്വസമവാക്യം 3.17 : $\tan(60^\circ-A)\tan A\tan(60^\circ+A)=\tan 3A$

ഉദാഹരണം 3.33 തന്നിട്ടുള്ള ഓരോ ഗുണനഫലത്തേയും തുകയോ വ്യത്യാസമോ ആയി എഴുതുക.

(i) $\sin 40^\circ\cos 30^\circ$ (ii) $\cos 110^\circ\sin 55^\circ$ (iii) $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}$

നിർദ്ധാരണം :

(i) $2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)$ എന്ന് നമുക്കറിയാം.

$A=40^\circ$, $B=30^\circ$ എന്നെടുത്താൽ,

$$2\sin 40^\circ\cos 30^\circ = \sin(40^\circ+30^\circ)+\sin(40^\circ-30^\circ)=\sin 70^\circ+\sin 10^\circ$$

അതിനാൽ, $\sin 40^\circ\cos 30^\circ = \frac{1}{2}[\sin 70^\circ+\sin 10^\circ]$

XI_Maths_Malayalam_Ch3A_V-1.indd 151 14-02-2023 16:48:14

(ii) $2\cos A\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$ എന്ന് നമുക്കറിയാം.

$A = 110^\circ$, $B = 55^\circ$ എന്നെടുത്താൽ,

$$2\cos 110^\circ \sin 55^\circ = \sin(110^\circ + 55^\circ) - \sin(110^\circ - 55^\circ) .$$

അതിനാൽ, $\cos 110^\circ \sin 55^\circ = \frac{1}{2}[\sin 165^\circ - \sin 55^\circ]$

(iii) $2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$ എന്ന് നമുക്കറിയാം.

$A = \frac{x}{2}$, $B = \frac{3x}{2}$ എന്നെടുത്താൽ

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2} = \sin\left(\frac{x}{2}+\frac{3x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}-\frac{3x}{2}\right) .$$

അതിനാൽ, $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2} = \frac{1}{2}[\sin 2x - \sin x]$

ഉദാഹരണം 3.34 തന്നിട്ടുള്ള ഓരോ തുക അഥവാ വ്യത്യാസങ്ങളെ ഗുണനഫലമായി എഴുതാം.

(i) $\sin 50^\circ + \sin 20^\circ$ (ii) $\cos 6\theta + \cos 2\theta$ (iii) $\cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{9x}{2}$

നിർദ്ധാരണം :

(i) $\sin C + \sin D = 2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$ എന്ന് നമുക്കറിയാം.

$C = 50^\circ$, $D = 20^\circ$ എന്നെടുത്താൽ.

$$\sin 50^\circ + \sin 20^\circ = 2\sin\frac{50^\circ + 20^\circ}{2}\cos\frac{50^\circ - 20^\circ}{2} = 2\sin 35^\circ \cos 15^\circ \text{ എന്ന് നമുക്കറിയാം.}$$

(ii) $\cos C + \cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$ എന്ന് നമുക്കറിയാം.

$C = 6\theta$, $D = 2\theta$.

$$\cos 6\theta + \cos 2\theta = 2\cos\frac{6\theta+2\theta}{2}\cos\frac{6\theta-2\theta}{2} = 2\cos 4\theta\cos 2\theta \text{ എന്നെടുത്താൽ.}$$

(iii) $\cos C - \cos D = 2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}$ എന്ന് നമുക്കറിയാം.

$C = \frac{3x}{2}$, $D = \frac{9x}{2}$ എന്നെടുത്താൽ,

$$\cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{9x}{2} = 2\sin\frac{\frac{3x}{2}+\frac{9x}{2}}{2}\sin\frac{\frac{9x}{2}-\frac{3x}{2}}{2} = 2\sin 3x\sin\frac{3x}{2} .$$

ഉദാഹരണം 3.35 $\sin 34^\circ + \cos 64^\circ - \cos 4^\circ$ യുടെ മൂല്യം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം:

$$\sin 34^\circ + \cos 64^\circ - \cos 4^\circ = \sin 34^\circ - 2\sin\left(\frac{64^\circ+4^\circ}{2}\right)\sin\left(\frac{64^\circ-4^\circ}{2}\right)$$
$$= \sin 34^\circ - 2\sin 34^\circ \sin 30^\circ = 0$$

XI_Maths_Malayalam_Ch3A_V-1.indd 152 14-02-2023 16:48:17

ഉദാഹരണം 3.36 തെളിയിക്കുക. $\cos 36^\circ \cos 72^\circ \cos 108^\circ \cos 144^\circ = \frac{1}{16}$

നിർദ്ധാരണം :

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \cos 36^\circ \cos(90^\circ - 18^\circ)\cos(90^\circ + 18^\circ)\cos(180^\circ - 36^\circ) \\ &= \sin^2 18^\circ \cos^2 36^\circ \\ &= \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

ഉദാഹരണം 3.37 ലഘൂകരിക്കുക $\frac{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ}{\cos 75^\circ + \cos 15^\circ}$.

നിർദ്ധാരണം :

$$\begin{aligned} \frac{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ}{\cos 75^\circ + \cos 15^\circ} &= \frac{2\cos\left(\frac{75^\circ + 15^\circ}{2}\right)\sin\left(\frac{75^\circ - 15^\circ}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{75^\circ + 15^\circ}{2}\right)\cos\left(\frac{75^\circ - 15^\circ}{2}\right)} \\ &= \frac{2\cos 45^\circ \sin 30^\circ}{2\cos 45^\circ \cos 30^\circ} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

കുറിപ്പ്: $\sin 75^\circ = \cos 15^\circ$ ഉം $\cos 75^\circ = \sin 15^\circ$ ഉം ഉപയോഗിച്ച് നിർദ്ധാരണം ചെയ്യാൻ ശ്രമിക്കുക.

ഉദാഹരണം 3.38 $\cos 10^\circ \cos 30^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ = \frac{3}{16}$ എന്ന് കാണിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം :

$$\cos(60^\circ - A)\cos A \cos(60^\circ + A) = \frac{1}{4}\cos 3A \text{ എന്ന് നമുക്കറിയാം.}$$

$$\begin{aligned} \cos 10^\circ \cos 30^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ &= \cos 30^\circ[\cos 10^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ] \\ &= \cos 30^\circ[\cos(60 - 10^\circ)\cos 10^\circ \cos(60^\circ + 10^\circ)] \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{1}{4}\cos 30^\circ\right] = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{16} \end{aligned}$$

അഭ്യാസം 3.6

1. തന്നിട്ടുള്ളവ ഓരോന്നും തുക അഥവാ വ്യത്യാസമായി എഴുതുക.
   (i) $\sin 35^\circ \cos 28^\circ$ (ii) $\sin 4x \cos 2x$ (iii) $2\sin 10\theta \cos 2\theta$
   (iv) $\cos 5\theta \cos 2\theta$ (v) $\sin 5\theta \sin 4\theta$
2. തന്നിട്ടുള്ളവ ഓരോന്നും ഒരു ഗുണനഫലമായി എഴുതുക.
   (i) $\sin 75^\circ - \sin 35^\circ$ (ii) $\cos 65^\circ + \cos 15^\circ$
   (iii) $\sin 50^\circ + \sin 40^\circ$ (iv) $\cos 35^\circ - \cos 75^\circ$
3. $\sin 12^\circ \sin 48^\circ \sin 54^\circ = \frac{1}{8}$ എന്ന് കാണിക്കുക.

4. $\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{5\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}\cos\frac{7\pi}{15}=\frac{1}{128}$ എന്ന് കാണിക്കുക.

5. $\frac{\sin 8x\cos x-\sin 6x\cos 3x}{\cos 2x\cos x-\sin 3x\sin 4x}=\tan 2x$ എന്ന് കാണിക്കുക.

6. $\frac{(\cos\theta-\cos 3\theta)(\sin 8\theta+\sin 2\theta)}{(\sin 5\theta-\sin\theta)(\cos 4\theta-\cos 6\theta)}=1$ എന്ന് കാണിക്കുക.

7. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=\sin 2x(1+2\cos x)$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

8. $\frac{\sin 4x+\sin 2x}{\cos 4x+\cos 2x}=\tan 3x$ എന്ന് തെളിയിക്കുക

9. $1+\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x=4\cos x\cos 2x\cos 3x$ എന്ന് തെളിയിക്കുക

10. $\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{7\theta}{2}+\sin\frac{3\theta}{2}\sin\frac{11\theta}{2}=\sin 2\theta\sin 5\theta$ എന്ന് തെളിയിക്കുക

11. $\cos(30^\circ-A)\cos(30^\circ+A)+\cos(45^\circ-A)\cos(45^\circ+A)=\cos 2A+\frac{1}{4}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക

12. തെളിയിക്കുക $\frac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x+\sin 7x}{\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cos 7x}=\tan 4x$

13. തെളിയിക്കുക $\frac{\sin(4A-2B)+\sin(4B-2A)}{\cos(4A-2B)+\cos(4B-2A)}=\tan(A+B)$.

14. $\cot(A+15^\circ)-\tan(A-15^\circ)=\frac{4\cos 2A}{1+2\sin 2A}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

3.5.4 വ്യവസ്ഥാപിത ത്രികോണമിതി സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ

ഉൾപ്പെടുന്ന കോണിന്റെ സ്വീകാര്യമായ എല്ലാ മൂല്യങ്ങൾക്കും ത്രികോണമിതി സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ ശരിയാണെന്ന് നമുക്കറിയാം. അധികമായ വ്യവസ്ഥകൾ പാലിക്കുന്ന ചില ത്രികോണമിതി സർവ്വസമവാക്യങ്ങളുണ്ട്. അത്തരം സർവ്വസമവാക്യങ്ങളെ **വ്യവസ്ഥാപിത ത്രികോണമിതി സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ** എന്നു വിളിക്കുന്നു. ഈ ഭാഗത്ത്, ചില ബന്ധങ്ങളെ അടിസ്ഥാനമാക്കി ചില സോപാധിക സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ സ്ഥാപിക്കുന്നതിന് മുൻഭാഗങ്ങളിൽ നിന്ന് ലഭിച്ച ബന്ധങ്ങൾ നമുക്ക് ഉപയോഗപ്പെടുത്താം.

ഉദാഹരണം 3.39 $A+B+C=\pi$ ആണെങ്കിൽ തന്നിട്ടുള്ളവ തെളിയിക്കുക.

(i) $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\left(\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{C}{2}\right)$

(ii) $\sin\left(\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{C}{2}\right)\le\frac{1}{8}$

(iii) $1<\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$

നിർദ്ധാരണം :

(i) $\cos A+\cos B+\cos C = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+\cos C$

$= 2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)\cos\left(\frac{A}{2}-\frac{B}{2}\right)+\cos C \quad \left(\frac{A+B+C}{2}=\frac{\pi}{2}\right)$

$= 2\sin\left(\frac{C}{2}\right)\cos\left(\frac{A}{2}-\frac{B}{2}\right)+1-2\sin^2\left(\frac{C}{2}\right)$

$= 1+2\sin\left(\frac{C}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{A}{2}-\frac{B}{2}\right)-\sin\left(\frac{C}{2}\right)\right]$

XI_Maths_Malayalam_Ch3A_V-1.indd 154 14-02-2023 16:48:20

$$= 1 + 2\sin\left(\frac{C}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{A}{2} - \frac{B}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right)\right]$$

$$= 1 + 2\sin\left(\frac{C}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{A}{2} - \frac{B}{2}\right) - \cos\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right)\right]$$

$$= 1 + 4\sin\left(\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{C}{2}\right)$$

(ii) $u = \sin\left(\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{C}{2}\right)$ എന്നെടുത്താൽ,

$$u = -\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) - \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\right]\sin\left(\frac{C}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) - \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\right]\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

$$\cos^2\frac{A+B}{2} - \cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2} + 2u = 0 \text{ എന്നത്}$$

$\cos\frac{A+B}{2}$ ലെ ഒരു ദ്വിഘാത സമീകരണമാണ്.

$\cos\frac{A+B}{2}$ ഒരു വാസ്തവിക സംഖ്യ ആയതിനാൽ, മേൽപ്പറഞ്ഞ സമീകരണത്തിന് ഒരു നിർദ്ധാരണം ഉണ്ടായിരിക്കും. അതിനാൽ, വിവേചകം $b^2 - 4ac \geq 0$, ഇതിൽ നിന്ന്,

$$\cos^2\frac{A-B}{2} - 8u \geq 0 \Rightarrow u \leq \frac{1}{8}\cos^2\frac{A-B}{2} \leq \frac{1}{8}$$

ആയതിനാൽ, $\sin\left(\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{C}{2}\right) \leq \frac{1}{8}$

(iii) ഇവിടെ (i) ൽ നിന്നും (ii) ൽ നിന്നും, $\cos A + \cos B + \cos C > 1$ ഉം

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq 1 + 4 \times \frac{1}{8}$$

അതിനാൽ, $1 < \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$ എന്ന് ലഭിക്കും.

കുറിപ്പ്: $A + B + C = \pi$, $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} > 0$.

ഉദാഹരണം 3.40 $A + B + C = \pi$ എങ്കിൽ, തന്നിട്ടുള്ളത് തെളിയിക്കുക,

$$\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} = 1 + 4\sin\left(\frac{\pi - A}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi - B}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi - C}{4}\right) .$$

നിർദ്ധാരണം :

$$\text{LHS} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right)$$

$$= \left[2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{4}\right)\cos\left(\frac{B-A}{4}\right)\right] + \left[1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{C}{4}\right)\right]$$

$$= 1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{C}{4}\right)\cos\left(\frac{B-A}{4}\right) - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{C}{4}\right)$$

$$= 1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{C}{4}\right)\left[\cos\left(\frac{B-A}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{C}{4}\right)\right]$$

XI_Maths_Malayalam_Ch3A_V-1.indd 155 14-02-2023 16:48:22

$$= 1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{C}{4}\right)\left[\cos\left(\frac{B-A}{4}\right) - \sin\left(\frac{A+B}{4}\right)\right]$$

$$= 1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{C}{4}\right)\left[\cos\left(\frac{B-A}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{4}\right)\right]$$

$$= 1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{C}{4}\right)\left[2\sin\left(\frac{\frac{B-A}{4} + \frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{4}}{2}\right) - \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{4} - \frac{B-A}{4}}{2}\right)\right]$$

$$= 1 + 4\sin\left(\frac{\pi - A}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi - B}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi - C}{4}\right)$$

ഉദാഹരണം 3.41 $A + B + C = \pi$ എങ്കിൽ, തന്നിട്ടുള്ളത് തെളിയിക്കുക, $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A \cos B \cos C$.

നിർദ്ധാരണം :

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = \frac{1}{2}[2\cos^2 A + 2\cos^2 B + 2\cos^2 C]$$

$$= \frac{1}{2}[(1 + \cos 2A) + (1 + \cos 2B) + (1 + \cos 2C)]$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C)$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}[2\cos(A + B)\cos(A - B) + (2\cos^2 C - 1)]$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}[-2\cos C\cos(A - B) + 2\cos^2 C - 1] \quad (\because A + B = \pi - C)$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}[-2\cos C(\cos(A - B) - \cos C)]$$

$$= 1 - \cos C[\cos(A - B) - \cos C]$$

$$= 1 - \cos C[\cos(A - B) + \cos(A + B)]$$

$$= 1 - \cos C[2\cos A\cos B]$$

$$= 1 - 2\cos A\cos B\cos C$$

അഭ്യാസം 3.7

1. $A + B + C = 180^\circ$ എങ്കിൽ, തന്നിട്ടുള്ളവ തെളിയിക്കുക.

   (i) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A\sin B\sin C$

   (ii) $\cos A + \cos B - \cos C = -1 + 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

   (iii) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A\cos B\cos C$

   (iv) $\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C = 2\sin A\sin B\cos C$

   (v) $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1$

   (vi) $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

   (vii) $\sin(B + C - A) + \sin(C + A - B) + \sin(A + B - C) = 4\sin A\sin B\sin C$

XI_Maths_Malayalam_Ch3A_V-1.indd 156 14-02-2023 16:48:24

2. $A + B + C = 2s$ എങ്കിൽ, $\sin(s - A)\sin(s - B) + \sin s \sin(s - C) = \sin A \sin B$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

3. $x + y + z = xyz$ എങ്കിൽ, $\frac{2x}{1-x^2} + \frac{2y}{1-y^2} + \frac{2z}{1-z^2} = \frac{2x}{1-x^2}\frac{2y}{1-y^2}\frac{2z}{1-z^2}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

4. $A + B + C = \frac{\pi}{2}$ എങ്കിൽ, തന്നിട്ടുള്ളവ തെളിയിക്കുക.

   (i) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \cos A \cos B \cos C$

   (ii) $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = 1 + 4 \sin A \sin B \sin C$

5. ΔABC ഒരു മട്ടത്രികോണവും $\angle A = \frac{\pi}{2}$ ഉം ആണെങ്കിൽ, തന്നിട്ടുള്ളവ തെളിയിക്കുക.

   (i) $\cos^2 B + \cos^2 C = 1$ (ii) $\sin^2 B + \sin^2 C = 1$

   (iii) $\cos B - \cos C = -1 + 2\sqrt{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$

3.6 ത്രികോണമിതി സമീകരണങ്ങൾ

അജ്ഞാതമായ കോണുകളുടെ ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങൾ അടങ്ങിയിട്ടുള്ള സമീകരണങ്ങളെ ത്രികോണമിതി സമീകരണങ്ങൾ എന്ന് അറിയപ്പെടുന്നു. ത്രികോണമിതി സമീകരണത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണം എന്നത് സമീകരണത്തെ സാധൂകരിക്കുന്ന അജ്ഞാത കോണിന്റെ മൂല്യമാണ്. മണ്ഡലം നിയന്ത്രിതമല്ലെങ്കിൽ, ത്രികോണമിതി സമീകരണത്തിന് അനന്തം നിർദ്ധാരണങ്ങൾ ഉണ്ടാകും, ഇത് ത്രികോണമിതി ഫലനത്തിന്റെ ആനുകാലികത കാരണമാണ്. ചില സമീകരണങ്ങൾക്ക് ഒരിക്കലും നിർദ്ധാരണം ഉണ്ടാകില്ല.

ഉദാഹരണത്തിന്, $\sin\theta = \frac{3}{2}$ എന്ന സമീകരണത്തിന് നിർദ്ധാരണമില്ല, കാരണം $-1 \leq \sin\theta \leq 1$ ആണ്.

$\sin\theta = 0$ എന്ന സമീകരണത്തിന് $\theta = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \cdots$ തുടങ്ങി അനന്തം നിർദ്ധാരണങ്ങൾ ഉണ്ട്, അവ ആനുകാലികമായി സംഭവിക്കുന്നു എന്നത് ശ്രദ്ധേയമാണ്.

പൊതുനിർദ്ധാരണം

ഒരു ത്രികോണമിതി ഫലനത്തിന്റെ ആനുകാലികതയുടെ സഹായത്തോടെ ലഭിക്കുന്ന സ്വീകാര്യമായ എല്ലാ മൂല്യങ്ങളും നൽകുന്ന ഒരു ത്രികോണമിതി സമീകരണത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണത്തെ സമീകരണത്തിന്റെ **പൊതു നിർദ്ധാരണം** എന്നു വിളിക്കുന്നു.

പ്രധാന നിർദ്ധാരണം

$[0, 2\pi]$ അല്ലെങ്കിൽ $[-\pi, \pi]$ എന്ന ഇടവേളയിൽ സമവാക്യത്തെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്ന അജ്ഞാത കോണിന്റെ ഏറ്റവും ചെറിയ സാംഖിക മൂല്യത്തെ ഒരു **പ്രധാന നിർദ്ധാരണം** എന്നു വിളിക്കുന്നു. പ്രധാന നിർദ്ധാരണം നിർവ്വചിക്കാൻ നാം $[-\pi, \pi]$ എന്ന ഇടവേള നമ്മൾ എടുക്കുന്നു. ഇതു കൂടാതെ, ഈ ഇടവേളയിൽ രണ്ട് നിർദ്ധാരണങ്ങൾ ഉണ്ടാകാം. രണ്ടും സാധുതയുള്ള നിർദ്ധാരണങ്ങളാണെങ്കിലും സംഖ്യയിൽ ചെറുതിനെ മാത്രമേ നാം സ്വീകരിക്കേണ്ടതുള്ളൂ. ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളുടെ വിപരീതം നിർമ്മിക്കുന്നതിന് അവയുടെ പ്രധാന മണ്ഡലം നിർവ്വഹിക്കാൻ ഇത് നമ്മെ സഹായിക്കുന്നു.

XI_Maths_Malayalam_Ch3A_V-1.indd 157 14-02-2023 16:48:25

സൈൻ ഫലനത്തിന്റെ പ്രധാനമൂല്യം $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ എന്ന ഇടവേളയിലാണ്. അതിനാൽ, അത് ചതുർത്ഥാംശം I ലോ ചതുർത്ഥാംശം III ലോ ആയിരിക്കും.

കൊസൈൻ ഫലനത്തിന്റെ പ്രധാന മൂല്യം $[0, \pi]$ ലും അതിനാൽ, അത് ചതുർത്ഥാംശം I ലോ ചതുർത്ഥാംശം II ലോ ആയിരിക്കും.

ടാൻജന്റ് ഫലനത്തിന്റെ പ്രധാനമൂല്യം $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ലും അതിനാൽ, അത് ചതുർത്ഥാംശം I ലോ ചതുർത്ഥാംശം IV ലോ ആയിരിക്കും.

കുറിപ്പ്:

(i) ത്രികോണമിതി സമീകരണങ്ങൾ ത്രികോണമിതി സർവ്വസമവാക്യങ്ങളിൽ നിന്ന് വ്യത്യസ്തമാണ്; കാരണം അജ്ഞാത കോൺ θ-യുടെ എല്ലാ സാധ്യമായ മൂല്യങ്ങൾക്കും ത്രികോണമിതി സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ ശരിയാണ്. എന്നാൽ ത്രികോണമിതി സമീകരണങ്ങൾ അജ്ഞാത കോണുകളുടെ ചില പ്രത്യേക മൂല്യങ്ങൾക്കാണ് സാധുവാകുന്നത്.

(ii) ത്രികോണമിതി സമീകരണങ്ങൾ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നതിന് പൊതുവായ ഒരു രീതിയുമില്ല. എന്നിരുന്നാലും, ഒരാൾ ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടത്; ചില സമീകരണങ്ങൾ ഘടകങ്ങളാക്കാവുന്നവയും, ചില സമീകരണങ്ങൾ ഒരു ഫലനമുപയോഗിച്ച് എഴുതാവുന്നവയും; ചില സമീകരണങ്ങൾ വർഗ്ഗമാക്കാവുന്നവയുമാണ്.

(iii) ത്രികോണമിതി സമീകരണങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണം കാണുന്നതിന്, ഒരാൾ ചിലപ്പോൾ ഇരുവശവും വർഗ്ഗം കാണുന്ന മാർഗ്ഗം ഉപയോഗിക്കും. തെറ്റായ നിർദ്ധാരണം (ബാഹ്യമായ നിർദ്ധാരണം) ലഭിക്കാൻ സാധ്യതയുള്ളതിനാൽ ഈ മാർഗ്ഗം ഉപയോഗിക്കുന്ന ഒരാൾ ശ്രദ്ധാലുവായിരിക്കണം. ഉദാഹരണത്തിന്, $0 \le x < 360^\circ$ ആകുമ്പോഴുള്ള $\sin x - \cos x = 1$ ന്റെ നിർദ്ധാരണം കാണുന്നതിന് നമുക്ക് ഇരുവശവും വർഗ്ഗം കാണാം. അപ്പോൾ $(\sin x - 1)^2 = \cos^2 x \Rightarrow 2\sin x(\sin x - 1) = 0$ അതുകൊണ്ട് $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$, $x = 0$ എന്നത് ഒരു തെറ്റായ നിർദ്ധാരണമെന്ന് വ്യക്തമാണ്. അതിനാൽ, വർഗം കാണുന്ന പ്രക്രിയയിൽ ശരിയായ നിർദ്ധാരണത്തിനായി നാം പരിശോധിക്കേണ്ടതാണ്.

(iv) ത്രികോണമിതി സമീകരണങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണങ്ങൾ നാമെഴുതുന്നത് കൂടുതലും റേഡിയനിലാണ്.

ഇപ്പോൾ, വ്യത്യസ്ത രൂപങ്ങളിലുള്ള ത്രികോണമിതി സമീകരണങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണം നാം കാണുന്നു.

(i) $\sin\theta = k (-1 \le k \le 1)$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ള സമീകരണം നിർദ്ധാരണം ചെയ്യാൻ :

$\sin\alpha = k$ ആകുന്നതിനുള്ള സാംഖികമായ ഒരു ചെറിയ കോണാണ് α എന്നിരിക്കട്ടെ.

എങ്കിൽ,

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \sin\alpha \\ \sin\theta - \sin\alpha &= 0 \\ 2\cos\frac{\theta+\alpha}{2}\sin\frac{\theta-\alpha}{2} &= 0 \end{aligned}$$

ഇത് നൽകുന്നത് $\cos\frac{\theta+\alpha}{2} = 0$ അല്ലെങ്കിൽ $\sin\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right) = 0$ എന്നാണ്.

XI_Maths_Malayalam_Ch3A_V-1.indd 158 14-02-2023 16:48:26

ഇപ്പോൾ, $\cos\frac{\theta+\alpha}{2}=0$	ഇപ്പോൾ, $\sin\frac{\theta-\alpha}{2}=0$,
$\frac{\theta+\alpha}{2}=(2n+1)\frac{\pi}{2},\ n\in\mathbb{Z}$	$\frac{\theta-\alpha}{2}=n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$
$\theta=(2n+1)\pi-\alpha,\ n\in\mathbb{Z}$ ... (i)	$\theta=2n\pi+\alpha,\ n\in\mathbb{Z}$ ... (ii)

(i) ഉം (ii)-ഉം കൂട്ടിയോജിപ്പിച്ചാൽ.

$$\sin\theta=\sin\alpha\Rightarrow\theta=n\pi+(-1)^n\alpha,\ n\in\mathbb{Z} \tag{3.13}$$

(ii) $\cos\theta=k\ (-1\le k\le 1)$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ള സമീകരണം നിർദ്ധാരണം ചെയ്യൽ :

$\cos\alpha=k$ ആകുന്നതിനുള്ള സാംഖികമായ ഒരു ചെറിയ കോണാണ് α എന്നിരിക്കട്ടെ.

എങ്കിൽ,

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \cos\alpha\\ \cos\theta-\cos\alpha &= 0\\ 2\sin\frac{\theta+\alpha}{2}\sin\frac{\alpha-\theta}{2} &= 0\\ \sin\frac{\theta+\alpha}{2}\sin\frac{\theta-\alpha}{2} &= 0 \text{ ഇത് നൽകുന്നത്,}\end{aligned}$$

അതിനാൽ $\sin\frac{\theta+\alpha}{2}=0$ അല്ലെങ്കിൽ $\sin\frac{\theta-\alpha}{2}=0$ എന്ന് നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നു.

$\sin\frac{\theta+\alpha}{2}=0$ നൽകുന്നത്	$\sin\frac{\theta-\alpha}{2}=0$ നൽകുന്നത്
$\Rightarrow\frac{\theta+\alpha}{2}=n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$	$\Rightarrow\frac{\theta-\alpha}{2}=n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$
$\theta=2n\pi-\alpha,\ n\in\mathbb{Z}$ .... (i)	$\theta=2n\pi+\alpha,\ n\in\mathbb{Z}$ ... (ii)

(i) ഉം (ii)-ഉം കൂട്ടിയോജിപ്പിച്ചാൽ.

$$\cos\theta = \cos\alpha\Rightarrow\theta=2n\pi\pm\alpha,\ n\in\mathbb{Z} \tag{3.14}$$

(iii) $\tan\theta=k\ (-\infty<k<\infty)$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ള സമീകരണം നിർദ്ധാരണം ചെയ്യൽ :

$\tan\alpha=k$ ആകുന്നതിനുള്ള സാംഖികമായ ഒരു ചെറിയ കോണാണ് α എന്നിരിക്കട്ടെ. എങ്കിൽ,.

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \tan\alpha\\ \frac{\sin\theta}{\cos\theta} &= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\Rightarrow\sin\theta\cos\alpha-\cos\theta\sin\alpha=0\\ \sin(\theta-\alpha) &= 0\Rightarrow\theta-\alpha=n\pi\\ \theta &= n\pi+\alpha,\ n\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

അതിനാൽ, $$\tan\theta = \tan\alpha\Rightarrow\theta=n\pi+\alpha,\ n\in\mathbb{Z} \tag{3.15}$$

(iv) $a\cos\theta+b\sin\theta=c$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ള സമീകരണം നിർദ്ധാരണം ചെയ്യൽ :

$a=r\cos\alpha, b=r\sin\alpha$ എന്നെടുത്താൽ.

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{a^2+b^2};\ \tan\alpha=\frac{b}{a},\ a\neq 0\\ a\cos\theta+b\sin\theta &= c\Rightarrow r\cos\alpha\cos\theta+r\sin\alpha\sin\theta=c\\ r\cos(\theta-\alpha) &= c\end{aligned}$$

$$\cos(\theta - \alpha) = \frac{c}{r} = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos\phi \text{ (എന്നിരിക്കട്ടെ)}$$

$$\theta - \alpha = 2n\pi \pm \phi,\ n \in \mathbb{Z}$$

$$\theta = 2n\pi + \alpha \pm \phi,\ n \in \mathbb{Z}$$

കുറിപ്പ്: മേൽപ്പറഞ്ഞരീതി ഉപയോഗിക്കുന്നത് $c \leq \sqrt{a^2 + b^2}$ ആകുമ്പോൾ മാത്രമാണ് $c > \sqrt{a^2 + b^2}$ ആണെങ്കിൽ, $a\cos\theta + b\sin\theta = c$ എന്ന സമീകരണത്തിന് നിർദ്ധാരണം ഉണ്ടായിരിക്കില്ല.

ഇപ്പോൾ ത്രികോണമിതി സമീകരണങ്ങളുടെ പൊതുനിർദ്ധാരണം നമുക്ക് സംഗ്രഹിക്കാം.

ത്രികോണമിതി സമീകരണം	പൊതു നിർദ്ധാരണം
$\sin\theta = 0$	$\theta = n\pi;\ n \in \mathbb{Z}$
$\cos\theta = 0$	$\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2};\ n \in \mathbb{Z}$
$\tan\theta = 0$	$\theta = n\pi;\ n \in \mathbb{Z}$
$\sin\theta = \sin\alpha,\ \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$\theta = n\pi + (-1)^n\alpha;\ n \in \mathbb{Z}$
$\cos\theta = \cos\alpha,\ \alpha \in [0, \pi]$	$\theta = 2n\pi \pm \alpha,\ n \in \mathbb{Z}$
$\tan\theta = \tan\alpha,\ \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$\theta = n\pi + \alpha,\ n \in \mathbb{Z}$

ഉദാഹരണം 3.42 പ്രധാന നിർദ്ധാരണം കാണുക

(i) $\sin\theta = \frac{1}{2}$ (ii) $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (iii) $\operatorname{cosec}\theta = -2$ (iv) $\cos\theta = \frac{1}{2}$

നിർദ്ധാരണം :

(i) $\sin\theta = \frac{1}{2} > 0$ ആയതിനാൽ പ്രധാനമൂല്യം ചതുർത്ഥാംശം I ൽ ആയിരിക്കും

$\sin\theta = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$ എന്ന് നമുക്കറിയാം

അതിനാൽ, $\theta = \frac{\pi}{6}$ ആണ് പ്രധാന നിർദ്ധാരണം.

(ii) $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$

$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ യുടെ പ്രധാനമൂല്യം $\sin\theta$-ൽ ആണെന്ന് നമുക്കറിയാം.

$\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$, ആയതിനാൽ, $\sin\theta$ യുടെ പ്രധാനമൂല്യം ചതുർത്ഥാംശം IV ൽ ആയിരിക്കും

$$\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

അതിനാൽ, $\theta = -\frac{\pi}{3}$ ആണ് പ്രധാന നിർദ്ധാരണം.

XI_Maths_Ch3B_V-1_Malayalam.indd 160 14-02-2023 17:06:57

(iii) $\operatorname{cosec}\theta = -2$

$\operatorname{cosec}\theta = -2 \Rightarrow \frac{1}{\sin\theta} = -2 \Rightarrow \sin\theta = -\frac{1}{2}$

$\sin\theta = -\frac{1}{2} < 0$

ആയതിനാൽ, $\sin\theta$ യുടെ പ്രധാനമൂല്യം ചതുർത്ഥാംശം IV ൽ ആയിരിക്കും.

$\sin\theta = -\frac{1}{2} = -\sin\frac{\pi}{6} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

അതിനാൽ, $\theta = -\frac{\pi}{6}$ ആണ് പ്രധാന നിർദ്ധാരണം.

(iv) $\cos\theta = \frac{1}{2}$

$\cos\theta$ യുടെ പ്രധാനമൂല്യം ചതുർത്ഥാംശം I ലും II ലും ആണ്

$\cos\theta = \frac{1}{2} > 0$

ആയതിനാൽ, പ്രധാനമൂല്യം $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ എന്ന ഇടവേളയിലായിരിക്കും

$\cos\theta = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

അതിനാൽ $\theta = \frac{\pi}{3}$ ആണ് പ്രധാന നിർദ്ധാരണം.

ഉദാഹരണം 3.43 $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ -ന്റെ പൊതു നിർദ്ധാരണം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം :

$\sin\theta = \sin\alpha,\ \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ന്റെ പൊതു നിർദ്ധാരണം $\theta = n\pi + (-1)^n\ \alpha, n \in \mathbb{Z}$

$\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ ആണ്

അതിനാൽ പൊതുനിർദ്ധാരണം

$\theta = n\pi + (-1)^n\left(-\frac{\pi}{3}\right) = n\pi + (-1)^{n+1}\left(\frac{\pi}{3}\right);\ n \in \mathbb{Z}$ ..... (1)

കുറിപ്പ്: മുകളിലുള്ള പൊതുനിർദ്ധാരണത്തിൽ നാമെത്തുമ്പോൾ, $[-\pi, \pi]$ എന്ന ഇടവേളയിലെ സാംഖികമായി ഏറ്റവും ചെറിയ ഒരു വിലയെ പ്രധാന മൂല്യമായെടുക്കുന്നുവെന്ന നമ്മുടെ സമ്പ്രദായപ്രകാരം $-\left(\frac{\pi}{3}\right)$ യെ പ്രധാനമൂല്യമായി നാം എടുക്കുന്നു. ഈ ഉദാഹരണത്തിലൂടെ, പ്രധാന നിർദ്ധാരണത്തിന്റെ നിർവ്വചനത്തിൽ സൂചിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നതിൻപ്രകാരം $[0, 2\pi]$ ൽ നിന്നും പ്രധാനമൂല്യം എടുക്കാമെന്ന് ഇപ്പോൾ നമുക്ക് സമർത്ഥിക്കാം. പ്രധാന നിർദ്ധാരണം. $[0, 2\pi]$ എന്ന ഇടവേളയിൽ നിന്നും നാമെടുക്കുകയാണെങ്കിൽ, പ്രധാന നിർദ്ധാരണം $\theta = \frac{4\pi}{3}$ ഉം പൊതു നിർദ്ധാരണം

$\theta = n\pi + (-1)^n\left(\frac{4\pi}{3}\right),\ n \in \mathbb{Z},\quad \frac{4\pi}{3} \in [0,\ 2\pi]$ ..... (ii) ഉം ആയിരിക്കും

(ii)-ൽ നിന്ന് $n = 0, -1, 1, -2, 2, \cdots$ എന്നിവയ്ക്ക് യോജിച്ച നിർദ്ധാരണങ്ങൾ $\frac{4\pi}{3}, \frac{-7\pi}{3}, \frac{-\pi}{3}, \frac{-2\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}, \cdots$.ആകുന്നു.

XI_Maths_Ch3B_V-1_Malayalam.indd 161 14-02-2023 17:06:59

(i)-ൽ നിന്ന് $n = 0, -1, 1, -2, 2, \cdots$ എന്നിവയ്ക്ക് യോജിച്ച നിർദ്ധാരണങ്ങൾ

$\frac{-\pi}{3}, \frac{-2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{-7\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \cdots$.

രണ്ട് സാഹചര്യങ്ങളിലും, ഒരേ ഗണത്തിലെ നിർദ്ധാരണങ്ങൾ തന്നെയാണ് നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നത്, എന്നാൽ ക്രമം വ്യത്യസ്തമായിരിക്കും. അതിനാൽ, പ്രധാന നിർദ്ധാരണത്തെ $[0, 2\pi]$ ലോ $[-\pi, \pi]$ ലോ നിന്നെടുക്കാമെന്ന് നമുക്ക് സമർത്ഥിക്കാം.

ഉദാഹരണം 3.44 പൊതുനിർദ്ധാരണം കാണുക. (i) $\sec\theta = -2$ (ii) $\tan\theta = \sqrt{3}$

നിർദ്ധാരണം :

(i) $\sec\theta = -2$

$\sec\theta = -2 \Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{2}$

$\cos\theta = \cos\alpha, \alpha \in [0, \pi]$ യുടെ പൊതുനിർദ്ധാരണം

$\theta = 2n\pi \pm \alpha,\ n \in \mathbb{Z}$ എന്ന് നമുക്കറിയാം.

$\alpha \in [0, \pi]$ ആകുന്ന $\cos\alpha = -\frac{1}{2} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3}$ നമുക്ക് കാണാം.

അതുകൊണ്ട് $\alpha = \frac{2\pi}{3}$

അതിനാൽ, പൊതുനിർദ്ധാരണം $\theta = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3},\ n \in \mathbb{Z}$.

(ii) $\tan\theta = \sqrt{3}$

$\tan\theta = \sqrt{3} = \tan\frac{\pi}{3}$

$\tan\theta = \tan\alpha, \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ന്റെ പൊതുനിർദ്ധാരണം $\theta = n\pi + \alpha,\ n \in \mathbb{Z}$ ആണെന്ന് നമുക്കറിയാം.

അതിനാൽ, പൊതുനിർദ്ധാരണം $\theta = n\pi + \frac{\pi}{3},\ n \in \mathbb{Z}$.

ഉദാഹരണം 3.45 നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക $3\cos^2\theta = \sin^2\theta$.

നിർദ്ധാരണം :

$3\cos^2\theta = 1 - \cos^2\theta \Rightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{4}$

$\frac{\cos 2\theta + 1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos 2\theta = -\frac{1}{2} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$2\theta = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3},\ n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3},\ n \in \mathbb{Z}$

കുറിപ്പ്: $\tan^2\theta = 3$ എന്നെഴുതി നിർദ്ധാരണം ചെയ്യാൻ ശ്രമിക്കുക.

ഉദാഹരണം 3.46 നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക $\sin x + \sin 5x = \sin 3x$.

നിർദ്ധാരണം :

$\sin x + \sin 5x = \sin 3x \Rightarrow 2\sin 3x\cos 2x = \sin 3x$

$\sin 3x(2\cos 2x - 1) = 0$

XI_Maths_Ch3B_V-1_Malayalam.indd 162 14-02-2023 17:07:01

അതിനാൽ, $\sin 3x = 0$ അല്ലെങ്കിൽ $\cos 2x = \frac{1}{2}$

$\sin 3x = 0$ ആണെങ്കിൽ, $3x = n\pi \Rightarrow x = \frac{n\pi}{3},\ n \in \mathbb{Z}$ ..... (i)

$\cos 2x = \frac{1}{2}$ ആണെങ്കിൽ, $\cos 2x = \cos\frac{\pi}{3}$

$2x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = n\pi \pm \frac{\pi}{6},\ n \in \mathbb{Z}$ ..... (ii)

(i) ൽ നിന്നും (ii) ൽ നിന്നും നമുക്ക് $x = \frac{n\pi}{3}$, $x = n\pi \pm \frac{\pi}{6},\ n \in \mathbb{Z}$ എന്ന പൊതുനിർദ്ധാരണം ലഭിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം 3.47 നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക $\cos x + \sin x = \cos 2x + \sin 2x$.

നിർദ്ധാരണം :

$$\cos x + \sin x = \cos 2x + \sin 2x$$
$$\Rightarrow \cos x - \cos 2x = \sin 2x - \sin x$$
$$2\sin\left(\frac{x+2x}{2}\right)\sin\left(\frac{2x-x}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{2x+x}{2}\right)\sin\left(\frac{2x-x}{2}\right)$$
$$2\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{3x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$\sin\left(\frac{x}{2}\right)\left[\sin\left(\frac{3x}{2}\right) - \cos\left(\frac{3x}{2}\right)\right] = 0$$

അതിനാൽ, $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0$ അല്ലെങ്കിൽ $\sin\left(\frac{3x}{2}\right) - \cos\left(\frac{3x}{2}\right) = 0$ ആയിരിക്കും.

$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0$ ആകുമ്പോൾ,
$\frac{x}{2} = n\pi \Rightarrow x = 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

$\sin\left(\frac{3x}{2}\right) - \cos\left(\frac{3x}{2}\right) = 0$ ആകുമ്പോൾ,
$\tan\left(\frac{3x}{2}\right) = 1 = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$
$\Rightarrow \frac{3x}{2} = n\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{2n\pi}{3} + \frac{\pi}{6},\ n \in \mathbb{Z}$

അതിനാൽ, പൊതുനിർദ്ധാരണം $x = 2n\pi$ ആണെങ്കിൽ $x = \frac{2n\pi}{3} + \frac{\pi}{6},\ n \in \mathbb{Z}$ ആകും.

കുറിപ്പ്: $\sin\theta = \cos\theta$ അതുകൊണ്ട്, $\theta \neq (2n+1)\frac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}$ അതിനാൽ, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 1$ എന്ന് നമുക്ക് ലഭിക്കും.

ഉദാഹരണം 3.48 $\sin 9\theta = \sin\theta$ എന്ന സമീകരണം നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക.

നിർദ്ധാരണം :

$$\sin 9\theta = \sin\theta \Rightarrow \sin 9\theta - \sin\theta = 0$$
$$2\cos 5\theta \sin 4\theta = 0 \Rightarrow \cos 5\theta = 0 \text{ അല്ലെങ്കിൽ } \sin 4\theta = 0$$

$\cos 5\theta = 0$ ആകുമ്പോൾ $5\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$
$\Rightarrow \theta = (2n+1)\frac{\pi}{10},\ n \in \mathbb{Z}$

$\sin 4\theta = 0 \Rightarrow 4\theta = n\pi$
$\Rightarrow \theta = \frac{n\pi}{4},\ n \in \mathbb{Z}$

തന്നിരിക്കുന്ന സമീകരണത്തിന്റെ പൊതുവായ നിർദ്ധാരണം $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{10},\ \theta = \frac{n\pi}{4},\ n \in \mathbb{Z}$.

XI_Maths_Ch3B_V-1_Malayalam.indd 163 14-02-2023 17:07:03

ഉദാഹരണം 3.49 നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക $\tan 2x = -\cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

നിർദ്ധാരണം:

$$\tan 2x = -\cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + x + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{5\pi}{6} + x\right)$$

$$2x = n\pi + \frac{5\pi}{6} + x,\ n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = n\pi + \frac{5\pi}{6},\ n \in \mathbb{Z}.$$

ഉദാഹരണം 3.50 നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക $\sin x - 3\sin 2x + \sin 3x = \cos x - 3\cos 2x + \cos 3x$.

നിർദ്ധാരണം :

$$\sin x - 3\sin 2x + \sin 3x = \cos x - 3\cos 2x + \cos 3x$$

$$\sin 3x + \sin x - 3\sin 2x = \cos 3x + \cos x - 3\cos 2x$$

$$2\sin 2x\cos x - 3\sin 2x = 2\cos 2x\cos x - 3\cos 2x$$

$$(\sin 2x - \cos 2x)(2\cos x - 3) = 0$$

എങ്കിൽ, $\sin 2x - \cos 2x = 0$ കാരണം, $2\cos x - 3 \neq 0$

$$\sin 2x = \cos 2x \Rightarrow \tan 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{8},\ n \in \mathbb{Z}.$$

ഉദാഹരണം 3.51 നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക $\sin x + \cos x = 1 + \sin x\cos x$.

നിർദ്ധാരണം :

$$\sin x + \cos x = t \quad \text{എന്നെടുത്താൽ}$$

$$\Rightarrow 1 + 2\sin x\cos x = t^2 \Rightarrow \sin x\cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$$

അതിനാൽ, തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണത്തിൽ നിന്ന് $t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow t = 1$.

ആയതിനാൽ, $\sin x + \cos x = 1$

$$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) = 1$$

$$\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1 \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

അതിനാൽ,

$$x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \quad \text{അല്ലെങ്കിൽ} \quad x = 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$$

ഉദാഹരണം 3.52 നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2$.

XI_Maths_Ch3B_V-1_Malayalam.indd 164 14-02-2023 17:07:05

നിർദ്ധാരണം :

$$2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2 \Rightarrow 2\sin^2 x + (2\sin x \cos x)^2 = 2$$

$$\cos^2 x(2\sin^2 x - 1) = 0$$

$\cos x = 0$ അല്ലെങ്കിൽ $\sin^2 x = \frac{1}{2}$

$\cos x = 0 \Rightarrow x = (2n+1)\frac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}$

$\sin^2 x = \frac{1}{2} = \sin^2 \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow x = n\pi \pm \frac{\pi}{4},\ n \in \mathbb{Z}$ (എങ്ങനെ)

അതിനാൽ നിർദ്ധാരണം $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ അല്ലെങ്കിൽ $x = n\pi \pm \frac{\pi}{4},\ n \in \mathbb{Z}$.

ഉദാഹരണം 3.53 ഏത് a യ്ക്കും b യ്ക്കും തന്നിട്ടുള്ളത് $-\sqrt{a^2+b^2} \le a\sin\theta + b\cos\theta \le \sqrt{a^2+b^2}$ തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം :

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta\right]$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\,[\cos\alpha\sin\theta + \sin\alpha\cos\theta]$$

ഇപ്പോൾ, $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\alpha+\theta)$$

ഇവിടെ, $|a\sin\theta + b\cos\theta| \le \sqrt{a^2+b^2}$

അതിനാൽ, $-\sqrt{a^2+b^2} \le a\sin\theta + b\cos\theta \le \sqrt{a^2+b^2}$

ഉദാഹരണം 3.54 നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക $\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta = \sqrt{2}$.

നിർദ്ധാരണം :

$$\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta = \sqrt{2}$$

ഇവിടെ, $a = -1;\ b = \sqrt{3};\ c = \sqrt{2};\ r = \sqrt{a^2+b^2} = 2$

അതിനാൽ, തന്നിരിക്കുന്ന സമീകരണത്തെ ചുവടെ തന്നിട്ടുള്ള രീതിയിൽ മാറ്റിയെഴുതാം.

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\theta\cos\frac{\pi}{6} - \cos\theta\sin\frac{\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\theta - \frac{\pi}{6} = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{4},\ n \in \mathbb{Z}$$

അതിനാൽ, $\theta = n\pi + \frac{\pi}{6} + (-1)^n\frac{\pi}{4},\ n \in \mathbb{Z}$

XI_Maths_Ch3B_V-1_Malayalam.indd 165 14-02-2023 17:07:07

ഉദാഹരണം 3.55 നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക $\sqrt{3}\tan^2\theta + (\sqrt{3}-1)\tan\theta - 1 = 0$.

നിർദ്ധാരണം :

$$\sqrt{3}\tan^2\theta + (\sqrt{3}-1)\tan\theta - 1 = 0$$
$$\sqrt{3}\tan^2\theta + \sqrt{3}\tan\theta - \tan\theta - 1 = 0$$
$$(\sqrt{3}\tan\theta - 1)(\tan\theta + 1) = 0$$

അതിനാൽ, $\sqrt{3}\tan\theta - 1 = 0$ (അല്ലെങ്കിൽ) $\tan\theta + 1 = 0$

$\sqrt{3}\tan\theta - 1 = 0$ ആണെങ്കിൽ,

$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow \theta = n\pi + \frac{\pi}{6},\ n \in \mathbb{Z}$ ..... (i)

$\tan\theta + 1 = 0$ ആണെങ്കിൽ,

$\tan\theta = -1 = \tan\left(\frac{-\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow \theta = n\pi - \frac{\pi}{4},\ n \in \mathbb{Z}$ ..... (ii)

(i) ൽ നിന്നും (ii) ൽ നിന്നും നമുക്ക് പൊതുനിർദ്ധാരണം ലഭിക്കും.

അഭ്യാസം 3.8

1. തന്നിട്ടുള്ളവയുടെ പ്രധാന നിർദ്ധാരണവും പൊതുവായ നിർദ്ധാരണവും കാണുക

   (*i*) $\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ (*ii*) $\cot\theta = \sqrt{3}$ (*iii*) $\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

2. തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണങ്ങളുടെ $0^\circ \le \theta < 360^\circ$ യിലുള്ള നിർദ്ധാരണങ്ങൾ കാണുക.

   (*i*) $\sin^4 x = \sin^2 x$ (*ii*) $2\cos^2 x + 1 = -3\cos x$ (*iii*) $2\sin^2 x + 1 = 3\sin x$

   (*iv*) $\cos 2x = 1 - 3\sin x$

3. തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണങ്ങളെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക

   (*i*) $\sin 5x - \sin x = \cos 3x$ (*ii*) $2\cos^2\theta + 3\sin\theta - 3 = 0$

   (*iii*) $\cos\theta + \cos 3\theta = 2\cos 2\theta$ (*iv*) $\sin\theta + \sin 3\theta + \sin 5\theta = 0$

   (*v*) $\sin 2\theta - \cos 2\theta - \sin\theta + \cos\theta = 0$ (*vi*) $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$

   (*vii*) $\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta = 1$ (*viii*) $\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta = \sqrt{3}$

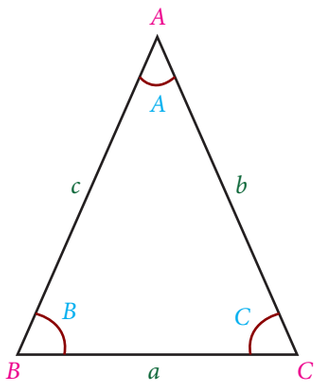
   (*ix*) $\tan\theta + \tan\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

   (*x*) $\cos 2\theta = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ (*xi*) $2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0$

XI_Maths_Ch3B_V-1_Malayalam.indd 166 14-02-2023 17:07:09

3.7 ത്രികോണത്തിന്റെ സവിശേഷതകൾ

ത്രികോണം ഉപയോഗിച്ച് രൂപപ്പെടുത്തിയ പ്രായോഗിക പ്രശ്നങ്ങൾ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക എന്നതാണ് ത്രികോണമിതിയുടെ ഒരു പ്രധാന ഉപയോഗം. ത്രികോണം നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക എന്നാൽ, ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ എല്ലാവശങ്ങളും എല്ലാ കോണുകളും കണ്ടുപിടിക്കുക എന്നാണ്. ഏതൊരു ത്രികോണത്തിന്റെയും മൂന്ന് വശങ്ങളെയും മൂന്ന് കോണുകളെയും ആ ത്രികോണത്തിന്റെ അടിസ്ഥാന അംശങ്ങൾ എന്നുവിളിക്കുന്നു. ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണം കാണുന്നതിന് പൈതഗോറിയൻ സിദ്ധാന്തം ഒരു പ്രധാന പങ്കുവഹിക്കുന്നു. ഒരു വിഷമഭുജ ത്രികോണത്തെ (മട്ടകോൺ ഇല്ലാത്ത ത്രികോണം) നിർദ്ധാരണം ചെയ്യാൻ ഫലപ്രദമായി ഉപയോഗിക്കാവുന്ന ഒരു പ്രധാന ഉപകരണമാണ് സൈൻ നിയമവും കൊസൈൻ നിയമവും. ഈ ഭാഗത്ത്, ഒരു ത്രികോണത്തിലെ കോണുകളും വശങ്ങളും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം ചർച്ച ചെയ്യുന്നതോടൊപ്പം സൈൻ നിയമവും കൊസൈൻ നിയമവും ഉള്ള വാക്കുകളാണ്.



ചിത്രം 3.17

പ്രതീകം : ABC ഒരു ത്രികോണം എന്നിരിക്കട്ടെ. ΔABC യുടെ A, B, C എന്നീ ശീർഷങ്ങളെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്ന കോണുകൾ A, B, C എന്നിവ തന്നെയാണ്. A, B, C എന്നീ കോണുകളുടെ എതിർവശങ്ങൾ യഥാക്രമം a, b, c എന്ന് അടയാളപ്പെടുത്താം. കൂടാതെ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണത്തെ സൂചിപ്പിക്കാൻ Δ എന്ന ചിഹ്നം നാം ഉപയോഗിക്കുന്നു.

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്ന് ശീർഷങ്ങളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വൃത്തത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്തം എന്ന് വിളിക്കുന്നു. പരിവൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം, വ്യാസാർദ്ധം R എന്നിവയെ പരിവൃത്തകേന്ദ്രം, പരിവൃത്തവ്യാസാർദ്ധം എന്നിങ്ങനെ അറിയപ്പെടുന്നു.

കുറിപ്പ്: ΔABC യിൽ, $A + B + C = \pi$ യും $a + b > c,\ b + c > a,\ a + c > b$ യും ആണ്.

സൈൻ നിയമം അല്ലെങ്കിൽ സൈൻ സൂത്രം

3.7.1. സൈൻ നിയമം

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകളും വശങ്ങളും തമ്മിലുള്ള ഒരു ബന്ധമാണ് സൈൻ നിയമം. ഒരു ത്രികോണം നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുമ്പോൾ, ഇനിപ്പറയുന്ന സാഹചര്യങ്ങളിൽ സൈൻ നിയമം വളരെ ഫലവത്തായ രീതിയിൽ ഉപയോഗിക്കാൻ സാധിക്കും.

(i) രണ്ട് വശങ്ങളും അവ ഉൾക്കൊള്ളാത്ത ഒരു കോണും തന്നിരുന്നാൽ ഒരു കോൺ കാണുന്നതിന്.

(ii) രണ്ട് കോണുകളും ഏതെങ്കിലും ഒരു കോണിന് എതിരെയുള്ള ഒരു വശവും തന്നിരുന്നാൽ ഒരുവശം കാണുന്നതിന്.

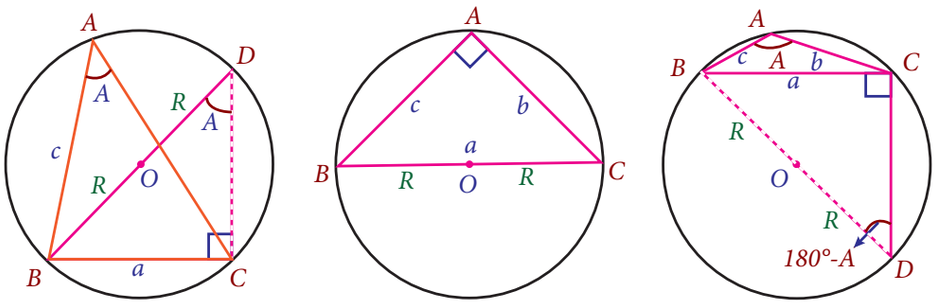
സിദ്ധാന്തം 3.1 (സൈൻ നിയമം)

ഏതൊരു ത്രികോണത്തിനും, വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ എതിർകോണുകളുടെ സൈൻ മൂല്യങ്ങൾക്ക് ആനുപാതികമായിരിക്കും. അതായത്, ΔABC യിൽ, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$, ഇവിടെ, R എന്നത് ത്രികോണത്തിന്റെ പരിവ്യാസാർദ്ധം ആണ്.

XI_Maths_Ch3B_V-1_Malayalam.indd 167 14-02-2023 17:07:10

തെളിവ് :

ΔABC യിലെ കോൺ A ഒരു ന്യൂനകോണോ മട്ടകോണോ ബ്യൂഹത്കോണോ ആകാം. O യുടെ പരിവൃത്ത കേന്ദ്രം ΔABC -വ്യാസാർദ്ധം R എന്നിരിക്കട്ടെ.



$\angle A$ ന്യൂനകോൺ $\angle A = 90°$ $\angle A$ ബ്യൂഹത്കോൺ

ചിത്രം 3.18

തരം I

$\angle A$, ന്യൂനകോൺ

BO യെ നീട്ടിയത് വൃത്തത്തെ D യിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു.

$$\angle BDC = \angle BAC = A$$

$$\angle BCD = 90°$$

$$\sin\angle BDC = \frac{BC}{BD} \text{ അല്ലെങ്കിൽ } \sin A = \frac{a}{2R} \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = 2R$$

തരം II

$\angle A$, മട്ടകോൺ

ഇവിടെ O യുടെ ΔABC യിൽ ഉള്ള BC -എന്ന വശത്തിന്മേൽ ആയിരിക്കും.

അപ്പോൾ, $\frac{a}{\sin A} = \frac{BC}{\sin 90°} = \frac{2R}{1} = 2R \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = 2R$

തരം III

$\angle A$, ബ്യൂഹത്കോൺ,

BO യെ നീട്ടിയത് വൃത്തത്തെ D യിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു.

$$\angle BDC + \angle BAC = 180°$$

$$\angle BDC = 180° - \angle BAC = 180° - A$$

$$\angle BCD = 90°$$

$$\sin\angle BDC = \frac{BC}{BD} \text{ അല്ലെങ്കിൽ}$$

$$\sin(180° - A) = \sin A = \frac{a}{2R} \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = 2R$$

ഓരോ തരത്തിൽ നിന്നും നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നത്, $\frac{a}{\sin A} = 2R$ എന്നാണ്.

അതുപോലെ, B, C എന്നീ കോണുകൾ പരിഗണിച്ചാൽ, $\frac{b}{\sin B} = 2R$ എന്നും $\frac{c}{\sin C} = 2R$ എന്നും നമുക്ക് തെളിയിക്കാനാകും.

XI_Maths_Ch3B_V-1_Malayalam.indd 168 14-02-2023 17:07:11

അതിനാൽ, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

കുറിപ്പ്: (i) സൈൻ നിയമത്തെ തന്നിട്ടുള്ള മൂന്ന് സമീകരണങ്ങളുടെ ഒരു സമാഹാര മായി എഴുതാൻ സാധിക്കുന്നു. $\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}$; $\frac{a}{c} = \frac{\sin A}{\sin C}$; $\frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C}$;

(ii) ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ അവയ്ക്ക് എതിരെയുള്ള കോണുകളുടെ സൈൻ മൂല്യങ്ങൾക്ക് ആനുപാതികമായിരിക്കും എന്നാണ് സൈൻ നിയമം പറയുന്നത്.

(iii) സൈൻ നിയമം ഉപയോഗിച്ച്, ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ട് വശങ്ങളും അവയുടെ ഉൾക്കോണും തന്നിരുന്നാൽ ത്രികോണം നിർദ്ധാരണം ചെയ്യാൻ സാധ്യമല്ല.

(iv) സൈൻ നിയമത്തിന്റെ രസകരമായ ഒരു ജ്യാമിതീയ അനുമാനം, ഏതൊരു ത്രികോണത്തിന്റെയും ഏറ്റവും വലിയ വശത്തിന്റെ എതിർകോൺ ഏറ്റവും വലിയ കോൺ ആയിരിക്കും എന്നതാണ്

നേപ്പിയറിന്റെ സൂത്രം

സിദ്ധാന്തം 3.2

ΔABC യിൽ നിന്ന് നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നത്,

(i) $\tan\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$

(ii) $\tan\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$

(iii) $\tan\frac{C-A}{2} = \frac{c-a}{c+a}\cot\frac{B}{2}$

തെളിവ്:

സൈൻ സൂത്രം $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ ആണെന്ന് നമുക്കറിയാം

അപ്പോൾ, $\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2} = \frac{2R\sin A - 2R\sin B}{2R\sin A + 2R\sin B}\cot\frac{C}{2}$

$= \frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B}\cot\frac{C}{2}$

$= \frac{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}\cot\frac{C}{2}$

$= \cot\frac{A+B}{2}\tan\frac{A-B}{2}\cot\frac{C}{2}$

$= \cot\left(90^\circ - \frac{C}{2}\right)\tan\frac{A-B}{2}\cot\frac{C}{2}$

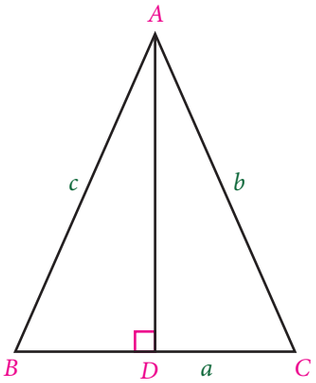
$= \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A-B}{2}\cot\frac{C}{2} = \tan\frac{A-B}{2}$

ഇതുപോലെ മറ്റ് രണ്ട് ഫലങ്ങളും നമുക്ക് തെളിയിക്കാനാകും.

XI_Maths_Ch3B_V-1_Malayalam.indd 169 14-02-2023 17:07:12

3.7.2 കൊസൈൻ നിയമം

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ട് വശങ്ങളും അവയുടെ ഉൾക്കോണും അല്ലെങ്കിൽ മൂന്ന് വശങ്ങൾ തന്നിരിക്കുമ്പോൾ, സൈൻ സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച് ആ ത്രികോണം നിർദ്ധാരണം ചെയ്യാൻ സാധ്യമല്ല. അത്തരം സാഹചര്യത്തിൽ, ത്രികോണ നിർദ്ധാരണത്തിന് കൊസൈൻ സൂത്രം ഉപയോഗിക്കാം. കൂടാതെ, ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ട് വശങ്ങളും അവയുടെ ഉൾക്കോണും തന്നിരുന്നാൽ കൊസൈൻ സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച് ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുന്നതിനുള്ള സൂത്രം രൂപീകരിക്കാം.



ചിത്രം 3.19

സിദ്ധാന്തം 3.3 (കൊസൈൻ നിയമം)

ΔABC യിൽ നിന്ന് നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നത്,

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};\ \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca};\ \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

തെളിവ് :

ΔABC യിൽ $AD \perp BC$ വരയ്ക്കുക.

ΔABD യിൽ $AB^2 = AD^2 + BD^2 \Rightarrow c^2 = AD^2 + BD^2$ ആണെന്ന് നമുക്ക് അറിയാം.

അപ്പോൾ, AD യുടെയും BD യുടെയും വിലകൾ ΔABC യുടെ വസ്തുതകൾ ഉപയോഗിച്ച് നമുക്ക് കാണാം.

$$\begin{aligned}
\frac{AD}{AC} &= \sin C \Rightarrow AD = b\sin C \\
BD &= BC - DC = a - b\cos C \\
c^2 &= (b\sin C)^2 + (a - b\cos C)^2 \\
&= b^2\sin^2 C + a^2 + b^2\cos^2 C - 2ab\cos C \\
&= a^2 + b^2(\sin^2 C + \cos^2 C) - 2ab\cos C \\
&= a^2 + b^2 - 2ab\cos C
\end{aligned}$$

അതിനാൽ, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ അല്ലെങ്കിൽ $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

ഇതുപോലെ, തന്നിട്ടുള്ള മറ്റു രണ്ട് ഫലങ്ങളും തെളിയിക്കാനാകും,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \text{ അല്ലെങ്കിൽ } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B \text{ അല്ലെങ്കിൽ } \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

കുറിപ്പ്: (i) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ പറയുന്നത്, ഒരു വശത്തിന്റെ വർഗ്ഗം മറ്റു രണ്ട് വശങ്ങളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുകയിൽ നിന്ന് ആ രണ്ട് വശങ്ങളുടെയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ ഇരട്ടിയുടെയും ആ വശങ്ങൾ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന കോണിന്റെ കൊസൈൻ വിലയുടെയും ഗുണനഫലം കുറച്ചത് ആയിരിക്കും. കൂടാതെ a, b, c എന്നീ അക്ഷരങ്ങൾ ചക്രഗതിയായി മാറ്റുമ്പോൾ ഒരു സൂത്രം മറ്റു സൂത്രങ്ങൾ നൽകുന്നു.

XI_Maths_Ch3B_V-1_Malayalam.indd 170 14-02-2023 17:07:14

(ii) മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കൊസൈൻ നിയമത്തെ പൈതഗോറിയൻ സിദ്ധാന്തമായി രൂപഭേദം വരുത്താം. അതിനാൽ, പൈതഗോറിയൻ സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ ഒരു സാമാന്യ വൽക്കരണമാണ് കൊസൈൻ നിയമം എന്ന് കാണുന്നു.

(iii) സൈൻ ഫലനത്തിൽ നിന്ന് വ്യത്യസ്തമായി കൊസൈൻ ഫലനം ന്യൂനകോണിനെയും ബ്യൂഹത് കോണിനെയും വേർതിരിക്കുന്നു എന്നതാണ് സൈൻ നിയമം ഉപയോഗിക്കുന്നതിനെക്കാൾ കൊസൈൻ നിയമം ഉപയോഗിക്കുന്നതിന്റെ പ്രയോജനം. ഒരു കോണിന്റെ കൊസൈൻ വില പോസിറ്റീവ് ആണെങ്കിൽ അത് ന്യൂനകോണും അല്ലെങ്കിൽ ബ്യൂഹത് കോണും ആണ്.

(iv) കൊസൈൻ നിയമം പറയുന്നത്: നേരിട്ടുള്ള മാർഗ്ഗം ഏറ്റവും ചെറുതാണ്. നമുക്ക് ഇത് വിവരിക്കാം.

ΔABC യിൽ, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$, $-\cos C < 1$ ആയതിനാൽ $c^2 < a^2 + b^2 + 2ab$ എന്ന് നമുക്ക് ലഭിക്കും. അതിനാൽ, $c < a + b$. ആയതിനാൽ,, ΔABC യിൽ, $a < b + c$, $b < c + a$, $c < a + b$ എന്നിങ്ങനെ ലഭിക്കും.

(v) കൊസൈൻ നിയമം ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ, എല്ലായ്പ്പോഴും ഏറ്റവും വലിയ കോൺ ആദ്യം പരിഗണിക്കുന്നതാണ് നല്ലത്, കാരണം ഒരു ബ്യൂഹത് കോൺ ഉണ്ടെങ്കിൽ അതാവും നമുക്ക് നൽകുന്നത്.

3.7.3. പ്രൊജക്ഷൻ സൂത്രം

സിദ്ധാന്തം 3.4

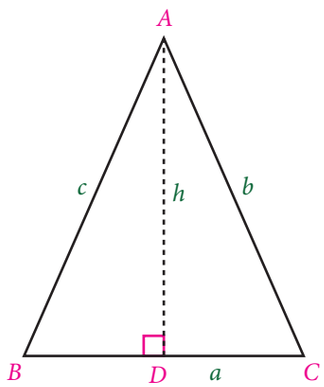
ΔABC യിൽ,

(i) $a = b\cos C + c\cos B$ (ii) $b = c\cos A + a\cos C$ (iii) $c = a\cos B + b\cos A$

തെളിവ് :

ΔABC യിൽ, $a = BC$ എന്ന് നമുക്കറിയാം.

$AD \perp BC$ വരയ്ക്കുക.



ചിത്രം 3.20

$$\begin{aligned} a &= BC = BD + DC \\ &= \frac{BD}{AB}AB + \frac{DC}{AC}AC \\ &= (\cos B)c + (\cos C)b \\ a &= b\cos C + c\cos B \end{aligned}$$

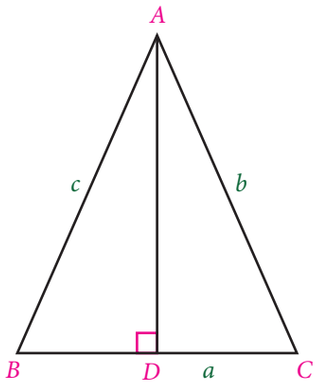
ഇതുപോലെ മറ്റു രണ്ട് പ്രൊജക്ഷൻ സൂത്രങ്ങളും ഒരാൾക്ക് തെളിയിക്കാനാകും.

കുറിപ്പ്: $a = b\cos C + c\cos B$ പറയുന്നത്, $a = a$ യിലേക്കുള്ള b യുടെ പ്രൊജക്ഷൻ + a യിലേക്കുള്ള c യുടെ പ്രൊജക്ഷൻ എന്നാണ്. അതിനാൽ, ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശം ആ വശത്തേയ്ക്കുള്ള മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളുടെ പ്രൊജക്ഷൻ തുകയ്ക്ക് തുല്യമാണ്.

XI_Maths_Ch3B_V-1_Malayalam.indd 171 14-02-2023 17:07:16

3.7.4 ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം

ഒരു വിഷമഭുജ ത്രികോണത്തിന്റെ ചില അംശങ്ങളും സൈൻ ഫലനവും ഉപയോഗിച്ച് നമുക്ക് ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണാം. ΔABC യുടെ വിസ്തീർണ്ണത്തിന്റെ സൂത്രം $\frac{1}{2}bh$ ആണെന്നത് ഓർക്കുക, ഇവിടെ b പാദവും h-ഉയരവും ആണ്. വിഷമഭുജ ത്രികോണത്തിന്, വിസ്തീർണ്ണത്തിന്റെ സൂത്രം ഉപയോഗിക്കുന്നതിന് മുമ്പ് h- കണ്ടുപിടിച്ചിരിക്കണം.



ചിത്രം 3.21

സിദ്ധാന്തം 3.5

ΔABC യിൽ ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം

$$\Delta = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B$$

തെളിവ് :

ΔABC യിൽ, $AD \perp BC$ വരയ്ക്കുക.

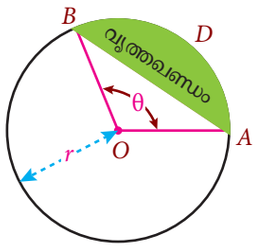
ΔADC യിൽ, $\frac{AD}{AC} = \sin C \Rightarrow AD = b\sin C$

അതിനാൽ, $\Delta = \frac{1}{2} \times$ ആധാരം $\times$ ഉയരം $= \frac{1}{2}ab\sin C$

ഇതുപോലെ, മറ്റു രണ്ടു ഫലങ്ങളും നമുക്ക് രൂപീകരിക്കാനാകും.

കുറിപ്പ്: (i) ഒരു വിഷമഭുജ ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണത്തിന്റെ സൂത്രം പറയുന്നത്, രണ്ടു വശങ്ങളുടെയും അവയുടെ ഉൾക്കോണിന്റെ സൈൻ വിലയുടെയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ പകുതിയാണ് വിസ്തീർണ്ണം എന്നാണ്.

(ii) ഒരു വൃത്താംശത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കണക്കാക്കാൻ വിസ്തീർണ്ണ സൂത്രം ഉപയോഗിക്കുന്നു. വൃത്താംശം എന്നത് ഞാണിനും അത് ഖണ്ഡിക്കുന്ന ചാപത്തിനും ഇടയിലുള്ള ഭാഗമാണ്.



ചിത്രം 3.22

ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം r ഉം ഞാൺ θ കേന്ദ്രത്തിലുണ്ടാക്കുന്ന കോൺ AB യും ആണെന്ന് പരിഗണിക്കാം.

വൃത്താംശം ABD യുടെ വിസ്തീർണ്ണം = വൃത്തഖണ്ഡത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം $-\ \Delta OAB$ യുടെ വിസ്തീർണ്ണം

$$= \frac{1}{2}r^2\theta - \frac{1}{2}r^2\sin\theta \quad = \frac{1}{2}r^2(\theta - \sin\theta)$$

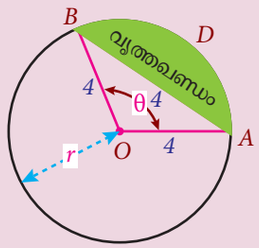
(iii) ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണ സൂത്രത്തിന്റെ ഒരു സാമാന്യവൽക്കരണമാണ് ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണ സൂത്രത്തിൽ പ്രകടമാവുന്നത്.

(iv) ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുന്നതിന് മൂന്നാംവശത്തിന്റെ അളവ് ആവശ്യമില്ല എന്നത് മേൽപ്പറഞ്ഞ സൂത്രത്തിൽ നിന്ന് വ്യക്തമാണ്. കൂടാതെ വിസ്തീർണ്ണം കാണാൻ ത്രികോണത്തിന്റെ ലംബം കാണേണ്ട ആവശ്യവും ഇല്ല.

XI_Maths_Ch3B_V-1_Malayalam.indd 172 14-02-2023 17:07:17

ഉദാഹരണം 3.56

8 കി.മീ വ്യാസത്തിൽ വൃത്താകാരമായ ഒരു സുവോളജിക്കൽ പാർക്ക് നിർമ്മിക്കുന്നതിന് ഗവൺമെന്റ് പദ്ധതി തയ്യാറാക്കി. ഇതിൽ 4 കി.മീ നീളമുള്ള ഒരു ഞാൺ രൂപീകരിക്കുന്ന വൃത്താംശമായ ഒരു പ്രദേശം ഒരു മൃഗാശുപത്രിക്കു മാത്രമായി മാറ്റി വയ്ക്കുന്നു. മൃഗാശുപത്രിക്കായി അനുവദിച്ച വൃത്താംശത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.



ചിത്രം 3.23

നിർദ്ധാരണം :

വൃത്താകാര പാർക്കിലെ ഞാൺ AB യും കേന്ദ്രം O യും ആണെന്നെടുക്കാം.

$\angle AOB = \theta$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

വൃത്താംശത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം = വൃത്തഖണ്ഡത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം $-\ \Delta OAB$ യുടെ വിസ്തീർണ്ണം

$$= \frac{1}{2}r^2\theta - \frac{1}{2}r^2\sin\theta$$

$$= \left(\frac{1}{2}\times 4^2\right)[\theta - \sin\theta] = 8[\theta - \sin\theta] \quad \text{..... (i)}$$

എന്നാൽ, $\cos\theta = \frac{4^2+4^2-4^2}{2(4)(4)} = \frac{1}{2}$

$\therefore\ \theta = \frac{\pi}{3}$

(i) ൽ നിന്നും മൃഗാശുപത്രിക്കായി അനുവദിച്ച വൃത്താംശത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം

$= 8\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{4}{3}(2\pi - 3\sqrt{3})\ \text{m}^2$ ആകും.

3.7.5. അർദ്ധ-കോൺ സൂത്രം

സിദ്ധാന്തം 3.6

ΔABC യിൽ,

(i) $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$

(ii) $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$

(iii) $\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$

ഇവിടെ, s ΔABC യുടെ ചുറ്റളവിന്റെ പകുതിയാണ് $s = \frac{a+b+c}{2}$.

തെളിവ് :

(i) $\sin\frac{A}{2} = +\sqrt{\sin^2\frac{A}{2}} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)}$

$$= \sqrt{\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc}} = \sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}$$

$$= \sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}} = \sqrt{\frac{(a+b+c-2c)(a+b+c-2b)}{4bc}}$$

$$= \sqrt{\frac{(2s-2b)(2s-2c)}{4bc}} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

XI_Maths_Ch3B_V-1_Malayalam.indd 173 14-02-2023 17:07:18

അതിനാൽ, $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$

ഇതുപോലെ, മറ്റു രണ്ട് ഫലങ്ങളും നമുക്ക് തെളിയിക്കാൻ സാധിക്കും.

കുറിപ്പ്: മറ്റ് അർദ്ധ-കോൺ സൂത്രങ്ങൾ

$$\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ac}}, \quad \sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$$

$$\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}; \quad \cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$$

$$\tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}, \quad \tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$

ഉപസിദ്ധാന്തം:

$$\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = 2\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$\sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം (ഹെറോൺ സൂത്രം)

(ക്രി.പി 10–70) ൽ ജീവിച്ചിരുന്ന ഗ്രീക്ക് എഞ്ചിനീയറും ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനുമായ അലക്സാൺട്രിയയിലെ ഹെറോയുടെ പേരിലാണ് ഹെറോൺ സൂത്രം അറിയപ്പെടുന്നത്. ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്ന് വശങ്ങളും അറിയാമെങ്കിൽ മാത്രമേ ഈ സൂത്രം ഉപയോഗിക്കാനാകൂ.

സിദ്ധാന്തം 3.7

ΔABC യിൽ $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ഇവിടെ S എന്നത് ΔABC യുടെ ചുറ്റളവാണ്.

തെളിവ് :

$$\Delta = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ab\left(2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\right)$$

$$= ab\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

കുറിപ്പ്: (i) ഹെറോൺ സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച്, മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ പൈതഗോറിയൻ സിദ്ധാന്തം തെളിയിക്കാനാകും. തിരിച്ച്, മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ പൈതഗോറിയൻ സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച് ഹെറോൺ വിസ്തീർണ്ണ സൂത്രം രൂപീകരിക്കാനും സാധിക്കും.

(ii) ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം ഒരു പൂർണ്ണാങ്കമായി തന്നിരുന്നാൽ, ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം പൂർണ്ണാങ്കത്തിൽ കാണാൻ ഹെറോൺ സൂത്രം ഉപയോഗപ്രദമാണ്.

(iii) ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് സ്ഥിരമാണെങ്കിൽ, പൂർണ്ണാങ്ക വിസ്തീർണ്ണവും പൂർണ്ണാങ്കവശങ്ങളുമുള്ള ത്രികോണങ്ങൾ കാണുന്നതിന് ഹെറോൺ സൂത്രം ഉപയോഗപ്രദമാണ്.

ഉദാഹരണത്തിന്, ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് 100 മീ എങ്കിൽ, വശങ്ങൾ, 32 മീ, 34 മീ, 34 മീ ഉം വിസ്തീർണ്ണം 480 മീ^{2} ഉം ഉള്ള ഒരു ത്രികോണം ഉണ്ടായിരിക്കും.

XI_Maths_Ch3B_V-1_Malayalam.indd 174 14-02-2023 17:07:20

ഉദാഹരണം 3.57 ΔABC യിൽ, $b^2 \sin 2C + c^2 \sin 2B = 2bc \sin A$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \text{ സൈൻ സൂത്രം.}$$

അതിനാൽ, $a = 2R\sin A;\ b = 2R\sin B;\ c = 2R\sin C$

$$\begin{aligned} b^2 \sin 2C + c^2 \sin 2B &= 4R^2 \sin^2 B \sin 2C + 4R^2 \sin^2 C \sin 2B \\ &= 4R^2 (2\sin^2 B \sin C \cos C + 2\sin^2 C \sin B \cos B) \\ &= 8R^2 \sin B \sin C (\sin B \cos C + \sin C \cos B) \\ &= 8R^2 \sin B \sin C \sin(B + C) \\ &= 8R^2 \sin B \sin C \sin(\pi - A) = 8R^2 \sin B \sin C \sin A \\ &= 8R^2 \left(\frac{b}{2R}\right)\left(\frac{c}{2R}\right)\sin A = 2bc \sin A \end{aligned}$$

ഉദാഹരണം 3.58 ΔABC യിൽ, $\sin\left(\frac{B-C}{2}\right) = \frac{b-c}{a}\cos\frac{A}{2}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \text{ സൈൻ സൂത്രം.}$$

$$\begin{aligned} \frac{b-c}{a}\cos\frac{A}{2} &= \frac{2R\sin B - 2R\sin C}{2R\sin A}\cos\frac{A}{2} \\ &= \frac{2\sin\left(\frac{B-C}{2}\right)\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}\cos\frac{A}{2} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{B-C}{2}\right)\cos\left(90^\circ - \frac{A}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}} \\ \text{അപ്പോൾ} \quad &= \frac{\sin\left(\frac{B-C}{2}\right)\sin\left(\frac{A}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)} = \sin\left(\frac{B-C}{2}\right) \end{aligned}$$

ഉദാഹരണം 3.59 ഒരു ത്രികോണത്തിലെ മൂന്ന് കോണുകളുടെ അംശബന്ധം 1 : 2 : 3 ആണെങ്കിൽ, അവയുടെ അനുയോജ്യമായ വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം $1 : \sqrt{3} : 2$ ആണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം :

കോണുകൾ $\theta,\ 2\theta,\ 3\theta$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

എങ്കിൽ, $\theta + 2\theta + 3\theta = 180^\circ$

അതിനാൽ, $\theta = 30^\circ$

XI_Maths_Ch3B_V-1_Malayalam.indd 175 14-02-2023 17:07:21

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \text{ സൈൻ സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച്,}$$

$$\frac{a}{\sin 30^\circ} = \frac{b}{\sin 60^\circ} = \frac{c}{\sin 90^\circ} \text{ എന്ന് നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നത്,}$$

$$\Rightarrow a : b : c = \sin 30^\circ : \sin 60^\circ : \sin 90^\circ$$

$$= \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} : 1 = 1 : \sqrt{3} : 2$$

ഉദാഹരണം 3.60 ΔABC യിൽ, $(b+c)\cos A + (c+a)\cos B + (a+b)\cos C = a+b+c$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം :

$$\text{LHS} = b\cos A + c\cos A + c\cos B + a\cos B + a\cos C + b\cos C$$

$$= b\cos C + c\cos B + c\cos A + a\cos C + b\cos A + a\cos B$$

$$= a + b + c \text{ (പ്രൊജക്ഷൻ സൂത്രം)}$$

ഉദാഹരണം 3.61 ΔABC യിൽ, $\frac{a^2+b^2}{a^2+c^2} = \frac{1+\cos(A-B)\cos C}{1+\cos(A-C)\cos B}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \text{ സൈൻ സൂത്രം ആണ്.}$$

$$\text{LHS} = \frac{a^2+b^2}{a^2+c^2} = \frac{(2R\sin A)^2 + (2R\sin B)^2}{(2R\sin A)^2 + (2R\sin C)^2}$$

$$= \frac{\sin^2 A + \sin^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 C} = \frac{1 - \cos^2 A + \sin^2 B}{1 - \cos^2 A + \sin^2 C}$$

$$= \frac{1 - (\cos^2 A - \sin^2 B)}{1 - (\cos^2 A - \sin^2 C)} = \frac{1 - \cos(A+B)\cos(A-B)}{1 - \cos(A+C)\cos(A-C)}$$

$$= \frac{1+\cos(A-B)\cos C}{1+\cos(A-C)\cos B}$$

ഉദാഹരണം 3.62 ΔABC യിലെ സൈൻ നിയമം ഉപയോഗിച്ച് കൊസൈൻ സൂത്രം രൂപീകരിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \text{ സൈൻ നിയമം.}$$

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{(2R\sin B)^2 + (2R\sin C)^2 - (2R\sin A)^2}{2(2R\sin B)(2R\sin C)}$$

$$= \frac{\sin^2 B + \sin(C+A)\sin(C-A)}{2\sin B\sin C}$$

$$= \frac{\sin B[\sin B + \sin(C-A)]}{2\sin B\sin C}$$

XI_Maths_Ch3B_V-1_Malayalam.indd 176 14-02-2023 17:07:23

$$= \frac{\sin(C+A)+\sin(C-A)}{2\sin C} = \cos A$$

അതിനാൽ, $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

ഇതുപോലെ മറ്റു രണ്ട് കൊസൈൻ സൂത്രങ്ങളും നമുക്ക് രൂപീകരിക്കാനാകും.

ഉദാഹരണം 3.63 സ്ഥിരമായ ചുറ്റളവുള്ള ഏറ്റവും കൂടിയ വിസ്തീർണ്ണമുള്ള ഒരു ത്രികോണം സമഭുജത്രികോണമായിരിക്കുമെന്ന് ഹെറോൺ സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച് തെളിയിക്കുക (സൂചന : $xyz \leq k$ യിൽ കൂടിയവില ലഭിക്കുന്നത്, $x = y = z$ ആകുമ്പോഴാണ്).

നിർദ്ധാരണം :

സ്ഥിരമായ ചുള്ളളവ് $2s$ ഉള്ള ഒരു ത്രികോണമാണ് ΔABC എന്നെടുത്താൽ, s ഒരു സ്ഥിരമായിരിക്കും

നമുക്കറിയാവുന്നത് $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

Δ -യുടെ ഏറ്റവും കൂടിയ വില ലഭിക്കുന്നത് $(s-a)(s-b)(s-c)$ പരമാവധിയാകുമ്പോഴാണ്.

അപ്പോൾ $(s-a)(s-b)(s-c) \leq \left(\frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3}\right)^3 = \frac{s^3}{27}$ [GM $\leq$ AM]

അതിനാൽ, $(s-a)(s-b)(s-c) \leq \frac{s^3}{27}$.

തുല്യതയാകുന്നത് $s-a = s-b = s-c$ ആകുമ്പോഴാണ്. അതായത് .

$a = b = c$ ആകുമ്പോൾ, $(s-a)(s-b)(s-c)$ യ്ക്ക് പരമാവധി $\frac{s^3}{27}$ ലഭിക്കുന്നു.

അതിനാൽ, ഒരു സ്ഥിര ചുറ്റളവ് $a = b = c$ ഉം, ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം പരമാവധിയുമാകുന്നത്, $2s$ ആകുമ്പോഴാണ്.

ആയതിനാൽ, ഒരു സ്ഥിര ചുറ്റളവുള്ള പരമാവധി വിസ്തീർണ്ണമുള്ള ഒരു ത്രികോണം സമഭുജ ത്രികോണമായിരിക്കും.

പരമാവധി വിസ്തീർണ്ണം, $\Delta = \sqrt{\frac{s(s^3)}{27}} = \frac{s^2}{3\sqrt{3}}$ ചതുരശ്ര.മാത്രകൾ.

അഭ്യാസം 3.9

1. ΔABC യിൽ $\frac{\sin A}{\sin C} = \frac{\sin(A-B)}{\sin(B-C)}$ ആണെങ്കിൽ, a^2, b^2, c^2 എന്നിവ കൂട്ടുസമാന്തര അനുക്രമത്തിലാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.
2. ത്രികോണം ΔABC യിലെ കോണുകൾ കൂട്ടുസമാന്തര അനുക്രമത്തിലും $b : c = \sqrt{3} : \sqrt{2}$ ഉം ആണെങ്കിൽ, $\angle A$ കാണുക.
3. ΔABC യിൽ $\cos C = \frac{\sin A}{2\sin B}$ എങ്കിൽ അത് ഒരു സമപാർശ്വ ത്രികോണമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.
4. ΔABC യിൽ $\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{c - a\cos B}{b - a\cos C}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.
5. ΔABC യിൽ $a\cos A + b\cos B + c\cos C = 2a\sin B\sin C$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

XI_Maths_Ch3B_V-1_Malayalam.indd 177 14-02-2023 17:07:26

6. ΔABC യിൽ $\angle A = 60^\circ$ എങ്കിൽ $b + c = 2a\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

7. ΔABC യിൽ തന്നിട്ടുള്ളവ തെളിയിക്കുക.

(i) $a\sin\left(\frac{A}{2}+B\right) = (b+c)\sin\frac{A}{2}$ (ii) $a(\cos B + \cos C) = 2(b+c)\sin^2\frac{A}{2}$

(iii) $\frac{a^2-c^2}{b^2} = \frac{\sin(A-C)}{\sin(A+C)}$

(iv) $\frac{a\sin(B-C)}{b^2-c^2} = \frac{b\sin(C-A)}{c^2-a^2} = \frac{c\sin(A-B)}{a^2-b^2}$

(v) $\frac{a+b}{a-b} = \tan\left(\frac{A+B}{2}\right)\cot\left(\frac{A-B}{2}\right)$

8. ΔABC യിൽ $(a^2 - b^2 + c^2)\tan B = (a^2 + b^2 - c^2)\tan C$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

9. ഒരു എഞ്ചിനീയർക്ക് ഒരു ഗ്രാമത്തിൽ 120 മീ ചുറ്റളവിൽ ത്രികോണാകൃതിയിലുള്ള ഒരു പാർക്ക് വികസിപ്പിക്കണം. പാർക്കിന്റെ വികസനം പരമാവധി വിസ്തീർണ്ണത്തിലായിരിക്കണം. പാർക്കിന്റെ അളവുകൾ കാണുക.

10. ഒരു കയറിന്റെ നീളം 12 മീ ആണെന്ന് തന്നിട്ടുണ്ട്. ഈ കയറുപയോഗിച്ച് നിർമ്മിക്കാവുന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ പരമാവധി വിസ്തീർണ്ണവും രൂപീകരിക്കപ്പെട്ട ത്രികോണത്തിന്റെ അളവുകളും കാണുക.

11. തന്നിട്ടുള്ളവയിൽ നിന്നും പ്രൊജക്ഷൻ സൂത്രം രൂപീകരിക്കുക (i) സൈൻ നിയമം (ii) കൊസൈൻ നിയമം.

3.8 ത്രികോണത്തിന്റെ പ്രയോഗം

ഭൂരിഭാഗം ആർക്കിടെക്ച്ചറും എഞ്ചിനീയറും സ്ഥിരത ആഗ്രഹിക്കുന്ന ഏതൊരു ഘടനയ്ക്കും പിന്തുണയായി ത്രികോണത്തെ ആശ്രയിക്കുന്നു. കൃത്യമായി ത്രികോണത്തെ ആശ്രയിക്കുന്നതിനുള്ള ശരിയായ കോൺ കണക്കാക്കാൻ ത്രികോണമിതി സഹായിക്കുന്നു. ഒരു വളഞ്ഞ ഘടന ശരിയായി നിർമ്മിക്കാൻ ത്രികോണമിതി നിർമ്മാതാക്കളെ വിഭാവനം ചെയ്യുന്നു. ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന് എന്നിങ്ങനെ കുറഞ്ഞത് ഒരു വശമെങ്കിലുമുള്ള രണ്ട് വിവരങ്ങൾ മതിയാകും. ത്രികോണത്തിന്റെ മറ്റ് വിശദാംശങ്ങൾ കാണാൻ. എന്നാൽ, ഒരു വിഷമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണം കാണാൻ, ഒരു വശമെങ്കിലുമുള്ള മൂന്ന് വിശദാംശങ്ങൾ നമുക്ക് ആവശ്യമാണ്. ഏതെങ്കിലും ഒരു വശം ഉൾപ്പെടുന്ന ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഏതെങ്കിലും മൂന്ന് വിശദാംശങ്ങൾ തന്നിരുന്നാൽ, സൈൻ നിയമം, കൊസൈൻ നിയമം, പ്രൊജക്ഷൻ സൂത്രം എന്നിവ ഉപയോഗിച്ച് മറ്റ് മൂന്ന് വിശദാംശങ്ങൾ കാണാൻ സാധിക്കും.

പ്രവർത്തന നിയമം

- ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിൽ, പൈതഗോറിയൻ സിദ്ധാന്തം വഴി രണ്ട് വശങ്ങളിൽ നിന്ന് മൂന്നാമത്തെ വശവും, മട്ടത്രികോണത്തിലെ ന്യൂനകോണുകൾ പൂരകമാണെന്ന വസ്തുത ഉപയോഗിച്ച് ഒരു ന്യൂനകോണിൽ നിന്ന് മറ്റേതും കാണാൻ സാധിക്കും.
- ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ എല്ലാ വശങ്ങളും തന്നിരുന്നാൽ കൊസൈൻ സൂത്രമോ, അല്ലെങ്കിൽ അർദ്ധ-കോൺ സൂത്രമോ ഉപയോഗിച്ച് ത്രികോണത്തിന്റെ എല്ലാ കോണുകളും കണക്കാക്കാം.

XI_Maths_Ch3B_V-1_Malayalam.indd 178 14-02-2023 17:07:26

- ഏതെങ്കിലും രണ്ട് കോണുകളും തന്നിട്ടുള്ള കോണുകളിൽ ഏതെങ്കിലുമൊന്നിന്റെ എതിർ വശവും തന്നിരുന്നാൽ, സൈൻ സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച് നമുക്ക് മറ്റു വശങ്ങൾ കണക്കാക്കാൻ സാധിക്കും.
- ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഏതെങ്കിലും രണ്ട് വശങ്ങളും അവ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന ഒരു കോണും തന്നിരുന്നാൽ, സൈൻ നിയമം ഉപയോഗിക്കാൻ നമുക്ക് സാധിക്കില്ല; എന്നാൽ കൊസൈൻ നിയമം ഉപയോഗിച്ച് ത്രികോണത്തിന്റെ മറ്റൊവശവും മറ്റു കോണുകളും കണക്കാക്കാൻ നമുക്ക് സാധിക്കും. ഈ സാഹചര്യത്തിൽ ഒരേയൊരു ത്രികോണമാകും നമുക്കുണ്ടാവുക.
- വിഷമഭുജ ത്രികോണത്തെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്ന എല്ലാ രീതികളിലും ഒരു വശത്തിന്റെ യെങ്കിലും നീളം തന്നിരിക്കേണ്ട ആവശ്യമാണ്.

ഒരു വിഷമഭുജത്രികോണം നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നതിനുള്ള പ്രവർത്തനനിയമം തന്നിട്ടുള്ള പട്ടികയിൽ നമുക്ക് സംഗ്രഹിക്കാം.

വിഷമഭുജ ത്രികോണം (എല്ലാ കോണുകളും ന്യൂനകോൺ അല്ലെങ്കിൽ ഒരു കോൺ ബ്യൂഹത് കോൺ)	തന്നിട്ടുള്ള വിവരണങ്ങൾ				
	വ–കോ–കോ	വ–വ–കോ*	വ–കോ–വ	വ–വ–വ	കോ–കോ–കോ
വിവരണങ്ങളും നിർദ്ധാരണത്തിന്റെ പ്രയോഗങ്ങളും	സൈൻ നിയമം	(സംശയം ഉടലെടുക്കുന്നു)	തന്നിട്ടുള്ള കോൺ വശങ്ങൾ ഉൾക്കൊള്ളുന്നതാകണം; കൊസൈൻ നിയമം അല്ലെങ്കിൽ ടാൻജന്റുകൾ	കൊസൈൻ നിയമം: ആദ്യം വലിയ കോൺ കാണണം	അനന്തം എണ്ണം ത്രികോണങ്ങൾ

കോൺ വശങ്ങൾ ഉൾക്കൊള്ളുന്നതല്ല; ഒന്നിൽ കൂടുതൽ ത്രികോണങ്ങൾ നമുക്കുണ്ടാകും.

സൈൻ നിയമത്തിന്റെ പ്രയോഗം മൂന്ന് സാഹചര്യങ്ങൾ ഉളവാക്കുന്നു: നിർദ്ധാരണം ഇല്ല അല്ലെങ്കിൽ, ഒരു ത്രികോണം അല്ലെങ്കിൽ രണ്ട് ത്രികോണങ്ങൾ.

a, b, A എന്നിവ അറിയാമെന്ന് ചിന്തിക്കുക $h = b \sin A$ എന്നെടുക്കുക.

$a < h$ ആണെങ്കിൽ, ത്രികോണം ഉണ്ടാകില്ല. $a = h$ ആണെങ്കിൽ അത് മട്ടത്രികോണം ആയിരിക്കും.

$a > h$ ഉം $a < b$ യും ആണെങ്കിൽ നമുക്ക് രണ്ട് ത്രികോണങ്ങൾ ഉണ്ടാകും.

$a \geq b$ ആണെങ്കിൽ നമുക്ക് ഒരേയൊരു ത്രികോണം ഉണ്ടാകും.

* വ–വ–കോ അർത്ഥമാക്കുന്നത് വശം, വശം, കോൺ.

XI_Maths_Ch3B_V-1_Malayalam.indd 179 14-02-2023 17:07:27

ഉദാഹരണം 3.64 ΔABC യിൽ $a = 3, b = 5$, $c = 7$ എങ്കിൽ, $\cos A, \cos B$, $\cos C$ എന്നിവയുടെ മൂല്യങ്ങൾ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം :

കൊസൈൻ സൂത്രത്തിൽ നിന്ന്,

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{5^2 + 7^2 - 3^2}{2(5)(7)} = \frac{13}{14}$$

അതുപോലെ, $\cos B = \frac{11}{14}$, $\cos C = -\frac{1}{2}$.

ഉദാഹരണം 3.65 ΔABC യും $A = 30°, B = 60°, c = 10$ എങ്കിൽ, a , b-യും കാണുക.

നിർദ്ധാരണം :

തന്നിട്ടുള്ളത്, $A = 30°, B = 60°, C = 180° - (A + B) = 90°$

സൈൻ സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച്,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{\sin 30°} = \frac{b}{\sin 60°} = \frac{10}{\sin 90°}$$

$$a = \frac{10 \sin 30°}{\sin 90°} = \frac{10\left(\frac{1}{2}\right)}{1} = 5$$

$$b = \frac{10 \sin 60°}{\sin 90°} = \frac{10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1} = 5\sqrt{3}$$

ഉദാഹരണം 3.66 ΔABC യിൽ $a = 2\sqrt{2}$, $b = 2\sqrt{3}$, $C = 75°$ എങ്കിൽ, മറ്റെ വശവും കോണുകളും കാണുക.

നിർദ്ധാരണം :

തന്നിട്ടുള്ളത്, $a = 2\sqrt{2}$, $b = 2\sqrt{3}$ കൂടാതെ $C = 75°$

കൊസൈൻ സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച്,

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\cos 75° = \frac{8 + 12 - c^2}{8\sqrt{6}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{8 + 12 - c^2}{8\sqrt{6}} \Rightarrow c = \sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)$$

കൂടാതെ, $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

അതിനാൽ A = 60°, B = 180° – (A + C) = 45°.

ഉദാഹരണം 3.67 13 സെ.മീ, 14 സെ.മീ കൂടാതെ 15 സെ.മീ എന്നീവശങ്ങളുള്ള ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

XI_Maths_Ch3B_V-1_Malayalam.indd 180 14-02-2023 17:07:28

നിർദ്ധാരണം :

$s = \frac{a+b+c}{2} \Rightarrow \quad s = \frac{13+14+15}{2} = 21$ സെ.മീ നമുക്കറിയാവുന്നത്.

ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = 84$ ചതുരശ്ര. സെ.മീ

ഉദാഹരണം 3.68 ഏതൊരു, ΔABC യും $a\cos A + b\cos B + c\cos C = \frac{8\Delta^2}{abc}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

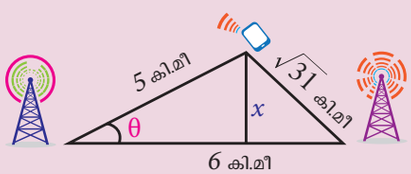
നിർദ്ധാരണം :

$a\cos A + b\cos B + c\cos C = 2a\sin B\sin C$ നമുക്കറിയാവുന്നത്.

അതിനാൽ,

$$a\cos A + b\cos B + c\cos C = 2a\left(\frac{2\Delta}{ac}\right)\left(\frac{2\Delta}{ab}\right) = \frac{8\Delta^2}{abc}$$

ഒരു സെൽഫോണിന്റെ പരിധിക്കുള്ളിൽ രണ്ട് സെൽഫോൺ ടവറുകളുണ്ടെന്ന് കരുതുക. രണ്ട് ടവറുകളും കിഴക്കുനിന്ന് പടിഞ്ഞാറോട്ടുള്ള ഹൈവേയിൽ 6 കി.മീ അകലത്തിലും സെൽഫോൺ ഹൈവേയിൽ നിന്നും വടക്കുമാണ് ഇരിക്കുന്നത്. ആദ്യ ടവറിൽ നിന്ന് 5 കി.മീ. ഉം രണ്ടാമത്തെ ടവറിൽ നിന്ന് $\sqrt{31}$ ഉം ദൂരത്ത് നിന്നാണ് സിഗ്നൽ ലഭിക്കുന്നത്. ആദ്യത്തെ ടവറിന്റെ വടക്കു കിഴക്കു ഭാഗത്തുള്ള സെൽഫോണിന്റെ സ്ഥാനവും ഹൈവേയിൽ നിന്ന് എത്ര അകലത്തിലുമാണെന്ന് നിർണ്ണയിക്കുക.



ചിത്രം 3.24

നിർദ്ധാരണം :

ആദ്യടവറിൽ നിന്ന് വടക്കുകിഴക്കു ഭാഗത്തുള്ള സെൽഫോണിന്റെ സ്ഥാനം θ എന്നിരിക്കട്ടെ.

എങ്കിൽ, കൊസൈൻ സൂത്രം ഉപയോഗിച്ചാൽ,

$$(\sqrt{31})^2 = 5^2 + 6^2 - 2\times 5\times 6\cos\theta$$

$$31 = 25 + 36 - 60\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

ഹൈവേയിൽനിന്നും സെൽഫോണിന്റെ സ്ഥാനത്തേക്കുള്ള ദൂരം x എന്നിരിക്കട്ടെ.

$$\text{എങ്കിൽ, } \sin\theta = \frac{x}{5} \Rightarrow x = 5\sin\theta = 5\sin 60^\circ = \frac{5\times\sqrt{3}}{2} \text{ കി.മീ}$$

ഉദാഹരണം 3.69 ഒരു ബോട്ട് തുറമുഖത്തുനിന്ന് കിഴക്കോട്ട് 10 കി.മീ സഞ്ചരിച്ചിട്ട് 60° ഇടത്തേക്ക് തിരിയുന്നുവെന്ന് കരുതുക. ബോട്ട് 8 കി.മീ കൂടി സഞ്ചരിക്കുകയാണെങ്കിൽ തുറമുഖത്തുനിന്ന് ബോട്ട് എത്ര ദൂരെയാണ്?

XI_Maths_Ch3B_V-1_Malayalam.indd 181 14-02-2023 17:07:29

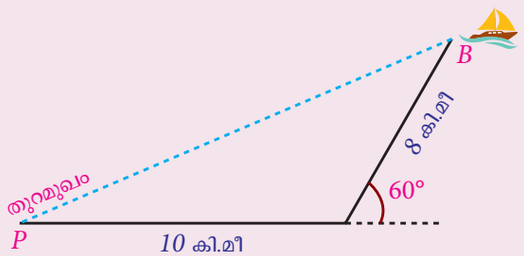
നിർദ്ധാരണം :

ആവശ്യപ്പെട്ട ദൂരം BP ആണെന്നിരിക്കട്ടെ.

കൊസൈൻ സൂത്രം ഉപയോഗിച്ചാൽ,

$BP^2 = 10^2 + 8^2 - 2 \times 10 \times 8 \times \cos 120° = 244$ കി.മീ

$\Rightarrow BP = 2\sqrt{61}$ കി.മീ.

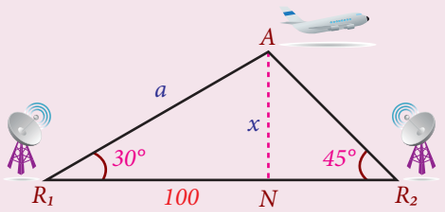


ചിത്രം 3.25

ഉദാഹരണം 3.70 100 കി.മീ അകലത്തിലിരിക്കുന്ന രണ്ട് റഡാർ സ്റ്റേഷനുകൾ ഓരോന്നും അവയ്ക്കിടയിൽ ഒരു യുദ്ധവിമാനം കണ്ടെത്തുന്നുവെന്ന് കരുതുക. ആദ്യ സ്റ്റേഷൻ അളക്കുന്ന മേൽക്കോൺ 30° യും രണ്ടാമത്തെ സ്റ്റേഷൻ അളക്കുന്ന മേൽക്കോൺ 45° യും ആണ്. ആ സമയത്തുള്ള വിമാനത്തിന്റെ ഉയരം കണക്കാക്കുക.

നിർദ്ധാരണം :

R_1, R_2 എന്നിവ രണ്ട് റഡാർ സ്റ്റേഷനുകളും യുദ്ധവിമാനം കണ്ടെത്തിയ സമയത്തുള്ള വിമാനത്തിന്റെ സ്ഥാനം A യും എന്നിരിക്കട്ടെ, വിമാനത്തിലെ ലംബ ഉയരം x എന്നെടുക്കാം. A യിൽ നിന്നും R_1R_2 ലേക്ക് വരയ്ക്കുന്ന ലംബം N ൽ ചേരുന്നു.



ചിത്രം 3.26

$$\angle A = 180° - (30° + 45°) = 105°$$

അതിനാൽ, $$\frac{a}{\sin 45°} = \frac{100}{\sin 105°} \Rightarrow a = \frac{100}{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{200(\sqrt{3}-1)}{2}$$

$$= 100 \times (\sqrt{3} - 1) \text{ കി.മീ}$$

അപ്പോൾ $\sin 30° = \frac{x}{a} \Rightarrow x = 50 \times (\sqrt{3} - 1)$ കി.മീ

അഭ്യാസം 3.10

1. തന്നിട്ടുള്ള അളവുകളായ $\angle B = 88°$, $a = 23$, $b = 2$ എന്നിവ നിർമ്മിക്കുന്നത് ഒരു ത്രികോണത്തെയാണോ അതോ രണ്ട് ത്രികോണങ്ങളെയാണോ അതോ ത്രികോണം രൂപീകരിക്കുന്നില്ലേ എന്ന് കണ്ടെത്തുക.
2. ΔABC യുടെ വശങ്ങൾ $a = 4$, $b = 6$, $c = 8$ എന്നിവ ആണെങ്കിൽ, $4 \cos B + 3 \cos C = 2$ എന്ന് കാണിക്കുക.
3. ΔABC യിൽ $a = \sqrt{3} - 1$, $b = \sqrt{3} + 1$, $C = 60°$ എങ്കിൽ മറ്റൊരു വശവും മറ്റു കോണുകളും കാണുക.
4. ഏതൊരു ΔABC-യ്ക്കും വിസ്തീർണ്ണം $\Delta = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4 \cot A}$ ആണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

XI_Maths_Ch3B_V-1_Malayalam.indd 182 14-02-2023 17:07:31

5. ΔABC-യിൽ $a = 12$ സെ.മീ, $b = 8$ സെ.മീ, $C = 30°$ ആണെങ്കിൽ അതിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം 24 ചതുരശ്ര. സെ.മീ ആണെന്ന് കാണിക്കുക.

6. ΔABC-യിൽ $a = 18$ സെ.മീ, $b = 24$ സെ.മീ, $c = 30$ സെ.മീ ΔABC ആണെങ്കിൽ വിസ്തീർണ്ണം 216 ചതുരശ്ര സെ.മീ ആണെന്ന് കാണിക്കുക.

7. നേരായ റോഡിൽ രണ്ട് വ്യത്യസ്ത ഭൂഗർഭ ബങ്കറുകളിൽ A, B എന്നീ രണ്ട് സൈനീകർ ഒരു കുന്നിൻ മുകളിൽ ഒരു നുഴഞ്ഞുകയറ്റക്കാരനെ കണ്ടെത്തുന്നു. A യിൽ നിന്നും B യിൽ നിന്നും യിൽ നിന്നും കിഴക്കു ദിശയിൽ നുഴഞ്ഞുകയറ്റക്കാരന്റെ മേൽക്കോൺ തറനിരപ്പിൽ നിന്ന് യഥാക്രമം 30°, 45° എന്നിവയാണ്. A-യും B-യും തമ്മിൽ 5 കി.മീ അകലത്തിലാ ണെങ്കിൽ B-യിൽ നിന്നും നുഴഞ്ഞുകയർറക്കാരന്റെ ദൂരം കാണുക.

8. സാധാരണ രീതിയിൽ അളക്കാൻ സാധിക്കാത്ത ഒരു കുളത്തിന്റെ കിഴക്കുനിന്നും പടിഞ്ഞാ റുവരെയുള്ള വീതി ഒരു ഗവേഷകന് അളക്കേണ്ടതുണ്ട്. P എന്ന ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് കുളത്തിന്റെ ഏറ്റവും കിഴക്കേ അറ്റത്തെ ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലം 8 കി.മീ ഉം ഏറ്റവും പടിഞ്ഞാറേ ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലം 6 കി.മീ ഉം ആണെന്ന് അദ്ദേഹം കണ്ടെത്തി. P- എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്നുള്ള രേഖകൾ രൂപീകരിക്കുന്ന വീക്ഷണകോൺ 60° ആണെങ്കിൽ, കുളത്തിന്റെ വീതി കാണുക.

9. ബംഗാൾ ഉൾക്കടലിന് മുകളിലൂടെ ഒരേ ഉയരത്തിൽ പറക്കുന്ന നേവിയുടെ രണ്ട് ഹെലി കോപ്റ്ററുകൾ A യും B യും കാണാതായ ഒരു ബോട്ടിനായി തിരച്ചിൽ നടത്തുകയാണ്. രണ്ട് ഹെലികോപ്റ്ററുകളും തമ്മിലുള്ള അകലം 10 കി.മീ ഉള്ളപ്പോൾ രണ്ട് പൈലറ്റുമാരും ഒരേ സമയം ബോട്ട് കാണുന്നു. A യിൽ നിന്നും ബോട്ടിലേക്കുള്ള അകലം 6 കി.മീ ഉം AB എന്ന രേഖാ ഖണ്ഡവും ബോട്ടും തമ്മിലുള്ള കോൺ 60° ആണെങ്കിൽ, B യിൽ നിന്നും ബോട്ടി ലേക്കുള്ള അകലം കാണുക.

10. ഒരു പർവതത്തിലൂടെ ഒരു നേരായ തുരങ്കം നിർമ്മിക്കണം. നിർമ്മിക്കേണ്ട തുരങ്കത്തിന്റെ A, B എന്നീ രണ്ട് അതിരുകൾ ഒരു സർവേയർ P എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് നിരീക്ഷിക്കുന്നു. $AP = 3$ കി.മീ, $BP = 5$ കി.മീ $\angle APB = 120°$ എന്നിങ്ങനെ ആണെങ്കിൽ നിർമ്മിക്കേണ്ട തുര ങ്കത്തിന്റെ നീളം കാണുക.

11. 120 അടി, 60 അടി വശങ്ങളും അവയുടെ ഉൾക്കോൺ 60° യും ആയിട്ടുള്ള ത്രികോണാ കൃതിയുള്ള ഒരു വസ്തു ഒരു കർഷകന് വാങ്ങണം. വസ്തുവിന്റെ വില ചരുരശ്രഅടിക്ക് ₹500 ആണെങ്കിൽ, ആവസ്തു വാങ്ങുന്നതിനു ആവശ്യമായ തുക കാണുക. കൂടാതെ വസ്തുവിന്റെ ചുറ്റളവും കാണുക.

12. ഒരു യുദ്ധവിമാനത്തിന് തിരശ്ചീന ദൂരത്തിൽ പറന്ന് ലക്ഷ്യത്തിലെത്തണം. ലക്ഷ്യസ്ഥാനം കാണുമ്പോഴുള്ള കീഴ്കോൺ പൈലറ്റ് കണക്കാക്കിയത് 30° ആണ്. 100 കി.മീ നു ശേഷം ലക്ഷ്യസ്ഥാനം 60° കീഴ്ക്കോണിൽ കാണുന്നു എങ്കിൽ ആ സമയത്ത് യുദ്ധവിമാനത്തിൽ നിന്ന് ലക്ഷ്യസ്ഥാനത്തേക്കുള്ള ദൂരം എത്രയാണ്?

13. ഒരു ലാൻഡ്മാർക്കിൽ നിന്നും 1 കി.മീ ഉം മറ്റൊന്നിൽ നിന്ന് 2 കി.മീ ഉം ആണ് വിമാനം. വിമാനത്തിന്റെ വീക്ഷണത്തിൽ നിന്ന് അവയ്ക്കിടയിലുള്ള ഭൂമി 45° കോണിൽ ഉൾക്കൊ ള്ളുന്നു. ലാൻഡ് മാർക്കുകൾ തമ്മിലുള്ള അകലം എത്രയാണ്?

14. ഒരു മനുഷ്യൻ തന്റെ പ്രഭാതനടത്തം A എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്നാരംഭിക്കുന്നു B, C എന്നീ ബിന്ദു ക്കളിൽ എത്തി ഒടുവിൽ A എന്ന ബിന്ദുവിൽ തിരികെ എത്തുമ്പോൾ $\angle A = 60°$ $\angle B = 45°$ $AC = 4$ കി.മീ അളവുകളിൽ $\angle ABC$ രൂപീകരിക്കുന്നു. പ്രഭാത നടത്തത്തിൽ അദ്ദേഹം സഞ്ചരിച്ച മൊത്തം ദൂരം കണ്ടെത്തുക.

XI_Maths_Ch3B_V-1_Malayalam.indd 183 14-02-2023 17:07:31

15. രണ്ട് വാഹനങ്ങൾ ഒരേ സ്ഥലത്തുനിന്ന് ഒരേസമയത്ത് രണ്ട് വ്യത്യസ്ത റോഡുകളിലൂടെ സഞ്ചാരം തുടങ്ങുന്നു. ഒരു വാഹനം മണിക്കൂറിൽ ശരാശരി 60 കി.മീ വേഗതയിലും മറ്റേ വാഹനം മണിക്കൂറിൽ ശരാശരി 80 കി.മീ വേഗതയിലും നീങ്ങുന്നു. അരമണിക്കൂറിനുശേഷം വാഹനങ്ങൾ A, B എന്നീ ലക്ഷ്യസ്ഥാനങ്ങളിൽ എത്തുന്നു. AB പ്രാരംഭബിന്ദുവിലുണ്ടാകുന്ന കോൺ $60°$ ആണെങ്കിൽ AB കാണുക.

16. ബഹിരാകാശത്തെ ഒരു ഉപഗ്രഹം, ഒരു എർത്ത് സ്റ്റേഷൻ ഭൂമിയുടെ കേന്ദ്രം എന്നിവയെല്ലാം ഒരേ തലത്തിലാണെന്ന് കരുതുക. ഭൂമിയുടെ വ്യാസാർദ്ധം r ഭൂമിയുടെ കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന് ഉപഗ്രഹത്തിലേക്കുള്ള ദൂരം R ഉം ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. എർത്ത് സ്റ്റേഷനിൽ നിന്ന് ഉപഗ്രഹത്തിലേക്കുള്ള ദൂരം d എന്നും, എർത്ത് സ്റ്റേഷനിൽ നിന്നും ഉപഗ്രഹത്തിലേക്കുള്ള മേൽക്കോൺ $30°$ എന്നും കരുതുക. എർത്ത് സ്റ്റേഷനും ഉപഗ്രഹവും തമ്മിൽ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡം ഭൂമിയുടെ കേന്ദ്രത്തിലുണ്ടാക്കുന്ന കോൺ α ആണെങ്കിൽ $d = R\sqrt{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2 - 2\frac{r}{R}\cos\alpha}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

3.9 വിപരീത ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങൾ

$f(x)$ എന്ന ഒരു ഫലനത്തിന് വിപരീതം ഉണ്ട് എങ്കിൽ, എങ്കിൽ മാത്രം അത് വൺ-ടു-വൺ 1-1 ഉം ഓൺ ടുവും ആണ്. അതിനാൽ, 1-1 പരാജയപ്പെടുകയാണെങ്കിൽ ഒരു ഫലനത്തിന്റെ വിപരീതം നിർവ്വചിക്കാൻ സാധ്യമല്ല. എന്നിരുന്നാലും, അനുയോജ്യമായ രീതിയിൽ മണ്ഡലത്തെ നിയന്ത്രിച്ചാൽ, നിയന്ത്രിത മണ്ഡലത്തിൽ ഒരു ഫലനത്തെ 1-1 ആക്കാൻ നമുക്ക് സാധിക്കും..

ഉദാഹരണത്തിന്, എല്ലാ വാസ്തവിക സംഖ്യയ്ക്കും $y = x^2$ 1-1 അല്ല. എന്നാൽ, $x \geq 0$, $x \leq 0$ എന്നിവയിലേതെങ്കിലും ഒന്നിൽ $y = x^2$, 1-1 ഉം ഓൺടുവും ആയിരിക്കും. ആയതിനാൽ $x \geq 0$ ൽ $y = x^2$ ന് $x \geq 0$ ൽ $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$ എന്ന വിപരീതം ഉണ്ടാകും. ഇപ്പോൾ, അവയുടെ ആനുകാലികത കാരണം, ആറ് ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളിലൊന്നും തന്നെ അവയുടെ സ്വാഭാവിക മണ്ഡലത്തിൽ 1-1 അല്ല.

നമുക്ക് മണ്ഡലങ്ങളെ നിയന്ത്രിക്കാം അങ്ങനെ ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങൾ അവയുടെ വിപരീത ഫലനങ്ങൾ നിലനില്ക്കുന്നതിന് പ്രാപ്തമാക്കുന്നതിന് 1-1 ആയിരിക്കും.

ആനുകാലികത കാരണം ഇത്തരം നിയന്ത്രണം വീണ്ടും പലതരത്തിൽ ചെയ്യാൻ കഴിയും. നിയന്ത്രിത മണ്ഡലങ്ങളുടെ തിരഞ്ഞെടുക്കൽ ഏകപക്ഷീയമാണെങ്കിലും അവയ്ക്ക് ചില പ്രധാന സ്വഭാവങ്ങളുണ്ട്. ഓരോ നിയന്ത്രിത മണ്ഡലത്തിലും സംഖ്യ 0 ഉം ചില പോസിറ്റീവ് കോണുകളും ഉൾപ്പെടുന്നു,

കൂടാതെ നിയന്ത്രിത മണ്ഡലത്തിന്റെ പ്രതിബിംബങ്ങളും പൂർണ്ണരംഗത്തിൽ ഉൾപ്പെടുന്നു..

സൈൻ ഫലനത്തിന്റെ വിപരീതം നമുക്ക് നിർവ്വചിക്കാം. $f(x) = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ പരിഗണിക്കുന്നു എങ്കിൽ, $\sin x$ ഈ നിയന്ത്രിത മണ്ഡലത്തിൽ 1-1 ഉം ഓൺ ടുവും ആണ്.

ആയതിനാൽ സൈൻ ഫലനത്തിന്റെ വിപരീതം നിലനില്ക്കുന്നതാണ് $f^{-1}(y) = x$ എങ്കിൽ, എങ്കിൽ മാത്രം $f(x) = y$ എന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക. $f^{-1}(x) = \sin^{-1}(x)$ എന്ന് നമുക്കെഴുതാം. അതിനാൽ സൈനിന്റെ വിപരീതത്തെ $\sin^{-1}(y) = x$ എങ്കിൽ, എങ്കിൽ മാത്രം $\sin x = y$ എന്ന് നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു.

XI_Maths_Ch3B_V-1_Malayalam.indd 184 14-02-2023 17:07:32

$\sin x : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ ഉം $\sin^{-1} x : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ഉം ആണെന്ന് വ്യക്തമാണ്. അതിനാൽ, $\sin^{-1} t$ എന്നത് അതിന്റെ സൈൻ മൂല്യത്തിന് തുല്യമായ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ൽ ഉള്ള t ആയിരിക്കും. ഇതുപോലെ മറ്റു വിപരീത ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളും നമുക്ക് നിർവ്വചിക്കാൻ സാധിക്കും.

$\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\tan^{-1} x$, $\text{cosec}^{-1}(x)$, $\sec^{-1}(x)$, $\cot^{-1}(x)$ എന്നീ വിപരീത ഫലനങ്ങളെ വിപരീത വൃത്താകാര ഫലനങ്ങൾ എന്ന് വിളിക്കുന്നു. $y = \sin x$ എന്ന ഫലനത്തിന്, $\sin x = t, \ -1 \leq t \leq 1$ തൃപ്തി പ്പെടുത്തുന്ന x, എന്ന അനന്തം കോണുകൾ ഉണ്ട്. ഇത്തരത്തിലുള്ള അനന്തം മൂല്യങ്ങളുടെ ഗണ ത്തിൽ, ഒരെണ്ണം $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ എന്ന ഇടവേളയിലുള്ളതായിരിക്കും. ഈ കോണിനെ പ്രധാനകോൺ എന്ന് വിളിക്കുന്നു, അതിനെ $\sin^{-1} t$ എന്ന് കുറിക്കുന്നു. ഒരു വിപരീത ഫലനത്തിന്റെ, പ്രധാന മൂല്യം സംഖ്യാടി സ്ഥാനത്തിലുള്ള പൊതുവായ മൂല്യത്തിന്റെ വിലയാണ്. ഇത് പോസിറ്റീവ് അല്ലെങ്കിൽ നെഗറ്റീവ് ആയിരി ക്കാം. രണ്ട് മൂല്യങ്ങൾ ഉണ്ടാകുമ്പോൾ, ഒന്ന് പോസിറ്റീവും മറ്റേത് നെഗറ്റീവും ആയിരുന്നാലും സംഖ്യാ പരമായി തുല്യമായിരിക്കും, അതിനാൽ പ്രധാനമൂല്യം പോസിറ്റീവ് ആണ്.

നിയന്ത്രിത മണ്ഡലങ്ങൾ, ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളുടെ രംഗങ്ങൾ കൂടാതെ യോജിച്ച വിപരീത ഫലന ങ്ങളുടെ മണ്ഡലങ്ങളും രംഗങ്ങളും നമുക്ക് ചുവടെ വിശദീകരിക്കാം.

(i) $\sin x : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$; $\sin^{-1} x : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

(ii) $\cos x : [0, \pi] \to [-1, 1]$; $\cos^{-1} x : [-1, 1] \to [0, \pi]$

(iii) $\tan x : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to (-\infty, \infty)$; $\tan^{-1} x : (-\infty, \infty) \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

(iv) $\cot x : [0, \pi] \to (-\infty, \infty)$; $\cot^{-1} x : (-\infty, \infty) \to [0, \pi]$

(v) $\text{cosec}\, x : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\} \to \mathbb{R} - (-1, 1)$; $\text{cosec}^{-1} x : \mathbb{R} - (-1, 1) \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$

(vi) $\sec x : [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \to \mathbb{R} - (-1, 1)$; $\sec^{-1} x : \mathbb{R} - (-1, 1) \to [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

കുറിപ്പ്:

(i) $\sin^{-1} x$ എന്നത് $\frac{1}{\sin x}$ എന്ന് അർത്ഥമാക്കുന്നില്ല.

(ii) സർ. ജോൺ എഫ് ഡബ്ല്യൂ ഹെർഷേൽ (1813) (Sir John FW Harschel) ന്റെ നിർവചനപ്രകാരം $\sin^{-1} x$ നെ ആർക് $\sin x$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം.

(iii) വിപരീത ത്രികോണമിതി ഫലനത്തെക്കുറിച്ച് നാം ചർച്ചചെയ്യുമ്പോൾ $y = \sin x, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ എന്നും $x = \sin^{-1} y, -1 \leq y \leq 1$ എന്നും ഉറ പ്പിക്കാം.

(iv) f^{-1} എന്ന വിപരീത ഫലനത്തിന്റെ ഗ്രാഫ്, $y = x$ ന്റെ ഗ്രാഫിന് f-എന്ന രേഖയിലുള്ള പ്രതിഫലനമാണ്. അതിനാൽ, $(a, b) \in f$ ആണെങ്കിൽ $(b, a) \in f^{-1}$ ആയിരിക്കും.

XI_Maths_Ch3B_V-1_Malayalam.indd 185 14-02-2023 17:07:35

വിപരീത ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളുടെ പ്രധാനമൂല്യങ്ങൾ ചുവടെ പട്ടികപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു.

$x \geq 0$-ആകുമ്പോൾ പ്രധാനമൂല്യം	$x < 0$-ആകുമ്പോൾ പ്രധാനമൂല്യം
$0 \leq \sin^{-1}(x) \leq \frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}(x) < 0$
$0 \leq \cos^{-1}(x) \leq \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < \cos^{-1}(x) \leq \pi$
$0 \leq \tan^{-1}(x) < \frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2} < \tan^{-1}(x) < 0$
$0 < \cot^{-1}(x) \leq \frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2} < \cot^{-1}(x) < 0$
$0 \leq \sec^{-1}(x) < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < \sec^{-1}(x) \leq \pi$
$0 < \operatorname{cosec}^{-1}(x) \leq \frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{cosec}^{-1}(x) < 0$

കുറിപ്പ്: (i) വിപരീത ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളുടെ സവിശേഷതകൾ, ഗ്രാഫുകൾ, സിദ്ധാന്തങ്ങൾ തുടങ്ങിയവ ഹയർസെക്കൻഡറി രണ്ടാംവർഷം പഠിക്കാം.

(ii) ചില ഇന്റഗ്രലുകളുടെ മൂല്യനിർണ്ണയത്തിന് വിപരീത ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങൾ വളരെ ഉപയോഗപ്രദമാണ്, ഇത് പിന്നീട് പഠിക്കാം.

ഉദാഹരണം 3.71 പ്രധാന മൂല്യങ്ങൾ കാണുക (i) $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, (ii) $\operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, (iii) $\tan^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$.

നിർദ്ധാരണം :

(i) $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = y$ എന്നിരിക്കട്ടെ, ഇവിടെ $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \sin y = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3} \Rightarrow y = \frac{\pi}{3}$

അതിനാൽ, $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ പ്രധാനമൂല്യം $\frac{\pi}{3}$.

(ii) $\operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = y$ എന്നിരിക്കട്ടെ, ഇവിടെ $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \operatorname{cosec} y = \frac{2}{\sqrt{3}} = \sin y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

അതിനാൽ, $\operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ പ്രധാനമൂല്യം $\frac{\pi}{3}$.

(iii) $\tan^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = y$ എന്നിരിക്കട്ടെ, ഇവിടെ $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

$\tan y = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan y = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow y = -\frac{\pi}{6}$

അതിനാൽ, $\tan^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ പ്രധാനമൂല്യം $-\frac{\pi}{6}$.

XI_Maths_Ch3B_V-1_Malayalam.indd 186 14-02-2023 17:07:37

അഭ്യാസം 3.11

1. (i) $\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$, (ii) $\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$, (iii) $\operatorname{cosec}^{-1}(-1)$, (iv) $\sec^{-1}(-\sqrt{2})$, (v) $\tan^{-1}(\sqrt{3})$ പ്രധാനമൂല്യം കാണുക.

2. x മീറ്റർ വീതിയുള്ള ഒരു റോഡിന്റെ ഒരുവശത്ത് റോഡിനഭിമുഖമായി നിന്ന് ഒരാൾ മറു വശത്ത് a മീറ്റർ വ്യാസമുള്ള വൃത്താകാരമായ പച്ചട്രാഫിക് സിഗ്നൽ കാണുന്നു. കാഴ്ച ക്കാരന്റെ കണ്ണിന്റെ തിരശ്ചീന തലത്തിൽ നിന്ന് b മീറ്റർ ഉയരത്തിലാണ് പച്ച സിഗ്നലിന്റെ അടിഭാഗം. പച്ച സിഗ്നലിന്റെ വ്യാസം കാഴ്ചക്കാരന്റെ കണ്ണിൽ ഉണ്ടാകുന്ന കോൺ α ആണെങ്കിൽ, $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{a+b}{x}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{b}{x}\right)$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

അഭ്യാസം 3.12

ശരിയുത്തരം തെരഞ്ഞെടുത്തെഴുതുക.

1. $\frac{1}{\cos 80^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\sin 80^\circ} =$

   (1) $\sqrt{2}$ (2) $\sqrt{3}$ (3) 2 (4) 4

2. $\cos 28^\circ + \sin 28^\circ = k^3$ ആണെങ്കിൽ, $\cos 17^\circ$ ന്റെ മൂല്യം

   (1) $\frac{k^3}{\sqrt{2}}$ (2) $-\frac{k^3}{\sqrt{2}}$ (3) $\pm\frac{k^3}{\sqrt{2}}$ (4) $-\frac{k^3}{\sqrt{3}}$

3. $4\sin^2 x + 3\cos^2 x + \sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}$ ന്റെ പരമാവധിമൂല്യം

   (1) $4+\sqrt{2}$ (2) $3+\sqrt{2}$ (3) 9 (4) 4

4. $\left(1+\cos\frac{\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{3\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{5\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{7\pi}{8}\right) =$

   (1) $\frac{1}{8}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (4) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

5. $\pi < 2\theta < \frac{3\pi}{2}$ ആണെങ്കിൽ, $\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos 4\theta}}$

   (1) $-2\cos\theta$ (2) $-2\sin\theta$ (3) $2\cos\theta$ (4) $2\sin\theta$

6. $\tan 40^\circ = \lambda$ ആണെങ്കിൽ, $\frac{\tan 140^\circ - \tan 130^\circ}{1+\tan 140^\circ \tan 130^\circ} =$

   (1) $\frac{1-\lambda^2}{\lambda}$ (2) $\frac{1+\lambda^2}{\lambda}$ (3) $\frac{1+\lambda^2}{2\lambda}$ (4) $\frac{1-\lambda^2}{2\lambda}$

7. $\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cos 3^\circ + \cdots + \cos 179^\circ =$

   (1) 0 (2) 1 (3) – 1 (4) 89

8. $f_k(x) = \frac{1}{k}[\sin^k x + \cos^k x]$ എന്നാണ്. ഇവിടെ, $x \in R$, $k \geq 1$ എങ്കിൽ, $f_4(x) - f_6(x) =$

   (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{1}{12}$ (3) $\frac{1}{6}$ (4) $\frac{1}{3}$

9. തന്നിട്ടുള്ളവയിൽ ശരിയല്ലാത്തതേത്?

   (1) $\sin\theta = -\frac{3}{4}$ (2) $\cos\theta = -1$ (3) $\tan\theta = 25$ (4) $\sec\theta = \frac{1}{4}$

XI_Maths_Ch3B_V-1_Malayalam.indd 187 14-02-2023 17:07:39

10. $\cos 2\theta \cos 2\phi + \sin^2(\theta - \phi) - \sin^2(\theta + \phi)$ യുടെ മൂല്യം

(1) $\sin 2(\theta + \phi)$ (2) $\cos 2(\theta + \phi)$ (3) $\sin 2(\theta - \phi)$ (4) $\cos 2(\theta - \phi)$

11. $\frac{\sin(A-B)}{\cos A \cos B} + \frac{\sin(B-C)}{\cos B \cos C} + \frac{\sin(C-A)}{\cos C \cos A} =$

(1) $\sin A + \sin B + \sin C$ (2) 1 (3) 0 (4) $\cos A + \cos B + \cos C$

12. $\cos p\theta + \cos q\theta = 0$ യും, $p \neq q$ യും ആണെങ്കിൽ, (ഏതൊരു പൂർണ്ണാങ്കം n നും) θ–യുടെ മൂല്യം.

(1) $\frac{\pi(3n+1)}{p-q}$ (2) $\frac{\pi(2n+1)}{p \pm q}$ (3) $\frac{\pi(n \pm 1)}{p \pm q}$ (4) $\frac{\pi(n+2)}{p+q}$

13. $\tan \alpha$ യും $\tan \beta$ യും $x^2 + ax + b = 0$ യുടെ മൂലങ്ങൾ ആണെങ്കിൽ $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha \ \sin\beta}$

(1) $\frac{b}{a}$ (2) $\frac{a}{b}$ (3) $-\frac{a}{b}$ (4) $-\frac{b}{a}$

14. ത്രികോണം ΔABC യിൽ $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$ ആണെങ്കിൽ, ആത്രികോണം

(1) സമഭുജത്രികോണം (2) സമപാർശ്വ ത്രികോണം

(3) മട്ടത്രികോണം (4) വിഷമഭുജ ത്രികോണം

15. $f(\theta) = |\sin\theta| + |\cos\theta|, \theta \in \mathbb{R}$ ആണെങ്കിൽ, $f(\theta)$ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന പരിധി,

(1) $[0, 2]$ (2) $[1, \sqrt{2}]$ (3) $[1, 2]$ (4) $[0, 1]$

16. $\frac{\cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos 2x + 10}{\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x} =$

(1) $\cos 2x$ (2) $\cos x$ (3) $\cos 3x$ (4) $2\cos x$

17. 12 മീ സ്ഥിര ചുറ്റളവുള്ള പരമാവധി വിസ്തീർണ്ണമുള്ള ത്രികോണം,

(1) വശം 4 മീ ആയിട്ടുള്ള ഒരു സമഭുജത്രികോണം.

(2) 2 മീ, 5 മീ, 5 മീ വശങ്ങളുള്ള ഒരു സമപാർശ്വത്രികോണം.

(3) 3 മീ, 4 മീ, 5 മീ വശങ്ങളുള്ള ഒരു ത്രികോണം.

(4) നിലവിലില്ല.

18. ഒരു ചക്രം 2 റേഡിയൻ/സെക്കന്റ് വേഗത്തിൽ ചുറ്റുന്നു. 10 ഭ്രമണം പൂർത്തിയാക്കാൻ എത്ര സെക്രന്റ് വേണം?

(1) 10π സെക്കന്റ് (2) 20π സെക്കന്റ്

(3) 5π സെക്കന്റ് (4) 15π സെക്കന്റ്

19. $\sin\alpha + \cos\alpha = b$ ആണെങ്കിൽ, $\sin 2\alpha$

(1) $b \leq \sqrt{2}$ എങ്കിൽ, $b^2 - 1$ (2) $b > \sqrt{2}$ എങ്കിൽ, $b^2 - 1$

(3) $b \geq 1$ എങ്കിൽ, $b^2 - 1$ (4) $b \geq \sqrt{2}$ എങ്കിൽ, $b^2 - 1$

20. ΔABC യിൽ (i) $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} > 0$ (ii) $\sin A \sin B \sin C > 0$ ആണെങ്കിൽ

(1) (i) ഉം (ii) ഉം ശരി. (2) (i) മാത്രം ശരി.

(3) (ii) മാത്രം ശരി. (4) (i) ഉം (ii) ഉം ശരിയല്ല.

XI_Maths_Ch3B_V-1_Malayalam.indd 188 14-02-2023 17:07:42

സംഗ്രഹം

തുക, വ്യത്യാസ സർവ്വസമതകൾ (ടോളമി സർവ്വസമതകൾ)

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta;\ \sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta};\ \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

സൈൻ	കൊസൈൻ	ടാൻജന്റ്
$\sin 2A = 2\sin A\cos A$ $\sin 2A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$ $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$	$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$ $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$ $\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$ $\cos 2A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$ $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$	$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$ $\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$
$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ $\sin\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$	$\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}$ $\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1$ $\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$	$\tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$

ത്രികോണമിതി സമീകരണം	പൊതു നിർദ്ധാരണം
$\sin\theta = \sin\alpha$, ഇവിടെ, $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$\theta = n\pi + (-1)^n\alpha,\ n \in \mathbb{Z}$
$\cos\theta = \cos\alpha$, ഇവിടെ, $\alpha \in [0,\ \pi]$	$\theta = 2n\pi \pm \alpha,\ n \in \mathbb{Z}$
$\tan\theta = \tan\alpha$, ഇവിടെ, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$	$\theta = n\pi + \alpha,\ n \in \mathbb{Z}$

സൈൻ നിയമം	കൊസൈൻ നിയമം	ടാൻജന്റ് നിയമം
$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$	$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ $\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$ $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$	$\tan\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$ $\tan\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$ $\tan\frac{C-A}{2} = \frac{c-a}{c+a}\cot\frac{B}{2}$

ΔABC-യിൽ നിന്ന് നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നത്,

(i) $a = b\cos C + c\cos B,\ b = c\cos A + a\cos C,\ c = a\cos B + b\cos A$ (പ്രൊജക്ഷൻ സൂത്രം)

(ii) $\Delta = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B$ (ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം)

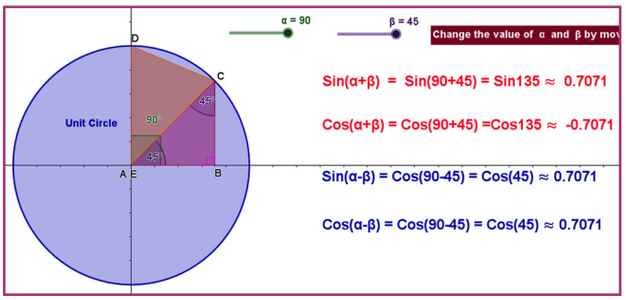
(iii) $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

(iv) $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},\ \cos\frac{A}{2} - \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},\ \tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$

ഇവിടെ, ΔABC യുടെ ചുറ്റളവിന്റെ പകുതിയാണ് s, $s = \frac{a+b+c}{2}$ (അർദ്ധകോൺ സൂത്രം)

XI_Maths_Ch3B_V-1_Malayalam.indd 189 14-02-2023 17:07:45

പ്രതീക്ഷിക്കുന്ന ഫലം – 3 (എ)



സ്റ്റെപ്പ്–1

ബ്രൗസർ ഓപ്പൺ ചെയ്ത് താഴെ തന്നിട്ടുള്ള URL ലിങ്ക് ടൈപ്പ് ചെയ്യുക. (അല്ലെങ്കിൽ) QR കോഡ് സ്കാൻ ചെയ്യുക.

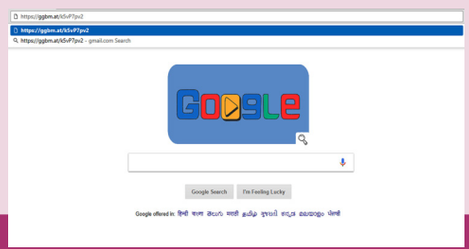
സ്റ്റെപ്പ്–2

"പതിനൊന്നാം തരം ത്രികോണമിതി" എന്ന് വിളിക്കുന്ന ജിയോജിബ്ര വർക്ക്ബുക്ക് പ്രത്യക്ഷമാകും. ഇതിൽ വ്യത്യസ്ത ത്രികോണമിതി ആശയങ്ങളുടെ ധാരാളം വർക്ക്ഷീറ്റുകൾ കാണാം. നിങ്ങൾക്ക് ആവശ്യമുള്ള ഒന്ന് തിരഞ്ഞെടുക്കുക. ഉദാഹരണത്തിന്, "Sine ഉം Cosine – അഡിഷൻ സൂത്രവാക്യം" ഓപ്പൺ ചെയ്യുക.

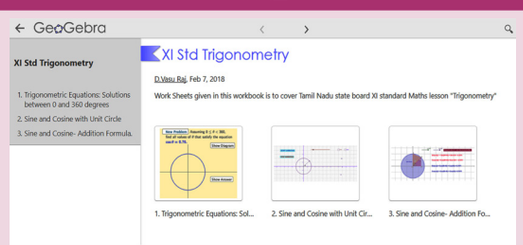
സ്റ്റെപ്പ്–3

α, β-എന്നിവയുടെ മൂല്യങ്ങൾ മാറ്റുന്നതിന് സ്ലൈഡുകൾ നീക്കുക. രേഖാചിത്രത്തിലെ കോണുകൾ മാറുകയും യോജിച്ച സങ്കലന സൂത്രങ്ങളുടെ മൂല്യങ്ങൾ മാറുകയും ചെയ്യുന്നു.

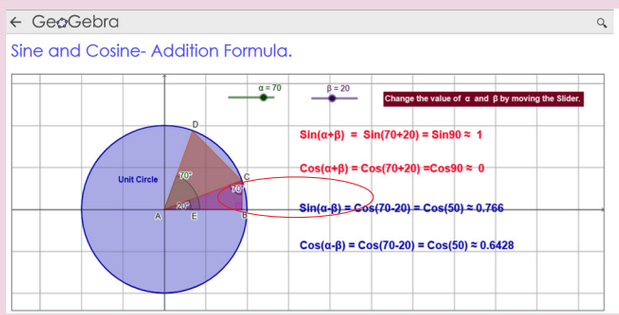
സ്റ്റെപ്പ്–1



സ്റ്റെപ്പ്–2



സ്റ്റെപ്പ്–3



സൂത്രങ്ങളുപയോഗിച്ച് കണക്കാക്കിയ ഓരോ മൂല്യവും നിരീക്ഷിച്ച് ഫലങ്ങൾ പരിശോധിക്കുക. ഇതുപോലെ അനുപാതം, യൂണിറ്റ് വൃത്തം തുടങ്ങിയവർക്ക് ഷീറ്റുകളും ഓപ്പൺ ചെയ്ത് പരിശോധിക്കുക.

* ചിത്രങ്ങൾ സൂചകങ്ങൾ മാത്രമാണ്.

ജിയോജിബ്രാവർക്ക് ബുക്കിനായി തന്നിരിക്കുന്ന ലിങ്ക് ബ്രൗസ് ചെയ്യുക : https://ggbm.at/k5vP7pv2

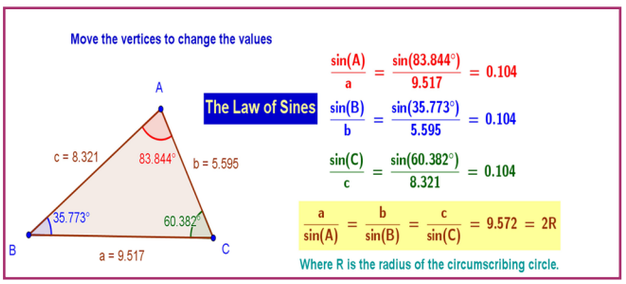
XETO6

XI_Maths_Ch3B_V-1_Malayalam.indd 190 14-02-2023 17:07:46

പ്രതീക്ഷിക്കുന്ന ഫലം – 3 (ബി)

സ്റ്റെപ്–1

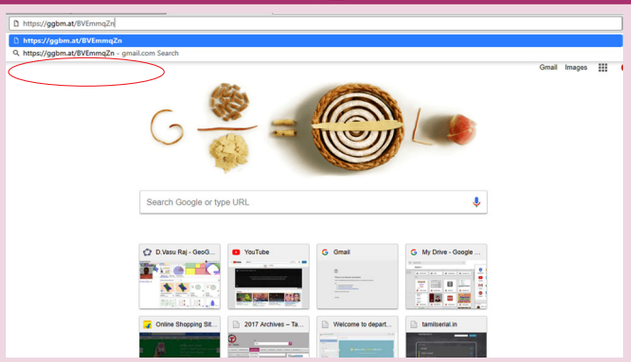
ബ്രൗസർ ഓപ്പൺ ചെയ്ത് താഴെ തന്നിട്ടുള്ള URL ലിങ്ക് ടൈപ്പ് ചെയ്യുക (അല്ലെങ്കിൽ) QR Code സ്കാൻ ചെയ്യുക.



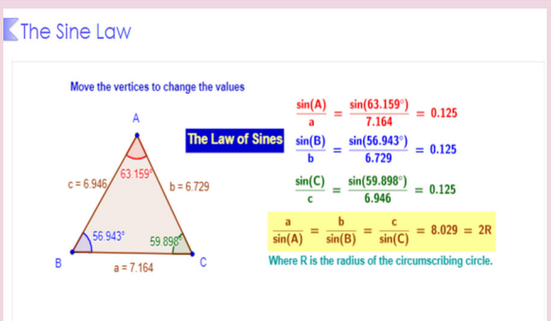
സ്റ്റെപ്–2

"സൈൻ നിയമം" എന്ന ജിയോജിബ്രാ വർക്ക് ഷീറ്റ് പ്രത്യക്ഷമാകും. വർക്ക്ഷീറ്റിൽ, A, B, C ശീർഷങ്ങളും a, b, c വശങ്ങളും ആയിട്ടുള്ള ഒരു ത്രികോണം കാണാം. ശീർഷങ്ങളെ നീക്കിയാൽ ത്രികോണത്തിന്റെ വലിപ്പം മാറും. ഏതൊരു ത്രികോണത്തിനും സൈൻ നിയമം പാലിക്കുകയും അത് പ്രവർത്തിക്കുന്നത് വലത് വശത്ത് കാണിക്കുകയും ചെയ്യുന്നത് നിരീക്ഷിക്കുക.

സ്റ്റെപ്–1



സ്റ്റെപ്–2



*ചിത്രങ്ങൾ സൂചകങ്ങൾ മാത്രമാണ്.

ജിയോജിബ്രാ വർക്ക് ബുക്കിനായി, തന്നിരിക്കുന്ന ലിങ്ക് ബ്രൗസ് ചെയ്യുക :
https://ggbm.at/k5vP7pv2

XI_Maths_Ch3B_V-1_Malayalam.indd 191 14-02-2023 17:07:46

അധ്യായം **4**

സങ്കലനവും ഗണിതശാസ്ത്ര സമാഹാരവും

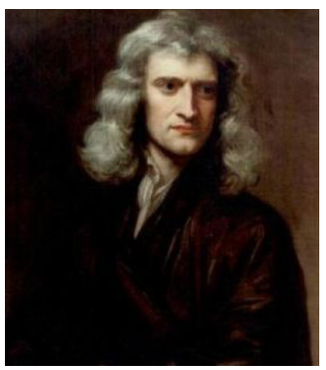
"ധീരമായ ഊഹമില്ലാത്ത വലിയ കണ്ടെത്തലുകളൊന്നും നടത്തിയിട്ടില്ല."

–സർ ഐസക് ന്യൂട്ടൺ.

4.1 ആമുഖം

സങ്കലനം എന്നത് എണ്ണുന്നതുമായ ബന്ധപ്പെട്ട ഗണിതശാസ്ത്ര ശാഖയാണ്. ഇതിൽ വസ്തുക്കളെ ഏതൊക്കെ രീതികളിൽ ക്രമീകരിക്കാം എന്നും ചില നിർദ്ദിഷ്ടസവിശേഷതകളുള്ള വസ്തുക്കളെ എപ്രകാരം എണ്ണുന്നത് എന്നതിനെപറ്റിയും ഇവിടെ വ്യക്തമായി കാണാം. ഈ വിഷയത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനം ക്രി. മുൻപ് 2800 കളിൽ ജാലക സമചതുരങ്ങളെപറ്റിയും മാതൃകകളെപ്പറ്റിയും പഠിക്കാൻ ഉപയോഗിച്ചതായി അറിയുവാൻ സാധിക്കുന്നു.

ഇംഗ്ലണ്ടുകാരനായ ഭൗതികശാസ്ത്രജ്ഞനും, ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനുമായ സർ ഐസക് ന്യൂട്ടൻ തന്റെ ഭൂഗുരുത്വാകർഷണത്തെപ്പറ്റിയുള്ള നിയമങ്ങൾക്ക് വളരെ പ്രസിദ്ധിയാർജ്ജിച്ച ആളാണ്. കൂടാതെ 17-ാം നൂറ്റാണ്ടിലെ ശാസ്ത്ര വിപ്ലവത്തിൽ ഗുരുത്വാകർഷണ നിയമത്തിന് പേരുകേട്ട ആളാണ്. മാതൃകകളുടെ സ്ഥിരതയെകുറിച്ചുള്ള ന്യൂട്ടന്റെ വിശ്വാസം അദ്ദേഹത്തിന്റെ ആദ്യത്തെ ഗണിതശാസ്ത്ര കണ്ടെത്തലിലേക്ക് നയിച്ചു. ദ്വിപദ പ്രയോഗത്തിന്റെ വ്യാപനത്തിന്റെ സാമാന്യവൽക്കരണത്തിന് പ്രയോജനപ്പെടുകയുണ്ടായി.



സർഐസക് ന്യൂട്ടൺ
(1643–1727)

ന്യൂട്ടന്റെ ദ്വിഘാതസിദ്ധാന്തത്തിന്റെ കണ്ടുപിടിത്തം വളഞ്ഞ രേഖക്കിടയിലുള്ള വിസ്തീർണ്ണം കാണാൻ ലഘുവായ രീതിയിൽ എപ്രകാരം കാണുന്നത് എന്നതിന് സഹായിച്ചു. അദ്ദേഹത്തിന്റെ ഈ കണ്ടുപിടിത്തം പ്രോബബിലിറ്റിയെ പറ്റി മനസ്സിലാക്കുവാൻ വളരെ അത്യന്താപേക്ഷിതമായി സഹായിച്ചു. മൾട്ടിനോമിയൽ സിദ്ധാന്തം ദ്വിമാന സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ പൊതുവായ പതിപ്പ് ഒന്നിലധികം വിവിധമായ സംഖ്യകൾക്ക് ബാധകമാണ്. ഇത് സങ്കലനത്തിലും, സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിലും വിപുലമായി ഉപയോഗിക്കുന്നുണ്ട്.

അദ്ദേഹം ഭിന്നമായ അനുക്രമങ്ങളെ ആദ്യമായി പ്രയോജനപ്പെടുത്തി. കൂടാതെ ഡയോഫാന്റൈൻ സമവാക്യത്തിന് പരിഹാരം കാണുന്നതിന് സമസ്ഥാന ജ്യാമിതി ഉപയോഗിച്ചതും അദ്ദേഹമായിരുന്നു. ലോഗരിതം (യൂലേഴ്സക് സമ്മേഷൻ സൂത്രത്തിന്റെ മുന്നോടിയായി) ഹാർമോണിക് അനുക്രമത്തിന്റെ ഭൗതിക തുകയെ ഏകദേശമൂല്യമായ ലോഗരിതം ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കുകയുണ്ടായി. ഘാതാങ്കന അനുക്രമത്തെ ആദ്യമായി ഉപയോഗിച്ചതുമാത്രമല്ലാതെ ശ്രേണിയെ മാറ്റി സ്ഥാപിക്കുകയും ചെയ്തു. ന്യൂട്ടന്റെ അനന്തമായ ശ്രേണിയുടെ കണ്ടുപിടിത്തങ്ങൾ സൈമൻ സ്റ്റീവിൻസ് ദശാംശങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് രൂപീകരിക്കപ്പെട്ടതാണ്.

1705 -ൽ ഇംഗ്ലണ്ട് രാജ്യത്തിന്റെ രാജ്ഞി (ക്യൂൻ ആനീ) സർ ഐസക് ന്യൂട്ടൻ എന്ന പദവി നൽകി പ്രോത്സാഹിപ്പിക്കുകയുണ്ടായി. ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനായ ലിബ്നിറ്റ്സിനൊപ്പം കാൽകുലസിന്റെ ആവശ്യ സിദ്ധാന്തങ്ങൾ വികസിപ്പിച്ചെടുത്തു. ആ ബഹുമതിയും ന്യൂട്ടനുണ്ട്.

XI_Maths_Ch4_V-1_Mal.indd 192 14-02-2023 16:50:45

യഥാർത്ഥ ജീവിത പ്രയോഗത്തിൽ എവിടെയെല്ലാം എണ്ണൽ ആവശ്യപ്പെടുന്നുവോ അവിടെയെല്ലാം എണ്ണൽ പ്രയോജനപ്പെടുന്നു. ഉദാഹരണമായി ആവശ്യത്തിനനുസരിച്ച് മൊബൈൽ ഫോൺ നമ്പർ ഉപയോഗിക്കുവാൻ സാധിക്കുമോ അല്ലെങ്കിൽ കമ്പ്യൂട്ടറിൽ വ്യത്യാസമായ അനുവദനീയമായ വാക്കുകളെ സൃഷ്ടിക്കാം എന്നതിനെപ്പറ്റി സങ്കലനം ഉപയോഗിച്ച് തീരുമാനിക്കാവുന്നതാണ്. കൂടാതെ ഇതിൽ എത്ര എണ്ണൽ രീതികളും ഒപ്റ്റിമൈസേഷൻ രീതികളും കൈകാര്യം ചെയ്യുന്നു. ഇത് ഒരു യഥാർത്ഥ പ്രശ്നത്തിലെ നിരവധി സാധ്യതകൾക്കിടയിൽ ഏറ്റവും മികച്ച പരിഹാരം കണ്ടെത്തുന്നതുമായി ബന്ധപ്പെട്ട രീതികളാണ്. ഈ അധ്യായത്തിൽ ക്രമീകരിച്ച അല്ലെങ്കിൽ ക്രമീകരിക്കാത്ത വസ്തുക്കളുടെ ക്രമീകരണത്തിൽ എണ്ണൽ പ്രശ്നം നാം പഠിക്കുന്നതാണ്. ഇപ്രകാരമുള്ള ക്രമീകരണങ്ങളെ ക്രമനിയമം കൂടാതെ സംയുക്തം എന്ന് വിളിക്കുന്നു. നെറ്റ്വർക്ക്, വാർത്താവിനിമയം, ക്രിപ്റ്റോഗ്രാഫി, നെറ്റ്വർക്ക് സുരക്ഷിതത്വം, പ്രോബബിലിറ്റി സിദ്ധാന്തം എന്നിവയുടെ എണ്ണൽ പ്രശ്നങ്ങളിൽ എണ്ണൽ പ്രധാനമായും പങ്കുവഹിക്കുന്നു.

നാം ഇവയുടെ ഗുണവിശേഷങ്ങൾ പര്യവേഷണം ചെയ്ത് അവയെ എണ്ണൽ പ്രശ്നങ്ങളിൽ പ്രയോജനപ്പെടുത്തുകയും ചെയ്യുന്നു. മറ്റൊരു സാഹചര്യം പരിഗണിക്കുക. നമ്മുടെ വൈദ്യുതി ഉപഭോക്താവിന്റെ കാർഡ് നമ്പർ $A:B:C$ എന്ന രൂപത്തിലാണ് എന്ന് നമുക്ക് അറിയാവുന്നതാണ്. അവിടെ A എന്നത് ഇലക്ട്രിക്കൽ സബ്സ്റ്റേഷൻ/വലിയ വിസ്തൃതിയിലുള്ള ട്രാൻസ്ഫോർമർ നമ്പറും B എന്നത് കുറഞ്ഞ വിസ്തൃതിയുള്ള ട്രാൻസ്ഫോർമർ നമ്പറിനെയും സൂചിപ്പിക്കുന്നു. കൂടാതെ C എന്നതിനെ ഉപഭോക്താവിന്റെ നമ്പറായും സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഓരോ സബ്സ്റ്റേഷനിലേയ്ക്കും പരമാവധി എണ്ണം ട്രാൻസ്ഫോർമർ മാത്രമേ ബന്ധിപ്പിക്കാനാകൂ എന്നും ഒരു പ്രത്യേക ട്രാൻസ്ഫോർമറുമായി ചില ഉപഭോക്താവ് സംയുക്താവസ്ഥ പരമാവധി എണ്ണം മാത്രമേ ബന്ധിപ്പിക്കാനാകൂ എന്നും വ്യവസ്ഥ കാണാം. ഇപ്പോൾ ഒരു പുതിയ ട്രാൻസ്ഫോർമർ/സബ്സ്റ്റേഷൻ സ്ഥാപിക്കേണ്ടതുണ്ടോ എന്ന് തീരുമാനിക്കുവാനുള്ള ചോദ്യം ഒരു സബ്സ്റ്റേഷൻ ട്രാൻസ്ഫോർമറുമായി ബന്ധിപ്പിച്ചിട്ടുള്ള ഉപഭോക്തൃ സംയുക്താവസ്ഥയുടെ എണ്ണത്തിനനുസരിച്ച് നിർമ്മിക്കുവാൻ കഴിയുകയുള്ളൂ. ആ എണ്ണം എങ്ങനെ ലഭിക്കും? എണ്ണൽ തത്വങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ഈ എണ്ണം എളുപ്പത്തിൽ കാണാവുന്നതാണ്.

ഈ അധ്യായത്തിൽ എണ്ണൽ എന്ന കലയെക്കുറിച്ച് ചർച്ച ചെയ്യുന്നു. എണ്ണൽക്രമ വ്യതിയാനത്തിലൂടെയും, സംയോജനത്തിലൂടെയും ചെയ്യാം എന്ന അടിസ്ഥാന തത്വങ്ങൾ പൂർണ്ണമായും കാണാം.

പഠനലക്ഷ്യങ്ങൾ

ഈ അധ്യായം പൂർത്തിയാകുമ്പോൾ വിദ്യാർത്ഥികൾക്ക് അറിയുവാൻ കഴിയുന്നത്.

- എണ്ണലിന്റെ തത്വങ്ങളെ വിവിധ സാഹചര്യങ്ങളിൽ പ്രയോഗിക്കേണ്ടത് എന്നതിനെക്കുറിച്ച് അറിയുക.
- എത്ര രീതികളിൽ വ്യത്യസ്തമായ വസ്തുക്കളെ ക്രമീകരിക്കാം എന്നതിനെപ്പറ്റി അറിയുക.
- സമാനവസ്തുക്കളുടെ എണ്ണത്തിൽ നിന്ന് ക്രമീകരണങ്ങളുടെ എണ്ണം എങ്ങനെ കണക്കാക്കാം എന്നതിനെക്കുറിച്ച് അറിയണം.
- ഒരു ഗണത്തിലുള്ള വ്യത്യസ്തമായ വസ്തുക്കളുടെ സംയോജനത്തിന്റെ എണ്ണങ്ങളെ കാണൽ.
- വ്യത്യസ്ത വസ്തുക്കളുടെ ഒരു കൂട്ടം സംയോജനങ്ങളുടെ എണ്ണത്തെ കണ്ടെത്തുന്നതിനുള്ള തന്ത്രങ്ങൾ എങ്ങനെ കണക്കുകൂട്ടാം എന്ന പ്രയോഗത്തിനെപറ്റി കാണുന്നത്.
- ഗണിതശാസ്ത്ര പ്രേരണയുടെ തത്വങ്ങളുടെ പ്രയോഗത്തെപറ്റി അറിയാവുന്നത്.

നമുക്ക് താഴെതന്നെ അദ്ധ്യായത്തിൽ നിന്നും ആരംഭിക്കാം.

XI_Maths_Ch4_V-1_Mal.indd 193 14-02-2023 16:50:45

4.2 എണ്ണലിന്റെ അടിസ്ഥാന തത്വങ്ങൾ

1. സങ്കലന നിയമം : (*സങ്കലന നിയമം*) പൂർത്തിയാക്കേണ്ട രണ്ട് ജോഡികൾ നമുക്ക് എടുക്കാവുന്നതാണ്. ഒരേ സമയത്ത് ചെയ്ത് പൂർത്തിയാക്കാൻ സാധിക്കാത്ത രണ്ടു ജോലികളിൽ ആദ്യത്തെ ജോലിയെ M രീതിയിലും രണ്ടാമത്തെ ജോലിയെ N രീതികളിലും പൂർത്തിയാക്കാം. എങ്കിൽ ഇവയിൽ ഏതെങ്കിലും ഒരു ജോലിയെ $M + N$ എന്ന രീതിയിൽ ചെയ്യുന്നതിനെ എണ്ണലിന്റെ കൂട്ടൽ നിയമം എന്നു പറയുന്നു.

ഉദാഹരണം 4.1 17 ആൺകുട്ടികളും, 29 പെൺകുട്ടികളും അടങ്ങുന്ന ഒരു ക്ലാസ്സിൽ നിന്ന് ഒരു പെൺകുട്ടിയെയും ഒരു ആൺകുട്ടിയെയും തിരഞ്ഞെടുക്കേണ്ടതുണ്ടെന്ന് കരുതുക. വ്യത്യസ്ത രീതികളിൽ ഈ തിരഞ്ഞെടുപ്പ് എങ്ങനെ നടത്താമെന്ന് കാണുക?

നിർദ്ധാരണം :

ഒരു പെൺകുട്ടിയെ തിരഞ്ഞെടുക്കുന്നതിന് ആദ്യത്തെ നിയുക്തത 29 വഴികളിലും ഒരു ആൺകുട്ടിയെ തിരഞ്ഞെടുക്കുന്നതിനുള്ള രണ്ടാമത്തെ നിയുക്തത 17 വഴികളിലും ചെയ്യാവുന്നതാണ്. അതുകൊണ്ട് ഈ തിരഞ്ഞെടുപ്പിനെ എണ്ണലിന്റെ സങ്കലന നിയമം ഉപയോഗിച്ച്, 17 + 29 = 46 വഴികളിൽ തെരഞ്ഞെടുക്കാവുന്നതാണ്.

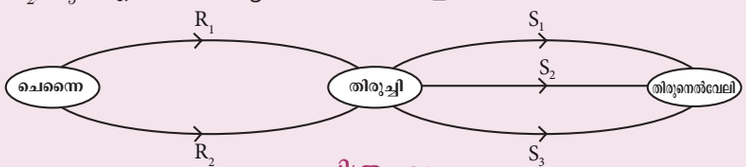
കുറിപ്പ് : ഈ നിയമം ഉപയോഗിച്ച് രണ്ടിലധികം ജോലികളെ വിവരിക്കാവുന്നതാണ്. അതുകൊണ്ട് ഒരേ സമയത്തിൽ തീർക്കാൻ പറ്റാത്ത n ജോലികൾ $T_1, T_2, T_3,..., T_n$ എന്നിവയെ ചെയ്തു തീർക്കുവാൻ ആകുന്ന സമയം യഥാക്രമം $m_1, m_2,..., m_n$ വഴികൾ ഉണ്ട്. എങ്കിൽ അതിൽ ഏതെങ്കിലും ഒന്നിനെ $m_1 + m_2 + ... + m_n$ വഴികളിൽ ചെയ്യാവുന്നതാണ്.

2. ഗുണന നിയമം : (*ഗുണനനിയമം*) ചെയ്യുന്നതിന് രണ്ടുവിധം പ്രവർത്തനം ഉണ്ടെന്ന് കരുതുക. ആദ്യത്തെ പ്രവർത്തനം ചെയ്തു തീർക്കുവാൻ M വഴികൾ ഉപയോഗിക്കാം. ആദ്യത്തെ നടപടിക്രമം പൂർത്തിയാക്കിയശേഷം രണ്ടാമത്തെ നടപടിക്രമം N വ്യത്യസ്ത രീതികളിൽ ചെയ്യാം. അതുകൊണ്ട് ഈ നിയമം പൂർത്തിയാക്കുന്നതിന്റെ ആകെ എണ്ണം $M \times N$ ആണ്.

ഉദാഹരണം 4.2 ചെന്നൈ, തിരുച്ചി, തിരിനെൽവേലി എന്നീ മൂന്നു നഗരങ്ങളെ പരിഗണിക്കുക. ഇതിൽ ഒരാൾക്ക് ചെന്നൈയിൽ നിന്നും തിരുച്ചി വഴിയായി മാത്രമേ തിരുനെൽവേലിയിൽ പോകുവാൻ സാധിക്കുകയുള്ളൂ എന്നിരിക്കട്ടെ. ചെന്നൈ, തിരുച്ചി എന്നീ നഗരങ്ങൾക്കിടയിൽ 2 റോഡുകളും, തിരുച്ചിയിൽ നിന്നും തിരുനെൽവേലിക്ക് 3 റോഡുകളും ഉണ്ട്. ചെന്നൈയിൽ നിന്നും തിരുനെൽവേലിയ്ക്കു 3 റോഡുകളും ഉണ്ട്. ചെന്നൈയിൽ നിന്നും തിരുനെൽവേലിയ്ക്കു എത്ര രീതികളിൽ പോകുവാൻ സാധിക്കും?

നിർദ്ധാരണം:

ചെന്നൈയെ തിരുച്ചിയിലേക്ക് ബന്ധിപ്പിക്കുന്ന രണ്ടു റോഡുകളുണ്ട്. ഇവയെ R_1, R_2 എന്ന് എടുക്കുക. കൂടാതെ തിരുച്ചിയിൽ നിന്നും തിരുനെൽവേലിയ്ക്ക് 3 റോഡുകൾ ഉണ്ട്. ഇവയെ S_1, S_2, S_3 എന്ന് എടുക്കുക. ഒരാൾ ചെന്നൈയിൽ നിന്നും തിരുച്ചിയ്ക്ക് പോകുന്നതിന് R_1 നെ തെരഞ്ഞെടുത്താൽ തിരുച്ചിയിൽ നിന്നും തിരുനെൽവേലിയ്ക്ക് പോകുവാൻ S_1, S_2 അല്ലെങ്കിൽ S_3 എന്നിവയിൽ ഏതെങ്കിലും ഒന്നിനെ തെരഞ്ഞെടുക്കാവുന്നതാണ്. അതുകൊണ്ട് (R_1, S_1), (R_1, S_2), (R_1, S_3) എന്നിവ സാധ്യമായ വഴികളാണ്. ഇതുപോലെ ചെന്നൈയിൽ നിന്നും തിരുച്ചിയിൽ പോകുവാൻ R_2 നെ തെരഞ്ഞെടുത്താൽ (R_2, S_1), (R_2, S_2), (R_2, S_3) എന്നീ സാധ്യമായ വഴികൾ ഉണ്ട്.



ചിത്രം 4.1

അതുകൊണ്ട് ചെന്നൈയിൽ നിന്നും തിരുനെൽവേലിയ്ക്ക് പോകുവാൻ $2 \times 3 = 6$ വഴികൾ ഉണ്ട്.

XI_Maths_Ch4_V-1_Mal.indd 194 14-02-2023 16:50:45

കുറിപ്പ് : ഗുണന നിയമത്തിന്റെ വിപുലീകരണം ഇനിപ്പറയുന്നതായി പ്രസ്താവിക്കാം. ഒരു നിയ്കുതത യിൽ ഉള്ള $P_1, P_2,..., P_n$ എന്ന n നടപടിക്രമം ഉൾക്കൊള്ളുവാൻ യഥാക്രമം $m_1, m_2,..., m_n$ എന്ന വഴികൾ ഉണ്ട് എന്നിരിക്കട്ടെ. കൂടാതെ $P_1, P_2.., P_{i-1}$ എന്ന പ്രക്രിയ ചെയ്തതിനുശേഷം നട പടിക്രമം പൂർത്തിയാക്കുന്നതിനുള്ള മാർഗങ്ങളുടെ എണ്ണം $m_1 \times m_2 \times ... \times m_n$ വഴികളാണ്.

3. **ചേർക്കൽ - ഒഴിവാക്കൽ അടിസ്ഥാനതത്വം :** A, B എന്നീ രണ്ടു നിയുക്തത ഒരേ സമയത്തിൽ ചെയ്തു തീർക്കുന്നതായി കരുതുക. ഓരോന്നും സ്വതന്ത്രമായി യഥാക്രമം $n(A), n(B)$ വഴികളിൽ ചെയ്തു തീർക്കാം എന്നിരിക്കട്ടെ. കൂടാതെ A, B എന്നിവയെ ഒരേ സമയത്തിൽ ചേർത്ത് $n(A \cap B)$ വഴികളിൽ ചെയ്തു തീർക്കാം. എങ്കിൽ ഇവയിൽ ഏതെങ്കിലും ഒരു ജോലിയെ ചെയ്യുന്ന വഴികളുടെ എണ്ണത്തെ കാണുവാൻ സങ്കലന നിയമത്തെ പ്രയോജനപ്പെടുത്തിയാൽ അത് ഉള്ളതിനെക്കാൾ കൂടുതൽ എണ്ണത്തെ തരുന്നതാണ്. ശരിയായ ഉത്തരം കിട്ടുന്നതിന് ഈ രണ്ടു ജോലികളെ ചെയ്യുന്ന വഴികളുടെ എണ്ണത്തെ കൂട്ടിയശേഷം രണ്ടു ജോലികളും ഒരേ സമയത്തിൽ ചേർത്ത് ചെയ്യുന്ന വഴി കളുടെ എണ്ണത്തെ കുറയ്ക്കുകയാണ് വേണ്ടത്. ഈ രീതിയെ ചേർക്കൽ - ഒഴിവാക്കൽ രീതി എന്നു പറയുന്നു. ഗണങ്ങളുപയോഗിച്ചാൽ ഇങ്ങനെ ചിഹ്നം ഉപയോഗിച്ച് താഴെതന്ന രീതിയിൽ എഴുതാവു ന്നതാണ്.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

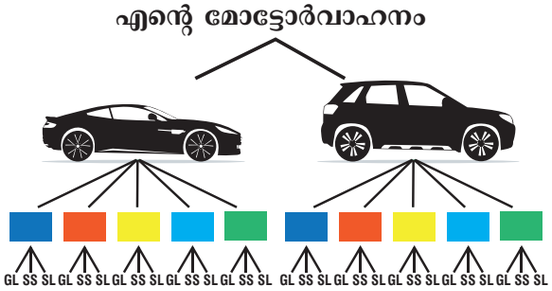
1000 വരെയുള്ള ധനപൂർണ്ണാങ്കങ്ങളിൽ 2 അല്ലെങ്കിൽ 7 കൊണ്ട് നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാൻ സാധിക്കുന്ന (എന്നാൽ ഈ രണ്ടു സംഖ്യകളെ കൊണ്ട് ഹരിക്കാവുന്ന സംഖ്യകളെ നീക്കി) സംഖ്യകളെ കാണുന്ന തായി കരുതുക. 2 കൊണ്ട് നിശ്ശേഷം ഹരിക്കുന്ന സംഖ്യകളെ $n(A)$ എന്നും, 7 കൊണ്ട് ഹരിക്കാവുന്ന സംഖ്യകളുടെ എണ്ണങ്ങളെ $n(B)$ എന്നും 2, 7 എന്നിവകൊണ്ട് നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാവുന്ന സംഖ്യകളുടെ എണ്ണത്തെ $n(A \cap B)$ എന്നും എടുത്താൽ 2 അല്ലെങ്കിൽ 7 കൊണ്ട് ഹരിക്കാവുന്ന ധനപൂർണ്ണാങ്കങ്ങളുടെ എണ്ണത്തെ.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 500 + 142 - 71 = 571$$

(കുറിപ്പ് : ഇവിടെ $n(A)$ യിൽ 1000 വരെയുള്ള 2-ന്റെ എല്ലാ ഗുണിതങ്ങളും ഉൾപ്പെടുന്നു. $n(B)$ യിൽ 1000 വരെയുള്ളന്റെ 7 എല്ലാ ഗുണിതങ്ങളും ഉൾപ്പെടുന്നു.)

വൃക്ഷരേഖാചിത്രം :

വൃക്ഷരേഖാചിത്രം കൂടുതലായും എണ്ണുന്നതിനായി പലതരം സാധ്യതയെ കുറിക്കുന്നു. ഉദാഹര ണമായി ഒരാൾ തന്റെ കുടുംബത്തിനായി ഒരു മോട്ടോർ വാഹനം വാങ്ങുന്നതായി കരുതുക. രണ്ട് വ്യത്യസ്ത ബ്രാൻഡ് വാഹനങ്ങളുണ്ട്. ഓരോ ബ്രാൻഡിനും 5 നിറങ്ങൾ ലഭ്യമാണ്. ഓരോ നിറത്തി നും മൂന്ന് വ്യത്യസ്ത നിറങ്ങൾ ഉണ്ടാകും; അതായത് GL, SS, SL എന്നിവയാകുന്നു. എങ്കിൽ ഒരു മോട്ടോർ വാഹനം തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നതിനുള്ള സാധ്യതയെ വൃക്ഷരേഖാചിത്രം മുഖേന താഴെതന്ന രീതി യിൽ കുറിക്കാവുന്നതാണ്.



ചിത്രം 4.2

XI_Maths_Ch4_V-1_Mal.indd 195 14-02-2023 16:50:46

നാം ഈ പറഞ്ഞ നിയമങ്ങളെ ഉദാഹരണങ്ങൾ മുഖേന തെളിയിക്കാവുന്നതാണ്.

ഉദാഹരണം 4.3 ഒരു സ്കൂൾ ലൈബ്രറിയിൽ ഗണിതശാസ്ത്രത്തെകുറിച്ച് 75 പുസ്തകങ്ങളുണ്ട്. ഭൗതികശാസ്ത്രത്തെ കുറിച്ചുള്ള 35 പുസ്തകങ്ങൾ ഉണ്ട്. ഒരു വിദ്യാർത്ഥിക്ക് ഒരു പുസ്തകം മാത്രമേ തിരഞ്ഞെടുക്കാനാകൂ. ഗണിതശാസ്ത്രത്തിലോ, ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിലോ ഒരു വിദ്യാർത്ഥിക്ക് എത്ര രീതിയിൽ ഒരു പുസ്തകം തിരഞ്ഞെടുക്കാനാകും?

നിർദ്ധാരണം :

(i) ഒരു വിദ്യാർത്ഥിക്ക് ഗണിതശാസ്ത്ര പുസ്തകത്തെ 75 വ്യത്യസ്ത രീതികളിൽ തിരഞ്ഞെടുക്കാം.

(ii) ഒരു വിദ്യാർത്ഥിക്ക് ഭൗതികശാസ്ത്രത്തെ 35 വ്യത്യസ്ത രീതികളിൽ തെരഞ്ഞെടുക്കാം.

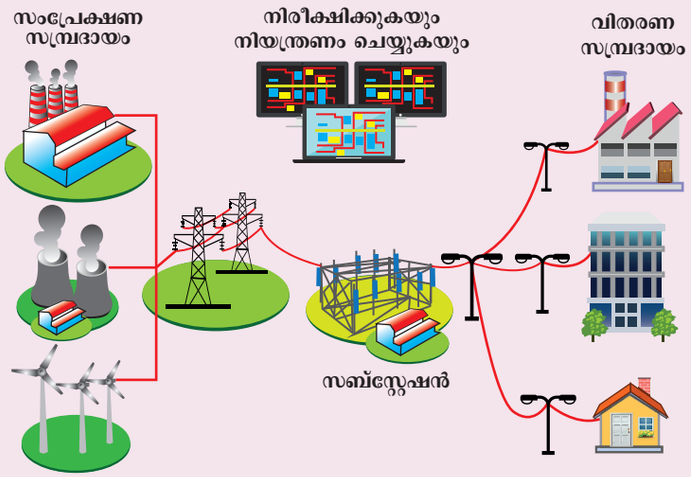
അതിനാൽ ഒരു വിദ്യാർത്ഥിക്ക് ഒരു പുസ്തകം തിരഞ്ഞെടുക്കാൻ കഴിയുന്ന മാർഗങ്ങളുടെ എണ്ണം $75 + 35 = 110$ ആണ്.

ഇപ്പോൾ ഞങ്ങളുടെ ആമുഖത്തിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന പ്രശ്നം വിശദീകരിക്കാം.

ഉദാഹരണം 4.4 ഒരു വൈദ്യുതി ഉപഭോക്താവിന് $238 : 110 : 29$ എന്ന ക്രമത്തിലെ നമ്പർ ഉണ്ടെങ്കിൽ 238 എന്ന വലിയ ശേഷി ട്രാൻസ്ഫോർമറുമായി ബന്ധിപ്പിച്ചിരിക്കുന്ന ഇരുപത്തി ഒൻപതാമത്തെ ഉപഭോക്താവിന്റെ കണക്ഷനുകളുടെ എണ്ണം ഓരോ ചെറിയ ശേഷി ട്രാൻസ്ഫോർമറിനും പരമാവധി 100 ഉപഭോക്തൃ ബന്ധം ഉണ്ടായിരിക്കാമെന്ന വ്യവസ്ഥയ്ക്ക് വിധേയമായി കാണുക.

നിർദ്ധാരണം :

താഴെതന്നെ ചിത്രം വിവരിക്കുന്നത് വൈദ്യുതിവിതരണത്തെ വ്യക്തമാക്കുന്ന ശൃംഖലയാണ്.



ചിത്രം 4.3

ഇവിടെ കൂടുതൽ കൊള്ളളവുള്ള ട്രാൻസ്ഫോർമറിൽ 110 കുറഞ്ഞ കൊള്ളളവുള്ള ട്രാൻസ്ഫോർമറുകൾ ഘടിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു. ഓരോ ചെറിയ കൊള്ളളവുള്ള ട്രാൻസ്ഫോർമറുമായി 100 ഉപഭോക്താവിന് ബന്ധിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നതിനാൽ 109 ട്രാൻസ്ഫോർമറിനും ആകെ $109 \times 100 = 10900$ വരെ ബന്ധിപ്പിച്ചിരിക്കും. 110 -മത്തെ ട്രാൻസ്ഫോർമറിനെ 29 ഉപഭോക്താവിന് നൽകിയിട്ടുണ്ട്. അതു കൊണ്ട് 238 -ാമത്തെ കൂടുതൽ കൊള്ളളവുള്ള ട്രാൻസ്ഫോർമറിൽ ആകെ $10900 + 29 = 10929$ ഉണ്ടായിരിക്കുന്നത്.

XI_Maths_Ch4_V-1_Mal.indd 196 14-02-2023 16:50:47

ഉദാഹരണം 4.5 ഒരു വ്യക്തി ഒരു കാർ വാങ്ങാൻ ആഗ്രഹിക്കുന്നു. ഇവിടെ രണ്ടു ബ്രാൻഡുകളുടെ കാർ വിപണിയിൽ ലഭ്യമാണ്. ഒപ്പം ഓരോ ബ്രാൻഡുകളിലും 3 വ്യത്യാസപ്പെട്ട മാതൃകകളിലും ഓരോ മാതൃകയിൽ അഞ്ച് വ്യത്യസ്ത നിറങ്ങൾ വരുന്നു. എങ്കിൽ എത്ര വഴികളിൽ വാഹനത്തെ തെരഞ്ഞെടുക്കുവാൻ അയാൾക്ക് കഴിയും ?

നിർദ്ധാരണം :

ഒരു മോട്ടോർ വാഹനം വാങ്ങുന്നതിന് ഒരു വ്യക്തിക്ക് ഒരു ബ്രാൻഡും പിന്നീട് ഒരു വ്യത്യാസമായ മാതൃകയും തുടർന്ന് ഒരു നിറവും തിരഞ്ഞെടുത്ത് കാർ വാങ്ങാം. ഒരു ബ്രാൻഡിനെ 2 വഴികളിലൂടെയും ഒരു മാതൃകയെ 3 വഴികളിലൂടെയും 5 നിറങ്ങളിൽ ഒരു നിറം തിരഞ്ഞെടുക്കുവാനും കഴിയും. അതുകൊണ്ട് ഗുണനനിയമം അനുസരിച്ച് ഒരു വ്യക്തിയ്ക്ക് മോട്ടോർ വാഹനം വാങ്ങുന്നതിനുള്ള വഴികൾ $2\times3\times5 = 30$ ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം 4.6 കാഞ്ചീപുരത്തിലുള്ള ഒരു തുണിക്കടയിൽ നിന്നും ഒരു സ്ത്രീ ഒരു പട്ടുസാരിയും ഒരു ശുങ്കിടി സാരിയും വാങ്ങാൻ ഉദ്ദേശിക്കുന്നു. ആ കടയിൽ 20 വ്യത്യസ്ത ഇനം സിൽക്ക് സാരികളും 8 വ്യത്യസ്ത തരം ശുങ്കിടി സാരികളുമുണ്ട്. സാരികളെ എത്ര വഴികളിൽ തിരഞ്ഞെടുക്കുവാൻ ആസ്ത്രീക്ക് കഴിയും?

നിർദ്ധാരണം :

ഒരു സ്ത്രീയ്ക്ക് ഒരു പട്ടുസാരിയും, ഒരു ശുങ്കിടി സാരിയും തിരഞ്ഞെടുക്കണം. അവർക്ക് പട്ടുസാരി തിരഞ്ഞെടുക്കാൻ 20 വഴികളും, ശുങ്കിടി സാരി തിരഞ്ഞെടുക്കുവാൻ 8 വഴികളും ഉണ്ട്. ഇവ രണ്ടിനെയും തിരഞ്ഞെടുക്കാൻ ഉള്ള ഗുണനനിയമം, $20 \times 8 = 160$ വഴികളാകുന്നു.

ഉദാഹരണം 4.7 ഒരു ഗ്രാമത്തിലെ ജനങ്ങളിൽ 80 ശതമാനം പേർ തെങ്ങുകൃഷിയും, 65 ശതമാനം പേർ നെൽ കൃഷിയും ചെയ്യുന്നു. രണ്ടിന്റെയും ഉടമസ്ഥതയിലുള്ള ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ശതമാനം എന്താണ്?

നിർദ്ധാരണം :

$n(C)$ എന്നത് തെങ്ങുകൃഷി ചെയ്യുന്നവരുടെ ശതമാനവും $n(P)$ എന്നത് നെൽ കൃഷി ചെയ്യുന്നവരുടെ ശതമാനത്തെയും സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഇവിടെ $n(C) = 80$, $n(P) = 65$ എന്ന് തന്നിട്ടുണ്ട്. ചേർക്കൽ - ഒഴിവാക്കൽ നിയമമനുസരിച്ച്, $n(C \cap P) = n(C) + n(P) - n(C \cup P)$ $n(C \cup P)$ യുടെ പരമാവധി മൂല്യം 100 ആകുന്നു. അതുകൊണ്ട് $n(C \cap P)$ –യുടെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ മൂല്യം $80 + 65 - 100 = 45$.

അതുകൊണ്ട് 45 ശതമാനം പേർ ഈ രണ്ടു കൃഷിയേയും ചെയ്യുന്നു.

കുറിപ്പ് : അടുത്തു വരുന്ന കണക്കുകളിൽ നാം ഒരു ശൃംഖലയുടെ ചിഹ്നം ഉപയോഗിക്കുന്നു. ശൃംഖല എന്നത് അക്ഷരങ്ങളെ ഒന്നിനുപുറകെ ഒന്നായി വരിയായി ക്രമീകരിക്കുന്നതാണ്. a, b, c, d എന്നീ അക്ഷരം ഉപയോഗിച്ച് ക്രമീകരിക്കുന്ന മൂന്നു ശൃംഖലയെ ഇവിടെ കാണാം. aaa, abb, bda, dca, cdd,... എന്നിങ്ങനെയാണ്.

ഉദാഹരണം 4.8

(i) BIRD എന്ന ഇംഗ്ലീഷ് വാക്കിലുള്ള 4 അക്ഷരങ്ങളെയും ഉപയോഗിച്ച് അക്ഷരങ്ങൾ വീണ്ടും ആവർത്തിക്കാതെ എത്ര അക്ഷര ശൃംഖലകൾ രൂപീകരിക്കാം.

(ii) PRIME എന്ന ഇംഗ്ലീഷ് വാക്കിലെ 5 അക്ഷരങ്ങളെയും ഉപയോഗിച്ച് അക്ഷരങ്ങൾ ആവർത്തിക്കാതെ എത്ര അക്ഷര ശൃംഖലകൾ രൂപീകരിക്കാം.

XI_Maths_Ch4_V-1_Mal.indd 197 14-02-2023 16:50:47

നിർദ്ധാരണം :

(i) 4 ശൂന്യസ്ഥലങ്ങളെ 4 അക്ഷരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് എത്ര വഴികളിൽ എഴുതാമോ അത്രയും അക്ഷരശൃംഖല ഉണ്ടായിരിക്കും. ഇതിൽ അക്ഷരങ്ങൾ ആവർത്തിക്കുവാൻ പാടില്ല എന്നതിനെ ഓർമ്മിക്കേണ്ടതാണ്. ആദ്യത്തെ ശൂന്യസ്ഥലത്തെ B, I, R, D എന്ന അക്ഷരങ്ങളിൽ ഏതെങ്കിലും ഒരക്ഷരം ഉപയോഗിച്ച് 4 വ്യത്യസ്തവഴികളിൽ പൂർത്തിയാക്കാവുന്നതാണ്. അതുപോലെ രണ്ടാമത്തെ ശൂന്യസ്ഥലത്തെ ബാക്കിയുള്ള 3 അക്ഷരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് 3 വ്യത്യസ്ത വഴികളിലും, മൂന്നാമത്തെ ശൂന്യസ്ഥലത്തെ 2 വഴികളിലും പൂർത്തിയാക്കാവുന്നതാണ്. നാലാമത്തെ സ്ഥലത്തെ ഒരു വഴിയിലും പൂർത്തിയാക്കാം.

ആയതുകൊണ്ട്, 4 ശൂന്യസ്ഥലങ്ങളെ പൂർത്തിയാക്കാവുന്ന വഴികളുടെ എണ്ണത്തെ ഗുണനനിയമം അനുസരിച്ച് $4\times3\times2\times1 = 24$. ആകുന്നു. അതുകൊണ്ട് ആവശ്യമുള്ള അക്ഷരശൃംഖലകളുടെ എണ്ണം 24 ആകുന്നു.

(ii) ഇവിടെ 5 സ്ഥലങ്ങളെ പൂർത്തിയാക്കുവാൻ 5 വ്യത്യസ്തമായ അക്ഷരങ്ങൾ ഉണ്ട്. ആദ്യത്തെ സ്ഥലത്ത് P,R,I,M,E എന്ന അക്ഷരങ്ങളിൽ ഏതെങ്കിലും ഒന്നിനെ ഉപയോഗിച്ച് 5 വഴികളിൽ പൂർത്തിയാക്കാവുന്നതാണ്. ആദ്യത്തെ ശൂന്യസ്ഥലത്തെ 5 അക്ഷരങ്ങളിൽ ഏതെങ്കിലും ഒന്നിനെ ഉപയോഗിച്ച് പൂർത്തിയാക്കിയശേഷം, ബാക്കിയുള്ള 4 അക്ഷരങ്ങളെ ഉപയോഗിച്ച് രണ്ടാമത്തെ ശൂന്യസ്ഥലത്തെയും, മൂന്നാമത്തെ ശൂന്യസ്ഥലത്തെ പൂർത്തിയാക്കുവാൻ 3 അക്ഷരങ്ങളും കൂടാതെ 4 -ാമത്തെ ശൂന്യ സ്ഥലത്തെ 2 അക്ഷരങ്ങളെക്കൊണ്ടും പൂർത്തിയാക്കാവുന്നതാണ്. ബാക്കിയുള്ള അവസാനത്തെ അക്ഷരത്തെ 5 -ാമത്തെ ശൂന്യസ്ഥലത്തിലും പൂർത്തിയാക്കാം.

അതുകൊണ്ട് 5 ശൂന്യസ്ഥലങ്ങളെ പൂർത്തിയാക്കാൻ സാധിക്കുന്നവയുടെ എണ്ണത്തെ $5\times4\times3\times2\times1 = 120$. എന്ന് എഴുതാം

കുറിപ്പ് : മുകളിൽ പറഞ്ഞ രണ്ടു യാദൃശ്ചികാസംഭവങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള തുല്യതയെ നിരീക്ഷിക്കുക.

ഉദാഹരണം 4.9 FLOWER എന്ന വാക്കിൽ ഉള്ള 6 അക്ഷരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് താഴെതന്ന നിബന്ധനകൾ ഉപയോഗിച്ച് എത്ര അക്ഷരശൃംഖലകളെ രൂപീകരിക്കാം.

(i) F ൽ ആരംഭിക്കണം അല്ലെങ്കിൽ R ൽ അവസാനിക്കണം.

(ii) F ൽ ആരംഭിക്കുകയോ അല്ലെങ്കിൽ R ൽ അവസാനിപ്പിക്കുകയോ ചെയ്യാൻ പാടില്ല.

നിർദ്ധാരണം :

ഏതൊരു അക്ഷരശൃംഖലയിലും F, L, O, W, E, R എന്ന അക്ഷരങ്ങൾ ഓരോന്നും ഒരു പ്രാവശ്യം മാത്രമേ വരുകയുള്ളൂ.

(i) ഒരു അക്ഷരശൃംഖല F ൽ ആരംഭിച്ചാൽ ബാക്കിയുള്ള 5 സ്ഥലങ്ങളെ L, O, W, E, R എന്നീ അക്ഷരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് പൂർത്തിയാക്കാവുന്നതാണ്.

അക്ഷരങ്ങളെ വീണ്ടും ആവർത്തിക്കുവാൻ സാധിക്കാത്തതിനാൽ 2-ാമത്തെ, 3-ാമത്തെ, 4 -ാമത്തെ, 5-ാമത്തെ, 6-ാമത്തെയും ശൂന്യസ്ഥലങ്ങളെ യഥാക്രമം 5, 4, 3, 2, 1 എന്നീ വഴികളിൽ പൂർത്തിയാക്കുവാൻ സാധിക്കും.

അതുകൊണ്ട് ഗുണനനിയമം അനുസരിച്ച്, F ൽ ആരംഭിച്ച അക്ഷരശൃംഖലകളെ $5\times4\times3\times2\times1 = 120$ വഴികളിൽ രൂപീകരിക്കാം.

F					
1 വഴി	5 വഴി	4 വഴി	3 വഴി	2 വഴി	1 വഴി

ചിത്രം 4.4

ഒരു ശൃംഖല R ൽ അവസാനിക്കണമെങ്കിൽ ബാക്കിയുള്ള 5 ശൂന്യസ്ഥലങ്ങളെ F, L, O, W, E എന്നീ അക്ഷരങ്ങളുപയോഗിച്ച് പൂർത്തിയാക്കാം.

മുകളിൽ പറഞ്ഞതുപോലെ R ൽ അവസാനിക്കുന്ന അക്ഷര ശൃംഖലകളേയും 120 വഴികളിൽ എഴുതാവുന്നതാണ്.

					R
5 വഴി	4 വഴി	3 വഴി	2 വഴി	1 വഴി	1 വഴി

ചിത്രം 4.5

XI_Maths_Ch4_V-1_Mal.indd 198 14-02-2023 16:50:47

ഒരു ശൃംഖല F ൽ ആരംഭിച്ച് R ൽ അവസാനിക്കുമെങ്കിൽ ബാക്കിയുള്ള 4 സ്ഥലങ്ങളെ L, O, W, E എന്നീ അക്ഷരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് പൂർത്തിയാക്കാം.

F					R
1 വഴി	4 വഴി	3 വഴി	2 വഴി	1 വഴി	1 വഴി

ചിത്രം 4.6

മുകളിൽ പറഞ്ഞതുപോലെ, F ൽ ആരംഭിച്ച് R ൽ അവസാനിക്കുന്ന 6 അക്ഷരശൃംഖലകളുടെ എണ്ണത്തെ $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24.$ എന്ന് എഴുതാം

ചേർക്കൽ - ഒഴിവാക്കൽ നിയമ അനുസരിച്ച് F ൽ ആരംഭിക്കണം. അല്ലെങ്കിൽ R ൽ അവസാനിക്കണം എന്ന രീതിയിൽ അക്ഷരശൃംഖലകളുടെ എണ്ണം $120 + 120 - 24 = 216$ ആകുന്നു.

(ii) F ൽ ആരംഭിക്കുവാനോ, R ൽ അവസാനിക്കുവാനോ പറ്റാത്ത അക്ഷരശൃംഖലകളുടെ എണ്ണമായത് (i) ൽ കണക്കാക്കിയിട്ടില്ല. ഇതുമാത്രമല്ലാതെ F, L, O, W, E, R എന്നീ അക്ഷരങ്ങളെ ആവർത്തിച്ചുവരാതെ ഉള്ള 6-അക്ഷരശൃംഖലകളുടെ എണ്ണത്തെ കണ്ടു പിടിക്കേണ്ടതാണ്.

ഇപ്പോൾ ആദ്യത്തെ ശൂന്യസ്ഥലത്തിൽ ഈ 6 അക്ഷരങ്ങളിൽ ഏതെങ്കിലും ഒന്നിനെ ഉപയോഗിച്ചും രണ്ടാമത്തെ ശൂന്യസ്ഥലത്തെ ബാക്കിയുള്ള 5 അക്ഷരങ്ങളിൽ ഏതെങ്കിലും ഒന്നിനെ ഉപയോഗിച്ചും അതുപോലെ മറ്റെ സ്ഥലങ്ങളെ പൂർത്തിയാക്കാൻ സാധിക്കുന്ന അക്ഷരങ്ങളുടെ എണ്ണത്തെ $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720.$ ഉം F ൽ ആരംഭിക്കുവാനോ R ൽ അവസാനിക്കുവാനോ പറ്റാത്ത അക്ഷരശൃംഖലകളുടെ എണ്ണത്തെ ആകെ അക്ഷരശൃംഖലകളുടെ എണ്ണത്തിൽ നിന്നും F ൽ തുടങ്ങി R ൽ അവസാനിക്കുന്ന അക്ഷരശൃംഖലകളുടെ എണ്ണത്തെ കുറയ്ക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്നു. അതിന്റെ മൂല്യം $720 - 216 = 504$ ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം 4.10 ആദ്യം രണ്ട് വ്യത്യസ്തമായ ഇംഗ്ലീഷ് അക്ഷരങ്ങളെയും അതിനെ തുടർന്ന് 4 വ്യത്യസ്തമായ സംഖ്യകളെയും അല്ലെങ്കിൽ ആദ്യം രണ്ടു വ്യത്യസ്തമായ സംഖ്യകളെയും അതിനെ തുടർന്ന് 4 വ്യത്യസ്തതമായ അക്ഷരങ്ങളെയും ഉപയോഗിച്ച് വ്യത്യസ്തമായ എത്ര ലൈസൻസ് പ്ലേറ്റുകൾ തയ്യാറാക്കാം?

നിർദ്ധാരണം :

ഈ നിർദ്ധാരണത്തെ രണ്ടു രീതികളിൽ കാണാവുന്നതാണ്.

വഴി 1 : ആദ്യം രണ്ട് വ്യത്യസ്തമായ ഇംഗ്ലീഷ് അക്ഷരങ്ങളെയും നാല് വ്യത്യസ്തമായ സംഖ്യകളെയും ഉപയോഗിച്ച് നിർമ്മിക്കുവാൻ സാധിക്കുന്ന ലൈസൻസ് പ്ലേറ്റുകളുടെ എണ്ണം $26 \times 25 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 32,76,000.$

വഴി 2 : ആദ്യം നാല് വ്യത്യസ്തമായ അക്ഷരങ്ങളെയും പിന്നീട് രണ്ടു വ്യത്യസ്തമായ സംഖ്യകളെയും ഉപയോഗിച്ച് നിർമ്മിക്കുവാൻ സാധിക്കുന്ന ലൈസൻസ് പ്ലേറ്റുകളുടെ എണ്ണത്തെ $10 \times 9 \times 26 \times 25 \times 24 \times 23 = 3,22,92,000$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

വഴി 1-ൽ അല്ലെങ്കിൽ വഴി 2 -ൽ ഉള്ളതുപോലെ നിർമ്മിക്കുന്ന ലൈസൻസ് പ്ലേറ്റുകളുടെ എണ്ണത്തെ സങ്കലനനിയമം അനുസരിച്ച് $(26 \times 25 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7) + (10 \times 9 \times 26 \times 25 \times 24 \times 23)$ $= 3,55,68,000$ എന്ന് എഴുതാം.

ഉദാഹരണം 4.11 7000–നെക്കാൾ കൂടുതലും 8000–ള്ളനേക്കാൾ കുറഞ്ഞതുമായുള്ള സംഖ്യകളുടെ അക്കങ്ങളെ വീണ്ടും ആവർത്തിക്കാത്തവിധം 5 കൊണ്ട് ഹരിക്കാവുന്ന സംഖ്യകളുടെ എണ്ണത്തെ കാണുക

നിർദ്ധാരണം :

7000-ത്തെക്കാൾ കൂടുതലായും 8000-ത്തെക്കാൾ കുറവായുള്ളതുമായ സംഖ്യകൾ, 4–അക്കങ്ങളുള്ളതായിരിക്കണം. അതുകൊണ്ട് 1000 -ത്തിന്റെ സ്ഥാനത്ത് 7 എന്ന സംഖ്യ ഇരിയ്ക്കണം. കൂടാതെ

XI_Maths_Ch4_V-1_Mal.indd 199 14-02-2023 16:50:48

ഇത് 5 കൊണ്ട് നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാമെങ്കിൽ ആദ്യത്തെ സ്ഥാനത്ത് 0 അല്ലെങ്കിൽ 5 ആയിരിക്കണം.

അക്കങ്ങൾ വീണ്ടും ആവർത്തിക്കാത്തതുകൊണ്ട്, 100-ാമത്തെ, 10-ാമത്തെ സ്ഥാനങ്ങളെ ബാക്കിയുള്ള സംഖ്യകളായ 8, 7 വഴികളിൽ പൂർത്തിയാക്കാം.

7			0/5
1 വഴി	**8** വഴി	**7** വഴി	**2** വഴി

ചിത്രം 4.7

അതുകൊണ്ട് ആവശ്യപ്പെട്ട സംഖ്യകളുടെ എണ്ണത്തെ $1 \times 8 \times 7 \times 2 = 112$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

ഉദാഹരണം 4.12 അക്കങ്ങളുടെ ആവർത്തനം ഉപയോഗിക്കാതെ 0, 1, 2, 3, 4 എന്നീ അക്കങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് എത്ര 4–അക്ക ഇരട്ട സംഖ്യകൾ സൃഷ്ടിക്കാൻ സാധിക്കും?

നിർദ്ധാരണം :

ഇതിൽ രണ്ടു നിബന്ധനകൾ താഴെതന്നിരിക്കുന്നു.

1. ഇതിൽ 4–അക്ക സംഖ്യകൾ ആയതുകൊണ്ട് 1000 ത്തിന്റെ സ്ഥാനത്ത് 0 വരാൻ പാടില്ല.
2. സംഖ്യ ഇരട്ടസംഖ്യകൾ ആയതുകൊണ്ട് ഒന്നാംസ്ഥാനത്ത് 0 , 2 അല്ലെങ്കിൽ 1 വരണം.

ഒന്നാം സ്ഥാനത്ത് 0 (പൂജ്യം) വരാതെയും അല്ലെങ്കിൽ 0 വരത്തക്കവിധവും ഈ കണക്കിനെ രണ്ടു വഴികളിൽ നിർദ്ധാരണം കാണാവുന്നതാണ്.

വഴി 1 : ഒന്നാം സ്ഥാനത്തിൽ 0 (പൂജ്യം) കൊണ്ട് പൂർത്തിയാക്കുക. 1000-ത്തിന്റെ സ്ഥാനത്തെ പൂർത്തിയാക്കുവാൻ 4 വഴികളും, 100-ന്റെ സ്ഥാനത്തെ പൂർത്തിചെയ്യാൻ 3 വഴികളും, 10-ന്റെ സ്ഥാനത്തെ പൂർത്തിയാക്കുവാൻ 2 വഴികളും ഉണ്ട്. അതുകൊണ്ട് ഒന്നാംസ്ഥാനത്തിൽ 0 (പൂജ്യം) വരത്തക്കവിധം $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ സംഖ്യയെ രൂപീകരിക്കാൻ സാധിക്കും.

			0
4 വഴി	3 വഴി	2 വഴി	1 വഴി

ചിത്രം 4.8

വഴി 2 : ഒന്നാം സ്ഥാനത്തിൽ 0 (പൂജ്യം) ഇല്ലാതിരിക്കുമ്പോൾ 2, 4 എന്നീ രണ്ടു സംഖ്യകളെ ഉപയോഗിച്ച് ഒന്നാം സ്ഥാനത്തെ 2 വഴികളിൽ പൂർത്തിയാക്കാം. 1000-ത്തിന്റെ സ്ഥാനത്തെ പൂർത്തിയാക്കുവാൻ 3 വഴികളും, 100-ന്റെ സ്ഥാനത്തെ പൂർത്തിചെയ്യാൻ 3 വഴികളും കൂടാതെ 10-ാമത്തെ സ്ഥാനത്തെ പൂർത്തിചെയ്യാൻ 2 വഴികളും ഉണ്ട്.

$\bar{0}$			2/4
3 വഴി	3 വഴി	2 വഴി	2 വഴി

ചിത്രം 4.9

അതുകൊണ്ട് ഒന്നാം സ്ഥാനത്തിൽ 0 (പൂജ്യം) ഇല്ലാത്തവിധം $3 \times 3 \times 2 \times 2 = 36$ എന്ന സംഖ്യകളെ രൂപീകരിക്കാം.

4–അക്ക ഇരട്ടസംഖ്യകളുടെ എണ്ണത്തെ സങ്കലനനിയമം ഉപയോഗിച്ച് $24 + 36 = 60$ എന്ന് എഴുതാം.

ഉദാഹരണം 4.13 5 നാണയങ്ങളെ ഒരു പ്രാവശ്യം എറിയുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന ആകെ ഫലങ്ങളുടെ എണ്ണം കണ്ടെത്തുക.

നിർദ്ധാരണം :

ഒരു നാണയം എറിയുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന ഫലങ്ങളെ 2 വഴികളിൽ എഴുതാവുന്നതാണ് (തല, പൂവ്). ഗുണനനിയമം അനുസരിച്ച്, 5 നാണയങ്ങളെ എറിയുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന ഫലത്തിന്റെ എണ്ണത്തെ $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$ എന്ന് എഴുതാം.

XI_Maths_Ch4_V-1_Mal.indd 200 14-02-2023 16:50:49

കുറിപ്പ് : പൊതുവായ, n നാണയങ്ങളെ എറിയുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന ഫലത്തിന്റെ എണ്ണം 2^n ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം 4.14

(i) 3 പെട്ടികളിൽ 5 വ്യത്യസ്ത പന്തുകളെ എത്ര വഴികളിൽ വിതരണം ചെയ്യാം.

(ii) 5 പെട്ടികളിൽ 3 വ്യത്യസ്ത പന്തുകൾ എത്ര വഴികളിൽ വിതരണം ചെയ്യാം.

നിർദ്ധാരണം :

(i) ഓരോ പന്തിനെയും 3 പെട്ടികളിൽ 3 വഴികളിൽ വയ്ക്കാം. അതുകൊണ്ട് ഗുണനനിയമം ഉപയോഗിച്ച് 5 വ്യത്യസ്ത പന്തുകളെ 3 പെട്ടികളിൽ $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5 = 243$ വഴികളിൽ വിതരണം ചെയ്യാം.

(ii) ഓരോ പന്തിനെയും 3 പെട്ടികളിൽ 3 വഴികളിൽ വയ്ക്കാം. അതുകൊണ്ട് ഗുണനനിയമം ഉപയോഗിച്ച് 5 വ്യത്യസ്ത പന്തുകളെ 3 പെട്ടികളിൽ $5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125$ വഴികളിൽ വിതരണം ചെയ്യാം..

കുറിപ്പ് : ഇപ്രകാരമുള്ള കണക്കുകളിൽ ഉണ്ടാകുന്ന ആശയകുഴപ്പം ഒഴിവാക്കുവാൻ വസ്തുക്കളെ (പന്തുകൾ) എടുത്ത് അവയെ സ്ഥലങ്ങളിൽ (പെട്ടികളിൽ) വിതരണം ചെയ്യേണ്ടതാണ് എന്നതിനെ ഓർമ്മിക്കുക.

പൊതുവായി, n വ്യത്യസ്തമായ വസ്തുക്കളെ m സ്ഥലങ്ങളിൽ വയ്ക്കുവാൻ ആകെ m^n വഴികൾ ഉണ്ട്.

ഉദാഹരണം 4.15 ഒരു മുറിയിൽ 10 ബൾബുകൾ ഉണ്ട്. ഓരോ ബൾബിനെയും പ്രത്യേകം പ്രത്യേകം സ്വതന്ത്രമായി ഉപയോഗിക്കുന്നു എങ്കിൽ ആമുറി പ്രകാശിപ്പിക്കുന്നതിനുള്ള വഴികളുടെ എണ്ണം കണ്ടെത്തുക.

നിർദ്ധാരണം :

ഓരോ ബൾബുകളും സ്വതന്ത്രമായി പ്രകാശിക്കുന്നു അല്ലെങ്കിൽ അണയുന്നു എന്ന് രണ്ടു വഴികൾ ഉണ്ട്. അതുകൊണ്ട് എല്ലാ ബൾബുകളും 2^{10} വഴികളിൽ പ്രവർത്തിപ്പിക്കാൻ സാധിക്കും. ഇതിൽ എല്ലാ ബൾബുകളെയും അണച്ചുവയ്ക്കുവാനുള്ള വഴിയും ഉൾക്കൊള്ളുന്നു. ഇവിടെ എല്ലാ ബൾബുകളെയും അണച്ച് മുറിയെ പ്രകാശിപ്പിക്കുവാൻ സാധിക്കുകയില്ല. അതിനാൽ ഈ മുറിയെ പ്രകാശിപ്പിക്കുവാൻ $2^{10}-1 = 1024-1 = 1023$ വഴികൾ ഉണ്ട്.

എണ്ണുന്നതിന് ഉപയോഗിക്കുന്ന മറ്റൊരു പ്രധാനപ്പെട്ട ആശയം താഴെ തന്ന രീതിയിൽ പ്രസ്താവിച്ചിരിക്കുന്നു.

പ്രാവിൻ കൂട് തത്വം

ഒരു പ്രാവിന്റെ കൂടിനെ നോക്കി ഒരു കൂട്ടം പ്രാവുകൾ പറന്നുവരുന്നു എന്ന് സങ്കല്പിക്കുക. പ്രാവിൻ കൂടിനെക്കാൾ കൂടുതൽ പ്രാവുകൾ ഉണ്ടെങ്കിൽ കുറഞ്ഞത് ഒരു പ്രാവിൻ കൂട്ടിൽ രണ്ടു പ്രാവുകളെങ്കിലും അടയ്ക്കണം. ഇതിന്റെ പൊതുവായ ഒരു രൂപം മറ്റ് വസ്തുക്കൾക്കും സാഹചര്യത്തിനും ബാധകമാക്കാം. അതായത് k പെട്ടികളിൽ $k + 1$ വസ്തുക്കൾ ഇരുന്നാൽ രണ്ടോ അതിലധികമോ വസ്തുക്കൾ അടങ്ങിയിരിക്കുന്ന കുറഞ്ഞത് ഒരു പെട്ടിയെങ്കിലും ഉണ്ട്.

XI_Maths_Ch4_V-1_Mal.indd 201 14-02-2023 16:50:49

ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ ഇവിടെ തന്നിരിക്കുന്നു:

1. 27 ഇംഗ്ലീഷ് പദങ്ങൾ ഉള്ള ഒരു കൂട്ടത്തിൽ ഒരേ അക്ഷരത്തിൽ ആരംഭിക്കുന്ന കുറഞ്ഞത് രണ്ട് പദങ്ങളെങ്കിലും ഉണ്ടായിരിക്കണം. (ഇംഗ്ലീഷ് അക്ഷരമാലയിൽ 26 അക്ഷരങ്ങൾ മാത്രമേ ഉള്ളൂ)
2. ഒരു ആഴ്ചയിലെ 5 പ്രവൃത്തി ദിവസങ്ങളിൽ മാത്രം 6 സമ്മേളനങ്ങൾ നടത്തുകയാണെങ്കിൽ ഓരോ ദിവസം കുറഞ്ഞത് രണ്ടു സമ്മേളനമെങ്കിലും ഉണ്ടായിരിക്കണം.

ക്രമവിനിമയവും സംയോജനവും മനസിലാക്കാൻ ഞങ്ങൾക്ക് ഫാക്റ്റോറിയലുകൾ എന്ന ഒരു ആശയം ആവശ്യമാണ്. അത് അടുത്ത വിഭാഗത്തിൽ ചർച്ച ചെയ്യാം.

4.3 ഘടക ഗുണിതം

ആദ്യത്തെ n നിസ്സർഗ്ഗസംഖ്യകളുടെ തുടർച്ചയായുള്ള ഗുണിതം n–ന്റെ ഘടകഗുണിതം എന്ന് പറയുന്നു. ഇതിനെ $n!$ എന്ന് കുറിക്കാവുന്നതാണ്.

അതായത്, $n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$.

ഈ ചിഹ്നനത്തെ " n factorial " അല്ലെങ്കിൽ " factorial of n" എന്ന് വായിക്കേണ്ടതാണ്.

$n!$ എന്ന ചിഹ്നത്തെ 1808 -ൽ ഫ്രഞ്ച് ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞൻ ക്രിസ്റ്റാൻ ക്രാമ്പാണ് (*Christian Kramo*) നടപ്പിലാക്കിയത്. ഇതിൽ n എന്ന ഒരു ധനപൂർണ്ണാങ്കത്തെ ശ്രദ്ധിക്കുക,

$$\begin{aligned} n! &= n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 3 \times 2 \times 1 \\ &= n(n-1)! \text{ , } n > 1\text{–ൽ} \\ &= n(n-1)(n-2)! \text{ , } n > 2\text{–ൽ} \\ &= n(n-1)(n-2)(n-3)! \text{ , } n > 3\text{–എന്നിങ്ങനെ തുടരാം.} \end{aligned}$$

നിരീക്ഷിക്കുക,

$$\begin{aligned} 1! &= 1 \\ 2! &= 2 \times 1 = 2 \\ 3! &= 3 \times 2 \times 1 = 6 \\ 4! &= 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \\ 5! &= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 \\ ... &= ... \\ 22! &= 22 \times 21 \times 20 \times ... \times 3 \times 2 \times 1 = 1124000727777607680000 \end{aligned}$$

ഘടകഗുണിതത്തിൽ 22 (ശ്രീനിവാസ രാമാനുജന്റെ ജന്മനാൾ) എന്ന സംഖ്യയ്ക്ക് ഒരു പ്രത്യേകതയുണ്ട്. ഇത് 1 -നെക്കാൾ കുറഞ്ഞ സംഖ്യ N–ആണ്. ഘടകഗുണിതത്തിന് അതിന്റെ കൃത്യമായ N അക്കങ്ങളാണുള്ളത്.

$N!$ ൽ ശരിയായ N അക്കങ്ങൾ ഉള്ള അടുത്ത N എന്ന സംഖ്യ കാണുന്നതിന് വിദ്യാർത്ഥികൾക്കും അദ്ധ്യാപകർക്കും ഇത് ഒരു നല്ല പരിശീലനമാണ്. $0! = 1$ എന്നത് തെളിയിക്കുവാൻ $n = 0$ എന്നതിനെ $(n+1)!=(n+1) \cdot n!$ എന്നതിൽ പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ $1! = (0+1) \times 0! \Rightarrow 0! = \frac{1!}{1} = 1$ എന്ന് തെളിയിക്കാം. ഇതുപോലെ നാം പൂജ്യമല്ലാത്ത ചില ഋണസംഖ്യകൾക്കുള്ള ഘടകഗുണിതത്തെപ്പറ്റിയും വ്യക്തമാക്കാം. ഘടകഗുണിതത്തിനെ ചില ഋണസംഖ്യകൾക്കുമാത്രം അല്ലാതെ മിശ്രഭിന്നങ്ങൾക്കും നിർവചിക്കാവുന്നതാണ്. ഇത് ഈ പാഠപുസ്തകത്തിന്റെ പരിധിക്കപ്പുറമാണ്.

XI_Maths_Ch4_V-1_Mal.indd 202 14-02-2023 16:50:49

ഘടകഗുണിതത്തിനെ കാണുന്ന രീതിയെ വ്യക്തമായി ചില ഉദാഹരണംമൂലം നോക്കാം.

ഉദാഹരണം 4.16 മൂല്യം കാണുക

(i) $5!$ (ii) $6!-5!$ (iii) $\frac{8!}{5!\times 2!}$

നിർദ്ധാരണം :

(i) $5! = 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 120.$

(ii) $6!-5! = 6\times 5!-5! = (6-1)\times 5! = 5\times 120 = 600.$

(iii) $\frac{8!}{5!\times 2!} = \frac{8\times 7\times 6\times 5!}{5!\times 2!} = \frac{8\times 7\times 6}{2} = 168.$

ഉദാഹരണം 4.17 ചുരുക്കുക $\frac{7!}{2!}$

നിർദ്ധാരണം :

$$\frac{7!}{2!} = \frac{7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2!}{2!} = 7\times 6\times 5\times 4\times 3 = 2520.$$

ഉദാഹരണം 4.18 മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കുക : $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ ഇവിടെ (i) $n=7, r=5$ (ii) $n=50, r=47$ (iii) $r=3$, എന്നത് ഏതൊരു n–നിനും.

നിർദ്ധാരണം :

(i) $n=7, \mathrm{r}=5$ എങ്കിൽ

$$\frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{7!}{5!(7-5)!} = \frac{7\times 6\times 5!}{5!\times 2!} = \frac{7\times 6}{1\times 2} = 21.$$

(ii) $n=50, r=47$ എങ്കിൽ

$$\frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{50!}{47!(50-47)!} = \frac{50\times 49\times 48\times 47!}{47!\times 3!} = \frac{50\times 49\times 48}{1\times 2\times 3} = 19600.$$

(iii) $r=3$ ന് ഏതു മൂല്യമായാലും, n–എങ്കിൽ

$$\frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{1\times 2\times 3\times (n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

ഉദാഹരണം 4.19 N എന്നതിനെ ദിവസങ്ങളുടെ എണ്ണമായി എടുക്കുവാൻ അനുവദിക്കുക. N ന്റെ മൂല്യം $N!$ ദിവസങ്ങളിലെ ആകെ മണിക്കൂറുകളുടെ എണ്ണത്തിന് തുല്യമാണ്. എങ്കിൽ N–ന്റെ മൂല്യം കാണുക?

നിർദ്ധാരണം :

$N! = 24\times N$ നമ്മൾ സമീകരണം പരിഹരിക്കേണ്ടതുണ്ട്.

$N = 1,2,3,4$ എങ്കിൽ $N! < 24\times N.$

$N=5$ എങ്കിൽ, $N! = 5! = 4!\times 5 = 24N.$

$N>5$ എങ്കിൽ, $N! \geq 5!N > 24\times N$ അതായത് $N=5$ ആകുന്നു.

XI_Maths_Ch4_V-1_Mal.indd 203 14-02-2023 16:50:51

ഉദാഹരണം 4.20 $\frac{6!}{n!} = 6$ ആണെങ്കിൽ, n–ന്റെ മൂല്യം കാണുക?

നിർദ്ധാരണം :

$$\frac{6!}{n!} = \frac{1.2.3.4.5.6.}{1.2.3...n} = 6.$$

$n < 6$ ആയതിനാൽ നമുക്ക് $n = 5$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം 4.21 $n! + (n-1)! = 30$ എങ്കിൽ, n–ന്റെ മൂല്യം കാണുക?

നിർദ്ധാരണം :

$30 = 6 \times 5$.

ഇപ്പോൾ, $n! + (n-1)! = (n+1)(n-1)!$ സമപ്പെടുത്തുമ്പോൾ $(n-1)! = 6 = 3!$ ആയതിനാൽ നമുക്ക് $n = 4$ കിട്ടുന്നു.

ഉദാഹരണം 4.22 $2! + 3! + 4! + ... + 22!$–ന്റെ ഒന്നാം സ്ഥാനം എന്താണ്?

നിർദ്ധാരണം :

$5!$ ൽ തുടങ്ങി എല്ലാ $n!$–കൾക്കും ഒന്നാം സ്ഥാനം പൂജ്യമാകുന്നു. അതുകൊണ്ട് ഒന്നാം സ്ഥാനം $2! + 3! + 4!$ മാത്രമേ അനുസരിച്ചിരിക്കുകയുള്ളൂ. ഇതിന്റെ മൂല്യം $2 + 6 + 24 = 32$. അതുകൊണ്ട് ഒന്നാം സ്ഥാനം 2 ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം 4.23 $\frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} = \frac{A}{9!}$ എങ്കിൽ A–യുടെ മൂല്യം എന്ത്?

നിർദ്ധാരണം :

ഇതിനെ

$\frac{A}{9 \times 8 \times 7!} = \frac{1}{7!} + \frac{1}{8 \times 7!}$ എന്ന് എഴുതാം.

അതുകൊണ്ട്, $\frac{1}{7!} \times \frac{A}{9 \times 8} = \frac{1}{7!} \times \left[1 + \frac{1}{8}\right]$ ഇത് $\frac{A}{72} = \frac{9}{8}$–നു തുല്യമായ മൂല്യം ലഭിക്കും. ഇതിൽ നിന്നും, $A = 81$ ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം 4.24 $\frac{(2n)!}{n!} = 2^n(1.3.5...(2n-1)$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം :

$$\frac{(2n)!}{n!} = \frac{1.2.3.4...(2n-2)(2n-1) \times 2n}{n!}$$

$$= \frac{(1.3.5...(2n-1))(2.4.6...(2n-2) \times 2n)}{n!}$$

(ഇരട്ട സംഖ്യകളെയും ഒറ്റസംഖ്യകളെയും വേർതിരിക്കുക)

$$= \frac{(1.3.5...(2n-1) \times 2^n \times (1.2.3...(n-1).n))}{n!}$$

(ഇവയിൽ നിന്നും 2-നെ വെളിയിൽ എടുക്കുക)

$$= \frac{(1.3.5...(2n-1)) \times 2^n \times n!}{n!}$$

$$= 2^n(1.3.5...(2n-1)).$$

XI_Maths_Ch4_V-1_Mal.indd 204 14-02-2023 16:50:52

അഭ്യാസം 4.1

1. (i) ഒരാൾ അത്താഴത്തിനായി ഒരു ഹോട്ടലിൽ പോയി മെനു കാർഡിൽ 10 ഇൻഡ്യൻ ഭക്ഷ്യ വസ്തുവും 7 ചൈനീസ് ഭക്ഷ്യവസ്തുവും കണ്ടു. ഒരു ഇൻഡ്യൻ അല്ലെങ്കിൽ ഒരു ചൈ നീസ് ഭക്ഷണത്തെ എത്രവഴികളിൽ തിരഞ്ഞെടുക്കുവാൻ സാധിക്കും ?

   (ii) ഒരു കടയിൽ 3 തരം കളിപ്പാട്ട കാറുകളും 2 തരം കളിപ്പാട്ട ട്രെയിനുകളും ലഭ്യമാണ്. ഒരു കുഞ്ഞിന് ഒരു കളിപ്പാട്ട കാറും ഒരു കളിപ്പാട്ട ട്രെയിനും വാങ്ങാൻ കഴിയുന്ന വഴികൾ കണ്ടെത്തുക?

   (iii) അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിക്കാതെ 1, 2, 3, 4, 5 എന്നീ സംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ച് എത്ര അക്ക ങ്ങൾ സൃഷ്ടിക്കാൻ കഴിയും?

   (iv) 10 പേർ ഇരിക്കുന്ന കോൺഫറൻസ് ഹാളിലേക്ക് മൂന്നുപേർ പ്രവേശിക്കുന്നു. എത്ര വഴിക ളിൽ അവർക്ക് ഇരിപ്പിടങ്ങൾ എടുക്കാം?

   (v) തുടർച്ചയായി 5 പേർക്ക് ഇരിക്കാൻ കഴിയുന്നവിധത്തിൽ ?

2. (i) ഒരു മൊബൈൽ ഫോണിന് 6 വ്യത്യസ്ത അക്കങ്ങളും പാസ്കോഡുകളും ഉണ്ട്. പാസ്കോഡ് വീണ്ടെടുക്കാൻ ഒരാൾ ചെയ്യുന്ന പരമാവധി ശ്രമങ്ങൾ ഏതാണ് ?

   (ii) വ്യത്യസ്തവർണ്ണങ്ങളുള്ള 4 പതാകകൾ നൽകിയിട്ടുണ്ട്. ഒരു സിഗ്നലിനും ഒന്നിനു താഴെ ഒന്നായി 3 പതാകകൾ ഉപയോഗിക്കേണ്ടതുണ്ടെങ്കിൽ എങ്ങനെ വ്യത്യസ്ത സിഗ്നലുകൾ സൃഷ്ടിക്കാൻ കഴിയും?

3. നാലു കുട്ടികൾ ഒരു ഓട്ടപന്തയം നടത്തുന്നു.

   (i) ആദ്യ രണ്ട് സ്ഥലങ്ങളെ എത്ര വഴികളിലൂടെ പൂരിപ്പിക്കാൻ കഴിയും?

   (ii) എത്ര വ്യത്യസ്ത വഴികളിലൂടെ അവർ ഓട്ടം പൂർത്തിയാക്കും?

4. 2, 4, 6, 8 എന്നീ അക്കങ്ങളെ ഉപയോഗിച്ച് 3 – അക്ക സംഖ്യകൾ

   (i) അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിച്ച് വരുന്ന വിധം

   (ii) അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിക്കാതെ വരുന്നവിധം എത്ര സംഖ്യകൾ വരുമെന്ന് കാണുക.

5. ഒന്നാം സ്ഥാനത്ത് വരുംവിധം എത്ര 3 അക്ക സംഖ്യകൾ ഉണ്ടായിരിക്കും

   (i) ആവർത്തനത്തോടെ

   (ii) ആവർത്തിക്കാതെ.

6. 100 നും 500–നും ഇടയിൽ 0,1,2,3,4,5 എന്നീ അക്കങ്ങളെ ഉപയോഗിച്ച്

   (i) അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിച്ച് വരുംവിധം എത്ര സംഖ്യകൾ രൂപീകരിക്കാം.

   (ii) അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിച്ചുവരാതെ എത്ര സംഖ്യകൾ രൂപീകരിക്കാം.

7. 0,1,2,3,4,5 എന്നീ അക്കങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് 3 അക്ക ഒറ്റസംഖ്യകൾ എത്രയെണ്ണം

   (i) അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിക്കാതെ

   (ii) അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിക്കുംവിധം കാണാൻ സാധിക്കും.

XI_Maths_Ch4_V-1_Mal.indd 205 14-02-2023 16:50:52

8. 999-നും 10000−നും ഇടയിലുള്ള അക്കങ്ങൾ എണ്ണുക എന്ന നിബന്ധനയ്ക്കു വിധേയമായി.

(i) നിയന്ത്രണങ്ങളില്ല എന്നത്

(ii) ഒരു അക്കവും ആവർത്തിക്കാതെ

(iii) കുറഞ്ഞത് അക്കങ്ങളിൽ ഒന്ന് ആവർത്തിക്കുന്നു എന്നതനുസരിച്ച് കാണുക.

9. അക്കങ്ങളുടെ ആവർത്തനം അനുവദിച്ചില്ലെങ്കിൽ 0, 1, 2, 3, 4, 5 അക്കങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് 5 കൊണ്ട് നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാവുന്ന എത്ര മൂന്നക്ക സംഖ്യകൾ സൃഷ്ടിക്കാൻ കഴിയും.

(i) അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിക്കാത്തവിധം?

(ii) ള്ളഅക്കങ്ങൾ ആവർത്തിക്കുന്നവിധം?

10. A മുതൽ B വരെ യാത്ര ചെയ്യാൻ രണ്ടു വ്യത്യസ്ത ബസ്സ് റൂട്ടുകളുണ്ട്. അവ B_1, B_2 എന്നിവയാണ്. T_1 , T_2 എന്ന രണ്ടു വ്യത്യസ്ത ട്രെയിൻ റൂട്ടുകളും ഒരു എയർറൂട്ട് A_1 ഉം ആകുന്നു. B എന്ന സ്ഥല ത്തുനിന്നും C എന്ന സ്ഥലത്തേക്ക് ഒരു ബസ്സ് റൂട്ടിനെ B_1' എന്നും, രണ്ടു വ്യത്യസ്ത ട്രെയിൻ റൂട്ടുകളെ, T_1', T_2' എന്നും ഒരു എയർറൂട്ടിനെ A_1' എന്നും ഇരിക്കട്ടെ. സമാനമായ ഗതാഗതമാർഗ്ഗം ഉപയോഗിക്കാതെ A എന്ന സ്ഥലത്തുനിന്ന് C എന്ന സ്ഥലത്തേക്ക് യാത്ര ചെയ്യുന്നതിനുള്ള റൂട്ടുകളുടെ എണ്ണം കണ്ടെത്തുക?

11. 1 മുതൽ 1000−വരെ (രണ്ടും ഉൾപ്പെടെ) 2 അല്ലെങ്കിൽ 5 കൊണ്ട് ഹരിക്കാവുന്ന എത്ര സംഖ്യക ളുണ്ട്.

12. LOTUS എന്ന വാക്കിലുള്ള അക്ഷരങ്ങളെ ഉപയോഗിച്ച്

(i) L എന്ന അക്ഷരത്തിൽ ആരംഭിക്കുകയോ അല്ലെങ്കിൽ S എന്ന അക്ഷരത്തിൽ അവസാനിക്കു ന്നതോ ആയ എത്ര ശൃംഖലകൾ സൃഷ്ടിക്കാൻ കഴിയും.

(ii) L ള്ളഎന്ന അക്ഷരത്തിൽ ആരംഭിക്കുകയോ കൂടാതെ S ള്ളഎന്ന അക്ഷരത്തിൽ അവസാനി ക്കുവാൻ സാധിക്കാത്ത എത്ര അക്ഷര ശൃംഖലകൾ സൃഷ്ടിക്കാൻ കഴിയും.

13. (i) ഓരോ ചോദ്യത്തിനും 4 തെരഞ്ഞെടുക്കൽ പ്രക്രിയയിൽ, 6 ഒബ്ജക്ടീവ് തരം ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഉത്തരം നൽകാനുള്ള ആകെ എണ്ണം എണ്ണുക?

(ii) 3 വ്യത്യസ്ത പ്രാവ് കൂടുകളിൽ 10 പ്രാവുകളെ എത്ര വഴികളിൽ സ്ഥാപിക്കാം?

(iii) 10 വിദ്യാർത്ഥികൾക്ക് 12 വ്യത്യസ്ത സമ്മാനങ്ങൾ വിതരണം ചെയ്യുന്നതിനുള്ള മാർഗ്ഗ ങ്ങളുടെ എണ്ണം കാണുക?

14. മൂല്യം കാണുക

(i) $6!$ (ii) $4! + 5!$ (iii) $3! - 2!$ (iv) $3! \times 4!$ (v) $\frac{12!}{9! \times 3!}$ (vi) $\frac{(n+3)!}{(n+1)!}$

15. വില നൽകുക $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ ഇവിടെ

(i) $n = 6$, $r = 2$ (ii) $n = 10, r = 3$ (iii) ഏതൊരു n−ഉം, $r = 2$ ആകുമ്പോൾ മൂല്യം കാണുക

16. n−ന്റെ മൂല്യം കാണുക

(i) $(n + 1)! = 20(n - 1)!$ (ii) $\frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} = \frac{n}{10!}$

XI_Maths_Ch4_V-1_Mal.indd 206 14-02-2023 16:50:53

ഘടക ഗുണിതങ്ങളെ ഇരട്ട ഘടകഗുണിതങ്ങളായി പൊതുവൽക്കരിക്കാം.

n–ന്റെ ഇരട്ട ഘടക ഗുണിതം

n–എന്ന പൂർണ്ണാങ്കത്തിന്റെ ഘടകഗുണിതത്തെ $n!$ എന്ന് ഫലനരൂപത്തിൽ എഴുതുന്നതിനെ കാണാം $f: \mathbb{N} \cup \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}$,

ഇവിടെ $\mathbb{N}$ എന്നത് നിസ്സർഗ്ഗ സംഖ്യകൾ ആകുന്നു. ഇതിനെ ഇപ്രകാരം നിർവചിക്കാം,

$$f(n) = \begin{cases} 1 & , n = 0, \\ n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1, & n \neq 0. \end{cases}$$

$n!!$ നെ നിർവചിക്കുന്നത് (n–ന്റെ ഇരട്ടഘടകഗുണിതം)

$$g(n) = \begin{cases} 1 & n = 0, \\ n \times (n-2) \times (n-4) \times \ldots \times 4 \times 2 & n \text{ എന്നത് ഇരട്ടസംഖ്യ}, \\ n \times (n-2) \times (n-4) \times \ldots \times 3 \times 1 & n \text{ എന്ന ഒറ്റസംഖ്യ}. \end{cases}$$

അപ്രകാരം $5!! = 5 \times 3 \times 1 = 15$ ഉം

$8!! = 8 \times 6 \times 4 \times 2 = 384$ ഉം ആകുന്നു.

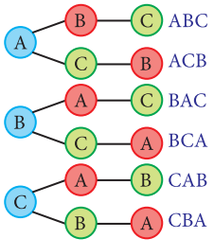
കുറിപ്പ് $n!! \neq (n!)!$, $4!! = 8$ ഇവിടെ $(4!)! = (24)!$ ഉം ആകുന്നു.

4.4 ക്രമപരിവർത്തനം

ക്രമപരിവർത്തനം എന്നാൽ എന്ത്?

ക്രമ പരിവർത്തനം പലവിധ സാഹചര്യങ്ങളാൽ ഉണ്ടാകുന്നതാണ്..

മൂന്നു സുഹൃത്തുക്കൾ A, B, C ഒരു ഫോട്ടോ എടുക്കുന്നതിന് വരിയായിട്ട് നിൽക്കേണ്ടതാണ്. എത്രവിധം വരികളിൽ നിൽക്കാൻ സാധിക്കും. ഇവ ഇടതു നിന്ന് വലതു ഭാഗമായി താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.



$A, B, C : A, C, B : B, A, C$

$B, C, A : C, A, B : C, B, A$

അതുകൊണ്ട്, ഫോട്ടോ എടുക്കുന്നതിന് 6 വഴികളിൽ അവർക്ക് വരിയായി നിൽക്കാൻ സാധിക്കുന്നു.

അതുപോലെ 3 വസ്തുക്കളെ ഒരു വരിയിൽ അടുക്കുന്നതിന് $3 \times 2 \times 1 = 3!$ വരിപരിവർത്തനങ്ങൾ ചെയ്യാം. നാല് വസ്തുക്കൾ ഒരു സമയത്തിൽ എടുക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന വരി പരിവർത്തനങ്ങളുടെ എണ്ണം $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4!$ ആകുന്നു. അതുകൊണ്ട് സാധാരണയായി n വസ്തുക്കളെ ഒരു വരിയിൽ അടുക്കുന്നതിന് ആകെ $n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1 = n!$ വരിപരിവർത്തനങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കും.

നമ്മുടെ കൈയിലുള്ള A, B, C, D, E, F, G എന്ന 7 അക്ഷരങ്ങളിൽ 4 അക്ഷരങ്ങളെകൊണ്ട് അക്ഷര ചരട് ഉണ്ടാക്കുമ്പോൾ, ആദ്യ അക്ഷരത്തിനെ തിരഞ്ഞെടുക്കാൻ നമുക്ക് 7 വഴികൾ ഉണ്ട്. ആദ്യ അക്ഷരത്തിനെ തിരഞ്ഞെടുത്തതിനുശേഷം നമ്മുടെ കൈയിൽ രണ്ടാമത്തെ സ്ഥാനത്തിനും 6 അക്ഷരങ്ങൾ ഉണ്ട്. തുടർന്ന് 4 -ാമത്തെ അക്ഷരത്തിന് 4 അവസരമാണുള്ളത്.

അതുകൊണ്ട് 7 അക്ഷരങ്ങളിൽ നിന്ന് ഉണ്ടാകുന്ന 4 അക്ഷരങ്ങളുടെ എണ്ണം

$$7 \times 6 \times 5 \times 4 = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = \frac{7!}{3!} = \frac{7!}{(7-4)!}$$

XI_Maths_Ch4_V-1_Mal.indd 207 14-02-2023 16:50:54

സാധാരണയായി, n വ്യത്യസ്തമായ വസ്തുക്കളിൽ നിന്ന് r വസ്തുക്കളെകൊണ്ട് ഉണ്ടാക്കുന്ന വരി പരിവർത്തനങ്ങളുടെ എണ്ണം $\frac{n!}{(n-r)!}$. ചിഹ്നത്താൽ ${}^nP_r$ എന്നു കുറിയ്ക്കാം. ഇതിന്റെ തെളിവ് ഈ ഭാഗത്ത് കാണാം.

4.4.1 വ്യത്യസ്തമായ വസ്തുക്കളിലുള്ള ക്രമപരിവർത്തനങ്ങൾ

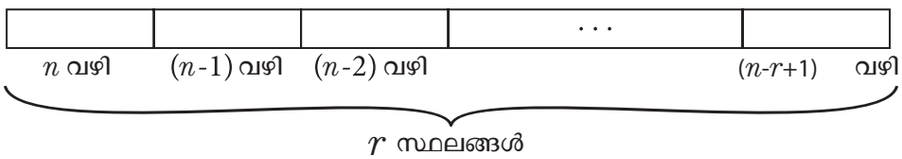
ഫലനങ്ങൾ മുഖേന വരി പരിവർത്തനത്തെ $S=\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ എന്ന അവസാനിക്കാത്ത ഗണത്തിൽ നിന്ന് S–നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ട ഒരു ഇരുവശ ഫലനത്തെ ഒരു ക്രമമാറ്റം എന്ന് നിർവ്വചിക്കാം. S–ന്റെ ക്രമമാറ്റത്തിന്റെ എണ്ണവും S–ന്മേൽ നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ട ഇരുവശ ഫലനത്തിന്റെ എണ്ണവും സമം.

ഈ ക്രമമാറ്റത്തിന്റെ എണ്ണത്തെ ${}^nP_r$ എന്ന് കുറിയ്ക്കാം.

സിദ്ധാന്തം 4.1

n, r എന്ന ധനപൂർണ്ണ സംഖ്യ, കൂടാതെ $r \leq n$ എങ്കിൽ, n വ്യത്യസ്തമായ വസ്തുക്കളിൽ നിന്ന് ഒരു സമയത്തിൽ r വസ്തുക്കളെക്കൊണ്ട് ഉണ്ടാക്കുന്ന ക്രമമാറ്റത്തിനെ $n(n-1)(n-2)...(n-r+1)$ ആകുന്നു.

തെളിവ് ഒരു ക്രമമാറ്റം എന്നത് ക്രമത്തിൽ ഉള്ളതാണ് n വെവ്വേറെയായ വസ്തുക്കളിൽ നിന്ന് ഒരു സമയത്തിൽ r വസ്തുക്കളെക്കൊണ്ട് ഉണ്ടാക്കുന്ന ക്രമമാറ്റത്തിനെ n വസ്തുക്കളെ r സ്ഥലങ്ങളിൽ നിർമ്മിക്കാം.



ആദ്യസ്ഥലം പൂർത്തിയാക്കുന്നതിന് n വസ്തുക്കൾ ഉണ്ട്. രണ്ടാമത്തെ സ്ഥലം പൂർത്തീകരിക്കുന്നതിന് $n-1$ വസ്തുക്കൾ ഉണ്ട്. മൂന്നാമത്തെ സ്ഥലം പൂർത്തിയാക്കുന്നതിന് $n-2$ വസ്തുക്കൾ ഉണ്ട്. ഇതുപോലെ അവസാനം വരെ തുടരുന്നതിന് അതായത് r -ാം സ്ഥലത്തെ നിരത്തുന്നതിന് $(n-(r-1))$ വസ്തുക്കൾ ഉണ്ട്. ഗുണനനിയമമനുസരിച്ച് ${}^nP_r = n(n-1)(n-2)...(n-r+1)$ എന്ന് കിട്ടുന്നു. □

സിദ്ധാന്തം 4.2

$n \geq 1$ കൂടാതെ $0 \leq r \leq n$ എങ്കിൽ ${}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$.

തെളിവ് സിദ്ധാന്തം 4.1 -ൽ നിന്ന്,

$$\begin{aligned} {}^nP_r &= n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times (n-r+1) \\ &= \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times (n-r+1) \times (n-r) \times (n-r-1) \times ... \times 2 \times 1}{(n-r) \times (n-r-1) \times ... \times 2 \times 1} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!}. \end{aligned}$$

□

കുറിപ്പ് : ഏതൊരു ധനപൂർണ്ണസംഖ്യ n കൂടാതെ ഋണമല്ലാത്ത പൂർണ്ണസംഖ്യ r–നും,

ഇതിനെ

$${}^nP_r = \begin{cases} \frac{n!}{(n-r)!} & , r \leq n \\ 0 & , r > n. \end{cases}$$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം.

XI_Maths_Ch4_V-1_Mal.indd 208 14-02-2023 16:50:55

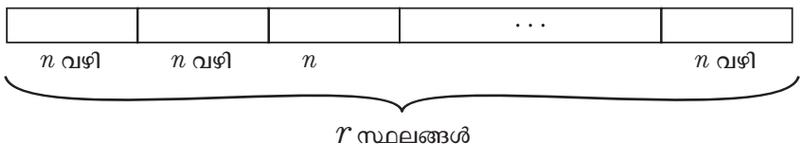
കുറിപ്പ്: $^{n}P_{r} = \begin{cases} ^{n}P_{n} = n! & ,r = n \\ ^{n}P_{0} = 1 & ,r = 0. \end{cases}$

കുറിപ്പ്: n വെവ്വേറായ വസ്തുക്കളെ ഒരു ക്രമത്തിൽ $^{n}P_{n} = n!$ വഴികളിൽ ക്രമപ്പെടുത്താം.

സിദ്ധാന്തം 4.3

n വ്യത്യസ്തമായ വസ്തുക്കളിൽ നിന്ന് ഒരു സമയത്തിൽ r വസ്തുക്കളെ ആവർത്തിച്ച് വരുന്ന വിധത്തിൽ n^{r} വഴികളിൽ ക്രമപ്പെടുത്താം.

തെളിവ് സിദ്ധാന്തം 4.1 -ൽ ഉള്ളതുപോലെ,



നാം ആദ്യ സ്ഥലത്തെ നിരപ്പാക്കുന്നതിന് n വസ്തുക്കളും, രണ്ടാമതു സ്ഥലത്തെ നിരപ്പാക്കുന്നതിന് (ആദ്യം പ്രയോജനപ്പെടുത്തിയ വസ്തുക്കളെ വീണ്ടും പ്രയോജനപ്പെടുത്താം). ഇതുപോലെ r മത് സ്ഥലത്തെ നിരപ്പാക്കുന്നതിന് n വസ്തുക്കളും ഉണ്ട്. ഗുണനനിയമത്തിൽ നിന്ന് വ്യത്യസ്തമായ n വസ്തുക്കളിൽ നിന്ന് ഒരു സമയത്തിൽ വസ്തുക്കൾ തിരിച്ചുവരുന്ന രീതിയിൽ $n \times n \times n \times \ldots \times n$ (r തവണ) $= n^{r}$ വഴികളിൽ ക്രമപ്പെടുത്താം.

4.4.2 ക്രമമാറ്റത്തിന്റെ ഗുണങ്ങൾ

ഗുണം 1: $^{n}P_{n} = {}^{n}P_{n-1}$

തെളിവ്

$$^{n}P_{n-1} = \frac{n!}{(n-(n-1))!} = \frac{n!}{1!} = n! = \frac{n!}{(n-n)!} = {}^{n}P_{n}$$

ഗുണം 2: $^{n}P_{r} = n \times {}^{n-1}P_{r-1}$

തെളിവ്

$$n \times {}^{n-1}P_{r-1} = n \times \frac{(n-1)!}{((n-1)-(r-1))!} = \frac{n!}{(n-r)!} = {}^{n}P_{r}$$

ഇതുപോലെ ആവർത്തിച്ചാൽ നമുക്ക് കിട്ടുന്നത്

$$\begin{aligned} ^{n}P_{r} &= n \times {}^{n-1}P_{r-1} = n \times (n-1) \times {}^{n-2}P_{r-2} \\ &= n \times (n-1) \times (n-2) \times {}^{n-3}P_{r-3} \times \ldots \times (n-(r-1)) \times {}^{n-r}P_{0} \\ &= n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-r+1) \end{aligned}$$

$$\boxed{^{n}P_{r} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-r+1).}$$

XI_Maths_Ch4_V-1_Mal.indd 209 14-02-2023 16:50:56

ഗുണം 3 : ${}^{n}P_{r} = {}^{n-1}P_{r} + r \times {}^{n-1}P_{r-1}$

തെളിവ്

$$
\begin{aligned}
{}^{n-1}P_{r} + r \times {}^{n-1}P_{r-1} &= \frac{(n-1)!}{((n-1)-r)!} + r\frac{(n-1)!}{(n-r)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(n-1-r)!} + r\frac{(n-1)!}{(n-r)!} \\
&= \frac{(n-1)! \times (n-r)}{(n-1-r)! \times (n-r)} + r\frac{(n-1)!}{(n-r)!} \\
&= \frac{(n-1)! \times (n-r)}{(n-r)!} + r\frac{(n-1)!}{(n-r)!} \\
&= \frac{(n-1)! \times ((n-r)+r)}{(n-r)!} = \frac{(n-1)!n}{(n-r)!} \\
&= \frac{n!}{(n-r)!} = {}^{n}P_{r}
\end{aligned}
$$

□

ഉദാഹരണം 4.25 മൂല്യം കാണുക : (i) ${}^{4}P_{4}$ (ii) ${}^{5}P_{3}$ (iii) ${}^{8}P_{4}$ (iv) ${}^{6}P_{5}$

നിർദ്ധാരണം :

(i) ${}^{4}P_{4} = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24.$

(ii) ${}^{5}P_{3} = 5 \times 4 \times 3 = 60.$

(iii) ${}^{8}P_{4} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680.$

(iv) ${}^{6}P_{5} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 6! = 720.$

ഉദാഹരണം 4.26 ${}^{(n+2)}P_{4} = 42 \times {}^{n}P_{2}$ എങ്കിൽ, n കാണുക.

നിർദ്ധാരണം :

$$
\begin{aligned}
{}^{(n+2)}P_{4} &= 42 \times {}^{n}P_{2} \\
\Rightarrow \frac{{}^{n+2}P_{4}}{{}^{n}P_{2}} &= 42 \\
\Rightarrow \frac{(n+2)(n+1)(n)(n-1)}{n(n-1)} &= 42 \\
\Rightarrow (n+2)(n+1) &= 42 = 7 \times 6 \\
\Rightarrow n+2 &= 7 \Rightarrow n = 5.
\end{aligned}
$$

ഉദാഹരണം 4.27 ${}^{10}P_{r} = {}^{7}P_{r+2}$ എങ്കിൽ, r കാണുക.

നിർദ്ധാരണം :

$$
\begin{aligned}
{}^{10}P_{r} &= {}^{7}P_{r+2} \\
\frac{10!}{(10-r)!} &= \frac{7!}{(5-r)!}
\end{aligned}
$$

XI_Maths_Ch4_V-1_Mal.indd 210 14-02-2023 16:50:57

$$\frac{10\times 9\times 8\times 7!}{(10-r)\times(9-r)\times(8-r)\times(7-r)\times(6-r)\times(5-r)!} = \frac{7!}{(5-r)!}$$

$$(10-r)\times(9-r)\times(8-r)\times(7-r)\times(6-r) = 10\times 9\times 8$$

$$(10-r)\times(9-r)\times(8-r)\times(7-r)\times(6-r) = 6\times 5\times 4\times 3\times 2$$

(10× 9 × 8 നെ അഞ്ച് അടുത്തടുത്ത സംഖ്യകളുടെ ഗുണനങ്ങളായിട്ട് അവരോഹണത്തിൽ എഴുതുക)

അതുകൊണ്ട്, $10-r = 6 \Rightarrow r = 4$.

ഉദാഹരണം 4.28 "VOWELS" എന്ന വാക്കിലുള്ള അക്ഷരങ്ങളെ കൊണ്ട് നിബന്ധനകൾക്കനുസരിച്ച് എത്ര അക്ഷര ചരടുകളെ ഉണ്ടാക്കാൻ സാധിക്കും.

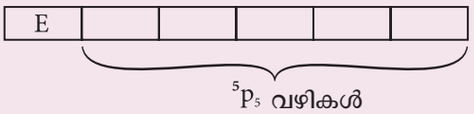
(i) E ആരംഭിക്കുന്ന രീതിയിൽ

(ii) E ൽ ആരംഭിച്ച്, W ൽ അവസാനിക്കുന്ന രീതിയിൽ.

നിർദ്ധാരണം :

കൊടുത്തിട്ടുള്ള വാക്കിൽ 6 അക്ഷരങ്ങൾ ഉണ്ട് (V, O, W, E, L, S)

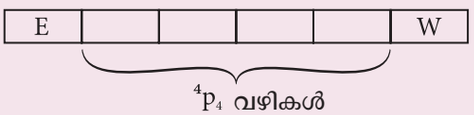
(i) എല്ലാ അക്ഷര ചരടുകളും E ൽ ആരംഭിക്കേണ്ടതാണ്. എങ്കിൽ ബാക്കിയുള്ള 5 അക്ഷരങ്ങളെ ക്രമപ്പെടുത്തുന്നതിന് ${}^5P_5 = 5!$ വഴികൾ ഉണ്ട്.



ചിത്രം 4.10

അതുകൊണ്ട്, E ൽ ആരംഭിക്കുന്ന അക്ഷര ചരടുകളുടെ എണ്ണം $5! = 120$.

(ii) എല്ലാ അക്ഷരശൃംഖലകളും E ൽ ആരംഭിച്ച് W ൽ അവസാനിക്കണം $5! = 120$.



ചിത്രം 4.11

അതുകൊണ്ട്, E യെ ആദ്യവും, W യെ അവസാനവും വയ്ക്കേണ്ടതാണ്. ബാക്കിയുള്ള 4 അക്ഷരങ്ങളെ ${}^4P_4 = 4!$ വഴികളിൽ ക്രമപ്പെടുത്താം.

അതുകൊണ്ട്, E ൽ ആരംഭിച്ച്, W ൽ അവസാനിക്കുന്ന അക്ഷരചരടുകളുടെ എണ്ണം $4! = 24$.

ഉദാഹരണം 4.29 നാലു വെവ്വേറായ സംഖ്യകൾ ഉള്ള 4–അക്ക സംഖ്യകളെ 1,2,3,4 കൂടാതെ 5 എന്ന സംഖ്യകളെ പ്രയോജനപ്പെടുത്തി തയ്യാറാക്കുമ്പോൾ താഴെക്കാണുന്നവയെ കാണുക.

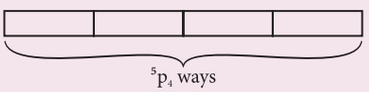
(i) ഇതുപോലുള്ള എത്ര സംഖ്യകളെ തയ്യാറാക്കാം?

(ii) ഇവയിൽ എത്ര സംഖ്യകൾ ഇരട്ട സംഖ്യകൾ?

(iii) ഇവയിൽ എത്ര സംഖ്യകൾ 4 കൊണ്ട് വിഭജിക്കപ്പെടുന്നു?

നിർദ്ധാരണം :

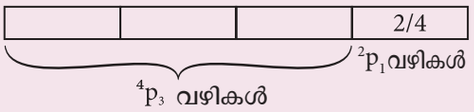
(i) നാലക്ക സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം തന്നിട്ടുള്ള 5 അക്കങ്ങളിൽ നിന്ന് 4 അക്കങ്ങളെ കൊണ്ട് തയ്യാറാക്കുന്നു. ക്രമം മാറ്റങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിനു സമം. ഇതിന്റെ വില ${}^5P_4 = 5\times 4\times 3\times 2 = 120$



ചിത്രം 4.12

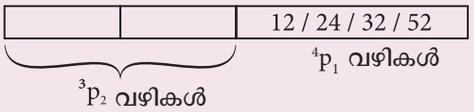
XI_Maths_Ch4_V-1_Mal.indd 211 14-02-2023 16:50:58

(ii) ഇരട്ടസംഖ്യയ്ക്കു അവസാന സംഖ്യ 2 അല്ലെങ്കിൽ 4 ആയി ഇരിക്കേണ്ടതാണ്. അതുകൊണ്ട് അവസാന സംഖ്യ ${}^2P_1$ വഴികളിൽ നിരത്താവുന്നതാണ്. അതുകൊണ്ട് ആവശ്യമായ ഇരട്ട സംഖ്യയുടെ സംഖ്യയുടെ എണ്ണം 3 സ്ഥാനങ്ങൾ ബാക്കിയിരിക്കും. ബാക്കിയുള്ള 4 അക്കങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചും ${}^4P_3$ വഴികളിൽ നിരത്താവുന്നതാണ് അതുകൊണ്ട് ആവശ്യമായ ഇരട്ടസംഖ്യകളുടെ എണ്ണത്തെ ${}^2P_1 \times {}^4P_3 = 2 \times 24 = 48$.



ചിത്രം 4.13

(iii) ഒരു സംഖ്യ 4 കൊണ്ട് വിഭജിക്കുന്നതിന് ആ സംഖ്യയുടെ അവസാന രണ്ട് അക്കങ്ങൾ 4 കൊണ്ട് വിഭജിക്കേണ്ടതാണ്. അതുകൊണ്ട് അവസാന രണ്ടു സംഖ്യകൾ നിരപ്പാക്കുന്നതിന് (4 വഴികൾ) 12, 24, 32, 52 എന്ന് ഇരിക്കേണ്ടതാണ്. ബാക്കിയുള്ള ആദ്യ രണ്ടു അക്കങ്ങളെ ബാക്കിയുള്ള 3 സംഖ്യകളെ കൊണ്ടു ${}^3P_2$ വഴികളിൽ നിരത്താവുന്നതാണ്. അതുകൊണ്ട് 4 ആൽ വിഭജിക്കുന്ന സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം ${}^4P_1 \times {}^3P_2 = 4 \times 6 = 24$.



ചിത്രം 4.14

4.4.3 വസ്തുക്കൾ എപ്പോഴും ഒന്നുപോലെ വന്നാൽ

n വ്യത്യസ്ഥമായ വസ്തുക്കളിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഏതൊരു m വസ്തുക്കളും ഒരേ പോൽ വരുന്ന രീതിയിലുള്ള ക്രമ മാറ്റത്തിന്റെ സംഖ്യയെ കാണുക

- ഒരേ ക്രമത്തിൽ ഉള്ള m വസ്തുക്കളെ കെട്ടി അതിനെ ഒരു യൂണിറ്റ് എന്ന് കണക്കാക്കുക.
- അതുപോലെ നമ്മുടെ കൈവശം $(n - m + 1)$ വസ്തുക്കൾ ഉണ്ട് ആ $(n - m + 1)$ വസ്തുക്കളെ $(n - m + 1)!$ വഴികളിൽ ക്രമപ്പെടുത്താവുന്നതാണ്.
- ഒരേപോൽ വരാനുള്ള m വസ്തുക്കളെ $m!$ വഴികളിൽ ക്രമപ്പെടുത്താം.
- ആവശ്യമുള്ള ക്രമമാറ്റങ്ങളുടെ എണ്ണത്തെ $m! \times (n - m + 1)!$ എന്ന് എഴുതാം.

4.4.4 ഏതൊരു രണ്ടു വസ്തുക്കളും ഒന്നുപോലെ വരാതിരുന്നാൽ

n വെവ്വേറായ (വ്യത്യസ്തമായ) വസ്തുക്കളിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഏതൊരു k വസ്തുക്കളും ഒരേ പോൽ വരാതിരുന്നാലും കൂടാതെ ബാക്കിയുള്ള $m = n-k$ വസ്തുക്കളിന്മേൽ ഏതൊരുവിധ നിയന്ത്രണങ്ങൾ ഇല്ലാതെയും ഉണ്ടാകുന്ന ക്രമമാറ്റങ്ങളുടെ എണ്ണം കാണുന്നതിന് താഴെ കാണുന്ന നിയമങ്ങളെ പിൻതുടരാം.

- ആദ്യമായി, നിയന്ത്രണമില്ലാത്ത m വസ്തുക്കളെ ഒരേ ക്രമത്തിൽ ക്രമീകരിക്കുക. ഈ m വസ്തുക്കളെ ${}^mP_m = m!$ വഴികളിൽ ക്രമീകരിക്കാം.
- ഏതൊരു നിയന്ത്രണവുമില്ലാത്ത m വസ്തുക്കൾക്ക് ഇടയ്ക്കുള്ള ഇടവേളയിൽ ആദ്യം അവസാന ഇടങ്ങളേയും ചേർത്തു എണ്ണേണ്ടതാണ്. ഈ രീതിയിലുള്ള ഇടവേളകൾ m നെക്കാൾ ഒന്നു കൂടുതലായി അല്ലെങ്കിൽ $(m + 1)$ ഇടവേളകൾ ഉണ്ടായിരിക്കും.

  ഈ $(m + 1)$ ന്റെ സ്ഥാനത്ത് k വസ്തുക്കളെ ${}^{(m+1)}P_k$ വഴികളിൽ ക്രമീകരിക്കാം.
- അതുകൊണ്ട് ആവശ്യമായ ക്രമമാറ്റങ്ങളുടെ എണ്ണം $m! \times {}^{(m+1)}P_k$.

ഉദാഹരണം 4.30 "സമവാക്യം" എന്ന വാക്കിലുള്ള അക്ഷരങ്ങളെ പ്രയോജനപ്പെടുത്തി

(i) സ്വരാക്ഷരങ്ങൾ ഒന്നായി വരുന്ന വിധത്തിൽ എത്ര അക്ഷരചരടുകൾ ഉണ്ടാക്കാം?

(ii) സ്വരാക്ഷരങ്ങൾ ഒന്നായി വരാത്ത രീതിയിൽ എത്ര അക്ഷരചരടുകൾ ഉണ്ടാക്കാം?

XI_Maths_Ch4_V-1_Mal.indd 212 14-02-2023 16:50:59

നിർദ്ധാരണം :

(i) "EQUATION" എന്ന വാക്കിൽ 8 അക്ഷരങ്ങൾ ഉണ്ട്. ഇവയിൽ 5 സ്വരാക്ഷരങ്ങൾ (E, U, A, I, O) കൂടാതെ 3 വ്യഞ്ജനാക്ഷരങ്ങൾ (Q, T, N) ഉണ്ട്. 5 സ്വരാക്ഷരങ്ങളെയും ഒരു അക്ഷരം പോലെ കരുതുന്നതിന് നമ്മുടെ കൈവശം 4 അക്ഷരങ്ങൾ ഉണ്ട്. ഇവയെ ${}^4P_4 = 4!$ രീതിയിൽ ക്രമീകരിക്കാം. എന്നാൽ ഈ ഓരോ ക്രമമാറ്റത്തിലും സ്വരാക്ഷരങ്ങൾ E, U, A, I, O എന്നിവയെ ${}^5P_5 = 5!$ വഴികളിൽ നമുക്ക് ക്രമപ്പെടുത്താം.

അതുകൊണ്ട് ഗുണന നിയമപ്രകാരം അക്ഷര ചരടുകളുടെ എണ്ണം
$4! \times 5! = 24 \times 120 = 2880.$

(ii) "EQUATION" എന്ന വാക്കിൽ ഉള്ള 8 അക്ഷരങ്ങളെക്കൊണ്ട് ഉണ്ടാക്കുന്ന അക്ഷരചരടുകളുടെ എണ്ണം ${}^8P_8 = 8! = 40320$.

അതുകൊണ്ട്, സ്വരാക്ഷരങ്ങൾ ഒന്നായ് വരാത്ത രീതിയിൽ ഉള്ള അക്ഷര ചരടുകളുടെ എണ്ണത്തെ ആകെ എഴുത്തു ചരടുകളുടെ എണ്ണത്തിൽ നിന്നും സ്വരാക്ഷരങ്ങൾ ഒന്നായി വരുന്ന രീതിയിൽ ഉള്ള എഴുത്തു ചരടുകളുടെ എണ്ണത്തെ കുറച്ച് കാണാം. അതുകൊണ്ട് ആവശ്യമായ എഴുത്തു ചരങ്ങളുടെ എണ്ണം $40320 - 2880 = 37440.$

ഉദാഹരണം 4.31 15 വിദ്യാർത്ഥികൾ എഴുതുന്ന ഒരു പരീക്ഷയിൽ, 7 വിദ്യാർത്ഥികൾ കണക്കു പരീക്ഷയും ബാക്കിയുള്ള 8 വിദ്യാർത്ഥികൾ വെവ്വേറെ വിഷയങ്ങൾക്കുള്ള പരീക്ഷയും എഴുതുന്നു. കണക്കു പരീക്ഷ എഴുതുന്ന ഏതു രണ്ടു വിദ്യാർത്ഥികളും ഒരേ ക്രമത്തിൽ അടുത്തടുത്ത് ഇല്ലാത്ത രീതിയിൽ എത്ര വഴികളിൽ ഇരുത്താം?

നിർദ്ധാരണം :

കണക്ക് അല്ലാതെ മറ്റുള്ള വിഷയങ്ങളിൽ പരീക്ഷ എഴുതുന്ന 8 വിദ്യാർത്ഥികളും ${}^8P_8 = 8!$ വഴികളിൽ ക്രമപ്പെടുത്താം. ഈ രീതിയിലുള്ള ഓരോ ക്രമീകരിക്കലുകളിലും 9 ഇടവേളകൾ ഉണ്ടായിരിക്കും. അതുകൊണ്ട് കണക്കു പരീക്ഷ എഴുതുന്ന 7 വിദ്യാർത്ഥികളെ ഈ 9 ഇടവേളകളിൽ ${}^9P_7$ വഴികളിൽ ഇരുത്താവുന്നതാണ്.

$$_O_1_O_2_O_3_O_4_O_5_O_6_O_7_O_8_$$

അതുകൊണ്ട്, ഗുണന നിയമമനുസരിച്ച് ആവശ്യമായ ക്രമമാറ്റങ്ങളുടെ എണ്ണം

$$8! \times {}^9P_7 = 8! \times \frac{9!}{2!} = \frac{8! \times 9!}{2!}.$$

ഉദാഹരണം 4.32 5 വിദ്യാർത്ഥികൾ 4 വിദ്യാർത്ഥിനികൾ ഒരേ ക്രമത്തിൽ ഏത് രണ്ടു വിദ്യാർത്ഥികളും അടുത്തടുത്ത് വരാതെ എത്ര വഴികളിൽ ഇരുത്തുന്നതിന് സാധിക്കും.

നിർദ്ധാരണം:

$$_B_1_B_2_B_3_B_4_B_5_$$

5 വിദ്യാർത്ഥികളെ ഒരേ ക്രമത്തിൽ ${}^5P_5 = 5!$ വഴികളിൽ ഇരുത്താവുന്നതാണ്. ഈ വിധത്തിൽ ഓരോ ക്രമീകരിക്കലിലും 6 ഇടവേളകൾ ഉണ്ടാകുന്നു. ഈ 6 ഇടവേളകളിൽ 4 വിദ്യാർത്ഥിനികളെ ${}^6P_4$ വഴികളിൽ ഇരുത്താവുന്നതാണ്.

അതുകൊണ്ട്, ഇരുത്താവുന്ന ആകെ വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം

$$5! \times {}^6P_4 = 120 \times 360 = 43200.$$

XI_Maths_Ch4_V-1_Mal.indd 213 14-02-2023 16:50:59

ഉദാഹരണം 4.33 4 വിദ്യാർത്ഥികൾ 4 വിദ്യാർത്ഥിനികൾ ഒരേ ക്രമത്തിൽ വിദ്യാർത്ഥിയും വിദ്യാർത്ഥിനിയും അടുത്തടുത്ത് വരുന്ന വിധത്തിൽ എത്ര വഴികളിൽ നിർത്താൻ സാധിക്കും?

നിർദ്ധാരണം :

4 വിദ്യാർത്ഥികളെ ഒരേ ക്രമത്തിൽ നിർത്തുന്ന വഴികൾ ${}^4P_4 = 4!$ വിദ്യാർത്ഥി (ആൺകുട്ടി) ആദ്യമായി എടുത്ത് ഈ ഓരോ ക്രമവും 4 ഇടവേള ഉണ്ടാക്കുന്നു. ഈ 4 സ്ഥലങ്ങളിൽ 4 വിദ്യാർത്ഥികളെ ${}^4P_4 = 4!$ വഴികളിൽ ഇരുത്താവുന്നതാണ്.

$$B_1_B_2_B_3_B_4_ \text{ or } G_1_G_2_G_3_G_4_$$

അതുകൊണ്ട് വിദ്യാർത്ഥിയെ ആദ്യമായി നിർത്തിയ ക്രമത്തിന്റെ എണ്ണം $4! \times 4!$.

ഇതുപോലെ മേൽ സൂചിപ്പിച്ച രീതികളിൽ വിദ്യാർത്ഥിനിയെ ആദ്യമായി നിർത്തിയ ക്രമത്തിന്റെ എണ്ണം $4! \times 4!$. അതുകൊണ്ട് സങ്കലന സിദ്ധാന്ത പ്രകാരം വിദ്യാർത്ഥി അല്ലെങ്കിൽ വിദ്യാർത്ഥിനിയോ ആദ്യമായിട്ടുള്ള ക്രമമാറ്റങ്ങളുടെ ആകെ എണ്ണം

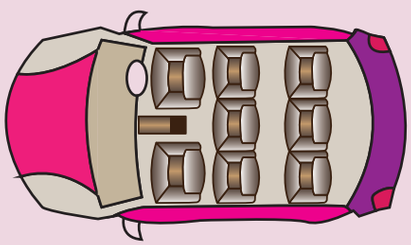
$$(4! \times 4!) + (4! \times 4!) = 2(4!)^2 = 1152.$$

ഉദാഹരണം 4.34 ഒരു വണ്ടിയിൽ 8 ഇരിപ്പിടങ്ങൾ ഉണ്ട്. ആദ്യത്തെ വരിയിൽ 2 ഇരിപ്പിടങ്ങളും അതിന്റെ പിന്നിൽ രണ്ടു വരികളിൽ ഓരോന്നിലും മൂന്നു ഇരിപ്പിടങ്ങൾ ഉണ്ട്. ആ വണ്ടി, ഏഴു ആൾക്കാർ $F, M, S_1, S_2, S_3, D_1, D_2$ ഉള്ള ഒരു കുടുംബത്തിനു സ്വന്തമായിട്ടുള്ളതാണ്. താഴെ കാണുന്ന നിബന്ധനകൾക്കു വിധേയമായി ആ വണ്ടിയിൽ എത്ര വഴികളിൽ ഇരുത്താൻ സാധിക്കും?

(i) ഒരുവിധ നിബന്ധനയുമില്ല

(ii) F അല്ലെങ്കിൽ M വണ്ടിയോ ഓടിക്കണം

(iii) F വണ്ടിയെ ഓടിക്കുമ്പോൾ D_1, D_2 ജന്നലിനടുത്ത ഇരിപ്പിടത്തിൽ ഇരിക്കേണ്ടതാണ്.



നിർദ്ധാരണം :

വണ്ടിയിൽ ഉള്ള 8 ഇരിപ്പിടത്തിൽ ഒരു ഇരിപ്പിടം ഡ്രൈവർക്ക് വേണ്ടി ഒതുക്കിയിരിക്കുന്നു. ഏതൊരു നിബന്ധനയും ഇല്ലാതെ ആരു വേണമെങ്കിലും വാൻ ഓട്ടിക്കാം. അതുകൊണ്ട് ഡ്രൈവർ ഇരിപ്പിടത്തിൽ ഇരിക്കുന്നതിന് ${}^7P_1 = 7$ വഴികൾ ഉണ്ട്. ബാക്കിയുള്ള 7 ഇരുപ്പിടത്തിൽ ബാക്കിയുള്ള 6 പേർ ${}^7P_6 = 5040$ വഴികളിൽ ഇരിക്കാം. അതുകൊണ്ട് വണ്ടിയിൽ ആ കുടുംബത്തെ $7 \times 5040 = 35280$ വഴികളിൽ ഇരുത്തുന്നതിന് സാധിക്കും.

(iv) ഡ്രൈവർ ഇരിപ്പിടം F അല്ലെങ്കിൽ M നിരത്തണമെങ്കിൽ, ഇതിനെ നിരത്തുന്നതിന് രണ്ടു വഴികളിൽ സാധിക്കും. അതുകൊണ്ട് വണ്ടിയിൽ ആ കുടുംബത്തെ $2 \times 5040 = 10080$ വഴികളിൽ ഇരുത്താൻ സാധിക്കും.

5 ജന്നലോര ഇരിപ്പിടങ്ങൾ മാത്രം ഉള്ളതുകൊണ്ട്, D_1 കൂടാതെ D_2 ജന്നലോര ഇരിപ്പിടത്തിൽ ${}^5P_2 = 20$ വഴികൾ ഉണ്ട്. ഡ്രൈവർ ഇരുപ്പിടത്തിൽ ഇരിക്കുന്നു. ബാക്കിയുള്ള 4 പേർ ബാക്കിയുള്ള 5 ഇരിപ്പിടങ്ങളിൽ ഇരിക്കുന്നതിന് ${}^5P_4 = 120$ വഴികൾ ഉണ്ട്. അതുകൊണ്ട് വണ്ടിയിൽ ആ കുടുംബം $20 \times 1 \times 120 = 2400$ വഴികളിൽ ഇരിക്കാൻ സാധിക്കും.

XI_Maths_Ch4_V-1_Mal.indd 214 14-02-2023 16:51:00

അടുത്ത കണക്കിനെ മനസ്സിലാക്കുന്നതിന് നാം **ഇംഗ്ലീഷ് അക്ഷരമാലയിൽ വാക്കുകളുടെ തരം** (*Rank of a word in the English Dictionary*) എന്നതിനെ നിർവ്വചിക്കാം. കൊടുത്തിട്ടുള്ള വാക്കിലുള്ള അക്ഷരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ഉണ്ടാക്കുന്ന അക്ഷര ചരടുകൾ ഇംഗ്ലീഷ് അക്ഷരമാലയിലെ ക്രമത്തിൽ എഴുതുമ്പോൾ അക്ഷരം വരുന്ന സ്ഥലത്ത് അതിന്റെ തരം എന്ന് നിർവചിക്കപ്പെടുന്നു.

ഉദാഹരണം 4.35 TABLE എന്ന വാക്കിലുള്ള അക്ഷരങ്ങളെ ക്രമമാറ്റം ചെയ്തു കിട്ടുന്ന എല്ലാ അക്ഷര ചരടുകളെയും ഇംഗ്ലീഷ് അക്ഷരമാലയിൽ ഉള്ള രീതിയിൽ ക്രമത്തിൽ മാറ്റിയാൽ താഴെ കാണുന്ന വാക്കുകളുടെ തരം കാണുക.

(i) TABLE (ii) BLEAT

നിർദ്ധാരണം :

കൊടുത്തിട്ടുള്ള വാക്കുകളുടെ എഴുത്തുക്കൾ ഇംഗ്ലീഷ് അക്ഷരമാലയിലെ A, B, E, L, T എന്ന ക്രമത്തിൽ വരുന്നു. അക്ഷരമാലയിൽ A യിൽ ആരംഭിക്കുന്ന വാക്കുകൾ ആണ് ആദ്യം വരുന്നത്. ആദ്യ സ്ഥലത്ത് A യെ നിർത്തി ബാക്കിയുള്ള 4 അക്ഷരങ്ങൾ (B,E,L,T) 4! വഴികളിൽ ക്രമപ്പെടുത്താം. അതു പോലെ ബാക്കി നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നത്,

(i) TABLE എന്ന വാക്കിന്റെ തരം

A _ _ _ _ = 4! = 24 വഴികൾ

B _ _ _ _ = 4! = 24 വഴികൾ

E _ _ _ _ = 4! = 24 വഴികൾ

L _ _ _ _ = 4! = 24 വഴികൾ

T A B E L = 1 വഴി

T A B L E = 1 വഴി

TABLE എന്ന വാക്കിന്റെ തരം $4 \times 4! + 1 + 1 = 98$.

(ii) BLEAT ന്റെ വാർത്തയിൽ

A _ _ _ _ = 4! = 24 വഴികൾ

B A _ _ _ = 3! = 6 വഴികൾ

B E _ _ _ = 3! = 6 വഴികൾ

B L A _ _ = 2! = 2 വഴികൾ

BLEAT = 1 വഴി

BLEAT എന്ന വാക്കിന്റെ തരം $24 + 6 + 6 + 2 + 1 = 39$.

4.4.5 എല്ലാം വ്യത്യസ്തമായല്ലാതെ വരുന്ന വസ്തുക്കളുടെ ക്രമമാറ്റങ്ങൾ

J E E എന്ന വാർത്തയെ ക്രമമാറ്റം ചെയ്യുന്നതായി കണക്കാക്കാം. ഇതിലുള്ള അക്ഷരങ്ങൾ എല്ലാം വ്യത്യസ്തമായല്ല. ഇതിൽ E എന്ന അക്ഷരം രണ്ടുതവണ വന്നത് ഒരേ രീതിയിൽ ആയിരിക്കുന്നു. തൽക്കാലം ഈ രണ്ടു E അക്ഷരങ്ങളിൽ ഒന്നിനെ E_1 എന്നും മറ്റൊന്നിനെ E_2 എന്നും കണക്കാക്കാം. മൂന്നു വ്യത്യസ്തമായ അക്ഷരങ്ങളിൽ ഒരേ സമയം ഉണ്ടാകുന്ന എല്ലാക്രമമാറ്റങ്ങളുടെ എണ്ണം 3! ആകുന്നു.

XI_Maths_Ch4_V-1_Mal.indd 215 14-02-2023 16:51:00

E_1, E_2 എന്നിവ വ്യത്യസ്തമായി കരുതുമ്പോൾ ക്രമമാറ്റങ്ങൾ	E_1, E_2 എന്നിവ ഒരേ രീതിയിൽ കരുതുമ്പോൾ ക്രമമാറ്റങ്ങൾ
$J\,E_1\,E_2$, $J\,E_2\,E_1$	JEE
$E_1\,J\,E_2$, $E_2\,J\,E_1$	EJE
$E_1\,E_2\,J$, $E_2\,E_1\,J$	EEJ

E_1,E_2 എന്ന 2 അക്ഷരങ്ങൾ തങ്ങൾക്ക് ക്രമമാറ്റം ചെയ്യുമ്പോൾ വാസ്തവത്തിൽ അതേ ക്രമമാറ്റം കിട്ടുന്നതാണ് ഇതിനുകാരണം. ഇവ രണ്ടും ഒന്നാണ്. അതിനാൽ ആവശ്യമായ ക്രമമാറ്റങ്ങൾ $\frac{3!}{2!} = 3$.

സിദ്ധാന്തം 4.4

n വസ്തുക്കളിൽ, o വസ്തുക്കൾ ഒരേ രീതിയായിട്ടും ബാക്കിയുള്ളതെല്ലാം വ്യത്യസ്തമായും ഉള്ള വസ്തുക്കളുടെ ക്രമമാറ്റങ്ങളുടെ എണ്ണം $\frac{n!}{p!}$.

സാധാരണയായി, n വസ്തുക്കളിൽ, o_1 വസ്തുക്കൾ ആദ്യ ഗ്രൂപ്പാകുന്നു. o_2 വസ്തുക്കൾ രണ്ടാമത്തെ ഗ്രൂപ്പിലും,... o_k വസ്തുക്കൾ k ഗ്രൂപ്പിലും മറ്റേ വസ്തുക്കൾ ഓരോന്നും വ്യത്യസ്തമായും കാണപ്പെട്ടാൽ ക്രമമാറ്റത്തിന്റെ എണ്ണം $\frac{n!}{p_1! \times p_2! \times \ldots \times p_k!}$. □

ഉദാഹരണം 4.36 BANANA എന്ന വാക്കിൽ ഉള്ള അക്ഷരങ്ങളെ എത്രവകയിൽ ക്രമീകരിക്കാം?

നിർദ്ധാരണം :

ഈ വാക്കിൽ 6 അക്ഷരങ്ങൾ ഉണ്ട്. ഇതിൽ മൂന്നു A കളും രണ്ടു N കളും കൂടാതെ ഒരു B യും ഉള്ളത്. ഇവയെ ക്രമീകരിക്കുന്ന തരങ്ങളുടെ എണ്ണം $\frac{6!}{3! \times 2!} = 60$.

ഉദാഹരണം 4.37 RAMANUJAN എന്ന വാക്കിൽ ഉള്ള സ്വരാക്ഷരങ്ങൾ, വ്യഞ്ജനാക്ഷരങ്ങളുടെ ഇരിപ്പിട നിലകൾ മാറ്റാതെ എത്ര വഴികളിൽ ക്രമപ്പെടുത്താം?

നിർദ്ധാരണം :

RAMANUJAN എന്ന വാക്കിൽ 4 സ്വരാക്ഷരങ്ങൾ (A,A,U,A) ഉണ്ട്. ഇതിൽ മൂന്നു A കളും ഒരു U ഉം ഉണ്ട്. മറ്റുള്ളവ വ്യത്യസ്തമായും കാണുന്നു. ഈ നാലു സ്വരാക്ഷരങ്ങളെ (R,M,N,J,N) 4 സ്വരാക്ഷരങ്ങൾ (A,A,A,U) അവയ്ക്ക് $\frac{4!}{3!} = 4$ വഴികളിൽ ക്രമപ്പെടുത്താം. കൂടാതെ 5 വ്യജ്ഞനാക്ഷരങ്ങൾ (R,M,N,J,N) അവയ്ക്കിടയിൽ $\frac{5!}{2!} = 60$ വഴികളിൽ ക്രമപ്പെടുത്താം. അതുകൊണ്ട് ആവശ്യമായ ക്രമമാറ്റങ്ങളുടെ എണ്ണം $\frac{4!}{3!} \times \frac{5!}{2!} = 4 \times 60 = 240$.

XI_Maths_Ch4_V-1_Mal.indd 216 14-02-2023 16:51:00

ഉദാഹരണം 4.38 ഒരു ഫോട്ടോ എടുക്കുന്നതിന് ഒരു വരിയിൽ മൂന്നു ജോടി ഇരട്ടകൾ നിൽക്കുന്നു. താഴെക്കാണുന്ന നിബന്ധനകൾക്കുൾപ്പെട്ട് എത്ര വഴികളിൽ ക്രമപ്പെടുത്താം.

(i) ഏതൊരു നിബന്ധനയുമില്ലാതെ

(ii) ഓരോരുത്തരും അവരുടെ ഇരട്ടകൾക്ക് അരുകിൽ നിൽക്കേണ്ടതാണ്.

നിർദ്ധാരണം :

(i) ഏതൊരു നിയന്ത്രണവും ഇല്ലാതെ 6 പേർ ${}^6P_6 = 6! = 720$ എന്ന വഴികളിൽ നിർത്താവുന്നതാണ്.

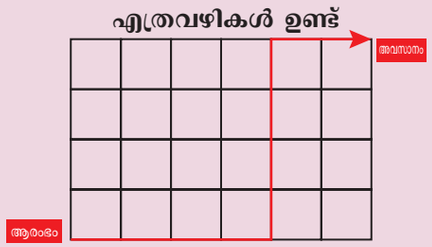
മൂന്നു ജോടി ഇരട്ടകളെ T_1, T_2, T_3 എന്ന ഓരോ ജോടി ഇരട്ടകളെയും ഒരു യൂണിറ്റാക്കിക്കൊണ്ട് അവരെ $3!$ വഴികളിൽ ക്രമീകരിക്കാം. ഇതിൽ ഉള്ള ഓരോ ജോടി ഇരട്ടകളെയും അവർ തമ്മിൽ $2!$ വഴികളിൽ ക്രമീകരിക്കാം. അതുകൊണ്ട് എല്ലാ ക്രമ പരിവർത്തനത്തിന്റെയും എണ്ണം $3! \times 2! \times 2! \times 2! = 48$ വഴികളിൽ.

ഉദാഹരണം 4.39 1,2,3,4,2,1 എന്ന സംഖ്യകളെ ഉപയോഗപ്പെടുത്തി ഇരട്ട ജോടി സംഖ്യകൾ ഇരട്ട ഇടത്തിൽ വരുന്നവിധം എത്ര സംഖ്യകൾ ഉണ്ടാക്കാം?

നിർദ്ധാരണം :

ഇതിൽ കാണുന്ന 6 സ്ഥലങ്ങളിൽ ഉള്ള 3 ഇരട്ടജോടി സ്ഥലങ്ങളിൽ 2, 4, 2 എന്ന ഇരട്ട ജോടി സംഖ്യകൾ വരേണ്ടതാണ്. 2, 4, 2 എന്ന സംഖ്യകളെ 3 ഇരട്ടജോടി സ്ഥലങ്ങളിൽ $\frac{3!}{2!} = 3$ വഴികളിൽ ക്രമപ്പെടുത്താം. ബാക്കിയുള്ള 1, 3, 1 എന്ന സംഖ്യകളെ $\frac{3!}{2!} = 3$ വഴികളിൽ ക്രമപ്പെടുത്താവുന്നതാണ്. അതുകൊണ്ട് ആവശ്യമായ സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം $3 \times 3 = 9$.

ഉദാഹരണം 4.40 ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നതുപോലെ 6×4 കള്ളികളിൽ ആരംഭത്തിൽ നിന്ന് അവസാനം വരെ എത്തുന്നതിന് എത്രവഴികൾ ഉണ്ട്?



ചിത്രം 4.15

നിർദ്ധാരണം :

ഓരോ വഴിയിലും 6 തിരശ്ചീന നീള യൂണിറ്റുകളും കൂടാതെ ലംബനീള യൂണിറ്റുകളും ഉണ്ട്. ഓരോ വഴിയിലും 4 ലംബനീള യൂണിറ്റും ഉണ്ട്. ഓരോ വഴിയിലും 10 നീളയൂണിറ്റുകൾ ഉണ്ട്. ഇതിൽ 6 ഒരു വകയിലും (തിരശ്ചീനം) 4 മറ്റൊരു വകയിലും (ലംബം) ഉണ്ട്.

അതുകൊണ്ട് ആകെ പാതയുടെ എണ്ണം $\frac{10!}{4! \times 6!} = 210$.

XI_Maths_Ch4_V-1_Mal.indd 217 14-02-2023 16:51:01

ഉദാഹരണം 4.41 BHASKARA ഇംഗ്ലീഷ് വാക്കിൽ ഉള്ള അക്ഷരങ്ങൾ ഇംഗ്ലീഷ് ഡിക്ഷണറിയിൽ ഉള്ള രീതിയിൽ ക്രമമാറ്റം ചെയ്യുമ്പോൾ B യിൽ തുടങ്ങുന്ന വാക്കുകൾക്ക് മുമ്പിൽ എത്ര അക്ഷര ചരങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കും?

നിർദ്ധാരണം :

B–യ്ക്കു മുമ്പിൽ A യിൽ തുടങ്ങുന്ന വാക്കുകൾ വരും. അതുകൊണ്ട് A യിൽ തുടങ്ങുന്ന A,A,B,H,K,R,S എന്ന അക്ഷരങ്ങളെ ഉപയോഗിച്ച് ഉണ്ടാക്കുന്ന അക്ഷര ചതുരങ്ങളുടെ എണ്ണം $\frac{7!}{2!} = 2520$ ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം 4.42 IITJEE വാക്കുകളിലുള്ള എല്ലാ അക്ഷരങ്ങളെയും എല്ലാ വഴികളിലും ക്രമമാറ്റം ചെയ്തു ഉണ്ടാകുന്ന അക്ഷരചരങ്ങളെ ഇംഗ്ലീഷ് ഡിക്ഷ്ണറിയിൽ ഉള്ള രീതിയിൽ ക്രമപ്പെടുത്തുമ്പോൾ IITJEE എന്ന വാക്കിന്റെ തരം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം :

IITJEE ൽ ഉള്ള അക്ഷരങ്ങൾ ഡിക്ഷണറി ക്രമത്തിൽ E,E,I,I,J,T എന്ന രീതിയിൽ ആയിരിക്കും. ഡിക്ഷ്ണറിയിൽ E ൽ തുടങ്ങുന്ന വാക്കുകൾ ആദ്യം വരുന്നു. ആദ്യ സ്ഥലത്തിൽ E കൊണ്ട് പൂർത്തിയാക്കിയശേഷം ബാക്കിയുള്ള 5 (E,I,I,J,T) അക്ഷരങ്ങളെ $\frac{5!}{2!}$ വഴികളിൽ ക്രമീകരിക്കാം.

ഇതുപോലെ തുടർന്നാൽ നമുക്ക് കിട്ടുന്നത്,

$E_____ = \frac{5!}{2!} = 60$ വഴികൾ

$E_____ = 4! = 24$ വഴികൾ

$I\ I\ E___ = 3! = 6$ വഴികൾ

$I\ I\ J___ = \frac{3!}{2!} = 3$ വഴികൾ

$I\ I\ T\ E__ = 2! = 2$ വഴികൾ

$I\ I\ T\ J\ E\ E = 1$ വഴി.

അതുകൊണ്ട്, IITJEE എന്ന വാക്കിന്റെ തരം $60 + 24 + 6 + 3 + 2 + 1 = 96$ ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം 4.43 1, 2, 4, 6, 8 എന്ന സ്ഥാനമുള്ള (അക്കങ്ങൾ) സംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ച് ഉണ്ടാക്കുന്ന എല്ലാ 4–അക്ക സംഖ്യകളുടെ തുക കാണുക.

നിർദ്ധാരണം :

തന്നിട്ടുള്ള 5 അക്കങ്ങളെകൊണ്ട് ഉണ്ടാക്കുന്ന 4–അക്ക സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം ${}^5P_4 = 120$ നാം ആദ്യം മൂന്നാംസ്ഥാനത്തിലുള്ള എല്ലാ 120 സംഖ്യകളുടെ തുക കാണാം. ഒന്നാം സ്ഥാനത്തിൽ 1-ഉം മറ്റേ സ്ഥാനങ്ങളിൽ ബാക്കിയുള്ള 4 സംഖ്യകളെ ${}^4P_3 = 24$ വഴികളിൽ ക്രമപ്പെടുത്താം. ഇതുപോലെ, 2, 4, 6, 8 ആകിയ അക്കങ്ങൾ ഒന്നാം സ്ഥാനത്തിൽ 24 തവണ വരുന്നു. എല്ലാ 120 സംഖ്യകളുടെ ഒന്നാം സ്ഥാനത്തിൽ വരുന്ന അക്കങ്ങളുടെ കൂട്ടുതുക കിട്ടുന്നു.

$$({}^4P_3 \times 1) + ({}^4P_3 \times 2) + ({}^4P_3 \times 4) + ({}^4P_3 \times 6) + ({}^4P_3 \times 8)$$

$$= {}^4P_3 \times (1 + 2 + 4 + 6 + 8)$$

XI_Maths_Ch4_V-1_Mal.indd 218 14-02-2023 16:51:01

$= {}^4P_3 \times$ (അക്കങ്ങളുടെ തുക)

$= {}^4P_3 \times 21.$

ഇതുപോലെ, 10-ാം സ്ഥാനത്തിൽ ഉള്ള സംഖ്യകളുടെ കൂട്ടുതുക ${}^4P_3 \times 21$. ഇതു 10-ാം സ്ഥാനത്തിൽ ഉള്ളതിനാൽ ഇതിന്റെ വില ${}^4P_3 \times 21 \times 10$. ഇതുപോലെ, 100-ാം സ്ഥാനം കൂടാതെ 1000-ാം സ്ഥാനത്തിൽ ഉള്ള സംഖ്യകളുടെ വില യഥാക്രമം ${}^4P_3 \times 21 \times 100$ കൂടാതെ ${}^4P_3 \times 21 \times 1000$. അതുകൊണ്ട് 1, 2, 4, 6, 8 എന്ന അക്ഷരങ്ങളെ കൊണ്ട് ഉണ്ടാക്കുന്ന എല്ലാ 4 സംഖ്യകളുടെ കൂട്ടുതുക

$$({}^4P_3 \times 21) + ({}^4P_3 \times 21 \times 10) + ({}^4P_3 \times 21 \times 100) + ({}^4P_3 \times 21 \times 1000)$$

$$= {}^4P_3 (21 \times 1111)$$

$$= 24 \times 21 \times 1111$$

$$= 559944.$$

ചിന്തിച്ചു മനസ്സിലാക്കുക 4.1

n പൂജ്യമല്ലാത്ത സ്ഥാനങ്ങളെക്കൊണ്ട് ഉണ്ടാകുന്ന എല്ലാ r –സ്ഥാനസംഖ്യകളുടെ കൂട്ടുതുക

$\{ {}^{n-1}P_{r-1} \times$ (സ്ഥാന സംഖ്യകളുടെ തുക) $\times 111...1 (r$ തവണ$)\}$

ചിന്തിച്ചു മനസ്സിലാക്കുക 4.2

കൊടുത്തിട്ടുള്ള n സ്ഥാനസംഖ്യകളിൽ 0 ഒരു സംഖ്യ (സ്ഥാനം) എങ്കിൽ ഇതിനാൽ ഉണ്ടാകുന്ന എല്ലാ r (സ്ഥാന) അക്കങ്ങളുടെ തുക

$\{ {}^{n-1}P_{r-1} \times$ (സംഖ്യകളുടെ തുക) $\times 111...1 (r$ തവണ$)\} -$

$\{ {}^{n-2}P_{r-2} \times$ (സംഖ്യകളുടെ തുക) $\times 111...1 ((r-1)$ തവണ$)\}.$

ഫലനങ്ങളുടെ ക്രമപരിവർത്തനം (Permutation as Function)

$S_n = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$ എന്ന അവസാനിക്കുന്ന ഗണത്തിന്മേലുള്ള ക്രമമാറ്റം എന്നത് $S_n \to S_n$ ന് നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ട ഇരുപുറ ഫലനം ആകുന്നു. അതുകൊണ്ട് n പദങ്ങൾ ഉള്ള അവസാനിക്കുന്ന ഗണത്തിന്മേൽ നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ട ക്രമമാറ്റത്തിന്റെ എണ്ണം ആ ഗണത്തിന്മേൽ നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ട ഇരുപുറ ഫലനങ്ങളുടെ ആകെ എണ്ണത്തിന് സമമാകുന്നു. ഇത് കൃത്യമായി $n!$ ആകുന്നു. അതുകൊണ്ട് ഒരു ഗണത്തിന്മേലുള്ള ക്രമമാറ്റങ്ങളെക്കുറിച്ച് പഠിക്കുന്നതും, ആ ഗണത്തിന്മേലുള്ള ഇരുപുറ ഫലനങ്ങളെപ്പറ്റി പഠിക്കുന്നതും ഒന്നാണ്. S_3–ൽ മേലുള്ള ചില ക്രമമാറ്റങ്ങൾ താഴെ കൊടുത്തിട്ടുണ്ട്.

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{bmatrix}, \ldots$$

അഭ്യാസം 4.2

1. ${}^{(n-1)}P_3 : {}^nP_4 = 1:10$ എങ്കിൽ, n കാണുക.
2. ${}^{10}P_{r-1} = 2 \times {}^6P_r$ എങ്കിൽ, r കാണുക.

XI_Maths_Ch4_V-1_Mal.indd 219 14-02-2023 16:51:02

3. (i) ഒരു നീന്തൽ മത്സരത്തിൽ 8 പേർ പങ്കുചേരുന്നു. സ്വർണ്ണം, വെള്ളി, വെങ്കലം, പാരിതോഷികങ്ങൾ എത്ര വഴികളിൽ നൽകാൻ സാധിക്കും?

(ii) മൂന്നു പേരുടെ കൈയിൽ 4 ഷർട്ട്, 5 മേൽ ഷർട്ട് (കോട്ട്), 6 തൊപ്പികൾ കാണുന്നു. ഇവയെ അവർക്ക് എത്രവഴികളിൽ ധരിക്കാൻ സാധിക്കും?

4. SIMPLE എന്ന വാക്കിലുള്ള ഉള്ള എല്ലാ അക്ഷരങ്ങളെയും ഒരേ നേരത്തിൽ പ്രയോജനപ്പെടുത്തി എത്ര ക്രമമാറ്റങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കാം?

5. ഒരു പരീക്ഷയിൽ 10 ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുക്കുന്ന ചോദ്യങ്ങൾ ഉണ്ട്. താഴെ കാണുന്ന നിബന്ധനകൾക്കുൾപ്പെട്ട് എത്ര വഴികൾ ഈ ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഉത്തരം നല്കാം.

(i) ഓരോ ചോദ്യത്തിനും 4 അവസരങ്ങൾ ഉണ്ട്.

(ii) ആദ്യത്തെ നാലു ചോദ്യങ്ങൾക്ക് 3 അവസരങ്ങളും ബാക്കിയുള്ള ചോദ്യങ്ങൾക്ക് 5 അവസരങ്ങളും ഉണ്ട്.

(iii) n മത്തെ ചോദ്യത്തിന് $n + 1$ അവസരങ്ങൾ ഉണ്ട്.

6. ഒരു വിദ്യാർത്ഥി 5 ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുക്കുക എന്ന ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഉത്തരം നല്കേണ്ടതാണ്. ഓരോ ചോദ്യത്തിനും ഉള്ള 4 അവസരങ്ങളിൽ ഒന്നു ശരിയാണ്.

(i) അധികപക്ഷം എത്ര വേവ്വേറായ ഉത്തരങ്ങളെ ഒരു വിദ്യാർത്ഥിയാൽ നല്കാൻ സാധിക്കും?

(ii) ഓരോ ചോദ്യത്തിനും ഒന്നിൽ കൂടുതൽ അവസരങ്ങളും ശരിയായിരിക്കാം എങ്കിൽ ഈ ഉത്തരം എപ്രകാരം മാറ്റാൻ സാധിക്കും?

7. ARTICLE എന്ന വാക്കിലുള്ള സ്വരാക്ഷരങ്ങൾ രണ്ടക്ക സ്ഥാനത്തിൽവരുന്ന വിധത്തിൽ എത്ര അക്ഷര ചരടുകൾ ഉണ്ടാക്കാൻ സാധിക്കും?

8. 8 സ്ത്രീകൾ 6 പുരുഷന്മാർ ഒരു വരിയിൽ നിൽക്കുന്നു.

(i) ആരും ഏതു സ്ഥലത്തും നിൽക്കാം എന്ന രീതിയിൽ എത്ര വഴികളിൽ നിൽക്കാം?

(ii) 6 പുരുഷന്മാരും അടുത്തടുത്ത് വരുന്ന വിധത്തിൽ എത്ര വഴികളിൽ നിൽക്കാൻ സാധിക്കും?

(iii) ഏത് രണ്ട് പുരുഷന്മാരും ഒരുമിച്ച് നിൽക്കാതെ എത്ര വഴികളിൽ നിർത്താൻ സാധിക്കും?

9. MISSISSIPPI എന്ന വാക്കുകളിലുള്ള അക്ഷരങ്ങളെ പ്രയോജനപ്പെടുത്തി എത്ര വെവ്വേറായ ക്രമമാറ്റങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കാം?

10. $a^2\, b^3\, c^4$ എന്ന ഗുണനത്തിൽ ഘാതാങ്ക ചിഹ്നങ്ങളെ പ്രയോജനപ്പെടുത്താതെ എത്ര വഴികളിൽ എഴുതാം ?

11. 4 ഗണിത പുസ്തകങ്ങൾ, 3 ഭൗതിക ശാസ്ത്ര പുസ്തകങ്ങൾ, 2 രസതന്ത്ര പുസ്തകങ്ങൾ കൂടാതെ 1 ജന്തുശാസ്ത്ര പുസ്തകങ്ങൾ ഒരു അലമാരിയിൽ ഒരേ പാഠ പുസ്തകങ്ങൾ ഒന്നായിട്ട് വരുന്ന രീതിയിൽ എത്ര വഴികളിൽ അടുക്കാം?

12. SUCCESS എന്ന വാക്കിൽ ഉള്ള അക്ഷരങ്ങളിൽ എല്ലാ S കളും ഒന്നായി വരുന്ന വിധത്തിൽ എത്ര വഴികളിൽ ക്രമീകരിക്കാം?

13. ഒരു നാണയം 8 തവണ ടോസ്സ് ചെയ്യുന്നു.

(i) വ്യത്യസ്തമായ തലകൾ, മറ്റും പൂക്കൾ ഉള്ള ക്രമമാറ്റം ഉണ്ടാകുന്നതെങ്ങനെ?

(ii) ആറു തലകൾ, കൂടാതെ രണ്ടുപൂക്കൾ ഉള്ള വെവ്വേറായ വരികൾ എത്ര ഉണ്ടാകും?

XI_Maths_Ch4_V-1_Mal.indd 220 14-02-2023 16:51:02

14. INTERMEDIATE എന്ന വാക്കിലുള്ള അക്ഷരങ്ങളെ പ്രയോജനപ്പെടുത്തി താഴെ കാണുന്ന നിരൂപണങ്ങൾക്ക് ഉൾപ്പെട്ട് എത്ര അക്ഷര ചങ്ങല രൂപീകരിക്കാം.

(i) സ്വരാക്ഷരങ്ങളും വ്യഞ്ജനാക്ഷരങ്ങളും അടുത്തടുത്ത് വരുന്നത്

(ii) എല്ലാ സ്വരാക്ഷരങ്ങളും ഒരുമിച്ച് വരുന്ന വിധത്തിൽ

(iii) സ്വരാക്ഷരങ്ങൾ ഒരുമിച്ച് വരാത്ത വിധത്തിൽ

(iv) ഏത് രണ്ട് സ്വരാക്ഷരങ്ങളും ഒരുമിച്ച് വരാത്ത രീതിയിൽ

15. 1, 1, 2, 3, 3 കൂടാതെ 4 എന്ന അക്കങ്ങൾ ഓരോന്നായി കാർഡ് ബോർഡിൽ എഴുതിയിരിക്കുന്നു. ഒരു 6 അക്ക സംഖ്യ ഉണ്ടാകുന്നതിന് ഈ ആറു കാർഡ് ബോർഡുകളെയും ക്രമീകരിക്കുമ്പോൾ

(i) എത്ര വെവ്വേറായ 6–അക്ക സംഖ്യകൾ രൂപീകരിക്കാം?

(ii) ഇവയിൽ എത്ര 6–അക്ക സംഖ്യകൾ ഇരട്ട സംഖ്യ?

(iii) ഇവയിൽ എത്ര 6–അക്ക സംഖ്യകൾ 4 കൊണ്ട് വിഭജിക്കാം?

16. GARDEN എന്ന വാക്കിൽ ഉള്ള അക്ഷരങ്ങളെ ക്രമം മാറ്റുന്നതിനു ഉൾപ്പെടുത്തി കിട്ടുന്ന അക്ഷര ചങ്ങലകളെ ഇംഗ്ലീഷ് ഡിക്ഷ്ണറിയിൽ ഉള്ളതുപോലെ ക്രമീകരിക്കുമ്പോൾ താഴെ കാണുന്ന വാക്കുകളുടെ തരത്തെ കാണുക. (i) GARDEN (ii) DANGER

17. THING എന്ന വാക്കിലുള്ള അക്ഷരങ്ങളെ ക്രമമാറ്റത്തിനുൾപ്പെടുത്തി എത്ര അക്ഷരചരങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കാം. കൂടാതെ ഇംഗ്ലീഷ് ഡിക്ഷ്ണറിയിൽ ഉള്ളതുപോലെ ക്രമീകരിക്കുമ്പോൾ 85-ാമത്തെ അക്ഷരചങ്ങല ഉണ്ടായിരിക്കും ?

18. FUNNY എന്ന വാക്കിൽ ഉള്ള അക്ഷരങ്ങളെ ക്രമമാറ്റം ചെയ്തു കിട്ടുന്ന അക്ഷരചരങ്ങളെ ഇംഗ്ലീഷ് ഡിക്ഷ്ണറിയിൽ ഉള്ളതുപോലെ ക്രമീകരിക്കുമ്പോൾ FUNNY എന്ന വാക്കിന്റെ തരം കാണുക.

19. 1, 2, 3, 4 കൂടാതെ 5 എന്ന അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിച്ച് വരാത്ത രീതിയിൽ ഉണ്ടാക്കുന്ന എല്ലാ 4– അക്ക സംഖ്യയുടെ തുക കാണുക.

20. 0, 2, 5, 7, 8 എന്ന അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിച്ച് വരുന്ന വകയിൽ ഉണ്ടാക്കുന്ന എല്ലാ 4–അക്ക സംഖ്യയുടെ കൂട്ടുതുക കാണുക.

4.5 സംയോജനം

A,B,C കൂടാതെ D എന്ന ഏതെങ്കിലും 4 പേരിൽ 3 പേരെ തിരഞ്ഞെടുത്ത് ഒരു ഗ്രൂപ്പ് ഉണ്ടാക്കുന്നതായി തീരുമാനിക്കാം. ഈ ഗ്രൂപ്പ് എത്ര വഴികളിൽ ഉണ്ടാക്കാം. ഉദാഹരണത്തിന്, A,B,C എന്നത് ഒരു ഗ്രൂപ്പ്. ഇവിടെ തെരഞ്ഞെടുത്ത അംഗങ്ങളുടെ ക്രമം മുഖ്യമല്ല. അതുകൊണ്ട് B,A,C എന്നതും C,A,B എന്നതും അതേ മൂന്നു പേരെ തെരഞ്ഞെടുത്തതിൽ ഒന്നുപോലെയാണ്. അതുകൊണ്ട് സാധ്യമായ വെവ്വേറായ ഗ്രൂപ്പുകൾ A,B,C; A,B,D; A,C,D; കൂടാതെ B,C,D ആകുന്നു. ഇതുകൊണ്ട് 4 പേരിൽ നിന്ന് 3 പേരെ 4 വഴികളിൽ തെരഞ്ഞെടുക്കുമ്പോൾ ഈ ഓരോ തെരഞ്ഞെടുപ്പും 4 വ്യത്യസ്തമായ വസ്തുക്കളിൽ നിന്ന് ഒരു സമയത്തിൽ 3 വസ്തുക്കളെ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്ന സംയോജനം എന്ന് കുറിപ്പിട്ടിരിക്കുന്നു.

നാല് പേരുകളിൽ നിന്ന് രണ്ടുപേരെ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നതായി കണക്കാക്കാം. സാധ്യമായ തെരഞ്ഞെടുപ്പുകൾ A,B: A,C: A,D: B,C: B,D: C,D അതുകൊണ്ട് 4 വ്യത്യസ്തമായ വസ്തുക്കളിൽ നിന്ന് 2 വസ്തുക്കളെ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്ന സംയോജനത്തിന്റെ (ഗ്രൂപ്പ്) എണ്ണം 6 ആകുന്നു. n വ്യത്യസ്തമായ

XI_Maths_Ch4_V-1_Mal.indd 221 14-02-2023 16:51:02

വസ്തുക്കളിൽ നിന്ന് r വസ്തുക്കളെ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്ന ഗ്രൂപ്പുകളുടെ എണ്ണത്തെ ${}^nC_r$ എന്നു പറയുന്നു. മുകളിൽ കുറിപ്പിട്ടതിൽ നിന്ന് നാം ${}^4C_3 = 4$ കൂടാതെ ${}^4C_2 = 6$ എന്നു പറയാം. ${}^4C_3$ എന്നത് 4 വ്യത്യസ്തമായ വസ്തുക്കളിൽ നിന്ന് ഒരു സമയത്തിൽ 3 വസ്തുക്കളെ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്ന (ഗ്രൂപ്പുകളിന്റെ) എണ്ണം ആകുന്നു. ഓരോ മൂന്നു വസ്തുക്കളുടെ സംയോജനത്തിലും 3! വഴികളിൽ ഇവയെ ക്രമീകരിക്കാം. അതുകൊണ്ട് 4 വ്യത്യസ്തമായ വസ്തുക്കളിൽ നിന്ന് ഒരേ സമയത്തിൽ 3 വസ്തുക്കളെ ക്രമീകരിക്കുന്ന ക്രമപരിവർത്തനത്തിന്റെ എണ്ണം ${}^4C_3 \times 3!$ ആകുന്നു. കൂടാതെ ഇതു ${}^4P_3$ –ന് തുല്യമാകുന്നു. അതുകൊണ്ട് ${}^4P_3 = {}^4C_3 \times 3!$.

സാധാരണയായി, ക്രമപരിവർത്തനവും സംയോജനവും തമ്മിലുള്ള മുഖ്യമായ ബന്ധത്തിനെ താഴെ കാണുന്ന രീതിയിൽ എഴുതാം.

$$ {}^nP_r = {}^nC_r \times r! $$

സാധാരണയായി ക്രമമാറ്റം കൂടാതെ സംയോജനത്തെ പറ്റി പഠിക്കുന്ന എല്ലാവർക്കും ഒരു കുഴപ്പം വരാൻ സാധ്യതയുണ്ട് ഉദാഹരണങ്ങളോട് തെളിയിക്കപ്പെട്ടിട്ടുള്ള താഴെ കാണുന്ന പട്ടിക ഇത്തരത്തിലുള്ള കുഴപ്പങ്ങൾ തീർക്കുന്നതിന് വളരെ ഉപയോഗപ്പെടുന്നു.

ഖ. എണ്ണ	തെളിവ്	ക്രമമാറ്റം	സംയോഗം
1	നിർവ്വചനം	വസ്തുക്കളെ ക്രമപ്പെടുത്തുന്നത് അല്ലെങ്കിൽ ഘാതങ്ങളുടെ എണ്ണം	തെരഞ്ഞെടുക്കുമ്പോൾ അല്ലെങ്കിൽ ഗ്രൂപ്പ് ഉണ്ടാക്കുന്ന രീതിക്കും രീതികളുടെ എണ്ണം
2	ഉപയോഗിക്കുന്ന സ്ഥലം	വസ്തുക്കളുടെ ക്രമം പ്രാധാന്യമർഹിക്കുമ്പോൾ	വസ്തുക്കളുടെ ക്രമം പ്രാധാന്യമർഹിക്കുമ്പോൾ
3	കുറിയ്ക്കുന്ന രീതി	${}^nP_r$	${}^nC_r$
	ഉദാഹരണങ്ങൾ		
4	ക്രിക്കറ്റ് കളിയിൽ	15 ക്രിക്കറ്റ് കളിക്കാരിൽ നിന്ന് 11 ക്രിക്കറ്റ് കളിക്കാരെ കൊണ്ട ക്രമത്തിന്റെ എണ്ണം.	15 ക്രിക്കറ്റ് കളികളിൽ നിന്ന് 11 കളിക്കാരുടെ എണ്ണം
5	പാരിതോഷികം കൊടുക്കുന്നു	3 വെവ്വേറായ പാരിതോഷികങ്ങളെ കൊടുക്കുന്ന രീതികളുടെ എണ്ണം	3 ഒരേ രീതിയിലുള്ള പാരിതോഷികങ്ങളെ കൊടുക്കുന്ന രീതികളുടെ എണ്ണം
6	ഗ്രൂപ്പ് ഉണ്ടാക്കുന്നത്	13 ആൾക്കാരിൽ നിന്ന് ഒരു പ്രസിഡന്റ്, ഉപപ്രസിഡന്റ് തെരഞ്ഞെടുക്കുന്ന രീതികളുടെ എണ്ണം	13 അംഗങ്ങളിൽ നിന്ന് 2 അംഗങ്ങൾകൊണ്ട് ഗ്രൂപ്പ് ഉണ്ടാക്കുന്ന രീതികളുടെ എണ്ണം
7	വസ്തുക്കളെ തെരഞ്ഞെടുക്കൽ	15 വെവ്വേറായ വസ്തുക്കളിൽ നിന്ന് 3 വസ്തു ഒന്നിനു പിന്നിൽ ഒന്നായി തെരഞ്ഞെടുക്കുന്ന രീതികളുടെ എണ്ണം	15 വ്യത്യസ്തമായ വസ്തുക്കളിൽ നിന്ന് 3 വസ്തുക്കളെ ഒരേ സമയത്തിൽ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്ന രീതികളുടെ എണ്ണം

XI_Maths_Ch4_V-1_Mal.indd 222 14-02-2023 16:51:03

സിദ്ധാന്തം 4.5

n വ്യത്യസ്തമായ വസ്തുക്കളിൽ നിന്ന് ഒരു സമയത്തിൽ r വസ്തുക്കളെ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്ന സംയോജനങ്ങളുടെ എണ്ണം ${}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}, 0 \le r \le n$.

തെളിവ് ക്രമ പരിവർത്തനത്തിനും സംയോജനത്തിനും തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തിൽ നിന്ന് നമുക്ക് ${}^nC_r = \frac{{}^nP_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ (ക്രമപരിവർത്തനത്തിൽ നിന്ന്) എന്ന് കിട്ടുന്നു.

4.5.1 സംയോജനത്തിന്റെ ഗുണങ്ങൾ

ഗുണം 1 :

(i) ${}^nC_0 = 1$ (ii) ${}^nC_n = 1$ (iii) ${}^nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{r!}$

തെളിവ്

(i) ${}^nC_0 = \frac{n!}{0!(n-0)!} = 1$

(ii) ${}^nC_n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!0!} = 1$

(iii) ${}^nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(r-1))}{r!} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{r!}$.

ഗുണം 2 : ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$

തെളിവ്

${}^nC_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = {}^nC_r$

എന്നതിൽ നിന്ന്, ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$ എന്ന് കാണാം.

ഗുണം 3 :

${}^nC_x = {}^nC_y$ എങ്കിൽ $x = y$ അല്ലെങ്കിൽ $x + y = n$.

തെളിവ്

ഗുണം 2-ൽ നിന്ന് ${}^nC_y = {}^nC_{n-y}$ അതുകൊണ്ട്, ${}^nC_x = {}^nC_y = {}^nC_{n-y}$ -ൽ നിന്ന്

$x = y$ അല്ലെങ്കിൽ $x = n - y$ അതുകൊണ്ട്, $x = y$ അല്ലെങ്കിൽ $x + y = n$

ഗുണം 4 :

${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$

തെളിവ്

സംയോജനത്തിന്റെ നിയമത്തിൽ നിന്ന് കിട്ടുന്നത്,

$$\begin{aligned} {}^nC_r + {}^nC_{r-1} &= \frac{n!}{r!.(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!.(n-(r-1))!} \\ &= \frac{n!}{r! \times (n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)! \times (n-r+1)!} \\ &= \frac{n!}{r.(r-1)! \times (n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!.(n-r)!(n-r+1)} \end{aligned}$$

XI_Maths_Ch4_V-1_Mal.indd 223 14-02-2023 16:51:04

$$= \frac{n!}{(r-1)!\times(n-r)!}\times\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{(n-r+1)}\right)$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!\times(n-r)!}\times\frac{(n-r+1+r)}{r(n-r+1)}$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!\times(n-r)!}\times\frac{(n+1)}{r(n-r+1)}$$

$$= \frac{(n+1)!}{r!\times(n+1-r)!} = {}^{n+1}C_r. \qquad \square$$

ഗുണം 5 :

$${}^nC_r = \frac{n}{r}\times{}^{(n-1)}C_{(r-1)}$$

തെളിവ്

$$\frac{n}{r}\times{}^{(n-1)}C_{(r-1)} = \frac{n}{r}\frac{(n-1)!}{(r-1)!\times((n-1)-(r-1))!}$$

$$= \frac{n(n-1)!}{r(r-1)!(n-r)!} = {}^nC_r. \qquad \square$$

ഉദാഹരണം 4.44 താഴെ കാണുന്നവയുടെ മൂല്യം കാണുക.

(i) ${}^{10}C_3$ (ii) ${}^{15}C_{13}$ (iii) ${}^{100}C_{99}$ (iv) ${}^{50}C_{50}$

നിർദ്ധാരണം :

(i) $${}^{10}C_3 = \frac{10!}{7!\times3!} = \frac{10\times9\times8\times7!}{7!\times3\times2\times1}$$

$$= \frac{10\times9\times8}{3\times2\times1} = 120$$

(ii) $${}^{15}C_{13} = \frac{15!}{2!\times13!} = \frac{15\times14\times13!}{2\times1\times13!}$$

$$= \frac{15\times14}{2\times1} = 105$$

(iii) $${}^{100}C_{99} = \frac{100\times99!}{99!} = 100$$

(iv) $${}^{50}C_{50} = \frac{50!}{50!\times0!} = 1$$

ഉദാഹരണം 4.45 ഗുണം 5 ഉപയോഗപ്പെടുത്തി ${}^5C_2$, ${}^7C_3$ –യുടെ മൂല്യം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം:

$${}^nC_r = \frac{n}{r}\times{}^{n-1}C_{r-1}$$

$n = 5$ കൂടാതെ $r = 2$ എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ

$${}^5C_2 = \frac{5}{2}\times{}^4C_1 = \frac{5}{2}\times\frac{4}{1} = \frac{5\times4}{2\times1} = 10$$

$n = 7$ കൂടാതെ $r = 3$ എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ

$${}^7C_3 = \frac{7}{3}\times{}^6C_2 = \frac{7}{3}\times\frac{6}{2}\times{}^5C_{2-1}$$

$$= \frac{7}{3}\times\frac{6}{2}\times{}^5C_1 = \frac{7}{3}\times\frac{6}{2}\times\frac{5}{1}$$

$$= \frac{7\times6\times5}{3\times2\times1} = 35$$

XI_Maths_Ch4_V-1_Mal.indd 224 14-02-2023 16:51:06

ഉദാഹരണം 4.46 ${}^nC_4 = 495$, n–ന്റെ മൂല്യം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം :

$$ {}^nC_4 = 495$$

$$\frac{n\times(n-1)\times(n-2)\times(n-3)}{4\times3\times2\times1} = 495$$

$$\Rightarrow n\times(n-1)\times(n-2)\times(n-3) = 495\times4\times3\times2\times1$$

495-നെ ഘടകങ്ങളാക്കിയാൽ $495 = 3\times3\times5\times11$ കൂടാതെ, ഈ ഗുണനത്തെ 4 അടുത്ത അടുത്ത സംഖ്യയുടെ ഗുണനങ്ങളായിട്ട് അവരോഹണക്രമത്തിൽ എഴുതുമ്പോൾ $n\times(n-1)\times(n-2)\times(n-3) = 12\times11\times10\times9$ എന്നു കിട്ടുന്നു. n –നെ വലിയ സംഖ്യയോട് താരതമ്യപ്പെടുത്തുമ്പോൾ, $n = 12$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

ഉദാഹരണം 4.47 ${}^nP_r = 11880$ കൂടാതെ ${}^nC_r = 495$ എങ്കിൽ, n കൂടാതെ r-ന്റെ മൂല്യം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം :

$\frac{{}^nP_r}{{}^nC_r} = r!$ എന്ന് അറിയാം.

അതുകൊണ്ട്, $r! = \frac{11880}{495} = 24 = 4!$.

ഇതിൽനിന്ന്, $r = 4$ എന്ന് കിട്ടുന്നു. അതുകൊണ്ട്, $r = 4$ എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ ${}^nC_4 = 495$ എന്ന് കിട്ടുന്നു. ഉദാഹരണം 4.46 -ൽ നിന്ന് $n = 12$ എന്ന് പറയാം.

ഉദാഹരണം 4.48 ${}^{24}C_4 + \sum_{r=0}^{4} {}^{(28-r)}C_3 = {}^{29}C_4$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം :

$$\begin{aligned}
{}^{24}C_4 + \sum_{r=0}^{4} {}^{(28-r)}C_3 &= {}^{24}C_4 + {}^{28}C_3 + {}^{27}C_3 + {}^{26}C_3 + {}^{25}C_3 + {}^{24}C_3 \\
&= {}^{24}C_4 + {}^{24}C_3 + {}^{25}C_3 + {}^{26}C_3 + {}^{27}C_3 + {}^{28}C_3 \\
&= {}^{25}C_4 + {}^{25}C_3 + {}^{26}C_3 + {}^{27}C_3 + {}^{28}C_3 \\
&= {}^{26}C_4 + {}^{26}C_3 + {}^{27}C_3 + {}^{28}C_3 \\
&= {}^{27}C_4 + {}^{27}C_3 + {}^{28}C_3 \\
&= {}^{28}C_4 + {}^{28}C_3 \\
&= {}^{29}C_4 .
\end{aligned}$$

ഉദാഹരണം 4.49 ${}^{10}C_2 + 2\times{}^{10}C_3 + {}^{10}C_4 = {}^{12}C_4$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം :

$$\begin{aligned}
{}^{10}C_2 + 2\times{}^{10}C_3 + {}^{10}C_4 &= {}^{10}C_2 + ({}^{10}C_3 + {}^{10}C_3) + {}^{10}C_4 \\
&= ({}^{10}C_2 + {}^{10}C_3) + ({}^{10}C_3 + {}^{10}C_4) \\
&= {}^{11}C_3 + {}^{11}C_4 \\
&= {}^{12}C_4 .
\end{aligned}$$

XI_Maths_Ch4_V-1_Mal.indd 225 14-02-2023 16:51:08

ഉദാഹരണം 4.50 ${}^{(n+2)}C_7 : {}^{(n-1)}P_4 = 13:24$ എങ്കിൽ, n–ന്റെ മൂല്യം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം :

$$\begin{aligned}
{}^{(n+2)}C_7 : {}^{(n-1)}P_4 &= 13:24 \\
\frac{{}^{(n+2)}C_7}{{}^{(n-1)}P_4} &= \frac{13}{24} \\
\frac{(n+2)!}{(n-5)!\times 7!} \times \frac{(n-5)!}{(n-1)!} &= \frac{13}{24} \Rightarrow \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!\times 7!} = \frac{13}{24} \\
(n+2)(n+1)(n) &= \frac{13}{24}\times 7! = \frac{13}{24}\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1 \\
(n+2)(n+1)(n) &= 13\times 14\times 15 \\
n+2 &= 15 \Rightarrow n = 13.
\end{aligned}$$

ഉദാഹരണം 4.51 ഒരു ഭക്ഷണശാലയിൽ പഴമിശ്രിതം ചെയ്യുന്നതിന് ആപ്പിൾ, വാഴപ്പഴം, പേരയ്ക്കാ മാതളങ്ങ, മുന്തിരിങ്ങ, പപ്പായ, കൈതച്ചക്ക എന്നീ പഴങ്ങളിൽ നിന്ന് 4 പഴങ്ങൾ വീതം തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു എങ്കിൽ പഴമിശ്രിതം ആകെ എത്ര വഴികളിൽ ചെയ്യാൻ സാധിക്കും?

നിർദ്ധാരണം :

7 പഴങ്ങളിൽ നിന്ന് 4 പഴങ്ങളെ പഴമിശ്രിതം ചെയ്യുന്നതിന് തെരഞ്ഞെടുക്കേണ്ടതാണ്. അതുകൊണ്ട് സാധ്യമായ പഴ മിശ്രിതത്തിന്റെ ആകെ എണ്ണം ${}^7C_4 = {}^7C_3 = 35$.

ഉദാഹരണം 4.52 ഒരു ഗണിത സമാജത്തിൽ 15 അംഗങ്ങൾ ഉണ്ട്. ഇതിൽ 8 അംഗങ്ങൾ സ്ത്രീകളാണ്. പകുതി സ്ത്രീകളായിരിക്കത്തക്കവണ്ണം ഒരു മത്സരത്തിന് 6 പേരെ തെരഞ്ഞെടുക്കേണ്ടതാണ്. സാധ്യമായ എത്ര വഴികളിൽ ഇവരെ തെരഞ്ഞെടുക്കാം?

നിർദ്ധാരണം :

ഗണിത സമാജത്തിൽ 8 സ്ത്രീകൾ കൂടാതെ 7 പുരുഷന്മാർ ഉണ്ട്. ഇതിൽ 6 അംഗങ്ങളിൽ പകുതി സ്ത്രീകൾ (3 സ്ത്രീകൾ 3 മറ്റുള്ളവർ) വരുന്ന വിധത്തിൽ ${}^8C_3 \times {}^7C_3 = 56\times 35 = 1960$ വഴികളിൽ തെരഞ്ഞെടുക്കാവുന്നതാണ്.

ഉദാഹരണം 4.53 20 കച്ചവട മുദ്രയുള്ള വാഹനങ്ങളിൽ (കാർ) വാഹനങ്ങളെ മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കുന്ന സ്ഥാപനം 5 വ്യാപാരമുദ്ര വാഹനങ്ങളെ ആദ്യത്തേത്, രണ്ടാമത്തേത്, മൂന്നാമത്തേത്, നാലാമത്തേത് കൂടാതെ അഞ്ചാമത്തേത് ഏറ്റവും നല്ല വ്യാപാര മുദ്ര വാഹനങ്ങൾ എന്നും, കൂടാതെ ബാക്കിയുള്ള 15-ൽ 7 തെരഞ്ഞെടുത്ത് ഏറ്റെടുക്കാവുന്ന വിധത്തിലുള്ളവയാണ് എന്നു പറയാൻ എത്ര വഴികൾ ഉണ്ട്?

നിർദ്ധാരണം :

20 വ്യാപാരമുദ്ര വാഹനങ്ങളിൽ 5 വാഹനങ്ങളെ ഒന്നാമത്, രണ്ടാമത്, മൂന്നാമത്, നാലാമത്, കൂടാതെ അഞ്ചാമത് എന്ന് ആകെ ${}^{20}P_5$ വഴികളിൽ ക്രമപ്പെടുത്താം. ബാക്കിയുള്ള 15 വ്യാപാര മുദ്ര വാഹനങ്ങളിൽ 7 ഏറ്റുകൊള്ളാനുള്ള വിധത്തിലുള്ളതാണ് എന്ന് പറയുന്നതിന് ${}^{15}C_7$ വഴികൾ ഉണ്ട്. അതുകൊണ്ട് ഗുണനനിയമ പ്രകാരം, ${}^{20}P_5 \times {}^{15}C_7$ വഴികളിൽ ഇത് ചെയ്യാവുന്നതാണ്.

XI_Maths_Ch4_V-1_Mal.indd 226 14-02-2023 16:51:09

ഉദാഹരണം 4.54 25 വിദ്യാർത്ഥികൾ ഉള്ള ക്ലാസ് റൂമിൽ 10 വിദ്യാർത്ഥികളെ വിനോദസഞ്ചാര യാത്രയ്ക്ക് തെരഞ്ഞെടുക്കേണ്ടതാണ്. ഇതിൽ 4 വിദ്യാർത്ഥികൾ എല്ലാവരും ഒന്നായി വരുന്നത്, അല്ലെങ്കിൽ ഒന്നായി വരാതിരിക്കുന്നത് എന്ന് തീരുമാനമെടുക്കുന്നു. വിനോദയാത്രയ്ക്കു എത്ര വഴികളിൽ വിദ്യാർത്ഥികളെ തെരഞ്ഞെടുക്കാം?

നിർദ്ധാരണം :

ഇതിൽ രണ്ടു സാധ്യതകൾ ഉണ്ട്.

(i) 4 വിദ്യാർത്ഥികളും ഒന്നായി യാത്രയ്ക്ക് വരുന്നതുകൊണ്ട്, ബാക്കിയുള്ള 6 വിദ്യാർത്ഥികളെ 21 വിദ്യാർത്ഥികളിൽ നിന്ന് ${}^{21}C_6 = \frac{21!}{6! \times 15!}$ വഴികളിൽ തിരഞ്ഞെടുക്കാം.

(ii) 4 വിദ്യാർത്ഥികളും ഒന്നായി യാത്രയ്ക്ക് വരുന്നില്ല എങ്കിൽ 10 വിദ്യാർത്ഥികളെ ബാക്കിയുള്ള, 21 വിദ്യാർത്ഥികളിൽ നിന്ന് ${}^{21}C_{10} = \frac{21!}{10! \times 11!}$ വഴികളിൽ തെരഞ്ഞെടുക്കാം.

അതുകൊണ്ട് ആകെ വഴികളുടെ എണ്ണം ${}^{21}C_6 + {}^{21}C_{10} = \frac{21!}{6! \times 15!} + \frac{21!}{10! \times 11!}$.

ഉദാഹരണം 4.55 ഒരു ഡസൺ ആപ്പിൾ പഴങ്ങൾ ഉള്ള ഒരു പെട്ടിയിൽ ഒരു അഴുകിയ ആപ്പിൾ ഉണ്ട്. ഇവയിൽ 3 ആപ്പിളുകളെ ഒരേ സമയത്തിൽ എടുക്കുമ്പോൾ എത്ര വഴികളിൽ നല്ല ആപ്പിളുകളെ മാത്രം കിട്ടാൻ സാധിക്കും?

നിർദ്ധാരണം :

12 ആപ്പിളുകളിൽ നിന്ന് 3 പഴങ്ങളെ ${}^{12}C_3 = 220$ വഴികളിൽ തെരഞ്ഞെടുക്കാം.

12 ആപ്പിളുകളിൽ നിന്ന് 3 ആപ്പിളുകൾ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്ന എണ്ണം എന്നത് ഒരു അഴുകിയ ആപ്പിൾ തെരഞ്ഞെടുത്ത് മറ്റേ 2 ആപ്പിളുകളെ ബാക്കിയുള്ള 11 നല്ല ആപ്പിളുകളിൽ നിന്ന് ${}^{11}C_2 = 55$ വഴികളിൽ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്ന എണ്ണം ആകുന്നു.

അതുകൊണ്ട് എല്ലാം നല്ല പഴങ്ങളായി കിട്ടുന്നതിന് ഉള്ള എണ്ണം

$$ {}^{12}C_3 - {}^{11}C_2 = 220 - 55 = 165 .$$

ഉദാഹരണം 4.56 ഒരു ചോദ്യപേപ്പറിൽ ഉള്ള 8 ചോദ്യങ്ങളിൽ 4 ചോദ്യങ്ങൾ ഭാഗം A–യിലും 4 ചോദ്യങ്ങൾ ഭാഗം B–യിലും ഉണ്ട്. പരീക്ഷ എഴുതുന്നവർ 5 ചോദ്യങ്ങൾക്കു ഉത്തരം നല്കേണ്ടതാണ്. താഴെ കാണുന്ന നിബന്ധനകളെ പൂർത്തിചെയ്യുന്ന രീതിയിൽ എത്ര വഴികളിൽ ഇതിനെ ചെയ്യാം.

(i) രണ്ടു ഭാഗങ്ങളിലും ഏതൊരുവിധ നിബന്ധനയും ഇല്ലാതെ എത്ര ചോദ്യങ്ങൾ വേണമെങ്കിലും തിരഞ്ഞെടുക്കാം.

(ii) കുറഞ്ഞപക്ഷം രണ്ടു ചോദ്യങ്ങളെയെങ്കിലും ഭാഗം A–യിൽ നിന്ന് എഴുതേണ്ടതാണ്.

നിർദ്ധാരണം :

(i) ഏതൊരു നിബന്ധനയുമില്ലാത്തത് : ഭാഗം A കൂടാതെ ഭാഗം B യിൽ ഉള്ള ആകെ 8 ചോദ്യങ്ങളിൽ 5 ചോദ്യങ്ങൾ ${}^{8}C_5 = {}^{8}C_3 = 56$ വഴികളിൽ തെരഞ്ഞെടുക്കാം.

XI_Maths_Ch4_V-1_Mal.indd 227 14-02-2023 16:51:09

(ii) കുറഞ്ഞപക്ഷം രണ്ടു ചോദ്യങ്ങൾക്കു ഭാഗം B യിൽ ഉത്തരം എഴുതൽ : ഈ നിബന്ധനയ്ക്കുൾപ്പെട്ടുള്ള അവസരങ്ങൾ താഴെ വരുന്ന വിധത്തിൽ പട്ടികാരീതിയിൽ എഴുതിയിട്ടുണ്ട്.

ഭാഗം A	ഭാഗം B	സംയോജനത്തിന്റെ എണ്ണം
2	3	${}^4C_2 \times {}^4C_3$
3	2	${}^4C_3 \times {}^4C_2$
4	1	${}^4C_4 \times {}^4C_1$

അതുകൊണ്ട് ഉത്തരം ചെയ്യുന്ന രീതികളുടെ എണ്ണം

$${}^4C_2 \times {}^4C_3 + {}^4C_3 \times {}^4C_2 + {}^4C_4 \times {}^4C_1 = 24 + 24 + 4 = 52.$$

ഉദാഹരണം 4.57 4 സ്വരാക്ഷരങ്ങൾ കൂടാതെ 7 വ്യഞ്ജനാക്ഷരങ്ങളിൽ നിന്ന് 3 വ്യഞ്ജനാക്ഷരങ്ങൾ കൂടാതെ 2 സ്വരാക്ഷരങ്ങൾ ഉള്ള അക്ഷരചരങ്ങൾ എത്ര എഴുതാം?

നിർദ്ധാരണം :

7 വ്യഞ്ജനാക്ഷരങ്ങളിൽ നിന്ന് 3 വ്യഞ്ജനാക്ഷരങ്ങളെയും കൂടാതെ 4 സ്വരാക്ഷരങ്ങളിൽ നിന്ന് 2 സ്വരാക്ഷരങ്ങളെയും ${}^7C_3 \times {}^4C_2$ വഴികളിൽ തെരഞ്ഞെടുക്കാം. ഓരോ അക്ഷര ചരങ്ങളിലും 5 അക്ഷരങ്ങൾ ഉണ്ട്. അവയെ തങ്ങൾക്കുള്ളിൽ $5! = 120$ വഴികളിൽ ക്രമമാറ്റം ചെയ്യാം. അതുകൊണ്ട് ആവശ്യമായ വഴികൾ ${}^7C_3 \times {}^4C_2 \times 5! = 35 \times 6 \times 120 = 25200$.

ഉദാഹരണം 4.58 PROPOSITION എന്ന വാക്കിൽ ഉള്ള അക്ഷരങ്ങളെ പ്രയോജനപ്പെടുത്തി 5 അക്ഷരങ്ങളിൽ എത്ര അക്ഷരചരങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കാം.

നിർദ്ധാരണം :

ഇതിൽ 11 അക്ഷരങ്ങൾ ഉണ്ട്. ഇതിൽ 4 വെവ്വേറെ അക്ഷരങ്ങൾ (R,S,T,N) 2 ഒരേ രീതിയിലുള്ള അക്ഷരങ്ങൾ ഉള്ള 2 ശ്രേണികൾ (PP, II) കൂടാതെ 3 ഒരേ അക്ഷരങ്ങൾ ഉള്ള ഒരു ശ്രേണി (OOO) എന്നിവ ഉണ്ട്.

താഴെ കാണുന്ന പട്ടിക, മേലെ ഉള്ള ശ്രേണിക്ക് അനുയോജ്യമായ പലതരം സംയോഗങ്ങളെയും കൂടാതെ അതിന്റേതായ അക്ഷരങ്ങളുടെ എണ്ണവും തരുന്നു.

ഖ. എണ്ണ	അക്ഷരങ്ങളുടെ അവസരങ്ങൾ	സംയോജനം	ക്രമമാറ്റം
1	5 വ്യത്യസ്തമായവ (R,S,T,N,P,I,O)	${}^7C_5$	${}^7C_5 \times 5! = 2520$
2	3 ഒരേ അക്ഷരങ്ങൾ ഉള്ള ഒരു ശ്രേണി (OOO), ഒരേ രീതിയിലുള്ള 2 അക്ഷരങ്ങൾ ഉള്ള ഒരു ശ്രേണി (PP,II)	${}^1C_1 \times {}^2C_1$	${}^1C_1 \times {}^2C_1 \times \frac{5!}{3! \times 2!} = 20$
3	3 ഒരേ രീതിയിലുള്ള അക്ഷരങ്ങളുള്ള ഒരു ശ്രേണി (OOO), 2 വ്യത്യസ്തമായവ (R,S,T,N,P,I)	${}^1C_1 \times {}^6C_2$	${}^1C_1 \times {}^6C_2 \times \frac{5!}{3!} = 300$

XI_Maths_Ch4_V-1_Mal.indd 228 14-02-2023 16:51:10

4	വ്യത്യസ്തമായവ ഒരേ രീതിയിൽ 2 അക്ഷരങ്ങൾ ഉള്ള 2 ശ്രേണികൾ (PP,II,OO), 1 വ്യത്യസ്തമായ (R,S,T,N കൂടാതെ ബാക്കിയുള്ള ഒന്ന് ഒരേ രീതിയിലുള്ള 2 അക്ഷരശ്രേണിയിൽ നിന്ന്)	${}^3C_2 \times {}^5C_1$	${}^3C_2 \times {}^5C_1 \times \frac{5!}{2! \times 2!} = 450$
5	ഒരേ രീതിയിലുള്ള 2 അക്ഷരങ്ങൾഉള്ള ഒരു ശ്രേണി (PP,II,OO), 3 വ്യത്യസ്തമായ (R,S,T,N കൂടാതെ ബാക്കിയുള്ള രണ്ടു ഒരേ രീതിയിലുള്ള 2 അക്ഷര ശ്രേണിയിൽ നിന്ന്)	${}^3C_1 \times {}^6C_3$	${}^3C_1 \times {}^6C_3 \times \frac{5!}{2!} = 3600$

അതുകൊണ്ട് ആകെ അക്ഷരചരങ്ങളുടെ എണ്ണം

$$2520 + 20 + 300 + 450 + 3600 = 6890.$$

ഉദാഹരണം 4.59 m സമാന്തരരേഖയുടെ ഗ്രൂപ്പ് മറ്റൊരു n സമാന്തര രേഖയുടെ ഒരു ഗ്രൂപ്പും (ആദ്യത്തെ ഗ്രൂപ്പിനോട് സമാന്തരമായത്) ഛേദിക്കുമ്പോൾ ഉണ്ടാകുന്ന പിന്നൽ രീതിയിൽ ഉള്ള സമാന്തരികത്തിന്റെ എണ്ണം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം :

m എണ്ണത്തിലുള്ള ആദ്യ ഗ്രൂപ്പിൽ നിന്ന് 2 രേഖകളെയും n എണ്ണത്തിലുള്ള രണ്ടാമത്തെ ഗ്രൂപ്പിൽ നിന്ന് 2 രേഖകളെയും തെരഞ്ഞെടുത്ത് ഒരു സമാന്തരികത്തിനെ ഉണ്ടാക്കാം. എന്നതുകൊണ്ട് ആകെ സാമാന്തരികത്തിന്റെ എണ്ണം ${}^mC_2 \times {}^nC_2$.

ഉദാഹരണം 4.60 n വശങ്ങൾ ഉള്ള ഒരു ബഹുകോണിനു എത്ര വികർണ്ണങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കും?

നിർദ്ധാരണം :

n വശങ്ങൾ ഉള്ള ഒരു ബഹുകോണിൽ n ശീർഷങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കും. ബഹുകോണിന്റെ രണ്ടു ശീർഷങ്ങളെ യോജിപ്പിക്കുമ്പോൾ ഒരു വശം അല്ലെങ്കിൽ ഒരു വികർണ്ണം കിട്ടുന്നു. രണ്ടു ശീർഷങ്ങൾ വഴിയേ ചെല്ലുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തിന്റെ എണ്ണം ${}^nC_2 = \frac{n(n-1)}{2}$. ഈ രേഖകളിൽ ബഹുകോണിന്റെ n വശങ്ങളും ഉണ്ട്. അതുകൊണ്ട് ബഹുകോണിന്റെ വികർണ്ണത്തിന്റെ എണ്ണം $\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$

പ്രധാനമായും ഒരു (അഞ്ചുകോൺ (ത്രികോണം) കൂടാതെ ഏഴു കോണത്രികോണം എന്നിവയുടെ വികർണ്ണങ്ങളുടെ എണ്ണം യഥാക്രമം $\frac{5(5-3)}{2} = 5$ കൂടാതെ $\frac{7(7-3)}{2} = 14$.

XI_Maths_Ch4_V-1_Mal.indd 229 14-02-2023 16:51:10

അഭ്യാസം 4.3

1. ${}^nC_{12} = {}^nC_9$ എങ്കിൽ, ${}^{21}C_n$ കാണുക?

2. ${}^{15}C_{2r-1} = {}^{15}C_{2r+4}$ എങ്കിൽ, r കാണുക?

3. ${}^nP_r = 720$ കൂടാതെ ${}^nC_r = 120$ എങ്കിൽ, n, r കാണുക?

4. തെളിയിക്കുക ${}^{15}C_3 + 2 \times {}^{15}C_4 + {}^{15}C_5 = {}^{17}C_5$.

5. തെളിയിക്കുക ${}^{35}C_5 + \sum_{r=0}^{4} {}^{(39-r)}C_4 = {}^{40}C_5$.

6. ${}^{(n+1)}C_8 : {}^{(n-3)}P_4 = 57 : 16$ എങ്കിൽ, n കാണുക?

7. തെളിയിക്കുക ${}^{2n}C_n = \dfrac{2^n \times 1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1)}{n!}$.

8. $1 \le r \le n$ എങ്കിൽ $n \times {}^{(n-1)}C_{r-1} = (n-r+1) \times {}^nC_{r-1}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

9. (i) ഒരു കബടി പരിശീലിപ്പിക്കുന്ന മാസ്റ്ററിന്റെ കീഴിൽ 14 പരിശീലകർ കളിക്കുന്നതിന് തയ്യാറായിട്ടുണ്ട്. 7 കളിക്കാരെ കൊണ്ട് എത്ര വെവ്വേറായ സാഹചര്യങ്ങൾ (അവസരങ്ങൾ) ഏർപ്പെടുത്തുന്നതിന് സാധിക്കും?

   (ii) ഒരു വിരുന്നിൽ 15 പേർ ഉണ്ട്. ഏത് രണ്ടു പേരും തമ്മിൽ കൈക്കൂലി കൊള്ളുന്നു; എന്ന് എടുത്താൽ ആ വിരുന്നിൽ എത്ര കൈകുലുക്കൽ സംഭവിക്കും?

   (iii) ഒരു വൃത്തത്തിൻമേലുള്ള 20 ബിന്ദുക്കൾ വഴിയേ എത്ര ഞാൺ വരയാൻ സാധിക്കും?

   (iv) ഒരു വാഹനം നിർത്തുന്ന സ്ഥലത്ത് ഒരു വർഷം പഴക്കമായ വാഹനങ്ങൾ 100 നിർത്തിയിട്ടിരിക്കുന്നു. ആ വാഹനങ്ങളിൽ പരിസര മലിനീകരണ (വായു മലനീകരണ) നിയന്ത്രിത ഉപകരണങ്ങൾ എപ്രകാരം പ്രവർത്തിക്കുന്നു എന്നതിനെ പരിശോധിക്കുന്നതിനു ഏതെങ്കിലും അഞ്ച് വാഹനങ്ങളെ തെരഞ്ഞെടുക്കേണ്ടതാണ്. എത്രവിധത്തിൽ ഈ അഞ്ചു വാഹനങ്ങളെ തിരഞ്ഞെടുക്കാം?

   (v) 3 പുരുഷന്മാർ, 2 സ്ത്രീകൾ കൂടാതെ 1 നപുംസകം എന്നിവരെ 5 പുരുഷന്മാർ, 2 സ്ത്രീകൾ കൂടാതെ 2 നപുംസകങ്ങളിൽ നിന്ന് എത്ര വഴികളിൽ തെരഞ്ഞെടുക്കാം?

10. താഴെ കാണുന്ന അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം ഉള്ള ഗണങ്ങളുടെ ഉപഗണത്തിലുള്ള എണ്ണം കാണുക.

    [ഉത്തരം : കുറിപ്പ് : ${}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + \ldots + {}^nC_n = 2^n$]

    (i) 4 അംഗങ്ങൾ (ii) 5 അംഗങ്ങൾ (iii) n അംഗങ്ങൾ

11. ഒരു ട്രസ്റ്റിൽ 25 അംഗങ്ങൾ ഉണ്ട്.

    (i) ഇവരിൽ 3 (അധികാരികളെ) എത്രവഴികളിൽ തെരഞ്ഞുടുക്കാം?

    (ii) ഒരു പ്രസിഡന്റ്, ഒരു ഉപ പ്രസിഡന്റ്, ഒരു സെക്രട്ടറി എന്നിവരെ എത്ര വഴികളിൽ തെരഞ്ഞെടുക്കാം?

12. ഒരു ഗ്രൂപ്പിൽ ഉള്ള 10 പേരിൽ നിന്ന്, ഒരു പ്രസിഡന്റ്, ഒരു സെക്രട്ടറി എന്നിവരെ ചേർത്ത് 6 പേരെ എത്ര വഴികളിൽ തെരഞ്ഞെടുക്കാം?

XI_Maths_Ch4_V-1_Mal.indd 230 14-02-2023 16:51:11

13. 12 വെവ്വേറായ പുസ്തകങ്ങളിൽ 5 പുസ്തകങ്ങളെ താഴെ കാണുന്ന നിബന്ധനകൾക്ക് ഉൾപ്പെട്ട് എത്ര വഴികളിൽ തെരഞ്ഞെടുക്കാം?

(i) രണ്ടു കുറിപ്പിട്ട പുസ്തകങ്ങളെ എപ്പോഴും തെരഞ്ഞെടുക്കേണ്ടതാണ്.

(ii) രണ്ടു കുറിപ്പിട്ട പുസ്തകങ്ങളെ ഒരിക്കലും തിരഞ്ഞെടുക്കാൻ പാടില്ല.

14. 5 അദ്ധ്യാപകർ, 25 വിദ്യാർത്ഥികളിൽ നിന്ന് 2 അദ്ധ്യാപകർ കൂടാതെ 3 വിദ്യാർത്ഥികളെക്കൊണ്ട് ഒരു ഗ്രൂപ്പ് രൂപീകരിക്കുന്നു. എത്ര വഴികളിൽ ഇത് ചെയ്യാം. കൂടാതെ ഇവയിൽ താഴെ കാണുന്ന നിബന്ധനകൾക്കു ഉൾപ്പെട്ട് എത്ര ഗ്രൂപ്പ് രൂപീകരിക്കാം?

(i) ആ ഗ്രൂപ്പിൽ ഒരു കുറിപ്പിട്ട അദ്ധ്യാപകൻ ഉണ്ട്.

(ii) ആ ഗ്രൂപ്പിൽ കുറിപ്പിട്ട വിദ്യാർത്ഥികൾ വരാത്ത വിധത്തിൽ.

15. ഒരു വിദ്യാർത്ഥി ഒരു പരീക്ഷയിൽ 9 ചോദ്യത്തിൽ 3 ചോദ്യങ്ങൾക്കു നിർബന്ധമായിട്ടും ഉത്തരം എഴുതേണ്ടതാണ്. എന്ന നിബന്ധനയിൽ 5 ചോദ്യങ്ങൾക്കു ഉത്തരം ചെയ്യണം. എത്ര വഴികളിൽ ആ ചോദ്യങ്ങൾക്കു ഒരു വിദ്യാർത്ഥി ഉത്തരം ചെയ്യാം?

16. 52 കാർഡുകൾ (ചീട്ട്) ഉള്ള ഒരു ചീട്ട് കെട്ടിൽ നിന്ന് 5 ചീട്ടുകളെ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നതിന് ഓരോ കെട്ടിലും (സംയോജനം) എപ്പോഴും മൂന്നു ഏസ്കൾ (*aces*) ഉണ്ടായിരിക്കതക്കവിധം എത്ര സംയോജനം ഉണ്ടായിരിക്കും എന്ന് കാണുക.

17. 7 ഇന്ത്യാക്കാർ കൂടാതെ 5 അമേരിക്കക്കാർ എന്നിവരിൽ നിന്ന് ഇന്ത്യാക്കാർ അധികം പേർ ഇരിക്കുന്ന വിധത്തിൽ 5 പേരുള്ള എത്രവിധമായ ഗ്രൂപ്പുകൾ ഉണ്ടാക്കാം?

18. 8 പുരുഷന്മാർ കൂടാതെ 6 സ്ത്രീകൾ. ഇവയിൽ നിന്ന് 7 പേരുള്ള ഗ്രൂപ്പ് ഉണ്ടാക്കുന്നു. താഴെ കാണുന്ന നിബന്ധനകളെ പൂർത്തി ചെയ്യുന്ന വിധത്തിൽ എത്ര ഗ്രൂപ്പുകളെ ഏർപ്പെടുത്താം.

(i) തുല്യമായി 3 സ്ത്രീകൾ ഉണ്ടായിരിക്കുന്ന വിധത്തിൽ.

(ii) കുറഞ്ഞപക്ഷം 3 സ്ത്രീകൾ ഉണ്ടായിരിക്കുന്ന വിധത്തിൽ.

(iii) അധികപക്ഷം 3 സ്ത്രീകൾ ഇരിക്കുന്ന വിധത്തിൽ.

19. ഒരു പുരുഷനും 4 സ്ത്രീകൾ കൂടാതെ 3 പുരുഷന്മാർ എന്ന് 7 ബന്ധുക്കൾ ഉണ്ട്. അദ്ദേഹത്തിന്റെ ഭാര്യയ്ക്ക് 3 സ്ത്രീകൾ, 4 പുരുഷന്മാർ എന്ന് 7 ബന്ധുക്കൾ ഉണ്ട്. ഒരു രാത്രി വിരുന്നിന് 3 സ്ത്രീകളേയും കൂടാതെ 3 പുരുഷന്മാരേയും ക്ഷണിക്കുമ്പോൾ പുരുഷന്റെ ബന്ധുക്കൾ 3 പേരും ഭാര്യയുടെ ബന്ധുക്കൾ 3 പേരും എന്ന വിധത്തിൽ വിരുന്നിൽ കലർന്നുകൊള്ളുന്നതിന് എത്ര വഴികളിൽ ക്ഷണിക്കാം?

20. ഒരു പെട്ടിയിൽ രണ്ടു വെള്ളപന്തുകൾ, മൂന്നു കറുപ്പു പന്തുകൾ കൂടാതെ 3 ചുവപ്പു പന്തുകൾ ഉണ്ട്. പെട്ടിയിൽ നിന്ന് മൂന്നു പന്തുകളെ തിരഞ്ഞെടുക്കുമ്പോൾ അവയിൽ കുറഞ്ഞ പക്ഷം ഒരു കറുപ്പ് പന്ത് ഉണ്ടായിരിക്കുന്ന വിധത്തിൽ എത്ര വഴികളിൽ തെരഞ്ഞെടുക്കാം?

21. EXAMINATION എന്ന വാക്കിൽ ഉള്ള അക്ഷരങ്ങളെക്കൊണ്ട് എത്ര 4 അക്ഷരചരങ്ങളെ രൂപീകരിക്കാം?

22. ഏതു മൂന്നു ബിന്ദുക്കളും ഒരേ രേഖയിൽ വരുന്ന വിധത്തിൽ 15 ബിന്ദുക്കളെകൊണ്ട് എത്ര ത്രികോണങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കാം?

XI_Maths_Ch4_V-1_Mal.indd 231 14-02-2023 16:51:11

23. 15 ബിന്ദുക്കളിൽ 7 ബിന്ദുക്കൾ ഒരു രേഖയിലും കൂടാതെ 8 ബിന്ദുക്കൾ മറ്റൊരു സമാന്തര രേഖയിലും ആയിരുന്നാൽ 15 ബിന്ദുക്കളെ കൊണ്ടു എത്ര ത്രികോണങ്ങൾ രൂപീകരിക്കാം?

24. ഒരു തലത്തിൽ 11 ബിന്ദുക്കൾ ഉണ്ട്. ഇവയിൽ 4 ബിന്ദുക്കളെ കൂടാതെ മറ്റേ ഏത് 3 ബിന്ദുക്കളും ഒരേ രേഖയിലില്ല എങ്കിൽ താഴെ കാണുന്നവയെ കാണുക.

(i) ഈ ബിന്ദുക്കളിൽ ഒരു ജോടി ബിന്ദുക്കളാൽ ഉണ്ടാകുന്ന രേഖകൾ എത്ര?

(ii) ഈ ബിന്ദുക്കളെ ശീർഷങ്ങളായിട്ടുള്ള എത്ര ത്രികോണങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കാം?

25. 90 വികർണ്ണങ്ങൾ ഉള്ള ബഹുകോണിൽ എത്ര വശങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കും?

4.6 ഗണിതാഗമനം

ആദ്യത്തെ n ഒറ്റ ഘനവാസ്തവിക സംഖ്യകളുടെ തുകയെ കരുതുക. ഇവ 1, 3, 5, 7,..., $2n-1$ ആണ്. ആദ്യത്തെ ഒറ്റസംഖ്യ 1 ഇതിന്റെ തുക 1. ആദ്യത്തെ രണ്ട് ഒറ്റസംഖ്യകൾ 1 കൂടാതെ 3. ഇവയുടെ തുക 4. ഇതിലിരുന്ന് താഴെതന്നിട്ടുള്ളതുപോലെ രൂപപ്പെടുന്നു.

$$1 = 1$$

$$1 + 3 = 4$$

$$1 + 3 + 5 = 9$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$ ഇങ്ങനെ തുടരാം.

വലത് ഭാഗത്തിലുള്ള സംഖ്യകൾ 1, 4, 9, 16, 25,... എല്ലാം വർഗ്ഗസംഖ്യകളാണ്. ഈ രൂപത്തിലിരുന്ന് ആദ്യത്തെ n ഒറ്റ ഘനവാസ്തവിക സംഖ്യകളുടെ തുക n–ന്റെ വർഗ്ഗമായ n^2 –ന് തുല്യമാണ് എന്ന് ചിന്തിക്കാം. ഇതിനെ $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$ ന് എന്ന് എഴുതാം. എന്നാലും ഇതൊരു അനുമാനമാണ്. ഇതിനെ തെളിയിക്കാൻ നാം ഗണിതാഗമസതരത്വം ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഇങ്ങനെയുള്ള അനുമാനത്തെ തെളിയിക്കുന്ന രീതി ഗണിതാഗമന രീതി ആകുന്നു. ഒരു പ്രത്യേക ഫലത്തിന്റെ എല്ലാ സാധ്യതകളേയും പരിശോധിച്ച് ഉണ്ടാക്കുന്ന അനുമാനത്തിനനുസരിച്ചാണ് ഈ ആഗമന രീതി ഉള്ളത്. ഇതു പ്രധാനമായി ബീജഗണിതം കൂടാതെ ഗണിതത്തിന്റെ മറ്റ് വിഭാഗങ്ങളിൽ ഘനവാസ്തവിക സംഖ്യ n ൽ ഉള്ള ഫലങ്ങൾ അല്ലെങ്കിൽ സിദ്ധാന്തങ്ങളെ തെളിയിക്കാൻ പ്രയോജനപ്പെടുന്നു.

ഈ ഗണിതാഗമന രീതിയെ പല പടികൾ കയറുന്നതിനോട് ബന്ധപ്പെടുത്തി നോക്കാം.

നാം പടികളിൽ കയറുന്നത് നിശ്ചയിക്കാൻ താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയെ തീരുമാനിക്കേണ്ടതുണ്ട്.

(a) നാം ആദ്യത്തെ പടിയിൽ കയറണം.

(b) ഒരു പ്രത്യേക പടിയിൽ എത്തിയതിന് ശേഷം നാം അതിനടുത്ത പടിയിൽ കയറണം.

നിലകൾ (a), (b) എന്നിവയെ തീരുമാനിച്ചാൽ നാം എല്ലാ പടികളെയും കയറുന്നത് തീരുമാനിക്കാം. ഇതുപോലെ ഈ രീതിയെ ഗണിതപ്രസ്താവന $P(n)$–നെ തെളിയിക്കാൻ പ്രയോജനപ്പെടുത്തുമ്പോൾ ആഗമന രീതിയിൽ താഴെ തന്നിട്ടുള്ള നിലകൾ ഉണ്ട്.

XI_Maths_Ch4_V-1_Mal.indd 232 14-02-2023 16:51:12



ചിത്രം 4.16

നില 1 : $n = 1$–ന് പ്രസ്താവന ശരിയാണെന്ന് തെളിയിക്കുക. അതായത് $P(1)$ ശരിയാണെന്ന് തെളിയിക്കുക. പടികെട്ടിന്റെ ആദ്യത്തെ പടി കയറുന്നതിനെ താരതമ്യപ്പെടുത്തുമ്പോൾ ഇതിനെ **പ്രാരംഭ നില** എന്നുപറയാം.

നില 2 : $n = k$–യ്ക്ക് ശരിയായിരിക്കുമ്പോൾ $n = k + 1$–ന് ഈ പ്രസ്താവന തെളിയിക്കുക. ഇവിടെ k ഒരു ഘനവാസ്തവിക സംഖ്യയാണ്. അതായത് $P(k)$ യ്ക്ക് ശരിയായാൽ $P(k + 1)$ ന് ശരിയാണെന്ന് തെളിയിക്കണം. ഇതിനെ **ആഗമനഘട്ടം** എന്ന് പറയാം.

നില 3 : നില 1, നില 2 എന്നിവയെ തെളിയിച്ചാൽ $P(n)$ എന്നത് എല്ലാ ഘന വാസ്തവിക സംഖ്യകൾ n–നും ശരിയാണ്.

ഗണിതത്തിൽ ആഗമനരീതി എന്നത് ഗണിതത്തിൽ തെളിയിച്ചിട്ടുള്ള രീതികളിൽ ഏറ്റവും രസകര മായ ഒന്നാണ്. ഈ രീതിയെ ഉദാഹരണത്തിലൂടെ വിവരിക്കാം. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ഉദാഹരണത്തിൽ നമുക്ക് നന്നായി അറിയാവുന്ന ഫലത്തെ ഗണിതാഗമനം മുഖേന തെളിയിക്കാം.

ഉദാഹരണം 4.61 ഗണിതാഗമന രീതി ഉപയോഗിച്ച് എല്ലാ വാസ്തവിക സംഖ്യകൾ $n \geq 1$–ന് $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം :

$P(n) : = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

$n = 1$ എന്ന് പ്രതിയിട്ടാൽ.

$$P(1) = \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

എന്നാൽ, $n = 1$–ന് ഇത് ശരി. അതായത് $P(1)$ എന്നത് ശരി.

$n = k$–യ്ക്ക് ഈ പ്രസ്താവന ശരിയായാൽ.

അതുകൊണ്ട്,

$$P(k) = 1 + 2 + 3 + ... + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

ഇപ്പോൾ $P(k+1)$ എന്നത് ശരിയാണെന്ന് തെളിയിക്കുന്നു.

XI_Maths_Ch4_V-1_Mal.indd 233 14-02-2023 16:51:12

$$P(k+1) = \underbrace{1+2+3+...+k} + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

$$P(k+1) = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

അതുകൊണ്ട്, $P(k+1)$ എന്നത് ശരിയാണ്.

$P(k)$ ശരി എന്നതുകൊണ്ട് $P(k+1)$ ശരിയെന്ന് തെളിയിച്ചു.

ഗണിതാഗമന തത്ത്വമനുസരിച്ച് എല്ലാ വാസ്തവിക സംഖ്യകൾ $n \geq 1$–നും $1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$ ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം 4.62 ആദ്യത്തെ n ഒറ്റ വാസ്തവിക സംഖ്യകളുടെ തുക n^2 എന്ന് ആഗമന രീതിയിൽ തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം :

$P(n)$: $= 1+3+5+...+(2n-1)$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

അതിനാൽ, $P(1) = 1 = 1^2$ എന്നത് ശരിയാണ്.

$n = k$–യ്ക്ക് ഈ പ്രസ്താവന ശരിയായാൽ.

അതുകൊണ്ട്,

$P(k) = 1+3+5+...+(2k-1)$

അതായത് $P(k) = k^2$

ഇപ്പോൾ $P(k+1) = (k+1)^2$ എന്ന് തെളിയിക്കണം.

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 1+3+5+...+(2(k+1)-1) \\ &= \underbrace{1+3+5+7+...+(2k-1)} + 2k+1 \\ &= P(k)+2k+1 \\ &= k^2+2k+1 = (k+1)^2 \end{aligned}$$

അതിനാൽ, $P(k+1)$ എന്നത് ശരി.

$P(k)$ ശരിയായതുകൊണ്ട് $P(k+1)$ ശരിയാണെന്ന് തെളിയിച്ചു.

അതിനാൽ ഗണിതാഗമനം മുഖേന എല്ലാ വാസ്തവിക സംഖ്യകൾ $n \geq 1$–നും,

ആദ്യത്തെ n ഒറ്റ വാസ്തവിക സംഖ്യകളുടെ തുക n^2 എന്ന് തെളിയിച്ചു.

ഉദാഹരണം 4.63 ഗണിതാഗമനം മുഖേന എല്ലാ വാസ്തവിക സംഖ്യകൾ $n \geq 1$–ന്

$1^2+2^2+3^2+...+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

XI_Maths_Ch4_V-1_Mal.indd 234 14-02-2023 16:51:14

നിർദ്ധാരണം :

$P(n) : = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

$n = 1$ എന്ന് പ്രതിയിട്ടാൽ

$$P(1) = \frac{1(1+1)(2(1)+1)}{6} = 1$$

അതിനാൽ, $n = 1$–ന് ഇത് ശരി. അതായത് $P(1)$ എന്നത് ശരി

$n = k$–യ്ക്ക് ഈ പ്രസ്താവന ശരി എന്നിരിക്കട്ടെ.

അതിനാൽ,

$$P(k) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

ഇപ്പോൾ $P(k+1)$ ശരി എന്ന് തെളിയിക്കണം.

$$\begin{aligned}
P(k+1) &= \underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2} + (k+1)^2 \\
&= P(k) + (k+1)^2 \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} \\
&= \frac{(k+1)(k(2k+1) + 6(k+1))}{6} \\
&= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} \\
&= \frac{(k+1)[(k+2)(2k+3)]}{6} \\
&= \frac{(k+1)[((k+1)+1)(2(k+1)+1)]}{6}
\end{aligned}$$

അതിനാൽ $P(k+1)$ എന്നത് ശരിയാണ്.

$P(k)$ ശരിയായത് കൊണ്ട് $P(k+1)$ ശരി എന്ന് തെളിയിച്ചു.

അതിനാൽ ഗണിതാഗമനം മുഖേന എല്ലാ വാസ്തവിക സംഖ്യകൾ $n \geq 1$–ന്

$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം 4.64 ഗണിതാഗമനം മുഖേന എല്ലാ നിസർഗ്ഗസംഖ്യകൾ n–ന്

$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം :

$P(n)$: $= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

$n = 1$ എന്ന് പ്രതിയിട്ടാൽ

XI_Maths_Ch4_V-1_Mal.indd 235 14-02-2023 16:51:15

$P(1) = \frac{1}{1.2} = \frac{1}{2}$

അതിനാൽ, $P(1)$ ശരി.

$n = k$– യ്ക്ക് ഈ പ്രസ്താവന ശരി എന്നിരിക്കട്ടെ.

അതിനാൽ, $P(k) = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$

ഇപ്പോൾ $P(k+1)$ എന്നത് ശരിയാണെന്ന് തെളിയിക്കണം.

$$\begin{aligned} P(k+1) &= \underbrace{\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{k(k+1)}} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= P(k) + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k}{(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{1}{(k+1)}\left(\frac{k}{1} + \frac{1}{k+2}\right) \\ &= \frac{1}{(k+1)}\left(\frac{k^2+2k+1}{k+2}\right) \\ &= \frac{1}{(k+1)}\left(\frac{(k+1)^2}{k+2}\right) = \frac{(k+1)}{(k+2)} \end{aligned}$$

അതിനാൽ $P(k+1)$ എന്നത് ശരി.

$P(k)$ ശരിയായതിനാൽ $P(k+1)$ ശരിയാണെന്ന് തെളിയിച്ചു.

അതിനാൽ ഗണിതാഗമനം മുഖേന എല്ലാ നിസർഗ്ഗസംഖ്യകൾ n–നും,

$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ ആണ്.

ഉദാഹരണം 4.65 ഏതൊരു നിസർഗ്ഗസംഖ്യ n–നും, $a > b$ എങ്കിൽ $a^n - b^n$ യെ $a - b$ കൊണ്ട് ഭാഗിക്കാം എന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം :

$P(n)$: $= a^n - b^n$ യെ $a - b$ കൊണ്ട് ഭാഗിക്കാം എന്നിരിക്കട്ടെ.

$n = 1$ എന്ന് പ്രതിയിട്ടാൽ

$P(1) = a - b$ ഇത് $a - b$ കൊണ്ട് ഭാഗിക്കാം.

അതിനാൽ $P(1)$ എന്നത് ശരി. ഈ പ്രസ്താവന $n = k$–യ്ക്ക് ശരിയാണെന്നിരിക്കട്ടെ. അതിനാൽ $P(k) = a^k - b^k$ യെ $a - b$ കൊണ്ട് ഭാഗിക്കാം.

$P(k) = a^k - b^k, \lambda(a-b), \lambda \in \mathbb{N}$

തെളിയിക്കാനുള്ളത് $P(k+1) = a^{k+1} - b^{k+1}$, എന്നത് $a - b$ കൊണ്ട് ഭാഗിക്കാം.

$$\begin{aligned} P(k+1) &= a^{k+1} - b^{k+1} \\ &= a^{k+1} - ab^k + ab^k - b^{k+1} \end{aligned}$$

XI_Maths_Ch4_V-1_Mal.indd 236 14-02-2023 16:51:17

$$= a(a^k - b^k) + b^k(a-b)$$

$$= a(\lambda(a-b)) + b^k(a-b)$$

$$= (a-b)(a\lambda + b^k)$$

$$= (a-b)\lambda_1,\ \lambda_1 = a\lambda + b^k, \lambda_1 \in \mathbb{N}$$

ഇത് $a-b$ കൊണ്ട് ഭാഗിക്കാം. അതിനാൽ $P(k+1)$ എന്നത് ശരി. $P(k)$ ശരിയായതുകൊണ്ട് $P(k+1)$ ശരിയെന്ന് തെളിയിച്ചു. അതിനാൽ ഗണിതാഗമനതത്ത്വം മുഖേന ഏതൊരു നിസർഗ്ഗസംഖ്യ n–നും, $a > b$ എങ്കിൽ $a^n - b^n$ യെ $a-b$ കൊണ്ട് ഭാഗിക്കാം.

ഉദാഹരണം 4.66 $n \geq 1$–ന് $3^{2n+2} - 8n - 9$ എന്നത് 8 കൊണ്ട് ഭാഗിക്കാം എന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം :

$P(n)$: $= 3^{2n+2} - 8n - 9$, എന്നത് 8 കൊണ്ട് ഭാഗിക്കാം എന്നിരിക്കട്ടെ.

$n = 1$ എന്ന് പ്രതിയിട്ടാൽ $P(1) = 3^{2+2} - 8(1) - 9 = 64$, ഇത് 8 കൊണ്ട് ഭാഗിക്കാം. അതിനാൽ $P(1)$ ശരിയാണ്.

$n = k$–യ്ക്ക് ഈ പ്രസ്താവന ശരി എന്നിരിക്കട്ടെ.

എങ്കിൽ $P(k) = 3^{2k+2} - 8k - 9$, എന്നത് 8 കൊണ്ട് ഭാഗിക്കാം.

അതിനാൽ, $P(k) = 3^{2k+2} - 8k - 9 = 8k_1, k_1 \in \mathbb{N}$

അതിനാൽ, $3^{2k+2} = 8k_1 + 8k + 9$ എന്ന് എഴുതാം.

$P(k+1) = 3^{2(k+1)+2} - 8(k+1) - 9$ എന്നത് 8 കൊണ്ട് ഭാഗിക്കാം എന്ന് തെളിയിക്കണം.

$$P(k+1) = 3^{2(k+1)+2} - 8(k+1) - 9$$

$$= 3^2 3^{2k+2} - 8k - 8 - 9$$

$$= 3^2(8k_1 + 8k + 9) - 8k - 17$$

$$= 72k_1 + 72k + 81 - 8k - 17 = 72k_1 + 64k + 64$$

$$= 8(9k_1 + 8k + 1)$$

$$= 8k_2, k_2 = 9k_1 + 8k + 1 \in \mathbb{N}$$

$P(k+1)$ എന്നത് 8 കൊണ്ട് ഭാഗിക്കാം. അതിനാൽ $P(k+1)$ എന്നത് ശരി. $P(k)$ ശരിയായത് കൊണ്ട് $P(k+1)$ ശരിയാണെന്ന് തെളിയിച്ചു. അതിനാൽ ഗണിതാഗമനം മുഖേന $n \geq 1$–ന് $3^{2n+2} - 8n - 9$ എന്നത് 8 കൊണ്ട് ഭാഗിക്കാം.

ഉദാഹരണം 4.67 ഗണിതാഗമന രീതിയിൽ $n \geq 2$ ആയ ഏതൊരു വാസ്തവിക സംഖ്യയ്ക്കും $3n^2 > (n+1)^2$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

XI_Maths_Ch4_V-1_Mal.indd 237 14-02-2023 16:51:19

നിർദ്ധാരണം :

$n \geq 2$ ആയിരിക്കുമ്പോൾ $3n^2 > (n+1)^2$ എന്ന പ്രസ്താവന $P(n)$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

അതിനാൽ ആദ്യഘട്ടം $n = 2$ ആണ്.

$P(2) = 3 \times 2^2 = 12$ കൂടാതെ $3^2 = 9,\ 12 > 9$ അതിനാൽ $P(2)$ എന്നത് ശരി.

$n = k$–യ്ക്ക് $P(n)$ ശരിയാണെന്നിരിക്കട്ടെ.

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 3(k+1)^2 = 3k^2 + 6k + 3 \\ &= P(k) + 6k + 3 \\ &> (k+1)^2 + 6k + 3 \\ &= k^2 + 2k + 1 + 6k + 3 \\ &= k^2 + 8k + 4 \\ &= k^2 + 4k + 4 + 4k \\ &= (k+2)^2 + 4k \\ &> (k+2)^2, k > 0 \text{ ആയതിനാൽ} \end{aligned}$$

$P(k+1)$ എന്നത് ശരി.

$P(k)$ എന്നത് ശരിയായതുകൊണ്ട് $P(k+1)$ ശരി എന്ന് തെളിയിച്ചു.

അതിനാൽ ഗണിതാഗമനം മുഖേന എല്ലാ $n \geq 2$–നും $3n^2 > (n+1)^2$ ആണ്.

ഉദാഹരണം 4.68 ഗണിതാഗമനം മുഖേന ഏതൊരു വാസ്തവിക സംഖ്യയ്ക്കും $n \geq 2,\ 3^n > n^2$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം :

$n \geq 2$–ന് $3^n > n^2$ എന്നത് $P(n)$ എന്ന പ്രസ്താവന എന്നിരിക്കട്ടെ. ആദ്യ ഘട്ടം $n = 2$ ആണ്.

$P(2) = 3^2 = 9$ കൂടാതെ $2^2 = 4$

$9 > 4$ ആയതുകൊണ്ട് $P(2)$ ശരിയാണ്.

$n = k$–യ്ക്ക് $P(n)$ ശരിയാണെന്നിരിക്കട്ടെ.

അതിനാൽ, $P(k) > k^2$

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 3^{k+1} = 3 \times 3^k = 3 \times P(k) \\ &> 3k^2 \\ &> (k+1)^2 \ \text{(ഉദാഹരണം 4.67ലിരുന്ന്)} \end{aligned}$$

അതിനാൽ $n \geq 2$ ഉള്ള എല്ലാ വാസ്തവികസംഖ്യകൾക്കും $3^n > n^2$ ആണ്.

XI_Maths_Ch4_V-1_Mal.indd 238 14-02-2023 16:51:21

ഉദാഹരണം 4.69 ഏതൊരു നിസർഗ്ഗസംഖ്യ $n \in \mathbb{N}$ –ന് ഗണിതാഗമനം മുഖേന

$$\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+...+\cos(\alpha+(n-1)\beta)=\cos\left(\alpha+\frac{(n-1)\beta}{2}\right)\times\frac{\sin\left(\frac{n\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

എന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം :

$$P(n) := \cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+...+\cos(\alpha+(n-1)\beta)$$

$$= \cos\left(\alpha+\frac{(n-1)\beta}{2}\right)\times\frac{\sin\left(\frac{n\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

$n=1$ എന്ന് പ്രതിയിട്ടാൽ

$$P(1)=\cos(\alpha)=\frac{\cos(\alpha).\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

അതുകൊണ്ട് $P(1)$ എന്നത് ശരി. ഈ പ്രസ്താവന $n=k$–യ്ക്ക് $P(k)$ ശരിയാണെന്നിരിക്കട്ടെ.

അതുകൊണ്ട്,

$$\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+...+\cos(\alpha+(k-1)\beta)=\cos\left(\alpha+\frac{(k-1)\beta}{2}\right)\times\frac{\sin\left(\frac{k\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

ഇപ്പോൾ $P(k+1)$ എന്നത് ശരിയാണെന്ന് തെളിയിക്കണം.

$$P(k+1) = \underbrace{\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+...+\cos(\alpha+(k-1)\beta)}+\cos(\alpha+k\beta)$$

$$P(k+1) = P(k)+\cos(\alpha+k\beta)$$

$$= \frac{\cos\left(\alpha+\frac{(k-1)\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{k\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}+\cos(\alpha+k\beta)$$

$$= \frac{1}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}\left[\cos\left(a+\frac{(k-1)\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{k\beta}{2}\right)+\cos(\alpha+k\beta)\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}\left[\cos\left(\left(\alpha+\frac{k\beta}{2}\right)-\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{k\beta}{2}\right)+\cos(\alpha+k\beta)\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}\left[\left(\cos\left(a+\frac{k\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)+\sin\left(\alpha+\frac{k\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)\sin\left(\frac{k\beta}{2}\right)+\cos(\alpha+k\beta)\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}\left[cos\left(a+\frac{k\beta}{2}\right)cos\left(\frac{\beta}{2}\right)sin\left(\frac{k\beta}{2}\right)+sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\left(sin\left(\alpha+\frac{k\beta}{2}\right)sin\left(\frac{k\beta}{2}\right)+cos(\alpha+k\beta)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}\left[\cos\left(a+\frac{k\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{k\beta}{2}\right)+\frac{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{2}\left(2\sin\left(\alpha+\frac{k\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{k\beta}{2}\right)+2\,\mathrm{c}\,os(\alpha+k\beta)\right)\right]$$

XI_Maths_Ch4_V-1_Mal.indd 239 14-02-2023 16:51:22

$$= \frac{1}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}\left[\cos\left(a+\frac{k\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{k\beta}{2}\right)+\frac{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{2}(\cos\alpha-\cos(\alpha+k\beta)+2cos(\alpha+k\beta))\right]$$

$$= \frac{1}{sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}\left[cos\left(a+\frac{k\beta}{2}\right)cos\left(\frac{\beta}{2}\right)sin\left(\frac{k\beta}{2}\right)+\frac{sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{2}(cos\alpha+cos(\alpha+k\beta))\right]$$

$$= \frac{1}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}\left[\cos\left(a+\frac{k\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{k\beta}{2}\right)+\frac{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{2}\left(2\cos\left(\alpha+\frac{k\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{-k\beta}{2}\right)\right)\right]$$

$$= \frac{\cos\left(a+\frac{k\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}\left[\sin\left(\frac{k\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)+\sin\frac{\beta}{2}\cos\left(\frac{k\beta}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{\cos\left(a+\frac{k\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{(k+1)\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

അതായത്,

$$\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+...+\cos(\alpha+(k-1)\beta)+\cos(\alpha+k\beta)$$

$$= \cos\left(a+\frac{k\beta}{2}\right)\times\frac{\sin\left(\frac{(k+1)\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

അതിനാൽ, $P(k+1)$ എന്നത് ശരിയാണ്. $P(k)$ ശരിയായതുകൊണ്ട് $P(k+1)$ ശരിയാണെന്ന് തെളിയിച്ചു. അതിനാൽ ഗണിതാഗമന തത്വം മുഖേന ഏതൊരു നിസർഗ്ഗസംഖ്യ $n\in\mathbb{N}$ –നും,

$$\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+...+\cos(\alpha+(n-1)\beta)=\cos\left(\alpha+\frac{(n-1)\beta}{2}\right)\times\frac{\sin\left(\frac{n\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

ആകുന്നു

ഉദാഹരണം 4.70 ഗണിതാഗമനം മുഖേന $i^2=-1$ ആയ ഏതൊരു നിസർഗ്ഗസംഖ്യ n–നും $(r(cos\theta+isin\theta))^n=r^n(cosn\theta+isinn\theta)$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം :

$P(n):=(r(cos\theta+isin\theta))^n=r^n(cosn\theta+isinn\theta)$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

$n=1$ എന്ന് പ്രതിയിട്ടാൽ

$P(1)=(r(cos\theta+isin\theta))^1=r(cos\theta+isin\theta)$

അതുകൊണ്ട് $P(1)$ എന്നത് ശരി. ഈ പ്രസ്താവന $n=k$–യ്ക്ക് $P(k)$ എന്നത് ശരി എന്നിരിക്കട്ടെ. അതിനാൽ

$(r(cos\theta+isin\theta))^k=r^k(cosk\theta+isink\theta)$

XI_Maths_Ch4_V-1_Mal.indd 240 14-02-2023 16:51:24

ഇപ്പോൾ $P(k+1)$ ശരിയാണെന്ന് തെളിയിക്കണം.

$$\begin{aligned} P(k+1) &= (r(cos\theta + isin\theta))^{k+1} \\ &= (r(cos\theta + isin\theta))^{k} \times r(cos\theta + isin\theta) \\ &= r^k(cosk\theta + isink\theta) \times r(cos\theta + isin\theta) \\ &= r^{k+1} \times ((cosk\theta cos\theta + i^2 sink\theta sin\theta) + i(sink\theta cos\theta + cosk\theta sin\theta)) \\ &= r^{k+1} \times ((cosk\theta cos\theta - sink\theta sin\theta) + i(sink\theta cos\theta + cosk\theta sin\theta)) \\ &= r^{k+1} \times (cos(k+1)\theta + isin(k+1)\theta) \end{aligned}$$

അതിനാൽ, $P(k+1)$ എന്നത് ശരി. $P(k)$ ശരിയായതുകൊണ്ട് $P(k+1)$ ശരിയാണെന്ന് തെളിയിച്ചു. അതിനാൽ ഗണിതാഗമന തത്ത്വമനുസരിച്ച് ഏതൊരു നിസർഗ്ഗസംഖ്യ n–നും,

$$(r(cos\theta + isin\theta))^n = r^n(cosn\theta + isinn\theta).$$

കുറിപ്പ്: ഉദാഹരണം 4.70 -ൽ നാം തെളിയിച്ചത് നിസർഗ്ഗസംഖ്യകളുടെ **ഡിമോവൈർ സിദ്ധാന്തം** ആണ്. ഇതുപറ്റി അടുത്തവർഷം വിശദമായി പഠിക്കാം.

അഭ്യാസം 4.4

1. ഗണിതാഗമന രീതിയിൽ $n \geq 1$–ന്
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

2. ഗണിതാഗമന രീതിയിൽ $n \geq 1$–ന്
$$1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

3. പൂജ്യമല്ലാത്ത ആദ്യത്തെ n ഇരട്ട സംഖ്യകളുടെ തുക $n^2 + n$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

4. ഗണിതാഗമന രീതിയിൽ $n \geq 1$–ന്
$$1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + n.(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

5. ഗണിതാഗമനം ഉപയോഗിച്ച് $n \geq 2$ ആയ ഏതൊരു നിസർഗ്ഗസംഖ്യയ്ക്കും
$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)...\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

6. ഗണിതാഗമനം ഉപയോഗിച്ച് $n \geq 2$ ആയ ഏതൊരു നിസർഗ്ഗസംഖ്യയ്ക്കും
$$\frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + ... + \frac{1}{1+2+3+...+n} = \frac{n-1}{n+1}$$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

7. ഗണിതാഗമനം ഉപയോഗിച്ച് ഏതൊരു നിസർഗ്ഗസംഖ്യ n–നും
$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + ... + \frac{1}{n.(n+1).(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

8. ഗണിതാഗമനം ഉപയോഗിച്ച് ഏതൊരു നിസർഗ്ഗ സംഖ്യ n–നും
$$\frac{1}{2.5} + \frac{1}{5.8} + \frac{1}{8.11} + ... + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{n}{6n+4}$$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

XI_Maths_Ch4_V-1_Mal.indd 241 14-02-2023 16:51:25

9. ഗണിതാഗമന രീതിയിൽ തെളിയിക്കുക.

$$1!+(2\times 2!)+(3\times 3!)+\ldots+(n\times n!)=(n+1)!-1$$

10. ഗണിതാഗമനം ഉപയോഗിച്ച് ഏതൊരു നിസർഗ്ഗ സംഖ്യ n–നും $x^{2n}-y^{2n}$ എന്നത് $x+y$ കൊണ്ട് ഹരിക്കാം എന്ന് തെളിയിക്കുക.

11. ഗണിതാഗമന തത്ത്വം അനുസരിച്ച് $n\geq 1$–ന്

$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2>\frac{n^3}{3}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

12. ആഗമനരീതി ഉപയോഗിച്ച് എല്ലാ നിസർഗ്ഗസംഖ്യകൾ n–നും n^3-7n+3 എന്നത് 3 കൊണ്ട് ഹരിക്കാം എന്ന് തെളിയിക്കുക.

13. ആഗമനരീതി ഉപയോഗിച്ച് എല്ലാ നിസർഗ്ഗസംഖ്യകൾ n–നും $5^{n+1}+4\times 6^n$ യെ 20 കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന ശിഷ്ടം 9 എന്ന് തെളിയിക്കുക.

14. ആഗമനരീതി ഉപയോഗിച്ച് എല്ലാ നിസർഗ്ഗസംഖ്യകൾ n–നും $10^n+3\times 4^{n+2}+5$ 9 കൊണ്ട് ഹരിക്കാം എന്ന് തെളിയിക്കാം.

15. ഗണിതാഗമനം ഉപയോഗിച്ച് താഴെ തന്നിട്ടുള്ള പ്രസ്താവന തെളിയിക്കുക.

$$sin(\alpha)+sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{6}\right)+\ldots$$

$$+sin\left(\alpha+\frac{(n-1)\pi}{6}\right)=\frac{sin\left(\alpha+\frac{(n-1)\pi}{12}\right)\times sin\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}$$

XKN7E

അഭ്യാസം 4.5

ശരിയായ ഉത്തരം തിരഞ്ഞെടുക്കുക.

1. 2,4,5,7 തുടങ്ങിയ എല്ലാ സംഖ്യകളും ഉപയോഗിച്ച് രൂപീകരിച്ച നാലക്ക സംഖ്യകളാൽ 10 –ാം സ്ഥാനത്തിലുള്ള എല്ലാ സംഖ്യകളുടെയും തുക.

(1) 432 (2) 108 (3) 36 (4) 18

2. ഒരു പരീക്ഷയിൽ 5 സാധ്യതകളുള്ള 3 പല തെരഞ്ഞെടുപ്പുള്ള ചോദ്യങ്ങൾ ഉണ്ട്. ഒരു വിദ്യാർത്ഥി എല്ലാ ചോദ്യങ്ങൾക്കും ശരിയായി ഉത്തരം നൽകാൻ പരാജയപ്പെടുന്ന വഴികളുടെ എണ്ണം .

(1) 125 (2) 124 (3) 64 (4) 63

3. 30 വിദ്യാർത്ഥികളുള്ള ക്ലാസിൽ ഗണിതശാസ്ത്രത്തിൽ ഒന്നാമതും, രണ്ടാമതും, ഭൗതിക ശാസ്ത്രത്തിൽ ഒന്നാമതും രണ്ടാമതും രസതന്ത്രത്തിൽ ഒന്നാമതും ഇംഗ്ലീഷിൽ ഒന്നാമതും സമ്മാനങ്ങൾ നൽകുന്നതിനുള്ള ആകെ മാർഗ്ഗങ്ങളുടെ എണ്ണം.

(1) $30^4\times 29^2$ (2) $30^3\times 29^3$ (3) $30^2\times 29^4$ (4) 30×29^5

4. എല്ലാം ഒറ്റസംഖ്യകളായ 5 അക്ക സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം.

(1) 25 (2) 5^5 (3) 5^6 (4) 625

XI_Maths_Ch4_V-1_Mal.indd 242 14-02-2023 16:51:26

5. 3 വിരലുകളിൽ 4 മോതിരങ്ങളിടുന്ന മാർഗങ്ങളുടെ എണ്ണം.

(1) 4^3-1 (2) 3^4 (3) 68 (4) 64

6. ${}^{(n+5)}P_{(n+1)}=\left(\frac{11(n-1)}{2}\right){}^{(n+3)}P_n$ എങ്കിൽ, n–ന്റെ മൂല്യം

(1) 7 കൂടാതെ 11 (2) 6 കൂടാതെ 7 (3) 2 കൂടാതെ 11 (4) 2 കൂടാതെ 6

7. തുടർന്ന r ബനവാസ്തവിക സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം ഏത് കൊണ്ട് ഹരിക്കാം.

(1) $r!$ (2) $(r-1)!$ (3) $(r+1)!$ (4) r^r

8. കുറഞ്ഞത് ഒരക്കം വീണ്ടും വരത്തക്കവിധം 5 അക്ക ഫോൺ നമ്പരിന്റെ എണ്ണം.

(1) 90000 (2) 10000 (3) 30240 (4) 69760

9. ${}^{a^2-a}C_2={}^{a^2-a}C_4$ എങ്കിൽ a–യുടെ മൂല്യം

(1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) 5

10. ഒരു തലത്തിൽ 10 ബിന്ദുക്കൾ ഉണ്ട്. അവയിൽ 4 ഒരേ രേഖയിലുള്ളത്. ഏതെങ്കിലും രണ്ട് ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിച്ച് കിട്ടുന്ന രേഖകളുടെ എണ്ണം

(1) 45 (2) 40 (3) 39 (4) 38

11. ഒരു ചടങ്ങിന് 12 പേരിൽ 8 പേരെ ക്ഷണിച്ചു. ഇതിൽ രണ്ട് പേർ ഒരുമിച്ച് ചടങ്ങിന് വരുന്നില്ല എങ്കിൽ അവരെ ക്ഷണിക്കാനുള്ള വഴികളുടെ എണ്ണം.

(1) $2\times{}^{11}C_7+{}^{10}C_8$ (2) ${}^{11}C_7+{}^{10}C_8$ (3) ${}^{12}C_8-{}^{10}C_6$ (4) ${}^{10}C_6+2!$

12. നാല് സമാന്തര രേഖകളുടെ കൂട്ടം മറ്റൊരു മൂന്ന് സമാന്തര രേഖകളെ ഛേദിക്കുമ്പോൾ രൂപം കൊള്ളുന്ന സാമാന്തരികങ്ങളുടെ എണ്ണം.

(1) 6 (2) 9 (3) 12 (4) 18

13. ഒരു മുറിയിലുള്ള ഓരോരുത്തരും മറ്റവരോട് കൈ കുലുക്കുന്നു. 66 കൈകുലുക്കൽ സംഭവിക്കുന്നു എങ്കിൽ ആ മുറിയിലെ ആളുകളെ എണ്ണം

(1) 11 (2) 12 (3) 10 (4) 6

14. 44 വികർണ്ണങ്ങളുള്ള ഒരു ബഹുഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണം

(1) 4 (2) 4! (3) 11 (4) 22

15. ഒരുതലത്തിലെ 10 രേഖകളിൽ രണ്ടെണ്ണം സമാന്തരമല്ലാതെയും മൂന്ന് രേഖകളും ഒരു ബിന്ദുവിൽ ഛേദിക്കാതെയും ഇരുന്നാൽ രേഖകൾ സംഗമിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെ ആകെ എണ്ണം.

(1) 45 (2) 40 (3) 10! (4) 2^{10}

16. ഒരു തലത്തിലുള്ള 10 ബിന്ദുക്കളിൽ 4 ബിന്ദുക്കൾ ഒരേ രേഖയിലുള്ളത് എങ്കിൽ അവയാൽ രൂപം കൊള്ളുന്ന ത്രികോണങ്ങളുടെ എണ്ണം

(1) 110 (2) ${}^{10}C_3$ (3) 120 (4) 116

XI_Maths_Ch4_V-1_Mal.indd 243 14-02-2023 16:51:27

17. ${}^{2n}C_3 : {}^{n}C_3 = 11:1$ എങ്കിൽ n–ന്റെ മൂല്യം

(1) 5 (2) 6 (3) 11 (4) 7

18. ${}^{(n-1)}C_r + {}^{(n-1)}C_{(r-1)}$ എന്നത്

(1) ${}^{(n+1)}C_r$ (2) ${}^{(n-1)}C_r$ (3) ${}^{n}C_r$ (4) ${}^{n}C_{r-1}$

19. 52 കാർഡുകളിലിരുന്ന് തെരഞ്ഞെടുക്കുന്ന 5 കാർഡുകളിൽ കുറഞ്ഞത് ഒരു രാജാവ് ഉണ്ടായിരിക്കുന്നതിനുള്ള സാധ്യതകളുടെ എണ്ണം.

(1) ${}^{52}C_5$ (2) ${}^{48}C_5$ (3) ${}^{52}C_5 + {}^{48}C_5$ (4) ${}^{52}C_5 - {}^{48}C_5$

20. ഒരു ചതുരംഗ പലകയിൽ ഉള്ള ദീർഘചതുരങ്ങളുടെ എണ്ണം.

(1) 81 (2) 9^9 (3) 1296 (4) 6561

21. 2 കൂടാതെ 3 എന്നീ അക്കങ്ങൾ കൊണ്ട് രൂപപ്പെടുത്തുന്ന 10 അക്ക സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം

(1) ${}^{10}C_2 + {}^{9}C_2$ (2) 2^{10} (3) $2^{10} - 2$ (4) 10!

22. P_r എന്നത് ${}^{r}P_r$ യെ സൂചിപ്പിച്ചാൽ $1 + P_1 + 2P_2 + 3P_3 + ... + nP_n$ എന്ന ശ്രേണിയുടെ തുക

(1) P_{n+1} (2) $P_{n+1} - 1$ (3) $P_{n-1} + 1$ (4) ${}^{(n+1)}P_{(n-1)}$

23. ആദ്യത്തെ n ഒറ്റ നിസർഗ്ഗസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം

(1) ${}^{2n}C_n \times {}^{n}P_n$ (2) $\left(\frac{1}{2}\right)^n \times {}^{2n}C_n \times {}^{n}P_n$ (3) $\left(\frac{1}{4}\right)^n \times {}^{2n}C_n \times {}^{2n}P_n$ (4) ${}^{n}C_n \times {}^{n}P_n$

24. ${}^{n}C_4, {}^{n}C_5, {}^{n}C_6$ എന്നിവ AP യിൽ ഉള്ളത് എങ്കിൽ, n–ന്റെ മൂല്യം

(1) 14 (2) 11 (3) 9 (4) 5

25. $1 + 3 + 5 + 7 + ... + 17$–ൽ മൂല്യം

(1) 101 (2) 81 (3) 71 (4) 61

സംഗ്രഹം

- ഒരു നിസർഗ്ഗസംഖ്യ n ന്റെ ഘടകങ്ങളാക്കൽ എന്നത് ആദ്യത്തെ n നിസർഗ്ഗ സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം ആണ്.
- ഏതൊരു വാസ്തവിക സംഖ്യ $n \geq 1$ ഉം $n! = n(n-1)!$ ആകുന്നു.
- n വ്യത്യസ്തമായ വസ്തുക്കളെ ക്രമപ്പെടുത്തുന്ന രീതികളുടെ എണ്ണം $n!$.
- n വ്യത്യസ്ത വസ്തുക്കളിലിരുന്ന് r വസ്തുക്കളെ ക്രമപരിവർത്തനം ചെയ്യുന്നതിന്റെ എണ്ണം ${}^{n}P_r = \frac{n!}{(n-r)!} = n(n-1)(n-2)...(n-r+1)$.
- n വസ്തുക്കളിൽ ഒരേ തരത്തിലുള്ള o_1 വസ്തുക്കളെ ആദ്യത്തെ വിഭാഗത്തിലും ഒരേ തരത്തിലുള്ള o_2 വസ്തുക്കളെ രണ്ടാമത്തെ വിഭാഗത്തിലും,... ഒരേ തരത്തിലുള്ള o_k വസ്തുക്കളെ k വിഭാഗത്തിലും മറ്റുള്ളവ വ്യത്യസ്തമായും ഉള്ള വസ്തുക്കളുടെ ക്രമപരിരവ്ത്തനത്തിന്റെ എണ്ണം $\frac{n!}{p_1!p_2!\cdots p_k!}$.
- ക്രമപരിവർത്തനത്തിൽ ക്രമം മുഖ്യം സംയോഗത്തിൽ ക്രമം മുഖ്യമില്ല.
- n വസ്തുക്കളിലിരുന്ന് r വസ്തുക്കളെ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്ന സംയോഗങ്ങളുടെ എണ്ണം ${}^{n}C_r$.

  ഇതിനെ ${}^{n}C_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}$ എന്ന് എഴുതാം.

XI_Maths_Ch4_V-1_Mal.indd 244 14-02-2023 16:51:29

ഐസിറ്റി കോർണർ – 4 (എ)



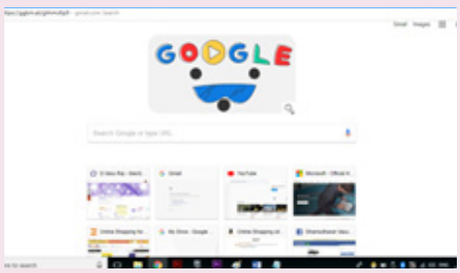
ഘട്ടം –1 : ബ്രൗസർ ഓപ്പൺ ചെയ്ത് താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള യുആർഎൽ ലിങ്കിൽ ടൈപ്പ് ചെയ്യുകയോ ക്യൂആർ കോഡ് സ്കാൻ ചെയ്യുകയോ ചെയ്യുക.

ഘട്ടം – 2 : ജിയോജിബ്രായിൽ പെർമ്യൂട്ടേഷൻസ് ആൻഡ് കോമ്പിനേഷൻസ് പ്രത്യക്ഷമാകും. ഇതിൽ നിങ്ങൾക്കാവശ്യമായ വർക്ക്ഷീറ്റ് തുറക്കാൻ കഴിയും. ഉദാഹരണം കോമ്പിനേഷൻ ഗെയിം.

ഘട്ടം – 3 : "Instruction" ബട്ടൺ അമർത്തി വിളയാടുന്ന രീതിയെ അറിഞ്ഞ് "Start" ബട്ടൺ അമർത്തിക്കൊണ്ട് ആരംഭിക്കുക.

ഘട്ടം – 4 : കൊടുത്തിരിക്കുന്ന വസ്ത്രങ്ങളിൽ സ്ത്രീക്ക് അനുയോജ്യമായ വസ്ത്രത്തെ തെരഞ്ഞെടുത്തതിന് ശേഷം ക്യാമറ ചിത്രം അമർത്തുക. അവസാനം "Check" ബട്ടൺ അമർത്തി ഉത്തരം പരിശോധിക്കാം.

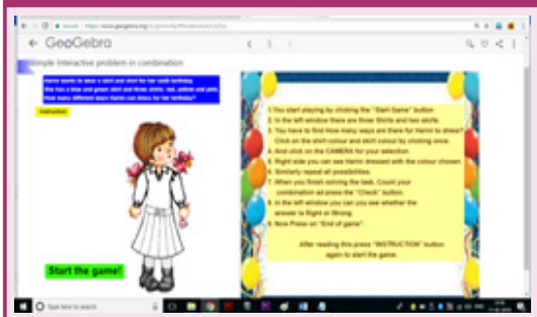
ഘട്ടം–1



ഘട്ടം–2

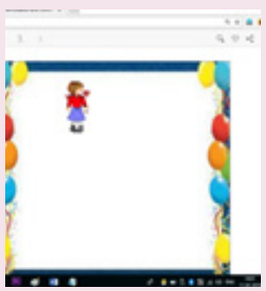


ഘട്ടം–3



ഘട്ടം–4





ബാക്കിയുള്ള വർക്കുകൾ കൂടി ചെയ്താൽ പെർമ്യൂട്ടേൻസ് ആൻഡ് കോമ്പിനേഷൻസ് എന്ന ആശയത്തെപ്പറ്റി കൂടുതൽ അറിയാൻ കഴിയും

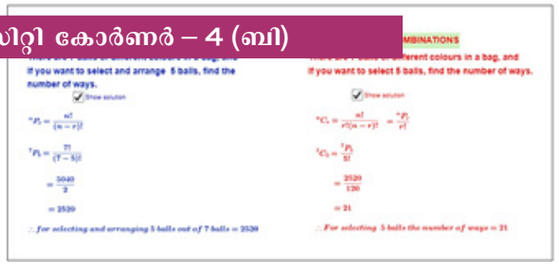
*ചിത്രങ്ങൾ പ്രതീകത്തിനുള്ളവയാണ്.

ബ്രൗസർ ലിങ്ക് : https://ggbm.at/gVnmcKp9

പെർമ്യൂട്ടേഷൻസ് ആൻഡ് കോമ്പിനേഷൻസ്

XI_Maths_Ch4_V-1_Mal.indd 245 14-02-2023 16:51:29

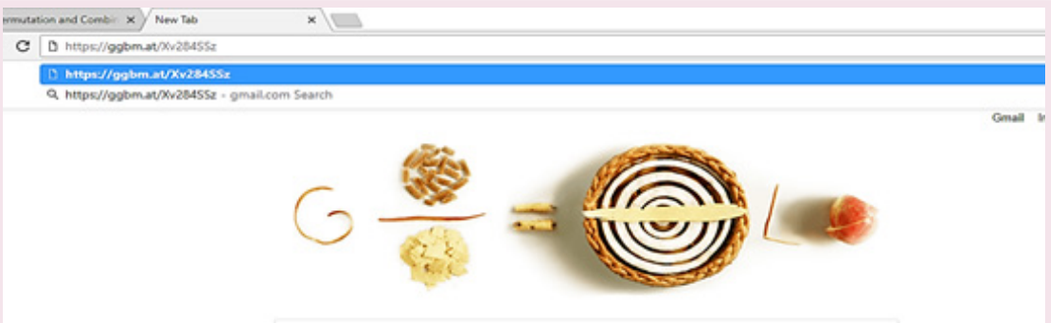
ഐസിറ്റി കോർണർ – 4 (ബി)



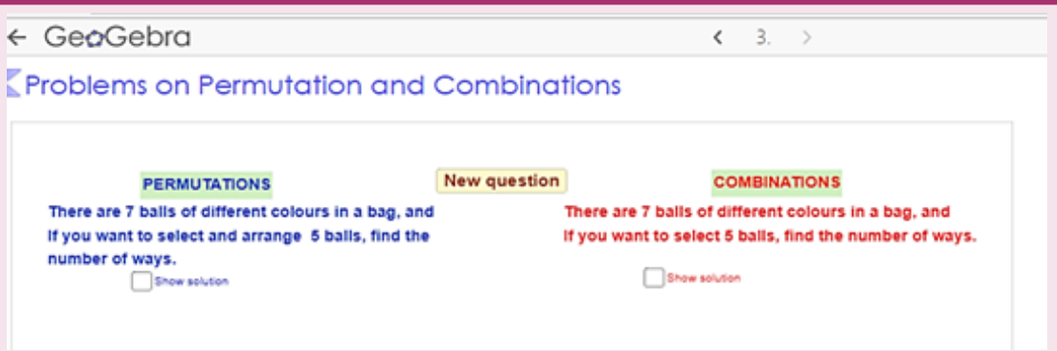
ഘട്ടം – 1 : ബ്രൗസർ ഓപ്പൺ ചെയ്ത് താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള യുആർഎൽ ലിങ്ക് ടൈപ്പ് ചെയ്യുകയോ ക്യൂആർ കോഡ് സ്കാൻ ചെയ്യുകയോ ചെയ്യുക.

ഘട്ടം – 2 : പെർമ്യൂട്ടേഷൻസ് ആൻഡ് കോമ്പിനേഷൻസിലെ ണെക്കുകൾ ജിയോജിബ്രയിൽ പ്രത്യക്ഷമാകും. ന്യൂ പ്രോബ്ളത്തിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ പുതിയ ചോദ്യങ്ങൾ തെളിഞ്ഞു വരും. നിങ്ങൾ സ്വന്തമായി ഉത്തരങ്ങൾ കണ്ടെത്തണം. അതിനുശേഷം ഷൊ സൊല്യൂഷൻ ക്ലിക്ക് ചെയ്ത് അതിലെ ഉത്തരങ്ങൾ നിങ്ങളുടെ ഉത്തരങ്ങളുമായി ശരിനോക്കുക.

ഘട്ടം–1



ഘട്ടം–2



*ചിത്രങ്ങൾ പ്രതീകങ്ങൾക്കു മാത്രം.

ബ്രൗസർ ലിങ്ക് : https://ggbm.at/gVnmcKp9

പെർമ്യൂട്ടേഷൻസ് ആൻഡ് കോമ്പിനേഷൻസ്

XI_Maths_Ch4_V-1_Mal.indd 246 14-02-2023 16:51:29

അധ്യായം 5

ദ്വിപദ സിദ്ധാന്തം, അനുക്രമവും കൂടാതെ ശ്രേണിയും

AUI3H

"ജീവിതം പുതിയതും തിളക്കമാർന്നതുമായ വസ്ത്രങ്ങൾ അണിഞ്ഞ് നീരുറവപോലെ എന്റെ മുന്നിൽ നിൽക്കുന്നു"

– ജോഹാൻകാൾ ഫ്രീഡിക്ക് കാസ്.

5.1 ആമുഖം

$(a+b)$ എന്ന ദ്വിപദത്തിന്റെ എല്ലാ ധനപൂർണ്ണാങ്കം, n–ന്റെ ഘാതത്തിനെ വികസിപ്പിക്കുന്നതിന് ദ്വിപദ സിദ്ധാന്തം വഴിതെളിക്കുന്നു. ദ്വിപദ സിദ്ധാന്തം ഗണിതത്തിന്റെ എല്ലാ ശാഖകളിലും കൂടാതെ ശാസ്ത്രത്തിന്റെ എല്ലാ വിഭാഗങ്ങളിലും ഉപയോഗപ്പെടുന്നു. ഉദാഹരണമായി, $(2x-7)^{23}$ –യുടെ വികസത്തിൽ x^{20} –ന്റെ ഗുണാങ്കത്തിനെ ദ്വിപദസിദ്ധാന്തം മൂലം ലളിതമായി കണ്ടുപിടിക്കാൻ സാധിക്കും. ഒരാൾ ദേശസാത്ക്കരിക്കപ്പെട്ട ഒരു ബാങ്കിൽ ഒരു നിശ്ചിത തുകയെ 8% കൂട്ടുപലിശ നിരക്കിൽ നിക്ഷേപിച്ചാൽ 10 വർഷങ്ങൾക്കുശേഷം അവർക്ക് എത്ര തുക ലഭിക്കുന്നു എന്നു കാണുന്നതിനും, നമ്മുടെ നാട്ടിന്റെ നിലവിലെ ജനസംഖ്യയും, ജനസംഖ്യാവളർച്ചാ നിരക്കും അറിയാമെങ്കിൽ 15 വർഷങ്ങൾക്കു ശേഷം നമ്മുടെ നാട്ടിലെ ജനസംഖ്യ കണക്കാക്കുന്നതിനും, ദ്വിപദ സിദ്ധാന്തം സഹായിക്കുന്നു. $(a+b)^n, n \in \mathbb{N}$ –ന്റെ വികാസത്തിലുള്ള അംഗങ്ങളുടെ ഗുണാങ്കത്തെ ദ്വിപദ ഗുണാങ്കം എന്നുപറയുന്നു. ഒരുസമ സന്ദർഭ പരീക്ഷണത്തിന്റെ സമീകരണം അവസാനമുള്ളതും അതിന്റെ ഓരോ സംഭവവും ജയമല്ലെങ്കിൽ പരാജയം എന്നിരിക്കുകയാണെങ്കിൽ ആ സമസന്ദർഭ പരീക്ഷണത്തിന്റെ ഓരോ സംഭവത്തിന്റെ സംഭാവ്യത കാണുന്നതിൽ ദ്വിപദ സിദ്ധാന്തം മുഖ്യപങ്കുവഹിക്കുന്നു. ഈ അധ്യായത്തിൽ ദ്വിപദ സിദ്ധാന്തവും അതിന്റെ ഉപയോഗത്തെയും കുറിച്ച് പഠിയ്ക്കാം.



ജോഹാൻകാൾ ഫ്രെഡറിക്കാസ് (1777–1855)

ഗ്രീക്ക് ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനായ യൂക്ലിഡ്, ദ്വിപദസിദ്ധാന്തത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനം രണ്ടിന്റെ ഒരു പ്രത്യേക സ്ഥിതിയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. അടിസ്ഥാനം മൂന്നിന്റെ ദ്വിപദസിദ്ധാന്തത്തിനെ ആറാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ഇന്ത്യാക്കാർ അറിഞ്ഞിരുന്നു. 1544-ാം ആണ്ടിൽ മൈക്കേൽ സ്റ്റിഫൽ എന്ന ജർമ്മൻ ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞൻ **ദ്വിപദ ഗുണാങ്കങ്ങളെ** ആവിഷ്കരിച്ച് $(1+x)^n$ ഉം $(1+x)^{n-1}$ ലൂടെ പ്രസ്താവിച്ചു.

ജോഹാൻ കാൾ ഫ്രെഡറിക് കാസ് ചരിത്രത്തിൽ വളരെ പ്രശസ്തനായ ഒരു ഗണിത പണ്ഡിതനാണ്. പലരും ഇദ്ദേഹത്തെ ഗണിതത്തിന്റെ യുവരാജാവ് എന്ന് വിളിച്ചിരുന്നു. സംഖ്യാ ഗണിതം, ഭൗതികശാസ്ത്രം, വാനശാസ്ത്രം എന്ന് പല വിഭാഗങ്ങളിൽ ഇദ്ദേഹത്തിന്റെ സംഭാവനകൾ ഉണ്ടായിട്ടും അദ്ദേഹത്തിന് ഇഷ്ടമുള്ള വിഭാഗം സംഖ്യാഗണിതം ആയിരുന്നു. കൂടാതെ ഇദ്ദേഹം സംഖ്യാഗണിതത്തെ ഗണിതത്തിന്റെ യുവരാജ്ഞി എന്ന് വിശേഷിപ്പിച്ചിരുന്നു. ഇദ്ദേഹത്തെക്കുറിച്ചുള്ള ഒരു കഥയുണ്ട്. ഇദ്ദേഹത്തിന്റെ സ്കൂളിലെ അധ്യാപകൻ വിദ്യാർത്ഥികളെ പരീക്ഷിക്കുവാൻവേണ്ടി 1 മുതൽ 100 വരെയുള്ള സംഖ്യകളെ കൂട്ടി മൂല്യം കാണാൻ ആവശ്യപ്പെട്ടു. അദ്ദേഹം ആവശ്യപ്പെട്ട ചില നിമിഷങ്ങളിൽ കാസ് 5050 എന്ന ഉത്തരം കാണിച്ചു. കുട്ടിയായ കാസ് ആ അനുക്രമത്തിന്റെ കൂട്ടുതുക കാണുവാൻ ഏതു രീതിയാണ് ഉപയോഗിച്ചത് എന്നത് ആർക്കും വ്യക്തമായി മനസ്സിലായില്ല.

XI_Maths_Ch5_V-1_Mal.indd 247 14-02-2023 16:52:31

1000 വർഷങ്ങൾക്കു മുമ്പ് പുരാണങ്ങളിൽ അനുക്രമം കൂടാതെ ശ്രേണികളെ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന ഗണിത തന്ത്രങ്ങൾ ആവിഷ്ക്കരിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്. അവയിൽ ശ്രേണിയെകുറിച്ചുള്ള ഒരു പ്രശസ്തമായ പുരാണകഥ, ചെസ്സിന്റെ കണ്ടുപിടിത്തമാണ്. ഇവിടെ ചെസ്സ് പലകയിൽ ഉള്ള ഓരോ കള്ളികളും (ചതുരം) 1, 2, 4, 8, . . . എന്ന സംഖ്യകളോട് ബന്ധമുള്ളതാണ്. (64-ാമത്തെ കള്ളിയിലെ സംഖ്യയെ ഊഹിക്കുക) കൂട്ടുസമാന്തരശ്രേണി, ഗുണനക്രമാനുപാത ശ്രേണി എന്നിവയുടെ പല ഉപയോഗങ്ങൾ യഥാർത്ഥ ജീവിതത്തിൽ ഉപയോഗമുള്ളതായി കാണാം.

മുൻ ക്ലാസ്സുകളിൽ അനുക്രമം കൂടാതെ ശ്രേണിയെക്കുറിച്ച് പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്. അനുക്രമം എന്നത് സംഖ്യകളെ ഒരു പ്രത്യേക രീതിയിൽ ക്രമപ്പെടുത്തുന്നതാണ്. ആ അനുക്രമത്തിലെ അംഗങ്ങളുടെ കൂട്ടുതുകയെ ശ്രേണി എന്നു വിളിക്കുന്നു. $\sin\frac{9}{44}\pi, \log 43$ കൂടാതെ e^{20} എന്നിവയുടെ മൂല്യങ്ങളെ ആവശ്യമുള്ള അളവിൽ ഏകദേശ രൂപത്തിൽ കാണാൻ അനന്തശ്രേണികൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു. അനുക്രമ രീതികൾ, വ്യത്യസ്ത സമീകരണങ്ങളിലും, വിശകലനങ്ങളിലും പ്രാധാന്യം അർഹിക്കുന്നു ഇപ്പോൾ അനുക്രമരീതികളെയും, ശ്രേണികളെയും കുറിച്ച് വിശദമായി പഠിയ്ക്കാം.

പഠനലക്ഷ്യങ്ങൾ

ഈ പാഠഭാഗം അവസാനിക്കുമ്പോൾ വിദ്യാർത്ഥികൾ അറിഞ്ഞിരിക്കേണ്ട പാഠവസ്തുതകൾ

- ദ്വിപദ സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ ആശയം, ദ്വിപദഗുണാങ്കങ്ങളെ കണക്കാക്കൽ കൂടാതെ ദ്വിപദ സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ പ്രയോജനങ്ങൾ;
- അനുക്രമവും ശ്രേണിയും കുറിച്ചുള്ള ആശയങ്ങൾ;
- കൂട്ടൽ, ഗുണനം കൂടാതെ വ്യുൽക്രമം ശരാശരി കണക്കിടൽ;
- വാസ്തവിക സംഖ്യകളുടെ അവസാനിക്കുന്നതും, അവസാനിക്കാത്തതുമായ ശ്രേണികളുടെ കൂട്ടുതുക കാണുക;
- ശ്രേണികളുടെ കൂട്ടുതുക കാണുവാൻ ദൂരദർശിനി കൂട്ടൽ ഉപയോഗിക്കുന്നു;
- ദ്വിപദശ്രേണി, ഘാതശ്രേണി, ലോഗരിത ശ്രേണി എന്നിവയെ ഉപയോഗിക്കുന്ന രീതി.

5.2 ദ്വിപദ സിദ്ധാന്തം

സൈക്കിൾ, ബൈനാക്കുലർ, ബൈനറി എന്നീ വാക്കുകളുടെ തുടക്കത്തിൽ കാണുന്ന b_i എന്ന വാക്ക് 2 നെ കുറിക്കുന്നു. ദ്വിപദം എന്ന വാക്ക് രണ്ട് പദങ്ങൾ ചേർന്ന അവസ്ഥയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഉദാഹരണമായി, $(1+x),(x+y),(x^2+xy)$ കൂടാതെ $(2a+3b)$ ദ്വിപദങ്ങൾക്ക് ചില ഉദാഹരണങ്ങളാകുന്നു.

5.2.1 ദ്വിപദഗുണാങ്കങ്ങൾ

പാഠഭാഗം 4-ൽ, ${}^nC_r$ എന്ന ചിഹ്നവും അതിന്റെ ഉപയോഗത്തെക്കുറിച്ചും പഠിച്ചു. കൂടാതെ അതിന്റെ നിർവ്വചനം ${}^nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(r-1))}{r(r-1)(r-2)...1} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$ എന്നതിനെ കുറിച്ചും നാം മനസ്സിലാക്കി. ${}^nC_r$ എന്നത്, $(1+x)^n$ ൽ x^r-ന്റെ ഗുണാങ്കമായും കൂടാതെ $(a+b)^n$ ൽ $a^r b^{n-r}$-ന്റെ ഗുണാങ്കമായും കാണപ്പെടുന്നതുകൊണ്ട് ഇവയെ **ദ്വിപദ ഗുണാങ്കങ്ങൾ** എന്നു പറയുന്നു. ${}^nC_r$-ന്റെ മൂല്യങ്ങളെ സൂത്രങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കുവാൻ സാധിക്കും എങ്കിലും അതിനെക്കാൾ ലഘുവായ രീതിയിലും കണ്ടുപിടിക്കാൻ സാധിക്കും.

XI_Maths_Ch5_V-1_Mal.indd 248 14-02-2023 16:52:32

പാസ്ക്കൽ ത്രികോണം

പാസ്ക്കൽ ത്രികോണം എന്നത് ${}^nC_r$ –ന്റെ മൂല്യങ്ങളെ ത്രികോണ രൂപത്തിൽ എഴുതുന്നതാകുന്നു. ഇവിടെ $(k+1)$ വരിയിൽ സംഖ്യകൾ അടങ്ങിയിരിക്കുന്നു. യഥാർത്ഥത്തിൽ പാസ്ക്കൽ ത്രികോണം എന്നത് ${}^kC_0, {}^kC_1, {}^kC_2, {}^kC_3, ..., {}^kC_k$.

$$
\begin{array}{cccc}
{}^0C_0 & & & \\
{}^1C_0 & {}^1C_1 & & \\
{}^2C_0 & {}^2C_1 & {}^2C_2 & \\
{}^3C_0 & {}^3C_1 & {}^3C_2 & {}^3C_3 \\
{}^4C_0 & {}^4C_1 & {}^4C_2 & {}^4C_3 \quad {}^4C_4 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}
\quad \Longleftrightarrow \quad
\begin{array}{ccccc}
 & & 1 & & \\
 & 1 & & 1 & \\
1 & & 2 & & 1 \\
 & 1 & & 3 & \quad 3 \quad 1 \\
1 & & 4 & & 6 \quad 4 \quad 1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots &
\end{array}
$$

$(a+b)^0, (a+b)^1, (a+b)^2, (a+b)^3$ എന്നീ സർവ്വസമീകരണങ്ങളുടെ ഓരോ പദത്തിന്റെയും ഗുണാങ്കങ്ങളുടെ വികാസത്തെയും, ഓർമ്മിയ്ക്കുകയും, നിരീക്ഷിക്കുകയും ചെയ്യാം. ഗുണാങ്കങ്ങളുടെ ക്രമീകരണം ഒരു പ്രത്യേക രീതിയിലാണ്.

$$
\begin{array}{cc}
(a+b)^0 = 1 & 1 \\
(a+b)^1 = a+b & 1 \quad 1 \\
(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 & 1 \quad 2 \quad 1 \\
(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 & 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1
\end{array}
$$

പാസ്ക്കൽ ത്രികോണത്തെ സൂക്ഷ്മമായി നിരീക്ഷിക്കുമ്പോൾ ഓരോ വരിയുടെയും ആരംഭവും അവസാനവും 1 ആകുന്നു. മറ്റുള്ളവ മുൻവരികളിൽ അതിനു മുകളിലുള്ള ദ്വിപദങ്ങളെ കൂട്ടികിട്ടുന്നതായും കാണപ്പെടുന്നു. ഉദാഹരണമായി '3' എന്നത് അതിന്റെ മുൻവരിയിലുള്ള 1, 2 ഇവയുടെ കൂട്ടുതുകയാകുന്നു. 10 എന്നത് അതിന്റെ മുൻവരിയിൽ 10 ന്റെ തൊട്ടു മുകളിലുള്ള രണ്ടു സംഖ്യകൾ 4, 6 ന്റെ കൂട്ടുതുകയാകുന്നു. $(a+b)^n = {}^nC_0 a^n b^0 + {}^nC_1 a^{n-1} b^1 + ... {}^nC_r a^{n-r} b^r + ... + {}^nC_n a^0 b^n$ എന്നത് $(a+b)^n$ ന്റെ **ദ്വിപദവികാസമാകുന്നു**. ഇതിനെ നമുക്ക് തെളിയിക്കാം. n–ന്റെ ഏതൊരു $(a+b)^n$ ന്റെ ദ്വിപദവികാസത്തെ പാസ്ക്കൽ ത്രികോണം ഉപയോഗിച്ച് എഴുതാം. ഉദാഹരണമായി, പാസ്ക്കൽ ത്രികോണത്തിന്റെ അഞ്ചാമത്തെ വരിയെ ഉപയോഗപ്പെടുത്തി $(a+b)^4$ ന്റെ വികാസത്തെയും ആറാമത്തെ വരി ഉപയോഗിച്ച് $(a+b)^5$ ന്റെ വികാസത്തെയും എഴുതാം അങ്ങനെ തുടർന്ന് എഴുതാവുന്നതാണ്.

$(a+b)^5$ –ന്റെ പദങ്ങൾ (ഗുണാങ്കങ്ങൾ ഇല്ലാതെ)

$a^5, a^4b, a^3b^2, a^2b^3, ab^4, b^5$ നമുക്ക് എഴുതാം

നമുക്ക് അറിയാം. പാസ്ക്കൽ ത്രികോണത്തിന്റെ ആറാമത്തെ വരി,

1 5 10 10 5 1 എന്നതാകുന്നു.

ഇവ രണ്ടിനെയും ഉപയോഗപ്പെടുത്തി, $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$ എന്നെഴുതാം.

ഗുണനം, വിഭജനം ഇല്ലാതെ കൂട്ടൽ മാത്രം പ്രയോജനപ്പെടുത്തി പാസ്ക്കൽ ത്രികോണം രൂപപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. അതുകൊണ്ട് ഏതൊരു $(a+b)^n, n \in \mathbb{N}$ ന്റെ ദ്വിപദ വികാസത്തെ ഗുണനക്രിയ ഇല്ലാതെ എഴുതാൻ സാധിക്കും.

XI_Maths_Ch5_V-1_Mal.indd 249 14-02-2023 16:52:34

മുകളിൽ പറഞ്ഞ ത്രികോണ രൂപം 17-ാം നൂറ്റാണ്ടിലെ ഫ്രഞ്ച് ഗണിത പണ്ഡിതൻ ബ്ലൈസ് പാസ്ക്കലിന്റെ കണ്ടുപിടിത്തമാണ്. ഇദ്ദേഹം ഈ ഘടനയുടെ ഗണിത സ്വഭാവങ്ങളെ കണ്ടറിഞ്ഞ് ശരിയായ രീതിയിൽ സംഭാവ്യതയിൽ പ്രയോഗിച്ചത്.

5.2.2 ധനസമാകല സൂചികയ്ക്കായുള്ള ദ്വിപദ സിദ്ധാന്തം

ഇപ്പോൾ വളരെ പ്രശസ്തമായ സിദ്ധാന്തങ്ങളിൽ ഒന്നായ ദ്വിപദ സിദ്ധാന്തത്തെ മനസ്സിലാക്കാം.

സിദ്ധാന്തം 5.1 ധനസമാകല സൂചികയ്ക്കായുള്ള ദ്വിപദസിദ്ധാന്തം

n–എന്നത് ഏതെങ്കിലും ഒരു ധനപൂർണ്ണാങ്കമാണെങ്കിൽ,

$(a+b)^n = {}^nC_0 a^n b^0 + {}^nC_1 a^{n-1} b^1 + \ldots + {}^nC_r a^{n-r} b^r + \ldots + {}^nC_n a^0 b^n$ ആകുന്നു.

തെളിവ് ഈ സിദ്ധാന്തത്തെ ഗണിതനിർദ്ധാരണം ഉപയോഗിച്ച് നമുക്ക് തെളിയിക്കാം. ഏതെങ്കിലും ഒരു ധനപൂർണ്ണാങ്കം n–ന് $P(n)$ ഒരു നിർവ്വചനമെന്നിരിക്കട്ടെ $(a+b)^n = {}^nC_0 a^n b^0 + {}^nC_1 a^{n-1} b^1 + \ldots + {}^nC_r a^{n-r} b^r + \ldots + {}^nC_n a^0 b^n$, ${}^1C_0 = 1$, ${}^1C_1 = 1$, അതുകൊണ്ട് $P(1)$ ന്റെ വലതുവശം $a^1 b^0 + a^0 b^1$ ആകുന്നു. ഇത് $(a+b)$ യ്ക്ക് സമമാണ്. ഇടതുവശം $(a+b)^1$ ആകുന്നു. അതുകൊണ്ട് $P(1)$ ശരിയാകുന്നു. ഏതെങ്കിലും ഒരു ധനപൂർണ്ണാങ്കം k– യ്ക്ക് $P(k)$ ശരിയാകുന്നു. അതായത് ..... നമുക്ക് ..... എന്ന സർവ്വസമീകരണത്തെ തെളിവിനായി ഉപയോഗിയ്ക്കാം. ഇപ്പോൾ,

$$(a+b)^k = {}^kC_0 a^k b^0 + {}^kC_1 a^{k-1} b^1 + \ldots + {}^kC_r a^{k-r} b^r + \ldots + {}^kC_k a^0 b^k$$

$$\begin{aligned}
(a+b)^{k+1} &= (a+b)(a+b)^k \\
&= (a+b)\left[{}^kC_0 a^k b^0 + {}^kC_1 a^{k-1} b^1 + \ldots + {}^kC_r a^{k-r} b^r + \ldots + {}^kC_k a^0 b^k\right] \\
&= \left[{}^kC_0 a^{k+1} b^0 + {}^kC_1 a^k b^1 + \ldots + {}^kC_r a^{k-r+1} b^r + \ldots + {}^kC_k a^1 b^k\right] \\
&\quad + \left[{}^kC_0 a^k b^1 + {}^kC_1 a^{k-1} b^2 + \ldots + {}^kC_r a^{k-r} b^{r+1} + \ldots + {}^kC_k a^0 b^{k+1}\right] \\
&= {}^kC_0 a^{k+1} b^0 + \left[{}^kC_1 + {}^kC_0\right] a^k b^1 + \ldots + \left[{}^kC_r + {}^kC_{r-1}\right] a^{k-r+1} b^r \\
&\quad + \ldots + \left[{}^kC_k + {}^kC_{k-1}\right] a^1 b^k + {}^kC_k a^0 b^{k+1}
\end{aligned}$$

${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$ എന്ന പരീക്ഷണ നിയമമനുസരിച്ച്,

$$\begin{aligned}
&= {}^{k+1}C_0 a^{k+1} b^0 + {}^{k+1}C_1 a^k b^1 + {}^{k+1}C_2 a^{k-1} b^2 + \ldots + {}^{k+1}C_r a^{k-r+1} b^r \\
&\quad + \ldots + {}^{k+1}C_k a^1 b^k + {}^{k+1}C_{k+1} a^0 b^{k+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(a+b)^{k+1} &= {}^{k+1}C_0 a^{(k+1)} b^0 + {}^{k+1}C_1 a^{(k+1)-1} b^1 + {}^{k+1}C_2 a^{(k+1)-2} b^2 + \ldots \\
&\quad + {}^{k+1}C_r a^{(k+1)-r} b^r + \ldots + {}^{k+1}C_k a^1 b^{(k+1)-1} + {}^{k+1}C_{k+1} a^0 b^{k+1}
\end{aligned}$$

ഇവിടെ ഇത് സൂചിപ്പിക്കുന്നത് $P(k)$ ശരിയാകുന്ന സമയത്തെല്ലാം $P(k+1)$ യും ശരിയാകുന്നു. അങ്ങനെ ഗണിത നിർവ്വചനത്തിന്റെ തത്വമനുസരിച്ച് എല്ലാ നിസർഗ്ഗ സംഖ്യകൾ n–നും $P(n)$ വാസ്തവമാകുന്നു.

അതായത്, $(a+b)^n = {}^nC_0 a^n b^0 + {}^nC_1 a^{n-1} b^1 + \ldots + {}^nC_r a^{n-r} b^r + \ldots + {}^nC_n a^0 b^n, n \in \mathbb{N}$

XI_Maths_Ch5_V-1_Mal.indd 250 14-02-2023 16:52:35

കുറിപ്പ് :

(i) $(a+b)^n, n \in \mathbb{N}$ ന്റെ വികസിപ്പിച്ച് എഴുതുമ്പോൾ,

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} {}^nC_k a^{n-k} b^k$, $\sum_{k=0}^{n} {}^nC_k a^k b^{n-k}$ എന്ന് എഴുതാം.

(ii) n $(a+b)^n$ നെ വികസിപ്പിച്ച് എഴുതുമ്പോൾ കൃത്യമായി $(n+1)$ പദങ്ങൾ അടങ്ങീട്ടുണ്ട്.

(iii) $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} {}^nC_k a^{n-k} b^k$ ൽ ഓരോ പദത്തിലും a –എന്ന ഘാതത്തിൽ 1 കുറഞ്ഞു വരുന്നു. അതേസമയം ഓരോ പദത്തിലും b –ന്റെ ഘാതത്തിൽ 1 കൂടിവരുന്നു. എന്നിരുന്നാലും ഓരോ പദത്തിലുമുള്ള a യുടെയും b –യുടെയും ഘാതത്തിന്റെ കൂട്ടുതുക എപ്പോഴും n ആകുന്നു.

(iv) $(a+b)^n$, n പദത്തിനെ വികസിപ്പിച്ചു എഴുതുമ്പോൾ $(r+1)$-ാം പദം $T_{r+1} = {}^nC_r a^{n-r} b^r$, $r = 0, 1, 2, ..., n$ ആകുന്നു.

(v) $(a+b)(a+b)...(a+b)$, എന്ന n ഘടകങ്ങളുടെ ഗുണനഫലത്തിൽ b^r ലഭിക്കുവാൻ ഈ n ഘടകങ്ങളിൽ r ഘടകങ്ങൾ ആവശ്യമുണ്ട്. ഇവയെ ${}^nC_r$ രീതികളിൽ നമുക്ക് ലഭിക്കും. അതുകൊണ്ട്, ${}^nC_r$ എന്നത് $a^{n-r}b^r$ –ഗുണാങ്കമായി നമുക്ക് ലഭിക്കും.

(vi) $(a+b)^n, n \in \mathbb{N}$ എന്നതിനെ വികസിപ്പിക്കുമ്പോൾ തുടക്കത്തിലും, അവസാനത്തിൽ സമദൂരത്തിലുള്ള ഗുണാങ്കങ്ങൾ സമമാണ്. എന്തെന്നാൽ, ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$

$(a+b)^n, n \in \mathbb{N}$ എന്നതിന്റെ വികസിപ്പിക്കലിൽ n ഒരു ഇരട്ട സംഖ്യയാണെങ്കിൽ ഗുണാങ്കത്തിന്റെ കൂടിയ മൂല്യം, ${}^nC_{\frac{n}{2}}$ ആകുന്നു. n ഒരു ഒറ്റസംഖ്യ ആണെങ്കിൽ ഗുണാങ്കത്തിന്റെ കൂടിയ മൂല്യം ${}^nC_{\frac{n-1}{2}}$ അല്ലെങ്കിൽ ${}^nC_{\frac{n+1}{2}}$ ആകുന്നു.

(vii) $(a+b)^n, n \in \mathbb{N}$ എന്നതിനെ വികസിപ്പിക്കുമ്പോൾ n ഒരു ഇരട്ടസംഖ്യയാണെങ്കിൽ മധ്യപദം $T_{\frac{n}{2}+1} = {}^nC_{\frac{n}{2}} a^{n-\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}}$ ആകുന്നു. n ഒറ്റസംഖ്യയാണെങ്കിൽ, $T_{\frac{n-1}{2}+1}$, $T_{\frac{n+1}{2}+1}$ എന്നിവ രണ്ട് മധ്യപദങ്ങളാകുന്നു.

5.3 ദ്വിപദ സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ പ്രത്യേക തരങ്ങൾ

$n \in \mathbb{N}$ എങ്കിൽ $(a+b)^n$ –ന്റെ വികസിപ്പിച്ചാൽ b–യ്ക്കു പകരം $(-b)$ യെ പ്രതിസ്ഥാപിയ്ക്കുക

$$(a-b)^n = {}^nC_0 a^n b^0 - {}^nC_1 a^{n-1} b^1 + {}^nC_2 a^{n-2} b^2 - ...$$
$$+(-1)^r {}^nC_r a^{n-r} b^r + ... + (-1)^n {}^nC_n a^0 b^n \text{ നമുക്ക് ലഭിക്കും}$$

ഇവിടെ '+' , '–' ചിഹ്നങ്ങൾ മാറിമാറി വരുന്നത് ശ്രദ്ധിയ്ക്കുക.

(i) $n \in \mathbb{N}$ എങ്കിൽ $(a+b)^n$ –ന്റെ ദ്വിപദത്തെ വികസിപ്പിക്കുമ്പോൾ $a = 1$, $b = x$ എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ, $(1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 x + {}^nC_2 x^2 + ... + {}^nC_r x^r + ... + {}^nC_n x^n$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു. പ്രത്യേകിച്ചും, $x = 1$ എങ്കിൽ, ${}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + ... + {}^nC_n = 2^n$

കുറിപ്പ്: X എന്നത് n അംഗങ്ങളുള്ള ഒരു ഗണം എങ്കിൽ, r അംഗങ്ങളുള്ള X–ന്റെ ഉപഗണങ്ങളുടെ എണ്ണം ${}^nC_r$ ആകുന്നു. $r = 0, 1, 2, ... n$ എന്ന് ${}^nC_r$ യിൽ പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ, X–ന്റെ ഉപഗണങ്ങളുടെ എണ്ണം കിട്ടും. അതുകൊണ്ട് മുകളിൽ പറഞ്ഞ സർവ്വസമീകരണം ഉപയോഗിച്ച് **n അംഗങ്ങളുള്ള ഒരു ഗണത്തിൽ 2^n ഉപഗണങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കും** എന്നത് മനസ്സിലാക്കാം.

XI_Maths_Ch5_V-1_Mal.indd 251 14-02-2023 16:52:38

(ii) $(1-x)^n = {}^nC_0 - {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 - \ldots + (-1)^r\,{}^nC_rx^r + \ldots + (-1)^nx^n$

പൊതുവിൽ, $x = 1$, ആകുമ്പോൾ,

${}^nC_0 + {}^nC_2 + {}^nC_4 + \ldots = {}^nC_1 + {}^nC_3 + {}^nC_5 + \ldots = 2^{n-1}$.

ഉദാഹരണം 5.1 $(2x+3)^5$ –നെ വികസിപ്പിച്ചെഴുതുക.

നിർദ്ധാരണം :

$(a+b)^n$ എന്ന ദ്വിപദസിദ്ധാന്തത്തെ വികസിപ്പിച്ചെഴുതുമ്പോൾ $a = 2x$, $b = 3$ കൂടാതെ $n = 5$ എന്നിവ പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ,

$$\begin{aligned}(2x+3)^5 &= (2x)^5 + 5(2x)^4 3 + 10(2x)^3 3^2 + 10(2x)^2 3^3 + 5(2x)3^4 + 3^5\\ &= 32x^5 + 240x^4 + 720x^3 + 1080x^2 + 810x + 243.\end{aligned}$$

ഉദാഹരണം 5.2 98^4 –ന്റെ മൂല്യത്തെ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം :

$(a-b)^n$ –എന്ന ദ്വിപദത്തെ വികസിപ്പിച്ചെഴുതുമ്പോൾ $a = 100$, $b = 2$ കൂടാതെ $n = 4$ എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ,

$$\begin{aligned}98^4 &= (100-2)^4\\ &= {}^4C_0\,100^4 - {}^4C_1\,100^3 2 + {}^4C_2\,100^2 2^2 - {}^4C_3\,100^1 2^3 + {}^4C_4\,100^0 2^4\\ &= 100000000 - 8000000 + 240000 - 3200 + 16\\ &= 92236816.\end{aligned}$$

ഉദാഹരണം 5.3 $(x+y)^6$ –നെ വികസിപ്പിച്ചെഴുതുമ്പോൾ മധ്യപദത്തെ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം :

ഇവിടെ $n = 6$ ഇത് ഇരട്ട സംഖ്യയാകുന്നു. അതുകൊണ്ട്, $(x+y)^6$ –നെ വികസിപ്പിച്ചെഴുതുമ്പോൾ മധ്യപദം $x^{\frac{6}{2}}y^{\frac{6}{2}}$ നെ അടങ്ങിയപദം. അതായത് x^3y^3 ഉള്ള പദം. അതുകൊണ്ട് ആ മധ്യപദം ${}^6C_3x^3y^3 = 20x^3y^3$ ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം 5.4 $(x+y)^7$ –നെ വികസിപ്പിച്ചെഴുതുമ്പോൾ മധ്യപദത്തിനെ കണ്ടുപിടിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം :

$n = 7$ എന്നത് ഒറ്റസംഖ്യയാകുന്നു. അതുകൊണ്ട് x^4y^3, x^3y^4 രണ്ട് മധ്യപദങ്ങൾ ഉണ്ട്. അവ ${}^7C_3x^4y^3$, ${}^7C_4x^3y^4$ മധ്യപദങ്ങൾ ആകുന്നു. ഇവ $35x^4y^3$, $35x^3y^4$ ന് സമമാകുന്നു.

ഉദാഹരണം 5.5 $(3+2x)^{10}$ –നെ വികസിപ്പിച്ചെഴുതുമ്പോൾ x^6 –ന്റെ ഗുണാങ്കത്തെ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം :

$(a+b)^{10}$ –എന്ന ദ്വിപദത്തെ വികസിപ്പിച്ചെഴുതുമ്പോൾ $a = 3$, $b = 2x$ എന്നെടുക്കുക.

XI_Maths_Ch5_V-1_Mal.indd 252 14-02-2023 16:52:40

x^6 എന്നത് $(2x)^6$ ന്റെ പദത്തിൽ മാത്രമെ കാണുകയുള്ളൂ. x^6 അടങ്ങിയപദം,

$$^{10}C_6 a^4 b^6 = {}^{10}C_4 a^4 b^6 = \frac{10\times 9\times 8\times 7}{4\times 3\times 2\times 1} 3^4 (2x)^6 = 210\times 3^4\times 2^6 x^6 \quad [\because {}^{10}C_6 = {}^{10}C_4]$$

$(3+2x)^{10}$ നെ വികസിപ്പിച്ചെഴുതുമ്പോൾ x^6 –ന്റെ ഗുണാങ്കം $210\times 3^4\, 2^6$ ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം 5.6 $(2-3x)^7$ –നെ വികസിപ്പിച്ചെഴുതുമ്പോൾ x^3 –യുടെ ഗുണാങ്കത്തെ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം :

$(a+b)^7$ – നെ വികസിപ്പിച്ചെഴുതുമ്പോൾ $a = 2$, $b = -3x$ എന്നെടുക്കുക. x^3 എന്നത്, $(-3x)^3$ അടങ്ങിയ പദത്തിൽ മാത്രമെ കാണുകയുള്ളൂ. x^3 യുള്ള പദം

$$^7C_3 a^4 b^3 = \frac{7\times 6\times 5}{3\times 2\times 1} 2^4 (-3x)^3 = 35\times 2^4\times (-3)^3 x^3 .$$

അതുകൊണ്ട്, $(2-3x)^7$ –നെ വികസിപ്പിച്ചെഴുതുമ്പോൾ x^3 –യുടെ ഗുണാങ്കം $35\times 16\times(-27) = -15120$ ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം 5.7 $(x+a)^n$ –നെ വികസിപ്പിച്ചെഴുതുമ്പോൾ 2, 3, 4-ാം പദങ്ങൾ ക്രമത്തിൽ 240, 720, 1080 എങ്കിൽ x, a, n–ന്റെ മൂല്യങ്ങളെ കണ്ടുപിടിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം :

ഇവിടെ $T_2 = 240, T_3 = 720$, $T_4 = 1080$ തന്നിട്ടുള്ളവ,

$$T_2 = {}^nC_1 x^{n-1} a = 240 \ldots\ldots (1)$$

$$T_3 = {}^nC_2 x^{n-2} a^2 = 720 \ldots\ldots (2)$$

$$T_4 = {}^nC_3 x^{n-3} a^3 = 1080 \ldots\ldots (3)$$

സമീകരണം (2) നെ (1) കൊണ്ടും (3) നെ (2) കൊണ്ടും വിഭജിക്കുമ്പോൾ നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നത്,

$$\frac{a}{x} = \frac{6}{n-1} \ldots\ldots (4)$$

$$\frac{a}{x} = \frac{9}{2(n-2)} \ldots\ldots (5)$$

സമീകരണം (4) ൽ നിന്നും (5) അതുകൊണ്ട്, $\frac{6}{n-1} = \frac{9}{2(n-2)}$ ആകുന്നു.

എന്നാൽ, $n = 5$ ആകുന്നു. $n = 5$ നെ (1) കൂടാതെ (4) നെ സമീകരണം (1), (4) കൊണ്ട് വിഭജിക്കുക, $\frac{5x^4 a}{\frac{a}{x}} = \frac{240}{\frac{6}{4}}$ എന്ന് ലഭിക്കും. അതുകൊണ്ട്, $5x^5 = 160$. ഇതിന് കാരണം $x = 2$ എന്നാകുന്നു. ഇതിനെ സമീകരണം (4) പ്രതിസ്ഥാപിക്കുമ്പോൾ, $a = 3$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം 5.8 $\left(2x-\frac{1}{2x}\right)^4$ വികസിപ്പിച്ചെഴുതുക.

നിർദ്ധാരണം :

$$\left(2x-\frac{1}{2x}\right)^4 = {}^4C_0 (2x)^4 \left(-\frac{1}{2x}\right)^0 + {}^4C_1 (2x)^3 \left(-\frac{1}{2x}\right)^1 + {}^4C_2 (2x)^2 \left(-\frac{1}{2x}\right)^2 + {}^4C_3 (2x)^1 \left(-\frac{1}{2x}\right)^3 + {}^4C_4 (2x)^0 \left(-\frac{1}{2x}\right)^4$$

XI_Maths_Ch5_V-1_Mal.indd 253 14-02-2023 16:52:42

$$= (2x)^4 - 4(2x)^3\left(\frac{1}{2x}\right) + 6(2x)^2\left(\frac{1}{2x}\right)^2 - 4(2x)\left(\frac{1}{2x}\right)^3 + \left(\frac{1}{2x}\right)^4$$

$$= 16x^4 - 16x^2 + 6 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{16x^4}$$

ഉദാഹരണം 5.9 $\left(x^2+\sqrt{1-x^2}\right)^5 + \left(x^2-\sqrt{1-x^2}\right)^5$ വികസിപ്പിച്ചെഴുതുക.

നിർദ്ധാരണം :

$$\begin{aligned}\left(x^2+\sqrt{1-x^2}\right)^5 &= {}^5C_0(x^2)^5\left(\sqrt{1-x^2}\right)^0 + {}^5C_1(x^2)^4\left(\sqrt{1-x^2}\right)^1 \\ &\quad + {}^5C_2(x^2)^3\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 + {}^5C_3(x^2)^2\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3 \\ &\quad + {}^5C_4(x^2)^1\left(\sqrt{1-x^2}\right)^4 + {}^5C_5(x^2)^0\left(\sqrt{1-x^2}\right)^5 \\ &= x^{10} + 5x^8\sqrt{1-x^2} + 10x^6(1-x^2) + 10x^4(1-x^2)\sqrt{1-x^2} \\ &\quad + 5x^2(1-x^2)^2 + (1-x^2)^2\left(\sqrt{1-x^2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(x^2-\sqrt{1-x^2}\right)^5 &= {}^5C_0(x^2)^5\left(\sqrt{1-x^2}\right)^0 - {}^5C_1(x^2)^4\left(\sqrt{1-x^2}\right)^1 \\ &\quad + {}^5C_2(x^2)^3\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 - {}^5C_3(x^2)^2\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3 \\ &\quad + {}^5C_4(x^2)^1\left(\sqrt{1-x^2}\right)^4 - {}^5C_5(x^2)^0\left(\sqrt{1-x^2}\right)^5 \\ &= x^{10} - 5x^8\sqrt{1-x^2} + 10x^6(1-x^2) - 10x^4(1-x^2)\sqrt{1-x^2} \\ &\quad + 5x^2(1-x^2)^2 - (1-x^2)^2\left(\sqrt{1-x^2}\right)\end{aligned}$$

എന്നാൽ,

$$\begin{aligned}\left(x^2+\sqrt{1-x^2}\right)^5 + \left(x^2-\sqrt{1-x^2}\right)^5 &= 2\left[x^{10} + 10x^6(1-x^2) + 5x^2(1-x^2)^2\right] \\ &= 2\left[x^{10} + 10x^6 - 10x^8 + 5x^2(1-2x^2+x^4)\right] \\ &= 2\left[x^{10} - 10x^8 + 15x^6 - 10x^4 + 5x^2\right]\end{aligned}$$

ഉദാഹരണം 5.10 എല്ലാ ധനപൂർണ്ണാങ്കസംഖ്യകൾ n–ന് $6^n - 5n$ നെ 25 കൊണ്ട് വിഭജിക്കുമ്പോൾ ശിഷ്ടം 1 എന്നതിനെ ദ്വിപദ സിദ്ധാന്തം മൂല്യം തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം :

$6^n - 5n = 25k + 1, k$ എന്നത് ഒരു നിസർഗ്ഗസംഖ്യ, എന്ന് തെളിയിച്ചാൽ മതിയാകും.

എങ്കിൽ, $(1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + \ldots + {}^nC_{n-1}x^{n-1} + {}^nC_nx^n, n \in \mathbb{N}$

$x = 5$ ആണെങ്കിൽ, $(1+5)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 5 + {}^nC_2 5^2 + \ldots + {}^nC_{n-1}5^{n-1} + {}^nC_n 5^n$ എന്നു കിട്ടും.

മുകളിലുള്ള സമീകരണം, $6^n = 1 + 5n + 25\left({}^nC_2 + {}^nC_3 5 + \ldots + {}^nC_n 5^{n-2}\right)$ എന്ന് മാറും.

അതായത്, $6^n - 5n = 1 + 25\left({}^nC_2 + {}^nC_3 5 + \ldots + {}^nC_n 5^{n-2}\right) = 1 + 25k, k \in \mathbb{N}$

ഇതിൽ നിന്നും $6^n - 5n$ നെ 25 കൊണ്ട് വിഭജിക്കുമ്പോൾ ശിഷ്ടം 1 എന്ന് നമുക്കറിയാം. ഇത് എല്ലാ നിസർഗ്ഗസംഖ്യ $'n'$–നും ശരിയാകും.

XI_Maths_Ch5_V-1_Mal.indd 254 14-02-2023 16:52:44

ഉദാഹരണം 5.11 7^{400} –ന്റെ അവസാന രണ്ട് പദങ്ങൾ (സ്ഥാനങ്ങൾ) കാണുക

നിർദ്ധാരണം :

$$7^{400} = (7^2)^{200} = (50-1)^{200}$$

$$= {}^{200}C_0 50^{200} - {}^{200}C_1 50^{199} + \ldots$$

$$+ {}^{200}C_{198} 50^2 (-1)^{198} + {}^{200}C_{199} 50(-1)^{199} + {}^{200}C_{200}(-1)^{200}$$

$$= 50^2 \left({}^{200}C_0 50^{198} - {}^{200}C_1 50^{197} + \ldots + {}^{200}C_{198}(-1)^{198}\right) - 200 \times 50 + 1$$

50^2 കൂടാതെ 200 എന്നീ സംഖ്യകളെ 100 കൊണ്ട് വിഭജിക്കാം. അതിനാൽ, 7^{400} –ന്റെ അവസാന രണ്ട് സംഖ്യകൾ 0 1.

അഭ്യാസം 5.1

1. വികസിപ്പിച്ചെഴുതുക (i) $\left(2x^2 - \frac{3}{x}\right)^3$ (ii) $\left(2x^2 - 3\sqrt{1-x^2}\right)^4 + \left(2x^2 + 3\sqrt{1-x^2}\right)^4$
2. മൂല്യം കാണുക. (i) 102^4 (ii) 99^4 (iii) 9^7
3. ദ്വിപദസിദ്ധാന്തത്തെ ഉപയോഗപ്പെടുത്തി $(1.01)^{1000000}$, 10000 എന്നിവയിൽ ഏത് വലുത് എന്ന് കാണുക.
4. $\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^{10}$ –നെ വികസിപ്പിച്ചെഴുതുമ്പോൾ x^{15} –ന്റെ ഗുണാങ്കം കാണുക.
5. $\left(x^2 - \frac{1}{x^3}\right)^6$ –വികസിപ്പിക്കുമ്പോൾ x^2, x^6 –ന്റെ ഗുണാങ്കങ്ങളെ കാണുക.
6. $(1+x^3)^{50}\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^5$ –വികസിപ്പിയ്ക്കുമ്പോൾ x^4 –ന്റെ ഗുണാങ്കം കാണുക.
7. $\left(2x^3 - \frac{1}{3x^2}\right)^5$ – വികസിപ്പിയ്ക്കുമ്പോൾ സ്ഥിരാങ്കം കാണുക.
8. 3^{600} –ന്റെ അവസാന രണ്ട് സ്ഥാനങ്ങൾ കാണുക.
9. എല്ലാ ധനപൂർണ്ണാങ്ക സംഖ്യ n–നും $9^{n+1} - 8n - 9$ എന്നത് 64 കൊണ്ട് വിഭജിയ്ക്കാൻ സാധിക്കും എന്ന് ദ്വിപദസിദ്ധാന്തംമൂലം തെളിയിക്കുക.
10. n ഒരു ഒറ്റസംഖ്യാധന പൂർണ്ണാങ്കം എങ്കിൽ, $(x+y)^n$ –നെ വികസിപ്പിയ്ക്കുമ്പോൾ മധ്യപദങ്ങളുടെ ഗുണാങ്കങ്ങൾ സമം എന്ന് തെളിയിക്കുക.
11. n ഒരു ധനപൂർണ്ണാങ്കം, r എന്നത് ഋണമല്ലാത്ത പൂർണ്ണാങ്കസംഖ്യകൾ എങ്കിൽ $(1+x)^n$ –നെ വികസിപ്പിയ്ക്കുമ്പോൾ x^r കൂടാതെ x^{n-r} പദങ്ങളുടെ ഗുണാങ്കങ്ങൾ സമം എന്ന് തെളിയിക്കുക.
12. a, b എന്നിവ വ്യത്യസ്ത പൂർണ്ണാങ്കസംഖ്യകൾ എങ്കിൽ, n എന്ന ധനപൂർണ്ണാങ്കത്തിന് $a^n - b^n$ –ന്റെ ഒരു ഘടകം $a - b$ എന്ന് തെളിയിക്കുക. (കുറിപ്പ് : $a^n = (a-b+b)^n$ എന്ന് എടുത്ത് വികസിപ്പിയ്ക്കുക.)
13. $(a+b)^n$ –ന്റെ വിസനത്തിൽ, 4, 13 എന്നീ പദങ്ങളുടെ ഗുണാങ്കം സമം എങ്കിൽ n–ന്റെ മൂല്യം കാണുക.
14. $(a+x)^n$ –നെ വികസിപ്പിയ്ക്കുമ്പോൾ തുടർച്ചയായ മൂന്നു പദങ്ങളുടെ ദ്വിപദ ഗുണാങ്കങ്ങളുടെ അനുപാദം 1:7:42 എങ്കിൽ, n–ന്റെ മൂല്യം കാണുക.

XI_Maths_Ch5_V-1_Mal.indd 255 14-02-2023 16:52:46

15. $(1+x)^n$ –എന്ന ദ്വിപദഗുണാങ്കത്തിൽ 5, 6, 7 പദങ്ങളുടെ ഗുണാങ്കങ്ങൾ Ap–യിലാണ് മൂല്യം കാണുക.

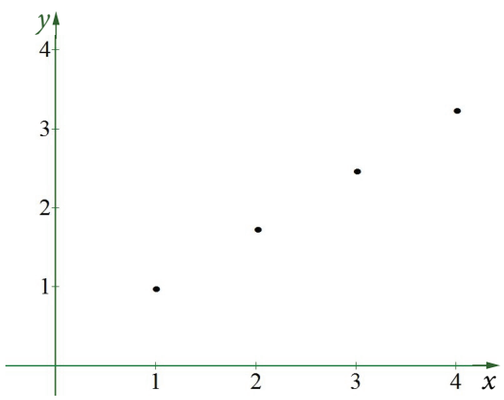
16. $C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + ... + C_n^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ തെളിയിക്കുക.

5.4 പരിമിതശ്രേണി

ഒരു നിയമമനുസരിച്ച് ക്രമമായി നിർവ്വചിച്ചിട്ടുള്ള സംഖ്യകളെയാണ് ശ്രേണി എന്നത് കൊണ്ട് ഉദ്ദേശിക്കുന്നത്. $a_1, a_2, ...$ എന്ന ശ്രേണി പരിഗണിച്ചാൽ ശ്രേണിയിലെ ഫലനങ്ങളും അവയുടെ മണ്ഡലവും ആദ്യത്തെ n നിസർഗ്ഗസംഖ്യകളുടെ ഗണം അല്ലെങ്കിൽ $\mathbb{N}$ ആയിരിക്കും. ഈ അദ്ധ്യായത്തിൽ മുഴുവനും വാസ്തവിക സംഖ്യകളുടെ ശ്രേണികളെക്കുറിച്ചാണ് നോക്കുന്നത്, കൂട്ടുസമാന്തര ശ്രേണി, ഗുണനക്രമാനുപാത ശ്രേണി എന്നിവയെ കൂട്ടുസമാന്തര അനുക്രമം *(AP)* ഗുണനക്രമാനുപാത അനുക്രമം *(GP)* എന്നും വിളിക്കുന്നു. ഇവിടെ കഴിഞ്ഞ ക്ലാസ്സുകളിൽ പഠിച്ച ശ്രേണിയുടേയും, അനുക്രമത്തിന്റേയും നിർവചനങ്ങളെക്കുറിച്ച് നോക്കാം.

- X എന്നത് ഏതെങ്കിലും ഒരു ഗണവും $n \in \mathbb{N}$ ഉം ആയാൽ ഫലനം, $f:\{1,2,3,...,n\} \to X$ നെ **പരിമിതശ്രേണി** എന്ന് പറയാം. കൂടാതെ X–എന്ന ഫലനം $g:\mathbb{N} \to X$ നെ X–ന്റെ **അപരിമിത ശ്രേണി** എന്ന് പറയുന്നു. n ൽ ഫലനം f–ന്റെ വില $f(n)$ നെ a_n എന്ന് കുറിക്കാം. ആ ശ്രേണിയെ (a_n) എന്നും കുറിക്കാം.
- X എന്ന ഗണം വാസ്തവിക സംഖ്യ ആയാൽ ആ ശ്രേണിയെ സംഖ്യാശ്രേണി അല്ലെങ്കിൽ വാസ്തവികസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി എന്ന് പറയാം.
- എല്ലാ ശ്രേണികളും ഒരു ഫലനമാകാം, എന്നാൽ എല്ലാ ഫലനങ്ങളും ഒരു ശ്രേണിയായിരിക്കണമെന്നില്ല.
- ഘടകങ്ങൾ ആവർത്തിക്കാത്ത ഗണത്തിൽ നിന്ന് വ്യത്യസ്തമായി ഒരു ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങൾ ആവർത്തിക്കാം.

  എല്ലാ പദങ്ങളും തുല്യമായ ഒരു ശ്രേണിയെ **സ്ഥിരാങ്ക ശ്രേണി** എന്ന് വിളിക്കുന്നു..
- (a_n)–എന്ന ശ്രേണിയെ ദൃശ്യവൽക്കരിക്കുന്നതിനുള്ള ഒരു ഉപയോഗപ്രദമായ മാർഗ്ഗം $\{(n, a_n): n \in \mathbb{N}\}$ ഇതിനെ ഗ്രാഫിൽ അടയാളപ്പെടുത്തണം. ഇത് ശ്രേണിയെക്കുറിച്ച് ചില വിവരങ്ങൾ നല്കുന്നു.



ചിത്രം 5.1

XI_Maths_Ch5_V-1_Mal.indd 256 14-02-2023 16:52:47

5.4.1 കൂട്ടുസമാന്തരശ്രേണിയും ഗുണനക്രമാനുപാത ശ്രേണിയും

ഈ പ്രത്യേക തരത്തിലുള്ള ശ്രേണികളിലെ സംഖ്യകൾ ആരോഹണ ക്രമത്തിലോ അവരോഹണ ക്രമത്തിലോ ആയിരിക്കും.

കഴിഞ്ഞ ക്ലാസ്സുകളിൽ പഠിച്ച കൂട്ടുസമാന്തരശ്രേണിയും, ഗുണനക്രമാനുപാത ശ്രേണിയുടെയും നിർവ്വചനങ്ങൾ നോക്കാം.

കൂട്ടുസമാന്തരശ്രേണി (Arithmetic Progression)(AP)

- $a, a+d, a+2d, a+3d, ..., a+(n-1)d, a+nd, ...$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ള സംഖ്യകളെ **കൂട്ടു സമാന്തര അനുക്രമം** അല്ലെങ്കിൽ **കൂട്ടുസമാന്തരശ്രേണി** എന്ന് വിളിക്കുന്നു. ഇവിടെ ആദ്യ പദം a ഒഴികെ മറ്റുപദങ്ങൾ കിട്ടാൻ അതിന്റെ തൊട്ട് മുൻപുള്ള പദത്തിനോട് ഒരു സ്ഥിര സംഖ്യ ചേർത്താണ് ഓരോ പദവും ഉണ്ടാക്കുന്നത്. സംഖ്യ d യെ പൊതുവ്യത്യാസം എന്നും a യെ ആദ്യപദമെന്നും പറയുന്നു.
- സമാന്തരശ്രേണിയിലെ n പദത്തിനെ $T_n = a+(n-1)d$ എന്ന് എഴുതാം.
- $\sqrt{2}, \sqrt{2}+\sqrt{3}, \sqrt{2}+2\sqrt{3}, \sqrt{2}+3\sqrt{3}, ...$ എന്ന ശ്രേണിയും 12, 9, 6, 3, . . . എന്ന സമാന്തര ശ്രണിയുടേയും പൊതുവ്യത്യാസം $\sqrt{3}$, -3 ഉം ആണ്.
- 3, 7, 11 ഈ മൂന്ന് അഭാജ്യസംഖ്യകളും ചേർന്ന് ഒരു AP യെ ഉണ്ടാക്കുന്നു.
- a, b എന്നിവ താരതമ്യേന അഭാജ്യസംഖ്യകളാണെങ്കിൽ $T_n = an+b, n \in \mathbb{N}$ എന്നത് അപരിമിതമായ ഭാജ്യസംഖ്യകളും, അഭാജ്യസംഖ്യകളും അടങ്ങിയ ഒരു AP ആകും.

ഗുണനക്രമാനുപാത ശ്രേണി (Geometric Progression) (GP)

- $a \neq 0, r \neq 0,$ യും വാസ്തവിക സംഖ്യകളാണെന്നിരിക്കട്ടെ. എങ്കിൽ $a, ar, ar^2, ar^3, ..., ar^{n-1}, ar^n, ...$ എന്നീ സംഖ്യകളെ **ഗുണനക്രമാനുപാതശ്രേണി** എന്നു പറയുന്നു. a എന്ന സംഖ്യയെ ആദ്യ പദമെന്നും r നെ പൊതു വ്യത്യാസം എന്നും പറയുന്നു.
- ഗുണനക്രമാനുപാതശ്രേണിയുടെ n ാം പദം $T_n = ar^{n-1}$
- 1, 2, 4, 8, 16 ... കൂടാതെ $\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, 16, ...$ എന്ന GP യിൽ പൊതു അനുപാതങ്ങൾ 2, $\sqrt{2}$ ആണ്.
- പൊതു അനുപാതം ധനസംഖ്യയായിട്ടുള്ള ഒരു ഗുണനക്രമാനുപാത ശ്രേണിയുടെ ഓരോ പദത്തിനും ലോഗരിതം കാണുകയാണെങ്കിൽ അത് ഒരു AP ആയി മാറും. $a, ar, ar^2, ...,$ $r > 0$ എന്നത് ഒരു AP ആണെങ്കിൽ $\log a, \log(ar), \log(ar^2), ...$ എന്നത് $log\ r$ നെ പൊതു വ്യത്യാസമാക്കിയുള്ള ഒരു AP ആണ്.

$c \neq 0$ ആണെങ്കിൽ, $c, c, c, . . .$ എന്ന സ്ഥിരാങ്കശ്രേണി ഒരു കൂട്ടുസമാന്തരശ്രേണിയായും ഗുണനക്രമാനുപാതശ്രേണിയായും മാറിയതായി കാണാം.

0, 0, 0, . . . എന്ന സ്ഥിരാങ്കശ്രേണിയെ എടുത്താൽ, ഇത് ഒരു കൂട്ടുസമാന്തരശ്രേണിയാണെന്ന് മനസ്സിലാക്കാം. ഇതിനെ ഒരു ഗുണനക്രമാനുപാതശ്രേണിയായി നോക്കുകയാണെങ്കിൽ ആദ്യപദം a എന്നത്. 0 ആണെന്ന് മനസ്സിലാക്കാം. അതിന്റെ പൊതുഅനുപാതം എന്തായിരിക്കും? 1, 2 അല്ലാതെ വേറെ ഏതെങ്കിലും ഒരു സംഖ്യ പൊതു അനുപാതം ആയാൽ, നമ്മൾ അതേ ശ്രേണി 0, 0, 0, . . . എടുക്കാം. ഇവിടെയുള്ള ഗുണനക്രമാനുപാതശ്രേണിയുടെ പൊതുഅനുപാതം അപരിമിതമായിരിക്കും. ഈ കുഴപ്പം മാറ്റാൻവേണ്ടിയാണ് ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞർ ഗുണനക്രമാനുപാതശ്രേണിയുടെ നിർവചന ത്തിൽ $a \neq 0$ എന്ന് എടുത്തിട്ടുള്ളത്.

XI_Maths_Ch5_V-1_Mal.indd 257 14-02-2023 16:52:48

5.4.2 കൂട്ടുസമാന്തര-ഗുണനക്രമാനുപാത ശ്രേണികൾ (Arithmetico- Geometric Progression) (AGP)

കൂട്ടുസമാന്തരം കൂടാതെ ഗുണനക്രമാനുപാതശ്രേണികളെ ചേർത്ത് ഉണ്ടാക്കിയ ഒരു പുതിയ ശ്രേണിയാണ് കൂട്ടുസമാന്തര-ഗുണന ക്രമാനുപാതശ്രേണികൾ. കൂട്ടുസമാന്തരശ്രേണിയെ AP എന്നും ഗുണനക്രമാനുപാത ശ്രേണിയെ GP എന്നും പറയുന്നതുപോലെ ഈ കൂട്ടുസമാന്തര-ഗുണന ക്രമാനുപാതശ്രേണിയെ AGP എന്ന് വിളിക്കുന്നു. സംഭാവ്യതയിൽ AGP–യെ വിവിധ രീതിയിൽ പ്രയോഗിക്കുന്നുണ്ട്.

നിർവചനം 5.1 :

$a,(a+d)r,(a+2d)r^2,(a+3d)r^3,...,(a+(n-1)d)r^{n-1},(a+nd)r^n,...$ എന്ന ശ്രേണിയെ **കൂട്ടുസമാന്തര-ഗുണനക്രമാനുപാത അനുക്രമം** അല്ലെങ്കിൽ **കൂട്ടുസമാന്തര-ഗുണന ക്രമാനുപാത ശ്രേണി** എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

$AP: a, a+d, a+2d, ...$ കൂടാതെ $GP: 1, r, r^2, ...$ എങ്കിൽ, $a,(a+d)r,(a+2d)r^2,...$ എന്നത് AGP ആണ്. ഇവിടെ AGP–യുടെ ആദ്യപദം a യും പൊതുവ്യത്യാസം d കൂടാതെ പൊതു അനുപാതം r ഉം ആണ്. ഇവിടെ, r=1 ആയാൽ, AGP, AP ആയും d = 0 ആണെങ്കിൽ, AGP, GP ആയും മാറുന്നു. അതിനാൽ കൂട്ടുസമാന്തര ശ്രേണിയും, ഗുണനക്രമാനുപാതശ്രേണിയും AGP–യുടെ ചില പ്രത്യേകതരം ആകാം AGP യുടെ n പദം $T_n = (a+(n-1)d)r^{n-1}$. എന്നാണ്. എല്ലാ AP ഉം GP ഉം AGP എന്നും പറയാം. ഉദാഹരണത്തിന്, AP യെ 0, 1, 2, 3, 4, . . . എന്നും GP യെ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ...$ എന്നും എടുത്താൽ, AGP യെ $\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{8}, ...$ എന്നും എഴുതാം.

4, 14, 40, 104, 256, 608 . . . എന്ന ശ്രേണി AGP യുടെ ഒരു ഉദാഹരണമാണ്. ഈ ശ്രേണിയിൽ a=4, d=3, r=2 ആണ്.

5.4.3 അനുപാത സങ്കലന ശ്രേണി (Harmonic progression)

പ്രധാനമായ ശ്രേണികളിൽ ഒന്നാണ് **അനുപാത സങ്കലനശ്രേണി**. ഇത് സമാന്തരശ്രേണിയുമായി അടുത്തബന്ധമുള്ളതാണ്.

നിർവചനം 5.2 :

$h_1, h_2, h_3, ...$ എന്ന ശ്രേണി ഒരു **അനുപാത സങ്കലന ശ്രേണി** ആയിരിക്കാൻ, $\frac{1}{h_1}, \frac{1}{h_2}, \frac{1}{h_3}, \frac{1}{h_4}, ...$ എന്നത് ഒരു കൂട്ടുസമാന്തരശ്രേണി ആയിരിക്കണം.

ഒരു ശ്രേണി അനുപാതസങ്കലനശ്രേണി ആയിരിക്കണമെങ്കിൽ അതിന്റെ വ്യുൽക്രമം ഒരു കൂട്ടു സമാന്തര ശ്രേണിയായിരിക്കണം എന്നത് ഓർക്കേണ്ടതാണ്. പക്ഷേ അനുപാത സങ്കലന ശ്രേണിയെ സമാന്തരശ്രേണിയുടെ വ്യുൽക്രമം എന്ന് പറയാൻ പറ്റില്ല. എന്തെന്നാൽ കൂട്ടുസമാന്തരശ്രേണിയിൽ പൂജ്യം ഒരംഗമായിരുന്നാൽ, അതിന്റെ വ്യുൽക്രമത്തിന്റെ അർത്ഥം കാണില്ല. ഒരു കൂട്ടുസമാന്തരശ്രേണിയിൽ പൂജ്യം ഒരംഗമല്ലായിരുന്നാൽ അതിന്റെ വ്യുൽക്രമം ഒരു അനുപാതസങ്കലനശ്രേണിയായിരിക്കും.

അതിനാൽ, $\frac{1}{a}, \frac{1}{a+d}, \frac{1}{a+2d}, \frac{1}{a+3d}, ...$ എന്നത് അനുപാതസങ്കലനശ്രേണിയുടെ പൊതു രൂപമാണ്. ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെ ഛേദം പൂജ്യമായിരിക്കാൻ പറ്റില്ല. അതായത് $a+kd \neq 0$; k ഒരു പൂർണ്ണ സംഖ്യയല്ല. അതിനാൽ, $\frac{-a}{d}$ ഒരു പൂർണ്ണസംഖ്യ എന്ന നിയമം ആവശ്യമാണ്. അനുപാത സങ്കലന ശ്രേണിയിലെ കണക്കുകളെ കൂട്ടുസമാന്തരശ്രേണിയാക്കി മാറ്റി നിർദ്ധാരണം കാണാം.

XI_Maths_Ch5_V-1_Mal.indd 258 14-02-2023 16:52:49

കുറിപ്പ് :

(i) ശ്രേണി $\left(\frac{1}{n}\right) = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ എന്നത് ഒരു അനുപാതസങ്കലന ശ്രേണി, $\left\{\left(n, \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$ –ന്റെ ഗ്രാഫ് വരച്ച് അനുപാതസങ്കലനശ്രേണി $\left(\frac{1}{n}\right)$ നെ കാണാം.

(ii) a, b, c എന്നിവ HP യിൽ ആണെങ്കിൽ, $b = \frac{2ac}{a+c}$ ആണ്.

(iii) ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ലംബങ്ങൾ AP യിൽ ആയിരുന്നാൽ അവയുടെ വശങ്ങൾ HP യിൽ ആയിരിക്കും.

ഉദാഹരണം 5.12 a, b, c എന്നിവ HP യിൽ എങ്കിൽ, എങ്കിൽ മാത്രം $\frac{a}{c} = \frac{a-b}{b-c}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം :

a, b, c എന്നിവ HP യിൽ ആയിരുന്നാൽ $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ എന്നിവ AP യിൽ ആയിരിക്കും.

അതിനാൽ, $\frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$. ഇതിൽ നിന്നും കിട്ടുന്നത്, $ab - ac = ac - bc$.

അതിനാൽ, $a(b-c) = c(a-b)$. ഇതിൽ നിന്നും കിട്ടുന്നത് $\frac{a}{c} = \frac{a-b}{b-c}$.

മറുവശത്ത്, $\frac{a}{c} = \frac{a-b}{b-c}$ എങ്കിൽ, $a(b-c) = c(a-b)$

ഇരുവശവും abc കൊണ്ട് ഹരിക്കുക, $\frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$.

അതിനാൽ, $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ എന്നത് ഒരു AP അതിനാൽ a, b, c എന്നിവ ഒരു HP യിലാണ്.

ഉദാഹരണം 5.13 ഒരു അനുപാത സങ്കലനശ്രേണിയുടെ 5-ാമത്തെ പദവും 9-മത്തെ പദവും $\frac{1}{19}$, $\frac{1}{35}$ എങ്കിൽ, ആ ശ്രേണിയുടെ 12-ാം പദം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം :

(h_n) ഒരു അനുപാതസങ്കലന ശ്രേണി എന്നിരിക്കട്ടെ. (a_n) ഒരു കൂട്ടുസമാന്തര ശ്രേണി ആയതിനാൽ $a_n = \frac{1}{h_n}$, $a_5 = 19$, $a_9 = 35$

$a + 4d = 19$, $a + 8d = 35$ ഇവ രണ്ടും നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുമ്പോൾ, $a = 3$, $d = 4$ എന്നും കിട്ടുന്നു. അതിനാൽ കൂട്ടുസമാന്തരശ്രേണിയുടെ 12-ാം പദം, $a_{12} = a + 11d = 47$. അതിനാൽ അനുപാത സങ്കലനശ്രേമിയുടെ 12 ാം പദം $\frac{1}{47}$ ആകുന്നു.

സ്ഥിരശ്രേണികളെക്കുറിച്ച് നമുക്ക് എന്ത് പറയാം?

പൂജ്യം ഒഴികെ ബാക്കിയുള്ള എല്ലാ സ്ഥിരശ്രേണികളും അനുപാത സങ്കലനശ്രേണിയാണ്.

5.4.4 കൂട്ടുസമാന്തര, ഗുണനക്രമാനുപാത, അനുപാത സങ്കലന മാധ്യമങ്ങൾ (Arithmetic, Geometric and Harmonic Means)

ശരാശരിയെക്കുറിച്ച് നമുക്ക് അറിയാം. ശരാശരിയിൽ പലതരങ്ങൾ ഉണ്ട്. കൂട്ടുസമാന്തര മാധ്യം, ഗുണനക്രമാനുപാത മാധ്യം, കൂടാതെ അനുപാത സങ്കലനമാധ്യം എന്നിവ ശരാശരിയിൽ ചിലതാണ്.

XI_Maths_Ch5_V-1_Mal.indd 259 14-02-2023 16:52:51

പദങ്ങൾ കൂട്ടുസമാന്തരശ്രേണി, ഗുണനക്രമാനുപാത ശ്രേണിയിൽ ഇല്ലാതിരുന്നാലും AP, GP യുടെ നിർവചനങ്ങളെക്കുറിച്ച് നോക്കാം. സമാന്തര മാധ്യവും ഗുണനക്രമാനുപാതമാധ്യവും.

സമാന്തരമാധ്യവും ഗുണനക്രമാനുപാത മാധ്യവും

നിർവചനം 5.3 :

n ഒരു ധനപൂർണ്ണാങ്കമാണെന്നിരിക്കട്ടെ. $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ എന്നിവ n സംഖ്യകൾ ആണെങ്കിൽ $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ എന്ന സംഖ്യകളുടെ **സമാന്തരമാധ്യം** $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n}$ ആണ്.

$a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ എന്ന സംഖ്യകൾ വെവ്വേറയോ അല്ലെങ്കിൽ ധനസംഖ്യകളായോ ഇരിക്കേണ്ടതില്ല. 14, 14, 17, 20, 15 എന്ന സംഖ്യകളുടെ ശരാശരി 16 ആണെന്ന് അറിയാം. സമാന്തര മാധ്യമത്തിൽ, n കൊണ്ട് കൂട്ടുന്നതിനും, ഹരിക്കുന്നതിനും പകരമായി n കൊണ്ട് ഗുണിക്കുകയും, n ന്റെ വർഗ്ഗം എടുക്കുകയും ചെയ്താൽ നമുക്ക് ഗുണനക്രമാനുപാതശ്രേണി കിട്ടുന്നു.

നിർവചനം 5.4 :

n ഒരു ധനപൂർണ്ണസംഖ്യയാണെന്നിരിക്കട്ടെ. $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ n എന്നിവ ഒരു ധനപൂർണ്ണസംഖ്യയാണെങ്കിൽ $\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 ... a_n}$ എന്നത് $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ എന്ന സംഖ്യകളുടെ **ഗുണനക്രമാനുപാതമാധ്യം** *(Geometric Mean)* ആണ്.

ഇവിടെ, $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ എന്നിവ വ്യത്യസ്തമായി ഇരിക്കേണ്ടതില്ല. എന്നാൽ അവ ഋണസംഖ്യ അല്ലാതിരിക്കണം. 4, 6, 9 എന്നിവയുടെ ഗുണനക്രമാനുപാതമാധ്യം $\sqrt[3]{216} = 6$ ആകുന്നു. 4, 6, 9 എന്നിവയുടെ സമാന്തരമാധ്യം $\frac{19}{3} = 6\frac{1}{3}$ ആണ്. ഇവിടെ സമാന്തരമാധ്യം ഗുണനക്രമാനുപാതമാധ്യമത്തെക്കാൾ കൂടുതലാണെന്ന് കാണാം. ഇത് എപ്പോഴും ശരിയാകണമെന്നുണ്ടോ?

ഋണസംഖ്യ അല്ലാത്ത n സംഖ്യകളുടെ കൂട്ടുശരാശരി, ഗുണനക്രമാനുപാത മാധ്യത്തിനെക്കാൾ കൂടുതൽ അല്ലെങ്കിൽ സമമാണ് എന്ന് തെളിയിക്കാം. അതായത് AM എന്നത് സമാന്തരമാധ്യവും, GM എന്നത് ഗുണനക്രമാനുപാത മാധ്യവുമാണെങ്കിൽ $AM \geq GM$ ആണ്

ഋണ അല്ലാത്ത രണ്ട് സംഖ്യകൾക്ക് $AM \geq GM$ എന്ന അസമത നമുക്ക് തെളിയിക്കാം.

സിദ്ധാന്തം 5.2

ഋണ അല്ലാത്ത രണ്ട് സംഖ്യകളുടെ കൂട്ടുസമാന്തര മാധ്യം, ഗുണനക്രമാനുപാതമാധ്യം എന്നിവ AM, GM ആണെങ്കിൽ, $AM \geq GM$. ഈ രണ്ട് അക്കങ്ങളും സമമാകുമ്പോൾ $AM = GM$ ആക്കും. രണ്ട് സംഖ്യകൾ തുല്യമാണ് എങ്കിൽ, മാത്രം സമത നിലനിൽക്കും.

തെളിവ് a, b എന്നിവ രണ്ട് ..... അപ്പോൾ, $AM = \frac{a+b}{2}$, $GM = \sqrt{ab}$ ആണ്.

$(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2 \geq 0$. അതിനാൽ, $(a+b)^2 - 4ab \geq 0$.

ഇതിൽ നിന്നും, $(a+b) \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$,

അതായത്, $AM \geq GM$. കൂടാതെ, $AM = GM \Leftrightarrow (a+b)^2 - 4ab = 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b$
അതിനാൽ, $AM = GM$ ആണ്.

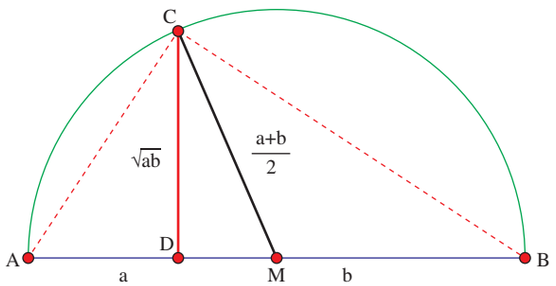
XI_Maths_Ch5_V-1_Mal.indd 260 14-02-2023 16:52:52

$AM \geq GM$ – എന്നതിന്റെ ജ്യാമിതീയ വ്യാഖ്യാനം

a, b എന്നിവ നെഗറ്റീവ് അല്ലാത്ത സംഖ്യകളാണ് ഇവയിൽ ഏതെങ്കിലും ഒന്ന് പൂജ്യമായാൽ GM ഉം പൂജ്യം ആകും. അതിനാൽ ഇത് നാം തെളിയിക്കേണ്ട ആവശ്യമില്ല. ഇവിടെ $a > 0$, $b > 0$ എന്ന് എടുക്കാം. നീളം $a + b$ ആയ AB എന്ന ഒരു നേർരേഖ വരച്ച്, അതിൽ AB വ്യാസത്തിൽ ഒരു അർദ്ധവൃത്തം വരയ്ക്കുക. M എന്നത് AB യുടെ മദ്ധ്യബിന്ദു. അതിനാൽ അർദ്ധവൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം M ആണ്. M എന്നത് AB യുടെ മദ്ധ്യബിന്ദു ആയതിനാൽ $AM = MB = \frac{a+b}{2}$.

അതിനാൽ, വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം $\frac{a+b}{2}$ ആണ്.

$AD = a$, $DB = b$ ആണെങ്കിൽ D എന്ന ബിന്ദുവിനെ AB–യ്ക്ക് ഉള്ളിൽ എടുക്കുക.



ചിത്രം 5.2

D ൽ കൂടി AB–യിലേക്ക് ലംബരേഖ വരയ്ക്കുക. അത് അർദ്ധവൃത്തത്തെ C എന്ന ബിന്ദുവിൽ ഛേദിക്കുന്നു. CA, CB കൂടാതെ CM എന്നിവ യോജിപ്പിക്കുക. M എന്നത് അർദ്ധവൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം ആയതിനാൽ CM = വ്യാസം = $\frac{a+b}{2}$, $MD = \frac{a+b}{2} - a$ എന്ന് കിട്ടുന്നു. ΔACD, ΔCBD എന്നിവ സദൃശ ത്രികോണമായതിനാൽ $\frac{CD}{AD} = \frac{BD}{CD}$. അതിനാൽ, $CD^2 = AD \times BD = ab$

അതിനാൽ, $CD = \sqrt{ab}$ (പൈതഗോറസ് സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച് $CD = \sqrt{ab}$ എന്ന് നിരൂപിക്കാം) ഒരു പകുതി ഞാണിന്റെ നീളം എല്ലായ്പ്പോഴും വ്യാസാർദ്ധത്തിനെക്കാൾ കുറവായി അല്ലെങ്കിൽ സമമായിരിക്കും അതിനാൽ, $CD \leq CM$ അല്ലെങ്കിൽ $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$. അതായത്, $AM \geq GM$.

D എന്നത് M–ൽ ആയിരിക്കുമ്പോൾ പകുതി ഞാൺ DC എന്നത് വ്യാസാർദ്ധത്തിന് സമമാകും. അതായത്, $AM = GM$ ആണെങ്കിൽ, $a = b$ കൂടാതെ $a = b$ എങ്കിൽ $AM = GM$ ആകുന്നു.

ഫലം 5.1 : $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ എന്നത് കൂട്ടുസമാന്തരശ്രേണിയായാൽ a_k $(k > 1)$ എന്ന ഓരോ പദവും അതിന്റെ മുൻപിലുള്ള സംഖ്യയായ a_{k-1} കൂടാതെ അതിന്റെ പിന്നിലുള്ള a_{k+1} ഇവ രണ്ടിനുമുള്ള കൂട്ടു സമാന്തര മാധ്യമായിരിക്കും.

തെളിവ് $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ എന്നതിന്റെ ആദ്യപദം a യും പൊതുവ്യത്യാസം d യും ആയ ഒരു കൂട്ടു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളാണ്.

$a_k = a + (k-1)d$, $a_{k-1} = a + (k-2)d$ കൂടാതെ $a_{k+1} = a + kd$

$$\frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2} = \frac{a + (k-2)d + a + kd}{2} = \frac{2a + (2k-2)d}{2} = a + (k-1)d = a_k .$$

അതായത്, a_{k-1}, a_{k+1} എന്നിവയുടെ കൂട്ടുസമാന്തരമാധ്യം a_k ആണ്.

XI_Maths_Ch5_V-1_Mal.indd 261 14-02-2023 16:52:54

ഫലം 5.2 : $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ എന്ന ഒരു ഗുണനക്രമാനുപാതശ്രേണിയിൽ, അതിലുള്ള ഓരോ പദവും $a_k (k > 1)$, അതിന്റെ മുന്നിലുള്ള പദമായ a_{k-1} കൂടാതെ അതിന്റെ പിന്നിലുള്ള പദമായ a_{k+1} എന്നിവയുടെ ഗുണനക്രമാനുപാത മാധ്യത്തിന് സമമാണ്.

തെളിവ് $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ എന്നതിന്റെ ആദ്യപദം a യും പൊതു അനുപാതം (പൊതു ഗുണിതം) r ഉം ആണ്.

അതിനാൽ, $a_k = ar^{k-1}, a_{k-1} = ar^{k-2}$ കൂടാതെ $a_{k+1} = ar^k$.

അതുകൊണ്ട്, $\sqrt{a_{k-1}a_{k+1}} = \sqrt{ar^{k-2}ar^k} = \sqrt{a^2r^{2k-2}} = ar^{k-1} = a_k$.

അതിനാൽ, a_{k-1}, a_{k+1} എന്നിവയുടെ ഗുണനക്രമാനുപാത മാധ്യം a_k ആണ്.

ഉദാഹരണം 5.14 $4, A_1, A_2, ..., A_7, 7$ എന്ന ശ്രേണി കൂട്ടുസമാന്തരശ്രേണിയായാൽ, $A_1, A_2, ..., A_7$ എന്ന 7 സംഖ്യകളെ കാണുക. കൂടാതെ, $12, G_1, G_2, G_3, G_4, \frac{3}{8}$ എന്ന ശ്രേണി ഗുണനക്രമാനുപാതശ്രേണിയിലാണെങ്കിൽ, G_1, G_2, G_3, G_4 ഇവയുടെ വില കാണുക.

നിർദ്ധാരണം :

$a = 4$, $4 + 8d = 7.$, $d = \frac{3}{8}$ എന്ന് കിട്ടുന്നു. അതിനാൽ ആവശ്യമായ 7 സംഖ്യകൾ $4\frac{3}{8}, 4\frac{6}{8}, 5\frac{1}{8}, 5\frac{4}{8}, 5\frac{7}{8}, 6\frac{2}{8}, 6\frac{5}{8}$ ആകുന്നു.

കൂടാതെ, $a = 12$, $ar^5 = \frac{3}{8}$, $r^5 = \frac{1}{32} \Rightarrow r = \frac{1}{2}$. അതിനാൽ ആവശ്യമായ 4 സംഖ്യകൾ $6, 3, 1\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം 5.15 ഒരു ഗുണനക്രമാനുപാതശ്രേണിയിലെ 4-ാം പദം, 5-ാം പദം, 6-ാം പദം എന്നിവയുടെ ഗുണനഫലം 4096 ഉം 5-ാം പദം, 6-ാം പദം, 7-ാം പദം എന്നിവയുടെ ഗുണനഫലം 32768 ഉം ആണ്. എങ്കിൽ ആ ഗുണനക്രമാനുപാതശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ 8 പദങ്ങളുടെ തുക കാണുക.

നിർദ്ധാരണം :

$a, ar, ar^2, ...$ എന്നത് കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഗുണനക്രമാനുപാത ശ്രേണിയാണ്.

4-ാം പദം, 5-ാം പദം, 6-ാം പദം എന്നിവയെ ar^3, ar^4, ar^5 എന്നെടുക്കുക. ഇവയുടെ ഗുണനഫലം $a^3r^{12} = 4096$. ഇതുപോലെ, $a^3r^{15} = 32768$. ഇതുപോലെ, $\frac{a^3r^{15}}{a^3r^{12}} = \frac{32768}{4096}$ അതായത്, $r^3 = 8 \Rightarrow r = 2$,

$a^3r^{12} = 4096$, ഇതിൽ $r = 2$ പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ, $a^3 = 1 \Rightarrow a = 1$.

ആദ്യത്തെ 8 പദങ്ങളുടെ തുക $\frac{a(1-r^8)}{1-r} = \frac{1-2^8}{1-2} = 255$.

അനുപാത സങ്കലന മാധ്യം

കൊടുത്തിട്ടുള്ള ധനസംഖ്യകളുടെ അനുപാത സങ്കലന മാധ്യം എന്നത് ആ സംഖ്യകളുടെ വ്യുൽക്രമത്തിന്റെ കൂട്ടുസമാന്തര മാധ്യത്തിന്റെ വ്യുൽക്രമമാണ്. അതായത്, $h_1, h_2, ..., h_n$ എന്നത് കൊടുത്തിട്ടുള്ള ധനസംഖ്യകളാണെങ്കിൽ, അവയുടെ വ്യുൽക്രമം $\frac{1}{h_1}, \frac{1}{h_2}, ..., \frac{1}{h_n}$ ആണ്. ഈ വ്യുൽക്രമത്തിന്റെ

XI_Maths_Ch5_V-1_Mal.indd 262 14-02-2023 16:52:56

കൂട്ടുസമാന്തര മാധ്യം $\frac{\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+...+\frac{1}{h_n}}{n}$ ആകുന്നു. ഈ കൂട്ടുസമാന്തര മാധ്യത്തിന്റെ വ്യുൽക്രമം $\frac{n}{\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+...+\frac{1}{h_n}}$ എന്നത് $h_1, h_2, ..., h_n$ എന്ന പദങ്ങളുടെ അനുപാത സങ്കലന മാധ്യമാണ്.

നിർവചനം 5.5

$\{h_1, h_2, ..., h_n\}$ എന്ന ഗണത്തിലുള്ള ധനസംഖ്യകളുടെ അനുപാത സങ്കലന മാധ്യം എന്നത് $\frac{n}{\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+...+\frac{1}{h_n}}$ ആകുന്നു. സൂക്ഷ്മമായി പരിശോധിച്ചാൽ a, b എന്നീ ധനസംഖ്യകളുടെ അനുപാത സങ്കലന മാധ്യം എന്നത് $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$ ആണ്.

"n ധനസംഖ്യയായ ഏതൊരു ഗണത്തിനും ഗുണനക്രമാനുപാത മാധ്യം അനുപാത സങ്കലന മാധ്യത്തെക്കാൾ അധികമോ അല്ലെങ്കിൽ സമമോ ആയിരിക്കും. അതായത് $GM \geq HM$ രണ്ട് നെഗറ്റീവ് (ഋണ) അല്ലാത്ത സംഖ്യകൾക്ക് $GM \geq HM$ എന്നത് തെളിയിക്കാം.

സിദ്ധാന്തം 5.3

രണ്ട് ധനസംഖ്യകളുടെ ഗുണനക്രമാനുപാത മാധ്യവും, അനുപാത സങ്കലന മാധ്യവും GM ഉം HM ഉം ആണെങ്കിൽ $GM \geq HM$ ആയിരിക്കും. രണ്ട് സംഖ്യകൾ തുല്യമാണ് എങ്കിൽ, $GM = HM$ എങ്കിൽ മാത്രം തുല്യത നിലനിൽക്കും.

പ്രസ്താവന a, b എന്നിവ രണ്ട് ധനസംഖ്യകൾ.

$$GM = \sqrt{ab} \text{ കൂടാതെ } HM = \frac{2ab}{a+b}$$

$$\begin{aligned} GM - HM &= \sqrt{ab} - \frac{2ab}{a+b} \\ &= \frac{\sqrt{ab}(a+b) - 2ab}{a+b} \\ &= \frac{\sqrt{ab}((a+b) - 2\sqrt{ab})}{a+b} \\ &= \frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a+b} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

അതിനാൽ, $GM - HM \geq 0$ അതായത്, $GM \geq HM$

കൂടാതെ $GM = HM \Leftrightarrow \frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a+b} = 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = b$$

ആദ്യം നാം $AM \geq GM$ എന്ന് തെളിയിച്ചു. ഇപ്പോൾ $GM \geq HM$ എന്ന് തെളിയിച്ചു. ഇവ രണ്ടും ചേർത്ത് $AM \geq GM \geq HM$ എന്ന് എഴുതാം.

ഫലം 5.3 : ഏതെങ്കിലും രണ്ട് ധനസംഖ്യകളുടെ ശരാശരികൾ AM, GM കൂടാതെ HM ഇവ മൂന്നും ഒരു ഗുണനക്രമാനുപാത ശ്രേണിയായിരിക്കും.

XI_Maths_Ch5_V-1_Mal.indd 263 14-02-2023 16:52:58

തെളിവ് a, b എന്നിവ രണ്ട് ധനവാസ്തവിക സംഖ്യകളാണെങ്കിൽ,

$$AM = \frac{a+b}{2},\ GM = \sqrt{ab} \text{ மற்றும் } HM = \frac{2ab}{a+b}.$$

അപ്പോൾ, $AM \times HM = \left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{2ab}{a+b}\right) = ab = (\sqrt{ab})^2 = GM^2$

അതായത്, $AM \times HM = GM^2$. അതിനാൽ, AM, GM കൂടാതെ HM എന്നിവ ഒരു ഗുണനക്രമാനുപാതശ്രേണി ആയിരിക്കും.

താഴെ ചില പ്രധാന ഫലങ്ങൾ കൊടുത്തിട്ടുണ്ട്.

- a, c എന്നിവയുടെ കൂട്ടുസമാന്തരമാധ്യം b–ആണെങ്കിൽ, a,b,c എന്നിവ ഒരു കൂട്ടുസമാന്തര ശ്രേണിയാണ്
- a, c എന്നിവയുടെ ഗുണനക്രമാനുപാതമാധ്യം b–ആണെങ്കിൽ, a,b,c എന്നിവ ഒരു ഗുണനാക്രമാനുപാത ശ്രേണിയാണ്.
- a, c എന്നിവയുടെ അനുപാത സങ്കലന മാധ്യം b–ആണെങ്കിൽ, a,b,c എന്നിവ ഒരു അനുപാത സങ്കലന ശ്രേണിയാണ്.

ഒരു വാഹനം മണിക്കൂറിൽ x കിലോമീറ്റർ വേഗത്തിൽ ഒരു നിശ്ചിതദൂരം യാത്ര ചെയ്തശേഷം തിരിച്ച് മണിക്കൂറിൽ y കിലോമീറ്റർ വേഗത്തിൽ പുറപ്പെട്ട സ്ഥലത്ത് വന്നെത്തിയാൽ, ആ വാഹനത്തിന്റെ മുഴുവൻ യാത്രയുടേയും ശരാശരി വേഗം രണ്ട് വേഗങ്ങളുടെ അനുതാപസങ്കലന മാധ്യം ആയിരിക്കും. വാസ്തവത്തിൽ ദൂരം d ആണെങ്കിൽ, ഒരു ഭാഗത്തേക്ക് ചെല്ലാനുള്ള സമയം $\frac{d}{x}$ കൂടാതെ മറ്റേ ഭാഗത്തേക്ക് വരാൻ എടുക്കുന്ന സമയം $\frac{d}{y}$ ആണ്.

അതിനാൽ ശരാശരി വേഗം, $\frac{2d}{\frac{d}{x}+\frac{d}{y}} = \frac{2xy}{x+y}$.

ഉദാഹരണമായി, ഒരു വാഹനം മണിക്കൂറിൽ 60 കിലോമീറ്റർ വേഗത്തിൽ ഒരു നിശ്ചിത സ്ഥലത്ത് എത്തിയ ശേഷം മണിക്കൂറിൽ 40 കിലോമീറ്റർ വേഗത്തിൽ തിരിച്ച് വന്ന് ചേർന്നാൽ, ആ വാഹനത്തിന്റെ മുഴുവൻ യാത്രയ്ക്കുള്ള ശരാശരി വേഗം 60, 40–ഇവയുടെ അനുപാതസങ്കലന മാധ്യം വേഗം ആണ്. അതായത്, $\frac{2\times60\times40}{60+40} = 48$ കി.മീ./മണിക്കൂർ.

അഭ്യാസം 5.2

1. ശ്രേണികളുടെ n -ാം പദം കൊടുത്തിട്ടുണ്ട്. അവയുടെ ആദ്യത്തെ 6 പദങ്ങൾ കാണുക. കൂടാതെ അവ കൂട്ടുസമാന്തരശ്രേണിയാണോ, ഗുണനക്രമാനുപാതശ്രേണിയാണോ, സമാന്തര-ഗുണനക്രമാനുപാത ശ്രേണിയാണോ, അനുപാതസങ്കലന ശ്രേണിയാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

   (i) $\frac{1}{2^{n+1}}$ (ii) $\frac{(n+1)(n+2)}{n+3(n+4)}$ (iii) $4\left(\frac{1}{2}\right)^n$ (iv) $\frac{(-1)^n}{n}$ (v) $\frac{2n+3}{3n+4}$ (vi) 2018 (vii) $\frac{3n-2}{3^{n-1}}$

2. n-ാം പദം a_n ആയ അനുക്രമത്തിന്റെ ആദ്യത്തെ 6 പദങ്ങൾ കാണുക.

   (i) $a_n = \begin{cases} n+1; & n \text{ ഒറ്റസംഖ്യകൾ} \\ n & ; n \text{ ഇരട്ടസംഖ്യകൾ} \end{cases}$

   (ii) $a_n = \begin{cases} 1 & ; n = 1 \text{ எனில்} \\ 2 & ; n = 2 \text{ எனில்} \\ a_{n-1} + a_{n-2} & ; n > 2 \end{cases}$

   (iii) $a_n = \begin{cases} n & ; n \text{ എന്നത് } 1, 2, \text{ അല്ലെങ്കിൽ } 3 \text{ എങ്കിൽ} \\ a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} & ; n > 3 \end{cases}$

XI_Maths_Ch5_V-1_Mal.indd 264 14-02-2023 16:52:59

3. താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള അനുക്രമത്തിന്റെ n–പദം കാണുക.

(i) 2, 2, 4, 4, 6, 6, . . .

(ii) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$

(iii) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{9}{10}, \ldots$

(iv) 6, 10, 4, 12, 2, 14, 0, 16, −2, . . .

4. ഗുണനക്രമാനുപാതശ്രേണിയിലെ ആരോഹണക്രമത്തിലുള്ള 3 സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം 5832. രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യയോട് 6-ഉം മൂന്നാമത്തെ സംഖ്യയോട് 9 ഉം കൂട്ടുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന സംഖ്യകൾ ഒരു AP ആയാൽ GP യിലെ ആ മൂന്ന് സംഖ്യകൾ കാണുക.

5. $\frac{3}{1^2 2^2}, \frac{5}{2^2 3^2}, \frac{7}{3^2 4^2}, \ldots$ എന്ന ശ്രേണിയിലെ n പദം രണ്ട് പദങ്ങളുടെ വ്യത്യാസമായി എഴുതുക.

6. ഒരു GP യിലെ k പദം t_k ആണെങ്കിൽ, k–യുടെ എല്ലാ വാസ്തവിക ധനസംഖ്യകളും t_{n-k}, t_n, t_{n+k} എന്നതും ഒരു GP ആണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

7. a, b, c എന്നിവ ഒരു ഗുണന ക്രമാനുപാത ശ്രേണിയും $a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}}$ ഇങ്ങനെ ആയാൽ, x, y, z എന്നിവ ഒരു കൂട്ടുസമാന്തരശ്രേണിയാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

8. രണ്ട് സംഖ്യകളുടെ കൂട്ടുശരാശരി (സമാന്തരമാധ്യം) ഗുണന ക്രമാനുപാതമാധ്യമത്തെക്കാളും 10 അധികമായും അനുപാതസങ്കലനശ്രേണിയെക്കാളും 16 അധികവുമായാൽ ആ രണ്ട് സംഖ്യകളെ കാണുക.

9. $(q-r)x^2 + (r-p)x + p - q = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ മൂല്യങ്ങൾ സമമായാൽ p, q, r എന്നിവ ഒരു AP യിലാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

10. ഒരു GP യിലെ p, q, r ാം പദങ്ങൾ യഥാക്രമം a, b, c എന്നാൽ, $(q-r)\log a + (r-p)\log b + (p-q)\log c = 0$ തെളിയിക്കുക.

5.5 പരിമിത അനുക്രമം

പൊതുവായി പറയുകയാണെങ്കിൽ അനുക്രമത്തിലെ പദങ്ങളുടെ **കൂട്ടുതുകയെ ശ്രേണി** എന്നു പറയുന്നു. ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളിൽ പരിമിത സംഖ്യകളുണ്ടെങ്കിൽ അതിനെ പരിമിത ശ്രേണി എന്നു പറയുന്നു. (a_n) എന്നത് സംഖ്യകളുടെ അനുക്രമമാണെന്നിരിക്കട്ടെ. എങ്കിൽ $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ എന്നതിനെ പരിമിത ശ്രേണി എന്ന് പറയാം. $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ എന്നതിനെ $\sum_{k=1}^{n} a_k$ എന്ന് കുറിയ്ക്കാം. ചില സമയങ്ങളിൽ ചോദ്യങ്ങളുടെ പ്രധാന്യവും എളിമയും കണക്കാക്കി $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ എന്ന് കൊടുക്കാം. ഇതിന്റെ ആദ്യ പദം a_0 ആകുന്നു.



5.5.1 കൂട്ടുസമാന്തര, ഗുണനക്രമാനുപാത കൂടാതെ കൂട്ടുസമാന്തര-ഗുണന ക്രമാനുപാത അനുക്രമത്തിന്റെ തുക

കഴിഞ്ഞ ക്ലാസ്സുകളിൽ നാം കൂട്ടുസമാന്തര അനുക്രമം, ഗുണനക്രമാനുപാത അനുക്രമം എന്നിവയിലുള്ള ചില പദങ്ങളുടെ തുക കാണാനും, ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക കാണാനും പഠിച്ചു. അതിനെ നമുക്ക് ഓർമ്മിക്കാം.

കൂട്ടുസമാന്തര ശ്രേണിയുടേയും, ഗുണനക്രമാനുപാതശ്രേണിയുടെയും തുക കാണൽ

- കൂട്ടുസമാന്തര അനുക്രമത്തിലുള്ള പദങ്ങളുടെ ശ്രേണിയെ **കൂട്ടുസമാന്തരശ്രേണി** എന്നു പറയുന്നു. ഗുണനക്രമാനുപാതത്തിലുള്ള പദങ്ങളുടെ ശ്രേണിയെ **ഗുണനക്രമാനുപാത ശ്രേണി** എന്നു പറയുന്നു.

XI_Maths_Ch5_V-1_Mal.indd 265 14-02-2023 16:53:00

- ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ കൂട്ടുസമാന്തരശ്രേണി $(a+(n-1)d)$ യെ $S_n = na + \frac{(n-1)n}{2}d = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$ എന്ന് കുറിക്കാം.
- ഗുണനക്രമാനുപാത ശ്രേണി (ar^{n-1})-ന്റെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ ഇവിടെ, $r \neq 1$. $r = 1$, എങ്കിൽ ആ ശ്രേണി ഒരു സ്ഥിരാങ്കശ്രേണി $a,a,a,...$ ആയിരിക്കും. അതിന്റെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക na അതിനാൽ, $r \neq 1$ **എങ്കിൽ,** $1+r+r^2+...+r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r}$

കൂട്ടുസമാന്തര - ഗുണനക്രമാനുപാത അനുക്രമത്തിന്റെ തുക

- ഒരു അനുക്രമത്തിലെ പദങ്ങൾ കൂട്ടുസമാന്തര ഗുണനക്രമാനുപാത അനുക്രമത്തിൽ ആയിരുന്നാൽ അതിനെ കൂട്ടുസമാന്തര ഗുണന ക്രമാനുപാത അനുക്രമം എന്ന് പറയുന്നു..
- $((a+(n-1)d)r^{n-1})$ എന്ന കൂട്ടുസമാന്തര- ഗുണനക്രമാനുപാത അനുക്രമത്തിലെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക $S_n = \frac{a-(a+(n-1)d)r^n}{1-r} + dr\left(\frac{1-r^{n-1}}{(1-r)^2}\right)$, ഇവിടെ $r \neq 1$

ഉദാഹരണം 5.16 $1+\frac{6}{7}+\frac{11}{49}+\frac{16}{343}+...$ എന്ന AGP യിലെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക കാണുക.

നിർദ്ധാരണം :

ഇവിടെ, $a = 1, d = 5$ കൂടാതെ $r = \frac{1}{7}$.

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a-(a+(n-1)d)r^n}{1-r} + dr\left(\frac{1-r^{n-1}}{(1-r)^2}\right) \\ &= \frac{1-(1+5(n-1))\left(\frac{1}{7}\right)^n}{1-\frac{1}{7}} + 5\times\frac{1}{7}\left(\frac{\left(1-\frac{1}{7}\right)^{n-1}}{\left(1-\frac{1}{7}\right)^2}\right) \\ &= \frac{1-\frac{5n-4}{7^n}}{\frac{6}{7}} + \frac{\frac{5}{7}(7^{n-1}-1)}{7^{n-1}\left(\frac{6}{7}\right)^2} \qquad \frac{1-\left(\frac{1}{7}\right)^{n-1}}{\left(1-\frac{1}{7}\right)^2} \\ &= \frac{7^n-5n+4}{7^{n-1}6} + \frac{5(7^{n-1}-1)}{7^{n-2}36} \end{aligned}$$

5.5.2 പരിമിത ശ്രേണിയ്ക്കുള്ള ദൂരദർശിനി സംഗ്രഹം

പരിമിതമോ അനന്തമോ ആയ ഒരു ശ്രേണിയുടെ തുക കണ്ടുപിടിക്കാൻ പൊതുവായി ഉപയോഗിക്കുന്ന രീതിയാണ് ദൂരദർശിനി സംഗ്രഹം. ഈ രീതി ഒരു നിശ്ചിത ശ്രേണിയുടെ n പദങ്ങളുടെ ആകെത്തുക രണ്ട് പദങ്ങളിൽ പ്രകടിപ്പിക്കുന്നു. സാധാരണയായി ആദ്യത്തേയും, അവസാനത്തേതുമായ പദങ്ങൾ ഒഴികെ ബാക്കിയുള്ള പദങ്ങൾ ഒന്നൊന്നായി നീക്കുക. ഇവിടെ പദങ്ങളെ നീക്കിയ ശേഷം ദൂരെയുള്ള അവസാന പദത്തിനെ ആദ്യപദത്തിന് അരികിലായി കൊണ്ട് വരിക. ഈ പ്രക്രിയെയാണ് **ദൂരദർശിനി സംഗ്രഹം** എന്ന് വിളിക്കുന്നത്.

XI_Maths_Ch5_V-1_Mal.indd 266 14-02-2023 16:53:02

ഉദാഹരണം 5.17 $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...$ എന്ന ശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക കാണുക.

നിർദ്ധാരണം :

തന്നിട്ടുള്ള ശ്രേണിയിൽ k ാം പദത്തിനെ t_k എന്നെടുത്തു. $t_k=\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$ ഇവിടെ k ാം പദത്തിനെ രണ്ട് പദപ്രയോഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസമായി എഴുതിയാൽ നമുക്ക് സാങ്കേതികവിദ്യ ഉപയോഗിച്ച് പരിഹാരം കാണാം.

അതിനാൽ,

$$t_k=\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})}=\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{k-(k+1)}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$$

അതായത്, $t_1+t_2+...+t_n=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+...+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\sqrt{n+1}-1$

ഉദാഹരണം 5.18 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$ -ന്റെ വില കാണുക.

നിർദ്ധാരണം :

തന്നിട്ടുള്ള ശ്രേണിയുടെ k ാം പദം $t_k=\frac{1}{k(k+1)}$.

ഭാഗിക ഭിന്നസംഖ്യ ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ, $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

അതിനാൽ,

$$t_1+t_2+...+t_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+...+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

അഭ്യാസം 5.3

1. ഒരു കൂട്ടുസമാന്തര ശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ 10 പദങ്ങളുടെ തുക 52 ഉം ആദ്യത്തെ 15 പദങ്ങളുടെ തുക 77-ഉം എങ്കിൽ ആദ്യത്തെ 20 പദങ്ങളുടെ തുക കാണുക.
2. $\frac{1^3}{1}+\frac{1^3+2^3}{1+3}+\frac{1^3+2^3+3^3}{1+3+5}+...$ എന്ന ശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ 17 പദങ്ങളുടെ തുക കാണുക.
3. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ശ്രേണികളുടെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക കാണുക.

   (i) 8+88+888+8888+... (ii) 6 + 66 + 666 + 6666 + ...
4. $1+(1+4)+(1+4+4^2)+(1+4+4^2+4^3)+...$ എന്ന ശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക കാണുക.
5. $1,\frac{4}{3},\frac{7}{9},\frac{10}{27},...$ എന്ന അനുക്രമത്തിലെ n ാം പദവും, n പദങ്ങളുടെ തുകയും കാണുക.
6. $\sqrt{3}+\sqrt{75}+\sqrt{243}+...$ എന്ന ശ്രേണിയിലെ n പദങ്ങളുടെ തുക $435\sqrt{3}$ എങ്കിൽ, n-ന്റെ വില കാണുക.
7. ഒരു കൂട്ടുസമാന്തരശ്രേണിയിലെ $(m+n)$, $(m-n)$ -ാം പദങ്ങളുടെ തുക m ാം പദത്തിന്റെ ഇരുമടങ്ങാണ് എന്ന് നിർണ്ണയിക്കുക.

XI_Maths_Ch5_V-1_Mal.indd 267 14-02-2023 16:53:03

8. ഒരാൾ ₹3250 ന് ആദ്യത്തെ മാസം ₹20–ഉം അടുത്ത ഓരോ മാസവും ₹15 ഉം കൂടുതലായി ചെലുത്തി വരുന്നു. എങ്കിൽ ആ തുകയെ ശരിയായി കണക്കാക്കാൻ എത്ര സമയം എടുക്കും?

9. ഒരു മത്സരത്തിൽ 20 പന്തുകൾ 4 മീറ്റർ ഇടവിട്ട് ഒരു വരിയിൽ വെയ്ക്കുന്നു. ആദ്യ പന്ത് ആരംഭ സ്ഥാനത്ത് നിന്ന് 24 മീറ്റർ അകലെയാണ്. ഒരു മത്സരാർത്ഥി ഒരു സമയത്ത് ഒരു പന്ത് വീതം എല്ലാ പന്തുകളെയും ആരംഭസ്ഥാനത്തേക്ക് തിരികെ കൊണ്ട് വരാൻ എത്ര ദൂരം ഓടണം.

10. ഒരു പ്രത്യേക ബാക്ടീരിയയുടെ കൾച്ചറിൽ ബാക്ടീരിയകളുടെ എണ്ണം ഓരോ മണിക്കൂറിലും ഇരട്ടിയാകുന്നു. ആരംഭത്തിൽ 30 ബാക്ടീരിയകൾ ഇരുന്നാൽ 2 ,4 , n ാം മണിക്കൂറിൽ എത്ര ബാക്ടീരിയകൾ ഉണ്ടാകും.

11. ഒരു ബാങ്കിൽ നിക്ഷേപിച്ച ₹500 ന്, 10% കൂട്ടുപലിശ ചേർത്ത്, 10 വർഷത്തിൽ എത്ര രൂപ കിട്ടും.

12. ഒരു നഗരത്തിൽ വൈറസ് രോഗം പിടിപെട്ടതിനാൽ അവിടെയുള്ള ജനങ്ങളുടെ ജീവിതരീതിയെ ബാധിച്ചു. ഓരോ ദിവസവും ആ രോഗം പരത്തുന്ന വൈറസുകളുടെ എണ്ണം ഒരു ഗുണനക്രമാനുപാത രീതിയിലാണ്. ഈ രോഗം ഓരോ ദിവസവും അതിന്റെ മുമ്പിലത്തെ ദിവസത്തിനെക്കാൾ രണ്ട് മടങ്ങ് കൂടുന്നു. ആദ്യത്തെ ദിവസം അതിന്റെ എണ്ണം 5 ആണെങ്കിൽ, ഏത് ദിവസം ആ വൈറസുകളുടെ എണ്ണം 1,50,000-ൽ കൂടുതലാകും എന്ന് കാണുക.

5.5.3 പ്രത്യേക പരിമിത അനുക്രമങ്ങൾ

ഈ ഭാഗത്ത് നമുക്ക് AP, GP കൂടാതെ ചില പ്രത്യേക പരിമിത അനുക്രമങ്ങളുടെ തുക കാണൽ എന്നിവയ്ക്കായി ഉപയോഗിക്കുന്ന ചില പ്രധാന സൂത്രങ്ങൾ നോക്കാം.

1. ആദ്യത്തെ n നിസ്സർഗ്ഗസംഖ്യകളുടെ തുക

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

(ഇതിൽ AP ൽ ഇരിക്കുന്നതായി കരുതി തുക കാണാം)

2. ആദ്യത്തെ n നിസർഗ്ഗസംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുക

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

[$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ എന്ന സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കാം]

3. ആദ്യത്തെ n നിസർഗ്ഗസംഖ്യകളുടെ ഘനങ്ങളുടെ തുക

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

[$k^4 - (k-1)^4 = (4k^3 - 6k^2 + 4k - 1)$ ഈ പ്രയോഗം ഉപയോഗിക്കാം.]

മേൽപ്പറഞ്ഞ സമീകരണങ്ങൾ മുൻപുള്ള ക്ലാസ്സുകളിൽ പഠിച്ചവയാണ്

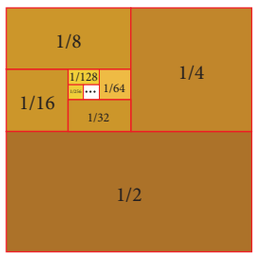
XI_Maths_Ch5_V-1_Mal.indd 268 14-02-2023 16:53:03

5.6 അനന്തമായ ശ്രേണികളും അനുക്രമങ്ങളും

വാസ്തവികസംഖ്യകളുടെ പരിമിതമായ തുക എന്നത് വാസ്തവിക സംഖ്യകളുടെ സവിശേഷതകളാൽ നന്നായി നിർവചിക്കപ്പെടുന്നു. പക്ഷേ അനന്തമായ ഒരു ശ്രേണിയുടെ അർത്ഥത്തിൽ ഒത്തുചേരൽ എന്ന ആശയം നാം പരിഗണിക്കേണ്ടതുണ്ട്. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$ എന്ന അനന്തമായ തുക പരിഗണിക്കുക. ഇതിൽ ഓരോ പദവും ധനസംഖ്യയാണ്. ഇതിന് ഒരു സംഖ്യാമൂല്യം നൽകാമോ? ആദ്യം അത് ബുദ്ധിമുട്ടുള്ളതോ, അസാധ്യമോ ആണെന്ന് തോന്നിയേക്കാം. ഈ ശ്രേണി ഒരു നിശ്ചിത അളവിലേക്ക് കൂടുതൽ കൂടുതൽ അടുക്കുന്നതായി കാണാം.

ഇതിനെ രസകരമായ ഒരു കണക്കിലൂടെ ആരംഭിക്കാം. A, B എന്ന രണ്ട് പാത്രങ്ങൾ എടുക്കുക. A എന്ന പാത്രത്തിൽ ഒരു മുഴുവൻ കേക്ക് വയ്ക്കുക. B എന്ന പാത്രത്തെ ശൂന്യമാക്കി വയ്ക്കുക. A എന്ന പാത്രത്തിൽ ഉള്ള കേക്കിനെ സമമായി വെട്ടി ഒരു ഭാഗം B എന്ന പാത്രത്തിൽ വയ്ക്കുക. വീണ്ടും A ൽ ഉള്ള പകുതി ഭാഗം കേക്കിന് രണ്ടായി വെട്ടി ഒരു ഭാഗം B എന്ന പാത്രത്തിൽ വയ്ക്കുക. ഇപ്രകാരം തുടർന്ന് ചെയ്തുകൊണ്ടിരുന്നാൽ അവസാനം A, B പാത്രങ്ങളിൽ എത്ര അളവ് കേക്ക് ഇരിക്കും. ഇതിനെ താഴെ നാം വരിയായി കൊടുത്തിട്ടുണ്ട്.

ഘട്ടങ്ങൾ	പാത്രം A	പാത്രം B
0	1	0
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$
5	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}$
...	...	...
n	$\frac{1}{2^n}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}\ldots+\frac{1}{2^n}$
...	...	...



ചിത്രം 5.3

ഇത് നോക്കുമ്പോൾ **അവസാനം** പാത്രം A ൽ ഒന്നും കാണില്ല. പാത്രം B മുഴുവൻ കേക്കും കാണാം. അതായത് പാത്രം A യിൽ, 0, B ൽ 1 എന്ന് കാണാം.

അതായത് $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}\ldots$ എന്നത് പൂജ്യത്തിനെ നോക്കി **ചെല്ലുന്നു** എന്ന് മനസ്സിലാക്കാം

$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16},\ldots$ എന്നത് 1 -നെ നോക്കി ചെല്ലുന്നുവെന്നും മനസ്സിലാക്കാം.

അതായത്, $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$ –യുടെ വില 1.

ഇവിടെ **'അവസാനം'** **'ചെയ്യുക'** എന്നീ വാക്കുകൾ എങ്ങനെ ഉപയോഗിക്കുന്നുവെന്നും അനന്തമായ ശ്രേണികളുടെ തുക എങ്ങനെ കാണാമെന്നും നോക്കാം.

XI_Maths_Ch5_V-1_Mal.indd 269 14-02-2023 16:53:04

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$... പൂജ്യത്തിനെ "നോക്കി ചെല്ലുന്നു" എന്ന് മനസ്സിലാക്കാം.

ഇതുപോലെ $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \frac{1}{100000}, \ldots$ പൂജ്യത്തിനെ നോക്കി ചെല്ലുന്നുവെന്നും മനസ്സിലാക്കാം.

(a_n) എന്നത് ഒരു ശ്രേണിയും, a എന്നത് അതിലെ ഒരു സംഖ്യയുമാണ്.

ഏതോ ഒരു പ്രത്യേക സാഹചര്യത്തിൽ a_n നും a–ക്കും ഇടയിലുള്ള ദൂരം ആ സംഖ്യയെക്കാൾ കുറവായിരുന്നാൽ, n എന്നത് ∞–യോട് അടുക്കുമ്പോൾ, a_n എന്നത് a–യോട് അടുക്കുന്നു. ഇതിനെ $n \to \infty$ എന്നും $a_n \to a$ എന്നും പറയാം. ഇതിനെ $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ എന്ന് എഴുതാം.,

എന്നാൽ 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1 ... എന്ന ശ്രേണി ഏത് സംഖ്യയിലേക്ക് പോകുന്നു എന്ന് പറയാൻ സാധ്യമല്ല. അതിനാൽ ഒരു ശ്രേണി ഉണ്ടാകാനുള്ള പരിധി ഇല്ല. എന്നാൽ ഒരു ശ്രേണിക്ക് ഒന്നിൽ കൂടുതൽ പരിധികളിലേക്ക് ഒത്തുചേരാനാവില്ലെന്ന് നമുക്ക് തെളിയിക്കാൻ കഴിയും. ഒരു ശ്രേണി ഒരു പരിധിയിലേക്ക് സംയോജിക്കുന്നുവെങ്കിൽ അത് അദ്വിതീയമാണ്.

5.6.1 ഫിബോനാച്ചി ശ്രേണി



ഫിബോനാച്ചി ശ്രേണി എന്നത് ആദ്യത്തെ രണ്ട് സംഖ്യകൾ 1, 1 ആയും അടുത്ത സംഖ്യകൾ അതിന് മുമ്പിലുള്ള രണ്ട് സംഖ്യകളെ കൂട്ടുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന ഒരു സംഖ്യയുടെ ശ്രേണിയാണ്. അതായത്, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... എന്ന് പോകുന്നു.

ഇതിന്റെ നിയമം $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, n \geq 3$ ഉം $x_1 = 1, \quad x_2 = 1$ ഉം ആണ്. **ഫിബോനാച്ചി** എന്ന ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞന്റെ പേരിലാണ് ഈ ശ്രേണി അറിയപ്പെടുന്നത്. ഇതിനെ ലിയോനാർഡോ പിസാ അല്ലെങ്കിൽ ലിയോനാർഡോ പിസാനോ എന്നും വിളിക്കുന്നു. ഫിബോനാച്ചി ശ്രേണി 1202-ൽ ആദ്യമായി ലിബർ അബാസി എന്ന പുസ്തകം മൂലമാണ് അറിയപ്പെട്ടത്. എപിസൻ നഗരത്തിലെ വ്യാപാരിയുടെ മകനായ ഫിബോനാച്ചി പല സ്ഥലങ്ങളിൽ യാത്ര ചെയ്ത് കച്ചവടം ചെയ്ത ആളാണ്. കച്ചവട മേഖലയിൽ ഉള്ളവർക്ക് ഗണിതം വളരെ പ്രധാനപ്പെട്ടതാണ് എന്നതിനാൽ ഫിബോനാച്ചി തന്റെ ചെറിയ വയസ്സ് മുതൽ സംഖ്യകളോടുള്ള ബന്ധത്തെ വളർത്തി.

ഹിന്ദു-അറബിക് സംഖ്യയിലാണ് ആദ്യമായി സംഖ്യകളെക്കുറിച്ചുള്ള അറിവ് തുടങ്ങിയത്. ഫിബോനാച്ചി വടക്കേ ആഫ്രിക്കയിൽ വച്ചാണ് ഇത് പഠിച്ചത്. ലിബർ അബായി എന്ന പുസ്തകം പുറത്തിറങ്ങുന്നതിനു മുമ്പ് ലാറ്റിൻ ഭാഷ സംസാരിക്കുന്ന ലോകത്തിന് ദശാംശസംഖ്യകളെ പരിചയപ്പെടുത്തിയില്ല. ഇദ്ദേഹം ജ്യാമിതി, വാണിജ്യഗണിതം, വാസ്തവിക സംഖ്യകൾ എന്നിവയെക്കുറിച്ച് പുസ്തകങ്ങൾ രചിച്ചിട്ടുണ്ട്. പൂജ്യം എന്ന ആശയത്തിന്റെ വികസനത്തിനും അദ്ദേഹം സഹായിച്ചിട്ടുണ്ട്.

n =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14 . . .
x_n =	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377 . . .

ഉദാഹരണത്തിന്, 8-ാം പദം എന്നത് 6-ാം പദത്തിന്റെയും 7-ാം പദത്തിന്റെയും തുകയാണ്. അതായത് $x_8 = 8 + 13 = 21$

XI_Maths_Ch5_V-1_Mal.indd 270 14-02-2023 16:53:05

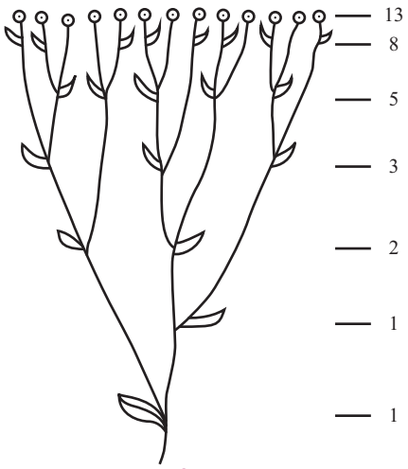
കുറിപ്പ് : ഫിബോനാച്ചി ശ്രേണിയിലുള്ള ചില രസകരമായ മാതൃക നോക്കാം.

(i) എല്ലാ മൂന്നാമത്തെ സംഖ്യയും മൂന്നാമത്തെ പദത്തിന്റെ മടങ്ങാണ് .$(t_3 = 2)$

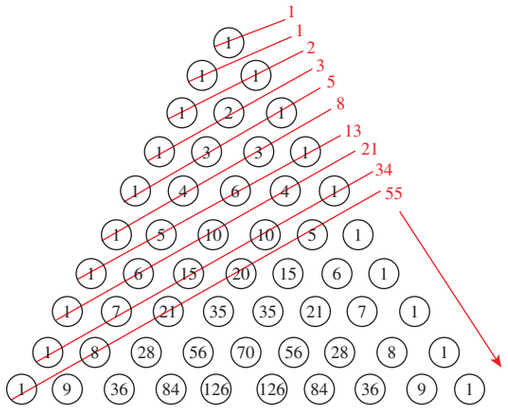
(ii) എല്ലാ നാലാമത്തെ സംഖ്യയും നാലാമത്തെ പദത്തിന്റെ മടങ്ങാണ് $(t_4 = 3)$

(iii) എല്ലാ അഞ്ചാമത്തെ സംഖ്യയും അഞ്ചാമത്തെ പദത്തിന്റെ മടങ്ങാണ് $(t_5 = 5)$

(iv) അതിനാൽ എല്ലാ n ാം പദവും n പദത്തിന്റെ മടങ്ങാണ്.



ചിത്രം 5.4



ചിത്രം 5.5

അനന്ത അനുക്രമങ്ങൾ

(a_n) എന്നത് അനന്തസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി ആണെങ്കിൽ നേരത്തെ സൂചിപ്പിച്ച പദപ്രയോഗം $a_1 + a_2 + ...$ നെ അനന്ത അനുക്രമം എന്നു പറയാം. ഇതിനെ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

ഈ ഭാഗത്തിന്റെ ആദ്യഘട്ടത്തിൽ നാം അനന്ത അനുക്രമം $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...$ കണ്ടുകഴിഞ്ഞു. കൂടാതെ അതിന്റെ തുക 1 ആണെന്ന് നാം ഗ്രഹിച്ചതുമാണ്. (കേക്ക് പ്രശ്നത്തിൽ) യഥാർത്ഥത്തിൽ കേക്ക് പ്രശ്നത്തിൽ, പാത്രം B യിലെ കേക്കിന്റെ ഘട്ടം ഘട്ടമായുള്ള ലഭ്യത താഴെ പറയുന്ന അനുക്രമത്തിൽ നൽകിയിരിക്കുന്നു.

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}, ...$$

ഈ ശ്രേണിയുടെ n പദം $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...+\frac{1}{2^n}$ ആകുന്നു ഇത് $\frac{2^n-1}{2^n}$ ന് തുല്യമാണ്.

s_n എന്നത് തുകയെ സൂചിപ്പിക്കുകയാണെങ്കിൽ $\lim_{n \to \infty} s_n = 1$ ആകുന്നു.

ഇതാണ് $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...$ ന്റെ തുക 1 ആണെന്ന് നമുക്ക് ബോധ്യപ്പെടാനുള്ള ഒരു കാരണം.

ഇത് പ്രചോദിപ്പിച്ചാൽ നമുക്ക് നിരവധി അനന്ത സംഖ്യയുടെ തുക നിർവചിക്കാൻ സാധിക്കും. (a_n) എന്നത് വാസ്തവിക സംഖ്യകളുടെ ഒരു ശ്രേണി കൂടാതെ, $3n=a_1+a_2.....+a_n$ എന്നിരിക്കട്ടെ ശ്രേണി S_n ഒരു പരിധി s–ൽ സംയോജിക്കുകയാണെങ്കിൽ ശ്രേണി (a_n) ന്റെ സങ്കലനം സാധ്യമാണ് എന്നും, അതിന്റെ തുക s ആണെന്നു പറയുന്നത് അർത്ഥവത്താണ്. ഈ സാഹചര്യത്തിൽ നമുക്ക് $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ എന്ന് എഴുതാം

അനുക്രമം s–ലേക്ക് സംയോജിക്കുന്നു എന്ന് പറയുന്നത് പതിവാണ്.

XI_Maths_Ch5_V-1_Mal.indd 271 14-02-2023 16:53:06

നിർവചനം 5.6 : $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, എന്നത് വാസ്തവികസംഖ്യകളുടെ ഒരു അനുക്രമം കൂടാതെ $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n, n \in \mathbb{N}$ എന്നിരിക്കട്ടെ..

ശ്രേണി (s_n) നെ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ന്റെ **ഭാഗിക സങ്കലന ശ്രേണി** എന്നു വിളിക്കാം. (s_n) സംയോജിക്കുകയും $\lim_{n \to \infty} s_n = s$ ഉം ആയാൽ ഈ അനുക്രമത്തെ **സംയോജന അനുക്രമം** എന്നും അനുക്രമത്തിന്റെ തുകയെ s എന്നും പറയാം.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ എന്ന് നമുക്ക് എഴുതാം. ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ നോക്കാം. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ എന്ന അനുക്രമം സംയോജിക്കുന്നില്ല എന്തെന്നാൽ ഭാഗികസങ്കലന ശ്രേണി 1, 0, 1, 0, 1,. . . സംയോജിക്കുന്നില്ല.

കുറിപ്പ് : പരിമിത അനുക്രമങ്ങൾക്കുള്ള ബീജഗണിത നിയമങ്ങൾ അനന്ത അനുക്രമങ്ങൾക്ക് അനന്തമായി പ്രയോഗിക്കാൻ സാധിക്കില്ല.

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + ...$ യെ പരിഗണിക്കുക.

$S = 1 - 1 + 1 - 1 + ...$ ആണെങ്കിൽ ഒരാൾക്ക് $S = (1-1) + (1-1) + ...$, $S = 1 + (-1+1) + (-1+1) + ...$ അല്ലെങ്കിൽ $1 - S = 1 - (+1 - 1 + 1 - 1 + ... = S)$ എന്നിവയ്ക്ക് അനുസരിച്ച് S-ന്റെ മൂല്യങ്ങളെ യഥാക്രമം S=0 അല്ലെങ്കിൽ 1 അല്ലെങ്കിൽ $\frac{1}{2}$ എന്നിങ്ങനെ വാദിക്കാൻ കഴിയും.

$x = \frac{1}{2}$ ആയാൽ $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ എന്ന അനുക്രമം സംയോജിക്കും. എന്നാൽ $x = 2$ ആയാൽ ഇത് സംയോജിക്കുന്നില്ല. ഇതിൽ നിന്നും $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ പോലുള്ള അനുക്രമങ്ങൾ x-ന്റെ ചില മൂല്യങ്ങൾക്ക് സംയോജിക്കുകയും x-ന്റെ ചില മൂല്യങ്ങൾക്ക് സംയോജിക്കുന്നില്ല എന്നത് വ്യക്തമാണ്. x- ന്റെ ഏത് മൂല്യങ്ങൾക്കാണ് ഇതുപോലുള്ള ശ്രേണികൾ സംയോജിക്കുന്നത് ഈ പുസ്തകത്തിന്റെ പരിധിക്കപ്പുറമാണ്. ഈ അധ്യായത്തിന്റെ ബാക്കി ഭാഗത്തിൽ ചില അനുക്രമങ്ങൾ x- ന്റെ ഏത് മൂല്യങ്ങൾക്ക് സംയോജിക്കുന്നു എന്നതും അങ്ങനെ സംയോജിക്കുകയാണെങ്കിൽ x-അനുക്രമങ്ങളുടെ തുകയും തന്നിട്ടുണ്ട്.

5.6.2 അനന്ത ഗുണനക്രമാനുപാത അനുക്രമങ്ങൾ

$\sum x^n$ എന്ന അനുക്രമത്തെ ഗുണനക്രമാനുപാത അനുക്രമം അല്ലെങ്കിൽ ഗുണന ക്രമാനുപാത ശ്രേണി എന്ന് പറയാം. നമുക്ക് $\sum_{n=0}^{\infty} x^n, x \neq 1$ എന്ന അനുക്രമത്തിൽ നിന്ന് തുടങ്ങാം. $s_n = \frac{1-x^n}{1-x}, |x| < 1$ ആണെങ്കിൽ $s_n = x_0 + x_1 + ... + x_n$ ആകുന്നു. $|x| < 1$ ആകുമ്പോൾ x^n ന്റെ മൂല്യം പൂജ്യത്തിലോട്ട് പോകുന്നതിനാൽ $|x| < 1$ ആയാൽ s_n എന്നത് $\frac{1}{1-x}$ ലോട്ട് പോകുന്നു എന്ന് പറയാം

- $|x| < 1$ എന്നതിനെ സഫലീകരിക്കുന്ന എല്ലാ വാസ്തവിക സംഖ്യ x-കൾക്കും $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ എന്ന അനുക്രമം സംയോജന സ്വഭാവമുള്ളതായിരിക്കും. ഇതിന്റെ തുക $\frac{1}{1-x}$ ആകുന്നു. $|x| < 1$ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്ന എല്ലാ വാസ്തവിക സംഖ്യകൾ x-നും $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$ ആകുന്നു.

XI_Maths_Ch5_V-1_Mal.indd 272 14-02-2023 16:53:08

- $|x| < 1$ നെ സഫലീകരിക്കുന്ന എല്ലാ വാസ്തവിക സംഖ്യകൾ x–നും $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ സംയോജിക്കുന്നു. ഇതിന്റെ തുക $\frac{1}{1+x}$ ആകുന്നു.

  അതായത്, $|x| < 1$ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്ന എല്ലാ വാസ്തവിക സംഖ്യകൾ x–നും

  $$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \text{ ആകുന്നു.}$$

- $|x| < \frac{1}{2}$ നെ സഫലീകരിക്കുന്ന എല്ലാ വാസ്തവിക സംഖ്യകൾ x–നും $\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n$ സംയോജിക്കുന്നു. അതിന്റെ തുക $\frac{1}{1-2x}$ ആകുന്നു.

  അതായത് $|x| < \frac{1}{2}$ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്ന എല്ലാ വാസ്തവിക സംഖ്യകൾ x–നും

  $$\frac{1}{1-2x} = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \ldots \text{ ആകുന്നു.}$$

- എല്ലാ വാസ്തവിക സംഖ്യകൾ x–നും $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ സംയോജിക്കുന്നു

  $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$ ആകുന്നു.

- $x = 0$– നു മാത്രം $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x$ സംയോജിക്കുന്നു.

ചില പ്രത്യേക അനുക്രമങ്ങളെ കുറിച്ച് നമുക്ക് വിവാദിക്കാം. ആ അനുക്രമങ്ങളുടെ സംയോജനത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ നമുക്ക് ചില പ്രശ്നങ്ങൾ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യാം.

5.6.3 അനന്ത കൂട്ടുസമാന്തര - ഗുണന ക്രമാനുപാത അനുക്രമം

- $\Sigma((a+(n-1)d))r^{n-1}$ എന്ന കൂട്ടുസമാന്തര - ഗുണനക്രമാനുപാത അനുക്രമത്തിന്റെ തുക

  $$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a}{1-r} + \frac{dr}{(1-r)^2}; -1 < r < 1 \text{ ആകുന്നു.}$$

ഉദാഹരണം 5.19 $1 + \frac{4}{5} + \frac{7}{25} + \frac{10}{125} + \ldots$–ന്റെ തുക കാണുക.

നിർദ്ധാരണം :

ഇവിടെ, $a = 1$, $d = 3$ കൂടാതെ $r = \frac{1}{5}$.

$$\begin{aligned} S_\infty &= \frac{a}{1-r} + \frac{dr}{(1-r)^2} \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{5}} + \frac{3 \times \frac{1}{5}}{\left(1-\frac{1}{5}\right)^2} \\ &= \frac{5}{4} + \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{25}{16}\right) \\ &= \frac{35}{16} \end{aligned}$$

5.6.4 അനന്ത അനുക്രമങ്ങളുടെ ദൂരദർശിനി സങ്കലനം

ഇതിന് മുൻപ് ഭാഗം 5.5.2 ൽ ഒരു പരിമിത ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളുടെ തുക ദൂരദർശിനി സങ്കലന രീതി ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കുന്നതെങ്ങനെ എന്നതിനെക്കുറിച്ച് നാം ചർച്ച ചെയ്തു. അനന്ത അനുക്രമങ്ങൾക്കും അതേ രീതി ഉപയോഗിക്കാം.

XI_Maths_Ch5_V-1_Mal.indd 273 14-02-2023 16:53:09

ഉദാഹരണം 5.20 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5n+6}$–ന്റെ മൂല്യം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം :

a_n എന്നത് തന്നിട്ടുള്ള അനുക്രമത്തിന്റെ n ാം പദം എന്നിരിക്കട്ടെ. എങ്കിൽ $a_n = \frac{1}{n^2+5n+6}$ ആകുന്നു ഭാഗിക ഭിന്നം ഉപയോഗിച്ചാൽ നമുക്ക് $a_n = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

s_n എന്നത് തന്നിട്ടുള്ള അനുക്രമത്തിന്റെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക എന്നിരിക്കട്ടെ. എങ്കിൽ.

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{n+3}$$

പക്ഷേ n അനന്തതയിലേക്ക് പോകുന്നതിനാൽ $\frac{1}{n+3}$ പൂജ്യത്തിലേക്ക് പോകുന്നു. അതിനാൽ $\frac{1}{3} - \frac{1}{n+3}$ എന്നതിന്റെ മൂല്യം $\frac{1}{3}$ ആകുന്നു. മറ്റു വാക്കുകളിൽ s_n ന്റെ മൂല്യം $\frac{1}{3}$ എന്ന് പറയാം.

അതായത് $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5n+6} = \frac{1}{3}$

5.6.5 ദ്വിപദ അനുക്രമം

ഗുണാനു ക്രമാനുപാത അനുക്രമത്തെ കുറിച്ചുള്ള ചർച്ചകളിൽ നിന്നും നാം കണ്ടത് x–ന്റെ ചില മൂല്യങ്ങൾക്ക്,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots ,$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots \text{ കൂടാതെ}$$

$$\frac{1}{1-2x} = 1 + 2x + 4x^2 + \ldots,$$

അതിനാൽ $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1+x}$ കൂടാതെ $\frac{1}{1-2x}$ എന്നിവകളെ $(1-x)^{-1}$, $(1+x)^{-1}$ കൂടാതെ $(1-2x)^{-1}$ എന്നും എഴുതാം. അതിനാൽ $(1+x), (1-x)\ldots$ എന്നിവയുടെ ഘാതങ്ങൾ ഋണമായിരിക്കാൻ സാധ്യതയുണ്ട് എന്ന് മനസ്സിലാക്കുന്നു. അതെ സാധ്യമാണ്. അതായത് ഘാതം ധനം അല്ലെങ്കിൽ ഋണം, പൂർണ്ണാങ്കം അല്ലെങ്കിൽ പരിമേയം ഇവയിൽ ഏതെങ്കിലുമായിരിക്കണം. കൂടാതെ $(1+x)$–ന്റെ ഘാതം ഒരു അപരിമേയ സംഖ്യ ആയും ഇരിക്കാം. മുൻപ് നാം സിദ്ധാന്തം 5.1 പ്രകാരം, ഘാതം ധനസംഖ്യയായിരിക്കുമ്പോഴുള്ള ദ്വിപദ സിദ്ധാന്തം നിരൂപിച്ചു. ഇപ്പോൾ നമുക്ക് പരിമേയ ഘാതത്തിനുള്ള ദ്വിപദസിദ്ധാന്തം നോക്കാം.

പരിമേയ ഘാതത്തിനുള്ള ദ്വിപദസിദ്ധാന്തം

സിദ്ധാന്തം 5.4

ഏതെങ്കിലും ഒരു പരിമേയ സംഖ്യ n–ന്, $|x| < 1$ നെ സഫലീകരിക്കുന്ന എല്ലാ വാസ്തവിക സംഖ്യ x–നും $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots$ ആകുന്നു. ഇതിന്റെ നിരൂപണത്തിൽ ഉയർന്ന ഗണിതാശയങ്ങൾ ഉൾപ്പെട്ടിരിക്കുന്നതിനാൽ സിദ്ധാന്തത്തെ തെളിവില്ലാതെ അനുമാനിച്ച് ചില പ്രത്യേക തരങ്ങളെ കാണാം. കൂടാതെ ചില പ്രശ്നങ്ങളും നിർദ്ധാരണം ചെയ്യാം. സിദ്ധാന്തത്തിൽ,

1. x ന്റെ സ്ഥാനത്ത് $-x$ പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ നമുക്ക്

$$(1-x)^n = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots \qquad (|x| < 1) \text{ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.}$$

XI_Maths_Ch5_V-1_Mal.indd 274 14-02-2023 16:53:11

2. n–ന്റെ സ്ഥാനത്ത് $-n$ പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ നമുക്ക്,

$(1+x)^{-n} = 1+(-n)x+\frac{(-n)(-n-1)}{2!}x^2-\frac{(-n)(-n-1)(-n-2)}{3!}x^3+\ldots$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

അതിനാൽ,

$(1+x)^{-n} = 1-nx+\frac{n(n+1)}{2!}x^2-\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3+\ldots \qquad (|x|<1)$ ആകുന്നു.

3. x–ന്റെയും n–ന്റെയും സ്ഥാനങ്ങളിൽ $-x$ കൂടാതെ $-n$ എന്നിവ പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ നമുക്ക്,

$(1-x)^{-n} = 1+nx+\frac{n(n+1)}{2!}x^2+\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3+\ldots \qquad (|x|<1)$ ലഭിക്കുന്നു.

സിദ്ധാന്തത്തിൽ, n ഒരു പരിമേയ സംഖ്യയാണെന്ന് വ്യക്തമായി പരാമർശിച്ചിട്ടുണ്ടെങ്കിലും, നമ്മളിൽ ചിലരെങ്കിലും ഒരു പൊതുവായ പരിമേയ സംഖ്യയുടെ സ്ഥാനത്ത് $\frac{p}{q}\ (q\neq 0)$ നെ ഉപയോഗിക്കാൻ മടിക്കും. അതിനാൽ ഒരു പരിമേയ സംഖ്യയെ $n=\frac{p}{q}\ (q\neq 0)$ രൂപത്തിൽ പ്രതിസ്ഥാപിച്ച് സിദ്ധാന്തത്തെ ഈ രീതിയിൽ നൽകുന്നു.

$$\begin{aligned}(1+x)^{\frac{p}{q}} &= 1+\frac{p}{q}x+\frac{\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}-1\right)}{2!}x^2+\frac{\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}-1\right)\left(\frac{p}{q}-2\right)}{3!}x^3+\ldots\\ &= 1+\frac{p}{q}x+\frac{p(p-q)}{q^2 2!}x^2+\frac{p(p-q)(p-2q)}{q^3 3!}x^3+\ldots \qquad (|x|<1)\\ (1-x)^{\frac{p}{q}} &= 1-\frac{p}{q}x+\frac{p(p-q)}{q^2 2!}x^2-\frac{p(p-q)(p-2q)}{q^3 3!}x^3+\ldots \qquad (|x|<1)\end{aligned}$$

$(1+x)^n$ ന്റെ മൂല്യം കാണുന്നതിനുള്ള സൂത്രം സിദ്ധാന്തത്തിൽ നിന്ന് ലഭിക്കുമെങ്കിലും, സംഖ്യാ സംബന്ധമായ പ്രശ്നങ്ങൾ എളുപ്പത്തിൽ നിർദ്ധാരണം കാണുന്നതിന് ചില വിപുലീകരണങ്ങളെ നേരിട്ട് എഴുതുന്നത് ഓർമിക്കുകയും അതിന് കഴിയുകയും വേണം.

ഓരോ വിപുലീകരണത്തിലും ഉള്ള ഗുണോത്തരങ്ങളുടെ നിരീക്ഷണം പ്രശ്നങ്ങൾക്ക് നിർദ്ധാരണം കാണുന്നത് വളരെ ഉപയോഗപ്രദമാണ്. അവയിൽ ചിലത് പട്ടികയിടാം.

1. $(1+x)^{-1} = 1-x+x^2-x^3+\ldots$
2. $(1-x)^{-1} = 1+x+x^2+x^3+\ldots$
3. $(1-x)^{-2} = 1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5+\ldots$
4. $(1+x)^{-2} = 1-2x+3x^2-4x^3+5x^4-6x^5+\ldots$

$|x|<1$ ആണെങ്കിൽ മാത്രമെ മുകളിൽ പറഞ്ഞ എല്ലാ വിപുലീകരണങ്ങളും പ്രാബല്യമാകൂ.

ഉദാഹരണം 5.21 $|x|<1$ എന്ന മൂല്യങ്ങൾക്ക് $(1+x)^{\frac{2}{3}}$ നെ ആദ്യത്തെ നാല് പദങ്ങൾ വരെ വിപുലീകരിച്ചെഴുതുക.

നിർദ്ധാരണം :

ഇവിടെ, $n=\frac{2}{3}$

$$\begin{aligned}\frac{n(n-1)}{2!} &= \frac{\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}-1\right)}{2!}\\ &= \frac{\frac{2}{3}\left(\frac{-1}{3}\right)}{2}\end{aligned}$$

XI_Maths_Ch5_V-1_Mal.indd 275 14-02-2023 16:53:12

$$= \frac{-1}{9}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} = \frac{\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}-1\right)\left(\frac{2}{3}-2\right)}{3!}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}\left(\frac{-1}{3}\right)\left(\frac{-4}{3}\right)}{6}$$

$$= \frac{4}{81}$$

അതായത്, $(1+x)^{\frac{2}{3}} = 1+\frac{2}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\frac{4}{81}x^3+\ldots$ ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം 5.22 $\frac{1}{(1+3x)^2}$ നെ x–ന്റെ ഘാതങ്ങളായി വിപുലീകരിക്കുക. വിപുലീകരണം പ്രായോഗികമാകുന്നതിനുള്ള x–ന്റെ നിബന്ധന കാണുക.

നിർദ്ധാരണം :

$3x = y$ എന്നിരിക്കട്ടെ. എങ്കിൽ, $\frac{1}{(1+3x)^2} = \frac{1}{(1+y)^2}$ ആകുന്നു.

ഇപ്പോൾ $\frac{1}{(1+y)^2}$ നെ ദ്വിപദസിദ്ധാന്തം മൂലം y–ന്റെ ഘാതങ്ങളായി വിപുലീകരിച്ചെഴുതാം. $|y|<1$ നെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്ന y മൂല്യങ്ങൾക്കു മാത്രമേ ഈ വിപുലീകരണം പ്രായോഗികമാകൂ. y–യുടെ സ്ഥാനത്ത് $3x$ പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ നമുക്ക് $|3x|<1$ ന്റെ വിപുലീകരണം ലഭിക്കും. x നെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്ന $\frac{1}{(1+3x)^2}$–മൂല്യങ്ങൾക്കു മാത്രമേ ഈ വിപുലീകരണം പ്രായോഗികമാകൂ. അതായത് $|x|<\frac{1}{3}$ യെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്ന x–ന്റെ മൂല്യങ്ങൾക്കു മാത്രമേ ഈ വിപുലീകരണം പ്രായോഗികമാകൂ.

$$\frac{1}{(1+3x)^2} = (1+3x)^{-2}$$

$$= 1-2(3x)+\frac{2(2+1)}{2!}(3x)^2-\frac{2(2+1)(2+2)}{3!}(3x)^3$$

$$+\frac{2(2+1)(2+2)(2+3)}{4!}(3x)^4-\ldots$$

അതിനാൽ, $\frac{1}{(1+3x)^2} = 1-6x+27x^2-108x^3+405x^4-\ldots,\ |x|<\frac{1}{3}$

ഉദാഹരണം 5.23 $\frac{1}{(3+2x)^2}$ നെ x–ന്റെ ഘാതങ്ങളായി വിപുലീകരിക്കുക. വിപുലീകരണം പ്രായോഗികമാകുന്നതിനുള്ള x–ന്റെ നിബന്ധന കാണുക.

നിർദ്ധാരണം :

നാം $(1+x)^{-2}$–നെ വിപുലീകരണം ഉപയോഗിക്കണമെന്നത് തികച്ചും വ്യക്തമാണ്.

അതിനാൽ നമുക്ക് $(3+2x)$ നെ $3\left(1+\frac{2x}{3}\right)$ എന്നെഴുതി മുന്നോട്ട് പോകാം.

അതായത് $\frac{1}{(3+2x)^2} = \frac{1}{3^2\left(1+\frac{2x}{3}\right)^2}$

$$= \frac{1}{9}\left(1+\frac{2x}{3}\right)^{-2}$$

XI_Maths_Ch5_V-1_Mal.indd 276 14-02-2023 16:53:14

$$= \frac{1}{9}(1+y)^{-2} \qquad \left(\frac{2x}{3} = y \text{ എന്നാൽ}\right)$$

$$= \frac{1}{9}(1-2y+3y^2-4y^3+5y^4-\ldots), |y|<1$$

$$= \frac{1}{9}\left(1-2\left(\frac{2x}{3}\right)+3\left(\frac{2x}{3}\right)^2-4\left(\frac{2x}{3}\right)^3+5\left(\frac{2x}{3}\right)^4-\ldots\right), \left|\frac{2x}{3}\right|<1$$

$$= \frac{1}{9}\left(1-\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}x^2-\frac{32}{27}x^3+\frac{80}{81}x^4-\ldots\right), |x|<\frac{3}{2}$$

അതായത്, $\frac{1}{(3+2x)^2} = \frac{1}{9}-\frac{4}{27}x+\frac{4}{27}x^2-\frac{32}{243}x^3+\frac{80}{729}x^4-\ldots, |x|<\frac{3}{2}$

അതിനാൽ $|x|<\frac{3}{2}$ ആണെങ്കിൽ മാത്രമേ ഈ വിപുലീകരണം പ്രായോഗികമാകൂ.

ദ്വിപദസിദ്ധാന്തം അനുസരിച്ച് നമുക്ക് ഏതൊരു ധനസംഖ്യയുടെയും വർഗ്ഗമൂലം, ഘനമൂലം, മറ്റു ചില മൂല്യങ്ങൾ എന്നിവ കാണാം. അതുപോലൊരു പ്രശ്നം താഴെ കാണാം.

ഉദാഹരണം 5.24 $\sqrt[3]{65}$ –ന്റെ മൂല്യം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം :

$|x|<1$ എങ്കിൽ, $(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\ldots$

$$\sqrt[3]{65} = 65^{\frac{1}{3}}$$

$$= (64+1)^{\frac{1}{3}}$$

$$= 64^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= 4\left(1+\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= 4\left(1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{64}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\times\left(\frac{1}{64}\right)^2+\ldots\right)$$

$$= 4+\frac{1}{48}-4\times\frac{1}{9}\times\frac{1}{64}\times\frac{1}{64}+\ldots$$

$$= 4+\frac{1}{48}-\frac{1}{9216}+\ldots$$

$$\approx 4+0.02 \quad (\text{കാരണം, } \frac{1}{9216}+\ldots \text{ വളരെ ചെറുതാണ്})$$

$\sqrt[3]{65} = 4.02$ (ഏകദേശമായി)

ഉദാഹരണം 5.25 x ഒരു വലിയ സംഖ്യ ആണെങ്കിൽ, $\sqrt[3]{x^3+7}-\sqrt[3]{x^3+4}$ –ന്റെ മൂല്യം ഏകദേശം $\frac{1}{x^2}$ ആകുന്നു എന്ന് തെളിയിക്കുക

നിർദ്ധാരണം :

$$\sqrt[3]{x^3+7} = (x^3+7)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left[x^3\left(1+\frac{7}{x^3}\right)\right]^{\frac{1}{3}} \qquad \left(x \text{ വലിയ സംഖ്യ ആയതിനാൽ } \left|\frac{7}{x^3}\right|<1\right)$$

$$= x\left(1+\frac{7}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

XI_Maths_Ch5_V-1_Mal.indd 277 14-02-2023 16:53:16

$$= x\left(1+\frac{1}{3}\times\frac{7}{x^3}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(\frac{7}{x^3}\right)^2+\ldots\right)$$

$$= x\left(1+\frac{7}{3}\times\frac{1}{x^3}-\frac{49}{9}\times\frac{1}{x^6}+\ldots\right)$$

$$= x+\frac{7}{3}\times\frac{1}{x^2}-\frac{49}{9}\times\frac{1}{x^5}+\ldots$$

$$\sqrt[3]{x^3+4} = (x^3+4)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left[x^3\left(1+\frac{4}{x^3}\right)\right]^{\frac{1}{3}} \quad (x \text{ എന്നത് വലിയ സംഖ്യ ആയതിനാൽ } \left|\frac{4}{x^3}\right|<1)$$

$$= x\left(1+\frac{4}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= x\left(1+\frac{1}{3}\times\frac{4}{x^3}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(\frac{4}{x^3}\right)^2+\ldots\right)$$

$$= x\left(1+\frac{4}{3}\times\frac{1}{x^3}-\frac{16}{9}\times\frac{1}{x^6}+\ldots\right)$$

$$= x+\frac{4}{3}\times\frac{1}{x^2}-\frac{16}{9}\times\frac{1}{x^5}+\ldots$$

x ഒരു വലിയസംഖ്യ ആയതിനാൽ $\frac{1}{x}$ വളരെ ചെറിയ ഒരു സംഖ്യ ആയിരിക്കാം. അതിന്റെ $\frac{1}{x}$ –ന്റെ വലിയ ഘാതങ്ങൾ അവഗണിക്കാവുന്നതാണ്.

അതിനാൽ $\sqrt[3]{x^3+7} = x+\frac{7}{3}\times\frac{1}{x^2}$ കൂടാതെ $\sqrt[3]{x^3+4} = x+\frac{4}{3}\times\frac{1}{x^2}$.

അതുകൊണ്ട്, $\sqrt[3]{x^3+7}-\sqrt[3]{x^3+4} = \left(x+\frac{7}{3}\times\frac{1}{x^2}\right)-\left(x+\frac{4}{3}\times\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{x^2}$

കുറിപ്പ് : എല്ലാ വാസ്തവിക സംഖ്യ n നും ദ്വിപദസിദ്ധാന്തം സത്യമാണ്. ഉദാഹരണമായി. $n=\sqrt{2}$

എങ്കിൽ, $(1+x)^{\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}\,x+\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{2}-1)}{2!}x^2+\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-2)}{3!}x^3+\ldots|x|<1.$

5.6.6 ഘാതാങ്ക അനുക്രമങ്ങൾ

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ എന്ന അനുക്രമം ഘാതാങ്ക അനുക്രമം എന്ന് അറിയപ്പെടുന്നു. ഈ അനുക്രമം x–ന്റെ മൂല്യങ്ങൾക്കും സംയോജിക്കുന്നു എന്നത് നമുക്ക് തെളിയിക്കാൻ കഴിയും.

ഏതൊരു വാസ്തവികസംഖ്യ x–നും $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$ ഇവിടെ,

$$e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots$$

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots \text{ ആകുന്നു} \qquad (5.1)$$

x–ന്റെ എല്ലാ മൂല്യങ്ങൾക്കും (5.1) ൽ x നെ $-x$ എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ,

$$e^{-x} = 1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots \qquad \text{എന്ന് ലഭിക്കുന്നു} \qquad (5.2)$$

കുറിപ്പായി $\frac{1}{e}=e^{-1}=1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\ldots$

XI_Maths_Ch5_V-1_Mal.indd 278 14-02-2023 16:53:18

5.1 കൂടാതെ 5.2 എന്നിവയിൽ നിന്നും

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\ldots \text{ കൂടാതെ } \frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots$$

എന്ന് ലഭിക്കുന്നു. കുറിപ്പായി

$$\frac{e+e^{-1}}{2}=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{6!}+\ldots \text{ കൂടാതെ } \frac{e-e^{-1}}{2}=\frac{1}{1!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\ldots \text{ ആകുന്നു.}$$

(5.1) ൽ x–ന് പകരം $2x$ നെ പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ,

$$e^{2x}=1+\frac{2x}{1!}+\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^3}{3!}+\frac{(2x)^4}{4!}+\ldots \text{ ആകുന്നു.}$$

ലഘൂകരിച്ചെഴുതിയാൽ,

$$e^{2x}=1+\frac{2x}{1!}+\frac{4x^2}{2!}+\frac{8x^3}{3!}+\frac{16x^4}{4!}+\ldots \text{ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.}$$

5.6.7 ലോഗരിത അനുക്രമങ്ങൾ

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ എന്ന അനുക്രമത്തെ **ലോഗരിത അനുക്രമം** എന്നു വിളിക്കുന്നു. $|x|<1$ നെ തൃപ്തിപ്പെടുന്ന x–ന്റെ എല്ലാ മൂല്യങ്ങൾക്കും ഈ അനുക്രമം സംയോജിക്കുന്നു. $x=1$–ആകുമ്പോഴും ഈ അനുക്രമം സംയോജിക്കുന്നു.

$|x|<1$ നെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്ന x ന്റെ എല്ലാ മൂല്യങ്ങൾക്കും അനുക്രമത്തിന്റെ $\log(1+x)$ ആകുന്നു. അതായത് $\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$

$|x|<1$ ന്റെ സ്ഥാനത്ത് x നെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്ന x –ന്റെ എല്ലാ മൂല്യങ്ങൾക്കും $-x$ എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ $\log(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\ldots$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

$|x|<1$ നെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്ന x ന്റെ എല്ലാ മൂല്യങ്ങൾക്കും $\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\log(1+x)-\log(1-x)$

ഇതിനെ ഉപയോഗിച്ചാൽ നമുക്ക്, $\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots\right]$.

ഉദാഹരണമായി, $\log(1+2x)$ നെ ഒരു അനുക്രമമായി എഴുതണമെങ്കിൽ നമുക്ക് വിപുലീകരണത്തിൽ, $2x$–നു പകരം y –നെ പ്രസ്താവിച്ചാൽ, $|y|<1$ എന്ന എല്ലാ y മൂല്യങ്ങൾക്കും $\log(1+y)=y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}+\ldots$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു. പക്ഷേ, $|y|<1$ ആണെങ്കിൽ $|2x|<1$ ആകുന്നു. അതിനാൽ, $|x|<\frac{1}{2}$ ആകുന്നു,

$$\log(1+2x)=2x-\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^3}{3}-\frac{(2x)^4}{4}+\ldots \text{ ആകുന്നു.}$$

അതായത്, $|x|<\frac{1}{2}$ നെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്ന എല്ലാ x–മൂല്യങ്ങൾക്കും $\log(1+2x)=2x-\frac{4x^2}{2}+\frac{8x^3}{3}-\frac{16x^4}{4}+\ldots$ ആകുന്നു.

അഭ്യാസം 5.4

1. താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയെ x–ന്റെ ആരോഹണം ഘാതങ്ങളായി എഴുതുക. കൂടാതെ ദ്വിപദ സിദ്ധാന്തം പ്രായോഗികമാകുന്നതിനുള്ള x –ന്റെ നിബന്ധന കാണുക.

(i) $\frac{1}{5+x}$ (ii) $\frac{2}{(3+4x)^2}$

(iii) $(5+x^2)^{\frac{2}{3}}$ (iv) $(x+2)^{-\frac{2}{3}}$

XI_Maths_Ch5_V-1_Mal.indd 279 14-02-2023 16:53:19

2. $\sqrt[3]{1001}$ –ന്റെ ഏകദേശമൂല്യം കാണുക (രണ്ട് ദശാംശ സ്ഥാനങ്ങൾക്ക്)

3. x ന്റെ മൂല്യം ആവശ്യത്തിന് വലുതാണെങ്കിൽ $\sqrt[3]{x^3+6}-\sqrt[3]{x^3+3}$ –ന്റെ മൂല്യം ഏകദേശം $\frac{1}{x^2}$ ന് തുല്യമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

4. x ന്റെ മൂല്യം വളരെ ചെറുതാണെങ്കിൽ, $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ ന്റെ മൂല്യം ഏകദേശം $1-x+\frac{x^2}{2}$ ന് തുല്യമെന്ന് തെളിയിക്കുക.

5. തന്നിട്ടുള്ള ഘാതാങ്ക അനുക്രമങ്ങളുടെ ആദ്യത്തെ 6 പദങ്ങൾ കാണുക.

(i) e^{5x} (ii) e^{-2x} (iii) $e^{\frac{1}{2}x}$

6. തന്നിട്ടുള്ള ലോഗരിത അനുക്രമങ്ങളുടെ ആദ്യത്തെ 4 പദങ്ങൾ കാണുക.

(i) $\log(1+4x)$ (ii) $\log(1-2x)$ (iii) $\log\left(\frac{1+3x}{1-3x}\right)$ (iv) $\log\left(\frac{1-2x}{1+2x}\right)$

വിപുലീകരണം പ്രായോഗികമാക്കുന്നതിനുള്ള ഇടവേളകളും കാണുക.

7. $y=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots$ അല്ലെങ്കിൽ, $x=y-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}-\frac{y^4}{4!}+\ldots$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

8. p, q മായി താരതമ്യം ചെയ്യുമ്പോൾ $p-q$ ചെറുതാണെങ്കിൽ $\sqrt[n]{\frac{p}{q}} \simeq \frac{(n+1)p+(n-1)q}{(n-1)p+(n+1)q}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക. കൂടാതെ $\sqrt[8]{\frac{15}{16}}$ –ന്റെ മൂല്യം കാണുക.

9. $\frac{3-4x+x^2}{e^{2x}}$ –ന്റെ വിപുലീകരണത്തിൽ x^4 –ന്റെ ഗുണാങ്കം കാണുക.

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\left(\frac{1}{9^{n-1}}+\frac{1}{9^{2n-1}}\right)$ ന്റെ മൂല്യം കാണുക.

UJK4B

അഭ്യാസം 5.5

ശരിയായ ഉത്തരം അല്ലെങ്കിൽ യോജിച്ച ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുത്തെഴുതുക.

1. $2+4+6+\ldots+2n$ – ന്റെ മൂല്യം

(1) $\frac{n(n-1)}{2}$ (2) $\frac{n(n+1)}{2}$ (3) $\frac{2n(2n+1)}{2}$ (4) $n(n+1)$

2. $(2+2x)^{10}$ ൽ x^6 –ന്റെ ഗുണാങ്കം.

(1) ${}^{10}C_6$ (2) 2^6 (3) ${}^{10}C_6 2^6$ (4) ${}^{10}C_6 2^{10}$

3. $(2x+3y)^{20}$ യുടെ വിപുലീകരണത്തിൽ x^8y^{12} –ന്റെ ഗുണാങ്കം

(1) 0 (2) $2^8 3^{12}$ (3) $2^8 3^{12}+2^{12}3^8$ (4) ${}^{20}C_8 2^8 3^{12}$

4. സാധ്യമായ എല്ലാ r-മൂല്യങ്ങൾക്കും ${}^nC_{10} > {}^nC_r$ എങ്കിൽ, n–ന്റെ മൂല്യം

(1) 10 (2) 21 (3) 19 (4) 20

5. രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ കൂട്ടുസമാന്തര ശ്രേണി a യും ഗുണന ക്രമാനുപാത ശ്രേണി g യും ആയാൽ,

(1) $a \le g$ (2) $a \ge g$ (3) $a = g$ (4) $a > g$

6. $(1+x^2)^2(1+x)^n = a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+x^{n+4}$ കൂടാതെ a_0, a_1, a_2 എന്നിവ ഒരു AP യും ആണെങ്കിൽ, n–ന്റെ മൂല്യം

(1) 1 (2) 5 (3) 2 (4) 4

XI_Maths_Ch5_V-1_Mal.indd 280 14-02-2023 16:53:22

7. $a, 8, b$ എന്നിവ AP യും, $a, 4, b$ എന്നിവ GP യും, a, x, b എന്നിവ HP യും ആണെങ്കിൽ, x–ന്റെ മൂല്യം

(1) 2 (2) 1 (3) 4 (4) 16

8. $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}, \ldots$ എന്ന ശ്രേണി ഒരു

(1) കൂട്ടുസമാന്തരശ്രേണി (2) ഗുണനക്രമാനുപാതശ്രേണി

(3) അനുപാതസങ്കലനശ്രേണി (4) കൂട്ടുസമാന്തര ഗുണനക്രമാനുപാത അനുക്രമം

9. രണ്ടു ധനസംഖ്യകളുടെ AM കൂടാതെ GP എന്നിവ യഥാക്രമം 16, 8 ആയാൽ അവയുടെ HM
(1) 10 (2) 6 (3) 5 (4) 4

10. S_n എന്നത് പൊതുവ്യത്യാസം d ഉള്ള ഒരു AP യുടെ n പദങ്ങളുടെ തുകയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു വെങ്കിൽ $S_n - 2S_{n-1} + S_{n-2}$ – ന്റെ മൂല്യം

(1) d (2) 2d (3) 4d (4) d^2

11. 38^{15} നെ 13 കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന ശിഷ്ടം

(1) 12 (2) 1 (3) 11 (4) 5

12. 1, 2, 4, 7, 11, . . . എന്ന ശ്രേണിയുടെ n പദം

(1) $n^3 + 3n^2 + 2n$ (2) $n^3 - 3n^2 + 3n$ (3) $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ (4) $\frac{n^2 - n + 2}{2}$

13. $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \ldots$ എന്ന അനുക്രമത്തിന്റെ n പദങ്ങളുടെ തുക

(1) $\sqrt{2n+1}$ (2) $\frac{\sqrt{2n+1}}{2}$ (3) $\sqrt{2n+1} - 1$ (4) $\frac{\sqrt{2n+1} - 1}{2}$

14. $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \ldots$ എന്ന ശ്രേണിയുടെ n -ാം പദം

(1) $2^n - n - 1$ (2) $1 - 2^{-n}$ (3) $2^{-n} + n - 1$ (4) 2^{n-1}

15. $\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{32} + \ldots$ എന്ന അനുക്രമത്തിന്റെ n പദങ്ങളുടെ തുക.

(1) $\frac{n(n+1)}{2}$ (2) $2n(n+1)$ (3) $\frac{n(n+1)}{\sqrt{2}}$ (4) 1

16. $\frac{1}{2} + \frac{7}{4} + \frac{13}{8} + \frac{19}{16} + \ldots$ എന്ന അനുക്രമത്തിന്റെ മൂല്യം

(1) 14 (2) 7 (3) 4 (4) 6

17. ഒരു അനന്ത GP യുടെ തുക 18 ആകുന്നു. ആദ്യപദം 6 ആയാൽ പൊതു അനുപാതം

(1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{2}{3}$ (3) $\frac{1}{6}$ (4) $\frac{3}{4}$

18. e^{-2x} എന്ന അനുക്രമത്തിൽ x^5 –ന്റെ ഗുണാങ്കം

(1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{3}{2}$ (3) $\frac{-4}{15}$ (4) $\frac{4}{15}$

19. $\frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + \ldots$ –ന്റെ മൂല്യം

(1) $\frac{e^2+1}{2e}$ (2) $\frac{(e+1)^2}{2e}$ (3) $\frac{(e-1)^2}{2e}$ (4) $\frac{e^2-1}{2e}$

XI_Maths_Ch5_V-1_Mal.indd 281 14-02-2023 16:53:24

20. $1-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2-\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^3+\ldots$ –ന്റെ മൂല്യം

(1) $\log\left(\frac{5}{3}\right)$ (2) $\frac{3}{2}\log\left(\frac{5}{3}\right)$ (3) $\frac{5}{3}\log\left(\frac{5}{3}\right)$ (4) $\frac{2}{3}\log\left(\frac{2}{3}\right)$

സംഗ്രഹം

ഈ അധ്യായത്തിൽ നിന്നും നാം നേടിയ അറിവുകൾ.

- ഏതൊരു $n \in \mathbb{N}$ നും ദ്വിപദസിദ്ധാന്തം
$$(a+b)^n = {}^nC_0a^nb^0 + {}^nC_1a^{n-1}b^1 + \ldots + {}^nC_na^0b^n$$
- ${}^nC_0 + {}^nC_1 + \ldots + {}^nC_n = 2^n$
- ${}^nC_1 + {}^nC_3 + + {}^nC_5 \ldots + = {}^nC_0 + {}^nC_2 + + {}^nC_4 \ldots + = 2^{n-1}$
- AM ≥ GM ≥ HM
- ഒരു AP യുടെ n-ാം പദം $T_n = a+(n-1)d$ ആകുന്നു.
- ഒരു AP യുടെ n-ാം പദം $T_n = ar^{n-1}$ ആകുന്നു.
- ഒരു AP യുടെ n-ാം പദം $T_n = (a+(n-1)d)r^{n-1}$ ആകുന്നു.
- a കൂടാതെ b എന്നിവ ഏതെങ്കിലും രണ്ട് ധനസംഖ്യകൾ എങ്കിൽ
$AM = \frac{a+b}{2}, GM = \sqrt{ab}, HM = \frac{2ab}{a+b}$
- ഒരു AP യിലെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക $S_n = \frac{n}{2}(2a+(n-1)d)$ ആകുന്നു.
- ഒരു AP യിലെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, r \neq 1$ ആകുന്നു.
- ഒരു AGP യിലെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക
$S_n = \frac{a-(a+(n-1)d)r^n}{1-r} + dr\left(\frac{1-r^{n-1}}{(1-r)^2}\right), r \neq 1$
- $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ ആകുന്നു.
- ഫിബോനാച്ചി ശ്രേണി 1,1,2,3,5,...
- പരിമേയ ഘാതത്തിനുള്ള ദ്വിപദസിദ്ധാന്തം,
$(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\ldots$ $|x|<1$ നെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്ന എല്ലാ വാസ്തവിക സംഖ്യകൾ x–നും ഇത് പ്രായോഗികമാണ്.

XI_Maths_Ch5_V-1_Mal.indd 282 14-02-2023 16:53:25

- $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$
- $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$
- $(1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 + \ldots$
- $(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - 6x^5 + \ldots$
- $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$
- $e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$
- $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots$ കൂടാതെ $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$
- $|x| < 1$ നെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്ന x-ന്റെ എല്ലാ മൂല്യങ്ങൾക്കും

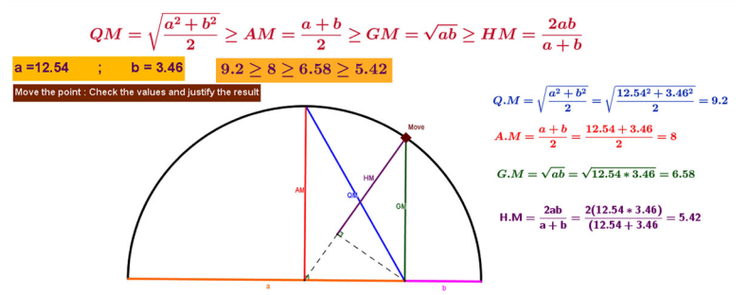
  $log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$ ആകുന്നു.
- $|x| < 1$ നെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്ന x-ന്റെ എല്ലാ മൂല്യങ്ങൾക്കും

  $log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots$ ആകുന്നു.
- $|x| < 1$ നെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്ന x-ന്റെ എല്ലാ മൂല്യങ്ങൾക്കും

  $log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right]$ ആകുന്നു.

XI_Maths_Ch5_V-1_Mal.indd 283 14-02-2023 16:53:26

ഐസിറ്റി കോർണർ – 5 (എ)

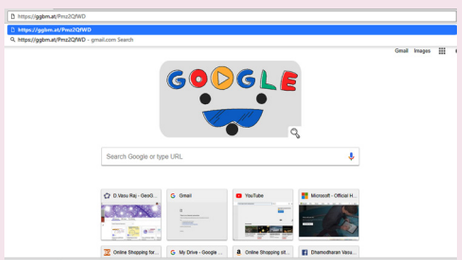


ഘട്ടം – 1 :ബ്രൗസർ ഓപ്പൺ ചെയ്ത് താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന യുആർഎൽ ലിങ്ക് ക്ലിക്ക് ചെയ്യുക. അല്ലെങ്കിൽ ക്യൂആർ കോഡ് സ്കാൻ ചെയ്യുക.

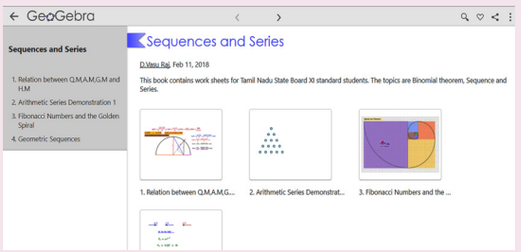
ഘട്ടം – 2 : ഇപ്പോൾ ശ്രേണികൾ കൂടാതെ അനുക്രമങ്ങൾ എന്ന പ്രവർത്തന ഭാഗം ഓപ്പൺ ആകും. ഈ പ്രവർത്തന ഭാഗത്തിൽ ധാരാളം പ്രവർത്തന പേജുകൾ കാണാം. ഒരു പ്രവർത്തന പേജ് Q.M, A.M, G.M കൂടാതെ H.M എന്നിവയ്ക്കിടയിലുള്ള ബന്ധം "Relation between Q.M, A.M, G.M, H.M" തെരഞ്ഞെടുക്കുക.

ഘട്ടം – 3 : ശരാശരി സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച് a, b എന്നിവയുടെ മൂല്യങ്ങൾ മാറ്റി പ്രവർത്തനം ചെയ്ത് നോക്കുക. "Move" എന്ന ചിഹ്നത്തെ ചലിപ്പിച്ച് a, b എന്നിവയെ മാറ്റുമ്പോൾ ശരാശരി മൂല്യവും മാറുന്നത് കാണാം.

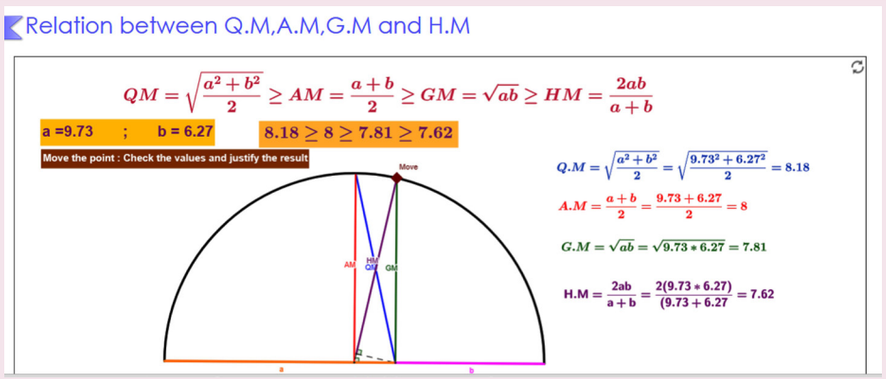
ഘട്ടം–1



ഘട്ടം–2



ഘട്ടം–3



ഇപ്പോൾ നിങ്ങൾക്ക് എന്തിനാണ് രേഖകളെ AM, QM, GM കൂടാതെ HM എന്നു വിളിക്കുന്നതെന്ന് കുപിടിയ്ക്കുന്നതി നുള്ളസമയമാണ്. പാഠ ആശയങ്ങൾ നന്നായി മനസ്സിലാക്കുന്നതിന് ബാക്കി പ്രവർത്തനഭാഗവും പരിശീലിക്കുക.

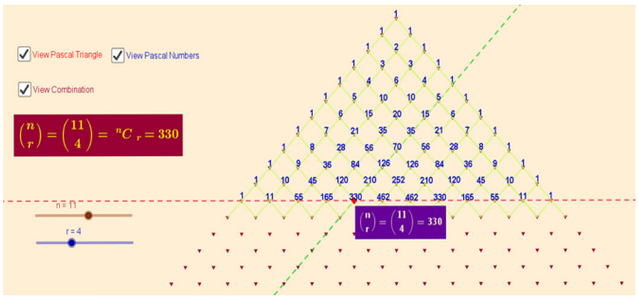
***ചിത്രങ്ങൾ സൂചകങ്ങൾക്കായി മാത്രം.**

പ്രവർത്തനത്തിനുള്ള ലിങ്ക് : https://ggbm.at/Pmz2QfWD

ക്യൂആർ കോഡ് സ്കാൻ ചെയ്യുക

XI_Maths_Ch5_V-1_Mal.indd 284 14-02-2023 16:53:27

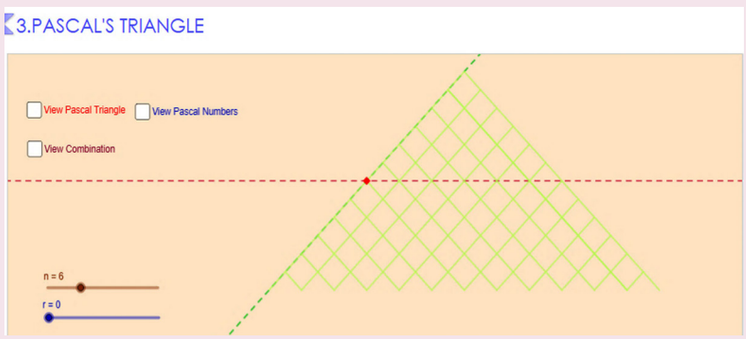
ഐസിറ്റി കോർണർ – 5 (ബി)



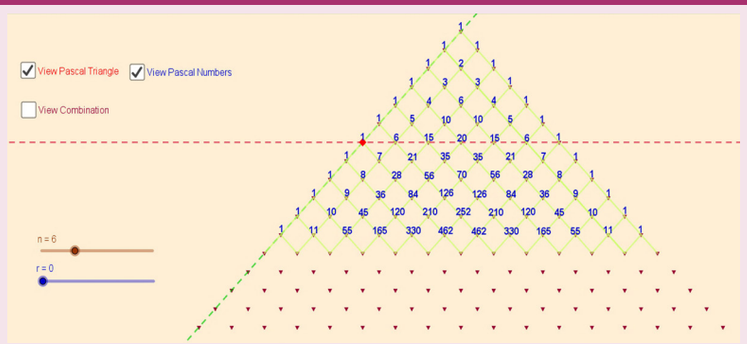
ഘട്ടം – 1 : ബ്രൗസർ ഓപ്പൺ ചെയ്ത് താഴെ തന്നിട്ടുള്ള. URL ലിങ്ക് ടൈപ്പ് ചെയ്യുക അല്ലെങ്കിൽ H^3 കോഡ് സ്കാൻ ചെയ്യുക. "PASCAL'S TRIANGLE" എന്ന പ്രവർത്തന ഭാഗം കാണാൻ സാധിക്കും. പാസ്ക്കൽ ത്രികോണത്തിന്റെ സമീകരണങ്ങൾ നിങ്ങൾക്ക് ഇവിടെ കാണാം "View Pascal Triangle", "View Pascal's Numbers" കൂടാതെ "View Combination" എന്നിങ്ങനെ 3 തെരഞ്ഞെടുക്കൽ പെട്ടികൾ നിങ്ങൾക്ക് കാണാം.

ഘട്ടം – 2 : "View Pasculs Numbers" നെ Click ചെയ്ത് n കൂടാതെ r എന്നീ Slider നെ ചലിപ്പിക്കുക. ചുവപ്പ് നിറബിന്ദു ചലിക്കുന്നത് കാണാം. ഏതെങ്കിലും ഒരു സംഖ്യയിൽ നിർത്തി "view Combination Click ചെയ്താൽ സംഖ്യയുടെ ടൂടിച്ചേരൽ കാണാൻ സാധിക്കും. പാസ്ക്കൽ സംഖ്യകളെ കണക്കു കൂട്ടലുമായി താരതമ്യം ചെയ്യുക. ചിത്രങ്ങൾ സൂചകങ്ങൾക്കായി മാത്രം

ഘട്ടം–1



ഘട്ടം–2



*** ചിത്രങ്ങൾ സൂചകങ്ങൾക്കായി മാത്രം.**

പ്രവർത്തനത്തിനുള്ള ലിങ്ക് : https://ggbm.at/QNga4HQd

ക്യൂആർ കോഡ് സ്കാൻ ചെയ്യുക

FBECY

XI_Maths_Ch5_V-1_Mal.indd 285 14-02-2023 16:53:28

അദ്ധ്യായം **6**

ദ്വിമാന വിശ്ലേഷക ജ്യാമിതി

"എന്റെ അധികാരങ്ങൾ സാധാരണമാണ്. എന്റെ വിജ്ഞാപനം മാത്രമാണ് എനിക്ക് വിജയം നൽകുന്നത്.'

– സർ ഐസക് ന്യൂട്ടൺ

6.1 ആമുഖം



ഫ്രാങ്കോയിസ് വിയറ്റ് (1540-1603) ആദ്യത്തെ ചിട്ടയായ ബീജഗണിത പ്രതീകങ്ങളുപയോഗിച്ചുള്ള സിദ്ധാന്തത്തെ അവതരിപ്പിക്കുകയും സമവാക്യ സിദ്ധാന്തത്തിന് സംഭാവന നൽകുകയും ചെയ്തു. രണ്ട് ഫ്രഞ്ച് ശാസ്ത്ര ജ്ഞൻ-തത്വചിന്തകനായ റെനെഡെസ്കാർട്ടസും പിയറി ഡി. ഫെർമാറ്റ് 1630-കളിൽ സ്വതന്ത്രമായി വിശകലന ജ്യാമിതിയിലെ ദൃശ്യവൽക്കരിക്കുകയും ഉണ്ടായി. ബീജഗണിത സൂത്രവാക്യങ്ങൾ ദൃശ്യവൽക്കരിക്കുന്നതിനുള്ള ഒരു മാർഗ്ഗം എന്ന നിലയിൽ ഡെസ്കാർട്ട് വിശ്ലേഷക ജ്യോമിതിയെ അംഗീകൃതമാക്കുകയും കോർഡിനേറ്റ് സിസ്റ്റത്തെ ഒരു തലത്തിലെ ബിന്ദുക്കളെ സ്ഥാപിക്കാനുള്ള ഒരു ഉപകരണം എന്നായി വികസിപ്പിക്കുകയും ചെയ്തു. ബീജഗണിതവും, ജ്യാമിതിയും തമ്മിലുള്ള വിടവ് നികത്തുക എന്നതായിരുന്നു അദ്ദേഹത്തിന്റെ പ്രധാന ലക്ഷ്യം. ബീജഗണിതവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട് ബീജഗണിത സമവാക്യം എങ്ങനെ പ്രകടിപ്പിക്കാമെന്നും ജ്യാമിതീയ രൂപങ്ങളുടെ ഉപയോഗത്തിലൂടെ അവയെ വിശദീകരിക്കാമെന്നും അദ്ദേഹം വിശദീകരിച്ചു. ഡെസ്കാർട്ടസിന്റെയും ഫെർമാറ്റിന്റെയും മികച്ച കണ്ടുപിടിത്തമാണ് വിശ്ലേഷക ജ്യാമിതി. കാർട്ടീഷ്യൽ ജ്യാമിതി വിശ്ലേഷക ജ്യാമിതിയ്ക്കുപകരം ഉപയോഗിക്കുന്ന ബദൽ പദം അദ്ദേഹത്തിന്റെ പേരിലാണ്.

17-ാം നൂറ്റാണ്ടുമുതൽ ഗണിതശാസ്ത്രം രണ്ടു ദിശകളിലാണ് വികസനം പ്രാപിച്ചത്. ശുദ്ധ ഗണിതം, പ്രായോഗിക ഗണിതവുമായി വളർച്ച പ്രാപിച്ചുവരുന്നു. 17-ാം നൂറ്റാണ്ടിൽ പ്രായോഗിക ഗണിതശാസ്ത്രത്തിന്റെ ആദ്യത്തെ മേഖലയിൽ ഒരു നേർരേഖയിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ ചലനത്തെപറ്റിയാണ് കണ്ടറിയുവാൻ സാധിച്ചത്. ഇതിൽ നേർരേഖാ ഗ്രാഫ് ഉപയോഗിക്കാം. വാണിജ്യം, സാമ്പത്തിക ശാസ്ത്രം, സാമൂഹ്യശാസ്ത്രം, ഭൗതികശാസ്ത്രം, വൈദ്യം എന്നിങ്ങനെ വൈവിധ്യമാർന്ന പഠനമേഖലകളിൽ നേർരേഖകളുടെ ഗ്രാഫുകൾ ഏറ്റവും വലിയ പങ്ക് വഹിക്കുന്നു. അടിസ്ഥാന ജ്യാമിതിയിൽ ഏറ്റവും നീളം കുറഞ്ഞ രേഖകൾ ഏറ്റവും കൂടുതൽ പങ്കുവഹിക്കുന്നതുമാത്രമല്ല ചരിത്രപരമായ പ്രാധാന്യം ഉള്ളതുമായി കരുതപ്പെടുന്നു.

ദൈനംദിന ജീവിതത്തിൽ സംഭവിക്കുന്ന ഓരോ പ്രശ്നങ്ങളെയും ഗണിതശാസ്ത്രത്തിന്റെ ഭാഷയിൽ മാറ്റി രൂപീകരിക്കുന്നത് ആദ്യത്തെ പണിയാണ്. ഗണിതശാസ്ത്ര മാതൃകകളുടെ നിർമ്മാണത്തിൽ നിരവധി സാങ്കേതിക വിദ്യകൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു. തന്നിരിക്കുന്ന ഒരു കൂട്ടം അനുമാനത്തിൽ നിന്ന് രേഖീയ സമവാക്യം (മാതൃകകൾ) എങ്ങനെ രൂപീകരിയ്ക്കാം എന്ന് നോക്കാം. ഒപ്പം ഉചിതമായ ഗണിത വിദ്യകൾ ഉപയോഗിച്ച് പരിഹരിച്ച് ചുവടെ ചിത്രീകരിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ യഥാർത്ഥ ജീവിതത്തിലെ ചില ലളിതമായ പ്രശ്നം പരിഗണിക്കുന്നതിനെപറ്റിയും താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു.

യഥാർത്ഥ ജീവിത സാഹചര്യം 6.1 ഒരു വിദ്യാർത്ഥി ദിവസവും രാവിലെ 8.00 മണിക്ക് വീട്ടിൽ നിന്നും സ്കൂളിലേക്ക് നടന്നു ചെല്ലുന്നു. അവൻ ശരാശരി വേഗതയിൽ 1 മണിക്കൂറിൽ 6 കി.മീ. വേഗത്തിൽ നടക്കുമ്പോൾ സ്കൂൾ തുടങ്ങുന്നതിന് 10 മിനിറ്റിനു മുൻപേ എത്തി ചേരുന്നു. അതേ സമയം

XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 286 14-02-2023 16:54:54

ശരാശരി വേഗതയിൽ 1 മണിക്കൂറിൽ 4 കി.മീ. വേഗത്തിൽ നടക്കുമ്പോൾ 5 മിനിറ്റ് താമസിച്ച് എത്തി ചേരുന്നു. എങ്കിൽ താഴെ തന്ന ചോദ്യങ്ങൾക്ക് എങ്ങനെ ഉത്തരം കാണാം.

(i) വിദ്യാർത്ഥിയുടെ വീട്ടിനും സ്കൂളിനും ഇടയ്ക്കുള്ള ദൂരം എന്ത്

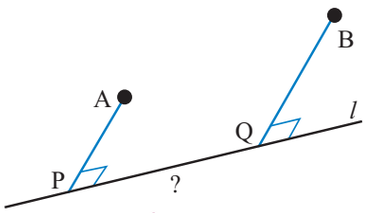
(ii) ശരിയായ സമയത്തിന് വിദ്യാർത്ഥി സ്കൂളിൽ എത്തി ചേരാൻ ആകുന്ന ശരാശരി വേഗവും അവൻ സ്കൂളിൽ എത്തേണ്ട സമയവും കാണുക

(iii) സ്കൂൾ ആരംഭിക്കുന്ന സമയം

(iv) വിദ്യാർത്ഥി നടന്നുപോയ ഒരു ജോടി നേർരേഖകളുടെ സമവാക്യം കാണുക.

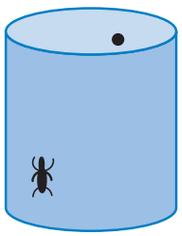
(രണ്ടു നേർ രേഖകളുടെ സംയോജിത സമവാക്യം ഉപയോഗിച്ച്)

യഥാർത്ഥ ജീവിതസാഹചര്യം 6.2 A, B എന്നീ രണ്ടു ഗ്രാമങ്ങൾക്ക് മികച്ച രീതിയിൽ വൈദ്യുതി നൽകുവാൻ ഒരു സബ്സ്റ്റേഷൻ നിർമ്മിക്കുവാൻ സർക്കാർ തീരുമാനിച്ചു. ഈ സബ്സ്റ്റേഷനുകൾ l എന്ന രേഖയിൻമേലാണ്. A യ്ക്കു ലംബമായി P എന്ന ബിന്ദുവും B യ്ക്കു ലംബമായി Q എന്ന ബിന്ദുവുമാണ്. ഇവയ്ക്കിടയിലുള്ള ദൂരം യഥാക്രമം 3 കി.മീ., 5 കി.മീ. ആകുന്നു. കൂടാതെ P, Q എന്നിവയ്ക്കിടയിലുള്ള ദൂരം 6 കി.മീ. ആകുന്നു. (i) രണ്ടു ഗ്രാമങ്ങളെ സബ്സ്റ്റേഷനുമായി യോജിപ്പിക്കുന്ന നീളം കുറഞ്ഞകമ്പി എന്നതാണ് (അല്ലെങ്കിൽ ഗ്രാമത്തെയും സബ്സ്റ്റേഷനെയും യോജിപ്പിക്കുന്ന റോഡ്) (ii) രണ്ടു ഗ്രാമങ്ങളെ സബ്സ്റ്റേഷനുമായി യോജിപ്പിക്കുന്ന കമ്പിയുടെ സമവാക്യം കാണുക.



ചിത്രം 6.1

യഥാർത്ഥ ജീവിതസാഹചര്യം 6.3 24 സെ.മി. ആധാരചുറ്റളവും 10 സെ.മി. ഉയരവും ഉള്ള ഒരു പൊള്ളയായ സിലിണ്ടറാകൃതിയിലുള്ള പാത്രത്തിന്റെ പുറത്തായി താഴെ നിന്നും 4 സെ.മി. ഉയരത്തിൽ ഒരു ഉറുമ്പ് ഇരിക്കുന്നു. അതിന്റെ നേർ എതിർ വശത്ത് പാത്രത്തിനുള്ളിൽ 3 സെ. മീറ്റർ താഴെ ഒരു തുള്ളി തേൻ ഉണ്ട്. ഉറുമ്പ് തേൻ നുകരുവാൻ എടുക്കുന്ന ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ദൂരം എന്തായിരിക്കും? ഉറുമ്പ് കണ്ടെത്തിയ പാതയുടെ സമവാക്യം എന്താണ്? ഉറുമ്പിന്റെയും തേനിന്റെയും സ്ഥാനം ചിത്രം 6.2 ൽ ചിത്രീകരിച്ചിരിക്കുന്നു.


ചിത്രം 6.2

യഥാർത്ഥ ജീവിതസാഹചര്യം 6.4 ഒരു ഉപഭോക്താവ് ₹8 വീതം വില 22,000 കോംപാക്റ്റ് ഡിസ്ക് (സി.ഡി.) വാങ്ങാൻ ഉദ്ദേശിക്കുന്നു. ഒരു ഡിസ്ക്കിന് ₹30 അല്ലെങ്കിൽ അതിൽ കൂടുതൽ വില കൊടുത്ത് വാങ്ങാൻ ഉദ്ദേശിക്കുന്നില്ല. അതേ സമയം ഒരു കോംപാക്റ്റ് ഡിസ്ക്കിന്റെ ₹6 അല്ലെങ്കിൽ അതിൽ കുറഞ്ഞ വിലയുടെ ഉപഭോക്താവ് വിൽക്കുവാനും ഉദ്ദേശിക്കുന്നില്ല. ഒരു ഡിസ്ക്കിന് ₹14 വീതം മാത്രമേ 24,000 കോംപാക്റ്റ് ഡിസ്ക്കുകൾ നിർമ്മാതാവിന് കൊടുക്കുവാൻ സാധിക്കുകയുള്ളൂ. ആവശ്യപ്പെടുന്നതിന്റെ അളവും വിതരണം ചെയ്യുന്ന അളവും രേഖീയമായ ആനുപാതികമാണെന്ന് കരുതുക.

തന്നിട്ടുള്ളവ എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കാം.

(i) ആവശ്യപ്പെട്ട സമവാക്യം (Demand Equation)

(ii) വിതരണം ചെയ്തവയുടെ സമവാക്യം (Supply Equation)

(iii) വിപണിയിലെ സന്തുലിത വില

(iv) വില ₹10 ആയിരിക്കുമ്പോൾ ആവശ്യപ്പെട്ടതിന്റെയും വിതരണം ചെയ്തതിന്റെയും അളവ് എന്തായിരിക്കും

മുകളിൽ തന്നിട്ടുള്ള നേർരേഖാ കണക്കുകളുടെ സമവാക്യങ്ങൾക്ക് ഒരു പ്രത്യേകതരം നിർദ്ധാരണം മാത്രം നൽകാതെ അവയിൽ നിന്നും വേറെ ധാരാളം വിവരങ്ങൾ അറിയുവാൻ ഇതിൽ

XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 287 14-02-2023 16:54:55

നിന്നും സഹായിക്കുന്നു. ഈ അദ്ധ്യായത്തിന്റെ അവസാനം കണക്കുകൾ മുഴുവനും നേർരേഖയുടെ ആശയം ഉപയോഗിച്ച് നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുവാൻ നാം ശ്രമിക്കണം. നേർരേഖകളെപ്പറ്റി മനസ്സിലാക്കുമ്പോൾ അതിന്റെ ചില അടിസ്ഥാന ആശയങ്ങൾ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന കുറെ അടിസ്ഥാന സങ്കല്പം നമുക്ക് ലഭിക്കേണ്ടതുണ്ട്. അവയെപ്പറ്റി നമുക്ക് വിശദമായി ചർച്ച ചെയ്യാം.

പഠനലക്ഷ്യങ്ങൾ

ഈ അദ്ധ്യായം പൂർത്തീകരിക്കുമ്പോൾ വിദ്യാർത്ഥികൾ അറിഞ്ഞിരിക്കേണ്ടവ

- വ്യത്യസ്ത രൂപങ്ങളുടെ നേർരേഖാ സമവാക്യം എഴുതൽ
- തന്നിട്ടുള്ള രണ്ടു നേർരേഖകൾ സമാന്തരമാണോ അല്ലയോ എന്ന് തിരിച്ചറിയൽ
- തന്നിട്ടുള്ള രേഖകളിൽ നിന്ന് കുറിപ്പിട്ട ബിന്ദുക്കളുടെ ദൂരം കണക്കാക്കൽ മാത്രമല്ല രണ്ടു സമാന്തര രേഖകൾക്ക് ഇടയിലുള്ള ദൂരം കാണൽ.
- തന്നിട്ടുള്ള നിബന്ധനയനുസരിച്ചുള്ള ഒരു നേർരേഖയുടെ കൂട്ടം
- നേർരേഖകളുടെ സമീകരണം, അവക്കിടയിലുള്ള കോണം കൂടാതെ അവയുടെ കോണ ദ്വിഭാജകം മുതലായവ കണ്ടറിയുക

6.2 ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ ബിന്ദുപഥം

XPYBS

നിർവചനം 6.1

ഒരു ബിന്ദു എന്നത് ഒരു തലത്തിന്റെ മേൽഭാഗത്തെ കുറിപ്പിട്ട സ്ഥലത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നതാണ്. ബിന്ദു ഒരു വസ്തുവിനെയോ, അല്ലെങ്കിൽ രൂപത്തെയോ സൂചിപ്പിക്കുന്നതാണ്

ഒരു ബിന്ദുവിനെപറ്റി നാം മനസ്സിലാക്കേണ്ടതില്ല. പക്ഷെ ഒരു സ്ഥാനമാണെന്ന് മനസിലാക്കേണ്ടത് അത്യാവശ്യമാണ്. സ്ഥാനത്തെ ഒരു ബിന്ദു ഉപയോഗിച്ച് കുറിയ്ക്കാം. ദ്വിമാന വിശ്ലേഷക ജ്യാമിതിയിൽ ബിന്ദുക്കളെ യഥാർത്ഥമായ സംഖ്യകളുടെ ക്രമതജോഡികളായി അതായത് (x, y) എന്ന രീതിയിൽ നിർവചിക്കാവുന്നതാണ്. പൊതുവായി സമാന്തരരേഖയെ x -അക്ഷമായും x -അക്ഷത്തിനു ലംബമായ രേഖയെ y-അക്ഷമെന്നും വിളിക്കുന്നു. ഈ രണ്ടു അക്ഷങ്ങളും ചേരദിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളെ മൂലബിന്ദു എന്ന് പറയുന്നു. ഒരു തലത്തിൽ മേൽ ഏതൊരു ബിന്ദുവായ P-യെ പ്രത്യേക രീതിയിൽ ക്രമീകരിച്ച ജോടിയെ (x, y) എന്ന് കുറിയ്ക്കാവുന്നതാണ്. ഇവിടെ x എന്നത് P-എന്ന ബിന്ദുവിനും y-അക്ഷത്തിനും ഇടയിലുള്ള ദൂരവും y എന്നത് P എന്ന ബിന്ദുവിനും x അക്ഷത്തിനും ഇടയിലുള്ള ദൂരവും ആകുന്നു. y -അക്ഷത്തിനു ഇടതുവശത്ത് x ന് ഋണമൂല്യവും അതുപോലെ x -അക്ഷത്തിനു താഴെ y യ്ക്ക് ഋണമൂല്യവും ആണ്. ആവശ്യത്തിനനുസരിച്ച് x, y -യ്ക്ക് പകരം വേറെ അക്ഷരങ്ങളെയും ഉപയോഗിക്കാവുന്നതാണ്. അക്ഷങ്ങൾക്ക് വേറെ വേറെ മാത്രകളും ഉപയോഗിക്കാം

നിർവചനം 6.2

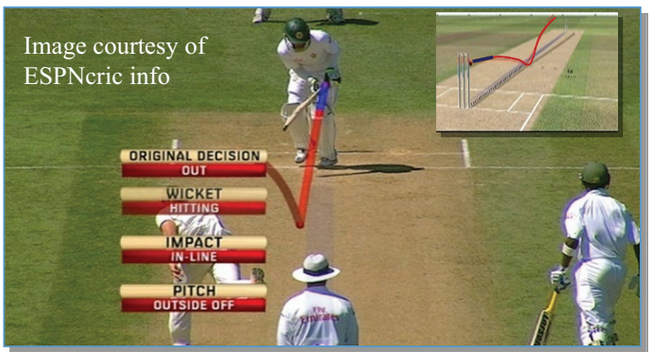
ഒരു ബിന്ദു എന്നത് ഒരു കുറിപ്പിട്ട നിബന്ധനയ്ക്കനുസരിച്ച് ചലിക്കുമ്പോൾ ആ ബിന്ദു ചലിച്ച പാതയെ അതിന്റെ **ബിന്ദുപഥം** എന്ന് പറയുന്നു.

താഴെ തന്ന ചിത്രീകരണം ബിന്ദുപഥത്തിന്റെയും അതിന്റെ പ്രയോജനത്തെപറ്റിയും അറിയാൻ സാധിക്കും.

XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 288 14-02-2023 16:54:55

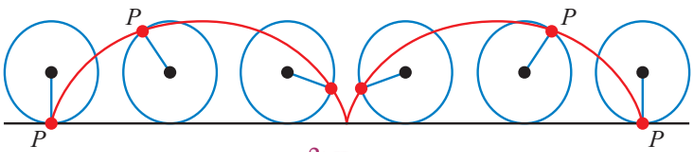
ചിത്രീകരണം 6.1 ക്രിക്കറ്റ് കളിയിൽ പന്ത് എറിയുന്നയാൾ ഒരു പന്ത് എറിയുമ്പോൾ പന്ത് കണ്ടെത്തിയ പാത ആ പന്തിന്റെ ബിന്ദു പഥം എന്നു പറയുന്നത്. പന്ത് എറിയുന്ന ആൾ മുഖേന എറിയുന്ന പന്ത് ബൗളർ തടുക്കുമ്പോൾ ബാറ്റ്സ്മാൻമാർക്കും ഫീൽഡർമാർക്കും തമ്മിലുള്ള പ്രശ്നങ്ങളുണ്ടാകുമ്പോൾ (LBW) മൂന്നാം അമ്പയറിലൂടെ കളിക്കാർ ഉയർത്തിയ പ്രതിസന്ധികളെ തീരുമാനിക്കും. അയാൾ പന്ത് ചെന്ന വഴിയെ സ്ക്രീനിൽ പതുക്കെ ചലിപ്പിച്ച് പന്ത് ബൗളറുടെ കാലിൽ തട്ടിയ ശേഷം സ്റ്റംബിൽ തൊടാൻ സാഹചര്യം ഉണ്ടായോ എന്ന ശരി നോക്കി ശരിയായ തീരുമാനം അറിയിക്കുന്നതാണ്. ഇവിടെ പന്തിനെ ഒരു ബിന്ദുവായും ആപത്ത് ചെന്ന പാതയെ ബിന്ദുപഥമായും കരുതുന്നു. നിലവിൽ അന്താരാഷ്ട്ര ക്രിക്കറ്റിൽ ഈ രീതി അനുവദിച്ചിരിക്കുന്നു

https://www.hawkeyeinnovations.com/sports എന്ന ലിങ്ക് ഉപയോഗിച്ച് കാണാം.



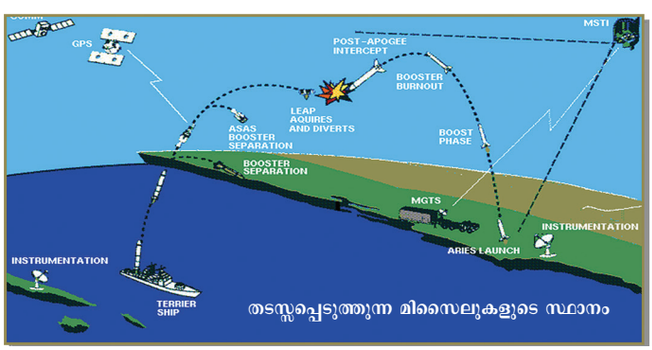
ചിത്രം 6.3

ചിത്രീകരണം 6.2 P എന്നത് വൃത്താകൃതിയുള്ള ചക്രത്തിന്റെ വക്കിലെ (ചുറ്റളവ്) ഒരു ബിന്ദുവാണെന്ന് കരുതുക. ആ വൃത്തം ഒരു നേർരേഖയിൻമേൽ വഴുക്കി പോകാതെ ഉരുണ്ടുപോകുന്നു. അങ്ങനെ ഉരുണ്ടു പോകുമ്പോൾ വൃത്തത്തിന്റെ വക്കിൽ Pഎന്ന ബിന്ദു ലഭിക്കുന്നു. ഈ ബിന്ദു കണ്ടെത്തിയ പാതയെ സൈക്ലോയിഡ് എന്ന് വിളിക്കുന്നു (വൃത്തത്തിനുള്ളിൽ ഒരു ബിന്ദുവിനെ എടുക്കാൻ ശ്രമിക്കുക) വെബ്സൈറ്റ് മുഖേന വക്രരേഖകളെ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഈ വക്രരേഖകളെ *www.mathworld.wolfram.com/cyloid* കൂടാതെ *www.gogebra.org/b/bd2ADu2I* എന്ന ലിങ്കിൽ കാണാം.



ചിത്രം 6.4

ചിത്രീകരണം 6.3 ഒരു സ്ഥലത്തെ നശിപ്പിക്കുവാൻ സൈനിക കപ്പലിൽ നിന്നും ഒരു മിസൈൽ വിക്ഷേപിച്ചു. ഇതിനെ തടഞ്ഞ് നശിപ്പിക്കുവാൻ തറയിൽ നിന്നും മറ്റൊരു മിസൈൽ വിക്ഷേപിക്കുന്നു. മിസൈലുകളുടെ ബിന്ദുപഥത്തെ ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. പല യുദ്ധങ്ങളിലും ഒരു മിസൈലിന്റെ സ്ഥാനം പ്രധാന പങ്കുവഹിക്കുന്നു. ഗൾഫ് യുദ്ധത്തിൽ (2 ആഗസ്റ്റ് 1990, 28 ഫെബ്രുവരി 1991) ഇറാഖ് ഇസ്രായേൽ നഗരങ്ങളെ സ്കഡ് മിസൈലുകളും ഉപയോഗിച്ച് ആക്രമിച്ചു. ഈ മിസൈലുകളെ തടഞ്ഞ് നശിപ്പിക്കുവാൻ ഇസ്രായേൽ പേൽട്രിയാട്ട് മിസൈലുകളെ ഉപയോഗിക്കുകയും ചെയ്തു. ബഹിരാകാശ വാഹനം വിജയകരമായി വിക്ഷേപിക്കുന്നതിന് ബഹിരാകാശ ഗവേഷണത്തിൽ പാത നിർണ്ണയിക്കുന്നത് ഒരു പ്രധാന പങ്ക് വഹിക്കുന്നു.

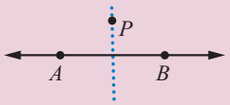
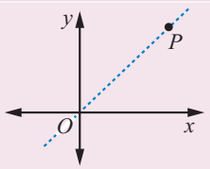
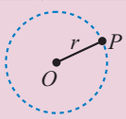


ചിത്രം 6.5

XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 289 14-02-2023 16:54:56

x, y എന്നീ രണ്ടു ചരങ്ങളുപയോഗിച്ചുള്ള സമവാക്യങ്ങളെ x, y എന്നീ ധനസംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ച് അനേകം ജോഡി അനന്തമായ മൂല്യങ്ങൾ തൃപ്തിപ്പെടുത്താവുന്നതാണ്. അത്തരത്തിലുള്ള ഓരോ ജോഡിയേയും സമവാക്യത്തിന്റെ യഥാർത്ഥ നിർദ്ധാരണം എന്നുപറയുന്നു. അത്തരം സമവാക്യത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണം അതിന്റെ ഗ്രാഫിനനുസരിച്ചായിരിക്കും. ഇവയുടെ ശേഖരണത്തെ തന്നിട്ടുള്ള സമവാക്യത്തിന്റെ ബിന്ദുപഥം എന്ന് പറയുന്നു.

ഗണിതത്തിലെ കുറെ പ്രധാനപ്പെട്ട ബിന്ദുപഥത്തെ താഴെ തന്ന പട്ടികയിൽ സൂചിപ്പിക്കുന്നു:

തന്നിരിക്കുന്ന വ്യവസ്ഥയിൽ P എന്നത് ഒരു ചലിക്കുന്ന ബിന്ദുവാകുന്നു	ഗ്രാഫ്	പാതയുടെ പേര്
AB എന്നീ രണ്ട് നിശ്ചിതബിന്ദുക്കളിൽ നിന്ന് തുല്യദൂരത്തിൽ P എന്ന ബിന്ദു ചലിക്കുന്നു.	 ചിത്രം 6.6	AB എന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തിന്റെ ലംബദ്വിഭാജമാകുന്നു.
Ox , Oy എന്നീ രണ്ട് നിശ്ചിത ബിന്ദുക്കളിൽ നിന്ന് Pഎന്ന ബിന്ദു തുല്യദൂരത്തിൽ ചലിക്കുന്നു	 ചിത്രം 6.7	$\angle xOy$ എന്ന കോണിന്റെ കോണദ്വിഭാജകം ആകുന്നു.
നിശ്ചലബിന്ദുവായ O യിൽ നിന്നും P എന്ന ബിന്ദു തുല്യ ദൂരത്തിൽ ചലിക്കുന്നു.	 ചിത്രം 6.8	വൃത്തം

നമുക്ക് ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനം കണ്ടെത്തുന്നതിനുള്ള വഴികളെപ്പറ്റി ചർച്ച ചെയ്യാം. ബിന്ദുപഥത്തിന്റെ സമവാക്യം എന്നത് ആ ബിന്ദുപഥത്തിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന എല്ലാ ബിന്ദുക്കളുടെയും അക്ഷദൂരങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള ബന്ധം ആകുന്നു.

ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ ബിന്ദുപഥത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുന്നതിനുള്ള നടപടിക്രമങ്ങൾ എന്തെന്നു നോക്കാം

(i) P എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ ബിന്ദുപഥത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുന്നതിന് P-യുടെ അക്ഷങ്ങളായ (h, k) എന്നിവയെ നിയോഗിക്കുക.

(ii) തന്നിട്ടുള്ള അളവുകളുടെയും അജ്ഞാതമായ പാരാമീറ്ററുകളെയും ഉപയോഗിച്ച് നൽകിയിരിക്കുന്ന വ്യവസ്ഥയെ സമവാക്യമായി എഴുതുക.

(iii) അറിയപ്പെടാത്ത പരാമീറ്ററുകളെ മാറ്റിയശേഷം h, k എന്നീ തന്നിട്ടുള്ള അളവുകൾ മാത്രം ഉപയോഗിച്ച് സമവാക്യം കാണുക.

(iv) കിട്ടുന്ന സമവാക്യത്തിൽ h-നു പകരം x ഉം k-ക്കു പകരം y എന്നിവ പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന സമീകരണം p-എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ ബിന്ദുപഥത്തിന്റെ സമീകരണമാണ്.

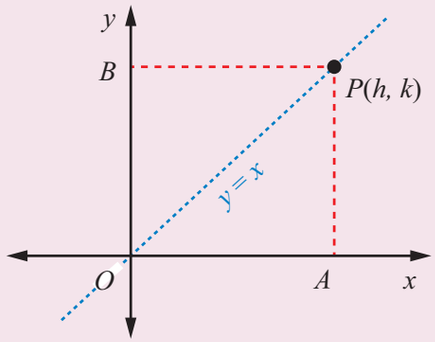
ഉദാഹരണം 6.1 x -അക്ഷത്തിൽ നിന്നുള്ള ദൂരം y -അക്ഷത്തിൽ നിന്നുള്ള ദൂരത്തിന് തുല്യമായി ചലിക്കുന്ന ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ ബിന്ദുപഥത്തെ കണക്കാക്കുക.

XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 290 14-02-2023 16:54:57

നിർദ്ധാരണം

$P(h,k)$ എന്നത് ബിന്ദു പഥത്തിൻ മേലുള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദു എന്നെടുക്കുക.

P- എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്നും x അക്ഷത്തിലും y-അക്ഷത്തിലും വരയുന്ന ലംബരേഖകളുടെ ആധാര ബിന്ദുക്കൾ യഥാക്രമം A, B എന്നിരിക്കട്ടെ.



ചിത്രം 6.9

അതായത് $P\ (OA,OB) = (BP,AP) = (h,k)$

തന്നിട്ടുള്ളത്,

$AP = BP \Rightarrow k = h$

$h = x$ എന്നും $k = y$ എന്നും പ്രതിസ്ഥാപിക്കുക

P-യുടെ ബിന്ദുപഥം $y = x$ എന്ന മൂലബിന്ദുവഴിയെ ചെല്ലുന്ന നേർരേഖയാണ്.

ഉദാഹരണം 6.2 $\left(ct, \frac{c}{t}\right)$ എന്നീ ബിന്ദു ചലിക്കുമ്പോൾ ഉണ്ടാകുന്ന ബിന്ദുപഥത്തെ കണക്കാക്കുക? ഇവിടെ $t \neq 0$ എന്നത് പരാമീറ്ററും, c എന്നത് ഒരു സ്ഥിരാങ്കവും ആണ്.

നിർദ്ധാരണം

$P(h,k)$ എന്നത് ബിന്ദുപഥത്തിൻ മേലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവാണെന്നിരിക്കട്ടെ.

തന്നിട്ടുള്ള നിബന്ധനയനുസരിച്ച് $h = ct$ യും $k = \frac{c}{t}$ ആകുന്നു.

ഈ രണ്ടു സമീകരണങ്ങളെയും ഗുണിച്ച് t-യെ മാറ്റാവുന്നതാണ്.

$(h)(k) = (ct)\left(\frac{c}{t}\right) \Rightarrow hk = c^2$, $h = x$ ഉം $k = y$ എന്നും പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ

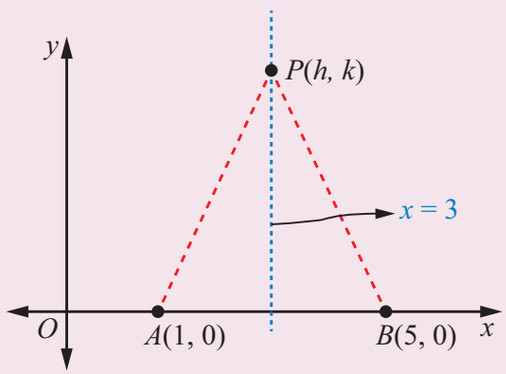
$\therefore\ xy = c^2$ എന്ന ബിന്ദുപഥത്തിന്റെ സമീകരണം ലഭിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം 6.3 $A(1,0)$ യും $B(5,0)$ എന്നീ നിശ്ചിത ബിന്ദുക്കളിൽ നിന്നും തുല്യ ദൂരത്തിൽ ചലിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ ബിന്ദുപഥത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ള രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ $A(1,0)$ യും $B(5,0)$ യും ആകുന്നു.

$P(h,k)$ എന്നത് പാതയിൻ മേലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവാണെന്ന് കരുതുക.



ചിത്രം 6.10

തന്നിട്ടുള്ള നിബന്ധനയനുസരിച്ച്, $AP = BP$

അതായത്,

$\sqrt{(h-1)^2+(k-0)^2} = \sqrt{(h-5)^2+(k-0)^2}$

$\Rightarrow \quad h = 3$

അതുകൊണ്ട് $P(h,k)$ -യുടെ നിയമപാത, $x = 3$

ഇത് y-അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായ നേർരേഖയാണ്.

XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 291 14-02-2023 16:54:58

ഉദാഹരണം 6.4 θ പരാമീറ്ററായും ചലിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളായ $(a\sec\theta,\ b\tan\theta)$ എന്നിവ ഉപയോഗിച്ച് ബിന്ദുപഥത്തിന്റെസമവാക്യം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$P(h,k)$ എന്നത് പാതയുടെ മേലുള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവാണെന്നിരിക്കട്ടെ.

തന്നിട്ടുള്ള നിബന്ധനയനുസരിച്ച്

$$h = a\sec\theta \text{ യും } k = b\tan\theta \text{ യും ആകുന്നു.}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{h}{a} = \sec\theta\ , \qquad \frac{k}{b} = \tan\theta$$

ത്രികോണമിതി സൂത്രമനുസരിച്ച് θ -യെ നീക്കാവുന്നതാണ്.

$$\left(\frac{h}{a}\right)^2 - \left(\frac{k}{b}\right)^2 = \sec^2\theta - \tan^2\theta$$

$$\left(\frac{h}{a}\right)^2 - \left(\frac{k}{b}\right)^2 = 1\ . \qquad \Rightarrow \frac{h^2}{a^2} - \frac{k^2}{b^2} = 1$$

$P(h,k)$ ബിന്ദുക്കളായുള്ള ബിന്ദുപഥം $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

https://www.geogebra.org/geometry

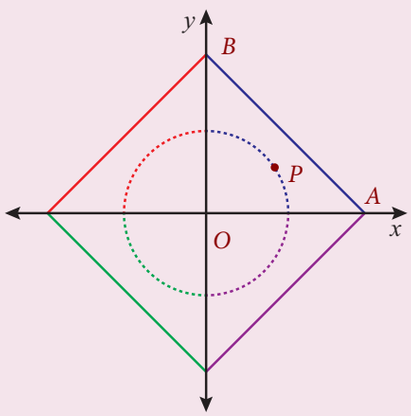
കുറിപ്പ് : പരാമീറ്ററുകൾ ത്രികോണമിതി രൂപത്തിൽ ആണെങ്കിൽ അവയെ നീക്കാൻ ബീജഗണിത സർവ്വസമീകരണങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കാം.

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1, \qquad \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1, \qquad \operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$$

ഉദാഹരണം 6.5 6 മാത്രനീളമുള്ള ഒരു നേരിയ കമ്പിയുടെ അഗ്രങ്ങൾ A യും B യും യഥാക്രമം x അക്ഷം, y-അക്ഷം എന്നിവയെ സ്പർശിക്കുംവിധം ചലിക്കുന്നു. O-മൂലബിന്ദുവുമായ ത്രികോണം ΔOAB യുടെ മധ്യമത്തിന്റെ ബിന്ദുപഥത്തിന്റെ സമീകരണം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$O,\ A,\ B$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യഥാക്രമം $(0,\ 0),\ (a,0),\ (0,\ b)$ എന്നിരിക്കട്ടെ. A യും B യും ചലിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളാണെന്ന് കരുതുക. $P\ (h,k)$ എന്ന ബിന്ദു ΔOAB യുടെ മധ്യമമെന്നിരിക്കട്ടെ



ചിത്രം 6.11

ΔOAB -യുടെ മധ്യമം $\left(\dfrac{0+a+0}{3}, \dfrac{0+0+b}{3}\right) = (h,k)$.

$$\frac{a}{3} = h \Rightarrow a = 3h,\ \frac{b}{3} = k \Rightarrow b = 3k$$

ΔOAB -യിൽ നിന്നും

$$OA^2 + OB^2 = AB^2$$

$$(3h)^2 + (3k)^2 = (6)^2 \quad \Rightarrow h^2 + k^2 = 4$$

$P(h,k)$ ബിന്ദുക്കളായ വൃത്തത്തിന്റെ ബിന്ദുപഥം, $x^2 + y^2 = 4$.

XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 292 14-02-2023 16:55:00

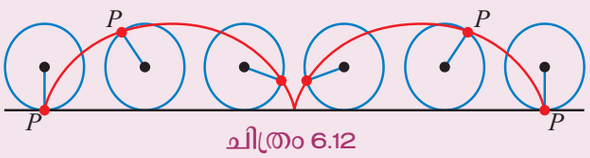
ഉദാഹരണം 6.6 ചലിക്കുന്ന ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ പരാമീറ്റർ θ യും അതിന്റെ അക്ഷങ്ങൾ $(a(\theta-\sin\theta),\ a(1-\cos\theta))$ യുമാണ്. എങ്കിൽ ആ ബിന്ദു ചലിക്കുന്ന ബിന്ദു പഥത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$P(h,k)$ എന്നത് ബിന്ദു പഥത്തിൻമേൽ ഉള്ള ഒരു ബിന്ദു എന്നിരിക്കട്ടെ. തന്നിട്ടുള്ള നിബന്ധന അനുസരിച്ച്.

$$h = a(\theta-\sin\theta) \qquad (6.1)$$

$$k = a(1-\cos\theta) \qquad (6.2)$$



ചിത്രം 6.12

മുകളിൽ ഉള്ള സമീകരണം (6.2) ൽ നിന്നും θ, $\sin\theta$ എന്നിവയുടെ മൂല്യം കാണാവുന്നതാണ്.

$$k = a(1-\cos\theta)$$

$$\cos\theta = \frac{a-k}{a} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{a-k}{a}\right) \text{ കൂടാതെ } \sin\theta = \frac{\sqrt{2ak-k^2}}{a}$$

θ, $\sin\theta$ മൂല്യങ്ങളെ (6.1) ൽ പ്രതിയിട്ടാൽ നമുക്ക്,

$$h = a\cos^{-1}\left(\frac{a-k}{a}\right) - \sqrt{2ak-k^2}$$

അതുകൊണ്ട്, (h,k) എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ ബിന്ദുപഥം,

$$x = a\cos^{-1}\left(\frac{a-y}{a}\right) - \sqrt{2ay-y^2} \qquad (6.3)$$

https://www.geogebra.org/b/bd2ADu2I#material/zCKMj8kE

കുറിപ്പ് : മുകളിൽ പറഞ്ഞ സമീകരണത്തെ പരാമട്രിക് രൂപത്തിൽ നിന്നും കാർട്ടീഷ്യൻ രൂപത്തിലേക്ക് മാറ്റിയിട്ടുണ്ട്. എന്നാൽ ചില സമയങ്ങളിൽ കാർട്ടീഷ്യൻ രൂപത്തെക്കാൾ പരാമട്രിക് രൂപത്തെ കൈകാര്യം ചെയ്യുന്നത് വളരെ എളുപ്പം ആയിരിക്കും.

അഭ്യാസം 6.1

1. α -യുടെ എല്ലാ മൂല്യങ്ങൾക്കും. P എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ ബിന്ദുപഥത്തിന്റെ സമീകരണം കാണുക?.

   (i) $(9\cos\alpha,\ 9\sin\alpha)$ (ii) $(9\cos\alpha,\ 6\sin\alpha)$

2. (i) x-അക്ഷത്തിൽ നിന്നും 2 മാത്രയും (ii) y -അക്ഷത്തിൽ നിന്നും 3 മാത്രയും നിരന്തരമായ ദൂരത്തേക്ക് നീങ്ങുന്ന P -എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ ബിന്ദുപഥത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക.

3. θ പരാമീറ്റർ ആണെങ്കിൽ, $x = a\cos^3\theta, y = a\sin^3\theta$ എന്നീ കോർഡിനേറ്റുകൾ ഉള്ള P -എന്ന ചലിക്കുന്ന ബിന്ദുവവിന്റെ ബിന്ദുപഥത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക.

4. $P(-3,1)$, $Q(2,b)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ $x^2-5x+ky=0$ എന്ന ബിന്ദുപഥത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു എങ്കിൽ k, b എന്നിവയുടെ മൂല്യങ്ങൾ കാണുക.

5. 8 മാത്ര നീളമുള്ള ഒരു കമ്പിയുടെ അഗ്രങ്ങൾ A യും B യും എല്ലായ്പ്പോഴും x, y-അക്ഷങ്ങളെ സ്പർശിക്കുന്ന രീതിയിൽ ചലിച്ചുകൊണ്ടിരിക്കുന്നു. എങ്കിൽ രേഖാഖണ്ഡം AB -യുടെ മധ്യ ബിന്ദുവിന്റെ ബിന്ദുപഥത്തിന്റെ സമീകരണം കാണുക.

XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 293 14-02-2023 16:55:02

6. $(3, 5), (1,-1)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾക്കിടയിൽ ചലിക്കുന്ന ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ ഇടയ്ക്കുള്ള ദൂരത്തിന്റെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുക 20-ന് തുല്യം എങ്കിൽ ആ ബിന്ദുവിന്റെ ബിന്ദുപഥത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക.

7. $A(1,-6)$, $B(4,-2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന AB എന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തിന്റെ P-ഒരു സമകോണത്തെ രൂപീകരിക്കുന്നു. എങ്കിൽ ബിന്ദു P-യുടെ നിയമപഥത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക.

8. മൂലബിന്ദു O എന്നിരിക്കട്ടെ. $y^2 = 4x$ എന്ന പരാബോളയിൻമേൽ R എന്ന ബിന്ദു സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു എങ്കിൽ രേഖാഖണ്ഡം OR -ന്റെ മധ്യബിന്ദുവിന്റെ ബിന്ദുപഥത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക.

9. P-എന്ന ചലിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ അക്ഷദൂരങ്ങൾ $\left(\frac{a}{2}(\text{cosec}\theta + \sin\theta), \frac{b}{2}(\text{cosec}\theta - \sin\theta)\right)$ എങ്കിൽ, P-യുടെ ബിന്ദുപഥത്തിന്റെ സമീകരണം $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ എന്ന് തെളിയിക്കുക? ഇതിൽ θ എന്നത് ഒരു ചരമാകുന്നു.

10. $P(2,-7)$ എന്നത് തന്നിട്ടുള്ള ബിന്ദുവും Q എന്ന ബിന്ദു $2x^2 + 9y^2 = 18$ എന്നതിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു. എങ്കിൽ PQ- എന്ന രേഖയുടെ മധ്യബിന്ദുവിന്റെ ബിന്ദുപഥത്തിന്റെ സമീകരണം കാണുക

11. R, Q എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യഥാക്രമം x, y -എന്നീ അക്ഷങ്ങളിൽ മേൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു, P എന്ന ചലിക്കുന്ന ബിന്ദു RQ-ൻമേലാണുള്ളത്. കൂടാതെ $RP = b$, $PQ = a$ യും RQ-യും എന്ന് ഇരിക്കും വിധം P-യുടെ ബിന്ദുപഥത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക.

12. $P(6\ ,\ 2)$, $Q(-2\ ,\ 1)$ കൂടാതെ R എന്നിവ ΔPQR-ന്റെ ശീർഷങ്ങളാണ്. കൂടാതെ R എന്ന ബിന്ദു $y = x^2 - 3x + 4$ എന്ന രേഖയിൻമേലുള്ള ബിന്ദുപഥമാകുന്നു. എങ്കിൽ, ΔPQR -ന്റെ കേന്ദ്ര കത്തിന്റെ ബിന്ദുപഥത്തിന്റെ സമീകരണം കണ്ടെത്തുക.

13. $x^2 + y^2 + 4x - 3y + 7 = 0$ എന്ന ബിന്ദുപഥത്തിനുമേൽ Q എന്ന ബിന്ദു സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു. P എന്ന ബിന്ദുരേഖാഖണ്ഡത്തെ OQ-വിനെ ബാഹ്യമായി 3:4എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ വിഭജിക്കുന്നു എങ്കിൽ P-എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ ബിന്ദുപഥത്തിന്റെ സമീകരണം കാണുക? ഇവിടെ O എന്നത് മൂല്യബിന്ദുവാകുന്നു.

14. തന്നിട്ടുള്ള ബിന്ദു $P(5,1)$ എന്ന ബിന്ദുവിന് 5 മാത്രയും x-അക്ഷത്തിൽ നിന്നും 3 മാത്രയും അകലം ഉള്ള ഒരു ബിന്ദുപഥത്തിനുമുകളിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്ന ബിന്ദുക്കൾ എത്രയാണ്. കൂടാതെ ആ ബിന്ദുക്കളെയും കാണുക.

15. $(-4,\ 0)$, $(4,0)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ നിന്നും ചലിക്കുന്ന ഒരു ബിന്ദുവിനും ഇടയിലുള്ള അകലങ്ങളുടെ തുക 10 മാത്രകൾ എങ്കിൽ ചലിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ ബിന്ദുപഥത്തിന്റെ സമീക രണം കാണുക

6.3 നേർരേഖകൾ

രേഖീയ സമീകരണങ്ങളെ ബീജഗണിത നിയമങ്ങളുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ പലരൂപങ്ങളിൽ മാറ്റിയെഴുതാം. ഇതുപോലെ രേഖീയ സമീകരണങ്ങളെ അധികമായും നേർരേഖകളുടെ സമവാക്യം എന്ന് പറയുന്നു. നേർരേഖയുടെ സമീകരണത്തിന്റെ പൊതുരൂപം

$$ax + by + c = 0 \qquad (6.4)$$

എന്ന് എഴുതാം. ഇവയിൽ a, b യിൽ കുറഞ്ഞത് ഒന്ന് എങ്കിലും പൂജ്യമല്ലാത്തതായിരിക്കും. ഒരു സമവാക്യത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണം ഒരു തലത്തിലെ നേർരേഖയിൽ സ്ഥിതിചെയ്താൽ ആ സമവാക്യത്തെ രേഖീയ സമവാക്യം എന്ന് പറയുന്നു.

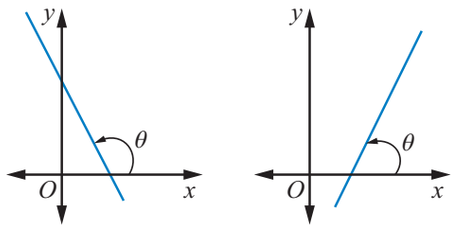
XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 294 14-02-2023 16:55:03

ഒരു നേർരേഖയുടെ സമീകരണത്തെ ബീജഗണിതത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ പലരൂപങ്ങളിൽ നിയമങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് മാറ്റി എഴുതാൻ സാധിക്കും. ഈ രൂപങ്ങളുടെ പേരുകൾ അവ എഴുതുന്നതി നാവശ്യമായ നിയമങ്ങളെ അടിസ്ഥാനമാക്കി എഴുതാവുന്നതാണ്. ഇതിൽ **ബിന്ദുക്കൾ, ചായ്‌വ്** കൂടാതെ **അന്തഃഖണ്ഡങ്ങൾ** എന്നിവ പ്രധാനപ്പെട്ടവയാണ്.

6.3.1 ഒരു നേർരേഖയുടെ ചായ്‌വ് കോണിനും ചായ്‌വിനും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം

നിർവചനം 6.3

ഒരു നേർരേഖയുടെ **ചായ്‌വ്** എന്നത് ആ രേഖ ഘടികാരത്തിന്റെ എതിർദിശയിൽ x-അക്ഷവുമായി ഏർപ്പെടുത്തുന്ന കോണം ആകുന്നു. ഇതിനെ θ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം.



ചിത്രം 6.13

നിർവചനം 6.4

ഒരു നേർരേഖയുടെ **ചായ്‌വ്** എന്നത് ദിശയെയും ചരിവിനെയും കുറിക്കുന്ന ഒരു സംഖ്യ.

x, y -എന്നീ അക്ഷങ്ങളുള്ള ഒരു തലത്തിൽ നേർരേഖയുടെ ചായ്‌വിനെ `m' എന്ന അക്ഷരം കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ചായ്‌വിനെ കാണാവുന്നതാണ്.

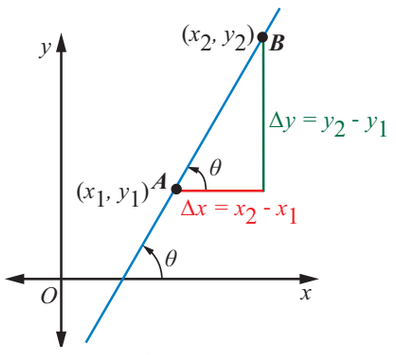
(i) ഒരു രേഖ ഘടികാരത്തിന്റെ എതിർദിശയിൽ x- അക്ഷവുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോൺ θ എങ്കിൽ നേർരേഖയുടെ **ചായ്‌വ്** $(slope)$

$$m = \tan\theta$$

ഇവിടെ θ -യുടെ വില $\frac{\pi}{2}$ എങ്കിൽ $m = \tan\frac{\pi}{2}$ എന്നത് നിർണ്ണയിക്കാത്തതാണ്.

(ii) (x_1, y_1), (x_2, y_2) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഒരു നേർരേഖയുടെ മേലാണെങ്കിൽ ആ രേഖയുടെ ചായ്‌വ് y -അക്ഷത്തിന്റെ വ്യതിയാനത്തെ x -അക്ഷത്തിന്റെ വ്യതിയാനത്താൽ വിഭജിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന സംഖ്യയാണ്. ഇവിടെ $x_2 \neq x_1$ ആകുന്നു. ഇതിനെ താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള രീതിയിൽ വിവരിക്കാവുന്നതാണ്.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{ലംബമാറ്റം}}{\text{തിരശ്ചീനമാറ്റം}}$$



ചിത്രം 6.14

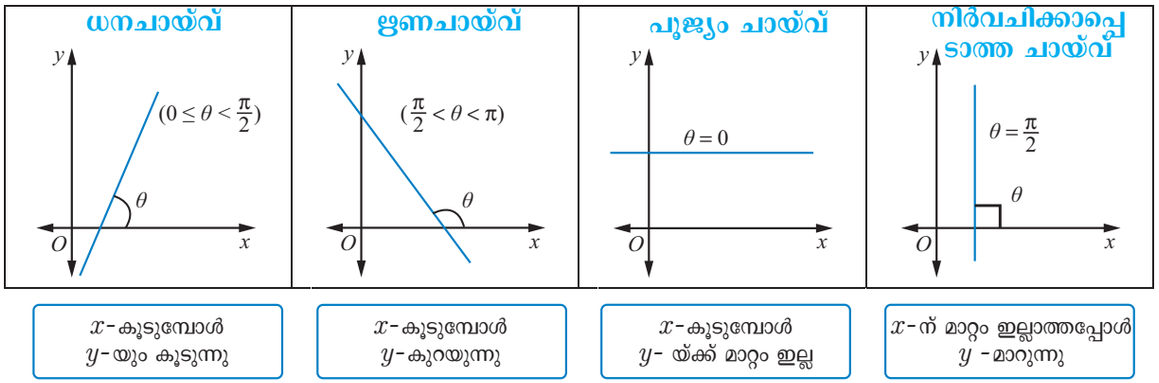
(iii) $ax + by + c = 0$ എന്നതാണ് നേർരേഖയുടെ പൊതുരൂപം എങ്കിൽ രേഖയുടെ ചായ്‌വ്

$$m = -\frac{a}{b},\ b \neq 0$$

ഇവിടെ $b = 0$ എങ്കിൽ, m എന്നത് നിർവചിച്ചിട്ടില്ല.

XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 295 14-02-2023 16:55:04

ഒരു നേർരേഖയുടെ ധനചായ്‌വ്, ഋണചായ്‌വ്, പൂജ്യം കൂടാതെ നിർവചിക്കപ്പെടാത്ത ചായ്‌വ്



ചിത്രം 6.15

നിർവചനം 6.5

മൂന്നോ അതിൽ കൂടുതലോ ബിന്ദുക്കൾ ഒരേ രേഖയിൽ സ്ഥിതിചെയ്താൽ ആ ബിന്ദുക്കളെ **സമരേഖീയ ബിന്ദുക്കൾ** എന്ന് പറയാം.

A, B, C എന്നീ മൂന്നു ബിന്ദുക്കളും ഒരേ രേഖയിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു എന്നിരിക്കട്ടെ. AB -യുടെ ചരിവ് BC (**അല്ലെങ്കിൽ** AC) -യുടെ ചരിവിന് തുല്യം എങ്കിൽ, A, B, C എന്നീ മൂന്നു ബിന്ദുക്കളും ഒരേ നേർരേഖയിൻമേലാണുള്ളത് എന്ന് പറയാം..

6.3.2 നേർരേഖയുടെ അന്തഃഖണ്ഡങ്ങൾ

നിർവചനം 6.6

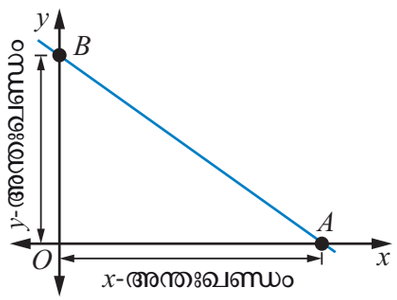
ഒരു **നേർരേഖയുടെ അന്തഃഖണ്ഡങ്ങൾ** എന്നത് x -അക്ഷത്തെയും y -അക്ഷത്തെയും ഛേദിക്കുന്ന ബിന്ദുവാകുന്നു.

y - യുടെ മൂല്യം പൂജ്യം ആയാൽ കിട്ടുന്ന ബിന്ദു x -അന്തഃഖണ്ഡം ആകുന്നു. അതുപോലെ, x-ന്റെ മൂല്യം പൂജ്യം ആയാൽ കിട്ടുന്ന ബിന്ദു y -അന്തഃഖണ്ഡമാകുന്നു. തിരശ്ചീനവും ലംബവുമായ അക്ഷങ്ങളെ ഛേദിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളെ ആ രേഖയുടെ ഛേദബിന്ദുക്കൾ എന്നുപറയുന്നു. ഇതിൽ നിന്നും നാം മനസ്സിലാക്കേണ്ടത്,

(i) x -അക്ഷത്തിന്റെ സമീകരണം $y = 0$ എന്നും

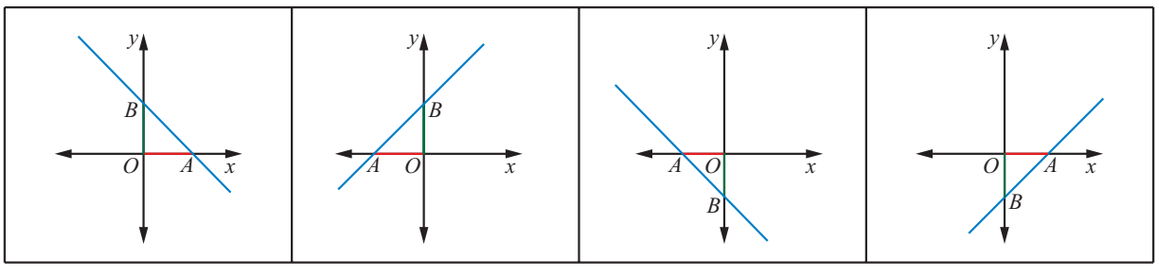
(ii) y -അക്ഷത്തിന്റെ സമീകരണം $x = 0$ എന്നും മനസ്സിലാക്കാം.

ചിത്രത്തിൽ നിന്നും OA എന്നത് x -അന്തഃഖണ്ഡവും OB എന്നത് y -അന്തഃഖണ്ഡവും ആകുന്നു.



ചിത്രം 6.16

x, y -അന്തഃഖണ്ഡങ്ങളുടെ പലതരങ്ങൾ



ചിത്രം 6.17

XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 296 14-02-2023 16:55:05

ബിന്ദുക്കൾ, ചായ്വുകൾ, അന്തഃഖണ്ഡങ്ങൾ എന്നിവയെപ്പറ്റിയുള്ള നിർവചനം നാം വളരെ വ്യക്തമായി മനസ്സിലാക്കി. ഈ നിർവചനം ഉപയോഗിച്ച് പലതരത്തിലുള്ള നേർരേഖകളുടെ സമവാക്യത്തെ ഓർമ്മിക്കാം.

6.3.3 നേർരേഖയുടെ വിവിധതരം

ഒരു നേർരേഖയുടെ സമവാക്യം അദ്വിതീയമായി നിർണ്ണയിക്കാൻ രണ്ടു വ്യവസ്ഥകൾ ആവശ്യമാണ്. **ചായ്വ്, അന്തഃഖണ്ഡങ്ങൾ** കൂടാതെ **ബിന്ദുക്കൾ** ഇവയിൽ ഏതെങ്കിലും രണ്ടെണ്ണം ഉപയോഗിച്ച് പലതരത്തിലുള്ള നേർരേഖാ സമവാക്യം രൂപീകരിക്കുവാൻ സാധിക്കും.

(i) **ചായ്വ്, അന്തഃഖണ്ഡങ്ങൾ ഉള്ള രൂപം**

(ii) **ബിന്ദുക്കൾ, ചായ്വു രൂപം**

(iii) **രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ രൂപം**

(iv) **അന്തഃഖണ്ഡരൂപം**

കൂടാതെ പ്രത്യേകതരം രണ്ടുസമവാക്യങ്ങൾ.

(v) **സാധാരണ രൂപം**

(vi) **പരാമട്രിക് രൂപം,**

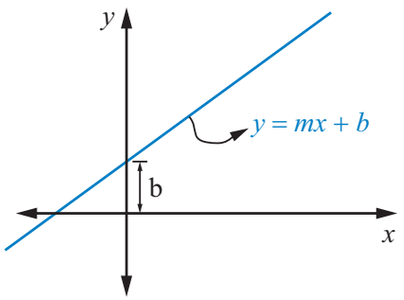
(vii) **പൊതുരൂപം**

രണ്ടു വ്യവസ്ഥകൾ ഉപയോഗിച്ച് ഈ നേർരേഖാ രൂപങ്ങളെ കണ്ടുപിടിയ്ക്കാവുന്നതാണ്.

(i) ചായ്വ് രൂപം അന്തഃഖണ്ഡരൂപം

ആനുപാതിക രേഖീയ ഫലനം $y = mx$ എന്ന രീതിയിലാണ്, ഇവിടെ m എന്നത് രേഖയുടെ ചായ്വ് ആകുന്നു. ആനുപാതികമല്ലാത്ത രേഖീയ ഫലങ്ങളെ

$$y = mx + b,\ b \neq 0 \qquad (6.5)$$



ചിത്രം 6.18

എന്ന രൂപത്തിൽ എഴുതാം. ഇത്തരം രൂപങ്ങളുള്ള രേഖീയ സമീകരണം എന്നത് നേർരേഖയുടെ ചായ്വ് - അന്തഃഖണ്ഡ രൂപമാകുന്നു. ഇവിടെ m ചായ്വും y അന്തഃഖണ്ഡം b യും ആകുന്നു.

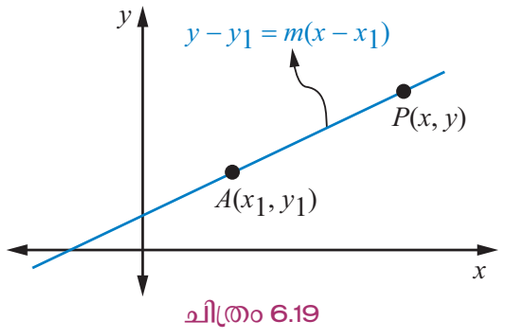
കുറിപ്പ് : (i) $b = 0$ യും $m \neq 0$ യും ആയിരിക്കുമ്പോൾ നേർരേഖമൂലബിന്ദുവഴി ചെയ്യുന്നു. ആ രേഖയുടെ സമീകരണം $y = mx$ ആകുന്നു.

(ii) $b = 0$ യും $m = 0$ യും ആയിരിക്കുമ്പോൾ നേർരേഖകൾ x -അക്ഷത്തിൻമേലായിരിക്കും. അതിന്റെ സമവാക്യം $y = 0$ ആകുന്നു.

(iii) $b \neq 0$, $m = 0$ ആയിരിക്കുമ്പോൾ നേർരേഖകൾ x -അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായിരിക്കും. സമീകരണം $y = b$ ആകുന്നു.

(ii) ബിന്ദുരൂപവും ചായ്വുരൂപവും

ചായ്വ് m ഉം $A(x_1, y_1)$ എന്നത് നേർരേഖയിൻമേലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവുമാണെന്നിരിക്കട്ടെ. A എന്ന ബിന്ദുവല്ലാതെ വേറൊരു ബിന്ദു $P(x,y)$ എങ്കിൽ, $A(x_1, y_1)$, $P(x,y)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന നേർരേഖയുടെ ചായ്വ്



ചിത്രം 6.19

XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 297 14-02-2023 16:55:06

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

$$\Rightarrow \qquad y - y_1 = m(x - x_1) \qquad (6.6)$$

ഈ രൂപത്തെ ബിന്ദു-ചായ്‌വ് രൂപം എന്ന് പറയാം.

കുറിപ്പ് : y -അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായ രേഖയുടെ ചായ്‌വ് (m) നിർവചിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ലാത്തതിനാൽ $A(x_1, y_1)$ എന്ന ബിന്ദു വഴിയും y -അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായ നേർരേഖയുടെ സമീകരണ ബിന്ദു - ചായ്‌വ് രൂപത്തിൽ നൽകുവാൻ സാധ്യമല്ല. ഈ നേർരേഖയിൽ എല്ലാ ബിന്ദുക്കളുടെയും x അക്ഷദൂരം, x_1 എന്നതുകൊണ്ട് ആ രേഖയുടെ സമീകരണം $x = x_1$ ആകുന്നു.

(iii) രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തന്നാലുള്ള രൂപം

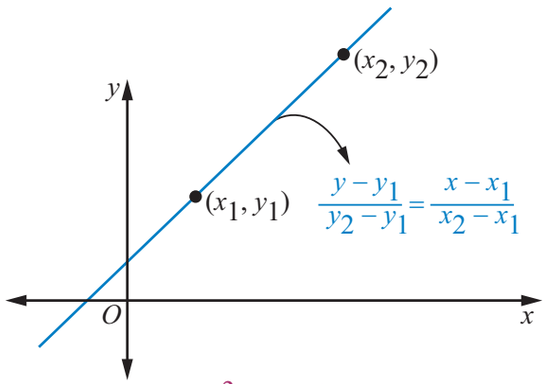
(x_1, y_1), (x_2, y_2) എന്നീ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളെയും യോചിപ്പിക്കുന്ന നേർരേഖയുടെ ചായ്‌വ്

$$m = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} \text{ ആകുന്നു.}$$

ബിന്ദു - ചായ്‌വ് രൂപം ഉപയോഗിച്ച്

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

എന്ന് എഴുതാം. ഇവിടെ $x_2 \neq x_1$ ആയതിനാൽ മുകളിലുള്ള സമീകരണത്തെ



ചിത്രം 6.20

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \qquad (6.7)$$

എന്ന് എഴുതാം. ഇത് രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തന്നിരുന്നാൽ ഉള്ള നേർരേഖയുടെ സമീകരണമാണ്. രണ്ടു ബിന്ദുക്കളുള്ള സമീകരണത്തെ താഴെ തന്നിട്ടുള്ള മാട്രിക്സ് രീതിയിൽ എഴുതാം.

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0$$

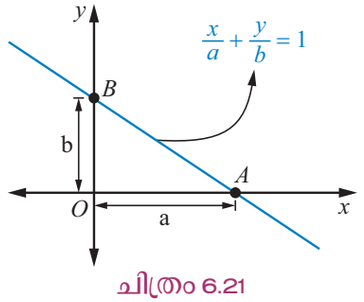
(iv) അന്തഃഖണ്ഡ രൂപം

ഒരു രേഖയുടെ x, y -അന്തഃഖണ്ഡങ്ങൾ അറിയാമെങ്കിൽ സമീകരണത്തെ നമുക്ക് കാണാൻ സാധിക്കും. അതായത് x -അന്തഃഖണ്ഡം $OA = a$ യും y -അന്തഃഖണ്ഡം $OB = b$ യും ആണ്. ഇവിടെ, a, b എന്നിവ പൂജ്യമല്ലാത്ത മൂല്യങ്ങളാണ്. എങ്കിൽ $A(a, 0)$, $B(0, b)$ എന്നീ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ വഴി ചെല്ലുന്ന നേർരേഖയുടെ സമീകരണം,

$$\frac{y - 0}{b - 0} = \frac{x - a}{0 - a}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (6.8)$$

മുകളിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള നേർരേഖയുടെ സമീകരണം അന്തഃഖണ്ഡ രൂപമാകുന്നു.



ചിത്രം 6.21

ഒരു നേർരേഖമൂലബിന്ദുവഴിയായോ, സമാന്തര രേഖയായോ, ലംബരേഖയായോ അല്ലെങ്കിൽ a, b ഏതെങ്കിലും ഒന്ന് പൂജ്യമായോ ഇരുന്നാൽ അന്തഃഖണ്ഡ രൂപത്തിൽ എഴുതുവാൻ സാധ്യമല്ല. ഗ്രാഫ് എളുപ്പത്തിൽ വരയ്ക്കുവാൻ ഈ രൂപം വളരെ പ്രയോജനപ്പെടുന്നു.

XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 298 14-02-2023 16:55:08

(v) സാധാരണ രൂപം

ഒരു നേർരേഖ x അക്ഷം y അക്ഷം എന്നിവയെ ഛേദിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ A, B എന്നിരിക്കട്ടെ. p എന്ന ബിന്ദു മൂലബിന്ദുവായ O യിൽ നിന്നും AB എന്ന രേഖയിൽ വരഞ്ഞ OP എന്ന ലംബ രേഖയുടെ നീളം ആകുന്നു. OP എന്ന രേഖ ധനദിശയിൽ അക്ഷങ്ങളുമായി ഏർപ്പെടുത്തുന്ന കോണം α എന്നിരിക്കട്ടെ

സമകോണത്രികോണം ΔOPA -യിൽ, $\frac{OP}{OA} = \cos\alpha$ യും

സമകോണത്രികോണം ΔOPB -യിൽ, $\frac{OP}{OB} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$

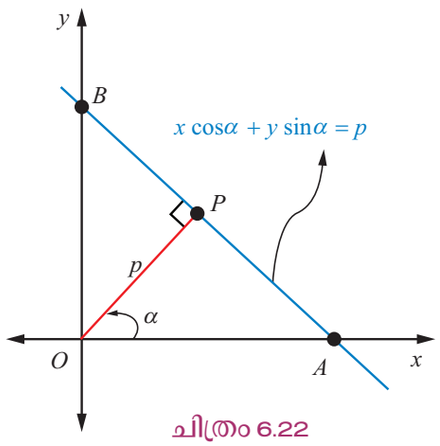
$\Rightarrow \quad \frac{1}{OA} = \frac{\cos\alpha}{p}$ യും $\frac{1}{OB} = \frac{\sin\alpha}{p}$ യുമാണ്.

മുകളിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള മൂല്യങ്ങളെ അന്തഃഖണ്ഡ രൂപത്തിൽ എഴുതിയാൽ

$$\frac{x}{OA} + \frac{y}{OB} = 1$$

$$\frac{x\cos\alpha}{p} + \frac{y\sin\alpha}{p} = 1$$

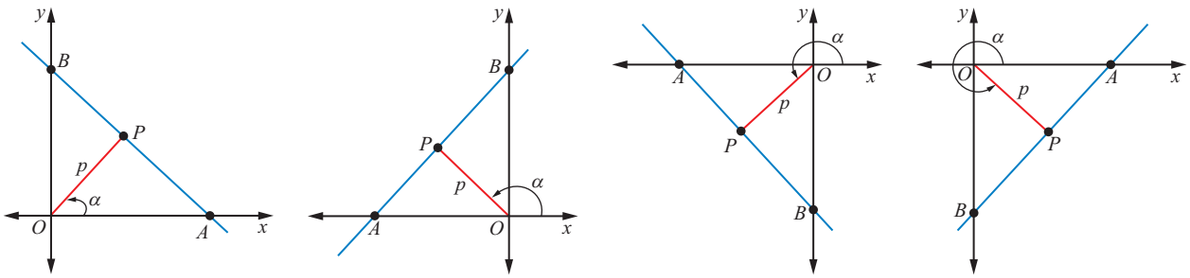
$$\Rightarrow \quad x\cos\alpha + y\sin\alpha = p \qquad (6.9)$$



ചിത്രം 6.22

ഇതിനെ നേർരേഖയുടെ സാധാരണ രൂപം എന്നു പറയുന്നു.

p എന്ന ബിന്ദു നേർരേഖയുടെ എല്ലാ നിലകളിലും ധനസംഖ്യയായതിനാൽ α എന്ന കോണത്തെ x -അക്ഷത്തിന്റെ ധനദിശയിൽ അളക്കുന്നു. ഈ സമവാക്യം താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ചിത്രങ്ങളിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.



ചിത്രം 6.23

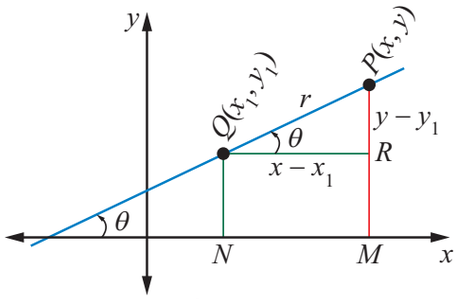
(vi) പരാമട്രിക് രൂപം

നേർരേഖയുടെ പരാമട്രിക് രൂപത്തിന്റെ സമവാക്യം

$x = ar + x_1$, $y = br + y_1$. ഇവിടെ a, b എന്നിവ സ്ഥിരാങ്കങ്ങളും r എന്നത് പരാമീറ്ററുമാകുന്നു.

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = r \ , \quad (a \neq 0,\ b \neq 0)$$

ഒരുനേർരേഖ $Q(x_1, y_1)$ എന്ന ബിന്ദുവഴിയേ കടന്നു പോകുന്നതായി കരുതുക. x -അക്ഷം ഏർപ്പെടുത്തുന്നു കോണം θ എന്നിരിക്കട്ടെ.



ചിത്രം 6.24

ബിന്ദു Q -യിൽ നിന്നും r ദൂരത്തിൽ അതേ രേഖയിൻമേലുള്ള ബിന്ദു $P(x, y)$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 299 14-02-2023 16:55:09

P, Q എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ നിന്നും x -അക്ഷത്തിലേക്ക് വരഞ്ഞിട്ടുള്ള ലംബരേഖകൾ യഥാക്രമം QN ഉം PM ഉം ആകുന്നു. അതായത് $QR \perp PM$.

സമകോണ ത്രികോണം ΔQRP -യിൽ,

$$x - x_1 = QR = PQ\cos\theta = r\cos\theta$$

ആയതിനാൽ, $$\frac{x - x_1}{\cos\theta} = r \qquad (6.10)$$

അതുപോലെ, $y - y_1 = RP = QP\sin\theta = r\sin\theta$

$$\Rightarrow \qquad \frac{y - y_1}{\sin\theta} = r \qquad (6.11)$$

സമീകരണം (6.10), (6.11) -ഇവയിൽ നിന്നും

$$\frac{x - x_1}{\cos\theta} = \frac{y - y_1}{\sin\theta} = r \qquad (6.12)$$

ഇവിടെ r എന്നത് ഒരു രേഖയിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന (x_1, y_1), (x, y) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾക്കിടയിലുള്ള ദൂരം ആകുന്നു. മുകളിലുള്ള രൂപത്തെ രേഖയുടെ സർവ്വസമതാരൂപം അല്ലെങ്കിൽ പരാമട്രിക് രൂപം എന്നു പറയുന്നു.

കുറിപ്പ് : ഒരു നേർരേഖയിന്മേലുള്ള ഏതൊരു ബിന്ദുവിനെയും $(x_1 + r\cos\theta\,,\ y_1 + r\sin\theta)$ എന്ന് എഴുതാം. ഇതിന്റെ അക്ഷ ദൂരങ്ങൾ r -ന്റെ മൂല്യത്തിനനുസരിച്ചിരിക്കുന്നതുകൊണ്ട് $x = x_1 + r\cos\theta$, $y = y_1 + r\sin\theta$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പരാമട്രിക് സമീകരണം എന്നു പറയുന്നു. r -ന് ധനസംഖ്യാ ബിന്ദുക്കളും, ഋണസംഖ്യാബിന്ദുക്കളും നൽകിയാൽ അവ രേഖയിൻമേൽ വെവ്വേറ് വശങ്ങളിൽ സ്ഥിതിചെയ്യും.

(vii) പൊതുരൂപത്തിന്റെ സമീകരണം

a, b, c എന്നിവ പൂജ്യമല്ലാത്ത സംഖ്യകളാണെങ്കിൽ നേർരേഖയുടെ പൊതുരൂപത്തിന്റെ സമീകരണം

$ax + by + c = 0$ ആകുന്നു.

തന്നിട്ടുള്ള നിബന്ധനയുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ നേർരേഖയുടെ സമീകരണം

ക്രമ സംഖ്യ	തന്നിട്ടുള്ള നിബന്ധന	നേർരേഖയുടെ സമീകരണം
(i)	ചായ്‌വ് (m) ഉം y അന്തഃഖണ്ഡം (b) യും	$y = mx + b$
(ii)	ചായ്‌വ് (m) ഉം ഒരു ബിന്ദു (x_1, y_1)	$y - y_1 = m(x - x_1)$
(iii)	(x_1, y_1), (x_2, y_2) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ തന്നാൽ	$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$
(iv)	x -അന്തഃഖണ്ഡം (a) യും y - അന്തഃഖണ്ഡം (b) യും കൊടുക്കപ്പെട്ടാൽ	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$
(v)	നീളം (p) യും കോണം (α) യും ആയാൽ	$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$
(vi)	പരാമട്രിക് രൂപം : പരാമീറ്റർ (r) ആയാൽ	$\frac{x - x_1}{\cos\theta} = \frac{y - y_1}{\sin\theta} = r$
(vii)	സമീകരണത്തിന്റെ പൊതുരൂപം	$ax + by + c = 0$

XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 300 14-02-2023 16:55:12

നമുക്ക് രണ്ടു ചരങ്ങളുള്ള അളവുകൾ ഉണ്ടെങ്കിൽ ഓരോന്നിനെയും ചരങ്ങൾ എന്ന് പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. ഒരു ചരത്തിനനുസരിച്ച് മറ്റൊരു ചരങ്ങളുമായി ബന്ധപ്പെട്ട മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് സ്ഥിരമായിരിക്കും. അവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം രേഖീയമാണ്.

രേഖീയ സമവാക്യത്തിൽ ഒന്നിനെ സ്വതന്ത്ര ചരമായും മറ്റൊന്നിനെ ആശ്രിത ചരമായും ഇരിക്കുന്നതാണ്. ഇതിൽ സ്വതന്ത്രചരത്തെ x-അക്ഷത്തിലും, ആശ്രിത ചരത്തെ y-അക്ഷത്തിലും രേഖപ്പെടുത്തുന്നതാണ്. അതായത് x-ന്റെ മൂല്യം സ്വതന്ത്രമായും y - യുടെ മൂല്യം x -ന്റെ മൂല്യത്തെ ആശ്രയിച്ചിരിക്കും.

രണ്ടു അക്ഷങ്ങളുടെയും തോത് ഒരുപോലെയിരിക്കണമെന്നില്ല. യഥാർത്ഥ ജീവിത കണക്കുകളിൽ x, y എന്നീ ചരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് കുറിക്കാവുന്നതാണ്.

ഉദാഹരണമായി, x എന്നത് വിറ്റ ഫോണുകളുടെ എണ്ണവും y എന്നത് വിറ്റപ്പോൾ കിട്ടിയ ആകെ തുകയും എന്ന് കരുതാം. ഓരോ തോതിനും വെവ്വേറെ അളവുകൾ എഴുതാവുന്നതാണ്. രണ്ടളവുകളും പൂജ്യമാകുമ്പോൾ മൂലബിന്ദുവിൽ ഛേദിക്കുന്നു

നേർരേഖകൾ ഉപയോഗിച്ച് നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുമ്പോൾ തന്നിട്ടുള്ള നിബന്ധനയനുസരിച്ച് അവയ്ക്കനുയോജ്യമായ രൂപത്തെ മുകളിൽ തന്നിട്ടുള്ള പട്ടികയിൽ നിന്നും സമവാക്യങ്ങളെ തെരഞ്ഞെടുക്കേണ്ടതാണ്.

ഉദാഹരണം 6.7 $(5, 7), (7, 5)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ വഴി ചെല്ലുന്ന നേർരേഖയുടെ ചായ്‌വ് കാണുക? കൂടാതെ x-അക്ഷവുമായി ഏർപ്പെടുത്തുന്ന ചായ്‌വു കോണവും കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

(x_1, y_1), (x_2, y_2) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യഥാക്രമം $(5, 7)$ ഉം $(7, 5)$ ഉം ആകുന്നു.

θ എന്നത് x -അക്ഷവുമായി ഏർപ്പെടുത്തുന്ന കോണം എന്നിരിക്കട്ടെ.

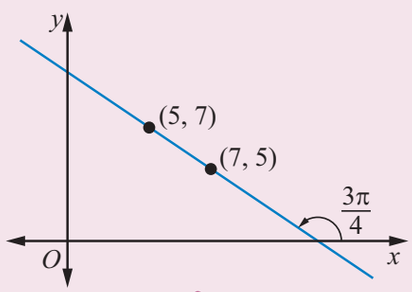
രേഖയുടെ ചായ്‌വ് $\quad m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{5-7}{7-5} = -1$

കൂടാതെ, $\quad m = \tan\theta$

$$\tan\theta = -1 \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4} \text{ അല്ലെങ്കിൽ } 135^\circ$$

ചായ്‌വ്, ചായ്‌വിന്റെ കോണം യഥാക്രമം,

$$m = -1 \text{ കൂടാതെ } \theta = \frac{3\pi}{4}$$



ചിത്രം 6.25

ഉദാഹരണം 6.8 ഒരു നേർരേഖ x-അക്ഷവുമായി 150° കോണത്തെ ഏർപ്പെടുത്തുന്നു. y -അക്ഷം ന്യൂനദിശയിൽ (എതിർ ദിശയിൽ) 5 മാത്ര അകലെ ഛേദിക്കുന്നു. എങ്കിൽ നേർരേഖയുടെ സമീകരണം കാണുക

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ള y -യുടെ ഋണ അന്തഃഖണ്ഡം $= 5$,

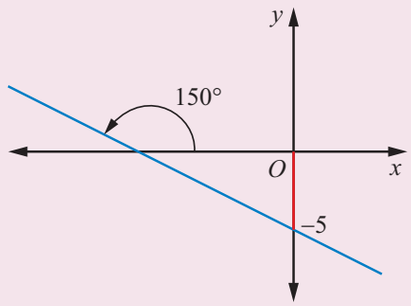
അതായത് $b = -5$

XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 301 14-02-2023 16:55:13

കോണം $\theta = 150^\circ$

ചായ്‌വ് $m = tan\ 150^\circ = tan\ (180\text{-}30)$

$= -tan\ 30 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$



ചിത്രം 6.26

നേർരേഖയുടെ ചായ്‌വും അന്തഃഖണ്ഡവും തന്നിരുന്നാൽ സമീകരണം:

$$y = mx + b$$

അതായത്, $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x - 5$

$$x + \sqrt{3}y + 5\sqrt{3} = 0$$

ഉദാഹരണം 6.9 $\left(0, -\frac{3}{2}\right), (1, -1)$ കൂടാതെ $\left(2, -\frac{1}{2}\right)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ സമരേഖീയമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

A, B, C എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യഥാക്രമം $\left(0, -\frac{3}{2}\right), (1, -1)$, $\left(2, -\frac{1}{2}\right)$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

രേഖയുടെ ചായ്‌വ് $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

AB -യുടെ ചായ്‌വ് $= \frac{-1 + \frac{3}{2}}{1 - 0} = \frac{1}{2}$

BC -യുടെ ചായ്‌വ് $= \frac{-\frac{1}{2} + 1}{2 - 1} = \frac{1}{2}$

AB -യുടെ ചായ്‌വും, BC -യുടെ ചായ്‌വും തുല്യം അതുകൊണ്ട് തന്നിട്ടുള്ള A, B, C ബിന്ദുക്കൾ സമരേഖീയങ്ങളാണ്. (ഒരേ നേർരേഖയിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു).

കുറിപ്പ് : ഒരു ചതുരത്തിന്റെ മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് മറ്റൊരു ചരത്തിന്റെ മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്കിന് സ്ഥിരാങ്കമായിരിക്കും. ഈ മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്കിനെ ചായ്‌വ് കണക്കാക്കുന്നു. (വേഗത എന്നത് നിരന്തരമായ വർദ്ധനവ് അല്ലെങ്കിൽ നിരന്തരമായ കുറവ് ...) കൂടാതെ നേർരേഖയുടെ സമീകരണം അക്ഷങ്ങളെ ആശ്രയിച്ചിരിക്കും. യഥാർത്ഥ സംഭവങ്ങളിൽ രേഖയുടെ സമീകരണം സമാധാനമായിരിക്കണമെന്നില്ല. എന്നാൽ അതിന്റെ പാതയും, ദൂരവും എപ്പോഴും തുല്യമായിരിക്കും.

ഉദാഹരണം 6.10 പാക് ജലസന്ധിയുടെ മുകളിൽ പണി ചെയ്തിട്ടുള്ള തീവണ്ടി ചെല്ലുന്ന പാമ്പൻ പാലത്തിന്റെ നീളം 2065 മീറ്റർ ആകുന്നു. ഈ പാലം ദ്വീപ് പട്ടണമായ രാമേശ്വരത്തെയും മണ്ഡപത്തെയും യോജിപ്പിക്കുന്നു. ഈ പാലം വഴിയെ തീവണ്ടി പോകുന്നതിന് ചില നിബന്ധനകൾ ഉണ്ട്. തീവണ്ടിയുടെ ഏകീകൃതവേഗത 12.5 മീ/സെക്കന്റ് എന്ന് തീരുമാനിച്ചിട്ടുണ്ട്. പാലത്തിന്റെ ആരംഭസ്ഥലത്ത് നിന്നും 560 മീറ്റർ നീളമുള്ള തീവണ്ടി ചലിക്കുവാൻ തുടങ്ങുന്നു എങ്കിൽ,

(i) തീവണ്ടിയുടെ ചലനത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക.

(ii) തീവണ്ടിയുടെ എഞ്ചിൻ എപ്പോഴാണ് രാമേശ്വരം ദ്വീപിൽ എത്തിച്ചേരുന്നത്?

(iii) തീവണ്ടിയുടെ അവസാനത്തെ ഭാഗം എപ്പോഴാണ് പാലത്തിന്റെ പ്രവേശനസ്ഥലം കടക്കുന്നത്?

(iv) പാമ്പൻ പാലത്തെ തീവണ്ടി കടന്നു ചെല്ലുവാൻ എടുക്കുന്ന സമയം എന്ത്?

XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 302 14-02-2023 16:55:14

നിർദ്ധാരണം

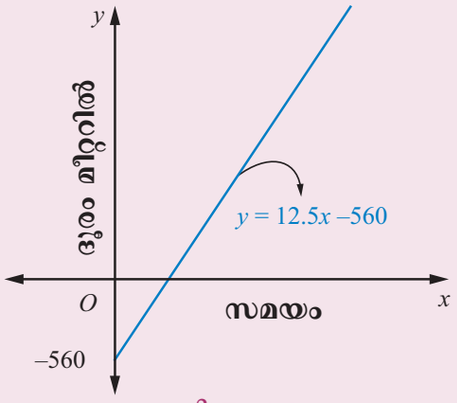
x -അക്ഷത്തിൽ സമയത്തെ സെക്കന്റുകളിലും,

y -അക്ഷത്തിൽ ദൂരത്തെ മീറ്ററുകളിൽ എടുക്കുക.

തീവണ്ടി ഇപ്പോൾ O-മൂലബിന്ദുവിലാണ് എന്ന് കരുതുക. തീവണ്ടിയുടെ നീളം 560 മീറ്റർ y - അക്ഷത്തിൽ ഋണസംഖ്യയിൽ ചേരദിക്കുന്നു.

അതുകൊണ്ട്, $b = -560$

തീവണ്ടിയുടെ ഏകീകൃത വേഗത 12.5 മീ/സെക്കന്റ് എന്നതിനെ ചരിവായി കരുതാം.



ചിത്രം 6.27

$$m = 12.5 \quad \left(\text{വേഗത} = \frac{\text{ദൂരം}}{\text{സമയം}}\right)$$

ചായ്വും അന്തഃഖണ്ഡവും തന്നിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ നേർരേഖയുടെ സമീകരണം

$$y = mx + b \qquad (6.13)$$

(i) $m = 12.5$ ഉം $b = -560$ ആകുമ്പോൾ

തീവണ്ടിയുടെ ചലനത്തിനുള്ള സമീകരണം

$$y = 12.5x - 560$$

(ii) തീവണ്ടിയുടെ എഞ്ചിൻ രാമേശ്വരം ദ്വീപിൽ എത്തിച്ചേരുന്ന സമയം

$y = 2065$ ഉം $b = 0$ ഉം എങ്കിൽ

$$2065 = 12.5x$$

$$x = 165.2 \text{ സെക്കന്റുകൾ}$$

(iii) തീവണ്ടിയുടെ അവസാനഭാഗം പാലത്തിന്റെ പ്രവേശന സ്ഥലത്തെ എത്തുന്നതിന് എടുത്ത സമയം $y = 0 \Rightarrow 0 = 12.5x - 560$

$, x = 44.8$ സെക്കന്റുകൾ

(iv) തീവണ്ടി പാമ്പൻ പാലത്തെ കടന്നു ചെല്ലുവാൻ എടുക്കുന്ന സമയം

$y = 2065 \Rightarrow 2065 = 12.5x - 560$

$$x = 210 \text{ സെക്കന്റുകൾ}$$

കുറിപ്പ് : തീവണ്ടിയുടെ അവസാനഭാഗം (ബിന്ദു) മൂലബിന്ദുവാണെന്നു കരുതി നേർരേഖയുടെ സമീകരണം കാണുക? എന്നാൽ അത് മുകളിൽ പറഞ്ഞിട്ടുള്ള സമീകരണമായിരിക്കുകയില്ല. തീവണ്ടി കടന്നുചെല്ലുന്ന പാത, ദൂരം, സമയം ഇവയെല്ലാം ഒന്നായിരിക്കും (ശ്രമിച്ചു നോക്കുക)

ഉദാഹരണം 6.11 y -അന്തഃഖണ്ഡം 7 ഉം നേർരേഖയ്ക്കും y -അക്ഷത്തിനും ഇടയിലുള്ള കോണം 30° ആകുന്നു. എങ്കിൽ നേർരേഖയുടെ സമീകരണങ്ങളെ കാണുക.

XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 303 14-02-2023 16:55:15

നിർദ്ധാരണം

y - അക്ഷവുമായി 30° കോണിനെ ഏർപ്പെടുത്തുന്ന രണ്ടു രേഖകൾ ഉണ്ട്.

ചിത്രത്തിൽ നിന്നും നേർരേഖകൾ x -അക്ഷവുമായി 60° യും 120° കോണുകളെ ഏർപ്പെടുത്തുന്നു.

$$m_1 = \tan 60^\circ = \sqrt{3} \text{ കൂടാതെ}$$

$$m_2 = \tan 120^\circ = \tan(180^\circ - 60^\circ)$$

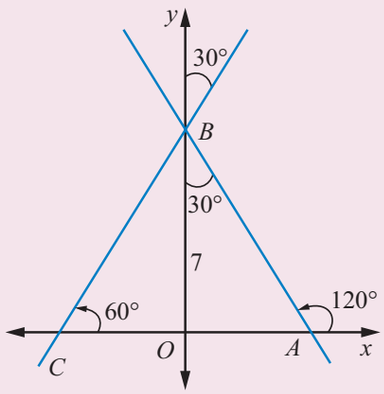
$$= -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$$

$m_1 = \sqrt{3}$, $m_2 = -\sqrt{3}$ കൂടാതെ $b = 7$ ആകുന്നു

ആവശ്യപ്പെട്ട നേർരേഖകളുടെ സമീകരണം

$y = m_1 x + b$ കൂടാതെ $y = m_2 x + b$

$y = \sqrt{3}\, x + 7$ കൂടാതെ $y = -\sqrt{3}\, x + 7$ ആകുന്നു.



ചിത്രം 6.28

കുറിപ്പ് : രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തന്നിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ സമീകരണം നിർദ്ധാരണം ചെയ്യാൻ രണ്ടു ബിന്ദുരൂപം അല്ലെങ്കിൽ ചായ്‌വ് - ബിന്ദുരൂപത്തെ ഉപയോഗിക്കാം. രണ്ട് അന്തഃഖണ്ഡങ്ങൾ തന്നിരുന്നാൽ അന്തഃഖണ്ഡരൂപത്തെയോ അല്ലെങ്കിൽ രണ്ടു ബിന്ദു രൂപത്തെയോ ഉപയോഗിച്ച് നിർദ്ധാരണം ചെയ്യാവുന്നതാണ്.

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ഉദാഹരണങ്ങൾ അദ്ധ്യായം 5-ൽ ശ്രേണികളുടെ ആശയത്തെ ഉപയോഗിച്ച് നിർദ്ധാരണം കണ്ടുപിടിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്. ഈ ഉദാഹരണങ്ങളെ നേർരേഖയുടെ ആശയം ഉപയോഗിച്ച് നിർദ്ധാരണം കാണാവുന്നതാണ്.

ഉദാഹരണം 6.12 ഒരു കൂട്ടുസമാന്തരശ്രേണി $(A.P.)$ 7-ാം അംഗം 30-ഉം 10-ാം അംഗങ്ങൾ യഥാക്രമം 21-ഉം ആകുന്നു. എങ്കിൽ,

(i) $A.P.$-യുടെ ആദ്യത്തെ മൂന്നുപദങ്ങൾ കാണുക.

(ii) കൂട്ടുസമാന്തരശ്രേണിയുടെ പദം എപ്പോഴാണ് പൂജ്യമാകുന്നത്.

(iii) നേർരേഖയുടെ ചായ്‌വിനും, കൂട്ടുസമാന്തരശ്രേണിയുടെ പൊതുവ്യത്യാസത്തിനും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം എന്നിവയെയും കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

ഒരു കൂട്ടുസമാന്തരശ്രേണി സ്ഥിരമായ കൂടുകയോ, കുറയുകയോ ചെയ്യുന്ന നേരീയ ഫലനമാണ്. ഇവിടെ x അക്ഷത്തിൽ പദങ്ങളുടെ എണ്ണവും y അക്ഷത്തിൽ പദങ്ങളുടെ മൂല്യവുമാണ് എന്നു കരുതുക.

(x_1, y_1) ഉം (x_2, y_2) യഥാക്രമം $(7, 30)$ ഉം $(10, 21)$ ഉം എന്നിരിക്കട്ടെ.

$y - y_1 = m(x - x_1)$ എന്ന സമീകരണത്തിൽ നിന്നും

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)$$

$$y - 30 = \left(\frac{21 - 30}{10 - 7}\right)(x - 7)$$

$$y = -3x + 51 \qquad (6.14)$$

XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 304 14-02-2023 16:55:17

(i) $x = 1, 2$ ഉം 3 ഉം സമീകരണം (6.14) -ൽ പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ A.P. -യുടെ ആദ്യത്തെ മൂന്നു പദങ്ങളും ലഭിക്കുന്നു. അവ യഥാക്രമം 48, 45 ഉം 42 എന്നിവയാകുന്നു.

(ii) $y = 0$ ത്തെ സമീകരണം (6.14) -ൽ പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ

$$0 = -3x + 51 \Rightarrow x = 17$$

അതായത്, 17-ാം പദം പൂജ്യമാകുന്നു.

(iii) നേർരേഖയുടെ ചായ്‌വ് -3, എന്നത് കൂട്ടുസമാന്തരശ്രേണിയുടെ പൊതുവ്യത്യാസത്തിനു തുല്യം എന്ന് തെളിവാകുന്നു. (ഈ ഉദാഹരണത്തിൽ നിന്നും കൂട്ടുസമാന്തരശ്രേണിയുടെ പൊതുവ്യത്യാസവും രേഖയുടെ ചായ്‌വും തുല്യമാണെന്ന് തെളിയിക്കുവാൻ ശ്രമിക്കുക).

ഉദാഹരണം 6.13 ഒരു ഉപഭോക്താവ് ₹8 വീതം വിലയുള്ള 22,000 കോം പാക്റ്റ്ഡിസ്ക് (സി.ഡി.) വാങ്ങുന്നു. ഒരു ഡിസ്ക്കിന് ₹30 അല്ലെങ്കിൽ അതിൽ കൂടുതൽ വില കൊടുത്ത് വാങ്ങാൻ ഉദ്ദേശിക്കുന്നില്ല. അതേസമയം ഒരു കോംപാക്റ്റ് ഡിസ്ക്കിന്റെ വില ₹6 അല്ലെങ്കിൽ അതിൽ കുറഞ്ഞ വിലയ്ക്ക് വിൽക്കുവാനും ഉദ്ദേശിക്കുന്നില്ല. എന്നാൽ ഒരു ഡിസ്ക്കിന് ₹14 വീതം മാത്രമേ 24,000 കോംപാക്റ്റ് ഡിസ്ക്കുകളെ കൊടുക്കുവാൻ സാധിക്കുകയുള്ളൂ. ആവശ്യപ്പെട്ടവയുടെ അളവുകളും വിതരണം ചെയ്തവയുടെ അളവുകളും രേഖീയ ആനുപാതിയമായി എടുക്കുകയാണെങ്കിൽ താഴെ തന്നവയെ എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കാം.

(i) ആവശ്യപ്പെട്ടവയുടെ സമവാക്യം (Demand Equation)

(ii) വിതരണം ചെയ്തവയുടെ സമവാക്യം (Supply Equation)

(iii) വിപണി സന്തുലിത അളവും വിലയും

(iv) ഒരു കോംപാക്റ്റ് ഡിസ്ക്കിന് ₹10 ആയിരിക്കുമ്പോൾ ആവശ്യപ്പെട്ട ഡിസ്ക്കിന്റെയും വിതരണം ചെയ്ത ഡിക്കിന്റെയും അളവുകൾ എന്തായിരിക്കും

നിർദ്ധാരണം

x -അക്ഷത്തിൽ 1 മാത്രയ്ക്കു പകരം 1000 മാത്രകൾ എന്ന അളവിൽ കോംപാക്റ്റ് ഡിസ്ക്കിന്റെ എണ്ണത്തെയും, y -അക്ഷത്തിൽ 1 മാത്രയെ 1 രൂപ എന്നും അടയാളപ്പെടുത്തുക.

(i) ആവശ്യപ്പെട്ടവയുടെ സമവാക്യം

(x_1, y_1), (x_2, y_2) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യഥാക്രമം $(22, 8)$, $(0, 30)$ എന്ന് എടുക്കുക.

രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തന്നിരുന്നാൽ നേർരേഖയുടെ സമീകരണം ഉപയോഗിച്ച്,

$$\frac{y-8}{30-8} = \frac{x-22}{0-22}$$

$$\Rightarrow \quad y_D = -x + 30$$

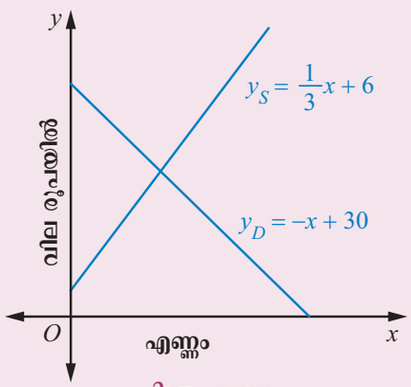
(ii) വിതരണ ഫലനം

(x_1, y_1), (x_2, y_2) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യഥാക്രമം $(0, 6)$, $(24, 14)$ എന്ന് എടുക്കുക.

രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തന്നിരുന്നാൽ നേർരേഖയുടെ സമീകരണം ഉപയോഗിച്ച് ,

$$\frac{y-6}{14-6} = \frac{x-0}{24-0}$$

$$\Rightarrow \quad y_S = \frac{1}{3}x + 6$$



ചിത്രം 6.29

XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 305 14-02-2023 16:55:18

(iii) വിപണി സന്തുലിതാവസ്ഥയിൽ ആവശ്യം, വിതരണം എന്നിവ തുല്യ അവസ്ഥയിൽ ആയിരിക്കും.

അതായത്, $y_D = y_S$

$$-x + 30 = \frac{1}{3}x + 6$$

$$\Rightarrow \quad x = 18 \text{ ഉം } y = 12$$

വിപണിയിൽ ഒരു കോംപാക്റ്റ് ഡിസ്ക്കിന്റെ വില ₹12 ഉം ഡിസ്ക്കുകളുടെ എണ്ണം 18,000 ആയിരിക്കും.

(iv) ഒരു കോംപാക്റ്റ് ഡിസ്ക്കിന്റെ വില ₹10 ആയിരിക്കുമ്പോൾ

വിതരണസമവാക്യത്തിൽ നിന്നും,

$$y = 10 \Rightarrow y_D = -x + 30$$

$$\Rightarrow \quad x = 20$$

അതായത് ആവശ്യപ്പെട്ട ഡിസ്ക്കുകളുടെ എണ്ണം 20,000 ആകുന്നു.

അതുപോലെ വിതരണ സമവാക്യത്തിൽ നിന്നും,

$$y = 10 \Rightarrow y_S = \frac{1}{3}x + 6,$$

$$\Rightarrow \quad x = 12$$

ഇവിടെ വിതരണം ചെയ്ത ഡിസ്ക്കുകളുടെ എണ്ണം 12,000 ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം 6.14 ഒരു നേർരേഖയുടെ അന്തഃഖണ്ഡങ്ങൾ തുല്യമായതും വിപരീത ചിഹ്നമുള്ളതും $(-1, 1)$ എന്ന ബിന്ദുവഴി കടന്നുചെല്ലുന്നതുമായ നേർരേഖയുടെ സമീകരണം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

x -അക്ഷത്തിന്റെ അന്തഃഖണ്ഡം $= a$ യും

y - അക്ഷത്തിന്റെ അന്തഃഖണ്ഡം $= -a$ യും എന്നിരിക്കട്ടെ.

ആവശ്യപ്പെട്ട നേർരേഖയുടെ സമീകരണം

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{a} = 1$$

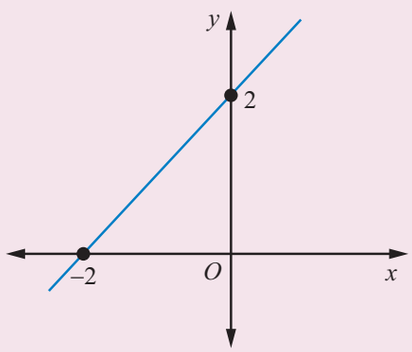
$$\Rightarrow \quad x - y = a$$

മുകളിലുള്ള സമീകരണം $(-1, 1)$ എന്ന ബിന്ദുവഴി ചെല്ലുന്നു.

$$(-1) - (1) = a \Rightarrow a = -2$$

ആവശ്യപ്പെട്ട നേർരേഖയുടെ സമീകരണം,

$$x - y + 2 = 0$$



ചിത്രം 6.30

ഉദാഹരണം 6.15 $(9, 4)$ എന്ന ബിന്ദുവഴി ചെല്ലുന്നതും ഋണ ചായ്വുള്ളതുമായ L എന്ന നേർരേഖ P, Q എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ധന അക്ഷങ്ങളിൽ ഛേദിക്കുന്നു. L എന്നത് വ്യത്യാസപ്പെടുമ്പോൾ $|OP| + |OQ|$ -ന്റെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ മൂല്യം കാണുക? ഇവിടെ O എന്നത് മൂലബിന്ദുവാകുന്നു.

XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 306 14-02-2023 16:55:19

നിർദ്ധാരണം

L എന്ന നേർരേഖയുടെ ചായ്‌വ് m എന്നിരിക്കട്ടെ. കൂടാതെ ഇത് $(9, 4)$ എന്ന ബിന്ദുവഴിയെ കടന്നുപോകുന്നു L -എന്ന രേഖയുടെ സമീകരണം

$$y - 4 = m(x-9). \quad (m<0)$$

P, Q എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യഥാക്രമം $\left(9-\frac{4}{m},0\right)$ യും $(0, 4-9m)$ ഉം ആകുന്നു.

$$|OP|+|OQ| = \left|9-\frac{4}{m}\right|+|4-9m|$$

$$= \left|9+\frac{4}{k}\right|+|4+9k| \quad (\because m<0 \text{ എങ്കിൽ } m=-k, k>0 \text{ എന്നിരിക്കട്ടെ})$$

$$= \left(9+\frac{4}{k}\right)+(4+9k) \quad (\because \text{എല്ലാ സംഖ്യകളും ധനസംഖ്യയാണ്})$$

$$= (4+9)+\left(\frac{4}{k}+9k\right)$$

$$\geq 13+2\sqrt{\frac{4}{k}\times 9k} \qquad (\text{A.M.} \geq \text{G.M.})$$

$$|OP|+|OQ| \geq 25$$

എങ്കിൽ, $|OP|+|OQ|$ -ന്റെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ മൂല്യം 25 ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം 6.16 മൂലബിന്ദുവിൽ നിന്നും നേർരേഖയിലേക്ക് വരച്ച ലംബരേഖയുടെ നീളം 12 ഉം ഇത് x -അക്ഷവുമായി ധനദിശയിൽ 150° കോണത്തെ രൂപീകരിക്കുന്നു എങ്കിൽ നേർരേഖയുടെ സമീകരണം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

ഇവിടെ $p = 12$ ഉം കോണം $\alpha = 150^\circ$ യും ആകുന്നു.

ആവശ്യപ്പെട്ട നേർരേഖയുടെ സമീകരണം,

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$$

അതായത് $\quad x\cos 150^\circ + y\sin 150^\circ = 12$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{3}x - y + 24 = 0$$

ഉദാഹരണം 6.17 ഒരു നേർരേഖ അക്ഷങ്ങളുമായി ഏർപ്പെടുത്തുന്ന ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം 36 ചതുരശ്രമാത്രയാകുന്നു. മൂലബിന്ദുവിൽ നിന്നും ആ രേഖയ്ക്ക് വരയാവുന്ന ലംബ രേഖ ധനസംഖ്യയെ രൂപീകരിക്കുന്ന x -അക്ഷവുമായി 45° കോണത്തെ ഉണ്ടാക്കുന്നു. എങ്കിൽ നേർരേഖയുടെ സമീകരണം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

P എന്ന ബിന്ദു മൂലബിന്ദുവിൽ നിന്നും നേർരേഖയിൽ വരഞ്ഞ ലംബരേഖയുടെ ദൂരം എന്നിരിക്കട്ടെ.

x - അക്ഷവുമായ ലംബരേഖ ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണം $= 45^\circ$ എങ്കിൽ

നേർരേഖയുടെ സമീകരണം

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$$

$$\Rightarrow \quad x\cos 45^\circ + y\sin 45^\circ = p$$

$$x + y = \sqrt{2}\,p$$

XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 307 14-02-2023 16:55:20

ഈ സമീകരണം $A(\sqrt{2}\,p, 0)$ എന്ന ബിന്ദുവും $B(0, \sqrt{2}\,p)$ എന്ന ബിന്ദുവും അക്ഷങ്ങളെ ഛേദിക്കുന്നു.

$\Delta\, OAB$ -യുടെ വിസ്തീർണ്ണം $= \frac{1}{2} \times \sqrt{2}\,p \times \sqrt{2}\,p = 36$

$\Rightarrow \quad p = 6$ (ഇവിടെ p ഒരു ധനസംഖ്യയാണ്)

അതായത്, നേർരേഖയുടെ സമീകരണം

$$x + y = 6\sqrt{2}$$

ഉദാഹരണം 6.18 ഒരു നേർരേഖ x -അക്ഷവുമായി (ധനസംഖ്യ) ഏർപ്പെടുത്തുന്ന കോണം 60° യും $(4,7)$ എന്ന ബിന്ദു $5\sqrt{2}$ എന്ന രേഖയിൻമേൽ $x - y + 3 = 0$ മാത്രഅകലെയുള്ള നേർരേഖയുടെ സമീകരണം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$x - y + 3 = 0$ എന്ന രേഖയുടെ ചായ്‌വ് കോണം 45° യും ഒരു ബിന്ദു $(4,7)$.

രേഖയുടെ മേലുള്ള പരാമട്രിക് രൂപം,

$$\frac{x - x_1}{\cos\theta} = \frac{y - y_1}{\sin\theta} = r$$

മുകളിൽ ഉള്ള സമീകരണത്തെ ഈ രൂപത്തിൽ എഴുതാം.

$$\frac{x - 4}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{y - 7}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \pm 5\sqrt{2}$$

(രേഖയിൻമേലുള്ള $(4,7)$ - എന്ന ബിന്ദുവിന് ഓരോ വശങ്ങളിൽ നിന്നും ദൂരം $r = \pm\, 5\sqrt{2}$) ആകുന്നു

അതായത്, $x - 4 = y - 7 = \pm 5$

ഇതിൽനിന്നും രേഖയിൻമേൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന ഒരു ബിന്ദു $(4,7)$ ഏതെങ്കിലും ഒരുവശത്തിൽ നിന്നും $5\sqrt{2}$ മാത്രകൾ ദൂരത്തിലാണുള്ളത്. ബിന്ദുക്കൾ $(4+5, 7+5)$ ഉം $(4-5, 7-5)$ ഉം ആകുന്നു.

ആവശ്യപ്പെട്ട ബിന്ദുക്കൾ $(9, 12), (-1, 2)$ ചായ്‌വ്

$$m = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

മുകളിൽ തന്നിട്ടുള്ള മൂല്യങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ചായ്‌വ് രൂപത്തിൽ എഴുതിയാൽ,

$\sqrt{3}\,x - y + (12 - 9\sqrt{3}) = 0$ കൂടാതെ

$\sqrt{3}\,x - y + (2 + \sqrt{3}) = 0$

6.3.4 ഒരു നേർരേഖയുടെ പൊതു രൂപത്തെ മറ്റൊരു രൂപത്തിൽ മാറ്റൽ

ഒരു നേർരേഖയുടെ പൊതുരൂപം $Ax + By + C = 0$

ഇവിടെ A, B, C എന്നിവ ധനസംഖ്യകൾ, രണ്ടുസംഖ്യകൾ ഒരേ സമയത്തിൽ പൂജ്യം ആകുന്നില്ല. മുകളിൽ തന്നിട്ടുള്ള പൊതുരൂപത്തെ മറ്റൊരു രൂപത്തിൽ മാറ്റാവുന്നതാണ്.

(i) ചായ്‌വ് - അന്തഃഖണ്ഡരൂപം ($B \neq 0$)

തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണത്തെ താഴെ തന്ന രീതിയിൽ എഴുതാവുന്നതാണ്.

$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \Rightarrow$ ചായ്‌വ് $m = \frac{-A}{B}$ യും y-യും അന്തഃഖണ്ഡം $= -\frac{C}{B}$

XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 308 14-02-2023 16:55:23

(ii) അന്തഖണ്ഡ രൂപം

തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണത്തെ ഇപ്രകാരം എഴുതാം.

$$\frac{x}{\left(-\frac{C}{A}\right)}+\frac{y}{\left(-\frac{C}{B}\right)}=1$$

$(A, B, C$ എന്നിവ പൂജ്യമല്ലാത്ത ധനസംഖ്യകൾ$)$

അന്തഃഖണ്ഡ രൂപത്തോട് താരതമ്യപ്പെടുത്തുമ്പോൾ,

x -ന്റെ അന്തഃഖണ്ഡം $(a) = \frac{-C}{A}$, y - യുടെ അന്തഃഖണ്ഡം $(b) = \frac{-C}{B}$

(iii) സാധാരണ രൂപം

$Ax + By + C = 0$ ഇവിടെ A, B എന്നിവ പൂജ്യമല്ലാത്ത മൂല്യങ്ങൾ.

മുകളിലുള്ള സമീകരണത്തെ $x\cos\theta + y\sin\theta = p$ യുമായി താരതമ്യപ്പെടുത്തിയാൽ

$\frac{-A}{\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{-B}{\sqrt{A^2+B^2}}y = \frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ ഇപ്രകാരം എഴുതാം.

ഇവിടെ $\cos\alpha = \frac{-A}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $\sin\alpha = \frac{-B}{\sqrt{A^2+B^2}}$ കൂടാതെ $p = \frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

ഉദാഹരണം 6.19 $\sqrt{3}x - y + 4 = 0$ എന്ന സമീകരണത്തെ തുല്യ രൂപത്തിൽ പ്രകടിപ്പിക്കുക.

(i) ചായ്‌വ് - അന്തഃഖണ്ഡരൂപം

(ii) അന്തഃഖണ്ഡരൂപം

(iii) പൊതുരൂപം

നിർദ്ധാരണം

(i) ചായ്‌വ് അന്തഃഖണ്ഡരൂപം

കൊടുത്തിട്ടുള്ള സമവാക്യം $\sqrt{3}x - y + 4 = 0$

$$\Rightarrow \quad y = \sqrt{3}x + 4 \qquad (6.15)$$

$y = mx + b$ എന്ന സമവാക്യത്തോട് താരതമ്യം ചെയ്താൽ

ചായ്‌വ് $= \sqrt{3}$ കൂടാതെ y -യുടെ അന്തഃഖണ്ഡം $= 4$

(ii) അന്തഃഖണ്ഡരൂപം

$$\sqrt{3}x - y + 4 = 0$$

$$\sqrt{3}x - y = -4$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-\sqrt{3}}{4}x + \frac{y}{4} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{\left(-\frac{4}{\sqrt{3}}\right)} + \frac{y}{4} = 1 \qquad (6.16)$$

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ എന്ന സമവാക്യവുമായി താരതമ്യം ചെയ്യുമ്പോൾ

x -ന്റെ അന്തഃഖണ്ഡം $= -\frac{4}{\sqrt{3}}$, കൂടാതെ y -ന്റെ അന്തഃഖണ്ഡം $= 4$

XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 309 14-02-2023 16:55:25

(iii) പൊതുരൂപം

$$\sqrt{3}x - y + 4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (-\sqrt{3})x + y = 4 \qquad (6.17)$$

$Ax + By + C = 0$ എന്ന സമീകരണവുമായി താരതമ്യപ്പെടുത്തുമ്പോൾ

$$A = -\sqrt{3} \;\; B = 1 \quad \therefore \sqrt{A^2 + B^2} = 2$$

സമീകരണം (6.17) -നെ ഇരുവശങ്ങളിലും 2 കൊണ്ട് ഹരിക്കുക

$$\Rightarrow \quad -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = 2 \qquad (6.18)$$

$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ യുമായി താരതമ്യപ്പെടുത്തുമ്പോൾ

$$\cos\alpha = \frac{-\sqrt{3}}{2}, \; \sin\alpha = \frac{1}{2} \;\; p = 2 \text{ ആണ്.}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = 150^\circ = \frac{5\pi}{6} \;\; p = 2$$

പൊതുരൂപത്തിന്റെ സമീകരണം

$x\cos\frac{5\pi}{6} + y\sin\frac{5\pi}{6} = 2$ ആണ്

കുറിപ്പ് : തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണങ്ങളെ ആവശ്യമുള്ള രൂപത്തിൽ മാറ്റാൻ ചിലപ്പോൾ സമാന പദങ്ങളുടെ ഗുണാങ്കങ്ങളുടെ ആനുപാതിക പ്രോപ്പർട്ടി ഉപയോഗിക്കുന്നത് കൂടുതൽ സൗകര്യപ്രദമാണ്.

ഉദാഹരണം 6.20 $\sqrt{3}x + y + 4 = 0$ എന്ന സമീകരണത്തെ പൊതുരൂപത്തിൽ മാറ്റുക.

നിർദ്ധാരണം

ആവശ്യപ്പെട്ട സമീകരണം $\quad x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$

തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണം, $\quad (-\sqrt{3})x - y = 4 \quad (\because p$ എന്നത് എപ്പോഴും ധനസംഖ്യയാകുന്നു)

ഈ രണ്ടു സമീകരണങ്ങളും ഒരേ നേർരേഖയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. സമാനപദങ്ങളുടെ ഗുണാങ്കങ്ങൾ ആനുപാതികത്തിലായിരിക്കും.

$$\frac{\cos\alpha}{-\sqrt{3}} = \frac{\sin\alpha}{-1} = \frac{p}{4}$$

$$\frac{\cos\alpha}{-\sqrt{3}} = \frac{\sin\alpha}{-1} = \frac{p}{4} = \frac{\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}}{\sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\alpha = \frac{-\sqrt{3}}{2}, \sin\alpha = \frac{-1}{2} \quad \text{ഉം} \;\; p = \frac{4}{2}$$

$$\alpha = 210^\circ = \frac{7\pi}{6} \quad \text{ഉം} \;\; p = 2$$

പൊതുരൂപത്തിന്റെ സമീരരണം

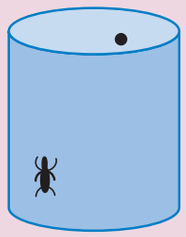
$x\cos\frac{7\pi}{6} + y\sin\frac{7\pi}{6} = 2$ ആകുന്നു.

കുറിപ്പ് : ഒരു വളഞ്ഞതലത്തിന്റെ ഉപരിതലത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾക്കിടയിലുള്ള ഏറ്റവും ചെറിയ പാതയെ കണ്ടെത്തുന്നത് വളരെ ബുദ്ധിമുട്ടാണ്. എങ്കിലും സിലിണ്ടറിന്റെ വളഞ്ഞ തലത്തിന്റെ

XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 310 14-02-2023 16:55:26

മേൽഭാഗമായിരുന്നാലും വളവിന്റെ ഉപരിതലം പരന്നതാണെങ്കിൽ സിലിണ്ടറിന്റെ ഉപരിതലത്തിലുള്ള പാതയുടെ നീളം മാറില്ല. പൊള്ളയായ സിലിണ്ടറിന്റെ മുകൾ ഭാഗം വെട്ടി ദീർഘചതുരാകൃതിയാകുന്നതു മുഖേന നമുക്ക് താഴെ തന്നിട്ടുള്ള കണക്കിൽ ഉറുമ്പ് പോകുന്ന പാതയെ എളുപ്പത്തിൽ നിർണ്ണയിക്കാൻ സാധിക്കും.

ഉദാഹരണം 6.21 10 സെ.മീറ്റർ ഉയരവും 24 സെ.മി. ആധാരവുമുള്ള പൊള്ളയായ സിലിണ്ടറാകൃതിയുള്ള ഒരു പാത്രത്തിന്റെ പുറത്ത് കീഴ്ഭാഗത്തുനിന്ന് 4 സെ.മി. ഉയരത്തിൽ ഒരു ഉറുമ്പ് അതിനു നേരെ എതിർവശത്ത് പാത്രത്തിനുള്ളിൽ മുകളിൽ നിന്നും 3 സെ.മീറ്റർ കീഴെയായി ഒരു തുള്ളി തേൻ ഇരിക്കുന്നു.



ചിത്രം 6.31

(i) ഉറുമ്പ് തേൻതുള്ളി നുകരുവാൻ എത്തേണ്ട ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ദൂരം എന്ത്?

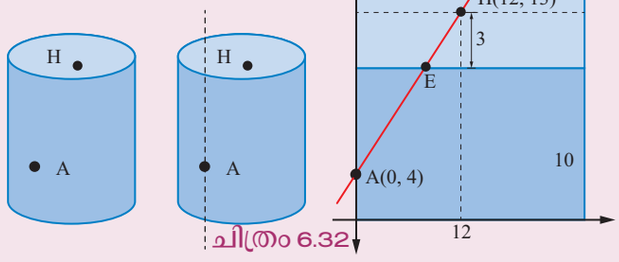
(ii) ഉറുമ്പ് പോകുന്ന പാതയുടെ സമീകരണം എന്ത് ?

(iii) ഉറുമ്പ് പാത്രത്തിന്റെ ഏതുഭാഗത്ത് കയറുന്നു ?

നിർദ്ധാരണം

പൊള്ളയായ സിലിണ്ടറിനെ വെട്ടിയെടുത്ത് ദീർഘചതുരാകൃതിയിൽ മാറ്റി അതിന്റെ പ്രതിഫലനത്തെ ഉറുമ്പ് ചെല്ലുന്ന പാതയാക്കി കാണാൻ സാധിക്കും. ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിട്ടുള്ളതുപോലെ സിലിണ്ടറിന്റെ അടിഭാഗത്തെ x -അക്ഷമായും A എന്ന ബിന്ദുവഴിയെ ഉറുമ്പ് ചെല്ലുന്ന ലംബരേഖയെ y -അക്ഷമായും എടുക്കുക. ഇവിടെ H എന്ന ബിന്ദു തേൻ ഇരിക്കുന്ന സ്ഥലമാകുന്നു. E എന്ന ബിന്ദു ഉറുമ്പ് അകത്തു കടക്കുന്ന ആരംഭ ബിന്ദുവും ആണ് തന്നിട്ടുള്ള നിബന്ധനയനുസരിച്ച്,

$A(x_1, y_1)$ ഉം $H(x_2, y_2)$ ഉം യഥാക്രമം $(0, 4), (12, 13)$ എന്നിരിക്കട്ടെ.



ചിത്രം 6.32

(i) A -എന്ന ബിന്ദുവിനും, H -എന്ന ബിന്ദുവിനും ഇടയിലുള്ള കുറഞ്ഞ ദൂരം

$$AH = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$$

ഉറുമ്പ് തേൻ നുകരുവാൻ എടുക്കാവുന്ന ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ദൂരം 15 സെ.മി. ആകുന്നു.

(ii) AH എന്ന പാതയുടെ സമീകരണം,

$$\frac{y-4}{13-4} = \frac{x-0}{12-0}$$

$$\Rightarrow \quad y = 0.75x + 4 \qquad (6.19)$$

(iii) ആരംഭബിന്ദു E -ൽ $y = 10 \Rightarrow x = 8$

$\Rightarrow$ E $= (8, 10)$ ആകുന്നു.

കുറിപ്പ് : മൂലബിന്ദുവിനെ വേറെവേറെ സ്ഥലങ്ങളിൽ സ്ഥാപിച്ചാൽ പല രൂപത്തിലുള്ള സമീകരണങ്ങൾ ലഭിക്കും. എന്നാൽ പാതയും, ദൂരവും തുല്യമാണ്.

XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 311 14-02-2023 16:55:27

അഭ്യാസം 6.2

1. താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയെ ഉപയോഗിച്ച്, $(1, 1)$എന്ന ബിന്ദുവഴി ചെല്ലുന്ന നേർരേഖയുടെ സമീകരണം കാണുക.

   (i) y - അന്തഃഖണ്ഡം (-4)

   (ii) ചായ്‌വ് 3

   (iii) $(-2, 3)$ എന്ന ബിന്ദു

   (iv) മൂല ബിന്ദുവിൽ നിന്നും രേഖയ്ക്കു വരയ്ക്കാവുന്ന ലംബരേഖ x -അക്ഷവുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണം 60°.

2. അക്ഷങ്ങൾക്കിടയിൽ ഒരു നേർരേഖയുടെ മധ്യബിന്ദു $p(r, c)$ എങ്കിൽ ആ നേർരേഖയുടെ സമീകരണം $\frac{x}{r}+\frac{y}{c}=2$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

3. $(1, 5)$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ കൂടെയും അക്ഷങ്ങളെ 3:10 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ വിഭജിക്കുന്നതുമായ നേർരേഖയുടെ സമീകരണം കാണുക.

4. p എന്നത് മൂലബിന്ദുവിൽ നിന്നും നേർരേഖയിലേക്ക് വരയ്ക്കുന്ന ലംബരേഖയുടെ നീളം ആകുന്നു. a, b എന്നിവ അക്ഷങ്ങളിൽ ഏർപ്പെടുത്തുന്ന അന്തഃഖണ്ഡങ്ങളുടെ നീളങ്ങളും ആകുന്നു. എങ്കിൽ,

   $$\frac{1}{p^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

5. ജലത്തിന്റെ സാധാരണ തിളനില $100^\circ C$ അല്ലെങ്കിൽ $212^\circ F$ ഉം ജലത്തിന്റെ ഖനീഭവന നില $0^\circ C$ അല്ലെങ്കിൽ $32^\circ F$ ഉം ആകുന്നു. എങ്കിൽ.

   (i) C -യ്ക്കും F-നും തമ്മിലുള്ള രേഖീയ ബന്ധം കണ്ടെത്തുക,

   (ii) താപനില $98.6^\circ F$ എങ്കിൽ C-യുടെ മൂല്യം എന്ത് ?

   (iii) താപനില $38^\circ C$ എങ്കിൽ F- യുടെ മൂല്യം എന്ത് ?

6. ഒരു ലക്ഷ്യത്തിലെത്താൻ നിരന്തരമായ വേഗതയിൽ P എന്ന സ്ഥലത്തുനിന്നും ഒരു വസ്തുവിനെ വിക്ഷേപിക്കുന്നു. ആ വസ്തു ലക്ഷ്യത്തിലെത്താൻ 15 സെക്കന്റിൽ ലക്ഷ്യത്തിൽ നിന്ന് 1400 മീറ്റർ അകലെയും 18 സെക്കന്റിൽ 800 മീറ്റർ അകലെയുമായിരുന്നു. എങ്കിൽ,

   (i) സ്ഥലവും ലക്ഷ്യവും തമ്മിലുള്ള ദൂരം കണ്ടെത്തുക?

   (ii) 15 സെക്കന്റിൽ കടക്കുന്ന ദൂരം ?

   (iii) ലക്ഷ്യത്തിലെത്താൻ എടുത്ത സമയം എന്നിവ കാണുക?

7. ഒരു നഗരത്തിലെ ജനസംഖ്യ 2005 ൽ 1,35,000 ഉം 2010 ൽ 1,45,000 ഉം ആകുന്നു എങ്കിൽ, 2015 -ാം വർഷം ജനസംഖ്യ എത്രയായിരിക്കുമെന്ന് ഏകദേശമായി കണക്കാക്കുക. (ജനസംഖ്യയുടെ വളർച്ച സ്ഥിരമാണെന്ന് കരുതുക.)

8. മൂലബിന്ദുവിൽ നിന്നും വരയപ്പെടുന്ന ഒരു ലംബരേഖയുടെ നീളം 12 മാത്രയാകുന്നു. ആ ലംബരേഖ x -അക്ഷവുമായി ഏർപ്പെടുത്തുന്ന കോൺ 30° എങ്കിൽ നേർരേഖയുടെ സമീകരണം കാണുക.

9. $(8, 3)$ എന്ന ബിന്ദു വഴിയെ ചെല്ലുന്നതും അന്തഃഖണ്ഡങ്ങളുടെ തുക 1 ഉം ആയിട്ടുള്ള നേർരേഖയുടെ സമീകരണം കാണുക.

10. $(1,3)$, $(2,1)$ ഉം കൂടാതെ $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ സമരേഖീയങ്ങളാണെങ്കിൽ

    (i) ചായ് ആശയം ഉപയോഗിച്ച് (ii) നേർരേഖയുടെ ആശയം ഉപയോഗിച്ച്

    (iii) വേറെ ഏതെങ്കിലും രീതി ഉപയോഗിച്ച് കാണുക.

XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 312 14-02-2023 16:55:28

11. $A(1, 2)$ എന്ന ബിന്ദുവഴിയായും ചായ്‌വ് $\frac{5}{12}$ ഉള്ളതുമായ ഒരു നേർരേഖ കടന്നുപോകുന്നു, A എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്നും 13 മാത്ര അകലെയുള്ള നേർരേഖയിൻമേലുള്ള ബിന്ദുക്കളെ കാണുക.

12. 150 മീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു തീവണ്ടി നിരന്തരമായ വേഗതയിൽ 12.5 മീ/സെക്കന്റ് വേഗതയിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു. എങ്കിൽ.

(i) തീവണ്ടിയുടെ ചലനത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക?

(ii) ധ്യവം കടക്കുവാൻ എടുത്ത സമയം എന്താണ് ?

(iii) 850 മീറ്റർ നീളമുള്ള പാലത്തെ കടക്കുവാൻ എടുത്ത സമയം എത്രയാണ്?

13. ഒരു പരീക്ഷണത്തിനായി സ്പ്രിംഗിനെ ഒരു കൊളുത്തിൽ തൂക്കിയിട്ടിരിക്കുന്നു. സ്പ്രിംഗിൽ വ്യത്യസ്തമായ ഭാരങ്ങൾ ഇടുമ്പോൾ അതിന്റെ നീളം മാറുന്നു. അതിനെ താഴെ തന്ന പട്ടികയിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു,

ഭാരം (കി.കി)	2	4	5	8
നീളം (സെ.മി.)	3	4	4.5	6

(i) മാറ്റത്തെ കാണിക്കുന്ന ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക.

(ii) സ്പ്രിംഗിന്റെ നീളത്തിനും ഭാരത്തിനും തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തെ കണക്കാക്കുന്ന സമീകരണം കാണുക.

(iii) സ്പ്രിംഗിന്റെ യഥാർത്ഥ നീളം എന്താണ്.

(iv) സ്പ്രിംഗിനെ 9 സെ.മീറ്റർ വരെ നീട്ടണമെങ്കിൽ എത്രഭാരം ചേർക്കണം?

(v) 6 കിലോഗ്രാം ഭാരം ചേർക്കുമ്പോൾ സ്പ്രിംഗിന്റെ നീളം എത്രയായിരിക്കും?

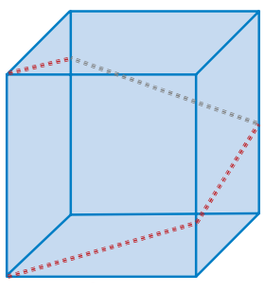
14. ഒരു കുടുംബത്തിൽ 14.2 കി.ഗ്രാം ഭാരമുള്ള രൂപമായ ദ്രാവഹ ഇന്ധനം (LPG) (സിലിണ്ടറിന്റെ ഭാരം ഉൾപ്പെടെ 29.5 കി.ഗ്രാം) ത്തെ ക്രമമായ രീതിയിൽ ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ 24-ാമത്തെ ദിവസം ഇന്ധനം തീരുന്നു. വീണ്ടും ഉടൻ തന്നെ സിലിണ്ടറിനെ വാങ്ങുന്നു. (ഇന്ധനം) (i) സിലിണ്ടറിലെ ഗ്രാസിന്റെ അളവ് ദിവസങ്ങളിലേക്ക് സൂചിപ്പിക്കുന്ന സമവാക്യം കാണുക. (ii) ആദ്യത്തെ 96 ദിവസത്തേയ്ക്ക് ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക.

15. 800×800×720 എന്നീ അളവുകൾ ഉള്ള സമചതുരലൈൻ രൂപത്തിലുള്ള ഒരു ഷോപ്പിംഗ് മാളിൽ ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചതുപോലെ ബിന്ദുക്കൾകൊണ്ട് ജോചിപ്പിച്ച പാതയിൽ എസ്കലേറ്റർ ഘടിപ്പിക്കുവാൻ ഉദ്ദേശിക്കുന്നു എങ്കിൽ,

(i) ചലിക്കുന്ന എസ്കലേറ്ററിന്റെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ദൈർഘ്യം കണ്ടെത്തുക.

(ii) എത്ര ഉയരത്തിൽ ചലിക്കുന്ന എസ്കലേറ്റർ തിരിയുന്നു എന്നു കാണുക.

(iii) എക്സലേറ്റർ തിരിയുന്ന ദിശയുടെ ചായ്‌വുകൾ കാണുക.



ചിത്രം 6.33

XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 313 14-02-2023 16:55:28

6.4 രണ്ടു നേർരേഖകൾക്കിടയിലുള്ള കോണം

ഒരു തലത്തിൽ രണ്ടു രേഖകൾ സമാന്തരമായോ, യാദൃശ്ചികമായോ അല്ലെങ്കിൽ ഒന്നിനൊന്ന് ഛേദിക്കുന്ന ബിന്ദുവിൽ രണ്ടു കോണുകൾ ഉണ്ടാകുന്നു. ഇതിൽ ഒന്ന് ന്യൂനകോണും, മറ്റേത് ബൃഹത് കോണും അല്ലെങ്കിൽ രണ്ടും സമകോണുകളായും ഇരിക്കാവുന്നതാണ്.

ഈ രണ്ടു കോണുകളും സംപൂരകകോണങ്ങളായിരിക്കും. കൂടാതെ നിർവചനമനുസരിച്ച് രണ്ടു രേഖകൾക്കിടയിലുള്ള കോണം എന്നത് ന്യൂനകോണിനെ മാത്രമേ സൂചിപ്പിക്കൂ. രണ്ടു നേർരേഖകളുടെ സമീകരണം എന്നിരിക്കട്ടെ. (കോണുകളുടെ കൂട്ടു തുക $180°$)

$y = m_1x + c_1$ ഉം $y = m_2x + c_2$ എന്നത് രണ്ട് നേർരേഖകളുടെ സമീകരണം എന്നിരിക്കട്ടെ.

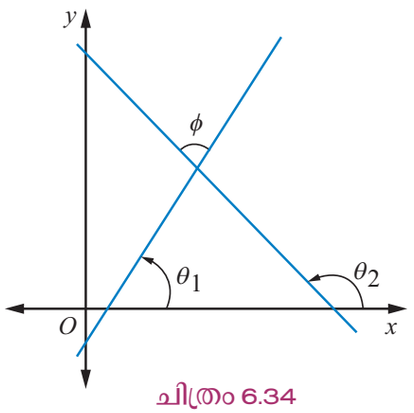
θ_1 ഉം θ_2 എന്നിവ x -അക്ഷവുമായി ഏർപ്പെടുന്ന കോണുകൾ എങ്കിൽ, $m_1 = \tan\theta_1$ ഉം $m_2 = \tan\theta_2$.

ϕ എന്നത് രണ്ട് നേർ രേഖകൾക്കിടയിലുള്ള കോൺ എങ്കിൽ,

$$\phi = \theta_2 - \theta_1 \Rightarrow \quad \tan\phi = \tan(\theta_2 - \theta_1)$$

$$\Rightarrow \quad \tan\phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$$



ചിത്രം 6.34

കുറിപ്പ് : (i) $\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$ -ന്റെ മൂല്യം ധനസംഖ്യയാണെങ്കിൽ, ϕ എന്നത് ഒരു ന്യൂനകോൺ ആയിരിക്കും.

(ii) $\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$ -ന്റെ മൂല്യം ഋണസംഖ്യയാണെങ്കിൽ, ϕ എന്നത് ഒരു ബൃഹത് കോൺ ആയിരിക്കും.

അതുകൊണ്ട് ന്യൂനകോൺ $\phi = \tan^{-1}\left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right|$

6.4.1 സമാന്തര രേഖകൾക്കുള്ള നിബന്ധന

ഒന്നിനൊന്ന് ഛേദിക്കാതെ ഒരേ തലത്തിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന രണ്ടു നേർരേഖകളെ സമാന്തരരേഖകൾ എന്നു പറയുന്നു.

$y = m_1x + c_1$ ഉം $y = m_2x + c_2$

എന്നീ നേർരേഖകൾ സമാന്തരമാണെങ്കിൽ ഇവയ്ക്കിടയിലുള്ള കോണം പൂജ്യം അല്ലെങ്കിൽ π ആകുന്നു.

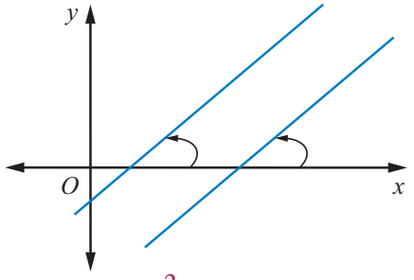
രണ്ടു രേഖകൾക്കിടയിലുള്ള കോണം $\phi = 0$ എങ്കിൽ

$$\Rightarrow \quad \tan\phi = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} = 0$$

$$\Rightarrow \quad m_2 - m_1 = 0 \Rightarrow m_2 = m_1$$

സമാന്തരരേഖകളുടെ ചായ്വുകൾ തുല്യമാകുന്നു.



ചിത്രം 6.35

XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 314 14-02-2023 16:55:31

ലംബമല്ലാത്ത രേഖകളുടെ ചായ്വുകൾ തുല്യം എങ്കിൽ ആ രേഖകൾ സമാന്തരമായിരിക്കും. എല്ലാ ലംബരേഖകളും സമാന്തരരേഖകളായിരിക്കും.

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ എന്നതും $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ എന്നതും നേർരേഖയുടെ പൊതുരൂപം എങ്കിൽ ഈ രണ്ടുരേഖകളും ഒന്നിനൊന്ന് സമാന്തരമായിരിക്കുന്നതിനുള്ള നിബന്ധന

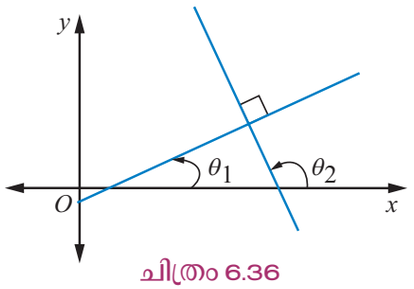
$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \text{ അല്ലെങ്കിൽ } a_1b_2 = a_2b_1$$

കുറിപ്പ് : (i) $ax + by + c = 0$ എന്ന നേർരേഖയ്ക്ക് സമാന്തരമായ നേർരേഖയുടെ രൂപം $ax + by = k$

(ii) (x_1, y_1) എന്ന ബിന്ദുവഴിയായി, $ax + by + c = 0$ എന്ന രേഖയ്ക്ക് സമാന്തരമായ നേർരേഖയുടെ സമീകരണം $ax + by = ax_1 + by_1$ ആകുന്നു.

6.4.2 ലംബരേഖകൾക്കുള്ള നിബന്ധന

$y = m_1x + c_1$ എന്ന രേഖയും $y = m_2x + c_2$ എന്ന രേഖയും ഒന്നിനൊന്ന് ലംബമാണെങ്കിൽ ഈ രണ്ടു രേഖകൾക്കിടയിലുള്ള കോണം 90° അല്ലെങ്കിൽ $\frac{\pi}{2}$ ആകുന്നു.



ചിത്രം 6.36

ϕ എന്നത് രണ്ടു രേഖകൾക്കിടയിലുള്ള കോണം എങ്കിൽ,

$$\tan\phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2m_1}$$

$$\Rightarrow \cot\phi = \frac{1 + m_2m_1}{m_2 - m_1}$$

$$\cot\frac{\pi}{2} = \frac{1 + m_2m_1}{m_2 - m_1} \Rightarrow 1 + m_1m_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad m_1m_2 = -1$$

കൂടാതെ, $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ഉം $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ എന്നിവ നേർരേഖകളുടെ പൊതുരൂപം എങ്കിൽ ഈ രണ്ടു നേർരേഖകളും ഒന്നിനൊന്ന് ലംബമായിരിക്കുന്നതിനുള്ള നിബന്ധന

$a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ ആകുന്നു.

കുറിപ്പ് : (i) $ax + by + c = 0$ എന്ന രേഖയ്ക്ക് ലംബമായ രേഖയുടെ പൊതുരൂപം $bx - ay = k$

(ii) (x_1, y_1) എന്ന ബിന്ദുവഴിയായും $ax + by + c = 0$ എന്ന രേഖയ്ക്ക് ലംബമായും ഉള്ള നേർരേഖയുടെ സമീകരണം, $bx - ay = bx_1 - ay_1$ ആകുന്നു.

രേഖയുടെ രൂപം	സമാന്തരമായിരിക്കുന്നതിനുള്ള നിബന്ധന	ലംബമായിരിക്കുന്നതിനുള്ള നിബന്ധന
$y = m_1x + c_1$ ഉം $y = m_2x + c_2$	$m_2 = m_1$	$m_1m_2 = -1$
$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ഉം $a_2x + b_2y + c_2 = 0$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ (അ) $a_1b_2 = a_2b_1$	$a_1a_2 + b_1b_2 = 0$

XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 315 14-02-2023 16:55:34

പ്രധാനപ്പെട്ട കുറിപ്പ്

$m_1 m_2 = -1$ എങ്കിൽ രണ്ടുരേഖകളും ലംബമായിരിക്കും. എന്നാൽ അതിന്റെ വിപരീതം ശരിയല്ല. എന്തെന്നാൽ രേഖകൾ അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമായാൽ ഫലം പ്രയോഗിക്കാൻ കഴിയുകയില്ല. ഇവ ലംബമായിരിക്കുമ്പോൾ പോലും $m_1 m_2 = -1$.

6.4.3 ഒരു നേർരേഖയുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനം

$ax + by + c = 0 \ (c \neq 0)$ എന്ന ഏതൊരു രേഖയും ഒരുതലത്തിനെ രണ്ടുഭാഗങ്ങളായി പിരിക്കുന്നു.

(i) ഒരു ഭാഗം മൂലബിന്ദുവിൽ അടങ്ങിയിരിക്കുന്നതായി ഇരുന്നാൽ അതിനെ ആ രേഖയുടെ മൂലബിന്ദുവിന്റെ വശം എന്നായും കണക്കാക്കുന്നു

(ii) മറ്റേ വശം മൂലബിന്ദുവിന്റെ വശത്തിൽ അടങ്ങിയിട്ടില്ലെങ്കിൽ ആ ഭാഗത്തെ മൂലബിന്ദു അല്ലാത്തവശം എന്നും വിളിക്കാവുന്നതാണ്.

ഒരു ബിന്ദു $P(x_1, y_1)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ $ax + by + c = 0, \ (c \neq 0)$, എന്ന നേർരേഖയ്ക്ക് മൂല ബിന്ദുവിനെ ഉള്ളടക്കിയ വശമായോ അല്ലെങ്കിൽ മൂലബിന്ദുവിനെ ഉള്ളടക്കാത്ത വശമായോ ഇരിക്കുക യാണെങ്കിൽ $ax_1 + by_1 + c$ കൂടാതെ c യ്ക്ക് ഒരേ ചിഹ്നം ആയിരിക്കും. അല്ലെങ്കിൽ എതിർ ചിഹ്നത്തിനു അനുസരിച്ച് സ്ഥിതിചെയ്യും.

$c > 0$ എങ്കിൽ, $P(x_1, y_1)$ എന്ന ബിന്ദു $ax + by + c = 0$ എന്ന നേർരേഖയ്ക്ക് മൂലബിന്ദുവിന്റെ മേൽ അല്ലെങ്കിൽ മൂലബിന്ദുവിനെ ഉള്ളടക്കാത്ത വശത്തിൽ സ്ഥിതിചെയ്യും. എങ്കിൽ, $ax_1 + by_1 + c$ എന്നിവ യഥാക്രമം ഒരു ധനസംഖ്യ അല്ലെങ്കിൽ ഒരു ഋണസംഖ്യ ആയിരിക്കും.

കുറിപ്പ് : $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ എന്ന സമീകരണത്തിലും $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ എന്ന സമീകരണത്തിലും $c_1 > 0$ യും $c_2 > 0$ യും ആയി മാറ്റി സ്ഥാപിച്ചതിനുശേഷം,

(i) $a_1a_2 + b_1b_2 < 0$ എങ്കിൽ ഈ നേർരേഖകൾക്കിടയിലുള്ള കോണം ന്യൂനകോൺ ആയിരിക്കും.

(ii) $a_1a_2 + b_1b_2 > 0$ എങ്കിൽ ഈ രണ്ടു നേർരേഖകൾക്കിടയിലുള്ള കോണം ബ്യൂബത്കോണം ആകുന്നു.

6.4.4 അകല സൂത്രങ്ങൾ

താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവ

(i) രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾക്കിടയിലുള്ള ദൂരം അകലം

(ii) ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്നും ഒരേ നേർരേഖയ്ക്ക് ഉള്ള അകലം

(iii) രണ്ടു സമാന്തരരേഖകൾക്കിടയിലുള്ള അകലം

(i) (x_1, y_1), (x_2, y_2)എന്നീ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾക്കിടയിലുള്ള അകലം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിനുള്ള സൂത്രം

$D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ (ചെറിയ ക്ലാസ്സുകളിൽ പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്)

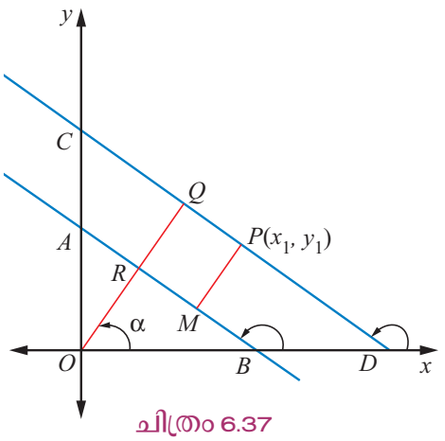
(ii) $P(x_1, y_1)$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്നും $ax + by + c = 0$ എന്ന നേർരേഖയ്ക്ക് ഇടയിലുള്ള അകലം $\left| \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$ ആകുന്നു.

തെളിവ്

AB എന്നത് തന്നിട്ടുള്ള നേർരേഖ $ax + by + c = 0$ ആകുന്നു. (6.20)

XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 316 14-02-2023 16:55:35

$P(x_1, y_1)$ എന്ന ബിന്ദു AB യ്ക്കു സമാന്തരമായി CD എന്ന നേർരേഖ വരയ്ക്കുക. അതുപോലെ $P(x_1, y_1)$ -യിൽ നിന്നും AB-യ്ക്ക് ലംബമായി ഒരു രേഖവര യ്ക്കുക. ആ രേഖ AB, M -എന്ന ബിന്ദുവിൽ ഛേദിക്കുന്നു. കൂടാതെ മൂലബിന്ദുവിൽ നിന്നും AB-യ്ക്ക് ലംബരേഖ വരയ്ക്കുക. അത് AB -യെ R-ലും, CD -യെ Q -ലും ഛേദിക്കുന്നു.



ചിത്രം 6.37

$\angle BOR = \alpha$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

ഇതിനെ ലംബരൂപം

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p,\ (p = OR) \qquad (6.21)$$

സമീകരണങ്ങൾ (6.20) ഉം (6.21), ഉം ഒരേ നേർരേഖയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. അതുകൊണ്ട് സമാനപദങ്ങളുടെ ഗുണാങ്കങ്ങൾ ആനുപാതികമാണ്.

$$\frac{\cos\alpha}{a} = \frac{\sin\alpha}{b} = \frac{p}{-c} \quad \Rightarrow \quad \frac{\cos\alpha}{a} = \frac{\sin\alpha}{b} = \frac{p}{-c} = \frac{\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\pm a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{\pm b}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{മറ്റുള്ളവ} \quad p = \frac{\pm c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

രേഖ CD -യുടെ ലംബ രൂപം.

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p', \quad (p' = OQ)$$

$P(x_1, y_1)$ എന്ന ബിന്ദു വഴിയേ ചെല്ലുന്നതു കൊണ്ട്

$$\Rightarrow \qquad p' = x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha \qquad (6.22)$$

$$\begin{aligned}
\text{ആവശ്യപ്പെട്ട ദൂരം} &= |PM| = |QR| = |OQ - OR| \\
&= |p' - p| \\
&= |(x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha) - p| \\
&= \left|\pm\frac{ax_1}{\sqrt{a^2+b^2}} \pm \frac{by_1}{\sqrt{a^2+b^2}} \pm \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| = \left|\pm\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|
\end{aligned}$$

$$\text{ആവശ്യപ്പെട്ട ദൂരം} = \left|\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$$

(iii) $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_1x + b_1y + c_2 = 0$ എന്നീ രണ്ടുസമാന്തര രേഖകൾക്കിടയിലുള്ള ദൂരം,

$$D = \frac{|c_2 - c_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

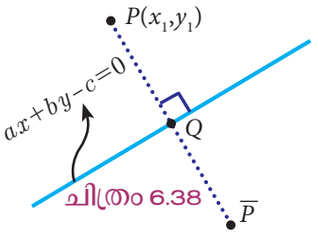
((x_1, y_1) എന്ന ബിന്ദുവിനു പകരം മൂലബിന്ദുവിനെ ഉപയോഗിച്ച് മുകളിലുള്ള ഫലം തെളിയിക്കാൻ സാധിക്കും)

XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 317 14-02-2023 16:55:37

കുറിപ്പ് :

- $P(x_1, y_1)$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്നും, $ax + by + c = 0$ എന്ന നേർരേഖയിൻമേൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്ന ലംബരേഖയുടെ ബിന്ദു Q -ന്റെ അക്ഷദൂരങ്ങൾ (പരാമട്രിക് രൂപം ഉപയോഗിച്ച്)

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = -\frac{(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2}$$ എന്ന് കാണാവുന്നതാണ്(6.23)



ചിത്രം 6.38

- $P(x_1, y_1)$ എന്ന ബിന്ദുവിന് $ax + by + c = 0$ എന്ന രേഖയുടെ പ്രതിബിംബത്തിന്റെ ബിന്ദു $\overline{P}$ -ന്റെ അക്ഷദൂരങ്ങളെ,

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = -\frac{2(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2}$$ -എന്നത് ഉപയോഗിച്ച് കാണാവുന്നതാണ് (6.24).

ഉദാഹരണം 6.22 $3x + 4y = 7$ എന്ന നേർരേഖ $(1, 2)$ എന്ന ബിന്ദുവഴി ചെല്ലുന്ന സമാന്തര രേഖയ്ക്കും, ലംബരേഖയ്ക്കും ഉള്ള സമീകരണം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$3x + 4y = 7$ എന്ന രേഖയ്ക്ക് സമാന്തരമായ രേഖയുടെ സമീകരണം

$$3x + 4y = 3x_1 + 4y_1$$

ഇവിടെ (x_1, y_1) എന്നത് $(1, 2)$ എന്നാകുന്നു.

$$\Rightarrow \quad 3x + 4y = 3(1) + 4(2)$$

$$3x + 4y = 11$$

കൂടാതെ, $3x + 4y = 7$ എന്ന നേർരേഖയ്ക്ക് ലംബമായ രേഖയുടെ സമീകരണം

$$4x - 3y = 4x_1 - 3y_1$$

മുകളിൽ പറഞ്ഞ സമീകരണം $(x_1, y_1) = (1, 2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ വഴി ചെല്ലുന്നു എങ്കിൽ

$$\Rightarrow \quad 4x - 3y = 4(1) - 3(2)$$

$$4x - 3y = -2$$

അതുകൊണ്ട് സമാന്തരരേഖ, ലംബരേഖ എന്നീ നേർരേഖകളുടെ സമീകരണം യഥാക്രമം

$$3x + 4y = 11$$

$$4x - 3y = -2 \text{ ഉം ആകുന്നു.}$$

ഉദാഹരണം 6.23 താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയ്ക്ക് നിർദ്ധാരണം കാണുക.

(i) $(5,4), (2,0)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾക്കിടയിലുള്ള ദൂരം

(ii) $5x + 12y - 3 = 0$ എന്ന രേഖയ്ക്കും $(1,2)$ എന്ന ബിന്ദുവിനും ഇടയിലുള്ള ദൂരം.

(iii) $3x + 4y = 12$, $6x + 8y + 1 = 0$ എന്നീ രേഖകൾക്കിടയിലുള്ള ദൂരം.

XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 318 14-02-2023 16:55:39

നിർദ്ധാരണം

(i) $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യഥാക്രമം $(5,\ 4)$, $(2,\ 0)$ എന്നിവയാണ്.

ബിന്ദുക്കൾക്കിടയിലുള്ള ദൂരം

$$D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

(ii) $ax + by + c = 0$ എന്ന ബിന്ദുവിനും (x_1, y_1) എന്ന നേർരേഖയ്ക്കും ഇടയിലുള്ള ദൂരം

$$D = \left| \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

അതായത്, $5x + 12y - 3 = 0$ എന്ന ബിന്ദുവിനും $(1\ ,\ 2)$ എന്ന രേഖയ്ക്കും തമ്മിലുള്ള ദൂരം

$$D = \left| \frac{5(1) + 12(2) - 3}{\sqrt{5^2 + 12^2}} \right| = 2$$

(iii) $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ എന്ന നേർരേഖയ്ക്കും $a_1x + b_1y + c_2 = 0$ എന്ന രേഖയ്ക്കും ഇടയിലുള്ള ദൂരം

$$D = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}$$

തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണങ്ങളെ $3x + 4y - 12 = 0$ യും $3x + 4y + \frac{1}{2} = 0$ യും എന്ന് എഴുതാം.

ഇവിടെ, $a_1 = 3,\ b_1 = 4,\ c_1 = -12,\ c_2 = \frac{1}{2}$

$$D = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \left| \frac{-12 - \frac{1}{2}}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \right| = \frac{25}{2 \times 5} = 2.5 \text{ മാത്രകൾ.}$$

ഉദാഹരണം 6.24 മൂലബിന്ദുവിൽ നിന്ന് $2x + y = 5$ എന്ന നേർരേഖയിൻമേൽ ഏറ്റവും അടുത്തുള്ള ബിന്ദു കണ്ടെത്തുക.

നിർദ്ധാരണം

മൂലബിന്ദുവിൽ നിന്നും $2x + y = 5$ എന്ന രേഖയിലേയ്ക്ക് വരയുന്ന ലംബരേഖയുടെ പാദ ബിന്ദുവാണ് ആവശ്യപ്പെട്ട ബിന്ദു. മൂലബിന്ദുവഴി ചെല്ലുന്നതും തന്നിട്ടുള്ള നേർരേഖയ്ക്ക് ലംബമായ രേഖ $x - 2y = 0$.

$2x + y = 5$, $x - 2y = 0$ എന്നീ രേഖകളുടെ നിർദ്ധാരണം $x = 2,\ y = 1$ അതുകൊണ്ട് ആവശ്യപ്പെട്ട ബിന്ദുക്കൾ $(2,\ 1)$ ആകുന്നു.

മറ്റൊരു രീതി

മുകളിൽ തന്നിട്ടുള്ള (6.23) എന്ന സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച്,

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = -\frac{(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2}$$

$$\frac{x - 0}{2} = \frac{y - 0}{1} = -\frac{(2(0) + 1(0) - 5)}{2^2 + 1^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = 1 \qquad \Rightarrow \quad (2,\ 1)$$

XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 319 14-02-2023 16:55:41

ഉദാഹരണം 6.25 $3x + 4y + 2 = 0,\ 5x + 12y - 5 = 0$ എന്നീ രണ്ടു നേർരേഖകൾക്കിടയിലുള്ള ന്യൂനകോണിന്റെ ദ്വിഭാജകത്തിന്റെ സമീകരണം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണങ്ങൾ $3x + 4y + 2 = 0,\ 5x + 12y - 5 = 0$ എന്നിവയാകുന്നു

ആദ്യമായി രണ്ടു സമീകരണങ്ങളുടെയും സ്ഥിരാങ്കത്തെ ധനസംഖ്യയാക്കി മാറ്റിയാൽ,

$3x + 4y + 2 = 0$ ഉം $-5x - 12y + 5 = 0$ ഉം ആകുന്നു.

രണ്ടുനേർരേഖകളുടെ ദ്വിഭാജകത്തിന്റെ സമീകരണം,

$$\frac{3x + 4y + 2}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \pm \frac{-5x - 12y + 5}{\sqrt{5^2 + 12^2}}$$

(ചലിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ നേർരേഖയിൽ നിന്നും തുല്യദൂരത്തിലായിരിക്കും)

$a_1 a_2 + b_1 b_2 = -15 - 48 < 0$, ആയതുകൊണ്ട്

രണ്ടുനേർരേഖകൾക്കിടയിലുള്ള ന്യൂനകോണുകളുടെ ദ്വിഭാജകങ്ങളുടെ സമീകരണം,

$$\frac{3x + 4y + 2}{5} = + \frac{(-5x - 12y + 5)}{13}$$

$$\Rightarrow \quad 64x + 112y + 1 = 0$$

ഉദാഹരണം 6.26 $x + y = 5$ എന്ന രേഖയിൻമേൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നതും $4x + 3y - 12 = 0$ എന്ന നേർരേഖയിൽ നിന്നും 2 മാത്രകൾ അകലെയുള്ള ബിന്ദുക്കളെ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$x + y = 5$ -എന്ന രേഖയിന്മേൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന ഏതൊരു ബിന്ദുവും $x = t,\ y = 5 - t$ യും ആകുന്നു.

$(t,\ 5 - t)$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്നും $4x + 3y - 12 = 0$ എന്ന നേർരേഖയ്ക്കിടയിലുള്ള ദൂരം 2 മാത്രകൾ,

എങ്കിൽ $$\frac{4(t) + 3(5 - t) - 12}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{|t + 3|}{5} = 2$$

$$\Rightarrow \quad t + 3 = \pm 10 \quad \Rightarrow \quad t = -13,\ t = 7$$

അതുകൊണ്ട് ആവശ്യപ്പെട്ട ബിന്ദുക്കൾ $(-13,\ 18)$ ഉം $(7,\ -2)$ ഉം ആകുന്നു

ഉദാഹരണം 6.27 ഒരു നിശ്ചിത ബിന്ദു $A(6,\ 8)$ എന്ന ബിന്ദുവഴിയെ കടന്നു ചെല്ലുന്ന നേർരേഖയിൻമേൽ മൂലബിന്ദുവിൽ നിന്നും ആ രേഖയ്ക്ക് വരയുന്ന ലംബരേഖയുടെ പാതത്തിന്റെ ലോക്കസിനെ കാണുക.

XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 320 14-02-2023 16:55:43

നിർദ്ധാരണം

$(x_1, y_1) = (6, 8)$ ഉം മൂലബിന്ദുവിൽ നിന്ന് (O-ൽ നിന്ന്) നേർരേഖയ്ക്ക് വരയപ്പെടുന്ന ലംബരേഖയുടെ പാതബിന്ദുവിന്റെ ലോക്കസിലുള്ള ബിന്ദു $P(h,k)$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

നിശ്ചിതബിന്ദു $A(6, 8)$ -വഴിയായും, m എന്ന ചായ്‌വ് ഉള്ളതുമായ നേർരേഖയുടെ സമീകരണം

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 8 = m(x - 6) \qquad (6.25)$$

ലംബരേഖയ OP-യുടെ ചായ്‌വ് $\left(\frac{k-0}{h-0}\right) = \frac{k}{h}$

ഇവിടെ OP എന്നത് സമീകരണം (6.25) -ന് ലംബമായിട്ടാണ് ഉള്ളത്.

$$m \times \left(\frac{k}{h}\right) = -1 \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{h}{k}$$

കൂടാതെ, $P(h,k)$ എന്നത് സമീകരണം (6.25) -ൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നതിനാൽ, $m = -\frac{h}{k}$ -യെ പ്രതിസ്ഥാപിക്കുക

$$k - 8 = -\frac{h}{k}(h - 6)$$

$$\Rightarrow \qquad k(k-8) = -h(h-6) \quad \Rightarrow \quad h^2 + k^2 - 6h - 8k = 0$$

$P(h,k)$ -യുടെ ലോക്കസ്

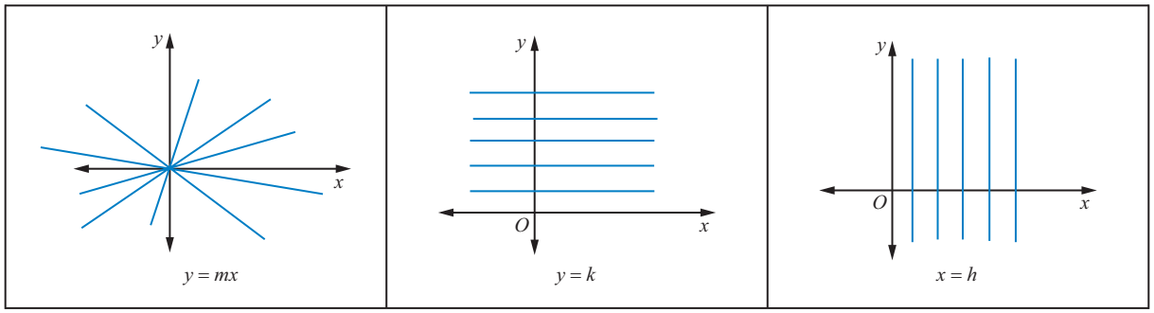
$$x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$$

ഒരു അർദ്ധവൃത്തത്തിന്റെ കോണം സമകോണം ആകുന്നു.

6.4.5 നേർരേഖകളുടെ കുടുംബം

എല്ലാ നേർരേഖകളും ഒരു നിർദ്ദിഷ്ട അവസ്ഥയെ പിൻതുടരുന്നു. അവയെ രേഖകളുടെ കുടുംബം എന്ന് വിളിക്കുന്നു. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ഉദാഹരണങ്ങളിൽ നിന്നും ചില രേഖകളുടെ കുടുംബത്തെ കാണാവുന്നതാണ്.

ഇവിടെ m, k കൂടാതെ h എന്നിവ അനിയന്ത്രിതമായ സ്ഥിരാങ്കമാണ്



ചിത്രം 6.39

$ax + by + c = 0$ എന്ന സമീകരണത്തിൽ a, b, c എന്നിവ മാറുന്ന അനിയന്ത്രിതമായിരിക്കുന്നു എന്നാണ് തോന്നുന്നത്. എന്നാൽ ശരിയതല്ല. സമീകരണത്തെ b കൊണ്ട് ഹരിക്കുക. (അല്ലെങ്കിൽ a, ഇവയിൽ ഏതാണ് പൂജ്യമല്ലാത്തത് അതിനെ എടുക്കുക),

$\frac{a}{b}x + y + \frac{c}{b} = 0$ ഇതിനെ $Ax + y + C = 0$ എന്നും എഴുതാവുന്നതാണ്.

XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 321 14-02-2023 16:55:44

ഇവിടെ $A = \frac{a}{b}$, $C = \frac{c}{b}$.

മുകളിൽ തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണത്തിന്റെ ചായ്‌വ്, അന്തഃഖണ്ഡരൂപത്തിൽ എഴുതുവാൻ സാധിക്കും. ഇതിൽ നിന്നും നേർരേഖയുടെ സമീകരണം രണ്ടു അനിയന്ത്രിത സ്ഥിരാങ്കങ്ങളെ ആശ്രയിച്ചിരിക്കും. കൂടാതെ ഈ അനിയന്ത്രിത സ്ഥിരാങ്കങ്ങളെ എണ്ണത്തിൽ കുറയ്ക്കാൻ സാധിക്കുകയില്ല എന്ന് തെളിയുന്നു. എന്നാൽ എല്ലാ നേർരേഖകളും രണ്ടു അനിയന്ത്രിതസ്ഥിരാങ്കങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കും. ഇതിന്റെ ഫലമായി ഒരു നേർരേഖയുടെ സമീകരണത്തെ തീരുമാനിക്കുവാൻ രണ്ടുനിബന്ധനകൾ ആവശ്യപ്പെടുന്നു.

നേർരേഖയുടെ സമീകരണത്തിൽ ഒരു നിബന്ധനയെ പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ രണ്ടു അനിയന്ത്രിതമായ സ്ഥിരാങ്കങ്ങൾക്കിടയിൽ ഒരു ബന്ധം കിട്ടുന്നു. ഇതിൽ ഒരു അനിയന്ത്രിത സ്ഥിരാങ്കം മറ്റൊരു അനിയന്ത്രിത സ്ഥിരാങ്കത്തെ തീരുമാനിക്കും. അതുകൊണ്ട് ഒരു നിബന്ധനയെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്ന നേർരേഖകൾ ഒരു അനിയന്ത്രിത സ്ഥിരാങ്കത്തെ നിർണയിക്കുന്നു. അതുകൊണ്ട് ഒരു വ്യവസ്ഥയെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്ന രേഖകളിൽ ഒരൊറ്റ ഏകപക്ഷീയമായ സ്ഥിരാങ്കം അടങ്ങിയിരിക്കുന്നു. അത്തരം രേഖകളെ ഏകപരാമീറ്റർ ഫാമിലി രേഖകൾ എന്നും അജ്ഞാത അനിയന്ത്രിതമായ സ്ഥിരാങ്കത്തെ പരാമീറ്റർ എന്നും പറയുന്നു.

$y = mx + b$ എന്ന സമീകരണം ഉപയോഗിച്ച് നേർരേഖയിലുള്ള മൂന്നുതരം കുടുംബങ്ങളെ വിശദീകരിക്കാം. ആദ്യത്തെ രണ്ടുതരം രേഖകളെ ഏക പരാമീറ്റർ കുടുംബങ്ങൾ എന്നും മൂന്നാമത്തെ തരത്തെ രണ്ടു പരാമീറ്റർ കുടുംബം എന്ന് വിളിക്കുന്നു. ഇതിൽ,

(i) **m എന്നത് അനിയന്ത്രിത സ്ഥിരാങ്കം ആയിരിക്കുമ്പോൾ b എന്നത് ഒരു നിശ്ചിത സ്ഥിരാങ്കം ആയിരിക്കും.**

(ii) **b എന്നത് അനിയന്ത്രിത സ്ഥിരാങ്കം ആയിരിക്കുമ്പോൾ m നിശ്ചിത സ്ഥിരാങ്കം ആയിരിക്കും.**

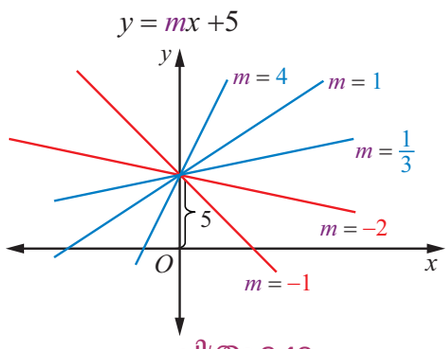
(iii) **m ഉം b യും അനിയന്ത്രിത സ്ഥിരാങ്കം ആകുമ്പോൾ.**

6.4.6 ഏകപരാമീറ്റർ കുടുംബം

(i) m എന്നത് അനിയന്ത്രിത സ്ഥിരാങ്കവും b എന്നത് നിശ്ചിത സ്ഥിരാങ്കവും എന്നിരിക്കട്ടെ.

$y = mx + b$ എന്ന ഒരു കൂട്ടം നേർരേഖ സമീകരണത്തിൽ $b = 5$ ആകുന്നു എന്നിരിക്കട്ടെ. ഇതിൽ m വ്യത്യസ്ത യഥാർത്ഥ മൂല്യങ്ങൾ കൊടുത്താൽ, അന്തഃഖണ്ഡത്തിൽ 5 മാത്രകൾ ഉള്ള y -രേഖകളുടെ കുടുംബത്തെ പ്രതിനിധീകരിക്കുവാൻ സാധിക്കും.

ഈ കൂട്ടത്തിൽ കുറെ അംഗങ്ങളെ ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. ഉദാഹരണമായി m -ന് $-1, -2, \frac{1}{3}, 1, 4$ എന്നീ മൂല്യങ്ങൾ നൽകിയിരിക്കുന്നു.



ചിത്രം 6.40

ഉദാഹരണം 6.28 $y = mx + 2$ എന്ന നേർരേഖാകുടുംബത്തിലെ രേഖകളും, $2x + 3y = 0$ എന്ന നേർരേഖ ഛേദിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ x -അക്ഷദൂരം, ചായ്‌വ് m എന്നിവ പൂർണ്ണസംഖ്യകളാണെങ്കിൽ ആ നേർരേഖാ കുടുംബത്തിലെ രേഖകളുടെ സമീകരണം കാണുക.

XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 322 14-02-2023 16:55:45

നിർദ്ധാരണം

$y = mx + 2$ എന്ന നേർരേഖാകുടുംബത്തിലെ രേഖകളുടെ സമീകരണം കാണുന്നതിന്, പരാമീറ്റർ m -ന്റെ മൂല്യം കാണേണ്ടതാണ്.

$y = mx + 2$, $2x + 3y = 10$ എന്നീ നേർരേഖകൾ ഛേദിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ

$\left(\frac{4}{3m+2}, \frac{10m+4}{3m+2}\right)$ എന്നിവയാകുന്നു.

ഇവിടെ, m ന്റെ മൂല്യവും x -അക്ഷദൂരവും പൂർണ്ണാങ്കം, എന്ന് തന്നിട്ടുണ്ട്.

അതുകൊണ്ട് എന്ന x -ന്റെ മൂല്യം $\frac{4}{3m+2}$ ഒരു പൂർണ്ണാങ്കം ആയതുകൊണ്ട്.

$\Rightarrow$ $3m + 2$ എന്നത് 4 -ന്റെ ഹരണമാണ്.

(അതായത്, $\pm 1, \pm 2$ ഉം ± 4)

$3m + 2 = \pm 1$, $3m + 2 = \pm 2$, $3m + 2 = \pm 4$ ഒരു പൂർണ്ണാങ്കമാണ്

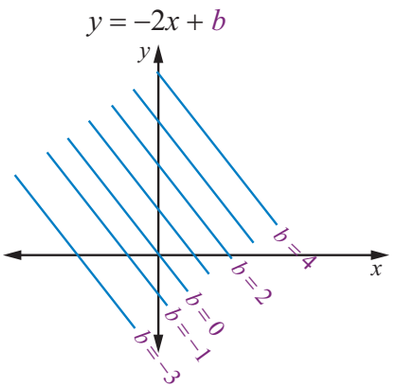
ഇവിടെ മുകളിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ളവ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുമ്പോൾ,

$m = \{-2, -1, 0\}$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

ആവശ്യപ്പെട്ട സമീകരണങ്ങൾ $y = -2x + 2, y = -x + 2$, $y = 2$ എന്നിവയാകുന്നു.

(ii) b അനിയന്ത്രിതവും m നിശ്ചിത സ്ഥിരാങ്കവുമായിരിക്കുമ്പോൾ.

m എന്ന നിശ്ചിത സ്ഥിരാങ്കമായ $m = -2$ ആയാൽ സമീകരണം $y = mx + b$ എന്നത് $y = -2x + b$ എന്ന് മാറുന്നു. b -യുടെ വ്യത്യസ്ത മൂല്യങ്ങൾക്ക് ചായ്വ് -2 ഉള്ള നേർരേഖാകുടുംബത്തിനു ലഭിക്കുന്നതാണ്. അവയിൽ ചിലവയുടെ കൂട്ടു ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഉദാഹരണമായി, b -യുടെ മൂല്യം $-3, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ എന്ന് ഇരിക്കുമ്പോൾ നേർരേഖകളുടെ കൂട്ടത്തിൽ ചില രേഖകൾ ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.



ചിത്രം 6.41

രണ്ടു സമാന്തര രേഖകളുടെയും ലംബരേഖകളുടെയും കുടുംബത്തിന്റെ (കൂട്ടത്തിന്റെ) ചില പ്രത്യേകതയെ പറ്റി നമുക്ക് നോക്കാം.

സമാന്തരരേഖകളുടെ കുടുംബം : $ax + by + c = 0$ എന്ന നേർരേഖയ്ക്ക് സമാന്തരരേഖയുടെ രൂപം $ax + by + \lambda = 0$ എന്ന രൂപത്തിലായിരിക്കും.

λ യുടെ വ്യത്യസ്ത മൂല്യങ്ങൾക്ക് $ax + by + c = 0$ -യ്ക്ക് സമാന്തരമായ വ്യത്യസ്ത രേഖകൾ ലഭിക്കുന്നതാണ്.

ലംബരേഖകളുടെ കുടുംബം : $ax + by + c = 0$ എന്ന രേഖയ്ക്ക് ലംബമായ രേഖയുടെ രൂപം $bx - ay + \lambda = 0$ എന്നായിരിക്കും.

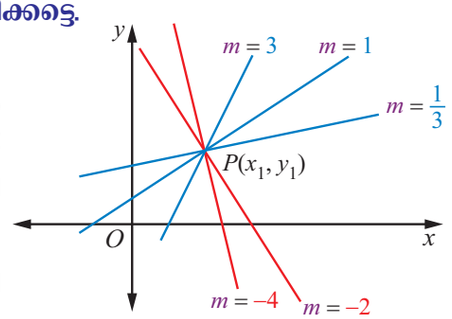
λ -യുടെ വ്യത്യസ്ത മൂല്യങ്ങൾക്ക് $ax + by + c = 0$ എന്ന രേഖയ്ക്ക് ലംബമായ രേഖകൾ ലഭിക്കുന്നു.

XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 323 14-02-2023 16:55:46

6.4.7 രണ്ടു പരാമീറ്ററുകൾ കുടുംബം

(iii) m ഉം b യും അനിയന്ത്രിതമായ സ്ഥിരാങ്കങ്ങൾ എന്നിരിക്കട്ടെ.

$y = mx+b$ -യിൽ m, b യും അനിയന്ത്രിതസ്ഥിരാങ്കമാണ്. നമുക്ക് കുടുംബത്തെ ഗ്രാഫിൽ എളുപ്പത്തിൽ ദൃശ്യവൽക്കരിക്കാനാവില്ല. എന്നാൽ, m -ന്റെ വ്യത്യസ്ത ധനസംഖ്യ മൂല്യങ്ങൾക്ക് $y-y_1 = m(x-x_1)$ എന്ന രൂപത്തിൽ ഗ്രാഫിനെ വരയുവാൻ സാധിക്കും. ഉദാഹരണമായി, $x = x_1$ എന്ന ലംബരേഖപോകെ (x_1, y_1) എന്ന നിശ്ചിതബിന്ദുവഴി ചൊലവ്ലുന്നു. $-2, -4, \frac{1}{3}, 1, 3$ എന്നീ m-ന്റെ മൂല്യങ്ങൾക്കുള്ള നേർരേഖകളെ ചിത്രത്തിൽ കാണാം.



ചിത്രം 6.42

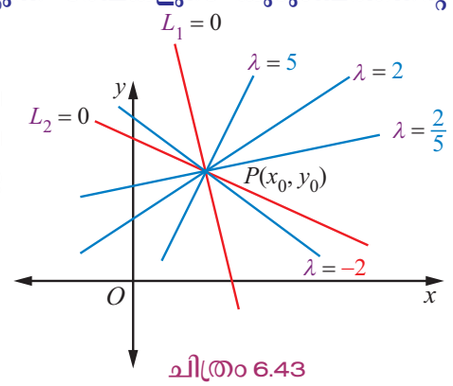
6.4.8 രണ്ടു നേർരേഖകൾ ഛേദിക്കുന്ന ബിന്ദുവഴി ചെല്ലുന്ന രേഖകളുടെ കുടുംബത്തിന്റെ സമീകരണം

$L_1 = a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $L_2 = a_2x + b_2y + c_2 = 0$ എന്നിവ രണ്ടു നേർരേഖകളുടെ സമീകരണമാകുന്നു. ഈ രണ്ടു നേർരേഖകളും ഛേദിക്കുന്ന ബിന്ദുവഴി ചെല്ലുന്ന രേഖയുടെ കുടുംബത്തിന്റെ സമീകരണം

$L_1 + \lambda L_2 = 0$ ആകുന്നു.

$$(a_1x + b_1y + c_1) + \lambda(a_2x + b_2y + c_2) = 0$$

ഇവിടെ λ എന്നത് പരാമീറ്ററാകുന്നു. λ-യുടെ മൂല്യം അനുസരിച്ച് വ്യത്യസ്തരേഖകളുടെ സമീകരണം ലഭിക്കുന്നു.



ചിത്രം 6.43

ഉദാഹരണം 6.29 $3x + 2y + 5 = 0$, $3x - 4y + 6 = 0$ എന്നീ നേർരേഖകൾ ഛേദിക്കുന്ന ബിന്ദുവഴിയായും $(1, 1)$ എന്ന ബിന്ദുവഴിയായും ചെല്ലുന്ന നേർരേഖയുടെ സമീകരണം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

രണ്ടു രേഖകൾ ഛേദിക്കുന്ന ബിന്ദുവഴി ചെല്ലുന്ന രേഖയുടെ കുടുംബത്തിന്റെ സമീകരണം

$(a_1x + b_1y + c_1) + \lambda(a_2x + b_2y + c_2) = 0$ എന്ന രൂപത്തിലാണ്.

അതുകൊണ്ട്, $(3x + 2y + 5) + \lambda(3x - 4y + 6) = 0$

ആവശ്യപ്പെട്ട രേഖ $(1, 1)$ എന്ന ബിന്ദു വഴി പോകുന്നതുകൊണ്ട് മുകളിൽ തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണത്തെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്നു.

അതുകൊണ്ട്, $\{3 + 2(1) + 5\} + \lambda\{3(1) - 4(1) + 6\} = 0 \Rightarrow \lambda = -2$

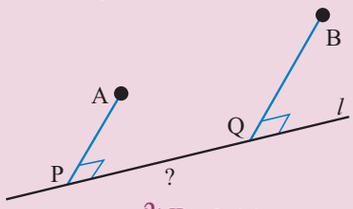
$\Rightarrow \lambda = -2$ -നെ മുകളിൽ തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണത്തിൽ പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ,

$3x - 10y + 7 = 0$ എന്ന സമീകരണം ലഭിക്കുന്നു.

(മുകളിൽ തന്ന ഉദാഹരണത്തെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ ഉപയോഗിച്ചുള്ള സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച് തെളിയിക്കുക)

XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 324 14-02-2023 16:55:48

ഉദാഹരണം 6.30 A, B എന്നീ രണ്ടു ഗ്രാമങ്ങൾക്ക് മെച്ചപ്പെട്ട വൈദ്യുതി വിതരണം ചെയ്യുന്നതിന് സർക്കാർ തീരുമാനിച്ചു. അതിനായി സബ്സ്റ്റേഷൻ നിർമ്മിക്കേണ്ടതുണ്ട്. ആ സബ്സ്റ്റേഷൻ l എന്ന നേർരേഖയിൻമേലാണുള്ളത്. A, B -എന്ന രേഖയ്ക്കീലംബമായി l എന്നിവയുടെ പാദത്തിൽ നിന്ന് P, Q എന്നീ ഗ്രാമങ്ങളിലേക്കുള്ള ദൂരം യഥാക്രമം 3 കി.മീറ്ററും, 5 കി. മീറ്ററും ആകുന്നു. P, Q -എന്നിവയ്ക്കിടയിലുള്ള ദൂരം 6 കി. മീറ്ററും എങ്കിൽ,

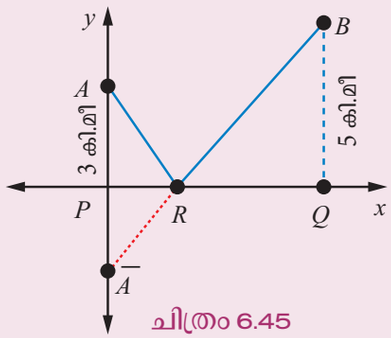


ചിത്രം 6.44

(i) രണ്ടു ഗ്രാമങ്ങളെയും സബ്സ്റ്റേഷനുമായി ബന്ധിപ്പിക്കുന്ന ഏറ്റവും നീളം കുറഞ്ഞ കമ്പി (കേബിൾ) ഏതാണ്

(ii) കേബിൾ കമ്പി ചെല്ലുന്ന പാതയുടെ സമീകരണം കാണുക? (പ്രതിഫലന തത്വവുമായി അറിവ് ഉപയോഗിക്കുന്നത് ഈ പ്രശ്നം പരിഹരിക്കാനുള്ള സമീപനത്തെ അനവദിക്കുന്നു).

നിർദ്ധാരണം



ചിത്രം 6.45

PQ-നെ ബന്ധിപ്പിക്കുന്ന നേർരേഖയെ x -അക്ഷമായും,

PA -യെ ബന്ധിപ്പിക്കുന്ന നേർരേഖയെ y -അക്ഷമായും,

P -എന്ന ബിന്ദുവിനെ മൂലബിന്ദുവായും കരുതുക.

അതുകൊണ്ട്, $P(0, 0)$, $A(0, 3)$ യും $B(6, 5)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങളായി ലഭിക്കുന്നു.

x -അക്ഷത്തിലെ A -യുടെ പ്രതിബിംബം $\overline{A}$ എങ്കിൽ, $\overline{A}$ എന്നത് $(0, -3)$ ആകുന്നു.

$\overline{A}B$ ഉം x -അക്ഷവും ഛേദിക്കുന്ന ബിന്ദുവാണ് R.

AR, BR എന്നിവയാണ് കേബിൾ കമ്പി പോകുന്ന പാത.

ഏറ്റവും നീളം കുറഞ്ഞ കമ്പി

$$= AR + BR = \overline{A}R + RB = \overline{A}B$$

$$= \sqrt{(6-0)^2 + (5+3)^2} = 10 \text{ കി.മീ}$$

$\overline{A}B$ -യുടെ സമീകരണം $y - (-3) = \left(\frac{5-(-3)}{6-0}\right)(x-0)$

$$4x - 3y = 9$$

$y = 0$ എങ്കിൽ $R\left(\frac{9}{4}, 0\right)$ ആകുന്നു.

സബ്സ്റ്റേഷൻ P -യിൽ നിന്നും 2.25 കി.മീറ്റർ ദൂരത്തിലായിരിക്കും.

$R\left(\frac{9}{4}, 0\right)$, $A(0, 3)$ എന്നീ രണ്ടുബിന്ദുക്കളെ യോചിപ്പിക്കുന്ന

RA -യുടെ സമീകരണം $4x + 3y = 9$

RA, RB (അല്ലെങ്കിൽ $\overline{A}B$) എന്നീ രണ്ടു കേബിൾ കമ്പികളുടെ സമീകരണം

$4x + 3y = 9$ ഉം $4x - 3y = 9$ യും ആകുന്നു.

XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 325 14-02-2023 16:55:49

ഉദാഹരണം 6.31 ഒരു കാർ വാടകയ്ക്ക് കൊടുക്കുന്ന സ്ഥാപനത്തിന് 1.8 കി.മീറ്റർ യാത്ര ചെയ്യാൻ ₹25 ഈടാക്കിയിരിക്കുന്നു. അതിൽ കൂടുതൽ ദൂരം യാത്ര ചെയ്യാൻ ഓരോ കിലോമീറ്ററിനും ₹12 ഈടാക്കുന്നു. യാത്രാദൂരം x കിലോമീറ്ററിനും, വാടക ₹y -യ്ക്കും ഉള്ള ബന്ധത്തിന്റെ സമീകരണം കാണുക? കൂടാതെ 15 കി.മീറ്റർ യാത്രചെയ്തതിനുള്ള വാടക കാണുക?

നിർദ്ധാരണം

1.8 കി.മീറ്റർ വരെ നിശ്ചിത വാടക ₹25 ആകുന്നു. അതുകൊണ്ട് അനുബന്ധ സമവാക്യം

$$y = 25, \quad 0 \le x \le 1.8 \qquad (6.26)$$

1.8-കിലോമീറ്ററിനുശേഷം ഓരോ അധിക കി.മീറ്ററിനും ₹12. ഉം ആകുന്നു. അനുബന്ധസമവാക്യം

$$y = 25 + 12(x - 1.8), \; x > 1.8 \qquad (6.27)$$

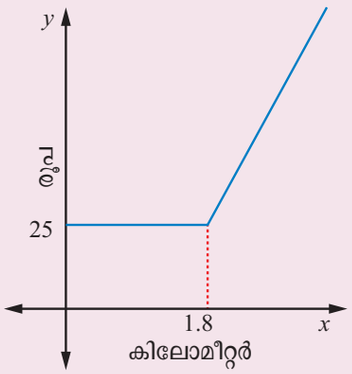
(6.26), (6.27) ന്റെയും സംയോജിത സമവാക്യം,

$$y = \begin{cases} 25, & 0 \le x \le 1.8 \\ 25 + 12(x - 1.8) & x > 1.8 \end{cases} \qquad (6.28)$$

$x = 15$ ആകുമ്പോൾ (6.27) -നിന്നും നമുക്ക്

$$y = 25 + 12(15 - 1.8) = 183.40.$$

$\therefore$ 15 കിലോമീറ്റർ സഞ്ചരിച്ചതിന്റെ വാടക ₹183.40 ആകുന്നു.



ചിത്രം 6.46



ഒരു കോൾ ടാക്സി ബുക്ക് ചെയ്യുന്നതിന് നിങ്ങളുടെ മൊബൈൽ ഫോണിൽ നിന്ന് ബന്ധിപ്പിക്കുകയാണെങ്കിൽ ടാക്സി സേവനം ഉള്ളിടത്തോളം കാലം അത് നിങ്ങളുടെ പ്രദേശത്ത് ലഭ്യമായ ആദ്യത്തെ ക്യാബിലേയ്ക്ക് യാന്ത്രികമായി ബന്ധിപ്പിക്കുന്നു. പിന്നീട് നമ്മുടെ ഇഷ്ടത്തിനനുസരിച്ച് നാം വിളിക്കുന്ന സ്ഥലത്ത് വന്ന് നമുക്ക് പോകേണ്ട സ്ഥലത്തേയ്ക്ക് വഴി കാണിച്ചു തരും. ഇപ്രകാരം നാം വിളിച്ച സ്ഥലം, പോകേണ്ട സ്ഥലം, വഴി, ദൂരം,..... എല്ലാം അറിയുന്നതിന് ഏതു തരത്തിലുള്ള അക്ഷദൂരത്തെ ഉപയോഗിക്കേണ്ടതാണ്?

ഇത് അറിയുവാൻ : www.mapbox.com എന്നത് ഉപയോഗിക്കുക.

ഉദാഹരണം 6.32 (3, 0), (5, 2) എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോചിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തെ (3, 0)-ൽ നിന്നും 15° യിൽ ഘടികാരദിശയിൽ ചുഴറ്റുമ്പോൾ ഉണ്ടാകുന്ന നേർരേഖയുടെ സമവാക്യം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

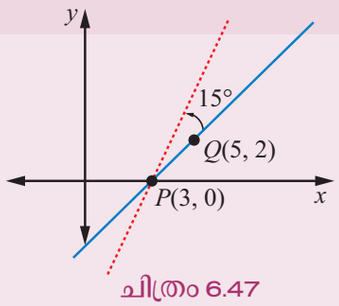
$P(3, 0)$, $Q(5, 2)$ എന്നിവ തന്നിട്ടുള്ള ബിന്ദുക്കൾ എന്നിരിക്കട്ടെ.

$$PQ \text{ -ന്റെ ചായ്വ്} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{2 - 0}{5 - 3} = 1$$

$$PQ \text{ -ന്റെ കോണം} = \tan^{-1}(1)$$

$$= \frac{\pi}{4} \text{ അല്ലെങ്കിൽ } 45^\circ$$



ചിത്രം 6.47

XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 326 14-02-2023 16:55:50

പുതിയ ദിശയിലുള്ള കോണിന്റെ ചായ്‌വ് $= m = tan(45^\circ + 15^\circ)$

$= tan\,60^\circ = \sqrt{3}$

$(3, 0)$ എന്ന ബിന്ദുവഴിയായും $\sqrt{3}$ -ചായ്‌വും ഉള്ള നേർരേഖയുടെ സമീകരണം

$$y - 0 = \sqrt{3}(x - 3)$$

$$\sqrt{3}x - y - 3\sqrt{3} = 0$$

അഭ്യാസം 6.3

1. $3x + 2y + 9 = 0$, $12x + 8y - 15 = 0$ എന്നീ രേഖകൾ സമാന്തരമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

2. $5x - 4y + 3 = 0$ എന്ന നേർ രേഖയ്ക്ക് സമാന്തരമായും, x -അന്തഖണ്ഡം 3 ഉം ഉള്ള നേർരേഖയുടെ സമീകരണം കാണുക.

3. $4x+3y+4=0$ എന്ന നേർരേഖയ്ക്കും (i) $(-2, 4)$ (ii) $(7, -3)$ എന്ന ബിന്ദുവിനും ഇടയ്ക്കുള്ള ദൂരം കാണുക.

4. $(1, -1)$ എന്ന ബിന്ദുവഴി കടന്നുചെല്ലുന്നതും

   (i) $x + 3y - 4 = 0$- എന്ന രേഖയ്ക്ക് സമാന്തരമായും

   (ii) $3x + 4y = 6$-എന്ന രേഖയ്ക്ക് ലംബമായും ഉള്ള നേർരേഖയുടെ സമീകരണം കാണുക.

5. ഒരു സമഭുജ സമാന്തരികത്തിന്റെ ഒരു ശീർഷം $(-4, 7)$, ഉം ഒരു വികർണത്തിന്റെ സമീകരണം $5x - y + 7 = 0$ ഉം ആകുന്നു. എങ്കിൽ മറ്റെ വികർണ്ണത്തിന്റെ സമീകരണം കാണുക.

6. $4x - y + 3 = 0$, $5x + 2y + 7 = 0$ എന്നീ നേർരേഖകൾ ഛേദിക്കുന്ന ബിന്ദുവഴിയെ ചെല്ലുന്നതും

   (i) $(-1 , 2)$ എന്ന ബിന്ദുവഴിയെയും

   (ii) $x - y + 5 = 0$ എന്ന രേഖയ്ക്ക് സമാന്തരമായും

   (iii) $x - 2y + 1 = 0$ എന്ന രേഖയ്ക്ക് ലംബമായും ഉള്ള നേർരേഖറയുടെ സമീകരണം കാണുക.

7. $12x + 5y + 2 = 0$ എന്ന നേർരേഖയ്ക്ക് സമാന്തരമായും, $(1, -1)$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്നും 1 മാത്ര ദൂരെയുള്ളതും ആയ രണ്ടു രേഖകളുടെ സമീകരണം കാണുക.

8. $3x + 4y - 6 = 0$ എന്ന നേർരേഖയ്ക്ക് ലംബമായതും, $(2, 1)$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്നും 4 മാത്രകൾ അകലെയുള്ളതുമായ നേർരേഖകളുടെ സമീകരണം കാണുക.

9. $2x + 3y = 10$ എന്ന രേഖയ്ക്ക് സമാന്തരമായതും അന്തഃഖണ്ഡങ്ങളുടെ തുക 15 ഉള്ളതുമായ നേർരേഖയുടെ സമീകരണം കാണുക.

10. $(-10, -2)$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്നും $x + y - 2 = 0$ എന്ന രേഖയ്ക്ക് വരയുന്ന ലംബരേഖയുടെ നീളത്തെയും അതിന്റെ പാദത്തിന്റെ ബിന്ദുക്കളെയും കാണുക.

11. $x\sec\theta + y\,\mathrm{cosec}\,\theta = 2a$, $x\cos\theta - y\sin\theta = a\cos 2\theta$ എന്നീ നേർരേഖകൾക്ക് മൂലബിന്ദുവിൽ നിന്നും വരച്ച ലംബരേഖകളുടെ അകലങ്ങൾ യഥാക്രമം p_1 , p_2 ഉം ആകുന്നു. എങ്കിൽ $p_1^2 + p_2^2 = a^2$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 327 3/24/2023 12:12:40 PM

12. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള സമാന്തര രേഖകൾക്കിടയിലുള്ള അകലം കാണുക.

(i) $12x + 5y = 7$, $12x + 5y + 7 = 0$

(ii) $3x - 4y + 5 = 0$ ഉം $6x - 8y - 15 = 0$

13. $3x + 4y - 12 = 0$ എന്ന നേർരേഖയ്ക്ക്

(i) ലംബമായ (ii) സമാന്തരമായ നേർരേഖകളുടെ കൂട്ടത്തെ (കുടുംബത്തെ) കാണുക.

14. $A(2, 0)$, $B(3, 1)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോചിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡം ബിന്ദു A -യിൽ നിന്നും എതിർ ഘടികാര ദിശയിൽ 15° കോണിൽ തിരിയുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന നേർരേഖയുടെ പുതിയ സ്ഥാനത്തിന്റെ സമീകരണം കാണുക.

15. $(1, 2)$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്നും വരുന്ന ഒരു പ്രകാശ കിരണം x -അക്ഷത്തിൻമേലുള്ള A-എന്ന ബിന്ദുവിൽ പ്രതിഫലിച്ച്, $(5, 3)$ എന്ന ബിന്ദുവഴിയെ ചെല്ലുന്നു എങ്കിൽ A-യുടെ അക്ഷദൂരങ്ങൾ കാണുക.

16. $5x = y + 7$ എന്ന രേഖയ്ക്ക് ലംബമായി വരയുന്ന ഒരു രേഖ അക്ഷങ്ങളുമായി ഏർപ്പെടുത്തുന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം 10 ചതുരശ്രമാത്രയാകുന്നു. എങ്കിൽ ആ രേഖയുടെ സമീകരണം കാണുക.

17. $x + 2y - 9 = 0$ എന്ന നേർരേഖയെകുറിച്ച് $(-2\ ,\ 3\ )$ എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ പ്രതിബിംബ ബിന്ദു കാണുക.

18. ഒരു തനിപകർപ്പിന്റെ ആദ്യത്തെ 10 പ്രതികളിൽ ഒരു പ്രതിയ്ക്ക് ₹1.50 വീതം വിലകൽപ്പിക്കുന്നു. 10 പ്രതികൾക്കു മേൽ അടുത്തടുത്ത പ്രതികൾക്ക് ₹1 വീതം വില കൽപ്പിക്കുന്നു. x നെ പ്രതികളുടെ എണ്ണമായും, y യെ പകർപ്പിന്റെ ആകെ വിലയായും കണക്കാക്കുന്നു എന്നിരിക്കട്ടെ.

(i) x -ന്റെ മൂല്യം 0 മുതൽ 50 വരെയുള്ള പ്രതികളുടെ വില കണക്കാക്കുന്ന ഗ്രാഫ് വരയുക.

(ii) 40 പ്രതികൾ എടുക്കാനാകുന്ന ചിലവ് എത്രയാണ് എന്ന് കണക്കാക്കുക?

19. $y = 5x + b$ എന്ന രേഖയിൽ b എന്നത് അനിയന്ത്രിത സ്ഥിരാങ്കവും $3x - 4y = 6$ എന്ന രേഖയുമായി ഛേദിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ x -അക്ഷദൂരവും, b പൂർണ്ണാങ്കവും ആണ് എങ്കിൽ ആ നേർരേഖകളുടെ കൂട്ടത്തിൽ കുറഞ്ഞത് രണ്ടു നേർരേഖകളുടെ സമീകരണം കാണുക.

20. $y = mx - 3$ എന്ന നേർരേഖകളുടെ കൂട്ടത്തിലുള്ള രേഖകളും $x - y = 6$ എന്ന നേർരേഖ ഛേദിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ x -അക്ഷദൂരം, ചായ്വ് m ഒരു പൂർണ്ണാങ്കവുമാണെങ്കിൽ, $y = mx - 3$ നേർരേഖാ കൂട്ടത്തിലെ രേഖകളുടെ സമീകരണം കാണുക.

6.5 ഒരു ജോടി നേർരേഖകൾ

രണ്ടോ അതിൽ കൂടുതലോ നേർരേഖകളുടെ സമീകരണങ്ങളെ ഒന്നു ചേർത്ത് ഏറ്റവും കൂടിയ ഘാതമുള്ള സമീകരണമായി ആവിഷ്ക്കരിക്കുവാൻ സാധിക്കും. x, y -എന്നിവയിലെ ഒരു സമവാക്യം ഒരു നേർരേഖയെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു എന്ന് നമുക്ക് മനസ്സിലാക്കാം. രണ്ടു രേഖീയ സമീകരണങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം ഒരു ജോടി നേർരേഖയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. അതിനാൽ x, y -എന്നിവയിലെ ഒരു ദ്വിഘാത സമവാക്യമായി നേർരേഖകളെ പറ്റി നാം പഠിക്കുന്നു.

XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 328 14-02-2023 16:55:52

$L_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $L_2 \equiv a_2x + b_2y + c_2 = 0$ എന്നിവ രണ്ടും നേർരേഖകളുടെ പ്രത്യേക സമവാക്യമാകുന്നു. $P(x_1, y_1)$ എന്ന ബിന്ദു L_1 -ൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുകയാണെങ്കിൽ $L_1 = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്നു.

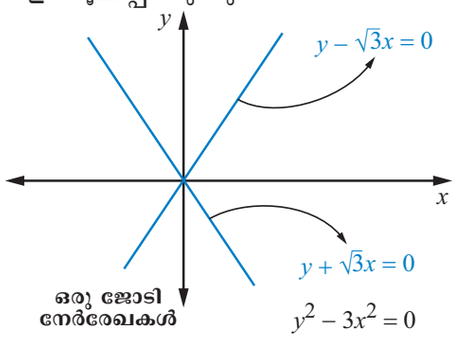
ഇതുപോലെ, $P(x_1, y_1)$ എന്ന ബിന്ദു L_2 -ൽ സ്ഥിതിചെയ്യുകയാണെങ്കിൽ, $L_2 = 0$ എന്ന സമീകരണത്തെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്നു.

$P(x_1, y_1)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ $L_1 = 0$ അല്ലെങ്കിൽ $L_2 = 0$ ഇവയിൽ ഏതെങ്കിലും ഒരു സമീകരണത്തിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുകയാണെങ്കിൽ, $(L_1)\ (L_2) = 0$ എന്ന സമീകരണങ്ങളെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്നു. കൂടാതെ വേറൊരു ബിന്ദുവും $L_1 . L_2 = 0$ -എന്നതിനെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്നില്ല. അതുകൊണ്ട്, $L_1 . L_2 = 0$ എന്നത് $L_1 = 0, L_2 = 0$ എന്നീ രേഖകളിൽ ഒരു ജോടി നേർരേഖകളെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണമായി,

$y + \sqrt{3}x = 0$ ഉം $y - \sqrt{3}x = 0$.

മുകളിൽ പറഞ്ഞിട്ടുള്ള രണ്ടു സമീകരണങ്ങളും മൂലബിന്ദുവഴിയെ കടന്നുപോകുന്നവയാകുന്നു. രണ്ടു നേർരേഖകളുടെ ചായ്‌വുകളും യഥാക്രമം $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ എന്ന് കുറിക്കുന്നു.



ചിത്രം 6.48

ഈ രണ്ടു സമീകരണങ്ങളെയും സംയോജന സമീകരണം ഉപയോഗിച്ചാൽ

$$(y + \sqrt{3}x)(y - \sqrt{3}x) = 0$$

$$\Rightarrow \quad y^2 - 3x^2 = 0 \text{ എന്നത് ഒരു ജോടി സമീകരണത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.}$$

6.5.1 മൂലബിന്ദുവഴിയെ ചെല്ലുന്ന ഒരു ജോടി നേർരേഖകൾ

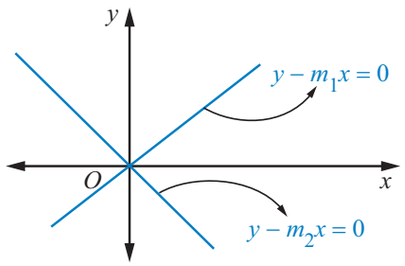
നാം ആദ്യമായി ഒരു എളിയ രീതിയിലുള്ള സമീകരണങ്ങളെ പരിഗണിക്കാം. രണ്ടു രേഖകളും മൂലബിന്ദുവഴി കടന്നുപോകുന്നവയാണെങ്കിൽ സമീകരണം

$y - m_1x = 0$, $y - m_2x = 0$ ആകുന്നു.

രണ്ടു നേർരേഖകളുടെയും സംയോജനസമീകരണം

$$(y - m_1x)(y - m_2x) = 0 \qquad (6.29)$$

$$y^2 - (m_1 + m_2)xy + m_1m_2x^2 = 0$$



ഒരു ജോടി നേർരേഖകൾ
ചിത്രം 6.49

മുകളിൽ തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണത്തെ $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ എന്നത് ഘാതം രണ്ടു ഉള്ള ഒരു സമാഘാത സമീകരണമായി എഴുതാം. ഇവിടെ ഓരോ അംഗത്തിന്റെയും ഘാതം രണ്ടാകുന്നു. കൂടാതെ.

$$m_1 + m_2 = \frac{-2h}{b}, \quad m_1m_2 = \frac{a}{b} \text{ യും ആകുന്നു.}$$

കുറിപ്പ് : സമഘാത സമീകരണത്തിന്റെ രേഖകൾ മൂലബിന്ദുവഴി കടന്നു പോകുന്നു

ഉദാഹരണം 6.33 $5x^2 + 6xy + y^2 = 0$ എന്ന സമീകരണത്തെ ഘടകങ്ങളാക്കുക (വിഭജിക്കുക).

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണം $5x^2 + 6xy + y^2 = 0$

സമീകരണത്തെ ഘടകങ്ങളാക്കുമ്പോൾ,

$$5x^2 + 5xy + xy + y^2 = 0$$

XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 329 14-02-2023 16:55:54

$$5x(x+y)+y(x+y) = 0$$

$$(5x+y)(x+y) = 0$$

എങ്കിൽ ആവശ്യമുള്ള നേർരേഖകൾ, $5x+y=0$, $x+y=0$

മറ്റൊരു രീതി

സമീകരണം സമഘാതമായതിനാൽ സമീകരണത്തെ വിഭജിക്കുക

$$5x^2+6xy+y^2 = 0$$

രണ്ടുവശവും x^2 കൊണ്ട് ഹരിക്കുക,

$$5+6\left(\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0$$

$$\frac{y}{x} = m \text{ (സമഘാത സമീകരണത്തിന്റെ ചായ്വ്)}$$

മുകളിൽ പറഞ്ഞ സമീകരണത്തെ

$$m^2+6m+5 = 0$$

ഘടകങ്ങളാക്കുക,

$$(m+1)(m+5) = 0$$

$$\Rightarrow \quad m=-1, m=-5$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y}{x}=-1, \frac{y}{x}=-5$$

ആവശ്യപ്പെട്ട സമീകരണം $x+y=0$, $5x+y=0$

ഉദാഹരണം 6.34 $2x^2+2xy+y^2=0$ എന്ന സമീകരണത്തെ സാധിക്കുമെങ്കിൽ ഒരു ജോടി നേർരേഖാ സമീകരണമായി വിഭജിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$2x^2+2xy+y^2=0$ തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണം സമഘാത സമീകരണമായതിനാൽ, x^2 കൊണ്ട് ഹരിക്കുകയും

$\frac{y}{x}=m$ നെ പ്രതിസ്ഥാപിക്കുകയും ചെയ്യുക, $m^2+2m+2=0$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

ഇവിടെ m -ന്റെ മൂല്യം യഥാർത്ഥമല്ലാത്തതുകൊണ്ട് $(\because \Delta = B^2-4AC = 4-8 = -4 < 0)$ (സാങ്കല്പം),

$2x^2+2xy+y^2=0$ എന്ന സമീകരണത്തിൽ നേർരേഖ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നില്ല. ചില സമയങ്ങളിൽ ഈ സമീകരണം സാങ്കല്പിക രേഖകളെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നുവെന്ന് പറയാം. മുഴുവൻ പ്രതലത്തിലും $(0, 0)$ എന്ന ബിന്ദു മാത്രം തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്നുള്ളൂ.

6.5.2 ഒരു ജോടി നേർരേഖകൾക്കിടയിലുള്ള കോണം

മൂലബിന്ദുവഴി കടന്നുചെല്ലുന്ന ഒരു ജോടി നേർരേഖകളുടെ സമീകരണം

$$ax^2+2hxy+by^2=0 \qquad (6.30)$$

m_1 , m_2 എന്നിവ ഈ നേർരേഖയുടെ ചായ്വുകൾ എന്നിരിക്കട്ടെ.

XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 330 14-02-2023 16:55:55

(6.30) എന്ന സമീകരണത്തെ x^2 -കൊണ്ട് ഹരിക്കുകയും $\frac{y}{x} = m$ എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിക്കുകയും ചെയ്യുക,

$bm^2 + 2hm + a = 0$ എന്ന് നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നു.

ഇതിന്റെ മൂലങ്ങൾ യഥാക്രമം m -എന്നിവയാകുന്നു..

m_1 യും m_2 യും ആകുന്നു

$$m_1 + m_2 = \frac{-2h}{b} \quad \text{യും} \quad m_1 m_2 = \frac{a}{b}$$

രണ്ടു രേഖകൾക്കിടയിലുള്ള കോണം θ എങ്കിൽ,

$$\begin{aligned}
\tan\theta &= \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}\right| \\
&= \left|\frac{\sqrt{(m_1 + m_2)^2 - 4m_1 m_2}}{1 + m_2 m_1}\right| \\
&= \left|\frac{\sqrt{\left(\frac{-2h}{b}\right)^2 - 4\frac{a}{b}}}{1 + \frac{a}{b}}\right| \\
\tan\theta &= \left|\frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}\right|
\end{aligned}$$

ആവശ്യപ്പെട്ട കോണം $\theta = \tan^{-1}\left|\frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}\right|$

ഈ സൂത്രവാക്യത്തിന്റെ അനന്തരഫലമായി നമുക്ക് ലഭിക്കുന്ന നിഗമനം

1. m_1 , m_2 എന്നിവ യഥാർത്ഥവും, വ്യതിരിക്തവുമായതെങ്കിൽ രേഖകൾ യഥാർത്ഥവും വ്യതിരിക്തവുമാണ്. അതായത്, $h^2 - ab > 0$ ആകുന്നു.

2. m_1 , m_2 എന്നിവ യഥാർത്ഥവും, തുല്യവും ആണെങ്കിൽ രേഖകൾ യഥാർത്ഥവും, സമാനവുമാണ്. അതായത്, $h^2 - ab = 0$ ആകുന്നു.

3. m_1 , m_2 എന്നിവ യഥാർത്ഥമല്ലെങ്കിൽ രേഖകൾ സാങ്കല്പികമായിരിക്കും. അതായത്, $h^2 - ab < 0$.

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ -എന്ന സമീകരണം പ്രതിനിധീകരിക്കുന്ന നേർരേഖകൾ സമാന്തരമാണെന്നും മൂലബിന്ദുവഴി കടന്നുപോകുന്നതിനാൽ ഇവ രണ്ടും യാദൃശ്ചിക രേഖകളാണ്,

അതായത് $\tan\theta = 0$. ആണെങ്കിൽ $h^2 - ab = 0$.

കൂടാതെ ഈ രേഖകൾ ലംബമാണെങ്കിൽ, $\cot\theta = 0$.

$\therefore \quad a+b = 0$.

ഒരു ജോടി നേർരേഖകൾ	സമാന്തരമായിരിക്കുന്നതിനുള്ള നിബന്ധന	ലംബമായിരിക്കുന്നതിനുള്ള നിബന്ധന
$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$	$h^2 - ab = 0$	$a + b = 0$

ഉദാഹരണം 6.35 $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ എന്ന ഒരു ജോടി നേർരേഖകൾക്ക് ലംബമായും മൂലബിന്ദുവഴിയും ചെല്ലുന്ന രേഖകളുടെ സമീകരണം കാണുക.

XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 331 14-02-2023 16:55:57

നിർദ്ധാരണം

m_1 , m_2 എന്നിവ $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ എന്ന നേർരേഖകളുടെ ചായ്വുകൾ എന്നിരിക്കട്ടെ.

$$y - m_1x = 0 \text{ ഉം } y - m_2x = 0 \qquad (6.31)$$

എന്നിവ രണ്ടു സമീകരണങ്ങളുടെ സംയോജന സമീകരണം

$$(y - m_1x)(y - m_2x) = 0$$

$$y^2 - (m_1 + m_2)xy + m_1m_2x^2 = 0 \qquad (6.32)$$

തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണം, $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0 \qquad (6.33)$

അതുകൊണ്ട്, $m_1 + m_2 = \frac{-2h}{b}$ ഉം $m_1m_2 = \frac{a}{b} \qquad (6.34)$

(6.31) -എന്ന സമീകരണത്തിന് ലംബരേഖകൾ

$$y + \frac{1}{m_1}x = 0 \text{ ഉം } y + \frac{1}{m_2}x = 0$$

ഇവയുടെ സംയോജന സമീകരണം,

$$(m_1y + x)(m_2y + x) = 0$$

$$m_1m_2y^2 + (m_1 + m_2)xy + x^2 = 0$$

(6.34) –നെ ഉപയോഗിച്ചാൽ,

$$\frac{a}{b}y^2 - \frac{2h}{b}xy + x^2 = 0$$

ആവശ്യപ്പെട്ട സമീകരണം $ay^2 - 2hxy + bx^2 = 0 \qquad (6.35)$

6.5.3 $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ എന്ന ഒരു ജോടി രേഖകൾക്കിടയിലുള്ള കോണിന്റെ ദ്വിഭാജകത്തിന്റെ സമീകരണം കാണുന്ന വിധം

$$y - m_1x = 0 \ , \quad y - m_2x = 0$$

എന്നിവ രണ്ടും നേർരേഖകളുടെ സമീകരണം എന്നിരിക്കട്ടെ.

അതുകൊണ്ട് $m_1 + m_2 = \frac{-2h}{b}$, $m_1m_2 = \frac{a}{b}$ യും ആകുന്നു.

ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്നും രണ്ടു നേർരേഖകൾക്ക് വരയപ്പെടുന്ന ലംബ രേഖകളുടെ നീളം തുല്യം എങ്കിൽ ആ ബിന്ദുവിന്റെ ബിന്ദുപഥം ആ രേഖകൾക്കിടയിലുള്ള കോണിന്റെ കോൺ ദ്വിഭാജകം ആകുന്നു.

$P(p,q)$ എന്നിവ ദ്വിഭാജകത്തിന്റെ ബിന്ദുപഥത്തിന്റെമേൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദു എന്നിരിക്കട്ടെ.

$P(p, q)$ ൽ നിന്നും $y - m_1x = 0$ എന്ന നേർരേഖയിലേയ്ക്ക് വരയ്ക്കുന്ന ലംബ രേഖയുടെ നീളം $y - m_2x = 0$ ൽ നിന്നും $P(p, q)$ എന്ന നേർരേഖയ്ക്ക് വരയ്ക്കുന്ന ലംബരേഖയുടെ നീളത്തിനു തുല്യമായിരിക്കും.

$$\pm\frac{q - m_1p}{\sqrt{1 + m_1^2}} = \pm\frac{q - m_2p}{\sqrt{1 + m_2^2}}$$

അതായത്, $(q - m_1p)^2(1 + m_2^2) = (q - m_2p)^2(1 + m_1^2)$

XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 332 14-02-2023 16:55:58

ലഘൂകരിക്കുമ്പോൾ നമുക്ക്,

$$p^2-q^2=2pq\left(\frac{1-m_1m_2}{m_1+m_2}\right) \Rightarrow p^2-q^2=2pq\left(\frac{1-\frac{a}{b}}{-\frac{2h}{b}}\right)$$

അതായത് $$\frac{p^2-q^2}{a-b}=\frac{pq}{h}$$

$\therefore$ $P(p, q)$ -ന്റെ ബിന്ദുപഥം, $$\frac{x^2-y^2}{a-b}=\frac{xy}{h} \qquad (6.36)$$

ഉദാഹരണം 6.36 $x^2-4xy+y^2=0$, $x+y=3$ എന്നീ നേർരേഖകൾ ഒരു സമഭുജ ത്രികോണത്തെ രൂപീകരിക്കുന്നു എന്ന് തെളിയിക്കുക.

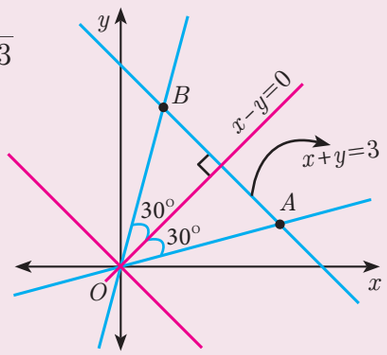
നിർദ്ധാരണം

$x+y=3$ എന്ന രേഖ $x^2-4xy+y^2=0$ എന്ന ഒരു ജോടി നേർരേഖയെ A, B-എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഛേദിക്കുന്നു എന്നിരിക്കട്ടെ. കൂടാതെ $x^2-4xy+y^2=0$ എന്ന രേഖ മൂലബിന്ദുവായ O ൽ ഛേദിയ്ക്കുകയും ചെയ്യുന്നു.

$x^2-4xy+y^2=0$ എന്ന നേർരേഖകൾക്കിടയിലുള്ള കോണം.

$$\tan\theta = \left|\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}\right| = \frac{2\sqrt{4-1}}{2} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \quad \angle AOB = \theta = \tan^{-1}\sqrt{3} = 60^\circ$$



ചിത്രം 6.50

ΔAOB യുടെ കോണ ദ്വിഭാജകത്തിന്റെ സമീകരണം,

$$\frac{x^2-y^2}{a-b} = \frac{xy}{h}$$

$$\Rightarrow \quad x^2-y^2=0 \quad \Rightarrow \quad (x+y)(x-y)=0$$

$$\Rightarrow \quad x+y=0 \text{ ഉം } x-y=0$$

$x-y=0$ -എന്ന രേഖയുടെ കോണദ്വിഭാജകത്തിന്റെ തന്നിട്ടുള്ള രേഖ AB, അതായത് $x+y=3$ എന്ന രേഖയ്ക്ക് ലംബമായിട്ടാണ് ഉള്ളത്.

അതുകൊണ്ട് ΔAOB എന്നത് ഒരു ദ്വിസമഭുജത്രികോണമാകുന്നു.

$$\Rightarrow \quad \angle ABO = \angle BAO = 60^\circ, \text{ കൂടാതെ } \angle AOB = 60^\circ$$

അതുകൊണ്ട് തന്നിട്ടുള്ള രേഖകൾ ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തെ രൂപീകരിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം 6.37 $x^2-2cxy-y^2=0$, $x^2-2dxy-y^2=0$ എന്നീ ഒരു ജോടി നേർരേഖയെ കുറിക്കുന്നു. ഓരോ ജോടി രേഖകളും മറ്റെ ജോടികൾക്കിടയിലുള്ള കോണിനെ സമമായി വിഭജിക്കുന്നു. എങ്കിൽ, $cd=-1$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ള ഒരു ജോടി രേഖകളുടെ സമീകരണം

$$x^2-2cxy-y^2 = 0 \qquad (6.37)$$

$$x^2-2dxy-y^2 = 0 \qquad (6.38)$$

സമീകരണം (6.37) -ന്റെ കോണദ്വിഭാജകത്തിന്റെ സമീകരണം

$$\frac{x^2-y^2}{2} = \frac{xy}{-c}$$

XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 333 14-02-2023 16:56:01

$$cx^2 + 2xy - cy^2 = 0 \qquad (6.39)$$

സമീകരണം (6.37) ന്റെ കോണദ്വിഭാജകമാണ് സമീകരണം (6.38), അതുകൊണ്ട് സമീകരണങ്ങൾ

$$x^2 - 2dxy - y^2 = 0$$

$$cx^2 + 2xy - cy^2 = 0$$

സമീകരണം (6.37) ന്റെ കോണ ദ്വിഭാജകം ഒരേ സമീകരണത്തെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു.

അതുകൊണ്ട് മുകളിൽ പറഞ്ഞ സമീകരണങ്ങളെ താരതമ്യപ്പെടുത്തുമ്പോൾ,

$$\frac{1}{c} = \frac{-2d}{2} = \frac{-1}{-c}$$

$$\Rightarrow \quad cd = -1$$

6.5.4 ജോടി രേഖകളുടെ പൊതു രൂപം

$l_1x + m_1y + n_1 = 0$, $l_2x + m_2y + n_2 = 0$

എന്നിവ ഏതെങ്കിലും രണ്ടു നേർരേഖകൾ എന്ന് കരുതുക. ഈ രേഖകളുടെ സംയോജന സമീകരണം,

$$(l_1x + m_1y + n_1)(l_2x + m_2y + n_2) = 0$$

ഈ രണ്ടു ഘടകങ്ങളെയും ഗുണിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന ജോടി നേർരേഖകളുടെ പൊതുരൂപം

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \qquad (6.40)$$

മുകളിൽ പറഞ്ഞ സമീകരണം ഏകീകൃതമല്ലാത്ത ജോടി നേർരേഖയുടെ ദ്വിഘാതസമീകരണമാകുന്നു.

ഇവിടെ,

$$a = l_1l_2 \qquad 2g = l_1n_2 + l_2n_1$$

$$b = m_1m_2 \qquad 2f = m_1n_2 + m_2n_1$$

$$c = n_1n_2 \qquad 2h = l_1m_2 + l_2m_1$$

മുകളിൽ തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണം (6.40) -നെ $l_1x + m_1y + n_1 = 0$, $l_2x + m_2y + n_2 = 0$

എന്നീ രണ്ടു രേഖീയ ഘടകങ്ങളായി വിഭജിക്കാൻ സാധിക്കുമെങ്കിൽ (6.40)-എന്ന സമീകരണം എപ്പോഴും ജോടി നേർരേഖകളുടെ സമീകരണം എന്ന് പ്രതിനിധീകരിക്കാം.

പൊതുവായി ഒരു ദ്വിഘാത സമീകരണം

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

എന്ന ഒരു ജോടിനേർരേഖയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നതിനുള്ള നിബന്ധനയെ കാണാം.

തന്നിട്ടുള്ള ഒരു ജോടി നേർരേഖയെ x - ലെ ദ്വിഘാത $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ എന്ന നേർരേഖകളുടെ സമീകരണമായി പുനഃക്രമീകരിക്കാം.

XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 334 14-02-2023 16:56:02

$$ax^2 + 2(hy+g)x + (by^2 + 2fy + c) = 0$$

$$x = \frac{-(hy+g) \pm \sqrt{(hy+g)^2 - a(by^2+2fy+c)}}{a}$$

$$ax + hy + g = \pm\sqrt{(hy+g)^2 - a(by^2+2fy+c)}$$

അതായത്, $ax + hy + g = \pm\sqrt{(h^2-ab)y^2 + 2(gh-af)y + g^2 - ac}$

മുകളിൽ പറഞ്ഞ സമീകരണങ്ങളിൽ ഒന്ന് നേർരേഖയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. അതുകൊണ്ട് ഈ സമീകരണങ്ങൾ x, y -യുള്ള ഏകഘാത സമീകരണമാകുന്നു. അതിനാൽ മുകളിലുള്ള ആവിഷ്കരണത്തിന്റെ അടിസ്ഥാന ചിഹ്നം y -യുടെ പൂർണ്ണവർഗ്ഗമായി മാറ്റാൻ സാധിക്കുന്നതാണ്. ഇതിനായുള്ള നിബന്ധന ഉപയോഗിക്കാവുന്നതാണ്

$$4(gh-af)^2 - 4(h^2-ab)(g^2-ac) = 0 \qquad (\because \Delta = B^2 - 4AC = 0)$$

ഇതിനെ ലഘൂകരിച്ച്, a -കൊണ്ട് ഹരിക്കുക,

$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

ഇതുകൂടാതെ $\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0$ എന്നും എഴുതാവുന്നതാണ്.

(ഇതിനെ പറ്റി അടുത്ത അധ്യായത്തിൽ പഠിക്കാവുന്നതാണ്)

തെളിയിക്കപ്പെടാത്ത ഫലങ്ങൾ

(i) $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ എന്ന നേർരേഖയിൽ ഉള്ള രണ്ടു രേഖകളും ഒന്നിനൊന്ന് ലംബമാണെങ്കിൽ,
$\frac{a}{h} = \frac{h}{b} = \frac{g}{f}$ അല്ലെങ്കിൽ $bg^2 = af^2$ ആകുന്നു.

(ii) $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ എന്ന സമീകരണം ഒരു ജോടി നേർരേഖയെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു എങ്കിൽ അവയ്ക്കു തമ്മിലുള്ള അകലം,
$2\sqrt{\frac{(g^2-ac)}{a(a+b)}}$ അല്ലെങ്കിൽ $2\sqrt{\frac{(f^2-bc)}{b(a+b)}}$ ആകുന്നു.

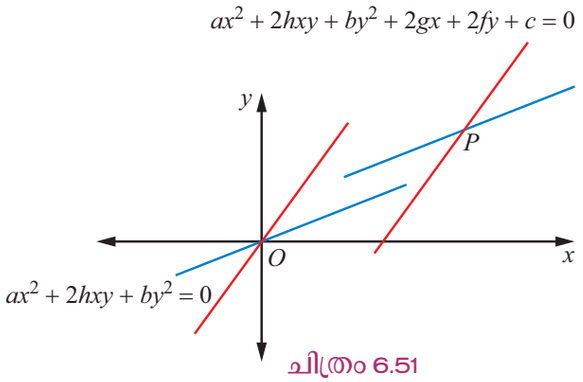
ജോടി നേർരേഖകളുടെ സമീകരണങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0 \qquad (6.41)$$

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \qquad (6.42)$$

ഈ ജോടി നേർരേഖകളുടെ ചായ്വുകൾ x^2, xy കൂടാതെ y^2 -ന്റെയും ഗുണാങ്കത്തെ മാത്രമേ ആശ്രയിച്ചിരിക്കുകയുള്ളൂ.

(i) സമീകരണം (6.41)-ൽ ഛേദിക്കുന്നു. ബിന്ദു $(0, 0)$ യും സമീകരണം (6.42)-ൽ ഛേദിക്കുന്ന ബിന്ദു $P\left(\frac{hf-bg}{ab-h^2}, \frac{gh-af}{ab-h^2}\right)$ ആകുന്നു.



ചിത്രം 6.51

XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 335 14-02-2023 16:56:04

(ii) θ എന്ന കോണം $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ എന്ന സമീകരണത്തിന്റെയും

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ എന്ന ജോടി രേഖകളുടെയും കോണുകൾ തുല്യമാകുന്നു. ,

$$\theta = \tan^{-1}\left|\frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a+b}\right|$$

(iii) $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$, $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ എന്നീ ജോടി നേർരേഖകളുടെ കോൺ സമ കോൺ ആകുന്നു. സമകോൺ ആകുന്നതിനുള്ള നിബന്ധന, $a + b = 0$

ഉദാഹരണം 6.38 $\lambda x^2 - 10xy + 12y^2 + 5x - 16y - 3 = 0$ എന്നതു ഒരു ജോടി നേർരേഖയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. എങ്കിൽ,

(i) λ-യുടെ മൂല്യവും വിഭജിക്കപ്പെട്ട സമീകരണവും കാണുക.

(ii) രണ്ടു നേർരേഖകളും ഛേദിക്കുന്ന ബിന്ദുവിനെ കാണുക.

(iii) രണ്ടു രേഖകൾക്കിടയിലുള്ള കോണം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

(i) സമീകരണത്തിന്റെ പൊതുരൂപം $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണം, $\lambda x^2 - 10xy + 12y^2 + 5x - 16y - 3 = 0$

മുകളിലുള്ള സമീകരണങ്ങളെ താരതമ്യപ്പെടുത്തിയാൽ,

$a = \lambda,\ b = 12,\ c = -3,\ h = -5,\ g = \frac{5}{2},\ f = -8$

ഈ മൂല്യങ്ങളെ ഒരു ജോടി രേഖകളുടെ നിബന്ധനയ്ക്ക് അനുസരിച്ച് പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ,

$$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$$

അതായത്, $\lambda(12)(-3) + 2(-8)\left(\frac{5}{2}\right)(-5) - \lambda(-8)^2 - 12\left(\frac{5}{2}\right)^2 - (-3)(-5)^2 = 0$

$\Rightarrow \quad -36\lambda + 200 - 64\lambda - 75 + 75 = 0$

$\Rightarrow \quad \lambda = 2$

ആവശ്യപ്പെട്ട സമീകരണം, $2x^2 - 10xy + 12y^2 + 5x - 16y - 3 = 0$.

മുകളിൽ ഉള്ള സമീകരണത്തിൽ ദ്വിഘാത പദങ്ങളെ ഘടകങ്ങളാക്കിയാൽ നമുക്ക് $2x^2 - 10xy + 12y^2$ -എന്ന് ലഭിക്കുന്നു,

$$2x^2 - 10xy + 12y^2 \equiv (x - 2y)(2x - 6y)$$

എന്നാൽ $2x^2 - 10xy + 12y^2 + 5x - 16y - 3 \equiv (x - 2y + c_1)(2x - 6y + c_2)$

സമാനമായ പദങ്ങളുടെ ഗുണാങ്കങ്ങളെ തുല്യമാക്കിയാൽ നമുക്ക്,

$2c_1 + c_2 = 5,\quad 3c_1 + c_2 = 8\ ,\quad c_1c_2 = -3$

ആദ്യത്തെ രണ്ടു സമീകരണങ്ങളെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്താൽ

$c_1 = 3,\ c_2 = -1$ ഉം കിട്ടുന്നു.

അതുകൊണ്ട് വിഭജിക്കപ്പെട്ട സമീകരണങ്ങൾ

$x - 2y + 3 = 0\ ,\ 2x - 6y - 1 = 0$ യും ആകുന്നു.

XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 336 14-02-2023 16:56:06

(ii) നേർരേഖകൾ ഛേദിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ കാണുന്നതിന് രണ്ടു നേർരേഖകളുടെ സമീകരണങ്ങളെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുമ്പോൾ നമുക്ക് $(x,\ y) = \left(-10, -\frac{7}{2}\right)$ കിട്ടുന്നു.

അല്ലെങ്കിൽ $\left(\frac{hf-bg}{ab-h^2}, \frac{gh-af}{ab-h^2}\right)$ എന്ന സൂത്രം ഉപയോഗിക്കണം.

(iii) നേർരേഖകൾക്കിടയിലുള്ള അകലം

$$\tan\theta = \left|\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}\right|$$

$$= \left|\frac{2\sqrt{25-24}}{2+12}\right| = \frac{1}{7}$$

അതുകൊണ്ട്, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം 6.39 ഒരു വിദ്യാർത്ഥി വീട്ടിൽ നിന്നും ശരാശരിയായി മണിക്കൂറിന് 6 കിലോമീറ്റർ വേഗതയിൽ നടക്കുമ്പോൾ വിദ്യാലയം ആരംഭിക്കുന്നതിന് 10 മിനിറ്റ് മുമ്പ് വിദ്യാലയത്തിൽ എത്തുന്നു. ശരാശരി വേഗത മണിക്കൂറിന് 4 കിലോമീറ്റർ ആയിരിക്കുമ്പോൾ അവൻ 5 മിനിറ്റ് വൈകി വിദ്യാലയത്തിൽ എത്തുന്നു. ആ വിദ്യാർത്ഥി ദിവസവും രാവിലെ 8.00 മണിയ്ക്ക് വീട്ടിൽ നിന്നും പുറപ്പെട്ടാൽ താഴെ തന്ന ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഉത്തരം നൽകുക.

(i) വിദ്യാർത്ഥിയുടെ വീട്ടിനും വിദ്യാലയത്തിനും ഉള്ള അകലം

(ii) ശരിയായ സമയത്തിൽ വിദ്യാലയത്തിലെത്താൻ എടുക്കുന്ന ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ശരാശരി വേഗതയും വിദ്യാർത്ഥി വിദ്യാലയത്തിൽ എത്തിച്ചേരാൻ ആകുന്ന സമയവും കാണുക

(iii) വിദ്യാലയത്തിലെ ഗേറ്റ് അടയ്ക്കുന്ന സമയം

(iv) വിദ്യാർത്ഥി നടന്നുപോയ പാതയുടെ നേർരേഖകളുടെ സമീകരണം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

x -അക്ഷംസമയത്തെ മണിക്കൂറിലും, y -അക്ഷം ദൂരത്തെ കിലോമീറ്ററിലും ആണെന്ന് ഇരിക്കട്ടെ. തന്നിട്ടുള്ള നിബന്ധനയനുസരിച്ച്,

$$y = 6\left(x - \frac{10}{60}\right) \Rightarrow y = 6x - 1 \qquad (6.43)$$

$$y = 4\left(x + \frac{5}{60}\right) \Rightarrow y = 4x + \frac{1}{3} \qquad (6.44)$$

മുകളിലുള്ള സമീകരണം (6.43), (6.44) നെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുമ്പോൾ $(x,y) = \left(\frac{2}{3}, 3\right)$

$x = \frac{2}{3}$ മണിക്കൂർ $= 40$ മിനിട്ടുകൾ, $y = 3$ കി.മീറ്റർ

(i) വിദ്യാർത്ഥിയുടെ വിദ്യാലയത്തിനും വീട്ടിനും ഉള്ള അകലം 3 കിലോമീറ്റർ

(ii) ശരാശരി സമയത്തിൽ വിദ്യാലയത്തിൽ എത്താൻ എടുക്കുന്ന ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ശരാശരി വേഗത $= \frac{60}{40} \times 3 = 4.5$ കി.മീറ്റർ / മണിക്കൂർ

വിദ്യാലയത്തിൽ എത്താൻ എടുക്കുന്ന സമയം $= \frac{2}{3}$ മണിക്കൂർ അല്ലെങ്കിൽ 40 മിനിറ്റുകൾ

(iii) വിദ്യാലയം ആരംഭിക്കുന്ന സമയം രാവിലെ 8.40 മണി ആകുന്നു.

XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 337 14-02-2023 16:56:07

(iv) വിദ്യാർത്ഥി നടന്നുപോയ പാതയുടെ ഒരു ജോടി നേർരേഖയുടെ സമീകരണം

$$(6x-y-1)\left(4x-y+\frac{1}{3}\right) = 0$$

$$72x^2-30xy+3y^2-6x+2y-1 = 0 \qquad (6.45)$$

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ലിങ്ക് ഉപയോഗിച്ച് ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കാവുന്നതാണ്.

https://www.geogebra.org/graphing, *https://www.geogebra.org/m/fhS6HUtP*

ഉദാഹരണം 6.40 $ax^2+2hxy+by^2=0$ എന്ന നേർരേഖകളിലൊന്ന് $px+qy=0$ -ന് ലംബമാണെങ്കിൽ $ap^2+2hpq+bq^2=0$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

m_1 , m_2 എന്നിവ $ax^2+2hxy+by^2=0$ എന്ന ജോടി നേർരേഖകളുടെ ചായ്വുകളും m എന്നത് $px+qy=0$ എന്ന രേഖയുടെ ചായ്വും ആകുന്നു.

അതുകൊണ്ട്, $m_1+m_2=\frac{-2h}{b}$, $m_1m_2=\frac{a}{b}$ കൂടാതെ $m=-\frac{p}{q}$

$ax^2+2hxy+by^2=0$ എന്ന ജോടി രേഖകളിൽ ഒരു രേഖ, $px+qy=0$ -യ്ക്ക് ലംബമായിട്ടാണ്. ലംബരേഖയുടെ നിബന്ധന അനുസരിച്ച്,

$$mm_1=-1 \text{ അല്ലെങ്കിൽ } mm_2=-1$$

$$\Rightarrow (mm_1+1)=0 \text{ അല്ലെങ്കിൽ } (mm_2+1)=0$$

$$\Rightarrow (mm_1+1)(mm_2+1)=0$$

$$\Rightarrow (m_1m_2)m^2+(m_1+m_2)m+1=0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)\left(-\frac{p}{q}\right)^2+\left(-\frac{2h}{b}\right)\left(-\frac{p}{q}\right)+1=0$$

$$\Rightarrow ap^2+2hpq+bq^2=0 \text{ എന്ന് തെളിയിച്ചു.}$$

ഉദാഹരണം 6.41 $3x-2y+2=0$ എന്ന നേർരേഖ, $3x^2+5xy-2y^2+4x+5y=0$ എന്ന ജോടി രേഖകളെ ഛേദിക്കുന്ന രണ്ടു ബിന്ദുക്കളെ മൂലബിന്ദുവുമായി ഛേദിക്കുന്ന രേഖയ്ക്ക് ലംബമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ള രേഖകൾ ഛേദിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളെ മൂലബിന്ദുവുമായി യോചിപ്പിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന നേർരേഖകളുടെ സമീകരണം ഒരു ദ്വിഘാത ഏകീകൃതസമീകരണമാകുന്നു.

$3x^2+5xy-2y^2+4x+5y=0$, $3x-2y+2=0$ എന്നീ രണ്ടു നേർരേഖകളുടെ സമീകരണം ഉപയോഗിച്ച് ഏകീകൃത സമീകരണത്തെ കാണാവുന്നതാണ്.

$$3x^2+5xy-2y^2+(4x+5y)(1)=0 \text{ കൂടാതെ } \frac{(3x-2y)}{-2}=1$$

$$3x^2+5xy-2y^2+(4x+5y)\left(\frac{3x-2y}{-2}\right)=0$$

അതായത്, $(-2)(3x^2+5xy-2y^2)+(4x+5y)(3x-2y)=0$

ഇതിനെ ലഘൂകരിക്കുമ്പോൾ $2x^2-xy-2y^2=0$ എന്ന് നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നു.

XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 338 14-02-2023 16:56:10

ഇവിടെ x^2 , y^2 -എന്നിവയുടെ ഗുണാങ്കങ്ങളുടെ തുക പൂജ്യമാകുന്നു.

അതായത്, $a+b=0$, $(\because\ a=2, b=-2)$

അതുകൊണ്ട് നേർരേഖകൾ ഒന്നിനൊന്ന് ലംബമാണ്.

അഭ്യാസം 6.4

1. $x-2y-3=0$, $x+y+5=0$ എന്നീ വിഭജിക്കപ്പെട്ട സമീകരണങ്ങളുടെ സംയോജിത സമീകരണം കണ്ടെത്തുക.

2. $4x^2+4xy+y^2-6x-3y-4=0$ എന്ന സമീകരണം ഒരു ജോടി സമാന്തരരേഖകൾ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു എന്ന് തെളിയിക്കുക.

3. $2x^2+3xy-2y^2+3x+y+1=0$ എന്ന ഒരു ജോടി ലംബരേഖകളെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു എന്ന് തെളിയിക്കുക.

4. $2x^2-xy-3y^2-6x+19y-20=0$ എന്ന സമീകരണങ്ങൾ ഒരു ജോടി വിഭജിക്കുന്ന രേഖകളെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നുവെന്ന് കാണിക്കുക. അവയ്ക്കിടയിലുള്ള കോണം $\tan^{-1}(5)$ ആണെന്നും കാണിക്കുക.

5. $y=x$ എന്ന രേഖയ്ക്ക് α എന്ന കോണം ഉള്ളതും മൂലബിന്ദുവഴി കടന്നുചെല്ലുന്നതുമായ ജോടി നേർരേഖയുടെ സമീകരണം $x^2-2xy\ \sec 2\alpha+y^2=0$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

6. $2x-3y+1=0$, $5x+y-3=0$ എന്ന നേർരേഖകൾക്ക് ലംബമായും, $(1,3)$ എന്ന ബിന്ദു വഴി ചെല്ലുന്നതുമായ ഒരു ജോടി നേർരേഖകളുടെ സമീകരണം കാണുക.

7. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ജോടി നേർരേഖകളിൽ വിഭജിക്കപ്പെട്ട നേർരേഖകളുടെ സമീകരണം കാണുക.

   (i) $3x^2+2xy-y^2=0$ (ii) $6(x-1)^2+5(x-1)(y-2)-4(y-2)^2=0$

   (iii) $2x^2-xy-3y^2-6x+19y-20=0$

8. $ax^2+2hxy+by^2=0$ എന്ന ജോടി നേർരേഖകളിൽ ഒന്നിന്റെ ചായ്വ് മറ്റെ നേർരേഖയുടെ ചായ്വിനെ പോലെ മൂന്നുമടങ്ങ് എങ്കിൽ $8h^2=9ab$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

9. $ax^2+2hxy+by^2=0$ എന്ന ജോടി നേർരേഖകളിൽ ഒന്നിന്റെ ചായ്വ് മറ്റെ രേഖയുടെ ചായ്വിനെ പോലെ മൂന്നുമടങ്ങ് എങ്കിൽ $3h^2=4ab$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

10. $x^2-4xy+y^2=0$ എന്ന ജോടി നേർരേഖയും $x+y-2=0$ എന്ന നേർരേഖയുള്ള PQ വും, ΔOPQ -നെ രൂപീകരിക്കുന്നു എങ്കിൽ, O -യിൽ നിന്നും വരയാവുന്ന ΔOPQ -ന്റെ മധ്യബിന്ദുവിന്റെ സമീകരണം കാണുക.

11. $6x^2+5xy-py^2+7x+qy-5=0$ എന്നത് ഒന്നിനൊന്ന് ലംബമായിരിക്കുന്ന നേർരേഖയാണെങ്കിൽ, p, q -എന്നിവയുടെ മൂല്യം കാണുക.

12. $12x^2+7xy-12y^2-x+7y+k=0$ എന്ന സമീകരണം ഒരു നേർരേഖാ ജോടിയെ സൂചിപ്പിച്ചാൽ k -യുടെ മൂല്യം കാണുക? കൂടാതെ അവ സമാന്തരമാണോ? അല്ലെങ്കിൽ ഒന്നിനൊന്ന് ഛേദിക്കുന്നതാണോ എന്ന് കാണുക?.

13. $12x^2+2kxy+2y^2+11x-5y+2=0$ എന്ന സമീകരണം ജോടി നേർരേഖയെ സൂചിപ്പിക്കുകയാണെങ്കിൽ k -യുടെ മൂല്യം കാണുക.

XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 339 14-02-2023 16:56:12

14. $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 12x + 16y - 12 = 0$ എന്ന സമീകരണം സമാന്തരമായ ജോടി നേർരേഖയാണെന്ന് തെളിയിക്കുക. കൂടാതെ ഈ രണ്ടു നേർരേഖകൾക്കിടയിലുള്ള അകലം കാണുക.

15. $4x^2 + 4xy + y^2 - 6x - 3y - 4 = 0$ എന്ന ജോടി നേർരേഖകൾ സമാന്തരമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക. കൂടാതെ ഈ രണ്ടു നേർരേഖകൾക്കിടയിലുള്ള അകലം കാണുക.

16. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ എന്ന ജോടി രേഖകൾ അക്ഷദൂരങ്ങൾക്ക് ഇടയിലുള്ള കോണിന്റെ ദ്വിഭാജകം എങ്കിൽ $(a+b)^2 = 4h^2$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

17. $x^2 - 2kxy - y^2 = 0$ എന്ന ജോടി നേർരേഖ $x^2 - 2lxy - y^2 = 0$ -എന്ന നേർരേഖയുടെ കോണുകളുടെ ദ്വിഭാജകം എങ്കിൽ രണ്ടാമത് സൂചിപ്പിച്ച രേഖകളുടെ കോണം ആദ്യം സൂചിപ്പിച്ച രേഖകളുടെ കോണുകളുടെ ദ്വിഭാജകം എന്ന് തെളിയിക്കുക.

18. $3x - 2y - 1 = 0$ എന്ന നേർരേഖ $3x^2 + 5xy - 3y^2 + 2x + 3y = 0$ എന്ന ജോടി നേർരേഖയെ ഛേദിക്കുന്ന രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ മൂലബിന്ദുവുമായി യോചിപ്പിക്കുന്ന രേഖകൾക്ക് ലംബമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

അഭ്യാസം 6.5

GH4CR

ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുത്ത് എഴുതുക

1. ഒരു ബിന്ദുവിനും y -അക്ഷത്തിനും ഇടയിലുള്ള അകലം ആ ബിന്ദുവിനും മൂലബിന്ദുവിനും ഇടയിലുള്ള അകലത്തിൽ പകുതി എങ്കിൽ ആ ബിന്ദുവിന്റെ ബിന്ദുപഥം

   (1) $x^2 + 3y^2 = 0$ (2) $x^2 - 3y^2 = 0$ (3) $3x^2 + y^2 = 0$ (4) $3x^2 - y^2 = 0$

2. $(at^2, 2at)$ എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ ബിന്ദുപഥത്തെ

   (1) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (3) $x^2 + y^2 = a^2$ (4) $y^2 = 4ax$

3. $3x^2 + 3y^2 - 8x - 12y + 17 = 0$ എന്ന ബിന്ദു പഥത്തിൻമേൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന ബിന്ദു

   (1) (0,0) (2) $(-2, 3)$ (3) $(1, 2)$ (4) $(0, -1)$

4. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = k$ എന്ന ബിന്ദുപഥത്തിനുമേൽ $(8,-5)$ എന്ന ബിന്ദു സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു എങ്കിൽ, k -യുടെ മൂല്യം

   (1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 3

5. $(2, 3), (-1, 4)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോചിപ്പിക്കുന്ന നേർരേഖയിൽ (α, β) എന്ന ബിന്ദു സ്ഥിതി ചെയ്താൽ

   (1) $\alpha + 2\beta = 7$ (2) $3\alpha + \beta = 9$ (3) $\alpha + 3\beta = 11$ (4) $3\alpha + \beta = 11$

6. $3x - y = -5$ എന്ന രേഖയിൽ 45° കോണം ഏർപ്പെടുത്തുന്ന രേഖയുടെ ചായ്വുകൾ

   (1) $1, -1$ (2) $\frac{1}{2}, -2$ (3) $1, \frac{1}{2}$ (4) $2, -\frac{1}{2}$

7. $4 + 2\sqrt{2}$ എന്ന ചുറ്റളവുള്ള ഒന്നാം ചതുർത്ഥാംശം അക്ഷങ്ങളിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന ദ്വിസമഭുജ ത്രികോണത്തെ രൂപീകരിക്കുന്ന രേഖയുടെ സമീകരണം

   (1) $x + y + 2 = 0$ (2) $x + y - 2 = 0$ (3) $x + y - \sqrt{2} = 0$ (4) $x + y + \sqrt{2} = 0$

XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 340 14-02-2023 16:56:14

8. $(-2, 4)$, $(-1, 2)$, $(1,2)$, $(2, 4)$ എന്ന ക്രമത്തിൽ ചതുർഭുജത്തിന്റെ നാലു ശീർഷ ബിന്ദുക്കളെ എടുക്കുക. ഒരു നേർരേഖ $(-1, 2)$ എന്ന ബിന്ദുവഴിയെ പോകുന്നു. കൂടാതെ അത് ചതുർഭുജത്തെ തുല്യവിസ്തീർണ്ണത്തിൽ വിഭജിക്കുന്നു എങ്കിൽ അതിന്റെ സമീകരണം,

(1) $x + 1 = 0$ (2) $x + y = 1$ (3) $x + y + 3 = 0$ (4) $x - y + 3 = 0$

9. $(1, 2)$, $(3, 4)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോചിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തിന്റെ ലംബ ദ്വിഭാജകം അക്ഷങ്ങളുമായി ഏർപ്പെടുത്തുന്നു. അന്തഃഖണ്ഡങ്ങൾ

(1) $5, -5$ (2) $5, 5$ (3) $5, 3$ (4) $5, -4$

10. ചായ്വ് 2 ഉള്ള രേഖയുടെ മൂലബിന്ദുവിൽ നിന്നും വരയുന്ന ലംബരേഖയുടെ നീളം $\sqrt{5}$ എങ്കിൽ ആ രേഖയുടെ സമീകരണം

(1) $x-2y=\sqrt{5}$ (2) $2x-y=\sqrt{5}$ (3) $2x-y=5$ (4) $x-2y-5=0$

11. $5x - y = 0$ എന്ന രേഖയ്ക്ക് ലംബരേഖയും അക്ഷങ്ങളുമായി രൂപീകരിക്കുന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം 5 ച:മാത്രകൾ എങ്കിൽ ആ രേഖയുടെ സമീകരണം

(1) $x + 5y \pm 5\sqrt{2} = 0$ (2) $x - 5y \pm 5\sqrt{2} = 0$

(3) $5x + y \pm 5\sqrt{2} = 0$ (4) $5x - y \pm 5\sqrt{2} = 0$

12. $x - y + 5 = 0$ എന്ന നേർരേഖയ്ക്ക് ലംബമായും y അക്ഷത്തിൽ ഛേദിക്കുന്ന ബിന്ദു വഴി കടന്നു പോകുന്നതുമായ നേർരേഖയുടെ സമീകരണം

(1) $x - y - 5 = 0$ (2) $x + y - 5 = 0$ (3) $x + y + 5 = 0$ (4) $x + y + 10 = 0$

13. ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു ബിന്ദു $(2, 3)$ ഉം ഈ ബിന്ദുവിന് എതിർവശം സ്ഥിതി ചെയ്യുന്ന ഒരു വശത്തിന്റെ സമീകരണം $x + y = 2$ എങ്കിൽ വശത്തിന്റെ നീളം

(1) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ (2) 6 (3) $\sqrt{6}$ (4) $3\sqrt{2}$

14. p, q എന്നീ ബിന്ദുക്കൾക്ക് ഏതൊരു മൂല്യങ്ങൾക്കും $(p+2q)x+(p-3q)y = p-q$ എന്ന രേഖയുടെ മേൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന ബിന്ദു

(1) $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ (2) $\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$ (3) $\left(\frac{3}{5}, \frac{3}{5}\right)$ (4) $\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$

15. $(1, 2)$, $(3, 4)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ നിന്നും തുല്യ ദൂരത്തിലും, $2x - 3y = 5$ എന്ന രേഖയിൻമേൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന ബിന്ദു

(1) $(7, 3)$ (2) $(4, 1)$ (3) $(1, -1)$ (4) $(-2, 3)$

16. $y = -x$ എന്ന രേഖയ്ക്ക് $(2, 3)$ എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ പ്രതിബിംബ ബിന്ദു

(1) $(-3, -2)$ (2) $(-3, 2)$ (3) $(-2, -3)$ (4) $(3, 2)$

17. $\frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1$ എന്ന രേഖയ്ക്ക് മൂലബിന്ദുവിൽ നിന്നും ലംബരേഖയ്ക്കുള്ള അകലം

(1) $\frac{11}{5}$ (2) $\frac{5}{12}$ (3) $\frac{12}{5}$ (4) $\frac{5}{7}$

18. $2x - 3y + 1 = 0$ എന്ന നേർരേഖയ്ക്ക് ലംബമായും $(1, 3)$ എന്ന ബിന്ദുവഴി കടന്നുപോകുന്നതും ആയ നേർരേഖയുടെ y അന്തഃഖണ്ഡം

(1) $\frac{3}{2}$ (2) $\frac{9}{2}$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{2}{9}$

XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 341 14-02-2023 16:56:18

19. $x+(2k-7)y+3=0$, $3kx+9y-5=0$ എന്നീ രണ്ടു രേഖകൾ ലംബമാണെങ്കിൽ k -യുടെ മൂല്യം

(1) $k=3$ (2) $k=\frac{1}{3}$ (3) $k=\frac{2}{3}$ (4) $k=\frac{3}{2}$

20. ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു ശീർഷം മൂലബിന്ദുവായും അതിന്റെ ഒരു വശം $4x+3y-20=0$ എന്ന നേർരേഖയിൻമേൽ സ്ഥിതിചെയ്യുകയാണെങ്കിൽ ആ സമചതുരത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം

(1) 20 ച:മാത്ര (2) 16 ച:മാത്ര (3) 25 ച:മാത്ര (4) 4 ച:മാത്ര

21. $6x^2+41xy-7y^2=0$ എന്ന ജോടി രേഖകൾ x –അക്ഷവുമായി ഏർപ്പെടുത്തുന്ന കോണുകൾ α, β എങ്കിൽ, $\tan\alpha\tan\beta=?$

(1) $-\frac{6}{7}$ (2) $\frac{6}{7}$ (3) $-\frac{7}{6}$ (4) $\frac{7}{6}$

22. $x^2-4y^2=0$, $x=a$ എന്ന നേർരേഖകൾ കൊണ്ട് രൂപീകരിക്കുന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം

(1) $2a^2$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$ (3) $\frac{1}{2}a^2$ (4) $\frac{2}{\sqrt{3}}a^2$

23. $6x^2-xy+4cy^2=0$ എന്ന നേർരേഖകളിൽ ഒരു നേർരേഖ $3x+4y=0$ എങ്കിൽ c -യുടെ മൂല്യം

(1) –3 (2) –1 (3) 3 (4) 1

24. $x^2-xy-6y^2=0$ എന്ന നേർരേഖകൾക്കിടയിലുള്ള ന്യൂനകോൺ θ എങ്കിൽ $\frac{2\cos\theta+3\sin\theta}{4\sin\theta+5\cos\theta}$ -യുടെ മൂല്യം

(1) 1 (2) $-\frac{1}{9}$ (3) $\frac{5}{9}$ (4) $\frac{1}{9}$

25. $x^2+2xy\cot\theta-y^2=0$ എന്ന ജോടി രേഖകളുടെ സമീകരണത്തിന്റെ ഒരു സമീകരണം

(1) $x-y\cot\theta=0$ (2) $x+y\tan\theta=0$

(3) $x\cos\theta+y(\sin\theta+1)=0$ (4) $x\sin\theta+y(\cos\theta+1)=0$

സംഗ്രഹം

- തന്നിട്ടുള്ള നിർദ്ദേശങ്ങളുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ നേർരേഖയുടെ സമീകരണത്തിന്റെ വകഭേദങ്ങൾ

ക്രമ സംഖ്യ	തന്നിട്ടുള്ള നിർദ്ദേശം	നേർരേഖകളുടെ സമീകരണം
(i)	ചായ്‌വ് (m) ഉം y അന്തഃഖണ്ഡവും - (b) യുംആയാൽ	$y=mx+b$
(ii)	ചായ്‌വ് (m) ഉം ഒരു ബിന്ദു (x_1,y_1) ഉം ആയാൽ	$y-y_1=m(x-x_1)$
(iii)	രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ (x_1,y_1) ഉം (x_2,y_2) തന്നിരുന്നാൽ	$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$
(iv)	x -അന്തഃഖണ്ഡം (a) യും y -അന്തഃഖണ്ഡം(b) യും ഉള്ള രേഖയുടെ സമീകരണം	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$
(v)	ലംബത്തിന്റെ നീളം (p) യും കോണം (α) യും ആയാൽ	$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$
(vi)	പരാമട്രിക് രൂപം : പരാമീറ്റർ (r)	$\frac{x-x_1}{\cos\theta}=\frac{y-y_1}{\sin\theta}=r$
(vii)	പൊതുരൂപം	$ax+by+c=0$

XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 342 14-02-2023 16:56:20

നേർരേഖയുടെ രൂപം	സമാന്തരത്തിനുള്ള നിബന്ധന	ലംബത്തിനുള്ള നിബന്ധന
$y = m_1x + c_1$ ഉം $y = m_2x + c_2$	$m_2 = m_1$	$m_1m_2 = -1$
$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ഉം $a_2x + b_2y + c_2 = 0$	$a_1b_2 = a_2b_1$	$a_1a_2 + b_1b_2 = 0$

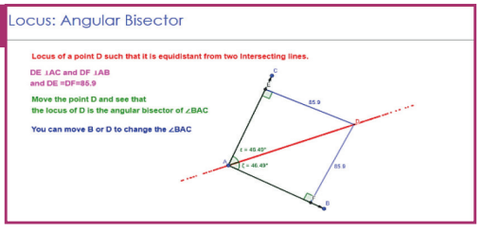
- ഒരു ബിന്ദു $P(x_1, y_1)$ എന്നത് $ax + by + c = 0, \ (c \neq 0)$ എന്ന രേഖയ്ക്ക് മൂലബിന്ദുവശമായോ അല്ലെങ്കിൽ മൂലബിന്ദു അല്ലാത്ത വശത്തിലോ ഇരുന്നാൽ $ax_1 + by_1 + c$ യും c – യും യഥാക്രമം ഒരേ ചിഹ്നം അല്ലെങ്കിൽ എതിർ ചിഹ്നത്തിലോ ആയിരിക്കും.
- (x_1, y_1), (x_2, y_2) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾക്കിടയിലുള്ള അകലം,
$$D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
- $P(x_1, y_1)$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്നും $ax + by + c = 0$ -യ്ക്ക് ഉള്ള അകലം $\left| \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$
- $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_1x + b_1y + c_2 = 0$ എന്ന സമാന്തര രേഖകൾക്ക് ഇടയിലുള്ള അകലം $\frac{|c_2 - c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
- $ax + by + c = 0$ എന്ന നേർരേഖയ്ക്ക്
  (i) സമാന്തരമായ രേഖ $ax+by = k$
  (ii) ലംബരേഖകൾ $bx - ay = k$
- ഒരു ബിന്ദു (x_1, y_1) എന്ന ബിന്ദുവഴിയെ ചെല്ലുന്ന നേർരേഖ $ax + by + c = 0$ യ്ക്ക്
  (i) സമാന്തരമായുള്ളത് എങ്കിൽ, $ax + by = ax_1 + by_1$ ഉം
  (ii) ലംബമായുള്ളതെങ്കിൽ, $bx - ay = bx_1 - ay_1$ ആകുന്നു.
- $ax + by + c = 0$ എന്ന നേർരേഖയെ സംബന്ധിച്ച് (x_1, y_1) എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ പ്രതിബിംബ ബിന്ദുവിലെ അക്ഷദൂരങ്ങൾ $\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = -\frac{2(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2}$

ജോടി നേർരേഖകൾ	സമാന്തരത്തിനുള്ള നിബന്ധന	ലംബത്തിനുള്ള നിബന്ധന
$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$	$h^2 - ab = 0$	$a + b = 0$

- $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ എന്ന ജോടി നേർരേഖയുടെ കോണിന്റെ ദ്വിഭാജകത്തിന്റെ സമീകരണം $\frac{x^2 - y^2}{a - b} = \frac{xy}{h}$
- ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന്റെ പൊതുരൂപം $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$
  (i) മുകളിൽ പറഞ്ഞ സമീകരണം ഒരു ദ്വിഘാത നേർരേഖയായി ഇരിയ്ക്കുന്നതിനുള്ള നിബന്ധന $abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$
  (ii) ഇവയ്ക്കിടയിലുള്ള $\theta = \tan^{-1}\left| \frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b} \right|$. ഇവിടെ $a + b = 0$ എങ്കിൽ രേഖകൾ ഒന്നിനൊന്ന് ലംബമായിരിക്കും.
  (iii) ഛേദിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ $P = \left(\frac{hf - bg}{ab - h^2}, \frac{gh - af}{ah - h^2} \right) ab - h^2$
- $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ എന്ന ജോടി നേർരേഖകൾ സമാന്തരമാണെങ്കിൽ, $\frac{a}{h} = \frac{h}{b} = \frac{g}{f}$ അല്ലെങ്കിൽ $bg^2 = af^2$
- $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ എന്ന രേഖയ്ക്ക് സമാന്തരമായി പോകുന്ന രണ്ടു നേർ രേഖകൾക്കിടയിലുള്ള അകലം $2\sqrt{\frac{(g^2 - ac)}{a(a + b)}}$ അല്ലെങ്കിൽ $2\sqrt{\frac{(f^2 - bc)}{b(a + b)}}$.

XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 343 14-02-2023 16:56:24

പ്രതീക്ഷിക്കുന്ന ഫലങ്ങൾ – 6 (എ)



സ്റ്റെപ്പ്–1

ബ്രൗസർ തുറക്കുക. താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള യുആർഎൽ ലിങ്കിനെ ടൈപ്പ് ചെയ്യുക. അല്ലെങ്കിൽ കൂആർ കോഡ് സ്കാൻ ചെയ്യുക.

സ്റ്റെപ്പ്–2

Geogebra Work book ലെ 11 Standard Analytical Geometry യെ open ചെയ്യുക 5 ൽ കൂടുതൽ Work Sheet ൽ തന്നിട്ടുണ്ട് അതിൽ നിങ്ങൾക്ക് ആവശ്യം ഉള്ളതിനെ Select ചെയ്യുക ഉദാഹരണമായി "Locus Angular bisector" Select കചെയ്യുക

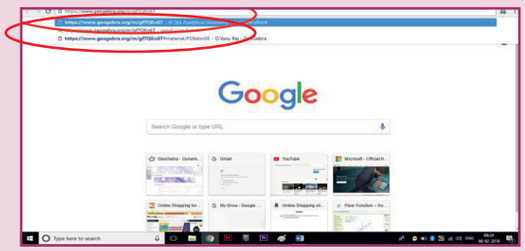
സ്റ്റെപ്പ്–3

അപ്പോൾ "Locus: Angular Work Sheet Open" ആകും ആ Page ൽ "D" എന്ന ബിന്ദുവിലോട്ട് Locus ചെയ്യുക

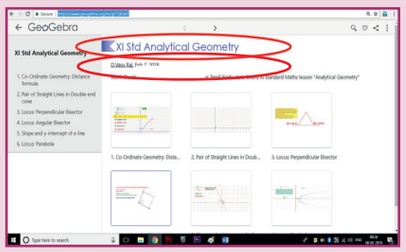
സ്റ്റെപ്പ്–4

"D"യെ ചലിപ്പിക്കുമ്പോൾ അവയുടെ ലംബദൂരങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള രണ്ടു നേർരേഖകളുടെ അകലം തുല്യമാകും.

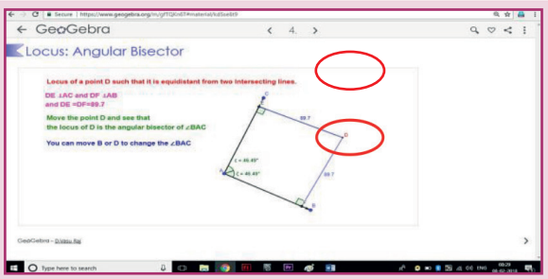
ഘട്ടം–1



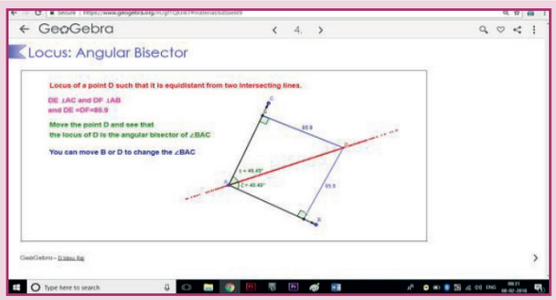
ഘട്ടം–2



ഘട്ടം–3



ഘട്ടം–4



അതുപോലെ നിങ്ങൾക്ക് മറ്റ് സ്ഥിരബിന്ദു ഒരു നേർരേഖയുടെ സമവാക്യം $y = mx + c$ എന്ന സമവാക്യം ദൂരം കാണുന്നതിനുള്ള സൂത്രം അവസാന കോണിലെ ഒരു ജോടി നേർരേഖകൾ എന്നിവ പരിശോധിക്കാം.

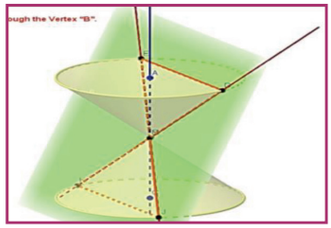
*ചിത്രങ്ങൾ സൂചകങ്ങൾ മാത്രം.

പ്രവർത്തനത്തിനുള്ള ലിങ്ക് : https://ggbm.at/QNaNghJZ

TZCSH

XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 344 14-02-2023 16:56:24

പ്രതീക്ഷിക്കുന്ന ഫലങ്ങൾ – 6 (ബി)



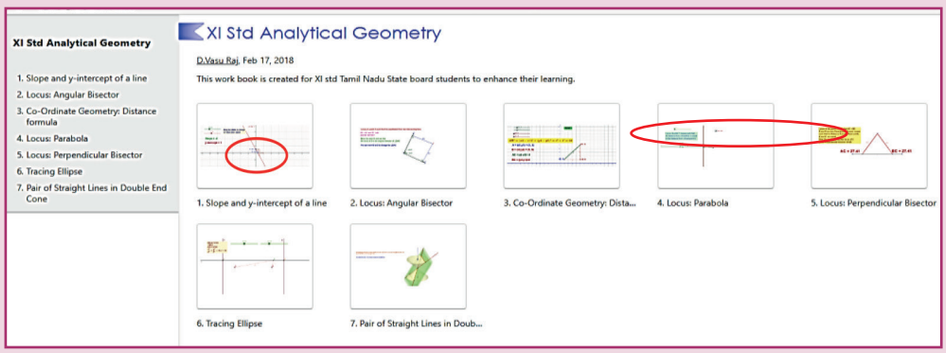
സ്റ്റെപ്പ്–1

ബ്രൗസർ തുറക്കുക താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള URL link നെ type ചെയ്യുക അല്ലെങ്കിൽ QR Code നെ തുറക്കുക "XI STD Analytical Geometry" എന്ന വർക്ക് ബുക്ക് തുറക്കപ്പെടും. അതിൽ നിങ്ങളുടെ പാഠവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട അഭ്യാസങ്ങളെ നിങ്ങൾക്ക് തിരഞ്ഞെടുക്കാം. അപ്പോൾ "Pair of Straight Line in Double End Cone" എന്ന ഭാഗം തിരഞ്ഞെടുക്കാം.

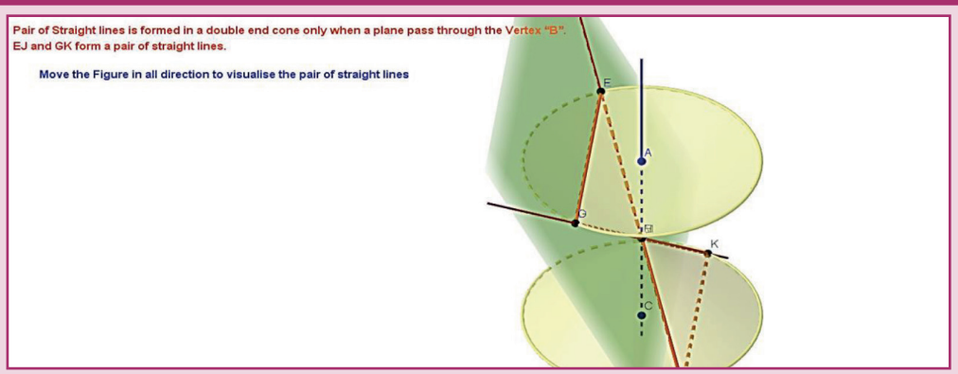
സ്റ്റെപ്പ്–2

ഒരു തലത്തെ louble end cone നാല് ബിന്ദുക്കളിൽ ഛേദിക്കുകയും അത് ശീർഷം വഴി കടന്നു പോകുകയും ചെയ്യുമ്പോൾ നമുക്ക് ഒരു ജോടി നേർരേഖകളെ നിരീക്ഷിക്കാൻ സാധിക്കുന്നു. കൂടാതെ E, D എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ ചലിപ്പിച്ചും നമുക്ക് നിരീക്ഷിക്കാം.

ഘട്ടം–1



ഘട്ടം–2



*ചിത്രങ്ങൾ സൂചകങ്ങൾ മാത്രം.

പ്രവർത്തനത്തിനുള്ള ലിങ്ക് : https://ggbm.at/QNaNghJZ

XI_Maths_Ch-6_V-1_Mal.indd 345 14-02-2023 16:56:25

ഉത്തരങ്ങൾ

അഭ്യാസം 1.1

(1) (i) $\{2, 3, 5, 7\}$ (ii) $\{1\}$ (iii) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

(iv) $\{-5\}$ (2) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 1\}$ (3) (i) പരിമിതം

(ii) അനന്തം (iii) അനന്തം (iv) അനന്തം

(v) അനന്തം (5) ശരിയല്ല (6) 0

(7) 128 (8) $\{0, 1, 2, 3\}$ (9) $A = \{x, y, z\}, B = \{1,2\}$

(10) $\{(-1, 0), (-1, 1), (0, 2), (1, 2)\}$

അഭ്യാസം 1.2

(1)(i) റിഫ്ളെക്സിവ്, സമഭാഗമല്ല, ട്രാൻസിറ്റിവ് (ii) റിഫ്ലക്സിവ് അല്ല സമഭാഗമാണ്, ട്രാൻസിറ്റിവ് അല്ല

(iii) റിഫ്ളക്സിവ്, സമഭാഗികം, ട്രാൻസിറ്റിവ് അല്ല (iv) റിഫ്ളക്സിവ്, സമഭാഗികം,

(v) $\mathbb{R}$ ഒരു ശൂന്യഗണം; റിഫ്ളക്സിവ് അല്ല, സമഭാഗികം, ട്രാൻസിറ്റീവ്

(2) (i) $(c, c), (d, d)$ (ii) (c, a)

(iii) ഉൾപ്പെടുത്തൽ ഒന്നുമില്ല (iv) $(c, c), (d, d), (c, a)$ ഉൾപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്

(3) (i) (c, c) (ii) (c, a) (iii) ഒന്നുമില്ല (iv) $(c, c), (c, a)$

(5) $\{(3, 8), (6, 6), (9, 4), (12, 2)\}$ റിഫ്ളെക്സിവ് അല്ല, സമഭാഗീകമല്ല, ട്രാൻസിറ്റിവ് ആണ്, തുല്യതാബന്ധമില്ല

(7) $R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (5,1)\}$ ഫിഫ്ളെക്സ് അല്ല, സമഭാഗികം ആണ്, ട്രാൻസിസ്റ്റിവ് അല്ല, തുല്യവുമല്ല

(8) ചെറിയഗണം = $\{(a, a), (b, b), (c, c)\}$. വലിയഗണം = $A \times A$

അഭ്യാസം 1.3

(1) അതെ, വിപരീതം ഒരു ഫലനമല്ല

(2) $f(-4) = 8$, $f(1) = 0$, $f(-2) = 6$, $f(7) = 0$, $f(0) = 0$

(3) $f(-3) = 1$, $f(5) = 38$, $f(2) = 1$, $f(-1) = -5$, $f(0) = -3$

(4) (i) ഘനമല്ല 1,1 ഫലനവുമല്ല (ii) ഫലനമല്ല .

(5) (i) $f = \{(1, a), (2, a), (3, a), (4, a)\}$ (ii) സാധ്യമല്ല

(iii) സാധ്യമല്ല (iv) $\{(1, a), (2, b), (3, c), (4, d)\}$

(6) $\mathbb{R} - \{n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}\}, n \in \mathbb{Z}$ (7) $\emptyset$ (8) $(-\infty, \frac{-1}{3}\ ] \cup [1, \infty)$

(9) $\mathbb{R} - \{0\}, \mathbb{R} - \{0\}$ (10) എല്ലാ x-നും $(g \circ f) = 0$,
$x < 0$ എന്നാൽ, $f \circ g = -4x$
$x \geq 0$ എന്നാൽ, $f \circ g = 0$

(12) $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{3}$ (13) $x > 0$

XI_Maths_Ans_V-1_Mal.indd 346 14-02-2023 16:34:21

(15) ആകെ വില = 0.43 മീ + 50, വിമാന നിരക്ക് = ₹ 738

(16) $(A + S)(x) = 55,000 + 0.09x$, കുടുംബത്തിലെ ആകെ വരുമാനം = ₹14, 05, 000

(17) $(g \circ f)(x) = 62.115x$

(18) ദിവസത്തെ വരുമാനം = $₹(200 - x)x$; ആകെ വില = $₹100(200 - x)$;

മൊത്ത ലാഭം = $₹(200 - x)x - 100(200 - x)$

(19) $f^{-1}(x) = \frac{9x}{5} + 32$ (20) $f^{-1}(x) = \frac{x+4}{3}$

അഭ്യാസം 1.5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
(3)	(2)	(4)	(1)	(1)	(4)	(2)	(2)	(3)	(2)	(2)	(3)	(3)
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
(2)	(4)	(3)	(4)	(3)	(2)	(4)	(4)	(1)	(4)	(2)	(3)	

അഭ്യാസം 2.1

(1) $\sqrt{7} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $-\frac{1}{4} \in \mathbb{Q}$, $0 \in \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, $3.14 \in \mathbb{Q}$, $4 \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, $\frac{22}{7} \in \mathbb{Q}$

(3) അതെ, $4 + \sqrt{3}$, $2 + \sqrt{3}$ (4) അതെ, $2 + \sqrt{3}$, $2 - \sqrt{3}$ (5) $\frac{1}{2^{1001}}$

അഭ്യാസം 2.2

(1) (i) $-4 < x < 10$ (ii) $\mathbb{R}$ (iii) $\frac{11}{3} \le x \le \frac{13}{3}$ (iv) $-7 < x < 7$

(2) $\left(-\infty, \frac{5}{12}\right) \cup \left(\frac{7}{12}, \infty\right)$ (3) $\left(-\infty, \frac{-7}{3}\right] \cup \left[\frac{7}{3}, \infty\right)$

(4) $\frac{-15}{2} \le x \le \frac{11}{2}$ (5) $\frac{-3}{10} < x < \frac{7}{10}$ (6) നിർദ്ധാരണം ഇല്ല

അഭ്യാസം 2.3

(1) (i) $[-1, 4)$ (ii) $[-3, 5]$ (iii) $(-\infty, 3)$ (iv) $(-\infty, 5)$

(2) (i) 1, 2, 3, 4 (ii) . . . , −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4

(3)(i) $\left(-\infty, -\frac{9}{2}\right]$ (ii) . . . , −7, −6, −5 (iii) നിർദ്ധാരണം ഇല്ല

(4)(i) $(-\infty, 2]$ (ii) $\left(\frac{34}{5}, \infty\right)$ (5) 93

(6) 120 ലിറ്ററിനും, 300 ലിറ്ററിനും ഇടയിൽ (7)(11, 13), (13, 15), (15, 17), (17, 19)

(8) $t = 9$ സെക്കന്റ്, 11 സെക്കന്റ് (9)10 മണിക്കൂറിനേക്കാൾ കുറവ്

(10) < ₹ 21,000 നേക്കാൾ കുറവോ > ₹ 33,000 ത്തിനേക്കാൾ കൂടുതലോ ആകാം.

അഭ്യാസം 2.4

(1) $x^2 - 4x - 21 = 0$ (2) $-\frac{2}{5}\left(x^2 - 2x - 4\right)$ (3) $x^2 + \frac{\sqrt{2}}{3}x + \frac{1}{3} = 0$

(6) (i) $b = 0$ (ii) $3b^2 = 16ac$ (iii) $c = a$

XI_Maths_Ans_V-1_Mal.indd 347 14-02-2023 16:34:24

(8) (i) വാസ്തവികവും വ്യത്യസ്തവും (ii) വാസ്തകികവും വ്യത്യസ്തവും
(iii) വാസ്തവികവും വ്യത്യസ്തവും

(9) (i) ഛേദിക്കുന്നില്ല (ii) 2 ബിന്ദുക്കളിൽ ഛേദിക്കും (iii) ഒരേ ഒരു ബിന്ദുവിൽ മാത്രമേ സ്പർശിക്കുകയുള്ളൂ.

(10) $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2$

അഭ്യാസം 2.5

(1) $\left[-3, \frac{5}{2}\right]$ (2) $[1, 2]$

അഭ്യാസം 2.6

(1) $-\frac{5}{2}$ കൂടാതെ $\frac{5}{2}$ (2) $\frac{3+\sqrt{53}}{2}$ കൂടാതെ $\frac{3-\sqrt{53}}{2}$

(3) $x = \pm 2$ (4) $x=-\frac{3}{5}$ കൂടാതെ -1

അഭ്യാസം 2.7

(1) $\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)$ (2) $a = 5$

അഭ്യാസം 2.8

(1) $(0, 1) \cup (2, \infty)$ (2) $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)\cup(2, 4)$ (3) $(-3, -2]\cup[2, 5)$

അഭ്യാസം 2.9

(1) $\frac{1}{2a(x-a)}-\frac{1}{2a(x+a)}$ (2) $\frac{7}{3(x-2)}+\frac{2}{3(x+1)}$

(3) $\frac{1}{6(x-1)}+\frac{2}{15(x+2)}+\frac{-3x+1}{10(x^2+1)}$ (4) $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-1)^3}$

(5) $\frac{1}{4(x-1)}-\frac{1}{4(x+1)}-\frac{1}{2(x^2+1)}$ (6) $\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2+1}$

(7) $1+\frac{13}{x-3}-\frac{7}{x-2}$ (8) $(x-5)+\frac{32}{(x+3)}-\frac{11}{(x+2)}$

(9) $-\frac{14}{9(x+1)}-\frac{11}{3(x+1)^2}+\frac{14}{9(x-2)}$ (10) $\frac{4}{x+1}+\frac{2x-3}{x^2+1}$

(11) $2+\left(\frac{2}{x+3}-\frac{1}{x-1}\right)$ (12) $\frac{3}{x+1}+\frac{4-3x}{x^2+1}$

അഭ്യാസം 2.11

(1) (i) 25 (ii) $\frac{1}{8}$ (iii) $\frac{1}{100}$ (iv) $\frac{1}{9}$ (v) $\frac{1}{3}$

(2) 8 (3) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (4) $\frac{1}{2}$ (5) 2

XI_Maths_Ans_V-1_Mal.indd 348 14-02-2023 16:34:27

(6) $\frac{21+7\sqrt{2}+3\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{7}$ (7) 5 (8) $\frac{2+2\sqrt{6}}{5}$

അഭ്യാസം 2.12

(1) $\log_b y = x$, $(0, \infty)$, $(-\infty, \infty)$ (2) $\frac{5}{6}$

(3) 64 (4) 2 (11) $2\sqrt{2}$ (12) -10

അഭ്യാസം 2.13

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(2)	(1)	(2)	(3)	(2)	(2)	(3)	(1)	(2)	(2)
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
(2)	(3)	(3)	(2)	(3)	(1)	(3)	(1)	(1)	(4)

അഭ്യാസം 3.1

(1) (i) ഒന്നാം ചതുർത്ഥാംശം (ii) രണ്ടാം ചതുർത്ഥാംശം

(iii) 4-ാം ചതുർത്ഥാംശം (iv) 4-ാം ചതുർത്ഥാംശം

(v) രണ്ടാം ചതുർത്ഥാംശം

(2) (i) 35 (ii) 165 (iii) 70 (iv) 90 (v) 270

(8) $k \in [-1, 1]$ (9) $\sec\theta = \frac{p^2+1}{2p}$; $\tan\theta = \frac{p^2-1}{2p}$; $\sin\theta = \frac{p^2-1}{p^2+1}$

(10) $\left(c^2+bd\right)^2 = (ad+cb)^2 + (ac-b^2)^2$

അഭ്യാസം 3.2

(1) (i) $\frac{\pi}{6}$ റേഡിയൻസ് (ii) $\frac{3\pi}{4}$ റേഡിയൻസ് (iii) $-\frac{41\pi}{36}$ റേഡിയൻസ്

(iv) $\frac{5\pi}{6}$ റേഡിയൻസ് (v) $\frac{11\pi}{6}$ റേഡിയൻസ്

(2) (i) 60° (ii) 20° (iii) 72° (iv) 420° (v) 200°

(3) $r \approx 31.82$ മീറ്റേഴ്സ് (4) $s = \frac{20\pi}{3} = 20.95$ സെ.മീ

(5) $\theta = 12^\circ 36'$ (6) $s = 7.16$ അടി (7) $r_1 : r_2 = 5 : 4$

(8) വൃത്തഖണ്ഡത്തിന്റെ കോൺ $\approx 65^\circ 27' 16''$

(9) 6000° (10) 14° (11) $\frac{3\pi}{4}$

അഭ്യാസം 3.3

(1) (i) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ii) $-\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{1}{2}$ (iv) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

(v) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ (vi) $\sqrt{3}$ (vii) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

XI_Maths_Ans_V-1_Mal.indd 349 14-02-2023 16:34:31

(2) $\sin\theta = \frac{2\sqrt{6}}{7}$; $\cos\theta = \frac{5}{7}$; $\tan\theta = \frac{2\sqrt{6}}{5}$; $\operatorname{cosec}\theta = \frac{7}{2\sqrt{6}}$; $\sec\theta = \frac{7}{5}$; $\cot\theta = \frac{5}{2\sqrt{6}}$

(3) (i) $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\operatorname{cosec}\theta = -\frac{2}{\sqrt{3}}$; $\sec\theta = -2$; $\tan\theta = \sqrt{3}$; $\cot\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(ii) $\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$; $\operatorname{cosec}\theta = \frac{3}{\sqrt{5}}$; $\sec\theta = \frac{3}{2}$; $\tan\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$; $\cot\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

(iii) $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$; $\operatorname{cosec}\theta = -\frac{3}{2}$; $\sec\theta = \frac{3}{\sqrt{5}}$; $\tan\theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$; $\cot\theta = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

(iv) $\sec\theta = -\sqrt{5}$; $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\cot\theta = -\frac{1}{2}$; $\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $\operatorname{cosec}\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$

(v) $\cos\theta = \frac{5}{13}$; $\sin\theta = -\frac{12}{13}$; $\operatorname{cosec}\theta = -\frac{13}{12}$; $\tan\theta = -\frac{12}{5}$; $\cot\theta = -\frac{5}{12}$

(5) $\theta = 60^\circ, 120^\circ, 240^\circ, 300^\circ$

അഭ്യാസം 3.4

(1) (i) $\sin(x+y) = \frac{220}{221}$ (ii) $\cos(x-y) = \frac{171}{221}$ (iii) $\tan(x+y) = \frac{220}{21}$

(2) (i) $\sin(A+B) = \frac{187}{205}$ (ii) $\cos(A-B) = \frac{156}{205}$

(3) $\cos(x-y) = \frac{4}{5}$ (4) $\sin(x-y) = -\frac{87}{425}$

(5) $\cos 105^\circ = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$; $\sin 105^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$; $\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right) = -(2+\sqrt{3})$

(7) $4x^2 - 2\sqrt{6}x + 1 = 0$ (16) 0 (22) 1 (24) $\frac{2}{11}$

അഭ്യാസം 3.5

(1) (i) $\frac{161}{289}$ (ii) $-\frac{7}{25}$ (iii) $\frac{3713}{4225}$ (2)(i) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ (ii) $\frac{1}{3\sqrt{2}}$

അഭ്യാസം 3.6

(1) (i) $\frac{1}{2}[\sin 63^\circ + \sin 7^\circ]$ (ii) $\frac{1}{2}[\sin 6x + \sin 2x]$ (iii) $\frac{1}{2}[\sin 12\theta + \sin 8\theta]$

(iv) $\frac{1}{2}[\cos 7\theta + \cos 3\theta]$ (v) $\frac{1}{2}[\cos\theta - \cos 9\theta]$

(2) (i) $2\cos 55^\circ \sin 20^\circ$ (ii) $2\cos 40^\circ \cos 25^\circ$

(iii) $2\sin 45^\circ \cos 5^\circ$ (iv) $2\sin 55^\circ \sin 20^\circ$

അഭ്യാസം 3.8

(1) (i) $\pi = -\frac{\pi}{4}$; $\theta = n\pi + (-1)^n\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$ (ii) $\theta = \frac{\pi}{6}$; $\theta = n\pi + \frac{\pi}{6}$, $n \in \mathbb{Z}$

XI_Maths_Ans_V-1_Mal.indd 350 14-02-2023 16:34:38

(iii) $\theta = -\frac{\pi}{6};\ \theta = n\pi + \left(-\frac{\pi}{6}\right), n \in \mathbb{Z}$

(2)(i) $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ (ii) $x = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \pi$ (iii) $x = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ (iv) $x = 0, \pi$

(3)(i) $x = (2n+1)\frac{\pi}{6}$ അല്ലെങ്കിൽ $x = \frac{n\pi}{2} + (-1)^n \frac{\pi}{12},\ n \in \mathbb{Z}$

(ii) $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$ അല്ലെങ്കിൽ $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}$

(iii) $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{4}$ അല്ലെങ്കിൽ $\theta = 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$

(iv) $\theta = \frac{n\pi}{3}$ അല്ലെങ്കിൽ $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3},\ n \in \mathbb{Z}$ (v) $\theta = 2n\pi$ അല്ലെങ്കിൽ $\theta = \frac{2n\pi}{3} + \left(-\frac{\pi}{6}\right),\ n \in \mathbb{Z}$

(vi) $\theta = (8n+1)\frac{\pi}{4},\ n \in \mathbb{Z}$ (vii) $\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$

(viii) $\theta = 2n\pi - \frac{\pi}{3} \pm \frac{2\pi}{3},\ n \in \mathbb{Z}$ (ix) $\theta = \frac{n\pi}{3} + \frac{\pi}{18},\ n \in \mathbb{Z}$

(x) $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{10},\ n \in \mathbb{Z}$ (xi) $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$

അഭ്യാസം 3.9

(2) $\angle A = 75^\circ$ (9) 40 മീ, 40 മീ, 4 മീ (10) 4 മീ, 4 മീ, 4 മീ കൂടാതെ $4\sqrt{3}$ ച.മീ

അഭ്യാസം 3.10

(1) അങ്ങനെ ഒരു ത്രികോണം നിലവിലില്ല (3) $\angle A = 15^\circ,\ \angle B = 105^\circ,\ C = \sqrt{6}$

(7) $\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}$ കി.മീ (8) $2\sqrt{13}$ കി.മീ (9) $3 + \sqrt{73}$ കി.മീ (10) 7 കി.മീ

(11) ആകെ വില : ₹155800 ചുറ്റളവ് $180 + 20\sqrt{27}$ അടി

(12) $x = 100$ കി.മീ (13) $\sqrt{5 - 2\sqrt{2}}$ കി.മീ (14) $2\sqrt{6} + 2(\sqrt{3}+3)$ കി.മീ

(15) $10\sqrt{13}$ കി.മീ

അഭ്യാസം 3.11

(1) (i) $\theta = \frac{\pi}{4}$ (ii) $\theta = \frac{\pi}{6}$ (iii) $\theta = -\frac{\pi}{2}$ (iv) $\theta = \frac{3\pi}{4}$ (v) $\theta = \frac{\pi}{3}$

അഭ്യാസം 3.12

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(4)	(1)	(1)	(1)	(4)	(4)	(1)	(2)	(4)	(2)
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
(3)	(2)	(3)	(3)	(2)	(4)	(1)	(1)	(1)	(1)

XI_Maths_Ans_V-1_Mal.indd 351 14-02-2023 16:34:43

അഭ്യാസം 4.1

(1) (i) 17 (ii) 6 (iii) 20 (iv) 720 (v) 120

(2) (i) 151200 (ii) 24 (3) (i) 12 (ii) 24

(4) (i) 64 (ii) 24 (5) (i) 90 (ii) 64

(6) (i) 144 (ii) 80 (7) (i) 48 (ii) 90

(8) (i) 9000 (ii) 4536 (iii) 4464 (9) (i) 36 (*ii*) 60

(10) 13 (11) 400 (12) (i) 42 (ii) 78

(13) (i) 4^6 (ii) 3^{10} (iii) 10^{12} (14) (i) 720 (ii) 144

(iii) 4 (iv) 144 (v) 220 (vi) $(n+3)(n+2)$

(15) (i) 15 (ii) 120 (iii) $\frac{n(n-1)}{2}$ (16) (i) 4 (ii) 100

അഭ്യാസം 4.2

(1) 10 (2) 4 (3) (i) 336 (ii) 172800 (4) 720

(5) (i) 4^{10} (ii) $3^4 \times 5^6$ (iii) 11! (6) (i) 4^5 (ii) 15^5

(7) 144 (8) (i) 14! (ii) 9! × 6! (iii) $8! \times {}^9P_6$

(9) 34650 (10) 1260 (11) 6912 (12) 60

(13) (i) 2^8 (ii) 28 (14) (i) 43200 (ii) 151200

(iii) 19807200 (iv) 151200 (15) (i) 180 (ii) 60 (iii) 30

(16) (i) 379 (ii) 135 (17) 120, ഐന്റ് (18) 7

(19) 399960 (20) 571956

അഭ്യാസം 4.3

(1) 1 (2) 3 (3) 10, 3 (6) 20

(9) (i) ${}^{14}C_7 = 3432$ (ii) ${}^{15}C_2 = 105$ (iii) ${}^{20}C_2 = 190$ (iv) ${}^{100}C_5$

(v) ${}^5C_3 \times {}^4C_2 \times {}^2C_1 = 120$ (10) (i) $2^4 = 16$ (ii) $2^5 = 32$ (iii) 2^n

(11) (i) ${}^{25}C_3$ (ii) ${}^{25}P_3$ (12) ${}^{10}P_2 \times {}^8C_4 = 6300$

(13) (i) ${}^{10}C_3 = 120$ (ii) ${}^{10}C_5 = 252$ (14) ${}^5C_2 \times {}^{20}C_3 = 11400$

(i) ${}^4C_1 \times {}^{20}C_3 = 4560$ (ii) ${}^5C_2 \times {}^{19}C_3 = 9690$ (15) ${}^7C_3 = 35$

(16) 4512 (17) 546 (18) (i) 280 (ii) 336 (iii) 736

(19) 485 (20) 64 (21) 2454 (22) ${}^{15}C_3 = 455$

(23) 364 (24) (i) 50 (ii) 161 (25) 15

അഭ്യാസം 4.5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
(2)	(2)	(1)	(2)	(2)	(2)	(1)	(4)	(2)	(2)	(3)	(4)	(2)
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
(3)	(1)	(4)	(2)	(3)	(4)	(3)	(2)	(2)	(2)	(1)	(2)	

XI_Maths_Ans_V-1_Mal.indd 352 14-02-2023 16:34:46

അഭ്യാസം 5.1

(1) (i) $8x^6 - 36x^3 + 54 - \frac{27}{x^3}$ (ii) $2[16x^8 + 216x^4(1-x^2) + 81(1-x^2)^2]$

(2) (i) 108243216 (ii) 96059601 (iii) 4782969

(3) $(1.01)^{10^6} > 10000$ (4) 10

(5) $15, x^6$ ഈ പദങ്ങൾ സാധ്യമല്ല. (6) 26235 (7) $-\frac{40}{27}$

(8) 01 (13) $n = 15$ (14) $n = 55$ (15) $n = 7$ അല്ലെങ്കിൽ 14

അഭ്യാസം 5.2

(1) (i) (*G.P.*) ഗുണനക്രമാനുപാത ശ്രേണി (ii) ഇതൊന്നുമല്ല

(iii) (*G.P.*) ഗുണനക്രമാനുപാതശ്രേണി (iv) ഇതൊന്നുമല്ല (v) ഇതൊന്നുമല്ല

(vi) *A.P., G.P., A.G.P.* ഉം *H.P* (vii) (*A.G.P*) കൂട്ടു സമാന്തര ഗുണനക്രമാനുപാത ശ്രേണി

(2) (i) 2, 2, 4, 4, 6, 6, . . . (ii) 1, 2, 3, 5, 8, 13, . . .

(iii) 1, 2, 3, 6, 11, 20 , . . .

(3)(i) $a_n = \begin{cases} n+1 & ; \ n \text{ ഒരു ഒറ്റ സംഖ്യ} \\ n & ; \ n \text{ ഒരു ഇരട്ട സംഖ്യ} \end{cases}$ (ii) $a_n = \frac{n}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $a_n = \frac{2n-1}{2n}, \forall n \in \mathbb{N}$ (iv) $a_n = \begin{cases} 7-n & ; \\ 8+n & ; \end{cases}$ n ഒരു ഒറ്റ സംഖ്യ, n ഒരു ഇരട്ട സംഖ്യ

(4) 12,18,27 (5) $t_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$ (8) 5, 45

അഭ്യാസം 5.3

(1) $a = \frac{133}{25}, d = -\frac{2}{75}, S_{20} = \frac{304}{3}$ (2) $S_{17} = 527$

(3)(i) $S_n = \frac{8}{81}\left[10\left(10^n - 1\right) - 9n\right]$ (ii) $S_n = \frac{6}{81}[10(10^n - 1) - 9n]$

(4) $S_n = \frac{4}{9}(4^n - 1) - \frac{n}{3}$ (5) $\frac{3n-2}{3^{n-1}}, \frac{3^n - (3n-2)}{2 \cdot 3^{n-1}} + \frac{3^{n-1} - 1}{4 \cdot 3^{n-3}}$

(6) $n = 15$ (8) 20 മാസങ്ങൾ (9) 2480 മീറ്ററുകൾ (10) $120,480,30(2)^n$

(11) $500\left(\frac{11}{10}\right)^{10} = 1296.87$ (12) 15 -ാം ദിവസം

അഭ്യാസം 5.4

(1) (i) $\frac{1}{5}\left[1 - \frac{x}{5} + \frac{x^2}{25} - \frac{x^3}{125} + \ldots\right]$; $|x| < 5$

(ii) $\frac{2}{9}\left[1 - 2\left(\frac{4x}{3}\right) + 3\left(\frac{4x}{3}\right)^2 - 4\left(\frac{4x}{3}\right)^3 + \ldots\right]$; $|x| < \frac{3}{4}$

(iii) $5^{\left(\frac{2}{3}\right)}\left[1 + \frac{2}{15}(x)^2 - \frac{1}{225}x^4 + \frac{4}{81 \times 125}x^6 + \ldots\right]$; $x^2 < 5$

XI_Maths_Ans_V-1_Mal.indd 353 14-02-2023 16:34:50

(iv) $2^{\left(-\frac{2}{3}\right)}\left[1-\frac{x}{3}+\frac{5}{36}x^2-\frac{5}{81}x^3+\ldots\right]$; $|x|<2$ (2) $(1001)^{\left(\frac{1}{3}\right)} \approx 10.00333$

(5) (i) $1+5x+\frac{25x^2}{2}+\frac{125x^3}{6}+\frac{625x^4}{24}+\frac{625x^5}{24}+\ldots$

(ii) $1-2x+2x^2-\frac{4x^3}{3}+\frac{2x^4}{3}-\frac{4x^5}{15}+\ldots$ (iii) $1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{48}x^3+\frac{1}{384}x^4+\ldots$

(6)(i) $4x-8x^2+\frac{64x^3}{3}-\frac{64x^4}{3}+\ldots$; $|x|<\frac{1}{4}$

(ii) $-2x-\frac{4x^2}{2}-\frac{8x^3}{3}-\frac{16x^4}{4}-\ldots$; $|x|<\frac{1}{2}$

(iii) $2[3x+\frac{27x^3}{3}+\frac{243x^5}{5}+\frac{2187x^7}{7}+\ldots]$; $|x|<\frac{1}{3}$

(iv) $-2[2x+\frac{8x^3}{3}+\frac{32x^5}{5}+\frac{128x^7}{7}+\ldots]$; $|x|<\frac{1}{2}$

(8) $\left(\frac{15}{16}\right)^{\frac{1}{8}} \simeq 0.99196$ (9) $\frac{28}{3}$ (10) $\frac{1}{2}log_e 10$

അഭ്യാസം 5.5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(4)	(4)	(4)	(4)	(2)	(3)	(1)	(3)	(4)	(1)
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
(1)	(4)	(4)	(2)	(3)	(2)	(2)	(3)	(3)	(2)

അഭ്യാസം 6.1

(1) (i) $x^2+y^2=81$ (ii) $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}=1$ (2) (i) $y=\pm 2$ (ii) $x=\pm 3$

(3) $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ (4) $k=-24,\ b=-\frac{1}{4}$ (5) $x^2+y^2=16$

(6) $x^2+y^2-4x-4y+8=0$ (7) $x^2+y^2-5x+8y+16=0$

(8) $y^2=2x$ (10) $8x^2+36y^2-16x+252y+431=0$

(11) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (12) $9x^2-33x-3y+35=0$

(13) $x^2+y^2-12x+9y+63=0$ (14) $(5-\sqrt{21},3),(5+\sqrt{21},3),(8,-3),(2,-3)$

(15) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

അഭ്യാസം 6.2

(1)(i) $y=5x-4$ (ii) $3x-y=2$ (iii) $2x+3y=5$ (iv) $x+\sqrt{3}y=(1+\sqrt{3})$

XI_Maths_Ans_V-1_Mal.indd 354 14-02-2023 16:34:56

(3) $10x+3y=25$ (5) (i) $C=\frac{5}{9}(F-32)$ അല്ലെങ്കിൽ $F=\frac{9}{5}C+32$

(ii) $C=37^\circ$ (iii) $F=100.4^\circ$ (6) (i) 4400 മീറ്റർ (ii) $D=3000$ മീറ്റർ

(iii) $T=22$ സെക്കന്റ് (7) $P=1,55,000$

(8) $\sqrt{(3)}x+y=24$ (9) $3x-4y=12, x-2y=2$

(11) $(13,7),(-11,-3)$ (12) (i) $y=12.5x-150$ (ii) 12 സെക്കന്റ്

(iii) 80 സെക്കന്റ് (13) (ii) $x-2y+4=0$ (iii) 2 സെ.മീ

(iv) 14 കി.മീ (v) 5 സെ.മീ (14) (i) $y=-\frac{71}{120}x+14.2, 0\le x\le 24$

(ii) $y=f(x)$ എന്നത് ഒരു പിരിയോഡിക്കൽ ഫലനമാണ് കൂടാതെ പിരിയേഡ് 24, $f(x)=f(x+24)$

(15)(i) കുറഞ്ഞനീളം = 3280 മാത്രകൾ

(ii) 180, 360 കൂടാതെ 540 മാത്രകൾ (iii) ഓരോ വഴിത്തിരിവിലും ചായ്വ് എന്നത് $=\frac{9}{40}$

അഭ്യാസം 6.3

(2) $5x-4y-15=0$ (3) (i) $\frac{8}{5}$ (ii) $\frac{23}{5}$

(4) (i) $x+3y+2$ 0 (ii) $4x-3y-7=0$ (5) $x+5y-31=0$

(6)(i) $x+1=0$ (ii) $x-y=0$ (iii) $2x+y+3=0$

(7) $12x+5y+6=0$ കൂടാതെ $12x+5y-20=0$

(8) $4x-3y+15=0$ കൂടാതെ $4x-3y-25=0$

(9) $2x+3y-18=0$ (10) $7\sqrt{2}$ കൂടാതെ $(-3,5)$ (12) (i) $\frac{14}{13}$ (ii) $\frac{5}{2}$

(13) (i) $4x-3y+k=0,\ k\in\mathbb{R}$ (ii) $3x+4y+k_1=0, k_1\in\mathbb{R}$

(14) $\sqrt{3}x-y-2\sqrt{3}=0$ (15) $A\left(\frac{13}{5},0\right)$ (16) $x+5y\pm10=0$

(17) $(0,7)$ (18) (i) $y=\begin{cases}1.50x, & 0\le x\le 10\\ x+5, & x>10\end{cases}$ (ii) ₹45

(19) $y=5x-7, y=5x+10$ (20) $y+3=0, 2x+y+3=0$ കൂടാതെ $2x-y-3=0$

അഭ്യാസം 6.4

(1) $x^2-xy-2y^2+2x-13y-15=0$

(6) $3x^2-13xy-10y^2+33x+73y-126=0$

(7) (i) $x+y=0,\ 3x-y=0$ (ii) $3x+4y-11=0,\ 2x-y=0$

(iii) $x+y-5=0,\ 2x-3y+4=0$ (10) $y=x$ (11) $p=6, q=17$ അല്ലെങ്കിൽ $-\frac{67}{6}$

(12) $k=-1$ (13) $k=-5$ അല്ലെങ്കിൽ $-\frac{35}{4}$ (14) $\frac{8}{5}$ (15) $\sqrt{5}$

അഭ്യാസം 6.5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
(4)	(4)	(3)	(4)	(3)	(2)	(2)	(4)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
(4)	(2)	(1)	(3)	(2)	(1)	(2)	(1)	(3)	(1)	(3)	(4)	

XI_Maths_Ans_V-1_Mal.indd 355 3/24/2023 12:12:07 PM

ഗണിതപദങ്ങൾ

അദ്ധ്യായം 1– ഗണങ്ങളും ബന്ധങ്ങളും, ഫലനങ്ങളും	
കേവല വില ഫലനം	absolute value function or modulus function
അടിസ്ഥാന ബന്ധങ്ങൾ	basic relations
ബൈജക്ടീവ് ഫലനം	bijective function
കാർഡിനാലിറ്റി	cardinality
അടച്ച ഇടവേള	closed interval
സഹ മണ്ഡലം	co–domain
ഫലനങ്ങളുടെ സംയോജനം	composition of functions
സ്ഥിരാങ്കം	constant
സ്ഥിരാങ്ക ഫലനം	constant function
ആശ്രിത ചരം	dependent variable
വ്യാപനം	dilation
വിയുക്ത ഗണങ്ങൾ	disjoint set
മണ്ഡലം	domain
ശൂന്യ ബന്ധം	empty relation
ശൂന്യ ഗണം	empty set
തുല്യതാ ബന്ധങ്ങൾ	equivalence relation
ഇരട്ട ഫലനം	even function
ഘാതാങ്ക ഫലനം	exponential function
അങ്ങേയറ്റത്തെ ബന്ധം	extreme relations
പരിമിത ഗണം	finite set
ഏറ്റവും വലിയ പൂർണ്ണാങ്ക ഫലനം	greatest integer function
തിരശ്ചീന രേഖ പരിശോധന	horizontal line test
അനന്യ ഫലനം	identity function
പ്രതിബിംബം	image
അനുചിത ഉപഗണം	improper subset
സ്വതന്ത്രമായ ചരം	independent variable
അനന്ത ഗണം	infinite set
വിപരീതം	inverse
വിപരീതം	invertible
രേഖീയ ഫലനം	linear function
ലോഗരിതമിക് ഫലനം	logarithmic function
ഒറ്റ ഫലനം	odd function
ഒന്ന് മുതൽ ഒന്ന് വരെയുള്ള ഫലനം	one–to–one function
ഒൺ റ്റു ഒൺ ഫലനം	onto function
തുറന്ന ഇടവേള	open interval
ഘാത ഗണം	power set
മുൻ ചിത്രം	pre–image
ഉചിതോപ ഗണം	proper subset
രംഗം	range
പരിമേയ ഫലനം	rational function
നേർരേഖ	real line
യഥാർത്ഥ മൂല്യമുള്ള ഫലനം	real–valued function
വ്യുൽക്രമ ഫലനം	reciprocal function
പ്രതി ഫലനം	reflection
പ്രതിഫലന ബന്ധം	reflexive relation
ഗണ വ്യത്യാസം	set difference
സിഗ്നം ഫലനം	signum function
ഏകാംഗ ഗണം	singleton set

XI_Maths_Glossary_V-1_Mal.indd 356 14-02-2023 16:57:06

ഏറ്റവും ചെറിയ പൂർണ്ണാങ്ക ഫലനം	smallest integer function
ഘട്ട ഫലനം	step functions
ഉപഗണം	subset
പ്രതിസാമ്യതാ വ്യത്യാസം	symmetric difference
ട്രാൻസിറ്റീവ് ബന്ധം	transitive relation
വിവർത്തനം	translation
നിസ്സാര ഉപഗണം	trivial subset
ഗണങ്ങളുടെ യോഗം	union of sets
സമസ്ത ബന്ധം	universal relation
ചരം	variable
ലംബമായരേഖ പരിശോധന	vertical line test
ശൂന്യ ഫലനം	zero function
ഗണം	set
സൂപ്പർ ഗണം	super set

അദ്ധ്യായം 2 – അടിസ്ഥാന ബീജഗണിതം

കോൺജുഗേറ്റ്	conjugate
വിവേചകം	discriminant
ഹരണ അൽഗോരിതം	division algorithm
ഘാതാങ്കം	exponents
അസമത്വം	inequality
ഭാഗിക ഭിന്നസംഖ്യ	partial fraction
ബഹുപദവ്യംജ്ഞകം	polynomial expression
ചതുർഘാതം	quartic
പഞ്ചഘാതം	quintic
റാഡിക്കൽ	radicals
പരിമേയ അസമത്വം	rational inequality
ശിഷ്ട സിദ്ധാന്തം	remainder theorem

അദ്ധ്യായം 3 – ത്രികോണമിതി

അനുബന്ധ കോണുകൾ	allied angles
ശരിയായ സ്ഥാനത്തെ കോണുകൾ	angles in standard position
ത്രികോണത്തിന്റെ ഉന്നതി	altitude of a triangle
സെന്റിസിമൽ സമ്പ്രദായം	centesimal system
ഞാൺ	chord
വൃത്താകാര സമ്പ്രദായം	circular system
പരിവൃത്ത കേന്ദ്രം	circum centre
പരിവൃത്തം	circum circle
പരിവൃത്ത വ്യാസാർദ്ധം	circum radius
പൂരക കോണുകൾ	complementary angles
ബഹുഗുണകോണുകൾ	compound angles
ബുഭിന്ന കോണുകൾ	conjugate angles
പൊതു നിർദ്ധാരണം	general solution
ഇടവേള	interval
വിപരീത ത്രികോണമിതി ഫലങ്ങൾ	inverse trigonometric functions
കാലഇടവേള	periodicity
ഘാതം കുറയ്ക്കുന്ന സർവ്വ സമവാക്യം	power reducing identities
പ്രധാന നിർദ്ധാരണം	principal solution
പ്രൊജക്ഷൻ	projection
ചതുർത്ഥാംശം	quadrant

XI_Maths_Glossary_V-1_Mal.indd 357 14-02-2023 16:57:06

റേഡിയൻ	radian
വൃത്താംശ ഖണ്ഡം	sector
ഉപഗുണകോണുകൾ	sub–multiple angles
സംപൂരക കോണുകൾ	supplementary angles
ത്രികോണമിതി സർവ സമവാക്യങ്ങൾ	trigonometric identities
ത്രികോണമിതി അംശബന്ധങ്ങൾ	trigonometric ratios

അദ്ധ്യായം 4 – സങ്കലനവും ഗണിതശാസ്ത്ര സമാഹാരവും

ക്രിപ്റ്റോഗ്രാഫി	cryptography
ഘടക ഗുണിതം	factorial
സപ്തഭുജം	heptagon
ചേർക്കൽ ഒഴിവാക്കൽ	inclusion–exclusion
ഇൻഡക്ടീവ് വഴി	inductive step
ഗണിത പ്രതിഷ്ഠ	mathematical induction
പഞ്ചഭുജം	pentagon
ക്രമപരിവർത്തനം	permutation
ബഹുഭുജം	polygon
ഗുണന നിയമം	product rule
സ്ട്രിംഗ് രീതി	string method
സങ്കലന നിയമം	sum rule

അദ്ധ്യായം 5 – ദ്വിപദ സിദ്ധാന്തം,അനുക്രമവും കൂടാതെ ശ്രേണിയും

കൂട്ടുശരാശരി	arithmetic mean
കൂട്ടുസമാന്തരശ്രേണി	arithmetic progression
സങ്ങഭകലന ശ്രേണി	arithmetic series
കൂട്ടുസമാന്തര ഗുണനം	arithmetico–geometric progression
കൂട്ടുസമാന്തര ഗുണന ക്രമാനുപാത ശ്രേണി	arithmetico–geometric series
ദ്വിപദഗുണാങ്കം	binomial coefficients
ദ്വിപദവികസനം	binomial expansion
ദ്വിപദശ്രേണി	binomial series
ദ്വിപദസിദ്ധാന്തം	binomial theorem
പൊതുവിദ്യാഭ്യാസം	common difference
പൊതുഅനുപാതം	common ratio
സംയോജന ശ്രേണി	convergent series
ഘാതാംഗശ്രേണി	exponential series
പരിമിത അനുക്രമം	finite sequence
പരിമിതശ്രേണി	finite series
ഗുണന ശരാശരി	geometric mean
ഗുണന ക്രമാനുപാദ ശ്രേണി	geometric progression
ഗുണന ശ്രേണി	geometric series
ഹാർമോണിക് ശരാശരി	harmonic mean
ഹാർമോണിക് സമാന്തര ശ്രേണി	harmonic progression
അനന്ത അനുക്രമം	infinite sequence
അനന്തശ്രേണി	infinite series
ആദ്യപദം	initial term
ലോഗരിതശ്രേണി	logarithmic series
ഭാഗിക സങ്കലനം	partial sum
പരിമേയ ഘാതാംഗം	rational exponent
ദൂരദർശിനി സംഗ്രഹം	telescopic summation

XI_Maths_Glossary_V-1_Mal.indd 358 14-02-2023 16:57:06

അദ്ധ്യായം 6 – ദ്വിമാന വിശ്ലേഷക ജ്യാമിതി	
ചെരിവ് കോൺ	angle of inclination
അനിയന്ത്രിത സ്ഥിരാങ്കം	arbitrary constant
ദ്വിഭാജികം	bisector
സംതുലനം	equilibrium
സ്ഥിരാങ്കം	fixed constant
നിശ്ചിതബിന്ദു	fixed point
പൊതുരൂപം	general form
സമജാത സമവാക്യം	homogenous equation
അന്തഃഖണ്ഡം	intercept
ബിന്ദുപദം	locus
ഋണ അന്തഃഖണ്ഡം	negative intercept
ഋണ ചായ്വ്	negative slope
വിജാതീയ സമവാക്യം	non–homogenous equation
സാധാരണ രൂപം	normal form
ഗണിതശാസ്ത്രത്തിലെ സ്ഥിരരാശി	parameter
സ്ഥിരരാശി രൂപം	parametric form
ധന അന്തഃഖണ്ഡം	positive intercept
ധന ചായ്വ്	positive slope
പ്രതിസാമ്യത	symmetry
രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ രൂപം	two point form

പരമാർശ ഗ്രന്ഥങ്ങൾ

- Advanced Mathematics - Merilyn Ryan S.S.J, Marvin E. Doublet, Mona Fabricant Theoran D.Rockhill, Prentice Hall
- Higher Algebra - Bernard and Child.
- Higher algebra - Hall and Knight.
- Algebra and Trigonometry - Marshall D. Hestenes, Richard O. Hill, Jr.
- A semester course in Trigonometry - Marcel B Finan, Ar Kansas Tech University, U.S.A.,
- Trigonometry - S.L.Loney
- Discrete and Combinatorial Mathematics, by Ralph P. Grimaldi, Pearson Education Asia,
- Discrete Mathematics with Applications, by Thomas Koshy, Elsevier
- Discrete Mathematics and its Applications with Combinatorics and Graph theory, by Kenneth, H, Rosen, Tata McGraw Hill Education Private Limited, 6th Edition
- Calculus - James Stewart.
- Calculus - Robert T.Smith, Roland B. Minton, McGraw Hill
- Calculus and Analytical Geometry, George B.Thomas and Ross L. Finney (Ninth edition) Addison-Wesley.
- Differential and Integral Calculus, N. Piskunov, Mir Publsihers, Moscow.
- Analytical Geometry for beginners, The straight line and circle Vol-I by Thomas Grenfele Vyvyan Classic Reprint Series.
- Analytical Geometry (The straight line and circle) Arthur Le Sueur – Google books.

XI_Maths_Glossary_V-1_Mal.indd 359 14-02-2023 16:57:06

CLASS 11 - MATHEMATICS VOL. 1
MALAYALAM MEDIUM

Academic Coordinator

K. Chandrasekaran,
Lecturer, DIET, Chennai.

Reviewers

Sreelatha. S
P.G Teacher,
TCK HSS, Padanthalumoodu.

Vijayakumari. K
P.G Teacher,
St. Mary's HSS, Kaliyal.

List of Translators

Deepa Gopal. L
P.G Teacher,
PPM HSS, Anducode.

Bindhu. N
B.T. Assistant,
St. Ephrem's HSS, Sooriacode.

Chinchu. S
B.T. Assistant,
GHSS, Kollemcode.

Anitha. K.K.
B.T. Assistant,
GHS, Puliyoorsalai.

Monibun Latha. S
B.T. Assistant,
St. Ephrem's HSS, Sooriacode.

Priya. V. P
B.T. Assistant,
PPM HSS, Anducode.

EMIS Technology Team

R.M. Satheesh
State Coordinator Technical,
TN EMIS, Samagra Shiksha.

K.P. Sathya Narayana
IT Consultant,
TN EMIS, Samagra Shiksha

R. Arun Maruthi Selvan
Technical Project Consultant,
TN EMIS, Samagra Shiksha

Layout & Illustrations

Ranjith, Pixels Print Media,
Parassala, Kerala.

In-House QC
V. Sridhar

Coordination
Ramesh Munisamy

This book has been printed on 80 G.S.M.
Elegant Maplitho paper.

Printed by offset at:

XI_Maths_Glossary_V-1_Mal.indd 360 3/24/2023 12:11:28 PM