GOVERNMENT OF TAMIL NADU

పదకొండవ తరగతి

HIGHER SECONDARY FIRST YEAR

గణితశాస్త్రము

MATHEMATICS

భాగము - II

VOLUME - II

TELUGU MEDIUM

Department of School Education

Untouchability is Inhuman and a Crime

00_11th-Std-Maths-Vol 2-FM.indd 1 10-03-2023 12:25:51

Government of Tamil Nadu

First Edition - 2022

Revised Edition - 2023

Reprint - 2024

(Published under New Syllabus)

Content Creation

State Council of Educational
Research and Training
© SCERT 2022

Printing & Publishing

Tamil NaduTextbook and Educational
Services Corporation

www.textbooksonline.tn.nic.in

00_11th-Std-Maths-Vol 2-FM.indd 2 10-03-2023 12:25:51

విషయసూచిక

గణితశాస్త్రము భాగము -II

		పుట సంఖ్య	నెల
అధ్యాయము 7 – మాత్రికలు మరియు నిర్ధారకములు			
7.1	పరిచయము	1	
7.2	మాత్రికలు	3	అక్టోబరు
7.3	నిర్ధారకములు	22	
అధ్యాయము 8 – సదిశా బీజగణితము			
8.1	పరిచయము	53	
8.2	అదిశలు మరియు సదిశలు	55	
8.3	సదిశలను సూచించు విధానము మరియు సదిశల రకములు	55	
8.4	సదిశల బీజగణితము	57	
8.5	స్థాన సదిశలు	62	అక్టోబరు
8.6	సదిశలను అంశములుగా విభజించుట	66	
8.7	దిశా కొసైనులు మరియు దిశా నిష్పత్తులు	69	
8.8	సదిశల లబ్ధము	75	
అధ్యాయము 9 – అవకలన గణితము – అవధులు మరియు అవిచ్ఛిన్నత			
9.1	పరిచయము	92	
9.2	అవధులు	95	నవంబరు
9.3	అవిచ్ఛిన్నత	125	
అధ్యాయము 10 – అవకలన గణితము అవకలనీయత మరియు అవకలన పద్ధతులు			
10.1	పరిచయము	142	
10.2	అవకలనము యొక్క భావన	143	నవంబరు
10.3	అవకలనీయత మరియు అవిచ్ఛిన్నత	151	
10.4	అవకలన నియమములు	155	
అధ్యాయము 11 – సమాకలన గణితము			
11.1	పరిచయము	190	
11.2	న్యూటన్ – లిబ్నిజ్ సమాకలనము	192	
11.3	సమాకలనం యొక్క ప్రాథమిక నియమాలు	194	
11.4	$f(ax+b)dx$ ప్రత్యక్ష రూపములో సమాకలనము	196	డిసెంబరు
11.5	సమాకలన ధర్మములు	198	
11.6	సాధారణ అనువర్తనాలు	200	
11.7	సమాకలన యొక్క పద్ధతులు	204	

అధ్యాయము 12 – సంభావ్యత సిద్ధాంతము – పరిచయము

12.1	పరిచయము	240	
12.2	ప్రాథమిక నిర్వచనములు	241	
12.3	పరిమిత ప్రతిరూప ఆవరణము	242	
12.4	సంభావ్యత	246	
12.5	సంభావ్యతపై కొన్ని ప్రాథమిక సిద్ధాంతములు	257	డిసెంబరు
12.6	నియత సంభావ్యత	261	
12.7	ఒక ఘటన యొక్క మొత్త సంభావ్యత	270	
12.8	బేయీ సిద్ధాంతము	272	

జవాబులు 284

పదకోశము 294

సంప్రదింపు గ్రంథాలు 296

061IV

E-book

DIYA1

Assessment

00_11th-Std-Maths-Vol 2-FM.indd 4 10-03-2023 12:25:51

అధ్యాయము 7

మాత్రికలు మరియు నిర్ణాయకములు

"కారణముల సంగీతమే గణితశాస్త్రము"

– సిల్వెస్టర్

7.1. పరిచయము

మాత్రికలు మరియు నిర్ణాయకముల ఆనవాళ్లు క్రీ.పూ. నాల్గవ శతాబ్దంలో కనబడినప్పటికీ వీని ప్రారంభం క్రీ.పూ. రెండవ శతాబ్దంలో జరిగినట్లు తెలుస్తున్నది. ఏదేమైనా, పదహేడవ శతాబ్దం చివరి వరకు వీని ఆలోచనలు తిరిగి కనబడటం మరియు వాస్తవ అభివృద్ధి జరుగుతూ పోయినది. రేఖీయ సమీకరణాల వ్యవస్థ యొక్క అధ్యయనం ద్వారా మాత్రికలు మరియు నిర్ణాయకముల ప్రారంభం ఉద్భవించునట్లు చెప్పినా ఆశ్చర్యపోనక్కర్లేదు. ఏకఘాతీయ రేఖీయ సమీకరణాలకు సంబంధించిన సమస్యలను బాబిలోనియన్లు అధ్యయనం చేసారు మరియు వానిలో కొన్నింటిని బంకమన్ను పలకలలో భద్రపరచారు. ఇవి ఇప్పటి వరకు మనుగడలో గలదు.



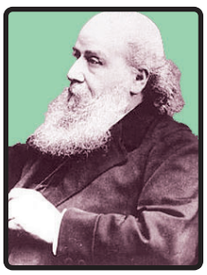
మాత్రికలు (matrices) యొక్క సిద్ధాంత పరిణామము అనునది రేఖీయ సమీకరణాల వ్యవస్థ యొక్క **సాధన**కు సులభ మరియు సరళ పద్ధతులను పొందే ప్రయత్నాల ఫలితము అగును. జ్యామితీయ వస్తువుల రూపాంతరముల అధ్యయనముతో కూడ ఇది ప్రారంభమైనది. 1850లో ఆంగ్ల గణితవేత్త మరియు న్యాయవాదైన జేమ్స్ జోసఫ్ సిల్వెస్టర్ మ్యాట్రిక్స్ (Matrix) అను పదంను మొదట ఉపయోగించారు. (నిజంగా లాటిన్ నుంచి M$\bar{a}$ter అనగా మదర్ – కొలిన్స్ డిక్షనరి అను అర్థము) మాత్రికలు ఇప్పుడు గణితంలో అత్యంత శక్తివంతమైన సాధనాల్లో ఒకటి.

సాధారణంగా ఒక మాత్రిక అనేది వస్తువుల ఒక దీర్ఘచతురస్రాకార అమరిక తప్ప వేరేమికాదు. ఒక సైనిక దళకవాతు లేదా ఒక పాఠశాల ప్రార్థన లేదా వరినాటుటను సూచించుటకు మనము మాత్రికలను ఉపయోస్తాము.



డిస్క్యుసిన్స్ అరిథ్‌మెటికా (Disquisitiones arithmeticae) అను పుస్తకములో కార్ల్ ఎఫ్.గౌస్ అను గణితశాస్త్రవేత్త ద్విఘాత రూపాల అధ్యయనము (1801) చేయు సందర్భములో నిర్ణాయకము (determinant) అను పదమును మొట్టమొదటగా ఉపయోగించారు. కాని ఈ భావన ఆధునిక కాలపు నిర్ణాయకపు భావనతో ఒకే మాదిరి గౌస్ మాత్రికా గుణకారమును వివరించునప్పుడు అతని ద్విఘాతరూపాల గుణకాలను దీర్ఘచతురస్రాకారంలో అమర్చారు.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_7.indd 1 24-01-2023 16:52:05



Sylvester (1814 - 1897)

కోషి (1812లో) నిర్ధారకము (determinant) నుకు దాని యొక్క ఆధునిక భావంను ఉపయోగించారు మరియు దీనిని విపులంగా అధ్యయనం చేశారు. ఈయన తొలినాటి ఫలితాలను పున:నిరూపణ చేశారు మరియు లఘునిర్ధారకము, అనుబంధములపై తన యొక్క క్రొత్త ఫలితాలను ఇచ్చారు. మాత్రికల యొక్క బీజగణిత అభివృద్ధిలో ఆర్థర్‌కెయిలే యొక్క సహకారం ప్రధానమైనది మరియు నిర్ధారకము యొక్క సిద్ధాంతమును కూడా 1841లో ప్రచురించారు. ఈ పేపరులో నిర్ధారకమును సూచించుటకు అమరికకు ఇరువైపుల రెండు నిలువు గీతలను ఈయన ఉపయోగించారు. ఈ సంకేతము ప్రస్తుతము ప్రామాణికంగా మారినది. 1858లో ఈయన మాత్రికల యొక్క సిద్ధాంతముపై వృత్తాంతం (Memoir) ను ప్రచురించారు. ఇది ఒక మాత్రిక యొక్క మొదటి abstract నిర్వచనమును కలిగివుండుటలో గుర్తించదగినది. ద్విఘాత రూపాలు మరియు రేఖీయ రూపాంతరాల కొరకు ముందుగా అభ్యసించిన గుణకాల అమరిక నుంచి తన యొక్క సాధారణ భావనల యొక్క ప్రత్యేక సందర్భములని ఈయన నిరూపించారు. కష్టతరమైన గణనలును కల్గిన ఇతర ప్రత్యక్ష పురోగమన పద్ధతులతో పోల్చినప్పుడు వీరు వారి యొక్క పనిని ఎక్కువగా విస్తరించి సరళీకృతం చేసారు. గణిత శాస్త్రవేత్తలు జేమ్స్ జోసఫ్ సిల్వర్‌స్టర్ (1814–1895), విలియం రోవన్ హమిల్టన్ (1805–1865) మరియు ఆర్థర్ కెయిలే (1821–1895) లు మాత్రికా సిద్ధాంతము యొక్క అభివృద్ధిలో ముఖ్యమైన పాత్ర వహించారు. ఆంగ్ల గణితశాస్త్రవేత్త కల్లీస్ (Cullis) 1913లో మాత్రికల కొరకు ఆధునిక బ్రాకెట్ సంకేతమును మొట్టమొదట ఉపయోగించారు. మాత్రికల జ్ఞానము గణితము యొక్క శాఖలకు మాత్రమే కాక విజ్ఞానశాస్త్రము, జెనటిక్స్, అర్థశాస్త్రము, సోషియాలజి, ఆధునిక మనోవిజ్ఞానశాస్త్రము మరియు పరిశ్రమల నిర్వహణల వంటి ఇతర శాఖలకు కూడా తప్పకుండా అవసరము.

రేఖీయ సమీకరణాల వ్యవస్థలలోని గుణకాలను సూచించుట కొరకు కూడా మాత్రికలు ఉపయోగకరంగా గలదు. గణన యంత్రముల ఎలక్ట్రానిక్ స్ప్రెడ్‌షీట్ ప్రోగ్రామ్స్‌లో, నిధిప్రణాళిక (budgeting) అమ్మకపువృద్ధి, ధర అంచనా వంటి వ్యాపారము యొక్క వివిధ శాఖలలో మరియు విజ్ఞానశాస్త్రములో ఒక ప్రయోగము యొక్క ఫలితమును విశ్లేషించుట కొరకు వంటి మొదలగు వానిలలో మాత్రికా సంకేతములు మరియు పరిక్రియలు ఉపయోగబడును.

ఆసక్తికరంగా, చాలా జ్యామితీయ పరిక్రియలైన పరిమాణవృద్ధి (magnification) భ్రమణము మరియు ఒక తలము ద్వారా ప్రతిబింబములను కూడా మాత్రికల ద్వారా గణితపరంగా సూచించవచ్చును. అర్థశాస్త్రవేత్తలు సాంఖిక గణనకు, ఇన్పుట్–ఔట్‌పుట్ పట్టికలకు మరియు పరిశ్రమాంతర అర్థశాస్త్ర అధ్యయనంకు మాత్రికలను ఉపయోగించారు. ఎలక్ట్రికల్ ఇంజినీరింగ్‌లోని కమ్యునికేషన్ థియరీ మరియు నెట్‌వర్క్ అనాలిసిస్‌లకు కూడా మాత్రికలను ఉపయోగించారు. వీటిని గుప్తశాస్త్రము (Cryptography) లో కూడా ఉపయోగించారు.

ఈ అధ్యాయములో, మనము ప్రస్తుతము మాత్రికులు మరియు వాని యొక్క ధర్మములను మొదట చర్చిస్తాము. తరువాత మనము నిర్ధారకములు, ప్రధానధర్మములు, లఘునిర్ధారకము మరియు వాని యొక్క సహకరణులను అధ్యయనం చేస్తాము. ఇచ్చట మనము ప్రస్తుతము చర్చను 3వ తరగతి నిర్ధారకము వరకు మాత్రమే నియంత్రించాము.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_7.indd 2 24-01-2023 16:52:05

అభ్యసన లక్ష్యాలు

ఈ అధ్యాయ ముగింపులో విద్యార్థులు క్రిందివానిని చేయగలరని ఆశిస్తున్నాము.

- కష్టతర సమస్యలను సరళపద్ధతిలో మాత్రికల రూపంలో దృశ్యీకరించుట.
- మాత్రికల యొక్క వివిధ రకాలను మరియు మాత్రికల బీజగణితంను అవగాహన చేసుకొంటారు.
- విస్తరణ ద్వారా నిర్ధారకపు విలువలను గణించుట మరియు నిర్ధారకములు ధర్మములను ఉపయోగించుట.
- ఒక త్రిభుజము యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనుటలో మరియు మూడు బిందువుల సరేఖీయతలో (ఏకరేఖీయ) మాత్రికలు మరియు నిర్ధారకముల భావనలను అనువర్తించుట.

7.2 మాత్రికలు (MATRICES)

ఒక దీర్ఘచతురస్రాకార అమరిక లేదా నమోదుల (ఎంట్రీల) అమరిక క్రమము లేదా మూలకములను అడ్డు మరియు నిలువు వరుసలలో ఒక చతురస్ర బ్రాకెట్ [ ] లో ఉంచి ప్రదర్శించుటను ఒక మాత్రిక అంటారు.

సాధారణంగా ఒక మాత్రిక యొక్క మూలకములు వాస్తవ లేదా సంకీర్ణసంఖ్యలు లేదా ఒక చరరాశి ప్రమేయములు (బహుపదులు, త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలు లేదా వీని కలయిక వంటివి) లేదా ఎక్కువ చరరాశుల ప్రమేయములు లేదా ఏదేని ఒక వస్తువు కావచ్చును. సాధారణంగా మాత్రికలను A, B, C, ... అను మొదలగు పెద్ద (capital) అక్షరాలచే సూచిస్తారు. ఈ అధ్యాయంలో మూలకములను వాస్తవ సంఖ్యలు లేదా చరరాశులపై వాస్తవ ప్రమేయాలుగా నియంత్రిచాము.

ఒక మాత్రిక యొక్క సాధారణ రూపము

ఒక మాత్రిక A, m అడ్డు వరుసలను మరియు n నిలువు వరుసలను కలిగి వుంటే దానిని క్రిందివిధంగా వ్రాస్తారు.

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}\ ,1\le i\le m,1\le j\le n.$$

అది,

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}=\begin{array}{c} \xrightarrow{\quad n \text{ నిలువ వరుసలు} \quad} \\ \begin{matrix} \text{నిలువ} & \text{నిలువ} & & \text{నిలువ} & & n \text{ వ నిలువ} \\ \text{వరుస } 1 & \text{వరుస } 2 & & \text{వరుస } j & & \text{వరుస} \end{matrix} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \left[\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}\right] \begin{matrix} \leftarrow \text{అడ్డువరుస } 1 \\ \leftarrow \text{అడ్డువరుస } 2 \\ \\ \leftarrow i \text{ వ అడ్డువరుస} \\ \\ \leftarrow m \text{ వ అడ్డువరుస} \end{matrix} \end{array} \Bigg\downarrow m \text{ అడ్డు వరుసలు}$$

m మరియు n లు ధనపూర్ణసంఖ్యలని గమనించుము.

మాత్రికలు యొక్క కొన్ని ఉదాహరణలు క్రిందివ్వబడినది.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_7.indd 3 24-01-2023 16:52:05

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 4 & 5\\ 9 & -8 & 6\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}7 & -9 & 1.2 & 0\\ \sin\frac{x}{4} & 2 & x^2 & 4\\ \cos\frac{x}{2} & 1 & 3 & -6\end{bmatrix},\ \text{మరియు}\ \ C=\begin{bmatrix}1 & 5 & -7\\ 3.4 & \frac{1}{2} & \sqrt{2}\\ e^2 & -3 & 4\\ \sqrt{5} & 2 & a\end{bmatrix}.$$

ఒక మాత్రికలో మూలకముల క్షితిజ సమాంతర రేఖలను అడ్డు వరుసలని మరియు మూలకముల లంబరేఖలను నిలువు వరుస అని అంటారు. కావున A, 3 అడ్డు మరియు 3 నిలువు వరుసలను, B,3 అడ్డు మరియు 4 నిలువు వరుసలను, C,4 అడ్డు మరియు 3 నిలువు వరుసలను కలిగివుందని అంటారు.

నిర్వచనము 7.1

$\boldsymbol{A}$ అను ఒక మాత్రిక $\boldsymbol{m}$ అడ్డువరుసలు మరియు $\boldsymbol{n}$ నిలువ వరుసలను కలిగివుంటే $\boldsymbol{A}$ మాత్రిక యొక్క తరగతిని లేదా పరిమాణంను $\boldsymbol{m\times n}$ ($\boldsymbol{m}$ బై $\boldsymbol{n}$ గా చదువుతారు) గా నిర్వచించారు.

$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ అను వస్తువులను $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ అను మాత్రిక యొక్క మూలకములు లేదా నమోదులు (ఎంట్రీలు) అని అంటారు. a_{ij} మూలకంను i వ అడ్డువరుస మరియు j వ నిలువు వరుసకు ఉమ్మడి మూలకమని మరియు A యొక్క (i,j) వ మూలకము అని అంటారు. A యొక్క i వ అడ్డువరుస $[a_{i1}\ \ a_{i2}\ \ \ldots\ \ a_{in}]$ మరియు j వ నిలువు వరుస $\begin{bmatrix}a_{1j}\\ a_{2j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{bmatrix}$ లు వరుసగా $1\times n$ మరియు $m\times 1$ మాత్రికలని గమనించుము.

రోజువారి సమస్యలను సరళీకృతం చేయుటకు మాత్రికలను సూచించు విధమును మరియు వాని నిర్మాణమును మనము ఇప్పుడు తెలుసుకొంటాము.

వివరణ 7.1

ఒక విద్యార్థి వివిధ సబ్జెక్టులలో మరియు వివిధ టెర్మినల్ పరీక్షలలో పొందిన మార్కులను తీసుకొందాము. వానిని క్రిందివ్వబడిన పట్టికలో చూపబడినది.

	తమిళము	ఆంగ్లము	గణితము	విజ్ఞానశాస్త్రము	సాంఘిక విజ్ఞానశాస్త్రము
పరీక్ష 1	48	71	80	62	55
పరీక్ష 2	70	68	91	73	60
పరీక్ష 3	77	84	95	82	62

ఈ పట్టిక పై సమాచారమును మాత్రికారూపంలో సూచించును. మూడవ అడ్డువరుస మరియు రెండవ నిలువు వరుసలో గల మూలకము దేనిని సూచించును?

పై సమాచారమును ఒక 3×5 తరగతి మాత్రిక A రూపంలో క్రింది విధంగా సూచించవచ్చును.

$$A=\begin{bmatrix}48 & 71 & 80 & 62 & 55\\ 70 & 68 & 91 & 73 & 60\\ 77 & \mathbf{84} & 95 & 82 & 62\end{bmatrix}.$$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_7.indd 4 24-01-2023 16:52:06

ఈ మాత్రికలో మూడవ అడ్డు వరుస మరియు రెండవ నిలువు వరుసలోని మూలకము 84 అనేది ఆ విద్యార్థి పరీక్ష 3లో ఆంగ్లములో పొందిన మార్కులను సూచించును.

ఉదాహరణ 7.1

ఒక మాత్రికలో 12 మూలకములు ఉందని అనుకుందాము. ఆ మాత్రికలో వీలగు తరుగతులు కనుగొనుము. ఇది ఒక వేళ 7 మూలకములను కలిగి ఉంటే వీలగు తరగతులు ఏమి?

సాధన

మూలకముల సంఖ్య అనేది అడ్డువరుసల సంఖ్య మరియు నిలువ వరుసల సంఖ్యల లబ్ధము అగును. కావున 12 లబ్ధముగా గల అన్ని సహజసంఖ్యల క్రమయుగ్మాలను మనము కనుగొనగలము. ఈ మాత్రిక యొక్క వీలగు అన్ని తరగతులు 1×12, 12×1, 2×6, 6×2, 3×4 మరియు 4×3.

7 ప్రధాన సంఖ్య కావున 1×7 మరియు 7×1 అను తరగతులు గల మాత్రికలు మాత్రమే సాధ్యమగును.

ఉదాహరణ 7.2

(i, j) వ మూలకము $a_{ij} = \frac{\sqrt{3}}{2}|2i-3j|\ \ (1 \le i \le 2,\ 1 \le j \le 3)$. గా ఇవ్వబడిన 2×3 మాత్రికను నిర్మించుము.

సాధన

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ అనునది ఒక 2×3 తరగతి మాత్రికను ఇచ్చును.

a_{ij} నిర్వచనం ప్రకారము, $a_{11} = \frac{\sqrt{3}}{2}|2-3| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ మరియు ఈ మాత్రిక A యొక్క మిగిలిన మూలకములను ఇదేవిధంగా గణించవచ్చును. కావున, కావలసిన మాత్రిక A, $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 2\sqrt{3} & \frac{7\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} & \frac{5\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$. అగును.

7.2.1 మాత్రికల రకములు (Types of Matrices)

అడ్డు, నిలువు, శూన్య మాత్రికలు (Row, Column, Zero matrices)

నిర్వచనము 7.2

ఒకే ఒక అడ్డు వరుసను కల్గిన మాత్రికను **అడ్డు వరుస మాత్రిక** అందురు.

ఉదాహరణమునకు, $A = [A]_{1\times4} = [1 \quad 0 \quad -1.1 \quad \sqrt{2}]$ అనునది $1\times n$ తరగతి గల అడ్డు వరుస మాత్రిక అగును.

$A = [a_{ij}]_{1\times n} = [a_{1j}]_{1\times n}$ అనునది $1\times n$ తరగతి గల అడ్డు వరుస మాత్రిక సామాన్య రూపమగును.

నిర్వచనము 7.3

ఒకే ఒక నిలువు వరుసను కల్గిన మాత్రికను నిలువు వరుస మాత్రిక అని అందురు.

ఉదాహరణకు $[A]_{4\times1}=\begin{bmatrix} x+1 \\ x^2 \\ 3x \\ 4 \end{bmatrix}$ అనునది ఒక నిలువు వరుస మాత్రిక అగును. ఇందులోని మూలకములు x చరరాశి గల వాస్తవ సంఖ్యల ప్రమేయం అగును.

$A=[a_{ij}]_{m\times1}=[a_{i1}]_{m\times1}$ అనునది $m\times1$. తరగతి గల నిలువు వరుస మాత్రిక సామాన్య రూపమగును.

నిర్వచనము 7.4

ఒక మాత్రిక $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ లో అన్ని $1\le i\le m$ మరియు $1\le j\le n$. విలువలకు $a_{ij}=0$ అయిన ఈ మాత్రికను **శూన్య మాత్రిక** అందురు. దీనిని O చే గుర్తించెదరు.

ఉదాహరణకు $[0]$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ మరియు $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ అనునవి క్రమముగా 1×1, 3×3 మరియు 2×4 తరగతులు కల్గిన "శూన్య మాత్రిక" అగును.

ఒక మాత్రిక A లో కనీసము ఒక మూలకము సున్న కాని యెడల అట్టి మాత్రికను శూన్యేతర మాత్రిక అందురు.

చతురస్ర, వికర్ణ, యూనిట్ (తత్సమ) త్రిభుజాకార మాత్రికలు (Square, Diagonal, Unit, Triangular matrices)

నిర్వచనము 7.5

ఒక మాత్రిక యొక్క అడ్డు మరియు నిలువు వరుసల సంఖ్య సమానం అయిన అట్టి మాత్రికను చతురస్ర మాత్రిక అని అందురు. $n\times n$ తరగతి గల ఒక చతురస్ర మాత్రికను n తరగతిగా గల **చతురస్ర మాత్రిక** అని అందురు.

ఉదాహరణకు, $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & c & f \\ g & h & l \end{bmatrix}$ అనునది 3 తరగతిగా గల ఒక చతురస్ర మాత్రిక అగును.

నిర్వచనము 7.6

n తరగతిగా గల ఒక చతురస్ర మాత్రిక $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ లోని మూలకములు $a_{11},a_{22},a_{33},\ldots,a_{nn}$ అను వానిని **ప్రధాన వికర్ణము లేదా సరళంగా వికర్ణము లేదా ప్రాధాన్య వికర్ణము లేదా ప్రాధాన్య వికర్ణ మూలకములు** అని అంటారు.

నిర్వచనము 7.7

$A=[a_{ij}]_{n\times n}$ అను చతురస్ర మాత్రికలో $i\ne j$. కు $a_{ij}=0$ అయిన, అట్టి మాత్రికను ఒక **వికర్ణమాత్రిక** అని అంటారు.

కావున, ఒక వికర్ణ మాత్రికలో ప్రధాన వికర్ణ మూలకములను తప్పించి మిగిలిన మూలకములన్నియు సున్న అగును.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_7.indd 6 24-01-2023 16:52:07

ఉదాహరణకు,

$$A=\begin{bmatrix}2.5 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{3} & 0\\ 0 & 0 & 0.5\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}r & 0\\ 0 & s\end{bmatrix},\ C=[6],\ \text{మరియు}\ D=\begin{bmatrix}a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$$ అనునవి

క్రమముగా 3,2,1 మరియు n తరగతులుగా గల వికర్ణ మాత్రికగును. ఒక శూన్యచతురస్ర మాత్రిక ఒక వికర్ణ మాత్రిక అగునా?

నిర్వచనము 7.8

ఒక వికర్ణ మాత్రికలో ప్రధాన వికర్ణ మూలకములన్నియు సమానం అయిన అట్టి మాత్రికను "అదిశామాత్రిక" అని అంటారు.

$A=[a_{ij}]_{n\times n}$ అను చతురస్ర మాత్రికలో $a_{ij}=\begin{cases}c & \text{if } i=j\\ 0 & \text{if } i\neq j\end{cases}$ అయిన అయిన ఈ మాత్రిక అదిశా మాత్రిక అగును. ఇచ్చట c అనునది ఒక స్థిర సంఖ్యయగును.

ఉదాహరణకు $A=\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}-5 & 0\\ 0 & -5\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}\sqrt{3}\end{bmatrix}$ మరియు $D=\begin{bmatrix}c & 0 & \cdots & 0\\ 0 & c & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & c\end{bmatrix}\begin{matrix}R_1\\ R_2\\ \\ R_n\end{matrix}$

అనునవి క్రమముగా 3,2,1 మరియు n తరగతులుగా గల అదిశా మాత్రికలగును. ఏదేని ఒక శూన్య చతురస్ర మాత్రిక, అదిశ 0 తో గల అదిశా మాత్రిక అగును అని గమనించవలయును.

నిర్వచనము 7.9

ఒక చతురస్ర మాత్రికలో ప్రధాన వికర్ణలో మూలకములు అన్నియు 1 గాను వేరే మూలకములు అన్నియు సున్నగాను ఉండిన అట్టి మాత్రికను **"యూనిట్ లేక తత్సమ మాత్రిక"** అని అంటారు. కావున $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ అను చతురస్ర మాత్రికలో $a_{ij}=\begin{cases}1 & \text{if } i=j\\ 0 & \text{if } i\neq j\end{cases}$ అయితే ఈ మాత్రిక ఒక యూనిట్ మాత్రిక అగును.

n తరగతిగా గల యూనిట్ మాత్రికను I_n. చే సూచిస్తారు. ఉదాహరణకు,

$$I_1=[1],I_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},I_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ \text{మరియు}\ I_n=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{matrix}R_1\\ R_2\\ \\ R_n\end{matrix}$$ అనునవి క్రమముగా 1,2,3

మరియు n తరగతులుగా గల యూనిట్ మాత్రికలు అగును.

గమనిక 7.1

తత్సమమాత్రిక అనునది ఒక అదిశా మాత్రికకు ఒక ఉదాహరణ అగును.

త్రిభుజాకార మాత్రికలలో, ఎగువ త్రిభుజాకార మాత్రిక మరియు దిగువ త్రిభుజాకార మాత్రిక అను రెండు రకాలు గలవు.

నిర్వచనము 7.10

ఒక చతురస్ర మాత్రికలో ప్రధాన వికర్ణమునకు క్రింద గల అన్ని మూలకములు సున్న అయిన ఆ మాత్రికను ఎగువ త్రిభుజాకార మాత్రిక అని అంటారు.

కావున $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ అను చతురస్ర మాత్రికలో ప్రతి $i>j.$ కు $a_{ij}=0$ అయిన మాత్రిక ఎగువ త్రిభుజాకార మాత్రికగును.

$\begin{bmatrix}4&3&0\\0&7&8\\0&0&2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-5&2\\0&1\end{bmatrix},$ మరియు $\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&a_{nn}\end{bmatrix}$ అనునవి ఎగువ త్రిభుజాకార మాత్రికలకు ఉదాహరణములగును.

నిర్వచనము 7.11

ఒక చతురస్ర మాత్రికలో ప్రధాన వికర్ణమునకు పైన వున్న అన్ని మూలకములు సున్న అయిన ఆ మాత్రికను **దిగువ త్రిభుజాకార మాత్రిక** అని అంటారు.

కావున $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ అను చతురస్ర మాత్రికలో ప్రతి $i<j.$ కు $a_{ij}=0$ అయిన ఆ మాత్రిక దిగువ త్రిభుజాకార మాత్రిక అగును.

$\begin{bmatrix}2&0&0\\4&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2&0&0\\4&1&0\\8&-5&7\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2&0\\9&-3\end{bmatrix},$ మరియు $\begin{bmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}$ అనునవి దిగువ త్రిభుజాకార మాత్రికకు ఉదాహరణలగును.

నిర్వచనము 7.12

ఎగువ త్రిభుజాకార మాత్రిక లేక దిగువ త్రిభుజాకార మాత్రిక రూపములో గల చతురస్ర మాత్రికను **త్రిభుజాకార మాత్రిక** అందురు.

ఒకే సమయంలో ఎగువ మరియు దిగువ త్రిభుజాకార రూపములో గల ఒక చతురస్ర మాత్రిక అనునది ఒక వికర్ణ మాత్రికగా మారును అని చూడవచ్చును.

7.2.2 మాత్రికల సమానత్వము (Equality of Matrices)

నిర్వచనము 7.13

$A=[a_{ij}]$ మరియు $B=[b_{ij}]$ అను రెండు మాత్రికలు సమాన మాత్రికలు ($A=B$ గుర్తించెదము) అయిన, అయినప్పుడు మాత్రమే

(i) A,B అను మాత్రికలు రెండునూ ఒకే తరగతి కల్గియుండును.

(ii) A,B అను మాత్రికల సదృశ మూలకములు సమానంగా వుండును. అనగా ప్రతి i మరియు j లకు $a_{ij}=b_{ij}$ అగును.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_7.indd 8 24-01-2023 16:52:11

ఉదాహరణకు

$\begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$ అయిన $x = 2.5, y = -1, u = \frac{1}{\sqrt{2}}$ మరియు $v = \frac{3}{5}$. అని లభించును.

నిర్వచనము 7.14

A, B అను రెండు మాత్రికలు నిర్వచనము 7.13లో గల నిబంధనలు (i) లేదా (ii) లను సంతృప్తి పరచని యెడల వానిని అసమాన మాత్రికలు అంటారు.

ఉదాహరణకు $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ ఎందుకంటే ఈ మాత్రికల సదృశ మూలకములు అసమానం మరియు

$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ ఎందుకనగా ఈ మాత్రికల తరగతులు అసమానం.

ఉదాహరణ 7.3

$\begin{bmatrix} 3x+4y & 6 & x-2y \\ a+b & 2a-b & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 5 & -5 & -3 \end{bmatrix}$ అయిన x, y, a మరియు b ల విలువలను కనుగొనుము?

సాధన

రెండు మాత్రికలు సమాన మాత్రికలు కావున వాటిలో సదృశ మూలకలములు సమానం.

కావున $3x+4y=2$, $x-2y=4$, $a+b=5$ మరియు $2a-b=-5$.

ఈ సమీకరణముల **సాధన**లను కనుగొనిన $x=2$, $y=-1$, $a=0$ మరియు $b=5$. అగును.

7.2.3 మాత్రికలపై బీజగణిత పరిక్రియలు (Algebraic Operations on Matrices)

మాత్రికలపై ప్రాథమిక పరిక్రియలు

1) ఒక మాత్రికను ఒక అదిశతో గుణించుట

2) రెండు మాత్రికల సంకలనము / వ్యవకలనము

3) రెండు మాత్రికల గుణకారం

ఒక మాత్రికను మరొక మాత్రికతో భాగించుట అను భావన నిర్వచింపబడలేదు. కావున A, B అను ఏదైనా రెండు మాత్రికలకు $\frac{A}{B}$ అను పరిక్రియ నిర్వచింపబడలేదు.

1) ఒక మాత్రికను అదిశతో గుణించుట.

ఒక మాత్రిక $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ మరియు k అనునది ఒక అదిశ అనుకుందాం. $kA = [b_{ij}]_{m\times n}$, అను క్రొత్త మాత్రికను నిర్వచించెదము. ఇచ్చట అన్ని i, j నకు $b_{ij} = ka_{ij}$ అగును.

ఉదాహరణకు $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$, $kA = \begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \end{bmatrix}$ అగును.

ప్రత్యేకంగా $k=-1$ అయిన $-A = [-a_{ij}]_{m\times n}$ గా పొందెదము. ఈ $-A$ అనునది A మాత్రికకు విలోమ మాత్రిక అగును. $-A$ అని చెప్పకుండా విలోమ మాత్రికగా చెప్పవలెను.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_7.indd 9 24-01-2023 16:52:13

2. రెండు మాత్రికల సంకలనము మరియు వ్యవకలనము

A, B అనునవి ఒకే తరగతి గల రెండు మాత్రికలు అయిన వీటి మొత్తము అదే తరగతి గల మాత్రికయగును. ఈ మాత్రికను $A + B$ గా గుర్తించెదము. ఇది A, B ల సదృశ మూలకములను కూడుట వలన లభించును.

$A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ అను రెండు మాత్రికల మొత్తము $A+B=[c_{ij}]_{m\times n}$ అను మాత్రిక అగును. ఇక్కడ అన్ని i, j నకు $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ అగును.

అదేవిధంగా వ్యవకలనం $A - B$ అనునది $A-B=A+(-1)B.$ గా నిర్వచింపబడును. కావున $A-B=[d_{ij}]_{m\times n}$, ఇచ్చట $d_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$, $\forall$ i మరియు j.

[$\forall$ అను గుర్తు ఒక్కొక్కటి లేక అన్నియు అని అర్థమగును].

గమనిక 7.2

(i) A, B అను మాత్రికల తరగతులు అసమానం అయిన $A + B$ మరియు $A - B$ నిర్వచించుటకు వీలుకాదు.

(ii) మాత్రికల సంకలన మరియు వ్యవకలన పరిక్రియలను పరిమిత సంఖ్యలు గల మాత్రికలకు విస్తరించవచ్చును.

ఉదాహరణ 7.4

$A=\begin{bmatrix}4 & \sqrt{5} & 7\\ -1 & 0 & 0.5\end{bmatrix}$ మరియు $B=\begin{bmatrix}\sqrt{3} & \sqrt{5} & 7.3\\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$ అయిన $A + B$ మరియు $A - B$ లను కనుగొనుము

సాధన

మాత్రికల కూడిక మరియు తీసివేత నిర్వచనంలను బట్టి $A+B=\begin{bmatrix}4+\sqrt{3} & 2\sqrt{5} & 14.3\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}$ మరియు

$A-B=\begin{bmatrix}4-\sqrt{3} & 0 & -0.3\\ -2 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$

4 3 0

ఉదాహరణ 7.5

$A=\begin{bmatrix}\sin^2\theta & 1\\ \cot^2\theta & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}\cos^2\theta & 0\\ -\operatorname{cosec}^2\theta & 1\end{bmatrix}$ మరియు $C=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ అయిన $A + B + C$ ను కనుగొనుము

సాధన

నిర్వచనాలను బట్టి మూడు మాత్రికల మొత్తము

$A+B+C=\begin{bmatrix}\sin^2\theta+\cos^2\theta+0 & 1+0-1\\ \cot^2\theta-\operatorname{cosec}^2\theta-1 & 0+1+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_7.indd 10 24-01-2023 16:52:13

ఉదాహరణ 7.6

$B=\begin{bmatrix}2 & 3 & 0\\ 1 & -1 & 5\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 3\\ -1 & 0 & 2\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}0 & 4 & -1\\ 5 & 6 & -5\end{bmatrix}$ అయిన $3B+4C-D$ ను కనుగొనుము.

సాధన

$$3B+4C-D = \begin{bmatrix}6 & 9 & 0\\ 3 & -3 & 15\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4 & -8 & 12\\ -4 & 0 & 8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -4 & 1\\ -5 & -6 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -3 & 13\\ -6 & -9 & 28\end{bmatrix}.$$

ఉదాహరణ 7.7

సూక్ష్మీకరించుము

$$\sec\theta\begin{bmatrix}\sec\theta & \tan\theta\\ \tan\theta & \sec\theta\end{bmatrix}-\tan\theta\begin{bmatrix}\tan\theta & \sec\theta\\ \sec\theta & \tan\theta\end{bmatrix}$$

సాధన

ఇచ్చిన సమాసమును A అనుకొనుము. మాత్రికల అదిశా గుణకార విధిని ఉపయోగించినచో

$$A=\begin{bmatrix}\sec^2\theta & \sec\theta\tan\theta\\ \sec\theta\tan\theta & \sec^2\theta\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\tan^2\theta & \tan\theta\sec\theta\\ \sec\theta\tan\theta & \tan^2\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

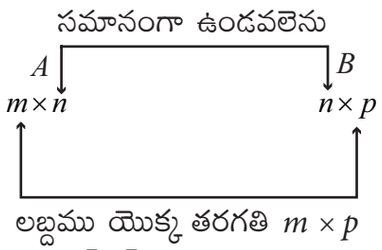
3) రెండు మాత్రికల గుణకారం

నిర్వచనము 7.15

A అను మాత్రిక నిలువు వరుస సంఖ్య B అను మాత్రిక అడ్డు వరుస సంఖ్యకు సమానముగా వుండిన A అను మాత్రికను B అను మాత్రికతో గుణించుటకు వీలగును అని అంటారు.

కావున, $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ మరియు $B=[b_{ij}]_{n\times p}$ అనునవి రెండు మాత్రికలు అయిన ఈ మాత్రికల గుణకారము AB అని గుర్తించబడును. దీని తరగతి $m\times p$ అగును.

AB ల తరగతి $m\times p$ (A లో గల అడ్డువరుసల సంఖ్య) × (B లో గల నిలువు వరుసల సంఖ్య)



$A=[a_1\ \ a_2\ \ \dots\ \ a_n]_{1\times n}$ మరియు $B=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}_{n\times 1}$, అయితే AB తరగతి 1×1 గాను, ఒకే ఒక మూలకమును కలిగి ఉండును.

$$AB=[a_1\ \ a_2\ \ \dots\ \ a_n]\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}=[a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n]=\left[\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right].$$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_7.indd 11 24-01-2023 16:52:14

ఉదాహరణకు

$$[1\ \ 2\ \ 3]\begin{bmatrix}-2\\3\\5\end{bmatrix}=[1(-2)+2(3)+3(5)]=[-2+6+15]=[19].$$

సాధారణంగా

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}$$ మరియు $$B=[b_{ij}]_{n\times p}=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1p}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2p}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{np}\end{bmatrix}$$ అయిన

$$AB=\begin{bmatrix}\overrightarrow{a_{11}}&\overrightarrow{a_{12}}&\cdots&\overrightarrow{a_{1n}}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}\downarrow&\downarrow&&\downarrow\\b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1p}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2p}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{np}\end{bmatrix}$$

$$AB \text{ ల లబ్ధము } =[c_{ij}]_{m\times p}=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1p}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&a_{2p}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\c_{m1}&c_{m2}&\cdots&c_{mp}\end{bmatrix}$$

ఇచ్చట c_{ij} అను మూలకమును $[a_{i1}\ \ a_{i2}\ \ \ldots\ a_{in}]\begin{bmatrix}b_{1j}\\b_{2j}\\\vdots\\b_{nj}\end{bmatrix}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$, అని వ్రాయవచ్చును.

ఉదాహరణ 7.8

$A=\begin{bmatrix}0&c&b\\c&0&a\\b&a&0\end{bmatrix}$ అయిన A^2. ను కనుగొనుము.

సాధన

$$A^2=AA=\begin{bmatrix}0&c&b\\c&0&a\\b&a&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&c&b\\c&0&a\\b&a&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}\\c_{21}&c_{22}&c_{23}\\c_{31}&c_{32}&c_{33}\end{bmatrix}$$

ఇచ్చట $c_{11}=[0\ \ c\ \ b]\begin{bmatrix}0\\c\\b\end{bmatrix}=0\cdot0+c\cdot c+b\cdot b=c^2+b^2$ ఇదేవిధముగా వేరే మూలకములు c_{ij} లను గణించెదము, చివరికి మనము సులభముగా పొందునది?

$$A^2=\begin{bmatrix}0+c^2+b^2&0+0+ab&0+ac+0\\0+0+ab&c^2+0+a^2&bc+0+0\\0+ac+0&bc+0+0&b^2+a^2+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b^2+c^2&ab&ac\\ab&c^2+a^2&bc\\ac&bc&a^2+b^2\end{bmatrix}.$$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_7.indd 12 24-01-2023 16:52:14

ఉదాహరణ 7.9

$[x \quad 2 \quad -1]\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ -1 & -4 & 1\\ -1 & -1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ 2\\ 1\end{bmatrix} = O$. అయిన x ను కనుగొనుము?

సాధన

$$[x \quad 2 \quad -1]\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ -1 & -4 & 1\\ -1 & -1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ 2\\ 1\end{bmatrix} = O$$

$$[x-2+1 \quad x-8+1 \quad 2x+2+2]\begin{bmatrix}x\\ 2\\ 1\end{bmatrix} = O$$

$$[x-1 \quad x-7 \quad 2x+4]\begin{bmatrix}x\\ 2\\ 1\end{bmatrix} = O$$

$$x(x-1)+2(x-7)+1(2x+4) = 0$$

$$x^2+3x-10 = 0 \Rightarrow x = -5, 2.$$

గమనిక 7.3

మనము క్రిందివ్వబడిన వాటిని గమనించగలము.

1) $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{n\times p}$ మరియు $m \neq p$, అయిన, AB అను గుణకార మాత్రికను నిర్వచించుటకు వీలగును. అయిన BA ను కనుగొనుటకు వీలుకాదు.

2) వాస్తవ సంఖ్యల ప్రాథమిక ధర్మములు :

$ab = ba \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

$ab = ac \Rightarrow b = c \; \forall \; a, b, c \in \mathbb{R}, \; a \neq 0$

$ab = 0 \Rightarrow a = 0$ లేక $b = 0 \;\; \forall \;\; a, b \in \mathbb{R}$.

వీటిని మాత్రికలలో కూడా చర్చించెదము?

(i) AB మరియు BA అనునవి నిర్వచింపబడును $AB = BA$ సత్యము కానవసరం లేదు.

ఉదాహరణకు

$A = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$ మరియు $B = \begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{bmatrix}$ అనుకొనుము

$AB = \begin{bmatrix}5 & 0\\ 4 & -2\end{bmatrix}$ మరియు $BA = \begin{bmatrix}0 & 2\\ 5 & 3\end{bmatrix}$ అయినందువలన

$AB \neq BA$, అని గమనించెదము.

ఈ సందర్భములో A మరియు B లు వినిమయం కాదని మనము చెప్పగలము (గుణకారము దృష్ట్యా)

$AB = BA$ కూడా కొన్ని సందర్భములలో వీలగును అని గమనించగలము.

if $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ మరియు $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ అను మాత్రికలకు $AB = BA = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ అని చూచెదము.

(ii) మాత్రిక గుణకారములో తొలగించు లక్షణము సత్యముకాదు. అదేమంటే $n \times n$, $n > 1$ అను తరగతి గల $A \neq O$, B, C అను మూడు చతురస్ర మాత్రికలకు, $AB = AC$ అయిన $B = C$ మరియు $BA = CA$ అయిన $B = C$ అనేది సమానంగా ఉండవలసిన అవసరం లేదు.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

కావున $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

(iii) $A \neq O$ మరియు $B \neq O$ గా వుండి $AB = O$ గా ఉండుటకు అవకాశం ఉన్నది. కావున $AB = O$ అయిన $A = O$. లేక $B = O$ గా ఉండవలసిన అవసరం లేదు. ఉదాహరణకు:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3) క్రింద ఇవ్వబడిన మాత్రికల సంకలనము మరియు గుణకారం పరిక్రియలకు వీలగు ఎదైనా రెండు మాత్రికలు A మరియు B లకు సాధారణముగా.

- $(A \pm B)^2$ అనునది $A^2 \pm 2AB + B^2$ నకు సమానముగా ఉండవలసిన అవసరము లేదు.
- $A^2 - B^2$ అనునది $(A + B)(A - B)$. నకు సమానముగా ఉండవలసిన అవసరము లేదు.

ఉదాహరణ 7.10

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ మరియు $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ అయిన AB మరియు BA లను అవి వ్యవస్థితమయితే కనుగొనుము?

సాధన

A యొక్క తరగతి 3×3 మరియు B యొక్క తరగతి 3×2. కావున AB యొక్క తరగతి 3×2 అగును. లబ్ధము AB కు A మరియు B లు అనుకూలంగా గలదు $C = AB$ అనుకొనుము.

c_{11} (A యొక్క మొదటి అడ్డువరుస) (B యొక్క మొదటి నిలువ వరుస)

$$\Rightarrow c_{11} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 + 1 + 2 = 4, \ (C_{11} \text{ ఒక మూలకమగును.})$$

అదేవిధంగా $c_{12} = 0, c_{21} = 0, c_{22} = 13, c_{31} = 7, c_{32} = 5.$

$$\text{కావున, } AB = C = [c_{ij}] = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 13 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$$

B మాత్రికలో గల నిలువు వరుసల సంఖ్య. A మాత్రిక యొక్క అడ్డు వరుసల సంఖ్యకు సమానం కాదు కావున BA ను కనుగొనుటకు వీలుకాదు.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_7.indd 14 24-01-2023 16:52:17

ఉదాహరణ 7.11

ఒక పండ్ల వ్యాపారి 3 విభిన్న రకముల బహుమతి ప్యాకేజిలను తయారు చేసినారు. ప్యాకేజి I లో 6 ఆఫిల్ , 3 ఆరెంజి మరియు 3 దానిమ్మ పండ్లు గలవు. ప్యాకేజి II లో 5 ఆఫిల్, 4 ఆరెంజి మరియు 4 దానిమ్మపండ్లు గలవు. ప్యాకేజి III లో 6 ఆఫిల్, 6 ఆరంజి మరియు 6 దానిమ్మపండ్లు గలవు. ఒక ఆఫిల్, ఒక ఆరంజి మరియు ఒక దానిమ్మపండు అను వాటి ధర క్రమముగా ₹ 30, ₹ 15, మరియు ₹ 45 అయిన ఒక్కొక్క పండ్ల ప్యాకేజిను తయారు చేయుటకు అగు ఖర్చు ఎంత?

సాధన

ధర మాత్రిక $A = [30 \;\; 15 \;\; 45]$, పండ్ల మాత్రిక

$$B = \begin{matrix} \\ \text{ఆఫిల్} \\ \text{ఆరంజి} \\ \text{దానిమ్మ} \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} \text{P-I} & \text{P-II} & \text{P-III} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 6 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

AB అను మాత్రికను కనుగొనుట ద్వారా పండ్ల ప్యాకేజి యొక్క ధరను కనుగొనవచ్చును. కావున A లో గల ఒక్కొక్క రకము యొక్క ధరతో (ధర మాత్రిక A) B- లో గల రకముల సంఖ్యను (పండ్ల మాత్రిక B) గుణించుట వలన పండ్ల ప్యాకేజి యొక్క ధరలను కనుగొనెదము.

$$AB = [30 \;\; 15 \;\; 45] \begin{bmatrix} 6 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 360 \\ 390 \\ 540 \end{bmatrix}$$

కావున ప్యాకేజి I యొక్క ధర ₹ 360, ప్యాకేజి II యొక్క ధర ₹ 390, ప్యాకేజి III యొక్క ధర ₹ 540.

7.2.4 మాత్రిక సంకలనము అదిశా గుణకారము మరియు మాత్రిక గుణకారముల ధర్మములు (Properties of Matrix Addition, Scalar Multiplication and Product of Matrices)

A, B మరియు C అనునవి సమాన తరగతులైన సంకలనమునకు వీలైన మూడు మాత్రికలు మరియు a, b అనునవి అదిశలు అనుకొనిన, మనము క్రింది వానిని గమనించగలము.

(1) $A + B$ అనునది అదే తరగతి గల మాత్రికను ఇచ్చును.
(2) $A + B = B + A$ (మాత్రికల సంకలనం వినిమయం)
(3) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (మాత్రికల సంకలన సహచర్యం)
(4) $A + O = O + A = A$ (O అనేది మాత్రికల సంకలన తత్సమము)
(5) $A + (-A) = O = (-A) + A$ ($-A$ అనునది A యొక్క సంకలన విలోమము)
(6) $(a + b)A = aA + bA$ మరియు $a(A + B) = aA + aB$
(7) $a(bA) = (ab)A$, $1A = A$ మరియు $0A = O$.

మాత్రికల యొక్క గుణకార ధర్మములు (Properties of matrix multiplication)

మాత్రికల బీజగణిత ధర్మముల నుండి క్రింది వాటిని పొందవచ్చును.

- A, B, C అనునవి క్రమముగా $m \times n, n \times p$ మరియు $p \times q$ తరగతులు గల మూడు మాత్రికలు అయిన $A(BC)$ మరియు $(AB)C$ అనునది $m \times q$ అను ఒకే తరగతి గల మాత్రికలగును

$A(BC) = (AB)C$ (మాత్రికల గుణకారము సహచర్య ధర్మమును కల్గివున్నది)

- A, B, C అనునవి క్రమముగా $m \times n, n \times p$ మరియు $n \times p$ తరగతులు గల మూడు మాత్రికలు అయిన $A(B + C)$ మరియు $AB + AC$ అనునవి $m \times p$ అను ఒకే తరగతి గల మాత్రికలగును. పైగా $A(B + C) = AB + AC$ (మాత్రికల గుణకార సంకలనముపై ఎడమ విభాగ ధర్మమును కల్గియున్నది)

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_7.indd 15 24-01-2023 16:52:17

- A, B, C అనునవి క్రమముగా $m \times n, m \times n$ మరియు $n \times p$ తరగతులు గల మూడు మాత్రికలు అయిన $A(B + C)$ మరియు $(AB + AC)$ అనునవి $m \times p$ అను సమ తరగతులు గల మాత్రికలగును. కావున $A(B + C) = AB + AC$. (మాత్రికల గుణకారం సంకలనముపై కుడి విభాగ ధర్మమును కల్గియున్నది)
- A, B అనునవి క్రమముగా $m \times n, n \times p$ తరగతులు గల రెండు మాత్రికలు మరియు α ఒక అదిశ అయిన $\alpha(AB) = A(\alpha B) = (\alpha A)B$ అనునది $m \times p$ తరగతి గల ఒక మాత్రిక అగును.
- I అనునది ఒక తత్సమ మాత్రిక అయిన $AI = IA = A$ (I అనునది గుణకార తత్సమములగును)

7.2.5 వ్యత్యయ మాత్రిక యొక్క పరిక్రియలు మరియు వాటి ధర్మములు:

నిర్వచనము 7.16

ఒక మాత్రిక A యొక్క అడ్డువరుస మరియు నిలువు వరుసలను స్థాన మార్పిడి చేయుట ద్వారా ఏర్పడు మాత్రిక A యొక్క వ్యత్యయ మాత్రిక అని అందురు. దీనిని A^T చే గుర్తించెదరు. కావున $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, అయిన $A^T = [b_{ij}]_{n\times m}$, ఇచ్చట $b_{ij} = a_{ji}$ అగును. A^T యొక్క (i, j) వ మూలకము a_{ji}. అగునట్లు.

ఉదాహరణకు,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 4 \\ -8 & 0 & 0.2 \end{bmatrix} \text{ అయిన } A^T = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ \sqrt{2} & 0 \\ 4 & 0.2 \end{bmatrix}$$

వ్యత్యయముపై కొన్ని ప్రాథమిక ఫలితాలను మనము ప్రవచించుకొందాము. వాటి నిరూపణలు నేరుగా సత్యమగునని గమనించగలము.

A, B అనునవి తగిన తరగతులు గల రెండు మాత్రికలు అయిన

(i) $(A^T)^T = A$

(ii) $(kA)^T = kA^T$ (ఇచ్చట k ఒక దిశ)

(iii) $(A+B)^T = A^T + B^T$

(iv) $(AB)^T = B^T A^T$ (వ్యత్యయ మాత్రిక యొక్క తిరోగమన న్యాయం)

ఉదాహరణ 7.12

$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ మరియు $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ అయిన క్రింది వాటిని సరిచూడుము?

(i) $(AB)^T = B^T A^T$ (ii) $(A+B)^T = A^T + B^T$ (iii) $(A-B)^T = A^T - B^T$ (iv) $(3A)^T = 3A^T$

సాధన

(i) $$AB = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 2 & 22 \\ -2 & 9 & 9 \\ 7 & 1 & 14 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^T = \begin{bmatrix} 16 & -2 & 7 \\ 2 & 9 & 1 \\ 22 & 9 & 14 \end{bmatrix} \quad \ldots (1)$$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_7.indd 16 24-01-2023 16:52:18

$$B^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix},\ A^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B^T A^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -2 & 7 \\ 2 & 9 & 1 \\ 22 & 9 & 14 \end{bmatrix} \quad \ldots (2)$$

(1) మరియు (2) ల నుండి $(AB)^T = B^T A^T$. అగును.

(ii) $$A + B = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 3 & 0 & 9 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(A + B)^T = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 7 & 0 & 5 \\ 1 & 9 & 3 \end{bmatrix} \quad \ldots(3)$$

$$A^T + B^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 7 & 0 & 5 \\ 1 & 9 & 3 \end{bmatrix} \quad \ldots (4)$$

(3) మరియు (4) నుండి, $(A+B)^T = A^T + B^T$.

(iii) $$A - B = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A-B)^T = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \ldots (5)$$

$$A^T - B^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \ldots (6)$$

(5) మరియు (6) ల నుండి $(A-B)^T = A^T - B^T$.

(iv) $$3A = \begin{bmatrix} 12 & 18 & 6 \\ 0 & 3 & 15 \\ 0 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(3A)^T = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 18 & 3 & 9 \\ 6 & 15 & 6 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} = 3(A^T)\ .$$

7.2.6 సౌష్ఠవ మరియు అసౌష్ఠవ మాత్రికలు

నిర్వచనము 7.17

A అనునది ఒక చతురస్ర మాత్రిక అనుకొనుము $A^T = A$. అయిన, A అనునది సౌష్ఠవ మాత్రిక అగును.

కావున $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ అనునది ఒక సౌష్ఠవ మాత్రిక అయిన ప్రతి i, j నకు $a_{ij} = a_{ji}$ అగును.

ఉదాహరణకు $A=\begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -6 & 8 & 5 \\ 9 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ అను మాత్రికకు $A^T = A$ అయినందువలన ఈ మాత్రిక సౌష్ఠవ మాత్రిక అగును.

A^T అను మాత్రిక యొక్క వ్యత్యయ మాత్రిక A అను మాత్రిక అగుననీ గమనించుము కావున $\left(A^T\right)^T = A.$

నిర్వచనము 7.18

A అను చతురస్ర మాత్రికకు $A^T = -A.$ అయిన, ఈ మాత్రికను అసౌష్ఠవ మాత్రిక అని అందురు.

$A=[a_{ij}]_{n\times n}$ అనునది అసౌష్ఠవ మాత్రిక అయిన, అన్ని i, j నకు $a_{ij} = -a_{ji}$ అగును.

$i = j$ అని ప్రత్యక్షేపించిన ప్రతి i కు $2a_{ii} = 0$ లేక $a_{ii} = 0$

కావున ఒక అసౌష్ఠవ మాత్రికలో వికర్ణ మూలకములు అన్నియు సున్న అగును అనునది దీని అర్థము,

ఉదాహరణకు $A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ అను మాత్రికకకు $A^T = -A$ అయినందువలన, ఈ మాత్రిక ఒక అసౌష్ఠవ మాత్రిక అగును.

ప్రతి చతురస్ర మాత్రికను సౌష్ఠవ మరియు అసౌష్ఠవ మాత్రికల మొత్తముగా వ్రాయవచ్చునని గమనించుము.

సిద్ధాంతము 7.1

A అనునది వాస్తవ సంఖ్యలు మూలకములుగా గల ఒక చతురస్ర మాత్రిక అయిన $A + A^T$ అనునది సౌష్ఠవ మాత్రిక అగును. మరియు $A - A^T$ అనునది ఒక అసౌష్ఠవ మాత్రిక అగును.

నిరూపణ

$B = A + A^T$ అనుకొందాము

$B^T = (A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A = A + A^T = B.$

$A + A^T$ కావున $C = A - A^T$ ఒక సౌష్ఠవ మాత్రిక

$C = A - A^T$ అయిన

$C^T = (A + (-A^T))^T = A^T + (-A^T)^T = A^T - (A^T)^T = A^T - A = -(A - A^T) = -C$

కావున $A - A^T$ ఒక అసౌష్ఠవ మాత్రిక ■

సిద్ధాంతము 7.2

ఒక చతురస్ర మాత్రికను సౌష్ఠవ మరియు అసౌష్ఠవ మాత్రికల మొత్తముగా వ్యక్తపరచవచ్చును.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_7.indd 18 24-01-2023 16:52:19

నిరూపణ

A అనునది ఒక చతురస్ర మాత్రిక అనుకొందాము $A=\frac{1}{2}(A+A^T)+\frac{1}{2}(A-A^T)$. అని వ్రాయవచ్చును.

సిద్ధాంతం 7.1 నుండి $(A+A^T)$ మరియు $(A-A^T)$ అనునవి క్రమముగా సౌష్ఠవ మరియు అసౌష్ఠవ మాత్రికలగును. $(kA)^T=kA^T$, నుండి $\frac{1}{2}(A+A^T)$ మరియు $\frac{1}{2}(A-A^T)$ అనునవి క్రమముగా సౌష్ఠవ మరియు అసౌష్ఠవ మాత్రికలు అగును. దీని నుండి కావల్సిన సాధనను పొందవచ్చును. దీని మూలముగా సిద్ధాంతమును నిరూపించబడినది. ■

గమనిక 7.4

సౌష్ఠవ మరియు అసౌష్ఠవ మాత్రికగా గల ఒక మాత్రిక ఒక శూన్యమాత్రిక అగును.

ఉదాహరణ 7.13

$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ -6 & 8 & 3\\ -4 & 6 & 5\end{bmatrix}$ అను మాత్రికను సౌష్ఠవ మరియు అసౌష్ఠవ మాత్రికల మొత్తంగా వ్యక్తపరుచుము.

సాధన

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ -6 & 8 & 3\\ -4 & 6 & 5\end{bmatrix}\Rightarrow A^T=\begin{bmatrix}1 & -6 & -4\\ 3 & 8 & 6\\ 5 & 3 & 5\end{bmatrix}$$

$$P=\frac{1}{2}(A+A^T)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & -3 & 1\\ -3 & 16 & 9\\ 1 & 9 & 10\end{bmatrix}$$ అనుకొనుము

$$\text{ఇప్పుడు } P^T=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & -3 & 1\\ -3 & 16 & 9\\ 1 & 9 & 10\end{bmatrix}=P$$

కావున, $P=\frac{1}{2}(A+A^T)$ ఒక సౌష్ఠవ మాత్రిక అగును..

ఇప్పుడు $Q=\frac{1}{2}(A-A^T)$ అనుకొందుము

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 9 & 9\\ -9 & 0 & -3\\ -9 & 3 & 0\end{bmatrix}$$

$$Q^T=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & -9 & -9\\ 9 & 0 & 3\\ 9 & -3 & 0\end{bmatrix}=-Q$$

కావున $Q = \frac{1}{2}(A - A^T)$ అనునది అసౌష్ఠవ మాత్రికగును..

$$A = P + Q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 16 & 9 \\ 1 & 9 & 10 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 9 & 9 \\ -9 & 0 & -3 \\ -9 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

కావున A అనునది ఒక సౌష్ఠవ మరియు అసౌష్ఠవ మాత్రికల మొత్తముగా వ్యక్తపరచబడినది.

అభ్యాసము 7.1

(1) $A = [a_{ij}]$, అను a_{ij} తరగతి మాత్రికను నిర్మించుము. ఇచ్చట a_{ij} క్రిందివిధంగా ఇవ్వబడినది.

(i) $a_{ij} = \frac{(i-2j)^2}{2}$ with $m = 2, n = 3$ (ii) $a_{ij} = \frac{|3i - 4j|}{4}$ with $m = 3, n = 4$

(2) $$\begin{bmatrix} p^2 - 1 & 0 & -31 - q^3 \\ 7 & r + 1 & 9 \\ -2 & 8 & s - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 7 & \frac{3}{2} & 9 \\ -2 & 8 & -\pi \end{bmatrix}.$$

p, q అయిన r మరియు s ల విలువలను కనుగొనుము?

(3) $$\begin{bmatrix} 2x + y & 4x \\ 5x - 7 & 4x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 7y - 13 \\ y & x + 6 \end{bmatrix}.$$

అయిన $x + y$ విలువను కనుకొనుము?

(4) $2A - B + \begin{bmatrix} 6 & -6 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 0$ మరియు $A - 2B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 8 \\ -2 & 1 & -7 \end{bmatrix}$

అను మాత్రికా సమీకరణములను సంతృప్తిపరచు A మరియు B మాత్రికలను కనుగొనుము.

(5) $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ అయిన A^4 ను కనుగొనుము.

(6) $A_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ అయిన

(i) $A_\alpha A_\beta = A_{(\alpha+\beta)}$. అని చూపుము

(ii) $A_\alpha + A_\alpha^T = I$. అను నిబంధనను సంతృప్తిపరచు α యొక్క వీలగు అన్ని వాస్తవ విలువలను కనుగొనుము

(7) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & x \end{bmatrix}$ మరియు $(A - 2I)(A - 3I) = O$, అయిన x యొక్క విలువను కనుగొనుము.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_7.indd 20 24-01-2023 16:52:21

(8) $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ a & b & -1\end{bmatrix}$ అయిన A^2 ఒక యూనిట్ మాత్రిక అని చూపుము

(9) $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 3\end{bmatrix}$ మరియు $A^3-6A^2+7A+kI=O$, అయిన k విలువను కనుగొనుము.

(10) ప్రతి సందర్భంలో క్రింది నిబంధనలను సంతృప్తి పరుచు మాత్రికలకు ఉదాహరణములిమ్ము. :

(i) $AB \neq BA$ అగునట్లు A మరియు B మాత్రికలు

(ii) $AB=O=BA,\ A\neq O$ and $B\neq O$. అగునట్లు A,B మాత్రికలు

(iii) $AB=O$ మరియు $BA\neq O$. A,B మాత్రికలు

(11) $f(x)f(y)=f(x+y)$, అయిన $f(x)=\begin{bmatrix}\cos x & -\sin x & 0\\ \sin x & \cos x & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ అని నిరూపించుము. .

(12) $A^2=A$ అగునట్లు A ఒక చతురస్ర మాత్రిక అయిన $7A-(I+A)^3$ యొక్క విలువను కనుగొనుము.

(13) $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & -3\\ 1 & 4 & 5\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & 0\\ 4 & 2\end{bmatrix}$, మరియు $C=\begin{bmatrix}4 & 7\\ 2 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ అయిన $A(B+C)=AB+AC$ అను ధర్మమును సరిచూడుము.

(14) $A\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7 & -8 & -9\\ 2 & 4 & 6\end{bmatrix}$ అను మాత్రిక సమీకరణమును సంతృప్తి పరుచు A అను మాత్రికను కనుగొనుము?

(15) $A^T=\begin{bmatrix}4 & 5\\ -1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ మరియు $B=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 7 & 5 & -2\end{bmatrix}$ అయిన క్రింది వాటిని సరిచూడుము.

(i) $(A+B)^T=A^T+B^T=B^T+A^T$ (ii) $(A-B)^T=A^T-B^T$ (iii) $(B^T)^T=B$.

(16) A ఒక 3×4 తరగతి మాత్రిక. A^TB మరియు BA^T రెండునూ నిర్వచితమగునట్లు B ఒక మాత్రిక అయిన ఈ B మాత్రిక యొక్క తరగతి ఏమి?

(17) క్రింద గల మాత్రికలను సౌష్ఠవ మరియు అసౌష్ఠవ మాత్రికల మొత్తముగా వ్రాయుము.

(i) $\begin{bmatrix}4 & -2\\ 3 & -5\end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix}3 & 3 & -1\\ -2 & -2 & 1\\ -4 & -5 & 2\end{bmatrix}$.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_7.indd 21 24-01-2023 16:52:23

(18) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} A^T = \begin{bmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & 2 & -5 \\ 9 & 22 & 15 \end{bmatrix}$ అయిన A మాత్రికను కనుగొనుము?

(19) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ x & 2 & y \end{bmatrix}$ మరియు $AA^T = 9I$ అయిన x మరియు y విలువలను కనుగొనుము?

(20) (i) x యొక్క ఏ విలువకు $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & x^3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ అనునది అసౌష్ఠవ మాత్రిక అగును?

(ii) $\begin{bmatrix} 0 & p & 3 \\ 2 & q^2 & -1 \\ r & 1 & 0 \end{bmatrix}$ అనునది అసౌష్ఠవ మాత్రిక అయిన p, q మరియు r ల విలువలను కనుగొనుము?

(21) $a_{ij} = i - j$ అయిన $A = [a_{ij}]_{3\times3}$, అను మాత్రికను నిర్మించుము. A సౌష్ఠవమా లేదా అసౌష్ఠవమా అని తెలుపుము.

(22) A మరియు B అనునవి రెండు సౌష్ఠవ మాత్రికలు అనుకొనుము. $AB = BA$ అయిన అయినప్పుడు మాత్రమే AB అనునది సౌష్ఠవ మాత్రిక అగుననీ నిరూపించుము.

(23) A మరియు B అనునవి సమాన తరగతుల గల రెండు సౌష్ఠవ మాత్రికలు అయిన క్రింది వాటిని నిరూపించుము

(i) $AB + BA$ అనునది సౌష్ఠవ మాత్రిక అగును

(ii) $AB - BA$ అనునది అసౌష్ఠవ మాత్రిక అగును

(24) ఒక అంగడిలో జీడిపప్పు, ఎండుద్రాక్ష మరియు బాదం పప్పులతో మూడు విధములైన బహుమతి సంచులను తయారు చెసెను.

సంచి I లో 100 గ్రా జీడిపప్పు, 100 గ్రా ఎండిన ద్రాక్ష మరియు 50 గ్రా బాదాం పప్పు,
సంచి II లో 200 గ్రా జీడిపప్పు, 100 గ్రా ఎండిన ద్రాక్ష మరియు 100 గ్రా బాదాం పప్పు,
సంచి III లో 250 గ్రా జీడిపప్పు, 250 గ్రా ఎండిన ద్రాక్ష మరియు 150 గ్రా బాదాం పప్పు గలవు.
50 గ్రా జీడిపప్పు ధర ₹ 50, 50 గ్రా ఎండిన ద్రాక్ష ధర ₹ 10 మరియు 50 గ్రా బాదాం పప్పు ధర ₹ 60 అయిన ఒక్కొక్క బహుమతి సంచిధరను కనుగొనుము.

7.3 నిర్ధారకములు (Determinants)

n తరగతి గల $A = [a_{ij}]$ అను ప్రతి చతురస్ర మాత్రికకు మనము కేటాయించగల ఒక సంఖ్యను A మాత్రిక యొక్క నిర్ధారకము అంటారు.

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ అయిన A యొక్క నిర్ధారకమును $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ గా వ్రాయవచ్చును.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_7.indd 22 24-01-2023 16:52:23

గమనిక 7.5

(i) చతురస్ర మాత్రికలకు మాత్రమే నిర్ధారకములను నిర్వచించగలము.

(ii) ఒక చతురస్ర మాత్రిక A కు $|A|$ ను A యొక్క నిర్ధారకము అని చదువుతాము.

(iii) ఒక మాత్రిక అనునది ఒక రూపము మాత్రమే కానీ నిర్ధారకము అనునది ఒక మాత్రిక యొక్క విలువను సూచించును.

7.3.1 విభిన్న తరగతులు కల్గిన మాత్రికల యొక్క నిర్ధారకములు (Determinants of Matrices of different order)

తరగతి 1గా గల మాత్రిక యొక్క నిర్ధారకము

$A = [a]$ అనునది తరగతి 1గా గల మాత్రిక అయిన A యొక్క నిర్ధారకము 'a' గా నిర్వచింపబడును.

తరగతి 2 గా గల మాత్రిక యొక్క నిర్ధారకము

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ అనునది తరగతి 2గా గల మాత్రిక అయిన A యొక్క నిర్ధారకమును

$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\ a_{22} - a_{21}\ a_{12}.$ గా నిర్వచించబడును

ఉదాహరణ 7.14

విలువను కనుగొనుము : (i) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$.

సాధన

(i) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = (2 \times 2) - (-1 \times 4) = 4 + 4 = 8.$

(ii) $\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = (\cos\theta\cos\theta) - (-\sin\theta\sin\theta) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$

తరగతి 3 గా గల మాత్రిక యొక్క నిర్ధారక మాత్రిక

వాస్తవ సంఖ్యలు లేక లో నిర్వచింపబడిన వాస్తవ విలువల ప్రమేయములను మూలకములుగా గల 3×3 తరగతి నిర్ధారకములను తీసుకొని, దాని ధర్మములను గూర్చి చదువుట మరియు నిర్దిష్ట నిర్ధారకముల విలువలను కనుగొను వేర్వేరు పద్ధతులను గూర్చి చెర్చించెదము.

నిర్వచనము 7.19

$A = [a_{ij}]_{3\times3}$ అనునది తరగతి 3గా గల చతురస్ర యాత్రిక అనుకొనుము. ఏదైనా ఒక మూలకము a_{ij} యొక్క లఘు నిర్ధారకము అనునది a_{ij} లో గల i వ అడ్డు వరుస మరియు j వ నిలువు వరుసను తొలగించగా పొందిన నిర్ధారకము అగును. a_{ij} యొక్క లఘు నిర్ధారకమును సాధారణముగా M_{ij}. గా సూచిస్తారు.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_7.indd 23 24-01-2023 16:52:24

నిర్వచనము 7.20

సంజ్ఞ (గుర్తు) తో కూడిన లఘు నిర్ధారకమును సహకారణి అంటారు. a_{ij} యొక్క సహకారణిను సాధారణంగా A_{ij} గా సూచిస్తారు మరియు $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ గా నిర్వచించారు.

ఉదాహరణకు $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ అను 3×3 తరగతి మాత్రికను తీసుకొనుము.

మూలకములు a_{11}, a_{12}, a_{13} ల లఘు నిర్ధారకములను మరియు సహకారణిలను క్రింది విధముగా కనుగొనవచ్చును.

(i) a_{11} యొక్క లఘు నిర్ధారకము $\mathrm{M}_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}$

a_{11} యొక్క సహకారణి $A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}$

(ii) a_{12} యొక్క లఘు నిర్ధారకము $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}$

a_{12} యొక్క సహకారణి $A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23})$

(iii) a_{13} యొక్క లఘు నిర్ధారకము $M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}$

a_{13} యొక్క సహకారణి $A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}$

ఫలితము 7.1 లాప్లాస్ విస్తరణ (Laplace Expansion)

ఇవ్వబడిన $A = [a_{ij}]_{3\times3}$ అను మాత్రిక మొదటి అడ్డు వరుసలో గల మూలకములతో వాని యొక్క సదృశ సహకారణుల లబ్ధముల మొత్తము A యొక్క నిర్ధారకము అగును.

కావున, $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$.

దీనిని లఘు నిర్ధారకములనుపయోగించి కూడా వ్రాయవచ్చును., $|A| = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$.

ఏ అడ్డువరుసనైన లేదా నిలువు వరుసనైన విస్తరించి నిర్ధారకములను గణించవచ్చును మరియు అన్ని సందర్భములలో వచ్చిన విలువ సమానము అనే ముఖ్యమైన విషయమును గమనించగలరు. ఉదాహరణకు

R_1 ద్వారా విస్తరించిన $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$.

R_2 ద్వారా విస్తరించిన $|A| = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$.

C_1 ద్వారా విస్తరించిన $|A| = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_7.indd 24 24-01-2023 16:52:24

ఉదాహరణ 7.15

$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ 4 & -5 & 6\\ -3 & 5 & 2\end{bmatrix}$ అయిన A యొక్క అన్ని లఘు నిర్ధారకములను మరియు సహకారణులను గణించుము. వీటినుపయోగించి $|A|$ ను కనుగొనుము. ఏ ఒక అడ్డు వరుసను లేక నిలువు మరుసనుపయోగించి విస్తరించిననూ $|A|$ యొక్క విలువ మారదని సరిచూడుము.

సాధన

లఘు నిర్ధారకములు: $M_{11}=\begin{vmatrix}-5 & 6\\ 5 & 2\end{vmatrix}=-10-30=-40$

$$M_{12}=\begin{vmatrix}4 & 6\\ -3 & 2\end{vmatrix}=8+18=26$$

$$M_{13}=\begin{vmatrix}4 & -5\\ -3 & 5\end{vmatrix}=20-15=5$$

$$M_{21}=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 5 & 2\end{vmatrix}=6+10=16$$

$$M_{22}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ -3 & 2\end{vmatrix}=2-6=-4$$

$$M_{23}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ -3 & 5\end{vmatrix}=5+9=14$$

$$M_{31}=\begin{vmatrix}3 & -2\\ -5 & 6\end{vmatrix}=18-10=8$$

$$M_{32}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 4 & 6\end{vmatrix}=6+8=14$$

$$M_{33}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & -5\end{vmatrix}=-5-12=-17$$

సహకారణులు :

$$A_{11}=(-1)^{1+1}(-40)=-40$$
$$A_{12}=(-1)^{1+2}(+26)=-26$$
$$A_{13}=(-1)^{1+3}(5)=5$$
$$A_{21}=(-1)^{2+1}(16)=-16$$
$$A_{22}=(-1)^{2+2}(-4)=-4$$
$$A_{23}=(-1)^{2+3}(14)=-14$$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_7.indd 25 24-01-2023 16:52:25

$$A_{31} = (-1)^{3+1}(8) = 8$$
$$A_{32} = (-1)^{3+2}(14) = -14$$
$$A_{33} = (-1)^{3+3}(-17) = -17$$

R_1 ద్వారా విస్తరించిన

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} .$$
$$|A| = 1(-40) + (3)(-26) + (-2)(5) = -128 . \quad \ldots (3)$$

C_1 ద్వారా విస్తరించిన

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} .$$
$$= 1(-40) + 4(-16) + -3(8) = -128 \quad \ldots (4)$$

3 మరియు 4 ల నుండి

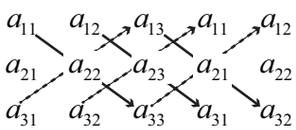
R_1 ద్వారా విస్తరించిన లభించు |A| యొక్క విలువ అనునది C_1 ద్వారా విస్తరించిన |A| యొక్క విలువ సమానం అని గమనించగలము.

సారస్ నియమమునుపయోగించి తరగతి 3 గా గల నిర్ధారకము విలువలను కనుగొనుట (ఫ్రెంచ్ గణిత శాస్త్రవేత్త పియారే ఫ్రెడిక్ సారస్ గారి యొక్క పేరుతో ఈ విధముగా పిలువబడుచున్నది)

Let $A = [a_{ij}]_{3\times3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$



A అను మాత్రిక మూలకములను క్రింది విధముగా వ్రాయుము:



$|A|$ అనునది క్రింది విధముగా గణించబడును

$$|A| = [a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}] - [a_{33}a_{21}a_{12} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{31}a_{22}a_{13}]$$

ఉదాహరణ 7.16

$A = \begin{bmatrix} 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\alpha & 0 & \sin\beta \\ \cos\alpha & -\sin\beta & 0 \end{bmatrix}$ అయిన, $|A|$ విలువను కనుగొనుము

సాధన

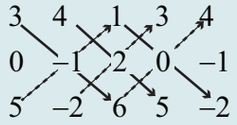
$$\begin{vmatrix} 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\alpha & 0 & \sin\beta \\ \cos\alpha & -\sin\beta & 0 \end{vmatrix} = 0M_{11} - \sin\alpha M_{12} + \cos\alpha M_{13}$$
$$= 0 - \sin\alpha(0 - \cos\alpha\sin\beta) + \cos\alpha(-\sin\alpha\sin\beta - 0) = 0.$$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_7.indd 26 24-01-2023 16:52:26

ఉదాహరణ 7.17

$A=\begin{bmatrix}3 & 4 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 5 & -2 & 6\end{bmatrix}$ అయిన, $|A|$ విలువను సారస్ నియమమునుపయోగించి కనుగొనుము.

సాధన



$$|A| = [3(-1)(6)+4(2)(5)+1(0)(-2)] - [5(-1)(1)+(-2)(2)3+6(0)(4)]$$
$$= [-18+40+0]-[-5-12+0] = 22+17 = 39.$$

గమనిక 7.6

సులభంగా గణించుట కొరకు అధిక సున్నాలు గల అడ్డువరుస లేదా నిలువు వరుసను ఉపయోగించి నిర్ధారకమును విస్తరిస్తాము.

n తరగతి $n \geq 4$ గా గల చతురస్ర మాత్రిక యొక్క నిర్ధారకము

నిర్ధారకము యొక్క భావనను తరగతి $n, n \geq 4$. గా గల చతురస్ర మాత్రికలకు విస్తరించవచ్చును. $A=[a_{ij}]_{n\times n}, n \geq 4$. అనుకొందుము.

i అను మాత్రిక నుండి j వ అడ్డు వరుస మరియు $A=[a_{ij}]_{n\times m}$ అను మాత్రిక నుండి $(n-1)$ వ నిలువు వరుసను తొలగించినప్పుడు తరగతి $A=[a_{ij}]_{n\times m}$ గా గల నిర్ధారకమును మనము పొందుతాము.

దీనిని a_{ij}అను మూలకము యొక్క లఘు నిర్ధారకము అని పిలుస్తారు.

దీనిని M_{ij} గా గుర్తిస్తాము, a_{ij} యొక్క సహకారణిని $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$. గా నిర్వచిస్తాము.

ఫలితము 7.2

తరగతి n గా గల చతురస్ర మాత్రిక $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ యొక్క మొదటి అడ్డువరుసలో గల మూలకములతో వాటి సదృశ సహకారణుల లబ్ధముల మొత్తమును A యొక్క నిర్ధారకము అంటారు.

అది $|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\ldots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}$ ఇది లఘు నిర్ధారకము మరియు సహకారణుల నిర్వచనము నుంచి

$|A|=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}$, కు సమానమగును

ఇచ్చట a_{1j} అనునది M_{1j} యొక్క సహకారణి మరియు A_{1j} అనునది a_{1j} యొక్క లఘు నిర్ధారకము అగును. ఇచ్చట $j = 1, 2, \ldots, n$ □

గమనిక 7.7

(i) $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ అయిన A యొక్క నిర్ధారకమును (A) లేక A లేక Δ లతో కూడ గుర్తిస్తాము.

(ii) దీనిని, ఏదైన ఒక అడ్డు వరుస లేదా నిలువు వరుసను ఉపయోగించి లెక్కించవచ్చును.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_7.indd 27 24-01-2023 16:52:26

7.3.2 నిర్ధారకముల ధర్మములు (Properties of Determinants)

నిర్ధారక గణనను సరళీకృతం చేయుటకు క్రింద గల నిర్ధారక ధర్మాలలో ఒకటి లేక ఎక్కువ ధర్మాలను మనము ఉపయోగించవచ్చును.

ధర్మము 1

ఒక మాత్రిక యొక్క అడ్డు వరుసలను నిలువు వరుసలగాను, నిలువు వరుసలను అడ్డు వరుసలగాను స్థానమార్పు చేసిన ఈ మాత్రిక యొక్క నిర్ధారకము మారదు.

అది $|A| = |A^T|$.

ఎందుకనగా, అడ్డువరుస విస్తరణ అనేది నిలువు వరుస విస్తరణకు సమానము. ఫలితము నిజమగును.

ధర్మము 2

ఒక నిర్ధారకము యొక్క రెండు అడ్డువరుసలు / నిలువు వరుసలు స్థానమార్పు చేసినట్లయితే ఈ నిర్ధారకము సంజ్ఞ (గుర్తు) మారును కాని దాని యొక్క పరమమూల్య విలువ మారదు.

అనుకొనిన

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ అనుకొనిన

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$ $(\text{since } R_2 \leftrightarrow R_3)$ అనుకొనిన

$$= a_1(b_3c_2 - b_2c_3) - b_1(a_3c_2 - a_2c_3) + c_1(a_3b_2 - a_2b_3)$$

$$= -a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + b_1(a_2c_3 - a_3c_2) - c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$$

$$= -[a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)]$$

$$= -|A|$$

$|A_1| = -|A|$. □

ధర్మము 3

A అను మాత్రిక యొక్క n అడ్డువరుసలు / నిలువు వరుసలు స్థాన మార్పిడి చేసినచో మాత్రిక యొక్క నిర్ధారకము $(-1)^n |A|$ అగును.

ధర్మము 4

ఒక మాత్రికలో రెండు అడ్డు వరుసలు / నిలువు వరుసలు సర్వ సమానమైన ఈ మాత్రిక యొక్క నిర్ధారకము సున్న అగును.

సరిచూచుట

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$, 2వ మరియు 3వ అడ్డు వరుసలు సర్వసమానముగా తీసుకొంటాము..

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_7.indd 28 24-01-2023 16:52:27

$$-|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = |A|$$ రెండవ మరియు మూడవ అడ్డు వరుసలను స్థాన మార్పిడి చేసిన లభించునది.

$\Rightarrow 2|A| = 0 \Rightarrow |A| = 0.$ ■

ధర్మము 5

A అను మాత్రికలో ఒక అడ్డు వరుస (నిలువు వరుస) ఆ మాత్రిక యొక్క మరొక అడ్డు వరుస (లేదా నిలువు వరుస) యొక్క అదిశ లబ్ధము (scalar multiple) గా ఉన్నచో దాని యొక్క నిర్ధారకము విలువ సున్న అగును.

గమనిక 7.8

(i) ఒక అడ్డు వరుస లేక నిలువు వరుసలోని అన్ని మూలకములు సున్న అయిన ఆ నిర్ధారకము సున్న అగును.

(ii) ఒక త్రిభుజాకార మాత్రిక యొక్క నిర్ధారకము దాని ప్రధాన వికర్ణ మూలకముల లబ్ధమగును.

ధర్మము 6

ఒక మాత్రిక యొక్క ఒక అడ్డు వరుసలోని / నిలువు వరుసలోని ప్రతి మూలకమును ఒక అదిశ k చే గుణించినచో దీని నిర్ధారికము అదే అదిశ k తో గుణించినట్లుగా ఉండును.

సరిచూచుట

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ అయిన

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ అయిన

$$= ka_1(b_2c_3 - b_3c_2) - kb_1(a_2c_3 - a_3c_2) + kc_1(a_2b_3 - a_3b_2) = k|A|$$

$$= k[a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)] = k|A|$$

$\Rightarrow |A_1| = k|A|.$ ■

గమనిక 7.9

A అనునది తరగతి n గా గల చతురస్ర మాత్రిక అయిన

(i) $|AB| = |A||B|$

(ii) $AB = O$ అయిన $|A| = 0$ లేక $|B| = 0.$

(iii) $|A^n| = (|A|)^n$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_7.indd 29 24-01-2023 16:52:28

ధర్మము 7

ఒక నిర్ధారక మాత్రికలో గల ఒక అడ్డు వరుస / నిలువు వరుస లోని ప్రతి మూలకము రెండు లేక ఎక్కువ పదాల మొత్తంగా వ్యక్తపరచి వున్నట్లయితే ఈ పూర్తి నిర్ధారకము రెండు లేదా ఎక్కువ నిర్ధారకముల మొత్తంగా వ్యక్తపరచబడును.

అనగా, $\begin{vmatrix} a_1+m_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+m_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+m_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_1 & b_1 & c_1 \\ m_2 & b_2 & c_2 \\ m_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

సరిచూచుట

మొదటి అడ్డు వరుస ద్వారా విస్తరించిన దీనిని సులభంగా సరిచూడగలము.

$$\text{LHS} = (a_1+m_1)(b_2c_3-b_3c_2)-(a_2+m_2)(b_1c_3-b_3c_1)+(a_3+m_3)(b_1c_2-b_2c_1)$$

$$= a_1(b_2c_3-b_3c_2)-a_2(b_1c_3-b_3c_1)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)+m_1(b_2c_3-b_3c_2)-m_2(b_1c_3-b_3c_1)$$

$$+m_3(b_1c_2-b_2c_1)$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_1 & b_1 & c_1 \\ m_2 & b_2 & c_2 \\ m_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \text{RHS}.$$

ధర్మము 8

ఒక నిర్ధారక యొక్క ఏదేని అడ్డు వరుస (నిలువు వరుస)లో గల ప్రతి మూలకమును ఒకటి లేక ఎక్కువ అడ్డువరుసలు (నిలువు వరుసలు) లోని సదృశ మూలకాల సమ గుణిజములతో సంకలనం లేదా వ్యవకలనం చేసిన నిర్ధారకము యొక్క విలువ మారదు.

సరిచూచుట

$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ అనుకొందాము.

మరియు $|A_1| = \begin{vmatrix} a_1+pa_2+qa_3 & b_1+pb_2+qb_3 & c_1+pc_2+qc_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} pa_2 & pb_2 & pc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} qa_3 & qb_3 & qc_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ { ధర్మము 7 ను అనుసరించి

$$|A_1| = |A| + p\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + q\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$|A_1| = |A| + p(0) + q(0) = |A|$ (ధర్మము 4ను అనుసరించి)

కావున $|A_1| = |A|$

ఈ ధర్మము ఒక నిర్ధిష్ట అడ్డు వరుస లేక నిలువు వరుసకు సంబంధించినది కాదు.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_7.indd 30 24-01-2023 16:52:28

ఉదాహరణ 7.18

a, b, c మరియు x అనునవి ధన వాస్తవ సంఖ్యలు అయిన, $\begin{vmatrix} (a^x+a^{-x})^2 & (a^x-a^{-x})^2 & 1 \\ (b^x+b^{-x})^2 & (b^x-b^{-x})^2 & 1 \\ (c^x+c^{-x})^2 & (c^x-c^{-x})^2 & 1 \end{vmatrix}$. అనునది సున్న అని నిరూపించుము.

సాధన

$C_1 \to C_1 - C_3$, ఉపయోగించి $\begin{vmatrix} 4 & (a^x-a^{-x})^2 & 1 \\ 4 & (b^x-b^{-x})^2 & 1 \\ 4 & (c^x-c^{-x})^2 & 1 \end{vmatrix} = 0$, since C_1 మరియు అనుపాతాలు.

ఉదాహరణ 7.19

$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}$ మరియు $B = \begin{bmatrix} b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \\ a+b & b+c & c+a \end{bmatrix}$

అనువాటి నిర్ధారకములను విస్తరించకుండా $|B| = 2|A|$ అని నిరూపించుము.

సాధన

We have $$|B| = \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & 2(a+b+c) & 2(a+b+c) \\ c+a & a+b & b+c \\ a+b & b+c & c+a \end{vmatrix} (R_1 \to R_1+R_2+R_3)$$

$$= 2\begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ c+a & a+b & b+c \\ a+b & b+c & c+a \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ -b & -c & -a \\ -c & -a & -b \end{vmatrix} (R_2 \to R_2-R_1 \text{ and } R_3 \to R_3-R_1)$$

$$= 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ -b & -c & -a \\ -c & -a & -b \end{vmatrix} (R_1 \to R_1+R_2+R_3)$$

$$= 2(-1)^2\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

$$= 2|A|.$$

ఉదాహరణ 7.20

గణించుము $\begin{vmatrix} 2014 & 2017 & 0 \\ 2020 & 2023 & 1 \\ 2023 & 2026 & 0 \end{vmatrix}$.

సాధన

$$\begin{vmatrix} 2014 & 2017 & 0 \\ 2020 & 2023 & 1 \\ 2023 & 2026 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2014 & 2017-2014 & 0 \\ 2020 & 2023-2020 & 1 \\ 2023 & 2026-2023 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2014 & 3 & 0 \\ 2020 & 3 & 1 \\ 2023 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2014 & 1 & 0 \\ 2020 & 1 & 1 \\ 2023 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -3(2014 - 2023) = -3(-9) = 27.$$

ఉదాహరణ 7.21

$\begin{vmatrix} x-1 & x & x-2 \\ 0 & x-2 & x-3 \\ 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix} = 0$ అయిన x యొక్క విలువను కనుగొనుము.

సాధన

ప్రధాన వికర్ణమునకు క్రింది గల అన్ని మూలకములు సున్న అయినందున నిర్ధారక మాత్రిక విలువ

$(x-1)(x-2)(x-3) = 0,\ x = 1, 2, 3$

ఉదాహరణ 7.22

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)$ అని నిరూపించుము

సాధన

$C_2 \to C_2 - C_1, C_3 \to C_3 - C_1$, చేయగా మనకు లభించునది

$$\text{LHS} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & y-x & z-x \\ x^2 & y^2-x^2 & z^2-x^2 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 1 \\ x^2 & y+x & z+x \end{vmatrix}$$

$$= (y-x)(z-x)[(z+x)-(y+x)] .$$

$$= (y-x)(z-x)(z-y) .$$

$$= (x-y)(y-z)(z-x) = \text{RHS}.$$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_7.indd 32 24-01-2023 16:52:29

అభ్యాసము 7.2

(1) నిర్ధారకములను విస్తరించకుండా $\begin{vmatrix} s & a^2 & b^2+c^2 \\ s & b^2 & c^2+a^2 \\ s & c^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix} = 0.$ అని నిరూపించుము.

(2) $\begin{vmatrix} b+c & bc & b^2c^2 \\ c+a & ca & c^2a^2 \\ a+b & ab & a^2b^2 \end{vmatrix} = 0$ అని నిరూపించుము

(3) $\begin{vmatrix} a^2 & bc & ac+c^2 \\ a^2+ab & b^2 & ac \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$ అని నిరూపించుము.

(4) $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ అని నిరూపించుము.

(5) $\begin{vmatrix} \sec^2\theta & \tan^2\theta & 1 \\ \tan^2\theta & \sec^2\theta & -1 \\ 38 & 36 & 2 \end{vmatrix} = 0.$ అని నిరూపించుము.

(6) $\begin{vmatrix} x+2a & y+2b & z+2c \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0.$ అని నిరూపించుము.

(7) 3×3 తరగతి గల అసౌష్ఠవ మాత్రిక యొక్క సాధారణ రూపమును వ్రాయుము. దాని నిర్ధారకము 0 అని చూపుము.

(8) $\begin{vmatrix} a & b & a\alpha+b \\ b & c & b\alpha+c \\ a\alpha+b & b\alpha+c & 0 \end{vmatrix} = 0,$

అయిన a, b, c అనునవి $G.P.$ లో యుండును లేక α అనునవి $ax^2+2bx+c=0$ యొక్క ఒక మూలము అని నిరూపించుము.

(9) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2-bc \\ 1 & b & b^2-ca \\ 1 & c & c^2-ab \end{vmatrix} = 0$ అని నిరూపించుము.

(10) a, b, c అనునవి ఒక $A.P$ లోని p q మరియు r వ పదాలు అయిన $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. యొక్క విలువను కనుగొనుము.

(11) $\begin{vmatrix} a^2+x^2 & ab & ac \\ ab & b^2+x^2 & bc \\ ac & bc & c^2+x^2 \end{vmatrix}$ అను నిర్ధారకము x^4 తో భాగింపబడునని నిరూపించుము.

(12) a, b, c అనేది ధనాత్మకము మరియు ఇవి ఒక $G.P$ లో p, q మరియు r వ పదాలు అయిన $\begin{vmatrix} \log a & p & 1 \\ \log b & q & 1 \\ \log c & r & 1 \end{vmatrix} = 0.$ అని నిరూపించుము.

(13) $x, y, z \neq 1.$ అయిన $\begin{vmatrix} 1 & \log_x y & \log_x z \\ \log_y x & 1 & \log_y z \\ \log_z x & \log_z y & 1 \end{vmatrix}$ యొక్క విలువ కనుగొనుము

(14) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \alpha \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ అయిన $\sum_{k=1}^{n} \det(A^k) = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)$ అని నిరూపించుము.

(15) విస్తరించకుండా క్రింది వాటి నిర్ధారకములను కనుగొనుము:

(i) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 6x & 9x & 12x \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ z & x & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

(16) A అనునది ఒక చతురస్ర మాత్రిక మరియు $|A| = 2$ అయిన $|AA^T|$ యొక్క విలువను కనుగొనుము.

(17) A, B అనునవి $|A| = -1$ మరియు $|B| = 3$ అగునట్లు 3వ తరగతి చతురస్ర మాత్రికలు అయిన $|3AB|$ యొక్క విలువను కనుగొనుము.

(18) $\lambda = -2$ అయిన $\begin{vmatrix} 0 & 2\lambda & 1 \\ \lambda^2 & 0 & 3\lambda^2+1 \\ -1 & 6\lambda-1 & 0 \end{vmatrix}$ యొక్క నిర్ధారకమును కనుగొనుము.

(19) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 20 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & 2x & 5x^2 \end{vmatrix} = 0.$ అను సమీకరణ మూలకములను కనుగొనుము.

(20) $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & -5 \end{bmatrix}$ మరియు $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \\ 9 & 7 & 5 \end{bmatrix}$ అను మాత్రికలకు $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ అని సరిచూడుము.

(21) $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ అను మాత్రిక యొక్కరెండవ అడ్డువరుసలో గల మూలకముల సహకారణీలనుపయోగించి $|A|$ యొక్క విలువను కనుగొనుము.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_7.indd 34 24-01-2023 16:52:30

7.3.3 నిర్ధారకములకు కారణాంక సిద్ధాంతమునుపయోగించుట
(Application of Factor Theorem to Determinants)

సిద్ధాంతము 7.3 : (కారణాంక సిద్ధాంతము) (Factor Theorem)

ఒక మాత్రిక A యొక్క ప్రతిమూలకము x లో బహుపద సమాసము మరియు $x = a$ కు $|A|$ శూన్యము అయిన $(x - a)$ అనునది $|A|$ యొక్క ఒక కారణాంకమగును.

గమనిక 7.10

(i) ఒక నిర్ధారకము యొక్క విలువను కారణాంక రూపములో పొందుటకు ఈ సిద్ధాంతము చాలా ఉపయోగపడును.

(ii) నిర్ధారకము $|A|$ లో a బదులు b ప్రతిక్షేపించిన, దాని యొక్క ఏదైనా రెండు అడ్డు వరుసలు లేక నిలువు వరుసలు సర్వసమానమైన $|A| = 0$ అగును. కావున కారణాంక సిద్ధాంతం ప్రకారం $(a - b)$ అనునది $|A|$ కు ఒక కారణాంక మగును.

(iii) n $(n \geq r)$ తరగతి గల ఒక నిర్ధారకములో, $x = a$ అని ప్రతిక్షేపించిన r అడ్డు వరుసలు (నిలువు వరుసలు) సర్వసమానమైన $(x - a)^{r-1}$ అనునది $|A|$ యొక్క ఒక కారణాంకమగును.

(iv) ఒక చతురస్ర మాత్రిక (లేక దాని యొక్క నిర్ధారకము) లోని ప్రతి అడ్డు వరుసను మొదటి అడ్డు వరుసలో గల చలరాశులు చక్రీయంగా మార్చుట వల్ల పొందిన ఆ చతురస్ర మాత్రికను చక్రీయ సౌష్ఠవ రూపము అని అంటారు.

(v) ఒక చక్రీయ సౌష్ఠవ నిర్ధారకములో m అనునది కారణాంకాల (ప్రతిక్షేపణ ద్వారా పొందిన) లబ్ధము యొక్క అంతస్థుకు మరియు ప్రధాన వికర్ణంలోని మూలకముల లబ్ధము యొక్క అంతస్థుకు గల వ్యత్యాసము అయిన

1) m అనునది సున్న అయిన కావలసిన కారణాంకము ఒక స్థిరాంకం k అగును.

2) m అనునది 1 అయిన కావలసిన కారణాంకము $k(a + b + c)$ అగును.

3) m అనునది 2 అయిన కావలసిన కారణాంకము $k(a^2 + b^2 + c^2) + l(ab + bc + ca)$ అగును.

ఉదాహరణ 7.23

కారణాంక సిద్ధాంతమునుపయోగించి $\begin{vmatrix} x+1 & 3 & 5 \\ 2 & x+2 & 5 \\ 2 & 3 & x+4 \end{vmatrix} = (x-1)^2(x+9)$. అని నిరూపించుము.

సాధన

$$|A| = \begin{vmatrix} x+1 & 3 & 5 \\ 2 & x+2 & 5 \\ 2 & 3 & x+4 \end{vmatrix}$$ అనుకొనుము.

$x = 1$, ను ప్రతిక్షేపించగా $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$

ఇచ్చట మూడు అడ్డు వరుసలు సర్వసమానములు కనుక $(x - 1)^2$ అనునది $|A|$ యొక్క ఒక కారణాంకమగును.

$|A|$ లో $x=-9$ ను ప్రతిక్షేపించిన $|A|=\begin{vmatrix}-8 & 3 & 5\\ 2 & -7 & 5\\ 2 & 3 & -5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 3 & 5\\ 0 & -7 & 5\\ 0 & 3 & -5\end{vmatrix}=0$

కావున, $(x+9)$ అనునది $|A|$ యొక్క కారణాంకమగును. $C_1 \to C_1+C_2+C_3$]

అది $(x-1)^2(x+9)$ అనునది $|A|$ యొక్క కారణాంకమగును. నిర్ధారకము x లో ఒక ఘన బహుపద సమానమగును. కావున మిగిలిన కారణాంకము చరరాశి k అగును.

కావున $\begin{vmatrix}x+1 & 3 & 5\\ 2 & x+2 & 5\\ 2 & 3 & x+4\end{vmatrix}=k(x-1)^2(x+9).$

కావున x^3 పదమును ఇరు ప్రక్కల సమపరచిన $k=1$ అని పొందెదము. కావున, $|A|=(x-1)^2(x+9)$).

ఉదాహరణ 7.24

$\begin{vmatrix}1 & x^2 & x^3\\ 1 & y^2 & y^3\\ 1 & z^2 & z^3\end{vmatrix}=(x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx)$. అని నిరూపించుము.

సాధన

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & x^2 & x^3\\ 1 & y^2 & y^3\\ 1 & z^2 & z^3\end{vmatrix}\cdot \text{ అనుకొనుము.}$$

$x=y$ అని ప్రతిక్షేపించిన $\quad |A|=\begin{vmatrix}1 & y^2 & y^3\\ 1 & y^2 & y^3\\ 1 & z^2 & z^3\end{vmatrix}=0 \quad (R_1=R_2)$

కావున $(x-y)$ ఒక కారణాంకమగును.

ఇవ్వబడిన నిర్ధారకము x, y మరియు z లో చక్రీయ సౌష్ఠవ రూపములో ఉంది కావున $(y-z)$ మరియు $(z-x)$ లు కూడా కారణాంకములగును.

$(x-y)(y-z)(z-x)$ కారణాంకాల లబ్ధం యొక్క అంతస్థు 3 మరియు ప్రధాన వికర్ణ మూలకము లబ్ధము $1\times y^2\times z^3$ యొక్క అంతస్థు 5

కావున మిగిలిన మరొక కారణాంకము $k(x^2+y^2+z^2)+\ell(xy+yz+zx)$ అగును.

కావున $\begin{vmatrix}1 & x^2 & x^3\\ 1 & y^2 & y^3\\ 1 & z^2 & z^3\end{vmatrix}=[k(x^2+y^2+z^2)+\ell(xy+yz+zx)]\times(x-y)(y-z)(z-x)$.

$x=0,\ y=1$ మరియు $z=2$, అని ప్రతిక్షేపించగా

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 8\end{vmatrix}=[k(0+1+4)+\ell(0+2+0)](-1)(1-2)(2-0)$$

$$\Rightarrow \quad (8-4)=[(5k+2\ell)](-1)(-1)(2)$$

$$4=10k+4\ell \Rightarrow 5k+2\ell=2 \qquad \ldots(1)$$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_7.indd 36 24-01-2023 16:52:30

$x = 0, y = -1$ and $z = 1$, అని ప్రతిక్షేపించగా

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = [k(2) + \ell(-1)](1)(-2)(1)$$

$$\Rightarrow \quad [(2k - \ell)(-2)] = 2$$

$$2k - \ell = -1. \quad \ldots (2)$$

1 మరియు 2 ను సాధించగా $k = 0, \ell = 1.$ అని లభించును

కావున $\begin{vmatrix} 1 & x^2 & x^3 \\ 1 & y^2 & y^3 \\ 1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix} = (x - y)(y - z)(z - x)(xy + yz + zx).$

ఉదాహరణ 7.25

$|A| = \begin{vmatrix} (q+r)^2 & p^2 & p^2 \\ q^2 & (r+p)^2 & q^2 \\ r^2 & r^2 & (p+q)^2 \end{vmatrix} = 2pqr\ (p+q+r)^3.$ అని నిరూపించుము.

సాధన

$p = 0,$ ను ప్రతిక్షేపించగా $|A| = \begin{vmatrix} (q+r)^2 & 0 & 0 \\ q^2 & r^2 & q^2 \\ r^2 & r^2 & q^2 \end{vmatrix} = 0.$

కావున, $(p - 0)$ అనునది ఒక కారణాంకమగును. అనగా p ఒక కారణాంకమగును.

$|A|$ అనునది p, q, r లో ఒక చక్రీయ సౌష్ఠవ రూపములో ఉంది కావున q మరియు r లు కూడా కారణాంకములు అగును.

$p + q + r = 0 \Rightarrow q + r = -p\ ;\ r + p = -q\ ;$ మరియు $p + q = -r.$

$|A| = \begin{vmatrix} p^2 & p^2 & p^2 \\ q^2 & q^2 & q^2 \\ r^2 & r^2 & r^2 \end{vmatrix} = 0$ అని లభించును..

ఇచ్చట మూడు నిలువు వరుసలు సర్వసమానము.

కావున $(p + q + r)^2$ అనునది $|A|$ యొక్క కారణాంకమగును.

$(p + q + r)^2$ అను పొందిన కారణాంకము యొక్క అంతస్థ 5. $|A|$ యొక్క ప్రధాన వికర్ణములోని మూలకముల లబ్ధము యొక్క అంతస్థ 6

కావున మరొక కావలసిన కారణాంకము $k\,(p + q + r).$ అగును.

$$\begin{vmatrix} (q+r)^2 & p^2 & p^2 \\ q^2 & (r+p)^2 & q^2 \\ r^2 & r^2 & (p+q)^2 \end{vmatrix} = k(p+q+r)\,(p+q+r)^2 \times pqr$$

$p = 1,\ q = 1,\ c = 1,$ అని ప్రతిక్షేపించగా

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = k(1+1+1)^3\ (1)\ (1)\ (1).$$

$4(16-1) - 1(4-1) + 1(1-4) = 27k$

$60 - 3 - 3 = 27\,k \Rightarrow k = 2.$

కావున $|A| = 2pqr\,(p+q+r)^3.$

ఉదాహరణ 7.26

త్రిభుజము ABC, లో $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1+\sin A & 1+\sin B & 1+\sin C \\ \sin A(1+\sin A) & \sin B(1+\sin B) & \sin C(1+\sin C) \end{vmatrix} = 0,$

అయిన ΔABC అనునది ఒక సమద్వి బాహు త్రిభుజమని నిరూపించుము.

సాధన

$\sin A = \sin B,$ అని ప్రతిక్షేపించగా

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1+\sin A & 1+\sin A & 1+\sin C \\ \sin A(1+\sin A) & \sin A(1+\sin A) & \sin C(1+\sin C) \end{vmatrix} = 0$$

అది $\sin A = \sin B$ అయిన, సమీకరణము తృప్తిచెందును.

ఇదేవిధంగా $\sin B = \sin C$ మరియు $C = \sin A$ అయినపుడు సమీకరణము తృప్తిచెందును.

కాబట్టి $A = B$ లేక $B = C$ లేక $C = A$ అని పొందెదము పై గల అన్ని సందర్భములోను ఏదైనా రెండు కోణములు సమానముగా ఉన్నది. కనుక ..... ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజమగును.

అభ్యాసము 7.3

క్రింది ఇవ్వబడిన వానిని కారణాంక సిద్ధాంతమును ఉపయోగించి సాధించుము

(1) $\begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix} = (x-a)^2(x+2a)$ అని నిరూపించుము..

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_7.indd 38 24-01-2023 16:52:33

(2) $\begin{vmatrix} b+c & a-c & a-b \\ b-c & c+a & b-a \\ c-b & c-a & a+b \end{vmatrix} = 8abc$ అని నిరూపించుము.

(3) $\begin{vmatrix} x+a & b & c \\ a & x+b & c \\ a & b & x+c \end{vmatrix} = 0$. సాధించుము

(4) $\begin{vmatrix} b+c & a & a^2 \\ c+a & b & b^2 \\ a+b & c & c^2 \end{vmatrix} = (a+b+c)\,(a-b)\,(b-c)\,(c-a)$ అని నిరూపించుము.

(5) సాధించుము $\begin{vmatrix} 4-x & 4+x & 4+x \\ 4+x & 4-x & 4+x \\ 4+x & 4+x & 4-x \end{vmatrix} = 0$.

(6) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)$ అని నిరూపించుము.

9WC7L

7.3.4 నిర్ధారకముల లబ్ధము (Product of Determinants)

రెండు మాత్రికల లబ్ధమును కనుగొనుటకు "అడ్డు–నిలువు" లబ్ధ విధిని మాత్రమే అనుసరించబడును. అడ్డు వరుసలను మరియు నిలువు వరుసలును స్థానమార్పిడి చేయు ప్రక్రియ వలన నిర్ధారకము విలువ మారదు (ధర్మము 1 ద్వారా) అని గమనించెదము. కావున రెండు నిర్ధారకముల లబ్ధమును క్రింది ప్రక్రియల ద్వారా కూడా మనము కనుగొనవచ్చును.

(i) అడ్డు – నిలువు వరుస గుణాకార ధర్మము
(ii) అడ్డు – అడ్డు వరుస గుణాకార ధర్మము
(iii) నిలువు – అడ్డు వరుస గుణాకార ధర్మము
(iv) నిలువు – నిలువు వరుస గుణాకార ధర్మము

గమనిక 7.11

(i) A మరియు B అనునవి n తరగతి గల రెండు చతురస్ర మాత్రికలు అయిన $|AB| = |A||B|$ అగును.

(ii) మాత్రికలలో సాధారణంగా $AB \neq BA$ గా ఉండిన $|AB| = |BA|$ అనునవి ఎల్లప్పుడూ సత్యమగును.

ఉదాహరణ 7.27

$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ మరియు $B = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ అయిన, $|AB| = |A||B|$ అని సరిచూడుము.

సాధన

$$AB = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\theta+\sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta-\sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta-\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta+\sin^2\theta \end{bmatrix}$$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_7.indd 39 24-01-2023 16:52:33

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |AB| = 1. \quad \ldots (1)$$

$$|A| = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

$$|B| = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

$$|A|\,|B| = 1. \quad \ldots (2)$$

1 మరియు 2 ల నుండి, $|AB| = |A|\,|B|$.

ఉదాహరణ 7.28

$$\begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} b^2 & c^2 & ab & ac \\ ab & c^2+a^2 & bc & \\ ab & bc & a^2+b^2 & \end{vmatrix}$$ అని నిరూపించుము.

సాధన

$$\text{LHS} = \begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}.$$

$$= \begin{vmatrix} 0+c^2+b^2 & 0+0+ab & 0+ac+0 \\ 0+0+ab & c^2+0+a^2 & bc+0+0 \\ 0+ac+0 & bc+0+0 & b^2+a^2+0 \end{vmatrix}.$$

$$= \begin{vmatrix} c^2+b^2 & ab & ac \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ac & bc & b^2+a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ac & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix} = \text{RHS}.$$

ఉదాహరణ 7.29

$$\begin{vmatrix} 2bc-a^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 2ca-b^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab-c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}^2$$ అని నిరూపించుము.

సాధన

$$\text{RHS} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}.$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \times (-1) \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$ [రెండవ నిర్ధారకములో $R_2 \leftrightarrow R_3$]

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}.$$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_7.indd 40 24-01-2023 16:52:33

నిలువ – నిలువ వరుసల లబ్ధము ప్రకారము

$$= \begin{vmatrix} -a^2+bc+cb & -ab+ab+c^2 & -ac+b^2+ac \\ -ab+c^2+ab & -b^2+ac+ac & -bc+bc+a^2 \\ -ac+ac+b^2 & -bc+a^2+bc & -c^2+ab+ab \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2bc-a^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 2ca-b^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab-c^2 \end{vmatrix} = \text{RHS.}$$

ఉదాహరణ 7.30

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1-2x^2 & -x^2 & -x^2 \\ -x^2 & -1 & x^2-2x \\ -x^2 & x^2-2x & -1 \end{vmatrix}$$ అని నిరూపించుము.

సాధన

$$\text{LHS} = \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix}.$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix} \times (-1)\,(-1) \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ -x & -1 & -x \\ -x & -x & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ -x & -1 & -x \\ -x & -x & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-x^2-x^2 & x-x-x^2 & x-x^2-x \\ x-x-x^2 & x^2-1-x^2 & x^2-x-x \\ x-x^2-x & x^2-x-x & x^2-x^2-1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-2x^2 & -x^2 & -x^2 \\ -x^2 & -1 & x^2-2x \\ -x^2 & x^2-2x & -1 \end{vmatrix}.$$

$= \text{R.H.S.}$

7.3.5 నిర్ధారకము మరియు వాటి సహకారిణి ంనిర్ధారకములకు మధ్య గల సంబంధము
(Relation between a Determinant and its Cofactor Determinant)

$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ అనుకొనుము.

$|A|$ a_1, b_1, c_1 ల సహకారణులు A_1, B_1, C_1 అనుకొందాం.

కావున, సహకారణి నిర్ధారకము $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$

$|A| = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1$

ఇదే విధముగా, $|A| = a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2$ మరియు $|A| = a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3$

ఏదేని ఒక అడ్డువరుస (లేదా నిలువు వరుస) మూలకములుతో వాని యొక్క సదృశ సహకారణుల లబ్ధముల మొత్తము అనేది నిర్ధారకము యొక్క విలువ అగును.

ఇప్పుడు $a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2 = -a_1\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_1\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - c_1\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$

$= -a_1(b_1c_3 - b_3c_1) + b_1(a_1c_3 - a_3c_1) - c_1(a_1b_3 - a_3b_1)$

$= a_1b_1c_3 + a_1b_3c_1 + a_1b_1c_3 - a_3b_1c_1 - a_1b_3c_1 + a_3b_1c_1 = 0$

ఇదేవిధముగా మనకు లభించునది

$a_1A_3 + b_1B_3 + c_1C_3 = 0$; $a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1 = 0$;

$a_2A_3 + b_2B_3 + c_2C_3 = 0$; $a_3A_1 + b_3B_1 + c_3C_1 = 0$ మరియు $a_3A_2 + b_3B_2 + c_3C_2 = 0$.

గమనిక 7.12

ఒక అడ్డువరుస (లేదా నిలువు వరుస) మూలకములలో మరొక అడ్డువరుస (లేదా నిలువు వరుస) సదృశ సహకారణుల లబ్ధముల మొత్తము సున్న అగును.

ఉదాహరణ 7.31

$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ అనుకొనుము a_i, b_i, c_i, $i = 1,2,3$ అను వాటి యొక్క సహకారణులు A_i, B_i, C_i

అయిన $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = |A|^2$ అని నిరూపించుము.

సాధన

లబ్ధము ప్రకారము $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1 & a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2 & a_1A_3 + b_1B_3 + c_1C_3 \\ a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1 & a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2 & a_2A_3 + b_2B_3 + c_2C_3 \\ a_3A_1 + b_3B_1 + c_3C_1 & a_3A_2 + b_3B_2 + c_3C_2 & a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{vmatrix} = |A|^3$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_7.indd 42 24-01-2023 16:52:34

అది, $|A| \times \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = |A|^3$.

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = |A|^2 .$$

7.3.6 త్రిభుజము యొక్క వైశాల్యము (Area of a Triangle)

$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ మరియు (x_3, y_3) లను, శీర్షములు గల **త్రిభుజము యొక్క వైశాల్యము** అనునది క్రింది దాని యొక్క పరమమూల్య విలువ అని మనము తెలుసుకొనెదము.

$$\frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3).$$

ఈ సమాసమును క్రిందివిధంగా నిర్ధారకము రూపం యొక్క పరమమూల్య నిలువుగా వ్రాయవచ్చును.

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} .$$

ఉదాహరణ 7.32

$(-3, 0), (3, 0)$ మరియు $(0, k)$ లను శీర్షములు గల త్రిభుజము యొక్క వైశాల్యము 9 చ.ప్ర అయిన, k విలువను కనుగొనుము.

సాధన

త్రిభుజము యొక్క వైశాల్యము = యొక్క పరమ మూల్య విలువ $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$.

$$9 = \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix} \right| = \left| \frac{1}{2}(-k)(-3-3) \right|$$

$$\Rightarrow \quad 9 = 3|k| \text{ and hence, } k = \pm 3.$$

గమనిక 7.13

మూడు బిందువులతో ఏర్పడు త్రిభుజము యొక్క వైశాల్యము శూన్యమయిన (సున్న), ఆ మూడు బిందువులు ఏకరేఖీయములు, మరియు దీని విపర్యము సత్యమగును. నిర్ధారకము యొక్క విలువ ఋణాత్మకముగా ఉండవచ్చును. కాని, వైశాల్యము అనునది ఎల్లప్పుడూ ఒక ఋణాత్మకము కాని సంఖ్య అగునని గుర్తించుకొనవలయును.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_7.indd 43 24-01-2023 16:52:34

ఉదాహరణ 7.33

$(-2, -3)$, $(3, 2)$ మరియు $(-1, -8)$. అను శీర్షములు గల త్రిభుజము యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనుము.

సాధన

$$\text{త్రిభుజము యొక్క వైశాల్యము} = \left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|.$$

$$\left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -8 & 1 \end{vmatrix}\right| = \left|\frac{1}{2}(-20+12-22)\right| = |-15| = 15$$

కావున కావలసిన వైశాల్యము 15 చ.ప్ర.

ఉదాహరణ 7.34

$(a, b + c)$, $(b, c + a)$ మరియు $(c, a + b)$ అనునవి ఏకరేఖీయములని నిరూపించుము.

సాధన

ఇవ్వబడిన బిందువులు ఏకరేఖీయములని నిరూపించుటకు, $|A| = \begin{vmatrix} a & b+c & 1 \\ b & c+a & 1 \\ c & a+b & 1 \end{vmatrix} = 0$ అని నిరూపించిన చాలును.

$C_1 \to C_1 + C_2$, అని తీసుకొనిన,

$$|A| = \begin{vmatrix} a+b+c & b+c & 1 \\ a+b+c & c+a & 1 \\ a+b+c & a+b & 1 \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b+c & 1 \\ 1 & c+a & 1 \\ 1 & a+b & 1 \end{vmatrix} = (a+b+c)\times 0 = 0$$

కావున, ఇవ్వబడిన బిందువులు ఏకరేఖీయములగును.

7.3.7 అసాధారణ మరియు సాధారణ మాత్రికలు (Singular and non-singular Matrices)

నిర్వచనము 7.21

ఒక చతురస్ర మాత్రిక A యొక్క నిర్ధారకము $|A| = 0$. A అయిన, A ను అసాధారణ మాత్రిక అంటారు. ఒక చతురస్ర మాత్రిక A యొక్క నిర్ధారకము $|A| \neq 0$. అయిన A ను సాధారణ మాత్రిక అంటారు.

ఉదాహరణకు $A = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ అనుకొనుము.

$$|A| = 3(1-1) - 8(-4+4) + 1(-4+4) = 0.$$

కావున A అనునది ఒక అసాధారణ మాత్రిక అగును.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_7.indd 44 24-01-2023 16:52:34

$B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -3 & 0 & 5 \\ 5 & 4 & -7 \end{bmatrix}$ అనుకొనుము $|B| = 2(0-20) - (-3)(-42-4) + 5(30-0) = -28 \neq 0$.

కావున B అనునది ఒక సాధారణ మాత్రిక అగును.

గమనిక 7.14

A మరియు B అనునవి ఒకే తరగతి గల సాధారణ మాత్రికలు అయిన $|AB| = |A|\ |B| = |BA|$ అగుట వలన AB మరియు BA అనునవి కూడా సాధారణ మాత్రికలగును.

అభ్యాసము 7.4

(1) $(0, 0), (1, 2)$ మరియు $(4, 3)$ అను శీర్షములు గల త్రిభుజము యొక్క వైశాల్యము కనుగొనుము.

(2) $(k, 2), (2, 4)$ మరియు $(3, 2)$ అను శీర్షములు గల త్రిభుజము యొక్క వైశాల్యము 4 చ.ప్ర అయిన, k యొక్క విలువను కనుగొనుము.

(3) క్రింది వానిలో అసాధారణ మరియు సాధారణ మాత్రికలను గుర్తించుము.

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 0 & a-b & k \\ b-a & 0 & 5 \\ -k & -5 & 0 \end{bmatrix}$

(4) క్రింది ఇవ్వబడిన అసాధారణ మాత్రికలు అగునట్లు a మరియు b విలువలను కనుగొనుము.

(i) $A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -2 & a \end{bmatrix}$ (ii) $B = \begin{bmatrix} b-1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

(5) $\cos 2\theta = 0$, అయిన $\begin{vmatrix} 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{vmatrix}^2$ యొక్క విలువను కనుగొనుము.

(6) $\begin{vmatrix} \log_3 64 & \log_4 3 \\ \log_3 8 & \log_4 9 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \log_2 3 & \log_8 3 \\ \log_3 4 & \log_3 4 \end{vmatrix}$ యొక్క లబ్ధ విలువను కనుగొనుము.

UKD5P

అభ్యాసము 7.5

సరియైన లేక మిక్కిలి సరియైన జవాబులను ఇవ్వబడిన నాలుగు ప్రత్యామ్నాయాల నుండి ఎన్నుకొనుము.

(1) $a_{ij} = \frac{1}{2}(3i - 2j)$ మరియు $A = [a_{ij}]_{2\times 2}$ అయిన, A అనునది

(1) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_7.indd 45 24-01-2023 16:52:35

(2) $2X+\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 8\\ 7 & 2\end{bmatrix}$ అయిన X మాత్రిక అనునది

(1) $\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix}1 & -3\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix}2 & 6\\ 4 & -2\end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix}2 & -6\\ 4 & -2\end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$ అను మాత్రికకు క్రిందివానిలో ఏది సత్యము కానిది?

(1) ఒక అదిశా మాత్రిక (2) ఒక వికర్ణ మాత్రిక

(3) ఒక ఎగువ త్రిభుజాకార మాత్రిక (4) ఒక దిగువ త్రిభుజాకార మాత్రిక

(4) A మరియు B లు $A+B$ మరియు AB లు నిర్వచితమగునట్లు రెండు మాత్రికలు అయిన,

(1) A మరియు B లు ఒకే తరగతి గల రెండు మాత్రికలు కానవసరం లేదు

(2) A మరియు B లు ఒకే తరగతి గల చతురస్ర మాత్రికలు

(3) A యొక్క నిలువు వరసల సంఖ్య B యొక్క అడ్డు వరుసల సంఖ్యకు సమానం.

(4) $A=B$.

(5) $A=\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ -1 & -\lambda\end{bmatrix}$, అయిన λ యొక్క ఏ విలువనకు $A^2=O$ అవుతుంది

(1) 0 (2) ± 1 (3) -1 (4) 1

(6) $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}a & 1\\ b & -1\end{bmatrix}$ మరియు $(A+B)^2=A^2+B^2$ అయిన a మరియు b విలువలు

(1) $a=4, b=1$ (2) $a=1, b=4$ (3) $a=0, b=4$ (4) $a=2, b=4$

(7) $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ a & 2 & b\end{bmatrix}$ అనునది $AA^T=9I$, అను సమీకరణమును తృప్తి పరచు మాత్రిక ఇచ్చట I అనునది 3×3 తరగతి గల తత్సమ మాత్రిక అయిన (a, b) అను క్రమయుగ్మము క్రింది వానిలో దేనికి సమానము.

(1) $(2, -1)$ (2) $(-2, 1)$ (3) $(2, 1)$ (4) $(-2, -1)$

(8) A అనునది ఒక చతురస్ర మాత్రిక అయిన క్రింది వాటిలో ఏది సౌష్ఠవము కాదు?

(1) $A+A^T$ (2) AA^T (3) A^TA (4) $A-A^T$

(9) A మరియు B లు n తరగతి గల సౌష్ఠవ మాత్రికలు, ఇచ్చట $A\neq B$ అయిన

(1) $A+B$ ఒక అసౌష్ఠవ మాత్రిక (2) $A+B$ ఒక సౌష్ఠవ మాత్రిక

(3) $A+B$ ఒక వికర్ణ మాత్రిక (4) $A+B$ ఒక శూన్య మాత్రిక

(10) $A=\begin{bmatrix}a & x\\ y & a\end{bmatrix}$ మరియు xy 1, అయిన $\det(A\,A^T)$ యొక్క విలువ

(1) $(a-1)^2$ (2) $(a^2+1)^2$ (3) a^2-1 (4) $(a^2-1)^2$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_7.indd 46 24-01-2023 16:52:35

(11) $A=\begin{bmatrix} e^{x-2} & e^{7+x} \\ e^{2+x} & e^{2x+3} \end{bmatrix}$ అనునది ఒక అసాధారణ మాత్రిక అయిన x యొక్క విలువ?

(1) 9 (2) 8 (3) 7 (4) 6

(12) $(x,-2)$, $(5,2)$, $(8,8)$ అనునవి సరేఖీయ బిందువులైన x యొక్క విలువ

(1) -3 (2) $\frac{1}{3}$ (3) 1 (4) 3

(13) $\begin{vmatrix} 2a & x_1 & y_1 \\ 2b & x_2 & y_2 \\ 2c & x_3 & y_3 \end{vmatrix}=\frac{abc}{2}\neq 0$, అయిన $\left(\frac{x_1}{a},\frac{y_1}{a}\right)$, $\left(\frac{x_2}{b},\frac{y_2}{b}\right)$, $\left(\frac{x_3}{c},\frac{y_3}{c}\right)$ అను శీర్షబిందువులు కల్గిన త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యము?

(1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{1}{4}abc$ (3) $\frac{1}{8}$ (4) $\frac{1}{8}abc$

(14) $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{bmatrix}$ అను మాత్రిక యొక్క వర్గము 2 తరగతిగా గల తత్సమ మాత్రిక అయిన α,β మరియు γ తృప్తిపరచు సంబంధం.

(1) $1+\alpha^2+\beta\gamma=0$ (2) $1-\alpha^2-\beta\gamma=0$

(3) $1-\alpha^2+\beta\gamma=0$ (4) $1+\alpha^2-\beta\gamma=0$

(15) $\Delta=\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix}$, అయిన $\begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ kx & ky & kz \\ kp & kq & kr \end{vmatrix}$ అనునది

(1) Δ (2) $k\Delta$ (3) $3k\Delta$ (4) $k^3\Delta$

(16) $\begin{vmatrix} 3-x & -6 & 3 \\ -6 & 3-x & 3 \\ 3 & 3 & -6-x \end{vmatrix}=0$ అను సమీకరణము యొక్క ఒక మూలము

(1) 6 (2) 3 (3) 0 (4) -6

(17) $A=\begin{bmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{bmatrix}$ యొక్క నిర్ధారకము విలువ

(1) $-2abc$ (2) abc (3) 0 (4) $a^2+b^2+c^2$

(18) x_1,x_2,x_3 మరియు y_1,y_2,y_3 అనునవి ఒకే సామాన్య నిష్పత్తి గల గుణశ్రేదులు అయిన (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) అను బిందువులు

(1) ఒక సమబాహు త్రిభుజము యొక్క శీర్షములు

(2) ఒక లంబకోణ త్రిభుజము యొక్క శీర్షములు

(3) ఒక సమద్విబాహు లంబకోణ త్రిభుజము యొక్క శీర్షములు

(4) సరేఖీయాలు (ఏక రేఖీయలు)

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_7.indd 47 24-01-2023 16:52:36

(19) $[\cdot]$ అనునది గరిష్ఠ పూర్ణసంఖ్య ప్రమేయం అనుకొనుము మరియు $-1 \le x < 0,\ 0 \le y < 1,\ 1 \le z < 2$, అయిన $\begin{vmatrix} \lfloor x \rfloor + 1 & \lfloor y \rfloor & \lfloor z \rfloor \\ \lfloor x \rfloor & \lfloor y \rfloor + 1 & \lfloor z \rfloor \\ \lfloor x \rfloor & \lfloor y \rfloor & \lfloor z \rfloor + 1 \end{vmatrix}$ అను నిర్ధారకము యొక్క విలువ?

(1) $\lfloor z \rfloor$ (2) $\lfloor y \rfloor$ (3) $\lfloor x \rfloor$ (4) $\lfloor x \rfloor + 1$

(20) $a \neq b, b, c$ అనునది $\begin{vmatrix} a & 2b & 2c \\ 3 & b & c \\ 4 & a & b \end{vmatrix} = 0$, అనుదానిని తృప్తి పరిచిన $abc =$

(1) $a+b+c$ (2) 0 (3) b^3 (4) $ab+bc$

(21) If $A = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ మరియు $B = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 8 \end{vmatrix}$, అయిన

(1) $B = 4A$ (2) $B = -4A$ (3) $B = -A$ (4) $B = 6A$

(22) A అనునది n తరగతి గల అసౌష్ఠవ మాత్రిక మరియు C అనునది $n \times 1$ తరగతి గల నిలువు వరుస మాత్రిక అయిన $C^T AC$ అనుది

(1) n తరగతి గల తత్సమాత్రిక (2) తరగతి 1 గల తత్సమ మాత్రిక

(3) తరగతి 1 గల శూన్యమాత్రిక (4) తరగతి 2 గల తత్సమ మాత్రిక

(23) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ అను సమీకరణమును తృప్తిపరుచు A మాత్రిక

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(24) If $A + I = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, అయిన $(A+I)(A-I)$ యొక్క విలువ.

(1) $\begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 8 & -9 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -8 & 9 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -8 & -9 \end{bmatrix}$

(25) A మరియు B లు ఒకే తరగతి గల రెండు సౌష్ఠవ మాత్రికలైన క్రింది ప్రవచనాలలో ఏది సత్యము కాదు?

(1) $A + B$ అనునది ఒక సౌష్ఠవ మాత్రిక (2) AB అనునది ఒక సౌష్ఠవ మాత్రిక

(3) $AB = (BA)^T$ (4) $A^T B = AB^T$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_7.indd 48 24-01-2023 16:52:41

పాఠ్యసారాంశము

ఈ పాఠ్యభాగములో మనము నేర్చుకున్నవి.

- వాస్తవ సంఖ్యలును లేక $\mathbb{R}$ పై వాస్తవ విలువ ప్రమేయంలను లేక సంకీర్ణ సంఖ్యలును దీర్ఘచతురస్రాకారములో వరుసపరుచుటను మాత్రిక అంటారు.
- ఒక మాత్రిక m అడ్డువరుసలు మరియు n నిలువు వరుసలు కల్గియున్నచో దాని తరగతి $m \times n$ అగును.
- $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ అను మాత్రికలో
  $m = n$ అయిన, ఆ మాత్రిక చతురస్ర మాత్రిక అగును.
  $m = 1$ అయిన, ఆ మాత్రిక అడ్డువరుస మాత్రిక అగును.
  $n = 1$ అయిన, ఆ మాత్రిక నిలువు వరుస మాత్రిక అగును.
  $a_{ij} = 0 \forall i, j$ అయిన ఆ మాత్రిక శూన్యమాత్రిక అగును.
  $m = n$ మరియు $a_{ij} = 0 \forall i \neq j$ అయిన ఆ మాత్రిక వికర్ణ మాత్రిక అగును.
  $m = n, a_{ij} = 0 \forall i \neq j$ మరియు $a_{ii} = \lambda$ i ఆ మాత్రిక అదిశా మాత్రిక అగును.
  $m = n, a_{ij} = 0$ i ≠ j మరియు $a_{ii} = 1 \ \forall \ i$ అయిన ఆ మాత్రిక యూనిట్ లేక తత్సమ మాత్రిక అగును.
  $m = n$ మరియు $a_{ij} = 0 \ \forall \ i > j$ అయిన ఎగువ త్రిభుజాకార మాత్రిక అగును.
  $m = n$ మరియు $a_{ij} = 0 \ \forall \ i < j.$ అయిన దిగుమతి భుజాకార మాత్రిక అగును.
- $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ మరియు $B=[b_{ij}]_{m\times n}$, అను మాత్రికలకు $a_{ij} = b_{ij} \ \forall \ i$ మరియు j అయిన వానిని సమమాత్రికలు అంటారు.
- $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ మరియు $B=[b_{ij}]_{m\times n}$, అయిన $A+B=[c_{ij}]_{m\times n}$, ఇచ్చుట $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
- If $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ మరియు λ ఒక అదిశ అయిన $\lambda A=[\lambda a_{ij}]_{m\times n}$
- $-A = (-1)A$
- $A + B = B + A$
- $A - B = A + (-1)B$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$ ఇచ్చుట A, B మరియు C అనునది ఒకే తరగతిని కల్గియున్నవి.
- $A(BC) = (AB)C$ (ii) $A(B+C) = AB+AC$ (iii) $(A+B)C = AC+BC$
- ఒక మాత్రిక A యొక్క అడ్డు వరుస మరియు నిలువు వరుసలను స్థానమార్పిడి చేయుట వలన లభించు మాత్రిక A యొక్క వ్యత్యయ మాత్రిక A^T అనబడును.
  (i) $(A^T)^T = A$, (ii) $(kA)^T = kA^T$, (iii) $(A+B)^T = A^T + B^T$, (iv) $(AB)^T = B^T A^T$
- A అనునది ఒక చతురస్ర మాత్రిక
  (i) $A^T = A$ అయిన A సౌష్ఠవ మాత్రిక అగును. (ii) $A^T = -A$ అయిన A అసౌష్ఠవ మాత్రిక అగును.
- ఒక చతురస్ర మాత్రికను సౌష్ఠవ మరియు అసౌష్ఠవ మాత్రికల మొత్తముగా వ్రాయవచ్చును.
- ఒక అసౌష్ఠవ మాత్రికలో వికర్ణ మూలకములు సున్న అగును.
- A అనునది వాస్తవ మూలకముల గల ఒక చతురస్ర మాత్రిక అయిన $A+A^T$ అనునది సౌష్ఠవ మాత్రిక అగును మరియు $A+A^T$ అనునది అసౌష్ఠవ మాత్రిక అగును కావున $A=\frac{1}{2}(A+A^T)+\frac{1}{2}(A-A^T)$
- చతురస్ర మాత్రికలకు మాత్రమే నిర్ధారకములను నిర్వచించుటకు వీలుగును.
- $|A^T| = |A|$.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_7.indd 49 24-01-2023 16:52:47

- A, B అనునవి ఒకే తరగతి గల రెండు చతురస్ర మాత్రికలు అయిన $|AB|=|A||B|$ అగును.
- ఒక చతురస్ర మాత్రిక $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, అయిన $|kA|=k^n|A|$, ఇచ్చట k అనునది ఒక అదిశ
- ఒక చతురస్ర మాత్రిక A అను మాత్రిక నిర్ధారకము యొక్క విలువ అనునది దాని ఒక అడ్డువరుస (లేదా నిలువు వరుస) మూలకములు మరియు వాటి యొక్క సదృశ సహకారణుల లబ్ధముల మొత్తమునకు సమానము అగును. ఉదాహరణకు $|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$
- ఒక అడ్డువరుస లేదా నిలువు వరుసలోని మూలకములతో మరొక అడ్డువరుస లేదా నిలువు వరుసలోని మూలకముల సహకారణుల లబ్ధముల మొత్తము సున్న అగును ఉదాహరణకు $a_{11}A_{13}+a_{12}A_{23}+a_{13}A_{33}=0$
- ఒక నిర్ధారకము యొక్క అన్ని అడ్డువరుసలను నిలువు వరుసలు స్థాన మార్పిడి చేసిన, నిర్ధారక విలువ మారదు.
- ఒక నిర్ధారకము యొక్క రెండు అడ్డువరుసలు లేదా నిలువు వరుసలు స్థాన మార్పిడి చేసినట్లైయితే, నిర్ధారకము యొక్క గుర్తు మారును.
- ఒక అడ్డువరుస లేదా ఒక నిలువు వరుసలో గల అన్ని మూలకములు 'సున్న' అయిన నిర్ధారకము విలువ సున్న అగును.
- ఒక నిర్ధారకము యొక్క రెండు అడ్డువరుసలు లేదా నిలువు వరుసలు సర్వసమానమైన లేదా అనుపాతములో ఉన్నచో వాటి విలువ సున్న అగును.
- ఒక నిర్ధారకములో ఏదైనా ఒక అడ్డువరుస లేదా నిలువు వరుసలో గల ప్రతి మూలకము ఒక అదిశ k తో గుణించినట్లైయితే ఆ నిర్ధారకము యొక్క విలువ k చే గుణించినట్లుగా ఉంటుంది.
- ఏదేని అడ్డువరుస (నిలువు వరుస)లో గల ప్రతి మూలకము r పదాల మొత్తముగా వుండినచో దాని నిర్ధారకమును r నిర్ధారకముల మొత్తంగా వ్యక్తపరచవచ్చును.
- ఒక నిర్ధారకములో $R_i+\alpha R_j+\beta R_k (j,k\neq i)$ అను అడ్డు వరుస (R_i) ప్రక్రియలకు లేదా $C_i+\alpha C_j+\beta C_k (j,k\neq i)$ అను నిలువువరుస (C_i) ప్రక్రియలకు లోపరచిన నిర్ధారకము యొక్క విలువ మారదు. ఇచ్చట α,β లు అదిశలు.
- **కారణాంక సిద్ధాంతం :** $|A|$ లోని ప్రతి మూలకము $x-$ లో ఒక బహుపద సమాసము మరియు $x-a$ కు $|A|$ యొక్క విలువ సున్న అయినచో $x-a$ కు ఒక కారణాంకమగును.
- (x_1, y_1), (x_2, y_2) మరియు (x_3, y_3) లను శీర్షములుగా కల్గిన త్రిభుజము యొక్క వైశాల్యము $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ యొక్క పరమమూల్య విలువ అగును.

  త్రిభుజము వైశాల్యం సున్న అయిన, ఈ మూడు బిందువులు సరేఖీయములు అగును.
- ఒక చతురస్ర మాత్రిక A నకు $|A|\neq 0$ అయిన, అది అసాధారణ మాత్రిక అగును. $|A|\neq 0$. అయిన, అది సాధారణ మాత్రిక అగును.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_7.indd 50 24-01-2023 16:52:52

అంతర్జాల కృత్యము 7(a)

మాత్రికలు మరియు నిర్ధారకములు

ఆశించిన ఫలితము



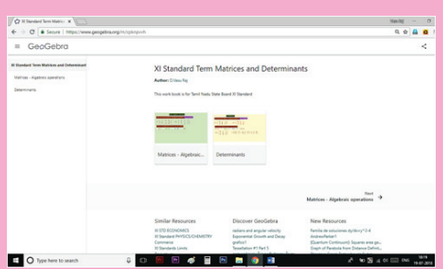
సోపానము -1

బ్రౌజరును ఓపెన్ చేసి క్రింది URL లింకును టైపు చేయుము. (లేదా) QR కోడును స్కాన్ చేయుము. “Matrices and Determinants” అను జియోజిబ్రా వర్క్‌బుక్ వచ్చును.ఆ వర్క్‌బుక్ నందు పాఠమునకు సంబందించిన కొన్ని వర్క్ షీట్లు ఇవ్వబడియుండును. స

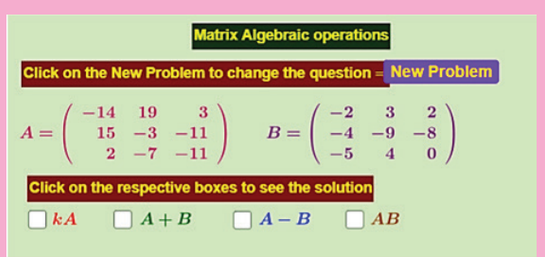
సోపానము -2

“Matrices-Algebraic operations” అను దానిని ఎన్నుకొనుము. దానిలో గల పరిక్రియలను చేసి దానికని ఇవ్వబడిన బుక్‌బాక్స్‌తో జవాబులను సరిచూచుకొనుము.

మరియు క్రొత్త ప్రశ్నలకు “New Problem” అనుదానిని ఎన్నుకొనుము.



సోపానము -1



సోపానము -2

Browse in the link:

Matrices and Determinants: https://ggbm.at/cpknpvvh

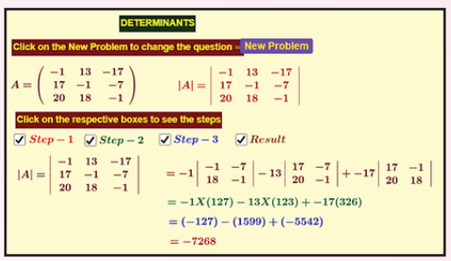
MC6O1

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_7.indd 51 24-01-2023 16:52:53

అంతర్జాల కృత్యము 7(b)

మాత్రికలు మరియు నిర్ణాయకములు

ఆశించిన ఫలితము



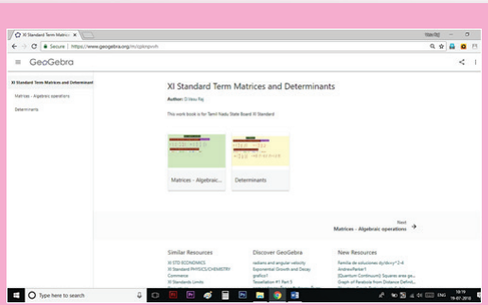
సోపానము -1

బ్రౌజరును ఓపెన్ చేసి క్రింది ఇవ్వబడిన URL లింకును టైపు చేయుము. (లేదా) QR కోడును స్కాన్ చేయుము. “Matrices and Determinants” అను జియోజిబ్రా వర్క్‌బుక్ వచ్చును. దానిలో ఈ పాఠమునకు సంబంధించిన కొన్ని వర్క్ షీట్లు ఈ పాఠమునకు ఇవ్వబడియుండును. స

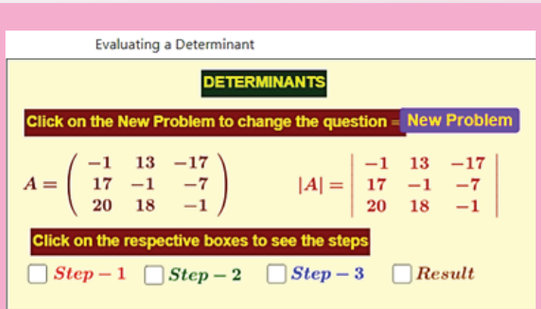
సోపానము -2

“Matrices-Algebraic operations” అను దానిని ఎన్నుకొనుము. దానిలో గల పరిక్రియలను చేసి దానికని ఇవ్వబడిన బుక్‌బాక్స్‌తో జవాబులను సరిచూచుకొనుము.

మరియు క్రొత్త ప్రశ్నలకు “New Problem” అనుదానిని ఎన్నుకొనుము.



సోపానము -1



సోపానము -2

Browse in the link:

Matrices and Determinants: https://ggbm.at/cpknpvvh

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_7.indd 52 24-01-2023 16:52:54

అధ్యాయము 8 సదిశా బీజగణితము

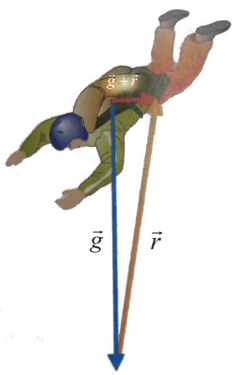
"భూమిపైన మనిషిని మించిన మహోన్నతమైనది ఏదీలేదు;
మనిషి మెదడును మించిన మహోన్నతమైనది ఏదీలేదు"

- హామిల్టన్

8.1 పరిచయము



ఒక విమాని విమానము ఎగిరే ప్రణాళికను తయారుచేయుటకు విమాన మార్గము, దాని శిరభాగము గాలి వేగము మరియు భూవేగమునకు సంబంధించిన విషయములను పరిగణనలో తీసుకొనవలెను. ఈ విమానము దాని యొక్క గమ్యము వైపుకు నేరుగా బయలుదేరునపుడు గాలిని ఖచ్చితంగా ప్రతిఘటించునట్లు తగిన కోణంతో ఎదుర్కొని విమానంను నడుపవలెను. ఒక navigation computer అందుబాటులో ఉంటే అది త్వరగా మరియు ఖచ్చితత్తముగా గణనలు చేయును. ఒక వేళ navigation computer అందుబాటులో లేనప్పుడు విమాని సదిశల యొక్క జ్ఞానముతో ఒక క్యాలికులేటర్ ద్వారా పెన్సిల్ – మరియు – పేపరు పనిపై ఆధారపడవలెను. కావున సదిశలు మరియు వాని యొక్క పరిక్రియల అవగాహన చాలా ముఖ్యమైనది.



ఒక **స్కైడైవర్** ఆకాశం నుంచి దూకునపుడు ఒక certain బిందువు వద్ద అతనిపై రెండు ప్రధాన బలములు పనిచేయును. అందులో ఒకటి భూ ఆకర్షణ బలం $(\vec{g})$ క్రిందికి లాగును మరియు మరొకటి గాలి నిరోధము $(\vec{r})$ ఏదో ఒక దిశలో పైకి నెట్టును. స్కై డైవర్‌పై పనిచేయు ఫలిత బలము ఏమి? దీని జవాబు $\vec{g}+\vec{r}$. (ఎలా?)

ఒక విమానము యొక్క వేగ సదిశ $\vec{v}$ అనుకుందాము. ఒకవేళ గాలి వేగమును $\vec{w}$ అనుసదిశగా ఇచ్చినచో విమానము యొక్క ప్రభావ వేగము ఏమి? దీని జవాబు $\vec{v}+\vec{w}$. అగును. పడమర వైపు ఎగురుటకు ఏ దిశలో విమానము యొక్క తలభాగము ఉండవలెను?





ప్రపంచ స్థానీకరణ వ్యవస్థ (GPS) అనునది భూమిపై, ఆకాశంలో మరియు నీటిపై ప్రయాణించుటకు కు సహాయం చేయునట్లు రూపొందించబడిన ఒక వ్యవస్థ, GPS లో సదిశలను కూడా ఉపయోగిస్తారు.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_8.indd 53 5/10/2022 10:56:24 AM

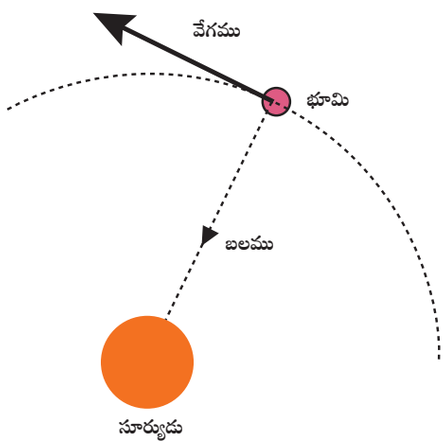
జెర్మన్ గణితశాస్త్రవేత్త **H.G. గ్రాస్‌మన్** (1809–1877) మరియు ఐరిస్ గణిత శాస్త్రవేత్త **W.R. హమిల్టన్‌ల** (1805–1865) కృషి ఫలితంగా సదిశలు యొక్క భావన అభివృద్ధి చెందినది. హమిల్టన్ ఉన్నత పదవులను అధిరోహించి ఉన్నారు మరియు గ్రాస్‌మన్ ఉన్నత పాఠశాలలో ఉపాధ్యాయుడుగా పనిచేశారు.



హమిల్టన్
(1805 - 1865)

క్వాటర్నియన్ కలన గణితము మరియు నిరూపక రేఖాగణితం యొక్క ఉత్తమ లక్షణాలను అనుసంధానం చేసి ఒక క్రొత్త సబ్జెక్టు సదిశా బీజగణితమును సృష్టించుటకు అమెరికా గణిత శాస్త్రవేత్త **J.B. గిబ్స్** (1839–1903) మరియు **Q. హెవిసైడ్** (1850–1925) అను ఇంగ్లాండ్ గణిత శాస్త్రవేత్తలు ఎక్కువ కృషి చేశారు. ఈ రోజు మనకు తెలిసిన సదిశల బీజగణితము మరియు సదిశా విశ్లేషణలు అనునవి యేల్ విశ్వవిద్యాలయంలో గిబ్స్ వారి యొక్క విద్యార్థుల కొరకు ఇచ్చిన సెట్స్ ఆఫ్ రిమార్క్‌బుల్ నోట్స్‌లో మొట్టమొదట వెల్లడించబడినది. క్లిఫర్డ్ (1845–1879) తన యొక్క ఎలిమెంట్స్ ఆఫ్ డైనమిక్స్ అను పుస్తకంలో రెండు క్వాటర్నియన్‌ల లబ్ధమును అదిశా లబ్ధము మరియు సదిశాలబ్ధము అను రెండు విభిన్న సదిశల లబ్ధంగా విభజించారు. వెక్టార్స్ (vectors) అనుపదము **'to carry'** అను లాటిన్ పదము నుండి హమిల్టన్ వలన ఉత్పన్నం చేయబడినది.

సదిశల సిద్ధాంతము గ్రాస్‌మన్ సిద్ధాంతముల విస్తరణ ఆధారంగా ఉద్భవించినది.





రేఖా గణితము మరియు భౌతిక శాస్త్రంలోని చాలా భావనల ఫలవంతమైన అధ్యయనంకు సదిశలు ఒక ఆదర్శ సాధనమని త్వరగా గ్రహించారు. భౌతిక శాస్త్రము మరియు అనువర్తిత గణితశాస్త్రంలోని గొప్ప విషయాలను వివరించుటకు **ప్రస్తుతము సదిశలు ఒక ఆధునిక భాషగా** పరిగణింపబడుతున్నది. ఇవి అంతర్గత గణిత ఆసక్తిని కొనసాగిస్తూ ఉన్నది.

అభ్యసన లక్ష్యాలు

ఈ అధ్యాయం ముగింపులో విద్యార్థులు క్రిందివాటిని నేర్చుకొనియుండాలని ఆశిస్తున్నాము.

- విభిన్న జ్యామితీయ మరియు భౌతికశాస్త్ర అధ్యయనంకు సదిశలు ఒక సాధనమని గ్రహించుట.
- సదిశల నుండి అదిశలను భేదపరచగలుగుట.
- సదిశలు మరియు సదిశల బీజగణితం యొక్క విభిన్న రకాలను అవగాహన చేసుకొనుట.
- జ్యామితీయ వివరణలను మరియు 2D మరియు 3D సదిశల స్పష్టతను అవగాహన చేసుకొనుట.
- సదిశా బీజగణితంలో మాత్రికల సిద్ధాంతము యొక్క ఉపయోగంను అభినందించుట.
- అదిశా లబ్ధము మరియు సదిశా లబ్ధముల ద్వారా వరుసగా అదిశలు మరియు సదిశలును పొందుటను ఒక ప్రత్యేక లక్షణంగా దృశ్యీకరణ చేసుకొనుట.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_8.indd 54 5/10/2022 10:56:25 AM

8.2 అదిశలు మరియు సదిశలు (Scalars and Vectors)

నిర్వచనము 8.1

పరిమాణమును మాత్రమే కలిగిన ఒక రాశిని అదిశ అంటారు. ఉదాహరణమునకు, దూరము, పొడవు, వేగము, ఉష్ణోగ్రత, విద్యుద్బలము, ద్రవ్యరాశి, పీడనము, పని అనునవి అదిశలగును.

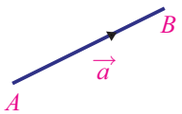
నిర్వచనము 8.2

పరిమాణము మరియు దిశలను కలిగిన రాశులను సదిశలు అందురు. కావున, ఇది దిశను సూచించు రేఖాఖండము అగును.

ఉదాహరణమునకు, బలము, స్థానభ్రంశము, దిశావేగము (ఇది వేగమును కదిపే దిశను సూచించును) అనునవి సదిశలగును.

సదిశలును ఆంగ్ల చిన్న అక్షరములచే బాణ గుర్తుతో సూచిస్తారు. ద్విపరిమాణ సదిశ అనునది $\mathbb{R}^2$ లో దిశను సూచించు ఒక రేఖాఖండమగును. మరియు త్రిపరిమాణము సదిశ అనునది $\mathbb{R}^3$ లో దిశను సూచించు ఒక రేఖాఖండమగును.

8.3 సదిశలను సూచించు విధానము మరియు సదిశల రకములు (Representation of a vector and types of vectors)



పటము 8.1

ఒక సదిశకు ముగింపు మరియు ఆరంభము ఉండును. పటము 8.1 లో చూడవచ్చును.

నిర్వచనము 8.3

$\vec{a}$ సదిశ యొక్క ఆరంభ బిందువు A ను ప్రారంభ బిందువు అనియు చివరిబిందువు. B ను అంత్య బిందువు అనియు అంటారు. ఒక సదిశ యొక్క ప్రారంభ బిందువును దాని యొక్క ఆదిబిందువుగా కూడ తీసుకొంటారు.

$\vec{a}$ యొక్క ప్రారంభ బిందువు A అనునది చలించుటకు ముందు ఆ బిందువు యొక్క స్థానమును, చివరిబిందువు B అనునది చలించిన పిదప ఆ బిందువు యొక్క స్థానమును సూచించును.

$\vec{a}$ అను సదిశ యొక్క పొడవు లేక పరిమాణము అనునది రేఖాఖండము AB యొక్క పొడవు అగును. మరియు దీనిని $|\vec{a}|$ చే సూచిస్తారు.

దిశ సూచించని, AB రేఖను **సదిశ $\vec{a}$ యొక్క ఆధారము అంటారు.**

ఒక దిశలేని రేఖాఖండమును, ఒక దిశతో కూడిన రేఖాఖండమును వేరుపరచుటకు $\overline{AB}$ మరియు $\vec{a}$ .. అను బాణపు గుర్తుతో గుర్తించబడును. కావున AB అనునది ఒక రేఖాఖండమును సూచించును.

నిర్వచనము 8.4

ఏదేని ఒక బిందువు వద్ద సదిశ యొక్క ఆదిబిందువును తీసుకొనే స్వేచ్ఛ మనకు ఉన్నట్లయితే దానిని **స్వేచ్ఛ సదిశ** అని, అదే సమయంలో ఏదోక పేర్కొన్న బిందువుకు నియంత్రించిన ఆ సదిశను **స్థానకృత సదిశ** అంటారు.

సదిశల లబ్ధము వరకు మనము స్వేచ్ఛ సదిశలను మాత్రమే ఉపయోగించియున్నాము. సరళ రేఖల యొక్క సమీకరణమును కనుగొనుటలో స్థానిక సదిశలను ఉపయోగించి యున్నాము.

నిర్వచనము 8.5

ఒకే ప్రారంభ బిందువును కలిగిన సదిశలను **సహా ప్రారంభ సదిశలు** అందురు. ఒకే అంతిమ బిందువులను కలిగిన సదిశలను **సహా – అంత్య సదిశలు** అందురు.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_8.indd 55 5/10/2022 10:56:25 AM

నిర్వచనము 8.6

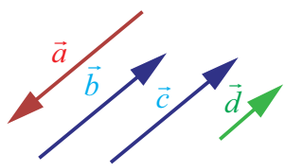
రెండు లేక అంతకంటే ఎక్కువ సదిశలు ఒకే దిశా రేఖను, లేదా వాని యొక్క దిశా లేఖలు ఒక దానికొకటి **సమాంతరాలైతే** వాటిని **సరేఖీయాలు** (ఏకరేఖీయ) లేదా సమాంతరాలు అంటారు.

ఒకే తలముపై ఉన్న లేక ఆ తలమునకు సమాంతరముగా ఉన్న రెండు లేక అంతకన్నా ఎక్కువ సదిశలను **సతలీయ సదిశలు** అంటారు.

నిర్వచనము 8.7

ఒకే దిశ మరియు ఒకే పరిమాణము కలిగిన రెండు సదిశలను **సమ సదిశలు** అంటారు.

సమ సదిశలకు ఒకే ప్రారంభ బిందువు ఒకే అంత్య బిందువు ఉండవలసిన అవసరము లేదు. ఉదాహరణకు, పటము 8.2 లోని $\vec{b}$ మరియు $\vec{c}$ సదిశలు సమానము ఎందుకనగా అవి ఒకే పొడవు మరియు ఒకే దిశను కలిగి ఉన్నాయి. అదే సమయంలో $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ లు సమానం కాదు ఎందుకనగా అవి ఒకే పొడవును కలిగి ఉన్నప్పటికి వాని దిశలు వ్యతిరేఖంగా గలదు సదిశలు $\vec{c}$ మరియు $\vec{d}$ లు సమానం కాదు ఎందుకనగా ఒకే దిశను కలిగివున్నప్పటికి వాని పరిమాణములు సమానం కాదు.



పటము 8.2

నిర్వచనము 8.8

పరిమాణము 0 గా గల సదిశను **శూన్య సదిశ** అందురు. దీనిని $\vec{0}$ గా సూచిస్తారు. ఇది ఏదేని ఒక దిశలో ఉండును.

అనగా, ఆది మరియు అంత్యబిందువులు ఏకీకృతమయిన సదిశను **శూన్య సదిశ** అంటారు. శూన్య సదిశ యొక్క ఆది మరియు అంత్యబిందువులు ఒకటే అని మనము గమనించగలం.

పరిమాణము 1గా గల సదిశను యూనిట్ సదిశ అంటారు. $\vec{a}$ యొక్క దిశలో గల **యూనిట్ సదిశ** $\hat{a}$ ('a క్యాప్' లేదా 'a హ్యాట్' గా చదువుతారు) స్పష్టంగా $|\hat{a}| = 1$ అగును.

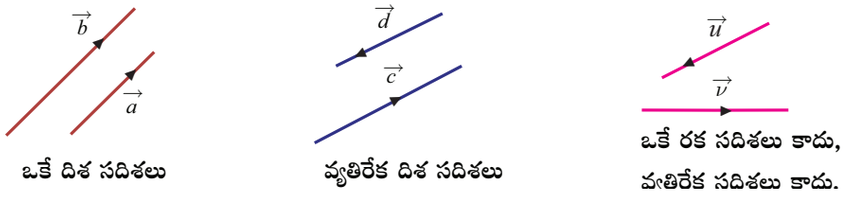
అనంత దిశలున్నందు వల్ల అనంత యూనిట్ సదిశలు ఉంటుందని గమనించుము. ప్రతి దిశకు దాని దిశలో ఒక యూనిట్ సదిశ ఉంటుంది.

ఏదేని $\vec{a}$ అను శూన్యేతర సదిశను $\vec{a}$ దిశలో గల యూనిట్ సదిశ యొక్క అదిశా గుణిజంగా వ్రాయవచ్చును. ఈ అదిశ అనునది ఆ సదిశ యొక్క పరిమాణము అగును.

కనుక, ఏదేని సదిశ $\vec{a}$ ను $\vec{a} = |\vec{a}|\,\hat{a}$ అని వ్రాయవచ్చును. ఇచ్చట $\hat{a}$ అనునది $\vec{a}$ యొక్క దిశలో యూనిట్ సదిశ అగును. కాబట్టి, శూన్యేతర సదిశనకు $\hat{a} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ అగును.

నిర్వచనము 8.9

ఒకే దిశ కలిగిన రెండు సదిశలను **ఒకే దిశ సదిశలు** అనియు, వ్యతిరేక దిశలు గల రెండు సదిశలను **వ్యతిరేక దిశ సదిశలు** అనియు అంటారు.



ఒకే దిశ సదిశలు | వ్యతిరేక దిశ సదిశలు | ఒకే రక సదిశలు కాదు, వ్యతిరేక సదిశలు కాదు.

పటము 8.3

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_8.indd 56 5/10/2022 10:56:25 AM

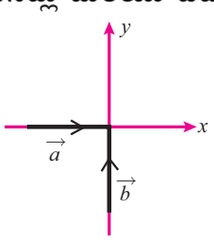
రెండు సదిశలు ఒకే దిశ సదిశలు లేదా వ్యతిరేక దిశ సదిశలుగానో ఉన్నప్పుడు వాని దిశ సూచించని (ఆధారము) రేఖలు ఒకదానికొకటి సమాంతరముగా ఉంటుంది. రెండు సదిశలు ఒకే దిశ సదిశలుగా లేదా వ్యతిరేక దిశసదిశలుగా కూడా లేకుండా యుండవచ్చును.

8.4 సదిశల బీజగణితము (Algebra of Vectors)

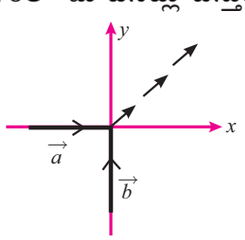
వాస్తవ సంఖ్యల మరియు మాత్రికలు పై ప్రాథమిక బీజగణిత పరిక్రియలను మనము అధ్యయనం చేసాము. ఇలాగే సదిశలపై కొన్ని పరిక్రియలను మనం అధ్యయనం చేస్తాము. రెండు సదిశల యొక్క సంకలనం, ఒక సదిశను మరొక సదిశ నుండి తీసివేయుట (వ్యవకలనం) మరియు ఒక సదిశను, ఒక అదిశతో గుణించటం లాంటివి చూసెదము.

8.4.1 సదిశల సంకలనం (Addition of Vectors)

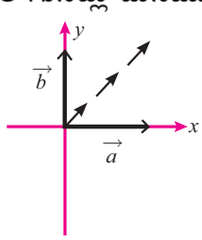
రెండు సదిశల సంకలనమును రెండు విధములుగా నిర్వచించి మరియు అవి సమానమని చూసెదము. ఒక యూనిట్ ద్రవ్యరాశి గల ఒక వస్తువు $\mathbb{R}^2$ లో ఆది బిందువు $(0,0)$ వద్ద గలదు అనుకొనెదము. ఈ వస్తువు యొక్క పరిమాణంను ఒక బిందువుగా మనము ఊహించుకొందాము. యూనిట్ పరిమాణం గల రెండు బలాలు $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ అనునవి x-అక్షము మరియు y-అక్షము ధనాత్మక దిశలో ఆ వస్తువుపై పనిచేయుననుకొనుము. (పటం 8.4 ను చూడుము) ఇప్పుడు ఆ వస్తువు x-అక్షంకు $45°$ కోణములో పటము 8.5లో సూచించినట్లు చలించునని సులువుగా మనము అంచనా వేయవచ్చును. $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ అను బలములు పటం 8.6 లో చూపబడియున్నది $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ సదిశలకు సమానము ఈ బలములు పటము 8.6లో చూపినట్లు ఆ వస్తువును త్రోయునట్లు మరియు పటం 8.6లో చూపినట్లు వస్తువును లాగునట్లు మనము ఊహించుకొనవచ్చును.



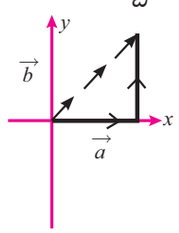
పటము 8.4



పటము 8.5



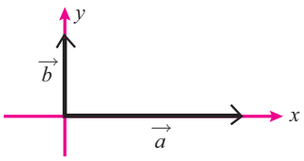
పటము 8.6



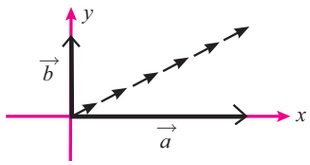
పటము 8.7

తదుపరి మనకు పుట్టు ప్రశ్న "అది ఎంత దూరం చలించును?" బలములు ఒకదాని తరువాత మరొకటి పనిచేయుననుకొందుము. $\vec{a}$ అను బలము ఆ వస్తువును x-అక్షము వెంబడి ఒక యూనిట్ దూరము చలింప చేస్తుంది. కావున ఆ వస్తువు $(0, 0)$ నుండి $(1, 0)$ అను బిందువునకు చలించును. ఇప్పుడు బలము $\vec{b}$ ఆ వస్తువును లంబంగా $(1, 0)$ నుండి $(1, 1)$ అను బిందువునకు చలింపజేయును. చివరగా ఆ వస్తువు $(1, 1)$ లో గలదు. (పటం 8.7ను చూడుము) కాబట్టి మనము రెండు సదిశల సంకలనమును $(0, 0)$ మరియు $(1, 1)$ ను కలుపు రేఖాఖండముగా $(0, 0)$ నుండి $(1, 1)$ అను దిశలో నిర్వచించవచ్చును.

ఇప్పుడు పై చెప్పబడిన సందర్భంలో $\vec{a}$ పరిమాణమును 1 కి బదులు 2 అని అనుకొనుము (పటం 8.8ను చూడుము) పటము 8.9 లో యున్నట్లు ఆ వస్తువు x-అక్షమునకు సమీపంలో చలించునని సులువుగా అంచనా వేయవచ్చును. అంతే కాకుండా ఆ వస్తువు $(2,1)$ అను బిందువునకు చలించును అని అంచనా చేయగలము. కాబట్టి ఈ రెండు సదిశల సంకలనము అనునది $(0,0)$ మరియు $(2,1)$ లను కలుపు రేఖాఖండముగా $(0,0)$ నుండి $(2,1)$ అను దిశలో నిర్వచించవచ్చును.



పటము 8.8



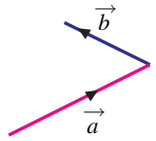
పటము 8.9

పైన చర్చించిన రెండు సందర్భములో బలముల దిశలు ఒకదానికొకటి లంబముగా గలదు ఇది సామాన్య సందర్భము కానవసరం లేదు. అయినప్పటికి ఒక దాని తరువాత ఒకటి తీసుకొన్న బలములను సంకలనము చేయవచ్చును. ఉదాహరణకు పటం 8.10 లో చూసినట్లు $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ అను రెండు బలములను ఒక తలంలో తీసుకొందాము.

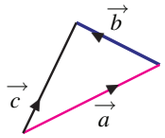
11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_8.indd 57 5/10/2022 10:56:26 AM



పటము 8.10



పటము 8.11

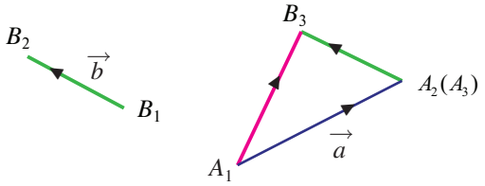


పటము 8.12

$\vec{a}$ యొక్క అంత్యబిందువు తో $\vec{b}$ యొక్క ఆది బిందువు వచ్చునట్లు (పటము 8.11) అమర్చుటకు వీటి సంకలనము పటము 8.12లో ఉన్నట్లు వచ్చును. మనము ఇప్పుడు రెండు సదిశల సంకలన నిర్వచనంను చూస్తాము.

సంకలన త్రిభుజ న్యాయము (Triangle law of addition)

$\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ అనునవి రెండు సదిశలు అనుకొనుము. A_1 మరియు B_1 అనునవి $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ యొక్క ప్రారంభ బిందువులు, మరియు A_2 మరియు B_2 అనునవి $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ యొక్క అంత్యబిందువులు అనుకొనుము.



పటము 8.13

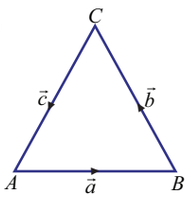
A_3B_3 ను B_1B_2 నకు సమాంతరముగా $A_3B_3 = B_1B_2$. అగునట్లు గీయుము. $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ యొక్క సంకలన సదిశ $\overrightarrow{A_1B_3}$ మరియు దీనిని $\vec{a}+\vec{b}$ గా సూచిస్తాము. దీనిని క్రింది విధముగా నిర్వచించవచ్చును.

నిర్వచనము 8.10 (సదిశ సంకలన త్రిభుజ న్యాయము)

రెండు సదిశలును పరిమాణములోను మరియు దిశలోను ఒక త్రిభుజం యొక్క రెండు భుజాలుగా క్రమంగా సూచించిన, వాని మొత్తంను ఆ త్రిభుజం యొక్క మూడవ భుజము, వ్యతిరేఖ క్రమంలో సూచించును.

ఫలితము 8.1

$\vec{a},\vec{b}$ మరియు $\vec{c}$ లను ఒక త్రిభుజం యొక్క భుజాలుగా పటం 8.14 క్రమంగా తీసుకొనిన $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ అగును.



పటము 8.14

నిరూపణ

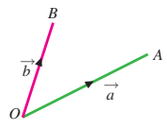
$\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$ మరియు $\overrightarrow{CA} = \vec{c}$. అనుకొనుము

ఇప్పుడు $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

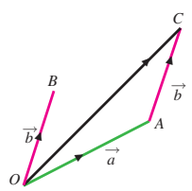
కావున ఫలితము నిరూపించబడినది. □

సదిశ సంకలన సమాంతర చతుర్భుజ న్యాయము (Parallelogram law of vector addition)

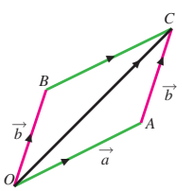
$\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ అనునవి ఏదేని రెండు సదిశలు అనుకొనుము. ఈ రెండు సదిశల ప్రారంభ బిందువులు ఒకటే అని అనుకొందాం నిర్వచనము 8.7 నుపయోగించి సంకలనమును కనుగొనెదము. $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ ల అంత్య బిందువులు వరుసగా A మరియు B లు అనుకొందాం (పటం 8.15) $\vec{a}+\vec{b}$ కనుగొనుటకు AC ను OB నకు సమాంతరముగా $OB = AC$ అగునట్లు గీయుము. ఇచ్చట $\overrightarrow{OC}$ అనునది వీటి సంకలనమగును. (పటం 8.16) OA మరియు BC లు సమాంతరాలు అని మనము గమనించగలము (పటం 8.17)



పటము 8.15



పటము 8.16



పటము 8.17

కాబట్టి ఒకే ప్రారంభ బిందువులు గల రెండు సదిశల సంకలనమును కనుగొనుటకు ఈ సదిశలను ఆసన్న భుజములుగా తీసుకొని ఒక సమాంతర చతుర్భుజమును గీచి దాని కర్ణమును వాని సంకలనముగా

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_8.indd 58 5/10/2022 10:56:27 AM

తెలియచేస్తారు. ఒకే ప్రారంభ బిందువు లేని రెండు సదిశలకు, ఏదైనా ఒక సదిశను తగినట్లు జరిపి ఒకే ప్రారంభ బిందువు గల సదిశలుగా మార్చవచ్చును. దీని నుండి క్రింది విధంగా నిర్వచనము 8.11 ను పొందవచ్చును.

O అను ఒకే ప్రారంభ బిందువు గల రెండు సదిశలు A మరియు B అనుకొనుము. వీటి అంత్యబిందువులో క్రమంగా $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ అనుకొనుము.

$OACB$ అను సమాంతర చతుర్భుజమును పూరించుము. $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ సదిశల సంకలనము $\overrightarrow{OC}$ సదిశగా నిర్వచించబడును.

నిర్వచనము 8.11 సమాంతర చతుర్భుజము యొక్క సంకలన న్యాయము (**Parallelogram law of addition**)

$OABC$ సమాంతర చతుర్భుజములో $\overrightarrow{OA}$ మరియు $\overrightarrow{OB}$ అనునవి రెండు ఆసన్న భుజములను సూచించిన, దాని కర్ణము $\overrightarrow{OC}$ వీటి మొత్తమును సూచించును (పటము 8.17 ను చూడుము)

సదిశల సంకలనంకు రెండు నిర్వచనాలు మనకు ఉండిననూ అవి రెండును ఒకటే మరియు సమానము. నిర్వచనం 8.10 ను సదిశల సంకలనము త్రిభుజన్యాయమును ఉపయోగించి నిర్వచింపబడినది మరియు నిర్వచనం 8.11ను సదిశల సంకలనంకు సమాంతర చతుర్భుజన్యాయమును ఉపయోగించి నిర్వచించారు.

త్రిభుజము ABC లో $\overrightarrow{AB}$ మరియు $\overrightarrow{BC}$ అనునవి రెండు భుజములను సూచించిన, మూడవ భుజము $\overrightarrow{AC}$ అనునది దాని మొత్తమును సూచించును.

8.4.2 రెండు సదిశలకు మధ్య గల వ్యత్యాసము (Difference between two Vectors)

ఇప్పుడు ఒక సదిశ నుండి మరొక సదిశను ఎలా తీసివేత చేయాలో తెలుసుకొనెదము.

నిర్వచనము 8.12

$\vec{a}$ ఏదైనా ఒక సదిశ అనుకొనుము. $\vec{a}$ యొక్క వ్యతిరేక సదిశను $-\vec{a}$ అని గుర్తించెదము. ఇది $\vec{a}$ నకు సమాన పరిమాణమును $\vec{a}$ యొక్క దిశకు వ్యతిరేక దిశను కలిగిన సదిశ అగును.

$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ అయిన $\overrightarrow{BA} = -\vec{a}$ అని గమనించుము.

సదిశల వ్యత్యాసము యొక్క రేఖాగణిత వివరణ (Geometrical interpretation of difference between two vectors)

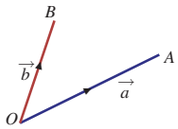
$\vec{a}$ అను సదిశ యొక్క ప్రారంభ బిందువు P మరియు అంతిమ బిందువు Q అనుకొనుము. $\vec{b}$ అను సదిశ యొక్క ప్రారంభ బిందువు Q మరియు అంతిమ బిందువు P అనుకొనుము. ఈ రెండు సదిశల పరిమాణములు P మరియు Q అన బిందువులను కలుపు రేఖాఖండము యొక్క పొడవు అగును. కావున వీటి యొక్క పరిమాణము సమానమగును. కాని వీటి దిశలు వ్యతిరేక దిశలగును. కావున $\vec{b}$ అనునది $-\vec{a}$ నకు సమానము అగును.

$\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ లు రెండు సదిశలయిన $\vec{a} - \vec{b}$. ను $\vec{a}$ మరియు $-\vec{b}$. సదిశల మొత్తముగా నిర్వచింపబడినది అది $\vec{a} + (-\vec{b})$

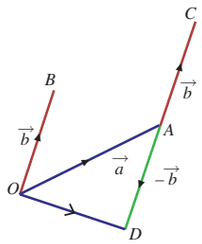
మనము $\vec{a} - \vec{b}$ సదిశను జ్యామితీయంగా వీక్షించవచ్చును $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ సదిశలు క్రమముగా $\overrightarrow{OA}$ మరియు $\overrightarrow{OB}$ లును సూచించునని అనుకొనుము. (పటము 8.18) AC ను OB నకు సమాంతరముగా $AC = OB$ ఉండునట్లు గీయుము. ఇప్పుడు $\overrightarrow{AC}$ అనునది $\vec{b}$ నకు సమానముగా ఉండును. $CA = AD$ అనునట్లు CA అను రేఖను D వరకు పొడిగించుము. ఇప్పుడు $\overrightarrow{AD}$ అనునది $-\vec{b}$ నకు సమానమగును. కావున $\vec{a} + (-\vec{b}) = \overrightarrow{OD}$ కనుక $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{OD}$ (పటము 8.19)

$OACB$ అను సమాంతర చతుర్భుజమును పూర్తిచేయుము. దీని నుండి BA మరియు OD అనునవి సమాంతరములు మరియు వాని పొడవులు సమానమని మనము గమనించగలం. కావున $\overrightarrow{BA}$ మరియు $\overrightarrow{OD}$ అనునవి సమాన సదిశలగును. కావున $\overrightarrow{BA}$ ను మనము $\vec{a} - \vec{b}$ అని తీసుకొనవచ్చును. దీని నుండి $OACB$ అను సమాంతర చతుర్భుజంలో భుజములు $\overrightarrow{OA}$ మరియు $\overrightarrow{OB}$ అనునవి క్రమంగా $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ సదిశలను సూచించిన, కర్ణము $\overrightarrow{BA}$ అనునది $\vec{a} - \vec{b}$. ను చూచించును. (పటము 8.20 ను చూడుము) మనము ముందే $\overrightarrow{OC}$ అనునది $\vec{a} + \vec{b}$. ను సూచించును, అని తెలిసికొనియున్నాము.

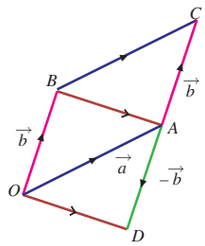
11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_8.indd 59 5/10/2022 10:56:28 AM



పటము 8.18



పటము 8.19



పటము 8.20

కనుక $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ అనునవి సమాంతర చతుర్భుజము యొక్క రెండు ఆసన్న భుజములను సూచించిన $\vec{a}+\vec{b}$ మరియు $\vec{a}-\vec{b}$ అనునవి కర్ణములను సూచించును.

8.4.3 సదిశ యొక్క అదిశా గుణకారము (Scalar multiplication of a vector)

మనము ఇప్పుడు ఒక సదిశను ఒక అదిశతో ఎట్లు గుణించుట అనుదానిని చూసెదము.

$\vec{a}$ అనునది ఏదైనా ఒక సదిశ, m ఒక అదిశ అనుకొనుము సదిశ $m\vec{a}$. అనునది అదిశ m తో $\vec{a}$ అను సదిశ యొక్క అదిశా గుణకారమగును. m. శూన్యమయిన $m\vec{a}$ యొక్క పరిమాణము 0 అగును.

కావున $m\vec{a}$ అనునది శూన్యసదిశ అగును. m ధనాత్మకము అయిన, $\vec{a}$ మరియు $m\vec{a}$. అనునవి ఒకే దిశను సూచించును మరియు m. ఋణాత్మక సంఖ్య అయిన, $\vec{a}$ మరియు $m\vec{a}$ అనునవి వ్యతిరేక దిశను సూచించును. కావున m ధనాత్మక సంఖ్య అయిన $\vec{a}$ మరియు $m\vec{a}$ అనునవి ఒకే దిశ సదిశలగాను, m ఋణాత్మక సంఖ్య అయిన $\vec{a}$ మరియు $m\vec{a}$ అనునవి వ్యతిరేక దిశ సదిశలుగాను ఉంటుంది. $m\vec{a}$ యొక్క పరిమాణము $|m\vec{a}|=|m||\vec{a}|$. అగును.

నిర్వచనము 8.13

λ ఒక అదిశ $\vec{a}=\lambda\vec{b}$ అయినచో $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ సదిశలును **సమాంతరములు** అంటారు. $\lambda>0$ అయినచో అవి ఒకే దిశలో గలదని $\lambda<0$ అయినచో అవి ఒక దానికొకటి వ్యతిరేక దిశలో గలదని అంటారు.

8.4.4 కొన్ని ధర్మములు మరియు ఫలితములు (Some properties and results)

ఏదైనా రెండు సదిశలు $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ మరియు అదిశలు m, n లకు క్రింది ధర్మములు గలదు.

(i) $m(n\vec{a}) = mn(\vec{a}) = n(m\vec{a})$

(ii) $(m+n)\vec{a} = m\vec{a}+n\vec{a}$

(iii) $m(\vec{a}+\vec{b}) = m\vec{a}+m\vec{b}$



ఫలితము 8.2

సదిశల సంకలనం సహచర్య న్యాయమును తృప్తిపరచును.

ఏదైనా మూడు సదిశలు $\vec{a},\vec{b}$ మరియు $\vec{c}$, లకు

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}).$$

ఫలితము 8.3

ఏదైనా ఒక సదిశ $\vec{a}$ కు $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$.

ఫలితము 8.4

ఏదైనా ఒక సదిశ $\vec{a}$ కు $\vec{a}$, $\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$.

ఈ ఫలితము నుండి ప్రతిసదిశకు సంకలన విలోమము వ్యవస్థితమగునని తెలుస్తున్నది.

ఫలితము 8.5

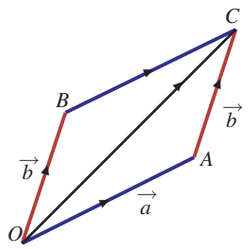
సదిశముల మొత్తము (వినిమయ) ధర్మమును తృప్తిపరచును.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_8.indd 60 5/10/2022 10:56:28 AM

నిరూపణ

$\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ అనునవి రెండు సదిశలు అనుకొనుము. $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ అనుకొనుము.

$OACB$ అను సమాంతర చతుర్భుజమును $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$. లు ఆసన్న భుజములుగా ఉండునట్లు పూర్తిచేయుము. $\overrightarrow{OB}$ మరియు $\overrightarrow{AC}$ సదిశలు ఒకే పరిమాణమును మరియు ఒకే దిశను కలిగియున్నవి కావున, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AC}$.



పటము 8.21

కావున $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$

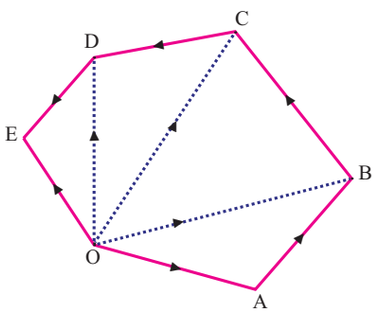
అదేవిధముగా $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$,

$\vec{b} + \vec{a} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}$.

కనుక $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

సంకలనం యొక్క బహుభుజ న్యాయము (Polygon law of addition)

పటము 8.22 లో చూపినట్లు $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$, మరియు $\overrightarrow{DE}$ అనునవి ఏదైనా 5 సదిశలు అనుకొనుము. ప్రతి సదిశను దాని ముందు గల సదిశ అంత్యబిందువు నుండి గీయబడుటను గుర్తించుకొన వలయును. త్రిభుజ న్యాయము ప్రకారము,



పటము 8.22

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD}$; $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OE}$

కావున, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OE}$.

కావున అన్ని సదిశల మొత్తము అనునది మొదటి సదిశ యొక్క ప్రారంభ బిందువును చివరి సదిశ యొక్క అంత్య బిందువుతో కలిపిన రేఖ అగును. దీనిని సదిశల **సంకలనం యొక్క బహుభుజ న్యాయము** అంటారు.

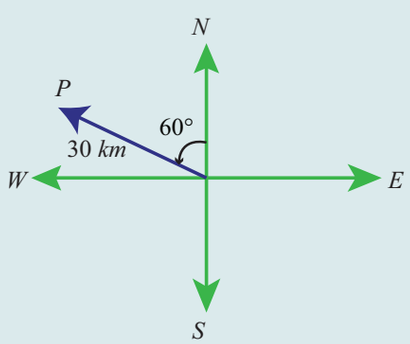
ఉదాహరణ 8.1

రేఖాచిత్రము ద్వారా క్రింది ఇవ్వబడిన స్థానభ్రంశములను గుర్తించుము.

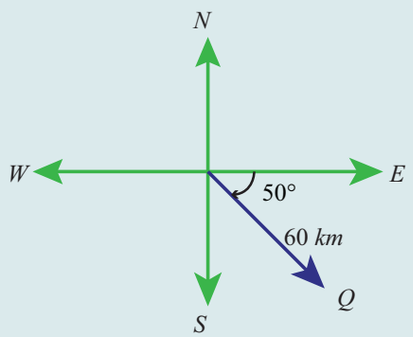
(i) 30 కి.మీ, 60° ఉత్తరము నుండి పడమరకు

(ii) 60 కి.మీ, 50° తూర్పు నుండి దక్షిణమునకు

సాధన



పటము 8.23



పటము 8.24

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_8.indd 61 5/10/2022 10:56:29 AM

ఉదాహరణ 8.2

సదిశలు $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ లు ఒక క్రమ షడ్భుజ యొక్క రెండు ఆసన్న భుజములును సూచించిన మిగిలిన భుజములను సూచించు సదిశలను కనుగొనుము.

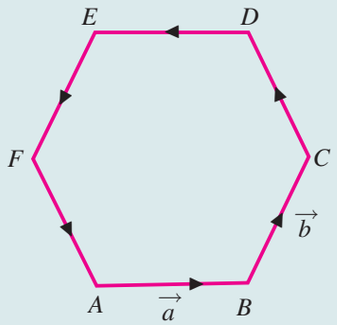
సాధన

A,B,C,D,E,F అనునవి క్రమషడ్భుజ యొక్క శీర్షములు అనుకొనుము.

$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ మరియు $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ అనుకొనుము క్రమషడ్భుజ యొక్క క్రింది ఇవ్వబడిన, ధర్మములను ఉపయోగించి భుజములను కనుగొనవచ్చు.

(i) AB, CF మరియు ED అను రేఖలు సమాంతరము మరియు BC, AD మరియు EF అను రేఖలు సమాంతరము.

(ii) CF యొక్క పొడవు AB యొక్క పొడవునకు రెండింతలు మరియు AD యొక్క పొడవు BC యొక్క పొడవుకు రెండింతలగును.



పటము 8.25

AB మరియు DE అను రేఖల సమాంతరములు, పొడవులు సమానము మరియు దిశ వ్యతిరేక దిశగాను ఉండును. కావున $\overrightarrow{DE} = -\vec{a}$.

AB మరియు CF అనురేఖలు సమాంతరము వ్యతిరేక దిశలో ఉన్నందువలన $\overrightarrow{CF} = -2\vec{a}$.

అదే విధముగా $\overrightarrow{EF} = -\vec{b}$ మరియు $\overrightarrow{AD} = 2\vec{b}$.

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ కావున

$$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}.$$

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ కావున

$$\vec{a} + \vec{b} + \overrightarrow{CD} = 2\vec{b}.$$

కావున $\overrightarrow{CD} = 2\vec{b} - (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{b} - \vec{a}$.

$\overrightarrow{FA} = -\overrightarrow{CD}$, అగుట వలన

$\overrightarrow{FA} = \vec{a} - \vec{b}$.

కావున, ఇవ్వబడిన భుజములు $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ మరియు $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, షడ్భుజి యొక్క మిగిలిన భుజములను $\overrightarrow{CD} = \vec{b} - \vec{a}, \overrightarrow{DE} = -\vec{a}, \overrightarrow{EF} = -\vec{b}$, మరియు $\overrightarrow{FA} = \vec{a} - \vec{b}$. అని పొందవచ్చును.

8.5 స్థాన సదిశలు (Position vectors)

నిర్వచనము 8.14

O ను ఆదిబిందువుగా మరియు P ఏదైనా ఒక బిందువు (తలములో లేక అంతరాళములో)గా తసుకొందాము. సదిశ $\overrightarrow{OP}$ అనునది ఆది బిందువు దృష్ట్యా P యొక్క **స్థానసదిశ** అని అంటారు.

సదిశకు స్థాన సదిశకు మధ్య గల సంబంధమును క్రింది ఫలితములలో ఇవ్వబడినది.

ఫలితము 8.6

O ను ఆదిబిందువుగా అనుకొనుము A మరియు B ఏదైనా రెండు బిందువులు అనుకొనుము. ఇప్పుడు $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ ఇక్కడ $\overrightarrow{OA}$ మరియు $\overrightarrow{OB}$ అనునవి వరుసగా A మరియు B ల స్థాన సదిశలగును.

నిరూపణ

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$. అని మనకు తెలుసును. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. అగును. ∎

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_8.indd 62 5/10/2022 10:56:30 AM

సిద్ధాంతము 8.1 (విభాగ సూత్రము – అంతర విభజన) Theorem 8.1 (Section Formula - Internal Division)

O ను ఆదిబిందువు అనుకొనుము. A మరియు B లు ఏదైనా రెండు బిందువులు అనుకొనుము. మరియు P అను బిందువు AB రేఖాఖండమును $m : n$ నిష్పత్తిలో అంతరముగా విభజించునని అనుకొనుము. $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ అనునవి A మరియు B ల స్థాన సదిశలయిన $\overrightarrow{OP}$ యొక్క స్థానసదిశ

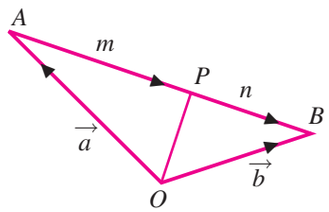
$$\overrightarrow{OP} = \frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{n+m}.$$

నిరూపణ

O ఆది బిందువు మరియు A. మరియు B యొక్క స్థాన సదిశలు క్రమముగా $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ అయిన,

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ మరియు $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

$\overrightarrow{OP} = \vec{r}$. అనుకొనుము.



పటము 8.26

AB రేఖాఖండమును P బిందువు $m : n$ నిష్పత్తిలో అంతరముగా విభజించిన

$$\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|} = \frac{m}{n}$$

కావున, $n|\overrightarrow{AP}| = m|\overrightarrow{PB}|$.

$\overrightarrow{AP}$ మరియు $\overrightarrow{PB}$ అనునవి ఒకే దిశలో ఉండిన,

$$n\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{PB}. \qquad (8.1)$$

అయితే $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA} = \vec{r}-\vec{a}$ మరియు $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP} = \vec{b}-\vec{r}$ సమీకరణము (8.1) లో ప్రతిక్షేపించిన,

$$n(\vec{r}-\vec{a}) = m(\vec{b}-\vec{r})$$

$$(n+m)\vec{r} = n\vec{a}+m\vec{b}.$$

కావున, $$\overrightarrow{OP} = \frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{n+m}.$$ ■

సిద్ధాంతము 8.2 విభాగ సూత్రము – బాహ్యవిభజన (నిరూపణ లేకుండా) (Section Formula - External Division (Without proof))

O ను ఆదిబిందువుగాను, A మరియు B లను ఏదైనా రెండు బిందువులుగాను అనుకొనుము. P అను బిందువు AB రేఖాఖండమును $m : n.$ నిష్పత్తిలో బాహ్యముగా విభజించునని అనుకొనుము. $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ అనునవి A మరియు B ల స్థాన సదిశలయిన, $\overrightarrow{OP}$ యొక్క స్థానసదిశ

$$\overrightarrow{OP} = \frac{n\vec{a}-m\vec{b}}{n-m}.$$

గమనిక 8.1

$m = n = 1$ అని సిద్ధాంతము 8.1లో ప్రతిక్షేపించిన A మరియు B బిందువులను కలుపు రేఖ యొక్క మధ్యబిందువు యొక్క స్థాన సదిశ $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$ అగును. ఇక్కడ $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ అనునవి వరుసగా A మరియు B ల స్థాన సదిశలగును. పై సిద్ధాంతము నుండి మూడు బిందువులు సరేఖీయ బిందువులుగా ఉండుటకు నిబంధనను పొందవచ్చును.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_8.indd 63 5/10/2022 10:56:32 AM

ఫలితము 8.7

$\vec{a}$, $\vec{b}$ మరియు $\vec{c}$ అనువాటిని స్థాన సదిశలుగా గల మూడు విభిన్న బిందువులు A, B మరియు C ఏక రేఖీయములు అగుటకు కావలసిన మరియు చాలినంత నిబంధనను $x,y,z,$ అను వాస్తవ సంఖ్యలు అన్నియు శూన్యము కాకుండా $x+y+z=0$ మరియు $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{0}$. అగునట్లు ఉండవలెను

ఉదాహరణ 8.3

A మరియు B అను రెండు బిందువుల స్థాన సదిశలు $2\vec{a}+4\vec{b}$ మరియు $2\vec{a}-8\vec{b}$. అనుకొనుము. A మరియు B లను కలుపు రేఖాఖండమును 1:3 అను నిష్పత్తిలో అంతరముగాను మరియు బాహ్యముగాను విభజించు బిందువుల స్థాన సదిశలను కనుగొనుము.

సాధన

O ను ఆదిబిందువుగా అనుకొనుము.

$\overrightarrow{OA} = 2\vec{a}+4\vec{b}$ మరియు $\overrightarrow{OB}=2\vec{a}-8\vec{b}$. అని ఇవ్వబడినది. C మరియు D అను బిందువులు AB అను రేఖాఖండమును 1:3 అను నిష్పత్తిలో క్రమముగా అంతరముగా మరియు బాహ్యముగాను విభజించుచున్నదని అనుకొనుము.

కావున
$$\overrightarrow{OC}=\frac{3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{3+1}=\frac{3(2\vec{a}+4\vec{b})+(2\vec{a}-8\vec{b})}{4}=2\vec{a}+\vec{b}.$$
$$\overrightarrow{OD}=\frac{3\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}}{3-1}=\frac{3(2\vec{a}+4\vec{b})-(2\vec{a}-8\vec{b})}{2}=2\vec{a}+10\vec{b}.$$

ఒక త్రిభుజము యొక్క శీర్షము నుండి దాని ఎదుటి భుజము యొక్క మధ్యబిందువును కలుపు రేఖను మధ్యగత రేఖ అంటారని నిర్వచనంను గుర్తు చేసుకొందాము. గురుత్వ కేంద్రము (గరిమనాభి) మధ్యగత రేఖను 2:1 నిష్పత్తిలో అంతరముగా విభజించును.

సిద్ధాంతము 8.3

ఒక త్రిభుజము యొక్క మధ్యగతరేఖలు అనుషక్తాలు

నిరూపణ

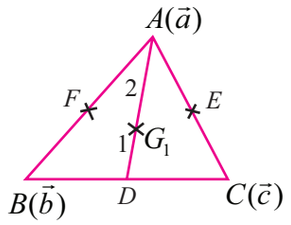
ABC అను త్రిభుజములో BC, CA మరియు AB అను భుజముల మధ్య బిందువులు క్రమముగా D, E, F అనుకొనుము. మనము AD, BE, CF అను మధ్యగత రేఖలు అనుషక్తాలని (ఒకే బిందువు వద్ద ఖండించుకొంటాయి) నిరూపించవలయును.

O ను ఆదిబిందువుగా మరియు $A, B,$ మరియు C ల యొక్క స్థాన సదిశలు క్రమముగా $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ అనుకొనుము. కావున, D, E, Fల యొక్క స్థాన సదిశలు క్రమముగా

$$\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2},\frac{\vec{c}+\vec{a}}{2},\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}.$$

AD పై గల G_1 అను బిందువు దానిని అంతరముగా 2 : 1 అను నిష్పత్తిలో విభజించిన,–

G యొక్క స్థాన సదిశ
$$=\frac{1\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OD}}{1+2}$$
$$\overrightarrow{OG_1}=\frac{1\vec{a}+2\left(\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)}{3}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$



పటము 8.27

BE పై గల G_2 అను బిందువు అంతరముగా 2:1 నిష్పత్తిలో విభజించిన G_2 యొక్క స్థాన సదిశ
$$\overrightarrow{OG_2}=\frac{1\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OE}}{1+2}$$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_8.indd 64 5/10/2022 10:56:32 AM

$$\overrightarrow{OG_2} = \frac{1\vec{b} + 2\left(\frac{\vec{c}+\vec{a}}{2}\right)}{3} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}. \quad (2)$$

ఇదే విధముగా CF ను G_3 అంతరముగా $2:1$ నిష్పత్తిలో విభజించిన

$$\overrightarrow{OG_3} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3} \quad (3)$$

(1), (2), (3)ల నుండి G_1, G_2, G_3 అను వాటి స్థాన సదిశలు సమానము కావున అవి వేర్వేరు బిందువులు కాదు. ఆ సామాన్య బిందువును G అనుకొనుము.

కావున త్రిభుజము యొక్క మధ్యగతరేఖలు అనుషక్తాలు మరియు అనుషక్త బిందువు G ■

సిద్ధాంతము 8.4

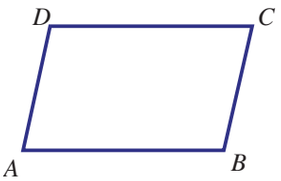
ఒక చతుర్భుజము సమాంతర చతుర్భుజముగా ఉండుటకు కావలసిన మరియు చాలినంత నిబంధన, దాని కర్ణములు సమద్విఖండన చేసుకొనును.

నిరూపణ

AC మరియు BD లు కర్ణములుగా గల చతుర్భుజము యొక్క శీర్షములు A, B, C, D అనుకొనుము. O దృష్ట్యా A, B, C మరియు D ల యొక్క స్థాన సదిశలు వరుసగా $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ మరియు $\vec{d}$ అనుకొనుము. చతుర్భుజము $ABCD$ ఒక సమాంతర చతుర్భుజము అనుకొనుము.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} \Rightarrow \vec{b} - \vec{a} = \vec{c} - \vec{d} \Rightarrow \vec{b} + \vec{d} = \vec{a} + \vec{c}$$

మరియు $\frac{\vec{b}+\vec{d}}{2} = \frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}$.



పటము 8.28

ఇది AC మరియు BD రేఖాఖండముల మధ్యబిందువుల స్థాన సదిశలు ఒకటే అని చూపిస్తున్నది. మరొక విధంగా కర్ణములు ఒకదానికొకటి సమద్విఖండన చేసుకొనును అని చెప్పవచ్చును.

విపర్యముగా, చతుర్భుజము యొక్క కర్ణములు ఒకదానికొకటి సమద్విఖండన చేసుకొనిన, కర్ణములు AC మరియు BD అను వాటి యొక్క మధ్యబిందువుల స్థాన సదిశలు సమానమగును.

కావున, $\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2} = \frac{\vec{b}+\vec{d}}{2} \Rightarrow \vec{a}+\vec{c} = \vec{b}+\vec{d} \Rightarrow \vec{c}-\vec{d} = \vec{b}-\vec{a}$.

దీని నుండి $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ మరియు $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$. అని నిర్వచించవచ్చును. దీని నుండి DC మరియు AB రేఖలు సమాంతరము అని చెప్పవచ్చును. $\vec{a}+\vec{c} = \vec{b}+\vec{d}$ నుండి $\vec{a}-\vec{d} = \vec{b}-\vec{c}$ అయిన AD మరియు BC రేఖలు సమాంతరమని చెప్పవచ్చును. కావున, $ABCD$ ఒక సమాంతర చతుర్భుజము అగును. ■

అభ్యాసము 8.1

(1) క్రింది ఇవ్వబడిన స్థానభ్రంశములను రేఖాచిత్రము ద్వారా సూచించుము

(i) $45cm$ $30°$ తూర్పు నుండి ఉత్తరమునకు (ii) 80కి.మీ $60°$ పడమర నుండి దక్షిణమును

(2) V అను అన్ని సదిశల సమితి పై '$\vec{a}$ R $\vec{b}$ అను సంబంధము R $\vec{a} = \vec{b}$ గా నిర్వచించిన అది V పై సమతుల్య సంబంధమని నిరూపించుము.

(3) $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ అనునవి A మరియు B బిందువుల స్థాన సదిశలు. AB అను రేఖాఖండమును మూడు సమభాగాలుగా విభజించు బిందువుల స్థాన సదిశలు $\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}$ మరియు $\frac{\vec{b}+2\vec{a}}{3}$. అని నిరూపించుము.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_8.indd 65 5/10/2022 10:56:34 AM

(4) త్రిభుజము ABC లో AB మరియు AC భుజాల మధ్యబిందువులు క్రమంగా D మరియు E అయిన $\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$. అని నిరూపించుము.

(5) ఒక త్రిభుజము యొక్క రెండు భుజముల మధ్యబిందువులను కలుపు రేఖాఖండం మూడవ భూజమునకు సమాంతరము అనియు, దాని పొడవు మూడవ భుజం పొడవులో సగమని నిరూపించుము.

(6) ఒక చతుర్భుజము యొక్క ఆసన్న భుజముల మధ్యబిందువులను కలుపు రేఖాఖండములు ఒక సమాంతర చతుర్భుజమును ఏర్పరచును అని నిరూపించుము.

(7) $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ లు ఒక సమాంతర చతుర్భుజము యొక్క ఒక భుజమును మరియు ఒక కర్ణమును సూచించిన మిగిలిన భుజములను మరొక కర్ణమును కనుగొనుము.

(8) $\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{QO}+\overrightarrow{OR}$ అయిన P, Q, R బిందువులు సరేఖీయాలు (ఏక రేఖీయములు) అని నిరూపించుము.

(9) త్రిభుజము ABC లో భుజము BC యొక్క మధ్యబిందువు D అయిన, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$. అని నిరూపించుము.

(10) ABC త్రిభుజము యొక్క గురుత్వ కేంద్రము G అయిన $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$. అని నిరూపించుము.

(11) $A, B,$ మరియు C లు ఒక త్రిభుజము యొక్క శీర్షములు అనుకొనుము. $D,E,$ మరియు F అనునవి వరుసగా $BC, CA,$ మరియు AB అను భుజముల మధ్యబిందువులు అనుకొనిన $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$. అని నిరూపించుము.

(12) $ABCD$ అను చతుర్భుజములో AC మరియు BD యొక్క మధ్యబిందువులు వరుసగా E మరియు F అయిన $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=4\overrightarrow{EF}$. అని నిరూపించుము.

8.6 సదిశలను అంశములుగా విభజించుట (Resolution of Vectors)

ఒక సదిశను అంశములుగా ఏ పరిమిత పరిమాణతలంలో, విభజించవచ్చును. కాని మనం ద్వి మరియు త్రి పరిమాణతలంలో మాత్రమే మనము చర్చించబోతున్నాము. ద్వి పరిమాణతలతో మనము ప్రారంభిస్తాము.

8.6.1 ద్వి పరిమాణతలలో ఒక సదిశ యొక్క అంశ విభజన (Resolution of a vector in two dimension)

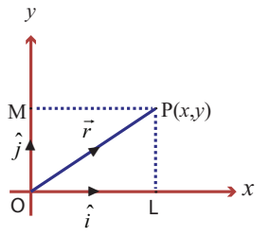
సిద్ధాంతము 8.5

$\hat{i}$ మరియు $\hat{j}$ అనునవి క్రమముగా ఆదిబిందువు O ప్రారంభ బిందువు గల x మరియు y అక్షాల ధనాత్మక దిశల వెంబడి గల యూనిట్ సదిశ అనుకొనుము. తలములో P అను ఏదేని ఒక బిందువు యొక్క స్థాన సదిశ $\overrightarrow{OP}$ అయిన x మరియు y అను ఏకత్వ సంఖ్యలకు $\overrightarrow{OP} = x\hat{i}+y\hat{j}$ గా $\overrightarrow{OP}$ ను వ్రాయవచ్చును. ఇంకను $|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{x^2+y^2}$.

నిరూపణ

P అను బిందువు యొక్క నిరూపకములు (x, y) అనుకొనుము. L మరియు M అనునవి P నుండి x మరియు y అక్షములకు గీయబడ్డ లంబపాదములు అనుకొనుము.

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{LP}=\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{OM}$.



పటము 8.29

కనుక $\hat{i}$ మరియు $\hat{j}$ అనునవి యూనిట్ సదిశలు కాబట్టి, $\overrightarrow{OL}=x\hat{i}$. మరియు $\overrightarrow{OM}=y\hat{j}$. అగును.

కనుక, $\overrightarrow{OP} = x\hat{i}+y\hat{j}$

$\overrightarrow{OP}=\vec{r}$ అయిన $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}$ అగును.

ఏకత్వమును నిరూపించుటకు $x_1\hat{i}+y_1\hat{j}$ మరియు $x_2\hat{i}+y_2\hat{j}$ అనునవి ఒకే బిందువు P ను గుర్తించునని అనుకొనుము

$$x_1\hat{i}+y_1\hat{j} = x_2\hat{i}+y_2\hat{j}.$$

దాని నుండి $(x_1-x_2)\hat{i}-(y_2-y_1)\hat{j}=\vec{0}\Rightarrow x_1-x_2=0, y_2-y_1=0.$

కాబట్టి $x_1=x_2$ మరియు $y_1=y_2$ దీని నుండి ఏకత్వమును తెలుసుకొనవచ్చును.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_8.indd 66 5/10/2022 10:56:34 AM

త్రిభుజము OLP లో $OP^2 = OL^2 + LP^2$; కనుక $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2}$. కాబట్టి $|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\hat{i}$ మరియు $\hat{j}$ అనునవి x మరియు y అక్షముల ధనాత్మక దిశలో యూనిట్ సదిశలు అయిన (6,4) అను బిందువు స్థాన సదిశను $6\hat{i} + 4\hat{j}$ అని ఏకైక పద్ధతిలో మాత్రమే వ్రాయవచ్చును.

ఫలితము 8.8

ఒక తలములో $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ అనునవి సరేఖీయాలు. కాని రెండు సదిశలైన, ఆ తలములో గల ఏదేని ఒక సదిశను $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ యొక్క సరళ సంయోగముగా ఏకైక పద్ధతిలో వ్రాయగలము. అది ఆ తలములో గల ఏదేని ఒక సదిశను l మరియు m అను కొన్ని సదిశలను $l\vec{a} + m\vec{b}$ అను రూపంలో వ్రాయగలము.

నిరూపణ

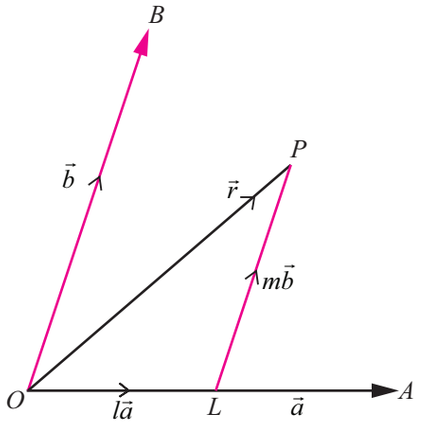
$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, అనుకొనుము మరియు $\vec{r}$ అనునది $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$. అన్న తలములో గల ఏదైన ఒక సదిశ అనుకొనుము.

OB నకు సమాంతరముగా PL ను గీయుము. కనుక $\overrightarrow{LP} = m\vec{b}$ మరియు $\overrightarrow{OL} = l\vec{a}$ అగును. ఇచ్చట l మరియు m అదిశలు.

ఇప్పుడు $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{LP}$.

అది $\vec{r} = l\vec{a} + m\vec{b}$.

కనుక, $\vec{r}, \vec{a}, \vec{b}$ అనునవి ఒక తలములో గల సదిశలు అయిన $\vec{r}$ అనునది $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$. యొక్క ఋజు సంయోగమగును.



పటము 8.30

గమనిక 8.2

సరేఖీయాలు కాని మూడు సదిశలు సతలీయములైన వానిలో ఒక సదిశను మిగిలిన రెండు సదిశలను సరళ సంయోగంగా వ్రాయవచ్చును. దీని యొక్క విపర్యయము కూడ సత్యమగును.

ఫలితము 8.9

ఒక అంతరాళములో $\vec{a}, \vec{b}$ మరియు $\vec{c}$ అను మూడు సతలీయాలు కాని సదిశలు అయిన అంతరాళంలోని ఏదేని ఒక సదిశను l, m మరియు n అను కొన్ని ఆ దిశలకు $l\vec{a} + m\vec{b} + n\vec{c}$ అని ఏకైకంగా వ్రాయగలము.

నిర్వచనము 8.15

$\hat{i}$ మరియు $\hat{j}$ క్రమముగా x మరియు y అక్షపు ధనాత్మక దిశలో గల యూనిట్ సదిశలు అనుకొనుము. $\vec{r}$ అనునది ఈ తలములో గల ఏదేని ఒక సదిశ అయిన x మరియు y అను కొన్ని వాస్తవ సంఖ్యలకు $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ అగును. ఇచ్చట $x\hat{i}$ మరియు $y\hat{j}$ లను క్రమముగా ద్విపరిమాణతలంలో x మరియు y అక్షాల వెంబడి $\vec{r}$ యొక్క నిరుపక్షాల అంశములు అని అంటారు.

మనము ఇదివరకు ద్విపరిమాణము తలంలో వివరించిన వాటిని త్రిపరిమాణాంతరాళములోను వివరించవచ్చును.

8.6.2 త్రిపరిమాణాంతరాళంలో ఒక సదిశ యొక్క అంశ విభజన ప్రక్రియ
(Resolution of a vector in three dimension)

సిద్ధాంతము 8.6

$\hat{i}, \hat{j}$ మరియు $\hat{k}$ అనునవి క్రమముగా x, y మరియు z అక్షముల ధనాత్మక దిశలో O ను ప్రారంభ బిందువు గల యూనిట్ సదిశలు అనుకొనుము. అంతరాళములో గల ఏదేని ఒక బిందువు P యొక్క స్థాన సదిశ $\overrightarrow{OP}$ ను ఏకైక పద్ధతిలో $\overrightarrow{OP} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ అని వ్రాయవచ్చును. ఇచ్చట x, y, z వాస్తవ సంఖ్యలు అంతే కాక, $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

నిరూపణ

P యొక్క నిరూపకములు (x, y, z) అనుకొనుము P నుండి xy-తలములకు గీయబడ్డ లంబ పాదము Q అనుకొనుము. R మరియు S అనునవి Q నుండి క్రమముగా x మరియు y–అక్షములకు గీయబడ్డ లంబ పాదములు అనుకొనుము. $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$ అనుకొనుము.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_8.indd 67 5/10/2022 10:56:35 AM

ఇప్పుడు, $OR = x$, $OS = y$, మరియు $QP = z$.

కనుక, $\overrightarrow{OR} = x\hat{i}$, $\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{OS} = y\hat{j}$, మరియు $\overrightarrow{QP} = z\hat{k}$

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QP} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}.$$

అది $\overrightarrow{OP} = \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ అగును.

ఇది O దృష్ట్యా త్రిపరిమాణాంతరాళములో P యొక్క స్థాన సదిశ $\overrightarrow{OP}$ అగును. త్రిభుజము ORQ, లో

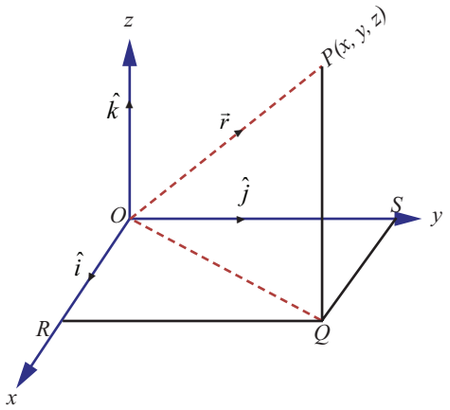
$$OQ^2 = OR^2 + RQ^2 \text{ (ఎట్లు?)}$$

మరియు త్రిభుజము OQP, లో

$$OP^2 = OQ^2 + QP^2.$$

ఇది $OP^2 = OQ^2 + QP^2 = OR^2 + RQ^2 + QP^2 = x^2 + y^2 + z^2$

కాగ, $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, అది $|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$



పటము 8.31

రెండు బిందువులను కలుపు సదిశ యొక్క అంశములు (Components of vector joining two points)

(x_1, y_1) మరియు (x_2, y_2) అను బిందువులను కలుపు రేఖ యొక్క అంశములను కనుగొనెదము.

A మరియు B అను బిందువులు (x_1, y_1) మరియు (x_2, y_2) అనుకొనుము. P అను బిందువును $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. అని తీసికొనుము. ఇప్పుడు $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP}$. అగును. $\overrightarrow{OP}$ యొక్క అంశములు $(x_2 - x_1)\hat{i}$ మరియు $(y_2 - y_1)\hat{j}$. అగును. కనుక, x మరియు y అక్షముల దిశలో $\overrightarrow{AB}$ యొక్క అంశములు $(x_2 - x_1)\hat{i}$ మరియు $(y_2 - y_1)\hat{j}$. అగును.

ఇదేవిధంగా (x_1, y_1, z_1) మరియు (x_2, y_2, z_2), అనునవి A మరియు B అయిన $\overrightarrow{AB}$ యొక్క అంశములు x, y మరియు z, అక్షముల దిశలో $(x_2 - x_1)\hat{i}$, $(y_2 - y_1)\hat{j}$ మరియు $(z_2 - z_1)\hat{k}$ అగును.

8.6.3 ఒక సదిశ యొక్క మాత్రికా రూపము (Matrix representation of a vector)

మూడు అంశములు గల సదిశను ఒక అడ్డువరుస మాత్రికగానో లేక నిలువు వరుస మాత్రికగానో క్రమముగా $[x, y, z]$ లేక $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ అని వ్రాయగలము.

కనుక, ఏదేని సదిశ $\vec{A} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ ను క్రిందిదాని నుంచి పొందగలము $[a_1 \ a_2 \ a_3]\begin{bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{bmatrix} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k} = \vec{A}$.

కాబట్టి సదిశల సంకలనము మరియు సదిశల లబ్ధము అనునవి క్రింది విధముగా నిర్వచింపబడును

$\vec{A} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ మరియు $\vec{B} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ అయిన $\vec{A} + \vec{B} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{bmatrix}$ అది,

$\vec{A} + \vec{B} = (a_1 + b_1)\hat{i} + (a_2 + b_2)\hat{j} + (a_3 + b_3)\hat{k}$.

కాగ, $k\vec{A} = k\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ ka_3 \end{bmatrix}$ నుంచి పొందునది

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_8.indd 68 5/10/2022 10:56:35 AM

$k\vec{A} = ka_1\hat{i} + ka_2\hat{j} + ka_3\hat{k}$

సదిశా పరిమాణం $k \in \mathbb{R}$ నకు $k > 1$ అయిన అధికమయ్యి $0 < k < 1$ అయిన తక్కువయ్యి లభించును. మరియు $k = 0$ అయిన $\overrightarrow{OA} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k} = \vec{0}$. అని శూన్య సదిశ అభించును.

ఫలితము 8.10

సదిశ సంకలనముల వినిమయ మరియు సహచర్య ధర్మములు, మరియు అదిశ గుణకార విభాగ నియమము లనుపయోగించి క్రిందివాటిని నిరూపించవచ్చును.

$\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$, $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ మరియు m ఒక అదిశ అనుకొనుము.

(i) $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\hat{i} + (a_2 + b_2)\hat{j} + (a_3 + b_3)\hat{k}$

(ii) $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1)\hat{i} + (a_2 - b_2)\hat{j} + (a_3 - b_3)\hat{k}$

(iii) $m\vec{a} = ma_1\hat{i} + ma_2\hat{j} + ma_3\hat{k}$ మరియు

(iv) $\vec{a} = \vec{b}$,అయితే $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, మరియు $a_3 = b_3$.

ఉదాహరణ 8.4

$5\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$. యొక్క దిశలో గల ఒక యూనిట్ సదిశను కనుగొనుము.

సాధన

$\vec{a}$ యొక్క దిశలో గల ఒక యూనిట్ సదిశ $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$. అగును. కనుక $5\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ యొక్క దిశలో ఒక యూనిట్ సదిశ

$$\frac{5\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}}{|5\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}|} = \frac{5\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}}{\sqrt{5^2 + 3^2 + 4^2}} = \frac{5\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}}{\sqrt{50}}.$$

గమనిక 8.3

$5\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ నకు సమాంతరంగా వ్యతిరేఖ దిశలో మరొక యూనిట్ సదిశ ఉంటుంది అది $-\frac{5\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}}{\sqrt{50}}$.

8.7 దిశా కొసైనులు మరియు దిశా నిష్పత్తులు (Direction Cosines and Direction Ratios)

మూలబిందువు నుండి r దూరములో అంతరాళములో గల బిందువు P యొక్క నిరూపకములు (x, y, z) అనుకొనుము P నుండి x, y మరియు z అక్షములకు గీయబడు లంబ పాదములు క్రమముగా R, S మరియు T అనుకొనుము.

$$\angle PRO = \angle PSO = \angle PTO = 90°.$$

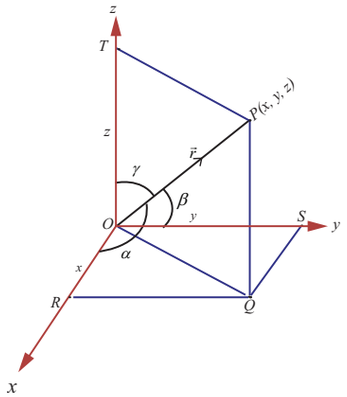
$$OR = x,\ OS = y,\ OT = z \text{ మరియు } OP = r.$$

$\angle PRO = \angle PSO = \angle PTO = 90°$ ను పటంలో దృశ్యీకరణ చేయుట కష్టము ఎందుకనగా ఇవి అక్షముల నుండి P నకు గీయబడు లంబపాదములు త్రిపరిమాణ ప్రతిరూపములో ఈ వాస్తవంను సులువుగా దృశ్యీకరణ చేయవచ్చును.

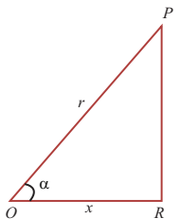
$\overrightarrow{OP}$ అనునది x, y మరియు z అక్షముల ధనాత్మక దిశలో ఏర్పరుచు కోణములు α, β, γ అయిన,

$$\angle POR = \alpha,\ \angle POS = \beta, \text{ మరియు } \angle POT = \gamma.$$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_8.indd 69 5/10/2022 10:56:36 AM



పటము 8.32



పటము 8.33

ΔOPR లో $\angle PRO = 90°, \angle POR = \alpha, OR = x,$ మరియు $OP = r.$

కనుక $\cos\alpha = \frac{OR}{OP} = \frac{x}{r}.$

ఇలాగే మనము $\cos\beta = \frac{y}{r}$, $\cos\gamma = \frac{z}{r}$ కనుగొనవచ్చును.

ఇచ్చట $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$ యొక్క దిశాకోణములు α, β, γ అనియు, మరియు $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ యొక్క **దిశాకోసైన్‌లు** $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ అనియు నిర్వచింపబడుచున్నది కాబట్టి $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ అను సదిశ దిశా కొసైన్‌లు $\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right)$, ఇచ్చట $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

సదిశ యొక్క దిశాకోసైన్‌లతో అనుపాతంలో గల ఏదేని మూడు సంఖ్యలను ఆ సదిశల దిశా నిష్పత్తులు అంటారు. కాబట్టి ఒక సదిశ దిశా నిష్పత్తులు ఏకైకం కాదు. ఇచ్చిన ఒక సదిశకు అనంత దిశా నిష్పత్తులు కలిగి ఉంటుంది.

పరిశీలనలు

(i) ఇవ్వబడిన శూన్యేతర సదిశకు దిశా నిష్పత్తులు మరియు దిశా కోసైనులను కనుగొనవచ్చును.
(ii) ఇవ్వబడిన దిశా నిష్పత్తులుతో దానికి సంబంధించిన సదిశను మనము నిర్ణయించలేము
(iii) ఇవ్వబడిన దిశా కొసైన్‌లతో దానికి సంబంధించిన సదిశను కనుగొనలేము.
(iv) ఇవ్వబడిన సదిశలకు దిశా కొసైన్‌ల త్రికము దిశా నిష్పత్తుల త్రికము కూడ అగును.
(v) ఒక సదిశను కనుగొనుటకు దాని పరిమాణము మరియు దిశా కొసైనులు లేక దిశా నిష్పత్తులు అవసరమగును.

గమనిక 8.4

ప్రారంభ బిందువు ఆది బిందువు వద్ద గల ఒక సదిశ $\overrightarrow{OP}$ ను తీసుకొనుము. ప్రారంభ బిందువు ఆదిబిందువు వద్ద లేని సదిశల దిశా కొసైనులను కనుగొను క్రమంలో స్థానమార్పు ద్వారా ఇచ్చిన సదిశకు సమాంతరంగా అదే పరిమాణం మరియు ప్రారంభ బిందువు ఆది బిందువు మధ్య గల ఒక సదిశను గీయుము. రెండు సమాన సదిశలు ఒకే దిశా కొసైనులను కలిగివుండును అను ధర్మము ద్వారా ఏదేని ఒక సదిశ యొక్క దిశా కొసైనులను మనము కనుగొనగలము.

ఫలితము 8.11

ఒక బిందువు యొక్క స్థాన సదిశ $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ అనుకొనుము. మరియు α, β, γ యొక్క దిశా కొణములు $\vec{r}$ అయిన,

(i) $\vec{r}$ యొక్క దిశా కొసైనుల వర్గముల మొత్తము 1 అగును.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_8.indd 70 5/10/2022 10:56:36 AM

(ii) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2$.

(iii) $\vec{r}$ యొక్క దిశా కొసైనులు $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

(iv) l,m,n అనునవి ఒక సదిశ యొక్క దిశా కొసైనులైన, $l^2+m^2+n^2=1$.మరియు దీని విపర్యయము సత్యము.

(v) ఏదేని ఒక యూనిట్ సదిశను మనము $\cos\alpha\hat{i}+\cos\beta\hat{j}+\cos\gamma\hat{k}$ అని వ్రాయవచ్చును.

నిరూపణ

(i) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}+\frac{z^2}{r^2}=\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2}=\frac{r^2}{r^2}=1$

(ii), (iii), (iv), మరియు (v) నిరూపణలు అభ్యాసము కొరకు వదలబడియున్నది. ■

ఉదాహరణ 8.5

క్రింది సదిశలకు దిశా నిష్పత్తులు మరియు దిశా కొసైనులు కనుగొనుము

(i) $3\hat{i}+4\hat{j}-6\hat{k}$, (ii) $3\hat{i}-4\hat{k}$.

సాధన

(i) $3\hat{i}+4\hat{j}-6\hat{k}$ యొక్క దిశా నిష్పత్తులు 3, 4, – 6. దిశా కొసైనులు $\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}$ ఇచ్చట

$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ కనుక దిశా కొసైనులు $\frac{3}{\sqrt{61}},\frac{4}{\sqrt{61}},\frac{-6}{\sqrt{61}}$ అగును.

(ii) $3\hat{i}-4\hat{k}$ యొక్క దిశా నిష్పత్తులు 3, 0, – 4. దిశా కొసైనులు $\frac{3}{5},0,\frac{-4}{5}$

ఉదాహరణ 8.6

(i) 2, 3, – 6. అను దిశా నిష్పత్తులుగా గల సదిశల దిశా కొసైన్‌లను కనుగొనుము.

(ii) $30°,45°,60°$ అనునవి ఒక సదిశకు దిశా కోణములగానా?

(iii) A (2, 3, 1) మరియు B (3, – 1, 2) అయిన, $\overrightarrow{AB}$, యొక్క దిశా కొసైన్‌లను కనుగొనుము.

(iv) (2, 3, 1) మరియు (3, – 1, 2) ను కలుపు రేఖ యొక్క దిశా కొసైన్‌లను కనుగొనుము.

(v) 2,3,6 లను దిశా నిష్పత్తులుగా పరిమాణము 5 గా గల సదిశను కనుగొనుము.

సాధన

(i) దిశా కొసైన్‌లు $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

అది, $\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{-6}{7}$.

(ii) నిబంధన $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

ఇచ్చట $\alpha=30°,\beta=45°,\gamma=60°$

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\neq 1$.

కనుక, ఇవి ఏ సదిశకు దిశాకోణములు కాలేవు.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_8.indd 71 5/10/2022 10:56:36 AM

(iii) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}$

దిశా కొసైనులు $\frac{1}{\sqrt{18}}, \frac{-4}{\sqrt{18}}, \frac{1}{\sqrt{18}}$.

(iv) A మరియు B అను బిందువులు $(2,3,1)$ మరియు $(3,-1,2)$ అనుకొనుము $\overrightarrow{AB}$ యొక్క దిశా కొసైనులు $\frac{1}{\sqrt{18}}, \frac{-4}{\sqrt{18}}, \frac{1}{\sqrt{18}}$. ఉన్నను, ఏ బిందువునైన ప్రారంభ బిందువుగా తీసుకొనవచ్చును. కనుక దీనికి వ్యతిరేక దిశలోను దిశా కొసైనులను కనుగొనవచ్చును. కాబట్టి, మనకు $\frac{-1}{\sqrt{18}}, \frac{4}{\sqrt{18}}, \frac{-1}{\sqrt{18}}$ అని మరొక దిశా కొసైన్‌లు లభించును.

(v) దిశా కొసైన్‌లు $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}$.

యూనిట్ సదిశ $\frac{2}{7}\hat{i} + \frac{3}{7}\hat{j} + \frac{6}{7}\hat{k}$.

కావలసి సదిశ $\frac{5}{7}(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$.

ఉదాహరణ 8.7

$2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$, $3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ మరియు $6\hat{i} - 5\hat{j} + 7\hat{k}$ అనువాటిని స్థాన సదిశలుగా గల బిందువులు సరేఖీయాలు (ఏకరేఖీయాలు) అని చూపుము.

సాధన

O ను ఆది బిందువు అనుకొనుము. $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ మరియు $\overrightarrow{OC}$ అనునవి క్రమముగా $2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$, $3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ మరియు $6\hat{i} - 5\hat{j} + 7\hat{k}$ అనుకొనుము. కాబట్టి

$$\overrightarrow{AB} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k} \text{ and } \overrightarrow{AC} = 4\hat{i} - 8\hat{j} + 12\hat{k}.$$

కనుక $\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AB}$ కాబట్టి $\overrightarrow{AB}$ మరియు $\overrightarrow{AC}$ అనునవి సమాంతరమగును. వీటికి A అను ఉమ్మడి బిందువు గలదు. కనుక, ఈ మూడు బిందువులు సరేఖీయాలు.

మరో పద్ధతి

O ను కేంద్రముగా అనుకొనుము.

$$\overrightarrow{OA} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}, \overrightarrow{OB} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k} \text{ మరియు } \overrightarrow{OC} = 6\hat{i} - 5\hat{j} + 7\hat{k}$$

$$\overrightarrow{AB} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k} \; ; \; \overrightarrow{BC} = 3\hat{i} - 6\hat{j} + 9\hat{k} \; ; \; \overrightarrow{CA} = -4\hat{i} + 8\hat{j} - 12\hat{k}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{14} \; ; \; \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{126} = 3\sqrt{14} \; ; \; \left|\overrightarrow{CA}\right| = \sqrt{224} = 4\sqrt{14}.$$

కాబట్టి, $AC = AB + BC$.

కనుక A, B, C అనునవి ఒకే రేఖపై ఉంటుంది. అది ఇవ్వబడిన బిందువులు సరేఖీయ బిందువులగును.

ఉదాహరణ 8.8

పరిమాణమును 5 గా $4\hat{i} - 3\hat{j} + 10\hat{k}$. నకు సమాంతరముగా స్థాన సదిశగా గల బిందువును కనుగొనుము.

సాధన

$\vec{a}$ ను $4\hat{i} - 3\hat{j} + 10\hat{k}$ అనుకొనుము.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_8.indd 72 5/10/2022 10:56:37 AM

$\vec{a}$ యొక్క దిశలో యూనిట్ సదిశ $\hat{a}$ అనునది $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ నకు సమానము. అది $\frac{4\hat{i}-3\hat{j}+10\hat{k}}{5\sqrt{5}}$ నకు సమానము. పరిమాణమును 5 గాను $4\hat{i}-3\hat{j}+10\hat{k}$ నకు సమాంతరముగాను గల సదిశ

$$5\left(\frac{4\hat{i}-3\hat{j}+10\hat{k}}{5\sqrt{5}}\right)=\frac{4\hat{i}}{\sqrt{5}}-\frac{3}{\sqrt{5}}\hat{j}+2\sqrt{5}\,\hat{k}.$$

కనుక కావలసిన బిందువు $\left(\frac{4}{\sqrt{5}},-\frac{3}{\sqrt{5}},2\sqrt{5}\right)$.

ఉదాహరణ 8.9

$2\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k},\ 4\hat{i}+\hat{j}+9\hat{k}\ 10\hat{i}-\hat{j}+6\hat{k}$ అను సదిశలను స్థాన సదిశలుగా గల బిందువులు ఒక లంబకోణ త్రిభుజమును ఏర్పరుచునని నిరూపించుము.

సాధన

O ను కేంద్రముగా గల A, B, C అను బిందువుల యొక్క స్థాన సదిశలు $2\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k},\ 4\hat{i}+\hat{j}+$, మరియు $0\hat{i}-\hat{j}+6\hat{k}$ అనుకొనుము.

$$\overrightarrow{OA} = 2\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k},\ \overrightarrow{OB}=4\hat{i}+\hat{j}+9\hat{k} \text{ మరియు } \overrightarrow{OC}=10\hat{i}-\hat{j}+6\hat{k}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(4\hat{i}+\hat{j}+9\hat{k})-(2\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k})=2\hat{i}-3\hat{j}+6\hat{k}.$$

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2+(-3)^2+6^2}=\sqrt{4+9+36}=7$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(10\hat{i}-\hat{j}+6\hat{k})-(4\hat{i}+\hat{j}+9\hat{k})=6\hat{i}-2\hat{j}-3\hat{k}.$$

$$BC = |\overrightarrow{BC}|=\sqrt{6^2+(-2)^2+(-3)^2}=\sqrt{36+4+9}=7$$

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}=(2\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k})-(10\hat{i}-\hat{j}+6\hat{k})=-8\hat{i}+5\hat{j}-3\hat{k}.$$

$$CA = |\overrightarrow{CA}|=\sqrt{(-8)^2+5^2+(-3)^2}=\sqrt{64+25+9}=\sqrt{98}$$

$$BC^2 = 49,\ CA^2=98,\ AB^2=49.$$

$$CA^2 = BC^2+AB^2.$$

కాబట్టి ఇవ్వబడిన బిందువులు లంబకోణ త్రిభుజమును ఏర్పరుచును.

ఉదాహరణ 8.10

$5\hat{i}+6\hat{j}+7\hat{k},\ 7\hat{i}-8\hat{j}+9\hat{k},\ 3\hat{i}+20\hat{j}+5\hat{k}$ అనునది సతలీయము అని నిరూపించుము.

సాధన

$5\hat{i}+6\hat{j}+7\hat{k} = s(7\hat{i}-8\hat{j}+9\hat{k})+t(3\hat{i}+20\hat{j}+5\hat{k})$ అనుకొనుము అంశములను పోల్చగా

$$\begin{aligned} 7s+3t &= 5 \\ -8s+20t &= 6 \\ 9s+5t &= 7 \end{aligned}$$

మొదటి రెండు సమీకరణములను సాధించిన $s=t=\frac{1}{2}$ అని పొందవచ్చును. ఇవి మూడవ సమీకరణమును తృప్తి పరుచును.

కనుక ఒక సదిశను తక్కిన రెండు సదిశల యొక్క సరళ సంయోగముగా వ్రాయవచ్చును. కాబట్టి ఇవ్వబడిన సదిశలు సతలీయము అగును.

అభ్యాసము 8.2

(1) క్రింది ఇవ్వబడిన నిష్పత్తులు ఏదొక సదిశ యొక్క దిశకొసైనులు అగునా కాదా అని సరిచూడుము.

(i) $\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ (iii) $\frac{4}{3}, 0, \frac{3}{4}$

(2) ఇవ్వబడిన దిశా నిష్పత్తులను కలిగిన సదిశల దిశా కొసైన్‌లను కనుగొనుము.

(i) 1 , 2 , 3 (ii) 3 , – 1 , 3 (iii) 0 , 0 , 7

(3) క్రింద గల సదిశలకు దిశా కొసైన్‌లు మరియు దిశా నిష్పత్తులను కనుగొనుము.

(i) $3\hat{i} - 4\hat{j} + 8\hat{k}$ (ii) $3\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ (iii) $\hat{j}$

(iv) $5\hat{i} - 3\hat{j} - 48\hat{k}$ (v) $3\hat{i} - 3\hat{k} + 4\hat{j}$ (vi) $\hat{i} - \hat{k}$

(4) బిందువులు 1, 0, 0), (0, 1, 0) మరియు (0, 0, 1). అను బిందువులను కలుపగా ఏర్పడు త్రిభుజము యొక్క మధ్యగత రేఖల దిశా కొసైన్‌లను కనుగొనుము.

(5) $\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, a$ అనునవి ఒక సదిశ యొక్క దిశా కొసైనులన a యొక్క విలువను కనుగొనుము.

(6) $(a , a + b , a + b + c)$ అనునది (1, 0, 0) మరియు (0, 1, 0) అను వాటిని కలుపు రేఖ యొక్క దిశా నిష్పత్తులైన $a, b, c.$ లను కనుగొనుము.

(7) $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k},\ 3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k},\ \hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$ అను సదిశలు ఒక లంబకోణ త్రిభుజమును ఏర్పరుచునని చూపుము.

(8) $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 9\hat{k}$ మరియు $\vec{b} = \hat{i} + \lambda\hat{j} + 3\hat{k}$ అను సదిశలు సమాంతరము అయిన λ యొక్క విలువను కనుగొనుము.

(9) క్రింద గల సదిశలు సతలీయము అని చూపుము.

(i) $\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k},\ -2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k},\ -\hat{j} + 2\hat{k}$

(ii) $2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k},\ \hat{i} - \hat{j},\ 7\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}.$

(10) $4\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k},\ -\hat{j} - \hat{k},\ 3\hat{i} + 9\hat{j} + 4\hat{k}$ మరియు $-4\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k}$ యొక్క స్థాన సదిశలుగా గల బిందువులు సతలీయము అని చూపుము.

(11) $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k},\ \vec{b} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - 5\hat{k}, \vec{c} = -3\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ అయిన క్రింది గల సదిశల యొక్క పరిమాణమును దిశా కొసైన్‌లను కనుగొనుము. (i) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ (ii) $3\vec{a} - 2\vec{b} + 5\vec{c}.$

(12) $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k};\ 3\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$ మరియు $-2\hat{i} + 3\hat{j} - 7\hat{k}$ అనునవి ఒక త్రిభుజము యొక్క శీర్షముల స్థాన సదిశలు అయిన ఆ త్రిభుజపు చుట్టుకొలతను కనుగొనుము.

(13) $\vec{a} = 3\hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k},\ \vec{b} = -2\hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k}$ మరియు $\vec{c} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}.$ అయిన, $3\vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c}$ అను సదిశకు సమాంతరంగా గల యూనిట్ సదిశను కనుగొనుము.

(14) మూడు బిందువుల స్థాన సదిశలు $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ అనునవి $2\vec{a} - 7\vec{b} + 5\vec{c} = \vec{0}.$ అను సంబంధంను తృప్తిపరిచిన ఆ బిందువులు సరేఖీయాలా?

(15) P, Q, R, S అను బిందువుల యొక్క స్థాన సదిశలు క్రమముగా $(i + j + k), (2\hat{i} + 5\hat{j}), (3\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k})$ మరియు $(\hat{i} - 6\hat{j} - \hat{k})$ అయిన PQ మరియు RS లు సమాంతరమని నిరూపించుము.

(16) $m\ (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ ఒక యూనిట్ సదిశ అయిన m యొక్క విలువ లేక విలువలను కనుగొనుము.

(17) A (1, 1, 1), B(1, 2, 3) మరియు C(2, – 1, 1) అను బిందువులు ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజ శీర్షములని నిరూపించుము.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_8.indd 74 5/10/2022 10:56:38 AM

8.8 సదిశల లబ్ధము (Product of Vectors)

మనము ఇప్పటి వరకు రెండు సదిశల సంకలనము, ఒక సదిశను మరొక సదిశ నుండి తీసివేయుట మరియు ఒక సదిశను ఒక అదిశచే గుణించుట మొదలగు వాటిని చూచియున్నాము. మనము ఇప్పుడు రెండు సదిశల లబ్ధమును గురించి అభ్యసిస్తాము. సదిశలను గుణించడానికి రెండు పద్ధతులు కలవు.

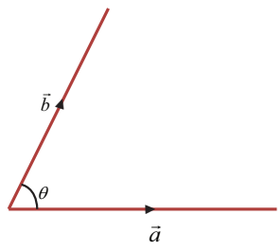
(i) అదిశా లబ్ధము (బిందు లబ్ధము) మరియు

(ii) సదిశా లబ్ధము (క్రాస్ లబ్ధము)

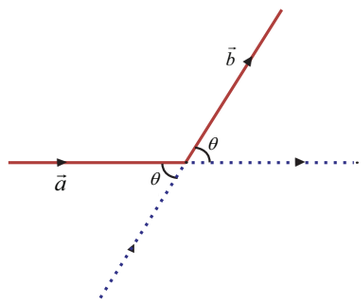
వీటిని నిర్వచించడానికి రెండు సదిశల మధ్యగల కోణము మనకు కావలయును.

8.8.1 రెండు సదిశలకు మధ్యగల కోణము (Angle between two vectors)

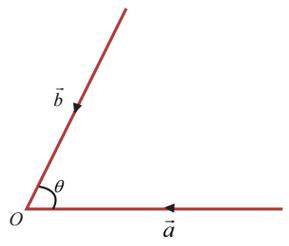
$\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ అను రెండు సదిశలు క్రమముగా $\overrightarrow{OA}$ మరియు $\overrightarrow{OB}$ అని అనుకొనుము. రెండు సదిశలకు మధ్యగల కోణము అనునది వాటి దిశలకు మధ్యగల కోణము అగును. ఆ రెండునూ ఖండన బిందువు నుండి అవసరణముగా (పటము 8.34) లేక అభిసరణముగా (పటము 8.36) ఉండవలెను.



పటము 8.34



పటము 8.35



పటము 8.36

θ అనునది రెండు సదిశలకు మధ్యగల కోణము అయిన, $0 \le \theta \le \pi$ అగును.

$\theta = 0$ లేక π గా ఉండునపుడు సదిశలు సమాంతరముగా వుండును.

రెండు సదిశలు పటము 8.35లో చూపినట్లు అవసరణము లేక అభిసరణముగా లేని యెడల మనము అందులో ఏదేని ఒక సదిశను పొడిగించి అవసరణమో లేక అభిసరణమో చేసి సదిశల మధ్య గల కోణమును కనుగొనవచ్చును.

8.8.2 అదిశా లబ్ధము (Scalar product)

నిర్వచనము 8.16

$\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ అను రెండు శూన్యేతర సదిశలకు మధ్యగల కోనమును θ అనుకొనుము. (పటము 8.34) వీటి యొక్క అదిశా లబ్ధము లేక బిందు లబ్ధమును $\vec{a}.\vec{b}$ గా సూచించి దానిని $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ అను అదిశగా నిర్వచించారు. కావున $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

$\vec{a}\cdot\vec{b}$ యొక్క ఫలితము ఒక అదిశ కావున దీనిని అదిశా లబ్ధము అని అంటారు. ఇంకను మనము బిందువు (డాట్) గుర్తు ('$\cdot$') ను ఉపయోగించుట వలన దీనిని బిందు లబ్ధము అని కూడా చెప్పవచ్చును.

అదిశా లబ్ధము యొక్క రేఖా గణిత వివరణ (ఒక సదిశ మీద మరొక సదిశ యొక్క లంబ విక్షేపము)

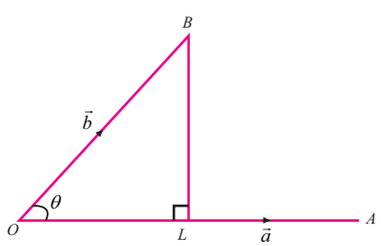
$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ మరియు θ. అనునది $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ మధ్యగల. కోణము అని అనుకొనుము. OA కు లంబముగా BL ను నిర్మించుము. లంబకోణ త్రిభుజము OLB లో

$$\cos\theta = \frac{OL}{OB}$$

$$OL = OB\cos\theta = |\vec{b}|\cos\theta$$

$\vec{a}$ మీద $\vec{b}$ యొక్క లంబవిక్షేపము OL అగును.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = |\vec{a}|(OL)$$



పటము 8.37

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_8.indd 75 5/10/2022 10:56:38 AM

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|$ ($\vec{a}$ మీద $\vec{b}$ యొక్క లంబవిక్షేపము)

కావున $\vec{a}$ మీద $\vec{b}$ యొక్క లంబ విక్షేపము $= \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$.

ఇదే విధంగా $\vec{b}$ మీద $\vec{a}$ యొక్క లంబవిక్షేపము $= \frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{|\vec{b}|}$.

8.8.3 అదిశా లబ్ధము యొక్క ధర్మములు (Properties of Scalar Product)

(i) రెండు సదిశల అదిశా లబ్ధము వినిమయ ధర్మమును కలిగి యుండును.

సాధారణ నిర్వచనము ప్రకారము, $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = |\vec{b}||\vec{a}|\cos\theta = \vec{b}\cdot\vec{a}$

అంటే , ఏవేని రెండు సదిశలు $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ లకు $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

(ii) అదిశా లబ్ధము యొక్క స్వభావము

$0 \le \theta \le \pi$ అని మనకు తెలియును.

$\theta = 0$ అయిన $\vec{a}\cdot\vec{b} = ab$ (రెండు సదిశలు ఒకే దిశలో సమాంతరాలు $\Rightarrow \theta = 0$)

$\theta = \pi$ అయిన $\vec{a}\cdot\vec{b} = -ab$ (రెండు సదిశలు వ్యతిరేఖదిశలో సమాంతరాలు $\Rightarrow \theta = \pi$.)

$\theta = \frac{\pi}{2}$ అయిన $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ (రెండు సదిశలు లంబము $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$).

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ అయిన $\cos\theta$ ధనాత్మకము, కావున $\vec{a}\cdot\vec{b}$ కూడా ధనాత్మకముగా వుండును

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ అయిన $\cos\theta$ ఋణాత్మకము, కావున $\vec{a}\cdot\vec{b}$ కూడా ఋణాత్మకముగా వుండును.

అంటే $\vec{a}\cdot\vec{b}$ అనునది $\begin{cases} > 0, 0 \le \theta < \pi/2 \\ 0\ ,\ \theta = \pi/2 \\ < 0, \pi/2 < \theta \le \pi \end{cases}$

(iii) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Rightarrow |\vec{a}| = 0$ లేక $|\vec{b}| = 0$ లేక $\theta = \frac{\pi}{2}$

(iv) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}$ రెండు శూన్యేతర సదిశలు $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ లకు $\vec{b}$ కు లంబముగా వుండును.

(v) $\vec{a}\cdot\vec{a}$ ను పలు విధములుగా సూచించుట.

$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2 = (\vec{a})^2 = \vec{a}^2 = a^2$.

ఈ విధంగా సూచించుట అనునది సమస్యల సాధనకు చాలా ముఖ్యమైనది.

(vi) $\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$ మరియు $\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = 0$ (ఎందుకు?).

(vii) ఏదేని రెండు అదిశలు మరియు λ and μ లకు

$\lambda\vec{a}\cdot\mu\vec{b} = \lambda\mu(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\lambda\mu\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(\lambda\mu\vec{b})$.

(viii) అదిశా లబ్ధము, సదిశా సంకలనంపై విభాగ ధర్మమును కలిగియుండును.

అంటే $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ అను ఏవేని మూడు సదిశలకు

$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$ (ఎడమ విభాగ ధర్మము)

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$ (కుడి విభాగ ధర్మము)

దీని ద్వారా,

$\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{a}\cdot\vec{c}$ మరియు $(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} - \vec{b}\cdot\vec{c}$ అగును

దీనిని ఎన్ని సదిశలకు కావలసిననూ విస్తరించుకొనవచ్చును.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_8.indd 76 5/10/2022 10:56:39 AM

(ix) సదిశల సర్వసమీకరణములు

$$(\vec{a}+\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} \qquad (\vec{a}-\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$$

నిరూపణ

ధర్మము (iii) ప్రకారము

$$(\vec{a}+\vec{b})^2 = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

ఇదే విధముగా మిగిలిన వాటిని నిరూపించవచ్చును. ■

(x) అదిశా లబ్ధమును కనుగొనుటకు కృత్యనియమము

$\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ మరియు $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ అనుకొనుము.

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k})\cdot(b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}) \\ &= a_1b_1(\hat{i}\cdot\hat{i}) + a_1b_2(\hat{i}\cdot\hat{j}) + a_1b_3(\hat{i}\cdot\hat{k}) \\ &\quad + a_2b_1(\hat{j}\cdot\hat{i}) + a_2b_2(\hat{j}\cdot\hat{j}) + a_2b_3(\hat{j}\cdot\hat{k}) + a_3b_1(\hat{k}\cdot\hat{i}) + a_3b_2(\hat{k}\cdot\hat{j}) + a_3b_3(\hat{k}\cdot\hat{k}) \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.\end{aligned}$$

కావున, రెండు సదిశల అదిశా లబ్ధము అనునది ఆసదిశల సదృశ నిరూపక అంశముల యొక్క గుణకముల లబ్ధముల మొత్తమునకు సమానము. ■

(xi) $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ కు మధ్యగల కోణము θ అయిన $\theta = \cos^{-1}\left[\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}\right]$.

(xii) ఏవేని రెండు సదిశలు $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ కు, $|\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

$\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ అనునవి ఒక త్రిభుజము యొక్క రెండు భుజములు అయిన వాని మొత్తము $\vec{a}+\vec{b}$ అనునది మూడవ భుజముగా వుండును. కావున త్రిభుజము యొక్క భుజముల ధర్మము ప్రకారము $|\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$ ■

(xiii) ఏవేని రెండు సదిశలు $\vec{a}$, $\vec{b}$ లకు $|\vec{a}\cdot\vec{b}| \le |\vec{a}||\vec{b}|$. వీటిలో ఏదేని ఒక సదిశ శూన్య సదిశ అయిన సమానత్వము వాస్తవమగును. కావున రెండు సదిశలు శూన్యేతర సదిశలు అనుకొనుము.

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

అంటే $\dfrac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|} = |\cos\theta| \le 1 \qquad \Rightarrow |\vec{a}\cdot\vec{b}| \le |\vec{a}||\vec{b}|$. ■

ఉదాహరణ 8.11

ఈ క్రింది వాటికి $\vec{a}\cdot\vec{b}$ కనుగొనుము

(i) $\vec{a} = \hat{i} - \hat{j} + 5\hat{k}$, $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{k}$

(ii) $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ అనునవి $(2, 3, -1)$ మరియు $(-1, 2, 3)$ అను బిందువులను సూచించు సదిశలు.

సాధన

(i) $\vec{a}\cdot\vec{b} = (\hat{i} - \hat{j} + 5\hat{k})\cdot(3\hat{i} - 2\hat{k}) = (1)(3) + (-1)(0) + (5)(-2) = 3 - 10 = -7$

(ii) $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ మరియు $\vec{b} = -\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = (2)(-1) + (3)(2) + (-1)(3) = -2 + 6 - 3 = 1.$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_8.indd 77 5/10/2022 10:56:39 AM

ఉదాహరణ 8.12

$\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ మరియు $\vec{b} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ అయిన $(\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b})$ ను కనుగొనుము

సాధన

$(\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a} \cdot \vec{a} + 5\vec{a} \cdot \vec{b} - 3\vec{b} \cdot \vec{b} = 2(1+1+4) + 5(3+2-2) - 3(9+4+1) = -15$.

ఉదాహరణ 8.13

$\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{b} = -\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ మరియు $\vec{c} = 3\hat{i} + \hat{j}$ అనునది $\vec{a} + \lambda\vec{b}$ అనునది $\vec{c}$ కు లంబం అగునట్లు వుండిన λ. విలువను కనుగొనుము.

సాధన

$$(\vec{a} + \lambda\vec{b}) \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} + \lambda\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$$
$$\Rightarrow (6 + 2) + \lambda(-3 + 2) = 0$$
$$\Rightarrow \lambda = 8.$$

ఉదాహరణ 8.14

$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ అయిన $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ అనునది లంబముగా వుండునని నిరూపించుము.

సాధన

$$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$$
$$\Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a} - \vec{b}|^2$$
$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$
$$4\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

కావున, $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ అనునది లంబముగా వుండును.

ఉదాహరణ 8.15

ఏ ఒక సదిశ $\vec{r}$ కు $\vec{r} = (\vec{r} \cdot \hat{i})\hat{i} + (\vec{r} \cdot \hat{j})\hat{j} + (\vec{r} \cdot \hat{k})\hat{k}$ అని నిరూపించుము.

సాధన

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ అనుకొనుము

$$\vec{r} \cdot \hat{i} = \left(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}\right) \cdot \hat{i} = x$$
$$\vec{r} \cdot \hat{j} = \left(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}\right) \cdot \hat{j} = y$$
$$\vec{r} \cdot \hat{k} = \left(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}\right) \cdot \hat{k} = z$$
$$(\vec{r} \cdot \hat{i})\hat{i} + (\vec{r} \cdot \hat{j})\hat{j} + (\vec{r} \cdot \hat{k})\hat{k} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = \vec{r}$$

కావున $\vec{r} = (\vec{r} \cdot \hat{i})\hat{i} + (\vec{r} \cdot \hat{j})\hat{j} + (\vec{r} \cdot \hat{k})\hat{k}$.

ఉదాహరణ 8.16

$5\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ మరియు $6\hat{i} - 8\hat{j} - \hat{k}$ అను సదిశల మధ్యగల కోణమును కనుగొనుము..

సాధన

$\vec{a} = 5\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$, మరియుఽ$\vec{b} = 6\hat{i} - 8\hat{j} - \hat{k}$.

అనుకొనుము వీటి రెండింటి మధ్యగల కోణము θ అనుకొనుము.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_8.indd 78 5/10/2022 10:56:40 AM

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{30-24-4}{\sqrt{50}\ \sqrt{101}} = \frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{101}} \quad \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left[\frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{101}}\right].$$

ఉదాహరణ 8.17

A, B, C, D అనునవి $(4, -3, 0), (7, -5, -1), (-2, 1, 3), (0, 2, 5)$ అను బిందువులైన $\overrightarrow{AB}$ మీద $\overrightarrow{CD}$ యొక్క లంబక్షేపమును కనుగొనుము.

సాధన

O ను ఆది బిందువు అని అనుకొనుము.

కావున, $\overrightarrow{OA} = 4\hat{i} - 3\hat{j}$; $\overrightarrow{OB} = 7\hat{i} - 5\hat{j} - \hat{k}$; $\overrightarrow{OC} = -2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$; $\overrightarrow{OD} = 2\hat{j} + 5\hat{k}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = 3\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$; $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = 2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$

$\overrightarrow{CD}$ మీద $\overrightarrow{AB}$ యొక్క లంబ విక్షేపము $= \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CD}|} = \dfrac{6-2-2}{3} = \dfrac{2}{3}.$

ఉదాహరణ 8.18

$\vec{a}, \vec{b}$, మరియు $\vec{c}$ అను మూడు యూనిట్ సదిశలు $\vec{a} - \sqrt{3}\,\vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ అను సమీకరణమును సంతృప్తి పరచిన $\vec{a}$ మరియు $\vec{c}$. మధ్యగల కోణమును కనుగొనుము.

సాధన

$\vec{a}$ మరియు $\vec{c}$.. కు మధ్యగల కోణమును θ అనుకొనుము

$$\vec{a} - \sqrt{3}\,\vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad |(\vec{a}+\vec{c})| = |\sqrt{3}\,\vec{b}|$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{a}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{c}|\cos\theta = 3|\vec{b}|^2$$

$$\Rightarrow \quad 1 + 1 + (2)\,(1)\,(1)\cos\theta = 3(1)$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}.$$

ఉదాహరణ 8.19

$(4, -3, 1), (2, -4, 5)$ మరియు $(1, -1, 0)$ అను బిందువులు ఒక లంబకోణ త్రిభుజమును ఏర్పరచునని చూపుము.

సాధన

సులభముగా ఈ బిందువులు ఒక త్రిభుజమును ఏర్పరచునని తెలియును. ఇప్పుడు ఏదేని ఒక కోణము $\frac{\pi}{2}$ అని నిరూపించిన చాలు. కావున త్రిభుజము యొక్క భుజములను కనుగొనవలెను.

O ను ఆది బిందువు అనుకొనుము. A,B,C లు వరుసగా $(4,-3,1),(2,-4,5)$ మరియు $(1,-1,0)$ అనుకొనుము.

$\overrightarrow{OA} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$, $\overrightarrow{OB} = 2\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$, $\overrightarrow{OC} = \hat{i} - \hat{j}$

ఇప్పుడు, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = -2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$

అదే విధంగా, $\overrightarrow{BC} = -\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$; $\overrightarrow{CA} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$

స్పష్టంగా,, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA} = 0$

కావున ఒక కోణము $\frac{\pi}{2}$ కావున ఇవ్వబడిన బిందువులు లంబకోణ త్రిభుజమును ఏర్పరచును

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_8.indd 79 5/10/2022 10:56:41 AM

గమనిక 8.5

మూడు భుజములు సదిశ రూపములో ఇచ్చినచో

(i) అవి త్రిభుజ భుజాలుగా ఉండుటకు, ఈ సదిశల యొక్క మొత్తము $\vec{0}$ లేక ఏవేని రెండు సదిశల మొత్తము మూడవ భుజమునకు సమానము అని నిరూపించవలెను.

(ii) లంబకోణ త్రిభుజంలో ఒక కోణము $\frac{\pi}{2}$ అని నిరూపించడానికి ఏవేని రెండు సదిశలకు మధ్యగల బిందు లబ్ధము 0 అని నిరూపించవలెను.

అభ్యాసము 8.3

(1) ఈ క్రింది $\vec{a}.\vec{b}$ లకు $\vec{a}.\vec{b}$ ను కనుగొనుము.

(i) $\vec{a}=\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ మరియు $\vec{b}=3\hat{i}-4\hat{j}-2\hat{k}$ (ii) $\vec{a}=2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ మరియు $\vec{b}=6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$.

(2) ఈ క్రింది సదిశలు $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ లు లంబము అయిన λ యొక్క విలువను కనుగొనుము.

(i) $\vec{a}=2\hat{i}+\lambda\hat{j}+\hat{k}$ మరియు $\vec{b}=\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$ (ii) $\vec{a}=2\hat{i}+4\hat{j}-\hat{k}$ మరియు $\vec{b}=3\hat{i}-2\hat{j}+\lambda\hat{k}$.

(3) $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ అను సదిశలకు $|\vec{a}|=10, |\vec{b}|=15$ మరియు $\vec{a}\cdot\vec{b}=75\sqrt{2}$ అయిన $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ మధ్యగల కోణమును కనుగొనుము.

(4) ఈ క్రింది ఇవ్వబడిన సదిశలకు మధ్యగల కోణమును కనుగొనుము.

(i) $2\hat{i}+3\hat{j}-6\hat{k}$ మరియు $6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$ (ii) $\hat{i}-\hat{j}$ మరియు $\hat{j}-\hat{k}$.

(5) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ అను మూడు సదిశలకు $\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ మరియు $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=4, |\vec{c}|=7$, అయిన $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ మధ్యగల కోణమును కనుగొనుము.

(6) $\vec{a}=2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k}$, $\vec{b}=6\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$, మరియు $\vec{c}=3\hat{i}-6\hat{j}+2\hat{k}$ అనునవి ఒక దానికొకటి లంబ సదిశలని నిరూపించుము.

(7) $-\hat{i}-2\hat{j}-6\hat{k}, 2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ మరియు $-\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k}$ అను సదిశలు ఒక లంబకోణ త్రిభుజమును ఏర్పరచునని చూపుము.

(8) $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=6$, $|\vec{c}|=7$ మరియు $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$, అయిన $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$ ను కనుగొనుము.

(9) $(2,-1,3), (4,3,1)$ మరియు $(3,1,2)$ అను బిందువులు సరేఖీయాలు (ఏకరేఖీయాలు) అని నిరూపించుము.

(10) $\vec{a},\vec{b}$ అనునవి యూనిట్ సదిశలు మరియు θ అనునది వీటి మధ్యగల కోణము అయిన,

(i) $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}|\vec{a}-\vec{b}|$ (ii) $\cos\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}|\vec{a}+\vec{b}|$ (iii) $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{|\vec{a}-\vec{b}|}{|\vec{a}+\vec{b}|}$. అని చూపుము.

(11) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ అను మూడు సదిశలు, $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, $|\vec{c}|=5$ అయిన ఒక్కొక్కటి మిగిలిన రెండు సదిశల మొత్తమునకు లంబముగా వుండిన $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$ ను కనుగొనుము.

(12) $2\hat{i}+6\hat{j}+3\hat{k}$ మీద $\hat{i}+3\hat{j}+7\hat{k}$ యొక్క లంబ నిక్షేపమును కనుగొనుము.

(13) $\vec{b}=2\hat{i}+6\hat{j}+3\hat{k}$ మీద $\vec{a}=\lambda\hat{i}+\hat{j}+4\hat{k}$ యొక్క లంబక్షేపము 4 ప్రమాణములు అయిన λ యొక్క విలువను కనుగొనుము.

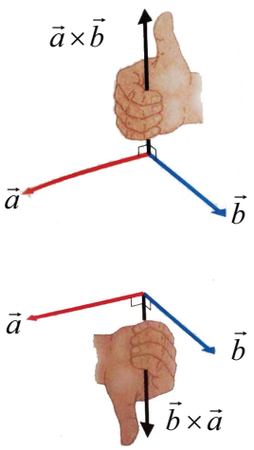
(14) $\vec{a},\vec{b}$ మరియు $\vec{c}$ అనునవి సదిశలయిన $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3, |\vec{c}|=4$ మరియు $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ అని వుండిన $4\vec{a}\cdot\vec{b}+3\vec{b}\cdot\vec{c}+3\vec{c}\cdot\vec{a}$. ను కనుగొనుము.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_8.indd 80 5/10/2022 10:56:41 AM

8.8.4 సదిశా లబ్ధము (Vector Product)

రెండు సదిశలకు మధ్యగల సదిశాలబ్ధమును నిర్వచించుటకు కుడిచేతి మరియు ఎడమచేతి వ్యవస్థ అను భావన మనకు అవసరమగును.

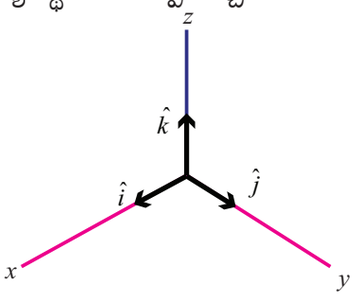
కుడిచేతి వ్రేళ్లను $\vec{a}$ తో సరిపొందునట్లు ఉంచి, వ్రేళ్లను $\vec{a}$ నుండి $\vec{b}$ కు భ్రమణం చేయు దిక్కువైపు వంచిన (కోణము 180° కన్నా తక్కువగా వుండవలెను) మన బొటన వ్రేలు $\vec{a}\times\vec{b}$ యొక్క దిశను సూచించును. ఇప్పుడు కుడిచేతి నియమం ప్రకారం $\vec{b}\times\vec{a}$ యొక్క దిశ అనునది $\vec{a}\times\vec{b}$ కు వ్యతిరేక దిశలో వుండును. (పటము 8.38 ను చూడుము)



పటము 8.38

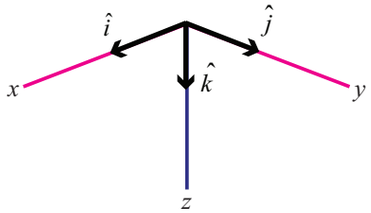
యింకనూ మనము $\vec{a}$ ను $\vec{b}$ యొక్క దిశలో θ కోణము $(<\pi)$ తో త్రిప్పిన $\vec{a}\times\vec{b}$ యొక్క దిశ అనునది కుడిచేతి పద్ధతిలో అమరియున్న మర తిరుగు దిశలోనే వుండునని గమనించవచ్చును.

ఒక కార్టీషియన్ నిరూపక వ్యవస్థను ఒక కుడి చేతి వ్యవస్థ అని చెప్పవలనంటే, ధనాత్మక అక్షములుండు దిశలో గల యూనిట్ సదిశలు $\hat{i},\hat{j},\hat{k}$ లు అనునవి పటము 8.39 చూపినట్లు కుడిచేతి త్రికమును ఏర్పాటు చేయవలెను. $\hat{k}$ యొక్క దిశ అనునది పటము 8.40 లో చూపినట్లు తలక్రిందులుగా అమరి యుండిన దానిని ఎడమ చేతి వ్యవస్థ అని చెప్పవచ్చును.



కుడిచేయి

పటము 8.39



ఎడమచేయి

పటము 8.40


కుడిమర

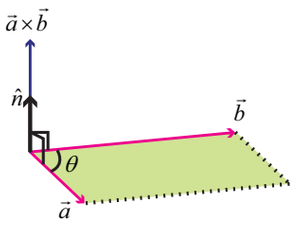
పటము 8.41


ఎడమమర

పటము 8.42

నిర్వచనము 8.17

రెండు శూన్యేతర సదిశలు $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ యొక్క సదిశా లబ్ధము $\vec{a}\times\vec{b}$ $\vec{a}\times\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}$, అని నిర్వచిస్తారు. ఇక్కడ θ అనునది $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ మధ్యగల కోణము, $0\le\theta\le\pi$ ఇక్కడ $\vec{a},\vec{b},\hat{n}$ అనునవి కుడిచేతి వ్యవస్థలో వుండును.



పటము 8.43

$\vec{a}\times\vec{b}$ అనునది $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ అను పరిమాణమును, $\hat{n}$ అను దిశను కలిగిన సదిశ అగును.

ఇది కాకుండా $\vec{a}\times\vec{b}$ అనునది $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$. ల రెండింటికి లంబముగా వుండును. .

గమనిక 8.6

(i) $\hat{n}$ యొక్క దిశను నిర్ణయించుటకు $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ యొక్క క్రమము మిక్కిలి ముఖ్యమగును..

(ii) ఈ లబ్ధము యొక్క ఫలితము ఒక సదిశయే. కావున దీనిని సదిశా లబ్ధము అని పిలుస్తారు. ఈ లబ్ధమును నిర్వచించుటకు '×' అను గుర్తును ఉపయోగించెదము కావున దీనిని అడ్డు గుణకార లబ్ధము (క్రాస్ లబ్ధము) అని కూడా పిలువవచ్చును.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_8.indd 81 5/10/2022 10:56:42 AM

సదిశా లబ్ధము యొక్క రేఖాగణిత వివరణ (Geometrical interpretation of vector product)

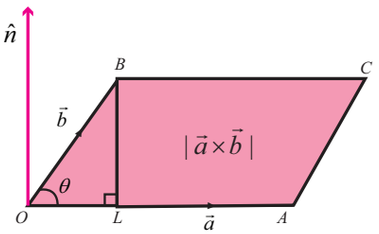
$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ మరియు $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ అను వాటిని ఆసన్న భుజములుగా గల $OACB$ అను సమాంతర చతుర్భుజమును నిర్మించుము.

$\angle AOB=\theta$ అనుకొనుము.

పటము నుండి

$$\sin\theta = \frac{BL}{OB}$$

$$BL = (OB)\sin\theta = |\vec{b}|\sin\theta$$



పటము 8.44

ఇప్పుడు $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta = |\vec{a}|(BL)$

$=$ (ఆధార భుజము) (ఎత్తు) $= OACB$ సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యము.

కావున, $\vec{a}\times\vec{b}$ అను సదిశ యొక్క పరిమాణము $\vec{a}, \vec{b}$ ను ఆసన్న భుజములుగా కలిగిన సమాంతర చతుర్భుజము యొక్క వైశాల్యమునకు సమానము అగును. మరియు దీని దిశ $\hat{n}$ అనునది $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ ను కలిగిన తలమునకు లంబమగుటయే కాకుండా $\vec{a},\vec{b},\hat{n}$ అనునవి కుడి చేతి వ్యవస్థలో వుండును.

కావున, $|\vec{a}\times\vec{b}|$ అనునది $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ ను ఆసన్న భుజములుగా కలిగిన సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యము అగును.

సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యము నుండి OAC త్రిభుజ వైశాల్యము $OACB$ వైశాల్యములో సగము ఉంటుందని మనము నిర్ధారించగలము. ■

ఉత్పాదకము

$\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ లను భుజములుగా కలిగిన త్రిభుజము యొక్క వైశాల్యము $\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$.

8.8.5 ధర్మములు (Properties)

(i) సదిశా లబ్ధము వినిమయ ధర్మమును పాటించదు

నిర్వచనము నుండి,

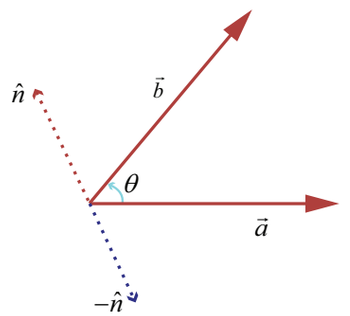
$$\vec{b}\times\vec{a} = |\vec{b}||\vec{a}|\sin\theta(-\hat{n})$$

$[\vec{b},\vec{a},-\vec{n}$ అనునది కుడి చేతి వ్యవస్థ వుండిన$]$

$$= -|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}$$

$$= -(\vec{a}\times\vec{b})$$

కావున సదిశా లబ్ధము వినిమయము కాదు.



పటము 8.45

(ii) రెండు సదిశలు సమాంతరము లేక సరేఖీయాలు అయిన $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ (ఎట్లు?)

కాని $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Rightarrow \vec{a}=\vec{0}$ లేక $\vec{b}=\vec{0}$ లేక $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ లు సమాంతరము.

(iii) $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ అను ఏదేని రెండు శూన్యేతర సదిశలకు $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow \vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ లు సమాంతరము.

ఉత్పాదకము

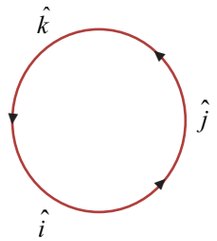
దీని నుండి $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$ అని పొందవచ్చును.

(iv) $\hat{i},\hat{j}$ and $\hat{k}$ అను వాటి నిర్వచనము నుండి (ఇవి కుడిచేతి వ్యవస్థలో యుండిన) క్రింది ఫలితములు లభించును.

$$\hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{k} = \vec{0}$$

$$\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k}\ ;\ \hat{j}\times\hat{k}=\hat{i}\ ;\ \hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$$

$$\hat{j}\times\hat{i}=-\hat{k}\ ;\ \hat{k}\times\hat{j}=-\hat{i}\ ;\ \hat{i}\times\hat{k}=-\hat{j}\quad (\text{ఎట్లు?})$$



పటము 8.46

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_8.indd 82 5/10/2022 10:56:43 AM

(v) $\theta = \frac{\pi}{2}$ అయిన, $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\hat{n}$.

(vi) ఏదేని రెండు అదిశలు m మరియు n లకు

$$m\vec{a} \times n\vec{b} = mn(\vec{a} \times \vec{b}) = (mn\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (mn\vec{b}) = n\vec{a} \times m\vec{b} .$$

(vii) సదిశ లబ్ధము సంకలనం మీద విభాగ ధర్మమును పూర్తి చేయును.

అంటే, $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$

$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c})$.

ఈ ధర్మమును వ్యవకలనం మరియు రెండుకన్నా ఎక్కువ సదిశలకునూ విస్తరింపజేయవచ్చును.

అంటే, $\vec{a} \times (\vec{b} - \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) - (\vec{a} \times \vec{c})$

$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{a} \times \vec{d})$.

(viii) క్రాస్ లబ్ధమును కనుగొనుటకు కృత్య నియమము

$$\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k} , \quad \vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k} .$$

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}) \times (b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}) \\ &= a_1b_1(\hat{i} \times \hat{i}) + a_1b_2(\hat{i} \times \hat{j}) + a_1b_3(\hat{i} \times \hat{k}) + a_2b_1(\hat{j} \times \hat{i}) \\ &\quad + a_2b_2(\hat{j} \times \hat{j}) + a_2b_3(\hat{j} \times \hat{k}) + a_3b_1(\hat{k} \times \hat{i}) + a_3b_2(\hat{k} \times \hat{j}) + a_3b_3(\hat{k} \times \hat{k}) \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)\hat{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\hat{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{k}\end{aligned}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} .$$

(ix) $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ కు మధ్యగల కోణము θ అయిన $\theta = \sin^{-1}\left[\frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right]$

దీని నిరూపణను అభ్యాసము కొరకు వదలబడియున్నది.

గమనిక 8.7

ఈ సందర్భంలో θ ఎల్లప్పుడు అల్పకోణముగా ఉండును. కావున సదిశా లబ్ధమునుపయోగించి రెండు సదిశలకు మధ్యగల కోణమును కనుగొనునపుడు ఎల్లప్పుడు అల్పకోణము మాత్రమే మనకు లభించును. కావున కోణములను కనుగొనుటకు బిందు లబ్ధమును ఉపయోగించుటయే శ్రేష్ఠమైనది. దీని నుండి θ ఏర్పడు స్థానమును తెలుసుకొనవచ్చును.

(x) $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ లకు లంబముగా గల యూనిట్ సదిశలు $\pm\hat{n} = \pm\frac{(\vec{a} \times \vec{b})}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$ (ఎలా?)

$\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ లకు లంబముగా λ పరిమాణము గల సదిశలు $\pm\lambda\hat{n} = \pm\lambda\frac{(\vec{a} \times \vec{b})}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$.

ఉదాహరణ 8.20

$\vec{a} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ మరియు $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ అయిన $|\vec{a} \times \vec{b}|$ యొక్క విలువను కనుగొనుము..

సాధన

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i}(4-0) - \hat{j}(3-0) + \hat{k}(3-4) = 4\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k} .$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |4\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}| = \sqrt{16+9+1} = \sqrt{26} .$$

ఉదాహరణ 8.21

$\vec{a} = -3\hat{i} + 4\hat{j} - 7\hat{k}$ మరియు $\vec{b} = 6\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ అయిన, క్రిందివాటిని సరిచూడుము

(i) $\vec{a}$ మరియు $\vec{a} \times \vec{b}$ అనునవి ఒకదానికొకటి లంబముగా ఉండును.

(ii) $\vec{b}$ మరియు $\vec{a} \times \vec{b}$ అనునవి ఒకదానికొకటి లంబముగా ఉండును.

సాధన

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & 4 & -7 \\ 6 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \hat{i}(-12+14) - \hat{j}(9+42) + \hat{k}(-6-24) = 2\hat{i} - 51\hat{j} - 30\hat{k}$$

(i) $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (-3\hat{i} + 4\hat{j} - 7\hat{k}) \cdot (2\hat{i} - 51\hat{j} - 30\hat{k}) = -6 - 204 + 210 = 0$.

కావున, $\vec{a}$ మరియు $\vec{a} \times \vec{b}$ అనునవి ఒకదానికొకటి లంబమైనవి.

(ii) $\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (6\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) \cdot (2\hat{i} - 51\hat{j} - 30\hat{k}) = 12 - 102 + 90 = 0.$

కావున, $\vec{b}$ మరియు $\vec{a} \times \vec{b}$ అనునవి ఒకదానికొకటి లంబమైనవి.

ఉదాహరణ 8.22

$\vec{a} = 4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ మరియు $\vec{b} = -2\hat{i} + j - 2\hat{k}$ అయిన, రెండు సదిశలకు లంబంగా 6 పరిమాణము గల సదిశలను కనుగొనుము.

సాధన

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \hat{i}(2-3) - \hat{j}(-8+6) + \hat{k}(4-2) = -\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$$

$\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ లకు లంబముగా గల యూనిట్ సదిశలు $\pm \dfrac{(\vec{a} \times \vec{b})}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = \pm \left[\dfrac{-\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}}{3} \right]$

$\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ లకు లంబముగా పరిమాణము 6 గల సదిశలు $\pm 2(-\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$.

ఉదాహరణ 8.23

$\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ మరియు $\vec{b} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ అనువాటికి మధ్యగల కొసైన్ మరియు సైన్ కోణములను కనుగొనుము.

సాధన

$\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ కు మధ్యగల కోణము θ అనుకొనుము

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}) \cdot (4\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}) = 8 - 2 + 6 = 12$$

$$|\vec{a}| = |2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}| = \sqrt{14} \quad ; \quad |\vec{b}| = |4\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}| = \sqrt{24}$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{12}{\sqrt{14}\sqrt{24}} = \sqrt{\frac{3}{7}}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \hat{i}(2+6) - \hat{j}(4-12) + \hat{k}(-4-4) = 8\hat{i} + 8\hat{j} - 8\hat{k}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |8\hat{i} + 8\hat{j} - 8\hat{k}| = 8\sqrt{3}$$

$$\sin\theta = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{14}\sqrt{24}} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{7}\sqrt{12}} = \frac{2}{\sqrt{7}}.$$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_8.indd 84 5/10/2022 10:56:44 AM

ఉదాహరణ 8.24

$\vec{a} = 3\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$ మరియు $\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ లను ఆసన్న భుజములుగా గల సమాంతర చతుర్భుజము యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనుము..

సాధన

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i}(1+4) - \hat{j}(3-4) + \hat{k}(-3-1) = 5\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k} \ .$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |5\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}| = \sqrt{42}$$

సమాంతర చతుర్భుజపు వైశాల్యము $\sqrt{42}$ చ.ప్రమాణములు

ఉదాహరణ 8.25

$\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ అను ఏదేని రెండు సదిశలకు, $|\vec{a}\times\vec{b}|^2 + (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 \ |\vec{b}|^2$ అని నిరూపించుము.

సాధన

$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ మరియు $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ అని మనకు తెలియును

$$|\vec{a}\times\vec{b}|^2 + (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 \ |\vec{b}|^2 \sin^2\theta + |\vec{a}|^2 \ |\vec{b}|^2 \cos^2\theta$$

$$= |\vec{a}|^2 \ |\vec{b}|^2 (\sin^2\theta + \cos^2\theta) = |\vec{a}|^2 \ |\vec{b}|^2 .$$

ఉదాహరణ 8.26

$A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$ అను బిందువులను శీర్షములుగా గల త్రిభుజము యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనుము.

సాధన

మనము ఇప్పుడు త్రిభుజపు ఏదేని రెండు భుజములను కనుకొందాము.

$$\overrightarrow{AB} = -\hat{i} + \hat{j} \ ; \ \overrightarrow{AC} = -\hat{i} + \hat{k}$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$$

$$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3}$$

త్రిభుజము ABC యొక్క వైశాల్యము $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

గమనిక 8.8

$\overrightarrow{AB}$ మరియు $\overrightarrow{AC}$ లకు బదులుగా ఏ రెండు భుజములనైన తీసుకొనవచ్చును.

అభ్యాసము 8.4

(1) $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ మరియు $\vec{b} = 3\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k}$ అయిన, $\vec{a}\times\vec{b}$ యొక్క పరిమాణము (magnitude) ను కనుగొనుము.

(2) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) + \vec{b}\times(\vec{c}+\vec{a}) + \vec{c}\times(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{0}$ అని చూపుము.

(3) $\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ మరియు $\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ అను సదిశలు గల తలమునకు లంబముగాను పరిమాణము $10\sqrt{3}$ గల సదిశలను కనుగొనుము.

(4) $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ మరియు $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$. అయిన, $\vec{a} + \vec{b}$ మరియు $\vec{a} - \vec{b}$ అనువాటిని విడివిడిగా లంబముగా గల యూనిట్ సదిశలను కనుగొనుము.

(5) $\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ మరియు $3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ అను రెండు సదిశలు ఆసన్న భుజములుగా గల సమాంతర చతుర్భుజము యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనుము.

(6) $A(3,-1,2)$, $B(1,-1,-3)$ మరయు $C(4,-3,1)$ అను శీర్షములు గల త్రిభుజము యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనుము.

(7) త్రిభుజము ABC యొక్క శీర్షములు A, B, C యొక్క స్థాన సదిశలు వరుసగా $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ అయిన, త్రిభుజము ABC యొక్క వైశాల్యము $\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}|$ అని నిరూపించి, దీని నుండి A, B, C అను బిందువులు సరేఖీయలగుటకు నిబంధనను కనుగొనుము.

(8) ఏ ఒక్క సదిశ $\vec{a}$ కు $|\vec{a}\times\hat{i}|^2+|\vec{a}\times\hat{j}|^2+|\vec{a}\times\hat{k}|^2=2|\vec{a}|^2$ అని నిరూపించుము.

(9) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ అను యూనిట్ సదిశలకు $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=0$ మరియు $\vec{b}$ కు $\vec{c}$ మధ్యగల కోణం $\frac{\pi}{3}$ అయిన, $\vec{a}=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}(\vec{b}\times\vec{c})$ అని నిరూపించుము.

(10) $2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ మరియు $\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ అనునవి సదిశలకు మధ్యగల కోణమును సదిశల లబ్ధమును ఉపయోగించి కనుగొనుము.

అభ్యాసము 8.5

T2R1Y

సరియైన లేక మిక్కిలి సరిపోవు సమాధానమును ఇవ్వబడిన నాలుగు ప్రత్యామ్నాయ సమాధానముల నుండి ఎన్నుకొనుము.

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CA}$ యొక్క విలువ

(1) $\overrightarrow{AD}$ (2) $\overrightarrow{CA}$ (3) $\vec{0}$ (4) $-\overrightarrow{AD}$

(2) $\vec{a}+2\vec{b}$ మరియు $3\vec{a}+m\vec{b}$ అనునవి సమాంతరమైన m యొక్క విలువ

(1) 3 (2) $\frac{1}{3}$ (3) 6 (4) $\frac{1}{6}$

(3) $\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ మరియు $\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ అను సదిశల మొత్తమునకు సమాంతరముగా గల యూనిట్ సదిశ

(1) $\frac{\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}}{\sqrt{5}}$ (2) $\frac{2\hat{i}+\hat{j}}{\sqrt{5}}$ (3) $\frac{2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}}{\sqrt{5}}$ (4) $\frac{2\hat{i}-\hat{j}}{\sqrt{5}}$

(4) ఒక సదిశ $\overrightarrow{OP}$ అనునది x మరియు y అక్షముల యొక్క ధనాత్మక దిశలో క్రమముగా $60°$ మరియు $45°$ లను ఏర్పరచుచున్నది. $\overrightarrow{OP}$ అనునది z-అక్షముతో ఏర్పరచు కోణం

(1) $45°$ (2) $60°$ (3) $90°$ (4) $30°$

(5) $\overrightarrow{BA}=3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ మరియు B యొక్క స్థాన సదిశ $\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}$, అయిన A యొక్క స్థానసదిశ

(1) $4\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ (2) $4\hat{i}+5\hat{j}$ (3) $4\hat{i}$ (4) $-4\hat{i}$

(6) ఒక సదిశ నిరూపాక్షములతో సమానకోణమును ఏర్పరచినచో ఆ కోణం

(1) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ (2) $\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ (3) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (4) $\cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_8.indd 86 5/10/2022 10:56:45 AM

(7) $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{c}-\vec{a}$ అను సదిశలు

(1) ఒకదానికొకటి సమాంతరమైనవి (2) యూనిట్ సదిశలు

(3) పరస్పర లంబ సదిశలు (4) సతలీయముల సదిశలు

(8) $ABCD$ ఒక సమాంతర చతుర్భుజమైన, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}$ అనునది

(1) $2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$ (2) $4\overrightarrow{AC}$ (3) $4\overrightarrow{BD}$ (4) $\vec{0}$

(9) $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ లను భుజములుగా గల సమాంతర చతుర్భుజం $ABCD$ యొక్క ఒక కర్ణము $\vec{a}+\vec{b}$. అయిన మరొక కర్ణము $\overrightarrow{BD}$ అనునది

(1) $\vec{a}-\vec{b}$ (2) $\vec{b}-\vec{a}$ (3) $\vec{a}+\vec{b}$ (4) $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

(10) A, B స్థాన సదిశలు $\vec{a},\vec{b}$ అయిన, ఈ క్రింది కనబడు స్థాన సదిశలలో ఏ స్థాన సదిశ యొక్క బిందువు AB అను రేఖమీద ఉంటుంది.

(1) $\vec{a}+\vec{b}$ (2) $\frac{2\vec{a}-\vec{b}}{2}$ (3) $\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$ (4) $\frac{\vec{a}-\vec{b}}{3}$

(11) $\vec{a}$, $\vec{b}$,$\vec{c}$ అనునవి సరేఖీయంగా ఉండు మూడు బిందువుల యొక్క స్థాన సదిశలు అయిన క్రింది వాటిలో ఏది సరియైనది?

(1) $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$ (2) $2\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$ (3) $\vec{b}=\vec{c}+\vec{a}$ (4) $4\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$

(12) P అను బిందువు యొక్క స్థాన సదిశ $\vec{r}=\frac{9\vec{a}+7\vec{b}}{16}$, అనుకొనుము. P అనునది $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ లను స్థానసదిశలుగా గల బిందువులను కలుపు రేఖను విభజించు నిష్పత్తి

(1) 7 : 9 అంతరముగా (2) 9 : 7 అంతరముగా (3) 9 : 7 బాహ్యంగా (4) 7 : 9 బాహ్యంగా

(13) $\lambda\hat{i}+2\lambda\hat{j}+2\lambda\hat{k}$ అనునది ఒక యూనిట్ సదిశ అయిన, λ యొక్క విలువ

(1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{4}$ (3) $\frac{1}{9}$ (4) $\frac{1}{2}$

(14) ఒక త్రిభుజము యొక్క రెండు శీర్షబిందువుల స్థాన సదిశలు $3\hat{i}+4\hat{j}-4\hat{k}$ మరియు $2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$. గురుత్వకేంద్రము (కేంద్రాభ్యాసము) యొక్క స్థాన సదిశ $\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$, అయిన, మూడవ శీర్షబిందువు యొక్క స్థాన సదిశ

(1) $-2\hat{i}-\hat{j}+9\hat{k}$ (2) $-2\hat{i}-\hat{j}-6\hat{k}$ (3) $2\hat{i}-\hat{j}+6\hat{k}$ (4) $-2\hat{i}+\hat{j}+6\hat{k}$

(15) $|\vec{a}+\vec{b}|=60, |\vec{a}-\vec{b}|=40$ మరియు $|\vec{b}|=46$, అయిన, $|\vec{a}|$ యొక్క విలువ

(1) 42 (2) 12 (3) 22 (4) 32

(16) $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ ఒకే పరిమాణమును కలిగి మరియు వీటి మధ్య కోణము 60° మరియు వీటి అదిశల లబ్ధము $\frac{1}{2}$ అయిన, $|\vec{a}|$ యొక్క విలువ

(1) 2 (2) 3 (3) 7 (4) 1

(17) $\vec{a}=(\sin\theta)\hat{i}+(\cos\theta)\hat{j}$ మరియు $\vec{b}=\hat{i}-\sqrt{3}\hat{j}+2\hat{k}$ అనునవి లంబముగా ఉండి $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ అయిన, θ యొక్క విలువ

(1) $\frac{\pi}{3}$ (2) $\frac{\pi}{6}$ (3) $\frac{\pi}{4}$ (4) $\frac{\pi}{2}$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_8.indd 87 5/10/2022 10:56:45 AM

(18) $|\vec{a}|=13, |\vec{b}|=5$ మరియు $\vec{a}\cdot\vec{b}=60°$ అయిన, $|\vec{a}\times\vec{b}|$ యొక్క విలువ

(1) 15 (2) 35 (3) 45 (4) 25

(19) $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ లకు మధ్యగల కోణము 120°. $|\vec{a}|=1, |b|=2$ అయిన, $[(\vec{a}+3\vec{b})\times(3\vec{a}-\vec{b})]^2$ యొక్క విలువ

(1) 225 (2) 275 (3) 325 (4) 300

(20) $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ ల పరిమాణము 2. వీటి మధ్యగల కోణము 60°. అయిన $\vec{a}$ మరియు $\vec{a}+\vec{b}$ ల మధ్యగల కోణము

(1) 30° (2) 60° (3) 45° (4) 90°

(21) $\hat{i}+3\hat{j}+\lambda\hat{k}$ మీద $5\hat{i}-\hat{j}-3\hat{k}$ యొక్క లంబ విక్షేపము $5\hat{i}-\hat{j}-3\hat{k}$ మీద $\hat{i}+3\hat{j}+\lambda\hat{k}$ యొక్క లంబ విక్షేపమునకు సమానమయిన λ యొక్క విలువ

(1) ± 4 (2) ± 3 (3) ± 5 (4) ± 1

(22) $\hat{i}+5\hat{j}-7\hat{k}$ అను సదిశ యొక్క ప్రారంభ మరియు చివరి బిందువులు $(1, 2, 4)$ మరియు $(2, -3\lambda-3)$ అయిన, λ యొక్క విలువ

(1) $\frac{7}{3}$ (2) $-\frac{7}{3}$ (3) $-\frac{5}{3}$ (4) $\frac{5}{3}$

(23) $10\hat{i}+3\hat{j}$, $12\hat{i}-5\hat{j}$ మరియు $a\hat{i}+11\hat{j}$ అను స్థాన సదిశల బిందువులు సరేఖీయాలు అయిన a యొక్క విలువ

(1) 6 (2) 3 (3) 5 (4) 8

(24) $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{b}=2\hat{i}+x\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{c}=\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}$ మరియు $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=70$ అయిన x యొక్క విలువ

(1) 5 (2) 7 (3) 26 (4) 10

(25) $\vec{a}=\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}, |\vec{b}|=5$ ఇంకా $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ లకు మధ్యగల కోణము $\frac{\pi}{6}$ అయిన ఈ రెండు సదిశలను రెండు భుజములుగా గల త్రిభుజము యొక్క వైశాల్యము

(1) $\frac{7}{4}$ (2) $\frac{15}{4}$ (3) $\frac{3}{4}$ (4) $\frac{17}{4}$

సారాంశము

ఈ అధ్యాయములో ఈ క్రింది జ్ఞానమును మనము సంపాదించాము.

- ఒక రాశిని దాని యొక్క పరిమాణంతో నిర్ధారించబడిన దానిని **అదిశ** అంటారు.
- పరిమాణము మరియు దిశ అను రెండింటితో నిర్ధారించబడిన రాశినే **సదిశ** అంటారు.
- ఏ ఒక్క బిందువునైనా ఒక సదిశ యొక్క ఆదిబిందువుగా ఎన్నుకోగలిగిన ఆ సదిశను స్వేచ్ఛా సదిశ **free vector** అంటారు. ఆ బిందువును ఒక నిర్దిష్ట బిందువును నియంత్రించిన ఆ సదిసను స్థానికరణ **localized** సదిశ అంటారు.
- ఒకే తలము మీద గల లేక అదే తలములకు సమాంతరముగా గల రెండు లేక అంతకన్నా ఎక్కువ సదిశలును **సతలీయములు** అంటారు.
- రెండు సదిశలు ఒకే పరిమాణము మరియు ఒకే దిశను కలిగియుండిన వాటిని **సమసదిశలు** అంటారు.
- ఒక సదిశపు పరిమాణము 0 అయిన అది **శూన్య సదిశ** అగును.
- ఒక సదిశపు పరిమాణము 1 అయిన అది **యూనిట్ సదిశ** అగును.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_8.indd 88 5/10/2022 10:56:46 AM

- $\vec{a}$ అనునది ఏదేని ఒక సదిశ m ఒక అదిశ అయిన, $m\vec{a}$ అనేది సదిశ $\vec{a}$ తో అదిశ m **యొక్క అదిశ గుణకారము** అంటారు.
- $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ అను రెండు సదిశలకు $\vec{a}=\lambda\vec{b}$ అయిన అవి సమాంతరాలు ఇక్కడ λ ఒక అదిశ.
- $\vec{a},\vec{b}$ మరియు $\vec{c}$ అనునవి క్రమంగా ఒక త్రిభుజము యొక్క భుజములు అయిన, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$
- సదిశా సంకలనము సహచర్య న్యాయమును పాటించును.
- ఏదీని ఒక సదిశ $\vec{a}$, కు, $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$ అగును.
- ఏదీని ఒక సదిశ $\vec{a}$, కు, $\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}.$ అగును
- సదిశా సంకలనము వినిమయమగును
- రెండు సదిశలు వాటి పరిమాణములోను, దిశలోనూ ఒక త్రిభుజము యొక్క రెండు భుజాలుగా ఒక క్రమంలో తీసుకొంటే వాటి మొత్తమును వ్యతిరేఖ క్రమంలో మూడవ భుజాలచే సూచించబడును. ఇదియే సంకలనం యొక్క త్రిభుజన్యాయము **(triangle law of addition)**
- $OABC$ అను సమాంతర చతుర్భుజములో $\overrightarrow{OA}$ మరియు $\overrightarrow{OB}$ అనునవి ఆసన్న భుజములయిన, దాని కర్ణము $\overrightarrow{OC}$ వీటి మొత్తమును సూచించును. ఇదియే సంకలనం యొక్క సమాంతర చతుర్భుజము న్యాయము **(parallelogram law of addition)**
- α,β,γ అనునవి దిశాకోణములు అయిన, $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ అనునవి దిశాకోసైన్‌లు అగును.
- $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ అను సదిశ యొక్క దిశా నిష్పత్తులు x,y,z అగును..
- $\vec{a},\vec{b}$ మరియు $\vec{c}$ అనునవి ఒక అంతరాళంలో సతలీయాలు కాని సదిశలు అయిన, అంతరాళంలోని ఏదేని సదిశను $l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}$ గా ఏకైక పద్ధతిలో వ్రాయవీలగును. ఏదేని ఒక బిందువు యొక్క స్థాన సదిశ $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ మరియు $\vec{r}$ యొక్క దిశాకోణములు α,β,γ అయిన,

(i) $\vec{r}$ యొక్క దిశాకోసైన్‌ల వర్గముల మొత్తము 1.

(ii) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2$.

(iii) $\vec{r}$ యొక్క దిశాకోసైన్‌లు $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

(iv) l,m,n అనునవి ఒక సదిశ యొక్క దిశాకోసైన్‌లు అయినప్పుడు మాత్రమే $l^2+m^2+n^2=1$.

(v) ఏదేని ఒక యూనిట్ సదిశను $\cos\alpha\hat{i}+\cos\beta\hat{j}+\cos\gamma\hat{k}$ అని వ్రాయవచ్చును..

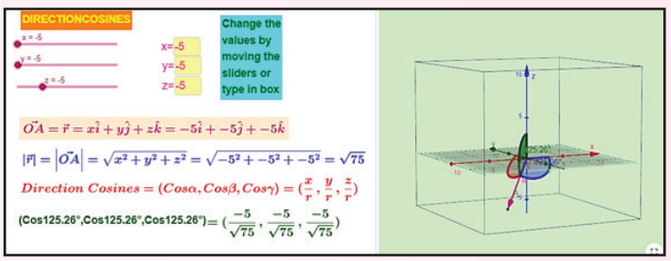
- $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ అను సదిశల యొక్క **అదిశాలబ్ధము** $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ అగును.
- $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ అను సదిశల యొక్క **సదిశాలబ్ధము** $\vec{a}\times\vec{b}$ అని గుర్తించి $\vec{a}\times\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}$, అగును. ఇక్కడ θ అనునది . $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ లకు మధ్యగల కోణము $0\le\theta\le\pi$ ఇక్కడ $\vec{a},\vec{b},\hat{n}$ అనునవి కుడిచేతి వ్యవస్థంంను ఏర్పరచును.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_8.indd 89 5/10/2022 10:56:47 AM

సదిశ బీజగణితము

అంతర్జాల కృత్యము 8(a)

ఆశించు ఘాతము

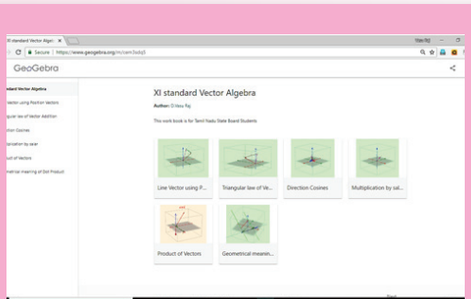


సోపానము 1

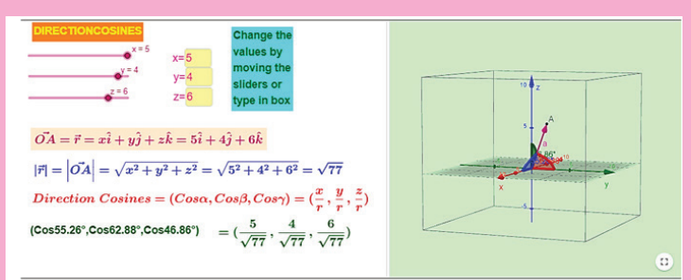
Browser ను Open చేసి URL లింక్‌ను టైప్ చేయుము (లేక) QR కోడ్‌ను స్కాన్ చేయుము. GeoGebra పనిపుస్తకము “XI Standard Vector Algebra” అను పేజి కనిపించును. అందులో మీ పాఠ్యాంశమునకు సంబంధించిన పలు పని కాగితములు ఈ పేజీలో ఇవ్వబడియుండును.

సోపానము 2

“Direction Cosines” అను అభ్యాస కాగితమును ఎంపిక చేయుము. కుడివైపు 3-D ఆకారము కనపడును. 3-D ఆకారమును మౌసును ఉపయోగించి వివిధ స్థానములకు త్రిప్పుము. స్లైడర్స్‌ను జరిపించి లేక x, y మరియు z విలువలను నమోదుచేసి సదిశను మార్చవచ్చును.



సోపానము 1



సోపానము 2

Browse in the link:

https://ggbm.at/cem3sdq5

“పటములు గుర్తింపునకు మాత్రము”

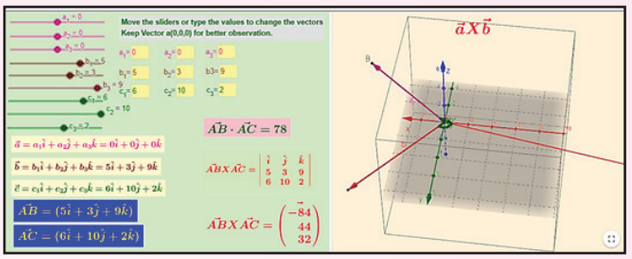
11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_8.indd 90 5/10/2022 10:56:48 AM

సదిశ బీజగణితము

అంతర్జాల కృత్యము 8(b)



ఆశించు ఘాతము

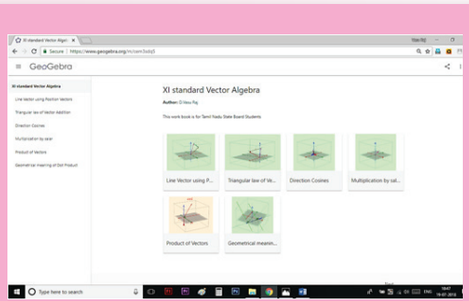


సోపానము 1

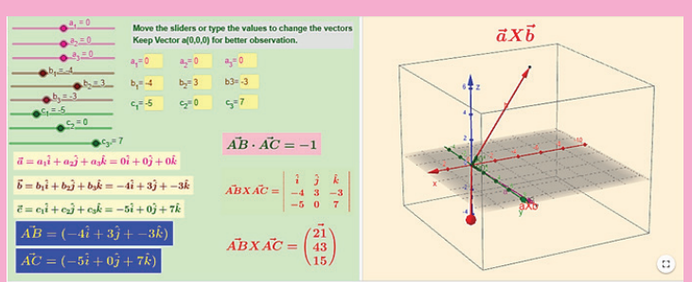
Browser ను Open చేసి URL లింక్‌ను టైప్ చేయుము (లేక) QR కోడ్‌ను స్కాన్ చేయుము. GeoGebra వర్క్‌షీట్స్ “XI Standard Vector Algebra” అను పేజి కనిపించును. అందులో మీ పాఠ్యాంశమునకు సంబంధించిన పలు వర్క్‌షీట్స్ ఈ పేజీలో ఇవ్వబడియుండును.

సోపానము 2

“Product of Vectors”. అను అభ్యాస కాగితమును ఎంపిక చేయుము. కుడివైపు 3-D ఆకారము కనపడును. 3-D ఆకారము మౌసును ఉపయోగించి వివిధ స్థానములకు త్రిప్పుము. స్లైడర్స్‌ను జరిపించి లేక x, y మరియు z విలువలను నమోదుచేసి సదిశను మార్చవచ్చును. (బాగుగా అర్థమగుటకు a_1, a_2, మరియు a_3 విలువలను మార్చకూడదు. ABXAC కోసం అంశములు లంబముగా ఇవ్వబడును)



సోపానము 1



సోపానము 2

Browse in the link:

https://ggbm.at/cem3sdq5

“పటములు గుర్తింపునకు మాత్రము”

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_8.indd 91 5/10/2022 10:56:48 AM

అధ్యాయము 9

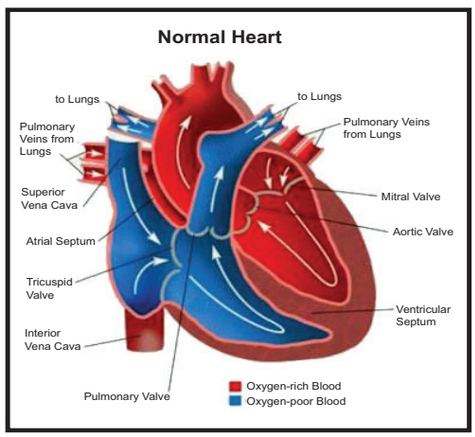
అవకలన గణితము – అవధులు మరియు అవిచ్ఛిన్నత

"మానవ జీవితము అశాశ్వతము, అయితే అతని సాధనలు శాశ్వతము"

– అగష్టిన్ -లూయిస్ కాచి

9.1 పరిచయము

కలన గణితము అనునది మార్పురేటునకు సంబంధించినది. విజ్ఞానశాస్త్రపు అన్ని విభాగముల యందు మార్పురేటు గలదు. ఒక గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు వక్రరేఖపై ఏదేని ఒక బిందువు వద్ద అమరియుండు సరళరేఖ మార్పు రేటును గణించుటలో ఆసక్తిగా యుండును. అదే సమయంలో ఒక భౌతిక శాస్త్రవేత్త చలనములో యుండు వస్తువు యొక్క స్థానభ్రంశము మరియు దిశావేగములలో ఏర్పడు మార్పురేటును గణించుటకు ఆసక్తి కనబరుచుచున్నాడు. ఒక రసాయనిక శాస్త్రవేత్త క్రియాజనకముల నుండి క్రియాజనితములు ఏర్పడు రసాయనిక చర్యలో మార్పురేటును తెలుసుకొనుటకు ఆశపడును.



ఒక జీవశాస్త్రవేత్త, జంతు జనాభా లేదా మొక్కల జనాభాలో ఏదోక సమయంలో విడివిడిగా వాని సంఖ్యలో వచ్చిన మార్పులను విశ్లేషించుటకు ఆసక్తి కనబరుచును. ఇంకనూ అతను సిర లేదా ధమని వంటి రక్తనాళములలో ప్రవహించు రక్త ప్రవాహ రేటును తెలుసుకొనుటకు మరియు సిరలు / ధమనులలో ఏ భాగములో ఈ ప్రవాహం కనిష్ఠంగా లేదా గరిష్ఠంగా గలదని కనుగొనుటకు ఆసక్తి కనపరుస్తారు.

ఒక అర్థశాస్త్రవేత్త, డిమాండ్ (గిరాకి), రెవిన్యూ (రాబడి) మరియు లాభ ప్రమేయాలలో వచ్చు మార్పురేటులు (అది అవకలనములు) అయిన ఉపాంత (అదనపు) డిమాండు, ఉపాంత రెవిన్యూ మరియు ఉపాంత లాభములను అధ్యయనం చేస్తారు.

ఒక భూగర్భ శాస్త్రజ్ఞుడు, కరిగిన రాతి శిలలు చుట్టు ప్రక్కల గల రాళ్ళతో ఉష్ణసంగ్రహణము చెంది చల్లబడు రేటును కనుగొనుటలో ఆసక్తి కనబరుచును. ఒక ఇంజనీరు, ఆనకట్టలోనికి లేదా వెలుపలకు వెళ్ళు నీటి ప్రవాహ రేటు కనుగొనుటకు ఆసిక్తి చూపును. ఒక నగరపు భూగోళ శాస్త్రవేత్త నగర విస్తరింపుతో బాటు



జనసాంద్రతలో ఏర్పడు మార్పురేటును కనుగొనుటలో ఆసక్తి కనబరుచును. ఒక ఖగోళ (వాతావరణ) శాస్త్రవేత్త ఎత్తుతో పాటు ఏర్పడు వాతావరణ పీడనములోని మార్పురేటును కనుగొనుటకు ప్రయత్నించును.



మనోవిజ్ఞాన శాస్త్రములో అభ్యసనా సిద్ధాంతముపై ఆసక్తిగలవారు, అభ్యసనా వక్రరేఖను గూర్చి చదివెదరు. ఇది ఒక వ్యక్తి యొక్క శిక్షణ (తర్ఫీదు) కాలముననుసరించి అభ్యసనా సామర్థ్యపు ప్రావీణ్యతను రేఖాచిత్రములో

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_9.indd 92 11/05/2022 16:04:49

తెలియజేయునది అగును. కాలమును అనుసరించి అభ్యసనా సామర్థ్యపు వృద్ధిరేటును తెలుసుకొనుటకు ఆసిక్తి కనబరుస్తారు.

మనము ఒక చీకటి గదిలోనికి ప్రవేశించినప్పుడు, మన కళ్ళు తక్కువైన వెలుగునకు తగినట్లుగా కనుపాప పెద్దదగునట్లుగా సర్దుబాటు చేసుకొనును. ఈ సర్దుబాటు ద్వారా కాంతి (వెలుతురు) అధికముగా కళ్ళలోనికి అనుమతించుట మూలముగా చుట్టుప్రక్కలా గల వస్తువులను చూచుటకు వీలగును. దానికి విరుద్ధముగా మనము అధిక కాంతివంతమైన గదిలోనికి ప్రవేశించునపుడు అధిక వెలుతురును చూచుటకు వీలుకాదు కనుక తక్కువ వెలుతురు కంటిలో ప్రవేశించునట్లు కన్నుపాపను సర్దుబాటు చేసుకొనును.

పరిశోధకులు ఈ విధమైన యాంత్రికతను అవధుల ఆధారంగా అధ్యయనం చేస్తారు. భౌతికశాస్త్రములో దిశావేగము, సాంద్రత, విద్యుత్ శక్తి, సామర్థ్యము మరియు ఉష్ణోగ్రత మార్పు, రసాయన శాస్త్రములో రసాయనిక చర్యలో మార్పురేటు మరియు సంపీడ్యతను(నొక్కుటకు అణచుటకు వీలు గల), జీవశాస్త్రములో పెరుగుదల రేటు మరియు రక్తవేగమును, ఆర్థికశాస్త్రములో ఉపాంతవ్యయం మరియు ఉపాంత లాభము, భౌగోళశాస్త్రములో ఉష్ణప్రవాహ మార్పురేటును, మనోవికాస శాస్త్రములో ప్రావీణ్యత యొక్క పెరుగుదల రేటు మొదలగు అన్నియు అవకలనము అను ఒకే ఒక గణిత భావన అగును.

గణిత శక్తి అను భాగము దాని యొక్క అమూర్తీకరణలో ఉంటుందని అను వాస్తవికతను ఇది తెలియచేయును ఒక ఏక అమూర్త గణిత భావనకు(అవకలనులు వంటి) ప్రతి విజ్ఞాన శాస్త్రంలో విభిన్న వివరణలు గలదు. మనము గణిత భావనలను అభివృద్ధి పరచునప్పుడు వాటి ఫలితములు విజ్ఞాన శాస్త్రపు ఒక్కొక్క విభాగము నందు రూపొందించు ప్రత్యేక భావనల కంటే ప్రభావితమైనదిగా యుండును.

ప్రాచీన కాలపు గొప్ప సృష్టిలలో ఒకటి యూక్లిడ్ జ్యామితి అగును. దాదాపు రెండువేల సంవత్సరాల తర్వాత కలన గణితం కనుగొను వరకు ఈ కళాఖండము యొక్క ముఖ్యత్వము తెలియలేదు.



అగష్టిన్ – లూయిస్ కాచి
(1789 – 1857)

అవకలన గణితమును ఇంగ్లాడు నందు **సర్ ఐసక్ న్యూటన్** (1642–1727) చే మరియు జర్మనీ నందు **గాట్‌ఫ్రైడ్ విల్‌హెల్మ్ లిబ్నైస్** (1646–1716) చే 17వ శతాబ్ద చివరి దశలో ఇరువురు వేర్వేరుగా స్వతంత్రముగా రూపొందించిరి.

న్యూటన్ యొక్క గణిత ఆసక్తి ప్రారంభంనకు కారణము, ఆ కాలమందు అందుబాటులో యుండిన **"యూక్లిడ్ యొక్క Elements** మరియు "డెస్‌కార్టె యొక్క లా జ్యామెట్రిక్" అను గొప్ప గ్రంథములను చదువుటయే. ఆయన, తనకంటే ముందు జీవించిన గెలిలియో మరియు పెర్మాట్ మొదలైన గొప్ప శాస్త్రవేత్తల గూర్చియు వారి యొక్క ఆవిష్కరణల గూర్చియు తెలుసుకొనియుండెను.

1664వ సం॥పు చివరి కల్లా, న్యూటన్ ఆ కాలమునకు సంబంధించిన గణిత జ్ఞానమును విపులముగా పొందియుండెను మరియు పొందియున్న జ్ఞానమును ఇంకనూ దృఢపరుచుకొనుటకు పూనుకోనెను 1665లో అతను అవిచ్ఛిన్నంగా మార్పుకు లోనగు దూరములు లేక ఉష్ణోగ్రత మొదలగు వాటి యొక్క మార్పు రేటును గూర్చి అధ్యయనం చేయుట ప్రారంభించెను.

ఈ పరిశోధనల యొక్క ఫలితమే ఇప్పుడు మనము చూస్తున్న అవకలన గణితము ఇప్పుడు గణిత శాస్త్రమును అధ్యయనము చేయు ప్రతి ఒకరు ఐసక్ న్యూటన్ యొక్క పరిశోధనలను ఉపయోగిస్తున్నారు.

లిబ్నిట్జ్ యొక్క చాలా గణిత పరిశోధన వ్యాసములు అతడు 1682లో ప్రారంభించిన ఆక్టా ఇరుడిటోరమ్ **1682** అను సంచికలో ప్రచురింపబడినది. ఈ సంచికలో అతని యొక్క కలన గణితము గురించిన వ్యాసములు స్థానము పొందియుండెను. ఇదియే ఎవరు మొట్టమొదటగా కలన గణితమును కనుగొన్నారు అని న్యూటన్‌తో చేదు వివాదమునకు దారితీసినది. కలన గణితంలో ముఖ్యమైన ఫలితాలను లిబ్నిట్జ్ మొట్టమొదట ప్రచురించారు మరియు ప్రస్తుతము ప్రామాణికంగా గల సంకేతములును మొదట ఈయన ఉపయోగించారు.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_9.indd 93 11/05/2022 16:04:49

ఫారిస్‌లో 1789వ సంవత్సరములో జన్మించి 19వ శతాబ్దపు మొదటి అర్ధ భాగములో చాలా ప్రభావ వంతమైన గణిత విశ్లేషకుడుగా పేరుగాంచిన వారు **అగష్టిన్ - లూయిస్ గోసి** (1789-1857) గోసి కలన గణితమునకు అనేక సేవలను చేసియున్నారు. 1829లో వీరి యొక్క **లెకాన్స్ లెక్యాలెకులా, డిఫరెన్షియల్ 'Lecons le calcul differential'** అను పుస్తకములో మొట్టమొదటగా అవధులు గురించి సహేతుకంగా స్పష్టమైన నిర్వచనమును ఇచ్చారు. ఇంకనూ అవకలనమును వ్యత్యాసముల నిష్పత్తుల అవధిగా మొదట నిర్వచించారు.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \ .$$

జర్మన్ గణిత శాస్త్రవేత్త కార్గవెయిస్ట్రాస్ (1815-1897) అవధ, అవిచ్ఛిన్నము మరియు అవకలనీయత యొక్క భావనల ఖచ్చితమైన నిర్వచనంను $(\epsilon - \delta$ definition) ఇచ్చారు.

కలన గణితము **(What is Calculus?)** అంటే ఏమి?

రాశుల యొక్క మార్పు నిష్పత్తి యొక్క గణితమునే కలన గణితము అంటారు. ఇది స్పర్శరేఖలు, వాలులు, వైశాల్యములు, ఘనపరిమాణములు, చాపపొడవులు, గురుత్వకేంద్రం, వక్రరేఖల గణితము కూడా అగును మరియు శాస్త్రవేత్తలు, ఇంజనీర్లు మరియు ఆర్థికవేత్తలు నిత్యజీవిత పరిస్థితులకు కనుకొన్న వివిధ రకాల ఇతర భావనల గణితము కూడా కలన గణితము అగును.

కలన గణిత యొక్క వేగములు, త్వరణములు, స్పర్శరేఖలు, వాలులు మొదలగువానిని విశ్లేషించనప్పటికి పూర్వకలన గణితంకు మరియు కలనగణితంకు మధ్య ప్రాథమికంగా వ్యత్యాసము గలదు. పూర్వ కలన గణితము అనునది చాలా స్థిరమైనది, అదే సమయంలో కలన గణితము అనేది చాలా క్రియాశీలమైనది. ఇచ్చట కొన్ని ఉదాహరణలు ఇవ్వబడినది.

- ★ స్థిర వేగంతో చలిస్తున్న వస్తువును పూర్వ కలనగణితంతో విశ్లేషించవచ్చును. కాని త్వరణంతో చలిస్తున్న వస్తువు వేగమును విశ్లేషించుటకు మనకు కలన గణితము అవసరము.
- ★ ఒక రేఖ యొక్క వాలును పూర్వకలన గణితంతో విశ్లేషించవచ్చును కాని వక్రము యొక్క వాలును విశ్లేషించుటకు మనకు కలన గణితము అవసరము.
- ★ ఒక వృత్తము యొక్క స్పర్శరేఖను పూర్వకలన గణితంతో విశ్లేషించవచ్చును. కాని సాధారణ రేఖాచిత్రంనకు వాలు రేఖను విశ్లేషించుటకు, మనకు కలన గణితము అవసరము.
- ★ ఒక దీర్ఘచతురస్రంనకు వైశాల్యమును పూర్వకలన గణితంతో విశ్లేషించవచ్చును కాని ఒక వక్రంతో పరిబద్ధమైన వైశాల్యమును విశ్లేషించుటకు మనకు కలన గణితం అవసరము.

ఈ ప్రతి సందర్భంలోనూ ఒకే విధమైన సాధారణ వ్యూహము గలదు. అది ఒక అవధి ప్రక్రియను ఉపయోగించుట ద్వారా పూర్వకలన గణితము యొక్క సూత్రములను తిరిగి సూత్రీకరించుట అగును. కావున కలన గణితము అంటే ఏమి? అను ప్రశ్నకు, కలన గణితము అనునది మూడు దశలను కలిగిన 'అవధి యంత్రము' 'limit machine' అగును అని సమాధానంగా చెప్పవచ్చును. మొదటి దశ అనునది ఒక దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యము లేదా ఒక రేఖవాలు వంటి పూర్వ కలన గణితము అగును. అవధి ప్రక్రియ రెండవ దశగాను మరియు మూడవ దశ అనునది అవకలని మరియు సమాకలని వంటి ఒక ఆధునిక కలన గణిత సూత్రీకరణము అగును.

పూర్వకలన గణితము	$\Rightarrow$	అవధి ప్రక్రియ	$\Rightarrow$	కలన గణితము

కలన గణితంను ఒక ప్రక్రియగా కాక ఒక నూతన సూత్రాల సేకరణ అని తేలికగా నేర్చుకొనుటకు ప్రయత్నించేవారిని, అవగాహన, ఆత్మస్థైరము, మరియు సంతృప్తి లను కోల్పోతారని, హెచ్చరిస్తుంది.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_9.indd 94 11/05/2022 16:04:49

అభ్యసన లక్ష్యాలు

ఈ అధ్యాయము ముగింపులో విద్యార్థులు క్రింది వాటిని నేర్చుకొంటారని ఆశిస్తున్నాము.

- అవధి / అవిచ్ఛిన్నత భావనను రేఖాగణిత ప్రక్రియ ద్వారా దృశ్యమానం చేసుకొంటారు.
- అవధి / అవిచ్ఛిన్నత భావనను నిత్యజీవిత కృత్యములతో సంబంధపరచుకొంటారు.
- అవధి / అవిచ్ఛిన్నతను కలన గణితం యొక్క హృదయంగా మరియు ఆత్మగా గ్రహించగలరు.
- అవధి / అవిచ్ఛిన్నతను భౌతిక ప్రపంచంలో కొలుచుటకు / పరిమాణీకరించుట / గణీతీకరణ మార్పులు చేయు ఒక పరిక్రియగా అవగాహన చేసుకొంటారు.
- అవధి / అవిచ్ఛిన్నత భావనను వాస్తవిక నిత్యజీవిత పరిస్థితుల దృష్టాంతం ద్వారా బలపరుచుకొంటారు.

9.2 అవధులు (Limits)

9.2.1 అవధుల యొక్క గణనము (The calculation of limits)

నవీన గణితములోను, కలన గణితంలోను ముఖ్య పాత్ర వహించు అవధి గురించిన భావనలను ఈ అధ్యాయములో వివరముగా చూచెదము. గణితశాస్త్రము 3000 సంవత్సరము ముందటిది అయినను, 19వ శతాబ్దములో ఫ్రెంచ్ గణితశాస్త్రవేత్త అగస్టిన్ – లూయిస్ కోషి మరియు కార్ల్ వైయర్‌స్ట్రాస్ అనువారు కళాఖండ కృత్యమును కనుగొనేంతవరకు అవధి గురించి అవగాహన చేసుకోలేకపోయాము. ఈ అధ్యాయములో అవధి యొక్క నిర్వచనము మరియు వాటిని ఏ విధముగా లెక్కించుట అనుదానిని గమనించెదము.

వివరణ 9.1

F: R$\to$R ప్రమేయం $y = f(x) = x^2 + 3$. గా నిర్వచింపబడినదిగా తీసుకొందాము.

$x = 2$ అను బిందువు వద్ద ఈ ప్రమేయపు స్వభావం గురించి పరిశోధిదంచెదము. రెండు విధములైన x యొక్క విలువలను ఉపయోగించెదము. ఒకటి 2 యొక్క ఎడమ ప్రక్క నుండి (2 కన్నా తక్కువ విలువ గల) 2 వైపుకు చేరవగు విలువలు; మరొక 2 యొక్క కుడి ప్రక్క నుండి 2 వైపుకు చేరువగు విలువలు (2 కన్నా ఎక్కువ విలువ గల)

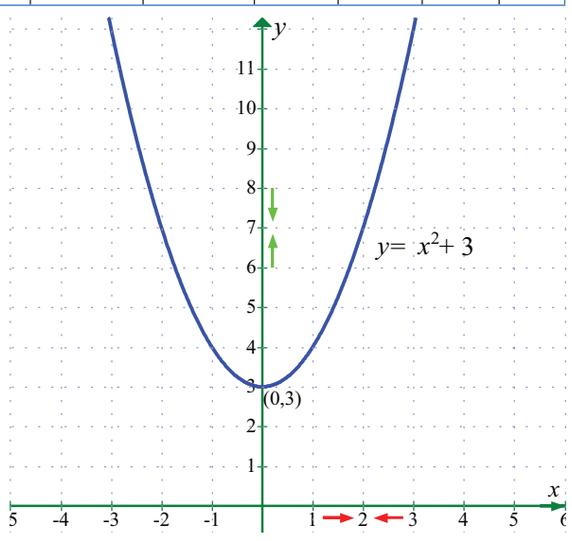
ఎడమ ప్రక్క నుండి 2కు చేరువగు x | కుడిప్రక్క నుండి 2కు చేరువగు x

x	1.7	1.9	1.95	1.99	1.999	1.9999	2	2.0001	2.001	2.01	2.05	2.1	2.3
$f(x)$	5.89	6.61	6.8025	6.9601	6.99601	6.99960001	7	7.0040001	7.004001	7.0401	7.2025	7.41	8.29

పట్టిక నుండి x యొక్క విలువ 2ను చేరువగునపుడు $f(x) = x^2 + 3$ యొక్క విలువ 7ను చేరువగుటను చూడవచ్చును. దీనిలో ఆశ్చర్యమగుటకు ఏమియును లేదు. ఎందుకంటే $x = 2$ లో $f(x)$ యొక్క విలువను గణించునపుడు $f(2) = 2^2 + 3 = 7$. అని లభించుటను చూడవచ్చును.

ఈ అవధి విలువను ఊహించుటకు $x = 2$ వద్ద $x^2 + 3$ యొక్క విలువను గణించ అవసరం లేదు.

x యొక్క విలువ 2 కు ఎడమ ప్రక్క నుండి (2 కన్నా తక్కువ విలువలు) కుడి ప్రక్క నుండి (2 కన్నా అధిక విలువలు) 2 ను చేరువగునపుడు $f(x)$ యొక్క విలువ ఇరువైపుల నుండి 7ను చేరువగుచున్నది. అంటే x యొక్క విలువ 2కు చేరువగునప్పుడు, $f(x)$ యొక్క విలువ 7కు చేరువగును. ఈ పరిస్థితిని క్లుప్తముగా క్రింది విధంగా వివరించవచ్చును.



పటము 9.1

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_9.indd 95 11/05/2022 16:04:49

x యొక్క విలువ 2 ను ఎడమ ప్రక్క నుండి చేరువగునపుడు $f(x)$ యొక్క ఎడమ అవది 7 గాను అదే విదముగా x యొక్క విలువ 2 ను కుడి ప్రక్క నుండి చేరువ గునపుడు $f(x)$ యొక్క కుడి అవది 7 గాను ఉన్నదని అర్థము. దీనిని క్రింది విదముగా వ్రాయవచ్చును.

$x \to 2^-$ అయిన $f(x) \to 7$ మరియు $x \to 2^+$ అయిన $f(x) \to 7$

(లేక)

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 7$ మరియు $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 7$.

అంటే $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 7 = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ అని కూడ గమనించగలము దీని సాధారణ విలువను $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 7$ గా వ్రాయవచ్చును.

దీని నుండి అవధి విలువ ఒక ఖచ్చితమైన వాస్తవ సంఖ్య అని తెలుసుకోవచ్చు. ఇక్కడ ఖచ్చితత్వము అనునది $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ మరియు $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ అనునవి వేర్వేరు కాదనియు, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ అనునది ఏకైక ఒక వాస్తవ సంఖ్య అనుటను తెలియచేయును.

$x \to 2$. అనునపుడు $f(x) = x^2 + 3$ యొక్క ప్రవర్తనను పటము 9.1లో రేఖాగణిత పద్ధతిలో వివరించబడినది.

వివరణ 9.2

తరువాత $f(x) = \dfrac{16 - x^2}{4 + x}$ అను అకరణీయ ప్రమేయమును తీసుకొందుము.

ఈ ప్రమేయపు ప్రదేశం $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$. అగును. $f(-4)$ నిర్వచింపబడలేదు. అయినను, x యొక్క విలువ 4 ను $f(x)$ యొక్క విలువ చేరువగునపుడు గల $f(x)$ యొక్క విలువను గణించవచ్చు, ఎందుకంటే, $\lim\limits_{x \to -4} \left(\dfrac{16 - x^2}{4 + x} \right)$ అని గుర్తును బట్టి మనము x కు -4 దగ్గర గల విలువలను మాత్రమే గుర్తించెదము. $x = -4$ కాదని ఇది గుర్తించును. ఈ క్రింది పట్టిక x యొక్క విలువ -4 ను చేరువగునపుడు గల $f(x)$ యొక్క విలువలను ఇచ్చుచున్నది.

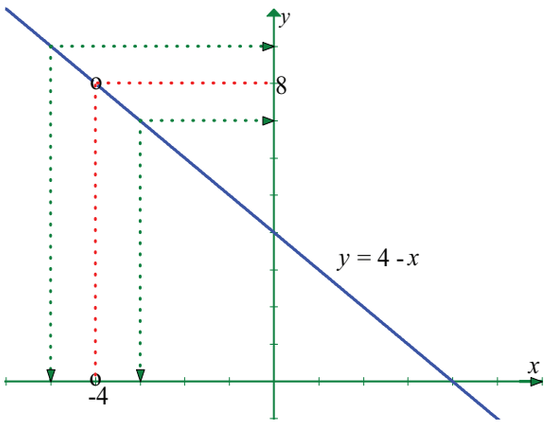
$(x < -4)$ $(x \to -4^-)$	$f(x)$	$(x > -4)$ $(x \to -4^+)$	$f(x)$
-4.1	8.1	-3.9	7.9
-4.01	8.01	-3.99	7.99
-4.001	8.001	-3.999	7.999

$x \neq -4$, అయిన, $f(x)$ ను తొలగించ పద్ధతిలో సూక్ష్మీకరించవచ్చును:

$$f(x) = \frac{16 - x^2}{4 + x}$$

$$= \frac{(4 + x)(4 - x)}{(4 + x)} = 4 - x.$$

పటము 9.2 నుండి, $f(x)$ యొక్క రేఖాచిత్రమనునది $x = -4$ అను బిందువు తప్ప మిగిలిన చోట్ల $y = 4 - x$ అను సరళరేఖ యొక్క రేఖాచిత్రము ఏర్పడియుండుటను చూడవచ్చును. $x = -4$ అను బిందువుకు x యొక్క గ్రాఫ్‌లో చిన్న రంధ్రము (ద్వారము) (Puncture) చూపబడినది. x అక్షముపై రెండు బాణపు గుర్తులతో సూచింపబడినట్లు $x - 4$ ను సమీపిస్తున్న కొద్ది, y అక్షంపై గల రెండు బాణపు గుర్తులు అదే సమయంలో సంఖ్యను సమీపించుటను చూడవచ్చును.



పటము 9.2

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_9.indd 96 11/05/2022 16:04:53

ఇక్కడ

$\lim\limits_{x\to -4^-} f(x) = 8 = \lim\limits_{x\to -4^+} f(x)$ కావున $\lim\limits_{x\to -4} f(x) = \lim\limits_{x\to -4} \dfrac{16-x^2}{4+x} = 8.$

వివరణ 9.2 లో $x=-4$ వద్ద $f(x)$ నిర్వచింపబడలేదు అయినను x యొక్క విలువ -4 ను చేరువగునపుడు $f(x)$ యొక్క విలువ ఒక అవధిని చేరువగుటను చూడవచ్చును. **$x=-4$ వద్ద $f(x)$ యొక్క వ్యవస్థితము లేదా వ్యవస్థితం కాకపోవుట అనునది -4 ను x సమీపించుకొద్ది $f(x)$ యొక్క అవధి వ్యవస్థితమును ప్రభావితం చేయదని గ్రహించగలము.**

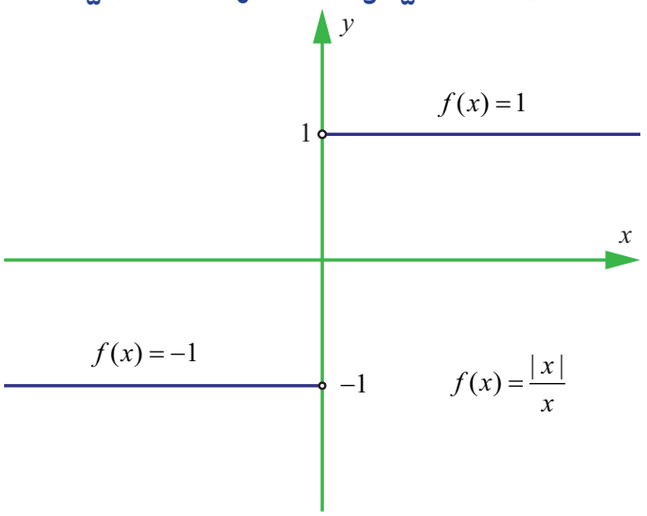
వివరణ 9.3

ఇప్పుడు మనం వివరణలు 9.1 మరియు 9.2లకు భిన్నమైన ఒక ప్రమేయమును తీసుకొందాము.

$f(x) = \dfrac{|x|}{x}$. అనుకొందాము

ఈ ప్రమేయము యొక్క ప్రదేశము $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ లో $x = 0$ ఉండదు. ఈ ప్రమేయపు రేఖాచిత్రంను చూడుము. ఈ రేఖాచిత్రము నుండి x యొక్క ధనాత్మక విలువలకు,

$\dfrac{|x|}{x} = \dfrac{x}{x} = +1$ అని మరియు x యొక్క



పటము 9.3

ఋణాత్మక విలువలకు, $\dfrac{|x|}{x} = \dfrac{-x}{x} = -1$ అని చూడవచ్చును..

x విలువ 0 కు ఎంత దగ్గరకు సమీపించినను $f(x)$ విలువ ఏమియుండదని దీనికి అర్థము (0 యొక్క చిన్న సమీప అంతరం) x యొక్క ధనాత్మక మరియు ఋణాత్మక విలువలకు క్రమముగా $f(x) = 1$ మరియు $f(x) = -1$ లుగా ఉండును అని తెలుసుకొనవచ్చును.

అనగా, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1$ మరియు $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +1.$

అవధి వ్యవస్థితము కాదని దీనికి అర్థము. కాని, x యొక్క మిగిలిన విలువలకు అవధి గలదు.

ఉదాహరణకు $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{|x|}{x} = 1$ మరియు $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{|x|}{x} = 1.$

ఇదే విధముగా, $\lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{-x}{x} = -1$

$\lim\limits_{x\to -3^+} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to -3^+} \dfrac{-x}{x} = -1.$

అంటే $x_0 \neq 0$ గా గల ప్రతి వాస్తవ సంఖ్యలకు, $x_0 < 0$ అయిన $\lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{|x|}{x} = -1 = \lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{|x|}{x}$ మరియు

$x_0 > 0.$ అయిన $\lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{|x|}{x} = 1 = \lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{|x|}{x}$

ఇప్పుడు 9.1 నుండి 9.3 వరకు గల వివరణలలో విభేదములను గమనించెదము. వివరణ 9.1 లో $f(x) = x^2 + 3$ అను ప్రమేయము $x = 2$ వద్ద నిర్వచింపబడియున్నది. అంటే 2 అను సంఖ్య $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. అను f

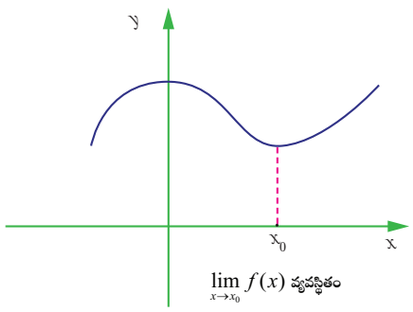
11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_9.indd 97 11/05/2022 16:04:54

ప్రదేశములో కలదు. వివరణ 9.2లోని ప్రమేయం $x=-4$ వద్ద నిర్వచితం కాదు. ఇంతకుముందు సందర్భములో x విలువ 2ను సమీపించు కొద్ది అవధి $\lim_{x\to 2} f(x)$ వ్యవస్థితమగునని మనము చెప్పవచ్చును. దీనికి అర్థము ఏమనగా $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ మరియు $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ లు ఒక ఏకైక వాస్తవ సంఖ్య అగును. తరువాతి సందర్భములోని ప్రమేయము $x=-4$ వద్ద నిర్వచితం కానప్పుడికినూ x విలువ -4 ను సమీపించు కొద్ది $\lim_{x\to -4} f(x)$ వ్యవస్థితమగును. వివరణ 9.3లో $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ వ్యవస్థితం కాదు అనగా x ను సమీపించు కొద్ది $\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}$ మరియు $\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}$ అను ఎడమ, కుడి అవధులు విభిన్నాలు అని దీనికి అర్థము. ఈ పరిశోధనల యొక్క ఫలితముల ద్వారా మనము అవధి యొక్క సహజత్వమును క్రింది నిర్వచనం ద్వారా తెలుసుకొంటాము.

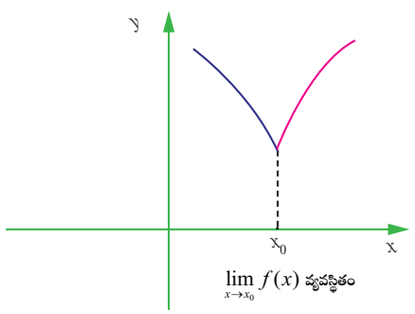
నిర్వచనం 9.1

I అనునది $x_0 \in \mathbb{R}$. ను కలిగిన వివృతాంతరము అనుకొనుము. $f: I \to \mathbb{R}$. అనుకొందాము. $x \neq x_0$, $f(x)$ తో x విలువ x_0 కు ఇరువైపుల నుండి సమీపించుకొద్ది $f(x)$ విలువ L ను సమీపించినట్లయితే x విలువ x_0 ను సమీపిస్తున్న $f(x)$ యొక్క అవధి L అని మనము చెప్పవచ్చును (సంకేతాత్మకంగా $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ గా వ్రాయవచ్చును)

పై చెప్పబడిన వివరములను ఈ క్రింది రేఖాచిత్రములు (9.4 మరియు 9.5) వివరించును.



పటము 9.4



పటము 9.5

9.2.2 ఒక ప్రక్క అవధులు (One sided limits)

నిర్వచనం 9.2

x విలువను x_0 కన్నా తక్కువ మరియు x_0 కు అతిసమీపంగా తీసుకొన్నప్పుడు $f(x)$ యొక్క విలువలు l_1 కు యాదృచ్ఛికంగా అతి సమీపంగా ఉన్నట్లయితే x విలువ x_0 ను సమీపించుకొలది $f(x)$ యొక్క ఎడమ అవధి (లేదా ఎడమ వైపు నుండి x_0 ను x సమీపిస్తున్నా $f(x)$ యొక్క అవధి) l_1 కు సమానమని మనము చెప్పవచ్చును. దీనిని సంకేతాత్మకముగా, $f(x_0^-) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = l_1$ అని వ్రాయవచ్చును.

ఇదే విధముగా, కుడి అవధిని నిర్వచింపగలము.

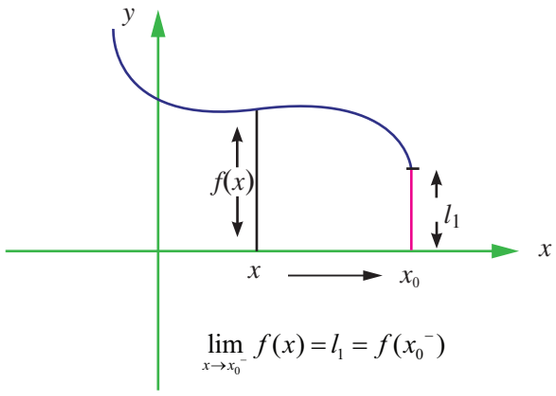
నిర్వచనం 9.3

x విలువను x_0 కన్నా ఎక్కువ మరియు x_0 కు అతి సమీపంగా తీసుకొన్నప్పుడు $f(x)$ యొక్క విలువలు l_2 కు యాదృచ్ఛికంగా అతి సమీపంగా ఉన్నట్లయితే x విలువ x_0 ను సమీపించుకొలది $f(x)$ యొక్క కుడి అవధి (లేదా కుడివైపు నుండి x_0 ను x సమీపిస్తున్నా $f(x)$ యొక్క అవధి) l_2 కు సమానమని మనము చెప్పవచ్చును. దీనిని సంకేతాత్మకముగా $f(x_0^+) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = l_2$ అని వ్రాయవచ్చును.

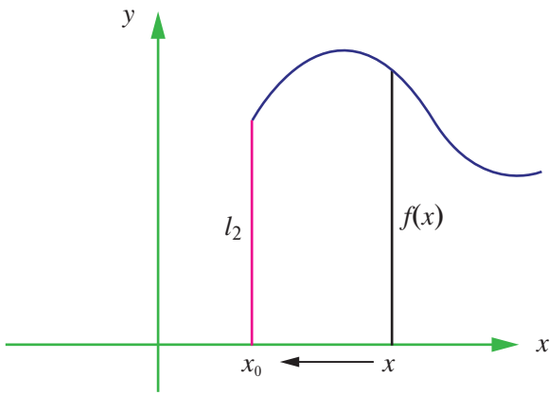
11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_9.indd 98 11/05/2022 16:04:55

ఇంకను $x < x_0$ మరియు $x > x_0$ అనునవి క్రమముగా "$x \to x_0^-$" మరియు "$x \to x_0^+$" అని గుర్తించబడుచున్నది.

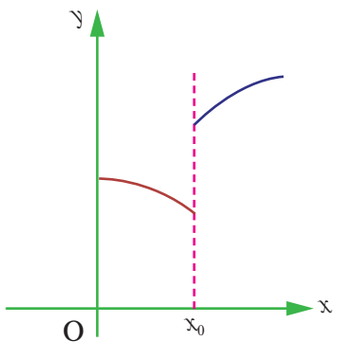
ఈ నిర్వచనములు 9.6 నుండి 9.9 వరకు గల పటముల ద్వారా వివరించబడియున్నది.



పటము 9.6



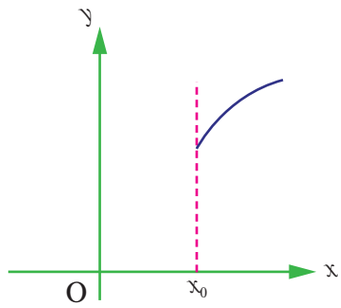
పటము 9.7



$\lim_{x \to x_0} f(x)$ **వ్యవస్థితం కాదు**

పటము 9.8

(x_0 ను ఎడమ ప్రక్క, కుడిప్రక్క నుండి చేరువగునపుడు విభిన్నమైన విలువలు లభించుచున్నవి)



$\lim_{x \to x_0} f(x)$ **వ్యవస్థితం కాదు**

పటము 9.9

(x_0 కు ఎడమ ప్రక్కన ప్రమేయము నిర్వచింపబడలేదు)

పై చర్చల నుండి $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ వ్యవస్థితమగుటకు ఈ క్రింది వాటిని పాటించాలని మనము నిర్ధారించవచ్చును.

(i) $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ వ్యవస్థితము,

(ii) $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ వ్యవస్థితము మరియు

(iii) $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$.

$f(x)$ యొక్క అవధి మరియు ఒకప్రక్క అవధుల యొక్క నిర్వచనముల నుండి ఈ క్రింది వాటిని పొందవచ్చును.

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ iff $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_9.indd 99 11/05/2022 16:04:55

ఈ విధముగా $\lim_{x\to x_0} f(x)$ వ్యవస్థిము అనగా L ఒక ఏకైక వాస్తవ సంఖ్య అని అర్థము. పై చెప్పబడిన నిబంధనలలో ఏదేని ఒకదానిని పాటించకపోతే x_0 ను x చేరువగునపుడు $f(x)$ కు అవధి వ్యవస్థితం కాదని చెప్పవచ్చును.

ఒక ప్రక్క అవధులు యొక్క వ్యవస్థితం అవధుల యొక్క వ్యవస్థితం కన్నా బలహీనమయినదని గమనించదగినది.

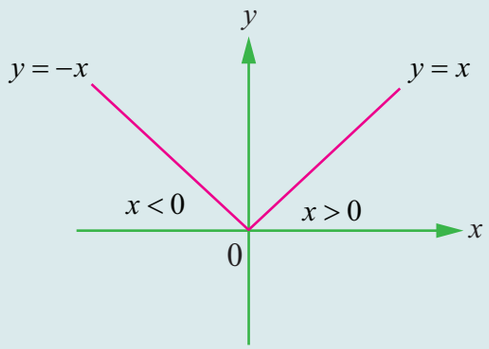
ఒక ప్రక్క అవధులను కనుగొనుటకు క్రింది ఇవ్వబడినవి, ఉపయోగకరమైననదిగా ఉండును.

$h>0$, అయిన, $f(x_0^-)=\lim_{h\to 0} f(x_0-h)$ మరియు $f(x_0^+)=\lim_{h\to 0} f(x_0+h)$.

ముఖ్యముగా $f(x_0^-)$ మరియు $f(x_0^+)$ అనునవి క్రమముగా ఎడమ మరియు కుడి అవధుల విలువలను సూచించును. కాని $f(x_0)$ అనునది $x=x_0$. వద్ద ప్రమేయపు విలువగును.

ఉదాహరణ 9.1

$\lim_{x\to 0} |x|$ యొక్క విలువను కనుగొనుము.



పటము 9.10

సాధన

అధ్యాయము 1లో ఉన్నట్లు

$$|x|=\begin{cases}-x, & x<0 \text{ అయిన}\\ 0, & x=0 \text{ అయిన}\\ x, & x>0 \text{ అయిన}\end{cases}$$

$x>0$, అయిన $|x|=x$, 0 కు

కుడివైపు నుండి $x\to 0$ అయినప్పుడు ఇది 0ను సమీపించును.. అది, $\lim_{x\to 0^+} |x|=0$

$x<0$, అయిన, $|x|=-x$, 0 కు ఎడమవైపు నుండి $x\to 0$ అయినప్పుడు ఇది మరలా 0 ను సమీపించును.

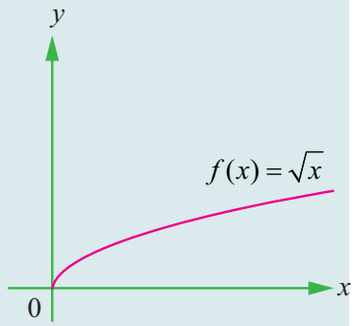
అది, $\lim_{x\to 0^-} |x|=0$.

కావున,, $\lim_{x\to 0^-} |x|=0=\lim_{x\to 0^+} |x|$.

కావున, $\lim_{x\to 0} |x|=0$.

ఉదాహరణ 9.2

ప్రమేయం $f(x)=\sqrt{x}$, $x\geq 0$. అయిన, $\lim_{x\to 0} f(x)$ వ్యవస్థితమా?



పటము 9.11

సాధన

అవధి వ్యవస్థితం కాదు. $x<0$ కు $f(x)=\sqrt{x}$

నిర్వచింపబడలేదు కావున, $x\to 0^-$, $\lim_{x\to 0^-}\sqrt{x}$ వ్యవస్థితం కాదు.

ఏదేమైనప్పటికి, $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$ అగును. కావున $\lim_{x\to 0}\sqrt{x}$ వ్యవస్థితం కాదు.

$\lim_{x\to 0^-} \log x$ వ్యవస్థితిమా?

ఈ ప్రశ్నకు సమాధానమునుకు x యొక్క రేఖాచిత్రమును చూడుము.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_9.indd 100 11/05/2022 16:04:59

ఉదాహరణ 9.3

$\lim\limits_{x\to 2^-}\lfloor x\rfloor$ మరియు $\lim\limits_{x\to 2^+}\lfloor x\rfloor$ అను వాటి విలువలను కనుగొనుము.

సాధన

గరిష్ట పూర్ణసంఖ్య ప్రమేయము $f(x)=\lfloor x\rfloor$ ను x కన్న తక్కువ లేదా సమానమైన గరిష్ట పూర్ణసంఖ్యగా నిర్వచింపబడినది.

ఈ ప్రమేయపు రేఖాచిత్రము నుండి (పటము 1.25) $\lim\limits_{x\to 2^-}\lfloor x\rfloor=1$ మరియు $\lim\limits_{x\to 2^+}\lfloor x\rfloor=2$ అగునని స్పష్టమగుచున్నది.

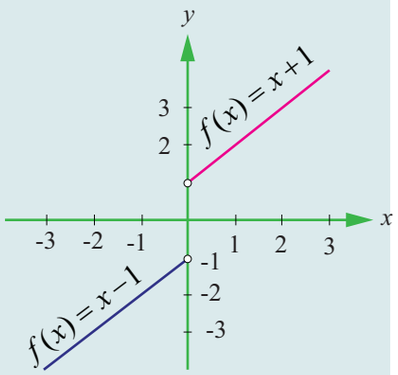
యింకనూ, ఏదేని ఒక పూర్ణసంఖ్య n కు, $\lim\limits_{x\to n^-}\lfloor x\rfloor=n-1$ మరియు $\lim\limits_{x\to n^+}\lfloor x\rfloor=n$ అగును.

$f(x)=\lim\limits_{x\to n}\lceil x\rceil$ వ్యవస్థితమగునా? ఈ ప్రశ్న యొక్క సమాధానమునకు $\lceil x\rceil$ అను ప్రమేయపు రేఖాచిత్రము (పటము 1.26) ను చూడుము.

ఉదాహరణ 9.4

$f(x)=\begin{cases}x+1, & x>0\\ x-1, & x<0\end{cases}$ అనుకొనుము.

$x\to 0$ అయినప్పుడు అవధి యొక్క వ్యవస్థితమును సరిచూడుము.



పటము 9.12

సాధన

ఈ ప్రమేయపు రేఖాచిత్రంను పటం 9.12లో చూడుము.

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-1$ మరియు $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$ స్పష్టమగును.

ఈ విలువలు విభిన్నంగా వుండుట వలన $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ వ్యవస్థితం కాదు.

ఉదాహరణ 9.5

$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x+5|}{x+5}, & \text{for } x\neq -5\\ 0, & \text{for } x=-5\end{cases}$ అయిన $\lim\limits_{x\to -5}f(x)$ వ్యవస్థితం అగునా అని సరిచూడుము.

సాధన

(i) $f(-5^-)$.

$x<-5$, అయిన, $|x+5|=-(x+5)$

కావున, $f(-5^-)=\lim\limits_{x\to -5^-}\dfrac{-(x+5)}{(x+5)}=-1$

(ii) $f(-5^+)$.

For $x>-5$,అయిన,$|x+5|=(x+5)$

కావున, $f(-5^+)=\lim\limits_{x\to -5^+}\dfrac{(x+5)}{(x+5)}=1$ అని గమనించుము.

$f(-5^-)\neq f(-5^+)$. కావున అవధి వ్యవస్థితము కాదు.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_9.indd 101 11/05/2022 16:04:59

ఉదాహరణ 9.6

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4|x-1|+x-1}{|x-1|}$, $x\neq 1$. అవధి వ్యవస్థితమును పరిశోధించుము.

సాధన

$x > 1$ అయిన, $|x-1| = x-1$ మరియు $f(1^+) = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{4(x-1)+x-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{5(x-1)}{(x-1)} = 5$.

$x < 1$ అయిన, $|x-1| = -(x-1)$, మరియు $f(1^-) = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-4(x-1)+(x-1)}{-(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{3(x-1)}{(x-1)} = 3$.

కావున $f(1^-) \neq f(1^+)$ కావున అవధి వ్యవస్థితం కాదు.

అభ్యాసము 9.1

1 నుండి 6 వరకు గల సమస్యలకు పట్టికను ఉపయోగించి అవధి విలువను గణించుము.

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-x-2}$

x	1.9	1.99	1.999	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	0.344820	0.33444	0.33344	0.333222	0.33222	0.332258

(2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4}$

x	1.9	1.99	1.999	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	0.25641	0.25062	0.250062	0.24993	0.24937	0.24390

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}$

x	– 0.1	– 0.01	– 0.001	0.001	0.01	0.1
f(x)	0.2911	0.2891	0.2886	0.2886	0.2885	0.28631

(4) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{1-x}-2}{x+3}$

x	– 3.1	– 3.01	– 3.00	– 2.999	– 2.99	– 2.9
$f(x)$	– 0.24845	– 0.24984	– 0.24998	– 0.25001	– 0.25015	– 0.25158

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$

x	– 0.1	– 0.01	– 0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	0.99833	0.99998	0.99999	0.99999	0.99998	0.99833

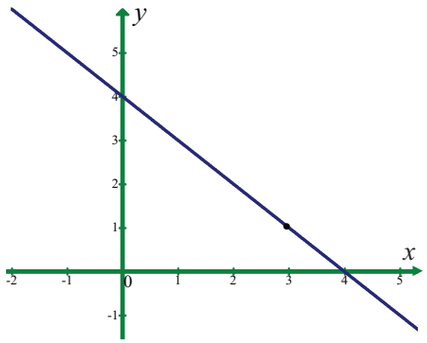
(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x}$

x	– 0.1	– 0.01	– 0.001	0.0001	0.01	0.1
$f(x)$	0.04995	0.0049999	0.0004999	–0.0004999	–0.004999	–0.04995

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_9.indd 102 11/05/2022 16:05:00

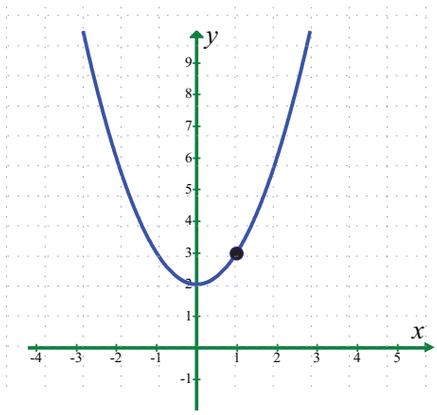
7 నుండి -15 వరకు గల సమస్యలకు రేఖాచిత్రములను ఉపయోగించి అవధి విలువను గణించుము (వ్యవస్థితమయిన) అవధి వ్యవస్థితం కానిచో కారణమును తెలుపుము.

(7) $\lim_{x\to 3}(4-x)$.



పటము 9.13

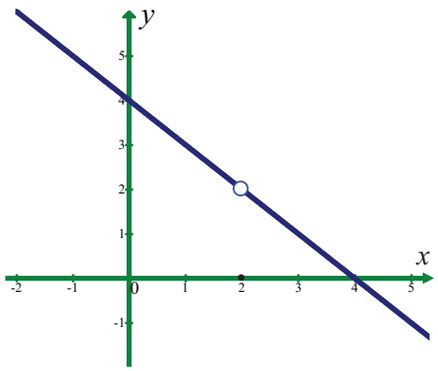
(8) $\lim_{x\to 1}(x^2+2)$.



పటము 9.14

(9) $\lim_{x\to 2} f(x)$

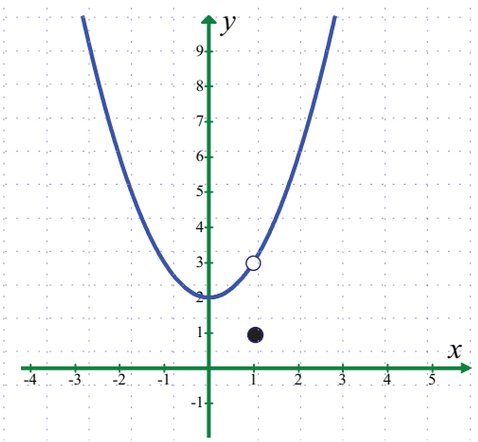
ఇక్కడ $f(x)=\begin{cases}4-x, & x\neq 2\\ 0, & x=2\end{cases}$.



పటము 9.15

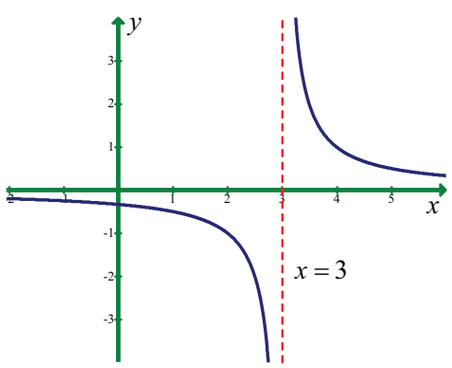
(10) $\lim_{x\to 1} f(x)$

ఇక్కడ $f(x)=\begin{cases}x^2+2, & x\neq 1\\ 1, & x=1\end{cases}$.



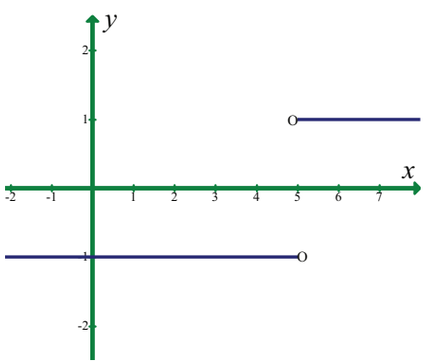
పటము 9.16

(11) $\lim_{x\to 3}\dfrac{1}{x-3}$



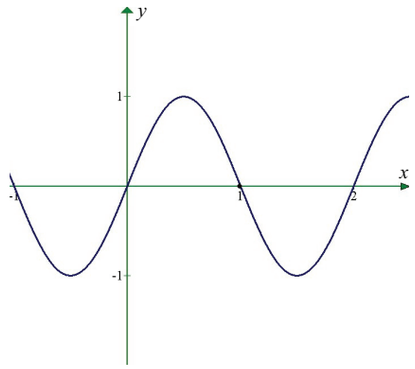
పటము 9.17

(12) $\lim_{x\to 5}\dfrac{|x-5|}{x-5}$



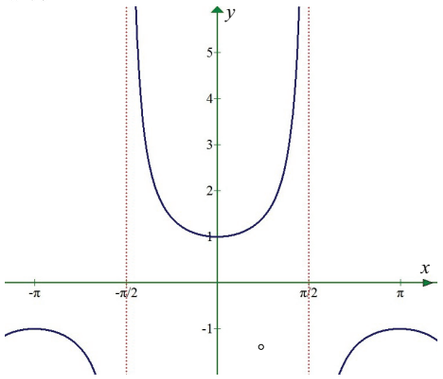
పటము 9.18

(13) $\lim_{x\to 1} \sin \pi x$



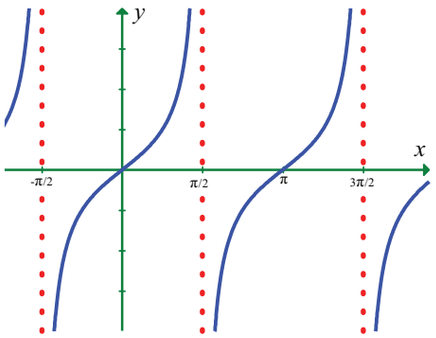
పటము 9.19

(14) $\lim_{x\to 0} \sec x$



పటము 9.20

(15) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \tan x$



పటము 9.21

16,17 సమస్యలకు f యొక్క రేఖాచిత్రమును గీచి x_0 యొక్క ఏ విలువలకు $\lim_{x\to x_0} f(x)$ వ్యవస్థితమగునా కనుగొనుము.

(16) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 2 \\ 8-2x, & 2 < x < 4 \\ 4, & x \ge 4 \end{cases}$.

(17) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0 \\ 1-\cos x, & 0 \le x \le \pi \\ \cos x, & x > \pi \end{cases}$

(18) ఇవ్వబడిన విలువలను తృప్తిపరచు f ప్రమేయపు రేఖాచిత్రమును గీయుము.

(i) $f(0)$ అనిర్వచితము

$\lim_{x\to 0} f(x) = 4$

$f(2) = 6$

$\lim_{x\to 2} f(x) = 3$

(ii) $f(-2) = 0$

$f(2) = 0$

$\lim_{x\to -2} f(x) = 0$

$\lim_{x\to 2} f(x)$ వ్యవస్థితం కాదు.

(19) $\lim_{x\to 8} f(x) = 25.$ అను సంకేతము యొక్క అర్థమును క్లుప్తముగా వివరింపుము.

(20) $f(2) = 4$ అయిన, x విలువ 2కు చేరువగునపుడు $f(x)$ యొక్క అవధి గురించి ఏదైనా నీవు నిర్ధారించగలవా?

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_9.indd 104 11/05/2022 16:05:01

(21) x విలువ 2కు చేరువగునపుడు $f(x)$ యొక్క అవధి విలువ 4 అయిన, $f(2)$ ను గురించి ఏదైనా నీవు నిర్ధారించగలవా? జవాబుకు వివరణ ఇవ్వుము.

(22) $f(3^-)$ మరియు $f(3^+)$ లను కనుగొనుట ద్వారా $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$ వ్యవస్థితమయినా ఆ విలువను కనుగొనుము.

(23) $f(x)=\begin{cases}\frac{|x-1|}{x-1}, & \text{for } x\neq 1\\ 0, & \text{for } x=1\end{cases}$ అయిన $\lim_{x\to 1} f(x)$, యొక్క వ్యవస్థితంను సరిచూడుము.

9.2.3 అవధుల మీది సిద్ధాంతములు (Theorems on limits)

మునుపటి విభాగంలో ఉదాహరణలు ద్వారా చర్చ యొక్క ఉద్దేశ్యము, అవధి వ్యవస్థితం లేదా వ్యవస్థితం కాకపోవుటను సహజంగా గ్రహించుట అగును. అయిన్నటికి ఒక రేఖాచిత్రం లేదా పట్టిక యొక్క ప్రమేయపు విలువలు ఆధారంగా అవధి వ్యవస్థితం గూర్చి ప్రతి సందర్భంలోను ప్రయోగాత్మకంగా మరియు ఉద్దేశ్యము నెరవేరునట్లు నిర్ధారణకు రాలేము. అవధిని గణించవీలగుటకు లేదా అవధి వ్యవస్థితం కాకపోవుటను ఎదొక యాంత్రిక విధానముదో మనము కనుగొనవలెను. ఈ విభాగంలో ఒక యాంత్రిక విధానంకు సిద్ధాంతములను తీసుకొందాం. ఈ సిద్ధాంతముల నిరూపణ చాలా సాంకేతపరమైనది మరియు ఈ అచ్చుపుస్తక పరిధికి మించినది.

వివరణ 9.1లో $\lim_{x\to 2}(x^2+3)=2^2+3=7$. అని మనము నిర్ధారించాము అంటే x యొక్క విలువ 2కు చేరువగునపుడు $f(x)=x^2+3$ యొక్క అవధి విలువ $x=2$ వద్ద $f(x)$ యొక్క విలువకు సమానం (అది $f(2)$) అయినప్పటికి, ఇంతకు ముందు సూచించిన విధానంలో అవధిని గణించు ప్రక్రియ ఎల్లప్పుడు పనిచేయదు ఎందుకనగా x_0 వద్ద $f(x)$ నిర్వచితం కాకపోవచ్చును. ఏదేమైనప్పటికి fఒక బహుపద సమాసము అయితే గణన ద్వారా అవధిని లెక్కించుటను ఎల్లప్పుడు వీలగును. అనునది సత్యము.

సిద్ధాంతము 9.1

$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ ఒక బహుపద సమాసము అనుకొనుము. ఇక్కడ $a_0, a_1, \cdots, a_n$ అనునవి వాస్తవ సంఖ్యలు మరియు n ఒక స్థిరమైన ధనాత్మక పూర్ణసంఖ్య అయినచో

$\lim_{x\to x_0} P(x)=a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\cdots+a_nx_0^n=P(x_0)$ అగును.

ఉదాహరణ 9.7

$\lim_{x\to 3}(x^3-2x+6)$ యొక్క విలువను గణించుము

సాధన

$P(x)=x^3-2x+6$ బహుపద సమాసము

కావున, $\lim_{x\to 3}P(x)=P(3)=3^3-2\times 3+6=27.$

ఉదాహరణ 9.8

ఏదేని ఒక వాస్తవ సంఖ్య x_0 కు $\lim_{x\to x_0}(5)$ యొక్క విలువను గణించుము.

సాధన

$f(x)=5$ ఒక బహుపద సమాసము (అంతస్థు 0)

కావున, $\lim_{x\to x_0}(5)=f(x_0)=5$.

స్థిర ప్రమేయము యొక్క అవధి విలువ ఆ స్థిరాంకమగును.

సిద్ధాంతము 9.2

$x_0 \in \mathbb{R}$. ను కలిగిన దివృతాంతరము I అనుకొనుము.

$f, g : I \to \mathbb{R}$. అనుకొనుము.

c ఒక స్థిరాంకముగాను $\lim_{x\to x_0} f(x)$ మరియు $\lim_{x\to x_0} g(x)$ అవధులు వ్యవస్థితం అయితే, $\lim_{x\to x_0}(cf(x)), \lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$, $\lim_{x\to x_0}[f(x) - g(x)]$, $\lim_{x\to x_0}[f(x)g(x)]$ మరియు $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$ అన్నియు వ్యవస్థితం. ఇంకనూ

(i) $\lim_{x\to x_0} cf(x) = c\lim_{x\to x_0} f(x)$,

(ii) $\lim_{x\to x_0}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x)$,

(iii) $\lim_{x\to x_0}[f(x).g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) . \lim_{x\to x_0} g(x)$ మరియు

(iv) $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$, ఇక్కడ $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$.

ఈ ఫలితములను, అన్ని పరిమిత సంఖ్యలయిన ప్రమేయములకు విస్తరింపజేయవచ్చును. ■

ఉదాహరణ 9.9

గణించుము (i) : $\lim_{x\to 8}(5x)$ (ii) $\lim_{x\to -2}\left(-\frac{3}{2}x\right)$.

సాధన

(i) $\lim_{x\to 8}(5x) = 5\lim_{x\to 8}(x) = 5\times 8 = 40$.

(ii) $\lim_{x\to -2}\left(-\frac{3}{2}x\right) = -\frac{3}{2}\lim_{x\to -2}(x) = \left(-\frac{3}{2}\right)(-2) = 3$.

ఉదాహరణ 9.10

గణించుము $\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2+x}{x} + 4x^3 + 3\right]$.

సాధన

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2+x}{x} + 4x^3 + 3\right] &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+x}{x}\right) + \lim_{x\to 0}(4x^3+3)\\ &= \lim_{x\to 0}(x+1) + \lim_{x\to 0}(4x^3+3)\\ &= (0+1) + (0+3)\\ &= 4.\end{aligned}$$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_9.indd 106 11/05/2022 16:05:03

ఉదాహరణ 9.11

గణించుము $\lim_{x\to -1}(x^2-3)^{10}$.

సాధన

$$\lim_{x\to -1}(x^2-3) = 1-3 = -2.$$

కావున, $\lim_{x\to -1}(x^2-3)^{10} = \lim_{x\to -1}(x^2-3)\,(x^2-3)...(x^2-3)$ (10 సార్లు)

$$= \lim_{x\to -1}(x^2-3)\lim_{x\to -1}(x^2-3)...\lim_{x\to -1}(x^2-3) \text{ (10 సార్లు)}$$

$$= \left[\lim_{x\to -1}(x^2-3)\right]^{10} = (-2)^{10} = 2^{10} = 1024.$$

$\lim_{x\to -1}(x^2-3)^{10} = \left[\lim_{x\to -1}(x^2-3)\right]^{10}$ అను దానిని గమనించుము.

సిద్ధాంతము 9.3

$\lim_{x\to x_0} f(x)$ వ్యవస్థితం అయిన $\lim_{x\to x_0}[f(x)]^n$ వ్యవస్థితము మరియు $\lim_{x\to x_0}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right]^n$ అగును.

ఉదాహరణ 9.12

$\lim_{x\to -2}(x^3-3x+6)\,(-x^2+15)$ యొక్క విలువను కనుగొనుము.

సాధన

$$\lim_{x\to -2}(x^3-3x+6) = (-2)^3-3(-2)+6 = -8+6+6 = 4$$

$$\lim_{x\to -2}(-x^2+15) = -(-2)^2+15 = -4+15 = 11$$

$$\lim_{x\to -2}(x^3-3x+6)\,(-x^2+15) = \lim_{x\to -2}(x^3-3x+6)\lim_{x\to -2}(-x^2+15) = 4\times 11 = 44.$$

ఉదాహరణ 9.13

$\lim_{x\to 3}\dfrac{(x^2-6x+5)}{x^3-8x+7}$ యొక్క విలువను కనుగొనుము.

సాధన

$$\lim_{x\to 3}(x^2-6x+5) = 3^2-6\times 3+5 = -4$$

$$\lim_{x\to 3}(x^3-8x+7) = 3^3-8\times 3+7 = 10 \neq 0.$$

కావున, $\lim_{x\to 3}\dfrac{(x^2-6x+5)}{x^3-8x+7} = \dfrac{\lim_{x\to 3}(x^2-6x+5)}{\lim_{x\to 3}(x^3-8x+7)} = \dfrac{-4}{10} = -\dfrac{2}{5}$.

జాగ్రత్త (Caution)

$\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ అయిన భిన్న ప్రమేయమునకు అవధి సిద్ధాంతమును ఉపయోగించరాదు.

ఉదాహరణ 9.14

గణించుము $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$.

సాధన

ఇక్కడ $\lim_{x\to 1}(x-1)=0$. ఈ సందర్భంలో లవమును అకరణీయ పరచుము.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{\lim_{x\to 1}(1)}{\lim_{x\to 1}\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{1}{2}.$$

ఉదాహరణ 9.15

$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$ యొక్క విలువను కనుగొనుము.

సాధన

మనము విభక్త, సిద్ధాంతమును వెంటనే ఉపయోగించలేము. బీజగణిత పద్ధతిలో లవమును అకరణీయ పరచుము.

$$\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}=\frac{\left(\sqrt{t^2+9}-3\right)\left(\sqrt{t^2+9}+3\right)}{t^2\left(\sqrt{t^2+9}+3\right)}=\frac{t^2+9-9}{t^2\left(\sqrt{t^2+9}+3\right)}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{t^2\sqrt{t^2+9}+3}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\sqrt{t^2+9}+3}=\frac{1}{\sqrt{9}+3}=\frac{1}{6}.$$

సిద్ధాంతము 9.4

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}.$$

నిరూపణ

$x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\cdots+xa^{n-2}+a^{n-1})$ అని మనకు తెలుసు.

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\cdots+xa^{n-2}+a^{n-1})}{(x-a)}$$

$$=\lim_{x\to a}(x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\cdots+xa^{n-2}+a^{n-1})$$

$$=a^{n-1}+a^{n-1}+\cdots+a^{n-1}\ \ (n \text{ సార్లు})$$

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}\ .$$

ఇది ప్రతి అకరణీయ సంఖ్య n కు సత్యము ■

ఉదాహరణ 9.16

గణించుము $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$.

సాధన

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1^3}{x-1}=3(1)^{3-1}=3$$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_9.indd 108 11/05/2022 16:05:04

ఉదాహరణ 9.17

$\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{\sqrt{t}-1}{t-1}$ యొక్క విలువను కనుగొనుము.

సాధన

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{t}-1}{t-1}=\lim_{x\to 1}\frac{t^{\frac{1}{2}}-1^{\frac{1}{2}}}{t-1}=\frac{1}{2}(1)^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}.$$

ఉదాహరణ 9.18

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2+x)^5-2^5}{x}$ యొక్క విలువను కనుగొనుము.

సాధన

$2+x=y$ అనుకొనుము దీని వలన $x\to 0$ అయిన, $y\to 2$ అగును.

కావున, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2+x)^5-2^5}{x}=\lim\limits_{y\to 2}\dfrac{y^5-2^5}{y-2}=5(2^4)=80$.

ఉదాహరణ 9.19

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^n-3^n}{x-3}=27$ అగునట్లు గల ధనాత్మక పూర్ణసంఖ్య n ను కనుగొనుము.

సాధన

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^n-3^n}{x-3}=n.3^{n-1}=27$$

అంటే $n.3^{n-1}=3\times 3^2=3\times 3^{3-1}\Rightarrow n=3$.

ఉదాహరణ 9.20

$f(x)=\begin{cases}ax+b & \text{if } x>3\\ 3ax-4b+1 & \text{if } x<3\end{cases}$ మరియు $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$ వ్యవస్థితమయిన a మరియు b ల మధ్యగల సంబంధమును కనుగనుము.

సాధన

$\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=9a-4b+1$

$\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=3a+b$. అవధి వ్యవస్థితమగుట వలన

$\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)$.

$\Rightarrow 9a-4b+1=3a+b$

$\Rightarrow 6a-5b+1=0.$

అభ్యాసము 9.2

ఈ క్రింది అవధి విలువలను కనుగొనుము:

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x-2}$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$, m మరియు n పూర్ణ సంఖ్యలు.

(3) $\lim\limits_{\sqrt{x}\to 3}\dfrac{x^2-81}{\sqrt{x}-3}$

(4) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}, x>0$

(5) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{x-5}$

(6) $\lim_{x\to 2}\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}$ (7) $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-x^2}{1-\sqrt{x}}$ (8) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$

(9) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ (10) $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{7+x^3}-\sqrt{3+x^2}}{x-1}$ (11) $\lim_{x\to 2}\dfrac{2-\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4-x}}$

(12) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ (13) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x^2}$ (14) $\lim_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$

(15) $\lim_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}(a>b)$

9.2.4 అనంత అవధులు మరియు అనంతము వద్ద అవధులు (Infinite limits and limits at infinity)

అనంత అవధులు (Infinite Limits)

$f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ అను ప్రమేయము $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ అని నిర్వచించబడినదని అనుకొనుము.

ఇప్పుడు $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}$ లెక్కించుటను చూచెదము. 0 కు దగ్గరలో $\dfrac{1}{x^2}$ యొక్క విలువలు ఈ క్రింది పట్టికలో యివ్వబడినవి.

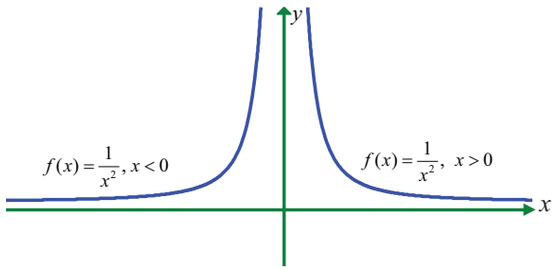
$x\to 0^+$			$x\to 0^-$		
x	x^2	$\frac{1}{x^2}$	x	x^2	$\frac{1}{x^2}$
1	1	1	-1	1	1
0.5	0.25	4	-0.5	0.25	4
0.1	0.01	100	-0.1	0.01	100
0.01	0.0001	10,000	$-.01$	0.0001	10,000
0.001	0.000001	10,00,000	-0.001	0.000001	10,00,000
0.0001	0.00000001	10,00,00,000	-0.0001	0.00000001	10,00,00,000

పట్టిక నుండి x యొక్క విలువ 0 కు దగ్గర మరియు మరింత దగ్గరగా వున్నప్పుడు $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ యొక్క విలువ పెద్దది మరియు మరింత పెద్దదిగా మారుటను గమనించవచ్చును. వాస్తవముగా x యొక్క విలువ ఇరు ప్రక్కల నుండి 0 కు చేరువైనపుడు $\dfrac{1}{x^2}$ యొక్క విలువ హద్దు లేకుండా అధికమగును. ఈ సందర్భములో x విలువ 0 కు చేరువైనపుడు $f(x)$ అనునది ∞ కు దగ్గరగా వుండునని అనవచ్చును. మరియు $x\to 0^-$ అయిన $\dfrac{1}{x^2}\to\infty$ మరియు $x\to 0^+$ అయిన $\dfrac{1}{x^2}\to\infty$ అని వ్రాయవచ్చును. కావున $x\to 0$ అయిన $\dfrac{1}{x^2}\to\infty$ జ్యామితీయంగా $x=0$ అంటే y అక్షము $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ వక్రం యొక్క అనంత స్పర్శరేఖ అగును.

$f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ యొక్క రేఖాచిత్రము పటము 9.22 లో యివ్వబడినది.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_9.indd 110 11/05/2022 16:05:06

అవధి విలువ అనంతము. కావున $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$ వ్యవస్థితం కాదని గుర్తించుకొండి. ∞అనునది $f(x)=\frac{1}{x^2}$ అను ప్రమేయపు సూచించు ఒక సంకేతము మాత్రమే. అది ఒక క్రొత్త సంఖ్య కాదు అన్న దానిని విద్యార్థులు గుర్తుంచుకొనవలయును.



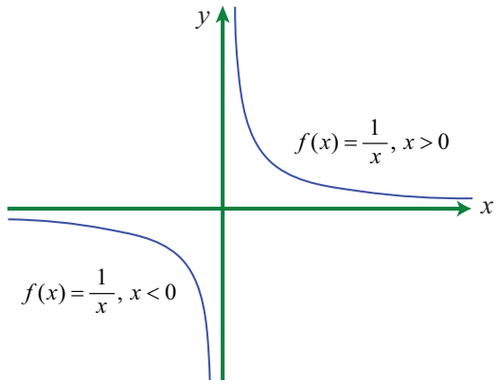
పటము 9.22

ఇదేవిధంగా $f(x)=\frac{1}{x}$, ను పరిశీలించినట్లయితే

$x\to 0^-$ అయిన $\frac{1}{x}\to -\infty$ మరియు $x\to 0^+$ అయిన $\frac{1}{x}\to +\infty$ అని సులభముగా చూడవచ్చును.

దీనిని $f(x)=\frac{1}{x}$ (పటము 9.23) యొక్క రేఖాచిత్రం నుండి స్పష్టంగా జామితీయంగా తెలుసుకొనవచ్చు.

సాధారణముగా ఈ క్రింది సహజమైన నిర్వచనములను చూడవచ్చును.



పటము 9.23

నిర్వచనము : 9.4

ఇవ్వబడిన విలువ $M>0$ కు, (M,∞) రూపం యొక్క వివృతాంతరమును ∞ యొక్క సామీవ్యము అంటారు.

ఇదేవిధంగా ఇవ్వబడిన విలువ $K<0$ కు, $(-\infty,K)$ రూపం యొక్క వివృతాంతరమును $-\infty$ యొక్క సామీవ్యము అంటారు.

నిర్వచనము : 9.5

ఇవ్వబడిన ధనాత్మక సంఖ్య M కు, $f(x)>M$ (అనగా $f(x)\in(M,\infty)$ అగునట్లు x యొక్క సామీప్యంలో x వుండి x_0 యొక్క ఒక సామీప్యము వ్యవస్థిత మయిన x విలువ x_0 ను సమీపించుకొద్ది $f(x)\to\infty$ అని మనము చెప్పవచ్చును.

ఇదేవిధంగా ఇవ్వబడిన $K<0$ కు $f(x)<K$ (అనగా $f(x)\in(-\infty,K)$) అగునట్లు x యొక్క సామీప్యంలో x ఉండి x_0 యొక్క ఒక సామప్యము వ్యవస్థితమయిన x విలువ x_0 ను సమీపించుకొద్ది $f(x)\to-\infty$ అని మనము చెప్పవచ్చును.

ఈ పరిస్థితిని వివరించుటకు సంకేత రూపములో ఈ క్రింది విధముగా వ్రాయవచ్చును.

$x\to x_0$ అయినప్పుడు $f(x)\to\infty$

$x\to x_0$ అయినప్పుడు $f(x)\to-\infty$

$x\to x_0^-$ అయినప్పుడు $f(x)\to\infty$

$x\to x_0^+$ అయినప్పుడు $f(x)\to-\infty$

మరియు $x\to x_0^+$ అయినప్పుడు $f(x)\to\infty$

$x\to x_0^-$ అయినప్పుడు $f(x)\to-\infty$

అనువాటిని అనంత (అపరిమిత) అవధలు అంటారు. పైన తెలిపిన నిభందనలో ఏదైనా ఒకటి నిజమైనచో $x=x_0$ అను రేఖ $f(x)$ యొక్క రేఖాచిత్రంకు లంబ అనంత స్పర్శరేఖ అగును.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_9.indd 111 11/05/2022 16:05:08

ఉదాహరణ 9.21

గణించుము $\lim_{x\to 0}\frac{1}{(x^2+x^3)}$.

సాధన

0 సమీపంలో (ఇరు ప్రక్కల నుండి) x యొక్క విలువలను పట్టిక పరచి మరియు $f(x)=\frac{1}{x^2+x^3}$ యొక్క విలువ హద్దు లేకుండా అధికమగుచున్నదని గ్రహించవచ్చును. కావున $x\to 0$ అయిన $f(x)\to\infty$ అగును.

ఈ ప్రమేయపు అవధి విలువను పట్టిక లేకుండా కనుగొనుటకు, మొదటగా లవము మరియు హారమును x^2 చే భాగించవలెను. అవధి విలువను లెక్కించుటలో $x\neq 0$ మరియు కావున $x^2\neq 0$ అయినందు వలన భాగహారము సాధ్యమగుచున్నది.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2+x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2+x^3}{x^2}}=\frac{\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\lim_{x\to 0}(1+x)}.$$

ఇప్పుడు $x\to 0$ అయిన $\frac{1}{x^2}\to\infty$ మరియు $\lim_{x\to 0}(1+x)=1$.

అంటే, హారము 1 కు చేరువైనప్పుడు, లవము హద్దులేకుండా అధికమగుచున్నది. అంటే $\frac{1}{(x^2+x^3)}$ అనంతమునకు చేరువగా వున్నదని చెప్పవచ్చును.

ఈ ఉదాహరణ, ఒక కఠినమైన గణనను కొన్ని బీజగణిత మార్పుల ద్వారా ఏ విధంగా సులభపరచవచ్చునని వివరించుచున్నది.

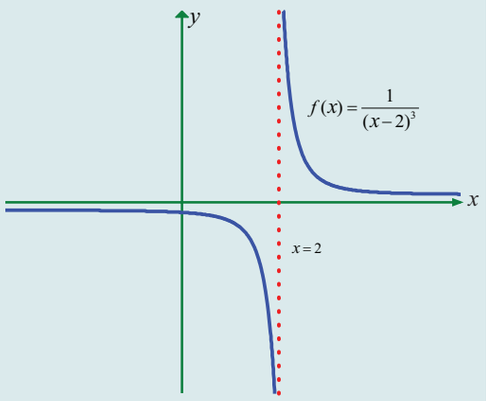
ఉదాహరణ 9.22

గణించుము $\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^3}$.

సాధన

$f(x)=\frac{1}{(x-2)^3}$ యొక్క రేఖాచిత్రము నుండి $x\to 2^-$ అయిన $\frac{1}{(x-2)^3}\to-\infty$ అని స్పష్టమగుచున్నది. మరియు $x\to 2^+$ అయిన $\frac{1}{(x-2)^3}\to\infty$ అగును.

కావున అవధి వ్యవస్థితం కాదు.



పటము 9.24

సాధారణముగా,

(i) n ఒక సరి ధనాత్మక పూర్ణసంఖ్య అయిన

$x\to a$ అయిన $\frac{1}{(x-a)^n}\to\infty$

$x\to a^-$ అయిన $\frac{1}{(x-a)^n}\to\infty$

$x\to a^+$ అయిన $\frac{1}{(x-a)^n}\to\infty$

(ii) n ఒక బేసి ధనాత్మక పూర్ణసంఖ్య అయిన;

$x\to a^-$ అయిన $\frac{1}{(x-a)^n}\to-\infty$

$x\to a^+$ అయిన $\frac{1}{(x-a)^n}\to+\infty$.

$x=a$ అను రేఖ లంబ అనంత స్పర్శరేఖగా మారును.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_9.indd 112 11/05/2022 16:05:09

9.2.5 అనంతము వద్ద అవధులు (Limits at infinity)

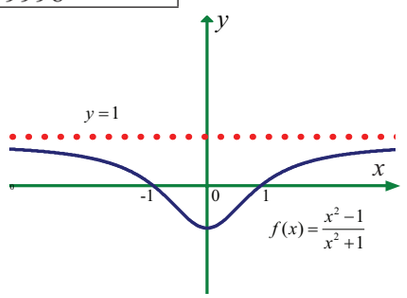
గడచిన భాగములో అనంత (అపరిమిత) అవధులు మరియు లంబ అనంత స్పర్శరేఖల గురించి పరిశోధించితిమి. అక్కడ x మొక్క విలువ నిర్దిష్ట సంఖ్యవైపు వెళ్ళునపుడు y యొక్క విలువల ఫలితము అతి పెద్దదిగా మారినది. (అతిపెద్ద ధనాత్మకం లేదా అతిపెద్ద ఋణాత్మకం) ఈ విభాగములో x యొక్క విలువ అతిపెద్దదిగా మారిన (ధనాత్మకం లేదా ఋణాత్మకం) y యొక్క విలువ ఏ విధంగా వుండునని చూడవచ్చును.

$f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ గా నిర్వచితమైన $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ యొక్క ప్రవర్తనను x పెద్దదిగా మారినపుడు పరిశోధించుట ద్వారా మనము ప్రారంభిస్తాము. ఈ ప్రమేయపు విలువలను పట్టిక పరచెదము.

x	$f(x)$
0	-1
±1	0
±2	0.6000000
±3	0.800000
±4	0.882353
±5	0.923077
±10	0.980198
±50	0.999200
±100	0.999800
±1000	0.999998

x యొక్క విలువ పెద్దది మరియు మరింత పెద్దదిగా పెరిగే కొలది (ధనాత్మక లేక ఋణాత్మక) $f(x)$ యొక్క విలువ 1 కు దగ్గరకు మరియు మరింత దగ్గరకు చేరుటను చూడవచ్చును. x యొక్క విలువను కావలసినంత పెద్దదిగా తీసికొని $f(x)$ యొక్క విలువలు 1 కు దగ్గరగా చూడవచ్చునని తెలియుచున్నది. ఈ విషయమును ఈ క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చును.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1.$$



పటము 9.25

జ్యామితీయంగా ఈ సందర్భము,(పటము 9.25) ఈ క్రింది నిర్వచనమునకు దారితీయును.

నిర్వచనము : 9.6

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$ లేక $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l.$ అయిన $y = l$ అను రేఖ $y = f(x)$ అను వక్రము యొక్క సమాంతర అనంత స్పర్శరేఖ అగును.

వివరణ 9.4

$f : \mathbb{R} \to \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ ను $f(x) = \tan^{-1} x,$ గా నిర్వచించినట్లయితే

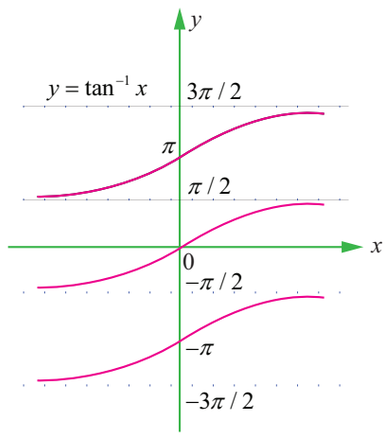
$\lim\limits_{x\to-\infty} \tan^{-1} x$ మరియు $\lim\limits_{x\to+\infty} \tan^{-1} x$ లను కనుగొనుము.

సాధన

రేఖాచిత్రమును చూడుము $y = \tan^{-1} x,$

$$\lim_{x\to-\infty} \tan^{-1} x = -\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to+\infty} \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}.$$



పటము 9.26

వివరణ 9.5

గణించుము $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-2x+3}{x^2+4x+4}$.

సాధన

దీని అవధి విలువను లెక్కించడానికి అవధి సిద్ధాంతములను ఉపయోగించిన మనము ఈ క్రింది సందర్భములకు వెళ్ళవలెను.

$x\to\infty$ అయిన $(2x^2-2x+3)\to\infty$

$x\to\infty$ అయిన $(x^2+4x+4)\to\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2-2x+3}{x^2+4x+4}\right)=\dfrac{\infty}{\infty}$ ఇది అనిర్దారిత రూపము అగును.

కాని వాస్తవ గణన మరియు దాని పట్టిక ఈ క్రింది విధముగా వుండును:

x	$2x^2-2x+3$	x^2+4x+4	$\dfrac{2x^2-2x+3}{x^2+4x+4}$
1	3	9	0.3333
10	183	144	1.27083
100	19803	10404	1.90340
1000	1998003	1004004	1.99003
10000	199980003	100040004	1.99900

పట్టిక నుండి x కావలసినంత పెద్దదైనపుడు $f(x)$ యొక్క విలువ 2కు చేరువగా వుండుటని చూడవచ్చును.

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2-2x+3}{x^2+4x+4}\right)=2.$

ఈ సమస్యలో లవము మరియు హారమును x^2 చే భాగించి సూక్ష్మీకరించవచ్చును.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-2x+3}{x^2+4x+4}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}\right)$$

$$=\frac{2-0+0}{1+0+0}\ (\text{ఎందుకనగా } x\to\infty \text{ అయిన } \frac{1}{x}\to 0,\ x\to\infty \text{ అయిన } \frac{1}{x^2}\to 0)$$

$$=2.$$

ఇక్కడ లవము మరియు హారముల సమాసముల యొక్క అంతస్థ సమానముగా వుండుటను చూడవచ్చును.

సాధారణముగా $x\to\pm\infty$ అయిన అకరణీయ సమాసపు అవధి విలువను కనుగొనుటకు హారంలోని x యొక్క గరిష్ఠ ఘాతముచే లవము మరియు హారమును మొదట భాగించి, మరియు లవము మరియు హారముల రెండింటి అవధిని $x\to\infty$ (లేదా $x\to-\infty$) అయినప్పుడు కనుగొనవచ్చును.

ఉదాహరణ 9.23

విలువను కనుగొనుము : $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x+3}{(5x^2+1)}$.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_9.indd 114 11/05/2022 16:05:12

సాధన

x^2 చే భాగించగా

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x+3}{(5x^2+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{5+\frac{1}{x^2}}\to\infty$$

అంటే, $\frac{x^3+2x+3}{(5x^2+1)}\to\infty$ అయిన $x\to\infty$.

అంటే, అవధి వ్యవస్థితము కాదు.

లవము యొక్క అంతస్థు హారము యొక్క అంతస్థుకంటే ఎక్కువగా వుండుటను గమనించుము.

ఉదాహరణ 9.24

విలువను కనుగొనుము $\lim_{x\to\infty}\frac{1-x^3}{3x+2}$.

సాధన

x, చే భాగించగా

$$x\to\infty \text{ అయిన } \frac{1-x^3}{3x+2}=\frac{\frac{1}{x}-x^2}{3+\frac{2}{x}}\to-\infty\,.$$

కావున అవధి వ్యవస్థితం కాదు.

9.2.6 అకరణీయ ప్రమేయముల అవధులు (Limits of rational functions)

$R(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ మరియు $q(x)$ యొక్క అంతస్థు కన్నా $p(x)$ యొక్క అంతస్థు ఎక్కువగా వుండిన

$x\to\infty$ అయినప్పుడు $\frac{p(x)}{q(x)}\to+\infty$ లేక $-\infty$ అగును.

$q(x)$ యొక్క అంతస్థు $p(x)$ యొక్క అంతస్థు కన్నా ఎక్కువగా వుండిన

$$\lim_{x\to\infty}\frac{p(x)}{q(x)}=0.$$

చివరగా $p(x)$ మరియు $q(x)$ అంతస్థులు సమానము అయిన

$$\lim_{x\to\infty}\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{p(x)\text{ లో గల }x\text{ యొక్క గరిష్ఠ ఘాతము యొక్క గుణకము}}{q(x)\text{ లో గల }x\text{ యొక్క గరిష్ఠ ఘాతము యొక్క గుణకము}}.$$

విశేషాంశము (Remark)

$x\to a$, అయిన $f(x)\to\infty$ అయిన $x\to a$, అయిన $f(x)\to-\infty$ మరియు $x\to\infty$, అయిన $f(x)\to\infty$, $x\to\infty$ అయిన $f(x)\to-\infty$ వంటి ప్రవచనాలకు అవధి వ్యవస్థితం కాదు అను అర్థమును మనము తిరిగి నొక్కిచెప్పవచ్చును. ∞ అను గుర్తు ఒక సంఖ్యను సూచించదు మరియు దీనిని ఒక సంఖ్యగా భావించరాదు.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_9.indd 115 11/05/2022 16:05:13

9.2.7 అవధుల యొక్క ఉపయోగములు (Applications of limits)

ఉదాహరణ 9.25

శరీరము నుండి ఆల్కాహాల్‌ను ఊపిరితిత్తులు, మూత్రపిండము వంటి అవయవములు మరియు కాలేయంలోని రసాయనిక చర్యలు ద్వారా తొలగించబడును. ఆల్కాహాల్ యొక్క గాఢత సాధారణముగా ఉండిన దానిని విసర్జించు పనిని ఎక్కువగా కాలేయము చేయుచున్నది. దాని గాఢత 5% నకు తక్కువగా వున్న ఆల్కహాల్‌ను ఊపిరితిత్తులు మరియు మూత్రపిండములు విసర్జించుచున్నవి. రక్త ప్రసరణలో గల ఆల్కాహాల్‌ను కాలేయము తొలగించు రేటు r ను రక్తములో గల ఆల్కాహాల్ గాఢత x తో ఒక అకరణీయ ప్రమేయము $r(x)=\frac{\alpha x}{x+\beta}$ రూపంగా సంబంధపరచబడినది. ఇక్కడ α, β అనునవి ధనాత్మక స్థిరాంకములు. ఆల్కాహాల్‌ను తొలగించుటకు వీలగు గరిష్ఠ రేటును కనుగొనుము.

సాధన

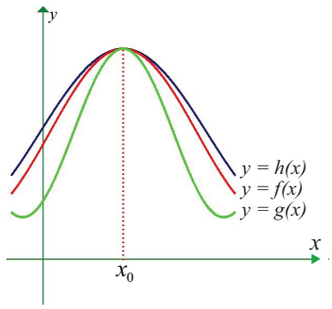
ఆల్కాహాల్ గాఢత x పెరుగుతున్నకొలది దానిని తొలగించు రేటు పెరుగును.

కావున తొలగించుటకు వీలగు గరిష్ఠరేటు $=\lim_{x\to\infty} r(x)$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha x}{x+\beta}=\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha}{\left(1+\frac{\beta}{x}\right)}=\alpha.$$

9.2.8 శాండ్విచ్ సిద్ధాంతము (Sandwich Theorem)

శాండ్విచ్ సిద్ధాంతమును సూక్యజ్ సిద్ధాంతము (squeeze theorem) అని కూడా అంటారు. పటము 9.27 లో చూపినట్లు $f(x)$ ను x_0 కు సమీపంలో గల ప్రతి x కు $g(x)$ మరియు $h(x)$ ల మధ్య ఇమడ్చబడినది. మరియు $x\to x_0$, అయినప్పుడు g మరియు h ప్రమేయాల ఉమ్మడి అవధి l అని మనకు తెలిసినా, ఇది $x\to x_0$. అయిన f కూడా l ను సమీపించును అని వివరించును.



పటము 9.27

సిద్ధాంతము 9.5 శాండ్విచ్ సిద్ధాంతము (Sandwich Theorem)

$f, g, h: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ అను ప్రమేయములు I లో గల x_0 యొక్క మినహాయింపు సామీప్యంలో గల అన్ని x కు $g(x)\le f(x)\le h(x)$ అగును.

$\lim_{x\to x_0} g(x)=\lim_{x\to x_0} h(x)=l$, అయితే $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ అవుతుంది.

ఉదాహరణ 9.26

ఐన్‌స్టీన్ సాపేక్ష సిద్ధాంతం ప్రకారము v వేగముతో చలిస్తున్న ఒక వస్తువు యొక్క ద్రవ్యరాశి $m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ ఇక్కడ m_0 అనునది ప్రారంభ ద్రవ్యరాశి మరియు c అనునది కాంతివేగము $v\to c^-$.

అయిన m కు ఏమి జరుగును? ఎందుకు ఎడమ అవధి అవసరము?

సాధన

$$\lim_{v\to c^-}(m)=\lim_{v\to c^-}\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{m_0}{\sqrt{\lim_{v\to c^-}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}}$$

$h>0$, అయిన $c-h<v<c$. దీని మూలంగా $(c-h)^2<v^2<c^2$.

అనగా $\frac{(c-h)^2}{c^2}<\frac{v^2}{c^2}<1$. అది $\lim_{h\to 0}\frac{(c-h)^2}{c^2}<\lim_{h\to 0}\frac{v^2}{c^2}<\lim_{h\to 0}1$.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_9.indd 116 11/05/2022 16:05:18

అది $1<\lim_{h\to 0}\frac{v^2}{c^2}<1$. అది $1<\lim_{v\to c^-}\frac{v^2}{c^2}<1$. శాండ్విచ్ సిద్ధాంతము ప్రకారము $\lim_{v\to c^-}=1$.

కావున $\lim_{v\to c^-}(m)\to\infty$.

కావున, $v\to c^-$. అయిన ద్రవ్యరాశి మిక్కిలి ఎక్కువ (అనంతము)గా పెరుగును.

ఎడమ అవధి అవసరము లేనిచో $v\to c^+$ అయిన $1-\frac{v^2}{c^2}<0$ కావున ద్రవ్యరాశిని కనుగొనుటకు వీలుకాదు.

ఉదాహరణ 9.27

స్వేచ్ఛగా పడుతున్న ఒక వస్తువు యొక్క వేగము అడుగు / సెకనులలో $r(t)=-\sqrt{\frac{32}{k}}\frac{1-e^{-2t\sqrt{32k}}}{1+e^{-2t\sqrt{32k}}}$ గా నిర్వచింపబడి యున్నది.

ఇక్కడ k స్థిరాంకము. ఇది ఆ వస్తువు యొక్క పరిమాణము, ఆకారము మరియు గాలి సాంద్రతపై ఆధారపడును. ఆ వస్తువు యొక్క వేగ అవధి $\lim_{t\to\infty}r(t)$ ను కనుగొనుము.

సాధన

$$\lim_{t\to\infty}r(t) = \lim_{t\to\infty}-\sqrt{\frac{32}{k}}\frac{1-e^{-2t\sqrt{32k}}}{1+e^{-2t\sqrt{32k}}}$$

$$=-\sqrt{\frac{32}{k}}\lim_{t\to\infty}\frac{1-e^{-2t\sqrt{32k}}}{1+e^{-2t\sqrt{32k}}}$$

$$=-\sqrt{\frac{32}{k}}\frac{(1-0)}{(1+0)}=-\sqrt{\frac{32}{k}}$$ అడుగులు / సెకెను

ఉదాహరణ 9.28

ఒక జంతువు యొక్క కంటిచూపు యొక్క వ్యాసము $f(x)=\frac{160x^{-0.4}+90}{4x^{-0.4}+15}$, అను ప్రమేయముగా ఇవ్వబడినది. ఇక్కడ x అనునది కాంతి తీవ్రతను సూచించును మరియు $f(x)$ మి.మీ.లో ఇవ్వబడినది. దాని కంటి చూపు యొక్క వ్యాసమును, (a) కనిష్ఠ కాంతి తీవ్రత (b) గరిష్ఠ కాంతి తీవ్రతలను కనుగొనుము.

సాధన

(a) కనిష్ఠ కాంతి తీవ్రత కొరకు $x\to 0^+$. అగునపుడు, ప్రమేయము యొక్క అవధిని కనుగొంటే చాలు.

$$\lim_{x\to 0^+}f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{160x^{-0.4}+90}{4x^{-0.4}+15}=\lim_{x\to 0^+}\frac{160+90x^{0.4}}{4+15x^{0.4}}$$

$$=\frac{160}{4}=40\text{mm}\ .$$

(b) గరిష్ఠ కాంతి తీవ్రత కొరకు $x\to\infty$ అగునపుడు, ప్రమేయము యొక్క అవధిని కనుగొంటే చాలు.

$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{160x^{-0.4}+90}{4x^{-0.4}+15}=\frac{90}{15}=6$ మి.మీ

కాంతి తీవ్రత గరిష్ఠంగా ఉన్నప్పుడు కంటిచూపు యొక్క అవధి 6 మి.మీ గా ఉండును.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_9.indd 117 11/05/2022 16:05:20

అభ్యాసము 9.3

(1) క్రిందివ్వబడిన ప్రమేయములకు ఎడమ, కుడి అవధుల విలువలను కనుగొనుము.

(a) $x=-2$. వద్ద $f(x)=\dfrac{x^2-4}{(x^2+4x+4)(x+3)}$

(b) $x=\dfrac{\pi}{2}$ వద్ద $f(x)=\tan x$.

క్రిందివ్వబడిన అవధుల విలువలను కనుగొనుము.

(2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2(x^2-6x+9)}$ (3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{2x+11}{x^2+x-6}$ (4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$ (6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3}$ (7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$

(8) నిరూపించుము.

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{3n^2+7n+2}=\dfrac{1}{6}$ (ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+\ldots+(3n)^2}{(1+2+\ldots+5n)(2n+3)}=\dfrac{9}{25}$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{3.4}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}=1$

(9) పునరుత్పత్తి కాలంలో ప్రస్తుతమున్న గ్రుడ్లును పెట్టే చేపల సంఖ్యను అంచనా వేయుట మరియు ఈ సమాచారమును ఉపయోగించి నదులకు తిరిగి వెళ్ళే పరిపక్వ చేపల సంఖ్యను అంచనా వేయుట అనునవి చేపల పెంపక శాస్త్రంలో ఒక ముఖ్యమైన సమస్య. గ్రుడ్లు పెట్టే వాని సంఖ్య S మరియు పరిపక్వత చెందే వాని సంఖ్య R అయితే "బెవర్టన్–హోల్ట్ గ్రుడ్ల నుండి పరిపక్వత చెందు వాని ప్రమేయం $R(S)=\dfrac{S}{(\alpha S+\beta)}$ అగును. ఇక్కడ α మరియు β లు ధనాత్మక స్థిరాంకములు. గ్రుడ్లుపెట్టే వాని సంఖ్య అతిపెద్దదైనప్పుడు స్థిరపరిపక్వతను ఈ ప్రమేయము సుమారుగా అంచనా వేయునని చూపుము.

(10) ఒక ట్యాంకు 5000 లీటర్ల శుద్దనీరును కలిగిఉన్నది. ఒక లీటరు నీటికి 30 గ్రాముల ఉప్పును కలిగిన బ్రైన్ (ఎక్కువ ఉప్పునీరు) నీరును ట్యాంకులోనికి ఒక నిముషంనకు 25 లీటర్ల చొప్పున వదల బడినది. t నిముషాల తరువాత ఉప్పునీటి గాఢత (లీటరుకు గ్రాములలో) $C(t)=\dfrac{30t}{200+t}$. అగును. $t\to\infty$? అయినప్పుడు ఈ గాఢత ఏవిధంగా మారును?

ఉదాహరణ 9.29

విలువను కనుగొనుము : $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

సాధన

$-1\le\sin\dfrac{1}{x}\le 1\Rightarrow -x^2\le x^2\sin\dfrac{1}{x}\le x^2$ అని మనకు తెలుసు

$g(x)=-x^2, f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}; h(x)=x^2$ తీసుకొంటాము

అయిన $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}(-x^2)=0$ మరియు

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_9.indd 118 11/05/2022 16:05:21

$$\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0}(x^2) = 0 \text{ అగును.}$$

శాండ్విచ్ సిద్ధాంతము ప్రకారము ,

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \text{ అగును.}$$

మనము అవధి సిద్ధాంతములను ఉపయోగించి యున్నచో తప్పైన నిర్ణయానికి వచ్చి ఉంటాము.

$$\text{అనగా, } \lim_{x\to 0} x^2\left(\sin\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}(x^2)\lim_{x\to 0}\left(\sin\frac{1}{x}\right)$$

ఇప్పుడు, $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ వ్యవస్థితం కాదు, $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ కావున $\lim_{x\to 0} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ యొక్క విలువ మనకు సమస్య కల్గించును

$a \le f(x) \le a$, then $\lim_{x\to x_0} f(x) = a.$ అని గమనించుము.

ఉదాహరణ 9.30

నిరూపించుము : $\lim_{x\to 0}\sin x = 0$.

సాధన

అన్ని $x \ge 0$ కు $-x \le \sin x \le x$ అని మనకు తెలుసు

$$\lim_{x\to 0}(-x) = 0 \text{ మరియు}$$

$$\lim_{x\to 0}(x) = 0.$$

శాండ్విచ్ సిద్ధాంతము ప్రకారం

$$\lim_{x\to 0}\sin x = 0.$$

ఉదాహరణ 9.31

$\lim_{x\to 0^+} x\left[\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{2}{x}\right\rfloor + \cdots + \left\lfloor\frac{15}{x}\right\rfloor\right] = 120$ అని నిరూపించుము.

సాధన

$$\frac{1}{x} - 1 \le \left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor \le \frac{1}{x} + 1$$

$$\frac{2}{x} - 1 \le \left\lfloor\frac{2}{x}\right\rfloor \le \frac{2}{x} + 1$$

$$\vdots$$

$$\frac{15}{x} - 1 \le \left\lfloor\frac{15}{x}\right\rfloor \le \frac{15}{x} + 1$$

వీటిని సంకలనం చేయగా, మనకు లభించునది,

$$\frac{120}{x} - 15 \le \left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{2}{x}\right\rfloor + \cdots + \left\lfloor\frac{15}{x}\right\rfloor \le \frac{120}{x} + 15$$

$$120 - 15x \le x\left[\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{2}{x}\right\rfloor + \cdots + \left\lfloor\frac{15}{x}\right\rfloor\right] \le 120 + 15x$$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_9.indd 119 11/05/2022 16:05:23

$$\lim_{x\to 0^+}(120-15x) \le \lim_{x\to 0^+} x\left[\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2}{x}\right\rfloor+\cdots+\left\lfloor\frac{15}{x}\right\rfloor\right] \le \lim_{x\to 0^+}(120+15x)$$

$$120 \le \lim_{x\to 0^+} x\left[\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2}{x}\right\rfloor+\cdots+\left\lfloor\frac{15}{x}\right\rfloor\right] \le 120$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\left[\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2}{x}\right\rfloor+\cdots+\left\lfloor\frac{15}{x}\right\rfloor\right]=120\,.$$

9.2.9 రెండు ప్రత్యేక త్రికోణమితీయ అవధులు (Two special Trigonometrical limits)

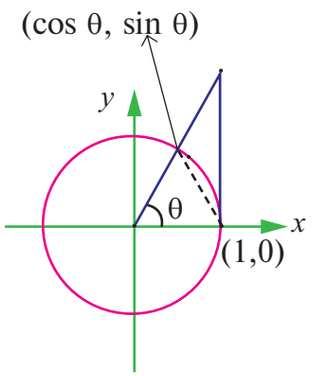
ఫలితము 9.1

(a) $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ (b) $\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta}=0$.

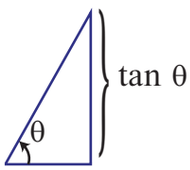
నిరూపణ

దీనిని వృత్త కోణభాగము మూలంగా నిరూపించవచ్చు.

కేంద్రము (0, 0) మరియు వ్యాసార్ధం 1 గల వృత్తమును తీసుకొందాం. వృత్తంపై గల ఏదేని ఒక బిందువు $P(\cos\theta, \sin\theta)$. అనుకోనుము



పటము 9.28



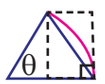
త్రిభుజ వైశాల్యం $\frac{\tan\theta}{2}$

పటము 9.29



వృత్త కోణభాగము యొక్క వైశాల్యం $\frac{\theta}{2}$

పటము 9.30



త్రిభుజ వైశాల్యం $\frac{\sin\theta}{2}$

పటము 9.31

వైశాల్య నియమం ప్రకారం $\frac{\tan\theta}{2} \ge \frac{\theta}{2} \ge \frac{\sin\theta}{2}$.

ప్రతి దానిని $\frac{2}{\sin\theta}$ తో గుణించిన $\frac{1}{\cos\theta} \ge \frac{\theta}{\sin\theta} \ge 1$ లభించును. విలోమము చేయగా

$\cos\theta \le \frac{\sin\theta}{\theta} \le 1$.

$\cos(-\theta) = \cos\theta$ మరియు $\frac{\sin(-\theta)}{-\theta} = \frac{\sin\theta}{\theta}$ అసమానత్వము

$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ అను వివృతాంతరంలో గల శూన్యేతర అన్ని θ విలువలకు అన్వయించును.

$\lim_{\theta\to 0}\cos\theta = 1; \lim_{\theta\to 0}(1) = 1$ అని మనకు తెలుసు. కావున శాండ్విచ్ సిద్ధాంతం ప్రకారం $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$.

(b) $\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta}=0$.

$$1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_9.indd 120 11/05/2022 16:05:24

$$\frac{1-\cos\theta}{\theta} = \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

కావున, $\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta} = \lim_{\theta\to 0}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right).\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\frac{\sin\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)$

$= 0 \times 1 = 0.$ ■

9.2.10 ఇతర ముఖ్యమయిన అవధులు (Some important other limits)

ఫలితము **9.2**

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

నిరూపణ

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots \qquad \text{(శ్రేడులు మరియు శ్రేణి నుండి)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\ldots\right)=1.$$ ■

ఫలితము **9.3**

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \log a,\ a>0$$

నిరూపణ

$a^x, \log_a x$ అనునది ఒకదానికి ఒకటి విలోమములు అని మనకు తెలుసు.

$\log f(x)$ అనునది $\exp(f(x))$, యొక్క విలోమము అయిన $\exp(\log f(x)) = f(x).$

కావున, $a^x = \exp(\log a^x)$

$= e^{x\log a}$

కావున, $\frac{a^x-1}{x} = \frac{e^{x\log a}-1}{x\log a}\times\log a$

$x\to 0$, అయిన $y = x\log a \to 0$

కావున, $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}\times\log a = \log a\lim_{y\to 0}\left(\frac{e^y-1}{y}\right) = \log a\,(1) = \log a$

$(\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ కావున)

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_9.indd 121 11/05/2022 16:05:26

ఫలితము **9.4**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1.$$

నిరూపణ

$\log(1+x) = y$ అని తీసుకొనుము

$x\to 0$ అయిన $y\to 0$ మరియు

$$1+x = e^y$$

$$x = e^y-1$$

కావున, $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{e^y-1}$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{1}{\left(\frac{e^y-1}{y}\right)}=\frac{1}{1}=1.$$

నిరూపణము లేని కొన్ని ముఖ్య అవధులు (Some important limits without proof)

ఫలితము **9.5** నుండి **9.9**

(5) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x}{x}=1$

(6) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x}{x}=1$

(7) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ వ్యవస్థితం మరియు ఈ విలువ e అని గుర్తించవచ్చు.

(8) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$

(9) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=e^k.$

e అను సంఖ్య $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0.$ అను రూపంలోని బహుపద సమీకరణంను ఎల్లప్పుడు తృప్తి పరచదు. కావున e అను సంఖ్యను ట్రాన్స్‌డెంటల్ సంఖ్య అంటారు.

ఉదాహరణ 9.32

విలువను కనుగొనుము : $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{2\operatorname{cosec} x}$

సాధన

$\sin x=\frac{1}{y}$ అనుకొనుము

$x\to 0,$ అయిన $y\to\infty$ మరియు

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{2\operatorname{cosec} x}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{2y}=\left[\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^2=e^2.$$

ఉదాహరణ 9.33

విలువ కట్టుము : $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^x.$

సాధన

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2+4}{x-2}\right)^{x-2+2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-2}\right)^{(x-2)+2}$$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_9.indd 122 11/05/2022 16:05:28

$y = x-2$, అయిన $x \to \infty$, అయినప్పుడు $y \to \infty$ మరియు

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^{x} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{y+2} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{y}.\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{2}$$

$$= e^4.1 = e^4 .$$

ఉదాహరణ 9.34

గణించుము : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{4\sqrt{2}-(\cos x+\sin x)^5}{1-\sin 2x}$.

సాధన

$$\frac{4\sqrt{2}-(\cos x+\sin x)^5}{1-\sin 2x} = \frac{2^{\frac{5}{2}}-\left[(\cos x+\sin x)^2\right]^{\frac{5}{2}}}{1-\sin 2x}$$

$$= \frac{2^{\frac{5}{2}}-(1+\sin 2x)^{\frac{5}{2}}}{2-(1+\sin 2x)}$$

$$= \frac{2^{\frac{5}{2}}-(1+\sin 2x)^{\frac{5}{2}}}{2-(1+\sin 2x)}$$

కావున, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{2^{\frac{5}{2}}-[(\cos x+\sin x)^2]^{5/2}}{2-[1+\sin 2x]} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{2^{\frac{5}{2}}-\left[1+\sin 2x)\right]^{\frac{5}{2}}}{2-(1+\sin 2x)}$.

$y = 1 + \sin 2x$. అనుకొనుము. $x \to \dfrac{\pi}{4}$ అయిన $y \to 2$

$$= \lim_{y\to 2} \frac{2^{\frac{5}{2}}-y^{\frac{5}{2}}}{2-y}$$

$$= \frac{5}{2}.2^{\frac{5}{2}-1} = \frac{5}{2}\times 2^{\frac{3}{2}} = 5\sqrt{2} .$$

ఉదాహరణ 9.35

$x \to 0$? అయినప్పుడు క్రిందివ్వబడిన ప్రమేయాలకు అవధి వ్యవస్థితమా కనుగొనుము? నీ సమాధానంకు కారణంను తెల్పుము.

(i) $\dfrac{\sin|x|}{x}$ (ii) $\dfrac{\sin x}{|x|}$ (iii) $\dfrac{x\lfloor x\rfloor}{\sin|x|}$ (iv) $\dfrac{\sin\left(x-\lfloor x\rfloor\right)}{x-\lfloor x\rfloor}$.

సాధన

(i) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(-x)}{x} & \text{మరియు } -1 < x < 0 \text{ అయితే} \\ \dfrac{\sin x}{x} & \text{మరియు } 0 < x < 1 \text{ అయితే} \end{cases}$$

కావున, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +1$.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_9.indd 123 11/05/2022 16:05:29

ఇక్కడ $f(0^-) \neq f(0^+)$ అయినందున అవధి వ్యవస్థితం కాదు.

(ii) $$\frac{\sin x}{|x|} = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{-x}, & -1 < x < 0 \\ \frac{\sin x}{x}, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

కావున, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$

అయినందున అవధి వ్యవస్థితం కాదు.

(iii) $$f(x) = \frac{x\lfloor x \rfloor}{\sin|x|} = \begin{cases} \frac{-x}{\sin(-x)}, & -1 < x < 0 \\ \frac{x.0}{\sin x}, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{x}{\sin x}, & -1 < x < 0 \\ 0, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

కావున, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +1$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0.$

కావున అవధి వ్యవస్థితం కాదు.

(iv) $$\frac{\sin\left(x - \lfloor x \rfloor\right)}{x - \lfloor x \rfloor} = \begin{cases} \frac{\sin(x-(-1))}{x-(-1)}, & -1 < x < 0 \\ \frac{\sin(x-0)}{x-0}, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x+1)}{(x+1)}, & -1 < x < 0 \\ \frac{\sin x}{x}, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \frac{\sin 1}{1} = \sin 1$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1.$

కావున అవధి వ్యవస్థితం కాదు.

అభ్యాసము 9.4

క్రింది వాటి అవధులను కనుగొనుము.

(1) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{7x}$

(2) $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{1/3x}$

(3) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^{\frac{m}{x}}$

(4) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)^{8x^2+3}$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_9.indd 124 11/05/2022 16:05:31

(5) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x+2}$

(6) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3\left(\frac{x}{2}\right)}{x^3}$

(7) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$

(8) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 5x}$

(9) $\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin(\alpha^n)}{(\sin\alpha)^m}$

(10) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}$

(11) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+b^2}-b}$

(12) $\lim_{x\to 0}\frac{2\arcsin x}{3x}$

(13) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

(14) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{x}$

(15) $\lim_{x\to 0}\frac{2^x-3^x}{x}$

(16) $\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{\sqrt{x+1}-1}$

(17) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x\sin 2x}$

(18) $\lim_{x\to\infty} x\left[3^{\frac{1}{x}}+1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)-e^{\frac{1}{x}}\right]$

(19) $\lim_{x\to\infty}\{x[\log(x+a)-\log(x)]\}$

(20) $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}$

(21) $\lim_{x\to\pi}(1+\sin x)^{2\operatorname{cosec} x}$

(22) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$

(23) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\tan x}$

(24) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x$

(25) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$

(26) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$

(27) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3}$

(28) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

9.3 (అవధులు) అవిచ్ఛిన్నత (Continuity)

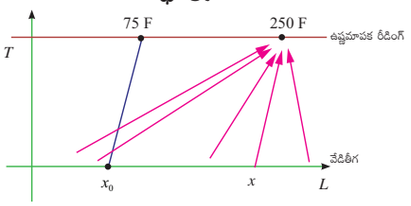
ప్రమేయముల ప్రవర్తనలలో అవిచ్ఛిన్నత అను ధర్మము ముఖ్యలక్షణాలలో ఒకటి అగును. ప్రకృతిలో మన ద్వారా పరిశోధింపబడుతున్న చాలా దృగ్విషియాల యొక్క సాధారణ లక్షణంను అవిచ్ఛిన్నత గణిత పరంగా ప్రతిబింబింపచేయును. ఉదాహరణకు, వేడి చేయబడుతున్న కడ్డీ యొక్క అవిచ్ఛిన్న విస్తరణ, సూక్ష్మజీవుల యొక్క అవిచ్ఛిన్నవృద్ధి, ఒక అవిచ్ఛిన్న ప్రవాహము, లేదా వాతావరణ ఉష్ణోగ్రత యొక్క అవిచ్ఛిన్నలే మొదలగువానిలో మనము అవిచ్ఛిన్నత గూర్చి మాట్లాడుతున్నాము.

ఒక ప్రమేయం యొక్క అవిచ్ఛిన్నత అను లక్షణము "రేఖాచిత్రంలో ఎటువంటి అంతరాయం లేదు" అను జ్యామితీయ సంకేతం నుండి ఉద్భవించినది. వాస్తవంగా "టుహ్యాంగ్ టుగేదర్ (ఏకరీతిగా కలిసిఉండుట)" అను అర్థమునిచ్చు continuere అను లాటిన్ పదం నుండి అవిచ్ఛిన్నత పేరు ఉద్భవించినది. ఏదేమైనా ప్రమేయాల యొక్క విశ్లేషణకు ఈ భావనను అనువర్తింపచేయుట యొక్క కోణంలో "రేఖాచిత్రంలో ఎటువంటి అంతరాయంలేదు" లేదా "ఏకరీతిగా కలిసి ఉండుట" అను దానితో అవిచ్ఛిన్నతను గుర్తించటంలో తీవ్రమైన లోపాలు గలదు. తదనుగుణంగా, ఆవిచ్ఛిన్నత యొక్క అర్థమును అంతరదృష్టితో పొందుటకు రేఖాచిత్రం యొక్క అభివృద్ధి చెందని ఉపయోగము తీవ్రంగా తప్పుదారి పట్టించును అని సలహా ఇవ్వబడినది. అయినప్పటికి, అవిచ్ఛిన్నము అనగా ప్రదేశాల అంతరంలో ప్రమేయాలకు రేఖాచిత్రంను పెన్సిల్ యొక్క కొనను పైకెత్తకుండా గీయగలుగుట అత్యావసరమని మనము తరువాత అవగాహన చేసుకొంటాము.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_9.indd 125 11/05/2022 16:05:31

వైఖరి యొక్క సరైన మరియు సమర్థవంతమైన పద్ధతి, అవధితో అవిచ్ఛిన్నతను అనుసంధానం చేయు భావనకు మనల్ని అనుమతిస్తుంది. సాధారణంగా మాట్లాడునప్పుడు, అవిచ్ఛిన్నత యొక్క ధర్మమును కలిగియుండుటకు అర్థము. ఒక అనుకూల అవధిని కలిగివుండుట అగును. అవధి పదాలలో అవిచ్ఛిన్నత యొక్క భావనను సూత్రీకరించు క్రమంలో మనము మన యొక్క శ్రద్దను ఒక బిందువు వద్ద కేంద్రీకరించవలెను. ఒక బిందువు వద్ద నిర్వచించిన అవధి మరియు అవిచ్ఛిన్నత రెండునూ ప్రాథమిక భావనలు. కాని అవిచ్ఛిన్నత ఒక బిందువారి మార్గంలో ఒక ప్రపంచ గుణంను ఆర్జించును.

ప్రేరణ కొరకు క్రిందివ్వబడిన భౌతిక పరిస్థితిని తీసుకొందాం. ఒక ఉష్ణమాపకము Tతో వేడితీగ L యొక్క ఉష్ణోగ్రతలను కొలుస్తాము.



పటము 9.32

వేడితీగ L మీద ప్రతిబిందువు x కు ఉష్ణసమాపకము T మీద ఉష్ణోగ్రత రీడింగ్ $t(x)$ కేటాయించబడును. తీగ L వెంబడి L మీద ఒక బిందువు x_0 చేరువరకు కదిలిన ఉష్ణోగ్రత $250°F$ గా సమానంగా ఉందని గమనించబడినది.

x_0 వద్ద ఉష్ణబందకం ఉన్నట్లయితే x_0 వద్ద ఉష్ణోగ్రత, $75°F$ అను గది ఉష్ణోగ్రతకు ఉన్నట్లుండి పడిపోయిందని అనుకొందాము. కాని, x_0 సమీపంలో $250°F$ రీడింగును మరలను గమనించామని అనుకొందాము. దీనిని మనము ప్రమేయ రూపంలో క్రింది విధంగా సూచిస్తాము.

$$t(x) = \begin{cases} 250^{\circ}F & \text{if } x \neq x_0 \\ 75^{\circ}F & \text{if } x = x_0 \end{cases} \text{ అయిన}$$

కావు x_0 బిందువును ఒక ప్రత్యేక బిందువు (singular point) అంటారు. singular అనగా "ప్రత్యేకమైనది లేదా అసాధారనమైనది") ఉష్ణోగ్రత రీడింగుల యొక్క పరిధిని విశ్లేషించి, x కు x_0 సమీపిస్తున్న దీని యొక్క సదృశ విలువలు $t(x)$, $t(x_0)$ సమీపంలో ఎటువంటి చలనం లేదు అని మనము చెప్పవచ్చును. సంక్షిప్తంగా x_0 వద్ద ఒక జంపు గలదు. కావున ఉష్ణోగ్రత ప్రమేయంలో" x_0 వద్ద అవిచ్ఛిన్నత లోటు "గలదని చెప్పుటకు దారితీయును. x విలువలు x_0 ను సమీపిస్తున్న $t(x) = 250°F$. చూపును కావున $t(x_0)$ ను $250°F$ గా మనము అంచనా వేస్తాము. పూర్వ – ప్రతిబింబము ఒక విలువను సమీపించునపుడు దాని ప్రతిబింబం ఏ విలువను సమీపించును అను డిమాండును మరియు అవిచ్ఛిన్నత యొక్క భావనను మరియు అవగాహన చేసుకొంటాము. మన యొక్క ఉదాహరణలో వేడితీగ మీద గల బిందువులు పూర్వ – ప్రతిబింబాలుగానూ, ఉష్ణోగ్రత రీడింగులు వాని యొక్క ప్రతిబింబాలుగాను అగును.

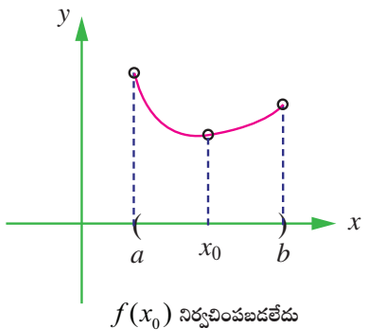
ప్రతిరోజు అనుభావాలలో "హఠాత్తుగా"! జరిగే ఆకస్మాతు మార్పులను వ్యక్తపరిచే అవిచ్ఛిన్నలో లోటు లేదా చాలా సరళంగా "అవిచ్ఛిన్నత" అను విరుద్ధభావన ద్వారా అవిచ్ఛిన్నత యొక్క సహజభావనను విద్యార్థులు ప్రతిబింబిస్తారు. మెదడుకు తక్కున గుర్తుచ్చే కొన్న గణిత నమూనాలను వాటి ప్రమేయాలతో సహా క్రిందివ్వబడినది :

1) ఒక లైటు బటన్‌ను వేయనప్పుడు : కాలప్రమేయంగా కాంతి తీవ్రత
2) ఒక వాహనం ఢీకొనుట : కాలప్రమేయంగా వేగము
3) ఒక ఆకాశవాణిని radio ను నిలిపినప్పుడు : కాలప్రమేయంగా శబ్ద తీవ్రత
4) బెలూన్ పగులుట : బెలూన్‌లో ప్రవేశించే గాలి ప్రమేయంగా వ్యాసార్ధము
5) తీగతెగుట : పొడవు ప్రమేయంగా తీగతన్యత (Tension)
6) తపాలా రుసుము : ఇక్కడ తపాలా రుసుము బరువుకు తగిన ప్రమేయం
7) ఆదాయపు పన్ను : పన్ను విధించగల ఆదాయ ప్రమేయంగా పన్ను–రేటు
8) వయస్సును సంవత్సరాలలో లెక్కించుట : కాల ప్రమేయంగా మొత్త సంవత్సరంలో వయస్సు
9) భీమా యొక్క ప్రీమియం ధర : వయస్సు కు, తగిన ప్రమేయంగా ప్రీమియం వాస్తవంగా, ఉదాహరణలు (1) – (5) అంత ఖచ్చితమైనవి కావు. ఉదాహరణకు, కాంతితీవ్రత పారదర్శకం (transparent) గా ఉంటుంది. కాని అవిచ్ఛిన్నత సున్న ప్రకాశం నుంచి ధనాత్మక ప్రకాశంకు ఉంటుంది. నిజానికి, ప్రకృతి విచ్ఛిన్నత (abhor)

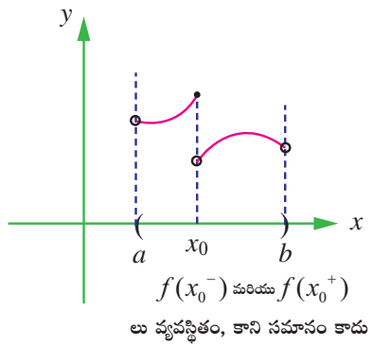
11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_9.indd 126 11/05/2022 16:05:31

కు విరొద్ధంగ గలదు. మరొకవిధంగా (6) – (9) ఉదాహరణలు అసలైన విచ్ఛిన్నాలు మరియు నిజానికి ఇవి ప్రత్యేక బిందువుల వద్ద జంపును (హఠాత్తు మార్పు) చూపును.

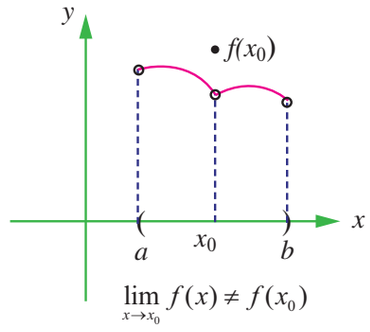
అవిచ్ఛిన్నము యొక్క గణితత్మాక నిర్వచనంను మనము ప్రతి రోజు మాట్లాడే భాషలో అవిచ్ఛిన్నత పదము యొక్క అర్థముతో అత్యంత సమీపంగా సరిపోల్చుకొని సంబంధపరచుకోవాలని విద్యార్థులకు సలహా ఇవ్వబడినది. ఏదైన ఒకటి ఆకస్మాతు మార్పు లేదా అంతరాయం లేకుండా క్రమేణ సంభవించినా దానిని అవిచ్ఛిన్న ప్రక్రియ అంటారు. అనగా, అక్కడ ఎటువంటి రంధ్రాలు, జంపులు లేదా ఖాళీలు లేదు. ప్రమేయం f రేఖాచిత్రము ఏ మూడు x బిందువుల వద్ద అవిచ్ఛిన్నం కాదో క్రింది పటములు తెలుపును. (a, b) అంతరంలోని మిగిలిన అన్ని బిందువుల వద్ద f యొక్క రేఖాచిత్రము అవిచ్ఛిన్నం మరియు అంతరాయం లేనిది అగును.



పటము 9.33



పటము 9.34



పటము 9.35

పైన ఇవ్వబడిన రేఖాచిత్రాలలో (9.33 నుండి 9.35) $x = x_0$ వద్ద f యొక్క రేఖాచిత్రముకు అవిచ్ఛిన్నము కాని మూడు నింబంధనలు వ్యవస్థితంను చూడవచ్చును.

ఇది $x = x_0$ వద్ద అవిచ్ఛిన్నము కాకపోవుటకు క్రిందివ్వబడిన మూడు నిబంధనలలో ఏదోకటి నాశనం చేయదు.

(1) $x = x_0$ వద్ద ప్రమేయం నిర్వచింపబడదు.

(2) $x = x_0$ వద్ద $f(x)$ యొక్క అవధి వ్యవస్థితం కాదు.

(3) $x = x_0$ వద్ద $f(x)$ యొక్క అవధి వ్యవస్థితం, కాని అది $f(x_0)$ కు వ్యవస్థితం కాదు.

వీటిని క్రింది ఉదాహరణల ద్వారా చూస్తాము.

వివరణ 9.6

(i) $f(x) = x^2+3$ (ii) $f(x) = \dfrac{16-x^2}{4+x}$

(i) $x \to 2$ అయినప్పుడు ఒక వైపు అవధులు

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 7$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 7$$

మరియు $\lim_{x\to 2} f(x) = 7$ అగును మరియు అయినప్పటికి $f(2)$ నిర్వచితం మరియు $f(2) = 7 = \lim_{x\to 2} f(x)$ ఈ సంధర్భంలో $x = 2$ వద్ద f అవిచ్ఛిన్నము.

(ii) ఒక వైపు అవధులు: $\lim_{x\to -4^-} f(x) = 8$

$$\lim_{x\to -4^+} f(x) = 8$$

మరియు కావున $\lim_{x\to -4} f(x) = 8$ కాని $f(-4)$ వ్యవస్థితం కాదు.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_9.indd 127 11/05/2022 16:05:32

$\lim_{x\to -4} f(x)$ వ్యవస్థితమయినప్పటికి -4 వద్ద ప్రమేయ విలువ $f(-4)$ నిర్వచితం కాలేదు. కావున $\lim_{x\to -4} f(x)$ యొక్క వ్యవస్థితం $f(-4)$ యొక్క వ్యవస్థితంపై ఆధారపడదు.

ఇప్పుడు మనము అవిచ్ఛిన్నతను క్రింది విధంగా నిర్వచిస్తాము.

నిర్వచనము 9.7

$\mathbb{R}$ లో x_0 కలిగిన వివృతాంతరం I ను తీసుకొందాం. $f: I \to \mathbb{R}$. అనుకొందాం. x_0 యొక్క సామీప్యఅంతరంలో f నిర్వచితము మరియు స్వతంత్ర చరరాశి x, x_0 ను సమీపించుకొలది ఈ ప్రమేయం యొక్క అవధి వ్యవస్థితమయ్యి $x = x_0$ వద్ద ప్రమేయం విలువకు సమానమయిన x_0 వద్ద f అవిచ్ఛిన్నము అని అంటారు.

$x = x_0$ వద్ద ఒక ప్రమేయం $y = f(x)$ కు అవిచ్ఛిన్నతకు క్రిందివ్వబడిన మూడు నిబంధనలను సంతృప్తి పరచవలెను.

(i) x_0 యొక్క సామీప్యఅంతరంలో $f(x)$ తప్పకుండ నిర్వచింపబడవలెను.

(ii) $\lim_{x\to x_0} f(x)$ వ్యవస్థితము ;

(iii) $f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)$.

నిబంధన (iii) ను $\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x) - f(x_0)] = 0$ గా మార్చి వ్రాయవచ్చును. మరియు x_0 వద్ద f యొక్క అవిచ్ఛిన్నతను క్రింది విధంగా మార్చవచ్చును.

నిర్వచనము 9.8

ఒక ప్రమేయం $y = f(x)$ ఏదొక x_0 యొక్క సామీప్య అంతరంలో నిర్వచితమై మరియు $\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x) - f(x_0)] = 0$ అయితే ఒక బిందువు x_0 (లేదా $x = x_0$ వద్ద) వద్ద ఈ ప్రమేయం అవిచ్ఛిన్నమని అంటారు.

నిబంధన (iii) ను $\lim_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right)$ అను రూపంలో కూడా వ్రాయవచ్చును. కావున, అవధి యొక్క గుర్తు మరియు ప్రమేయం యొక్క గుర్తులను పరస్పరం మార్పిడి చేసినట్లయితే వాదన యొక్క అవధి విలువ వద్ద ఈ ప్రమేయం అవిచ్ఛిన్నమగును.

9.3.1 ఒక బిందువు వద్ద అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయాల ఉదాహరణలు (Examples of functions Continuous at a point)

(1) $\mathbb{R}$ యొక్క ప్రతి బిందువు వద్ద స్థిరప్రమేయము అవిచ్ఛిన్నము $f(x) = k, k \in \mathbb{R}$ ఒక స్థిరాంకం అనుకొందాము. $x_0 \in \mathbb{R}$, అయితే $f(x_0) = k$. అగును.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}(k) = k.$$

(2) $\mathbb{R}$ యొక్క ప్రతి బిందువు వద్ద ధనపూర్ణసంఖ్య ఘాతాంకంగా గల ఘాత ప్రమేయములు అవిచ్ఛిన్నములు $f(x) = x^n$ అయితే అవధి సిద్ధాంతం ద్వారా f యొక్క ప్రదేశము $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ మరియు $\lim_{x\to x_0} x^n = x_o^n, x_0 \in \mathbb{R}$ అగును.

(3) బహుపది ప్రమేయములు $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, $a_0 \neq 0$ అనునవి $\mathbb{R}$ యొక్క ప్రతిబిందువు వద్ద అవిచ్ఛిన్నాలు.

$$\lim_{x\to x_0} p(x) = a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x_0 + a_n = p(x_0).$$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_9.indd 128 11/05/2022 16:05:34

(4) $R(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ రూపంలో గల అకరణీయ ప్రమేయాలు అని అనబడు బహుపదుల విభక్తాలు, $q(x) \neq 0$ అగు ప్రతిబిందువు వద్ద అవిచ్ఛిన్నము.

$$\lim_{x \to x_0} R(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{p(x)}{q(x)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to x_0} p(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} q(x)} = \frac{p(x_0)}{q(x_0)} = R(x_0)\,.$$

(5) వృత్త ప్రమేయాలు $\sin x$ మరియు $\cos x$ లు వాని యొక్క ప్రదేశము $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ లోని ప్రతి బిందువు వద్ద అవిచ్ఛిన్నాలు. ఎందుకనగా $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$, $\lim\limits_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$ అవధుల యొక్క బీజగణితంలోని వ్యుత్క్రమము మరియు విభక్త నియమముల కోణంలో $\tan x$, $\cot x$, $\operatorname{cosec} x$, $\sec x$ లు వాని యొక్క సరైన ప్రదేశాలలో అవిచ్ఛిన్నములు.

(6) $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ వంటి n వ మూలం ప్రమేయాలు వాని యొక్క సరైన ప్రదేశాలలో అవిచ్ఛిన్నములు.

ఎందుకనగా $\lim\limits_{x \to x_0} \left(x^{\frac{1}{n}} \right) = x_0^{\frac{1}{n}}$.

(7) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ అను వ్యుత్క్రమ ప్రమేయం 0 వద్ద నిర్వచితం కాదు, కావున 0 వద్ద అవిచ్ఛిన్నం కాదు. ఇది $\mathbb{R} - \{0\}$ యొక్క ప్రతిబిందువు వద్ద అవిచ్ఛిన్నము.

(8) $h(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0 \\ x^2+1, & x > 0 \end{cases}$

వాస్తవ సంఖ్యలు అన్నియు h యొక్క ప్రదేశము అగును. మరియు

$$\lim_{x \to 0^-} h(x) = \lim_{x \to 0^-} (x+1) = 1 = h(0)$$

$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = \lim_{x \to 0^+} (x^2+1) = 1 = h(0)\,.$$

కావున $x = 0$ వద్ద $h(x)$ అవిచ్ఛిన్నము.

సహజంగా, $(-\infty, 0)$ మరియు $(0, \infty)$ యొక్క ప్రతిబిందువు వద్ద $h(x)$ అవిచ్ఛిన్నము మరియు $(-\infty, \infty)$ యొక్క మొత్తంలో h అవిచ్ఛిన్నము.

(9) గరిష్ఠ పూర్ణ సంఖ్య ప్రమేయం $f(x) = \lfloor x \rfloor$ అనునది $x = 0$ వద్ద అవిచ్ఛిన్నం కాదు.

$$\lim_{x \to 0^-} \lfloor x \rfloor = -1 \text{ మరియు}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \lfloor x \rfloor = 0$$

ఇది ప్రతి పూర్ణసంఖ్య బిందువు వద్ద అవిచ్ఛిన్నము. వాస్తవంగా

$$\lim_{x \to n^-} \lfloor x \rfloor = n - 1 \text{ మరియు}$$

$$\lim_{x \to n^+} \lfloor x \rfloor = n.$$

(10) మాపు ప్రమేయము

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \text{ అయిన} \\ 0, & x = 0 \text{ అయిన} \\ x, & x > 0 \text{ అయిన} \end{cases}$$

ఇది $\mathbb{R}$ అను వాస్తవరేఖపై గల అన్ని బిందువుల వద్ద అవిచ్ఛిన్నము. ప్రత్యేకంగా

$$\lim_{x \to 0^-} |x| = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0,$$

$$\lim_{x \to 0^+} |x| = \lim_{x \to 0^+} (x) = 0, \text{ మరియు}$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 = f(0).$$

(11) $f(x) = e^x$ అను ఘాతాంక ప్రమేయము $\mathbb{R}$ మీద అవిచ్ఛిన్నము.

(12) $f(x) = \log x \ (x > 0)$ అను సంవర్గమాన ప్రమేయము $(0, \infty)$ లో అవిచ్ఛిన్నము.

9.3.2 అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయాల బీజగణితము (Algebra of continuous functions)

x_0 వద్ద f మరియు g లు అవిచ్ఛిన్నములు అయితే

(1) $x = x_0$ వద్ద $f + g$ అవిచ్ఛిన్నము,

(2) $x = x_0$ వద్ద $f - g$ అవిచ్ఛిన్నము

(3) $x = x_0$ వద్ద $f . g$ అవిచ్ఛిన్నము మరియు

(4) $x = x_0$ వద్ద $\frac{f}{g}$ అవిచ్ఛిన్నము $(g(x) \neq 0)$

(5) అవిచ్ఛిన్నతపై సంయుక్త ప్రమేయ సిద్ధాంతము :

$g(x_0)$ వద్ద f అవిచ్ఛిన్నము మరియు x_0 వద్ద g అవిచ్ఛిన్నము అయితే x_0 వద్ద fog అవిచ్ఛిన్నము.

ఒక సంవృతాంతరంలో అవిచ్ఛిన్నత (Continuity in a closed interval)

నిర్వచనము 9.9

ఒక ప్రమేయం $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ వివృతాతంరం $[a, b]$ లో అవిచ్ఛిన్నము మరియు $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ మరియు $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$ అయితే ఈ ప్రమేయంను సంవృతాంతరము (a, b) లో అవిచ్ఛిన్నము అంటారు.

అనగా, ప్రమేయము f కుడి నుండి a వద్ద అవిచ్ఛిన్నము మరియు ఎడమ నుండి b వద్ద అవిచ్ఛిన్నము. మరియు $x_0 \in (a, b)$ అను ప్రతిబిందువు వద్ద అవిచ్ఛిన్నము.

వివరణ 9.7

$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ యొక్క అవిచ్ఛిన్నతను చర్చించుము

ప్రమేయం f యొక్క నిర్వచనం ప్రకారం సంవృత్తాంతరము $[-1, 1]$ అవుతుంది.

$(1 - x^2 \geq 0)$ అయిన f నిర్విచితము)

$c \in (-1, 1)$ అనే ఏదేని ఒక బిందువుకు

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} \sqrt{1 - x^2} = \left[\lim_{x \to c} (1 - x^2) \right]^{\frac{1}{2}}$$

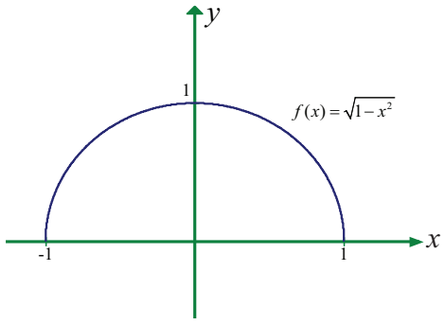
11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_9.indd 130 11/05/2022 16:05:36

$$= (1-c^2)^{\frac{1}{2}} = f(c)\cdot$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+}(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = 0 = f(1).$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \left[\lim_{x\to -1^-}(1-x^2)\right]^{\frac{1}{2}} = 0 = f(-1).$$

కావున $[-1, 1]$ మీద f అవిచ్ఛిన్నము. సంయుక్త ప్రమేయ సిద్ధాంతమును ఉపయోగించి కూడా ఈ సమస్యను సాధించవచ్చును.



పటము 9.36

ఉదాహరణ 9.36

క్రిందివ్వబడిన ప్రతి ప్రమేయము అవిచ్ఛిన్నమగు అంతరంలను వివరించుము.

(i) $f(x) = \tan x$

(ii) $g(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

(iii) $h(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

సాధన

(i) $f(x) = \tan x$ అను టాంజెంట్ ప్రమేయము $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in Z.$ వద్ద నిర్వచితం కాదు. మిగిలిన అన్ని బిందువుల వద్ద ఇది అవిచ్ఛిన్నము. కావున $f(x) = \tan x$ క్రింది సూచించిన ప్రతి వివృతాంతరంలో అవిచ్ఛిన్నము.

$$\ldots\left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right), \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), \ldots$$

(ii) $y = \frac{1}{x}$ ప్రమేయము $x = 0$ వద్ద తప్ప $\mathbb{R}$ యొక్క ప్రతిబిందువు వద్ద అవిచ్ఛిన్నము. ఎందుకనగా ఇది $x = 0$ వద్ద నిర్వచితం కాదు.

$g(x) = \sin\frac{1}{x}$ ప్రమేయము $x = 0$ వద్ద తప్ప అన్ని బిందువుల వద్ద అవిచ్ఛిన్నము. ఇక్కడ $\lim_{x\to 0} g(x)$ వ్యవస్థితం కాదు. కావున $(-\infty, 0)$ మరియు $(0, \infty)$ అంతరంలో g అవిచ్ఛిన్నము అగును.

(iii) వాస్తవ రేఖ $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ యొక్క అన్ని బిందువుల వద్ద $h(x)$ ప్రమేయం నిర్వచితము; ఏదేని $x_0 \neq 0$ కు

$$\lim_{x\to x_0} h(x) = \left(\lim_{x\to x_0} x\sin\frac{1}{x}\right)$$

$$= x_0 \sin\frac{1}{x_0} = h(x_0)$$

$x_0 = 0$ కు

$$h(x) = x.\sin\frac{1}{x}$$

$$-x \leq x\sin\frac{1}{x} \leq x$$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_9.indd 131 11/05/2022 16:05:37

$$g(x) = -x, f(x) = x\sin\frac{1}{x}, h(x) = x$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0, \lim_{x\to 0} h(x) = 0$$

మరియు $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0.$

శాండ్విచ్ సిద్ధాంతం ప్రకారం

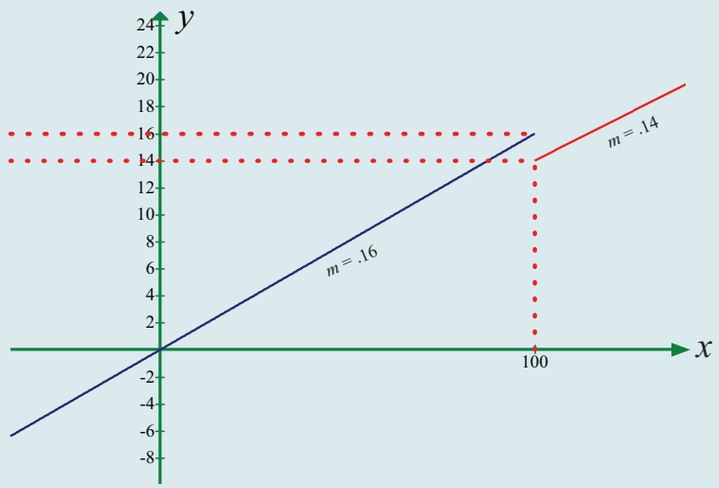
$$\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right) = 0 = h(0).$$

కావున పూర్తి వాస్తవరేఖలో $h(x)$ అవిచ్ఛిన్నము.

ఉదాహరణ 9.37

ఒక టమోట మొత్త విక్రేత కొత్తగా కోతచేసిన టమోటాలను ప్రతిరోజు 100.కి.గ్రాల కన్నా తక్కువగా కొన్నట్లయితే దాని ధరని కి.గ్రాలకు ₹0.16 గానూ, ప్రతిరోజు కనీసము 100 కి.గ్రా కొన్నట్లయితే దాని ధర కి.గ్రాలకు ₹0.14 కు పడిపోయిందని గమనించాడు. మొత్తం ధర ప్రమేయంను కనుగొనుము మరియు 100 కి.గ్రాలు కొన్నప్పుడు ధరను కనుగొనుము.

సాధన



పటము 9.37

రోజూ కొన్ని టమోటాల కిలోగ్రాముల సంఖ్య x అనుకొందాము మరియు దాని ధరను C తో సూచించిన

$$C(x) = \begin{cases} 0.16x, & 0 \le x < 100 \text{ అయిన} \\ 0.14x, & x \ge 100 \text{ అయిన} \end{cases}.$$

ప్రమేయ రేఖాచిత్రంను పటం 9.37లో చూపబడినది.

ఇది $x = 100$ వద్ద విచ్ఛిన్నము ఎందుకనగా $\lim\limits_{x\to 100^-} C(x) = 16$ మరియు $\lim\limits_{x\to 100^+} C(x) = 14$.

$C(100) = 14$ అని గమనించుము. కావున, $\lim\limits_{x\to 100^-} C(x) = 16 \neq 14 = \lim\limits_{x\to 100^+} C(x) = C(100)$.

ఈ ప్రమేయము ఒక పరిమిత సంఖ్య 14 నుండి మరొక పరిమిత సంఖ్య 16కు జంపు అయినదని కూడ గమనించండి.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_9.indd 132 11/05/2022 16:05:37

9.3.3 నివార్య మరియు లంఘన విచ్ఛిన్నతలు (Removable and Jump Discontinuities)

క్రింది ప్రమేయాలను పరిశీలించుము:

(i) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$

(ii) $g(x)=C(x)$, $C(x)$ ను ఉదాహరణ 9.38 లో నిర్వచింపబడినది.

$x=0$ వద్ద తప్ప మిగిలిన వాస్తవ రేఖ యొక్క అన్ని బిందువుల వద్ద ప్రమేయం $f(x)$ నిర్వచితమగును. అనగా, $f(0)$ అనిర్వచితము. కాని $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ వ్యవస్థితమగును. $f(x)$ ను క్రింది విధంగా పున:నిర్వచించుకొందాము

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

$x=0$ తో కలిపి వాస్తవ రేఖ యొక్క అన్ని బిందువుల వద్ద h నిర్వచితము. ఏదేమైనా, $x=0$ వద్ద h అవిచ్ఛిన్నము ఎందుకనగా

$$\lim_{x\to 0}h(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1=h(0).$$

అన్ని $x\neq 0$ కు $h(x)=f(x)$ అని గమనించుము. $x=0$ వద్ద ప్రమేయము $f(x)$ అవిచ్ఛిన్నము కాకపోయిననూ, పున:నిర్వచితమైన ప్రమేయము 0 వద్ద అవిచ్ఛిన్నము అగును. అనగా, ప్రమేయమును పున:నిర్వచించుకోవడం ద్వారా విచ్ఛిన్నతను మనము తొలగించగలము. ఇటువంటి విచ్ఛిన్న బిందువులను నివార్య విచ్ఛిన్నాలు అంటారు. ఈ ఉదాహరణ క్రింది నిర్వచనమునకు దారితీయును.

నిర్వచనము 9.10

ఒక ప్రమేయము $h:I\to\mathbb{R}$ ను $h(x)=\begin{cases}f(x), & x\neq x_0 \text{ అయిన}\\ \lim\limits_{x\to x_0}f(x), & x=x_0 \text{ అయిన}\end{cases}$ అగునట్లు $I\subseteq\mathbb{R}$ అంతరంలో నిర్వచింపబడిన ప్రమేయం f కు $x_0\in I$ వద్ద నివార్య విచ్ఛిన్నత గలదని అంటారు.

నివార్య విచ్ఛిన్నతకు $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ తప్పకుండ వ్యవస్థితమగునని గమనించుము.

ప్రమేయము $g(x)=C(x)$ (ఉదాహరణ 9.38 చూడుము) ను పరిశీలించినా $(0,\infty)$ యొక్క అన్ని బిందువుల వద్ద ఇది నిర్వచితమయినప్పటికి, $\lim\limits_{x\to 100}g(x)$ వ్యవస్థితం కాదు మరియు $\lim\limits_{x\to 100^+}g(x)-\lim\limits_{x\to 100^-}g(x)=16-14=2,$ అను ఎత్తు ఎగిరినది. ఇది పరిమిత సంఖ్య. $\lim\limits_{x\to 100}g(x)$ వ్యవస్థితం కాదు మరియు $x=100$ వద్ద అవిచ్ఛిన్నం కాదు కావున ఇటువంటి విచ్ఛిన్నతలను లంఘన విచ్ఛిన్నత అంటారు. కావున క్రింది విధంగా దీనిని నిర్వచించారు.

నిర్వచనము 9.11

f అను ప్రమేయము $I\subseteq\mathbb{R}$ అంతరంలో నిర్వచితం అనుకొందాము. $x_0\in I$ అనుకొందాము. x_0 వద్ద f నిర్వచితము.

$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ మరియు $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ వ్యవస్థితం కాని

$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ అయితే $x_0\in I$ వద్ద f కు లంఘన విచ్ఛిన్నత గలదు అంటారు.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_9.indd 133 11/05/2022 16:05:38

ఉదాహరణ 9.38

$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ అని నిర్వచించబడిన f అను ప్రమేయం $\mathbb{R}$ లో అవిచ్ఛిన్నమా అని నిర్ధారించుము.

సాధన

శాండ్విచ్ సిద్ధాంతం ప్రకారం $\lim_{x\to 0} x^2\sin\frac{1}{x}=0$ మరియు $f(x)$ యొక్క నిర్వచనం ప్రకారం $f(0)=0$ కావున $x=0$ వద్ద f అవిచ్ఛిన్నము మరియు మిగిలిన అన్ని విలువలకు అవిచ్ఛిన్నము అని స్పష్టమగుచున్నది కావున ప్రమేయం $\mathbb{R}$ లో ఇది అవిచ్ఛిన్నము.

అభ్యాసము 9.5

(1) $f(x)=2x^2+3x-5$, $\mathbb{R}$ లోని అన్ని బిందువుల వద్ద అవిచ్ఛిన్నము అని నిరూపించుము.

(2) ఈ క్రింది వాటికి అవిచ్ఛిన్నతను పరిశీలించుము.

(i) $x+\sin x$ (ii) $x^2\cos x$ (iii) $e^x\tan x$

(iv) $e^{2x}+x^2$ (v) $x.\ln x$ (vi) $\frac{\sin x}{x^2}$

(vii) $\frac{x^2-16}{x+4}$ (viii) $|x+2|+|x-1|$ (ix) $\frac{|x-2|}{|x+1|}$

(x) $\cot x+\tan x$

(3) క్రింది ఇవ్వబడిన ప్రమేయములకు విచ్ఛిన్నత బిందువులను కనుగొనుము.

(i) $f(x)=\begin{cases}4x+5, & x\leq 3\\ 4x-5, & x>3\end{cases}$ (ii) $f(x)=\begin{cases}x+2, & x\geq 2\\ x^2, & x<2\end{cases}$

(iii) $f(x)=\begin{cases}x^3-3, & x\leq 2\\ x^2+1, & x>2\end{cases}$ (iv) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\leq x\leq\frac{\pi}{4}\\ \cos x, & \frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}\end{cases}$

(4) ఇవ్వబడిన ప్రమేయములకు ఇవ్వబడిన బిందువు x_0 లో అవిచ్ఛిన్నమా లేక విచ్ఛిన్నమా అని కారణంతో వివరింపుము.

(i) $x_0=1, f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x-1}, & x\neq 1\\ 2, & x=1\end{cases}$ (ii) $x_0=3, f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-9}{x-3}, & x\neq 3\\ 5, & x=3\end{cases}$

(5) $\begin{cases}\frac{x^3-1}{x-1}, & x\neq 1\\ 3, & x=1\end{cases}$ అను ప్రమేయం $(-\infty,\infty)$ లో అవిచ్ఛిన్నము అని చూపుము.

(6) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^4-1}{x-1}, & x\neq 1\\ \alpha, & x=1\end{cases}$ అని నిర్వచింపబడిన ప్రమేయం $x=1$ వద్ద అవిచ్ఛిన్నము అయిన, α యొక్క విలువ కనుగొనుము.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_9.indd 134 11/05/2022 16:05:39

(7) $f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x^2, & 0\le x<2\\ 4, & x\ge 2\end{cases}$ అను ప్రమేయపు రేఖాచిత్రంను గీయుము. ఈ ప్రమేయం f, $(-\infty,\infty)$ లో అవిచ్ఛిన్నమని చూపుము.

(8) f మరియు g అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయములు ఇంకా $f(3)=5$ మరియు $\lim_{x\to 3}\left[2f(x)-g(x)\right]=4$ అయిన $g(3)$ ను కనుగొనుము.

(9) ప్రమేయం f విచ్ఛిన్నమగు బిందువులను కనుగొనుము. ఈ బిందువులలో ఏ బిందువు f ఎడమవైపు అవిచ్ఛిన్నత, కుడివైపు అవిచ్ఛిన్నత లేదా ఏదియు కాదు అను వానిని కనుగొనుము. f కు రేఖాచిత్రం గీయుము.

(i) $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\le -1\\ 3x & -1<x<1\\ 2x-1, & x\ge 1\end{cases}$ (ii) $f(x)=\begin{cases}(x-1)^3, & x<0\\ (x+1)^3, & x\ge 0\end{cases}$

(10) f ప్రమేయం క్రింది విధంగా నిర్వచింపబడినది.

$$f(x)=\begin{cases}0 & x<0;\\ x & 0\le x<1;\\ -x^2+4x-2 & 1\le x<3;\\ 4-x & x\ge 3\end{cases}$$

ఈ ప్రమేయం అవిచ్ఛిన్నమా?

(11) క్రిందివ్వబడిన ప్రమేయములలో వేటికి $x=x_0$ వద్ద నివార్య విచ్ఛిన్నత కలదు? విచ్ఛిన్నతను తొలగించకలిగితే, $x\neq x_0$ కు fతో అంగీకరించి మరియు $\mathbb{R}$ లో అవిచ్ఛిన్నము అగునట్లు g అనే ప్రమేయంను కనుగొనుము.

(i) $f(x)=\dfrac{x^2-2x-8}{x+2},\ x_0=-2.$

(ii) $f(x)=\dfrac{x^3+64}{x+4},\ x_0=-4.$

(iii) $f(x)=\dfrac{3-\sqrt{x}}{9-x},\quad x_0=9.$

(12) $g(x)=\begin{cases}x^2-b^2 & \text{if } x<4\\ bx+20 & \text{if } x\ge 4\end{cases}$ అనే ప్రమేయం $(-\infty,\infty)$ లో అవిచ్ఛిన్నము అగునట్లు స్థిరరాశి b ను కనుగొనుము.

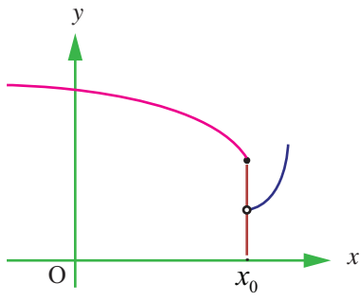
(13) $f(x)=x\sin\dfrac{\pi}{x}.$ ప్రమేయంను తీసుకొందాము. అన్ని చోట్ల (ప్రతిబిందువు) ఈ ప్రమేయమును అవిచ్ఛిన్నము చేయుక్రమంలో $f(0)$ కు మనము ఏ విలువను ఇస్తాము?

(14) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$ అను ప్రమేయం $x=1$ నిర్వచించబడలేదు. $x=1$ వద్ద $f(x)$ ను అవిచ్ఛిన్నము చేయుక్రమంలో $f(1)$ కు మనము ఏ విలువను ఇస్తాము?

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_9.indd 135 11/05/2022 16:05:40

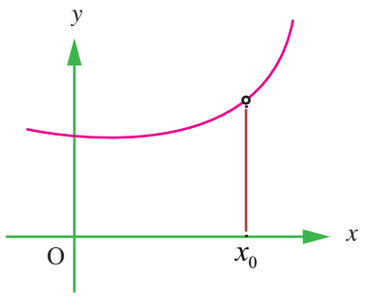
(15) క్రిందివ్వబడిన ప్రతి రేఖాచిత్రంకు $x = x_0$ వద్ద ఏవిధంగా అవిచ్ఛిన్నము అగునవి తెలుపుము.

అ)



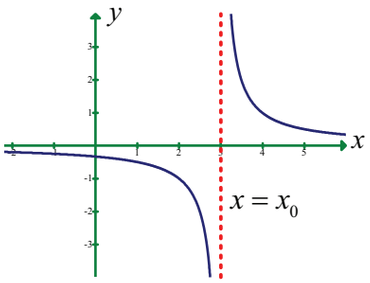
పటము 9.38

ఆ)



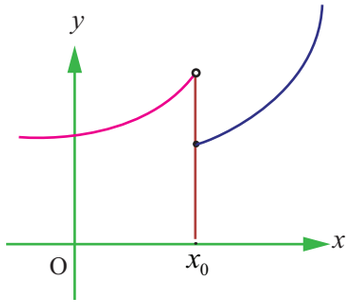
పటము 9.39

ఇ)



పటము 9.40

ఈ)



పటము 9.41

అభ్యాసము 9.6



క్రింద ఇవ్వబడిన ప్రశ్నలకు సరైన సమాధానం లేక ఇవ్వబడిన నాలుగు ప్రత్యామ్నాయాలలో అనుకూలమయిన సమాధానంను గుర్తించుము.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x}$

(1) 1 (2) 0 (3) ∞ (4) $-\infty$

(2) $\lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{2x-\pi}{\cos x}$

(1) 2 (2) 1 (3) -2 (4) 0

(3) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$

(1) 0 (2) 1 (3) $\sqrt{2}$ (4) విలువలేదు

(4) $\lim\limits_{\theta\to0} \dfrac{\sin\sqrt{\theta}}{\sqrt{\sin\theta}}$

(1) 1 (2) – 1 (3) 0 (4) 2

(5) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+5x+3}{x^2+x+3}\right)^x$ is

(1) e^4 (2) e^2 (3) e^3 (4) 1

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_9.indd 136 11/05/2022 16:05:41

(6) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{2x+1}=$

(1) 1 (2) 0 (3) -1 (4) $\frac{1}{2}$

(7) $\lim_{x\to0}\frac{a^x-b^x}{x}=$

(1) $\log ab$ (2) $\log\left(\frac{a}{b}\right)$ (3) $\log\left(\frac{b}{a}\right)$ (4) $\frac{a}{b}$

(8) $\lim_{x\to0}\frac{8^x-4^x-2^x+1^x}{x^2}=$

(1) $2\log 2$ (2) $2(\log 2)^2$ (3) $\log 2$ (4) $3\log 2$

(9) $f(x)=x(-1)^{\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor}$, $x\le 0$, అయితే $\lim_{x\to0} f(x)$ కు సమానమైన విలువ.

(1) -1 (2) 0 (3) 2 (4) 4

(10) $\lim_{x\to3}\lfloor x\rfloor=$

(1) 2 (2) 3 (3) విలువలేదు (4) 0

(11) $f(x)=\begin{cases}3x & 0\le x\le 1\\ -3x+5 & 1<x\le 2\end{cases}$, గా ప్రమేయం f నిర్వచితం అయితే

(1) $\lim_{x\to1} f(x)=1$ (2) $\lim_{x\to1} f(x)=3$

(3) $\lim_{x\to1} f(x)=2$ (4) $\lim_{x\to1} f(x)$ వ్యవస్థితం కాదు

(12) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ అనునది $x\in\mathbb{R}$, కు $f(x)=\lfloor x-3\rfloor+|x-4|$ అని నిర్వచించినట్లయితే $\lim_{x\to3^-} f(x)$ విలువ?

(1) -2 (2) -1 (3) 0 (4) 1

(13) $\lim_{x\to0}\frac{xe^x-\sin x}{x}$ విలువ

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 0

(14) $\lim_{x\to0}\frac{\sin px}{\tan 3x}=4$, అయితే p విలువ

(1) 6 (2) 9 (3) 12 (4) 4

(15) $\lim_{\alpha\to\pi/4}\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\alpha-\frac{\pi}{4}}$ విలువ

(1) $\sqrt{2}$ (2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (3) 1 (4) 2

(16) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\ldots+\frac{n}{n^2}\right)$ విలువ

(1) $\frac{1}{2}$ (2) 0 (3) 1 (4) ∞

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_9.indd 137 11/05/2022 16:05:44

(17) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{x}=$

(1) 1 (2) e (3) $\frac{1}{e}$ (4) 0

(18) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-e^{x}}{\tan x-x}=$

(1) 1 (2) e (3) $\frac{1}{2}$ (4) 0

(19) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{x^2}}$ విలువ

(1) 1 (2) – 1 (3) 0 (4) అవధి వ్యవస్థితం కాదు

(20) k ఒక పూర్ణసంఖ్య అయిన $\lim_{x\to k^-} x-\lfloor x\rfloor$ యొక్క విలువ

(1) – 1 (2) 1 (3) 0 (4) 2

(21) $x=\frac{3}{2}$ వద్ద ప్రమేయం $f(x)=\frac{|2x-3|}{2x-3}$ అనునది

(1) అవిచ్ఛిన్నము (2) విచ్ఛిన్నము (3) అవకలనీయము (4) శూన్యేతరము

(22) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ అనునది $f(x)=\begin{cases}x & ; x \text{ ఒక కరణీయ సంఖ్య}\\ 1-x & ; x \text{ ఒక అకరణీయ సంఖ్య}\end{cases}$ గా నిర్వచితం అయితే f అనునది.

(1) $x=\frac{1}{2}$ వద్ద విచ్ఛిన్నము (2) $x=\frac{1}{2}$ వద్ద అవిచ్ఛిన్నము

(3) అన్ని ప్రదేశాలలో అవిచ్ఛిన్నము (4) అన్ని ప్రదేశాలలో విచ్ఛిన్నము

(23) ప్రమేయము $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x^3+1} & ; x\neq -1\\ P & ; x=-1\end{cases}$ అనునది $x=-1$ కు నిర్వచింపబడదు $f(-1)$ యొక్క ఏ విలువకు ఈ ప్రమేయం అవిచ్ఛిన్నము.

(1) $\frac{2}{3}$ (2) $-\frac{2}{3}$ (3) 1 (4) 0

(24) f ను ప్రమేయం [2, 5] లో అవిచ్ఛిన్నము అనుకొనుము. x యొక్క అన్ని విలువలకు f అకరణీయ విలువలు మాత్రమే తీసుకొనబడను. ఇంకను $f(3)=12$ అయిన $f(4.5)$ యొక్క విలువ.

(1) $\frac{f(3)+f(4.5)}{7.5}$ (2) 12 (3) 17.5 (4) $\frac{f(4.5)-f(3)}{1.5}$

(25) f అనే ప్రమేయం $f(x)=\frac{x-|x|}{x}$, $x\neq 0$ అని నిర్వచించబడి $f(0)=2$ అయిన f అనునది

(1) ఎక్కడా అవిచ్ఛిన్నము కాదు

(2) అన్ని ప్రదేశాలలో అవిచ్ఛిన్నము

(3) $x=1$ ను తప్పించి అన్ని x విలువలకు అవిచ్ఛిన్నము

(4) $x=0$ ను తప్పించి అన్ని x విలువలకు అవిచ్ఛిన్నము

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_9.indd 138 11/05/2022 16:05:45

సారాంశము

ఈ అధ్యాయంలో మనము ఈ క్రింది విషయాలలో జ్ఞానము పొందాము.

- x యొక్క విలువ x_0 కు తక్కువయిన విలువ నుండి x_0 ను సమీపించినపుడు $y=f(x)$ అనే ప్రమేయం అవధి విలువ?
- x యొక్క విలువ x_0 కు ఎక్కువయిన విలువ నుండి x_0 ను సమీపించునపుడు $y=f(x)$ అనే ప్రమేయం అవధి విలువ.
- x_0 యొక్క తొగించిన సామీప్య అంతరంలో x యొక్క విలువ x_0 ను సమీపించునపుడు ప్రమేయము యొక్క అవధి విలువ వ్యవస్థితం అగుటకు కావలసిన మరియు సరిపోవు నిబంధన $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=L=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L.$
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ అనగా $x=x_0$ వద్ద తప్ప x యొక్క విలువ x_0 కు రెండు ప్రక్కల నుండి x_0 ను సమీపించునప్పుడు $f(x)$ యొక్క విలువ L కు అభిసరణ చెందును అని అర్థము.
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ and $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ మరియు వ్యవస్థితం అయితే

  (i) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

  (ii) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x).g(x)\right]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x).\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

  (iii) $g(x)\neq 0$ మరియు $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$ అయితే $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$.
- $x\to x_0^-$ అనునప్పుడు $f(x)\to\pm\infty$ లేక $x\to x_0^+$ అనునప్పుడు $f(x)\to\pm\infty$ లేక $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=l_1\neq l_2=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ అని ఉన్నట్లయితే x యొక్క విలువ x_0 ను సమీపించునప్పుడు $f(x)$ యొక్క అవధి వ్యవస్థితం కాదు.
- (M,∞) అనునది $+\infty$, యొక్క $M>0$

  $(-\infty,K)$ అనునది of $-\infty$, యొక్క $K<0.$
- $x\to x_0$ అనునప్పుడు $f(x)\to\pm\infty$ అయిన $x=x_0$ లంబ అనంత స్పర్శరేఖ అగును.
- $x\to\infty$ అనునప్పుడు $f(x)\to l_1$ లేక $x\to-\infty$ అనునప్పుడు $f(x)\to l_2$ మొదలయిన వాటిలో ఒకటి నిజం అయిన $y=f(x)$ అను వక్రమునకు $y=l_1$ (లేక l_2) అను రేఖ క్షితిజ అనంత స్పర్శరేఖ అగును.
- x_0 వద్ద $f(x)$ అవిచ్ఛిన్నము అగుటకు కావలసిన మరియు సరిపోవు నిబంధనలు.

  (i) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

  (ii) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$

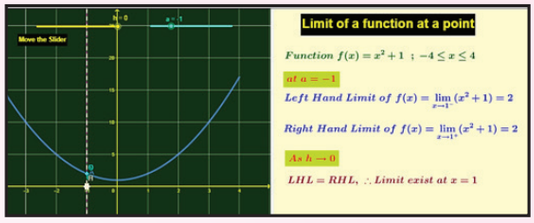
  (iii) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f\left(\lim\limits_{x\to x_0} x\right)$.
- లంఘన మరియు నివార్య విచ్ఛిన్నత

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_9.indd 139 11/05/2022 16:05:45



అవధులు మరియు అవిచ్ఛిన్నత

ఆశించు ఫలితాలు

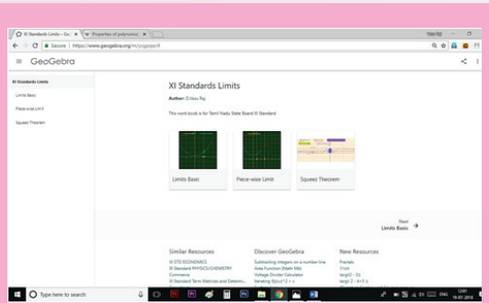


సోపానము -1

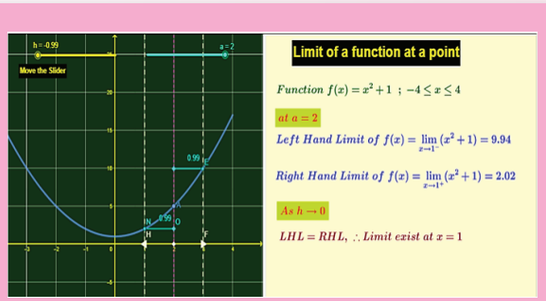
బ్రౌజర్‌ను తెరవండి URL లింక్‌ను టైప్ చేయండి (లేక) QR కోడ్ స్కాన్ చేయండి. జియోజీబ్రా యొక్క " XI వ తరగతి అవధులు" అనే పేజీ కనబడును. ఈ పాఠంనకు సంబంధించి అనేక వర్క్‌షీటులు ఈ పేజీలో ఇవ్వబడినది.

సోపానము -2

"ప్రాథమిక అవధి" అను work sheet ను ఎంచుకొనుము. క్రింది అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయం ఇవ్వబడినది "a" అనే స్లైడర్ ద్వారా నీకు కావలసిన చోట అవధిని ఎంచుకోవచ్చు. ఆపై "h" అనే స్లైడర్‌ను కదిలించుట ద్వారా $f(h)$ ను సరిచూచుటకు $x=h$ రేఖలను ఎడమ మరియు కుడి వైపుకు ఒక బిందువుకు దగ్గరగా కదిలించవలెను.
దీనిని పుస్తకంలో ఇవ్వబడిన నిర్వచనంతో పోల్చి చూడండి.



సోపానము 1



సోపానము 2

క్రింది బ్రౌజర్‌ను తెరవండి

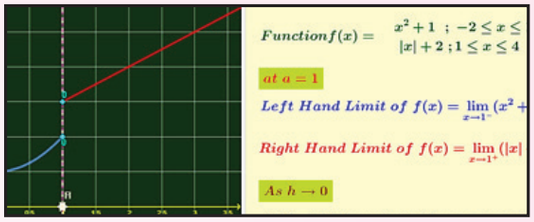
మాత్రికలు మరియు నిర్ధారకములు https://ggbm.at/cpknpvvh

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_9.indd 140 11/05/2022 16:05:46



అవధులు మరియు అవిచ్ఛిన్నత

ఆశించు ఫలితాలు



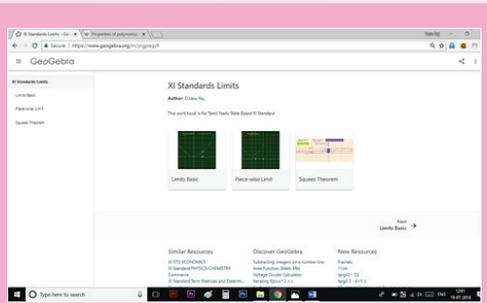
సోపానము -1

బ్రౌజర్‌ను తెరచి క్రింద ఇవ్వబడిన URL లింక్‌ను టైప్ చేయండి (లేక) QR కోడ్ స్కాన్ చేయండి. మనకు XI వ తరగతి అవధులు కనబడును. దీనిని GeoGebra Workbook అని పిలవబడును. ఈ పాఠంనకు సంబంధించి అనేక వర్క్‌షీటులు కనబడును.

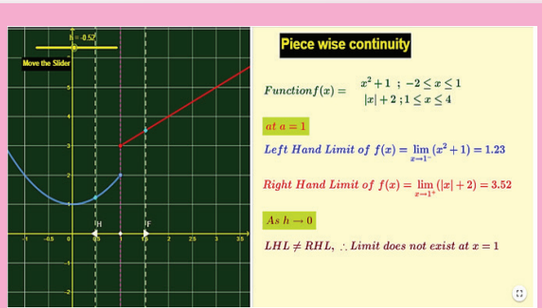
సోపానము -2

Piece-wise limit అనే ను ఎంచుకొనుము. Piece-wise ప్రమేయం ఇవ్వబడినది ఆపై $f(h)$ అనే స్లైడర్‌ను కదిలించుట ద్వారా $f(h)$ను సరిచూచుటకు $x=h$ ఎడమ మరియు కుడి వైపున ($x = 1$ కి దగ్గరగా) కదిలించుము.

దీనిని పుస్తకంలో ఇవ్వబడిన నిర్వచనంతో పోల్చి చూడండి.



సోపానము 1



సోపానము 2

క్రింది బ్రౌజర్‌ను తెరవండి

మాత్రికలు మరియు నిర్ధారకములు https://ggbm.at/cpknpvvh

BY9N6

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_9.indd 141 11/05/2022 16:05:46

అధ్యాయం 10

అవకలన గణితము అవకలనీయత మరియు అవకలన పద్ధతులు

"నీకు కావలసినది తీసుకొని చేయదగినది చేసిన యెడల
పొందగలిగినది పొందుతావు"

– లిబ్నిజ్

10.1 పరిచయం (Introduction)

ఈ పాఠ్యాంశములో అవకలనం అను భావన గురించియు, దానికి సంబంధించిన ఇతర భావనలను పరిశోధించడం ద్వారా నిజజీవితములో ఎదుర్కొను సమస్యలకు పరిష్కారం కనుగొనుటకు వీలగును. దీనితోపాటు దిశావేగపు సగటును ఈ క్రింది సమస్యల ద్వారా గమనించెదము.

ఒక నిర్ధిష్ట దూరమును దాటుటకు అంతర భావన ద్వారా వేగము లేదా దిశావేగపు రేటును ఉపయోగించు అలవాటు సాధారణంగా అందరిలోను కలదు. ఉదాహరణకు, ఒక గంట సమయంలో ఒక బస్సు 60కి.మీ దూరమును ప్రయాణించిన ఆ బస్సు యొక్క సరాసరి దిశావేగము గంటకు 60కి.మీ అని ఏర్పడును. కాని ప్రయాణ దూరమును పూర్తిగా 60కి.మీ నిలకడ వేగముతో బస్సును నడుపుటకు వీలుకాదు. ఎందుకంటే నగర ప్రాంతములలో కొద్దిగా వేగమును తగ్గించవలెను. ఇతర వాహనములను దాటునపుడు వేగమును పెంచవలెను. వేరు విధంగా చెప్పిన కాలమును అనుసరించియే దిశావేగము మారును అని చెప్పవచ్చును.

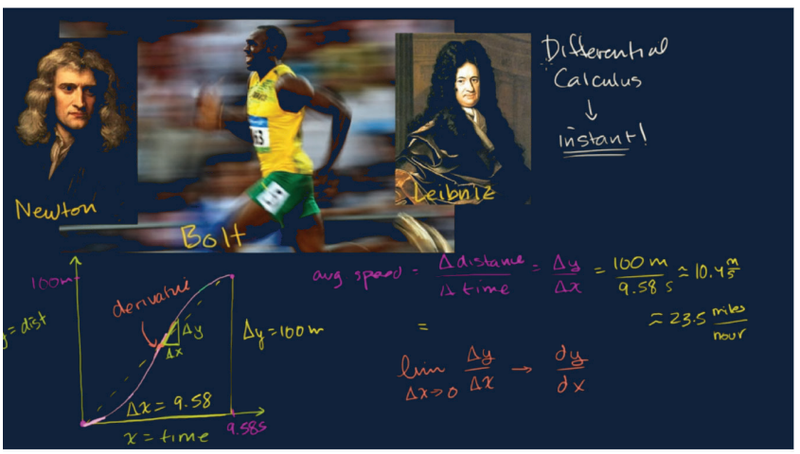
ఒక రవాణాసంస్థ కాలపట్టిక ప్రకారము ఒక బస్సు ఒక ఊరి నుండి ఇంకొక ఊరికి వెళ్ళుటకు ఒక గంటలో 60కి.మీ ప్రయాణించవలెను. కాని బస్సు వెళ్ళు మార్గములో అక్కడక్కడ ఏర్పడు కాల వ్యయమును, వేగపు తగ్గుదలను ఇతర నగరంలలో సరికట్టవలెను అని తెలుసుకొని డ్రైవరు ఆ బస్సును నడుపును. సరాసరి దిశావేగము గంటకు 60కి.మీ అని తెలిసియుండినను ఒక నిర్ధిష్ట సమయంలో ఆ బస్సు యొక్క దిశావేగము ఎంత అనుటకు సమాధానము ఉండదు. సాధారణముగా సరాసరి దిశావేగము లేదా చలనములో గల వస్తువు యొక్క సరాసరి వేగము అనునది స్థానభ్రంశపు కాలపు రేటుగా ఈ క్రింది విధంగా నిర్వచింపబడినది.

$$v_{ave} = \frac{\text{ప్రయాణ దూరము}}{\text{ప్రయాణ కాలము}}$$

ఒక పరుగు వీరుడు 10 కి.మీ పందెపు దూరమును పూర్తిచేయుటకు తీసుకొన్న కాలము 1 గంట 15 నిమిషాలు (1.25 గంట) అని అనుకొనెదము. ఈ పరుగు పందెములో అతని సరాసరి వేగము లేదా సరాసరి దిశావేగము

$$v_{ave} = \frac{10}{1.25} = 8 \text{ కి.మీ/గంట అగును.}$$

పందెము దూరములో సగము దూరమును దాటినపుడు పరుగెత్తువాని వేగము v అని స్పష్టముగా లెక్కించవలెనని



ఉసేన్ బోల్ట్ యొక్క సరాసరి వేగము

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{100 \text{ మీ}}{9.58 \text{ సె}} = 10.4 \text{ మీ/సె}$$

ఉసేన్ బోల్ట్ యొక్క ఇప్పటి వేగము ఎంత? ($\rightarrow$) కలన గణితము

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_10.indd 142 10-03-2023 12:26:01

అనుకొనుము. 0 గంట నుండి 0.5 గంటల కాలవ్యవధిలో పరుగెత్తిన దూరము 5కి.మీ అయిన, $v_{ave} = \frac{5}{0.5} = 10$ కి.మీ/గంట అగును.



గాట్‌ఫ్రెడ్ విల్ నిబ్‌నిడ్స్
(1646 - 1716)

అదే సమయంలో 0.5 గంటలో పరుగెత్తువాని వేగపు రేటును కనుగొనడానికి తక్షణ వేగపు రేటు v ని గుర్తుగా పైన తెలిపిన సమాధానమును తీసుకొనుటకు వీలుకాదు. ప్రారంభ స్థానము నుండి 5.7కి.మీ దూరములో 0.6 గంటలలో ఉన్నాడని తీర్మానించినచో, 0 గంటల నుండి 0.6 గంటల వరకు గల సరాసరి వేగము $v_{ave} = \frac{5.7-5}{0.6-0.5} = 7$ కి.మీ/గంట అగును.

చివరిగా పొందిన v యొక్క విలువ కొద్దిగా తగ్గుట అనునది సరియైన విలువగా పరిగణించవచ్చును. ఈ కాలవ్యవధిని 0.5 గంటలలోపు 'తగ్గించుట వలన' దానికి తగినట్లు 5కి.మీ దూరమునకు రమారమి కొలతను లెక్కించునపుడు పరుగెత్తువాని వేగమును 0.5 గంటలో ఇంకనూ స్పష్టమైన ఉజ్జాయింపు విలువలను పొందుటకు వీలగును.

దిశావేగమును లెక్కించుట అనునది $y = f(x)$ అను నిరూపక సమికరణంను లెక్కించుటకు సాధారణ అవకలన గణిత నమూనాగా సూచించబడును. దీని మూలముగా ఈ క్రింది లక్ష్యములను పొందడానికి మరియు క్రమముగా అవకలనం యొక్క విశ్లేషణ గురించి తెలుసుకొనెదము.

అభ్యసన లక్ష్యాలు

ఈ పాఠ్యాంశము చివర విద్యార్థులు తెలుసుకొను విషయములు

- భిన్నముల హద్దులుగా అవకలన భావనను తెలుసుకొనుట.
- రేఖాగణితము ద్వారా అవకలన భావనను చూచుట.
- మార్పుల లెక్కించు పద్ధతిగా అవకలనమును అర్థంచేసుకొనుట.
- వక్రరేఖలపై ఉన్న స్పర్శరేఖల వాలుగాను/మార్పురేటును కొలవడానికి అవకలన ఉపకరణమును గురించి తెలుసుకొనుట.
- అవకలనము యొక్క వివిధ పద్ధతులను అర్థం చేసుకొనుట.
- నిత్యజీవిత సమస్యల సాధనలకు ఉపకరణముగా అవకలన గణితమును ఉపయోగించుట.

10.2 అవకలనము యొక్క భావన (The concept of derivative)

17వ శతాబ్దంలో గణితశాస్త్రవేత్తలు సాధనను కనుగొనుటకు ప్రయత్నించిన నాలుగు ముఖ్యమైన సమస్యల నుండి అవకలన గణితము అభివృద్ధి చెందినది. అవి

(1) స్పర్శరేఖ సమస్య

(2) దిశావేగము మరియు త్వరణము సమస్య

(3) కనిష్ట మరియు గరిష్ట సమస్య

(4) వైశాల్యము సమస్య

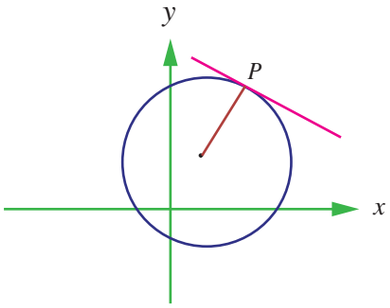
మొదటి రెండు సమస్యల గురించి ఈ అధ్యాయములో గమనించెదము. మిగిలిన రెండింటిని తరువాతి అధ్యాయములలో చూడవచ్చును.

10.2.1 స్పర్శరేఖ సమస్య (The tangent line problem)

ఒక వక్రరేఖపై ఒక బిందువు ద్వారా పోవు రేఖను ఎందువలన స్పర్శరేఖ అందురు. ఒక వృత్తముపై P అను బిందువు ద్వారా వెళ్ళు స్పర్శరేఖ అనునది పటము 10.1లో ఉండునట్లు P అను బిందువును సంధించు వ్యాసార్ధరేఖకు (కేంద్రగామి)లంబముగా ఉండును.

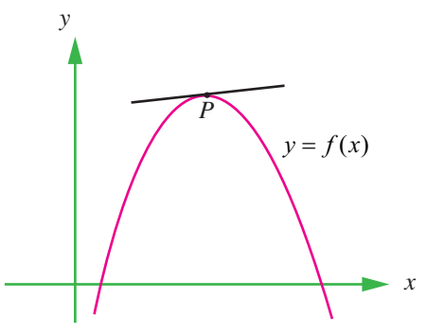
11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_10.indd 143 10-03-2023 12:26:01

సాధారణ వక్రరేఖకు స్పర్శరేఖను కనుగొనుట మిక్కిలి కష్టమైనది అగును. ఉదాహరణకు క్రింద ఇవ్వబడిన పటములు 10.2 నుండి 10.4 వరకు గల వాటికి స్పర్శరేఖలను ఏవిధంగా గుర్తించవచ్చును?

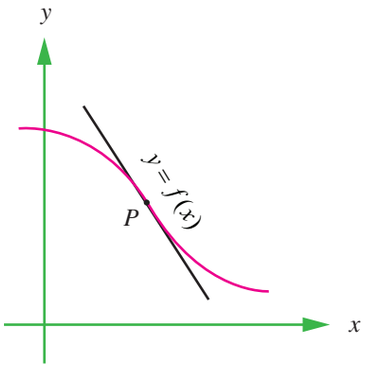


పటము 10.1

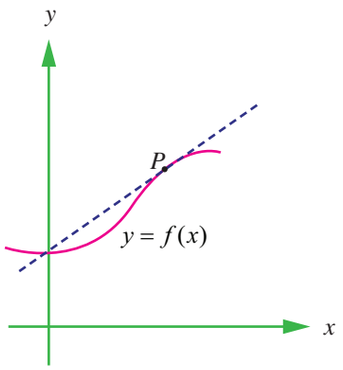
'P'అను బిందువు వద్ద వక్రరేఖను ఖండించకుండా స్పర్శించురేఖను మాత్రమే స్పర్శరేఖగా చెప్పవచ్చును. ఈ నిర్వచనము పటము 10.2లో వున్న వక్రరేఖకు వర్తించును. కాని పటము 10.3లో గల వక్రరేఖకు వర్తించదు, లేక వర్తించును. ఒక వక్రరేఖనూ ఒకే ఒక బిందువు వద్ద స్పర్శించు లేక ఖండించు రేఖను స్పర్శరేఖ అని చెప్పవచ్చును. కాని ఈ నిర్వచనము వృత్తమునకు వర్తించును. కాని పటము 10.4లో ఉండు విధముగా వున్న సాధారణ వక్రరేఖకు ఈ వివరణ వర్తించదు.



పటము 10.2



పటము 10.3

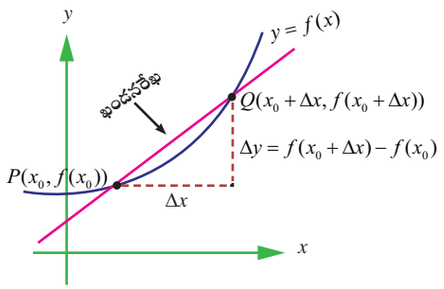


పటము 10.4

ప్రాథమికంగా 'P' అను బిందువు వద్ద గల స్పర్శరేఖను కనుగొనుటకు ప్రయత్నించుట అనునది 'P' అను బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ వాలును కనుగొనునట్లు మారును. ఈ వాలును, స్పర్శబిందువు (point of tangency) మరియు వక్రరేఖ మీద ఉండు మరొక బిందువు ద్వారా వెళ్ళు ఖండనరేఖ (జ్యా స్పర్శరేఖ) యొక్క వాలుకు ఉజ్జాయింపుగా పటము 10.5లో ఉండునట్లు చూడగలము.

స్పర్శబిందువును $P(x_0, f(x_0))$ అనియు మరియు రెండువ బిందువును $Q(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ అనియు తీసుకొనుము.

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ అను వాలు సూత్రములో ప్రతిక్షేపించుట ద్వారా రెండు బిందువుల ద్వారా వెళ్ళు ఖండనరేఖల వాలును పొందవచ్చును.



పటము 10.5

$$m_{sec} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{(x_0 + \Delta x) - x_0} = \frac{y \text{ లోని మార్పు}}{x \text{ లోని మార్పు}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad .$$

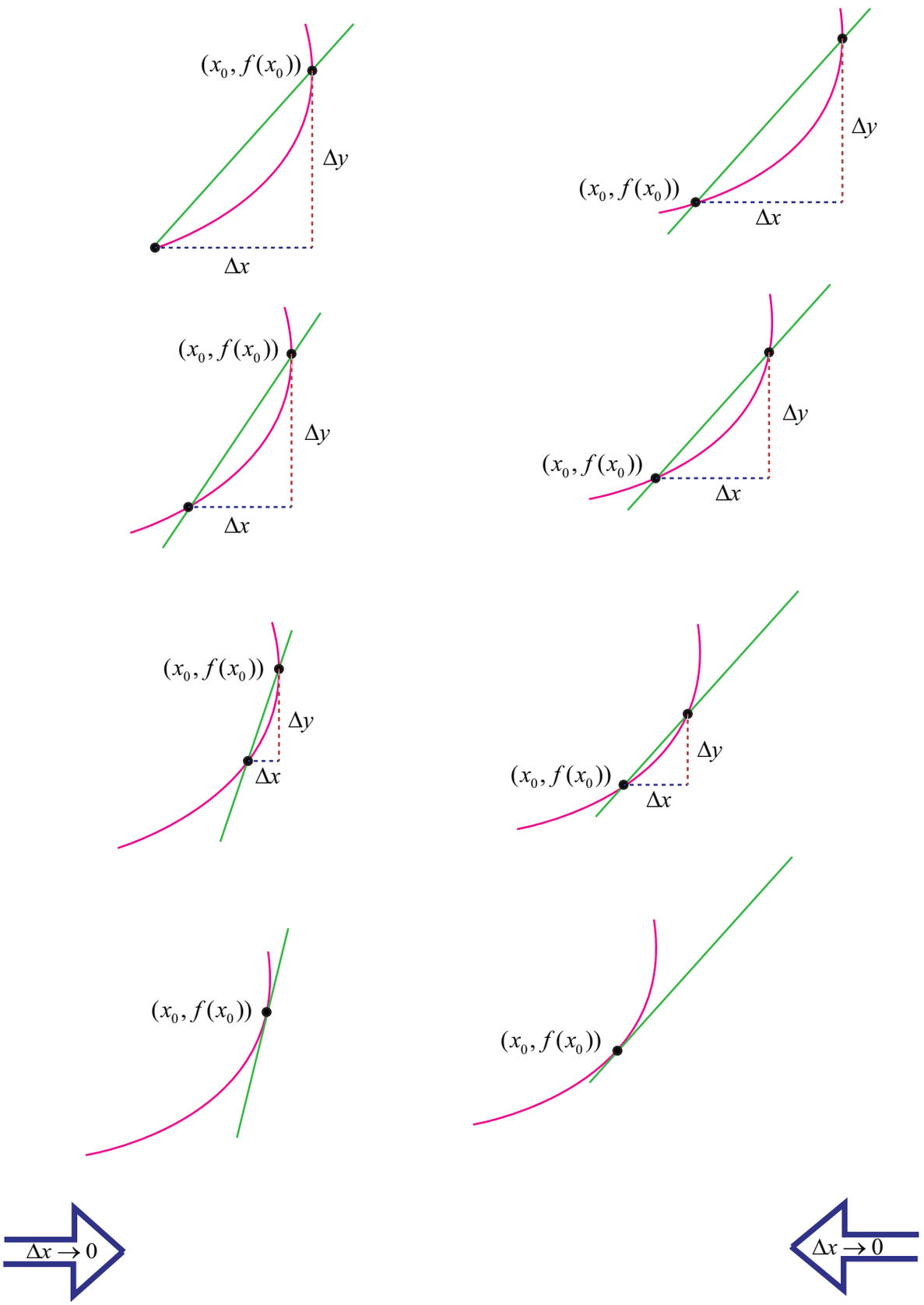
అంటే, $m_{sec} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, అనునది ఖండనరేఖ యొక్క వాలుగా ఉండును.

ఈ సమీకరణమునకు కుడిచేతి ప్రక్కన ఉండునది వ్యత్యాస భిన్నము**(difference quotient)** అగును. హారము Δx అనునది **change in *x*** లోని మార్పు (x లో అధికరించుట) మరియు లవము $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ అనునది ***y*** లోనిమార్పు అగును.

స్పర్శ బిందువునకు మిక్కిలి దగ్గరగా ఉండు బిందువును తీసుకొనుట ద్వారా స్పర్శరేఖ యొక్క వాలుకు మిక్కిలి దగ్గరి ఉజ్జాయింపు విలువను పొందుటకు వీలగును అనునదే ఈ పద్ధతి యొక్క ముఖ్యాంశము అగును.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_10.indd 144 10-03-2023 12:26:02

స్పర్శరేఖ యొక్క ఉజ్జాయింపు



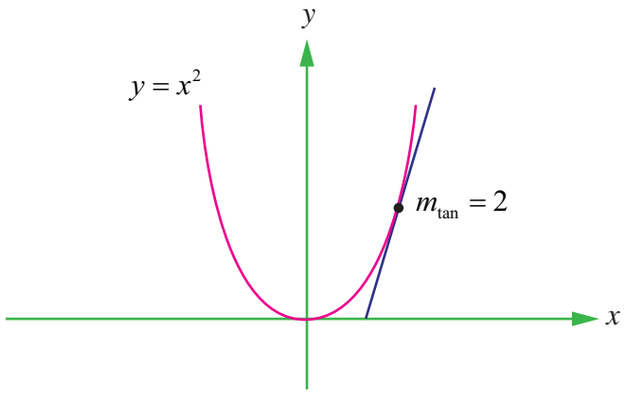
పటము 10.6 నుండి 10.13

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_10.indd 145 10-03-2023 12:26:02

మాదిరి ఉదాహరణ 10.1

$f(x) = x^2$ అను రేఖాచిత్రమునకు (1, 1) అను బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ యొక్క వాలును కనుగొనుటకు ప్రయత్నిస్తాము.

మొదటగా $\Delta x = 0.1$ అని అనుకొనుము. (1,1) మరియు $(1.1,(1.1)^2)$ బిందువుల ద్వారా వెళ్ళు ఖండన రేఖ యొక్క వాలును కనుగొందుము.



పటము 10.14

(i) $f(1.1) = (1.1)^2 = 1.21$

(ii) $\Delta y = f(1.1) - f(1)$
$= 1.21 - 1 = 0.21$

(iii) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{0.21}{0.1} = 2.1$

(1) కు కుడిప్రక్కన మరియు ఎడమ ప్రక్కన ఏర్పడు వరుస విలువలను ఈ క్రింది విధంగా పట్టికలో రూపొందించుదుము:

Δx	$1 + \Delta x$	$f(1)$	$f(1 + \Delta x)$	Δy	$\Delta y / \Delta x$
0.1	1.1	1	1.21	0.21	2.1
0.01	1.01	1	1.0201	1.0201	2.01
0.001	1.001	1	1.002001	0.002001	2.001
– 0.1	0.9	1	0.81	– 0.19	1.9
– 0.01	0.99	1	0.9801	– 0.0199	1.99
– 0.001	0.999	1	0.998001	– 0.001999	1.999

స్పష్టముగా, $\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2$; $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2.$

దీని ద్వారా $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2$ అని చూడవచ్చును.

కావున, (1, 1) అను బిందువు వద్ద $y = x^2$ అను రేఖాచిత్రము యొక్క స్పర్శరేఖ వాలు వద్ద $m_{\tan} = 2$ అగును.

పటములు 10.6 నుండి 10.13, మాదిరి ఉదాహరణము 10.1 మరియు మన అంతర భావన ద్వారా 'P' అను బిందువు వద్ద $y = f(x)$ అను రేఖాచిత్రము యొక్క 'L' అను స్పర్శరేఖ $Q \to P\,(\Delta x \to 0)$ ఉండునట్లు 'P' మరియు 'Q' ల ద్వారా వెళ్ళు ఖండనరేఖ PQ యొక్క **హద్దు** అని చెప్పవచ్చును. మరియు 'L' యొక్క వాలు $m_{\tan}$ అనునవి $\Delta x \to 0$ అయినపుడు $m_{\sec}$ యొక్క **హద్దు** విలువగా ఏర్పడును. దీనినే ఈ క్రింది విధంగా క్లుప్తంగా చెప్పవచ్చును.

నిర్వచనము 10.1 వాలు m గల స్పర్శరేఖ (Tangent line with slope m)

x_0 అను బిందువు ఉన్న వివృతాంతరంలో f అను ప్రమేయమును నిర్వచిస్తాము.

ఇంకనూ, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = m_{\tan}$ వ్యవస్థితం, m అను వాలుతో $(x_0, f(x_0)$ బిందువు ద్వారా వెళ్ళు రేఖ $(x_0, f(x_0))$ అను బిందువు వద్ద f అను రేఖాచిత్రపు **స్పర్శరేఖగా** ఏర్పడును.

$(x_0, f(x_0))$ అను బిందువు వద్ద గీయబడిన స్పర్శరేఖ వాలు, ఆ బిందువు వద్ద **వక్రరేఖ యొక్క వాలు** అని కూడా పిలువబడును.

నిర్వచనము ద్వారా ఒక రేఖాచిత్రము $(x_0, f(x_0))$ అను బిందువు వద్ద ఒక స్పర్శరేఖను ఏర్పరచినచో అది ఏకైకం (*unique*) గా ఉండును. ఎందుకంటే ఇవ్వబడిన ఒక బిందువు మరియు వాలు ద్వారా ఒకేఒక రేఖను గీయవచ్చును.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_10.indd 146 10-03-2023 12:26:05

ంఖాచిత్రము యొక్క వాలును కనుగొనుటకు నిబంధనలను 4 సోపానాలుగా వ్రాయవచ్చును:

(i) x_0 మరియు $x_0 + \Delta x$ అను బిందువుల వద్ద f యొక్క విలువలను కనుగొనుము. అనగా, $f(x_0)$ మరియు $f(x_0 + \Delta x)$ అను వాటిని కనుగొనుము.

(ii) Δy లెక్కించుము: అనగా, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ ను కనుగొనుము.

(iii) Δy ను $\Delta x \neq 0$ చే భాగించుము: అంటే, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ ను కనుగొనుము.

(iv) $\Delta x \to 0 (\Delta x \neq 0)$: అయినపుడు $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ యొక్క హద్దును కనుగొనుము. అంటే, $m_{\tan} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

మాదిరి ఉదాహరణ 10.1లో గల రేఖాచిత్రపు వాలును సులభముగా కనుగొనుటకు నిర్వచనములను ఉపయోగించి చూడవచ్చును.

(i) $f(1) = 1^2 = 1$. ప్రతి $\Delta x \neq 0$ కు $f(1 + \Delta x) = (1 + \Delta x)^2 = 1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2$

(ii) $\Delta y = f(1 + \Delta x) - f(1) = 2\Delta x + (\Delta x)^2 = \Delta x\,(2 + \Delta x)$

(iii) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2 + \Delta x)}{\Delta x} = 2 + \Delta x\,.$$

(iv) $$m_{\tan} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2 + \Delta x) = 2 + 0 = 2\,.$$

ఉదాహరణ 10.1

$f(x) = 7x + 5$ అను రేఖాచిత్రమునకు $(x_0, f(x_0))$ అను బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ యొక్క వాలును కనుగొనుము.

సాధన

సోపానము (i) $f(x_0) = 7x_0 + 5$.

ప్రతి $\Delta x \neq 0$ కు,

$$f(x_0 + \Delta x) = 7(x_0 + \Delta x) + 5$$
$$= 7x_0 + 7\Delta x + 5$$

సోపానము (ii) $$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$
$$= (7x_0 + 7\Delta x + 5) - (7x_0 + 5)$$
$$= 7\Delta x$$

సోపానము (iii) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 7$$

కావున, $f(x) = 7x + 5$ అను రేఖాచిత్రములో గల ఏదేని బిందువునకు

సోపానము (iv) $$m_{\tan} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (7) = 7.$$

ఒక రేఖీయ రేఖాచిత్రమునకు $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ అనునది x_0 మరియు దాని పెరుగుదలైన Δx అను వాటిపై ఆధారపడకుండా ఒక స్థిరాంకముగా ఉండునని గమనింతుము

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_10.indd 147 10-03-2023 12:26:06

ఉదాహరణ 10.2

$f(x) = -5x^2 + 7x$ అను రేఖాచిత్రమునకు $(5, f(5))$ అను బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ యొక్క వాలును కనుగొనుము.

సాధన

సోపానము (i) $f(5) = -5(5)^2 + 7 \times 5 = -125 + 35 = -90.$

ప్రతి $\Delta x \neq 0$ కు,

$$f(5 + \Delta x) = -5(5 + \Delta x)^2 + 7(5 + \Delta x) = -90 - 43\Delta x - 5(\Delta x)^2.$$

సోపానము (ii) $\Delta y = f(5 + \Delta x) - f(5)$

$= -90 - 43\Delta x - 5(\Delta x)^2 + 90 = -43\Delta x - 5(\Delta x)^2$

$= \Delta x\,[-43 - 5\Delta x].$

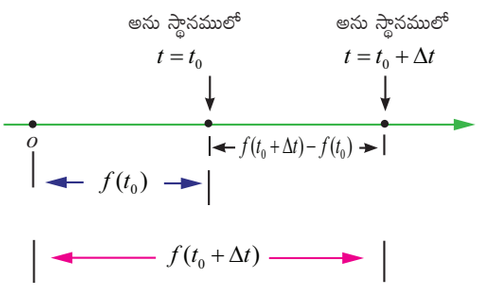
సోపానము (iii) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -43 - 5\Delta x$

సోపానము (iv) $m_{\tan} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -43.$

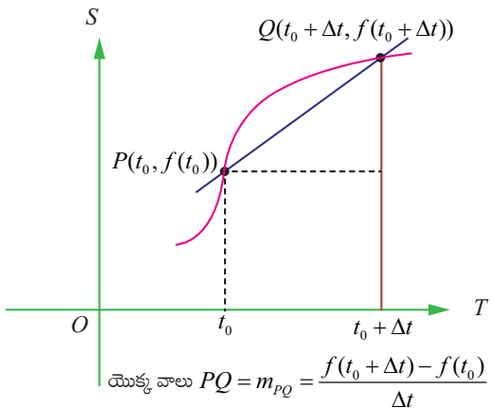
10.2.2 సరళరేఖీయ చలనములో దిశావేగము (Velocity of Rectilinear motion)

ఆదిబిందువు నుండి t సమయంలో ఒక వస్తువు యొక్క స్థానభ్రంశము (పయనించిన దూరము) s అనుకొనుము $s = f(t)$ అను చలన సమీకరణము ప్రకారము ఆ వస్తువు సరళరేఖీయముగా చలించుచున్నదని అనుకొనుము. ఇక్కడ చలనమును వివరించు f అను ప్రమేయము వస్తువు యొక్క 'స్థానప్రమేయము' **(position function)** అని పిలువబడుచున్నది. $t = t_0$ నుండి $t = t_0 + \Delta t$ అను కాల అంతరములో స్థాన మార్పు $f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$ అగును. ఈ కాల అంతరములో సరాసరి దిశావేగము.

$$v_{\text{avg}} = \frac{\text{స్థానభ్రంశము}}{\text{కాలము}} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} = \frac{s \text{ లోని మార్పు}}{t \text{ లోని మార్పు}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$ ఇది పటము 10.16 లో చూపినవిధంగా PQ అను ఖండనరేఖ వాలు అగును.

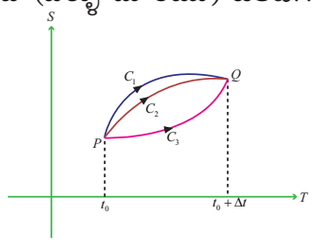


పటము 10.15



పటము 10.16

కాల అంతరము Δt లో (t_0 నుండి $t_0 + \Delta t$ వరకు) దూరమును పూర్తిచేయుట (వెళ్ళు దూరము) ఒకటిగా ఉండినను చలనము పలు విధాలుగా ఉండవచ్చును. ఇది ఒక తలములో గల P మరియు Q బిందువుల మధ్య పూర్తిగా వేరువేరైన C_1, C_2, C_3 అను వక్రరేఖల ద్వారా వివరించబడినవి. (పటము 10.17) ఈ రేఖాచిత్రములో గల వక్రరేఖలు ఇవ్వబడిన కాల అంతరములో, అన్ని చలనములకు $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ అను ఒకే సరాసరి దిశావేగమును కలిగియుండును కాని, పూర్తిగా వేర్వేరైన చలనమును కల్గి ఉండును.



పటము 10.17

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_10.indd 148 10-03-2023 12:26:06

$[t_0, t_0 + \Delta t]$ అను కనిష్ట మరియు మిక్కిలి కనిష్టమైన కాల అంతరములలో సరాసరి దిశావేగములను ఇప్పుడు చూచెదము. ఇంకో విధంగా చెప్పిన Δt అనునది 0 చేరువైనదని అనుకొనుము. ఇప్పుడు $t = t_0$ అను కాలములో దిశావేగమును $v(t_0)$ (తక్షణ దిశావేగము) సరాసరి దిశావేగము హద్దుగా చూడవచ్చును.

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

దీని నుండ $t = t_0$ అను సమయంలో దిశావేగము అనునది P అను బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ యొక్క వాలుకు సమానముగా ఉన్నదని స్పష్టమగుచున్నది.

మాదిరి ఉదాహరణ 10.2

శూన్య ప్రదేశములో స్వేచ్ఛగా క్రిందపడు ఒక వస్తువు పయనించిన దూరము s అనుకొనుము. అందుకు తీసుకొను సమయమును t అనుకొనుము. ఇవి రెండును చరరాశులుగాను, ఒకదానికొకటి ఆధారపడియుండను. స్వేచ్ఛగా క్రింద పడు నియమము ప్రకారము పై చెప్పబడినవాటిని ఈ క్రింది విధంగా వివరించవచ్చును. :

$s = \frac{1}{2} gt^2$ (ప్రారంభ దిశావేగము లేనపుడు) ఇక్కడ g గురుత్వాకర్షణ స్థిరాంకమగును.

సోపానము (i) $f(t_0 + \Delta t) = \frac{1}{2} g(t_0 + \Delta t)^2 = \frac{1}{2} g\left(t_0^2 + 2t_0\Delta t + (\Delta t)^2\right)$

సోపానము (ii) $\Delta s = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$

$$= \frac{1}{2} g\left[(t_0^2 + 2t_0\Delta t + (\Delta t)^2\right] - \frac{1}{2} gt_0^2$$

$$= g\,\Delta t\left[t_0 + \frac{1}{2}\Delta t\right]$$

సోపానము (iii) $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{g\,\Delta t\left[t_0 + \frac{1}{2}\Delta t\right]}{\Delta t} = g\left[t_0 + \frac{1}{2}\Delta t\right]$

సోపానము (iv) $v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = gt_0$.

దీని నుండి, t_0 తక్షణ సమయంలో దిశావేగము నిర్వచింపబడినది అని స్పష్టమగుచున్నది. ఇంకనూ ఇది చలన నియమమునకు అనుపాతములో ఏర్పడును.

10.2.3 ప్రమేయము యొక్క అవకలనము (The derivative of a Function)

ఇప్పుడు మనం కలన గణితము యొక్క అతిముఖ్యమైన సందర్భమునకు చేరియున్నాము. అవధి మూలముగా స్పర్శరేఖ యొక్క వాలును నిర్వచించడం లేదా హద్దు ద్వారా "స్వేచ్ఛగా క్రిందపడు" వస్తువు యొక్క తక్షణసమయ దిశావేగమును కనుగొనుట అనునది కలన గణితంలో గల రెండు ప్రాథమిక పరిక్రియలలో అవకలనము ఒకటి.

నిర్వచనం 10.2

x_0 అను బిందువు ల వివృతాంతరము $I \subseteq \mathbb{R}$ లో f అను ప్రమేయము నిర్వచింపబడినది. ఇంకనూ $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ అనునది వ్యవస్థితమగును. ఇప్పుడు f అనునది x_0 లో అవకలనము అనియు, x_0 లో f యొక్క అవకలనమును $f'(x_0)$, అని గుర్తించిన క్రింది విధంగా ఏర్పడును.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_10.indd 149 10-03-2023 12:26:07

ఈ అవధి అనునది x యొక్క ప్రతి విలువలకు వ్యవస్థితమగును,

$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ అనునది x యొక్క ప్రమేయముగా ఏర్పడును..

x యొక్క అవకలన ప్రమేయము అనునది x యొక్క ప్రమేయము కూడా అగును. ఈ "క్రొత్త ప్రమేయము" $(x, f(x))$ అను బిందువు వద్ద f అను రేఖాచిత్రపు స్పర్శరేఖ యొక్క వాలును ఇస్తుంది. (ఈ బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖను నిర్మించగలిగితే)

ఒక ప్రమేయము యొక్క వ్యుత్పన్నమును (అవకలనము) కనుగొను పద్ధతిని అవకలనము అని అందురు. ఒక ప్రమేయము x వద్ద అవకలనీయమైతే దాని అవకలనము. వ్యవస్థితమగును మరియు వివృతాంతరం (a, b) వద్ద అవకలనీయమైతే దాని ప్రతి బిందువు (a, b) వద్ద అవకలనీయము అగును.

$y = f(x)$ యొక్క అవకలనమును $f'(x)$ గా గుర్తిస్తాము. మరియు $f'(x)$ ను "f prime of x" లేక "f dash of x" గా చదవచ్చును. అంతే కాకుండా మిగతా గుర్తులు కూడా ఉపయోగించబడుతున్నవి. వాటిలో కొన్ని సాధారణ గుర్తులు.

$f'(x), \frac{dy}{dx}, y', \frac{d}{dx}[f(x)], D_x[y]$ లేదా Dy లేదా y_1 ఇక్కడ $\frac{d}{dx}$ లేదా D అనునది అవకలన కారకము అగును.

ఇక్కడ $\frac{dy}{dx}$ ను x లో y యొక్క అవకలనం(లేదా) $dy - dx$ల, లేదా *Dee y Dee x* లేదా *Dee Dee x of y* అనియు చదవవచ్చును. ఈగుర్తు ఒక భిన్నమును చూచించదు అని జ్ఞాపకము ఉంచుకొనుము.

$\frac{dy}{dx}$ అను గుర్తును లీబ్నిజ్ గుర్తు అంటారు.

10.2.4 ఒక ప్రక్క అవకలనములు (లేదా) ఒక వైపు అవకలనములు (ఎడమ చేతి మరియు కుడి చేతి అవకలనములు) (One sided derivatives (left hand and right hand derivatives))

x_0 అను బిందువు గల వివృతాంతరమైన (a, b) లో $y = f(x)$ అను ప్రమేయము నిర్వచింపబడుతున్నది. $x = x_0$ లో f యొక్క ఎడమ చేతి అవకలనము మరియు కుడి చేతి అవకలనము క్రమముగా $f'(x_0^-)$ మరియు $f'(x_0^+)$, అని గుర్తించి ఈ క్రింది విధంగా నిర్వచింపబడుచున్నది. అవధులు వ్యవస్థితమైనట్లయితే,

$$f'(x_0^-) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$ గాను

మరియు $f'(x_0^+) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, గాను నిర్వచింపబడుచున్నది.

అంటే, కుడి మరియు ఎడమ వైపు నుండి ప్రమేయమును అవకలనీయం చేయవచ్చును. x_0 వద్ద ప్రమేయపు అవధి వ్యవస్థితము అయితే $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ అగును. కావలసిన మరియు సరిపోవు నిబంధన ఏమనగా $f'(x_0^-) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ మరియు $f'(x_0^+) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ అనునవి వ్యవస్థితములు అయితే మరియు $f'(x_0^-) = f'(x_0^+)$ అగును.

కావున, $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \Leftrightarrow f'(x_0^-) = f'(x_0^+)$.

దీనిలో ఏదైనా ఒక నిబంధన వర్తించకుండా వుండిన f అనునది x_0. లో అవకలనము చెందదు.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_10.indd 150 10-03-2023 12:26:09

దీనినే $h = \Delta x > 0$ అను విధంగా,

$$f'(x_0^+) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \text{ మరియు}$$

$$f'(x_0^-) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h} \text{ అగును.}$$

నిర్వచనం 10.3

సంవృతాంతరము $[a,b]$ ప్రమేయము f అవకలనీయమైతే వివృతాంతరం $[a,b]$ ప్రమేయము f లో అవకలనీయం అగును. మరియు చివరి బిందువులైన a మరియు b, లలో

$$f'(a) = \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h},\ h>0$$

$$f'(b) = \lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{f(b+\Delta x)-f(b)}{\Delta x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(b-h)-f(b)}{-h},\ h>0.$$

$x = x_0$ అను బిందువు వద్ద f అవకలనీయమైతే $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, ఇక్కడ $x = x_0 + \Delta x$ మరియు $\Delta x \to 0$ అనునది $x \to x_0$. కు సమానమగును. ఇటువంటి మార్పు పద్ధతి కొన్ని సమయములలో అవకలనము చేయుటకు సులభంగా ఉండును. సౌలభ్యం కోసం $h = \Delta x$, అనుకొనిన అవధి వ్యవస్థితమైనచో $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, అగును.

10.3 అవకలనీయత మరియు అవిచ్ఛిన్నత (Differentiability and Continuity)

మాదిరి ఉదాహరణ 10.3

$x = 2$ అను బిందువు వద్ద $f(x) = |x-2|$ అను ప్రమేయపు అవకలనీయతను పరిశోధించుము.

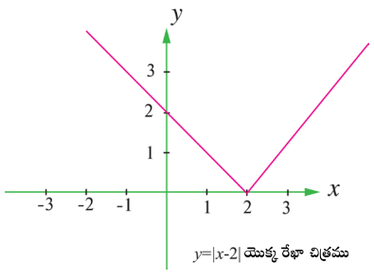
సాధన

ఈ ప్రమేయము $x = 2$ వద్ద అవిచ్ఛిన్నం అని తెలియును.

కాని $$f'(2^-) = \lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{|x-2|-0}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-(x-2)}{(x-2)} = -1 \text{ మరియు}$$



పటము 10.18

$$f'(2^+) = \lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{|x-2|-0}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)}{(x-2)} = 1 \text{ అగును.}$$

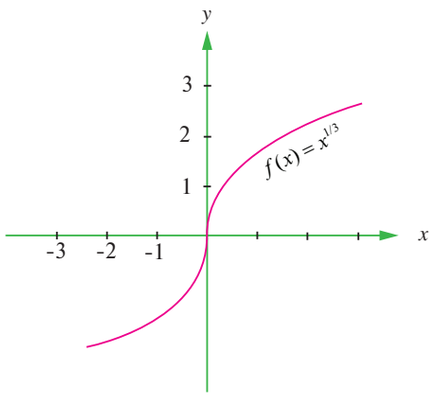
ఇక్కడ ఒక వైపు అవకలనములయిన $f'(2^-)$ మరియు $f'(2^+)$ అనునవి అసమానమగుట వలన $f'(2)$ వ్యవస్థితము కాదు. అంటే $x = 2$ వద్ద f అను ప్రమేయము అవకలనీయము కాదు. కానీ ఇతర బిందువుల వద్ద ప్రమేయము అవకలనీయమగును.

ఇంకా $x_0 \neq 2$ అను మిగతా బిందువులలో

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_10.indd 151 10-03-2023 12:26:15

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{|x - x_0|}{x - x_0} = \begin{cases} 1 & x > x_0 \text{ అయితే} \\ -1 & x < x_0 \text{ అయితే} \end{cases}$$

$$f'(2) = \begin{cases} 1 & x > 2 \text{ అయితే} \\ -1 & x < 2 \text{ అయితే} \end{cases}$$



పటము 10.19

నిజంగా, $f'(2)$ వ్యవస్థితము కాదు అను విషయము రేఖాగణితము ద్వారా $y = |x - 2|$ కు $(2, 0)$ అను బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ వ్యవస్థితము కాదు. పైగా $(2, 0)$ బిందువు వద్ద వక్రరేఖ పదునైన అంచును కలిగియుండుటను గమనింతుము.

మాదిరి ఉదాహరణ 10.4

$x = 0$ అను బిందువు వద్ద $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ యొక్క అవకలనీయతను పరీక్షించుము.

సాధన

$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ అనుకొనుము. ఈ ప్రమేయపు రేఖాచిత్రములో ఏ విధమైన ద్వారమో (విచ్ఛిన్నమో)లేదు మరియు ప్రదేశములో గల అన్ని బిందువుల వద్ద ప్రమేయము అవిచ్ఛిన్నముగా ఉండును.

$f'(0)$ వ్యవస్థితం అని పరిశోధించెదము.

ఇప్పుడు $$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^{\frac{1}{3}} - 0}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} x^{\frac{-2}{3}} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} \to \infty$$

కావున, $x = 0$ వద్ద f కు అవకలనీయం కాదు. ఇంకా పటం 10.19లో $x = 0$ వద్ద స్పర్శరేఖ లంబరేఖగా కలదు. కావున $x = 0$ వద్ద f కు అవకలనీయత లేదు.

> ఒక ప్రమేయము ఒక బిందువు వద్ద అవిచ్ఛిన్నమైనచో, ఆ ప్రమేయమునకు ఆ బిందువు వద్ద అవకలనీయత కలదని చెప్పలేము.

ఉదాహరణ 10.3

గరిష్ఠ పూర్ణసంఖ్య ప్రమేయము $f(x) = \lfloor x \rfloor$ అనునది ఏ ఒక్క పూర్ణసంఖ్య అవకలనీయముకాదని చూపుము.

సాధన

గరిష్ఠ పూర్ణసంఖ్యా ప్రమేయము $f(x) = \lfloor x \rfloor$ అనునది ప్రతి పూర్ణాంకము n కు విచ్ఛిన్నమైనది.

ఎందుకంటే $\lim_{x \to n^-} \lfloor x \rfloor = n - 1$ మరియు $\lim_{x \to n^+} \lfloor x \rfloor = n$. కావున, $f'(n)$ వ్యవస్థితము కాదు.

మిగతా బిందువుల వద్ద ప్రమేయపు అవకలనీయత గురించి ఏమి చెప్పవచ్చు?

మాదిరి ఉదాహరణ 10.5

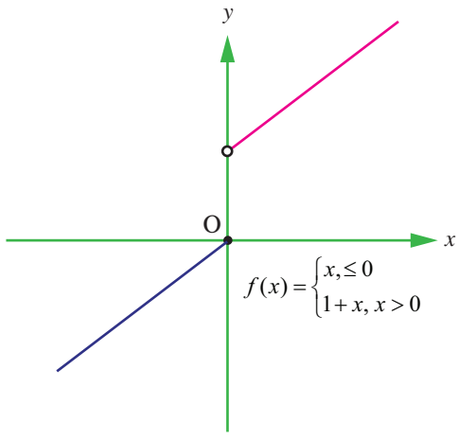
$f(x) = \begin{cases} x & x \le 0 \\ 1 + x & x > 0 \end{cases}$ అనుకొనుము.

$f'(0)$ వ్వవస్థితమైతే దానిని గణించుము.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_10.indd 152 10-03-2023 12:26:18

సాధన

ఇవ్వబడిన రేఖాచిత్రమును గమనించుము.



పటము 10.20

$$f'(0^-) = \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$f'(0^-) = \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$

$$f'(0^+) = \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{1+\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{\Delta x}\right)\to\infty$$

కావున $f'(0)$ వ్యవస్థితము కాదు.

ఇక్కడ $x = 0$ వద్ద f అనే రేఖాచిత్రము ఒకే సారి పెరుగుటను (jump) గమనింతుము. అంటే, $x = 0$ అనునది ఒక్కసారిగా అధికమగును.

పైన చూచిన మాదిరి ఉదాహరణల నుండి ఈ క్రింది ఫలితములను క్లుప్తముగా చెప్పవచ్చును.

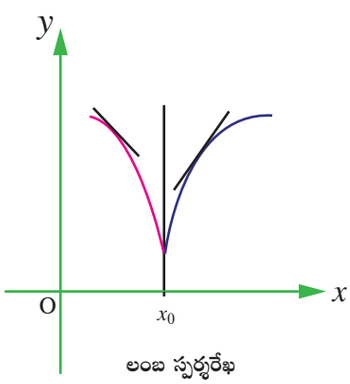
ఒక ప్రమేయము f అనే ప్రదేశములో గల ఒక బిందువు x_0 వద్ద ఈ క్రింది ఏదైనా ఒక సందర్భము వర్ణించిన , f ఆ బిందువు వద్ద అవకలనీయము కాదు:

(i) $x=x_0$ అను బిందువు వద్ద f కు లంబ స్పర్శరేఖను కలిగి ఉండును..

(ii) f యొక్క రేఖాచిత్రము $x=x_0$ అను బిందువు వద్దకు వస్తుంది. (పదునైన అంచు $\vee$ లేదా పదునైన శిఖరం $\wedge$)

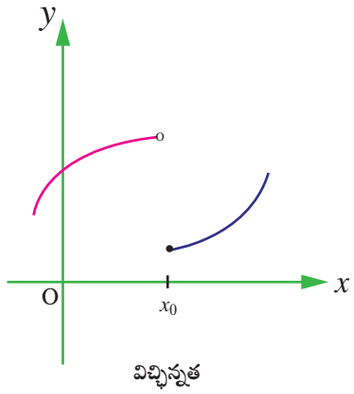
(iii) $x=x_0$ అను బిందువు వద్ద f అనునది విచ్ఛిన్నము అగును.

ఈ క్రింది సందర్భములలో ఒక ప్రమేయము అవకలనీయము కాదు.



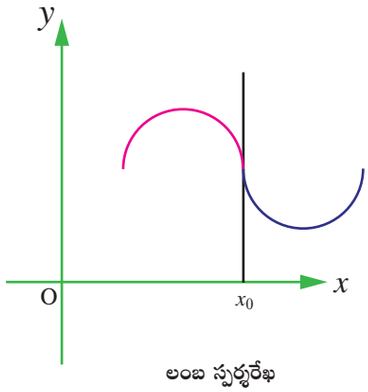
లంబ స్పర్శరేఖ

పటము 10.21



విచ్ఛిన్నత

పటము 10.22



లంబ స్పర్శరేఖ

పటము 10.23

మాదిరి ఉదాహరణ 10.3 మరియు 10.4లో ప్రమేయము $f(x)=|x-2|$ మరియు $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ క్రమముగా $x = 2$ మరియు $x = 0$ వద్ద అవిచ్ఛిన్నముగాను కాని ఆ చోట్లలో f అవకలనీయము కానట్లు ఉన్నది. అదే సమయంలో 10.3 ఉదాహరణములోను మరియు 10.5 మాదిరి ఉదాహరణములోను ఉన్న ప్రమేయములు $f(x)=\lfloor x\rfloor$ మరియు $f(x)=\begin{cases}x & x\le 0\\ 1+x & x>0\end{cases}$ అగును. క్రమముగా ఏ ఒక్క పూర్ణసంఖ్య

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_10.indd 153 10-03-2023 12:26:19

$x = n$ మరియు $x = 0$ వద్ద విచ్ఛిన్నముగాను మరియు అవకలనీయము లేకుండాను ఏర్పడును. పై పరిశోధనను క్లుప్తంగా ఈ క్రింది విధంగా క్లుప్తముగా చెప్పవచ్చును. విచ్ఛిన్నత అనే భావన ద్వారా అవకలనీయము కాదు.

సిద్ధాంతము 10.1 అవకలనీయము అనే భావన ద్వారా అవిచ్ఛిన్నం (Differentiability implies continuity)

$x = x_0$ బిందువు వద్ద f అవకలనీయము అయిన ఆ బిందువు వద్ద f అవిచ్ఛిన్నము అగును.

నిరూపణ

x_0 బిందువు వద్ద (a, b) అంతరములో $f(x)$ అవకలనీయ ప్రమేయం అగును అని అనుకొనుము. కావున, $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 \text{ ï } x) \quad f(x_0)}{\Delta x}$ వ్యవస్థితం మరియు $f'(x_0)$ అనునది ఒక ఏకైక వాస్తవ సంఖ్య అని గుర్తించగలము.

$$\text{ఇప్పుడు } \lim_{\Delta x \to 0}\left[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\right] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \times \Delta x$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\right] \times \lim_{\Delta x \to 0}(\Delta x)$$

$$= f'(x_0) \times 0 = 0 .$$

దీని ద్వారా $x = x_0$ వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం. ■

మొదటి నియమము నుండి అవకలనమును కనుగొనుట (Derivatives from first principle)

అవకలనము నిర్వచనములోని నిబంధనల ప్రకారము ఒక ప్రమేయం యొక్క అవకలనమును కనుగొను పద్ధతియే మొదటి నియమము నుండి అవకలనము అందురు.

అభ్యాసము 10.1

(1) మొదటి నియమమును ఉపయోగించి ఈ క్రింది ప్రమేయముల అవకలనములను కనుగొనుము.

(i) $f(x) = 6$ (ii) $f(x) = -4x + 7$ (iii) $f(x) = -x^2 + 2$

(2) ఈ క్రింది ప్రమేయములకు $x = 1$ వద్ద ఎడమ మరియు కుడి వైపు అవకలనమును (లభించినచో) కనుగొనుము. $x = 1$ వద్ద ప్రమేయములకు అవకలనీయత వున్న దానిని కనుగొనుము.

(i) $f(x) = |x - 1|$ (ii) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ (iii) $f(x) = \begin{cases} x, & x \le 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$

(3) ఇవ్వబడిన బిందువు వద్ద ఈ క్రింది ప్రమేయములకు అవకలనీయత వున్న దానిని కనుగొనుము.

(i) $f(x) = x\,|\,x\,|$ at $x = 0$ (ii) $f(x) = |\,x^2 - 1|$ at $x = 1$

(iii) $f(x) = |x| + |x - 1|$ at $x = 0, 1$ (iv) $f(x) = \sin|\,x\,|$ at $x = 0$

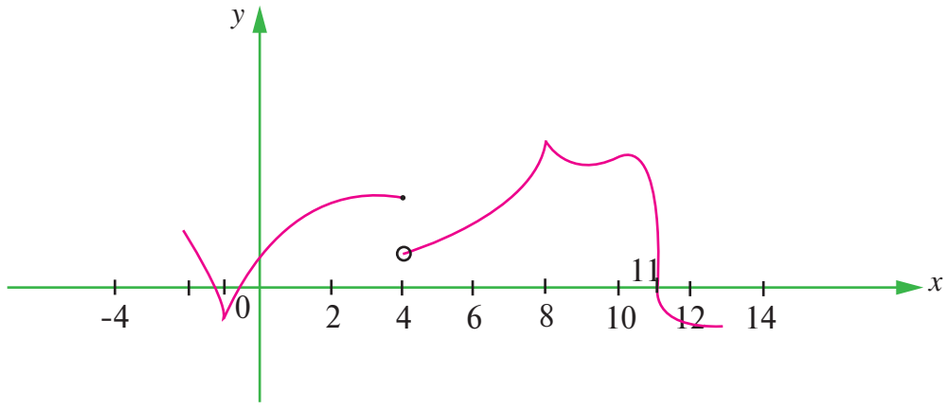
(4) ఈ క్రింది ప్రమేయములకు గుర్తించిన విలువ వద్ద అవకలనము కాదని చూపుము.

(i) $f(x) = \begin{cases} -x + 2, & x \le 2 \\ 2x - 4, & x > 2 \end{cases}$; $x = 2$ (ii) $f(x) = \begin{cases} \text{ü}x & x < \\ -\text{ü}x & x \ge \end{cases}$ ' $x = 0$

(5) క్రింది ఇవ్వబడిన f యొక్క రేఖాచిత్రము నందు x విలువలకు (సంఖ్యలకు) f అవకలనము కాదనుటకు

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_10.indd 154 10-03-2023 12:26:20

గల కారణములను తెల్పుము.



పటము 10.24

(6) $f(x) = |x + 100| + x^2$ అయిన, $f'(-100)$ వ్యవస్థితమా అని పరిశోధించి చూడుము.

(7) $\mathbb{R}$ లో ప్రమేయముల యొక్క అవకలనీయతను పటములను గీచి పరిశోధించుము.

(i) $|\sin x|$ (ii) $|\cos x|$.

10.4 అవకలన నియమములు (Differentiation Rules)

I వివృతాంతరములో వాస్తవ చరరాశికి నిర్ధారింపబడు వాస్తవ విలువగల ప్రమేయము f మరియు $y = f(x)$ అనునది x యొక్క అవకలన ప్రమేయము అయిన, $\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ అగును. సాధారణముగా మొదటి నియమమును ఉపయోగించి అవకలనము కనుగొను పద్ధతి పలుచోట్ల కష్టంగాను, అధిక సమయం తీసుకొనునదిగాను ఉన్నది. కాని అన్ని ప్రాథమికమైన ప్రధాన ప్రమేయమునకు అవకలనమును తెలుసుకొని, ఇంకా ప్రమేయముల యొక్క అవకలన బీజగణిత పద్ధతులను, ప్రమేయము యొక్క ప్రమేయ పద్ధతులను తెలుసుకొనియున్నచో ప్రతిసారి అవధి చర్యలను ఉపయోగించకుండా అన్నింటికి అవకలనము చేయవచ్చును. కావున అవకలన ప్రక్రియ చర్యలను ప్రత్యక్షముగానే చేయవచ్చును. ఇప్పుడు ప్రమేయముల యొక్క కూడిక, గుణకారము మరియు భాగహార అవకలనపు నియమములను గమనించెదమయ

సిద్ధాంతము 10.2

రెండు (లేదా రెండింటికంటే ఎక్కువగా) అవకలనీయ ప్రమేయముల యొక్క మొత్తం అవకలనము, ఆ ప్రమేయముల వేర్వేరు అవకలనముల మొత్తమునకు సమానముగా ఉండును. అంటే, u మరియు v అనునవి రెండు అవకలనీయ ప్రమేయములైన $\boxed{\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{d}{dx}u + \frac{d}{dx}v}$

నిరూపణ

$I \subseteq \mathbb{R}$ అను వివృతాతంరములో నిర్వచింపబడ్డ అవకలనీయమైన రెండు వాస్తవ విలువలు గల ప్రమేయములు u మరియు v అనుకొనుము. $y = u + v$ అయిన, $y = f(x)$ అనునది I లో నిర్వచింపబడిన ప్రమేయమగును. పరికల్పనచేత,

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}$$

$$v'(x) = \frac{dv}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} \text{ లభించును. .}$$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_10.indd 155 10-03-2023 12:26:21

ఇప్పుడు, $f(x+\Delta x) = u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)$

$$f(x+\Delta x)-f(x) = u(x+\Delta x)-u(x)+v(x+\Delta x)-v(x).$$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}+\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}.$$

దీని ద్వారా, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}$.

అంటే, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = u'(x)+v'(x)$.

అంటే, $f'(x) = u'(x)+v'(x)$.

లేదా $(u+v)'(x) = u'(x)+v'(x)$.

కావున, $\boxed{\frac{d}{dx}(u+v)=\frac{d}{dx}u+\frac{d}{dx}v}$.

దీనిని పరిమిత సంఖ్యలు గల అవకలనీయ ప్రమేయముల $u_1, u_2, ..., u_n$ లకు విస్తరించిన $(u_1+u_2+...+u_n)' = u_1'+u_2'+...+u_n'$ అగును..

సిద్ధాంతము 10.3

u మరియు v అనునవి రెండు అవకలనీయ ప్రమేయములైన $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$.

నిరూపణ

u మరియు v అనునవి ఇవ్వబడిన రెండు అవకలనీయ ప్రమేయములైన

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} = \frac{du}{dx}$ మరియు $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x} = \frac{dv}{dx}$.

$y = f(x) = u.v$ అని అనుకొనుము.

కావున, $f(x+\Delta x) = u(x+\Delta x)\, v(x+\Delta x)$, మరియు

$f(x+\Delta x)-f(x) = u(x+\Delta x)\, v(x+\Delta x) - u(x).v(x)$

$= v(x+\Delta x)\,[u(x+\Delta x)-u(x)]+u(x)[v(x+\Delta x)-v(x)]$.

దీని నుండి, $\frac{f(x \text{ న } x)\quad f(x)}{\Delta x} = u(x)\frac{[v(x+\Delta x)-v(x)]}{\Delta x}+v(x+\Delta x)\frac{[u(x+\Delta x)-u(x)]}{\Delta x}$.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = u(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}$$

$= u(x)v'(x)+v(x)u'(x)$ (v అవిచ్ఛిన్నమైనది కావున, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x) = v(x)$).

అంటే, $f'(x) = u(x)\frac{dv}{dx}+v(x)\frac{du}{dx}$

$f'(x) = \boxed{\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}}$.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_10.indd 156 10-03-2023 12:26:24

లేదా $\boxed{(uv)' = uv' + vu'}$

ఇదేవిధంగా $(uvw)' = uvw' + uv'w + u'vw$.

ఇంకను దీనిని పరిమిత సంఖ్యలు గల అవకలనీయ ప్రమేయములు $u_1, u_2, \ldots u_n$, విస్తరింపజేసి, దాని అనుగమనంను ఉపయోగించి ఈ క్రింది విధంగా పొందవచ్చును.

$$(u_1.u_2 \ldots, u_n)' = u_1u_2 \ldots u_{n-1}u_n' + u_1u_2 \ldots u_{n-1}'u_n + \cdots + u_1'u_2 \cdots u_n .$$

సిద్ధాంతము 10.4 భాగహార నియమము (Quotient Rule)

u మరియు v అనునవి రెండు అవకలనీయ ప్రమేయములు, $v(x) \neq 0$. అయిన $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$.

నిరూపణ

$y = f(x) = \dfrac{u}{v}$, అనుకొనుము. u మరియు v లు x యొక్క అవకలనీయ ప్రమేయములు మరియు ఇక్కడ $v(x) \neq 0$

ఇప్పుడు $f(x+\Delta x) = \dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}$

దీని నుండి, $f(x+\Delta x) - f(x) = \dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \dfrac{u(x)}{v(x)}$

$$= \frac{v(x)u(x+\Delta x) - u(x)v(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)v(x)} .$$

దీని నుండి, $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \dfrac{\dfrac{v(x)\left[u(x+\Delta x) - u(x)\right]}{\Delta x} - \dfrac{u(x)\left[v(x+\Delta x - v(x)\right]}{\Delta x}}{v(x+\Delta x)v(x)}$

దీని నుండి, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \dfrac{v(x)\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} - u(x)\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}}{v(x)\lim\limits_{\Delta x \to 0} v(x+\Delta x)}$

$$= \frac{v(x)u'(x) - u(x)v'(x)}{v(x)v(x)} \qquad \left(\because \lim_{\Delta x \to 0} v(x+\Delta x) = v(x)\right)$$

దీని నుండి, $f'(x) = \dfrac{v(x)u'(x) - u(x)v'(x)}{\left[v(x)\right]^2}$.

అంటే, $\dfrac{d}{dx}(f) = \dfrac{vu' - uv'}{v^2}$

లేదా $\boxed{\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}}$.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_10.indd 157 10-03-2023 12:26:27

సిద్ధాంతము 10.5 గొలుసు నియమము/ సంయుక్త ప్రమేయపు నియమము లేదా ప్రమేయము యొక్క ప్రమేయ నియమము (Chain Rule / Composite Function Rule or Function of a Function Rule)

$y = f(u)$ అనునది u యొక్క ప్రమేయముగాను మరియు $u = g(x)$ అనునది x యొక్క ప్రమేయముగాను ఉన్నట్లయితే $y = f\big(g(x)\big) = (fog)(x)$. కావున $\dfrac{d}{dx}(f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$.

నిరూపణ

పైన చెప్పబడిన ప్రమేయములో $u = g(x)$ అనునది అంతర ప్రమేయము మరియు f అనునది బాహ్య ప్రమేయము అని పిలువబడుచున్నది. చివరిగా y అనునది x యొక్క ప్రమేయమగును.

ఇప్పుడు $\Delta u = g(x+\Delta x) - g(x)$

కావున $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta u} \times \dfrac{\Delta u}{\Delta x} = \dfrac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u} \times \dfrac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$.

$\Delta x \to 0$ అయిన $\Delta u \to 0$ అగును.

$$\text{కావున, } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u} \times \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

$$= \lim_{\Delta u \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\right) . \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

$$= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u} \times \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$= f'(u) \times u'(x)$$

$$= f'\big(g(x)\big)g'(x) \text{ లేదా } \boxed{\frac{d}{dx}\big(f(g(x)) = f'\big(g(x)\big)g'(x)}.$$

కావున $y = f\big(g(x)\big)$ అను ప్రమేయము అవకలనమునకు $g(x) = u$ ను అనుసరించి బాహ్య ప్రమేయము f యొక్క అవకలనమును స్వతంత్ర చలరాశి x ను అనుసరించి అంతర ప్రమేయము యొక్క అవకలనముతో గుణించవలెను. ఇప్పుడు u అనునది మధ్యస్థ కోణాంకము (intermediate argument) అని పిలువబడును.

సిద్ధాంతము 10.6

$f(x)$ అనునది అవకలనీయ ప్రమేయముగాను మరియు $y = k\,f(x), k \neq 0$. అయిన $\dfrac{d}{dx}(k\,f(x)) = k\dfrac{d}{dx}f(x)$.

నిరూపణ

f అనునది అవకలనీయము అయిన, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$.

$$y = h(x) = k\,f(x) \text{ అనుకొనుము.}$$

$$h(x+\Delta x) = k\,f(x+\Delta x)$$

$$h(x+\Delta x) - h(x) = kf(x+\Delta x) - kf(x)$$

$$= k\big[f(x+\Delta x) - f(x)\big] .$$

$$\frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} = k\frac{\big[f(x+\Delta x) - f(x)\big]}{\Delta x} .$$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_10.indd 158 10-03-2023 12:26:30

$$\text{దీని నుండి,}\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} k\,\frac{[f(x+\Delta x)-f(x)]}{\Delta x}$$

$$= k\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[f(x+\Delta x)-f(x)]}{\Delta x}$$

$$= kf'(x) = k\frac{d}{dx}f(x)$$

$$\frac{d}{dx}\big(h(x)\big) = k\frac{d}{dx}f(x)\,.$$

అంటే, $\boxed{\frac{d}{dx}\big(kf(x)\big)=k\frac{d}{dx}f(x)}$. ■

10.4.1 ప్రాథమిక ప్రమేయముల యొక్క అవకలనము (Derivatives of basic elementary functions)

అన్ని ప్రాథమిక ప్రమేయముల అవకలనీయ పద్ధతులను చూచెదము. మొదట స్థిర ప్రమేయమును తీసుకొందుము.

(1) స్థిర ప్రమేయపు అవకలనీయము శూన్యమగును.

$y = f(x) = k$ అనుకొనుము, k ఒక స్థిరాంకము.

కావున $f(x+\Delta x) = k$ మరియు

$f(x+\Delta x) - f(x) = k - k = 0.$

$$\text{దీనినుండి,}\quad \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = 0$$

$$\text{కావున,}\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = 0.$$

$$\text{కాబట్టి}\quad f'(x) = 0.$$

$$\text{లేదా}\quad \boxed{\frac{d}{dx}(k)=0}.$$

(2) $y = x^n$ అను ఘాత ప్రమేయము, $n > 0$ అనునది ఒక పూర్ణసంఖ్య

$f(x) = x^n$ అనుకొనుము.

కావున $f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^n$ మరియు

$f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^n - x^n.$

$$\text{దీని నుండి,}\quad \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{(x+\Delta x)-x}$$

$$\text{దీని నుండి,}\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{(x+\Delta x)-x}$$

$$= \lim_{y\to x}\frac{y^n - x^n}{y-x} = nx^{n-1},\quad \text{ఇక్కడ}\quad y = x+\Delta x\quad \text{అనుకొనుము}$$

మరియు $\Delta x \to 0$. అయిన $y \to x$

$$\text{అంటే}\quad \frac{d}{dx}f(x) = nx^{n-1}\quad \text{లేదా}\quad \boxed{\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}}.$$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_10.indd 159 10-03-2023 12:26:36

ఉపసిద్ధాంతము 10.1

$n = \frac{p}{q}, (p,q) = 1,$ అయిన, $\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{p}{q}}\right) = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}$.

ఉపసిద్ధాంతము 10.2

α అనునది ఏదైనా ఒక వాస్తవ సంఖ్యయైన, $\frac{d}{dx}(x^{\alpha}) = \alpha x^{\alpha-1}$.

కొన్ని ఉదాహరణలు

(1) $\frac{d}{dx}(5) = 0$ ఎందుకంటే 5 ఒక స్థిరాంకము.

(2) $\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2,$ ఘాత నియమము ప్రకారము

(3) $\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}},$ ఘాత నియమము ప్రకారము

(4) $\frac{d}{dx}\left(x^{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1},$ ఘాత నియమము ప్రకారము

(5) $\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}, (x \neq 0),$ ఘాత నియమము ప్రకారము

(6) $\frac{d}{dx}(100x^9) = 100\frac{d}{dx}(x^9) = 100 \times 9x^{9-1} = 900x^8$ సిద్ధాంతము 10.6 ప్రకారము

(3) సంవర్గమాన ప్రమేయము యొక్క అవకలనము

***x* యొక్క సహజ సంవర్గమును $\log_e x$ లేదా $\log x$ అని $\ln x$ వ్రాయవచ్చును.**

$y = f(x) = \log x$ అనుకొనుము.

ఇప్పుడు $f(x+\Delta x) = \log(x+\Delta x)$ మరియు

$f(x+\Delta x) - f(x) = \log(x+\Delta x) - \log x$

$= \log\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right).$

$= \log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right).$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}.$$

$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\log(1+\alpha k)}{\alpha} = k\lim_{\alpha\to 0}\frac{\log(1+k\alpha)}{k\alpha} = k$ అని మనకు తెలియును.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_10.indd 160 10-03-2023 12:26:37

కావున $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{x}$.

అంటే, $\boxed{\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}}$.

ఉపసిద్ధాంతము 10.3

$y = f(x) = \log_a x$ అయిన, $f'(x) = \frac{1}{(\log a)x}$ అగును.

$f(x) = \log_a x = \log_a e \times \log_e x = (\log_a e)\log x$

కావున $\frac{d}{dx}(f(x)) = \frac{d}{dx}(\log_a e \times \log x)$

$= (\log_a e)\frac{d}{dx}(\log x)$ (స్థిరాంక గుణకము ప్రకారము)

$= \log_a e.\frac{1}{x}$ లేదా $\frac{1}{(\log a)x}$.

(4) ఘాత ప్రమేయము యొక్క అవకలనము

$y = a^x$ అనుకొనుము.

కావున, $f(x+\Delta x) - f(x) = a^{x+\Delta x} - a^x$

$= a^x(a^{\Delta x} - 1)$ మరియు $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = a^x\left(\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}\right)$.

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = \log a$ అని తెలియును.

కాబట్టి, $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}\right)$

$= a^x \times \log a$

లేదా $\boxed{\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \log a}$.

ముఖ్యముగా, $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \log e$

$\boxed{\frac{d}{dx}(e^x) = e^x}$.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_10.indd 161 10-03-2023 12:26:43

(5) త్రికోణమితీయ ప్రమేయము యొక్క అవకలనగుణకము

(i) sine ప్రమేయము sin*x*.

$$y = f(x) = \sin x \text{ అనుకొనుము.}$$

$$\text{కావున } f(x+\Delta x) = \sin(x+\Delta x) \text{ మరియు}$$

$$f(x+\Delta x) - f(x) = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

$$\text{ఇప్పుడు } \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

$$\text{దీని నుండి } \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}.\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

$= 1 \times \cos x$ ($\cos x$ అవిచ్ఛిన్నమైనదగుట వలన, $\lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\Delta x) = \cos x$).

$= \cos x$

అంటే, $\boxed{\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x}$.

(ii) cosine ప్రమేయము cos *x*

$$y = \cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \text{ అనుకొనుము.}$$

$$\text{కావున } \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$u = x+\frac{\pi}{2} \text{ అనుకొనుము}$$

$$\frac{du}{dx} = 1+0 = 1$$

$$\text{కావున } \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin u) = \frac{d}{dx}(\sin u)\frac{du}{dx} \text{ (గొలుసు నియమము ప్రకారము)}$$

$$= \cos u \times 1 = \cos u = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x.$$

అంటే, $\boxed{\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x}$.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_10.indd 162 10-03-2023 12:26:47

(iii) tangent ప్రమేయము tan x

$$\text{Let } y = f(x) = \tan x \text{ అనుకొనుము.}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x}$$

కావున $$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

$$= \frac{\cos x \frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x} \quad \text{(భాగహార నియమము ప్రకారము)}$$

$$= \frac{\cos x(\cos x) - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}\ .$$

అంటే, $\boxed{\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x}$.

(iv) secant ప్రమేయము sec x

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x} = (\cos x)^{-1} \text{ అనుకొనుము.}$$

అయిన $$\frac{dy}{dx} = (-1)(\cos x)^{-2}(-\sin x) \quad \text{(గొలుసు నియమము ప్రకారము)}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^2 ii} = \frac{1}{\cos} . \frac{\sin x}{\cos} = \sec x . \tan x\ .$$

అంటే, $\boxed{\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x}$.

(v) cosecant ప్రమేయము cosec x

$$y = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} = (\sin x)^{-1} \text{ అనుకొనుము.}$$

$$\frac{dy}{dx} = (-1)(\sin x)^{-2}(\cos x) \quad \text{(గొలుసు నియమము ప్రకారము)}$$

$$= -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin x} . \frac{\cos x}{\sin x} = -\operatorname{cosec} x \cot x\ .$$

అంటే, $\boxed{\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \cot x}$.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_10.indd 163 10-03-2023 12:26:50

(vi) cotangent ప్రమేయము cot x

$$y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \text{ అనుకొనుము.}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)$$

$$= \frac{\sin x \frac{d}{dx}(\cos x) - \cos x \frac{d}{dx}(\sin x)}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{\sin x(-\sin x) - \cos x(\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\text{cosec}^2 x$$

అంటే, $\boxed{\frac{d}{dx}(\cot x) = -\text{cosec}^2 x}$.

(6) విలోమ త్రికోణమితీయ ప్రమేయముల యొక్క అవకలనములు (The derivatives of the inverse trigonometric functions)

(i) $\sin^{-1} x$ లేదా arc sin x యొక్క అవకలనము

$$y = f(x) = \sin^{-1} x \text{ అనుకొనుము.}$$

కావున $y + \Delta y = f(x + \Delta x) = \sin^{-1}(x + \Delta x)$

దీని నుండి, $x = \sin y$ మరియు

$x + \Delta x = \sin(y + \Delta y)$.

కావున $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\sin(y + \Delta y) - \sin y} = \frac{1}{\frac{\sin(y + \Delta y) - \sin y}{\Delta y}}$

$\Delta x \to 0$ అగునపుడు $\Delta y \to 0$ అగుటవలన

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\frac{\sin(y + \Delta y) - \sin y}{\Delta y}}$$

$$= \frac{1}{\cos y}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

అంటే, $\boxed{\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_10.indd 164 10-03-2023 12:26:53

(ii) arc cos x లేదా $\cos^{-1} x$ యొక్క అవకలనము

$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$. అను సర్వసమీకరణము తెలియును.

$$\text{దీని నుండి, } \frac{d}{dx}(\sin^{-1} x + \cos^{-1} x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\text{దీని ద్వారా } \frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) + \frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = 0$$

$$\text{కావున } \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = 0$$

అంటే, $\boxed{\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$.

(iii) arc tan x లేదా $\tan^{-1} x$ యొక్క అవకలనము

$y = f(x) = \tan^{-1} x$ అనుకొనుము. ... (1)

దీని నుండి, $y + \Delta y = f(x + \Delta x) = \tan^{-1}(x + \Delta x)$ ... (2)

$x = \tan y$ మరియు

$x + \Delta x = \tan(y + \Delta y)$

దీని నుండి $\Delta x = \tan(y + \Delta y) - \tan y$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\tan(y+\Delta y) - \tan y}$$

$$= \frac{1}{\frac{\tan(y+\Delta y) - \tan y}{\Delta y}}.$$

$\Delta x \to 0$, అగునపుడు $\Delta y \to 0$ అగుటవలన

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\tan(y+\Delta y) - \tan y}{\Delta y}} = \frac{1}{\frac{d}{dy}(\tan y)}$$

$$= \frac{1}{\sec^2 y}$$

$$= \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

అంటే, $\boxed{\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}}$.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_10.indd 165 10-03-2023 12:26:57

(iv) arc cot x లేదా ü ^{-1}x యొక్క అవకలనము

$$\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2} \text{ అను సర్వసమీకరణము మనకు తెలియును.}$$

$$\text{దీని నుండి } \frac{d}{dx}(\tan^{-1}x+\cot^{-1}x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$\text{దాని నుండి } \frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)+\frac{d}{dx}(\cot^{-1}x) = 0$$

$$\text{అంటే, } \frac{d}{dx}(\cot^{-1}x) = -\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

అంటే, $\boxed{\frac{d}{dx}(\cot^{-1}x) = -\frac{1}{1+x^2}}$.

(v) arc sec x అంటే, $\sec^{-1}x$ యొక్క అవకలనము $\boxed{\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}}$ అగును.

(vi) arc cosec x అంటే, $\text{cosec}^{-1}x$ యొక్క అవకలనము $\boxed{\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}}$ అగును.

(5) మరియు (6) నిరూపణలు అభ్యాసం కొరకు ఇవ్వబడియున్నది.

ఉదాహరణ 10.7

x దృష్ట్యా ఇవ్వబడిన వాటికి అవకలనీయము కనుగొనుము.

(i) $y = x^3+5x^2+3x+7$ (ii) $y = e^x+\sin x+2$

(iii) $y = 4\text{cosec}\,x - \log x - 2e^x$ (iv) $y = \left(x-\frac{1}{x}\right)^2$ (v) $y = xe^x \log x$

(vi) $y = \frac{\cos x}{x^3}$ (vii) $y = \frac{\log x}{e^x}$

(viii) $f(x) = |x-4|$ అయిన $f'(3)$ మరియు $f'(5)$ ను కనుగొనుము.

సాధన

(i) $\frac{dy}{dx} = 3x^2+10x+3.$ (ii) $\frac{dy}{dx} = e^x+\cos x.$

(iii) $\frac{dy}{dx} = -4\ \text{cosec}\ x.\cot x - \frac{1}{x} - 2e^x.$

(iv) $y = x^2+\frac{1}{x^2}-2 = x^2+x^{-2}-2$

$\frac{dy}{dx} = 2x-2x^{-2-1} = 2x-\frac{2}{x^3}.$

(v) $\frac{dy}{dx} = xe^x\left(\frac{1}{x}\right)+e^x.\log x(1)+x\log x(e^x)$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_10.indd 166 10-03-2023 12:27:02

$$= e^x + e^x \log x + xe^x \log x = e^x(1 + \log x + x \log x).$$

(vi) $y = \dfrac{\cos x}{x^3}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3(-\sin x) - \cos x(3x^2)}{x^6} = \frac{-x^2(x \sin x + 3\cos x)}{x^6} = -\frac{(x \sin x + 3\cos x)}{x^4}.$$

(vii) $y = \dfrac{\log x}{e^x} = e^{-x}.\log x$

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x}\left(\frac{1}{x}\right) + \log x(e^{-x})(-1)$$

$$= e^{-x}\left[\frac{1}{x} - \log x\right].$$

(viii) $f(x) = |x-4| = \begin{cases} -(x-4) & ; \ x < 4 \\ (x-4) & ; \ x \geq 4 \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{if } x < 4 \\ +1 & \text{if } x \geq 4 \end{cases}$$

కావున $f'(3) = -1$

$f'(5) = 1$.

అభ్యాసము 10.2

ఈ క్రింది ఇవ్వబడిన ప్రమేయములకు స్వతంత్ర చలరాశులదృష్ట్యా అవకలనమును కనుగొనుము.

(1) $f(x) = x - 3\sin x$
(2) $y = \sin x + \cos x$
(3) $f(x) = x \sin x$
(4) $y = \cos x - 2\tan x$
(5) $g(t) = t^3 \cos t$
(6) $g(t) = 4\sec t + \tan t$
(7) $y = e^x \sin x$
(8) $y = \dfrac{\tan x}{x}$
(9) $y = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$
(10) $y = \dfrac{x}{\sin x + \cos x}$
(11) $y = \dfrac{\tan x - 1}{\sec x}$
(12) $y = \dfrac{\sin x}{x^2}$
(13) $y = \tan\theta(\sin\theta + \cos\theta)$
(14) $y = \operatorname{cosec} x \cdot \cot x$
(15) $y = x \sin x \cos x$
(16) $y = e^{-x}.\log x$
(17) $y = (x^2 + 5)\log(1+x)e^{-3x}$
(18) $y = \sin x^\circ$
(19) $y = \log_{10} x$
(20) $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ అయిన $f'(x)$ అను ప్రమేయపు రేఖాచిత్రమును గీయుము.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_10.indd 167 10-03-2023 12:27:04

10.4.2 గొలుసు నియమము యొక్క ఉదాహరణములు (Examples on Chain Rule)

ఉదాహరణ 10.8

$F(x) = \sqrt{x^2+1}$ అయిన $F'(x)$ కనుగొనుము.

సాధన

$$u = g(x) = x^2+1 \text{ మరియు } f(u) = \sqrt{u}$$

$$\therefore F(x) = (fog)(x) = f(g(x))$$

$$f'(u) = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \text{ మరియు}$$

$$g'(x) = 2x, \text{ అందువలన}$$

$$F'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}.2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

ఉదాహరణ 10.9

అవకలనము చేయుము: (i) $y = \sin(x^2)$ (ii) $y = \sin^2 x$

సాధన

(i) ఇక్కడ sine ప్రమేయము బాహ్య ప్రమేయము, వర్గ ప్రమేయము మరియు అంతర ప్రమేయము అగును.

$u = x^2$ అనుకొనుము.

అంటే, $y = \sin u$.

కావున, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$

$= \cos u \times (2x)$

$= \cos(x^2).2x$

$= 2x\cos(x^2).$

(ii) $u = \sin x$

కావున $y = u^2$

మరియు $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$

$= 2u \times \cos x$

$= 2\sin x \,.\, \cos x$

$= \sin 2x.$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_10.indd 168 10-03-2023 12:27:05

ఉదాహరణ 10.10

$y=(x^3-1)^{100}$ ను అవకలనము చేయుము.

సాధన

$u = x^3-1$ అనుకొనుము

$y = u^{100}$

మరియు $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\times\dfrac{du}{dx}$

$= 100u^{100-1}\times(3x^2-0)$

$= 100(x^3-1)^{99}\times 3x^2$

$= 300x^2(x^3-1)^{99}$.

ఉదాహరణ 10.11

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}$ అయిన, $f'(x)$ ను కనుగొనుము..

సాధన

మొదట: $f(x) =$ üx^2+x+ $^{\frac{-1}{3}}$ అని వ్రాయుదుము

కావున $f'(x) = -\dfrac{1}{3}(x^2+x+1)^{\frac{-1}{3}-1}\dfrac{d}{dx}(x^2+x+1)$

$= -\dfrac{1}{3}(x^2+x+1)^{\frac{-4}{3}}\times(2x+1)$

$= -\dfrac{1}{3}(2x+1)(x^2+x+1)^{\frac{-4}{3}}$.

ఉదాహరణ 10.12

$g(t)=\left(\dfrac{t-2}{2t+1}\right)^9$ అను ప్రమేయపు అవకలన గుణకమును కనుగొనుము..

సాధన

$g'(t) = 9\left(\dfrac{t-2}{2t+1}\right)^{9-1}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{t-2}{2t+1}\right)$

$= 9\left(\dfrac{t-2}{2t+1}\right)^8\left[\dfrac{(2t+1)\dfrac{d}{dt}(t-2)-(t-2)\dfrac{d}{dt}(2t+1)}{(2t+1)^2}\right]$

$= 9\left(\dfrac{t-2}{2t+1}\right)^8\left[\dfrac{(2t+1)\times 1-(t-2)\times 2}{(2t+1)^2}\right]$

$= 9\left(\dfrac{t-2}{2t+1}\right)^8\left[\dfrac{2t+1-2t+4}{(2t+1)^2}\right]$

$= \dfrac{45(t-2)^8}{(2t+1)^{10}}$.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_10.indd 169 10-03-2023 12:27:06

ఉదాహరణ 10.13

$(2x + 1)^5 \ (x^3 - x + 1)^4$ ను అవకలనము చేయుము.

సాధన

$y = (2x + 1)^5 \ (x^3 - x + 1)^4$ అనుకొనుము

$u = 2x + 1 \ ; v = x^3 - x + 1$ అని తీసుకొన్నచో

$y = u^5 \ . \ v^4$

$$\frac{dy}{dx} = u^5 . \frac{d}{dx}(v^4) + v^4 \frac{d}{dx}(u^5)$$ (గుణకార నియమము ప్రకారము)

$$= u^5 . 4v^{4-1} \frac{dv}{dx} + v^4 . 5u^{5-1} \frac{du}{dx}$$ (గొలుసు నియమము ప్రకారము)

$$= 4u^5 . v^3 \times (3x^2 - 1) + 5v^4 u^4 \times 2$$

$$= 4(2x+1)^5 (x^3 - x + 1)^3 (3x^2 - 1) + 10(x^3 - x + 1)^4 (2x+1)^4$$

$$= (2x+1)^4 (x^3 - x + 1)^3 \left[4(2x+1)(3x^2 - 1) + 10(x^3 - x + 1) \right]$$

$$= 2(2x+1)^4 (x^3 - x + 1)^3 (17x^3 + 6x^2 - 9x + 3) .$$

ఉదాహరణ 10.14

$y = e^{\sin x}$ ను అవకలనము చేయుము.

సాధన

$u = \sin x$ అని తీసుకొన్నచో

$y = e^u$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(e^u)}{du} \times \frac{du}{dx} = e^u \times \cos x = \cos x \ e^{\sin x}.$$

ఉదాహరణ 10.15

2^x ను అవకలనము చేయుము.

సాధన

$y = 2^x = e^{x \log 2}$ అనుకొనుము.

$u = x \ (\log 2)$ అని తీసుకొన్నచో

$y = e^u$ అగును.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = e^u \times \log 2 = \log 2 \ e^{x \log 2}$$

$$= (\log 2) 2^x$$

a^x, యొక్క అవకలనము సూత్రమునుపయోగించి వ్రాయవచ్చును.

ఉదాహరణ 10.16

$y = \tan^{-1} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$, అయిన y' ను కనుగొనుము..

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_10.indd 170 10-03-2023 12:27:08

సాధన

$$y = \tan^{-1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$\frac{1+x}{1-x} = t$ అనుకొనుము.

కావున, $y = \tan^{-1}t$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dt}(\tan^{-1}t).\frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{1}{1+t^2}.\frac{(1-x).1-(1+x)(-1)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}.\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2} = \frac{1}{1+x^2}\ .$$

అభ్యాసము 10.3

ఈ క్రింది ఇవ్వబడిన వాటికి అవకలనములను కనుగొనుము:

(1) $y = (x^2+4x+6)^5$ (2) $y = \tan 3x$ (3) $y = \cos(\tan x)$

(4) $y = \sqrt[3]{1+x^3}$ (5) $y = e^{\sqrt{x}}$ (6) $y = \sin(e^x)$

(7) $F(x) = (x^3+4x)^7$ (8) $h(t) = \left(t-\frac{1}{t}\right)^{\frac{3}{2}}$ (9) $f(t) = \sqrt[3]{1+\tan t}$

(10) $\ddot{u} = \cos(\ ^3 + \ ^3)$ (11) $y = e^{-mx}$ (12) $y = 4\sec 5x$

(13) $y = (2x-5)^4(8x^2-5)^{-3}$ (14) $y = (x^2+1)\sqrt[3]{x^2+2}$ (15) $y = xe^{-x^2}$

(16) $s(t) = \sqrt[4]{\frac{t^3+1}{t^3-1}}$ (17) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{7-3x}}$ (18) $y = \tan(\cos x)$

(19) $y = \frac{\sin^2 x}{\cos x}$ (20) $y = 5^{\frac{-1}{x}}$ (21) $y = \sqrt{1+2\tan x}$

(22) $y = \sin^3 x + \cos^3 x$ (23) $y = \sin^2(\cos kx)$ (24) $y = (1+\cos^2 x)^6$

(25) $y = \frac{e^{3x}}{1+e^x}$ (26) $\ddot{u} = \sqrt{\ +\sqrt{\ }}$ (27) $y = e^{x\ddot{u}\ \ x}$

(28) $y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ (29) $y = \sin\left(\tan\left(\sqrt{\sin x}\right)\right)$ (30) $y = \sin^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

10.4.3 అంతర్లీన అవకలనము (Implicit Differentiation)

ఒక ప్రమేయపు ఆధారిత చలరాశి ద్వారా స్పష్టముగా ఇవ్వబడిన $y = f(x)$ అను రూపములో ఉండిన దానిని బహిర్లీన ప్రమేయము (**explicit** function) అని చెప్పవచ్చును. ఉదాహరణకు, $y = \frac{1}{2}x^3 - 1$ అనునది ఒక బహిర్లీన ప్రమేయము అగును. అదే సమయం దానికి సమానమైన సమీకరణము $2y - x^3 + 2 = 0$ అని, x, y

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_10.indd 171 10-03-2023 12:27:10

అను చలరాశులను అంతర్లీనంగా నిర్వచించిన దానిని అంతర్లీన ప్రమేయమని చెప్పవచ్చును. లేదా y అనునది x చే రూపొందించబడ్డ అంతర్లీన ప్రమేయమని చెప్పవచ్చును.

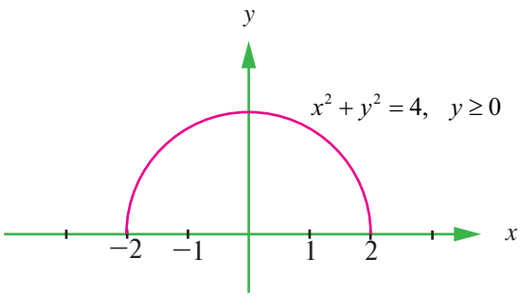
$$x^2 + y^2 = 4 \tag{1}$$

అను సమీకరణము ఆది బిందువును కేంద్రముగాను వ్యాసార్ధము 2 గాను కలిగిన ఒక వృత్తమును గుర్తించునని గమనించెదము. సమీకరణము (1) ప్రమేయము కాదు. ఎందుకనగా $-2 < x < 2$ అను అంతరములో గల ఒక్కొక్క x విలువకు y లో రెండు విలువలు కలవు. అవి:

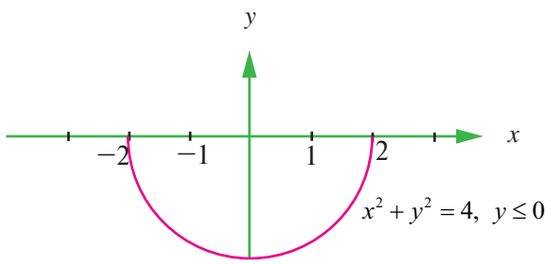
$$f(x) = \sqrt{4-x^2}, -2 \le x \le 2 \tag{2}$$

$$g(x) = -\sqrt{4-x^2}, -2 \le x \le 2 \tag{3}$$

రెండు విలువలు కలవు. (1)లో గుర్తించిన వృత్తపు పై అర్ధభాగమును (2), క్రింది భాగము (3) తెలియజేయుచున్నది. వృత్తము యొక్క పై అర్ధభాగము లేదా క్రింది అర్ధభాగమును ప్రమేయముగా అనుకొనవచ్చును. కావున $-2 \le x \le 2$ అను అంతరములో సమీకరణము (1) అనునది కనీసము రెండు అంకర్లీన ప్రమేయములను ఇచ్చుచున్నవి.



పటము 10.25



పటము 10.26

$x^2 + [f(x)]^2 = 4$ మరియు $x^2 + [g(x)]^2 = 4$ అను రెండు సమీకరణములు $-2 \le x \le 2$ అంతరములో సర్వసమానంగా ఉండునని గుర్తించదగినది.

సాధారణముగా, ఏదో ఒక అంతరములో $F(x, y) = 0$ అను సమీకరణము f ప్రమేయమును ఒక అంతర్లీన ప్రమేయముగా నిర్వచించిన $F(x, f(x)) = 0$ అనునది ఆ అంతరములో సర్వసమీకరణముగా ఏర్పడును. f అను ప్రమేయపు రేఖాచిత్రము $F(x, y) = 0$ సమీకరణపు రేఖాచిత్రము యొక్క భాగమును లేదా పూర్తిగానో తెలుపును.

$x^4 + x^2y^3 - y^5 = 2x + 1$ లాంటి మిక్కిలి సంక్లిష్టమైన సమీకరణము x అక్షములో నిర్ణయించిన (పరిమితి చేయబడిన) అంతరములో అంతర్లీన ప్రమేయములను తీర్మానించును. మరియు y ను x పదములచే వ్రాయుటకు వీలుకాకుండ ఉండును. అయినను, కొన్ని సందర్భములలో $\frac{dy}{dx}$ ను కనుగొనుటకు ఉపయోగించు పద్ధతిని అంతర్లీన అవకలనము అంటారు. ఈ పద్ధతి ప్రకారము సమీకరణమును రెండు ప్రక్కలా అవకలనము చేయు పద్ధతినుపయోగించి x ను అనుసరించి అవకలనము $\frac{dy}{dx}$ ను పొందవచ్చును. సమీకరణములో తీర్మానింపబడు y ఒక అవకలనము ప్రమేయముగా ఏర్పడునపుడు, ప్రమేయమును ఘాత నియమం గొలుసు నియమమును ఉపయోగించి, ఈ క్రింది విధముగా ఫలితాలను ఇచ్చును.

$\frac{d}{dx}(y^n) = n\,y^{n-1}\frac{dy}{dx}$, ఇక్కడ n ఒక పూర్ణాంకమగును.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_10.indd 172 10-03-2023 12:27:12

ఉదాహరణ 10.17

$x^2 + y^2 = 1$ అయిన, $\frac{dy}{dx}$ ను కనుగొనుము.

సాధన

సమీకరణమును ఇరువైపుల అవకలనము చేయగా

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(1)$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \text{ అగును.}$$

ఉదాహరణ 10.18

బిందువు $x = 1$. వద్ద $x^2 + y^2 = 4$ అను రేఖాచిత్రము యొక్క స్పర్శరేఖ వాలును కనుగొనుము.

సాధన

ఇవ్వబడిన సమీకరణములో $x = 1$ అని ప్రతిక్షేపించగా $y^2 = 3$ లేదా $y = \pm\sqrt{3}$ అని లభించును.

కావున, $(1, \sqrt{3})$ మరియు $(1, -\sqrt{3})$ లో స్పర్శరేఖలు ఏర్పడును. రెండు వేర్వేరు అంతర్లీన ప్రమేయముల యొక్క రేఖాచిత్రములలో గల బిందువులుగా $(1, \sqrt{3})$ మరియు $(1, -\sqrt{3})$ ఏర్పడినను ఒక్కొక్క బిందువు ద్వారాను వాలు లభించును. కావున

$$(1, \sqrt{3}) \text{ వద్ద } \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ మరియు } (1, -\sqrt{3}) \text{ వద్ద } \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

ఉదాహరణ 10.19

$x^4 + x^2y^3 - y^5 = 2x + 1$ అయిన, $\frac{dy}{dx}$ ను కనుగొనుము.

సాధన

అంతర్లీన అవకలనము ప్రకారము

$$\frac{d}{dx}(x^4) + \frac{d}{dx}(x^2y^3) - \frac{d}{dx}(y^5) = \frac{d}{dx}(2x + 1)$$

దీని నుండి, $4x^3 + x^2\left(3y^2\frac{dy}{dx}\right) + (2x)y^3 - 5y^4\frac{dy}{dx} = 2 + 0$

దీని నుండి, $4x^3 \text{ ﷺ } 3x^2y^2\frac{dy}{dx} \quad 2xy^3 \quad 5y^4\frac{dy}{dx} = 2$

కావున, $(3x^2y^2 - 5y^4)\frac{dy}{dx} = 2 - 4x^3 - 2xy^3$

లేదా $\frac{dy}{dx} = \frac{2 - 4x^3 - 2xy^3}{3x^2y^2 - 5y^4}$.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_10.indd 173 10-03-2023 12:27:15

ఉదాహరణ 10.20

$\sin y = y\cos 2x$ అయిన $\frac{dy}{dx}$ ను కనుగొనుము.

సాధన

$\sin y = y\cos 2x$.

$$\text{అవకలనముచేయగా, } \frac{d}{dx}\sin y = \frac{d}{dx}(y\cos 2x)$$

$$\text{అంటే, } \cos y\frac{dy}{dx} = y(-2\sin 2x) + \cos 2x\frac{dy}{dx}$$

$$\text{దీని నుండి, } (\cos y - \cos 2x)\frac{dy}{dx} = -2y\sin 2x$$

$$\text{లేదా } \frac{dy}{dx} = \frac{-2y\sin 2x}{\cos y - \cos 2x} .$$

10.4.4 సంవర్గమాన అవకలనము (Logarithmic Differentiation)

$y = x^x$ లాంటి సరళ ప్రమేయములను, అవకలనపు నియమములను, ప్రాథమిక ప్రమేయముల యొక్క అవకలనపు పట్టికనుపయోగించుట ద్వారా ప్రారంభములోఉపయోగించబడు ఏ ఒక్క ప్రమేయమునైనను సులభముగా అవకలనమును చేయవచ్చును. ఇటువంటి ప్రమేయములు అంతస్థ ఘాత ప్రమేయములుగా గుర్తించబడుచున్నది. వీటిలో సాధారణముగా ఆ ప్రమేయపు ఆధారము, ఘాతము స్వచ్ఛంద చలరాశులపై ఆధారపడియుండును.

అంతస్థ ఘాత ప్రమేయము $y = x^x$ కు అవకలనము కనుగొనుటకు ఇరుప్రక్కలా సంవర్గమానమును ఉపయోగించవలెను.

$\log y = x \log x, x > 0$ అగును.

ఇది ఒక సర్వసమానమగుట వలన ఎడమ ప్రక్క అవకలనము అనునది కుడి ప్రక్క అవకలనమునకు ఖచ్చితంగా సమానముగా ఉండవలెను. x ను దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా (ఎడమ ప్రక్క గల ప్రమేయము, ప్రమేయపు ప్రమేయము లేదా ప్రమేయం యొక్క ప్రమేయముగా గుర్తించుకోవలసినది) :

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \log x + 1$$

$$\text{కావున } \frac{dy}{dx} = y(\log x + 1) = x^x(\log x + 1)$$

$f(x)$ ప్రమేయమునకు సంవర్గమానమును కనుగొన్న (e ఆధారము) తరువాత అవకలనమును ఉపయోగించు పద్ధతిని సంవర్గమాన అవకలనము అని పిలువబడుచున్నది.

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\log f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}}.$$

ఈ పద్ధతి ద్వారా గుణకారం, భాగహారం లేదా ఘాతములు గల కఠినమైన ప్రమేయముల అవకలనములను సంవర్గమాన అవకలనమును ఉపయోగించి సులభముగా కనుగొనవచ్చును.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_10.indd 174 10-03-2023 12:27:16

ఉదాహరణ 10.21

$y = \sqrt{x^2+4}\,.\sin^2 x\,.2^x$ అయిన, y యొక్క అవకలనమును కనుగొనుము.

సాధన

ఇరుప్రక్కల సంవర్గమానము చేయగా,

$\log y = \frac{1}{2}\log(x^2+4) + 2\log(\sin x) + x\log(2)$. అని లభించును.

$$\text{దీని నుండి, } \frac{y'}{y} = \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+4} + 2.\frac{\cos x}{\sin x} + \log 2$$

$$= \frac{x}{x^2+4} + 2\cot x + \log 2$$

$$\text{కావున } y' = \frac{dy}{dx} = y\left(\frac{x}{x^2+4} + 2\cot x + \log 2\right).$$

ఉదాహరణ 10.22

అవకలనము చేయుము: $y = \dfrac{x^{\frac{3}{4}}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$.

సాధన

ఇరుప్రక్కల సంవర్గమానము చేయగా

$\log y = \frac{3}{4}\log x + \frac{1}{2}\log(x^2+1) - 5\log(3x+2)$.

అంతర్లీన అవకలనము ప్రకారము

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{4x} + \frac{1}{2}\frac{2x}{(x^2+1)} - \frac{5\times 3}{3x+2}$$

$$= \frac{3}{4x} + \frac{x}{(x^2+1)} - \frac{15}{3x+2}$$

$$\text{కావున, } \frac{dy}{dx} = y' = \frac{x^{\frac{3}{4}}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}\left[\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}\right].$$

సంవర్గమాన అవకలనపు సోపానములు (Steps in Logarithmic Differentiation)

(1) $y = f(x)$ అను సమీకరణపు ఇరుప్రక్కల సహజ సంవర్గమానమును తీసుకొని సంవర్గమాన నియమములను ఉపయోగించి సూక్ష్మీకరించవలెను.

(2) x ను అనుసరించి అంతర్లీన అవకలనము చేయవలెను.

(3) y' కొరకు సాధన కనుగొనవలెను.

సాధారణముగా, ఘాతములు మరియు ఆధారములను బట్టి నాలుగు రకములు కలవు.

UQRZ6

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_10.indd 175 10-03-2023 12:27:17

(1) $\frac{d}{dx}(a^b) = 0$ (a మరియు b అనునవి స్థిరాంకములు).

(2) $\frac{d}{dx}\left[f(x)\right]^b = b\left[f(x)\right]^{b-1} f'(x)$

(3) $\frac{d}{dx}[a^{g(x)}] = a^{g(x)}(\log a)g'(x)$

(4) $\frac{d}{dx}\left[f(x)\right]^{g(x)} = [f(x)]^{g(x)}\left[\frac{g(x)f'(x)}{f(x)} + \log f(x).g'(x)\right]$

ఉదాహరణ 10.23

అవకలనము చేయుము: $y = x^{\sqrt{x}}$.

సాధన

ఇరుప్రక్కల సంవర్గమానము చేయగా

$$\log y = \sqrt{x}\log x$$

అంతర్లీన అవకలనము ప్రకారము,

$$\frac{y'}{y} = \sqrt{x}.\frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}.\log x$$

$$= \frac{\log x + 2}{2\sqrt{x}}$$

కావున, $\frac{d}{dx}(x^{\sqrt{x}}) = y' = x^{\sqrt{x}}\left(\frac{\log x + 2}{2\sqrt{x}}\right)$.

10.4.5 ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి (Substitution method)

విలోమ త్రికోణమితీయ ప్రమేయములను అవకలనముచేయునపుడు ఈ ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి ద్వారా అవకలనము చేయుట అనునది మిక్కిలి ఉపయోగవంతమైనదిగా వుండును.

$f(x) = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ అను ప్రమేయమును తీసుకొనుము.

ఈ ప్రమేయముకు, ఒక ప్రమేయ నియమము యొక్క ప్రమేయమునుపయోగించి $f'(x)$ కనుగొనవచ్చు. కాని, అది కొంచెం క్లిష్టతరమైనది. దానికి బదులుగా ప్రతిక్షేపణ పద్ధతిని ఉపయోగించిన సులభమగును.

$x = \tan\theta$ అనుకొనుము.

కావున $\frac{2x}{1-x^2} = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \tan 2\theta$ మరియు

$$f(x) = \tan^{-1}(\tan 2\theta) = 2\theta$$

$$= 2\tan^{-1}x$$

$f'(x) = \frac{2}{1+x^2}$ అని సులభముగా పొందవచ్చును.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_10.indd 176 10-03-2023 12:27:19

ఉదాహరణ 10.24

$y = \tan^{-1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, అయిన, y' కనుగొనుము.

సాధన

$x = \tan\theta$ అనుకొనుము.

$$\text{కావున, } \frac{1+x}{1-x} = \frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta} = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right).$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\right] = \frac{\pi}{4}+\theta = \frac{\pi}{4}+\tan^{-1}x$$

$$y = \frac{\pi}{4}+\tan^{-1}x$$

$$y' = \frac{1}{1+x^2}.$$

ఉదాహరణ 10.25

$f(x) = \cos^{-1}(4x^3 - 3x)$ అయిన, $f'(x)$ ను కనుగొనుము..

సాధన

$x = \cos\theta$ అనుకొనుము.

$$\text{కావున, } 4x - 3x = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = \cos 3\theta \text{ మరియు}$$

$$f(x) = \cos^{-1}(\cos 3\theta) = 3\theta = 3\cos^{-1}x$$

$$\text{అందువలన, } f'(x) = 3\left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{-3}{\sqrt{1-x^2}}.$$

10.4.6 పరామితీయ సమీకరణములచే నిర్వచింపబడ్డ చలరాశుల యొక్క అవకలనము (Derivatives of variables defined by parametric equations)

$x = f(t), y = g(t)$ అను సమీకరణములను తీసుకొనుము.

ఈ సమీకరణములు x మరియు y చలరాశుల మధ్య గల ప్రమేయపు సంబంధమును ఇచ్చును. $[a, b]$ అను ఏదేని ఒక ప్రదేశములో గల t విలువకు x మరియు y కనుగొనవచ్చును.

x మరియు y అను రెండు ప్రమేయములు స్వతంత్రంగా t అను మధ్యస్థపు (సహాయక) చలరాశి ద్వారా నిర్వచింపబడిన x మరియు y కు గల ప్రమేయ సంబంధమును పరామితీయ సంబంధము అనియు మరియు మధ్యస్థపు చలరాశిని పరామితి అని అంటారు.

x మరియు y లకు మధ్య గల ప్రత్యక్ష సంబంధమును పరామితి t లేకుండా కనుగొనుట అనునది పరామితిని తొలగించుట అంటారు. రెండు అంత కంటే ఎక్కువ చరరాశులు గల పరామితీయ సమీకరణములలో నుండిఏక చరరాశి t ని ఎలా తగ్గించవచ్చు అనే ప్రశ్న ఉద్భవించును.

ఉదాహరణమునకు, కేంద్రము $(0, 0)$ మరియు వ్యాసార్ధము r గా గల వృత్తపు సమీకరణము $x^2 + y^2 = r^2$ అగును. ఈ సమీకరణము x మరియు y రెండింటికి మధ్యగల సంబంధమును వివరించుచున్నది.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_10.indd 177 10-03-2023 12:27:20

దీని పరామితీయ సమీకరణములు $x = r\cos t$; $y = r\sin t$ అని లభించును.

విపర్యయంగా t ను తొలగించినపుడు $x^2 + y^2 = r^2$ అని లభించును.

y ను x యొక్క ప్రమేయముగా తీసుకొన్నచో $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{g'(t)}{f'(t)}$.

x ను y యొక్క ప్రమేయముగా తీసుకొన్నచో y ను అనుసరించి x యొక్క అవకలనము,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}} = \frac{f'(t)}{g'(t)}.$$ అగును.

వృత్తమును గమనించినచో $\dfrac{dy}{dx}$ అనునది వృత్త స్పర్శరేఖ యొక్క వాలు అగును,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{r\cos t}{-r\sin t} = -\cot t$$ గా ఏర్పడును.

ఉదాహరణ 10.26

$x = at^2$; $y = 2at$, $t \neq 0$ అయిన $\dfrac{dy}{dx}$ కనుగొనుము.

సాధన

$x = at^2$; $y = 2at$ అగుట వలన

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{2a}{2at} = \frac{1}{t}.$$

ఉదాహరణ 10.27

$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ అయిన $\dfrac{dy}{dx}$ కనుగొనుము.

సాధన

$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t).$

ఇప్పుడు $\dfrac{dx}{dt} = a(1 - \cos t)$; $\dfrac{dy}{dt} = a\sin t$

కావున, $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{\sin t}{(1-\cos t)}.$$

10.4.7 ఒకప్రమేయమును బట్టి మరొక ప్రమేయపు యొక్క అవకలనము (Differentiation of one function with respect to another function)

$y = f(x)$ అను ప్రమేయము అవకలనీయమైన, x దృష్ట్యా y యొక్క అవకలనము

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_10.indd 178 10-03-2023 12:27:20

f మరియు g అనునవి x యొక్క అవకలన ప్రమేయములు మరియు $\frac{dg}{dx} = g'(x) \neq 0$, అయిన

$$\frac{df}{dg} = \frac{\frac{df}{dx}}{\frac{dg}{dx}} = \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

ఉదాహరణ 10.28

$x \log x$ ను బట్టి x^x యొక్క అవకలనమును కనుగొనుము..

సాధన

$$u = x^x, v = x \log x$$

$$\log u = x \log x$$

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = x.\frac{1}{x} + 1.\log x = 1 + \log x$$

$$\frac{du}{dx} = u(1 + \log x) = x^x(1 + \log x)$$

$$\frac{dv}{dx} = 1 + \log x$$

$$\frac{d(x^x)}{d(x \log x)} = \frac{du}{dv} = \frac{\frac{du}{dx}}{\frac{dv}{dx}} = x^x .$$

గమనించవలసినది ఏమనగా g ఒక తత్సమ ప్రమేయముగా ఉండిన, $g(x) = x$ కావున $\frac{df}{dg}$ అనునది $\frac{df}{dx} = f'(x)$. గా మారును.

ఉదాహరణ 10.29

$x^2 + x + 1$ దృష్ట్యా $\tan^{-1}(1 + x^2)$ యొక్క అవకలనమును కనుగొనుము.

సాధన

$f(x) = \tan^{-1}(1 + x^2)$ అనుకొనుము.

$g(x) = x^2 + x + 1$

$$\frac{df}{dg} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$f'(x) = \frac{2x}{\left(x^4 + 2x^2 + 2\right)}$$

$$g'(x) = 2x + 1$$

$$\frac{df}{dg} = \frac{2x}{(2x + 1)(x^4 + 2x^2 + 2)} .$$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_10.indd 179 10-03-2023 12:27:22

ఉదాహరణ 10.30

$\cos(lx^2+mx+n)$ దృష్ట్యా $\sin(ax^2+bx+c)$ ను అవకలనముచేయుము.

సాధన

$$u = \sin(ax^2+bx+c) \text{ మరియు}$$

$$v = \cos(lx^2+mx+n) \text{ అనుకొనుము.}$$

$$\frac{du}{dv} = \frac{u'(x)}{v'(x)}$$

$$u'(x) = \cos(ax^2+bx+c)(2ax+b)$$

$$v'(x) = -\sin(lx^2+mx+n)(2lx+m)$$

$$\frac{du}{dv} = \frac{u'(x)}{v'(x)} = \frac{(2ax+b)\cos(ax^2+bx+c)}{-(2lx+m)\sin(lx^2+mx+n)} .$$

10.4.8 అధిక అంతస్థు గల అవకలనములు (Higher order Derivatives)

ఒక సరళరేఖలో చలించు వస్తువు యొక్క స్థానప్రమేయము (స్థానభ్రంశము) $s = s(t)$ అనుకొనుము. దాని మొదటి అవకలనగుణకము, వస్తువు యొక్క దిశావేగపు ప్రమేయము $v(t)$ గా ఏర్పడును అని భౌతిక సంకర్షణ ద్వారా సులభముగా తెలుసుకొనియున్నాము.

$$v(t) = s'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} .$$

ఇంకను, సమయము దృష్ట్యా దిశావేగపు తక్షణ మార్పు రేటు ఆ వస్తువు యొక్క త్వరణము $a(t)$ అగును. కావున త్వరణపు ప్రమేయము అనునది దిశావేగ ప్రమేయము యొక్క అవకలనం అగును. అందువలన త్వరణపు ప్రమేయము, స్థానప్రమేయపు రెండవ అవకలనమగును.

$$a(t) = v'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}$$

$$= \frac{d}{dt}(v(t))$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2s}{dt^2} = s''(t)$$

ఇదేవిధంగా, f అనునది x యొక్క అవకలనీయ ప్రమేయమైన, దాని మొదటి అవకలనము $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ అనునది $y = f(x)$ అను ప్రమేయము యొక్క రేఖాచిత్రము స్పర్శరేఖ వాలు అని సరళ రేఖాగణిత సంకర్షణముల ద్వారా ఏర్పడును. f' అనునది x యొక్క ప్రమేయముగా ఉండుటవలన f' కు దానికదే అవకలనముగా ఉండవచ్చును. మరియు అది వ్యవస్థితముయితే $(f')' = f''$ గా గుర్తించవచ్చు.

$$f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x} .$$

$$= \frac{d}{dx}(f'(x)) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)$$

$$= \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2} \text{ అని వ్రాయవచ్చును.}$$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_10.indd 180 10-03-2023 12:27:22

దీనిని మరొక చిహ్నముగా $D^2 f(x) = D^2 y = y_2 = y''$ అని వ్రాయవచ్చును.

రెండవ అవకలనము అనునది మార్పు రేటు యొక్క మార్పురేటుగా అనుకొనుము. కాని రేఖాగణిత సంకర్షణముల యొక్క వివరణ సులభముగా లేదు. అయినను $y = f(x)$ అను ప్రమేయపు రేఖాచిత్రము యొక్క వక్రత వంపు వ్యాసార్ధమునకు మరియు రెండవ అవకలనము $f''(x)$ నకు దగ్గరి సంబంధం కలదని ఉన్నత తరగతులలో చూచెదము. అదేవిధంగా $f''(x)$ వ్యవస్థితమైతే, అది అవకలనీయముగానో లేదా అవకలనీయము కాకుండా ఏర్పడును.

ఈ f'' యొక్క అవకలనమును f యొక్క మూడవ అవకలనము f''' అని అందురు మరియు దీనిని

$$f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3} = y''' = y_3 \text{ గా గుర్తించబడును.}$$

మూడవ అవకలనమును భౌతిక సంకర్షణముల ద్వారా ఒక సరళరేఖలో చలించు వస్తువు యొక్క స్థానప్రమేయము $f(t)$ అనునది ఒక ప్రమేయమగును. ఎందువలన అనగా $s''' = (s'')' = a'(t)$ అగుటవలన, స్థానప్రమేయము యొక్క మూడవ అవకలనము అనునది త్వరణ ప్రమేయపు అవకలనము అగును. మరియు దానిని 'కుదుపు' **(jerk)** అనియు

$$j = \frac{da}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3} \text{ అనియు వ్రాయవచ్చును.}$$

కావున, 'కుదుపు' అనునది త్వరణములోని మార్పురేటు అగును.

ఎందువలన అనగా త్వరణములోని తక్షణ మార్పురేటును పెద్ద కుదుపు అందురు. ఈ పెద్దకుదుపు ఏర్పడినచో వాహన చలనములో అదుర్లు ఏర్పడును.

ఉదాహరణ 10.31

$y = ü^3 - ü^2 - + $ అయిన y', y'' మరియు y''' అనువాటిని కనుగొనుము.

సాధన

$$y = x^3 - 6x^2 - 5x + 3 \text{ మరియు}$$
$$y' = 3x^2 - 12x - 5$$
$$y'' = 6x - 12$$
$$y''' = 6.$$

ఉదాహరణ 10.32

$y = \frac{1}{x}$ అయిన y''' ను కనుగొనుము.

సాధన

$$\text{We have, } y = \frac{1}{x} = x^{-1}$$
$$y' = -1x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$
$$y'' = (-1)(-2)x^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{x^3}.$$
$$\text{మరియు } y''' = (-1)(-2)(-3)x^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{x^4}.$$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_10.indd 181 10-03-2023 12:27:23

ఉదాహరణ 10.33

$f(x) = x \cos x$ అయిన f'' ను కనుగొనుము.

సాధన

$$f(x) = x \cos x.$$

ఇప్పుడు $f'(x) = -x \sin x + \cos x$, మరియు

$$f''(x) = -(x \cos x + \sin x) - \sin x$$
$$= -x \cos x - 2 \sin x.$$

ఉదాహరణ 10.34

$x^4 + y^4 = 16$ అయిన y'' ను కనుగొనుము.

సాధన

$$x^4 + y^4 = 16 \ .$$

అంతర్లీన అవకలనము ప్రకారము, $4x^3 + 4y^3 y' = 0$

$$y' = -\frac{x^3}{y^3} \ .$$

y'' ను కనుగొనుటకు y' పైన భాగహార నియమమును ఉపయోగించవలెను. x యొక్క ప్రమేయముగా y కలదని గమనించుము.

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{-x^3}{y^3}\right) = \frac{-\left[y^3 \frac{d}{dx}(x^3) - x^3 \frac{d}{dx}(y^3)\right]}{(y^3)^2}$$
$$= -\frac{\left[y^3 . 3x^2 - x^3 (3y^2 y')\right]}{y^6}$$
$$= \frac{-3x^2 y^3 - 3x^3 y^2 \left(-\frac{x^3}{y^3}\right)}{y^6}$$
$$= \frac{-3(x^2 y^4 + x^6)}{y^7} = \frac{-3x^2[x^4 + y^4]}{y^7}$$
$$= \frac{-3x^2(16)}{y^7} = \frac{-48x^2}{y^7} \ .$$

ఉదాహరణ 10.35

$x = a \cos t$

$y = a \sin t$ అయిన రెండవ అవకలన గుణకమును కనుగొనుము.

సాధన

x దృష్ట్యా అంతర్లీన ప్రమేయమును అవకలనము చేయగా,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a \cos t}{-a \sin t} = -\frac{\cos t}{\sin t}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_10.indd 182 10-03-2023 12:27:24

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{-\cos t}{\sin t}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{-\cos t}{\sin t}\right)\frac{dt}{dx} = \text{[} \operatorname{cosec}^2 t \text{]} \quad \frac{1}{x'(t)}$$

$$= \operatorname{cosec}^2 t \times \frac{1}{-a\sin t}$$

$$= -\frac{\cos ec^3 t}{a} .$$

ఉదాహరణ 10.36

$x^2 + y^2 = 4$ అయిన $\frac{d^2y}{dx^2}$ ను కనుగొనుము..

సాధన

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$= -\frac{y.1 - x.\frac{dy}{dx}}{y^2}$$ (భాగహార నియమము ప్రకారము)

$$= -\frac{y - x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2}$$

$$= -\frac{x^2 + y^2}{y^3} = -\frac{4}{y^3} .$$

అభ్యాసము 10.4

ఈ క్రింది వాటిని అవకలనము చేయుము. (1–18)

(1) $y = x^{\cos x}$

(2) $y = x^{\log x} + (\log x)^x$

(3) $\sqrt{xy} = e^{(x-y)}$

(4) $x^y = y^x$

(5) $(\cos x)^{\log x}$

(6) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

(7) $\sqrt{x^2 + y^2} = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

(8) $\tan(x + y) + \tan(x - y) = x$

(9) $\cos(xy) = x$, అయిన $\frac{dy}{dx} = \frac{-(1 + y\sin(xy))}{x\sin xy}$ అని చూపుము.

(10) $\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_10.indd 183 10-03-2023 12:27:25

(11) $\tan^{-1}\left(\frac{6x}{1-9x^2}\right)$ (12) $\cos\left(2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$

(13) $x = a\cos^3 t$; $y = a\sin^3 t$ (14) $x = a(\cos t + t\sin t)$; $y = a(\sin t - t\cos t)$

(15) $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, y = \frac{2t}{1+t^2}$ (16) $\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

(17) $\sin^{-1}(3x-4x^3)$ (18) $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}\right)$.

(19) x^2 దృష్ట్యా $\sin x^2$ యొక్క అవకలనమును కనుగొనుము.

(20) $\tan^{-1} x$ దృష్ట్యా $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ యొక్క అవకలనమును కనుగొనుము.

(21) $u = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ మరియు $v = \tan^{-1} x$, అయిన $\frac{du}{dv}$ ను కనుగొనుము.

(22) $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)$ దృష్ట్యా $\tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)$ యొక్క అవకలనమును కనుగొనుము.

(23) $y = \sin^{-1}x$ అయిన y'' ను కనుగొనుము.

(24) $y = e^{\tan^{-1}x}$, అయిన $(1+x^2)y'' + (2x-1)y' = 0$ అని చూపుము.

(25) $y = \frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$, అయిన $(1-x^2)y_2 - 3xy_1 - y = 0$ అని చూపుము.

(26) $x = a(\theta + \sin\theta), y = a(1-\cos\theta)$ అయిన $\theta = \frac{\pi}{2}$, గా ఉన్నప్పుడు $y'' = \frac{1}{a}$ అని నిరూపించుము.

(27) $\sin y = x\sin(a+y)$, అయిన $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$, అని నిరూపించుము. ఇక్కడ $a \neq n\pi$.

(28) $y = (\cos^{-1}x)^2$, అయిన $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - 2 = 0$. అని నిరూపించుము మరియు $x = 0$ అయినప్పుడు y_2 విలువను కనుగొనుము.

అభ్యాసము 10.5

క్రింద ఇవ్వబడిన నాలుగు సమాధానములనుండి సరియైన సమాధానమును ఎంపిక చేయుము.

(1) $\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{\pi}\sin x^\circ\right)$ is

(1) $\frac{\pi}{180}\cos x^\circ$ (2) $\frac{1}{90}\cos x^\circ$ (3) $\frac{\pi}{90}\cos x^\circ$ (4) $\frac{2}{\pi}\cos x^\circ$

(2) $y = f(x^2+2)$ మరియు $f'(3) = 5$, అయిన $x = 1$ వద్ద $\frac{dy}{dx}$ యొక్క విలువ

(1) 5 (2) 25 (3) 15 (4) 10

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_10.indd 184 10-03-2023 12:27:30

(3) $y=\frac{1}{4}u^4,\ u=\frac{2}{3}x^3+5$, అయిన $\frac{dy}{dx}$ యొక్క విలువ

(1) $\frac{1}{27}x^2(2x^3+15)^3$ (2) $\frac{2}{27}x(2x^3+5)^3$

(3) $\frac{2}{27}x^2(2x^3+15)^3$ (4) $-\frac{2}{27}x(2x^3+5)^3$

R9X61

(4) $f(x)=x^2-3x$, అయిన $f(x)=f'(x)$ గా ఏర్పడు బిందువులు

(1) రెండునూ ధనపూర్ణాంకములగును

(2) రెండునూ ఋణపూర్ణాంకములగును

(3) రెండునూ కరణీయ సంఖ్యలగును

(4) ఒకటి అకరణీయ సంఖ్యగాను మరొకటి కరణీయ సంఖ్యగానూ ఉండును.

(5) $y=\frac{1}{a-z}$, అయిన $\frac{dz}{dy}$ యొక్క విలువ

(1) $(a-z)^2$ (2) $-(z-a)^2$ (3) $(z+a)^2$ (4) $-(z+a)^2$

(6) $y=\cos(\sin x^2)$, అయిన $x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ వద్ద $\frac{dy}{dx}$ యొక్క విలువ

(1) -2 (2) 2 (3) $-2\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (4) 0

(7) $y=mx+c$ మరియు $f(0)=f'(0)=1$, అయిన $f(2)$ యొక్క విలువ

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) -3

(8) $f(x)=x\tan^{-1}x$, అయిన $f'(1)$ యొక్క విలువ

(1) $1+\frac{\pi}{4}$ (2) $\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$ (3) $\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$ (4) 2

(9) $\frac{d}{dx}(e^{x+5\log x})$ యొక్క విలువ

(1) $e^x.x^4(x+5)$ (2) $e^x.x(x+5)$ (3) $e^x+\frac{5}{x}$ (4) $e^x-\frac{5}{x}$

(10) $x=0$ వద్ద $(ax-5)e^{3x}$ యొక్క అవకలనము -13 అయిన a, యొక్క విలువ

(1) 8 (2) -2 (3) 5 (4) 2

(11) $x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, y=\frac{2t}{1+t^2}$ అయిన $\frac{dy}{dx}$ యొక్క విలువ

(1) $-\frac{y}{x}$ (2) $\frac{y}{x}$ (3) $--$ (4) $\frac{x}{y}$

(12) $x=a\sin\theta$ మరియు $y=b\cos\theta$, అయిన $\frac{d^2y}{dx^2}$ యొక్క విలువ

(1) $\frac{a}{b^2}\sec^2\theta$ (2) $-\frac{b}{a}\sec^2\theta$ (3) $-\frac{b}{a^2}\sec^3\theta$ (4) $-\frac{b^2}{a^2}\sec^3\theta$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_10.indd 185 10-03-2023 12:27:35

(13) $\log_x 10$ ను ఆధారముగా $\log_{10} x$ యొక్క అవకలనము

(1) 1 (2) $-(\log_{10} x)^2$ (3) $(\log_x 10)^2$ (4) $\frac{x^2}{100}$

(14) $f(x) = x+2$, అయిన $x=4$ వద్ద $f'(f(x))$ యొక్క విలువ

(1) 8 (2) 1 (3) 4 (4) 5

(15) $y = \frac{(1-x)^2}{x^2}$, అయిన $\frac{dy}{dx}$ యొక్క విలువ

(1) $\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}$ (2) $-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}$ (3) $-\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^3}$ (4) $-\frac{2}{x^3}+\frac{2}{x^2}$

(16) $pv = 81$, అయిన $v = 9$ వద్ద $\frac{dp}{dv}$ యొక్క విలువ

(1) 1 (2) – 1 (3) 2 (4) –2

(17) $f(x) = \begin{cases} x-5 & , \ x \le 1 \\ 4x^2-9 & , \ 1 < x < 2 \\ 3x+4 & , \ x \ge 2 \end{cases}$ అయిన, $x = 2$ వద్ద $f(x)$ యొక్క కుడి ప్రక్క అవకలనము విలువ

(1) 0 (2) 2 (3) 3 (4) 4

(18) $f'(a)$ ఉన్నచో, $\lim_{x\to a} \frac{xf(a)-af(x)}{x-a}$ అనునది

(1) $f(a)-af'(a)$ (2) $f'(a)$ (3) $-f'(a)$ (4) $f(a)+af'(a)$

(19) $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 2 \\ 2x-1, & x \ge 2 \end{cases}$, అయిన $f'(2)$ అనునది

(1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) నిర్వచింపలేము

(20) $g(x) = (x^2+2x+1) f(x)$ మరియు $f(0) = 5$ మరియు $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-5}{x} = 4$, అయిన $g'(0)$ అనునది

(1) 20 (2) 14 (3) 18 (4) 12

(21) $f(x) = \begin{cases} x+2, & -1 < x < 3 \\ 5 & x = 3 \\ 8-x & x > 3 \end{cases}$, అయిన $x = 3$, వద్ద $f'(x)$ అనునది

(1) 1 (2) – 1 (3) 0 (4) నిర్వచింపలేము

(22) $x = -3$ వద్ద $f(x) = x|x|$ యొక్క అవకలన గుణకము

(1) 6 (2) – 6 (3) నిర్వచింపలేము (4) 0

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_10.indd 186 10-03-2023 12:27:37

(23) If $f(x)=\begin{cases}2a-x, & -a<x<a\\ 3x-2a & x\geq a\end{cases}$, అయిన ఈ క్రిందివాటిలో ఏది వాస్తవము?

(1) $x=a$ వద్ద $f(x)$ అవకలన కాదు

(2) $x=a$ వద్ద $f(x)$ విచ్ఛిన్నముగా ఉండును.

(3) $\mathbb{R}$ లో ప్రతి x కు $f(x)$ అవిచ్ఛిన్నముగా ఉండును

(4) ప్రతి $x\geq a$ కు $f(a)$ అవకలనముగా ఉండును.

(24) If $f(x)=\begin{cases}ax^2-b, & -1<x<1\\ \dfrac{1}{|x|}, & \text{ఇతర}\end{cases}$ $x=1$, వద్ద ఇతర అవకలనము అయిన

(1) $a=\frac{1}{2},\ b=\frac{-3}{2}$ (2) $a=\frac{-1}{2},\ b=\frac{3}{2}$ (3) $a=-\frac{1}{2},\ b=-\frac{3}{2}$ (4) $a=\frac{1}{2},\ b=\frac{3}{2}$

(25) $f(x)=|x-1|+|x-3|+\sin x$ అను ప్రమేయము $\mathbb{R}$ లో అవకలనము చేయుటకు వీలుకాని బిందువులు

(1) 3 (2) 2 (3) 1 (4) 4

పాఠ్యసారాంశము

ఈ పాఠ్యాంశములో మనము నేర్చుకొన్నవి

- అవకలనము అనునది మార్పురేటు అగును. $y=f(x)$ అయిన x_0 వద్ద x దృష్ట్యా y యొక్క అవకలనము అనునది $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, ఇక్కడ అవధి వ్యవస్థితము $f'(x_0^+)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0^-)$ అనునది ఒక ఏకైక వాస్తవ సంఖ్యగా ఉండవలెను
- $x=x_0$ వద్ద $y=f(x)$ యొక్క అవకలనము $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}=f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.
- రేఖాగణిత వివరణ ప్రకారం $(x,f(x))$. అను బిందువు వద్ద $y=f(x)$ వక్రము యొక్క స్పర్శరేఖ వాలు అనునది $y=f(x)$ యొక్క అవకలనం అగును.
- భౌతిక వివరణ ప్రకారం $s=f(t)$ యొక్క అవకలనము t దృష్ట్యా స్థానభ్రంశ మార్పు రేటు అగును. అది దిశా వేగము అగును. రెండవ అవకలనము అనునది త్వరణము అగును. మరియు మూడవ అవకలనము కుదుపు (Jerk) అగును.
- $x=x_0$ వద్ద $y=f(x)$ విచ్ఛిన్నముగా ఉండిన $x=x_0$ వద్ద $f(x)$ అవకలనము చేయుటకు వీలుకాదు.
- $x=x_0$ వద్ద $f(x)$ కు అవకలనము లేని యెడల $(x_0,f(x_0))$ వద్ద $y=f(x)$ అను రేఖాచిత్రమునకు స్పర్శరేఖ లేదు అని అర్థము.
- రేఖా గణిత వివరణ ప్రకారం $y=f(x)$ అను రేఖాచిత్రమునకు $x=x_0$ వద్ద రేఖాచిత్ర రూపము $(\vee)$ లేదా $(\wedge)$ గా వుండిన $x=x_0$ వద్ద అవకలనము ఉండదు.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_10.indd 187 10-03-2023 12:27:40

- అవకలనము అనునది ఒక ప్రక్రియే కాని నిబంధనల సమితి కాదు.
- అవకలనీయత అవిచ్ఛిన్నతను ఇచ్చును. కాని అవిచ్ఛిన్నత అనునది అవకలనమును ఇవ్వనవసరము లేదు.
- అవకలన ప్రమేయముల యొక్క కూడిక, తీసివేత, గుణకారము మరియు భాగహారము అను వాటి అవకలనమములు క్రింది విధంగా నిర్వచించబడినవి.

(i) $\frac{d}{dx}(f(x)\pm g(x))=\frac{d}{dx}f(x)\pm\frac{d}{dx}g(x)$

(ii) $\frac{d}{dx}(f(x)g(x))=f(x)\frac{dg}{dx}+g(x)\frac{df}{dx}$

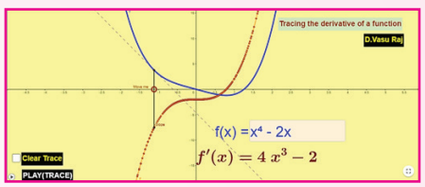
(iii) $\frac{d}{dx}((fog)(x))=f'(g(x))g'(x)$

(iv) $\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, ఇక్కడ $(g)x\neq 0$ అగును.

అవకలన గణితము

సంగణక కృత్యము 10(a)

అశించు లక్ష్యములు



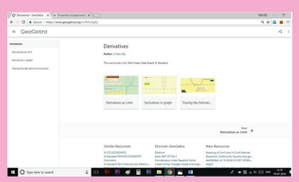
సోపానము 1

బ్రౌజర్‌ను ఓపెన్ చేసి క్రింద ఇవ్వబడిన URL లింకును టైపు చేయుము లేదా QR Code సంకేతమును స్కాన్ చేయుము దీనిని ఉపయోగించి. జియోజీబ్రా యొక్క "Derivatives" అను వర్క్‌షీటు ను పొందుము. ఆ వర్క్‌షీటులో ఈ పాఠ్యాంశమునకు సంబంధించిన పలు విషయములు ఇవ్వబడియుండును.

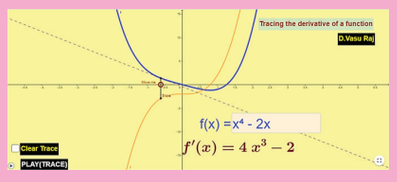
సోపానము 2

"Tracing the derivative of a function" అను అభ్యాస పుటను ఎంచుకొనుము. మీరు ఏదేని ప్రమేయపు విలువను f(x) పెట్టెలో నమోదు చేయుము. ప్రమేయము నీలపు రంగులో మరియు అవకలనము నారింజ రంగులో కనబడును. play trace button ను క్లిక్ చేయగా అవకలనము యొక్క రేఖాగణితపు దృశ్యరూపము కనబడును. ఇది (X. X వద్ద వాలు) అను బిందువు వద్ద ఏర్పడును.

$f(x)$ యొక్క ఒక్కొక్క బిందువు వద్ద అవకలనపు దారిని పరిశీలించవచ్చును.



సోపానము 1



సోపానము 2

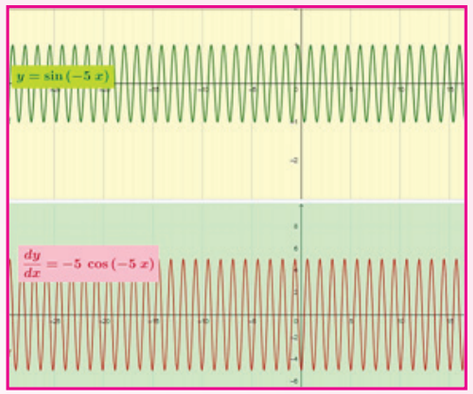
Browse in the link:

అవకలనములు: https://ggbm.at/fk3w5g8y

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_10.indd 188 10-03-2023 12:27:42



అవకలన గణితము



ఆశించు లక్ష్యములు

సోపానము 1

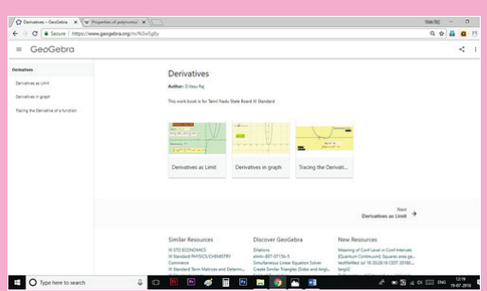
బ్రౌజర్‌ను ఓపెన్ చేసి క్రింద ఇవ్వబడిన URL లింకును టైపు చేయుము లేదా QR Code సంకేతమును స్కాన్ చేయుము.

ఇప్పుడు జియోజీబ్రా యొక్క "Derivatives" అను వర్క్‌షీటు తెరపైకనబడును. ఆ వర్క్‌షీటులో ఈ పాఠ్యాంశమునకు సంబంధించిన పలు విషయములు ఇవ్వబడియున్నవి.

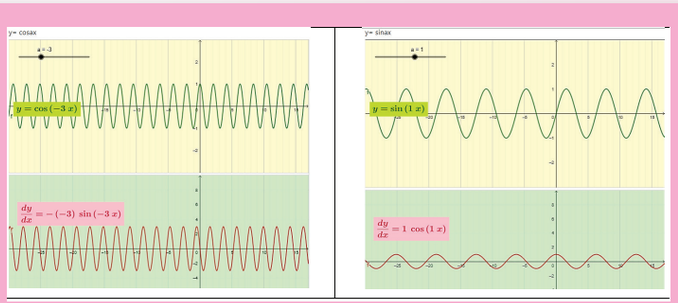
సోపానము 2

"Derivatives in graph" అను దానిని ఎంపిక చేయుము కొన్ని ఆధార ప్రమేయాలు మరియు వాటి అవకలనములు ఇవ్వబడియుండును.

స్లైడర్‌ను కదిపి "a" యొక్క విలువలను మార్చవచ్చును. ప్రతికృత్యములోను ఏర్పడు మార్పులను గమనించుము.



సోపానము 1



సోపానము 2

Browse in the link:

అవకలనములు: https://ggbm.at/fk3w5g8y

UBZI3

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_10.indd 189 10-03-2023 12:27:44

అధ్యాయం 11

సమాకలన గణితము

"సంకేతాలు నూతన ఆవిష్కరణలను సులభంగా చేయును.
ఆలోచనలను సులభతరం చేయుటకు ఇది ఒక అద్భుతమైన పద్ధతి"
- గొట్టి ఫ్రెడ్ దిల్ హెమ్ అబ్నిజ్

11.1 పరిచయం (Introduction)


న్యూటన్


లిబ్నిజ్

గొట్ట్ ఫ్రెడ్ విల్ హేమ్ లిబ్నిజ్ (1646–1716) మరియు సర్ ఐసక్ న్యూటన్ (1643–1727) అను వారు 17వ శతాబ్దం మధ్యలో వేరువేరుగా కలన గణితమును కనుగొనిరి. తత్త్వవేత్త, గణితవేత్త, రాజకీయ సలహాదారి మరియు తర్కవేత్త అని చెప్పబడిన జర్మనీ దేశానికి చెందిన అవకలన మరియు సమాకలన కలన గణితమును వేరేవేరుగా కనుగొన్నారు. ఈ శతాబ్దం నందు ఇంగ్లాండ్ దేశానికి చెందిన సర్ ఐజాక్ న్యూటన్ ఒక (వక్రరేఖ) క్రింద వున్న వైశాల్యమును కనుగొనుటకు కలన గణితము యొక్క ప్రాథమిక సిద్ధాంతమును కనుగొనెను. న్యూటన్ గణితములోనే కాకుండా దృక్ శాస్త్రము (optics) మరియు గురుత్వాకర్షణ మొదలైన వాటి సిద్ధాంతాలను కనుగొనెను.

అవకలన గణితము మరియు సమాకలన గణితము లేకుండా ఈ ప్రపంచాన్ని మనము ఊహించడానికి వీలు కాదు. గణితము యొక్క అవకలన గణితము మరియు సమాకలన గణితము అను రెండు ప్రాథమిక సమ్మేళనముల ఉపయోగము వలన ఈ శతాబ్దం నందు విజ్ఞానశాస్త్రము అభివృద్ధి గుర్తించదగినదిగా వుండుటను చూడవచ్చును. భౌతిక శాస్త్రము, ఖగోళశాస్త్రము, ఇంజనీరింగు, భౌగోళిక శాస్త్రము, రసాయనశాస్త్రము, జీవశాస్త్రము మరియు సాంఘిక శాస్త్రములలో ఏర్పడు పలు రకాల ప్రశ్నలకు సమాధానాలు కనుగొనుటకు పైన తెలపబడిన రెండు ప్రాథమిక సమ్మేళనముల ఉపయోగముల తప్పనిసరిగా అవసరమగును.

కలన గణితము ప్రధానంగా రెండు రేఖాగణిత సమస్యలతో వ్యవహరిస్తుంది.

(i) ఒక వక్రరేఖ యొక్క స్పర్శరేఖవాలును అవధి పద్ధతిలో తెలుసుకొను ప్రక్రియను అవకలన గణితము అందురు.

(ii) ఒక వక్రరేఖ క్రింద అమరియున్న భాగము యొక్క వైశాల్యమును అవధి పద్ధతిలో తెలుసుకొను ప్రక్రియను సమాకలనం అందురు.

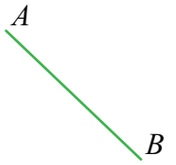
మనము 9 మరియు 10వ అధ్యాయం నందు అవకలన గణితము గూర్చి చదివియున్నాము. ఈ అధ్యాయం నందు సమాకలన గణితము యొక్క కొన్ని ప్రాథమిక విధులను చూడగలము.

క్రింద వివరించిన కొన్ని సాధారణ పరిస్థితులను పరిగణించండి.

సందర్భం 1

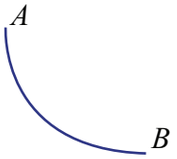
A మరియు B అను రెండు బిందువులు మధ్య (పటం 11.1(a)) దగ్గర దూరం ఆ రెండు బిందువులను కలుపు రేఖా ఖండం అగును. ఒక కణము A నుండి B కు (లంబంగా లేకుండా) వంగి ప్రయాణించునపుడు తీసుకొను అతి తక్కువ సమయం తీసుకొను దారిని చూడగలము అని అనుకొందుము. చాలా మంది తక్కువ దూరం కలిగిన AB అనే సరళరేఖ గుండా పోవునపుడు (పటం 11.1(a)) తీసుకొను సమయం తక్కువ సమయం అని నమ్ముతున్నారు.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_11.indd 190 10-03-2023 12:30:05



A నుండి *B* కు తక్కువ దూరం కలిగిన మార్గం

పటము 11.1 (a)



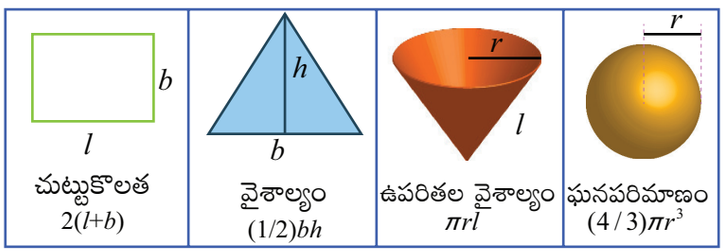
A నుండి *B* కు తక్కువ సమయం కలిగిన మార్గము

పటము 11.1 (b)

అయితే A ను B ను కలుపు సరళరేఖ తక్కువ సమయం కలిగిన మార్గంగా వుండదు. ఎందువలననగా A కు దగ్గర అధిక వాలు కలిగిన వక్రములో (పటం 11.1(b)) వుండు దిశా వేగం అనునది సరళ రేఖలో (పటం 11.1(a)) వుండు దిశా వేగం కంటే ఎక్కువగా ఉండును. ఈ వక్రమార్గం ఎక్కువ దూరముగా ఉన్నట్లు వుండినను, ఈ మార్గంను అతివేగంగా అతి తక్కువ సమయంలో చేరుకొనవచ్చును. దీనిని బ్రాచిస్టోక్రోన్ (Brachistochrone) సమస్య అని పిలవబడుచున్నది.

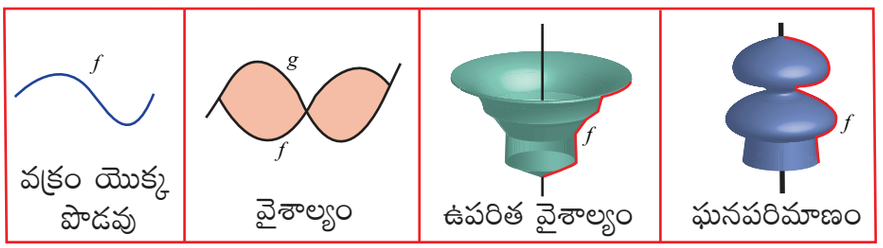
సందర్భం 2

ప్రాథమిక జ్యామితికి సంబంధించిన సూత్రాలను ఉపయోగించి క్రిందివున్న క్రమ ఆకారముల కొలతలను కనుగొనుట, గూర్చి ఇంతకుముందే మనము చదివియున్నాము.



పటము 11.2 (a)

క్రింద వచ్చు రేఖాచిత్రంల ద్వారా ఇవ్వబడిన కొలతలను ప్రమేయములను ఏ విధంగా గణించగలము?



పటము 11.2 (b)

ఈ సమస్యలను చూచినపుడు కఠినముగా ఉన్నా కూడా కలన గణితంలోని సమాకలనం ద్వారా వీటిని సులభంగా కనుగొనవచ్చును.

సందర్భం 3

ఒక విద్యార్థి తన మోటర్ వాహనంపై 24 మీ / సెకను వేగంతో ప్రయాణించునపుడు నిర్దేశించిన సమయంలో తనకు ముందుగా 40 మీటర్ల దూరంలో ఉన్న అడ్డును డీకొట్టుకోకుండా తప్పించుటకు వాహనమును నిలుపవలసిన అవసరం ఉన్నది. వెంటనే తన యొక్క వాహనము వేగంను 8 మీ / సెకను^{2} తగ్గించి ప్రయాణించిన ఎదురుగా ఉన్న అడ్డును డీకొనకుండా నిలబడగలడా?



పటము 11.3

మన నిత్యజీవితంలో సహజంగా సంభవించే పలు సమస్యలను మనము చూడగలము.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_11.indd 191 10-03-2023 12:30:05

- ఏ వేగంతో ఒక ఉపగ్రహంను పైకి పంపించిన మళ్ళీ అది భూమివైపు తిరిగిరాకుండా వుంటుంది?
- ఇవ్వబడిన చుట్టుకొలత (P) వున్న సమద్విబాహు త్రిభుజంలో అమరియున్న వృత్త చట్రము యొక్క వ్యాసార్ధం ఎంత?
- $2r$ వ్యాసార్ధం వున్న ఘన గోళం, కేంద్రం నుండి r వ్యాసార్ధం ఉన్న ఒక రంధ్రంను చేసి భయటకు తీసిన ఆ ఘనము యొక్క ఘనపరిమాణం ఎంత?
- బ్యాక్టిరియా అభివృద్ధి నిష్పత్తి ప్రస్తుతం వున్న జనాభా మొత్తానికి అనులోమాను పాతంలో పెరుగుతూ ఉంటుంది. బాక్టిరియా యొక్క పెరుగుదల ఒక గంటకు రెట్టింపు అయితే రెండు గంటల తరువాత దాని పెరుగుదల ఎంత?

పైన తెలుపబడు సంభవాలకు సమాకలన సమాధానం ఇవ్వగలదు.

అభ్యసన లక్ష్యాలు (Learning Objectives)

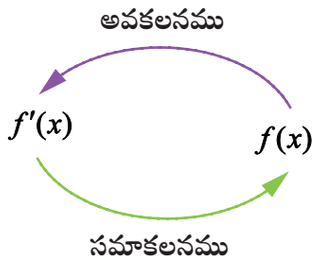
ఈ పాఠ్యాంశము ముగించే సమయానికి విద్యార్థులు నేర్చుకోవలసిన విషయాలు.

- అనిశ్చిత సమకలనము యొక్క నిర్వచనమును అవకలనము యొక్క విలోమ ప్రక్రియ అని అర్థం చేసుకొనుట.
- స్థిర గణాంకాలు, కూడిక మరియు తీసివేత మొదలగు ప్రాథమిక ప్రమేయాల యొక్క అనిశ్చిత సమాకలనమును కనుగొనుట.
- సంయుక్త ప్రమేయాల అనిశ్చిత సమాకలనంను పొందడానికి తగిన పద్ధతులు అనుసరించడం.
- ఒక ప్రమేయం యొక్క మార్పు రేటు ఇవ్వబడిన ఆ ప్రమేయంను సమాకలనం ఉపయోగించి కనుగొనుట మొదలగునవి ఎదురుచూడబడుచున్నది.

11.2 న్యూటన్–లిబ్నిజ్ సమాకలనము (Newton-Leibnitz Integral)

సమాకలన కలన గణితమును ముఖ్యంగా అనిశ్చిత సమాకలనం (indefinite integrals) మరియు నిశ్చిత సమాకలనం (definite integrals) గా విభజించబడినది. ఈ పాఠ్యాంశము నందు అనిశ్చిత సమాకలనంను దాన్ని అవకలనం నుండి పొందు ప్రమేయం యొక్క ఆధారంగా చదివెదము.

$(+,-)$, $(\times,\div)$, $\left((\,)^n, \sqrt[n]{\ }\right)$ మొదలగు విలోమ పరిక్రియల జతలను గూర్చి మనము ముందుగానే తెలుసుకున్నాము. ఇదేవిధంగా అవకలనం, సమాకలనం $(d,\int)$ లు ఒకదానికొకటి విలోమ ప్రక్రియల జతలగును. అవకలనం యొక్క విలోమ ప్రక్రియలను "ప్రత్యవకలనం" అని పిలుతురు.



పటము 11.4

నిర్వచనం 11.1

I అను అంతరంలో ఒక్కొక్క x – కు $F'(x)=f(x)$ అని ఉంటే $F(x)$ అనునది I పై $f(x)$ కు ప్రత్యవకలనం (న్యూటన్–లిబ్నిజ్ సమాకలనం) అంటారు.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_11.indd 192 10-03-2023 12:30:07

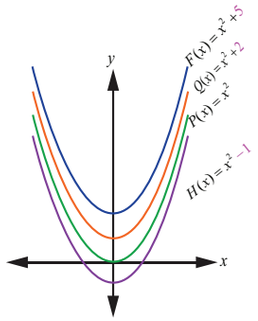
వివరణతో కూడిన ఉదాహరణ 11.1

$F(x) = x^2 + 5$ అయితే $F'(x) = 2x$

$f(x) = 2x$, అని నిర్వచించిన $f(x)$ అనునది

$F(x)$ యొక్క అవకలనముగాను,

$F(x)$ అనుది $f(x)$ యొక్క ప్రత్యవకలనం గాను అగును.



పటము 11.5

క్రింది పట్టికను చూడండి.

$F(x)$	$F'(x) = f(x)$	$f(x) = 2x$ యొక్క ప్రత్యవకలనం
$P(x) = x^2 + 0$ $Q(x) = x^2 + 2$ $H(x) = x^2 - 1$	$P'(x) = 2x$ $Q'(x) = 2x$ $H'(x) = 2x$ } $f(x) = 2x$	$F(x) = x^2 + ?$

$F(x), P(x), Q(x)$ మరియు $H(x)$ మొదలగు వాటి అవకలనం $f(x)$ గా చూసాము. అయితే $f(x) = 2x$ యొక్క ప్రత్యవకలనం ఏకైకం కాదు. కాబట్టి $f(x)$ యొక్క ప్రత్యవకలనములు అంతమొందని చాలా ప్రమేయముల సమూహమగును.

సిద్ధాంతం 11.1

ఒక అంతరం ***I*** లో $F(x)$ అనునది $f(x)$ ఒక నిర్ధిష్ట ప్రత్యవకలనం అయితే ***I*** లో $f(x)$ ను ఒక్కొక్క ప్రత్యవకలనము $\int f(x)dx = F(x) + c$ అని లభించును. ఇక్కడ **c** అనునది ఏకపక్ష స్థిరాంకం (**arbitrary constant**) మరియు $f(x)$ యొక్క అన్ని ప్రత్యవకలనములు **c** కు ఇచ్చిన విలువలు ద్వారా చూడగలము.

ప్రమేయం ***f(x)*** ను సమాకలన ప్రమేయం అని అందురు.

dx లో ఉండు ***x*** ను "సమాకలన చరరాశి" లేక "అనుసందాన కర్త" (**Integrator**) అని పిలుతురు పిలుస్తారు.

సమాకలనం చేయు విధానం "సమాకలనం" లేదా "ప్రత్యవకలనం" అని పిలవబడుతుంది.

(Sum) అను పదం నందు మొదటి అక్షరం S (Σ) అనే దానిని సాగదీసిన $\int$ అను గుర్తును సమాకలనం గుర్తుగా పొందుతున్నాము.

అవకలనంను కలిగి ఉన్న కొన్ని సమస్యలకు ఒక గుర్తించిన నిబంధనలను అనువర్తింపచేసి ప్రత్యవకలన సాధన పొందాలనుకుంటున్నాం. ఈ గుర్తించిన నిబంధన ప్రాథమిక నిబంధన లేక సరిహద్దు నిబంధన అని పిలవబడుతుంది.

ఉదాహరణకు $\frac{dy}{dx}$ వున్న సమీకరణంలో ప్రాథమిక నిబంధనలుగా $x = x_1$, మరియు $y = y_1$ అని ఇవ్వబడి ఉన్నప్పుడు దాని ప్రత్యవకలనా తెలుసుకొని దానిలో కలిగి ఉన్న ఏకపక్ష స్థిరరాశి c ను $x = x_1$, మరియు $y = y_1$ అని ప్రతిక్షేపించి కనుగొనవచ్చును.

వివరణతో కూడిన ఉదాహరణ 11.2

$x = 2$. అనినప్పుడు $y = 10$ అనే ప్రథమ నిబంధన కలిగిన $\frac{dy}{dx} = 2x$ అను సమీకరణంను సంతృప్తి చేయు ఒక నిర్ధిష్ట ప్రత్యవకలనం పొందగలం.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_11.indd 193 10-03-2023 12:30:08

ఇవ్వబడిన సమీకరణం ప్రకారం

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$y = \int 2x\,dx$$

$$y = x^2 + c$$

$y = 10$ మరియు $x = 2.$ ను పైన ఉన్న సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించగా

$$10 = 2^2 + c \;\Rightarrow\; c = 6$$

c =6 ను ప్రతిక్షేపించగా $y = x^2 + 6$

అను అవసరమైన ప్రత్యవకలనం లభించును.

11.3 సమాకలనం యొక్క ప్రాథమిక నియమాలు (Basic Rules of Integration)

ప్రాథమిక సూత్రాలు:

సమాకలనం అనునవి అవకలనంకు విలోమ ప్రక్రియ అయినందువలన క్రింద ఇవ్వబడిన ప్రాథమిక సమాకలన సూత్రాలను దానికి సంబంధించిన అవకలన సూత్రాలను ఉపయోగించి రాబట్టవచ్చును.

అవకలనం	ప్రత్యవకలనం
$\frac{d}{dx}(c) = 0,$ c ఒక స్థిరరాశి	$\int 0\,dx = c$, c ఒక స్థిరరాశి
$\frac{d}{dx}(kx) = k,$ k ఒక స్థిరరాశి	$\int k\,dx = kx + c$ c ఒక ఏకైక స్థిరరాశి
$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,$ $n \neq -1$ (ఘాతనియమము)
$\frac{d}{dx}(\log x) = \left(\frac{1}{x}\right)$	$\int \frac{1}{x}\,dx = \log\lvert x\rvert + c$
$\frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$	$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$
$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$	$\int \cos x\,dx = \sin x + c$
$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_11.indd 194 10-03-2023 12:30:08

$\frac{d}{dx}(-\cot x) = \operatorname{cosec}^2 x$	$\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\cot x + c$
$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$	$\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + c$
$\frac{d}{dx}(-\operatorname{cosec} x) = \operatorname{cosec} x \cot x$	$\int \operatorname{cosec} x \cot x \, dx = -\operatorname{cosec} x + c$
$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$	$\int e^x dx = e^x + c$
$\frac{d}{dx}\left(\frac{a^x}{\log a}\right) = a^x$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + c$
$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c$
$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + c$

ఉదాహరణ 11.1

క్రింది వాటికి సమాకలనమును గణించండి.

(i) x^{10} (ii) $\frac{1}{x^{10}}$ (iii) $\sqrt{x}$ (iv) $\frac{1}{\sqrt{x}}$

సాధన

(i) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$. అని మనకు తెలుసు

$n = 10$ ను ప్రతిక్షేపించగా

$$\int x^{10} dx = \frac{x^{10+1}}{10+1} + c = \frac{x^{11}}{11} + c$$

(ii) $$\int \frac{1}{x^{10}} dx = \int x^{-10} dx = \frac{x^{-10+1}}{-10+1} + c = -\frac{1}{9x^9} + c$$

(iii) $$\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c$$

(iv) $$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = 2\sqrt{x} + c$$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_11.indd 195 10-03-2023 12:30:10

ఉదాహరణ 11.2

క్రింది వాటికి సమాకలనం గణించండి.

(i) $\frac{1}{\cos^2 x}$ (ii) $\frac{\cot x}{\sin x}$ (iii) $\frac{\sin x}{\cos^2 x}$ (iv) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

సాధన

(i) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$

(ii) $\int \frac{\cot x}{\sin x} dx = \int \operatorname{cosec} x \cot x\, dx = -\operatorname{cosec} x + c$

(iii) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} . \frac{1}{\cos x} dx = \int \tan x \sec x\, dx = \sec x + c$

(iv) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c$

ఉదాహరణ 11.3

క్రింది వాటికి సమాకలనం గణించండి.

(i) $\frac{1}{e^{-x}}$ (ii) $\frac{x^2}{x^3}$ (iii) $\frac{1}{x^3}$ (iv) $\frac{1}{1+x^2}$

సాధన

(i) $\int \frac{1}{e^{-x}} dx = \int e^x dx = e^x + c$

(ii) $\int \frac{x^2}{x^3} dx = \int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c$

(iii) $\int \frac{1}{x^3} dx = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + c = -\frac{1}{2x^2} + c$

(iv) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + c$

అభ్యాసం 11.1

ఈ క్రింది వాటికి సమాకలనంను గణించండి.

(1) (i) x^{11} (ii) $\frac{1}{x^7}$ (iii) $\sqrt[3]{x^4}$ (iv) $(x^5)^{\frac{1}{8}}$

(2) (i) $\frac{1}{\sin^2 x}$ (ii) $\frac{\tan x}{\cos x}$ (iii) $\frac{\cos x}{\sin^2 x}$ (iv) $\frac{1}{\cos^2 x}$

(3) (i) 12^3 (ii) $\frac{x^{24}}{x^{25}}$ (iii) e^x

(4) (i) $(1+x^2)^{-1}$ (ii) $\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$

11.4 $\int f(ax+b)dx$ ప్రత్యక్ష రూపములో సమాకలనము (Integrals of the Form)

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{(x-a)^{10}}{10}\right] = (x-a)^9 \Rightarrow \int (x-a)^9 dx = \frac{(x-a)^{10}}{10} + c$$

$$\frac{d}{dx}[\sin(x+k)] = \cos(x+k) \Rightarrow \int \cos(x+k)dx = \sin(x+k) + c$$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_11.indd 196 10-03-2023 12:30:12

పైన తెలిపిన ఉదాహరణల నుండి ప్రత్యక్ష రూపంలో ఉన్న ఏకైక చలరాశి x తో ఏ ఒక స్థిరరాశిని కూడిన లేదా తీసివేసిన ప్రాథమిక సమాకలన సూత్రములో ఏవిధంగాను మార్పు ఏర్పడదు అని తెలుస్తున్నది. అయితే

$$\text{అయితే } \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{l}(e^{lx+m})\right] = e^{lx+m} \Rightarrow \int e^{lx+m}dx = \frac{1}{l}e^{(lx+m)} + c$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{a}\sin(ax+b)\right] = \cos(ax+b) \Rightarrow \int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + c$$

ఈ ఉదాహరణల ద్వారా మనము తెలుసుకొన్నది ఏదైనా చరరాశి x తో కూడ ఏదైనా ఒక స్థిరరాశిని గుణించిన ప్రాథమిక సమాకలన సూత్రంను అదే స్థిరరాశితో భాగించి అవసరమైన ప్రమేయపు విలువను పొందవచ్చును.

$$\int f(x)dx = g(x) + c, \text{అయితే } \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}g(ax+b) + c$$

పైన కనబరిచిన సూత్రమును ప్రతిక్షేపన పద్ధతి మూలముగా పొందవచ్చును అని తరువాత చదివెదము.

ఉదాహరణ 11.4

క్రింది వాటికి విలువలను కనుగొనుము.

(i) $\int (4x+5)^6\,dx$ (ii) $\int \sqrt{(15-2x)}\,dx$ (iii) $\int \frac{1}{(3x+7)^4}dx$

సాధన

(i) $\int (4x+5)^6\,dx = \frac{1}{4}\frac{(4x+5)^{6+1}}{6+1} = \frac{(4x+5)^7}{28} + c$

(ii) $\int \sqrt{(15-2x)}\,dx = \int (15-2x)^{\frac{1}{2}}\,dx = \left(\frac{1}{-2}\right)\frac{(15-2x)^{\frac{1}{2}+1}}{(1/2)+1} = -\frac{(15-2x)^{\frac{3}{2}}}{3} + c$

(iii) $\int \frac{1}{(3x+7)^4}dx = \int (3x+7)^{-4}\,dx = \frac{1}{3}\frac{(3x+7)^{-4+1}}{-4+1} = -\frac{1}{9(3x+7)^3} + c$

ఉదాహరణ 11.5

క్రింది వాటికి సమాకలనమును గణించండి.

(i) $\sin(2x + 4)$ (ii) $\sec^2(3+4x)$ (iii) $\text{cosec}(ax+b)\cot(ax+b)$

సాధన

(i) $\int \sin(2x + 4)\,dx = \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\cos(2x+4)\right) + c = -\frac{1}{2}\cos(2x+4) + c$

(ii) $\int \sec^2(3+4x)\,dx = \frac{1}{4}\tan(3+4x) + c$

(iii) $\int \text{cosec}(ax+b)\cot(ax+b)\,dx = \left(\frac{1}{a}\right)\left(-\text{cosec}(ax+b)\right) + c = -\frac{1}{a}\text{cosec}(ax+b) + c$

ఉదాహరణ 11.6

క్రింది వాటికి సమాకలనమును గణించండి.

(i) e^{3x} (ii) e^{5-4x} (iii) $\frac{1}{(3x-2)}$ (iv) $\frac{1}{(5-4x)}$

సాధన

(i) $\int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x} + c$ (ii) $\int e^{5-4x}\,dx = -\frac{e^{5-4x}}{4} + c$

(iii) $\int \frac{1}{(3x-2)}dx = \frac{1}{3}\log|(3x-2)|+c$ (iv) $\int \frac{1}{(5-4x)}dx = -\frac{1}{4}\log|(5-4x)|+c$

ఉదాహరణ 11.7

క్రింది వాటికి సమాకలనమును గణించండి.

(i) $\frac{1}{1+(2x)^2}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{1-(9x)^2}}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{1-25x^2}}$

సాధన

(i) $\int \frac{1}{1+(2x)^2}dx = \frac{1}{2}\tan^{-1}(2x)+c$ (ii) $\int \frac{1}{\sqrt{1-(9x)^2}}dx = \frac{1}{9}\sin^{-1}(9x)+c$

(iii) $\int \frac{1}{\sqrt{1-25x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}}dx = \frac{1}{5}\sin^{-1}(5x)+c$

అభ్యాసం 11.2

"x" దృష్ట్యా క్రింది వాటికి సమాకలనమును కనుగొనుము.

(1) (i) $(x+5)^6$ (ii) $\frac{1}{(2-3x)^4}$ (iii) $\sqrt{3x+2}$

(2) (i) $\sin 3x$ (ii) $\cos(5-11x)$ (iii) $\text{cosec}^2(5x-7)$

(3) (i) e^{3x-6} (ii) e^{8-7x} (iii) $\frac{1}{6-4x}$

(4) (i) $\sec^2\frac{x}{5}$ (ii) $\text{cosec}(5x+3)\cot(5x+3)$ (iii) $\sec(2-15x)\tan(2-15x)$

(5) (i) $\frac{1}{\sqrt{1-(4x)^2}}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{1-81x^2}}$ (iii) $\frac{1}{1+36x^2}$

11.5 సమాకలన ధర్మములు (Properties of Integrals)

(1) k ఒక చరరాశి అయిన $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ అగును

(2) $\int (f_1(x)\pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$

గమనిక 11.1

పైన ఉన్న రెండు ధర్మములను కలిపి క్రింద విధముగా విస్తరించవచ్చును.

$$\int (k_1f_1(x)\pm k_2f_2(x)\pm k_3f_3(x)\pm\cdots\pm k_nf_n(x))\,dx$$

$$= k_1\int f_1(x)dx \pm k_2\int f_2(x)dx \pm k_3\int f_3(x)dx \pm\cdots\pm k_n\int f_n(x)dx.$$

అనగా అంతమొందు సంఖ్యలో వున్న ప్రమేయముల రేఖీయ సమ్మేళనముల సమాకలనము, వాటి సమాకలనముల రేఖీయ సమ్మేళనమునకు సమానమగును.

ఉదాహరణ 11.8

క్రింది వాటికి సమాకలనమును గణించండి.

(i) $5x^4$ (ii) $5x^2-4+\frac{7}{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}$ (iii) $2\cos x-4\sin x+5\sec^2 x+\text{cosec}^2 x$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_11.indd 198 10-03-2023 12:30:20

సాధన

(i) $\int 5x^4 dx = 5\int x^4 dx = 5\frac{x^{4+1}}{4+1} = 5\frac{x^5}{5} = x^5 + c.$

(ii) $\int\left(5x^2 - 4 + \frac{7}{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx = 5\int x^2 dx - 4\int dx + 7\int \frac{1}{x}dx + 2\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

$= 5\frac{x^{2+1}}{2+1} - 4x + 7\log|x| + 2\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c$

$= \frac{5}{3}x^3 - 4x + 7\log|x| + 4\sqrt{x} + c$

(iii) $\int(2\cos x - 4\sin x + 5\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x)dx$

$= 2\int \cos x\,dx - 4\int \sin x\,dx + 5\int \sec^2 x\,dx + \int \operatorname{cosec}^2 x\,dx$

$= 2\sin x + 4\cos x + 5\tan x - \cot x + c$

ఉదాహరణ 11.9

క్రింది వాటికి సమాకలనమును గణించండి.

(i) $\frac{12}{(4x-5)^3} + \frac{6}{3x+2} + 16e^{4x+3}$ (ii) $\frac{15}{\sqrt{5x-4}} - 8\cot(4x+2)\operatorname{cosec}(4x+2)$

సాధన

(i) $\int\left(\frac{12}{(4x-5)^3} + \frac{6}{3x+2} + 16e^{4x+3}\right)dx$

$= 12\int \frac{1}{(4x-5)^3}dx + 6\int \frac{1}{3x+2}dx + 16\int e^{4x+3}dx$

$= 12\left(\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{2(4x-5)^2}\right) + 6\left(\frac{1}{3}\right)\log|3\ddot{u}+2| + 16\left(\frac{1}{4}\right)^{4x+3} +$

$= -\frac{3}{2(4x-5)^2} + 2\log|3x+2| + 4e^{4x+3} + c.$

(ii) $\int\left(\frac{15}{\sqrt{5x-4}} - 8\cot(4x+2)\operatorname{cosec}(4x+2)\right)dx$

$= 15\int \frac{1}{\sqrt{5x-4}}dx - 8\int \cot(4x+2)\operatorname{cosec}(4x+2)\,dx$

$= 15\left(\frac{1}{5}\right)(2\sqrt{5x-4}) - 8\left(\frac{1}{4}\right)(-\operatorname{cosec}(4x+2)) + c$

$= 6\sqrt{5x-4} + 2\operatorname{cosec}(4x+2) + c.$

అభ్యాసం 11.3

x దృష్ట్యా క్రింది వాటికి సమాకలనంను కనుగొనుము.

(1) $(x+4)^5+\frac{5}{(2-5x)^4}-\operatorname{cosec}^2(3x-1)$

(2) $4\cos(5-2x)+9e^{3x-6}+\frac{24}{6-4x}$

(3) $\sec^2\frac{x}{5}+18\cos 2x+10\sec(5x+3)\tan(5x+3)$

(4) $\frac{8}{\sqrt{1-(4x)^2}}+\frac{27}{\sqrt{1-9x^2}}-\frac{15}{1+25x^2}$

(5) $\frac{6}{1+(3x+2)^2}-\frac{12}{\sqrt{1-(3-4x)^2}}$

(6) $\frac{1}{3}\cos\left(\frac{x}{3}-4\right)+\frac{7}{7x+9}+e^{\frac{x}{5}+3}$

11.6 సాధారణ అనువర్తనాలు (Simple applications)

ఇంతవరకు మనము x ను సమాకలనా యొక్క చలరాశిగా ఉపయోగించాము. చాలా సందర్భాలలో సమాకలనం యందు వేరు చేయబడిన చలరాశిని ఉపయోగించవలసిన అవసరము ఉన్నది. ఉదాహరణకు చలన సమీకరణంలో స్వతంత్ర చలరాశిగా ఉన్న కాలం t అనేది సమాకలములో సమాకలన చలరాశి t గా మారును.

ఇవ్వబడిన ఒక వస్తువు యొక్క త్వరణం ఇచ్చినట్లయితే, ఆ వస్తువు యొక్క స్థానం మరియు దిశావేగంను కొనుగొనుటకు సమాకలనం ఏ విధంగా ఉపయోగించవచ్చు అనే దానిని మరియు ఇలాంటి సమస్యలను చర్చించబోతున్నాము. గణిత పరంగా చూచినట్లు అయితే ఒక ప్రమేయం యొక్క అవకలనంతో మొదలై దాని అసలు ప్రమేయంను తెలియజేయును. నిష్పత్తి పెరుగుదల, తగ్గుదల చివరిదశ, మార్పు, మారుతూ మరియు పెరుగుదల అను సాధారణ పదములు అవకలనమును సూచించును.

ఉదాహరణ 11.10

If $f'(x)=3x^2-4x+5$ మరియు $f(1)=3$, అయితే $f(x)$ ను కనుగొనుము.

సాధన

$f'(x)=\frac{d}{dx}(f(x))=3x^2-4x+5$ అని ఇవ్వబడినది

ఇరువైపుల సమాకలనం చేయగా

$$\int f'(x)\,dx=\int(3x^2-4x+5)\,dx$$

$$f(x)=x^3-2x^2+5x+c$$

$f(1)=3$ గా ఇవ్వబడిన సమాచారమును ఉపయోగించి సమాకలన స్థిరరాశి c యొక్క విలువను నిర్ణయించవచ్చును.

$$f(1)=3\Rightarrow 3=(1)^3-2(1)^2+5(1)+c\Rightarrow c=-1$$

కావున $f(x)=x^3-2x^2+5x-1$.

ఉదాహరణ 11.11

ఒక రైలుబండి మదురై జంక్షన్ నుండి కొయంబత్తూర్ వరకు మధ్యాహ్నం 3 గంటలకు $v(t)=20t+50$ కి.మీ/ గంట అను దిశావేగంతో బయలుదేరినది, ఇక్కడ t అనేది గంటలలో లెక్కించునపుడు సాయంత్రం 5 గంటలకు ఆ రైలుబండి ఎంత దూరం ప్రయాణించును?

సాధన: కలన గణితం ఉపయోగించి, దిశా వేగం $v=\frac{ds}{dt}$ అనునది సమయంతో పాటు దాని స్థాన మార్పు రేటు అగును. ఇక్కడ s అనేది దూరమును తెలుపును.

రైలుబండి దిశావేగం $v(t)=20t+50$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_11.indd 200 10-03-2023 12:30:22

అయినందువల్ల $\frac{ds}{dt} = 20t + 50$

దూరం యొక్క ప్రమేయం s ను కనుగొనుటకు అవకలన ప్రమేయంను సమాకలనం చేయవలెను.

అపుడు, $s = \int (20t + 50)\, dt$

$$s = 10t^2 + 50t + c$$

కాలము సున్న అయినపుడు రైలు బండి ప్రయాణించిన దూరము సున్న అగును. ప్రారంభ సమయంలో నిబందన $t = 0$ అయిన $s = 0$ ను ఉపయోగించి సమాకలన స్థిరాంకం C ను కనుగొనవచ్చును.

$$\Rightarrow s = 10t + 50t + c \quad \Rightarrow c = 0$$

అయితే, $s = 10t^2 + 50t$

2 గంటల సమయంలో రైలుబండి ప్రయాణించుదూరమును కనుగొనుటకు $t = 2$ ని $s = 10t^2 + 50t$ లో ప్రతిక్షేపించవలెను.

$s = 10(2)^2 + 50(2) = 140$ కి.మీ. సాయంత్రం 5 గంటలకు ఆ రైలుబండి 140 కి.మీ దూరము ప్రయాణించును.

ఉదాహరణ 11.12

ఒక వ్యక్తి యొక్క ఎత్తు h సెం.మీ మరియు బరువు w కిలోగ్రాము అతని బరువు మార్పురేటు పెరుగుదలకు సంబంధించి సుమారుగా $\frac{dw}{dh} = 4.364 \times 10^{-5} h^2$ అని ఇవ్వబడివున్నది. అయితే బరువును ఎత్తు యొక్క ప్రమేయంగా కనుగొనుము. ఇంకను ఒక వ్యక్తి ఎత్తు 150 సెం.మీ గా ఉండునపుడు బరువును కనుగొనుము.

సాధన

ఎత్తును బట్టి బరువు మార్పురేటు

$$\frac{dw}{dh} = 4.364 \times 10^{-5} h^2$$

$$w = \int 4.364 \times 10^{-5} h^2 \, dh$$

$$w = 4.364 \times 10^{-} \left(\frac{h}{3}\right) + c$$

ఎత్తు సున్నగా గణించినపుడు ఆ వ్యక్తి బరువు సున్నగా ఉండును. అని గమనించగలము ప్రాథమిక నిబందన $h = 0$ అయిన $w = 0$, అనునది పైన వున్న సమీకరణములో ప్రతిక్షేపించగా, సమాకలన స్థిరాంకము c ను గణించగలము.

$$w = 4.364 \times 10^{-5} \left(\frac{h^3}{3}\right) + c \Rightarrow c = 0$$

ఒక వ్యక్తి బరువు మరియు ఎత్తు మధ్య కావలసిన సంబంధము

$$w = 4.364 \times 10^{-5} \left(\frac{h^3}{3}\right) \text{ అగును.}$$

$h =$ 150 సెం.మీ అయితే $\quad w = 4.364 \times 10^{-5} \left(\frac{150^3}{3}\right)$

ఎత్తు $h =$ 150 సెం.మీ అయిన బరువు సుమారుగా $w = 49$ కిలోగ్రాము అగును.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_11.indd 201 10-03-2023 12:30:22

ఉదాహరణ 11.13

ఒక చెట్టు పెరుగుదల t సందర్భంలలో $\frac{18}{\sqrt{t}}$ సెం.మీ / సంవత్సరం అనే విధంగా పెరుగును. $t=0$ అని ఉండునపుడు ఎత్తు 5 సెం.మీ గా ఉండునట్లు తీసుకొన్నట్లు అయితే

అ) నాలుగు సంవత్సరాల తర్వాత చెట్టు ఎత్తును కనుగొనుము.

ఆ) ఎన్ని సంవత్సరాల తర్వాత చెట్టు యొక్క ఎత్తు 149 సెం.మీ పెరుగును.

సాధన

కాలము t ను బట్టి h యొక్క మార్పురేటు అనునది కాలం t ను బట్టి h ను అవకలనం చేయవలెను.

$$\text{కావున, } \frac{dh}{dt} = \frac{18}{\sqrt{t}} = 18t^{-\frac{1}{2}}$$

కావున ఎత్తుకు సాధారణ ఆకారం, పొందడానికి పై సమీకరణాన్ని సమాకలనము చేయవలెను.

$$h = \int 18t^{-\frac{1}{2}}dt = 18(2t^{\frac{1}{2}}) + c = 36\sqrt{t} + c$$

$t=0$ ఉన్నప్పుడు ఎత్తు 5 సెం.మీ గా ఇవ్వబడి ఉన్నది.

$$5 = 0 + c \Rightarrow c = 5$$

$$h = 36\sqrt{t} + 5.$$

(i) నాలుగు సంవత్సరాల తర్వాత చెట్టు ఎత్తును మనము కనుగొనవలెను.

$t=4$ అయితే,

$$h = 36\sqrt{t} + 5 \Rightarrow h = 36\sqrt{4} + 5 = 77$$

నాలుగు సంవత్సరాల తర్వాత చెట్టు ఎత్తు 77 సెం.మీ గా ఉండును.

(ii) $h = 149$ సెం.మీ అయిన t ను కనుగొనవలెను.

$$h = 36\sqrt{t} + 5 \Rightarrow 149 = 36\sqrt{t} + 5$$

$$\sqrt{t} = \frac{149-5}{36} = 4 \Rightarrow t = 16$$

కావున చెట్టు 149 సెం.మీ ఎత్తు పెరుగుటకు , 16 సంవత్సరాలు తీసుకొనును.

ఉదాహరణ 11.14



ఒక విద్యార్థి తన ద్విచక్ర వాహనము నందు 24 మీ / సెకను వేగముతో ప్రయాణిస్తున్నప్పుడు నిర్దేశించిన సమయంలో తనకు ముందుగా 40 మీటర్లు దూరములో ఉండు అడ్డం ను ఢీకొట్టకుండా ఉండుటకు వాహనమును నిలుపవలసియున్నది. వెంటనే తన వాహనము వేగంను 8 మీటరు / సెకను^{2} ప్రయాణించిన ఎదురుగా వున్న వేగ నిరోధకమును ఢీ కొట్టకుండా నిలబడగలదా?

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_11.indd 202 10-03-2023 12:30:28

సాధన

ద్విచక్రవాహనము యొక్క దిశావేగము v అని మరియు త్వరణము a అని తీసుకొనుము. s అనునది దూరమును తెలుపును. కలన గణితంలో v ను $v = \frac{ds}{dt}$ 'a'ని $a = \frac{dv}{dt}$ అని గుర్తిస్తాము. ద్విచక్రవాహనం యొక్క వేగము తగ్గించునపుడు దాని త్వరణము ద్విచక్రవాహనం యొక్క చలనమునకు ఎదురు దిశలో పనిచేయును అయినందు వల్ల త్వరణమును ఋణాత్మక గుర్తులో వ్రాస్తాము.

ద్విచక్రవాహన ప్రతి త్వరణం 8 మీటరు / సెకను^{2} అని ఇవ్వబడియున్నది.

$$\text{కావున, } a = \frac{dv}{dt} : 8 \text{ మీటరు / సెకను}^2$$

$$\text{కావున, } v = \int a\,dt = \int -8dt = -8t + c_1$$

$$v = -8t + c_1.$$

బ్రేక్‌ను ఉపయోగించునపుడు,

$t = 0$, మరియు $v = 24$. మీ/సె

$$24 = -8(0) + c_1 \Rightarrow c_1 = 24.$$

కావున $v = -8t + 24.$

కావున $\frac{ds}{dt} = -8t + 24.$

దూరము అడిగినందువలన దానిని కనుగొనుటకు తిరిగి మరొకసారి సమాకలనం చేయవలసిన అవసరం ఉన్నది.

$s = \int v\,dt = \int (-8t + 24)dt \quad s = -4t^2 + 24t + c_2$

c_2. ను నిర్ణయించడానికి, బ్రేక్‌ను ఎక్కడ ఉపయోగిస్తామో, అక్కడ నుండి నిలుపు దూరం s ను కొలవగలము. కావున $t = 0,\ s = 0$.

అయితే

$$s = -4t^2 + 24t + c_2 \Rightarrow 0 = -4(0)^2 + 24(0) + c_2 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$s = -4t^2 + 24t.$$

బ్రేక్‌ను ఉపయోగించిన తరువాత ద్విచక్రవాహనం నిలిచిపోవు కాలము తెలిసినట్లు అయితే నిలిచే దూరమును లెక్కించవచ్చును. దిశావేగము సమీకరణము నుండి కాలము నిర్ణయించబడుతుంది. వాహనం నిలిచిపోవునపుడు

$v = 0$ అగును.

$$\Rightarrow v = -8t + 24 \quad \Rightarrow 0 = -8t + 24 \Rightarrow t = 3.$$

$t = 3$ అయిన

$$s = -4t^2 + 24t \Rightarrow s = -4(3)^2 + 24(3)$$

s = 36 మీటర్ < 40 మీటర్

కావున వాహనము వేగనిరోధకమునకు 4 మీటర్ల ముందే నిలిచిపోవును.

అభ్యాసం 11.4

(1) $f'(x) = 4x - 5$ మరియు $f(2) = 1$, అయితే $f(x)$. ను కనుగొనుము?

(2) $f'(x) = 9x^2 - 6x$ మరియు $f(0) = -3$, అయితే $f(x)$. ను కనుగొనుము?

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_11.indd 203 10-03-2023 12:30:34

(3) $f''(x) = 12x - 6$ మరియు $f(1) = 30$, అయితే $f(x)$. ను కనుగొనుము?

(4) ఒక బంతి 39.2 మీ/సె ప్రారంభ దిశ వేగము భూమి నుండి పైకి లంబంగా విసరబడినది. ఇక్కడ త్వరణము గురుత్వాకర్షణను అనుసరించి మాత్రమే అని అనుకొనునపుడు

అ) ఎంత సమయం తరువాత బంతి భూమిపై వచ్చిచేరును?

ఆ) ఏ వేగంతో బంతి భూమిని తాకును?

ఇ) ఎంత దూరం బంతి పైకి ప్రయాణించునో కనుగొనుము?

(5) ఒకరికి ఏర్పడిన గాయం అనునది $-\frac{6}{(t+2)^2}$ సెం.మీ^{2} / రోజు $0<t\leq 8$ అనే రేటులో ఆదివారం మొదలు గాయం వైశాల్యం తగ్గుతున్నది. సోమవారం ఆ గాయం యొక్క వైశాల్యము 1.4 సెం.మీ^{2} అయితే (ఇక్కడ t అనునది రోజులను తెలియజేయును)

అ) ఆదివారం గాయం యొక్క వైశాల్యము ఎంతగా ఉండి ఉంటుంది?

(ఆ) ఇదే రేటులో కొనసాగితే గాయం మానుతున్నప్పుడు గురువారం నాడు ఆ గాయం యొక్క వైశాల్యము ఎంత?

11.7 సమాకలన యొక్క పద్ధతులు (Methods of Integration)

అవకలనము వలే సమాకలనం ను కనుగొనడం అంత సులభమైనది కాదు. ఇది దాని యొక్క మొదటి సహజత్వ పని. ఒక ప్రమేయము యొక్క అవకలనంను కనుగొనుటకు నిర్మాణాత్మక లక్షణము కలిగిన అవకలజము ఖచ్చితంగా ఉండవలెను.

$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ అనునది ఒక అవకలనంగా నిర్వచించబడినది.

$\log x$ యొక్క అవకలనమును కనుగొనవలననిన కావసిన క్రమమైన పద్ధతిలో ఫలితము పొందుట మనకు తెలుసు.

కాని $\log x$ యొక్క సమాకలనమును కనుగొనుటకు కావలసిన నిర్మాణాత్మకమైన పద్ధతి లేదు.

పలు రకాలైన ప్రమేయాల అవకలన నియమాలను ఉపయోగించి సంకలన, గుణకార, భాగహార మరియు ప్రమేయముల యొక్క సమ్మేళనము మొదలగు వాటి అవకలజము యొక్క వివిధ సంయోగములను కనుగొనవచ్చును.

సమాకలన సిద్ధాంతము నందు సమాకలనము చేయడానికి కొన్ని నియమాలు మాత్రమే ఉన్నవి మరియు వాటి అనువర్తనాలలో కొన్ని నిబంధనలు ఉన్నవి. కాని ఈ సమాకలన పద్ధతులు సమాకలనం చేయడంలో గొప్ప ముఖ్యత్వమును వహించును.

తీవ్రమైన అభ్యాసము చేసిన తరువాతనే సమాకలనములో అనుగుణమైన పద్ధతిని ఎన్నుకొని మిక్కిలి సులభంగా సమాకలనము చేయు నైపుణ్యమును పొందవచ్చును.

సమాకలనం యొక్క రెండు ముఖ్యమైన ధర్మాలు గూర్చి ముందుగానే మనము తెలుసుకున్నాము. క్రింద ఇవ్వబడినవి ముఖ్యమైన నాలుగు సమాకలన పద్ధతులు.

(1) సంకలనం లేదా వ్యవకలనంగా వేరుచేసి సమాకలనం చేయడం.

(2) ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి ద్వారా సమాకలనం చేయడం.

(3) విభాగ సమాకలనం

(4) వరుస తగ్గింపు ద్వారా సమాకలనం చేయడం.



ఇక్కడ పైన తెలిపిన మొదట మూడు పద్ధతులు గూర్చి మాత్రమే మనము చదువుకుంటాము. నాల్గవ పద్ధతిని పై తరగతిలో నేర్చుకుంటాము.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_11.indd 204 10-03-2023 12:30:34

11.7.1 విచ్ఛిన్న పద్ధతి (Decomposition method)

కొన్ని సమయాలలో ఇవ్వబడిన ప్రమేయంనకు నేరుగా సమాకలనంను కనుగొనడం చాలా కష్టం. కానీ వాటిని ప్రమేయపు కూడిక (సంకలనం) లేదా తీసివేత (వ్యవకలనం) గా విభజించి ముందుగానే మనకు తెలిసిన (సమాకలనం) సమాకలన పద్ధతి ద్వారా కనుగొనవచ్చును. ఉదాహరణకు $\left(1-x^3\right)^2$, $\frac{x^2-x+1}{x^3}$, $\cos 5x \sin 3x$, $\cos^3 x$, $\frac{e^{2x}-1}{e^x}$, మొదలగునవి సూత్రం ద్వారా నేరుగా సమాకలనం చేయడానికి వీల్లేదు. కానీ వాటిని ప్రమేయపు కూడిక లేక తీసివేతగా విభజించిన తరువాత లభించు కొత్త సమాకలనం మనకు తెలిసినది అగును. చాలావరకు ఇవ్వబడిన సమాకలనం యొక్క బీజగణితము. త్రికోణమితి లేదా ఘాతంక రూపాలు మరియు కొన్ని సమయాలలో ప్రమేయముల యొక్క సమ్మేళనములు అను వాటిలో ఏదైనా ఒకటిగా వుండును.

ఉదాహరణ 11.15

x దృష్ట్యా క్రింది వాటిని సమాకలనము చేయుము.

(i) $\left(1-x^3\right)^2$ (ii) $\frac{x^2-x+1}{x^3}$

సాధన

(i) $$\begin{aligned}\int\left(1-x^3\right)^2 dx &= \int(1-2x^3+x^6)dx \\ &= \int dx - 2\int x^3 dx + \int x^6 dx \\ &= x - \frac{x^4}{2} + \frac{x^7}{7} + c.\end{aligned}$$

(ii) $$\begin{aligned}\int\frac{x^2-x+1}{x^3}dx &= \int\left(\frac{x^2}{x^3}-\frac{x}{x^3}+\frac{1}{x^3}\right)dx \\ &= \int\frac{1}{x}dx - \int\frac{1}{x^2}dx + \int\frac{1}{x^3}dx. \\ \int\frac{x^2-x+1}{x^3}dx &= \log|x| + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + c.\end{aligned}$$

ఉదాహరణ 11.16

x దృష్ట్యా క్రింది వాటిని సమాకలనము చేయుము.

(i) $\cos 5x \sin 3x$ (ii) $\cos^3 x$.

సాధన

(i) $$\begin{aligned}\int\cos 5x \sin 3x\, dx &= \frac{1}{2}\int 2\cos 5x \sin 3x\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int(\sin 8x - \sin 2x)dx \\ \int\cos 5x \sin 3x\, dx &= \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 8x}{8} + \frac{\cos 2x}{2}\right) + c.\end{aligned}$$

(ii) $$\begin{aligned}\int\cos^3 x\, dx &= \frac{1}{4}\int(3\cos x + \cos 3x)dx \\ &= \frac{1}{4}\left(3\sin x + \frac{\sin 3x}{3}\right) + c\end{aligned}$$

ఉదాహరణ 11.17

x దృష్ట్యా క్రింది వాటిని సమాకలనము చేయుము?

(i) $\frac{e^{2x}-1}{e^x}$ (ii) $e^{3x}\left(e^{2x}-1\right)$.

సాధన

(i) $$\int \frac{e^{2x}-1}{e^x}dx = \int\left(\frac{e^{2x}}{e^x}-\frac{1}{e^x}\right)dx$$

$$= \int\left(e^x-e^{-x}\right)dx = e^x+e^{-x}+c.$$

(ii) $$\int e^{3x}\left(e^{2x}-1\right)dx = \int\left(e^{5x}-e^{3x}\right)dx = \frac{e^{5x}}{5}-\frac{e^{3x}}{3}+c.$$

ఉదాహరణ 11.18

$\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$. ను కనుగొనుము?

సాధన

$$\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x}dx+\int \frac{1}{\sin^2 x}dx$$

$$= \int \sec^2 x dx+\int \operatorname{cosec}^2 x dx$$

$$= \tan x-\cot x+c.$$

ఉదాహరణ 11.19

$\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx$. యొక్క విలువను కనుగొనుము?

సాధన

$$\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx = \int\left(\frac{\sin x}{1+\sin x}\right)\left(\frac{1-\sin x}{1-\sin x}\right)dx$$

$$= \int \frac{\sin x-\sin^2 x}{1-\sin^2 x}dx = \int \frac{\sin x-\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx-\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx$$

$$= \int \tan x\sec x dx-\int \tan^2 x dx$$

$$= \int \tan x\sec x dx-\int (\sec^2 x-1)dx$$

$$= \sec x-\tan x+x+c.$$

ఉదాహరణ 11.20

$\int \sqrt{1+\cos 2x}\,dx$. యొక్క విలువను కనుగొనుము?

సాధన

$$\int \sqrt{1+\cos 2x}\,dx = \int \sqrt{2\cos^2 x}\,dx = \sqrt{2}\int \cos x dx = \sqrt{2}\sin x+c$$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_11.indd 206 10-03-2023 12:30:36

ఉదాహరణ 11.21

$\int \frac{(x-1)^2}{x^3+x}\,dx$. యొక్క విలువను కనుగొనుము.

సాధన

$$\begin{aligned}\int \frac{(x-1)^2}{x^3+x}\,dx &= \int \frac{x^2+1-2x}{x(x^2+1)}\,dx \\ &= \int\left(\frac{(x^2+1)}{x(x^2+1)}-\frac{2x}{x(x^2+1)}\right)dx \\ &= \int \frac{1}{x}\,dx \quad 2\int \frac{1}{1 \quad x^2}\,dx \\ &= \log|x|-2\tan^{-1}x+c.\end{aligned}$$

ఉదాహరణ 11.22

$\int (\tan x+\cot x)^2\,dx$. యొక్క విలువను కనుగొనుము.

సాధన

$$\begin{aligned}\int (\tan x+\cot x)^2\,dx &= \int[\tan^2 x+2\tan x\cot x+\cot^2 x]\,dx \\ &= \int[(\sec^2 x-1)+2+(\operatorname{cosec}^2 x-1)]\,dx \\ &= \int(\sec^2 x+\operatorname{cosec}^2 x)\,dx \\ &= \tan x+(-\cot x)+c \\ &= \tan x-\cot x+c.\end{aligned}$$

ఉదాహరణ 11.23

$\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}\,dx$. యొక్క విలువను కనుగొనుము.

సాధన

$$\begin{aligned}\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}\,dx &= \int \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\,dx=\int \tan^2\frac{x}{2}\,dx \\ &= \int\left(\sec^2\frac{x}{2}-1\right)dx=\frac{\tan\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}}-x+c \\ &= 2\tan\frac{x}{2}-x+c.\end{aligned}$$

ఉదాహరణ 11.24

$\int \sqrt{1+\sin 2x}\,dx$. ను కనుగొనుము.

సాధన

$$\int \sqrt{1+\sin 2x}\,dx = \int \sqrt{(\cos^2 x+\sin^2 x)+(2\sin x\cos x)}\,dx$$

$$= \int \sqrt{(\cos x + \sin x)^2}\, dx = \int (\cos x + \sin x) dx$$
$$= \sin x - \cos x + c$$

ఉదాహరణ 11.25

$\int \frac{x^3+2}{x-1} dx$. యొక్క విలువను కనుగొనుము.

సాధన

$$\int \frac{x^3+2}{x-1} dx = \int \frac{x^3-1+3}{x-1} dx = \int \left(\frac{x^3-1}{x-1} + \frac{3}{x-1} \right) dx$$
$$= \int \left[\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} + \frac{3}{x-1} \right] dx$$
$$= \int \left(x^2 + x + 1 + \frac{3}{x-1} \right) dx$$
$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + 3\log|(x-1)| + c.$$

ఉదాహరణ 11.26

(i) $\int a^x e^x dx$ (ii) $\int e^{x\log 2} e^x\, dx$. లను కనుగొనుము.

సాధన

(i) $$\int a^x e^x dx = \int (ae)^x dx = \frac{(ae)^x}{\log(ae)} + c$$

(ii) $$\int e^{x\log 2} e^x dx = \int e^{\log 2^x} e^x dx = \int 2^x e^x dx$$
$$= \int (2e)^x dx = \frac{(2e)^x}{\log(2e)} + c.$$

ఉదాహరణ 11.27

$\int (x-3)\sqrt{x+2}\, dx$. యొక్క విలువను కనుగొనుము.

సాధన

$$\int (x-3)\sqrt{x+2}\, dx = \int (x+2-5)\sqrt{x+2}\, dx$$
$$= \int (x+2)\sqrt{x+2}\, dx - 5\int \sqrt{x+2}\, dx$$
$$= \int (x+2)^{\frac{3}{2}} dx - 5\int (x+2)^{\frac{1}{2}} dx$$
$$= \frac{(x+2)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 5\frac{(x+2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$
$$= \frac{2}{5}(x+2)^{\frac{5}{2}} - \frac{10}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}} + c.$$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_11.indd 208 10-03-2023 12:30:38

ఉదాహరణ 11.28

$\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\,dx$. యొక్క విలువను కనుగొనుము.

సాధన

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\left[\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}\right]dx$$

$$= \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x+1}^{2}\right)-\left(\sqrt{x}\right)^{2}}\,dx$$

$$= \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{x+1-x}\,dx = \int\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)dx$$

$$= \int \sqrt{x+1}dx - \int \sqrt{x}dx = \int (x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx - \int x^{\frac{1}{2}}dx$$

$$= \frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\left[(x+1)^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}}\right] + c.$$

11.7.2 పాక్షిక భిన్నాలుగా విడదీయుట (Decomposition by Partial Fractions)

సమాకలనమును గణించుటకు గల ముఖ్యమైన పద్ధతులలో పాక్షిక భిన్నాలు ఒకటి. సమాకలనం చేయవలసిన (సమాకలజం) బీజీయ భిన్నాల రూపంలో ఉండి మరియు సరళ సద్ధతులలో సమాకలనము చేయుటకు వీలుకాని సందర్భంలో సమాకలనము చేయుటకు ముందుగానే "పాక్షిక భిన్నాలు" (**Partial Fractions**) ను భిన్నాలుగా చూపించవలసిన అవసరం ఉంటుంది.

$\frac{p(x)}{q(x)}$, $\left(q(x)\neq 0\right)$ అనునది ఒక అకరణీయ ప్రమేయంగా ఊహించుకొందాము. ఇక్కడ $p\,(x)$ యొక్క అంతస్థు $<$ $q\,(x)$ యొక్క అంతస్థు. ఒక వేళ ఈ సందర్భం కానప్పుడు, మనము ఎల్లప్పుడు దీర్ఘ భాగహారంను చేయవలెను.

ఉదాహరణ 11.29

(i) $\int \frac{3x+7}{x^2-3x+2}\,dx$ (ii) $\int \frac{x+3}{(x+2)^2(x+1)}\,dx$. లను కనుగొనుము.

సాధన

(i) $$\int \frac{3x+7}{x^2-3x+2}\,dx = \int \frac{13}{x-2}\,dx - \int \frac{10}{x-1}\,dx \quad \text{(పాక్షిక భిన్నాలుగా విడగొట్టగా)}$$

$$= 13\log|x-2| - 10\log|x-1| + c$$

(ii) $$\int \frac{x+3}{(x+2)^2(x+1)}\,dx = \int \frac{-2}{x+2}\,dx - \int \frac{1}{(x+2)}\,dx + \int \frac{2}{x+1}\,dx$$

$$= -2\int \frac{1}{x+2}\,dx - \int \frac{1}{(x+2)^2}\,dx + 2\int \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= -2\log|x+2| - \int (x+2)^{-2}\,dx + 2\log|x+1| + c$$

$$= -2\log|x+2| + \frac{1}{x+2} + 2\log|x+1| + c.$$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_11.indd 209 10-03-2023 12:30:40

అభ్యాసము 11.5

x దృష్ట్యా క్రింది ఇవ్వబడిన ప్రమేయములను సమాకలనం చేయుము.

(1) $\frac{x^3 \aleph 4x^2 \quad 3x \quad 2}{x^2}$

(2) $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$

(3) $(2x-5)(36+4x)$

(4) $\cot^2 x+\tan^2 x$

(5) $\frac{\cos 2x-\cos 2}{\cos x-\cos}$

(6) $\frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}$

(7) $\frac{3+4\cos x}{\sin^2 x}$

(8) $\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$

(9) $\frac{\sin 4x}{\sin x}$

(10) $\cos 3x\cos 2x$

(11) $\sin^2 5x$

(12) $\frac{1+\cos 4x}{\cot x-\tan x}$

(13) $e^{x\log a}e^x$

(14) $(3x+4)\sqrt{3x+7}$

(15) $\frac{8^{1+x}+4^{1-x}}{2^x}$

(16) $\frac{1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x-4}}$

(17) $\frac{x+1}{(x+2)(x+3)}$

(18) $\frac{1}{(x-1)(x+2)^2}$

(19) $\frac{3x-9}{(x-1)(x+2)(x^2+1)}$

(20) $\frac{x^3}{(x-1)(x-2)}$

11.7.3 ప్రతిక్షేపన పద్ధతి (లేదా) చరరాశి యొక్క మార్పు (Method of substitution or change of variable)

సమాకలనంలో ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి అనేది అవకలనంలో ఒక ప్రమేయం యొక్క అవకలన ప్రమేయమును కనుగొను విధములాగే ఉంటుంది. సరైన ప్రతిక్షేపణమును ఉపయోగించి సమాకలనం యొక్క చరరాశిని సమాకలనం యొక్క క్రొత్త చరరాశి మార్పు చేయుట ద్వారా సులభంగా సమాకలనం చేయవచ్చును.

u అనునది x యొక్క ప్రమేయం అయితే $\frac{du}{dx}=u'$.

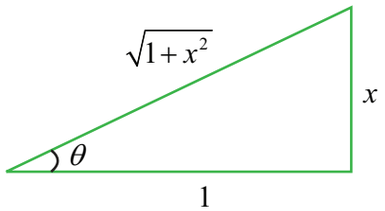
అని మనకు తెలియును కావున $\int f(u)u'dx=\int f(u)du$ అని వ్రాయవచ్చును.

కావున $\int f[g(x)]g'(x)dx=\int f(u)du$, ఇక్కడ $u=g(x)$ పై పద్ధతి యొక్క విజయము అనేది సరైన ప్రతిక్షేపణమును ఎన్నుకొనుటపై ఆధారపడును.

$x=\phi(u)$ (లేదా) $u=g(x)$.

గమనిక 11.2

సమాకలనం యొక్క చరరాశిని, త్రికోణమితియ ప్రమేయంలో ప్రతిక్షేపించినప్పుడు దీని నుండి మరొక ప్రతిక్షేపణ విలువను కనుగొనుటకు చిత్తు పటమును ఉపయోగించుము. x సమాకలనం యొక్క చరరాశిని $x=\tan\theta$ గా ప్రతిక్షేపించి సమాకలనము చేసిన తరువాత దాని సాధనను $\sec\theta+\operatorname{cosec}\theta$ గా అనుకొందుము. ఉదాహరణకు, $x=\tan\theta$, అయిన పటం నుండి



$$\operatorname{cosec}\theta=\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right),$$

$$\sec\theta=\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{1}\right)$$

కావున $\sec\theta+\operatorname{cosec}\theta=\sqrt{1+x^2}+\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)$.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_11.indd 210 10-03-2023 12:30:44

ఉదాహరణ 11.30

క్రింది వాటికి సమాకలనమును కనుగొనుము.

(i) $\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$ (ii) $\int e^{-x^2}x\,dx$ (iii) $\int \frac{\sin x}{1+\cos x}dx$

(iv) $\int \frac{1}{1+x^2}dx$ (v) $\int x(a-x)^8\,dx$

సాధన

(i) $\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$

$1+x^2=u$, అయితే $2x\,dx=du$ అగును

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx = \int \sqrt{u}\,du$$

$$= \int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+c = \frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+c.$$

(ii) $\int e^{-x^2}x\,dx$

$x^2=u$ అయితే $2x\,dx=du$ అగును

$$\therefore \int e^{-x^2}x\,dx = \int e^{-u}\frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int e^{-u}du = \frac{1}{2}(-e^{-u})+c = -\frac{1}{2}e^{-u}+c = -\frac{1}{2}e^{-x^2}+c.$$

(iii) $\int \frac{\sin x}{1+\cos x}dx$

$1+\cos x=u$, అయితే $\sin x\,dx=du$

$$\therefore \int \frac{\sin x}{1+\cos x}dx = \int \frac{-du}{u} = -\log|u|+c = -\log|1+\cos x|+c.$$

(iv) $\int \frac{1}{1+x^2}dx$

$x=\tan u$, అయితే $dx=\sec^2 u\,du$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \int \frac{\sec^2 u}{1+\tan^2 u}du = \int \frac{\sec^2 u}{\sec^2 u}du = \int du = u+c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1}x+c.$$

(v) $\int x(a-x)^8\,dx$

$u=a-x$, అయితే $du=-dx$

$$\int x(a-x)^8\,dx = \int x(a-x)^8\,dx$$

$$= \int (a-u)(u)^8(-du)$$

$$= \int \left(-a(u)^8+u^9\right)du$$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_11.indd 211 10-03-2023 12:30:52

$$= \int u^9\,du - a\int u^8\,du$$

$$= \frac{u^{10}}{10} - a\frac{u^9}{9} + c$$

$$\int x(a-x)^8\,dx = \frac{(a-x)^{10}}{10} - \frac{a(a-x)^9}{9} + c.$$

11.7.4 కొన్ని ముఖ్యమైన ఫలితములు (సమాకలన సూత్రములు) (Important Results)

(1) $$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + c$$

(2) $$\int f'(x)[f(x)]^n\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$$

నిరూపణ

(1) $I = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$ అయితే

$f(x) = u$ అయితే $f'(x)dx = du$

కావున, $I = \int \frac{du}{u} = \log|u| + c$

$\therefore \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + c.$

(2) $I = \int f'(x)[f(x)]^n\,dx$ అనుకొనుము.

$f(x) = u$ అయితే $f'(x)dx = du$

కావున, $I = \int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$

$\therefore \int f'(x)[f(x)]^n\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c.$

ఉదాహరణ 11.31

x దృష్ట్యా క్రింది వాటిని సమాకలనము చేయుము.

(i) $\int \tan x\,dx$ (ii) $\int \cot x\,dx$ (iii) $\int \operatorname{cosec} x\,dx$ (iv) $\int \sec x\,dx$

సాధన

(i) $I = \int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$

$\cos x = u$ అయితే $\sin x\,dx = du$

కావున $I = \int -\frac{1}{u}\,du = -\log|u| + c = -\log|\cos x| + c = \log|\sec x| + c.$

(ii) $I = \int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$

$\sin x = u$ అయితే $\cos x\,dx = du$

కావున $I = \int \frac{1}{u}\,du = \log|u| + c = \log|\sin x| + c.$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_11.indd 212 10-03-2023 12:31:00

(iii) $$I = \int \operatorname{cosec} x\,dx = \frac{\int \operatorname{cosec} x(\operatorname{cosec} x - \cot x)}{\operatorname{cosec} x - \cot x}dx$$

$$= \int \frac{\operatorname{cosec}^2 x - \operatorname{cosec} x \cot x}{\operatorname{cosec} x - \cot x}\,dx$$

$\operatorname{cosec} x - \cot x = u$, అయితే $(\operatorname{cosec}^2 x - \operatorname{cosec} x \cot x)\,dx = du$

కావున, $I = \int \frac{1}{u}du = \log|u| + c = \log|\operatorname{cosec} x - \cot x| + c.$

(iv) $$I = \int \sec x\,dx = \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x}dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}dx$$

$\sec x + \tan x$ అయితే $(\sec^2 x + \sec x \tan x)\,dx = du$

కావున, $I = \int \frac{1}{u}du = \log|u| + c = \log|\sec x + \tan x| + c$

$\therefore \int \sec x\,dx = \log|\sec x + \tan x| + c.$

ఈ క్రింద ఇవ్వబడిన ముఖ్యమైన ప్రామాణిక ఫలితాలు

(1)	$\int \tan x\,dx = \log\lvert\sec x\rvert + c$
(2)	$\int \cot x\,dx = \log\lvert\sin x\rvert + c$
(3)	$\int \operatorname{cosec} x\,dx = \log\lvert\operatorname{cosec} x - \cot x\rvert + c$
(4)	$\int \sec x\,dx = \log\lvert\sec x + \tan x\rvert + c$

ఉదాహరణ 11.32

x దృష్ట్యా క్రింది వాటిని సమాకలనము చేయుము.

(i) $\int \frac{2x+4}{x^2+4x+6}dx$ (ii) $\int \frac{e^x}{e^x - 1}dx$ (iii) $\int \frac{1}{x \log x}dx$

(iv) $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}dx$ (v) $\int \frac{\cos 2x}{(\sin x + \cos x)^2}dx$

సాధన

(i) $$I = \int \frac{2x+4}{x^2+4x+6}dx$$

$x^2 + 4x + 6 = u$, అయితే $(2x+4)\,dx = du$

కావున $I = \int \frac{du}{u} = \log|u| + c = \log|x^2 + 4x + 6| + c$

$\therefore \int \frac{2x+4}{x^2+4x+6}dx = \log|x^2 + 4x + 6| + c.$

(ii) $I = \int \frac{e^x}{e^x - 1} dx$. అనుకొనుము.

$e^x - 1 = u$, అయితే $e^x dx = du$

కావున, $I = \int \frac{du}{u} = \log|u| + c = \log|e^x - 1| + c$

$\therefore \int \frac{e^x}{e^x - 1} dx = \log|e^x - 1| + c.$

(iii) $I = \int \frac{1}{x \log x} dx.$

$\log x = u$, అయితే $\frac{1}{x} dx = du$

కావున, $I = \int \frac{du}{u} = \log|u| + c = \log|\log x| + c$

$\therefore \int \frac{1}{x \log x} dx = \log|\log x| + c.$

(iv) $I = \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} dx$. అనుకొనుము.

$\sin x - \cos x = u$, అయితే $(\cos x + \sin x)\, dx = du$

కావున, $I = \int \frac{du}{u} = \log|u| + c = \log|\sin x - \cos x| + c$

$\therefore \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} dx = \log|\sin ü - \cos \quad| +$

(v) $I = \int \frac{\cos 2x}{(\sin x + \cos x)^2} dx = \int \frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} dx.$

$1 + \sin 2x = u$, అయితే $2 \cos 2x\, dx = du$

కావున, $I = \int \frac{du}{2u} = \frac{1}{2} \log|u| + c = \frac{1}{2} \log|1 + \sin 2x| + c.$

అభ్యాసము 11.6

x దృష్ట్యా క్రిందివాటిని సమాకలనము చేయుము.

(1) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ (2) $\frac{x^2}{1+x^6}$ (3) $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ (4) $\frac{10x^9 + 10^x \log_e 10}{10^x + x^{10}}$

(5) $\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ (6) $\frac{\cot x}{\log(\sin x)}$ (7) $\frac{\operatorname{cosec} x}{\log\left(\tan\frac{x}{2}\right)}$ (8) $\frac{\sin 2x}{a^2 + b^2 \sin^2 x}$

(9) $\frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$ (10) $\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ (11) $\frac{1}{x \log x \log(\log x)}$ (12) $\alpha\beta x^{\alpha-1} e^{-\beta x^\alpha}$

(13) $\tan x \sqrt{\sec x}$ (14) $x(1-x)^{17}$ (15) $\sin^5 x \cos^3 x$ (16) $\frac{\cos x}{\cos(x-a)}$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_11.indd 214 10-03-2023 12:31:11

11.7.5 విభాగ సమాకలన పద్ధతి (Integration by parts)

సమాకలనం చేయవలసిన (సమాకలజము) (Integrand) రెండు వేరువేరు రకాల ప్రమేయాల లబ్ధముగా (లేదా) ఏక సంవర్గమాన ప్రమేయంగా (లేదా) ఏక విలోమ త్రికోణమితియ ప్రమేయంగా (లేదా) ప్రత్యక్షంగా సమాకలనం చేయడానికి వీలుకాని ప్రమేయం అయినప్పుడు మాత్రమే సాధారణ విభాగ సమాకలన పద్ధతిని ఉపయోగించి సమాకలనంను కనుగొంటాము. రెండు ప్రమేయముల లబ్ధము యొక్క అవకలన సూత్రము నుండి ఈ సులభ సమాకలన పద్ధతిని మనము పొందుతాము.

u మరియు v అనునది అవకలనపు ప్రమేయాలు అయితే

$$d(uv) = vdu + udv$$

$$udv = d(uv) - vdu$$

సమాకలనం చేయగా

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$\int udv$ నుండి మరొక సమాకలనం $\int vdu$ రూపంలో ఉంటుంది. మరియు $\int udv$ సమాకలనం చివరి సమాసమును ఇవ్వదు. ఇది $u\,dv$ లబ్ధము యొక్క సమాకలన సమస్యలను పాక్షికంగా మాత్రమే సాధించును. కావున చాలా యూరోఫియన్ దేశాలలో దీనికి " పాక్షిక సమాకలనమ" **(Partial Integration)** అను పదమును ఉపయోగిస్తారు. మన దేశంలో లాగే మరికొన్ని దేశాలలో దీనిని "విభాగ సమాకలనము" **(Integration by Parts)** అను పదముగా వాడుతున్నారు.

ఈ పద్ధతి యొక్క విజయము అనునది u ను సరిగ్గా ఎన్నుకొనుటపై ఆధారపడును.

(i) సమాకలనం చేయవలసిన (సమాకలజం) $\log x$, $\tan^{-1} x$ అను మొదలగునవి సూత్రము నుండి ప్రత్యక్షంగా సమాకలనము చేయలేని ప్రమేయాలుగా ఉంటే, ఆ సూత్రములో సమాకలనము చేయలేని ప్రమేయమును u గా మరొక దానిని dv గా తీసుకొనవలెను.

(ii) సమాకలజం రెండు సమాకలనీయ ప్రమేయములను కలిగి ఉండి మరియు అందులో ఒకటి x^n (ఇచ్చట n ఒక ధనాత్మక పూర్ణసంఖ్య) అయిన $u = x^n$ గా తీసుకొనుము.

(iii) మిగిలిన సందర్భములలో u యొక్క ఎన్నిక మన ఇష్టము.

ఉదాహరణ 11.33

ఇవ్వబడిన వాటిని సమాకలనము చేయుము.

(i) $\int xe^x dx$ (ii) $\int x\cos x\,dx$ (iii) $\int \log x\,dx$ (iv) $\int \sin^{-1} x\,dx$

సాధన

(i) $I = \int xe^x dx.$

ఇక్కడ x ఒక బీజీయ ప్రమేయం మరియు e^x ఒక ఘాతాంక ప్రమేయం కావున

$u = x$ అయితే $du = dx$

$dv = e^x$ అయితే $dx \Rightarrow v = e^x$

విభాగ సమాకలన పద్ధతిని ఉపయోగించిన

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\Rightarrow \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx$$

కావున, $\int xe^x dx = xe^x - e^x + c.$

(ii) $I = \int x$ ü $x\,dx$ అనుకొనుము.

x ఒక బీజీయ ప్రమేయం మరియు $\cos x$ ఒక త్రికోణమితీయ ప్రమేయం కావున

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_11.indd 215 10-03-2023 12:31:15

$u = x$ అయితే $du = dx$

$dv = \cos x\,dx \Rightarrow v = \sin x$

విభాగ సమాకలన పద్ధతిని ఉపయోగించిన

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\Rightarrow \int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx$$

$$\Rightarrow \int x\cos x\,dx = x\sin x + \cos x + c$$

(iii) $I = \int \log x\,dx$ అనుకొనుము.

$u = \log x$ అయితే $du = \frac{1}{x}dx$

$dv = dx \Rightarrow v = x$

విభాగ సమాకలన పద్ధతిని ఉపయోగించిన

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\Rightarrow \int \log x\,dx = x\log x - \int x\frac{1}{x}dx$$

$$\Rightarrow \int \log x\,dx = x\ddot{u}\quad x - x + c$$

(iv) $I = \int \sin^{-1} x\,dx$ అనుకొనుము.

$u = \sin^{-1}(x), dv = dx$

అయితే $du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, v = x$

$$\int \sin^{-1} x dx = x\sin^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$\int \sin^{-1} x dx = x\sin^{-1} x \aleph \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}}, \text{where } t \quad 1 \quad x^2$$

$$= x\sin^{-1} x + \sqrt{t} + c$$

$$= x\sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + c$$

ఉదాహరణ 11.34

$\int \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) dx$ ను కనుగొనుము.

సాధన

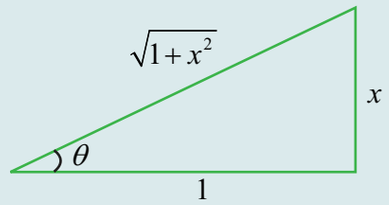
$I = \int \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) dx$ అనుకొనుము.

$x = \tan\theta \Rightarrow dx = \sec^2\theta\,d\theta$

$$\therefore I = \int \tan^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\right)\sec^2\theta\,d\theta$$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_11.indd 216 10-03-2023 12:31:15

$$= \int \tan^{-1}(\tan 2\theta)\sec^2\theta\, d\theta$$
$$= \int 2\theta \sec^2\theta\, d\theta$$
$$= 2\int (\theta)(\sec^2\theta\, d\theta)$$



విభాగ సమాకలన పద్ధతిని ఉపయోగించిన

$$I = 2\left[\theta\tan\theta - \int \tan\theta d\theta\right]$$
$$= 2(\theta\tan\theta - \log|\sec\theta|) + c$$

$\tan\theta = x$

$\sec\theta = \sqrt{1+x^2}$

$$\int \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)dx = 2x\tan^{-1}x - 2\log|\sqrt{1+x^2}| + c$$

11.7.6 విభాగ సమాకలనమునకు బెర్నోలీ సూత్రము (Bernoulli's formula for Integration by Parts)

u మరియు v అనునవి x యొక్క ప్రమేయములు అయితే బెర్నోలీ సూత్రము

$$\int u dv = uv - u'v_1 + u''v_2 - \cdots$$

ఇక్కడ $u', u'', u''', \ldots$ అనునది u యొక్క వరుస అవకలనములు అగును మరియు $v, v_1, v_2, v_3, \cdots$ అనునవి dv యొక్క వరుస సమాకలనములు అగును.

$u = x^n$ (n అనునది ధనాత్మక పూర్ణసంఖ్య) అని తీసుకొన్నప్పుడు బెర్నోలీ సూత్రమును ఉపయోగించుట సులభముగా ఉండును.

ఇవ్వబడిన సమస్యల సాధనను పొందుటకు రెండు (లేదా) అంతకంటే ఎక్కువ సార్లు విభాగ సమాకలనమును ఉపయోగించవలయును. ఇటువంటి సమస్యల సాధనను సరళతరం చేయుటకు బెర్నోలీ సూత్రము చాలా ఉపయోగపడుతుంది.

ఉదాహరణ 11.35

x దృష్ట్యా క్రిందివాటిని సమాకలనము చేయుము.

(i) x^2e^{5x} (ii) $x^3\cos x$ (iii) x^3e^{-x}

సాధన

(i) $\int x^2e^{5x}dx$.

బెర్నోలీ సూత్రమును ఉపయోగించగా

$$\int u dv = uv - u'v_1 + u''v_2 - \cdots$$

	$dv = e^{5x}dx$
$u = x^2$	$v = \frac{e^{5x}}{5}$
$u' = 2x$	$v_1 = \frac{e^{5x}}{5^2}$
$u'' = 2$	$v_2 = \frac{e^{5x}}{5^3}$
$u''' = 0$	$v_3 = \frac{e^{5x}}{5^4}$

$$\int x^2e^{5x}dx = \left(x^2\right)\left(\frac{e^{5x}}{5}\right) - (2x)\left(\frac{e^{5x}}{5^2}\right) + (2)\left(\frac{e^{5x}}{5^3}\right) - (0)\left(\frac{e^{5x}}{5^4}\right) + 0 + \cdots + 0 + c$$
$$= \frac{x^2e^{5x}}{5} - \frac{2xe^{5x}}{25} + \frac{2e^{5x}}{125} + c.$$

(ii) $\int x^3\cos x\, dx$.

బెర్నోలీ సూత్రమును ఉపయోగించగా

$$\int u dv = uv - u'v_1 + u''v_2 - \cdots$$

	$dv = \cos x\, dx$
$u = x^3,$	$v = \sin x$
$u' = 3x,^2$	$v_1 = -\cos x$
$u'' = 6x,$	$v_2 = -\sin x$
$u''' = 6,$	$v_3 = \cos x$

$$\int x^3\cos x\, dx = \left(x^3\right)\left(\sin x\right) - \left(3x^2\right)\left(-\cos x\right) + \left(6x\right)\left(-\sin x\right) - \left(6\right)\left(\cos x\right) + c$$
$$= x^3\sin x + 3x^2\cos x - 6x\sin x - 6\cos x + c.$$

(iii) $\int x^3 e^{-x} dx$.

బెర్నోలీ సూత్రమును ఉపయోగించగా

$$\int udv = uv - u'v_1 + u''v_2 - \cdots$$

$$\int x^3 e^{-x}\, dx = (x^3)(-e^{-x}) - (3x^2)(e^{-x}) + (6x)(-e^{-x}) - (6)(e^{-x}) + c$$

$$= -x^3 e^{-x} - 3x^2 e^{-x} - 6xe^{-x} - 6e^{-x} + c.$$

	$dv = e^{-x}dx$
$u = x^3,$	$v = -e^{-x}$
$u' = 3x^2,$	$v_1 = +e^{-x}$
$u'' = 6x,$	$v_2 = -e^{-x}$
$u''' = 6,$	$v_3 = e^{-x}$

అభ్యాసము 11.7

x దృష్ట్యా క్రింది వాటిని సమాకలనము చేయుము.

(1) (i) $9xe^{3x}$ (ii) $x\sin 3x$ (iii) $25xe^{-5x}$ (iv) $x\sec x\tan x$

(2) (i) $x\log x$ (ii) $27\,x^2e^{3x}$ (iii) $x^2\cos x$ (iv) $x^3\sin x$

(3) (i) $\dfrac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$ (ii) $x^5e^{x^2}$ (iii) $\tan^{-1}\left(\dfrac{8x}{1-16x^2}\right)$ (iv) $\sin^{-1}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$

11.7.8 అను రూపముల యొక్క సమాకలనము (Integrals of the form)

(i) $\int e^{ax}\sin bx\,dx$ (ii) $\int e^{ax}\cos bx\,dx$

$e^{ax}\cos bx$ మరియు $e^{ax}\sin bx$, అనే రూపం యొక్క సమాకలన ప్రమేయంలను సమాకలనం చేయగా క్రమంగా క్రిందచూపబడిన ఉదాహరణలో విభాగ సమాకలనంను రెండుసార్లు ఉపయోగించి ఇరువైపుల ఒకే విధమైన ఫలితమును వచ్చునట్లు చూడవలెను.

ఫలితము 11.1

(i) $$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\sin bx - b\cos bx] + c$$

(ii) $$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\cos bx + b\sin bx] + c$$

నిరూపణ : (i)

$I = \int e^{ax}\sin bx\,dx$ అనుకొనుము

$u = \sin bx; du = b\cos bx\,dx$ గా తీసుకొనిన

$$dv = e^{ax}; v = \frac{e^{ax}}{a},$$

విభాగ సమాకలన పద్ధతిని ఉపయోగించగా

$$I = \frac{e^{ax}}{a}\sin bx - \int \frac{e^{ax}}{a} b\cos bx\,dx$$

$$I = \frac{e^{ax}}{a}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx$$

$u = \cos bx; du = -b\sin bx\,dx,$ గా తీసుకొనగా

$$dv = e^{ax}; v = \frac{e^{ax}}{a},$$

మరొకసారి విభాగ సమాకలన పద్ధతిని ఉపయోగించగా

$$I = \frac{e^{ax}}{a}\sin bx - \frac{b}{a}\left[\frac{e^{ax}}{a}\cos bx + \int \frac{e^{ax}}{a} b\sin bx\,dx\right]$$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_11.indd 218 10-03-2023 12:31:21

$$I = \frac{e^{ax}}{a}\sin bx - \frac{b}{a}\frac{e^{ax}}{a}\cos bx - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin bx\,dx$$

$$I = \frac{e^{ax}}{a}\sin bx - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos bx - \frac{b^2}{a^2}I$$

$$\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)I = \frac{ae^{ax}\sin bx - be^{ax}\cos bx}{a^2}$$

$$\left(\frac{a^2+b^2}{a^2}\right)I = \frac{e^{ax}[a\sin bx - b\cos bx]}{a^2}$$

$$\therefore\ I = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\sin bx - b\cos bx] + c$$

కావున $\therefore \int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\sin bx - b\cos bx] + c$

ఇదేవిధంగా, $\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\cos bx + b\sin bx] + c$

$$\boxed{\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\sin bx - b\cos bx] + c}$$

$$\boxed{\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\cos bx + b\sin bx] + c}$$

ప్రత్యేక సమాకలనులను విభాగ సమాకలనంను ఉపయోగించునప్పుడు ప్రారంభంలో ఎన్నుకొన్న u మరియు dv ల జతనే కుడివైపు గల వరుస సమాకలనంకు వాడవలెను. (పై రెండు ఉదాహరణలను గమనించుము) ఎంపిక చేసిన జతను పరస్పరం ఒకదానికొకటి మార్చుకోకూడదు.

ఉదాహరణ 11.36

ఇవ్వబడిన వాటికి సమాకలనమును కనుగొనుము.

(i) $\int e^{3x}\cos 2x\,dx$ (ii) $\int e^{-5x}\sin 3x\,dx$

(i) $\int e^{3x}\cos 2x\,dx$

అను సూత్రమును ఉపయోగించిన

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\cos bx + b\sin bx] + c$$

అను సూత్రములో $a = 3$ and $b = 2$ ను ప్రతిక్షేపించగా

$$\int e^{3x}\cos 2x\,dx = \left(\frac{e^{3x}}{3^2+2^2}\right)(3\cos 2x + 2\sin 2x) + c$$

$$= \left(\frac{e^{3x}}{13}\right)(3\cos 2x + 2\sin 2x) + c.$$

(ii) $\int e^{-5x} \sin 3x \, dx$

అను సూత్రమును ఉపయోగించిన

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a \sin bx - b \cos bx] + c$$

అను సూత్రములో $a = -5, b = 3$ ను ప్రతిక్షేపించగా

$$\int e^{-5x} \sin 3x \, dx = \left(\frac{e^{-5x}}{(-5)^2+3^2}\right)(-5 \sin 3x - 3 \cos 3x) + c$$

$$\int e^{-5x} \sin 3x \, dx = -\left(\frac{e^{-5x}}{34}\right)(5 \sin 3x + 3 \cos 3x) + c$$

అభ్యాసము 11.8

x దృష్ట్యా క్రింది వాటిని సమాకలనము చేయుము.

(1) (i) $e^{ax} \cos bx$ (ii) $e^{2x} \sin x$ (iii) $e^{-x} \cos 2x$

(2) (i) $e^{-3x} \sin 2x$ (ii) $e^{-4x} \sin 2x$ (iii) $e^{-3x} \cos x$

ఫలితము 11.2

$$\int e^x [f(x) + f'(x)] dx = e^x f(x) + c$$

నిరూపణ

$I = \int e^x [f(x) + f'(x)] dx$ అనుకొనుము.

$= \int e^x f(x) dx + \int e^x f'(x) dx$

మొదటి సమాకలనం $u = f(x)$; $du = f'(x)\,dx$, తీసుకొనగా

$dv = e^x; v = e^x$,

అదేవిధంగా, $I = e^{ü} f(x) - \int e \; f'(x) dx + \int e \; f'(x) dx + c$

$\therefore \quad I = e^x f(x) + c.$

ఉదాహరణ 11.37

ఇవ్వబడిన వాటికి సమాకలనమును కనుగొనుము.

(i) $\int e^x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx$ (ii) $\int e^x (\sin x + \cos x)\, dx$ (iii) $\int e^x \left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2 dx$

సాధన

(i) $I = \int e^x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx$ అనుకొనుము

$f(x) = \frac{1}{x}$, అయితే $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$ అగును

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_11.indd 220 10-03-2023 12:31:23

I అనునది $\int e^x[f(x)+f'(x)]dx$ అను రూపంలో కలదు.

$$\text{కావున } \int e^x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx = e^x\frac{1}{x}+c.$$

(ii) $I=\int e^x(\sin x+\cos x)\,dx$ అనుకొనుము.

$f(x)=\sin x$, అయితే $f'(x)=\cos x$ అగును

I అనునది $\int e^x[f(x)+f'(x)]\,dx$ అను రూపములో వున్నది.

$$\int e^x(\sin x+\cos x)\,dx = e^x\sin x+c.$$

(iii) $\int e^x\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2dx$

$$I=\int e^x\frac{(1-x)^2}{(1+x^2)^2}dx \text{ అనుకొనుము.}$$

$$=\int e^x\frac{(1+x^2-2x)}{(1+x^2)^2}dx$$

$$=\int e^x\left(\frac{1}{(1+x^2)}-\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right)dx$$

$$f(x)=\frac{1}{(1+x^2)}, \text{ నుండి } f'(x)=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$\int e^x\left(f(x)+f'(x)\right)dx=e^xf(x)+c$ అను సూత్రమును ఉపయోగించిన

$$\int e^x\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2dx = \int e^x\left(\frac{1}{(1+x^2)}-\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right)dx = e^x\frac{1}{(1+x^2)}+c.$$

అభ్యాసము 11.9

x దృష్ట్యా క్రింది వాటిని సమాకలనము చేయుము.

(1) $e^x(\tan x+\log\sec x)$ (2) $e^x\left(\frac{x-1}{2x^2}\right)$ (3) $e^x\sec x(1+\tan x)$

(4) $e^x\left(\frac{2+\sin 2x}{1+\cos 2x}\right)$ (5) $e^{\tan^{-1}x}\left(\frac{1+x+x^2}{1+x^2}\right)$ (6) $\frac{\log x}{(1+\log x)^2}$

11.7.9 అకరణీయ బీజగణిత ప్రమేయము యొక్క సమాకలనము (Integration of Rational Algebraic Functions)

ఈ విభాగంలో మనము అకరణీయ బీజీయ ప్రమేయములను ఏవిధంగా సమాకలనము చేయవచ్చు అని చర్చిస్తాము. దీని లవము మరియు హరములు స్థిరమైన గుణకాలతో x యొక్క ఘాతాలను కలిగిన కొన్ని ధనాత్మక సమాకలనములు అగును.

రకం - 1

రూపంలో గల సమాకలనములను కనుగొనుట $\int \frac{dx}{a^2 \pm x^2}$, $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

(i) $$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + c$$

(ii) $$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c$$

(iii) $$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + c$$

(iv) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + c$$

(v) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \log \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + c$$

(vi) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \log \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + c$$

నిరూపణ

(i) $I = \int \frac{dx}{a^2 - x^2}$. నుండి

$$= \int \frac{dx}{(a-x)(a+x)}$$

$$= \frac{1}{2a} \int \left[\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right] dx \qquad \text{(పాక్షికభిన్నాలుగా విడదీయగా)}$$

$$= \frac{1}{2a} \left[\log |a+x| - \log |a-x| \right] + c$$

$$= \frac{1}{2a} \log \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + c$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + c$$

(ii) $I = \int \frac{dx}{x^2 - a^2}$. అనుకొనుము

$$= \int \frac{dx}{(x-a)(x+a)}$$

$$= \frac{1}{2a} \int \left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right] dx \qquad \text{(పాక్షికభిన్నాలుగా విడదీయగా)}$$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_11.indd 222 10-03-2023 12:31:27

$$= \frac{1}{2a}[\log|x-a| - \log|x+a|] + c$$

$$= \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$$

$$\therefore \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$$

(iii) $I = \int \frac{dx}{a^2+x^2}$. అనుకొనుము

$$x = a\tan\theta \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{x}{a}$$

$$dx = a\sec^2$$

$$I = \int \frac{a\sec^2\theta}{a^2+a^2\tan^2\theta}d\theta = \int \frac{a\sec^2\theta}{a^2(1+\tan^2\theta)}d\theta = \int \frac{a\sec^2\theta}{a^2\sec^2\theta}d\theta = \frac{1}{a}\int d\theta$$

$$= \frac{1}{a}\theta + c = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$\therefore \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

(iv) $I = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$. అనుకొనుము

$$x = a\sin\theta \Rightarrow \theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$dx = a\cos\theta$$

$$I = \int \frac{a\cos\theta}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}}d\theta = \int \frac{a\cos\theta}{\sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)}}d\theta = \int \frac{a\cos\theta}{a\cos\theta}d\theta = \int d\theta$$

$$= \theta + c = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

(v) $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$ అనుకొనుము

$$x = a\sec\theta \Rightarrow \theta = \sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$dx = a\sec\theta\tan\theta d\theta$$

$$I = \int \frac{a\sec\theta\tan\theta}{\sqrt{a^2\sec^2\theta-a^2}}d\theta = \int \frac{a\sec\theta\tan\theta}{\sqrt{a^2(\sec^2\theta-1)}}d\theta = \int \frac{a\sec\theta\tan\theta}{a\tan\theta}d\theta = \int \sec\theta d\theta$$

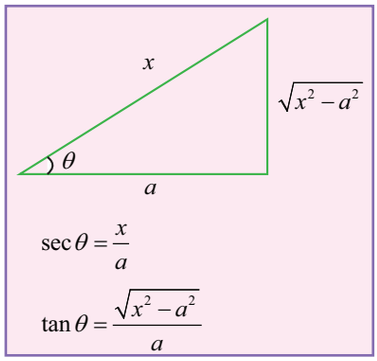
$$= \log|\sec\theta + \tan\theta| + c$$

$$= \log\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+c$$

$$= \log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|-\log a+c$$

$$= \log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c_1 \text{ where } c_1 = c-\log a$$

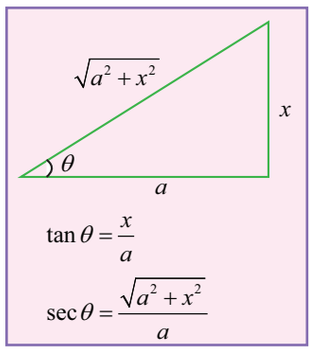
కావున $\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c_1$



(vi) $I = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$ అనుకొనుము

$x = a\ \tan\theta \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

$dx = a\sec^2\theta d\theta$



$$I = \int \frac{a\sec^2\theta}{\sqrt{a^2\tan^2\theta+a^2}}d\theta = \int \frac{a\sec^2\theta}{\sqrt{a^2(\tan^2\theta+1)}}d\theta$$

$$= \int \frac{a\sec^2\theta}{a\sec\theta}d\theta = \int \sec\theta d\theta$$

$$= \log|\sec\theta+\tan\theta|+c$$

$$= \log\left|\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+1}\right|+c$$

$$= \log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|-\log a+c$$

$$= \log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+c_1 \text{ where } c_1 = c-\log a$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+c_1$$

విశేషాంశము : a^2-x^2, a^2+x^2 మరియు x^2-a^2. అనే ప్రమేయాలను సమాకలనం చేయడానికి క్రింది పట్టికలోని ప్రతిక్షేపణలను ఉపయోగపడుతాయి అని గుర్తు చేసుకుందాము.

ఇచ్చునది	ప్రతిక్షేపణ
a^2-x^2	$x = a\ \sin\theta$
a^2+x^2	$x = a\ \tan\theta$
x^2-a^2	$x = a\ \sec\theta$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_11.indd 224 10-03-2023 12:31:35

ఉదాహరణ 11.38

క్రింది వాటికి సమాకలనములను కనుగొనుము.

(i) $\int \frac{1}{(x-2)^2+1}dx$ (ii) $\int \frac{x^2}{x^2+5}dx$ (iii) $\int \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}dx$ (iv) $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2-25}}dx$

సాధన

(i) $I = \int \frac{1}{(x-2)^2+1}dx = \int \frac{1}{(x-2)^2+1^2}dx$ అనుకొనుము.

$x-2 = t$ గా ఉంచిన $\Rightarrow dx = dt$ అగును.

కావున $\therefore I = \int \frac{1}{t^2+1^2}dt = \tan^{-1}(t)+c = \tan^{-1}(x-2)+c$

(ii) $I = \int \frac{x^2}{x^2+5}dx$ అనుకొనుము.

$$= \int \frac{x^2+5-5}{x^2+5}dx = \int\left(1-\frac{5}{x^2+5}\right)dx = \int dx - \int \frac{5}{x^2+5}dx$$

$$= x-5\int \frac{1}{x^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}dx$$

$$= x-5\frac{1}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)+c$$

$$I = x-\sqrt{5}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)+c$$

(iii) $I = \int \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1+(2x)^2}}dx$ అనుకొనుము.

$2x = t$ గా ఉంచిన $2\,dx = dt \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt$

కావున $\therefore I = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1^2+t^2}}dt$

$$I = \frac{1}{2}\log\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|+c = \frac{1}{2}\log\left|2x+\sqrt{(2x)^2+1}\right|+c$$

$$I = \frac{1}{2}\log\left|2x+\sqrt{4x^2+1}\right|+c$$

(iv) $I = \int \frac{1}{\sqrt{4x^2-25}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{(2x)^2-25}}dx$ అనుకొనుము.

$2x = t$ గా ఉంచిన $2\,dx = dt \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_11.indd 225 10-03-2023 12:31:36

కావున $\therefore, I = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t^2-5^2}}dt$

$= \frac{1}{2}\log\left|t+\sqrt{t^2-5^2}\right|+c$

$I = \frac{1}{2}\log\left|2x+\sqrt{4x^2-25}\right|+c$

రకం -2

$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ మరియు $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ అను రూపముల యొక్క సమాకలనములు

ax^2+bx+c మొదట రెండు వర్గ పదముల మొత్తము లేదా వ్యత్యాసంగా వ్యక్తపరచవలెను. ఇది రకం -1లోని ఏదేని ఒక రూపం అగును. క్రింద ఇవ్వబడిన నియమము ax^2+bx+c సమాసంను రెండు వర్గ పదముల మొత్తము లేదా వ్యత్యాసముగా వ్యక్తపరచుటకు ఉపయోగపడును.

(1) x^2 యొక్క గుణకమును 1 గా మార్చుము.

(2) x గుణకములోని సగము యొక్క వర్గమును చేర్చి మరియు తీసివేయుట ద్వారా వర్గము అగునట్లు పూర్తిచేయవలెను.

అనగా, $ax^2+bx+c = a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]$

$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$

ఉదాహరణ 11.39

క్రింది వాటికి విలువలను కనుగొనుము.

(i) $\int \frac{1}{x^2-2x+5}dx$ (ii) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+12x+11}}dx$ (iii) $\int \frac{1}{\sqrt{12+4x-x^2}}dx$

సాధన

(i) $\int \frac{1}{x^2-2x+5}dx = \int \frac{1}{x^2-2(1)x+(1)^2+4}dx$

$= \int \frac{1}{(x-1)^2+2^2}dx$

$\int \frac{1}{x^2-2x+5}dx = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right)+c$

(ii) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+12x+11}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x+6)^2-25}}dx$

$= \int \frac{1}{\sqrt{(x+6)^2-5^2}}dx$

$= \log\left|x+6+\sqrt{(x+6)^2-5^2}\right|+c$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_11.indd 226 10-03-2023 12:31:37

కావున, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+12x+11}}dx = \log\left|x+6+\sqrt{x^2+12x+11}\right|+c$

(iii) $$\int \frac{1}{\sqrt{12+4x-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{12-(x^2-4x)}}dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{12-\{(x-2)^2-4\}}}dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{4^2-(x-2)^2}}dx$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{(x-2)}{4}\right)+c$$

అభ్యాసము 11.10

X దృష్ట్యా క్రిందివాటిని సమాకలనము చేయుము.

(1) (i) $\frac{1}{4-x^2}$ (ii) $\frac{1}{25-4x^2}$ (iii) $\frac{1}{9x^2-4}$

(2) (i) $\frac{1}{6x-7-x^2}$ (ii) $\frac{1}{(x+1)^2-25}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{x^2+4x+2}}$

(3) (i) $\frac{1}{\sqrt{(2+x)^2-1}}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{x^2-4x+5}}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{9+8x-x^2}}$

రకం -3

$\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx$ మరియు $\int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$.అను రూపంల యొక్క సమాకలనాలు.

పైన ఇవ్వబడిన సమాకలనములను కనుగొనుటకు మొదట మనము ఈ విధంగా వ్రాయవలెను.

$$px+q = A\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c)+B$$

$$px+q = A(2ax+b)+B$$

ఇరువైపుల x యొక్క గుణకములను మరియు స్థిరరాశులను వేరువేరుగా మనము చేసిన A మరియు B ల విలువలను కనుగొనవచ్చును.

(i) ఇవ్వబడిన మొదటి సమీకలనంను క్రింది విధంగా వ్రాయగా

$$\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{A(2ax+b)+B}{ax^2+bx+c}dx$$

$$= A\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx + B\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$$

(మొదటి సమాకలనం $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$) అనే రూపంలో ఉన్నది)

$$= A\log|ax^2+bx+c| + B\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$$

ముందు పద్ధతులను ఉపయోగించి కుడివైపు ఉన్న రెండవ సమాకలనంను కనుగొనవచ్చును.

(ii) ఇవ్వబడిన రెండవ సమాకలనంను క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చును.

$$\int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \int \frac{A\ddot{u}\ ax+b\ +B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

$$= A\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx + B\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

(మొదటి సమాకలనం $\int f'(x)[f(x)]^n dx$ అనే రూపంలో ఉన్నది)

$$= A\left(2\sqrt{ax^2+bx+c}\right) + B\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

ముందు పద్ధతులను ఉపయోగించి కుడివైపు ఉన్న రెండవ సమాకలనంను గణించవచ్చును.

ఉదాహరణ 11.40

క్రింది ఇవ్వబడిన వాటికి సమాకలనములను కనుగొనుము.

(i) $\int \frac{3x+5}{x^2+4x+7}dx$ (ii) $\int \frac{x+1}{x^2-3x+1}dx$ (iii) $\int \frac{2\ +3}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$ (iv) $\int \frac{5x-7}{\sqrt{3x-x^2-2}}dx$

సాధన

(i) $I = \int \frac{3x+5}{x^2+4x+7}dx$ అనుకొనుము

$$3x+5 = A\ \frac{d}{dx}(x^2+4x+7)+B$$

$$3x+5 = A(2x+4)+B$$

సజాతి గుణకాల పదములను పోల్చడం వలన

$$2A = 3 \Rightarrow A = \frac{3}{2}; 4A+B = 5 \Rightarrow B = -1$$

$$I = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+4)-1}{x^2+4x+7}dx$$

$$I = \frac{3}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+7}dx - \int \frac{1}{x^2+4x+7}dx$$

$$= \frac{3}{2}\log\left|x^2+4x+7\right| - \int \frac{1}{(x+2)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}dx$$

$$= \frac{3}{2}\log\left|x^2+4x+7\right| - \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right)+c$$

(ii) $I = \int \frac{x+1}{x^2-3x+1}dx$ అనుకొనుము

$$x+1 = A\frac{d}{dx}(x^2-3x+1)+B$$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_11.indd 228 10-03-2023 12:31:39

$$x+1 = A(2x-3)+B$$

సజాతి గుణకాల పదములను పోల్చడం వలన.

$$2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}; -3A + B = 1 \Rightarrow B = \frac{5}{2}$$

$$I = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-3)+\frac{5}{2}}{x^2-3x+1}dx$$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{2x-3}{x^2-3x+1}dx + \frac{5}{2}\int \frac{1}{x^2-3x+1}dx$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|x^2-3x+1\right| + \frac{5}{2}\int \frac{1}{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}dx$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|x^2-3x+1\right| + \frac{5}{2}\frac{1}{2\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)}\log\left|\frac{x-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{x-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}\right| + c$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|x^2-3x+1\right| + \frac{\sqrt{5}}{2}\log\left|\frac{2x-3-\sqrt{5}}{2x-3+\sqrt{5}}\right| + c$$

(iii) $I = \int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$ నుండి

$$2x+3 = A\frac{d}{dx}(x^2+x+1)+B$$

$$2x+3 = A(2x+1)+B$$

సజాతి గుణకాల పదములను పోల్చడం వలన.

$$2A = 2 \Rightarrow A = 1; \quad A + B = 3 \Rightarrow B = 2$$

$$I = \int \frac{(2x+1)+2}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$$

$$I = \int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx + 2\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$$

$$= 2\sqrt{x^2+x+1} + 2\int \frac{1}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}dx$$

$$= 2\sqrt{x^2+x+1}+2\log\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right|+c$$

కావున, $I = 2\sqrt{x^2+x+1}+2\log\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|+c$

(iv) $\int \frac{5x-7}{\sqrt{3x-x^2-2}}dx$

$$5x-7 = A\frac{d}{dx}(3x-x^2-2)+B$$

$$5x-7 = A(3-2x)+B$$

సజాతి గుణకాల పదములను పోల్చడం వలన.

$$-2A = 5 \Rightarrow A = -\frac{5}{2}; 3A+B = -7 \Rightarrow B = \frac{1}{2}$$

$$I = \int \frac{\frac{-5}{2}(3-2x)+\frac{1}{2}}{\sqrt{3x-x^2+2}}dx$$

$$I = -\frac{5}{2}\int \frac{3-2x}{\sqrt{3x-x^2+2}}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{3x-x^2+2}}dx$$

$$= \left(-\frac{5}{2}\right)2\sqrt{3x-x^2+2}+\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}}dx$$

$$= -5\sqrt{3x-x^2+2}+\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x-\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{17}}{2}}\right)+c$$

కావున, $I = -5\sqrt{3x-x^2+2}+\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2x-3}{\sqrt{17}}\right)+c$

అభ్యాసము 11.11

x దృష్ట్యా క్రింద ఇవ్వబడిన వాటిని సమాకలనము చేయుము.

(1) (i) $\frac{2x-3}{x^2+4x-12}$ (ii) $\frac{5x-2}{2+2x+x^2}$ (iii) $\frac{3x+1}{2x^2-2x+3}$

(2) (i) $\frac{2x+1}{\sqrt{9+4x-x^2}}$ (ii) $\frac{x+2}{\sqrt{x^2-1}}$ (iii) $\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+4x+1}}$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_11.indd 230 10-03-2023 12:31:42

పద్ధతి **IV**

$\int\sqrt{a^2\pm x^2}\,dx, \int\sqrt{x^2-a^2}\,dx$ అను రూపముల యొక్క సమాకలనము

ఫలితము 11.3

(1) $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c$

(2) $\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c$

(3) $\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+c$

నిరూపణ

(1) $I=\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ అనుకొనుము.

$u=\sqrt{a^2-x^2}$ అయితే $du=\frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}dx$

$dv=dx\Rightarrow v=x$

విభాగ సమాకలన పద్ధతిని ఉపయోగించగా

$$\int udv = uv-\int vdu$$

$$\Rightarrow I = x\sqrt{a^2-x^2}-\int\frac{-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2}-\int\frac{a^2-x^2-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2}-\int\left(\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{(-a^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)dx$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2}-\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx+\int\frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2}-I+a^2\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$2I = x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

కావున $I=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c$

మిగిలిన రెండింటి నిరూపణను ఈ విధంగానే చేయవలయును.

గమనిక 11.3

$x=a\sin\theta$ ను ప్రతిక్షేపించి పైన ఉన్న ఫలితాలను నిరూపించవచ్చును.

ఉదాహరణ 11.41

క్రింది వాటికి మిలువలను కనుగొనుము.

(i) $\int\sqrt{4-x^2}\,dx$ (ii) $\int\sqrt{25x^2-9}\,dx$ (iii) $\int\sqrt{x^2+x+1}\,dx$ (iv) $\int\sqrt{(x-3)(5-x)}\,dx$

సాధన

(i) $I = \sqrt{4-x^2}\,dx$ అనుకొనుము

$$= \int \sqrt{2^2-x^2}\,dx$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{2^2-x^2} + \frac{2^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+c$$

కావున, $I = \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + 2\sin^{1}\left(\frac{x}{2}\right)+c$

(ii) $I = \int \sqrt{25x^2-9}dx$ అనుకొనుము

$$= \int \sqrt{(5x)^2-3^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{5}\left[\frac{5x}{2}\sqrt{(5x)^2-3^2} - \frac{3^2}{2}\log\left|5x+\sqrt{(5x)^2-3^2}\right|\right]+c$$

కావున, $I = \frac{1}{5}\left[\frac{5x}{2}\sqrt{25x^2-9} - \frac{9}{2}\log\left|5x+\sqrt{25x^2-9}\right|\right]+c$

(iii) $I = \int \sqrt{x^2+x+1}\,dx$ అనుకొనుము

$$= \int \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,dx$$

$$= \frac{x+\frac{1}{2}}{2}\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2}\log\left|\left[x+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right]\right|+c$$

కావున, $I = \frac{2x+1}{4}\sqrt{x^2+x+1} + \frac{3}{8}\log\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|+c$

(iv) $I = \int \sqrt{(x-3)(5-x)}\,dx$ అనుకొనుము

$$= \int \sqrt{8x-x^2-15}\,dx$$

$$= \int \sqrt{1^2-(x-4)^2}\,dx$$

$$= \frac{x-\text{ü}}{2}\sqrt{1^{\text{ü}}-(x-4)} + \frac{}{2}\sin^{-}\left(\frac{x-}{1}\right)+c$$

కావున, $I = \frac{x-4}{2}\sqrt{8x-x^2-15} + \frac{1}{2}\sin^{-1}(x-4)+c$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_11.indd 232 10-03-2023 12:31:46

అభ్యాసము 11.12



x దృష్ట్యా క్రింది ప్రమేయములను సమాకలనము చేయుము.

(1) (i) $\sqrt{x^2+2x+10}$ (ii) $\sqrt{x^2-2x-3}$ (iii) $\sqrt{(6-x)(x-4)}$

(2) (i) $\sqrt{9-(2x+5)^2}$ (ii) $\sqrt{81+(2x+1)^2}$ (iii) $\sqrt{(x+1)^2-4}$

అభ్యాసము 11.13

ఈ క్రింది వాటికి సరియైన సమాధానమును ఎంచుకొనుము.

(1) $\int f(x)dx = g(x)+c$, అయిన $\int f(x)g'(x)dx$ అనునది

(1) $\int (f(x))^2 dx$ (2) $\int f(x)g(x)dx$ (3) $\int f'(x)g(x)dx$ (4) $\int (g(x))^2 dx$

(2) $\int \frac{3^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx = k\ (3^{\frac{1}{x}})+c$, అయితే k యొక్క విలువ

(1) $\log 3$ (2) $-\log 3$ (3) $-\frac{1}{\log 3}$ (4) $\frac{1}{\log 3}$

(3) $\int f'(x)e^{x^2}dx = (x-1)e^{x^2}+c$, అయితే $f(x)$ అనునది

(1) $2x^3-\frac{x^2}{2}+x+c$ (2) $\frac{x^3}{2}+3x^2+4x+c$ (3) x^3+4x^2+6x+c (4) $\frac{2x^3}{3}-x^2+x+c$

(4) (x, y) అను ఏదైన ఒక బిందువు వద్ద వక్రరేఖ వాలు $\frac{x^2-4}{x^2}$ అగును. ఈ వక్రరేఖ (2, 7) అను బిందువు గుండా పోయిన ఆ వక్రరేఖ సమీకరణం

(1) $y = x+\frac{4}{x}+3$ (2) $y = x+\frac{4}{x}+4$ (3) $y = x^2+3x+4$ (4) $y = x^2-3x+6$

(5) $\int \frac{e^x(1+x)}{\cos^2(xe^x)}\ dx$ అనేది

(1) $\cot(xe^x)+c$ (2) $\sec(\ddot{u}^{\ x})+$ (3) $\tan(xe^x)+c$ (4) $\cos(xe^x)+c$

(6) $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\sin 2x}dx$

(1) $\sqrt{\tan x}+c$ (2) $2\sqrt{\tan x}+c$ (3) $\frac{1}{2}\sqrt{\tan x}+c$ (4) $\frac{1}{4}\sqrt{\tan x}+c$

(7) $\int \sin^3 x dx$

(1) $\frac{-3}{4}\cos x-\frac{\cos 3x}{12}+c$ (2) $\frac{3}{4}\cos x+\frac{\cos 3x}{12}+c$

(3) $\frac{-3}{4}\cos x+\frac{\cos 3x}{12}+c$ (4) $\frac{-3}{4}\sin x-\frac{\sin 3x}{12}+c$

(8) $\int \frac{e^{6\log x}-e^{5\log x}}{e^{4\log x}-e^{3\log x}}dx$

(1) $x+c$ (2) $\frac{x^3}{3}+c$ (3) $\frac{3}{x^3}+c$ (4) $\frac{1}{x^2}+c$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_11.indd 233 10-03-2023 12:31:51

(9) $\int \frac{\sec x}{\sqrt{\cos 2x}} dx$

(1) $\tan^{-1}(\sin x)+c$ (2) $2\sin^{-1}(\tan x)+c$ (3) $\tan^{-1}(\cos x)+c$ (4) $\sin^{-1}(\tan x)+c$

(10) $\int \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}}\, dx$

(1) x^2+c (2) $2x^2+c$ (3) $\frac{x^2}{2}+c$ (4) $-\frac{x^2}{2}+c$

(11) $\int 2^{3x+5} dx$

(1) $\frac{3(2^{3x+5})}{\log 2}+c$ (2) $\frac{2^{3x+5}}{2\log(3x+5)}+c$ (3) $\frac{2^{3x+5}}{2\log 3}+c$ (4) $\frac{2^{3x+5}}{3\log 2}+c$

(12) $\int \frac{\sin^8 x-\cos^8 x}{1-2\sin^2 x\cos^2 x}\, dx$

(1) $\frac{1}{2}\sin 2x+c$ (2) $-\frac{1}{2}\sin 2x+c$ (3) $\frac{1}{2}\cos 2x+c$ (4) $-\frac{1}{2}\cos 2x+c$

(13) $\int \frac{e^x(x^2\tan^{-1}x+\tan^{-1}x+1)}{x^2+1}\, dx$

(1) $e^x\tan^{-1}(x+1)+c$ (2) $\tan^{-1}(e^x)+c$ (3) $e^x\frac{(\tan^{-1}x)^2}{2}+c$ (4) $e^x\tan^{-1}x+c$

(14) $\int \frac{x^2+\cos^2 x}{x^2+1}\operatorname{cosec}^2 x dx$

(1) $\cot x+\sin^{-1}x+c$ (2) $-\cot x+\tan^{-1}x+c$

(3) $-\tan x+\cot^{-1}x+c$ (4) $-\cot x-\tan^{-1}x+c$

(15) $\int x^2\cos x\, dx$

(1) $x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+c$ (2) $x^2\sin x-2x\cos x-2\sin x+c$

(3) $-x^2\sin x+2x\cos x+2\sin x+c$ (4) $-x^2\sin x-2x\cos x+2\sin x+c$

(16) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$

(1) $\sqrt{1-x^2}+\sin^{-1}x+c$ (2) $\sin^{-1}x-\sqrt{1-x^2}+c$

(3) $\log\left|x+\sqrt{1-x^2}\right|-\sqrt{1-x^2}+c$ (4) $\sqrt{1-x^2}+\log\left|x+\sqrt{1-x^2}\right|+c$

(17) $\int \frac{dx}{e^x-1}$

(1) $\log|e^x|-\log|e^x-1|+c$ (2) $\log|e^x|+\log|e^x-1|+c$

(3) $\log|e^x-1|-\log|e^x|+c$ (4) $\log|e^x+1|-\log|e^x|+c$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_11.indd 234 10-03-2023 12:31:59

(18) $\int e^{-4x}\cos x\,dx$

(1) $\frac{e^{-4x}}{17}[4\cos ü - \sin\ \ ] +$ (2) $\frac{e^{-4x}}{17}[-4\cos x + \sin x] + c$

(3) $\frac{e^{-4x}}{17}[4\cos x + \sin x] + c$ (4) $\frac{e^{-4x}}{17}[-4\cos x - \sin x] + c$

(19) $\int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x - 1}dx$

(1) $2\log\left|\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right| + c$ (2) $\log\left|\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right| + c$

(3) $\frac{1}{2}\log\left|\frac{\tan x+1}{\tan x-1}\right| + c$ (4) $\frac{1}{2}\log\left|\frac{\tan x-1}{\tan x+1}\right| + c$

(20) $\int e^{-7x}\sin 5x\,dx$

(1) $\frac{e^{-7x}}{74}[-7\sin 5x - 5\cos 5x] + c$ (2) $\frac{e^{-7x}}{74}[7\sin 5x + 5\cos 5x] + c$

(3) $\frac{e^{-7x}}{74}[7\sin 5x - 5\cos 5x] + c$ (4) $\frac{e^{-7x}}{74}[-7\sin 5x + 5\cos 5x] + c$

(21) $\int x^2 e^{\frac{x}{2}}dx$

(1) $x^2e^{\frac{x}{2}} - 4xe^{\frac{x}{2}} - 8e^{\frac{x}{2}} + c$ (2) $2x^2e^{\frac{x}{2}} - 8xe^{\frac{x}{2}} - 16e^{\frac{x}{2}} + c$

(3) $2x^2e^{\frac{x}{2}} - 8xe^{\frac{x}{2}} + 16e^{\frac{x}{2}} + c$ (4) $x^2\frac{e^{\frac{x}{2}}}{2} - \frac{xe^{\frac{x}{2}}}{4} + \frac{e^{\frac{x}{2}}}{8} + c$

(22) $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2-1}}dx$

(1) $\sqrt{x^2-1} - 2\log\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + c$ (2) $\sin^{-1}x - 2\log\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + c$

(3) $2\log\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| - \sin^{-1}x + c$ (4) $\sqrt{x^2-1} + 2\log\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + c$

(23) $\int \frac{1}{x\sqrt{(\log x)^2 - 5}}dx$

(1) $\log\left|x + \sqrt{x^2-5}\right| + c$ (2) $\log\left|\log x + \sqrt{\log x - 5}\right| + c$

(3) $\log\left|\log x + \sqrt{(\log x)^2 - 5}\right| + c$ (4) $\log\left|\log x - \sqrt{(\log x)^2 - 5}\right| + c$

(24) $\int \sin\sqrt{x}dx$

(1) $2\left(-\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + \sin\sqrt{x}\right) + c$ (2) $2\left(-\sqrt{x}\cos\sqrt{x} - \sin\sqrt{x}\right) + c$

(3) $2\left(-\sqrt{x}\sin\sqrt{x} - \cos\sqrt{x}\right) + c$ (4) $2\left(-\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + \cos\sqrt{x}\right) + c$

(25) $\int e^{\sqrt{x}}dx$

(1) $2\sqrt{x}(1 - e^{\sqrt{x}}) + c$ (2) $2\sqrt{x}(e^{\sqrt{x}} - 1) + c$

(3) $2e^{\sqrt{x}}(1 - \sqrt{x}) + c$ (4) $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + c$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_11.indd 235 10-03-2023 12:32:07

పాఠ్య సారాంశం

అవకలనం	ప్రత్యవకలనం (లేదా) సమాకలనం
$\frac{d}{dx}(c)=0,\ c$ ఒక స్థిరరాశి	$\int 0\,dx=c,\ c$ ఒక స్థిరరాశి
$\frac{d}{dx}(kx)=k,\ k$ ఒక స్థిరరాశి	$\int k\,dx=kx+c$ ఏకైక స్థిరరాశి
$\frac{d}{ü}\left(\frac{x^{n+1}}{+1}\right)=x^n$	$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c,\quad n\neq -1$ ఘాతి నియము
$\frac{d}{dx}\log x=\left(\frac{1}{x}\right)$	$\int \frac{1}{x}\,dx=\log\lvert x\rvert+c$
$\frac{d}{dx}(-\cos x)=\sin x$	$\int \sin x\,dx=-\cos x+c$
$\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$	$\int \cos x\,dx=\sin x+c$
$\frac{d}{dx}(\tan x)=\sec^2 x$	$\int \sec^2 x\,dx=\tan x+c$
$\frac{d}{dx}(-\cot x)=\operatorname{cosec}^2 x$	$\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx=-\cot x+c$
$\frac{d}{dx}(\sec x)=\sec x\tan x$	$\int \sec x\tan x\,dx=\sec x+c$
$\frac{d}{dx}(-\operatorname{cosec} x)=\operatorname{cosec} x\cot x$	$\int \operatorname{cosec} x\cot x\,dx=-\operatorname{cosec} x+c$
$\frac{d}{dx}(e^x)=e^x$	$\int e^x dx=e^x+c$
$\frac{d}{dx}\left(\frac{a^x}{\log a}\right)=a^x$	$\int a^x dx=\frac{a^x}{\log a}+c$
$\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\sin^{-1}x+c$
$\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)=\frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2}dx=\tan^{-1}x+c$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_11.indd 236 10-03-2023 12:32:08

(1) k ఏదైన స్థిరాంకం అయితే $\int kf(x)dx = k\int f(x)\,dx$

(2) $\int (f_1(x) \pm f_2(x))\,dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$

$\int f(x)\,dx = g(x)+c$, అయితే $\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\,g(ax+b)+c$

(1)	$\int \tan ü = \log\lvert\sec x\rvert + c$
(2)	$\int \cot x\,dx = \log\lvert\sin x\rvert + c$
(3)	$\int cosecx\,dx = \log\lvert\operatorname{cosec} x - \cot x\rvert + c$
(4)	$\int \sec x\,dx = \log\lvert\sec x + \tan x\rvert + c$

ప్రమేయాలు అయితే బెర్నోలీ నియమం ప్రకారం

విభాగ సమాకలనమునకు బెర్నోలీ సూత్రము u మరియు v లు x యొక్క ప్రమేయాలు అయితే బెర్నోలీ నియమం ప్రకారం $\int udv = uv - u'v_1 + u''v_2 + \ldots$

ఇక్కడ $u', u'', u''', \ldots u$ యొక్క వరుస అవకలనాలు మరియు $v, v_1, v_2, v_2, \ldots, \mathrm{d}v$ యొక్క వరుస సమాకలనములు.

$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\sin bx - b\cos bx] + c$

$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\cos bx + b\sin bx] + c$

$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\log\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert + c$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$
$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + c$	$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log\left\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\right\rvert + c$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \log\left\lvert x+\sqrt{x^2+a^2}\right\rvert + c$

$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\log\left\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\right\rvert + c$

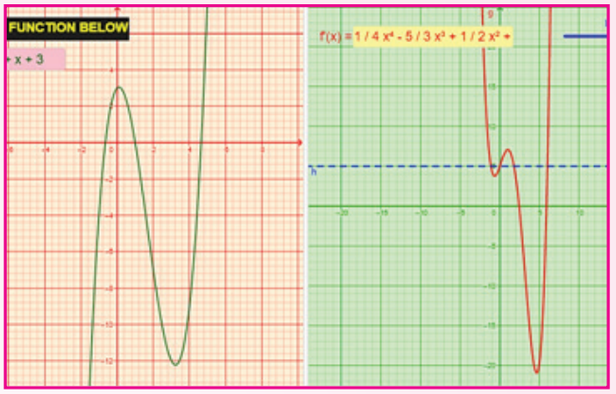
$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\log\left\lvert x+\sqrt{x^2+a^2}\right\rvert + c$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_11.indd 237 10-03-2023 12:32:15

సమాకలన గణితము

సంగణక కృత్యము 11(a)





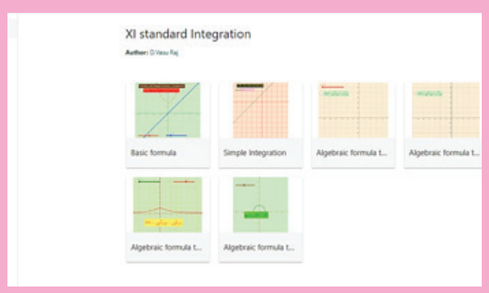
ఆశించు లక్ష్యములు

మెట్టు -1

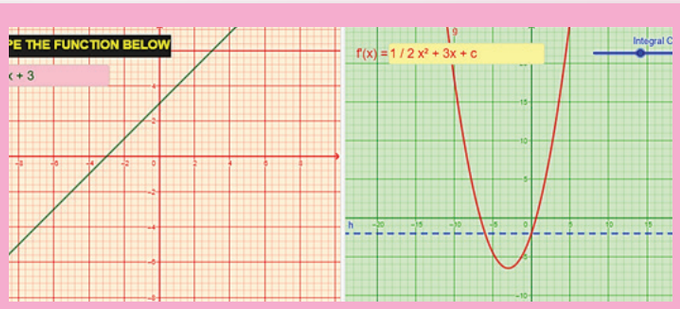
Browser ను Open చేసి URL లింక్‌ను టైప్ చేయుము (లేక) QR కోడ్‌ను స్కాన్ చేయుము. GeoGebra పనిపుస్తకము XI standard Integration అను పేజీ కనిపించును. అందులో మీ పాఠ్యాంశమునకు సంబంధించిన పలు పని కాగితములు ఈ పేజీలో ఇవ్వబడియుండును.

మెట్టు -2

Simple Integration అను అభ్యాస కాగితమును ఎంపిక చేయుము. నీవు ఏదైనా ప్రమేయమును f(x) బాక్స్ నందు నమోదు చేయండి. రేఖాచిత్రము $f(x)$ కుడివైపు కనపడుతుంది. మరియు దానికి కుడివైపు సమాకలన ప్రమేయం కనబడుతుంది (గమనిక x^5 ఈ విధంగా నమోదు x^5 Integration constant అనే తెరని జరిపి సమాకలనము యొక్క స్థిరరాశిని మార్చవలయును.



మెట్టు -1



మెట్టు -2

‘పటములు గుర్తింపులకు మాత్రమే

XI standard Integration: https://ggbm.at/c63hdegc

LC8NQ

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_11.indd 238 10-03-2023 12:32:18

సమాకలన గణితము

ఆశించు లక్ష్యములు

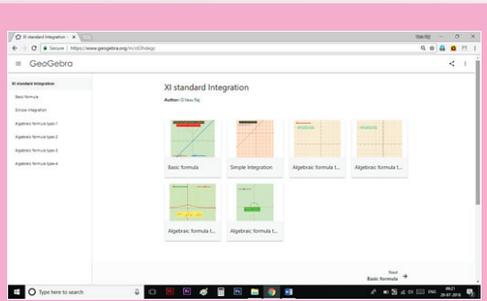


సోపానము 1

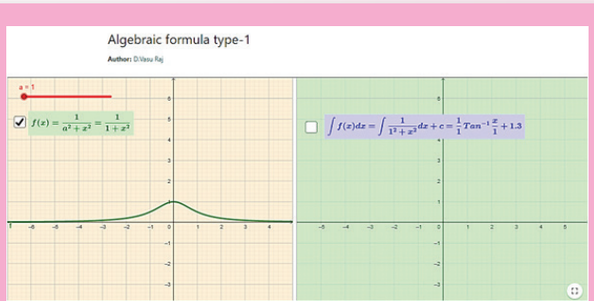
బ్రౌజర్‌ను తెరచి క్రింద ఇవ్వబడిన URL లింకును టైపు చేయుము లేదా QR కోడ్ ను స్కాన్ చేయుము. GeoGebra అను పేజీ కనిపించును. అందులో మీ పాఠ్యాంశమునకు సంబంధించిన అనేక ..... ఉండును.

సోపానము 2

..... అనే .... ను ఎంపిక చేయుము ఎడమవైపు రేఖాచిత్రము యొక్క ప్రమేయం మరియు కుడివైపు సమాకలన గణితము యొక్క ప్రమేయం ఇవ్వబడియుండును. ఈ రెండింటిని క్లిక్ చేసి రేఖాచిత్రంను చూడుము. .... ను కదిపిన విలువలు మారును. బీజగణిత రకాలను 4 విధాలుగా వర్గీకరించెను. ఈ విధంగా మిగిలిన 3 బీజగణిత రకాలను గమనించుము.



Step1



Step2

‘పటములు గుర్తింపులకు మాత్రమే

XI standard Integration: https://ggbm.at/c63hdegc

C3HVG

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_11.indd 239 10-03-2023 12:32:19

అధ్యాయము 12

సంభావ్యత సిద్ధాంతము – పరిచయము

CSBKI

జీవితం యొక్క చాలా ముఖ్యమైన ప్రశ్నలతో చాలా వరకు
నిజానికి వాస్తవంగా సంభావ్యత యొక్క సమస్యలు మాత్రమే
పియర్ – సైమన్ లాప్లాస్



లాప్‌లాస్
1749-1827

12.1 పరిచయము

బ్లైయిస్ పాస్కల్ మరియు పియర్ డీ ఫెర్మాట్ అను ఇద్దరు ప్రసిద్ధిగాంచిన ఫ్రెంచ్ గణిత శాస్త్రజ్ఞులచే సృష్టించబడిన సంభావ్యత సిద్ధాంతము అనునది 1654లో ఒక జూద రంగంలో సంభవించిన వివాదమే మూలకారణమైనది. సంభావ్యత సిద్ధాంతము యొక్క ప్రాథమిక నియమాలను మొట్టమొదటగా పాస్కల్ మరియు ఫెర్మాట్ అనువారు రూపొందించిరి. లాప్లాస్ తన విస్తృతమైన పరిశోధన తర్వాత 1812లో తన స్మారక పనిని ప్రచురించారు మరియు సంభావ్యత సిద్ధాంతమునకు పునాది సాంఖ్యక శాస్త్రములో బ్లైయిస్ యొక్క సంభావ్యత వివరణను ముఖ్యంగా లాప్లాస్ ద్వారా అభివృద్ధి చేయబడినది.

ఆధునిక ప్రపంచం యొక్క చాలా విషయాలలో సంభావ్యత అను అంశంను చూస్తున్నాము. దీని యొక్క మూలం నుండి ఆటలను అధ్యయనం చేయు పద్ధతిగా సంభావ్యత ఒక శక్తివంతమైన మరియు విస్తృతంగా అనువర్తించే గణిత విభాగంగా పాల్గొన్నది. జీవిత భీమా ప్రీమియం నిర్ధారణకు, ఎన్నికల ఫలితాలను ముందుగా అంచనా వేయుటలో, ఒక గ్యాస్‌లో గల అణువుల యొక్క ప్రవర్తనల వివరణలో మొదలగు వానిలో సంభావ్యతలను ఉపయోగించారు. ఈ ప్రయోజనాల కారణంచే పాఠ్యపుస్తకాలలో సంభావ్యతల అధ్యయనంను చూస్తున్నాము.

"సంభావ్యత" అను పదము యొక్క వివరణ అవకాశం, సాధ్యమయ్యే, వీలగు, బహుశ, అసమానత, అనిశ్చితి, ప్రాబల్యం, హాని, అంచనా మొదలగు పర్యాయపదాలుగా గలదు.

మన ప్రపంచం అంత అనిశ్చితితో నిండి వున్నది.మనము ప్రతిరోజు అనిశ్చితి ప్రభావంతో ఊహాత్మకంగా నిర్ణయాలు తీసుకొంటాము. అనిశ్చితిని కొలిచే క్రమంలో, సంభావ్యత సిద్ధాంతము అను గణిత విభాగము వైపు మన దృష్టి మరలినది. ఒక ఘటన సంభవించు అనుకూలతను కొలుచుటయే సంభావ్యత అగును.

అభ్యసన లక్ష్యాలు

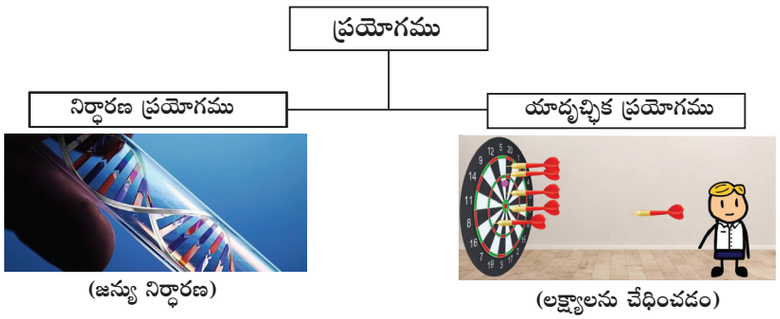
ఈ అధ్యాయ ముగింపులో విద్యార్థులు క్రింది వాటిని తెలుసుకొంటారు.

- సంభావ్యత యొక్క సాంప్రదాయక సిద్ధాంతమును మరియు సంభావ్యతకు స్వీకృత విధానంను అవగాహన చేసుకొంటారు.
- పరస్పర వివర్జిత, పరస్పర వర్జిత మరియు సంపూర్ణ ఘటనలను అవగాహన చేసుకొంటారు.
- నియత సంభావ్యత మరియు స్వతంత్ర ఘటనల భావనలను అవగాహన చేసుకొంటారు.
- బేయీ సిద్ధాంతమును అనువర్తించుట
- నిత్యజీవితంలో సంభావ్యత సిద్ధాంతమును అనువర్తించుట

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_12.indd 240 10-03-2023 12:26:10

12.2 ప్రాథమిక నిర్వచనములు (BASIC DEFINITIONS)

సంభావ్యత సిద్ధాంతమును నేర్చుకొనుటకు ముందు మనము ముందు తరగతులలో ఎక్కువగా ఉపయోగించిన కొన్ని నిర్వచనములను జ్ఞప్తికి తెచ్చుకొనెదము.



నిర్వచనము 12.1

సునిర్వచిత (నిర్దేశించిన) ఫలితం కొరకు ఒక ప్రక్రియగా **ఒక ప్రయోగమును** నిర్వచించారు.

నిర్వచనము 12.2

నిశ్చిత మరియు ఆదర్శ పరిస్థితులలో ఫలితములను ఊహించ కలిగే ఒక ప్రయోగమును నిర్ధారణ **ప్రయోగము** అంటారు.

నిర్వచనము 12.3

యాదృచ్ఛిక ప్రయోగము **(A random experiment or non-deterministic)** అనగా

(i) ఒక ప్రయోగంలో లభించు వీలైన అన్ని ఫలితాలు ముందుగానే తెలుసుకొని యుండుటకు వీలగును.

(ii) ప్రయోగమునకు మునుపే ఏ ఫలితము లభించునో చెప్పలేము.

(iii) ఒకే విధమైన పరిస్థితులలో ఆ ప్రయోగాన్ని ఎన్నిసార్లు అయినా చేయడానికి వీలగును.

ఒక పాచికను "దొర్లించడం" ఒక నాణెమును "ఎగురవేయడం" మొదలగునవి యాదృచ్ఛిక ప్రయోగమునకు ఉదాహరణములగును.

నిర్వచనము 12.4

ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం యొక్క వీలయ్యే చాలా ప్రధాన ఫలితం మరియు దానిని మరింత విభజించుటకు వీలుకాని దాని **సరళ ఘటన (simple event)** అంటారు. దీనిని ప్రాథమిక ఘటన లేదా నమూనా బిందువు (elementary event or sample point) అని కూడా అంటారు.

నిర్వచనము 12.5

ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగములో వీలగు అన్ని ఫలితాల సమితిని ప్రతిరూప ఆవరణము **(sample space)** అంటారు. ప్రతిరూప ఆవరణలోని ప్రతిబిందువు ఒక సరళఘటన అగును.

వివరణ 12.1

(1) (i) ఒక పాచికను ఒకసారి విసిరిన లభించు ప్రతిరూప ఆవరణ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

(ii) ఒక నాణెము ఎగురవేసిన లభించు ప్రతిరూప ఆవరణ $S = \{H, T\}$.

(2) (i) బొమ్మపడు వరకు ఒక నాణెమును ఎన్నిసార్లు ఎగురవేయవలనని ముందుగానే తెలుసుకొనుటకు వీలుకాదు. ఈ ప్రయోగంలో ప్రతిరూప ఆవరణ $S = \{H, TH, TTH, TTTH, ...\}$ అను అపరిమిత సమితి అగును.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_12.indd 241 10-03-2023 12:26:11

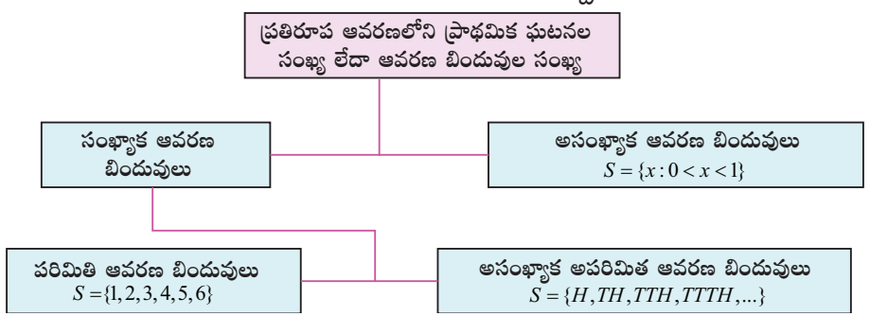
(ii) రైలు టికట్లు విక్రయించు స్థలములో టికెట్టు కొరకు వేచియున్న ప్రయాణికుల సంఖ్యల ప్రతిరూప ఆవరణమనునది $S=\{0,1,2,...\}$.

(3) (i) యాదృచిక ప్రయోగములో 0. మరియు 1 కు మధ్య ఒక సంఖ్యను ఎనుకొనుటకు ఏర్పడు ప్రతిరూప ఆవరణ $S = \{ x: 0< x <1\}$.

(ii) ఒక విద్యుత్‌బల్బు యొక్క ఆయువుకాలము (t గంటలలో)ను ప్రతిరూప ఆవరణ $S = \{ t: 0 < t<1000\}$.

ఉదాహరణ (2) మరియు (3) లో ఉన్న రెండు విధములైన అపరిమిత సమితులను వేరుపరుచునపుడు అందులో ఒకటి మరొయొకటి కంటే ఎక్కువ మూలకములు పొందియుండునని తెలియును. ప్రత్యేకంగా (2)లో ఉన్న S ను సంఖ్యాక అపరిమితము అని అంటారు. అదే సమయంలో (3)లో ఉన్న S ను అసంఖ్యాక అపరిమితము అని అంటారు. సంఖ్యాక పరిమిత సమితిలోని మూలకములను మనము జాబితాపరచవచ్చును. అనగా ఈ సమితిని సహజ సంఖ్యలు $\mathbb{N}$ తో పక-పక సంబంధంను ఏర్పరచవచ్చును అని అర్థము. అసంఖ్యాక అపరిమిత సమితిలోని మూలకములను మనము జాబితా పరచలేము.

పై ఉదాహరణల నుంచి, ప్రతిరూప ఆవరణము, సంఖ్యాక (countable) లేదా అసంఖ్యాక (uncountable) ప్రాథమిక ఘటనలును కలగి వుంటుందని అవగాహన చేసుకొనవచ్చును.



12.3 పరిమిత ప్రతిరూప ఆవరణము (FINITE SAMPLE SPACE)

ఈ విభాగంలో పరిమిత ప్రతి బిందువులు ఉన్న ప్రతిరూప ఆవరణమును మాత్రమే చూసెదము.

ఘటనల రకములు (Types of events)

ఈ అధ్యాయములో తరుచుగా ఉపయోగించే కొన్ని ముఖ్య ఘటనలను నిర్వచించుకొందాము.

- ఖచ్చిత ఘటన లేదా ఘటన (Sure event or certain event)
- అసాధ్యఘటన (Impossible event)
- పూరక ఘటన (Complementary event)
- పరస్పర వివర్జిత ఘటన (Mutually exclusive events)
- పరస్పర అవర్జిత ఘటన (Mutually inclusive event)
- పూర్ణఘటనలు (Exhaustive events)
- సమ సంభవ ఘటనలు (Equally likely events)
- స్వతంత్ర ఘటన (Independent events) సంభావ్యత (భావనలను గూర్చి తెలుసుకున్న తర్వాత నిర్వచించబడును)

నిర్వచనము 12.6

ప్రతిరూప ఆవరణమనునది పరిమితము అయినప్పుడు ప్రతిరూప ఆవరణము యొక్క ఏదేని ఒక ఉపసమితిని ఒక ఘటన అంటారు. అనగా, ప్రతిరూప ఆవరణ యొక్క ఘాతసమితి $\mathcal{P}(S)$ లో గల అన్ని మూలకములును ఘటనలుగా నిర్వచిస్తారు.

ఒక ఘటన అనునది ఆవరణ బిందువుల లేదా ప్రాథమిక ఘటనల సేకరణ అగును. ప్రతిరూప ఆవరణము S ను ఖచ్చిత ఘటన లేదా నిర్ధిష్ట ఘటన అంటారు. Sలో గల శూన్యసమితి $\varnothing$ ను అసాధ్యఘటన అని అంటారు.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_12.indd 242 10-03-2023 12:26:15

నిర్వచనము 12.7

ప్రతి ఘటన A లో సంబంధపరచు మరొక ఘటన $\overline{A}$ ను A యొక్క పూరక ఘటన అంటారు. దీనిని 'A కాని' ఘటన అని కూడ అంటారు

వివరణ 12.2

ప్రతిరూప ఆవరణము $S = \{1,2,3,4\}$

యొక్క వీలగు అన్ని ఉపసమితుల (S యొక్క ఘాత సమితి) సమితి $\mathscr{P}(S)$

$$\mathscr{P}(S) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$$

(i) $\mathscr{P}(S)$ యొక్క అన్ని మూలకములును ఘటనలు అంటారు.

(ii) $\varnothing$ అనునది అసాధ్యఘటన అగును.

(iii) $\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}$ అనునవి సరళఘటనలు లేదా ప్రాథమిక ఘటనలు

(iv) $\{1, 2, 3, 4\}$ అనునది ఖచ్చిత ఘటన లేదా నిర్ధిష్ట ఘటన అగును.

నిర్వచనము 12.8

ఏకకాలంలో సంభవించుటకు వీలుకాని రెండు ఘటనలు పరస్పర వర్జిత ఘటనలు (mutually exclusive events) అగును.

$A_1, A_2, A_3, ..., A$ అనునవి పరస్పర వర్జిత ఘటనలు అనగా $i \neq j$ కు $A_i \cap A_j = \varnothing$ అగును అని అర్థము.

నిర్వచనము 12.9

ఏకకాలంలో సంభవించు రెండు ఘటనలు పరస్పర అవర్జిత ఘటనలు (mutually exclusive events) అగును.

$A_1, A_2, A_3, ..., A$ అనునవి పరస్పర అవర్జిత ఘటనలు అనగా $i \neq j$ $A_i \cap A_j \neq \varnothing$ అగును అని అర్థము.

వివరణ 12.3

ఒక పాచికను దొర్లించిన లభించు ప్రతిరూప ఆవరణము $S = \{1,2,3,4,5,6\}$.

(i) $\{1, 3\} \cap \{2, 4, 5, 6\} = \varnothing$, అయిన $\{1,3\}$ మరియు $\{2,4,5,6\}$ ఘటనలు పరస్పర వర్జిత ఘటనలగును.

(ii) $\{1,6,\},\{2,3,5\}$ మొదలగునవి పరస్పర వివర్జిత ఘటనలు.

(iii) $\{2,3,5\},\{5,6\}$ అను ఘటనలు పరస్పర అవర్జిత ఘటనలగును ఎందుకనగా $\{2, 3, 5\} \cap \{5, 6\} = \{5\} \neq \varnothing$

నిర్వచనము 12.10

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_k = S$ అయిన $A_1, A_2, A_3, ..., A_k$ అనునవి పూర్ణఘటనలు అని పిలువబడును.

నిర్వచనము 12.11

(i) $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$ (ii) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_k = S$

అయిన $A_1, A_2, A_3, ..., A_k$ పరస్పర వివర్జిత మరియు పూర్ణఘటనలు అంటారు.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_12.indd 243 10-03-2023 12:26:17

వివరణ 12.4

ఒక పాచికను దొర్లించినపుడు ప్రతిరూప ఆవరణము $S = \{1,2,3,4,5,6\}$.

ఈ ఆవరణములో $\{2,3\},\{1,3,5\},\{4,6\},\{6\}$ మరియు $\{1,5\}$ అనునవి కొన్ని ఘటనలగును.

(i) $\{2,3\} \cup \{1,3,5\} \cup \{4,6\} = \{1,2,3,4,5,6\} = S$ (ప్రతిరూప ఆవరణము) అయితే $\{2,3\},\{1,3,5\},\{4,6\}$ లు పూర్ణఘటనలు అగును.

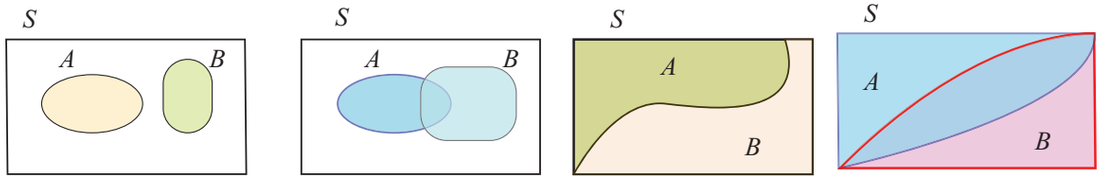
(ii) అదేవిధంగా $\{2,3\},\{4,6\}$ మరియు $\{1,5\}$ కూడా పూర్ణఘటనలగును.

(iii) $\{1,3,5\},\{4,6\},\{6\}$ మరియు $\{1,5\}$ అనునవి పూర్ణఘటనలు కావు.

(ఎందుకనగా $\{1,3,5\} \cup \{4,6\} \cup \{6\} \cup \{1,5\} \neq S$)

(iv) $\{2,3\},\{4,6\}$, మరియు $\{1,5\}$ మొదలగునవి పరస్పర వివర్జిత మరియు సంపూర్ణ ఘటనలు అగును. ఎందుకనగా $\{2,3\} \cap \{4,6\} = \varnothing, \{2,3\} \cap \{1,5\} = \varnothing, \{4,6\} \cap \{1,5\} = \varnothing$ మరియు $\{2,3\} \cup \{4,6\} \cup \{1,5\} = S$

క్రిందివ్వబడిన వెన్ చిత్రము ద్వారా ప్రతిరూప ఆవరణములో సంబంధం గల ఘటనల రకాలను సులభంగా దృష్ట్యాంతం చేసుకొనవచ్చును.



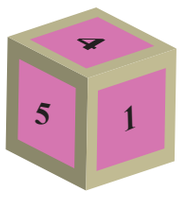
A మరియు B పరస్పర వివర్జిత ఘటనలు | A మరియు B పరస్పర అవివర్జిత ఘటనలు | A మరియు B పరస్పర వివర్జిత మరియు పూర్ణఘటనలు | A మరియు B పరస్పర అవివర్జిత మరియు పూర్ణఘటనలు

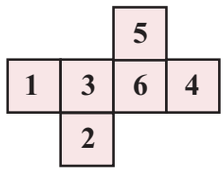
నిర్వచనము 12.12

ఘటనలు అవి సంభవించు అవకాశములు సమానంగా ఉన్న వానిని సమసంభవ ఘటనలు (Equally likely event) అని అంటారు.

(i) సమసంభవ ఘటనను ఉదాహరణ : ఒక నిస్పాక్షికమైన పాచికను దొర్లించబడినది అనుకొందాము.

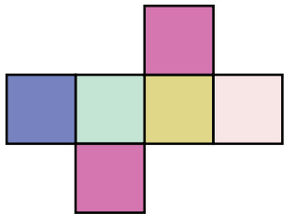
ముఖం మీద గల సంఖ్య	1	2	3	4	5	6
సంభవించు అవకాశములు	1	1	1	1	1	1





(ii) సమసంభవము కాని ఘటనలకు ఒక ఉదాహరణ : పటములో చూపిన రంగుపూయబడిన పాచికను దొర్లించుట.

ముఖంపై గల రంగు					
సంభవించు అవకాశములు	1	1	1	2	1





ఇదేవిధంగా ఒక నాణెమును ఎగురవేయుటలో బొమ్మ లేదా బొరుసు సంభవించుట అనునవి సమసంభవ ఘటనలు. ప్రతిరూప ఆవరణమును కనుగొను పద్ధతులు (Methods to find sample space)

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_12.indd 244 10-03-2023 12:26:19

వివరణ 12.5

రెండు నాణెములు ఎగురవేయునపుడు లభించు ప్రతిరూప ఆవరణము

(i) $S=\{H,T\}\times\{H,T\}=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$ లేక $\{HH,HT,TH,TT\}$

(ii) ఒకే సమయములో ఒక నాణెము ఎగురవేయుట మరియు ఒక పాచికను దొర్లించిన ఏర్పడు ప్రతిరూప ఆవరణము.

$S=\{H,T\}\times\{1,2,3,4,5,6\}=\{H1,H2,H3,H4,H5,H6,T1,T2,T3,T4,T5,T6\}$ లేదా

$S=\{(H,1),(H,2),(H,3),(H,4),(H,5),(H,6),(T,1),(T,2),(T,3),(T,4),(T,5),(T,6)\}$.

నాణెము మరియు పాచికచే లభించు ఫలితములు క్రమమును పరస్పరం మార్చవచ్చును. కొన్ని యాదృచ్ఛిక ప్రయోగములో లభించు ప్రతి రూప ఆవరణములు ఈ క్రింది పట్టికలో పట్టికపరచబడియున్నది.

యాదృచ్ఛిక ప్రయోగము	ఫలితముల మొత్త సంఖ్య	ప్రతిరూప ఆవరణము
ఒక నిస్పాక్షిక నాణెమును ఎగురవేయుట	$2^1=2$	$\{H,\ T\}$
రెండు నిస్పాక్షిక నాణెమును ఎగురవేయుట	$2^2=4$	$\{HH,\ HT,\ TH,\ TT\}$
మూడు నిస్పాక్షిక నాణెమును ఎగురవేయుట	$2^3=8$	$\{HHH,\ HHT,\ HTH,\ THH,\ HTT,\ THT,\ TTH,\ TTT\}$
ఒక నిస్పాక్షిక పాచికను దొర్లించిన	$6^1=6$	$\{1,\ 2,3,\ 4,\ 5,6\}$
రెండు నిస్పాక్షిక పాచికలు దొర్లించిన (లేదా) ఒక పాచికను రెండు సార్లు దొర్లించిన	$6^2=36$	$\{(1,1),(1,2),\ (1,3),\ (1,4),\ (1,5),\ (1,6),$ $(2,1),\ (2,2),\ (2,3),\ (2,4),\ (2,5),\ (2,6),$ $(3,1),\ (3,2),\ (3,3),\ (3,4),\ (3,5),\ (3,6),$ $(4,1),\ (4,2),\ (4,3),\ (4,4),\ (4,5),\ (4,6),$ $(5,1),\ (5,2),\ (5,3),\ (5,4),\ (5,5),\ (5,6),$ $(6,1),\ (6,2),(6,3),\ (6,4),\ (6,5),\ (6,6)\}$
52 పేక ముక్కల నుండి ఒక ముక్కను ఎన్నుకొనుము.	$52^1=52$	హార్ట్ ♥ A 2 3 4 5 6 7 8 9 10 J Q K ఎరుపురంగు డైమోండ్ ♦ A 2 3 4 5 6 7 8 9 10 J Q K ఎరుపురంగు స్పేడ్ ♠ A 2 3 4 5 6 7 8 9 10 J Q K నలుపురంగు క్లావర్ ♣ A 2 3 4 5 6 7 8 9 10 J Q K నలుపురంగు

సంకేతములు (Notations)

A మరియు B అనునవి రెండు ఘటనలు అనుకొనుము.

(i) $A\cup B$ అనునది A లేదా B లేదా రెండునూ సంభవించును.

(ii) $A\cap B$ అనునది A మరియు B ఒకే సమయములో సంభవించును.
$A\cap B$ ను AB అని కూడా వ్రాయవచ్చును.

(iii) $\overline{A}$ లేదా A' లేదా A^c అనునది A సంభవించని దానిని తెల్పును.

(iv) $(A\cap\overline{B})$ అనునది A మాత్రము సంభవించునని తెల్పును.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_12.indd 245 10-03-2023 12:26:19

12.4 సంభావ్యత (PROBABILITY)

12.4.1 సంభావ్యత సాంప్రదాయక (లేదా ముందు) నిర్వచనం (Classical definition (A priori) of probability) (బెర్నౌలి సమసంభవ నియమము) (Bernoulli's principle of equally likely)

ముందు: అనుభవము లేదా పరిశీలన మూలముగా కాకుండా సైద్ధాంతిక నిరూపణ లేదా ఊహించుకొనుట ద్వారా పొందిన జ్ఞానము

మనము ముందు తరగతిలో సంభావ్యత యొక్క పౌన:పున్య నిర్వచనం (A posteriori) అధ్యయనం చేసి మరియు సమస్యలను సాధించాము. ప్రస్తుతము మనము సంభావ్యత సిద్ధాంతంకు స్వీకృత విధానము యొక్క ప్రాథమిక నియమాలను నేర్చుకొందాము.

అనుభవము లేదా పరిశీలన ద్వారా పొందిన జ్ఞానము

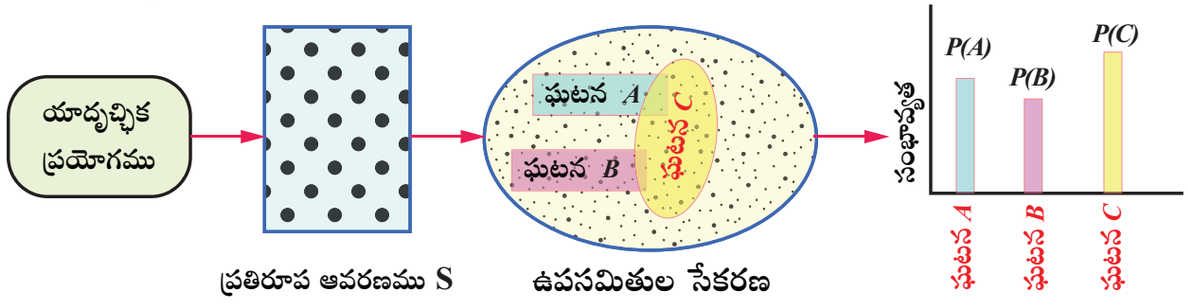
సాంప్రదాయక సిద్ధాంతంకు ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగము యొక్క ఫలితాలు సమసంభవాలు అని ప్రధానంగా ఊహించుకొందాము. ఒక ప్రయోగంలో n పరస్పర వివర్జిత సమసంభవ పూర్ణ ఫలితాలు మరియు వానిలో ఘటన A యొక్క అనుకూల ఫలితాలు m అయిన గణితాత్మకంగా A యొక్క సంభావ్యతను $\frac{m}{n}$ నిష్పత్తిగా నిర్వచిస్తాము. మరొక విధంగా $P(A)=\frac{m}{n}$. అని వ్రాస్తాము.

నిర్వచనము 12.13

ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగంలో ప్రతిరూప ఆవరణము S గా మరియు ఒక ఘటన A గా తీసుకొనుము. S మురియు A లో ఉన్న మూలకముల సంఖ్య వరుసగా $n(S)$ మరియు $n(A)$ అయిన ఘటన A యొక్క సంభావ్యత క్రింది విధంగా నిర్వచిస్తాము.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{A \text{ కు అనుకూల ఫలితముల సంఖ్య}}{S \text{ లో ఉన్న పూర్ణ ఘటనల ఫలితముల సంఖ్య}}$$

ప్రతి సంభావ్యత నమూనాలో గల అంతర్లీన ప్రక్రియను క్రింది చిత్రములో చూపబడినది.



సంభావ్యత యొక్క సాంప్రదాయక నిర్వచన అనువర్తనమును పరిమిత సంఖ్య ఉన్న సాధ్యమైన ఫలితములు కల్గిన పరిస్థితులకు మాత్రమే పరిమితం (limitations) చేయబడినది. ఇది ముఖ్యంగా వివక్త ఘటనలను మాత్రమే పరిగణనలో చేసుకొంటుంది. మరియు దీని యొక్క పద్ధతులు ముఖ్యంగా సంయోగాత్మమైనది. "ఒక నాణెంను బొమ్మ వచ్చు వరకు ఎగురవేయుట" వంటి కొన్ని యాదృచ్ఛిక ప్రయోగాలను ఈ నిర్వచనంను అనువర్తింపచేయలేమని ఈ సంయోగాత్మకత తెలియచేస్తుంది. ఈ యాదృచ్ఛిక ప్రయోగంలో వచ్చు వీలగు ఫలితాల సమితి ఒక అపరిమిత సమితి కావున సాంప్రదాయక నిర్వచనంకు మరొక పరిమితము (limitations) ఏమనగా ప్రతి ఫలితము "సమసంభవాలు" గా ఉండాలని నిబంధన విధించారు.

సంభావ్యత యొక్క సాంప్రదాయక నిర్వచనములోని ఇటువంటి షరతులు, సంభావ్యత యొక్క ఆధునిక నిర్వచనము యొక్క వికాస అభివృద్ధికి దారి తీసింది.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_12.indd 246 10-03-2023 12:26:20

ఈ ఆధునిక నిర్వచనము సమితి భావనపై ఆధారపడును. దీనిని స్వీకృత పద్ధతి అంటారు.


A.N. కోల్మోగోరోవ్

రష్యోగణిత శాస్త్రవేత్త ఆండ్రీ నికోలాయోవిచ్ కోల్మోగోరోవ్ ఆధునిక సంభావ్యత సిద్ధాంతమునకు పునాదివేసెను. ఈయన రిచర్డ్ వాన్‌మైషన్ పరిచయం చేసిన ప్రతిరూప ఆవరణ సంకేతమును మరియు మెషర్ (కొలత) సిద్ధాంతమును సంయోగం చేసి 1933లో సంభావ్యత సిద్ధాంతమునకు తన యొక్క స్వీకృత వ్యవస్థను సమర్పించారు. A.N. కోల్మోగోరోవ్‌చే ప్రతిపాదించబడిన స్వీకృత విధానమును మేము పరిచయం చేసాము. దీని ఆధారంగా సంభావ్యత సిద్ధాంతం యొక్క ఆధునిక సిద్ధాంతమునకు ఒక తర్కీయ భాద్యత నిర్మాణంను నిర్మించుటకు వీలగును. సంభావ్యత యొక్క సాంప్రదాయక సిద్ధాంతం అనునది స్వీకృత సంభావ్యత యొక్క ప్రత్యేక సందర్భము. ఈ స్వీకృతముల నియమములు సంభావ్యత సిద్ధాంతములను నిరూపించుటకు ఉపయోగపడును.

12.4.2 సంభావ్యతకు స్వీకృత విధానము (Axiomatic approach to Probability)

సంభావ్యత యొక్క స్వీకృతాలు (Axioms of probability)

$\mathscr{P}(S)$. ను ఒక పరిమిత ప్రతిరూప ఆవరణ అనుకొందాము, P అనునది $\mathscr{P}(S)$ ఘటనల యొక్క తరగతి అనుకొందాము, మరియు P అనునది $\mathscr{P}(S)$ పై నిర్వచించిన ఒక వాస్తవ విలువ ప్రమేయము అనుకొందాము. క్రింది స్వీకృతములను పాటించినట్లయితే $P(A)$ ను ఘటన A యొక్క సంభావ్యత ప్రమేయము అంటారు.

$[P_1]$ ఏదేని ఒక ఘటన A, నకు $P(A) \geq 0$ (ఋణేతర స్వీకృతం) (Non-negativity axiom)

$[P_2]$ ఏదేని రెండు పరస్పర వివర్జిత ఘటనలకు

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \text{(సంకలన స్వీకృతం) (Additivity axiom)}$$

$[P_3]$ నిర్దిష్టఘటనకు $P(S) = 1$ (సామాన్య స్వీకృతం) (Normalization axiom)

గమనిక **12.1**

(i) $0 \leq P(A) \leq 1$

(ii) ప్రతిరూప ఆవరణము $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ S అనునవి పరస్పర నివర్జిత ఘటనలు,

అయిన $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots + P(A_n)$

పరిమిత సంభావ్యత అంతరాళములో సిద్ధాంతములు (నిరూపణ లేకుండ)

ఫలితాలు సమసంభవ ఘటనలు అయిన సిద్ధాంతము 12.1 ను ఉపయోగించవచ్చును. ఆ విధంగా లేకపోతే 12.2 సిద్ధాంతాన్ని ఉపయోగించవచ్చును.

సిద్ధాంతము 12.1

S ఒక ప్రతిరూప ఆవరణములో మరియు S యొక్క ఏదేని ఒక ఉపసమితి A నకు $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$.

అయిన $P(A)$ అనునది $[P_1], [P_2]$, మరియు $[P_3]$ అను సంభావ్యత స్వీకృతములను సంతృప్తి పరచును.

సిద్ధాంతము12.2

$S = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$. అనునది ఒక పరిమిత ప్రతిరూప ఆవరణము అనుకొనుము. S లోని ప్రతి బిందువు a_i కు ఒక వాస్తవ సంఖ్య p_i, ను

కేటాయించుట ద్వారా ఒక పరిమిత సంభావ్యత అంతరాళంను పొందుతాము. క్రింది ధర్మాలను పాటిస్తే ఈ p_i, ను a_i యొక్క సంభావ్యత అంటారు.

(i) ప్రతి $p_i \geq$. (ii) p_i మొత్తము 1, అనగా, $\sum p_i = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_1 = 1$.

ఘటన A యొక్క సంభావ్యత $P(A)$ ను A లోని బిందువుల యొక్క సంభావ్యతం మొత్తంగా నిర్వచించినట్లయితే ప్రమేయము $P(A)$, $[P_1], [P_2]$, మరియు $[P_3]$ అను సంభావ్యత స్వీకృతములను సంతృప్తి పరుచును.

గమనిక: కొన్ని సందర్భములలో ఒక పరిమిత, ప్రక్రియకు ఆవరణములోనున్న ఆవరణ బిందువులకు వానికి కేటాయించిన సంభావ్యతలు పట్టిక రూపంలో క్రింది విధంగా ఉంటుంది.

ఫలితము	$a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ldots\ldots a_n$
సంభావ్యత	$p_1\ p_2\ p_3\ \ldots\ldots\ldots p_n$

ఒక నమూనాను గూర్చి కొన్ని భావ ఊహల నుండి ప్రారంభించి ఒక సంభావ్యత న్యాయంను ఏ విధంగా నిర్మించాలో క్రింది వివరణ తెలియజేయును.

వివరణ **12.6**

(1) $S = \{1, 2, 3\}$. అనుకొనుము. $\mathcal{P}(S)$ అనునది S యొక్క ఘాతసమితి మరియు $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)}$

అయిన $P(\{1\}) = \dfrac{1}{3}$, $P(\{2\}) = \dfrac{1}{3}$ మరియు $P(\{3\}) = \dfrac{1}{3}$

అనునవి సంభావ్యత యొక్క స్వీకృతములు $[P_1], [P_2]$ మరియు $[P_3]$ లను సంతృప్తి పరుచును ఇక్కడ గల అన్ని ఫలితములు సమసంభవాలు.

(2) $S = \{1, 2, 3\}$. అనుకొనుము. $\mathcal{P}(S)$ అనునది S,

యొక్క ఘాతసమితి అగును. A లోని బిందువుల యొక్క సంభావ్యతల మొత్తముగా సంభావ్యత $P(A)$ ను నిర్వచించినట్లయితే A

$P(\{1\}) = \dfrac{1}{2}$, $P(\{2\}) = \dfrac{1}{4}$, $P(\{3\}) = \dfrac{1}{4}$ అనునవి

సంభావ్యత స్వీకృతములు $[P_1], [P_2]$, మరియు $[P_3]$ లను సంతృప్తి పరుచును.

(3) $S = \{1, 2, 3\}$ మరియు $\mathcal{P}(S)$ అనునది S యొక్క ఘాతసమితి అగును. A లోని బిందువుల యొక్క సంభావ్యతల మొత్తంగా సంభావ్యత $P(A)$ను నిర్వచించినట్లయితే

$P(\{1\}) = 0$, $P(\{2\}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, మరియు $3P(\{1\}) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

అనునవి సంభావ్యత స్వీకృతములు $[P_1], [P_2]$, మరియు $[P_3]$ లను సంతృప్తి పరుచును

(2) మరియు (3) లోని ఫలితములు సమసంభవ ఘటనలు కావు.

గమనిక **12.2**

సంభావ్యత విలువలు కరణీయ సంఖ్యలుగాను ఉండవచ్చును.

తరగతి కృత్యము: ప్రతి విద్యార్థి ఒక నాణెంను 10 సార్లు ఎగురవేసినపుడు

గణించుట: $p = \dfrac{\text{బొమ్మ ఎన్నిసార్లు వచ్చును}}{10}$

$p \to \dfrac{1}{2}$ అగునట్లు నాణెమును ఎగురవేయు సంఖ్యను పెంచినప్పుడు నాణెమును ఎగురవేయుటకు బొమ్మలు యొక్క సంచిత నిష్పత్తిను కనుగొనుము.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_12.indd 248 10-03-2023 12:26:24

ఉదాహరణ 12.1

ఒక ప్రయోగము $A, B,$ మరియు C అను ఖచ్చితంగా మూడు వీలగు పరస్పర వివర్జిత ఫలితాలు ఉన్నట్లయితే ప్రతిసందర్భంలో కేటాయించిన సంభావ్యత అనుమతించతగినదా సరిచూడుము.

(i) $P(A)=\frac{4}{7}$, $P(B)=\frac{1}{7}$, $P(C)=\frac{2}{7}$.

(ii) $P(A)=\frac{2}{5}$, $P(B)=\frac{1}{5}$, $P(C)=\frac{3}{5}$.

(iii) $P(A)=0.3$, $P(B)=0.9$, $P(C)=-0.2$.

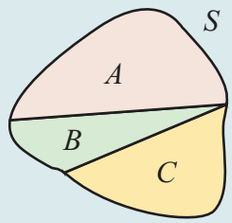
(iv) $P(A)=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $P(B)=1-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $P(C)=0$.

(v) $P(A)=0.421$, $P(B)=0.527$ $P(C)=0.042$.

సాధన

ఈ ప్రయోగములో సరిగ్గా మూడు సరస్పర వివర్జిత ఫలితములు మాత్రమే ఉన్నది. కావున అవి పూర్ణఘటనలగును.

$\Rightarrow S = A \cup B \cup C$



కావున సంభావ్యత స్వీకృతం నుంచి

$P(A) \geq 0,\quad P(B) \geq 0,\quad P(C) \geq 0$ మరియు

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) = P(S) = 1$ అగును.

(i) $P(A)=\frac{4}{7} \geq 0$, $P(B)=\frac{1}{7} \geq 0$, **మరియు** $P(C)=\frac{2}{7} \geq 0$

మరియు $P(S) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{4}{7} + \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = 1$

కావున ఇవ్వబడిన సంభావ్యతలు అనుమతించతగినది.

(ii) $P(A)=\frac{2}{5} \geq 0$, $P(B)=\frac{1}{5} \geq 0$, **మరియు** $P(C)=\frac{3}{5} \geq 0$

కానీ $P(S) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{6}{5} > 1$

కావున ఈ ఇవ్వబడిన సంభావ్యతలు అనుమతించతగినది కాదు.

(iii) $P(C) = -0.2$ ఋణాత్మక సంఖ్యగా ఉన్నందున ఇవ్వబడిన ఈ సంభావ్యతలు అనుమతించతగినది కాదు.

(iv) ఈ కేటాయింపు అనుమతించతగినది ఎందుకనగా

$P(A)=\frac{1}{\sqrt{3}} \geq 0$, $P(B)=1-\frac{1}{\sqrt{3}} \geq 0$, మరియు $P(C)=0 \geq 0$

పైగా $P(S) = P(A)+P(B)+P(C)=\frac{1}{\sqrt{3}}+1-\frac{1}{\sqrt{3}}+0=1.$

(v) $P(A)=0.421 \geq 0$, $P(B)=0.527 \geq 0$ మరియు $P(C)=0.042 \geq 0$ అని ఉండిననూ

$P(S) = P(A)+P(B)+P(C)=0.421+0.527+0.042=0.990<1$. కావున ఈ ఇవ్వబడిన సంభావ్యతలు అనుమతించతగినది కాదు.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_12.indd 249 10-03-2023 12:26:33

ఉదాహరణ 12.2

మొదటి 10 ధనాత్మక పూర్ణసంఖ్య నుండి ఒక సంఖ్యను ఎంచుకొనబడెను. ఆ సంఖ్య (i) సరిసంఖ్యవచ్చుటకు (ii) 3 యొక్క గుణిజములుగా ఉండుటకు సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన

ప్రతిరూప ఆవరణము $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $n(S)=10$

A అనునది సరిసంఖ్య వచ్చు ఘటన అనుకొనుము B అనునది మూడు యొక్క గుణిజములు వచ్చుఘటన అని అనుకొనుము.

$\ddot{u}=\{2, 4, 6, 8, 10\}$, $(\ )=5$,

$B=\{3, 6, 9\}$, $n(B)=3$

$$P(\text{సరిసంఖ్య వచ్చుటకు})=P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}.$$

$$P(\text{మూడు యొక్క గుణిజములు వచ్చుటకు})=P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{3}{10}.$$

ఉదాహరణ 12.3

మూడు నాణెములు ఒకేసారి ఎగురవేయబడినది. (i) ఖచ్చితంగా ఒక బొమ్మ (ii) కనీసము ఒక బొమ్మ (iii) గరిష్ఠముగా ఒక బొమ్మ వచ్చుటకు సంభావ్యతను కనుగొనుమము.

సాధన:

మూడు నాణెములను ఒకసారి ఎగురవేయుట = ఒక నాణెమును మూడుసార్లు ఎగురవేయుట అని గమనించుము.

ప్రతిరూప ఆవరణము $S=\{H,T\}\times\{H,T\}\times\{H,T\}$

$$S=\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH,TTT\},\ n(S)=8$$

A అనునది ఖచ్చితంగా ఒక బొమ్మవచ్చు ఘటన B అనునది కనీసము ఒక బొమ్మవచ్చు ఘటన మరియు C అనునది గరిష్ఠముగా ఒక బొమ్మవచ్చు ఘటన అని అనుకొనుము.

$$A=\{HTT,THT,TTH\};\ n(A)=3$$

$$B=\{HTT,THT,TTH,HHT,HTH,THH,HHH\};\ n(B)=7$$

$$C=\{TTT,HTT,THT,TTH\};\ n(C)=4$$

కావున కావలసిన సంభావ్యత

(i) $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{3}{8}$

(ii) $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}=\dfrac{7}{8}$

(iii) $P(C)=\dfrac{n(C)}{n(S)}=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}.$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_12.indd 250 10-03-2023 12:26:45

గమనిక 12.3



ప్రతిరూప ఆవరణములో ఉన్న మూలకముల సంఖ్య మిక్కిలి తక్కువగా ఉన్నప్పుడు ఘటనలోని మూలకములను చేతి వ్రేళ్ళనుపయోగించి మనము సాధించవచ్చును. కానీ, మూలకముల సంఖ్య మిక్కిలి పెద్దదిగా ఉండిన సంయోగాల combinatorics పద్ధతిని ఉపయోగించి సమస్యలను సాధించవచ్చును.

క్రిందిచ్చిన సమస్యతో ప్రతిరూప ఆవరణంలోని మూలకముల సంఖ్యను కనుగొనుటకు సంయోగాల (combinatorics) ను ఉపయోగిస్తాము.

ఉదాహరణ 12.4

10 నాణెములు ఎగురవేయబడినది. (i) ఖచ్చితంగా రెండు బొమ్మలు (ii) గరిష్ఠముగా రెండు బొమ్మలు (iii) కనీసము రెండు బొమ్మలు వచ్చుటకు సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన

ఒకే సమయములో 10 నాణెములను ఎగురవేయుట అనునది ఒకే నాణెమును 10 సార్లు ఎగురవేయు

S ప్రతిరూప ఆవరణము అనుకొనుము. 10 సార్లు

అదేమనగా $\underbrace{\{\ ,\ \}\times\{\ ,\ \}\times\{\ ,\ \}\times\cdots\times\{\ ,\ \}}$

A అనునది ఖచ్చితంగా రెండు బొమ్మలు వచ్చు ఘటన

B అనునది గరిష్ఠముగా రెండు బొమ్మలు వచ్చు ఘటన

C అనునది కనీసము రెండు బొమ్మలు వచ్చు ఘటన అని అనుకొనుము.

10 నాణెములను ఎగురవేయునపుడు ప్రతిరూప ఆవరణంలో గల మూలకముల సంఖ్య $2^n = 2^{10} = 1024$

$$n(S) = 1024$$

$$n(A) = {}^{10}C_2 = 45$$

$$n(B) = {}^{10}C_0 + {}^{10}C_1 + {}^{10}C_2 = 1 + 10 + 45 = 56$$

$$n(C) = {}^{10}C_2 + {}^{10}C_3 + {}^{10}C_4 + \cdots + {}^{10}C_{10}$$

$$= n(S) - ({}^{10}C_0 + {}^{10}C_1) = 1024 - 11 = 1013$$

కావలసిన సంభావ్యతలు

(i) $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{45}{1024}$

(ii) $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)} = \dfrac{56}{1024} = \dfrac{7}{128}$

(iii) $P(C) = \dfrac{n(C)}{n(S)} = \dfrac{1013}{1024}.$

ఉదాహరణ 12.5

ఒక నిష్పాక్షిక పాచికను దొర్లించినపుడు

(i) సరిసంఖ్యవచ్చుటకు(ii) 3 యొక్క గుణిజములు వచ్చుటకు సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన

S అనునది ప్రతిరూప ఆవరణ అనుకొనుము.

A అనునది సరిసంఖ్య వచ్చుటకు ఘటన

B అనునది 3 యొక్క గుణిజములు వచ్చు ఘటనలు

అనుకొనుము.

కావున

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$ $\Rightarrow n(S) = 6$

$A = \{2, 4, 6\}$ $\Rightarrow n(A) = 3$

$B = \{3, 6\}$ $\Rightarrow n(B) = 2$

కావలసిన సంభావ్యత

(i) P (సరిసంఖ్య వచ్చుటకు) $= P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

(ii) P (మూడు యొక్క గుణిజములు వచ్చుటకు) $= P(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}.$

ఉదాహరణ 12.6

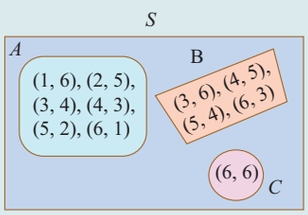
రెండు పాచికలను దొర్లించిన వాటి విలువల మొత్తము

(i) 7 (ii) 7 లేక 9 (iii) 7 లేక 12 వచ్చుటకు సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన

ప్రతిరూప ఆవరణ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

S = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),
(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),
(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),
(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),
(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),
(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}



సాధ్యమగు ఫలితముల సంఖ్య= $6^2 = 36 = n(S)$

A అనునది మొత్తము 7 వచ్చు ఘటన, B అనునది మొత్తము 9 వచ్చుఘటన మరియు C అనునది మొత్తము 12 వచ్చుఘటన అనుకొనుము.

$A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$ $\Rightarrow n(A) = 6$

$B = \{(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)\}$ $\Rightarrow n(B) = 4$

$C = \{(6,6)\}$ $\Rightarrow n(C) = 1$

(i) P (మొత్తము 7 వచ్చుటకు) $= P(A)$

$$= \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_12.indd 252 10-03-2023 12:26:47

(ii) P (7 లేక 9 వచ్చుటకు) $= P(A$ లేక $B) = P(A \cup B)$

$= P(A) + P(B)$

A మరియు B పరస్పర వివర్జిత ఘటనలగును. $A \cap B = \varnothing$)

$$= \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{36} + \frac{4}{36} = \frac{5}{18}$$

(iii) P (7 లేక 12 వచ్చుటకు) $= P(A$ లేక $C) = P(A \cup C)$

$= P(A) + P(C)$ A మరియు C పరస్పర వర్జిత ఘటనలు

$$= \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{6}{36} + \frac{1}{36} = \frac{7}{36}.$$

ఉదాహరణ 12.7



ప్రస్తుత సంవత్సరములో జరుగు FIDE చదరంగ పోటీలో (World Chess Federation) కప్పును గెలుపొందుటకు X, Y, మరియు Z అను ముగ్గురు వ్యక్తులు పోటీ చేయుచున్నారు. X గెలుపొందుట Y గెలుపొందుటకు 3 రెట్లు మరియు Y గెలుపొందుట Z గెలుపొందుటకు 2 రెట్లు అయిన X, Y,మరియు Z లు కప్పును గెలుపొందుటకు సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన:

ప్రస్తుత సంవత్సరములో FIDE కప్పును X, Y మరియు Z గెలుపొందు ఘటనలు వరుసగా A, B మరియు C అనుకొనుము.

X గెలుపొందుట Y గెలుపొందుటకు 3 రెట్లుండును. కావున

$$A : B :: 3 : 1. \qquad (1)$$

Y గెలుపొందుట Z గెలుపొందుటకు 2 రెట్లుండును.

$$B : C :: 2 : 1 \qquad (2)$$

(1) మరియు (2) ల నుండి

$$A : B : C :: 6 : 2 : 1$$

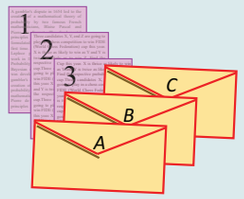
$A = 6k$, $B = 2k$, $C = k$, ఇచ్చట k అనునది ఒక అనుపాత స్థిరాంకము.

కప్పును X గెలుపొందుటకు సంభావ్యత $P(A) = \frac{6k}{9k} = \frac{2}{3}$

కప్పును Y గెలుపొందుటకు సంభావ్యత $P(B) = \frac{2k}{9k} = \frac{2}{9}$ మరియు

కప్పును Z గెలుపొందుటకు సంభావ్యత $P(C) = \frac{k}{9k} = \frac{1}{9}$.

ఉదాహరణ 12.8



వేర్వేరు ముగ్గురు వ్యక్తులకు మూడు లేఖలు వ్రాయబడినది మరియు మూడు కవర్లపై వారి చిరునామ వ్రాయబడినది చిరునామాలను చూడకుండానే లేఖలను కవర్లలో ఉంచిన

(i) ఖచ్చితంగా ఒక లేఖ సరైన కవరులో ఉంచుటకు (ii) అన్ని లేఖలను సరియైన కవరులో ఉంచకుండుటకు సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన

$A, B,$ మరియు C అనునవి కవర్లను మరియు 1,2 మరియు 3 అనునవి వరుసగా వాని లేఖలను చూపునని అనుకొనుము

లేఖలను కవర్లులో ఉంచుటకు సాధ్యమగు అన్ని సంయోగాలు పట్టికలో ఇవ్వబడియున్నది.

ఫలితములు

కవర్లు	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6
A	1	1	2	2	3	3
B	2	3	1	3	1	2
C	3	2	3	1	2	1

c_i అనునది ఫలిత ఘటనలు అనుకొనుము.

X అనునది ఒకే ఒక లేఖను మాత్రమే సరియైన కవరులో ఉంచుఘటన అనుకొనుము.

Y అనునది మూడు లేఖలు సరియైన కవరులో ఉంచని ఘటన అని అనుకొనుము.

$S=\{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\},\ n(S)=6$

$$X=\{c_2, c_3, c_6\}, \qquad n(X)=3$$
$$Y=\{c_4, c_5\} \qquad n(Y)=2$$
$$P(X)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2} \quad P(Y)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

ఉదాహరణ 12.9

$M=\begin{bmatrix} x & y \\ z & 1 \end{bmatrix}$ అను మాత్రికను తీసుకొందాము. x,y మరియు z లు సమితి $\{1,2,3\}$నుండి యాదృచ్ఛికంగా ఎన్నుకోబడును మరియు పునరావృతం అనుమతించబడినది. $(i.e., x=y=z)$, అయిన మాత్రిక M అసాధారణ మాత్రికగా ఉండుటకు సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన

M , అసాధారణ మాత్రిక అయిన అంటే

$$\begin{vmatrix} x & y \\ z & 1 \end{vmatrix}=0.$$

అంటే, $x-yz=0.$

(x,y,z) లను ఎన్నుకొనుటకు వీలగు మార్గములు

$\{(1,1,1),(2,1,2),(2,2,1),(3,1,3),(3,3,1)\}=A$ అనుకొనుము

అనుకూల ఫలితాల సంఖ్య $n(A)=5$

మొత్తము ఫలితాల సంఖ్య $n(S)=3^3=27$

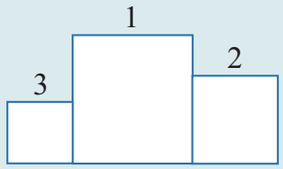
ఇవ్వబడిన మాత్రిక అసాధారణ మాత్రికగా ఉండుటకు

సంభావ్యత $p=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{5}{27}.$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_12.indd 254 10-03-2023 12:26:52

ఉదాహరణ 12.10

ఒక క్రీడా ఉత్సవం కొరకు గెలిచిన వారు నిలబడు కొయ్యదిమ్మెలు (wooden blocks) పటములో చూపినట్లు అమర్చబడియున్నది. ఎరుపు రంగుతో సహా ఆరు రంగులనుపయోగించి మూడు బ్లాకులకు, ఏ రెండింటికి ఒకే రంగు రానట్లు రంగులను పూయవలెను. చిన్న బ్లాకుకు ఎరుపు రంగు పూయబడుటకు సంభావ్యతను కనుగొనండి. ఇక్కడ ఆరు రంగులలో ఎరుపు ఒకటి.



సాధన

S అనునది ప్రతిరూప ఆవరణ అనుకొనుము. A అనునది చిన్నబ్లాకుకు ఎరుపు రంగు గల ఘటన అనుకొనుము.

$$n(S) = {}^{6}P_{3} = 6\times5\times4 = 120$$

$$n(A) = 5\times4 = 20$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}.$$

	6	6	3
$n(S)$	6	5	4
$n(A)$	5	4	ఎరుపు

12.4.3 అనుకూల మరియు ప్రతికూల నిష్పత్తులు (ODDS)

సాంఖ్యకశాస్త్రము మరియు సంభావ్యతలో **ODDS** అనుపదమును తరచుగా ఉపయోగిస్తాము. ఒక ఘటన A యొక్క అనుకూల అవకాశములను దాని యొక్క ప్రతికూల అవకాశములతో సంబంధపరచును. 'a' అనునది ఒక ఘటన సంభవించే మార్గముల సంఖ్యను 'b' అనునది ఆ ఘటన సంభవించకుండా ఉండు మార్గముల సంఖ్యను సూచించును అని అనుకొనుము.

ఘటన A యొక్క ODDS దానికి అనుకూలంగా $a : b$ అగును మరియు

$$P(A) = \frac{a}{a+b}.$$

ఒక ఘటన యొక్క అనుకూల నిష్పత్తి $a : b$ గా సూచించుట అనేది ఆ ఘటన యొక్క ప్రతికూల నిష్పత్తి $b : a$ అని చెప్పుట ఒకటే అగును.

ఒక ఘటన యొక్క సంభావ్యత p అయితే ఇది సంభవించుటకు అనుకూల నిష్పత్తి $p : (1-p)$ మరియు దీని యొక్క సంభవంనకు ప్రతికూల నిష్పత్తి $(1-p) : p$.

వివరణ 12.7

(i) ఒక పాచిక ఒకసారి దొర్లించబడిన ప్రతిరూప ఆవరణము S అని మరియు 5 లభించే ఘటన A అనుకొనుము.



$n(S) = 6$, $n(A)$ = మరియు $n(\overline{A}) = 5$.

దీనిని క్రింది విధంగా కూడ వివరించవచ్చును.

A కు అనుకూలమగు నిష్పత్తి $1:5$ లేదా $\frac{1}{5}$, A నకు ప్రతికూల నిష్పత్తి $5:1$ లేదా $\frac{5}{1}$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(A)+n(\overline{A})} = \frac{1}{5+1} = \frac{1}{6} = \frac{n(A)}{n(S)}.$$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_12.indd 255 10-03-2023 12:26:53

(ii) B అను ఘటనకు అనుకూల నిష్పత్తి 3:5 అయిన $P(B)=\frac{3}{8}$

(iii) C అను ఘటనకు ప్రతికూల నిష్పత్తి 4:11 అయిన $P(C)=\frac{11}{15}$.

ఉదాహరణ 12.11

2 పది రూపాయలు, 4 వంద రూపాయలు మరియు 6 ఐదు వందల రూపాయలు కాగితములు ఒక వ్యక్తి పాకెట్టు నందు గలదు. యాదృచ్ఛికంగా రెండు కాగితములు తీసుకొనిన ఆ రెండు కాగితములు నూరు రూపాయల కాగితములుగా ఉండుటకు అనుకూల నిష్పత్తి మరియు దాని సంభావ్యతను కూడ కనుగొనుము.

సాధన

S అనునది ప్రతిరూప ఆవరణము మరియు నూరు రూపాయల కాగితమును ఎన్నుకొను ఘటన A అనుకొనుము.

కావున, $n(S)=12c_2=66$, $n(A)=4c_2=6$ మరియు $n(\bar{A})=66-6=60$

A నకు అనుకూల నిష్పత్తి 6: 60 అనగా

A కు అనుకూల నిష్పత్తి 1: 10, మరియు $P(A)=\frac{1}{11}$.

అభ్యాసము 12.1

(1) ఒక ప్రయోగంలో A, B, C మరియు D అను నాలుగు పరస్పర వర్జిత మరియు పూర్ణ ఘటనలు గలవు. క్రిందివ్వబడిన సంభావ్యత కేటాయింపులు అనుమతించతగినదా అని సరిచూడుము.

(i) $P(A)=0.15$, $P(B)=0.30$, $P(C)=0.43$, $P(D)=0.12$

(ii) $P(A)=0.22$, $P(B)=0.38$, $P(C)=0.16$, $P(D)=0.34$

(iii) $P(A)=\frac{2}{5}$, $P(B)=\frac{3}{5}$, $P(C)=-\frac{1}{5}$, $P(D)=\frac{1}{5}$

(2) రెండు నాణెములు ఒకే సమయంలో ఎగురవేయబడినది.

(i) ఒక బొమ్మ మరియు ఒక బొరుసు వచ్చుటకు

(ii) గరిష్టముగా రెండు బొరుసులు వచ్చుటకు సంభావ్యతను కనుగొనుము.

(3) ఒక పెట్టెలో 5 మామిడి పండ్లు మరియు 4 ఆఫిల్ పండ్లు గలవు. యాదృచ్ఛికంగా రెండు పండ్లను ఎన్నుకొనిన (i) ఒక మామిడి మరియు ఒక ఆఫిల్ వచ్చుటకు (ii) రెండూ ఒకేరకంగా ఉండుటకు సంభావ్యతను కనుగొనుము.

(4) (i) ఒక సాధారణ సంవత్సరంలో (ii) ఒక లీపు సంవత్సరములో 53 ఆదివారములు కల్గియుండుటకు సంభావ్యతను కనుగొనుము.

(5) ఎనిమిది నాణెములును ఒకసారి ఎగురవేయబడినది

(i) ఖచ్చితంగా రెండు బొరుసులు (ii) కనీసము రెండు బొరుసులు

(iii) గరిష్ఠముగా రెండు బొరుసులు పొందుటకు సంభావ్యతను కనుగొనుము.

(6) మొదటి 100 ధన పూర్ణ సంఖ్యల నుండి ఒక సంఖ్య ఎన్నుకొనబడినది. అది ఒక ప్రధానంకము లేదా 8 యొక్క గుణిజముగా ఉండుటకు సంభావ్యతను కనుగొనుము.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_12.indd 256 10-03-2023 12:26:54

(7) ఒక సంచిలో 7 ఎరుపు మరియు 4 నలుపు బంతులు గలవు. యాదృచ్ఛికంగా 3 బంతులను తీయగా అవి

(i) అన్ని బంతులు ఎరుపురంగుగా ఉండుటకు

(ii) ఒక ఎరుపురంగు మరియు రెండు నలుపు రంగు బంతులు పొందుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.

(8) 52 పేక ముక్కల నుండి యాదృచ్ఛికంగా ఒక ముక్కను ఎన్నుకొనిన అది

(i) ఒక ఏస్ లేదా రాజు (ii) 6 లేదా దానికంటే తక్కువ గల సంఖ్య

(iii) రాణి లేదా 9 వచ్చుటకు సంభావ్యతను కనుగొనుము.

(9) ఒక క్రికెట్ సంఘములో 16 మంది సభ్యులు గలరు. వారిలో 5 మంది బౌలర్లు. వీరిలో 11 మంది కల్గిన ఒక గ్రూపులో కనీసము 3 బౌలర్లు ఎన్నుకొనుటకు సంభావ్యతను కనుగొనుము?

(10) (i) ఒక ఘటన A సంభవించుటకు అనుకూల నిష్పత్తి (ODDS) 5 నుంచి 7 అయిన $P(A)$ ను కనుగొనుము.

(ii) $P(B) = \frac{2}{5}$ అయిన ఘటన B సంభవించుటకు అనుకూల నిష్పత్తి (ODDS) ను కనుగొనుము.

12.5 సంభావ్యతపై కొన్ని ప్రాథమిక సిద్ధాంతములు (Some basic Theorems on Probability)

ఇంతవరకు సాధించిన సమస్యలన్నియూ పరస్పర వర్జిత ఘటలకు సంబంధించనది. కావున మనము $P(A$ లేక $B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ అను సూత్రమును ఉపయోగించాము. అయితే ఘటనలు పరస్పర అవర్జిత ఘటనలైన సంకలన స్వీకృతము $(A \cap B)$ ను రెండు సార్లు లెక్కించును. పరస్పర అవర్జిత ఘటనలకు మనకు వేరే సూత్రము కలదు.

సంభావ్యత సిద్ధాంతం యొక్క అభివృద్ధిలోని అన్ని ఫలితాలు, సంభావ్యత యొక్క స్వీకృతాలను మాత్రమే ఉపయోగించి ప్రత్యక్షంగా లేదా పరోక్షంగా ఉత్పాదించబడినది. సంభావ్యత యొక్క కొన్ని ముఖ్యమైన ప్రాథమిక సిద్ధాంతములను క్రింద ఉత్పాదించెదము.

సిద్ధాంతము 12.3

అసాధ్య ఘటన యొక్క సంభావ్యత శూన్యము అగును.

అనగా, $\boxed{P(\varnothing) = 0}$

నిరూపణ

అసాధ్యఘటనలో ఏ ప్రతిరూప ఆవరణ బిందువు ఉండదు.

కావున, $S \cup \varnothing = S$

$P(S \cup \varnothing) = P(S)$

$P(S) + P(\varnothing) = P(S)$ (S మరియు $\varnothing$ లు పరస్పర వర్జిత ఘటనలు)

$P(\varnothing) = 0$ ■

ఉదాహరణ 12.12

ఒక పాచికను దొర్లించినపుడు 7 లభించుటకు సంభావ్యతను కనుగొనుము.

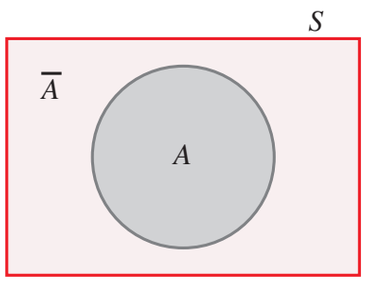
సాధన

7 పొందు ఘటన అసాధ్యఘటన అగును. కావున P (7 పొందుట) $= S$

సిద్ధాంతము 12.4

$\overline{A}$ అనునది A మొక్క పూరకఘటన అయిన

$$\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$$



నిరూపణ

S అనునది ప్రతిరూప ఆవరణము

$$A \cup \overline{A} = S$$

$$P(A \cup \overline{A}) = P(S)$$

$$P(A) + P(\overline{A}) = P(S) \text{ (ఎందుకనగా } A \text{ మరియు } \overline{A} \text{ పరస్పర వర్జితము)}$$

$$= 1$$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \text{ or } P(A) = 1 - P(\overline{A})$$

ఉదాహరణ 12.13

9 నాణెములను ఒకేసారి ఎగురవేయబడినది. కనీసము రెండు బొమ్మలుపడుటకు సంభావ్యతను కనుగొనుము?

సాధన

S అనునది ప్రతిరూప ఆవరణము మరియు కనీసము రెండు బొమ్మలు పడు ఘటన A అనుకొనుము. కావున, ఘటన $\overline{A}$ గరిష్ఠముగా ఒక బొమ్మపడు ఘటనను సూచించును.

$$n(S) = 2^9 = 512, \quad n(\overline{A}) = 9C_0 + 9C_1 = 1 + 9 = 10$$

$$P(\overline{A}) = \frac{10}{512} = \frac{5}{256}$$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{5}{256} = \frac{251}{256}$$

$\sum_{r=2}^{9} 9C_r$ లెక్కించుట కంటే
$\sum_{r=0}^{1} 9C_r$ ను లెక్కించుట సులభము

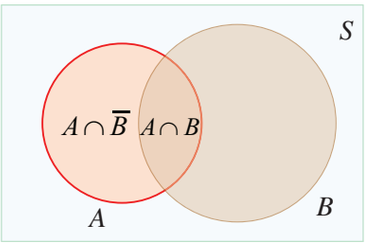
సిద్ధాంతము 12.5

A మరియు B అనునవి ఏదేని రెండు ఘటనలు మరియు $\overline{B}$ అనునది ఘటన B యొక్క పూరకము అయిన

$$\boxed{P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)}$$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_12.indd 258 10-03-2023 12:27:01

నిరూపణ



పటము నుండి

$$(A\cap\overline{B})\cup(A\cap B) = A$$

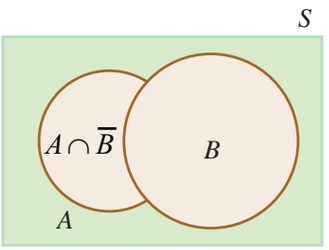
$$P\left[(A\cap\overline{B})\cup(A\cap B)\right] = P(A)$$

$$P(A\cap\overline{B})+P(A\cap B) = P(A)$$

$(A\cap\overline{B})$ మరియు $(A\cap B)$ పరస్పర వర్జిత ఘటనలు అగును.

$$P(A\cap\overline{B}) = P(A)-P(A\cap B)$$

సిద్ధాంతము 12.6 (సంభావ్యతకు సంకలన సిద్ధాంతము)



A మరియు B అనునవి ఏదేని రెండు ఘటనలు అయిన

$$\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$$

నిరూపణ

పటము నుండి

$$A\cup B = (A\cap\overline{B})\cup B$$

$$P(A\cup B) = P\left[(A\cap\overline{B})\cup B\right]$$

$$= P(A\cap\overline{B})+P(B) \text{ (ఎందుకనగా } (A\cap\overline{B}) \text{ మరియు } B \text{ పరస్పరవర్జిత ఘటనలు)}$$

$$= [P(A)-P(A\cap B)]+P(B)$$

కావున, $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

గమనిక 12.4

పై తెల్పిన సిద్ధాంతమును ఏదేని మూడు ఘటనలకు విస్తరించవచ్చును.

(i) $P(A\cup B\cup C) = \{P(A)+P(B)+P(C)\}$
$$-\{P(A\cap B)+P(B\cap C)+P(C\cap A)\}+P(A\cap B\cap C)\}$$

(ii) $P(A\cup B\cup C) = 1-P(\overline{A\cup B\cup C}) = 1-P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})$

ఉదాహరణ 12.14

$P(A) = 0.52,\ P(B) = 0.43$, మరియు $P(A\cap B) = 0.24$ మరియు

(i) $P(A\cap\overline{B})$ (ii) $P(A\cup B)$ (iii) $P(\overline{A}\cap\overline{B})$ (iv) üü¯∪¯ ను కనుగొనుము.

సాధన

(i) $P(A\cap\overline{B}) = P(A)-P(A\cap B)$

$$= 0.52-0.24 = 0.28$$

$$P(A\cap\overline{B}) = 0.28.$$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_12.indd 259 10-03-2023 12:27:05

(ii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= 0.52 + 0.43 - 0.24$

$P(A \cup B) = 0.71.$

(iii) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B})$ (డీమోర్గన్ సూత్రము ప్రకారము)

$= 1 - P(A \cup B)$

$= 1 - 0.71 = 0.29.$

(iv) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B})$ (డీమోర్గన్ సూత్రము ప్రకారము)

$= 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.24$

$= 0.76.$

ఉదాహరణ 12.15

పోటీ పరీక్షకు తయారగు ఒక మహిళకు రాష్ట్ర ప్రభుత్వ పని పొందుటకు సంభావ్యత 0.12 మరియు కేంద్ర ప్రభుత్వపని పొందుటకు సంభావ్యత 0.25 మరియు రెండింటిని పొందుటకు గల సంభావ్యత 0.07 అయిన ఆమె (i) రెండింటిలో కనీసము ఒకపనిని పొందుటకు సంభావ్యత (ii) రెండు పనిలో ఒక పని మాత్రమే పొందుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన

I అనునది రాష్ట్ర ప్రభుత్వపని పొందు ఘటన మరియు C అనునది కేంద్ర ప్రభుత్వపని పొందు ఘటన అనుకొనుము.

ఇవ్వబడినది $P(I) = 0.12$, $P(C) = 0.25$, మరియు $P(I \cap C) = 0.07$

(i) P (కనీసము రెండింటిలో ఒక పని పొందుటకు) $= P(I$ లేదా $C) = P(I \cup C)$

$= P(I) + P(C) - P(I \cap C)$

$= 0.12 + 0.25 - 0.07 = 0.30$

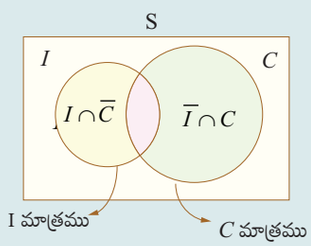
(ii) P (రెండు పనిలో ఒకే ఒకపని మాత్రమే పొందుటకు) $= P(I$ మాత్రము లేదా C మాత్రము)

$= P(I \cap \overline{C}) + P(\overline{I} \cap C)$

$= \{P(I) - P(I \cap C)\} + \{P(C) - P(I \cap C)\}$

$= \{0.12 - 0.07\} + \{0.25 - 0.07\}$

$= 0.23.$



అభ్యాసము 12.2

(1) A మరియు B పరస్పర వర్జిత ఘటనలు, $P(A) = \frac{3}{8}$ మరియు $P(B) = \frac{1}{8}$ అయిన

(i) $P(\overline{A})$ (ii) $P(A \cup B)$ (iii) $P(\overline{A} \cap B)$ (iv) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$ లను కనుగొనుము.

(2) A మరియు B అనునది ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగంలోని ఘటనలు మరియు

$P(A) = 0.35$, $P(A$ లేక $B) = 0.85$, $P(A$ మరియు $B) = 0.15$. అయిన

లేదా (i) $P(B$మాత్రము$)$ (ii) $P(\overline{B})$ (iii) $P(A$మాత్రము$)$ లను కనుగొనుము.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_12.indd 260 10-03-2023 12:27:06

(3) ఒక పాచిక రెండుసార్లు దొర్లించబడినది. మొదటిసారి దొర్లించిన 5 పొందు ఘటన A అనియు రెండవసారి దొర్లించిన 5 పొందు ఘటన B అని అనుకొనిన $P(A \cup B)$ ని కనుగొనుము.

(4) A అను ఘటన యొక్క సంభావ్యత 0.5 మరియు B అనుఘటన సంభావ్యత 0.3 మరియు A మరియు B లు పరస్పర వర్జిత ఘటనలు అయిన క్రింది సంభావ్యతలను కనుగొనుము.

(i) $P(A \cup B)$ (ii) $P\left(A \cap \overline{B}\right)$ (iii) $P\left(\overline{A} \cap B\right)$.

(5) ఒక పట్టణంలో రెండు ఫైర్ ఇంజన్లు స్వతంత్రంగా పనిచేయుచున్నవి. ఒక్కొక్క ఫైర్ ఇంజను అవసరమయినప్పుడు అందుబాటులో ఉండుటకు సంభావ్యత 0.96.

(i) అవసరమైనపుడు ఫైర్ ఇంజను అందుబాటులో ఉండుటకు సంభావ్యత ఏమిటి?

(ii) అవసరమైనపుడు రెండు ఫైర్ ఇంజన్లు అందుబాటులో లేకుండుటకు సంభావ్యత ఏమిటి?

(6) కొత్త రైల్వే వంతెన దాని రూపకల్పనకు అవార్డును పొందే సంభావ్యత 0.48, సమర్థవంతమైన విధంగా మూలపదార్థాల వినియోగానికి అవార్డు అభించే అవకాశం 0.36 మరియు పై తెల్పిన రెండు అవార్డులు పొందే అవకాశం 0.2 అయిన (i) కనీసము ఒక అవార్డు పొందుటకు (ii) ఒకే ఒక అవార్డు మాత్రము పొందుటకు సంభావ్యత ఏమి?

12.6 నియత సంభావ్యత (Conditional Probability)

వివరణ 12.8

నియత సంభావ్యత యొక్క భావనను అర్థం చేసుకోవడానికి ఈ క్రింది ఉదాహరణమును చూచెదము.

ఒక నిష్పాక్షిక పాచిక దొర్లించబడినది అనుకొనెదము. దాని ప్రతిరూప ఆవరణము $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ఇప్పుడు మనము రెండు ప్రశ్నలను అడుగుతాము.

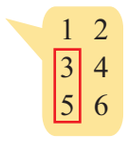
Q_1: పాచికలో 2 కంటే ఎక్కువగా గల బేసి సంఖ్యను పొందుటకు సంభావ్యత ఎంత?

Q_2: పాచిక బేసి సంఖ్యను చూపిస్తే, అది 2 కంటే ఎక్కువ ఉండే బేసి సంఖ్య పొందుటకు సంభావ్యత ఏమిటి?

సందర్భం 1

2 కంటే ఎక్కువైన బేసి సంఖ్యలను పొందు ఘటన $\{3, 5\}$

P_1 అనునది 2 కంటే ఎక్కువైన బేసి సంఖ్యలను పొందు సంభావ్యత అనుకొనుము.

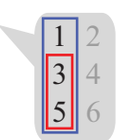


$$P_1 = \frac{n(\{3,5\})}{n(\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\})} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

సందర్భం 2

"పాచిక బేసి సంఖ్యను సూచించినపుడు" అనగా మన యొక్క ప్రతిరూప ఆవరణమునకు బేసి సంఖ్యను మాత్రమే కల్గియున్న ఉపసమితికి పరిమితం చేస్తాము.

$S_1 = \{1, 3, 5\}$. ఇప్పుడు మనము 2 కంటే ఎక్కువైన బేసి సంఖ్యలను పొందే సంభావ్యతను కనుగొనుటకు ఆసక్తి చూపుతాము దీనిని P_2 గా తీసుకొందుము.



$$P_2 = \frac{n(\{3,5\})}{n(\{1,\ 3,\ 5\})} = \frac{2}{3}$$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_12.indd 261 10-03-2023 12:27:08

పై రెండు సందర్భంలోని అనుకూల ఘటనలు ఒకటే, కాని వాటి యొక్క పూర్ణ ఘటనల ఫలితములు వేరువేరుగా ఉండును. సందర్భం 2 లోని ప్రతిరూప ఆవరణములో మొదటి ఒక నిబంధనను విధించిన తర్వాత సంభావ్యతను కనుగొనెదము. ఈ విధమైన సంభావ్యతను నియత సంభావ్యత అంటారు.

ప్రతిరూప ఆవరణమునుపయోగించి దీనిని క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చును.

$$P_2 = \frac{\frac{n(\{3,5\})}{n(\{1,2,3,4,5,6\})}}{\frac{n(\{1,3,5\})}{n(\{1,2,3,4,5,6\})}} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3}$$ గా పొందవచ్చును.

ముఖ్యగమనిక: సంభావ్యతకు, నియత సంభావ్యతకు ప్రతిరూప ఆవరణము ఒకటిగా ఉండును.

నిర్వచనము 12.14

ఘటన A ముందుగా సంభవించినట్లు ఊహించుకొన్న, ఒక ఘటన B యొక్క నియత సంభావ్యతను $P(B/A)$ గా సూచిస్తారు. మరియు క్రింది విధంగా నిర్వచిస్తారు.

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad P(A) \neq 0$$ అని ఇవ్వబడినది.

అదేవిధంగా, $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) \neq 0$ అని ఇవ్వబడినది.

ఉదాహరణ 12.16

If $P(A) = 0.6, \quad P(B) = 0.5$, మరియు $P(A \cap B) = 0.2$

అయిన (i) $P(A/B)$ (ii) $P(\overline{A}/B)$ (iii) $P(A/\overline{B})$ లను కనుగొనుము.

సాధన

ఇవ్వబడినదది $P(A) = 0.6, \quad P(B) = 0.5$, మరియు $P(A \cap B) = 0.2$

(i) $$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.2}{0.5} = \frac{2}{5}$$

(ii) $$P(\overline{A}/B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{0.5 - 0.2}{0.5} = \frac{0.3}{0.5} = \frac{3}{5}$$

(iii) $$P(A/\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})}$$

$$= \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)}$$

$$= \frac{0.6 - 0.2}{1 - 0.5} = \frac{0.4}{0.5} = \frac{4}{5}$$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_12.indd 262 10-03-2023 12:27:12

గమనిక 12.5

$P(A/B)+P(\overline{A}/B)=1$

ఉదాహరణ 12.17

ఒక పాచికను దొర్లించబడినది. ఇది ఒక బేసి సంఖ్య చూపినట్లయితే తరువాత 5 పొందుటకు సంభావ్యత ఎంత?

సాధన

ప్రతిరూప ఆవరణ $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

A అనునది బేసిసంఖ్య లభించు ఘటన అని అనుకొనుము.

B అనునది 5 పొందు ఘటన అనుకొనుమము.

$A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{5\}$, మరియు $A\cap B=\{5\}$.

కావున, $P(A)=\frac{3}{6}$ మరియు $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$

P (5 పొందుట/ పాచిక ఒక బేసి సంఖ్య చూపుట) $=P(B/A)$

$$=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}}$$

$$P(B/A)=\frac{1}{3}.$$

నియత సంభావ్యతను మార్చి వ్రాసిన, మనకు సంభావ్యతపై గుణకార సిద్ధాంతం లభిస్తుంది.

సిద్ధాంతము 12.7

సంభావ్యతపై గుణకార సిద్ధాంతం (Multiplication theorem on probability)

ఏక కాలంలో జరిగే రెండు ఘటనల A మరియు B లకు సంభావ్యత క్రింది విధంగా ఉంటుంది.

$$P(A\cap B)=P(A/B)P(B)$$
లేక
$$P(A\cap B)=P(B/A)P(A)$$

12.6.1 స్వతంత్ర ఘటనలు (Independent Events)

ఏదైన ఒక ఘటన సంభవించడం లేదా సంభవించకపోవడం అనునది, ఇతర ఘటనలు సంభవించు లేదా సంభవించకపోవుట యొక్క సంభావ్యత ప్రభావితం చేయకపోతే ఆ ఘటనలను స్వతంత్ర ఘటనలు అంటారు.

నిర్వచనము 12.15

A మరియు B అను రెండు ఘటనలు స్వతంత్ర ఘటనలు అయితే అయినప్పుడు మాత్రమే

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_12.indd 263 10-03-2023 12:27:15

గమనిక 12.6

(1) ఈ నిర్వచనము కిందివానికి ఖచ్చితముగా సమానంగా ఉంటుంది.

$$P(A/B) = P(A),\ P(B) > 0$$

$$P(B/A) = P(B),\ P(A) > 0$$

(2) $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ అనునది పరస్పర స్వతంత్ర ఘటనలు

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \cdots \cdot P(A_n).$$

సిద్ధాంతము 12.8

A మరియు B లు స్వతంత్ర ఘటనలు అయిన

(i) $\overline{A}$ మరియు $\overline{B}$ లు స్వతంత్ర ఘటనలగును

(ii) A మరియు $\overline{B}$ లు స్వతంత్ర ఘటనలగును

(iii) $\overline{A}$ మరియు B లు స్వతంత్ర ఘటనలగును

నిరూపణ

(i) $\overline{A}$ మరియు $\overline{B}$ స్వతంత్ర ఘటనలు అని నిరూపించుట :

A మరియు B స్వతంత్ర ఘటనలగుట వలన

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot (PB)$$

$\overline{A}$ మరియు $\overline{B}$ స్వతంత్రఘటనలని నిరూపించుటకు ఈ క్రింది దానిని నిరూపించవలెను.

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}).$$

డీమోర్గన్ న్యాయం ప్రకారం

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cap \overline{B}) &= P\left(\overline{A \cup B}\right) \\ &= 1 - P\left(A \cup B\right) \\ &= 1 - \{P(A) + P(B) - P(A \cap B)\} \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P\left(B\right) \\ &= \left(1 - P(A)\right)\left(1 - P(B)\right) \\ &= P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \end{aligned}$$

కావున $\overline{A}$ మరియు $\overline{B}$ స్వతంత్ర ఘటనలు అగును.

ఇదేవిధంగా (ii) మరియు (iii) నిరూపించవచ్చును. ■

ఉదాహరణ 12.18

52 ముక్కలు గల ఒక పేకాట కట్ట నుండి రెండు ముక్కలను ఒకటి తర్వాత ఒకటి తీయబడుచున్నది. తీయబడిన రెండు ముక్కలు జ్యాక్ (Jack) గా వుండుటకు సంభావ్యతను క్రింది నిభంధనల ప్రకారము కనుగొనుము.

(i) మొదట తీయబడిన ముక్కను మరల పేకాట కట్టలో ఉంచబడును.

(ii) మొదట తీయబడిన ముక్కను మరల పేకాట కట్టలో ఉంచబడలేదు.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_12.indd 264 10-03-2023 12:27:17

సాధన

మొదట తీసిన ముక్క జ్యాక్ అయ్యే ఘటన A అనుకొందాము.

రెండోసారి తీసిన ముక్క జ్యాక్ అయ్యే ఘటన B అనుకొందాము.

సందర్భము (1) :

తీయబడు ముక్క మరల పేకాట కట్టలో ఉంచబడును.

$$n(A) = 4 \quad \text{(జ్యాక్)}$$

$$n(B) = 4 \quad \text{(జ్యాక్)}$$

$$\text{మరియు} \quad n(S) = 52 \quad \text{(మొత్తము)}$$

ఘటన A అనునది B ఘటన సంభావ్యతను భాదించదు. కావున A మరియు B లు స్వతంత్ర ఘటనలగును.

$$ü(\ \cap\ ) = P(A) \,.\, P(B)$$

$$P(A) = \frac{4}{52}\ ,\ P(B) = \frac{4}{52}$$

$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$$

$$= \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{52}$$

$$= \frac{1}{169}\ .$$

వివరణ (ii)

తీయబడు ముక్క మరల పేకాట కట్టలో ఉంచబడలేదు.

మొదటసారి తీయునపుడు మొత్తము 52 ముక్కలలో 4 జ్యాక్ (Jacks) ముక్కలు ఉండును. మొదటగా తీసిన ముక్కను మరల ఉంచకుండా రెండవసారి తీయునపుడు మొత్తము 51 ముక్కలలో 3 జ్యాక్ (Jacks) ముక్కలు ఉండును. కావున మొదటి ఘటన A అనునది తర్వాత జరుగు ఘటన B యొక్క సంభావ్యతను భాదించును.

కావున A, B ఘటనలు స్వతంత్ర ఘటనలు కావు. అవి అస్వతంత్ర ఘటనలగును.

$$\text{కావున}, P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B/A)$$

$$P(A) = \frac{4}{52}$$

$$P(B/A) = \frac{3}{51}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B/A)$$

$$= \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51}$$

$$= \frac{1}{221}\ .$$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_12.indd 265 10-03-2023 12:27:18

ఉదాహరణ 12.19

ఒక నాణెము రెండుసార్లు ఎగురవేయబడినది. E= మొదటిసారి ఎగురవేయునపుడు బొమ్మవచ్చుట, F = రెండవసారి విసురనపుడు బొమ్మవచ్చుట అని నిర్వచించిన ఈ క్రింది కనుగొనుము.

(i) $P(E \cup F)$ (ii) $\ddot{u}(\quad / \quad)$

(iii) $P(\overline{E} / F)$. (iv) E మరియు F స్వతంత్ర ఘటనలా?

సాధన

ప్రతిరూప ఆవరణము $S = \{H, T\} \times \{H, T\}$

$S = \{(H, H),(H, T), (T, H), (T, T)\}$

మరియు $E = \{(H, H), (H,T)\}$

$F = \{(H, H), (T, H)\}$

$E \cup F = \{(H, H),(H, T), (T, H)\}$

$E \cap F = \{(H, H)\}$

(i) $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$ లేదా $\left(= \frac{n(E \cup F)}{n(S)}\right)$

$= \frac{2}{4} + \frac{2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

(ii) $P(E / F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{(1/4)}{(2/4)} = \frac{1}{2}$

(iii) $P(\overline{E} / F) = \frac{P(\overline{E} \cap F)}{P(F)}$

$= \frac{P(F) - P(E \cap F)}{P(F)}$

$= \frac{(2/4) - (1/4)}{(2/4)}$

$= \frac{1}{2}$

(iv) E మరియు F స్వతంత్ర ఘటనలగునా?

$P(E \cap F) = \frac{1}{4}$

$P(E) = \frac{2}{4}, \quad P(F) = \frac{2}{4}$

$P(E)\,P(F) = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_12.indd 266 10-03-2023 12:27:20

$$\Rightarrow P(E \cap F) = P(E) \,.\, P(F)$$

కావున E మరియు F స్వతంత్రఘటనలగును.

గమనిక 12.7

స్వతంత్ర ఘటనలు అనునది ఒక సంభావ్యత ధర్మము. కాని పరస్పర వర్జిత ఘటనలు అనునది ఒక సమితి-సిద్ధాంతిక ధర్మము. అందువల్ల స్వతంత్ర ఘటనలు వాటి యొక్క సంభావ్యతల ద్వారా మరియు పరస్పర వర్జిత ఘటనలు వాటి యొక్క ఘటనలు ద్వారా గుర్తిస్తారు.

సిద్ధాంతము 12.9

A మరియు B అను రెండు ఘటనలు $P(A) \neq 0, P(B) \neq 0$ అగునట్లు ఉందని అనుకొందాము.

(1) A మరియు B పరస్పర వర్జితములు అయిన అవి స్వతంత్ర ఘటనలు కాదు

(2) A మరియు B స్వతంత్ర ఘటనల అయిన అవి పరస్పర వర్జితము కాదు (నిరూపణ లేకుండా)

ఉదాహరణ 12.20

A మరియు B అను రెండు స్వతంత్ర ఘటనలు మరియు

$P(A) = 0.4$ మరియు $P(A \cup B) = 0.9$. అయిన $P(B)$ని కనుగొనుము..

సాధన

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A).P(B) \quad (A \text{ మరియు } B \text{ స్వతంత్ర ఘటనలు కావున})$$

$$\text{అది, } 0.9 = 0.4 + P(B) - (0.4)\,P(B)$$

$$0.9 - 0.4 = (1 - 0.4)\,P(B)$$

$$P(B) = \frac{5}{6}.$$

ఉదాహరణ 12.21

వేగముగా దూసుకెళ్ళు ఒక శత్రువిమానమును, ఒక యుద్ధ విమాన తుపాకి సహాయంతో గరిష్ఠముగా 4 సార్లు మాత్రమే కాల్చుటకు వీలగును. ఆ విమానాన్ని మొదట, రెండవ, మూడవ మరియు నాల్గవ సార్లలో కాల్చి పడబోయుటకు సంభావ్యతలు క్రమముగా 0.2, 0.4, 0.2 మరియు 0.1 అయిన ఆ విమానమును కాల్చి పడబోయుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.



సాధన

H_1, H_2, H_3 మరియు H_4 అనునవి క్రమముగా విమానమును మొదట, రెండవ, మూడవ మరియు నాల్గవ సార్లలో యుద్ధవిమాన తుపాకిచే కాల్చిపడవేయు ఘటనలు అనుకొనుము.

H అనునది విమానమును తుపాకిచే కాల్చి పడబోయు ఘటన అనుకొన్నచో $\bar{H}$ అనునది విమానమును తుపాకిచే కాల్చి పడవేయకుండా ఉండు ఘటన అగును.

$$P(H_1) = 0.2 \quad \Rightarrow P(\bar{H}_1) = 1 - P(H_1) = 0.8$$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_12.indd 267 10-03-2023 12:27:22

$P(H_2) = 0.4 \quad \Rightarrow P(\bar{H}_2) = 1 - P(H_2) = 0.6$

$P(H_3) = 0.2 \quad \Rightarrow P(\bar{H}_3) = 1 - P(H_3) = 0.8$

$P(H_4) = 0.1 \quad \Rightarrow P(\bar{H}_4) = 1 - P(H_4) = 0.9$

విమానమును తుపాకిచే కాల్చిపడవేయుటకు గల సంభావ్యత

$$P(H) = 1 - P(\bar{H}) = 1 - P(\overline{H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4})$$

$$= 1 - P\left(\bar{H}_1 \cap \bar{H}_2 \cap \bar{H}_3 \cap \bar{H}_4\right)$$

$$= 1 - P(\bar{H}_1)P(\bar{H}_2)P(\bar{H}_3)P(\bar{H}_4)$$

$$= 1 - (0.8)(0.6)(0.8)(0.9) = 1 - 0.3456$$

$$P(H) = 0.6544$$

ఉదాహరణ 12.22

70% సందర్భాలలో X నిజమును మాట్లాడును మరియు 90% సందర్భములలో Y నిజము మాట్లాడును. అయిన ఒకే వాస్తవాన్ని వారు చెప్పేటప్పుడు వారు పరస్పరం విరుద్ధంగా ఉండుటకు సంభావ్యత ఏమిటి?

సాధన

X నిజం మాట్లాడే ఘటన A, Y నిజం మాట్లాడే ఘటన B అనుకొందాము

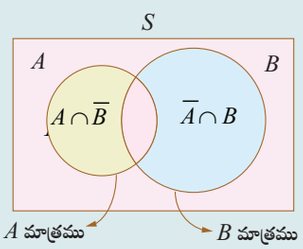
$\therefore X$ అబద్ధం మాట్లాడే ఘటన $\bar{A}$ మరియు Y అబద్ధం మాట్లాడే ఘటన $\bar{B}$ అగును.

C అనునది ఇరువురు పరస్పరము విరుద్ధంగా మాట్లాడు ఘటన అనుకొనుము.

ఇవ్వబడినదది

$P(A) = 0.70 \quad \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0.30$

$P(B) = 0.90 \quad \Rightarrow P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 0.10$



C = (A నిజము B అబద్ధము లేదా A అబద్ధము B నిజము చెప్పుదురు.

$C = [(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)]$ (పటమును చూడుము)

కావున $(A \cap \bar{B})$ మరియు $(\bar{A} \cap B)$ పరస్పర వివర్జితయగును.

$$P(C) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B)$$

$$= P(A)\,P(\bar{B}) + P(\bar{A})\,P(B)$$

కావున A, B స్వతంత్ర ఘటనలు, $A, \bar{B}$ లు కూడా స్వతంత్రఘటనలు

$$= (0.70)\ (0.10) + (0.30)\ (0.90)$$

$$= 0.070 + 0.270 = 0.34$$

$$P(C) = 0.34.$$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_12.indd 268 10-03-2023 12:27:23

ఉదాహరణ 12.23

ఒక నగరంలోని ఒక ప్రధాన రహదారిలో ట్రాఫిక్ లైట్లతో 4 కూడలి (crossroads) ఉంది. ఒక్కొక్క ట్రాఫిక్ లైటు తెరచుటకు లేదా మూయుటకు గల సంభావ్యత వరుసగా 0.4 మరియు 0.6 అయిన క్రిందివాటి సంభావ్యతను కనుగొనుము.

(i) మొదటి కూడలిలో ఒక కారు నిలబడకుండా వెళ్ళుటను

(ii) మొదటి రెండు కూడలిలో ఒక కారు నిలబడకుండా వెళ్ళుటకు

(iii) మూడవ కూడలిలో ఒక కారు నిలచి మిగిలిన కూడలిలలో నిలబడకుండా వెళ్ళుటకు

(iv) ఖచ్చితంగా ఒక కూడలిలో నిలచి మిగిలిన కూడలిలో నిలబడకుండా వెళ్ళుటకు

సాధన:

A_i అనునది ట్రాపిక్ లైట్ i వ కూడలిలో నిలబడకుండ పోవు ఘటన అనుకొనుము. ఇచ్చట $i = 1, 2, 3, 4$

B_i అనునది ట్రాఫిక్ లైట్ i కూడలిలో నిలచి వెళ్ళుట గల ఘటన అనుకొనుము. ఇచ్చట $i = 1, 2, 3, 4$.

ట్రాఫిక్ లైట్‌లు స్వతంత్ర ఘటనలు కావున

A_i మరియు B_i స్వతంత్ర ఘటనలు ఇచ్చట $i = 1, 2, 3, 4$.

ఇవ్వబడినవి

$$P(A_i) = 0.4,\ i = 1, 2, 3, 4$$

$$P(B_i) = 0.6,\ i = 1, 2, 3, 4$$

(i) మొదటి కూడలిలో ఒక కారు నిలబడకుండా వెళ్ళుటకు గల సంభావ్యత

$$P(A_1) = 0.4.$$

(ii) మొదటి రెండు కూడలిలో ఒక కారు నిలబడకుండా వెళ్ళుటకు గల సంభావ్యత

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1A_2) = (0.4)(0.4) = 0.16$$

(iii) మూడవ కూడలిలో నిలచి మిగిలిన కూడలిలలో నిలబడకుండా ఒక కారు వెళ్ళుటకు గల సంభావ్యత

$$P(A_1 \cap A_2 \cap B_3 \cap A_4) = P(A_1A_2B_3A_4) = (0.4)(0.4)(0.6)(0.4) = 0.0384$$

(iv) ఒక కూడలిలో నిలచి మిగిలిన కూడలిలలో ఒక కారు నిలబడకుండా వెళ్ళుటకు సంభావ్యత

$$P(B_1A_2A_3A_4 \cup A_1B_2A_3A_4 \cup A_1A_2B_3A_4 \cup A_1A_2A_3B_4)$$

$$= P(B_1A_2A_3A_4) + P(A_1B_2A_3A_4) + P(A_1A_2B_3A_4) + P(A_1A_2A_3B_4)$$

$$= 4(0.4)(0.4)(0.6)(0.4) = 4(0.0384) = 0.1536$$

అభ్యాసము 12.3

(1) రెండు ఘటనలు ఒకే సమయంలో పరస్పర వర్జిత మరియు స్వతంత్ర ఘటనలుగా ఉండుటకు సాధ్యమగునా?

(2) A మరియు B అను రెండు ఘటనలకు $P(A \cup B) = 0.7$ మరియు $P(A \cap B) = 0.2$ అయిన $P(B) = 0.5$ A మరియు B స్వతంత్ర ఘటనలని చూపుము.

(3) A మరియు B స్వతంత్ర ఘటనలుగాను $P(A \cup B) = 0.6, P(A) = 0.2$ అయిన $P(B)$ ని కనుగొనుము.

(4) $P(A) = 0.5, P(B) = 0.8$ మరియు $P(B/A) = 0.8$ అయిన $P(A/B)$ మరియు $P(A \cup B)$ ని కనుగొనుము.

(5) A మరియు B అను రెండు ఘటనలకు $P(A) = \frac{3}{4}, P(B) = \frac{2}{5}$ మరియు $A \cup B = S$ (ప్రతి రూప ఆవరణము) అయిన $P(A/B)$ యొక్క నియత సంభావ్యతను కనుగొనుము.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_12.indd 269 10-03-2023 12:27:26

(6) గణితంలో ఒక సమస్యను మూడు విద్యార్థులకు సాధించుటకు ఇవ్వబడినది. వారు విడివిడిగా సాధన కనుగొనుటకు గల సంభావ్యతలు వరుసగా $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ మరియు $\frac{1}{5}$. (i) ఆ సమస్య సాధించబడుటకు సంభావ్యత ఏమి? (ii) ఖచ్చితంగా ఒకరు మాత్రమే ఆ సమస్యను సాధించుటకు సంభావ్యత ఏమి?

(7) పెట్రోల్ నింపబడిన ఒక కారునకు చమురు మార్చుటకు సంభావ్యత 0.30, చమురు వడపోత (oil filter) మార్చుటకు సంభావ్యత 0.40, చమురు మరియు చమురు వడపోత రెండింటిని మార్చుటకు సంభావ్యత 0.15.
(i) చమురు మార్చ అవసరమైనచో ఒక కొత్త చమురు వడపోత అవసరమగు సంభావ్యత ఏమి?
(ii) ఒక కొత్త చమురు వడపోత అవసరమైనచో చమురు మార్చ అవసరమగు సంభావ్యత ఏమి?

(8) ఒక సంచిలో 5 తెల్లని మరియు 3 నల్లని రంగు బంతులు ఉన్నవి. వేరొక సంచిలో 4 తెల్లని మరియు 6 నల్లని రంగు బంతులు ఉన్నవి. ఒక్కొక్క సంచి నుండి ఒక బంతి ఎన్నుకొనబడును. అయిన (i) రెండూను తెల్లని బంతులుగా ఉండుటకు (ii) రెండూను నల్లని బంతులుగా ఉండుటకు (iii) ఒక తెల్లని మరియు ఒక నల్లని బంతిని ఎన్నుకొనుటకు గల సంభావ్యతలను కనుగొనుము.

(9) ఒక తరగతిలో మూడింటిలో రెండవ భాగము బాలురులు మిగిలిన వారు బాలికలు గలరు. మొదటి శ్రేణి పొందుటకు సంభావ్యత బాలికలకు 0.85 మరియు బాలురలకు 0.70 యాదృచ్ఛికంగా ఎన్నుకొనబడిన విద్యార్థి మొదటి శ్రేణి పొందుటకు గల సంభావ్యత ఏమిటి?

(10) $P(A) = 0.4$ మరియు $P(A \cup B) = 0.7$ అయిన $P(B)$ ని ఈ క్రింది నిభందనలను అనుసరించి కనుగొనుము.
(i) A మరియు B పరస్పర వర్జిత ఘటనలు. (ii) A మరియు B స్వతంత్ర ఘటనలు.
(iii) $P(A / B) = 0.4$ (iv) $P(B / A) = 0.5$

(11) యాదృచ్ఛికంగా ఎన్నుకొనబడిన సంవత్సరములో 53 ఆదివారాలు ఉండుటకు గల సంభావ్యత ఏంత?
(i) 53 ఆదివారములు ఉండుటకు గల సంభావ్యత ఎంత?
(ii) 53 ఆదివారములు గల లీపు సంవత్సరముగా ఉండుటకు గల సంభావ్యత ఎంత?

(12) ఒక లక్ష్యాన్ని ఒక వ్యక్తి X 4లో 3 సార్లు, Y వ్యక్తి, 5లో 4 సార్లు మరియు Z వ్యక్తి 3 లో 2 సార్లు సరిగ్గా కాల్చే అవకాశం గలదు. ముగ్గురూ ఆ లక్ష్యాన్ని కాల్చినపుడు సరిగ్గా ఇద్దరు మాత్రమే కాల్చుటకు గల సంభావ్యత ఏమి?

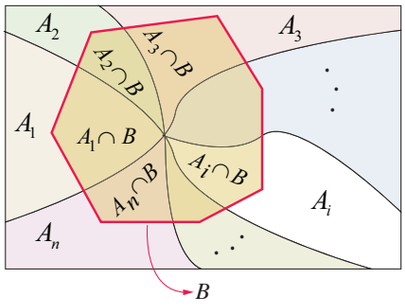
12.7 ఒక ఘటన యొక్క మొత్తం సంభావ్యత (Total Probability of an event)

సిద్ధాంతము 12.10 (ఒక ఘటన యొక్క మొత్తం సంభావ్యత)

$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ అనునది పరస్పర వివర్జిత మరియు పూర్ణ ఘటనలు మరియు B అనునది ప్రతిరూప ఆవరణము S లో గల ఒక ఘటన అయిన $P(B)$ అనునది B ఘటన యొక్క మొత్త సంభావ్యత అగును.

$$P(B) = P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2) + \cdots + P(A_n).P(B/A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(B/A_i)$$

నిరూపణ



B అనునది ప్రతిరూప ఆవరణము S లో గల ఒక ఘటన పటము నుండి

$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B) \cup \cdots (A_n \cap B)$.

S $A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$ అనునవి పరస్పర నివర్జిత ఘటనలు కావున

$(A_1 \cap B), (A_2 \cap B), (A_3 \cap B), \cdots, (A_n \cap B)$ అనునవి పరస్పర వివర్జిత ఘటనలగును.

$$P(B) = P\left[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B)\right]$$

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B)$$

$$P(B) = P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2) + \cdots + P(A_n).P(B/A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(B/A_i).$$ □

క్రింది వచ్చు సమస్యలును ఘటన యొక్క మొత్త సంభావ్యతను ఉపయోగించి సాధించుము.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_12.indd 270 10-03-2023 12:27:29

ఉదాహరణ 12.24

జాడీ I లో 8 ఎరుపు మరియు 4 నీలము రంగు గల బంతులు గలవు. జాడీలో II 5 ఎరుపు మరియు 10 నీలము రంగు జంతులు గలవు. యాదృచ్ఛికంగా ఒక జాడని ఎన్నుకొని దాని నుండి రెండు బంతులును ఎన్నుకొనిన ఆ రెండు బంతులు ఎరుపు రంగు బంతులుగా ఉండుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన:

A_1 అనునది జాడి I ని ఎన్నుకొనబడు ఘటన మరియు A_2 అనునది జాడి II ను ఎన్నుకొనబడు ఘటన అనుకొందాము.

	ఎరుపు బంతి	నీలిరంగు బంతి	మొత్తము
జాడి-I	8	4	12
జాడి-II	5	10	15
మొత్తము	13	14	27

B అనునది రెండు ఎరుపు రంగు బంతులు ఎన్నుకొను ఘటన అనుకొనుము.

B యొక్క మొత్త సంభావ్యతను మనము కనుగొనవలెను. అంటే $P(B)$

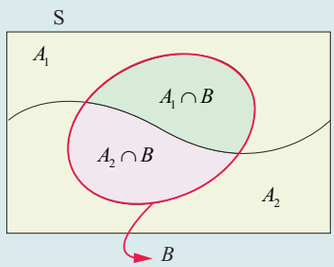
A_1 మరియు A_2 అనునవి పరస్పర వివర్జితములు, పూర్ణ ఘటనలు అని స్పష్టముగా తెలియును.

$$P(A_1) = \frac{1}{2}, \quad P(B/A_1) = \frac{8c_2}{12c_2} = \frac{14}{33}$$

$$P(A_2) = \frac{1}{2}, \quad P(B/A_2) = \frac{5c_2}{15c_2} = \frac{2}{21}$$

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2)$$

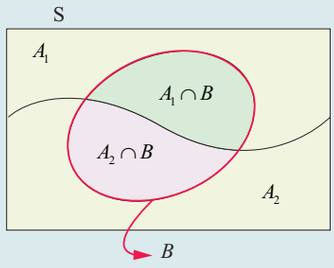
$$P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{14}{33} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{21} = \frac{20}{77}.$$



ఉదాహరణ 12.25

ఒక పరిశ్రమలో I మరియు II అను రెండు యంత్రములు గలదు. యంత్రము I పరిశ్రమ మొత్త ఉత్పత్తిలో 40% తయారుచేయును. మరియు యంత్రము 2 మొత్తము ఉత్పత్తిలో 60% తయారు చేయును. పైగా యంత్రము I ద్వారా తయారు చేయబడిన వస్తువులలో 4% లోపము కలదిగాను మరియు యంత్రము II ద్వారా తయారు చేయబడిన వస్తువులలో 5% లోపము ఉన్నది. ఉత్పత్తి చేయబడిన వస్తువుల నుండి యాదృచ్ఛికంగా ఎన్నుకోబడిన ఒక వస్తువు లోపము కలదిగా ఉండుటకు సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన:



A_1 అనునది యంత్రము I చే ఉత్పత్తి చేయబడ్డ వస్తువుల ఘటన A_2 అనునది యంత్రము II చే ఉత్పత్తి చేయబడ్డ వస్తువుల ఘటన అనుకొనుము. B అనునది లోపము గల వస్తువులను ఎన్నుకొనబడు ఘటన అనుకొనుము. ఘటన B యొక్క మొత్తము సంభావ్యతను మనము కనుగొనవలయును. అనగా $P(B)$

A_1 మరియు A_2 లు పరస్పర వివర్జితములు మరియు పూర్ణ ఘటనలు అగును.

కావున $P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2)$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_12.indd 271 10-03-2023 12:27:32

$$P(A_1) = 0.40, \quad P(B/A_1) = 0.04$$

$$P(A_2) = 0.60, \quad P(B/A_2) = 0.05$$

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2)$$

$$= (0.40)(0.04) + (0.60)(0.05)$$

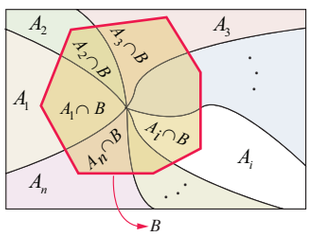
$$= 0.046.$$

12.8 బేయీ సిద్ధాంతము



1702-1761

థామస్ బేయీస్ అనునతను ఆంగ్ల సాంఖ్యక శాస్త్రవేత్త, తత్త్వవేత్త మరియు ప్రెస్బిటిరియన్ మంత్రి ఈయన సిద్ధాంతము యొక్క ప్రత్యేక సందర్భమును రూపొందించారు. ప్రయోగం చేయుటకు ముందు గల సంభావ్యత మరియు నియత సంభావ్యతను, ప్రయోగం చేసిన తరువాత గల ఈ సంభావ్యతలను బేయీ యొక్క నియమం ద్వారా అనుసంధానం యొక్క ధర్మము నుండి బేయీస్ పద్ధతి ఉద్భవించినది. పొన:పున్యం లేని నమ్మకం యొక్క బలము, పరికల్పనలు అను మొదలగు జ్ఞానాత్మక విశ్లేషణ విశ్వాసము మొత్తంగా సంభావ్యత సంబంధిత చాలా వ్యాఖ్యానాలకు బేయీ యొక్క సంభావ్యత అని పేరు ఇవ్వబడినది.



సిద్ధాంతము 12.11 (బేయీ సిద్ధాంతము)

$A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ లను పరస్పర వివర్జిత మరియు పూర్ణ ఘటనలుకు

$P(Ai) > 0, \quad i = 1,2,3,\ldots.n$ మరియు B అనునది ఏదేని ఒక ఘటనకు $P(B) > 0$ అయిన

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i)\,P(B/A_i)}{P(A_1)\,P(B/A_1) + P(A_2)\,P(B/A_2) + \cdots + P(A_n)\,P(B/A_n)}$$

నిరూపణ

B ఘటన యొక్క మొత్త సంభావ్యత నియమము ప్రకారము

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)$$

మరియు గుణకార సిద్ధాంతము ప్రకారము $P(A_i \cap B) = P(B/A_i)P(A_i)$

నియత సంభావ్యత నిర్వచనము నుండి

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

$$P\ddot{u}A_i \quad B = \frac{P(B/A_i)P(A_i)}{P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)}$$ (సూత్రమునుపయోగించి)

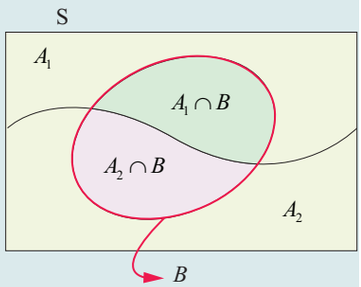
పైన ఉన్న సూత్రమనునది $P(A_i/B)$ మరియు $P(B/A_i)$ లకు మధ్యగల సంబంధమును తెలియజేయును.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_12.indd 272 10-03-2023 12:27:36

ఉదాహరణ 12.26

ఒక పరిశ్రమలో I మరియు II అను రెండు యంత్రములు గలదు. యంత్రము I పరిశ్రమ ఉత్పత్తిలో 40% తయారు చేయును మరియు యంత్రము II ఉత్పత్తిలో 60% తయారు చేయును. పైగా యంత్రము I ద్వారా తయారు చేయబడిన వస్తువులలో 4% లోపము కలదిగాను యంత్రము II ద్వారా తయారు చేయబడు వస్తువులలో 5% లోపముగా ఉన్నవి. ఉత్పత్తి చేయబడిన వస్తువుల నుండి యాదృచ్ఛికంగా ఎన్నుకోబడిన ఒక వస్తువు లోపము కలదిగా ఉన్నప్పుడు, ఆ వస్తువు యంత్రము II ద్వారా ఉత్పత్తి చేయబడినది అగుటకు సంభావ్యత ఏది? (ముందు తెల్పిన ఉదాహరణ ప్రశ్నతో పోల్చి చూడుము.)

సాధన



A_1 అనునది యంత్రము I ద్వారా ఉత్పత్తి చేయబడిన వస్తువుల ఘటన అనుకొనుము. A_2 అనునది యంత్రము II ద్వారా ఉత్పత్తి చేయబడిన వస్తువుల ఘటన అనుకొనుము. B అనునది లోపము గల ఒక వస్తువును ఎన్నుకొనబడు ఘటన అనుకొనుము. $P(A_2/B)$ అను నియత సంభావ్యతను కనుగొనవలెను. A_1, A_2 లు పరస్పర వర్జితములు మరియు పూర్ణ ఘటనలు అగును. బేయీ సిద్ధాంతము ప్రకారము

$$P(A_2 / B) = \frac{P(A_2)\,P(B / A_2)}{P(A_1)\,P(B / A_1) + P(A_2)\,P(B / A_2)}$$

మనకు లభించునది,

$$P(A_1) = 0.40, \quad P(B / A_1) = 0.04$$

$$P(A_2) = 0.60, \quad P(B / A_2) = 0.05$$

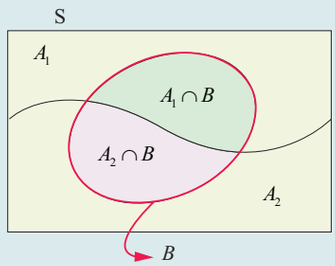
$$P(A_2 / B) = \frac{P(A_2)\,P(B / A_2)}{P(A_1)\,P(B / A_1) + P(A_2)\,P(B / A_2)}$$

$$P(A_2 / B) = \frac{(0.60)(0.05)}{(0.40)(0.04) + (0.60)(0.05)} = \frac{15}{23}.$$

ఉదాహరణ 12.27

భవన నిర్మాణ సంస్థలో 2 ఎగ్జిక్యూటర్ ఇంజనీర్లు పనిలో నియమింపబడ్డారు. కంపెనిలోని 60% పనిని ఇంజనీరు 1 చేస్తారు. 40% పనిని ఇంజనీరు 2 చేయుదురు. ముందు అనుభవమును బట్టి ఇంజనీరు, చేయు పనిలో దోష సంభావ్యత 0.03 ఇంజనీరు 2 చేయు పనిలో దోష సంభావ్యత 0.04 ప్రస్తుతము జరుగు భవన నిర్మాణములో ఒక భయంకర దోషము సంభవించుననుకొనిన ఏ ఇంజనీరు దోషము చేసియుండునని ఊహించుము?

సాధన



A_1 మరియు A_2 అనునవి వరసగా ఇంజనీరు 1 మరియు ఇంజనీరు 2 చేయు పనులను తెల్పు ఘటనలు అనుకొనుము. B అనునది పనిలో ఏర్పడిన దోష ఘటన అనుకొనుము.

నియత సంభావ్యత $P(A_1/B)$ $P(A_2/B)$ లను వారి పనులను పోల్చుటకు కనుగొనవలెను.

ఇవ్వబడిన వివరముల నుండి

$P(A_1) = 0.60, \quad P(B/A_1) = 0.03$

$P(A_2) = 0.40, \quad P(B/A_2) = 0.04$

A_1 మరియు A_2 పరస్పర వర్జితము మరియు పూర్ణ ఘటనలగును.

బేయీస్ సిద్ధాంతము ప్రకారము.

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1)\,P(B/A_1)}{P(A_1)\,P(B/A_1) + P(A_2)\,P(B/A_2)}$$

$$= \frac{(0.60)(0.03)}{(0.60)(0.03)+(0.40)(0.04)}$$

$$P(A_1 \mid B) = \frac{9}{17}.$$

$$P(A_2/B) = \frac{P(A_2)\,P(B/A_2)}{P(A_1)\,P(B/A_1) + P(A_2)\,P(B/A_2)}$$

$$P(A_2/B) = \frac{(0.40)(0.04)}{(0.60)(0.03)+(0.40)(0.04)}$$

$$P(A_2/B) = \frac{8}{17}.$$

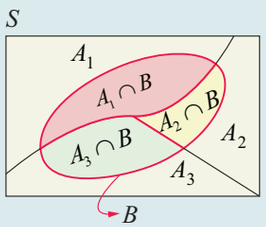
$P(A_1/B) > P(A_2/B)$, కాబట్టి ఎగ్జిక్యూటివ్ ఇంజనీరు 1, దోష సంభావ్యత ఎగ్జిక్యూటివ్ ఇంజనీరు 2 యొక్క దోష సంభావ్యత కంటే ఎక్కువగా ఉన్నందున పనిలో ఏర్పడిన దోషమును ఎగ్జిక్యూటివ్ ఇంజనీరు 1 చేసి వుండును అని ఊహించవచ్చును.

ఉదాహరణ 12.28

ఒక సంస్థలో X, Y మరియు Z మొదలగువారు సంస్థలో నిర్వాహకులుగా అయ్యే అవకాశములు వరుసగా 4 : 2 : 3 అను నిష్పత్తిలో ఉన్నది. X, Y మరియు Z నిర్వాహకులుగా మారితే బోనస్ పథకంను ప్రవేశపెట్టుటకు సంభావ్యత వరుసగా 0.3, 0.5 మరియు 0.4 అగును. సంస్థలో బోనస్ పథకం ప్రవేశపెట్టినట్లయితే Z ను నిర్వాహకునిగా (manager) నియమించుటకు సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన

A_1, A_2 మరియు A_3 అనునవి వరుసగా X, Y మరియు Z మొదలగువారు నిర్వాహకునిగా అయ్యే అవకాశములు గల ఘటనలు అనుకొనుము. B అనునది బోనస్ పథకంను ప్రవేశపెట్టుటకు ఘటన అనుకొనుము.



ఇచ్చట మనము నియత సంభావ్యత $P(A_3/B)$. ని కనుగొనవలెను.

A_1, A_2 మరియు A ఘటనలు పరస్పర వర్జితము మరియు పూర్ణ ఘటనలు అగుట వలన బేయీస్ సిద్ధాంతము ప్రకారము

$$P(A_3/B) = \frac{P(A_3)\,P(B/A_3)}{P(A_1)\,P(B/A_1) + P(A_2)\,P(B/A_2) + P(A_3)\,P(B/A_3)}$$

$$P(A_1) = \frac{4}{9}, \quad P(B/A_1) = 0.3$$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_12.indd 274 10-03-2023 12:27:38

$$P(A_2) = \frac{2}{9}, \quad P(B/A_2) = 0.5$$

$$P(A_3) = \frac{3}{9}, \quad P(B/A_3) = 0.4$$

$$P(A_3/B) = \frac{P(A_3)\,P(B/A_3)}{P(A_1)\,P(B/A_1) + P(A_2)\,P(B/A_2) + P(A_3)\,P(B/A_3)}$$

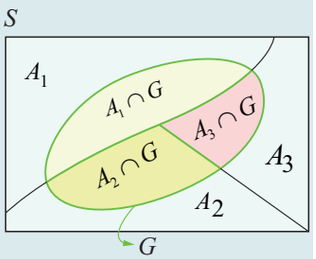
$$P(A_3/B) = \frac{\left(\frac{3}{9}\right)(0.4)}{\left(\frac{4}{9}\right)(0.3)+\left(\frac{2}{9}\right)(0.5)+\left(\frac{3}{9}\right)(0.4)}$$

$$= \frac{12}{34} = \frac{6}{17}.$$

ఉదాహరణ 12.29

ఒక కన్సల్టింగ్ సంస్థ మూడు ఏజెన్సీల నుండి కారును అద్దెకు తీసుకొంటుంది. అంటే 50% కార్లను L సంస్థ నుండి, 30% ను M నుండి 20% ను N సంస్థ నుండి తీసుకొనచున్నది. L సంస్థ నుండి అద్దెకు తీసుకొనబడిన కార్లలలో 90% ను, M సంస్థ నుండి తీసుకొనబడిన కార్లలలో 70% ను N సంస్థ నుండి తీసుకొనబడిన కార్లలలో 60% ను మంచి స్థితిలో ఉన్నది అనిన (i) సంస్థ నుండి మంచికారును పొందుటకు సంభావ్యత ఏమిటి? (ii) కారు మంచి స్థితిలో ఉంటే అది N సంస్థ నుండి పొందుటకు గల సంభావ్యత ఏమిటి?

సాధన



L, M మరియు N అను సంస్థల నుండి కార్లను అద్దెకు తీసుకొను ఘటనలు వరుసగా A_1, A_2 మరియు A_3 అనుకొనుము.

G అనునది మంచిస్థితిలో ఉన్న కారును పొందుటకు అనుకొనుము.

(i) ఘటన G యొక్క మొత్త సంభావ్యత $P(G)$ ను,

(ii) A_3 యొక్క నియత సంభావ్యత G ఇచ్చిన $P(A_3/G)$ ను కనుగొనవలెను.

$$P(A_1) = 0.50, \quad P(G/A_1) = 0.90$$

$$P(A_2) = 0.30, \quad \ddot{u}(\ /\ _2) = 0.70$$

$$P(A_3) = 0.20, \quad P(G/A_3) = 0.60.$$

(i) A_1, A_2, A_3 పరస్పర వర్జితము మరియు పూర్ణఘటనలు అనిన G యొక్క మొత్త సంభావ్యత మరియు G, S లో ఒక ఘటన అయిన $P(G)$

$$P(G) = P(A_1)\,P(G/A_1) + P(A_2)\,P(G/A_2) + P(A_3)\,P(G/A_3)$$

$$P(G) = (0.50)(0.90)+(0.30)(0.70)+(0.20)\ (0.60)$$

$$P(G) = 0.78.$$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_12.indd 275 10-03-2023 12:27:41

(ii) A_3 యొక్క నియత సంభావ్యతఇవ్వబడిన G కనుగొనవలెను.

బేయీస్ సిద్ధాంతము ప్రకారము

$$P(A_3 / G) = \frac{P(A_3)\,P(G / A_3)}{P(A_1)\,P(G / A_1) + P(A_2)\,P(G / A_2) + P(A_3)\,P(G / A_3)}$$

$$P(A_3 / G) = \frac{(0.20)(0.60)}{(0.50)(0.90) + (0.30)(0.70) + (0.20)\,(0.60)}$$

$$= \frac{2}{13}.$$

అభ్యాసము 12.4

(1) ఒక పరిశ్రమలో యంత్రములు I మరియు II అను రెండు రకములున్నవి. యంత్రము I పరిశ్రమ ఉత్పత్తిలో 60% తయారు చేయును మరియు యంత్రము II ఉత్పత్తిలో 40% తయారుచేయును. పైగా యంత్రము I ద్వారా ఉత్పత్తి చేయబడిన వస్తువులలో 2% లోపము కలదిగాను యంత్రము II ద్వారా ఉత్పత్తి చేయబడిన వస్తువులలో 4% లోపమున్నట్లుగాను తెలుపబడును. ఉత్పత్తి చేయబడిన వస్తువుల నుండి యాదృచ్ఛికంగా ఒక వస్తువు ఎన్నుకొనబడినట్లయితే ఆ వస్తువు లోపముతో వుండుటకు సంభావ్యత ఏమిటి?

(2) ఒకే రకమైన రెండు జాడీలలో ఒక జాడీయందు 6 నలుపు మరియు 4 ఎరుపు బంతులు గలవు. మరియొక జాడీలో 2 నలుపు, 2 ఎరుపు రంగు బంతులు గలవు. యాదృచ్ఛికంగా ఒక జాడీ ఎన్నుకొనబడి దాని నుండి ఒక బంతి తీసుకొనబడును. (i) ఆ బంతి నలుపుగా ఉండుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము. (ii) తీసుకొనబడిన బంతి నలుపు అయిన మొదటి జాడీ నుండి తీసుకొనబడుటకు గల సంభావ్యత ఏమిటి?

(3) ఒక PVC వైపు తయారు చేయు సంస్థ X, Y మరియు Z అను మూడు పరిశ్రమముల ద్వారా ఉత్పత్తి చేయబడును. X, Y మరియు Z లు ప్రతిరోజు ఉత్పత్తి చేయు పైపుల ఘనపరిమాణములు వరుసగా 2000 యూనిట్లు, 3000 యూనిట్లు, 5000 యూనిట్లు అగును. ముందున్న సామర్థ్యాన్ని బట్టి X, Y మరియు Z పరిశ్రమములో ఉత్పత్తియగు లోపములు వరుసగా 3%, 4% మరియు 2% అగును. యాదృచ్ఛికంగా ఒక్క రోజులో ఉప్పత్తియైన పైపుల నుండి ఒక వైపు ఎన్నుకొనబడుతుంది.

(i) ఎన్నుకొనబడిన వైపు లోపము గలదిగా ఉండుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.

(ii) ఎన్నుకొనబడిన వైపు లోపము కలదిగా ఉన్నప్పుడు అది పరిశ్రమ Y లో ఉత్పత్తి అగుటకు గల సంభావ్యత ఏమిటి?

(4) ఒక గుర్తించబడిన సంస్థలో A, B మరియు C లు కార్యదర్శి అగుటకు గల అవకాశములు వరుసగా 5 : 3 : 2 అను నిష్పత్తిలో గలదు. A, B మరియు C మొదలగు వారు కార్యదర్శులుగా ఉండిన కార్యాలయ క్యాంటీన్‌ను అభివృద్ధి పరచుటకు సంభావ్యతలు వరుసగా 0.4, 0.5 మరియు 0.3 అగును. కార్యాలయ క్యాంటీన్ అభివృద్ధి చేయబడినట్లయితే B అనునతనిని కార్యదర్శిగా నియమించుటకు గల సంభావ్యత ఏమిటి?

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_12.indd 276 10-03-2023 12:27:42

(5) పెళ్ళియైన మగవారు మరియు ఆడవారు ప్రత్యేక సమయంలో దూరదర్శిని కార్యక్రమములను వీక్షించుట గూర్చి ఒక ప్రకటన సంస్థ యొక్క కార్యదర్శి అధ్యాయనము చేసినపుడు గత వీక్షణ రికార్డుల ఆధారంగా ప్రత్యేక సమయంలో దూరదర్శిని కార్యక్రమములను చూచు భార్యలు 60% అగుదురు. భార్యలు దూరదర్శిని కార్యక్రమమును చూచు సమయంలో భర్తలు కూడా 40% దూరదర్శిని కార్యక్రమములను చూసెదరు. భార్యలు దూరదర్శిని కార్యక్రమము చూడని సమయంలో 30% భర్తలు దూరదర్శిని కార్యక్రమమును చూసెదరు అయిన (i) ప్రధాన సమయంలో భర్తలు దూరదర్శినిని చూచుటకు గల సంభావ్యత (ii) భర్త దూరదర్శిని చూస్తున్న సమయంలో భార్య కూడా దూరదర్శినిని చూచుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.

అభ్యాసము 12.5

సరియైన లేక మిక్కిలి దగ్గర జవాబును ఇవ్వబడిన నాలుగు ప్రత్యామ్నాయాల నుండి ఎన్నుకొనుము.



(1) 3 మగవారు, 2 ఆడవారు మరియు 4 పిల్లలు ఉన్న ఒక సమూహము నుండి యాదృచ్ఛికంగా 4 వ్యక్తులు ఎన్నుకొనబడతారు. వారిలో ఖచ్చితంగా ఇద్దరు మాత్రమే పిల్లలుగా ఉండుటకు గల సంభావ్యత

(1) $\frac{3}{4}$ (2) $\frac{10}{23}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{10}{21}$

(2) $\{1,2,3,...,20\}$ అను సమితి నుండి ఒక సంఖ్య ఎన్నుకోబడుతుంది. ఆ సంఖ్య 3 లేదా 4 చే భాగింపబడుటకు గల సంభావ్యత

(1) $\frac{2}{5}$ (2) $\frac{1}{8}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{2}{3}$

(3) $A, B,$ మరియు C విడివిడిగా ఒకే సమయంలో స్వతంత్రంగా లక్ష్యాన్ని కాల్చుదురు. వారు ఆ లక్ష్యాన్ని కాల్చుటకు సంభావ్యతలు వరుసగా $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}$ అయిన A లేదా B ఆ లక్ష్యాన్ని సరిగా కాల్చుటకును కాని C సరిగా కాల్చలేకుండుటకు గల సంభావ్యత

(1) $\frac{21}{64}$ (2) $\frac{7}{32}$ (3) $\frac{9}{64}$ (4) $\frac{7}{8}$

(4) A మరియు B లు రెండు ఘటనలు అయిన ఖచ్చితంగా ఒక ఘటన సంభవించుటకు గల సంభావ్యత

(1) $P(A\cup\overline{B})+P(\overline{A}\cup B)$ (2) $P(A\cap\overline{B})+P(\overline{A}\cap B)$

(3) $P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ (4) $P(A)+P(B)+2P(A\cap B)$

(5) A మరియు B అను రెండు ఘటనలకు $P\left(\overline{A\cup B}\right)=\frac{1}{6}$, $P\left(A\cap B\right)=\frac{1}{4}$ మరియు $P\left(\overline{A}\right)=\frac{1}{4}$ ఘటనలు A మరియు B లు

(1) సమసంభవ ఘటనలు కాని స్వతంత్ర ఘటనలు కావు.

(2) స్వతంత్ర ఘటనలు కాని సమసంభవ ఘటనలు కావు

(3) స్వతంత్ర ఘటనలు మరియు సమసంభవ ఘటనలు

(4) పరస్పర అవర్జిత మరియు అస్వతంత్ర ఘటనలు.

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_12.indd 277 10-03-2023 12:27:42

(6) 4 లోపము గల వస్తువులను కల్గిన మొత్తము 12 వస్తువుల నుండి రెండు వస్తువులను ఎన్నుకున్నపుడు అందులో కనీసము ఒక వస్తువు లోపముగా గల వస్తువుగా ఉండుటకు సంభావ్యత

(1) $\frac{19}{33}$ (2) $\frac{17}{33}$ (3) $\frac{23}{33}$ (4) $\frac{13}{33}$

(7) ఒక వ్యక్తి యొక్క సంచిలో 3 యాభై రూపాయల కాగితములు, 4 నూరు రూపాయల కాగితములు మరియు 6 ఐదు వందల రూపాయల కాగితములు ఉన్నవి. వాటి నుండి తీయబడు రెండు కాగితములు వందరూపాయల కాగితంగా ఉండుటకు గల సంభావ్యత యొక్క అనుకూల నిష్పత్తి (Odds)

(1) 1:12 (2) 12:1 (3) 13:1 (4) 1:13

(8) 'ASSISTANT' అను పదము నుండి యాదృచ్ఛిక పద్ధతిలో ఒక అక్షరమును మరియు 'STATISTICS' అనుపదము నుండి యాదృచ్ఛికంగా ఒక అక్షరమును ఎన్నుకొన్నప్పుడు ఆ రెండు అక్షరములు ఒకే అక్షరంగా ఉండుటకు గల సంభావ్యత ఎంత?

(1) $\frac{7}{45}$ (2) $\frac{17}{90}$ (3) $\frac{29}{90}$ (4) $\frac{19}{90}$

(9) తరగతి 2 కల్గిన అన్ని మాత్రికల సమితిలో మాత్రికల మూలకములు 0 లేదా 1 మాత్రమే ఉన్నవి. ఎన్నుకొనబడు మాత్రిక యొక్క నిర్ధారకము విలువ శూన్యము కానిదిగా వచ్చుటకు గల సంభావ్యత

(1) $\frac{3}{16}$ (2) $\frac{3}{8}$ (3) $\frac{1}{4}$ (4) $\frac{5}{8}$

(10) ఒక సంచిలో 5 తెల్లని మరియు 3 నల్లని రంగు బంతులు కలవు. సంచి నుండి వరుసగా 5 బంతులను మరల ఉంచకుండా ఎత్తినపుడు, బంతుల రంగు మారిమారి వచ్చుటకు గల సంభావ్యత

(1) $\frac{3}{14}$ (2) $\frac{5}{14}$ (3) $\frac{1}{14}$ (4) $\frac{9}{14}$

(11) A మరియు B అను రెండు ఘటనలు $A \subset B$ మరియు $P(B) \neq 0$, గా ఉన్నప్పుడు ఈ క్రింది వాటిలో ఏది సరియైనది.

(1) $P(A/B) = \frac{P(A)}{P(B)}$ (2) $P(A/B) < P(A)$

(3) $P(A/B) \geq P(A)$ (4) $P(A/B) > P(B)$

(12) ఒక సంచిలో 6 పచ్చ, 2 తెలుపు మరియు 7 నలుపు రంగు బంతులున్నవి. రెండు బంతులు ఒకే సమయంలో ఎన్నుకొనునపుడు అది వేర్వేరు రంగులుగా ఉండుటకు సంభావ్యత

(1) $\frac{68}{105}$ (2) $\frac{71}{105}$ (3) $\frac{64}{105}$ (4) $\frac{73}{105}$

(13) X మరియు Y అను రెండు ఘటనలకు $P(X/Y) = \frac{1}{2}$, $P(Y/X) = \frac{1}{3}$ మరియు $P(X \cap Y) = \frac{1}{6}$ అయిన $P(X \cup Y)$ విలువ

(1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{2}{5}$ (3) $\frac{1}{6}$ (4) $\frac{2}{3}$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_12.indd 278 10-03-2023 12:27:52

(14) ఒక జాడీలో 5 ఎరుపు మరియు 5 నలుపు రంగు బంతులు గలవు. జాడీ నుండి యాదృచ్ఛికంగా ఒక బంతిని ఎన్నుకొని దాని రంగును గుర్తించి వానిని వాటి జాడీలో మరల ఉంచబడును అదనంగా ఆ రంగులోని 2 బంతులను జాడీలో చేర్చి ఒక బంతిని ఎన్నుకొనవలెను. తర్వాత జాడీ నుండి రెండవ బంతిని ఎన్నుకొనునపుడు అది ఎరుపు రంగు బంతిగా ఉండుటకు గల సంభావ్యత

(1) $\frac{5}{12}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{7}{12}$ (4) $\frac{1}{4}$

(15) మొదటి 100 సహజ సంఖ్యల నుండి యాదృచ్ఛికంగా ఒక సంఖ్య x ఎన్నుకొనబడినది. $\frac{(x-10)(x-50)}{x-30} \geq 0$

అనుదానిని సంతృప్తి చేయు సంఖ్యల ఘటనA అయిన $P(A)$ అనునది

(1) 0.20 (2) 0.51 (3) 0.71 (4) 0.70

(16) A మరియు B అను స్వతంత్ర ఘటనలకు $P(A)=0.35$ మరియు $P(A\cup B)=0.6$ అయిన $P(B)$ అనునది.

(1) $\frac{5}{13}$ (2) $\frac{1}{13}$ (3) $\frac{4}{13}$ (4) $\frac{7}{13}$

(17) A మరియు B అను రెండు ఘటనలకు $P(\overline{A})=\frac{3}{10}$ మరియు $P(A\cap\overline{B})=\frac{1}{2}$ అయిన $P(A\cap B)$ విలువ

(1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{1}{4}$ (4) $\frac{1}{5}$

(18) A మరియు B అను రెండు ఘటనలకు $P(A)=0.4, P(B)=0.8$ మరియు $P(B/A)=0.6$ అయిన $P(\overline{A}\cap B)$ విలువ

(1) 0.96 (2) 0.24 (3) 0.56 (4) 0.66

(19) A, B మరియు C అను మూడు ఘటనలలో ఒకటి మాత్రమే సంభవించును. A కు ప్రతికూల నిష్పత్తి 7 నుండి 4 మరియు B నకు ప్రతికూల నిష్పత్తి 5 నుండి 3 అయిన C నకు ప్రతికూల నిష్పత్తి.

(1) 23: 65 (2) 65: 23 (3) 23: 88 (4) 88: 23

(20) $\{1,2,3,4\}$ సమితి నుండి a మరియు bలను యాదృచ్ఛికంగా ఎన్నుకొని వానిని తిరిగి ఉంచుట (with replacement) ద్వారా జరిగినది. $x^2+ax+b=0$ అను సమీకరణ వాస్తవ మూలములకు సంభావ్యత

(1) $\frac{3}{16}$ (2) $\frac{5}{16}$ (3) $\frac{7}{16}$ (4) $\frac{11}{16}$

(21) A మరియు B అను రెండు ఘటనలకు $P(A)=\frac{1}{4}$, $P(A/B)=\frac{1}{2}$ మరియు $P(B/A)=\frac{2}{3}$.

అయిన $P(B)$ విలువ

(1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{1}{2}$

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_12.indd 279 10-03-2023 12:27:54

(22) ఒక నిర్దిష్ట కళాశాలలో 4% బాలురు మరియు 1% బాలికలు 1.8 మీ కన్నా పొడవుగా ఉన్నారు. మరియు ఆ కళాశాలలో మొత్తము సంఖ్యలో 60% బాలికలున్నారు. యాదృచికంగా 1.8 మీ పొడవు కంటే ఎక్కువగా ఉన్నా ఒకరిని ఎన్నుకొన్నప్పుడు ఆ ఒకరు బాలికగా ఉండుటకు గల సంభావ్యత

(1) $\frac{2}{11}$ (2) $\frac{3}{11}$ (3) $\frac{5}{11}$ (4) $\frac{7}{11}$

(23) 10 నాణెములను ఎగురవేసినపుడు కనీసము 8 బొమ్మలు పడుటకు సంభావ్యత

(1) $\frac{7}{64}$ (2) $\frac{7}{32}$ (3) $\frac{7}{16}$ (4) $\frac{7}{128}$

(24) A మరియు B అను రెండు ఘటనలు సంభవించుటకు సంభావ్యతలు వరుసగా 0.3, 0.6 అగును. A మరియు B ఒకే సమయంలో సంభవించుటకు సంభావ్యత 0.18 అయిన A మరియు B సంభవించకుండా ఉండుటకు సంభావ్యత

(1) 0.1 (2) 0.72 (3) 0.42 (4) 0.28

(25) ఒక సంఖ్య m అనునది $m \leq 5$ అయిన ద్విఘాత సమీకరణము $2x^2 + 2mx + m + 1 = 0$ యొక్క మూలములు వాస్తవ మూలములుగా ఉండుటకు సంభావ్యత

(1) $\frac{1}{5}$ (2) $\frac{2}{5}$ (3) $\frac{3}{5}$ (4) $\frac{4}{5}$

సారాంశము

ఒక యాదృచిక ప్రయోగంలో ప్రతిరూప ఆవరణము S గాను దానిలో ఏదేని ఒక ఘటన A గా అనుకొనిన

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{A \text{ నకు గల అనుకూల ఫలితముల సంఖ్య}}{S \text{ లో ఉన్న పూర్ణ ఫలితముల సంఖ్య}}$$

సంభావ్యత యొక్క స్వీకృత్యములు (Axioms of probability)

S అనునది ఒక యాదృచిక ప్రయోగము యొక్క పరిమిత ప్రతిరూప ఆవరణము. A అనునది S యొక్క ఏదేని ఒక ఘటన $P(A)$ అనునది A యొక్క సంభావ్యత అయిన $P(A)$ ఈ క్రింది ప్రాథమిక నియమములను సంతృప్తి చేయును.

(1) $P(A) \geq 0$

(2) A మరియు B పరస్పర వర్జిత ఘటనలు అయిన $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(3) $P(S) = 1$

అసాధ్యఘటన సంభావ్యత శూన్యమగును. $\boxed{P(\varnothing) = 0}$

A మరియు B రెండు ఘటనలు మరియు B యొక్క పూరక ఘటన $\overline{B}$ అయిన

$$\boxed{P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)}$$

A మరియు B అనునవి రెండు ఘటనలు అయిన

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

ఘటన A జరిగిందని ఇస్తే (ఇంతకుమునుపే సంభవించిన స్థితిలో) A యొక్క నిభందనలో B యొక్క నియత సంభావ్యత $P(B/A)$ అని గుర్తించబడిన

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_12.indd 280 10-03-2023 12:27:56

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \quad \text{provided } P(A)\neq 0$$

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \quad \text{provided } P(B)\neq 0$$

ఏకకాలము నందు ఏర్పడు A మరియు B అను రెండు ఘటనల సంభావ్యత

$$P(A\cap B)=P(A/B)P(B) \text{ or } P(A\cap B)=P(B/A)P(A)$$

$P(A\cap B)=P(A)\,.\,P(B)$ అయిన A మరియు B అను రెండు ఘటనలు స్వతంత్ర ఘటనలగును.

మొత్త సంభావ్యత

$A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ అనునవి పరస్పర వర్జిత ఘటనలు మరియు పూర్ణ ఘటనలు మరియు B అనునది S అను ప్రతిరూప ఆవరణములో ఉన్న ఏదేని ఒక ఘటన అయిన

$$P(B) = P(A_1).P(B/A_1)+P(A_2).P(B/A_2)+\cdots+P(A_n).P(B/A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(B/A_i)$$

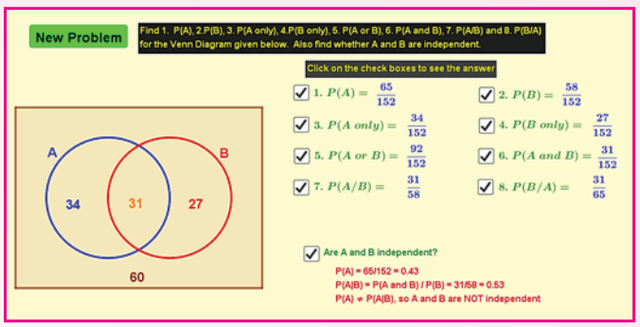
బేయీస్ సిద్ధాంతము (Bayes' Theorem)

ఒక ప్రయోగములో $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ లు పరస్పర వర్జిత ఘటనలు మరియు పూర్ణఘటనలు అవుతూ $P(A_i) > 0, \quad i=1,2,3,\ldots.n$ అయిన $P(B) > 0$ గా ఉన్నప్పుడు B అను ఏదేని ఒక ఘటన

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i)\,P(B/A_i)}{P(A_1)\,P(B/A_1)+P(A_2)\,P(B/A_2)+\ldots+P(A_n)\,P(B/A_n)}$$

సంభావ్యత

కృత్యము చివర ఎడురు చూచు ఫలితము



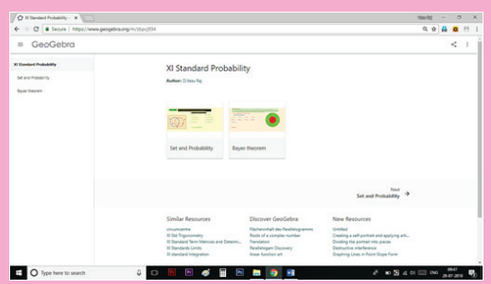
సోపానము 1

ఈ క్రింద ఇవ్వబడిన బ్రౌసరును ఓపెన్ చేసి URL లింకును టైపు చేయుము లేదా QR కోడ్‌ను స్కాన్ చేయుము.

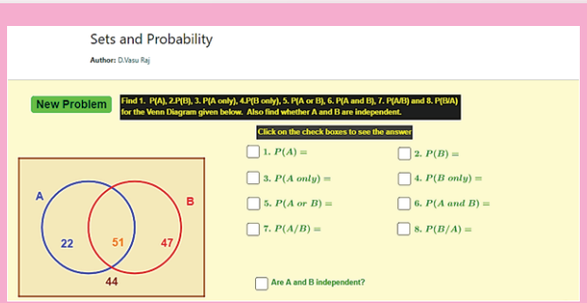
GeoGebra లో "XI standard Probability" ప్రక్కకు వెళ్ళుము. మీ పాఠమునకు సంబంధించిన పనికాగితము ఆ పక్కలో ఇవ్వబడియుండును.

సోపానము 2

"Sets and Probability" అనుదానిని ఎన్నుకొనుము. అందులో "New Problem" అనుదానిని ఎన్నుకొని ప్రశ్నలను మార్చవచ్చును. సంభావ్యత సమస్యలను చేసి దానికని ఇవ్వబడిన బాక్సులను క్లిక్ చేయుట ద్వారా మార్చుకొన వచ్చును. జవాబులను సరిచూడుము.



సోపానము 1



సోపానము 2

Browse in the link:

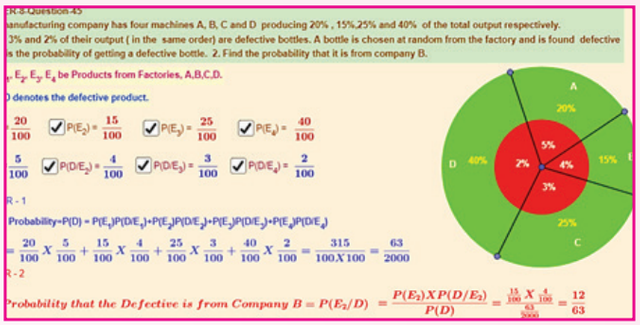
XI standard Probability: https://ggbm.at/zbpcj934

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_12.indd 282 10-03-2023 12:27:57

అంతర్జాల కృత్యము 12(b)

సంభావ్యత సిద్ధాంతము – పరిచయము

కృత్యము చివర ఎడురు చూచు ఫలితము



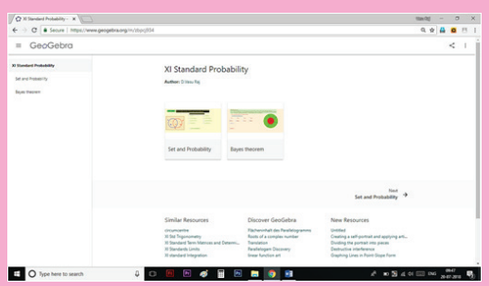
సోపానము 1

ఈ క్రింద ఇవ్వబడిన బ్రౌసరును ఓపెన్ చేసి URL లింకును టైపు చేయుము లేదా QR కోడ్‌ను స్కాన్ చేయుము.

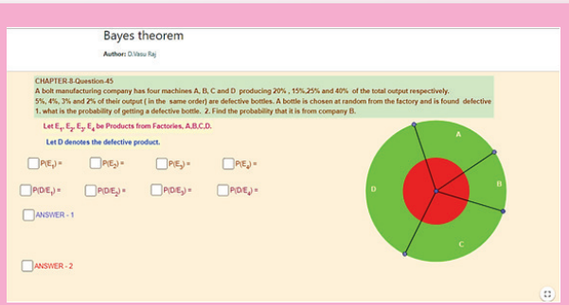
GeoGebra లో "XI standard Probability" ప్రక్కకు వెళ్ళుము. మీ పాఠమునకు సంబంధించిన పనికాగితము ఆ పక్కలో ఇవ్వబడియుండును.

సోపానము 2

"Bayes Theorem" అనుదానిని ఎన్నుకొనుము. అందులో కొన్ని ఉదాహరణములు ఇవ్వబడి యుండును. ఇవ్వబడిన సోపానముల ప్రకారము సంభావ్యతను చేయుము. ఈ యొక్క జవాబులను సరిచూడుము. అందులకు ఇవ్వబడిన బాక్సులను క్లిక్ చేయుము.



సోపానము 1



సోపానము 2

Browse in the link:

XI standard Probability: https://ggbm.at/zbpcj934

AYF8G

11th_Maths_Vol_2_Telugu_medium_Unit_12.indd 283 10-03-2023 12:27:58

జవాబులు

అభ్యాసము 7.1

(1) (i) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 9 & 25\\ 0 & 4 & 16\end{bmatrix}$ (ii) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & 5 & 9 & 13\\ 2 & 2 & 6 & 10\\ 5 & 1 & 3 & 7\end{bmatrix}$ (2) $\pm\sqrt{2}, -3, \frac{1}{2}, 1-\pi$

(3) 5 (4) $A=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-15 & 10 & -8\\ 10 & -5 & 5\end{bmatrix}$, $B=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-12 & 2 & -16\\ 8 & -4 & 13\end{bmatrix}$

(5) $A^4=\begin{bmatrix}1 & 4a\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ (6) (ii) $\alpha=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}, n\in\mathbb{Z}$ (7) $x=1$

(9) $k=2$ (12) $-I$ (14) $A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & 0\end{bmatrix}$ (16) 3×4

(18) $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 12\\ -5 & 0\end{bmatrix}$ (19) $x=-2,\ y=-1$ (20) (i) $x=3^{\frac{1}{3}}$ (ii) $p=-2, q=0, r=-3$

(21) $A=\begin{bmatrix}0 & -1 & -2\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$, అసౌష్ఠవ (24) I వ సంచి ₹ 180, II వ సంచి ₹ 340 III వ సంచి ₹ 480

అభ్యాసము 7.2

(10) 0 (13) 0 (15) (i) 0 (ii) 0 (16) 4

(17) −81 (18) (19) −1, 2 (21) 7

అభ్యాసము 7.3

(3) $x=0$ (బాహుళ్యత 2), $x=-(a+b+c)$ (5) $x=0$ (బాహుళ్యత 2), $x=-12$

అభ్యాసము 7.4

(1) 2.5 చ.ప్రమాణాలు (2) $k=-1, 7$ (3) (i) విలక్షణం (ii) అవిలక్షణ (iii) విలక్షణ

(4) (i) $a=-\frac{6}{7}$ (ii) $b=\frac{49}{8}$ (5) $\frac{1}{2}$ (6) 6

అభ్యాసము 7.5

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
2	1	1	2	2	2	4	4	2	4	2	4	3	2	4
(16)	(17)	(18)	(19)	(20)	(21)	(22)	(23)	(24)	(25)					
3	3	4	1	3	2	3	3	1	2					

అభ్యాసము 8.1

(7) $\vec{b}-\vec{a}, -\vec{a}, \vec{a}-\vec{b}$ ఇతర భుజాలు మరియు మరొక కర్ణము $\vec{b}-2\vec{a}$

13_11th-Maths-Vol2-Answers-Telugu.indd 284 5/10/2022 12:16:11 PM

అభ్యాసము 8.2

(1) (i) దిశా కొసైన్‌లు కానివి (ii) దిశాకొసైన్‌లు (iii) దిశాకొసైన్‌లు కాని

(2) (i) $\left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$ (ii) $\left(\frac{3}{\sqrt{19}}, \frac{-1}{\sqrt{19}}, \frac{3}{\sqrt{19}}\right)$ (iii) (0, 0, 1)

(3) (i) $\left(\frac{3}{\sqrt{89}}, \frac{-4}{\sqrt{89}}, \frac{8}{\sqrt{89}}\right)$, $(3,-4,8)$ (ii) $\left(\frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}\right)$, $(3,1,1)$

(iii) (0, 1, 0) మరియు (0, 1, 0) (iv) $\left(\frac{5}{\sqrt{2338}}, \frac{-3}{\sqrt{2338}}, \frac{-48}{\sqrt{2338}}\right)$ మరియు (5, –3, –48)

(v) $\left(\frac{3}{\sqrt{34}}, \frac{4}{\sqrt{34}}, \frac{-3}{\sqrt{34}}\right)$ మరియు (3, 4, –3) (vi) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ మరియు $(1,0,-1)$

(4) $\left(\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ మరియు $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$

(5) $a = \pm\frac{1}{2}$ (6) $a=-1, b=2, c=-1$, లేక $a=1, b=-2, c=1$ (8) $\lambda = \frac{2}{3}$

(11) (i) $\sqrt{41}, \left(\frac{2}{\sqrt{41}}, \frac{1}{\sqrt{41}}, \frac{-6}{\sqrt{41}}\right)$ (ii) $\sqrt{1123}, \left(\frac{-15}{\sqrt{1123}}, \frac{27}{\sqrt{1123}}, \frac{13}{\sqrt{1123}}\right)$

(12) $\sqrt{44}+\sqrt{218}+\sqrt{110}$ (13) $\frac{1}{\sqrt{398}}(17\hat{i}-3\hat{j}-10\hat{k})$

(14) అవును (16) $m = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

అభ్యాసము 8.3

(1) (i) 9 (ii) 4 (2) (i) $\lambda = \frac{5}{2}$ (ii) $\lambda = -2$ (3) $\theta = \frac{\pi}{4}$

(4) (i) $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-9}{49}\right)$ (ii) $\theta = \frac{2\pi}{3}$ (5) $\theta = \frac{2\pi}{3}$ (8) –55

(11) $5\sqrt{2}$ (12) $\frac{41}{7}$ (13) 5 (14) –42

అభ్యాసము 8.4

(1) $\sqrt{507}$ (3) $\frac{\pm 10\sqrt{3}}{\sqrt{35}}(5\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k})$ (4) $\pm\frac{(-\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})}{\sqrt{6}}$

(5) $8\sqrt{3}$ చ.ప్రమాణాలు (6) $\frac{1}{2}\sqrt{165}$ చ.ప్రమాణాలు (10) $\frac{\pi}{3}$

అభ్యాసము 8.5

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
3	3	4	2	2	3	4	4	2	3	2	1	1	1	3
(16)	(17)	(18)	(19)	(20)	(21)	(22)	(23)	(24)	(25)					
4	1	4	4	1	3	2	4	3	2					

అభ్యాసము 9.1

(1) $\simeq 0.\overline{3}$ (2) $\simeq 0.25$ (3) $\frac{1}{2\sqrt{3}} \simeq 0.288$ (4) $\simeq 0.25$

(5) $\simeq 1$ (6) $\simeq 0$ (7) 1 (8) 3

(9) 2 (10) 3 (11) వర్తించదు (12) వర్తించదు

(13) 0 (14) 1 (15) వర్తించదు

(16) $x_0 = 4$ తప్ప (17) $x_0 = \pi$ తప్ప (19) $f(8^-) = f(8^+) = 25$

(20) కాదు (21) $f(2)$ ను నిర్ణయించలేము (22) 6, 6 (23) వర్తించదు

అభ్యాసము 9.2

(1) 32 (2) $\frac{m}{n}$ (3) 108 (4) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

(5) $\frac{1}{6}$ (6) $-\frac{1}{4}$ (7) 3 (8) 4

(9) $\frac{1}{2}$ (10) $-\frac{1}{4}$ (11) $-\frac{3}{4}\sqrt[3]{4}$ (12) 0

(13) $f(x) \to -\infty$ అయిన $x \to 0$ (వర్తించదు) (14) $\frac{1}{4}$ (15) $\frac{1}{4a\sqrt{a-b}}$

అభ్యాసము 9.3

(1) (i) $f(-2) \to \infty$ అయిన $x \to -2^-$, $f(-2) \to -\infty$ అయిన $x \to -2^+$

(ii) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) \to \infty$ అయిన $x \to \frac{\pi}{2}^-$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) \to -\infty$ అయిన $x \to \frac{\pi}{2}^+$

(2) $f(3) \to -\infty$ అయిన $x \to 3^-$, $f(3) \to \infty$ అయిన $x \to 3^+$ (3) $f(x) \to \infty$ అయిన $x \to \infty$

(4) 0 (5) $f(x) \to \infty$ అయిన $x \to \infty$ (6) -1 (7) $\frac{1}{4}$

(9) $\frac{1}{\alpha}$ (10) 30

అభ్యాసము 9.4

(1) e^7 (2) $e^{\frac{1}{3}}$ (3) 1 (4) $\frac{1}{e^8}$ (5) e^3

(6) $\frac{1}{8}$ (7) $\frac{\alpha}{\beta}$ (8) $\frac{2}{5}$ (9) $\begin{cases} 1 & \text{if } m = n \\ 0 & \text{if } m > n \\ f(\alpha) \to \infty & \text{అయిన } \alpha \to 0 \text{ if } m < n \end{cases}$

(10) $2\cos a$ (11) $\frac{b}{a}$ (12) $\frac{2}{3}$ (13) $\frac{1}{2}$ (14) 2

(15) $\log\frac{2}{3}$ (16) $\log 9$ (17) $\frac{1}{2}$ (18) $\log 3 - 1$ (19) a

(20) $-\frac{3}{2}$ (21) e^2 (22) $\frac{1}{4\sqrt{2}}$ (23) 1 (24) e^2

(25) 2 (26) $a - b$ (27) $\frac{1}{2}$ (28) $\frac{1}{2}$

13_11th-Maths-Vol2-Answers-Telugu.indd 286 5/10/2022 12:16:19 PM

అభ్యాసము 9.5

(2) (i) $x \in \mathbb{R}$ యొక్క అన్ని విలువలకు అవిచ్ఛిన్నమగును (ii) $\mathbb{R}$ వద్ద అవిచ్ఛిన్నమగును

(iii) $x \in \mathbb{R} - (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in z$ యొక్క ప్రతి విలువకు అవిచ్ఛిన్నమగును

(iv) $x \in \mathbb{R}$ యొక్క ప్రతి విలువకు అవిచ్ఛిన్నమగును

(v) $(0, \infty)$ వద్ద అవిచ్ఛిన్నమగును (vi) $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ యొక్క ప్రతి విలువకు అవిచ్ఛిన్నమగును

(vii) $x \in \mathbb{R} - \{-4\}$ యొక్క ప్రతి విలువకు అవిచ్ఛిన్నమగును (viii) $x \in \mathbb{R}$ యొక్క ప్రతి విలువకు అవిచ్ఛిన్నమగును

(ix) $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ యొక్క ప్రతి విలువకు అవిచ్ఛిన్నమగును

(x) $x \in \mathbb{R} - \frac{n\pi}{2}, n \in z$ యొక్క ప్రతి విలువకు అవిచ్ఛిన్నమగును

(3) (i) $x = 3$ వద్ద అవిచ్ఛిన్నము కాదు (ii) $x \in \mathbb{R}$ యొక్క ప్రతి విలువకు అవిచ్ఛిన్నమగును

(iii) $x \in \mathbb{R}$ యొక్క ప్రతి విలువకు అవిచ్ఛిన్నమగును (iv) $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ యొక్క ప్రతి విలువకు అవిచ్ఛిన్నమగును

(4) (i) $x_0 = 1$ వద్ద అవిచ్ఛిన్నమగును (ii) $x_0 = 3$ వద్ద అవిచ్ఛిన్నం కాదు

(6) $\alpha = 4$ (8) 6

(9) (i) $x = 1$ వద్ద అవిచ్ఛిన్నం కాదు (ii) $x = 0$ వద్ద అవిచ్ఛిన్నం కాదు

(10) $x = 0, 1, 3$ విలువలకు అవిచ్ఛిన్నం అగును

(11) (i) $x = -2$, వద్ద నివార్య విచ్ఛిన్నత $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 8}{x+2} & x \neq -2 \text{ అయిన} \\ -6 & x = -2 \text{ అయిన} \end{cases}$

(ii) $x = -4$, వద్ద నివార్య విచ్ఛిన్నత $g(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 64}{x+4} & x \neq -4 \text{ అయిన} \\ 48 & x = -4 \text{ అయిన} \end{cases}$

(iii) $x = 9$, వద్ద నివార్య విచ్ఛిన్నత $g(x) = \begin{cases} \frac{3 - \sqrt{x}}{9 - x} & x \neq 9 \text{ అయిన} \\ \frac{1}{6} & x = 9 \text{ అయిన} \end{cases}$

(12) -2 (13) $f(0) = 0$ (14) $f(1) = \frac{2}{3}$

అభ్యాసము 9.6

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
2	3	4	1	1	4	2	2	2	3	4	3	4	3	1
(16)	(17)	(18)	(19)	(20)	(21)	(22)	(23)	(24)	(25)					
1	1	1	4	2	2	2	2	2	4					

అభ్యాసము 10.1

(1) (i) 0 (ii) -4 (iii) $-2x$

(2) (i) $f'(1^-) = -1$, $f'(1^+) = 1$, అవకలనీయత కానిది (ii) $f'(x) \to -\infty$ as $x \to 1^-$, అయిన అవకలనీయత కానిది

(iii) $f'(1^-) = 1$, $f'(1^+) = 2$, అవకలనీయత కానిది

13_11th-Maths-Vol2-Answers-Telugu.indd 287 5/10/2022 12:16:21 PM

(3) (i) అవకలనీయమైనది (ii) అవకలనీయత కానది

(iii) అవకలనీయత కానిది (iv) అవకలనీయత కానిది

(5) $x=-1$ వద్ద మరియు $x=8$ అనేవి

$x=4$ వద్ద అవిచ్ఛిన్నమగును, $x=11$, వద్ద స్పర్శరేఖ లంబంగా ఉండును

(6) వర్తించదు

(7) (i) $x=n\pi, n\in z$ కు అవకలనీయత లేదు (ii) $x=(2n+1)\frac{\pi}{2}, n\in z$ అవకలనీయత లేదు

అభ్యాసము 10.2

(1) $1-3\cos x$ (2) $\cos x-\sin x$ (3) $x\cos x+\sin x$

(4) $-\sin x-2\sec^2 x$ (5) $3t^2\cos t-t^3\sin t$ (6) $4\sec t\tan t+\sec^2 t$

(7) $e^x(\cos x+\sin x)$ (8) $\frac{x\sec^2 x-\tan x}{x^2}$ (9) $\frac{1}{1+\cos x}$

(10) $\frac{(1-x)\cos x+(1+x)\sin x}{(\sin x+\cos x)^2}$ (11) $\cos x+\sin x$ (12) $\frac{x\cos x-2\sin x}{x^3}$

(13) $\tan\theta\sec\theta+\cos\theta+\sin\theta$ (14) $-\frac{(1+\cos^2 x)}{\sin^3 x}$ (15) $x\cos 2x+\sin x\cos x$

(16) $e^{-x}\left[\frac{1}{x}-\log x\right]$ (17) $e^{-3x}\left[-3(x^2+5)\log(1+x)+\frac{x^2+5}{1+x}+2x\log(1+x)\right]$

(18) $\frac{\pi}{180}\cos\frac{\pi}{180}x$ (19) $\frac{\log_{10} e}{x}$

అభ్యాసము 10.3

(1) $5(2x+4)(x^2+4x+6)^4$ (2) $3\sec^2 3x$ (3) $-\sec^2 x\sin(\tan x)$

(4) $x^2(1+x^3)^{-\frac{2}{3}}$ (5) $\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$ (6) $e^x\cos(e^x)$

(7) $7(3x^2+4)(x^3+4x)^6$ (8) $\frac{3}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)$ (9) $\frac{1}{3}\sec^2 t(1+\tan t)^{-\frac{2}{3}}$

(10) $-3x^2\sin(a^3+x^3)$ (11) $-my$ (12) $20\sec 5x\tan 5x$

(13) $\frac{8(2x-5)^3}{(8x^2-5)^4}[-4x^2+30x-5]$ (14) $\frac{8x^3+14x}{3(x^2+2)^{\frac{2}{3}}}$ (15) $e^{-x^2}[1-2x^2]$

(16) $-\frac{3t^2}{2(t^3+1)^{\frac{3}{4}}(t^3-1)^{\frac{5}{4}}}$ (17) $\frac{14-3x}{2(7-3x)\sqrt{7-3x}}$ (18) $-\sin x\sec^2(\cos x)$

(19) $\sin x(1+\sec^2 x)$ (20) $\frac{5^{-\frac{1}{x}}(\log 5)}{x^2}$ (21) $\frac{\sec^2 x}{\sqrt{1+2\tan x}}$

13_11th-Maths-Vol2-Answers-Telugu.indd 288 5/10/2022 12:16:24 PM

(22) $3\sin x\cos x(\sin x-\cos x)$ (23) $-k\sin kx\sin(2\cos kx)$ (24) $-6\sin 2x(1+\cos^2 x)^5$

(25) $\dfrac{3e^{3x}+2e^{4x}}{(1+e^x)^2}$ (26) $\dfrac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ (27) $e^{x\cos x}[\cos x-x\sin x]$

(28) $\dfrac{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}+2\sqrt{x}+1}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$ (29) $\dfrac{\cos\left(\tan\sqrt{\sin x}\right)\sec^2\left(\sqrt{\sin x}\right)\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$ (30) $\dfrac{-2}{1+x^2}$

అభ్యాసము 10.4

(1) $x^{\cos x}\left(\dfrac{\cos x}{x}-\sin x\log x\right)$ (2) $x^{\log x}\left(\dfrac{2\log x}{x}\right)+(\log x)^x\left[\dfrac{1}{\log x}+\log(\log x)\right]$

(3) $\dfrac{y(2x-1)}{x(1+2y)}$ (4) $\dfrac{y(x\log y-y)}{x(y\log x-x)}$ (5) $(\cos x)^{\log x}\left[\dfrac{\log(\cos x)}{x}-\tan x\log x\right]$

(6) $-\dfrac{b^2x}{a^2y}$ (7) $\dfrac{x\sqrt{x^2+y^2}+y}{x-y\sqrt{x^2+y^2}}$ (8) $\dfrac{1-\sec^2(x+y)-\sec^2(x-y)}{\sec^2(x+y)-\sec^2(x-y)}$

(10) $\dfrac{1}{2}$ (11) $\dfrac{6}{1+9x^2}$ (12) 1 (13) $-\tan t$

(14) $\tan t$ (15) $\dfrac{t^2-1}{2t}$ (16) $\dfrac{2}{1+x^2}$ (17) $\dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}}$

(18) 1 (19) $\cos x^2$ (20) 2 (21) $\dfrac{1}{2}$

(22) -1 (23) $\dfrac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

అభ్యాసము 10.5

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
2	4	3	3	1	4	3	2	1	4	3	3	2	2	4
(16)	(17)	(18)	(19)	(20)	(21)	(22)	(23)	(24)	(25)					
2	3	1	4	2	4	1	1	3	2					

అభ్యాసము 11.1

(1) (i) $\dfrac{x^{12}}{12}+c$ (ii) $-\dfrac{1}{6x^6}+c$ (iii) $\dfrac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}+c$ (iv) $\dfrac{8}{13}x^{\frac{13}{8}}+c$

(2) (i) $-\cot x+c$ (ii) $\sec x+c$ (iii) $-\text{cosec}x+c$ (iv) $\tan x+c$

(3) (i) 12^3x+c (ii) $\log|x|+c$ (iii) e^x+c

(4) (i) $\tan^{-1}x+c$ (ii) $\sin^{-1}x+c$

అభ్యాసము 11.2

(1) (i) $\dfrac{(x+5)^7}{7}+c$ (ii) $\dfrac{1}{9(2-3x)^3}+c$ (iii) $\dfrac{2}{9}(3x+2)^{\frac{3}{2}}+c$

(2) (i) $\dfrac{-\cos 3x}{3}+c$ (ii) $-\dfrac{\sin(5-11x)+c}{11}$ (iii) $-\dfrac{\cot(5x-7)}{5}+c$

(3) (i) $\frac{1}{3}e^{3x-6}+c$ (ii) $-\frac{e^{8-7x}}{7}+c$ (iii) $-\frac{1}{4}\log|6-4x|+c$

(4) (i) $5\tan\frac{x}{5}+c$ (ii) $-\frac{1}{5}\operatorname{cosec}(5x+3)+c$ (iii) $-\frac{1}{15}\sec(2-15x)+c$

(5) (i) $\frac{1}{4}\sin^{-1}(4x)+c$ (ii) $\frac{1}{9}\sin^{-1}(9x)+c$ (iii) $\frac{1}{6}\tan^{-1}(6x)+c$

అభ్యాసము 11.3

(1) $\frac{(x+4)^6}{6}+\frac{1}{3(2-5x)^3}+\frac{\cot(3x-1)}{3}+c$ (2) $-2\sin(5-2x)+3e^{3x-6}-6\log|6-4x|+c$

(3) $5\tan\frac{x}{5}+9\sin 2x+2\sec(5x+3)+c$ (4) $2\sin^{-1}(4x)+9\sin^{-1}(3x)-3\tan^{-1}(5x)+c$

(5) $2\tan^{-1}(3x+2)+3\sin^{-1}(3-4x)+c$ (6) $\sin\left(\frac{x}{3}-4\right)+\log|7x+9|+5e^{\frac{x}{5}+3}+c$

అభ్యాసము 11.4

(1) $2x^2-5x+3$ (2) $3(x^3-x^2-1)$ (3) $2x^3-3x^2+5x+26$

(4) (i) 8 సెకన్లు (ii) 39.2 మీ/సెకను (iii) 78.4 మీ/సెకను

(5) (i) 2.4 చ.సెంమీ (ii) 0.4 చ.సెంమీ

అభ్యాసము 11.5

(1) $\frac{x^2}{2}+4x-3\log|x|-\frac{2}{x}+c$ (2) $\frac{x^2}{2}+\log|x|+2x+c$ (3) $\frac{8x^3}{3}+26x^2-180x+c$

(4) $\tan x-\cot x-2x+c$ (5) $2[\sin x+x\cos\alpha]+c$ (6) $-2\operatorname{cosec}2x+c$

(7) $-3\cot x-4\operatorname{cosec}x+c$ (8) $x-\sin x+c$ (9) $2\left[\frac{\sin 3x}{3}+\sin x\right]+c$

(10) $\frac{1}{2}\left[\frac{\sin 5x}{5}+\sin x\right]+c$ (11) $\frac{1}{2}\left[x-\frac{\sin 10x}{10}\right]+c$ (12) $-\frac{1}{8}\cos 4x+c$

(13) $\frac{(ae)^x}{\log(ae)}+c$ (14) $\frac{2}{15}(3x+7)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}(3x+7)^{\frac{3}{2}}+c$

(15) $\frac{2^{2x+2}}{\log 2}-\frac{2^{2-3x}}{3\log 2}+c$ (16) $\frac{2}{21}[(x+3)^{\frac{3}{2}}+(x-4)^{\frac{3}{2}}]+c$

(17) $2\log|x+3|-\log|x+2|+c$ (18) $\frac{1}{9}\log|x-1|-\frac{1}{9}\log|x+2|+\frac{1}{3(x+2)}+c$

(19) $\log\left|\frac{x+2}{x-1}\right|+3\tan^{-1}x+c$ (20) $\frac{x^2}{2}+3x-\log|x-1|+8\log|x-2|+c$

అభ్యాసము 11.6

(1) $\sqrt{1+x^2}+c$ (2) $\frac{1}{3}\tan^{-1}(x^3)+c$ (3) $\log|e^x+e^{-x}|+c$

(4) $\log|10^x+x^{10}|+c$ (5) $-2\cos\sqrt{x}+c$ (6) $\log|\log(\sin x)|+c$

13_11th-Maths-Vol2-Answers-Telugu.indd 290 5/10/2022 12:16:29 PM

(7) $\log\left|\log\left(\tan\frac{x}{2}\right)\right|+c$ (8) $\frac{1}{b^2}\log|a^2+b^2\sin^2 x|+c$ (9) $\frac{(\sin^{-1}x)^2}{2}+c$

(10) $(1+\sqrt{x})^2-4(1+\sqrt{x})+2\log\left|1+\sqrt{x}\right|+c$ (11) $\log|\log(\log x)|+c$

(12) $-e^{-\beta x^{\alpha}}+c$ (13) $2\sqrt{\sec x}+c$ (14) $\frac{(1-x)^{19}}{19}-\frac{(1-x)^{18}}{18}+c$

(15) $\frac{\sin^6 x}{6}-\frac{\sin^8 x}{8}+c$ (16) $(x-a)\cos a-\sin a\log|\sec(x-a)|+c$

అభ్యాసము 11.7

(1) (i) $e^{3x}[3x-1]+c$ (ii) $-\frac{x\cos 3x}{3}+\frac{\sin 3x}{9}+c$

(iii) $-e^{-5x}[5x+1]+c$ (iv) $x\sec x-\log|\sec x+\tan x|+c$

(2) (i) $\frac{x^2\log|x|}{2}-\frac{x^2}{4}+c$ (ii) $e^{3x}[9x^2-6x+2]+c$

(iii) $x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+c$ (iv) $-x^3\cos x+3x^2\sin x+6x\cos x-6\sin x+c$

(3) (i) $-\sin^{-1}x\sqrt{1-x^2}+x+c$ (ii) $\frac{1}{2}e^{x^2}[x^4-2x^2+2]+c$

(iii) $\frac{1}{2}\left[4x\tan^{-1}4x-\log\left|\sqrt{1+16x^2}\right|\right]+c$ (iv) $2\left[x\tan^{-1}x-\log\left|\sqrt{1+x^2}\right|\right]+c$

అభ్యాసము 11.8

(1) (i) $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\cos bx+b\sin bx]+c$ (ii) $\frac{e^{2x}}{5}[2\sin x-\cos x]+c$

(iii) $\frac{e^{-x}}{5}[2\sin 2x-\cos 2x]+c$

(2) (i) $-\frac{e^{-3x}}{13}[3\sin 2x+2\cos 2x]+c$ (ii) $-\frac{e^{-4x}}{10}[2\sin 2x+\cos 2x]+c$

(iii) $\frac{e^{-3x}}{10}[\sin x-3\cos x]+c$

అభ్యాసము 11.9

(1) $e^x\log|\sec x|+c$ (2) $\frac{e^x}{2x}+c$ (3) $e^x\sec x+c$

(4) $e^x\tan x+c$ (5) $xe^{\tan^{-1}x}+c$ (6) $\frac{x}{1+\log|x|}+c$

అభ్యాసము 11.10

(1) (i) $\frac{1}{4}\log\left|\frac{2+x}{2-x}\right|+c$ (ii) $\frac{1}{20}\log\left|\frac{5+2x}{5-2x}\right|+c$ (iii) $\frac{1}{12}\log\left|\frac{3x-2}{3x+2}\right|+c$

13_11th-Maths-Vol2-Answers-Telugu.indd 291 5/10/2022 12:16:30 PM

(2) (i) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left|\frac{\sqrt{2}-3+x}{\sqrt{2}+3-x}\right|+c$ (ii) $\frac{1}{10}\log\left|\frac{x-4}{x+6}\right|+c$ (iii) $\log\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+2}\right|+c$

(3) (i) $\log\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2-1}\right|+c$ (ii) $\log\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+5}\right|+c$ (iii) $\sin^{-1}\left(\frac{x-4}{5}\right)+c$

అభ్యాసము 11.11

(1) (i) $\log\ |x^2+4x-12|-\frac{7}{8}\log\left|\frac{x-2}{x+6}\right|+c$ (ii) $\frac{5}{2}\log|x^2+2x+2|-7\tan^{-1}(x+1)+c$

(iii) $\frac{3}{4}\log|2x^2-2x+3|+\frac{\sqrt{5}}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right)+c$

(2) (i) $5\sin^{-1}\frac{x-2}{\sqrt{13}}-2\sqrt{9+4x-x^2}+c$ (ii) $\sqrt{x^2-1}+2\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+c$

(iii) $2\sqrt{x^2+4x+1}-\log\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+1}\right|+c$

అభ్యాసము 11.12

(1) (i) $\frac{x+1}{2}\sqrt{x^2+2x+10}+\frac{9}{2}\log\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+10}\right|+c$

(ii) $\frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x-3}-2\log\left|x-1+\sqrt{x^2-2x-3}\right|+c$

(iii) $\frac{x-5}{2}\sqrt{10x-x^2-24}+\frac{1}{2}\sin^{-1}(x-5)+c$

(2) (i) $\frac{1}{4}\left[(2x+5)\sqrt{9-(2x+5)^2}+9\sin^{-1}\left(\frac{2x+5}{3}\right)\right]+c$

(ii) $\frac{1}{4}\left[(2x+1)\sqrt{81+(2x+1)^2}+81\log\left|2x+1+\sqrt{81+(2x+1)^2}\right|\right]+c$

(iii) $\frac{x+1}{2}\sqrt{(x+1)^2-4}+2\log\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2-4}\right|+c$

అభ్యాసము 11.13

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
1	3	4	1	3	1	3	2	4	3	4	2	4	4	1
(16)	(17)	(18)	(19)	(20)	(21)	(22)	(23)	(24)	(25)					
1	3	2	4	1	3	4	3	1	4					

అభ్యాసము 12.1

(1) (i) సాధ్యమగును (ii) సాధ్యము కాదు (iii) సాధ్యముకాదు

(2) (i) $\frac{1}{2}$ (ii) 1 (3) (i) $\frac{5}{9}$ (ii) $\frac{4}{9}$ (4) (i) $\frac{1}{7}$ (ii) $\frac{2}{7}$ (5)(i) $\frac{7}{64}$ (ii) $\frac{247}{256}$ (iii) $\frac{37}{256}$

13_11th-Maths-Vol2-Answers-Telugu.indd 292 5/10/2022 12:16:32 PM

(6) $\frac{37}{100}$ (7) (i) $\frac{7}{33}$ (ii) $\frac{14}{55}$ (8) (i) $\frac{2}{13}$ (ii) $\frac{5}{13}$ (iii) $\frac{2}{13}$

(9) $\frac{627}{728}$ (10) (i) $\frac{5}{12}$ (ii) 2 to 3

అభ్యాసము 12.2

(1) (i) $\frac{5}{8}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii)) $\frac{1}{8}$ (iv) 1 (2) (i) 0.50 (ii) 0.35 (iii) 0.20

(3) $\frac{11}{36}$ (4) (i) 0.8 (ii) 0.5 (iii) 0.3

(5) (i) 0.9984 (ii) 0.0016 (6) (i) 0.64 (ii) 0.44

అభ్యాసము 12.3

(1) కాదు (3) 0.5 (4) (i) 0.5 (ii) 0.9

(5) $\frac{3}{8}$ (6) (i) $\frac{3}{5}$ (ii) $\frac{13}{30}$ (7) (i) 0.5 (ii) 0.375

(8) (i) $\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{9}{40}$ (iii) $\frac{21}{40}$ (9) 0.75

(10) (i) 0.3 (ii) 0.5 (iii) 0.5 (iv) 0.5 (11) (i) $\frac{5}{28}$ (ii) $\frac{1}{14}$ (12) $\frac{13}{30}$

అభ్యాసము 12.4

(1) 0.028 (2) (i) $\frac{11}{20}$ (ii) $\frac{6}{11}$ (3) (i) $\frac{7}{250}$ (ii) $\frac{3}{7}$

(4) $\frac{15}{41}$ (5) (i) $\frac{9}{25}$ (ii) $\frac{2}{3}$

అభ్యాసము 12.5

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
4	3	1	2	2	1	1	4	2	3	3	1	4	2	3
(16)	(17)	(18)	(19)	(20)	(21)	(22)	(23)	(24)	(25)					
1	4	3	2	3	2	2	4	4	3					

13_11th-Maths-Vol2-Answers-Telugu.indd 293 5/10/2022 12:16:32 PM

పదకోశము

అధ్యాయం 7
మాత్రికలు మరియు నిర్ధారకములు

matrix	మాత్రిక
order	వరుస
row matrix	పంక్తి మాత్రిక
column matrix	దొంతి మాత్రిక
zero matrix	శూన్యమాత్రిక
null matrix	శూన్యమాత్రిక
square matrix	చతురస్ర మాత్రిక
diagonal matrix	వికర్ణ మాత్రిక
unit matrix	యూనిట్ మాత్రిక
triangular matrix	త్రిభుజాకార మాత్రిక
upper triangular matrix	ఎగువ త్రిభుజాకార మాత్రిక
lower triangular matrix	దిగువ త్రిభుజాకార మాత్రిక
principal diagonal	ప్రధాన వికర్ణము
scalar matrix	అదిశామాత్రిక
conformable	తగిన
commutative property	స్థిత్యంతర ధర్మము
associative property	సహచర ధర్మము
identity property	తత్సమ ధర్మము
inverse property	విలోమ ధర్మము
distributive property	విభాగ ధర్మము
symmetric	సౌష్ఠవము
skew-symmetric	అసౌష్ఠవము
determinant	నిర్ధారకము
singular matrix	అసాధారణ మాత్రిక
non-singular matrix	సాధారణ మాత్రిక

అధ్యాయం 8
సదిశా బీజగణితము

vector	సదిశ
initial point	తొలిబిందువు (లేక) ప్రారంభబిందువు
terminal point	చివరి బిందువు (లేక) అంత్యబిందువు
support of the vector	సదిశాధారము
free vector	స్వేచ్ఛా సదిశ
localised vector	స్థానిక సదిశ
co-initial vectors	సహప్రారంభ సదిశలు
co-terminal vectors	ఒకే అంతం గల సదిశలు
collinear vectors	సరేఖీయ సదిశలు
parallel vectors	సమాంతర సదిశలు
coplanar vectors	సతలీయ సదిశలు
equal vectors	సమాన సదిశలు
zero vector	శూన్యసదిశ
unit vector	యూనిట్ సదిశ
like vectors	ఏకదిశా సదిశలు
unlike vectors	వ్యతిరేఖ దిశాసదిశలు
scalar multiplication	అదిశా గుణిజము
position vector	స్థానసదిశ (లేక) స్థితిసదిశ
section formula	విభాగ సూత్రము
resolution of vector	సదిశావిభజనము
direction cosines	దిశాకొసైన్‌లు (లేక) దిక్‌కొసైన్‌లు
direction ratios	దిశావిష్పత్తులు (లేక) దిక్ నిష్పత్తులు
scalar product	అదిశా లబ్ధము
vector product	సదిశా లబ్ధము

అధ్యాయం 9
అవకలన గణితము – అవధులు మరియు అవిచ్ఛిన్నత

calculus	కలన గణితము
limit	అవధి
one sided limit	ఏకపార్శ్వ అవధి
left hand limit	ఎడమవైపు అవధి
right hand limit	కుడివైపు అవధి
infinite limit	అనంత అవధి
limit at infinity	అనంతము వద్ద అవధి
vertical asymptote	క్షితిజలంబ అమర స్పర్శరేఖ
horizontal asymptote	క్షితిజ సమాంతర అనంత స్పర్శరేఖ
Sandwich theorem	శాండ్విచ్ సిద్ధాంతము

14_11th-Maths-Vol2-Glossary - Telugu.indd 294 5/10/2022 1:05:52 PM

continuity	అవిచ్ఛిన్నత
discontinuity	విచ్ఛిన్నత
removable discontinuity	నివార్య విచ్ఛిన్నతి
jump discontinuity	లంఘన విచ్ఛిన్నత

అధ్యాయం 10
అవకలన గణితము – అవకలనీయత మరియు అవకలన పద్ధతులు

analytic equation	వైశ్లేషిక సమీకరణము (నిరూపక సమీకరణం)
derivative	అవకలనము
velocity	వేగము
acceleration	త్వరణము (లేక) గమనవేగము
jerk	కుదుపు
tangency	స్పర్శ
difference quotient	భాగషలముల వ్యత్యాసము
secant line	ఖండనరేఖ (లేక) భేదన రేఖ
tangent line	స్పర్శరేఖ
slope of the curve	వక్రము యొక్క వాలు
rectilinear motion	సరళరేఖీయ చలనము
position function	స్థానప్రమేయము
differentiable	అవకలనీయం
differentiation	వ్యుత్పన్నము (లేక) అవకలనము
left hand derivative	ఎడమ వైపు అవకలనము
right hand derivative	కుడివైపు అవకలనము
non-differentiability	అవకలనీయత కాని
quotient rule	భాగఫల న్యాయము
chain rule	గొలుసు నియమము
composite functions rule	సంయుక్త ప్రమేయ నియమము
function of a function rule	ప్రమేయ నియమం యొక్క ప్రమేయం
intermediate argument	మధ్యస్థ కోణాంకము
implicit differentiation	అంతర్నీవ అవకలనము
explicit differentiation	బహిర్లేన అవకలనము
parametric differentiation	పరామితీయ అవకలనము
higher order derivative	ఉన్నత స్థాయి అవకలనము

అధ్యాయం 11
సమకలన గణితము

integrand	సమాకల్యము
integrator	సమాకలన చరరాశి
anti-derivative	ప్రతి – అవకలనము
indefinite integral	అనిశ్చిత సమాకలనము

అధ్యాయం 12
సంభావ్యత సిద్ధాంతము యొక్క పరిచయం

experiment	ప్రయోగం
deterministic experiment	నిర్ణయాత్మకమైన ప్రయోగం
random experiment	యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం
event	ఘటన
sure event or certain event	ఖచ్చిత ఘటన (లేక) అవశ్యఘటన
impossible event	అసాధ్య సంఘటన
exhaustive event	సమగ్ర ఘటన
sample space	ప్రతిరూప ఆవరణము
mutually exclusive events	పరస్పర వర్జిత ఘటనలు
equally likely events	సమ సంభవ ఘటనలు
conditional probability	నిబంధన సంభావ్యత
independent events	స్వతంత్ర ఘటనలు

14_11th-Maths-Vol2-Glossary - Telugu.indd 295 5/10/2022 1:05:52 PM

సంప్రదింపు గ్రంథాలు

(1) Elements of Linear Algebra– P.M.Cohn , Springer

(2) Theory and Problems of Matrices – Frank Ayres, Schaum's Outline series

(3) Topics in Algebra, I.N. Herstein, Vikas Publishing Company.

(4) Vector Algebra, Schaum's Outline series.

(5) Differential and Integral Calculus, N. Piskunov, Mir Publsihers, Moscow.

(6) Elementary Treatise on the Calculus, George A. Gibson, Macmillan & Co. New York.

(7) Elementary Calculus, Vol. I, V.I. Smirnov, Addison – Wesley Publish Company, Inc.

(8) Calculus (Volume 1 and II), Tom. M. Apostol, John Wiley Publications.

(9) Calculus and Analytical Geometry,

George B.Thomas and Ross L. Finney (Ninth edition) Addison-Wesley.

(10) Calculus Early Transcendentals – George B.Thomas JR., Joel Hass, Christopher Heil, Maurice D.Weir, Pearson

(11) Advanced Engineering Mathematics- Erwin Kreyszig – Wiley India(P) Ltd.

(12) Calculus, Robert T.Smith, Roland B.Minton, McGraw Hill Education(India) Private Limited.

(13) Mathematical Analysis, S.C. Malik, Wiley Eastern Ltd.

(14) Methods of Real Analysis, Richard R. Goldberg, Oxford and IBH Publishing Company, New Delhi.

(15) Theory and Problems of Probability, Random Variables and Random Processes, Hwei P. Hsu, Schaum's Outline series

(16) Mathematical Statistics, John E. Freund and Ronald D. Walpole, Prentice Hall of India.

(17) Mathematical Statistics, Saxena and Kapoor

14_11th-Maths-Vol2-Glossary - Telugu.indd 296 5/10/2022 1:05:53 PM

Higher Secondary – Class XI – Mathematics – Volume 2
TELUGU MEDIUM
List of Reviewers & Translators

Academic Coordinator

Dr. M.Ethirajulu,
Senior Lecturer,
SCERT,
Chennai-6.

Reviewers

Y. Narayanappa,
P.G.Asst.,
G.H.S.S, Nallur,
Krishnagiri Dist.

K.V. Chandrakala,
P.G.Asst.,
G.H.S.S, Bukkasagaram,
Krishnagiri Dist.

E. Gurumuthy,
B.T.Asst.,
S.K.P.D.B.H.S.S., Paris,
Chennai-1

Chandra Sekaravarma,
B.T.Asst.,
S.K.D.T.H.S.S., Villivakkam,
Chennai.

K. Ramesh kumar,
B.T.Asst.,
G.H.S., Kechalam,
Thiruvallur Dist.

Translators

J. Krishanmoorthy,
B.T.Asst.,
G.H.S., Deveerapalli,
Krishnagiri Dist.

Y.S. Venkatesh Murthy,
B.T.Asst.,
G.G.H.S.S., Bagalur,
Krishnagiri Dist.

B.R. Venkatesulu,
B.T.Asst.,
G.H.S.S, Bukkasagaram,
Krishnagiri Dist.

T. Govindarajulu,
B.T.Asst.,
G.H.S, Mornapalli,
Krishnagiri Dist

Velam Nagaraju,
B.T.Asst.,
G.H.S, Muthali,
Krishnagiri Dist.

V. Sudhakar,
B.T.Asst.,
G.H.S.S., A Settipalli,
Krishnagiri Dist.

K. Chokkalingam,
B.T.Asst.,
G.H.S.S, Berigai,
Krishnagiri Dist.

R. Ilayaraja,
B.T.Asst.,
G.H.S.S, Berigai,
Krishnagiri Dist.

V.S. Manjunath,
B.T.Asst.,
G.B.H.S.S., Shoolagiri
Krishnagiri Dist.

D. Sudhakar,
B.T.Asst.,
G.H.S.S., Peddabelagondapalli,
Krishnagiri Dist.

K. Janakiraman,
B.T.Asst.,
G.G.H.S.S, Thalli,
Krishnagiri Dist.

R. Manjunath,
B.T.Asst.,
G.H.S, Athimugam,
Krishnagiri Dist.

Proof work

P. Thulasiram,
B.T.Asst.,
Presidency Girl's H.S.School,
Egmore, Chennai - 8.

B.S. Jeyalakshmi,
B.T.Asst.,
Sir Thegaraya H.S.S,
Korukkupet, Chennai - 21.

EMIS Technology Team

R.M. Satheesh
State Coordinator Technical,
TN EMIS, Samagra Shiksha.

K.P. Sathya Narayana
IT Consultant,
TN EMIS, Samagra Shikaha

R. Arun Maruthi Selvan
Technical Project Consultant,
TN EMIS, Samagra Shiksha

Layout

S. Ashok Kumar
Daniel A
Balasubramiyam B
Pechimuthu
Rajesh Thangappan

In-House QC

B. Yogesh

Co-ordinator

Ramesh Munisamy

This book has been printed on 80 G.S.M. Elegant Maplitho paper.
Printed by offset at:

14_11th-Maths-Vol2-Glossary - Telugu.indd 297 5/10/2022 1:05:53 PM

Note

14_11th-Maths-Vol2-Glossary - Telugu.indd 298 5/10/2022 1:05:53 PM

Note

14_11th-Maths-Vol2-Glossary - Telugu.indd 299 5/10/2022 1:05:53 PM

Note

14_11th-Maths-Vol2-Glossary - Telugu.indd 300 5/10/2022 1:05:53 PM