GOVERNMENT OF TAMIL NADU

# ہائر سکنڈری سالِ دوّم

## HIGHER SECONDARY SECOND YEAR

# ریاضی

جلد - I

# MATHEMATICS

## VOLUME - I

## (URDU MEDIUM)

Department of School Education

**Untouchability is Inhuman and a Crime**

12th_Maths_UM_Vol1_FP.indd 1 28-03-2023 15:58:39

**Government of Tamil Nadu**

First Edition - 2021

Revised Edition - 2022, 2023

Reprint - 2024

(Published under new syllabus)

## Content Creation

State Council of Educational
Research and Training

© SCERT 2021

## Printing & Publishing

Tamil NaduTextbook and Educational
Services Corporation

www.textbooksonline.tn.nic.in



12th_Maths_UM_Vol1_FP.indd 2 28-03-2023 15:58:39

## HOW TO USE THE BOOK ?

**Scope of Mathematics**

- Awareness on the scope of higher educational opportunities; courses, institutions and required competitive examinations.
- Possible financial assistance to help students climb academic ladder.

**Learning Objectives**

- Overview of the unit
- Give clarity on the intended learning outcomes of the unit.




- Visual representation of concepts with illustrations
- Videos, animations, and tutorials.

**ICT**

- To increase the span of attention of concepts
- To visualize the concepts for strengthening and understanding
- To link concepts related to one unit with other units.
- To utilize the digital skills in classroom learning and providing students experimental learning.

**Summary**

- Recapitulation of the salient points of each chapter for recalling the concepts learnt.

**Evaluation**

- Assessing student's understanding of concepts and get them acquainted with solving exercise problems.

**Books for Reference**

- List of relevant books for further reading.

**Scope for Higher Order Thinking**

- To motivate students aspiring to take up competitive examinations such as JEE, KVPY, Math olympiad, etc., the concepts and questions based on Higher Order Thinking are incorporated in the content of this book.

**Glossary**

- Frequently used Mathematical terms have been given with their Tamil equivalents.

### Mathematics Learning

The correct way to learn is to understand the concepts throughly. Each chapter opens with an Introduction, Learning Objectives, Various Definitions, Theorems, Results and Illustrations. These in turn are followed by solved examples and exercise problems which have been classified in to various types for quick and effective revision. One can develop the skill of solving mathematical problems only by doing them. So the teacher's role is to teach the basic concepts and problems related to it and to scaffold students to try the other problems on their own. Since the second year of Higher Secondary is considered to be the foundation for learning higher mathematics, the students must be given more attention to each and every concept mentioned in this book.



12th_Maths_UM_Vol1_FP.indd 3 28-03-2023 15:58:39

# CONTENTS مضامین

## MATHEMATICS ریاضی


| اکائی | عنوان | صفحہ نمبر | مہینہ |
|---|---|---|---|
| 1 | میٹرکس اور مقطعہ کے استعمالات | 1 | جون |
| 1.1 | تعارف | 1 | |
| 1.2 | غیر نادر مربع میٹرکس کا معکوس | 2 | |
| 1.3 | میٹرکس کے بنیادی متبادلات | 16 | |
| 1.4 | میٹرکسوں کے استعمالات : خطی مساوات کے نظام کو حل کرنا | 27 | |
| 1.5 | میٹرکس کے استعمالات : مقام کے طریقے سے خطی مساوات کے نظام کی ہم آہنگی | 38 | |
| 2 | مرکب اعداد | 52 | جولائی |
| 2.1 | مرکب اعداد کی تعریف | 52 | |
| 2.2 | مرکب اعداد | 54 | |
| 2.3 | مرکب اعداد کی بنیادی الجبریائی خصوصیات | 58 | |
| 2.4 | مرکب عدد کا زوجی | 60 | |
| 2.5 | مرکب عدد کا معین ضروب | 66 | |
| 2.6 | مرکب اعداد کا ہندسی اور طریق | 73 | |
| 2.7 | مرکب عدد کا قطبی اور ائلر شکل | 75 | |
| 2.8 | ڈی مویرس نظریہ اور اس کے استعمالات | 83 | |
| 3 | مساوات کا نظریہ | 97 | جولائی |
| 3.1 | تعارف | 97 | |
| 3.2 | کثیر رقمی مساوات کی بنیادیں | 99 | |
| 3.3 | ویٹا کا ضابطہ اور کثیر رقمی کی تشکیل | 100 | |
| 3.4 | جذروں کی نوعیت اور کثیر رقمی مساوات کے سراعداد کی نوعیت | 107 | |
| 3.5 | علم ہندسہ میں کثیر رقمی مساوات کے استعمالات | 111 | |
| 3.6 | اعلیٰ درجہ کثیر رقمی مساوات کی جذریں | 112 | |
| 3.7 | زیادہ معلومات کے ساتھ کثیر رقمیات | 113 | |
| 3.8 | زیادہ معلومات کے بغیر کثیر رقمی مساوات | 118 | |
| 3.9 | ڈیسکارٹیس اصول | 124 | |
| 4 | معکوس علم مثلثی تفاعلات | 129 | جولائی/اگست |
| 4.1 | تعارف | 129 | |
| 4.2 | چند بنیادی اصول | 130 | |
| 4.3 | سائن تفاعل اور معکوس سائن تفاعل | 133 | |
| 4.4 | کوسائن تفاعل اور معکوس کو سائن تفاعل | 138 | |




12th_Maths_UM_Vol1_FP.indd 4 28-03-2023 15:58:39

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4.5 | ٹینجنٹ تفاعل اور معکوس ٹینجنٹ تفاعل | 143 | |
| 4.6 | کوسیکینٹ تفاعل اور معکوس کوسیکینٹ تفاعل | 148 | |
| 4.7 | سیکینٹ تفاعل اور معکوس سیکینٹ تفاعل | 149 | |
| 4.8 | کوٹینجنٹ (کاٹ) تفاعل اور معکوس کوٹینجنٹ تفاعل | 151 | |
| 4.9 | معکوس علم مثلثی تفاعلات کی اصل قیمت | 153 | |
| 4.10 | معکوس علم مثلثی تفاعلات کی خصوصیات | 155 | |
| **5** | **دو ابعادی تحلیلی علم ہندسہ - II** | **172** | **اگست** |
| 5.1 | تعارف | 172 | |
| 5.2 | دائرہ | 173 | |
| 5.3 | مخروطی | 182 | |
| 5.4 | مخروطی تراشے | 197 | |
| 5.5 | مخروطی تراشے کی پیمائشی شکل | 199 | |
| 5.6 | مخروطی تراشوں کے مماسیں اور عمودیں | 201 | |
| 5.7 | مخروطی تراشوں کے حقیقی زندگی میں استعمالات | 207 | |
| **6** | **سمتیہ الجبرا کے استعمالات** | **221** | **اگست / ستمبر** |
| 6.1 | تعارف | 221 | |
| 6.2 | سمتیوں کا علم ہندسی تعارف | 222 | |
| 6.3 | عددیہ حاصل ضرب اور سمتیہ حاصل ضرب | 224 | |
| 6.4 | عددیہ تگنا حاصل ضرب | 231 | |
| 6.5 | سمتیوں کا سمتیہ تگنا حاصل ضرب | 238 | |
| 6.6 | جاکوبی کا تماثل اور لیگرانجی کا تماثل | 239 | |
| 6.7 | سہ ابعادی علم ہندسہ میں سمتیہ کے استعمالات | 242 | |
| 6.8 | مسطح کی مساوات کی مختلف شکلیں | 255 | |
| 6.9 | مسطح پر ایک نقطہ کا خیال (عکس) | 273 | |
| 6.10 | ایک خط اور ایک مسطح کا ملنے کا نقطہ | 274 | |
| | **جوابات (ANSWERS)** | **282** | |
| | **فرہنگ الفاظ و معنی (GLOSSARY)** | **292** | |


GEK8O

**E-book**

N9UVC

**Assessment**



12th_Maths_UM_Vol1_FP.indd 5 28-03-2023 15:58:39

12th_Maths_UM_Vol1_FP.indd 6

# Scope for students after completing Higher Secondary



## EXAMS

| Joint Entrance Examination (JEE) Main | |
|---|---|
| **Purpose** | For Admission in B. E./B. Tech., B. Arch., B. Planning |
| **Eligibility** | Class 12 pass (PCM) |
| **Application Mode** | Online |
| **Source** | http://jeemain.nic.in |
| **JEE Advanced** | |
| **Purpose** | Admission in UG programmes in IITs and ISM Dhanbad |
| **Eligibility** | Class 12 Pass (PCM) |
| **Application Mode** | Online |
| **Source** | http://jeeadv.iitd.ac.in/ |
| **Indian Maritime University Common Entrance Test** | |
| **Purpose** | Admission in Diploma in Nautical Science (DNS) leading to BSc. (Nautical Science) |
| **Eligibility** | Class 12 (PCM) |
| **Application Mode** | By post |
| **Source** | www.imu.edu.in/index.php |
| **Indian Navy B.Tech Entry Scheme** | |
| **Purpose** | Admission in Indian Navy B.Tech course |
| **Eligibility** | Class 12 passed |
| **Application Mode** | Online |
| **Source** | www.nausena-bharti.nic.in/index.php |



## EXAMS

| Indian Navy Sailors Recruitment | |
|---|---|
| **Purpose** | Admission in 24 weeks Basic training at INS Chilka followed by Professional training |
| **Eligibility** | Class 12 (Maths and Physics/Chem./Bio/Computer Sc.) |
| **Application Mode** | Online, By Post |
| **Source** | www.nausena-bharti.nic.in/index.php |
| **Defence Indian Army Technical Entry Scheme (TES)** | |
| **Purpose** | Technical Entry to Army |
| **Eligibility** | Class 12 PCM |
| **Application Mode** | Online |
| **Source** | www.joinindianarmy.nic.in/ |
| **National Defence Academy and Naval Academy Examination (I)** | |
| **Purpose** | Admission to Army and Air Force wings of NDA and 4 years B. Tech course for the Indian Naval Academy Course (INAC) |
| **Eligibility** | Class 12 Passed |
| **Application Mode** | Online |
| **Source** | www.upsc.gov.in/ |



28-03-2023 15:58:39

12th_Maths_UM_Vol1_FP.indd 7

# Scope for students after completing Higher Secondary



## EXAMS

- If you have aspiration to become a scientist/teacher, you can do degree course in mathematics in any college of your choice. Doing B.Sc., mathematics with your knowledge which acquired in XII standard mathematics will definitely elevate you to a better career.
- There are some institutions such as IIT's, IISc., ISI's and Anna University which admit students at XII Standard level for their Integrated Courses leading to the award of M.Sc., degree in mathematics/engineering/Statistics/ Computer Science .

In Mathematics, the following degrees programmes are offered:

| | |
|---|---|
| - 3-year BSc | - 4-year Integrated B.Sc-B.Ed. |
| - 3-year B. Math | - 4-year BS |
| - 4-year B. Tech | - 5-year Integrated M.Sc /MS |

**BITSAT**

Purpose- For admission to Integrated First Degree Programmes in BITS Pilani, Goa & Hyderabad campuses.

**National Aptitude Test in Architecture (NATA)**

Purpose- Admission to B.Arch. program

**Kishore Vaigyanik Protsahan Yojana (KVPY)**

Purpose- Fellowship and admission to IISc Banglore in 4 year BS Degree

**Indian Statistical Institute (ISI) Admission**

Purpose-Admission in B Stat (Hons), B Math (Hons)

**Chennai Mathematical Institute**

Purpose- Admission in BSc (Hons) in Mathematics and Computer Science, BSc (Hons) in Mathematics and Physics



## Job Opportunities

- You have acquired sufficient analytical still to appear for competitive examinations conducted by various organizations such as TNPSC, UPSC, BSRB, RSB.
- You are placed with better opportunity to get recruitment directly into some of the top Multi National Companies.
- You can plan to take up engineering degree course to acquire BE/B.TECH in any of the leading Technical Institutions/Universities/Engineering colleges. Institutions such as IIT's , IISc, NIT's conduct All India Level Entrance Examinations to admit students.

| | |
|---|---|
| • Indian Forest Services | • Scientist Jobs in ISRO, DRDO, CSIR labs |
| • Union Public Service Commission | • Staff Selection Commission |
| • Indian Defense Services | • Public Sector Bank |
| • Tax Assistant | • Statistical Investigator |
| • Combined Graduate Level Exam | • Tamil Nadu Public Service Commission |
| • Teaching Profession | |



28-03-2023 15:58:40

12th_Maths_UM_Vol1_FP.indd 8

# Scholarship and Research Opportunities



## FINANCIAL ASSISTANCE

- Scholarship for Graduate and Post – Graduate courses
- NTSE at the end of X (from class XI to Ph.D)
- International Olympiad: for getting stipend for Higher Education in Science and Mathematics
- DST – INSPIRE Scholarships (for UG and PG)
- DST – INSPIRE Fellowships (for Ph.D)
- UGC National Fellowships (for Ph.D)
- Indira Gandhi Fellowship for Single Girl Child (for UG and PG)
- Moulana Azad Fellowship for minorities (for Ph.D)
- In addition various fellowships for SC / ST / PWD / OBC etc are available. (Visit website of University Grants Commission (UGC) and Department of Science and Technology (DST))
- University Fellowships
- Tamil Nadu Collegiate Education fellowship.



## RESEARCH INSTITUTIONS

| NAME OF THE INSTITUTION | WEBSITE |
|---|---|
| Indian Institute of Science (IISc) Bangalore | www.iisc.ac.in |
| Chennai Mathematical Institute (CMI) Chennaie | www.cmi.ac.in |
| Tata Institue of Fundamental Research (TIFR) Mumbai | www.tifr.res.in |
| Indian Institute of Space Science and Technology (IIST) Trivandrum | www.iist.ac.in |
| National Institute of Science Education and Research (NIS-ER) | www.niser.ac.in |
| Birla Institute of Technology and Science, Pilani | www.bits-pilani.ac.in |
| Indian Institute of Science Education and Research | www.iiseradmission.in |
| Anna University | https://www.annauniv.edu/ |
| Indian Institute of Technology in various places (IIT's) | www.iitm.ac.in |
| National Institute of Technology (NITs) | www.nitt.edu |
| Central Universities | www.cucet.ac.in |
| State Universities | www.ugc.ac.in |
| Tamil Nadu agricultural University (tnau.ac.in) | tnau.ac.in |
| International Institute of Information Technology | www.iiit.ac.in |
| The Institute of Mathematical Sciences (IMSC) Chennai. | www.imsc.res.in |
| Hyderabad Central university, Hyderabad. | www.uohyd.ac.in |
| Delhi University, Delhi | www.du.ac.in |
| Mumbai University, Mumbai | www.mu.ac.in |
| Savithiri Bai Phule Pune University, Pune | www.unipune.ac.in |



28-03-2023 15:58:41

باب
1

# میٹرکس اور مقطعہ کے استعمالات
# (Application of Matrices and Determinants)

GWEX7

سب سے بڑے ریاضی دان، جیسا کہ ارکمیڈیز، نیوٹن اور گاؤس ہمیشہ نظریہ اور استعمالات کو یکساں پیمانے میں متحد کیا

فیلکس کلین

## 1.1 تعارف (Introduction)



کارل فریڈرک گاؤس
(1777-1855)
جرمن کے ریاضی اور طبیعات دان

خطی مساوات کے نظام کی تشریح میں میٹرکس بہت اہم کردار بنھاتی ہیں۔ ریاضی دان گاؤس، جارڈن، کیلی اور ہیملٹن نے میٹرکس کا نظریقہ تشکیل کیا ہے جو خطی مساوات کے نظام کو حل کرنے اور اس کی چھان بین میں استعمال ہوتا ہے۔

اس باب میں ہم خطی مساوات کے نظام کو حل کرنے میں میٹرکس کے چند استعمالات پیش کرتے ہیں۔ جن میں خاص طور پر یہاں چار طریقوں کا مطالعہ کریں گے۔ (1) معکوس میٹرکس کا طریقہ (2) کرامر کا اصول (3) گاؤس کے خارج کا طریقہ (4) مقام کا طریقہ

ان طریقوں کے جاننے سے پہلے ہم درج ذیل کا تعارف کراتے ہیں۔ (1) غیرنادر مربع میٹرکس کا معکوس (2) میٹرکس کا مقام (3) صف اور قطار کے ابتدائی عملیات (4) خطی مساوات کے نظام کی ہم آہنگی

### سیکھنے کے مقاصد

اس باب کی تکمیل پر طلباء درجہ ذیل کے قابل بن جائیں گے۔

- خطی مساوات کے نظام کو حل کرنے میں کچھ بنیادی آلوں کا مظاہرہ کرنے میں جیسا کہ ۔
  - مربع میٹرکس کا شریک ۔
  - غیر نادر میٹرکس کا معکوس ۔
  - ابتدائی صف اور قطار کے اعمال ۔
  - صف ایکلان شکل (Row-echelon form)
  - میٹرکس کا مقام ۔
- غیر نادر میٹرکس کا معکوس حاصل کرنے کے لئے صف کے بنیادی اعمال کا استعمال کرنے میں۔
- خطی مساوات کے نظام کو حل کرنے کے لئے درج ذیل ٹیکنیکوں کا استعمال کرنے میں ۔
  - معکوس میٹرکس کا طریقہ ۔
  - کرامر کا اصول ۔
  - گاؤس کے خارج کاطریقہ ۔
- غیر ایکساں خطی مساوات کے نظام کی ہم آہنگی کی جانچ ۔
- ایکساں خطی مساوات کے نظام اور ان کے غیر معمولی حل کی جانچ ۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 1 28-03-2023 15:04:21

## 1.2 غیر نادر مربع میٹرکس کا معکوس (Inverse of a non-singular matrix)

ہمیں یاد ہے کہ مربع میٹرکس کو غیر نادر کہا جاتا ہے۔ اگر اس کے مقطعہ کی قدر صفر نہ ہو اور نادر اگر اس کے مقطعہ کی قدر صفر ہو۔ ہم پہلے ہی میٹرکس کو عددیہ (Scalar) سے ضرب کرنا، دو میٹریسوں کی جمع اور حاصل ضرب سیکھ چکے ہیں۔ مگر ایک میٹرکس کو دوسرے میٹرکس سے تقسیم کرنے کا اصول بنایا نہیں جاسکتا۔کیونکہ میٹرکس صرف عناصر کی ترتیب ہے اور کوئی قدر (Value) نہیں رکھتی۔جب ہم کہتے ہیں کہ، میٹرکس $A$ کی ترتیب $n$ ہے، تو اس کا مطلب اس میں $n$ صف اور $n$ قطاریں ہیں اور یہ ایک مربع میٹرکس ہے۔

حقیقی عدد کے سلسلے میں $x \neq 0$, ایک حقیقی عدد $y\left(=\frac{1}{x}\right)$ ہوگا جو کہ $x$ کا معکوس یعنی $xy = yx = 1$ کہلاتا ہے۔ اسی طریقے سے، اگر میٹرکس $A$ دی جائے، تو ہم میٹرکس $B$ کی کھوج کریں گے اس طرح کے $AB$ اور $BA$ کا حاصل ضرب $AB = BA = I$, جہاں $I$ ایک اکائی میٹرکس ہو۔

اس حصّہ میں، ہم غیرنادر مربع میٹرکس کے معکوس کی تعریف کریں گے اور یہ ثابت کریں گے کہ مربع میٹرکس کا معکوس منفرد ہے۔ اس کے علاوہ ہم معکوس میٹرکس کے چند صفات کے بارے میں بھی پڑھیں گے ۔ ان تمام کاروائیوں کے لئے ہمیں ایک میٹرکس کی ضرورت ہے جو مربع میٹرکس کی شریک کہلاتی ہے۔

### 1.2.1 مربع میٹرکس کا شریک (Adjoint of a Square Matrix)

یہاں پر ہم مربع میٹرکس عنصروں کے ہم ضربی کی خصوصیات کو دہرائیں گے۔ اگر $A$ ایک $n$ ترتیب کا مربع میٹرکس ہے جس کا مقطعہ کو ہم $\det(A)$ یا $|A|$ کے طور پر ظاہر کرتے ہیں۔ اگر میٹرکس میں عنصر $a_{ij}$, $i$ صف اور $j$ قطار کے قطع پر ہے۔ $i$ صف اور $j$ قطار کو خارج کرنے سے، ہمیں جو میٹرکس حاصل ہوگا وہ $A$ کا تحتی میٹرکس ہے۔ جس کی ترتیب $(n-1)$ ہے۔اس کا مقطعہ $a_{ij}$ عنصر کا کمتر کہلاتا ہے۔ اس کو ہم $M_{ij}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ $M_{ij}$ اور $(-1)^{i+j}$ کا حاصل ضرب $a_{ij}$ عنصر کا ہم ضربی کہلاتا ہے ۔

$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$، $a_{ij}$ کا ہم ضربی ہے۔

ایک اہم صفت جو مربع میٹرکس کے عناصر اور اس کے ہم ضربیوں کو جوڑتی ہے وہ یہ ہے میٹرکس کے ایک صف کے عناصر اور اسی صف کے نظیری ہم ضربیوں کے حاصل ضرب کا مجموعہ مقطعہ کی قدر ہوگا اور میٹرکس کے ایک صف کے عناصر اور دوسری صف کے نظیری ہم ضربیوں کے حاصل ضرب کا مجموعہ صفر ہوگا۔جیسا کہ،

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} |A|, & \text{اگر } i = j \\ 0, & \text{اگر } i \neq j \end{cases}$$

یہاں پر $|A|$ مربع میٹرکس $A$ کا مقطعہ ہے اور اسے ہم "مقطعہ $A$ " پڑھتے ہیں نا کہ " $A$ کا مقیاس"۔ نوٹ کریں کہ $|A|$ ایک حقیقی عدد ہی نہیں بلکہ منفی بھی ہوسکتا ہے جیسا کہ، ہمارے پاس ہے،

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2(1-2) - 1(1-2) + 1(2-2) = -2 + 1 + 0 = -1.$$

**تعریف 1.1**

اگر $A$, $n$ ترتیب والی ایک مربع میٹرکس ہے تو $A$ کے ہر عنصر $a_{ij}$ کو اس کے نظیری ہم ضربی $A_{ij}$ سے بدلنے پر حاصل ہونے والی میٹرکس $A$ کی ہم ضربی میٹرکس کہلاتی ہے۔ $A$ کی ہم ضربی میٹرکس کا الٹا $A$ کا شریک میٹرکس ہے جسے adj $A$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 2 28-03-2023 15:04:30

## غور کیجئے (Note)

$\text{adj } A$ ایک $n$ درجے کی مربع میٹرکس ہے اور $\text{adj } A = \left[A_{ij}\right]^T = \left[(-1)^{i+j} M_{ij}\right]^T$

خاص طور پر 3 ترتیب والی مربع میٹرکس کا شریک $\text{adj } A$ نیچے دیا گیا ہے۔

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} +M_{11} & -M_{12} & +M_{13} \\ -M_{21} & +M_{22} & -M_{23} \\ +M_{31} & -M_{32} & +M_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}.$$

### مسئلہ 1.1 (Theorem)

ہر مربع میٹرکس $A$ کے لئے جس کی ترتیب $n$ ہو۔ $A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A| I_n$

### ثبوت

آسانی کے لئے، ہم اس مسئلہ کو $n = 3$ تک کے لئے ثابت کریں گے ۔

غور کیجئے اگر $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

تو ہمیں

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = |A|, \quad a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0, \quad a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} = 0;$$
$$a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} = 0, \quad a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = |A|, \quad a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33} = 0;$$
$$a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13} = 0, \quad a_{31}A_{21} + a_{32}A_{22} + a_{33}A_{23} = 0, \quad a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} = |A|.$$ ملے گا

اوپر کے مساوات کو استعمال کرنے سے ، ہمیں حاصل ہو گا۔

$$A(\text{adj}A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix} = |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = |A| I_3 \quad \ldots (1)$$

$$(\text{adj}A)A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix} = |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = |A| I_3, \quad \ldots (2)$$

یہاں $I_3$ ترتیب 3 کی ایک اکائی میٹرکس ہے۔

مساوات(1) اور (2) سے ہمیں، $A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A| I_3$. حاصل ہوتا ہے۔ ■

## غور کیجئے (Note)

اگر $A$ ایک $n$ درجے کی نادر میٹرکس ہے تو $|A| = 0$ ہو گا اس لئے $A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = O_n$, یہاں $O_n$ ایک $n$ درجے کی صفر میٹرکس ہے۔

### مثال 1.1

اگر $A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$, ہو تو ثابت کریں $A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A| I_3$

### حل

ہے۔ $|A| = \begin{vmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 8(21-16) + 6(-18+8) + 2(24-14) = 40 - 60 + 20 = 0.$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 3 28-03-2023 15:04:39

شریک میٹرکس کی تعریف سے، ہمیں

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} (21-16) & -(-18+8) & (24-14) \\ -(-18+8) & (24-4) & -(-32+12) \\ (24-14) & -(-32+12) & (56-36) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 10 \\ 10 & 20 & 20 \\ 10 & 20 & 20 \end{bmatrix}$$ حاصل ہو گا۔

چنانچہ،

$$A(\text{adj } A) = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 10 & 10 \\ 10 & 20 & 20 \\ 10 & 20 & 20 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 40-60+20 & 80-120+40 & 80-120+40 \\ -30+70-40 & -60+140-80 & -60+140-80 \\ 10-40+30 & 20-80+60 & 20-80+60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0I_3 = |A|I_3,$$

حاصل ہو گا۔

اسی طرح, ہمیں

$$(\text{adj } A)A = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 10 \\ 10 & 20 & 20 \\ 10 & 20 & 20 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

حاصل ہو گا۔

$$= \begin{bmatrix} 40-60+20 & -30+70-40 & 10-40+30 \\ 80-120+40 & -60+140-80 & 20-80+60 \\ 80-120+40 & -60+140-80 & 20-80+60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0I_3 = |A|I_3.$$

لہذا، $A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A|I_3$

## 1.2.2 مربع میٹرکس کے معکوس کی تعریف (Definition of inverse matrix of a square matri)

اب ہم مربع میٹرکس کے معکوس کی تعریف کریں گے۔

### تعریف 1.2

اگر $A$ ایک $n$ ترتیب کی مربع میٹرکس ہے۔ اور اسی ترتیب کی ایک مربع میٹرکس $B$ موجود ہے۔اس طرح کے $AB = BA = I_n$, ہے تو $B$ میٹرکس , $A$ کا معکوس کہلاتی ہے۔

### مسئلہ 1.2 (Theorem)

اگر ایک مربع میٹرکس میں معکوس ہے، تو وہ منفرد ہو گا۔

### ثبوت

اگر $A$ ایک $n$ ترتیب کی مربع میٹرکس ہے جس کا معکوس موجود ہے۔ قیاس کریں کہ میٹرکس $A$ کے دومعکوس $B$ اور $C$ ہیں۔ تو معکوس کی تعریف سے ہمیں $AB = BA = I_n$ اور $AC = CA = I_n$ حاصل ہو گا۔ دونوں کو استعمال کرنے سے

$C = CI_n = C(AB) = (CA)B = I_nB = B.$ حاصل ہو گا۔

اس سے معکوس کے منفرد ہونے کا پتہ چلتا ہے ۔

میٹرکس $A$ کے معکوس کو ہم $A^{-1}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

### غور کیجئے (Note)

$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 4 28-03-2023 15:04:46

**مسئلہ 1.3 (Theorem)**

اگر $A$ ایک $n$ ترتیب کی مربع میٹرکس ہے تو, $A^{-1}$ موجود ہوگا اگر اور صرف اگر $A$ کا معکوس ایک غیرنادر ہے۔

**ثبوت**

سوچئے کہ $A^{-1}$ موجود ہے تو مقطعہ $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

مقطعہ کے حاصل ضرب کے اصول کے تحت ہمیں حاصل ہوگا۔

$$|A| = \det(A) \neq 0, \text{ تو } \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}) = \det(A^{-1})\det(A) = \det(I_n) = 1.$$

چنانچہ, $A$ ایک غیر نادر ہے۔

اس کے برعکس, سوچئے $A$ ایک غیر نادر ہے تو

$|A| \neq 0$ ہوگا۔ مسئلہ 1.1 سے ہمیں حاصل ہوگا۔

$$A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A| I_n.$$

چنانچہ، $|A|$ سے تقسیم کریں، تو ہمیں $A\left(\frac{1}{|A|}\text{adj } A\right) = \left(\frac{1}{|A|}\text{adj } A\right)A = I_n$. حاصل ہوگا۔

یہاں پر، $B = \frac{1}{|A|}\text{adj } A$ ہم نے میٹرکس کا پتہ لگاتے ہیں۔ اس طرح کے $AB = BA = I_n$ ہو۔

لہذا، $A$ کا معکوس موجود ہے اور اس کو اس طرح سے $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj } A$ دیا گیا ہے۔ ■

**ریمارک (Remark)**

نادر میٹرکس کا مقطعہ صفر ہے۔ اس لئے نادر میٹرکس کا معکوس نہیں ہے۔

**مثال 1.2**

اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ایک غیر نادر ہے تو، $A^{-1}$ کا پتہ لگائیں۔

**حل**

پہلے شریک میٹرکس کو معلوم کریں گے ۔ اس کی تعریف سے، ہمیں

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} +M_{11} & -M_{12} \\ -M_{21} & +M_{22} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

حاصل ہوتا ہے۔

کیونکہ, $A$ ایک غیر نادر ہے، $|A| = ad - bc \neq 0$.

کیونکہ $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj } A$, ہے، ہمیں $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ حاصل ہوگا۔ ■

**مثال 1.3**

$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -5 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ کا معکوس میٹرکس معلوم کیجئے۔

**حل**

اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -5 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ ہوتو $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -5 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2(7) + (-12) + 3(-1) = -1 \neq 0.$

چنانچہ $A^{-1}$ موجود ہے۔ ہمیں، حاصل ہوگا۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 5 28-03-2023 15:04:55

$$\text{adj}\,A = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 7 & 12 & -1 \\ 9 & 15 & -1 \\ -10 & -17 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 7 & 9 & -10 \\ 12 & 15 & -17 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

لہذا، $$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj}\,A) = \frac{1}{(-1)}\begin{bmatrix} 7 & 9 & -10 \\ 12 & 15 & -17 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -9 & 10 \\ -12 & -15 & 17 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

## 1.2.3 معکوس میٹریسوں کی خصوصیات (Properties of inverses of matrices)

ہم یہاں معکوس میٹریسوں کے چند مسئلوں کا بیان کرکے اسے ثابت کریں گے۔

**مسئلہ 1.4 (Theorem)**

اگر $A$ ایک غیر نادر ہے، تو

(i) $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ (ii) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ (iii) $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$ ، یہاں $\lambda$ ایک غیر صفری عددیہ ہے۔

**ثبوت**

$A$ ایک غیر نادر ہے تو $|A| \neq 0$ اور $A^{-1}$ موجود ہے۔ تعریف سے ہمیں،

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n. \qquad \ldots(1)$$

(i) (1) سے ہمیں، $|AA^{-1}| = |A^{-1}A| = |I_n|$ حاصل ہوگا۔

مقطعہ کے حاصل ضرب کے اصول کا استعمال کرکے ہمیں $|A||A^{-1}| = |I_n| = 1$ حاصل ہوگا۔

چنانچہ، $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

(ii) (1) سے ہمیں $(AA^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = (I_n)^T$. حاصل ہوگا۔

میٹرکس کے پلٹاؤ کا برعکس اصول (reversal law of transpose) کا استعمال کرکے ہمیں، $(A^{-1})^T A^T = A^T (A^{-1})^T = I_n$,

چنانچہ، $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ حاصل ہوگا۔

(iii) کیونکہ $\lambda$ ایک غیر صفری عددیہ ہے۔(1) سے ہمیں $(\lambda A)\left(\frac{1}{\lambda}A^{-1}\right) = \left(\frac{1}{\lambda}A^{-1}\right)(\lambda A) = I_n$. حاصل ہوتا ہے تو،

$$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$$

**مسئلہ 1.5 (Theorem) بائیں منسوخ کا مسئلہ (Left Cancellation Law)**

فرض کیجیے $A, B$ اور $C$، $n$ ترتیب کے مربع میٹریس ہیں اگر $A$ ایک غیر نادر اور $AB = AC$, ہوتو $B$ اور $C$ مساوی ہونگے۔

**ثبوت**

کیونکہ $A$ ایک غیر نادر ہے۔ $A^{-1}$ موجود ہے۔اور $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ . $AB = AC$ کو لیکر دونوں طرف $A^{-1}$ سے ماقبل ضرب کرنے پر، ہمیں $A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC)$. حاصل ہوگا۔ میٹرکس کے ضرب کی تلازمی خاصیت اور معکوس میٹرکس کی صفت کے استعمال کرنے سے ہمیں، $B = C$ حاصل ہوگا۔

**مسئلہ 1.6 (Theorem) دائیں منسوخ کا مسئلہ (Right Cancellation Law)**

فرض کیجئے $A, B$ اور $C$ کے مربع میٹریس $n$ ترتیب میں ہیں۔ اگر $A$ ایک غیر نادر ہے اور $BA = CA$, ہوتو $B = C$ ہوگا۔

**ثبوت**

کیونکہ $A$ ایک غیرنادر ہے، $A^{-1}$ موجود ہے اور $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. $BA = CA$ کو لیکر $A^{-1}$ سے دونوں جانب مابعد ضرب کرنے پر ہمیں $(BA)A^{-1} = (CA)A^{-1}$ حاصل ہوگا۔ میٹرکس کے ضرب کی تلازمی خاصیت اور معکوس میٹرکس کی صفت کے استعمال سے ہمیں $B = C$ حاصل ہوگا۔ ■

**غور کیجئے (Note)**

اگر $A$ ایک نادر ہے اور $AB = AC$ یا $BA = CA$, ہوتو ضروری نہیں کہ $B$ اور $C$ مساوی ہو۔ مثال کے طور پر درج ذیل میٹریسوں پر غور کریں۔

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ اور } C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ہم یہاں دیکھیں گے $|A| = 0$ اور $AB = AC$, لیکن $B \neq C$ ہے۔

**مسئلہ 1.7 (Theorem) معکوس میٹرکس برعکس اصول (Reversal Law for Inverses)**

اگر $A$ اور $B$ مساوی ترتیب کے غیر نادر میٹریس ہیں تو ان کا حاصل ضرب $AB$ بھی غیر نادر ہوگا اور $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ہوگا۔

**ثبوت**

اگر فرض کریں کہ $A$ اور $B$ مساوی $n$ ترتیب والے غیر نادر میٹریس ہیں تو $|A| \neq 0, |B| \neq 0$ دونوں $A^{-1}$ اور $B^{-1}$ موجود ہیں اور ان کی ترتیب بھی $n$ ہوگی۔ $AB$ اور $B^{-1}A^{-1}$ دونوں کا حاصل ضرب دریافت کرسکتے ہیں۔اور ان کی ترتیب بھی $n$ ہوگی۔مقطعہ کے حاصل ضرب کا استعمال کرنے سے ہمیں $|AB| = |A||B| \neq 0$. ملے گا۔ تو، $AB$ ایک غیر نادر ہے۔ اور

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (A(BB^{-1}))A^{-1} = (AI_n)A^{-1} = AA^{-1} = I_n;$$
$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = (B^{-1}(A^{-1}A))B = (B^{-1}I_n)B = B^{-1}B = I_n.$$

لہذا، $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ■

**مسئلہ 1.8 (Theorem) دگنے معکوس کا اصول (Law of Double Inverse)**

اگر $A$ ایک غیر نادر ہے تو $A^{-1}$ بھی ایک غیر نادر ہوگا اور $(A^{-1})^{-1} = A$.

**ثبوت**

فرض کریں کہ $A$ ایک غیر نادر ہے تو $|A| \neq 0$, اور $A^{-1}$ موجود ہے۔

اب، $A^{-1}$ بھی غیرنادر ہے $\Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \neq 0$ اور $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

اب، $AA^{-1} = I \Rightarrow \left(AA^{-1}\right)^{-1} = I \Rightarrow \left(A^{-1}\right)^{-1} A^{-1} = I.$ ... (1)

مساوات (1) کو $A$ سے دونوں جانب مابعد ضرب کرنے پر ہمیں $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A.$ حاصل ہوگا۔ ■



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 7 28-03-2023 15:05:17

**مسئلہ 1.9 (Theorem)**

اگر $A$ ایک غیر نادر $n$ ترتیب والی مربع میٹرکس ہے تو

(i) $(\text{adj } A)^{-1} = \text{adj}\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{|A|} A$

(ii) $|\text{adj } A| = |A|^{n-1}$

(iii) $\text{adj}(\text{adj } A) = |A|^{n-2} A$

(iv) $\text{adj}(\lambda A) = \lambda^{n-1}\text{adj}(A)$ $\lambda$ ایک غیر صفری عددیہ ہے۔

(v) $|\text{adj}(\text{adj}A)| = |A|^{(n-1)^2}$

(vi) $(\text{adj } A)^T = \text{adj}\left(A^T\right)$

**ثبوت**

کیونکہ $A$ ایک غیرنادر مربع میٹرکس ہے تو ہمیں $|A| \neq 0$ ہے۔ اور لہذا ہمیں حاصل ہوگا۔

(i) $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj } A) \Rightarrow \text{adj } A = |A| A^{-1} \Rightarrow (\text{adj } A)^{-1} = \left(|A| A^{-1}\right)^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(A^{-1}\right)^{-1} = \frac{1}{|A|} A$.

$A$ کو $A^{-1}$ سے تبدیل کرنے پر $\text{adj } A = |A| A^{-1}$، تو ہمیں $\text{adj}\left(A^{-1}\right) = \left|A^{-1}\right|\left(A^{-1}\right)^{-1} = \frac{1}{|A|} A$ حاصل ہوگا۔

لہذا، $(\text{adj } A)^{-1} = \text{adj}\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{|A|} A$.

(ii) $A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A| I_n \Rightarrow \det\left(A(\text{adj } A)\right) = \det\left((\text{adj } A)A\right) = \det\left(|A| I_n\right)$

$\Rightarrow |A||\text{adj } A| = |A|^n \Rightarrow |\text{adj } A| = |A|^{n-1}$.

(iii) کوئی بھی $n$ ترتیب والی غیرنادر میٹرکس $B$ کے لئے ہے۔ $B(\text{adj } B) = (\text{adj } B)B = |B| I_n$

$B = \text{adj } A$. ڈالنے پر، $(\text{adj } A)(\text{adj}(\text{adj } A)) = |\text{adj } A| I_n$ حاصل ہوگا۔

چونکہ, $|\text{adj } A| = |A|^{n-1}$, $(\text{adj } A)(\text{adj}(\text{adj } A)) = |A|^{n-1} I_n$., حاصل ہوگا۔

دونوں طرف $A$, سے ماقبل ضرب کرنے پر $A\left((\text{adj } A)(\text{adj } (\text{adj } A))\right) = A\left(|A|^{n-1} I_n\right)$, حاصل ہوگا۔

معکوس میٹرکس کی تلازمی صفت کے استعمال سے ہمیں

$\left(A(\text{adj } A)\right)\text{adj}(\text{adj } A) = A\left(|A|^{n-1} I_n\right)$.

لہذا، $\left(|A| I_n\right)\left(\text{adj}(\text{adj } A)\right) = |A|^{n-1} A$, $\text{adj}(\text{adj } A) = |A|^{n-2} A$, حاصل ہوگا۔

(iv) $A$ کو $\lambda A$ سے تبدیل کرنے پر $\text{adj}(A) = |A| A^{-1}$ (یہاں $\lambda$ ایک غیر صفری عددیہ ہے۔

$\text{adj}(\lambda A) = |\lambda A|(\lambda A)^{-1} = \lambda^n |A| \frac{1}{\lambda} A^{-1} = \lambda^{n-1} |A| A^{-1} = \lambda^{n-1}\text{adj}(A)$.

(v) (iii) سے ہمیں $\text{adj}(\text{adj } A) = |A|^{n-2} A$ دونوں طرف مقطعہ کا استعمال کرنے سے، ہمیں حاصل ہوگا۔

$|\text{adj}(\text{adj}A)| = \left||A|^{n-2} A\right| = \left(|A|^{(n-2)}\right)^n |A| = |A|^{n^2-2n+1} = |A|^{(n-1)^2}$.

(vi) $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj } A$ میں $A$ کو $A^T$ سے تبدیل کرنے پر $\left(A^T\right)^{-1} = \frac{1}{|A^T|}\text{adj}\left(A^T\right)$ ہمیں حاصل ہوگا۔

لہذا، $\text{adj}\left(A^T\right) = |A^T|\left(A^T\right)^{-1} = |A|\left(A^{-1}\right)^T = \left(|A| A^{-1}\right)^T = \left(|A| \frac{1}{|A|}\text{adj } A\right)^T = (\text{adj } A)^T$ ہمیں حاصل ہوگا۔ ■

## غور کیجئے (Note)

اگر $A$ ایک 3 ترتیب کی غیر نادر مربع میٹرکس ہے تو، $|A| \neq 0$ ہوگا۔ مسئلہ 1.9 (ii) سے ہمیں، $|\text{adj}A| = |A|^2$ حاصل ہوتا ہے۔
اس لئے $|\text{adj } A|$ مثبت ہو تو، $|A| = \pm\sqrt{|\text{adj } A|}$ حاصل ہوتا ہے۔

اس سے ہمیں $A^{-1} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{|\text{adj } A|}}\text{adj } A.$ حاصل ہوتا ہے۔

علاوہ، خصوصیت (iii) سے ہمیں $A = \dfrac{1}{|A|}\text{adj}(\text{adj } A)$ حاصل ہوتا ہے۔

لہذا، اگر $A$ ایک 3 ترتیب والی غیر نادر مربع میٹرکس ہے تو، ہمیں $A = \pm\dfrac{1}{\sqrt{|\text{adj } A|}}\text{adj}(\text{adj } A)$ حاصل ہوتا ہے۔

### مثال 1.4

اگر $A$ ایک طاق ترتیب والی غیر نادر میٹرکس ہے، تو ثابت کرو کہ $|\text{adj } A|$ مثبت ہے۔

### حل

فرض کریں کہ $A$ ایک $2m+1$ ترتیب والی غیر نادر میٹرکس ہے۔یہاں $m = 0,1,2,\cdots$ ہو تو، ہمیں $|A| \neq 0$ ہوگا اور
مسئلہ 1.9 (ii) سے ہمیں $|\text{adj } A| = |A|^{(2m+1)-1} = |A|^{2m}$ حاصل ہوتا ہے۔

کیونکہ $|A|^{2m}$ ہمیشہ مثبت رہنے سے، ہمیں $|\text{adj } A|$ بھی مثبت ہوگا۔ ■

### مثال 1.5

اگر $\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 7 & 7 & -7 \\ -1 & 11 & 7 \\ 11 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ ہو تو میٹرکس $A$ معلوم کریں۔

### حل

پہلے، ہم پتہ کرتے ہیں کہ $|\text{adj}(A)| = \begin{vmatrix} 7 & 7 & -7 \\ -1 & 11 & 7 \\ 11 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 7(77-35) - 7(-7-77) - 7(-5-121) = 1764 > 0.$

اس سے، ہمیں حاصل ہوگا۔

$$A = \pm\frac{1}{\sqrt{|\text{adj } A|}}\text{adj}(\text{adj } A) = \pm\frac{1}{\sqrt{1764}}\begin{bmatrix} +(77-35) & -(-7-77) & +(-5-121) \\ -(49+35) & +(49+77) & -(35-77) \\ +(49+77) & -(49-7) & +(77+7) \end{bmatrix}^T$$

$$= \pm\frac{1}{42}\begin{bmatrix} 42 & 84 & -126 \\ -84 & 126 & 42 \\ 126 & -42 & 84 \end{bmatrix}^T = \pm\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

■

### مثال 1.6

اگر $\text{adj } A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, ہو تو، $A^{-1}$ معلوم کریں۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 9 28-03-2023 15:05:40

## حل

$|\text{adj } A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 9$ معلوم کریں گے،

تو ہمیں، $A^{-1} = \pm \frac{1}{\sqrt{|\text{adj}(A)|}} \text{adj}(A) = \pm \frac{1}{\sqrt{9}} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \pm \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ حاصل ہوتا ہے۔

## مثال 1.7

اگر $A$ ایک متناسب ہو تو ثابت کریں کہ $\text{adj } A$ بھی ایک متناسب ہے۔

## حل

اگر $A$ ایک متناسب ہو تو $A = A^T$ ہوگا اور مسئلہ 1.9 (vi) سے، ہمیں

$\text{adj}\left(A^T\right) = \left(\text{adj } A\right)^T \Rightarrow \text{adj } A = \left(\text{adj } A\right)^T \Rightarrow \text{adj } A$ ایک متناسب ہے۔

**مسئلہ 1.10 (Theorem)**

اگر $A$ اور $B$، $n$ ترتیب والے کوئی دو غیر نادر مربع میٹریس ہیں تو $\text{adj}(AB) = (\text{adj } B)(\text{adj } A)$. ہوگا۔

## ثبوت

$A$ کو $AB$ سے تبدیل کرنے پر، $\text{adj}(A) = |A| A^{-1}$ حاصل ہوگا۔

$\text{adj}(AB) = |AB|(AB)^{-1} = \left(|B| B^{-1}\right)\left(|A| A^{-1}\right) = \text{adj}(B)\,\text{adj}(A)$.

## مثال 1.8

$A = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$. ہو تو خصوصیت $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$ کی تصدیق کریں۔

## حل

دیے گئے $A$ کے لئے، $|A| = (2)(7) - (9)(1) = 14 - 9 = 5$ حاصل ہوتا ہے۔ $A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 7 & -9 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} & -\frac{9}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$،

ہو تو

$\left(A^{-1}\right)^T = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{9}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -9 & 2 \end{bmatrix}$ ہوگا۔ ... (1)

دیے گئے $A$ سے $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$ اس لئے $\left|A^T\right| = (2)(7) - (1)(9) = 5$

ہو تو

$\left(A^T\right)^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -9 & 2 \end{bmatrix}$ ہوگا۔ ... (2)

(1) اور (2) سے $\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1}$ خصوصیت کی تصدیق مکمل ہوئی۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 10 28-03-2023 15:05:49

**مثال 1.9**

$A=\begin{bmatrix}0 & -3\\ 1 & 4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-2 & -3\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ ہو تو $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ کی تصدیق کریں۔

**حل**

$$AB = \begin{bmatrix}0 & -3\\ 1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & -3\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0+0 & 0+3\\ -2+0 & -3-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 3\\ -2 & -7\end{bmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{(0+6)}\begin{bmatrix}-7 & -3\\ 2 & 0\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-7 & -3\\ 2 & 0\end{bmatrix} \qquad \dots (1)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{(0+3)}\begin{bmatrix}4 & 3\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}4 & 3\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{(2-0)}\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 0 & -2\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 0 & -2\end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 0 & -2\end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix}4 & 3\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-7 & -3\\ 2 & 0\end{bmatrix}. \qquad \dots (2)$$

(1) اور (2) میٹریس کے مساوی ہیں اس سے $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ تصدیق ہوا۔

**مثال 1.10**

اگر $A=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & 5\end{bmatrix}$، اس طرح کہ $A^2+xA+yI_2=O_2$ ہو تو $x$ اور $y$ دریافت کیجئے۔ اور $A^{-1}$ بھی دریافت کریں۔

**حل**

$$A^2 = \begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}22 & 27\\ 18 & 31\end{bmatrix}, \text{ کیونکہ}$$

$$A^2+xA+yI_2=O_2 \Rightarrow \begin{bmatrix}22 & 27\\ 18 & 31\end{bmatrix}+x\begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & 5\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}22+4x+y & 27+3x\\ 18+2x & 31+5x+y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

تو ہمیں $22+4x+y=0,\ 27+3x=0,\ 31+5x+y=0$ اور $18+2x=0$ حاصل ہوتا ہے۔

لہذا، $x=-9$ اور $y=14$. ہے پھر $A^2-9A+14I_2=O_2$. حاصل ہوگا۔

$A^{-1}$ سے مابعد ضرب کرنے پر $A-9I_2+14A^{-1}=O_2$. حاصل ہوتا ہے۔

لہذا، $$A^{-1}=\frac{1}{14}(9I_2-A)=\frac{1}{14}\left(9\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & 5\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{14}\begin{bmatrix}5 & -3\\ -2 & 4\end{bmatrix}.$$

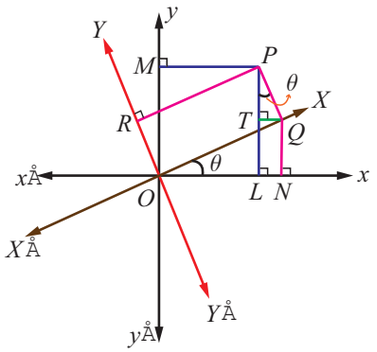


12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 11 28-03-2023 15:05:57

## 1.2.4 علم ہندسہ میں میٹریس کا استعمال (Application of matrices to Geometry)

غیر نادر میٹریسوں کی خاص قسمیں ہوتی ہیں جو وسیع طور پر علم ہندسہ میں استعمال ہوتی ہیں۔ آسانی کے لئے ہم دو ابعادی تحلیلی علم ہندسہ پر غور کریں گے۔

فرض کرو کہ $O$ ایک مبداء ہے اور $x'Ox$ محوراور $y'Oy$ $y$ محور ہے۔ اگر $P$ نقطہ جس کے محددی $(x,y)$ ہیں محددی نظام کے نسبت سے فرض کیجئے کہ ہم $x$ محور کو اور $y$ محور کو مبداء کے اطراف $\theta$ زاویہ سے گھماتے ہیں جیسا کہ خاکہ میں بتایا گیا ہے۔ اگر $X'OX$ اور $Y'OY$ دونئے محوریں ہیں۔ فرض کریں نئے محددی نظام کے نسبت سے $P$ کے نئے محددوں کا مجموعہ $(X,Y)$ ہوگا۔ خاکہ (خاکہ 1.1) سے ہمیں



خاکہ 1.1

$$x = OL = ON - LN = X\cos\theta - QT = X\cos\theta - Y\sin\theta ,$$

$$y = PL = PT + TL = QN + PT = X\sin\theta + Y\cos\theta .$$

یہ مساوات ہمیں ایک محددی نظام کو دوسرے محددی نظام میں تبدیل کرتی ہیں۔ اوپر دئے گئے دومساوات کو میٹرکس کی شکل میں اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} .$$

فرض کرو کہ $W = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ ہے تو $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = W\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ اور $|W| = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

چنانچہ $W$ کا معکوس موجود ہے اور وہ $W^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ ہے۔ ہم نے غور کیا کہ یہاں $W^{-1} = W^T$ ہے۔ اس سے ہمیں استحالہ معکوس حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = W^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{bmatrix} .$$

لہذا، ہمیں استحالہ $X = x\cos\theta - y\sin\theta$ , $Y = x\sin\theta + y\cos\theta$ حاصل ہوتا ہے۔

یہ استحالہ کمپیوٹر ترسیمی میں استعمال ہوتا ہے اور وہ میٹرکس $W = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ کہلاتا ہے۔ ہم نے غور کیا کہ میٹرکس $W$ خاص خصوصیت کو رکھتی ہے جیسا کہ $W^{-1} = W^T$ یعنی، $WW^T = W^TW = I$

**تعریف 1.3**

ایک مربع میٹرکس $A$ عمودی کہلاتی ہے اگر $AA^T = A^TA = I$

### غور کیجئے (Note)

$A$ ایک عمودی ہے اگر اور صرف اگر $A$ ایک غیر نادر اور $A^{-1} = A^T$ ہو۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 12 28-03-2023 15:06:08

## مثال 1.11

$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ ثابت کیجئے کہ عمودی ہے ۔

**حل**

اگر $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ ہو تو $A^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

$$AA^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\theta+\sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta-\sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta-\cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta+\cos^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 .$$

اسی طرح، $A^TA = I_2$ حاصل ہوتا ہے۔ لہذا، $AA^T = A^TA = I_2 \Leftarrow A$ ایک عمودی ہے۔ ■

## مثال 1.12

اگر $A = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 6 & -3 & a \\ b & -2 & 6 \\ 2 & c & 3 \end{bmatrix}$ عمودی ہے تو $a$ , $b$ اور $c$ کا پتہ لگائیں اور اسی طرح $A^{-1}$ معلوم کریں۔

**حل**

اگر $A$ عمودی ہے تو $AA^T = A^TA = I_3$ اس لئے ہمیں

$$AA^T = I_3 \Rightarrow \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 6 & -3 & a \\ b & -2 & 6 \\ 2 & c & 3 \end{bmatrix}\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 6 & b & 2 \\ -3 & -2 & c \\ a & 6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 45+a^2 & 6b+6+6a & 12-3c+3a \\ 6b+6+6a & b^2+40 & 2b-2c+18 \\ 12-3c+3a & 2b-2c+18 & c^2+13 \end{bmatrix} = 49\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} 45+a^2=49 \\ b^2+40=49 \\ c^2+13=49 \\ 6b+6+6a=0 \\ 12-3c+3a=0 \\ 2b-2c+18=0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} a^2=4, b^2=9, c^2=36, \\ a+b=-1, a-c=-4, b-c=-9 \end{Bmatrix} \Rightarrow a=2, b=-3, c=6$$

اس طرح، ہمیں $A = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 6 & -3 & 2 \\ -3 & -2 & 6 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ ملے گا، یعنی، $A^{-1} = A^T = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 6 & -3 & 2 \\ -3 & -2 & 6 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ ■



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 13 28-03-2023 15:06:17

## 1.2.5 خفیہ حروفوں میں لکھنے کا فن میں میٹریسس کا استعمال (Application of matrices to Geometry)



غیر نادر مربع میٹرکس کا ایک اہم استعمال cryptography میں ہوتا ہے۔ Cryptography دولوگوں کے درمیان فن گفتگو کا ایسا طریقہ ہے جس کی اطلاع کسی دوسرے کو نہیں ہوتی ۔یہ دواجزاء پر منحصر ہے encryption اور decryption۔ **Encryption** ایسا عمل ہے جس میں خبر plain form کو ناقابل سمجھ تحریری شکل، coded form میں تبدیل کیا جاتا ہے۔ دوسری طرف decryption ہے جس میں ناقابل تحریری شکل coded form کوپڑھنے کے قابل یعنی اصل صورت میں تبدیل کیا جاتا ہے encryption اور decryption کے لئے ایک خفیہ ٹکنیک کی ضرورت ہے جو صرف بھیجنے (مرسّل) اور (وصول) حاصل کرنے والوں کو پتہ ہو۔

اس بھید کو چابی کہا جاتا ہے۔ اس چابی کو حاصل کرنے کا ایک طریقہ جس میں غیر نادر میٹرکس کا استعمال کرکے بھیجی گئی خبر کو encrypt کیا جاتا ہے۔ اس خبر کو رسیوکرنے والا معکوس میٹرکس کا استعمال کرکے اس کو decrypt کرتا ہے۔ میٹرکس جو encryption کے لئے استعمال ہوتا ہے۔وہ **encryption** میٹرکس (**encoding matrix**) کہلاتا ہے اور میٹرکس جو decryption کے لئے استعمال ہوتا ہے وہ **decryption** میٹرکس (**decoding matrix**) کہلاتا ہے۔

ہم ایک مثال کے ذریعہ encryption اور decryption کے عمل کی وضاحت کرتے ہیں۔

فرض کریں مرسل اور وصول دونوں $A-Z$ کنندہ حرفوں کو بالترتیب 1-26 تک اور خالی جگہ کے لئے 0 کا انتخاب کرتے ہیں ۔ آسانی کے لئے مرسل چابی کا استعمال اس کی مرضی کی 3ترتیب والی غیر نادر میٹرکس سے مابعد ضرب کرکے کرتا ہے اور وصول اس میٹرکس کے معکوس سے مابعد ضرب جو مرسل انتخاب کرتا ہے۔ اس کا استعمال کرتا ہے۔




فرض کرو encoding میٹرکس ہے ۔

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

مرسل پیغام "**WELCOME**" بھیجنا چاہتا ہے۔

کیونکہ چابی مربع سیٹکرس جو 3ترتیب والی ہے اس سے مابعد ضرب سے ملے گی۔خبر کو تین حصوں میں بانٹاجاتا ہے **(WEL), (COM), (E)** ہر ایک کی لمبائی 3ہے ۔اس کو تین صف میٹریسوں میں تبدیل کیا جاتا ہے ۔

**[23 5 12],[3 15 13],[5 0 0].**

غور کریں کہ آخری صف میٹرکس میں ہم نے دوصفروں کو داخل کیا ہے ۔ اس کی وجہ صف میٹرکس کو حاصل کرنا ہے۔جس کا پہلا عنصر 5 ہو ۔ اب ہم پیغام کو encode کرنے کے لئے صف میٹرکس کو ایک ایک کرکے میٹرکس سے مابعد ضرب کریں گے ۔ جیسا کہ نیچے دیا گیا ہے۔

| Uncoded row matrix | Encoding matrix | Coded row matrix |
|---|---|---|
| $[23\ 5\ 12]$ | $\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ | $=[45\ \ -28\ \ 23];$ |
| $[3\ 15\ 13]$ | $\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ | $=[46\ \ -18\ \ 3];$ |
| $[5\ \ 0\ \ 0]$ | $\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ | $=[5\ \ -5\ \ 5].$ |



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 14 28-03-2023 15:06:20

encoded پیغام اس طرح [23 −28 45] [46 −18 3] [5 −5 5] ہے۔ $A$ کے معکوس سے مابعد ضرب کرکے decode کرتا ہے۔ تحصیل کرنے والا اس پیغام کو الٹی چابی کا استعمال اس لئے decoding میٹرکس ہے ۔

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

encoded پیغام کو تحصیل کرنے والا decode استعمال ذیل کی طرح کرتا ہے۔

| Coded row matrix | Decoding matrix | Decoded row matrix |
|---|---|---|

$$[45 \ -28 \ 23]\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = [23 \ 5 \ 12];$$

$$[46 \ -18 \ 3]\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = [3 \ 15 \ 13];$$

$$[5 \ -5 \ 5]\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = [5 \ 0 \ 0].$$

اسی طرح decoded صف کا میٹرکس سلسلہ $[23\ 5\ 12], [3\ 15\ 13], [5\ 0\ 0]$ ہے ۔
تحصیل کرنے والا پیغام کو "**WELCOME**" پڑھتا ہے۔

## مشق 1.1

1. مندرجۂ ذیل کے شریک کا پتہ لگائیں۔

(i) $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$ (iii) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

2. مندرجۂ ذیل کے معکوس کا پتہ لگائیں (اگر موجود ہوں تو)

(i) $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

3. اگر $F(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$ ہوتو $[F(\alpha)]^{-1} = F(-\alpha)$. ثابت کرو۔

4. اگر $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ ہوتو $A^2 - 3A - 7I_2 = O_2$ ثابت کرو۔ اسی طرح $A^{-1}$ کا پتہ کریں۔

5. اگر $A = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -8 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ 1 & -8 & 4 \end{bmatrix}$ ہوتو $A^{-1} = A^T$ ثابت کرو۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 15 28-03-2023 15:06:27

6. اگر $A=\begin{bmatrix}8 & -4\\ -5 & 3\end{bmatrix}$ ہوتو $A(\text{adj } A)=(\text{adj } A)A=|A|I_2$ ثابت کرو۔

7. اگر $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 7 & 5\end{bmatrix}$ اور $B=\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 5 & 2\end{bmatrix}$ ہوتو $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ ثابت کرو۔

8. اگر $\text{adj}(A)=\begin{bmatrix}2 & -4 & 2\\ -3 & 12 & -7\\ -2 & 0 & 2\end{bmatrix}$، ہوتو $A.$ معلوم کریں۔

9. اگر $\text{adj}(A)=\begin{bmatrix}0 & -2 & 0\\ 6 & 2 & -6\\ -3 & 0 & 6\end{bmatrix}$، ہوتو $A^{-1}$ معلوم کریں۔

10. اگر $\text{adj } A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$. ہوتو $\text{adj}(\text{adj}(A))$ معلوم کریں۔

11. اگر $A=\begin{bmatrix}1 & \tan x\\ -\tan x & 1\end{bmatrix}$ ہوتو $A^TA^{-1}=\begin{bmatrix}\cos 2x & -\sin 2x\\ \sin 2x & \cos 2x\end{bmatrix}$ ثابت کرو۔

12. اگر $A\begin{bmatrix}5 & 3\\ -1 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14 & 7\\ 7 & 7\end{bmatrix}$ ہوتو میٹرکس $A.$ معلوم کریں۔

13. $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ اور $C=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$ ہوتو میٹرکس $X$ معلوم کریں۔ اسی طرح کہ $AXB=C$ ہو

14. اگر $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$، ہوتو $A^{-1}=\frac{1}{2}\left(A^2-3I\right)$ ثابت کرو۔

15. اصول کی ہوئی coded خبر $[-3 \quad 2]\,[4 \quad 20]$ کو Decrypt کرو جہاں encryption $\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ میٹرکس ہے اور decryption میٹرکس اس کا معکوس ہے۔ جہاں ضابطہ کے نظام کے لئے نمبر 1-26 تک بالترتیب $A-Z$ کے لئے اور 0 خالی جگہ کے لئے تشریح ہے۔

## 1.3 میٹرکس کے بنیادی متبادلات (Elementary Transformations of a Matrix)

ایک میٹرکس پر ہم ایک خاص بنیادی عمل جسے ہم ابتدائی صف ، ابتدائی قطار کے عمل بھی کہتے ہیں ان کے استعمال سے دوسری میٹرکس میں تبدیل کیا جاسکتا ہے۔

### 1.3.1 ابتدائی صف اور کالم کے عملیات (Elementary row and column operations)

میٹرکس پر ابتدائی صف (قطار ) کے اعمال مندرجۂ ذیل ہیں۔

(i) کہیں کوئی دو صفوں (قطاروں) کا آپس میں بدلاؤ۔

(ii) کسی بھی صف (قطار) کے عناصر کی ضرب ایک غیر صفر عدد سے کرکے اس صف (قطار) کو تبدیل کرنا۔

(iii) میٹرکس کے ایک صف (قطار) کو اس کے اور دوسری قطار (کالم) کو کسی غیر صفر عدد سے ضرب کرکے دونوں کا جمع کرکے اس صف (قطار) کو تبدیل کرنا۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 16 28-03-2023 15:06:34

میٹرکس کے بنیادی صف کے اعمال اور بنیادی کالم کے اعمال کو میٹرکس کے بنیادی متبادلات کہا جاتا ہے۔
ہم اس بنیادی صف کے متبادلات کو درجہ ذیل کے علامتوں سے ظاہر کرتے ہیں۔

(i) علامتی طور پر $i^{th}$ اور $j^{th}$ صفوں کا آپس میں بدلاؤ $R_i \leftrightarrow R_j$ سے دکھایا جاتا ہے۔

(ii) علامتی طور پر $i^{th}$ صف کے ہر عنصر کو $\lambda$ سے ضرب کرنے پر جہاں $\lambda \neq 0$ کو $R_i \to \lambda R_i$ سے دکھایا جاتا ہے۔

(iii) علامتی طور پر $i^{th}$ صف کے عنصر میں جوڑاس کے مطابق $j^{th}$ صف کے عناصر کی $\lambda$ سے ضرب $R_i \to R_i + \lambda R_j$ سے دکھائی جاتی ہے۔

اسی طرح کی علامتیں قطار کے بنیادی عملیات میں بھی استعمال ہوتی ہیں۔

**تعریف 1.4**

مساوی ترتیب کے دو میٹرکس $A$ اور $B$ ہم معنی کہلاتے ہیں اگر ایک میٹرکس کو بنیادی متبادلات کے ذریعے دوسرے میں تبدیل کیا جا سکے۔ ہم علامتی طور پر $A \sim B$ لکھتے ہیں۔اس کا مطلب $A$ میٹرکس $B$ کا ہم معنی ہے۔

مثال کے طور، پر فرض کیجئے میٹرکس $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$.

درجہ ذیل صف کا عمل $R_2 \to R_2 + R_1$ میٹرکس $A$ کے ساتھ کرنے سے،

$A \sim B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$. حاصل ہوگی جس میں دوسری صف $A$ کی پہلی اور دوسری صف کی جمع ہے۔

اس ابتدائی صف کے عمل کو اس طرح سے بھی ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}.$$

**غور کیجئے (Note)**

بنیادی عملیات کے ذریعے ایک میٹرکس کو دوسری میٹرکس میں تبدیل کیا جاسکتا ہے جو ضروری نہیں کہ دی گئی میٹرکس کے مساوی ہو۔

## 1.3.2 صف ایکلان شکل (Row-Echelon form)

صف کے ابتدائی عمل کو استعمال کرکے ہم ایک غیر صفر میٹرکس کو معمولی شکل میں تبدیل کرسکتے ہیں۔ جو صف ایکلان میٹرکس کہلاتی ہے۔ اس شکل میں ایسی صفیں بھی ہونگی جس کے تمام عناصر صفر ہونگے ۔ ایسے صفوں کو ہم صفر صفیں کہتے ہیں۔ اگر کوئی صف میں اگر ایک عنصر بھی غیر صفر ہوتو اسے ہم غیر صفری صف کہتے ہیں۔ مثال کے طور پر میٹرکس $\begin{bmatrix} 6 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ میں، $R_1$ اور $R_2$ غیر صفر صفیں ہیں اور $R_3$ صفر صف ہے۔

**تعریف 1.5**

ایک غیر صفر میٹرکس $E$ صف ایکلان کی شکل کہلاتی ہے اگر

(i) تمام صفر صفیں $E$ کی غیر صفری صفوں کے نیچے پائی جائیں۔

(ii) صف $i$ میں پہلا غیر صفری عنصر $j^{th}$ قطار میں ہو اور $E$ میٹرکس کی $j$ قطار میں تمام عنصر جو پہلے عنصر کے نیچے ہو وہ تمام صفر ہوں۔

(iii) $E$ میٹرکس میں $i^{th}$ صف کا پہلا غیر صفری عنصر $(i+1)^{th}$ صف کی غیر صفری عنصروں کی بائیں طرف ہو۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 17 28-03-2023 15:06:39

### غور کیجئے (Note)

**اگر غیر صفر میٹرکس میں تمام صفر صفیں نچلی ہوں اور کسی بھی نچلے صف کا غیر صفر عنصر اس کے اوپر والی صف کے پہلے غیر صفری عنصر کے دائیں طرف ہوتو ایسی میٹرکس صف ایکلان میٹرکس ہے۔**

مندرجۂ ذیل میٹرکس صف ایکلان کی شکل میں ہیں۔ (i) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

سمجھئے (i) میٹرکس میں آخری صف سے اوپری صفوں کی طرف چلیں ۔ تیسری صف صفر صف ہے۔ پہلا غیر صفری عنصر دوسری صف اور تیسری قطار پر واقع ہے۔ اور یہ اوّل صف میں پہلا غیر صفری عنصر جو دوسری قطار پر ہے اس کے دائیں واقع ہے۔ اس لئے یہ میٹرکس ایکلان میٹرکس ہے۔

سمجھئے (ii) میٹرکس میں آخری صف سے اوپری صفوں کی طرف چلیں۔ سارے صف غیر صفر ہیں۔ پہلا غیر صفری عنصر تیسری صف اور چوتھے قطار پر واقع ہے اور یہ دوسری صف میں پہلے غیر صفری عنصر جو دوسری صف اور تیسری قطار پر ہے اس کے دائیں طرف ہے۔ دوسری صف کا پہلا غیر صفری عنصر تیسری قطار پر ہے اور یہ پہلے صف کے غیر صفری عنصر جو پہلی قطار میں واقع ہے اس کے دائیں ہے۔ اس لئے یہ میٹرکس اکلان میٹرکس ہے۔

مندرجۂ ذیل میٹرکس صف ایکلان کی شکل میں نہیں ہیں۔

(i) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, (ii) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

سمجھئے (i) میٹرکس میں پہلا غیر صفر عنصر تیسری صف میں دوسری قطار پر ہے اور یہ دوسری صف کا پہلا غیر صفر عنصر جو تیسری قطار میں ہے اِس کے بائیں ہے اس لئے یہ میٹرکس صف ایکلان کی شکل میں نہیں ہے۔

سمجھئے (ii) میٹرکس میں پہلا غیر صفر عنصر دوسری صف اور پہلے قطار پر ہے اور یہ پہلے صف کے پہلے غیر صفر عنصر کے بائیں طرف ہے اس لئے یہ میٹرکس صف ایکلان کی شکل میں نہیں ہے۔

### میٹرکس $\left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ کو صف ایکلان کی شکل میں تبدیل کرنے کا طریقہ

#### مرحلہ 1

پہلی صف کامعائنہ کریں۔ اگر پہلی صف صفر صف ہے۔ تو اس کو غیر صفر صف جو پہلی صف کے نیچے ہو اس سے تبادلہ کرلیں۔اگر $a_{11}$ غیر صفرہے ۔ تو مرحلہ 2 کو چلے جائیں۔ دوسری صورت، میں پہلی صف $R_1$ کو کسی بھی غیر صفر نچلی صفوں سے آپس میں تبادلہ کرلیں جس میں پہلی قطار میں غیر صفر عنصر ہو اگر پہلی صف کے نچلی صفوں میں پہلی قطار پر کوئی غیر صفری عنصر نہیں ہے ۔ تو $a_{12}$ پر غور کریں اگر $a_{12}$ غیر صفر ہوتو مرحلہ 2 کو چلے جائیں ۔دوسری صورت میں، $R_1$ کو نچلی کسی بھی صف سے آپس میں تبدیل کرلیں جس میں دوسری قطار پر غیرصفری عنصر ہو۔ اگر کوئی بھی نچلی صف میں دوسری قطار پر غیر صفری عنصر نہ ہوتو $a_{13}$ پر غور کریں۔ اسی طرح آگے بڑھیں جب تک کہ پہلے صف میں ایک غیر صفری عنصر نہ مل جائے ۔ اسے **(pivoting)** کہتے ہیں۔اور پہلی صف کا پہلا غیر صفر عنصر **(pivot)** یعنی محور کہلاتا ہے۔

#### مرحلہ 2

پہلی صف اور صف کے ابتدائی عمل کا استعمال کرکے تمام عنصر جو محور کے اندر ہیں ان کو صفر میں تبدیل کریں۔

#### مرحلہ 3

دوسری صف کو پہلی صف فرض کریں اور مرحلہ (1) اور (2) کو دہرائیں۔خیال رکھیں یہ دوسری صف کی نچلی صفیں ہوں ۔دہراتے رہیں جب تک کہ تمام صف خالی نہ ہوجائیں ۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 18 28-03-2023 15:06:41

## مثال 1.13

میٹرکس $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ کو صف ایکلان شکل میں تحلیل کرو۔

## حل

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \to R_2 + 2R_1, \\ R_3 \to R_3 + R_1}} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - \frac{1}{2}R_2} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

## غور کیجئے (Note)

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2/8} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

یہ بھی دی گئی میٹرکس کی صف ایکلان شکل ہے اس لئے ضروری نہیں کہ صف ایکلان کی شکل منفرد ہو۔

## مثال 1.14

میٹرکس $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & 0 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ کو صف ایکلان کی شکل میں تحلیل کرو۔

## حل

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & 0 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 4R_1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 8 & 20 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - \frac{2}{3}R_2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & \frac{22}{3} & 16 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to 3R_2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 22 & 48 \end{bmatrix}.$$

## 1.3.3 میٹرکس کا مقام (Rank of a Matrix)

میٹرکس کے مقام کی تعریف سے پہلے ہمیں میٹرکس کے تحتی میٹریسوں اور اس کے کمتروں کے بارے میں جاننا چاہئے۔

$A$ ایک دی گئی میٹرکس ہے۔ $A$ کے چند صف اور قطار وں کو خارج کرنے کے بعد جو میٹرکس ہمیں ملتی ہے وہ $A$ کی تحتی میٹرکس کہلاتی ہے۔ ایک میٹرکس خود کی تحتی میٹرکس ہے کیونکہ وہ ہمیں صفر عدد صف اور صفر عدد قطار کو خارج کرنے سے ملتی ہے۔

یاد کریں ایک میٹرکس کی مربع تحتی میٹرکس کا مقطعہ میٹرکس کا کمتر کہلاتا ہے۔

### تعریف 1.6

$A$ کی سب سے اونچی اور نہ معدوم ہونے والی کمتر کی ترتیب $A$ کا مقام کہلاتی ہے۔ اس کو $\rho(A)$. سے ظاہر کیا جاتا ہے۔صفر میٹرکس کا مقام صفر ہے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 19 28-03-2023 15:06:44

## غور کیجئے (Note)

(i) اگر میٹرکس کے پاس کم سے کم ایک غیر صفری عنصر ہو تو $\rho(A) \geq 1$ ہوگا۔

(ii) اکائی میٹرکس $I_n$ کا مقام $n$ ہے۔

اگر $A$ میٹرکس کا مقام $r$, ہے تو $A$ کا کم سے کم ایک کمتر $r$ ترتیب والا موجود ہونا چاہئے جو کہ معدوم نہ ہو اور $A$ کے تمام $r+1$ اور اس سے اونچی ترتیب والے کمتر (اگر ہوں تو) وہ معدوم ہوں۔

(iv) اگر $A$ میٹرکس کی ترتیب $m \times n$ ہے تو، $\rho(A) \leq \min\{m,n\} = \text{minimum of } m,n.$

(v) $n$ ترتیب والی ایک مربع میٹرکس $A$ کا معکوس ہے اگر صرف اور صرف $\rho(A) = n.$

## مثال 1.15

ذیل میں دئے گئے میٹرکسوں کے مقام معلوم کیجئے۔ (i) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & -2 & 4 \\ 6 & 7 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

## حل

(i) اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ تو $A$ کی ترتیب $3 \times 3$ ہے۔ اس لئے $\rho(A) \leq \min\{3,3\} = 3$ ترتیب 3 والی کمتر سب سے اونچی ترتیب والی ہے۔ یہاں $A$ کی 3 ترتیب والی کمتر صرف ایک ہے۔ وہ

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 3(6-6) - 2(6-6) + 5(3-3) = 0$$

اس لئے $\rho(A) < 3$

اب دوسری ترتیب والی کمتروں کا جائزہ لیں گے ۔

ایک دو ترتیب والی کمتر کا پتہ لگائیں گے۔ $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0$ اس لئے $\rho(A) = 2$ ہے۔

(ii) $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & -2 & 4 \\ 6 & 7 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ ہو تو $A$ کی ترتیب $3 \times 4$ ہے ۔ اس لئے $\rho(A) \leq \min\{3,4\} = 3$

$A$ کی اونچی ترتیب والے کمتر ترتیب 3 کے ہیں۔ ہم 3 ترتیب والے غیر صفری کمتر کو ڈھونڈیں گے یہاں مگر سارے 3 ترتیب والے کمتر معدوم ہوجاتے ہیں جیسا کہ

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \\ 6 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & 4 \\ 6 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 4 \\ 6 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \\ 7 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

اس لئے $\rho(A) < 3$ ہے ۔اب ہم دو ترتیب والے غیر صفری کمتر $A$ کا پتہ لگائیں گے ۔

$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 9 = 5 \neq 0$ اس لئے $\rho(A) = 2$ ہے۔ ■

## ریمارک (Remark)

میٹرکس کے مقام کا پتہ لگانا یعنی اونچی ترتیب والی غیر صفر نہ معدوم میٹرکس کو ڈھونڈنا مشکل ہوگا جب میٹرکس کی ترتیب بڑی ہو ایک دوسرا طریقہ میٹرکس کے مقام کا پتہ لگانے کے لئے استعمال ہوتا ہے جو آسان طریقہ ہے چاہے میٹرکس کی ترتیب کتنی بڑی بھی ہو۔یہ طریقہ میٹرکس کے صف ایکلان ہم معنی میٹرکس کے مقام کا پتہ لگانے کا ہے اگر میٹرکس صف ایکلان کی شکل میں ہے تو تمام عناصر جو اہم وتر (جو کہ $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \cdots.$ وتری عناصر کے جگہوں کو ملانے والی خط ہے) کے نیچے واقع ہیں وہ صفریں ہوں۔ اس طرح کمتر صفر ہے یا غیر صفری جانچنے میں آسانی ہوگی۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 20 28-03-2023 15:06:52

## مثال 1.16

مندرجۂ ذیل میٹرکسوں کے مقام کا پتہ لگائیں جو کہ صف ایکلان کی شکل میں ہیں۔

(i) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -7 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 6 & 0 & -9 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

**حل:**

(i) اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -7 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $A$ $3\times3$ ترتیب والی میٹرکس ہے اور $\rho(A) \leq 3$

تین ترتیب والی کمتر $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -7 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2)(3)(1) = 6 \neq 0$ اس لئے $\rho(A) = 3$

**غور کریں یہاں تینوں صف غیر صفر ہیں۔**

(ii) اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، $A$ ایک $3\times3$ ترتیب والی میٹرکس ہے اور $\rho(A) \leq 3$

صرف ایک 3 ترتیب والا کمتر ہے اور $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-2)(5)(0) = 0$ اس لئے $\rho(A) \leq 2$

یہاں پر کئی دو ترتیب والے کمتر ہیں۔ ہم دوترتیب والی کمتر کا پتہ لگاتے ہیں مثال کے طور پر $\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = (-2)(5) = -10 \neq 0$

$\rho(A) = 2$ ہے۔

**غور کریں یہاں دو غیر صفری صفیں ہیں اور تیسری صف صفر صف ہے۔**

(iii) اگر $A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -9 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، ہوتو، $A$ ، $4\times3$ ترتیب والی میٹرکس ہے اور $\rho(A) \leq 3$

نچلے دو صف صفر صف ہیں۔ یہاں پر کئی دوترتیب والے کمتر ہیں۔ ہم ایک دوترتیب والی کمتر کا پتہ لگاتے ہیں۔مثال کے طور پر

$\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = (6)(2) = 12 \neq 0$ اس لئے $\rho(A) = 2$ ہے۔

**غور کریں یہاں دوغیرصفری صفیں ہیں اور تیسری اور چوتھی صف صفر صف ہے۔**

اوپر کی مثالوں کا جائزہ لینے پر ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ میٹرکس کے مقام صف ایکلان شکل میں اس کے غیرصفری صفوں کی تعداد کے برابر ہے۔ اس جائزہ کو ہم میٹرکس کے مقام کی تعرنیف کرنے میں استعمال کرتے ہیں۔ ■

**مسئلہ 1.11 (Theorem)**

میٹرکس کا مقام صف ایکلان شکل میں اس کے غیر صفری صفوں کی تعداد ہے۔

میٹرکس کا مقام جو صف ایکلان کی شکل میں نہیں ہے اسے ہم مندرجۂ ذیل نتیجہ کے استعمال سے کرتے ہیں جو کہ بنا ثبوت کے بیان کیا گیا ہے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 21 28-03-2023 15:06:58

**مسئلہ 1.12 (Theorem)**

غیر صفری میٹرکس کا مقام اس کی صف ایکلان میٹرکس کے غیر صفری صفوں کے تعداد کے مساوی ہوگا۔

## مثال 1.17

$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&4\\3&0&5\end{bmatrix}$ میٹرکس کا مقام اسے صف ایکلان کی شکل میں تحلیل کرکے معلوم کیجئے۔

## حل

اگر $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&4\\3&0&5\end{bmatrix}$ ہے ابتدائی صف کے عملیات کا استعمال کرکے

$$A\xrightarrow[R_3\to R_3-3R_1]{R_2\to R_2-2R_1}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-3&-2\\0&-6&-4\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3-2R_2}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-3&-2\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

آخری میٹرکس جو $A$ کی ہم معنی ہے صف ایکلان کی شکل میں ہے اس میں دو غیر صفری صفیں ہیں۔ اس لئے $\rho(A)=2$ ہے۔

## مثال 1.18

$\begin{bmatrix}2&-2&4&3\\-3&4&-2&-1\\6&2&-1&7\end{bmatrix}$ میٹرکس کا مقام اسے صف ایکلان کی شکل میں تحلیل کرکے معلوم کیجئے۔

## حل

اگر $A$ میٹرکس ہے ابتدائی صف کے عملیات کا استعمال کرکے

$$A=\begin{bmatrix}2&-2&4&3\\-3&4&-2&-1\\6&2&-1&7\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2\to 2R_2}\begin{bmatrix}2&-2&4&3\\-6&8&-4&-2\\6&2&-1&7\end{bmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3-3R_1]{R_2\to R_2+3R_1}\begin{bmatrix}2&-2&4&3\\0&2&8&7\\0&8&-13&-2\end{bmatrix}.$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-4R_2}\begin{bmatrix}2&-2&4&3\\0&2&8&7\\0&0&-45&-30\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3\div(-15)}\begin{bmatrix}2&-2&4&3\\0&2&8&7\\0&0&3&2\end{bmatrix}.$$

آخری میٹرکس جو $A$ کی ہم معنی ہے صف ایکلان کی شکل میں ہے۔ اس میں تین غیر صفری صفیں ہیں اس لئے $\rho(A)=3$ ہے۔

میٹرکس کی صف کے ابتدائی عملیات کو انجام دینے کے لئے دی گئی میٹرکس کو خاص طبقہ والی میٹرکسوں سے ماقبل ضرب کیا جاتا ہے۔ ان کو ابتدائی میٹریسس کہتے ہیں۔

## تعریف 1.7

اکائی میٹرکس پر صرف ایک ابتدائی عمل کا استعمال کرنے سے جو میٹرکس حاصل ہوتی ہیے وہ ابتدائی میٹرکس کہلاتی ہے۔

## ریمارک (Remark)

اگر ہم 3 صفوں والی میٹرکسوں سے نمٹ رہے ہیں تو تمام ابتدائی میٹرکس 3 ترتیب والے مربع میٹرکس ہیں جو کہ اکائی میٹرکس $I_3$ پر صرف ایک بار صفوں پر ابتدائی عملیات کرنے سے حاصل ہوتی ہیں۔ تمام صف کے ابتدائی عملیات جو میٹرکس $A$ پر کئے جاتے ہیں وہ میٹرکس $A$ کو ابتدائی میٹرکس سے ماقبل ضرب کرنے سے حاصل کرسکتے ہیں۔ اسی طرح تمام کالم کے ابتدائی عملیات جو میٹرکس $A$ پر کرتے ہیں ۔ وہ میٹرکس $A$ کو ابتدائی میٹرکس سے مابعد ضرب کرنے سے حاصل کرسکتے ہیں ۔ اس باب میں ہم صرف صف کے ابتدائی عملیات کا استعمال کریں گے۔

مثال کے طور پر $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ پر غور کریں۔

اگر ہم $R_2 \to R_2 + \lambda R_3$، اس عمل کو $A$, پر لاگو کریں گے تو، یہاں، $\lambda \neq 0$ ایک مستقل ہے۔

$A \xrightarrow{R_2 \to R_2 + \lambda R_3} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+\lambda a_{31} & a_{22}+\lambda a_{32} & a_{23}+\lambda a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. حاصل ہو گا۔ ....(1)

میٹرکس $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ایک ابتدائی میٹرکس ہے کیونکہ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + \lambda R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$A$, کو $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ سے ماقبل ضرب کرنے پر

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+\lambda a_{31} & a_{22}+\lambda a_{32} & a_{23}+\lambda a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}. \quad \text{... (2)}$$

(1) اور (2) سے $A \xrightarrow{R_2 \to R_2 + \lambda R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A.$ حاصل ہو گا۔

اس لئے ابتدائی عمل $R_2 \to R_2 + \lambda R_3$ کو میٹرکس $A$ پر لاگو کرنے سے جو نتیجہ حاصل ہوتا ہے وہی ہمیں $A$ کو ابتدائی میٹرکس $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ سے ماقبل ضرب کرنے پر بھی ملتا ہے۔

اس طرح، ہم ثابت کرسکتے ہیں کہ

(i) ابتدائی عمل $R_2 \leftrightarrow R_3$ کو میٹرکس $A$ پر لاگو کرنے سے جو نتیجہ حاصل ہو گا وہی ہمیں میٹرکس $A$ کو ابتدائی میٹرکس $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ سے ماقبل ضرب کرنے پر ملے گا۔

(ii) ابتدائی عمل $R_2 \to \lambda R_2$ کو $A$ پرلاگو کرنے سے جو نتیجہ حاصل ہو گا وہی میٹرکس $A$ کو ابتدائی میٹرکس $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ سے ماقبل ضرب کرنے پر ملے گا۔

ہم یہاں اس نتیجہ کو بنا ثبوت بیان کریں گے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 23 28-03-2023 15:07:07

**مسئلہ 1.13 (Theorem)**

تمام غیر صفری نادر میٹرکس کو ابتدائی صف کے اعمال کا سلسلہ استعمال کرکے اکائی میٹرکس میں تبدیل کرسکتے ہیں۔

ہم اوپر دئے گئے مسئلہ کی تشریح کے لئے $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ میٹرکس فرض کرتے ہیں تو

$|A|=12+3=15\neq 0.$ کیونکہ $A$ ایک غیر نادر ہے۔ہم $A$ کو ابتدائی صف کے عملیات کا سلسلہ سے $I_2$ میں تبدیل کریں گے۔

پہلے ہم $A$ کے $a_{11}$ عنصر کو 1 میں بدلی کرنے کا عمل ڈھونڈیں گے۔ اس کے لئے جو ابتدائی عمل کی ضرورت ہے وہ $R_1\rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)R_1$. ہے۔

مماثل ابتدئی میٹرکس $E_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$. ہے۔

پھر ہمیں $E_1A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ 3 & 4\end{bmatrix}$. حاصل ہوتا ہے۔

آگے ہم $E_1A$ میں $a_{11}$ کی نیچے والے عنصر کو 0 میں تبدیل کریں گے۔یہاں صرف ایک عنصر $a_{21}$ ہے۔

اس کے لئے جوابتدائی عمل ضرورت ہے وہ $R_2\rightarrow R_2+(-3)R_1$. ہے۔

مماثل ابتدائی میٹرکس ہے۔ $E_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -3 & 1\end{bmatrix}$. پھر ہم کو

$E_2\left(E_1A\right)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{11}{2}\end{bmatrix}$. حاصل ہوتا ہے۔

پھر ہم $E_2\left(E_1A\right)$ کے $a_{22}$ عنصر کو 1 میں تبدیل کریں گے۔ اس کے لئے جو ابتدائی عمل ضروری ہے وہ $R_2\rightarrow\left(\frac{2}{11}\right)R_2$. ہے۔

$E_3=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{2}{11}\end{bmatrix}$. مماثل ابتدائی میٹرکس ہے۔

ہمیں، $E_3\left(E_2\left(E_1A\right)\right)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{2}{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{11}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$. حاصل ہوتا ہے۔

آخر میں ہم $E_3\left(E_2\left(E_1A\right)\right)$ کے $a_{12}$ کو 0 میں تبدیل کرنے کا ابتدائی عمل پتہ کریں گے ۔ ابتدائی عمل جو ہمیں ضرورت ہے وہ ہے۔

$R_1\rightarrow R_1+\left(\frac{1}{2}\right)R_2.$ مماثل ابتدائی میٹرکس $E_4=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$. ہے۔ پھر ہمیں



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 24 28-03-2023 15:07:14

$E_4\left(E_3\left(E_2\left(E_1A\right)\right)\right)=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I_2.$ حاصل ہوتا ہے۔

اوپر دئے گئے تمام ابتدائی عملیات کے سلسلے کو ہم اس طریقہ سے لکھ سکتے ہیں۔

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1\to\left(\frac{1}{2}\right)R_1}\begin{bmatrix}1 & \frac{-1}{2}\\ 3 & 4\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2+(-3)R_1}\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{11}{2}\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2\to\left(\frac{2}{11}\right)R_2}\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1\to R_1+\left(\frac{1}{2}\right)R_2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

### مثال 1.19

$\begin{bmatrix}3 & 1 & 4\\ 2 & 0 & -1\\ 5 & 2 & 1\end{bmatrix}$ میٹرکس غیر نادر ہے ثابت کریں۔اور اس کو ابتدائی صف کے عملیات کے استعمال سے اکائی میٹرکس میں تبدیل کریں۔

### حل

$|A|=3(0+2)-1(2+5)+4(4-0)=6-7+16=15\neq 0.$ ہوتو $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 4\\ 2 & 0 & -1\\ 5 & 2 & 1\end{bmatrix}.$

اس لئے $A$ ایک غیر نادر ہے۔ ہمارا مقصد اکائی میٹرکس کو حاصل کرنا ہے اس کو مدنظر رکھتے ہوئے ہم سلسلہ وار صف کے عمل کو $A$ پر لاگو کرکے اسے پورا کریں گے۔

$$\begin{bmatrix}3 & 1 & 4\\ 2 & 0 & -1\\ 5 & 2 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1\to\frac{1}{3}R_1}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3}\\ 2 & 0 & -1\\ 5 & 2 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1,\ R_3\to R_3-5R_1}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3}\\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{11}{3}\\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{17}{3}\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2\to\left(-\frac{3}{2}\right)R_2}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3}\\ 0 & 1 & \frac{11}{2}\\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{17}{3}\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-\frac{1}{3}R_2,\ R_3\to R_3-\frac{1}{3}R_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & \frac{11}{2}\\ 0 & 0 & -\frac{15}{2}\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3\to\left(-\frac{2}{15}\right)R_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & \frac{11}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1\to R_1+\frac{1}{2}R_3,R_2\to R_2-\frac{11}{2}R_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

■

## 1.3.4 گاؤس-جارڈن کا طریقہ (Gauss-Jordan Method)

اگر $A$ ایک $n$ ترتیب والی غیر نادر میٹرکس ہے۔ اور $A$ , $B$ کا معکوس ہے ۔

تو ہمارے پاس $AB=BA=I_n$ ہے۔ $I_n$ کی صفت سے ہمارے پاس $A=I_nA=AI_n$ ہے۔

$A=I_nA$ مساوات کو فرض کریں۔ ...(1)

کیونکہ $A$ غیرنادر ہے۔ (1) کے دونوں طرف سلسلہ وار ابتدائی میٹرکسوں (صف کے اعمال ) کے ماقبل ضرب سے (1) کے بائیں جانب کا $A$ اکائی میٹرکس $I_n$ میں تبدیل ہوگا۔ وہی ابتدائی میٹرکسوں کے سلسلے (صف کے اعمال) سے (1) کے دائیں جانب $I_n$ میٹرکس $B$. میں تبدیل ہوگا ۔ اس لئے مساوات (1) $I_n=BA$. میں تبدیل ہوگا۔ چنانچہ $A$ کا معکوس $B$ ہے یعنی، $A^{-1}=B$. ہے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 25 28-03-2023 15:07:20

## غور کیجئے (Note)

اگر $E_1, E_2, \cdots, E_k$ ابتدائی میٹرکس (صف کے اعمال) ہیں اس طرح کہ $\left(E_k \cdots E_2 E_1\right) A = I_n$ ہے۔ تو $A^{-1} = E_k \cdots E_2 E_1$. ہو گا۔

غیر نادر میٹرکس $A$ کو صف کے ابتدائی عملیات کے استعمال سے $I_n$ کی شکل میں تبدیل کرنے کو گاؤس جارڈن کا طریقہ کہا جاتا ہے۔ $A^{-1}$ کا پتہ گاؤس جارڈن کے طریقہ سے لگانے کے مرحلے نیچے دئے گئے ہیں۔

### مرحلہ 1

$A$ کے دائیں طرف اکائی میٹرکس $I_n$ کو بڑھا کر $\left[A \mid I_n\right]$ حاصل کرو۔

### مرحلہ 2

ابتدائی میٹرکسوں (صف کے اعمال) کو حاصل کریں اس طرح کہ $\left(E_k \cdots E_2 E_1\right) A = I_n$. ہو۔

$E_1, E_2, \cdots, E_k$ کو $\left[A \mid I_n\right]$ پر لاگو کریں۔ تو $\left[\left(E_k \cdots E_2 E_1\right) A \mid \left(E_k \cdots E_2 E_1\right) I_n\right]$. یعنی $\left[I_n \mid A^{-1}\right]$ ملے گا۔

### مثال 1.20

غیر نادر میٹرکس $A = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$ کا معکوس گاؤس۔ جارڈن کے طریقے سے حاصل کریں۔

### حل

گاؤس-جارڈن کے طریقہ کے استعمال سے ہمیں ملتا ہے۔

$$\left[A \mid I_2\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to (-1)R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{5}R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & (1/5) & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to R_1 + 6R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & (6/5) & -1 \\ 0 & 1 & (1/5) & 0 \end{array}\right].$$

اس سے ہمیں $A^{-1} = \begin{bmatrix} (6/5) & -1 \\ (1/5) & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ملتا ہے۔

### مثال 1.21

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ کا معکوس گاؤس۔ جارڈن کے طریقے سے حاصل کریں۔

### حل

گاؤس-جارڈن کے طریقے کا استعمال کرکے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\left[A \mid I_3\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & (1/2) & (1/2) & (1/2) & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - 3R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & (1/2) & (1/2) & (1/2) & 0 & 0 \\ 0 & (1/2) & -(1/2) & -(3/2) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to 2R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & (1/2) & (1/2) & (1/2) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - \frac{1}{2}R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 \to R_2 + R_3]{R_1 \to R_1 - R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

اس لئے $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. ہے۔

## مشق 1.2

1. مندرجۂ ذیل میٹرکسوں کا مقام کمتر (minor) کے طریقہ سے حاصل کریں۔

(i) $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -7 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ (v) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 8 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

2. مندرجۂ ذیل میٹرکسوں کا مقام صفوں کے کم کرنے (row reduction) کے طریقہ سے حاصل کریں۔

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 7 & 11 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 3 & -8 & 5 & 2 \\ 2 & -5 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

3. مندرجۂ ذیل کے معکوس گاؤس-جارڈن کے طریقہ سے حاصل کریں۔

(i) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

## 1.4 میٹرکسوں کے استعمالات : خطی مساوات کے نظام کو حل کرنا
## (Applications of Matrices: Solving System of Linear Equations)

میٹرکسوں اور مقطوں کا ایک اہم استعمال خطی مساوات کے نظام کو حل کرنا ہے۔حیاتیات، کیمیاء، تجارت، معاشیات اور انجینیرنگ میں متعدد مشاہدہ واقع ہوتے ہیں۔ جس کے سبب خطی مساوات کا نظام حسابی نمونے کے طور پر وجود میں آتا ہے۔ مثال کے طورپر سرکیوٹ نظریہ کا تجزیہ، داخلی ، خارجی نمونے کا تجزیہ اور کیمیائی رد عمل کے تجزیوں میں خطی مساوات کے نظام کے حل کی ضرورت ہے۔

### 1.4.1 خطی مساوات کے نظام کی تشکیل (Formation of a System of Linear Equations )

سادہ عملی مسئلے کو حسابی نمونہ میں تشکیل کرنے سے خطی مساوات کے نظام کو سمجھا جاسکتا ہے۔

تین افراد A, B اور C ایک ہی برانڈس کے چاول اور شکر خرید نے ایک سپر مارکٹ جاتے ہیں۔ ایک شخص A 5 کلوگرام چاول اور 3 کلو گرام شکر خریدتا ہے۔ اور ₹440 ادا کرتا ہے۔ شخص B 6 کلوگرام چاول اور 2 کلو گرام شکر خریدتا ہے اور ₹400 ادا کرتا ہے۔ شخص C 8 کلوگرام چاول اور 5 کلو گرام شکر خریدتا ہے اور ₹720 ادا کرتا ہے۔ ہم ایک کلوگرام چاول کی قیمت اور ایک کلوگرام شکر کی قیمت کا حساب لگانے کے لئے حسابی نمونہ کی تشکیل کریں گے اگر ایک کلو گرام چاول کی قیمت x اور ایک کلوگرام شکر کی قیمت y ہے۔ شخص A 5 کلوگرام چاول اور 3 کلو گرام شکر خریدتا ہے اور ₹ 440 ادا کرتا ہے۔اس لئے $5x + 3y = 440$ اسی طرح شخص B اور شخص C پر غور کریں تو ہمیں $6x + 2y = 400$ اور $8x + 5y = 720$ حاصل ہوتا ہے۔ چنانچہ حسابی نمونہ جو $x$ اور $y$ کو پتہ کرنے کے لئے ہے وہ

$8x + 5y = 720,\ 6x + 2y = 400,\ 5x + 3y = 440$ ہے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 27 28-03-2023 15:07:35

### غور کیجئے (Note)

اوپر کی مثال میں $x$ اور $y$ کی قیمتیں جو ایک مساوات کو راضی کرتی ہیں وہی قیمتیں دوسری مساواتوں کو بھی راضی کرنی چاہئے دوسرے الفاظوں میں ایک ہی $x$ اور $y$ کی قیمتیں بیک وقت تمام مساوات کو منظور کرنی ہیں۔ اگر ایسی قیمتیں $x$ اور $y$ کے لئے موجود ہوں تو یہ خطی مساوات کے نظام کا **حل** کہلاتی ہیں۔تینوں مساوات میں $x$ اور $y$ کا درجہ ایک ہے۔ اس لئے انھیں دومتغیرات $x$ اور $y$ والی خطی مساوات کا نظام کہا جاتا ہے۔ انھیں $x$ اور $y$ متغیرات کی ہمزاد خطی مساوات بھی کہا جاتا ہے۔ اس نظام میں 3 خطی مساوات دومتغیر $x$ اور $y$ پر منحصر ہیں۔

یہ مساوات دو ابعادی تحلیلی علم ہندسہ میں 3 سیدھی خطوں کو ظاہر کرتی ہیں۔

اس حصے میں میٹرکسوں کو استعمال کرکے ہم خطی مساوات کے نظام کا حل نکالنے کے طریقے ایجاد کریں گے۔

## 1.4.2 خطی مساوات کے نظام کی میٹرکس شکل (System of Linear Equations in Matrix Form)

$n$ متغیرات والی $m$ خطی مساوات کا نظام اس طرح کا ہے۔

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned} \qquad \ldots (1)$$

یہاں سرعدد $a_{ij}$، $i = 1, 2, \cdots, m;\ j = 1, 2, \cdots, n$ اور $b_k$، $k = 1, 2, \cdots, m$ مستقل ہیں۔اگر تمام $b_k$'s صفر ہوں تو یہ نظام خطی مساوات کا یکساں نظام کہلاتا ہے اگر دوسری طرف اگر ایک $b_k$ بھی غیر صفر تو یہ نظام خطی مساوات کا غیر ایکساں نظام کہلاتا ہے۔ اگر $x_1, x_2, \cdots, x_n$ کے لئے بالترتیب $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ قیمتیں موجود ہوں اور یہ (1) میں دی گئی تمام مساوات کو راضی کرتے ہیں۔ تو $n-\text{tuple}\ (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ (1) کا حل کہلاتے ہیں۔ اوپر کے نظام (1) کو میٹرکس کی شکل میں درجہ ذیل طریقہ سے پیش کیا جاتا ہے۔

فرض کرو $m \times n$ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ ترتیب والی میٹرکس ہے جو $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ کے سرعددوں سے تشکیل ہوئی ہے $A$ کی پہلی صف $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ کے سرعددوں کو لیکر بنی ہے۔ اسی ترتیب میں جس طرح وہ پہلی مساوات میں پائی گئی ہیں۔ اسی طرح $A$ کی دوسری صفیں بھی تشکیل ہوتی ہیں۔ $m$ مساوات کی تمام $x_1$ کے سرعدد ترتیب وار لینے سے پہلی قطار بنتی ہے۔ اسی طرح دوسری قطاریں بھی تشکیل پاتی ہیں۔

اگر $n \times 1$ $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ ترتیب والی قطار میٹرکس جو کہ $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ کو لیکر بنتی ہے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 28 28-03-2023 15:07:42

اور $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ ترتیب والی صف میٹرکس جو کہ دائیں طرف کے مستقلوں $b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots,\ b_m$ سے بنتی ہے $m \times 1$

$$AX = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = B.$$

حاصل کرتے ہیں۔

اس طرح $AX = B$ میٹرکس مساوات جن میں میٹرکس شامل ہیں خطی مساوات کے نظام کی میٹرکس کی شکل کہلاتی ہے۔ میٹرکس $A$ نظام کی سرعدد میٹرکس کہلاتی ہے اور میٹرکس $\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$ نظام کی بڑھاؤ میٹرکس کہلاتی ہے۔ ہم بڑھاؤ میٹرکس کو $[A \mid B]$. سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثال کے طور پر خطی مساوات کے نظام کی میٹرکس شکل

$$2x + 3y - 5z + 7 = 0, 7y + 2z - 3x = 17, 6x - 3y - 8z + 24 = 0, \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -3 & 7 & 2 \\ 6 & -3 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 17 \\ -24 \end{bmatrix}.$$

## 1.4.3 خطی مساوات کے نظام کا حل (Solution to a System of Linear equations)

درجہ ذیل معاملات خطی مساوات کے نظام کے حل کو سمجھا جاسکتا ہے۔

**صورت حال (i)**

خطی مساوات کے نظام پر غور کریں۔

$$2x - y = 5, \quad \ldots (1)$$

$$x + 3y = 6. \quad \ldots (2)$$

یہ دومساواتیں دو ابعادی علم ہندسہ میں سیدھی خط کے جوڑے کو ظاہر کرتی ہیں۔ (1) سے ہمیں ملتا ہے۔

$$x = \frac{5 + y}{2}. \quad \ldots (3)$$

(3) کو (2) میں درج کریں تو ہمیں $y = 1$ حاصل ہوگا۔

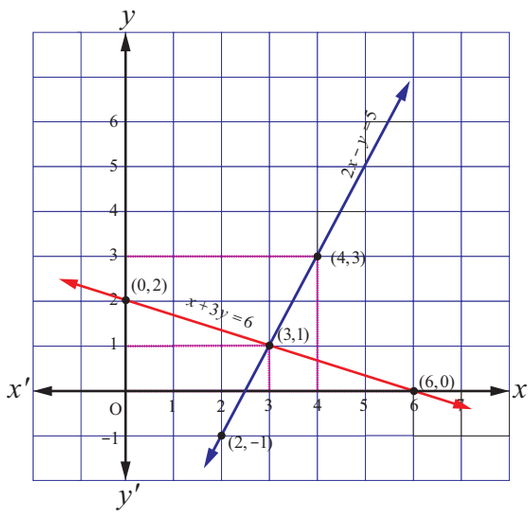
$y = 1$ کو (1) میں درج کرکے مختصر کرنے سے ہمیں $x = 3$ حاصل ہوتا ہے۔

(1) اور (2) دونوں مساواتیں $x = 3$ اور $y = 1$ سے راضی ہوتی ہیں۔

یعنی (1) کا حل ہی (2) کا حل بھی ہے۔

اس لئے ہم کہتے ہیں۔ نظام ہم آہنگ ہے اور اس کا حل (3,1) منفرد ہے۔

(3,1) دوخطوں $2x - y = 5$ , $x + 3y = 6$ کا نقطہ تقاطع ہے۔




خاکہ 1.2



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 29 28-03-2023 15:07:50

**صورت حال (ii)**

خطی مساوات کے نظام پر غور کریں۔

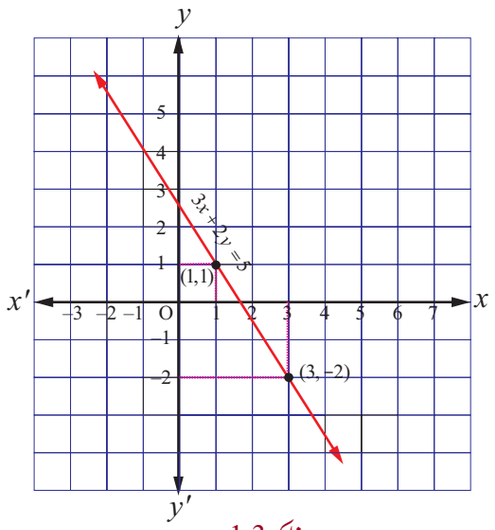
$$3x+2y = 5, \quad \ldots (1)$$

$$6x+4y = 10 \quad \ldots (2)$$

مساوات (1) کے استعمال سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$x = \frac{5-2y}{3} \quad \ldots (3)$$

(3) کو (2) میں درج کریں اور مختصر کرنے سے ہمیں $0 = 0$ حاصل ہوتا ہے۔



خاکہ 1.3

اس سے ہم کو پتہ چلتا ہے کہ مساوات (2), مساوات (1) کا ابتدائی تبادل ہے۔ درحقیقت مساوات (2) کو 2 سے تقسیم کرنے پر مساوات (1) حاصل ہوتا ہے۔ منفرد $x$ اور $y$ کو صرف مساوات (1) سے حاصل کرنا ناممکن ہے۔

اس لئے ہم مجبور ہیں کہ ایک نامعلوم قدر کو فرض کریں کہ، $y = t$ یہاں، $t$ ایک حقیقی عدد ہے۔ تو $x = \frac{5-2t}{3}$ دونوں مساواتیں (1) اور (2) دو ابعادی علم ہندسہ میں ایک ہی خط (موافق خطوط) کو دو ابعادی تحلیلی علم ہندسہ ظاہر کرتی ہیں۔ (خاکہ 1.3 دیکھیں) دوسرے الفاظ میں، نظام یکجہتی ہے۔ (1) کا حل ہی (2) کا حل بھی ہے اور اس کے لا محدود کئی حل ہیں، چونکہ $t$ ایک حقیقی عدد ہے۔ جو کوئی بھی قیمت فرض کرسکتا ہے اس لئے متعدد حل ہونگے۔

**صورت حال (iii)**

خطی مساوات کے نظام پر غور کریں۔

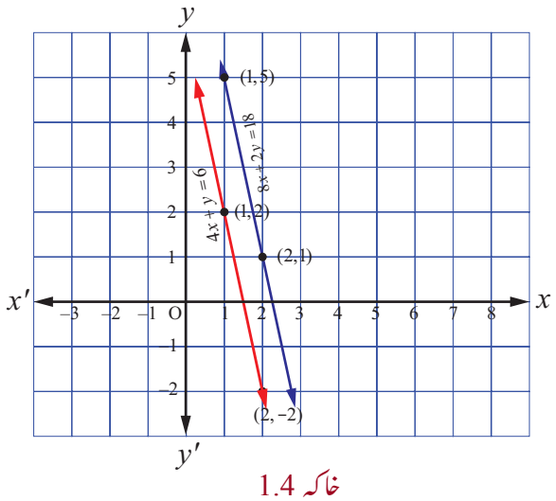
$$4x+y = 6, \quad \ldots (1)$$

$$8x+2y = 18. \quad \ldots (2)$$

مساوات (1) کے استعمال سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$x = \frac{6-y}{4} \quad \ldots (3)$$

(3) کو (2) میں درج کریں اور مختصر کرنے سے ہمیں $12 = 18$ حاصل ہوتا ہے۔



خاکہ 1.4

یہ متضاد نتیجہ ہے۔ جس سے ہمیں پتہ چلتا ہے کہ مساوات (1)، مساوات (2) کے ساتھ یکجہتی نہیں رکھتا۔ اس لئے (1) کا حل، (2) کا حل نہیں ہوسکتا۔

دوسرے الفاظ میں نظام یکجہتی نہیں ہے اور اس کا کوئی حل نہیں۔ یہاں پر غور کریں دومساوات دو سمتی علم ہندسے میں دو متوازی خطوں (ناموافق خطوط) کو دو ابعادی تحلیلی علم ہندسہ میں ظاہر کرتی ہیں۔ (خاکہ 1.4 دیکھیں) ہمیں معلوم ہے کہ دوناموافق متوازی خطوط کبھی حقیقی نقطوں پر نہیں ملتے۔

## غور کیجئے (Note)

(1) خطی مساوات کے نظام میں دومساوات کا آپس میں ردوبدل کرنے سے نظام کے حل میں کوئی فرق نہیں پڑتا۔

(2) خطی مساوات کے نظام میں ایک مساوات کو غیر صفر مستقل سے ضرب کرکے تبدیل کریں تو نظام کے حل میں کوئی فرق نہیں پڑیگا۔

(3) خطی مساوات کے نظام کی ایک مساوات کو نظام کی کسی دوسری غیر صفر مستقل سے ضرب کی ہوئی مساوات سے جمع کریں تو نظام کے حل میں کوئی فرق نہیں پڑے گا۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 30 28-03-2023 15:07:56

**تعریف 1.8**

خطی مساوات کا نظام جس کا کم از کم ایک حل ہو وہ **ہم آہنگ** کہلاتا ہے۔ خطی مساوات کے نظام کا کوئی حل نہ ہو تو وہ **غیر ہم آہنگ** کہلاتا ہے۔

**ریمارک (Remark)**

اگر خطی مساوات کے نظام میں مساوات کی تعداد اور نامعلوم کی تعداد یکساں ہے تو نظام $A$ کی سرعدد میٹرکس ایک مربع میٹرکس ہے۔ مزید یہ کہ اگر $A$ ایک غیر نادر میٹرکس ہے تو پھر مساوات کا نظام کا حل مندرجۂ ذیل طریقوں میں سے کسی ایک کے ذریعہ پایا جاسکتا ہے۔
(i) انعکاس میٹرکس کا طریقہ، (ii) کرامر کا اصول (Cramer's rule)، (iii) گاؤس کے خارج کا طریقہ۔

## 1.4.3 (i) انعکاس میٹرکس کا طریقہ (Matrix Inversion Method)

یہ طریقہ صرف اس صورت میں لاگو کیاجاسکتا ہے جب سرعدد میٹرکس، مربع میٹرکس اور غیر نادر ہو۔

میٹرکس مساوات پر غور کریں۔

$$AX = B, \quad \ldots (1)$$

جہاں $A$ ایک غیر نادر اور مربع میٹرکس ہے۔ چونکہ $A$ غیر نادر ہے $A^{-1}$ موجود ہے اور $A^{-1}A = AA^{-1} = I$.

(1) کے دونوں طرف $A^{-1}$ سے ماقبل ضرب کرنے سے ہمیں

$A^{-1}(AX) = A^{-1}B.$ یعنی $(A^{-1}A)X = A^{-1}B.$ حاصل ہوتا ہے

لہٰذا، $X = A^{-1}B$ ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

**مثال 1.22**

انعکاس میٹرکس کا طریقہ استعمال کرکے ذیل کے خطی مساوات کے نظام کو حاصل کریں۔

$3x + 2y = 5, 5x + 2y = 3.$

**حل**

میٹرکس نظام کی شکل $AX = B$ ہے۔ جہاں $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

ہمیں پتہ ہے $|A| = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 6 = 4 \neq 0$. اس لئے $A^{-1}$ موجود ہے۔ اور $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

$X = A^{-1}B$، ضابطہ کے استعمال سے ہمیں حاصل ہوگا۔

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 6-10 \\ -9+25 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -4 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-4}{4} \\ \frac{16}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$ حاصل ہوتا ہے۔

اس کا حل $(x = -1, y = 4)$. ہے۔

**مثال 1.23**

درجہ ذیل خطی مساوات کے نظام کو انعکاس میٹرکس کا طریقہ استعمال کرکے حل کریں۔

$3x_1 - x_2 - 2x_3 = 3, \quad x_1 - 2x_2 + x_3 = -4, \quad 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 5.$

**حل**

میٹرکس نظام کی شکل $AX = B,$ ہے۔ جہاں

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 31 28-03-2023 15:08:04

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 2(4+1)-3(-2-3)+3(-1+6) = 10+15+15 = 40 \neq 0 .$$ ہمیں حاصل ہو گا۔

اس لئے، $A^{-1}$ موجود ہے اور

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj } A) = \frac{1}{40}\begin{bmatrix} +(4+1) & -(-2-3) & +(-1+6) \\ -(-6+3) & +(-4-9) & -(-2-9) \\ +(3+6) & -(2-3) & +(-4-3) \end{bmatrix}^T = \frac{1}{40}\begin{bmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 5 & -13 & 1 \\ 5 & 11 & -7 \end{bmatrix}$$

$X = A^{-1}B$ کے استعمال سے ہمیں حاصل ہو گا۔

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{40}\begin{bmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 5 & -13 & 1 \\ 5 & 11 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{40}\begin{bmatrix} 25-12+27 \\ 25+52+3 \\ 25-44-21 \end{bmatrix} = \frac{1}{40}\begin{bmatrix} 40 \\ 80 \\ -40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$ حاصل ہوتا ہے۔

اس کا حل $(x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1)$ ہے۔ ■

## مثال 1.24

اگر $A = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -7 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ہو تو $AB$ اور $BA$ کا حاصل ضرب معلوم کریں اور

$2x+y+3z=1,\ x-2y-2z=9,\ x-y+z=4$ مساوات کے نظام کو بھی حل کریں۔

## حل

$$AB = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -7 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4+4+8 & 4-8+4 & -4-8+12 \\ -7+1+6 & 7-2+3 & -7-2+9 \\ 5-3-2 & -5+6-1 & 5+6-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} = 8I_3$$ ہم پتہ لگاتے ہیں۔

اور $$BA = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -7 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4+7+5 & 4-1-3 & 4-3-1 \\ -4+14-10 & 4-2+6 & 4-6+2 \\ -8-7+15 & 8+1-9 & 8+3-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} = 8I_3$$

اس طرح ہمیں $AB = BA = 8I_3$ حاصل ہوتا ہے۔ یعنی $\left(\frac{1}{8}A\right)B = B\left(\frac{1}{8}A\right) = I_3$. لہذا، $B^{-1} = \frac{1}{8}A$. ہے۔

دئے گئے مساوات کے نظام کو میٹرکس کی شکل میں لکھنے سے ہمیں

$$B\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}$$ یعنی $$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}$$ حاصل ہوتا ہے

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = B^{-1}\begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{8}A\right)\begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -7 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -16+36+4 \\ -28+9+3 \\ 20-27-1 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 24 \\ -16 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$ اس طرح

لہذا، اس کا حل $(x = 3, y = -2, z = -1)$. ہے۔ ■

## مشق 1.3

1. انعکاس میٹرکس کے طریقہ سے ذیل کے خطی مساوات کے نظام کو حل کریں۔

(i) $2x+5y=-2,\ x+2y=-3$ (ii) $2x-y=8,\ 3x+2y=-2$

(iii) $2x+3y-z=9,\ x+y+z=9,\ 3x-y-z=-1$

(iv) $x+y+z-2=0,\ 6x-4y+5z-31=0,\ 5x+2y+2z=13$

2. اگر $A=\begin{bmatrix}-5 & 1 & 3\\ 7 & 1 & -5\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$ اور $B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix}$ ہوتو $AB$ اور $BA$ کا حاصل ضرب معلوم کریں اور اس طرح مساوات کے نظام کو حل کریں۔ $2x+y+3z=2,\ 3x+2y+z=7,\ x+y+2z=1$

3. ایک شخص ملازمت میں مقرر ہوتا ہے۔ جس کی ماہانہ تنخواہ ایک مخصوص رقم اور سالانہ اضافہ کی ایک مقررہ رقم ہوتی ہے اگر 3سال کی نوکری کے بعد پہلی مہینہ کی تنخواہ 19,800 ₹ ہےاور 9 سال کی نوکری کے بعد پہلی مہینہ کی تنخواہ23,400 ₹ ہے تو اس کی ابتدائی تنخواہ اور سالانہ اضافے کا حساب لگائیں۔(انعکاس میٹرکس کے طریقہ کا استعمال کرکے حل نکالیں)

4. چار مرد اور چار خواتین مشترکہ طور پر 3 دن میں ایک کام ختم کرسکتے ہیں۔ جبکہ 2 مرد اور 5 خواتین مشترکہ طور پر یہی کام 4 دن میں ختم کرسکتے ہیں۔ تنہا ایک مرد اور ایک عورت کتنے وقت میں اس کام کو انجام دے سکتے ہیں اس کا پتہ لگائیں انعکاس میٹرکس طریقہ کا استعمال کریں۔

5. تین اشیاء $A, B$ اور $C$ کی قیمتیں بالترتیب $x, y$ ₹ اور $z$ ہیں۔ اگر فرد $P$ کے 4 یونیٹس کے خریدتا ہے اور $A$ کے 2 یونٹوں اور $C$ کے 5 یونیٹوں کو بیچتا ہے۔ فرد $Q$ کے دویونٹوں خریدتا ہے اور $A$ کے 3 یونٹوں اور $B$ کی ایک یونٹ کو بیچتا ہے۔ فرد $R$ ایک یونٹ $A$ کی خریدتا ہے اور $B$ کی 3 یونٹوں اور $C$ کی ایک یونٹ کو بیچتا ہے۔ اس عمل میں $P, Q$ اور $R$ بالترتیب اور 4,000 ₹ کمالیتے ہیں تو $A, B$ اور $C$ کی ایک یونٹ کی قیمت کا حساب لگائیں (انعکاس میٹرکس کے طریقہ استعمال 1,000 ₹,15,000 ₹ کرکے حل کریں)۔

### 1.4.3 (ii) کرامر کا اصول (Cramer's Rule)

یہ طریقہ اس صورت میں استعمال ہوتا ہے۔ جب سرعدد میٹریکس ایک مربع میٹرکس اور غیرنادر ہو۔ اسے درجہ ذیل مساوات کے نظام کو فرض کرکے وضاحت کرسکتے ہیں۔

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,$$
$$a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3,$$

جہاں سرعدد میٹرکس $\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$ ایک غیر نادر ہوتو $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\neq 0.$

فرض کرو کہ $\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$ ہوتو ہمیں ملے گا۔

$$x_1\Delta=x_1\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}x_1 & a_{12} & a_{13}\\ a_{21}x_1 & a_{22} & a_{23}\\ a_{31}x_1 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 & a_{12} & a_{13}\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 & a_{22} & a_{23}\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\Delta_1$$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 33 28-03-2023 15:08:22

چونکہ، $\Delta \neq 0$ ہے، ہمیں $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$ حاصل ہوتا ہے۔

اسی طرح $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$ حاصل ہوتا ہے۔ جہاں $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$

اسی طرح **کرامر کا اصول** $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$ حاصل ہوتا ہے۔

جہاں $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$

## غور کیجئے (Note)

پہلی قطار میں $\Delta$ کے $a_{11}, a_{21}, a_{31}$ عناصر کو $b_1, b_2, b_3$ سے بالترتیب تبدیلی کرنے پر ہمیں $\Delta_1$ حاصل ہوتا ہے۔
دوسری قطار میں $\Delta$ کے $a_{12}, a_{22}, a_{32}$ عناصر کو $b_1, b_2, b_3$ سے بالترتیب تبدیل کرنے پر ہمیں $\Delta_2$ حاصل ہوتا ہے
تیسری قطار میں $\Delta$ کے $a_{13}, a_{23}, a_{33}$ عناصر کو $b_1, b_2, b_3$ سے بالترتیب تبدیل کرنے پر ہمیں $\Delta_3$ حاصل ہوتا ہے۔
اگر $\Delta = 0$، ہو تو کرامر کا اصول استعمال نہیں کیا جاسکتا۔

## مثال 1.25

کرامر کے اصول کے ذریعے مساوات کے نظام کا حل معلوم کیجئے۔

$x_2 + 2x_3 = 7,\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 17,\ x_1 - x_2 = 3$

## حل

پہلے ہم $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0, \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 17 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 12, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 17 & 4 \\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix} = -6, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 17 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 24.$

کی قیمتیں معلوم کریں گے۔

کرامر کے اصول سے ہمیں $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{12}{6} = 2,\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-6}{6} = -1,\ x_3 = \frac{24}{6} = 4.$ حاصل ہوتا ہے۔

اس کا حل $(x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 4)$ ہے۔

## مثال 1.26



T20 میچ میں ایک ٹیم کو جیتنے کے لئے آخری اوور میں ایک بال کے کے رہ جانے پر 6رنوں کی ضرورت ہے۔ آخری گیند اچھائی گئی اور کریز پر بلے باز اسے اونچا مارا۔ بال کھڑی سطح میں ایک ترچھے راستے سے آگے بڑھتا ہے۔ اور اس راستے کی مسارات $y = ax^2 + bx + c$ محددی نظام $xy$ کے لحاظ سے کھڑی سطح پر ہے۔ اوربال نقاط $(10,8), (20,16), (40,22)$ سے ہوتے ہوئے آگے بڑھتا ہے۔ کیا آپ یہ نتیجہ اخذ کرسکتے ہیں کہ ٹیم میچ جیت گئی؟

اپنے جواب کا جواز پیش کریں (تمام فاصلے میٹروں میں ناپے جاتے ہیں اور راستے کی سطح اور سب سے دور کی حد ملنے کا نقطہ $(70,0)$ ہے۔)

## حل

راستہ $y = ax^2 + bx + c$ نقاط $(10,8), (20,16), (40,22)$ سے گزرتا ہے اس لئے ہمیں مساوات کا نظام

$100a + 10b + c = 8,\ 400a + 20b + c = 16,\ 1600a + 40b + c = 22.$ حاصل ہوتا ہے۔ کرامر کے اصول کے استعمال سے ہم



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 34 28-03-2023 15:08:31

$$\Delta = \begin{vmatrix} 100 & 10 & 1 \\ 400 & 20 & 1 \\ 1600 & 40 & 1 \end{vmatrix} = 1000 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1000[-2+12-16] = -6000,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 10 & 1 \\ 16 & 20 & 1 \\ 22 & 40 & 1 \end{vmatrix} = 20 \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 8 & 2 & 1 \\ 11 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 20[-8+3+10] = 100,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 100 & 8 & 1 \\ 400 & 16 & 1 \\ 1600 & 22 & 1 \end{vmatrix} = 200 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 1 \\ 16 & 11 & 1 \end{vmatrix} = 200[-3+48-84] = -7800,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 100 & 10 & 8 \\ 400 & 20 & 16 \\ 1600 & 40 & 22 \end{vmatrix} = 2000 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 8 \\ 16 & 4 & 11 \end{vmatrix} = 2000[-10+84-64] = 20000.$$

کرامر کے اصول کے تحت، $a = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{1}{60}, b = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{7800}{6000} = \frac{78}{60} = \frac{13}{10}, c = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -\frac{20000}{6000} = -\frac{20}{6} = -\frac{10}{3}$ حاصل ہوتا ہے۔

چونکہ، راستہ کی مساوات $y = -\frac{1}{60}x^2 + \frac{13}{10}x - \frac{10}{3}$ ہے۔

جب $x = 70$, ہوتو $y = 6$. حاصل ہوتا ہے۔تو بال باؤنڈری پر 6 میٹر کی اونچائی پر چلی جاتی ہے۔ اس لئے فیلڈر جو باؤنڈری کے تھوڑا آگے کھڑا ہوا ہے اچھل کر بال کو پکڑنا اس کے لئے ناممکن ہے۔ اس لئے بال سپر سکس پر گئی اور ٹیم میچ جیت گئی ۔ ■

## مشق 1.4

1. کرامر کے اصول سے درجۂ ذیل خطی مساوات کے نظام کو حل کریں ۔

$$x + 3y - 7 = 0,\ 5x - 2y + 16 = 0 \text{ (i)}$$

$$\frac{2}{x} + 3y = 13,\ \frac{3}{x} + 2y = 12 \text{ (ii)}$$

$$4x + 3y + 2z = 25,\ 2x - y + 2z = 9,\ 3x + 3y - z = 11, \text{ (iii)}$$

$$\frac{2}{x} - \frac{5}{y} - \frac{4}{z} + 1 = 0,\ \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z} - 2 = 0,\ \frac{3}{x} - \frac{4}{y} - \frac{2}{z} - 1 = 0 \text{ (iv)}$$

2. ایک مقابلے کے امتحان میں ہر صحیح جواب کے لئے ایک نمبر دیا جاتا ہے۔ جبکہ ہر غلط جواب $\frac{1}{4}$ نمبر کاٹ دئے جاتے ہیں۔ایک طالب علم نے 100 سوالوں کے جواب دئے اور اسے 80 نمبر ملے۔ اس نے کتنے سوالوں کا صحیح جواب دیا (کرامر کے اصول کا استعمال کرکے حل کریں)۔

3. ایک کیمیاء دان کے پاس ایک محلول ہے جو کہ 50٪ آسیڈ ہے اور دوسرا محلول جو کہ 25٪ آسیڈ ہے۔10 لیٹر محلول جو کہ 40٪ آسیڈ ہو۔ بنانے کے لئے ہر ایک کو کتنا ملایا جاسکتا ہے۔(کرامر کے اصول کے استعمال سے حل کریں)۔

4. ایک مچھلی کی ٹینک کو ایک ساتھ دونوں پمپ $A$ اور $B$ کا استعمال کرتے ہوئے 10 منٹ میں پُر کیا جاسکتا ہے۔تاہم پمپ $B$ اسی شرح سے پانی کو اندر یا باہر ایک ساتھ ، پمپ کرسکتا ہے۔ اگر پمپ $B$ نادانستہ طور پر ریورس میں چلایا جاتا ہے تو ٹینک 30 منٹ میں بھر جائے گا۔ ہر ایک پمپ کو خود سے ٹینک کو بھرنے میں کتنا وقت لگے گا (کرامر کے اصول کے استعمال سے حل کریں)۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 35 28-03-2023 15:08:38

5. 3 افراد پر مشتمل ایک فیملی ہوٹل میں ڈنر کھانے کے لئے جاتی ہے۔دو چیلے 3 اٹلی اور 2 بڑے کی قیمت 150 ہے۔ دو چیلے ، دو اٹلی اور 4 بڑے کی قیمت 200 ہے۔ 5 چیلے 4 اٹلی اور دو بڑے کی قیمت 250 ہے۔ فیملی کے پاس 350 ہیں۔ اور انھوں نے 3 چیلے 6 اٹلی اور 6 بڑے کھائے ۔ کیا وہ اپنے پاس موجود رقم سے بل ادا کرنے کا انتظام کر سکیں گے۔

## 1.4.3 (iii) گاؤسین کے خارج کا طریقہ (Gaussian Elimination Method)

یہ طریقہ اس وقت بھی لاگو کیا جاسکتا ہے۔ جب سرعدد میٹریکس نادر اور مستطیلی ہو۔ یہ بنیادی طور پر متبادل کا طریقہ ہے جو ہم پہلے بھی دیکھ چکے ہیں۔اس طریقہ کار میں ہم خطی مساوات کے نظام کے بڑھاؤ میٹرکس کو ایکلان کی شکل میں تبدیل کرتے ہیں اور پھر پیچھے سے متبادل کے ذریعے ہم حل حاصل کرتے ہیں۔

### مثال 1.27

گاؤسین کے خارج کا طریقہ استعمال کرکے خطی مساوات کے نظام کو حل کریں۔

$2x+9y+z=1,\ x+5y+7z=13,\ 4x+3y+6z=25$

### حل

بڑھاؤمیٹرکس کو ایکلان کی شکل میں تبدیل کرنے سے ہمیں

$$\left[\begin{array}{ccc|c}4&3&6&25\\1&5&7&13\\2&9&1&1\end{array}\right] \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|c}1&5&7&13\\4&3&6&25\\2&9&1&1\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{R_2\to R_2-4R_1,\\ R_3\to R_3-2R_1}} \left[\begin{array}{ccc|c}1&5&7&13\\0&-17&-22&-27\\0&-1&-13&-25\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{R_2\to R_2\div(-1),\\ R_3\to R_3\div(-1)}} \left[\begin{array}{ccc|c}1&5&7&13\\0&17&22&27\\0&1&13&25\end{array}\right] \xrightarrow{R_3\to 17R_3-R_2} \left[\begin{array}{ccc|c}1&5&7&13\\0&17&22&27\\0&0&199&398\end{array}\right]$$ حاصل ہوتا ہے۔

ہم معنی نظام ایکلان کی شکل کے استعمال سے اس طرح لکھتے ہیں۔

$$x+5y+7z = 13, \quad \ldots (1)$$
$$17y+22z = 27, \quad \ldots (2)$$
$$199z = 398. \quad \ldots (3)$$

(3) سے ہمیں $z=\frac{398}{199}=2$ حاصل ہوتا ہے۔

(2) میں $z=2$ کو تبدیل کرنے سے ہمیں $y=\frac{27-22\times 2}{17}=\frac{-17}{17}=-1$ حاصل ہوتا ہے۔

(1) میں $z=2, y=-1$ کو تبدیل کرنے سے ہمیں $x=13-5\times(-1)-7\times 2=4$ حاصل ہوتا ہے۔

اس لئے حل $(x=4, y=-1, z=2)$ ہے۔

**غور کریں:** آخری مساوات سے پہلی مساوات تک جانے کا مذکورہ بالا طریقہ **پیچھے سے متبادل کا طریقہ** کہلاتا ہے۔

### مثال 1.28



کسی وقت $t$ میں راکٹ کی اوپری رفتار $v(t)$ لگ بھگ $v(t)=at^2+bt+c,\ 0\le t\le 100$ ہے یہاں $a, b$ اور $c$ مستقل ہیں۔ معلوم ہوا ہے کہ $t=3$ , $t=6$ اور $t=9$ سیکنڈس اوقات میں رفتار بالترتیب 64, 133 اور 208 میلس پر سیکنڈ ہے۔ $t=15$ سیکنڈس ہونے پر رفتار معلوم کریں۔ (گاؤسین کے خارج کا طریقہ استعمال کریں)



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 36 28-03-2023 15:08:47

## حل

کیونکہ، $v(3)=64,\ v(6)=133$ اور $v(9)=208$ ہے۔ہمیں درجۂ ذیل خطی مساوات کا نظام حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} 9a+3b+c &= 64,\\ 36a+6b+c &= 133,\\ 81a+9b+c &= 208. \end{aligned}$$

اس خطی مساوات کے نظام کو ہم گاؤسین کے خارج کے طریقے سے حل کریں گے۔

بڑھاؤ میٹرکس کو ابتدائی صف کے اعمال سے ہم معنی ایکلان شکل میں تبدیل کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$[A\mid B]=\left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 1 & 64\\ 36 & 6 & 1 & 133\\ 81 & 9 & 1 & 208 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2\to R_2-4R_1,\,R_3\to R_3-9R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 1 & 64\\ 0 & -6 & -3 & -123\\ 0 & -18 & -8 & -368 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2\to R_2\div(-3),\,R_3\to R_3\div(-2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 1 & 64\\ 0 & 2 & 1 & 41\\ 0 & 9 & 4 & 184 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3\to 2R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 1 & 64\\ 0 & 2 & 1 & 41\\ 0 & 18 & 8 & 368 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3\to R_3-9R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 1 & 64\\ 0 & 2 & 1 & 41\\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3\to(-1)R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 1 & 64\\ 0 & 2 & 1 & 41\\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

صف ایکلان شکل کی میٹرکس سے ہم معنی مساوات لکھنے سے ہمیں

$9a+3b+c=64,\ 2b+c=41,\ c=1.$ حاصل ہوتا ہے۔

پیچھے متبادل طریقے سے ہمیں $c=1,\ b=\dfrac{(41-c)}{2}=\dfrac{(41-1)}{2}=20,\ a=\dfrac{64-3b-c}{9}=\dfrac{64-60-1}{9}=\dfrac{1}{3}$ حاصل ہوتا ہے۔

چنانچہ $v(t)=\dfrac{1}{3}t^2+20t+1$ حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح $v(15)=\dfrac{1}{3}(225)+20(15)+1=75+300+1=376$ ■

## مشق 1.5

1. گاؤسین خارج کے طریقے سے درجۂ ذیل خطی مساوات کے نظاموں کو حل کریں۔

   (i) $3x-y+2z=1,\ x+2y-z=3, 2x-2y+3z=2$

   (ii) $-x+y+2z=2,\ 3x+8y+5z=27,\ 2x+4y+6z=22$

2. اگر $ax^2+bx+c$ کو $x+3$، $x-5$ اور $x-1$ سے بالترتیب تقسیم کرنے پر بچتیں 21، 61 اور 9 ہیں $a$، $b$ اور $c$ کو معلوم کریں۔ (گاؤسین کے خارج کا طریقہ استعمال کریں)۔

3. تین بانڈوں میں بالترتیب 6%، 8% اور 9% کی شرح سے ₹ 65,000 سرمایہ کاری سالانہ کی جاتی ہے۔ کل سالانہ آمدنی ₹ 4,800 ہے ۔ تیسرے بانڈ سے ہونے والی آمدنی دوسرے بانڈ سے ہونے والی آمدنی سے ₹ 600 زیادہ ہے۔ ہر بانڈ کی قیمت کا تعین کریں۔ (گاؤسین کے خارج کا طریقہ استعمال کریں)۔

4. ایک لڑکا $y=ax^2+bx+c$ راستے کے ذریعے نقاط $(-6,8)$، $(-2,-12)$ اور $(3,8)$ سے ہوکر چل رہا ہے۔ وہ اپنے دوست سے $P(7,60)$ پر ملنا چاہتا ہے۔کیا وہ اپنے دوست سے ملے گا؟ (گاؤسین کے خارج کا طریقہ استعمال کریں)



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 37 28-03-2023 15:08:56

## 1.5 میٹرکس کے استعمالات : مقام کے طریقے سے خطی مساوات کے نظام کی ہم آہنگی۔
## (Applications of Matrices: Consistency of System of Linear Equations by Rank Method)

حصّے 1.3.3 میں ہم خطی مساوات کے نظام کی ہم آہنگی کی تعریف پہلے ہی کر چکے ہیں۔ اس حصّے میں ہم مقام کے طریقے سے اس کی چھان بین کریں گے ۔ہم مندرجۂ ذیل مسئلہ کو بناثبوت کے بیان کریں گے۔

**مسئلہ 1.14 (روچھی کیپیل کا مسئلہ) (Rouché - Capelli Theorem)**

میٹرکس کی شکل $AX = B$ میں لکھا ہوا خطی مساوات کا نظام، ہم آہنگ ہے اگر اور صرف اگر مسرعددی میٹرکس کا مقام اور بڑھاؤ میٹرکس کا مقام یکساں ہو۔ یعنی، $\rho(A) = \rho([A \mid B])$

اس مسئلہ کو ہم مندرجۂ ذیل مثالوں میں استعمال کریں گے۔

### 1.5.1 غیر ایکساں خطی مساوات (Non-homogeneous Linear Equations)

**مثال 1.29**

درجہ ذیل خطی مساوات کے نظام کی ہم آہنگی کی جانچ کریں۔اگر ممکن ہو سکے تو حل کریں۔

$x - y + z + 1 = 0\,,\; x - 2y + 3z = 3,\; 3x - y + 2z = 1,\; x + 2y - z = 3$

**حل**

یہاں نہ معلوم کی تعداد 3ہے ۔

نظام کی میٹرکس شکل $AX = B,$ ہے، جہاں،

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

بڑھاؤ میٹرکس ہے۔

گاؤسین خارج کے طریقے کے استعمال سے ہمیں $[A \mid B]$ حاصل ہوتا ہے۔

$$[A \mid B] \xrightarrow[R_4 \to R_4 - R_1]{\substack{R_2 \to R_2 - 3R_1, \\ R_3 \to R_3 - R_1,}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -7 & 5 & -8 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow[R_4 \to (-1)R_4]{\substack{R_2 \to (-1)R_2, \\ R_3 \to (-1)R_3,}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & -5 & 8 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_4 \to 7R_4 - 3R_2]{\substack{R_3 \to 7R_3 - 4R_2, \\ }} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & -8 & -32 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 \div (-8)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{R_4 \to R_4 - R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$[A \mid B]$. صف ایکلان شکل میں تین غیر صفر صفیں ہیں۔ اس لئے $\rho([A \mid B]) = 3$

$A$ کی صف ایکلان شکل $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ہے۔ اس میں تین غیر صفری صفیں ہیں، اس لئے $\rho(A) = 3$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 38 28-03-2023 15:09:03

لہذا، $\rho(A) = \rho([A \mid B]) = 3$.

ایکلان شکل سے ہم معنی مساوات کے نظام کو ہم اس طرح لکھتے ہیں۔

$$x + 2y - z = 3,\ 7y - 5z = 8,\ z = 4,\ 0 = 0.$$

آخری مساوات $0 = 0$ بامعنی ہے ۔ پیچھے متبادل طریقے سے ہمیں حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} z &= 4 \\ 7y - 20 &= 8 \quad \Rightarrow \quad y = 4, \\ x &= 3 - 8 + 4 \quad \Rightarrow \quad x = -1. \end{aligned}$$

اس کا حل $(x = -1, y = 4, z = 4)$ ہے۔ (غور کریں کہ $A$ مربع میٹرکس نہیں ہے۔)

یہاں دیا گیا ن ظام ہم آہنگ ہے اور اس کا منفرد حل ہے۔

### مثال 1.30

درجۂ ذیل خطی مساوات کے نظام کی ہم آہنگی کی جانچ کریں۔اگر ممکن ہو سکے تو حل کریں۔

$$15x - 3y + 9z = 21,\ x + y - 3z = -1,\ 4x - 2y + 6z = 8$$

### حل

یہاں نہ معلوم کی تعداد 3 ہے۔

نظام کی میٹرکس شکل $AX = B$, ہے، جہاں،

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & -3 \\ 15 & -3 & 9 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \\ 21 \end{bmatrix}.$$

بڑھاؤ میٹرکس $[A \mid B]$, پر صف کے ابتدائی اعمال کے استعمال سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 6 & 8 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \\ 15 & -3 & 9 & 21 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 4 & -2 & 6 & 8 \\ 15 & -3 & 9 & 21 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{R_2 \to R_2 - 4R_1, \\ R_3 \to R_3 - 15R_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -6 & 18 & 12 \\ 0 & -18 & 54 & 36 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{R_2 \to R_2 \div (-6), \\ R_3 \to R_3 \div (-18)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

اس طرح $\rho(A) = \rho([A \mid B]) = 2 < 3$. ہے۔ ایکلان کی شکل سے ہمیں ہم معنی مساوات حاصل ہوتے ہیں۔

$$x + y - 3z = -1, y - 3z = -2, 0 = 0.$$

اس ہم معنی نظام میں دو غیر معمولی مساوات اور 3 متغیر ہیں ۔ اس لئے ایک نامعلوم کو ہماری پسند سے طئے کرنا چاہئے تاکہ دونامعلوم کے لئے دومساوات حاصل کی جاسکے۔ ہم $z$ کو اپنی پسند سے $t$ ناقرار دیتے ہیں۔ جو کہ ایک حقیقی عدد ہے اور ہمیں $y = 3t - 2,\ x = -1 - (3t - 2) + 3t = 1$ حاصل ہوتا ہے۔ اس کا حل $(x = 1, y = 3t - 2, z = t)$, ہے۔یہاں $t$ حقیقی ہے۔ اوپری حل کا مجموعہ ایک مقدار والے حل کی فیملی ہے۔یہاں نظام ہم آہنگ ہے اور اس کے لاتعداد حل موجود ہیں جو ایک مقدار والے حل کی فیملی کی تشکیل کرتے ہیں۔

### غور کیجئے (Note)

اوپر کی مثال میں مربع میٹرکس $A$ نادر ہے اس لئے میٹرکس کے انعکاس کا طریقہ مساوات کے نظام کو حل کرنے میں استعمال نہیں کیا جاسکتا ۔ تاہم گاؤسین کے خارج کا طریقہ استعمال ہوتا ہے اور ہم نظام، ہم آہنگ ہے یا نہیں فیصلہ کرنے کے اہل ہیں۔ اگلی مثال دوسرے طریقوں سے کہیں زیادہ گاؤسین کے خارج کے طریقے کار کی بالادستی کی بھی تصدیق کرتی ہے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 39 28-03-2023 15:09:12

## مثال 1.31

درجۂ ذیل خطی مساوات کے نظام کی ہم آہنگی کی جانچ کریں۔اگر ممکن ہو سکے تو حل کریں۔

$3x-3y+3z+27=0,\ 2x-2y+2z=-18,\ x-y+z=-9$

### حل

یہاں نہ معلوم کی تعداد 3 ہے۔

نظام کی میٹرکس شکل $AX=B$ ہے، جہاں،

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&-2&2\\3&-3&3\end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-9\\-18\\-27\end{bmatrix}.$$

بڑھاؤ میٹرکس $[A\,|\,B]$ پر صف کے ابتدائی اعمال کے استعمال سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$[A\,|\,B]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&-9\\2&-2&2&-18\\3&-3&3&-27\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{R_2\to R_2-2R_1,\\R_3\to R_3-3R_1}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&-9\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right].$$

چنانچہ، $\rho(A)=\rho([A\,|\,B])=1<3.$

ایکلان کی شکل سے ہمیں ہم معنی مساوات $x-y+z=-9,\ 0=0,\ 0=0.$ حاصل ہوتے ہیں۔

اس ہم معنی نظام میں ایک غیر معمولی مساوات اور 3متغیر ہیں ۔

غالباً $y=s, z=t$ لینے سے ہمیں $x-s+t=-9$ یا $x-s+t=-9;$ حاصل ہوتا ہے۔

اس کا حل $(x=-9+s-t, y=s, z=t)$ ہے۔یہاں $s$ اور $t$ مقدار ہیں۔

اوپری حل کا مجموعہ دو مقدار والے حل کی فیملی ہے۔

یہاں، دیا گیا نظام ہم آہنگ ہے اور اس کے لامحدود حل موجود ہیں۔جو دو مقدار والے حل کی فیملی کی تشکیل کرتے ہیں۔

## مثال 1.32

مندرجۂ ذیل خطی مساوات کے نظام کی ہم آہنگی کی جانچ کریں۔

$4x-y+2z=7,\ 3x-y+z=6,\ 2x-y+z=4,\ x-y+z=-9$

### حل

یہاں نہ معلوم کی تعداد 3 ہے۔

نظام کی میٹرکس شکل $AX=B$ ہے، جہاں،

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&-1&1\\3&-1&1\\4&-1&2\end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-9\\4\\6\\7\end{bmatrix}.$$

بڑھاؤ میٹرکس $[A\,|\,B]$ پر صف کے ابتدائی اعمال کے استعمال سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$[A\,|\,B]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&-9\\2&-1&1&4\\3&-1&1&6\\4&-1&2&7\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{R_2\to R_2-2R_1,\\R_3\to R_3-3R_1,\\R_4\to R_4-4R_1}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&-9\\0&1&-1&22\\0&2&-2&33\\0&3&-2&43\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{R_3\to R_3-2R_2,\\R_4\to R_4-3R_2}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&-9\\0&1&-1&22\\0&0&0&-11\\0&0&1&-23\end{array}\right]\xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_4}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&-9\\0&1&-1&22\\0&0&1&-23\\0&0&0&-11\end{array}\right]$$

چنانچہ، $\rho(A)=3$ اور $\rho([A\,|\,B])=4$ ۔ لہذا، $\rho(A)\neq\rho([A\,|\,B]).$ ہے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 40 28-03-2023 15:09:21

اگر ہم ، ہم معنی مساوات کے نظام کو ایکلان کی شکل میں لکھتے ہیں تو ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$x-y+z=-9,\quad y-z=22,\quad z=-23,\quad 0=-11.$$

آخری مساوات تضاد ہے۔

اس لئے نظام ہم آہنگ نہیں ہے اوراس کا کوئی حل نہیں ہے۔

روچھی کیپیل کا مسئلہ سے ہمیں مندرجۂ ذیل اصول حاصل ہوتا ہے۔

- اگر مساوات کے نظام میں نامعلوم کی تعداد $n$ ہو اور $\rho(A)=\rho([A\,|\,B])=n$, ہو تو نظام $AX=B$, ہم آہنگ ہے اور اس کا حل منفرد ہے۔
- اگر نظام $AX=B$, میں نامعلوم کی تعداد $n$ ہے اور $\rho(A)=\rho([A\,|\,B])=n-k, k\neq 0$ ہو تو نظام ہم آہنگ ہے اور اس کے لامحدود حل موجود ہیں اور یہ حل $k$ مقدار والے حل کی فیملی کی تشکیل کرتا ہے خاص طور پر اگر مساوات کے نظام میں نامعلوم کی تعداد 3 ہو اور $\rho(A)=\rho([A\,|\,B])=2$, نظام کے لامحدود حل موجود ہیں اور یہ حل ایک مقدار والی فیملی کی تشکیل کرتے ہیں۔ اس طریقہ کار سے، اگر مساوات کے نظام میں نامعلوم کی تعداد 3 ہے اور $\rho(A)=\rho([A\,|\,B])=1$, ہوتونظام کے لامحدود حل موجود ہیں۔ اور یہ حل دومقدار والی فیملی کی تشکیل کرتے ہیں۔
- اگر $\rho(A)\neq\rho([A\,|\,B])$, ہو تو نظام $AX=B$ ہم آہنگ نہیں ہے اور اس کا کوئی حل نہیں۔

## مثال 1.33

$a, b$ اور $c$ پر شرط معلوم کریں اس طرح کے درجۂ ذیل خطی مساوات کا نظام کا حل ایک مقدار والی فیملی ہو۔

$$x+y+z=a,\ x+2y+3z=b,\ 3x+5y+7z=c.$$

### حل

یہاں نہ معلوم کی تعداد 3 ہے۔

نظام کی میٹرکس شکل $AX=B$, ہے، جہاں، $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\\3&5&7\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$.

بڑھاؤ میٹرکس $[A\,|\,B]$, پر صف کے ابتدائی عملیات کے استعمال سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$[A\,|\,B]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a\\1&2&3&b\\3&5&7&c\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{R_2\to R_2-R_1,\\ R_3\to R_3-3R_1}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a\\0&1&2&b-a\\0&2&4&c-3a\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-2R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a\\0&1&2&b-a\\0&0&0&(c-3a)-2(b-a)\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a\\0&1&2&b-a\\0&0&0&(c-2b-a)\end{array}\right].$$

نظام کا حل اور ایک مقدار والی فیملی ہونے کے لئے ہمیں $\rho(A)=\rho([A,B])=2.$ کا ہونا ضروری ہے۔ تاکہ تیسری صف ایکلان کی شکل میں صفر ہو۔

اس طرح، $c-2b-a=0\ \Rightarrow\ c=a+2b.$

## مثال 1.34

خطی مساوات میں $\lambda$ اور $\mu$ کی قیمتوں کی جانچ کریں جیسا کہ،

$$x+3y-5z=5,\ x+y+\lambda z=\mu,\ x+2y+z=7.$$

(i) کوئی حل نہیں ہے۔ (ii) منفرد حل ہے۔ (iii) لامحدود حل ہیں۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 41 28-03-2023 15:09:30

## حل

یہاں نہ معلوم کی تعداد 3 ہے۔

نظام کی میٹرکس شکل $AX = B$ ہے، جہاں، $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 3 & -5 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 \\ \mu \\ 5 \end{bmatrix}$.

بڑھاؤ میٹرکس $[A \mid B]$ پر صف کے ابتدائی عملیات کے استعمال سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & \lambda & \mu \\ 1 & 3 & -5 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & -5 & 5 \\ 1 & 1 & \lambda & \mu \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - R_1,} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -6 & -2 \\ 0 & -1 & \lambda - 1 & \mu - 7 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda - 7 & \mu - 9 \end{array}\right].$$

(i) اگر $\lambda = 7$ اور $\mu \neq 9$ ہوتو $\rho(A) = 2$ اور $\rho([A \mid B]) = 3$ ہوگا۔ اس طرح، $\rho(A) \neq \rho([A \mid B])$ لہذا، نظام ہم آہنگ نہیں ہے اور اس کا کوئی حل نہیں۔

(ii) اگر $\lambda \neq 7$ اور $\mu$ ایک حقیقی عدد ہوتو $\rho(A) = 3$ اور $\rho([A \mid B]) = 3$. ہے۔ اس طرح، نامعلوم کی تعداد $= \rho(A) = \rho([A \mid B]) = 3$ لہذا، نظام ہم آہنگ ہے اور اس کا حل منفرد ہے۔

(iii) اگر $\lambda = 7$ اور $\mu = 9$, ہوتو $\rho(A) = 2$ اور $\rho([A \mid B]) = 2$. ہے۔ اس طرح، نامعلوم کی تعداد $> \rho(A) = \rho([A \mid B]) = 2$ لہذا، نظام ہم آہنگ ہے اور اس کے لامحدود حل موجود ہیں۔ ■

## مشق 1.6

1. مندرجۂ ذیل میں ہم آہنگ کی جانچ کریں اور ممکن ہوتو مقام کے طریقے کے استعمال سے حل کریں۔

(i) $x - y + 2z = 2, \quad 2x + y + 4z = 7, \quad 4x - y + z = 4$

(ii) $3x + y + z = 2, \quad x - 3y + 2z = 1, \quad 7x - y + 4z = 5$

(iii) $2x + 2y + z = 5, \quad x - y + z = 1, \quad 3x + y + 2z = 4$

(iv) $2x - y + z = 2, \quad 6x - 3y + 3z = 6, \quad 4x - 2y + 2z = 4$

2. $k$ کی قیمت معلوم کریں اگر مساوات $x - 2y + kz = 1, \quad x - 2ky + z = -2, \quad kx - 2y + z = 1$ جن کا

(i) کوئی حل نہیں ہے۔ (ii) منفرد حل ہے۔ (iii) لامحدود حل ہیں۔

3. اگر خطی مساوات کا نظام $2x + 3y + 5z = 9, \quad 7x + 3y - 5z = 8, \quad 2x + 3y + \lambda z = \mu$ ہوتو $\lambda$ اور $\mu$ کی قیمتوں کی جانچ کریں۔ جن کا

(i) کوئی حل نہیں ہے۔ (ii) منفرد حل ہے۔ (iii) لامحدود کئی حل ہیں۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 42 28-03-2023 15:09:39

## 1.5.2 یکساں خطی مساوات کا نظام (Homogeneous system of linear equations)

ہمیں یاد ہے کہ یکساں خطی مساوات کا نظام اس طرح کا ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0, \end{aligned} \quad \ldots (1)$$

جہاں، سرعدد $a_{ij}$، $i = 1, 2, \cdots, m;\ j = 1, 2, \cdots, n$ مستقل ہیں۔اوپری نظام $x_1 = 0, x_2 = 0, \cdots, x_n = 0$. سے راضی ہوتا ہے۔اس حل کو (1) کا معمولی حل کہا جاتا ہے۔دوسرے الفاظ میں نظام (1) ہمیشہ حل رکھتا ہے۔

اوپری نظام (1) کو میٹرکس کی شکل میں اس طرح $AX = O_{m \times 1}$, لکھا جاتا ہے۔ جہاں،

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, O_{m \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

ہم $O_{m \times 1}$ اس کو معمولی طور پر بڑے حروف $O$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ چونکہ، $O$ ایک صفر قطار میٹرکس ہے۔ یہ ہمیشہ سچ ہے کہ $\rho(A) = \rho([A \mid O]) \leq m.$ اس لئے روچھی کیپیل کا مسئلہ سے کوئی بھی یکساں خطی مساوات کا نظام ہمیشہ ہم آہنگ ہے۔

فرض کرو کہ $m < n,$ ہوتو نامعلوم کی تعداد مساوات کی تعداد سے زیادہ ہوگی۔اس لئے $\rho(A) = \rho([A \mid O]) < n.$ لہٰذا، نظام (1) غیر معمولی حل کا دعوی کرتا ہے۔

فرض کرو کہ $m = n,$ ہوتو مساوات اور نامعلوم کی تعداد مساوی ہوگی۔

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n &= 0, \end{aligned} \quad \ldots (2)$$

دو صورت حال پیدا ہوتے ہیں۔

**صورت حال (i)**

اگر $\rho(A) = \rho([A \mid O]) = n,$ ہو تو نظام (2) کے پاس منفرد حل اور معمولی حل ہونگے۔کیونکہ، $\rho(A) = n,\ |A| \neq 0.$۔ معمولی حل $|A| \neq 0$ ہونگے۔

**صورت حال (ii)**

اگر $\rho(A) = \rho([A \mid O]) < n,$ ہو تو نظام (2) کے پاس غیر معمولی حل ہونگے کیونکہ $\rho(A) < n,\ |A| = 0,$ دوسرے الفاظ میں مساوی نظام (2) کے پاس غیر معمولی حل ہونگے اگر اور صرف اگر سرعدد میٹرکس کے مقطعہ کی قیمت صفر ہو۔

فرض کرو کہ $m > n,$ ہوتو مساوات کی تعداد نامعلوم کی تعداد سے زیادہ ہوگی۔ابتدائی عملیات کے ذریعے نظام کو مختصر کرنے پر ہمیں $\rho(A) = \rho([A \mid O]) \leq n.$ حاصل ہوتا ہے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 43 28-03-2023 15:09:48

## مثال 1.35

درجۂ ذیل نظام کو حل کریں:

$$7x+10y+12z=0,\ 3x+4y+4z=0,\ x+2y+3z=0$$

## حل

یہاں، مساوات اور نامعلوم کی تعداد مساوی ہے۔

(گاؤسین کے خارج کا طریقہ) ایکلان شکل میں تبدیل کرنے سے بڑھاؤمیٹرکس ہوجائے گا۔

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\3&4&4&0\\7&10&12&0\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{R_2\to R_2-3R_1,\\ R_3\to R_3-7R_1}} \left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\0&-2&-5&0\\0&-4&-9&0\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{R_2\to R_2\div(-1),\\ R_3\to R_3\div(-1)}} \left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\0&2&5&0\\0&4&9&0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-2R_2} \left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\0&2&5&0\\0&0&-1&0\end{array}\right] \xrightarrow{R_3\to R_3\div(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\0&2&5&0\\0&0&1&0\end{array}\right].$$

اس لئے، نامعلوم کی تعداد $\rho(A)=\rho([A\,|\,O])=3$

لہٰذا، نظام کے پاس منفرد حل ہے۔ چونکہ، $x=0,\ y=0,\ z=0$ ہمیشہ مساوی نظام کے حل ہیں۔ ایک ہی حل $x=0,\ y=0,\ z=0.$ معمولی حل ہے۔

## غور کیجئے (Note)

اوپر کے مثال سے ہمیں حاصل ہوگا۔

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\3&4&4\\7&10&12\end{vmatrix}=1(48-40)-2(36-28)+3(30-28)=8-16+6=-2\neq 0.$$

## مثال 1.36

$x-11y+14z=0,\ 2x-y+4z=0,\ x+3y-2z=0$ نظام کو حل کریں۔

## حل

یہاں نہ معلوم کی تعداد 3 ہے۔

(گاؤسین کے خارج کا طریقہ) ایکلان شکل میں تبدیل کرنے سے بڑھاؤمیٹرکس ہوجائے گا۔

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&-2&0\\2&-1&4&0\\1&-11&14&0\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{R_2\to R_2-2R_1,\\ R_3\to R_3-R_1}} \left[\begin{array}{ccc|c}1&3&-2&0\\0&-7&8&0\\0&-14&16&0\end{array}\right] \xrightarrow{\substack{R_2\to R_2\div(-1),\\ R_3\to R_3\div(-2)}} \left[\begin{array}{ccc|c}1&3&-2&0\\0&7&-8&0\\0&7&-8&0\end{array}\right] \xrightarrow{R_3\to R_3-R_2} \left[\begin{array}{ccc|c}1&3&-2&0\\0&7&-8&0\\0&0&0&0\end{array}\right].$$

اس لئے، نامعلوم کی تعداد $\rho(A)=\rho([A\,|\,O])=2<3$

لہٰذا، نظام کے پاس ایک مقداروالی حلوں کی فیملی (Parameter) ہے۔

ایکلان شکل کو استعمال کرکے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$x+3y-2z=0,\qquad 7y-8z=0,\qquad 0=0.$$

$z=t,$ لینے سے، جہاں، $t$ ایک کوئی (arbitary) حقیقی عدد ہے۔ ہمیں بیحد متبادل طریقے سے حاصل ہوتا ہے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 44 28-03-2023 15:09:55

$$z = t,$$

$$7y - 8t = 0 \implies y = \frac{8t}{7},$$

$$x + 3\left(\frac{8t}{7}\right) - 2t = 0 \implies x + \frac{24t - 14t}{7} = 0 \implies x = -\frac{10t}{7}.$$

اس طرح، $\left(x = -\frac{10t}{7}, y = \frac{8t}{7}, z = t\right)$ حل ہے۔ یہاں، $t$ ایک حقیقی عدد ہے۔

## مثال 1.37

نظام $x + y - 2z = 0, 2x - 3y + z = 0, 3x - 7y + 10z = 0, 6x - 9y + 10z = 0.$ کو حل کریں۔

## حل

یہاں، مساوات کی تعداد 4 ہے اور نامعلوم کی تعداد 3 ہے۔ بڑھاؤ میٹرکس کو ایکلان کی شکل میں تبدیل کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$[A \mid O] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -7 & 10 & 0 \\ 6 & -9 & 10 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_4 \to R_4 - 6R_1]{\substack{R_2 \to R_2 - 2R_1, \\ R_3 \to R_3 - 3R_1,}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & -10 & 16 & 0 \\ 0 & -15 & 22 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 \div (-2)]{\substack{R_2 \to R_2 \div (-5), \\ R_3 \to R_3 \div (-2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -8 & 0 \\ 0 & -15 & 22 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_4 \to R_4 + 15R_2]{\substack{R_3 \to R_3 - 5R_2, \\ R_4 \to R_4 + 15R_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_4 \to R_4 \div 7]{\substack{R_3 \to R_3 \div (-3), \\ R_4 \to R_4 \div 7}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_4 \to R_4 - R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

اس لئے، نامعلوم کی تعداد $= 3 = \rho([A \mid O]) = \rho(A)$

لہذا، نظام کا حل صرف معمولی ہو گا۔

## مثال 1.38

$(3\lambda - 8)x + 3y + 3z = 0,\ 3x + (3\lambda - 8)y + 3z = 0,\ 3x + 3y + (3\lambda - 8)z = 0$

کی قیمت جانچ کریں کہ جس کے لئے مساوات کے نظام کا حل غیر معمولی ہو۔

## حل

یہاں نامعلوم کی تعداد 3 ہے ۔ لہٰذا، اگر نظام ہم آہنگ ہے اور اس کے غیر معمولی حل ہوں تو سرعدد میٹرکس کا مقام اور بڑھاؤ میٹرکس کا مقام مساوی ہے اور وہ 3 سے کم ہے۔ اس سبب سرعدد میٹرکس کے مقطعہ کی قدر کو صفر ہونا چاہئے۔

لہٰذا، ہمیں حاصل ہو گا۔

$$\begin{vmatrix} 3\lambda - 8 & 3 & 3 \\ 3 & 3\lambda - 8 & 3 \\ 3 & 3 & 3\lambda - 8 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{یا} \quad \begin{vmatrix} 3\lambda - 2 & 3\lambda - 2 & 3\lambda - 2 \\ 3 & 3\lambda - 8 & 3 \\ 3 & 3 & 3\lambda - 8 \end{vmatrix} = 0 \quad (R_1 \to R_1 + R_2 + R_3 \text{ لاگو کرنے پر})$$

$$\text{یا} \quad (3\lambda - 2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3\lambda - 8 & 3 \\ 3 & 3 & 3\lambda - 8 \end{vmatrix} = 0 \quad (R_1 \text{ سے } (3\lambda - 2) \text{ کو باہر نکالنے پر})$$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 45 28-03-2023 15:10:01

$$\text{یا } (3\lambda-2)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 3\lambda-11 & 0\\ 0 & 0 & 3\lambda-11\end{vmatrix} = 0 \quad (R_2 \to R_2-3R_1, R_3 \to R_3-3R_1 \text{ لاگو کرنے پر})$$

$$\text{یا } (3\lambda-2)(3\lambda-11)^2 = 0. \quad \text{اس طرح } \lambda=\frac{2}{3} \text{ اور } \lambda=\frac{11}{3}$$

اب ہم کیمیاء میں خطی مساوات کے نظام کے استعمال کو بیان کرتے ہیں۔ آپ دونوں طرف موجود جوہریوں کی تعداد کا معائنہ کرکے کیمیائی رد عمل کی مساوات کو متوازن کرنے سے پہلے ہی واقف ہیں۔ ایک براہ راست طریقہ سمجھنے کے لئے نیچے دیا گیا ہے۔

## مثال 1.39

گاؤسین کے خارج کے طریقہ کے استعمال سے کیمیائی رد عمل کی مساوات کو متوازن کریں۔

$$C_5H_8 + O_2 \to CO_2 + H_2O.$$

(مندرجہ بالا وہ رد عمل ہے جو ایسو پرین (isoprene) نامیاتی مرکبات کو جلانے سے ملتا ہے۔)

## حل

ہم مثبت سالم عدد $x_1, x_2, x_3$ اور $x_4$ کی تلاش کریں گے تاکہ

$$x_1C_5H_8 + x_2O_2 = x_3CO_2 + x_4H_2O \quad \ldots (1)$$

(1) میں کاربن جواہروں کی تعداد بائیں طرف اور کاربن جواہروں کی تعداد دائیں طرف مساوی ہونی چاہئے اس لئے ہمیں مساوی خطی مساوات حاصل ہوتے ہیں۔

$$5x_1 = x_3 \implies 5x_1 - x_3 = 0. \quad \ldots (2)$$

اسی طرح، ہیڈروجن اور آکسیجن جواہروں پر غور کرنے سے ہمیں بالترتیب حاصل ہوتے ہیں۔

$$8x_1 = 2x_4 \implies 4x_1 - x_4 = 0, \quad \ldots (3)$$

$$2x_2 = 2x_3 + x_4 \implies 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0. \quad \ldots (4)$$

(2), (3) اور (4) مساوات ایک مساوی خطی مساوات کے نظام کو بناتے ہیں۔ جس میں 4 نامعلوم ہیں۔

بڑھاؤ میٹرکس سے $[A \mid B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 4 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right]$.

گاؤسین کے خارج کے طریقے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$[A \mid B] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 5 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0\\ 5 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to 4R_3 - 5R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -4 & 5 & 0 \end{array}\right].$$

اس لئے، نامعلوم کی تعداد $\rho(A) = \rho([A \mid B]) = 3 < 4 =$

نظام ہم آہنگ ہے اور اس کے لامحدود حل ہیں۔

ایکلان شکل کا استعمال کرکے مساوات کو لکھنے پر ہمیں $4x_1 - x_4 = 0, 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, -4x_3 + 5x_4 = 0$ حاصل ہوتا ہے۔

اس طرح، ایک نامعلوم کو غالباً چننا ضروری ہے جو کہ ایک غیر صفری حقیقی عدد ہو۔

فرض کرو کہ $x_4 = t, t \neq 0$ کو چنتے ہیں۔تو متبادلہ سے ہمیں $x_1 = \frac{t}{4}, x_2 = \frac{7t}{4}, x_3 = \frac{5t}{4}$ حاصل ہوتا ہے۔

کیونکہ، $x_1$ ، $x_2$، $x_3$ اور $x_4$ مثبت سالم اعداد ہیں۔ فرض کرو کہ $t = 4$ کو چننے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$x_1 = 1, x_2 = 7, x_3 = 5$ اور $x_4 = 4$.

اس لئے متوازن مساوات $C_5H_8 + 7O_2 \rightarrow 5CO_2 + 4H_2O$ ہے۔

**مثال 1.40**

اگر مساوات کے نظام $px + by + cz = 0,\ ax + qy + cz = 0,\ ax + by + rz = 0$ کے پاس غیر معمولی حل ہے اور $p \neq a,\ q \neq b,\ r \neq c$, ہو تو ثابت کرو $\frac{p}{p-a} + \frac{q}{q-b} + \frac{r}{r-c} = 2$.

**حل**

فرض کرو کہ نظام $px + by + cz = 0,\ ax + qy + cz = 0,\ ax + by + rz = 0$ کے پاس غیر معمولی حل ہے۔

اوپر کی مساوات میں $R_2 \rightarrow R_2 - R_1$ اور $R_3 \rightarrow R_3 - R_1$ کو لاگو کرنے پر $\begin{vmatrix} p & b & c \\ a & q & c \\ a & b & r \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} p & b & c \\ -(p-a) & q-b & 0 \\ -(p-a) & 0 & r-c \end{vmatrix} = 0$ یعنی، $\begin{vmatrix} p & b & c \\ a-p & q-b & 0 \\ a-p & 0 & r-c \end{vmatrix} = 0$ ۔

چونکہ، $p \neq a,\ q \neq b,\ r \neq c$ ، $(p-a)(q-b)(r-c)\begin{vmatrix} \frac{p}{p-a} & \frac{b}{q-b} & \frac{c}{r-c} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ حاصل ہوتا ہے۔

اس طرح، $\begin{vmatrix} \frac{p}{p-a} & \frac{b}{q-b} & \frac{c}{r-c} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ حاصل ہوتا ہے۔

منقطعہ کو پھیلانے پر ہمیں $\frac{p}{p-a} + \frac{b}{q-b} + \frac{c}{r-c} = 0$. ملتا ہے۔ یعنی،

$$\frac{p}{p-a} + \frac{q-(q-b)}{q-b} + \frac{r-(r-c)}{r-c} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{p}{p-a} + \frac{q}{q-b} + \frac{r}{r-c} = 2.$$

## مشق 1.7

1. مندرجۂ ذیل یکساں مساوات کو حل کریں۔

(i) $3x + 2y + 7z = 0,\quad 4x - 3y - 2z = 0,\quad 5x + 9y + 23z = 0$

(ii) $2x + 3y - z = 0,\quad x - y - 2z = 0,\quad 3x + y + 3z = 0$

2. $\lambda$ کی قیمت جانچ کریں جس کے لئے درجۂ ذیل مساوات کا نظام کا حل۔

$x + y + 3z = 0,\ 4x + 3y + \lambda z = 0,\ 2x + y + 2z = 0$

(i) منفرد حل ہے۔ (ii) غیر معمولی حل ہے۔

3. گاؤسین کے خارج کے طریقے کے استعمال سے کیمائی رد عمل کی مساوات کو متوان کریں۔

$C_2H_6 + O_2 \rightarrow H_2O + CO_2$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 47 28-03-2023 15:10:20

## مشق 1.8

دیے گئے چار حل میں سے صحیح یا سب سے مناسب جواب کا انتخاب کریں۔

1. اگر $|\text{adj}(\text{adj } A)| = |A|^9$ ہے تو مربع میٹرکس $A$ کی ترتیب

(1) 3 (2) 4 (3) 2 (4) 5

2. اگر $A$ ایک $3\times 3$ ترتیب والی غیر نادر میٹرکس ہے اس طرح کہ $AA^T = A^T A$ اور $B = A^{-1}A^T$ تو $BB^T = ?$

(1) $A$ (2) $B$ (3) $I_3$ (4) $B^T$

3. اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$، $B = \text{adj } A$ اور $C = 3A$ تو $\dfrac{|\text{adj } B|}{|C|} = ?$

(1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{9}$ (3) $\frac{1}{4}$ (4) 1

4. اگر $A\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ ہو تو $A = ?$

(1) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

5. اگر $A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ہو تو $9I_2 - A = ?$

(1) $A^{-1}$ (2) $\dfrac{A^{-1}}{2}$ (3) $3A^{-1}$ (4) $2A^{-1}$

6. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ہو تو $|\text{adj}(AB)| = ?$

(1) $-40$ (2) $-80$ (3) $-60$ (4) $-20$

7. اگر $P = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$، $3\times 3$ ترتیب والی میٹرکس $A$ کا شریک ہے اور $|A| = 4$ تو $x$ ہے۔

(1) 15 (2) 12 (3) 14 (4) 11

8. اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ اور $A^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ تو $a_{23}$ کی قیمت ہے۔

(1) 0 (2) $-2$ (3) $-3$ (4) $-1$

9. اگر $A, B$ اور $C$ کسی ترتیب والے عکس پذیر میٹریسس ہیں تو درجۂ ذیل میں کونسا صحیح نہیں ہے۔

(1) $\text{adj } A = |A|A^{-1}$ (2) $\text{adj}(AB) = (\text{adj } A)(\text{adj } B)$

(3) $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$ (4) $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

10. اگر $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ اور $(AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 12 & -17 \\ -19 & 27 \end{bmatrix}$ ہو تو $B^{-1} = ?$

(1) $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 48 28-03-2023 15:10:37

11. اگر $A^T A^{-1}$ تشاکل ہو تو $A^2 = ?$

(1) $A^{-1}$ (2) $(A^T)^2$ (3) $A^T$ (4) $(A^{-1})^2$

12. اگر $A$ ایک غیر نادر میٹرکس ہے اس طرح کہ $A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ تو $(A^T)^{-1} = ?$

(1) $\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

13. اگر $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ x & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$ اور $A^T = A^{-1}$، ہو تو $x$ کی قیمت ہے۔

(1) $\frac{-4}{5}$ (2) $\frac{-3}{5}$ (3) $\frac{3}{5}$ (4) $\frac{4}{5}$

14. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & \tan\frac{\theta}{2} \\ -\tan\frac{\theta}{2} & 1 \end{bmatrix}$ اور $AB = I_2$ ہو تو $B = ?$

(1) $\left(\cos^2\frac{\theta}{2}\right)A$ (2) $\left(\cos^2\frac{\theta}{2}\right)A^T$ (3) $(\cos^2\theta)I$ (4) $\left(\sin^2\frac{\theta}{2}\right)A$

15. اگر $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ اور $A(\text{adj } A) = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ ہو تو $k = ?$

(1) 0 (2) $\sin\theta$ (3) $\cos\theta$ (4) 1

16. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ اس طرح ہے کہ $\lambda A^{-1} = A$ تو $\lambda$ ہے۔

(1) 17 (2) 14 (3) 19 (4) 21

17. اگر $\text{adj } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ اور $\text{adj } B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ ہو تو $\text{adj}(AB)$ ہے۔

(1) $\begin{bmatrix} -7 & -1 \\ 7 & -9 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -2 & -10 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} -7 & 7 \\ -1 & -9 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} -6 & -2 \\ 5 & -10 \end{bmatrix}$

18. میٹرکس $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ کا مقام

(1) 1 (2) 2 (3) 4 (4) 3

19. اگر $x^a y^b = e^m, x^c y^d = e^n, \Delta_1 = \begin{vmatrix} m & b \\ n & d \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & m \\ c & n \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$، ہو تو $x$ اور $y$ کی قیمت بالترتیب ہو گی۔

(1) $e^{(\Delta_2/\Delta_1)}, e^{(\Delta_3/\Delta_1)}$ (2) $\log(\Delta_1/\Delta_3), \log(\Delta_2/\Delta_3)$

(3) $\log(\Delta_2/\Delta_1), \log(\Delta_3/\Delta_1)$ (4) ) $e^{(\Delta_1/\Delta_3)}, e^{(\Delta_2/\Delta_3)}$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 49 28-03-2023 15:10:53

20. مندرجۂ ذیل میں کونسا صحیح ہے یا نہیں؟

(i) تشاکل میٹرکس کا شریک بھی تشاکل میٹرکس ہے۔

(ii) وتری میٹرکس کا شریک بھی وتری میٹرکس ہے۔

(iii) اگر $n$ ترتیب والی مربع میٹرکس $A$ ہے اور $\lambda$ ایک عددیہ ہے تو $\text{adj}(\lambda A) = \lambda^n \text{adj}(A)$

(iv) $A(\text{adj}A) = (\text{adj}A)A = |A|I$

(1) صرف (i) (2) (ii) اور (iii) (3) (iii) اور (iv) (4) (i), (ii) اور (iv)

21. اگر $\rho(A) = \rho([A|B])$ ہوتو خطی مساوات کا نظام $AX = B$ میں ہے۔

(1) یکجہتی ہے اور حل منفرد ہے۔ (2) یکجہتی

(3) یکجہتی اور لامحدود حل (4) غیر یکجہتی ہے۔

22. اگر $0 \le \theta \le \pi$ اور مساوات کا نظام $x + (\sin\theta)y - (\cos\theta)z = 0,\ (\cos\theta)x - y + z = 0,\ (\sin\theta)x + y - z = 0$ کا حل غیر معمولی ہے تو $\theta$ ہے۔

(1) $\frac{2\pi}{3}$ (2) $\frac{3\pi}{4}$ (3) $\frac{5\pi}{6}$ (4) $\frac{\pi}{4}$

23. خطی مساوات کے نظام کی بڑھاؤ میٹرکس $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & \lambda-7 & \mu+5 \end{bmatrix}$ ہوتو نظام کے پاس لامحدود حل ہیں اگر

(1) $\lambda = 7, \mu \neq -5$ (2) $\lambda = -7, \mu = 5$ (3) $\lambda \neq 7, \mu \neq -5$ (4) $\lambda = 7, \mu = -5$

24. فرض کرو کہ $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ اور $4B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & x \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ہے۔ اگر $A$ کا معکوس $B$ ہوتو $x$ کی قیمت

(1) 2 (2) 4 (3) 3 (4) 1

25. اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ہوتو $\text{adj}(\text{adj } A)$ ہے۔

(1) $\begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 6 & -6 & 8 \\ 4 & -6 & 8 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} -3 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

## SUMMARY خلاصہ

(1) $A$ میٹرکس کا شریک $= A$ کی سرعددی میٹرکس کا پلٹاؤ

(2) $A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A| I_n$

(3) $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A.$

(4) (i) $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ (ii) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ (iii) $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$، $\lambda$ ایک غیرصفری عددیہ ہے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 50 28-03-2023 15:11:05

(5) (i) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (ii) $(A^{-1})^{-1} = A$

(6) اگر $A$ ایک $n$ ترتیب والی غیرنادر مربع میٹرکس ہے تو

(i) $\left(\text{adj } A\right)^{-1} = \text{adj}\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{|A|}A$ (ii) $|\text{adj } A| = |A|^{n-1}$

(iii) $\text{adj}\left(\text{adj } A\right) = |A|^{n-2}A$ (iv) $\text{adj}(\lambda A) = \lambda^{n-1}\text{adj}(A)$, $\lambda$ ایک غیرصفری عددیہ ہے۔

(v) $\left|\text{adj}\left(\text{adj } A\right)\right| = |A|^{(n-1)^2}$ (vi) $(\text{adj } A)^T = \text{adj}\left(A^T\right)$

(vii) $\text{adj}(AB) = (\text{adj } B)(\text{adj } A)$

(7) (i) $A^{-1} = \pm\frac{1}{\sqrt{|\text{adj } A|}}\text{adj } A$. (ii) $A = \pm\frac{1}{\sqrt{|\text{adj } A|}}\text{adj}\left(\text{adj } A\right)$.

(8) (i) میٹرکس $A$ عمودی ہے اگر $AA^T = A^TA = I$

(ii) میٹرکس $A$ عمودی ہے صرف اور صرف اگر $A$ غیرنادر اور $A^{-1} = A^T$ ہو۔

(9) خطی مساوات کے نظام $AX = B$ کو حل کرنے کے طریقے

(i) انعکاس میٹرکس کا طریقہ $X = A^{-1}B, |A| \neq 0$

(ii) کرامر کا اصول $x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, z = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \Delta \neq 0$

(iii) گاؤسین کے خارج کا طریقہ

(10) (i) اگر نامعلوم کی تعداد $= \rho(A) = \rho([A\,|\,B])$ ہوتو نظام کا حل منفرد ہوگا۔

(ii) اگر نامعلوم کی تعداد $> \rho(A) = \rho([A\,|\,B])$ ہوتو نظام کے لامحدود حل ہونگے۔

(iii) اگر $\rho(A) \neq \rho([A\,|\,B])$ ہوتو نظام غیریکجہتی ہوگا اور اس کا کوئی حل نہیں۔

(11) یکساں خطی مساوات کا نظام $AX = 0$ کا

(i) معمولی حل ہوگا اگر $|A| \neq 0$

(ii) غیرمعمولی حل ہوگا اگر $|A| = 0$

## ICT کارنر

**https://ggbm.at/vchq92pg or Scan the QR Code**

بروسر کھولئے اور دئے گئے لنک ٹیپ کیجئے (یا) کوڈ کو اسکین کیجئے۔ 12ویں جماعت ریاضی نامی جیو جبرا ورک بک کھلے گا۔ ورک بک کے بائیں جانب تمہاری کتاب کے اسباق ہوں گے۔ ”میٹرکس اور مقطعہ کے استعمالات“ نامی باب پر کلک کریں۔ اس باب سے تعلق رکھنے والے بہت سارے ورک شیٹ دیکھ سکتے ہو۔ ”میٹرکس کے استعمالات-حساب“ کی ترسیم کے ورک شیٹ کو انتخاب کریں۔

S62YB



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 51 28-03-2023 15:11:15

باب
2

# مرکب اعداد
# Complex Numbers

تصوری اعداد ایک روح الٰہی کی عمدہ اور حیرت انگیز پناہ گاہ ہے جو موجود اور غیر موجود کے درمیان تقریباً ایک جل تھلیا ہے۔

– گارڈ فریڈ لیبنز



رافیل بمبیلی
(1526-1572)

ہت سے ریاضی دانوں نے مرکب اعداد کی مکمل ترقی میں حصہ لیا۔ اٹلی کے ریاض دان رافیل بمبیلی (Rafael Bombelli) نے مرکب اعداد کے جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم کو ترقی دی۔ ان کو عام طور پر مرکب اعداد کے الجبراء کو تیار کرنے والا پہلا شخص مانا جاتا ہے۔ ان کے کارناموں کے اعزاز میں ایک چاند کے جوالا مکھ (moon crater) کو بامبیلی کا نام دیا گیا۔

## حقیقی زندگی کی عبارت (Real Life Context)

مرکب اعداد ایک ایسے رجحان کی نمائندگی کرنے میں کارآمد ہے جس کے ایک ہی وقت میں دو مختلف حصے ہوتے ہیں۔ مثال کے طور پر برقی رو (alternating current) انجینیروں، ڈاکٹروں، سائنسدانوں اور گاڑی کے نقش ونگاروں اور دیگر تمام جو برقی مقناطیس سگنل (اشارہ) استعمال کرتے ہیں انہیں اپنی منزل تک پہنچنے کے لئے مرکب اعداد کو مضبوط سگنل کے طور پر استعمال کرتے ہیں۔ مرکب اعداد کو سگنل پر وسیسنگ، اختیار اصول (control theory) برقی مقناطیسیت، سیال حرکت (quantum mechanics) علم سکون وحرکت اور ارتعاش تجزیہ (vibration analysis) کے طور پر استعمال کرتے ہیں۔

## Learning Objectives سیکھنے کے مقاصد

اس باب کو تکمیل کے بعد طلباء اس قابل ہو سکیں گے کہ

- مرکب اعداد پر الجبریائی اعمال کا کرنا۔
- آرگنڈی مسطح (Argand plane) میں مرکب اعداد کی منصوبہ بندی۔
- مرکب اعداد کے زوجی (conjugate) اور معین ضروب (modulus) معلوم کرنا۔
- مرکب اعداد کے قطبی (polar) اور ائلیر (Euler) شکل معلوم کرنا۔
- ڈی موری نظریہ (de Moivre theorem) کے استعمال سے مرکب اعداد کے n ویں جذریں معلوم کرنا۔

## 2.1 مرکب اعداد کی تعریف (Introduction to Complex Numbers)

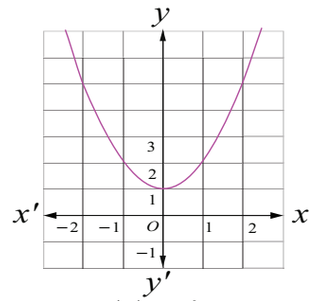
مرکب اعداد کو جاننے سے پہلے چلو ہم وہ سوال کا جواب دیں نے کی کوشش کریں گے۔ "کیا وہاں کوئی حقیقی عدد موجود ہو جس کا مربع منفی ہو"؟ اس کے لئے چلو ہم جواب حاصل کرنے کے لئے معمولی سا مثال دیکھتے ہیں۔

مساوات (1) اور (2) غور کریں۔

| مساوات 1 | مساوات 2 |
|---|---|
| $x^2 - 1 = 0$ | $x^2 + 1 = 0$ |
| $x = \pm\sqrt{1}$ | $x = \pm\sqrt{-1}$ |
| $x = \pm 1$ | $x = \pm ?$ |



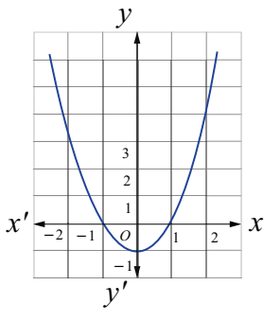
12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 52 28-02-2023 12:25:54




$f(x) = x^2 + 1$

**2.2 خاکہ**

اسی منطق سے ،**مساوات (2)** غیر حقیقی حل رکھتا ہے جبکہ ترسیم $f(x) = x^2 + 1$ ، $x$ مقطوعہ پار نہیں کرتا۔ہم ترسیم $f(x) = x^2 + 1$ کو بھی دیکھ کر یہ جان سکتے ہیں۔




$f(x) = x^2 - 1$

**2.1 خاکہ**

مساوات (1) $x = -1$ اور $x = 1$ دو حقیقی حل رکھتا ہے ہم جانتے ہیں کہ $x$ میں کسی مساوات کو حل کرنا $x$ مقطوعہ intercepts کا $f(x) = x^2 - 1$ ترسیم میں تلاش کرنے کے مترادف ہے جو $(-1, 0)$ اور $(1, 0)$ پر $x$- محور پار کریں۔

اس وجہ سے جب ہم ایک صحیح عدد کو مربع کریں تو ہمیں منفی صحیح عدد حاصل ہونا، ناممکن ہے۔ اگر مساوات 2 حل رکھتے ہیں پھر ہم کو 1- کے مربع جزر کے طور پر ایک خیالی عدد تیار کرنا چاہئے ۔ یہ خیالی اکائی $\sqrt{-1}$ کو $i$ سے نشان دہی کیا گیا ہے کہ $i^2 = -1$. ہم اس کے ذریعے $i$ کی دوسرے قوتیں معلوم کرسکتے ہیں۔

## 2.1.1 خیالی اکائی $i$ کی قوتیں (Powers of imaginary unit $i$)

| | | | |
|---|---|---|---|
| $i^0 = 1,\ i^1 = i$ | $i^2 = -1$ | $i^3 = i^2 i = -i$ | $i^4 = i^2 i^2 = 1$ |
| $(i)^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{(i)^2} = -i$ | $(i)^{-2} = -1$ | $(i)^{-3} = i$ | $(i)^{-4} = 1 = i^4$ |

ہم جانتے ہیں، کہ کوئی سالم عدد $n$ کے لئے $i^n$ صرف چار ممکن قیمتیں رکھتا ہے۔ جو n کی قیمتیں سے مطابقت رکھتے ہیں۔4 سے تقسیم کرنے پر باقی0، 1، 2 اور 3 حاصل ہوتا ہے۔ یہ اسی وقت ہے جب سالم عدد $n \le -4$ یا $n \ge 4$ ، کو ال گارتمی تقسیم کے استعمال کرتے ہوئے n کو $n = 4q + k, \quad 0 \le k < 4,$ لکھا جاسکتا ہے۔ k اور q سالم اعداد ہیں اور ہم لکھتے ہیں۔

$$(i)^n = (i)^{4q+k} = (i)^{4q}(i)^k = \left((i)^4\right)^q (i)^k = (1)^q (i)^k = (i)^k$$

### مثال 2.1

مندرجہ ذیل کو مختصر کرو

(i) $i^7$ (ii) $i^{1729}$ (iii) $i^{-1924} + i^{2018}$ (iv) $\sum_{n=1}^{102} i^n$ (v) $i\, i^2\, i^3 \cdots i^{40}$

**حل**

(i) $(i)^7 = (i)^{4+3} = (i)^3 = -i$ ; (ii) $i^{1729} = i^{1728}\, i^1 = i$

(iii) $(i)^{-1924} + (i)^{2018} = (i)^{-1924+0} + (i)^{2016+2} = (i)^0 + (i)^2 = 1 - 1 = 0$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 53 28-02-2023 12:26:06

(iv) $\sum_{n=1}^{102} i^n = \left(i^1+i^2+i^3+i^4\right)+\left(i^5+i^6+i^7+i^8\right)+\cdots+\left(i^{97}+i^{98}+i^{99}+i^{100}\right)+i^{101}+i^{102}$

$= \left(i^1+i^2+i^3+i^4\right)+\left(i^1+i^2+i^3+i^4\right)+\cdots+\left(i^1+i^2+i^3+i^4\right)+i^1+i^2$

$= \{i+(-1)+(-i)+1\}+\{i+(-1)+(-i)+1\}+\cdots\ldots+\{i+(-1)+(-i)+1\}+i+(-1)$

$= 0+0+\cdots 0+i-1$

$= -1+i$ (یہ عدد کیا ہے؟)

(v) $i\, i^2\, i^3 \cdots i^{40} = i^{1+2+3+\cdots+40} = i^{\frac{40\times 41}{2}} = i^{820} = i^0 = 1.$

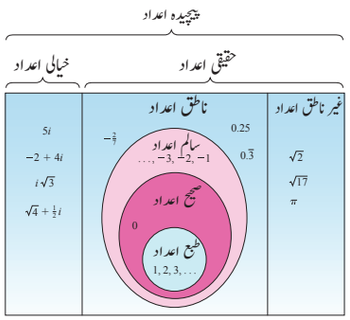
**نتیجہ :** $i$ کی چار متواتر قوتوں کا حاصل جمع صفر ہے۔ $\forall n\in\mathbb{Z}\ ،\ i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} = 0$

## غور کیجئے (Note)

(i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ صرف اس صورت میں درست ہے۔ جب $a, b$ میں سے کم از کم ایک غیر منفی ہے۔

مثال کے طور پر $6 = \sqrt{36} = \sqrt{(-4)(-9)} = \sqrt{(-4)}\sqrt{(-9)} = (2i)(3i) = 6i^2 = -6$ ایک تضاد ہے۔ چونکہ $\sqrt{(-4)(-9)} = \sqrt{(-4)}\sqrt{(-9)}$ ہم نے لیا ہے ہم ایک تضاد پر پہنچے ہیں۔ لہٰذا $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ اسی صورت میں درست ہے جب $a, b$ میں کم از کم ایک غیر منفی ہو۔

(ii) $y \in \mathbb{R}, y^2 \geq 0$ کے طور پر




$\sqrt{(-1)(y^2)} = \sqrt{(y^2)(-1)}$ لہٰذا

$\sqrt{(-1)}\sqrt{(y^2)} = \sqrt{(y^2)}\sqrt{(-1)}$

$iy = yi.$

## مشق 2.1

مندرجۂ ذیل کو مختصر کرو۔

1. $i^{1947} + i^{1950}$
2. $i^{1948} - i^{-1869}$
3. $\sum_{n=1}^{12} i^n$
4. $i^{59} + \frac{1}{i^{59}}$
5. $i\, i^2 i^3 \cdots i^{2000}$
6. $\sum_{n=1}^{10} i^{n+50}$

## 2.2 مرکب اعداد (Complex Numbers)

ہم نے دیکھا ہے کہ مساوات $x^2 + 1 = 0$ کا حقیقی عددی نظام میں حل نہیں ہے عام طور پر چند حقیقی سرعدد کثیر رقمی مساوات ہیں۔ جو کوئی حقیقی حل نہیں رکھتے ہم دوبارہ صحیح عددی نظام کو وسعت دیتے ہیں۔ تاکہ اس طرح کے کثیر رقمی مساوات کے حلوں کو ملایا جاسکے۔ اس نے ریاضی دانوں کو مرکب اعداد کے نظام کی وضاحت کرنے کے لئے متحرک کیا۔

اس حصہ میں، ہم معلوم کریں گے۔

(i) مستطیلی شکل میں مرکب اعداد

(ii) آرگنڈی مطبح

(iii) مرکب اعداد پر الجبریائی کارروائی

خیالی اکائی $i$ کے ساتھ حقیقی عددی نظام کی توسیع مرکب عددی نظام ہے۔

خاصیت $i^2 = -1$ کے ساتھ خیالی اکائی $i$ $x$ اور $y$ حقیقی اعداد کے ساتھ جمع اور ضرب کے عمل سے ملا ہوا ہے۔ ہم مرکب عدد $x + iy.$ حاصل کرتے ہیں۔ علامت '+' کو سمیتہ جمع (vector addition) کے طور پر سمجھا جاتا ہے۔ اس کو کارل فرائڈرچ گاس (1777-1855) (Carl Friedrich Gauss) نے متعارف کرایا تھا۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 54 28-02-2023 12:26:18

## 2.2.1 مستطیلی شکل (Rectangular form)

**تعریف 2.1 – مرکب عدد کی مستطیلی شکل (Rectangular form of a complex number)**

ایک مرکب عدد $x+iy$ (or $x+yi$) کی شکل میں ہو جہاں $x$ اور $y$ صحیح اعداد ہیں۔ جس کا صحیح حصہ یا حقیقی حصہ $x$ اور خیالی حصہ $y$ ہے۔

مرکب عدد میں اگر $x=0$ ہو تو خالصتاً خیالی کہا جاتا ہے۔ پھر اگر $y=0$ ہو تو مرکب عدد کو حقیقی کہا جاتا ہے ۔ صفر Zero واحد عدد ہے جو بہ یک وقت حقیقی اور خیالی ہے ایک مرکب عدد $x+iy$ کی معیاری مستطیلی شکل کو ظاہر کرنے کا رواج بطور $z$ اور ہم $x=\mathrm{Re}(z)$ اور $y=\mathrm{Im}(z)$ لکھتے ہیں۔ مثال کے طور پر $\mathrm{Re}(5-i7)=5$ اور $\mathrm{Im}(5-i7)=-7$.

$\alpha+i\beta,\ \beta\neq 0$ کی شکل کے اعداد جہاں کو خیالی اعداد (غیر حقیقی مرکب) کہتے ہیں۔ اعداد کی برابری کی وضاحت مندرجۂ ذیل ہے۔

**تعریف 2.2**

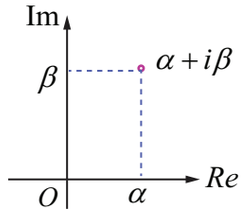
دو مرکب اعداد $z_1=x_1+iy_1$ اور $z_2=x_2+iy_2$ کو مساوی اس وقت کہا جائے گا اگر صرف اور صرف $\mathrm{Re}(z_1)=\mathrm{Re}(z_2)$ اور $\mathrm{Im}(z_1)=\mathrm{Im}(z_2)$ ہو۔ یہاں $x_1=x_2$ اور $y_1=y_2$ ہیں۔

مثال کے طور پر، اگر $\alpha+i\beta=-7+3i$ ہو تو $\alpha=-7$ اور $\beta=3$ ہے۔

## 2.2.2 آرگنڈی مسطح (Argand plane)

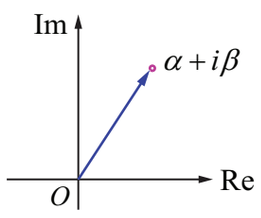
ایک مرکب عدد $z=x+iy$ حقیقی اعداد $(x,y)$ مرتب جفت جوڑے کے ذریعے منفرد انداز میں طے کیا جاتا ہے۔ اعداد $6,\ 3-8i$ اور $-4i$ بالترتیب $(6,0),\ (3,-8)$ اور $(0,-4)$ کے مساوی ہیں اس طرح سے ہم ایک محدد مسطح پر مرکب عدد $z=x+iy$ کو نقطہ $(x,y)$ پر جوڑتے ہیں اگر ہم مرکب اعداد کی نمائندگی کے لئے $x$ محور بطور حقیقی اور $y$ محور پر بطور خیالی محور رکھ لیں۔ تو پھر $xy$ مسطح مرکب مسطح یا آرگنڈی مسطح (Argand plane) کہلاتا ہے۔ اس کو (1768 – 1822) سوئز ریاضی دان جین آرگنڈ (Jean Argand) کے نام پر رکھا گیا ہے۔

ایک مرکب عدد کی نمائندگی نہ صرف ایک نقطۂ کے ذریعہ ہوتی ہے بلکہ مقامی سمتیہ (position vector) کے ذریعے بھی ہوتی ہے جو مبداء (origin) سے نقطہ کی طرف اشارہ کرتا ہے۔ عدد، نقطہ اور سمتیہ (vector) ان تمام کو ایک ہی حرف $z$ سے ظاہر کیا جاتا ہے ہم ہمیشہ کی طرح ان تمام سمتیوں (vectors) کی شناخت کرتے ہیں۔ جو متوازی منتقلی کے ذریعہ ایک دوسرے سے حاصل کئے جاسکتے ہیں۔ اس سبق میں $\mathbb{C}$ سے تمام مرکب اعداد کے مجموعہ کو ظاہر کیا جاتا ہے۔ ہندسی (Geometrically) طور پر، مرکب عدد کو $\mathbb{R}^2$ میں ایک نقطہ یا آرگنڈی (Argand) مسطح میں ایک سمتیہ (vector) کے طور پر دیکھا جاسکتا ہے۔



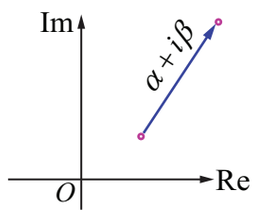

ایک نقطہ کے طور پر مرکب عدد

خاکہ 2.3




مبدا سے نقطہ کی طرف اشارہ کرنے والے مقامی سمتیہ (position vector) کے ذریعہ مرکب عدد

خاکہ 2.4




سمتیہ (vector) کے طور پر مرکب عدد

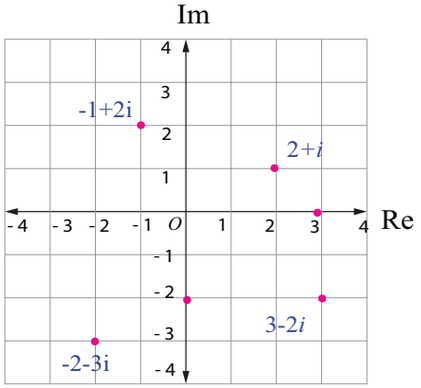
خاکہ 2.5

## تشریح 2.1

یہاں $2+i,\ 0-2i,\ -1+2i,\ 3-2i,\ 3+\sqrt{-2},\ -2-3i,\ \cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$ اور $3+0i$ کچھ مرکب اعداد ہیں۔ ان میں سے چند آرگنڈی مسطح (Argand plane) پر منصوبہ بندی کئے گئے ہیں۔

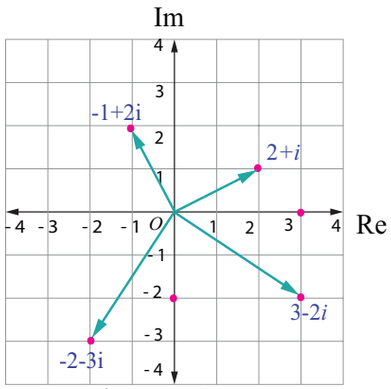



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 55 28-02-2023 12:26:31




نقطہ کے طور پر مرکب اعداد

خاکہ 2.6




سمتیہ vector کے طور پر مرکب اعداد

خاکہ 2.7

## 2.2.3 مرکب اعداد پر الجبریائی کاروائی (Algebraic operations on complex numbers)

ہم اس حصے میں، مرکب عدد کے الجبریائی اور ہندسی بناوٹ کا مطالعہ کرتے ہیں کہ حقیقی اعداد کے مماثل خصوصیات کو معلوم کیا جائے۔

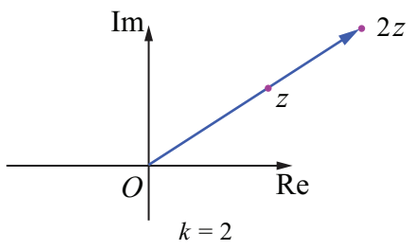
### (i) مرکب اعداد کا میزان ضرب (Scalar multiplication of complex numbers)

اگر $z = x + iy$ اور $k \in \mathbb{R}$ ہو پھر ہم واضح کرتے ہیں۔

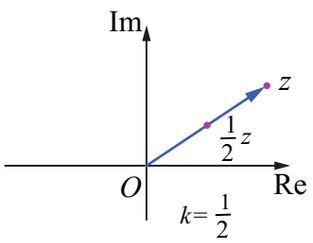
$$k\,z = (kx) + (ky)\,i\,.$$

خاص طور پر $0\,z = 0$, $1\,z = z$ اور $(-1)z = -z$

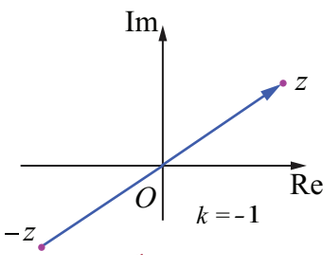
مندرجۂ ذیل خاکہ دکھلاتا ہے کہ k z کے لئے $k = 2, \frac{1}{2}, -1$




خاکہ 2.8




خاکہ 2.9



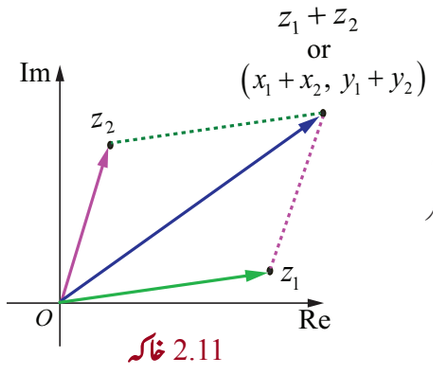

خاکہ 2.10

### (ii) مرکب اعداد کا جمع (Addition of complex numbers)

اگر $z_1 = x_1 + iy_1$ اور $z_2 = x_2 + iy_2$ ہو۔ جہاں $x_1, x_2, y_1$ اور $y_2 \in \mathbb{R}$ پھر ہم واضح کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) \\ &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \end{aligned}$$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)\,.$$




خاکہ 2.11

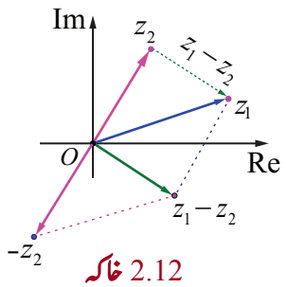
پہلے ہی ہم نے دیکھا ہے کہ سمتیہ (vector) ان کی لمبائی اور سمت سے مخصوص ہیں ترجمہ کے تحت دیئے جانے والا سمتیہ کوئی تبدیلی نہیں رکھتا جب $z_1 = x_1 + iy_1$ اور $z_2 = x_2 + iy_2$ ہو پھر متوازی الاضلاع کی جمع کے اصول تحت $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ کا حاصل جمع $(x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$ سے مطابقت رکھتا ہے یہ ان محدد (coordinates) اور ان کے اجزاء کے ساتھ بھی سمتیہ سے مطابقت رکھتا ہے۔ اس لئے مرکب مسطح میں موجود نقاط $z_1$، $z_2$ اور $z_1 + z_2$ سمتی (vectorially) طور پر حاصل کئے جاسکتے ہیں۔ جیسا کہ متصلہ (adjacent) خاکہ 2.11 میں دکھایا گیا ہے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 56 28-02-2023 12:26:40

### (iii) مرکب اعداد کی تفریق (Subtraction of complex numbers)

اسی طرح تفریق $z_1 - z_2$ کو ہم سمتیہ وکٹر چھڑا کر دکھا سکتے ہیں۔ جس کا ابتدائی نقطہ اور اختتامی نقطہ $(x_1 - x_2,\ y_1 - y_2)$ ہو۔ہم واضح کرتے ہیں کہ



خاکہ 2.12

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= z_1 + (-z_2) \\ &= (x_1 + iy_1) + (-x_2 - iy_2) \\ &= (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \end{aligned}$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

یہاں پر یہ غور کرنا ضروری ہے کہ سمتیہ $z_1 - z_2$ کے فرق کی نمائندگی کرنے والے سمتیے (vectors) کو $z_2$ کے اختتامی نقطہ سے $z_1$ کی نوک تک جوڑ کر کھینچا جاسکتا ہے۔ اس طرح کی نمائندگی، فرق عمل کے معنی اور تشریح کو تبدیل نہیں کرتی۔ سمتیہ $z_1$ اور $z_2$ نوکوں پر ملنے کے فرق کو نقطہ وار لکیر (ہرا) میں دکھایا گیا ہے۔

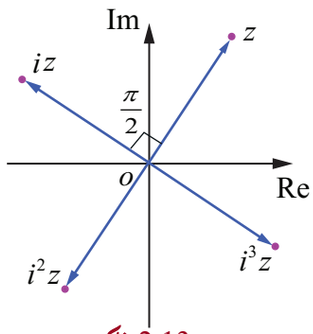
### (iv) مرکب اعداد کا ضرب (Multiplication of complex numbers)

مرکب اعداد $z_1$ اور $z_2$ کے ضرب کو اس طرح بیان کیا جاتا ہے کہ

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{aligned}$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

اگر چہ دو مرکب اعداد $z_1$ اور $z_2$ کا حاصل ضرب خود ایک سمتیہ (vector) کے ذریعہ نمائندگی کرنے والا ایک مرکب عدد ہے۔ $z_1 z_2$ اسی مسطح پر ہوتا ہے جس میں $z_1$، $z_2$ ہوں ظاہر ہے کہ پھر یہ حاصل ضرب نہ تو میزانی (scalar) ہے نہ کہ سمتیہ (vector) ہے جو سمتیہ الجبراء میں استعمال ہوتا ہے۔



خاکہ 2.13

### ریمارک (Remark)

#### مرکب عدد $z$ کا ضرب $i$ سے (Multiplication of complex number $z$ by $i$)

اگر $z = x + iy$ پھر

$$\begin{aligned} iz &= i(x + iy) \\ &= -y + ix. \end{aligned}$$

مرکب عدد $iz$ مبداء سے گھڑی کی سمت $90^\circ$ یا $\frac{\pi}{2}$ ریڈان (radians) کی طرف سے $z$ کا گھماؤ ہے عام طور پر، مرکب عدد $z$ کا حاصل ضرب $i$ سے $90^\circ$ گھڑی کی سمت میں مسلسل گردش کرتا ہے۔

## تشریح 2.2

فرض کرو $z_1 = 6 + 7i$ اور $z_2 = 3 - 5i$ پھر $z_1 + z_2$ اور $z_1 - z_2$ ہیں۔

$$\begin{aligned} \text{(i)}\ (3 - 5i) + (6 + 7i) &= (3 + 6) + (-5 + 7)i = 9 + 2i \\ (6 + 7i) - (3 - 5i) &= (6 - 3) + (7 - (-5))i = 3 + 12i. \end{aligned}$$

فرض کرو $z_1 = 2 + 3i$ اور $z_2 = 4 + 7i$ پھر $z_1 z_2$ ہیں۔

$$\begin{aligned} \text{(ii)}\ (2 + 3i)(4 + 7i) &= (2 \times 4 - 3 \times 7) + i(2 \times 7 + 3 \times 4) \\ &= (8 - 21) + (14 + 12)i = -13 + 26i. \end{aligned}$$




12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 57 28-02-2023 12:26:56

**مثال 2.2**

اگر مرکب عدد $(2+i)x+(1-i)y+2i-3$ اور $x+(-1+2i)y+1+i$ مساوی ہیں، تو حقیقی اعداد $x$ اور $y$ کی قیمت معلوم کرو۔

**حل**

فرض کرو کہ $z_1 = (2+i)x+(1-i)y+2i-3=(2x+y-3)+i(x-y+2)$ اور

$z_2 = x+(-1+2i)y+1+i=(x-y+1)+i(2y+1).$

دیا گیا $z_1 = z_2$

لہٰذا $(2x+y-3)+i(x-y+2)=(x-y+1)+i(2y+1).$

حقیقی اور خیالی حصے کو الگ الگ مساوی کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$2x+y-3 = x-y+1 \quad \Rightarrow \quad x+2y=4.$$
$$x-y+2 = 2y+1 \quad \Rightarrow \quad x-3y=-1.$$

اوپر کے مساوات حل کرنے پر ملتا ہے۔

$x=2$ اور $y=1.$

## مشق 2.2

1. اگر $z=5-2i$ اور $w=-1+3i$ ہو تو مندرجۂ ذیل کی تشخیص کرو۔

(i) $z+w$ (ii) $z-iw$ (iii) $2z+3w$
(iv) $zw$ (v) $z^2+2zw+w^2$ (vi) $(z+w)^2.$

2. مرکب عدد $z=2+3i$ دیا گیا ہے آرگنڈی خاکہ میں مرکب اعداد کی نمائندگی کریں۔

(i) $z,\ iz$ اور $z+iz$ (ii) $z,\ -iz$ اور $z-iz.$

3. حقیقی اعداد $x$ اور $y$ کی قیمتیں معلوم کرو اگر مرکب اعداد $(3-i)x-(2-i)y+2i+5$ اور $2x+(-1+2i)y+3+2i$ مساوی ہیں۔

## 2.3 مرکب اعداد کی بنیادی الجبریائی خصوصیات
## (Basic Algebraic Properties of Complex Numbers)

مرکب اعداد کے جمع اور ضرب کی خصوصیات حقیقی اعداد کی طرح ہیں۔ ہم یہاں بنیادی الجبریائی خصوصیات کو درج کرتے ہیں اور ان میں کچھ کی تصدیق کرتے ہیں۔

### 2.3.1 مرکب اعداد کی خصوصیات (Properties of complex numbers)

| مرکب اعداد مندرجۂ ذیل ضرب کی خصوصیات کو مطمئن کرتی ہے۔ | مرکب اعداد مندرجۂ ذیل جمع کی خصوصیات کو مطمئن کرتی ہے۔ |
|---|---|
| (i) شمولیت کی خصوصیت<br>کسی بھی مرکب اعداد $z_1$ اور $z_2$ کا حاصل ضرب $z_1 z_2$ بھی ایک مرکب عدد ہے۔ | (i) شمولیت کی خصوصیت<br>کسی بھی دو مرکب اعداد $z_1$ اور $z_2$ کے لئے $z_1+z_2$ کا حاصل جمع بھی ایک ممرکب عدد ہے۔ |



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 58 28-02-2023 12:27:08

| (ii) متبادلیت پذیر خاصیت | (ii) متبادلیت پذیر خاصیت |
|---|---|
| کسی بھی دو مرکب اعداد $z_1$ اور $z_2$ کیلئے۔<br>$z_1z_2 = z_2z_1$ | کسی بھی دو مرکب اعداد $z_1$ اور $z_2$ کیلئے۔<br>$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ . |
| (iii) مربوطی خصوصیت | (iii) مربوطی خصوصیت |
| کسی بھی تین مرکب اعداد $z_1$ ، $z_2$ اور $z_3$<br>$(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$ . | کسی بھی تین مرکب اعداد $z_1$ ، $z_2$ اور $z_3$<br>$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ . |
| (iv) ضربی تماثل | (iv) جمعی تماثل |
| ایک مرکب عدد $1 = 1+0i$ موجود ہے۔ جیسے کہ ہر مرکب عدد $z$ کے لئے<br>$z1 = 1z = z$<br>مرکب عدد $1 = 1+0i$ کو ضربی تماثل کے نام سے جانا جاتا ہے۔ | ایک مرکب عدد $0 = 0+0i$ موجود ہے جیسے کہ ہر مرکب عدد $z$ کے لئے<br>$z + 0 = 0 + z = z$<br>مرکب عدد $0 = 0+0i$ کو جمعی تماثل کے نام سے جانا جاتا ہے۔ |
| (v) ضربی معکوس | (v) جمعی معکوس |
| ہر غیر صفر مرکب عدد $z$ کے لئے ایک مرکب عدد $w$ موجود ہے۔اس طرح کہ $zw = wz = 1$.<br>$w$ ، $z$ کا ضربی معکوس کہلاتا ہے۔<br>$w$ کو $z^{-1}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ | ہر مرکب عدد $z$ کیلئے ایک مرکب عدد $-z$ موجود ہے۔اس طرح کہ<br>$z + (-z) = (-z) + z = 0.$<br>$-z$ ، $z$ کا جمعی معکوس کہلاتا ہے۔ |
| (vi) تقسیمی خصوصیات (جمع پر ضرب کی تقسیمی خصوصیت)<br>کسی بھی تین مرکب اعداد $z_1$ ، $z_2$ اور $z_3$ کے لئے<br>$(z_1 + z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3$ . اور $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$ | |

آئیے ہم اب کچھ خصوصیات کو ثابت کریں۔

**خصوصیت**

**جمع پر متبادلت پذیر کی خاصیت**

کسی بھی دو مرکب اعداد $z_1$ اور $z_2$ کیلئے، $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ ہمارے پاس ہے

**ثبوت**

فرض کرو کہ $z_1 = x_1 + iy_1$، $z_2 = x_2 + iy_2$ اور $x_1, x_2, y_1$ اور $y_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) \\ &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \\ &= (x_2 + x_1) + i(y_2 + y_1) \qquad (x_1, x_2, y_1 \text{ اور } y_2 \in \mathbb{R} \text{ جب کہ}) \\ &= (x_2 + iy_2) + (x_1 + iy_1) \\ &= z_2 + z_1. \end{aligned}$$

■

**خصوصیت**

**ضرب پر معکوسی خصصیت**

یہ ثابت کریں کہ $z = x + iy$ ایک غیر صفر مرکب عدد کا ضربی معکوس ہے $\frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2}$.



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 59 28-02-2023 12:27:18

**ثبوت**

جمعی معکوس سے ضربی معکوس کم واضح (less obvious) ہے۔

فرض کرو کہ $z = x + iy$ کا معکوس $z^{-1} = u + iv$ ہے۔

ہمارے پاس $z\, z^{-1} = 1$ ہے

یعنی $(x + iy)(u + iv) = 1$

$$(xu - yv) + i(xv + uy) = 1 + i0$$

حقیقی اور خیالی حصے کو مساوی کرنے پر

$$xu - yv = 1 \quad \text{اور} \quad xv + uy = 0 .$$

$u$ اور $v$ میں بہ یک وقت مساوات کے مندرجہ بالا نظام کو حل کرکے۔

حاصل ہوتا ہے $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ اور $v = \dfrac{-y}{x^2 + y^2}$ ($\because z$ ایک غیر صفر ہے $\Leftarrow x^2 + y^2 > 0$)

اگر $z = x + iy$ پھر $z^{-1} = \dfrac{x}{x^2 + y^2} + i\dfrac{-y}{x^2 + y^2}$ ($\because z^{-1}$ غیر واضح ہے جب $z = 0$) ■

غور کریں کہ مذکورہ بالا مثال مرکب عدد $z$ کے معکوس $z^{-1}$ کے موجودگی کو ظاہر کرتی ہے۔دیا گیا مرکب عدد کا معکوس معلوم کرنے کے لئے ہم آسانی سے $z^{-1} = \dfrac{1}{z}$ استعمال کرتے ہیں۔ اگر $z_1$ اور $z_2$ دو مرکب اعداد ہیں جہاں $z_2 \neq 0$ ہو، پھر $z_1$ اور $\dfrac{1}{z_2}$ کا حاصل ضرب کو $\dfrac{z_1}{z_2}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ دوسری خصوصیات کی بھی اسی طرح تصدیق کی جاسکتی ہے۔ اگلے حصہ کے دوران ہم ایک مرکب عدد کے زوجی کی وضاحت کرتے ہیں۔ جو مرکب عدد معلوم کرنے میں ہمار مدد کرے گا۔

### مرکب اعداد اشاریہ کے قوانین کی پابندی کرنا (Complex numbers obey the laws of indices)

(i) $z^m z^n = z^{m+n}$ (ii) $\dfrac{z^m}{z^n} = z^{m-n}$ , $z \neq 0$ (iii) $\left(z^m\right)^n = z^{mn}$ (iv) $\left(z_1 z_2\right)^m = {z_1}^m {z_2}^m$

## مشق 2.3

1. اگر $z_1 = 1 - 3i$ ، $z_2 = -4i$ اور $z_3 = 5$ ہوتو بتاؤ کہ

(i) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (ii) $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$.

2. اگر $z_1 = 3i$ ، $z_2 = -7i$ اور $z_3 = 5 + 4i$ ہوتو بتاؤ کہ

(i) $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ (ii) $(z_1 + z_2)z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$.

3. اگر $z_1 = 2 + 5i$ ، $z_2 = -3 - 4i$ اور $z_3 = 1 + i$ ہوتو $z_1$ ، $z_2$ اور $z_3$ کے جمعی اور ضربی معکوس کرو۔

## 2.4 مرکب عدد کا زوجی (Conjugate of a Complex Number)

اس حصے میں مرکب عدد کے زوجی اس کے ہندسی نمائندگی اور مناسب مثالوں کے ساتھ حضوصیات کے بارے میں مطالعہ کرتے ہیں ۔

**تعریف 2.3**

مرکب عدد $x + iy$ کہ زوجی (conjugate) کی وضاحت مرکب عدد $x - iy$. کی حیثیت سے کی گئی ہے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 60 28-02-2023 12:27:30

$z$ کے مرکبِ زوجی کو $\overline{z}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ مرکب عدد $z$ کا زوجی حاصل کرنے کے لئے، $z$ میں $i$ کو $-i$ سے تبدیل کریں۔ مثال کے طور پر $2+5i$ کا زوجی $2-5i$ ہے۔ مرکب عدد اور اس کے حاصل زوجی کا حاصل ضرب ایک حقیقی عدد ہے۔

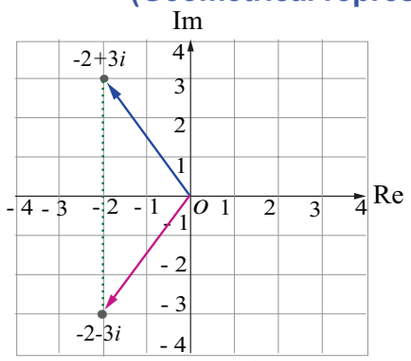
مثال کے طور پر،

(i) $(x+iy)(x-iy)=x^2-(iy)^2=x^2+y^2$

(ii) $(1+3i)(1-3i)=(1)^2-(3i)^2=1+9=10$.

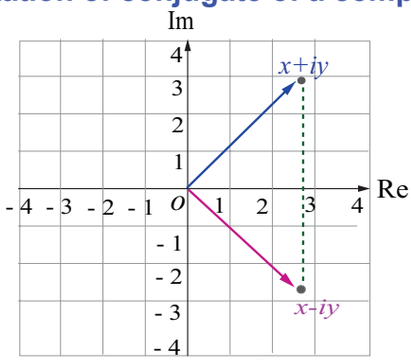
ہندسی طور پر، $z$ کا زوجی، حقیقی محور پر $z$ کی عکاسی کرتے ہوئے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

## 2.4.1 ایک مرکب عدد کے زوجی کی ہندسی نمائندگی
## (Geometrical representation of conjugate of a complex number)




مرکب عدد کا زوجی

خاکہ 2.14




مرکب عدد کا زوجی

خاکہ 2.15

### غور کیجئے (Note)

دو مرکب اعداد $x+iy$ اور $x-iy$ ایک دوسرے کے زوجین (conjugate) ہیں۔ زوجی، مرکب عدد کی تقسیم میں کارآمد ہیں ایک مرکب عدد کے شمار کنندہ اور نسب نما کو اس کے نسب نما کے زوجی (conjugate) سے ضرب کرنے پر نسب نما کو حقیقی عدد میں تبدیل کیا جاسکتا ہے۔ یہ عمل نسب نما کو ناطق بنانے اور سرڈ کو دفع کرنے کی طرح ہے۔

## 2.4.2 مرکب زوجی کی خصوصیات (Properties of Complex Conjugates)

(1) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$

(2) $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$

(3) $\overline{z_1 z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$

(4) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}},\ z_2\neq 0$

(5) $\mathrm{Re}(z)=\frac{z+\overline{z}}{2}$

(6) $\mathrm{Im}(z)=\frac{z-\overline{z}}{2i}$

(7) $\overline{(z^n)}=(\overline{z})^n$، جہاں $n$ ایک سالم عدد ہے۔

(8) $z$ ایک حقیقی عدد ہے اگر اور صرف اگر $z=\overline{z}$

(9) $z$ ایک خالصتاً خیالی ہے اگر اور صرف اگر $z=-\overline{z}$

(10) $\overline{\overline{z}}=z$

آیئے ہم کچھ خصوصیات کی تصدیق کریں۔

**خصوصیت**

کسی بھی دو مرکب اعداد $z_1$ اور $z_2$ کیلئے ہمارے پاس ہے $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$.

**ثبوت**

فرض کرو کہ $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$ اور $x_1, x_2, y_1$ اور $y_2\in\mathbb{R}$

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)}$$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 61 28-02-2023 12:27:37

$$= \overline{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} = (x_1+x_2)-i(y_1+y_2)$$
$$= (x_1-iy_1)+(x_2-iy_2)$$
$$= \overline{z_1}+\overline{z_2}\ .$$

اس میں حسابات کو داخل کرکے کسی حد تک محدود ارقام کیلئے عام کی جاسکتی ہے۔

■ $\overline{z_1+z_2+z_3+\cdots z_n} = \overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}+\cdots+\overline{z_n}$ .

**خصوصیت**

$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$ جہاں $x_1, x_2, y_1$ اور $y_2 \in \mathbb{R}$ ہے۔

**ثبوت**

فرض کرو $z_1 = x_1+iy_1$ اور $z_2 = x_2+iy_2$

پھر $z_1 z_2 = (x_1+iy_1)(x_2+iy_2) = (x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$

لہٰذا $\overline{z_1z_2} = \overline{(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)} = (x_1x_2-y_1y_2)-i(x_1y_2+x_2y_1)$,

اور $\overline{z}_1\overline{z}_2 = (x_1-iy_1)(x_2-iy_2) = (x_1x_2-y_1y_2)-i(x_1y_2+x_2y_1)$

لہٰذا، $\overline{z_1z_2} = \overline{z}_1\overline{z}_2$

■

**خصوصیت**

مرکب عدد $z$ خالصتاً خیالی ہے اگر اور صرف اگر $z = -\overline{z}$ ہو۔

**ثبوت**

فرض کرو $z = x+iy$ پھر واضح طور پر $\overline{z} = x-iy$

لہٰذا $z = -\overline{z}$

$\Leftrightarrow\ x+iy = -(x-iy)$

$\Leftrightarrow\ 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\Leftrightarrow$ $z$ ایک خالصتاً خیالی ہے۔

■ اس طرح سے، ہم مرکب اعداد کے زوجی کی دوسری خصوصیات کی تصدیق کرسکتے ہیں۔

**مثال 2.3**

$\dfrac{3+4i}{5-12i}$ کو $x+iy$ کی شکل میں لکھو لہٰذا اس کا حقیقی حصہ اور خیالی حصہ معلوم کرو۔

**حل**

$\dfrac{3+4i}{5-12i}$ کے حقیقی اور خیالی حصے کو معلوم کرنے کے لئے پہلے ہم کو اسے مستطیل کی شکل $x+iy$ میں ظاہر کرنا چاہئے۔ ہمیں خارج قسمت کو آسان بنانے کے لئے شمار کنندہ اور نسب نما کو نسب نما کے زوجی سے ضرب کریں گے تاکہ نسب نما سے $i$ خارج ہو۔

$$\frac{3+4i}{5-12i} = \frac{(3+4i)(5+12i)}{(5-12i)(5+12i)}$$
$$= \frac{(15-48)+(20+36)i}{5^2+12^2}$$
$$= \frac{-33+56i}{169} = -\frac{33}{169}+i\frac{56}{169}\ .$$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 62 28-02-2023 12:27:47

چنانچہ $\frac{3+4i}{5-12i} = -\frac{33}{169}+i\frac{56}{169}$ ایک $x+iy$ کی شکل میں ہے۔

لہٰذا، $-\frac{33}{169}$ حقیقی حصہ اور $\frac{56}{169}$ خیالی حصہ ہے۔

**مثال 2.4**

$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3-\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$ کو مستطیل شکل میں مختصر کرو۔

**حل**

ہم غور کریں، $\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+2i-1}{1+1}=\frac{2i}{2}=i$

اور، $\frac{1-i}{1+i} = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{-1}=\frac{1}{i}=-i$

لہٰذا، $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3-\left(\frac{1-i}{1-i}\right)^3 = i^3-(-i)^3=-i-i=-2i$

**مثال 2.5**

اگر $\frac{z+3}{z-5i}=\frac{1+4i}{2}$ ہو، تو مرکب عدد $z$ کی مستطیلی شکل معلوم کرو۔

**حل**

ہمارے پاس ہے، $\frac{z+3}{z-5i} = \frac{1+4i}{2}$

$\Rightarrow 2(z+3) = (1+4i)(z-5i)$

$\Rightarrow 2z+6 = (1+4i)z+20-5i$

$\Rightarrow (2-1-4i)z = 20-5i-6$

$\Rightarrow z = \frac{14-5i}{1-4i}=\frac{(14-5i)(1+4i)}{(1-4i)(1+4i)}=\frac{34+51i}{17}=2+3i$ .

**مثال 2.6**

اگر $z_1=3-2i$ اور $z_2=6+4i$ ہو $\frac{z_1}{z_2}$ کی مستطیلی شکل معلوم کرو۔

**حل**

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3-2i}{6+4i}=\frac{3-2i}{6+4i}\times\frac{6-4i}{6-4i}$ $z_1$ اور $z_2$ کی دی گئی قیمت کی مدد سے

$= \frac{(18-8)+i(-12-12)}{6^2+4^2}=\frac{10-24i}{52}=\frac{10}{52}-\frac{24i}{52}$

$= \frac{5}{26}-\frac{6}{13}i$ .



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 63 28-02-2023 12:27:57

**مثال 2.7**

اگر $z=(2+3i)(1-i)$، $z^{-1}$ معلوم کرو۔

**حل**

ہمارے پاس ہے، $z = (2+3i)(1-i)=(2+3)+(3-2)i=5+i$

$$\Rightarrow \quad z^{-1} = \frac{1}{z}=\frac{1}{5+i} .$$

شمار کنندہ اور نسب نما کو نسب نما کے زوجی سے ضرب کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا۔

$$z^{-1} = \frac{(5-i)}{(5+i)(5-i)}=\frac{5-i}{5^2+1^2}=\frac{5}{26}-i\frac{1}{26}$$

$$\Rightarrow \quad z^{-1} = \frac{5}{26}-i\frac{1}{26}.$$

**مثال 2.8**

بتاؤ کہ (i) $\left(2+i\sqrt{3}\right)^{10}+\left(2-i\sqrt{3}\right)^{10}$ حقیقی ہے اور (ii) $\left(\frac{19+9i}{5-3i}\right)^{15}-\left(\frac{8+i}{1+2i}\right)^{15}$ ایک خالصتاً خیالی ہے۔

**حل**

(i) فرض کرو کہ $z = \left(2+i\sqrt{3}\right)^{10}+\left(2-i\sqrt{3}\right)^{10}$، پھر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned}
\overline{z} &= \overline{\left(2+i\sqrt{3}\right)^{10}+\left(2-i\sqrt{3}\right)^{10}} \\
&= \overline{\left(2+i\sqrt{3}\right)^{10}}+\overline{\left(2-i\sqrt{3}\right)^{10}} \quad (\because \overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}) \\
&= \left(\overline{2+i\sqrt{3}}\right)^{10}+\left(\overline{2-i\sqrt{3}}\right)^{10} \quad \left(\because \left(\overline{z^n}\right)=\left(\overline{z}\right)^n\right) \\
&= \left(2-i\sqrt{3}\right)^{10}+\left(2+i\sqrt{3}\right)^{10}=z
\end{aligned}$$

$\overline{z} = z \Rightarrow z$ حقیقی ہے

(ii) فرض کرو کہ $z = \left(\frac{19+9i}{5-3i}\right)^{15}-\left(\frac{8+i}{1+2i}\right)^{15}$

یہاں، $\frac{19+9i}{5-3i} = \frac{(19+9i)(5+3i)}{(5-3i)(5+3i)}$

$$= \frac{(95-27)+i(45+57)}{5^2+3^2}=\frac{68+102i}{34}$$

$$= 2+3i \qquad (1)$$

اور $\frac{8+i}{1+2i} = \frac{(8+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}$

$$= \frac{(8+2)+i(1-16)}{1^2+2^2}=\frac{10-15i}{5}$$

$$= 2-3i. \qquad (2)$$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 64 28-02-2023 12:28:07

$$z = \left(\frac{19+9i}{5-3i}\right)^{15} - \left(\frac{8+i}{1+2i}\right)^{15}$$ اب

$$\Rightarrow z = (2+3i)^{15} - (2-3i)^{15} .$$ ((1)) اور (2) سے)

$$\overline{z} = \left(\overline{(2+3i)^{15} - (2-3i)^{15}}\right)$$ تعریف سے،

$$= \left(\overline{2+3i}\right)^{15} - \left(\overline{2-3i}\right)^{15}$$ (زوجی کی خصوصیات کے استعمال سے)

$$= (2-3i)^{15} - (2+3i)^{15} = -\left((2+3i)^{15} - (2-3i)^{15}\right)$$

$$\Rightarrow \overline{z} = -z .$$

لہٰذا، $z = \left(\frac{19+9i}{5-3i}\right)^{15} - \left(\frac{8+i}{1+2i}\right)^{15}$ خالصتاً خیالی ہے۔

## مشق 2.4

1. مندرجۂ ذیل کو مستطیل شکل میں لکھو۔

(i) $\overline{(5+9i)+(2-4i)}$ (ii) $\frac{10-5i}{6+2i}$ (iii) $\overline{3i} + \frac{1}{2-i}$

2. اگر $z = x + iy$ ہو تو مندرجۂ ذیل کی مستطیل شکل لکھو۔

(i) $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)$ (ii) $\mathrm{Re}(i\overline{z})$ (iii) $\mathrm{Im}(3z + 4\overline{z} - 4i)$

3. اگر $z_1 = 2 - i$ اور $z_2 = -4 + 3i$ ہو تو، $z_1 z_2$ اور $\frac{z_1}{z_2}$ کا معکوس معلوم کرو۔

4. مرکب اعداد $u$ ، $v$ اور $w$ کا تعلق $\frac{1}{u} = \frac{1}{v} + \frac{1}{w}$ ہے۔ اگر $v = 3 - 4i$ اور $w = 4 + 3i$ ہو تو $u$ کی مستطیل شکل معلوم کرو۔

5. مندرجۂ ذیل خصوصیات کو ثابت کرو۔

(i) $z$ حقیقی ہے اگر اور صرف اگر $z = \overline{z}$ ہو (ii) $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$ اور $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$

6. $\left(\sqrt{3} + i\right)^n$ (i) حقیقی (ii) خالصتاً خیالی ہونے کے لئے مثبت سالم عدد $n$ کی کم سے کم قیمت معلوم کرو۔

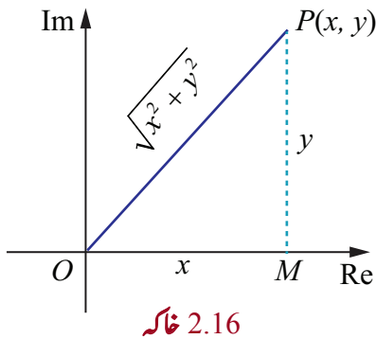
7. بتاؤ کہ (i) $\left(2 + i\sqrt{3}\right)^{10} - \left(2 - i\sqrt{3}\right)^{10}$ خالصتاً خیالی ہے۔

(ii) $\left(\frac{19-7i}{9+i}\right)^{12} + \left(\frac{20-5i}{7-6i}\right)^{12}$ حقیقی ہے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 65 28-02-2023 12:28:18

## 2.5 مرکب عدد کا معین ضروب
## (Modulus of a Complex Number)



خاکہ 2.16

بالکل اسی طرح جیسے کسی حقیقی عدد کی مطلق (absolute) قیمت حقیقی عددی خط کے ساتھ، عدد کا فاصلہ مبداد سے پیمائش کرتا ہے مرکب عدد کا معین ضروب (origin) مبداء سے وہ عدد کا فاصلہ مرکب مسطح (modulus) پر پیمائش کرتا ہے $z = x + iy$ کومبداء سے خط کی لمبائی، شعاعی خط کے ساتھ مشاہدہ کریں پھر یہ محض ایک مثلث زاویہ قائمہ کا وتر ہے جس کے ایک ضلع کی لمبائی $x$ اور دوسرے ضلع کی لمبائی $y$ ہے۔

**تعریف 2.4**

اگر $z = x + iy$ ہوتو، $z$ کے معین ضروب کو $|z|$ سے ظاہر کیا جاتا ہے اس کی تعریف $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ہے

مثال کے طور پر

(i) $|i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$

(ii) $|-12i| = \sqrt{0^2 + (-12)^2} = 12$

(iii) $|12 - 5i| = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = \sqrt{169} = 13$

### غور کیجئے (Note)

اگر $z = x + iy$ ، پھر $\bar{z} = x - iy$ پھر $z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = (x)^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$

$$|z|^2 = z\bar{z} .$$

### 2.5.1 مرکب عدد کے معین ضروب کی خصوصیات (Properties of Modulus of a complex number)

(1) $|z| = |\bar{z}|$

(2) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ (مثلث کی عدم مساوات)

(3) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

(4) $|z_1 - z_2| \ge ||z_1| - |z_2||$

(5) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \neq 0$

(6) $|z^n| = |z|^n$ ، جہاں $n$ ایک سالم عدد ہے

(7) $\text{Re}(z) \le |z|$

(8) $\text{Im}(z) \le |z|$

چلئے ہم چند خصوصیات کو ثابت کریں۔

**خصوصیت مثلث کی عدم مساوات**

کسی بھی دو مرکب اعداد $z_1$ اور $z_2$ کیلئے ہمارے پاس ہے $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

**ثبوت**

استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) && (\because |z|^2 = z\bar{z}) \\ &= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) && (\because \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\ &= z_1\bar{z}_1 + (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) + z_2\bar{z}_2 \end{aligned}$$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 66 28-02-2023 12:28:27

$$= z_1\overline{z}_1 + \left(z_1\overline{z}_2 + \overline{z_1\overline{z}_2}\right) + z_2\overline{z}_2 \qquad (\because \overline{\overline{z}} = z)$$

$$= |z_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2) + |z_2|^2 \qquad (\because\ 2\,\mathrm{Re}(z) = z + \overline{z})$$

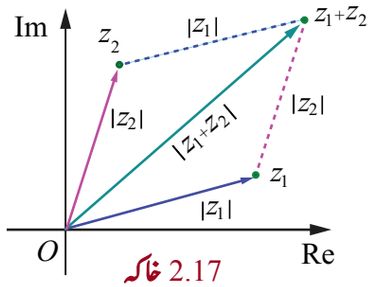
$$\leq |z_1|^2 + 2\left|z_1\overline{z_2}\right| + |z_2|^2 \qquad (\because\ \mathrm{Re}(z) \leq |z|)$$

$$= |z_1|^2 + 2|z_1|\,|z_2| + |z_2|^2 \qquad (\because |z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2| \ \text{اور}\ |z| = |\overline{z}|)$$

$$\Rightarrow\ |z_1 + z_2|^2 \leq \left(|z_1| + |z_2|\right)^2$$

$$\Rightarrow |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

## ہندسی تشریح (Geometrical interpretation)



خاکہ 2.17

اب دکھائے گئے مثلث کی راسیں $O$ ، $z_1$ یا $z_2$ اور $z_1 + z_2$ پر غور کریں ہم ہندسی سے جانتے ہیں مثلث زاویہ قائمہ کے ضلع کی لمبائی سمتیہ $z_1 + z_2$ کے موافق باقی دو ضلعوں کے لمبائیوں کی جمع سے زیادہ نہیں ہو سکتی $z_1 + z_2$ یہی خصوصیت "مثلثی عدم مساوات" ("Triangle Inequality") کہلانے کی وجہ ہے۔

اس میں حسابات کو داخل کرکے کسی حد تک محدود ارقام کیلئے عام کیا جاسکتا ہے۔

$|z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3| + \cdots + |z_n|$ کیلئے $n = 2, 3, \cdots$

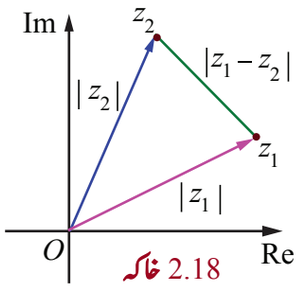
**خصوصیت** مرکب مسطح (complex plane) پر دو نقاط $z_1$ اور $z_2$ کا درمیانی فاصلہ $|z_1 - z_2|$ ہے۔

اگر $z_1 = x_1 + iy_1$ اور $z_2 = x_2 + iy_2$ پھر

$$|z_1 - z_2| = \left|(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)\,i\right|$$

$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\,.$$

## ریمارک (Remark)



خاکہ 2.18

مرکب مسطح پر دو نقاط $z_1$ اور $z_2$ کا درمیانی فاصلہ $|z_1 - z_2|$ ہے۔

اس طرح کی دلیل سے ہم، مبداد $z_1$ اور $z_2$ کو مثلث کے راسین رکھ لیتے ہیں تو ہمارے پاس ہے۔

$$|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$\left||z_1| - |z_2|\right| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

اور $\left||z_1| - |z_2|\right| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

**خصوصیت** حاصل ضرب کا معین ضروب، معیون ضروب (moduli) کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔

کسی بھی دو مرکب اعداد $z_1$ اور $z_2$ کیلئے ہمارے پاس ہے $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

**ثبوت**

ہمارے پاس ہے $|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2})$ $(\because |z|^2 = z\overline{z})$

$= (z_1)(z_2)\left(\overline{z_1}\right)\left(\overline{z_2}\right)$ $(\because \overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1\,\overline{z}_2)$




12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 67 28-02-2023 12:28:40

$= \left(z_1\overline{z_1}\right)\left(z_2\overline{z_2}\right) = |z_1|^2\,|z_2|^2$ (متبادلت پذیر کے لحاظ سے $z_2\overline{z_1} = \overline{z_1}z_2$)

لہٰذا، $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$

## غور کیجئے (Note)

اس میں حساب کو داخل کرکے کسی حد تک محدود ارقام کیلئے عام کیا جاسکتا ہے۔

$$|z_1z_2z_3\cdots z_n| = |z_1||z_2||z_3|\cdots|z_n|$$

مرکب اعداد کے حاصل ضرب کا معین ضروب معیون ضروب کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔

اسی طرح سے ہم مرکب عدد کے معین ضروب کی دوسری خصوصیات بھی ثابت کرسکتے ہیں۔

### مثال 2.9

اگر $z_1 = 3+4i,\ z_2 = 5-12i$ اور $z_3 = 6+8i$ ہوتو $|z_1|$، $|z_2|$، $|z_3|$، $|z_1+z_2|$، $|z_2-z_3|$ اور $|z_1+z_3|$ کی معلوم کرو۔

### حل

$z_1$، $z_2$ اور $z_3$ کی دی ہوئی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے ہمیں حاصل ہوتا۔

$$|z_1| = |3+4i| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$$

$$|z_2| = |5-12i| = \sqrt{5^2+(-12)^2} = 13$$

$$|z_3| = |6+8i| = \sqrt{6^2+8^2} = 10$$

$$|z_1+z_2| = |(3+4i)+(5-12i)| = |8-8i| = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$$

$$|z_2-z_3| = |(5-12i)-(6+8i)| = |-1-20i| = \sqrt{401}$$

$$|z_1+z_3| = |(3+4i)+(6+8i)| = |9+12i| = \sqrt{225} = 15$$

غور کریں کہ یہاں، پر سب معاملات میں مثلث عدم مساوات مطمئن ہیں۔

$|z_1+z_3| = |z_1|+|z_3| = 15$ (کیوں؟)

### مثال 2.10

مندرجۂ ذیل معلوم کرو

(i) $\left|\dfrac{2+i}{-1+2i}\right|$ (ii) $\left|\overline{(1+i)}(2+3i)(4i-3)\right|$ (iii) $\left|\dfrac{i(2+i)^3}{(1+i)^2}\right|$

### حل

(i) $$\left|\frac{2+i}{-1+2i}\right| = \frac{|2+i|}{|-1+2i|} = \frac{\sqrt{2^2+1^2}}{\sqrt{(-1)^2+2^2}} = 1. \qquad \left(\because \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},\ z_2 \neq 0\right)$$

(ii) $$\left|\overline{(1+i)}(2+3i)(4i-3)\right| = \left|\overline{(1+i)}\right|\,|2+3i|\,|4i-3| \qquad \left(\because |z_1z_2z_3| = |z_1||z_2||z_3|\right)$$

$$= |1+i|\,|2+3i|\,|-3+4i| \qquad \left(\because |z| = |\overline{z}|\right)$$

$$= \left(\sqrt{1^2+1^2}\right)\left(\sqrt{2^2+3^2}\right)\left(\sqrt{(-3)^2+4^2}\right)$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{13}\right)\left(\sqrt{25}\right) = 5\sqrt{26}.$$

(iii) $$\left|\frac{i(2+i)^3}{(1+i)^2}\right| = \frac{|i|\,|(2+i)^3|}{|(1+i)^2|} = \frac{1|2+i|^3}{|1+i|^2} = \frac{\left(\sqrt{4+1}\right)^3}{\left(\sqrt{2}\right)^2} \quad \left(\because \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},\ z_2 \neq 0\right)$$

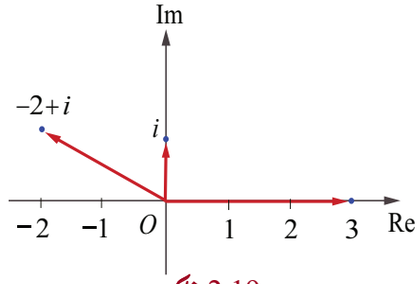
$$= \frac{\left(\sqrt{5}\right)^3}{2} = \frac{5\sqrt{5}}{2}.$$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 68 28-02-2023 12:28:53

**مثال 2.11**

نقاط $i$ ، $-2+i$ اور 3 میں کونسا نقطہ مبداء (origin) سے بہت دور ہے۔



خاکہ 2.19

**حل**

مبداء سے $z = i, -2+i,$ اور 3 کے درمیانی فاصلہ ہیں۔

$$|z| = |i| = 1$$

$$|z| = |-2+i| = \sqrt{(-2)^2+1^2} = \sqrt{5}$$

$$|z| = |3| = 3$$

$1 < \sqrt{5} < 3$ کیونکہ مبداء سے بہت دور نقطہ 3 ہے۔

**مثال 2.12**

اگر $z_1$ ، $z_2$ اور $z_3$ مرکب اعداد ہیں اس طرح کہ $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_1+z_2+z_3| = 1$ ، $\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right|$ کی قیمت معلوم کرو۔

**حل**

چونکہ $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1,$

$$|z_3|^3 = 1 \Rightarrow z_3\overline{z}_3 = 1 \text{ اور } |z_1|^2 = 1 \Rightarrow z_1\overline{z}_1 = 1, \; |z_2|^2 = 1 \Rightarrow \overline{z}_2 z_2 = 1,$$

چنانچہ $\overline{z}_1 = \frac{1}{z_1}$ ، $\overline{z}_2 = \frac{1}{z_2}$ اور $\overline{z}_3 = \frac{1}{z_3}$ اور لہٰذا،

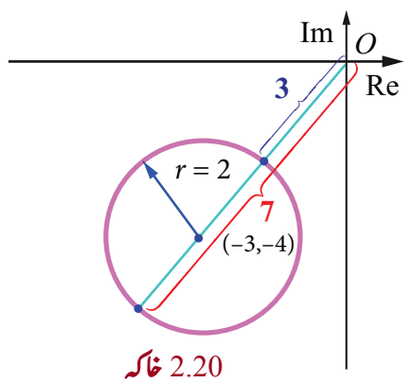
$$\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right| = \left|\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}\right|$$

$$= \overline{|z_1+z_2+z_3|} = |z_1+z_2+z_3| = 1.$$

**مثال 2.13**

اگر $|z| = 2$ ہو تو بتلاؤ $3 \le |z+3+4i| \le 7$

**حل**



خاکہ 2.20

$$|z+3+4i| \le |z| + |3+4i| = 2+5 = 7$$

$$|z+3+4i| \le 7 \qquad (1)$$

$$|z+3+4i| \ge \big||z| - |3+4i|\big| = |2-5| = 3$$

$$|z+3+4i| \ge 3 \qquad (2)$$

(1) اور (2) کی طرف سے ہمیں $3 \le |z+3+4i| \le 7$ حاصل ہوتا ہے۔

**غور کیجئے (Note)**

ہمیں اوپر حد (upper bound) اور نیچی حد (lower bound) معلوم کرنے کے لئے $\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1+z_2| \le |z_1| + |z_2|.$ استعمال ہوتا ہے۔




12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 69 28-02-2023 12:29:04

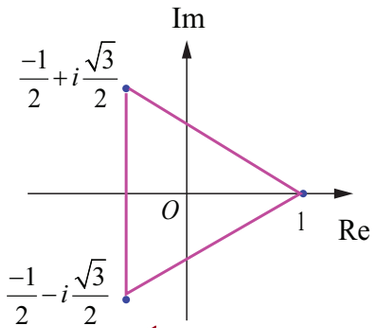
**مثال 2.14**

دکھلاؤ کہ یہ نقاط $1$ , $\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ اور $\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ایک مثلث مساوی الاضلاع کے راسیں ہیں۔

**حل**

یہی کافی ہے ہم ثابت کرتے ہیں کہ دیئے گئے مثلث کے اضلاع مساوی ہیں۔

فرض کرو $z_1=1$ ، $z_2=\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ اور $z_3=\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ . مثلث کے اضلاع کی لمبائی



خاکہ 2.21

$$|z_1-z_2| = \left|1-\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right| = \left|\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$|z_2-z_3| = \left|\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{3}$$

$$|z_3-z_1| = \left|\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-1\right| = \left|\frac{-3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{3}$$

جب ضلع مساوی ہوں، تو دیئے گئے نقاط ایک مثلث مساوی الاضلاع بناتے ہیں۔ ■

**مثال 2.15**

فرض کرو کہ $z_1$ ، $z_2$ اور $z_3$ مرکب اعداد ہیں، اس طرح کہ $|z_1|=|z_2|=|z_3|=r>0$ اور $z_1+z_2+z_3\neq 0$ ہو تو ثابت کرو کہ

$$\left|\frac{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}{z_1+z_2+z_3}\right| = r$$

**حل**

$$|z_1| = |z_2|=|z_3|=r \Rightarrow z_1\bar{z}_1=z_2\bar{z}_2=z_3\bar{z}_3=r^2 \text{ دیا گیا ہے}$$

$$\Rightarrow z_1 = \frac{r^2}{\bar{z}_1},\quad z_2=\frac{r^2}{\bar{z}_2},\quad z_3=\frac{r^2}{\bar{z}_3}$$

$$z_1+z_2+z_3 = \frac{r^2}{\bar{z}_1}+\frac{r^2}{\bar{z}_2}+\frac{r^2}{\bar{z}_3} \text{ لہٰذا}$$

$$= r^2\left(\frac{\bar{z}_2\bar{z}_3+\bar{z}_1\bar{z}_3+\bar{z}_1\bar{z}_2}{\bar{z}_1\bar{z}_2\bar{z}_3}\right)$$

$$|z_1+z_2+z_3| = |r^2|\left|\frac{\overline{z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2}}{\overline{z_1z_2z_3}}\right| \quad (\because \bar{z}_1+\bar{z}_2=\overline{z_1+z_2})$$

$$= r^2\frac{|z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2|}{|z_1||z_2||z_3|} \quad (\because |z|=|\bar{z}| \text{ اور } |z_1z_2z_3|=|z_1||z_2||z_3|)$$

$$|z_1+z_2+z_3| = r^2\frac{|z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2|}{r^3} = \frac{|z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2|}{r}$$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 70 28-02-2023 12:29:16

$$\Rightarrow \quad \frac{|z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2|}{|z_1+z_2+z_3|} = r \,.\ (\text{دیا گیا ہے۔}\ z_1+z_2+z_3 \neq 0)$$

$$\left|\frac{z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2}{z_1+z_2+z_3}\right| = r \quad \text{اس طرح،}$$

**مثال 2.16**

بتلاؤ کہ مساوات $z^2 = \bar{z}$ چار حل رکھتا ہے۔

**حل**

$$z^2 = \bar{z} \quad \text{لہٰذا،}$$

$$\Rightarrow |z|^2 = |z|$$

$$\Rightarrow |z|(|z|-1) = 0,$$

$$\Rightarrow |z| = 0 \text{ یا } |z| = 1.$$

$|z| = 0 \Rightarrow z = 0$ ایک حل ہے

$|z| = 1 \Rightarrow z\bar{z} = 1 \Rightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}.$

$z^2 = \bar{z}$ دیا گیا ہے $\Rightarrow z^2 = \frac{1}{z} \Rightarrow z^3 = 1.$

یہ 3 غیر صفر حل رکھتا ہے لہٰذا، صفر حل سمیت، چار حل ہیں۔

## 2.5.2 مرکب عدد کا جذر المربع (Square roots of a complex number)

فرض کرو $a+ib$ کا جذرالمربع $x+iy$ ہے

یعنی، $x+iy = \sqrt{a+ib}$ جہاں $x, y \in \mathbb{R}$،

$$a+ib = (x+iy)^2 = x^2-y^2+i2xy$$

حقیقی اور خیالی حصوں کو مساوی حل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا۔

$$x^2-y^2 = a \quad \text{اور} \quad 2xy = b$$

$$(x^2+y^2)^2 = (x^2-y^2)^2+4x^2y^2 = a^2+b^2$$

$$x^2+y^2 = \sqrt{a^2+b^2}, \quad \text{چونکہ } x^2+y^2 \text{ مثبت ہے}$$

حل کرنے سے $x^2-y^2 = a$ اور $x^2+y^2 = \sqrt{a^2+b^2}$، ہمیں حاصل ہو گا۔

$$x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \;;\; y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}.$$

چونکہ $2xy = b$ یہ واضح ہے کہ جب $b$ مثبت ہے تو $x$ اور $y$ دونوں کی ایک ہی علامت ہوگی اور $b$ منفی ہو تو $x$ اور $y$ کی مختلف علامت ہوگی۔

لہٰذا $\sqrt{a+ib} = \pm\left(\sqrt{\frac{|z|+a}{2}}+i\frac{b}{|b|}\sqrt{\frac{|z|-a}{2}}\right)$، جہاں $b \neq 0$، $(\because \text{Re}(z) \leq |z|)$

ایک مرکب عدد کا جذرالمربع معلوم کرنے کا ضابطہ

$\sqrt{a+ib} = \pm\left(\sqrt{\frac{|z|+a}{2}}+i\frac{b}{|b|}\sqrt{\frac{|z|-a}{2}}\right)$ جہاں $z = a+ib$ اور $b \neq 0$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 71 28-02-2023 12:29:29

**غور کیجئے (Note)**

اگر $b$ منفی ہے، $\frac{b}{|b|}=-1$ ہوتو، $x$ اور $y$ مختلف علامتیں رکھتی ہیں۔

اگر $b$ مثبت ہے، $\frac{b}{|b|}=1$ ہوتو، $x$ اور $y$ یکساں علامتیں رکھتے ہیں۔

**مثال 2.17**

$6-8i$ کا جذرالمربع معلوم کرو۔

**حل**

ہم شمار کرتے ہیں $|6-8i| = \sqrt{6^2+(-8)^2} = 10$ اور جذرالمربع کا ضابطہ استعمال کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned}\sqrt{6-8i} &= \pm\left(\sqrt{\frac{10+6}{2}}-i\sqrt{\frac{10-6}{2}}\right) \quad \left(\because b \text{ منفی ہے۔} \frac{b}{|b|}=-1\right)\\ &= \pm\left(\sqrt{8}-i\sqrt{2}\right)\\ &= \pm\left(2\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right).\end{aligned}$$

## مشق 2.5

1. مندرجۂ ذیل مرکب اعداد کے معین ضروب (modulus) معلوم کرو۔

(i) $\frac{2i}{3+4i}$ (ii) $\frac{2-i}{1+i}+\frac{1-2i}{1-i}$ (iii) $(1-i)^{10}$ (iv) $2i(3-4i)(4-3i)$.

2. کسی بھی دو مرکب اعداد $z_1$ اور $z_2$ اس طرح کہ $|z_1|=|z_2|=1$ اور $z_1z_2 \neq -1$ ہو پھر بتلاؤ کہ $\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ ایک حقیقی عدد ہے۔

3. نقاط $10-8i, 11+6i$ میں سے کونسا نقطہ $1+i$ سے قریب ترین ہے۔

4. اگر $|z|=3$ ہوتو بتاؤ کہ $7 \leq |z+6-8i| \leq 13$

5. اگر $|z|=1$ ہوتو بتاؤ کہ $2 \leq |z^2-3| \leq 4$

6. اگر $|z|=2$ ہوتو بتاؤ کہ $8 \leq |z+6+8i| \leq 12$

7. اگر $z_1$ ، $z_2$ اور $z_3$ تین مرکب اعداد ہیں اس طرح کہ $|z_1|=1, |z_2|=2, |z_3|=3$ اور $|z_1+z_2+z_3|=1$ ہوتو دکھاؤ کہ

$$|9z_1z_2+4z_1z_3+z_2z_3|=6$$

8. اگر راسیں $z$ ، $iz$ اور $z+iz$ کے ذریعہ تشکیل کردہ مثلث کا رقبہ 50 مربع اکائیاں ہیں تو $|z|$ کی قیمت معلوم کرو۔

9. بتاؤ کہ مساوات $z^3+2\bar{z}=0$ پانچ حل رکھتا ہے۔

10. مندرجۂ ذیل کے جذرالمربع معلوم کرو۔

(i) $4+3i$ (ii) $-6+8i$ (iii) $-5-12i$.



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 72 28-02-2023 12:29:40

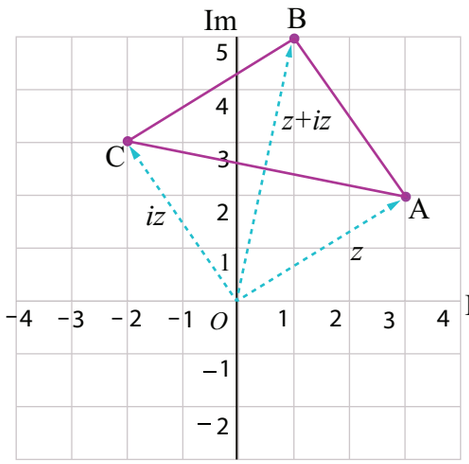
## 2.6 مرکب اعداد کا ہندسی اور طریق (Geometry and Locus of Complex Numbers)

آیئے ہم اس حصے میں مرکب عدد $z$ کی ہندسی تشریح ایک مرکب مسطح پر اور $z$ کا طریق (locus) کارتیس (Cartesian) شکل میں پڑھیں گے۔

**مثال 2.18**

مرکب عدد $z = 3+2i$ دیا گیا ہے جو مرکب اعداد $z$، $iz$ اور $z+iz$ کی ایک آرگنڈی مسطح (Argand plane) پر نمائندگی کریں۔ بتاؤ کہ یہ مرکب اعداد ایک مثلث مساوی الساقین (isosceles triangle) کی راسیں بناتے ہیں۔

**حل**



خاکہ 2.22

دیا گیا ہے $z = 3+2i$.

لہٰذا، $iz = i(3+2i) = -2+3i$

$$z+iz = (3+2i)+i(3+2i) = 1+5i$$

لہٰذا، $A$، $B$ اور $C$ سے $z$، $z+iz$ اور $iz$ بالترتیب لیں۔

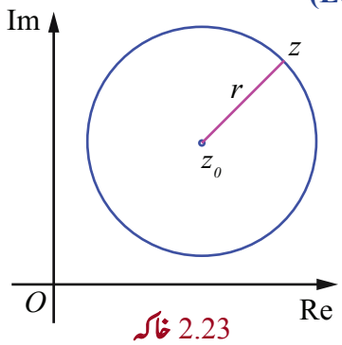
$$AB^2 = |(z+iz)-z|^2 = |-2+3i|^2 = 13$$
$$BC^2 = |iz-(z+iz)|^2 = |-3-2i|^2 = 13$$
$$CA^2 = |z-iz|^2 = |5-i|^2 = 26$$

چونکہ، $AB^2 + BC^2 = CA^2$ اور $AB = BC$، $\Delta ABC$ ایک مثلث مساوی الساقین ہے۔

**تعریف 2.5 دائرہ (circle)**

دائرہ کی تعریف کسی ایسے نقطہ کے لوکس (طریق) سے کی جاتی ہے۔ جو مسطح پر حرکت کرتا ہے کہ اس مسطح میں کسی مقررہ نقطہ (fixed point) سے اس کا فاصلہ ہمیشہ مستقل (constant) رہتا ہے وہ مقررہ نقطہ مرکز ہے اور مستقل فاصلہ دائرے کا نصف قطر ہے۔

### دائرہ کے مرکب شکل کی مساوات (Equation of Complex Form of a Circle)



خاکہ 2.23

طریق (locus) جو مساوات $|z-z_0| = r$ کو مطمئن کرتا ہے۔ جہاں $z_0$ ایک مقررہ مرکب عدد اور $r$ مقررہ مثبت حقیقی عدد جو $z$ کے تمام نقاط سے جڑا ہے جس کا فاصلہ $z_0$ سے $r$ ہے۔

لہٰذا $|z-z_0| = r$ دائرے کی مساوات کی مرکب شکل ہے (خاکہ 2.23 دکھایا گیا)

(i) $|z-z_0| < r$ دائرے کے اندرونی نقاط کی نمائندگی کرتے ہیں۔

(ii) $|z-z_0| > r$ دائرے کے بیرونی نقاط کی نمائندگی کرتے ہیں۔

### تشریح 2.3

$$|z| = r \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = r$$

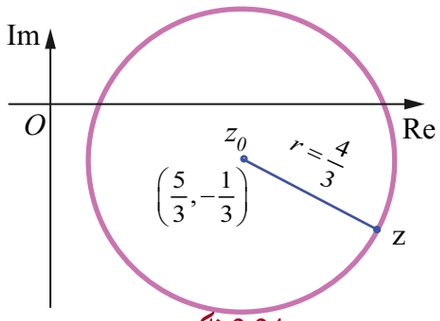
$\Rightarrow x^2+y^2 = r^2$ مبدا سے مرکز پر نصف قطر $r$ اکائیاں کے ساتھ دائرہ کی نمائندگی کرتا ہے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 73 28-02-2023 12:29:47

**مثال 2.19**

بتاؤ کہ $|3z-5+i|=4$ دائرہ کی نمائندگی کرتا ہے اس کا مرکز اور نصف قطر معلوم کرو۔



خاکہ 2.24

**حل**

دیا گیا مساوات $|3z-5+i|=4$ کو ہم لکھ سکتے ہیں۔

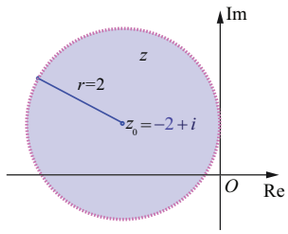
$$3\left|z-\frac{5-i}{3}\right| = 4 \Rightarrow \left|z-\left(\frac{5}{3}-\frac{i}{3}\right)\right| = \frac{4}{3}.$$

یہ ایک $|z-z_0|=r$ کی شکل میں دائرہ کی نمائندگی کرتا ہے۔

جس کا مرکز اور نصف قطر بالترتیب $\left(\frac{5}{3},-\frac{1}{3}\right)$ اور $\frac{4}{3}$ ہے۔

**مثال 2.20**

بتاؤ کہ $|z+2-i|<2$ دائرہ کے اندرونی نقاط کی نمائندگی کرتا ہے۔اس کا مرکز اور نصف معلوم کرو۔



خاکہ 2.25

**حل**

$|z+2-i|=2$ مساوات پر غور کریں۔

اس کو $|z-(-2+i)|=2$ کی طرح بھی لکھا جاسکتا ہے۔

مذکورہ بالا مساوات کا مرکز $z_0=-2+i$ اور نصف قطر $r=2$ کے ساتھ دائرہ کی نمائندگی کرتا ہے لہٰذا $|z+2-i|<2$ تمام اندرونی نقاط کی نمائندگی کرتا ہے جس میں مرکز $-2+i$ اور نصف قطر 2 ہے۔جیسا کہ خاکہ میں دکھایا گیا۔

**مثال 2.21**

مندرجۂ ذیل کے ہر ایک معاملہ میں z کے طریق (locus) کی کارتیسین شکل حاصل کرو۔

(i) $|z|=|z-i|$ (ii) $|2z-3-i|=3$

**حل**

(i) ہمارے پاس $|z| = |z-i|$

$$\Rightarrow |x+iy| = |x+iy-i|$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y-1)^2}$$

$$\Rightarrow x^2+y^2 = x^2+y^2-2y+1$$

$$\Rightarrow 2y-1 = 0.$$

(ii) ہمارے پاس $|2z-3-i| = 3$ ہے۔

$$|2(x+iy)-3-i| = 3.$$

دونوں جانب مربع کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$|(2x-3)+(2y-1)i|^2 = 9$$

$$\Rightarrow (2x-3)^2+(2y-1)^2 = 9$$

$$\Rightarrow 4x^2+4y^2-12x-4y+1 = 0,$$ z کا طریق جو کارتسین کی شکل میں ہے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 74 28-02-2023 12:30:00

## مشق 2.6

1. اگر $z = x + iy$ ایک مرکب عدد ہے اس طرح کہ $\left|\frac{z-4i}{z+4i}\right| = 1$ ہوتو بتاؤ کہ $z$ کا طریق حقیقی محور ہے۔

2. اگر $z = x + iy$ ایک مرکب عدد ہے اس طرح کہ $\text{Im}\left(\frac{2z+1}{iz+1}\right) = 0$ ہوتو بتاؤ کہ $z$ کا طریق $2x^2 + 2y^2 + x - 2y = 0$. ہے۔

3. مندرجۂ ذیل ہر ایک صورت میں $z = x + iy$ کا طریق کارتسین شکل میں حاصل کرو۔

(i) $\left[\text{Re}(iz)\right]^2 = 3$ (ii) $\text{Im}[(1-i)z+1] = 0$ (iii) $|z+i| = |z-1|$ (iv) $\bar{z} = z^{-1}$.

4. دکھاؤ کہ مندرجۂ ذیل مساوات دائرہ کی نمائندگی کرتا ہے، اور اس کا مرکز اور نصف قطر معلوم کرو۔

(i) $|z-2-i| = 3$ (ii) $|2z+2-4i| = 2$ (iii) $|3z-6+12i| = 8$.

5. مندرجۂ ذیل ہر ایک صورت میں $z = x + iy$ کے طریق کی کارتسین مساوات حاصل کریں۔

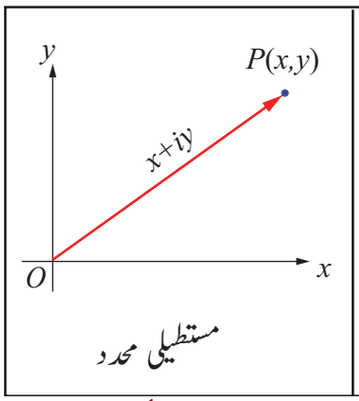
(i) $|z-4| = 16$ (ii) $|z-4|^2 - |z-1|^2 = 16$.

## 2.7 مرکب عدد کا قطبی اور ائلر شکل (Polar and Euler form of a Complex Number)

جب ہم مرکب اعداد کے جمع اور تفریق کی کارگردگی کا مظاہرہ کرتے ہیں۔تو مستطیلی شکل کا استعمال کرتے ہیں۔ اس وجہ سے ہے کہ ہم حقیقی اور خیالی حصے کو جمع کرتے یا حقیقی اور خیالی حصے کو تفریق کرتے ہیں۔ضرب کرنا، یا قوتیں معلوم کرنا یا مرکب اعداد کی جذریں معلوم کرنا اس کے لئے ایک متبادل طریقہ، قطبی شکل (polar form) کا استعمال کرتے ہیں۔کیونکہ مستطیلی شکل کے بجائے قطبی شکل میں حل کرنا آسان ہے۔

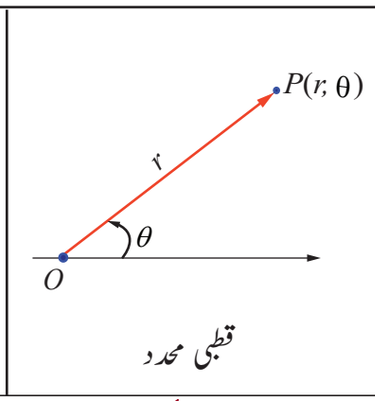
### 2.7.1 مرکب عدد کا قطبی شکل (Polar form of a complex number)

قطبی محدد جو پیرا میٹر (parameters) کا ایک اور مجموعی دیتا ہے۔ وہ سمتیہ مبداد سے نقطہ $z = x + iy$ وسعت اور سمت (direction) کے ساتھ خصوصیت کرتے ہیں۔ قطبی محدد طریقہ ایک مقررہ نقطہ $O$ پر مشتمل ہے اور قطب (pole) سے نکلنے والی نصف افقی خط کو ابتدائی خط (قطبی محور) بھی کہا جاتا ہے۔ قطب سے نقطہ $P$ تک کا فاصلہ $r$ ہے ابتدائی خط سے گھڑی کی سمت کی موافق خط $OP$ پر زاویہ کا جھکاؤ $\theta$ ہے۔ پھر $r$ اور $\theta$ ترتیب جوڑی کو $P$ کا قطبی محدد کہتے ہیں۔ مستطیلی محدد نظام پر قطبی محدد نظام کو مسلط کرنے سے جیسا مندرجۂ ذیل خاکے میں دکھایا گیا ہے، ملتا ہے۔



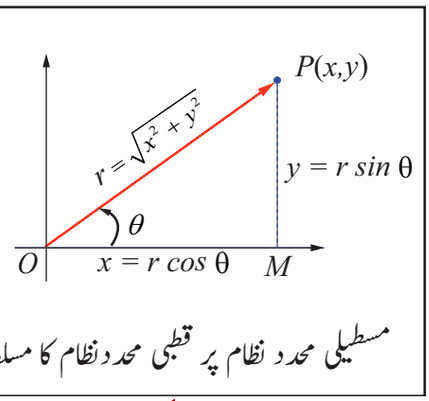
مستطیلی محدد

خاکہ 2.26



قطبی محدد

خاکہ 2.27



مسطیلی محدد نظام پر قطبی محدد نظام کا مسلط

خاکہ 2.28

$$x = r\cos\theta \quad \ldots(1)$$

$$y = r\sin\theta. \quad \ldots(2)$$

کوئی بھی غیر صفر مرکب عدد $z = x + iy$ کو $z = r\cos\theta + i\, r\sin\theta$. کے طور پر ظاہر کیا جاسکتا ہے۔




12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 75 28-02-2023 12:30:10

## تعریف 2.6

فرض کرو کہ $r$ اور $\theta$ نقطہ $P(x,y)$ کے قطبی محدد ہیں جو ایک غیر صفر مرکب عدد $z=x+iy$ سے مطابقت رکھتا ہے۔ ایک مرکب عدد $P$ کی قطبی شکل یا مثلثی شکل $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ ہے۔

آسانی کے لئے، ہم قطبی شکل کو ایسے لکھ سکتے ہیں

$$z=x+iy=r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)=r\,cis\,\theta.$$

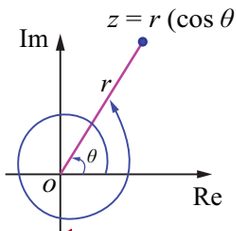
قیمت $r$ ایک مرکب عدد $z$ کی مطلق قیمت یا معین ضروب کی نمائندگی کرتا ہے زاویہ $\theta$ کو مرکب عدد $z$ کا دلیل یا طول عرض (argument or amplitude) کہتے ہیں۔ اس کو $\theta=\arg(z)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

(i) اگر $z=0$ تو دلیل (argument) $\theta$ نامعلوم ہے تو جہاں کہیں بھی قطبی محدد استعمال کرتے ہیں۔ وہاں $z\neq 0$ ہے۔ اس کو سمجھا جائے۔

(ii) اگر مخلوط عدد $z=x+iy$ قطبی محدد $(r,\theta)$ رکھتا ہے تو اس کا زوجی $\bar{z}=x-iy$ قطبی محدد $(r,-\theta)$ رکھتا ہے۔

(1) اور (2) جمع اور مربع کرنے پر، اور جذرالمربع اٹھانے پر $r$ کی قیمت جو دیا گیا۔ $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.

(2) کو (1) سے تقسیم پر۔ $\dfrac{r\sin\theta}{r\cos\theta}=\dfrac{y}{x}\Rightarrow\tan\theta=\dfrac{y}{x}$.



خاکہ 2.29

مرحلہ (i) حقیقی عدد $\theta$ زاویہ کی نمائندگی کرتا ہے۔ جو ریڈین میں ناپا جاتا ہے۔ جب سمتیہ نصف قطر کو z سے تشریح کی جاتی ہے تو z مثبت حقیقی محور کے ساتھ بناتا ہے۔ زاویہ $\theta$ ایک لامحدود بہت سی ممکنہ قیمتیں رکھتا ہے، بشمول منفی بھی، جو $2\pi$ کے لازمی ضرب سے مختلف ہوتے ہیں۔ ان کی قیمت کا یقین (determined) مساوات $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ سے کیا جاسکتا ہے۔ جہاں z متعلق نقطہ منتقل ہونے والے ربع کی وضاحت کی جانی چاہئے ہر ایک $\theta$ کی قیمت z کا دلیل کہلاتا ہے، اور اس طرح کی تمام قیمتیں $2\pi$ کے حاصل ضربوں کو $\theta$ سے جمع کرنے پر حاصل کیا جاتا ہے۔ اس کو $\arg z$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

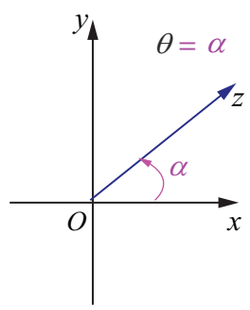
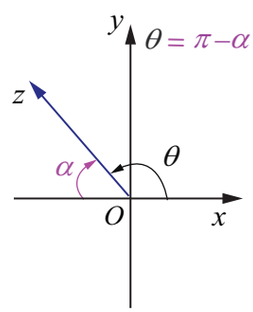
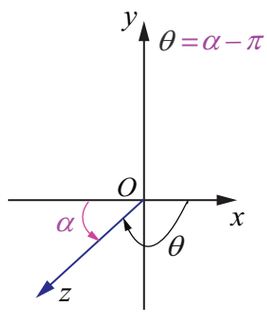
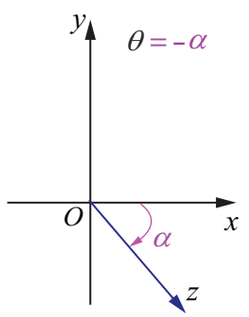
QZCT5

مرحلہ (ii) یہاں پر $\theta$ کی ایک انوکھی قیمت ہے جو شرط $-\pi<\theta\leq\pi$ کو پورا کرتی ہے جو $\theta$ کی اصل قیمت یا z کی اصل دلیل کہلاتا ہے۔ اس کو $\arg z$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

غور کریں۔

$$-\pi<\mathrm{Arg}(z)\leq\pi \quad or \quad -\pi<\theta\leq\pi$$

### پیچیدہ عدد کی اصل دلیل

| ربع - I | ربع - II | ربع - III | ربع - IV |
|---|---|---|---|
|  |  |  |  |
| $\theta=\alpha$ | $\theta=\pi-\alpha$ | $\theta=\alpha-\pi$ | $\theta=-\alpha$ |


خاکہ 2.30


خاکہ 2.31


خاکہ 2.32


خاکہ 2.33



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 76 28-02-2023 12:30:18

بنیادی قیمت کو عام قیمت سے ممتاز (distinguish) کرنے کے لئے یہاں سرمایہ A ضروری ہے واضح طور پر، ہمیں اصل زاویہ $\theta$ معلوم کرنے کی کوشش میں، ہم عام طور پر $\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$ معلوم کرتے ہیں،اور ربع مسئلہ کے لئے $\alpha$ کو $\pi$ کے ساتھ مناسب طریقے سے جمع کرنے یا تفریق کرتے ہیں۔

$$\arg z = Arg\ z + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$$

دلائل (arguments) کی چند خصوصیات یہ ہیں۔

$$\arg(z_1\ z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \quad (1)$$

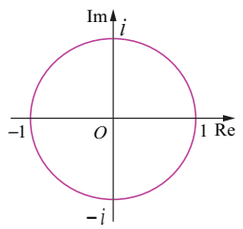
$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 \quad (2)$$

$$\arg(z^n) = n \arg z \quad (3)$$

$\cos\theta + i\sin\theta$ (4) کے متبادل شکلیں $\cos(2k\pi+\theta)+i\sin(2k\pi+\theta),\ k \in \mathbb{Z}$ ہیں۔

مثال کے طور پر $1, i, -1, -i$ کی اصل دلیل اور دلیل ذیل میں دکھائے گئے ہیں

| $z$ | 1 | $i$ | $-1$ | $-i$ |
|---|---|---|---|---|
| $Arg(z)$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $-\frac{\pi}{2}$ |
| $\arg z$ | $2n\pi$ | $2n\pi+\frac{\pi}{2}$ | $2n\pi+\pi$ | $2n\pi-\frac{\pi}{2}$ |



خاکہ 2.34

## تشریح

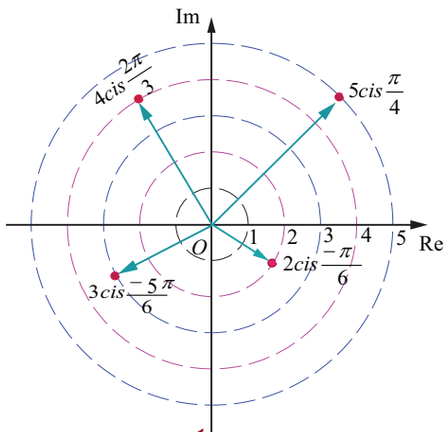
مرکب مسطح میں درجہ ذیل مرکب اعداد کی منصوبہ بندی کریں۔

(i) $5\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

(ii) $4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

(iii) $3\left(\cos\frac{-5\pi}{6}+i\sin\frac{-5\pi}{6}\right)$

(iv) $2\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.



خاکہ 2.35

### 2.7.2 مخلوط اعداد کی ائیلر شکل (Euler's Form of the complex number)

مندرجۂ ذیل تماثل (identity) ائیلر ضابطہ کہلاتا ہے۔

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

ائیلر ضابطہ قطبی شکل $z = r\,e^{i\theta}$ دیتا ہے۔

### غور کیجئے (Note)

ائیلر شکل کی بھی مدد سے ہم مرکب اعداد کے ضرب یا قوتیں یا مرکب اعداد کے جذر معلوم کرسکتے ہیں۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 77 28-02-2023 12:30:26

## مثال 2.22

مندرجۂ ذیل مرکب اعداد کے معین ضروب اور اصلی دلیل معلوم کرو۔

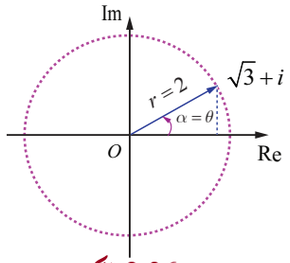
(i) $\sqrt{3}+i$ (ii) $-\sqrt{3}+i$ (iii) $-\sqrt{3}-i$ (iv) $\sqrt{3}-i$

## حل

(i) $\sqrt{3}+i$

معین ض.روب (modulus) $= \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2} = \sqrt{3+1} = 2$

$$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$



خاکہ 2.36

کیونکہ، مرکب عدد $\sqrt{3}+i$ پہلے ربع میں پایا جاتا ہے۔اس کی اصلی قیمت،

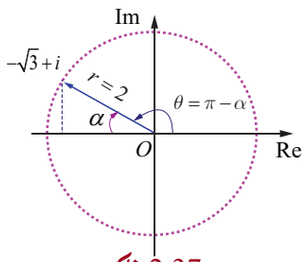
$$\theta = \alpha = \frac{\pi}{6}$$

لہٰذا، $\sqrt{3}+i$ کا معین ضروب اور اصل دلیل بالترتیب 2 اور $\frac{\pi}{6}$ ہے۔

(ii) $-\sqrt{3}+i$

معین ضروب (modulus) $= 2$

$$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6} \quad \text{اور}$$



خاکہ 2.37

کیونکہ، مرکب عدد $-\sqrt{3}+i$ دوسرے ربع میں پایا جاتا ہے۔اس کی اصلی قیمت،

$$\theta = \pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

لہٰذا، $-\sqrt{3}+i$ کا معین ضروب اور اصل دلیل بالترتیب 2 اور $\frac{5\pi}{6}$ ہے۔

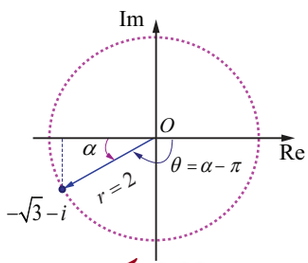
(iii) $-\sqrt{3}-i$

$r = 2$ اور $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

کیونکہ، $-\sqrt{3}-i$ تیسرے ربع میں پایا جاتا ہے۔اس کی اصلی قیمت،

$$\theta = \alpha - \pi = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5\pi}{6}.$$

لہٰذا، $-\sqrt{3}-i$ کا معین ضروب اور اصل دلیل بالترتیب 2 اور $-\frac{5\pi}{6}$ ہے۔



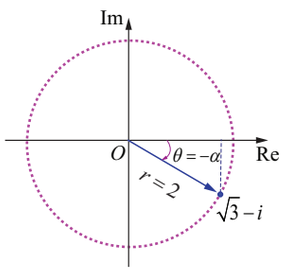
خاکہ 2.38

(iv) $\sqrt{3}-i$

$r = 2$ اور $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

یہ، چوتھے ربع عدد میں پایا جاتا ہے۔اس کی اصلی قیمت،

$$\theta = -\alpha = -\frac{\pi}{6}$$



خاکہ 2.39



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 78 28-02-2023 12:30:34

لہٰذا، $\sqrt{3}-i$ کا معین ضروب اور اصل دلیل بالترتیب 2 اور $-\frac{\pi}{6}$ ہے۔

ان چاروں معاملوں میں، معین ضروب مساوی ہیں، جبکہ دلائل مرکب عدد میں موجود ربع پر منحصر ہیں۔

### مثال 2.23

مرکب عدد (i) $-1-i$ (ii) $1+i\sqrt{3}$ قطبی شکل میں نمائندگی کریں۔

### حل

(i) فرض کرو $-1-i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

ہمارے پاس $r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| = \tan^{-1}1 = \frac{\pi}{4}.$$

لہٰذا، مرکب عدد $-1-i$ تیسرے ربع میں پایا جاتا ہے۔ یہ اصل قیمت رکھتا ہے۔

$$\theta = \alpha - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}$$

لہٰذا $-1-i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} - i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

$$-1-i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right)-i\sin\left(\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right)\right),\ k\in\mathbb{Z}.$$

### غور کیجئے (Note)

$k$ کی مختلف قیمتوں پر منحصر، ہم مختلف متبادل قطبی شکلیں حاصل ہوتے ہیں۔

(ii) $1+i\sqrt{3}$

$$r = |z| = \sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{3}$$

لہٰذا $\arg(z) = \frac{\pi}{3}$.

لہٰذا، $1+i\sqrt{3}$ کی قطبی شکل کو اس طرح سے لکھا جاسکتا ہے۔

$$1+i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)\right),\ k\in\mathbb{Z}.$$



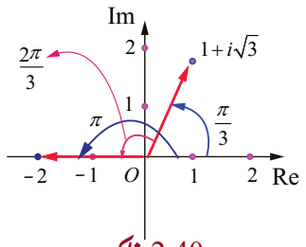
12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 79 28-02-2023 12:30:42

**مثال 2.24**

جب $z=\dfrac{-2}{1+i\sqrt{3}}$ ہو تو $\arg z$ کی اصل دلیل معلوم کرو۔

**حل**

$$\begin{aligned}\arg z &= \arg\frac{-2}{1+i\sqrt{3}}\\ &= \arg(-2)-\arg\left(1+i\sqrt{3}\right) \quad \left(\because \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg z_1-\arg z_2\right)\\ &=\left(\pi-\tan^{-1}\left(\frac{0}{2}\right)\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right)\\ &= \pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}\end{aligned}$$



خاکہ 2.40

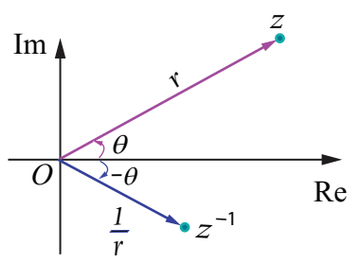
یہ ہمیں $\arg z$ کی اصل دلیل ایک قیمت $\dfrac{2\pi}{3}$ دیتا ہے۔

لہٰذا $\pi$ اور $-\pi$ کے درمیان $\dfrac{2\pi}{3}$ پایا جاتا ہے۔ $\arg z$ کی اصل دلیل $\dfrac{2\pi}{3}$ ہے۔

## قطبی شکل کی خصوصیات (Properties of polar form)

خصوصیت 1 : اگر $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$, پھر $z^{-1}=\dfrac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)$.

**ثبوت**



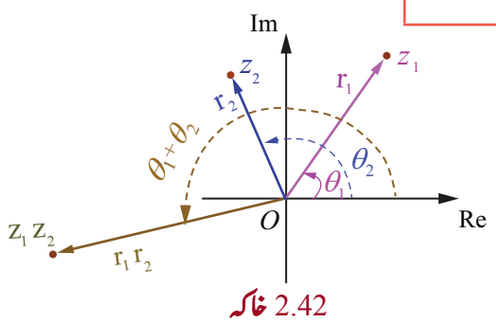
خاکہ 2.41

$$\begin{aligned}z^{-1} &= \frac{1}{z}=\frac{1}{r(\cos\theta+i\sin\theta)}\\ &= \frac{(\cos\theta-i\sin\theta)}{r(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta-i\sin\theta)}\\ &= \frac{(\cos\theta-i\sin\theta)}{r(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}\\ z^{-1} &= \frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta).\end{aligned}$$

خصوصیت 2 : اگر $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$ اور $z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

پھر $z_1z_2 = r_1r_2\left(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\right)$

**ثبوت**



خاکہ 2.42

$$\begin{aligned}z_1 &= r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\\ z_2 &= r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2) \quad \text{اور}\\ \Rightarrow\ z_1z_2 &= r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\end{aligned}$$




12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 80
28-02-2023 12:30:54

$$= r_1 r_2 \left( (\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2) + i(\sin\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_2 \cos\theta_1) \right)$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left( \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) \right).$$ ■

### غور کیجئے (Note)

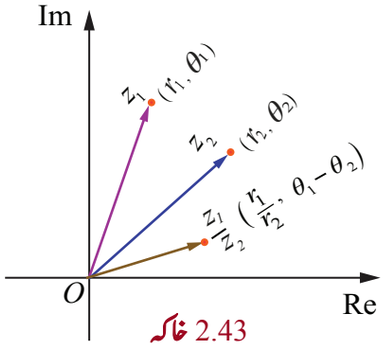
$$\arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2 = \arg(z_1) + \arg(z_2).$$

**خصوصیت 3**

اگر $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ اور $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$، پھر $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right]$

### ثبوت

$z_1$ اور $z_2$ کے قطبی شکل کے استعمال سے، ہمارے پاس ہے۔



خاکہ 2.43

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \frac{(\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2) + i(\sin\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_2 \cos\theta_1)}{\cos^2\theta + \sin^2\theta}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right).$$ ■

### غور کیجئے (Note)

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \theta_1 - \theta_2 = \arg(z_1) - \arg(z_2).$$

**مثال 2.25**

$\frac{3}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \cdot 6\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$ کا حاصل ضرب مستطیلی شکل میں معلوم کرو۔

**حل**

حاصل ضرب $\frac{3}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \cdot 6\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)(6)\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6}\right)\right)$$

$$= 9\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$$

$$= 9\left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)\right)$$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 81 28-02-2023 12:31:04

$$= 9\left(-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$= 9\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)=-\frac{9\sqrt{3}}{2}-\frac{9i}{2}$$ یہ مستطیلی شکل میں ہے۔ ■

**مثال 2.26**

$\dfrac{2\left(\cos\frac{9\pi}{4}+i\sin\frac{9\pi}{4}\right)}{4\left(\cos\left(\frac{-3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{-3\pi}{2}\right)\right)}$ کا خارج قسمت، مستطیلی شکل میں معلوم کرو۔

**حل**

$$\frac{2\left(\cos\frac{9\pi}{4}+i\sin\frac{9\pi}{4}\right)}{4\left(\cos\left(\frac{-3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{-3\pi}{2}\right)\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{9\pi}{4}-\left(\frac{-3\pi}{2}\right)\right)+i\sin\left(\frac{9\pi}{4}-\left(\frac{-3\pi}{2}\right)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{9\pi}{4}+\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{9\pi}{4}+\frac{3\pi}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{15\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{15\pi}{4}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\left(4\pi-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(4\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$\dfrac{2\left(\cos\frac{9\pi}{4}+i\sin\frac{9\pi}{4}\right)}{4\left(\cos\left(\frac{-3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{-3\pi}{2}\right)\right)} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}-i\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}-i\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. یہ مستطیلی شکل میں ہے۔ ■

**مثال 2.27**

اگر $z=x+iy$ اور $\arg\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ ہے تو بتاؤ کہ $x^2+y^2=1$

**حل**

$$\frac{z-1}{z+1} = \frac{x+iy-1}{x+iy+1}=\frac{(x-1)+iy}{(x+1)+iy} = \frac{\left[(x-1)+iy\right]\left[(x+1)-iy\right]}{\left[(x+1)+iy\right]\left[(x+1)-iy\right]}$$ اب،

$$\Rightarrow \quad \frac{z-1}{z+1} = \frac{(x^2+y^2-1)+i(2y)}{(x+1)^2+y^2}.$$

$$\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{2y}{x^2+y^2-1}\right) = \frac{\pi}{2}$$ کیونکہ،

$$\Rightarrow \quad \frac{2y}{x^2+y^2-1} = \tan\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow x^2+y^2-1=0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2 = 1.$$ ■



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 82 28-02-2023 12:31:16

## مشق 2.7

1. مندرجۂ ذیل مرکب اعداد قطبی شکل میں لکھو۔

(i) $2+i2\sqrt{3}$ (ii) $3-i\sqrt{3}$ (iii) $-2-i2$ (iv) $\dfrac{i-1}{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}}$.

2. مرکب اعداد کی مستطیلی شکل معلوم کرو۔

(i) $\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ (ii) $\dfrac{\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}}{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$.

3. اگر $(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)(x_3+iy_3)\cdots(x_n+iy_n)=a+ib$ ہوتو بتاؤ کہ

(i) $(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)(x_3^2+y_3^2)\cdots(x_n^2+y_n^2)=a^2+b^2$

(ii) $\sum_{r=1}^{n}\tan^{-1}\left(\frac{y_r}{x_r}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

4. اگر $z=i\tan\theta$ ہوتو، بتاؤ کہ $\dfrac{1+z}{1-z}=\cos 2\theta+i\sin 2\theta$

5. اگر $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0$, ہوتو بتاؤ کہ

(i) $\cos 3\alpha+\cos 3\beta+\cos 3\gamma=3\cos(\alpha+\beta+\gamma)$ اور

(ii) $\sin 3\alpha+\sin 3\beta+\sin 3\gamma=3\sin(\alpha+\beta+\gamma)$

6. اگر $z=x+iy$ اور $\arg\left(\dfrac{z-i}{z+2}\right)=\dfrac{\pi}{4}$ ہوتو، بتاؤ کہ $x^2+y^2+3x-3y+2=0$

## 2.8 ڈی مویرس نظریہ اور اس کے استعمالات

## (de Moivre's Theorem and its Applications)



de Moivre
1667–1754

Abraham de Moivre (1667–1754) ڈی مویرس ایک ایسا ریاض دان تھا جس نے مرکب اعداد کو علم مثلث میں استعمال کیا۔

وہ ضابطہ $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=(\cos n\theta+i\sin n\theta)$ اس کے نام سے جانا جاتا ہے ہندسہ کے دائرے سے نکل کر تجزیہ کرنے میں اور مثلث کو معاون بنانے میں مددگار تھا۔

### 2.8.1 ڈی مویری نظریہ (de Moivre's Theorem)

دیا گیا کوئی بھی مرکب عدد $\cos\theta+i\sin\theta$ اور کوئی بھی سالم عدد $n$ ہے۔

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

### فرضی نتیجہ (Corollary)

(1) $(\cos\theta-i\sin\theta)^n=\cos n\theta-i\sin n\theta$ (2) $(\cos\theta+i\sin\theta)^{-n}=\cos n\theta-i\sin n\theta$

(3) $(\cos\theta-i\sin\theta)^{-n}=\cos n\theta+i\sin n\theta$ (4) $\sin\theta+i\cos\theta=i(\cos\theta-i\sin\theta)$.

آیئے مرکب اعداد کو آسان بنانے اور مساوات کا حل تلاش کرنے کے لئے ڈی مویری نظریہ کا اطلاق کریں۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 83 28-02-2023 12:31:27

**مثال 2.28**

اگر $z=(\cos\theta+i\sin\theta)$ ہو تو بتاؤ کہ $z^n+\frac{1}{z^n}=2\cos n\theta$ اور $z^n-\frac{1}{z^n}=2i\sin n\theta$

**حل**

فرض کرو $z=(\cos\theta+i\sin\theta)$ ڈی موویرس نظریہ کے تحت

$$z^n=(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

$$\frac{1}{z^n}=z^{-n}=\cos n\theta-i\sin n\theta$$

لہٰذا $z^n+\frac{1}{z^n}=(\cos n\theta+i\sin n\theta)+(\cos n\theta-i\sin n\theta)$

$$z^n+\frac{1}{z^n}=2\cos n\theta\,.$$

اسی طرح

$$z^n-\frac{1}{z^n}=(\cos n\theta+i\sin n\theta)-(\cos n\theta-i\sin n\theta)$$

$$z^n-\frac{1}{z^n}=2i\sin n\theta\,.$$

**مثال 2.29**

مختصر کرو $\left(\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6}\right)^{18}$.

**حل**

ہمارے پاس $\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6}=i\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ ہے۔ دونوں طرف قوت 18 کو بڑھائیں۔

$$\left(\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6}\right)^{18}=(i)^{18}\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{18}$$

$$=(-1)\left(\cos\frac{18\pi}{6}-i\sin\frac{18\pi}{6}\right)$$

$$=-(\cos3\pi-i\sin3\pi)=1+0i\,.$$

لہٰذا $\left(\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6}\right)^{18}=1$

**مثال 2.30**

مختصر کرو $\left(\frac{1+\cos2\theta+i\sin2\theta}{1+\cos2\theta-i\sin2\theta}\right)^{30}$

**حل**

فرض کرو $z=\cos2\theta+i\sin2\theta$

جیسا $|z|=|z|^2=z\bar{z}=1$، ہمیں حاصل ہوتا ہے $\bar{z}=\frac{1}{z}=\cos2\theta-i\sin2\theta$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 84 28-02-2023 12:31:39

$$\frac{1+\cos 2\theta + i\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta - i\sin 2\theta} = \frac{1+z}{1+\frac{1}{z}} = \frac{(1+z)z}{z+1} = z \quad \text{لہٰذا،}$$

$$\left(\frac{1+\cos 2\theta + i\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta - i\sin 2\theta}\right)^{30} = z^{30} = \left(\cos 2\theta + i\sin 2\theta\right)^{30} \quad \text{لہٰذا،}$$

$$= \cos 60\theta + i\sin 60\theta .$$

**مثال 2.31**

مختصر کرو. (i) $(1+i)^{18}$ (ii) $(-\sqrt{3}+3i)^{31}$

**حل**

(i) $(1+i)^{18}$

فرض کرو $1+i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ پھر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \; ; \; \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4},$$

$$\theta = \alpha = \frac{\pi}{4} \qquad (\because 1+i \text{ پہلے ربع میں پایا جاتا ہے})$$

$$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{لہٰذا،}$$

دونوں جانب قوت 18 کو بڑھائیں

$$(1+i)^{18} = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{18} = \sqrt{2}^{18}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{18}.$$

ڈی موویرس نظریہ کی جانب

$$(1+i)^{18} = 2^9\left(\cos\frac{18\pi}{4} + i\sin\frac{18\pi}{4}\right)$$

$$= 2^9\left(\cos\left(4\pi+\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(4\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2^9\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$(1+i)^{18} = 2^9(i) = 512i .$$

(ii) $(-\sqrt{3}+3i)^{31}$

فرض کرو $-\sqrt{3}+3i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ پھر، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$r = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3},$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{3}{-\sqrt{3}}\right| = \tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3},$$

$$\theta = \pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \quad (\because -\sqrt{3}+3i \text{ دوسرے ربع میں پایا جاتا ہے۔})$$

$$-\sqrt{3}+3i = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) \quad \text{لہٰذا،}$$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 85 28-02-2023 12:31:51

دونوں جانب قوت 31 کو بڑھائیں۔

$$
\begin{aligned}
(-\sqrt{3}+3i)^{31} &= \left(2\sqrt{3}\right)^{31}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^{31}\\
&= \left(2\sqrt{3}\right)^{31}\left(\cos\left(20\pi+\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(20\pi+\frac{2\pi}{3}\right)\right)\\
&= \left(2\sqrt{3}\right)^{31}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\\
&= \left(2\sqrt{3}\right)^{31}\left(\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right)\\
&= \left(2\sqrt{3}\right)^{31}\left(-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\left(2\sqrt{3}\right)^{31}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).
\end{aligned}
$$

## 2.8.2 مرکب عدد کے $n^{th}$ جذریں معلوم کرنا (Finding $n^{th}$ roots of a complex number)

ڈی موویرس ضابطہ کے تحت مرکب اعداد کے جذریں (roots) حاصل کئے جاسکتے ہیں۔ فرض کرو کہ $n$ ایک مثبت سالم عدد ہے اور $z$ کا $n^{th}$ جذر مرکب عدد $\omega$ ہے اس کو $z^{1/n}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے، پھر ہمارے پاس ہے۔

$$\omega^n = z. \qquad \ldots(1)$$

اور $\omega = \rho\left(\cos\phi+i\sin\phi\right)$ فرض کرو کہ

$$z = r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)=r\left(\cos\left(\theta+2k\pi\right)+i\sin\left(\theta+2k\pi\right)\right),\ k\in\mathbb{Z}$$

کیونکہ، $z$ کا $n^{th}$ جذر $w$ ہے۔ پھر،

$$\omega^n = z$$

$$\Rightarrow\ \rho^n\left(\cos\phi+i\sin\phi\right)^n = r\left(\cos\left(\theta+2k\pi\right)+i\sin\left(\theta+2k\pi\right)\right),\ k\in\mathbb{Z}$$

ڈی موویرس نظریہ کے تحت،

$$\rho^n\left(\cos n\phi+i\sin n\phi\right) = r\left(\cos\left(\theta+2k\pi\right)+i\sin\left(\theta+2k\pi\right)\right),\ k\in\mathbb{Z}$$

معیون ضروب (moduli) اور دلائل (arguments) کو موازنہ کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا؟

$$\rho^n = r \quad \text{اور} \quad n\phi=\theta+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\rho = r^{1/n} \quad \text{اور} \quad \phi=\frac{\theta+2k\pi}{n}, k\in\mathbb{Z}.$$

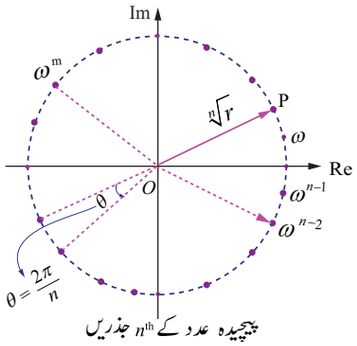
لہٰذا $\omega$ کی قیمتیں $r^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right),\ k\in\mathbb{Z}$ ہیں۔

حالانکہ $k$ کے لامحدود کئی قیمتیں ہیں لیکن جب $k=0,1,2,3,\ldots,n-1$ ہوتو $\omega$ کی الگ الگ قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔ جب $k=n,n+1,n+2,\ldots$ ہوتو ہمیں یہی جذریں باقاعدہ وقفوں کے ساتھ مل جاتے ہیں۔ (Cyclically) لہٰذا، مرکب عدد $z=r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$ کی $n^{th}$ جذریں ہیں۔

$$z^{1/n}=r^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right),\ k=0,1,2,3,\ldots,n-1.$$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 86 28-02-2023 12:32:04




خاکہ 2.44

اگر ہم $\omega = \sqrt[n]{r}e^{\frac{i(\theta+2k\pi)}{n}}$ ترتیب دیں، ایک مرکب عدد کے $n^{th}$ جذریں یا $n$ ویں جذریں کے ضابطے میں ایک اچھی ہندسی تشریح ہے جیسا خاکہ میں دکھایا گیا ہے غور کریں چونکہ $|\omega| = \sqrt[n]{r}$ ، $n$ جذریں مساوی معین ضروب رکھتے ہیں۔ مبدا مرکز $\sqrt[n]{r}$ نصف قطر کے دائرے پر مقیم ہیں۔مزید ، $n$ جذریں ، دائرے میں یکساں فاصلہ پر ہیں کیونکہ مسلسل $n$ جذروں کی دلیلیں $\frac{2\pi}{n}$ سے مختلف ہوتے ہیں۔

## ریمارک (Remark)

### (1) ڈی موویرس نظریہ کی عام شکل
### (General form of de Moivre's Theorem)

اگر $x$ ناطق ہے پھر $(\cos\theta + i\sin\theta)^x$ کی قیمت میں سے ایک قیمت $\cos x\theta + i\sin x\theta$

### (2) اکائی دائرہ کی قطبی شکل (Polar form of unit circle)

فرض کرو $\theta$ $z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ پھر، ہمیں حاصل ہوتا۔

$$|z|^2 = |\cos\theta + i\sin\theta|^2$$

$$\Rightarrow \quad |x+iy|^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 1.$$

لہٰذا، $|z| = 1$ مبدا سے ایک اکائی دائرہ ( نصف قطر ایک) مرکز مبدا کی نمائندگی کرتا ہے۔

## 2.8.3 اکائی کی $n^{th}$ جذریں (The $n^{th}$ roots of unity)

$z^n = 1$ مساوات کے حل، $n$ سالم عدد کی مثبت قیمتوں کے لئے اکائی کی $n^{th}$ جذریں ہیں۔ $z^n = 1$ کو قطبی شکل میں ایسے لکھا جاسکتا ہے۔

$$z^n = \cos(0 + 2k\pi) + i\sin(0 + 2k\pi) = e^{i2k\pi}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

ڈی موویرس نظریہ کے تحت ، ہم مندرجۂ ذیل مساوات سے اکائی کی $n^{th}$ جذریں معلوم کرتے ہیں۔

$$z = \left(\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right) = e^{\frac{i2k\pi}{n}}, k = 0,1,2,3,\ldots,n-1. \qquad \ldots (1)$$

ایک مثبت سالم عدد $n$ دیا گیا ہے۔ ایک مرکب عدد $z$ اکائی کی $n^{th}$ جذر کہلاتا ہے۔ اگر اور صرف اگر $z^n = 1$. ہوتو، اگر ہم $\omega$ کے ذریعہ مرکب عدد کی نشان دہی کرتے ہیں۔

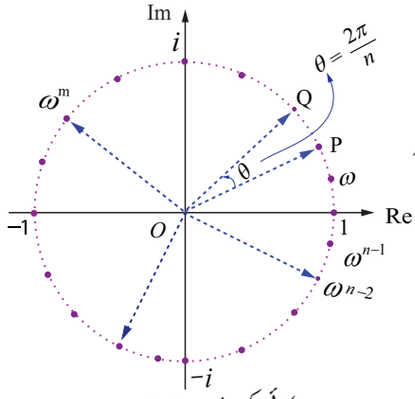
$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}} = \cos\frac{2\pi i}{n} + i\sin\frac{2\pi i}{n}$$

$$\Rightarrow \quad \omega^n = \left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^n = e^{2\pi i} = 1.$$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 87 28-02-2023 12:32:14

لہٰذا $\omega$ ایک اکائی کا $n^{th}$ جذر ہے۔ مساوات (1) کے تحت اکائی کی $n^{th}$ کی جذریں $1, \omega, \omega^2, \cdots, \omega^{n-1}$ ہیں۔ مرکب اعداد $1, \omega, \omega^2, \cdots, \omega^{n-1}$ مرکب مسطح کے نقاط ہیں اور $n$ ضلعوں کے باقاعدہ کثیر الاضلاع کے راسیں ہیں۔ جو اکائی دائرہ پر ثبت (inscribed) ہیں جیسا کہ خاکہ 2.45 دکھایا گیا ہے غور کریں چونکہ $n^{th}$ جذریں تمام کا معین ضروب 1 ہے وہ مبدا مرکز کے ساتھ نصف قطر 1 کے دائرے پر پائے جاتے ہیں۔ مزید $n$ جذریں دائرے میں یکساں فاصلے پر ہوتے ہیں۔ کیونکہ مسلسل $n$ جذروں کی دلیلیں $\frac{2\pi}{n}$ سے مختلف ہوتے ہیں۔



اکائی کی $n^{th}$ جذریں
**خاکہ** 2.45

اکائی کی $n^{th}$ جذریں $1, \omega, \omega^2, \cdots, \omega^{n-1}$ عام تناسب $\omega$ کے ساتھ ہندسی سلسلے میں ہیں۔

لہٰذا $1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{n-1} = \frac{1-\omega^n}{1-\omega} = 0$، چونکہ $\omega^n = 1$ اور $\omega \neq 1$

اکائی کی تمام $n^{th}$ جذروں کا حاصل جمع
$1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{n-1} = 0$ ہے۔

اکائی کی $n$، $n^{th}$ جذروں کا حاصل ضرب

$$1\omega\omega^2\cdots\omega^{n-1} = \omega^{0+1+2+3+\cdots+(n-1)} = \omega^{\frac{(n-1)n}{2}}$$

$$= \left(\omega^n\right)^{\frac{(n-1)}{2}} = \left(e^{i2\pi}\right)^{\frac{(n-1)}{2}} = \left(e^{i\pi}\right)^{n-1} = (-1)^{n-1}$$

اکائی کی تمام $n^{th}$ جذروں کا حاصل ضرب $1\omega\omega^2\cdots\omega^{n-1} = (-1)^{n-1}$ ہے۔

جب $|\omega| = 1$ ہمارے پاس ہے۔ $\omega\bar{\omega} = |\omega|^2 = 1$، لہٰذا، $\bar{\omega} = \omega^{-1} \Rightarrow (\bar{\omega})^k = \omega^{-k},\ 0 \leq k \leq n-1$

$$\omega^{n-k} = \omega^n\omega^{-k} = \omega^{-k} = (\bar{\omega})^k,\ 0 \leq k \leq n-1$$

لہٰذا، $\omega^{n-k} = \omega^{-k} = \left(\bar{\omega}\right)^k,\ 0 \leq k \leq n-1$

## غور کیجئے (Note)

(1) اکائی کی تمام $n^{th}$ جذروں کا $n$ جذریں ہندسی سلسلہ میں ہیں۔

(2) اکائی کی تمام $n^{th}$ جذروں کا $n$ جذروں کا حاصل جمع ہمیشہ صفر کے برابر ہوتا ہے۔

(3) اکائی کی تمام $n^{th}$ جذروں کا $n$ جذروں کا حاصل ضرب $(-1)^{n-1}$ کے مساوی ہے۔

(4) اکائی کی تمام $n^{th}$ جذروں کا $n$ جذروں دائرے کے محیط پر پائے جاتے ہیں جس کا مرکز مبداء ہے۔ اور نصف قطر 1 کے برابر ہے اور وہ جذریں دائرہ کو $n$ مساوی حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ اور $n$ ضلعوں کا ایک کثیر الاضلاع بناتے ہیں۔

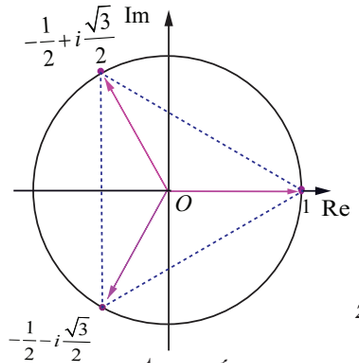


12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 88 28-02-2023 12:32:23

**مثال 2.32**

اکائی کا جذر المکعب معلوم کرو۔

**حل**



اکائی کا جذر المکعب

خاکہ 2.46

ہمیں $1^{\frac{1}{3}}$ معلوم کرنا ہے فرض کرو کہ $z=1^{\frac{1}{3}}$ ہو۔ پھر $z^3=1$ ، مساوات $z^3=1$ کو قطبی شکل میں ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$z^3=\cos(0+2k\pi)+i\sin(0+2k\pi)=e^{i2k\pi},\ k=0,\ 1,\ 2,\cdots.$$

لہٰذا ، $z=\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right)=e^{i\frac{2k\pi}{3}},\ k=0,\ 1,\ 2$

$k=0,1,2$ لینے سے ہمیں حاصل ہوتا۔

$$k=0,\quad z=\cos 0+i\sin 0=1.$$

$$k=1,\quad z=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$k=2,\quad z=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=-\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

لہٰذا، اکائی کا جذر المکعب

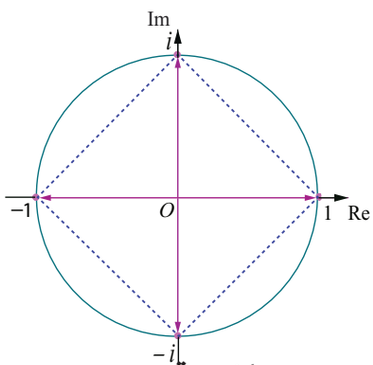
$$1,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\ \Rightarrow\ 1,\omega,\ \text{اور}\ \omega^2\ ،\ \text{جہاں}\ \omega=e^{i\frac{2\pi}{3}}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$

■

**مثال 2.33**

اکائی کی چوتھی جذریں معلوم کرو۔

**حل**



اکائی کی چوتھی جذریں

خاکہ 2.47

ہمیں $1^{\frac{1}{4}}$ معلوم کرنا ہے فرض کرو کہ $z=1^{\frac{1}{4}}$ پھر $z^4=1$ ، مساوات $z^4=1$ کو قطبی شکل میں ہم اس طرح سے لکھ سکتے ہیں۔

$$z^4=\cos(0+2k\pi)+i\sin(0+2k\pi)=e^{i2k\pi},k=0,\ 1,\ 2,\ldots.$$

$$z=\cos\left(\frac{2k\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{4}\right)=e^{i\frac{2k\pi}{4}},\ k=0,1,2,3\ ،\ \text{لہٰذا}$$

$k=0,1,2,3$ لینے سے ہمیں حاصل ہوتا۔

$$k=0,\quad z=\cos 0+i\sin 0=1.$$

$$k=1,\quad z=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=i.$$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 89 28-02-2023 12:32:36

$k=2,\qquad z=\cos\pi+i\sin\pi=-1.$

$k=3,\qquad z=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}=-i.$

اکائی کی چوتھی جذریں 1، i، -1، -i ہیں۔ $\Leftarrow 1,\omega,\omega^2$ اور $\omega^3$ جہاں، $\omega=e^{i\frac{2\pi}{4}}=i$ ہو۔

## غور کیجئے (Note)

(i) اس سبق میں اکائی کی $n^{th}$ جذروں کے لئے حرف $\omega$ استعمال کیا گیا ہے۔ لہٰذا، $\omega$ کی قیمت $n$ پر منحصر ہے جیسا کہ مندرجۂ ذیل میں بتایا گیا ہے۔

| $n$ کی قیمت | 2 | 3 | 4 | 5 | ⋯ | $k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\omega$ کی قیمت | $e^{i\frac{2\pi}{2}}$ | $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ | $e^{i\frac{2\pi}{4}}$ | $e^{i\frac{2\pi}{5}}$ | ⋯ | $e^{i\frac{2\pi}{k}}$ |

(ii) مبداء سے گھڑی کی سمت کے موافق میں ریڈن $\theta$ کے ذریعہ $z$ کی گردش مرکب عدد $ze^{i\theta}$ ہے۔

### مثال 2.34

$z^3+8i=0$ مساوات حل کرو، جہاں $z\in\mathbb{C}$ ہے۔

### حل

فرض کرو کہ $z^3+8i=0$ پھر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$z^3=-8i$$
$$=8(-i)=8\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right),k\in\mathbb{Z}.$$

لہٰذا، $z=\sqrt[3]{8}\left(\cos\left(\frac{-\pi+4k\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi+4k\pi}{6}\right)\right),\ k=0,1,2$

$k=0,1,2$ لینے سے ہمیں حاصل ہوتا۔

$k=0,\qquad z=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}-i$

$k=1,\qquad z=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=2=2(0+i)=0+2i=2i.$

$k=2,\qquad z=2\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)=2\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$$=2\left(-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=-\sqrt{3}-i.$$

$z$ کی قیمتیں $\sqrt{3}-i$، $2i$ اور $-\sqrt{3}-i$ ہیں۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 90 28-02-2023 12:32:49

**مثال 2.35**

$\sqrt{3}+i$ کے تمام جذر المکعب معلوم کرو۔

**حل**

ہمیں $\left(\sqrt{3}+i\right)^{\frac{1}{3}}$ معلوم کرنا ہے فرض کرو $z=\left(\sqrt{3}+i\right)^{\frac{1}{3}}$ پھر $z^3 = \sqrt{3}+i=r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$

پھر $r = \sqrt{3+1}=2$ اور $\alpha=\theta=\frac{\pi}{6}$ $(\because \sqrt{3}+i$ پہلے ربع میں پایا جاتا ہے۔)

لہٰذا، $$z^3 = \sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \quad z = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi+12k\pi}{18}\right)+i\sin\left(\frac{\pi+12k\pi}{18}\right)\right),\ k=0,1,2\,.$$

$k=0,1,2$ لینے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$k=0,\ z = 2^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\pi}{18}+i\sin\frac{\pi}{18}\right);$$

$$k=1,\ z = 2^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{13\pi}{18}+i\sin\frac{13\pi}{18}\right);$$

$$k=2,\ z = 2^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{25\pi}{18}+i\sin\frac{25\pi}{18}\right)=2^{\frac{1}{3}}\left(-\cos\frac{7\pi}{18}-i\sin\frac{7\pi}{18}\right).$$

■

**مثال 2.36**

فرض کرو کہ $z_1$، $z_2$ اور $z_3$ ایک مثلث مساوی الاضلاع کے راس ہیں۔ جو دائرہ میں ثبت (inscribed) ہے۔ اگر $z_1=1+i\sqrt{3}$ پھر $z_2$ اور $z_3$ معلوم کرو۔

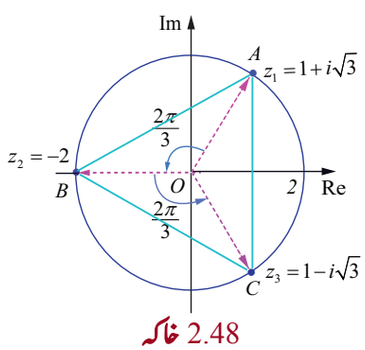
**حل**

$|z|=2$ مرکز $(0,0)$ اور نصف قطر 2 والے دائرہ کی نمائندگی کرتا ہے۔

فرض کرو کہ A، B اور C دیئے گئے مثلث کے راسیں ہیں چونکہ $z_1$، $z_2$ اور $z_3$ راسیں ایک مثلث مساوی الاضلاع کی تشکیل دیتے ہیں جو دائرہ $|z|=2$ میں ثبت ہے مثلث کے ضلع AB، BC اور CA کے مبداء پر $\frac{2\pi}{3}$ ریڈین (120 درجہ) کا محاسبہ کرتے ہیں۔ (مثلث کا حائط مرکز)

(مرکب عدد $ze^{i\theta}$، z کی مبداء کے گرد $\theta$ ریڈین سے گھڑی کی سمت گردش ہے۔)

لہٰذا، ہم بالترتیب $\frac{2\pi}{3}$ اور $\frac{4\pi}{3}$ کی جانب سے $z_1$ کی گردش کے ذریعہ $z_2$ اور $z_3$ حاصل کرسکتے ہیں۔



خاکہ 2.48

$\overrightarrow{OA} = z_1=1+i\sqrt{3}$ دیا گیا ہے۔

$$\overrightarrow{OB} = z_1e^{i\frac{2\pi}{3}}=\left(1+i\sqrt{3}\right)e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$=\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$=\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-2$$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 91 28-02-2023 12:33:02

$$\overrightarrow{OC} = z_1 e^{i\frac{4\pi}{3}} = z_2 e^{i\frac{2\pi}{3}} = -2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$= -2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= -2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3}\,.$$

لہٰذا، $z_2 = 2$ اور $z_3 = 1 - i\sqrt{3}$.

## مشق 2.8

1. اگر $\omega \neq 1$ اکائی کا جذر المکعب ہے تو دکھاؤ کہ $\frac{a+b\omega+c\omega^2}{b+c\omega+a\omega^2} + \frac{a+b\omega+c\omega^2}{c+a\omega+b\omega^2} = -1$

2. بتاؤ کہ $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^5 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5 = -\sqrt{3}$

3. $\left(\frac{1+\sin\frac{\pi}{10}+i\cos\frac{\pi}{10}}{1+\sin\frac{\pi}{10}-i\cos\frac{\pi}{10}}\right)^{10}$ کی قیمت معلوم کرو۔

4. اگر $2\cos\alpha = x + \frac{1}{x}$ اور $2\cos\beta = y + \frac{1}{y}$ ہو تو بتاؤ کہ

(i) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2\cos(\alpha - \beta)$ (ii) $xy - \frac{1}{xy} = 2i\sin(\alpha + \beta)$

(iii) $\frac{x^m}{y^n} - \frac{y^n}{x^m} = 2i\sin(m\alpha - n\beta)$ (iv) $x^m y^n + \frac{1}{x^m y^n} = 2\cos(m\alpha + n\beta)$.

5. مساوات $z^3 + 27 = 0$ کو حل کرو۔

6. اگر $\omega \neq 1$ اکائی کا جذرالمکعب ہو تو بتاؤ کہ مساوات $(z-1)^3 + 8 = 0$ کی جذریں $-1, 1-2\omega, 1-2\omega^2$ ہیں۔

7. $\sum_{k=1}^{8}\left(\cos\frac{2k\pi}{9} + i\sin\frac{2k\pi}{9}\right)$ کی قیمت معلوم کرو۔

8. اگر $\omega \neq 1$ اکائی کا جذر المکعب ہے تو بتاؤ کہ

(i) $(1-\omega+\omega^2)^6 + (1+\omega-\omega^2)^6 = 128$۔

(ii) $(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^4)(1+\omega^8)\cdots(1+\omega^{2^{11}}) = 1$۔

9. اگر $z = 2 - 2i$ ہو، مبداء کے گرد گھڑی کی سمت ریڈان $\theta$ کے ذریعہ $z$ کی گردش معلوم کرو۔

(i) $\theta = \frac{\pi}{3}$ (ii) $\theta = \frac{2\pi}{3}$ (iii) $\theta = \frac{3\pi}{2}$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 92 28-02-2023 12:33:14

L593J

## مشق 2.9

دیئے گئے چار متبادلات (alternatives) میں سے صحیح یا مناسب جواب کا انتخاب کریں۔

1. $i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3}$ ہے

(1) 0 (2) 1 (3) $-1$ (4) $i$

2. $\sum_{n=1}^{13} (i^n + i^{n-1})$ کی قیمت ہے۔

(1) $1+i$ (2) $i$ (3) 1 (4) 0

3. آرگنڈی خاکہ میں مرکب اعداد $z$ ، $iz$ اور $z+iz$ کا تشکیل کردہ مثلث کا رقبہ

(1) $\frac{1}{2}|z|^2$ (2) $|z|^2$ (3) $\frac{3}{2}|z|^2$ (4) $2|z|^2$

4. مرکب عدد کا زوجی $\frac{1}{i-2}$ ہے تو پھر مرکب عدد ہے۔

(1) $\frac{1}{i+2}$ (2) $\frac{-1}{i+2}$ (3) $\frac{-1}{i-2}$ (4) $\frac{1}{i-2}$

5. اگر $z = \frac{\left(\sqrt{3}+i\right)^3 (3i+4)^2}{(8+6i)^2}$ پھر $|z|$ مساوی ہے۔

(1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 3

6. اگر $z$ ایک غیر صفر مرکب عدد ہے۔اس طرح کہ $2iz^2 = \bar{z}$ ہوتو $|z|$ ہے۔

(1) $\frac{1}{2}$ (2) 1 (3) 2 (4) 3

7. اگر $|z-2+i| \leq 2$ ہوتو $|z|$ سب سے بڑی قیمت ہے۔

(1) $\sqrt{3}-2$ (2) $\sqrt{3}+2$ (3) $\sqrt{5}-2$ (4) $\sqrt{5}+2$

8. اگر $\left|z-\frac{3}{z}\right| = 2$ ہوتو $|z|$ کی سب سے کم قیمت ہے۔

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 5

9. اگر $|z|=1$ ہوتو $\frac{1+z}{1+\bar{z}}$ کی قیمت ہے۔

(1) $z$ (2) $\bar{z}$ (3) $\frac{1}{z}$ (4) 1

10. مساوات $|z| - z = 1+2i$ کا حل ہے۔

(1) $\frac{3}{2}-2i$ (2) $-\frac{3}{2}+2i$ (3) $2-\frac{3}{2}i$ (4) $2+\frac{3}{2}i$

11. اگر $|z_1|=1,\ |z_2|=2,\ |z_3|=3$ اور $|9z_1z_2+4z_1z_3+z_2z_3|=12$ اور ہوتو $|z_1+z_2+z_3|$ کی قیمت ہے۔

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

12. اگر $z$ ایک مرکب عدد ہے اس طرح کہ $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ اور $z+\frac{1}{z} \in \mathbb{R}$ ہوتو $|z|$ ہے۔

(1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 3



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 93 28-02-2023 12:33:28

13. اگر $z_1, z_2, z_3$ مرکب اعداد ہیں اس طرح $z_1+z_2+z_3=0$ اور $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ ہوتو ${z_1}^2+{z_2}^2+{z_3}^2$

(1) 3 (2) 2 (3) 1 (4) 0

14. اگر $\frac{z-1}{z+1}$ خالصتاً خیالی ہوتو $|z|$ ہے۔

(1) $\frac{1}{2}$ (2) 1 (3) 2 (4) 3

15. اگر $z=x+iy$ ایک مرکب عدد ہے اس طرح $|z-2|=|z+2|$ ہوتو $z$ کا طریق ہے۔

(1) حقیقی محور (2) خیالی محور (3) بیضوی (4) دائرہ

16. $\frac{3}{-1+i}$ کی اصل دلیل ہے۔

(1) $\frac{-5\pi}{6}$ (2) $\frac{-2\pi}{3}$ (3) $\frac{-3\pi}{4}$ (4) $\frac{-\pi}{2}$

17. $(\sin 40°+i\cos 40°)^5$ کی اصل قیمت ہے۔

(1) $-110°$ (2) $-70°$ (3) $70°$ (4) $110°$

18. اگر $(1+i)(1+2i)(1+3i)\cdots(1+ni)=x+iy$ ہوتو $2\cdot5\cdot10\cdots(1+n^2)$ ہے۔

(1) 1 (2) $i$ (3) $x^2+y^2$ (4) $1+n^2$

19. اگر $\omega\neq1$ اکائی کا جذر مکعب ہے اور $(1+\omega)^7=A+B\omega$ ہو تو $(A,B)$ مساوی ہے۔

(1) $(1,0)$ (2) $(-1,1)$ (3) $(0,1)$ (4) $(1,1)$

20. مرکب عدد $\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^2}{4i\left(1-i\sqrt{3}\right)}$ کی اصل دلیل ہے۔

(1) $\frac{2\pi}{3}$ (2) $\frac{\pi}{6}$ (3) $\frac{5\pi}{6}$ (4) $\frac{\pi}{2}$

21. اگر $\alpha$ اور $\beta$ مساوات $x^2+x+1=0$ کی جذریں ہیں تو ${\alpha}^{2020}+{\beta}^{2020}$ ہے۔

(1) $-2$ (2) $-1$ (3) 1 (4) 2

22. $\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$ کی چار تمام قیمتوں کا حاصل ضرب

(1) $-2$ (2) $-1$ (3) 1 (4) 2

23. اگر $\omega\neq1$ اکائی کا جذرالمکعب ہے اور $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -\omega^2-1 & \omega^2\\ 1 & \omega^2 & \omega^7\end{vmatrix}=3k$ ہوتو $k$ مساوی ہے

(1) 1 (2) $-1$ (3) $\sqrt{3}i$ (4) $-\sqrt{3}i$

24. $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$ کی قیمت

(1) $cis\frac{2\pi}{3}$ (2) $cis\frac{4\pi}{3}$ (3) $-cis\frac{2\pi}{3}$ (4) $-cis\frac{4\pi}{3}$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 94 28-02-2023 12:33:44

25. اگر $\omega = cis\frac{2\pi}{3}$ ہوتو $\begin{vmatrix} z+1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & z+\omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & z+\omega \end{vmatrix} = 0$ کی مختلف جذروں کی تعداد

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

## (SUMMARY) خلاصہ

اس سبق میں ہم نے مطالعہ کیا۔

ایک مرکب عدد کی مستطیلی شکل $x+iy\,(\text{or } x+yi)$ ہے۔ جہاں x اور y حقیقی عدد ہیں

دو مرکب اعداد $z_1 = x_1 + iy_1$ اور $z_2 = x_2 + iy_2$ کو برابر کہا جائے گا اگر صرف اور اگر: $\text{Re}(z_1) = \text{Re}(z_2)$ اور $\text{Im}(z_1) = \text{Im}(z_2)$ کی صورت میں ہو۔یعنی، $x_1 = x_2$ اور $y_1 = y_2$

مرکب عدد $x+iy$ کا زوجی کو مرکب عدد $x-iy$ کے طور پر یہاں دیا گیا ہے۔

### مرکب زوجیوں کی خصوصیات (Properties of complex conjugates )

(1) $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2}$

(2) $\overline{z_1-z_2} = \overline{z_1}-\overline{z_2}$

(3) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$

(4) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2},\ z_2 \neq 0$

(5) $\text{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$

(6) $\text{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$

(7) $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$, جہاں $n$ ایک سالم عدد ہے

(8) $z$ حقیقی ہے اگر اور صرف اگر $z = \overline{z}$ ہو

(9) $z$ خالصتاً خیالی ہے اگر اور صرف اگر $z = -\overline{z}$ ہو۔

(10) $\overline{\overline{z}} = z$

اگر $z = x+iy$, ہوتو $\sqrt{x^2+y^2}$، $z$ کا معین ضرب ہے۔ اس کو $|z|$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

### مرکب عدد کے معین ضرب کی خصوصیات (Properties of Modulus of a complex number)

(1) $|z| = |\overline{z}|$

(2) $|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$ (مثلث کی عدم مساوات)

(3) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

(4) $|z_1-z_2| \geq \big||z_1|-|z_2|\big|$

(5) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},\ z_2 \neq 0$

(6) $|z^n| = |z|^n$, جہاں $n$ ایک سالم عدد ہے

(7) $\text{Re}(z) \leq |z|$

(8) $\text{Im}(z) \leq |z|$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 95 28-02-2023 12:33:46

مرکب عدد کے جذر المربع معلوم کرنے کا ضابطہ

$$\sqrt{a+ib}=\pm\left(\sqrt{\frac{|z|+a}{2}}+i\frac{b}{|b|}\sqrt{\frac{|z|-a}{2}}\right),\quad b\neq 0 \text{ اور } z=a+ib \text{ جہاں}$$

فرض کرو کہ $r$ اور $\theta$، نقطہ $P(x,y)$ کے قطبی محدد ہیں، جو ایک غیر صفری مرکب عدد $z=x+iy$ سے مطابقت رکھتا ہے ایک مرکب عدد $P$ کی قطبی شکل یا مثلثی شکل ہے۔

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta).$$

## قطبی شکل کی خصوصیات (Properties of polar form)

خاصیت 1: اگر $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$, پھر $z^{-1}=\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)$

خاصیت 2: اگر $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$ اور $z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ پھر

$$z_1z_2=r_1r_2\left(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\right)$$

خاصیت 3: اگر $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$ اور $z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ پھر

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\right]$$

## ڈی موویرس نظریہ (de Moivre's Theorem)

**(a) دیا گیا کوئی بھی مرکب عدد $\cos\theta+i\sin\theta$ اور کسی بھی سالم عدد $n$،**

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

**(b) اگر $x$ ناطق ہے، تو $(\cos\theta+i\sin\theta)^x$ کی قیمت میں ایک قیمت $\cos x\theta+i\sin x\theta$ ہے۔**

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ مرکب عدد کی $n^{\text{th}}$ جذریں ہیں۔

$$z^{1/n}=r^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right),\quad k=0,1,2,3,\ldots,n-1.$$

## ICT کارنر

**https://ggbm.at/vchq92pg or Scan the QR Code**

براؤزر (Browser) کو کھول کر ذیل میں دیا گیا لنک (Link) ٹائپ کریں یا (QR code) کو اسکین (Scan) کریں۔ "12 ویں ریاضی کی کتاب" (GeoGebra) نامی ورک بک (work book) کھل جائے گی اگر ورک بک کے بائیں جانب آپ کی کتاب سے متعلق بہت سے ابواب (chapters) ہیں۔ 'مرکب اعداد' والے باب پر کلک کریں آپ اس باب سے متعلق کئی ورک شیٹس (work sheets) دیکھ سکتے ہیں اس میں ورک شیٹ ہندسی معنی (Geometrical Meaning) کا انتخاب کریں۔

باب
3

# مساوات کا نظریہ
# Theory of Equations

ADFU5

ایسا لگتا ہے اگر کوئی کسی مساوات میں خوبصورتی حاصل کرنے کے نقطہ نظر سے کام کررہا ہے اور اگر واقعی میں کسی کو صحیح بصیرت حاصل ہے تو وہ یقیناً ترقی کے راستے پر پیش قدم ہے۔

پال ڈیرک

## 3.1 تعارف (Introduction)

ریاضی میں سب سے پرانے مسئلہ میں سے ایک الجبرا کی مساوات کو حل کرنا ہے خاص طور پر کثیر رقمی مساوات کی جذر تلاش کرنا ہے۔ 2000 BC (BCE) کے اردگرد سومیریں اور بیبی لونیان سے شروع کرکے مصر، یونان، بھارت، عرب، چین اور دنیا کے تقریباً تمام حصّوں کے ریاضی دان اور فلسفیوں نے کثیر رقمی مساوات کو حل کرنے کی کوشش کی۔


ایبل
(1802-1829)

قدیم ریاضی داونوں نے مسئلے اور ان کے حل کو مکمل طور پر الفاظوں میں بیان کیا۔ انھوں نے خاص مسئلوں پر کوشش کی اور یہ کوئی عام بات نہیں تھی۔ برہما گپتا پہلا تھا جس نے منفی عدد شامل ہونے والی دو درجی مساوات کو حل کیا۔ یوکلیڈ، ڈیوفانٹس، برہماگپتا، عمر قیام، فیبونکی، ڈسکارٹس اور روفینی ریاضی دان شامل تھے جنھوں نے کثیر رقمی مساوات پر کام کیا۔ روفینی نے دعوی کیا کہ پانچویں درجہ کی مساوات کا حل تلاش کرنے کے لئے الجبرا ضابطہ نہیں تھا جو کہ بہت لمبا اور اس کا عمل میں لانا مشکل تھا۔ آخرکار 1823 میں ناروے کے ریاضی دان ایبل نے اسے ثابت کردیا۔



فرض کریں کہ بناوٹ کمپنی اس کی مصنوعات کو مستطیل ڈبوں میں باندھنا چاہتی ہے۔ یہ ڈبوں کو تعمیر کرنے کی نمونہ بندی کرتا ہے۔ تاکہ قاعدہ کی لمبائی چوڑائی سے چھ اکائی زیادہ ہو اور ڈبہ کی اونچائی لمبائی اور قاعدہ کی چوڑائی کا اوسط ہو۔ جب حجم طئے شدہ ہے تو کمپنی ڈبہ کے اطراف کی تمام ممکن پیمائش کو جاننا چاہتی ہے۔

اگر ہم قاعدہ کی چوڑائی کو $x$ لیں گے تو پھر لمبائی $x+6$ ہے اور اونچائی $x+3$ ہے۔ اس وجہ سے ڈبہ کا حجم $x(x+3)(x+6)$ ہے۔ فرض کریں حجم 2618 مکعب اکائی ہے، پھر ہمیں $x^3+9x^2+18x=2618$ کا ہونا ضروری ہے۔ اگر ہم اوپر کی مساوات کو راضی کرنے والے $x$ کو معلوم کرنے کے قابل ہیں۔ پھر ہم ضروری پیمائش کے ایک ڈبہ کی تعمیر کرسکتے ہیں۔

ہم جانتے ہیں ایک دائرہ اور سیدھی خط دو سے زیادہ نقطوں پر قاطع نہیں ہوتے۔ لیکن یہ ہم کیسے ثابت کرسکتے ہیں ؟ ریاضی مساوات ہمیں اس طرح کے بیان کو ثابت کرنے میں مدد کرتے ہیں۔ مرکز مبدا اور $r$ نصف قطر رکھنے والے دائرے کی مساوات xy مسطح $x^2+y^2=r^2$ سے ظاہر کی جاتی ہے۔ ہم مزید یہ جانیں سیدھی خط اسی مسطح پر $ax+by+c=0$ سے ظاہر کرسکتے ہیں۔ ایک سیدھی خط اور دائرہ کا نقطہ تقاطع دونوں کی مساوات کو راضی کرتا ہے۔

دوسرے الفاظ میں ہمزاد مساوات $x^2+y^2=r^2$ اور $ax+by+c=0$ کا حل ہمیں نقطہ تقاطع دیتا ہے۔ دوسرے الفاظ میں اوپر مساوات کے نظام کے حل سے ہم یہ نتیجہ اخذ کرسکتے ہیں کہ دونوں ایک دوسرے کو چھوتے ہیں، دونقطوں پر قاطع ہوتے ہیں یا ایک دوسرے کو قطع نہیں کرتے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 97 27-02-2023 15:33:37

صرف ایک پرکار اور اسکیل کے استعمال سے ہندسی چیزوں کی تصنیف کے کچھ قدیم مسائل ہیں۔(بغیر کسی نشان کے براہ راست کنارے)۔ مثال کے طور پر ایک باقاعدہ مسدس اور ایک 17 پہلو والے کثیر الاضلاع کی تصنیف ممکن ہے۔ جبکہ ایک باقاعدہ ست اضلاع اور 18 پہلو والے کثیر الاضلاع کی تصنیف نہیں ہوسکتی۔ صرف ایک پرکار اور اسکیل کے استعمال سے ہندسی تصنیفات خاص طور پر مندرجہ ذیل تین ، تصنیف کرنا ناممکن ہے۔

- ایک زاویہ کو تین حصوں میں کاٹنا (دئے گئے ایک زاویہ کی 3 مساوی زاویوں میں تقسیم)۔
- ایک دائرے کو مربع کرنا (ایک دئے گئے دائرے کے رقبہ سے ایک مربع کی تصنیف)۔

(شری نی واسا رامانجن نے اپنی "کتاب" میں قریبی حل دیا ہے۔)

- ایک مکعب کو دوگنا کرنا (مکعب کی تصنیف دئے گئے مکعب کے دوگنا حجم سے)

ان قدیم مسائل کو ہندسی مسئلوں سے کثیر رقمی میں تبدیل کرنے کے بعد ہی نپٹایا جاتا ہے۔اصل میں یہ **تصنیفیں ناممکن** ہیں۔ ناممکنات کو ثابت کرنے میں ریاضی ایک بہت اچھا آلہ ہے۔

ایک حقیقی زندگی کے مسئلوں کو حل کرنے کے لئے مسئلہ کو ریاضی دان ایک ریاضی مسئلہ میں تبدیل کرتے ہیں۔ ریاضی طریقہ کار کے استعمال سے ریاضی مسئلہ کو حل کرتے ہیں۔اور پھر ریاضی حل کو حقیقی زندگی کے مسئلہ کے حل میں تبدیل کرتے ہیں۔ اکثر حقیقی زندگی کے مسئلوں کو ریاضی مسائل میں تبدیل کرتے وقت وہ ریاضی مساوات پر جاکے ختم ہوجاتے ہیں۔ ڈبہ کی پیمائش کے فیصلہ میں، ہندسی نتیجوں کو ثابت کرنے کے لئے اور چند تعافیف نا ممکن ہیں ثابت کرنے کے بحث و مباحثہ کرتے وقت ہم ریاضی مساوات پر جاکر ختم ہو تے ہیں۔

اس باب میں ہم مساوات کے بارے میں کچھ نظریہ سیکھیں گے۔ خاص طور پر کثیر رقمی مساوات اور ان کے حلوں کے بارے میں ، ہم کثیر رقمی مساوات کی کچھ خصوصیات پڑھیں گے، دئے گئے جذروں کے ساتھ کثیر رقمی مساوات کی تشکیل ، الجبرا کا بنیادی نظریہ اور کثیر رقمی مساوات کے مثبت اور منفی جذروں کی تعداد کے بارے میں جانیں گے۔ ان خیالات کا استعمال کرتے ہوئے ہم کچھ قسم کے کثیر رقمی مساوات کے حل کرنے کے ہمارے مقصد پر پہنچ جائیں گے۔ہم کثیر رقمی مساوات کے لئے تیار شدہ طریقوں کا استعمال کرکے کچھ غیر کثیر رقمی مساوات کو حل کرنا بھی سیکھیں گے۔

## Learning Objectives

## سیکھنے کے مقاصد

اس باب کے اختتام پر

- جذروں پر دئے گئے شرائط کو راضی کرکے کثیر رقمی مساوات کا حل ۔
- اعلی درجہ کے کثیر رقمی مساوات کو حل کرنے کے طریقہ کار کا مظاہرہ ۔
- کچھ جذروں کا مرکب عدد یا مختفی غیر ناطق اور ناطق کا علم ہونے پر اعلی درجہ کی مساوات کا حل ۔
- متبادلہ مساوات کی شناخت اور حل۔
- ڈیکارٹس اصول کا استعمال کرتے ہوئے ایک کثیر رقمی مساوات کے مثبت اور منفی جذروں کی تعداد کا تعین۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 98 27-02-2023 15:33:37

## 3.2 کثیر رقمی مساوات کی بنیادیں (Basics of Polynomial Equations)

### 3.2.1 کثیر رقمی مساوات کے مختلف اقسام (Different types of Polynomial Equations)

ہم پہلے ہی جانتے ہیں کسی بھی غیر منفی سالم عدد $n$ ، کے لئے ایک متغیر $x$ میں $n$ درجے والی کثیر رقمی کی وضع کو

$$P \equiv P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad \ldots (1)$$

سے ظاہر کیا جاتا ہے

جہاں $a_r \in \mathbb{C}$ ، $r = 0,1,2,\ldots,n$ مستقل ہیں اور ساتھ میں $a_n \neq 0$ ، $x$ متغیر حقیقی یا مرکب عدد ہے۔

جب کثیر رقمی $P$ کے تمام سراعداد حقیقی ہیں۔ ہم کہیں گے۔"**$P$** کثیر رقمی $\mathbb{R}$ پر اختتام پذیر" ہے۔ اس طرح ہم اصطلاحات کو استعمال کرکے "**$P$** کثیر رقمی $\mathbb{C}$ پر اختتام پذیر "ہے۔"**$P$** کثیر رقمی $\mathbb{Q}$ پر اختتام پذیر "ہے۔"اور "**$P$** کثیر رقمی $\mathbb{Z}$ پر اختتام پذیر" ہے۔

تفاعل $P$ کو اس طرح بیان کرتے ہیں $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ایک کثیر رقمی تفاعل کہلاتا ہے۔

مساوات

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \quad \ldots (2)$$

کثیر رقمی مساوات کہلاتی ہے۔

کسی $c \in \mathbb{C}$ کے لئے اگر $a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \cdots + a_1 c + a_0 = 0$ ہوتو $c$ کثیر رقمی (1) صفر کہلاتا ہے۔ اور کثیر رقمی مساوات۔ (2) کا جذر یا حل کہلاتا ہے۔

اگر ایک رقمی $x$ متغیر مساوات ک جذر $c$ ہےتوہم "$x = c$ جذرہے" لکھتے ہیں۔ مستقلیں $a_r$ سراعداد کہلاتی ہیں۔ سرعدد $a_n$ نمایاں سرعدد کہلاتا ہے اور رقم $a_n x^n$ نمایاں رقم کھلاتی ہے۔ سراعداد کوئی بھی عدد حقیقی یا مرکب عدد ہوسکتے ہیں۔ صرف ایک پابندی ہم لگاتے ہیں۔ کہ نمایاں سرعدد $a_n$ غیرصفر ہو۔ کثیر رقمی جس کا نمایاں سرعدد 1 ہے۔ ایک درجی کثیر رقمی کہلاتا ہے۔

#### ریمارک (Remark)

ہم مندرجۂ ذیل پر غور کریں گے۔

- کثیر رقمی تفاعل $x$ کی تمام قدروں کے لئے بیان ہوتی ہے۔
- ہر غیر صفر مستقل درجہ 0 کا ایک کثیر رقمی ہے۔
- 0 مستقل بھی ایک کثیر رقمی ہے یہ صفر کثیر رقمی کہلاتا ہے اس کے درجہ کی وضاحت نہیں کی گئی ہے۔
- ایک کثیر رقمی کادرجہ ایک غیر منفی سالم عدد ہے۔
- صفر کثیر رقمی وہ واحد کثیر رقمی ہے جس کا نمایاں سرعدد صفر ہے۔
- درجہ دو کی کثیر رقمی کو دو درجی کثیر رقمی کہا جاتا ہے۔
- درجہ تین کی کثیر رقمی کو تین درجی کثیر رقمی کہا جاتا ہے۔
- درجہ چار کی کثیر رقمی کو چار درجی کثیر رقمی کہا جاتا ہے۔

کثیر رقمی کو $x$ کی نزولی قوتوں میں لکھنا حسب معمولی ہے۔ یقنی کثیر رقمی میں سب سے پہلی رقم سب سے زیادہ درجہ والی رقم (نمایاں رقم) اور مستقل رقم کو آخری رقم کے طور پر لکھا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر $2x + 3y + 4z = 5$ اور $6x^2 + 7x^2y^3 + 8z = 9$ تین متغیرات $x, y, z$ والی اور ; $x^2 - 4x + 5 = 0$ ایک متغیر $x$ والی مساواتیں ہیں۔ پہلے کی جماعتوں میں ہم نے مثلثی مساواتوں ، خطی مساوات کے نظام اور کچھ کثیر رقمی مساواتوں کو حل کیا ہے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 99 27-02-2023 15:33:46

ہم جانتے ہیں کہ 3 کثیر رقمی $x^2-5x+6$ کا صفر ہے اور 3 مساوات $x^2-5x+6=0$ کا جذر یا حل ہے۔ ہم غور کریں گے کہ $\cos x=\sin x$ اور $\cos x+\sin x=1$ بھی ایک متغیر $x$ والی مساوات ہیں۔ لیکن $\cos x-\sin x$ اور $\cos x+\sin x-1$ کثیر رقمی نہیں ہیں۔ لہٰذا، $\cos x=\sin x$ اور $\cos x+\sin x=1$ "کثیر رقمی مساوات" نہیں ہیں۔ ہم صرف کثیر رقمی مساوات پر غور کریں گے اور جن کو ایک متغیر والی مساوات کے استعمال سے حل کیا جاسکتا ہے۔

ہم یاد کرتے ہیں $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ ، $\mathbb{R}$ پر ایک شناخت ہے جبکہ $\sin x+\cos x=1$ اور $\sin^3 x+\cos^3 x=1$ مساوات ہیں۔

یہ یاد رکھنا ضروری ہے کہ ایک کثیر رقمی کے سر اعداد حقیقی یا مرکب عدد اعداد ہوسکتے ہیں۔ لیکن علامتوں کا غیر منفی سالم اعداد کے طور پر ہونا ضروری ہے۔ مثال کے طور، پر بیانات $3x^{-2}+1$ اور $5x^{\frac{1}{2}}+1$ کثیر رقمی نہیں ہیں۔ہم پہلے ہی کثیر رقمی، کثیر رقمی مساوات خاص طور پر دودوجی مساوات کے بارے میں سیکھ چکے ہیں۔اس حصہ میں ہم فوری طور پر انھیں یاد کریں گے اور کچھ تصورات دیکھیں گے۔

### 3.2.2 دو درجی مساوات (Quadratic Equations)

$ax^2+bx+c=0$ دو درجی مساوات کے لئے, $b^2-4ac$ کہلاتا ہے اسے $\Delta$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ ہم جانتے ہیں ۔

$\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ اور $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ، $ax^2+bx+c=0$ کی جذریں ہیں۔ دوجذر وں کو عام طورپر ساتھ ساتھ $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ لکھا جاتا ہے۔اس پر زور دینے کی ضرورت نہیں کہ $a\neq 0$ ہو۔ دو درجی کثیر رقمی $ax^2+bx+c$ کہنے سے یہ بات ظاہر $a\neq 0$ ہے کہ

ہم نے یہ بھی پڑھا ہے کہ $\Delta=0$ اور اگر صرف اور صرف جذریں مساوی ہوں۔یہاں ہم جانتے ہیں $a,b,c$ حقیقی ہیں۔

- $\Delta>0$ ،صرف اور صرف ، اگر جذریں حقیقی اور مختلف ہوں۔
- $\Delta<0$ ،صرف اور صرف۔ اگر جذریں دو درجی مساوات کی حقیقی نہ ہوں۔

## 3.3 ویٹا کا ضابطہ اور کثیر رقمی کی تشکیل (Vieta's Formulae and Formation of Polynomial Equations)

ویٹا کا ضابطہ کثیر رقمی کے جذروں کی جمع اور ضرب اور اس کے سراعداد کو ملاتا ہے۔ ویٹا ایک فرانسیسی ریاضی دان تھا جس کے کثیر رقمی پر کام نے جدید الجبراء کے لئے راستہ دیا۔

### 3.3.1 ویٹا کا ضابطہ دو درجی مساوات کے لئے (Vieta's formula for Quadratic Equations)




اگر $\alpha$ اور $\beta$ دو درجی مساوات $ax^2+bx+c=0$ کی جذریں ہیں تو

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)=ax^2-a(\alpha+\beta)x+a(\alpha\beta)=0$$

مساوی قوتوں والے سراعداد کو دیکھنے سے $\alpha+\beta=\frac{-b}{a}$ اور $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

اس لئے دو درجی مساوات جن کی جذریں $\alpha$ اور $\beta$ ہوں تو دو درجی مساوات ۔ یعنی دو درجی مساوات $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$ ہے۔ اگر دو درجی مساوات جذریں دی گئی ہوں تو

$x^2-$ (جذروں کا حاصل جمع) $x+$ جذروں کا حاصل ضرب $=0$ .... (1)

### غور کیجئے (Note)

غیرواضح اقرار **a** اوپر کے بیان میں استعمال ہوتا ہے۔ درحقیقت اگر $P(x)=0$ دو درجی مساوات ہے جس کی جذریں $\alpha$ اور $\beta$ ہیں۔ تو $cP(x)$ بھی ایک دو درجی مساوات ہے جس کی جذریں $\alpha$ اور $\beta$ ہیں اور c کوئی بھی ایک غیر صفر مستقل ہے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 100 27-02-2023 15:34:00

پہلی جماعتوں میں جذر اور سراعداد کے درمیان کے تعلق کا استعمال کرکے ہم نے دو درجی مساوات کی تعمیر کی ہے۔ جس کی جذریں $\alpha$ اور $\beta$ ہیں۔درحقیقت اس طرح کی مساوات (1)کی طرح ہوتی ہے۔مثال کے طور پر ایک دو درجی مساوات جس کی جذریں 3 اور 4 ہیں وہ $x^2-7x+12=0.$ ہے۔

اس کے علاوہ ہم نئے کثیر رقمی مساوات کی تعمیر کرتے ہیں جن کی جذریں ایک دیے گئے کثیر رقمی مساوات کی جذریں ہیں۔ اس عمل میں ہم دیے گئے کثیر رقمی مساوات کی جذریں تلاش کئے بغیر ایک نئے کثیر رقمی مساوات کی تشکیل کرتے ہیں۔ مثال کے طور پر کثیر رقمی مساوات کی جذروں میں 2 کااضافہ کرکے کثیر رقمی مساوات کی تعمیر کرتے ہیں۔جیسا کہ نیچے دیاگیا ہے ۔

### مثال 3.1

اگر $\alpha$ اور $\beta$ دو درجی مساوات $17x^2+43x-73=0$ کی جذریں ہیں، ایک، دو درجی مساوات کی تعمیر کرو جس کی جذریں $\alpha+2$ اور $\beta+2$ ہوں۔

### حل

چونکہ $\alpha$ اور $\beta$ کی جذریں $17x^2+43x-73=0$ ہیں ہمارے پاس $\alpha+\beta=\frac{-43}{17}$ اور $\alpha\beta=\frac{-73}{17}$ ہے۔

ہم جذر $\alpha+2$ اور $\beta+2$ کے ساتھ دو درجی مساوات کی تعمیر کرنا چاہتے ہیں۔ اس طرح کی ایک، دو درجی مساوات کی تعمیر کے لئے، محسوب کریں

$$\text{جذروں کی جمع} = \alpha+\beta+4 = \frac{-43}{17}+4 = \frac{25}{17} \quad \text{اور}$$

$$\text{جذروں کا ضرب} = \alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4 = \frac{-73}{17}+2\left(\frac{-43}{17}\right)+4 = \frac{-91}{17}.$$

اس طرح $x^2-\frac{25}{17}x-\frac{91}{17} = 0$ مساوات دو درجی اور ضروری جذروں سے بنی ہے۔

اس مساوات کو 17 سے ضرب کرنے پر، $17x^2-25x-91 = 0$ حاصل ہوگا، جو کہ $\alpha+2$ اور $\beta+2$ جذروں والی دو درجی مساوات ہے۔

### مثال 3.2

اگر $\alpha$ اور $\beta$ دو درجی مساوات $2x^2-7x+13=0$ کی جذریں ہیں ایک، دو درجی مساوات کی تعمیر کریں جس کی جذریں $\alpha^2$ اور $\beta^2$ ہیں۔

### حل

چونکہ $\alpha$ اور $\beta$ دو درجی مساوات کی جدریں ہیں ہمارے پاس $\alpha+\beta = \frac{7}{2}$ اور $\alpha\beta=\frac{13}{2}$ ہے۔

اسی طرح ایک نئے دو درجی مساوات کی تعمیر کے لئے

$$\text{جذروں کی جمع} = \alpha^2+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta = \frac{-3}{4}.$$

$$\text{جذروں کا ضرب} = \alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2 = \frac{169}{4}$$

اس طرح ضروری دو درجی مساوات $x^2+\frac{3}{4}x+\frac{169}{4}=0$ ہے۔اس سے ہم دیکھتے ہیں۔

$$4x^2+3x+169 = 0$$

جذریں $\alpha^2$ اور $\beta^2$ والی ایک دو درجی مساوات ہے۔

### ریمارک (Remark)

مثال کے طور پر 3.1 اور 3.2 میں ہم نے $\alpha+\beta$ اور $\alpha\beta$ کا استعمال کرتے ہوئے جذروں کی جمع اور ضرب کی تحسیب کی۔اس طرح ہم مطلوبہ جذروں کے ساتھ دو درجی مساوات کی تعمیر کرسکتے ہیں۔ بشرطیکہ ایک نئے دو درجی مساوات کی جذروں کی جمع اور ضرب لکھنے کے لئے دئے گئے دو درجی مساوات کے جذروں کی جمع اور ضرب کا استعمال کیا جاسکے۔ ہم غور کرتے ہیں کہ ہم نے دئے گئے مساوات کو حل نہیں کیا ہے۔ کام کے خاتمہ پر بھی ہمیں $\alpha$ اور $\beta$ کی قیمتوں کا پتہ نہیں ہے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 101 27-02-2023 15:34:10

## 3.3.2 کثیر رقمی مساوات کے لئے ویٹا کا ضابطہ (Vieta's formula for Polynomial Equations)

ہم نے دو درجی کثیر رقمی کے لئے جو سیکھا ہے۔ وہ اعلیٰ درجے کے کثیر رقموں تک بڑھایا جاسکتا ہے۔ اس حصہ میں ہم اعلیٰ درجے کی ایک کثیر رقمی کے صفر اور اس کے سر اعداد کے تعلق کا مطالعہ کرتے ہیں۔ ہم یہ بھی سیکھتے ہیں کہ اعلیٰ درجے کی کثیر رقمی کیسے بنائی جائے جب صفر کے بارے میں کچھ معلومات ہوں۔ اس باب میں ہم درجہ $n$ کی ایک کثیر رقمی کے صفر یا کثیر رقمی مساوات کے جذروں کا استعمال کرتے ہیں۔

### 3.3.2 (a) الجبرا کا بنیادی مسئلہ (The Fundamental Theorem of Algebra)

اگر ایک کثیر رقمی مساوات $P(x)=0$ کا جذر $a$ ہے۔ تو پھر $P(x)$ کا ایک جذو ضربی $(x-a)$ ہے۔ تو $\deg(P(x))\geq 1$. اگر $P(x)=0$ کی جذریں $a$ اور $b$ ہیں تو پھر $(x-a)(x-b)$، $P(x)=0$ کے اجزائے ضربی ہیں اور اس لئے $\deg(P(x))\geq 2$ اسی طرح اگر کے $P(x)=0$ کی $n$ جذریں ہیں۔ پھر اس کا درجہ $n$ یا $n$ سے زیادہ ہونا ضروری ہے۔ دوسرے الفاظ میں درجہ $n$ کی ایک کثیر رقمی مساوات کے جذریں $n$ سے زیادہ نہیں ہونگے۔

پچھلی جماعتوں میں ہم نے کثرت سے متعلق سیکھا ہے۔اب ہم یاد کریں گے کہ کثرت سے کیا مطلب ہے۔ ہم جانتے ہیں اگر $P(x)=0$ ایک کثیر رقمی مساوات کے اجزائے ضربی $(x-a)^k$ ہیں۔ $P(x)=0$ اور کثیر رقمی مساوات کے اجزائے ضربی $(x-a)^{k+1}$ نہیں ہیں۔ پھر $a$ کو $k$ کثرت کی جذر کہا جاتا ہے۔ مثال کے طورپر 3 مساوات $x^2-6x+9=0$ دو کثرت کی جذر اور $x^3-7x^2+159x-9=0$ کے لئے 2 کثرت کی جذر ہے اگر چہ ہم مرکب عدد اعداد کو سرعدد کی جگہ استعمال نہیں کرنے جارہے ہیں، یہ کہنا کارآمد ہوگا کہ خیالی عدد $2+i$ میں کثیر رقمی $x^2-(4+2i)x+3+4i=0$ اور $x^4-8x^3+26x^2-40x+25=0.$ کے لئے 2 کثرت کی جذر ہے۔ اگر $a$ کثیر رقمی مساوات کے لئے کثرت 1 کی جذر ہے تو $a$ کثیر رقمی مساوات کا ایک سادہ جذر کہلاتا ہے۔

اگر $P(x)=0$ کے پاس $n$ جذریں کثرت شمار ہیں۔ پھر بھی ہم دیکھتے ہیں کہ اس کا درجہ $n$ سے زیادہ ہونا یا برابر کا ہونا ضروری ہے۔ دوسرے الفاظ میں "$n$ درجہ کی ایک کثیر رقمی مساوات کے پاس جذریں $n$ سے زیادہ نہیں ہونگی"۔یہاں تک کہ اگر جذریں ان کی کثرتوں کے ساتھ بھی شمار کی جائیں۔

مساوات کے مسئلوں میں ایک اہم مسئلہ الجبرا کا بنیادی مسئلہ ہے جیسا کہ ثبوت نصاب کی گنجائش کے باہر ہے۔ ہم اس کو بغیر ثبوت کے بیان کرتے ہیں۔

**مسئلہ 3.1 الجبرا کا بنیادی مسئلہ (The Fundamental Theorem of Algebra)**

درجہ $n\geq 1$ کے ہر کثیر رقمی مساوات کا کم سے کم ایک جذر $\mathbb{C}$ میں ہوتا ہے۔

اس کا استعمال کرتے ہوئے ہم یہ ثابت کرسکتے ہیں کہ درجہ $n$ کی ایک کثیر رقمی مساوات کے کم از کم $n$ جذر $\mathbb{C}$ میں ہیں جب جذروں کو ان کی کثرت ساتھ شمار کیا جاتا ہے۔یہ بیان اور اوپر کی ہماری بحث مل کر کہتا ہے کہ

> جب جذروں کو ان کی کثیرتوں کے ساتھ شمار کیا جائے تو درجہ $n$ کے ایک کثیر رقمی مساوات کی ٹھیک $n$ جذریں $\mathbb{C}$ میں ہونگی۔

کچھ مصنف اس بیان کو الجبرا کا بنیادی مسئلہ کے طور پر بیان کرتے ہیں۔

### 3.3.2 (b) ویٹا کا ضابطہ (Vieta's Formula)

#### (i) 3 درجہ کی کثیر رقمی مساوات کے لئے ویٹا کا ضابطہ (Vieta's Formula for Polynomial equation of degree 3)

اب ہم اس قسم کے تعلقات اعلی درجے کی کثیر رقمی کے لئے حاصل کرتے ہیں۔ایک عام مکعب مساوات پر غور کریں۔

$$ax^3+bx^2+cx+d = 0\,.$$

الجبرا کے بنیادی مسئلہ سے اس کی تین جذریں ہیں۔ فرض کریں $\alpha, \beta$ اور $\gamma$ جذریں ہیں۔ چنانچہ ہمارے پاس



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 102 27-02-2023 15:34:21

$$ax^3+bx^2+cx+d \;=\; a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

کو دائیں جانب پھیلانے سے

$$ax^3-a(\alpha+\beta+\gamma)x^2+a(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-a(\alpha\beta\gamma)\,.$$

مساوی قوتوں کے سر اعداد کا موازنہ کرنے سے،

$$\alpha+\beta+\gamma \;=\; \frac{-b}{a},\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a} \quad \text{اور} \quad \alpha\beta\gamma=\frac{-d}{a}\,.$$

حاصل کرتے ہیں۔

چونکہ کثیر رقمی مساوات کا درجہ 3 ہے۔ ہمارے پاس $a\neq 0$ اور اس وجہ سے $a$ سے تقسیم بامعنی ہے۔ اگر ایک مکعب درجہ کی کثیر رقمی کی جذریں $\alpha$ , $\beta$ اور $\gamma$ ہیں۔ پھر

$x^2 \;=\; -(\alpha+\beta+\gamma)$, کا سرعدد

اور , $x \;=\; \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ کا سرعدد

$-\alpha\beta\gamma\,.$ = مستقل رقم

## (ii) $n>3$ درجے کی کثیر رقمی مساوات کے لئے ویٹا کا ضابطہ (Vieta's Formula for Polynomial equation of degree $n>3$)

یہی ایک اعلیٰ درجہ کی کثیر رقمی مساوات کے لئے بھی سچ ہے۔ اگر درجہ $n$ کی ایک کثیررقمی مساوات کی جذریں $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ ہیں۔ پھر

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^{n-1}$ | کا سرعدد | | $=\sum_1$ | $=$ | $-\sum\alpha_1$ |
| $x^{n-2}$ | کا سرعدد | | $=\sum_2$ | $=$ | $\sum\alpha_1\alpha_2$ |
| $x^{n-3}$ | کا سرعدد | | $=\sum_3$ | $=$ | $-\sum\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ |
| $x$ | کا سرعدد | | $=\sum_{n-1}$ | $=$ | $(-1)^{n-1}\sum\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}$ |
| $x^0$ | کا سرعدد = مستقل رقم | | $=\sum_n$ | $=$ | $(-1)^n\,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$ |

یہاں $\sum\alpha_1$ سب جذروں کی جمع کو ظاہر کرتا ہے۔ $\sum\alpha_1\alpha_2$ ایک وقت میں دوجذروں کی ضرب کا حاصل جمع بتاتا ہے۔ $\sum\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ ایک وقت میں تین جذروں کی ضرب کے حاصل جمع کو ظاہر کرتا ہے۔اور پھر اسی طرح اگر $\alpha,\beta,\gamma,$ اور $\delta$ ایک چار درجی مساوات کی جذریں ہیں۔ پھر $\sum\alpha_1$ کو $\sum\alpha$ لکھا جاتا ہے۔ $\sum\alpha_1\alpha_2$ کو $\sum\alpha\beta$ لکھا جاتا ہے۔اسی طرح ہمارے پاس

$$\begin{aligned}
\sum\alpha &= \alpha+\beta+\gamma+\delta\\
\sum\alpha\beta &= \alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta\\
\sum\alpha\beta\gamma &= \alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta\\
\sum\alpha\beta\gamma\delta &= \alpha\beta\gamma\delta
\end{aligned}$$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 103 27-02-2023 15:34:30

جب جذریں واضح طور پر عددی شکل میں دستیاب ہیں۔ تب بھی ہم ان آسان علامتوں کا استعمال کرتے ہیں۔ ہمیں اعلیٰ کثرت جذروں کو سنبھالنے میں محتاط رہنا ہوگا۔مثال کے طور پر اگر مکعب مساوات کی جذریں 1،2،2 ہیں پھر $\sum\alpha = 5$ اور

$$\sum\alpha\beta = (1\times 2)+(1\times 2)+(2\times 2) = 8$$

اوپر کی بحث سے ہم غور کرتے ہیں ایک کثیر رقمی مساوات کے جذروں کی جمع $x^{n-1}$ کا سرعدد اور $(-1)$ کا حاصل ضرب ہے اور جذروں کا ضرب مستقل رقم اور $(-1)^n$ کاحاصل ضرب ہے۔

**مثال 3.3**

اگر $\alpha, \beta, \gamma$ مساوات $x^3+px^2+qx+r=0$ کی جذریں ہیں۔ $\sum\frac{1}{\beta\gamma}$ کی قیمت سراعداد کے لحاظ سے معلوم کریں۔

**حل**

چونکہ $\alpha, \beta, \gamma$ مساوات $x^3+px^2+qx+r=0$ کی جذریں ہیں۔ہمارے پاس

$$\sum\nolimits_1 \ \alpha+\beta+\gamma = -p \quad \text{اور} \quad \sum\nolimits_3 \ \alpha\beta\gamma = -r\,.$$

اب

$$\sum\frac{1}{\beta\gamma} = \frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}+\frac{1}{\alpha\beta} = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma} = \frac{-p}{-r} = \frac{p}{r}\,.$$

## 3.3.2 (c) دئے گئے جذروں کے ساتھ کثیر رقمی مساوات کی تشکیل (Formation of Polynomial Equations with given Roots)

جذروں کے پتہ ہونے پر ہم نے دو درجی مساوات کی تعمیر کی ہے۔ اب ہم جذروں کے پتہ ہونے پر اعلیٰ درجہ کے کثیر رقمی مساوات کیسے تشکیل دینا سیکھتے ہیں۔ ہم $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ ، $n$ جذروں کے ساتھ اعلیٰ درجہ کی ایک کثیر رقمی مساوات کو کیسے تلاش کریں گے ایک کثیر رقمی مساوات لکھنے کا ایک طریقہ اجزائے ضربی کی ضرب ہے۔ یعنی

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots(x-\alpha_n)=0$$

یہ $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ جذروں کے ساتھ ایک کثیر رقمی مساوات ہے۔ لیکن یہ ایک کثیر رقمی مساوات لکھنے کا معمول طریقہ نہیں ہے۔ ہمیں معیاری شکل میں کثیر رقمی مساوات کو لکھنا پڑتا ہے۔ جو مزید محاسبوں پر منحصر ہوتا ہے۔ لیکن جذروں اور سر اعداد کے درمیان تعلقات کا استعمال کرتے ہوئے ہم براہ راست کثیر رقمی مساوات لکھ سکتے ہیں۔ اس کے علاوہ پورے کثیر رقمی مساوات کو تلاش کئے بغیر $x$ کی کسی بھی مخصوص قوت کا سرعدد لکھنا ممکن ہے۔

ایک مکعب کثیر رقمی مساوات جن کی جذریں $\alpha, \beta, \gamma$ ہوں

$x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma=0$ ہے۔

جذروں کے ساتھ $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ درجہ $n$ کی ایک کثیر رقمی مساوات

$x^n-\left(\sum\alpha_1\right)x^{n-1}+\left(\sum\alpha_1\alpha_2\right)x^{n-2}-\left(\sum\alpha_1\alpha_2\alpha_3\right)x^{n-3}+\cdots+(-1)^n\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n=0$ سے دی جاتی ہے۔

جہاں $\sum\alpha_1, \sum\alpha_1\alpha_2, \sum\alpha_1\alpha_2\alpha_3, \ldots$

جیسا کہ پہلے بیان کیا گیا ہے۔مثال کے طور پر 1, 2− اور 3 جذروں کے ساتھ ایک کثیر رقمی مساوات

$x^3-(1-2+3)x^2+(1\times(-2)+(-2)\times 3+3\times 1)x-1\times(-2)\times 3=0$ سے دی جاتی ہے۔

جسے، مختصر کرنے پر $x^3-2x^2-5x+6=0$ بنتا ہے۔ یہ تصدیق کرنا دلچسپ ہے کہ $(x-1)(x+2)(x-3)=0$ کی توسیع $x^3-2x^2-5x+6=0$ ہے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 104 27-02-2023 15:34:37

## مثال 3.4

$a \neq 0,\ ax^4+bx^3+cx^2+dx+e = 0$ کی جذروں کے مربعوں کی حاصل جمع معلوم کریں۔

## حل

فرض کرو $\alpha$ ، $\beta$ ، $\gamma$ اور $\delta$ $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e = 0$ کی جذریں ہیں۔

پھر ہم حاصل کرتے ہیں

$$\sum_1 = \alpha+\beta+\gamma+\delta = -\frac{b}{a},$$
$$\sum_2 = \alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta = \frac{c}{a},$$
$$\sum_3 = \alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta = -\frac{d}{a},$$
$$\sum_4 = \alpha\beta\gamma\delta = \frac{e}{a}.$$

ہمیں $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$ کو تلاش کرنا ہوگا۔الجبرائی تماثلات کا استعمال کرنے پر

$$(a+b+c+d)^2 \equiv a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd),$$

حاصل کرتے ہیں۔

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2 = (\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2-2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta)$$
$$= \left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\left(\frac{c}{a}\right)$$
$$= \frac{b^2-2ac}{a^2}.$$

## مثال 3.5

اس شرط کو تلاش کریں کہ مکعب مساوات $x^3+ax^2+bx+c = 0$ کے جذروں کی نسبت $p:q:r$ میں ہو۔

## حل

چونکہ جذروں کی نسبت $p:q:r$ میں ہے۔ ہم جذروں کو $p\lambda$ ، $q\lambda$ اور $r\lambda$. کے طور پر اخذ کر سکتے ہیں۔

پھر ہم

$$\sum_1 = p\lambda+q\lambda+r\lambda = -a, \quad \ldots.(1)$$
$$\sum_2 = (p\lambda)(q\lambda)+(q\lambda)(r\lambda)+(r\lambda)(p\lambda) = b, \quad \ldots.(2)$$
$$\sum_3 = (p\lambda)(q\lambda)(r\lambda) = -c, \quad \ldots.(3)$$

حاصل کرتے ہیں۔

$$(1) \Rightarrow \lambda = -\frac{a}{p+q+r} \quad \ldots.(4)$$
$$(3) \Rightarrow \lambda^3 = -\frac{c}{pqr} \quad \ldots..(5)$$

(4)کو(5)میں درج کرنے سے , حاصل ہوتا ہے۔

$$\left(-\frac{a}{p+q+r}\right)^3 = -\frac{c}{pqr} \Rightarrow pqra^3 = c(p+q+r)^3.$$

## مثال 3.6

مساوات کی تشکیل کریں جس کی جذریں مکعب مساوات $x^3+ax^2+bx+c = 0$ کی جذروں کا مربع ہیں۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 105 27-02-2023 15:34:48

## حل

فرض کرو $x^3+ax^2+bx+c = 0$ کی جذریں $\alpha$، $\beta$ اور $\gamma$ ہیں پھر ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$\sum_1 = \alpha+\beta+\gamma = -a, \quad \ldots(1)$$
$$\sum_2 = \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = b, \quad \ldots(2)$$
$$\sum_3 = \alpha\beta\gamma = -c. \quad \ldots(3)$$

ہمیں مساوات بنانا ہے۔جن کی جذریں $\alpha^2$، $\beta^2$ اور $\gamma^2$ ہو۔(1)، (2) اور (3) کا استعمال کرتے ہوئے، ہم مندرجہ ذیل کی تلاش کریں گے۔

$$\sum_1 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = (\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) = (-a)^2-2(b) = a^2-2b,$$
$$\sum_2 = \alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2 = (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2((\alpha\beta)(\beta\gamma)+(\beta\gamma)(\gamma\alpha)+(\gamma\alpha)(\alpha\beta))$$
$$= (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\beta+\gamma+\alpha) = (b)^2-2(-c)(-a) = b^2-2ca$$
$$\sum_3 = \alpha^2\beta^2\gamma^2 = (\alpha\beta\gamma)^2 = (-c)^2 = c^2.$$

لہذا، ضروری مساوات ہے۔

$$x^3-\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)x^2+\left(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2\right)x-\alpha^2\beta^2\gamma^2 = 0.$$

یعنی، $x^3-\left(a^2-2b\right)x^2+\left(b^2-2ca\right)x-c^2=0$

## مثال 3.7

اگر $p$ حقیقی ہے مساوات $4x^2+4px+p+2=0$ کے لحاظ سے $p$ کے جذروں کی نوعیت پر بحث کریں۔

## حل

$\Delta=(4p)^2-4(4)(p+2)=16\left(p^2-p-2\right)=16(p+1)(p-2)$ تو ہم حاصل کرتے ہیں۔

اگر $\Delta<0$ $-1<p<2$

اگر $\Delta=0$ $p=-1$ یا $p=2$

اگر $\Delta>0$ $-\infty<p<-1$ یا $2<p<\infty$

اس طرح دیئے گئے کثیر رقمیات کی۔

فرضی جذریں ہیں اگر $-1<p<2$

مساوی حقیقی جذریں ہیں اگر $p=-1$ یا $p=2$

مختلف حقیقی جذریں ہیں اگر $-\infty<p<-1$ یا $2<p<\infty$

## 3.1 مشق

1. اگر مکعب ڈبہ کے ایک مکعب نما بنانے کے لئے اطرافوں کو بالترتیب 1، 2، 3 اکائی تک بڑھایا جاتا ہے۔مکعب ڈبہ کا حجم 52 مکعب اکائی اضافہ ہوا ہے۔ مکعب نما کا حجم تلاش کریں۔
2. جذروں کے ساتھ ایک مکعب مساوات کی تعمیر کریں۔

   (i) 1, 2 اور 3 (ii) 1, 1 اور $-2$ (iii) 2, $\frac{1}{2}$ اور 1
3. اگر $\alpha$, $\beta$ اور $\gamma$ مکعب مساوات $x^3+2x^2+3x+4=0$ کی جذریں ہیں ایک مکعب مساوات کی تشکیل کریں جن کی جذریں ہیں۔

   (i) $2\alpha$, $2\beta$, $2\gamma$ (ii) $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ (iii) $-\alpha, -\beta, -\gamma$
4. $3x^3-16x^2+23x-6=0$ مساوات کو حل کریں۔اگر دو جذروں کا حاصل ضرب 1 ہے۔
5. $2x^4-8x^3+6x^2-3=0$ مساوات کی جذروں کے مربعوں کی حاصل جمع معلوم کریں۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 106 27-02-2023 15:34:59

6. $x^3-9x^2+14x+24=0$ مساوات کو حل کریں۔اگر یہ دیاجاتا ہے کہ اس کی جذریں نسبت $3:2$ میں ہیں۔

7. اگر $\alpha$، $\beta$ اور $\gamma$ کثیر رقمی مساوات $ax^3+bx^2+cx+d=0$ کی جذریں ہیں۔ سراعداد کی نسبت سے $\sum\frac{\alpha}{\beta\gamma}$ کو قیمت تلاش کریں

8. اگر $\alpha$، $\beta$، $\gamma$ اور $\delta$ کثیر رقمی مساوات $2x^4+5x^3-7x^2+8=0$ کی جذریں ہیں۔ سالم سراعداد کے ساتھ ایک دو درجی مساوات تلاش کریں جن کی جذریں $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ اور $\alpha\beta\gamma\delta$ ہیں۔

9. اگر $p$ اور $q$ مساوات $lx^2+nx+n=0$ کی جذریں ہیں۔ $\sqrt{\frac{p}{q}}+\sqrt{\frac{q}{p}}+\sqrt{\frac{n}{l}}=0$ ثابت کرو۔

10. اگر مساوات $x^2+px+q=0$ اور $x^2+p'x+q'=0$ کا ایک عام جذر ہے۔ ثابت کریں کہ اس کا $\frac{pq'-p'q}{q-q'}$ یا $\frac{q-q'}{p'-p}$ کے برابر ہونا ضروری ہے۔

11. ایک 12 میٹر لمبے درخت دو حصوں میں ٹوٹ گیا تھا۔ پتہ چلا کہ جس حصے کی اونچائی کھڑی تھی۔ وہ اس حصے کی لمبائی کی مکعب جذر ہے جو کاٹ دی گئی تھی۔ اس حصے کی اونچائی تلاش کرنے کے لئے اس کو ریاضی کے مسئلے میں مرتب کریں جو کھڑا رہ گیا تھا۔

## 3.4 جذروں کی نوعیت اور کثیر رقمی مساوات کے سراعداد کی نوعیت
## (Nature of Roots and Nature of Coefficients of Polynomial Equat ons)

### 3.4.1 خیالی جذریں (Imaginary Roots)

حقیقی سراعداد کے ساتھ ایک دو درجی مساوات کے لئے اگر $\alpha+i\beta$ جذر ہے پھر $\alpha-i\beta$ بھی ایک جذر ہے۔ اس حصہ میں ہم ثابت کریں گے کہ یہ اعلی درجہ کی کثیر رقمیات کے لئے بھی سچ ہے۔

مساواتی نظریوں کا ایک بہت اہم نظریہ کو اب ہم ثابت کریں گے۔

**مسئلہ 3.2 جوڑی مرکب عدد جذر مسئلہ (Complex Conjugate Root Theorem)**

اگر ایک مرکب عدد عدد $z_0$ حقیقی سراعداد والے ایک کثیر رقمی مساوات کا جذر ہے۔ تو اس کا جوڑی مرکب عدد $\overline{z_0}$ بھی ایک جذر ہے۔

**ثبوت**

فرض کرو $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_o=0$ حقیقی سراعداد کا ساتھ ایک کثیر رقمی مساوات ہے۔

فرض کرو $z_0$ اس کثیر رقمی مساوات کا جذر ہے تو $P(z_0)=0$ اب

$$\begin{aligned}
P(\overline{z_0}) &= a_n\overline{z}_0^n+a_{n-1}\overline{z}_0^{n-1}+\cdots+a_1\overline{z}_0+a_0\\
&= a_n\overline{z_0^{\,n}}+a_{n-1}\overline{z_0^{\,n-1}}+\cdots+a_1\overline{z_0}+a_0\\
&= \overline{a_n}\,\overline{z_0^{\,n}}+\overline{a_{n-1}}\,\overline{z_0^{\,n-1}}+\cdots+\overline{a_1}\,\overline{z_0}+\overline{a_0} \qquad (\text{جیسا کہ } a_r=\overline{a_r} \text{ تمام } a_r \text{ کے لئے حقیقی } r \text{ ہے})\\
&= \overline{a_nz_0^{\,n}}+\overline{a_{n-1}z_0^{\,n-1}}+\cdots+\overline{a_1z_0}+\overline{a_0}\\
&= \overline{a_nz_0^{\,n}+a_{n-1}z_0^{\,n-1}+\cdots+a_1z_0+a_0} \;=\overline{P(z_0)}=\overline{0}=0\,.
\end{aligned}$$

یعنی $P(\overline{z}_0)=0$ اس کا مطلب یہ ہے کہ جب $z_0$ جذر ہے۔ (یعنی، $P(z_0)=0$) اس کی جوڑی $\overline{z}_0$ بھی ایک جذر ہے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 107 27-02-2023 15:35:09

اگر کوئی پوچھتا ہے کہ 2 ایک مرکب عدد ہے۔ بہت سے طالب علم "ہاں" کہنے کے لئے ہچکچاتے ہیں جیسا کہ ہر سالم عدد ایک ناطق عدد ہے۔ہم جانتے ہیں کہ ہر حقیقی بھی ایک مرکب عدد ہے۔ لہٰذا واضح طور پر ایک مرکب عدد کی وضاحت کرنے کے لئے جو حقیقی عدد نہیں ہے یعنی $\alpha+i\beta$ ، $\beta\neq 0$ کے ساتھ شکل کے اعداد کی وضاحت کرنا، غیر حقیقی مرکب عدد ہم خاص لفظ استعمال کرتے ہیں کچھ بانی اس طرح کے اعداد کو خیالی اعداد کہتے ہیں۔

### ریمارک 1 (Remark)

فرض کرو $z_0=\alpha+i\beta$ کے ساتھ $\beta\neq 0$ پھر $\bar{z}_0=\alpha-i\beta$ اگر $\alpha+i\beta$ حقیقی سرعدد کے ساتھ ایک کثیر رقمی مساوات $P(x)=0$ کی جذر ہے پھر جوڑی مرکب عدد جذر مسئلہ سے $\alpha-i\beta$ بھی ایک جذر $P(x)=0$ کی ہے۔ عام طور پر مندرجہ بالا بیانات کو اس طرح کہاجائے گا۔ جیسا کہ مرکب عدد جذریں جوڑوں میں ہوتی ہے۔ لیکن اصل میں اس کا مطلب یہ ہے کہ غیر حقیقی مرکب عدد جذریں یا خیالی جذریں جوڑوں کے طور پر ہوتی ہیں۔ اس وجہ سے کہ کثیر رقمی مساوات کی سراعداد حقیقی ہو۔

### ریمارک 2 (Remark)

اس سے ہم دیکھتے ہیں کہ حقیقی سراعداد کے ساتھ کسی بھی طاق درجہ کثیر رقمی مساوات کی کم ازکم ایک حقیقی جذر ہے ۔ حقیقی سراعداد کے ساتھ ایک طاق درجہ کثیر رقمی مساوات کی حقیقی جذریں ہمیشہ ایک طاق تعداد میں ہوتی ہیں اس طرح حقیقی سراعداد کے ساتھ ایک جفت درجہ کثیر رقمی مساوات کی حقیقی جذریں ہمیشہ ایک جفت تعداد میں ہوتی ہیں۔

### مثال 3.8

حقیقی سراعداد کے ساتھ کم از کم درجہ کی ایک درجہ کثیر رقمی مساوات کو تلاش کریں۔ جس کی جذر $2-\sqrt{3}\,i$ ہے۔

### حل

چونکہ $2-\sqrt{3}\,i$ اصل سراعداد کے ساتھ ضروری کثیر رقمی مساوات کا جذر ہے $2+\sqrt{3}\,i$ بھی جذر ہے لہٰذا جذر کی جمع 4 ہے۔ اور جذروں کا حاصل ضرب 7 ہے۔ اس طرح $x^2-4x+7=0$ ضرورت والی ایک درجہ کثیر رقمی مساوات ہے۔ ■

## 3.4.2 غیر ناطق جذریں (Irrational Roots)

اگر ہم دو درجی مساوات $ax^2+bx+c=0$ کی سراعداد کو ناطق تک محدود کردیں ۔ہمیں کچھ دلچسپ نتائج ملتے ہیں۔ $a, b,$ اور $c$ ناطق کے ساتھ ایک دو درجی مساوات $ax^2+bx+c=0$ پر غور کریں۔ ہمیشہ کی طرح فرض کرو $\Delta=b^2-4ac$ اور فرض کرو $r_1$ اور $r_2$ جذریں ہیں۔ اس معاملہ میں جب $\Delta=0$ ہو ہمارے پاس $r_1=r_2$ ; ہے۔ یہ جذر نہ صرف حقیقی ہے، حقیقت میں یہ ایک ناطق عدد ہے۔

جب $\Delta$ مثبت ہے تو پھر کوئی شک نہیں $\sqrt{\Delta}$ $\mathbb{R}$ میں موجود ہے اور ہمیں دو الگ الگ حقیقی جذریں مل جاتی ہیں لیکن $a, b,$ اور $c$ کی بعض قیمتوں کے لئے $\sqrt{\Delta}$ ناطق عدد ہوگا اور $a, b,$ اور $c$ کے دیگر قیمتوں کے لئے یہ ایک غیر ناطق عدد ہوگا۔

اگر $\sqrt{\Delta}$ ناطق ہے پھر دونوں $r_1$ اور $r_2$ ناطق ہیں۔

اگر $\sqrt{\Delta}$ غیر ناطق ہے پھر دونوں $r_1$ اور $r_2$ غیر ناطق ہیں۔

ہمارے پاس فوری طور پر ایک سوال ہے۔ اگر $\Delta>0$ ، $\sqrt{\Delta}$ کب ناطق ہوجائے گا اور کب یہ ناطق عدد ہوجائے گا؟ اس سوال کے جواب کے لئے سب سے پہلے ہم یہ دیکھتے ہیں کہ $\Delta$ ناطق ہے کیونکہ سراعداد ناطق عدد ہیں ۔یعنی $\Delta=\frac{m}{n}$ کچھ مثبت سالم اعداد $m$ اور $n$ کے لئے $(m,n)=1$ کے ساتھ، جہاں $(m,n)$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 108 27-02-2023 15:35:16

$m$ اور $n$ مشترک کے مقسوم علیہ اعظم کو ظاہر کرتا ہے۔

یہ سمجھنا آسان ہے کہ $\sqrt{\Delta}$ ناطق ہے اگر صرف اور صرف دونوں، $m$ اور $n$ کامل مربع ہیں اور $\sqrt{\Delta}$ غیر ناطق ہے صرف اور صرف اگر کم از کم $m$ اور $n$ کوئی ایک کامل مربع نہیں ہے۔

ہم $p+\sqrt{q}$ قسم کی غیر ناطق اعداد سے واقف ہیں۔ جہاں $p$ اور $q$ ناطق اعداد اور $\sqrt{q}$ غیر ناطق ہے۔ اس طرح کے عددوں کو **surds** سرڈس کہا جاتا ہے ۔ جیسا کہ خیالی جذروں کے معاملے میں ہم یہ ثابت کرسکتے ہیں کہ اگر $p+\sqrt{q}$ ایک کثیر رقمیات کی جذر ہے۔ پھر $p-\sqrt{q}$ بھی اسی کثیر رقمیات مساوات کا ایک جذر ہے، جب تمام سراعداد ناطق ہیں۔ اگرچہ یہ کسی بھی درجہ کے کثیر رقمیات مساوات کے لئے سچ ہے۔اور یہ خیالی جذروں کے ثبوت میں استعمال ہونے والے طریقہ کار کا استعمال کرتے ہوئے ثابت کیا جاسکتا ہے۔ ہم صرف یہ ایک دو درجی مساوات مسئلہ 3.3 بیان کر کے ثابت کرتے ہیں۔

مسئلہ ثابت کرنے سے پہلے ہم یاد کرتے ہیں کہ اگر $a$ اور $b$ ناطق اعداد ہیں اور $c$ ایک غیر ناطق عدد ہے۔ اس طرح کہ $a+bc$ ایک ناطق ہے۔ پھر $b$ کا صفر ہونا ضروری ہے۔مزید اگر $a+bc=0$ پھر $a$ اور $b$ کا صفر ہونا ضروری ہے۔

مثال کے طورپر اگر $a+b\sqrt{2}\in \mathbb{Q}$ پھر $b$ کاصفر ہونا ضروری ہے۔ اور اگر $a+b\sqrt{2}=0$ پھر $a=b=0$ اب ہم عام نتیجہ کو بیان کرکے ثابت کرتے ہیں۔ جیسا کہ نیچے دیاگیا ہے۔

**مسئلہ 3.3**

فرض کرو $p$ اور $q$ ناطق اعداد ہیں اس طرح کہ $\sqrt{q}$ غیر ناطق ہے اگر $p+\sqrt{q}$ ناطق سراعداد والے ایک دو درجی مساوات کا جذر ہے پھر $p-\sqrt{q}$ بھی اسی مساوات کا ایک جذر ہے۔

## ثبوت

ہم اس مسئلہ کو ثابت کرتے ہوئے سمجھتے ہیں کہ دو درجی مساوات ایک کثیر رقمی مساوات ہے۔ غیر ایک درجہ کثیر رقمی مساوات کا نتیجہ اسی طرح ثابت ہوا ہے۔

فرض کرو $p$ اور $q$ ایک ناطق اعداد اس طرح کہ $\sqrt{q}$ غیرناطق ہے فرض کرو $p+\sqrt{q}$ مساوات $x^2+bx+c=0$ کی جذر ہے۔ جہاں $b$ اور $c$ ناطق اعداد ہیں۔

فرض کرو $\alpha$ دوسری جذر ہو۔ جذروں کو جمع کرنے سے ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$\alpha+p+\sqrt{q} = -b$$

اور اسی وجہ سے $\alpha+\sqrt{q}=-b-p\in\mathbb{Q}$ . $-b-p$ کو $s$ لینے سے ہمارے پاس $\alpha+\sqrt{q}=s$ ہے۔

اس کا مطلب ہے۔

$$\alpha = s-\sqrt{q}\,.$$

جذروں کی حاصل ضرب سے ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$(s-\sqrt{q})(p+\sqrt{q}) = c$$

اور اس وجہ سے $(sp-q)+(s-p)\sqrt{q}=c\in\mathbb{Q}$ اسی طرح $s-p=0$ اس کا مطلب $s=p$ اور اس وجہ سے ہم $\alpha=p-\sqrt{q}$ حاصل کرتے ہیں تو دوسری جذر $p-\sqrt{q}$ ہے۔ ■

## ریمارک (Remark)

مسئلہ 3.3 کا بیان تھوڑا سا مشکل لگتا ہے۔ ہمیں مسئلہ کو مختصر طور پر لکھنے میں جلدی نہیں کرنی چاہئے۔"ناطق سراعداد والی ایک کثیر رقمی مساوات کے لئے غیر ناطق جذریں جوڑوں میں ہوتی ہیں۔" یہ سچ نہیں ہے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 109 27-02-2023 15:35:24

مثال کے طور پر مساوات $x^3 - 2 = 0$ کا صرف ایک غیرناطق جذر ہے۔یعنی $\sqrt[3]{2}$ ، بالکل دوسری دو جذریں غیر ناطق اعداد ہیں۔ (وہ کیا ہیں؟)

## مثال 3.9

ناطق سراعداد والے کم از کم درجہ کا ایک کثیر رقمی مساوات تلاش کریں جس کی جذر $2 - \sqrt{3}$ ہے۔

## حل

چونکہ $2 - \sqrt{3}$ ایک جذر ہے اور سر اعداد ناطق عدد ہیں $2 + \sqrt{3}$ بھی ایک جذر ہے ایک ضروری کثیر رقمی مساوات اس طرح سے دیا جاتا ہے۔

$$x^2 - (\text{جذروں کا حاصل جمع})\, x + (\text{جذروں کا حاصل ضرب}) = 0$$

اور اس وجہ سے

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

ایک ضروری مساوات ہے۔

## غور کیجئے (Note)

ہم غور کرتے ہیں کہ لفظ "ناطق سراعداد" بہت اہم ہے۔ دوسری صورت میں $x - (2 - \sqrt{3}) = 0$ ایک کثیر رقمی مساوات ہوجائے گا۔ جس میں $2 - \sqrt{3}$ جذرہوگا، لیکن $2 + \sqrt{3}$ نہیں ہم مندرجہ ذیل نتیجہ کو ثبوت کے بغیر بیان کرتے ہیں۔

**مسئلہ 3.4**

فرض کرو $\sqrt{p}$ اور $\sqrt{q}$ غیر ناطق اعداد ہوں فرض کرو $p$ اور $q$ ناطق عدد ہیں تاکہ۔مزید کوئی ایک $\sqrt{p}$ اور $\sqrt{q}$ میں سے ایک دوسرے کا ناطق ضربی نہیں ہے۔ اگر $\sqrt{p} + \sqrt{q}$ ناطق سراعداد والے ایک کثیر رقمی ۔ مساوات کا ایک جذر ہے۔ پھر $\sqrt{p} - \sqrt{q}, -\sqrt{p} + \sqrt{q}$ اور $-\sqrt{p} - \sqrt{q}$ بھی اسی کثیر رقمی مساوات کی جذریں ہیں۔

## مثال 3.10

$\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$ جذر کے ساتھ سالم سراعداد والے کثیر رقمی مساوات کو تشکیل دیں۔

## حل

چونکہ $\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$ جذر ہے $x - \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$ اجزائے ضربی ہے۔بیرونی مربع جذر کو دور کرنے کے لئے ، ہم $x + \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$ ایک اور اجزائے ضربی کے طور پر لے کران کی حاصل ضرب کو تلاش کریں گے۔

$$\left(x + \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}\right)\left(x - \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}\right) = x^2 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

اب بھی ہم نے اپنا مقام حاصل نہیں کیا۔لہٰذا ہم ایک اور اجزائے ضربی $x^2 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ کو شامل کرنے پر حاصل ضرب ملتا ہے۔

$$\left(x^2 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\left(x^2 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) = x^4 - \frac{2}{3}.$$

تو $3x^4 - 2 = 0$ سالم سراعداد والی ایک ضروری کثیر رقمی مساوات ہے۔

اب ہم مساوات کو حل کئے بغیر دئے گئے مساوات کی جذروں کی نوعیت کی شناخت کرتے ہیں۔ یہ خیال $\Delta = b^2 - 4ac$ کے منفی ہونے وصفر کے مساوی ہونے اور مثبت ہونے سے آتا ہے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 110 27-02-2023 15:35:31

### 3.4.3 ناطق جذریں (Rational Roots)

اگر ایک دو درجی مساوات کے تمام سر اعداد سالم ہیں، پھر $\Delta$ سالم عدد ہے، اور جب یہ مثبت ہے تو ہمارے پاس، $\sqrt{\Delta}$ ناطق ہے اگر صرف اور صرف $\Delta$ کامل مربع ہے۔دوسرے الفاظ میں مساوات $ax^2+bx+c=0$ سالم سر اعداد والی کے پاس ناطق جذریں ہیں۔ صرف اور صرف اگر $\Delta$ ایک کامل مربع ہے۔

ہم نے اب تک جو بحث کی ہے وہ ناطق سراعداد والی کثیر رقمی کے لئے ہی نہیں بلکہ سالم اعداد سراعداد رکھنے والی کثیر رقمی مساوات کے لئے بھی صحیح ہے۔درحقیقت، ناطق سر اعداد والی کثیر رقمی مساوات کو سراعداد کے عام نسب نما سے ضرب کریں تو ہمیں سالم سراعداد والی کثیر رقمی مساوات جس کی جذریں بھی وہی ہیں حاصل ہوتی ہے۔ہمیں اس صورت حال کو احتیاط سے سنبھالنا ہے۔ فرض کرو ایک ناطق سراعداد والی ایک درجہ کی کثیر رقمی کا جذر $\frac{1}{2}$ ہے، لیکن ایک سالم سراعداد والی ایک درجہ کی کثیر رقمی نہیں ہے۔جس کا جذر $\frac{1}{2}$ ہو۔

1QN29

**مثال 3.11**

ثابت کرو کہ $x$ کی کوئی بھی حقیقت قیمت $2x^2-6x+7=0$ مساوات کو راضی نہیں کرسکتی ۔

**حل**

$\Delta=b^2-4ac=-20<0$ جذریں خیالی ہیں۔ ■

**مثال 3.12**

اگر $x^2+2(k+2)x+9k=0$ کی مساوی جذریں ہیں، $k$ تلاش کریں ۔

**حل**

یہاں، برابر جذروں کے لئے $\Delta=b^2-4ac=0$ اس کا مطلب ہے $4(k+2)^2=4(9)k$ مطلب $k=4$ یا $1$ ہے۔ ■

**مثال 3.13**

ثابت کریں اگر $p,q,r$ ناطق ہیں مساوات $x^2-2px+p^2-q^2+2qr-r^2=0$ کی جذریں ناطق ہیں۔

**حل**

جذریں ناطق ہیں۔ اگر $\Delta=b^2-4ac=(-2p)^2-4\left(p^2-q^2+2qr-r^2\right)$

لیکن یہ اظہار $4\left(q^2-2qr+r^2\right)$ یا $4(q-r)^2$ مختصر ہوجاتاہے۔جو ایک کامل مربع ہے۔ لہٰذا جذریں ناطق ہیں۔ ■

## 3.5 علم ہندسہ میں کثیر رقمی مساوات کااستعمالات (Applications of Polynomial Equation in Geometry)

بعض علم ہندسی خصوصیات کثیر رقمی مساوات کا استعمال کرتے ہوئے ثابت ہوتے ہیں۔ ہم یہاں چند علم ہندسی خصوصیات پر گفتگو کرتے ہیں۔

**مثال 3.14**

ثابت کرو کہ ایک خط دونقطوں سے زیادہ دائرے کو قطع نہیں کرسکتا ۔

**حل**

مناسب طریقے سے ہم محددی محور کو منتخب کرکے دائرے کے لئے $x^2+y^2=r^2$ مساوات اور سیدھی خط $y=mx+c$ مساوات کے طور پر لیتے ہیں۔ ہم جانتے ہیں کہ دائرہ اور سیدھی خط کا نقطہ تقاطع کو دونوں ہم معنی مساوات کوراضی کرنا ہے۔

$$x^2+y^2=r^2 \quad \ldots (1)$$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 111 27-02-2023 15:35:37

$$y = mx + c \qquad \ldots (2)$$

اگر ہم (1) میں $y$ کے لئے $mx+c$ کو تبدیل کرتے ہیں تو، ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$x^2 + (mx+c)^2 - r^2 = 0$$

جو دو درجی مساوات کے طور پر ہے۔

$$(1+m^2)x^2 + 2mcx + (c^2 - r^2) = 0 \qquad \ldots . (3)$$

اس مساوات کے دو سے زیادہ حل نہیں ہوسکتے اور اس وجہ سے ایک خط اور ایک دائرہ دونقطوں سے زیادہ قطع نہیں ہوسکتا ہے۔

یہ غور کرنا دلچسپ ہے کہ متبادل دومتغیرات والی دومساوات کو حل کرنے کے مسئلہ کو دو درجی مساوات کا حل کرنے کے مسئلہ میں تبدیلی کردیتا ہے۔

اس کے علاوہ ہم غور کریں کہ مختصر ہونے والے دو درجی کثیر رقمیات کے سراعداد چونکہ حقیقی ہیں۔ یا تو دونوں جذریں حقیقی یا دونوں خیالی نے ہیں۔ اگر دونوں جذریں خیالی ہیں ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ دائرہ اور سیدھی خط قطع نہیں ہونگے حقیقی جذروں کے معاملے میں، وہ کثیر رقمیات کے مختلف یا کثیر جذریں ہیں۔ اگر وہ الگ ہیں ۔ (2)میں متبادل کرکے ہم $y$ کے لئے دوقیمت حاصل کرتے ہیں اور اس وجہ سے دونقاط تقاطع ہیں اگر ہمارے پاس مساوی جذریں ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ سیدھی خط دائرے کو ایک مماس کے طور پر چھو جاتا ہے۔ جیسا کہ کثیر رقمیات(3) کے پاس صرف ایک سادہ حقیقی جذر نہیں ہے۔ ایک خط صرف ایک ہی نقطہ پر دائرے کو نہیں کاٹ سکتا ۔

### غور کیجئے (Note)

مثال کے طور پر، مثال 3.14 کا ایک ہی طریقہ ہے جو ثابت کرنے کے لئے اپنا یا جاسکتا ہے۔

- دودائرے دو نقطوں سے زیادہ قطع نہیں ہوسکتے ہیں۔
- ایک دائرے اور ایک بیضوی چار نقطوں سے زیادہ قطع نہیں ہوسکتے ہیں۔

### مشق 3.2

1. اگر $k$ حقیقی ہے کثیر رقمی مساوات $2x^2 + kx + k = 0$ کے جذروں کی نوعیت $k$ کی نسبت سے بحث کریں۔
2. ناطق سراعداد کے ساتھ کم از کم درجہ کی ایک رقمی مساوات کو تلاش کریں، $2+\sqrt{3}i$ جس کا جذر ہو۔
3. ناطق سراعداد کے ساتھ کم از کم درجہ کے ایک کثیر رقمی مساوات کو تلاش کریں، $2i+3$ جس کا جذر ہو۔
4. ناطق سراعداد کے ساتھ کم از کم درجہ کے ایک کثیر رقمی مساوات کو تلاش کریں، $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ جس کا جذر ہو۔
5. ثابت کرو کہ سیدھی خط اور بیضوی دونقطوں سے زیادہ پر قطع نہیں ہوسکتے ۔

## 3.6 اعلیٰ درجہ کثیر رقمی مساوات کی جذریں (Roots of Higher Degree Polynomial Equations)

ہم جانتے ہیں کہ مساوات $P(x) = 0$ کو کثیر رقمی مساوات کہا جاتا ہے۔ ایک کثیر رقمی مساوات کی جذر یا صفر اور مقابل کثیر رقمی مساوات کا حل سب مساوی ہیں۔ لہٰذا، ہم دونوں اصطلاحات استعمال کرتے ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ یہ اس بات کی تصدیق کرنا آسان ہے کہ متبادل طریقے سے عدد ایک کثیر رقمی مساوات کی جذر ہے یا نہیں لیکن جذریں تلاش کرتے وقت مسئلہ آسان ہے اگر مساوات دو درجی ہے لیکن عام طورپر اعلیٰ درجہ کی ایک کثیر رقمی مساوات کے لئے بہت آسان نہیں ہے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 112 27-02-2023 15:35:41

ایک کثیر رقمی مساوات کا حل جو صرف اس کے سراعداد کا استعمال کرتے ہوئے لکھا ہو، ریاضی کے چار بنیادی (جمع، ضرب، تفریق اور تقسیم)اور ناطق اخراجات (ایک ناطق پر قوت، اس طرح کے مربع، مکعب جذرالمربع، جزرمکعب اور اس طرح) ایک بنیادی حل کہا جاتا ہے۔ایبل نے ثابت کیا کہ پانچ یا اس سے زیادہ کی عام کثیر رقمی مساوات کے لئے ایک بنیادی حل لکھنا ناممکن ہے۔

EPBK6

ہم کثیر رقمی مساوات کے بارے میں کچھ نتیجہ بیان کرتے ہیں۔ جو اعلیٰ درجہ کثیر رقمی مساوات کو حل کرنے میں مفید ہیں۔

- ایک متغیر والی ہر کثیر رقمی $\mathbb{R}$ سے $\mathbb{R}$ تک ایک مسلسل تفاعل ہے۔
- ایک کثیر رقمی مساوات $P(x)=0$ جفت درجہ والی کے لئے $P(x)\to\infty$ کیونکہ $P(x)\to\pm\infty$ اس لئے جفت درجہ کثیر رقمی کی ترسیم اور بائیں اوپر سے شروع ہوکر دائیں اوپر ختم ہوتی ہے۔
- گیارہویں جماعت کی کتاب کے پہلے جلد میں ترسیم کی حل پر بحث کئے گئے تمام نتیجوں کو کثیر رقمی کے ترسیم پر عمل کیا جاسکتا ہے۔ مثال کے طور پر کثیر رقمی کے مستقل مقدار میں تبدیلی صرف اس کے ترسیم کو اوپر یا نیچے کرتی ہے۔
- تمام کثیر رقمی مساوات کو کتنے بھی وقت تفریق کرسکتے ہیں۔
- ایک کثیر رقمی مساوات $P(x)=0$ کی حقیقی جذریں $x$ محور پروہ نقاط ہیں جہاں $P(x)=0$ کی ترسیم $x$ محور کو کاٹتی ہے۔
- اگر $a$ اور $b$ دو حقیقی اعداد ہیں ایسا کہ $P(a)$ اور $P(b)$ کی علامت مخالف ہے تو۔
  - حقیقی خط پر ایک نقطہ $c$ ہے جس کے لئے $P(c)=0$
  - یعنی، $a$ اور $b$ کے درمیان ایک جذر ہے۔
  - یہ ضروری نہیں ہے کہ اس طرح کے نقطوں کے درمیان صرف ایک جذر ہو بلکہ $3,5,7,\ldots$ جذریں ہوسکتی ہیں۔یعنی $a$ اور $b$ کے درمیان حقیقی جذروں کی تعداد طاق ہے اور یہ جفت نہیں ہے۔

تاہم اور اگر جذروں کے بارے میں کچھ معلومات معلوم ہوتی ہیں ۔پھر ہم دوسری جذریں تلاش کرنے کی کوشش کرسکتے ہیں فرض کرو اگر یہ معلوم ہوتا ہے کہ ناطق سراعداد والی درجہ 6 کے کثیر رقمی مساوات کی دد جذریں $2+3i$ اور $4-\sqrt{5}$ ہیں پھر فوری طور پر کہہ سکتے ہیں کہ $2-3i$ اور $4+\sqrt{5}$ بھی کثیر رقمی مساوات کی جذریں ہیں۔ تو اسی مطابقت اجزائے ضربی سے تقسیم کرکے ہم مسئلہ کو دوسری درجہ مساوات کے مسئلہ کا حل معلوم کرنے تک کم کرسکتے ہیں اس شعبہ میں ہم ہم اعلیٰ درجہ کی کثیر رقمی کے جذریں تلاش کرنے کے کچھ طریقے سیکھتے ہیں۔اگر ہمارے پاس تھوڑی جانکاری ہو۔

## 3.7 زیادہ معلومات کے ساتھ کثیر رقمیات (Polynomials with Additional Information)

اب ہم چند زیادہ معلومات پر تبادلہ خیال کرتے ہیں۔ جس کے ساتھ ہم اعلیٰ درجہ کثیر رقمی کو حل کرسکتے ہیں۔ کبھی کبھی زیادہ معلومات براہِ راست دی جائے گی۔ جیسے کہ ایک جذر $2+3i$ ہے۔ کبھی کبھی زیادہ معلومات جیسا کہ، سراعداد کی جمع صفر، کثیر رقمیات کے مشاہدے کی طرف سے پایا جاسکتا ہے۔

### 3.7.1 خیالی یا سرڈس جذریں (Imaginary or Surds Roots)

اگر $\alpha+i\beta$ حقیقی سراعداد کے ساتھ دو درجی کثیر رقمی کی ایک خیالی جذر ہے۔ پھر $\alpha-i\beta$ بھی جذر ہے۔ اس طرح $(x-(\alpha+i\beta))$ اور $(x-(\alpha-i\beta))$ کثیر رقمیات کے اجزائے ضربی ہیں لہٰذا ان کی حاصل ضرب ایک اجزائے ضربی ہے۔ $x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2$ ایک اجزائے ضربی ہے۔ ہم اس اجزائے ضربی سے کثیر رقمی کی تقسیم کرسکتے ہیں اور دوسری درجہ خارج قسمت حاصل کرسکتے ہیں۔ جسے جانے مانے طریقوں سے حل کیا جاسکتا ہے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 113 27-02-2023 15:35:46

اگر $2+\sqrt{3}$ ناطق سراعداد کے ساتھ دو درجی کثیر رقمی مساوات کا جذر ہے۔ پھر $2-\sqrt{3}$ بھی جذر ہے۔اس طرح ان کی حاصل ضرب $(x-(2+\sqrt{3}))(x-(2-\sqrt{3}))$ ایک اجزائے ضربی ہے یعنی $x^2-4x+1$ ایک اجزائے ضربی ہے، ہم اس اجزائے ضربی سے کثیر رقمیات کی تقسیم کرسکتے ہیں۔اور ایک دوسرے اجزائے ضربی کے طور پر خارج قسمت حاصل کرسکتے ہیں۔جو کہ جانے طریقوں سے حل کیا جاسکتا ہے۔اس کا استعمال کرتے ہوئے، ہم دو درجی مساوات کی تمام جذروں کو تلاش کرسکتے ہیں یہ طریقہ $2+\sqrt{3}$ کی جگہ لینے والے تمام سرڈ کے لئے استعمال ہوتا ہے۔

اگر کسی ناطق سراعداد کے ساتھ چھٹے درجہ کے کثیر رقمی کی جذر اور سرڈ جذر کا پتہ چل جاتا ہے۔ پھر قدم بہ قدم ہم چھٹے درجہ کثیر رقمیات مساوات کو حل کرنے کے مسئلے کو ایک دو درجی مساوات کو حل کرنے کے مسئلہ میں تبدیل کردیں گے۔

### مثال 3.15

اگر $2+i$ اور $3-\sqrt{2}$ مساوات $x^6-13x^5+62x^4-126x^3+65x^2+127x-140=0$, کی جذریں ہوتو تمام جذریں تلاش کریں۔

### حل

چونکہ مساوات کی سراعداد تمام ناطق اعداد ہیں اور $2+i$ اور $3-\sqrt{2}$ جذریں ہیں ہم $2-i$ اور $3+\sqrt{2}$ حاصل کرتے ہیں۔ یہ بھی دیئے گئے مساوات کی جذریں ہیں اس طرح $(x-(2-i))$, $(x-(2+i))$ $(x-(3-\sqrt{2}))$ اور $(x-(3+\sqrt{2}))$ اجزائے ضربی ہیں اس طرح ان کی حاصل ضرب

$$((x-(2+i))(x-(2-i))(x-(3-\sqrt{2}))(x-(3+\sqrt{2}))$$

دی گئی کثیر رقمیات مساوات کا ایک اجزائے ضربی ہے یعنی،

$$(x^2-4x+5)(x^2-6x+7)$$

ایک اجزائے ضربی ہے۔ اس اجزائے ضربی سے دیئے گئے کثیر رقمی مساوات کو تقسیم کرکے ہم دوسرے اجزائے ضربی $(x^2-3x-4)$ کوحاصل کرتے ہیں جس کا مطلب ہے کہ 4 اور $-1$ دوسری دوجذریں ہیں اس طرح $3+\sqrt{2},3-\sqrt{2},2+i,2-i$ ، $-1$ اور 4 دیئے گئے کثیر رقمی مساوات کی جذریں ہیں۔

## 3.7.2 صرف جفت قوتوں کے ساتھ کثیر رقمی مساوات (Polynomial equations with Even Powers Only)

اگر $P(x)$ درجہ $2n$ کی ایک کثیر رقمی مساوات ہے صرف $x$ کی جفت قوتوں کے ساتھ (یعنی، طاق قوتوں کے سراعداد 0 ہیں) $x^2$ کو $y$ میں تبدیل کرئیے ہم $y$ میں درجہ $n$ کے ساتھ ایک کثیر رقمی مساوات حاصل کرتے ہیں۔ فرض کرو $y_1, y_2, \cdots y_n$ اس کثیر رقمی مساوات کی جذریں ہو۔ پھر $n$ مساوات $x^2 = y_r$ ، پر غور کریں ہم ہر ایک $y_r$ کے لئے $x$ کی دوقیمت تلاش کرسکتے ہیں۔یہ $2n$ تعداد $x$ میں دی گئی کثیر رقمی مساوات کی جذریں ہیں۔

### مثال 3.16

$x^4-9x^2+20=0$ مساوات کو حل کریں۔

### حل

$x^4-9x^2+20=0$ . دی گئی مساوات ہے۔

یہ ایک چوتھے درجہ کی مساوات ہے اگر ہم $x^2$ کو $y$ سے تبدیل کرتے ہیں۔ تو پھر ہم کو ایک دو درجی مساوات ملتی ہے۔

$$y^2-9y+20=0\ .$$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 114 27-02-2023 15:35:56

یہ دیکھنا آسان ہے 4 اور 5، $y^2-9y+20=0$ کے حل ہیں اب $x^2=4$ اور $x^2=5$ کو لیکر ہم $2,-2,\sqrt{5},-\sqrt{5}$ دیئے گئے مساوات کے حل کے طور پر حاصل کرتے ہیں۔

ہم غور کریں کہ اوپر کا طریقہ کار $x^6-17x^3+30=0$، $ax^{2k}+bx^k+c=0$ جیسے کثیر رقمی مساوات پر استعمال کیا جاسکتا ہے اور اس شکل کے تمام کثیر رقمی مساوات میں $a_nx^{kn}+a_{n-1}x^{k(n-1)}+\cdots+a_1x^k+a_0=0$ جہاں $k$ کوئی مثبت سالم عدد ہے۔

### 3.7.3 تمام سراعداد کی جمع صفر (Zero Sum of all Coefficients)

فرض کور $P(x)=0$ ایک کثیر رقمی مساوات ہیں جس کے سراعداد کی جمع صفر ہے۔ اصل میں سراعداد کی جمع کیا ہے؟ سراعداد کی جمع کچھ نہیں ہے۔ بلکہ $P(1)$. تمام سراعداد کی جمع صفر ہے جس کا مطلب $P(1)=0$ ہے۔جو کہتا ہے کہ 1 $P(x)$ کی جذر ہے۔ مساوات کو حل کرنے کے باقی مسائل آسان ہیں۔

**مثال 3.17**

$x^3-3x^2-33x+35=0$. مساوات کو حل کریں۔

**حل**

کثیر رقمی کے سراعداد کی جمع 0. ہے۔لہذا، 1 کثیر رقمی کی جذر ہے۔ دیگر جذریں تلاش کرنے کے لئے، ہم $x^3-3x^2-33x+35$ کو $x-1$ سے تقسیم کرتے ہیں اور خارج قسمت $x^2-2x-35$ کے طور پر حاصل کریں گے۔ اس کو حل کرکے ہم 7 اور $-5$ جذروں کے طور پر حاصل کرتے ہیں۔ اس طرح $1,7,-5$ دیئے گئے مساوات کے حل کا مجموعہ کہلاتی ہے۔

### 3.7.4 طاق اور جفت قوتوں کے سراعداد کی مساوی جمع (Equal Sums of Coefficients of Odd and Even Powers)

فرض کرو $P(x)=0$ ایک کثیر رقمی مساوات ہے جیسے کہ طاق قوتوں کی سراعداد کی جمع، جفت قوتوں کے سراعداد جمع کے برابر ہیں۔ اصل میں اس کا کیا مطلب ہے؟ اگر $a$، $P(x)=0$, میں ایک طاق قوت کا سرعدد ہے تو مساوی قوت کا سرعدد $-a$، $P(-x)=0$ میں ہے۔ $P(x)=0$ اور $P(-x)=0$ دونوں کی بھی جفت ورجے کی رقم کے سراعداد مساوی ہونگے۔ اس طرح دیئے گئے شرط کا ظاہر یہ ہے کہ $P(-x)=0$ کے تمام سراعداد کی جمع صفر ہے اور اس وجہ سے 1، $P(-x)=0$ کا ایک جذر ہے۔ جس کا کہنا ہے کہ $-1$، $P(x)=0$ کی جذر ہے۔ مساوات کو حل کرنے کے باقی مسائل آسان ہیں۔

**مثال 3.18**

$2x^3+11x^2-9x-18=0$ مساوات کو حل کریں۔

**حل**

ہم یہ دیکھتے ہیں کہ طاق قوتوں کی سراعداد کی جمع اور جفت قوتوں کے سراعداد کی جمع مساوی ہے۔ لہٰذا، $-1$ مساوات کا ایک جذر ہے۔ دیگر جذریں تلاش کرنے کے لئے ہم $2x^3+11x^2-9x-18$ کو $x+1$ تقسیم کرتے ہیں اور $2x^2+9x-18$ کے طور پر خارج قسمت حاصل کریں گے اس کو حل کرکے $\frac{3}{2}$ اور $-6$ جذروں کے طور پر حاصل کرتے ہیں۔ اس طرح $-6,-1,\frac{3}{2}$ جذریں دیئے گئے مساوات کے حل ہیں۔

### 3.7.5 سلسلہ میں جذریں (Roots in Progressions)

جیسا کہ پہلے سے ہی اعلیٰ درجہ کثیر رقمی مساوات کو حل کرنے کا ذکر کیا گیا ہے۔ ہمیں مساوات یا کثیر رقمی کے حلوں کے بارے میں کچھ معلومات کی ضرورت ہے۔ ”جذریں ریاضی سلسلہ میں ہیں“ اور ”جذریں ہندسی سلسلہ میں ہیں“ ایسی کچھ معلومات ہیں ہم اس قسم کے مساوات پر بحث کرتے ہیں۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 115 27-02-2023 15:36:06

## مثال 3.19

اس شرط کو حاصل کریں کہ $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ کی جذریں A.P. میں ہیں۔

## حل

فرض کرو جذریں A.P. میں ہیں ہم ان کو $\alpha - d, \alpha, \alpha + d$ فرض کرسکتے ہیں۔

ویٹا کا ضابطہ استعمال کرنے سے $(\alpha - d) + \alpha + (\alpha + d) = -\frac{p}{1} = p \Rightarrow 3\alpha = -p \Rightarrow \alpha = -\frac{p}{3}$

لیکن ہم غور کریں کہ $\alpha$ دیئے گئے مساوات کا ایک جذر ہے لہٰذا ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$\left(-\frac{p}{3}\right)^3 + p\left(-\frac{p}{3}\right)^2 + q\left(-\frac{p}{3}\right) + r = 0 \Rightarrow 9pq = 2p^3 + 27r$$

## مثال 3.20

اس شرط کو تلاش کریں کہ $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ کی جذریں ہندسی سلسلہ میں ہیں فرض کریں $a, b, c, d \neq 0$

## حل

فرض کرو جذریں G.P. میں ہیں۔

پھر ہم ان کے $\frac{\alpha}{\lambda}, \alpha, \alpha\lambda$ کی شکل میں فرض کرسکتے ہیں۔

ویٹا ضابطہ استعمال کرنے سے ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$\sum_1 = \alpha\left(\frac{1}{\lambda} + 1 + \lambda\right) = -\frac{b}{a} \quad \ldots (1)$$

$$\sum_2 = \alpha^2\left(\frac{1}{\lambda} + 1 + \lambda\right) = \frac{c}{a} \quad \ldots (2)$$

$$\sum_3 = \alpha^3 = -\frac{d}{a}. \quad \ldots (3)$$

(2) کو (1) سے تقسیم کرکے ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$\alpha = -\frac{c}{b} \quad \ldots (4)$$

(4) کو (3) میں درج کرنے سے، ہم حاصل کرتے ہیں $\left(-\frac{c}{b}\right)^3 = -\frac{d}{a} \Rightarrow ac^3 = db^3$.

## مثال 3.21

اگر $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ کی جذریں H.P میں ہیں۔ $9pqr = 27r^2 + 2q^3$ ثابت کریں فرض کریں $p, q, r \neq 0$.

## حل

فرض کرو جذریں H.P. میں ہیں۔ پھر ان کے معکوس A.P. میں ہیں مساوات کی جذریں۔

$$\left(\frac{1}{x}\right)^3 + p\left(\frac{1}{x}\right)^2 + q\left(\frac{1}{x}\right) + r = 0 \Leftrightarrow rx^3 + qx^2 + px + 1 = 0. \quad \ldots (1)$$

چونکہ (1) کی جذریں A.P. میں ہیں ہم ان کو $\alpha - d, \alpha, \alpha + d$ کو فرض کرسکتے ہیں۔

ویٹا کا ضابطہ استعمال کرنے سے ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$\sum_1 = (\alpha - d) + \alpha + (\alpha + d) = -\frac{q}{r} \Rightarrow 3\alpha = -\frac{q}{r} \Rightarrow \alpha = -\frac{q}{3r}.$$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 116 27-02-2023 15:36:16

لیکن ہم غور کریں کہ $\alpha$ (1) کی جذر ہے۔ لہٰذا ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$r\left(-\frac{q}{3r}\right)^3+q\left(-\frac{q}{3r}\right)^2+p\left(-\frac{q}{3r}\right)+1=0\Rightarrow -q^3+3q^3-9pqr+27r^2=0\Rightarrow 9pqr=2q^3+27r^2\,.$$

### مثال 3.22

یہ معلوم ہوتا ہے کہ مساوات $x^3-6x^2-4x+24=0$ کی جذریں ریاضی سلسلہ میں ہیں ان جذروں کو تلاش کریں۔

### حل

فرض کرو جذریں $a-d,a,a+d$ ہو پھر جذروں کی جمع $3a$ ہے جو دیئے گئے مساوات میں 6 کے برابر ہے۔ اس طرح $3a=6$ اور اس وجہ سے $a=2$ . جذروں کا حاصل ضرب $a^3-ad^2$ ہے جو دیئے گئے مساوات میں 24– کے برابر ہے $a$ کی رقم کو تبدیل کرکے ہم $8-2d^2=-24$ حاصل کرتے ہیں اور اس وجہ سے $d=\pm 4$ حاصل ہوتا ہے۔ اگر ہم $d=4$ لیتے ہیں تو ہم 2,2,6– جذروں کے طور پر حاصل کرتے ہیں اور اگر ہم $d=-4,$ لیتے ہیں تو ہم 6,2,–2 مساوات کی جذروں کے طور پر حاصل کرتے ہیں۔(معکوس ترتیب میں دی گئی ایک ہی جذریں)۔

## مشق 3.3

1. $2x^3-x^2-18x+9=0$ مکعب مساوات کو حل کریں اگر اس کی دوجذروں کا حاصل جمع معدوم ہوجاتا ہے۔
2. $9x^3-36x^2+44x-16=0$ مساوات کو حل کریں اگر جذریں ریاضی سلسلہ کی شکل میں ہیں۔
3. $3x^3-26x^2+52x-24=0$ مساوات کو حل کریں اگر جذریں ہندسی سلسلہ کی شکل میں ہیں۔
4. $k$ کی وضاحت کریں اور $2x^3-6x^2+3x+k=0$ مساوات کو حل کریں اگر اس کا جذر دوسرے دو جذروں کے حاصل جمع کے دُگنے برابر ہے۔
5. $x^6-3x^5-5x^4+22x^3-39x^2-39x+135$ کثیر رقمی کے تمام صفر تلاش کریں۔ اگر یہ معلوم ہوتا ہے کہ $1+2i$ اور $\sqrt{3}$ اس کی دوصفریں ہیں۔
6. مکعب مساوات کو حل کریں. (i) $2x^3-9x^2+10x=3$, (ii) $8x^3-2x^2-7x+3=0$.
7. $x^4-14x^2+45=0$ مساوات کو حل کریں۔

### 3.7.6. جزوی طور پر کثیر رقمیات (Partly Factored Polynomials)

**چودرجی کثیر رقمی مساوات $(ax+b)(cx+d)(px+q)(rx+s)+k=0$، $k\neq 0$ کو اس شکل میں دوبارہ لکھا جاسکتا ہے۔ $(\alpha x^2+\beta x+\lambda)(\alpha x^2+\beta x+\mu)+k=0$**

ہم اگلے دومثالوں میں اس صورتِ حال کو حل کرنے کا طریقہ بیان کرتے ہیں۔

### مثال 3.23

مساوات کو حل کریں۔ $(x-2)(x-7)(x-3)(x+2)+19=0$

### حل

ہم اس چوتھے درجہ کی مساوات کا حل کرنے کیلئے مناسب انداز میں لکھ کر تبدیل کے طریقے کو اپنانے کی طرف سے حل کرسکتے ہیں۔ مساوات کو دوبارہ لکھیں۔

$$(x-2)(x-3)(x-7)(x+2)+19=0\,.$$

دیئے گئے مساوات بن جاتے ہیں۔

$$(x^2-5x+6)(x^2-5x-14)+19=0\,.$$

اگر ہم $x^2-5x$ کو $y$ طور پر لیں۔ پھر مساوات $(y+6)(y-14)+19=0;$ بن جاتی ہے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 117 27-02-2023 15:36:25

یعنی، $y^2-8y-65=0$

اس کو حل کرنے سے $y=13$ اور $y=-5$ حاصل ہوتے ہیں ہم اس کو تبدیل کرنے سے ہم دو درجی مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$x^2-5x-13=0 \quad \text{اور} \quad x^2-5x+5=0$$

انھیں ہمیشہ کی طرح حل کیا جاسکتا ہے۔دونوں کے حلوں کو ایک ساتھ ملانے سے ہمیں $\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}, \frac{5\pm\sqrt{77}}{2}$ حل حاصل ہوتے ہیں۔

**مثال 3.24**

$(2x-3)(6x-1)(3x-2)(x-2)-5=0$ مساوات کو حل کریں ۔

**حل**

دی گئی مساوات اسی طرح ہے۔

$$(2x-3)(3x-2)(6x-1)(x-2)-5=0\,.$$

ایک تحسیب کے بعد اوپر کی مساوات بن جاتی ہے۔

$$(6x^2-13x+6)(6x^2-13x+2)-5=0\,.$$

$y=6x^2-13x,$ لے کر، اوپر کی مساوات بن جاتی ہے۔

$$(y+6)(y+2)-5=0$$

جو اسی طرح ہے۔ $y^2+8y+7=0$.

اس مساوات کو حل کرنے پر ہم حاصل کرتے ہیں $y=-1$ اور $y=-7$

$y=6x^2-13x,$ میں $y$ رقم کو تبدیل کریں۔ ہم حاصل کرتے ہیں

$$6x^2-13x+1=0$$

$$6x^2-13x+7=0$$

ان دومساوات کو حل کرنے سے ہم حاصل کرتے ہیں۔

$x=1, x=\frac{7}{6}$ اور $x=\frac{13+\sqrt{145}}{12}$ $x=\frac{13-\sqrt{145}}{12}$

دیئے گئے مساوات کی جذریں ہیں۔

## مشق 3.4

1. حل کرو ۔ (i) $(x-5)(x-7)(x+6)(x+4)=504$ (ii) $(x-4)(x-7)(x-2)(x+1)=16$
2. حل کرو۔ $(2x-1)(x+3)(x-2)(2x+3)+20=0$

## 3.8 زیادہ معلومات کے بغیر کثیر رقمی مساوات (Roots of Higher Degree Polynomial Equations)

### 3.8.1 ناطق جذر کا مسئلہ (Rational Root Theorem)

ہم آزمائشی طریقہ کار کی طرف سے کچھ کثیر رقمی مساوات کے چند جذریں تلاش کرسکتے ہیں مثال کے طور پر ہم مساوات پر غور کرتے ہیں۔

$$4x^3-8x^2-x+2=0 \quad \ldots (1)$$

یہ ایک تیسری درجہ کی مساوات ہے جسے کسی بھی طریقہ سے حل نہیں کیا جاسکتا ہے جو اب تک ہم اس باب میں گفتگو کرچکے ہیں۔ اگر ہم (1) کو $P(x)$ سے ظاہر کرتے ہیں۔تو ہم دیکھتے ہیں کہ $P(2)=0$ جو کہتا ہے کہ $x-2$ ایک اجزائے ضربی ہے جیسا کہ مساوات کو حل کرنے کے باقی مسائل آسان ہیں ہم اسے ایک مشق کے طور پر چھوڑ دیں گے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 118 27-02-2023 15:36:34

**مثال 3.25**

$x^3 - 5x^2 - 4x + 20 = 0$ مساوات کو حل کریں۔

**حل**

اگر $P(x)$ کثیر رقمی کی مساوات کو ظاہر کرتا ہے۔ تو پھر $P(2) = 0$ لہٰذا 2 کثیر رقمی مساوات کا ایک جذر ہے۔ دیگر جذریں تلاش کرنے کے لئے ہم نے دیئے گئے کثیر رقمیات $x^3 - 5x^2 - 4x + 20$ کو $x - 2$ سے تقسیم کیا اور $Q(x) = x^2 - 3x - 10$ خارج قسمت حاصل ہے۔ $Q(x) = 0$ کو حل کرنے سے ہم $-2$ اور 5 جذروں کے طور پر حاصل کرتے ہیں۔ اس طرح $2, -2, 5$ دیئے گئے مساوات کے حل ہیں۔

ایک عدد کو آزمائشی طریقہ سے جذر قیاس کرنا آسان کام نہیں ہے۔ لیکن جب سراعداد سالم ہیں۔ اس کی اہم سراعداد اور مستقل رقم کا استعمال کرتے ہوئے، ہم ممکن جذروں کے طور پر ناطق عدد کی یقینی کو شمار کرسکتے ہیں۔ ناطق جذر کا مسئلہ ممکن ناطق جذروں کی ایسی فہرست بنانے میں ہماری مدد کرتا ہے۔ ہم یاد کرتے ہیں کہ اگر کثیر رقمی کے ناطق سراعداد ہے۔ اس کے بعد مناسب عددوں سے ضرب کرکے ہم سالم سراعداد کے ساتھ وہی جذریں رکھنے والی کثیر رقمی حاصل کرسکتے ہیں لہٰذا ہم **ناطق جذر کا مسئلہ** استعمال کرسکتے ہیں جو ذیل میں دیا گیا ہے۔ جو ناطق سراعداد کے ساتھ کثیر رقمی کے چند جذروں کا اندازہ کرنے میں مددگار ہوگا۔ ہم مسئلہ کو بنا ثبوت کے بیان کریں گے۔

**مسئلہ 3.5 ناطق جذر کا مسئلہ (Rational Root Theorem)**

فرض کرو $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ کے ساتھ $a_n \neq 0$ اور $a_0 \neq 0$ ہے۔ سالم سراعداد کے ساتھ ایک کثیر رقمی ہے۔ اگر $\frac{p}{q}$، $(p,q) = 1$ کے کثیر رقمی کی جذر ہے پھر $p$، $a_0$ کا ایک اجزائے ضربی ہے اور $q$، $a_n$ کا ایک اجزائے ضربی ہے۔

جب $a_n = 1$ اگر ایک ناطق جذر $\frac{p}{q}$ ہے پھر مسئلہ 3.5 کے مطابق $q$، $a_n$ کا ایک اجزائے ضربی ہے۔ پھر ہمیں $q = \pm 1$. ہونا ضروری ہے۔ اس طرح $p$ ایک لازمی سالم ہے۔ لہٰذا سالم سر عدد کے ساتھ ایک درجہ کثیر رقمی کی غیر تکملہ ناطق جذریں نہیں ہوسکتی ہیں۔ تو جب $a_n = 1$ اگر جذر ایک ناطق جذر ہے تو اسے سالم ہونا چاہئے اور سالم عدد $a_0$ کو تقسیم کرنا چاہئے۔ (ہم کہتے ہیں کہ ایک سالم عدد $a$ ایک سالم عدد $b$ کو تقسیم کرتا ہے، اگر $b = ad$ کچھ سالم عدد $d$ کے لئے)

مثال کے طور پر ہم مساوات $x^2 - 5x - 6 = 0$ پر غور کریں گے۔ 6 کے مقسوم علیہ $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ ہیں۔ ناطق جذر مسئلہ سے، ہم یہ نتیجہ اخذ کرسکتے ہیں کہ $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ مساوات کے واحد حل ہیں۔ اس کا یہ مطلب یہ نہیں ہے کہ سب حل ہیں دو رقمیں $-1$ اور 6 مساوات کو راضی کرتے ہیں۔ دیگر رقم مساوات کو راضی نہیں کرتے ہیں۔

اس کے علاوہ اگر ہم $x^2 + 4 = 0$ مساوات پر غور کریں۔ ناطق جذر مسئلہ کے مطابق، ممکن حل $\pm 1, \pm 2, \pm 4$; ہیں لیکن ان میں سے کوئی بھی حل نہیں ہے۔ **ناطق جذر کا مسئلہ صرف ہمیں حل کا اندازہ لگانے میں مدد کرتا ہے اور اسے حل نہیں کرتا۔**

**مثال 3.26**

$2x^3 + 3x^2 + 2x + 3 = 0$ کی جذریں تلاش کریں۔

**حل**

ہماری علامتوں کے مطابق، $a_n = 2$ اور $a_0 = 3$ اگر $\frac{p}{q}$ کثیر رقمی کا صفر ہے۔ چونکہ $(p,q) = 1$ ہے $p$ کا 3 کو تقسیم کرنا ضروری اور $q$ کا 2 کو تقسیم کرنا ضروری ہے۔ واضح طور پر $p$ کے ممکن رقم $1, -1, 3, -3$ ہیں اور $q$ کے ممکن رقم $1, -1, 2, -2$ ہیں۔ ان $p$ اور $q$ کا



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 119 27-02-2023 15:36:43

استعمال کرتے ہوئے صرف $\pm\frac{3}{1}$ ، $\pm\frac{3}{2}$ ، $\pm\frac{1}{2}$ ، $\pm\frac{1}{1}$ اجزائے ضربی دے سکتے ہیں۔ان آٹھ امکانات میں متبادل طریقے سے ثابت کرنے پر ہم $\frac{-3}{2}$ حاصل کرتے ہیں۔ وہی صرف ایک ناطق صفر ہے۔ دیگر صفر تلاش کرنے کے لئے ، ہم $2x+3$ سے دیئے گئے کثیر رقمی $2x^3+3x^2+2x+3$ کو تقسیم کرتے ہیں اور باقی صفر ساتھ خارج قیمت کے طور پر $x^2+1$ حاصل کرتے ہیں۔ $x^2+1=0$ کو حل کرکے ہم $i$ اور $-i$ جذروں کے طور پر حاصل کرتے ہیں۔اس طرح $\frac{-3}{2}, -i, i$ دی گئی کثیر رقمی مساوات کی جذریں ہیں۔

### 3.8.2 باہمی مساوات (Reciprocal Equations)

فرض کرو $\alpha$ ، مساوات

$$2x^6-3x^5+\sqrt{2}x^4+7x^3+\sqrt{2}x^2-3x+2=0. \quad \ldots (1)$$

کا حل ہے۔

پھر $\alpha \neq 0$ (کیوں؟) اور

$$2\alpha^6-3\alpha^5+\sqrt{2}\alpha^4+7\alpha^3+\sqrt{2}\alpha^2-3\alpha+2 = 0.$$

(1) میں بائیں جانب $x$ کے لئے $\frac{1}{\alpha}$ کو تبدیل کرنا ،ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$2\left(\frac{1}{\alpha}\right)^6-3\left(\frac{1}{\alpha}\right)^5+\sqrt{2}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^4+7\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3+\sqrt{2}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2-3\left(\frac{1}{\alpha}\right)+2$$

$$= \frac{2-3\alpha+\sqrt{2}\alpha^2+7\alpha^3+\sqrt{2}\alpha^4-3\alpha^5+2\alpha^6}{\alpha^6} = \frac{0}{\alpha^6} = 0.$$

اس طرح $\frac{1}{\alpha}$ بھی(1) کا حل ہے۔اس طرح ہم یہ دیکھ سکتے ہیں کہ $\alpha$ مساوات

$$2x^5+3x^4-4x^3+4x^2-3x-2 = 0 \quad \ldots (2)$$

کا حل ہے تو پھر $\frac{1}{\alpha}$ بھی (2) کا حل ہے۔

مساوات (1) اور (2) میں ایک عام خاصیت ہے ۔ اگر ہم مساوات میں $\frac{1}{x}$ کو $x$ کی جگہ لے لیتے ہیں اور اسے کثیر رقمی مساوات کے طورپر لکھیں تو پھر ہم اس مساوات کو واپس پائیں گے۔ہمارے دماغ میں پھیلنے والے فوری سوالات ہیں۔"کیا ہم اس بات کی شناخت مساوات کو بس دیکھ کر کرسکتے ہیں کہ دی گئی مساوات کے پاس یہ خاصیت ہے۔یا نہیں ہے"؟ مسئلہ 3.6 ذیل میں اس سوال کا جواب دیتا ہے۔

**تعریف 3.1**

درجہ $n$ کی ایک کثیر رقمیات $P(x)$ باہمی کثیر رقمیات کہلاتا ہے اگر مندرجہ ذیل شرائط میں سے ایک سچ ہے۔

(i) $P(x)=x^nP\left(\frac{1}{x}\right)$ (ii) $P(x)=-x^nP\left(\frac{1}{x}\right)$.

ایک $n$ درجہ کی کثیر رقمیات $P(x)$ باہمی رقمی قسم I کی کہلاتی ہے اگر $P(x)=x^nP\left(\frac{1}{x}\right)$. یہ قسم I کی باہمی مساوات کہلاتی ہے۔

ایک $n$ درجہ کی کثیر رقمیات $P(x)$ باہمی کثیر رقمی قسم II کی کہلاتی ہے۔ اگر $P(x)=-x^nP\left(\frac{1}{x}\right)$ یہ قسم II کی باہمی مساوات کہلاتی ہے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 120 27-02-2023 15:36:52

**مسئلہ 3.6**

ایک کثیر رقمی مساوات $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ ، $(a_n \neq 0)$ ایک باہمی مساوات ہے اگر صرف اور صرف ، مندرجہ ذیل کے دو بیانات میں سے ایک سچ ہے۔

(i) $a_n = a_0$ ، $a_{n-1} = a_1$ ، $a_{n-2} = a_2 \cdots$

(ii) $a_n = -a_0$ ، $a_{n-1} = -a_1$ ، $a_{n-2} = -a_2, \cdots$

## ثبوت

کثیر رقمی مساوات پر غور کریں۔

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 . \quad \ldots (1)$$

(1) میں $\frac{1}{x}$ ، $x$ کی جگہ لے لیں تو ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{a_n}{x^n} + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_{n-2}}{x^{n-2}} + \cdots + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_1}{x} + a_0 = 0 . \quad \ldots (2)$$

$x^n$ سے (2) کو دونوں طرف ضرب کرکے ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$x^n P\left(\frac{1}{x}\right) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n = 0 . \quad \ldots (3)$$

اب، (1) ایک باہمی مساوات ہے $\Leftrightarrow$ $P(x) = \pm x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$ $\Leftrightarrow$ (1) اور (3) یکساں ہیں۔

$\Leftrightarrow$ یہ ممکن ہے $\frac{a_n}{a_0} = \frac{a_{n-1}}{a_1} = \frac{a_{n-2}}{a_2} = \cdots = \frac{a_2}{a_{n-2}} = \frac{a_1}{a_{n-1}} = \frac{a_0}{a_n}$.

تناسب $\lambda$ کے برابر ہونے دو . پھر ہم $\frac{a_n}{a_0} = \lambda$ اور $\frac{a_0}{a_n} = \lambda$ ان مساوات کو ضرب کرنے پر $\lambda^2 = 1$ ہم حاصل کرتے ہیں۔لہٰذا ہمیں دو مرحلے $\lambda = 1$ اور $\lambda = -1$ حاصل ہوتے ہیں۔

### مرحلہ (i) :

$\lambda = 1$ اس صورت میں، ہمارے پاس $a_n = a_0$, $a_{n-1} = a_1$, $a_{n-2} = a_2$, $\cdots$ ہے۔

شروع سے (1) کی سراعداد ختم سے سراعداد کے برابر ہیں۔

### مرحلہ (ii) :

$\lambda = -1$ اس صورت میں، ہمارے پاس $a_n = -a_0$, $a_{n-1} = -a_1$, $a_{n-2} = -a_2$, $\cdots$ ہے۔

شروع سے (1) کی سراعداد ختم سے سراعداد کی مقداریں برابر ہیں۔ لیکن علامتیں برعکس ہیں۔

■

### غور کیجئے (Note)

قسم I کے باہمی مساوات ان سے مطابقت رکھتے ہیں جس میں شروع سے سراعداد ختم ہونے سے سراعداد کے برابر ہیں۔

مثال کے طور پر ، مساوات $6x^5 + x^4 - 43x^3 - 43x^2 + x + 6 = 0$ قسم I کی ہے۔

قسم II کے باہمی مساوات ان سے مطابقت رکھتے ہیں۔جس میں شروع سے سراعداد ختم ہونے سے سراعداد کے مقداریں برابر ہیں لیکن علامتیں برعکس ہیں۔

مثال کے طور پر مساوات $6x^5 - 41x^4 + 97x^3 - 97x^2 + 41x - 6 = 0$ قسم II کی ہے۔

### ریمارک (Remark)

(i) باہمی مساوات کا حل صفر نہیں ہوسکتا۔

(ii). سراعداد اور حل حقیقی تک محدود نہیں ہیں۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 121 27-02-2023 15:37:01

(iii) بیان **"اگر $P(x)=0$ ایک کثیر رقمی مساوات ہے تو جب بھی $\alpha$ جذر ہے، $\frac{1}{\alpha}$ بھی ایک جذر ہے، لہٰذا کثیر رقمی مساوات $P(x)=0$ کا ایک معکوس مساوات ہونا ضروری ہے"**۔ سچ نہیں ہے۔ مثال کے طور پر $2x^3-9x^2+12x-4=0$ ایک کثیر رقمی مساوات کی جزریں $2, 2, \frac{1}{2}$ ہیں۔یاد رکھیں کہ $x^3P\left(\frac{1}{x}\right) \neq \pm \mathrm{P}(x)$ اور لہٰذا یہ ایک معکوسی مساوات نہیں ہے۔معکوسی مساوات کے درجہ بندی قسم I اور قسم II $a_{n-r}=a_r$ یا $a_{n-r}=-a_r$ کے مطابق $r=0, 1, 2,...n$ ہم کچھ نتائج کے بغیر ثبوت کے دیتے ہیں۔

- قسم I کے ایک طاق درجہ کی معکوسی مساوات کے لئے، $x=-1$ کا ایک حل ہونا ضروری ہے۔
- قسم II کے ایک طاق درجہ کی معکوسی مساوات کے لئے $x=1$ کا ایک حل ہونا ضروری ہے۔
- قسم II کے ایک جفت درجہ کی معکوسی مساوات کے لئے، درمیانی رقم 0 ہونا چاہئے اور $x=1$ اور $x=-1$ حل ہیں۔
- کسی جفت درجے کی معکوسی مساوات کے لئے، $y$ کو $x+\frac{1}{x}$ یا $x-\frac{1}{x}$ لیکر ہم دیئے گئے مساوات کی درجہ کی ایک نصف درجہ کی ایک کثیر رقمی مساوات حاصل کرسکتے ہیں۔ جسے حل کر کے ہم دئے گئے مساوات کے حل حاصل کرسکتے ہیں۔

ایک مثال کے طور پر کثیر رقمی مساوات پر غور کریں

$$6x^6-35x^5+56x^4-56x^2+35x-6=0$$

جو قسم II کی جفت درجہ معکوسی مساوات ہے۔ تو $1$ اور $-1$ مساوات کے دوحل ہیں اور لہٰذا $x^2-1$ کثیر رقمی کا ایک اجزائے ضربی ہے۔

$x^2-1$ اجزائے ضربی سے کثیر رقمیات کو تقسیم کرکے ہم $6x^4-35x^3+62x^2-35x+6$ کو اجزائے ضربی کے طور پر حاصل کرتے ہیں۔اس اجزائے ضربی کو $x^2$ سے تقسیم کرکے اور ہم رقم ترتیب کرنے سے $6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-35\left(x+\frac{1}{x}\right)+62$ حاصل ہوتا ہے۔

$u=\left(x+\frac{1}{x}\right)$ درج کرنے سے یہ ایک $6(u^2-2)-35u+62$ دو درجہ کا کثیر رقمی بن جاتا ہے۔ اور گھٹنے پر $6u^2-35u+50$ ہے حل کرنے پر $u=\frac{10}{3}, \frac{5}{2}$ حاصل ہوتا ہے۔ $u=\frac{10}{3}$ لینے سے $x=3, \frac{1}{3}$ دیتا ہے اور $u=\frac{5}{2}$ لینے سے $x=2, \frac{1}{2}$ دیتا ہے $+1, -1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}$ ضروری حل ہیں۔

## مثال 3.27

$7x^3-43x^2=43x-7$ مساوات کو حل کریں۔

## حل

$7x^3-43x^2-43x+7=0$ دیئے گئے مساوات کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔

یہ قسم I کی ایک طاق درجہ معکوسی مساوات ہے۔ اس طرح $-1$ ایک حل اور لہٰذا $x+1$ ایک اجزائے ضربی ہے۔ اجزائے ضربی $x+1$ سے کثیر رقمی $7x^3-43x^2-43x+7$ کو تقسیم کرکے ہم $7x^2-50x+7$ کو خارج قسمت کے طورپر حاصل کرتے ہیں۔ اس کو حل کرکے ہم $7$ اور $\frac{1}{7}$ کو جذروں کے طور پر حاصل کرتے ہیں۔ اس طرح $-1, \frac{1}{7}, 7$ دیئے گئے مساوات کے حل ہیں۔ ■

## مثال 3.28

$x^4-10x^3+26x^2-10x+1=0$ مندرجہ ذیل مساوات کو حل کریں۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 122 27-02-2023 15:37:12

**حل**

یہ مساوات قسم I کی جنت درجہ معکوسی مساوات ہے لہٰذا اس کو دوبارہ $x^2\left[\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-10\left(x+\frac{1}{x}\right)+26\right]=0$ لکھا جاسکتا ہے۔چونکہ $x\neq 0$ ہے۔ہم $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-10\left(x+\frac{1}{x}\right)+26=0$ حاصل کرتے ہیں۔

فرض کرو $x+\frac{1}{x}=y$ پھر ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$\left(y^2-2\right)-10y+26=0 \Rightarrow y^2-10y+24=0 \Rightarrow (y-6)(y-4)=0 \Rightarrow y=6 \text{ or } y=4$$

**مرحلہ(i):**

$$y=6 \Rightarrow x+\frac{1}{x}=6 \Rightarrow x=3+2\sqrt{2}, x=3-2\sqrt{2}.$$

**مرحلہ(ii):**

$$y=4 \Rightarrow x+\frac{1}{x}=4 \Rightarrow x=2+\sqrt{3}, x=2-\sqrt{3}$$

لہٰذا، جذریں $3\pm 2\sqrt{2}, 2\pm\sqrt{3}$ ہیں۔

### 3.8.3 غیر کثیر رقمی مساوات (Non-polynomial Equations)

کچھ کثیر رقمی مساوات کا استعمال کرتے ہوئے غیر کثیر رقمی مساوات کو حل کیا جاسکتا ہے مثال کے طور پر ہم مساوات $\sqrt{15-2x}=x$ پر غور کریں۔سب سے پہلے ہم غور کریں کہ یہ ایک کثیر رقمی مساوات نہیں ہے۔دونوں طرف مربع کرنے سے ہم $x^2+2x-15=0$ حاصل کرتے ہیں ہم جانتے ہیں کہ یہ کثیر رقمی مساوات کو کیسے حل کرنا ہے۔کثیر رقمی مساوات کے حل سے ہم دیئے گئے مساوات کا تجزیہ کرسکتے ہیں۔واضح طور پر 3 اور $-5$ ، $x^2+2x-15=0$ کے حل ہیں۔ اگر ہم صرف غیر منفی $\sqrt{\bullet}$ تعداد کو مقرر کرنے کے تصور کو اپناتے ہوئے پھر $x=3$ واحد حل ہے۔ اگر ہم تصور کو اپنا یا نہیں کرتے ہیں پھر ہم $x=-5$ بھی حل ہے۔

**مثال 3.29**

اگر مساوات $2\cos^2 x-9\cos x+4=0$ کا کوئی حل ہے۔تو اسے تلاش کریں۔ ....(1)

**حل**

اس مساوات کے بائیں ہاتھ کی طرف $x$ میں کثیر رقمی نہیں ہے۔لیکن یہ ایک کثیر رقمی کی طرح لگ رہا ہے اصل میں ،ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ یہ $\cos x$ میں ایک کثیر رقمی ہے۔ تا ہم ، ہم کثیر رقمی مساوات پر ہمارے علم کا استعمال کرتے ہیں ہوئے مساوات (1) حل کرسکتے ہیں۔

اگر ہم $\cos x$ کو $y$ سے تبدیل کرتے ہیں پھر ہم کثیر رقمی مساوات $2y^2-9y+4=0$ حاصل کرتے ہیں۔ جس کے 4 اور $\frac{1}{2}$ کے حل ہیں۔

اس سے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ $x$ کو $\cos x=4$ یا $\cos x=\frac{1}{2}$ مطمئن کرنا ضروری ہے۔ لیکن $\cos x=4$ کبھی نہیں ممکن ہے۔ اگر ہم $\cos x=\frac{1}{2}$ لیتے ہیں پھر ہم لامحدود حقیقی عدد $x$ حاصل کرتے ہیں کہ تاکہ $\cos x=\frac{1}{2}$ مطمئن ہوسکے درحقیقت $n\in\mathbb{Z}$ سب کے لئے ، $x=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$ دیئے گئے مساوات (1) کے حل ہیں۔

اگر ہم $\cos^2 x-9\cos x+20=0,$ مساوات کو لیکر مرحلوں کو دوبارہ کریں گے تو ہم یہ دیکھتے ہیں کہ ان مساوات کا کوئی حل نہیں ہے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 123 27-02-2023 15:37:22

### ریمارک (Remark)

ہم یاد رکھیں کہ

- حاصل کردہ کثیر رقمی مساوات کے تمام حل دی گئی مساوات کے تمام حل نہیں دے سکتے ۔
- غیر محدود طور پر غیر کثیر رقمی مساوات کے لئے لا محدود حل ہوسکتے ہیں۔ اگرچہ وہ کثیر رقمی مساوات کی طرح نظر آتے ہیں۔
- اس طرح کے مساوات کا کوئی حل نہیں ہوسکتا ہے۔
- الجبرا کے بنیادی مسئلہ صرف کثیر رقمیات کے لئے ثابت ہوا ہے۔غیر کثیر رقمیات اظہار کے لئے ہم درجہ کے بارے میں بات نہیں کرسکتے ہیں اور اس وجہ سے ہمیں الجبرا کے بنیادی مسئلہ پر کوئی غلط خیال نہیں ہونا چاہئے جو ذہن میں غیر کثیر رقمیات مساوات کو لیکر ہو۔

## مشق 3.5

1. مندرجۂ ذیل مساوات کو حل کریں۔

(i) $\sin^2 x - 5\sin x + 4 = 0$ (ii) $12x^3 + 8x = 29x^2 - 4$

2. ناطق جذروں کی جانچ کریں۔

(i) $2x^3 - x^2 - 1 = 0$ (ii) $x^8 - 3x + 1 = 0$.

3. حل کریں: $8x^{\frac{3}{2n}} - 8x^{\frac{-3}{2n}} = 63$

4. حل کریں: $2\sqrt{\frac{x}{a}} + 3\sqrt{\frac{a}{x}} = \frac{b}{a} + \frac{6a}{b}$

5. مساوات کو حل کریں

(i) $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$ (ii) $x^4 + 3x^3 - 3x - 1 = 0$

6. تمام حقیقی عددوں کو تلاش کریں جو $4^x - 3(2^{x+2}) + 2^5 = 0$ کو راضی کریں۔

7. $6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0$ مساوات کو حل کریں اگر یہ معلوم ہوتا ہے کہ $\frac{1}{3}$ ایک حل ہے۔

## 3.9 ڈیسکارٹیس اصول (Descartes Rule)

اس شعبہ میں ہم مثبت جذروں کی تعداد منفی جذروں کی تعداد اور غیر حقیقی مرکب عدد جذروں کی تعداد کی پابندیوں پر بحث کریں گے جو کہ $\mathbb{R}$ پر کثیر رقمی کی جذریں ہیں۔ یہ پابندیاں ایک طاقتور آلے کا استعمال کرتے ہوئے شمار کرسکتے ہیں۔ جسے ڈیسکارٹیس اصول کہا جاتا ہے۔

### 3.9.1 ڈیسکارٹیس اصول کا بیان (Statement of Descartes Rule)

اس بات پر تبادلہ خیال کرنے کے لئے ہم سب سے پہلے ایک **کثیر رقمی کے سر اعداد میں نشان کی تبدیلی** کے تصور کو متعارف کراتے ہیں۔

کثیر رقمیات پر غور کریں۔

$$2x^7 - 3x^6 - 4x^5 + 5x^4 + 6x^3 - 7x + 8$$

اس کثیر رقمیات کے لئے، ہم علامت کا استعمال کرتے ہوئے سراعداد کے نشان بناتے ہیں ' + ' اور ' − ' کے طور پر توجہ کرئے:

$$+, -, -, +, +, -, +$$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 124 27-02-2023 15:37:27

غور کریں کہ ہم نے $x^2$ کے مطابق کسی بھی علامت کو نہیں بنایا ہے۔ہم اگر غور کریں کہ 4 وقت یہ نشان تبدیل ہوئے ($x^0$ پر اور $x^1, x^4, x^6$)

**تعریف 3.2**

**سراعداد میں ایک نشان کی تبدیلی** کہاجاتا ہے جو ایک کثیر رقمیات $P(x)$ میں $x^j$ کی درجہ کے مقام پر ہوتا ہے۔ اگر $x^{j+1}$ کا سرعدد اور $x^j$ کا سرعدد (یا) $x^{j-1}$ کا سرعدد $x^j$ کا سرعدد بھی مختلف نشان میں سے ہیں (صفر سرعدد کے لئے ہم فوری طور پر اگلے غیر صفر سرعدد کو لے لیتے ہیں)۔

نشان کی تبدیلی کی تعداد سے، ہم ڈیکارٹیس اصول کا استعمال کرتے ہوئے کثیر رقمیات کی جذر کے بارے میں کچھ معلومات حاصل کرتے ہیں۔ جیسا کہ ثبوت کتاب کی حد سے باہر ہے۔ ہم بغیر کسی **ثبوت کے مسئلہ** کو بیان کرتے ہیں۔

**مسئلہ 3.7 ڈیسکارٹیس اصول (Descartes Rule)**

اگر $p$ حقیقی سراعداد والی کثیر رقمیات $P(x)$ کے مثبت صفروں کی تعداد ہے اور $s$, $P(x)$ کے سراعداد میں نشان کی تبدیلی کی تعداد ہے۔پھر $s-p$ غیر منفی سالم جفت ہے۔

مسئلہ کے بیان میں یہ بتایا گیا ہے کہ کثیر رقمیات $P(x)$ کی مثبت جذروں کی تعداد $P(x)$ سراعداد میں تبدیل کی نشانی سے زیادہ نہیں ہوسکتی ہے۔ اس کے علاوہ یہ کہتے ہیں کہ $P(x)$ کے سراعداد کے نشان میں تبدیلی کی تعداد اور کثیر رقمیات $P(x)$ کی مثبت جذروں بھی کی تعداد میں فرق جفت ہوگا۔

چونکہ $P(x)$ کا منفی صفر $P(-x)$ کا مثبت صفر ہے ہم مسئلہ استعمال کرسکتے ہیں اور یہ نتیجہ اخذ کریں کہ **کثیر رقمیات $P(x)$ کے منفی صفر کی تعداد سراعداد میں نشانوں کی تبدیلیاں کی تعداد سے زیادہ نہیں ہوسکتی ہے۔ اور $P(-x)$ کی سراعداد میں نشان کی تبدیلی کی تعداد کے درمیان فرق اور کثیر رقمیات $P(x)$ کے منفی صفر کی تعداد کے درمیان فرق بھی جفت ہے۔**

$x^k$ سے ایک کثیر رقمیات کی ضرب کرنے پر کچھ مثبت سالم اعداد $k$ کے لئے نہ ہی کثیر رقمیات کے مثبت صفر تعداد میں تبدیلی اور نہ ہی سراعداد میں نشان کی تبدیلی کی تعداد میں فرق پڑے گا ہمیں کثیر رقمیات کی مستقل رقم کے بارے میں فکر کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔ کچھ بانی اس بات کو فرض کرتے ہیں کہ کثیر رقمیات کی مستقل رقم کا غیر صفر ہونا ضروری ہے۔

ڈیسکارٹیس اصول میں ہم غور کرتے ہیں کہ جذر 0 کے بارے میں کچھ بیان نہیں ہے۔ لیکن جب معمولی شکل میں لکھی کثیر رقمیات کو نظر سے دیکھ کر یہ کہہ سکتے ہیں کہ 0 کثیر رقمیات کی جذر ہے یا نہیں۔ اب ہم بعض کثیر رقمیات کے ذریعہ ڈیسکارٹیس اصول کی تصدیق کریں گے۔

## 3.9.2 حدوں کو پانا (Attainment of bounds)

### (a) 3.9.2 حقیقی جذروں کی تعداد کے لئے حدیں (Bounds for the number of real roots)

کثیر رقمیات $P(x)=(x+1)(x-1)(x-2)(x+i)(x-i)$ کے صفر $-1, 1, 2, -i, i$ ہیں کثیر رقمیات معمولی شکل میں $x^5-2x^4-x+2$ ہے یہ کثیر رقمیات $P(x)$ میں 2 نشانی تبدیلیاں ہیں۔ یعنی چوتھی اور صفر قوتوں میں اس کے علاوہ

$$P(-x)=-x^5-2x^4+x+2$$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 125 27-02-2023 15:37:35

ایک نشانی تبدیلی ہے ہمارے ڈیسکارٹیس اصول کی طرف سے کثیر رقمیات $P(x)$ کے مثبت صفر کی تعداد 2 سے زیادہ نہیں ہوسکتی ہے; کثیر رقمیات $P(x)$ کے منفی صفر کی تعداد 1 سے زیادہ نہیں ہوسکتی ہے۔ واضح طور پر 1 اور 2 مثبت صفر ہیں اور $-1$ کثیر رقمیات کے لئے منفی صفر ہے۔ $x^5-2x^4-x+2$ اوراس وجہ سے مثبت صفر کے لئے 2 اور منفی صفر کے لئے 1 حد حاصل کی جاتی ہے ۔ ہم غور کریں کہ $i$ اور $-i$ نہ ہی مثبت ہیں اور نہ منفی ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ $(x+2)(x+3)(x+i)(x-i)$ جذریں $-2,-3,-i,i$ کے ساتھ ایک کثیر رقمیات ہے۔ کثیر رقمیات $P(x)$ کہئے۔ $x^4+5x^3+7x^2+5x+6$ حسب معمولی شکل میں ہے۔

یہ کثیر رقمیات $P(x)$ میں کوئی نشان کی تبدیلی نہیں ہے اور $P(-x)=x^4-5x^3+7x^2-5x+6$ میں 4 نشان کی تبدیلی ہے۔ ڈیسکارٹیس اصول کی طرف سے ، کثیر رقمیات $P(x)$ کی 0 سے زائد مثبت صفریں نہیں ہوسکتی اور کثیر رقمیات $P(x)$ کے منفی صفر کی تعداد 4 سے زیادہ نہیں ہوسکتی ہے۔

ایک اور مثال کے طورپر ، ہم کثیر رقمیات پر غور کرتے ہیں

$$x^n-{}^nC_1x^{n-1}+{}^nC_2x^{n-2}-{}^nC_3x^{n-3}+\cdots+(-1)^{n-1}{}^nC_{(n-1)}x+(-1)^n.$$

یہ $(x-1)^n$ کی توسیع ہے یہ کثیر رقمیات سراعداد کے نشان میں $n$ تبدیلی ہے اور $P(-x)$ سراعداد کے نشان میں کوئی تبدیلی نہیں ہے۔ اس سے پتہ چلتا ہے کہ کثیر رقمیات کے مثبت صفر کی تعداد $n$ سے زیادہ نہیں ہوسکتی اور کثیر رقمیات کے منفی صفر کی تعداد 0 سے زیادہ نہیں ہوسکتی ہے۔ منفی صفر کا بیان ہمیں ایک بہت مفید معلومات فراہم کرتا ہے۔ کہ کثیر رقمیات میں کوئی منفی صفر نہیں ہے۔ لیکن مثبت صفروں کا بیان مثبت صفر کے بارے میں کوئی اچھی معلومات نہیں دیتا۔ اصل میں یہ اچھی طرح سے معلوم ہے کہ درجہ $n$ کے کثیر رقمیات کے لئے صفر کی تعداد $n$ سے زیادہ نہیں ہوسکتی اور لہٰذا مثبت صفر کی تعداد $n$ سے زیادہ نہیں ہوسکتی ہے۔

## 3.9.2 (b) ذہنی (غیر حقیقی مرکب عدد) جذروں کی تعداد کے لئے حدیں

## (Bounds for the number of Imaginary (Nonreal Complex) roots)

ڈیسکارٹیس اصول کا استعمال کرتے ہوئے ، ہم ذہنی جذروں کی تعداد کے لئے کم حد کی پابندی شمار کرسکتے ہیں۔

فرض کرو کہ $m$ درجہ کے $P(x)$ میں سراعداد نشان $n$ کی تعداد کو تبدیل کرنے دو، فرض کرو $P(-x)$ کو سراعداد میں تبدیل کرنے کی تعداد کونشان $k$ کہتے ہیں۔اسی کے بعد کم از کم $n-(m+k)$ کثیر رقمیات $P(x)$ کے لئے ذہنی جذروں اصول کے دوسرے اختتام کا استعمال کرتے ہوئے ۔یعنی ، جذروں کی تعداد اور جفت اسی نشانی تبدیلی کے درمیان فرق بھی ہے۔ ہم خاص معاملات میں حدوں کو تیز کرسکتے ہیں۔

### مثال 3.30

ظاہر کریں کہ کثیر رقمیات $9x^9+2x^5-x^4-7x^2+2$ کی کم از کم چھ خیالی جذریں ہیں۔

### حل

واضح طور پر دی گئی کثیر رقمیات $P(x)$ میں 2 نشان کی تبدیلی ہے۔ اور لہٰذا، $P(x)$ کی مثبت جذروں کی تعداد دو سے زائد نہیں ہوسکتی ہے۔ اس کے علاوہ $P(-x)=-9x^9-2x^5-x^4-7x^2+2$, $P(-x)$ کے لئے ایک نشان کی تبدیلی ہے۔اور لہٰذا منفی جذروں کی تعداد ایک سے زیادہ نہیں ہوسکتی ہے۔ واضح طور پر 0 جزر نہیں ہے تو زیادہ سے زیادہ حقیقی جذریں 3 ہیں اور اس وجہ سے کم از کم 6 ذہنی جذریں ہونگی۔

### ریمارک (Remark)

اوپر بیان سے ہم غور کریں کہ ڈیسکارٹیس اصول سے مثبت جذروں اور منفی جذروں کی تعداد صرف اوپر ی کی تعداد صرف اوپری حد دیتا ہے۔ ڈیسکارٹیس اصول نہ ہی مثبت جذروں کی برابر تعداد اور منفی جذریں کی برابر تعداد فراہم کرتا ہے۔ لیکن ہم بعض معاملات میں مثبت ، منفی اور غیر حقیقی جذریں نکال سکتے ہیں اس کے علاوہ جذریں تلاش کرنے کے لئے کوئی طریقہ نہیں دیا ہے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 126 27-02-2023 15:37:44

**مثال 3.31**

مندرجہ ذیل کثیر رقمیات کی جذروں کی حقیقت پر گفتگو کریں۔

(i) $x^{2018}+1947x^{1950}+15x^8+26x^6+2019$ (ii) $x^5-19x^4+2x^3+5x^2+11$

**حل**

فرض کرو $P(x)$ کثیر رقمی پر غور و فکر ہے۔

(i) $P(x)$ اور $P(-x)$ میں نشان کی تبدیلی کی تعداد صفر ہے اور لہٰذا اس میں کوئی مثبت جذر نہیں ہے اور منفی جذریں نہیں ہیں واضح طور پر صفر جذر نہیں ہے۔ اس طرح کثیر رقمیات میں کوئی حقیقی جذر نہیں ہے۔ اور لہٰذا کثیر رقمیات کی تمام جذریں خیالی جذریں ہیں۔

(ii) $P(x)$ اور $P(-x)$ میں نشان کی تبدیلی کی تعداد 2 اور 1 بالترتیب ہے۔لہٰذا اس میں زیادہ سے زیادہ 2 مثبت جذریں اور زیادہ سے زیادہ 1 منفی جذر ہے۔چونکہ $P(-x)$ میں سراعداد کے نشان میں تبدیلی کی تعداد کے درمیان فرق اور منفی جذروں کی تعداد کے برابر ہے۔ اس لئے صفر منفی جذریں نہیں ہوسکتی ۔لہٰذا منفی جذریں کی تعداد 1ہے چونکہ $P(x)$ کے سراعداد کے نشان کی تبدیلی اور مثبت جذروں کے درمیان فرق برابر ہونا چاہئے۔ ہمیں صفر یا دومثبت جذریں ہونا ضروری ہے۔ لیکن جیسا کہ سراعداد کی جمع صفر ہے۔ اس طرح ہمیں دو اور صرف دو مثبت جذریں ہونا ضروری ہے ظاہر ہے کہ دیگر درجذریں خیالی ہیں۔

## مشق 3.6

1. $9x^9-4x^8+4x^7-3x^6+2x^5+x^3+7x^2+7x+2=0$. کثیر رقمیات مساوات کے مثبت اور منفی جذروں کی زیادہ سے زیادہ ممکن تعداد پر گفتگو کریں۔
2. کثیر رقمیات $x^2-5x+6$ اور $x^2-5x+16$ کے مثبت اور منفی صفر کی زیادہ سے زیادہ ممکن تعداد پر گفتگو کریں۔ ترسیم کا کچا خاکہ بھی ڈالیں۔
3. $x^9-5x^5+4x^4+2x^2+1=0$ ظاہر کریں کہ مساوات کے کم از کم 6 خیالی حل ہیں۔
4. مساوات $x^9-5x^8-14x^7=0$ کے مثبت اور منفی جذروں کی تعداد کا تعین کریں۔
5. حقیقی صفر کی صحیح تعداد اور کثیر رقمیات $x^9+9x^7+7x^5+5x^3+3x$ کے خیالی کی تعداد کو تلاش کریں۔

FWDV8

## مشق 3.7

**دئے گئے چار حل میں سے صحیح یا سب سے مناسب جواب کا انتخاب کریں۔**

1. $x^3+64$ کا صفر ہے۔

(1) 0 (2) 4 (3) $4i$ (4) -4

2. اگر $f$ اور $g$ کثیر رقمیات ہیں درجہ $m$ اور $n$ کی اور اگر $h(x)=(f\circ g)(x)$ پھر $h$ کا درجہ ہے۔

(1) $mn$ (2) $m+n$ (3) $m^n$ (4) $n^m$

3. ایک کثیر رقمی مساوات $x$ میں جس کا درجہ $n$ ہو اس کے پاس ہمیشہ ہے۔

(1) $n$ مختلف جذر (2) $n$ حقیقی جذر (3) $n$ مرکب عدد جذر (4) زیادہ سے زیادہ ایک جذر

4. اگر $\alpha$، $\beta$، $\gamma$ اور $x^3+px^2+qx+r$ کی صفریں ہیں پھر $\sum\frac{1}{\alpha}$ ہے۔

(1) $-\frac{q}{r}$ (2) $-\frac{p}{r}$ (3) $\frac{q}{r}$ (4) $-\frac{q}{p}$

5. ناطق جذر مسئلہ کے مطابق، کونسا عدد $4x^7+2x^4-10x^3-5$ کا ناطق صفر ممکن نہیں ہے۔

(1) $-1$ (2) $\frac{5}{4}$ (3) $\frac{4}{5}$ (4) 5



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 127 27-02-2023 15:37:53

6. کثیر رقمیات $x^3 - kx^2 + 9x$ کے تین حقیقی صفر ہیں اگر صرف اور صرف اگر $k$ راضی کرتا ہے۔

(1) $|k| \leq 6$ (2) $k = 0$ (3) $|k| > 6$ (4) $|k| \geq 6$

7. حقیقی عددوں کی تعداد $[0, 2\pi]$ میں $\sin^4 x - 2\sin^2 x + 1$ کوراضی کرنے والی ہے۔

(1) 2 (2) 4 (3) 1 (4) $\infty$

8. اگر $x^3 + 12x^2 + 10ax + 1999$ کے پاس یقینی طور پر ایک مثبت صفر ہے۔اگر اور صرف اگر

(1) $a \geq 0$ (2) $a > 0$ (3) $a < 0$ (4) $a \leq 0$

9. کثیر رقمیات $x^3 + 2x + 3$ کے پاس

(1) ایک منفی اور دوخیالی صفر (2) ایک مثبت اور دوخیالی صفر

(3) تین حقیقی صفر (4) صفر نہیں

10. کثیر رقمیات $\sum_{j=0}^{n} {}^nC_r(-1)^r x^r$ کے مثبت صفر کی تعداد ہے۔

(1) 0 (2) $n$ (3) $< n$ (4) $r$

## خلاصہ (SUMMARY)

اس باب میں ہم نے مطالعہ کیا

- درجہ 2، 3 اور n<3 کے کثیر رقمی مساوات کے لئے ویٹا کا ضابطہ
- **الجبرا کا بنیادی مسئلہ:** درجہ $n \geq 1$ کثیر رقمی مساوات کا کم از کم ایک جذر $\mathbb{C}$ میں ہوتا ہے۔
- **مرکب عدد تعریف جذر مسئلہ** خیالی (غیر حقیقی مرکب عدد) جذریں جوڑی مرکب عدد کے طور پر واقع ہوتی ہیں۔اگر کثیر رقمیات کے سراعداد حقیقی ہیں۔
- **ناطق جذر کا مسئلہ:** فرض کرو $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ کے ساتھ $a_n \neq 0$ اور $a_0 \neq 0$ سالم سراعداد کے ساتھ ایک کثیر رقمیات ہیں۔اگر $\frac{p}{q}$، $(p,q) = 1$ کے ساتھ کثیر رقمیات کی جذر ہے۔پھر $p$ کا $a_0$ ایک اجزائے ضربی ہے اور $q$ کا $a_n$ ایک اجزائے ضربی ہے۔
- کچھ خاص قسم کے کثیر رقمی مساوات کو حل کرنے کے طریقے جیسے کثیر رقمی جیسے صرف جفت درجہ کے، جزوی اجزائے ضربی کثیر رقمیات، کثیر رقمیات جن کے سر اعداد کی جمع صفر ہے، معکوس مساوات۔
- **ڈیسکارٹیس اصول:** اگر $p$ حقیقی سراعداد والی کثیر رقمیات $P(x)$ کے مثبت صفروں کی تعداد ہے اور $s$، $P(x)$ کے سراعداد میں نشان کی تبدیلی کی تعداد ہے۔ پھر $s - p$ غیر منفی جفت سالم عدد ہے۔

## ICT کارنر

**https://ggbm.at/vchq92pg or Scan the QR Code**

بروزر کھولیئے اور دئے گئے لنک ٹیپ کیجئے (یا) کوڈ کو اسکین کیجئے ۔ 12 ویں جماعت ریاضی نامی ورک بک کھلے گی۔ ورک بک کے بائیں جانب تمہاری کتاب کے اسباق ہوں گے۔ "درجہ اور سراعداد کے استعمالات" نامی باب پر کلک کریں۔ اس باب سے تعلق رکھنے والے بہت سارے ورک شیٹ دیکھ سکتے ہو۔ "مساوات کا نظریہ" -جذروں اور سرعددوں کا تعلق کے ورک شیٹ کا انتخاب کریں۔

FCVU6



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 128 27-02-2023 15:38:00

باب
4

# معکوس علم مثلثی تفاعلات
# (Inverse Trignometric Functions)

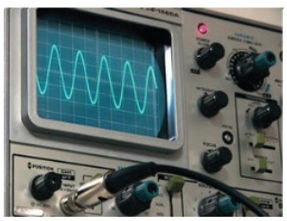
QBML8

ریاضی کی طاقت اکثر ایک چیز کو دوسری چیز میں تبدیل کرنا ہے علم ہندسہ کو زبان میں تبدیل کرنا ہے۔
مارکس ڈو ساٹوئے۔

## 4.1 تعارف (Introduction)


جان ۔یف۔ڈبلیو۔ ہرش

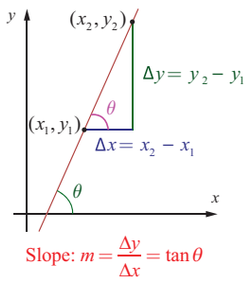
ہم اپنی روز مرہ کی زندگی میں بلا راست پیمائش کو استعمال کرکے مسئلوں کے نتائج حاصل کرتے ہیں۔ جنہیں ہم پیمائشی آلات کو استعمال کرکے حل کرنا ناممکن ہوتا ہے۔ علم مثلث ہمیں پیمائشی آلات کے استعمال کے بغیر جیسے پہاڑوں کی اونچائیاں بلند عمارتوں کی اونچائیوں کی پیمائش کو دریافت کرنے میں مدد کرتا ہے۔ علم مثلثی تفاعلات اور ان کے معکوس علم مثلثی تفاعلات کو وسیع پیمانے پر انجینئرنگ اور طبیعیات ، سائنس کے دوسرے شعبوں میں بھی استعمال ہوتے ہیں۔ یہ مثلث قائمہ الزاویہ کے دئے گئے دو اضلاع کی پیمائش کو استعمال کرکے مثلثوں کو حل کرنے کے علاوہ ، یہ بہت کارآمد ہے تکملہ کے بعض اقسام کو جانچنے کے لئے ، جیسے $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$ اور $\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx$ ۔ جان ۔یف۔ڈبلیو۔ ہرشیل (1792-1871) برطانوی ریاضی دان نے سین کی تفاعل کے معکوس علم مثلثی تفاعل $\arcsin(x)$ کو $\sin^{-1}x$ کے طور پر متعارف کیا۔ والد کے ساتھ مل کر اپنی تصنیف پر کام کیا جس کے عوض 1826ء میں رائل فلکیات سوسائٹی نے انھیں سونے کا تمغہ پیش کیا۔



اہتزاز بیں ایک برقیاتی آلہ ہے جو برقی اشاروں کو ترسیم میں تبدیل کرتا ہے۔جو سین تفاعل کے طور پر ہوتا ہے۔ آلہ کو قابو میں کرکے سین منحنی خطوط کے حیطہ میں تبدیلی، وقفہ اور مرحلہ کو تبدیل کرسکتے ہیں۔ اہتزازبیں کو مختلف مقامات پر استعمال کیا جاتا ہے۔ جیسے انسان کی دل کی دھڑکن کی پیمائش، جس میں مثلثی تفاعلات کا بہت اہم کردار ہے۔

چلئے ہم چند آسان مثالوں کے ذریعے معکوس مثلثی تفاعلات کے متعدد استعمالات کو سمجھیں گے۔

### وضاحت 1 (میلان کا حساب) Illustration-1 (Slope problem)



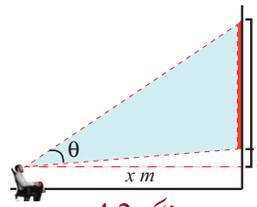
خاکہ 4.1

فرض کیجئے کہ ایک خط مستقیم $y = mx + b$ ہے ۔ چلئے ہم خط کے $x$ - محور کے ساتھ بننے والے زاویہ $\theta$ کو میلان $m$ کے ذریعے معلوم کریں گے۔ ایک تفاعل میں تبدیلی کی شرح کو میلان یاڈھلوان $m$ کہتے ہیں۔اس کو عموماً $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. سے محسوب کیا جاتا ہے۔ مثلث قائمۃ الزاویہ میں، (خاکہ 4.1) $\tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ لہٰذا، $\tan\theta = m$ ہے۔ $\theta$ کو حل کرنے کے لئے ، ہمیں معکوس علم مثلثی تفاعل کی ضرورت ہے جس کو **"معکوس مماس تفاعل"** کہتے ہیں۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 4_Inverse Trigonometry.indd 129 28-03-2023 15:25:15

### وضاحت 2 : (سنیما حال کے پردے) Illustration-2 (Movie Theatre Screens)

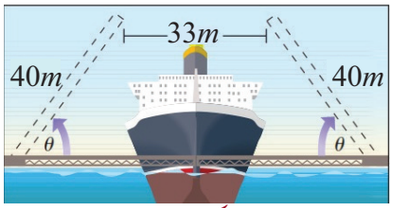


خاکہ 4.2

فرض کیجئے ایک سنیما حال کے پردے کی اونچائی 7 میٹر ہے۔ جب کوئی شخص بیٹھتا ہے ، تو پردہ کا نچلا حصّہ اس کے خط بصارت سے 2 میٹر اوپر ہوتا ہے۔ خطِ بصارت سے پردہ کے نچلے حصّہ تک ایک خط کھینچئے اور آنکھ سے پردے کے اوپری حصّہ تک ایک خط کھینچئے۔ اس سے بننے والا زاویہ کو بصری زاویہ کہتے ہیں۔خاکہ 4.2 میں $\theta$، بصری زاویہ ہے۔ فرض کیجئے کہ وہ شخص پردے سے $x$ میٹر دوری پر بیٹھا ہوا ہے۔ بصری زاویہ $\theta$ کو تفاعل $\theta(x) = \tan^{-1}\left(\frac{9}{x}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{2}{x}\right)$ سے دیا گیا ہے۔ غور کریں کہ بصری زاویہ $\theta$، $x$ کا تفاعل ہے۔

ZLH9D

### وضاحت 3 : (اٹھاؤ پُل) Illustration-3 ( Drawbridge )



خاکہ 4.3

فرض کیجئے کہ دو پتی والا اٹھاؤ پُل جیسا کہ (خاکہ 4.3) میں دکھایا گیا ہے۔ پُل کا ہر پتہ 40 میٹر لمبا ہے۔ 33 میٹر چوڑائی والی ایک جہاز کو اس پُل سے گزرنا ہوگا۔ جہاز کو پُل پار کرنے کے لئے ہر پتہ کو کھولنے کے لئے کم از کم زاویہ $\theta$ معلوم کرنے کے لئے معکوس علم مثلثی تفاعل کا استعمال ہوتا ہے۔

ہم نے XI جماعت میں ، اکائی دائرے کو استعمال کرکے حقیقی اعداد کے علم مثلثی تفاعلات کے بارے میں بحث کیا تھا۔جس میں زاویۂ ریڈین پیمائش کے ہوتے ہیں ۔ اس باب میں ہم معکوس علم مثلثی تفاعلات ، ان کے ترسیمات اور خصوصیات سیکھیں گے ۔ ہمارے اس مباحثہ میں ہمیشہ کی طرح $\mathbb{R}$ اور $\mathbb{Z}$ بالترتیب تمام حقیقی اعداد کا مجموعہ اور تمام سالم اعداد کا مجموعہ کو ظاہر کرتے ہیں۔

اب ہم چھ مثلثی تفاعلات کے علاقہ، وسعت، دورانیت کے بارے میں اعادہ کریں گے۔

## Learning Objectives سیکھنے کے مقاصد

اس باب کے اختتام پر طلباء ذیل کے قابل ہونگے ۔

- معکوس علم مثلثی تفاعلات کی تعریف کرنا۔
- معکوس علم مثلثی تفاعلات کے اصل قیمتوں کو جانچنا۔
- علم مثلثی تفاعلات اور ان کے معکوس کے ترسیمات کھینچنا ۔
- معکوس علم مثلثی تفاعلات کے خصوصیات کو بروئے کارلانا اور چند اظہاروں کو جانچنا۔

## 4.2 چند بنیادی تصورات (Some Fundamental Concepts)

### تعریف 4.1 (دورانیت) (Periodicity)

ایک حقیقی قیمت تفاعل $f$ کو **دوری** یا **وقفہ** ہے۔ اگر ایک عدد $p > 0$ واقع ہے، اس طرح کہ علاقہ $f$ میں موجود تمام $x$ کے لئے ، $x + p$، $f$ کے علاقہ میں ہے اور $f(x+p) = f(x)$

اس طرح کے اعداد میں سب سے چھوٹا عدد ، تفاعل $f$ کا **وقفہ** کہلاتا ہے۔

مثال کے طور پر ، $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{cosec} x$, $\sec x$ اور $e^{ix}$ دوری تفاعلات ہیں۔ جس میں وقفہ $2\pi$ ریڈینس ہے جبکہ ، $\tan x$ اور $\cot x$ دوری تفاعلات ہیں۔ جس میں وقفہ $\pi$ ریڈینس ہے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 4_Inverse Trigonometry.indd 130 28-03-2023 15:25:18

**تعریف 4.2 (طاق اور جفت تفاعلات (فنکشن)) (Odd and even functions)**

ایک حقیقی قیمت تفاعل $f$ ایک **جفت تفاعل** کہلاتا ہے۔اگر تمام $x$ جو علاقہ $f$ میں موجود ہیں، $-x$ بھی $f$ کے علاقہ میں ہو اور $f(-x)=f(x)$ ہے۔

ایک حقیقی قیمت تفاعل $f$ ایک **طاق تفاعل** کہلاتا ہے۔ اگر تمام $x$ جو علاقہ $f$ میں موجود ہیں۔ $-x$ بھی $f$ کے علاقہ میں ہو اور $f(-x)=-f(x)$ ہے۔

مثال کے طور پر، $x^3$, $\sin x$, $\operatorname{cosec} x$, $\tan x$ اور $\cot x$ یہ تمام **طاق تفاعلات** ہیں، جبکہ، $x^2$, $\cos x$ اور $\sec x$ **جفت تفاعلات** ہیں۔

## ریمارک (Remark)

$f=g\pm h$ کا وقفہ $\{h$ کا وقفہ، $g$ کا وقفہ$\}$ lcm ہے۔ جب بھی وہ واقع ہو۔

مثال کے طور پر، $y=\cos 6x+\sin 4x$ کا وقفہ $\pi$ ہے اور $y=\cos x-\sin x$ کا وقفہ $2\pi$ ہے۔

## 4.2.1 مثلثی تفاعلات کا علاقہ اور وسعت (Domain and Range of trigonometric functions)

مندرجۂ ذیل جدول میں علم مثلثی تفاعلات کا **علاقے** اور **وسعتیں** دئے گئے ہیں۔

| علم مثلثی تفاعل | $\sin x$ | $\cos x$ | $\tan x$ | $\operatorname{cosec} x$ | $\sec x$ | $\cot x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| علاقہ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}\setminus\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}, n\in\mathbb{Z}\right\}$ | $\mathbb{R}\setminus\{n\pi,\ n\in\mathbb{Z}\}$ | $\mathbb{R}\setminus\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}, n\in\mathbb{Z}\right\}$ | $\mathbb{R}\setminus\{n\pi,\ n\in\mathbb{Z}\}$ |
| وسعت | $[-1,\ 1]$ | $[-1,\ 1]$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}\setminus(-1,\ 1)$ | $\mathbb{R}\setminus(-1,\ 1)$ | $\mathbb{R}$ |

## 4.2.2 تفاعلات کے ترسیمات (Graphs of functions)

فرض کیجئے کہ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ایک حقیقی قیمت تفاعل ہے اور اس کے علاقہ میں موجود ایک نقطہ $x$ کی تفاعل $f$ کی قیمت $f(x)$ ہوتو تمام نقاط کا مجموعہ $\big(x, f(x)\big), x\in\mathbb{R}$ تفاعل $f$ کی ترسیم کو متعین کرتا ہے۔ عام طور پر، $xy$ - مسطح پر موجود ترسیم کو ایک تفاعل کو ظاہر کرنا ضروری نہیں ہے۔جبکہ، اگر ترسیم عمودی خط جانچ کو پورا کرتی ہے۔ (اگر کوئی عمودی خط، ترسیم پر زیادہ سے زیادہ ایک نقطہ پر قطع کرئے ) تو یہ ترسیم تفاعل کو ظاہر کرتی ہے۔ ایک تفاعل کو سمجھنے کے لئے ترسیم کھینچی جائے اور ترسیم کی مدد سے اس کی خصوصیات کا تجزیۂ کیا جائے ۔

ہم روز مرہ کی زندگی میں موجوں، دن یا رات وغیرہ میں دہرانے والے اعمال کا مشاہدہ کرتے ہیں۔جو مخصوص وقفے میں دہرائے جاتے ہیں۔ چونکہ، علم مثلثی تفاعلات دورانیہ ہیں۔ اس طرح کے واقعات کو علم مثلثی تفاعلات کے ذریعے جان سکتے ہیں۔ ترسیم کی شکل میں علم مثلثی تفاعل کو بصری طورپر پیش کرنے سے ، ہمیں دوریت میں موجود خصوصیات کو جانچنے میں مدد ملتی ہے۔

$xy$ - مسطح پر علم مثلثی تفاعلات کی ترسیم کو کھینچنے کے لئے، ہم علامت $x$ کو غیر منحصر متغیر کے لئے استعمال کرتے ہیں۔ جو زاویہ کی پیمائش کو ریڈین میں ظاہر کرتا ہے، اور $y$ کو منحصر متغیر کے لئے استعمال کرتے ہیں۔ $y=\sin x$ سائن تفاعل کو ظاہر کرنے کے لئے ہم لکھتے ہیں۔ اسی طرح دوسرے علم مثلثی تفاعلات کو لکھ سکتے ہیں۔ درجۂ ذیل کے حصّوں میں، ہم کس طرح علم مثلثی تفاعلات اور معکوس علم مثلثی تفاعلات کے ترسیمات کو کھینچنے اور ان کے خصوصیات کو سیکھیں گے۔

## 4.2.3 ایک ترسیم کا حیطہ اور وقفہ (Amplitude and Period of a graph)

ترسیم کے $x$ - محورسےزیادہ سے زیادہ فاصلے کو حیط کہتے ہیں۔ لہٰذا، ایک تفاعل کاحیط $x$ - محور سے زیادہ سے زیادہ یا کم از کم اونچائی ہوگی۔ایک مکمل دور کو پورا کرنے کے لئے تفاعل کو درکار فاصلہ کو وقفہ کہتے ہیں۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 4_Inverse Trigonometry.indd 131 28-03-2023 15:25:29

### ریمارک (Remark)

(i) دوری وقفہ تفاعل کی ترسیم بار بار دہرانے والے ترسیم کے حصّے کی وقفہ کی مسافت کی لمبائی پر مشتمل ہے۔

(ii) طاق تفاعل کی ترسیم مبداء کے لحاظ سے متشاکل ہوتی ہے اور جفت تفاعل کی ترسیم $y$ - محور سے متشاکل ہوتی ہے۔

## 4.2.4 معکوس تفاعلات (Inverse functions)

اس بات کو ذہن میں رکھیں کہ تفاعل میں درج کی جانے والی ایک قیمت کا ہمیشہ ایک مخصوص جواب حاصل ہوتا ہے۔مثال کے طور پر ایک معکوس تفاعل ہوتو بھی اوپر دئے گئے شرط کو پورا کرنا ہوگا۔ ہم اس کو ایک مثال کے ذریعہ تشریح کریں گے۔

فرض کیجئے کہ انسانوں کا مجموعہ جس میں مماثل جڑواں نہ پائے جاتے ہوں۔ اس مجموعہ میں ہر فرد کاایک خون کا گروپ اور DNA کا سلسلہ ہوگا۔ یہ تفاعلات ہیں، جس میں ایک فرد کا اندراج اور اس کا نتیجہ، خون کا گروپ یا DNA کا سلسلہ ہوگا۔ ہم جانتے ہیں کہ کئی افراد کا خون کا گروپ ایک ہی ہوسکتا ہے۔ لیکن DNA کا سلسلہ ہر فرد کے لئے مخصوص ہوگا ۔ اس کے برخلاف، مثال کے طور پر اگر تم خون کا گروپ کو جانتے ہوتو کیا تم بتا سکتے ہو کہ یہ کس فرد کا خون ہے۔ اس کا جواب **نہیں** ہوگا ۔البتہ اس کی دوسری طرف، اگر تم ایک DNA کا سلسلہ جانتے ہو تو یہ مجموعہ میں ایک مخصوص فرد کی شناخت کرتا ہے۔ DNA کی مثال کی طرح تفاعل ایک -کو- ایک ہوتا الٹا میپنگ کرنا ممکن ہے۔ الٹے میپنگ کو معکوس تفاعل کہتے ہیں۔ سرسری طورپر دیکھا جائے تو معکوس تفاعل عمل نہیں کرتا ہے جو عمل تفاعل کرتا ہے۔

کسی بھی مثلث قائمۃ الزاویہ کا ایک زاویہ حادہ اور ایک ضلع کی لمبائی دی گئی ہوتو ہم اس کے دوسرے زاویئے اور اضلاع معلوم کرسکتے ہیں۔ لیکن ، اگر ہمیں ایک مثلث قائمۃ الزاویہ کے صرف دو اضلاع دئے گئے ہوتو اس کے لئے ہمیں ایک طریقے کار درکار ہے جس سے ہم اضلاع کی نسبت کے ذریعہ زاویہ معلوم کرسکتے ہیں۔ ایسے موقع پر علم مثلثی تفاعل کامعکوس تفاعل ایک اہم کردار ادا کرتا ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ کوئی بھی علم مثلثی تفاعلات کا پورے علاقے میں ایک -کو- ایک تفاعل نہیں ہوسکتے۔ مثال کے طور پر $\sin\theta = 0.5$ دیاگیا ہوتو ہمیں اس طرح کہ، $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}, -\frac{11\pi}{6}, \cdots$ لامحدود قیمتیں اس مساوات کو پورا کرتے ہیں۔ لہٰذا، دئے گئے $\sin\theta$ کے لئے $\theta$ کی ایک ہی قیمت حاصل کرنا ناممکن ہے۔ ایک ہی کی قیمت کے لئے کئی زاویئے میپنگ ہوتے ہیں۔ تو اس طرح کے مسئلہ کو حل کرنے کے لئے ہم معکوس علم مثلثی تفاعل کو تشریح کرنے سے پہلے علاقہ کو مناسب طور پر محدود کرلیتے ہیں۔

علم مثلثی تفاعل کے معکوس کو تصنیف کرنے کے لئے ، ہمیں چاہئے کہ ایک چھوٹی مسافت اس طرح لیں کہ محدود مسافت میں تفاعل ایک۔ ایک ہو۔ لیکن تفاعل کی وسعت اس جو محدد مسافت کے لئے ہوگی وہ مکمل وسعت ہے۔اس باب میں ہم، علم مثلثی تفاعلات کے معکوس ان کے محدود علاقوں کے ساتھ تشریح کریں گے۔

## 4.2.5 معکوس تفاعلات کے ترسیمات (Graphs of inverse functions)

فرض کیجئے کہ $f$ ایک دوہرا تفاعل ہے اور $f$ کا معکوس $f^{-1}$ ہے۔ $y = f(x)$ ، اگر اور صرف اگر $x = f^{-1}(y)$ ہو۔ لہٰذا، $f$ کے ترسیم پر $(a, b)$ ایک نقطہ ہے اگر اور صرف اگر $f^{-1}$ کے ترسیم پر مطابق نقطہ $(b, a)$ ہو۔ اس تجویز کے تحت معکوس تفاعل $f^{-1}$ کی ترسیم، $x$ اور $y$ محوروں کو $f$ ترسیم پر ادل بدل کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔ دوسرے لفظوں میں، $y = x$ خط پر $f^{-1}$ کی ترسیم کا آئینہ عکس $f$ کی ترسیم ہوگا ۔ یا مساوی طور پر، $y = x$ خط پر $f^{-1}$ کی ترسیم ، $f$ کی ترسیم کا انعکاس ہوگا۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 4_Inverse Trigonometry.indd 132 28-03-2023 15:25:33

## 4.3 سائن تفاعل اور معکوس سائن تفاعل (Sine Function and Inverse Sine Function)

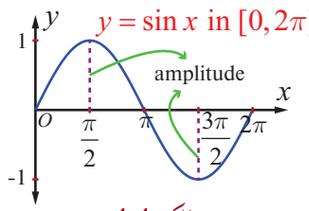
آؤ ہم اعادہ کریں کہ سائن تفاعل ، ایک ایسا تفاعل ہے۔ جس کا علاقہ $\mathbb{R}$ اور $[-1, 1]$ اس کی وسعت ہے۔ سائن تفاعل کو $y = \sin x$ اور معکوس سائن تفاعل کو $y = \sin^{-1} x$ یا $y = \arcsin(x)$ لکھاجاتا ہے۔یہاں، علامت $-1$ قوت نہیں ہے۔ یہ معکوس کو ظاہر کرتا ہے یہ معنی مقلوب نہیں ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ، $\sin(x+2\pi) = \sin x$ تمام حقیقی اعداد $x$ کے لئے صحیح ہے۔اسی طرح $0 < p < 2\pi$ اور تمام $x$ کے لئے $\sin(x+p)$ ضروری نہیں کہ $\sin x$ کے مساوی ہو۔ لہٰذا ، سائن تفاعل کا وقفہ $2\pi$ ہے۔

### 4.3.1 سائن تفاعل کی ترسیم (The graph of sine function)

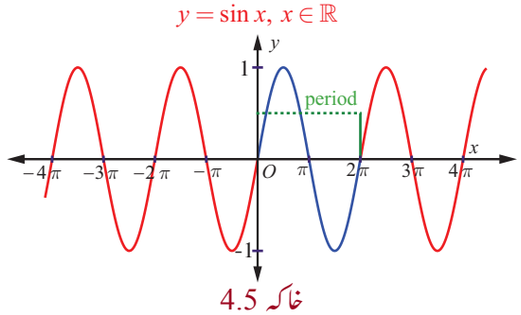
سائن تفاعل کی ترسیم $y = \sin x$ کی ترسیم ہے۔ جس میں $x$ ایک حقیقی عدد ہے۔ چونکہ، سائن تفاعل کاوقفہ $2\pi$ ہے۔ سائن تفاعل کی ترسیم میں ہر ایک مسافت میں وہی نمونے دہرائے جاتے ہیں۔ $\cdots, [-2\pi, 0], [0, 2\pi], [2\pi, 4\pi], [4\pi, 6\pi], \cdots$ لہٰذا، $x \in [0, 2\pi]$ ترسیم کے حصّے کی قیمت کو محسوب کرنا ہی کافی ہوگا۔ $y = \sin x,\ x \in [0, 2\pi]$ کی ترسیم پر $(x, y)$ نقاط کے لئے چند معلوم محدد جوڑیوں کی شناخت کے لئے ذیل کے جدول کو تصنیف کیجئے۔

| $x$ (ریڈین میں) | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = \sin x$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | 0 | $-1$ | 0 |



خاکہ 4.4

یہ واضح ہے کہ, $y = \sin x,\ 0 \le x \le 2\pi$ کی ترسیم مبداء سے شروع ہوتی ہے۔ جیسا کہ 0 سے $\frac{\pi}{2}$ تک $x$ کی قیمت میں اضافہ ہوتو 0 سے 1 تک $y = \sin x$ کی قیمت میں بھی اضافہ ہوتا ہے۔ جیسے $\frac{\pi}{2}$ سے $\pi$ تک اور اس کے بعد $\frac{3\pi}{2}$ تک $x$ کی قیمت میں اضافہ ہوتو $y$ قیمت میں 1 سے 0 تک اور اس کے بعد $-1$ تک کمی ہوتی ہے۔ جیسے $\frac{3\pi}{2}$ سے $2\pi$ تک $x$ کی قیمت میں اضافہ ہوتو $y$ کی قیمت میں $-1$ سے 0 تک اضافہ ہوتا ہے۔ جدول میں درجہ بندی کئے ہوئے نقاط کو مرتسم کیجئے اور ان کو جوڑ کر ایک ہموار منحنی خط بنائیں ۔ ترسیم کا حصّہ خاکہ 4.4 میں دکھایا گیا ہے۔



خاکہ 4.5

$y = \sin x,\ x \in \mathbb{R}$ کا وقفہ $2\pi$ رہنے کی وجہ سے ، $y = \sin x$ کا مکمل ترسیم میں مسافت $[0, 2\pi]$ کے دونوں جانب بار بار دہرانے والے اوپر کا حصّہ ہے۔جیسا کہ خاکہ 4.5 میں سائن تفاعل کی ترسیم دکھائی گئی ہے۔ منحنی خط میں 0 سے $2\pi$ کے مطابق درمیانی حصّہ کو دور کہتے ہیں۔ اس کا حیطہ 1 ہے۔

### غور کیجئے (Note)

معائنہ کریں کہ، $\sin x \ge 0,\ 0 \le x \le \pi$ کے لئے سائن تفاعل کی قیمتیں ربع I اور ربع II سے مطابقت رکھتے ہیں۔ $\sin x < 0$ ، $\pi < x < 2\pi$ کے لئے سائن تفاعل کی قیمتیں ربع III اور ربع IV سے مطابقت رکھتے ہیں۔۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 4_Inverse Trigonometry.indd 133 28-03-2023 15:25:48

## 4.3.2 سائن تفاعل کی خصوصیات (Properties of the sine function)

$y = \sin x$ ترسیم سے ہم ذیل کے سائن تفاعل کی خصوصیات کو مشاہدہ کرتے ہیں۔

(i) منحنی خط میں نہ کوئی توڑ یا عدم تسلسل پائی جاتی ہے۔ سائن تفاعل مسلسل ہے۔

(ii) سائن تفاعل طاق ہے چونکہ، ترسیم مبداء کے لحاظ سے متناکل ہوتی ہے۔

(iii) سائن تفاعل کی زیادہ سے زیادہ قیمت 1 ہے اور یہ $x = \cdots, -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \cdots$ پر واقع ہوتی ہے۔اور اس کی کم از کم قیمت $-1$ ہے اور یہ $x = \cdots, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \cdots$ پر واقع ہوتی ہے۔بالفاظ دیگر ، $-1 \le \sin x \le 1$ تمام $x \in \mathbb{R}$ کے لئے ہے۔

## 4.3.3 معکوس سائن تفاعل اور اس کی خصوصیات (The inverse sine function and its properties)

سائن تفاعل مکمل علاقہ $\mathbb{R}$ ، میں ایک -کو- ایک تفاعل نہیں ہے۔ ہم نے غور کیا کہ $y = b,\ -1 \le b \le 1,$ ہر افقی خط $y = \sin x$ ترسیم پر کئی مرتبہ قطع کرتے ہیں۔ دوسرے لفظوں میں سائن تفاعل افقی خطی جانچ (Horizontal line test) میں پورا نہیں اترتے۔ **ایک -کو- ایک** تفاعل کو جانچنے کا یہ ایک آلہ ہے ۔ اگر علاقہ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ تک محدود کرتے ہیں تو سائن تفاعل ایک -کو- ایک اور دروں (**دوہراپن**) ہوجائے گا جس کی وسعت $[-1, 1]$ ہوگی۔ اب چلئے ہم علاقہ $[-1, 1]$ اور وسعت $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ کو لے کر معکوس سائن تفاعل کی تشریح کریں گے۔

**تعریف 4.3**

$-1 \le x \le 1,$ کے لئے $\sin^{-1} x$ کو تشریح کریں کہ ایک مخصوص عدد $y$ ، $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ میں اس طرح کہ $\sin y = x$ ہے۔ دوسرے لفظوں میں معکوس سائن تفاعل $\sin^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ کی تشریح $\sin^{-1}(x) = y$ ہے۔ اگر اور صرف اگر $\sin y = x$ اور $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ہو۔

### غور کیجئے (Note)

(i) محدود علاقہ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ میں سائن تفاعل ایک -کو- ایک ہے لیکن کوئی بڑی مسافت جس میں مبداء ہو، ایک -کو- ایک تفاعل نہیں ہوسکتی۔

(ii) مسافت $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ میں کوسائن تفاعل غیر منفی ہے۔ جو $\sin^{-1} x$ کی وسعت ہے۔ احصاء تکملہ میں علم مثلثی اندر اجات استعمال کرتے وقت یہ معائنہ بہت اہم ہے۔

(iii) جب بھی ہم معکوس سائن تفاعل کا ذکر کرتے ہیں۔ تو ہمارے پاس ہے،

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1] \quad \text{اور} \quad \sin^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

(iv) مسافتوں میں سے کوئی ایک سائن تفاعل کا محدود علاقہ ہوسکتا ہے۔ جہاں یہ ایک -کو- ایک تفاعل ہے۔

$\left[-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}\right], \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right] \cdots$ اور اس کی وسعت $[-1,1]$ ہوگی۔

(v) محدود علاقہ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ کوسائن تفاعل کا **اصل علاقہ** کہتے ہیں اور $y = \sin^{-1} x$ تفاعل کی قیمتیں $y = \sin^{-1} x,\ -1 \le x \le 1,$ کو **اصل قیمتیں** کہتے ہیں۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 4_Inverse Trigonometry.indd 134 28-03-2023 15:25:59

$y = \sin^{-1} x$ کی تعریف سے ہم نے ذیل کے نکات اخذ کئے۔

(i) $y = \sin^{-1} x$ اگر اور صرف اگر $-1 \le x \le 1$, کے لئے $x = \sin y$ اور $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

(ii) $\sin\left(\sin^{-1} x\right) = x$ اگر $|x| \le 1$ ، کوئی مطلب نہیں اگر $|x| > 1$

(iii) $\sin^{-1}\left(\sin x\right) = x$ اگر $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$، غور کریں $\sin^{-1}(\sin 2\pi) = 0 \neq 2\pi$

(iv) $\sin^{-1}\left(\sin x\right) = \pi - x$ اگر $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$، غور کریں $-\frac{\pi}{2} \le \pi - x \le \frac{\pi}{2}$

(v) $y = \sin^{-1} x$ ایک طاق تفاعل ہے۔

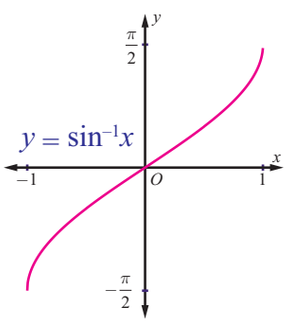
### ریمارک (Remark)

$\sin x = \frac{1}{2}$ اور $x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ مساواتوں کے درمیان فرق کریں گے، $\sin x = \frac{1}{2}$ مساوات کو حل کرنے کے لئے ، $(-\infty, \infty)$ مسافت میں تمام $x$ کی قیمتوں کو معلوم کرنا ہوگا اس طرح کہ، $\sin x = \frac{1}{2}$ ہو۔ جب کبھی، $x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ میں $x$ معلوم کرنے کے لئے ، $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ مسافت میں ایک مخصوص $x$ کی قیمت معلوم کرنا ہوگا اس طرح کہ، $\sin x = \frac{1}{2}$ ہو۔

## 4.3.4 معکوس سائن تفاعل کی ترسیم (Graph of the inverse sine function)

$\sin^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ معکوس سائن تفاعل $[-1, 1]$ مسافت میں ایک حقیقی عدد $x$ حاصل کر کے اسے اندراج کرتے ہیں۔ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ مسافت میں ایک حقیقی عدد $y$ نتیجہ کے طور پر حاصل ہوتا ہے۔ ہمیشہ کی طرح، $y = \sin^{-1} x$ مساوات کو استعمال کرکے $(x, y)$ کے چند نقاط معلوم کریں گے اور ان کو $xy$ - مسطح پر مرتسم کریں گے۔ غور کریں کہ، $-\frac{\pi}{2}$ سے $\frac{\pi}{2}$ تک $y$ کی قیمت میں اضافہ ہوتو $-1$ سے $1$ تک $x$ کی قیمت میں اضافہ ہوتا ہے۔ ان نقاط کو جوڑ کر ایک ہموار منحنی خط بنانے سے ہمیں $y = \sin^{-1} x$ کی ترسیم حاصل ہوتی ہے۔ جیسا کہ خاکہ 4.6 میں دکھایا گیا ہے۔

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $-1$ | $-\frac{\pi}{2}$ |
| $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\pi}{4}$ |
| $0$ | $0$ |
| $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\pi}{4}$ |
| $1$ | $\frac{\pi}{2}$ |




خاکہ 4.6

### غور کیجئے (Note)

$y = \sin^{-1} x$ کی ترسیم:

(i) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ مسافت میں $y = \sin x$ کی مکمل ترسیم کے حصّے کا انعکاس $y = x$ خط کی نسبت حاصل ہوگا۔ یا $y = \sin x$ کی ترسیم میں $x$ اور $y$ محوروں کو ادل بدل کرنے سے بھی حاصل ہوگا۔

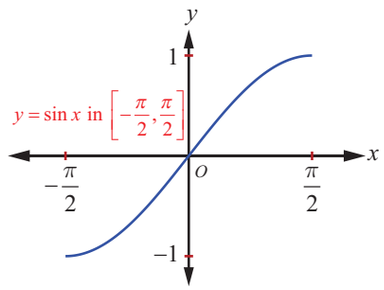
(ii) مبداء سے گزرتی ہے۔

(iii) مبداء کے لحاظ سے تشاکل رہنے سے $y = \sin^{-1} x$ ایک طاق تفاعل ہے۔

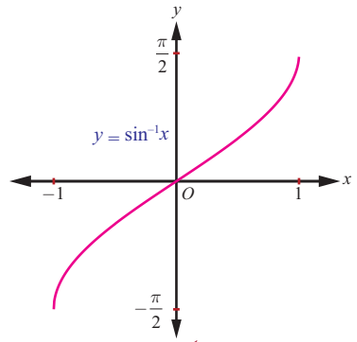


12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 4_Inverse Trigonometry.indd 135 28-03-2023 15:26:15

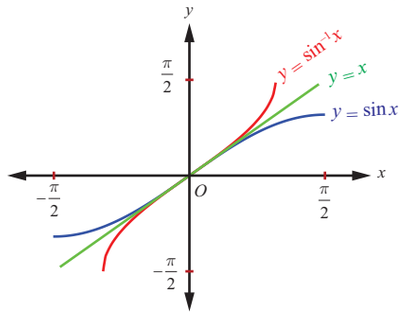
$y = \sin x,\ -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ اور $y = \sin^{-1} x,\ -1 \le x \le 1$ دونوں ترسیمات علٰحیدہ اور ملا کر کھینچئے گئے ہیں۔ جس سے اس کو ہم بہتر انداز سے سمجھ سکتے ہیں۔



خاکہ 4.7



خاکہ 4.8



خاکہ 4.9

$y = \sin^{-1} x$ کی ترسیم $y = x$ خط کے ذریعے، $y = \sin x,\ -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ کی ترسیم کا آئینہ عکس ہے۔ جیسا کہ خاکہ 4.9 میں تشریح کی گئی ہے۔یہ بھی دکھایا گیا ہے کہ سائن تفاعل اور معکوس سائن تفاعل مبداء سے تشاکل ہیں۔

### مثال 4.1

$\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ کی اصل قیمت معلوم کیجئے (ریڈین اور درجہ میں)۔

**حل**

فرض کیجئے $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = y$، ہو تو $\sin y = -\frac{1}{2}$

$\sin^{-1} x$ کی اصل قیمت کی وسعت $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ہے اور چنانچہ، $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ اس طرح کہ، $\sin y = -\frac{1}{2}$ ہو۔ یہ صاف ہے کہ $y = -\frac{\pi}{6}$

لہٰذا، $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ کی اصل قیمت $-\frac{\pi}{6}$ ہے۔ یہ $-30°$ مشابہ ہے۔ ■

### مثال 4.2

$\sin^{-1}(2)$ کی اصل قیمت موجود ہوتو اس کو معلوم کیجئے۔

**حل**

چونکہ، $y = \sin^{-1} x$ کا علاقہ $[-1,\ 1]$ ہے، $2 \notin [-1, 1]$ $\sin^{-1}(2)$ موجود نہیں ہے۔ ■

### مثال 4.3

ذیل کی اصل قیمت معلوم کیجئے۔

(i) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (ii) $\sin^{-1}\left(\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$ (iii) $\sin^{-1}\left(\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$.

**حل**

ہم جانتے ہیں کہ $\sin^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ دیا جاتا ہے۔

$\sin^{-1} x = y$ اگر اور صرف اگر $x = \sin y$ ، $-1 \le x \le 1$ کے لئے اور $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$، اس طرح



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 4_Inverse Trigonometry.indd 136 28-03-2023 15:26:24

(i) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{4}$ چونکہ، $\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ اور $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

(ii) $\sin^{-1}\left(\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=-\frac{\pi}{3}$ چونکہ، $-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

(iii) $\sin^{-1}\left(\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)=\sin^{-1}\left(\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right)=\sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}$ چونکہ، $\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

**مثال 4.4**

$\sin^{-1}\left(2-3x^2\right)$ کا علاقہ معلوم کیجئے۔

**حل**

ہم جانتے ہیں کہ $\sin^{-1}(x)$ کا علاقہ $[-1,1]$ ہے۔

رہنے کی وجہ سے $-1\le 2-3x^2\le 1 \Rightarrow -3\le -3x^2\le -1$ حاصل ہوتا ہے۔

اب، $-3\le -3x^2$ سے $x^2\le 1$ ملتا ہے اور ... (1)

$-3x^2\le -1$ سے $x^2\ge\frac{1}{3}$ ملتا ہے۔ ... (2)

مساوات (1) اور (2) کو جوڑنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $\frac{1}{3}\le x^2\le 1$ یعنی، $\frac{1}{\sqrt{3}}\le|x|\le 1$ سے حاصل ہوتا ہے۔

چونکہ، $x\in\left[-1,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right]\cup\left[\frac{1}{\sqrt{3}},1\right]$، $a\le|x|\le b \Rightarrow x\in[-b,-a]\cup[a,b]$

## مشق 4.1

1. $x$ کی تمام قیمتیں معلوم کیجئے۔

(i) $-10\pi\le x\le 10\pi$ اور $\sin x=0$ (ii) $-3\pi\le x\le 3\pi$ اور $\sin x=-1$.

2. وقفہ اور حیطہ معلوم کیجئے۔

(i) $y=\sin 7x$ (ii) $y=-\sin\left(\frac{1}{3}x\right)$ (iii) $y=4\sin(-2x)$.

3. $y=\sin\left(\frac{1}{3}x\right)$، $0\le x<6\pi$ کے لئے ترسیم کھینچئے۔

4. قیمت معلوم کیجئے۔ (i) $\sin^{-1}\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ (ii) $\sin^{-1}\left(\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$.

5. $x$ کی کس قیمت کے لئے $\sin x=\sin^{-1}x$ ہوگا؟

6. ذیل کے علاقہ معلوم کیجئے۔

(i) $f(x)=\sin^{-1}\left(\frac{x^2+1}{2x}\right)$ (ii) $g(x)=2\sin^{-1}(2x-1)-\frac{\pi}{4}$.

7. $\sin^{-1}\left(\sin\frac{5\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{5\pi}{9}\sin\frac{\pi}{9}\right)$ کی قیمت معلوم کیجئے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 4_Inverse Trigonometry.indd 137 28-03-2023 15:26:36

## 4.4 کوسائن تفاعل اور معکوس کوسائن تفاعل (The Cosine Function and Inverse Cosine Function)

کوسائن تفاعل ایک ایسا تفاعل ہے جس کا علاقہ $\mathbb{R}$ اور وسعت $[-1, 1]$ ہے کوسائن تفاعل کو $y = \cos x$ اور معکوس کوسائن تفاعل کو $y = \cos^{-1} x$ یا $y = \arccos(x)$ سے بالترتیب لکھا جاتا ہے۔ جبکہ $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ تمام حقیقی اعداد $x$ کے لئے صحیح ہے۔ اسی طرح $\cos(x + p)$ کے لئے $\cos x$ سے مساوی ہونا ضروری نہیں کہ وہ $0 < p < 2\pi$, کے لئے $y = \cos x$ ، $x \in \mathbb{R}$ کا وقفہ $2\pi$ ہے۔

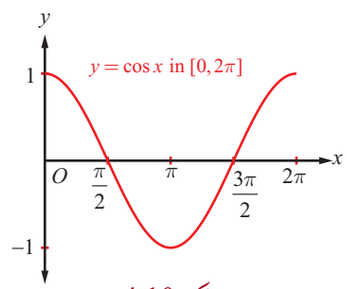
### 4.4.1 کوسائن تفاعل کی ترسیم (Graph of cosine function)

کوسائن تفاعل کی ترسیم $y = \cos x$ کی ترسیم ہے۔ جس میں $x$ ایک حقیقی عدد ہے۔ چونکہ کوسائن تفاعل کا وقفہ $2\pi$ ہے کوسائن تفاعل کی ترسیم میں ہر مسافت میں وہی نمونے دہرائے جاتے ہیں۔

$\cdots, [-4\pi, -2\pi], [-2\pi, 0], [0, 2\pi], [2\pi, 4\pi], [4\pi, 6\pi], \cdots$ میں $x \in [0, 2\pi]$ لہٰذا، کوسائن تفاعل کی ترسیم کے حصّے کو محسوب کرنا ہی کافی ہوگا۔ $(x, y)$ ترسیم میں موجود نقاط $y = \cos x$, $x \in [0, 2\pi]$ کی ترسیم پر $(x, y)$ نقاط کے لئے چند معلوم محدد جوڑیوں کی شناخت کے لئے ذیل کے جدول کو تصنیف کیجئے۔

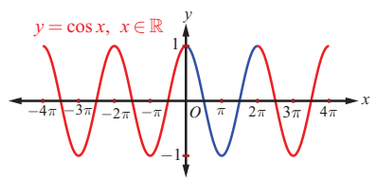
| $x$ (ریڈین میں) | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = \cos x$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-1$ | 0 | 1 |

جدول سے ہمیں یہ معلوم ہوتا ہے کہ $y = \cos x$, $0 \le x \le 2\pi$ کی ترسیم نقطہ $(0,1)$ شروع ہوتی ہے۔ جیسا کہ ، $x$ کی قیمت میں 0 سے $\pi$ تک کی قیمت کا اضافہ ہونے سے $y = \cos x$ کی قیمت میں 1 سے $-1$ تک کی کمی واقع ہوتی ہے۔ جیسے $x$ کی قیمت میں $\pi$ سے $2\pi$ تک اضافہ ہوتا، $y$ کی قیمت میں $-1$ سے 1 تک اضافہ ہوتا ہے۔ جدول میں درجہ بندی کئے ہوئے نقاط کو مرتسم کیجئے اور ان کو جوڑ کر ایک ہموار منحنی خط بنائے۔ ترسیم کا حصّہ خاکہ 4.10 میں دکھایا گیا ہے۔



خاکہ 4.10

$y = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$ کی ترسیم میں مسافت $[0, 2\pi]$ کے دونوں جانب بار بار دہرانے والے اوپر کا حصّہ ہے۔ جیسا کہ خاکہ 4.11 میں دکھایا گیا ہے۔ کوسائن تفاعل کی ترسیم سے غور کریں کہ، ربع I میں $\cos x$ مثبت $\left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right.$ کے لئے$\left.\right)$ ہے۔ ربع II میں $\left(\frac{\pi}{2} < x \le \pi\right.$ کے لئے$\left.\right)$ اور ربع III میں $\left(\pi < x < \frac{3\pi}{2}\right.$ کے لئے$\left.\right)$ میں منفی ہے۔ پھر سے ربع IV میں $\left(\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right.$ کے لئے$\left.\right)$ میں مثبت ہے۔



خاکہ 4.11

### غور کیجئے (Note)

ہم نے ترسیم میں دیکھا کہ $\cos(-x) = \cos x$ تمام $x$ کے لئے ہے۔ جس سے یقینی طور پر یہ ظاہر ہوتا ہے کہ $y = \cos x$ ایک جفت تفاعل ہے۔




12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 4_Inverse Trigonometry.indd 138 28-03-2023 15:26:50

## 4.4.2 کوسائن تفاعل کی خصوصیات (Properties of the cosine function)

$y = \cos x$ ترسیم سے ہم نے ذیل کے کوسائن تفاعل کی خصوصیات کا مشاہدہ کیا۔

(i) منحنی خط میں نہ کوئی توڑ (break) یا عدم تسلسل پایا جاتا ہے۔ کوسائن تفاعل مسلسل ہے۔

(ii) کوسائن تفاعل جفت ہے، چونکہ ترسیم $y$ -محور سے متشاکل ہوتی ہے۔

(iii) کوسائن تفاعل کی زیادہ سے زیادہ قیمت 1 ہے اور یہ $x = \ldots, -2\pi, 0, 2\pi, \ldots$ پر واقع ہوتی ہے اور اس کی کم ازکم قیمت $-1$ ہے۔ یہ $x = \ldots, -\pi, \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$ پرواقع ہوتی ہے۔ بالفاظ دیگر $-1 \leq \cos x \leq 1$ تمام $x \in \mathbb{R}$ کے لئے ہے۔

### ریمارک (Remark)

(i) $y = \cos x$ ترسیم میں $\frac{\pi}{2}$ ریڈینس کو دائیں جانب منتقل کرنے سے $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ ترسیم حاصل ہوتی ہے۔جو $y = \sin x$ کی ترسیم جیسی ہے۔غور کرو کہ

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

(ii) $y = A\sin\alpha x$ اور $y = B\cos\beta x$ ہمیشہ $-|A| \leq A\sin\alpha x \leq |A|$ اور $-|B| \leq B\cos\beta x \leq |B|$ نامساوات کو پورا کرتے ہیں۔ $y = \mathrm{A}\sin\alpha x$ کا حیطہ اور وقفہ بالترتیب $|A|$ اور $\frac{2\pi}{|\alpha|}$ ہے۔اور $y = B\cos\beta x$ کا حیطہ اور وقفہ بالترتیب $|B|$ اور $\frac{2\pi}{|\beta|}$ ہے۔ $y = A\sin\alpha x$ اور $y = B\cos\beta x$ تفاعلات کو **جیبی تفاعلات (sinusoidal functions)** کہا جاتا ہے۔




(iii) $y = A\sin\alpha x$ اور $\left[0, \frac{2\pi}{|\beta|}\right]$ اور $\left[0, \frac{2\pi}{|\alpha|}\right]$ مسافتوں کی ترسیمات کے حصوں کو دراز کرنے سے $y = B\cos\beta x$ کی ترسیمات بالترتیب حاصل ہوتے ہیں۔

### استعمالات (Applications)

قدرت میں وقتِ مقرّرہ پر دہرائے جانے والے اعمال جیسے موجیں، سالانہ تپش کو **جیبیہ (sinusoids)** استعمال کرکے نمونے تیار کئے جاتے ہیں۔مثال کے طور پر، $y = d + a\cos(bt - c)$ جیبی تفاعل استعمال کرکے موجوں کا نمونہ بنانے کے مرحلے ذیل میں دئے گئے ہیں۔

(i) ایک جیبی ترسیم (تفاعل) کا حیطہ، ترسیم $y$ - کی مطلق قیمتوں میں زیادہ سے زیادہ اور کم ازکم قیمت کے فرق کا آدھا ہے۔

یعنی، **حیطہ**، $a = \frac{1}{2}$ (سب سے چھوٹی قیمت ۔ سب سے بڑی قیمت)؛

مرکزی خط $y = d$، جس میں، $d = \frac{1}{2}$ (سب سے چھوٹی قیمت + سب سے بڑی قیمت)

(ii) **وقفہ**، $b = \frac{2\pi}{p}$، $p = 2 \times$ (سب سے بڑی قیمت اور سب سے چھوٹی قیمت کے درمیانی وقت کی پیمائش)

(iii) $c = b \times$ (سب سے بڑی قیمت حاصل ہونے کا وقت)

### نمونہ 1

موجوں کی وجہ سے بندرگاہ کے کنارے پانی کی گہرائی میں تبدیلی واقع ہوتی ہے۔ مندرجہ ذیل کے جدول میں مختلف اوقات میں پانی کی گہرائی (میٹر میں) دی گئی ہے۔

| $t$، وقت | 12 am | 2 am | 4 am | 6 am | 8 am | 10 am | دوپہر 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| گہرائی | 3.5 | 4.2 | 3.5 | 2.1 | 1.4 | 2.1 | 3.5 |



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 4_Inverse Trigonometry.indd 139 28-03-2023 15:27:02

$t$ وقت پر پانی کی گہرائی کو معلوم کرنے کے لئے جیبی تفاعل $y = d + a\cos(bt - c)$ کی تصنیف کریں۔ یہاں

$$a = 1.4 \ ; \ d = 2.8 \ ; \ p = 12 \ ; \ b = \frac{\pi}{6} \ ; \ c = \frac{\pi}{3}$$

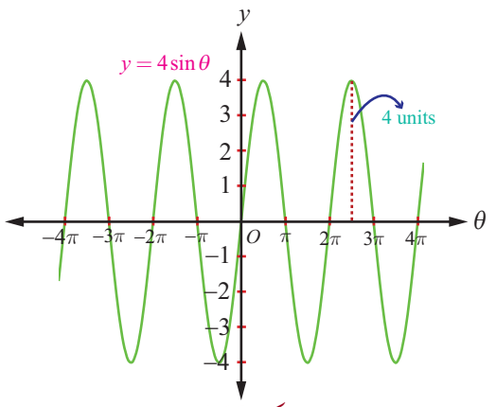
مطلوبہ جیبی تفاعل $y = 2.8 + 1.4\cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{3}\right)$ ہے۔

### غور کیجئے (Note)

سائن اور کوسائن تفاعلات کی تحویل بہت سارے استعمالات میں کارآمد ہیں۔ ہمیشہ سائن یا کوسائن تفاعل کے استعمال سے مدور حرکت کا نمونہ تیار کرسکتے ہیں۔

### نمونہ 2

مبداء مرکز والا ایک دائرہ کے اطراف ایک نقطہ گردش کرتا ہے اس دائرہ کا نصف قطر 4 ہے ۔ ہم $y$ - محدّد کا نقطہ گردشی زاویے کے تفاعل طور پر حاصل کرسکتے ہیں۔



خاکہ 4.12

مبداء مرکز والا ایک دائرہ پر کا نقطہ جس کا نصف قطر $a$ ہے، $y$ - محدّد کا نقط $y = a\sin\theta$ جس میں $\theta$ گردشی زاویہ ہے۔ اس صورت میں، ہمیں مساوات $y(\theta) = 4\sin\theta$ حاصل ہوتا ہے۔جس میں $\theta$ ریڈین میں ہے، حیطہ 4 اور وقفہ $2\pi$ ہے۔حیطہ 4کی وجہ سے سائن تفاعل $\sin\theta$ میں $y$ کی قیمتیں 4کے جزو ضربی سے عمودی طور پر پھیلتے ہیں۔

## 4.4.3 معکوس کوسائن تفاعل اور ان کی خصوصیات (The inverse cosine function and its properties)

کوسائن تفاعل میں مکمل علاقہ $\mathbb{R}$ ایک۔ایک تفاعل نہیں ہے۔جب کہ محدود علاقہ $[0, \pi]$ میں کوسائن تفاعل ایک۔ایک تفاعل ہے اور اس کا وسعت $[-1, 1]$ ہے۔ چلئے ہم علاقہ $[-1, 1]$ اور وسعت $[0, \pi]$ لے کر معکوس کوسائن تفاعل کی تشریح کریں گے۔

### تعریف 4.4

$-1 \le x \le 1$ کے لئے $\cos^{-1} x$ کی تشریح کریں کہ ایک مخصوص عدد $y$ اس طرح کہ $\cos y = x, [0, \pi]$ ہے۔ دوسرے لفظوں میں معکوس کو سائن تفاعل $\cos^{-1}(x) = y$ کی تشریح $\cos^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$ اگر اور صرف اگر $\cos y = x$ اور $y \in [0, \pi]$ ہو۔

### غور کیجئے (Note)

(i) مسافت $[0, \pi]$ میں سائن تفاعل غیر منفی ہے۔جس کا وسعت $\cos^{-1} x$ ہے۔احصاء تکملہ میں علم مثلثی اندراجات استعمال ہوتے ہیں۔

(ii) جب بھی ہم معکوس کو سائن تفاعل کا ذکر کرتے ہیں تو ہمیں ان نقاط کو ذہن میں رکھنا ہوگا۔ $\cos x : [0, \pi] \to [-1, 1]$ اور $\cos^{-1} x : [-1, 1] \to [0, \pi]$

(iii) $\cdots, [-\pi, 0], [\pi, 2\pi], \cdots$ مسافتوں میں سے کوئی ایک کوسائن تفاعل کا محدود علاقہ ہوسکتا ہے جو ایک۔ایک تفاعل اور اس کی وسعت $[-1, 1]$ ہوگی۔

$[0, \pi]$ محدود علاقہ کو کوسائن تفاعل کا **اصل علاقہ (principal domain)** کہتے ہی اور $-1 \le x \le 1$, $y = \cos^{-1} x$ تفاعل کی قیمتوں کو **اصل قیمتیں** کہتے ہیں۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 4_Inverse Trigonometry.indd 140 28-03-2023 15:27:12

$y = \cos^{-1} x$ کی تعریف سے ہم نے ذیل کے نکات اخذ کئے۔

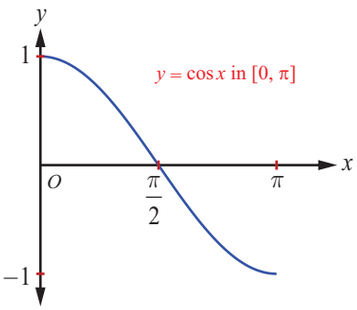
(i) $y = \cos^{-1} x$، اگر اور صرف اگر $x = \cos y$، $-1 \le x \le 1$ اور $0 \le y \le \pi$ کیلئے

(ii) $\cos\left(\cos^{-1} x\right) = x$ اگر $|x| \le 1$، کوئی مطلب نہیں، اگر $|x| > 1$

(iii) $\cos^{-1}\left(\cos x\right) = x$ اگر $0 \le x \le \pi$، $\cos^{-1} x$ کی وسعت، غور کریں $\cos^{-1}\left(\cos 3\pi\right) = \pi$

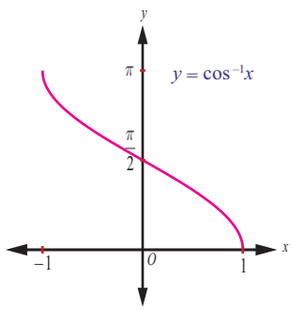
## 4.4.4 معکوس کوسائن تفاعل کی ترسیم (Graph of the inverse cosine function)

معکوس کوسائن تفاعل $\cos^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$ مسافت $[-1, 1]$ میں ایک حقیقی عدد $x$ حاصل کرکے اسے اندراج (input) کرتے ہیں۔ مسافت $[0, \pi]$ میں ایک حقیقی عدد $y$ نتیجہ (output) حاصل ہوتا ہے۔ (زاویہ، ریڈین کی پیمائش میں ہے) $y = \cos^{-1} x$ مساوات کو استعمال کرکے $(x, y)$ کے چند نقاط معلوم کریں گے اور ان کو $xy$ - مسطح پر مرتسم کریں گے۔ ہم نے غور کیا کہ $\pi$ سے 0 تک $y$ کی قیمت میں کمی ہوتو $-1$ سے 1 تک $x$ کی قیمت میں اضافہ ہوتا ہے۔ معکوس کوسائن تفاعل کی قیمت میں کمی اور یہ علاقہ میں تسلسل ہوتا ہے۔ ان نقاط کو جوڑ کر ایک ہموار منحنی خط بنانے سے ہمیں $y = \cos^{-1} x$ کی ترسیم حاصل ہوتی ہے۔ جیسا کہ 4.14 میں دکھایا گیا ہے۔




خاکہ 4.13

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $-1$ | $\pi$ |
| $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{3\pi}{4}$ |
| $0$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\pi}{4}$ |
| $1$ | $0$ |




خاکہ 4.14

### غور کیجئے (Note)

(i) $y = \cos^{-1} x$ تفاعل کی ترسیم کو $y = \cos x$ کی ترسیم میں $x$ اور $y$ محوروں کو ادل بدل کرکے بھی حاصل کیا جاسکتا ہے۔

(ii) $y = \cos^{-1} x$ تفاعل میں $x$ - مقطوعہ 1 اور $y$ - مقطوعہ $\frac{\pi}{2}$ ہے۔

(iii) ترسیم نہ تو مبداء سے نہ تو $y$ - محور سے متشاکل ہے۔ لہٰذا $y = \cos^{-1} x$ نہ تو طاق ہے نہ تو جفت تفاعل ہے۔

### مثال 4.5

$\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ کی اصل قیمت معلوم کیجئے۔

### حل

فرض کیجئے $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = y$ ہوتو $\cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$y = \cos^{-1} x$ کی **اصل قیمتوں کی وسعت** $[0, \pi]$ ہے۔

لہٰذا، $[0, \pi]$ میں $y$ کی قیمت حاصل کریں اس طرح کہ $\cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ہو۔

لیکن، $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ اور $\frac{\pi}{6} \in [0, \pi]$ چنانچہ، $y = \frac{\pi}{6}$

اسلئے $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ کی اصل قیمت $\frac{\pi}{6}$ ہے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 4_Inverse Trigonometry.indd 141 28-03-2023 15:27:25

**مثال 4.6**

معلوم کیجئے۔

(i) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (ii) $\cos^{-1}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$ (iii) $\cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$

**حل**

معکوس کو سائن تفاعل کی تعریف کے تحت، $\cos^{-1}x:[-1,1]\to[0,\pi]$

$\cos^{-1}x=y$ اگر اور صرف اگر $x=\cos y$ ہے۔یہاں، $-1\le x\le 1$ اور $0\le y\le\pi$ ۔

(i) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{3\pi}{4}$ چونکہ $\frac{3\pi}{4}\in[0,\pi]$ اور $\cos\frac{3\pi}{4}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(ii) $\cos^{-1}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=\cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=\frac{\pi}{3}$، چونکہ، $\cos^{-1}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$، لیکن، $-\frac{\pi}{3}\notin[0,\pi]$، $\frac{\pi}{3}\in[0,\pi]$

(iii) $\cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)=\frac{5\pi}{6}$ چونکہ، $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ اور $\frac{5\pi}{6}\in[0,\pi]$

**مثال 4.7**

$\cos^{-1}\left(\frac{2+\sin x}{3}\right)$ کا علاقہ معلوم کیجئے۔

**حل**

تعریف سے، $y=\cos^{-1}x$ کا علاقہ $-1\le x\le 1$ یا $|x|\le 1$ ہوگا۔

اس سے $-1\le\frac{2+\sin x}{3}\le 1$ جو اس طرح کا ہے۔ $-3\le 2+\sin x\le 3$ اس طرح $-5\le\sin x\le 1$ مختصر ہوکر

$-1\le\sin x\le 1$

جس سے $-\sin^{-1}(1)\le x\le\sin^{-1}(1)$ یا $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$ حاصل ہوتا ہے۔

$\cos^{-1}\left(\frac{2+\sin x}{3}\right)$ کا علاقہ $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ ہوگا۔

## مشق 4.2

1. $x$ کی تمام قیمتیں معلوم کیجئے اس طرح کہ

(i) $-6\pi\le x\le 6\pi$ اور $\cos x=0$ (ii) $-5\pi\le x\le 5\pi$ اور $\cos x=-1$.

2. $\cos^{-1}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]\ne-\frac{\pi}{6}$ کے لئے سبب بیان کیجئے۔

3. کیا $\cos^{-1}(-x)=\pi-\cos^{-1}(x)$ صحیح ہے ؟ تمہارے جواب کی تصدیق کیجئے۔

4. $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ کی اصل قیمت معلوم کیجئے۔

5. قیمت معلوم کیجئے۔

(i) $2\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ (ii) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+\sin^{-1}(-1)$ (iii) $\cos^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{17}-\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{\pi}{17}\right)$.



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 4_Inverse Trigonometry.indd 142 28-03-2023 15:27:37

6. علاقہ معلوم کیجئے۔ (i) $f(x)=\sin^{-1}\left(\frac{|x|-2}{3}\right)+\cos^{-1}\left(\frac{1-|x|}{4}\right)$ (ii) $g(x)=\sin^{-1}x+\cos^{-1}x$

7. $x$ کی کونسی قیمت $\frac{\pi}{2}<\cos^{-1}(3x-1)<\pi$ نامساوات کے لئے صحیح ہے؟

8. قیمت معلوم کیجئے۔

(i) $\cos\left(\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)+\sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)\right)$ (ii) $\cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)+\cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$.

## 4.5 مماس تفاعل اور معکوس مماس تفاعل (The Tangent Function and the Inverse Tangent Function)

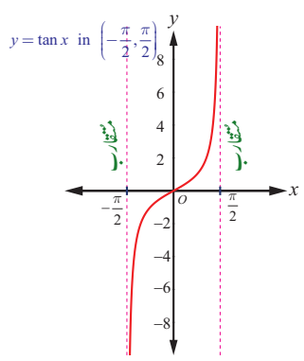
ہم جانتے ہیں کہ $y=\tan x$ مماس تفاعل اونچائیاں یا فاصلے دریافت کرنے کے لئے استعمال ہوتا ہے۔جیسے عمارت ، پہاڑ یا مستول (flagpole) کی بلندی معلوم کرسکتے ہیں۔ $y=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ کا علاقہ نسب نما کو صفر کرنے والی $x$ کی قیمتوں کو شامل نہیں کرتا۔لہٰذا، $x=\cdots,-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\cdots$ ان قیمتوں میں مماس تفاعل کی توضیح نہیں کی گئی ہے۔ چنانچہ ، $y=\tan x$ مماس تفاعل کا علاقہ $\left\{x:x\in\mathbb{R},x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}=\bigcup_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{2k+1}{2}\pi,\frac{2k+3}{2}\pi\right)$ ہے۔ اور $(-\infty,\infty)$ وسعت ہے۔ $y=\tan x$ مماس تفاعل کا وقفہ $\pi$ ہے۔

### 4.5.1 مماس تفاعل کی ترسیم (The graph of tangent function)

مماس تفاعل کی ترسیم دہرائے ہوئے وقفہ کی مسافتوں پر تفاعل کی قیمتیں معلوم کرنے کے لئے استعمال ہوتی ہے۔مماس تفاعل طاق ہے اور لہٰذا، $y=\tan x$ ترسیم مبداء سے متشاکل ہے۔مماس تفاعل کا وقفہ $\pi$ رہنے کی وجہ سے $\pi$ لمبائی رکھنے والے کسی بھی ایک مسافت میں $y=\tan x$ کی ترسیم کو تعین کرنا ضروری ہے۔ $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ مسافت فرض کیجئے اور $y=\tan x,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ ترسیم کھینچنے کے لئے مندرجہ ذیل جدول کی تصنیف کیجئے۔

| $x$ (ریڈین میں) | $-\frac{\pi}{3}$ | $-\frac{\pi}{4}$ | $-\frac{\pi}{6}$ | 0 | $\frac{\neq}{6}$ | $\frac{\neq}{4}$ | $\frac{\neq}{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=\tan x$ | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $\frac{-\sqrt{3}}{3}$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ |

$y=\tan x$ کی جزوی ترسیم بنانے کے لئے ان نقاط کو مرتسم کریں اور ان کو جوڑ کر ایک ہموار منحنی خط کھینچئے۔ جہاں $-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}$ اگر $x$ کی قیمت $\frac{\neq}{2}$ کے قریب ہو لیکن $\frac{\neq}{2}$ سے کم ہو، $\sin x$ کی قیمت 1 کے قریب ہوگی اور $\cos x$ کی قیمت 0 کے قریب اور مثبت ہوگی۔ لہٰذا، $x$ کی قیمت $\frac{\neq}{2}$ کے قریب ہونے سے، $\frac{\sin x}{\cos x}$ کی نسبت مثبت اور بڑی ہوگی۔ چنانچہ، یہ $\infty$ کے نزدیک ہوگی۔



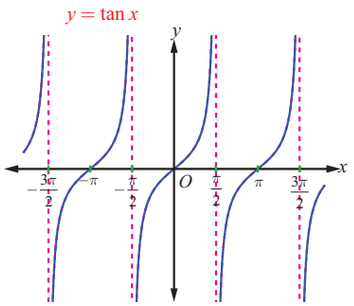

خاکہ 4.15



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 4_Inverse Trigonometry.indd 143 28-03-2023 15:27:48

اس لئے، $x=\frac{\pi}{2}$ خط ترسیم کو عمودی متقارب ہے۔ اسی طرح اگر $x$، $-\frac{\pi}{2}$ کے قریب ہوتا ہے، $\frac{\sin x}{\cos x}$ والی نسبت منفی قیمت اور قدر (magnitude) میں اضافہ ہونے سے $-\infty$ کے قریب ہوگی۔ اس لئے، $x=-\frac{\pi}{2}$ خط بھی ترسیم کو عمودی متقارب ہے۔ لہٰذا، ہمیں $y=\tan x$ ترسیم کی ایک شاخ حاصل ہوتی ہے، $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ کے لئے جیسا کہ خاکہ 4.15 میں دکھایا گیا ہے۔ مسافت $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ کو $y=\tan x$ کا اصل علاقہ کہتے ہیں۔

$x=(2n+1)\frac{\pi}{2}, n\in\mathbb{Z}$ قیمتوں کے علاوہ تمام حقیقی اعداد پر مماس تفاعل کی تشریح کرسکتے ہیں اور یہ بڑھتی ہوئی تفاعل ہے۔ $x=(2n+1)\frac{\pi}{2}, n\in\mathbb{Z}$ عمودی متقاربیاں موجود ہیں۔ $x=n\pi, n\in\mathbb{Z}$ کے مطابق $y=\tan x$ کے شاخیں متشاکل ہیں $y=\tan x$ کی مکمل ترسیم خاکہ 4.16 میں دکھائی گئی ہے۔



خاکہ 4.16

### غور کیجئے (Note)

ترسیم سے ہم نے غور کیا کہ $y=\tan x$، $0<x<\frac{\pi}{2}$ اور $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$ میں مثبت ہے۔ $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ اور $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$ میں $y=\tan x$ منفی ہے۔

## 4.5.2 مماس تفاعل کی خصوصیات (Properties of the tangent function)

$y=\tan x$ ترسیم سے ہم نے ذیل کے مماس تفاعل کی خصوصیات کا مشاہدہ کیا۔

(i) مماس تفاعل غیر مسلسل ہے۔ مزید $x=(2n+1)\frac{\pi}{2}, n\in\mathbb{Z}$ والے نقاط پر $y=\tan x$ غیر مسلسل ہے۔

(ii) $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ کے لئے جزوی ترسیم مبداء سے متشاکل ہے۔

(iii) اس کے پاس $x=(2n+1)\frac{\pi}{2}, n\in\mathbb{Z}$ لامحدود عمودی متقارِب ہیں۔

(vi) مماس تفاعل نہ ہی زیادہ سے زیادہ ہے اور نہ ہی کم از کم قیمت ہے۔

### ریمارک (Remark)

(i) $y=a\tan bx$ ترسیم، $-\frac{\pi}{2|b|}<x<\frac{\pi}{2|b|}$ کے لئے ایک مکمل دور سے گزرتا ہے اس کا وقفہ $\frac{\pi}{|b|}$ ہے۔

(ii) $y=a\tan bx$ کے لئے، متقارِبیں $x=\frac{\pi}{2|b|}+\frac{\pi}{|b|}k, k\in\mathbb{Z}$ خط ہوں گے۔

(iii) چونکہ، مماس تفاعل نہ تو زیادہ سے زیادہ قیمت اور نہ تو کم از کم قیمت رکھتا ہے۔ اس لئے $\tan x$ کے لئے حیطہ کی تشریح نہیں کرسکتے ہیں۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 4_Inverse Trigonometry.indd 144 28-03-2023 15:27:58

## 4.5.3 معکوس مماس تفاعل اور ان کی خصوصیات (The inverse tangent function and its properties)

مماس تفاعل میں مکمل علاقہ $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$، میں ایک -کو- ایک تفاعل نہیں ہے جبکہ $\tan x : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ دوہرا تفاعل ہے۔ ہم علاقہ $\mathbb{R}$ اور $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ وسعت کو لے کر معکوس مماس تفاعل کی تشریح کریں گے۔

**تعریف 4.5**

کوئی بھی حقیقی عدد $x$ کے لئے، $\tan^{-1} x$ کو تشریح کریں ایک مخصوص عدد $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ سے اس طرح کہ، $\tan y = x.$ ہو۔ دوسرے لفظوں میں، معکوس مماس تفاعل $\tan^{-1} : (-\infty, \infty) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ کی تشریح $\tan^{-1}(x) = y$ اگر اور صرف اگر $\tan y = x$ اور $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ہو۔

$y = \tan^{-1} x$ کی تعریف سے ہم نے ذیل کے نکات اخذ کئے۔

(i) $y = \tan^{-1} x$ اگر اور صرف اگر $x = \tan y$، $x \in \mathbb{R}$ اور $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ کے لئے

(ii) $\tan\left(\tan^{-1} x\right) = x$ کسی حقیقی عدد $x$ کے لئے اور $y = \tan^{-1} x$ ایک طاق تفاعل ہے۔

(iii) $\tan^{-1}\left(\tan x\right) = x$ اگر اور صرف اگر $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ہو، غور کریں کہ $\tan^{-1}\left(\tan \pi\right) = 0$ اور $\pi$ نہیں ہے۔

**غور کیجئے (Note)**

(i) جب بھی ہم معکوس مماس تفاعل کا تذکرہ کرتے ہیں تو ہمیں

$\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ اور $\tan^{-1} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ کو ذہن میں رکھنا ہوگا۔

(ii) $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ محدود علاقہ کو مماس تفاعل کا **اصل علاقہ** کہتے ہیں اور $y = \tan^{-1} x$، $x \in \mathbb{R}$ تفاعل کی قیمتوں کو $y = \tan^{-1} x$ کی **اصل قیمتیں** کہتے ہیں۔

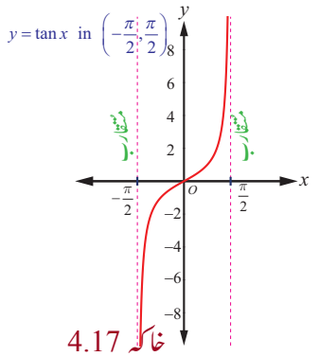
## 4.5.4 معکوس مماس تفاعل کی ترسیم (Graph of the inverse tangent function)

$y = \tan^{-1} x$ مکمل حقیقی خط $(-\infty, \infty)$ علاقہ کے ساتھ ایک تفاعل ہے۔ اس کا وسعت $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ہے۔ غور کیجئے کہ مماس تفاعل $-\frac{\pi}{2}$ اور $\frac{\pi}{2}$ پر غیر واضح ہے۔ چنانچہ، $y = \tan^{-1} x$ کی ترسیم $y = -\frac{\pi}{2}$ اور $y = \frac{\pi}{2}$ سختی سے دونوں خطوط کے درمیان ہی واقع ہے۔ اور ان دونوں خطوط کو مس نہیں کرتی، دوسرے لفظوں میں $y = -\frac{\pi}{2}$ اور $y = \frac{\pi}{2}$ دو خطوط $y = \tan^{-1} x$ کے افقی متقارب ہیں۔

خاکہ 4.17 اور خاکہ 4.18 دونوں خاکوں میں $y = \tan x$ ترسیم $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ علاقہ میں اور $y = \tan^{-1} x$ ترسیم $(-\infty, \infty)$ علاقہ میں بالترتیب دکھائی گئی ہے۔

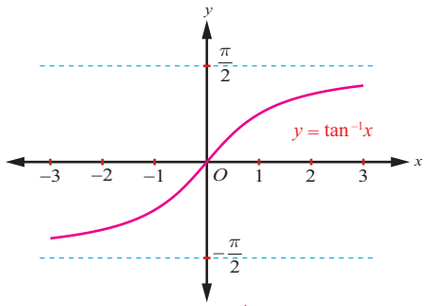


12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 4_Inverse Trigonometry.indd 145 28-03-2023 15:28:11




خاکہ 4.17

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $-1$ | $-\frac{\pi}{4}$ |
| $0$ | $0$ |
| $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $-\frac{\pi}{6}$ |
| $1$ | $\frac{\pi}{4}$ |




خاکہ 4.18

## غور کیجئے (Note)

(i) معکوس مماس تفاعل علاقہ $(-\infty, \infty)$ میں سختی سے بڑھتا اور مسلسل ہے۔

(ii) $y = \tan^{-1} x$ کی ترسیم مبداء سے گزرتی ہے۔

(iii) ترسیم مبداء سے متشاکل ہے اور لہٰذا، $y = \tan^{-1} x$ ایک طاق تفاعل ہے۔

### مثال 4.8

$\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)$ کی اصل قیمت معلوم کیجئے۔

### حل

فرض کیجئے کہ $\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right) = y$ ہو تو $\tan y = \sqrt{3}$ اس طرح $y = \frac{\pi}{3}$، چونکہ، $\frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)$ کی اصل قیمت $\frac{\pi}{3}$ ہے۔

### مثال 4.9

دریافت کیجئے:

(i) $\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)$ (ii) $\tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{5}\right)$ (iii) $\tan\left(\tan^{-1}(2019)\right)$

### حل

(i) $\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right) = \tan^{-1}\left(\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = -\frac{\pi}{3}$، چونکہ، $-\frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

(ii) $\tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{5}\right)$

میں $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ کو معلوم کرنا ہوگا۔ اس طرح کہ، $\tan\theta = \tan\frac{3\pi}{5}$ ہو۔

چونکہ، مماس تفاعل کا وقفہ $\pi$ ہے، $\tan\frac{3\pi}{5} = \tan\left(\frac{3\pi}{5} - \pi\right) = \tan\left(-\frac{2\pi}{5}\right)$

لہٰذا، $\tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{5}\right) = \tan^{-1}\left(\tan\left(-\frac{2\pi}{5}\right)\right) = -\frac{2\pi}{5}$، چونکہ، $-\frac{2\pi}{5} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

(iii) چونکہ، $\tan\left(\tan^{-1} x\right) = x, x \in \mathbb{R}$ ہمارے پاس ہے $\tan\left(\tan^{-1}(2019)\right) = 2019$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 4_Inverse Trigonometry.indd 146 28-03-2023 15:28:21

### مثال 4.10

$\tan^{-1}(-1)+\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ کی قیمت محسوب کیجئے۔

### حل

فرض کیجئے کہ، $\tan^{-1}(-1)=y$ ہوتو $\tan y=-1=-\tan\frac{\pi}{4}=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$،

جیسا کہ، $-\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$، $\tan^{-1}(-1)=-\frac{\pi}{4}$

اب، $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=y \Rightarrow \cos y=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$.

جیسا کہ، $\frac{\pi}{3}\in[0,\pi]$، $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$

اب، $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)=y \Rightarrow \sin y=-\frac{1}{2}=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

جیسا کہ، $-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$، $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$

لہٰذا، $\tan^{-1}(-1)+\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{12}$

### مثال 4.11

$\tan\left(\sin^{-1}x\right)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\ -1<x<1.$ ثابت کیجئے۔

### حل

... (1) اگر $x=0$ ہوتو دونوں جانب صفر 0 کے مساوی ہوگا۔

فرض کیجئے کہ $0<x<1$.

اب، $\theta=\sin^{-1}x$ لیجئے، $0<\theta<\frac{\pi}{2}$. ہو تو، $\sin\theta=\frac{x}{1}$، $\tan\theta=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ حاصل ہوتا ہے۔

... (2) چنانچہ، $\tan\left(\sin^{-1}x\right)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

فرض کیجئے کہ، $-1<x<0$. ہو تو $\theta=\sin^{-1}x$، $-\frac{\pi}{2}<\theta<0$ سے حاصل ہوتا ہے اب، $\sin\theta=\frac{x}{1}$ سے $\tan\theta=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ حاصل ہوتا ہے

... (3) اس صورت میں بھی، $\tan\left(\sin^{-1}x\right)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

مساوات (1)، (2) اور (3) سے $-1<x<1$، $\tan\left(\sin^{-1}x\right)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ثابت ہوتا ہے۔

## مشق 4.3

1. ذیل کے تفاعلات کا علاقہ معلوم کیجئے۔

(i) $\tan^{-1}\left(\sqrt{9-x^2}\right)$ (ii) $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(1-x^2\right)-\frac{\pi}{4}$.

2. قیمت معلوم کیجئے۔

(i) $\tan^{-1}\left(\tan\frac{5\pi}{4}\right)$ (ii) $\tan^{-1}\left(\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$.



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 4_Inverse Trigonometry.indd 147 28-03-2023 15:28:31

3. قیمت دریافت کیجئے۔

(i) $\tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)$ (ii) $\tan\left(\tan^{-1}(1947)\right)$ (iii) $\tan\left(\tan^{-1}(-0.2021)\right)$.

4. قیمت دریافت کیجئے۔

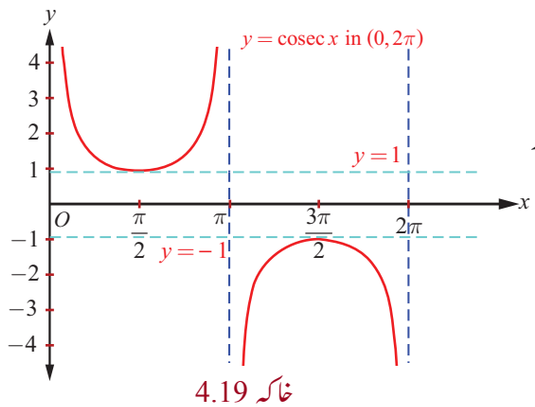
(i) $\tan\left(\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)-\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ (ii) $\sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)-\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)\right)$.

(iii) $\cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)\right)$.

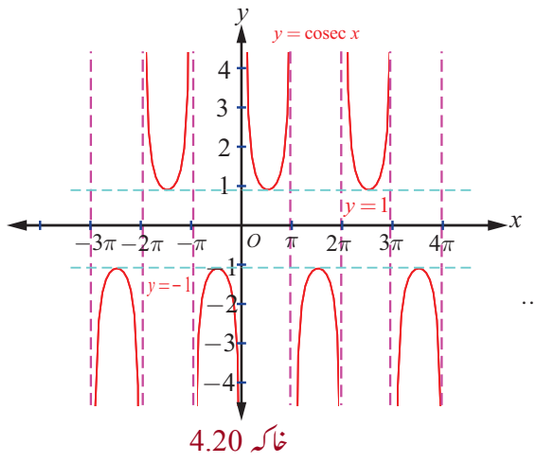
## 4.6 کوسیکینٹ تفاعل اور معکوس کوسیکینٹ تفاعل
## (The Cosecant Function and the Inverse Cosecant Function)

سائن تفاعل کی طرح، کوسیکینٹ تفاعل ایک طاق تفاعل ہے اور اس کا وقفہ $2\pi$ ہے۔ $y=\operatorname{cosec} x$ کوسیکینٹ تفاعل کی قیمتیں $2\pi$ لمبائی والے مسافت کے بعد دہراتے ہیں۔غور کریں کہ جب $\sin x=0$ ہوتو $y=\operatorname{cosec} x=\frac{1}{\sin x}$ کی تشریح نہیں ہوتی ہے۔ لہٰذا، کوسیکینٹ تفاعل کاعلاقہ $\mathbb{R}\setminus\{n\pi : n\in\mathbb{Z}\}$ ہے۔ جبکہ، $-1\le\sin x\le 1$ رہنے کی وجہ سے $y=\operatorname{cosec} x$ ، $-1$ اور $1$ کے درمیان کوئی قیمت نہیں لیتا۔ اس طرح کوسیکینٹ تفاعل کی وسعت $(-\infty,1]\cup[1,\infty)$ ہے۔

### 4.6.1 کوسیکینٹ تفاعل کی ترسیم (Graph of the cosecant function)



خاکہ 4.19



خاکہ 4.20

$(0,\ 2\pi)$ مسافت میں کوسیکینٹ تفاعل $x=\pi$ نقطہ کے علاوہ ہر کہیں مسلسل ہے۔ نہ ہی اس کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہے اور نہ ہی کم از کم ہے۔ عام طور پر، $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ کے لئے $y=\operatorname{cosec} x$ کی قیمت $\infty$ سے 1 تک کم ہوگی۔ $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$ کے لئے $y=\operatorname{cosec} x$ کی قیمت 1 سے $\infty$ تک اضافہ ہوتی ہے۔دوبارہ، $x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$ کے لئے $-\infty$ سے $-1$ تک اضافہ ہوتا ہے اور $x\in\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ کے لئے $-1$ سے $-\infty$ تک کمی ہوتی ہے۔

$y=\operatorname{cosec} x$ ، $x\in(0,2\pi)\setminus\{\pi\}$ ترسیم کوخاکہ 4.19 میں دکھایا گیا ہے۔ ترسیم کا یہ حصّہ مسافتوں $\cdots,(-4\pi,-2\pi)\setminus\{-3\pi\},(-2\pi,0)\setminus\{-\pi\},(2\pi,4\pi)\setminus\{3\pi\},(4\pi,6\pi)\setminus\{5\pi\},\cdots$ کے لئے دہراتا ہے۔

$y=\operatorname{cosec} x$ کی مکمل ترسیم خاکہ 4.20 میں دکھائی گئی ہے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 4_Inverse Trigonometry.indd 148 28-03-2023 15:28:42

## 4.6.2 معکوس کوسیکینٹ تفاعل (The inverse cosecant function)

کوسیکینٹ تفاعل $\text{cosec} : \left[-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right] \to (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$ ، $\left[-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ محدود علاقہ میں دوہرا تفاعل ہے۔ لہٰذا، معکوس کوسیکینٹ تفاعل کی تشریح $(-\infty,-1] \cup [1,\infty)$ علاقہ اور $\left[-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ وسعت کے ساتھ ہوگی۔

**تعریف 4.6**

معکوس کوسیکینٹ تفاعل $\text{cosec}^{-1} : (-\infty,-1] \cup [1,\infty) \to \left[-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ کی تشریح $\text{cosec}^{-1}(x) = y$ ہے۔

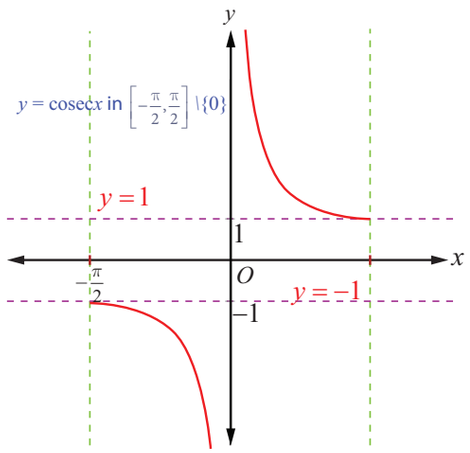
اگر اور صرف اگر $\text{cosec}\, y = x$ اور $y \in \left[-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ ہو۔

## 4.6.3 معکوس کوسیکینٹ تفاعل کی ترسیم (Graph of the inverse cosecant function)

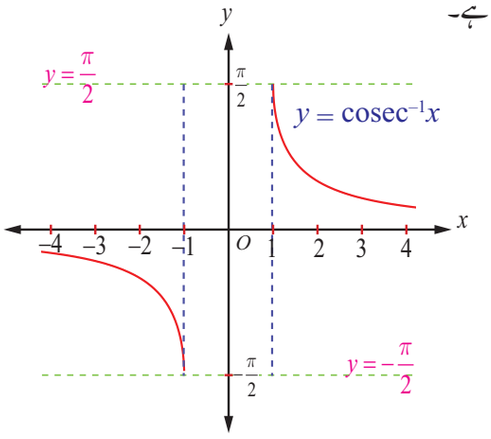
معکوس کوسیکینٹ تفاعل $y = \text{cosec}^{-1}x$ کا علاقہ $\mathbb{R} \setminus (-1,1)$ اور وسعت $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$ ہے۔یعنی،

$\text{cosec}^{-1} : (-\infty,-1] \cup [1,\infty) \to \left[-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ ہوگا۔

خاکہ 4.21 اور خاکہ 4.22 ترسیمات میں کوسیکینٹ تفاعل کو اصل علاقہ میں اور معکوس کوسیکینٹ تفاعل کو نظیری علاقہ میں بالترتیب دکھایا گیا ہے۔




خاکہ 4.21




خاکہ 4.22

## 4.7 سیکینٹ تفاعل اور معکوس سیکینٹ تفاعل (The Secant Function and Inverse Secant Function)

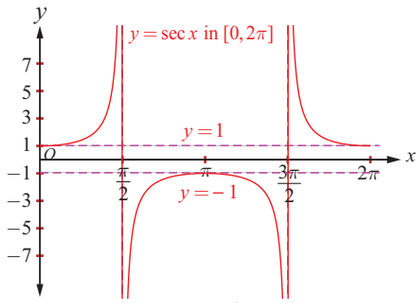
سیکنیٹ تفاعل کو، کوسائن تفاعل کے مقلوب کے طور پر تشریح کیا گیا ہے۔ اس طرح کہ ، $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$ ، $\cos x = 0$ کے علاوہ تمام $x$ کی قیمتوں کے لئے تشریح ہوتی ہے۔ چنانچہ، $y = \sec x$ تفاعل کا **علاقہ** $\mathbb{R} \setminus \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2} : n \in \mathbb{Z}\right\}$ ہے۔ $-1 \le \cos x \le 1$ رہنے کی وجہ سے $y = \sec x$ $(-1, 1)$ میں قیمتیں نہیں لیتا۔ لہٰذا، سیکینٹ تفاعل کی وسعت $(-\infty,1]\cup[1,\infty)$ ہے۔ سیکینٹ تفاعل کی قیمت نہ ہی زیادہ سے زیادہ اور نہ ہی کم از کم رکھتا ہے۔ $y = \sec x$ تفاعل کا وقفہ $2\pi$ ہے اور یہ جفت تفاعل بھی ہے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 4_Inverse Trigonometry.indd 149 28-03-2023 15:28:50

## 4.7.1 سیکینٹ تفاعل کی ترسیم (The graph of the secant function)

$0 \le x \le 2\pi$ , $x \ne \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ میں سیکینٹ تفاعل کی ترسیم کو خاکہ 4.23 میں دکھایا گیا ہے۔ I اور IV ربع یا $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ مسافت میں، $y = \sec x$ صرف مثبت قیمتیں لیتا ہے۔ جبکہ، II اور III ربع میں یا $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ مسافت میں صرف منفی قیمتیں لیتا ہے۔



خاکہ 4.23

$0 \le x \le 2\pi$ , $x \ne \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ کے لئے، سیکینٹ تفاعل مسلسل ہے۔ سیکینٹ تفاعل کی قیمت $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ کے لئے 1 سے $\infty$ تک بڑھتی ہے، $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ کے لئے $-\infty$ سے $-1$ تک بڑھتی ہے۔ $x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ کے لئے $-1$ سے $-\infty$ تک گھٹتی ہے اور $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ کے لئے $\infty$ سے 1 تک گھٹتی ہے۔

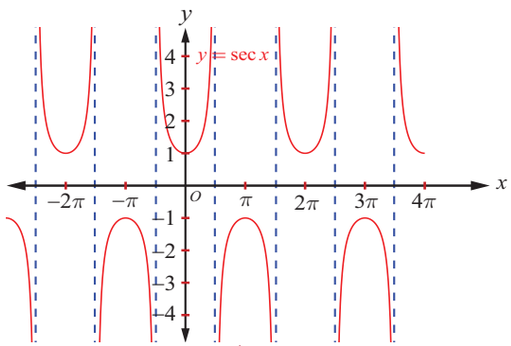
چونکہ، $y = \sec x$ کا وقفہ $2\pi$ ہے۔ $0 \le x \le 2\pi$ , $x \ne \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ ترسیم کا وہی حصّہ

$$[2\pi, 4\pi] \setminus \left\{\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right\}, [4\pi, 6\pi] \setminus \left\{\frac{9\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}\right\}, \ldots$$

اور

$$\ldots, [-4\pi, -2\pi] \setminus \left\{-\frac{7\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}\right\}, [-2\pi, 0] \setminus \left\{-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right\}$$

میں دہراتا ہے۔ $y = \sec x$ کی مکمل ترسیم خاکہ 4.24 دکھائی گئی ہے۔



خاکہ 4.24

## 4.7.2 معکوس سیکینٹ تفاعل (Inverse secant function)

سیکینٹ تفاعل $\sec x : [0,\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \to \mathbb{R} \setminus (-1,1)$ محدود علاقہ $[0,\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ میں دہرا تفاعل ہے۔ معکوس سیکینٹ تفاعل کی تشریح علاقہ $\mathbb{R} \setminus (-1,1)$ اور وسعت $[0,\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ کے ساتھ ہوتی ہے۔

### تعریف 4.7

معکوس سیکینٹ تفاعل $\sec^{-1} : \mathbb{R} \setminus (-1,1) \to [0,\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ کی تشریح $\sec^{-1}(x) = y$ سے کی جاتی ہے جب کبھی $\sec y = x$ اور $y \in [0,\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ ہو۔



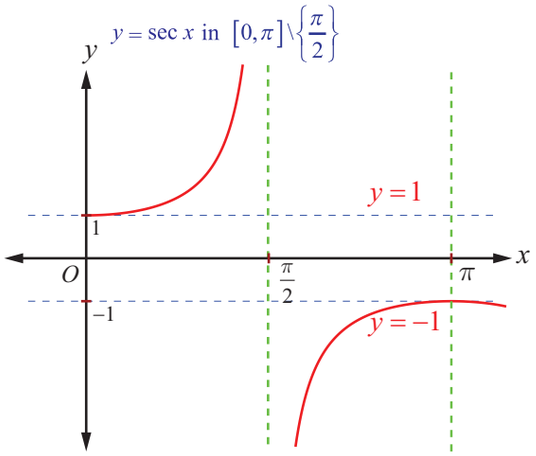
12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 4_Inverse Trigonometry.indd 150 28-03-2023 15:29:01

### 4.7.3 معکوس سیکینٹ تفاعل کی ترسیم (Graph of the inverse secant function)

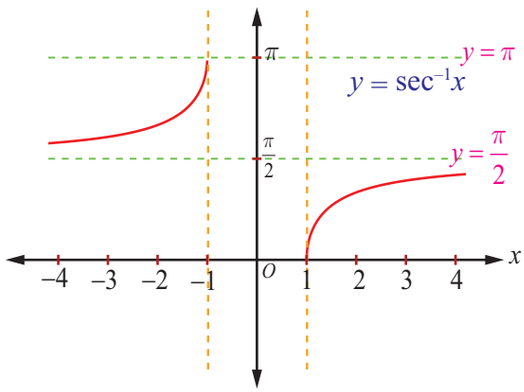
معکوس سیکینٹ تفاعل $y = \sec^{-1} x$ ایک تفاعل ہے۔جس کا علاقہ $\mathbb{R} \setminus (-1,1)$ اور وسعت $[0,\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ ہے۔ یعنی ،

$\sec^{-1} : \mathbb{R} \setminus (-1,1) \to [0,\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ ہے۔

خاکہ 4.25 اور خاکہ 4.26 ترسیمات میں سیکینٹ تفاعل اصل علاقہ میں اور معکوس سیکینٹ تفاعل نظیری علاقہ میں بالترتیب دکھائے گئے ہیں۔




خاکہ 4.25




خاکہ 4.26

**ریمارک (Remark)**

$\operatorname{cosec} x$ یا $y = \sec x$ کی ترسیم کو کھینچنے کا ایک عمدہ طریقہ یہ ہے۔

(i) $\sin x$ یا $y = \cos x$ کی ترسیم کھینچئے۔

(ii) $x$ - مقطوعوں پر عمودی متقارب کو کھینچئے اور $y$ کی قیمتوں کا مقلوب لیجئے۔

## 4.8 کومماس (کاٹ) تفاعل اور معکوس کومماس تفاعل
## (The Cotangent Function and the Inverse Cotangent Function)

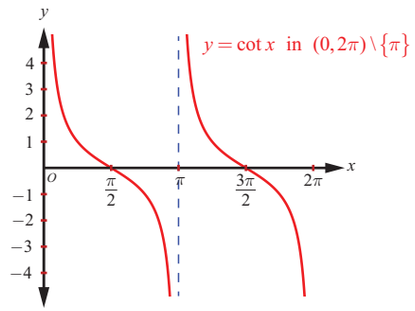
کومماس تفاعل $\cot x = \frac{1}{\tan x}$ سے دیا جاتا ہے۔ $\tan x = 0$ یا $x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$ کی علاوہ $x$ کے تمام حقیقی قیمتوں کے لئے اس کی تشریح ہوتی ہے۔ چنانچہ کومماس تفاعل کا علاقہ $\mathbb{R} \setminus \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$ اور اس کی وسعت $(-\infty, \infty)$ ہے۔ $\tan x$ کی طرح، کومماس تفاعل ایک طاق تفاعل اور اس کا وقفہ $\neq$ ہے۔

### 4.8.1 کومماس تفاعل کی ترسیم (The graph of the cotangent function)

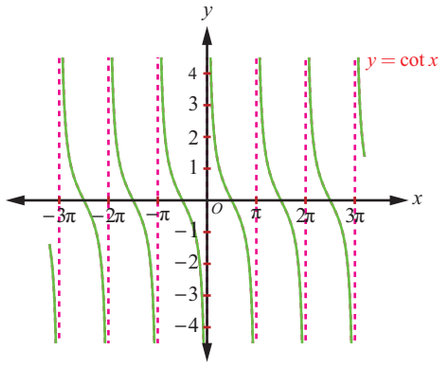
کومماس تفاعل محموعہ $(0,2\pi) \setminus \{\pi\}$ پر مسلسل ہے۔ پہلے $(0,2\pi) \setminus \{\pi\}$ میں کومماس تفاعل کا ترسیم کھینچیں گے I اور III ربع میں کومماس تفاعل صرف مثبت قیمتیں لیتے ہیں۔ اور II اور IV ربع میں صرف منفی قیمتیں لیتے ہیں۔ کومماس تفاعل کے پاس نہ تو زیادہ سے زیادہ قیمت یا نہ تو کم از کم قیمت ہوتی ہے۔ کومماس تفاعل $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ کے لئے $\infty$ سے 0 تک گھٹتا ہے۔ $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ کے لئے 0 سے $-\infty$ تک گھٹتا ہے۔ $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ کے لئے $\infty$ سے 0 تک گھٹتا ہے اور $x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ کے لئے 0 سے $-\infty$ تک گھٹتا ہے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 4_Inverse Trigonometry.indd 151 28-03-2023 15:29:09




خاکہ 4.27




خاکہ 4.28

$y = \cot x,\ x \in (0,2\pi)\setminus\{\pi\}$ ترسیم کو خاکہ 4.27 میں دکھایا گیا ہے۔ $(0,2\pi)\setminus\{\pi\}$ کو مماس ترسیم کا وہی حصّہ

$\cdots, (-4\pi,-2\pi)\setminus\{-3\pi\}, (-2\pi, 0)\setminus\{-\pi\}$ اور $(2\pi,4\pi)\setminus\{3\pi\}, (4\pi, 6\pi)\setminus\{5\pi\}, \cdots,$

ان وقفوں میں دہراتا ہے۔ $\mathbb{R}\setminus\{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$ علاقہ کے ساتھ کو مماس تفاعل کی مکمل ترسیم خاکہ 4.28 میں دکھائی گئی ہے۔

## 4.8.2 معکوس کو مماس تفاعل (Inverse cotangent function)

کو مماس تفاعل مکمل علاقہ $\mathbb{R}\setminus\{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$ میں ایک -کو- ایک تفاعل نہیں ہے۔ جبکہ، $\cot : (0, \pi) \to (-\infty, \infty)$ محدود علاقہ $(0, \pi)$ میں دوہرا تفاعل ہے۔ہم علاقہ $(-\infty, \infty)$ اور $(0, \pi)$ وسعت کو لے کر معکوس کو مماس تفاعل کی تشریح کریں گے۔

**تعریف 4.8**

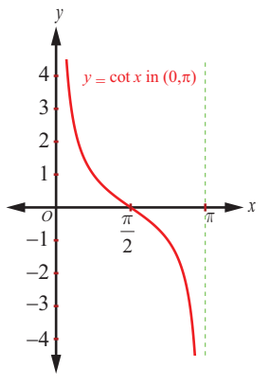
معکوس کو مماس تفاعل $\cot^{-1} : (-\infty, \infty) \to (0, \pi)$ کی تشریح $\cot^{-1}(x) = y$ ہے۔ اگر اور صرف اگر $\cot y = x$ اور $y \in (0, \pi)$ ہو۔

## 4.8.3 معکوس کو مماس تفاعل کی ترسیم (Graph of the inverse cotangent function)

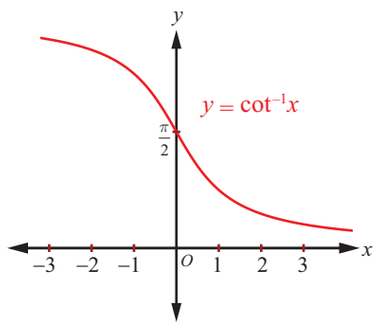
معکوس کو مماس تفاعل $y = \cot^{-1} x$ ایک تفاعل ہے۔جس کا علاقہ $\mathbb{R}$ اور وسعت $(0,\pi)$ ہے یعنی،

$\cot^{-1} x : (-\infty, \infty) \to (0, \pi)$ ہوگا۔

خاکہ 4.29 اور خاکہ 4.30 ترسیمات میں کو مماس تفاعل اصل علاقہ میں اور معکوس کو مماس تفاعل نظیری علاقہ میں بالترتیب دکھایا گیا ہے۔




خاکہ 4.29




خاکہ 4.30



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 4_Inverse Trigonometry.indd 152 28-03-2023 15:29:17

## 4.9 معکوس علم مثلثی تفاعلات کی اصل قیمت (Principal Value of Inverse Trigonometric Functions)

اعادہ کریں، $x$ نقطہ معکوس علم مثلثی تفاعل کی اصل قیمت، $x$ نقطہ معکوس تفاعل کی قیمت ہے۔ مثال کے طور پر $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ کی اصل قیمت $\frac{\pi}{6}$ ہے۔ چونکہ، $\frac{\pi}{6} \in [0, \pi]$ جب دو قیمتیں عددی طور پر مساوی ہیں جیسے ایک مثبت اور دوسرا منفی ہو تو معکوس علم مثلثی تفاعل کی اصل قیمت مثبت ہوگی۔ اب مندرجہ ذیل جدول میں علم مثلثی تفاعلات کا اصل علاقہ اور وسعت، معکوس علم مثلثی تفاعلات کا علاقہ اور وسعت کی فہرست بنائیں گے۔

| معکوس تفاعل | علاقہ | اصل قیمت کی شاخ کی وسعت |
|---|---|---|
| $\sin^{-1}$ | $[-1,1]$ | $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ |
| $\cos^{-1}$ | $[-1,1]$ | $[0,\pi]$ |
| $\tan^{-1}$ | $\mathbb{R}$ | $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ |
| $\text{cosec}^{-1}$ | $\mathbb{R} \setminus (-1,1)$ | $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$ |
| $\sec^{-1}$ | $\mathbb{R} \setminus (-1,1)$ | $[0,\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ |
| $\cot^{-1}$ | $\mathbb{R}$ | $(0,\pi)$ |

| تفاعل | اصل علاقہ | وسعت |
|---|---|---|
| sine | $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ | $[-1,1]$ |
| cosine | $[0,\pi]$ | $[-1,1]$ |
| tangent | $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ | $\mathbb{R}$ |
| cosecant | $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$ | $\mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ |
| secant | $[0,\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ | $\mathbb{R} \setminus (-1,1)$ |
| cotangent | $(0,\pi)$ | $\mathbb{R}$ |

**مثال 4.12**

اصل قیمت دریافت کیجئے۔

(i) $\text{cosec}^{-1}(-1)$ (ii) $\sec^{-1}(-2)$.

**حل**

(i) فرض کیجئے کہ $\text{cosec}^{-1}(-1) = y$، ہو تو، $\text{cosec}\, y = -1$

چونکہ، $y = \text{cosec}^{-1} x$ اصل قیمت کی شاخ کی وسعت، $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$ ہے۔

اور $\text{cosec}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ رہنے سے $y = -\frac{\pi}{2}$ ہوگا۔ غور کریں کہ۔ $-\frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$

لہٰذا، $\text{cosec}^{-1}(-1)$ کی اصل قیمت $-\frac{\pi}{2}$ ہے۔

(ii) فرض کیجئے کہ، $y = \sec^{-1}(-2)$ ہو تو، $\sec y = -2$

تعریف سے، $y = \sec^{-1} x$ اصل قیمت کی شاخ کی وسعت، $[0,\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ ہے۔

$[0,\pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ میں $y$ کی قیمت معلوم کریں گے اس طرح کہ، $\sec y = -2$ ہو۔

لیکن، $\sec y = -2 \Rightarrow \cos y = -\frac{1}{2}$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 4_Inverse Trigonometry.indd 153 28-03-2023 15:29:33

اب، $\cos y = -\frac{1}{2} = -\cos\frac{\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3}$، لہٰذا، $y = \frac{2\pi}{3}$

چونکہ، $\frac{2\pi}{3} \in [0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$، $\sec^{-1}(-2)$ کی اصل قیمت $\frac{2\pi}{3}$ ہے۔

**مثال 4.13**

$\sec^{-1}\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ کی قیمت محسوب کیجئے۔

**حل**

فرض کیجئے، $\theta = \sec^{-1}\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ ہوتو، $\sec\theta = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ جہاں، $\theta \in [0,\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$، اس طرح، $\cos\ \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

اب، $\cos\frac{5\pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ لہٰذا، $\sec^{-1}\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{5\pi}{6}$

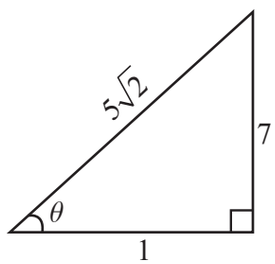
**مثال 4.14**

اگر $\theta = \cot^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$، ہوتو $\cos\theta$ کی قیمت معلوم کیجئے۔

**حل**

تعریف کے تحت، $\cot^{-1} x \in (0,\pi)$

چنانچہ، $\cot^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) = \theta \Rightarrow \theta \in (0,\pi)$،



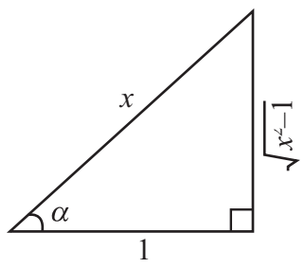

لیکن، $\cot\theta = \frac{1}{7} \Rightarrow \cot^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) = \theta$ لہٰذا، $\tan\theta = 7$ اور $\theta$ زاویہ حادہ ہے۔

$\tan\theta = \frac{7}{1}$ استعمال کرکے ہم ایک مثلث قائمۃ الزاویہ تصنیف کریں گے جیسا کہ دکھایا گیا ہے۔ $\cos\theta = \frac{1}{5\sqrt{2}}$ حاصل ہوتا ہے۔

**مثال 4.15**

$\cot^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right) = \sec^{-1} x\ ,\ |x| > 1$ ثابت کیجئے۔

**حل**




فرض کیجئے، $\alpha = \cot^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$ ہوتو، $\cot\alpha = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ اور $\alpha$ زاویہ حادہ ہے۔

دئے گئے معطیات سے ہم مثلث قائمۃ الزاویہ کی تصنیف کریں گے۔

مثلث سے، $\sec\alpha = \frac{x}{1} = x$، ہوتو، $\alpha = \sec^{-1} x$

لہٰذا، $\cot^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right) = \sec^{-1} x\ ,\ |x| > 1$

## مشق 4.4

1. اصل قیمت دریافت کیجئے۔

(i) $\sec^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ (ii) $\cot^{-1}\left(\sqrt{3}\right)$ (iii) $\text{cosec}^{-1}\left(-\sqrt{2}\right)$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 4_Inverse Trigonometry.indd 154 28-03-2023 15:29:45

2. قیمت دریافت کیجئے۔

(i) $\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)-\sec^{-1}(-2)$ (ii) $\sin^{-1}(-1)+\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+\cot^{-1}(2)$

(iii) $\cot^{-1}(1)+\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\sec^{-1}\left(-\sqrt{2}\right)$

## 4.10 معکوس علمِ مثلثی تفاعلات کی خصوصیات (Properties of Inverse Trigonometric Functions)

اس حصّے میں ہم معکوس علم مثلثی تفاعلات کی چند خصوصیات کو جانچیں گے۔ خصوصیات جو بحث کرنے والے ہیں وہ نظیری معکوس علمِ مثلثی تفاعلات کی اصل قیمت کی شاخوں کے اندر جہاں ان کی تشریح کی گئی ہے۔ درست ہوں گے۔

### خصوصیت I (Property-I)

(i) $\sin^{-1}(\sin\theta)=\theta$ اگر، $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$

(ii) $\cos^{-1}(\cos\theta)=\theta$ اگر، $\theta\in[0,\ \pi]$

(iii) $\tan^{-1}(\tan\theta)=\theta$ اگر، $\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$

(iv) $\operatorname{cosec}^{1}(\operatorname{cosec}\theta)=\theta$ اگر، $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]\setminus\{0\}$

(v) $\sec^{-1}(\sec\theta)=\theta$ اگر، $\theta\in[0,\ \pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

(vi) $\cot^{-1}(\cot\theta)=\theta$ اگر، $\theta\in(0,\ \pi)$

### ثبوت

اوپر کے تمام نتائج معکوس تفاعلات کی متعلقہ تعریف (definition) سے حاصل ہوتے ہیں۔

مثال کے طور پر، (i) فرض کیجئے، $\sin\theta=x;\ \theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$

اب، $\sin\theta=x$ سے $\theta=\sin^{-1}x$ حاصل ہوتا ہے۔معکوس سائن تفاعل کی تعریف کے تحت،

لہٰذا، $\sin^{-1}\left(\sin\theta\right)=\theta$

### خصوصیت II (Property-II)

(i) $\sin\left(\sin^{-1}x\right)=x$ اگر، $x\in[-1,\ 1]$

(ii) $\cos\left(\cos^{-1}x\right)=x$ اگر، $x\in[-1,\ 1]$

(iii) $\tan\left(\tan^{-1}x\right)=x$ اگر، $x\in\mathbb{R}$

(iv) $\operatorname{cosec}\left(\operatorname{cosec}^{-1}x\right)=x$ اگر، $x\in\mathbb{R}\setminus(-1,1)$

(v) $\sec\left(\sec^{-1}x\right)=x$ اگر، $x\in\mathbb{R}\setminus(-1,1)$

(vi) $\cot\left(\cot^{-1}x\right)=x$ اگر، $x\in\mathbb{R}$

### ثبوت

$x\in[-1,\ 1]$ کے لئے، $\sin^{-1}x$ اچھی طرح واضح کیا گیا ہے۔

فرض کیجئے، $\sin^{-1}x=\theta$ ہوتو، تعریف کے تحت، $\sin\theta=x$ اور $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$

اس طرح، $\sin\theta=x\ \Rightarrow\ \sin\left(\sin^{-1}x\right)=x$

اسی طرح، دوسرے نتائج بھی ثابت کرسکتے ہیں۔

### غور کیجئے (Note)

(i) کسی بھی علم مثلثی تفاعل $y=f(x)$، کے لئے، $f$ کے وسعت میں موجود تمام $x$ کے لئے $f\left(f^{-1}(x)\right)=x$ ہوگا، یہ $f^{-1}(x)$ کی تعریف سے پیروی کرتا ہے۔جب $f\left(g^{-1}(x)\right)$ ہمارے پاس موجود ہوتا ہے، جس میں $\cos^{-1}x$ یا $g^{-1}(x)=\sin^{-1}x$ کو حل کرنے کے لئے ایک مثلث کو چھڑانا ہوگا جو معکوس علم مثلثی تفاعل سے تشریح ہوتا ہے۔مثال کے طور پر، $\cot\left(\sin^{-1}x\right)$ کو حل کرنے کے لئے ہمیں $\sin^{-1}x$. کو استعمال کرکے ایک مثلث چھڑانا ہوگا۔ جبکہ، $f^{-1}\left(f(x)\right)$ شکل کے اظہار کو حل کرنے کے لئے ہمیں زیادہ محتاط رہنا ہوگا۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 4_Inverse Trigonometry.indd 155 28-03-2023 15:30:02

(ii) $f$ چھ علم مثلثی تفاعلات میں سے کوئی ایک ہوتو، $f^{-1}[f(x)]$ کی قیمت جانچنا۔

(a) $x$ اگر $f$ کے محدود علاقے (اصل علاقہ) میں ہوتو، $f^{-1}[f(x)] = x$ ہوگا۔

(b) $x$ اگر $f$ کے محدود علاقے میں نہ ہوتو، $f$ کے محدود علاقے کے اندر، $x_1$ دریافت کرنا ہوگا۔ جیسا کہ، $f(x) = f(x_1)$، اب، $f^{-1}[f(x)] = x_1$ ہوگا۔ مثال کے طور پر،

$$\sin^{-1}(\sin x) = \begin{cases} x & \text{اگر } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x_1 & \text{اگر } x \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \end{cases}$$

جہاں، $\sin x = \sin x_1$ اور $x_1 \in \left[-\frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{2}\right]$

## خصوصیت III (باہمی معکوس تماثلات) (Property-III) (Reciprocal inverse identities)

(i) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{cosec}^{-1} x$ اگر، $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ (ii) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \sec^{-1} x$ اگر، $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$

(iii) $$\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \cot^{-1} x & \text{اگر } x > 0 \\ -\pi + \cot^{-1} x & \text{اگر } x < 0. \end{cases}$$

### ثبوت

(i) اگر $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ ہوتو، $\frac{1}{x} \in [-1, 1]$ اور $x \neq 0$ ہوگا تو $\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ خوب واضح ہے۔

فرض کیجئے کہ، $\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \theta$ ہوتو، تعریف کے تحت، $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$ اور $\sin\theta = \frac{1}{x}$

$\operatorname{cosec}\theta = x$ جس سے $\theta = \operatorname{cosec}^{-1} x$ حاصل ہوتا ہے۔

اب، $\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \theta = \operatorname{cosec}^{-1} x$ جس سے $\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{cosec}^{-1} x$, $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ حاصل ہوتا ہے۔

اسی طرح، دوسرے نتائج بھی ثابت ہوتے ہیں۔

## خصوصیت IV (انعکاس تماثلات) (Property-IV) (Reflection identities)

(i) $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x$, اگر $x \in [-1, 1]$.

(ii) $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x$, اگر $x \in \mathbb{R}$.

(iii) $\operatorname{cosec}^{-1}(-x) = -\operatorname{cosec}^{-1} x$, اگر $|x| \geq 1$ یا $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$.

(iv) $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x$, اگر $x \in [-1, 1]$.

(v) $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1} x$, اگر $|x| \geq 1$ یا $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$.

(vi) $\cot^{-1}(-x) = \pi - \cot^{-1} x$, اگر $x \in \mathbb{R}$.

### ثبوت

(i) اگر $x \in [-1, 1]$، ہوتو، $-x \in [-1, 1]$ اس طرح یہ، $\sin^{-1}(-x)$ خوب واضح ہے۔

فرض کیجئے، $\sin^{-1}(-x) = \theta$ ہوتو، $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$، اور $\sin\theta = -x$

اب، $\sin\theta = -x \Rightarrow x = -\sin\theta = \sin(-\theta)$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 4_Inverse Trigonometry.indd 156 28-03-2023 15:30:20

$x = \sin(-\theta)$ سے $\sin^{-1} x = -\theta$ ہوگا۔ اس سے $\theta = -\sin^{-1} x$ حاصل ہوگا۔

لہٰذا، $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x$

(iv) اگر، $x \in [-1, 1]$ تو $-x \in [-1, 1]$ اس طرح کہ، $\cos^{-1}(-x)$ خوب واضح ہے۔

فرض کیجئے کہ، $\cos^{-1}(-x) = \theta$ ہوتو، $\theta \in [0, \pi]$ اور $\cos\ \theta = -x$

اب، $\cos\theta = -x \Rightarrow x = -\cos\theta = \cos(\pi - \theta)$

$x$ سے $\pi - \theta = \cos^{-1} x$ حاصل ہوتا ہے۔ $\theta = \pi - \cos^{-1} x$

لہٰذا، $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x$

اسی طرح، دوسرے نتائج بھی ثابت کرسکتے ہیں۔

## غور کیجئے (Note)

(i) ایک -کو- ایک اور طاق تفاعل کا معکوس تفاعل، طاق تفاعل ہی ہوگا۔ مثال کے طور پر، $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ محدود علاقہ میں سائن تفاعل ایک -کو- ایک اور طاق تفاعل رہنے کی وجہ سے $y = \sin^{-1} x$ ایک طاق تفاعل ہوگا۔

(ii) کیاایک جفت تفاعل کا معکوس تفاعل بھی جفت ہوگا؟ یہ سوال بے معنی ہے کیونکہ صفر 0 کے علاوہ کسی بھی مقام پر جفت تفاعل ایک-کو- ایک تفاعل نہیں ہوسکتا۔غور کریں کہ $\cos^{-1} x$ اور $\sec^{-1} x$ جفت تفاعلات نہیں ہیں۔

## خصوصیت V (معکوس ہم تفاعل تماثلات) (Property-V - Cofunction inverse identities)

(i) $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2},\ x \in [-1, 1].$ (ii) $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2},\ x \in \mathbb{R}.$

(iii) $\text{cosec}^{-1} x + \sec^{-1} x = \frac{\pi}{2},\ x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ یا $|x| \geq 1$.

### ثبوت

(i) یہاں، $x \in [-1, 1]$ فرض کیجئے $\sin^{-1} x = \theta$ ہوتو، $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ اور $\sin\theta = x$

غور کریں کہ $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\pi}{2} - \theta \leq \pi$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta = x,$ سے $\cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} x$ حاصل ہوتا ہے۔

لہٰذا، $\cos^{-1} x + \sin^{-1} x = \frac{\pi}{2},\ |x| \leq 1$

(ii) فرض کیجئے کہ، $\cot^{-1} x = \theta$ ہوتو، $0 < \theta < \pi$ اور $\cot\theta = x,\ x \in \mathbb{R}$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta = x \quad \text{... (1)}$$ اب،

یعنی، $x \in \mathbb{R}$ کے لئے $\tan(\tan^{-1} x) = x$ اور (1) سے یہ $\tan(\tan^{-1} x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{لہٰذا,}\ \tan(\tan^{-1} x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \cot^{-1} x\right) \quad \text{... (2)}$$

غور کریں کہ $0 < \cot^{-1} x < \pi$ سے $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - \cot^{-1} x < \frac{\pi}{2}.$ حاصل ہوتا ہے۔

اس طرح (2) سے $\tan^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \cot^{-1} x$ حاصل ہوتا ہے۔ اس لئے $x \in \mathbb{R},\ \tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ ہے۔

اسی طرح (iii) کو بھی ثابت کرسکتے ہیں۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 4_Inverse Trigonometry.indd 157 28-03-2023 15:30:34

## خصوصیت VI (Property-VI)

(i) $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y = \sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right)$, یہاں $x^2+y^2\le 1$ یا $xy<0$

(ii) $\sin^{-1}x-\sin^{-1}y = \sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}\right)$, یہاں $x^2+y^2\le 1$ یا $xy>0$

(iii) $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y=\cos^{-1}\left[xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right]$, اگر $x+y\ge 0$.

(iv) $\cos^{-1}x-\cos^{-1}y=\cos^{-1}\left[xy+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right]$, اگر $x\le y$.

(v) $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$, اگر $xy<1$.

(vi) $\tan^{-1}x-\tan^{-1}y=\tan^{-1}\left(\dfrac{x-y}{1+xy}\right)$ اگر $xy>-1$.

### ثبوت

(i) فرض کیجئے کہ، $A=\sin^{-1}x$ ہوتو، $A\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ ; $x=\sin A$ ، $|x|\le 1$ اور $\cos A$ مثبت ہے۔

فرض کیجئے کہ، $B=\sin^{-1}y$ ہوتو، $B\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ ; $y=\sin B$ ، $|y|\le 1$ اور $\cos B$ مثبت ہے۔

اب، $\cos A=+\sqrt{1-\sin^2 A}=\sqrt{1-x^2}$ اور $\cos B=+\sqrt{1-\sin^2 B}=\sqrt{1-y^2}$

اسی طرح، $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

$=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}$ جس میں، $|x|\le 1$ ; $|y|\le 1$

اور لہٰذا، $x^2+y^2\le 1$

چنانچہ، $A+B=\sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right)$

اس طرح، $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y = \sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right)$، یہاں، $x^2+y^2\le 1$ یا $xy<0$ ہوگا۔

اسی طرح، دوسرے نتائج بھی ثابت کرسکتے ہیں۔

## خصوصیت VII (Property-VII)

(i) $2\tan^{-1}x=\tan^{-1}\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right), |x|<1$

(ii) $2\tan^{-1}x=\cos^{-1}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right),\ x\ge 0$

(iii) $2\tan^{-1}x=\sin^{-1}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right), |x|\le 1$.

### ثبوت

(i) خصوصیت IV (v) میں $y=x$ لینے سے ہم مطلوبہ نتیجہ حاصل کرسکتے ہیں۔

$$2\tan^{-1}x=\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right), |x|<1.$$

(ii) فرض کیجئے کہ، $\theta=2\tan^{-1}x$ ہوتو، $\tan\dfrac{\theta}{2}=x$

تماثل، $\cos\theta=\dfrac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ سے $\theta=\cos^{-1}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ حاصل ہوتا ہے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 4_Inverse Trigonometry.indd 158 28-03-2023 15:30:54

لہٰذا، $2\tan^{-1}x=\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right),\ x\geq 0$

اسی طرح، دوسرے نتائج بھی ثابت کرسکتے ہیں۔

## خصوصیت VIII (Property-VIII)

(i) $\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)=2\sin^{-1}x$ اگر $|x|\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$ یا $-\frac{1}{\sqrt{2}}\leq x\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(ii) $\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)=2\cos^{-1}x$ اگر $\frac{1}{\sqrt{2}}\leq x\leq 1$.

### ثبوت

(i) فرض کیجئے کہ، $x=\sin\theta$

اب، $2x\sqrt{1-x^2}=2\sin\theta\cos\theta=\sin 2\theta$

اس طرح، $2\theta=\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$ ۔ لہٰذا، $\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)=2\sin^{-1}x$

(ii) فرض کیجئے کہ، $x=\cos\theta$

اب، $2x\sqrt{1-x^2}=2\cos\theta\sin\theta=\sin 2\theta$، سے، $2\theta=\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$ حاصل ہوتا ہے،

لہٰذا، $\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)=2\cos^{-1}x$

## خصوصیت IX (Property-IX)

(i) اگر $0\leq x\leq 1$, $\sin^{-1}x=\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$ (ii) اگر $-1\leq x<0$, $\sin^{-1}x=-\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$

(iii) اگر $-1<x<1$, $\sin^{-1}x=\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ (iv) اگر $0\leq x\leq 1$, $\cos^{-1}x=\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$

(v) اگر $-1\leq x<0$, $\cos^{-1}x=\pi-\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$ (vi) اگر $x>0$, $\tan^{-1}x=\sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

### ثبوت

(i) فرض کیجئے کہ، $\sin^{-1}x=\theta$ ہوتو، $\sin\theta=x$ چونکہ، $0\leq x\leq 1$ سے، $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$ حاصل ہوتا ہے۔

یا $\cos\theta=\sqrt{1-x^2}$، $\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}=\theta=\sin^{-1}x$

اس طرح، $\sin^{-1}x=\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$, $0\leq x\leq 1$

(ii) فرض کریں کہ $-1\leq x\leq 0$ اور $\sin^{-1}x=\theta$ ہوتو، $-\frac{\pi}{2}\leq\theta<0$،

اس لئے، $\sin\theta=x$ اور $\cos(-\theta)=\sqrt{1-x^2}$ (چونکہ، $\cos\theta>0$)

اس طرح، $\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}=-\theta=-\sin^{-1}x$ لہٰذا، $\sin^{-1}x=-\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$

اسی طرح، دوسرے نتائج بھی ثابت کرسکتے ہیں۔

## خصوصیت X (Property-X)

(i) $3\sin^{-1}x=\sin^{-1}(3x-4x^3),\ x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$. (ii) $3\cos^{-1}x=\cos^{-1}(4x^3-3x),\ x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$.



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 4_Inverse Trigonometry.indd 159 28-03-2023 15:31:10

**ثبوت**

(i) فرض کیجئے کہ، $\theta = \sin^{-1} x$ ہوتو، $x = \sin\theta$

اب، $3x - 4x^3 = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta = \sin 3\theta$

اس طرح، $\sin^{-1}(3x - 4x^3) = 3\theta = 3\sin^{-1} x$

دوسرے نتائج بھی اسی طرح ثابت کرسکتے ہیں۔

**ریمارک (Remark)**

(i) $\sin^{-1}(\cos x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x, & \text{اگر } x \in [0, \pi] \\ \frac{\pi}{2} - y, & \text{اگر } x \notin [0, \pi] \quad \text{اور} \quad \cos x = \cos y, y \in [0, \pi] \end{cases}$

(ii) $\cos^{-1}(\sin x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x, & \text{اگر } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \frac{\pi}{2} - y, & \text{اگر } x \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{اور} \quad \sin x = \sin y,\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$

**مثال 4.16**

$\frac{\pi}{2} \le \sin^{-1} x + 2\cos^{-1} x \le \frac{3\pi}{2}$ ثابت کیجئے۔

**حل**

$$\sin^{-1} x + 2\cos^{-1} x = \sin^{-1} x + \cos^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} + \cos^{-1} x$$

ہم جانتے ہیں کہ، $0 \le \cos^{-1} x \le \pi$ اس طرح، $\frac{\pi}{2} + 0 \le \cos^{-1} x + \frac{\pi}{2} \le \pi + \frac{\pi}{2}$

اس طرح، $\frac{\pi}{2} \le \sin^{-1} x + 2\cos^{-1} x \le \frac{3\pi}{2}$

**مثال 4.17**

مختصر کیجئے۔

(i) $\cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{3}\right)\right)$ (ii) $\tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

(iii) $\sec^{-1}\left(\sec\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)$ (iv) $\sin^{-1}[\sin 10]$

**حل**

(i) $\cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{3}\right)\right)$، $\cos^{-1} x$ کی اصل قیمتوں کی وسعت $[0, \pi]$ ہے۔

چونکہ، $\frac{13\pi}{3} \notin [0, \pi]$، $\frac{13\pi}{3} \neq \frac{\pi}{3}$ اس کو اس طرح $\frac{13\pi}{3} = 4\pi + \frac{\pi}{3}$ لکھ سکتے ہیں، جس میں، $\frac{\pi}{3} \in [0, \pi]$

اب، $\cos\left(\frac{13\pi}{3}\right) = \cos\left(4\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3}$

اس طرح، $\cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{3}\right)\right) = \cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}$، چونکہ، $\frac{\pi}{3} \in [0, \pi]$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 4_Inverse Trigonometry.indd 160 28-03-2023 15:31:21

(ii) $\tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

غور کریں کہ $\tan^{-1}x$ کی اصل وسعت، مسافت $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ میں $\frac{3\pi}{4}$ نہیں ہو گا۔

ہم اس طرح، $\frac{3\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$ لکھیں گے،

اب، $\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ اور $-\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

لہٰذا، $\tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \tan^{-1}\left(\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = -\frac{\pi}{4}$، چونکہ $-\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

(iii) $\sec^{-1}\left(\sec\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)$

غور کریں کہ $\sec^{-1}x$ کی اصل وسعت، $[0, \pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ میں $\frac{5\pi}{3}$ نہیں ہو گا۔

ہم اس طرح، $\frac{5\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3}$ لکھیں گے۔ اب، $\sec\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \sec\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sec\left(\frac{\pi}{3}\right)$ اور $\frac{\pi}{3} \in [0, \pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

لہٰذا، $\sec^{-1}\left(\sec\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right) = \sec^{-1}\left(\sec\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}$

(iv) $\sin^{-1}[\sin 10]$

ہم جانتے ہیں کہ، اگر $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ہو تو $\sin^{-1}(\sin\theta) = \theta$ ہو گا۔ $\frac{\pi}{2} \simeq \frac{11}{7}$ تقریبی قیمت لیتے ہیں،

$10 \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$، ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں، لیکن، $(10-3\pi) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

اب، $\sin 10 = \sin\left(3\pi + (10-3\pi)\right) = \sin(\pi + (10-3\pi) = -\sin(10-3\pi) = \sin(3\pi - 10).$

لہٰذا، $\sin^{-1}[\sin 10] = \sin^{-1}\left[\sin\left(3\pi - 10\right)\right] = 3\pi - 10$، چونکہ $(3\pi - 10) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ■

**مثال 4.18**

قیمت معلوم کیجئے۔ (i) $\sin\left[\frac{\pi}{3} - \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$ (ii) $\cos\left[\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)\right]$

(iii) $\tan\left[\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2a}{1+a^2}\right) + \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)\right]$.

**حل**

(i) $\sin\left[\frac{\pi}{3} - \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = \sin\left[\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

(ii) $\cos\left[\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)\right]$ لیں، فرض کیجئے کہ، $\cos^{-1}\left(\frac{1}{8}\right) = \theta$ ہو تو، $\cos\theta = \frac{1}{8}$ اور $\theta \in [0, \pi]$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 4_Inverse Trigonometry.indd 161 28-03-2023 15:31:35

اب، $\cos\theta = \frac{1}{8} \Rightarrow 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = \frac{1}{8}$، اس طرح، $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{3}{4}$ چونکہ، $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ مثبت ہے۔

اس طرح، $\cos\left[\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)\right] = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{3}{4}$

(iii) $\tan\left[\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2a}{1+a^2}\right) + \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)\right]$

فرض کیجئے، $a = \tan\theta$.

اب،

$$\tan\left[\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2a}{1+a^2}\right) + \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)\right] = \tan\left[\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right) + \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right)\right]$$

$$= \tan\left[\frac{1}{2}\sin^{-1}(\sin 2\theta) + \frac{1}{2}\cos^{-1}(\cos 2\theta)\right] = \tan[2\theta] = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2a}{1-a^2}.$$

**مثال 4.19**

ثابت کیجئے، $\tan(\cos^{-1}x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$، $|x|<1$ کے لئے، $x \neq 0$

**حل**

فرض کیجئے کہ، $\cos^{-1}x = \theta$ ہوتو، $\cos\theta = x$ اور $-1 \le x \le 1$

اب،

$$\tan(\sin^{-1}x) = \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x},\ |x|<1.$$

**مثال 4.20**

جانچئے۔ $\sin\left[\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) + \sec^{-1}\left(\frac{5}{4}\right)\right]$

**حل**

فرض کیجئے کہ، $\sec^{-1}\frac{5}{4} = \theta$ ہوتو $\sec\theta = \frac{5}{4}$ اور لہٰذا، $\cos\theta = \frac{4}{5}$

$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ حاصل ہوتا ہے۔ $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$ سے

اس طرح، $\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = \sec^{-1}\left(\frac{5}{4}\right)$ اور $\sin^{-1}\frac{3}{5} + \sec^{-1}\left(\frac{5}{4}\right) = 2\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$

ہم جانتے ہیں کہ، $\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = 2\sin^{-1}x$ اگر، $|x| \le \frac{1}{\sqrt{2}}$

چونکہ، $\frac{3}{5} < \frac{1}{\sqrt{2}}$، ہمیں $2\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = \sin^{-1}\left(2\times\frac{3}{5}\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{24}{25}\right)$

لہٰذا، $\sin\left[\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) + \sec^{-1}\left(\frac{5}{4}\right)\right] = \sin\left(\sin^{-1}\left(\frac{24}{25}\right)\right) = \frac{24}{25}$ چونکہ، $\frac{24}{25} \in [-1, 1]$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 4_Inverse Trigonometry.indd 162 28-03-2023 15:31:51

## مثال 4.21

ثابت کیجئے، (i) $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$ (ii) $2\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=\tan^{-1}\frac{31}{17}$

### حل

(i) ہم جانتے ہیں کہ، $xy<1$ , $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$

اس طرح، $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\tan^{-1}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)}=\tan^{-1}(1)=\frac{\pi}{4}$

(ii) ہم جانتے ہیں کہ، $-1<x<1$ , $2\tan^{-1}x=\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$

اس طرح، $2\tan^{-1}\frac{1}{2}=\tan^{-1}\frac{2\left(\frac{1}{2}\right)}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$

لہٰذا، $2\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=\tan^{-1}\frac{4}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=\tan^{-1}\left(\frac{\frac{4}{3}+\frac{1}{7}}{1-\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{1}{7}\right)}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{31}{17}\right)$

## مثال 4.22

اگر، $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y+\cos^{-1}z=\pi$ اور $0<x,y,z<1$ ہوتو، ثابت کیجئے کہ،

$x^2+y^2+z^2+2xyz=1$

### حل

فرض کیجئے کہ، $\cos^{-1}x=\alpha$ اور $\cos^{-1}y=\beta$، ہوتو، $x=\cos\alpha$ اور $y=\cos\beta$

$\cos^{-1}x+\cos^{-1}y+\cos^{-1}z=\pi$ جس سے $-\cos^{-1}z$. حاصل ہوتا ہے۔ $\alpha+\beta=\pi$ ...(1)

اب، $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$

(1) سے ہمیں حاصل ہوا، $\cos(\pi-\cos^{-1}z)=xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$

$-\cos(\cos^{-1}z)=xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$.

یعنی، $-z=xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$ جس سے $-xy-z=-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$ حاصل ہوتا ہے۔

دونوں جانب مربع کرکے مختصر کرنے پر، ہمیں $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$ حاصل ہوتا ہے۔

## مثال 4.23

اگر حسابی سلسلہ $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ ہو جس کا مشترک فرق $d$ ہوتو،

ثابت کیجئے۔ $\tan\left[\tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_1a_2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_2a_3}\right)+\ldots+\tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_na_{n-1}}\right)\right]=\frac{a_n-a_1}{1+a_1a_n}$

### حل

اب، $\tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_1a_2}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{a_2-a_1}{1+a_1a_2}\right)=\tan^{-1}a_2-\tan^{-1}a_1$.



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 4_Inverse Trigonometry.indd 163 28-03-2023 15:32:05

اس طرح، $\tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_2a_3}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{a_3-a_2}{1+a_2a_3}\right) = \tan^{-1}a_3 - \tan^{-1}a_2$ .

مسلسل استدلال کرنے سے، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_na_{n-1}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{a_n-a_{n-1}}{1+a_{n-1}a_n}\right) = \tan^{-1}a_n - \tan^{-1}a_{n-1}.$$

عمودی طور پر جمع کرنے سے، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_1a_2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_2a_3}\right)+\ldots+\tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_na_{n-1}}\right) = \tan^{-1}a_n - \tan^{-1}a_1.$$

$$\tan\left[\tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_1a_2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_2a_3}\right)+\ldots+\tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_na_{n-1}}\right)\right] = \tan[\tan^{-1}a_n - \tan^{-1}a_1]$$

$$= \tan\left[\tan^{-1}\left(\frac{a_n-a_1}{1+a_la_n}\right)\right] = \frac{a_n-a_1}{1+a_la_n}.$$

**مثال 4.24** حل کیجئے، $\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\frac{1}{2}\tan^{-1}x$، $x>0$ کے لئے

**حل**

$\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\frac{1}{2}\tan^{-1}x$ سے، $\tan^{-1}1-\tan^{-1}x=\frac{1}{2}\tan^{-1}x$ حاصل ہوتا ہے۔

چونکہ، $\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}\tan^{-1}x$ اس کو مختصر کرنے سے، $\tan^{-1}x=\frac{\pi}{6}$ حاصل کرتے ہیں۔

اس طرح، $x=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

**مثال 4.25** حل کیجئے، $\sin^{-1}x>\cos^{-1}x$

**حل**

$\sin^{-1}x>\cos^{-1}x$ دیا گیا ہے کہ، $-1\le x\le 1$ پر غور کریں۔

$\sin^{-1}x,$ کو دونوں جانب جمع کرنے سے، ہمیں حاصل ہو گا ہے۔

$\sin^{-1}x+\sin^{-1}x>\cos^{-1}x+\sin^{-1}x$ مختصر ہوکر یہ $2\sin^{-1}x>\frac{\pi}{2}$ حاصل ہو گا۔

$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ مسافت میں سائن تفاعل میں اضافہ ہونے سے، $x>\sin\frac{\pi}{4}$ یا $x>\frac{1}{\sqrt{2}}$ ہو گا۔

اس طرح، $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},1\right]$ مسافت، اس کے حل کا مجموعہ ہو گا۔

**مثال 4.26** $\cot(\sin^{-1}x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$، $-1\le x\le 1$ اور $x\neq 0$ ہے۔ ثابت کیجئے

**حل**

فرض کیجئے کہ، $\sin^{-1}x=\theta$ تو، $x=\sin\theta$ اور $x\uparrow 0$، ہمیں $\theta\in\left[\frac{-\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ حاصل ہو گا۔

لہٰذا، $\cos\theta\ge 0$ اور $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-x^2}$

اس طرح، $\cot(\sin^{-1}x)=\cot\theta=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$، $|x|\le 1$ اور $x\neq 0$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 4_Inverse Trigonometry.indd 164 28-03-2023 15:32:21

**مثال 4.27** حل کیجئے، $\tan^{-1}2x+\tan^{-1}3x=\frac{\pi}{4}$ اگر $6x^2<1$

**حل**

اب، $\tan^{-1}2x+\tan^{-1}3x = \tan^{-1}\left(\frac{2x+3x}{1-6x^2}\right)$ چونکہ، $6x^2<1$

اس طرح، $\tan^{-1}\left(\frac{5x}{1-6x^2}\right) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{5x}{1-6x^2}=\tan\frac{\pi}{4}=1$

اس طرح، $5x = 1-6x^2$ سے $6x^2+5x-1=0$ حاصل ہو گا،

لہٰذا، $x = -1, \frac{1}{6}$ لیکن، $x=-1$، $6x^2<1$ شرط کو پورا نہیں کرتا۔

$x=-1$ مساوات کو بائیں جانب منفی کر دیتا ہے جبکہ مساوات کے دائیں جانب مثبت قیمت ہے اس وجہ سے $x=-1$ حل نہیں ہے۔

لہٰذا، اس مساوات کا ایک ہی حل $x=\frac{1}{6}$ ہے۔

**مثال 4.28** حل کیجئے۔ $\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x-2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)=\frac{\pi}{4}$

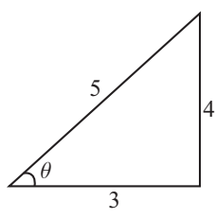
**حل**

اب، $$\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x-2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \tan^{-1}\left[\frac{\frac{x-1}{x-2}+\frac{x+1}{x+2}}{1-\frac{x-1}{x-2}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)}\right]=\frac{\pi}{4}.$$

اس طرح، $1 = \frac{\frac{x-1}{x-2}+\frac{x+1}{x+2}}{1-\frac{x-1}{x-2}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)}$ اس کو مختصر کرنے سے، $2x^2-4=-3$ حاصل ہو گا۔

اس طرح، $x^2 = \frac{1}{2}$ سے، $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ حاصل ہو گا۔

**مثال 4.29** حل کیجئے۔ $\cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right) = \sin\left\{\cot^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)\right\}$




**حل**

ہم جانتے ہیں کہ، $\sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

اس طرح، $\cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ...(1)

فرض کیجئے کہ، $\cot^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)=\theta$. ہوتو، $\cot\theta=\frac{3}{4}$ اور اس لئے $\theta$ زاویہ حادہ ہے۔

خاکہ کے ذریعہ ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

چنانچہ، $\sin\left\{\cot^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)\right\}=\sin\theta=\frac{4}{5}$ ...(2)

دئے گئے مساوات میں (1) اور (2) کو استعمال کرکے ہمیں $\frac{4}{5} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ حاصل ہوا۔ جس سے $\sqrt{1+x^2}=\frac{5}{4}$ ملتا ہے۔

لہٰذا، $x=\pm\frac{3}{4}$ ہے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 4_Inverse Trigonometry.indd 165 28-03-2023 15:32:35

## مشق 4.5

1. قیمت معلوم کیجئے اگر یہ واقع ہیں اگر قیمت واقع نہیں ہو تو اس کا سبب بیان کیجئے۔

(i) $\sin^{-1}(\cos\pi)$ (ii) $\tan^{-1}\left(\sin\left(-\frac{5\pi}{2}\right)\right)$ (iii) $\sin^{-1}[\sin 5]$.

2. حوالہ مثلث (reference triangle) کو استعمال کرکے اظہار کی قیمت، $x$ کے لحاظ سے معلوم کیجئے۔

(i) $\sin\left(\cos^{-1}(1-x)\right)$ (iii) $\cos\left(\tan^{-1}(3x-1)\right)$ (iii) $\tan\left(\sin^{-1}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)$.

3. قیمت معلوم کیجئے۔

(i) $\sin^{-1}\left(\cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\right)$ (ii) $\cot\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}+\sin^{-1}\frac{4}{5}\right)$ (iii) $\tan\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}+\cot^{-1}\frac{3}{2}\right)$.

4. ثابت کیجئے۔

(i) $\tan^{-1}\frac{2}{11}+\tan^{-1}\frac{7}{24}=\tan^{-1}\frac{1}{2}$ (ii) $\sin^{-1}\frac{3}{5}-\cos^{-1}\frac{12}{13}=\sin^{-1}\frac{16}{65}$.

5. $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\tan^{-1}\left[\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}\right]$ ثابت کیجئے۔

6. اگر $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\pi$ ہو تو، $x+y+z=xyz$ ثابت کیجئے۔

7. $\tan^{-1}x+\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}=\tan^{-1}\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$, $|x|<\frac{1}{\sqrt{3}}$ ثابت کیجئے۔

8. مختصر کیجئے: $\tan^{-1}\frac{x}{y}-\tan^{-1}\frac{x-y}{x+y}$

9. حل کیجئے۔

(i) $\sin^{-1}\frac{5}{x}+\sin^{-1}\frac{12}{x}=\frac{\pi}{2}$ (ii) $2\tan^{-1}x=\cos^{-1}\frac{1-a^2}{1+a^2}-\cos^{-1}\frac{1-b^2}{1+b^2}$, $a>0,\ b>0$.

(iii) $2\tan^{-1}(\cos x)=\tan^{-1}(2\operatorname{cosec} x)$ (iv) $\cot^{-1}x-\cot^{-1}(x+2)=\frac{\pi}{12}$, $x>0$.

10. $\tan^{-1}(x-1)+\tan^{-1}x+\tan^{-1}(x+1)=\tan^{-1}(3x)$ مساوات کی حل کی تعداد معلوم کیجئے۔

16R30

## مشق 4.6

دئے گئے چار حل میں سے صحیح یا سب سے مناسب جواب کا انتخاب کریں۔

1. $\sin^{-1}(\cos x),\ 0\le x\le\pi$ کی قیمت ہے۔

(1) $\pi-x$ (2) $x-\frac{\pi}{2}$ (3) $\frac{\pi}{2}-x$ (4) $x-\pi$

2. اگر $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=\frac{2\pi}{3}$ ہو تو $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y$ کی قیمت۔

(1) $\frac{2\pi}{3}$ (2) $\frac{\pi}{3}$ (3) $\frac{\pi}{6}$ (4) $\pi$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 4_Inverse Trigonometry.indd 166 28-03-2023 15:32:48

3. $\sin^{-1}\frac{3}{5}-\cos^{-1}\frac{12}{13}+\sec^{-1}\frac{5}{3}-\operatorname{cosec}^{-1}\frac{13}{12}$ مساوی ہے۔

(1) $2\pi$ (2) $\pi$ (3) $0$ (4) $\tan^{-1}\frac{12}{65}$

4. اگر $\sin^{-1}x=2\sin^{-1}\alpha$ کا حل ہوتو۔

(1) $|\alpha|\le\frac{1}{\sqrt{2}}$ (2) $|\alpha|\ge\frac{1}{\sqrt{2}}$ (3) $|\alpha|<\frac{1}{\sqrt{2}}$ (4) $|\alpha|>\frac{1}{\sqrt{2}}$

5. ذیل میں دی گئی قیمتوں میں سے کونسی قیمت کے لئے $\sin^{-1}(\cos x)=\frac{\pi}{2}-x$ صحیح ہے۔

(1) $-\pi\le x\le 0$ (2) $0\le x\le\pi$ (3) $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$ (4) $-\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{3\pi}{4}$

6. اگر $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y+\sin^{-1}z=\frac{3\pi}{2}$، ہوتو، $x^{2017}+y^{2018}+z^{2019}-\frac{9}{x^{101}+y^{101}+z^{101}}$ کی قیمت۔

(1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 3

7. چند $x\in R$ کے لئے $\cot^{-1}x=\frac{2\pi}{5}$ ہوتو $\tan^{-1}x$ کی قیمت۔

(1) $-\frac{\pi}{10}$ (2) $\frac{\pi}{5}$ (3) $\frac{\pi}{10}$ (4) $-\frac{\pi}{5}$

8. واضح تفاعل $f(x)=\sin^{-1}\sqrt{x-1}$ کا علاقہ ہے۔

(1) $[1,\ 2]$ (2) $[-1,\ 1]$ (3) $[0,1]$ (4) $[-1,\ 0]$

9. اگر $x=\frac{1}{5}$ ہوتو $\cos\left(\cos^{-1}x+2\sin^{-1}x\right)$ کی قیمت۔

(1) $-\sqrt{\frac{24}{25}}$ (2) $\sqrt{\frac{24}{25}}$ (3) $\frac{1}{5}$ (4) $-\frac{1}{5}$

10. $\tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{2}{9}\right)$ مساوی ہے۔

(1) $\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ (2) $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ (3) $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ (4) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

11. اگر تفاعل $f(x)=\sin^{-1}\left(x^2-3\right)$ ہوتو $x$ کا تعلق۔

(1) $[-1,1]$ (2) $\left[\sqrt{2},\ 2\right]$

(3) $\left[-2,-\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2},\ 2\right]$ (4) $\left[-2,-\sqrt{2}\right]$

12. اگر $\cot^{-1}2$ اور $\cot^{-1}3$ مثلث کے دوزاویے ہوتو تیسرا زاویہ ہے۔

(1) $\frac{\pi}{4}$ (2) $\frac{3\pi}{4}$ (3) $\frac{\pi}{6}$ (4) $\frac{\pi}{3}$

13. $\sin^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{4}\right)-\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{3}{x}}\right)=\frac{\pi}{6}$ ہوتو $x$ مساوات کا جذر

(1) $x^2-x-6=0$ (2) $x^2-x-12=0$ (3) $x^2+x-12=0$ (4) $x^2+x-6=0$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 4_Inverse Trigonometry.indd 167 28-03-2023 15:33:06

14. $\sin^{-1}\left(2\cos^2 x-1\right)+\cos^{-1}\left(1-2\sin^2 x\right)=$

(1) $\frac{\pi}{2}$ (2) $\frac{\pi}{3}$ (3) $\frac{\pi}{4}$ (4) $\frac{\pi}{6}$

15. اگر $\cot^{-1}\left(\sqrt{\sin\alpha}\right)+\tan^{-1}\left(\sqrt{\sin\alpha}\right)=u$ ہوتو $\cos 2u$ مساوی ہے۔

(1) $\tan^2\alpha$ (2) 0 (3) $-1$ (4) $\tan 2\alpha$

16. اگر $|x|\leq 1$ ہوتو $2\tan^{-1}x-\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$ مساوی ہے۔

(1) $\tan^{-1}x$ (2) $\sin^{-1}x$ (3) 0 (4) $\pi$

17. $\tan^{-1}x-\cot^{-1}x=\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ مساوات کا حل ۔

(1) کوئی حل نہیں (2) صرف ایک حل

(3) دو حل (4) لامحدود حل

18. اگر $\sin^{-1}x+\cot^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$ ہوتو $x$ مساوی ہے۔

(1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (3) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

19. اگر $\sin^{-1}\frac{x}{5}+\text{cosec}^{-1}\frac{5}{4}=\frac{\pi}{2}$ ہوتو $x$ کی قیمت ۔

(1) 4 (2) 5 (3) 2 (4) 3

20. $\sin(\tan^{-1}x),\ |x|<1$ مساوی ہے۔

(1) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (2) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (3) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (4) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 4_Inverse Trigonometry.indd 168 28-03-2023 15:33:15

# SUMMARY خلاصہ

## معکوس علمِ مثلثی تفاعلات (Inverse Trigonometric Functions)

| معکوس کومماس تفاعل | معکوس سیکینٹ تفاعل | معکوس کوسیکینٹ تفاعل | معکوس مماس تفاعل | معکوس کوسائن تفاعل | معکوس سائن تفاعل |
|---|---|---|---|---|---|
| علاقہ $\mathbb{R}$ | علاقہ $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$ | علاقہ $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$ | علاقہ $\mathbb{R}$ | علاقہ $[-1,1]$ | علاقہ $[-1,1]$ |
| وسعت $(0,\pi)$ | وسعت $[0,\pi]-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ | وسعت $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]-\{0\}$ | وسعت $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ | وسعت $[0,\pi]$ | وسعت $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ |
| تفاعل وقفہ دوران نہیں ہے۔ | تفاعل وقفہ دوران نہیں ہے۔ | تفاعل وقفہ دوران نہیں ہے۔ | تفاعل وقفہ دوران نہیں ہے۔ | تفاعل وقفہ دوران نہیں ہے۔ | تفاعل وقفہ دوران نہیں ہے۔ |
| نہ جفت اور نہ ہی طاق تفاعل ہے۔ | نہ جفت اور نہ ہی طاق تفاعل ہے۔ | طاق تفاعل ہے۔ | طاق تفاعل ہے۔ | نہ جفت اور نہ ہی طاق تفاعل ہے۔ | طاق تفاعل ہے۔ |
| تفاعل سختی سے کم ہوتا ہے۔ | علاقہ کے لحاظ سے تفاعل سختی سے کم ہوتا ہے۔ | علاقہ کے لحاظ سے تفاعل سختی سے کم ہوتا ہے۔ | تفاعل سختی سے اضافہ ہوتا ہے۔ | تفاعل سختی سے کم ہوتا ہے۔ | تفاعل سختی سے اضافہ ہوتا ہے۔ |
| ایک -کو- ایک تفاعل ہے۔ | ایک -کو- ایک تفاعل ہے۔ | ایک -کو- ایک تفاعل ہے۔ | ایک -کو- ایک تفاعل ہے۔ | ایک -کو- ایک تفاعل ہے۔ | ایک -کو- ایک تفاعل ہے۔ |

## معکوس علمِ مثلثی تفاعلات کی خصوصیات (Properties of Inverse Trigonometric Functions)

### خصوصیت I (Property-I)

(i) $\sin^{-1}(\sin\theta)=\theta$ اگر $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

(ii) $\cos^{-1}(\cos\theta)=\theta$ اگر $\theta\in[0,\pi]$

(iii) $\tan^{-1}(\tan\theta)=\theta$ اگر $\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

(iv) $\operatorname{cosec}^{1}(\operatorname{cosec}\theta)=\theta$ اگر $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\setminus\{0\}$

(v) $\sec^{-1}(\sec\theta)=\theta$ اگر $\theta\in[0,\pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

(vi) $\cot^{-1}(\cot\theta)=\theta$ اگر $\theta\in(0,\pi)$

### خصوصیت II (Property-II)

(i) $\sin\left(\sin^{-1}x\right)=x$ اگر $x\in[-1,1]$

(ii) $\cos\left(\cos^{-1}x\right)=x$ اگر $x\in[-1,1]$

(iii) $\tan\left(\tan^{-1}x\right)=x$ اگر $x\in\mathbb{R}$

(iv) $\operatorname{cosec}\left(\operatorname{cosec}^{-1}x\right)=x$ اگر $x\in\mathbb{R}\setminus(-1,1)$

(v) $\sec\left(\sec^{-1}x\right)=x$ اگر $x\in\mathbb{R}\setminus(-1,1)$

(vi) $\cot\left(\cot^{-1}x\right)=x$ اگر $x\in\mathbb{R}$

### خصوصیت III (مقلوب معکوس تماثلات) (Property-III) (Reciprocal inverse identities)

(i) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\operatorname{cosec}^{-1}x$ اگر $x\in\mathbb{R}\setminus(-1,1)$

(ii) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\sec^{-1}x$ اگر $x\in\mathbb{R}\setminus(-1,1)$

(iii) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\begin{cases}\cot^{-1}x & \text{اگر } x>0\\ -\pi+\cot^{-1}x & \text{اگر } x<0.\end{cases}$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 4_Inverse Trigonometry.indd 169 28-03-2023 15:33:20

### خصوصیت IV (انعکاس کی تماثلات) (Reflection identities) (Property-IV)

(i) $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x$, اگر $x \in [-1, 1]$.

(ii) $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x$, اگر $x \in \mathbb{R}$.

(iii) $\operatorname{cosec}^{-1}(-x) = -\operatorname{cosec}^{-1} x$, اگر $|x| \geq 1$ یا $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$.

(iv) $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x$, اگر $x \in [-1, 1]$.

(v) $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1} x$, اگر $|x| \geq 1$ یا $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$.

(vi) $\cot^{-1}(-x) = \pi - \cot^{-1} x$, اگر $x \in \mathbb{R}$.

### خصوصیت V (معکوس ہم تفاعل تماثلات) (Cofunction inverse identities) (Property-V)

(i) $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$, $x \in [-1, 1]$.

(ii) $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.

(iii) $\operatorname{cosec}^{-1} x + \sec^{-1} x = \frac{\pi}{2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ یا $|x| \geq 1$.

### خصوصیت VI (Property-VI)

(i) $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y = \sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$, یہاں $x^2 + y^2 \leq 1$ یا $xy < 0$

(ii) $\sin^{-1} x - \sin^{-1} y = \sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right)$, یہاں $x^2 + y^2 \leq 1$ یا $xy > 0$

(iii) $\cos^{-1} x + \cos^{-1} y = \cos^{-1}\left[xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right]$, اگر $x + y \geq 0$.

(iv) $\cos^{-1} x - \cos^{-1} y = \cos^{-1}\left[xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right]$, اگر $x \leq y$.

(v) $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$, اگر $xy < 1$.

(vi) $\tan^{-1} x - \tan^{-1} y = \tan^{-1}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$ اگر $xy > -1$.

### خصوصیت VII (Property-VII)

(i) $2\tan^{-1} x = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right), |x| < 1$

(ii) $2\tan^{-1} x = \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$, $x \geq 0$

(iii) $2\tan^{-1} x = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right), |x| \leq 1$.

### خصوصیت VIII (Property-VIII)

(i) $\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = 2\sin^{-1} x$ اگر $|x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ یا $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(ii) $\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = 2\cos^{-1} x$ اگر $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1$.



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 4_Inverse Trigonometry.indd 170 28-03-2023 15:33:22

### خصوصیت IX (Property-IX)

(i) اگر $0 \le x \le 1$, $\sin^{-1} x = \cos^{-1} \sqrt{1-x^2}$ (ii) اگر $-1 \le x < 0$, $\sin^{-1} x = -\cos^{-1} \sqrt{1-x^2}$

(iii) اگر $-1 < x < 1$, $\sin^{-1} x = \tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ (iv) اگر $0 \le x \le 1$, $\cos^{-1} x = \sin^{-1} \sqrt{1-x^2}$

(v) اگر $-1 \le x < 0$, $\cos^{-1} x = \pi - \sin^{-1} \sqrt{1-x^2}$ (vi) اگر $x > 0$, $\tan^{-1} x = \sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

### خصوصیت X (Property-X)

(i) $3\sin^{-1} x = \sin^{-1}(3x - 4x^3)$, $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. (ii) $3\cos^{-1} x = \cos^{-1}(4x^3 - 3x)$, $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

### ICT کارنر

**https://ggbm.at/vchq92pg or Scan the QR Code**

براوزر کھوئے اور دیا گیا URL لنک ٹیپ کیجئے (یا) QR کوڈ کو اسکین کیجئے۔ "12 ویں جماعت ریاضی" نامی GeoGebra ورک بک کھلے گی۔ ورک بک کے بائیں جانب تمہاری کتاب کے اسباق ہوں گے۔ "معکوس علم مثلثی تفاعلات" نامی باب پر کلک کریں۔ اس باب سے تعلق رکھنے والے بہت سارے ورک شیٹ دیکھ سکتے ہو۔ "معکوس علم مثلثی تفاعلات کی ترسیم" کے ورک شیٹ کا انتخاب کریں۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 4_Inverse Trigonometry.indd 171 28-03-2023 15:33:23

باب
5

# دوابعادی تحلیلی علم ہندسہ - II
# Two Dimensional Analytical Geometry - II

"ہر مشکل کو زیادہ سے زیادہ حصوں میں تقسیم کریں چونکہ یہ ہر ممکن ضروری ہے تشریح کے لیے"
رینی ڈسکارٹس

## 5.1 تعارف (Introduction)


رینی ڈسکارٹس
1596 – 1650

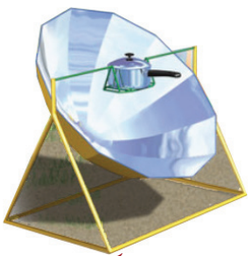
دوابعادی تحلیلی علم ہندسہ دوابعاد کارتیسی محددی نظام کو استعمال کرکے نقطہ خط، دائرہ، مکافی، بیضوی اور ہذلولی جیسے علم ہندسہ کے اشیاء کو وضاحت کرنے کے لئے استعمال ہوتی ہے۔دوسوسال قبل ((BCE) 1 BC –2 ≈) قدیم یونانیوں نے مخروطی منحنیوں کا مطالعہ کیا کیونکہ ان کے مطالعہ کے ذریعے دلچسپ حیران کن، چیلنج اور دلچسپ تصورات ظاہر ہوئے تھے۔ بعد کے صدیوں میں ان خطوط منحنیوں کے استعمالات کا قیاس انھوں نے نہیں کیا۔

تحلیلی علم ہندسہ کے طریقے سے مسئلوں کے حل کی ترتیب وار ترقی ٹی ڈسکارٹس (Descartes) اور دیگر عظیم ریاضی دان جیسے فرماٹ (Fermat)، کپلر (Kepler)، نیوٹن (Newton)، یولر(Euler)، لیبنز (Leibniz)، ناہوپ ٹل (l'Hôpital)، کرامر (Cramer) اور جیکوبس(Jacobis) نے زیادہ تر 17 ویں صدی کے پہلے آدھے حصے میں کی

علم ہندسہ کے مسائل (problems geometrical) کو حل کرنے کے لئے الجبرائی طریقہ (algebraic techniques) کو مقرر کرنے کی ضرورت تحلیلی علم ہندسہ کی ترقی کا سبب بنا اور اس میدان کی ترقی نے کارخانے ، ادویات اور سائنسی تحقیقات سب کو اپنے زیر کرلیا۔

جرمن کے ریاضی دان مع طبعیات دان جونس کپلر (Johannes Kepler) نے سیّاروی حرکات کے نظریہ کو ایجاد کئے کہ نظام شمسی کے تمام سیارے (جس میں زمین بھی شامل ہے) بیضوی محور پر سورج ایک ماسکہ کے اطراف گھومتے ہیں۔ معکوس مربع کے ضابطہ کے رہنمائی جس سے یوکلیڈین علم ہندسہ (Euclidean geometry) کی سرگرمیاں جاری کرنے میں آسانی ہوئی۔ یولر نے خلائی منحنیوں اور سطحوں کے منظم مطالعہ کے لئے محددی طریقہ استعمال کیا، جسے آگے چل کر آلبرٹ آئنسٹین نے اپنے نظریہ تناسبیت (theory of relativity) میں پروان چڑھایا۔

مختلف میدانوں میں کئی استعمالات جیسے دانتیدار چکری (gears) ڈیم میں سوراخیں (vents)، پہیئے اور دائری علم ہندسہ اور علم مثلث کو راستہ دکھانے جو دائروں کے خصوصیات کے تحت بطور استعمال ہیں۔ محرابیں، رکابی ، شمسی کوکر، ہیڈلائٹ، جھولنے والے پل اور تلاشی چراغ مکافی کے خصوصیات کے تحت بطور استعمال ہیں، طبی میدان میں لیتوٹرپسی (Lithotripsy)، کانا پھلسی گیلیری (whispering galleries) نے ۔ ڈی۔یاگ لیزروں اور دانتدار چکری بیضوی کے خصوصیات کے تحت بطور استعمال ہیں اور دوربین، حرارت ٹھنڈا کرنے والی مینارین ، ہوائی جہاز یا جہازوں کے مقامات معلوم کرنے میں ہذلولی خصوصیات کے تحت بطور استعمال ہیں۔


خاکہ 5.1


خاکہ 5.2


خاکہ 5.3



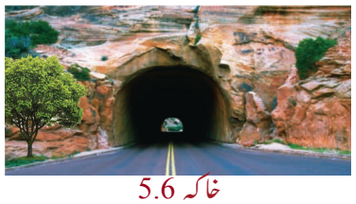
12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 172 27-02-2023 16:13:58



خاکہ 5.4



خاکہ 5.5



خاکہ 5.6

ایک ڈرائیور نے آن لائن میں آرڈر کئے کتابوں کے ٹرک کو پہنچانے کا کام لیا۔ وہ ٹرک 3m چوڑا اور 2.7m اونچا ہے، گاڑی چلانے کے دوران اس نے ایک سرنگ کے نصف بیضوی داخلے پر ایک نشان دیکھا، احتیاط! سرنگ کے مرکزی حصے کی اونچائی 3m ہے۔ پھر اس نے ایک اور نشان دیکھا: احتیاط ! سرنگ کی چوڑائی 12m ہے۔ کیا اس کی ٹرک اس سرنگ محرابی راستے کے داخلے سے نکل پائے گی؟ اس باب کے آخر میں ہم اس سوال کے جواب بتانے کے قابل ہوں گے۔

## Learning Objectives سیکھنے کے مقاصد

اس باب کے اختتام پر، طلباء کابل بن جائیں گے

- دائرہ ، مکافی، بیضوی ، ہذلولی کے مساوات کو معیاری شکل میں لکھنے کے مقابل بنیں گے۔
- مختلف مخروطی (conics) تراشے کی مساوات سے مرکز، راسیں اور ماسکہ (foci) وغیرہ معلوم کرنے کے قابل بنیں گے۔
- مختلف مخروطی تراشے کے مماس اور عمودی کے مساوات حاصل کرنے کے قابل بنیں گے۔
- مختلف مخروطی تراشے اور ان کے تحلیل شدہ شکل کی تقسیم بندی کرنے کے قابل بنیں گا۔
- پیمائشی (parametric) شکل میں مخروطی تراشوں کی مساوات کی تشکیل کریں گے اور ان کے استعمالات۔
- حقیقی زندگی کے مختلف حالات پر مخروطی تراشے استعمال کرنے کے قابل بنیں گے۔

## 5.2 دائرہ (Circle)

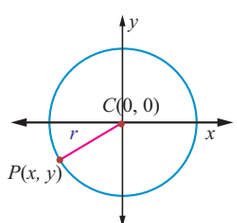
لفظ دائرہ یونانی زبان سے لیا گیا ہے۔ اور دائروں کا انحصار (reference) 1700 BC (BCE) کے فوراً بعد ہی انکشاف ہوچکا ہے۔ کائنات میں دائروں کا مشاہدہ کرچکے ہوں گے جیسے کہ چاند، سورج اور **پانی کی سطح** پر لہروں کا بننا وغیرہ۔ دائرہ ہی پہیہ کی بنیاد ہے، جس کے متعلقہ ایجادات جیسے گیئرز (gears) کے ذریعہ کافی حد تک جدید مشینیری کی ایجادات ممکن ہوئی ہے۔علم ریاض میں علم ہندسہ ، **علم فلکیات** اور احصاء کی ترقی کے لئے دائرہ کے مطالعہ سے مدد ملی۔ بور۔ سومرفلڈ (Bohr-Sommerfeld) جوہر (atom) کے کلیہ میں، **الکٹران کے محور** کو دائرہ کا نمونہ پیش کیا گیا ہے۔

### تعریف 5.1

دائرہ مستوی میں ایسے نقاط کا مجموعہ ہے جو ایک متعین نقطہ سے مستقل فاصلہ پر حرکت پذیر ہے، یہ ہمیشہ ایک مستقل ہے۔
متعین نقطہ کو دائرہ کا **مرکز** کہا جاتا ہے اور مستقل فاصلہ کو دائرہ کا **نصف قطر** کہا جاتا ہے۔

### 5.2.1 معیاری شکل میں دائرہ کی مساوات (Equation of a circle in standard form)

#### (i) مرکز (0,0) اور نصف قطر $r$ والے دائرہ کی مساوات (Equation of circle with centre (0, 0) and radius $r$)




خاکہ 5.7

فرض کیجئے کہ مرکز $C(0,0)$ اور نصف قطر $r$ ہے اور $P(x,y)$ ایک متحرک نقطہ ہے۔
غور کیجئے کہ نقطہ $P$ کا مختص $(x,y)$ کو $P(x,y)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔
تب، $CP = r$ اور اس لئے $CP^2 = r^2$

لہٰذا، $(x-0)^2 + (y-0)^2 = r^2$

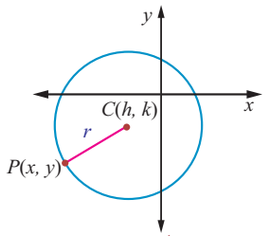
یعنی، $x^2 + y^2 = r^2$

یہ مرکز $(0,0)$ اور نصف قطر $r$ والے دائرہ کی مساوات ہے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 173 27-02-2023 16:14:04

## (ii) مرکز $(h, k)$ اور نصف قطر $r$ والے دائرہ کی مساوات (Equation of circle with centre $(h, k)$ and radius $r$)



خاکہ 5.8

فرض کیجئے کہ مرکز $C(h,k)$ اور نصف قطر $r$ ہے اور $P(x,y)$ ایک متحرک نقطہ ہے۔

تب، $CP = r$ اور اس لئے $CP^2 = r^2$

یعنی، $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ یہ معیاری شکل میں دائرہ کی مساوات ہے جسے مرکز – نصف قطر شکل بھی کہا جاتا ہے۔

مساوات کو پھیلانے پر، ہمیں $x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$ حاصل ہوتا ہے۔

$2g = -2h, 2f = -2k, c = h^2 + k^2 - r^2$ لینے پر مساوات اس شکل کا بنتا ہے

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ جو دائرہ کی عام شکل کہلاتا ہے۔

مساوات $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$، $x$ اور $y$ میں ایک دو درجی مساوات ہے جو ذیل کی مخصوص خصوصیات رکھتی ہے:

(i) یہ $x$ اور $y$ میں ایک دو درجی مساوات ہے،

(ii) $x^2$ کا ضریب = $y^2$ کا ضریب $\neq 0$،

اس کے برخلاف، ہمیں یہ ثابت کرنا ہے کہ ان تین مخصوص خصوصیات رکھنے والی ایک مساوات ہمیشہ ایک دائرہ کو ظاہر کرتی ہے۔ فرض کیجئے کہ

$$ax^2 + ay^2 + 2g'x + 2f'y + c = 0 \quad \ldots (1)$$

(i)، (ii) اور (iii)، $a \neq 0$ خصوصیات رکھنے والی $x$ اور $y$ میں ایک دو درجی مساوات ہے۔

(1) کو $a$ سے تقسیم کرنے پر

$$x^2 + y^2 + \frac{2g'}{a}x + \frac{2f'}{a}y + \frac{c'}{a} = 0 \quad \ldots . (2)$$ حاصل ہوتا ہے۔

$\frac{g'}{a} = g, \frac{f'}{a} = f$ اور $\frac{c'}{a} = c$ لینے پر مساوات (2) ہوجاتی ہے $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

$g^2$ اور $f^2$ کو جمع اور تفریق کرنے پر، $x^2 + 2gx + g^2 + y^2 + 2fy + f^2 - g^2 - f^2 + c = 0$ ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\Rightarrow (x+g)^2 + (y+f)^2 = g^2 + f^2 - c$$

$$\Rightarrow (x-(-g))^2 + (y-(-f))^2 = \left(\sqrt{g^2 + f^2 - c}\right)^2$$

یہ مرکز $C\ (-g,-f)$ اور نصف قطر $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$ کے ساتھ ایک دائرہ کا معیاری شکل میں ہے ۔ مساوات (1)، $(-g,-f) = \left(\frac{-g'}{a}, \frac{-f'}{a}\right)$ نصف قطر اور مرکز، $= \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \frac{1}{a}\sqrt{g'^2 + f'^2 - c'a}$ والے ایک دائرہ کو ظاہر کرتی ہے۔

### غور کیجئے (Note)

مرکز $(-g,-f)$ اور نصف قطر $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$ والے دائرہ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ کی مساوات ظاہر کرتی ہے۔

(i) ایک حقیقی دائرہ اگر $g^2 + f^2 - c > 0$

(ii) ایک نقطہ دائرہ اگر $g^2 + f^2 - c = 0$

(iii) ایک خیالی (imaginary) دائرہ اگر $g^2 + f^2 - c < 0$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 174 27-02-2023 16:14:21

**مثال 5.1**

مرکز $(-3,-4)$ اور نصف قطر 3 اکائیوں والے ایک دائرہ کی عام مساوات معلوم کیجئے۔

**حل**

معیاری شکل میں دائرہ کی مساوات $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ ہے۔

$$\begin{aligned}\Rightarrow\quad (x-(-3))^2+(y-(-4))^2 &= 3^2\\ \Rightarrow\quad (x+3)^2+(y+4)^2 &= 3^2\\ \Rightarrow\quad x^2+y^2+6x+8y+16 &= 0.\end{aligned}$$

**مسئلہ 5.1**

دائرہ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ اور خط $lx+my+n=0$ کے تقاطع (حقیقی یا خیالی) نقاط سے گذرنے والا دائرہ $x^2+y^2+2gx+2fy+c+\lambda(lx+my+n)=0,\ \lambda\in\mathbb{R}^1$ کی شکل کا دائرہ ہے۔

**ثبوت**

فرض کرو کہ S ایک دائرہ ہے : $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ .....(1)

اور L ایک خط ہے : $lx+my+n=0$ .....(2)

مان لیجئے $S+\lambda L=0$، یعنی، $x^2+y^2+2gx+2fy+c+\lambda(lx+my+n)=0$ .....(3)

$x,y$ کے ارقام اور مستقلات کو گروپ بنانے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$x^2+y^2+x(2g+\lambda l)+y(2f+\lambda m)+c+\lambda n=0$ جو $x$ اور $y$ میں دو درجی مساوات ہے جس میں $x^2$ اور $y^2$ کے مساوی ہیں اور کوئی $xy$ رقم نہیں ہے۔

اگر S اور L کا نقطہ تقاطع $(\alpha,\beta)$ مساوات (1) اور (2) پوری کرتا ہے، تو یہ مساوات (3) کو پوری کرتا ہے۔

چنانچہ $S+\lambda L=0$ مطلوبہ دائرہ کو ظاہر کرتی ہے۔

**مثال 5.2**

دائرہ کے وتر $3x+y+5=0$ کو قطر لے کر بنا گیا $x^2+y^2=16$ دائرہ کی مساوات معلوم کیجئے۔

**حل**

مسئلہ 5.1 کی مدد سے وتر اور دائرہ کے نقاط تقاطع سے گذرنے والے دائرہ کی مساوات $x^2+y^2-16+\lambda(3x+y+5)=0$ ہے۔

وتر $3x+y+5=0$ اس دائرہ کا قطر ہے، اگر مرکز $\left(\frac{-3\lambda}{2},\frac{-\lambda}{2}\right)$ وتر پر واقع ہو۔

اس لئے ، ہمارے پاس، $3\left(\frac{-3\lambda}{2}\right)-\frac{\lambda}{2}+5=0$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\quad \frac{-9\lambda}{2}-\frac{\lambda}{2}+5 &= 0,\\ \Rightarrow\quad -5\lambda+5 &= 0,\\ \Rightarrow\quad \lambda &= 1.\end{aligned}$$

لہٰذا، مطلوبہ دائرہ کی مساوات $x^2+y^2+3x+y-11=0$ ہے۔

**مثال 5.3**

جانچ کیجئے کہ $x+y-1=0$، $c$ کی ہر ممکن قیمتوں کے لئے دائرہ $x^2+y^2-6x+4y+c=0$ کے قطر کی مساوات ہے۔

**حل**

دائرہ کا مرکز $(3,-2)$ ہے جو $x+y-1=0$ پر واقع ہے۔ اس لئے خط $x+y-1=0$ مرکز سے گذرتا ہے اور لہٰذا، خط $x+y-1=0$، $c$ کی ہر ممکن قیمتوں کے لئے دائرہ کے قطر کی مساوات ہے۔

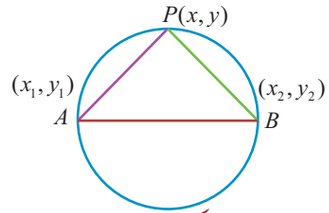


12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 175 27-02-2023 16:14:42

**مسئلہ 5.2**

دائرہ کے کسی ایک یہ قطر کے کناروں $(x_1, y_1)$ اور $(x_2, y_2)$ والے دائرہ کی مساوات $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$ ہے۔

**ثبوت**



خاکہ 5.9

فرض کیجئے کہ $A(x_1, y_1)$ اور $B(x_2, y_2)$ قطر $AB$ کے دو کنارے ہیں، اور $P(x, y)$ دائرہ پر ایک نقطہ ہو تو $\angle APB = \frac{\pi}{2}$ (نصف دائرہ میں زاویہ)۔

لہٰذا، $AP$ اور $PB$ کے میلانوں کا حاصل ضرب $-1$ کے مساوی ہے۔

یعنی، $\left(\frac{(y-y_1)}{(x-x_1)}\right)\left(\frac{(y-y_2)}{(x-x_2)}\right) = -1$ مطلوبہ دائرہ کی مساوات اس طرح حاصل ہوتی ہے۔

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0 \cdot$$

**مثال 5.4**

دائرہ کی عام مساوات معلوم کیجئے جس کا قطر نقاط $(-4,-2)$ اور $(1,1)$ کو ملانے والا قطاع خط ہے۔

**حل**

مسئلہ 5.2 میں دئے گئے $(x_1, y_1)$ اور $(x_2, y_2)$ کناروں کے قطر والے دائرہ کی مساوات ہے۔

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2) = 0$$

$$\Rightarrow (x+4)(x-1)+(y+2)(y-1) = 0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+3x+y-6=0$$ جو دائرہ کی مطلوبہ مساوات ہے۔

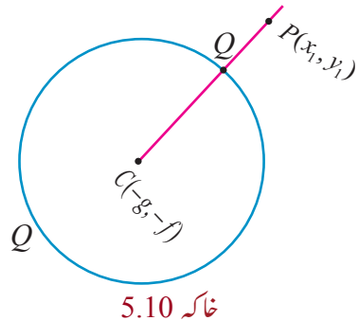
**مسئلہ 5.3**

مستوی (plane) میں دئے گئے دائرہ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ کے لحاظ سے ایک نقطہ $P(x_1, y_1)$ کا مقام

$$x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c \begin{cases} >0 & \text{یا} \\ =0 & \text{یا} \\ <0. \end{cases}$$

کے مطابق دائرہ کے باہر یا پر یا اندر واقع ہے۔

**ثبوت**



خاکہ 5.10

مرکز $C(-g,-f)$ اور نصف قطر $r=\sqrt{g^2+f^2-c}$ والے دائرہ کی مساوات $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ہے۔

فرض کیجئے کہ $P(x_1, y_1)$ مستوی میں ایک نقطہ ہے۔ $CP$ کو ملائیے اور فرض کیجئے کہ یہ دائرہ کو Q پر ملتا ہے۔ پھر نقطہ $P$

$$|CP| \text{ is } \begin{cases} >|CQ| & \text{یا} \\ =|CQ| & \text{یا} \\ <|CQ|. \end{cases}$$

کے مطابق دائرہ کے باہر یا پر یا اندر واقع ہے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 176 27-02-2023 16:15:03

$$\Rightarrow \text{ہے} \quad CP^2 \quad \begin{cases} > r^2 & \text{یا} \\ = r^2 & \text{یا} \\ < r^2 & \end{cases} \quad \{CQ = r\},$$

$$\Rightarrow \text{ہے} \quad (x_1+g)^2+(y_1+f)^2 \quad \begin{cases} > g^2+f^2-c & \text{یا} \\ = g^2+f^2-c & \text{یا} \\ < g^2+f^2-c & \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{ہے} \quad x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c \quad \begin{cases} > 0 & \text{یا} \\ = 0 & \text{یا} \\ < 0 & \end{cases}$$

### مثال 5.5

دائرہ $x^2+y^2-6x-8y+12=0$ کے لحاظ سے نقطہ $(2,3)$ کے مقام کی جانچ کیجئے۔

**حل**

$(x_1, y_1)$ کو $(2,3)$ لینے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c = 2^2+3^2-6\times 2-8\times 3+12,$$
$$= 4+9-12-24+12 = -11<0$$

لہٰذا، مسئلہ 5.3 سے، نقطہ $(2,3)$ دائرہ کے اندر ہوتا ہے۔

### مثال 5.6

خط $3x+4y-12=0$ مختص محوروں سے A اور B پر ملتا ہے۔ AB قطر والے کھینچے گئے دائرہ کی مساوات معلوم کیجئے۔

**حل**

خط $3x+4y=12$, کو مقطوعی شکل میں لکھنے پر $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$ حاصل ہوتا ہے۔ چنانچہ نقاط A اور B، $(4,0)$ اور $(0,3)$ ہیں۔
قطر کی شکل میں دائرہ کی مساوات ہے۔

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2) = 0$$
$$(x-4)(x-0)+(y-0)(y-3) = 0$$
$$x^2+y^2-4x-3y = 0$$

### مثال 5.7

ایک خط $3x+4y+10=0$ مرکز $(2,1)$ والے دائرہ پر 6 اکائیاں والے ایک وتر کو کاٹتا ہے۔ عام شکل میں دائرہ کی مساوات معلوم کیجئے۔

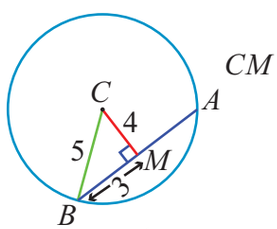
**حل**

$C(2,1)$ دائرہ کا مرکز ہے اور خط $3x+4y+10=0$ دائرہ پر ایک وتر AB کو کاٹتا ہے۔ فرض کیجئے کہ AB کا درمیانی نقطہ M ہے۔
پھر ہمارے پاس ہے۔

اب BMC ایک قائم مثلث ہے۔ $AM = BM = 3$.

$$= \frac{|3(2)+4(1)+10|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 4.$$ اس لئے، ہمارے پاس

$$BC^2 = BM^2+MC^2 = 3^2+4^2 = 25.$$ مسئلہ فیثاغورث سے



خاکہ 5.11


12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 177 27-02-2023 16:15:16

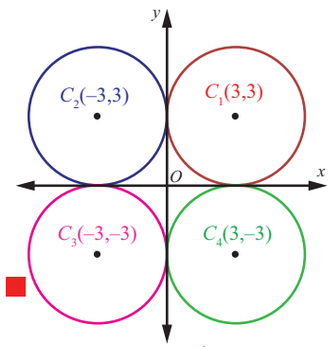
$BC$ = نصف قطر $= 5$

اس لئے، مطلوبہ دائرہ کی مساوات $5^2$ = $(x-2)^2+(y-1)$ ہے۔

$$x^2+y^2-4x-2y-20 = 0.$$

## مثال 5.8

3 اکائیاں نصف قطر والا ایک دائرہ دونوں محوروں کو چھوتا ہے۔ بننے والے تمام ممکن دائروں کی مساوات عام شکل میں معلوم کیجئے۔



خاکہ 5.12

### حل

کیونکہ دائرہ دونوں محوروں کو چھوتا ہے، دونوں محوروں سے مرکز کا فاصلہ 3 اکائیاں ہے، مرکز $(\pm3,\pm3)$ ہوسکتا ہے۔اور چنانچہ نصف قطر 3 والے چار دائرے ہیں اور چار دائروں کی مطلوبہ مساوات ہے۔

$$x^2+y^2\pm6x\pm6y+9=0$$

## مثال 5.9

$3x^2+(a+1)y^2+6x-9y+a+4=0$ دائرہ کا مرکز اور نصف قطر معلوم کیجئے۔

### حل

$x^2$ کا ضریب = $y^2$ کا ضریب (دودرجی مساوات دائرہ کو ظاہر کرنے کے لئے مخصوص خاصیت(ii))

یعنی، $a=2$ اور $3=a+1$

لہٰذا، دائرہ کی مساوات

$$3x^2+3y^2+6x-9y+6 = 0$$

$$x^2+y^2+2x-3y+2 = 0$$

اس لئے، مرکز $\left(-1,\frac{3}{2}\right)$ ہے اورنصف قطر $r = \sqrt{1+\frac{9}{4}-2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

## مثال 5.10

نقاط $(1,1)$، $(2,-1)$ اور $(3,2)$ سے گذرنے والے دائرہ کی مساوات معلوم کیجئے۔

### حل

فرض کیجئے کہ دائرہ کی عام مساوات

(1) ... $\quad x^2+y^2+2gx+2fy+c = 0$ .

یہ نقاط $(1,1)$، $(2,-1)$ اور $(3,2)$ سے گذرتی ہے۔

لہٰذا،

(2) ... $\quad 2g+2f+c = -2,$

(3) ... $\quad 4g-2f+c = -5,$

(4) ... $\quad 6g+4f+c = -13.$

(5) ... $\quad -2g+4f = 3.$ $\quad$ سے (2) – (3)

(6) ... $\quad 2g+6f = -8.$ $\quad$ سے (4) – (3)

$f = -\frac{1}{2}$ $\quad$ سے (5) + (6)



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 178 27-02-2023 16:15:30

$g=-\frac{5}{2}$ کو (6) میں بھرتی کرنے پر $f=-\frac{1}{2}$,

$c=4$ بھرتی کرنے پر $f=-\frac{1}{2}$ اور $g=-\frac{5}{2}$ میں (2).

لہٰذا، دائرہ کی مطلوبہ مساوات ہے۔

$$x^2+y^2+2\left(-\frac{5}{2}\right)x+2\left(-\frac{1}{2}\right)y+4=0$$
$$\Rightarrow x^2+y^2-5x-y+4=0.$$

## غور کیجئے (Note)

دائرہ پر تین نقاط منفرد انداز میں دائرہ کے مساوات کی تعین کرتے ہیں۔ اس کے برخلاف مرکزی نقطہ سے تین مساوی فاصلے والے نقاط ایک دائرہ بناتے ہیں۔

## 5.2.2 دئے گئے دائرے کے ایک نقطہ $P$ پر مماس اور عمودی کے مساوات
## )Equations of tangent and normal at a point $P$ on a given circle(

دائرے کا مماس وہ خط ہے جو دائرہ کو صرف ایک ہی نقطہ پر چھوتا ہے اور عمودی مماس کا عمودی خط ہے اور یہ خط نقطہ مماس سے گذرتا ہے۔

فرض کیجئے کہ $P(x_1,y_1)$ اور $Q(x_2,y_2)$ دائرہ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ پر دونقاط ہیں۔

لہٰذا،

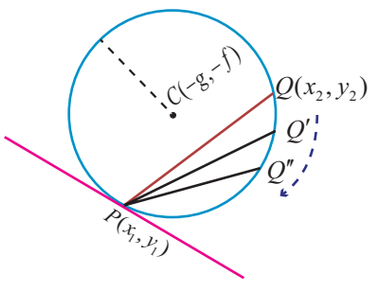
$$x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0 \quad \ldots(1)$$

اور $x_2^2+y_2^2+2gx_2+2fy_2+c=0$ ,,, (2)

(2) − (1) سے

$$x_2^2-x_1^2+y_2^2-y_1^2+2g(x_2-x_1)+2f(y_2-y_1)=0$$
$$(x_2-x_1)(x_2+x_1+2g)+(y_2-y_1)(y_2+y_1+2f)=0$$
$$\frac{x_2+x_1+2g}{y_2+y_1+2f}=-\frac{(y_2-y_1)}{(x_2-x_1)}$$

لہٰذا، $PQ$ کا میلان $=-\frac{(x_1+x_2+2g)}{(y_1+y_2+2f)}$



خاکہ 5.13

جب، $Q\to P$, وتر $PQ$، $P$ پر مماس بنتا ہے۔

مماس کا میلان یہ ہے۔ $-\frac{(2x_1+2g)}{(2y_1+2f)}=-\frac{(x_1+g)}{(y_1+f)}$.

چنانچہ مماس کی مساوات $y-y_1=-\frac{(x_1+g)}{(y_1+f)}(x-x_1)$.

مختصر کرنے پر $yy_1+fy-y_1^2-fy_1+xx_1-x_1^2+gx-gx_1=0$

$$xx_1+yy_1+gx+fy-(x_1^2+y_1^2+gx_1+fy_1)=0 \quad \ldots(1)$$

چونکہ $(x_1,y_1)$ دائرہ پر ایک نقطہ ہے، $x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0$ ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

لہٰذا، $-(x_1^2+y_1^2+gx_1+fy_1)=gx_1+fy_1+c$ ...(2)

چنانچہ، (2) کو (1) میں بھرتی کرنے پر، $(x_1,y_1)$ پر ہمیں مماس کی مساوات اس طرح حاصل ہوئی ہے۔

$$xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0.$$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 179 27-02-2023 16:15:47

چنانچہ، عمودی کی مساوات $(y-y_1)=\frac{(y_1+f)}{(x_1+g)}(x-x_1)$

$$\Rightarrow (y-y_1)(x_1+g)=(y_1+f)(x-x_1)$$

$$\Rightarrow x_1(y-y_1)+g(y-y_1)=y_1(x-x_1)+f(x-x_1)$$

$$\Rightarrow yx_1-xy_1+g(y-y_1)-f(x-x_1)=0.$$

### ریمارک (Remark)

(1) $(x_1,y_1)$ پر دائرہ $x^2+y^2=a^2$ کے مماس کی مساوات $xx_1+yy_1=a^2$ ہے۔

(2) $(x_1,y_1)$ پر دائرہ $x^2+y^2=a^2$ کے عمودی کی مساوات $xy_1-yx_1=0$ ہے۔

(3) عمودی دائرے کے مرکز سے گذرتا ہے۔

## 5.2.3 خط $y=mx+c$ کے دائرہ $x^2+y^2=a^2$ پر مماس ہونے کا شرط اور نقطہ مماس معلوم کرنا

**Condition for the line $y=mx+c$ to be a tangent to the circle $x^2+y^2=a^2$ and finding the point of contact**

فرض کرو کہ خط $y=mx+c$ دائرہ $x^2+y^2=a^2$ کو چھوتی ہے۔ مرکز اور نصف قطر دائرے $x^2+y^2=a^2$ کے بالترتیب $(0,0)$ اور $a$ ہیں۔

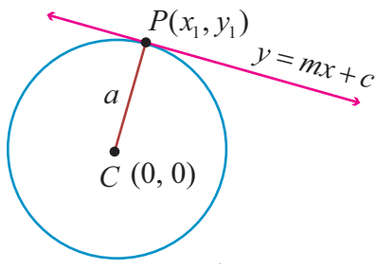
### (i) خط کا دائرہ کے مماس ہونے کے لئے شرط

توپھر $(0,0)$ سے خط $y-mx-c=0$ کا عمودی فاصلہ ہے۔ $\left|\frac{0-m.0-c}{\sqrt{1+m^2}}\right|=\frac{|c|}{\sqrt{1+m^2}}$

یہ فاصلہ نصف قطر کے مساوی ہونا ضروری ہے۔ لہٰذا، $\frac{|c|}{\sqrt{1+m^2}}=a$ یا $c^2=a^2(1+m^2)$

**غرض خط $y=mx+c$ کے دائرہ $x^2+y^2=a^2$ پر مماس ہونے کے لئے شرط ہے $c^2=a^2(1+m^2)$**

### (ii) نقطہ مماس



خاکہ 5.14

فرض کیجئے کہ $(x_1,y_1)$ دائرہ $x^2+y^2=a^2$ اور خط $y=mx+c$ کا نقطہ مماس ہے۔

پھر، $y_1=mx_1+c.$ ... (1)

$(x_1,y_1)$ پر مماس کی مساوات ہے $xx_1+yy_1=a^2.$

$$yy_1=-xx_1+a^2 \quad \text{... (2)}$$

مساوات (1) اور (2) ایک ہی خط کو ظاہر کرتے ہیں اور چنانچہ ضریبیں متناسب ہیں۔

اس لئے، $\frac{y_1}{1}=\frac{-x_1}{m}=\frac{a^2}{c}$

$$y_1=\frac{a^2}{c}, x_1=\frac{-a^2m}{c},\ c=\pm a\sqrt{1+m^2}.$$

تو پھر نقاط مماس یا تو $\left(\frac{-am}{\sqrt{1+m^2}},\frac{a}{\sqrt{1+m^2}}\right)$ یا

$\left(\frac{am}{\sqrt{1+m^2}},\frac{-a}{\sqrt{1+m^2}}\right)$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 180 27-02-2023 16:16:04

## غور کیجئے (Note)

P پر دائرہ کے مماس کی مساوات $y = mx \pm a\sqrt{1+m^2}$ ہے۔

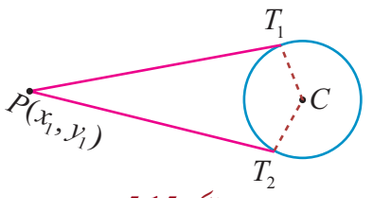
**مسئلہ 5.4**

دائرہ $x^2 + y^2 = a^2$ کے باہر کسی ایک نقطے سے دو مماس کھینچے جاسکتے ہیں۔

**ثبوت**

فرض کیجئے کہ $P(x_1, y_1)$ دائرے کے باہر ایک نقطہ ہے۔ مماس کی مساوات $y = mx \pm a\sqrt{1+m^2}$ ہے۔ یہ $(x_1, y_1)$ سے گذرتا ہے۔لہٰذا،

$$y_1 = mx_1 \pm a\sqrt{1+m^2}$$
$$y_1 - mx_1 = a\sqrt{1+m^2}$$



خاکہ 5.15

دونوں جانب مربع کرنے پر $(y_1 - mx_1)^2 = a^2(1+m^2)$ حاصل ہوتا ہے۔

$$y_1^2 + m^2x_1^2 - 2mx_1y_1 - a^2 - a^2m^2 = 0$$
$$m^2(x_1^2 - a^2) - 2mx_1y_1 + (y_1^2 - a^2) = 0 .$$

یہ $m$ میں ایک دودرجی مساوات ہے جس سے $m$ کی دو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

ان قیمتوں سے دائرہ $x^2 + y^2 = a^2$ کے دو مماس حاصل ہوتے ہیں۔

## غور کیجئے (Note)

(1) اگر $(x_1, y_1)$ دائرہ کے باہر ایک نقطہ ہے، تو دونوں مماس حقیقی ہیں۔

(2) اگر $(x_1, y_1)$ دائرہ کے اندر ایک نقطہ ہے، تو دونوں مماسیں خیالی ہیں

(3) اگر $(x_1, y_1)$ دائرہ پر ایک نقطہ ہے تو دونوں، مماسیں منطبق ہیں۔

**مثال 5.11**

$P(-3,4)$ پر دائرہ $x^2 + y^2 = 25$ کے مماس اور عمودی کی مساوات معلوم کیجئے ۔

**حل**

$P(x_1, y_1)$ پر دائرے کے مماس کی مساوات $xx_1 + yy_1 = a^2$ ہے۔

یعنی، $x(-3) + y(4) = 25$

$$-3x + 4y = 25$$

عمودی کی مساوات ہے۔ $xy_1 - yx_1 = 0$

یعنی ، $4x + 3y = 0$

**مثال 5.12**

اگر $y = 4x + c$ دائرہ $x^2 + y^2 = 9$ کا مماس ہوتو c معلوم کیجئے ۔

**حل**

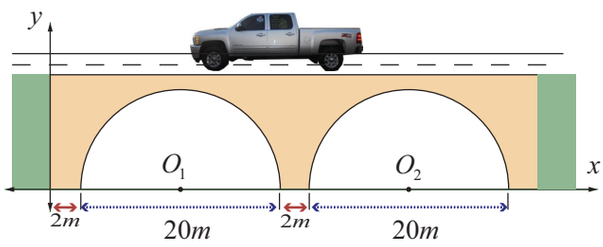
خط $y = mx + c$ کے دائرہ $x^2 + y^2 = a^2$ کے مماس ہونے کے لئے شرط ہے $c^2 = a^2(1+m^2)$

پھر $c = \pm\sqrt{9(1+16)}$

$$c = \pm 3\sqrt{17} .$$

**مثال 5.13**

ایک آبپاشی نہر کے اوپر ایک پُل جس کے دو نصف دائرہ نما سوراخ ہیں ہر ایک کا پھیلاو 20m ہے اور اسے تھامنے والے ستونوں کی چوڑائی 2m ہیں۔ خاکہ 5.16 کو استعمال کرکے نصف عمودی سوراخوں کو ظاہر کرنے والے مساوات لکھئے۔



خاکہ 5.16

**حل**

فرض کیجئے کہ $O_1$ ، $O_2$ دونصف دائرہ نما سوراخوں کے مراکز ہیں۔




12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 181 27-02-2023 16:16:22

مرکز $O_1\ (12,0)$ اور نصف قطر $r=10$ پہلے سوراخ جس کا پہلے نصف دائرہ کی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

$$(x-12)^2+(y-0)^2=10^2$$
$$\Rightarrow x^2+y^2-24x+44=0\ ,\ y>0\ .$$

مرکز $O_2\ (34,0)$ اور $r=10$ دوسرے سوراخ جس کا دوسرے نصف دائرہ کی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

$$(x-34)^2+y^2=10^2$$
$$\Rightarrow x^2+y^2-68x+1056=0\ ,\ y>0\ .$$

## مشق 5.1

1. عام شکل میں دائروں کی مساوات معلوم کیجئے جس کا نصف قطر 5 cm اور مبداء پر $x$ محور کو چھوتے ہوں۔
2. عام شکل میں دائرہ کی مساوات معلوم کیجئے جس کا مرکز $(2,-1)$ ہے اور نقطہ $(3,6)$ سے گذرتا ہے۔
3. عام شکل میں دائروں کی مساوات معلوم کیجئے جو دونوں محوروں کو چھوتا ہے اور $(-4,-2)$ سے گذرتا ہے۔
4. دائرہ کی مساوات معلوم کیجئے جس کا مرکز $(2,3)$ ہے اور خطوط $3x-2y-1=0$ اور $4x+y-27=0$ کے نقطہ تقاطع سے گذرتا ہے۔
5. دائرہ کی مساوات معلوم کیجئے جس کے قطر کے کنارے $(3,4)$ اور $(2,-7)$ ہیں۔
6. نقاط $(1,0)$، $(-1,0)$ اور $(0,1)$ سے گذرنے والے دائرے کی مساوات معلوم کیجئے ۔
7. رقبہ $9\pi$ مربع اکائیاں والے ایک دائرہ کی دو قطریں خطوط $x+y=5$ اور $x-y=1$ کے ہم راہ ہیں۔ دائرہ کے مساوات معلوم کیجئے۔
8. اگر $y=2\sqrt{2}x+c$ دائرہ $x^2+y^2=16$ کا مماس ہے تو $c$ کی قیمت معلوم کیجئے ۔
9. $(2,2)$ پر دائرہ کے مماس $x^2+y^2-6x+6y-8=0$ اور عمود کی مساوات معلوم کیجئے۔
10. جانچ کیجئے کہ نقاط $(-2,1)$، $(0,0)$ اور $(-4,-3)$ دائرہ $x^2+y^2-5x+2y-5=0$ کے باہر یا پر یا اندر ہیں۔
11. ذیل کے دائروں کے مرکز اور نصف قطر معلوم کیجئے۔

(i) $x^2+(y+2)^2=0$ (ii) $x^2+y^2+6x-4y+4=0$
(iii) $x^2+y^2-x+2y-3=0$ (iv) $2x^2+2y^2-6x+4y+2=0$

12. اگر مساوات $3x^2+(3-p)xy+qy^2-2px=8pq$ ایک دائرہ کو ظاہر کرتی ہے، تو $p$ اور $q$ معلوم کیجئے۔اس کے علاوہ دائرہ کا مرکز اور نصف قطر بھی معلوم کیجئے۔

## 5.3 مخروطی تراشے (Conics)

**تعریف 5.2**

مخروطی تراشہ ایک نقطہ کا مقام (locus) ہے جو مستوی میں حرکت کرتا ہے اس طرح کہ ایک ساکن نقطہ (fixed point) سے اس کا ساکن خط سے اس کا فاصلہ ایک مستقل نسبت رکھتا ہے۔

ساکن نقطہ ماسکہ **(focus)** اور ساکن خط ہادی خط **(directrix)** کہلاتا ہے، اور مستقل نسبت خروج مرکز کہلاتا **(eccentricity)** ہے۔ جسے ***e*** سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

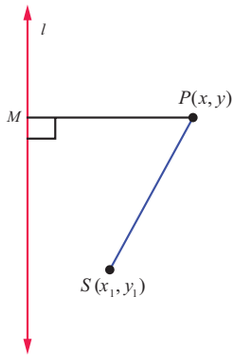
i. اگر یہ مستقل $e=1$ ہوتو مخروطی تراشہ ایک مکافی (parabola) کہلاتا ہے۔
ii. اگر یہ مستقل $e<1$ ہوتو مخروطی تراشہ ایک بیضوی (ellipse) کہلاتا ہے۔
iii. اگر یہ مستقل $e>1$ ہوتو مخروطی تراشہ ایک ہذلولی (hyperbola) کہلاتا ہے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 182 27-02-2023 16:16:37

## 5.3.1 مخروطی تراشے کی عام مساوات (The general equation of a Conic)

فرض کیجئے کہ $S(x_1, y_1)$ ماسکہ، $l$ ہادی خط اور $e$ خروج مرکز ہے۔ فرض کیجئے کہ $P(x, y)$ متحرک نقطہ ہے۔



خاکہ 5.17

مخروطی تراشے کی تعریف سے، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{SP}{PM} = \text{مستقل} = e, \ldots(1)$$

جہاں $SP = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}$

اور $PM = P(x, y)$ سے $lx + my + n = 0$ خط کا عمودی فاصلہ

$$= \left| \frac{lx + my + n}{\sqrt{l^2 + m^2}} \right|.$$

(1) سے ہمیں $SP^2 = e^2 PM^2$ حاصل ہوتا ہے۔

$$\Rightarrow (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 = e^2 \left[ \frac{lx + my + n}{\sqrt{l^2 + m^2}} \right]^2.$$

مختصر کرنے پر اوپر کی مساوات عام دو درجی مساوات کی شکل $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ لیتی ہے، جہاں

$$A = 1 - \frac{e^2 l^2}{l^2 + m^2}, B = \frac{2lme^2}{l^2 + m^2}, C = 1 - \frac{e^2 m^2}{l^2 + m^2}$$

اب،

$$B^2 - 4AC = \frac{4l^2 m^2 e^4}{\left(l^2 + m^2\right)^2} - 4\left(1 - \frac{e^2 l^2}{l^2 + m^2}\right)\left(1 - \frac{e^2 m^2}{l^2 + m^2}\right)$$

$$= 4\left(e^2 - 1\right)$$

ذیل کے صورت حال حاصل ہوتے ہیں۔

(i) $B^2 - 4AC = 0 \Leftrightarrow e = 1 \Leftrightarrow$ مخروطی تراشہ ایک مکافی ہے۔

(ii) $B^2 - 4AC < 0 \Leftrightarrow 0 < e < 1 \Leftrightarrow$ مخروطی تراشہ ایک بیضوی ہے۔

(iii) $B^2 - 4AC > 0 \Leftrightarrow e > 1 \Leftrightarrow$ مخروطی تراشہ ایک ہذلولی ہے۔

## 5.3.2 مکافی (Parabola)

چونکہ مکافی کے لئے، $e = 1$ ہے، ہم یہ غور کرتے ہیں کہ مکافی مستوی میں ان نقطوں کا مقام ہے جو ہادی خط اور ماسکہ دونوں سے ہم فاصلہ ہوں۔

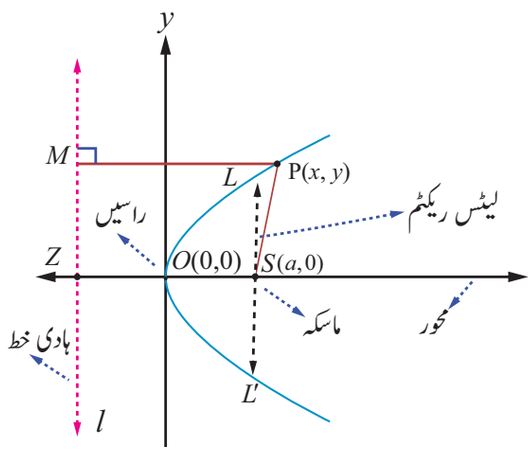
### (i) معیاری شکل میں مکافی کی مساوات جس میں راس (0,0) پر ہو۔

**(Equation of a parabola in standard form with vertex at (0, 0))**

فرض کیجئے کہ $S$ ماسکہ اور $l$ ہادی خط ہے۔

خط $l$ کا عمود $SZ$ کھینچئے۔

آیئے ہم اخذ کرتے ہیں $SZ$ کو $x$ محور کی طرح اور $SZ$ کے عمودی ناصف $y$ محور کی طرح کھینچا ہے۔ $SZ$ سے عمودی ناصف کا تقاطع مبداء $O$ ہے۔



خاکہ 5.18



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 183 27-02-2023 16:16:48

فرض کیجئے کہ $SZ = 2a$۔ پھر $S\ (a,0)$ ہے اور ہادی خط کی مساوات $x + a = 0$ ہے۔

فرض کیجئے کہ مکافی حاصل ہونے والے طریق کا متحرک نقطہ $P(x,y)$ ہے۔ عمود کا ہادی خط $PM$ کھینچئے۔

تعریف کے ذریعہ $e = \frac{SP}{PM} = 1$ اس لئے $SP^2 = PM^2$

پھر $(x-a)^2 + y^2 = (x+a)^2$ مختصر کرنے پر، ہمیں $y^2 = 4ax$ حاصل ہوتا ہے جو معیاری شکل میں مکافی کی مساوات ہے۔

مکافی کی دوسرے معیاری شکلیں $y^2 = -4ax, x^2 = 4ay$ اور $x^2 = -4ay$ ہیں۔

### تعریف 5.3

- وہ خط جو ہادی خط پر عمود ہو اور ماسکہ سے گذرتا ہو مکافی کا **محور** کہلاتا ہے۔
- منحنی محور کا نقطہ تقاطع مکافی کا **راس (vertex)** کہلاتا ہے۔
- مکافی کا کوئی بھی وتر، جو اس کے ماسکہ سے گذرتا ہو مکافی کا **ماسکی وتر (focal chord)** کہلاتا ہے۔
- محور پر عمودی ماسکی وتر کی لمبائی مکافی کا **لیٹس ریکٹم (latus rectum)** کہلاتا ہے۔

### مثال 5.14

مکافی $y^2 = 4ax$ کے لیٹس ریکٹم کی لمبائی معلوم کیجئے۔

### حل

مکافی کی مساوات $y^2 = 4ax$ ہے۔

لیٹس ریکٹم $LL'$ ماسکہ $(a,0)$ سے گذرتا ہے۔ (5.18 خاکہ) کے حوالے سے

چنانچہ، نقطہ $L$، $(a, y_1)$ ہے۔

چنانچہ، $y_1^2 = 4a^2$

لہٰذا، $y_1 = \pm 2a$

لیٹس ریکٹم کے انتہائی نقاط $(a,2a)$ اور $(a,-2a)$ ہیں۔

لہٰذا، $LL' = 4a$ لیٹس ریکٹم کی لمبائی

### غور کیجئے (Note)

مکافی $y^2 = 4ax$ کی معیاری شکل کے لئے راس $(0,0)$، محور $x$ محور، ماسکہ $(a,0)$ ہے۔ مکافی $y^2 = 4ax$، $x$ محور کے غیر منفی جانب واقع ہے۔ $y^2 = 4ax$ میں y کو $-y$ سے تبدیل کرنے پر $y^2 = 4ax$، مساوات ویسے ہی رہتی ہے۔اسی لئے مکافی $x$ محور پر متشاکل ہے یعنی، $x$ محور $y^2 = 4ax$ کا محور اور متشاکل ہے۔

### (ii) مکافیاں جس میں راس $(h,k)$ پر ہوں (Parabolas with vertex at $(h,k)$)

جب راس $(h,k)$ اور متشاکل کا محور (Axis of symmetry) $x$ محور کے متوازی ہوں، مکافی کی مساوات یا تو

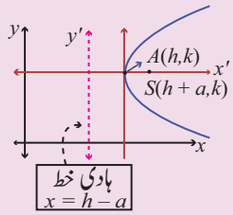
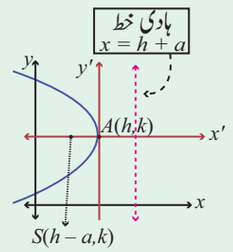
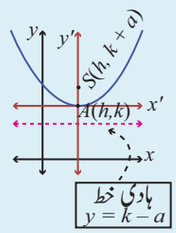
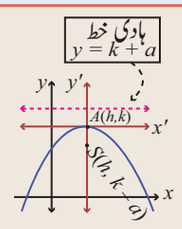
$(y-k)^2 = 4a(x-h)$ یا $(y-k)^2 = -4a(x-h)$ (5.19, 5.20 خاکہ)

جب راس $(h,k)$ اور متشاکل کا محور (Axis of symmetry) $y$ محور کے متوازی ہوں، مکافی کی مساوات یا تو

$(x-h)^2 = 4a(y-k)$ یا $(x-h)^2 = -4a(y-k)$ (5.21, 5.22 خاکہ)



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 184 27-02-2023 16:17:02

| مساوات (Equation) | ترسیم (Graph) | راسیں (Vertices) | ماسکہ (Focus) | تشاکل کا محور (Axis of symmetry) | ہادی خط کی مساوات (Equation of directrix) | لیٹس ریکٹم کی لمبائی (Length of latus rectum) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $(y-k)^2 = 4a(x-h)$ |  (a) $(y-k)^2 = 4a(x-h)$ کی ترسیم خاکہ 5.19 | $(h,k)$ | $(h+a,0+k)$ | $y=k$ | $x=h-a$ | $4a$ |
| $(y-k)^2 = -4a(x-h)$ |  (b) $(y-k)^2 = -4a(x-h)$ کی ترسیم خاکہ 5.20 | $(h,k)$ | $(h-a,0+k)$ | $y=k$ | $x=h+a$ | $4a$ |
| $(x-h)^2 = 4a(y-k)$ |  (c) $(x-h)^2 = 4a(y-k)$ کی ترسیم خاکہ 5.21 | $(h,k)$ | $(0+h,a+k)$ | $x=h$ | $y=k-a$ | $4a$ |
| $(x-h)^2 = -4a(y-k)$ |  (d) $(x-h)^2 = -4a(y-k)$ کی ترسیم خاکہ 5.22 | $(h,k)$ | $(0+h,-a+k)$ | $x=h$ | $y=k+a$ | $4a$ |

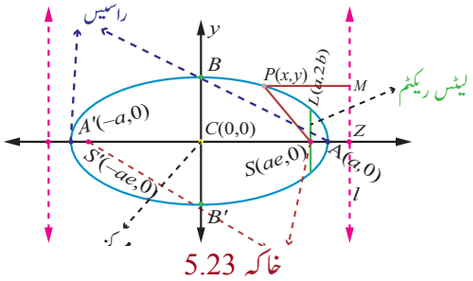


12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 185 27-02-2023 16:17:15

## 5.3.3 بیضوی (Ellipse)

ہم طلب کرتے ہیں کہ بیضوی اس نقطے کا طریق ہے جو اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک ساکن نقطے (ماسکہ) سے اس کا فاصلہ اس کے ہادی اور خط سے اس کا فاصلہ ایک مستقل نسبت (eccentricity) $e$ رکھتا ہے۔ جو اکائی سے کم ہے $(0 < e < 1)$

### (i) معیاری شکل میں بیضوی کی مساوات (Equation of an Ellipse in standard form)



خاکہ 5.23

فرض کیجئے کہ $S$ ماسکہ $l$ ہادی خط، $e$ خروج مرکز $(0 < e < 1)$ ہے اور $P(x, y)$ متحرک نقطہ ہے۔ $l$ کے عمودی $SZ$ اور $PM$ کھینچئے۔

فرض کیجئے کہ $A$ اور $A'$ دو نقاط ہیں جو $SZ$ کو اندرونی اور بیرونی جانب بالترتیب $e:1$ کی نسبت میں تقسیم کرتے ہیں۔ فرض کیجئے کہ $AA' = 2a$، فرض کیجئے کہ $AA'$ کے ساتھ عمودی ناصف کا نقطہ تقاطع $C$ ہے۔لہٰذا، $CA = a$ اور $CA' = a$، $C$ کو مبداء اور $CZ$ کو $x$ محور کی طرح اور $AA'$ کا عمودی ناصف کو $y$ محور کی طرح کھینچا گیا ہے۔

تعریف کے ذریعہ،

$$\frac{SA}{AZ} = \frac{e}{1} \qquad \text{اور} \qquad \frac{SA'}{A'Z} = \frac{e}{1}$$

$$SA = eAZ \qquad SA' = eA'Z$$

$$CA - CS = e(CZ - CA) \qquad A'C + CS = e(A'C + CZ)$$

$$a - CS = e(CZ - a) \quad \ldots(1) \qquad a + CS = e(a + CZ) \quad \ldots(2)$$

$(2)+(1)$ سے $CZ = \frac{a}{e}$ حاصل ہوتا ہے اور $(2)-(1)$ سے $CS = ae$ حاصل ہوتا ہے۔

لہٰذا، $\mathrm{M}\left(\frac{a}{e}, y\right)$ ہے اور $\mathrm{S}(ae, 0)$ ہے۔

مخروطی تراشہ کی تعریف سے $\frac{SP}{PM} = e \Rightarrow SP^2 = e^2 PM^2$

$$\Rightarrow (x-ae)^2 + (y-0) = e^2\left[\left(x - \frac{a}{e}\right)^2 + 0\right]$$

جسے مختصر کرنے پر یہ حاصل ہوتا ہے۔ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1$

چونکہ $1-e^2$ ایک مثبت مقدار ہے، $b^2 = a^2(1-e^2)$ لکھئے

لیجئے $ae = c,\ b^2 = a^2 - c^2$۔

چنانچہ ہمیں $P$ کا طریق اس طرح $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ حاصل ہوتا ہے۔جو معیاری شکل میں بیضوی کی مساوات ہے اور غور کیجئے کہ یہ $x$ اور $y$ محور پر متشاکل ہے۔

**تعریف 5.4**

(1) قطاع خط $AA'$ بیضوی کا محورِ اکبر کہلاتا ہے اور اس کی لمبائی $2a$ ہے۔

(2) قطاع خط $BB'$ بیضوی کا محورِ اصغر کہلاتا ہے اور اس کو لمبائی $2b$ ہے۔

(3) قطاع خط $CA$ = قطاع خط $CA'$ = نصف محور اکبر = $a$ ہے۔ اور قطاع خط $CB$ = قطاع خط $CB'$ = نصف محور اصغر = $b$ ہے۔

(4) تشاکل سے، $S'(-ae, 0)$ ماسکہ اور $x = -\frac{a}{e}$ ہادی خط $l'$ سے بھی وہی بیضوی حاصل ہوتا ہے۔

غرض، ہم یہ دیکھتے ہیں کہ بیضوی کے دو ماسکہ $S(ae,0)$ اور $S'(-ae,0)$ اور دو راسیں $A(a,0)$ اور $A'(-a,0)$ اور دو ہادی خطوط $x = \frac{a}{e}$ اور $x = -\frac{a}{e}$ ہیں۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 186 27-02-2023 16:17:36

## مثال 5.15

بیضوی کے لیٹس ریکٹم کی لمبائی معلوم کیجئے۔ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

## حل

بیضوی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ لیٹس ریکٹم $LL'$ (خاکہ 5.23) $S(ae,0)$ سے گذرتا ہے۔

چنانچہ $L$ ، $(ae,y_1)$ ہے۔

لہٰذا، $\frac{a^2e^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$

$$\frac{y_1^2}{b^2}=1-e^2$$

$$y_1^2=b^2(1-e^2)$$

$$=b^2\left(\frac{b^2}{a^2}\right) \quad \left(\text{چونکہ، } e^2=1-\frac{b^2}{a^2}\right)$$

$$y_1=\pm\frac{b^2}{a}.$$

یعنی ، لیٹس ریکٹم کے انتہائی نقاط $L$ اور $L'$ ، $\left(ae,\frac{b^2}{a}\right)$ اور $\left(ae,-\frac{b^2}{a}\right)$ ہیں۔

چنانچہ لیٹس ریکٹم کی لمبائی $LL'=\frac{2b^2}{a}$

### (ii) بیضوی کی اقسام جس میں مرکز $(h,k)$ ہو۔ (Types of ellipses with centre at (h,k))

### (a) $x$ - محور کے متوازی محور اکبر (Major axis parallel to the $x$-axis)

خاکہ 5.24 سے

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1,\ a>b$$

محور اکبر کی لمبائی $2a$ ہے۔ محور اصغر کی لمبائی $2b$ ہے۔ راسوں کی مختصیں (coordinates) $(h-a,k)$ اور $(h+a,k)$ ، اور ماسکوں کی مختصیں ماسکہ $(h-c,k)$ اور $(h+c,k)$ ہیں۔ جہاں ، $c^2=a^2-b^2$

### (b) $y$ - محور کے متوازی محور اکبر (Major axis parallel to the $y$-axis)

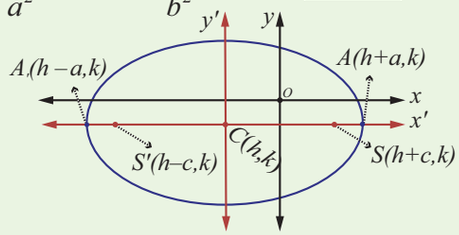
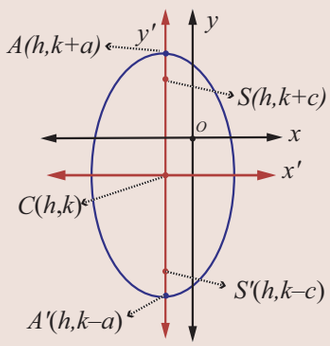
خاکہ 5.25 سے

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1,\ a>b$$

محور اکبر کی لمبائی $2a$ ہے۔ محور اصغر کی لمبائی $2b$ ہے۔ راسوں کی مختصیں $(h,k+a)$ ،اور $(h,k-a)$ ہیں اور ماسکوں کی مختصیں $(h,k+c)$ اور $(h,k-c)$ ہیں جہاں $c^2=a^2-b^2$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 187 27-02-2023 16:17:49

| مساوات (Equation) | مرکز (Centre) | محوراکبر (Major Axis) | راسیں (Vertices) | ماسکہ (Foci) |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \quad \boxed{a^2>b^2}$   خاکہ 5.24 (a) $x$ - محور کے متوازی محوراکبر ماسکہ مرکز کے $c$ اکائیاں دائیں جانب اور $c$ اکائیاں بائیں جانب ہیں، جہاں $c^2=a^2-b^2$ | $(h,k)$ | $x$ - محور کے متوازی | $(h-a,k)$ $(h+a,k)$ | $(h-c,k)$ $(h+c,k)$ |
| $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1 \quad \boxed{a^2>b^2}$   خاکہ 5.25 (b) $y$ - محور کے متوازی محور اکبر ماسکہ مرکز کے $c$ اکائیاں دائیں جانب اور $c$ اکائیاں بائیں جانب ہیں۔ جہاں $c^2=a^2-b^2$ | $(h,k)$ | $y$ - محور کے متوازی | $(h,k-a)$ $(h,k+a)$ | $(h,k-c)$ $(h,k+c)$ |

**مسئلہ 5.5**

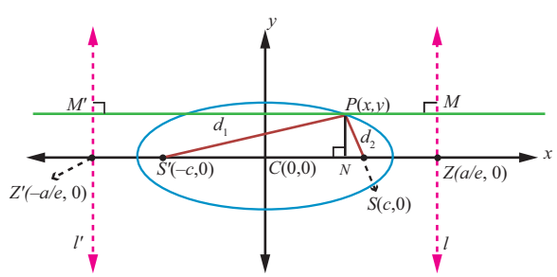
بیضوی پر ایک نقطہ کے ماسکی فاصلوں کا حاصل جمع اس کے محور اکبر کی لمبائی کے مساوی ہوتا ہے۔

**ثبوت**

فرض کیجئے کہ $P(x,y)$، $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ بیضوی پر ایک نقطہ ہے۔

ہادی خطوط $l$ اور $l'$ کا عمودی، $P$ سے $MM'$ کھینچئے۔

$x$ محور کے $PN \perp$ کھینچئے۔



خاکہ 5.26

$$SP = ePM \quad \text{تعریف کے ذریعہ}$$
$$= eNZ$$
$$= e[CZ-CN]$$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 188 27-02-2023 16:17:57

$$= e\left[\frac{a}{2} - x\right] = a - ex \qquad \ldots (1)$$

32USZ

$$SP' = ePM' \quad \text{اور}$$

$$= e[CN + CZ']$$

$$= e\left[x + \frac{a}{e}\right] = ex + a \qquad \ldots (2)$$

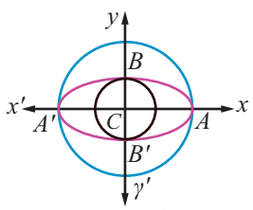
■ چنانچہ، $SP + S'P = a - ex + a + ex = 2a$

**ریمارک (Remark)**

جب $b = a$، ہو تو مساوات $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$، $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$ بنتی ہے جو مرکز $(h,k)$ اور نصف قطر $a$ والا ایک دائرہ ہے

جب $b = a$، $e = \sqrt{1 - \frac{a^2}{a^2}} = 0$، چنانچہ **دائرہ کا خروج مرکز صفر ہے**

آگے $\frac{SP}{PM} = 0$ جس کا مطلب $PM \to \infty$ یعنی، اس دائرہ کا ہادی خط $\infty$ (infinity) پر ہے۔



خاکہ 5.27

**ریمارک (Remark)**

معاون دائرہ یا حائط دائرہ وہ دائرہ ہے جس کا قطر محور اکبر کی لمبائی کے برابر ہے اور **درون دائرہ** وہ دائرہ ہے جس کا قطر محور اصغر کی لمبائی کے برابر ہے۔ یہ بالترتیب $x^2 + y^2 = a^2$ اور $x^2 + y^2 = b^2$ سے دئے گئے ہیں۔

## 5.3.4 ہذلولی (Hyperbola)

ہم طلب کرتے ہیں کہ ہذلولی اس نقطے کا طریق ہے جو اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک ساکن نقطہ (ماسکہ) سے اس کا فاصلہ اور اس کے ہادی خط سے اس کا فاصلہ ایک مستقل نسبت (eccentricity) $e$ رکھتا ہے۔ جو اکائی سے زیادہ ہے $(e > 1)$

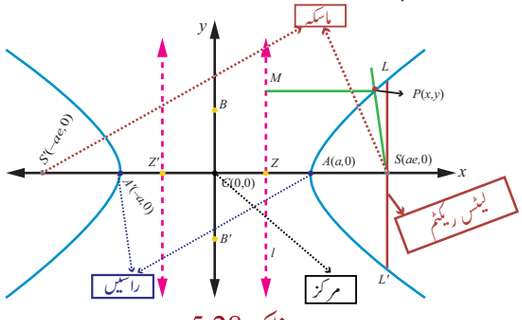
### (i) معیاری شکل میں ہذلولی کی مساوات جس کا مرکز (0, 0) پر ہو۔

**(Equation of a Hyperbola in standard form with centre at (0, 0))**

فرض کیجئے کہ $S$ ماسکہ، $l$ ہادی خط $e$ خروج مرکز $e > 1$ ہے اور $P(x,y)$ متحرک نقطہ ہے۔ $l$ کے عمودی $SZ$ اور $PM$ کھینچئے۔

فرض کیجئے کہ $A$ اور $A'$ دونقاط ہیں جو $SZ$ کو اندرونی اور بیرونی جانب بالترتیب $e:1$ کی نسبت میں تقسیم کرتے ہیں۔

فرض کیجئے کہ $AA' = 2a$ فرض کیجئے کہ $AA'$ کے ساتھ عمودی ناصف کا نقطہ تقاطع $C$ ہے۔لہٰذا، $CA = CA' = a$، $C$ کو مبداء اور $CZ$ کو $x$ - محور کی طرح کھینچا گیا ہے اور $AA'$ کا عمودی ناصف $y$ - محور کی طرح کھینچا گیا ہے۔



خاکہ 5.28

تعریف کے ذریعہ، $\frac{AS}{AZ} = e$ اور $\frac{A'S}{A'Z} = e$.




12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 189 27-02-2023 16:18:08

$\Rightarrow \quad AS = eAZ \qquad\qquad A'S = eA'Z$

$\Rightarrow \quad CS - CA = e(CA - CZ) \qquad A'C + CS = e(A'C + CZ)$

$\Rightarrow \quad CS - a = e(a - CZ) \ldots (1) \qquad a + CS = e(a + CZ) \ldots (2)$

$(1)+(2)$ سے $CS = ae$ حاصل ہوتا ہے اور $(2)-(1)$ سے $CZ = \frac{a}{e}$ حاصل ہوتا ہے۔

چنانچہ $S$ کی مختفین $(ae, 0)$ ہیں، چونکہ $PM = x - \frac{a}{e}$ ہادی خط کی مساوات ہے $x - \frac{a}{e} = 0$

فرض کیجئے کہ $P(x, y)$ ہذلولی پر ایک نقطہ ہے۔

مخروطی تراشے کی تعریف کے ذریعہ، $\frac{SP}{PM} = e \Rightarrow SP^2 = e^2 PM^2$

$$(x-ae)^2 + (y-0)^2 = e^2\left(x - \frac{a}{e}\right)^2$$ پھر

$$(x-ae)^2 + y^2 = (ex-a)^2 \quad \Leftarrow$$

$$(e^2-1)x^2 - y^2 = a^2(e^2-1) \quad \Leftarrow$$

$\Leftarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(e^2-1)} = 1$ ہمیں چونکہ $e > 1$، $a^2(e^2-1) = b^2 . a^2\left(e^2-1\right) > 0$ لینے پر، $P$ کا طریق حاصل کرتے ہیں جو

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ معیاری شکل میں ہذلولی کی مساوات ہے اور غور کیجئے کہ یہ $x$ محور اور $y$ محور پر متشاکل ہے۔

$ae = c$ لینے پر $b^2 = c^2 - a^2$ ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

## تعریف 5.5

(1) قطاع خط $AA'$، $2a$ لمبائی والا عرضی محور (Transverse axis) ہے۔

(2) قطاع خط $BB'$، $2b$ لمبائی والا زوجی محور (Conjugate axis) ہے۔

(3) قطاع خط $CA$ = قطاع خط $CA'$ = نصف عرض محور = $a$ اور قطاع خط $CB$ = قطاع خط $CB'$ = نصف زوجی محور = $b$۔

(4) تشاکل سے، $S'(-ae, 0)$ ماسکہ اور $x = -\frac{a}{e}$ ہادی خط $l'$ سے بھی وہی ہذلولی حاصل ہوتا ہے۔

غرض، ہم یہ دیکھتے ہیں کہ ہذلولی کے دوماسکہ $S(ae, 0)$ اور $S'(-ae, 0)$ دو راسیں $A(a, 0)$ اور $A'(-a, 0)$ اور دوہادی خطوط $x = \frac{a}{e}$ اور $x = -\frac{a}{e}$ ہیں۔

ہذلولی کے لیٹس ریکٹم کی لمبائی $\frac{2b^2}{a}$ ہے، جو بیضوی کی طرح کے خطوط سے ہم راہ حاصل کرسکتے ہیں۔

### خط متقارب (Asymptotes)

فرض کیجئے کہ $P(x, y)$ منحنی پر ایک نقطہ ہے جس کو $y = f(x)$ سے وضاحت کیا گیا ہے۔ جو مبداء سے دور اور مزید دور حرکت کرتا ہے اس طرح کہ $P$ اور کسی ساکن خط کا فاصلہ صفر کی طرف بڑھتا ہے (Tends to zero) یہ ساکن خط خط متقارب (Asymptote) کہلاتا ہے۔

غور کیجئے کہ ہذلولی اں خط متقارب کو تسلیم کرلیتے ہیں جبکہ مکافیاں اور بیضوی تسلیم نہیں کرتے ۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 190 27-02-2023 16:18:26

## (ii) ہذلولی کے اقسام جن کے مرکز $(h, k)$ ہوں (Types of Hyperbola with centre at $(h, k)$)

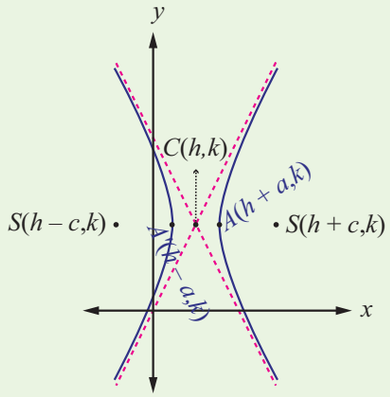
### (a) عرضی محور x محور کے متوازی

ہذلولی جس کا مرکز $C(h,k)$ اور عرضی محور x محور کے متوازی (خاکہ 5.29) تو اس کی مساوات $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ سے دی جاتی ہے۔

راسوں کے مختصیں $A(h+a,k)$ اور $A'(h-a,k)$ ہیں۔ ماسکہ کی مختصیں $S(h+c,k)$ اور $S'(h-c,k)$ ہیں، جہاں

$c^2 = a^2 + b^2$

ہادی خطوط کی مساوات $x = h \pm \frac{a}{e}$ ہیں۔




خاکہ 5.29

**(a) عرضی محور x محور کے متوازی**

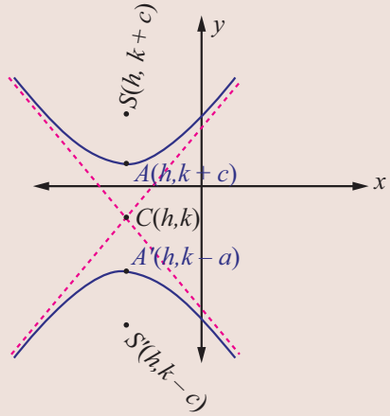
### (b) عرضی محور y محور کے متوازی ہو

ہذلولی جس کا مرکز $C(h,k)$ اور عرضی محور y محور کے متوازی(خاکہ 5.30) تو اس کی مساوات $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ سے دی جاتی ہے۔

راسوں کے مختصیں $A(h,k+a)$ اور $A'(h,k-a)$ ہیں۔ ماسکہ کی مختصیں $S(h,k+c)$ اور $S'(h,k-c)$ ہیں، جہاں

$c^2 = a^2 + b^2$

ہادی خطوط کی مساوات $y = k \pm \frac{a}{e}$ ہیں۔




خاکہ 5.30

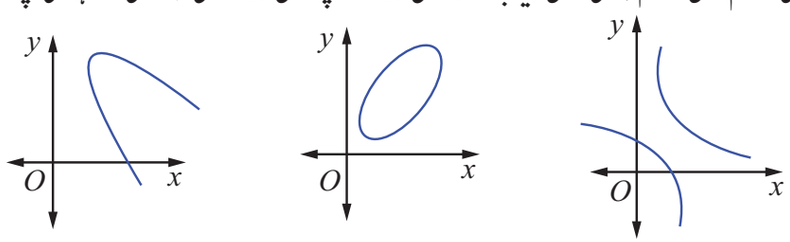
**(b) عرضی محور y محور کے متوازی**

### ریمارک (Remark)

(1) دائرہ جو ہذلولی کے عرض محور پر کھینچا گیا ہو اس کا قطر اسی کے برابر ہو ہذلولی کا معاون دائرہ کہلاتا ہے۔ اس کی مساوات $x^2 + y^2 = a^2$ ہے۔

(2) ہذلولی پر کسی نقطے کے ماسکی فاصلوں کا مطلق فرق (Absolute difference) $|PS - PS'| = 2a$ مستقل ہے اور عرضی محور کی لمبائی کے برابر ہے۔ یعنی، (بیضوی کی طرح سے ثابت کیا جاسکتا ہے۔)

اب تک ہم مکافی کے چار اقسام، بیضوی کے دو اقسام اور ہذلولی کے دو اقسام پر بحث کرچکے ہیں۔ کئی مکافیاں، بیضوی اور ہذلولیاں ایسے ہیں جن کی مساوات کو معیاری اقسام میں تقسیم بندی نہیں کیا جاسکتا۔ مثال کے طور پر ذیل کے مکافی، بیضوی اور ہذلولی پر غور کیجئے۔




خاکہ 5.31

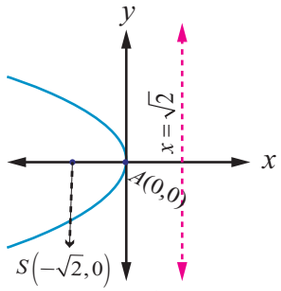
مختص محوروں میں مناسب تبدیلیاں کرکے ذریعہ انہیں معیاری مساوات میں ظاہر کیا جاسکتا ہے۔




12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 191 27-02-2023 16:18:34

**مثال 5.16**

مکافی کی مساوات معلوم کیجئے جس کا ماسکہ $\left(-\sqrt{2},0\right)$ اور ہادی خط $x=\sqrt{2}$ ہے۔



خاکہ 5.32

**حل**

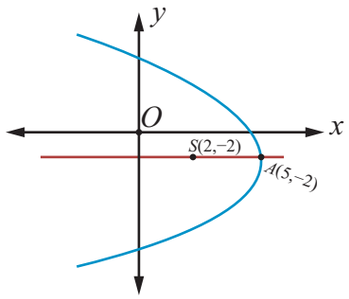
مکافی بائیں طرف کھلتا ہے اور تشاکل محور $x$ محور اور راس $(0,0)$ ہے۔

پھر مطلوبہ مکافی کی مساوات یہ ہے۔

$$\begin{aligned}(y-0)^2 &= -4\sqrt{2}(x-0)\\ \Rightarrow\ y^2 &= -4\sqrt{2}\,x\,.\end{aligned}$$

**مثال 5.17**

مکافی کی مساوات معلوم کیجئے جس کا راس $(5,-2)$ اور ماسکہ $(2,-2)$ ہے۔



خاکہ 5.33

**حل**

دیا گیا ہے راس $A(5,-2)$ اور ماسکہ $S(2,-2)$ اور ماسکی فاصلہ $AS=a=3$

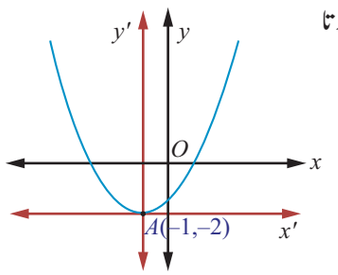
مکافی بائیں طرف کھلتا ہے اور $x$ محور کے متوازی خط پر متشاکل ہے۔

پھر، مطلوبہ مکافی کی مساوات یہ ہے۔

$$\begin{aligned}(y+2)^2 &= -4(3)(x-5)\\ \Rightarrow\ y^2+4y+4 &= -12x+60\\ \Rightarrow\ y^2+4y+12x-56 &= 0\,.\end{aligned}$$

**مثال 5.18**

مکافی کی مساوات معلوم کیجئے جس کا راس $(-1,-2)$، $y$ محور کے متوازی محور اور $(3,6)$ سے گذرتا ہے۔



خاکہ 5.34

**حل**

چونکہ اس کا محور $y$ محور کے متوازی ہے مطلوبہ مکافی کی مساوات یہ ہے۔

$$(x+1)^2 = 4a(y+2)$$

چونکہ یہ $(3,6)$ سے گذرتا ہے، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned}(3+1)^2 &= 4a(6+2)\\ \Rightarrow\quad a &= \frac{1}{2}\,.\end{aligned}$$

پھر مکافی کی مساوات $(x+1)^2=2(y+2)$ ہے جسے مختصر کرنے پر $x^2+2x-2y-3 = 0$ حاصل ہوتا ہے۔

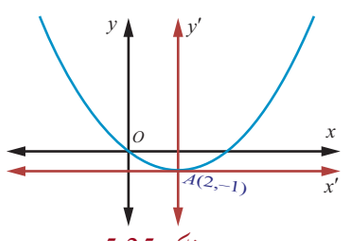
**مثال 5.19**

$x^2-4x-5y-1=0$. مکافی کے راس، ماسکہ، ہادی خط اور لیٹس ریکٹم کی لمبائی معلوم کیجئے۔

**حل**

مکافی کے لئے

$$\begin{aligned}x^2-4x-5y-1 &= 0\\ \Rightarrow\quad x^2-4x &= 5y+1\\ \Rightarrow\quad x^2-4x+4 &= 5y+1+4\,.\end{aligned}$$



خاکہ 5.35

$\Leftarrow (x-2)^2 = 5(y+1)$ جو معیاری شکل میں ہے ۔ لہٰذا، $4a = 5$ اور $(2,-1)$ راس ہے، اور ماسکہ $\left(2,\frac{1}{4}\right)$ ہے۔
ہادی خط کی مساوات ہے۔

$$y-k+a = 0$$
$$y+1+\frac{5}{4} = 0$$
$$4y+9 = 0.$$

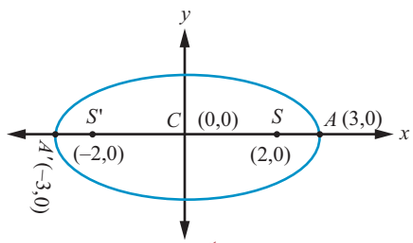
لیٹس ریکٹم کی لمبائی 5 اکائیاں۔

## مثال 5.20

بیضوی کی مساوات معلوم کیجئے جس کا ماسکہ $(\pm 2,0)$، راسیں $(\pm 3,0)$

**حل**

خاکہ 5.36 سے، ہمیں حاصل ہوتا ہے



خاکہ 5.36

$$SS' = 2c \text{ اور } 2c = 4 \; ; \; A'A = 2a = 6$$
$$\Rightarrow c = 2 \text{ اور } a = 3,$$
$$\Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 9-4 = 5.$$

محور اکبر x محور کے ہم راہ ہے، کیونکہ $a > b$.
مرکز $(0, 0)$ ہے اور ماسکہ $(\pm 2,0)$ ہیں۔
لہٰذا، بیضوی کی مساوات $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ ہے۔

## مثال 5.21

بیضوی کی مساوات معلوم کیجئے جس کا خروج مرکز $\frac{1}{2}$ ہے، کوئی ایک ماسکہ $(2,3)$ اور ہادی خط $x = 7$ ہے۔ اس کے علاوہ بیضوی کے محور اکبر اور محور اصغر کی لمبائی بھی معلوم کیجئے۔

**حل**

مخروطی تراشے کی تعریف کے ذریعہ، $SP^2 = e^2PM^2$ یا $\frac{SP}{PM} = e$

$$\text{پھر، } (x-2)^2+(y-3)^2 = \frac{1}{4}(x-7)^2$$
$$\Rightarrow 3x^2+4y^2-2x-24y+3 = 0$$
$$\Rightarrow 3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+4(y-3)^2 = 3\left(\frac{1}{9}\right)+4\times 9-3 = \frac{100}{3}$$

$$\frac{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2}{\frac{100}{9}}+\frac{(y-3)^2}{\frac{100}{12}} = 1 \text{ جو معیاری شکل میں ہے۔}$$

$$\text{لہٰذا، محور اکبر لمبائی اور } 2a = 2\sqrt{\frac{100}{9}} = \frac{20}{3}$$
$$\text{محور اصغر کی لمبائی } 2b = 2\sqrt{\frac{100}{12}} = \frac{10}{\sqrt{3}}$$


12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 193 27-02-2023 16:19:01

## مثال 5.22

مخروطی تراشہ کے ماسکہ ، راسیں اور محورِ اکبر اور محور اصغر کی لمبائی معلوم کیجئے۔

$4x^2+36y^2+40x-288y+532=0$.

**حل**

$4x^2+36y^2+40x-288y+532=0$ کے $x$ اور $y$ پر مربع کو مکمل کرنے پر حاصل ہوتا ہے۔

$$4(x^2+10x+25-25)+36(y^2-8y+16-16)+532 = 0,$$

$$4(x^2+10x+25)+36(y^2-8y+16) = -532+100+576$$

$$4(x+5)^2+36(y-4)^2 = 144.$$

دونوں طرف 144 سے تقسیم کرنے پر، مساوات گھٹتا ہے۔

$$\frac{(x+5)^2}{36}+\frac{(y-4)^2}{4}=1.$$

یہ ایک بیضوی ہے جس کا مرکز $(-5,4)$، محور اکبر $x$- محور کے متوازی ہے، محور اکبر کی لمبائی 12 ہے اور محور اصغر کی لمبائی 4 ہے۔
راسیں $(1,4)$ اور $(-11,4)$ ہیں۔

اب، $c^2 = a^2-b^2 = 36-4 = 32$ اور

$$c = \pm 4\sqrt{2}.$$

پھر ماسکہ $(-5+4\sqrt{2},4)$ اور $(-5-4\sqrt{2},4)$ ہیں۔

اکائیاں $2a=12$ = محوراکبر کی لمبائی اور

اکائیاں $2b=4$ = محور اصغر کی لمبائی

## مثال 5.23

بیضوی $4x^2+y^2+24x-2y+21=0$ کے لئے، مرکز، راسیں، ماسکہ معلوم کیجئے اور مزید ثابت کیجئے کہ لیٹس ریکٹم کی لمبائی 2 ہے۔

**حل**

ارقام کو دوبارہ ترتیب دینے پر، بیضوی کی مساوات یہ ہے۔

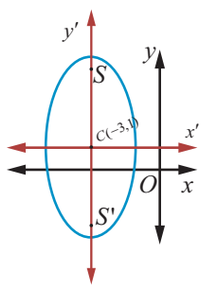
$$4x^2+24x+y^2-2y+21 = 0$$

یعنی، $4(x^2+6x+9-9)+(y^2-2y+1-1)+21 = 0,$

$$4(x+3)^2-36+(y-1)^2-1+21 = 0,$$

$$4(x+3)^2+(y-1)^2 = 16,$$

$$\frac{(x+3)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{16} = 1.$$



خاکہ 5.37

مرکز $(-3,1)$. $a=4$، $b=2$ ہے، اور محور اکبر y- محور کے متوازی ہے۔

$$c^2 = 16-4=12$$

$$c = \pm 2\sqrt{3}.$$

لہٰذا، ماسکہ $(-3,2\sqrt{3}+1)$ اور $(-3,-2\sqrt{3}+1)$ ہیں۔

راسیں $(-3,\pm 4+1)$ ہیں۔ یعنی، راسیں $(-3,5)$ اور $(-3,-3)$ ہیں اور

لیٹس ریکٹم کی لمبائی 2 اکائیاں = $\frac{2b^2}{a}$ (خاکہ 5.37 دیکھئے)

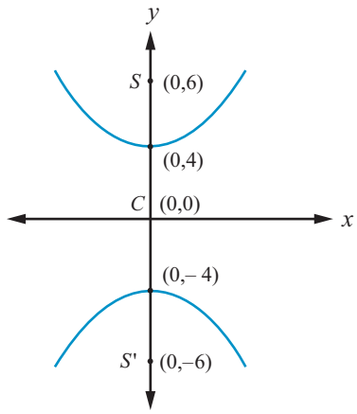


12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 194 27-02-2023 16:19:19

**مثال 5.24**

ہذلولی کی مساوات معلوم کیجئے جس کے راسیں $(0,\pm4)$ اور ماسکہ $(0,\pm6)$ ہیں۔

**حل**




خاکہ 5.38

خاکہ 5.38 سے ، ماسکوں کے ملانے والے خط کا درمیانی نقطہ مرکز $C\,(0,0)$ ہے۔

عرضی محور y محور ہے۔

$$AA' = 2a \Rightarrow 2a = 8,$$

$$SS' = 2c = 12, c = 6$$

$$a = 4$$

$$b^2 = c^2 - a^2 = 36 - 16 = 20.$$

چنانچہ مطلوبہ ہذلولی کی مساوات $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{20} = 1$ ہے۔

**مثال 5.25**

ہذلولی $9x^2 - 16y^2 = 144$ کے لئے راسیں اور ماسکہ معلوم کیجئے۔

**حل**

$9x^2 - 16y^2 = 144$ کو معیاری شکل میں گھٹانے پر

ہمارے پاس $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$ ہے۔

جس کا عرضی محور x- محور کے ہم راہ ہے اور راسیں $(-4,0)$ اور $(4,0)$ ہیں اور

$$c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25, \quad c = 5.$$

چنانچہ ماسکہ $(-5,0)$ اور $(5,0)$ ہیں۔

**مثال 5.26**

$11x^2 - 25y^2 - 44x + 50y - 256 = 0$ ہذلولی کا مرکز ، ماسکہ اور خروج مرکز معلوم کیجئے۔

**حل**

ہذلولی کی مساوات کو اس کے معیاری شکل میں دوبارہ ترتیب دینے پر

ہمارے پاس $11(x^2 - 4x) - 25(y^2 - 2y) - 256 = 0$ ہے۔

$$11(x-2)^2 - 25(y-1)^2 = 256 - 44 + 25$$

$$11(x-2)^2 - 25(y-1)^2 = 275$$

$$\frac{(x-2)^2}{25} - \frac{(y-1)^2}{11} = 1.$$

مرکز $(2,1)$، $a^2 = 25, b^2 = 11$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

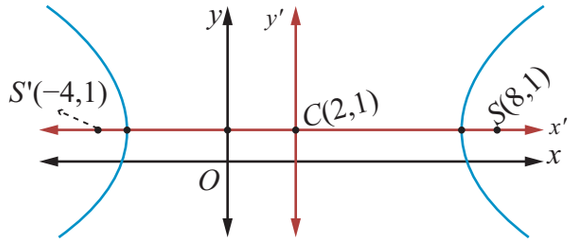
$$= 25 + 11 = 36$$

لہٰذا، $c = \pm 6$

خاکہ 5.39 سے اور $e = \frac{c}{a} = \frac{6}{5}$ اور ماسکہ کی مختصیں $(8,1)$ اور $(-4,1)$ ہیں۔




12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 195 27-02-2023 16:19:33




خاکہ 5.39

### مثال 5.27

ہالئے کے دم دار تارا (Halley's Comet) کا محور (خاکہ 5.51 ) ایک بیضوی ہے جو 36.18 فلکی اکائیاں لمباء اور 9.12 فلکی اکائیاں (astronomical units) چوڑاہے۔ خروج مرکز معلوم کیجئے۔

**حل**

دیا گیا ہے $2a = 36.18,\ 2b = 9.12$ ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$e = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \frac{\sqrt{\left(\frac{36.18}{2}\right)^2 - \left(\frac{9.12}{2}\right)^2}}{\frac{36.18}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{(18.09)^2-(4.56)^2}}{(8.09)} \approx 0.97\ .$$

**غور کیجئے (Note)**

ایک فلکی اکائی (سورج اور زمین کا اوسط فاصلہ) $1,49,597,870\,km$ ہے۔زمین کے محور کا نصف محور اکبر.

## مشق 5.2

1. مندرجہ ذیل دئے گئے ہر ایک صورت حال میں مکافی کی مساوات معلوم کیجئے۔
   (i) ماسکہ $(4,0)$ اور ہادی خط $x = -4$
   (ii) $(2,-3)$ سے گذرتاہو اور $y$۔ محور کے متشاکل ہو۔
   (iii) راس $(1,-2)$ اور ماسکہ $(4,-2)$
   (vi) لیٹس ریکٹم کے انتہائی نقاط $(4,-8)$ اور $(4,8)$ ہوں۔
2. مندرجہ ذیل دئے گئے ہر ایک صورتِ حال میں بیضوی کی مساوات معلوم کیجئے۔
   (i) ماسکہ $(\pm 3,0)$، $e = \frac{1}{2}$
   (ii) ماسکہ $(0,\pm 4)$ اور محور اکبر کے انتہائی نقاط $(0,\pm 5)$
   (iii) لیٹس ریکٹم کی لمبائی 8، خروج مرکز $= \frac{3}{5}$، مرکز $(0,0)$ اور محور اکبر $x$۔ محور ہو۔
   (iv) لیٹس ریکٹم کی لمبائی 4، ماسکوں کا درمیانی فاصلہ $4\sqrt{2}$ ، مرکز $(0,0)$ اور محور اکبر $y$۔ محور ہو۔
3. مندرجۂ ذیل دئے گئے ہر ایک صورت حال میں ہذلولی کی مساوات معلوم کیجئے ۔
   (i) ماسکہ $(\pm 2,0)$، خروج مرکز $= \frac{3}{2}$
   (ii) مرکز $(2,1)$، کوئی ایک ماسکہ $(8,1)$ اور نظیری ہادی خط $x = 4$ ہو۔
   (iii) $(5,-2)$ سے گذرتا ہو اور عرضی محور $x$ محور کے ہم راہ ہو اور اس کی لمبائی 8 اکائیاں ہو۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 196 27-02-2023 16:19:42

4. ذیل کے راس، ماسکہ، ہادی خط کی مساوات اور لیٹس ریکٹم کی لمبائی معلوم کیجئے۔

(i) $y^2 = 16x$ (ii) $x^2 = 24y$ (iii) $y^2 = -8x$

(iv) $x^2 - 2x + 8y + 17 = 0$ (v) $y^2 - 4y - 8x + 12 = 0$

5. مخروطی تراشہ کی قسم کی شناخت کیجئے اور ذیل کے ہر ایک کا مرکز ماسکہ، راسیں اور ہادی خطوط معلوم کیجئے۔

(i) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ (ii) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{10} = 1$ (iii) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$ (iv) $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$

6. ثابت کیجئے کہ ہذلولی $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ کے لیٹس ریکٹم کی لمبائی $\frac{2b^2}{a}$ ہے۔

7. ثابت کیجئے کہ ہذلولی پر کسی نقطہ P کے ماسکی فاصلوں کے فرق کی مطلق قیمت اس کے عرضی محور کی لمبائی ہے۔

8. مخروطی تراشہ کی قسم کی شناخت کیجئے اور ذیل کے ہر ایک کا مرکز، ماسکہ، راسیں، اور ہادی خطوط معلوم کیجئے۔

(i) $\frac{(x-3)^2}{225} + \frac{(y-4)^2}{289} = 1$ (ii) $\frac{(x+1)^2}{100} + \frac{(y-2)^2}{64} = 1$ (iii) $\frac{(x+3)^2}{225} - \frac{(y-4)^2}{64} = 1$

(iv) $\frac{(y-2)^2}{25} - \frac{(x+1)^2}{16} = 1$ (v) $18x^2 + 12y^2 - 144x + 48y + 120 = 0$

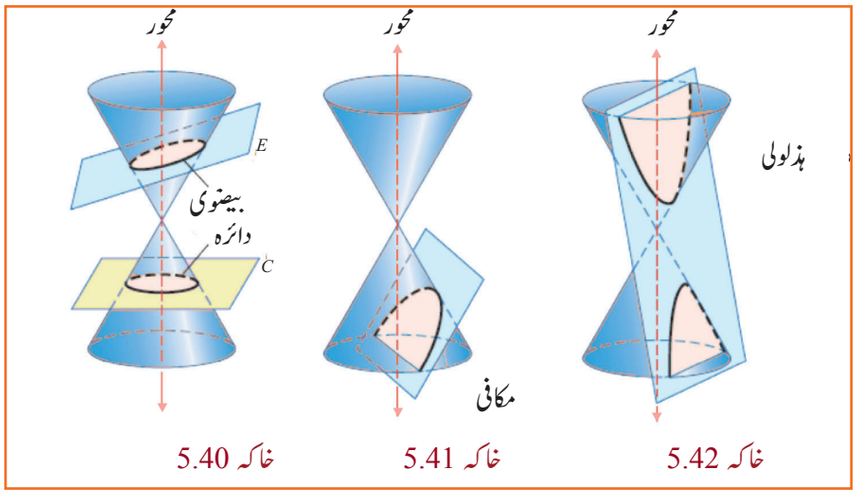
(vi) $9x^2 - y^2 - 36x - 6y + 18 = 0$

## 5.4 مخروطی تراشے (Conic Section)

سکشن 5.3 میں بحث کئے گئے منحنیوں کو معلوم کرنے کے طریقے کے علاوہ مخروطی تراشہ کی علم ہندسوی وضاحت یہاں دی گئی ہے۔دائرہ، بیضوی، مکافی یا ہذلولی کی ترسیم مستوی اور دہرا مخروط کے تقاطع سے بھی حاصل کی جاسکتی ہے۔چنانچہ، ان شکلوں کو مخروطی تراشے یا عام طور سے مخروط سے منسوب کیا جاتا ہے۔

### 5.4.1 مخروطی تراشے کی علم ہندسوی وضاحت (Geometric description of conic section)

مخروط کے محور کے عمودی ایک مستوی (مستوی C)، جو دہری الٹے مخروط (double napped cone) کے کسی ایک الٹے مخروط کو تراشنے (کاٹنے) سے دائرہ حاصل ہوتا ہے۔ (خاکہ 5.40) مستوی $E$ کو اس طرح جھکایا ہوا ہے، کہ یہ محور کے عمودی نہ ہو، دوہری الٹے مخروط کے کسی ایک الٹے مخروط کو تراشنے سے بیضوی حاصل ہوتا ہے۔ جب مستوی دوہری الٹے مخروط کے کسی ایک الٹے مخروط کے ضلع کے متوازی ہو اور اس مستوی کے مخروط کو تراشنے سے مکافی حاصل ہوتا ہے (خاکہ 5.41) جب مستوی دوہری الٹے مخروط کے مستوی جس میں اس کا محور واقع ہو دوہری مخروط کو تراشنے سے ہذلولی حاصل ہوتا ہے۔ (خاکہ 5.42)




خاکہ 5.40 خاکہ 5.41 خاکہ 5.42

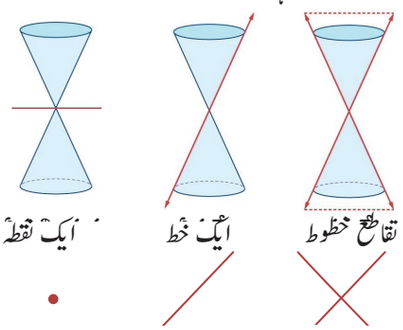


12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 197 27-02-2023 16:19:51

## 5.4.2 تحلیل شدہ شکلیں (Degenerate Forms)

مختلف مخروطی تراشوں کی تحلیل شدہ شکلیں (خاکہ 5.43) یا تو ایک نقطہ یا ایک خط یا خطوط مستقیم کی ایک جوڑی یا دو تقاطع خطوط یا خالی مجموعہ جن کا انحصار دوہری الٹے مخروط کو تراشنے والے مستوی کے زاویہ (کی قسم) اور راس سے گذرنے پر ہے یا جب مخروطیں مستوی جو استوانہ کے محور کے متوازی ہو، ایک استوانہ کو تحلیل ہوتے ہیں۔

اگر تراشنے والا مستوی دوہری الٹے مخروط کے راس سے گذرے اور محور کے عمودی ہو،تو ہمیں ایک نقطہ یا ایک دائری نقطہ حاصل ہوتا ہے۔اگر تراشنے والے مستوی مولد (generator) سے گذرتا ہو تو ہمیں ایک خط یا متوازی خطوط کی ایک جوڑی یا ایک مکافی کی تحلیل شدہ شکل جس کے لئے مخروطی تراشے کی عام مساوات میں $A = B = C = 0$ ملتا ہے اور اگر تراشنے والا مستوی دوہری الٹے مخروط کے محور اور راس سے گذرتا ہوتو ہمیں تقاطع خطوط یا ہذلولی کی تحلیل شدہ شکل حاصل ہوتی ہے۔




خاکہ 5.43

### ریمارک (Remark)

بیضوی کی صورت حال میں $(0 < e < 1)$ جہاں $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ جب $e \to 0$، $\frac{b}{a} \to 1$ یعنی، $b \to a$ یا محور اکبر اور محور اصغر کی لمبائیاں جسامت میں بالکل قریب ہیں یعنی، بیضوی دائرے کے بالکل قریب ہے۔ جب $e \to 1$، $\frac{b}{a} \to 0$ اور بیضوی ایک قطاع خط میں تبدیل (تحلیل ہوتا) ہے یعنی، بیضوی سیدھی ہوتی ہے۔

### ریمارک (Remark)

ہذلولی کی صورت حال میں $(e > 1)$ جہاں $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$ جب $e \to 1$، $\frac{b}{a} \to 0$ یعنی، اس طرح $e \to 1$، $a$ تعلق کے سے $b$ بہت چھوٹا ہے اور ہذلولی ایک نوکیلا نقطہ بنتی ہے۔ جب $e \to \infty$، $a$ کے تعلق سے $b$ بہت بڑا ہے اور ہذلولی سیدھی ہوتی ہے۔

## 5.4.3 مخروطی تراشے کی عام مساوات سے مخروطی تراشے کی شناخت $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ (Identifying the conics from the general equation of the conic)

دو درجی مساوات کی ترسیم دائرہ، مکافی، بیضوی، ہذلولی، نقطہ، خالی مجموعہ، ایک خط یا خطوط کی ایک جوڑی میں سے ایک ہے۔ جب،

(1) $A = C = 1$، $B = 0$، $D = -2h$، $E = -2k$، $F = h^2 + k^2 - r^2$ یہ عام مساوات $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ کو گھٹتا ہے جو ایک دائرہ ہے۔

(2) $B = 0$ اور یا تو $A$ یا $C = 0$، اس سطح پر مطالعہ کے تحت عام مساوات سے مکافی حاصل ہوتی ہے۔

(3) $A \neq C$ اور $A$ اور $C$ یکساں نشانی رکھتے ہوں، تو عام مساوات سے بیضوی حاصل ہوتی ہے۔

(4) $A \neq C$ اور $A$ اور $C$ مختلف نشانی رکھتے ہوں تو عام مساوات سے ہذلولی حاصل ہوتی ہے۔

(5) $A = C$ اور $B = D = E = F = 0$ ہو تو عام مساوات سے نقطہ $x^2 + y^2 = 0$ حاصل ہوتا ہے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 198 27-02-2023 16:20:02

(6) $A=C=F$ اور $B=D=E=0$ ہو تو عام مساوات سے خالی مجموعہ $x^2+y^2+1=0$ حاصل ہوتا ہے اس کا کہ کوئی حقیقی حل نہیں۔

(7) $A\neq 0$ یا $C\neq 0$ اور باقیہ صفر ہوں، تو عام مساوات سے مختصی محوریں حاصل ہوتے ہیں۔

(8) $A=-C$ اور باقیہ صفر ہوں، تو عام مساوات سے ایک خطوط کی جوڑی $x^2-y^2=0$ حاصل ہوتی ہے۔

### مثال 5.28

ذیل کے مساوات کے لئے مخروطی تراشہ کی قسم پہچانئے۔

(1) $16y^2=-4x^2+64$ (2) $x^2+y^2=-4x-y+4$

(3) $x^2-2y=x+3$ (4) $4x^2-9y^2-16x+18y-29=0$

**حل**

| سوال نمبر | مساوات | شرط | مخروطی تراشہ کی قسم |
|---|---|---|---|
| 1 | $16y^2=-4x^2+64$ | 3 | بیضوی |
| 2 | $x^2+y^2=-4x-y+4$ | 1 | دائرہ |
| 3 | $x^2-2y=x+3$ | 2 | مکافی |
| 4 | $4x^2-9y^2-16x+18y-29=0$ | 4 | ہذلولی |

## مشق 5.3

ذیل کے ہر مساوات کے لئے مخروطی تراشہ کی قسم پہچانئے۔

1. $2x^2-y^2=7$ 2. $3x^2+3y^2-4x+3y+10=0$ 3. $3x^2+2y^2=14$

4. $x^2+y^2+x-y=0$ 5. $11x^2-25y^2-44x+50y-256=0$ 6. $y^2+4x+3y+4=0$

# 5.5 مخروطی تراشے کی پیمائشی شکل (Parametric form of Conics)

## 5.5.1 پیمائشی مساوات (Parametric equations)

مان لیجئے کہ $f(t)$ اور $g(t)$، '$t$' کے تفاعلات ہیں۔ پھر مساوات $x=f(t)$ اور $y=g(t)$ ایک ساتھ مستوی میں ایک منحنی کی وضاحت کرتے ہیں۔ عام طور پر '$t$' ایک بے قاعدہ متغیر ہے، اس صورت حاصل میں اسے **پیمائش (parameter)** کہا جاتا ہے، اور منحنی کے اس طریقے سے وضاحت کرنے کو **پیمائش مساوات (parametric equations)** کہتے ہیں۔ '$t$' کی ایک اہم تشریح وقت ہے۔ اس تشریح میں مساوات $x=f(t)$ اور $y=g(t)$ وقت '$t$' پر ایک شئے کے مقام کو بتاتے ہیں۔

اس لئے پیمائش مساوات میں مختصر طور پر ایک تیسرا متغیر ہوتا ہے، $x$ اور $y$ کو اس تیسرے متغیر کو بطور پیمائش ظاہر کرتے ہیں۔ پیمائش کا ہمیشہ '$t$' ہونا ضروری نہیں۔ '$t$' استعمال کرنا زیادہ معیاری ہے مگر دوسرے متغیر بھی استعمال کر سکتے ہیں۔

### (i) دائرہ $x^2+y^2=a^2$ کی پیمائشی شکل

**(Parametric form of the circle $x^2+y^2=a^2$)**

فرض کیجئے کہ $x^2+y^2=a^2$ دائرہ پر ایک نقطہ $P(x,y)$ ہے۔

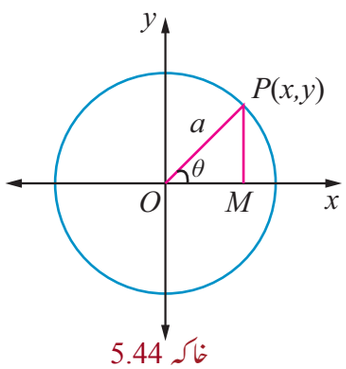
$OP$ کو ملائیے اور فرض کیجئے کہ یہ $x$- محور سے زاویہ $\theta$ بناتا ہے۔

$x$ محور کے عمودی $PM$ کھینچئے۔ مثلث $OPM$ سے،

$$x=OM=a\cos\theta$$

$$y=MP=a\sin\theta$$

غرض دئے گئے دائرہ پر کسی نقطے کے مختصیں $(a\cos\theta, a\sin\theta)$ ہیں اور




خاکہ 5.44

$x = a\cos\theta, y = a\sin\theta$ ، $0 \le \theta \le 2\pi$ دائرہ $x^2 + y^2 = a^2$ کے پیمائشی مساوات ہیں۔

اس کے برخلاف، اگر $x = a\cos\theta, y = a\sin\theta$ ، $0 \le \theta \le 2\pi$

پھر $\frac{x}{a} = \cos\theta, \frac{y}{a} = \sin\theta$

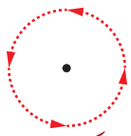
مربع کرنے کے بعد جمع کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

غرض $x^2 + y^2 = a^2$ سے دائرہ کی مساوات حاصل ہوتی ہے جس کا مرکز $(0,0)$ اور نصف قطر $a$ اکائیاں ہیں۔

### غور کیجئے (Note)

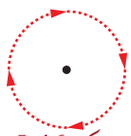
(1 $x = a\cos t, y = a\sin t$ ، $0 \le t \le 2\pi$ بھی دائرے $x^2 + y^2 = a^2$ کی پیمائشی مساوات کو ظاہر کرتے ہیں۔



خاکہ 5.45

$t$ گھڑی کی مخالف سمت میں بڑھتا ہے۔

(2 $x = a\sin t, y = a\cos t$ ، $0 \le t \le 2\pi$ بھی دائرہ $x^2 + y^2 = a^2$ کی مساوات کو ظاہر کرتے ہیں۔



خاکہ 5.46

$t$ گھڑی کی مخالف سمت میں برھتا ہے۔

### (ii) مکافی $y^2 = 4ax$ کی پیمائشی شکل (Parametric form of the parabola $y^2 = 4ax$)

فرض کیجئے کہ $P(x_1, y_1)$ مکافی پر ایک نقطہ ہے۔

$$y_1^2 = 4ax_1$$

$$(y_1)(y_1) = (2a)(2x_1)$$

$$\frac{y_1}{2a} = \frac{2x_1}{y_1} = t \quad (-\infty < t < \infty) \text{ کہئے}$$

$$y_1 = 2at, \; 2x_1 = y_1 t$$

$$2x_1 = 2at(t)$$

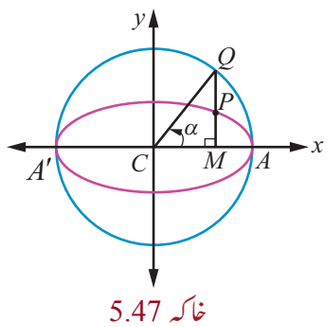
$$x_1 = at^2$$

$y^2 = 4ax$ کی پیمائشی شکل $x = at^2, y = 2at$، $-\infty < t < \infty$ ہے۔

اس کے برخلاف اگر $x = at^2$ اور $y = 2at$، $-\infty < t < \infty$ ہوتو ان مساوات میں سے '$t$' کو خارج کرنے پر $y^2 = 4ax$ ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

### (iii) بیضوی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ کی پیمائشی شکل (Parametric form of the Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$)

فرض کیجئے کہ $P$ بیضوی پر ایک نقطہ ہے۔ فرض کیجئے کہ مختص $MP$ معاون دائرہ سے $Q$ پر ملتا ہے۔




خاکہ 5.47

فرض کیجئے کہ $\angle ACQ = \alpha$

$\therefore \; CM = a\cos\alpha, \; MQ = a\sin\alpha$

اور $Q(a\cos\alpha, a\sin\alpha)$

اب $P$ کا $x$ مختص $a\cos\alpha$ ہے۔اگر اس کا $y$ مختص $y'$ ہوتو $P(a\cos\alpha, y')$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ پر واقع ہوتا ہے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 200 27-02-2023 16:20:42

$$\cos^2\alpha + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \quad \text{لہٰذا،}$$
$$\Rightarrow \qquad y' = b\sin\alpha\,.$$

چنانچہ $P$ $(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$ ہے۔

یہ پیمائش $\alpha$ نقطہ $P$ کا خروج مرکزی زاویہ کہلاتا ہے۔غور کیجئے کہ $\alpha$ وہ زاویہ ہے جو خط $CQ$، $x$ محور کے ساتھ بناتا ہے اور وہ زاویہ نہیں جو خط $CP$، $x$ محور سے بناتا ہو۔

چنانچہ بیضوی کی پیمائشی مساوات $x = a\cos\theta$، $y = b\sin\theta$ ہے جہاں $\theta$ ایک پیمائش $0 \le \theta \le 2\pi$ ہے۔

### (iv) ہذلولی $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ کی پیمائشی شکل (Parametric form of the Hyperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$)

اسی طرح، ہذلولی کی پیمائشی مساوات بھی $x = a\sec\theta$، $y = b\tan\theta$ کی طرح سے مشتق (derived) کیا جاسکتا ہے۔ جہاں $\theta$ ایک پیمائش ہے۔ $-\pi \le \theta \le \pi$ سوائے $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ کے علاوہ

مختصراً دائرہ، مکافی، بیضوی اور ہذلولی کے پیمائشی مساوات ذیل کے جدول میں دئے گئے ہیں۔

| مخروطی تراشے | پیمائشی مساوات | پیمائش | پیمائش کی وسعت | مخروطی تراشے میں کوئی نقطہ |
|---|---|---|---|---|
| دائرہ | $x = a\cos\theta$<br>$y = a\sin\theta$ | $\theta$ | $0 \le \theta \le 2\pi$ | ‘$\theta$’<br>یا $(a\cos\theta, a\sin\theta)$ |
| مکافی | $x = at^2$<br>$y = 2at$ | $t$ | $-\infty < t < \infty$ | ‘$t$’<br>یا $(at^2, 2at)$ |
| بیضوی | $x = a\cos\theta$<br>$y = b\sin\theta$ | $\theta$ | $0 \le \theta \le 2\pi$ | ‘$\theta$’<br>یا $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ |
| ہذلولی | $x = a\sec\theta$<br>$y = b\tan\theta$ | $\theta$ | $-\pi \le \theta \le \pi$<br>$\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ کے علاوہ | ‘$\theta$’<br>یا $(a\sec\theta, b\tan\theta)$ |

#### ریمارک (Remark)

(1) پیمائشی شکل مخروطی تراشے پر نقاط کے ایک خاندان کو ظاہر کرتی ہے جو پیمائش کا رول ہے۔ آگے پیمائش مستقل اور متغیر کا رول ادا کرتا ہے۔جبکہ کارتیسی شکل مخروطی تراشہ کو واضح کرنے والے نقطے کے طریق کو ظاہر کرتا ہے۔یہ پیمائشی طریقہ (Parameterisation) منحنی کے سمت بندی (orientation) کو ظاہر کرتا ہے۔

(2) پیمائشی اظہار کو منفرد (unique) ہونے کی ضرورت نہیں ہے۔

(3) غور کیجئے کہ پیمائشی طریقہ کے استعمال سے متغیرات کی تعداد کو کم از کم ایک پر گھٹادیتا ہے۔

## 5.6 مخروطی تراشوں کے مماسیں اور عمودیں (Tangents and Normals to Conics)

مستوی منحنی کا مماس ایک خط مستقیم ہے جو منحنی کو ٹھیک ایک نقطہ پر چھوتا ہے اور وہ خط مستقیم جو مماس کے عمودی ہو اور نقطہ مماس (point of contact) سے گذرتا ہو اس نقطے پر عمودی (normal) کہلاتا ہے۔

### 5.6.1 مکافی $y^2 = 4ax$ کے مماس اور عمودی کی مساوات

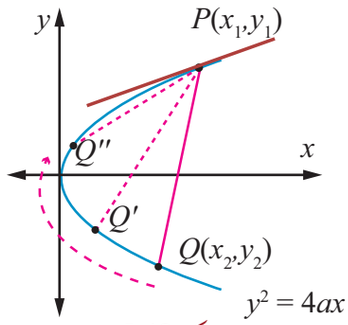
### (Equation of tangent and normal to the parabola $y^2 = 4ax$)

#### (i) کارتیسی شکل میں مماس کی مساوات (Equation of tangent in cartesian form)

فرض کیجئے کہ $P(x_1, y_1)$ اور $Q(x_2, y_2)$ مکافی $y^2 = 4ax$ پر دو نقاط ہیں۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 201 27-02-2023 16:20:57



خاکہ 5.48

پھر، $y_1^2 = 4ax_1$ اور $y_2^2 = 4ax_2$

$$y_1^2 - y_2^2 = 4a(x_1 - x_2).$$

مختصر کرنے پر، $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{4a}{y_1 + y_2}$، وتر $PQ$ کا میلان

غرض، $(y - y_1) = \frac{4a}{y_1 + y_2}(x - x_1)$، وتر $PQ$ کی مساوات کو ظاہر کرتا ہے۔

جب $Q \to P$ یا $y_2 \to y_1$ یہ وتر $P$ پر مماس بنتا ہے۔

غرض، $(x_1, y_1)$ پر مماس کی مساوات یہ ہے

$$y - y_1 = \frac{4a}{2y_1}(x - x_1) \quad \text{.....(1)}$$

جہاں $\frac{2a}{y_1}$ مماس کا میلان ہے۔

$$yy_1 - y_1^2 = 2ax - 2ax_1$$

$$yy_1 - 4ax_1 = 2ax - 2ax_1$$

$$\boxed{yy_1 = 2a(x + x_1)}$$

## (ii) پیمائشی شکل میں مماس کی مساوات (Equation of tangent in parametric form)

مکافی کی $(at^2, 2at)$ پر مماس کی مساوات

$$y(2at) = 2a(x + at^2)$$

$$\boxed{yt = x + at^2}$$

## (iii) کارتیسی شکل میں عمودی کی مساوات (Equation of normal in cartesian form)

(1) سے عمودی کا میلان $-\frac{y_1}{2a}$ ہے۔

لہٰذا، **عمودی کی مساوات** یہ ہے۔

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{2a}(x - x_1)$$

$$2ay - 2ay_1 = -y_1x + y_1x_1$$

$$xy_1 + 2ay = y_1(x_1 + 2a)$$

$$\boxed{xy_1 + 2ay = x_1y_1 + 2ay_1}$$

## (iv) پیمائشی شکل میں عمودی کی مساوات (Equation of normal in parametric form)

مکافی کی $(at^2, 2at)$ پر عمودی کی مساوات یہ ہے۔

$$x2at + 2ay = at^2(2at) + 2a(2at)$$

$$2a(xt + y) = 2a(at^3 + 2at)$$

$$\boxed{y + xt = at^3 + 2at}$$

**مسئلہ 5.6**

دئے گئے ایک نقطے سے مکافی $y^2 = 4ax$ کو تین عمودیں کھینچے جاسکتے ہیں۔ جن میں سے ایک ہمیشہ حقیقی ہے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 202 27-02-2023 16:21:19

## ثبوت

$y^2 = 4ax$ دیا گیا مکافی ہے۔ فرض کیجئے کہ $(\alpha, \beta)$ دیا گیا نقطہ ہے۔

پیمائشی شکل میں عمودی کی مساوات یہ ہے۔

$$y = -tx + 2at + at^3 \quad \ldots (1)$$

اگر عمودی کا میلان $m$ ہو تو $m = -t$

لہٰذا، مساوات (1) اس طرح بنتا ہے۔ $y = mx - 2am - am^3$

فرض کیجئے کہ یہ $(\alpha, \beta)$ سے گذرتا ہے تو $\beta = m\alpha - 2am - am^3$

$$am^3 + (2a - \alpha)m + \beta = 0$$

جو $m$ میں ایک مکعبی مساوات ہے $m$ کے تین قیمتیں ہیں۔اس کے نتیجہ میں عام طور پر مکافی کے ایک نقطہ سے تین عمودی کھینچے جاسکتے ہیں۔چونکہ حقیقی مساوات کے جذریں (complex roots) ہمیشہ زوجی جوڑیاں ہوتے ہیں اور (1) ایک طاق درجی مساوات ہے، اس کا کم از کم ایک حقیقی جذر ہوتا ہے۔ چنانچہ مکافی کا کم از کم ایک عمودی حقیقی ہوتا ہے۔ ■

## 5.6.2 بیضوی اور ہذلولی کے مماس اور عمودی کی مساوات (ذیل کا عبوت طالب علم کے ذمہ ہے)

**Equations of tangent and normal to Ellipse and Hyperbola (the proof of the following are left to the reader)**

(1) بیضوی کے مماس کی مساوات $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

(i) $(x_1, y_1)$ پر $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$ ہے۔ کارتیسی شکل

(ii) $'\theta'$ پر $\frac{x\cos\theta}{a} + \frac{y\sin\theta}{b} = 1$ ہے۔ پیمائشی شکل

(2) بیضوی کے عمودی کی مساوات $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

(i) $(x_1, y_1)$ پر $\frac{a^2x}{x_1} - \frac{b^2y}{y_1} = a^2 - b^2$ ہے۔ کارتیسی شکل

(ii) $'\theta'$ پر $\frac{ax}{\cos\theta} - \frac{by}{\sin\theta} = a^2 - b^2$ ہے۔ پیمائشی شکل

(3) ہذلولی کے مماس کی مساوات $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

(i) $(x_1, y_1)$ پر $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$ ہے۔ کارتیسی شکل

(ii) $'\theta'$ پر $\frac{x\sec\theta}{a} - \frac{y\tan\theta}{b} = 1$ ہے۔ پیمائشی شکل

(4) ہذلولی کے عمودی کی مساوات $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

(i) $(x_1, y_1)$ پر $\frac{a^2x}{x_1} + \frac{b^2y}{y_1} = a^2 + b^2$ ہے۔ کارتیسی شکل

(ii) $'\theta'$ پر $\frac{ax}{\sec\theta} + \frac{by}{\tan\theta} = a^2 + b^2$ ہے۔ پیمائشی شکل



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 203 27-02-2023 16:21:33

## 5.6.3 خط $y = mx + c$ کے مخروطی تراشے کا مماس ہونے کا شرط

## (Condition for the line $y = mx + c$ to be a tangent to the conic sections)

### (i) مکافی $y^2 = 4ax$

فرض کیجئے کہ $(x_1, y_1)$ مکافی $y^2 = 4ax$ پر ایک نقطہ ہے۔پھر $y_1^2 = 4ax_1$ .....(1)

فرض کیجئے کہ $y = mx + c$ مکافی کا مماس ہے۔ .....(2)

5.6.1 سے $(x_1, y_1)$ پر مکافی کے مماس کی مساوات $yy_1 = 2a(x + x_1)$ ہے۔ .....(3)

چونکہ (2) اور (3) ایک ہی خط کو ظاہر کرتے ہیں، ضریب متناسب ہیں۔

$$\frac{y_1}{1} = \frac{2a}{m} = \frac{2ax_1}{c}$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{2a}{m}, x_1 = \frac{c}{m}$$

$$\left(\frac{2a}{m}\right)^2 = 4a\left(\frac{c}{m}\right)$$ پھر (1) بنتا ہے۔

$$\Rightarrow \boxed{c = \frac{a}{m}}$$

نقطہ مماس اور مکافی کے مماس کی مساوات $y = mx + \frac{a}{m}$ ہے خط $y = mx + c$ کے $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$ بیضوی یا ہذلولی کا مماس ہونے کا شرط مکافی کے صورت حال کی طرح سے ذیل میں حاصل کیاگیا ہے۔

### (ii) بیضوی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

خط $y = mx + c$ کے بیضوی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ پر کا مماس ہونے کا شرط، $c^2 = a^2m^2 + b^2$ ہے جس میں نقطہ مماس $\left(-\frac{a^2m}{c}, \frac{b^2}{c}\right)$ ہے اور مماس کی مساوات $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ ہے۔

### (iii) ہذلولی $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

خط $y = mx + c$ کے ہذلولی $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ کا مماس ہونے کا شرط $c^2 = a^2m^2 - b^2$ ہے۔جس میں نقطہ مماس $\left(-\frac{a^2m}{c}, -\frac{b^2}{c}\right)$ ہے اور مماس کی مساوات $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$ ہے۔

### غور کیجئے (Note)

(1) $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ میں، $y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ یا تو $y = mx - \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ بیضوی کے مماس کی مساوات ہے مگر دونوں نہیں۔

(2) $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$ میں $y = mx + \sqrt{a^2m^2 - b^2}$ یا تو $y = mx - \sqrt{a^2m^2 - b^2}$ ہذلولی کے مماس کی مساوات ہے مگر دونوں نہیں۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 204 27-02-2023 16:21:49

## نتیجہ (ثبوت طالب علم کے ذمہ ہے)

(1) مستوی پر کسی بیرونی نقطے سے (i) مکافی (ii)بیضوی اور (iii) ہذلولی ، کو دو مماسیں کھینچے جاسکتے ہیں۔

(2) مستوی پر کسی بیرونی نقطے سے (i) مکافی (ii)بیضوی اور (iii)ہذلولی سے چار عمودیں کھینچے جاسکتے ہیں۔

(3) عمودی مماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق

(i) مکافی $y^2 = 4ax$ کے لئے $x = -a$ ہے (ہادی خط)

(ii).بیضوی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ کے لئے $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ ہے (بیضوی کا ہادی دائرہ کہاجاتا ہے)

(iii) ہذلولی $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ کے لئے $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$ ہے (ہذلولی کا ہادی دائرہ کہا جاتا ہے)

### مثال 5.29

مکافی $x^2 + 6x + 4y + 5 = 0$ کے $(1, -3)$ پر مماس اور عمودی کی مساوات معلوم کیجئے۔

### حل

مکافی کی مساوات $x^2 + 6x + 4y + 5 = 0$ ہے۔

$$x^2 + 6x + 9 - 9 + 4y + 5 = 0$$

$$(x+3)^2 = -4(y-1) \qquad \ldots (1)$$

فرض کیجئے کہ $X = x+3, Y = y-1$

مساوات (1) معیاری شکل لیتی ہے۔

$$X^2 = -4Y$$

مماس کی مساوات $XX_1 = -2(Y + Y_1)$

$(1, -3)$ پر، $X_1 = 1+3 = 4; Y_1 = -3-1 = -4$

لہٰذا، $(1, -3)$ پر مماس کی مساوات یہ ہے۔

$$(x+3)4 = -2(y-1-4)$$

$$2x + 6 = -y + 5 .$$

$$2x + y + 1 = 0 .$$

$(1, -3)$ پر مماس کا میلان $-2$ ہے، اس لئے $(1, -3)$ پر عمودی کا میلان $\frac{1}{2}$ ہے۔

لہٰذا، $(1, -3)$ پر عمودی کی مساوات اس طرح دی جاتی ہے۔

$$y + 3 = \frac{1}{2}(x-1)$$

$$2y + 6 = x - 1$$

$$x - 2y - 7 = 0 .$$

### مثال 5.30

بیضوی $x^2 + 4y^2 = 32$ کے مماس اور عمودی کی مساوات معلوم کیجئے جب $\theta = \frac{\pi}{4}$

## حل

بیضوی کی مساوات $x^2+4y^2 = 32$ ہے۔

$$\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{8} = 1$$

$$a^2 = 32,\ b^2 = 8$$

$$a = 4\sqrt{2},\ b = 2\sqrt{2}$$

$\theta = \frac{\pi}{4}$ پر مماس کی مساوات یہ ہے۔

$$\frac{x\cos\frac{\pi}{4}}{4\sqrt{2}}+\frac{y\sin\frac{\pi}{4}}{2\sqrt{2}} = 1$$

$$\frac{x}{8}+\frac{y}{4} = 1$$

$$x+2y-8 = 0.$$

عمودی کی مساوات یہ ہے۔ $\frac{4\sqrt{2}x}{\cos\frac{\pi}{4}}-\frac{2\sqrt{2}y}{\sin\frac{\pi}{4}} = 32-8$

یعنی، $8x-4y = 24$

$$2x-y-6 = 0.$$

### دوسرا طریقہ

$$\text{At},\quad \theta = \frac{\pi}{4},$$

$$(a\cos\theta,\ b\sin\theta) = \left(4\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4},\ 2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= (4,2)$$

$\theta = \frac{\pi}{4}$ پر مماس کی مساوات $(4,2)$ پر بھی وہی ہے۔

کارتیسی شکل میں مماس کی مساوات $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2} = 1$ ہے۔

$$x+2y-8 = 0$$

$$y-2 = 2(x-4)$$

مماس کا میلان $-\frac{1}{2}$ ہے۔
عمودی کا میلان $2$ ہے۔
عمودی کی مساوات یہ ہے۔

$$y-2x+6 = 0.$$

## مشق 5.4

1. دو مماسوں کی مساوات معلوم کیجئے جو $(5,2)$ سے بیضوی $2x^2+7y^2 = 14$ کو کھینچے جاسکتے ہے۔
2. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{64} = 1$ ہذلولی کے مماس کی مساوات معلوم کیجئے۔جو $10x-3y+9 = 0$ کے متوازی ہو۔
3. ثابت کیجئے۔ کہ خط $x-y+4 = 0$ بیضوی $x^2+3y^2 = 12$ کو ایک مماس ہے۔ اس کے علاہ نقطہ مماس کے مختص بھی معلوم کیجئے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 206 27-02-2023 16:22:18

4. مکافی $y^2 = 16x$ کے مماس کی مساوات معلوم کیجئے جو $2x + 2y + 3 = 0$ کے عمودی ہو۔

5. $t = 2$ پر مکافی $y^2 = 8x$ کے مماس کی مساوات معلوم کیجئے۔(اشارہ : پیائشی شکل استعمال کریں)

6. $\theta = \frac{\pi}{3}$ پر ہذلولی $12x^2 - 9y^2 = 108$ کے مماس اور عمودی کے مساوات معلوم کیجئے (اشارہ : پیائشی شکل استعمال کریں)

7. ثابت کیجئے مکافی $y^2 = 4ax$ پر، $\left[at_1t_2 , a(t_1 + t_2)\right]$ '$t_1$' اور '$t_2$' پر مماسوں کا نقطہ تقاطع ہے۔

8. اگر مکافی $y^2 = 4ax$ پر نقطہ '$t_1$' پر عمودی مکافی کو دوبارہ '$t_2$' پر ملتا ہو تو ثابت کیجئے کہ $t_2 = -\left(t_1 + \frac{2}{t_1}\right)$

## 5.7 مخروطی تراشوں کے حقیقی زندگی میں استعمالات (Real life Applications of Conics)

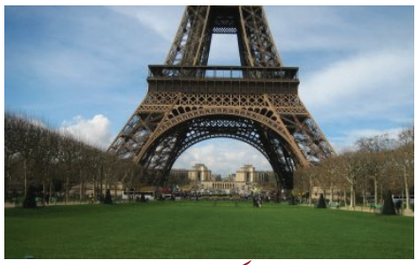
### 5.7.1 مکافی (Parabola)

مکافی کے دلچسپ استعمالات میں روشنی یا ریڈیائی لہروں (radio waves) کے انعکاس کنندہ (reflectors) اور وصول کنندہ (receivers) کی طرح سے ان کے استعمالات شامل ہیں، مثال کے طور پر ، کار کے ہیڈلائٹ اور فلاش لائیٹ کی آڑی تراش مکافیاں ہیں جن میں مکافی شکلی کے اس کے محور پر کے گھومنے سے یہ آلات بنتے ہیں۔ ہیڈلائٹ اور فلاش لائٹ میں بلب ماسکہ پر واقع ہے اور اس نقطے سے روشنی تشاکل کے محور کے متوازی باہر انعکاس ہوتی ہے (خاکہ 5.60) جبکہ سیارچہ رکابی (Satellite dishes) اور میدانی مائیکروفون کا کھیلوں کے مواقع ، میں استعمال ریڈیائی یا صوتی لہروں کے حاصل کرنے میں محور کے متوازی استعمال ہوتے ہیں جو ماسکہ میں انعکاس ہوکر یہ اور تیز ہوتی ہے (خاکہ 5.59) ۔ اسی طرح، شمسی پکوان میں، ایک خانے میں مکافی آئینہ رکھا ہوا ہوتا ہے۔جس میں ایک کھانے کا گھڑا ماسکی رقبہ پر لٹکایا ہوا ہوتا ہے۔(خاکہ 5.1) داخل ہونے والا سورج کے شعاعیں جو محور کے متوازی ہیں کر ماسکہ میں انعکاس ہوتے ہیں جس سے پکوان کے لئے کافی زیادہ تپش حاصل ہوتی ہے۔

مکافی محرابیں بہترین پائیدار شکلیں ہیں اور ان کی خوبصورتی کے لئے قابل تعظیم ہیں۔ جیسا کہ ہندوستان میں، آندھرا پردیش کے، گوداوری ندی میں پل پر محرابیں فرانس کے پیرس میں، ایفل ٹور۔



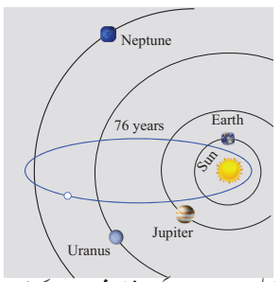
خاکہ 5.49



خاکہ 5.50

### 5.7.2 بیضوی (Ellipse)

جانس کپلر (Johannes Kepler) کے مطابق، نظام شمسی میں تمام سیارے سورج کے اطراف بیضوی محوروں میں گردش کرتے ہیں جس میں سورج ایک ماسکہ پر ہے۔ چند دم دار تاروں (Halley's Comet ) کے بھی بیضوی محوریں ہوتے ہیں جن میں سورج ایک ماسکہ پر ہےمثلاً ہیلے کا دم دار تارہ جو ہر 75 سال میں ایک مرتبہ نظر آتا ہے $e \approx 0.97$ کے ساتھ بیضوی محور میں (خاکہ 5.51)۔ہمارا سیارچہ چاند زمین کے اطراف بیضوی محورپر سفر کرتا ہے جس میں زمین کسی ایک ماسکہ پر ہے ۔ دوسرے سیاروں کے سیارچہ بھی ان کے سیاروں کے اطراف بیضوی محوروں میں ہی گردش کرتے ہیں۔



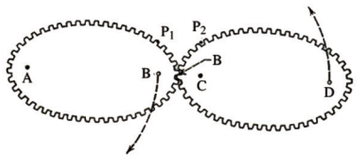

پہلے دم دار تارے کی بیضوی محور جوہر کے بھو

خاکہ 5.51

بیضوی محرابیں (arches) اکثر ان کی خوبصورتی اور پائیداری کے لئے ہی تعمیر کی جاتی ہیں۔ یہ مانا جاتا ہے کہ تبخیری بھاپ دان (Steam boilers) زیادہ مظبوطی رکھتے ہیں جب ان کے سرے بیضوی شکل کے بنائے گئے ہوں جس میں محور اکبر اور محور اصغر 2:1 کی نسبت میں ہوں۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 207 27-02-2023 16:22:24



خاکہ 5.52

سومرفلڈ کلیہ کے جوہری نظریہ میں (Bohr-Sommerfeld theory) بجلی کے ان محور دائری یا بیضوی ہوسکتے ہیں۔ بازاوقات دانتے دار چکر یا پہیا (Gears) (کسی خاص ضرورت کے لئے) بیضوی شکل (خاکہ 5.52) کے بنے ہوئے ہوتے ہیں۔

ہماری زمین کی ساخت کروی نارنگی مشکل کا ہے۔ یعنی، بیضوی کی اپنے محور اصغر پر گردش، خط استوائی حصے کے ہم راہ پھولا ہوا اور قطبی حصے پر چپٹا ہے۔

بیضوی کی خصوصیت، بیضوی کے ایک ماسکہ سے نکلی ہوئی شعاع یا آواز بیضوی کو چھوتے ہی انعکاس ہوتے ہوئے دوسرے ماسکہ پر پہنچاتی ہے (خاکہ 5.62)، جو طبعیات میں **شعاع وقوع** اور **شعاع انکاس کے** تصورات کو استعمال کرکے ثابت کیا جاسکتا ہے۔

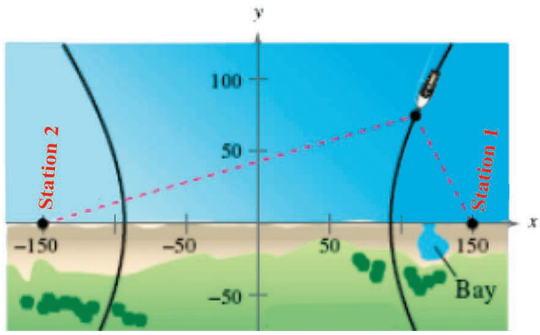
بیضوی عاکس (ellipsoidal reflectors) کا ایک حیرت انگیز طبی استعمال ایک آلہ جسے **لیتو ٹرپٹر (Lithotripter)** کہتے ہیں (خاکہ 5.4 اور5.63) جس میں برق مقناطیسی یا بالاصوتی ٹکنالوجی کو استعمال کرتے ہوئے شاک موج (shock wave) تیار کی جاتی ہے جس سے گردے کے کنکری کہ پیساجاتا ہے۔ یہ موج بیضوی کے ایک ماسکہ سے پیدا ہوتا ہے اور اسے گردے کے کنکری پر انعکاس کیا جاتا ہے۔جو دوسرے ماسکہ پر واقع ہوتا ہے۔ اس ٹکنیک کے نتیجہ میں دوسرے رسمی عمل جراحی سے بہت کم وقت میں صحت یابی حاصل ہوتی ہے، غیر متجاوز (non-invasive) اور شرح موت بھی کم ہے۔

## 5.7.3 ہذلولی (Hyperbola)

چند دم دار تارے ہذلولی راستے میں سفر کرتے ہیں جن میں سورج ایک ماسکہ پر ہوتا ہے، اس طرح کے دم دار تارے صرف ایک ہی مرتبہ سورج سے گذرتے ہیں یہ بیضوی محوروں کے دم دار تاروں کے برخلاف گھومتے ہیں جو ایک وقفہ کے بعد دوبارہ سورج سے گذرتے ہیں۔

ہذلولیاں فن تعمیر میں بھی ہم ہذلولی اں دیکھتے ہیں، جیسے ممبئی کا ہوائی اڈا (خاکہ 5.53)، فلکیتی مشین (planetarium) کی آڑی تراش میں، جہازوں کے مقام معلوم کرنے میں (خاکہ 5.54) بھاپ یا جوہر توانائی خانہ (plant nuclear power) کے کولنگ ٹاور (cooling tower) میں (خاکہ 5.5)


خاکہ 5.53



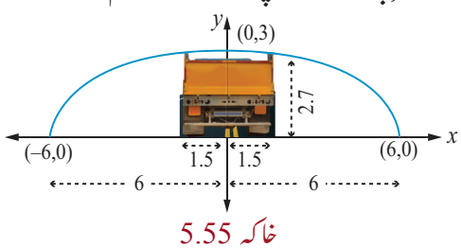
خاکہ 5.54

**مثال 5.31**

ایک طرفی سڑک (one-way road) کے اوپر ایک نصف بیضوی محرابی راستہ جس کی اونچائی 3 میٹر اور چوڑائی 12 میٹر ہے۔ ایک لاری کی چوڑائی 3 میٹر اور اونچائی 2.7 میٹرہے۔ کیا اس محرابی راستے کے داخلے سے وہ لاری نکل پائے گی؟ (خاکہ 5.6)

**حل**

چونکہ لاری کی چوڑائی 3 میٹر ہے، اس کے نکلنے کا حل معلوم کرنے کے لئے، ہمیں مرکز سے محرابی راستہ کی اونچائی 1.5 میٹر معلوم کرنا ضروری ہے۔ اگر یہ اونچائی 2.7 میٹر یا اس سے کم ہو تو محرابی راستے سے یہ لاری نکل نہیں پائے گی۔



خاکہ 5.55

خاکہ سے $a = 6$ اور $b = 3$ سے بیضوی کی مساوات اس طرح $\frac{x^2}{6^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ حاصل ہوتی ہے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 208 27-02-2023 16:22:26

3m چوڑائی والے لاری مرکز سے $x = 1.5m$ کے نظیری ہے۔ $x = 1.5$ کو بھرتی کرتے ہوئے اور $y$ کے لئے حل کرتے ہوئے ہم مرکز سے $1.5m$ والے محراب کی اونچائی معلوم کریں گے۔

$$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$y^2 = 9\left(1 - \frac{9}{144}\right)$$

$$= \frac{9(135)}{144} = \frac{135}{16}$$

$$y = \frac{\sqrt{135}}{4}$$

$$= \frac{11.62}{4}$$

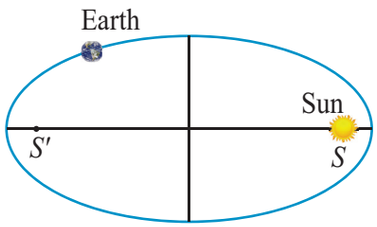
$$= 2.90$$

غرض مرکز سے $1.5m$ والے محراب کی اونچائی تقریباً $2.90m$ ہے۔چونکہ لاری کی اونچائی $2.7m$ ہے۔لاری محرابی راستے سے نکل سکتی ہے۔

## مثال 5.32

سورج سے زمین کے زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم فاصلے بالترتیب $152\times10^6$ km اور $94.5\times10^6$ km ہیں۔ سورج بیضوی محور کے ایک ماسکہ پر واقع ہے۔ سورج سے دوسرے ماسکہ کا فاصلہ معلوم کیجئے۔

**حل**



خاکہ 5.56

$AS = 94.5\times10^6$ km, $SA' = 152\times10^6$ km

$a + c = 152\times10^6$

$a - c = 94.5\times10^6$

تفریق کرنے پر، $2c = 57.5\times10^6 = 575\times10^5$ km

سورج سے دوسرے ماسکہ کا فاصلہ $SS' = 575\times10^5$ km ہے۔

## مثال 5.33

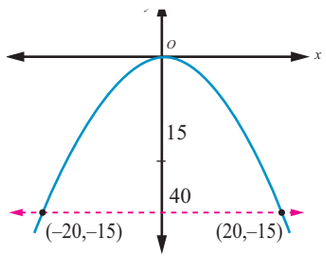
ایک ٹھوس پل (concrete bridge) مکافی محراب کے شکل میں بنایا گیا ہے۔پل کے اوپر سڑک کی لمبائی 40m ہے اور محراب کی زیادہ سے زیادہ اونچائی 15m ہے۔ مکافی محراب کی مساوات لکھئے۔

**حل**

ترسیم سے راس (0,0) پر ہے اور مکافی نیچے کی طرف کھلا ہے۔

$x^2 = -4ay$ مکافی کی مساوات ہے۔

$(-20,-15)$ اور $(20,-15)$ مکافی پر واقع ہے۔



خاکہ 5.57

$20^2 = -4a(-15)$

$4a = \frac{400}{15}$

$x^2 = \frac{-80}{3} \times y$

لہٰذا، مساوات $3x^2 = -80y$ ہے۔

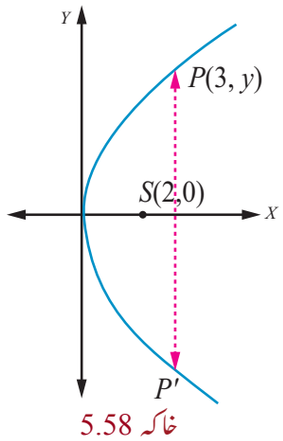


12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 209 27-02-2023 16:22:38

### مثال 5.34

مکافی خبر رسانی آنٹینا (antenna) کا ماسکہ اس کے راس سے 2m کے فاصلے پر ہے۔ راس سے 3m والے انٹینا کی چوڑائی معلوم کیجئے۔

**حل**



خاکہ 5.58

فرض کیجئے کہ مکافی $y^2 = 4ax$ ہے۔

چونکہ راس $a = 2$ سے ماسکہ 2m پر ہے۔

$y^2 = 8x$ مکافی کی مساوات ہے۔

فرض کیجئے کہ $P$ مکافی پر ایک نقطہ ہے ۔ جس کا x- مختص راس $P(3, y)$ سے 3m ہے

$$y^2 = 8\times 3$$
$$y = \sqrt{8\times 3}$$
$$= 2\sqrt{6}$$

راس سے 3m والے آنٹینا کی چوڑائی $4\sqrt{6}\ m$ ہے۔

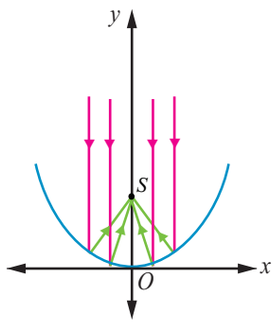
## 5.7.4 مکافی کی انعکاسی خصوصیت (Reflective property of parabola)

مکافی کے ماسکہ پر پیدا ہونے والے روشنی یا (صوتی) آواز یا ریڈیائی لہریں مکافی کے محور کے متوازی انعکاس ہوتے ہیں۔ (خاکہ 5.60) اور اسکے بر خلاف محور کے متوازی آنے والے شعاعیں ماسکہ کی جانب جاتی ہے (خاکہ 5.59)

### مثال 5.35

مساوات $y = \frac{1}{32}x^2$ مکافی آئینوں کے آڑی تراشوں کا نمونہ ہے جو شمسی توانائی کے لئے استعمال کئے جاتے ہیں۔ ہر مکافی کے ماسکہ پر ایک حراری نالی (heating tube) واقع ہے ؛ یہ نالی مکافی کے راس کے اوپر کتنی اونچائی پر واقع ہے؟

**حل**



خاکہ 5.59

مکافی کی مساوات یہ ہے۔

$$y = \frac{1}{32}x^2$$

یعنی، $x^2 = 32y$ راس $(0,0)$ ہے۔

$$= 4(8)y$$
$$\Rightarrow a = 8$$

اس لئے حراری نالی کو ماسکہ $(0,a)$ پر رکھنے کی ضرورت ہے۔ چنانچہ حراری نالی کو مکافی کے راس 8 اکائیاں اوپر رکھنا چاہئے۔

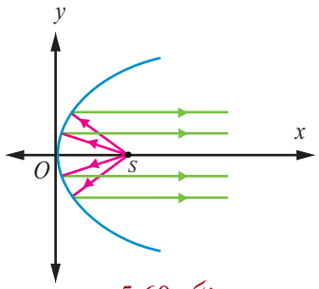
### مثال 5.36

ایک تلاشی چراغ (search light) میں مکافی عاکس (parabolic reflector) ہے (آڑی تراش یعنی، رکابی شکل کا ہے)۔ مکافی رکابی (bowl) کنارے سے کنارے $40\,cm$ چوڑا اور $30\,cm$ گہرا ہے۔بلب ماسکہ پر واقع ہے۔

(1) عاکس کے لئے استعمال کی گئی مکافی کی مساوات کیا ہے؟

(2) راس سے بلب کو کتنے فاصلے پر رکھنا چاہئے اس طرح کہ زیادہ سے زیادہ فاصلہ طے کرے؟

**حل**



خاکہ 5.60

فرض کیجئے کہ راس $(0,0)$ ہے۔

مکافی کی مساوات یہ ہے۔

$$y^2 = 4ax$$

(1) چونکہ قطر $40\,cm$ ہے اور گہرائی $30\,cm$ ہے، نقطہ $(30,20)$ مکافی پر واقع ہے۔

$$20^2 = 4a \times 30$$

$$4a = \frac{400}{30} = \frac{40}{3}.$$

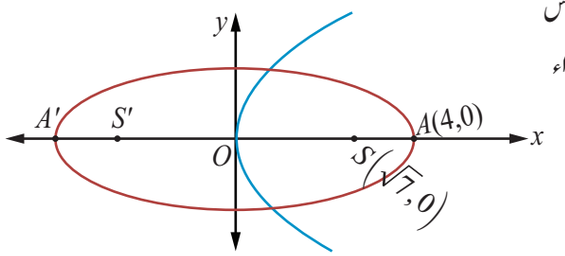
مساوات $y^2 = \frac{40}{3}x$ ہے۔

(2) بلب ماسکہ $(a,0)$ پر ہے۔ لہٰذا، راس سے بلب $\frac{10}{3}\,cm$ کے فاصلے پر ہے۔

■

### مثال 5.37

ایک بصری عدسی نظام کے بیضوی حصے کی مساوات $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ ہے۔اس نظام کے مکافی حصے کا ماسکہ بیضوی کا دائیں ماسکہ مشترک ہے۔ مکافی کا راس مبداء پر ہے اور مکافی دائیں طرف کھلا ہوا ہے۔مکافی کی مساوات معلوم کیجئے ۔



خاکہ 5.61

**حل**

دئے گئے بیضوی میں $a^2 = 16, b^2 = 9$

پھر ، $c^2 = a^2 - b^2$

$$c^2 = 16 - 9$$

$$= 7$$

$$c = \pm\sqrt{7}$$

لہٰذا، ماسکہ $F\left(\sqrt{7},0\right), F'\left(-\sqrt{7},0\right)$ ہیں۔ مکافی کا ماسکہ $a=\sqrt{7} \Leftarrow \left(\sqrt{7},0\right)$ ہے۔

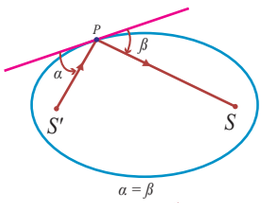
مکافی کی مساوات $y^2 = 4\sqrt{7}x$ ہے۔

■

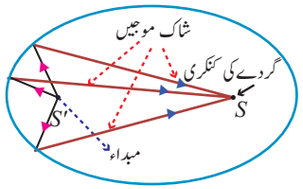
## 5.7.5 بیضوی کی انعکاسی خصوصیت (Reflective Property of an Ellipse)

ماسکوں سے بیضوی پر ایک نقطے کو ملانے والے خطوط اس نقطے پر خط مماس سے مساوی زاویے بناتے ہیں۔(خاکہ 5.62)

ایک ماسکہ سے خارج ہوئی روشنی یا آواز یا ریڈیائی لہریں بیضوی پر کسی نقطہ $P$ سے ٹکراتے ہوئے دوسرے ماسکہ پر حاصل کی جاتی ہے۔ (خاکہ 5.63)



خاکہ 5.62



خاکہ 5.63

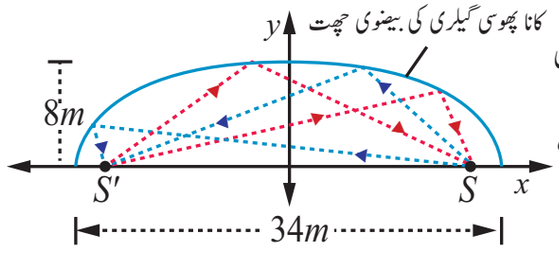
### مثال 5.38

$34m$ لمبائی والا ایک کمرہ کو ایک کانا پھوسی گیلیری (whispering gallery) بنایا جاتا ہے۔ اس کمرے کی چھت بیضوی ہے جیسا کہ خاکہ 5.64 میں بتایا گیا ہے۔ اگر چھت کی زیادہ سے زیادہ اونچائی $8m$ ہے، تو معلوم کیجئے کہ ماسکہ کہاں واقع ہونا چاہئے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 211
27-02-2023 16:22:55

**حل**




خاکہ 5.64

بیضوی چھت کے نصف محور اکبر کی لمبائی $a$، 17m ہے۔ نصف محور اصغر کی اونچائی $b$، 8m ہے۔ غرض،

$$c^2 = a^2 - b^2 = 17^2 - 8^2$$

پھر، $c = \sqrt{289-64} = \sqrt{225}$،

$$\simeq 15$$

بیضوی چھت کے لئے محور اکبر کے ہم راہ، مرکز کے دونوں جانب 15m کے فاصلے پر ماسکہ واقع ہیں۔

## غیر متجاور طبی معجزہ (A non-invasive medical miracle)

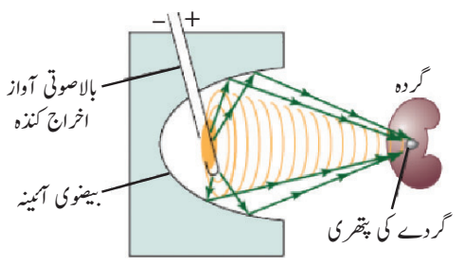
لیتوٹرپٹر (lithotripter) میں، کسی مبداء کے ذریعہ سے زیادہ ارتعاش والی صوتی موج خارج ہوتی ہے۔جو بیضوی کے کسی ایک ماسکہ پر واقع ہے۔مریض کو اس طرح لیٹایا جاتا ہے کہ گردے کی کنکری اسی بیضوی کے دوسرے ماسکہ پر ہو۔

### مثال 5.39

اگر بیضوی کی مساوات $\frac{(x-11)^2}{484}+\frac{y^2}{64}=1$ ہے۔($x$ اور $y$ سنٹی میٹر میں پیمائش کئے گئے ہیں)۔ تقریبی سنٹی میٹر میں مریض کے گردے کی کنکری کو کہاں رکھا جائے اس طرح کہ انعکاس شدہ آواز گردے کی کنکری سے ٹکرائے؟

**حل**

بیضوی کی مساوات $\frac{(x-11)^2}{484}+\frac{y^2}{64}=1$ ہے۔صوتی موج کا مبداء اور مریض کے گردے کی کنکری، کنکریوں کو کچلنے کے غرض سے دونوں ماسکوں پر ہونا چاہئے۔

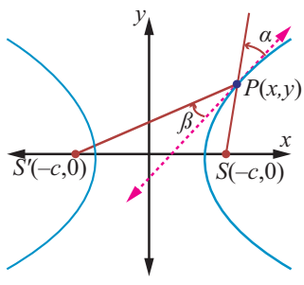



خاکہ 5.65

$$a^2 = 484 \text{ and } b^2 = 64$$
$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$= 484 - 64$$
$$= 420$$
$$c \simeq 20.5$$

لہٰذا، مریض کے گردے، کی کنکری کو بیضوی کے مرکز سے 20.5cm پر رکھنا چاہئے۔

## 5.7.6 ہذلولی کی انعکاسی خصوصیت (Reflective Property of a Hyperbola)




خاکہ 5.66

ماسکوں سے ہذلولی پر ایک نقطے کو ملانے والے خطوط اس نقطے پر خط مماس سے مساوی زاویے بناتے ہیں۔(خاکہ 5.66)

ماسکہ سے خارج ہوئی روشنی یا آواز یا ریڈئی موجیں بیضوی کے صورت حال کی طرح سے (خاکہ 5.54)دوسرے ماسکہ پر حاصل کی جاتی ہے۔ انہیں گہرے سمندر میں تیرنے والے جہازوں کے مقامات معلوم کرنے کے لئے استعمال کئے جاتے ہیں۔

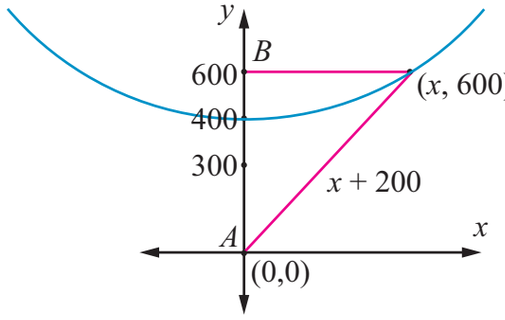
### مثال 5.40

دو ساحلی محافظی مقامات (stations) نقاط $A(0,0)$ اور $B(0,600)$ پر 600 km دوری پر واقع ہیں۔ $P$ پر ایک جہاز سے آفتی اشارہ (distress signal) دومقامات پر تھوڑے سے مختلف اوقات پر حاصل کیا جاتا ہے۔یہ معلوم کیا گیا کہ وہ جہاز مقام $B$ کی بہ نسبت مقام $A$ سے 200 km کی دوری پر ہے۔ ہذلولی کی مساوات معلوم کیجئے جو جہاز کے مقام سے گذرتا ہو۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 212 27-02-2023 16:23:03

## حل



خاکہ 5.67

چونکہ مرکز $(0,300)$ پر واقع ہے، جو دونوں ماسکوں کے درمیان ہے۔ یہ دونوں ماسکہ ساحلی محافظی مقامات ہیں، $\frac{(y-300)^2}{a^2}-\frac{(x-0)^2}{b^2}=1$ ...(1) مساوات یہ ہے۔

$a$ اور $b$ کی قیمتیں معلوم کرنے کے لئے، ہذلولی پر دو نقاط انتخاب کرتے ہوئے انہیں اوپر کی مساوات میں بھرتی کرتے ہیں۔

نقطہ $(0,400)$ ہذلولی پر واقع ہے، چونکہ یہ نقطہ مقام $B$ کی بہ نسبت مقام $A$ سے 200 km دوری پر ہے۔

$600^2+x^2=(x+200)^2$ ہذلولی پر اسی طرح ہے کہ $(x,600)$ ایک اور نقطہ $a^2=10000$، $\frac{(400-300)^2}{a^2}-\frac{0}{b^2}=1$، $\frac{100^2}{a^2}=1$

$$360000+x^2 = x^2+400x+40000$$

$$x = 800$$

$$\frac{(600-300)^2}{10000}-\frac{(800-0)^2}{b^2} = 1$$ میں بھرتی کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ (1)

$$9-\frac{640000}{b^2} = 1$$

$$b^2 = 80000$$

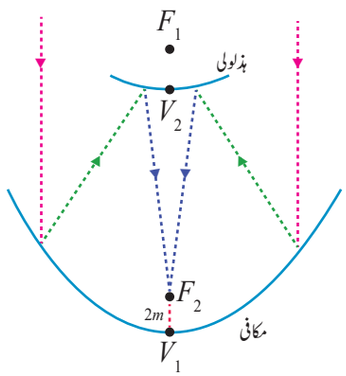
غرض ہذلولی کی مطلوبہ مساوات $\frac{(y-300)^2}{10000}-\frac{x^2}{80000}=1$ ہے۔

جہاز ہذلولی پر کہیں واقع ہے۔ ایک تیسرے مقام سے معطیات کو استعمال کرتے ہوئے ٹھیک مقام معلوم کیا جاسکتا ہے۔ ■

## مثال 5.41

بعض مخصوص دور بینوں میں مکافی آئینہ اور ہذلولی آئینہ دونوں ہوتے ہیں۔ خاکہ 5.68 میں بتایا گیا دوربین میں مکافی اور ہذلولی کا ماسکہ $F_1$ یکساں ہے جو مکافی کے راس کے 14m اوپر ہے۔ $F_2$ ہذلولی کا دوسرا ماسکہ مکافی کے راس کے 2m اوپر ہے۔ ہذلولی آئینے کا راس $F_1$ سے 1m نیچے ہے۔ محددی نظام کو مقام کریں جس میں ہذلولی کا مرکز مبداء اور $y$ محور پر ماسکہ ہو۔ پھر ہذلولی کی مساوات معلوم کیجئے۔

## حل



خاکہ 5.68

فرض کیجئے کہ مکافی کا راس $V_1$ ہے اور ہذلولی کا راس $V_2$ ہے۔

$\overline{F_1F_2} = 14-2=12m,\ 2c=12,\ c=6$

ہذلولی کے راس سے مرکز کا فاصلہ $a=6-1=5$ ہے۔

$$b^2 = c^2-a^2$$
$$= 36-25=11.$$

لہٰذا ہذلولی کی مساوات $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{11}=1$ ہے۔

■



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 213 27-02-2023 16:23:13

## مشق 5.5

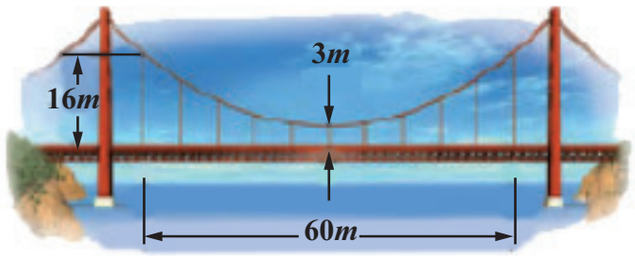
1. ایک پل میں مکافی محراب ہے جو مرکز میں 10m اونچا ہے اور قاعدے پر 30m چوڑا ہے۔ مرکز کے دونوں طرف سے 6m دوری پر محراب کی اونچائی معلوم کیجئے۔

2. چار سڑکی شاہراہ (highway) کے لئے پہاڑ میں ایک سرنگ کھودا گیا ہے جس کا داخلہ بیضوی ہے۔شاہراہ کی کل چوڑائی (داخلہ کی نہیں) کو 16m ہونا ہے ، اور سڑک کے کنارے کی اونچائی 4m اونچائی والی لاری کے نکلنے کے لئے کافی ہو اگر داخلے کی زیادہ سے زیادہ اونچائی تقریباً 5m ہو۔تو داخلہ کتنا چوڑا ہونا چاہئے۔

3. پانی کے ایک فوارے پر، پانی اس کے مبداء سے 0.5m افقی فاصلہ پر 4m زیادہ سے زیادہ اونچائی تک پہنچتا ہے۔ اگر پانی کا راستہ مکافی ہے ، مبداء کے نقطے سے 0.75m افقی فاصلے پر پانی کی اونچائی معلوم کیجئے۔

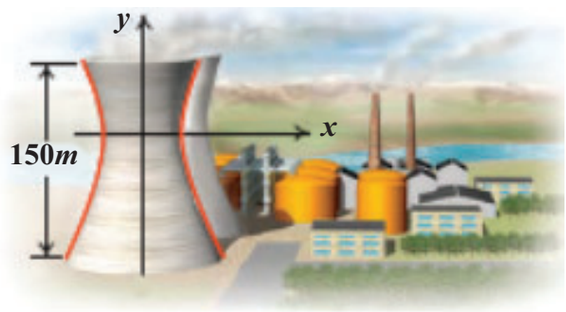
4. ایک انجینئر مکافی آڑی تراش کی سیارچی تھالی (satellite dish) بناتا ہے۔اس تھالی کا داخلہ 5m چوڑا ہے اور راس سے 1.2m پر ماسکہ ہے۔
(a) محددی نظام کو مقام کریں جس میں مبداء مکافی کے راس پر ہو اور تشاکل کا محور x محور پر ہو اور مکافی کی مساوات معلوم کیجئے۔
(b) راس پر سیارچی تھالی کی گہرائی معلوم کیجئے۔

5. معلق پُل (لٹکے ہوئے ) سڑک کے 60m حصے کی مکافی رسی (Parabolic Cable) نیچے دکھائی گئی ہے ۔صورت حال پر ہے۔ سڑک کے اس ہم راہ کے حصہ میں ہر 6m کے فاصلے پر عمودی رسیاں (Vertical Cables) ہیں۔ راس سے پہلے کے دو عمودی رسیوں کی لمبائیاں معلوم کیجئے ۔




خاکہ 5.69

6. جوہری حراری جذب کرنے کا مینار (cooling tower) کی آڑی تراش ایک ہذلولی کی شکل میں ہے۔جس کی مساوات $\frac{x^2}{30^2}-\frac{y^2}{44^2}=1$ ہے۔مینار 150m بلند ہے اور مینار کی چوٹی سے ہذلولی کے مرکز کا فاصلہ مینار کے قدم سے ہذلولی کے مرکز کے فاصلے کا آدھا ہے، مینار کے چوٹی اور قدم کا قطر معلوم کیجئے۔




خاکہ 5.70



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 214 27-02-2023 16:23:15

7. 1.2m لمبائی والا سلاق اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اس کے دونوں کنارے ہمیشہ محددی محوروں کو چھوتے ہیں۔ سلاق پر ایک نقطہ P کا طریق جو کنارے سے 0.3m x - محور کے ساتھ مس کرتا ہے وہ بیضوی ہے۔ خروج مرکز معلوم کیجئے ۔

8. اخذ کیجئے کہ چپٹے نالی (horizontal pipe) کے کنارے سے پانی خارج ہوتا ہے ۔جو زمین کے 7.5m اوپر ہے ، جو ایک مکافی راستہ ظاہر کرتا ہے۔مکافی راستے کار اس نالی کے کنارے پر ہے۔ نالی کے خط کے نیچے 2.5m کے مقام پر، نالی کے کنارے سے عمودی خط کے 3m اس پار پانی کا بہاؤ باہر کی طرف منحنی بناتا ہے۔اس عمودی خط کے اس پار کتنی دوری پر پانی زمین پر گرے گا؟

9. ایک راکٹ پٹاخا داغنے پر مکافی راستے میں آگے کی جانب حرکت کرتے ہوئے زیادہ سے زیادہ 4m کے اونچائی پر پہنچتا ہے۔ جب یہ شروع ابھار کے نقطے سے 6m دوری پر ہے۔ آخرکار یہ شروع کے نقطے سے 12m کے دوری پر زمین پر پہنچتا ہے۔ اس ابھار کا زاویہ معلوم کیجئے

10. نقاط A اور B، 10km کے فاصلے پر ہیں اور مختلف اوقات پر ان دونوں نقاط پر کسی دھماکے کی آواز سے یہ معلوم کیا گیا دھماکے کا مقام نقطہ B کے بہ نسبت نقطہ A سے 6km قریب ہے۔ بتائیے کہ دھماکے کا مقام ایک مخصوص منحنی پر محدود ہے اور اس کی مساوات معلوم کیجئے ۔

## مشق 5.6

6DPUC

**دئے گئے چار حل میں سے صحیح یا سب سے مناسب جواب کا انتخاب کریں۔**

1. $(1,5)$ اور $(4,1)$ سے گذرنے اور $y$ محور کو چھونے والے دائرے کی مساوات $x^2+y^2-5x-6y+9+\lambda(4x+3y-19)=0$ ہے جہاں $\lambda$ مساوی ہے۔

(1) $0,-\frac{40}{9}$ (2) $0$ (3) $\frac{40}{9}$ (4) $\frac{-40}{9}$

2. ہذلولی جس کا لیٹس ریکٹم 8 ہے اور زوجی محور اس کے ماسکوں کے فاصلے کا آدھا ہے تو اس کا خروج مرکز

(1) $\frac{4}{3}$ (2) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ (3) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (4) $\frac{3}{2}$

3. دائرہ $x^2+y^2=4x+8y+5$ خط $3x-4y=m$ کو دو مختلف نقاط پر قطع کرتا ہے اگر

(1) $15<m<65$ (2) $35<m<85$ (3) $-85<m<-35$ (4) $-35<m<15$

4. دائرہ جو $x$ - محور کو نقطہ $(1,0)$ پر چھوتا ہے اور نقطہ $(2,3)$ سے گذرتا ہے اس کے قطر کی لمبائی یہ ہے۔

(1) $\frac{6}{5}$ (2) $\frac{5}{3}$ (3) $\frac{10}{3}$ (4) $\frac{3}{5}$

5. دائرہ $3x^2+by^2+4bx-6by+b^2=0$ کا نصف قطر ہے ۔

(1) 1 (2) 3 (3) $\sqrt{10}$ (4) $\sqrt{11}$

6. خطوط $x^2-8x-12=0$ اور $y^2-14y+45=0$ سے بنے مربع میں بنائے گئے (inscribed) دائرہ کا مرکز یہ ہے۔

(1) $(4,7)$ (2) $(7,4)$ (3) $(9,4)$ (4) $(4,9)$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 215 27-02-2023 16:23:27

7. دائرہ $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ کے کا عمودی جو خط $2x+4y=3$ کے متوازی ہے تو اس کی مساوات یہ ہے۔

(1) $x+2y=3$ (2) $x+2y+3=0$ (3) $2x+4y+3=0$ (4) $x-2y+3=0$

8. اگر $P(x,y)$ ، $16x^2+25y^2=400$ پر ایک نقطہ ہے جس کے ماسکہ $F_1(3,0)$ اور $F_2(-3,0)$ ہوں تو $PF_1+PF_2$

(1) 8 (2) 6 (3) 10 (4) 12

9. نقطہ $(6,2)$ سے گذرنے والا دائرہ جس کی دو قطریں $x+y=6$ اور $x+2y=4$ ہوں تو اس کا نصف قطر ہے۔

(1) 10 (2) $2\sqrt{5}$ (3) 6 (4) 4

10. ہذلولی $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ اور $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ کے ماسکوں سے بننے والے چار ضلعی کا رقبہ ہے۔

(1) $4(a^2+b^2)$ (2) $2(a^2+b^2)$ (3) $a^2+b^2$ (4) $\frac{1}{2}(a^2+b^2)$

11. اگر مکافی $y^2=4x$ کے لیٹس ریکٹم کے انتہائی نقاط سے کھینچے گئے عمودیں $(x-3)^2+(y+2)^2=r^2$ دائرہ کے مماسیں ہوں تو $r^2$ کی قیمت ہے۔

(1) 2 (2) 3 (3) 1 (4) 4

12. اگر $x+y=k$ مکافی $y^2=12x$ کا عمودی ہو تو $k$ کی قیمت ہے۔

(1) 3 (2) $-1$ (3) 1 (4) 9

13. بیضوی $E_1 : \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ ایک مستطیل $R$ کے اندر (inscribed) بنایا گیا ہے۔ جس کے اضلاع محدد محوروں کے متوازی ہیں۔ ایک اور بیضوی $E_2$ اس مستطیل $R$ کے احاطے پر بنتا ہے۔(circumscribes) جو نقطہ $(0,4)$ سے گذرتا ہے۔ بیضوی کا خروج مرکز ہے۔

(1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{3}{4}$

14. خط مستقیم $2x-y=1$ کے متوازی ہذلولی $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ کی مماسیں کھینچے گئے ہیں۔ ہذلولی کے مماسوں کا ایک نقطہ مماس ہے۔

(1) $\left(\frac{9}{2\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ (2) $\left(\frac{-9}{2\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (3) $\left(\frac{9}{2\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (4) $\left(3\sqrt{3},-2\sqrt{2}\right)$

15. مرکز $(0,3)$ اور بیضوی $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ کے ماسکوں سے گذرنے والے دائرے کی مساوات ہے۔

(1) $x^2+y^2-6y-7=0$ (2) $x^2+y^2-6y+7=0$

(3) $x^2+y^2-6y-5=0$ (4) $x^2+y^2-6y+5=0$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 216 27-02-2023 16:23:48

16. فرض کیجئے کہ $C$ ایک دائرہ ہے جس کا مرکز $(1,1)$ اور نصف قطر=1 ہے۔ اگر $T$ ایک دائرہ ہے جس کا مرکز $(0,y)$ پر ہے۔ اور یہ مبداء سے گذرتے ہوئے دائرہ $C$ کو بیرونی جانب چھوتا ہے، تو $T$ کانصف قطر مساوی ہے۔

(1) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{1}{4}$

17. ایک بیضوی لیجئے جس کا مرکز مبداء پر ہو اور اس کا محور اکبر $x$ - محور کے ہم راہ ہو۔ اگر اس کا خروج مرکز $\frac{3}{5}$ ہے اور اس کے ماسکوں کے درمیان کا فاصلہ 6 ہے، تو بیضوی کے محور اکبر او رمحور اصغر کے بقدر وتریں رکھنے والے چار ضلعی کا رقبہ ہے۔

(1) 8 (2) 32 (3) 80 (4) 40

18. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ بیضوی کے اندر کھینچے گئے بڑے سے بڑے مستطیل کا رقبہ ہے۔

(1) $2ab$ (2) $ab$ (3) $\sqrt{ab}$ (4) $\frac{a}{b}$

19. ایک بیضوی کا نصف محور اصغر $OB$ ہے، $F$ اور $F'$ اس کے ماسکہ ہیں اور زاویہ $FBF'$ زاویہ قائمہ ہے۔ تو بیضوی کا خروج مرکز ہے۔

(1) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{4}$ (4) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

20. $(x-3)^2+(y-4)^2=\frac{y^2}{9}$ بیضوی کا خروج مرکز ہے ۔

(1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{1}{3\sqrt{2}}$ (4) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

21. اگر مکافی $y^2=4x$ کو نقطہ $P$ سے کھینچی گئی دو مماسین زاویہ قائمہ پر ہوں تو $P$ کا طریق ہے۔

(1) $2x+1=0$ (2) $x=-1$ (3) $2x-1=0$ (4) $x=1$

22. وہ دائرہ جو $(1,-2)$ سے گذرتا ہے اور $x$ کے محور کو $(3,0)$ پر چھوتے ہوئے کس نقطے سے گذرتا ہے

(1) $(-5,2)$ (2) $(2,-5)$ (3) $(5,-2)$ (4) $(-2,5)$

23. ایک نقطے کا طریق جس کا $(-2,0)$ سے فاصلہ خط $x=\frac{-9}{2}$ سے اس کے فاصلے کا $\frac{2}{3}$ گنا ہے تو وہ طریق ہے۔

(1) مکافی (2) ہذلولی (3) بیضوی. (4) دائرہ

24. $m$ کی وہ قیمتیں جن کے لئے خط $y=mx+2\sqrt{5}$ ہذلولی $16x^2-9y^2=144$ کو چھوتا ہو، وہ $x^2-(a+b)x-4=0$ کی جذریں ہیں تو $(a+b)$ کی قیمت ہے۔

(1) 2 (2) 4 (3) 0 (4) $-2$

25. اگر دائرہ $x^2+y^2-8x-4y+c=0$ کے قطر کا ایک کنارے کے مختصیں $(11,2)$ ہوں تو دوسرے کنارے کے مختصیں ہیں۔

(1) $(-5,2)$ (2) $(-3,2)$ (3) $(5,-2)$ (4) $(-2,5)$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 217 27-02-2023 16:24:05

## خلاصہ (SUMMARY)

(1) معیاری شکل میں دائرے کی مساوات ہے۔ $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

(i) مرکز $(h,k)$ (ii) نصف قطر ' $r$ '

(2) معیاری شکل میں دائرے کی مساوات ہے۔ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$

(i) مرکز $(-g,-f)$ (ii) نصف قطر $=\sqrt{g^2+f^2-c}$

(3) خط $lx+my+n=0$ اور دائرے $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ کے تقاطع سے گذرنے والا دائرہ ہے۔

$x^2+y^2+2gx+2fy+c+\lambda(lx+my+n)=0, \lambda\in\mathbb{R}^1$.

(4) دائرہ جس کے کسی ایک قطر کے انتہائی نقاط $(x_1,y_1)$ اور $(x_2,y_2)$ ہیں۔اس دائرہ کی مساوات ہے۔ $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$

(5) دائرہ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ پر نقطہ $(x_1,y_1)$ پر مماس کی مساوات ہے۔ $xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$

(6) دائرہ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ پر نقطہ $(x_1,y_1)$ پر عمودی کی مساوات ہے۔ $yx_1-xy_1+g(y-y_1)-f(x-x_1)=0$

### جدول 1

### مماس اور عمود (Tangent and normal)

| منحنی | مساوات | مماس کی مساوات | عمودی کی مساوات |
|---|---|---|---|
| دائرہ | $x^2+y^2=a^2$ | (i) کارتیسی شکل<br>$xx_1+yy_1=a^2$<br>(ii) پیمائشی شکل<br>$x\cos\theta+y\sin\theta=a$ | (i) کارتیسی شکل<br>$xy_1-yx_1=0$<br>(ii) پیمائشی شکل<br>$x\sin\theta-y\cos\theta=0$ |
| مکافی | $y^2=4ax$ | (i) $yy_1=2a(x+x_1)$<br>(ii) $yt=x+at^2$ | (i) $xy_1+2y=2ay_1+x_1y_1$<br>(ii) $y+xt=at^3+2at$ |
| بیضوی | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ | (i) $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$<br>(ii) $\frac{x\cos\theta}{a}+\frac{y\sin\theta}{b}=1$ | (i) $\frac{a^2x}{x_1}+\frac{b^2y}{y_1}=a^2-b^2$<br>(ii) $\frac{ax}{\cos\theta}-\frac{by}{\sin\theta}=a^2-b^2$ |
| ہذلولی | $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ | (i) $\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1$<br>(ii) $\frac{x\sec\theta}{a}-\frac{y\tan\theta}{b}=1$ | (i) $\frac{a^2x}{x_1}+\frac{b^2y}{y_1}=a^2+b^2$<br>(ii) $\frac{ax}{\sec\theta}+\frac{by}{\tan\theta}=a^2+b^2$ |



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 218 27-02-2023 16:24:28

## جدول 2

## $y = mx + c$ خط کے مخروطی تراشوں کو مماس ہونے کا شرط

**(Condition for the sine $y = mx + c$ to be a tangent to the Conics)**

| مخروطی تراشہ | مساوات | مماس ہونے کا شرط | نقطہ مماس | مماس کی مساوات |
|---|---|---|---|---|
| دائرہ | $x^2 + y^2 = a^2$ | $c^2 = a^2(1+m^2)$ | $\left(\frac{\mp am}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{\pm a}{\sqrt{1+m^2}}\right)$ | $y = mx \pm \sqrt{1+m^2}$ |
| مکافی | $y^2 = 4ax$ | $c = \frac{a}{m}$ | $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$ | $y = mx + \frac{a}{m}$ |
| بیضوی | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ | $c^2 = a^2m^2 + b^2$ | $\left(\frac{-a^2m}{c}, \frac{b^2}{c}\right)$ | $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ |
| ہذلولی | $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ | $c^2 = a^2m^2 - b^2$ | $\left(\frac{-a^2m}{c}, \frac{-b^2}{c}\right)$ | $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$ |

## جدول 3

## پیمائشی شکلیں (Parametric forms)

| مخروطی تراشہ | پیمائشی مساوات | پیمائش | پیمائش کی وسعت | مخروطی تراشے پر کوئی نقطہ |
|---|---|---|---|---|
| دائرہ | $x = a\cos\theta$<br>$y = a\sin\theta$ | $\theta$ | $0 \le \theta \le 2\pi$ | یا ' $\theta$ '<br>$(a\cos\theta, a\sin\theta)$ |
| مکافی | $x = at^2$<br>$y = 2at$ | $t$ | $-\infty < t < \infty$ | یا ' $t$ '<br>$(at^2, 2at)$ |
| بیضوی | $x = a\cos\theta$<br>$y = b\sin\theta$ | $\theta$ | $0 \le \theta \le 2\pi$ | یا ' $\theta$ '<br>$(a\cos\theta, b\sin\theta)$ |
| ہذلولی | $x = a\sec\theta$<br>$y = b\tan\theta$ | $\theta$ | $-\pi \le \theta \le \pi$<br>سوائے $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ | یا ' $\theta$ '<br>$(a\sec\theta, b\tan\theta)$ |

**مخروطی تراشہ $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ کے عام مساوات سے مخروطی تراشہ کو پہچاننا :**

دو درجی مساوات کی ترسیم ایک دائرہ ، مکافی، بیضوی، ہذلولی ، نقطہ ، خالی مجموعہ، ایک خط یا خطوط کی ایک جوڑی میں سے کوئی ایک ہے۔

جب،

(1) $A = C = 1$ ، $B = 0$ ، $D = -2h$ ، $E = -2k$ ، $F = h^2 + k^2 - r^2$ عام مساوات، $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ میں گھٹتا ہے۔جو ایک دائرہ ہے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 219 27-02-2023 16:24:39

(2) $B = 0$ اوریا تو $A$ یا $C = 0$ اس سطح کے مطالعہ کے تحت، عام مساوات سے ایک مکافی حاصل ہوتا ہے۔

(3) $A \neq C$ اور $A$ اور $C$ یکساں نشان کے ہوں تو عام مساوات سے ایک بیضوی حاصل ہوتا ہے۔

(4) $A \neq C$ اور $A$ اور $C$ مختلف نشان کے ہوں تو عام مساوات سے ایک ہذلولی حاصل ہوتا ہے۔

(5) $A = C$ اور $B = D = E = F = 0$، عام مساوات سے ایک نقطہ $x^2 + y^2 = 0$ حاصل ہوتا ہے۔

(6) $A = C = F$ اور $B = D = E = 0$، عام مساوات سے ایک خالی مجموعہ $x^2 + y^2 + 1 = 0$ حاصل ہوتا ہے، چونکہ یہاں کوئی حقیقی جذر نہیں۔

(7) $A \neq 0$ یا $C \neq 0$ باقیہ تمام صفر ہوں، تو عام مساوات سے مختص محوریں حاصل ہوتے ہیں۔

(8) $A = -C$ اور باقیہ تمام صفر ہوں تو عام مساوات سے خطوط $x^2 - y^2 = 0$ کی ایک جوڑی حاصل ہوتا ہے۔

## ICT کارنر

**https://ggbm.at/vchq92pg or Scan the QR Code**

براؤزر کھولنے اور دئے گئے URL کو ٹائپ کیجئے یا QR کوڈ کو اسکین کیجئے۔ "12 ویں ریاضی کی کتاب" (GeoGebra) نامی ورک بک کھولے گا۔اس ورک بک کے بائیں طرف تمہارے کتاب سے متعلق کئی باب ہیں۔ دوابعادی تحلیلی علم ہندسہ - II نامی باب پر کلک کیجئے۔اس باب سے متعلق کئی ورک شیٹ دیکھائی دیں گے "Conic Tracing" ورک شیٹ کا انتخاب کیجئے۔



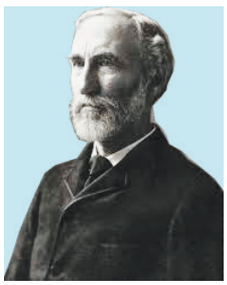
12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 220 27-02-2023 16:24:44

باب
6

# سمتیہ الجبرا کے استعمالات
# (Application of Vector Algebra)

"ریاضی وسعت کے تعلق کی سائنس ہے وسعت وہ چیز ہے جسے کسی دوسری چیز کے برابر یا غیر مساوی رکھا جا سکتا ہے دو چیزیں مساوی ہوتی ہیں جب ہر دعوی میں ہر ایک کی جگہ دوسری لے لی جاتی ہے۔"
ہرمن گونتھر گراسمین۔

## 6.1 تعارف (Introduction)



جوزہ ولارڈ گبس
(1839 – 1903)

ہم گیارھویں جماعت میں سمتیے کے تصورات کے بارے میں پڑھ چکے ہیں۔ (ویکٹس ***(vectus)*** کو لاطینی زبان میں "لے جانا" کہتے ہیں) جب ویسل (1745-1818) اور آرگنڈ (1768-1822) نے مرکب اعداد (complex numbers) کو علمِ ہندسی کے طور پر محدد مسطح میں ایک قطاع خط کو رُخ دینے کی کوشش کے دوران انہیں سمتیے کے جدید مسئلے کے خیالات کا انکشاف ہوا۔ ہم نے دیکھا کہ ایک سمتیہ میں قدر **(magnitude)** اور سمت **(direction)** ہوتا ہے۔ یکساں قدر اور ایک ہی سمت رکھنے والے دو سمتیے کے ابتدائی نقاط کسی مقام پر بھی ہوں لیکن وہ ہمیشہ مساوی ہوں گے۔

دو سمتیوں کا حاصل جمع، سمتیوں کا عدد یہ ضرب، نقطہ حاصل ضرب (dot product) اور کراس حاصل ضرب (cross product) ایک اختیاری سمتیہ سے $\vec{a}$ یا $a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ علامت تعبیر کیا جانے کو ہم نے سیکھا ہے۔ دئے گئے ایک سمتیہ کا سمت اور قدر اور دوسرے تصورات کو مزید بہتر انداز میں سمجھنے کے لئے ہمیں سمتیوں کے علمی ہندسی کا تعارف کے اعادہ کرنا ہوگا۔ جو خطوط مستقیم کے مساوات اور مسطح کے بارے میں بحث کرنے کے دوران بہت کارآمد ہوگا۔ گراسمین، ہیملٹن، کلفّورڈ اور گبس مشہور ریاضی دانوں نے سب سے پہلے سمتیوں کا نقطہ حاصل ضرب اور سمتیوں کا کراس حاصل ضرب کا تعارف کروایا۔

سمتیہ الجبرا کے چند استعمالات راست طور پر طبیعیات میں ہوتے ہیں جبکہ انجینئرنگ اور طب (medicine) کے شعبوں میں سمتیہ احصاء کے استعمالات بہت زیادہ ہیں۔ ان میں چند ذیل میں بیان کئے گئے ہیں۔

- کسی متوازی السطوح (parallelepiped) کا حجم دریافت کرنے کے لئے، عددیہ کا تگنا حاصل ضرب (scalar triple product) کا استعمال ہوتا ہے۔
- میکانیات میں کیا گیا کام اور قوتِ گردشہ (torque) معلوم کرنے کے لئے نقطہ حاصل اور کراس حاصل ضرب بالترتیب استعمال ہوتے ہیں۔
- برقی مقناطیسیت، ماقوا حرکیات، خون کا بہاؤ، راکٹ داغنے اور مصنوعی سیارچہ کا راستے کے مطالعے میں خم اور انتشار کا بہت زیادہ استعمال ہوتا ہے۔
- خلاء میں دو ہوائی جہازوں کے درمیانی فاصلہ اور ان کے درمیان کے راستوں کا زاویہ محسوب کرنے کے لئے نقطہ اور کراس حاصل ضرب کا استعمال ہوتا ہے۔
- شمسی توانائی کو زیادہ مقدار میں حاصل کرنے کے لئے شمسی پینل کا جھکاؤ سورج کی جانب نصب کرنے کے لئے، سمتیوں کا نقطہ حاصل ضرب کا استعمال ہوتا ہے۔ ایک شمسی پینل کے ذریعہ حاصل ہونے والی شمسی توانائی (بجلی) کی مقدار کو محسوب کرنے کے لئے سمتیہ الجبرا کا استعمال ہوتا ہے۔
- مصنوعی سیارچوں میں پینلس کے درمیانی زاویوں اور فاصلوں کی پیمائش کرنے کے لئے، مختلف کارخانوں میں نالیوں (پائپ) کی جال تعمیر کرنے کے لئے، تعمیری شعبے میں ستونوں اور ساختوں کے درمیانی فاصلے اور زاویئے محسوب کرنے کے لئے سمتیہ الجبراء کا استعمال ہوتا ہے۔



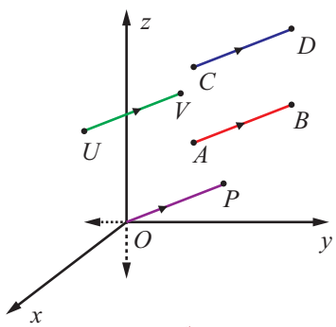
12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 221 27-02-2023 16:29:56

## Learning Objectives — سیکھنے کے مقاصد

اس باب کے اختتام پر طلباء ذیل کو جاننے کے قابل ہونگے ۔

- دو اور تین سمتیوں کے عددیہ اور سمتیہ کے حاصل ضرب کو استعمال کرنا۔
- علم ہندسہ، علم مثلث اور طبیعیات کے حسابات کو حل کرنا۔
- مختلف صورتوں میں پیمائشی، غیر پیمائشی اور کارتیسی شکلوں میں خط کی مساوات دریافت کرنا۔
- مختلف صورتوں میں پیمائشی، غیر پیمائشی اور کارتیسی شکلوں میں مسطح کی مساوات دریافت کرنا۔
- خطوط کا درمیانی زاویہ اور ترچھی (ٹیڑھے) خطوط (skew lines) کا درمیانی فاصلہ دریافت کرنا۔
- ایک نقطے کے خیال کے محدودیں دریافت کرنا۔

## 6.2 سمتیوں کا علم ہندسی تعارف (Geometric introduction to vectors)



خاکہ 6.1

تین ابعادی خلا $\mathbb{R}^3$ میں سمتیہ $\vec{v}$ کو سمت دار قطع خط سے ظاہر کرتے ہیں۔ جس کا ابتدائی نقطہ $A = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ اور آخری نقطہ $B = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ ہے، اس کو $\overrightarrow{AB}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ $AB$ قطع خط کی لمبائی سمتیہ $\vec{v}$ کا قدر ہے۔ اور $A$ سے $B$ کی جانب کے رخ کو $\vec{v}$ سمتیہ کا رخ کہتے ہیں۔ اس کے بعد ، ایک سمتیہ کو $\vec{v}$ یا $\overrightarrow{AB}$ سے ظاہر کریں گے۔ $\mathbb{R}^3$ میں دو سمتیے $\overrightarrow{AB}$ اور $\overrightarrow{CD}$ کو مساوی کہتے ہیں۔اگر اور صرف اگر $AB$ کی لمبائی ، $CD$ کی لمبائی کے مساوی ہو اور $A$ سے $B$ کا رُخ اور $C$ سے $D$ کا رُخ متوازی ہو۔ اگر $\overrightarrow{AB}$ اور $\overrightarrow{CD}$ مساوی ہوں تو $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ لکھ سکتے ہیں اور $\overrightarrow{CD}$ کو $\overrightarrow{AB}$ کا منتقلی **(translate)** کہتے ہیں۔

کسی بھی سمتیہ $\overrightarrow{AB}$ کو $\mathbb{R}^3$ میں کہیں بھی منتقل کرسکتے ہیں۔ایک سمتیہ کا ابتدائی نقطہ $U \in \mathbb{R}^3$ اور آخری نقطہ $V \in \mathbb{R}^3$ کے مساوی ہوتو اس طرح $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{UV}$ ہوگا۔ خاص طور پر ، اگر ایک نقطہ $O$ ، $\mathbb{R}^3$ میں مبداء ہوتو ایک نقطہ $P \in \mathbb{R}^3$ اس طرح $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP}$ حاصل ہوگا۔ سمتیہ $\overrightarrow{OP}$ کو نقطہ $P$ کا مقامی سمتیہ کہتے ہیں۔ مزید، ہم نے غور کیا کہ دئے گئے کوئی بھی سمتیہ $\vec{v}$ کے لئے ایک خاص نقطہ $P \in \mathbb{R}^3$ اس طرح ہوکہ $P$ کا مقامی سمتیہ $\overrightarrow{OP}$ سے سمتیہ $\vec{v}$ کے مساوی ہے۔ ایک سمتیہ $\overrightarrow{AB}$ ، جس کا ابتدائی نقطہ $A$ اور آخری نقطہ $B$ ایک ہی ہوتو اس کو صفر سمتیہ کہتے ہیں۔ہم معیاری ترقیمات $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ اور $\vec{0}$ کو $(1,0,0)$ ، $(0,1,0)$، $(0,0,1)$ اور $(0,0,0)$ نقاط کے مقامی سمتیے سے بالترتیب ظاہر کرتے ہیں ۔ دئے گئے ایک نقطہ $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ کا مقامی سمتیہ $a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$, ہوگا۔ جو $(a_1, a_2, a_3)$, نقطہ کا مقامی سمتیہ کہلاتا ہے، جو سمت دار قطع خط کا ابتدائی نقطہ $(0,0,0)$ اور آخری نقطہ $(a_1, a_2, a_3)$ ہوگا۔ تمام حقیقی اعداد کو عددیہ کہتے ہیں۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 222 27-02-2023 16:29:57

دئے گئے سمتیہ $\overrightarrow{AB}$ کے سمتیہ کی لمبائی کو ذیل کے ضابطہ کے ذریعہ محسوب کرسکتے ہیں۔

$$\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}\ ,$$

جس میں $A$ ، $(a_1,a_2,a_3)$ اور $B$ ، $(b_1,b_2,b_3)$ ہے۔ خاص طور پر، اگر ایک سمتیہ $(b_1,b_2,b_3)$، کا مقامی سمتیہ $\vec{b}$ ہوتو اس کی لمبائی $\sqrt{{b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2}$ ہوگی۔ ایک سمتیہ جس کی لمبائی (قدر) 1 ہوتو اس کو اکائی سمتیہ کہتے ہیں۔ ہم اکائی سمتیہ کو علامت $\hat{u}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ غور کریں کے $\hat{i}$, $\hat{j}$, اور $\hat{k}$ اکائی سمتیے ہیں اور 0 لمبائی رکھنے والے سمتیہ $\vec{0}$ کو خاص سمتیہ کہتے ہیں ۔ $\vec{0}$ سمتیہ کا رُخ عبارت پر منحصر ہے۔

تین ابعادی خلا میں سمتیہ کا جمع اور عددیہ کے ضرب کی وضاحت اس طرح ہے۔

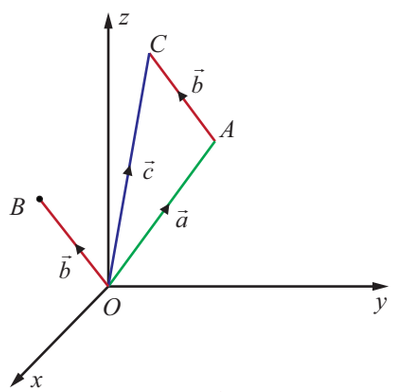
$$\vec{a}+\vec{b} \ = \ (a_1+b_1)\hat{i}+(a_2+b_2)\hat{j}+(a_3+b_3)\hat{k}\ .$$

$$\alpha\vec{a} \ = \ (\alpha a_1)\hat{i}+(\alpha a_2)\hat{j}+(\alpha a_3)\hat{k}\ ;$$

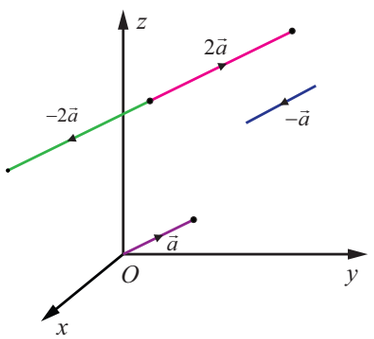
جس میں، $\vec{a} \ = \ a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k},\ \vec{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}\in\mathbb{R}^3$ اور $\alpha\in\mathbb{R}$ ہے۔

$\vec{a}+\vec{b}$ کا علم ہندسی تشریح دیکھیں گے۔ فرض کیجئے کہ $A=(a_1,a_2,a_3)$ اور $B=(b_1,b_2,b_3)$ کے مقامی سمتیے $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ بالترتیب ہیں۔ مقامی سمتیہ $\vec{b}$ کو ابتدائی نقطہ $A$ اور ایک مناسب نقطہ $(c_1,c_2,c_3)\in\mathbb{R}^3$ آخری نقطہ $C=(c_1,c_2,c_3)$ کے طور پر منتقل کرتے ہیں تو نقطہ $(c_1,c_2,c_3)$ کا مقامی سمیتہ $\vec{c}$، $\vec{a}+\vec{b}$ کے مساوی ہوگا ۔ خاکہ (6.2) دیکھیں۔

سمتیہ $\alpha\vec{a}$ اور دوسرا سمتیہ $\vec{a}$ کے متوازی ہے اور اس کی لمبائی کو بڑھایا (اگر $\alpha>1$) یا گھٹایا (اگر $0<\alpha<1$) جاتا ہے۔
اگر $\alpha<0$ ہوتو سمتیہ $\alpha\vec{a}$ جس کی قدر سمتیہ $\vec{a}$ کے $|\alpha|$ گناہوگا اور سمتیہ کا سمت، سمتیہ $\vec{a}$ کے مخالف سمت میں ہوگا۔
خاص طورپر ، اگر $\alpha=-1$ ہوتو $\alpha\vec{a}=-\vec{a}$ سمتیہ جس کی لمبائی مساوی اور سمت، سمتیہ $\vec{a}$ کے مخالف سمت میں ہوگا۔خاکہ 6.3 دیکھیں ۔




خاکہ 6.2




خاکہ 6.3



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 223 27-02-2023 16:29:59

## 6.3 عددیہ حاصل ضرب اور سمتیہ حاصل ضرب (Scalar Product and Vector Product)

ہم دو سمتیوں کا عددیہ حاصل ضرب اور سمتیہ حاصل ضرب کا اعادہ کریں گے۔

### تعریف 6.1

دئے گئے دو سمتیے $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ اور $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ کا عددیہ حاصل ضرب (نقطہ حاصل ضرب) کو $\vec{a}\cdot\vec{b}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اس کو اس طرح محسوب کرتے ہیں۔

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3,$$

اور سمتیہ حاصل ضرب (یا کراس حاصل ضرب) کو $\vec{a}\times\vec{b}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اس کو اس طرح محسوب کرتے ہیں۔

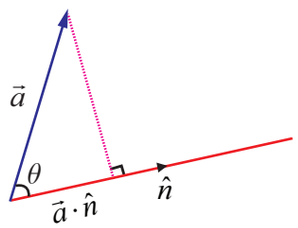
$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

### غور کیجئے (Note)

$\vec{a}\cdot\vec{b}$ ایک عددیہ اور $\vec{a}\times\vec{b}$ ایک سمتیہ ہے۔

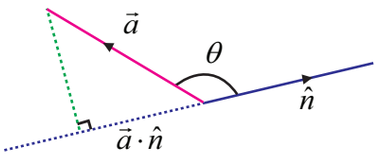
### 6.3.1 علم ہندسی تشریح (Geometrical interpretation)

اگر $\vec{a}$ ایک اختیاری سمتیے اور $\hat{n}$ ایک اکائی سمتیہ ہوں تو $\vec{a}\cdot\hat{n}$ سمتیہ $\vec{a}$ کی تظلیل خط مستقیم پر ہے جس میں $\hat{n}$ واقع ہے۔ اگر $\vec{a}$ اور $\hat{n}$ کا درمیانی زاویہ حادہ ہو تو $\vec{a}\cdot\hat{n}$ کی قیمت مثبت ہوگی، خاکہ 6.4 دیکھیں اور اگر $\vec{a}$ اور $\hat{n}$ کا درمیانی زاویہ منفرجہ ہو تو $\vec{a}\cdot\hat{n}$ کی قیمت منفی ہوگی، خاکہ 6.5 دیکھیں۔



مثبت نقطہ حاصل ضرب

خاکہ 6.4



منفی نقطہ حاصل ضرب

خاکہ 6.5

اگر $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ غیر صفری اختیاری (مہوری) سمتیے ہوں تو $|\vec{a}\cdot\vec{b}| = \left|\,|\vec{b}|\,\vec{a}\cdot\left(\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)\right| = \left|\,|\vec{a}|\,\vec{b}\cdot\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right)\right|$ اور $|\vec{a}\cdot\vec{b}|$ یعنی، $\vec{b}$ کی سمت میں، $|\vec{b}|\,\vec{a}$ تظلیل کو دریافت کرنے کے دوران حاصل ہونے والی قطع خط کی لمبائی یا $\vec{a}$ کی سمت میں، $|\vec{a}|\,\vec{b}$ تظلیل کو دریافت کرنے کے دوران حاصل ہونے والی قطع خط کی لمبائی ہوگی۔ ہم جانتے ہیں کہ $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ جس میں دو سمتیے $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کا درمیانی زاویہ $\theta$ ہے۔ مزید، $\vec{a}$ سے $\vec{b}$ تک درمیانی زاویہ کی پیمائش گھڑی کی مخالف سمت میں کی جاتی ہے۔

$\vec{a}\times\vec{b}$ سمتیہ ایک $\vec{0}$ سمتیہ یا عمودی ہے مسطح سے جو $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ دونوں کے متوازی ہے جس کا قدر ہی متوازی الاضلاع کا رقبہ جو $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ متصل سمتیوں سے حاصل ہوگا۔ اگر $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ غیر صفری سمتیے ہوں تو $\vec{a}\times\vec{b}$ کی قدر اس طرح محسوب کرسکتے ہیں۔

$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}||\sin\theta|$, جہاں، $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کا درمیانی زاویہ $\theta$ ہے۔

دو سمتیے متصل (coterminus) کہلاتے ہیں اگر دونوں کا ابتدائی نقطہ ایک ہی ہو۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 224 27-02-2023 16:30:02

### ریمارک (Remark)

(1) دوغیر صفری سمتیے $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کا درمیانی زاویہ ذیل کے ضابطہ سے محسوب کرسکتے ہیں۔ $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)$

(2) $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ متوازی کہلاتے ہیں اگر ان دونوں کا درمیانی زاویہ $0$ یا $\pi$ ہو۔

(3) $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ عمودی کہلاتے ہیں اگر ان دونوں کا درمیانی زاویہ $\frac{\pi}{2}$ یا $\frac{3\pi}{2}$ ہو۔

### خصوصیت (Property)

(1) فرض کیجئے کہ دوغیر صفری سمتیے $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ ہوتو،

- $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ ہوتو، اگر اور صرف اگر $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ ایک دوسرے کے عمودی ہوں۔
- $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ ہوتو، اگر اور صرف اگر $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ ایک دوسرے کے متوازی ہوں۔

(2) $\vec{a}$، $\vec{b}$ اور $\vec{c}$ کوئی تین سمتیے ہیں اور $\alpha$ ایک عددیہ ہوتو،

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a},\ (\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c},\ (\alpha\vec{a})\cdot\vec{b}=\alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(\alpha\vec{b});$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = -(\vec{b}\times\vec{a}),\ (\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c},\ (\alpha\vec{a})\times\vec{b}=\alpha(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\times(\alpha\vec{b}).$$

## 6.3.2 مسطح علم مثلث میں نقطہ اور کراس کے حاصل ضربوں کا استعمال
## (Application of dot and cross products in plane Trigonometry)

دوسمتیوں کا نقطہ اور کراس حاصل ضرب کے تصورات کو اپنا کر مسطح علم مثلث میں چند ضابطے اخذ کریں گے۔

### مثال 6.1 (کوسائن ضابطے) (Cosine formulae)

حسب معمول علامتوں (ترقیمات) کے ساتھ کسی مثلث $ABC$ میں درجہ ذیل کو سمتیہ طریقے سے ثابت کیجئے۔

(i) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ (ii) $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$

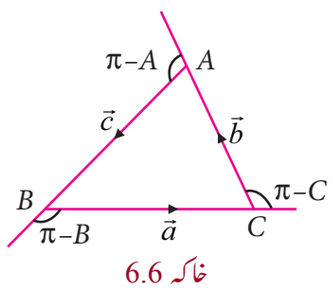
(iii) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

### حل

حسب معمول ترقیمات سے مثلث $ABC$ میں $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$، $\overrightarrow{CA}=\vec{b}$ اور $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$، ہوتو، $|\overrightarrow{BC}|=a$، $|\overrightarrow{CA}|=b$، $|\overrightarrow{AB}|=c$

اور $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{AB}.$$



خاکہ 6.6

نقطہ حاصل ضرب کے استعمال سے، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC} = (-\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{AB})\cdot(-\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{AB})$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{CA}|^2+|\overrightarrow{AB}|^2+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2+c^2+2bc\cos(\pi-A)$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2+c^2-2bc\cos A.$$

اسی طریقے کو اپنا کر نتیجہ (ii) اور (iii) کو ثابت کریں گے۔

### مثال 6.2

حسب معمول ترقیمات سے کسی مثلث $ABC$ میں درجہ ذیل کو سمتیہ طریقے سے ثابت کیجئے۔

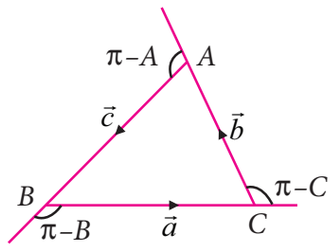
(i) $a = b\cos C + c\cos B$ (ii) $b = c\cos A + a\cos C$

(iii) $c = a\cos B + b\cos A$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 225 27-02-2023 16:30:06

**حل**



خاکہ 6.7

حسب معمول ترقیمات سے مثلث $ABC$ میں $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$ ، $\overrightarrow{CA}=\vec{b}$ اور $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$ ، ہو تو،

$|\overrightarrow{BC}|=a$ ، $|\overrightarrow{CA}|=b$ ، $|\overrightarrow{AB}|=c$ اور $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

$$\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{AB}$$

نقطہ حاصل ضرب کے استعمال سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{BC}|^2=-|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{CA}|\cos(\pi-C)-|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{AB}|\cos(\pi-B)$$

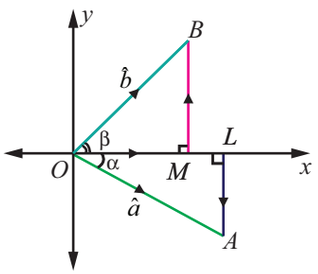
$$\Rightarrow a^2=ab\cos C+ac\cos B$$

لہذا، $a=b\cos C+c\cos B$ اسی طریقے کو اپنا کر نتیجہ (ii) اور (iii) کو ثابت کر سکتے ہیں۔

## مثال 6.3

سمتیہ طریقہ استعمال کرکے، $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ ثابت کیجئے۔

**حل**



خاکہ 6.8

فرض کیجئے کہ $\hat{a}=\overrightarrow{OA}$ اور $\hat{b}=\overrightarrow{OB}$ اکائی سمتیے ہیں جو مثبت $x$ - محور پر $\alpha$ اور $\beta$ بالترتیب زاویے بناتے ہیں۔ جس میں $A$ اور $B$ کو خاکہ 6.8 میں دکھایا گیا ہے۔ $AL$ اور $BM$ کو $x$ - محور کے عمودی کھینچتے ہیں تو $|\overrightarrow{OL}|=|\overrightarrow{OA}|\cos\alpha=\cos\alpha$ ، $|\overrightarrow{LA}|=|\overrightarrow{OA}|\sin\alpha=\sin\alpha$

$$\overrightarrow{OL}=|\overrightarrow{OL}|\,\hat{i}=\cos\alpha\hat{i},\ \overrightarrow{LA}=\sin\alpha(-\hat{j}).$$

چنانچہ، $\hat{a}=\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{LA}=\cos\alpha\hat{i}-\sin\alpha\hat{j}.$ ... (1)

اسی طرح، $\hat{b}=\cos\beta\hat{i}+\sin\beta\hat{j}$ ... (2)

$\hat{a}$ اور $\hat{b}$ کا درمیانی زاویہ $\alpha+\beta$ ہے۔ اور

$$\hat{a}\cdot\hat{b}=|\hat{a}||\hat{b}|\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha+\beta) \quad \ldots (3)$$

اس کی دوسری جانب، (1) اور (2) سے،

$$\hat{a}\cdot\hat{b}=(\cos\alpha\hat{i}-\sin\alpha\hat{j})\cdot(\cos\beta\hat{i}+\sin\beta\hat{j})=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta. \quad \ldots (4)$$

(3) اور (4) سے، ہمیں $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ حاصل ہوتا ہے۔

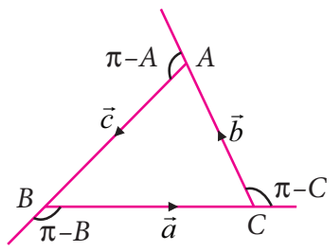
## مثال 6.4

حسب معمول ترقیمات سے کسی مثلث $ABC$ میں سمتیہ طریقہ سے $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ ثابت کیجئے۔

**حل**

حسب معمول ترقیمات سے مثلث $ABC$ میں $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$ ، $\overrightarrow{CA}=\vec{b}$ اور $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$ ، ہو تو،

$|\overrightarrow{BC}|=a$ ، $|\overrightarrow{CA}|=b$ ، اور $|\overrightarrow{AB}|=c$



خاکہ 6.9

چونکہ، $\Delta ABC$ سے، $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ ، ہمیں $\overrightarrow{BC}\times(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})=\vec{0}$ مختصر کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}. \quad \ldots (1)$$

اسی طرح، چونکہ، $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

$\overrightarrow{CA}\times(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})=\vec{0}$ ہمارے پاس ہے،



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 226 27-02-2023 16:30:12

$$\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{AB} \quad \text{... (2)}$$

مختصر کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا۔

مساوات (1) اور (2) سے ہمیں حاصل ہوا،

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{CA}.$$

$$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{CA}|.$$

$$ca\sin(\pi - B) = bc\sin(\pi - A) = ab\sin(\pi - C).$$

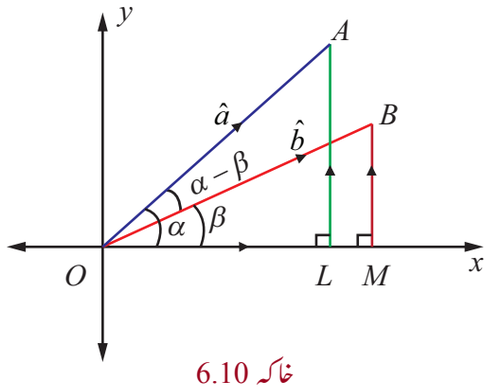
یعنی، $ca\sin B = bc\sin A = ab\sin C$ ، $abc$ سے تقسیم کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \quad \text{یا} \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

### مثال 6.5

سمتیہ طریقہ استعمال کرکے، $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ ثابت کیجئے۔

### حل



خاکہ 6.10

فرض کیجئے کہ $\hat{a} = \overrightarrow{OA}$ اور $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ اکائی سمتیے ہیں جو مثبت $x$ - محور پر $\alpha$ اور $\beta$ بالترتیب زاویے بناتے ہیں۔ جس میں $A$ اور $B$ کو خاکہ 6.10 میں دکھایا گیا ہے۔ تو، ہمیں حاصل ہوا۔ $\hat{a} = \cos\alpha\hat{i} + \sin\alpha\hat{j}$ اور

$\hat{b} = \cos\beta\hat{i} + \sin\beta\hat{j}$،

$\hat{a}$ اور $\hat{b}$ کا درمیانی زاویہ $\alpha-\beta$ ہے اور $\hat{b}$، $\hat{a}$، $\hat{k}$ سمتیے، سیدھے ہاتھ کا نظام (right-handed system) میں بنے ہوئے ہیں۔

لہٰذا، ہمیں حاصل ہوا،

$$\hat{b}\times\hat{a} = |\hat{b}||\hat{a}|\sin(\alpha-\beta)\hat{k} = \sin(\alpha-\beta)\hat{k}. \quad \text{... (1)}$$

دوسرے جانب،

$$\hat{b}\times\hat{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \end{vmatrix} = (\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)\hat{k} \quad \text{... (2)}$$

لہٰذا مساوات (1) اور (2) سے حاصل ہوا،

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

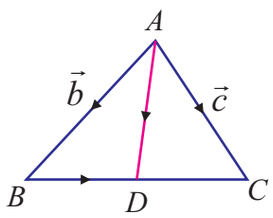
## 6.3.3 علم ہندسہ میں نقطہ اور کراس حاصل ضربوں کا استعمال
## (Application of dot and cross products in Geometry)

### مثال 6.6 (اپولونیس کا مسئلہ) (Apollonius's theorem)

مثال $ABC$ میں ضلع $BC$ کا وسطی (درمیانی) نقطہ $D$ ہو تو سمتیہ طریقہ سے ثابت کیجئے۔

$$|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 = 2(|\overrightarrow{AD}|^2 + |\overrightarrow{BD}|^2).$$

### حل



خاکہ 6.11

فرض کیجئے $A$ مبداء ہے، $B$ کا مقامی سمتیہ $\vec{b}$ اور $C$ کا مقامی سمتیہ $\vec{c}$ ہے۔ $BC$ کا وسطی نقطہ $D$ ہے اور $D$ کا مقامی سمتیہ $\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$ ہے۔ چنانچہ، ہمارے پاس ہے



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 227 27-02-2023 16:30:13

(1) ... $|\overrightarrow{AD}|^2 = \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD} = \left(\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)\cdot\left(\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right) = \frac{1}{4}(|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\vec{b}\cdot\vec{c})$.

(2) ... $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} - \vec{b} = \frac{\vec{c}-\vec{b}}{2}$ اب،

$|\overrightarrow{BD}|^2 = \overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BD} = \left(\frac{\vec{c}-\vec{b}}{2}\right)\cdot\left(\frac{\vec{c}-\vec{b}}{2}\right) = \frac{1}{4}(|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{c})$ تو یہ حاصل ہوا،

(1) اور (2) کو جمع کرنے سے ہمیں حاصل ہوا،

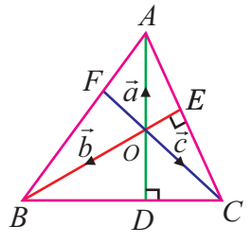
چنانچہ, $|\overrightarrow{AD}|^2 + |\overrightarrow{BD}|^2 = \frac{1}{4}(|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\vec{b}\cdot\vec{c}) + \frac{1}{4}(|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\vec{b}\cdot c) = \frac{1}{2}(|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2)$

$|\overrightarrow{AD}|^2 + |\overrightarrow{BD}|^2 = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2)$ ⇐

لہٰذا ، $|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 = 2(|\overrightarrow{AD}|^2 + |\overrightarrow{BD}|^2)$

## مثال 6.7

سمتیہ طریقہ استعمال کرکے ثابت کیجئے کہ ایک مثلث کے راسوں کے مقابل ضلعوں پر کھینچے گئے عمودی خطوط (ارتفاع) متراکز ہیں۔



خاکہ 6.12

### حل

فرض کیجئے کہ مثلث $ABC$ کو دو ارتفاع $AD$ اور $BE$ نقطہ $O$ پر قطع کرتے ہیں۔ $CO$ کو اس طرح کھینچیے کہ وہ $AB$ میں $F$ پر ملے۔ $O$ مبداء کے طور پر لیتے ہیں تو $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$، $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ اور $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$

چونکہ $\overrightarrow{AD}$، $\overrightarrow{BC}$ کا عمودی ہے، $\overrightarrow{OA}$، $\overrightarrow{BC}$ کا عمودی ہے۔ چنانچہ ، $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$ ہمیں حاصل ہوا، یعنی ، $\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b}) = 0$ جس کے معنی،

$$\vec{a}\cdot\vec{c} - \vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \quad \ldots (1)$$

اسی طرح ، چونکہ $\overrightarrow{BE}$، $\overrightarrow{CA}$ کا عمودی ہے، $\overrightarrow{OB}$، $\overrightarrow{CA}$ کا عمودی ہے۔ چنانچہ ، $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CA} = 0$ ہمیں حاصل ہوا، یعنی ، $\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{c}) = 0$ جس کے معنی،

$$\vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{b}\cdot\vec{c} = 0. \quad \ldots (2)$$

مساوات (1) اور (2) کو جمع کرنے سے، ہمیں $\vec{a}\cdot\vec{c} - \vec{b}\cdot\vec{c} = 0$ حاصل ہوتا ہے۔ یعنی ، $\vec{c}\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = 0$

یعنی ، $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{BA} = 0$ چنانچہ ، $\overrightarrow{BA}$، $\overrightarrow{OC}$ کا عمودی رہنے کی وجہ سے $\overrightarrow{CF}$، $\overrightarrow{AB}$ کا بھی عمودی ہے۔ لہٰذا، $C$ سے $AB$ کو کھینچے جانے والی عمودی خط $O$ سے گزرتی ہے۔ لہٰذا، ارتفاع متراکز ہیں۔

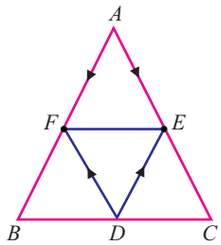
## مثال 6.8

مثلث $ABC$ میں، اضلاع $BC$، $CA$ اور $AB$ کے وسطی نقاط بالترتیب $D$، $E$ اور $F$ ہیں۔ سمتیہ طریقہ استعمال کرکے ثابت کیجئے کہ $\Delta DEF$ کا رقبہ ($\Delta ABC$ کا رقبہ) $\frac{1}{4}$ کے مساوی ہے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 228 27-02-2023 16:30:14

## حل



خاکہ 6.13

مثلث $ABC$ میں، $A$ کو مبداء کے طور پر لیتے ہیں تو $D$، $E$ اور $F$ کے مقامی سمتیے بالترتیب $\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$، $\frac{\overrightarrow{AC}}{2}$ اور $\frac{\overrightarrow{AB}}{2}$ دیے گئے ہیں۔ چونکہ، $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$ متوازی الاضلاع کا رقبہ ہے جو متصلہ ضلع $\overrightarrow{AB}$ اور $\overrightarrow{AC}$ دوسمتیوں سے بنا ہوا ہے۔ $\Delta ABC$ کا رقبہ $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$ ہے۔ اسی طرح، $\Delta DEF$ کو فرض کریں۔

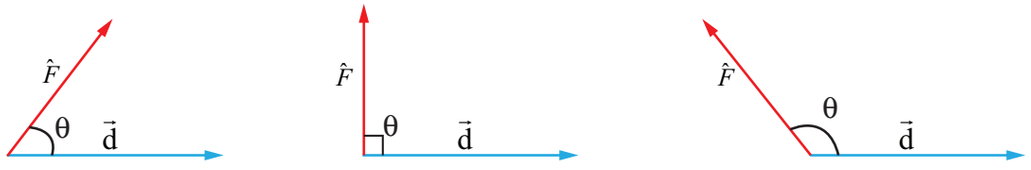
$$\begin{aligned}\Delta DEF \text{ کا رقبہ} &= \frac{1}{2}|\overrightarrow{DE}\times\overrightarrow{DF}|\\ &= \frac{1}{2}|(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD})\times(\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AD})|\\ &= \frac{1}{2}\left|\frac{\overrightarrow{AB}}{2}\times\frac{\overrightarrow{AC}}{2}\right|\\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|\right)\\ &= \frac{1}{4}\ (\Delta ABC \text{ کا رقبہ}).\end{aligned}$$

■

## 6.3.4 طبعیات میں نقطہ اور کراس حاصل ضرب کا استعمال (Application of dot and cross product in Physics)

**تعریف 6.2**

اگر $\vec{d}$ ایک ذرّہ کا ہٹاؤ (displacement) سمتیہ ہے جو ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ تک حرکت کرنے کے لئے ایک مستقل قوت $\vec{F}$ کو ذرّہ پر اپنایا جاتا ہے تو ذرّہ پر قوت سے حاصل شدہ کام $w=\vec{F}\cdot\vec{d}$ ہے۔



خاکہ 6.14

اگر قوت کی وجہ سے بنے والے زاویئے ، زاویہ حادّہ ،عمودی زاویہ اور زاویہ متفرجہ ہوتو قوت سے حاصل شدہ کام بالترتیب مثبت ، صفر اور منفی ہے۔

### مثال 6.9

ایک ذرّہ $(4,-3,-2)$ نقطہ سے $(6,1,-3)$ دوسرے نقطہ تک حرکت کرنے کے لئے $2\hat{i}+5\hat{j}+6\hat{k}$ اور $-\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k}$ مستقل قوتیں عمل پذیر ہوں تو قوتوں سے حاصل شدہ کل کام محسوب کیجئے۔

### حل

دیے گئے قوتوں کا نتیجہ $\vec{F}=(2\hat{i}+5\hat{j}+6\hat{k})+(-\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k})=\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k}$

فرض کیجئے نقاط $A$ اور $B$ بالترتیب $(4,-3,-2)$ اور $(6,1,-3)$ ہوں تو ذرہ کا ہٹاؤ سمتیہ

$$\vec{d}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(6\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k})-(4\hat{i}-3\hat{j}-2\hat{k})=2\hat{i}+4\hat{j}-\hat{k}$$

حاصل شدہ کام، لہٰذا $w=\vec{F}\cdot\vec{d}=(\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k})\cdot(2\hat{i}+4\hat{j}-\hat{k})=9$ اکائیاں.

■



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 229 27-02-2023 16:30:16

## مثال 6.10

ایک ذرّہ $(1,3,-1)$ نقطہ سے $(4,-1,\lambda)$ دوسرے نقطہ تک حرکت کرنے کے لئے $3\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}$ اور $2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ مستقل قوتیں عمل پذیر ہوتے ہیں اگر قوتوں سے حاصل شدہ کام 16 اکائیاں ہے تو $\lambda$ کی قیمت معلوم کیجئے۔

### حل

دئے گئے قوتوں کا نتیجہ $\vec{F}=(3\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k})+(2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})=5\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$

دئے گئے ذرّہ کا ہٹاؤ

$$\vec{d}=(4\hat{i}-\hat{j}+\lambda\hat{k})-(\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})=(3\hat{i}-4\hat{j}+(\lambda+1)\hat{k}).$$

جیسا کہ قوتوں سے حاصل شدہ کام 16 اکائیاں ہے۔یعنی ،

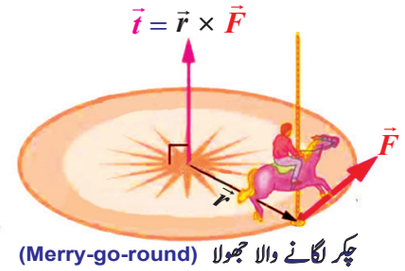
$$\vec{F}\cdot\vec{d}=16.$$

$$(5\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})\cdot(3\hat{i}-4\hat{j}+(\lambda+1)\hat{k}=16\Rightarrow\lambda+20=16.$$

لہٰذا، $\lambda=-4$

## تعریف 6.3

اگر ایک قوت $\vec{F}$ ، $\vec{r}$ مقامی سمتیہ والے ایک نقطہ پر موجود ذرّہ پر عمل پذیر ہوتو اس ذرّہ کا **قوتِ گردشہ** یا **حرکت** $\vec{t}=\vec{r}\times\vec{F}$ ہوگا۔قوتِ گردشہ کو گردشی قوت بھی کہتے ہیں۔



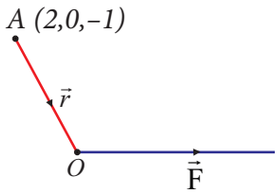

چکر لگانے والا جھولا (Merry-go-round)

خاکہ 6.15

## مثال 6.11

قوتِ گردشہ کی قدر اور سمت کو سائن معلوم کیجئے۔ نقطہ $(2,0,-1)$، کے لحاظ سے قوت $2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$, کا جس کے عمل کا خط مبداء سے گزرتا ہے۔

### حل




خاکہ 6.16

فرض کیجئے $A\ (2,0,-1)$ نقطہ ہوتو $A$ کا مقامی سمتیہ $\overrightarrow{OA}=2\hat{i}-\hat{k}$ ہے۔ چنانچہ ،

$$\vec{r}=\overrightarrow{AO}=-2\hat{i}+\hat{k}$$

دی گئی قوت $\vec{F}=2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$، اس طرح قوتِ گردشہ،

$$\vec{t}=\vec{r}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\-2&0&1\\2&1&-1\end{vmatrix}=-\hat{i}-2\hat{k}.$$

قوتِ گردشہ کی قدر $|-\hat{i}-2\hat{k}|=\sqrt{5}$ ہے اور قوتِ گردشہ کے سمت کو سائن $-\frac{1}{\sqrt{5}},0,-\frac{2}{\sqrt{5}}$ ہیں۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 230 27-02-2023 16:30:17

## مشق 6.1

1. سمتیہ طریقہ سے ثابت کیجئے کہ،اگر ایک خط دائرے کے مرکز سے ایک وتر کے وسطی نقطہ پر کھینچا جائے تو خط، وتر کے عمودی ہوگا۔
2. سمتیہ طریقہ سے ثابت کیجئے کہ ایک مثلث مساوی الساقین کے قاعدہ کے درمیان سے کھینچیں جانے والی خط، قاعدہ کے عمودی ہوگی۔
3. سمتیہ طریقہ سے ثابت کیجئے کہ نصف دائرے میں بننے والا ایک زاویہ ، زاویہ قائمہ ہوگا۔
4. سمتیہ طریقہ سے ثابت کیجئے کہ ایک معین کے وتریں ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر تصنیف (bisect) کرتے ہیں۔
5. سمتیہ کا طریقہ استعمال کرکے ثابت کیجئے کہ اگر متوازی اضلاع کی وتریں مساوی ہوتو یہ مستطیل ہوگا۔
6. سمتیہ طریقہ سے ثابت کیجئے کہ $ABCD$ چار ضلعی جس کے وتریں $AC$ اور $BD$ ہوتو اس کا رقبہ $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BD}|$ ہوگا۔
7. سمتیہ طریقہ سے ثابت کیجئے کہ ایک ہی قاعدہ میں واقع اور ایک ہی متوازی خطوط کے درمیان بننے والے متوازی الاضلاع کے رقبہ مساوی ہیں۔
8. اگر $\Delta ABC$ کا ہندسی مرکزی $G$ ہوتو ثابت کیجئے کہ

$$(\Delta ABC \text{ کا رقبہ}) = \frac{1}{3}(\Delta GCA \text{ کا رقبہ}) = (\Delta GBC \text{ کا رقبہ}) = (\Delta GAB \text{ کا رقبہ})$$

9. سمتیہ طریقہ سے ثابت کیجئے کہ $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$
10. سمتیہ طریقہ سے ثابت کیجئے کہ $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
11. ایک ذرّہ $(1,2,3)$ نقطہ سے $(5,4,1)$ دوسرے نقطہ تک حرکت کرنے کے لئے $8\hat{i}+2\hat{j}-6\hat{k}$ اور $6\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$ مستقل قوتیں عمل پذیر ہوں تو قوتوں سے حاصل شدہ کل کام محسوب کیجئے۔
12. قوتوں کے قدریں $5\sqrt{2}$ اور $10\sqrt{2}$ اکائیاں ہیں۔ان سمتیوں میں بالترتیب $3\hat{i}+4\hat{j}+5\hat{k}$ اور $10\hat{i}+6\hat{j}-8\hat{k}$ میں عملہ پذیر ہوتے ہیں۔ذرّہ کا ہٹاؤ ایک نقطہ جس کا مقامی سمتیہ $4\hat{i}-3\hat{j}-2\hat{k}$ سے دوسرے نقطہ جس کا مقام سمتیہ $6\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}$ ہے۔ قوتوں سے حاصل شدہ کام معلوم کیجئے۔
13. قوتِ گردشہ کاقدر اور سمت کو سائن معلوم کیجئے ۔قوت کو $3\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k}$ سے ظاہر کیا گیا ہے۔نقطہ کا مقامی سمتیہ $2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$ سے عمل پذیر ہوکر ایک نقطہ سے گزرتا ہے جس کا مقامی سمتیہ $4\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ ہے۔
14. تین قوتیں کو $-3\hat{i}+6\hat{j}-3\hat{k}$ ، $4\hat{i}-10\hat{j}+12\hat{k}$ اور $4\hat{i}+7\hat{j}$ سے ظاہر کئے گئے ہیں۔ نقطہ پر مقامی سمتیہ $8\hat{i}-6\hat{j}-4\hat{k}$ سے عمل پذیر ہوکر دوسرے نقطہ پر مقامی سمتیہ $18\hat{i}+3\hat{j}-9\hat{k}$ ہوگا۔تینوں قوتوں کے نتیجہ کا قوتِ گردشہ معلوم کیجئے۔

## 6.4 عددیہ کا تگنا حاصل ضرب (Scalar triple product)

### تعریف 6.4

تین سمتیے $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ اور $\vec{c}$ دئے گئے ہوتو $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ کو $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$ سمتیوں کا عددیہ کا تگنا حاصل ضرب کہتے ہیں۔

### ریمارک (Remark)

$\vec{a}\cdot\vec{b}$ ایک عددیہ ہوتو $(\vec{a}\cdot\vec{b})\times\vec{c}$ کا کوئی معنی نہیں ہے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 231 27-02-2023 16:30:18

### غور کیجئے (Note)

$\vec{a}$، $\vec{b}$ اور $\vec{c}$ دئے گئے کسی تین سمتیوں کے لئے مندرجہ ذیل میں اُن سمتیوں کے عددیہ کے تگنا حاصل ضرب کو دیا گیا ہے۔

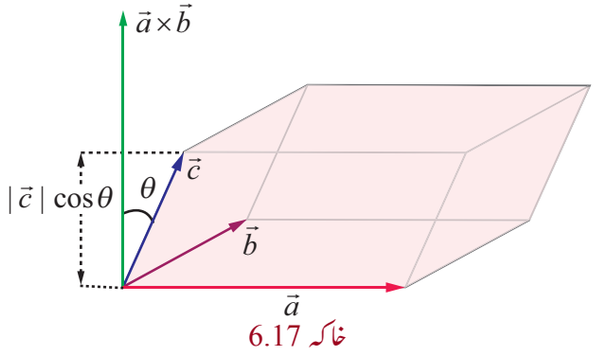
$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}, (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}, (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}, \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}), \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}), \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}),$

$(\vec{b}\times\vec{a})\cdot\vec{c}, (\vec{c}\times\vec{b})\cdot\vec{a}, (\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b}, \vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{b}), \vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{c}), \vec{c}\cdot(\vec{b}\times\vec{a})$

### عددیہ کا تگنا حاصل ضرب کی علم ہندسی تشریح (Geometrical interpretation of scalar triple product)

علم ہندسی طور پر ثابت کریں گے، عددیہ کا تگنا حاصل ضرب $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ کی مطلق قیمت (absolute value) متوازی السطوح (parallelepiped) کا حجم ہوگا جو تین سمتیے $\vec{a}$، $\vec{b}$ اور $\vec{c}$ کے عام نقطہ انتہا کے کنارے (co-terminus edges) کے استعمال سے بنتا ہے۔

سمتیہ $(\vec{a}\times\vec{b})$ کا قدر ہی متوازی اضلاع کا رقبہ ہوگا جو سمتیے $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کے استعمال سے بنتا ہے۔ سمتیہ $(\vec{a}\times\vec{b})$ کا سمت، $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ دونوں سمتیوں کے متوازی طور پر واقع مسطح کو عمودی ہوگا۔



خاکہ 6.17

لہٰذا $|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|$، $|\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}||\cos\theta|$، جس میں $\theta$، $\vec{a}\times\vec{b}$ اور $\vec{c}$ کا درمیانی زاویہ ہے۔ خاکہ 6.17 سے ہم نے غور کیا کہ $|\vec{c}||\cos\theta|$ متوازی السطوح کی اونچائی ہے جو تین سمتیے کے متعلہ سمتیے کے استعمال سے بنتا ہے۔اس طرح، $|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|$ متوازی السطوح کا حجم ہے۔

عددیہ کا تگنا حاصل ضرب محسوب کرنے کے لئے درجہ ذیل کا مسئلہ بہت کارآمد ہے۔

**مسئلہ 6.1 (Theorem)**

اگر $\vec{a} = a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$، $\vec{b} = b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$ اور $\vec{c} = c_1\hat{i}+c_2\hat{j}+c_3\hat{k}$ ہوگا۔

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

**ثبوت**

اوپر کے تعریف کے مطابق،

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}\cdot\vec{c}$$

$$= \left[(a_2b_3-a_3b_2)\hat{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\hat{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\hat{k}\right]\cdot(c_1\hat{i}+c_2\hat{j}+c_3\hat{k})$$

$$= (a_2b_3-a_3b_2)c_1+(a_3b_1-a_1b_3)c_2+(a_1b_2-a_2b_1)c_3$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

جو مسئلہ کے ثبوت کو مکمل کرتا ہے ■

## 6.4.1 عددیہ کا تگنا حاصل ضرب کی خصوصیات (Properties of the scalar triple product)

**مسئلہ 6.2 (Theorem)**

$\vec{a}$، $\vec{b}$ اور $\vec{c}$ کوئی تین سمتیے ہو تو $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 232 27-02-2023 16:30:20

## ثبوت

فرض کیجیے کہ $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ ، $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ اور $\vec{c} = c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}$

تو, $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$, by $R_1 \leftrightarrow R_3$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \text{ by } R_2 \leftrightarrow R_3$$

$$= (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\,.$$

لہٰذا، مسئلہ ثابت ہوا۔ ■

## غور کیجئے (Note)

مسئلہ 6.2 یہ کہتا ہے کہ عددیہ کا تگنا حاصل ضرب میں سمتیوں کے وقوعہ کی ترتیب کو بغیر تبدیل کئے نقطہ اور کراس کو ادل بدل کرسکتے ہیں۔ اس کا طریقہ یہ ہے کہ ، قوسین کو اس طرح لکھیں کہ نقطہ قوسین کے باہر اور کراس سمتیوں کے درمیان اور قوسین کے اندر ہو۔ مثال کے طور پر

$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ , چونکہ،نقطہ اور کراس کو ادل بدل کرسکتے ہیں۔

$= (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}$ , چونکہ، نقطہ حاصل ضرب متبادلہ ہے۔

$= \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})$ , چونکہ ، نقطہ اور کراس کو ادل بدل کرسکتے ہیں۔

$= (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$ , چونکہ، نقطہ حاصل ضرب متبادلہ ہے۔

$= \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$ , چونکہ، نقطہ اور کراس کو ادل بدل کرسکتے ہیں۔

## علامت (Notation)

$\vec{a}$ ، $\vec{b}$ اور $\vec{c}$ کوئی تین سمتیوں کے لئے عددیہ کا تگنا حاصل ضرب $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ ہے اس کو $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$ کو باکس $\vec{c}\,,\vec{b},\vec{a},$ پڑھا جاتا ہے۔ اس طرح لکھنے کی وجہ یہ ہے کہ عددیہ کا تگنا حاصل ضرب کی مطلق قیمت ایک باکس (مستطیلی متوازی السطوح) کے حجم کو ظاہر کرتی ہے، عددیہ کا تگنا حاصل ضرب کو باکس حاصل ضرب **(box product)** بھی کہتے ہیں۔

## غور کیجئے (Note)

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a} = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = [\vec{b},\vec{c},\vec{a}] \qquad (1)$$

$$[\vec{b},\vec{c},\vec{a}] = (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a} = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = [\vec{c},\vec{a},\vec{b}].$$

دوسرے لفظوں میں ، $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = [\vec{b},\vec{c},\vec{a}] = [\vec{c},\vec{a},\vec{b}]$ یعنی ، اگر تین سمتیوں کو یکساں دوری ترتیب میں مبادلہ کہ کرتے ہیں تو عددیہ کا تگنا حاصل ضرب کی قیمت میں کوئی تبدیلی نہیں ہوگی۔

(2) اگر عددیہ کا تگنا حاصل ضرب میں کوئی دو سمتیے کے مقام کو ادل بدل کرتے ہیں تو عددیہ کا تگنا حاصل ضرب کی قیمت کو $(-1)$ سے ضرب دینا ہوگا۔ مزید وضاحت کے لئے،

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = [\vec{b},\vec{c},\vec{a}] = [\vec{c},\vec{a},\vec{b}] = -[\vec{a},\vec{c},\vec{b}] = -[\vec{c},\vec{b},\vec{a}] = -[\vec{b},\vec{a},\vec{c}]\,.$$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 233 27-02-2023 16:30:25

**مسئلہ 6.3 (Theorem)**

عددیہ کا تگنا حاصل ضرب، جمع اور عددیہ کا ضرب کے خصوصیات کو پورا کرتا ہے۔یعنی،

$$[(\vec{a}+\vec{b}),\vec{c},\vec{d}] = [\vec{a},\vec{c},\vec{d}]+[\vec{b},\vec{c},\vec{d}];$$
$$[\lambda\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \lambda[\vec{a},\vec{b},\vec{c}], \forall\lambda\in\mathbb{R}$$
$$[\vec{a},(\vec{b}+\vec{c}),\vec{d}] = [\vec{a},\vec{b},\vec{d}]+[\vec{a},\vec{c},\vec{d}];$$
$$[\vec{a},\lambda\vec{b},\vec{c}] = \lambda[\vec{a},\vec{b},\vec{c}], \forall\lambda\in\mathbb{R}$$
$$[\vec{a},\vec{b},(\vec{c}+\vec{d})] = [\vec{a},\vec{b},\vec{c}]+[\vec{a},\vec{b},\vec{d}];$$
$$[\vec{a},\vec{b},\lambda\vec{c}] = \lambda[\vec{a},\vec{b},\vec{c}], \forall\lambda\in\mathbb{R}.$$

**ثبوت**

عددیہ حاصل ضرب اور سمتیہ حاصل ضرب کے خصوصیات کو استعمال کرکے ہمیں حاصل ہوا۔

$$\begin{aligned}[(\vec{a}+\vec{b}),\vec{c},\vec{d}] &= ((\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c})\cdot\vec{d}\\ &= (\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{d}\\ &= (\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{d}+(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{d}\\ &= [\vec{a},\vec{c},\vec{d}]+[\vec{b},\vec{c},\vec{d}]\end{aligned}$$

$$[\lambda\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = ((\lambda\vec{a})\times\vec{b})\cdot\vec{c} = (\lambda(\vec{a}\times\vec{b}))\cdot\vec{c} = \lambda((\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}) = \lambda[\vec{a},\vec{b},\vec{c}].$$

اس مسئلہ کا پہلا بیان استعمال کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned}[\vec{a},(\vec{b}+\vec{c}),\vec{d}] &= [(\vec{b}+\vec{c}),\vec{d},\vec{a}] = [\vec{b},\vec{d},\vec{a}]+[\vec{c},\vec{d},\vec{a}]\\ &= [\vec{a},\vec{b},\vec{d}]+[\vec{a},\vec{c},\vec{d}]\end{aligned}$$

$$[\vec{a},\lambda\vec{b},\vec{c}] = [\lambda\vec{b},\vec{c},\vec{a}] = \lambda[\vec{b},\vec{c},\vec{a}] = \lambda[\vec{a},\vec{b},\vec{c}].$$

اسی طریقے کو اپنا کر بقیہ مساوات کو ثابت کرسکتے ہیں۔ ■

تین غیر صفری سمتیے ہم سطح (coplanar) سمتیے ہوتو ان میں کوئی ایک سمتیہ کو دوسرے دو سمتیوں کے خطی اتحاد (linear combination) سے ظاہر کرنے کے بارے میں ہم نے XI ویں جماعت میں سیکھا ہے۔ اب ہم عدیہ کا تگنا حاصل ضرب کے استعمال سے ہم سطح سمتیے کی خصوصیات کو جانیں گے۔

**مسئلہ 6.4 (Theorem)**

تین غیر صفری سمتیوں کا عددیہ کا تگنا حاصل ضرب صفر ہوگا اگر اور صرف اگر سمتیہ ہم سطح ہوں۔

**ثبوت**

فرض کیجئے کہ $\vec{a}$، $\vec{b}$، $\vec{c}$ کوئی تین غیر صفری سمتیے ہوتو،

$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0 \Leftrightarrow$ $\vec{a}\times\vec{b}$ کے $\vec{c}$ عمودی ہے۔

$\Leftrightarrow$ $\vec{c}$ مسطح میں واقع ہے جو $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ دونوں کے متوازی ہے۔

$\Leftrightarrow$ $\vec{a}$، $\vec{b}$، $\vec{c}$ ہم سطح ہیں۔ ■

**مسئلہ 6.5 (Theorem)**

تین سمتیے $\vec{a}$، $\vec{b}$، $\vec{c}$ ہم سطح ہیں، اگر اور صرف اگر $r,s,t\in\mathbb{R}$ عددیہ اس طرح واقع ہوں کہ ان میں سے کم از کم ایک غیر صفری اور $r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}=\vec{0}$ ہو۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 234 27-02-2023 16:30:27

**ثبوت**

فرض کیجئے کہ ، $\vec{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ ، $\vec{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$ ہوتو، $\vec{c}=c_1\hat{i}+c_2\hat{j}+c_3\hat{k}$

$$\vec{a},\vec{b},\vec{c} \text{ ہم سطح ہیں۔} \Leftrightarrow \left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0$$

$\Leftrightarrow$ عددیہ $r,s,t\in\mathbb{R}$ اس طرح واقع ہیں کہ ,

ان میں سے کم از کم ایک غیر صفر ہو اس طرح کہ

$$a_1r+a_2s+a_3t=0,\ b_1r+b_2s+b_3t=0,\ c_1r+c_2s+c_3t=0$$

$\Leftrightarrow$ عددیہ $r,s,t\in\mathbb{R}$ اس طرح واقع ہیں کہ ,

ان میں سے کم از کم ایک غیر صفر ہو اس طرح کہ $r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}=\vec{0}$ ■

**مسئلہ 6.6 (Theorem)**

اگر $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$ اور $\vec{p}$ ، $\vec{q}$ ، $\vec{r}$ تین سمتیے کے کوئی دو نظام ہیں اور اگر $\vec{p}=x_1\vec{a}+y_1\vec{b}+z_1\vec{c}$ ، $\vec{q}=x_2\vec{a}+y_2\vec{b}+z_2\vec{c}$ اور $\vec{r}=x_3\vec{a}+y_3\vec{b}+z_3\vec{c}$ ہوتو

$$\left[\vec{p},\vec{q},\vec{r}\right]=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right].$$

**ثبوت**

مسئلہ 6.6 کے تحت ، اگر $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$ غیر ہم سطح (non-coplanar) اور

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}\neq 0,$$

ہوتو تین سمتیے $\vec{p}=x_1\vec{a}+y_1\vec{b}+z_1\vec{c}$ ، $\vec{q}=x_2\vec{a}+y_2\vec{b}+z_2\vec{c}$ اور $\vec{r}=x_3\vec{a}+y_3\vec{b}+z_3\vec{c}$ بھی غیر ہم سطح ہوں گے۔

## مثال 6.12

اگر $\vec{a}=-3\hat{i}-\hat{j}+5\hat{k}$ ، $\vec{b}=\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ ، $\vec{c}=4\hat{j}-5\hat{k}$ ہوتو $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ معلوم کیجئے۔

**حل**

تین سمتیوں کا عددیہ کا تگنا حاصل ضرب تعریف کے تحت،

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix} -3 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -5 \end{vmatrix}=-3.$$ ■



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 235 27-02-2023 16:30:28

## مثال 6.13

متوازی السطوح کا حجم معلوم کیجئے جس کے عام نقطہ انتہا کے کنارے سمتیے دئے گئے ہیں، $\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ ، $2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$ اور $3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$۔

### حل

ہم جانتے ہیں کہ متوازی السطوح کا حجم جس کے عام نقطہ انتہا کے کنارے $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$ کو اس طرح دیا گیا ہے۔ $|[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]|$ یہاں،

$\vec{a}=2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$ ، $\vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ ، $\vec{c}=3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$

چونکہ $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=\begin{vmatrix}2&-3&4\\1&2&-1\\3&-1&2\end{vmatrix}=-7$ ، مکعبی اکائیاں $|-7|=7$ متوازی سطوح کا حجم

## مثال 6.14

ثابت کیجئے کہ سمتیے $\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ ، $2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ اور $3\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ ہم سطح ہیں۔

### حل

یہاں، $\vec{a}=\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k},\ \vec{b}=2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k},\ \vec{c}=3\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$

$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=\begin{vmatrix}1&2&-3\\2&-1&2\\3&1&-1\end{vmatrix}=0$ ، اب، $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=0$ ہو ، اگر اور صرف اگر $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$ ہم سطح ہیں ہم جانتے ہیں کہ

لہٰذا دئے گئے تین سمتیے ہم سطح ہیں۔

## مثال 6.15

اگر $3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ ، $2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$ ، $\hat{i}+m\hat{j}+4\hat{k}$ ہم سطح ہیں تو $m$ کی قیمت معلوم کیجئے۔

### حل

$\begin{vmatrix}2&-1&3\\3&2&1\\1&m&4\end{vmatrix}=0\Rightarrow m=-3$ ، دئے گئے تین سمتیے ہم سطح رہنے کی وجہ سے،

## مثال 6.16

ثابت کیجئے کہ چار نقاط $(6,-7,0)$ ، $(16,-19,-4)$ ، $(0,3,-6)$ ، $(2,-5,10)$ ایک ہی مسطح پر واقع ہیں۔

### حل

فرض کیجئے کہ $A=(6,-7,0)$ ، $B=(16,-19,-4)$ ، $C=(0,3,-6)$ ، $D=(2,-5,10)$ چار نقاط $D,C,B,A$ ایک ہی مسطح پر واقع ہیں اس کو ثابت کرنے کے لئے ہمیں تین سمتیے $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ کو ہم سطح ثابت کرنا ہوگا۔

اب ، $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(16\hat{i}-19\hat{j}-4\hat{k})-(6\hat{i}-7\hat{j})=10\hat{i}-12\hat{j}-4\hat{k}$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=-6\hat{i}+10\hat{j}-6\hat{k}$ اور $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=-4\hat{i}+2\hat{j}+10\hat{k}$.

$$[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}]=\begin{vmatrix}10&-12&-4\\-6&10&-6\\-4&2&10\end{vmatrix}=0.$$

کیونکہ تین سمتیے $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}$ ہم سطح ہیں۔ اور لہٰذا چار نقاط $C,B,A$ اور $D$ ایک ہی مسطح پر واقع ہیں۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 236 27-02-2023 16:30:32

## مثال 6.17

اگر سمتیے $\vec{a}$، $\vec{b}$، $\vec{c}$ ہم سطح ہوں تو ثابت کیجئے کہ سمتیے $\vec{a}+\vec{b}$، $\vec{b}+\vec{c}$، $\vec{c}+\vec{a}$ بھی ہم سطح ہیں۔

### حل

چونکہ $\vec{a}$، $\vec{b}$، $\vec{c}$ ہم سطح ہیں $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=0$ ہوگا۔عددیہ کا تگنا حاصل ضرب کی خصوصیات کے استعمال سے، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned}[\vec{a}+\vec{b},\vec{b}+\vec{c},\vec{c}+\vec{a}] &= [\vec{a},\vec{b}+\vec{c},\vec{c}+\vec{a}]+[\vec{b},\vec{b}+\vec{c},\vec{c}+\vec{a}]\\ &= [\vec{a},\vec{b},\vec{c}+\vec{a}]+[\vec{a},\vec{c},\vec{c}+\vec{a}]+[\vec{b},\vec{b},\vec{c}+\vec{a}]+[\vec{b},\vec{c},\vec{c}+\vec{a}]\\ &= [\vec{a},\vec{b},\vec{c}]+[\vec{a},\vec{b},\vec{a}]+[\vec{a},\vec{c},\vec{c}]+[\vec{a},\vec{c},\vec{a}]+[\vec{b},\vec{b},\vec{c}]+[\vec{b},\vec{b},\vec{a}]+[\vec{b},\vec{c},\vec{c}]+[\vec{b},\vec{c},\vec{a}]\\ &= [\vec{a},\vec{b},\vec{c}]+[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=2[a,b,c]=0.\end{aligned}$$

لہٰذا، سمتیے $\vec{a}+\vec{b}$، $\vec{b}+\vec{c}$، $\vec{c}+\vec{a}$ ہم سطح ہیں۔ ■

## مثال 6.18

اگر $\vec{a}$، $\vec{b}$، $\vec{c}$ تین سمتیے ہیں تو ثابت کیجئے کہ $[\vec{a}+\vec{c},\ \vec{a}+\vec{b},\ \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}]=[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$۔

### حل

مسئلہ 6.6 کے استعمال سے ، ہمیں حاصل ہوا۔

$$[\vec{a}+\vec{c},\vec{a}+\vec{b},\ \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}] = \begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$$

$$= [\vec{a},\vec{b},\vec{c}].$$ ■

## مشق 6.2

1. اگر، $\vec{a}=\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$، $\vec{b}=2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$، $\vec{c}=3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ ہوتو، $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ معلوم کیجئے۔

2. متوازی السطوح کا حجم معلوم کیجئے کہ جس کے عام نقطہ انتہا کے کناروں کو سمتیے $2\hat{i}+4\hat{j}-2\hat{k}$ اور $14\hat{i}-10\hat{j}-6\hat{k}$، $-6\hat{i}+14\hat{j}+10\hat{k}$ سے ظاہر کئے گئے ہیں۔

3. متوازی السطوح کا حجم $7\hat{i}+\lambda\hat{j}-3\hat{k}$، $\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$، $-3\hat{i}+7\hat{j}+5\hat{k}$، 90 مکعبی اکائیاں ہیں۔ جس کے عام نقطۂ انتہا کے کنارے ہیں۔ $\lambda$ کی قیمت معلوم کیجئے۔

4. اگر $\vec{a}$، $\vec{b}$، $\vec{c}$ تین غیر ہم سطح سمتیے کو متوازی السطوح کے متراکز کناروں سے ظاہر کیا گیا ہے جس کا حجم 4 مکعبی ہوتو قیمت معلوم کیجئے۔
$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{b}\times\vec{c})+(\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{c}\times\vec{a})+(\vec{c}+\vec{a})\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$

5. $\vec{a}=-2\hat{i}+5\hat{j}+3\hat{k}$، $\hat{b}=\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k}$ اور $\vec{c}=-3\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k}$ سمتیوں سے بنائے گئے متوازی اضلاع کے قاعدے کے طور پر لئے گئے سمتیے $\vec{b}$ اور $\vec{c}$ سے بنائے جانے والے متوازی السطوح کا ارتفاع معلوم کیجئے۔

6. جانچئے کہ کیا تین سمتیے $2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$، $\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}$ اور $3\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$ ہم سطح ہیں۔

7. فرض کیجئے کہ $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$، $\vec{b}=\hat{i}$ اور $\vec{c}=c_1\hat{i}+c_2\hat{j}+c_3\hat{k}$ اگر $c_1=1$ اور $c_2=2$ ہوتو $c_3$ معلوم کیجئے اس طرح کہ $\vec{a}$، $\vec{b}$ اور $\vec{c}$ ہم سطح ہیں۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 237 27-02-2023 16:30:33

8. اگر $\vec{a}=\hat{i}-\hat{k}$، $\vec{b}=x\hat{i}+\hat{j}+(1-x)\hat{k}$، $\vec{c}=y\hat{i}+x\hat{j}+(1+x-y)\hat{k}$ ہوتو ثابت کیجئے کہ $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$ کونہ تو $x$ اور نہ تو $y$ پر منحصر ہوگا۔

9. اگر سمتیے $a\hat{i}+a\hat{j}+c\hat{k}$، $\hat{i}+\hat{k}$ اور $c\hat{i}+c\hat{j}+b\hat{k}$ ہم سطح ہیں ثابت کیجئے کہ $a$ اور $b$ کا علم ہندسی اوسط $c$ ہے۔

10. فرض کیجئے کہ $\vec{a}$، $\vec{b}$، $\vec{c}$ تین غیر صفری سمتیے ہیں۔ جیسا کہ $\vec{c}$ ایک اکائی سمتیہ ہے جو $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ دونوں کا عمودی ہے۔ اگر $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کادرمیانی زاویہ $\frac{\pi}{6}$ ہوتو ثابت کیجئے کہ $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]^2=\frac{1}{4}|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$

## 6.5 سمتیوں کا سمتیہ کا تگنا حاصل ضرب (Vector triple product)

### تعریف 6.5

تین سمتیے $\vec{a}$، $\vec{b}$، $\vec{c}$ دیے گئے ہوں تو $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ کو ان سمتیوں کا سمتیہ کا تگنا حاصل ضرب کہتے ہیں۔

### غور کیجئے (Note)

$\vec{a}$، $\vec{b}$، $\vec{c}$ دیے گئے کسی تین سمتیوں کے لئے مندرجہ ذیل میں ان سمتیوں کے سمتیہ کا تگنا حاصل ضربوں کو دیا گیا ہے۔

$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$, $(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a}$, $(\vec{c}\times\vec{a})\times\vec{b}$, $\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})$, $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$, $\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})$

سمتیہ حاصل ضرب کے اچھی طرح واقف خصوصیات کے استعمال کرکے درجہ ذیل مسئلہ کو حاصل کریں گے۔

### مسئلہ 6.7 (Theorem)

درجہ ذیل خصوصیات کو سمتیہ کا تگنا حاصل ضرب پورا کرتا ہے۔

(1) $(\vec{a}_1+\vec{a}_2)\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{a}_1\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{a}_2\times(\vec{b}\times\vec{c})$, $(\lambda\vec{a})\times(\vec{b}\times\vec{c})=\lambda(\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}))$, $\lambda\in\mathbb{R}$

(2) $\vec{a}\times((\vec{b}_1+\vec{b}_2)\times\vec{c})=\vec{a}\times(\vec{b}_1\times\vec{c})+\vec{a}\times(\vec{b}_2\times\vec{c})$, $\vec{a}\times((\lambda\vec{b})\times\vec{c})=\lambda(\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}))$, $\lambda\in\mathbb{R}$

(3) $\vec{a}\times(\vec{b}\times(\vec{c}_1+\vec{c}_2))=\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}_1)+\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}_2)$, $\vec{a}\times(\vec{b}\times(\lambda\vec{c}))=\lambda(\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}))$, $\lambda\in\mathbb{R}$

### ریمارک (Remark)

سمتیہ کا تگنا حاصل ضرب مربوطی خاصیت نہیں رکھتا۔ اس کا مطلب، $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\neq(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ بعض سمتیے $\vec{a}$، $\vec{b}$، $\vec{c}$ کے لئے ہے۔

### تصدیق (جواز) (Justification)

لیتے ہیں $\vec{a}=\hat{i}$، $\vec{b}=\hat{i}$، $\vec{c}=\hat{j}$ ہوتو $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\hat{i}\times(\hat{i}\times\hat{j})=\hat{i}\times\hat{k}=-\hat{j}$، لیکن، $(\hat{i}\times\hat{i})\times\hat{j}=\vec{0}\times\hat{j}=\vec{0}$،

چنانچہ، $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\neq(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$

ذیل کا مسئلہ ہمیں سمتیہ کا تگنا حاصل ضرب جانچنے کے لئے ایک آسان ضابطہ دیتا ہے۔

### مسئلہ 6.8 (سمتیہ کا تگنا حاصل ضرب کا پھیلاؤ) (Vector Triple product expansion) (Theorem)

$\vec{a}$، $\vec{b}$، $\vec{c}$ کوئی تین سمتیے ہوتو $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$

### ثبوت

محدّد محوروں کو ذیل کی طرح انتخاب کریں گے۔

$\vec{a}$ خط برائے عمل کے سمت میں $x$ محور کا انتخاب کریں، مسطح میں $y$ محور کا انتخاب کریں کہ یہ $\vec{a}$ سے گزرتا ہے اور $\vec{b}$ کے متوازی ہے۔ $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ رکھنے والے مسطح کے عمود میں $z$ محور کا انتخاب کریں تو، ہمیں



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 238 27-02-2023 16:30:39

$$\vec{a} = a_1\hat{i}$$
$$\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j}$$
$$\vec{c} = c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}$$

اب ,
$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = a_1\hat{i}\times\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ b_1 & b_2 & 0\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$
$$= a_1\hat{i}\times\left(b_2c_3\hat{i} - b_1c_3\hat{j} + (b_1c_2 - b_2c_1)\hat{k}\right)$$
$$= -a_1b_1c_3\hat{k} + a_1(b_2c_1 - b_1c_2)\hat{j} \quad \ldots (1)$$
$$(\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b})\vec{c} = a_1c_1\times\left(b_1\hat{i} + b_2\hat{j}\right) - a_1b_1\left(c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}\right)$$
$$= a_1(b_2c_1 - b_1c_2)\hat{j} - a_1b_1c_3\hat{k} \quad \ldots (2)$$

مساوات(1) اور (2) سے ہمیں حاصل ہوا۔

■ $$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (a\cdot\vec{b})\vec{c}$$

## غور کیجئے (Note)

(1) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$ جس میں، $\alpha = \vec{a}\cdot\vec{c}$ اور $\beta = -(\vec{a}\cdot\vec{b})$ ، اور یہ مسطح پر واقع ہے جو $\vec{b}$ اور $\vec{c}$ کے متوازی ہے۔

(2) ہم نے مزید غور کیا کہ،
$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = -\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})$$
$$= -[(\vec{c}\cdot\vec{b})\vec{a} - (\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}]$$
$$= (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$$

چنانچہ، $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ سطح میں واقع ہے۔ جو $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کے متوازی ہے۔

(3) $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ میں قوسین کے اندر کے سمتیے میں $\vec{b}$ کو وسطی سمتیہ اور $\vec{a}$ کو غیر وسطی سمتیہ کہتے ہیں۔ اسی طرح $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$, میں $\vec{b}$ کو وسطی سمتیہ اور $\vec{c}$ کو غیر وسطی سمتیہ کہتے ہیں۔ ہم نے غور کیا کہ ان سمتیوں کا، سمتیہ کا تگنا حاصل ضرب مساوی ہو گا۔

$$\lambda \text{ (وسطی سمتیہ)} - \mu \text{ (غیر وسطی سمتیہ)}$$

جس میں $\lambda$ وسطی سمتیہ کے علاوہ دوسرے سمتیے کا نقطہ حاصل ضرب ہے اور $\mu$ غیر وسطی سمتیہ کے علاوہ دوسرے سمتیے کا نقطہ حاصل ضرب ہے۔

## 6.6 جاکوبی کا تماثل اور لیگرانجی کا تماثل (Jacobi's Identity and Lagrange's Identity)

**مسئلہ 6.9 (جاکوبی کا تماثل) (Jacobi's identity) (Theorem)**

$\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$ کوئی تین سمتیے ہوں تو $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) + \vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a}) + \vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{0}$

### ثبوت

سمتیہ کا تگنا حاصل ضرب کے پھیلاؤ کے استعمال سے ہمیں حاصل ہوا۔
$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$$
$$\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a}) = (\vec{b}\cdot\vec{a})\vec{c} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 239 27-02-2023 16:30:46

$$\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = (\vec{c}\cdot\vec{b})\vec{a}-(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}\,.$$

اوپر کے مساوات کو جمع کریں ۔ اور دو سمتیے کا عددیہ حاصل ضرب کی متبادلہ خصوصیت کو استعمال کرکے ہمیں حاصل ہوا۔

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{0}$$

**مسئلہ 6.10 (لیگرانجی کا تماثل) (Lagrange's identity) (Theorem)**

$\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$ ، $\vec{d}$ کوئی چار سمتیے ہو تو

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{a}\cdot\vec{d} \\ \vec{b}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{d} \end{vmatrix}$$

**ثبوت**

چونکہ ، عددیہ کے حاصل ضرب میں نقطہ اور کراس کو ادل بدل کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) &= \vec{a}\cdot(\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{d})) \\ &= \vec{a}\cdot((\vec{b}\cdot\vec{d})\vec{c}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{d}) \quad \text{(سمتیہ کا تگنا حاصل صرب کا پھیلاؤ کے تحت)} \\ &= (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d})-(\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c}) \\ &= \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{a}\cdot\vec{d} \\ \vec{b}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{d} \end{vmatrix}\end{aligned}$$

## مثال 6.19

ثابت کیجئے کہ $[\vec{a}\times\vec{b},\ \vec{b}\times\vec{c},\ \vec{c}\times\vec{a}]=[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]^2$۔

**حل**

عددیہ کا تگنا حاصل ضرب تعریف کے استعمال سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$[\vec{a}\times\vec{b},\ \vec{b}\times\vec{c},\ \vec{c}\times\vec{a}]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot[(\vec{b}\times\vec{c})\times(\vec{c}\times\vec{a})] \quad \ldots (1)$$

سمتیہ کا تگنا حاصل ضرب میں $(\vec{b}\times\vec{c})$ کو پہلا سمتیہ کے طور پر لے کر ہم دریافت کریں گے۔

$$(\vec{b}\times\vec{c})\times(\vec{c}\times\vec{a}) = ((\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a})\vec{c}-((\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{c})\vec{a}=[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\vec{c}\,.$$

اسی قیمت (1) میں استعمال کرنے سے ہمیں حاصل ہوگا۔

$$[\vec{a}\times\vec{b},\vec{b}\times\vec{c},\vec{c}\times\vec{a}] = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot([\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\vec{c})=[\vec{a},\vec{b},\vec{c}](\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]^2\,.$$

## مثال 6.20

ثابت کیجئے کہ $(\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}))\vec{a}=(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{a}\times\vec{c})$۔

**حل**

دئے گئے مساوات کے دائیں جانب میں $(\vec{a}\times\vec{b})$ کو پہلے سمتیہ کے طور پر لیتے ہیں اور سمتیہ کا تگنا حاصل ضرب کے پھیلاؤ سے ہمیں حاصل ہوا۔

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{a}\times\vec{c}) = ((\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c})\vec{a}-((\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a})\vec{c}=(\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}))\vec{a}\,.$$

## مثال 6.21

$\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$ ، $\vec{d}$ کوئی چار سمتیے ہوں تو

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = [\vec{a},\vec{b},\vec{d}]\vec{c}-[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\vec{d}=[\vec{a},\vec{c},\vec{d}]\vec{b}-[\vec{b},\vec{c},\vec{d}]\vec{a}\,.$$

**حل**

$\vec{p}=(\vec{a}\times\vec{b})$ کو ایک سمتیہ کے طور پر لیں اور سمت کا تگنا حاصل ضرب کے پھیلاؤ سے ہمیں حاصل ہوا۔

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = \vec{p}\times(\vec{c}\times\vec{d})$$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 240 27-02-2023 16:30:49

$$= (\vec{p}\cdot\vec{d})\vec{c} - (\vec{p}\cdot\vec{c})\vec{d}$$

$$= ((\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{d})\vec{c} - ((\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c})\vec{d} = [\vec{a},\vec{b},\vec{d}]\vec{c} - [\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\vec{d}$$

اسی طرح، $\vec{q} = \vec{c}\times\vec{d}$ کی طرح لینے سے ہمیں حاصل ہوا،

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{q}$$

$$= (\vec{a}\cdot\vec{q})\vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{q})\vec{a}$$

$$= [\vec{a},\vec{c},\vec{d}]\vec{b} - [\vec{b},\vec{c},\vec{d}]\vec{a}$$

## مثال 6.22

اگر $\vec{a} = -2\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$، $\vec{b} = 3\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$، $\vec{c} = 2\hat{i} - 5\hat{j} + \hat{k}$ ہو تو $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ اور $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ محسوب کیجئے۔ کیا وہ مساوی ہیں بیان کیجئے۔

## حل

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 7\hat{i} - 7\hat{k}$$ تعریف کے تحت،

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 7 & 0 & -7 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = -35\hat{i} - 21\hat{j} - 35\hat{k}$$ تو، ... (1)

$$\vec{b}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 14\hat{i} + 3\hat{j} - 13\hat{k}\,.$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 3 & -2 \\ 14 & 3 & -13 \end{vmatrix} = -33\hat{i} - 54\hat{j} - 48\hat{k}$$ اس کے بعد، ... (2)

لہٰذا، مساوات (1) اور (2) سے ہمیں $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} \neq \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ حاصل ہوا۔

## مثال 6.23

اگر $\vec{a} = \hat{i} - \hat{j}$، $\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k}$، $\vec{c} = 3\hat{j} - \hat{k}$ اور $\vec{d} = 2\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}$ ہو تو، تصدیق کیجئے کہ،

(i) $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = [\vec{a},\vec{b},\vec{d}]\vec{c} - [\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\vec{d}$

(ii) $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = [\vec{a},\vec{c},\vec{d}]\vec{b} - [\vec{b},\vec{c},\vec{d}]\vec{a}$

## حل (i)

تعریف کے تحت،

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 4\hat{i} + 4\hat{j},\ \vec{c}\times\vec{d} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 8\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}$$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 241 27-02-2023 16:30:53

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 4 & 0 \\ 8 & -2 & -6 \end{vmatrix} = -24\hat{i}+24\hat{j}-40\hat{k} \quad \text{تو ،} \qquad \ldots (1)$$

اس کے بعد

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{d}]\vec{c}-[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\vec{d} = 28(3\hat{j}-\hat{k})-12(2\hat{i}+5\hat{j}+\hat{k}) = -24\hat{i}+24\hat{j}-40\hat{k} \qquad \ldots (2)$$

لہٰذا، مساوات (1) اور (2) سے تماثل (i) تصدیق ہوا۔

تماثل (ii) کی تصدیق کو طلباء کے مشق کے لئے چھوڑ دیا گیا ہے۔

## مشق 6.3

1. اگر $\vec{a}=\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$، $\vec{b}=2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$، $\vec{c}=3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ ہوتو، (i) $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ (ii) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ معلوم کیجئے۔
2. کوئی سمتیہ $\vec{a}$ کے لئے ثابت کیجئے کہ $\hat{i}\times(\vec{a}\times\hat{i})+\hat{j}\times(\vec{a}\times\hat{j})+\hat{k}\times(\vec{a}\times\hat{k})=2\vec{a}$۔
3. ثابت کیجئے $[\vec{a}-\vec{b},\ \vec{b}-\vec{c},\ \vec{c}-\vec{a}]=0$۔
4. اگر، $\vec{a}=2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}$، $\vec{b}=3\hat{i}+5\hat{j}+2\hat{k}$، $\vec{c}=-\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$ ہوتو، تصدیق کیجئے۔

   (i) $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$ (ii) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$
5. اگر، $\vec{a}=2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}$، $\vec{b}=-\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}$، $\vec{c}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ ہوتو، $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{c})$ کی قیمت معلوم کیجئے۔
6. اگر $\vec{a}$، $\vec{b}$، $\vec{c}$، اور $\vec{d}$ ہم سطح سمتیے ہوتو ثابت کیجئے $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=\vec{0}$
7. اگر، $\vec{a}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$، $\vec{b}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$، $\vec{c}=3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ اور $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}$ ہوتو $l$، $m$، $n$ کی قیمتیں معلوم کیجئے۔
8. اگر $\hat{a}$، $\hat{b}$، $\hat{c}$ تین اکائی سمتیے ہیں جس میں $\hat{b}$ اور $\hat{c}$ غیر متوازی ہیں اور $\hat{a}\times(\hat{b}\times\hat{c})=\frac{1}{2}\hat{b}$ ہوتو $\hat{a}$ اور $\hat{c}$ کے درمیانی زاویہ معلوم کیجئے۔

## 6.7 ابعادی علم ہندسہ میں سمتیے کے استعمالات (Application of Vectors to 3-Dimensional Geometry)

3 ابعادی میں خطوط مستقیم اور مسطحوں کے، مطالعہ کرنے کے لئے سمتیے ایک عمدہ طریقہ مہیا کرتے ہیں۔ تمام خطوط مستقیم اور مسطحیں $\mathbb{R}^3$ کے تحتی مجموعے ہیں۔ ایک خط مستقیم کو اختصار کرکے خط کہیں گے۔ مسطح ایک سطح ہے جو $P$ میں موجود نقاط کا مجموعہ $\mathbb{R}^3$ میں سمجھا جاتا ہے۔ اس طرح کہ اگر $P$ کے کوئی تین نقاط $A$، $B$ اور $C$ غیر ہم خط ہوتو ان میں سے کوئی دو نقاط سے خط گزرتی ہے تو یہ $P$ کا تحتی مجموعہ ہوگا۔ قطع کرنے والے دو مسطح ان کو کہتے ہیں جس میں اگر ان کا کم از کم ایک نقطہ مشترک ہو اور کم از کم ایک نقطہ ایک مسطح پر واقع ہو لیکن دوسرا نقطہ مسطح پر واقع نہ ہو۔ اگر دو مسطحوں میں ٹھیک یکساں نقاط ہیں تو ان کو منطبق کہتے ہیں۔ اگر دو مسطحوں میں کوئی مشترک نقطہ نہ ہوتو ان کو متوازی کہتے ہیں لیکن وہ منطبق نہیں ہیں۔ اسی طرح، قطع کرنے والے دو مسطحوں کے مشترک نقاط کا مجموعہ ایک خط مستقیم کہلاتا ہے۔ اس حصّے میں، سمتیہ کا طریقہ استعمال کرکے خط مستقیم اور مسطحوں کے لئے کارتیسی مساوات اور سمتیے مساوات معلوم کریں گے۔ ایک علم ہندسی شکل کی مساوات کا مطلب اس شکل میں موجود ہر ایک نقطے کے مقامی سمتیے مساوات کو پورا کرتے ہے تو وہ مساوات علم ہندسی شکل کا سمتیہ مساوات کہلاتا ہے۔ یہ مساوات ایک سمتیہ مساوات یا عددیہ مساوات ہوسکتا ہے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 242 27-02-2023 16:30:55

## 6.7.1 خط مستقیم کی مختلف شکلوں کے مساوات (Different forms of equation of a straight line)

ایک خط مستقیم کی مساوات کو ذیل کے دو مخصوص طریقوں سے حل کریں گے۔

- خط مستقیم پر واقع ایک نقطہ اور خط مستقیم کی سمت دی گئی ہو۔
- خط مستقیم پر واقع دو نقاط دیے گئے ہوں۔

ہم خط مستقیم کی مساواتوں کو سمتیہ اور کارتیسی شکل میں دریافت کریں گے۔ سمتیہ شکل میں ایک خط مستقیم کی مساوات معلوم کرنے کے لئے، ایک خط مستقیم پر ایک اختیاری نقطہ $P$ جس کا مقامی سمتیہ $\vec{r}$ لیا جاتا ہے۔ اور دیے گئے شرائط کے استعمال سے ایک تعلق $\vec{r}$ کو پورا کرتا ہے۔ اس تعلق کو خط مستقیم کی سمتیہ مساوات کہتے ہیں۔ خط مستقیم کی سمتیہ مساوات میں پیمائشیں (parameters) شامل ہوسکتے ہیں اور نہیں بھی ہوسکتے ہیں۔ اگر سمتیہ مساوات میں پیمائشیں شامل ہو تو اس کو پیمائشی شکل کا سمتیہ مساوات کہتے ہیں۔ اگر پیمائشیں شامل نہ ہو تو اسی کو غیر پیمائشی شکل کا سمتیہ مساوات کہتے ہیں۔

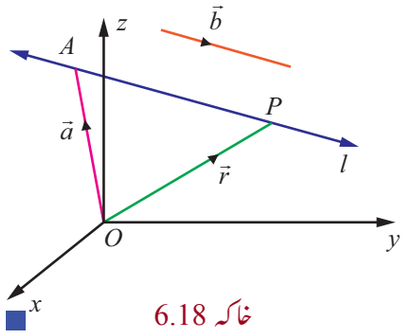
## 6.7.2 خط مستقیم پر واقع ایک نقطہ اور خط مستقیم کی سمت دی گئی ہو۔ (A point on the straight line and the direction of the straight line are given)

### (a) پیمائشی شکل کا سمتیہ مساوات (Parametric form of vector equation)

**مسئلہ 6.11 (Theorem)**

متعین نقطہ جس کا مقامی سمتیہ $\vec{a}$ سے گزرنے والا اور دیے گئے سمتیہ $\vec{b}$ کے متوازی ہونے والے خط مستقیم کی سمتیہ مساوات $\vec{r} = \vec{a} + t\vec{b}$ جس میں $t \in \mathbb{R}$ ہے۔

**ثبوت**



خاکہ 6.18

اگر دیے گئے نقطہ $A$ کا مقامی سمتیہ $\vec{a}$ ہے اور خط مستقیم پر اختیاری نقطہ $P$ کا مقامی سمتیہ $\vec{r}$ ہو تو $\overrightarrow{AP} = \vec{r} - \vec{a}$

چونکہ، $\overrightarrow{AP}$، $\vec{b}$ کے متوازی رہنے کی وجہ سے، یا

$$\vec{r} - \vec{a} = t\vec{b},\ t \in \mathbb{R} \quad \ldots (1)$$ یا

$$\vec{r} = \vec{a} + t\vec{b},\ t \in \mathbb{R} \quad \ldots (2)$$

یہ خط مستقیم کے سمتیہ مساوات کی پیمائشی شکل ہے۔

**ریمارک (Remark)**

خط پر کسی بھی نقطہ کے مقامی سمتیہ کو $\vec{a} + t\vec{b}$ کے طور پر لیا جاتا ہے۔

### (b) غیر پیمائشی شکل کی سمتیہ مساوات (Non-parametric form of vector equation)

چونکہ، $\overrightarrow{AP}$، $\vec{b}$ کے متوازی رہنے کی وجہ سے ہمارے پاس ہے، $\overrightarrow{AP} \times \vec{b} = \vec{0}$

یعنی، $(\vec{r} - \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{0}$

یہ خط مستقیم کے سمتیہ مساوات کی غیر پیمائشی شکل کہلاتا ہے۔

### (c) کارتیسی مساوات (Cartesian equation)

$P$ قیاس کیجئے کہ $(x, y, z)$، اور $A$ اور $(x_1, y_1, z_1)$ ہو تو $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$، $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$، $\vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$

کو (1) میں درج کرکے $\hat{i}$، $\hat{j}$، $\hat{k}$ کے ضریبوں کا موازنہ کریں تو ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$x - x_1 = tb_1, y - y_1 = tb_2, z - z_1 = tb_3 \quad \ldots (4)$$

مساوات (4) کو حسب معمول اس طرح لکھیں گے۔

$$\frac{x - x_1}{b_1} = \frac{y - y_1}{b_2} = \frac{z - z_1}{b_3} \quad \ldots (5)$$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 243 27-02-2023 16:30:57

ان کو کارتیسی مساوات یا متشاکل مساوات کہتے ہیں۔ ایک خط مستقیم کا جو نقطہ $(x_1, y_1, z_1)$ سے گزرتا ہے اور ایک سمتیہ جس کے سمت کی نسبتیں $b_1$، $b_2$، $b_3$ کے متوازی ہے۔

### ریمارک (Remark)

(i) مساوات (5) میں خط پر ہر نقطہ $(x_1 + tb_1, y_1 + tb_2, z_1 + tb_3)$ کی شکل میں ہوگا جس میں $t \in \mathbb{R}$ ہے۔

(ii) چونکہ، ایک خط کا کوئی سائن سمت، خط کے سمت نسبتوں کے متناسب ہوگا۔ اگر $l$، $m$، $n$ خط کے کوسائن سمتیں ہو تو خط کی کارتیسی مساوات یہ ہیں۔

$$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}.$$

(iii) (5) میں، اگر ان میں سے کوئی ایک یا دو $b_1$، $b_2$، $b_3$ میں صفر ہو تو اس کا مطلب یہ نہیں کہ صفر سے تقسیم کریں گے۔ لیکن اس کا مطلب نظیری نسب نما صفر ہے۔ مثال کے طور پر، اگر $b_1 \neq 0$، $b_2 \neq 0$ اور $b_3 = 0$ ہو تو $\frac{x-x_1}{b_1} = \frac{y-y_1}{b_2} = \frac{z-z_1}{0}$، اس طرح لکھ سکتے ہیں۔ $\frac{x-x_1}{b_1} = \frac{y-y_1}{b_2}, z - z_1 = 0$

(vi) ہم جانتے ہیں کہ $x$ - محور کی کوسائن سمتیں 1، 0، 0 ہیں، چنانچہ، $x$ - محور کے مساوات یہ ہیں۔

$\frac{z-0}{0} = \frac{y-0}{0} = \frac{x-0}{1}$ یا، $x = t$، $y = 0$، $z = 0$ جس میں $t \in \mathbb{R}$ ہے۔

اسی طرح $y$ - محور اور $z$ - محور کے مساوات بالترتیب $\frac{x-0}{0} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{0}$ اور $\frac{x-0}{0} = \frac{y-0}{0} = \frac{z-0}{1}$ ہیں۔

## 6.7.3 دئے گئے دونقاط سے گزرنے والی خط مستقیم (Straight Line passing through two given points)

### (a) پیائشی شکل کی سمتیہ مساوات (Parametric form of vector equation)

**مسئلہ 6.12 (Theorem)**

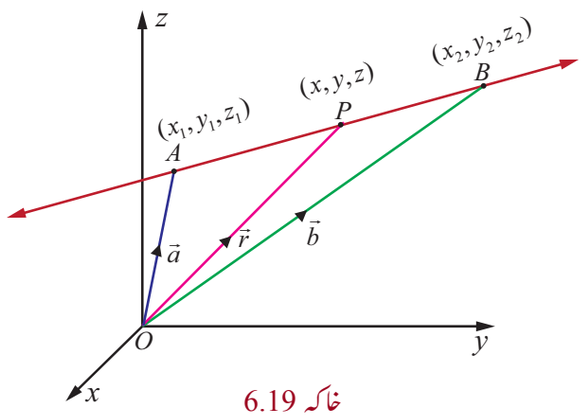
دونقاط جن کے مقامی سمتیہ $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ سے گزرنے والے خط کی پیائشی شکل کی سمتیہ مساوات $\vec{r} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}), t \in \mathbb{R}$ ہے۔

### (b) غیر پیائشی شکل کا سمتیہ مساوات (Non-parametric form of vector equation)

اوپر کی مساوات کے غیر پیائشی شکل کی سمتیہ مساوات کو اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$(\vec{r} - \vec{a}) \times (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{0}$$

### (c) کارتیسی شکل کی مساوات (Cartesian form of equation)



خاکہ 6.19

قیاس کیجئے کہ $P(x, y, z)$، $A(x_1, y_1, z_1)$ اور $B(x_2, y_2, z_2)$ ہو تو $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$، $\vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$ اور $\vec{b} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$ کو مسئلہ 6.12 میں درج کرکے $\hat{i}$، $\hat{j}$، $\hat{k}$ کے ہم ضربیوں کا موازنہ کریں تو ہمیں $x - x_1 = t(x_2 - x_1)$، $y - y_1 = t(y_2 - y_1)$، $z - z_1 = t(z_2 - z_1)$ حاصل ہوتا ہے۔ دئے گئے دونقاط $(x_1, y_1, z_1)$ اور $(x_2, y_2, z_2)$ سے گزرنے والی خط کی کارتیسی مساوات کو اس طرح دیا گیا ہے۔




12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 244 27-02-2023 16:31:00

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

اوپر کی مساوات سے ہم نے غور کیا کہ دیے گئے دونقاط $(x_1,y_1,z_1)$ اور $(x_2,y_2,z_2)$ سے گزرنے والی ایک خط کے سمت نسبتیں $x_2-x_1$، $y_2-y_1$، $z_2-z_1$ سے دیے جاتے ہیں۔ مزید، انھیں کوئی تین اعداد جو ان کے متناسب ہوں گے اور خاص طور پر $x_1-x_2$، $y_1-y_2$، $z_1-z_2$ سے بھی دیے جاتے ہیں۔

## مثال 6.24

ایک خط مستقیم نقطہ $(1,2,-3)$ سے گزرتی ہے اور $4\hat{i}+5\hat{j}-7\hat{k}$ کے متوازی ہے۔ معلوم کیجئے۔ (i) پیمائشی شکل کی سمتیہ مساوات (ii) غیر پیمائشی شکل کی سمتیہ مساوات (iii) خط مستقیم کی کارتیسی مساوات۔

## حل

مطلوبہ خط نقطہ $(1,2,-3)$ سے گزرتی ہے۔ چنانچہ، نقطہ کا مقامی سمتیہ $\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ ہے۔
فرض کیجئے کہ، $\vec{a}=\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ اور $\vec{b}=4\hat{i}+5\hat{j}-7\hat{k}$ ہوتو ہمیں حاصل ہونگے۔

(i) مطلوبہ خط مستقیم کی پیمائشی شکل کی سمتیہ مساوات $\vec{r}=\vec{a}+t\vec{b},\ t\in\mathbb{R}$ ہے۔

لہٰذا، $\vec{r}=(\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})+t(4\hat{i}+5\hat{j}-7\hat{k}),\ t\in\mathbb{R}$

(ii) مطلوبہ خط مستقیم کی غیر پیمائشی شکل کی سمتیہ مساوات $(\vec{r}-\vec{a})\times\vec{b}=\vec{0}$ ہے۔

لہٰذا، $(\vec{r}-(\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}))\times(4\hat{i}+5\hat{j}-7\hat{k})=\vec{0}$

(iii) مطلوبہ خط کی کارتیسی مساوات $\frac{x-x_1}{b_1}=\frac{y-y_1}{b_2}=\frac{z-z_1}{b_3}$ ہے۔

یہاں، $(x_1,y_1,z_1)=(1,2,-3)$ ہے اور مطلوبہ خط کے سمت نسبتیں $4,5,-7$ کے متناسب میں ہیں۔ لہٰذا، خط مستقیم کی کارتیسی مساوات $\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{5}=\frac{z+3}{-7}$ ہیں۔

## مثال 6.25

خط کی پیمائشی شکل کی سمتیہ مساوات $\vec{r}=(3\hat{i}-2\hat{j}+6\hat{k})+t(2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k})$ ہے۔ معلوم کیجئے کہ (i) خط مستقیم کی کوسائن سمتیں۔ (ii) خط کی غیر پیمائشی شکل کا سمتیہ مساوات ۔ (iii) خط کی کارتیسی مساوات۔

## حل

دی گئی مساوات سے $\vec{r}=\vec{a}+t\vec{b}$ کو خط مستقیم کی مساوات کے ساتھ موازنہ کرنے سے ہمیں $\vec{a}=3\hat{i}-2\hat{j}+6\hat{k}$ اور $\vec{b}=2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$ حاصل ہوا۔ لہٰذا،

(i) اگر $\vec{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$ ہوتو خط مستقیم کے سمت نسبتیں $b_1$، $b_2$، $b_3$ ہوں گی۔ چنانچہ دی گئی خط مستقیم کے سمت نسبتیں $2,-1,3$ کے متناسب میں ہیں۔ لہٰذا، دیے گئے خط مستقیم کی کوسائن سمتیں $\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{-1}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}}$ ہیں۔

(ii) خط مستقیم کی غیر پیمائشی شکل کا سمتیہ مساوات $(\vec{r}-\vec{a})\times\vec{b}=\vec{0}$ ہے۔

لہٰذا، $(\vec{r}-(3\hat{i}-2\hat{j}+6\hat{k}))\times(2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k})=\vec{0}$

(iii) یہاں، $(x_1, y_1, z_1)=(3,-2,6)$ ہے اور سمت نسبتیں $2,-1,3$ کے متناسب میں ہیں۔

لہٰذا، خط مستقیم کی کارتیسی مساوات $\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-6}{3}$ ہیں۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 245 27-02-2023 16:31:01

## مثال 6.26

ایک خط، نقطہ $(-4,2,-3)$ سے گزرتی ہے اور خط $\frac{-x-2}{4}=\frac{y+3}{-2}=\frac{2z-6}{3}$ کے متوازی ہو تو پیمائشی شکل کی سمتیہ مساوات اور کارتیسی مساوات معلوم کیجئے۔

## حل

دئے گئے مساوات کو دوبارہ اس طرح $\frac{x+2}{-4}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-3}{3/2}$ لکھتے ہیں اور $\frac{x-x_1}{b_1}=\frac{y-y_1}{b_2}=\frac{z-z_1}{b_3}$ سے موازنہ کرنے سے ہمیں $\vec{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}=-4\hat{i}-2\hat{j}+\frac{3}{2}\hat{k}=-\frac{1}{2}(8\hat{i}+4\hat{j}-3\hat{k})$ حاصل ہوتا ہے۔ واضح طور پر $\vec{b}$ سمتیہ $8\hat{i}+4\hat{j}-3\hat{k}$ کے متوازی ہے۔ مطلوبہ مستقیم کی سمتیہ مساوات دئے گئے نقطہ $(-4,2,-3)$ سے گزرتی ہے اور $8\hat{i}+4\hat{j}-3\hat{k}$ سمتیہ کے متوازی ہے۔

$$\vec{r}=(-4\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})+t(8\hat{i}+4\hat{j}-3\hat{k}),\ t\in\mathbb{R}.$$

لہٰذا، مطلوبہ خط مستقیم کی کارتیسی مساوات دی گئی ہے۔

$$\frac{x+4}{8}=\frac{y-2}{4}=\frac{z+3}{-3}.$$

## مثال 6.27

نقاط $(-5,7,-4)$ اور $(13,-5,2)$ سے گزرنے والی خط مستقیم کی پیمائشی شکل کی سمتیہ مساوات اور کارتیسی مساواتیں معلوم کیجئے۔ خط مستقیم، $xy$ - مسطح پر کونسے نقطہ پر قطع کرتا ہے معلوم کیجئے۔

## حل

خط مستقیم $(-5,7,-4)$ اور $(13,-5,2)$ نقاط سے گزرتی ہے اور چنانچہ، ان دونوں نقاط کو ملانے والے خط مستقیم کی سمت نسبتیں $18,-12,6$ ہیں۔ یعنی، $3,-2,1$ ہے۔

خط مستقیم $3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ کے متوازی ہے، لہٰذا،

- مطلوبہ خط مستقیم کی پیمائشی شکل کی سمتیہ مساوات $\vec{r}=(-5\hat{i}+7\hat{j}-4\hat{k})+t(3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k})$ یا $\vec{r}=(13\hat{i}-5\hat{j}+2\hat{k})+s(3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k})$ ہے جس میں $s,t\in\mathbb{R}$ ہے۔
- مطلوبہ خط مستقیم کی کارتیسی مساواتیں $\frac{x+5}{3}=\frac{y-7}{-2}=\frac{z+4}{1}$ یا $\frac{x-13}{3}=\frac{y+5}{-2}=\frac{z-2}{1}$ ہیں۔

خط مستقیم پر ایک اختیاری نقطہ کی شکل یہ ہے۔

$$(3s+13,-2s-5,\ s+2)\ \text{یا}\ (3t-5,-2t+7,\ t-4)$$

چونکہ، خط مستقیم، $xy$ - مسطح کو قطع کرتی ہے تو $z$ - محدّد کا نقطہ تقاطع (point of intersection) صفر ہے۔ چنانچہ، $t-4=0$ یعنی $t=4$ ہے۔ لہٰذا، خط مستقیم، $xy$ - مسطح پر $(7,-1,0)$ پر قطع کرتا ہے۔

## مثال 6.28

$\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{2}=-z$ خط مستقیم محددی محوروں کے درمیان بننے والے زاویئے معلوم کیجئے۔

## حل

اگر $\hat{b}$ ایک اکائی سمتیہ ہے جو دئے گئے خط کے متوازی ہو تو $\hat{b}=\frac{2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}}{|2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}|}=\frac{1}{3}(2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})$ ہوگا۔ چنانچہ، $\hat{b}$ کی کوسائن سمت کے تعریف سے ہمیں حاصل ہوتا ہے،



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 246 27-02-2023 16:31:03

$$\cos\alpha = \frac{2}{3},\ \cos\beta = \frac{2}{3},\ \cos\gamma = -\frac{1}{3},$$

جس میں مثبت $x$ - محور، مثبت $y$ - محور اور مثبت $z$ - محور پر $\hat{b}$ سے بننے والے زاویئے بالترتیب $\alpha, \beta$ اور $\gamma$ ہیں۔ دئے گئے خط مستقیم کے محددی محوروں کے درمیانی زاویے اور $\hat{b}$ کے محددی محوروں سے بننے والے زاویے مساوی رہنے کی وجہ سے

$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right),\ \beta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right),\ \gamma = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{3}\right)$ ہمیں حاصل ہوں گے۔

## 6.7.4 دوخطوط مستقیم کا درمیانی زاویہ (Angle between two straight lines)

### (a) سمتیہ شکل (Vector form)

$\vec{r} = \vec{a} + s\vec{b}$ اور $\vec{r} = \vec{c} + t\vec{d}$ دئے گئے دو خطوط مستقیم کا درمیانی زاویہ حادہ اور $\vec{b}$ اور $\vec{d}$ سمتیوں کا درمیانی زاویہ یکساں ہے۔اس طرح $\cos\theta = \frac{|\vec{b}\cdot\vec{d}|}{|\vec{b}||\vec{d}|}$ یا $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{|\vec{b}\cdot\vec{d}|}{|\vec{b}||\vec{d}|}\right)$ ہوگا۔

### ریمارک (Remark)

(i) دئے گئے دو خطوط $\vec{r} = \vec{a} + s\vec{b}$ اور $\vec{r} = \vec{c} + t\vec{d}$ متوازی ہیں۔

$$\theta = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = 1 \Leftrightarrow |\vec{b}\cdot\vec{d}| = |\vec{b}|\,|\vec{d}|.$$

(ii) دئے گئے دو خطوط $\vec{r} = \vec{a} + s\vec{b}$ اور $\vec{r} = \vec{c} + t\vec{d}$ متوازی ہیں اگر اور صرف اگر $\vec{b} = \lambda\vec{d}$ ہو، کوئی عددیہ $\lambda$ کے لئے۔

(iii) دئے گئے دو خطوط $\vec{r} = \vec{a} + s\vec{b}$ اور $\vec{r} = \vec{c} + t\vec{d}$ عمودی ہیں اگر اور صرف اگر $\vec{b}\cdot\vec{d} = 0$ ہو۔

### (b) کارتیسی شکل (Cartesian form)

اگر دو خطوط کارتیسی شکل میں اس طرح $\frac{x-x_1}{b_1} = \frac{y-y_1}{b_2} = \frac{z-z_1}{b_3}$ اور $\frac{x-x_2}{d_1} = \frac{y-y_2}{d_2} = \frac{z-z_2}{d_3}$ دئے گئے ہوں تو دئے گئے دو خطوط کا درمیانی زاویہ حادہ $\theta$ اس طرح سے دیا جاتا ہے۔

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{|b_1d_1 + b_2d_2 + b_3d_3|}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}\sqrt{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}}\right)$$

### ریمارک (Remark)

(i) دئے گئے دو خطوط سمت نسبتیں $b_1, b_2, b_3$ اور $d_1, d_2, d_3$ کے ساتھ متوازی ہیں اگر اور صرف اگر، $\frac{b_1}{d_1} = \frac{b_2}{d_2} = \frac{b_3}{d_3}$ ہو۔

(ii) دئے گئے دوخطوط سمت نسبتیں $b_1, b_2, b_3$ اور $d_1, d_2, d_3$ کے ساتھ عمودی ہیں اگر اور صرف اگر $b_1d_1 + b_2d_2 + b_3d_3 = 0$ ہو۔

(iii) دئے گئے دو خطوط مستقیم کے کوسائن سمت $l_1, m_1, n_1$ اور $l_2, m_2, n_2$ ہوتو دئے گئے دو خطوط مستقیم کا درمیانی زاویہ $\cos\theta = |l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2|$ ہے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 247 27-02-2023 16:31:05

## مثال 6.29

خط $\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}) + t(2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})$ اور $(5,1,4)$ اور $(9,2,12)$ نقاط سے گزرنے والے خط مستقیم کا درمیانی زاویہ حادہ معلوم کیجئے۔

## حل

ہم جانتے ہیں کہ خط $\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}) + t(2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})$ سمتیہ $2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ کے متوازی ہے۔

$(5,1,4)$ اور $(9,2,12)$ دیے گئے دونقاط کو ملانے والا خط مستقیم کی سمت نسبت $4,1,8$ ہیں۔ لہٰذا، یہ خط سمتیہ $4\hat{i} + \hat{j} + 8\hat{k}$ کے متوازی ہے۔

لہٰذا، دیے گئے دو خطوط مستقیم کا درمیانی زاویہ حادہ

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{|\vec{b}\cdot\vec{d}|}{|\vec{b}||\vec{d}|}\right), \text{ جس میں } \vec{b} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k} \text{ اور } \vec{d} = 4\hat{i} + \hat{j} + 8\hat{k}.$$

$$\text{چنانچہ, } \theta = \cos^{-1}\left(\frac{|(2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})\cdot(4\hat{i} + \hat{j} + 8\hat{k})|}{|2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}||4\hat{i} + \hat{j} + 8\hat{k}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right).$$

## مثال 6.30

$\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-2}{2}$ اور $\frac{x-4}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$ خطوط مستقیم کا درمیانی زاویہ حادہ معلوم کیجئے اور بیان کیجئے کہ کیا یہ متوازی یا عمودی ہیں؟

## حل

دیے گئے خطوط کو خطوط مستقیم کی عام کارتیسی مساوات کے ساتھ موازنہ کرنے سے ،

$$\frac{x-x_1}{b_1} = \frac{y-y_1}{b_2} = \frac{z-z_1}{b_3} \text{ اور } \frac{x-x_2}{d_1} = \frac{y-y_2}{d_2} = \frac{z-z_2}{d_3}$$

$(b_1,b_2,b_3) = (2,1,-2)$ اور $(d_1,d_2,d_3) = (4,-4,2)$ حاصل ہوتا ہے، چنانچہ، دو خطوط مستقیم کا درمیانی زاویہ حادہ

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{|(2)(4) + (1)(-4) + (-2)(2)|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}\sqrt{4^2 + (-4)^2 + 2^2}}\right) = \cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$$

لہٰذا، دوخطوط مستقیم عمودی ہیں۔

## مثال 6.31

$A(6,7,5)$ اور $B(8,10,6)$ نقاط سے گزرنے والے خط مستقیم، $C(10,2,-5)$ اور $D(8,3,-4)$ نقاط سے گزرنے والے خط مستقیم کے عمودی ہے ثابت کیجئے۔

## حل

$A(6,7,5)$ اور $B(8,10,6)$ نقاط سے گزرنے والا خط مستقیم سمتیہ $\vec{b} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ کے متوازی ہے اور $C(10,2,-5)$ اور $D(8,3,-4)$ نقاط سے گزرنے والا خط مستقیم سمتیہ $\vec{d} = \overrightarrow{CD} = -2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ کے متوازی ہے۔ چنانچہ ، دوخطوط مستقیم کا درمیانی زاویہ ، $\vec{b}$ اور $\vec{d}$ دوسمتیے کے درمیانی زاویہ کے مساوی ہے۔ چونکہ ،

$$\vec{b}\cdot\vec{d} = (2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k})\cdot(-2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 0.$$

دو سمتیے عمودی ہیں۔ اور لہٰذا، دو خطوط مستقیم عمودی ہیں۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 248 27-02-2023 16:31:07

### دوسرا طریقہ (Aliter)

ہم نے معلوم کیا کہ، $A(6,7,5)$ اور $B(8,10,6)$ دونقاط کو ملانا والا خط مستقیم کی سمت نسبتیں $(b_1,b_2,b_3)=(2,3,1)$ ہیں اور $C(10,2,-5)$ اور $D(8,3,-4)$ دونقاط کو ملانے والاخط مستقیم کی سمت نسبتیں $(d_1,d_2,d_3)=(-2,1,1)$ ہیں۔چونکہ، $b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3=(2)(-2)+(3)(1)+(1)(1)=0$، دو خطوط مستقیم عمودی ہیں۔

### مثال 6.32

ثابت کیجئے کہ خطوط $\frac{x-3}{-2}=\frac{y-3}{3}=\frac{5-z}{6}$ اور $\frac{x-1}{4}=\frac{2-y}{6}=\frac{z-4}{12}$ متوازی ہیں۔

### حل

ہم نے غور کیا کہ خط مستقیم $\frac{x-1}{4}=\frac{2-y}{6}=\frac{z-4}{12}$، سمتیہ $4\hat{i}-6\hat{j}+12\hat{k}$ کے متوازی ہے اور خط مستقیم $\frac{x-3}{-2}=\frac{y-3}{3}=\frac{5-z}{6}$، سمتیہ $-2\hat{i}+3\hat{j}-6\hat{k}$ کے متوازی ہے۔

چنانچہ ، $4\hat{i}-6\hat{j}+12\hat{k}=-2(-2\hat{i}+3\hat{j}-6\hat{k})$, دو سمتیے متوازی ہیں۔ لہٰذا ، دوخطوط مستقیم متوازی ہیں۔

## مشق 6.4

1. مقامی سمتیہ $4\hat{i}+3\hat{j}-7\hat{k}$ رکھنے والے نقطہ سے گزرنے والا خط مستقیم سمتیہ $2\hat{i}-6\hat{j}+7\hat{k}$ کے متوازی ہوتو غیر پیمائشی شکل میں سمتیہ مساوات اور کارتیسی مساوات معلوم کیجئے۔
2. نقطہ $(-2,3,4)$ سے گزرنے والا اور $\frac{x-1}{-4}=\frac{y+3}{5}=\frac{8-z}{6}$ خط مستقیم کے متوازی ہونے والے خط مستقیم کی پیمائشی شکل میں سمتیہ مساوات اور کارتیسی مساوات معلوم کیجئے ۔
3. نقاط $(6,7,4)$ اور $(8,4,9)$ سے گزرنے والے خط مستقیم کا $xz$ اور $yz$ مسطح پر قطع کرنے والے نقاط معلوم کیجئے۔
4. نقاط $(5,6,7)$ اور $(7,9,13)$ سے گزرنے والے خط مستقیم کا کوسائن سمت معلوم کیجئے دئے گئے دو نقاط سے گزرنے والے خط مستقیم کی پیمائشی شکل سمتیہ مساوات اور کارتیسی مساوات معلوم کیجئے۔
5. ذیل کے خطوط کے درمیانی زاویہ حادہ معلوم کیجئے۔

   (i) $\vec{r}=(4\hat{i}-\hat{j})+t(\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}),\ \vec{r}=(\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k})+s(-\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k})$

   (ii) $\frac{x+4}{3}=\frac{y-7}{4}=\frac{z+5}{5},\ \vec{r}=4\hat{k}+t(2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$.

   (iii) $2x=3y=-z$ اور $6x=-y=-4z$.
6. $\Delta ABC$ کی راسیں $A(7,2,1)$، $B(6,0,3)$ اور $C(4,2,4)$ ہوتو $\angle ABC$ معلوم کیجئے۔
7. اگر $(2,1,4)$ اور $(a-1,4,-1)$ نقاط کو ملانے والا خط مستقیم، $(0,2,b-1)$ اور $(5,3,-2)$ نقاط کو ملانے والے خط مستقیم کے متوازی ہوتو $a$ اور $b$ کی قیمتیں معلوم کیجئے۔
8. اگر $\frac{x-5}{5m+2}=\frac{2-y}{5}=\frac{1-z}{-1}$ اور $x=\frac{2y+1}{4m}=\frac{1-z}{-3}$ خطوط مستقیم ایک دوسرے کے عمودی ہیں تو $m$ کی قیمت دریافت کیجئے۔
9. ثابت کیجئے کہ نقاط $(2,3,4)$، $(-1,4,5)$ اور $(8,1,2)$ ہم خط ہیں۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 249 27-02-2023 16:31:08

## 6.7.5 دوخطوط مستقیم کا نقطہ تقاطع (Point of intersection of two straight lines)

اگر $\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{a_2}=\frac{z-z_1}{a_3}$ اور $\frac{x-x_2}{b_1}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{b_3}$ دوخطوط مستقیم ہوں تو ان خطوط پر واقع ہر نقطہ کی شکل بالترتیب اس طرح ہوگی۔ $(x_1+sa_1, y_1+sa_2, z_1+sa_3)$ اور $(x_2+tb_1, y_2+tb_2, z_2+tb_3)$ اگر خطوط قطع کرتے ہیں تو وہاں ضرور ایک مشترک نقطہ ہوگا۔ چنانچہ نقطہ تقاطع پر $s$ اور $t$ کی چند قیمتوں کے لئے ، ہمارے پاس ہے۔

$$(x_1+sa_1, y_1+sa_2, z_1+sa_3) = (x_2+tb_1, y_2+tb_2, z_2+tb_3)$$

لہٰذا, $x_1+sa_1 = x_2+tb_1, y_1+sa_2 = y_2+tb_2, z_1+sa_3 = z_2+tb_3$

اوپر کے تین مساواتوں میں سے کوئی دومساواتوں کو حل کرنے سے ہمیں $s$ اور $t$ کی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔ اگر $s$ اور $t$ کی قیمت بقیہ مساوات کو پورا کرتے ہیں تو یہ خطوط قطع کرنے والے خطوط ہیں۔ ورنہ خطوط، غیر قطع خطوط ہوں گے۔ $s$ کی قیمت درج کرنے سے (یا $t$ کی قیمت درج کرنے سے) ہمیں دوخطوط کا نقطہ تقاطع حاصل ہوگا۔

اگر خطوط مستقیم کی مساواتیں کو سمتیہ شکل میں دئے گئے ہوں تو ان کو کارتیسی شکل میں لکھ کر اس کو اوپر کے طریقے سے نقطہ تقاطع دریافت کریں ۔

### مثال 6.33

خطوط $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}$ اور $\frac{x-4}{5}=\frac{y-1}{2}=z$ کا نقطہ تقاطع معلوم کیجئے۔

### حل

$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}=s$ (لیں) اس خط پر موجود ہر نقطہ $(2s+1, 3s+2, 4s+3)$ کی شکل میں ہوگا اور

$\frac{x-4}{5}=\frac{y-1}{2}=z=t$ (لیں) اس خط پرموجود ہر نقطہ $(5t+4, 2t+1, t)$ کی شکل میں ہوگا۔نقطہ تقاطع میں $s$ اور $t$ کی چند قیمتوں کے لئے، ہمارے پاس ہے۔

$$(2s+1, 3s+2, 4s+3) = (5t+4, 2t+1, t)$$

چنانچہ، $2s-5t=3$ ، $3s-2t=-1$ اور $4s-t=-3$ پہلے دومساواتوں کو حل کرنے سے ہمیں $t=-1$ اور $s=-1$ حاصل ہوتاہے۔ $s$ اور $t$ کی قیمتیں تیسری مساوات کو پورا کرتے ہیں۔ لہٰذا، دئے گئے خطوط قطع کرتے ہیں۔ $t$ یا $s$ کی قیمتوں کو بالترتیب نقاط پر درج کرنے سے ہمیں نقطہ تقاطع $(-1,-1,-1)$ ہے۔

## 6.7.6 دوخطوط مستقیم کے درمیان کا مختصر ترین فاصلہ (Shortest distance between two straight lines)

ہم نے ابھی سمجھایا تھا کہ کس طرح دوخطوط مستقیم کا نقطہ تقاطع معلوم کیا جاتا ہے۔ اور ہم نے مزید سیکھا کہ دئے گئے دو خطوط متوازی ہیں یا نہیں ۔

### تعریف 6.6

اگر دوخطوط ایک ہی مسطح پر واقع ہوں تو ان کو ہم سطح (coplanar) کہتے ہیں۔

### غور کیجئے (Note)

اگر دو خطوط یاتو متوازی یا قطع کرنے والے ہوتو ان کو ہم سطح کہتے ہیں۔

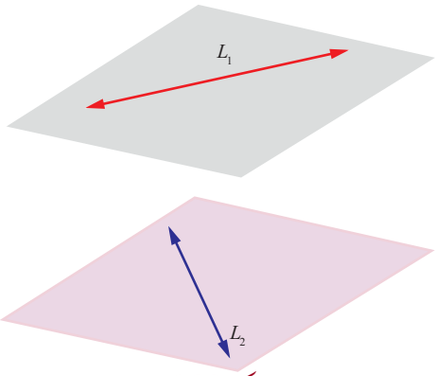
### تعریف 6.7

خلا میں دو خطوط یاتو اگر ایک دوسرے کے متوازی نہ ہوں اور قطع نہ کرتے ہوں تو ان کو ٹیڑھے خطوط (skew lines) کہتے ہیں۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 250 27-02-2023 16:31:10

## غور کیجئے (Note)



خاکہ 6.20

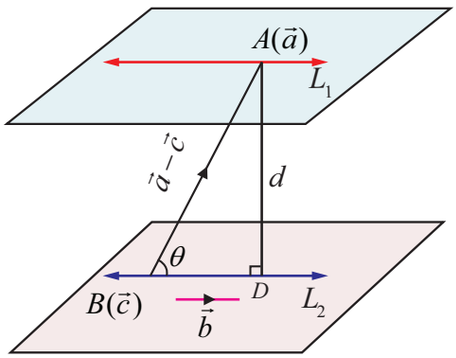
اگر دو خطوط ٹیڑھے خطوط (skew) ہوں تو وہ غیر ہم سطح (non coplanar) ہوں گے۔

اگر قطع کرتے ہیں تو ان کا درمیانی فاصلہ صفر ہوگا۔ اگر دو خطوط متوازی ہوں اور ایک دوسرے کو قطع نہ کریں تو ان دو متوازی خطوط کے عمودی قطاع خط کی لمبائی ہی دو خطوط کا مختصر ترین فاصلہ ہوگا۔ اسی طریقے سے، دو ٹیڑھے (skew) خطوط کا درمیانی مختصر ترین فاصلہ کی وضاحت، دونوں ٹیڑھے (skew) خطوط کے عمودی قطاع خط کی لمبائی ہوگی۔ دو خطوط یا تو متوازی یا ٹیڑھے (skew) ہوں گے۔

### مسئلہ 6.13 (Theorem)

دو متوازی خطوط $\vec{r}=\vec{a}+s\vec{b}$ اور $\vec{r}=\vec{c}+t\vec{b}$ کا درمیانی مختصر ترین فاصلہ $d=\dfrac{|(\vec{c}-\vec{a})\times\vec{b}|}{|\vec{b}|}$،
جہاں $|\vec{b}|\neq 0$ ہوگا۔

### ثبوت



خاکہ 6.21

دیے گئے دو متوازی خطوط $\vec{r}=\vec{a}+s\vec{b}$ اور $\vec{r}=\vec{c}+t\vec{b}$ کو بالترتیب $L_1$ اور $L_2$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ فرض کیجئے کہ $L_1$ اور $L_2$ پر نقاط $A$ اور $B$ ہیں جن کے مقامی سمتیے بالترتیب $\vec{a}$ اور $\vec{c}$ ہیں۔ دیے گئے دو خطوط $\vec{b}$ کے متوازی ہیں۔

فرض کیجئے دیے گئے دو خطوط کا عمودی $AD$ ہے۔ اگر $\overrightarrow{AB}$ اور $\vec{b}$ کا درمیانی زاویہ حادہ $\theta$ ہو تو،

$$\sin\theta = \frac{|\overrightarrow{AB}\times\vec{b}|}{|\overrightarrow{AB}|\,|\vec{b}|}=\frac{|(\vec{c}-\vec{a})\times\vec{b}|}{|\vec{c}-\vec{a}|\,|\vec{b}|} \quad \ldots (1)$$

لیکن $ABD$ مثلث قائمۃ الزاویہ سے،

$$\sin\theta = \frac{d}{AB}=\frac{d}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{d}{|\vec{c}-\vec{a}|} \quad \ldots (2)$$

(1) اور (2) سے ہمیں $d = \dfrac{|(\vec{c}-\vec{a})\times\vec{b}|}{|\vec{b}|}$ جہاں $|\vec{b}|\neq 0$ حاصل ہوا۔ ■

### مسئلہ 6.14 (Theorem)

دو ٹیڑھے (skew) خطوط $\vec{r}=\vec{a}+s\vec{b}$ اور $\vec{r}=\vec{c}+t\vec{d}$ کا درمیانی مختصر ترین فاصلہ

$$\delta = \frac{|(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{b}\times\vec{d})|}{|\vec{b}\times\vec{d}|}$$ جہاں $|\vec{b}\times\vec{d}|\neq 0$ ہوگا۔

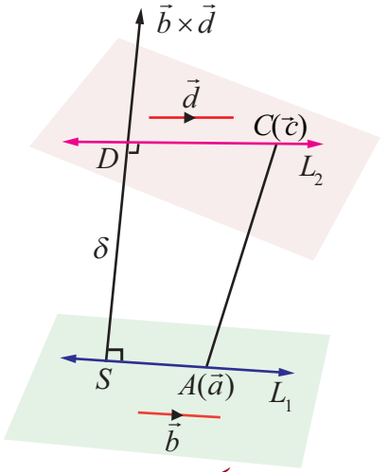
### ثبوت

دیے گئے دو ٹیڑھے (skew) خطوط $\vec{r}=\vec{a}+s\vec{b}$ اور $\vec{r}=\vec{c}+t\vec{d}$ کو بالترتیب $L_1$ اور $L_2$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

فرض کیجئے کہ $L_1$ اور $L_2$ پر نقاط $A$ اور $C$ ہیں جن کے مقامی سمتیے بالترتیب $\vec{a}$ اور $\vec{c}$ ہیں۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 251 27-02-2023 16:31:13



خاکہ 6.22

دئے گئے ٹیڑھے (skew) خطوط کی مساوات سے، ہم نے غور کیا کہ $L_1$، سمتیہ $\vec{b}$ کے متوازی ہے اور $L_2$، سمتیہ $\vec{d}$ کے متوازی ہے۔ اس طرح $\vec{b}\times\vec{d}$، خطوط $L_1$ اور $L_2$ کا عمودی ہے۔

دونوں خطوط $L_1$ اور $L_2$ کا عمودی قطاع خط $SD$ ہوتو، سمتیہ $\overrightarrow{SD}$ سمتیے $\vec{b}$ اور $\vec{d}$ کے عمودی ہوگا۔ چنانچہ، یہ سمتیہ $\vec{b}\times\vec{d}$ کے متوازی ہے۔

یعنی، $\overrightarrow{SD}$ کے سمت میں $\dfrac{\vec{b}\times\vec{d}}{|\vec{b}\times\vec{d}|}$ اکائی سمتیہ ہے تو مختصر ترین فاصلہ $|\overrightarrow{SD}|$، $\overrightarrow{SD}$ پر $\overrightarrow{AC}$ کے تظلیل کی مطلق قیمت ہے۔یعنی،

$$\delta = |\overrightarrow{SD}| = |\overrightarrow{AC}\ .\ (\overrightarrow{SD}\text{ کی سمت میں اکائی سمتیہ})| = \left|(\vec{c}-\vec{a})\cdot\frac{\vec{b}\times\vec{d}}{|\vec{b}\times\vec{d}|}\right|$$

$$\delta = \frac{|(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{b}\times\vec{d})|}{|\vec{b}\times\vec{d}|}, \text{ جہاں } |\vec{b}\times\vec{d}|\neq 0\ .$$

### ریمارک (Remark)

(1) مسئلہ 6.14 سے، $\vec{r}=\vec{a}+s\vec{b}$ اور $\vec{r}=\vec{c}+t\vec{d}$ دوخطوط ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں (یعنی، ہم سطح) اگر $(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{b}\times\vec{d})=0$

(2) اگر $\dfrac{x-x_1}{b_1}=\dfrac{y-y_1}{b_2}=\dfrac{z-z_1}{b_3}$ اور $\dfrac{x-x_2}{d_1}=\dfrac{y-y_2}{d_2}=\dfrac{z-z_2}{d_3}$ دوخطوط ایک دوسرے کو قطع (یعنی، ہم سطح) کرتے ہیں تو ہمیں حاصل ہوگا۔

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}=0$$

## مثال 6.34

ایک خط مستقیم کی پیمائش شکل میں سمتیہ مساوات دریافت کیجئے جو $\vec{r}=(\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})+t(2\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k})$ اور $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z+3}{4}$ خطوط مستقیم کے نقطہ تقاطع سے گزرتی ہے اور دونوں خطوط مستقیم کے عمودی ہے۔

### حل

خط مستقیم کی کارتیسی مساوات ہے $\vec{r}=(\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})+t(2\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k})$

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+1}{2}=s \quad \text{(لیں)}$$

اس خط پر موجود کوئی بھی نقطہ کی شکل $(2s+1,\ 3s+3,\ 2s-1)$ ... (1)

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z+3}{4}=t \quad \text{(لیں)}$$ دوسری خط کی کارتیسی مساوات ہے۔

اس خط پر موجود کوئی بھی نقطہ کی شکل ۔ $(t+2,\ 2t+4,\ 4t-3)$ ... (2)



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 252 27-02-2023 16:31:14

اگر دیے گئے خطوط قطع کرتے ہیں تو ان کا کوئی ضرور ایک مشترک نقطہ ہوگا۔ کوئی $s,t \in \mathbb{R}$ کے لئے
ہمیں حاصل ہوا، $(2s+1,\ 3s+3,\ 2s-1) = (t+2,\ 2t+4, 4t-3)$
$x$، $y$ اور $z$ کے محدّدوں کو مساوی کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$2s-t=1,\ 3s-2t=1 \quad \text{اور} \quad s-2t=-1.$$

اوپر کے تین مساواتوں میں سے پہلے دومساواتوں کو حل کرنے سے ہمیں $s=1$ اور $t=1$ حاصل ہوتا ہے۔ $s$ اور $t$ کی قیمتیں کو تیسری مساوات کو پورا کرتی ہے۔تو یہ خطوط قطع ہیں۔

$s$ کی قیمت کو (1) میں یا $t$ کی قیمت کو (2) میں استعمال کرنے سے ہمیں، ان دو خطوط مستقیم کا نقطہ تقاطع $(3,6,1)$ حاصل ہوگا۔

اگر $\vec{b} = 2\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$ اور $\vec{d} = \hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k}$ لیتے ہیں $\vec{b}\times\vec{d} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 8\hat{i}-6\hat{j}+\hat{k}$ تو سمتیہ دیے گئے دونوں خطوط مستقیم کے عمودی ہے، چنانچہ ،مطلوبہ خط مستقیم نقطہ $(3,6,1)$ سے گزرتی ہے اور دیے گئے دونوں خطوط مستقیم کے عمودی ہے۔ اسی طرح ، خط مستقیم نقطہ $(3,6,1)$ سے گزرتی ہے اور سمتیہ $8\hat{i}-6\hat{j}+\hat{k}$ کے متوازی ہے۔ لہٰذا، مطلوبہ خط مستقیم کی مساوات یہ ہے۔

$$\vec{r} = (3\hat{i}+6\hat{j}+\hat{k}) + m(8\hat{i}-6\hat{j}+\hat{k}),\ m \in \mathbb{R}.$$

## مثال 6.35

جانچئے کہ کیا $\vec{r} = (2\hat{i}+6\hat{j}+3\hat{k}) + t(2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k})$، $\vec{r} = (2\hat{j}-3\hat{k}) + s(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})$ خطوط مستقیم کی جوڑی متوازی ہے؟ ان کے درمیان کا مختصر ترین فاصلہ معلوم کیجئے۔

## حل

دیے گئے دومساواتوں کا موازنہ کرنے سے،

$$\vec{r} = \vec{a}+s\vec{b} \quad \text{اور} \quad \vec{r} = \vec{c}+s\vec{d},$$

$\vec{a} = 2\hat{i}+6\hat{j}+3\hat{k}$، $\vec{b} = 2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$، $\vec{c} = 2\hat{j}-3\hat{k}$، $\vec{d} = \hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ ہمارے پاس ہے۔

یہ واضح ہے کہ $\vec{b}$، $\vec{d}$ کا ایک عددیہ ضعیف (scalar multiple) نہیں ہے۔ چنانچہ ، دو سمتیے متوازی نہیں ہیں اور لہٰذا، دوخطوط بھی متوازی نہیں ہے۔

دو خطوط مستقیم کا درمیانی مختصر ترین فاصلہ کو اس طرح دیا گیا ہے۔

$$\delta = \frac{|(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{b}\times\vec{d})|}{|\vec{b}\times\vec{d}|}$$

اب، $\vec{b}\times\vec{d} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$

چونکہ، $(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{b}\times\vec{d}) = (-2\hat{i}-4\hat{j}-6\hat{k})\cdot(\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}) = 0.$

لہٰذا، دیے گئے دوخطوط مستقیم کا درمیانی فاصلہ صفر ہے۔ اس طرح ، دیے گئے خطوط ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 253 27-02-2023 16:31:16

## مثال 6.36

دیے گئے دو خطوط مستقیم $\vec{r} = (2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k})+t(-2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k})$ اور $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{2}$ کے درمیان کا مختصر ترین فاصلہ معلوم کیجئے۔

## حل

دیے گئے خطوط مستقیم کی پیمائشی شکل کی سمتیہ مساوات ہے۔

$$\vec{r} = (2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k})+t(-2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k})$$

اور $\vec{r} = (3\hat{i}-2\hat{k})+t(2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k})$

دیے گئے دو مساوات کو $\vec{r}=\vec{a}+t\vec{b}$، $\vec{r}=\vec{c}+s\vec{d}$ کے ساتھ موازنہ کرنے سے ہمیں حاصل ہوا،

$\vec{a}=2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$، $\vec{b}=-2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$، $\vec{c}=3\hat{i}-2\hat{k}$، $\vec{d}=2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ حاصل ہوگا۔

$\vec{b}$، $\vec{d}$ کا عددیہ ضیعف ہے۔ چنانچہ دو خطوط مستقیم کے متوازی ہیں۔ ہم جانتے ہیں کہ دو متوازی خطوط مستقیم کے درمیان کا مختصر ترین فاصلہ

$$d=\frac{|(\vec{c}-\vec{a})\times\vec{b}|}{|\vec{b}|}$$

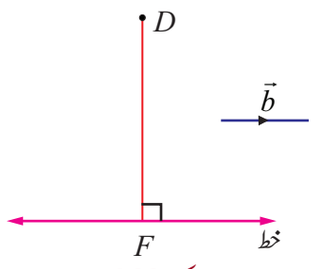
اب، $(\vec{c}-\vec{a})\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -3 & -6 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 12\hat{i}+14\hat{j}-5\hat{k}$

لہٰذا، $d=\frac{|12\hat{i}+14\hat{j}-5\hat{k}|}{|-2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}|}=\frac{\sqrt{365}}{3}$

## مثال 6.37

نقطہ $(-1,2,3)$ سے خط مستقیم $\vec{r}=(\hat{i}-4\hat{j}+3\hat{k})+t(2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k})$ پر کھینچی گئی عمودی خط کے پایہ کی محدّدیں معلوم کیجئے۔ دیے گئے نقطہ سے خط مستقیم کا مختصر ترین فاصلہ بھی معلوم کیجئے۔

## حل



خاکہ 6.23

دی گئی مساوات $\vec{r}=(\hat{i}-4\hat{j}+3\hat{k})+t(2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k})$ کو $\vec{r}=\vec{a}+t\vec{b}$ سے موازنہ کرنے سے $\vec{a}=\hat{i}-4\hat{j}+3\hat{k}$ اور $\vec{b}=2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$ حاصل ہوتا ہے۔ ہم دیے گئے نقطہ $(-1,2,3)$ کو $D$ سے ظاہر کرتے ہیں اور خط مستقیم پر نقطہ $(1,-4,3)$ کو $F$ سے ظاہر کرتے ہیں اگر خط مستقیم پر نقطہ $F$، $D$ کے عمودی خط کا پایہ ہو تو نقطہ $F$، $(2t+1,\ 3t-4,t+3)$ کی شکل میں ہے اور $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OD}=(2t+2)\hat{i}+(3t-6)\hat{j}+t\hat{k}$ ۔

چونکہ، سمتیہ $\vec{b}$، $\overrightarrow{DF}$ کا عمودی رہنے کی وجہ سے، ہمیں حاصل ہوگا۔

$$\vec{b}\cdot\overrightarrow{DF} = 0 \Rightarrow 2(2t+2)+3(3t-6)+1(t)=0 \Rightarrow t=1$$

چنانچہ، $F$ کا محدّد $(3,-1,4)$ ہے۔

دیے گئے نقطہ سے دیے گئے خط کا عمودی فاصلہ یہ ہے۔

$DF = |\overrightarrow{DF}| = \sqrt{4^2+(-3)^2+1^2} = \sqrt{26}$ اکائیاں.



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 254 27-02-2023 16:31:18

## مشق 6.5

1. ایک خط مستقیم کا پیمائشی شکل میں سمتیہ مساوات اور کارتیسی مساوات معلوم کیجئے جو نقطہ $(5,2,8)$ سے گزرتی ہے۔ $\vec{r}=(\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})+s(2\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k})$ اور $\vec{r}=(2\hat{i}-\hat{j}-3\hat{k})+t(\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k})$ خطوط مستقیم کے عمودی ہے۔
2. ثابت کیجئے کہ خطوط $\vec{r}=(6\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k})+s(\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})$ اور $\vec{r}=(3\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k})+t(2\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k})$ ٹیڑھے (skew) خطوط ہیں اور ان کے درمیان کا مختصر ترین فاصلہ بھی معلوم کیجئے۔
3. اگر دو خطوط $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{4}$ اور $\frac{x-3}{1}=\frac{y-m}{2}=z$ ایک نقطہ پر قطع کرتے ہیں تو $m$ کی قیمت معلوم کیجئے۔
4. ثابت کیجئے کہ خطوط $z-1=0, \frac{x-3}{3}=\frac{y-3}{-1}$ اور $y-2=0, \frac{x-6}{2}=\frac{z-1}{3}$ قطع کرتے ہیں اور ان کا نقطہ تقاطع بھی معلوم کیجئے۔
5. ثابت کیجئے کہ خطوط $x+1=2y=-12z$ اور $x=y+2=6z-6$ ٹیڑھے خطوط (skew) ہیں اور ان کے درمیان کا مختصر ترین فاصلہ معلوم کیجئے
6. نقطہ $(-1,2,1)$ سے گزرنے والے خط مستقیم اور خط مستقیم $\vec{r}=(2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})+t(\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k})$ کے متوازی خط کی پیمائشی شکل میں سمتیہ مساوات معلوم کیجئے اور ان کے درمیان کا مختصر ترین فاصلہ بھی معلوم کیجئے۔
7. نقطہ $(5,4,2)$ سے خط $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-1}{-1}$ پر کھینچی گئی عمودی خط کے پایہ کی محدّدیں معلوم کیجئے۔ عمودی کی مساوات بھی معلوم کیجئے۔

## 6.8 مسطح کے مساوات کی مختلف شکلیں (Different forms of Equation of a plane)

مسطح کے ترقیم کے بارے میں ہم پہلے ہی دیکھ چکے ہیں۔

### تعریف 6.8

ایک سمتیہ جو مسطح کے عمودی ہو اس کو مسطح کا **عمود (normal)** کہتے ہیں۔

### غور کیجئے (Note)

ایک مسطح کا ہر ایک عمود، اُس مسطح پر موجود ہر ایک خط مستقیم کے عمودی ہوگا۔
مندرجہ ذیل میں اگر کوئی ایک دیا گیا ہو تو ایک مسطح کو واضح طور پر متعین کرسکتے ہیں۔

- مسطح کا ایک اکائی عمود اور مبداء سے اس مسطح کا فاصلہ۔
- مسطح کا ایک نقطہ اور مسطح کا ایک عمود دیا گیا ہو۔
- مسطح کے تین غیر ہم خط نقاط دئے گئے ہوں۔
- مسطح کا ایک نقطہ اور دو غیر متوازی خطوط یا غیر متوازی سمتیے، جو مسطح کے متوازی دئے گئے ہوں۔
- مسطح کے دو مختلف نقاط اور ایک خط مستقیم یا غیر صفری سمتیہ، جو مسطح کے متوازی ہو لیکن دونقاط کو ملانے والی خط کے متوازی نہ ہو۔

مندرجۂ بالا صورتِ حالوں کے استعمال سے مسطحوں کے سمتیہ اور کارتیسی مساواتیں معلوم کریں گے۔

### 6.8.1 جب مسطح کا ایک عمود اور مبداء سے اس مسطح کا فاصلہ دیا گیا ہو تو ایک مسطح کی مساوات
### (Equation of a plane when a normal to the plane and the distance of the plane from the origin are given)

#### (a) عمود کی شکل میں مسطح کی سمتیہ مساوات (Vector equation of a plane in normal form)

**مسئلہ 6.15 (Theorem)**

مبداء سے $p$ فاصلہ پر اور اکائی عمود کا سمتیہ $\hat{d}$ کے عمودی مسطح کی مساوات $\vec{r}\cdot\hat{d}=p$ ہوگی۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 255 27-02-2023 16:31:20

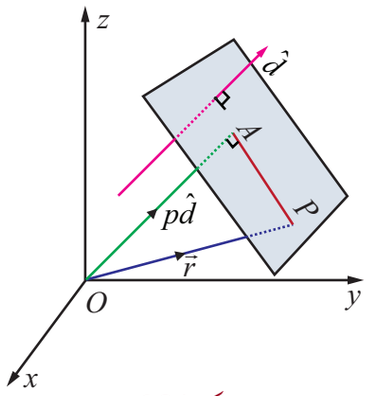
**ثبوت**

فرض کیجئے کہ ایک مسطح جس کا مبداء سے عمودی فاصلہ $p$ ہے۔

فرض کیجئے کہ $O$ سے مسطح تک کے عمودی کا پایہ A ہے۔

فرض کیجئے کہ $\overrightarrow{OA}$ کے سمت میں $\hat{d}$ اکائی عمود کا سمتیہ ہے تو $\overrightarrow{OA} = p\hat{d}$

اگر مسطح پر ایک اختیاری نقطہ $P$ کا مقامی سمتیہ $\vec{r}$ ہو تو $\overrightarrow{AP}$ ، $\overrightarrow{OA}$ کا عمودی ہے۔




خاکہ 6.24

چنانچہ, $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{OA} = 0 \Rightarrow (\vec{r} - p\hat{d})\cdot p\hat{d} = 0$

$\Rightarrow (\vec{r} - p\hat{d})\cdot \hat{d} = 0$

$\vec{r}\cdot\hat{d} = p$ ، اس سے حاصل ہوا، ... (1)

اوپر کی مساوات کو عمودی کی شکل میں مسطح کی سمتیہ مساوات کہتے ہیں۔

### (b) عمودی شکل میں مسطح کی کارتیسی مساوات (Cartesian equation of a plane in normal form)

فرض کیجئے کہ $\hat{d}$ کے کوسائن سمت $l, m, n$ ہو تو $\hat{d} = l\hat{i} + m\hat{j} + n\hat{k}$ ہمیں حاصل ہو گا۔

اس طرح مساوات (1) ہو گا۔

$$\vec{r}\cdot(l\hat{i} + m\hat{j} + n\hat{k}) = p$$

اگر $P(x,y,z)$ ہو تو $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ہو گا۔

چنانچہ, $(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})\cdot(l\hat{i} + m\hat{j} + n\hat{k}) = p$ یا $lx + my + nz = p$ ... (2)

مساوات (2) کو عمودی کی شکل میں مسطح کی کارتیسی مساوات کہتے ہیں۔

### ریمارک (Remark)

(i) اگر مسطح مبداء سے گزرتا ہے تو $p = 0$ ہو گا۔ چنانچہ ، مسطح کی مساوات $lx + my + nz = 0$ ہے۔

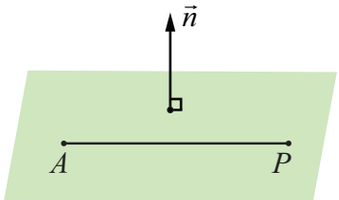
(ii) اگر $\vec{d}$ مسطح کا عمودی سمتیہ ہو تو $\hat{d} = \frac{\vec{d}}{|\vec{d}|}$ مسطح کا اکائی عمود ہو گا۔ چنانچہ ، مسطح کی سمتیہ مساوات $\vec{r}\cdot\frac{\vec{d}}{|\vec{d}|} = p$ یا $\vec{r}\cdot\vec{d} = q$ جس میں $q = p|\vec{d}|$ ہے۔ مساوات $\vec{r}\cdot\vec{d} = q$ مسطح کے سمتیہ مساوات کی معیاری شکل ہے۔

### غور کیجئے (Note)

$\vec{r}\cdot\vec{d} = q$ ، معیاری شکل میں، $\vec{d}$ اکائی عمود ہونا ضروری نہیں اور $q$ کا عمودی فاصلہ ہونا بھی ضروری نہیں۔

## 6.8.2 ایک مسطح کی مساوات جو ایک سمتیہ کے عمودی اور دئے گئے ایک نقطہ سے گزرتا ہو۔
## (Equation of a plane perpendicular to a vector and passing through a given point)

### (a) مساوات کی سمتیہ شکل (Vector form of equation)




خاکہ 6.25

فرض کیجئے کہ مسطح ایک نقطہ $A$ سے گزرتا ہے جس کا مقامی سمتیہ $\vec{a}$ اور دئے گئے مسطح کو $\vec{n}$ ایک عمود سمتیہ ہے۔

فرض کیجئے کہ مسطح پر ایک اختیاری نقطہ $P$ کا مقامی سمتیہ $\vec{r}$ ہو تو



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 256 27-02-2023 16:31:22

$\overrightarrow{AP}$ ، $\vec{n}$ کا عمودی ہے۔

$\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}=0 \Rightarrow (\vec{r}-\vec{a})\cdot\vec{n}=0$ ، چنانچہ ... (1) اس سے حاصل ہوا۔

جو سمتیہ شکل میں مسطح کی مساوات ہے۔ جو نقطہ جس کا مقامی سمتیہ $\vec{a}$ سے گزرتا ہے اور یہ $\vec{n}$ کے عمودی ہے۔

### غور کیجئے (Note)

$(\vec{r}-\vec{a})\cdot\vec{n}=0 \Rightarrow \vec{r}\cdot\vec{n}=\vec{a}\cdot\vec{n} \Rightarrow \vec{r}\cdot\vec{n}=q$ ، یہاں ، $q=\vec{a}\cdot\vec{n}$ .

### (b) کارتیسی شکل میں مساوات (Cartesian form of equation)

اگر $\vec{n}$ کی سمت نسبتیں $a$، $b$، $c$ ہوں تو $\vec{n}=a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k}$ حاصل ہوگا۔ قیاس کیجئے کہ $A(x_1,y_1,z_1)$ ہوتو مساوات (1) $((x-x_1)\hat{i}+(y-y_1)\hat{j}+(z-z_1)\hat{k})\cdot(a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k})=0$ ہوگا۔ یعنی،

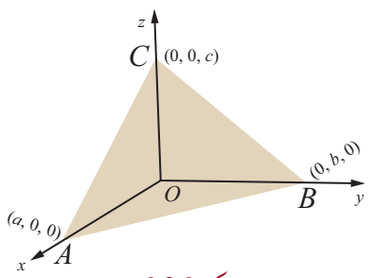
$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1) = 0$$




جو مسطح کی کارتیسی مساوات ہے، جو سمت نسبتیں $a$، $b$، $c$ والے سمتیہ کے عمود اور دئے گئے نقطہ $(x_1,y_1,z_1)$ سے گزرتا ہے۔

## 6.8.3 مقطوعہ کی شکل میں مسطح کی مساوات (Intercept form of the equation of a plane)

فرض کیجئے کہ مسطح $\vec{r}\cdot\vec{n}=q$ محدّد محوروں پر بالترتیب $A$, $B$ اور $C$ پر اس طرح ملتے ہیں کہ ان کے محوروں پر مقطوعے $OA=a$، $OB=b$، $OC=c$ ہیں۔ نقطہ $A$ کا مقامی سمتیہ $a\hat{i}$ ہے۔ چونکہ، دیا گیا مسطح پر $A$ واقع ہے، ہمارے پاس $a\hat{i}\cdot\vec{n}=q$ جس سے $\hat{i}\cdot\vec{n}=\frac{q}{a}$ حاصل ہوگا۔ اسی طرح سمتیے $b\hat{j}$ اور $c\hat{k}$ بھی دئے گئے مسطح پر واقع ہیں تو $\hat{j}\cdot\vec{n}=\frac{q}{b}$ اور $\hat{k}\cdot\vec{n}=\frac{q}{c}$ حاصل ہوگا۔ $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ کو $\vec{r}\cdot\vec{n}=q$ میں درج کرنے پر ہمیں $x\hat{i}\cdot\vec{n}+y\hat{j}\cdot\vec{n}+z\hat{k}\cdot\vec{n}=q.$ حاصل ہوگا جو $x\left(\frac{q}{a}\right)+y\left(\frac{q}{b}\right)+z\left(\frac{q}{c}\right)=q$ ہوگا۔




خاکہ 6.26

$q$ سے مستقیم کرنے پر ہمیں $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ حاصل ہوگا۔ جو مقطوعہ کی شکل میں مسطح کی مساوات کہلاتی ہے۔ جس میں $a$، $b$، $c$ بالترتیب $x$، $y$، $z$ محوروں پر مقطوعے ہیں۔

**مسئلہ 6.16 (Theorem)**

$ax+by+cz+d=0$ میں $x$، $y$، $z$ پہلے درجہ کی عام مساوات ایک مسطح کو ظاہر کرتی ہے۔

### ثبوت

مساوات $ax+by+cz+d=0$ کو سمتیہ شکل میں ذیل کی طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})\cdot(a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k})=-d \quad \text{یا} \quad \vec{r}\cdot\vec{n}=-d\ .$$

جو کہ معیاری شکل میں یہ مسطح کی مساوات کی سمتیہ شکل ہے، دی گئی مساوات $ax+by+cz+d=0$ ایک مسطح کو ظاہر کرتی ہے۔ یہاں، $\vec{n}=a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k}$ ایک سمتیہ مسطح کا عمود ہے۔ ■

### غور کیجئے (Note)

مسطح کی عام شکل $ax+by+cz+d=0$ میں $a$، $b$، $c$ مسطح کے عمود کی سمت نسبتیں ہیں۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 257 27-02-2023 16:31:25

## مثال 6.38

مسطح کی مساواتیں سمتیہ اور کارتیسی شکل میں معلوم کیجئے جس کا فاصلہ مبداء سے 12 اکائیاں ہے اور یہ $6\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ کے عمودی ہے۔

## حل

فرض کیجئے کہ $\vec{d}=6\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ اور $p=12$

اگر سمتیہ $6\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ کی رخ میں اکائی عمود سمتیہ $\hat{d}$

ہوتو $\hat{d}=\frac{\vec{d}}{|\vec{d}|}=\frac{1}{7}(6\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})$

اگر مسطح پر $(x,y,z)$ اختیاری نقطہ کا مقامی سمتیہ $\vec{r}$ ہوتو $\vec{r}\cdot\hat{d}=p$ کے استعمال سے ہمیں عمود کی شکل میں مسطح کی سمتیہ مساوات $\vec{r}\cdot\frac{1}{7}(6\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})=12$ حاصل ہوگا۔

اوپر کی مساوات میں $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ کو درج کرنے پر $(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})\cdot\frac{1}{7}(6\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})=12$ حاصل ہوگا۔

اوپر کی مساوات میں نقطہ حاصل ضرب کو استعمال کرکے اور مختصر کرنے سے ہمیں $6x+2y-3z=84$, حاصل ہوگا۔جو مطلوبہ مسطح کی کارتیسی مساوات ہے۔

## مثال 6.39

اگر ایک مسطح کی کارتیسی مساوات $3x-4y+3z=-8$ ہوتو معیاری شکل میں مسطح کی سمتیہ مساوات معلوم کیجئے ۔

## حل

اگر مسطح پر $(x,y,z)$ اختیاری نقطہ کا مقامی سمتیہ $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ ہوتو دی گئی مساوات کو

$(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})\cdot(3\hat{i}-4\hat{j}+3\hat{k})=-8$ یا $(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})\cdot(-3\hat{i}+4\hat{j}-3\hat{k})=8$ اس طرح لکھ سکتے ہیں۔ یعنی ،

$\vec{r}\cdot(-3\hat{i}+4\hat{j}-3\hat{k})=8$ جو دئے گئے مسطح کی سمتیہ مساوات کی معیاری شکل ہے۔

## مثال 6.40

$\vec{r}\cdot(3\hat{i}-4\hat{j}+12\hat{k})=5$ والے مسطح سے کوسائن سمت کا عمود اور مبداء سے مسطح پر کھینچی جانے والی عمودی خط کی لمبائی معلوم کیجئے۔

## حل

فرض کیجئے کہ $\vec{d}=3\hat{i}-4\hat{j}+12\hat{k}$ اور $q=5$ ہے۔

اگر سمتیہ $3\hat{i}-4\hat{j}+12\hat{k}$ کی رُخ میں اکائی سمتیہ $\hat{d}$ ہوتو دی گئی مساوات کو 13 سے تقسیم کرنے پر،ہمیں $\hat{d}=\frac{1}{13}(3\hat{i}-4\hat{j}+12\hat{k})$ حاصل ہوگا۔

$$\vec{r}\cdot\left(\frac{3}{13}\hat{i}-\frac{4}{13}\hat{j}+\frac{12}{13}\hat{k}\right)=\frac{5}{13}$$

جو عمود کی شکل میں مسطح کی مساوات $\vec{r}\cdot\hat{d}=p$ ہے۔

اسی مساوات سے، ہم نے معلوم کیا کہ، $\hat{d}=\frac{1}{13}(3\hat{i}-4\hat{j}+12\hat{k})$ مبداء سے مسطح پر اکائی عمود سمتیہ ہے۔چنانچہ ، $\hat{d}$ کے کوسائن سمت $\frac{3}{13},\frac{-4}{13},\frac{12}{13}$ ہیں اور مبداء سے مسطح پر کھینچی گئی عمودی خط کی لمبائی $\frac{5}{13}$ ہے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 258 27-02-2023 16:31:26

## مثال 6.41

مسطح کی سمتیہ اور کارتیسی مساواتیں معلوم کیجئے جو نقطہ سے گزرتا ہے جس کا مقامی سمتیہ $4\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ اور $2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ سمتیہ کا عمود ہے۔

### حل

اگر دئے گئے نقطہ کا مقامی سمتیہ $\vec{a}=4\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ اور $\vec{n}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ ہوتو مسطح کی مساوات ایک نقطہ سے گزرتی ہے اور ایک سمتیہ کی عمود ہے جس کو $(\vec{r}-\vec{a})\cdot\vec{n}=0$ یا $\vec{r}\cdot\vec{n}=\vec{a}\cdot\vec{n}$ دیا گیا ہے۔

اوپر کی مساوات پر $\vec{a}=4\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ اور $\vec{n}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ کو درج کرنے پر، ہمیں حاصل ہوگا۔

$$\vec{r}\cdot(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}) = (4\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})\cdot(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})$$

اس طرح، $\vec{r}\cdot(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})=3$ مطلوبہ مسطح کی سمتیہ مساوات ہے اگر $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ ہوتو $2x-y+z=3$ مسطح کا کارتیسی مساوات حاصل ہوگی۔

## مثال 6.42

ایک متغیر مسطح اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اس کے محددی محوروں پر مقطوعوں کے مقلوبوں کا حاصل جمع ایک مستقل ہے۔ثابت کیجئے کہ مسطح ایک متعین نقطہ سے گزرتا ہے۔

### حل

$x$، $y$، $z$ محوروں پر مقطوعے بالترتیب $a$، $b$، $c$ سے بننے والے مسطح کی مساوات $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ ہے۔ چونکہ، محددی محوروں پر مقطوعوں کے مقلوبوں کا حاصل جمع ایک مستقل ہے۔ ہمیں حاصل ہوگا، $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=k$ جس میں $k$ ایک مستقل ہے۔ جس کو

$$\frac{1}{a}\left(\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{b}\left(\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{c}\left(\frac{1}{k}\right)=1$$

کی طرح لکھ سکتے ہیں۔

اس سے یہ ثابت ہوا کہ مسطح $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ ایک متعین نقطہ $\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right)$ سے گزرتا ہے۔

## مشق 6.6

1. مسطح کی سمتیہ مساوات معلوم کیجئے جس کا فاصلہ مبداء سے 7 اکائیاں ہے اور اس کے عمود کے سمت نسبتیں $3$، $-4$، $5$ ہیں۔
2. $12x+3y-4z=65$ مسطح کے عمود کی کوسائن سمت معلوم کیجئے اور مسطح کی غیر پیمائشی شکل کی سمتیہ مساوات اور مبداء سے مسطح پر کھینچی جانے والی عمودی خط کی لمبائی بھی معلوم کیجئے۔
3. مسطح کی سمتیہ اور کارتیسی مساواتیں معلوم کیجئے جو نقطہ سے گزرتا ہے جس کا مقامی سمتیہ $2\hat{i}+6\hat{j}+3\hat{k}$ اور $\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k}$ سمتیہ کے عمودی ہے۔
4. ایک مسطح $(-1,1,2)$ نقطہ سے گزرتا ہے اور مسطح کے عمودی کی قدر $3\sqrt{3}$ ہے جو محددی محوروں سے مساوی زاویہ حادہ بناتا ہے۔ مسطح کی مساوات معلوم کیجئے۔
5. $\vec{r}\cdot(6\hat{i}+4\hat{j}-3\hat{k})=12$ مسطح کے محورں پر بننے والے مقطوعے معلوم کیجئے۔
6. اگر ایک مسطح محددی محوروں سے $A, B$ اور $C$ پر ملتا ہے اس طرح کہ مثلث $ABC$ کا ہندسی مرکز کا نقطہ $(u,v,w)$ ہوتو مسطح کی مساوات معلوم کیجئے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 259 27-02-2023 16:31:28

## 6.8.4 دئے گئے تین غیر ہم خط نقاط سے گزرنے والے مسطح کی مساوات
## (Equation of a plane passing through three given non-collinear points)

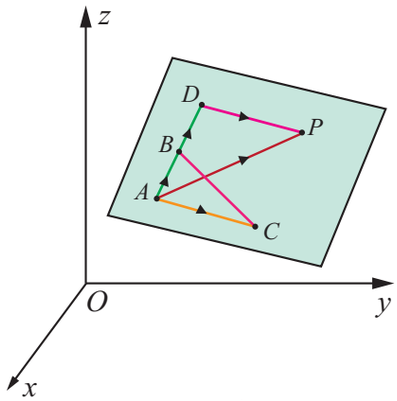
### (a) سمتیہ مساوات کی پیمائشی شکل (Parametric form of vector equation)

**مسئلہ 6.17 (Theorem)**

اگر تین غیر ہم خط نقاط جس کے مقامی سمتیے $\vec{a}, \vec{b}$ اور $\vec{c}$ دئے گئے ہو تو دئے گئے نقاط سے گزرنے والا مسطح کی سمتیہ مساوات کی پیمائشی شکل یہ ہے

$\vec{r} = \vec{a} + s(\vec{b}-\vec{a}) + t(\vec{c}-\vec{a})$ , جہاں $\vec{b} \neq \vec{0}, \vec{c} \neq \vec{0}$ اور $s, t \in \mathbb{R}$ .

**ثبوت**



خاکہ 6.27

فرض کیجئے کہ مسطح تین غیر ہم خط نقاط $A, B$ اور $C$ سے گزرتا ہے جس کے مقامی سمتیے بالترتیب $\vec{a}, \vec{b}$ اور $\vec{c}$ ہیں۔ ان میں سے کم از کم دو غیر صفری سمتیے ہیں۔ $\vec{b} \uparrow \vec{0}$ اور $\vec{c} \uparrow \vec{0}$ لیجئے ، مسطح پر اختیاری نقطہ $P$ ہے۔ جس کا مقامی سمتیہ $\vec{r}$ ہوگا ۔ $AB$ کو دراز کرکے نقطہ $D$ لیجئے کہ $\overrightarrow{AD}$ ، $\overrightarrow{AB}$ کے متوازی ہو اور $\overrightarrow{DP}$ ، $\overrightarrow{AC}$ کے متوازی ہو، چنانچہ،

$$\overrightarrow{AD} = s(\vec{b}-\vec{a}),\ \overrightarrow{DP} = t(\vec{c}-\vec{a}).$$

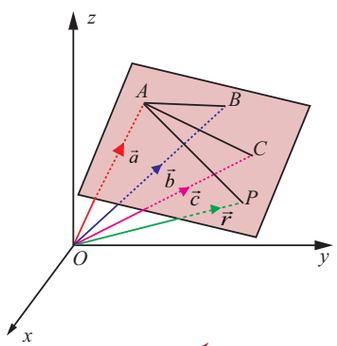
مثلث $ADP$ سے ہمیں حاصل ہوگا۔

$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP}$ یا $\vec{r} - \vec{a} = s(\vec{b}-\vec{a}) + t(\vec{c}-\vec{a})$ جس میں،

$\vec{r} = \vec{a} + s(\vec{b}-\vec{a}) + t(\vec{c}-\vec{a})$ ، یعنی $s, t \in \mathbb{R}$ اور $\vec{b} \neq \vec{0}, \vec{c} \neq \vec{0}$

یہ مسطح کی پیمائشی شکل میں سمتیہ مساوات ہے جو دئے گئے تین غیر ہم خط نقاط سے گزرتا ہے۔ ■

### (b) سمتیہ مساوات کی غیر پیمائشی شکل (Non-parametric form of vector equation)



خاکہ 6.28

فرض کیجئے کہ مسطح تین غیر ہم خط نقاط $A, B$ اور $C$ سے گزرتا ہے جس کے مقامی سمتیے بالترتیب $\vec{a}, \vec{b}$ اور $\vec{c}$ ہو تو ان میں کم از کم دو غیر صفری سمتیے ہوں گے $\vec{b} \neq \vec{0}$ اور $\vec{c} \neq \vec{0}$ لیجئے۔ اب $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ اور $\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a}$ ہے۔ سمتیہ $(\vec{b}-\vec{a})$ اور $(\vec{c}-\vec{a})$ مسطح پر واقع ہیں۔ چونکہ $\vec{a}, \vec{b}$ اور $\vec{c}$ غیر ہم خط ہیں، $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ کے متوازی نہیں ہے۔ لہٰذا، $(\vec{b}-\vec{a})\times(\vec{c}-\vec{a})$ مسطح کا عمودی ہے۔

اگر مسطح پر اختیاری نقطہ $P(x, y, z)$ ہے۔ جس کا مقامی سمتیہ $\vec{r}$ ہو تو نقطہ $A$ سے گزرنے والے مسطح کی مساوات مقامی سمتیہ $\vec{a}$ کے ساتھ اور سمتیہ $(\vec{b}-\vec{a})\times(\vec{c}-\vec{a})$ کے عمودی ہے اس کو اس طرح دیا گیا ہے۔

$$(\vec{r}-\vec{a})\cdot((\vec{b}-\vec{a})\times(\vec{c}-\vec{a})) = 0 \quad \text{یا} \quad [\vec{r}-\vec{a}, \vec{b}-\vec{a}, \vec{c}-\vec{a}] = 0$$

یہ مسطح کی غیر پیمائشی شکل کی سمتیہ مساوات ہے جو دئے گئے تین غیر ہم خط نقاط سے گزرتے ہیں۔

### (c) کارتیسی شکل کی مساوات (Cartesian form of equation)

اگر تین غیر ہم خط نقاط $A, B$ اور $C$ کے محدّدیں $(x_1, y_1, z_1)$ ، $(x_2, y_2, z_2)$ اور $(x_3, y_3, z_3)$ ہیں جن کے مقامی سمتیے بالترتیب $\vec{a}, \vec{b}$ اور $\vec{c}$ ہیں اور نقطہ $P$ کا محدّد $(x, y, z)$ کا مقامی سمتیہ $\vec{r}$ ہو تو ہمیں $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ اور $\vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$, $\vec{b} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$, $\vec{c} = x_3\hat{i} + y_3\hat{j} + z_3\hat{k}$ حاصل ہوگا۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 260 27-02-2023 16:31:30

ان سمتیوں کے استعمال سے مسطح کی غیر پیمائشی شکل کی سمتیہ مساوات جو دئے گئے تین غیر ہم خط نقاط سے گذرتی ہے اس کو معادل طور پر اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

یہ مسطح کی کارتیسی مساوات ہے جو تین غیر ہم خط نقاط سے گزرتی ہے۔

## 6.8.5 دئے گئے ایک نقطہ سے گزرنے والے اور دئے گئے دوغیر متوازی سمتیوں کے متوازی مسطح کی مساوات

**(Equation of a plane passing through a given point and parallel to two given non-parallel vectors)**

### (a) سمتیہ مساوات کی پیمائشی شکل (Parametric form of vector equation)

فرض کیجئے کہ ایک مسطح، دئے گئے نقطہ $A$ سے گزرتا ہے جس کا مقامی سمتیہ $\vec{a}$ اور دئے گئے دوغیر متوازی سمتیہ $\vec{b}$ اور $\vec{c}$ کے متوازی ہے۔ اگر مسطح پر اختیاری نقطہ $P$ جس کا مقامی سمتیہ $\vec{r}$ ہوتو سمتیے $(\vec{r}-\vec{a})$، $\vec{b}$ اور $\vec{c}$ ہم سطح ہیں۔ اس طرح، $(\vec{r}-\vec{a})$ مسطح پر واقع ہے جس میں $\vec{b}$ اور $\vec{c}$ شامل ہیں تو عددیے $s, t \in \mathbb{R}$ ہے موجود ہیں۔ اس طرح کہ،

$$\vec{r}-\vec{a} = s\vec{b}+t\vec{c} \Rightarrow \vec{r} = \vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}\text{ ، جس میں ہے ۔ } s, t \in \mathbb{R} \quad \ldots (1)$$

یہ مسطح کی سمتیہ مساوات کی پیمائشی شکل ہے۔ جو دئے گئے ایک نقطہ سے گزرتا ہے اور دئے گئے دوغیر متوازی سمتیوں کے متوازی ہے۔

### (b) سمتیہ مساوات کی غیر پیمائشی شکل (Non-parametric form of vector equation)

مساوات (1) کو معادل طور پر اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$(\vec{r}-\vec{a})\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = 0 \quad \ldots (2)$$

یہ مسطح کی سمتیہ مساوات غیر پیمائشی شکل میں ہے۔ جو دئے گئے ایک نقطہ سے گزرتا ہے اور دئے گئے دوغیر متوازی سمتیوں کے متوازی ہے۔

### (c) کارتیسی شکل کی مساوات (Cartesian form of equation)

اگر $\vec{a} = x_1\hat{i}+y_1\hat{j}+z_1\hat{k}$, $\vec{b} = b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$, $\vec{c} = c_1\hat{i}+c_2\hat{j}+c_3\hat{k}$ اور $\vec{r} = x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ ہوتو مساوات (2) کو معادل طور پر اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

یہ مسطح کی کارتیسی مساوات ہے جو دئے گئے ایک نقطہ سے گزرتا ہے اور دئے گئے دوغیر متوازی سمتیوں کے متوازی ہے۔

## 6.8.6 دئے گئے دو مختلف نقاط سے گزرنے والے مسطح کی مساوات اور ایک غیر صفری سمتیہ کے متوازی ہے۔

**(Equation of a plane passing through two given distinct points and is parallel to a non-zero vector)**

### (a) سمتیہ مساوات کی پیمائشی شکل (Parametric form of vector equation)

مسطح ہے جو دئے گئے دو مختلف نقاط $A$ اور $B$ سے گزرتا ہے جس کا مقامی سمتیہ $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ ہے۔ اور یہ غیر صفری سمتیہ $\vec{c}$ کے متوازی ہے۔ اس کی سمتیہ مساوات پیمائشی شکل میں



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 261 27-02-2023 16:31:31

$$\vec{r} = \vec{a} + s(\vec{b} - \vec{a}) + t\vec{c} \quad \text{یا} \quad \vec{r} = (1-s)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} \qquad \ldots (1)$$

جس میں $s, t \in \mathbb{R}$، $(\vec{b} - \vec{a})$ اور $\vec{c}$ غیر متوازی سمتیے ہیں۔

### (b) سمتیہ مساوات کی غیر پیمائشی شکل (Non-parametric form of vector equation)

مساوات (1) کو معادل طور پر غیر پیمائشی سمتیہ کی شکل میں لکھ سکتے ہیں۔

$$(\vec{r} - \vec{a}) \cdot ((\vec{b} - \vec{a}) \times \vec{c}) = 0 \qquad \ldots (2)$$

جس میں $(\vec{b} - \vec{a})$ اور $\vec{c}$ غیر متوازی سمتیے ہیں۔

### (c) کارتیسی شکل کی مساوات (Cartesian form of equation)

اگر $\vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$, $\vec{b} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$, $\vec{c} = c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k} \neq \vec{0}$ اور $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ہو تو مساوات (2) کو معادل طور پر اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

یہ مسطح کی مطلوبہ کارتیسی مساوات ہے۔

### مثال 6.43

نقطہ $(0,1,-5)$ سے گزرنے والا مسطح اور خطوط مستقیم $\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}) + s(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$ اور $\vec{r} = (\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}) + t(\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})$ کے متوازی ہے تو پیمائشی شکل میں سمتیہ مساوات اور کارتیسی مساوات معلوم کیجئے۔

### حل

ہم نے غور کیا کہ مطلوبہ مسطح سمتیے $\vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$ اور $\vec{c} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ کے متوازی ہے اور $(0,1,-5)$ نقطہ سے گزرتا ہے جس کا مقامی سمتیہ $\vec{a}$ ہے۔ ہم نے یہ بھی غور کیا کہ $\vec{b}$، $\vec{c}$ کے متوازی نہیں ہے۔ مسطح کی غیر پیمائشی شکل میں سمتیہ مساوات $(\vec{r} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$ ...(1) اس طرح دیا گیا ہے۔

مساوات (1) میں $\vec{a} = \hat{j} - 5\hat{k}$ اور $\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -9\hat{i} + 8\hat{j} - \hat{k}$ کو درج کرنے پر ہمیں حاصل ہو گا

$$(\vec{r} - (\hat{j} - 5\hat{k})) \cdot (-9\hat{i} + 8\hat{j} - \hat{k}) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{r} \cdot (-9\hat{i} + 8\hat{j} - \hat{k}) = 13.$$

اگر مسطح کے اختیاری نقطہ کا مقامی سمتیہ $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ہو تو، اوپر کی مساوات سے ہمیں مسطح کی کارتیسی مساوات $-9x + 8y - z = 13$ یا $9x - 8y + z + 13 = 0$ حاصل ہو گی۔

### مثال 6.44

نقاط $(-1,2,0)$، $(2,2-1)$ سے گزرنے والا مسطح اور خط مستقیم $\frac{x-1}{1} = \frac{2y+1}{2} = \frac{z+1}{-1}$ کے متوازی ہو تو پیمائشی سمتیہ، غیر پیمائشی سمتیہ اور کارتیسی مساوات معلوم کیجئے۔

### حل

مطلوبہ مسطح دیے گئے خط کے متوازی ہے اور اس طرح یہ سمتیہ $\vec{c} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ کے متوازی ہے اور نقاط $\vec{a} = -\hat{i} + 2\hat{j}$, اور $\vec{b} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ سے مسطح گزرتا ہے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 262 27-02-2023 16:31:32

- مسطح کی پیمائشی شکل میں سمتیہ مساوات $\vec{r}=\vec{a}+s\left(\vec{b}-\vec{a}\right)+t\vec{c}$ جس میں $s,t\in\mathbb{R}$ ہے۔
  $\Rightarrow \vec{r}=\left(-\hat{i}+2\hat{j}\right)+s\left(3\hat{i}-\hat{k}\right)+t\left(\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}\right)$ جس میں $s,t\in\mathbb{R}$ ہے۔
- مسطح کی غیر پیمائشی شکل کی سمتیہ مساوات $(\vec{r}-\vec{a})\cdot((\vec{b}-\vec{a})\times\vec{c})=0$ ہے۔

اب، $(\vec{b}-\vec{a})\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\3&0&-1\\1&1&-1\end{vmatrix}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$،

$(\vec{r}-(-\hat{i}+2\hat{j}))\cdot(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})=0\Rightarrow\vec{r}\cdot(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})=3$ ، ہمیں حاصل ہو گا۔

- اگر مسطح پر اختیاری نقطہ کا مقامی سمتیہ $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ ہو تو اوپر کی مساوات سے ہمیں مسطح کی کارتیسی مساوات $x+2y+3z=3$ حاصل ہو گی۔

## مشق 6.7

1. $(2,3,6)$ نقطہ سے گزرنے والا مسطح اور خطوط مستقیم $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{1}$ اور $\frac{x+3}{2}=\frac{y-3}{-5}=\frac{z+1}{-3}$ کے متوازی ہے تو غیر پیمائشی شکل کی سمتیہ مساوات اور کارتیسی مساوات معلوم کیجئے۔

2. نقاط $(2,2,1),(9,3,6)$ سے گزرنے والا مسطح اور مسطح $2x+6y+6z=9$ کے عمودی ہو تو غیر پیمائشی شکل میں سمتیہ مساوات اور کارتیسی مساوات معلوم کیجئے۔

3. نقاط $(2,2,1)$ اور $(1,-2,3)$ سے گزرنے والا مسطح اور نقاط $(2,1,-3)$ اور $(-1,5,-8)$ سے گزرنے والے خط مستقیم کے متوازی ہو تو پیمائشی شکل میں سمتیہ مساوات اور کارتیسی مساوات معلوم کیجئے۔

4. نقطہ $(1,-2,4)$ سے گزرنے والا مسطح اور $x+2y-3z=11$ مسطح کے عمودی اور خط $\frac{x+7}{3}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z}{1}$ کے متوازی ہو تو غیر پیمائشی شکل میں سمتیہ مساوات اور کارتیسی مساوات معلوم کیجئے۔

5. مسطح پر واقع خط $\vec{r}=(\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k})+t(2\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k})$ ، $\vec{r}\cdot(\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})=8$ مسطح کے عمودی ہو تو پیمائشی شکل میں سمتیہ مساوات اور کارتیسی مساوات معلوم کیجئے۔

6. $(3,6,-2)$ ، $(-1,-2,6)$ اور $(6,4,-2)$ تین غیر ہم خط نقاط سے گزرنے والے مسطح کا پیمائشی سمتیہ، غیر پیمائشی سمتیہ اور کارتیسی مساوات معلوم کیجئے۔

7. $\vec{r}=\left(6\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\right)+s\left(-\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}\right)+t\left(-5\hat{i}-4\hat{j}-5\hat{k}\right)$ مسطح کا غیر پیمائشی شکل کا سمتیہ مساوات اور کارتیسی مساوات معلوم کیجئے۔

### 6.8.7 ایک مسطح پر ایک خط کے واقع ہونے کی شرط (Condition for a line to lie in a plane)

ہم نے غور کیا کہ ایک خط مستقیم ایک مسطح پر واقع ہو گا اگر خط کا ہر نقطہ، مسطح پر واقع ہو اور مسطح کا عمودی خط کے عمودی ہو گا۔

(i) اگر خط $\vec{r}=\vec{a}+t\vec{b}$ ، $\vec{r}\cdot\vec{n}=d$ مسطح پر واقع ہو تو $\vec{a}\cdot\vec{n}=d$ اور $\vec{b}\cdot\vec{n}=0$ ہو گا۔

(ii) اگر خط $\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$ ، $Ax+By+Cz+D=0$ سطح پر واقع ہو تو $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$ اور $aA+bB+cC=0$ ہو گا۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 263 27-02-2023 16:31:33

**مثال 6.45**

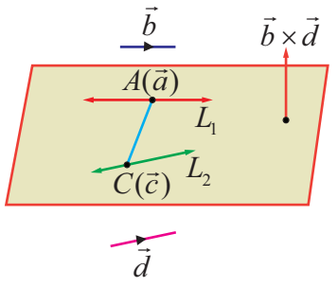
جانچئے کہ کیا خط $\frac{x-3}{-4}=\frac{y-4}{-7}=\frac{z+3}{12}$ مسطح $5x-y+z=8$ پر واقع ہے؟

**حل**

یہاں، $(x_1,y_1,z_1)=(3,4,-3)$ اور دئے گئے خط مستقیم کی سمت نسبتیں یہ ہیں $(a,b,c)=(-4,-7,12)$ ۔
دئے گئے مسطح کے عمود کے سمت نسبتیں $(A,B,C)=(5,-1,1)$ ہیں۔
ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ، دیا گیا نقط $(x_1,y_1,z_1)=(3,4,-3)$ دئے گئے مسطح $5x-y+z=8$ کو پورا کرتا ہے۔
اب کے بعد، $aA+bB+cC=(-4)(5)+(-7)(-1)+(12)(1)=-1\neq 0$ اس طرح، مسطح کا عمود خط کے عمودی نہیں ہے،
لہٰذا، دی گئی خط مسطح پر واقع نہیں ہے۔

## 6.8.8 دو خطوط کے ہم سطح ہونے کا شرط (Condition for coplanarity of two lines)

### (a) سمتیہ شکل میں شرط (Condition in vector form)



خاکہ 6.29

دئے گئے دو غیر متوازی خطوط $\vec{r}=\vec{a}+s\vec{b}$ اور $\vec{r}=\vec{c}+t\vec{d}$ ہم سطح ہیں۔ اس طرح کہ وہ ایک مسطح پر واقع ہیں۔ فرض کیجئے کہ نقاط A اور C کے مقامی سمتیے $\vec{a}$ اور $\vec{c}$ ہوں تو A اور C مسطح پر واقع ہیں۔ چونکہ $\vec{b}$ اور $\vec{d}$ مسطح کے متوازی ہیں $\vec{b}\times\vec{d}$ مسطح کے عمودی ہے اس طرح، $\overrightarrow{AC}$، $\vec{b}\times\vec{d}$ کے عمودی ہے۔ یعنی،

$$(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{b}\times\vec{d}) = 0$$

سمتیہ شکل میں دوخطوط کے ہم مسطح ہونے کے لئے یہ مطلوبہ شرط ہے۔

### (b) کارتیسی شکل میں شرط (Condition in Cartesian form)

دوخطوط $\frac{x-x_1}{b_1}=\frac{y-y_1}{b_2}=\frac{z-z_1}{b_3}$ اور $\frac{x-x_2}{d_1}=\frac{y-y_2}{d_2}=\frac{z-z_2}{d_3}$ ہم سطح ہیں۔ اگر

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}=0$$

کارتیسی شکل میں دوخطوط ہم سطح ہونے کے لئے یہ مطلوبہ شرط ہے۔

## 6.8.9 ایک مسطح پر واقع دوغیر متوازی ہم سطح خطوط کی مسطح کی مساوات
## (Equation of plane containing two non-parallel coplanar lines)

### (a) پیمائشی شکل میں سمتیہ مساوات (Parametric form of vector equation)

فرض کیجئے کہ $\vec{r}=\vec{a}+s\vec{b}$ اور $\vec{r}=\vec{c}+t\vec{d}$ دو غیر متوازی ہم سطح خطوط ہو تو $\vec{b}\times\vec{d}\neq\vec{0}$. ہوگا۔ مسطح پر کوئی ایک نقطہ $P$ لیں اور اس کا مقامی سمتیہ $\vec{r_0}$ ہو تو سمتیے $\vec{r_0}-\vec{a},\vec{b},\vec{d}$ مزید $\vec{r_0}-\vec{c},\vec{b},\vec{d}$ بھی ہم سطح ہیں۔ اس طرح ہمیں، $\vec{r_0}-\vec{a}=t\vec{b}+s\vec{d}$ یا $\vec{r_0}-\vec{c}=t\vec{b}+s\vec{d}$ حاصل ہوگا۔ لہٰذا، پیمائشی شکل میں سمتیہ مساوات $\vec{r}=\vec{a}+t\vec{b}+s\vec{d}$ یا $\vec{r}=\vec{c}+t\vec{b}+s\vec{d}$ ہے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 264 27-02-2023 16:31:37

### (b) غیر پیمائشی شکل میں سمتیہ مساوات (Non-parametric form of vector equation)

فرض کیجئے کہ $\vec{r}=\vec{a}+s\vec{b}$ اور $\vec{r}=\vec{c}+t\vec{d}$ دو غیر متوازی ہم سطح خطوط ہو تو $\vec{b}\times\vec{d}\neq\vec{0}$ ہوگا۔ مسطح پر کوئی ایک نقطہ $P$ لیں اور اس کا مقامی سمتیہ $\vec{r_0}$ ہو تو سمتیے $\vec{r_0}-\vec{a},\vec{b},\vec{d}$ مزید $\vec{r_0}-\vec{c},\vec{b},\vec{d}$ بھی ہم سطح ہیں۔ اس طرح ہمیں $\left(\vec{r_0}-\vec{a}\right).\left(\vec{b}\times\vec{d}\right)=0$ یا $\left(\vec{r_0}-\vec{c}\right).\left(\vec{b}\times\vec{d}\right)=0$ حاصل ہوگا۔ لہٰذا، غیر پیمائشی شکل میں سمتیہ مساوات $\left(\vec{r}-\vec{a}\right).\left(\vec{b}\times\vec{d}\right)=0$ یا $\left(\vec{r}-\vec{c}\right).\left(\vec{b}\times\vec{d}\right)=0$ ہے۔

### (c) کارتیسی شکل میں مسطح کی مساوات (Cartesian form of equation of plane)

مسطح پر واقع دیے گئے دو ہم سطح خط کی کارتیسی شکل کی مساوات کو

$\frac{x-x_1}{b_1}=\frac{y-y_1}{b_2}=\frac{z-z_1}{b_3}$ اور $\frac{x-x_2}{d_1}=\frac{y-y_2}{d_2}=\frac{z-z_2}{d_3}$ کو اس طرح دیا گیا ہے،

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{یا}$$

$$\begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = 0$$

### مثال 6.46

ثابت کیجئے کہ خطوط $\vec{r}=\left(2\hat{i}+4\hat{j}+6\hat{k}\right)+t\left(\hat{i}+4\hat{j}+7\hat{k}\right)$ اور $\vec{r}=\left(-\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k}\right)+s\left(3\hat{i}+5\hat{j}+7\hat{k}\right)$ ہم سطح ہیں اور مسطح پر واقع ان خطوط کی غیر پیمائشی شکل میں سمتیہ مساوات بھی دریافت کیجئے۔

### حل

دیے گئے دو خطوط کو ان سے موازنہ کرنے پر،

$$\vec{r}=\vec{a}+t\vec{b},\ \vec{r}=\vec{c}+s\vec{d}$$

حاصل ہوا۔ $\vec{a}=-\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k},\ \vec{b}=3\hat{i}+5\hat{j}+7\hat{k},\ \vec{c}=2\hat{i}+4\hat{j}+6\hat{k}$ اور $\vec{d}=\hat{i}+4\hat{j}+7\hat{k}$، ہمیں،

معلوم ہے کہ دو دیے گئے خطوط ہم سطح ہیں اگر $\left(\vec{c}-\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{b}\times\vec{d}\right)=0$

تو، $\vec{b}\times\vec{d}=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 7\hat{i}-14\hat{j}+7\hat{k}$ اور $\vec{c}-\vec{a}=3\hat{i}+7\hat{j}+11\hat{k}$

چنانچہ، $\left(\vec{c}-\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{b}\times\vec{d}\right) = \left(3\hat{i}+7\hat{j}+11\hat{k}\right)\cdot\left(7\hat{i}-14\hat{j}+7\hat{k}\right)=0.$

دیے گئے دو خطوط ہم سطح ہوں تو ہم مسطح پر واقع دیے گئے دو خطوط کی غیر پیمائشی شکل کی سمتیہ مساوات حاصل کریں گے۔ ہم جانتے ہیں کہ، مسطح جس پر دو ہم سطح خطوط واقع ہیں اس طرح ہے۔

$$\left(\vec{r}-\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{b}\times\vec{d}\right) = 0$$

$\left(\vec{r}-\left(-\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k}\right)\right)\cdot\left(7\hat{i}-14\hat{j}+7\hat{k}\right)=0$ اس طرح، مطلوبہ مسطح جس پر دیے گئے دو خطوط واقع ہیں اس کی غیر پیمائشی شکل میں سمتیہ مساوات $\vec{r}\cdot\left(\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}\right)=0$ ہے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 265 27-02-2023 16:31:43

## مشق 6.8

1. ثابت کیجئے کہ خطوط مستقیم $\vec{r}=(5\hat{i}+7\hat{j}-3\hat{k})+s(4\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k})$ اور $\vec{r}=(8\hat{i}+4\hat{j}+5\hat{k})+t(7\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k})$ ہم سطح ہیں۔ یہ خطوط واقع ہونے والے مسطح کی سمتیہ مساوات بھی دریافت کیجئے۔

2. ثابت کیجئے کہ خطوط $\frac{x-1}{-3}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-5}{1}$ اور $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{3}$ ہم سطح ہیں۔ جس مسطح پر یہ خطوط واقع ہیں اس کی مساوات بھی دریافت کیجئے۔

3. اگر خطوط مستقیم $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{m^2}$ اور $\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{m^2}=\frac{z-1}{2}$ ہم سطح ہوں تو $m$ کی مختلف حقیقی قیمتیں محسوب کیجئے۔

4. اگر خطوط مستقیم $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{\lambda}=\frac{z}{2}$ اور $\frac{x+1}{5}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{\lambda}$ ہم سطح ہوں تو $\lambda$ اور ان دو خطوط کو رکھنے والی مسطح کی مساوات معلوم کیجئے۔

### 6.8.10 دو مسطحوں کا درمیانی زاویہ (Angle between two planes)

دئے گئے دو مسطحوں کا درمیانی زاویہ، ان مسطحوں کے عمودوں کے درمیانی زاویہ کے مساوی ہوگا۔

**مسئلہ 6.18 (Theorem)**

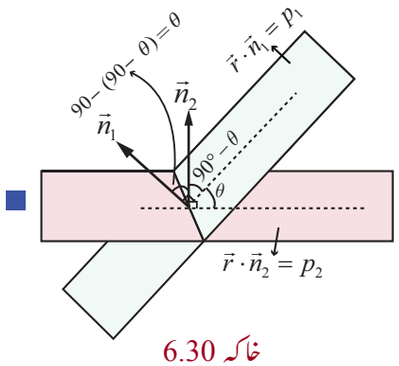
دو مسطحوں $\vec{r}\cdot\vec{n}_1=p_1$ اور $\vec{r}\cdot\vec{n}_2=p_2$ کا درمیانی زاویہ حادہ $\theta$ اس طرح دیا گیا ہے۔

$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}\right)$$

**ثبوت**

اگر دو مسطحوں $\vec{r}\cdot\vec{n}_1=p_1$ اور $\vec{r}\cdot\vec{n}_2=p_2$ کا درمیانی زاویہ حادہ $\theta$ ہو تو ان کے $\vec{n}_1$ اور $\vec{n}_2$ عمودی سمتیے کا درمیانی زاویہ حادہ $\theta$ ہوگا۔ چنانچہ،

$$\cos\theta=\left(\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}\right)\Rightarrow\theta=\cos^{-1}\left(\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}\right) \quad \ldots(1)$$



خاکہ 6.30

**ریمارک (Remark)**

(i) اگر دو مسطحیں $\vec{r}\cdot\vec{n}_1=p_1$ اور $\vec{r}\cdot\vec{n}_2=p_2$ عمودی ہوں تو $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0$ ہوگا۔

(ii) اگر دو مسطحیں $\vec{r}\cdot\vec{n}_1=p_1$ اور $\vec{r}\cdot\vec{n}_2=p_2$ متوازی ہوں تو $\vec{n}_1=\lambda\vec{n}_2$ ہوگا۔ جس میں $\lambda$ عددیہ ہے۔

(iii) ایک مسطح $\vec{r}\cdot\vec{n}=p$ کے متوازی مسطح کی مساوات $\vec{r}\cdot\vec{n}=k,\ k\in\mathbb{R}$ ہے۔

**مسئلہ 6.19 (Theorem)**

دو مسطحوں $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ اور $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ کا درمیانی زاویہ حادہ $\theta$ اس طرح دیا گیا ہے

$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}\right)$$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 266 27-02-2023 16:31:47

## ثبوت

دیے گئے دو مسطحوں $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ اور $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ کے عمودی سمتیے بالترتیب $\vec{n}_1=a_1\hat{i}+b_1\hat{j}+c_1\hat{k}$ اور $\vec{n}_2=a_2\hat{i}+b_2\hat{j}+c_2\hat{k}$ ہوں تو $\vec{n}_1=a_1\hat{i}+b_1\hat{j}+c_1\hat{k}$ اور $\vec{n}_2=a_2\hat{i}+b_2\hat{j}+c_2\hat{k}$ ہو گا۔

چنانچہ ، مسئلہ 6.18 میں مساوات (1) کے استعمال سے مسطحوں کا درمیانی زاویہ حادہ $\theta$ اس طرح دیا گیا ہے۔

$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{a_1^{\,2}+b_1^{\,2}+c_1^{\,2}}\sqrt{a_2^{\,2}+b_2^{\,2}+c_2^{\,2}}}\right)$$

## ریمارک (Remark)

(i) مسطحیں $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ اور $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ عمودی ہیں اگر $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$

(ii) مسطحیں $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ اور $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ متوازی ہیں اگر $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$

(iii) ایک مسطح $ax+by+cz=p$ کے متوازی مسطح کی مساوات $ax+by+cz=k\ ,\ k\in\mathbb{R}$ ہے۔

## مثال 6.47

$\vec{r}\cdot\left(2\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}\right)=11$ اور $4x-2y+2z=15$ مسطحوں کا درمیانی زاویہ حادہ معلوم کیجئے۔

## حل

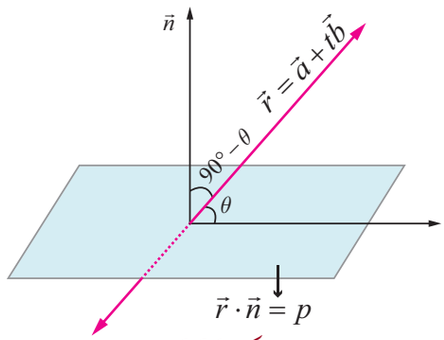
دیے گئے دو مسطحوں $\vec{r}\cdot\left(2\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}\right)=11$ اور $4x-2y+2z=15$ کے عمودی سمتیے بالترتیب $\vec{n}_1=2\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}$ اور $\vec{n}_2=4\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}$ ہیں۔

اگر دو مسطحوں کا درمیانی زاویہ حادہ $\theta$ ہو،تو ہمیں حاصل ہو گا۔

$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{\left|\left(2\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}\right)\cdot\left(4\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}\right)\right|}{\left|2\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}\right|\left|4\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}\right|}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$$

## 6.8.11 ایک خط اور ایک مسطح کا درمیانی زاویہ (Angle between a line and a plane)

ہم جانتے ہیں کہ ایک خط اور ایک مسطح کا درمیانی زاویہ، مسطح کا عمود اور خط کا درمیانی زاویہ ایک دوسرے کے مستتم زاویہ ہیں۔



خاکہ 6.31

فرض کیجئے کہ $\vec{r}=\vec{a}+t\vec{b}$ خط کی مساوات اور $\vec{r}\cdot\vec{n}=p$ مسطح کی مساوات ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ $\vec{b}$ دیے گئے خط کے متوازی ہے اور $\vec{n}$ دیے گئے مسطح کا عمود ہے۔ اگر خط اور مسطح کا درمیانی زاویہ حادہ $\theta$ ہو،تو $\vec{n}$ اور $\vec{b}$ کا درمیانی زاویہ حادہ $\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ ہے۔ چنانچہ،

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta=\frac{|\vec{b}\cdot\vec{n}|}{|\vec{b}||\vec{n}|}$$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 267 27-02-2023 16:31:48

... (1) اس طرح، خط اور مسطح کا درمیانی زاویہ حادہ $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{|\vec{b}\cdot\vec{n}|}{|\vec{b}|\,|\vec{n}|}\right)$ دیا گیا ہے۔

کارتیسی شکل میں، اگر $\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1}$ اور $ax+by+cz=p$ خط اور مسطح کے مساواتیں ہو تو

$\vec{b}=a_1\hat{i}+b_1\hat{j}+c_1\hat{k}$ اور $\vec{n}=a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k}$ ہوگا۔ چنانچہ، (1) کو استعمال کرکے، خط اور مسطح کا درمیانی زاویہ حادہ $\theta$ اس طرح دیا گیا ہے۔

$$\theta=\sin^{-1}\left(\frac{|aa_1+bb_1+cc_1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a_1^{\,2}+b_1^{\,2}+c_1^{\,2}}}\right)$$

### ریمارک (Remark)

(i) اگر خط، مسطح کا عمودی ہو تو مسطح کا عمود خط کے متوازی ہوگا۔ اس طرح، $\vec{b}$، $\vec{n}$ کا عمودی ہو تو ہمیں $\vec{b}=\lambda\vec{n}$ جس میں $\lambda\in\mathbb{R}$ سے $\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\frac{c_1}{c}$ حاصل ہوگا۔

(ii) اگر خط، مسطح کا متوازی ہو تو خط مسطح کا عمود کے عمودی ہوگا۔ چنانچہ، $\vec{b}\cdot\vec{n}=0\Rightarrow aa_1+bb_1+cc_1=0$

### مثال 6.48

$\vec{r}=\left(2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}\right)+t\left(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\right)$ خط مستقیم اور $2x-y+z=5$ مسطح کا درمیانی زاویہ معلوم کیجئے۔

### حل

$\vec{r}=\vec{a}+t\vec{b}$ خط اور $\vec{r}\cdot\vec{n}=p$ مسطح جس کا عمود $\vec{n}$ ہو کا درمیانی زاویہ $\theta=\sin^{-1}\left(\frac{|\vec{b}\cdot\vec{n}|}{|\vec{b}||\vec{n}|}\right)$ ہے۔

یہاں، $\vec{b}=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ اور $\vec{n}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$

$$\theta=\sin^{-1}\left(\frac{|\vec{b}\cdot\vec{n}|}{|\vec{b}|\,|\vec{n}|}\right)=\sin^{-1}\left(\frac{\left|\left(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\right)\cdot\left(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\right)\right|}{\left|\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\right|\left|2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\right|}\right)=\sin^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$ ، ہمیں حاصل ہوا۔ ■

## 6.8.12 ایک مسطح سے نقطہ کا فاصلہ (Distance of a point from a plane)

### (a) سمتیہ شکل میں مسطح کی مساوات (Equation of a plane in vector form)

**مسئلہ 6.20 (Theorem)**

مقامی سمتیہ $\vec{u}$ کے ایک نقطہ سے $\vec{r}\cdot\vec{n}=p$ مسطح کا عمودی فاصلہ اس طرح دیا گیا ہے۔

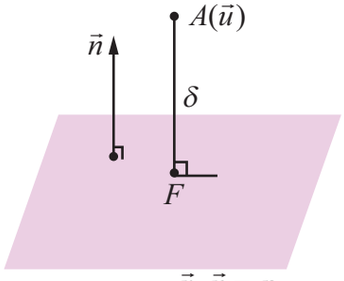
$$\delta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}-p|}{|\vec{n}|}.$$

### ثبوت

فرض کیجئے کہ نقطہ $A$ جس کا مقامی سمتیہ $\vec{u}$ ہے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 268 27-02-2023 16:31:50



خاکہ 6.32

فرض کیجئے کہ $\vec{r}\cdot\vec{n}=p$ مسطح کو نقطہ $A$ سے کھینچے جانے والی عمودی خط کا پایہ $F$ ہوگا۔ $A$ اور $F$ کو ملانے والی خط $\vec{n}$ عمودی سمتیہ کے متوازی ہے۔اور چنانچہ ، اس کی مساوات $\vec{r}=\vec{u}+t\vec{n}$ ہے۔

لیکن $\vec{r}=\vec{u}+t\vec{n}$ خط اور دیا گیا مسطح $\vec{r}\cdot\vec{n}=p$ کا نقطہ تقاطع $F$ ہے۔ اگر $F$ کا مقامی سمتیہ $\vec{r}_1$ ہوتو $\vec{r}_1=\vec{u}+t_1\vec{n}$ ، $\vec{r}_1\cdot\vec{n}=p$ کسی اور $t_1\in\mathbb{R}$ کو خارج کرنے سے ہمیں حاصل ہوگا۔

$$\left(\vec{u}+t_1\vec{n}\right)\cdot\vec{n}=p \Rightarrow t_1=\frac{p-\left(\vec{u}\cdot\vec{n}\right)}{\left|\vec{n}\right|^2}.$$

$$\overrightarrow{FA}=\vec{u}-\left(\vec{u}+t_1\vec{n}\right) = -t_1\vec{n}=\left(\frac{\left(\vec{u}\cdot\vec{n}\right)-p}{\left|\vec{n}\right|^2}\right)\vec{n}$$

چنانچہ ، A نقطہ سے دیے گئے مسطح کے عمودی خط کی لمبائی،

$$\delta = \left|\overrightarrow{FA}\right|=\left|\left(\frac{\left(\vec{u}\cdot\vec{n}\right)-p}{\left|\vec{n}\right|^2}\right)\vec{n}\right|=\left|\frac{\left(\vec{u}\cdot\vec{n}\right)-p}{\left|\vec{n}\right|}\right|$$

$AF$ عمودی خط کا پایہ $A$ کا مقامی سمتیہ اس طرح دیا گیا ہے۔

$$\vec{r}_1 = \vec{u}+t_1\vec{n} \quad \text{یا}$$

$$\vec{r}_1 = \vec{u}+\left(\frac{p-\vec{u}\cdot\vec{n}}{\left|\vec{n}\right|^2}\right)\vec{n}$$

■

## (b) کارتیسی شکل میں مسطح کی مساوات (Equation of a plane in Cartesian form)

کارتیسی شکل میں، اگر دیا گیا نقطہ $A\left(x_1,y_1,z_1\right)$ جس کا مقامی سمتیہ $\vec{u}$ ہے اور دیے گئے مسطح کی کارتیسی مساوات $ax+by+cz=p$ ہے تو $\vec{u}=x_1\hat{i}+y_1\hat{j}+z_1\hat{k}$ اور $\vec{n}=a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k}$ ہوگا۔ چنانچہ ان سمتیوں کو $\delta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}-p|}{|\vec{n}|}$ میں استعمال کرکے ہم کارتیسی شکل میں، مسطح سے نقطہ کا عمودی فاصلہ حاصل ہوگا۔

$$\delta=\left|\frac{ax_1+by_1+cz_1-p}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|=\frac{|ax_1+by_1+cz_1-p|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

### ریمارک (Remark)

مبداء سے $ax+by+cz+d=0$ مسطح کا عمودی فاصلہ اس طرح دیا گیا ہے۔

$$\delta=\frac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

### مثال 6.49

$\vec{r}\cdot\left(6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}\right)=5$ مسطح سے $(2,5,-3)$ نقطہ کا فاصلہ دریافت کیجئے۔

### حل

دیے گئے مسطح کی مساوات کو $\vec{r}\cdot\vec{n}=p$ کے ساتھ موازنہ کرنے سے ہمیں $\vec{n}=6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$ حاصل ہوا۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 269 27-02-2023 16:31:52

ہم جانتے ہیں کہ مقامی سمتیہ $\vec{u}$ والے ایک نقطہ سے $\vec{r}\cdot\vec{n}=p$ مسطح کا عمودی فاصلہ اس طرح $\delta=\dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{n}-p|}{|\vec{n}|}$ دیا گیا ہے۔ چنانچہ

$\vec{u}=(2,5,-3)=2\hat{i}+5\hat{j}-3\hat{k}$ اور $\vec{n}=6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$ کو ضابطے میں درج کرنے سے ہمیں حاصل ہوا۔

$$\delta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}-p|}{|\vec{n}|}=\frac{\left|\left(2\hat{i}+5\hat{j}-3\hat{k}\right)\cdot\left(6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}\right)-5\right|}{\left|6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}\right|}=2$$ اکائیاں۔

### مثال 6.50

$A(4,1,2)$ اور $B(7,5,4)$ نقاط سے گزرنے والا خط مستقیم، اور $x-y+z=5$ مسطح کا نقطہ تقاطع سے نقطہ $(5,-5,-10)$ کا فاصلہ دریافت کیجئے۔

### حل

$A$ اور $B$ خط مستقیم کو ملانے والا کارتیسی مساوات یہ ہے۔

$$\frac{x-4}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-2}{2}=t \quad \text{(say)}.$$

چنانچہ، خط مستقیم پر ایک اختیاری نقطہ کی شکل $(3t+4,4t+1,2t+2)$ ہے۔ مسطح اور خط مستقیم کا نقطہ تقاطع معلوم کرنے کے لئے $x=3t+4,\ y=4t+1,\ z=2t+2$ درج کرنے پر ہمیں $x-y+z=5$ میں $t=0$ حاصل ہوا۔ چنانچہ، خط مستقیم کا نقطہ تقاطع $(4, 1, 2)$ ہے۔ $(4, 1, 2)$ اور $(5,-5,-10)$ دونقاط کا درمیانی فاصلہ یہ ہے۔

$$\sqrt{(4-5)^2+(1+5)^2+(2+10)^2}=\sqrt{181}$$ اکائیاں۔

## 6.8.13 دومتوازی مسطحوں کا درمیانی فاصلہ (Distance between two parallel planes)

**مسئلہ 6.21 (Theorem)**

$ax+by+cz+d_1=0$ اور $ax+by+cz+d_2=0$ دومتوازی مسطحوں کا درمیانی فاصلہ اس طرح دیا گیا ہے

$$\frac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

### ثبوت

فرض کیجئے کہ $A(x_1,y_1,z_1)$، $ax+by+cz+d_2=0$ مسطح پر کوئی نقطہ ہو تو۔

ہمارے پاس ہے $ax_1+by_1+cz_1+d_2=0\Rightarrow\ ax_1+by_1+cz_1=-d_2$

$A(x_1,y_1,z_1)$ نقطہ سے $ax+by+cz+d_1=0$ مسطح کا فاصلہ اس طرح دیا گیا ہے۔

$$\delta=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d_1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

لہٰذا، $ax+by+cz+d_1=0$ اور $ax+by+cz+d_2=0$ دومتوازی مسطحوں کا درمیانی فاصلہ اس طرح دیا گیا ہے۔

$$\delta=\frac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 270 27-02-2023 16:31:53

## مثال 6.51

$x+2y-2z+1=0$ اور $2x+4y-4z+5=0$ متوازی مسطحوں کا درمیانی فاصلہ معلوم کیجئے۔

### حل

ہم جانتے ہیں کہ $ax+by+cz+d_1=0$ اور $ax+by+cz+d_2=0$ دو متوازی مسطحوں کا درمیانی فاصلہ کا ضابطہ $\delta=\frac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ ہے۔دوسری مساوات کو $x+2y-2z+\frac{5}{2}=0$ اس طرح لکھیں دئے گئے مساواتوں کو عام مساواتوں سے موازنہ کرنے سے ہمیں $a=1,\ b=2,\ c=-2,\ d_1=1,\ d_2=\frac{5}{2}$ حاصل ہوگا۔ ان قیمتوں کو ضابطے میں درج کرنے سے، ہمیں فاصلہ حاصل ہوگا۔

$$\delta=\frac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{\left|1-\frac{5}{2}\right|}{\sqrt{1^2+2^2+\left(-2^2\right)}}=\frac{1}{2}$$ اکائیاں.

## مثال 6.52

$\vec{r}\cdot\left(2\hat{i}-\hat{j}-2\hat{k}\right)=6$ اور $\vec{r}\cdot\left(6\hat{i}-3\hat{j}-6\hat{k}\right)=27$ مسطحوں کا درمیانی فاصلہ دریافت کیجئے۔

### حل

فرض کیجئے کہ $\vec{r}\cdot(2\hat{i}-\hat{j}-2\hat{k})=6$ مسطح پر ایک اختیاری نقطہ کا مقامی سمتیہ $\vec{u}$ ہے تو ہمیں حاصل ہوگا۔

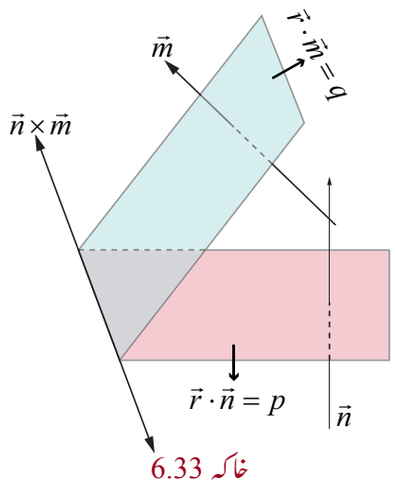
$$\vec{u}\cdot(2\hat{i}-\hat{j}-2\hat{k})=6. \quad \ldots(1)$$

اگر دئے گئے مسطحوں کا درمیانی فاصلہ $\delta$ ہو تو $\vec{u}$ سے مسطح کا عمودی فاصلہ $\delta$ ہوگا۔

$$\vec{r}\cdot(6\hat{i}-3\hat{j}-6\hat{i})=27.$$

چنانچہ، $\delta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}-p|}{|\vec{n}|}=\left|\frac{\vec{u}\cdot(6\hat{i}-3\hat{j}-6\hat{k})-27}{\sqrt{6^2+(-3)^2+(-6)^2}}\right|=\left|\frac{3(\vec{u}\cdot(2\hat{i}-\hat{j}-2\hat{k}))-27}{9}\right|=\left|\frac{(3(6)-27}{9}\right|=1$ اکائی.

## 6.8.14 دو مسطحوں کو قطع کرنے والی خط کی مساوات (Equation of line of intersection of two planes)



خاکہ 6.33

$\vec{r}\cdot\vec{n}=p$ اور $\vec{r}\cdot\vec{m}=q$ دو غیر متوازی مسطحیں ہیں۔ ہم جانتے ہیں کہ $\vec{n}$ اور $\vec{m}$ سمتیے دئے گئے مسطحوں کے بالترتیب عمودی ہیں۔ اس طرح، مسطحوں کو قطع کرنے والی خط $\vec{n}$ اور $\vec{m}$ دونوں کی عمودی ہے۔ چنانچہ، یہ سمتیہ $\vec{n}\times\vec{m}$ کے متوازی ہے۔ فرض کریں کہ $\vec{n}\times\vec{m}=l_1\hat{i}+l_2\hat{j}+l_3\hat{k}$

قیاس کریں کہ دو مسطحیں $a_1x+b_1y+c_1z=p$ اور $a_2x+b_2y+c_2z=q$ ہیں۔ دئے گئے دو مسطحوں کو قطع کرنے والی خط مسطحوں کے کم از کم ایک محدّد پر قطع کرے گی۔ آسانی کے لئے ، ہم فرض کرتے ہیں کہ خط محدّد مسطح $z=0$ پر ملتا ہے۔ دو مساواتوں میں $z=0$ درج کرنے پر $a_1x+b_1y-p=0$ اور $a_2x+b_2y-q=0$ حاصل ہوتے ہیں۔ ان مساواتوں کو حل کرنے سے، ہمیں $x$ اور $y$ کی قیمتیں بالترتیب $x_1$ اور $y_1$ کے طور پر حاصل ہوں گے۔


12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 271 27-02-2023 16:31:54

چنانچہ، مطلوبہ خط پر ایک نقطہ $(x_1, y_1, 0)$ ہے۔ جو $l_1\hat{i} + l_2\hat{j} + l_3\hat{k}$ کے متوازی ہے۔ لہٰذا، خط کی مساوات یہ ہے۔ $\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{l_2} = \frac{z-0}{l_3}$

## 6.8.15 دئے گئے دو مسطحوں کو قطع کرنے والی خط سے گزرنے والے مسطح کی مساوات
## (Equation of a plane passing through the line of intersection of two given planes)

**مسئلہ 6.22 (Theorem)**

$\vec{r}\cdot\vec{n}_1 = d_1$ اور $\vec{r}\cdot\vec{n}_2 = d_2$ دو مسطحوں کو قطع کرنے والی خط سے گزرنے والا مسطح کی سمتیہ مساوات کو اس طرح دیا گیا ہے ۔
$(\vec{r}\cdot\vec{n}_1 - d_1) + \lambda(\vec{r}\cdot\vec{n}_2 - d_2) = 0$ جس میں $\lambda \in \mathbb{R}$ ہے۔

**ثبوت**

فرض کیجئے کہ مساوات،

$$(\vec{r}\cdot\vec{n}_1 - d_1) + \lambda(\vec{r}\cdot\vec{n}_2 - d_2) = 0 \quad \ldots (1)$$

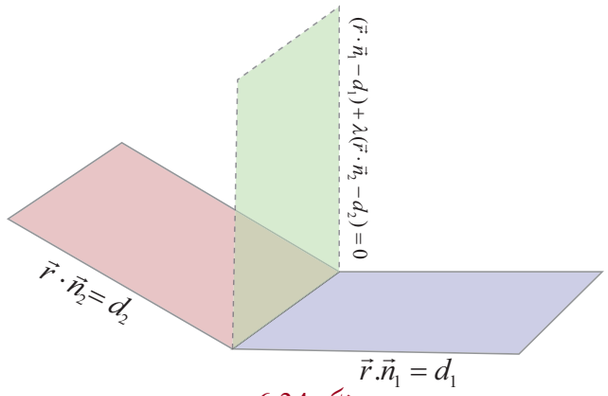
اوپر کی مساوات کو اس طرح مختصر کرسکتے ہیں۔

$$\vec{r}\cdot(\vec{n}_1 + \lambda\vec{n}_2) - (d_1 + \lambda d_2) = 0 \quad \ldots (2)$$

مساوات (2) میں $\vec{n} = \vec{n}_1 + \lambda\vec{n}_2$ اور $d = (d_1 + \lambda d_2)$ کو درج کرنے سے ہمیں حاصل ہوا۔

$$\vec{r}\cdot\vec{n} = d \quad \ldots (3)$$

مساوات (3) ایک مسطح کو ظاہر کرتی ہے۔ لہٰذا، مساوات (1) ایک مسطح کو ظاہر کرتا ہے۔



خاکہ 6.34

مسطح پر قطع کرنے والی خط کا کوئی بھی نقطہ کا مقامی سمتیہ $\vec{r}_1$ ہوتو $\vec{r}\cdot\vec{n}_1 = d_1$ اور $\vec{r}\cdot\vec{n}_2 = d_2$ دونوں مساواتوں کو $\vec{r}_1$ پورا کرتا ہے۔ اسی طرح،

$$\vec{r}_1\cdot\vec{n}_1 = d_1 \quad \ldots (4)$$

اور $\vec{r}_2\cdot\vec{n}_2 = d_2$ $\ldots (5)$

(4) اور (5) سے $\vec{r}_1$ مساوات (1) کو پورا کرتا ہے۔ قطع کرنے والی خط کا کوئی بھی نقطہ مسطح (1) پر واقع ہے۔ اس سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ مسطح (1) قطع کرنے والی خط سے گزرتا ہے۔

$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ اور $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ مسطحوں کو قطع کرنے والی خط سے گزرنے والا مسطح کی کارتیسی مساوات کو اس طرح دیا گیا ہے۔

$$(a_1x + b_1y + c_1z - d_1) + \lambda(a_2x + b_2y + c_2z - d_2) = 0$$

### مثال 6.53

$\vec{r}\cdot(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) + 1 = 0$ اور $\vec{r}\cdot(2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}) = 2$ مسطحوں کو قطع کرنے والی اور نقطہ $(-1, 2, 1)$ سے گزرنے والے مسطح کی مساوات معلوم کیجئے ۔

**حل**

ہم جانتے ہیں کہ $\vec{r}\cdot\vec{n}_1 = d_1$ اور $\vec{r}\cdot\vec{n}_2 = d_2$ مسطحوں کو قطع کرنے والی خط سے گزرنے والا مسطح کی سمتیہ مساوات کو اس طرح دیا گیا ہے۔ $(\vec{r}\cdot\vec{n}_1 - d_1) + \lambda(\vec{r}\cdot\vec{n}_2 - d_2) = 0$

اوپر کی مساوات میں $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ , $\vec{n}_1 = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ , $\vec{n}_2 = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ اور $d_1 = 1,\ d_2 = -2$ کو درج کرنے سے ہمیں حاصل ہو گا۔

$$(x + y + z + 1) + \lambda(2x - 3y + 5z - 2) = 0$$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 272 27-02-2023 16:31:56

چونکہ یہ مسطح ،نقطہ $(-1,2,1)$ سے گزرتا ہے تو $\lambda = \frac{3}{5}$ ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ لہٰذا، مطلوبہ مسطح کی مساوات $11x-4y+20z=1$ ہے۔ ■

**مثال 6.54**

$2x+3y-z+7=0$ اور $x+y-2z+5=0$ مسطحوں کو قطع کرنے والی خط سے گزرنے والا مسطح اور یہ $x+y-3z-5=0$ مسطح کے عمودی ہو تو مسطح کی مساوات دریافت کیجئے۔

**حل**

$2x+3y-z+7=0$ اور $x+y-2z+5=0$ مسطحوں کو قطع کرنے والی خط سے گزرنے والا مسطح کی مساوات

$$(2x+3y-z+7)+\lambda(x+y-2z+5)=0$$ یا

$$(2+\lambda)x+(3+\lambda)y+(-1-2\lambda)z+(7+5\lambda)=0$$ ہے۔

چونکہ ، یہ مسطح ، دئے گئے مسطح $x+y-3z-5=0$ کا عمودی ہے۔ ان دونوں مسطحوں کی عمودیں ایک دوسرے کے عمودی ہیں۔ چنانچہ، ہمیں حاصل ہوا،

$$(1)(2+\lambda)+(1)(3+\lambda)+(-3)(-1-2\lambda)z=0$$

$\lambda=-1 \implies$ ،اس طرح مطلوبہ مسطح کی مساوات ہے۔

$(2x+3y-z+7)-(x+y-2z+5)=0 \Rightarrow x+2y+z+2=0$ . ■

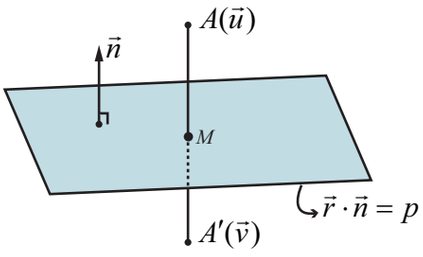
## 6.9 مسطح پر ایک نقطہ کا خیال (عکس) (Image of a Point in a Plane)

فرض کیجئے کہ دیا گیا نقطہ $A$ کا مقامی سمتیہ $\vec{u}$ ہے۔ $\vec{r}\cdot\vec{n}=p$ مسطح کی مساوات ہے ۔ مسطح پر نقطہ $A$ کا آئینہ خیال $A'$ کا مقامی سمتیہ $\vec{v}$ ہو تو $\overrightarrow{AA'}$ مسطح کے عمودی ہے۔ اس طرح یہ $\vec{n}$ کے متوازی ہے۔

$$\overrightarrow{AA'}=\lambda\vec{n} \text{ or } \vec{v}-\vec{u}=\lambda\vec{n} \implies \vec{v}=\vec{u}+\lambda\vec{n} \quad \ldots (1)$$

فرض کیجئے کہ $AA'$ کا وسطی نقطہ $M$ ہو تو $M$ کا مقامی سمتیہ $\frac{\vec{u}+\vec{v}}{2}$ ہوگا۔ لیکن $M$ مسطح پر واقع ہے۔

$$\left(\frac{\vec{u}+\vec{v}}{2}\right)\cdot\vec{n}=p\,. \quad \ldots (2)$$



خاکہ 6.35

مساوات (1) کو (2) میں درج کرنے سے ہمیں حاصل ہو گا

$$\left(\frac{\vec{u}+\lambda\vec{n}+\vec{u}}{2}\right)\cdot\vec{n}=p \implies \lambda=\frac{2\left[p-(\vec{u}\cdot\vec{n})\right]}{|\vec{n}|^2}$$

چنانچہ ، $A'$ کا مقامی سمتیہ $\vec{v}=\vec{u}+\frac{2[p-(\vec{u}\cdot\vec{n})]}{|\vec{n}|^2}$ ہے۔

**غور کیجئے (Note)**

نقطہ $A$ سے مسطح $\vec{r}\cdot\vec{n}=p$ کا عمودی پایہ ، $AA'$ کا وسطی نقطہ $M$ ہے۔عمودی خط کا پایہ $M$ کا مقامی سمتیہ اس طرح دیا گیا ہے۔

$$\frac{\vec{u}+\vec{v}}{2}=\frac{\vec{u}}{2}+\frac{1}{2}\left(\vec{u}+\frac{2[p-(\vec{u}\cdot\vec{n})}{|\vec{n}|^2}\vec{n}\right)$$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 273 27-02-2023 16:31:58

## 6.9.1 مسطح پر ایک نقطہ کے خیال کی محدّدیں (The coordinates of the image of a point in a plane)

فرض کیجئے کہ نقطہ $(a_1, a_2, a_3)$، $\vec{u}$ ہے جس کا جو مسطح پر مطلوبہ نقطہ کا خیال چاہیے ہو تو $\vec{u} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ ہوگا۔

فرض کرو دیے گئے مسطح کی مساوات $ax + by + cz = d$ ہے۔ مساوات کو سمتیہ شکل میں لکھنے سے ہمیں $\vec{r} \cdot \vec{n} = p$ حاصل ہوا۔ جس میں $\vec{n} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ ہے۔ تو خیال کا مقامی سمتیہ یہ ہے۔

$$\vec{v} = \vec{u} + \frac{2\left[p - (\vec{u} \cdot \vec{n})\right]}{|\vec{n}|^2}\vec{n} .$$

اگر $\vec{v} = v_1\hat{i} + v_2\hat{j} + v_3\hat{k}$ ہو تو $v_1 = a_1 + 2a\alpha$ , $v_2 = a_2 + 2a\alpha$ , $v_3 = a_3 + 2a\alpha$ ہوگا۔

جس میں، $\alpha = \dfrac{2\left[p - (aa_1 + ba_2 + ca_3)\right]}{a^2 + b^2 + c^2}$.

### مثال 6.55

$\vec{r} \cdot \left(\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}\right) = 38$ مسطح پر نقطہ کا خیال معلوم کیجئے جس کا مقامی سمتیہ $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ ہے۔

### حل

یہاں، $\vec{u} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ , $\vec{n} = \hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}$ , $p = 38$ ہو تو $\vec{u} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ کے خیال $\vec{v}$ کا مقامی سمتیہ اس طرح دیا گیا ہے۔

$$\vec{v} = \vec{u} + \frac{2\left[p - (\vec{u} \cdot \vec{n})\right]}{|\vec{n}|^2}\vec{n}$$

$$\vec{v} = \left(\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}\right) + \frac{2\left[38 - \left(\left(\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}\right) \cdot \left(\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}\right)\right)\right]}{\left(\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}\right) \cdot \left(\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}\right)}\left(\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}\right).$$

یعنی، $\vec{v} = \left(\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}\right) + 2\left(\dfrac{38 - 17}{21}\right)\left(\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}\right) = 3\hat{i} + 6\hat{j} + 11\hat{k}$ .

لہٰذا، $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ نقطہ کے خیال کا مقامی سمتیہ $3\hat{i} + 6\hat{j} + 11\hat{k}$ ہے۔ ■

### غور کیجئے (Note)

دیے گئے مسطح پر نقطہ جس کا مقامی سمتیہ $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ سے عمودی خط کا پایہ

$$\frac{(\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + (3\hat{i} + 6\hat{j} + 11\hat{k})}{2} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 7\hat{k} .$$

## 6.10 ایک خط اور ایک مسطح کا ملنے کا نقطہ (Meeting Point of a Line and a Plane)

**مسئلہ 6.23 (Theorem)**

خط مستقیم $\vec{r} = \vec{a} + t\vec{b}$ اور مسطح $\vec{r} \cdot \vec{n} = p$ کا نقطہ تقاطع کا مقامی سمتیہ $\vec{a} + \left(\dfrac{p - (\vec{a} \cdot \vec{n})}{\vec{b} \cdot \vec{n}}\right)\vec{b}$ ہے جس میں $\vec{b} \cdot \vec{n} \neq 0$ ہے۔

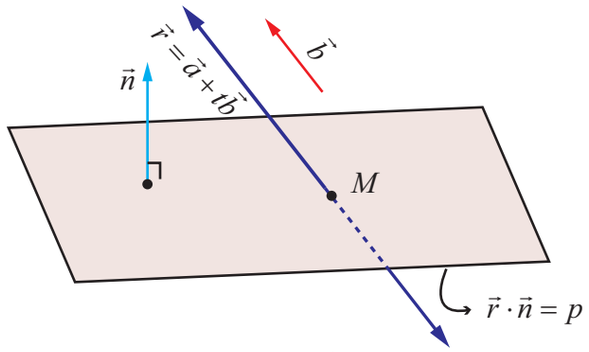
### ثبوت

فرض کیجئے کہ دی گئی خط کی مساوات $\vec{r} = \vec{a} + t\vec{b}$ جو دیے گئے مسطح جس کی مساوات $\vec{r} \cdot \vec{n} = p$ کے متوازی نہیں ہے۔ جس میں $\vec{b} \cdot \vec{n} \neq 0$ ہے۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 274 27-02-2023 16:31:59

مسطح پر خط ملنے کا نقطہ کے مقامی سمتیہ $\vec{u}$ ہوتو $\vec{r}=\vec{a}+t\vec{b}$ اور $\vec{r}\cdot\vec{n}=p$ دونوں کو $\vec{u}$ مطمئن کرتا ہے۔ $t$ کی چند قیمت کے لئے، $t_1$ لیتے ہیں تو ہمیں حاصل ہوگا۔



خاکہ 6.36

$$\vec{u}=\vec{a}+t\vec{b} \quad \ldots(1)$$

$$\vec{u}\cdot\vec{n}=p \quad \ldots(2)$$

مساوات (1) کو (2) میں درج کرنے سے ہمیں حاصل ہوگا

$$\left(\vec{a}+t_1\vec{b}\right)\cdot\vec{n}=p$$

یا، $$\vec{a}\cdot\vec{n}+t_1\left(\vec{b}\cdot\vec{n}\right)=p$$

یا، $$t_1=\frac{p-\left(\vec{a}\cdot\vec{n}\right)}{\vec{b}\cdot\vec{n}} \quad \ldots(3)$$

مساوات (3) کو (1) میں درج کرنے سے ہمیں حاصل ہوگا۔

$$\vec{u}=\vec{a}+\left(\frac{p-\left(\vec{a}\cdot\vec{n}\right)}{\vec{b}\cdot\vec{n}}\right)\vec{b},\ \vec{b}\cdot\vec{n}\neq 0$$

## مثال 6.56

$x-y+z-5=0$ مسطح $\vec{r}=\left(2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}\right)+t\left(3\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k}\right)$ خط مستقیم کو قطع کرنے والے نقطہ کی محددیں دریافت کیجئے۔

## حل

یہاں، $\vec{a}=2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k},\ \vec{b}=3\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k}$.

دئے گئے مسطح کی سمتیہ شکل $\vec{r}\cdot\left(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\right)=5$ ہوتو $\vec{n}=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ اور $p=5$ ہوگا۔

ہم جانتے ہیں کہ $\vec{r}=\vec{a}+t\vec{b}$ خط اور $\vec{r}\cdot\vec{d}=p$ مسطح کے نقطہ تقاطع کا مقامی سمتیہ اس طرح دیا گیا ہے۔

$$\vec{u}=\vec{a}+\left(\frac{p-\left(\vec{a}\cdot\vec{n}\right)}{\vec{b}\cdot\vec{n}}\right)\vec{b}$$ جس میں $\vec{b}\cdot\vec{n}\neq 0$

واضح طور پر ہم نے غور کیا کہ $\vec{b}\cdot\vec{n}\neq 0$

یہاں $\frac{p-\vec{a}\cdot\vec{n}}{\vec{b}\cdot\vec{n}}=\frac{5-\left(2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}\right)\cdot\left(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\right)}{\left(3\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k}\right)\cdot\left(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\right)}=0$ چنانچہ، دئے گئے خط اور دئے گئے مسطح کے نقطہ تقاطع کا مقامی سمتیہ یہ ہے۔

$$\vec{r}=\left(2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}\right)+(0)\left(3\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k}\right)=2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$$

یعنی، مسطح اور دیا گیا خط مستقیم نقطہ $(2,-1,2)$ پر قطع کرتے ہیں۔

**دوسرا طریقہ (Aliter)**

دئے گئے خط مستقیم کی کارتیسی مساوات $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-2}{2}=t$ ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ دئے گئے خط مستقیم پر کوئی بھی نقطہ کی شکل $(3t+2,4t-1,2t+2)$ ہوگی۔ اگر مسطح اور دیا گیا خط قطع کرتا ہے تو یہ نقطہ دئے گئے مسطح $x-y+z-5=0$ پر واقع ہوگا۔

$$(3t+2)-(4t-1)+(2t+2)-5=0\Rightarrow t=0.$$

چنانچہ، دیا گیا مسطح دیا گیا خط نقطہ $(2,-1,2)$ پر قطع کرتے ہیں۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 275 27-02-2023 16:32:01

## مشق 6.9

1. $\vec{r}\cdot\left(2\hat{i}-7\hat{j}+4\hat{k}\right)=3$ اور $3x-5y+4z+11=0$ مسطحوں کو قطع کرنے والی خط سے اور نقطہ $(-2,1,3)$ سے گزرنے والا مسطح کی مساوات معلوم کیجئے۔
2. $x+2y+3z=2$ اور $x-y+z=3$ مسطحوں کو قطع کرنے والی خط سے گزرنے والے $(3,1,-1)$ نقطہ سے $\frac{2}{\sqrt{3}}$ فاصلے پر واقع مسطح کی مساوات دریافت کیجئے۔
3. $\vec{r}=\left(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\right)+t\left(\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}\right)$ خط اور $\vec{r}\cdot\left(6\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}\right)=8$ مسطح کا درمیانی زاویہ محسوب کیجئے۔
4. $\vec{r}\cdot\left(\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}\right)=3$ اور $2x-2y+z=2$ مسطحوں کا درمیانی زاویہ دریافت کیجئے۔
5. مسطح کی مساوات معلوم کیجئے جو نقطہ $(3,4,-1)$ سے گزرتی ہے اور $2x-3y+5z+7=0$ مسطح کے متوازی ہے۔ دو مسطحوں کا درمیانی فاصلہ بھی دریافت کیجئے۔
6. $(1,-2,3)$ نقطہ سے $x-y+z=5$ مسطح پر عمودی خط کی لمبائی معلوم کیجئے۔
7. $2x-y+2z=2$ مسطح پر $x-1=\frac{y}{2}=z+1$ خط کا نقطہ تقاطع معلوم کیجئے اور خط اور مسطح کا درمیانی زاویہ بھی دریافت کیجئے۔
8. $(4,3,2)$ نقطہ سے مسطح $x+2y+3z=2$ پر کھینچی گئی عمودی خط کی لمبائی اور عمودی نقطہ کے پایہ کی محددیں معلوم کیجئے۔

G58SL

## مشق 6.10

**دئے گئے چار حل میں سے صحیح یا سب سے مناسب جواب کا انتخاب کریں۔**

1. اگر $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ متوازی سمتیے ہو تو $[\vec{a},\vec{c},\vec{b}]$ کی قیمت

(1) 2 (2) $-1$ (3) 1 (4) 0

2. اگر $\vec{\beta}$ اور $\vec{\gamma}$ مسطح پر سمتیہ $\vec{\alpha}$ واقع ہو تو

(1) $[\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}]=1$ (2) $[\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}]=-1$ (3) $[\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}]=0$ (4) $[\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}]=2$

3. اگر $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0$ ہو تو $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$ کی قیمت

(1) $|\vec{a}||\vec{b}||\vec{c}|$ (2) $\frac{1}{3}|\vec{a}||\vec{b}||\vec{c}|$ (3) 1 (4) $-1$

4. اگر $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ تین اکائی سمتیے اس طرح ہیں کہ $\vec{a}$، $\vec{b}$ کے عمودی ہے اور یہ $\vec{c}$ کے متوازی ہو تو $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ کی قیمت مساوای ہے

(1) $\vec{a}$ (2) $\vec{b}$ (3) $\vec{c}$ (4) $\vec{0}$

5. اگر $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=1$ ہو تو $\frac{\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})}{(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}}+\frac{\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})}{(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}}+\frac{\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})}{(\vec{c}\times\vec{b})\cdot\vec{a}}$ کی قیمت

(1) 1 (2) $-1$ (3) 2 (4) 3

6. متوازی السطوح کا حجم جس کے کناروں کو سمتیے $\hat{i}+\hat{j}$, $\hat{i}+2\hat{j}$, $\hat{i}+\hat{j}+\pi\hat{k}$ سے ظاہر ہیں۔

(1) $\frac{\pi}{2}$ (2) $\frac{\pi}{3}$ (3) $\pi$ (4) $\frac{\pi}{4}$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 276 27-02-2023 16:32:03

7. اگر $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ اکائی سمتیے اس طرح $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}\times\vec{b}]=\frac{1}{4}$ ہو تو $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کا درمیانی زاویہ

(1) $\frac{\pi}{6}$ (2) $\frac{\pi}{4}$ (3) $\frac{\pi}{3}$ (4) $\frac{\pi}{2}$

8. اگر $\vec{c}=\hat{i}$, $\vec{b}=\hat{i}+\hat{j}$, اور $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$ ہو تو $\lambda+\mu$ کی قیمت۔

(1) 0 (2) 1 (3) 6 (4) 3

9. اگر $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ غیر سطح، غیر صفری سمتیے ہیں اس طرح کہ $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]=3$ ہو تو $\{[\vec{a}\times\vec{b}, \vec{b}\times\vec{c}, \vec{c}\times\vec{a}]\}^2$ مساوای ہے۔

(1) 81 (2) 9 (3) 27 (4)18

10. اگر $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ تین غیر ہم سطحی اکائی سمتیے ہیں اس طرح کہ $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{\sqrt{2}}$ ہو تو $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کا درمیانی زاویہ ۔

(1) $\frac{\pi}{2}$ (2) $\frac{3\pi}{4}$ (3) $\frac{\pi}{4}$ (4) $\pi$

11. اگر $\vec{a}\times\vec{b}$, $\vec{b}\times\vec{c}$, $\vec{c}\times\vec{a}$ عام نقطہ انتہا کے کنارے سے بنا ہوا متوازی السطوح کا حجم 8 مکعبی اکائیاں ہو تو
$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{b}\times\vec{c}),(\vec{b}\times\vec{c})\times(\vec{c}\times\vec{a})$ اور $(\vec{c}\times\vec{a})\times(\vec{a}\times\vec{b})$ عام نقطہ انتہا کے کنارے سے بنا ہوا متوازی السطوح کا حجم

(1) 8 مکعبی اکائیاں (2) 512 مکعبی اکائیاں (3) 64 مکعبی اکائیاں (4) 24 مکعبی اکائیاں

12. فرض کیجئے کہ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ سمتیے اس طرح کہ $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=\vec{0}$ ہو۔ سمتیے کی جوڑی $\vec{a}$, $\vec{b}$ اور $\vec{c}$, $\vec{d}$ سے دریافت کئے ہوئے مسطح بالترتیب $P_1$ اور $P_2$ ہو تو $P_1$ اور $P_2$ کا درمیانی زاویہ۔

(1) 0° (2) 45° (3) 60° (4) 90°

13. اگر $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$, ہو جس میں $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ تین سمتیے اس طرح $\vec{b}\cdot\vec{c}\neq 0$ اور $\vec{a}\cdot\vec{b}\neq 0$ ہو تو $\vec{a}$ اور $\vec{c}$ ہیں ۔

(1) عمودی (2) متوازی

(3) زاویہ $\frac{\pi}{3}$ پر جھکاؤ (4) زاویہ $\frac{\pi}{6}$ پر جھکاؤ

14. اگر $\vec{a}=2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}$، $\vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}-5\hat{k}$ ہو تو ایک سمتیہ $\vec{c}=3\hat{i}+5\hat{j}-\hat{k}$ ہو تو ایک سمتیہ $\vec{a}$ کے عمودی ہے اور $\vec{b}$ اور $\vec{c}$ رکھنے والے مسطح پر واقع ہے۔

(1) $-17\hat{i}+21\hat{j}-97\hat{k}$ (2) $17\hat{i}+21\hat{j}-123\hat{k}$

(3) $-17\hat{i}-21\hat{j}+97\hat{k}$ (4) $-17\hat{i}-21\hat{j}-97\hat{k}$

15. $\frac{x-1}{1}=\frac{2y+3}{3}=\frac{z+5}{2}$ اور $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-2}, z=2$ خطوط کا درمیانی زاویہ ہے۔

(1) $\frac{\pi}{6}$ (2) $\frac{\pi}{4}$ (3) $\frac{\pi}{3}$ (4) $\frac{\pi}{2}$



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 277 27-02-2023 16:32:07

16. اگر خط $\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-5}=\frac{z+2}{2}$ مسطح $x+3y-\alpha z+\beta=0$ پر واقع ہوتو $(\alpha,\beta)$ ہے۔

(1) $(-5,5)$ (2) $(-6,7)$ (3) $(5,-5)$ (4) $(6,-7)$

17. خط $\vec{r}=(\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})+t(2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k})$ اور مسطح $\vec{r}\cdot(\hat{i}+\hat{j})+4=0$ کا درمیانی زاویہ

(1) $0°$ (2) $30°$ (3) $45°$ (4) $90°$

18. مسطح $\vec{r}.(\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})=3$ اور خط $\vec{r}=(6\hat{i}-\hat{j}-3\hat{k})+t(-\hat{i}+4\hat{k})$ ملنے والے نقطہ کی محدیں۔

(1) $(2,1,0)$ (2) $(7,-1,-7)$ (3) $(1,2,-6)$ (4) $(5,-1,1)$

19. مبداء سے مسطح $3x-6y+2z+7=0$ کا فاصلہ

(1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 3

20. مسطحوں $x+2y+3z+7=0$ اور $2x+4y+6z+7=0$ کا درمیانی فاصلہ

(1) $\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$ (2) $\frac{7}{2}$ (3) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ (4) $\frac{7}{2\sqrt{2}}$

21. اگر ایک خط کی کوسائن سمت $\frac{1}{c},\frac{1}{c},\frac{1}{c}$ ہوتو۔

(1) $c=\pm3$ (2) $c=\pm\sqrt{3}$ (3) $c>0$ (4) $0<c<1$

22. خط $\vec{r}=(\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k})+t(6\hat{j}-\hat{k})$ مستقیم کی سمتیہ مساوات کو ظاہر کرتی ہے یہ نقاط سے گزرتی ہے

(1) $(0,6,-1)$ اور $(1,-2,-1)$ (2) $(0,6,-1)$ اور $(-1,-4,-2)$

(3) $(1,-2,-1)$ اور $(1,4,-2)$ (4) $(1,-2,-1)$ اور $(0,-6,1)$

23. اگر مبداء سے نقطہ $(1,1,1)$ کا فاصلہ، مسطح $x+y+z+k=0$ کے فاصلہ کا آدھا ہوتو $k$ کی قیمت ۔

(1) $\pm3$ (2) $\pm6$ (3) $-3,9$ (4) $3,-9$

24. اگر $\vec{r}.(2\hat{i}-\lambda\hat{j}+\hat{k})=3$ اور $\vec{r}.(4\hat{i}+\hat{j}-\mu\hat{k})=5$ مسطحیں متوازی ہوتو $\lambda$ اور $\mu$ کی قیمت۔

(1) $\frac{1}{2},-2$ (2) $-\frac{1}{2},2$ (3) $-\frac{1}{2},-2$ (4) $\frac{1}{2},2$

25. اگر مبداء سے $2x+3y+\lambda z=1,\ \lambda>0$ مسطح کی عمودی لمبائی $\frac{1}{5}$ ہوتو $\lambda$ کی قیمت۔

(1) $2\sqrt{3}$ (2) $3\sqrt{2}$ (3) 0 (4) 1



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 278 27-02-2023 16:32:09

## خلاصہ (SUMMARY)

1. تین سمتیے $\vec{a}$، $\vec{b}$ اور $\vec{c}$ دیے گئے ہوتو $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ کو ان سمتیوں کا عددیہ **تگنا حاصل ضرب** کہتے ہیں۔
2. متوازی السطوح کا حجم ہوگا جو تین سمتیے $\vec{a}$، $\vec{b}$ اور $\vec{c}$ کے عام نقطہ انتہا کے کنارے کے استعمال سے بنتا ہے۔اس کو اس طرح دیا گیا ہے $\left|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\right|$.
3. تین غیر صفری سمتیوں کا عددیہ کا تگنا حاصل ضرب صفر ہے اگر اور صرف اگر وہ تینوں سمتیے ہم سطح ہوں ۔
4. تین سمتیے $\vec{a}$، $\vec{b}$ اور $\vec{c}$ ہم سطح ہیں اگر اور صرف اگر $r,s,t\in\mathbb{R}$ عددیہ اس طرح واقع ہوں کہ ان میں کم از کم ایک غیر صفری اور $r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}=\vec{0}$ ہو۔
5. اگر $\vec{a}$، $\vec{b}$، $\vec{c}$ اور $\vec{p}$، $\vec{q}$، $\vec{r}$ تین سمتیوں کے کوئی دو نظام ہیں اور اگر $\vec{p}=x_1\vec{a}+y_1\vec{b}+z_1\vec{c}$، $\vec{q}=x_2\vec{a}+y_2\vec{b}+z_2\vec{c}$ اور $\vec{r}=x_3\vec{a}+y_3\vec{b}+z_3\vec{c}$ ہوتو $\left[\vec{p},\vec{q},\vec{r}\right]=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]$.
6. تین سمتیے $\vec{a}$، $\vec{b}$ اور $\vec{c}$ دیے گئے ہوتو $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ کو ان سمتیوں نظام سمتیہ کا تگنا حاصل ضرب کہتے ہیں۔
7. $\vec{a}$، $\vec{b}$ اور $\vec{c}$ کوئی تین سمتیے ہوتو $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$.
8. متعین نقطہ سے گزرنے والا مقامی سمتیہ $\vec{a}$ اوردیے گئے سمتیہ $\vec{b}$ کے متوازی ہونے والے خط مستقیم کی سمتیہ مساوات پیمائشی شکل، $\vec{r}=\vec{a}+t\vec{b}$ جس میں $t\in\mathbb{R}$. ہے۔
9. ایک خط مستقیم نقطہ $(x_1,y_1,z_1)$ سے گزرتا ہے اور ایک سمتیہ جس کے سمت کی نسبتیں $b_1$, $b_2$, $b_3$ کے متوازی ہوتو کارتیسی مساوات $\frac{x-x_1}{b_1}=\frac{y-y_1}{b_2}=\frac{z-z_1}{b_3}$ ہے۔
10. $\frac{x-x_1}{b_1}=\frac{y-y_1}{b_2}=\frac{z-z_1}{b_3}$ خط پر کوئی بھی نقطہ $t\in\mathbb{R}$. $(x_1+tb_1,\ y_1+tb_2,\ z_1+tb_3)$ شکل کا ہوگا۔
11. دیے گئے مقامی سمتیے $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ دونقاط سے گزرنے والی خط کی پیمائشی شکل کی سمتیہ مساوات $\vec{r}=\vec{a}+t\left(\vec{b}-\vec{a}\right), t\in\mathbb{R}$. ہے۔
12. دیے گئے دونقاط $(x_1,y_1,z_1)$ اور $(x_2,y_2,z_2)$ سے گزرنے والی خط کی کارتیسی مساوات کو اس طرح دیا گیا ہے۔
$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$
13. اگر $\vec{r}=\vec{a}+s\vec{b}$ اور $\vec{r}=\vec{c}+t\vec{d}$ دوخطوط مستقیم کا زاویہ حادہ $\theta$ ہوتو $\theta=\cos^{-1}\left(\frac{\left|\vec{b}\cdot\vec{d}\right|}{\left|\vec{b}\right|\left|\vec{d}\right|}\right)$ ہے۔
14. اگر دو خطوط ایک ہی مسطح پر واقع ہوں تو ان کو ہم سطح کہتے ہیں۔
15. خلا میں دو خطوط اگر ایک دوسرے کے متوازی نہ ہوں اور قطع نہ کرتے ہوں تو ان کو ٹیڑھے **(skew)** خطوط کہتے ہیں۔
16. دو ٹیڑھے (skew) خطوط کا درمیانی مختصر ترین فاصلہ دوٹیڑھے خطوط کے عمودی قطاع خط کی لمبائی ہوگی۔
17. دو ٹیڑھے خطوط $\vec{r}=\vec{a}+s\vec{b}$ اور $\vec{r}=\vec{c}+t\vec{d}$ کا درمیانی مختصر ترین فاصلہ
$\delta=\frac{\left|(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{b}\times\vec{d})\right|}{\left|\vec{b}\times\vec{d}\right|}$ جہاں $|\vec{b}\times\vec{d}|\neq 0$ ہوگا۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 279 27-02-2023 16:32:12

18. دوخطوط مستقیم $\vec{r}=\vec{a}+s\vec{b}$ اور $\vec{r}=\vec{c}+t\vec{d}$ ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں اگر $(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{b}\times\vec{d})=0$.

19. $\vec{r}=\vec{a}+s\vec{b}$ اور $\vec{r}=\vec{c}+t\vec{b}$ دو متوازی خطوط کا درمیانی مختصر ترین فاصلہ $d=\dfrac{|(\vec{c}-\vec{a})\times\vec{b}|}{|\vec{b}|}$ جس میں $|\vec{b}|\neq 0$ ہے۔

20. اگر $\dfrac{x-x_1}{b_1}=\dfrac{y-y_1}{b_2}=\dfrac{z-z_1}{b_3}$ اور $\dfrac{x-x_2}{d_1}=\dfrac{y-y_2}{d_2}=\dfrac{z-z_2}{d_3}$ دوخطوط قطع کرتے ہیں تو

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}=0.$$

21. ایک سمتیہ جو مسطح کے عمودی ہو اس کو مسطح کا عمود کہتے ہیں۔

22. مبداء سے مسطح کا فاصلہ $p$ اور اکائی عمود سمتیہ $\hat{d}$ کے عمودی ہوتو مسطح کی مساوات $\vec{r}\cdot\hat{d}=p$ ہوگی۔ (عمود کی شکل میں).

23. مسطح کی کارتیسی مساوات میں عمود کی شکل $lx+my+nz=p$ ہے۔

24. مسطح کی مساوات سمتیہ شکل میں، جو نقطہ مقامی سمتیہ $\vec{a}$ سے گزرتا ہے اور یہ $\vec{n}$ کے عمودی ہے تو $(\vec{r}-\vec{a})\cdot\vec{n}=0$ ہے۔

25. سمت نسبتیں $a,b,c$ والے سمتیہ کے عمود اور دئے گئے نقطہ $(x_1,y_1,z_1)$ سے گزرنے والے مسطح کا کارتیسی مساوات $a\,(x-x_1)+b\,(y-y_1)+c\,(z-z_1)=0$ ہے۔

26. مقطوعہ کی شکل میں $\vec{r}\cdot\vec{n}=q$ مسطح کی مساوات جس میں $x,y,z$ محوروں پر بالترتیب $a,b,c$ مقطوعہ ہوتو $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ ہے۔

27. مسطح کی پیمائشی شکل میں سمتیہ مساوات جو دئے گئے تین غیر ہم خط نقاط سے گزرتی ہے $\vec{r}=\vec{a}+s(\vec{b}-\vec{a})+t(\vec{c}-\vec{a})$.

28. مسطح کی کارتیسی مساوات جو تین غیر ہم خط نقاط سے گزرتی ہے

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

29. ایک خط مستقیم ایک مسطح پر واقع ہوگا اگر خط کا ہر نقطہ، مسطح پر واقع ہو اور مسطح کا عمود، خط کے عمودی ہوگا۔

30. دئے گئے دو غیر متوازی خطوط $\vec{r}=\vec{a}+s\vec{b}$ اور $\vec{r}=\vec{c}+t\vec{d}$ ہم سطح ہیں اگر $(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{b}\times\vec{d})=0$ ہوگا۔

31. اگر $\dfrac{x-x_1}{b_1}=\dfrac{y-y_1}{b_2}=\dfrac{z-z_1}{b_3}$ اور $\dfrac{x-x_2}{d_1}=\dfrac{y-y_2}{d_2}=\dfrac{z-z_2}{d_3}$ دوخطوط ہم سطح ہیں اگر

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}=0.$$

32. $\vec{r}=\vec{a}+s\vec{b}$ اور $\vec{r}=\vec{c}+t\vec{d}$ مسطح پر واقع دو ہم سطح خطوط کی غیر پیمائشی شکل میں سمتیہ مساوات $(\vec{r}-\vec{a})\cdot(\vec{b}\times\vec{d})=0$ یا $(\vec{r}-\vec{c})\cdot(\vec{b}\times\vec{d})=0$ ہے۔

33. $\vec{r}\cdot\vec{n}_1=p_1$ اور $\vec{r}\cdot\vec{n}_2=p_2$ دو مسطحوں کا درمیانی زاویہ حادہ $\theta$ ہے $\theta=\cos^{-1}\left(\dfrac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}\right)$.



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 280 27-02-2023 16:32:13

34. اگر $\vec{r} = \vec{a} + t\vec{b}$ خط اور $\vec{r} \cdot \vec{n} = p$ مسطح کا درمیانی زاویہ حادہ $\theta$ ہو تو $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{|\vec{b} \cdot \vec{n}|}{|\vec{b}||\vec{n}|}\right)$ ہو گا۔

35. ایک نقطہ جس کا مقامی سمتیہ $\vec{u}$ سے $\vec{r} \cdot \vec{n} = p$ مسطح کا عمودی فاصلہ اس طرح دیا گیا ہے۔ $\delta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n} - p|}{|\vec{n}|}$.

36. $ax + by + cz = p$ مسطح سے $(x_1, y_1, z_1)$ نقطہ کا عمودی فاصلہ $\delta = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - p|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ ہے۔

37. مبداء سے $ax + by + cz + d = 0$ مسطح کا عمودی فاصلہ $\delta = \frac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ ہے۔

38. $ax + by + cz + d_1 = 0$ اور $ax + by + cz + d_2 = 0$ دو متوازی مسطحوں کا درمیانی فاصلہ اس طرح دیا گیا ہے
$\frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

39. $\vec{r} \cdot \vec{n}_1 = d_1$ اور $\vec{r} \cdot \vec{n}_2 = d_2$ دو مسطحوں کو قطع کرنے والی خط سے گزرنے والا مسطح کی سمتیہ مساوات کو اس طرح دیا گیا ہے ۔
$(\vec{r} \cdot \vec{n}_1 - d_1) + \lambda(\vec{r} \cdot \vec{n}_2 - d_2) = 0$ جس میں $\lambda \in \mathbb{R}$ ہے۔

40. $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ اور $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ مسطحوں کو قطع کرنے والی خط سے گزرنے والا مسطح کی کارتیسی مساوات کو اس طرح دیا گیا ہے۔
$$(a_1x + b_1y + c_1z - d_1) + \lambda(a_2x + b_2y + c_2z - d_2) = 0.$$

41. $\vec{r} = \vec{a} + t\vec{b}$ خط مستقیم اور $\vec{r} \cdot \vec{n} = p$ مسطح کے نقطہ تقاطع کا مقامی سمتیہ $\vec{u} = \vec{a} + \left(\frac{p - (\vec{a} \cdot \vec{n})}{\vec{b} \cdot \vec{n}}\right)\vec{b}$ ہے جس میں $\vec{b} \cdot \vec{n} \neq \vec{0}$ ہے۔

42. اگر $\vec{r} \cdot \vec{n} = p$ مسطح پر $\vec{u}$ کے خیال کا مقامی سمتیہ $\vec{v}$ ہو تو $\vec{v} = \vec{u} + \frac{2[p - (\vec{u} \cdot \vec{n})]}{|n|^2}\vec{n}$ ہو گا۔

## ICT CORNER — ICT کارنر

**https://ggbm.at/vchq92pg or Scan the QR Code**

بروز کھولئے اور دئے گئے URL لنک کو ٹیپ کیجئے یا QR کوڈ کو اسکین کیجئے۔12ویں جماعت ریاضی نامی GeoGebra ورک بک کھلے گا۔ ورک بک کے بائیں جانب تمھاری کتاب کے اسباق ہوں گے۔ ”سمتیہ الجبراء کے استعمالات “ نامی باب پر کلک کریں۔اس باب سے تعلق رکھنے اولے بہت سارے ورک شیٹ دیکھ سکتے ہو۔ ”عددیہ کا تگنا حاصل ضرب“ ورک شیٹ کا انتخاب کریں۔



12th_Maths_Urdu_Vol1_CH 6_Vector Algebra.indd 281 27-02-2023 16:32:17

# جوابات (ANSWERS)

## مشق 1.1

1. (i) $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 9 & -5 & -1 \end{bmatrix}$ (iii) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & +2 & 2 \end{bmatrix}$

2. (i) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ (ii) $\frac{1}{28}\begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 6 \end{bmatrix}$ (iii) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 9 & -5 & -1 \end{bmatrix}$ 4. $A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$

8. $\pm\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ 9. $\pm\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & -6 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ 10. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ 13. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 15. HELP

## مشق 1.2

1. (i) 1 (ii) 2 (iii) 2 (iv) 3 (v) 3 2. (i) 2 (ii) 3 (iii) 3

3. (i) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

## مشق 1.3

1. (i) $x = -11, y = 4$ (ii) $x = 2, y = -4$
   (iii) $x = 2, y = 3, z = 4$ (iv) $x = 3, y = -2, z = 1$
2. $x = 2, y = 1, z = -1$ 3. ₹ 18000, ₹ 600
4. 18 دن, 36 دن 5. ₹ 2000, ₹ 1000, ₹ 3000

## مشق 1.4

1. (i) $x = -2, y = 3$ (ii) $x = \frac{1}{2}, y = 3$
   (iii) $x = 2, y = 3, z = 4$ (iv) $x = 1, y = 3, z = 3$
2. 84 3. 4 لیٹر 25% ترشہ ہے، 6 لیٹر 50% ترشہ ہے۔
4. پمپ A : 15 منٹ, پمپ B : 30 منٹ
5. ₹ 30/-, ₹ 10/-, ₹ 30/-, ہاں

## مشق 1.5

1. (i) $x = -1, y = 4, z = 4$ (ii) $x = 3, y = 1, z = 2$
2. $a = 2, b = 1, c = 6$ 3. ₹ 30000, ₹ 15000, ₹ 20000
4. $a = 1, b = 3, c = -10$ , ہاں

## مشق 1.6

1. (i) $x = y = z = 1$ (ii) $x = \frac{1}{10}(7 - 5t), y = \frac{1}{10}(5t - 1), z = t, t \in \mathbb{R}$



12th_Maths_UM_Vol1_Answers.indd 282 28-03-2023 15:54:52

(iii) حل نہیں (iv) $x=\frac{1}{2}(s-t+2), y=s, z=t \text{ and } s,t\in\mathbb{R}$

2. (i) $k=1$ (ii) $k\neq 1, k\neq -2$ (iii) $k=-2$

3. (i) $\lambda=5$ اور $\mu\neq 9$ (ii) $\lambda\neq 5$ اور $\mu\in\mathbb{R}$ (iii) $\lambda=5, \mu=9$

## مشق 1.7

1. (i) $x=-t, y=-2t, z=t, t\in\mathbb{R}$ (ii) صرف سادہ حل

2. (i) $\lambda\neq 8$ (ii) $\lambda=8$

3. $2C_2H_6+7O_2\rightarrow 6H_2O+4CO_2$

## مشق 1.8

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (2) | (3) | (2) | (3) | (4) | (2) | (4) | (4) | (2) | (1) |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| (2) | (4) | (1) | (2) | (4) | (3) | (2) | (1) | (4) | (4) |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | | | | | |
| (2) | (4) | (4) | (4) | (1) | | | | | |

## مشق 2.1

1. $-1-i$ 2. $1+i$ 3. 0 4. 0

5. 1 6. $1-i$

## مشق 2.2

1. (i) $4+i$ (ii) $8-i$ (iii) $7+5i$ (iv) $1+17i$

(v) $15+8i$ (vi) $15+8i$

3. $x=-1,\ y=1$

## مشق 2.3

3. $-z_1=-2-5i$ , $z_1^{-1}=\frac{1}{29}(2-5i)$

$-z_2=3+4i$ , $z_2^{-1}=\frac{1}{25}(-3+4i)$

$-z_3=-1-i$ , $z_3^{-1}=\frac{1}{2}(1-i)$

## مشق 2.4

1. (i) $7-5i$ (ii) $\frac{5}{4}(1-i)$ (iii) $\frac{2}{5}-\frac{14i}{5}$

2. (i) $\frac{x}{x^2+y^2}$ (ii) $y$ (iii) $-y-4$

3. $\frac{1}{25}(-1-2i), \frac{1}{5}(-11+2i)$ (4) $\frac{1}{2}(7-i)$



12th_Maths_UM_Vol1_Answers.indd 283 28-03-2023 15:54:53

6. (i) 6 (ii) 3

## مشق 2.5

1. (i) $\frac{2}{5}$ (ii) $2\sqrt{2}$ (iii) 32 (iv) 50

3. $11+6i$

8. 10 10. (i) $\pm\left(\frac{3}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (ii) $\pm\left(\sqrt{2}+i2\sqrt{2}\right)$ (iii) $\pm(2-3i)$

## مشق 2.6

3. (i) $y^2=3$ (ii) $x-y=0$ (iii) $x+y=0$ (iv) $x^2+y^2=1$

4. (i) $2+i,3$ (ii) $-1+2i,1$ (iii) $2-4i,\frac{8}{3}$

5. (i) $x^2+y^2-8x-240=0$ (ii) $6x+1=0$

## مشق 2.7

1. (i) $4\left(\cos\left(2k\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right), k\in\mathbb{Z}$

(ii) $2\sqrt{3}\left(\cos\left(2k\pi-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(2k\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right), k\in\mathbb{Z}$

(iii) $2\sqrt{2}\left(\cos\left(2k\pi-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(2k\pi-\frac{3\pi}{4}\right)\right), k\in\mathbb{Z}$

(iv) $\sqrt{2}\left(\cos\left(2k\pi+\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(2k\pi+\frac{5\pi}{12}\right)\right), k\in\mathbb{Z}$

2. (i) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ (ii) $\frac{-i}{2}$

## مشق 2.8

3. 1 5. $3\,\mathrm{cis}\frac{\pi}{3}, -3, 3\,\mathrm{cis}\frac{5\pi}{3}$ 7. $-1$

9. (i) $2\sqrt{2}\,e^{\frac{i\pi}{12}}$ (ii) $2\sqrt{2}\,e^{\frac{i5\pi}{12}}$ (iii) $2\sqrt{2}\,e^{\frac{i5\pi}{4}}$

## مشق 2.9

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | (1) | (1) | (2) | (3) | (1) | (4) | (1) | (1) | (1) |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| (2) | (2) | (4) | (2) | (2) | (3) | (1) | (3) | (4) | (4) |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | | | | | |
| (2) | (3) | (4) | (1) | (1) | | | | | |

## مشق 3.1

1. 60

2. (i) $x^3-6x^2+11x-6=0$ (ii) $x^3-3x+2=0$ (iii) $x^3-4x^2-4x+16=0$



12th_Maths_UM_Vol1_Answers.indd 284 28-03-2023 15:54:53

3. (i) $x^3+4x^2+12x+32=0$ (ii) $4x^3+3x^2+2x+1=0$ (ii) $x^3-2x^2+3x-4=0$

4. $2,3,\frac{1}{3}$ 5. 10 6. $6,4,-1$ 7. $\sum\frac{\alpha}{\beta\gamma}=\frac{2ac-b^2}{ad}$

8. $2x^2-3x-20=0$ 11. $x^3+x-12=0$

## مشق 3.2

1. جب $k<0$ ہوتو، کثیر رقمی کے پاس حقیقی جذر ہیں۔
جب $k=0$ یا $k=8$ ہوتو، جذریں حقیقی اور مساوی ہیں۔
جب $0<k<8$ ہوتو، جذریں خیالی ہیں۔
جب $k>8$ ہوتو، جذریں حقیقی اور مختلف ہیں۔

2. $x^2-4x+7=0$ 3. $x^2-6x+13=0$ 4. $x^4-16x^2+4$

## مشق 3.3

1. $-3,3,\frac{1}{2}$ 2. $\frac{2}{3},\frac{4}{3},2$ 3. $\frac{2}{3},2,6$ 4. $k=2,\ 2,\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

5. $1-2i,1+2i,\sqrt{3},-\sqrt{3},\frac{1+\sqrt{37}}{2},\frac{1-\sqrt{37}}{2}$ 6. (i) $1,\frac{1}{2},3$ (ii) $-1,\frac{1}{2},\frac{3}{4}$ 7. $\pm3,\pm\sqrt{5}$

## مشق 3.4

1. (i) $\{-2,3,-7,8\}$ (ii) $3,3,3+\sqrt{17},3-\sqrt{17}$ 2. $\left\{1,-2,\frac{-1+2\sqrt{5}}{2},\frac{-1-2\sqrt{5}}{2}\right\}$

## مشق 3.5

1. (i) $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{2},n\in\mathbb{Z}$, ۔ کے لئے حل نہیں $\sin x=4$ (ii) $2,-\frac{1}{4},\frac{2}{3}$

2. (i) $x=1$ (ii) ناطق جذریں نہیں ۔ 3. $4^n$ 4. $\frac{b^2}{4a},\frac{9a^3}{b^2}$

5. (i) $2,3,\frac{1}{2},\frac{1}{3}$ (ii) $+1,-1,\frac{-3+\sqrt{5}}{2},\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$

6. $2,3$ 7. $\frac{1}{3},3,-\frac{1}{2}$ and $-2$

## مشق 3.6

1. اس کے پاس زیادہ سے زیادہ چار مثبت جذریں اور تین منفی جذریں ہیں۔
2. اس کے پاس زیادہ سے زیادہ دو مثبت جذریں اور منفی جذریں نہیں ہیں۔
4. اس کے پاس ایک مثبت حقیقی جذر اور ایک منفی حقیقی جذر ہیں۔
5. اس کے پاس کوئی مثبت حقیقی جذر نہیں اور منفی حقیقی جذر نہیں ۔

## مشق 3.7

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (4) | (1) | (3) | (1) | (3) | (4) | (1) | (3) | (1) | (2) |



12th_Maths_UM_Vol1_Answers.indd 285 28-03-2023 15:54:54

## مشق 4.1

1. (i) $x = n\pi,\ n = 0, \pm1, \pm2, \ldots \pm10$ (ii) $x = (4n-1)\frac{\pi}{2},\ n = 0, \pm1$

2. (i) 1, $\frac{2\pi}{7}$ (ii) 1, $6\pi$ (iii) 4, $\pi$ 4. (i) $\frac{\pi}{3}$ (ii) $-\frac{\pi}{4}$

5. $x = 0$ 6. (i) $\{-1, 1\}$ (ii) $[0, 1]$ 7. $\frac{\pi}{3}$

## مشق 4.2

1. (i) $x = (2n+1)\frac{\pi}{2},\ n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5, -6$ (ii) $x = (2n+1)\pi,\ n = 0, \pm1, \pm2, -3$

2. $-\frac{\pi}{6} \notin [0, \pi]$ 3. $\frac{\pi}{3}$ 4. $\frac{\pi}{3}$

5. (i) $\frac{5\pi}{6}$ (ii) $-\frac{\pi}{6}$ (iii) $\frac{24\pi}{119}$ 6. (i) $[-5, 5]$ (ii) $[-1, 1]$

7. $0 < x < \frac{1}{3}$ 8. (i) 0 (ii) $\frac{17\pi}{12}$

## مشق 4.3

1. (i) $[-3, 3]$ (ii) $\mathbb{R}$ 2. (i) $\frac{\pi}{4}$ (ii) $-\frac{\pi}{6}$

3. (i) $\frac{7\pi}{4}$ (ii) 1947 (iii) –0.2021 4. (i) $\infty$ (ii) $-\frac{2\sqrt{5}}{25}$ (iii) $\frac{24}{25}$

## مشق 4.4

1. (i) $\frac{\pi}{6}$ (ii) $\frac{\pi}{6}$ (iii) $-\frac{\pi}{4}$ 2.(i) $-\frac{\pi}{3}$ (ii) $\cot^{-1}(2) - \frac{\pi}{6}$ (iii) $-\frac{5\pi}{6}$

## مشق 4.5

1. (i) $-\frac{\pi}{2}$ (ii) $-\frac{\pi}{4}$ (iii) $5 - 2\pi$

2. (i) $\sqrt{2x - x^2}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{9x^2 - 6x + 2}}$ (iii) $\frac{2x+1}{\sqrt{3 - 4x - 4x^2}}$

3. (i) $\frac{\pi}{6}$ (ii) 0 (iii) $\frac{17}{6}$ 8. $\frac{\pi}{4}$

9. (i) $x = 13$ (ii) $x = \frac{a-b}{1+ab}$ (iii) $x = n\pi + \frac{\pi}{4},\ n \in \mathbb{Z}$

(iv) $x = \sqrt{3}$

10. 3



12th_Maths_UM_Vol1_Answers.indd 286 28-03-2023 15:54:56

## مشق 4.6

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (3) | (2) | (3) | (1) | (2) | (1) | (3) | (1) | (4) | (4) |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| (3) | (2) | (2) | (1) | (3) | (3) | (2) | (2) | (4) | (4) |

## مشق 5.1

1. $x^2+y^2\pm10y=0$ 2. $(x-2)^2+(y+1)^2=50$
3. $x^2+y^2+4x+4y+4=0$ or $x^2+y^2+20x+20y+100=0$ 4. $x^2+y^2-4x-6y-12=0$
5. $x^2+y^2-5x+3y-22=0$ 6. $x^2+y^2=1$
7. $x^2+y^2-6x-4y+4=0$ 8. $\pm12$
9. $x-5y+8=0,\ 5x+y-12=0$ 10. باہر، اندر، باہر

11. (i) $(0,-2),0$ (ii) $(-3,2),3$ (iii) $\left(\frac{1}{2},-1\right),\frac{\sqrt{17}}{2}$ (iv) $\left(\frac{3}{2},-1\right),\frac{3}{2}$
12. $p=q=3$, $(1,0),5$

## مشق 5.2

1. (i) $y^2=16x$ (ii) $3x^2=-4y$ (iii) $(y+2)^2=12(x-1)$ (iv) $y^2=16x$

2. (i) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$ (ii) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ (iii) $\frac{16x^2}{625}+\frac{y^2}{25}=1$ (iii) $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{16}=1$

3. (i) $\frac{9x^2}{16}-\frac{9y^2}{20}=1$ (ii) $\frac{(x-2)^2}{12}-\frac{(y-1)^2}{24}=1$ (iii) $\frac{x^2}{16}-\frac{9y^2}{64}=1$

4.

| | راسیں | ماسکہ | باری خط کی مساوات | لیٹس ریکٹم کی لمبائی |
|---|---|---|---|---|
| i. | $(0,0)$ | $(4,0)$ | $x=-4$ | 16 |
| ii. | $(0,0)$ | $(0,6)$ | $y=-6$ | 24 |
| iii. | $(0,0)$ | $(-2,0)$ | $x=2$ | 8 |
| iv. | $(1,-2)$ | $(1,-4)$ | $y=0$ | 8 |
| v. | $(1,2)$ | $(3,2)$ | $x=-1$ | 8 |



12th_Maths_UM_Vol1_Answers.indd 287 28-03-2023 15:54:56

| | مخروطی تراشہ کی قسم | مرکز | راسیں | ماسکہ | بارِی خط |
|---|---|---|---|---|---|
| i. | بیضوی | $(0,0)$ | $(\pm5,0)$ | $(\pm4,0)$ | $x=\pm\frac{25}{4}$ |
| ii. | بیضوی | $(0,0)$ | $(0,\pm\sqrt{10})$ | $(0,\pm\sqrt{7})$ | $y=\pm\frac{10}{\sqrt{7}}$ |
| iii. | ہذلولی | $(0,0)$ | $(\pm5,0)$ | $(\pm13,0)$ | $x=\pm\frac{25}{13}$ |
| iv. | ہذلولی | $(0,0)$ | $(0,\pm4)$ | $(0,\pm5)$ | $y=\pm\frac{16}{5}$ |

8.

| | مخروطی تراشہ کی قسم | مرکز | راسیں | ماسکہ | بارِی خط |
|---|---|---|---|---|---|
| i. | بیضوی | $(3,4)$ | $(3,21),(3,-13)$ | $(3,12),(3,-4)$ | $y=\frac{321}{8}$, $y=\frac{-257}{8}$ |
| ii. | بیضوی | $(-1,2)$ | $(-11,2),(9,2)$ | $(-7,2),(5,2)$ | $x=\frac{47}{3}$, $x=\frac{-53}{3}$ |
| iii. | ہذلولی | $(-3,4)$ | $(-18,4),(12,4)$ | $(-20,4),(14,4)$ | $x=\frac{174}{17}$, $x=\frac{-276}{17}$ |
| iv. | ہذلولی | $(-1,2)$ | $(-1,7),(-1,-3)$ | $(-1,2+\sqrt{41})$ $(-1,2-\sqrt{41})$ | $y=\frac{25}{\sqrt{41}}+2$, $y=\frac{-25}{\sqrt{41}}+2$ |
| v. | بیضوی | $(4,-2)$ | $(4,-2+3\sqrt{2})$, $(4,-2-3\sqrt{2})$ | $(4,-2+\sqrt{6})$, $(4,-2-\sqrt{6})$ | $y=-2+3\sqrt{6}$, $y=-2-3\sqrt{6}$ |
| vi. | ہذلولی | $(2,-3)$ | $(3,-3),(1,-3)$ | $(2+\sqrt{10}-3)$, $(2-\sqrt{10},-3)$ | $x=\frac{1}{\sqrt{10}}+2$, $x=\frac{-1}{\sqrt{10}}+2$ |



12th_Maths_UM_Vol1_Answers.indd 288 28-03-2023 15:54:57

## مشق 5.3

1. ہذلولی  2. دائرہ  3. بیضوی  4. دائرہ  5. ہذلولی  6. مکافی

## مشق 5.4

1. $x-y-3=0, x-9y+13=0$  2. $10x-3y+32=0,\ 10x-3y-32=0$
3. $(-3,1)$  4. $x-y+4=0$
5. $x-2y+8=0$  6. $4x-3y-6=0, 3x+4y-42=0$

## مشق 5.5

1. 8.4 m  2. 26.6 m  3. 3 m
4. $y^2=4.8x,\ 1.3m$  5. $3.52m,\ 5.08m$  6. 90.82m, 148.91m
7. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$  8. $3\sqrt{3}m$  9. $\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$  10. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$

## مشق 5.6

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | (3) | (4) | (3) | (3) | (1) | (1) | (3) | (2) | (2) | (1) | (4) | (3) |
| 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | --- |
| (3) | (1) | (4) | (4) | (1) | (1) | (2) | (2) | (3) | (3) | (3) | (2) | --- |

## مشق 6.1

11. 80 اکائیاں  12. 69 اکائیاں
13. $\sqrt{179}, \frac{3}{\sqrt{179}}, \frac{-11}{\sqrt{179}}, \frac{-7}{\sqrt{179}}$  14. $-96\hat{i}+115\hat{j}+15\hat{k}$

## مشق 6.2

1. 24  2. 720 مکعب اکائیاں  3. $-5$
4. $\pm 12$  5. $\frac{2\sqrt{3}}{5}$  6. ہم سطح  7. 2

## مشق 6.3

1. (i) $-2\hat{i}+14\hat{j}-22\hat{k}$  (ii) $22\hat{i}+14\hat{j}+2\hat{k}$  5. $-74$
7. $l=0,\ m=10,\ n=-3$  8. $\theta=\frac{\pi}{3}$

## مشق 6.4

1. $\left(\vec{r}-\left(4\hat{i}+3\hat{j}-7\hat{k}\right)\right)\times\left(2\hat{i}-6\hat{j}+7\hat{k}\right)=\vec{0}$, $\frac{x-4}{2}=\frac{y-3}{-6}=\frac{z+7}{7}$
2. $\vec{r}=\left(-2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}\right)+t\left(-4\hat{i}+5\hat{j}-6\hat{k}\right)$, $\frac{x+2}{-4}=\frac{y-3}{5}=\frac{z-4}{-6}$



12th_Maths_UM_Vol1_Answers.indd 289  28-03-2023 15:54:57

3. $\left(\frac{32}{3},0,\frac{47}{3}\right),(0,16,-11)$

4. $\left(\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{6}{7}\right)$, $\vec{r}=\left(5\hat{i}+6\hat{j}+7\hat{k}\right)+t\left(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k}\right)$ or

$\vec{r}=\left(7\hat{i}+9\hat{j}+13\hat{k}\right)+t\left(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k}\right)$,

$\frac{x-5}{2}=\frac{y-6}{3}=\frac{z-7}{6}$ or $\frac{x-7}{2}=\frac{y-9}{3}=\frac{z-13}{6}$

5. (i) $0°$ (ii) $\frac{\pi}{6}$ (iii) $\frac{\pi}{2}$ 6. $\frac{\pi}{2}$ 7. $a=18, b=\frac{2}{3}$ 8. 1

## مشق 6.5

1. $\vec{r}=\left(5\hat{i}+2\hat{j}+8\hat{k}\right)+t\left(2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}\right), t\in\mathbb{R}$, $\frac{x-5}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-8}{-2}$

2. $\frac{7}{\sqrt{5}}$ اکائیاں 3. $\frac{9}{2}$ 4. $(6,2,1)$ 5. 2 اکائیاں

6. $\frac{\sqrt{83}}{\sqrt{6}}$ اکائیاں 7. $(1,6,0)$, $\frac{x-5}{-4}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-2}{-2}$

## مشق 6.6

1. $\vec{r}\cdot\left(\frac{3\hat{i}-4\hat{j}+5\hat{k}}{5\sqrt{2}}\right)=7$ 2. $\frac{12}{13},\frac{3}{13},\frac{-4}{13}$; $\vec{r}.\left(\frac{12\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}}{13}\right)=5$; 5

3. $\vec{r}\cdot\left(\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k}\right)=35$; $x+3y+5z=35$ 4. $\vec{r}\cdot\left(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}\right)=2$; $x+y+z=2$

5. $x$-مقطوعہ $=2$, $y$-مقطوعہ $=3$, $z$-مقطوعہ $=-4$ 6. $\frac{x}{u}+\frac{y}{v}+\frac{z}{w}=3$

## مشق 6.7

1. $\vec{r}\cdot\left(\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k}\right)=20$; $x-2y+4z-20=0$

2. $\vec{r}\cdot\left(3\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k}\right)=9$; $3x+4y-5z-9=0$

3. $\vec{r}=\left(2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}\right)+s\left(-\hat{i}-4\hat{j}+2\hat{k}\right)+t\left(3\hat{i}-4\hat{j}+5\hat{k}\right)s,t\in\mathbb{R}$;

$12x-11y-16z+14=0$

4. $\vec{r}\cdot\left(\hat{i}+10\hat{j}+7\hat{k}\right)=9$; $x+10y+7z-9=0$

5. $\vec{r}=\left(\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}\right)+s\left(2\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}\right)+t\left(\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}\right)s,t\in\mathbb{R}$; $9x-2y-5z+4=0$

6. $\vec{r}=\left(3\hat{i}+6\hat{j}-2\hat{k}\right)+s\left(-4\hat{i}-8\hat{j}+8\hat{k}\right)+t\left(3\hat{i}-2\hat{j}\right)s,t\in\mathbb{R}$; $\vec{r}\cdot\left(2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}\right)=16$;

$2x+3y+4z-16=0$

7. $\vec{r}\cdot\left(3\hat{i}+5\hat{j}-7\hat{k}\right)=6$; $3x+5y-7z-6=0$



12th_Maths_UM_Vol1_Answers.indd 290 28-03-2023 15:54:58

## مشق 6.8

1. $\vec{r}\cdot\left(17\hat{i}-47\hat{j}-24\hat{k}\right)=-172$
2. $x+2y-z-4=0$
3. $m=\pm\sqrt{2}$
4. $-2, 2,\ y+z+1=0,\ y-z+1=0$

## مشق 6.9

1. $15x-47y+28z-7=0$
2. $5x-11y+z-17=0$
3. $\sin^{-1}\left(\frac{8}{21}\right)$
4. $\cos^{-1}\left(\frac{2}{3\sqrt{6}}\right)$
5. $2x-3y+5z+11=0, \frac{4}{\sqrt{38}}$
6. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ اکائیاں
7. $(2,2,0),\ \text{Sin}^{-1}\left(\frac{2}{3\sqrt{6}}\right)$
8. $(3,1,-1)$؛ $\sqrt{14}$ اکائیاں.

## مشق 6.10

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (4) | (3) | (1) | (2) | (1) | (3) | (1) | (1) | (1) | (2) |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| (3) | (1) | (2) | (4) | (4) | (2) | (3) | (4) | (2) | (1) |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | | | | | |
| (2) | (3) | (4) | (3) | (1) | | | | | |



12th_Maths_UM_Vol1_Answers.indd 291 28-03-2023 15:54:58

# فرہنگ الفاظ و معنی (GLOSSARY)

## باب 1

## میٹرکس اور مقطعہ کے استعمالات

| | |
|---|---|
| Adjoint matrix | شریک میٹرکس |
| Inverse matrix | معکوس میٹرکس |
| Rank | مقام |
| Elementary transformation | ابتدائی عملیات |
| Echelon form | ایکلان شکل |
| Trivial solution | معمولی حل |
| Non-trivial solution | غیر معمولی حل |
| Augmented matrix | بڑھاؤ میٹرکس |
| Consistent | ہم آہنگ |
| Pivot | مدار |

## باب 2

## پیچیدہ اعداد

| | |
|---|---|
| Complex numbers | پیچیدہ اعداد |
| Imaginary unit | خیالی اکائی |
| Rectangular form | مستطیلی شکل |
| Argand Plane | آرگنڈی مسطح |
| Conjugate of a complex number | پیچیدہ اعداد کا زوجی |
| Upper bound | اوپری حد |
| Lower bound | نچلی حد |
| Polar form | قطبی شکل |
| Exponential form | قوت نما شکل |
| Trigonometric form | علم مثلثی شکل |
| Absolute value | مطلق قیمت |
| Modulus | معین ضروب |
| Argument or amplitude | دلیل یا حیطہ |
| Principal argument | اصلی دلیل |
| Euler's form | ائلیر شکل |

## باب 3

## مساوات کا نظریہ

| | |
|---|---|
| Complex conjugate root theorem | جوڑی مرکب جذر مسئلہ |
| Leading coefficient | نمایاں سر عدد |
| Leading term | نمایاں رقم |
| Monic polynomial | ایک درجی کثیر رقمی |



12th_Maths_UM_Vol1_Glossary.indd 292 28-02-2023 11:20:49

| | |
|---|---|
| Non-polynomial equation | غیر کثیر رقمی مساوات |
| Non real complex number | غیر حقیقی پیچیدہ عدد |
| Quartic polynomial | دو درجی کثیر رقمی |
| Radical solution | بنیادی حل |
| Rational root Theorem | ناطق جذر کا مسئلہ |
| Reciprocal equation | باہمی مساوات |
| Reciprocal polynomial | باہمی کثیر رقمی |
| Simple root | معمولی جذر |
| Zero polynomial | صفر کثیر رقمی |

## باب 4

## معکوس علم مثلثی تفاعلات

| | |
|---|---|
| Inverse trigonometric functions | معکوس علم مثلثی تفاعلات |
| Principal value | اصل قیمت |
| Amplitude | حیطہ |
| Period | وقفہ |
| Principal domain | اصل علاقہ |
| Periodic function | وقفہ دوران تفاعل |

| | |
|---|---|
| Reciprocal inverse identities | مقلوب معکوس تماثلات |
| Reflection identities | انعکاس تماثلات |
| Cofunction inverse identities | ہم تفاعل معکوس تماثلات |

## باب 5

## دو ابعادی تحلیلی جیومیٹری - II

| | |
|---|---|
| Circle | دائرہ |
| Parabola | مکافی |
| Ellipse | بیضوی |
| Hyperbola | ہذلولی |
| Algebraic techniques | الجبریائی طریقے |
| Geometrical problems | ہندسی حل |
| Astronomy | علم فلکیات |
| Conics | مخروطی تراشے |
| Focus | ماسکہ |
| Directrix | ساکن خط |
| Eccentricity | خروج مرکز |



12th_Maths_UM_Vol1_Glossary.indd 293 28-02-2023 11:20:49

# باب 6
# سمتیہ الجبراء کے استعمالات

| | |
|---|---|
| Box product | باکس حاصل ضرب |
| Line of intersection | قطع کرنے والی خط |
| Moment | حرکت |
| Normal | عمود |
| Parallelepiped | متوازی السطوح |
| Parameter | پیمائشی |
| Plane | مسطح |
| Rotaional force | گردشی قوت |
| Skew lines | ٹیڑھے خطوط |
| Torque | قوتِ گردشہ |
| Triple product | تگنا حاصل ضرب |

| | |
|---|---|
| Focal chord | ماسکی وتر |
| Vertex | راس |
| Latus rectum | لیٹس ریکٹم |
| Major axis | محور اکبر |
| Minor axis | محور اصغر |
| Transverse axis | عرضی محور |
| Conjugate axis | زوجی محور |
| Auxiliary circle | معاون دائرہ |
| Incircle | درون دائرہ |
| Asymptotes | خط متقارب |
| Degenerate forms | تحلیلی شکلیں |
| Double napped cone | دہری الٹے مخروط |
| Parametric equation | پیمائشی مساوات |
| Director circle | ہادی دائرہ |
| Elliptic orbit | بیضوی مدار |
| Reflective property | معکوس خصوصیت |



12th_Maths_UM_Vol1_Glossary.indd 294 28-02-2023 11:20:49

# BOOKS FOR REFERENCE


1. Higher Algebra - S. Barnard, and J. M. Child, Macmillan & Co Ltd, New York.
2. A First Course in Complex Analysis with Applications - Dennis D. Zill, and Patrik D. Shanahan, Jones and Bartlett Publishers, London.
3. Complex Variables and Applications - James ward Brown, and Ruel V.Churchill, McGrawHill Higher education, New Delhi.
4. Elementary Theory of Equations - Dickson, L. E., New York: Wiley, pp. 36-37, 1914.
5. Polynomials and Polynomial Inequalities.Borwein, P. and Erdélyi, New York: Springer, Verlag, p. 4, 1995.
6. Beyond the Quartic Equation - King, R. B.,Boston, MA: Birkhäuser, 1996.
7. Fundamentals of College Algebra - Charles D. Miller, Margaret L. Lial, David I. Schneider: Scott & Foresman/Little & Brown Higher Education, 3rd edition 1990,
8. Trigonometry – John R. Durbin, John wiley & Sons.
9. Trigonometry – Michael Corral.
10. Notes from Trigonometry – Steven Butler.
11. College Algebra – Robert Blitzer
12. College Algebra – Ron Larson
13. A text book two dimensional Geometry - (i) Satpal (ii) Harbans Lal
14. Vector Calculus - Jerrold E. Marsden, Anthony Tromba
15. Vector Algebra - Schaum's Outline Series
16. Analytical Geometry and Calculus, with vectors - McGraw-Hill Book Company, Inc





12th_Maths_UM_Vol1_Glossary.indd 295 28-02-2023 11:20:49

# Class 12 - Mathematics - Volume 1 - Urdu Medium

## Text Book Translators and Reviewers ریاضی برائے بارھویں جماعت

### Academic Coordinator & Head

**Dr. Mrs. S. Shameem,**
Deputy Director, SCERT,
Chennai.

### Reviewer and Coordinator

**A. Sheema Akthar,**
Head Mistress, Govt. Hr. Sec. School
Nagavedu, Ranipet Dt. - 631002

### Translators

**A. Sheema Akthar,**
Head Mistress, Govt. Hr. Sec. School
Nagavedu, Ranipet Dt. - 631002

**A. Sadiq Mohammed,**
B.T. Asst., Municipal Old Muslim Girls
Middle School, Triupattur - 635601

**M. N. Althaf Hussain**
B.T. Asst., Murthuzaviya Or. Hr. Sec.
School, Triplicane, Chennai – 600005

**H. Hafeezur Rahman,**
B.T. Asst., Municipal Muslim Boys High
School, Vaniyambadi - 635751

**M. Mohammed Nasir**
B.T. Asst., Mazharul Uloom Hr. Sec.
School, Ambur – 635802

**Y. K. Sajjad Ahmad**
B.T. Asst., Muslim Hr. Sec. School,
Triplicane, Chennai – 600005

**H.M. Fahmeena Begum**
B.T. Asst., Murthuzaviya Or. Hr. Sec.
School, Triplicane, Chennai – 600005

### تعلیمی سربراہ اور معاون

**ڈاکٹر یس شمیم صاحبہ**
، ڈپٹی ڈائریکٹر ، ایس سی ای آر ٹی
چنئی۔

### نظر ثانی اور معاون

**اے شیما اختر**
ہیڈ مسٹرس،جی ہچ یس یس، ناگویڈ،رانی پیٹ – 631002

### مترجمین

**اے شیما اختر**
ہیڈ مسٹرس،جی ہچ یس یس، ناگویڈ،رانی پیٹ – 631002

**اے۔صادق محمد**
بی۔ٹی۔اسسٹنٹ، میونسپل اولڈ مسلم گرلس مڈل اسکول
درگاہ گلی، تروپتور– 635601

**یم۔ین۔الطاف حسین**
بی۔ٹی۔اسسٹنٹ، مرتضویہ اورینٹل ہائیر سیکنڈری اسکول
ٹرپلیکن، چنئی – 600005

**ہچ۔حفیظ الرحمٰن**
بی۔ٹی۔اسسٹنٹ، میونسپل مسلم بائز ہائی اسکول
گاندھی نگر، وانمباڑی – 635751

**یم محمد ناصر**
بی۔ ٹی۔ اسسٹنٹ، مظہر العلوم ہائیر سکنڈری اسکول
آمبور – 635802

**سجّاد احمد وائی۔ کے**
بی۔ ٹی۔ اسسٹنٹ، مسلم ہائیر سکینڈری اسکول
ٹرپلیکن، چنئی – 600005

**ہچ یم فہمینہ بیگم**
بی۔ٹی۔اسسٹنٹ، مرتضویہ اورینٹل ہائیر سیکنڈری اسکول
ٹرپلیکن، چنئی – 600005

### Layout

**B. Yogesh**
**B. Ravi Kumar, Erode**
**V. S. Johnsmith**
**S. Santhosh Kumar**

### Typing

**S.K. Anwar Ahmed,**
**Siddiqua graphic, Chennai**

### Inhouse -QC

**V. Sridhar**

### Coordinator

**Ramesh Munisamy**

### EMIS Technology Team

**R.M. Satheesh**
State Coordinator Technical,
TN EMIS, Samagra Shiksha.

**K.P. Sathya Narayana**
IT Consultant,
TN EMIS, Samagra Shikaha.

**R. Arun Maruthi Selvan**
Technical Project Consultant,
TN EMIS, Samagra Shiksha.

This book has been printed on 80 G.S.M.
Elegant Maplitho Paper.

Printed by Web Offset at :



12th_Maths_UM_Text Book Translator Team.indd 296 4/21/2022 1:03:18 PM