GOVERNMENT OF TAMIL NADU

ہائر سکنڈری سالِ دوّم

HIGHER SECONDARY SECOND YEAR

ریاضی

جلد - II

MATHEMATICS

VOLUME - II

(URDU MEDIUM)

Department of School Education

Untouchability is Inhuman and a Crime

12th_Maths_UM_Vol2_FP.indd 1 13-03-2023 15:39:28

Government of Tamil Nadu

First Edition - 2021

Revised Edition - 2022, 2023

Reprint - 2024

(Published under new syllabus)

Content Creation

State Council of Educational Research and Training

© SCERT 2021

Printing & Publishing

Tamil NaduTextbook and Educational Services Corporation

www.textbooksonline.tn.nic.in

12th_Maths_UM_Vol2_FP.indd 2 13-03-2023 15:39:28

CONTENTS مضامین

MATHEMATICS ریاضی

اکائی	عنوان	صفحہ نمبر	مہینہ
7	**تفرقی احصاء کے استعمالات (اطلاقات)**	**1**	**اکتوبر**
7.1	تعارف	1	
7.2	مشتق کے معنی	2	
7.3	اوسط قیمت مسئلہ	15	
7.4	سلسلہ کی توسیع	22	
7.5	غیر تفرقی شکلیں	25	
7.6	پہلے تفرقی کے استعمالات	32	
7.7	دوسرے تفرقی کے استعمالات	40	
7.8	اصلاح میں استعمالات	44	
7.9	تماثل اور متقارب	47	
7.10	منحنی کی خاکہ کاری	50	
8	**سمتیہ الجبرا کے استعمالات**	**58**	**اکتوبر / نومبر**
8.1	تعارف	58	
8.2	خطی تقریبی اور تفریقات	60	
8.3	کثیر متغیرات والے تفاعلات	68	
8.4	دو متغیرات والے تفاعلات کے حد اور تسلسل	70	
8.5	جزوی مشتقیں	74	
8.6	خطی تقریب اور کثیر متغیرات والے تفاعل کی تفرق	80	
9	**تکملہ کے اطلاقات**	**90**	**نومبر / دسمبر**
9.1	تعارف	90	
9.2	حاصل جمع کے انتہاء کے طور پر معین تکملہ	92	
9.3	تکملہ احصا کے بنیادی نظریات اور ان کے استعمالات	98	
9.4	برنولی کا ضابطہ	113	
9.5	نا مناسب تکملے	115	
9.6	تخفیف ضابطہ	117	
9.7	گاما تکملہ	120	
9.8	تکمیل سے گھری مستوی رقبہ کی تشخیص	122	
9.9	محور کے گرد گھومنے والے رقبہ کے ذریعے حاصل کردہ ٹھوس کا حجم	135	

12th_Maths_UM_Vol2_FP.indd 3 13-03-2023 15:39:28

10	**عام تفرقی مساوات**	**144**	**دسمبر**
10.1	تعارف	144	
10.2	تفرقی مساوات ترتیب اور درجہ	145	
10.3	تفرقی مساوات کی درجہ بندی	149	
10.4	تفرقی مساوات کی تشکیل	151	
10.5	عام تفرقی مساوات کا حل	155	
10.6	پہلے رتبہ اور پہلے درجہ والی تفرقی مساوات کا حل	158	
10.7	اول درجہ کی خطی تفرقی مساواتیں	166	
10.8	اوّل درجہ کی عام تفرقی مساواتوں کے استعمالات	170	
11	**امکانی بٹوارے**	**179**	**جنوری**
11.1	تعارف	179	
11.2	سریعی متغیر	179	
11.3	سریعی متغیر کے اقسام	184	
11.4	مسلسل بٹوارے	195	
11.5	ریاضی توقع	203	
11.6	نظریاتی بٹوارے : چند مخصوص منفصل بٹوارے	211	
12	**سمتیہ الجبرا کے استعمالات**	**224**	**جنوری**
12.1	تعارف	224	
12.2	بائنری اعمال	225	
12.3	ریاضی منطق	237	
	جوابات (ANSWERS)	**254**	
	فرہنگ الفاظ و معنی (GLOSSARY)	**265**	
	BOOKS FOR REFERENCE	**267**	

DGORK

E-book

MVH21

Assessment

12th_Maths_UM_Vol2_FP.indd 4 13-03-2023 15:39:29

باب
7

تفرقی احصاء کے استعمالات (اطلاقات)
(Applications of Differencial Calculus)

"اُس دنیا میں کچھ بھی جگہ نہیں لیتا جسکے معنی کسی زیادہ سے زیادہ یا کم سے کم نہیں ہوتے"

روڈولف اوٹو سگمنڈ لپسچٹز۔

7.1 تعارف (Introduction)

7.1.1 ابتدائی ترقی (Early Developments)



روڈولف اوٹو سگمنڈ لپچڈز
Rudolf Otto Sigismund Lipschitz
1832-1903

تفرقی احصاء کا بنیادی مقصد چند چیزوں کے چھوٹے ٹکڑوں میں تقسیم کرنا ہے۔ مشاہدہ کرنے کے لئے کہ یہ کیسے تبدیل ہوتے ہیں۔ اسی وجہ سے آج کے دور کے تفرقی احصاء کو بہت **چھوٹے ٹکڑے احصاء** کا نام رکھا گیا تھا۔ سائنس کی بنیاد کے ہم عصر تفرقی احصاء کے طبیعیات اور علم فلکیات میں استعمال ہوتے ہیں۔ 18 ویں صدی کے تمام حصوں میں ان استعمالات کو اس وقت تک بڑھا یا گیا جب تک کہ 18 ویں صدی کے آخر میں لیگرینج اور لیپلیس نے قوتوں کے مطالعہ کو پوری وسعت کے ساتھ تجزیہ کے دائرہ میں لایا۔

تفریق کے استعمالات کی ترقی بھی لیجون ڈرچلٹ، ریمن، وان نیومن، ہین، کرونکر، لیچٹز، کرسٹوفل، کرچاف، بلٹرامی اور دوسرے اس صدی کے کئی معروف طبیعیات دانوں کی وجہ سے ہوئی۔

- تفرقی احصاء جو علم ہندسہ اور حرکیات میں استعمال ہوتے ہیں۔
- تفاعلات کے مشتق، جو قیمت کی نمائندگی، قوت، چیزوں کا عمل، نفع، وغیرہ تفاعلات کے ایک سری کی جانچ میں استعمال ہوتا ہے۔ اور مقداروں کے انتہاء قیمتوں کی جانکاری جو ان تفاعلات سے ظاہر ہیں۔
- تفاعل کے مشق کو انجینئرنگ اور سائنس کے نمونہ مسئلوں کو حل کرنے میں بھی نمایاں مقام حاصل ہے۔
- تفرقی احصاء، سماجی سائنس اور میڈیکل سائنس میں بھی استعمال ہوتا ہے۔

$f(x)$ تفاعل کے پہلئے دو مشق استعمال کرتے ہوئے، اس سبق میں ہم تفاعل کی خصوصیت، $y = f(x)$ منحنی نقشہ کھینچئے اور تفاعل کے انتہاء قیمت (زیادہ یا کم) کی جانکاری وغیرہ سیکھے گیں اور اسی طرح چند $f(x)$ کے اعلیٰ درجہ مشتق (اگر ہونے پر) اور $f(x)$ کے سلسلے کی پھیلاؤ جو ایک نقطے پر ہو تحقیق کرینگے۔

Learning Objectives — سیکھنے کے مقاصد

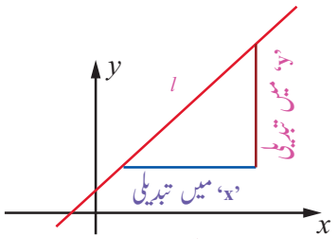
اس باب کی تکمیل کے بعد طلباء ذیل کے قابل بن جائیگے۔

- مشتق کو ہندسی مسئلوں میں استعمال کرنے۔
- مشتق کو طبیعیاتی مسئلوں میں استعمال کرنے۔
- منحنی کی خصوصیت کی جانکاری جیسے ایک سری، حدب، اور مقعریت۔
- حقیقی مسئلوں کا نمونہ انتہاء قیمتوں کو مشتق کے استعمال سے محسوب کرنے۔
- تفاعلات اور کثیر رقمیات کے لئے منحنی نقشہ کھینچئے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 7_Differential Calculus.indd 1 28-02-2023 16:35:33

7.2 مشتق کے معنی (Meaning of Derivatives)

7.2.1 میلان کے طور پر مشتق (Derivative as slope)



خاکہ 7.1

میلان یا خط کا ڈھلوان: فرض کرو کہ l ایک غیر افقی خط جو خاکہ 7.1 میں دکھایا گیا ہے۔ l سے نقطہ آغاز کے ساتھ کسی بھی لمبائی کا افقی خط اور دی گئی خط کو چھونے کے لئے افقی خط کے آخر سے شروع ہونے والا طبقہ لیں یہ مشاہدہ کیا جاسکتا ہے۔ عمودی لمبائی اور افقی لمبائی کا تناسب ہمیشہ مستقل رہیگا۔ اس تناسب کو خط l کا میلان کہا جاتا ہے۔ اور اسکو m سے ظاہر کیا جا تا ہے۔

میلان کو استعمال کرکے خط کی بڑھتی اور گھٹتی خصوصیت کو معلوم کر سکتے ہیں اور اس خط کو بڑھتی یا گھٹتی کہتے ہیں بالترتیب $m>0$ یا $m<0$ کے لحاظ سے اور y کی قیمت میں غیر تبدیلی، جب $m=0$ کا خیال کریں کہ $y=mx+c$ ، XY سطح میں خط مستقیم کو ظاہر کرتا ہے۔ جہاں، m خط کے میلان کو ظاہر کرتا ہے۔

منحنی کا میلان یا ڈھلاؤ : فرض کرو کہ $y=f(x)$ ایک دی گئی منحنی ہے۔ دو نقطوں $(x,f(x))$ اور نقطہ $(x+h,f(x+h))$ کو ملانے والے خط کا میلان ہے۔

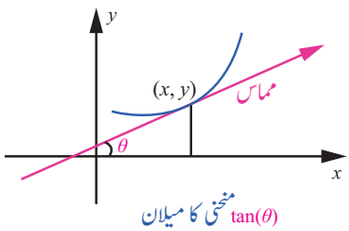
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \text{(نیوٹن خارج قسمت)} \qquad \ldots(1)$$

$h\to 0$ حد لینے پر ہمیں،

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x) \quad \text{(نیوٹن خارج قسمت کا حد)} \qquad \ldots(2)$$

یہی نقطے (x,y) (یا) $(x,f(x))$ نقطہ پر منحنی کا میلان ہے۔

ریمارک (Remark)



خاکہ 7.2

$y=f(x)$ مماس سے منحنی کو نقطہ (x,y) پر بنایا ہوا زاویہ θ ہو تو، (x,y) پر منحنی کا میلان $f'(x)=\tan\theta$ ہے۔ زاویہ θ کو x - محور سے ناپا جاتا ہے۔ نوٹ کریں، کہ $f'(x)$ کو $\frac{dy}{dx}$ سے بھی ظاہر کیا جاتا ہے ۔ اور اس کو تبدیلی کی فوری شرح بھی کہا جاتا ہے۔ وقفہ میں اوسط تبدیلی کی شرح کو نیوٹن خارج قسمت سے محسوب کیا جاتا ہے۔

مثال 7.1

تفاعل $f(x)=x^2, x\in[0,2]$ کے لئے $[0,0.5],[0.5,1],[1,1.5],[1.5,2]$ تحیی وقفوں میں اوسط تبدیلی کی شرح محسوب کریں۔ $x=0.5,1,1.5,2$ نقطوں پر تبدیلی کی فوری شرح معلوم کرو۔

حل

اوسط شرح کی تبدیلی جن کا وقفہ $[a,b]$ جو $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ دیئے گئے تفاعل جس کا فوری شرح x نقاط پر $f'(x)$ ہے۔ جس کا بالترتیب نقاط $b+a$ اور $2x$ ہے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 7_Differential Calculus.indd 2 28-02-2023 16:35:37

تبدیلی کی شرح

a	b	x	اوسط کی شرح ہے $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=b+a$	فوری شرح ہے $f'(x)=2x$
0	0.5	0.5	**0.5**	**1**
0.5	1	1	**1.5**	**2**
1	1.5	1.5	**2.5**	**3**
1.5	2	2	**3.5**	**4**

جدول 7.1

7.2.2 تبدیلی کی شرح کے طور پر مشتق (Derivative as rate of change)

ہم یہ دیکھے ہیں کہ میلان معلوم کرنے کے لئے مشتق کا استعمال ہوتا ہے۔ اس طرح مشتق سے ایک تغیر سے دوسرے متغیر کی تبدیلی کی شرح بھی معلوم کرسکتے ہیں ۔ جس کی چند مثالیں آبادی کی بڑھتی شرح ، فصل کی شرح، پانی کی بہاؤ کی شرح، سمتی رفتار اور اسراع وغیرہ ۔

تبدیلی کی شرح کی مقامی ضرورت یہ ہے کہ ایک شئے کی حرکت جو خط مستقیم میں چلتی ہے۔ ایسے چند مرحلے پر یہ بھی ضروری ہے کہ اُفقی یا عمودی خط کو حرکت کے خط مقدرہ مبداء کے لحاظ سے استعمال کریں۔ ایسے خطوط، جو آگے کی رخ میں ہونے والی حرکت کو مثبت سمت اور پیچھے کی رخ میں ہونے والی حرکت کو منفی سمت کہا جائے گا۔

تفاعل $s(t)$ جو کسی شئے کا مقام (مبداء کے تعلق سے) تفاعل کا ہوتو یہ وقت t مقامی تفاعل کہلاتا ہے۔ اور اس کو $s=f(t)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ سمتی رفتار اور اسراع وقت t پر ایسے ظاہر کرتے ہیں۔ $v(t)=\frac{ds}{dt}$ اور $a(t)=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}$

ریمارک (Remark)

مندرجہ ذیل تشریح کو آسانی سے مشاہدہ کرسکتے ہیں

(1) رفتار کی مطلق قیمت سمتی رفتار ہے۔ سمت کے حوالے کے بغیر لہٰذا، رفتار $=|v(t)|=\left|\frac{ds}{dt}\right|$

(2)
- جب ایک شئے آرام میں ہوتو $v(t)=0$
- جب شئے آگے کی رخ کرے تو $v(t)>0$
- جب شئے پیچھے کی رخ کرے تو $v(t)<0$
- جب شئے سمت بدلے تو $v(t)$ کی نشانی میں بدلی ہوگی۔

(3) اگر وقتی نقاط t_1 اور t_2 $(t_1<t_c<t_2)$ کا درمیانی وقتی نقطہ t_c ہو، جہاں شئے اس کا رخ بدلے تو مکمل فاصلہ وقت t_1 سے وقت t_2 تک اس طرح محسوب کرتے ہیں۔ $|s(t_1)-s(t_c)|+|s(t_c)-s(t_2)|$

(4) سیارہ زمین کی سطح کے قریب، تمام اجسام مستقل اسراع سے گرتی جب کہ ہوا کی مزاحمت غیر حاضر یا کم ہو اور صرف قوت کشش ہی نیچے گرنے والے جسم کی قوتِ ہے، ہم ایسے طریقے سے جسم کے گرنے کو آزاد کرنا کہتے ہیں۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 7_Differential Calculus.indd 3 28-02-2023 16:35:40

ایک شئے ابتدائی اونچائی s_0 سے وقت $t=0$ میں پھینکی جاتی ہے اور ابتدائی سمتی رفتار v_0 کے ساتھ مساوات کو مطمئن کرتی ہے۔

$$a=-g,\quad v=-gt+v_0,\quad s=-\frac{gt^2}{2}+v_0t+s_0$$

جہاں، $g=9.8\ \text{m/s}^2$ (یا) $32\ \text{ft/s}^2$

ہمارے روزمرہ زندگی کے چند **مقداروں** کے مثال نیچے دیئے گئے ہیں۔ جو ایک **مقدار کی تبدیلی کی شرح سے دوسرے شئے** میں تبدیل ہوتے ہیں:

1. میلان جو **تبدیلی کی شرح جو اُفقی خط کے لحاظ سے عمودی خط میں تبدیلی کی شرح ہے۔**
2. **وقت کے لحاظ سے سرکاؤ کی شرح ہی** سمتی رفتار ہے۔
3. **وقت کے لحاظ سے سمتی رفتار میں تبدیلی کی شرح** ہی اسراع ہے۔
4. پہاڑی ڈھلاؤ **خطی فاصلے کے لحاظ سے بلندی میں تبدیلی کی شرح ہے۔**

نیچے دئے گئے دو صورت حال پر غور کریں:

- اگر ایک شخص کار مسلسل طور پر چینئی سے دھرمپوری چلاتا ہے۔ طئے شدہ فاصلہ (کلومیٹر میں ناپئے) کو وقت کی تفاعل (گھنٹوں میں ناپئے) $D(t)$ سے ظاہر کرتے ہیں۔کیا معنی $D'(3)=70$ سے منسوب ہے؟

اس کا مطلب یہ ہے کہ۔ **"فاصلہ کی شرح جب $t=3$ ہو 70 kmph ہے۔"**

- چشمہ میں وقت t کے لحاظ سے پانی خالی ہو رہا ہے۔ t دن کے بعد خالی ہونے والی پانی کی مقدار کو $V(t)$ سے ظاہر کیا گیا ہے۔ $y=V(t)$، $t=7$ پر ہو تو منحنی مماس کا میلان -3 ہے۔ اس کا کیا مطلب ہے؟

اس کا مطلب یہ ہے کہ **"فی دن 3 اکائیوں کی شرح سے 7 ویں دن پانی خالی ہوگا۔"**

اسی طرح شرح کی تبدیلی کا تصور ہمارے روزِمرہ زندگی کے مسئلوں میں استعمال ہوتا ہے۔ جس کو اب اور زیادہ مثالوں سے سمجھ سکتے ہیں۔

مثال 7.2

تپش T سیلیشس والی لمبی سلاخ کی لمبائی 10 میٹر ہے۔ جس کے دونوں کنارے غیر موصل ہیں۔ اس کا ایک تفاعل لمبائی x میں $T=x(10-x)$ سے دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ سلاخ کی وسطی نقطہ پر تپش کی تبدیلی کی شرح صفر ہے۔

حل

ہمیں دیا گیا ہے، کہ $T=10x-x^2$ لہٰذا، کئی فاصلہ میں ایک حد سے شرح کی تبدیلی $\frac{dT}{dx}=10-2x$ ہوگا۔ سلاخ کی درمیانی نقطہ $x=5$ ہے۔ $x=5$ تفریق کرنے پر ہمیں $\frac{dT}{dx}=0$ ملے گا۔

مثال 7.3

ایک شخص انگریزی امتحان کے لئے 100 الفاظ سیکھتا ہے t دنوں میں اس کے لفظوں کی تعداد کو یاد رکھنے کو اس طرح $W(t)=100\times(1-0.1t)^2,\ 0\le t\le 10$ دیا گیا ہے۔ اس شخص کے یاد کئے ہوئے الفاظ دو دن میں بھولنے کی شرح معلوم کریں۔

حل

ہمیں

$$\frac{d}{dt}W(t)=-20\times(1-0.1t)$$

لہٰذا، $t=2$ پر $\frac{d}{dt}W(t)=-16$

یعنی، وہ شخص پڑھنے کے دو دن کے بعد الفاظ کو بھولنے کی شرح 16 الفاظ ہیں۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 7_Differential Calculus.indd 4 28-02-2023 16:35:44

مثال 7.4

ایک شئے حرکت کرتی ہے جب کہ فاصلہ اس کلیہ کے تحت $s(t)=\frac{t^3}{3}-t^2+3$ ہے، کون سے وقت پر سمتی رفتار اور اسراع صفر ہونگے؟

حل

$$s = \frac{t^3}{3}-t^2+3 \quad \text{وقت } 't' \text{ میں حرکت کیا گیا فاصلہ}$$

$$v(t) = \frac{ds}{dt}=t^2-2t \quad \text{سمتی رفتار } 't' \text{ وقت پر}$$

$$a(t) = \frac{dV}{dt}=2t-2 \quad \text{اسراع } 't' \text{ وقت پر}$$

لہٰذا، سمتی رفتار صفر ہوگی جب $t^2-2t=0$، یعنی، $t=0,2$ ، اسراع صفر ہوگا جب $2t-2=0$ یعنی، وقت پر $t=1$ ■

مثال 7.5

ایک شئے کو زمین سے اوپر کی جانب عمودی طور پر داغہ جائے تو وہ s قدم کی اونچائی t سیکنڈ میں پہنچتا ہے، جہاں $s(t)=128t-16t^2$ ہے۔

(i) پہنچی ہوئی شئے کی زیادہ سے زیادہ اونچائی محسوب کریں۔

(ii) شئے کی سمتی رفتار کیا ہوگا جب وہ زمین پر ٹکرائے؟

حل

(i) زیادہ سے زیادہ اونچائی پر، شئے کی سمتی رفتار $v(t)$ صفر ہے۔ اب، ہم t وقت پر شئے کی سمتی رفتار معلوم کریں گے۔

$$v(t)=\frac{ds}{dt}=128-32t$$

$$v(t)=0 \Rightarrow 128-32t=0 \Rightarrow t=4$$

4 سیکنڈ کے بعد، شئے زیادہ سے زیادہ اونچائی پر پہنچ جائے گی۔

اونچائی جب کہ $t=4$، $s(4)=128(4)-16(4)^2=256$ ft

(ii) شئے جب زمین پر ٹکرائے تو $s=0$

$$s=0 \Rightarrow 128t-16t^2=0$$

$$\Rightarrow t=0,\ 8 \text{ سیکنڈ}$$

شئے $t=8$ سیکنڈ میں زمین پر ٹکرائے گی اور زمین پر ٹکرانے پر سمتی رفتار $v(8)=-128$ ft/s ہوگی۔ ■

مثال 7.6

ایک شئے افقی خط کے ہمراہ حرکت کرتی ہے۔ جس کا مقام کسی بھی وقت $t\geq 0$ پر $s(t)=t^3-6t^2+9t+1$ سے دیا گیا ہے کہ ہے۔ جہاں s کو میٹر میں اور t کو سیکنڈ میں پیمائش کی جاتی ہے۔

(i) کون سے وقت پر شئے ساکت ہوگا ؟

(ii) کون سے وقت پر شئے اپنا سمت تبدیل کرے گا؟

(iii) پہلے 2 سیکنڈ میں شئے کا طئے کردہ کل فاصلہ معلوم کرو؟

حل

دیا گیا ہے $s(t)=t^3-6t^2+9t+1$ جس کو تفرقی کرنے پر، ہمیں $v(t)=3t^2-12t+9$ اور $a(t)=6t-12.$ حاصل ہوتا ہے۔

(i) جب $v(t)=0$ شئے آرام میں ہوگا۔ لہٰذا، $v(t)=3(t-1)(t-3)=0$ جس سے $t=1$ اور $t=3$ ملے گا۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 7_Differential Calculus.indd 5 28-02-2023 16:35:49

(ii) شئے کا رخ بدلے گا جبکہ $v(t)$ کی علامت بدلے گی اب اگر $0 \le t < 1$ ہوتو دونوں $(t-1)$ اور $(t-3) < 0$ اور لہٰذا، $v(t) > 0$

اگر $1 < t < 3$ ہوتو $(t-1) > 0$ اور $(t-3) < 0$ اور لہٰذا، $v(t) < 0$

اگر $t > 3$ ہوتو دونوں $(t-1)$ اور $(t-3) > 0$ اور لہٰذا، $v(t) > 0$

لہٰذا، شئے اپنی سمت تبدیل کرے گی جب کہ $t = 1$ اور $t = 3$ ہو،

(iii) شئے کا طئے کردہ کل فاصلہ، وقت $t = 0$ سے $t = 2$ تک دیا جاتا ہے، میٹر $|s(0) - s(1)| + |s(1) - s(2)| = |1-5| + |5-3| = 6$

7.2.3 تعلقی شرح (Related rates)

تعلقی شرح کے حسابات وہ حسابات ہیں جس کی کم سے کم دو تبدیل ہونے والی مقداریں شامل ہوتی ہیں۔ ہمیں یہ بھی جاننا چاہئے ہوگا کہ شرح کی تبدیلی جب مکمل معلومات دوسرے تبادل کی دی گئی ہو۔مثال کے طور پر، دوسواری مختلف سمت میں سوار ہیں ہم ان کی رفتار کو معلوم کرسکتے ہیں۔ جس میں وہ ایک دوسرے سے علیحدہ ہوتے ہیں۔ اگر ہمیں ان کی انفرادی رفتار اور سمت معلوم ہوں۔

مثال 7.7

کرّہ نما شکل کا ایک غبارہ جس میں ہوا $1000\,\text{cm}^3$ فی سیکنڈ کی شرح بھری جائے، غبارہ کا نصف قطر میں کسی شرح میں تبدیلی ہوگی۔ جب نصف قطر 7 سم ہے؟ اسی طرح سطح میں تبدیلی شرح کی محسوب کریں ۔

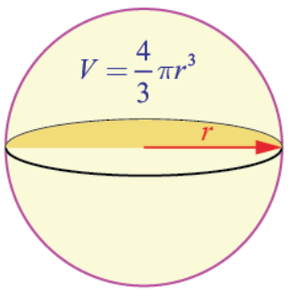
حل



غبارہ کا حجم جس کا نصف قطر r ہے، $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

ہمیں دیا گیا ہے کہ $\frac{dV}{dt} = 1000$ اور ہمیں $\frac{dr}{dt}$ کو معلوم کرنا ہے، جب $r = 7$ ہے۔

اب ، $\frac{dV}{dt} = 3 \times \frac{4}{3}\pi r^2 \times \frac{dr}{dt}$



خاکہ 7.4

$r = 7$ کو درج کرنے پر اور $\frac{dV}{dt} = 1000$ ہمیں $1000 = 4\pi \times 49 \times \frac{dr}{dt}$ حاصل ہوتا ہے۔

لہٰذا، $\frac{dr}{dt} = \frac{1000}{4 \times 49 \times \pi} = \frac{250}{49\pi}$

غبارہ کا سطحی رقبہ S جو $S = 4\pi r^2$ ہے۔لہٰذا، $\frac{dS}{dt} = 8\pi \times r \times \frac{dr}{dt}$

$r = 7$ کو درج کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ اور $\frac{dr}{dt} = \frac{250}{49\pi}$

$$\frac{dS}{dt} = 8\pi \times 7 \times \frac{250}{49\pi} = \frac{2000}{7}.$$

لہٰذا، نصف قطر کی تبدیلی کی شرح $\frac{250}{49\pi}$ cm/sec ہے۔ اور سطحی رقبہ میں تبدیلی کی شرح $\frac{2000}{7}$ cm^2/sec ہے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 7_Differential Calculus.indd 6 28-02-2023 16:35:56

مثال 7.8

شئے کی قیمت کا تعلق دستیاب ہونے والے اکائیوں کی تعداد (فراہم) سے ہے۔ جسکی مساوات $Px+3P-16x=234$ ہے۔ جہاں، P فی اکائی شئے کی قیمت روپیوں (₹) میں اور x اکائیوں کا عدد ہے۔ قیمت میں تبدیلی کی شرح وقت کے لحاظ سے معلوم کرو جب 90 اکائیاں دستیاب ہیں اور فراہم کی اضافہ ہونے کی شرح 15 اکائیاں / ہفتہ ہے؟

حل

ہمارے پاس،

$$P = \frac{234+16x}{x+3}$$

لہٰذا، $$\frac{dP}{dt} = -\frac{186}{(x+3)^2}\times\frac{dx}{dt}$$

$x=90,\ \frac{dx}{dt}=15$ درج کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $\frac{dP}{dt}=-\frac{186}{93^2}\times 15=-\frac{10}{31}\approx -0.32$ روپیہ / ہفتہ یہی وہ قیمت میں تبدیلی ہے، حقیقت میں کم ہونے کی شرح 0.32 ₹ روپیہ / ہفتہ ہے۔

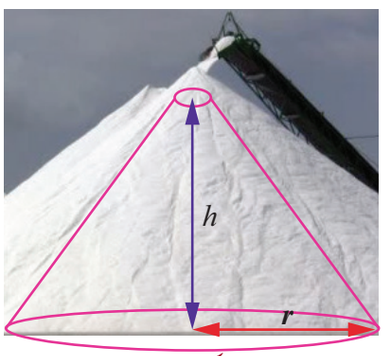
مثال 7.9

نمک کو ایک کنویربلٹ میں 30 مکعب میٹر فی منٹ کی شرح سے چھڑکایا جاتا ہے۔ جو ایک مخروط ڈھیر کی شکل ڈھال لیتا ہے۔ مدور قاعدہ اس کی اونچائی اور قاعدہ کا قطر ہمیشہ مساوی ہوتے ہیں۔ جب ڈھیر کی اونچائی 10 میٹر ہو تو کتنی تیزی کے ساتھ ڈھیر کی اونچائی بڑھ رہی ہے؟

حل

فرض کرو کہ h اور r اونچائی اور قاعدہ کا نصف قطر ہیں۔ لہٰذا، $h=2r$ فرض کرو کہ V نمک کے مخروط کا حجم ہے۔

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{12}\pi h^3;\ \frac{dV}{dt}=30\ \mathrm{m}^3/\mathrm{min}$$



خاکہ 7.5

لہٰذا، $$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{4}\pi h^2\frac{dh}{dt}$$

لہٰذا، $$\frac{dh}{dt} = 4\frac{dV}{dt}\cdot\frac{1}{\pi h^2}$$

یعنی، $$\frac{dh}{dt} = 4\times 30\times\frac{1}{100\pi}$$

$$= \frac{6}{5\pi}\ \mathrm{m/min.}$$

مثال 7.10 (دومتغیر متعلق شرح کے حساب) (Two variable related rate problem)

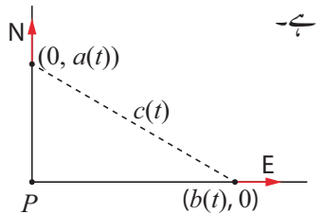
شمال سے جنوب کی طرف چلنے والی ایک سڑک مشرق سے مغرب تک جانے والی سڑک سے P نقطے پر قطع کرتی ہے۔ کار A پہلے سڑک کے ہمراہ شمال میں چلتی ہے، کار B دوسرے سڑک کے ہمراہ مشرق میں چلتی ہے۔ مخصوص وقت پر کار A شمال میں P سے 10 کلومیٹر پر 80 km/hr سے سفر کرتی ہے۔اور کار B مشرق میں P سے 15 کلومیٹر پر اور 100 km/hr سے سفر کرتی ہے۔دونوں کاروں کے درمیانی فاصلہ درمیانی کتنی تیزی سے تبدیل ہو گا؟

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 7_Differential Calculus.indd 7 28-02-2023 16:36:00

حل

فرض کرو کہ ہے، کار A ، P کے شمال میں t وقت کا فاصلہ $a(t)$ ہے، اور فاصلہ ہے، کار B ، P کے مشرق میں t وقت کا فاصلہ $b(t)$ ہے، اور فرض کرو کہ کار A سے کار B تک کا وقت t کا $c(t)$ فاصلہ ہے، مسئلہ فیثاغورث سے، $c(t)^2 = a(t)^2 + b(t)^2$

مشتق سے ہمیں $2c(t)c'(t) = 2a(t)a'(t) + 2b(t)b'(t)$ حاصل ہوتا ہے۔



خاکہ 7.6

$$c' = \frac{aa' + bb'}{c} = \frac{aa' + bb'}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$ اس لئے،

جانی ہوئی قیمتوں کو درج کرنے پر، ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے،

$$c' = \frac{(10\times 80) + (15\times 100)}{\sqrt{10^2 + 15^2}} = \frac{460}{\sqrt{13}} \approx 127.6 \text{ km/hr}$$

قطع کرنے کا وقت،

مشق 7.1

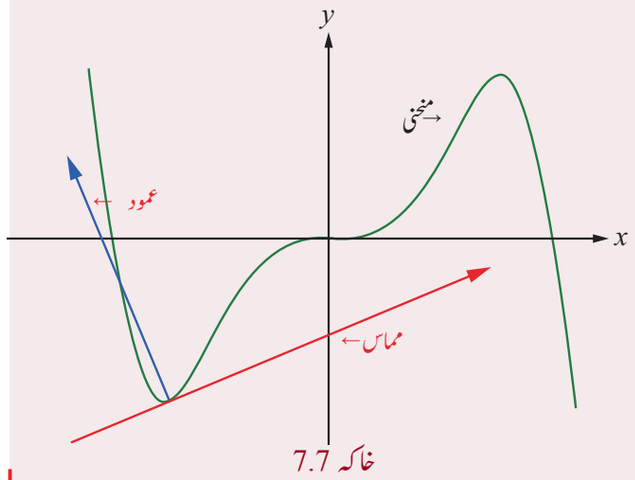
1. ایک شئے خط مستقیم پر حرکت کرتی ہے اس طرح کہ t سیکنڈ کے بعد اسی کا فاصلہ مبداء سے $s = 2t^2 + 3t$ میٹر ہے۔
   (i) $t = 3$ اور $t = 6$ سیکنڈ کے درمیان اوسط سمتی رفتار معلوم کریں ۔
   (ii) $t = 3$ اور $t = 6$ سیکنڈ پر فوری سمتی رفتاریں معلوم کریں۔
2. 400 ft اونچائی والے پہاڑ کے کنارے سے کیمرہ کو اتفاق سے ڈھکیل دیا گیا t سیکنڈ بعد کیمرہ گرنے کا فاصلہ $s = 16t^2$ ہے۔
   (i) زمین پر ٹکرانے کے پہلے کیمرہ کتنی دور گرے گا؟
   (ii) آخری 2 سیکنڈ میں کیمرے کے گرنے کی اوسط سمتی رفتار کیا ہے؟
   (iii) کیمرہ کی فوری رفتار کیا ہے،جب وہ زمین پر ٹکرائے؟
3. ایک شئے ایک خط کے ہمراہ حرکت کرتی ہے کلیہ کے تحت $s(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t - 4$ جہاں، $t \geq 0$ ہے۔
   (i) کس وقت پر شئے اپنا سمت کو تبدیل کرلے گئی؟
   (ii) پہلے 4 سیکنڈ میں شئے کا طئے کردہ کل فاصلہ معلوم کریں ؟
   (iii) ہر مرتبہ وقت جب سمتی رفتار صفر ہوتو شئے کی اسراع معلوم کریں؟
4. اگر x لمبائی ضلع کا مکعب کا حجم $v = x^3$ ہے۔ جب $x = 5$ اکائیاں ہوتو x کے لحاظ سے حجم میں تبدیلی کی شرح معلوم کریں؟
5. ایک باریک سلاخ کی کمیت $m(x)$ (کلوگرام میں) جس کی لمبائی x (میٹر میں) $m(x) = \sqrt{3x}$ دی گئی ہے، تو لمبائی کے لحاظ سے کمیت میں تبدیلی کی شرح معلوم کریں ، جب لمبائی $x = 3$ اور $x = 27$ میٹر ہے۔
6. ایک پتھر کو تالاب میں پھینکنے سے ہم مرکز دائرے بنتے ہیں۔ اس لہہ کا بیرونی نصف قطر r مستقل شرح 2 سمر فی سیکنڈ سے بڑھتا ہے۔ اگر نصف قطر 5 سمر ہوتو معلوم کرو کہ چھیڑے ہوئے پانی کے کل رقبہ کی تبدیلی کی شرح کیا ہوگی؟
7. ایک چراغ راہ (روشن مینار) جس کا ایک دورہ 10 سیکنڈ کا ہے یہ ایک جہاز جو سیدھے ساحل سے 5 کلومیٹر دور لنگرانداز کیا گیا ہے۔ جب یہ ساحل کے ساتھ $45°$ زاویہ بناتا ہے۔ ساحل کی کلیر کے ساتھ شعاع کتنی تیزی سے حرکت کرتی ہے؟
8. ایک مخروط شکل پانی کا ٹینک جس کا راس اونچائی سے 12 میٹر نیچے ہے اور اوپری نصف قطر 5 میٹر ہے۔ اگر ٹینک میں پانی کا بہاؤ 10 مکعب میٹر /منٹ ہے۔ پانی 8 میٹر گہرا ہے تو پانی کی گہرائی کتنی تیزی سے بڑھے گی ؟
9. ایک سیڑھی 17 میٹر لمبائی ہے۔ جو دیوار کے مقابل جھکائی گئی ہے۔ سیڑھی کا قائدہ دیوار سے پانچ میٹر /سیکنڈ کی شرح سے کھینچا جاتا ہے۔ جب دیوار سے اس کا قاعدہ 8 میٹر ہوتو،
   (i) سیڑھی کا اوپری حصہ کتنی تیزی سے دیوار پر نیچے آتا ہے ؟
   (ii) سیڑھی، دیوار اور زمین سے تشکیل پایا ہوا مثلث کا رقبہ کی تبدیلی کی شرح کیا ہوگی؟

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 7_Differential Calculus.indd 8 28-02-2023 16:36:04

10. ایک پولیس جیپ شمال کی سمت میں مستقیم زاویہ سے قائمہ چوراہے پر پہنچ رہی ہے۔ ایک تیز رفتار کار کا پیچھا کررہی ہے جو موڑ کر سیدھے مشرق کے سمت جارہی ہے۔ جب جیپ چوراہے سے 0.6 کلومیٹر شمال میں ہے اور کار مشرق میں 0.8 کلومیٹر پر ہے۔ پولیس نے ریڈار سے یہ طئے کیا کہ ان کا اور کار کا درمیانی فاصلہ 20 کلومیٹر فی گھنٹہ بڑھ رہا ہے۔ اگر جیپ پیمائش کے فوری لمحے میں 60 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے آگے بڑھ رہی ہے، تو کار کی رفتار کتنی ہے؟

7.2.4 مماس اور عمودی کی مساوات (Equations of Tangent and Normal)

لینیتز کے قول سے مماس وہ خط ہے جو منحنی پر دو بالکل قریبی نقاط کی جوڑی سے گزرتا ہے۔



خاکہ 7.7

تعریف 7.1

مستوی منحنی پر دئے گئے ایک نقطہ پر مماس خط (یا مماس) خط مستقیم ہے جو منحنی کو اس نقطہ پر **ہی مس** کرتا ہے۔

تعریف 7.2

منحنی کے ایک نقطہ پر عمودی ایک خط مستقیم ہے جو مماس کو اس نقطہ پر عمود ہو۔

منحنی کے مماس اور عمودی ایک نقطہ پر خاکہ 7.7 کے ذریعے تشریح کئے گئے ہیں۔

فرض کرو کہ دیا گیا منحنی $y = f(x)$ ہے،

مماس کی مساوات جو منحنی کے نقطے پر، کہئے (a,b) اس طرح دیا گیا ہے۔

$$y-b=(x-a)\times\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(a,b)} \quad \text{یا} \quad y-b=f'(a)\cdot(x-a)\,.$$

وہی منحنی کے وہی نقطہ پر حاصل ہونے والے عمود کے مساوات کے لئے ہم نے غور کیا کہ مماس کا نقطہ عمود کے عمودی ہے۔ لہٰذا، عمود کا میلان (a,b) پر مماس کے میلان کا منفی معکوس ہے، جو $-\left(\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right)_{(a,b)}$

لہٰذا، عمود کی مساوات ہے،

$$(y-b)=-\left(\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right)_{(a,b)}\times(x-a) \quad \text{یا} \quad (y-b)\times\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(a,b)}=-(x-a)\,.$$

ریمارک (Remark)

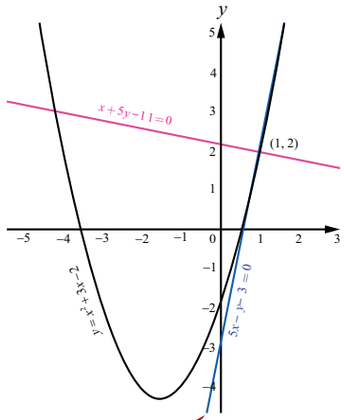
(i) اگر منحنی کا مماس ایک نقطے پر افقی ہے تو تفرقی اس نقطے پر 0 ہوگا۔ لہٰذا، اس نقطہ (x_1,y_1) میں مماس کی مساوات $y=y_1$ اور عمود کی مساوات $x=x_1$ ہے،

(ii) اگر منحنی کا مماس ایک نقطہ پر عمودی (Vertical) ہے تو اس نقطہ پر تفرقی واقع اور لامحدود (∞) ہوگا۔ لہٰذا، اس نقطہ (x_1,y_1) میں مماس کی مساوات $x=x_1$ اور عمود کی مساوات $y=y_1$ ہوگی۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 7_Differential Calculus.indd 9 28-02-2023 16:36:07

مثال 7.11

نقطہ $(1,2)$ پر منحنی $y = x^2 + 3x - 2$ کے مماس اور عمودی کی مساوات معلوم کریں۔



خاکہ 7.8

حل

ہمارے پاس ہے، $\frac{dy}{dx} = 2x + 3$ لہٰذا، $(1,2)$ پر $\frac{dy}{dx} = 5$.

لہٰذا، مماس کی مطلوبہ مساوات ہے،

$$(y-2) = 5(x-1) \Rightarrow 5x - y - 3 = 0$$

عمود کا میلان نقطہ $(1,2)$ پر $-\frac{1}{5}$ ہے۔

لہٰذا، عمود کی مطلوبہ مساوات ہے،

$$(y-2) = -\frac{1}{5}(x-1) \Rightarrow x + 5y - 11 = 0 .$$

مثال 7.12

منحنی $y = x^3 - 3x^2 + x - 2$ پر نقطے معلوم کریں، جن پر مماس $y = x$ خط کے متوازی ہے۔

حل

خط $y = x$ کا میلان 1 ہے۔ دیئے گئے منحنی کے مماس اس خط کا متوازی تب ہوگا۔جب کہ منحنی کے مماس کا میلان اس نقطے پر بھی 1 ہو۔ لہٰذا ،

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x + 1 = 1$$

جس سے $3x^2 - 6x = 0$

لہٰذا، $x = 0$ اور $x = 2$

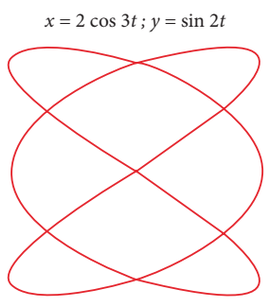
لہٰذا، $(0, -2)$ اور $(2, -4)$ نقطے پر مماس اور خط $y = x$ متوازی ہونگے۔

مثال 7.13

دئے گئے لیساجوس منحنی $x = 2\cos 3t$ اور $y = 3\sin 2t, t \in \mathbb{R}$ کے لئے، کہ کسی بھی نقطے پر مماس اور عمودکا مساوات معلوم کرو۔

حل

ہم نے غور کیا کہ دی گئی منحنی نہ تو دائرہ ہے نہ ہی بیضوی شکل کا ہے۔ تمھاری جانکاری کے لئے خاکہ 7.9 میں دکھایا گیا ہے۔



لیساجوس منحنی
خاکہ 7.9

اب ،

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

$$= -\frac{6\cos 2t}{6\sin 3t} = -\frac{\cos 2t}{\sin 3t} .$$

لہٰذا، کسی بھی نقطے پر مماس

$$y - 3\sin 2t = -\frac{\cos 2t}{\sin 3t}(x - 2\cos 3t)$$

یعنی، $x\cos 2t + y\sin 3t = 3\sin 2t\sin 3t + 2\cos 2t\cos 3t$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 7_Differential Calculus.indd 10 28-02-2023 16:36:11

عمود کا میلان جو مماس کے میلان کا منفی معکوس ہے اس صورت میں $\frac{\sin 3t}{\cos 2t}$ ہوگا۔ لہٰذا، عمود کی مساوات

$$y - 3\sin 2t = \frac{\sin 3t}{\cos 2t}(x - 2\cos 3t).$$

یعنی، $x\sin 3t - y\cos 2t = 2\sin 3t\cos 3t - 3\sin 2t\cos 2t = \sin 6t - \frac{3}{2}\sin 4t$

7.2.5 دو منحنیوں کے درمیانی زاویہ (Angle between two curves)

تعریف 7.3

دو منحنیوں کے درمیانی زاویہ، اگر دو منحنی قاطع ہوں ، تعارف ہے کہ مماس کے خطوط اور ان دو منحنیوں کے نقطہ تقاطع کا درمیانی زاویہ حادہ زاویہ ہوگا۔

دیئے گئے منحنیوں کے لئے نقطہ تقاطع پر مماسوں کے میلانوں کو استعمال کرکے ہم دو منحنیوں کے درمیانی زاویہ حادّہ کی پیمائش کرسکتے ہیں۔ فرض کرو کہ $y = m_1x + c_1$ اور $y = m_2x + c_2$ دو خطوط ہیں تو زاویہ حادّہ θ ان دونوں خطوں کے درمیانی زاویہ دیا جاتا ہے۔

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}\right| \quad \ldots (3)$$

جہاں m_1 اور m_2 محدود ہیں۔

ریمارک (Remark)

(i) اگر دو منحنی (x_1, y_1) نقطے پر متوازی ہوں تو $m_1 = m_2$ ہوگا۔

(ii) اگر دو منحنی (x_1, y_1) نقطے پر عمودی ہوں اور اگر m_1 اور m_2 موجود ہوں اور محدود ہوں تو $m_1m_2 = -1$ ہوگا۔

مثال 7.14

$y = x^2$ اور $y = (x-3)^2$ کے درمیانی زاویہ معلوم کرو۔

حل

پہلے ہم دو منحنیوں کا نقطہ تقاطع معلوم کریں گے۔ مساوی کرنے پر $x^2 = (x-3)^2$ سے ہمیں $x = \frac{3}{2}$ حاصل ہوگا۔ لہٰذا، نقطہ تقاطع $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$ ہے، فرض کرو کہ θ دو منحنیوں کے درمیانی زاویہ ہے تو دو منحنیوں کا میلان مندرجہ ذیل ہوگا۔

منحنی $y = x^2$ کے لئے

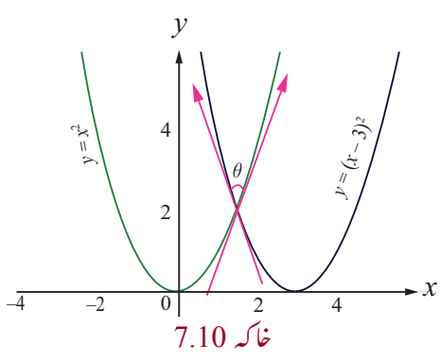
$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

فرض کرو کہ $m_1 = \frac{dy}{dx}$ پر $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right) = 3$

منحنی $y = (x-3)^2$ کے لئے

$$\frac{dy}{dx} = 2(x-3)$$

فرض کرو کہ $m_2 = \frac{dy}{dx}$ پر $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right) = -3$



خاکہ 7.10

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 7_Differential Calculus.indd 11 28-02-2023 16:36:16

(3) کے استعمال سے ہمیں

$$\tan\theta = \left|\frac{3-(-3)}{1-9}\right| = \frac{3}{4}$$

لہٰذا، $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$

مثال 7.15

منحنیوں $y = x^2$ اور $x = y^2$ کے درمیان زاویہ ان کے نقطہ تقاطع $(0,0)$ اور $(1,1)$ پر معلوم کریں۔

حل

پہلے ہم منحنیوں کے میلان معلوم کریں گے۔

فرض کرو کہ منحنی $y = x^2$ کا m_1 میلان ہے۔

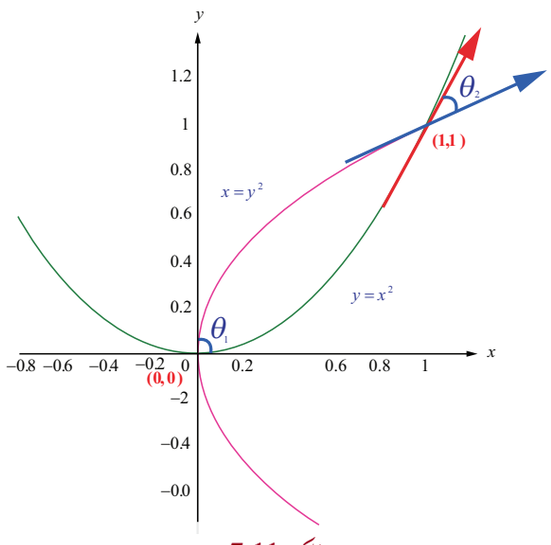
ہو تو $m_1 = \frac{dy}{dx} = 2x$

فرض کرو کہ منحنی $x = y^2$ کا m_2 میلان ہے۔

ہو تو $m_2 = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$

فرض کرو کہ θ_1 اور θ_2 زاویے جو $(0,0)$ اور $(1,1)$ پر بالترتیب ہیں۔

$\tan\theta_1 = \left|\frac{2x-\frac{1}{2y}}{1+(2x)\left(\frac{1}{2y}\right)}\right|$ میں $(0,0)$ پر ہم نسب نما میں غیر تفرقی شکل $0\times\infty$ پاتے ہیں۔ اس لئے ہم حد کا طریقہ اپنائیں گے۔



خاکہ 7.11

$$\tan\theta_1 = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{2x-\frac{1}{2y}}{1+(2x)\left(\frac{1}{2y}\right)}\right|$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{4xy-1}{2(y+x)}\right|$$

$$= \infty$$

حاصل ہو گا، $\theta_1 = \tan^{-1}(\infty) = \frac{\pi}{2}$

$(1,1)$ پر، $m_1 = 2,\ m_2 = \frac{1}{2}$

$$\tan\theta_2 = \left|\frac{2-\frac{1}{2}}{1+(2)\left(\frac{1}{2}\right)}\right|$$

$$= \frac{3}{4}$$

حاصل ہو گا، $\theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 7_Differential Calculus.indd 12 28-02-2023 16:36:20

مثال 7.16

منحنی $y = \sin x$ کا مثبت x-محور کے ساتھ قاطع کا زاویہ معلوم کریں۔

حل

اگر منحنی $y = \sin x$ مثبت x-محور کو قطع کرے تو $y = 0$ جس سے $x = n\pi,\ n = 1,2,3,\ldots$ حاصل ہو گا، اب $\frac{dy}{dx} = \cos x$، $x = n\pi$ پر میلان $\cos(n\pi) = (-1)^n$ ہے۔ لہٰذا، مطلوبہ قاطع کا زاویہ

$$\tan\theta = \left|\frac{(-1)^n - 0}{1 + (-1)^n (0)}\right| = 1,\ \forall\, n$$

مثال 7.17

اگر منحنیوں $ax^2 + by^2 = 1$ اور $cx^2 + dy^2 = 1$ ایک دوسرے سے عمودی طور پر قطع کرتے ہیں تو،

ثابت کرو کہ $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{c} - \frac{1}{d}$

حل

فرض کرو کہ دو منحنی (x_0, y_0) نقطے پر قطع کرتے ہیں جس سے $(a-c)x_0^2 + (b-d)y_0^2 = 0$ پیش رو ہے۔

چلئے ہم منحنیوں کے میلان نقطہ تقاطع (x_0, y_0) پر معلوم کریں گے۔ منحنیوں کا میلان مندرجہ ذیل ہے۔

منحنی کے لئے $ax^2 + by^2 = 1,\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{ax}{by}$

منحنی کے لئے $cx^2 + dy^2 = 1,\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{cx}{dy}$

اب، اگر دو منحنی مستقیم زاویہ پر قاطع ہو تو اس کے نقطہ تقاطع (x_0, y_0) پر میلانوں کا حاصل ضرب -1 ہو گا۔ لہٰذا، اگر اوپر دئے گئے دو منحنی مستقیم زاویہ پر (x_0, y_0) نقطہ تقاطع ہوں تو،

$$\left(-\frac{ax_0}{by_0}\right) \times \left(-\frac{cx_0}{dy_0}\right) = -1.$$

یعنی، $acx_0^2 + bdy_0^2 = 0$

مل کر، $(a-c)x_0^2 + (b-d)y_0^2 = 0$

حاصل ہو گا۔ $\frac{a-c}{ac} = \frac{b-d}{bd}$.

یعنی، $\frac{1}{c} - \frac{1}{a} = \frac{1}{d} - \frac{1}{b}$

لہٰذا، $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{c} - \frac{1}{d}$

ریمارک (Remark)

اوپر دیئے گئے مثال سے، اسی کا برعکس بھی صحیح ہو گا۔ یعنی، $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{c} - \frac{1}{d}$ حالت کو فرض کرنے پر کوئی بھی آسانی سے جانچ سکتا ہے کہ منحنی مستقیم زاویہ پر قاطع ہیں۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 7_Differential Calculus.indd 13 28-02-2023 16:36:25

مثال 7.18

ثابت کرو کہ بیضوی $x^2+4y^2=8$ اور ہذلولی $x^2-2y^2=4$ مستقیم زاویہ پر قاطع کرتے ہیں۔

حل

فرض کریں کہ دو منحنیوں کا نقطہ تقاطع (a,b) ہے۔ لہٰذا،

$$a^2+4b^2 = 8 \quad \text{اور} \quad a^2-2b^2=4 \qquad \ldots (4)$$

ہم یہ ثابت کریں گے کہ دو منحنیوں کے میلانوں کا حاصل ضرب نقطہ تقاطع (a,b) پر محسوب کرنے سے -1 ہو۔

$x^2+4y^2=8$ کو x کے لحاظ سے تفرقی کرنے پر

$$2x+8y\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{حاصل ہوگا}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{4y} \quad \text{لہٰذا،}$$

$$\frac{dy}{dx} \text{ پر } (a,b) = m_1 = -\frac{a}{4b} \quad \text{تو ہو}$$

$x^2-2y^2=4$ کو x کے لحاظ سے تفریق کرنے پر

$$2x-4y\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{حاصل ہوگا}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2y} \quad \text{لہٰذا،}$$

$$\frac{dy}{dx} \text{at } (a,b) = m_2 = \frac{a}{2b} \quad \text{تو ہو}$$

$$m_1 \times m_2 = \left(-\frac{a}{4b}\right)\times\left(\frac{a}{2b}\right) = -\frac{a^2}{8b^2} \quad \text{، چونکہ} \qquad \ldots (5)$$

نسبت کے تناسب کو (4) میں درج کرنے سے ہمیں،

$$\frac{a^2}{-16-16} = \frac{b^2}{-8+4} = \frac{1}{-2-4}.$$

چونکہ، $\frac{a^2}{b^2}=\frac{32}{4}=8$ کو (5) میں درج کرنے پر ہمیں، $m_1\times m_2=-1$ حاصل ہوتا ہے۔ لہٰذا، منحنی مستقیم زاویہ پر قاطع کرتے ہیں۔ ■

مشق 7.2

1. دئے گئے مندرجہ ذیل نقاط پر منحنیوں کے مماس کے میلان معلوم کریں۔

(i) $y=x^4+2x^2-x$، پر $x=1$ (ii) $x=a\cos^3 t, y=b\sin^3 t$، پر $t=\frac{\pi}{2}$

2. منحنی $y=x^2-5x+4$ کا مماس خط $3x+y=7$ کے متوازی ہو تو منحنی کا نقطہ معلوم کرو۔

3. منحنی $y=x^3-6x^2+x+3$ پر نقطے معلوم کرو۔ جہاں عمود، خط $x+y=1729$ کے متوازی ہے۔

4. منحنی $y^2-4xy=x^2+5$ پر نقطے معلوم کریں جن کے لئے مماس افقی ہوں۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 7_Differential Calculus.indd 14 28-02-2023 16:36:31

5. دیے گئے منحنی کے نقاط درجہ پر ذیل کے منحنیوں کے مماس اور عمود معلوم کریں۔

(i) $y = x^2 - x^4$ پر $(1,0)$ (ii) $y = x^4 + 2e^x$ پر $(0,2)$

(iii) $y = x\sin x$ پر $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (iv) $x = \cos t, y = 2\sin^2 t$ پر $t = \frac{\pi}{3}$

6. منحنی $y = 1 + x^3$ کے مماسوں کی مساواتیں معلوم کرو۔ جس کے لئے مماس، خط $x + 12y = 12$ کے ساتھ مستقیم زاویہ پر ہے۔

7. منحنی $y = \frac{x+1}{x-1}$ کے مماسوں کی مساواتیں معلوم کریں۔ جو خط $x + 2y = 6$ کے متوازی ہیں۔

8. $x = 7\cos t$ اور $y = 2\sin t$، $t \in \mathbb{R}$ منحنی کے کسی بھی نقطہ پر دیا گیا ہو تو منحنی کے مماس اور عمودی کی مساوات معلوم کریں۔

9 مستطیلی ہذلولی $xy = 2$ اور مکافی $x^2 + 4y = 0$ کے درمیان کا زاویہ معلوم کرو۔

10. ثابت کرو کہ دو منحنی $x^2 - y^2 = r^2$ اور $xy = c^2$ جہاں، c, r مستقلات ہیں، مستقیم زاویہ پر قاطع کرتے ہیں۔

7.3 اوسط قیمت مسئلہ (Mean Value Theorem)

اوسط قیمت مسئلہ کی بنیاد اس لئے کی گئی جب دو نقاط کے درمیان موجود نقطہ جو منحنی کے مماس اور اس منحنی کے دو نقاط کے ملنے والے مقطوعہ (secant) کے متوازی ہے۔ چلئے ہم درمیانی قیمت مسئلہ کے درمیان کے ساتھ اس حصہ کا آغاز کریں۔

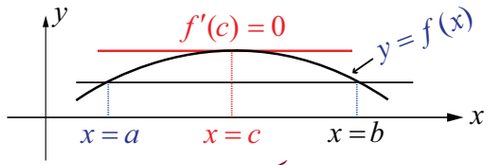
مسئلہ 7.1 (درمیانی قیمت مسئلہ) (Intermediate value theorem)

اگر بند وقفہ $[a,b]$ میں f مسلسل ہے، $f(a)$ اور $f(b)$ کے درمیانی کوئی عدد c شامل ہو تو بند وقفہ $[a,b]$ میں کم از کم ایک عدد x ہوگا۔ اس طرح کہ $f(x) = c$ ہے۔

7.3.1 رولّس کا مسئلہ (Rolle's Theorem)

مسئلہ 7.2 (رولّس کا مسئلہ) (Rolle's Theorem)

فرض کرو کہ بند وقفہ $[a,b]$ پر، $f(x)$ مسلسل ہے۔اور کھلے وقفے (a,b) پر تفرقی ہے، اور اگر $f(a) = f(b)$ ہو، تو کم از کم ایک نقطہ $c \in (a,b)$ ہوگا۔ جہاں $f'(c) = 0$ ہے۔



خاکہ 7.12

اگر مماس منحنی کے ہمراہ $x = a$ سے شروع ہو کر $x = b$ کی جانب حرکت کرتا ہے۔ جیسا کہ خاکہ 7.12 میں دکھایا گیا ہو تو $c \in (a,b)$ واقع ہوگا۔ جس میں مماس، x - محور کے متوازی ہے۔

مثال 7.19

تفاعل $f(x) = x^2(1-x)^2, x \in [0,1]$ جو رولّس کے مسئلے کو مطمئن کرتا ہے، تو $'c'$ کی قیمت محسوب کریں۔

حل

غور کریں کہ $f(0) = 0 = f(1)$، وقفہ $[0,1]$ میں $f(x)$ مسلسل ہے، اور $(0,1)$ میں تفرقی ہے۔ اب،

$$f'(x) = 2x(1-x)(1-2x)$$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 7_Differential Calculus.indd 15 28-02-2023 16:36:38

لہٰذا، $\frac{1}{2}$ اور $c = 0,1 \Rightarrow f'(c) = 0$.

یعنی، $\Rightarrow c = \frac{1}{2} \in (0,1)$

مثال 7.20

تفاعل $f(x) = x + \frac{1}{x}, x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ رولس مسئلہ کو مطمئن کرتا ہے،تو وقفہ $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ میں قیمت معلوم کرو۔

حل

وقفہ $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ میں $f(x)$ مسلسل ہے۔ اور $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ میں کے ساتھ $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2} = f(2)$ تفرقی ہے، رولّس مسئلہ سے $c \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ قیمت موجود ہونا چاہیے اس طرح کہ

$f'(c) = 1 - \frac{1}{c^2} = 0 \Rightarrow c^2 = 1 \Rightarrow c = \pm 1$ حاصل ہوگا ۔ چونکہ $1 \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ میں ہے۔ ہم $c = 1$ کا انتخاب کرتے ہیں۔

مثال 7.21

وقفہ $[2,3]$ میں تفاعل $f(x) = \log\left(\frac{x^2+6}{5x}\right)$ رولس مسئلہ مطمئن کرتا ہے،تو 'c' کی قیمت محسوب کریں۔

حل

غور کریں کہ $f(2) = 0 = f(3)$ اور $f(x)$ مسلسل ہے۔ اور وقفہ $[2,3]$ میں تفرقی ہے۔

$$f'(x) = \frac{x^2 - 6}{x(x^2+6)}$$

لہٰذا، $f'(c) = 0$ دیتا ہے۔

$$\frac{c^2 - 6}{c(c^2+6)} = 0$$

$$\Rightarrow c = \pm\sqrt{6}$$

تب، $c = +\sqrt{6} \in (2,3)$

ہم نے غور کیا کہ $-\sqrt{6} \notin (2,3)$ اور لہٰذا، $c = +\sqrt{6}$ رولس مسئلہ کو مطمئن کرتا ہے۔

الجبرائی مساوات کو حل کئے بغیر ہی ایک وقفہ میں مساوات کے جزروں کی تعداد محسوب کرنے کے لئے بھی رولّس مسئلہ کو استعمال کیا جاتا ہے۔

مثال 7.22

بغیر حل کئے ثابت کریں کہ مساوات $x^4 + 2x^3 - 2 = 0$ کاوقفہ $(0,1)$ میں صرف ایک حقیقی جذر ہے۔

حل

فرض کرو کہ $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2$ ہے۔ تو $[0,1]$ میں $f(x)$ مسلسل اور تفرقی $(0,1)$ میں ہے۔ اب،

$f'(x) = 4x^3 + 6x^2$. اگر $f'(x) = 0$ ہوتو

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 7_Differential Calculus.indd 16 28-02-2023 16:36:44

$$2x^2(2x+3) = 0.$$

لہٰذا، $x = 0, -\frac{3}{2}$ لیکن $0, -\frac{3}{2} \notin (0,1)$

اس طرح $f'(x) > 0, \ \forall x \in (0,1)$

لہٰذا، رولّس مسئلہ کے مطابق $a, b \in (0,1)$ واقع نہیں ہے، جیسا کہ $f(a) = 0 = f(b)$. لہٰذا، مساوات $f(x) = 0$ کے لئے $(0,1)$ میں دو جذریں نہیں ہو سکتی۔ مگر درمیانی قیمت مسئلہ کے تحت $f(0) = -2 < 0$ اور $f(1) = 1 > 0$ بتاتا ہے۔ کہ منحنی $y = f(x)$، 0 اور 1 کے درمیان x - محور پر صرف ایک مرتبہ قطع کرتا ہے۔ لہٰذا، مساوات $x^4 + 2x^3 - 2 = 0$ کے لئے وقفہ $(0,1)$ میں صرف ایک حقیقی جذر ہے۔

رولّس مسئلہ کے استعمال کے تحت ہم درجہ ذیل حاصل کر سکتے ہیں۔

مثال 7.23

رولّس کے مسئلہ کے استعمال سے ثابت کریں کہ $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ کے کوئی دو منفرد کثیر رقمی کے حقیقی صفروں کے درمیان $na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1$ کثیر رقمی کا ایک صفر ہے۔

حل

فرض کریں کہ $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$ ہے۔ فرض کریں کہ $\alpha < \beta$، $P(x)$ کے دو حقیقی صفریں ہیں۔ لہٰذا، $P(\alpha) = P(\beta) = 0$. چنانچہ، $[\alpha, \beta]$ میں $P(x)$، مُسلسل ہے، اور (α, β) تفرقی ہے۔ رولّس مسئلہ کے تحت $\gamma \in (\alpha, \beta)$ واقع ہے۔ جیسا کہ $P'(\gamma) = 0$، چنانچہ،

$$P'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1$$

جس سے ثبوت مکمل ہوا۔

مثال 7.24

ثابت کریں کہ وقفہ $(2,7)$ میں $2x^3 - 9x^2 - 11x + 12$ کثیر رقمی کا صفر ہے۔ دیا گیا ہے کہ $x^4 - 6x^3 - 11x^2 + 24x + 28$ کے کثیر رقمی کے صفریں 2 اور 7 ہیں۔

حل

مثال 7.23 کے استعمال سے

$$P(x) = x^4 - 6x^3 - 11x^2 + 24x + 28, \ \alpha = 2, \ \beta = 7$$

اور مشاہدہ کرتے ہیں،

$$\frac{P'(x)}{2} = 2x^3 - 9x^2 - 11x + 12 = Q(x), \text{ (کہو)}.$$

$\Leftarrow$اس سے ہمیں، وقفہ $(2,7)$ میں ایک کثیر رقمی کا صفر $Q(x)$ ہو گا۔

ثابت کرنے کے لئے،

$$Q(2) = 16 - 36 - 22 + 12 = 28 - 58 = -30 < 0$$

$$Q(7) = 686 - 441 - 77 + 12 = 698 - 518 = 180 > 0$$

اسی طرح ہم دیکھ سکتے ہیں کہ اس سے ہمیں، وقفہ $(2,7)$ میں ایک کثیر رقمی کا صفر $Q(x)$ ہو گا۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 7_Differential Calculus.indd 17 28-02-2023 16:36:51

ریمارک (Remark)

ایسے تفاعل بھی ہیں جن پر رولؔس مسئلہ کا استعمال نہیں ہوسکتا۔

(1) تفاعل $f(x)=|x|, x\in[-1,1]$ کے لئے رولؔس مسئلہ کا استعمال نہیں کرسکتے۔ حالانکہ $f(-1)=1=f(1)$ لیکن، $x=0$ پر $f(x)$ تفرقی نہیں ہے۔

(2) تفاعل

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{جب} \quad x=0,\\ x & \text{جب} \quad 0<x\le 1\end{cases}$$ کے لئے

حالانکہ $f(0)=f(1)=1$ رولؔس مسئلہ کا استعمال نہیں ہوسکتا، کیونکہ، $x=0$ پر $f(x)$ غیر مُسلسل ہے۔

(3) تفاعل $f(x)=\sin x$، $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ کے لئے، رولؔس مسئلہ کااستعمال نہیں کرسکتے، حالانکہ $f(x)$، مُسلسل بندوقفے میں $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ہے اور $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ کھلے وقفے میں تفرقی ہے، کیونکہ، $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1\neq 0=f(0)$ ہے۔

اگر $[a,b]$ بندوقفے میں $f(x)$ مُسلسل ہے اور (a,b) کھلے وقفے میں تفرقی ہے۔ اور اگر $f(a)\neq f(b)$ ہوتو رولؔس مسئلہ کی توسیع درجہ ذیل سے ہوگی۔

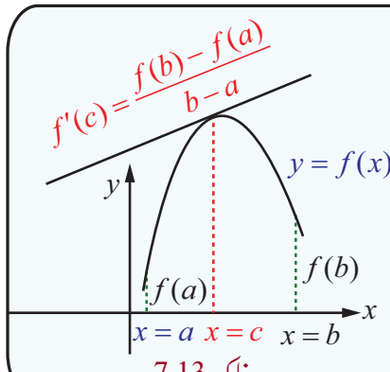
7.3.2 لیگرانجی اوسط قیمت مسئلہ (Lagrange's Mean Value Theorem)

مسئلہ 7.3

فرض کرو کہ $[a,b]$ بندوقفے میں $f(x)$ مُسلسل ہے اور (a,b) کھلے وقفے میں تفرقی ہے۔

(جب کہ $f(a)$، $f(b)$ کا مساوی ہونا غیر ضروری ہے۔) تو کوئی ایک نقطہ $c\in(a,b)$ موجود ہوگا اس طرح کہ،

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \ldots(6)$$



خاکہ 7.13

ریمارک (Remark)

اگر $f(a)=f(b)$ ہوتو لیگرانجی اوسط قیمت مسئلہ سے رولؔس مسئلہ حاصل ہوگا۔ اس کو **گھومتا رولؔس مسئلہ** بھی کہا جاتا ہے۔

ریمارک (Remark)

اوپر دیئے گئے مسئلہ کا طبعی معنی، عدد $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ سوچا جاسکتا ہے $f(x)$ کی تبدیلی کی اوسط شرح (a,b) پر اور $f'(c)$ فوری تبدیلی ہے۔

لیگرانجی کے اوسط قیمت مسئلہ کے علم ہندسی معنی یہ ہیں کہ کچھ داخلی نقطہ پر تبدیلی کی فوری شرح پورے وقفے میں اوسط تبدیلی کی شرح کے برابر ہے۔ اس کو اس طرح تشریح کر سکتے ہیں :

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 7_Differential Calculus.indd 18 28-02-2023 16:36:55

ایک کار 200 میٹر سفر طے کرنے کے لئے صفر سے 8 سیکنڈ تک کا اسراع لیتی ہے۔ جس کی اوسط سمتی رفتار 8 سیکنڈ وقفہ کے لئے $\frac{200}{8} = 25$ m/s ہے۔ اوسط قیمت مسئلہ کہتا ہے کہ سفر کے دوران کسی ایک نقطہ رفتار پیمائش (speedometer) میں ٹھیک 90 km/h ہوتا ہے۔ جو 25 m/s کے برابر ہے۔

مسئلہ 7.4

اگر $[a,b]$ بندوقفے میں $f(x)$ مُسلسل ہے اور (a,b) کھلے وقفے میں تفرقی ہے۔ اور اگر $f'(x) > 0,\ \forall x \in (a,b)$ ہوتو $x_1, x_2 \in [a,b]$ جیسا کہ $x_1 < x_2$ ہے۔ ہمارے پاس $f(x_1) < f(x_2)$ ہے۔

ثبوت

اوسط قیمت مسئلہ کے مطابق $c \in (x_1, x_2) \subset (a,b)$ واقع ہے اس طرح کہ،

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

چونکہ، $f'(c) > 0$ اور $x_2 - x_1 > 0$ ، ہمیں $f(x_2) - f(x_1) > 0$ حاصل ہوگا۔

ہم یہ نتیجہ اخذ کیا کہ جب بھی $x_1 < x_2$ ہو تو، ہمیں $f(x_1) < f(x_2)$ حاصل ہوگا۔

ریمارک (Remark)

اگر $f'(x) < 0,\ \forall x \in (a,b)$ ہو تو، $x_1, x_2 \in [a,b]$ کے لئے جیسا کہ، $x_1 < x_2$ ہمارے پاس $f(x_1) > f(x_2)$ کو اسی طرح ثابت کر سکتے ہیں۔

مثال 7.25

$(1,2)$ وقفے میں قیمت معلوم کریں ۔ جب اوسط قیمت مسئلہ تفاعل $f(x) = x - x^2$ کے لئے $1 \le x \le 2$ کو مطمئن کرتا ہے۔

حل

$f(1) = 0$ اور $f(2) = -2$. صاف طور پر $f(x)$ کی واضح ہے اور $1 < x < 2$ میں تفرقی ہے۔ لہٰذا، اوسط قیمت مسئلہ سے $c \in (1,2)$ واقع ہے اس طرح کہ،

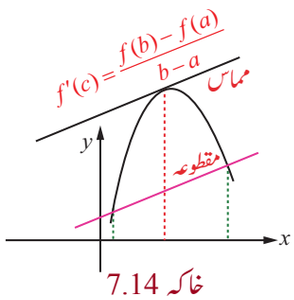
$$f'(c) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = 1 - 2c$$

یعنی، $1 - 2c = -2 \Rightarrow c = \frac{3}{2}$

■

علم ہندسی معنی (Geometrical meaning)

علم ہندسی میں، اوسط قیمت مسئلہ کہتا ہے کہ $x = a$ اور $x = b$ درمیان $y = f(x)$ منحنی کا مقطوعہ اور منحنی خط کا مماس چند نقطہ $c \in (a,b)$ پر متوازی ہیں۔



خاکہ 7.14

لیگرانجی اوسط قیمت مسئلہ کے نتائج
(Consequences of Lagrange's Mean Value Theorem)

تفرق کے لئے (MVT) خاص تین نتائج ہیں ۔

(1) دیئے گئے تفاعل کے لئے ایک سری تعین کرسکتے ہیں ۔ (مسئلہ 7.4)

(2) اگر $f'(x) = 0$ تمام x کے لئے (a,b) میں ہوتو (a,b) میں f مستقل ہے۔

(3) اگر $f'(x) = g'(x)$ تمام x کے لئے ہو، تو $f(x) = g(x) + C$ چند مستقل کے لئے C ہے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 7_Differential Calculus.indd 19 28-02-2023 16:37:02

7.3.3 استعمالات (Applications)

مثال 7.26

ایک ٹرک محصول سڑک پر رفتار کی حد 80 کلو میٹر فی گھنٹہ ہے۔ ٹرک 2 گھنٹے میں 164 کلو میٹر کا فاصلہ طے کرتا ہے۔ محصول سڑک کے ختم ہونے پر رفتار کی خلاف ورزی کا نوٹس دیا گیا اوسط قیمت مسئلہ کے استعمال سے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔

حل

فرض کرو کہ $f(t)$ ٹرک کا طئے کردہ فاصلہ 't' گھنٹوں میں ہے۔ یہ $[0,2]$ وقفے میں مُسلسل تفاعل اور $(0,2)$ میں تفرقی ہے۔ اب، $f(0)=0$ اور $f(2)=164$. اوسط قیمت مسئلہ کے استعمال سے، وقت c واقع ہے۔ اس طرح کہ،

$$f'(c)=\frac{164-0}{2-0}=82>80\,.$$

لہٰذا، چند وقت کے کسی بھی لمحہ میں 2 گھنٹوں کے دوران ٹرک 80 کلو میٹر فی گھنٹہ سے زیادہ رفتار سے چلی ہے۔ اس لئے رفتار خلاف ورزی کا نوٹس ملا۔

مثال 7.27

فرض کریں کہ $f(x)$ تفرقی تفاعل تمام x کے لئے $f'(x)\le 29$ اور $f(2)=17$ کے ساتھ ہے۔ $f(7)$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت کیا ہے؟

حل

اوسط قیمت مسئلہ سے ہمیں $'c'\in(2,7)$ واقع ہے، اس طرح کہ ،

$$\frac{f(7)-f(2)}{7-2}\;=\;f'(c)\le 29\,.$$

چنانچہ، $f(7)\le 5\times 29+17\;=\;162$

لہٰذا، $f(7)$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت 162 ہے۔

مثال 7.28

اوسط قیمت مسئلہ کے استعمال سے ثابت کریں۔

$$|\sin\alpha-\sin\beta|\le|\alpha-\beta|,\ \alpha,\ \beta\in\mathbb{R}\,.$$

حل

فرض کریں کہ $f(x)=\sin x$ جو کسی بھی کھلے وقفے میں تفرقی ہے فرض کریں کہ وقفہ $[\alpha,\beta]$ ہے۔ اوسط قیمت مسئلہ کے استعمال سے $c\in(\alpha,\beta)$ واقع ہے۔ اس طرح کہ،

$$\frac{\sin\beta-\sin\alpha}{\beta-\alpha}\;=\;f'(c)=\cos(c)$$

چونکہ، $\left|\dfrac{\sin\alpha-\sin\beta}{\alpha-\beta}\right|\;=\;|\cos(c)|\le 1$

لہٰذا، $|\sin\alpha-\sin\beta|\;\le\;|\alpha-\beta|$

ریمارک (Remark)

اگر ہم $\beta=0$ لیں تو اوپر دیئے گئے مثال سے ہمیں $|\sin\alpha|\le|\alpha|$ حاصل ہوگا۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 7_Differential Calculus.indd 20 28-02-2023 16:37:07

مثال 7.29

ایک تپش پیما کو فریزر سے اٹھایا گیا اور گرم پانی میں ڈالا گیا۔ 22 سیکنڈ لینے پر تپش پیما میں تپش $-10°C$ سے $100°C$ تک درجہ بڑھتا ہے۔ ثابت کرو کہ تپش میں شرح کی تبدیلی کسی بھی وقت t پر $5°C$ فی سیکنڈ ہے۔

حل

فرض کرو کہ t وقت پر تپش $f(t)$ ہے اوسط قیمت مسئلہ سے ہمیں حاصل ہو گا،

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
$$= \frac{100-(-10)}{22}$$
$$= \frac{110}{22}$$
$$= 5°C \text{ فی سیکنڈ}$$

لہذا، تپش کی فوری شرح کسی بھی وقت t پر $5°C$ فی سیکنڈ ہے۔

مشق 7.3

1. مندرجہ ذیل تفاعلوں کے لئے متعلق وقفوں میں کیوں رولّس مسئلہ کا استعمال نہیں ہو سکتا ہے، تشریح کریں۔

(i) $f(x) = \left|\frac{1}{x}\right|,\ x \in [-1,1]$ (ii) $f(x) = \tan x, x \in [0,\pi]$

(iii) $f(x) = x - 2\log x, x \in [2,7]$

2. رولّس مسئلہ کے استعمال سے x کی قیمتیں معلوم کریں۔ جس پر مندرجہ ذیل تفاعلوں کے مماس x -محور کے متوازی ہے۔

(i) $f(x) = x^2 - x,\ x \in [0,1]$ (ii) $f(x) = \frac{x^2-2x}{x+2},\ x \in [-1,6]$

(iii) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{x}{3},\ x \in [0,9]$

3. مندرجہ ذیل تفاعلوں کے لئے متعلق وقفوں میں کیوں لیگرانجی اوسط قیمت مسئلہ کا استعمال نہیں ہو سکتا ہے، تشریح کریں۔

(i) $f(x) = \frac{x+1}{x}, x \in [-1,2]$ (ii) $f(x) = |3x+1|,\ x \in [-1,3]$

4. لیگرانجی اوسط قیمت مسئلہ کے استعمال سے x کی قیمتیں معلوم کریں۔ جبکہ مماس دیئے گئے وقفوں کے ختم نقطے پر قاطع خط کے متوازی ہیں۔

(i) $f(x) = x^3 - 3x + 2,\ x \in [-2,2]$ (ii) $f(x) = (x-2)(x-7),\ x \in [3,11]$

5. ثابت کریں کہ اوسط قیمت مسئلہ کے نتیجہ پر قیمت،

(i) $f(x) = \frac{1}{x}$ کے لئے مثبت عدد کے بند وقفہ $[a,b]$ میں $\sqrt{ab}$ ہے۔

(ii) $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ کے لئے کوئی وقفہ $[a,b]$ میں $\frac{a+b}{2}$ ہے۔

6. ایک ریس (رفتار کا مقابلہ) کار ڈرایور کلومیٹر پتھر 20 پر ہے۔ اگر اس کی رفتار $150\ km/hr$ سے بڑھتی نہیں ہے۔ اگلے دو گھنٹے میں طئے کردہ زیادہ سے زیادہ کلومیٹر کیا ہو گا۔

7. فرض کریں کے تفاعل $f(x)$، $f'(x) \le 1$ کے لئے تمام $1 \le x \le 4$ کے لئے ثابت کریں کہ $f(4) - f(1) \le 3$ ہے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 7_Differential Calculus.indd 21 28-02-2023 16:37:14

8. کیا تفرقی تفاعل $f(x)$ واقع ہے اس طرح کہ $f(0)=-1, f(2)=4$ اور $f'(x)\le 2$ تمام x کے لئے۔ تمہارے جواب کی پیش تصدیق کریں۔

9 ثابت کریں کہ، $f(x)=x(x+3)e^{-\frac{\pi}{2}}, -3\le x\le 0$ منحنی پر واقع نقطہ ہے۔ جہاں، بنایا گیا مماس x - محور کے متوازی ہے۔

10. اوسط قیمت مسئلہ کے استعمال سے ثابت کریں۔ $a>0, b>0, |e^{-a}-e^{-b}|<|a-b|$

7.4 سلسلہ کی توسیع (Series Expansions)

ٹیلارس سلسلہ اور میکلارنس سلسلہ کی توسیع تفاعل جو لامحدود تفرقی ہیں۔

مسئلہ 7.5

(a) ٹیلارس سلسلہ (Taylor's Series)

فرض کرو کہ $x=a$ پر $f(x)$ ایک لامحدود تفرقی تفاعل ہو تو $f(x)$ کو سلسلے میں پھیلا سکتے ہیں، وقفہ $(a-\varepsilon, a+\varepsilon), \varepsilon>0$ میں،

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots.$$

کی شکل میں ہوگا۔

(b) میکلارنس سلسلہ (Maclaurin's series)

اگر $a=0$ ہو تو پھیلاؤ کی شکل بن جاتی ہے۔

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots.$$

ثبوت

$f(x)$ کے سلسلے کی توسیع $(x-a)$ کی قوتوں میں اسی طرح دی جاتی ہے۔

$$f(x) = A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n(x-a)^n \qquad \ldots (7)$$

$x=a$ کو درج کرنے پر $A_0=f(a)$ حاصل ہوگا، (7) کو تفرق کرنے پر، ہمیں حاصل ہوگا

$$f'(x) = 1!A_1+\sum_{n=2}^{\infty}nA_n(x-a)^{n-1} \qquad \ldots (8)$$

$x=a$ کو درج کرنے پر $A_1=f'(a)$ حاصل ہوگا، (8) کو تفرق کرنے پر، ہمیں حاصل ہوگا

$$f''(x) = 2!A_2+\sum_{n=3}^{\infty}n(n-1)A_n(x-a)^{n-2} \qquad \ldots (9)$$

$x=a$ کو درج کرنے پر $A_2=\frac{f''(a)}{2!}$ حاصل ہوگا، (9) کو تفرق کرنے پر، ہمیں حاصل ہوگا

$$f'''(x) = 3!A_3+\sum_{n=4}^{\infty}n(n-1)(n-2)A_n(x-a)^{n-3} \qquad \ldots (10)$$

$(k-3)$ مرتبہ (10) کو تفرق کرنے سے ہمیں حاصل ہوگا،

$$f^{(k)}(x) = k!A_k+\sum_{n=k+1}^{\infty}n(n-1)\ldots(n-k+1)A_n(x-a)^{n-k} \qquad \ldots(11)$$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 7_Differential Calculus.indd 22 28-02-2023 16:37:21

$x = a$ کو درج کرنے پر $A_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ حاصل ہوگا، اس طرح مسئلہ کا ثبوت مکمل ہوا۔

اس ترتیب سے تفاعل کو نقطے $x = a$ کے اطراف پھیلانے پر، $(x-a)$ کے مساوی قوتوں میں سے ہمیں دیئے گئے تفاعل کو کئی مرتبہ قوتوں کی ضرورت کے مطابق تفرق کریں اور $x = a$ پر وضاحت کریں، یہ $(x-a)$ کے مطلوبہ قوتوں کے سرعدد کی قیمت حاصل ہوگا۔

مثال 7.30

$-1 < x \leq 1$ کے لئے 4 غیر صفری رقموں تک $\log(1+x)$ کو میکلارنس سلسلہ میں پھیلاؤ۔

حل

فرض کرو کہ $f(x) = \log(1+x)$ ہوتو $f(x)$ میکلارنس سلسلہ $f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n x^n$ ہے۔ جہاں، $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ تفاعل $f(x)$ کے کئی تفرق کو $x = 0$ پر وضاحت کرنے سے مندرجہ ذیل حاصل ہوگا۔

تفاعل اور اس کے تفرق	$\log(1+x)$ اور اس کے تفرق	$x = 0$ پر قیمت
$f(x)$	$\log(1+x)$	0
$f'(x)$	$\frac{1}{1+x}$	1
$f''(x)$	$-\frac{1}{(1+x)^2}$	-1
$f'''(x)$	$\frac{2}{(1+x)^3}$	2
$f^{(iv)}(x)$	$-\frac{6}{(1+x)^4}$	-6

جدول 7.2

قیمتوں کے درج کرنے اور مختصر کرنے پر ہمیں دیئے گئے تفاعل کا مطلوبہ پھیلاؤ اس طرح حاصل ہوگا۔

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \quad ; -1 < x \leq 1.$$

مثال 7.31

x کی بڑھتی ہوئی قوتوں میں 5 ویں قوت تک $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ کے لئے $\tan x$ کو پھیلایئے

حل

فرض کریں کہ $f(x) = \tan x$ ہو تو میکلارنس سلسلہ $f(x)$ کے لئے ہے۔

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n x^n \quad \text{جہاں} \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

تفاعل $f(x)$ کی کئی تفرقیوں کی $x = 0$ پر وضاحت مندرجہ ذیل ہے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 7_Differential Calculus.indd 23 28-02-2023 16:37:26

اب،

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2(x)$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(\sec^2(x)) = 2\sec x \cdot \sec x \cdot \tan x = 2\sec^2 x \cdot \tan x$$

$$f'''(x) = \frac{d}{dx}(2\sec^2(x) \cdot \tan x) = 2\sec^2(x) \cdot \sec^2 x + \tan x \cdot 4\sec x \cdot \sec x \cdot \tan x$$

$$= 2\sec^4 x + 4\sec^2 x \cdot \tan^2 x$$

$$f^{(iv)}(x) = 8\sec^3 x \cdot \sec x \cdot \tan x + 4\sec^2 x \cdot 2\tan x \cdot \sec^2 x + 8\sec x \cdot \sec x \cdot \tan x \cdot \tan^2 x$$

$$= 16\sec^4 x \tan x + 8\sec^2 x \cdot \tan^3 x$$

$$f^{(v)}(x) = 16\sec^4 x \cdot \sec^2 x + 64\sec^3 x \cdot \sec x \cdot \tan x \cdot \tan x + 8\sec^2 x \cdot 3\tan^2 x \cdot \sec^2 x$$
$$+16\sec x \cdot \sec x \cdot \tan x \cdot \tan^3 x$$

$$= 16\sec^6 x + 88\sec^4 x \cdot \tan^2 x + 16\sec^2 x \cdot \tan^4 x .$$

تفاعل اور اس کے تفرقی	$\tan x$ اور اس کے تفرقی	$x = 0$ پر قیمت
$f(x)$	$\tan x$	0
$f'(x)$	$\sec^2 x$	1
$f''(x)$	$2\sec^2 x \tan x$	0
$f'''(x)$	$2\sec^4 x + 4\sec^2 x \cdot \tan^2 x$	2
$f^{(iv)}(x)$	$16\sec^4 x \cdot \tan x + 8\sec^2 x \cdot \tan^3 x$	0
$f^{(v)}(x)$	$16\sec^6 x + 88\sec^4 x \cdot \tan^2 x + 16\sec^2 x \cdot \tan^4 x$	16

جدول 7.3

قیمتوں کے درج کرنے اور مختصر کرنے پر ہمیں تفاعل کا مطلوبہ پھیلاؤ حاصل ہو گا ۔

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots \quad ; -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} ..$$

مثال 7.32

پہلے تین غیر صفری رقموں کو محسوب کرکے $x = 2$ میں $\frac{1}{x}$ کے ٹیلارس سلسلہ کا پھیلاؤ لکھئے ۔

حل

فرض کریں کہ $f(x) = \frac{1}{x}$ ، ہو تو $f(x)$ کا ٹیلارس سلسلہ

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n (x-2)^n \quad \text{جہاں،} \quad a_n = \frac{f^{(n)}(2)}{n!}$$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 7_Differential Calculus.indd 24 28-02-2023 16:37:32

$x = 2$ پر وضاحت کئے گئے $f(x)$ کی تفرقیاں نیچے دی گئی ہیں۔

تفاعل اور اس کے تفرقی	$\frac{1}{x}$ اور اس کے تفرقی	$x = 2$ پر قیمت
$f(x)$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{2}$
$f'(x)$	$-\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{4}$
$f''(x)$	$\frac{2}{x^3}$	$\frac{1}{4}$
$f'''(x)$	$-\frac{6}{x^4}$	$-\frac{3}{8}$

جدول 7.4

قیمتوں کو درج کرنے سے، ہمیں تفاعل کا مطلوبہ پھیلاؤ حاصل ہوگا۔

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\frac{(x-2)}{1!} + \frac{1}{4}\frac{(x-2)^2}{2!} - \frac{3}{8}\frac{(x-2)^3}{3!} + \cdots$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} - \frac{(x-2)}{4} + \frac{(x-2)^2}{8} - \frac{(x-2)^3}{16} + \cdots$$

مشق 7.4

1. مندرجہ ذیل تفاعلات کو میکلارنس سلسلہ پھیلاؤ میں لکھئے۔

(i) e^x (ii) $\sin x$ (iii) $\cos x$

(iv) $\log(1-x)\,; -1 \le x < 1$ (v) $\tan^{-1}(x)\ ; -1 \le x \le 1$ (vi) $\cos^2 x$

2. تفاعل $\log x$ کا $x = 1$ میں تین غیر صفری رقموں تک $x > 0$ کے لئے ٹیلارس سلسلہ کا پھیلاؤ لکھئے۔

3. $x - \frac{\pi}{4}$ کی چڑھتی ہوئی قوتوں میں تین غیر صفری رقموں تک $\sin x$ کو پھیلائیے۔

4. کثیر رقمی $f(x) = x^2 - 3x + 2$ کو $x - 1$ کی قوتوں میں پھیلائیے ۔

7.5 غیر متعین شکلیں (Indeterminate Forms)

اس حصّے میں ہم کئی "غیر متعین شکلوں" پر بحث کریں گے۔ اور حدوں کو حل کرنے کا طریقے معلوم کریں گے جب ہم ان سے گزریں۔

7.5.1 حد کا عمل (A Limit Process)

جب حد کو محسوب کریں ۔

$$\lim_{x \to \alpha} R(x)$$

بعض مخصوص تفاعلات $R(x)$ کے لئے، ہمیں مندرجہ ذیل موقع پیش آتے ہیں۔ جیسا کہ

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0 \times \infty,\ \infty - \infty,\ 1^{\infty},\ 0^0,\ \infty^0.$$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 7_Differential Calculus.indd 25 28-02-2023 16:37:37

ہم جانتے ہیں کہ اعداد کی ایسی بھی شکل ہے۔ مگر قیمتوں کو منسوب نہیں کیا جاسکتا جس راہ سے جو کہ اعداد کا ضرب اور جمع کے عام اصولوں سے ہم آہنگ ہوں۔ ہم ان اظہار کو غیر متعین شکلیں کہتے ہیں۔ حالانکہ وہ اعداد نہیں ہیں۔ غیر تفرقی شکلیں تفاعل کے حدوں کی خاصیت میں اہم کردار ادا کرتے ہیں۔

جاون (جوہن) برنولی نے تفرقی کو استعمال کرکے کسروں کے حدیں محسوب کرنے کا اصول یجاد کیا جس کا شمار کنندہ اور نسب نما دونوں صفر یا ∞ کو پہنچتے ہیں۔ آج یہ اصول لو پتھل (l'Hôpital's) اصول سے جانا جاتا ہے۔ جو فرانسی نوبل شخص گیلوم ڈی لو پتھل کے نام پر رکھا گیا۔ جنہوں نے ابتدائی تعارفی احصاء کو لفظوں میں لکھا جہاں یہ اصول پہلے چھاپا گیا۔

7.5.2 لو پتھل اصول (The l'Hôpital's Rule)

فرض کریں کے $f(x)$ اور $g(x)$ تفرقی تفاعل ہیں اور $g'(x) \neq 0$ کے ساتھ

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 = \lim_{x\to a} g(x) \text{ ہوتو } \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty = \lim_{x\to a} g(x) \text{ ہوتو } \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

7.5.3 غیر متعین شکلیں $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\times\infty, \infty-\infty$ (Indeterminate forms)

مثال 7.33

محسوب کرو: $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}\right)$

حل

اگر ہم سیدھے $x=1$ ڈالیں تو ہم یہ غور کرسکتے ہیں کہ دیا گیا تفاعل غیر متعین شکل $\frac{0}{0}$ میں ہوگا۔ جس کا شمار کنندہ اور نسب نما کی تفاعل درجہ 2 والے کثیر رقمی میں ہو یہ دونوں تفرقی ہیں۔ لہٰذا، لو پتھل کے اصول کے استعمال سے ہمیں حاصل ہوگا۔

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{2x-3}{2x-4}\right)$$

$$= \frac{1}{2}.$$

نوٹ کرو کہ شمار کنندہ اور نسب نما کے اجزائے ضربی لیکر بھی حد کو محسوب کرسکتے ہیں۔ یعنی، $\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3} = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-3)}$

مثال 7.34

$\lim_{x\to a}\left(\frac{x^n-a^n}{x-a}\right)$ حد محسوب کرو۔

حل

اگر ہم سیدھے $x=a$ درج کریں تو دیا گیا تفاعل غیر متعین $\frac{0}{0}$ کی شکل اختیار کرلے گا۔ شمار کنندہ اور نسب نما میں کثیر رقمی تفاعل ہیں، یہ دونوں تفرقی ہیں۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 7_Differential Calculus.indd 26 28-02-2023 16:37:40

لہٰذا، لو پتھل کے اصول کے استعمال سے ہمیں حاصل ہو گا۔

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{x^n-a^n}{x-a}\right) = \lim_{x\to a}\left(\frac{n\times x^{n-1}}{1}\right)$$

$= n\times a^{n-1}$. حاصل ہوتا ہے

مثال 7.35

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin mx}{x}\right)$ حد دریافت کرو۔

حل

اگر سیدھے ہم درج کریں $x=0$ تو غیر متعین شکل $\frac{0}{0}$ حاصل ہو گا۔ لہٰذا، لو پتھل کے اصول سے حد کو اس طرح معلوم کرسکتے ہیں۔

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin mx}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{m\times\cos mx}{1}\right)$$

$$= m$$

اگلے مثال سے میں حد کی موجود نہیں ہے، کہا جائے گا۔

مثال 7.36

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x^2}\right)$ حد دریافت کرو۔

حل

اگر ہم سیدھے $x=0$ درج کریں تو غیر متعین شکل $\frac{0}{0}$ حاصل ہو گا۔ لہٰذا، لو پتھل اصول کے استعمال سے حد کو اس طرح معلوم کرسکتے ہیں۔

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\cos x}{2x}\right) = \infty$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\sin x}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\cos x}{2x}\right) = -\infty$$

بائیں حد اور دائیں حد مساوی نہیں ہیں۔ لہٰذا، ہم اس نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ حد واقع نہیں ہے۔

ریمارک (Remark)

اگر کوئی یہ کوشش کرے کہ لو پتھل دوبارہ استعمال کرکے $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\cos x}{2x}\right)$ کا نتیجہ حاصل کرسکتے ہیں۔

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\cos x}{2x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{-\sin x}{2}\right) = 0\,.$$

جو صحیح نہیں ہے۔ کیونکہ، یہ غیر متعین شکل میں نہیں ہے۔

مثال 7.37

اگر $\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{1-\cos m\theta}{1-\cos n\theta}\right)=1$ ہوتو، ثابت کرو کہ $m=\pm n$

حل

چونکہ یہ غیر متعین شکل $\left(\frac{0}{0}\right)$ ہے۔ لو پتھل کے اصول کے استعمال سے

$$\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{1-\cos m\theta}{1-\cos n\theta}\right) = \lim_{\theta\to 0}\left(\frac{m\sin m\theta}{n\sin n\theta}\right)$$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 7_Differential Calculus.indd 27 28-02-2023 16:37:45

اب مثال 7.35 کے استعمال سے، ہمارے پاس

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{m}{n}\times\left(\frac{\frac{\sin m\theta}{\theta}}{\frac{\sin n\theta}{\theta}}\right)=\frac{m^2}{n^2}$$

لہٰذا، $m^2 = n^2$

یعنی، $m = \pm n$ ■

مثال 7.38

دریافت کرو: $\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{\log(1-x)}{\cot(\pi x)}\right)$

حل

یہ غیر متعین شکل $\frac{\infty}{\infty}$ میں ہے۔ لہٰذا، لو پتھل اصول کو استعمال کرکے حد معلوم کرسکتے ہیں۔

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\log(1-x)}{\cot(\pi x)}=\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{-\frac{1}{1-x}}{-\pi\operatorname{cosec}^2(\pi x)}\right)\quad\left(\frac{\infty}{\infty}\text{ کی شکل}\right)$$

اس طرح

مختصر کرنے پر ہمیں

$$=\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{\sin^2(\pi x)}{\pi(1-x)}\right).\quad\left(\frac{0}{0}\text{ کی شکل}\right)$$

دوبارہ لو پتھل اصول کے استعمال سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$=\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{2\pi\sin(\pi x)\cdot\cos(\pi x)}{-\pi}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\left(-2\sin(\pi x)\cdot\cos(\pi x)\right)$$

$$=0.$$ ■

مثال 7.39

دریافت کرو: $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$

حل

یہ غیر متعین شکل $\infty-\infty$ میں ہے۔ اس کی حد دریافت کرنے کے لئے پہلے ہم مختصر کر کے $\left(\frac{0}{0}\right)$ شکل میں لاکر لو پتھل اصول کی استعمال سے، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^x-x-1}{x(e^x-1)}\right).\quad\left(\frac{0}{0}\text{ کی شکل}\right)$$

اب،

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^x-x-1}{x(e^x-1)}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^x-1}{xe^x+e^x-1}\right)\quad\left(\frac{0}{0}\text{ کی شکل}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^x}{xe^x+2e^x}\right)=\frac{1}{2}.$$ ■

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 7_Differential Calculus.indd 28 28-02-2023 16:37:49

مثال 7.40

دریافت کرو: $\lim\limits_{x\to 0^+} x\log x$

حل

یہ غیر متعین شکل $(0\times\infty)$ میں ہے اس کو معلوم کرنے کے لئے، پہلے ہم مختصر کرکے شکل $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ میں تبدیل کریں گے اور لو پتھل اصول کا استعمال کریں گے اس طرح ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\lim_{x\to 0^+} x\log x = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\log x}{\frac{1}{x}}\right) \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\ \text{شکل}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\right) = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0\,.$$

مثال 7.41

دریافت کرو: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+17x+29}{x^4}\right)$

حل

یہ غیر متعین شکل $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ میں ہے۔ اس کی حد کی معلوم کرنے کے لئے، لو پتھل اصول کا استعمال کریں

ہمیں حاصل ہوگا، $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+17x+29}{x^4}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+17}{4x^3}\right)$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{12x^2}\right) = 0\,.$$

مثال 7.42

دریافت کرو: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{e^x}{x^m}\right), m\in N$

حل

یہ غیر متعین شکل $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ میں ہے۔

اس کی حد کو معلوم کرنے کے لئے لو پتھل اصول کو m مرتبہ استعمال کرنے سے،

ہمیں حاصل ہوگا، $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^m} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{m!}$

$$= \infty\,.$$

7.5.4 غیر متعین شکلیں 0^0، 1^∞ اور ∞^0 (Indeterminate forms 0^0, 1^∞ and ∞^0)

ترتیب سے ایسے غیر متعین شکل کو معلوم کرنے کے لئے، ہمیں مرکب تفاعل کی حد کے مسئلہ کو ثابت کرنا ہوگا۔

مسئلہ 7.6

فرض کریں کے $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$ واقع ہے، اور فرض کریں کہ وہ L ہے، اور $x=L$ پر مسلسل تفاعل $f(x)$ ہوتو،

$$\lim_{x\to\alpha} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to\alpha} g(x)\right).$$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 7_Differential Calculus.indd 29 28-02-2023 16:37:53

حدوں کو معلوم کرنے کے لئے طریقہ عمل (The evaluation procedure for evaluating the limits)

(1) فرض کریں کہ $A = \lim_{x\to a} g(x)$ ہے۔ $A > 0$ اخذ کرنے کے ساتھ لاگرتم لینے پر اس یقین کے ساتھ کہ لاگرتم تفاعل مسلسل ہے۔

$\log A = \lim_{x\to a} \log(g(x))$ ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ لہٰذا، اوپر دیئے گئے مسئلے سے جو $f(x) = \log x$ ہمیں حد حاصل ہوگا۔

$$\lim_{x\to a} \log(g(x)) \;=\; \log\left(\lim_{x\to a} g(x)\right).$$

(2) حد جو $\lim_{x\to a} \log(g(x))$ چاہے، وہ $\left(\frac{0}{0}\right)$ یا $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ کی شکل ہو، اس کو لو پتھل اصول کے استعمال سے دریافت کریں۔

(3) فرض کریں کہ حاصل شدہ حد α ہوتو مطلوبہ حد e^{α} ہوگا۔

مثال 7.43

لو پتھل اصول کے استعمال سے، ثابت کرو: $\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

حل

یہ غیر متعین شکل 1^{∞} میں ہے۔ فرض کریں کہ $g(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ ہے۔ لاگرتم لینے پر، ہمیں حاصل ہوگا۔

$$\log g(x) \;=\; \frac{\log(1+x)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \log(g(x)) \;=\; \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\log(1+x)}{x}\right) \quad \left(\frac{0}{0} \text{ شکل}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\frac{1}{1+x}}{1}\right) \qquad \text{(لو پتھل اصول سے)}$$

$$= 1\ .$$

$$\lim_{x\to 0^+} \log g(x) \;=\; \log\left(\lim_{x\to 0^+} g(x)\right) \quad \text{مگر}$$

$$\log\left(\lim_{x\to 0^+} g(x)\right) \;=\; 1 \quad \text{چنانچہ،}$$

لہٰذا، قوت لینے پر ہمیں $\lim_{x\to 0^+} g(x) = e$ حاصل ہوگا۔

مثال 7.44

دریافت کرو: $\lim_{x\to\infty} (1+2x)^{\frac{1}{2\log x}}$

حل

یہ غیر متعین شکل ∞^0 میں ہے۔

$$g(x) \;=\; (1+2x)^{\frac{1}{2\log x}} \quad \text{فرض کریں کہ}\ .$$

لاگرتم لینے پر ہمیں حاصل ہوگا۔

$$\log g(x) \;=\; \frac{\log(1+2x)}{2\log x}$$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 7_Differential Calculus.indd 30 28-02-2023 16:37:59

$$\lim_{x\to\infty}\log g(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\log(1+2x)}{2\log x}\right) \quad \left(\text{کی شکل } \frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{2}{1+2x}}{\frac{2}{x}}\right) \quad \text{(لو پتھل اصول سے)}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+2x}\right) \quad \left(\text{کی شکل } \frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{مگر}$$

$$\lim_{x\to\infty}\log g(x) = \log\left(\lim_{x\to\infty} g(x)\right)$$

لہٰذا، قوت لینے پر ہمیں مطلوبہ حد $\sqrt{e}$ حاصل ہوتا ہے۔

مثال 7.45

دریافت کرو: $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

حل

فرض کریں کہ $g(x) = x^{\frac{1}{1-x}}$. یہ غیر متعین شکل 1^{∞} میں ہے۔ جب $x\to 1$ ہو. لاگرتم لینے پر،

$$\log g(x) = \frac{\log x}{1-x}.$$

$$\lim_{x\to 1}\log g(x) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{\log x}{1-x}\right) \quad \left(\text{چنانچہ، کی شکل } \frac{0}{0}\right)$$

لو پتھل اصول کے استعمال سے ہمیں حاصل ہوگا۔

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\frac{1}{x}}{-1}\right) = -1.$$

$$\lim_{x\to 1}\log g(x) = \log\left(\lim_{x\to 1} g(x)\right) \text{، مگر}$$

لہٰذا، قوت لینے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

مشق 7.5

مندرجہ ذیل حدوں کو دریافت کرو۔ اگر ضرورت ہو تو لو پتھل اصول کا استعمال کرو۔

1. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$
2. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3}{x^2-5x+3}$
3. $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\log x}$
4. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\sec x}{\tan x}$
5. $\lim_{x\to\infty} e^{-x}\sqrt{x}$
6. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$
7. $\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{x}{x-1}\right)$
8. $\lim_{x\to 0^+} x^x$
9. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 7_Differential Calculus.indd 31 28-02-2023 16:38:05

10. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$ 11. $\lim_{x\to 0^+}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

12. اگر ابتدائی رقم A_0 روپیوں کو r فیصد مرکب سود سے ایک سال میں n مرتبہ سرمایہ کیا جاتا ہے، سرمایہ کی گئی رقم t سال میں $A = A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$ ہے۔ اگر سود کو مسلسل مرکب کیا جاتا ہے، (یعنی، $n \to \infty$)، ثابت کرو کہ رقم t سال کے بعد $A = A_0e^{rt}$ ہوگی۔

7.6 پہلے تفرقی کے استعمالات (Applications of First Derivative)

پہلے تفرقی کے استعمال سے ہم تفاعل $f(x)$ کی ایک سری (بڑھتی یا گھٹتی) کو جانچ سکتے ہیں، مخصوص نقطہ پر توجہ کرکے اس کا علاقہ اور علاقے پر مقامی انتہاء (Extrema) (زیادہ یا کم) جانچ سکتے ہیں۔

7.6.1 تفاعل کی ایک سری (Monotonicity of functions)

تفاعل کی ایک سری اس کے بڑھنے یا گھٹنے کا ردعمل ہے۔

تعریف 7.4

ایک تفاعل $f(x)$ کو وقفہ I میں بڑھتا ہوا تفاعل اس وقت کہا جاتا ہے۔

اگر $a<b \Rightarrow f(a)\le f(b), \forall a,b\in I$ ہو۔

تعریف 7.5

ایک تفاعل $f(x)$ کو وقفہ I میں گھٹتا ہوا تفاعل اس وقت کہا جاتا ہے۔

اگر $a<b \Rightarrow f(a)\ge f(b), \forall a,b\in I$

تفاعل $f(x)=x$ پورے حقیقی خط میں ایک بڑھتا ہوا تفاعل ہے، جبکہ $f(x)=-x$ پورے حقیقی خط میں گھٹتا ہوا تفاعل ہے۔ مقامی طور پر دیا گیا تفاعل چند وقفے میں بڑھے گا، اور چند وقفے میں گھٹے گا، مثال کے طور پر تفاعل $f(x)=|x|$ ، $(-\infty,0]$ میں گھٹتا اور $[0,\infty)$ میں بڑھتا ہے۔ ایسے تفاعل ایک سری کو غور کرنے میں آسان ہیں۔ مگر جب اختیاری تفاعل دیا گیا ہے۔ تو اس کی ایک سری حقیقی خط کے ایک وقفہ میں ہم کیسے جانچ سکتے ہیں۔ جہاں، مندرجہ ذیل مسئلہ (ثبوت کے بغیر بیان کیا گیا) پر کارآمد ہوگا۔

مسئلہ 7.7

اگر کھلا وقفہ (a,b) میں ایک تفاعل $f(x)$ تفرقی ہوں تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ

(1) اگر

$$\frac{d}{dx}(f(x)) \ge 0, \forall x\in(a,b), \quad \ldots(1)$$

تو $f(x)$ وقفہ (a,b) میں بڑھتا ہے۔

(2) اگر

$$\frac{d}{dx}(f(x)) > 0, \forall x\in(a,b), \quad \ldots(2)$$

تو $f(x)$ وقفہ (a,b) میں سختی سے بڑھتا ہے۔

یہ مسئلہ 7.3 سے اوپر کے ثبوت پر غور کرسکتے ہیں۔

(3) وقفہ (a,b) میں $f(x)$ گھٹتا ہے۔ اگر

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 7_Differential Calculus.indd 32 28-02-2023 16:38:11

$$\frac{d}{dx}(f(x)) \leq 0, \forall x \in (a,b). \quad \ldots(3)$$

(4) وقفہ (a,b) میں $f(x)$ سختی سے گھٹتا ہے۔ اگر

$$\frac{d}{dx}(f(x)) < 0, \forall x \in (a,b). \quad \ldots(4)$$

ریمارک (Remark)

یہ بھی ضروری ہے کہ مندرجہ ذیل حقیقت پر غور کریں، یہ کہنا غلط ہوگا، کہ اگر I میں تفاعل $f(x)$ تفرقی ہوتو، سختی سے I بڑھتا ہے، تو $f'(x) > 0$ تمام $x \in I$ کے لئے، فرض کریں کہ $y = x^3, x \in (-\infty, \infty)$ ، $(-\infty, \infty)$ میں سختی سے بڑھتا ہے، اسے ثابت کرنے کے لئے فرض کریں $a > b$ تو ہمیں $f(a) > f(b)$ ثابت کرنا ہوگا۔ اس مقصد کے لئے ہمیں $a^3 - b^3 > 0$ ثابت کرنا ہوگا۔

اب،

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2) \\ &= (a-b)\frac{1}{2}(2a^2 + 2ab + 2b^2) \\ &= (a-b)\frac{1}{2}\left((a+b)^2 + a^2 + b^2\right) \end{aligned}$$

چونکہ، $a - b > 0$ بقیہ قوسین کے اندر دوسرے رقم > 0 ہیں۔

لہٰذا، یہ صاف ظاہر ہے دو درجی اظہار ہمیشہ مثبت ہوگا (یہ صفر کے مساوی ہوگا، اگر $a = b = 0$ جو $a < b$ شرط کے > 0 متضاد ہے) لہٰذا، تفاعل $y = x^3$ ، $(-\infty, \infty)$ میں سختی سے بڑھتا ہے، مگر $f'(x) = 3x^2$ جو صفر کے مساوی ہے $x = 0$ پر۔

تعریف 7.6

تفرقی تفاعل $f(x)$ کا ساکن نقطہ $(x_0, f(x_0))$ ہے۔ جہاں، $f'(x_0) = 0$ ہو۔

تعریف 7.7

تفاعل $f(x)$ کا فاصل نقطہ (Critical Point) $(x_0, f(x_0))$ ہے۔ جہاں، $f'(x_0) = 0$ یا واقع نہیں ہو۔

غور کیجئے (Note)

ہم کہہ سکتے ہیں کہ اگر (x,y) ساکن نقطہ یا فاصل نقطہ f کے لئے ہے۔ جہاں، f کے علاقے سے x ساکن عدد یا فاصل عدد کہلاتا ہے۔

ہر کوئی ساکن نقطہ فاصل نقطہ کہلائے گا۔ مگر تمام فاصل نقطے، ساکن نقطے ہونا ضروری نہیں ہے۔ اس کے لئے ایک مثال کے طور پر تفاعل $f(x) = |x - 17|$ کا فاصل نقطہ $(17,0)$ پر ہے۔ مگر $(17,0)$ ساکن نقطہ نہیں ہے۔ کیونکہ، $x = 17$ پر تفاعل تفرقی نہیں ہے۔

مثال 7.46

ثابت کرو کہ وقفہ $(2,7)$ میں تفاعل $f(x) = x^2 + 2$ سختی سے بڑھتا ہے، اور وقفہ $(-2,0)$ میں سختی سے گھٹتا ہے۔

حل

ہمارے پاس ہے،

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x > 0, \forall x \in (2,7) \quad \text{اور} \\ f'(x) &= 2x < 0, \forall x \in (-2,0) \end{aligned}$$

اور لہٰذا، ثبوت مکمل ہوا۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 7_Differential Calculus.indd 33 28-02-2023 16:38:20

مثال 7.47

ثابت کرو کہ وقفہ $(2,\infty)$ میں تفاعل $f(x)=x^2-2x-3$ سختی سے بڑھتا ہے۔

حل

چونکہ، $f(x)=x^2-2x-3$ ، $f'(x)=2x-2>0\ \forall\ x\in(2,\infty)$ ۔ لہٰذا، $f(x)$ وقفہ $(2,\infty)$ میں سختی سے بڑھتا ہے۔ ■

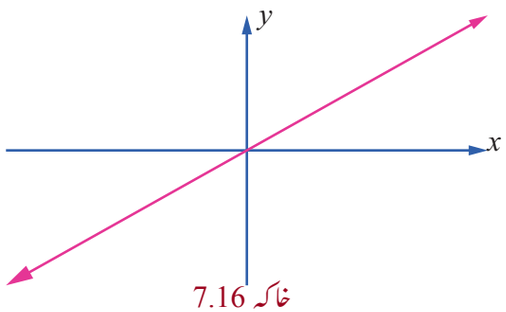
7.6.2 مطلق زیادتی اور کمی (Absolute maxima and minima)

مطلق زیادتی اور مطلق کمی کے حوالہ سے ایک وقفہ میں تفاعل کی بڑی سے بڑی یا چھوٹی سے چھوٹی قیمت کی وضاحت کی جاتی ہے۔

تعریف 7.8

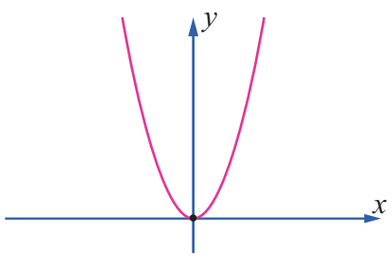
فرض کریں کہ علاقہ D میں تفاعل $f(x)$ کا عدد x_0 ہے۔ لئے، تو D میں $f(x)$ کی مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت $f(x_0)$ ہے۔ اگر $f(x_0)\geq f(x)\forall x\in D$ اور D میں $f(x)$ کی مطلق کم از کم قیمت $f(x_0)$ ہے، اگر $f(x_0)\leq f(x)\forall x\in D$ ۔

عام طور پر، اصل میں دیئے گئے وقفے میں مطلق زیادتی یا مطلق کمی کا ہونا تفاعل کے ذمے نہیں ہوگا۔ مندرجہ ذیل نقشہ سے دکھایا جاسکتا ہے کہ مسلسل تفاعل کی محدود کھلا وقفہ یا غیر محدود وقفے میں مطلق زیادتی یا مطلق کمی ہو بھی سکتی ہے یا نہیں بھی ہو سکتی ہے۔



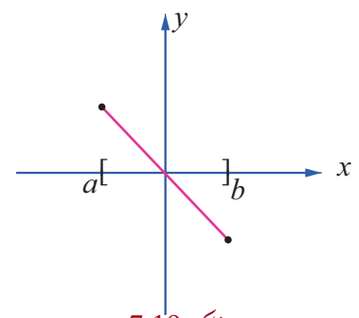
خاکہ 7.16

$(-\infty,\infty)$ میں $f(x)$ مطلق انتہائی نہیں ہوگی۔



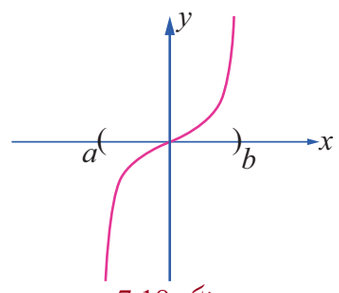
خاکہ 7.15

$(-\infty,\infty)$ میں $f(x)$ مطلق کمی مگر مطلق زیادتی نہیں ہوگی۔



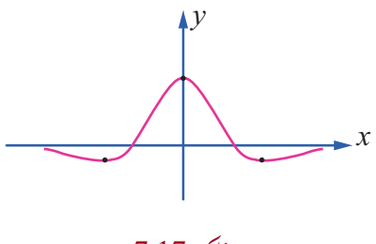
خاکہ 7.19

$[a,b]$ میں $f(x)$ کی مطلق زیادتی اور مطلق کمی ہے۔



خاکہ 7.18

(a,b) میں $f(x)$ کی مطلق انتہائی نہیں ہے۔



خاکہ 7.17

$(-\infty,\infty)$ میں $f(x)$ کی مطلق زیادتی اور مطلق کمی ہوگی۔

لیکن مندرجہ ذیل مسئلہ سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ مسلسل تفاعل کے ہر بند وقفہ میں مطلق زیادتی اور مطلق کمی دونوں کا ہونا ضروری ہے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 7_Differential Calculus.indd 34 28-02-2023 16:38:25

مسئلہ 7.8 انتہاء قیمت مسئلہ (Extreme Value Theorem)

اگر بند وقفے $[a,b]$ میں $f(x)$ مسلسل ہے تو $[a,b]$ میں f کی مطلق زیادتی اور مطلق کمی دونوں ہونگے۔

بند وقفہ $[a,b]$ کے آخری نقطوں میں یا کھلا وقفہ (a,b) کے اندر $f(x)$ کا مطلق انتہاء واقع ہوگا۔ اگر مطلق انتہاء اندر ہوں تو، تولازمی طور پر $f(x)$ کے فاصل اعداد پر واقع ہوگا۔ اس لئے ہم مندرجہ ذیل طریقہ سے بند وقفہ $[a,b]$ میں مسلسل تفاعل کے انتہاء مطلق کو معلوم کرنے میں استعمال کر سکتے ہیں۔

بند وقفہ $[a,b]$ میں مسلسل تفاعل $f(x)$ کے مطلق انتہاء کو معلوم کرنے کا طریقہ عمل یہ ہے۔

مرحلہ 1: (a,b) میں $f(x)$ کے فاصل اعداد معلوم کریں۔

مرحلہ 2: $f(x)$ کو تمام فاصل اعداد اور آخری نقطہ a اور b پر واضح کریں۔

مرحلہ 3 : مرحلہ 2 کی سب سے بڑی اور سب سے چھوٹی قیمت بند وقفہ $[a,b]$ میں $f(x)$ کی مطلق زیادہ اور مطلق کم قیمت ہوگی ۔

مثال 7.48

وقفہ $[-3,2]$ میں تفاعل $f(x)=2x^3+3x^2-12x$ کا مطلق زیادہ اور مطلق کم قیمتیں معلوم کرو۔

حل

دئے گئے تفاعل کو تفرق کرنے پر حاصل ہوگا۔

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2+6x-12 \\ &= 6(x^2+x-2) \\ f'(x) &= 6(x+2)(x-1) \end{aligned}$$

چونکہ، $f'(x)=0 \Rightarrow x=-2,1 \in (-3,2)$

لہٰذا، فاصل اعداد $x=-2,1$ ہیں۔ $f(x)$ کو آخری نقطے $x=-3,2$ اور فاصل اعداد $x=-2,1$ پر معلوم کرنے سے ہمیں $f(-3)=9$ ، $f(2)=4$ ، $f(-2)=20$ اور $f(1)=-7$ حاصل ہوگا۔

ان قیمتوں سے، $x=-2$ پر واقع مطلق زیادتی 20 ہے، اور $x=1$ پر واقع مطلق کمی -7 ہے۔

مثال 7.49

بند وقفہ $[0,2\pi]$ میں تفاعل $f(x)=3\cos x$ کی مطلق انتہاء معلوم کریں۔

حل

دئے گئے تفاعل کو تفرق کرنے پر، ہمیں $f'(x) = -3 \sin x$ حاصل ہوگا۔

یعنی، $f'(x)=0 \Rightarrow \sin x=0 \Rightarrow x=\pi \in (0,2\pi)$ کے آخری نقطے $x=0,2\pi$ پر اور فاصل عدد $x=\pi$ پر $f(x)$ کی تشخیص کرنے سے ہمیں $f(0)=3$ ، $f(2\pi)=3$ اور $f(\pi)=-3$ حاصل ہوگا۔

ان قیمتوں سے، $x=0,\ 2\pi$ پر واقع مطلق زیادتی 3 ہے اور $x=\pi$ پر واقع مطلق کمی -3 ہے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 7_Differential Calculus.indd 35 28-02-2023 16:38:32

7.6.3 وقفہ میں متعلق انتہاء (Relative Extrema on an Interval)

ایک تفاعل $f(x)$ کا متعلق زیادہ سے زیادہ x_0 پر ہے۔ اگر کھلے وقفہ ہے۔ جس میں x_0 موجود سب سے بڑی قیمت $f(x_0)$ ہے۔ اسی طرح، تفاعل $f(x)$ کا متعلق کم از کم x_0 پر ہے۔ اگر کھلے وقفہ ہے۔ جس میں x_0 موجود سب سے چھوٹی قیمت $f(x_0)$ ہے۔

ایک متعلق زیادہ سے زیادہ، لازمی نہیں کہ پورے علاقے میں بڑی قیمت ہو، جبکہ ایک متعلق کم از کم، لازمی نہیں کہ پورے علاقے میں کم قیمت ہو۔ لہٰذا، پورے علاقے میں ایک سے بڑھ کر متعلق زیادہ سے زیادہ اور متعلق کم از کم ہوسکتے ہیں۔

ایک تفاعل کا متعلق انتہاء اس تفاعل کی انتہاء قیمتیں (زیادہ سے زیادہ یا کم از کم) $f(x)$ کی تمام واضح قیمتوں میں سے ہیں۔

$\forall x \in I \subset D$ جہاں، I کھلا یا بند ہوسکتا ہے۔ مقامی طور پر تفاعل کی مقامی انتہاء قیمت اس کے فاصل عدد پر حاصل ہوتی ہے۔ غور کریں کہ تفاعل کا $x = c$ پر فاصل نقطہ ہے۔ جہاں، مقامی انتہاء قیمت نہیں ہے۔ مثلاً دونوں تفاعل $y = x^3$ اور $y = x^{\frac{1}{3}}$ کے پاس مبداء پر فاصل نقطے ہیں، مگر دونوں تفاعل کا مقامی انتہاء مبداء پر نہیں ہے۔

مسئلہ 7.9 (فرمٹ) (Fermat)

اگر $f(x)$ کا متعلق انتہاء $x = c$ پر ہوتو c ایک فاصل عدد ہے۔ بلا تبدیل تفاعل کے فاصل اعداد ہونگے جو $f'(x) = 0$ مساوات کے حل کے طور پر حاصل کئے جاتے ہیں۔ یا x کی قیمتوں کی طرح جہاں، $f'(x)$ واقع نہیں ہوتا۔

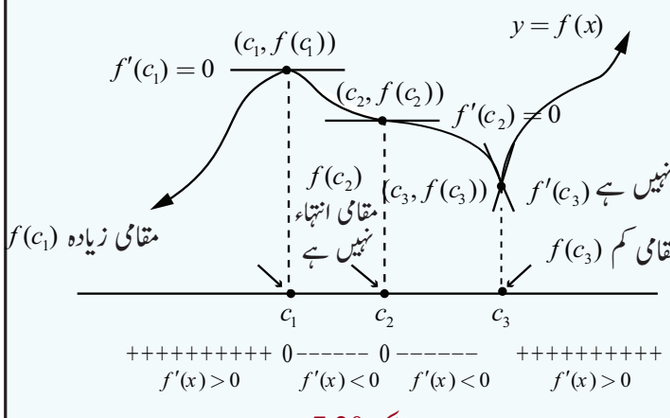
7.6.4 پہلے تفرقی جانچ کے استعمال سے انتہاء (Extrema using First Derivative Test)

وقفے جس میں تفاعل بڑھتے یا گھٹتے ہیں۔ معلوم کرنے کے بعد یہ مشکل نہیں تفاعل کا متعلق انتہاء دریافت کرنا۔ مقام یا نقطے جن پر $f(x)$ تفاعل کے متعلق انتہاء واقع ہوتے ہیں۔ $y = f(x)$ کی ترسیم سے انہیں دیکھا جاسکتا ہے۔ لیکن ٹھیک نقطہ اور تفاعلات کے انتہاء کی قیمت معلوم کرنے کے لئے ہمیں تفاعلات پر چند جانچ کا استعمال کرنا ہوگا۔ اسی طرح کا ایک جانچ، پہلا تفرقی جانچ ہے۔ جو کہ مندرجہ ذیل مسئلہ میں بیان کیا گیا ہے۔

مسئلہ 7.10 پہلا تفرقی جانچ (First Derivative Test)

فرض کریں کہ مسلسل تفاعل $f(x)$ کا فاصل نقطہ $(c, f(c))$ ہو، یعنی، تفاعل کُھلے وقفے I میں c موجود ہے۔ اگر $f(x)$ وقفے میں تفرقی ہے، c کے ممکن کے بغیر، تو $f(c)$ کو مندرجۂ ذیل کی طرح درجہ بندی کرسکتے ہیں۔

(جب بائیں سے دائیں جانب وقفہ I میں حرکت کریں۔)



خاکہ 7.20

(i) اگر $f(x)$ جو c پر منفی سے مثبت میں تبدیل ہوتو، $f(x)$ کی مقامی کمی $f(c)$ ہے۔

(ii) اگر $f'(x)$، c پر مثبت سے منفی میں تبدیل ہوتو، $f(x)$ کی مقامی زیادتی $f(c)$ ہے۔

(iii) اگر $f'(x)$، c پر دونوں جانب مثبت ہو یا c پر دونوں جانب منفی ہوتو، $f(c)$ نہ تو مقامی کمی ہوگی ہی نہ تو مقامی زیادتی ہے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 7_Differential Calculus.indd 36 28-02-2023 16:38:37

مثال 7.50

ایک سری کا وقفے معلوم کرو، اور لہذا، تفاعل $f(x)=x^2-4x+4$ کے لئے مقامی انتہاء معلوم کرو۔

حل

ہمارے پاس ہے

$$f(x)=(x-2)^2,$$ ہوتو،

$$f'(x)=2(x-2)=0 \quad \Rightarrow \quad x=2$$

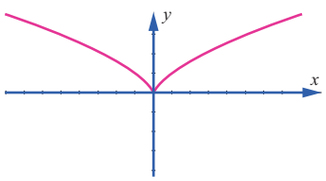
ایک سری کا وقفے $(-\infty,2)$ اور $(2,\infty)$ ہیں، چونکہ، $f'(x)<0$، تمام $x\in(-\infty,2)$ کے لئے تفاعل $f(x)$ ، $(-\infty,2)$ میں سختی سے گھٹتاہے۔ ایسے ہی $f'(x)>0$ تمام $x\in(2,\infty)$ کے لئے تفاعل $f(x)$ ، $(2,\infty)$ میں سختی بڑھتا ہے۔کیونکہ، تفاعل $f(x)$ میں جب $x=2$ سے گزرتا ہوتو تفاعل $f'(x)$ اس کے نشانی کو منفی سے مثبت میں تبدیل کرلیتا ہے۔ اسلئے اس کے پاس مقامی کمی $x=2$ پر ہوگی۔ اور مقامی کمی کی قیمت $f(2)=0$ ہے۔

مثال 7.51

ایک سری وقفے معلوم کرو۔ اور لہذا، تفاعل $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ کے لئے مقامی انتہاء معلوم کرو۔

حل

ہمارے پاس ہے $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ ہوتو $f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}$ ، $f'(x)\neq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$ اور $f'(x)$ ، $x=0$ پر واقع نہیں ہے۔ لہذا، کوئی ساکن نقطہ نہیں ہے مگر $x=0$ پر فاصل نقطہ ہے۔



خاکہ 7.21

وقفہ	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$ کی نشانی	$-$	$+$
	سختی سے گھٹتا	سختی سے بڑھتا
	ایک سری	

جدول 7.5

کیونکہ، $f'(x)$ کی نشانی کو منفی سے مثبت میں بدل لیتا ہے۔ $x=0$ سے گزرنے پر تفاعل $f(x)$ کے لئے $x=0$ پر اس کی مقامی کمی ہوگی اور مقامی کمی کی قیمت $f(0)=0$ ہے۔ غور کریں کہ مقامی کمی فاصل نقطے پر واقع ہے جو ساکن نقطہ نہیں ہے۔

مثال 7.52

ثابت کرو کہ تفاعل $f(x)=x-\sin x$ حقیقی خط میں بڑھتا ہے اور مقامی انتہاء کے وجود کے لئے بھی تبادلہ خیال کریں۔

حل

چونکہ، $f'(x)=1-\cos x\geq 0$ اور $x=2n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$ نقطوں پر صفر ہے، اور لہذا، تفاعل حقیقی خط میں بڑھتا ہے۔

چونکہ، $f'(x)$ میں نشانی کی کوئی تبدیلی نہیں ہے۔ $x=2n\pi$، $n\in\mathbb{Z}$ کے راہ سے گزرنے پر، پہلے تفرقی جانچ سے مقامی انتہاء نہیں ہے۔

مثال 7.53

تفاعل $f(x)=\log(1+x)-\frac{x}{1+x}, x>-1$ کی ایک سری اور مقامی انتہاءمعلوم کرو۔ اور لہذا، علاقہ معلوم کریں جہاں، $\log(1+x)>\frac{x}{1+x}$ ہے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 7_Differential Calculus.indd 37 28-02-2023 16:38:43

حل

ہمارے پاس ہے،

$$f(x) = \log(1+x) - \frac{x}{1+x}$$

چنانچہ، $$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{x}{(1+x)^2}.$$

لہٰذا،

$f'(x)$ ہے۔ $\begin{cases} <0 & \text{جب} \quad -1<x<0 \\ =0 & \text{جب} \quad x=0 \\ >0 & \text{جب} \quad x>0 \end{cases}$

لہٰذا، $f(x)$ ، $x>0$ کے لئے سختی سے بڑھتا ہے اور $x<0$ پر سختی سے گھٹتا ہے۔ چونکہ، $f'(x)$ اس کے نشانی کو $x=0$ سے گزرنے پر منفی سے مثبت میں بدل لیتا ہے۔پہلے تفرقی جانچ کہتا ہے کہ $x=0$ پر مقامی کمی ہے۔ جو کہ $f(0)=0$ ہے۔ اس کے بعد، $x>0$ کے لئے $f(x)>f(0)=0$ سے $(0,\infty)$ پر

$$\log(1+x) - \frac{x}{1+x} > 0 \Rightarrow \log(1+x) > \frac{x}{1+x}$$

■

مثال 7.54

تفاعل $f(x) = x\log x + 3x$ کے ایک سری وقفے اور مقامی انتہاء معلوم کرو۔

حل

دیا گیا تفاعل واضح ہے۔ اور یہ تمام $x \in (0,\infty)$ پر تفرقی ہے،

$$f(x) = x\log x + 3x.$$

لہٰذا، $$f'(x) = \log x + 1 + 3 = 4 + \log x$$

ساکن نقطہ سے دئے جاتے ہیں، $$4 + \log x = 0$$

یعنی، $$x = e^{-4}$$

لہٰذا، ایک سری وقفے $(0,e^{-4})$ اور (e^{-4},∞) ہیں۔

$x = e^{-5} \in (0,e^{-4})$ پر $f'(e^{-5}) = -1 < 0$ اور لہٰذا، وقفہ $(0,e^{-4})$ میں تفاعل سختی سے گھٹتا ہے۔

$x = e^{-3} \in (e^{-4},\infty)$ پر $f'(e^{-3}) = 1 > 0$ اور لہٰذا، وقفہ (e^{-4},∞) میں تفاعل سختی سے بڑھتا ہے۔ چونکہ، $f'(x)$ اس کے نشانی کو منفی سے مثبت میں $x = e^{-4}$ سے گزرنے پر بدل لیتا ہے۔ پہلا تفرقی جانچ کہتا ہے کہ $x = e^{-4}$ پر مقامی کمی ہوگی اور وہ $f(e^{-4}) = -e^{-4}$ ہے۔

■

مثال 7.55

تفاعل $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ کے لئے ایک سری وقفے اور مقامی انتہاء معلوم کریں۔

حل

دیا گیا تفاعل واضح ہے اور تمام $x \in (-\infty,\infty)$ پر تفرقی ہے۔ چونکہ،

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

ہمارے پاس ہے، $$f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 7_Differential Calculus.indd 38 28-02-2023 16:38:52

ساکن اعداد $\frac{-2x}{(1+x^2)^2} = 0$ سے دیے جاتے ہیں۔ یعنی، $x = 0$

لہٰذا، ایک سری وقفے $(-\infty, 0)$ اور $(0, \infty)$ ہیں۔

وقفہ $(-\infty, 0)$ پر تفاعل سختی سے بڑھتا ہے، کیونکہ وقفہ میں $f'(x) > 0$ واقع ہے۔

$(0, \infty)$ میں تفاعل $f(x)$ سختی سے گھٹتا ہے، کیونکہ، اس وقفہ میں $f'(x) < 0$ واقع ہے، چونکہ، $f'(x)$ اس کی نشانی کو مثبت سے منفی میں $x = 0$ سے گزرنے پر بدل لیتا ہے۔ پہلے تفرقی جانچ سے مقامی زیادتی $x = 0$ پر ہے، اور مقامی زیادتی کی قیمت $f(0) = 1$ ہے۔

مثال 7.56

تفاعل $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ تفاعل کی ایک سری اور مقامی انتہاء معلوم کرو۔

حل

دیا گیا تفاعل واضح ہے اور تمام $x \in (-\infty, \infty)$ پر تفرقی ہے۔

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2},$$

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

$1 - x^2 = 0$ سے ساکن اعداد دیے جاتے ہیں۔ یعنی، $x = \pm 1$ ہے۔

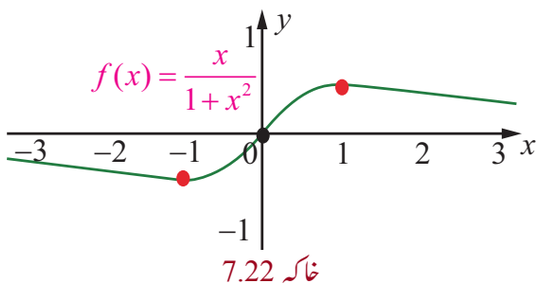
لہٰذا، ایک سری وقفے $(-\infty, -1)$، $(-1, 1)$ اور $(1, \infty)$ ہیں۔

وقفہ	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$ کی نشانی	−	+	−
ایک سری	سختی سے گھٹتا	سختی سے بڑھتا	سختی سے گھٹتا

جدول 7.6

لہٰذا، $f(x)$ وقفہ $(-\infty, -1)$ اور $(1, \infty)$ میں سختی سے بڑھتا اور $(-1, 1)$ میں سختی سے گھٹتا ہے۔

چونکہ، $f'(x)$ اس کی نشانی کو $x = -1$ سے گزرنے پر منفی سے مثبت میں بدل لیتا ہے۔ پہلا تفرقی جانچ کہتا ہے، کہ $x = -1$ پر مقامی کمی ہے، اور مقامی کم قیمت $f(-1) = -\frac{1}{2}$ ہے۔ چونکہ $f'(x)$ اس کے نشانی کو $x = 1$ سے گزرنے پر مثبت سے منفی میں بدل لیتا ہے۔ پہلا تفرقی جانچ کہتا ہے کہ $x = 1$ پر مقامی زیادتی ہے اور مقامی زیادتی قیمت $f(1) = \frac{1}{2}$ ہے۔



خاکہ 7.22

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 7_Differential Calculus.indd 39 28-02-2023 16:38:58

مشق 7.6

1. دیئے گئے بند وقفے میں مندرجہ ذیل تفاعل کی مطلق انتہاء معلوم کرو۔

(i) $f(x)=x^2-12x+10$; $[1,7]$ (ii) $f(x)=3x^4-4x^3$; $[-1,2]$

(iii) $f(x)=6x^{\frac{4}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}$; $[-1,1]$ (iv) $f(x)=2\cos x+\sin 2x$; $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

2. مندرجہ ذیل تفاعلوں کے لئے ایک سری وقفے اور لہذا، مقامی انتہاء معلوم کرو۔

(i) $f(x)=2x^3+3x^2-12x$ (ii) $f(x)=\frac{x}{x-5}$

(iii) $f(x)=\frac{e^x}{1-e^x}$ (iv) $f(x)=\frac{x^3}{3}-\log x$

(v) $f(x)=\sin x\cos x+5,\ x\in(0,2\pi)$

OFWQ9

7.7 دوسرے تفرقی کے استعمالات (Applications of Second Derivative)

تفاعل کے دوسرے تفرقی کو استعمال کرکے مقعری، محدبی، مڑنے کے نقطے اور تفاعل کے مقامی انتہاء معلوم کرسکتے ہیں۔

7.7.1 مقعری، محدبی اور مڑنے کے نقاط (Concavity, Convexity, and Points of Inflection)



خاکہ 7.23

ایک ترسیم ایک نقطہ پر مقعر نیچے (محدب اوپر) کہا جاتا ہے۔ اگر مماسِ خط ترسیم کے اوپر نقطہ کے آس پاس سے گزرتا ہے۔ جیسے ہی مقعر اوپر (محدب نیچے) کہا جاتا ہے۔ اگر مماس خط اس نقطہ پر ترسیم کے نیچے سے نقطہ کے آس پاس سے گزرتا ہے۔ جس کو ملحق ترسیم کے ذریعے آسانی سے غور کرسکتے ہیں۔

تعریف 7.8

فرض کریں کہ تفاعل $f(x)$ کا دوسرا تفرقی $I=(a,b)$ کھلے وقفہ میں واقع ہے، تو وہ تفاعل $f(x)$ کہا جائے گا۔

(i) اگر $f'(x)$، I میں سختی سے بڑھتا ہو تو وہ تفاعل کھلے وقفے I میں مقعر اوپر ہوگا۔

(ii) اگر $f'(x)$ سخت گھٹتی I میں سختی سے گھٹتا، تو وہ تفاعل کھلے وقفے I میں مقعر نیچے ہوگا۔

تحلیلی طور پر دیئے گئے تفرقی تفاعل جس کی ترسیم $y=f(x)$ ہوتو، مقعری مندرجہ ذیل نتیجہ سے دی گئی ہے۔

مسئلہ 7.11 (مقعری کے لئے جانچ) (Test of Concavity)

(i) اگر $f''(x)>0$ کھلے وقفے I میں ہوتو، I میں $f(x)$ مقعر اوپر ہوگا۔

(ii) اگر $f''(x)<0$ کھلے وقفے I میں ہوتو، I میں $f(x)$ مقعر نیچے ہوگا۔

ریمارک (Remark)

(1) $[a,b]$ وقفہ میں واضح مقعر اوپر تفاعل کا مقامی زیادتی اس کا مطلق زیادتی اس وقفہ میں ہوگا۔

(2) $[a,b]$ وقفہ میں واضح محدب نیچے تفاعل کا مقامی کمی اس کا مطلق کمی اس وقفہ میں ہوگا۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 7_Differential Calculus.indd 40 28-02-2023 16:39:05

(3) یہاں، صرف ایک مطلق زیادہ (اور ایک مطلق کم) ہے۔ مگر یہاں ایک سے زیادہ مقامی زیادتی اور کمی ہوسکتے ہیں۔

مڑنے کے نقاط (Points of Inflection)

تعریف 7.9

وہ نقاط جہاں تفاعل کی ترسیم *"مقعر اوپر سے مقعر نیچے"* یا *"مقعر نیچے سے مقعر اُوپر"* میں تبدیل ہوتی ہے، $f(x)$ *کے مڑنے کے نقاط* کہلاتے ہیں۔

مسئلہ 7.12 (مڑنے کے نقاط کے لئے جانچ) (Test for Points of Inflection)

(i) اگر $f''(c)$ واقع ہے، اور $f''(c)$ ، $x=c$ سے گزرنے پر نشانی بدلے، تو نقطہ $(c, f(c))$ ترسیم f کے مڑنے کا نقطہ ہے۔

(ii) اگر $f''(c)$ مڑنے کے نقطہ پر واقع ہوتو، $f''(c)=0$ ہوگا۔

ریمارک (Remark)

منحنی $y=f(x)$ پر مڑنے کے نقطوں کا مقام جاننا ہوتو ضروری ہے کہ نقطے معلوم کریں، جہاں $f''(x)$ نشانی تبدیل کرتا ہے۔ 'ہموار' منحنیوں (تیز کونے نہیں) میں یہ واقع ہوتا ہے جب یا تو۔

(i) $f''(x)=0$ یا

(ii) $f''(x)$ اس نقطہ پر غیر واقع ہو۔

ریمارک (Remark)

(1) یہ بھی ممکن ہے کہ $f''(c)$ غیر واقع ہو، مگر $(c, f(c))$ مڑنے کا نقطہ ہوسکتا ہے اس کے لئے مثال، $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ ، $c=0$ پر۔

(2) یہ بھی ممکن ہے کہ نقطہ پر $f''(c)=0$ ہو، مگر $(c, f(c))$ مڑنے کا نقطہ ہونا ضروری نہیں ہے۔ اس کے لئے مثال $f(x)=x^4$ $c=0$ پر۔

(3) مڑنے کا نقطہ ساکن نقطہ ہونا ضروری نہیں ہے۔ اس کے لئے مثال $f(x)=\sin x$ تو $f'(x)=\cos x$ اور $f''(x)=-\sin x$ اور لہٰذا، $(\pi, 0)$ مڑنے کا نقطہ ہے۔ مگر $f(x)$ کا ساکن نقطہ نہیں۔

مثال 7.57

منحنی $f(x)=(x-1)^3\cdot(x-5)$ ، $x\in\mathbb{R}$ کے لئے مقعری وقفے معلوم کرو اور مڑنے کے نقاط بھی معلوم کریں، اگر کوئی ہوں۔

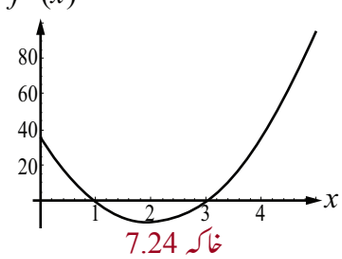
حل

دیا گیا تفاعل درجہ 4 کا ایک کثیر رقمی ہے، اب ،

$$f'(x)=(x-1)^3+3(x-1)^2\cdot(x-5)$$
$$=4(x-1)^2\cdot(x-4)$$
$$f''(x)=4((x-1)^2+2(x-1)\cdot(x-4))$$
$$=12(x-1)\cdot(x-3)$$

اب ،

$$f''(x)=0 \Rightarrow x=1, x=3 .$$



خاکہ 7.24

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 7_Differential Calculus.indd 41 28-02-2023 16:39:13

مقعری وقفے مندرجۂ ذیل جدول 7.7 میں دئے گئے ہیں۔

وقفہ	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
$f''(x)$ کی نشانی	+	−	+
	مقعر اُوپر	مقعر نیچے	مقعر اُوپر

جدول 7.7

منحنی $(-\infty,1)$ اور $(3,\infty)$ میں مقعر اوپری ہے۔

منحنی $(1,3)$ میں مقعر نیچے ہے۔

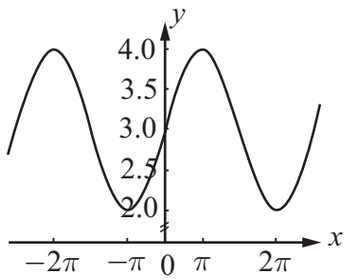
یوں $f''(x)$ اس کی نشانی کو $x=1$ اور $x=3$ سے گزرنے پر بدل لیتا ہے۔ $(1, f(1)) = (1,0)$ اور $(3, f(3)) = (3,-16)$ ترسیم $y = f(x)$ کے مڑنے کے نقطے ہیں، منحنی $f''(x)$ کے نقشے سے ہم غور کرسکتے ہیں کہ نشانی میں تبدیلی واقع ہے۔

مثال 7.58

منحنی $y = 3 + \sin x$ کے مقعری وقفے جانچئے۔

حل

دیا گیا تفاعل، دوری تفاعل ہے جس کا دور 2π ہے۔ اور لہٰذا، اس کے لئے ہر ایک دوری وقفہ میں ساکن نقطے اور مڑنے کے نقطے ہونگے۔



خاکہ 7.25

ہمارے پاس، $\frac{dy}{dx} = \cos x$ اور $\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x$

اب، $\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x = 0 \Rightarrow x = n\pi$

اب ہم فرض کریں کہ وقفہ $(-\pi,\pi)$ کو $(-\pi,0)$ اور $(0,\pi)$ میں ٹکڑے کریں۔

$(-\pi,0)$ وقفے میں، $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ اور لہٰذا، تفاعل مقعر اوپر ہے ۔

$(0,\pi)$ وقفے میں، $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ اور لہٰذا، تفاعل مقعر نیچے ہے۔ لہٰذا، $(0,3)$ مڑنے کا نقطہ ہے، (نقشہ 7.25 دیکھئے) منحنی کے مقعر پر بحث کے لئے عام وقفوں کو غور کرنا ضروری نہیں۔ $(n\pi,(n+1)\pi)$ جس میں n کوئی سالم عدد ہے، جس پر بحث جیسا پہلے کہ کیا گیا ہے یہ نتیجہ پر آتے ہیں کہ $(n\pi,3)$ بھی مڑنے کے نقطے ہیں۔ ■

7.7.2 دوسرے تفرقی جانچ کے استعمال سے انتہائیاں (Extrema using Second Derivative Test)

دوسرا تفرقی جانچ : دوسرا تفرقی جانچ فاصل نقطے، انتہاء قیمتیں اور مقعر کو ملاتا ہے، جو بہت ضروری آلہ ہے جس سے تفاعل کی ترسیم کے فاصل نقطے متعلق زیادہ یا متعلق کم ہیں جان سکتے ہیں۔

مسئلہ 7.13 دوسرا تفرقی جانچ (The Second Derivative Test)

فرض کریں کہ c فاصل نقطہ ہے، جہاں پر $f'(c) = 0$ ہے، یوں $f'(x)$ ، c کے ہمسایہ میں واقع ہے اور $f''(c)$ واقع ہے۔ تو f کی متعلق زیادہ قیمت c پر ہے، اگر $f''(c) < 0$ اور متعلق کم قیمت c پر ہے، اگر $f''(c) > 0$. اگر $f''(c) = 0$ ، جانچ غیر معلوماتی ہے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 7_Differential Calculus.indd 42 28-02-2023 16:39:21

مثال 7.59

تفاعل $f(x) = x^4 + 32x$ کے مقامی انتہاء معلوم کرو۔

حل

ہمارے پاس،

$$f'(x) = 4x^3 + 32 = 0 \quad \text{جس سے} \quad x^3 = -8$$
$$\Rightarrow x = -2$$
$$\text{اور} \quad f''(x) = 12x^2$$

چونکہ، $f''(-2) > 0$، تو $x = -2$ پر تفاعل کا مقامی کم ہے اور مقامی کمی کی قیمت $f(-2) = -48$ ہے۔ لہٰذا، انتہاء نقطہ $(-2, -48)$ ہے۔

مثال 7.60

تفاعل $f(x) = 4x^6 - 6x^4$ کے مقامی انتہاء معلوم کرو۔

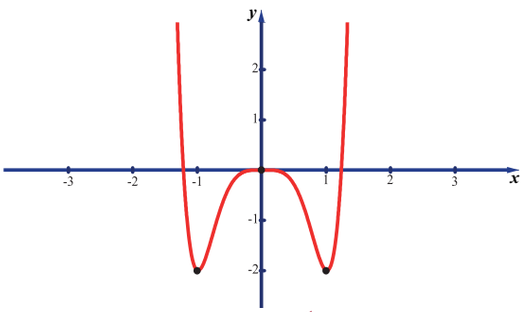
حل

x کے لحاظ سے تفرقی کرنے پر، ہمیں حاصل ہو گا،

$$f'(x) = 24x^5 - 24x^3$$
$$= 24x^3(x^2 - 1)$$
$$= 24x^3(x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1, 0, 1$$

لہٰذا، فاصل اعداد $x = -1, 0, 1$ ہیں۔



خاکہ 7.26

اب،

$$f''(x) = 120x^4 - 72x^2 = 24x^2(5x^2 - 3)$$
$$\Rightarrow f''(-1) = 48,\ f''(0) = 0,\ f''(1) = 48$$

چونکہ $f''(-1)$ اور $f''(1)$ مثبت ہیں، دوسرے تفرقی جانچ سے، تفاعل $f(x)$ کا مقامی کم ہے۔ مگر $x = 0$ پر، $f''(0) = 0$ یعنی، دوسرا تفرقی جانچ ہمیں $x = 0$ پر مقامی انتہاء کے لئے کوئی معلومات نہیں دے گا۔ لہٰذا، ہمیں پہلے تفرقی جانچ کو جانا ضروری ہے۔ ایک سری وقفے جدول 7.8 میں دئے گئے ہیں۔

وقفہ	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$ کی نشانی	−	+	−	+
ایک سری	سختی سے گھٹتا ہے۔	سختی سے بڑھتا ہے۔	سختی سے گھٹتا ہے۔	سختی سے بڑھتا ہے۔

جدول 7.8

پہلے تفرقی جانچ سے $f(x)$ کا مقامی کم $x = -1$ پر ہے۔ اور مقامی کمی کی قیمت -2 ہے۔ $x = 0$ پر، تفاعل $f(x)$ کی مقامی زیادتی $x = 0$ پر اور اس کی زیادہ قیمت 0 ہے۔ $x = 1$ پر، تفاعل $f(x)$ کی مقامی کمی $x = 1$ پر اور اس کی کم قیمت -2 ہے۔

ریمارک (Remark)

جب دوسرا تفرقی جانچ کے معدوم ہوجاتا ہے۔ ہمیں انتہاء کے بارے میں معلومات نہیں ملتے ہم پہلے تفرقی جانچ کے استعمال سے تفاعل کے انتہاء قیمتیں معلوم کرسکتے ہیں۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 7_Differential Calculus.indd 43 28-02-2023 16:39:29

مثال 7.61

$x+y=10$ خط پر تفاعل x^2y^2 کی مقامی زیادتی اور کمی معلوم کرو۔

حل

دیئے گئے تفاعل $f(x)=x^2(10-x)^2$ کو اس طرح لکھ سکتے ہیں۔ اب،

$$f(x) = x^2(100-20x+x^2) = x^4-20x^3+100x^2$$

لہٰذا، $f'(x) = 4x^3-60x^2+200x = 4x(x^2-15x+50)$

$$f'(x) = 4x(x^2-15x+50)=0 \Rightarrow x=0,\ 5,\ 10$$

اور $f''(x) = 12x^2-120x+200$

$f(x)$ کے ساکن اعداد $x=0,\ 5,\ 10$ ہیں۔ ان نقطوں پر $f''(x)$ کی قیمتیں بالترتیب 200، -100 اور 200 ہیں۔ $x=0$ پر، اس کی مقامی کمی ہے اس کی قیمت $f(0)=0$ ہے۔ $x=5$ پر، اس کی مقامی زیادتی ہے اور اس کی قیمت $f(5)=625$ ہے۔ $x=10$ پر اس کی مقامی کمی ہے اور اس کی قیمت $f(10)=0$ ہے۔ ■

مشق 7.7

1. مندرجہ ذیل تفاعلوں کے مقعر وقفے اور مڑنے کے نقطے معلوم کرو:

(i) $f(x)=x(x-4)^3$ (ii) $f(x)=\sin x+\cos x,\ 0<x<2\pi$ (iii) $f(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$

2. دوسرے تفرقی جانچ کے استعمال سے مندرجہ ذیل تفاعلوں کے مقامی انتہاء معلوم کرو:

(i) $f(x)=-3x^5+5x^3$ (ii) $f(x)=x\log x$ (iii) $f(x)=x^2e^{-2x}$

3. تفاعل $f(x)=4x^3+3x^2-6x+1$ کے لئے ایک سری کے وقفے، مقامی انتہاء، مقعری کے وقفے اور مڑنے کے نقطے معلوم کرو۔

7.8 اصلاح میں استعمالات (Applications in Optimization)



اصلاح (چاہے زیادہ سے زیادہ یا کم سے کم) چند شرائط کے اندر انتہاء قیمت معلوم کرنے کا عمل ہے۔

اصلاحی حسابوں کو حل کرنے یا انتہاء معلوم کرنے کا طریقہ کار۔

مرحلہ 1: ایک مناسب شکل کو بنائیں اور اس کو حساب کے تعلقی مقداروں سے نشان کریں۔

مرحلہ 2: مقدار جس کو زیادہ سے زیادہ یا کم سے کم کرنا ہو اس کا اظہار معلوم کریں۔

مرحلہ 3: دیئے گئے حساب کے شرطوں کے استعمال سے مقدار کو انتہاء بنائیں۔

مرحلہ 4: حساب میں دیئے گئے شرائط سے متغیر کی ممکن قیمتوں والے وقفے معلوم کریں۔

مرحلہ 5: انتہاء کے طریقہ عمل کے استعمال سے (مطلق انتہاء، پہلا تفرقی جانچ (یا) دوسرا تفرقی جانچ) زیادہ سے زیادہ یا کم سے کم حاصل کریں۔

مثال 7.62

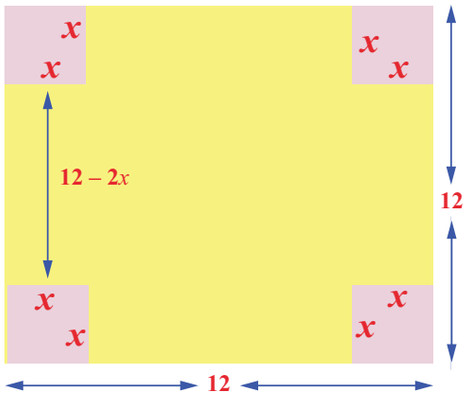
ہمارے پاس 12 اکائی مربع نما باریک مواد کا ٹکڑا ہے۔ ہمارے مواد کے چار کناروں سے چھوٹے مربعوں کو تراش کر ایک کھلا ڈبہ کناروں کو اوپر کی طرف موڑ کر بنانا ہے۔ سوال یہ ہے کہ، کونسا تراش زیادہ سے زیادہ حجم والا ڈبہ دے گا؟

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 7_Differential Calculus.indd 44 28-02-2023 16:39:36

حل

فرض کریں کہ ، x = چھوٹے مربعے کے ہر ایک ضلع کی کے ٹکڑے لمبائی

V = موڑے ہوئے ڈبہ کا حجم



خاکہ 7.27

x، ناپ کے ہر ایک کنارے کے دوٹکڑے کرنے کے بعد قائدہ کی لمبائی $12-2x$ ہے، موڑنے کے بعد ڈبے کی گہرائی x ہے، لہٰذا، حجم $V = x\times(12-2x)^2$ ہے۔ غور کریں کہ جب $x = 0$ یا 6 ہوں تو حجم صفر ہوگا۔ اور لہٰذا، اس سے ڈبہ نہیں بنے گا۔ لہٰذا، مسئلہ سے $V = x\times(12-2x)^2, x\in(0,6)$ کو بڑھانے کا ہے۔

اب، $\dfrac{dV}{dx} = (12-2x)^2 - 4x(12-2x)$

$= (12-2x)(12-6x)$.

$\dfrac{dV}{dx}=0$ ساکن اعداد $x = 2, 6$ دیتا ہے۔ چونکہ، $6\notin(0,6)$ اس لئے صرف ایک ساکن عدد $x = 2\in(0,6)$ ہے۔ مزید، $\dfrac{dV}{dx}$ اس کی نشانی کو مثبت سے منفی میں $x=2$ سے گزرنے پر بدل لیتا ہے۔ لہٰذا، $x=2$ پر مقامی زیادہ حجم V ہے۔ مقامی زیادہ حجم کی قیمت اکائیاں $V=128$ ہیں۔ لہٰذا، زیادہ سے زیادہ تراش صرف 2 اکائیوں کا ہوسکتا ہے۔

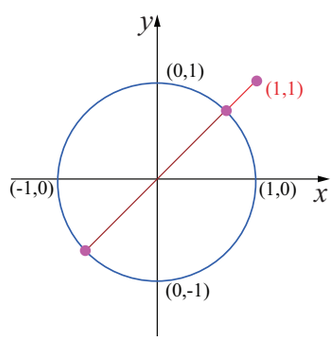
مثال 7.63

اکائی دائرہ $x^2+y^2=1$ پر $(1,1)$ سے دور اور قریبی نقطے معلوم کرو۔

حل

$(1,1)$ سے کوئی نقطہ (x,y) کے درمیان فاصلہ $d=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$، d کی انتہاء کے بجائے، سہولت کے لئے $D=d^2=(x-1)^2+(y-1)^2$ کو شرط $x^2+y^2=1$ سے ہم انتہاء کریں گے۔ اب، $\dfrac{dD}{dx}=2(x-1)+2(y-1)\times\dfrac{dy}{dx}$

جہاں، x کے لحاظ سے $x^2+y^2=1$ کو تفرقی کرکے $\dfrac{dy}{dx}$ محسوب کرسکتے ہیں۔ لہٰذا، ہمیں $2x+2y\dfrac{dy}{dx}=0$ حاصل ہوتا ہے جس سے $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$ ملتا ہے۔



خاکہ 7.28

اسے درج کرنے پر، ہمیں $\dfrac{dD}{dx}=2(x-1)+2(y-1)\left(-\dfrac{x}{y}\right)$ حاصل ہوگا،

$=\dfrac{2[xy-y-xy+x]}{y}$

$\dfrac{dD}{dx}=2\left[\dfrac{x-y}{y}\right]=0$

$\Rightarrow x=y$

چونکہ (x,y) دائرہ $x^2+y^2=1$ پر واقع ہے۔ جو ہمیں $2x^2=1$ دیتا ہے۔ اور جس سے $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ حاصل ہے۔ لہٰذا، نقطے جہاں پر انتہائی فاصلے واقع ہوتے ہیں، وہ $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$، $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ہیں۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 7_Differential Calculus.indd 45 28-02-2023 16:39:44

انتہاء کو معلوم کرنے کے لئے ، تفرق کے دوسرے جانچ کو اپنانے پر ہمیں،

$$\frac{d^2D}{dx^2} = 2\frac{y^2+x^2}{y^3}.$$

$\left(\frac{d^2D}{dx^2}\right)_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} > 0$; $\left(\frac{d^2D}{dx^2}\right)_{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} < 0$ کی قیمت

اس سے، قریبی اور دوری نقطے بالترتیب $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ اور $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ہیں ۔

لہٰذا، قریبی اور دوری فاصلے بالترتیب $\sqrt{2}-1$ اور $\sqrt{2}+1$ ہیں۔

مثال 7.64

ایک فولاد کی کمپنی ایک دن میں کم درجے کی فولاد x ٹن اور اونچی درجے کی فولاد y ٹن تیار کرنے کے قابل ہے۔ جہاں، $y = \frac{40-5x}{10-x}$ ہے۔ اگر کم درجے فولاد کی مارکیٹ قیمت بخوبی اونچی درجے فولاد کی بہ نسبت آدھی ہے، کم درجے کی فولاد اور اونچی درجے کی فولاد کے پیداوار کی اصلاح سے زیادہ سے زیادہ محصول کی کیا امید ہے۔

حل

فرض کریں کہ کم درجے کی فولاد کی قیمت فی ٹن ₹p ہے۔جبکہ اونچی درجے کی فولاد کی قیمت فی ٹن ₹$2p$ ہے۔

کُل محصول فی دن کے لئے دیا گیا ہے، $R = px+2py = px+2p\left(\frac{40-5x}{10-x}\right)$ ہے۔ لہٰذا، ہمارا مسئلہ R کو زیادہ سے زیادہ کرنا ہے۔ اب R کو مختصر کرنے اور x کے لحاظ سے تفرق کرنے پر حاصل ہوتا ہے۔

$$R = p\left(\frac{80-x^2}{10-x}\right)$$

$$\frac{dR}{dx} = p\left(\frac{x^2-20x+80}{(10-x)^2}\right)$$

$$\frac{d^2R}{dx^2} = -\frac{40p}{(10-x)^3}$$

اب $\frac{dR}{dx} = 0 \Rightarrow x^2-20x+80 = 0$

اور لہٰذا، $x = 10\pm 2\sqrt{5}$

$x = 10-2\sqrt{5}$ پر $\frac{d^2R}{dx^2} < 0$ اور لہٰذا، R زیادہ سے زیادہ ہوگا۔ اگر $x = 10-2\sqrt{5}$ ہوتو، $y = 5-\sqrt{5}$ ہے۔ لہٰذا، ایک دن میں فولاد کی کمپنی کم درجے اور اونچے درجے کی فولاد کو بالترتیب پیدا کرسکتی ہے۔

$10-2\sqrt{5}$ اور $5-\sqrt{5}$.

مثال 7.65

ثابت کریں کہ .دئے گئے رقبہ کے تمام مستطیلوں کے درمیان کم سے کم احاطہ مربع کا ہے۔

حل

فرض کریں کہ x, y مستطیل کے ضلع ہیں ۔ لہٰذا، مستطیل کا رقبہ $xy = k$ ہے۔ (دیا گیا ہے) اور مستطیل کا احاطہ P، $2(x+y)$ ہے۔ مسئلہ $2(x+y)$ کو کم کرنا ہے، اس شرط پر کہ $xy = k$ ہو۔ فرض کریں $P(x) = 2\left(x+\frac{k}{x}\right)$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 7_Differential Calculus.indd 46 28-02-2023 16:39:50

$$P'(x) = 2\left(1-\frac{k}{x^2}\right)$$

$$P'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{k}\,.$$

چونکہ x، y مستطیل کے ضلع ہیں۔ $x = \sqrt{k}$ فاصل عدد ہے۔

اب، $P''(x) = \frac{4k}{x^3}$ اور $P''(\sqrt{k}) > 0 \Rightarrow$ پر ہے $x = \sqrt{k}$ کی کم قیمت $P(x)$

$x = \sqrt{k}$ کو $xy = k$ میں درج کرنے پر ہمیں $y = \sqrt{k}$ حاصل ہوتا ہے۔ لہٰذا، دئے گئے رقبہ کا کم احاطہ والا مستطیل مربع ہے۔ ■

مشق 7.8

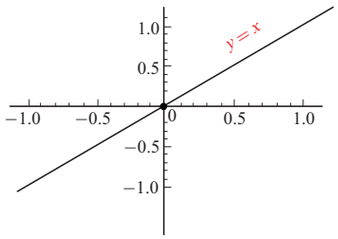
1. دو مثبت اعداد معلوم کریں جن کا حاصل جمع 12 اور حاصل ضرب زیادہ سے زیادہ ہو۔
2. دومثبت اعداد معلوم کریں جن کا حاصل ضرب 20 اور حاصل جمع کم سے کم ہو۔
3. $x^2 + y^2$ کی ممکن چھوٹی قیمت معلوم کریں دیا گیا ہے۔ $x + y = 10$
4. ایک باغ کو مستطیل رقبہ میں بچھانا ہے، اور اس کو رسّی سے باڑلگا کر حفاظت کرنا ہے۔ 40 میٹر رسّی سے باغ کو باڑ لگانے کے لئے سب سے بڑا
   ممکن رقبہ معلوم کرو۔
5. ایک مستطیلی صفحہ میں 24 مربع سمر کو پرنٹ کرنا ہے۔ اُوپر اور نیچے 1.5 سمر مارجن اور بقیہ دونوں جانب 1 سمر مارجن رکھا گیا ہے۔ صفحہ کے ابعاد کیا ہونگے اگر استعمال کردہ کاغذ کا رقبہ کم سے کم ہو۔
6. ایک کسان ندی کے کنارے مستطیلی چرواہ گاہ بنانے کا منصوبہ کرتا ہے۔ چرواہوں کو کافی گھاس مہیا کرنے کے لئے چراگاہ کا 1,80,000 مربع میٹر پر مشتمل ہونا ضروری ہے۔ ندی کے طرف باڑ لگانے کی ضرورت نہیں ہے۔ باڑ لگانے والے مواد کی کم سے کم درکار لمبائی کیا ہوگی۔
7. زیادہ سے زیادہ رقبے کے ساتھ مستطیل کے ابعاد کو تلاش کریں جس کو 10 سمر نصف قطر والے دائرہ میں کندہ کیا جاسکتا ہے۔
8. ثابت کرو کہ دئے گئے احاطہ کے تمام مستطیلوں میں مربع کا زیادہ سے زیادہ رقبہ ہے۔
9. سب سے بڑے مستطیل کے ابعاد معلوم کریں جس کو r نصف قطر والے نصف دائرے میں کندہ کیا جاسکتا ہے۔
10. ایک کاریگر کہ ایک کُھلا ڈبہ ڈیزائن کرنا چاہتا ہے۔ جس کا قائدہ مربع اور طرفی سطحی رقبہ 108 مربع سمر ہو۔زیادہ سے زیادہ حجم والے ڈبہ کے لئے ابعاد معلوم کریں۔
11. استوانے کا حجم معلوم کرنے کا ضابطہ $V = \pi r^2 h$ دیا گیا ہے۔ اگر $r + h = 6$ ہوتو حجم V کی بڑی سے بڑی اور چھوٹی سے چھوٹی قیمت معلوم کریں۔
12. ایک کھوکھلا مخروط جس کا نصف قطر a سمر اور اونچائی b سمر ہے (ٹیبل) میز پر رکھا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ سب سے بڑے استوانہ کا حجم جسے نیچے چھپایا جاسکتا ہے مخروط کے حجم کا $\frac{4}{9}$ ویں بار ہے۔

7.9 تشاکل اور متقارب (Symmetry and Asymptotes)

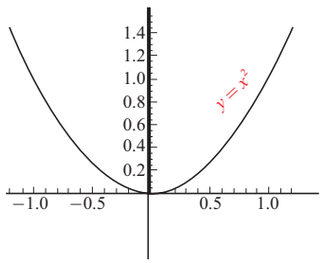
7.9.1 تشاکل (Symmetry)

مندرجہ ذیل منحنیوں کو غور کریں۔ جن کے ہر ایک میں چند مخصوص خصوصیات پائے جاتے ہیں ۔ نقطہ کے لحاظ سے، خط کے لحاظ سے تشاکل کہلاتے ہیں۔

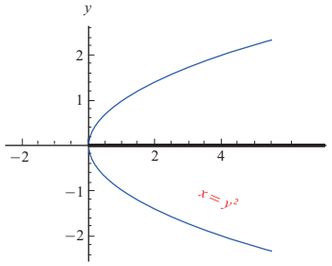
12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 7_Differential Calculus.indd 47 28-02-2023 16:39:53



خاکہ 7.29



خاکہ 7.30



خاکہ 7.31

ہم رسمی طور پر تشاکل کی تعارف مندرجہ ذیل سے کریں گے۔

اگر کوئی شکل یا منحنی دوسرے شکل سے خط کے لحاظ سے آئینہ کی عکاسی ہے تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ وہ شکل یا منحنی خط کے لحاظ سے تشاکل ہے۔ اس خط کو تشاکل کا خط کہا جاتا ہے۔

ایک منحنی نقطے کے لحاظ سے θ زاویہ گردشی تشاکل کہا جائیگا اگر نقطہ کے لحاظ سے θ زاویہ گردش کرنے پر منحنی میں تبدیلی نہ ہو۔

ایک منحنی کئی خطوں کے لحاظ سے تشاکل ہوسکتی ہے۔ خاص طور پر ہم، محدد محوروں کے لحاظ سے، مبداء کے لحاظ سے تشاکل فرض کرتے ہیں ریاضی طورپر، ایک منحنی $f(x,y)=0$ کو یوں کہا جائیگا۔

- **y-محور کے لحاظ سے تشاکل** اگر $\forall x,y \quad f(x,y)=f(-x,y)$ یا اگر (x,y) منحنی کے ترسیم میں ایک نقطہ ہوتو اس قدر $(-x,y)$ بھی ہوگا۔

اگر ایک آئینہ کو y- محور پر رکھیں تو آئینہ کے ایک جانب اور آئینہ کے دوسرے جانب منحنی کا حصہ مساوی ہوگا۔

- **x-محور کے لحاظ سے تشاکل** اگر $\forall x,y \quad f(x,y)=f(x,-y)$ یا اگر (x,y) منحنی کے ترسیم میں ایک نقطہ ہوتو اس قدر $(x,-y)$ بھی ہوگا۔

اگر ایک آئینہ کو x-محور پر رکھیں تو منحنی کا حصہ آئینہ کے ایک جانب اور آئینہ کے دوسرے جانب مساوی ہوگا۔

- **مبداء کے لحاظ سے تشاکل** اگر $\forall x,y \quad f(x,y)=f(-x,-y)$ یا اگر (x,y) منحنی کے ترسیم میں ایک نقطہ ہوتو اس قدر $(-x,-y)$ بھی ہوگا۔

یعنی، منحنی میں کوئی تبدیلی نہیں ہوگی جب ہم مبدا کے گرد اس کو $180°$ گردش کریں۔

مثال کے طور پر اوپر ذکر کئے گئے منحنی $x=y^2$ ، $y=x^2$ اور $y=x$ بالترتیب x-محور کے لحاظ سے، y-محور کے لحاظ سے اور مبداء کے لحاظ سے تشاکل ہیں۔

7.9.2 متقارب (Asymptotes)

ایک متقارب منحنی $y=f(x)$ کے لئے خط مستقیم ہے، جو اُس منحنی کے لئے ∞ پر مماس ہے۔ دوسرے الفاظ میں منحنی اور خط مستقیم کے درمیان فاصلہ صفر کو پہنچتا ہے، جب منحنی پر نقطے ∞ کو پہنچتے ہوں ۔

1. **اُفقی متقارب، جو** x-محور کے متوازی ہے۔ خط $y=L$ منحنی $y=f(x)$ کے لئے اُفقی متقارب کہلاتا ہے، اگر یا تو $\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$ یا $\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$
2. **عمودی متقارب،** جو y-محور کے متوازی ہے خط $x=a$ منحنی $y=f(x)$ کے لئے عمودی متقارب کہلاتا ہے،اگر یا تو $\lim_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty$ یا $\lim_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$
3. **مائل متقارب،** ایک مائل (ترچھا) متقارب اُس وقت واقع ہوگا، جبکہ شمار کنندہ کے کثیر رقمی کا درجہ نسب نما کے کثیررقمی سے بڑا ہوگا۔

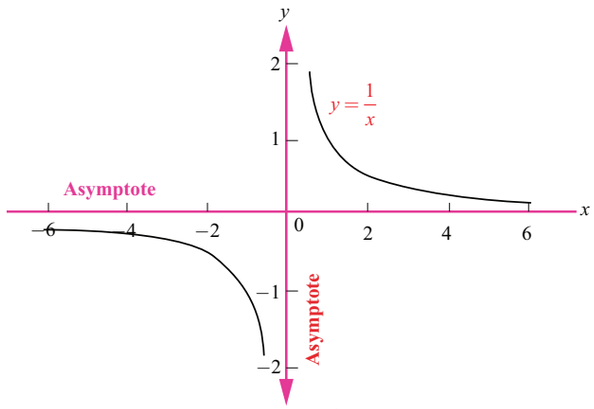
12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 7_Differential Calculus.indd 48 28-02-2023 16:40:00

مائل متقارب کو معلوم کرنے کے لئے ہمیں شمار کنندہ کو نسب نما سے تقسیم کرنا ہوگا۔ چاہے لمبی تقسیم سے ہو یا ترکیبی تقسیم سے ہو۔

مثال 7.66

تفاعل $f(x)=\frac{1}{x}$ کے متقارب معلوم کریں۔

حل



خاکہ 7.32

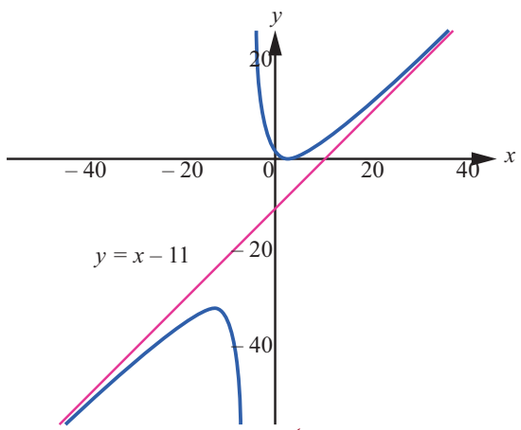
ہمارے پاس، $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$ اور $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty$ لہٰذا، ضروری عمودی متقارب $x=0$ یا y-محور ہے۔

یوں منحنی دونوں محوروں کے لحاظ سے تشاکل ہے۔ $y=0$ یا x-محور بھی متقارب ہے۔ لہٰذا، اس منحنی (مستطیلی ہذلولی) کے پاس عمودی اور اُفقی متقارب دونوں ہیں۔

مثال 7.67

تفاعل $f(x)=\frac{x^2-6x+7}{x+5}$ کے مائل (ترچھے) متقارب معلوم کرو۔

حل



خاکہ 7.33

چونکہ، شمار کنندہ میں کثیر رقمی بڑا درجہ (2nd) نسب نما (1st) ہے۔ ہمیں معلوم ہے یہ مائل متقارب ہے اس کو معلوم کرنے کے لئے، شمار کنندہ کو نسب نما سے تقسیم کرنا ہے۔ اس کے لئے ہم لمبی تقسیم کو استعمال کرسکتے ہیں۔

$$\begin{array}{r} x-11 \\ x+5\overline{)\,x^2-6x+7} \\ \underline{x^2+5x} \\ -11x+7 \\ \underline{-11x-55} \\ 62 \end{array}$$

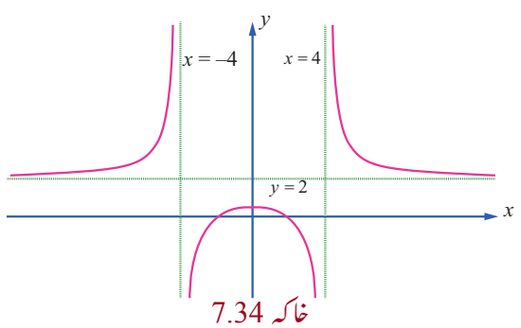
نوٹ کریں کہ لمبی تقسیم حساب کو مکمل کرکے بچت حاصل کرنے کی ضرورت نہیں۔ ہمیں صرف رقموں کی ضرورت ہے جس سے خط کا مساوات بنے مائل متقارب $y=x-11$ ہے۔

تفاعل کی ترسیم میں دیکھ سکتے ہو، منحنی مائل متقارب $y=x-11$ کے قریب پہنچتا ہے مگر پار نہیں کرتا۔

مثال 7.68

منحنی $f(x)=\frac{2x^2-8}{x^2-16}$ کے متقارب معلوم کرو۔

حل



خاکہ 7.34

یوں $\lim_{x\to -4^+}\frac{2x^2-8}{x^2-16}=-\infty$ اور $\lim_{x\to -4^+}\frac{2x^2-8}{x^2-16}=\infty$

لہٰذا، $x=-4$ اور $x=4$ عمودی متقارب ہیں۔

یوں $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-8}{x^2-16}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{8}{x^2}}{1-\frac{16}{x^2}}=2$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 7_Differential Calculus.indd 49 28-02-2023 16:40:04

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-8}{x^2-16} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{8}{x^2}}{1-\frac{16}{x^2}} = 2$$ اور

لہٰذا، $y = 2$ اُفقی متقارب ہے اس کو ترکیبی تقسیم سے بھی حاصل کرسکتے ہیں۔

7.10 منحنی کی خاکہ کاری (Sketching of Curves)

ہم تفاعل کی ترسیم کی خاکہ کاری یونہی ہاتھ سے یا کوئی ترسیمی سافٹویر سے کرسکتے ہیں۔ ہم مکمل ترسیم کو بتا نہیں سکتے ، ترسیم کا کوئی ایک حصّہ کی خاکہ کاری کرسکتے ہیں۔لہٰذا، تنقیدی سوال یہ ہے کہ منحنی کے کون سے حصّے کو ہم دکھاسکتے ہیں اور کیسے اس حصّے کو چُن سکتے ہیں۔ اُس کو چننے کے لئے تفاعل کے تفرقی کا استعمال کریں گے۔ یوں ہم چند ہدایت نامہ پیش کرتے ہیں جو تفاعل کے ترسیم کے مستطیل کو بہتر دیکھنے میں مفید ہیں اور وہ یہ ہیں۔

(i) علاقہ اور تفاعل کی وسعت
(ii) منحنی کے مقطوعے (اگر ہوں)
(iii) تفاعل کے فاصل نقطے
(iv) تفاعل کے مقامی انتہاء
(v) مقعری وقفے
(vi) مڑنے کے نقطے (اگر ہوں)
(vii) منحنیوں کے متقارب (اگر واقع ہوں)

مثال 7.69

منحنی $y = f(x) = x^2 - x - 6$ کی خاکہ کاری کرو۔

حل

دئے گئے تفاعل کے اجزائے ضربی لینے پر ہمیں،

$$y = f(x) = (x-3)(x+2)$$

(1) دئے گئے تفاعل $f(x)$ کا علاقہ پوری حقیقی خط ہے۔

(2) $y = 0$ کو درج کرنے پر ہمیں $x = -2, 3$ حاصل ہوتا ہے۔ لہٰذا، x- مقطوعے $(-2,0)$ اور $(3,0)$ ہیں۔ $x = 0$ ڈالنے پر $y = -6$ ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ لہٰذا، y-مقطوعہ $(0,-6)$ ہے۔

(3) $f'(x) = 2x - 1$ اورلہٰذا، منحنی کا فاصل نقطہ $x = \frac{1}{2}$ پر واقع ہوتا ہے۔

(4) $f''(x) = 2 > 0 \quad \forall x$ لہٰذا، $x = \frac{1}{2}$ پر منحنی کا مقامی کم ہوگا، جو $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{25}{4}$ ہے۔

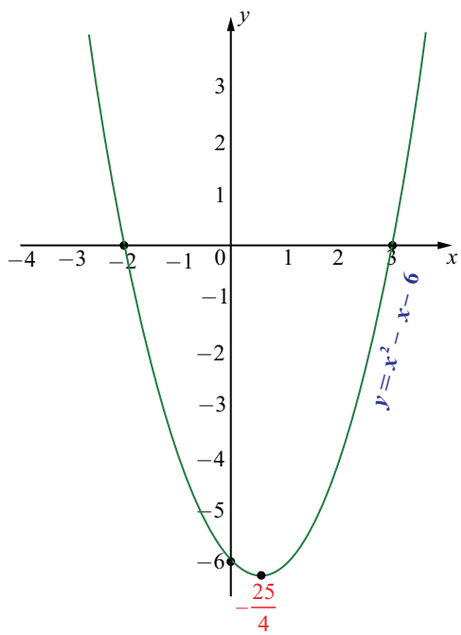
(5) تفاعل کی وسعت $y \geq -\frac{25}{4}$ ہے۔

(6) چونکہ $f''(x) = 2 > 0, \forall x$ پورے حقیقی خط میں تفاعل مقعر اُوپری ہے۔

(7) چونکہ $f(x) = 2 \neq 0, \forall x$ ، منحنی میں مڑنے کا نقطہ نہیں رکھتا ہے۔

(8) منحنی کے متقارب نہیں ہیں۔

منحنی کا خام خاکہ بائیں جانب دکھایا گیا ہے۔



خاکہ 7.35

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 7_Differential Calculus.indd 50 28-02-2023 16:40:09

مثال 7.70

منحنی $y = f(x) = x^3 - 6x - 9$ کی خاکہ کاری کریں۔

حل

دئے گئے تفاعل کے اجزائے ضربی لینے پر ہمارے پاس ہے،

$$y = f(x) = (x-3)(x^2+3x+3)\,.$$

(1) دئے گئے تفاعل $f(x)$ کا علاقہ اور وسعت پوری طور پر حقیقی خط ہے۔

(2) $y = 0$ کو درج کرنے پر $x = 3$ حاصل ہوتا ہے۔ دوسرے دو جزر خیالی ہیں۔ لہٰذا، x- مقطوعہ $(3,0)$ ہے۔ $x = 0$ کودرج کرنے پر $y = -9$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا، y -مقطوعہ $(0,-9)$ ہے۔

(3) $f'(x) = 3(x^2-2)$ اور اسلئے فاصل نقطے $x = \pm\sqrt{2}$ پر واقع ہیں۔

(4) $f''(x) = 6x$ لہٰذا، $x = \sqrt{2}$ پر منحنی مقامی کم رکھتا ہے ۔ کیونکہ $f''\left(\sqrt{2}\right) = 6\sqrt{2} > 0$

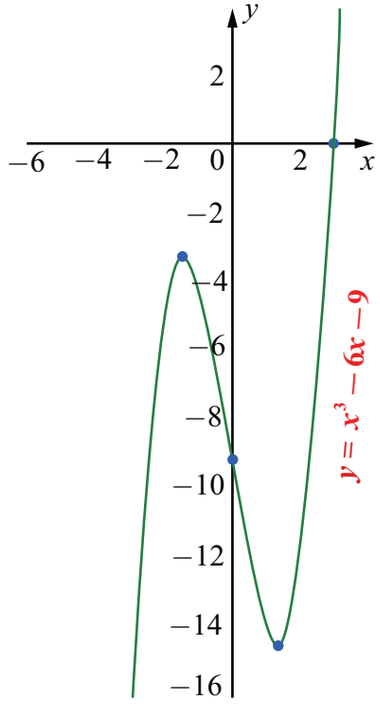
اور مقامی کمی کی قیمت $f\left(\sqrt{2}\right) = -4\sqrt{2} - 9$ ہے۔ اسی طرح $x = -\sqrt{2}$ پر منحنی کی مقامی زیادہ رکھتا ہے۔ کیونکہ $f''\left(-\sqrt{2}\right) = -6\sqrt{2} < 0$ اور مقامی زیادہ کی قیمت $f\left(-\sqrt{2}\right) = 4\sqrt{2} - 9$ ہے ۔

(5) چونکہ، $f''(x) = 6x > 0,\ \forall\, x > 0$ تفاعل مثبت حقیقی خط میں مقعر اوپر ہے۔ یوں $f''(x) = 6x < 0,\ \forall\, x < 0$ تفاعل منفی حقیقی خط میں مقعر نیچے ہے۔

(6) چونکہ، $f''(x) = 0$ ، $x = 0$ پرہے۔اور $f''(x)$ اس کی نشانی کو $x = 0$ سے گزرنے پر تبدیل کرلیتا ہے۔ لہٰذا، مڑنے کا نقطہ $\left(0, f(0)\right) = (0,-9)$ ہے۔

(7) منحنی کے متقارب نہیں ہیں۔

منحنی کا خام خاکہ بائیں جانب دکھایا گیا ہے۔



خاکہ 7.36

مثال 7.71

منحنی $y = \dfrac{x^2 - 3x}{(x-1)}$ کی خاکہ کاری کرو۔

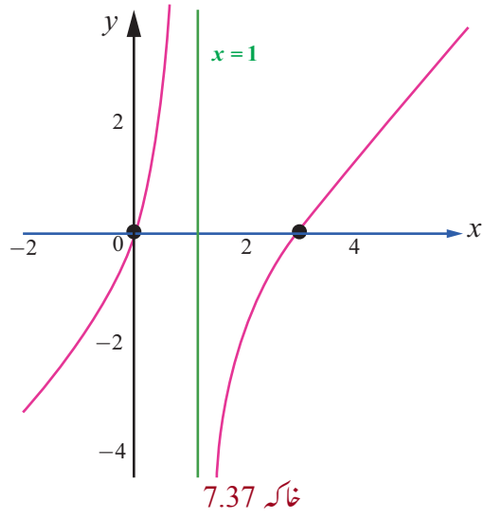
حل

دئے گئے تفاعل کے اجزائے ضربی لینے پر ہمارے پاس ہے،

$$y = f(x) = \frac{x(x-3)}{(x-1)}$$

(1) علاقہ اور $f(x)$ کی وسعت بالترتیب $R \setminus \{1\}$ اور پوری حقیقی خط ہے۔

(2) $y = 0$ کو درج کرنے پر ہمیں $x = 0,3$ حاصل ہوتا ہے۔ لہٰذا، x-مقطوعہ $(3,0)$ ہے۔ $x = 0$ کو درج کرنے پر ہمیں $y = 0$ حاصل ہوتا ہے۔ لہٰذا، منحنی مبداء سے گزرتی ہے۔



خاکہ 7.37

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 7_Differential Calculus.indd 51 28-02-2023 16:40:15

(3) $f'(x)=\frac{x^2-2x+3}{(x-1)^2}$ اور لہٰذا، منحنی کا فاصل نقطہ جو $x=1$ پر واقع ہوتا ہے۔ کیونکہ، $f'(1)$ غیر واقع ہے۔ مگر $x^2-2x+3=0$ کا حقیقی حل نہیں ہے۔ لہٰذا، صرف ایک فاصل نقطہ $x=1$ پر واقع ہوتا ہے۔

(4) $x=1$ تفاعل کے علاقہ میں نہیں ہے ۔ اور $f'(x)\neq 0\ \forall\ x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ کی مقامی کمی اور مقامی زیادتی نہیں ہے۔

(5) $f''(x)=-\frac{4}{(x-1)^3}\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ لہٰذا، اگر $x<1$، $f''(x)>0$ منحنی $(-\infty,1)$ میں مقعر اُوپر ہے اور اگر $x>1$، $f''(x)<0$ منحنی $(1,\infty)$ میں مقعر نیچے ہے۔ چونکہ $x=1$ علاقہ میں نہیں ہے۔ $f''(x)\neq 0\ x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$، $f(x)$ کے لئے مڑنے کا نقطہ نہیں ہے۔

(6) چونکہ $\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-3x}{(x-1)}=+\infty$ اور $\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-3x}{(x-1)}=-\infty$، $x=1$ عمودی متقارب ہے۔

خام خاکہ بائیں جانب دکھایا گیا ہے۔

مثال 7.72

$y=\frac{3x}{x^2-1}$ تفاعل کے ترسیم کی خاکہ کاری کرو۔

حل

(1) $f(x)$ کا علاقہ $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ ہے۔

(2) چونکہ، $f(-x,-y)=f(x,y)$، منحنی مبداء کی نسبت متناکل ہے۔

(3) $y=0$ درج کرنے پر $x=0$، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ لہٰذا، x-مقطوعہ $(0,0)$ ہے۔

(4) $x=0$ درج کرنے پر $y=0$، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ لہٰذا، y-مقطوعہ $(0,0)$ ہے۔

(5) ایک سری معلوم کرنے کے لئے ہم پہلا تفرقی معلوم کرتے ہیں، $f'(x)=\frac{-3(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$ لہٰذا، $f'(x)$، $x=-1,1$ پر غیر واقع ہے۔

لہٰذا، فاصل اعداد $x=-1,1$ ہیں۔ ایک سری وقفے کو جدول 7.9 میں دیا گیا ہے۔

وقفہ	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$ کی نشانی	–	–	–
ایک سری	سختی سے گھٹتا ہے۔	سختی سے گھٹتا ہے۔	سختی سے گھٹتا ہے۔

جدول 7.9

(6) چونکہ $f'(x)$ میں فاصل اعداد سے گزرنے پر نشانی میں تبدیلی نہیں ہے۔ لہٰذا، مقامی انتہاء نہیں ہیں۔

(7) مقعری کو معلوم کرنے کے لئے، دوسرے تفرقی کو معلوم کرتے ہیں، جو $f''(x)=\frac{6x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$ ہے۔ $f''(x)=0\Rightarrow x=0$ اور $f''(x)$، $x=-1,1$ پر غیر واقع ہے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 7_Differential Calculus.indd 52 28-02-2023 16:40:22

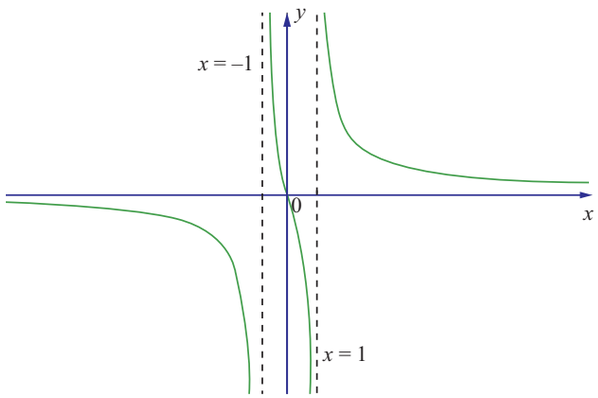
مقعری وقفے جدول 7.10 میں دئے گئے ہیں۔

وقفہ	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$f''(x)$ کی نشانی	$-$	$+$	$-$	$+$
مقعری	مقعر نیچے	مقعر اُوپر	مقعر نیچے	مقعر اُوپر

جدول 7.10

(8) یوں $x=-1$ اور 1، $f(x)$ کے علاقے میں نہیں ہیں اور $x=0$ پر دوسرا تفرقی صفر ہے اور $f''(x)$ اس کی نشانی کو $x=0$ سے گزرنے پر مثبت سے منفی میں بدل لیتا ہے۔ لہٰذا، مڑنے کا نقطہ $(0, f(0))=(0,0)$ ہے۔

(9) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3}{x-\dfrac{1}{x}}=0$ لہٰذا، $y=0$ ہے اُفقی متقارب ہے چونکہ نسب نما صفر ہے جب $x=\pm1$ ہے۔



خاکہ 7.38

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{3x}{x^2-1}=-\infty\,,\quad \lim_{x\to-1^+}\frac{3x}{x^2-1}=+\infty\,,$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{3x}{x^2-1}=-\infty\,,\quad \lim_{x\to1^+}\frac{3x}{x^2-1}=\infty\,.$$

لہٰذا، $x=-1$ اور $x=1$ عمودی متقارب ہیں۔

خام خاکہ بائیں جانب دکھایا گیا ہے۔

مشق 7.9

1. مندرجہ ذیل منحنیوں کے متقارب معلوم کرو۔

(i) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$ (ii) $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$ (iii) $f(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+2}}$

(iv) $f(x)=\dfrac{x^2-6x-1}{x+3}$ (v) $f(x)=\dfrac{x^2+6x-4}{3x-6}$

2. درجہ ذیل تفاعلات کے ترسیمات کی خاکہ کاری کرو۔

(i) $y=-\dfrac{1}{3}(x^3-3x+2)$ (ii) $y=x\sqrt{4-x}$ (iii) $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-4}$

(iv) $y=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 7_Differential Calculus.indd 53 28-02-2023 16:40:26

مشق 7.10

دیے گئے چار حل میں سے صحیح یا سب سے مناسب جواب کا انتخاب کریں۔

1. کرّے کے حجم میں بڑھتے حجم کی فی شرح $3\pi \text{ cm}^3/\text{sec}$ ہے۔
اگر نصف قطر $\frac{1}{2}$ سم ہو تو اس کے نصف قطر کی تبدیلی کی شرح۔

(1) 3 cm/s (2) 2 cm/s (3) 1 cm/s (4) $\frac{1}{2}$ cm/s

2. ایک غبارہ 10 m/s پر سیدھے اُوپر چڑھتا ہے۔ ایک مبصرین اُس جگہ سے 40 میٹر دور ہے جہاں غبارہ زمین چھوڑتا ہے۔ جب غبارہ زمین سے 30 میٹر بلندی پر ہوتا ہے تو ہر سیکنڈ میں ریڈین میں غبارہ کے ارتفاع زاویہ کی تبدیلی کی شرح۔

(1) $\frac{3}{25}$ radians/sec (ریڈین پر سیکنڈ) (2) $\frac{4}{25}$ radians/sec (ریڈین پر سیکنڈ)

(3) $\frac{1}{5}$ radians/sec (ریڈین پر سیکنڈ) (4) $\frac{1}{3}$ radians/sec (ریڈین پر سیکنڈ)

3. ایک شئے کی کا مقام کوئی بھی t وقت پر اُفقی خط کے ہمراہ حرکت کرنے پر $s(t) = 3t^2 - 2t - 8$ دیا گیا ہے۔ کو نسے وقت پر شئے ساکن کی حالت میں ہوگی۔

(1) $t = 0$ (2) $t = \frac{1}{3}$ (3) $t = 1$ (4) $t = 3$

4. ایک پتھر کو عمودی طور پر پھینکا جاتا ہے t وقت پر اس کی طے کردہ اُونچائی $x = 80t - 16t^2$ سے دی گئی ہے۔ اونچائی میں t سیکنڈ میں پتھر کی زیادہ سے زیادہ پہنچنے کی اونچائی کیا ہے۔

(1) 2 (2) 2.5 (3) 3 (4) 3.5

5. منحنی $6y = x^3 + 2$ پر نقطہ جس پر y-محور 8 مرتبہ تیزی سے x-محور سے متبادل ہے۔

(1) (4,11) (2) (4,−11) (3) (−4,11) (4) (−4,−11)

6. منحنی $f(x) = \sqrt{8-2x}$ پر نقطہ کا مقطوعہ جس پر مماس کا میلان -0.25 ہے؟

(1) −8 (2) −4 (3) −2 (4) 0

7. منحنی $f(x) = 2\cos 4x$ کے عمودی خط کا میلان $x = \frac{\pi}{12}$ پر ہے۔

(1) $-4\sqrt{3}$ (2) −4 (3) $\frac{\sqrt{3}}{12}$ (4) $4\sqrt{3}$

8. منحنی $y^2 - xy + 9 = 0$ کا مماس عمودی ہے جب۔

(1) $y = 0$ (2) $y = \pm\sqrt{3}$ (3) $y = \frac{1}{2}$ (4) $y = \pm 3$

9. $y^2 = x$ اور $x^2 = y$ کے درمیان مبداء پر زاویہ ہے۔

(1) $\tan^{-1}\frac{3}{4}$ (2) $\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$ (3) $\frac{\pi}{2}$ (4) $\frac{\pi}{4}$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 7_Differential Calculus.indd 54 28-02-2023 16:40:33

10. حد $\lim_{x\to 0}\left(\cot x-\frac{1}{x}\right)$ کی قیمت ہے۔

(1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) ∞

11. تفاعل $\sin^4 x+\cos^4 x$ اس وقفہ میں بڑھتا ہے۔

(1) $\left[\frac{5\pi}{8},\frac{3\pi}{4}\right]$ (2) $\left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{8}\right]$ (3) $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ (4) $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

12. رولس کے مسئلہ سے تفاعل $x^3-3x^2, x\in[0,3]$ کے لئے دیا گیا عدد ہے۔

(1) 1 (2) $\sqrt{2}$ (3) $\frac{3}{2}$ (4) 2

13. اوسط قیمت مسئلہ سے تفاعل $\frac{1}{x}, x\in[1,9]$ کے لئے دیا گیا عدد ہے۔

(1) 2 (2) 2.5 (3) 3 (4) 3.5

14. تفاعل $9+|3-x|$ کی کم سے کم قیمت

(1) 0 (2) 3 (3) 6 (4) 9

15. منحنی $y=e^x\sin x, x\in[0,2\pi]$ کے مماس کا زیادہ سے زیادہ میلان

(1) $x=\frac{\pi}{4}$ (2) $x=\frac{\pi}{2}$ (3) $x=\pi$ (4) $x=\frac{3\pi}{2}$

16. تفاعل $x^2e^{-2x}, x>0$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت

(1) $\frac{1}{e}$ (2) $\frac{1}{2e}$ (3) $\frac{1}{e^2}$ (4) $\frac{4}{e^4}$

17. منحنی $x^2-y^2=4$ پر ایک نقطہ جو نقطہ $(6,0)$ سے بالکل قریب ہے۔

(1) $(2,0)$ (2) $\left(\sqrt{5},1\right)$ (3) $\left(3,\sqrt{5}\right)$ (4) $\left(\sqrt{13},-\sqrt{3}\right)$

18. دو مثبت عددوں کے حاصل ضرب کی زیادہ سے زیادہ قیمت جبکہ ان کے مربعوں کا حاصل جمع 200 ہے۔

(1) 100 (2) $25\sqrt{7}$ (3) 28 (4) $24\sqrt{14}$

19. منحنی $y=ax^4+bx^2$ ، $ab>0$ کے ساتھ

(1) اُفقی مماس نہیں رکھتا ہے۔ (2) مقعر اُوپر ہے۔

(3) مقعر نیچے ہے۔ (4) مڑنے کے نقطے نہیں ہیں۔

20. منحنی $y=(x-1)^3$ کے مڑنے کا نقطہ ہے۔

(1) $(0,0)$ (2) $(0,1)$ (3) $(1,0)$ (4) $(1,1)$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 7_Differential Calculus.indd 55 28-02-2023 16:40:39

خلاصہ (SUMMARY)

- اگر $y = f(x)$ ہوتو $\frac{dy}{dx}$ x کے لحاظ سے y کی فوری تبدیلی کی شرح کی نمائندگی کرتا ہے۔
- اگر $y = f\left(g(t)\right)$ ہوتو، $\frac{dy}{dt} = f'\left(g(t)\right)\cdot g'(t)$ جس کو زنجیر اُصول کہا جاتا ہے۔
- مماس کی مساوات منحنی $y = f(x)$ کے لئے (a,b) پر $(x-a)$ یا $y-b=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(a,b)}$ سے دی جاتی ہے۔ $y-b=f'(a)(x-a)$
- رولّس کا مسئلہ

فرض کرو کہ بند وقفہ $[a,b]$ پر، $f(x)$ مسلسل ہے۔اور کھلے وقفے (a,b) پر تفرق ہے، اور اگر $f(a)=f(b)$ ہو، تو کم از کم ایک نقطہ $c\in(a,b)$ ہوگا۔ جہاں $f'(c)=0$ ہے۔

- لیگرانجی اوسط قیمت مسئلہ

فرض کرو کہ $[a,b]$ بندوقفے میں $f(x)$ مُسلسل ہے اور (a,b) کھلے وقفے میں تفرق ہے۔
(جب کہ $f(a)$، $f(b)$ کا مساوی ہونا غیر ضروری ہے۔) تو کوئی ایک نقطہ $c\in(a,b)$ موجود ہوگا اس طرح کہ،

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \ldots (6)$$

- **ٹیلارس سلسلہ (Taylor's Series)**

فرض کرو کہ $x=a$ پر $f(x)$ ایک لامحدود تفرقی تفاعل ہوتو $f(x)$ کو سلسلے میں پھیلا سکتے ہیں، وقفہ $(a-\varepsilon,a+\varepsilon),\ \varepsilon>0$ میں،

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots.$$

کی شکل میں ہوگا۔

- **میکلارنس سلسلہ (Maclaurin's series)**

اگر $a=0$ ہوتو پھیلاؤ کی شکل بن جاتی ہے۔

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots.$$

- **لو پتھل اصول (The l'Hôpital's Rule)**

فرض کریں کے $f(x)$ اور $g(x)$ تفرقی تفاعل ہیں اور $g'(x)\neq 0$ کے ساتھ

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{تو} \quad \lim_{x\to a}f(x) = 0 = \lim_{x\to a}g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{تو} \quad \lim_{x\to a}f(x) = \pm\infty = \lim_{x\to a}g(x)$$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 7_Differential Calculus.indd 56 28-02-2023 16:40:42

- اگر ایک تفاعل $f(x)$ کھلے وقفہ (a,b) میں تفرقی ہے تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ، اگر $\frac{d}{dx}(f(x)) > 0, \forall x \in (a,b)$ تو $f(x)$ وقفہ (a,b) میں سختی سے بڑھتا ہے۔

  اگر $\frac{d}{dx}(f(x)) < 0, \forall x \in (a,b)$ تو $f(x)$ وقفہ (a,b) میں سختی سے گھٹتا ہے۔

- **بند وقفہ $[a,b]$ میں مسلسل تفاعل $f(x)$ کے مطلق انتہاء کو معلوم کرنے کا طریقہ عمل یہ ہے۔**

مرحلہ 1: (a,b) میں $f(x)$ کے فاصل اعداد معلوم کریں۔

مرحلہ 2: $f(x)$ کو تمام فاصل اعداد اور آخری نقطہ a اور b پر واضح کریں۔

مرحلہ 3 : مرحلہ 2 کی سب سے بڑی اور سب سے چھوٹی قیمت بند وقفہ $[a,b]$ میں $f(x)$ کی مطلق زیادہ اور مطلق کم قیمت ہوگی ۔

- پہلے تفرقی جانچ

فرض کریں کہ مسلسل تفاعل $f(x)$ کا فاصل نقطہ $(c, f(c))$ ہو، یعنی، تفاعل کُھلے وقفے I میں c موجود ہے۔ اگر $f(x)$ وقفے میں تفرقی ہے، c کے ممکن کے بغیر، تو $f(c)$ کو مندرجۂ ذیل کی طرح درجہ بندی کرسکتے ہیں۔

(جب بائیں سے دائیں جانب وقفہ I میں حرکت کریں۔)

(i) اگر $f(x)$ جو c پر منفی سے مثبت میں تبدیل ہوتو، $f(x)$ کی مقامی کمی $f(c)$ ہے۔

(ii) اگر $f'(x)$، c پر مثبت سے منفی میں تبدیل ہوتو، $f(x)$ کی مقامی زیادتی $f(c)$ ہے۔

(iii) اگر $f'(x)$، c پر دونوں جانب مثبت ہو یا c پر دونوں جانب منفی ہوتو، $f(c)$ نہ تو مقامی کمی ہوگی ہی نہ تو مقامی زیادتی ہے۔

- دوسرا تفرقی جانچ

فرض کریں کہ c فاصل نقطہ ہے، جہاں پر $f'(c) = 0$ ہے، یوں $f'(x)$ ، c کے ہمسایہ میں واقع ہے اور $f''(c)$ واقع ہے۔ تو f کی متعلق زیادہ قیمت c پر ہے، اگر $f''(c) < 0$ اور متعلق کم قیمت c پر ہے، اگر $f''(c) > 0$. اگر $f''(c) = 0$ ، جانچ غیر معلوماتی ہے۔

ICT کارنر

https://ggbm.at/dy9kwgbt or Scan the QR Code

بروزر کھولیئے اور دیا گیا URL لنک ٹیپ کیجئے (یا) QR کوڈ کو اسکین کیجئے۔ "12 ویں جماعت ریاضی جلد - 2" Geo Gebra (جیوجبرا) نامی ورک بک کھلے گی۔ ورک بک کے بائیں جانب تمہاری کتاب کے اسباق ہوں گے۔ "تفرقی احصاء کے استعمالات (اطلاقات)" نامی باب پر کلک کریں۔ اس باب سے تعلق رکھنے والے بہت سارے ورک شیٹ تم دیکھ سکتے ہو تمام ورک شیٹوں کا معالعہ کیجئے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 7_Differential Calculus.indd 57 28-02-2023 16:40:44

باب
8

تفریقیاں اور جزوی مشتق
(Differentials and Partial Derivatives)

IGKR1

وہ شخص جس نے کڑوے اشیاء کا ذائقہ نہیں چکھا میٹھے اشیاء بھی حاصل نہیں کیا۔
گاٹفرائڈ ولہلم لینبنیز

8.1 تعارف (Introduction)

حوصلہ افزائی (Motivation)

حقیقی زندگی میں ہمیں کئی تفاعلات کا سامنا کرنا پڑتا ہے۔کئی موقع پر غیر تابع متغیر کی تبدیلی کی بنا پر تفاعل میں تبدیلی معلوم کرنے کی ضرورت پیش آتی ہے۔یہاں حقیقی زندگی کے چند صورتِ حال دئے گئے ہیں۔

- مان لیجئے کہ ایک باریک دائری دھاتی تھالی کو یکساں طور پر گرم کیا جاتا ہے تو اس کا نصف قطر بڑھتا ہے اور اس کا رقبہ بھی بڑھتا ہے۔ ماں لیجئے کہ ہم نصف قطر کا اضافہ اندازاً معلوم کرسکتے ہیں۔ ہم کس طرح سے دائری تھالی کے رقبہ کا اضافہ معلوم کرسکتے ہیں۔؟

- مان لیجئے کہ ایک الٹا قائم مدور مخروط شکل کے پانی کے حوض (ٹینک)میں پانی بھر رہا ہے۔اس طریقے سے پانی کے سطح کی اونچائی تبدیل ہو رہی ہے، پانی کے سطح کا نصف قطر تبدیل ہوتا ہے اور وقت کے تبدیلی کی اعتبار سے ٹینک میں پانی کا حجم بھی تبدیل ہورہا ہے۔چھوٹے سے وقفے میں، اگر ہم اونچائی میں تبدیلی، نصف قطر میں تبدیلی کی پیمائش کرسکتے ہیں، کس طرح سے ہم اس وقفہ میں پانی کے حجم میں تبدیلی معلوم کرسکتے ہیں۔؟

- ایک سیارچہ (Satellite) کو اڑانے کے مقام (Launch pad) سے خلاء میں اڑایا جاتا ہے۔ ایک کیمرہ لگایا جاتا ہے، جس کے ذریعہ سے اس کے اڑنے کو اڑانے کے مقام سے کسی محفوظ فاصلے سے مشاہدہ کیا جاتا ہے۔جیسے ہی وہ سیارچہ اوپر جاتا ہے، کیمرہ کا زاویہ ارتقا بھی تبدیل ہوجاتا ہے۔ اگر ہمیں تھوڑے سے وقفے کے دوران دومتواتر ارتقا زاویے معلوم ہوں، تو ہم اس چھوٹے سے وقفہ کے دوران اس کے طے کردہ فاصلہ کس طرح معلوم کرسکتے ہیں۔؟

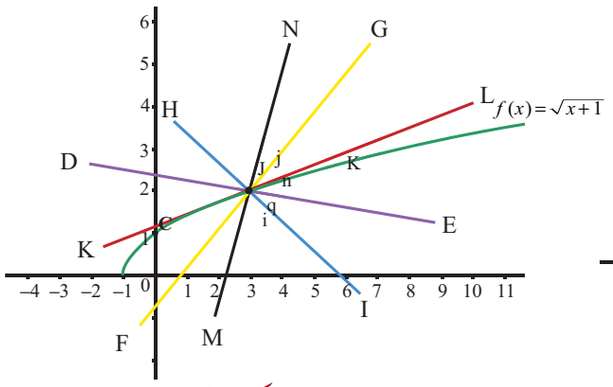
اس قسم کے سوالات سے رجوع کرنے کے لئے ہم مشتق اور جزوی مشتق کے تصورات کو استعمال کرتے ہوئے درکار تفاعلات کے خطی تقریب اور تفرقی معلوم کرتے ہیں۔


گاٹفرائڈ ولہلم لینبنیز
Godfried W Leibniz
(1646 - 1716)

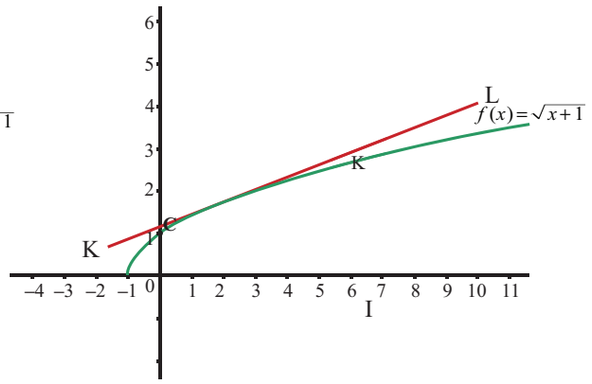
ہم پچھلے بابوں میں ایک حقیقی متغیر کے حقیقی قیمتی تفاعل کے مشتق کے تصور کے بارے میں سیکھ چکے ہیں۔ اس کے علاوہ ہم اس کو استعمال کرکے تفاعل کے علاقہ پر انتہا معلوم کرنے اور تفاعل کی ترسیم کھینچنے کے بارے میں بھی سیکھ چکے ہیں۔ اس باب میں، ہم ایک اور مشتق کے استعمال کے بارے میں بھی سیکھیں گے، اسے استعمال کرکے کسی نقطے پر تفاعل کی قیمتیں معلوم کرتے ہیں۔ہمیں معلوم ہے کہ خطی تفاعلات $y = mx + b$ ، کو استعمال کرنا آسان ہے ؛ جبکہ غیر خطی تفاعلات کو استعمال کرنا حسابی طور پر تھوڑا مشکل ہے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 8_Differentials and Partial.indd 58 28-02-2023 14:56:28

مثال کے طور پر ، اگر ہمارے پاس دوتفاعلات $f(x)=\sqrt{x+1}$ ، $g(x)=2x-7$ ہیں ۔اور مان لیجئے کہ ہم ان تفاعلات کو مثلاً $x=3.25$ پر حل کرنا چاہتے ہیں۔ حل کرنے میں کونسا آسان ہوگا؟ واضح طور پر $g(3.25)$ کو حل کرنا $f(3.25)$ سے آسان ہے۔ اگر ہم $f(3.25)$ کے معلوم کرنے میں چند غلطیوں کو تسلیم کرنے کے لئے تیار ہوں تو ہم ایک خطی تفاعل معلوم کرسکتے ہیں جس سے $x=3$ کے قریب f کی قریبی قیمت حاصل ہوتی ہے اور اس تفاعل کو استعمال کرتے ہوئے $f(3.25)$ کی تقریبی قیمت حاصل کرسکتے ہیں۔ ہم یہ جانتے ہیں کہ کسی تفاعل کی ترسیم ایک غیر عمودی خط ہے اگر اور صرف اگر یہ ایک خطی تفاعل ہے۔ اس تفاعل کے ترسیم پر دئے گئے کسی نقطے سے گذرنے والے کئی لامحدود خطوط مستقیم میں سے صرف خط مماس سے ہی اس تفاعل کی ایک صحیح قریبی قیمت حاصل ہوتی ہے کیونکہ f کی ترسیم نقط (3,2) کے قریب تقریباً ایک خط مستقیم نظر آتا ہے۔



خاکہ 8.1



خاکہ 8.2 (ترسیم کا خط)

اوپر کے خاکوں سے یہ واضح ہے کہ ان خطوط مستقیم میں سے صرف $x=3$ پر $f(x)$ کی ترسیم کا خط مماس ہی سے نقطہ $x=3$ کے قریب صحیح قریبی قیمت حاصل ہوتی ہے۔ بنیادی طور پر ہم **منتخب شدہ** نقطہ (3,2) پر دئے گئے تفاعل کو "خطی" بنا رہے ہیں۔اس تصور سے ہمیں درآمد کی تبدیلی کے ذریعہ منتخب شدہ نقطے کے قریب تفاعل کے تبدیلی کا اندازہ لگانے میں مدد ملتی ہے۔ہم **"تفرق"** کے تصور کی تعریف کرنے کے لئے **"مشتق"** کا استعمال کریں گے۔ جس سے تفاعل کی قریبی تبدیلی حاصل ہوتی ہے اور اس کے علاوہ منتخب شدہ نقطے کے قریب تفاعل کی قریبی قیمت معلوم کرنے میں استعمال ہوتا ہے۔مشتق تبدیلی کی فوری شرح کی پیمائش کرتا ہے جبکہ تفرق تفاعلی قیمتوں کی اندازً تبدیلی ہے اس کے علاوہ ، تفریقیاں ، تفرق مساوات کو حل کرنے کے لئے بعد میں استعمال ہوتاہے اور اندراج کے طریقے سے متعین تکملے محسوب کرنے میں استعمال ہوتا ہے۔

تفرق کو سیکھنے کے بعد، ہم کئی متغیرات والے حقیقی قیمت والے تفاعلات پر توجہ دیں گے۔ کئی متغیرات والے تفاعلات کے لئے، ہم **"جزوی مشتق"** کی تعارف کریں گے، جو ایک متغیر کی حقیقی قیمت والے تفاعل کا ، **مشتق** کے تصور کی عمومی شکل ہے ۔ ہمیں کیوں ایک سے زائد متغیرات کے تفاعلات پر غور کرنا چاہئے؟ آئیے ایک مختصر صورت حال پر غور کریں جس سے اس کی اہمیت سمجھیں گے ۔مان لیجئے کہ ایک کمپنی مثلاً پن اور نوٹ بکس تیار کرتی ہے۔ یہ کمپنی اپنی منافع کو بڑھانا چاہتی ہے۔تو پھر اس کمپنی کو اپنی تیاری کی حد کو دریافت کرنا چاہئے جس سے زیادہ منافع حاصل ہو۔ یہ دریافت کرنے کے لئے، آمدنی، قیمت اور منافع کی تفاعلات کی تشریح کرنا چاہئے اس صورتِ حال میں یہ دو متغیرات (پن، نوٹ بک) کے تفاعلات ہیں۔ اسی طرح سے، اگر ہم کسی ڈبّے کے حجم پر غور کریں، تو پھر یہ تین متغیرات مثلاً لمبائی ، چوڑائی اور اونچائی والا ایک تفاعل ہوگا۔اس کے علاوہ ، کسی ملک کی اقتصادیت کئی قطعوں پر منحصر ہے۔ غرض ایک سے زائد متغیرات پر مشتمل تفاعلات کو سمجھنا ایک سے زائد متغیرات پر کے تفاعلات کے لئے 'مشتق کا تصور" کی ترقی لازی اور قابل لحاظ ہے۔ اس کے علاوہ ہم دو اور تین متغیرات والے تفاعلات کے لئے **"تفرق"** کے تصور کی ترقی بھی کریں گے اور اس کے استعمالات میں سے چند استعمالات پر غور کریں گے۔ اس باب میں ہم صرف حقیقی ۔ قیمت والے تفاعلات کو سیکھیں گے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 8_Differentials and Partial.indd 59 28-02-2023 14:56:30

Learning Objectives سیکھنے کے مقاصد

اس باب کے اختتام پر، طلباء

- ایک نقطے پر ایک متغیر والے تفاعل کی خطّی تقریبی معلوم کرنے کے قابل بنیں گے۔
- کیلکولیٹر کے بغیر تفاعل کے خطی تقریبی کو استعمال کرکے اس تفاعل کی قیمت کا اندازہ لگانے کے قابل بنیں گے۔
- تفاعل کا تفرقی معلوم کرنے کے قابل بنیں گے۔
- روزمرہ کی زندگی کے صورت حال کے حسابات میں تفرقی اور خطی تقریبی کو استعمال کرنے کے قابل بنیں گے۔
- ایک سے زائد متغیرات والے تفاعل کے جزوی مشتق معلوم کرنے کے قابل بنیں گے۔
- ایک سے زائد متغیرات والے تفاعل کی خطی تقریبی معلوم کرنے کے قابل بنیں گے۔
- یہ جانچ کرنے کے قابل بنیں گے کہ دئے گئے کئی متغیرات والے تفاعل ہم جنس ہیں یا نہیں۔
- ہم جنس تفاعلات کے لئے آئلر کا مسئلہ استعمال کرنے کے قابل بنیں گے۔

8.2 خطی تقریبی اور تفریقات (Linear Approximation and Differentials)

8.2.1 خطی تقریبی (Linear Approximation)

اس حصے میں، ہم ایک نقطے پر تفاعل کی خطی اندازہ کی تعارف کرتے ہیں۔اس خطی اندازہ سے ، منتخب شدہ نقطے کے قریب تفاعل کی قیمت دریافت کریں گے۔پھر ہم ایک متغیر کے حقیقی قیمت والے تفاعل کی تفرق کا تعارف کریں گے۔جو اطلاق میں بھی استعمال ہوتے ہیں۔

فرض کیجئے کہ $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ ایک تفرقی پذیر تفاعل ہے اور $x\in(a,b)$ چونکہ f ، x پر تفرقی پذیر ہے، ہمارے پاس

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x) \quad \ldots (1)$$

اگر Δx چھوٹا ہو، تو (1) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ ; ... (2)

$$f(x+\Delta x)-f(x) \approx f'(x)\Delta x$$

جو اس کے معادل ہے۔

$$f(x+\Delta x) \approx f(x)+f'(x)\Delta x, \quad \ldots (3)$$

یہاں، $\approx$ کے معنی **"تقریباً"** مساوی ہے۔ اس کے علاوہ ہم یہ مشاہدہ کرتے ہیں کہ آزاد متغیر x سے جیسے $x+\Delta x$ کو تبدیل ہوتا ہے، تفاعل کی قیمت $f(x)$ سے $f(x+\Delta x)$ کو تبدیل ہوتی ہے۔ چنانچہ اگر Δx چھوٹا ہو اور ماحصل (output) کی تبدیلی کو Δf یا Δy سے ظاہر کیا جائے ، تو (2) کودوبارہ اس طرح سے لکھ سکتے ہیں۔

$$\text{ماحصل کی تبدیلی} = \Delta y=\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\Delta x$$

غور کیجئے کہ $f(x)$ اور $f'(x)\Delta x$ کو استعمال کرکے $f(x+\Delta x)$ کی قیمت کا اندازہ لگانے میں (3) مدد دیتی ہے۔ اس کے علاوہ ، ایک ساکن x_0 کے لئے ، $y(x)=f(x_0)+f'(x_0)\,(x-x_0), x\in\mathbb{R}$ سے $(x_0,f(x_0))$ پر f کی ترسیم کے لئے خط مماس حاصل ہوتا ہے جس سے x_0 کے قریب تفاعل f کا صحیح اندازہ حاصل ہوتا ہے۔

تعریف 8.1 خطی تقریبی (Linear Approximation)

فرض کیجئے کہ $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ ایک تفریق پذیر تفاعل ہے اور $x_0\in(a,b)$ ہم x_0 پر f کے خطی اندازہ L کو اس طرح بیان کرتے ہیں۔

$$L(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0), \quad \forall x\in(a,b) \qquad \ldots (4)$$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 8_Differentials and Partial.indd 60 28-02-2023 14:56:35

غور کیجئے کہ(3) اور(4) سے ہم یہ دیکھتے ہیں کہ

$$f(x+\Delta x) \approx f(x)+f'(x)\Delta x$$

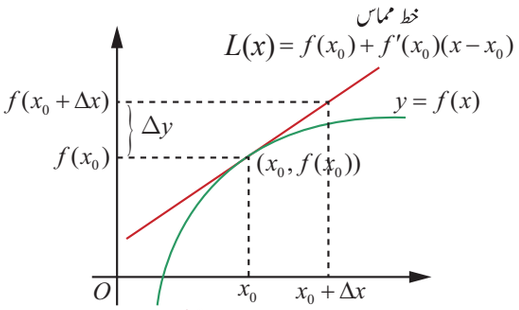
جو $f(x+\Delta x)$ کی قیمت کا اندازہ لگانے میں استعمال ہوتا ہے۔

غور کیجئے کہ x_0 پر f کے لئے خطی اندازے سے $f(x)$ کا صحیح اندازہ حاصل ہوتا ہے اگر x، x_0 کے قریب ہو، کیونکہ

$$\text{غلطی} = f(x)-L(x) = f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0) \quad \ldots (5)$$

x_0 پر f کے مسلسل سے صفر کے قریب ہوتا ہے جیسے جیسے x، x_0 کے قریب ہوتا ہے مزید اگر $f(x)=mx+c$ کسی بھی نقطہ $x \in (a,b)$ کے لئے اس کا خطی اندازہ $L(x)=(mx_0+c)+m(x-x_0)=mx+c=f(x)$ ہے۔

یعنی، اس صورتِ حال میں، خطی اندازہ اصلی تفاعل خود ہے (کیا یہ تعجب کی بات نہیں ہے؟)



خاکہ 8.3 خطِ مماس سے خطی اندازہ

مثال 8.1

$x_0=3$ پر $f(x)=\sqrt{1+x}, x \geq -1$ کے لئے خطی اندازہ معلوم کیجئے۔اس خطی اندازہ کو استعمال کرکے $f(3.2)$ کا اندازہ لگائیے۔

حل

(4) سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ $L(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ ہمارے پاس $x_0=3, \Delta x=0.2$ اور چنانچہ $f(3)=\sqrt{1+3}=2$ اس کے علاوہ

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \text{ اور چنانچہ } f'(3)=\frac{1}{2\sqrt{1+3}}=\frac{1}{4}.$$

غرض، $L(x) = 2+\frac{1}{4}(x-3)=\frac{x}{4}+\frac{5}{4}$ سے مطلوبہ خطی اندازہ حاصل ہوتا ہے۔

اب، $f(3.2) = \sqrt{4.2} \approx L(3.2)=\frac{3.2}{4}+\frac{5}{4}=2.050$

حقیقت میں، اگر ہم حساب کرنے کے لئے کیلکولیٹر استعمال کریں تو $\sqrt{4.2}=2.04939$. حاصل ہوتا ہے۔

8.2.2 غلطیاں :مطلق غلطی، متعلقہ غلطی اور فیصد غلطی

(Errors: Absolute Error, Relative Error, and Percentage Error)

حب ہم کسی قیمت کا اندازہ لگاتے ہیں، تو کوئی غلطی واقع ہوتی ہے۔ اس حصے میں، ہم اس غلطی پر غور کرتے ہیں، جو خطی اندازہ سے واقع ہوتی ہے۔جو (4) سے دیا گیا ہے۔ ہم غلطیوں کے مختلف اقسام پر غور کریں گے ۔ $h=x-x_0$, لینے پر، ہمیں $x=x_0+h$ حاصل ہوتا ہے، پھر (5) اس طرح تبدیل ہوتا ہے۔

$$E(h) = f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h \quad \ldots (6)$$

غور کیجئے کہ $E(0)=0$ اور اس طرح ہم پہلے ہی مشاہدہ کرچکے ہیں $\lim_{h\to 0} E(h)=0$ ، x_0 پر f کے مسلسل سے حاصل ہوتا ہے۔اس کے علاوہ اگر f تفرقی پذیر ہے تو (1) سے ، یہ ملتا ہے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 8_Differentials and Partial.indd 61 28-02-2023 14:56:41

$$\lim_{h\to 0}\frac{E(h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x) = 0\,.$$

غرض، جب f پر x_0 تفرقی پذیر ہو تو اوپر کے مساوات سے یہ ظاہر ہوتا ہے h کے صفر پر پہنچنے سے بھی (تیزی سے) آگے $E(h)$ حقیقت میں صفر کو پہنچتا ہے۔

تعریف 8.2

مان لیجئے کہ مخصوص مقدار کو محسوب کرنا ہے۔ اس کی ٹھیک قیمت کو **اصل قیمت** کہتے ہیں۔ کبھی کبھار ہمیں کسی اندازہ کے طریقے سے اس کی **تقریبی قیمت** حاصل ہوتی ہے۔اس صورتِ حال میں ہم یہ وضاحت کرتے ہیں ۔

تقریبی قیمت - اصل قیمت = مطلق غلطی

اس لئے (6) سے مطلق غلطی حاصل ہوتا ہے جو خطی اندازہ کے ذریعہ سے واقع ہوتا ہے۔ آیئے خطی اندازہ کے استعمال کی تشریح کی مثال کو سمجھتے ہیں۔

مثال 8.2 خطی اندازہ کے استعمال سے کیلکولیٹر کے استعمال کے بغیر $\sqrt{9.2}$ کی تقریبی قیمت معلوم کیجئے۔

حل

ہمیں خطی اندازہ کے استعمال سے $\sqrt{9.2}$ کی تقریبی قیمت معلوم کرنا چاہئے۔

اب (3) سے، ہمارے پاس $f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$ ہے۔

یہ حاصل کرنے کے لئے، ہمیں ایک مناسب تفاعل f ، نقطہ x_0 اور Δx کو پہچاننا چاہئے ۔ ہمارا انتخاب اس طرح ہونا چاہئے کہ کیلکولیٹر کے بغیر اوپر کی تقریبی مساوات کے دائیں طرف قابلِ حساب ہونا چاہئے۔ اس لئے ، ہم $f(x)=\sqrt{x}, x_0=9$ اور $\Delta x = 0.2$ کا انتخاب کرتے ہیں۔ پھر $f'(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{9}}$ اور چنانچہ

$$\sqrt{9.2} \approx f(9)+f'(9)(0.2) = 3+\frac{0.2}{6} = 3.03333\,.$$

اب اگر ہم موازنہ کرنے کے لئے کیلکولیٹر کا استعمال کریں تو ہمیں $\sqrt{9.2}=3.03315$ حاصل ہوتا ہے۔ہم یہ دیکھتے ہیں کہ تین اشاریہ کے مقام تک ہمارا اندازہ ٹھیک ہے اور غلطی $3.03315-3.03333=-0.00018$ ہے۔ (اس کے علاوہ ہم غور کرتے ہیں کہ $f(x)=\sqrt{1+x}, x_0=8$ اور $\Delta x=0.2$ کا بھی انتخاب کرسکتے ہیں۔اس لئے f اور x_0 کا انتخاب منفرد ہونا ضروری نہیں ہے)۔

اسی لئے اوپر کے مثال میں، مطلق غلطی $3.03315-3.03333=-0.00018$. ہے۔غور کیجئے کہ مطلق غلطی سے غلطی کا پتہ چلتا ہے، مگر اندازہ کے بارے میں کچھ نہیں پتہ چلا کہ یہ کتنا مناسب ہے ، مثال کے طور پر،دو مختصر صورت حال پر غور کرتے ہیں۔

صورت حال 1

مان لیجئے کہ کسی شئے کی اصل قیمت 5 ہے اور اس کی تقریبی قیمت 4 ہے تو پھر مطلق غلطی $5-4=1$ ہے۔

صورت حال 2

مان لیجئے کہ کسی شئے کی اصل قیمت 100 ہے اور اس کی تقریبی قیمت 95 ہے۔ اس صورت حال میں، مطلق غلطی $100-95=5$ ہے۔ اس لئے پہلے صورت حال میں مطلق غلطی دوسرے صورت حال سے کم ہے جب ہم انہیں موازنہ کرتے ہیں۔

ان دو اندازوں میں، کونسا بہتر اندازہ ہے اور کیوں؟ مطلق غلطی سے یہ واضح نہیں ہوتا کہ اندازہ صحیح ہے یا نہیں۔ تو دوسری جانب ، اگر ہم متعلقہ غلطی یا غلطی کا فیصد معلوم کریں (نیچے وضاحت کی گئی ہے)۔ تو یہ دیکھنا آسان ہوگا کہ یہ اندازہ کتنا صحیح ہے۔ اگر اصل قیمت صفر ہے، تو ہمیں معلوم ہے کہ ہمارا اندازہ (حل) اصل قیمت کے کتنا قریب ہے۔ اس لئے اگر اصل قیمت صفر نہیں ہے تو ہم وضاحت کرتے ہیں۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 8_Differentials and Partial.indd 62 28-02-2023 14:56:45

تعریف 8.3

اگر اصل قیمت صفر نہیں ہے، تو

$$\text{متعلقہ غلطی} = \frac{\text{تقریبی قیمت - اصل قیمت}}{\text{اصل قیمت}}$$

$$\text{فیصد غلطی} = \text{متعلقہ غلطی} \times 100$$

غور کیجئے (Note)

مطلق غلطی کے لئے پیمائشی اکائی ہے جبکہ متعلقہ غلطی اور فیصد غلطی کے لئے کوئی اکائیاں نہیں ہوتے ۔ غور کیجئے کہ اوپر کے مثالوں کے صورتِ حال میں

پہلے صورتِ حال میں،

$$\text{متعلقہ غلطی} = \frac{1}{5} = 0.2 \quad \text{اور} \quad \text{فیصد غلطی} = \frac{1}{5} \times 100 = 20\%$$

دوسرے صورتِ حال میں

$$\text{متعلقہ غلطی} = \frac{5}{100} \quad \text{اور} \quad \text{فیصد غلطی} = \frac{5}{100} \times 100 = 5\%$$

اس لئے دوسرا اندازہ پہلے اندازہ سے بہتر اندازہ ہے۔ غور کیجئے کہ متعلقہ غلطی یا فیصد غلطی معلوم کرنے کے لئے کسی بھی شئے کی اصل قیمت کا معلوم ہونا ضروری ہے۔

آئیے چند مثالیں دیکھیے۔

مثال 8.3

فرض کیجئے کہ صابن کے غبارہ کی شکل کردی ہے۔ خطی اندازہ کو استعمال کرکے صابن کے غبارے کے سطحی رقبہ میں بڑھوتی کا اندازہ لگائیے جیسے جیسے اس کا نصف قطر سمر 5 سے سمر 5.2 تک بڑھتا ہے۔ اس کے علاوہ فیصد غلطی بھی معلوم کیجئے۔

حل

اعادہ کیجئے کہ نصف قطر r والے کرّہ کا سطحی رقبہ $S(r) = 4\pi r^2$ سے دیا جاتا ہے۔

غور کیجئے کہ اس ضابطہ کو استعمال کرکے ٹھیک تبدیلی معلوم کرنے کے باوجود ہم خطی اندازہ کو استعمال کرکے تبدیلی کا اندازہ لگانے کی کوشش کرتے ہیں۔ اس لئے، (4) کو استعمال کرکے، ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{سطحی رقبہ میں تبدیلی} = S(5.2) - S(5) \approx S'(5)(0.2)$$

$$= 8\pi(5)(0.2) = 8\pi \text{ مربع سمر}$$

سطحی رقبہ میں تبدیلی کا ٹھیک حساب

$$S(5.2)\text{-}S(5) = 108.16\pi - 100\pi = 8.16\pi \text{ مربع سمر}$$

$$\text{فیصد غلطی} = \frac{8.16\pi - 8\pi}{8.16\pi} \times 100 = 1.9607\% \quad \times 100 \text{ متعلقہ غلطی}$$

مثال 8.4

نصف قطر سمر $r = 10$ اور اونچائی سمر $h = 20$ کا ایک قائم مدوّر استوانہ ہے۔ مان لیجئے کہ استوانے کا نصف قطر کو سمر 10 سے سمر 10.1 بڑھایا گیا ہے اور اونچائی تبدیل نہیں ہوتی ۔ استوانے کے حجم کا اندازہ لگائیے۔اس کے علاوہ متعلقہ غلطی اور فیصد غلطی معلوم کیجئے ۔

حل

اعادہ کیجئے کہ ایک قائم مدوّراستوانے کا حجم $V = \pi r^2 h$ سے دیا جاتا ہے، جہاں r نصف قطر ہے اور h اونچائی ہے۔اس لئے ہمارے پاس $V(r) = \pi r^2 h = 20\pi r^2$.

$$V(10.1) - V(10) \approx \left.\frac{dV}{dt}\right|_{r=10} (10.1 - 10) = 20\pi\, 2(10(0.1)).$$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 8_Differentials and Partial.indd 63 28-02-2023 14:56:48

غرض حجم کے تبدیلی کا اندازہ $40\pi \text{ cm}^3$ ہے۔

حجم کے تبدیلی کے ٹھیک حساب سے یہ حاصل ہوتا ہے۔

$$V(10.1)-V(10) = 2040.2\pi - 2000\pi = 40.2\pi \text{ cm}^3$$

اور چنانچہ، متعلقہ غلطی $= \dfrac{40.2\pi - 40\pi}{40.2\pi} = \dfrac{1}{201} = 0.00497$ اس لئے ، متعلقہ غلطی

$$\text{فیصد غلطی} = \text{متعلقہ غلطی} \times 100 = \frac{1}{201}\times 100 = 0.497\%$$

مشق 8.1

1. فرض کیجئے کہ $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ، $x = 27$ پر خطی اندازہ معلوم کیجئے۔ خطی اندازہ کو استعمال کرکے $\sqrt[3]{27.2}$ کا اندازہ لگائیے۔
2. خطی اندازہ کو استعمال کرکے ذیل کی تقریبی قیمتیں معلوم کیجئے۔

(i) $(123)^{\frac{2}{3}}$ (ii) $\sqrt[4]{15}$ (iii) $\sqrt[3]{26}$

3. نشان دہی کئے گئے نقاط پر ذیل کے تفاعلات کے لئے خطی اندازہ معلوم کیجئے۔

(i) $f(x) = x^3 - 5x + 12,\ x_0 = 2$ (ii) $g(x) = \sqrt{x^2+9},\ x_0 = -4$

(iii) $h(x) = \dfrac{x}{x+1},\ x_0 = 1$

4. ایک دائرہ نما تھالی کے نصف قطر کی اصل لمبائی سمر 12.65 کے بجائے سمر 12.5 پیمائش کی جاتی ہے۔ مدور پتی میں رقبہ کے تبدیلی کرنے میں ذیل کے غلطیاں معلوم کیجئے۔

(i) مطلق غلطی (ii) متعلقہ غلطی (iii) فیصد غلطی

5. برف سے بنے ایک کرہ کا نصف قطر سمر 10 ہے۔ اس کا نصف قطر سمر 10 سے سمر 9.8 تک گھٹتا ہے تو ذیل کے لئے اندازہ معلوم کیجئے۔

(i) حجم میں تبدیلی (ii) سطحی رقبہ میں تبدیلی

6. ایک سادہ رقاص جس کی لمبائی l ہے۔ ایک مکمل ارتعاش کے لئے وقت T لگتا ہے، اس کی مساوات $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ سے دی گئی ہے، یہاں g ایک مستقل ہے، l کی قیمت میں 2 فیصد کے غلطی کے لحاظ سے T کی حسابی قیمت میں فیصد غلطی کا اندازہ معلوم کیجئے۔
7. ثابت کیجئے کہ ایک عدد کے n ویں جذر میں فیصد غلطی تقریباً اس عدد میں فیصد غلطی کا $\dfrac{1}{n}$ گنا ہے۔

8.2.3 تفرقی (Differentials)

یہاں دوبارہ ، ہم مشتق کے تصور کو استعمال کرکے **"تفرقی"** کا تعارف کرتے ہیں۔ آئیے (1) پر دوبارہ نظر ثانی کریں۔

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}. \qquad ...(7)$$

یہاں، $\dfrac{df}{dx}$ ایک ترقیم ہے، جسے لیبنیز نے استعمال کیا تھا، یہ خارج قسمت کے فرق کے حد کے لئے ہے، جو x کے لحاظ سے y کا **تفرقی ضریب** کہلاتا ہے۔ کیا $\dfrac{df}{dx}$ کو df اور dx کے خارج قسمت کی طرح استعمال کرنا بامعنی ہوگا؟ دوسرے الفاظ میں، کیا یہ ممکن ہے کہ df اور dx کے معنیٰ اس طرح منسوب کریں کہ مشتق df اور dx کے خارج قسمت کے مساوی ہو۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 8_Differentials and Partial.indd 64 28-02-2023 14:56:52

اچھا، چند صورت حالوں میں ہاں اس طرح ممکن ہے۔ مثال کے طور پر، اگر $f(x)=mx+c$، m، c مستقل ہوں تو $y=f(x)$

$$\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)=m\Delta x=f'(x)\Delta x$$ تمام کے لئے $x\in\mathbb{R}$ اور Δx

چنانچہ، دونوں مساوات (2) اور (3) میں مساوی۔ اس صورت حال میں x اور $y(=f)$ میں تبدیلیاں خطوط مستقیم کے ہم راہ ہوتے ہیں۔ اس طرح کی صورت حال میں

$$\frac{f\text{ میں تبدیلی}}{x\text{ میں تبدیلی}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)=\frac{df}{dx}=\frac{dy}{dx}$$

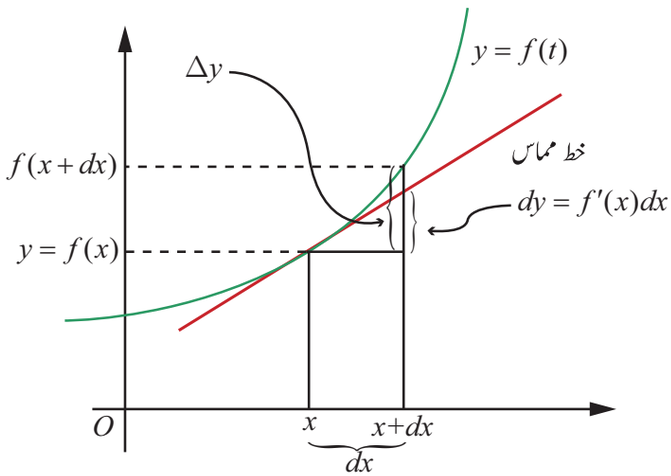
غرض اس صورت حال میں مشتق $\frac{df}{dx}$ حقیقی معنی میں df اور dx کا خارج قسمت ہے، اگر ہم، $df=\Delta f=dy$ اور $dx=\Delta x$ لیں۔ اس سے ہمیں ذیل کی طرح سے f کی تفرق کی وضاحت کے لئے رہنمائی ملتی ہے۔

تعریف 8.4

فرض کیجئے کہ $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ ایک تفرق پذیر تفاعل ہے، $x\in(a,b)$ کے لئے اور Δx، x کو دیا گیا اضافہ ہے، ہم f کے تفرق کو اس طرح وضاحت کرتے ہیں۔

$$df=f'(x)\Delta x\ . \qquad \ldots(8)$$

پہلے ہم یہ غور کرتے ہیں کہ اگر $f(x)=x$، تو (8) سے ہمیں $dx=f'(x)\Delta x=1\Delta x$ حاصل ہوتا ہے جس کا مطلب تفرق $dx=\Delta x$، جو x- محور میں تبدیلی ہے۔ اس لئے (8) کے ذریعہ دیا گیا تفرق $df=f'(x)dx$ کی طرح یکساں ہے۔



خاکہ 8.4 (خطی تقریبی اور تفریقات)

اس کے بعد ہم ایک اختیاری تفرق پذیر تفاعل $y=f(x)$ کے لئے تفرق کی تلاش کریں گے۔ پھر $\Delta f=f(x+dx)-f(x)$ کی ترسیم کے ہم راہ ماحصل میں تبدیلی حاصل ہوتی ہے $y=f(x)$ اور $f'(x)$ سے پر خط مماس کا میلان $(x, f'(x))$ پر حاصل ہوتا ہے۔ فرض کیجئے کہ dy یا df خط مماس کے ہم راہ f میں اضافہ کو ظاہر کرتا ہے۔ پھر اوپر کے مشاہدے سے ہمیں، $dy=f'(x)dx$ حاصل ہوتا ہے۔

خاکہ سے یہ واضح ہے کہ $\Delta f\approx dy=df=f'(x)dx$ اور چنانچہ $f'(x)$ کو اندازاً بطور Δf اور Δx کے خارج قسمت کو دیکھا جاسکتا ہے۔ اس لئے ہم $\frac{df}{dx}$ کو بطور df اور dx کے خارج قسمت کے توضیح کرسکتے ہیں۔

ریمارک (Remark)

ہم یہ جانتے ہیں کہ ایک تفاعل کا مشتق دوبارہ ایک تفاعل ہے۔ دوسری طرف، ایک تفاعل f کا تفرق df صرف آزاد متغیر کا ایک تفاعل نہیں ہے بلکہ اندراج مثلاً $dx=\Delta x$ میں تبدیلی پر بھی منحصر ہے۔ اس لئے df دو تبدیلی مقداریں x اور dx کا تفاعل ہے۔ غور کیجئے کہ $\Delta f\approx df$ جسے خاکہ 8.4 سے مشاہدہ کرسکتے ہیں۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 8_Differentials and Partial.indd 65 28-02-2023 14:56:58

ذیل کے جدول میں ہم موازنہ کے لئے چند تفاعلات، ان کے مشتق اور ان کے تفرقی پہلو بہ پہلو دئے گئے ہیں۔

شمار عدد	تفاعل	مشتق	تفرقی
1	$f(x)=x^n$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$df=nx^{n-1}dx$
2	$f(x)=\cos(x^2+7x)$	$f'(x)=-\sin(x^2+7x)(2x+7)$	$df=-\sin(x^2+7x)(2x+7)dx$
3	$f(x)=\cot(x^2)$	$f'(x)=-\operatorname{cosec}^2(x^2)2x$	$df=-\operatorname{cosec}^2(x^2)2x\,dx$
4	$f(x)=\sin^{-1}(x)$	$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$df=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$
5	$f(x)=\tan^{-1}x$	$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$	$df=\frac{1}{1+x^2}dx$
6	$f(x)=e^{x^3-5x+7}$	$f'(x)=e^{x^3-5x+7}(3x^2-5)$	$df=e^{x^3-5x+7}(3x^2-5)dx$
7	$f(x)=\log(x^2+1)$	$f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$	$df=\frac{2x}{x^2+1}dx$

اس کے بعد ہم تفرقی کے خصوصیات پر غور کریں گے۔ یہ نتائج تفرقی کی تعریف اور تفرقی کے اصولوں سے بہ آسانی حاصل ہوتے ہیں۔ ہم (5) کے لئے نیچے ثبوت دیتے ہیں اور دوسرے ثبوت بطور مشق دئے گئے ہیں۔

تفرقی کے خصوصیات (Properties of Differentials)

یہاں ہم حقیقی متغیر کے حقیقی قیمت والے تفاعلات پر غور کرتے ہیں۔

(1) اگر f ایک مستقل تفاعل ہو تو، $df=0$ ہے۔

(2) اگر $f(x)=x$ ایک متماثل تفاعل ہو تو، $df=1dx$ ہے۔

(3) اگر f تفرق پذیر اور $c\in\mathbb{R}$ ہو تو، $d(cf)=cf'(x)dx$ ہے۔

(4) اگر f, g تفرق پذیر ہو تو، $d(f+g)=df+dg=f'(x)dx+g'(x)dx$ ہے۔

(5) اگر f, g تفرق پذیر ہو تو، $d(fg)=fdg+gdf=(f(x)g'(x)+f'(x)g(x))dx$ ہے۔

(6) اگر f, g تفرق پذیر ہو تو، $d(f/g)=\frac{gdf-fdg}{g^2}=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}dx$، جہاں $g(x)\neq 0$ ہے۔

(7) اگر f, g تفرق پذیر ہوں اور $h=f\circ g$ کی وضاحت دی گئی ہو تو، $dh=f'(g(x))g'(x)dx$ ہے۔

(8) اگر $h(x)=e^{f(x)}$ ہو تو، $dh=e^{f(x)}f'(x)dx$ ہے۔

(9) اگر $f(x)>0$ تمام x کے لئے اور $g(x)=\log(f(x))$ ہو تو، $dg=\frac{f'(x)}{f(x)}dx$ ہے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 8_Differentials and Partial.indd 66 28-02-2023 14:57:05

مثال 8.5

فرض کیجئے کہ $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ تفرقی پذیر تفاعلات ہیں۔بتائیے کہ، $d(fg) = fdg + gdf$

حل

فرض کیجئے کہ $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ تفرقی پذیر تفاعلات ہیں اور $h(x) = f(x)g(x)$ ہو تو، h، تفرقی پذیر تفاعلات کا حاصل ضرب، (a,b) پر تفرقی پذیر ہے۔اس لئے تعریف سے، $dh = h'(x)dx$ اب ضربی اصول سے ہمیں، $h'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$ حاصل ہوتا ہے۔

غرض $dh = h'(x)dx = (f(x)g'(x) + f'(x)g(x))dx = f(x)g'(x)dx + f'(x)g(x)dx$

$= f(x)dg + g(x)df = fdg + gdf$ ■

مثال 8.6

فرض کیجئے کہ $g(x) = x^2 + \sin x$ تفرقی dg معلوم کیجئے۔

حل

غور کیجئے کہ g تفرقی پذیر ہے اور $g'(x) = 2x + \cos x$

غرض، $dg = (2x + \cos x)dx$ ■

مثال 8.7

اگر سمر 10 نصف قطر والے ایک کرّہ کے نصف قطر کو سمر 0.1 کم کریں، تو اس کے حجم میں اندازاً کی کمی کتنی ہوگی؟

حل

ہمیں معلوم ہے کہ کرہ کا حجم، $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ سے دیا گیاہے۔یہاں $r > 0$ نصف قطر ہے۔ اس لئے تفرقی $dV = 4\pi r^2 dr$ اور چنانچہ،

$$\begin{aligned} \Delta V \approx dV &= 4\pi(10)^2(9.9\text{-}10)\,\text{cm}^3 \\ &= 4\pi 10^2(-0.1)\,\text{cm}^3 \\ &= -40\pi\,\text{cm}^3. \end{aligned}$$ ■

غور کیجئے ہم سمر $dr = (9.9 - 10)$ استعمال کئے ہیں، کیونکہ نصف قطر 10 سے 9.9 تک کم ہوتا ہے۔ دوبارہ جواب میں منفی نشان یہ ظاہر کرتا ہے کہ کرّہ کا حجم $40\pi\ \text{cm}^3$ تک تقریباً کم ہوگا۔

مشق 8.2

1. ذیل کے ہر ایک تفاعلات کے لئے تفرقی dy معلوم کیجئے۔

(i) $y = \dfrac{(1-2x)^3}{3-4x}$ (ii) $y = (3 + \sin(2x))^{2/3}$ (iii) $y = e^{x^2-5x+7}\cos(x^2-1)$

2. $f(x) = x^2 + 3x$ کے لئے df معلوم کیجئے۔

(i) $x = 2$ اور $dx = 0.1$ (ii) $x = 3$ اور $dx = 0.02$

3. $x, \Delta x$ کے نشاندہی کردہ قیمتوں کے لئے تفاعل f کے لئے Δf اور df معلوم کیجئے اور موازنہ کیجئے۔

(i) $f(x) = x^3 - 2x^2; x = 2,\ \Delta x = dx = 0.5$

(ii) $f(x) = x^2 + 2x + 3;\ x = -0.5,\ \Delta x = dx = 0.1$

4. $\log_{10} e = 0.4343$ اخذ کرتے ہوئے، $\log_{10} 1003$ کی تقریبی قیمت معلوم کیجئے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 8_Differentials and Partial.indd 67 28-02-2023 14:57:11

5. ایک درخت کے تنے کا قطر 30 سم ہے۔ اس کے بعد سال کے دوران، اس کا محیط 6 cm بڑھ گیا۔ (i) درخت کا قطر اندازاً کتنا بڑھے گا؟ (ii) درخت کے عمودی تراش کے رقبہ میں فیصد بڑھوتی کتنی ہوگی؟

6. ایک مخصوص پرندے کا انڈا بہت قریب ترین کروی شکل کا ہے۔ اگر خول کا اندرونی نصف قطر 5 mm اور خول کا بیرونی نصف قطر 5.3 mm ہے، تو خول کا تقریبی حجم معلوم کیجئے۔

7. اخذ کیجئے کہ انسانی شریان کا ترچھی تراش دائرہ نما ہے۔شریانوں کو پھیلانے کے لئے مریض کو ایک دوائی دی جاتی ہے۔اگر شریان کا نصف قطر 2 mm سے 2.1 mm تک بڑھتا ہے، تو ترچھی تراش کا رقبہ اندازاً کتنا بڑھے گا؟

8. ایک نئی ترقی یافتہ شہر میں، یہ تخمینہ لگایا گیا کہ ووٹ دینے والوں کی آبادی (ہزار میں) $V(t)=30+12t^2-t^3,\ 0\le t\le 8$ کے مطابق اضافہ ہوگا۔یہاں t سال میں وقفہ ہے۔ 4 سے $4\frac{1}{6}$ سال کے وقفہ کی تبدیلی کے لئے ووٹ دینے والوں کی تقریبی تبدیلی معلوم کیجئے۔

9. x گھنٹوں میں ایک شخص کو y الفاظ سیکھنے کے تعلق کو $y=52\sqrt{x},\ 0\le x\le 9$ سے دیا گیا ہے۔ جب x ذیل کی طرح تبدیل ہونے پر سیکھے گئے۔ الفاظ کی تقریبی تعداد کیا ہے؟

(i) 1 سے 1.1 گھنٹہ؟ (ii) 4 سے 4.1 گھنٹہ؟

10. ایک دائرہ نماتھالی حرارت کے تاثیر سے یکساں طور پر پھیلتی ہے۔ اگر اس کا نصف قطر 10.5 cm تا 10.75 cm تک بڑھتا ہے، تو اس کے رقبہ میں تقریبی تبدیلی اور رقبہ میں تقریبی فیصد تبدیلی معلوم کیجئے۔

11. رنگ کے تہہ (coat of paint) کی موٹائی 0.2 cm مکعب کے سطحوں پر چڑھایا جاتا ہے جس کا کنارہ 10 cm ہے۔ تفرق کو استعمال کرکے اس مکعب کو رنگنے کے لئے اندازاً کتنا مکعب سنٹی میٹر رنگ استعمال کیا گیا ہے معلوم کیجئے ۔ اس کے علاوہ اس کے رنگنے کے لئے استعمال کردہ ٹھیک مقدار بھی معلوم کیجئے۔

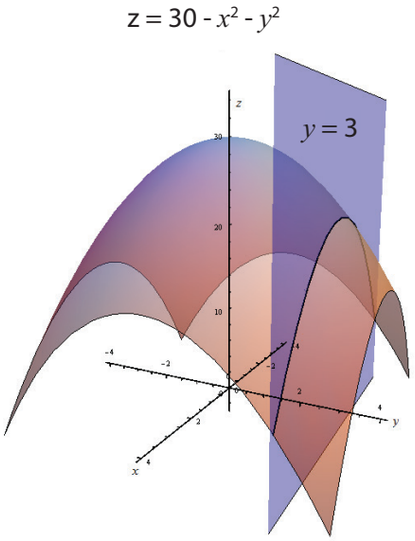
8.3 کثیر متغیرات والے تفاعلات (Functions of Several Variables)

اعادہ کیجئے کہ x کا ایک تفاعل f دیا گیا ہے؛ ہم اسے اچھی طرح سمجھنے کے لئے $y=f(x)$ کی ترسیم کھینچتے ہیں۔ عام طور پر $y=f(x)$ کے ترسیم سے xy- مستوی میں ایک منحنی حاصل ہوتا ہے۔ اس کے علاوہ $x=a$ پر f کا مشتق $f'(a)$، $x=a$ پر f کی ترسیم کے مماس کے میلان کو ظاہر کرتا ہے۔ تعارف میں ہم یہ دیکھ چکے ہیں کہ ایک سے زائد متغیرات والے تفاعلات کی ضرورت کیا ہے۔ پہلے ہم دومتغیرات والے تفاعلات پر غور کریں گے۔فرض کیجئے کہ $F(x,y)$، x اور y کا ایک تفاعل ہے۔ ترسیم F حاصل کرنے کے لئے ، ہم xyz- مستوی میں $z=F(x,y)$ ترسیم کھینچتے ہیں۔ اس کے علاوہ، ہم دو متغیرات والے تفاعل کے مسلسل ، جزوی مشتق کے تصورات میں ترقی کریں گے۔

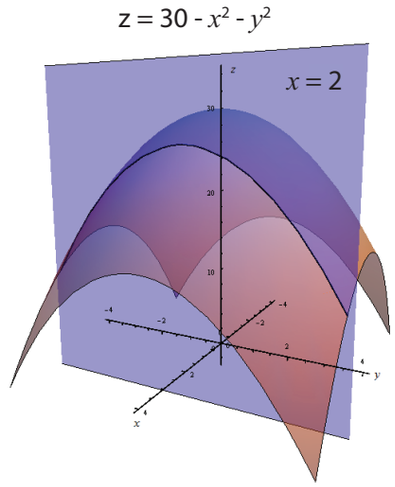
آیئے اب ہم ایک مثال پر غور کریں، $g(x,y)=30-x^2-y^2,\ x,y\in\mathbb{R}$ کے لئے دیا گیا ہے کہ ایک نقطہ $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ تو پھر $z=30-x^2-y^2$ سے ترسیم پر اس نقطے کا z مختص حاصل ہوتا ہے۔ غرض نقطہ $(x,y,30-x^2-y^2)$ ، $30-x^2-y^2$ مستوی xy میں نقطہ (x,y) کے تھوڑا اوپر واقع ہے، مثال کے طور پر $(2,3)\in\mathbb{R}^2$ کے لئے، نقطہ $g\ (2,3,30-2^2-3^2)=(2,3,17)$ ترسیم پر واقع ہے۔ اگر ہم قیمت $y=3$ متعین کریں، تو $g(x,3)=-x^2+21$ جو ایک تفاعل ہے جو صرف x متغیر پر منحصر ہے؛ اس لئے اس کی ترسیم ایک منحنی ہونی چاہئے۔ اسی طرح ، اگر ہم قیمت $x=2$ متعین کریں، تو پھر ہمیں $g(2,y)=26-y^2$ حاصل ہوتا ہے۔جو ایک تفاعل ہے جو صرف y پر منحصر ہے۔ ہر صورتِ حال میں ترسیم حاصل ہونے والا تفاعل کی طرح سے دودرجی، ایک مکافی ہوگا۔ $z=g(x,y)$ سے ہمیں حاصل ہونے والا سطح ”شلجم نما شکل“ (Paraboloid) کہلاتا ہے۔

غور کیجئے کہ $g(x,3)=21-x^2$ ایک مکافی کو ظاہر کرتا ہے، جو $z=30-x^2-y^2$ کے سطح اور مستوی $y=3$ کے تقاطع سے حاصل ہوتا ہے خاکہ 8.5 دیکھئے۔ اسی طرح سے $g(2,y)=26-y^2$ ایک مکافی کو ظاہر کرتا ہے۔جو $z=30-x^2-y^2$ کے سطح اور مستوی $x=2$ کے تقاطع سے حاصل ہوتا ہے۔(خاکہ 8.6 دیکھئے) ذیل کے ترسیمات اوپر کے بحث کی وضاحت کرتا ہے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 8_Differentials and Partial.indd 68 28-02-2023 14:57:17



خاکہ 8.5



خاکہ 8.6

اسی طرح،تفاعل F دو متغیر x, y کہئے دیا گیا ہے،ہم اس کو تین مسطح میں مساوات $z = F(x, y)$ سے دیکھ سکتے ہیں عام طور پر ،اسے $\mathbb{R}^3$ میں سطح سے ظاہر کر سکتے ہیں۔

8.3.1 ایک متغیر کے حد اور مسلسل کا اعادہ کرنا

(Recall of Limit and Continuity of Functions of One Variable)

اس کے بعد ہم دو متغیرات x ، y والے تفاعل کے مسلسل کے بارے میں غور کریں گے۔اس سے پہلے، ایک متغیر والے تفاعل کے مسلسل کا اعادہ کرنا ہمارے فائدہ مند ہوگا۔ ہم XI ویں جماعت میں ذیل کی مسلسل کی تعریف پڑھ چکے ہیں۔

ایک تفاعل $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ ایک نقطہ $x_0 \in (a,b)$ پر مسلسل کہلاتا ہے۔اگر ذیل کے خصوصیات اختیار کرتا ہیں۔

(1) f ، x_0 پر واضح ہے (2) $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ وجود میں آتا ہے (3) $L = f(x_0)$

مسلسل کا بنیادی تصور اوپر کے دئے گئے دوسری شرط کو سمجھنے میں ہے۔ہم لکھتے $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ جب کبھی $f(x)$ ، L کے قریب سے قریب ہوتا ہے۔جیسے جیسے x ، x_0 کے قریب سے قریب ہوتا ہے۔

اس کو واضح اور مختصر کرنے کے لئے ، ہم دوسری شرط کو، اس کے قریبی کے لحاظ سے دوبارہ لکھتے ہیں۔ اس سے ہمیں دومتغیرات والے تفاعلات کے بارے میں سیکھنے کے دوران مدد ملے گی۔

تعریف 8.5 تفاعل کا حد (Limit of a Function)

مان لیجئے کہ $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ اور $x_0 \in (a,b)$ ہم یہ کہتے ہیں کہ $x = x_0$ پر f کا حد L ہے اگر ہر ایک L کا قریبی کے لئے $(L-\varepsilon, L+\varepsilon), \varepsilon > 0$ x_0 کا ایک قریبی $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset (a,b), \delta > 0$ وجود میں ہوتا ہو اس طرح کہ

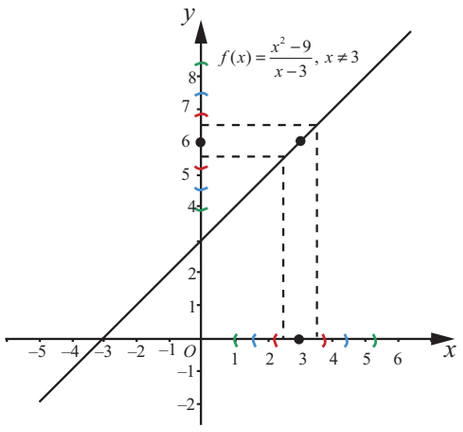
$$x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \setminus \{x_0\} \text{ جب کبھی } f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$$

قریبی کے لحاظ سے اوپر کی شرط کو ذیل کی طرح سے معین ضروب (modulus) یا مطلق قیمت (absolute value) ترقیم کو استعمال کرکے بھی معادل طور پر بیان کیا جاسکتا ہے۔

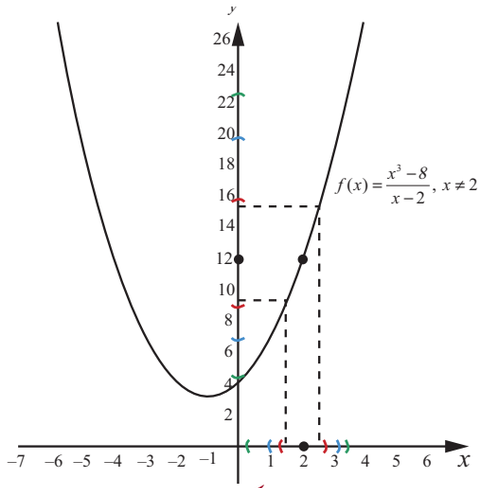
12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 8_Differentials and Partial.indd 69 28-02-2023 14:57:21

$\forall \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0$ اس طرح کہ $|f(x) - L| < \varepsilon$ جب کبھی $0 < |x - x_0| < \delta$

اس کا مطلب جب کبھی $x \neq x_0$ اور x_0 سے δ فاصلہ کے اندر ہوتو $f(x)$ ، L سے ε فاصلہ کے اندر ہے۔ ذیل کے خاکے ε اور δ کے درمیان باہمی مداخلت کو سمجھاتے ہیں۔



خاکہ 8.7



خاکہ 8.8

XI ویں جماعت سے ہمیں یہ بھی معلوم ہے کہ ایک تفاعل f جو ممکنہ طور پر x_0 کے علاوہ x_0 کے قریبی میں وضاحت کی گئی ہے اس تفاعل کا ایک حد x_0 پر ہے اگر ذیل کی خصوصیات اختیار کرے:

(1) $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L_1$ (دائیں طرف کا حد) وجود میں آتا ہو (2) $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L_2$ (بائیں طرف کا حد وجود میں آتا ہو

(3) $L_1 = L_2$.

فرض کیجئے کہ $f(x_0) = L$ تو پھر یہ f تفاعل $x = x_0$ پر مسلسل ہے اگر $L = L_1 = L_2$ غور کیجئے کہ ایک متغیر والے تفاعلات کے حد اور مسلسل میں، قریبی اہم رول ادا کرتے ہیں۔ ایک نقطہ $x_0 \in \mathbb{R}$ کے ایک قریبی اس صورت حال میں، $(x_0 - r, x_0 + r)$ کی طرح نظر آتا ہے، یہاں $r > 0$۔ دو متغیرات والے تفاعلات کے حد اور مسلسل کو دریافت کرنے کے لئے ، ایک نقط $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ کے قریبی کو وضاحت کرنے کی ضرورت ہے، اس لئے $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ اور $r > 0$ کے لئے اس نقطہ (u,v) کا ایک r - قریبی سٹ یہ ہے۔

$$B_r((u,v)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-u)^2 + (y-v)^2 < r^2\}$$

اس لئے ایک نقطہ (u,v) کا ایک r - قریبی ایک کھلی تھالی ہے جس کا مرکز (u,v) اور نصف قطر $r > 0$ ہے۔ قریبی سے اگر مرکز کو نکال دیا جائے تو یہ **منسوخ کردہ قریبی deleted neighbourhood** کہلاتا ہے۔

8.4 دو متغیرات والے تفاعلات کے حد اور مسلسل

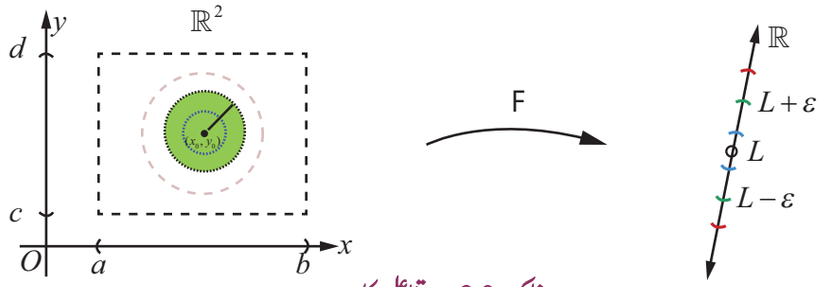
(Limit and Continuity of Functions of Two Variables)

تعریف 8.6 (ایک تفاعل کا حد) (Limit of a Function)

مان لیجئے کہ $A = \{(x,y) \mid a < x < b, c < y < d\} \subset \mathbb{R}^2, F : A \to \mathbb{R}$ ، ہم یہ کہتے ہیں کہ (u,v) پر F کا ایک حد L ہے اگر ذیل کی خصوصیت اختیار کرے:

ہر ایک L کا قریبی $(L-\varepsilon, L+\varepsilon), \varepsilon > 0$ کے لئے (u,v) کا، ایک δ - قریبی $B_\delta((u,v)) \subset A$ وجود میں آتا ہے اس طرح کہ $(x,y) \in B_\delta((u,v)) \setminus \{(u,v)\}, \delta > 0 \Rightarrow f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ اس کو ہم $\lim\limits_{(x,y) \to (u,v)} F(x,y) = L$ سے ظاہر کرتے ہیں اگر اس طرح کا ایک حد وجود میں آتا ہے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 8_Differentials and Partial.indd 70 28-02-2023 14:57:25



خاکہ 8.9 تفاعل کا حد

جب ہم ایک متغیر والے تفاعل کے صورت حال سے موازنہ کریں دو متغیرات والے ایک تفاعل کے لئے ، حد بندی کے عمل میں ایک گہرائی ہے۔یہاں $F(x,y)$ کی قیمتیں اس مساوی قیمت L کو پہنچنا چاہئے، جیسے جیسے، (x,y)، (u,v) کو پہنچتاہو (u,v) کو **ہر ممکن راستے کے ہم راہ** (تمام راستے شامل ہیں جو خطوط مستقیم نہیں ہیں) خاکہ 8.9 حد بندی کے عمل کو سمجھاتا ہے۔

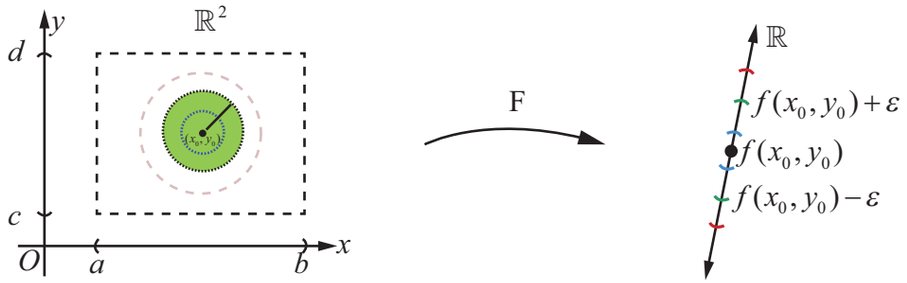
ایک متغیر والے تفاعلات کے حدود (حد کے مسئلے) کے تمام اصولیں کثیر متغیرات والے تفاعلات کے لئے بھی درست ہیں۔

اب، ایک متغیر والے تفاعلات کے لئے مسلسل کے تصور سے، ہم دومتغیرات والے تفاعل کی مسلسل کی وضاحت کرتے ہیں۔

تعریف 8.7 (مسلسل) (Continuity)

مان لیجئے کہ $A=\{(x,y)|a<x<b,c<y<d\}\subset\mathbb{R}^2, F:A\to\mathbb{R}$، ہم یہ کہتے ہیں کہ F ، (u,v) پر مسلسل ہے اگر ذیل کے خصوصیات اختیار کرے۔

(1) F واضح ہے (u,v) پر۔ (2) $\lim\limits_{(x,y)\to(u,v)} F(x,y)=L$ وجود میں آتا ہو۔ (3) $L=F(u,v)$



خاکہ 8.10 تفاعل کا مسلسل

ریمارک (Remark)

(1) خاکہ 8.10 میں $L=F(x_0,y_0)$ لینے پر (x_0,y_0) پر مسلسل کی تشریح ہوگی۔

(2) $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ کی مسلسل بھی واضح ہے جیسا کہ اوپر وضاحت کی گئی ۔

آیئے دو متغیرات کے تفاعلات کے مسلسل کو سمجھنے کے لئے چند مثالیں بطور تشریح غور کریں۔

مثال 8.8

فرض کیجئے کہ $f(x,y)=\dfrac{3x-5y+8}{x^2+y^2+1}$ تمام $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ کے لئے

ثابت کیجئے کہ $\mathbb{R}^2$ پر f مسلسل ہے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 8_Differentials and Partial.indd 71 28-02-2023 14:57:28

حل

فرض کیجئے کہ $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ ایک اختیاری (arbitrary) نقطہ ہے۔ ہم (a,b) پر f کے مسلسل کی تحقیق کریں گے۔

یعنی ، یہ جانچ کریں گے مسلسل کے تینوں شرائط (a,b) پر f کے لئے درست ہیں۔

پہلی شرط کی جانچ کے لئے غور کیجئے کہ ، $f(a,b) = \dfrac{3a-5b+8}{a^2+b^2+1}$ واضح ہے۔

اس کے بعد ہم یہ معلوم کرتے ہیں کہ اگر $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ وجود میں آتا ہے یا نہیں۔

اس لئے ہم $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} (3x-5y+8) = 3a-5b+8$ اور $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} (x^2+y^2+1) = a^2+b^2+1 \neq 0$ دریافت کرتے ہیں۔

غرض ، حدود کے خصوصیات کے ذریعے ، ہم یہ دیکھتے ہیں کہ

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \frac{\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} (3x-5y+8)}{\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} (x^2+y^2+1)} = \frac{3a-5b+8}{a^2+b^2+1} = f(a,b) = \mathrm{L}$$ وجود میں آتا ہے۔

اب ہم غور کرتے ہیں کہ $\lim\limits_{x,y\to(a,b)} f(x,y) = L = f(a,b)$ چنانچہ (a,b) پر f کے مسلسل کے تینوں شرائط درست ہیں چونکہ کہ (a,b) $\mathbb{R}^2$ میں ایک اختیاری نقطہ ہے ہم اس نقطے پر پہنچتے ہیں کہ f $\mathbb{R}^2$ تمام نقاط پر مسلسل ہے۔

مثال 8.9

ماں لیجئے کہ $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ اگر $(x,y) \neq (0,0)$ اور $f(0,0) = 0$ بتائیے کہ $(0,0)$ پر f مسلسل نہیں ہے۔اور $\mathbb{R}^2$ کے دوسرے تمام نقاط پر مسلسل ہے۔

حل

غور کیجئے کہ f ہر ایک $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ کے لئے واضح ہے۔ پہلے ہم $(a,b) \neq (0,0)$ پر مسلسل کی جانچ کریں گے۔

آیئے فرض کرتے ہیں کہ، مثال کے طور پر ، $(a,b) = (2,5)$ پھر ، $f(2,5) = \dfrac{10}{29}$ پھر ، اوپر کے مثال کی طرح سے، ہم

$\lim\limits_{(x,y)\to(2,5)} xy = 2(5) = 10$ اور $\lim\limits_{(x,y)\to(2,5)} x^2+y^2 = 2^2+5^2 = 29 \neq 0$ دریافت کرتے ہیں۔

$$\text{چنانچہ } \lim_{(x,y)\to(2,5)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{10}{29}$$

چونکہ $f(2,5) = \dfrac{10}{29} = \lim\limits_{(x,y)\to(2,5)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ ، اس کے اتباع میں f $(2,5)$ پر مسلسل ہے ۔ٹھیک طور پر اسی طرح کے بحث کے ذریعے ہم یہ ثابت کرسکتے ہیں کہ f تمام نقاط $(a,b) \neq (0,0)$ پر مسلسل ہے۔آیئے اب ہم $(0,0)$ پر مسلسل کی جانچ کریں۔ غور کیجئے کہ تعریف کے ذریعے $f(0,0) = 0$ اس کے بعد ہم یہ معلوم کرتے ہیں کہ اگر $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ وجود میں آتا ہے یا نہیں۔

آیئے پہلے ہم $(0,0)$ سے گذرنے والے خط مستقیم $y = mx$ کے ہمراہ حد کی جانچ کریں،

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{(1+m^2)x^2} = \frac{m}{1+m^2} \neq f(0,0) \text{ اگر } m \neq 0$$

اس لئے m کے مختلف قیمتوں کے لئے، ہمیں $\dfrac{m}{1+m^2}$ کی مختلف قیمتیں حاصل ہوتے ہیں۔اور چنانچہ اس نتیجے پر پہنچتے ہیں کہ

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ وجود میں نہیں آتا ۔ چنانچہ $(0,0)$. پر f مسلسل نہیں ہوسکتا۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 8_Differentials and Partial.indd 72 28-02-2023 14:57:34

مثال 8.10

مان لیجئے کہ $g(x,y)=\dfrac{2x^2y}{x^2+y^2}$ اگر $(x,y)\neq(0,0)$ اور $g(0,0)=0$ ثابت کیجئے کہ $\mathbb{R}^2$ پر g مسلسل ہے۔

حل : مشاہدہ کیجئے کہ تفاعل g تمام $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ کے لئے واضح ہے اوپر کے مثالوں سے یہ جانچ کرنا آسان ہے کہ g تمام نقاط $(x,y)\neq(0,0)$ پر مسلسل ہے ۔ اس کے بعد ہم $(0,0)$ پر g کے مسلسل کی جانچ کریں گے۔ اس کے لئے ہم دیکھتے ہیں اگر g کا ایک حد L ہے اور اگر $L=g(0,0)=0$ اس لئے ہم غور کرتے ہیں۔

$$|g(x,y)-g(0,0)|=\left|\frac{2x^2y}{x^2+y^2}-0\right|=\frac{2|x^2y|}{|x^2+y^2|}=\frac{2|xy||x|}{x^2+y^2}\leq\frac{(x^2+y^2)|x|}{x^2+y^2}\leq|x| \qquad \ldots(9)$$

غور کیجئے کہ اوپر کے آخری مرحلے میں ہم $2|xy|\leq x^2+y^2$ استعمال کر چکے ہیں۔ (اپناتے ہوئے اس کی اتباع ہوتی $0\leq(x-y)^2$ ہے) تمام $x,y\in\mathbb{R}$ کے لئے غور کیجئے کہ $(x,y)\to(0,0)$ ، $|x|\to0$ کو ظاہر کرتا ہے ۔پھر (9) سے اس کی اتباع میں $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2x^2y}{x^2+y^2}=0=g(0,0)$ ؛ جس سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ g $(0,0)$ پر مسلسل ہے۔ اس لئے g $\mathbb{R}^2$ کے تمام نقاط پر مسلسل ہے۔

مشق 8.3

1. محسوب کیجئے $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}g(x,y)$ ، اگر حدوجود میں آتا ہو، جہاں $g(x,y)=\dfrac{3x^2-xy}{x^2+y^2+3}$.

2. محسوب کیجئے $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\cos\left(\dfrac{x^3+y^2}{x+y+2}\right)$ ،اگر حد وجود میں آتا ہو۔

3. فرض کیجئے کہ $f(x,y)=\dfrac{y^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ ، $(x,y)\neq(0,0)$ کے لئے ثابت کیجئے کہ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$.

4. محسوب کیجئے $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\cos\left(\dfrac{e^x\sin y}{y}\right)$ ، اگر حد وجود میں آتا ہو۔

5. فرض کیجئے $g(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ ، $(x,y)\neq(0,0)$ کے لئے اور $f(0,0)=0$

   (i) ثابت کیجئے $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}g(x,y)=0$ تمام خط $y=mx,m\in\mathbb{R}$ کے ہمراہ

   (ii) ثابت کیجئے $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}g(x,y)=\dfrac{k}{1+k^2}$ تمام مکافی $y=kx^2,k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ کے ہمراہ

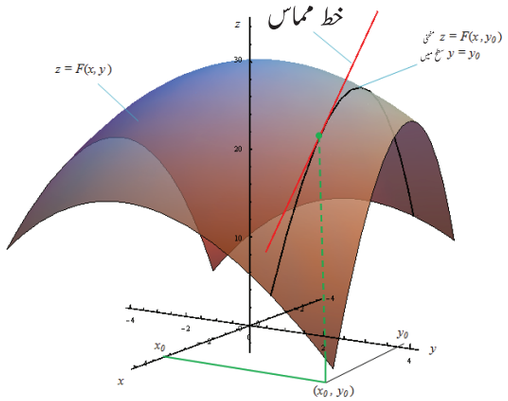
6. ثابت کیجئے $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{y^2+1}$ تمام $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ پر مسلسل ہے۔

7. فرض کیجئے کہ $g(x,y)=\dfrac{e^y\sin x}{x}$ ، $x\neq0$ اور $g(0,0)=1$ کے لئے ثابت کیجئے $(0,0)$ پر g مسلسل ہے۔

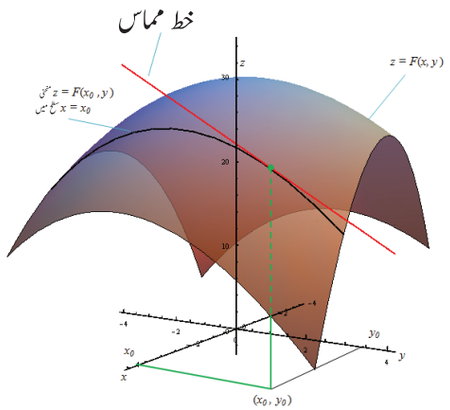
12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 8_Differentials and Partial.indd 73 28-02-2023 14:57:41

8.5 جزوی مشتقیں (Partial Derivatives)

اس حصّے میں، ہم یہ دیکھیں گے کہ ایک متغیر والے تفاعلات کے مشتق کے تصور کو کثیر متغیرات والے حقیقی - قیمت تفاعل کے لئے عام کیا جاسکتا ہے پہلے ہم دومتغیرات والے تفاعلات پر غور کریں گے۔ فرض کیجئے کہ $A=\{(x,y)|a<x<b, c<y<d\}\subset\mathbb{R}^2$ ، اور $F:A\to\mathbb{R}$ ایک حقیقی قیمت والا تفاعل ہے۔ مان لیجئے کہ $(x_0,y_0)\in A$ اور ہم صرف ایک متغیر x کی تبدیلی کے لحاظ سے (x_0,y_0) پر F کی تبدیلی کی شرح معلوم کرنے میں دلچسپی رکھتے ہیں۔ اس طرح کہ ہم دیکھ چکے ہیں کہ $F(x,y_0)$ صرف x کا تفاعل ہے اور یہ ایک منحنی کو ظاہر کرتا ہے جو سطح $z=F(x,y)$ مستوی $y=y_0$ کے تقاطع سے حاصل ہوتا ہے۔ اس لئے ہم x کے لحاظ سے $F(x,y_0)$ کا مشتق معلوم کرکے اور $x=x_0$ پر اس کی قیمت محسوب کرتے ہوئے $x=x_0$ پر منحنی $z=F(x,y_0)$ کے مماس کا میلان معلوم کرسکتے ہیں۔ ہم y کے لحاظ سے $F(x_0,y)$ کا مشتق معلوم کرکے اور $y=y_0$ پر اس کی قیمت محسوب کرتے ہوئے اور $y=y_0$ پر منحنی $z=F(x_0,y)$ کا میلان معلوم کرسکتے ہیں۔ یہ وہ بنیادی تصورات ہیں جو ہمیں نیچے آنے والے جزوی مشتق کی وضاحت کرنے کی حوصلہ افزائی کرتے ہیں۔



خاکہ 8.12



خاکہ 8.11

تعریف 8.8

فرض کیجئے $F:A\to\mathbb{R}, A=\{(x,y)|a<x<b, c<y<d\}\subset\mathbb{R}^2$ اور $(x_0,y_0)\in A$

(i) ہم یہ کہتے ہیں کہ $(x_0,y_0)\in A$ پر x کے لحاظ سے F کا ایک جزوی مشتق ہے اگر

$$\lim_{h\to0}\frac{F(x_0+h,y_0)-F(x_0,y_0)}{h} \quad \ldots(10)$$

وجود میں آتا ہو۔اس صورتِ حال میں حد کی قیمت کو $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

ہم یہ کہتے ہیں کہ $(x_0,y_0)\in A$ پر y کے لحاظ سے F کا ایک جزوی مشتق ہے اگر

$$\lim_{k\to0}\frac{F(x_0,y_0+k)-F(x_0,y_0)}{k} \quad \ldots(11)$$

وجود میں آتا ہو۔اس صورتِ حال میں، حد کی قیمت کو $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

ریمارک (Remark)

1. تین یا کثیر متغیرات والے تفاعلات کے جزوی مشتق ٹھیک اسی طریقے سے وضاحت کئے جاتے ہیں۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 8_Differentials and Partial.indd 74 28-02-2023 14:57:45

2. ہم ∂F کو"جزوی F "اور ∂x کو"جزوی x "پڑھتے ہیں۔ $\frac{\partial F}{\partial x}$ کو"جزوی F بئ"جزوی x اسے "ڈھو F بئ ڈھو" x بھی پڑھتے ہیں۔

3. اسی طرح، ہم $\frac{\partial F}{\partial x}$ کو" جزوی F بئ جزوی y "پڑھتے ہیں یا"ڈھو F بئ ڈھو y " بھی پڑھتے ہیں۔

4. کبھی کبھار $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)$ کو $F_x(x_0, y_0)$ یا $\left.\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\right|_{(x_0,y_0)}$ سے بھی ظاہر کیا جاتا ہے۔

اسی طرح $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$ کو $F_y(x_0, y_0)$ یا $\left.\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right|_{(x_0,y_0)}$ سے بھی ظاہر کیا جاتا ہے۔

5. ایک اہم بات جو غور کرنے کی ہے وہ یہ ہے کہ x کے لحاظ سے F کا مشتق معلوم کرنے کے دوران، ہم y کو بطور مستقل برتاؤ کرتے ہیں اور x کے لحاظ سے مشتق معلوم کرتے ہیں۔یعنی ، صرف اس متغیر کے علاوہ جس کے لحاظ سے ہم جزوی مشتق معلوم کرتے ہیں، دوسرے تمام متغیرات کو بطور مستقلات برتاؤ کرتے ہیں۔ اسی وجہ سے ہم اسے "جزوی مشتق" کہتے ہیں۔

6. اگر A کے ہر نقطے پر x کے لحاظ سے F کا ایک جزوی مشتق ہو، تو ہم یہ کہتے ہیں کہ A پر $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)$ وجود میں آتا ہے۔ غور کیجئے کہ اس صورت حال (x,y) میں $\frac{\partial F}{\partial x}$ پھر سے A پر واضح ایک حقیقی قیمت والا تفاعل ہے۔

7. (4)کی روشنی میں، تفرقی کے تمام اصولوں (حاصل جمع، حاصل ضرب، خارج قسمت اور زنجیری اصول) کی جانچ کرنا آسان ہے۔ اور جو ضابطے ہم پہلے ہی سیکھ چکے ہیں یہ تمام جزوی مشتق کے لئے بھی درست ہیں۔

اعادہ کیجئے کہ ایک متغیر والے تفاعل کے لئے، ایک نقطے پر تفرقی ہمیشہ اس نقطے پر مسلسل کو ظاہر کرتا ہے۔دو متغیرات x, y والے ایک تفاعل F کے لئے ، ہم $\frac{\partial F}{\partial x}(u,v)$ اور $\frac{\partial F}{\partial y}(u,v)$ کی وضاحت کرچکے ہیں۔کیا نقطہ (u,v) پر F کے جزوی مشتق کے وجود میں آنے سے (u,v) پر F کے مسلسل کو ظاہر کرتا ہے؟ ذیل کے مثال سے اس کی تشریح ہوتی ہے کہ اس طرح ہونا ہمیشہ ضروری نہیں۔

مثال 8.11

فرض کیجئے کہ $f(x,y) = 0$ اگر $xy \neq 0$ اور $f(x,y) = 1$ اگر $xy = 0$

(i) محسوب کیجئے: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0),\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

(ii) ثابت کیجئے کہ f $(0,0)$ پر مسلسل نہیں ہے۔

حل

غور کیجئے کہ تفاعل f x, y محور پر قیمت 1 اور $\mathbb{R}^2$ پر کہیں اور قیمت 0 رکھتا ہے۔ اس لئے آیئے ہم یہ محسوب کرتے ہیں۔

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1-1}{h} = 0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{1-1}{k} = 0$$

جس سے (i) مکمل ہوتا ہے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 8_Differentials and Partial.indd 75 28-02-2023 14:57:50

اب (ii) کے لئے ، چلئے خط $y = x$ کے ہمراہ $(x, y) \to (0,0)$ سے f کا حد محسوب کریں۔ پھر $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$ ؛ کیونکہ خط $y = x$ کے ہمراہ جب $x \neq 0, f(x, y) = 0$ مگر $f(0,0) = 1 \neq 0$ ؛ چنانچہ f $(0,0)$ پر مسلسل نہیں ہو سکتا۔

مثال 8.12

فرض کیجئے کہ $F(x, y) = x^3y + y^2x + 7$ تمام $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ کے لئے $\frac{\partial F}{\partial x}(-1,3)$ اور $\frac{\partial F}{\partial y}(-2,1)$ محسوب کیجئے۔

حل

پہلے ہم $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$ معلوم کریں گے، پھر $(-1,3)$ پر ہم اس کو جانچتے ہیں۔ جیسے کہ ہم پہلے ہی مشاہدہ کر چکے ہیں۔ y کو ایک مستقل مانتے ہوئے ہم x کے لحاظ سے مشتق معلوم کرتے ہیں۔ یعنی

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial(x^3y + y^2x + 7)}{\partial x} = \frac{\partial(x^3y)}{\partial x} + \frac{\partial(y^2x)}{\partial x} + \frac{\partial(7)}{\partial x}$$

$$= 3x^2y + y^2 + 0$$

$$= 3x^2y + y^2.$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(-1,3) = 3(-1)^2 3 + 3^2 = 18.$$ اس لئے

اس کے بعد اسی طرح y کے لحاظ سے ہم جزوی مشتق معلوم کرتے ہیں۔

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial(x^3y + y^2x + 7)}{\partial y} = \frac{\partial(x^3y)}{\partial y} + \frac{\partial(y^2x)}{\partial y} + \frac{\partial(7)}{\partial y}$$

$$= x^3 + 2yx + 0$$

$$= x^3 + 2yx.$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(-2,1) = (-2)^3 + 2(1)(-2) = -12$$ چنانچہ ہمارے پاس ہے۔

غور کیجئے کہ اوپر کے مثال $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 3x^2y + y^2$ میں، جو پھر سے دو متغیرات والا تفاعل ہے۔ اس لئے ہم x یا y کے لحاظ سے اس تفاعل کا جزوی مشتق حاصل کر سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر ، اگر ہم $G(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}$ لیں، تو ہم $\frac{\partial G}{\partial x} = 6xy$ معلوم کرتے ہیں۔ چونکہ $G(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}$ ہمارے پاس $\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = 6xy$ ہے۔ ہم اس کو $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ کی طرح سے ظاہر کرتے ہیں۔ جس کو x کے لحاظ سے F کا **دو درجی جزوی مشتق** کہتے ہیں۔ اس کے علاوہ $\frac{\partial G}{\partial y} = 3x^2 + 2y$ ، چونکہ $G(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}$ ہمارے پاس $\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = 3x^2 + 2y$ ہے۔ ہم اس کو $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$ کی طرح سے ظاہر کرتے ہیں۔ جس کو x, y کے لحاظ سے F کا مرکب جزوی مشتق کہتے ہیں۔ اس طرح ہم $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = 3x^2 + 2y$. بھی محسوب کرتے ہیں۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 8_Differentials and Partial.indd 76 28-02-2023 14:57:56

اس کے علاوہ ، اگر ہم $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$ کو y کے لحاظ سے جزوی طور پر تفرق کریں، تو ہمیں $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ حاصل ہوتا ہے، جسے y کے لحاظ سے دو ترتیب جزوی مشتق کہتے ہیں۔ اس لئے کسی بھی تحتی محموعہ $\{(x,y) \mid a<x<b, c<y<d\} \subset \mathbb{R}^2$ پر وضاحت کردہ کسی بھی تفاعل F کے لئے، ہمارے پاس ذیل کی ترقیم ہے۔

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = F_{xx}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = F_{xy}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = F_{yx}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = F_{yy}$$

اوپر کے تمام ترقیمات کو F کے دو ترتیب جزوی مشتق کہتے ہیں۔اسی طرح سے ہم اعلیٰ ترتیبی جزوی مشتق کی وضاحت کرسکتے ہیں۔ مثلاً $\frac{\partial^3 F}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\right)$ اور $\frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\right)$ اس کے بعد ہم جزوی تفرق کے کئی مثالوں پر غور کریں گے۔

مثال 8.13

فرض کیجئے کہ $f(x,y) = \sin(xy^2) + e^{x^3+5y}$ تمام $(x,y) \in \mathbb{R}^2$، $\frac{\partial f}{\partial x}$، $\frac{\partial f}{\partial y}$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ اور $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ محسوب کیجئے۔

حل

پہلے ہم $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ محسوب کریں گے۔ غور کیجئے کہ f ، دو تفاعلات کا حاصل جمع ہے اور اس لئے

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\sin(xy^2) + \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{x^3+5y}\right) \\ &= \cos(xy^2)\frac{\partial}{\partial x}(xy^2) + e^{x^3+5y}\frac{\partial}{\partial x}(x^3+5y) \\ &= \cos(xy^2)y^2 + e^{x^3+5y}3x^2 .\end{aligned}$$

اسی طرح

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\sin(xy^2) + \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x^3+5y}\right) \\ &= \cos(xy^2)\frac{\partial}{\partial y}(xy^2) + e^{x^3+5y}\frac{\partial}{\partial y}(x^3+5y) \\ &= \cos(xy^2)2xy + 5e^{x^3+5y} .\end{aligned}$$

اس کے بعد ہم اس پر غور کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\cos(xy^2) + 3x^2e^{x^3+5y}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y}(y^2\cos(xy^2)) + \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2e^{x^3+5y}\right) \\ &= 2y\cos(xy^2) + y^2\left(-\sin(xy^2)2xy\right) + 3x^2e^{x^3+5y}5 \\ &= 2y\cos(xy^2) - 2xy^3\sin(xy^2) + 15x^2e^{x^3+5y} .\end{aligned}$$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 8_Differentials and Partial.indd 77 28-02-2023 14:58:02

بالآخر،

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\cos(xy^2)2xy + 5e^{x^3+5y}\right)$$

$$= -\sin(xy^2)y^2 2xy + \cos(xy^2)2y + 5e^{x^3+5y}3x^2$$

$$= 2y\cos(xy^2) - 2xy^3\sin(xy^2) + 15x^2 e^{x^3+5y}$$

غور کیجئے کہ ہم پہلے حاصلِ جمع کا اصول استعمال کئے ہیں، پھر اگلے مرحلے میں زنجیری اصول استعمال کئے ہیں۔ تیسرے مرحلے میں حاصل ضرب کا اصول استعمال کیا گیا ہے۔اس کے علاوہ ، ہم غور کرتے ہیں کہ $f_{xy} = f_{yx}$ کیا یہ اتفاق ہے؟ کیا یہ ہمیشہ درست ہے؟ حقیقت میں، کئی تفاعلات ہوتے ہیں۔جن کے لئے چند نقاط پر $f_{xy} \neq f_{yx}$ ۔ ذیل کے مسئلے سے وہ شرائط حاصل ہوتے ہیں جن کے تحت $f_{xy} = f_{yx}$

مسئلہ 8.1 کلاریٹسس کا مسئلہ (Clairaut's Theorem)

مان لیجئے کہ $A = \{(x,y) \mid a < x < b, c < y < d\} \subset \mathbb{R}^2$ ، $F : A \to \mathbb{R}$. اگر f_{xy} اور f_{yx} ، A میں وجود میں ہوں ، اور A میں مسلسل ہوں، تو A میں $f_{xy} = f_{yx}$

ہم اس مرحلے ثبوت پر بحث کو ترک کرتے ہیں۔

مثال 8.14

فرض کیجئے کہ $w(x,y) = xy + \frac{e^y}{y^2+1}$ تمام $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ کے لئے ، $\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$ اور $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ محسوب کیجئے۔

حل

پہلے ہم $\frac{\partial w}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial(xy)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\frac{e^y}{y^2+1}\right)}{\partial x}$ محسوب کرتے ہیں۔

اس سے $\frac{\partial w}{\partial x}(x,y) = y + 0$ حاصل ہوتا ہے اور چنانچہ $\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}(x,y) = 1$ ۔ دوسری طرف

$$\frac{\partial w}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial(xy)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\frac{e^y}{y^2+1}\right)}{\partial y}.$$

$$= x + \frac{(y^2+1)e^y - e^y 2y}{(y^2+1)^2}$$

چنانچہ $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}(x,y) = 1$.

تعریف 8.9

فرض کیجئے کہ $A = \{(x,y) \mid a < x < b, c < y < d\} \subset \mathbb{R}^2$ ایک تفاعل $u : A \to \mathbb{R}^2$ ، A میں ہم آہنگ (harmonic) کہلاتا ہے اگر یہ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \forall (x,y) \in A$ کی شرط پوری کرتا ہو۔ اس مساوات کو لیپلیس کی مساوات (Laplace's equation) کہتے ہیں۔

کئی قدرتی اعمال جیسے حرارتی موصلیت ،برق ماسکونی میدان ، مائع کے بہاؤ وغیرہ کے مطالعے میں لیپلیس کی مساوات واقع ہوتے ہیں۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 8_Differentials and Partial.indd 78 28-02-2023 14:58:08

مثال 8.15

فرض کیجئے کہ $u(x,y)=e^{-2y}\cos(2x)$ تمام $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ کیلئے ثابت کیجئے کہ u، $\mathbb{R}^2$ میں ہم آہنگ تفاعل ہے۔

حل

ہم کو یہ ثابت کرنا ضروری ہے کہ u، $\mathbb{R}^2$ میں لیپلیس کی مساوات پوری کرتا ہے۔مشاہدہ کیجئے کہ

$u_x(x,y)=e^{-2y}(-2)\sin(2x)$ اور چنانچہ $u_{xx}(x,y)=e^{-2y}(-2)(2)\cos(2x)$.

اسی طرح، $u_y(x,y)=e^{-2y}(-2)\cos(2x)$ اور $u_{yy}(x,y)=(-2)(-2)e^{-2y}\cos(2x)$.

غرض، $u_{xx}+u_{yy}=-4e^{-2y}\cos(2x)+4e^{-2y}\cos(2x)=0$ ■

مشق 8.4

1. نشاندہی کئے ہوئے نقاط پر ذیل کے تفاعلات کے جزوی مشتق معلوم کیجئے۔

$$f(x,y)=3x^2-2xy+y^2+5x+2,\quad (2,-5)\ \text{(i)}$$

$$g(x,y)=3x^2+y^2+5x+2,\quad (1,-2)\ \text{(ii)}$$

$$h(x,y,z)=x\sin(xy)+z^2x,\left(2,\frac{\pi}{4},1\right)\ \text{(iii)}$$

$$G(x,y)=e^{x+3y}\log(x^2+y^2),(-1,1)\ \text{(iv)}$$

2. ذیل کے ہر ایک تفاعلات کے لئے f_x, f_y معلوم کیجئے او رثابت کیجئے کہ $f_{xy}=f_{yx}$

(i) $f(x,y)=\dfrac{3x}{y+\sin x}$ (ii) $f(x,y)=\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{y}\right)$ (iii) $f(x,y)=\cos(x^2-3xy)$

3. اگر $U(x,y,z)=\dfrac{x^2+y^2}{xy}+3z^2y$ ہوتو، $\dfrac{\partial U}{\partial x}$، $\dfrac{\partial U}{\partial y}$ اور $\dfrac{\partial U}{\partial z}$ معلوم کیجئے۔

4. اگر $U(x,y,z)=\log(x^3+y^3+z^3)$ ہوتو، $\dfrac{\partial U}{\partial x}+\dfrac{\partial U}{\partial y}+\dfrac{\partial U}{\partial z}$ معلوم کیجئے۔

5. ذیل کے ہر ایک تفاعلات کے لئے g_{xx}, g_{xy} اور g_{yx}، g_{yy} معلوم کیجئے۔

(i) $g(x,y)=xe^y+3x^2y$ (ii) $g(x,y)=\log(5x+3y)$

(iii) $g(x,y)=x^2+3xy-7y+\cos(5x)$

6. فرض کیجئے $(x,y,z)\neq(0,0,0)$ $w(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$، ثابت کیجئے کہ $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}=0$۔

7. اگر $V(x,y)=e^x(x\cos y-y\sin y)$ ہوتو، ثابت کیجئے کہ $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0$۔

8. اگر $w(x,y)=xy+\sin(xy)$ ہوتو، ثابت کیجئے کہ $\dfrac{\partial^2 w}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 8_Differentials and Partial.indd 79 28-02-2023 14:58:14

9. اگر $v(x,y,z)=x^3+y^3+z^3+3xyz$ ہوتو، ثابت کیجئے کہ $\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z}=\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y}$

10. ایک کمپنی ہر ہفتے دوقسم کے محاسب (کیلکولیٹر) تیار کرتی ہے A قسم کے x عدد اور B قسم کے y عدد۔ ہفتہ واری محصول (revenue) اور قیمت تفاعلات (روپیوں میں) بالترتیب $R(x,y)=80x+90y+0.04xy-0.05x^2-0.05y^2$ اور $C(x,y)=8x+6y+2000$ ہیں۔

(i) منافع تفاعل $P(x,y)$ معلوم کیجئے۔

(ii) $\frac{\partial P}{\partial x}(1200,1800)$ اور $\frac{\partial P}{\partial y}(1200,1800)$ معلوم کیجئے اور ان نتیجوں کی تشریح کیجئے۔

8.6 خطی تقریب اور کثیر متغیرات والے تفاعل کی تفرق

(Linear Approximation and Differential of a function of several variables)

پہلے ہی اس باب میں، ہم خطی تقریب اور ایک متغیر والے تفاعل کے تفرق سیکھ چکے ہیں۔ یہاں ہم دومتغیرات اور تین متغیرات کے تفاعلات کے لئے اسی طرح کے تصورات کا تعارف کرتے ہیں۔ عام طورپر کثیر متغیرات کے تفاعلات کے لئے ان تصورات کو اسی طرح سے وضاحت کرسکتے ہیں۔

تعریف 8.10

فرض کیجئے کہ $A=\{(x,y)\mid a<x<b, c<y<d\}\subset\mathbb{R}^2, F:A\to\mathbb{R}$ اور $(x_0,y_0)\in A$

(i) $(x_0,y_0)\in A$ پر F کی خطی تقریب کی وضاحت یہ ہے۔

$$L(x,y)=F(x_0,y_0)+\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}(x-x_0)+\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}(y-y_0) \quad \ldots(12)$$

(ii) F کے تفرق کی وضاحت یہ ہے

$$dF=\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)dx+\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)dy, \quad \ldots(13)$$

یہاں $dx=\Delta x$ اور $dy=\Delta y$

یہاں ہم تین متغیرات والے تفاعلات کے لئے خطی تقریب اور تفرق کا خلاصہ لکھیں گے۔ حقیقت میں، ہم کثیر متغیرات کے حقیقی قیمت والے تفاعل کے لئے خطی تقریب اور تفرق معلوم کرسکتے ہیں مگر ہم خود کو صرف تین متغیرات پر محدود کرتے ہیں۔

تعریف 8.11

فرض کیجئے کہ $A=\{(x,y,z)\mid a<x<b, c<y<d,\ e<z<f\}\subset\mathbb{R}^3, F:A\to\mathbb{R}$ اور $(x_0,y_0,z_0)\in A$

(i) $(x_0,y_0,z_0)\in A$ پر F کی خطی تقریب کی وضاحت یہ ہے۔

$$L(x,y,z)=F(x_0,y_0,z_0)+\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}(x-x_0)+\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}(y-y_0)+\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}(z-z_0); \quad \ldots(14)$$

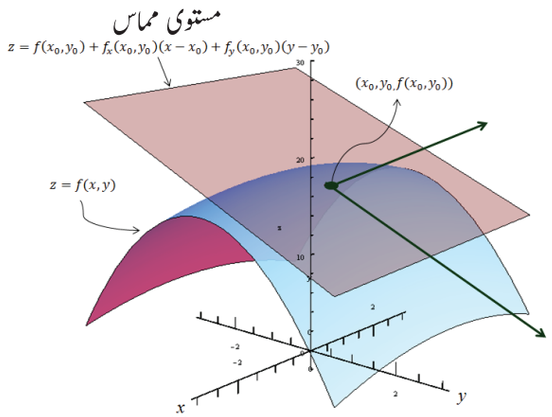
(ii) F کی تفرق کی وضاحت یہ ہے

$$dF=\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)dx+\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)dy+\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)dz, \quad \ldots(15)$$

یہاں $dx=\Delta x$ ، $dy=\Delta y$ اور $dz=\Delta z$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 8_Differentials and Partial.indd 80 28-02-2023 14:58:20

علم ہندسی کے طور پر، ایک متغیرات کے تفاعل f کے اس صورت حال میں، نقطہ x_0 پر خطی تقریب x_0 پر $y=f(x)$ کی ترسیم کے خط مماس کو ظاہر کرتا ہے۔اسی طرح، دومتغیرات والے تفاعل F کے اس صورتِ حال میں، نقطہ (x_0,y_0) پر خطی تقریب نقطہ (x_0,y_0) پر $z=F(x,y)$ کے ترسیم کے مستوی مماس کو ظاہر کرتا ہے۔



خاکہ 8.13 مستوی مماس سے خطی تقریب

مثال 8.16

اگر $w(x,y,z)=x^2y+y^2z+z^2x,\ x,y,z\in\mathbb{R}$ ہوتو تفرقی dw معلوم کیجئے۔

حل

پہلے ہم w_x ، w_y اور w_z معلوم کریں۔

اب $w_x=2xy+z^2$ ، $w_y=2yz+x^2$ اور $w_z=2zx+y^2$

غرض، (15) سے تفرقی یہ ہے۔

$$dw=(2xy+z^2)dx+(2yz+x^2)dy+(2zx+y^2)dz\ .$$

مثال 8.17

فرض کیجئے کہ $U(x,y,z)=x^2-xy+3\sin z,\ x,y,z\in\mathbb{R}$ ، $(2,-1,0)$ پر U کے لئے خطی تقریب معلوم کیجئے۔

حل

(14) سے خطی تقریب اس طرح دیا جاتا ہے۔

$$U(x,y,z)=U(x_0,y_0,z_0)+\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}(x-x_0)+\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}(y-y_0)+\left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}(z-z_0)$$

اب $U_x=2x-y$ ، $U_y=-x$ اور $U_z=3\cos z$

یہاں $(x_0,y_0,z_0)=(2,-1,0)$، چنانچہ $U_x(2,-1,0)=5$، $U_y(2,-1,0)=-2$ اور $U_z(2,-1,0)=3$

غرض $U(x,y,z)=6+5(x-2)-2(y+1)+3(z-0)=5x-2y+3z-6$، $(2,-1,0)$ پر U کے لئے درکار خطی تقریب ہے۔

مشق 8.5

1. اگر $w(x,y)=x^3-3xy+2y^2,\ x,y\in\mathbb{R}$ ہوتو $(1,-1)$ پر w کے لئے خطی تقریب معلوم کیجئے۔
2. اگر $z(x,y)=x^2y+3xy^4,\ x,y\in\mathbb{R}$ ہوتو $(2,-1)$ پر z کے لئے خطی تقریب معلوم کیجئے۔
3. اگر $v(x,y)=x^2-xy+\frac{1}{4}y^2+7,\ x,y\in R$ ہوتو تفرقی dv معلوم کیجئے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 8_Differentials and Partial.indd 81 28-02-2023 14:58:26

4. فرض کرو کہ $x, y, z \in \mathbb{R}$، $w(x,y,z) = x^2\text{-}xy+3\sin z$، $[2,-1,0]$ پر خطی تقریب معلوم کیجئے۔

5. فرض کیجئے کہ $V(x, y, z) = xy + yz + zx, x, y, z \in \mathbb{R}$ تفرق dV معلوم کیجئے۔

8.6.1 تفاعل کے تفاعل کا اصول (Function of Function Rule)

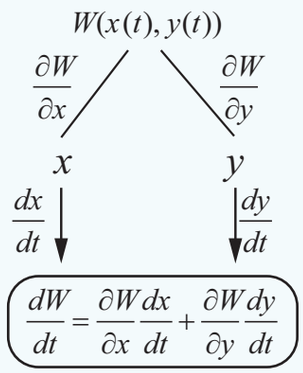
فرض کیجئے کہ F دو متغیرات x, y کا ایک تفاعل ہے۔ بسا اوقات یہ متغیرات یکساں علاقہ رکھنے والے ایک متغیرات کے تفاعلات ہوسکتے ہیں۔اس صورت حال میں، آخرکار یہ تفاعل F صرف ایک ہی متغیر کے تابع ہے۔ اس لئے ہم اس تفاعل F کو بطور ایک متغیر کے تفاعل خیال کرنا چاہئے اور $\frac{dF}{dt}$ کے بارے میں مطالعہ کرنا چاہئے ۔ حقیقت میں، یہ ایک اتفاق نہیں ہے، اسے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ

مسئلہ 8.2

مان لیجئے کہ $W(x, y)$ دومتغیرات x, y کا ایک تفاعل ہے جس کے جزوی مشتق $\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}$ ہیں۔ اگر دونوں متغیرات x, y ایک متغیر t کے تفرقی پذیر تفاعلات ہوں، تو

W، t کا تفرقی پذیر تفاعل ہے اور

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial W}{\partial y}\frac{dy}{dt} \qquad \ldots(16)$$



خاکہ 8.14

آیئے مذکورہ بالا مسئلہ کی تشریح کے لئے ایک مثال پر غور کریں۔

مثال 8.18

$F(x, y) = x^2 - 2y^2 + 2xy$ اور $x(t) = \cos t, y(t) = \sin t, t \in [0, 2\pi]$ کے لئے مذکورہ بالا مسئلے کی تصدیق کیجئے۔

حل

فرض کیجئے کہ $F(x,y) = x^2 - 2y^2 + 2xy$ اور $x(t) = \cos t, y(t) = \sin t$

تو پھر $F(x, y) = \cos^2 t - 2\sin^2 t + 2\cos t \sin t$ اور غرض F ایک متغیر t کا ایک تفاعل بنتا ہے۔اس لئے رنجیری اصول کو استعمال کرکے ، ہم یہ دیکھتے ہیں کہ

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt} &= 2\cos t(-\sin t) - 4\sin t\cos t + 2(-\sin^2 t + \cos^2 t)\\ &= -6\cos t\sin t + 2(-\sin^2 t + \cos^2 t)\end{aligned}$$

دوسری طرف اگر ہم یہ محسوب کریں۔

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} &= (2x+2y)\frac{dx}{dt} + (2x-4y)\frac{dy}{dt}\\ &= 2(\cos t + \sin t)(-\sin t) + 2(\cos t - 2\sin t)(\cos t)\\ &= -6\cos t\sin t + 2(-\sin^2 t + \cos^2 t)\\ &= \frac{dF}{dt}\end{aligned}$$

■

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 8_Differentials and Partial.indd 82 28-02-2023 14:58:32

مثال 8.19

فرض کیجئے کہ $g(x,y)=x^2-yx+\sin(x+y),\ x(t)=e^{3t},\ y(t)=t^2,\ t\in\mathbb{R}$ ، $\frac{dg}{dt}$ معلوم کیجئے۔

حل

یہ محسوب کرنے کے لئے ہم شجری خاکے کو اختیار کریں گے۔

اس لئے پہلے ہم کو $\frac{\partial g}{\partial x}$ ، $\frac{\partial g}{\partial y}$، $\frac{dx}{dt}$ اور $\frac{dy}{dt}$ معلوم کرنا چاہئے۔

اب $\frac{\partial g}{\partial x}=2x-y+\cos(x+y)$، $\frac{\partial g}{\partial y}=-x+\cos(x+y)$، $\frac{dx}{dt}=3e^{3t}$ اور $\frac{dy}{dt}=2t$

غرض

$$\begin{aligned}\frac{dg}{dt} &= \frac{\partial g}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{dy}{dt}\\ &= \big(2x-y+\cos(x+y)\big)3e^{3t}+\big(-x+\cos(x+y)\big)(2t)\\ &= (2e^{3t}-t^2+\cos(e^{3t}+t^2))3e^{3t}+(-e^{3t}+\cos(e^{3t}+t^2))(2t)\\ &= 6e^{6t}-3t^2e^{3t}+3e^{3t}\cos(e^{3t}+t^2)-2te^{3t}+2t\cos(e^{3t}+t^2)\,.\end{aligned}$$

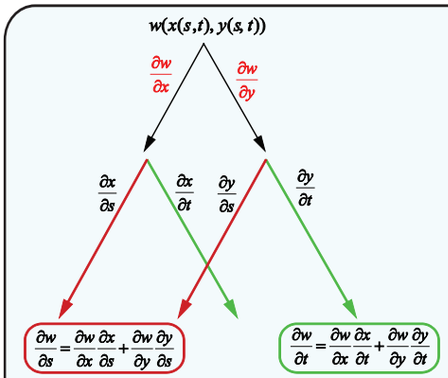
اس کے علاوہ، بسا اوقات $W(x,y)$ اس طرح سے $x=x(s,t)$ اور $y=y(s,t)$ ہوگا جہاں $s,t\in\mathbb{R}$ پھر W تفاعل کو s، t پر منحصر لے سکتے ہیں۔ اگر x,y دونوں کے s,t کے لحاظ سے جزوی مشتق ہوں اور x اور y کے لحاظ سے W کے جزوی مشتق ہوں، تو ہم ذیل کے مسئلے کو استعمال کرکے s اور t کے لحاظ سے W کے جزوی مشتق محسوب کرسکتے ہیں۔

مسئلہ 8.3

مان لیجئے کہ $W(x,y)$ دومتغیرات x,y کا ایک تفاعل ہے جس کے جزوی مشتق $\frac{\partial W}{\partial x},\frac{\partial W}{\partial y}$ ہیں۔اگر دونوں متغیرات $x=x(s,t)$ اور $y=y(s,t)$ جہاں $s,t\in\mathbb{R}$ کے s اور t کے لحاظ سے جزوی مشتق ہوں، تو

$$\frac{\partial W}{\partial s} = \frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}, \qquad \dots (17)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}. \qquad \dots (18)$$



خاکہ 8.15

ہم ثبوت کو چھوڑ دیتے ہیں۔ مذکورہ بالا مسئلہ بہت کار آمد ہے۔ مثال کے طور پر، اس صورت پر غور کیجئے جس میں $x=r\cos\theta$ اور $y=\sin\theta$ ، $r\geq 0$ اور $\theta\in\mathbb{R}$ (کارتیسی محددی نظام سے قطبی نظام میں تبدیل کرنے پر)۔ مذکوہ بالا مسئلہ n متغیرات والے تفاعلات کے لئے عام کیا جاسکتا ہے۔

آئیے ایک مثال پر غور کریں۔

مثال 8.20

فرض کیجئے کہ $g(x,y)=2y+x^2, x=2r-s, y=r^2+2s, r,s\in\mathbb{R}$ ، $\frac{\partial g}{\partial r},\frac{\partial g}{\partial s}$ معلوم کیجئے۔

حل

یہاں پھر سے ہم $\frac{\partial g}{\partial r},\frac{\partial g}{\partial s}$ محسوب کرنے کے لئے شجری خاکے کو استعمال کریں گے۔

چنانچہ ہم معلوم کرتے ہیں $\frac{\partial g}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial g}{\partial y}=2,\ \frac{\partial x}{\partial r}=2,\ \frac{\partial x}{\partial s}=-1,\ \frac{\partial y}{\partial r}=2r$ اور $\frac{\partial y}{\partial s}=2$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 8_Differentials and Partial.indd 83 28-02-2023 14:58:38

ب. $\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = 2x(2) + 2(2r) = 12r - 4s$

اس کے علاوہ $\frac{\partial g}{\partial s} = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = 2x(-1) + (2)2 = 2s - 4r + 4$

مشق 8.6

1. اگر $y = \sin t$ اور $x = e^t$، $u(x, y) = x^2y + 3xy^4$ معلوم کیجئے $\frac{du}{dt}$ اور $t = 0$ پر اسے جانچئے۔
2. اگر $u(x, y, z) = xy^2z^3,\ x = \sin t,\ y = \cos t,\ z = 1 + e^{2t}$، $\frac{du}{dt}$ معلوم کیجئے۔
3. اگر $w(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2,\ x = e^t,\ y = e^t \sin t$ اور $z = e^t \cos t$، $\frac{dw}{dt}$ معلوم کیجئے۔
4. اگر $U(x, y, z) = xyz,\ x = e^{-t},\ y = e^{-t}\cos t,\ z = \sin t,\ t \in \mathbb{R}$، $\frac{dU}{dt}$ معلوم کیجئے۔
5. اگر $w(x, y) = 6x^3 - 3xy + 2y^2,\ x = e^s,\ y = \cos s,\ s \in \mathbb{R}$، $\frac{dw}{ds}$ معلوم کیجئے۔ اور $s = 0$ پر جانچئے۔
6. اگر $z(x, y) = x\tan^{-1}(xy),\ x = t^2,\ y = se^t,\quad s, t \in \mathbb{R}$، $\frac{\partial z}{\partial s}$ اور $\frac{\partial z}{\partial t}$ $s = t = 1$ پر معلوم کیجئے۔
7. فرض کیجئے کہ $U(x, y) = e^x \sin y$ جہاں $x = st^2,\ y = s^2t,\ \ s, t \in \mathbb{R}$، $\frac{\partial U}{\partial s}$، $\frac{\partial U}{\partial t}$ معلوم کیجئے۔ اور $s = t = 1$ پر انہیں جانچئے۔
8. فرض کیجئے کہ $z(x, y) = x^3 - 3x^2y^3$ یہاں $x = se^t, y = se^{-t},\quad s, t \in \mathbb{R}$، $\frac{\partial z}{\partial s}$ اور $\frac{\partial z}{\partial t}$ معلوم کیجئے۔
9. $W(x, y, z) = xy + yz + zx,\ x = u - v,\ y = uv,\ z = u + v,\quad u, v \in \mathbb{R}$، $\frac{\partial W}{\partial u}$، $\frac{\partial W}{\partial v}$ معلوم کیجئے۔ اور $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ پر انہیں جانچئے۔

8.6.2 ہم جنس تفاعلات اور آئلر کا مسئلہ (Homogeneous Functions and Euler's Theorem)

تعریف 8.12

(a) فرض کیجئے کہ $A = \{(x, y) \mid a < x < b,\ c < y < d\} \subset \mathbb{R}^2$، $F : A \to \mathbb{R}$، ہم یہ کہتے ہیں کہ A ، F پر ایک ہم جنس تفاعل ہے، اگر ایک مستقل p وجود میں ہو اس طرح کہ $F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^p F(x, y)$ تمام $\lambda \in \mathbb{R}$ کے لئے اور مناسب طریقے سے λ, x, y اس طرح مقید ہوں کہ $(\lambda x, \lambda y) \in A$ یہ مستقل p ، F کا درجہ کہلاتا ہے۔

(b) فرض کیجئے $G : B \to \mathbb{R}$ $B = \{(x, y, z) \mid a < x < b,\ c < y < d,\ u < z < v\} \subset \mathbb{R}^3$، ہم یہ کہتے ہیں کہ B ، G پر ہم جنس تفاعل ہے، اگر ایک مستقل p وجود میں ہو اس طرح کہ $G(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^p G(x, y, z)$ تمام $\lambda \in \mathbb{R}$ کے لئے اور مناسب طریقے سے λ, x, y, z اس طرح مقید ہوں کہ $(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \in B$ یہ مستقل p ، G کا درجہ کہلاتا ہے۔

غور کیجئے (Note)

کسی بھی متغیر سے تقسیم ہو سکتا ہے، صفر سے تقسیم کو ترک کرنے کے لئے، ہم یہ کہتے ہیں کہ λ, x, y, z مناسب طریقے حقیقی اعداد ہیں۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 8_Differentials and Partial.indd 84 28-02-2023 14:58:47

اس قسم کے تفاعلات عام تفرقی مساوات (باب 10) میں اہم ہیں۔ آیئے چند مثالوں پر غور کریں۔

لیجئے $F(x,y) = x^3 - 2y^3 + 5xy^2,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$ پھر

$$F(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^3 - 2(\lambda y)^3 + 5(\lambda x)(\lambda y)^2 = \lambda^3 (x^3 - 2y^3 + 5xy^2)$$

اور چنانچہ F درجہ 3 کا ایک ہم جنس تفاعل ہے۔

دوسری طرح،

$G(x,y) = e^{x^2} + 3y^2$ ایک ہم جنس تفاعل نہیں ہے کیونکہ،

$$G(\lambda x, \lambda y) = e^{(\lambda x)^2} + 3(\lambda y)^2 \neq \lambda^p G(x,y)$$

کسی بھی $\lambda \neq 1$ اور کسی p کے لئے

مثال 8.21

ثابت کیجئے کہ $F(x,y) = \dfrac{x^2 + 5xy - 10y^2}{3x + 7y}$ درجہ 1 کا ایک ہم جنس تفاعل ہے۔

حل

ہم محسوب کرتے ہیں۔

$$F(\lambda x, \lambda y) = \frac{(\lambda x)^2 + 5(\lambda x)(\lambda y) - 10(\lambda y)^2}{3\lambda x + 7\lambda y} = \frac{\lambda^2}{\lambda}\left(\frac{x^2 + 5xy - 10y^2}{3x + 7y}\right) = \lambda F(x,y)$$

تمام $\lambda \in \mathbb{R}$ کے لئے اس لئے F درجہ 1 کا ایک ہم جنس تفاعل ہے۔ ہم جنس تفاعلات پر لینارڈ آئلر (Leonard Euler) کے ذیل کا مسئلہ بیان کرتے ہیں۔

تعریف 8.13 آئلر (Euler)

مان لیجئے کہ $A = \{(x,y) \mid a < b,\ c < y < d\} \subset \mathbb{R}^2$, $F : A \to \mathbb{R}^2$ اگر F مسلسل جزوی مشتق رکھتا ہے اور A پر ہم جنس ہے، جس کا درجہ p ہو تو، پھر

$$x\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = pF(x,y)\ \forall\ (x,y) \in A.$$

مان لیجئے کہ $B = \{(x,y,z) \mid a < x < b,\ c < y < d,\ u < z < v\} \subset \mathbb{R}^3$, $F : B \to \mathbb{R}^3$ اگر F مسلسل جزوی مشتق رکھتا ہے اور B پر ہم جنس ہے، جس کا درجہ p ہو تو، پھر

$$x\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) + y\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) + z\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = pF(x,y,z)\ \forall\ (x,y,z) \in B$$

ہم ثبوت کو ترک کرتے ہیں۔ مذکورہ بالا مسئلہ n متغیرات والے کسی بھی ہم جنس تفاعل کے لئے بھی درست ہے؛ اور پہلے درجہ کے جزوی مشتق پر مشتمل چند حسابات میں استعمال ہوتا ہے۔

مثال 8.22

اگر $u = \sin^{-1}\left(\dfrac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)$، ثابت کیجئے کہ $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{1}{2}\tan u$

حل

غور کیجئے کہ یہ تفاعل u ہم جنس نہیں ہے۔ اس لئے ہم u کے لئے آئلر کا مسئلہ استعمال نہیں کرسکتے ۔

اس کے باوجود، غور کیجئے کہ $f(x,y) = \dfrac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \sin u$ ہم جنس ہے، کیونکہ

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 8_Differentials and Partial.indd 85 28-02-2023 14:58:53

$$f(tx,ty)=\frac{tx+ty}{\sqrt{tx}+\sqrt{ty}}=\frac{t}{\sqrt{t}}=t^{1/2}f(x,y),\ \forall\ x,y,t\geq 0$$

غرض f ہم جنس ہے جس کا درجہ $\frac{1}{2}$ ہے، اور اس لئے آئلر کے مسئلے سے ہمارے پاس

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{2}f(x,y)$$

اوپر کے مساوات میں $f=\sin u$ درج کرنے پر، ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے۔

$$x\frac{\partial(\sin u)}{\partial x}+y\frac{\partial(\sin u)}{\partial y}=\frac{1}{2}\sin u$$

$$x\cos u\frac{\partial u}{\partial x}+y\cos u\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2}\sin u \qquad \ldots (19)$$

دونوں جانب $\cos u$ سے تقسیم کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2}\tan u$$

غور کیجئے (Note)

اس مسئلے کو براہ راست حساب کے ذریعے حل کرنا ممکن ہے، مگر طویل مرحلے شامل ہونگے۔

مشق 8.7

1. ذیل کے ہر صورت حال میں ، جانچئے کہ ذیل کے تفاعل ہم جنس ہیں یا نہیں ۔اگر ہم جنس ہو، تو درجہ معلوم کیجئے۔

(i) $f(x,y)=x^2y+6x^3+7$ (ii) $h(x,y)=\dfrac{6x^2y^3-\pi y^5+9x^4y}{2020x^2+2019y^2}$

(iii) $g(x,y,z)=\dfrac{\sqrt{3x^2+5y^2+z^2}}{4x+7y}$ (iv) $U(x,y,z)=xy+\sin\left(\dfrac{y^2-2z^2}{xy}\right)$

2. ثابت کیجئے $f(x,y)=x^3-2x^2y+3xy^2+y^3$ ہم جنس ہے، اس کا درجہ کیا ہے؟ f کے لئے آئلر کے مسئلے کی تصدیق کیجئے۔

3. ثابت کیجئے کہ $g(x,y)=x\log\left(\dfrac{y}{x}\right)$ ہم جنس ہے، اس کا درجہ کیا ہے؟ g کے لئے آئلر کے مسئلے کی تصدیق کیجئے۔

4. اگر $u(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x+y}}$، ثابت کیجئے کہ $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{3}{2}u$۔

5. اگر $v(x,y)=\log\left(\dfrac{x^2+y^2}{x+y}\right)$، ثابت کیجئے کہ $x\dfrac{\partial v}{\partial x}+y\dfrac{\partial v}{\partial y}=1$۔

6. اگر $w(x,y,z)=\log\left(\dfrac{5x^3y^4+7y^2xz^4-75y^3z^4}{x^2+y^2}\right)$، $x\dfrac{\partial w}{\partial x}+y\dfrac{\partial w}{\partial y}+z\dfrac{\partial w}{\partial z}$ معلوم کیجئے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 8_Differentials and Partial.indd 86 28-02-2023 14:58:59

مشق 8.8

دیے گئے چار حل میں سے صحیح یا سب سے مناسب جواب کا انتخاب کریں۔

1. ایک دائرہ نما سانچے کا نصف قطر 10 سمر ہے۔ نصف قطر کے پیمائش میں 0.02 سمر کی تقریبی غلطی ہے، پھر اس سانچے کے رقبہ محسوب کرنے پر فیصد غلطی یہ ہے۔

(1) 0.2% (2) 0.4% (3) 0.04% (4) 0.08%

2. 31 کے پانچویں جزر کی فیصد غلطی 31 کی فیصد غلطی کتنا گنا ہوگی؟

(1) $\frac{1}{31}$ (2) $\frac{1}{5}$ (3) 5 (4) 31

3. اگر $u(x,y)=e^{x^2+y^2}$ ہوتو $\frac{\partial u}{\partial x}$ مساوی ہے۔

(1) $e^{x^2+y^2}$ (2) $2xu$ (3) x^2u (4) y^2u

4. اگر $v(x,y)=\log(e^x+e^y)$ ہوتو $\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}$ مساوی ہے۔

(1) e^x+e^y (2) $\frac{1}{e^x+e^y}$ (3) 2 (4) 1

5. اگر $w(x,y)=x^y, x>0$ ہوتو $\frac{\partial w}{\partial x}$ مساوی ہے۔

(1) $x^y \log x$ (2) $y\log x$ (3) yx^{y-1} (4) $x\log y$

6. اگر $f(x,y)=e^{xy}$ ہو،تو $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ مساوی ہے۔

(1) xye^{xy} (2) $(1+xy)e^{xy}$ (3) $(1+y)e^{xy}$ (4) $(1+x)e^{xy}$

7. اگر ہم ایک مکعب کے ضلع کو 0.1 سمر کے غلطی سے 4 سمر پیمائش کرتے ہیں، تو ہمارے حساب میں حجم کی غلطی یہ ہے۔

(1) 0.4 مکعب سمر (2) 0.45 مکعب سمر (3) 2 مکعب سمر (4) 4.8 مکعب سمر

8. مکعب کے سطحی رقبہ $S=6x^2$ میں تبدیلی یہ ہے جب کنارے کی لمبائی x_0 سے x_0+dx کو تبدیل ہو۔

(1) $12x_0+dx$ (2) $12x_0dx$ (3) $6x_0dx$ (4) $6x_0+dx$

9. x میٹر ضلع والے مکعب کے ضلع کو 1% اضافہ کرنے پر اس کے حجم V میں تقریبی تبدیلی یہ ہے۔

(1) $0.3xdx\,m^3$ (2) $0.03x\,m^3$ (3) $0.03x^2m^3$ (4) $0.03x^3m^3$

10. اگر $y(t)=\cos t$ اور $g(x,y)=3x^2-5y+2y^2, x(t)=e^t$ ہوں،تو $\frac{dg}{dt}$ مساوی ہے۔

(1) $6e^{2t}+5\sin t-4\cos t\sin t$ (2) $6e^{2t}-5\sin t+4\cos t\sin t$

(3) $3e^{2t}+5\sin t+4\cos t\sin t$ (4) $3e^{2t}-5\sin t+4\cos t\sin t$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 8_Differentials and Partial.indd 87 28-02-2023 14:59:06

11. اگر $f(x)=\frac{x}{x+1}$ ہوتو، اس کی تفرقی اس سے دیا جاتا ہے۔

(1) $\frac{-1}{(x+1)^2}dx$ (2) $\frac{1}{(x+1)^2}dx$ (3) $\frac{1}{x+1}dx$ (4) $\frac{-1}{x+1}dx$

12. اگر $u(x,y)=x^2+3xy+y-2019$ ہو، تو $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(4,-5)}$ مساوی ہے۔

(1) -4 (2) -3 (3) -7 (4) 13

13. $g(x)=\cos x$ کے لئے خطی تقریب $x=\frac{\pi}{2}$ پر یہ ہے ۔

(1) $x+\frac{\pi}{2}$ (2) $-x+\frac{\pi}{2}$ (3) $x-\frac{\pi}{2}$ (4) $-x-\frac{\pi}{2}$

14. اگر $w(x,y,z)=x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$ ہو،تو $\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$ ہے۔

(1) $xy+yz+zx$ (2) $x(y+z)$ (3) $y(z+x)$ (4) 0

15. اگر $f(x,y,z)=xy+yz+zx$ ہو،تو f_x-f_z مساوی ہے۔

(1) $z-x$ (2) $y-z$ (3) $x-z$ (4) $y-x$

خلاصہ (SUMMARY)

- فرض کیجئے کہ $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ تفرقی پذیر ہے اور $x_0\in(a,b)$ ہوتو x_0 پر f کی خطی تقریب L دیا جاتا ہے۔

$$L(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\forall x\in(a,b)$$

- تقریبی قیمت – اصل قیمت = مطلق غلطی

$$\frac{\text{مطلق غلطی}}{\text{اصل غلطی}}=\text{متعلقہ غلطی}$$

$$\text{متعلقہ غلطی}\times 100=\text{فیصد غلطی}$$

(یا)

$$\frac{\text{مطلق غلطی}}{\text{اصل غلطی}}\times 100$$

- فرض کیجئے کہ $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ ایک تفرقی پذیر تفاعل ہے۔ $x\in(a,b)$ کے لئے اور Δx ، x کو دیا گیا اضافہ ہے، ہم f کے تفرقی کو $df=f'(x)\Delta x$ سے وضاحت کرتے ہیں۔
- ایک متغیر والے تفاعلات کے تمام حدود (حد کے مسئلے) کے تمام اصولیں کثیر متغیرات والے تفاعلات کے لئے بھی درست ہیں۔
- فرض کیجئے کہ $A=\{(x,y)\mid a<x<b,\ c<y<d\}\subset\mathbb{R}^2, F:A\to\mathbb{R}$ اور $(x_0,y_0)\in A$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 8_Differentials and Partial.indd 88 28-02-2023 14:59:14

(i) $(x_0, y_0) \in A$ پر x کے لحاظ سے F کا ایک جزوی مشتق ہے اگر $\lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h, y_0)-F(x_0, y_0)}{h}$ ہو اور اس کو $\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$(x_0, y_0) \in A$ پر y کے لحاظ سے F کا ایک جزوی مشتق ہے اگر $\lim_{k\to 0} \frac{F(x_0, y_0+k)-F(x_0, y_0)}{k}$ وجود ہو اور اس کو $\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

- کلاریٹس کا مسئلہ : مان لیجئے کہ $F: A \to \mathbb{R}$، $A = \{(x, y) | a < x < b, c < y < d\} \subset \mathbb{R}^2$ اگر A میں f_{xy} اور f_{yx} وجود میں ہوں اور A میں مسلسل ہوں، تو A میں $f_{xy} = f_{yx}$

- فرض کیجئے کہ $A = \{(x, y) | a < x < b, c < y < d\} \subset \mathbb{R}^2$ ایک تفاعل $U: A \to \mathbb{R}$، A میں ہم آہنگ (harmonic) کہلاتا ہے اگر یہ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \forall (x, y) \in A$ کی شرط پوری کرتا ہو۔اس مساوات کو لیپلیس کی مساوات (Laplace's equation) کہتے ہیں۔

- فرض کیجئے کہ $A = \{(x, y) | a < x < b, c < y < d\} \subset \mathbb{R}^2$، $F: A \to \mathbb{R}$ اور $(x_0, y_0) \in A$

(i) $(x_0, y_0) \in A$ پر F کی خطی تقریب کی وضاحت یہ ہے۔

$$L(x, y) = F(x_0, y_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)} (x - x_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)} (y - y_0)$$

(ii) F کے تفرق کی وضاحت یہ ہے $dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$ یہاں $\Delta x = dx$ اور $\Delta y = dy$

- مان لیجئے کہ w دو متغیرات x, y کا ایک تفاعل ہے جہاں x اور y ایک متغیر 't' کے تفاعلات ہوں، تو $\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$

- مان لیجئے کہ w دو متغیرات x اور y کا ایک تفاعل ہے جہاں x اور y دو متغیرات s اور t کے تفاعلات ہوں، تو

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}, \quad \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

- مان لیجئے کہ $F: A \to \mathbb{R}^2$ $A = \{(x, y) | a < x < b, c < y < d\} \subset \mathbb{R}^2$ اگر F کے مسلسل جزوی مشتق ہوں اور A پر ہم جنس ہوں جس کا درجہ p ہو، تو $x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} = pF$

ICT کارنر

https://ggbm.at/dy9kwgbt or Scan the QR Code



بروزر کھولئے اور دئے گئے URL لنک ٹیپ کیجئے (یا) QR کوڈ کو اسکین کیجئے۔ "12 ویں جماعت ریاضی 2- جلد" Geo Gebra (جیوجبرا) نامی ورک بک کھلے گی۔ ورک بک کے بائیں جانب تمہاری کتاب کے اسباق ہوں گے۔ "تفریقیاں اور جزوی مشتق" نامی باب پر کلک کریں۔ اس باب سے تعلق رکھنے والے بہت سارے ورک شیٹ دکھائے دینگے تمام ورک شیٹوں کا مطالعہ کیجئے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 8_Differentials and Partial.indd 89 28-02-2023 14:59:20

باب
9

تکملہ کے اطلاقات
(Applications of Integration)

"مجھے کھڑے ہونے کی جگہ دو تو میں زمین کو حرکت دے سکتا ہوں۔"

"Give me a place to stand and I will move the earth"

ارشمیدس

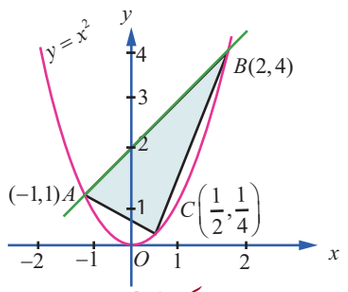
9.1 تعارف (Introduction)



ارشمیدس آف سائرا کیز
Archimedes of Syracuse
(288BC(CE)-212BC(CE))
یونانی ریاضی دان طبعیات دان انجینیر موجد تھا

ابتدائی ریاضی دانوں میں سے ایک ارشمیدس جنہوں نے ہندسی اشیاء کے رقبوں اور حجموں کا حساب و کتاب کرنے کے لئے حیرت انگیز دریافتیں کیں۔ ارشمیدس نے ثابت کیا کہ مکافی اور خط مستقیم سے منسلک علاقہ کسی نشان کردہ مثلث کے رقبہ کا $\frac{4}{3}$ گنا ہے نقشہ 9.1 میں دیکھیں۔

انھوں نے اس رقبہ کو متعدد ابتدائی رقبوں میں قطعہ تقسیم کرکے اور لاتعدادی مجموعہ تلاش کرکے حاصل کیا۔ یہ محدود تصور معین تکملہ کی تعریف میں شامل ہے جو ہم یہاں تیار کرنے جارہے ہیں اور کچھ ہندسی اشکال کے رقبوں اور حجموں کی تلاش میں بھی اس کو لاگو کریں گے۔



خاکہ 9.1

Learning Objectives — سیکھنے کے مقاصد

اس باب کے اختتام پر، طلباء قابل ہو سکیں گے

- معین تکملہ کو انتہا کے حاصل جمع کے طور پر تعریف ۔
- معین تکملہ کا علم ہندسہ میں مظاہرہ
- تکملہ احصا کے بنیادی مسئلہ کا استعمال
- مخالف مشتق (Anti-derivatives) کے ذریعے سے معین تکملہ کی جانچ
- معین تکملہ (Definite integrals) کے چند خصوصیات کی تشکیل
- نا مناسب تکملہ (Improper integrals) کا انتخاب کرنا اور گاما تکملہ (Gamma integral) کا استعمال
- تخفیف ضابطہ (Reduction formulae) کا اخذ
- مستوی خطہ کا رقبہ معلوم کرنے کے لئے معین تکملہ کا استعمال
- گردش کردہ ٹھوس کا حجم معلوم کرنے کے لئے معین تکملہ کا استعمال

چلئے $f(x)$ کا مخالف مشتق جو ہم پہلے ہی پڑھ چکے ہیں اس کا مختصر اعادہ کریں۔ اگر $\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$ ہو تو تفاعل $f(x)$ کا مخالف مشتق $F(x)$ ہوگا۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 9_App of Integration.indd 90 28-02-2023 15:02:49

یہ منفرد نہیں ہے، کیونکہ کسی بھی بلا تخصیص مستقل C کے لئے ہم $\frac{d}{dx}[F(x)+C]=\frac{d}{dx}[F(x)]=f(x)$ حاصل کرتے ہیں۔ یعنی، اگر $f(x)$ کا مخالف مشتق $F(x)$ ہو تو تفاعل $F(x)+C$ بھی اس $f(x)$ کا مخالف مشتق ہوگا۔ نوٹ کریں کہ $f(x)$ کے تمام مخالف مشتق کے صرف مستقل مختلف ہیں۔ $f(x)$ کے مخالف مشتق کو عام طور پر $f(x)$ کا **غیر معین تکملہ** بھی کہا جاتا ہے جو x کے ساتھ مد نظر رکھتے ہوئے اور $\int f(x)dx$ سے نشاندہی کرتے ہیں۔

غیر معین تکملہ کی ایک معروف خاصیت اس کی **خطی خاصیت** ہے۔

$\int[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx=\alpha\int f(x)dx+\beta\int g(x)dx$ ، جہاں، α اور β مستقل ہیں۔

ہم ذیل میں کچھ تفاعلات اور ان کے مخالف مشتق درج کرتے ہیں (غیر معین تکملہ):

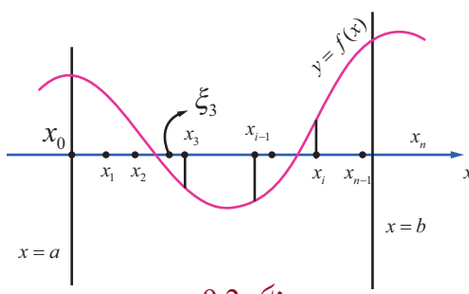
تفاعل $f(x)$	غیر معین تکملہ $\int f(x)dx$
K ، ایک مستقل	$Kx+C$
$(ax+b)^n$ ، جہاں، $a\neq 0$ اور b مستقل ہیں اور $n\neq -1$ ہے۔	$\frac{1}{a}\left[\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}\right]+C$
$\frac{1}{ax+b}$ ، جہاں، $a\neq 0$ اور b مستقل ہیں۔	$\frac{1}{a}\log_e\lvert(ax+b)\rvert+C$
e^{ax} ، جہاں، a ایک غیر-صفری مستقل ہے۔	$\frac{e^{ax}}{a}+C$
$\sin(ax+b)$، جہاں، $a\neq 0$ اور b مستقل ہیں۔	$-\frac{\cos(ax+b)}{a}+C$
$\cos(ax+b)$، جہاں، $a\neq 0$ اور b مستقل ہیں۔	$\frac{\sin(ax+b)}{a}+C$
$\tan(ax+b)$، جہاں، $a\neq 0$ اور b مستقل ہیں۔	$\frac{1}{a}\log\lvert\sec(ax+b)\rvert+C$
$\cot(ax+b)$، جہاں، $a\neq 0$ اور b مستقل ہیں۔	$\frac{1}{a}\log\lvert\sin(ax+b)\rvert+C$
$\sec(ax+b)$، جہاں، $a\neq 0$ اور b مستقل ہیں۔	$\frac{1}{a}\log\lvert\sec(ax+b)+\tan(ax+b)\rvert+C$
$\operatorname{cosec}(ax+b)$، جہاں، $a\neq 0$ اور b مستقل ہیں۔	$-\frac{1}{a}\log\lvert\operatorname{cosec}(ax+b)-\cot(ax+b)\rvert+C$
$\frac{1}{a^2+x^2}$ ، جہاں، $a\neq 0$ ایک مستقل ہے۔	$\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C$
$\frac{1}{a^2-x^2}$ ، جہاں، $a\neq 0$ ایک مستقل ہے۔	$\frac{1}{2a}\log_e\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert+C$
$\frac{1}{x^2-a^2}$ ، جہاں، $a\neq 0$ ایک مستقل ہے۔	$\frac{1}{2a}\log_e\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert+C$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 9_App of Integration.indd 91 28-02-2023 15:02:56

$f(x)$ تفاعل	$\int f(x)dx$ غیر معین تکملہ
$\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$، جہاں، a ایک مستقل ہے۔	$\log_e\left\|x+\sqrt{a^2+x^2}\right\|+C$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$، جہاں، $a\neq 0$ ایک مستقل ہے۔	$\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$، جہاں، a ایک مستقل ہے۔	$\log_e\left\|x+\sqrt{x^2-a^2}\right\|+C$
$\sqrt{a^2+x^2}$، جہاں، a ایک مستقل ہے۔	$\frac{x\sqrt{a^2+x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\log_e\left\|x+\sqrt{a^2+x^2}\right\|+C$
$\sqrt{a^2-x^2}$، جہاں، a ایک مستقل ہے۔	$\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C$
$\sqrt{x^2-a^2}$، جہاں، a ایک مستقل ہے۔	$\frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2}-\frac{a^2}{2}\log_e\left\|x+\sqrt{x^2-a^2}\right\|+C$

9.2 حاصل جمع کے انتہاء کے طور پر معین تکملہ (Definite Integral as the Limit of a Sum)

9.2.1 ریمن تکملہ (Riemann Integral)



خاکہ 9.2

مان لیجئے $f(x)$ ایک حقیقی قیمت گھرا تفاعل جو بند اور گھرا وقفہ سے بیان کیا گیا ہے۔ وقفہ $[a,b]$، $a<b$. میں تفاعل کو ایک ہی علامت ہونے کی ضرورت نہیں ہے۔ یعنی، $f(x)$ کی وقفہ $[a,b]$ پر مثبت اور منفی قیمتیں بھی ہوسکتی ہیں۔ خاکہ 9.2 دیکھیں جس میں $[a,b]$ وقفہ کو n ماتحت وقفوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ $[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-2},x_{n-1}],[x_{n-1},x_n]$ تاکہ

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b.$$

ہر ایک ماتحت وقفہ $[x_{i-1},x_i]$، $i=1,2,\cdots,n$، میں ایک حقیقی عدد ξ_i اختیاری طور پر انتخاب کریں تاکہ $x_{i-1}\le\xi_i\le x_i$ اس حاصل جمع پر غور کریں

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}) = f(\xi_1)(x_1-x_0)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+\cdots+f(\xi_n)(x_n-x_{n-1}) \quad \ldots.(1)$$

مساوات (1) کا حاصل جمع ہی **ریمن کا حاصل جمع** کہلاتا ہے جو $[a,b]$ کا $[x_0,x_1]$، $[x_1,x_2]$، ...$[x_{n-1},x_n]$ کی ماتحت کے مطابق وابستہ ہے۔ چونکہ بہت ساری لاتعدادی قیمتیں ξ_i ہیں جو $x_{i-1}\le\xi_i\le x_i$, کی شرط کو مطمئن کرتے ہیں جہاں، لاتعداد $f(x)$ کے ریمن کے حاصل جمع ہیں۔ جو $[a,b]$ میں اسی ماتحتوں $[x_0,x_1]$، $[x_1,x_2]$، ...$[x_{n-1},x_n]$ سے وابستہ ہیں۔ اگر محدود عمل کے تحت $n\to\infty$ اور $\max\left(x_i-x_{i-1}\right)\to 0$، (1) کا حاصل جمع ایک حد تک محدود ہوجاتا ہے تو اسے A کہتے ہیں، تو $[a,b]$ پر x کو مدنظر رکھتے ہوئے A کی قیمت کو $f(x)$ کا **معین تکملہ** کہتے ہیں۔ مزید اس کو $[a,b]$ پر $f(x)$ کا **ریمن تکملہ** بھی کہا جاتا ہے۔ اور اس کو $\int_a^b f(x)dx$ سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اس کو تکملہ $f(x)$، a سے b تک x کو مدنظر رکھتے ہوئے پڑھا جاتا ہے۔ اگر $a=b$, ہو تو $\int_a^a f(x)dx=0.$ ہوگا۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 9_App of Integration.indd 92 28-02-2023 15:03:03

غور کیجئے (Note)

موجودہ باب میں ہم گھرے تفاعل $f(x)$ پر غور کرتے ہیں جو $[a,b]$ پر مسلسل جاری رہتے ہیں۔ تاہم $[a,b]$ پر $f(x)$ کا ریمن تکملہ گھرے تفاعل $f(x)$ کے لئے بھی موجود ہے جو $[a,b]$ پر ٹکڑاوار (Piece-wise) مسلسل جاری رہتا ہے۔ ہم نے ایک ہی علامت $\int$ کو دونوں معین تکملہ اور مخالف مشتق (غیر معین تکملہ) کے لئے استعمال کیا ہے۔تکملہ احصا کے بنیادی نظریات بیان کرنے کے بعد اس کی وجہ واضح ہوگی۔ متغیر x اسی لحاظ سے جعلی (Dummy) ہے کہ یہ صرف ہماری پسند پر منتخب کیا گیا ہے تو ہم $\int_a^b f(x)dx$ کو $\int_a^b f(u)du$ بھی لکھ سکتے ہیں۔ تو $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du$ ہوگا۔ جیساکے $\max\left(x_i - x_{i-1}\right) \to 0,$ تمام تین نقاط x_{i-1}، ξ_i اور x_i ہر ماتحت وقفہ $[x_{i-1}, x_i]$ کے صرف ایک نقطہ کی طرف کھسک جاتے ہیں۔ ہم پہلے ہی اشارہ کرچکے ہیں ماتحت وقفہ $[x_{i-1}, x_i]$، $i = 1,2,\cdots,n$ میں تشخیص نقطہ ξ_i منتخب کرنے کے لئے لاتعداد طریقے موجود ہیں۔ $\xi_i = x_{i-1}$ $i = 1,2,\cdots,n$ کو منتخب کرکے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty \text{ and } \max(x_i - x_{i-1})\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}). \quad \text{(2)...}$$

مساوات (2) ریمن تکملہ کی جانچ میں بائیں خاتمہ کے قاعدہ کے طور پر جاناجاتا ہے۔

$\xi_i = x_i$، $i = 1,2,\cdots,n$ منتخب کرکے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty \text{ and } \max(x_i - x_{i-1})\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}). \quad \text{(3)...}$$

مساوات (3) ریمن تکملہ کی جانچ میں دائیں خاتمہ کے قاعدہ کے طورپر جاناجاتا ہے۔

$\xi_i = \dfrac{x_{i-1} + x_i}{2}$، $i = 1,2,\cdots,n$ منتخب کرکے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

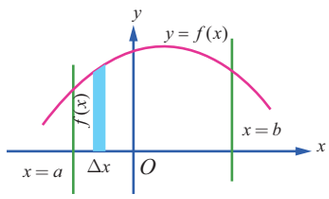
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty \text{ and } \max(x_i - x_{i-1})\to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)(x_i - x_{i-1}). \quad \text{(4)...}$$

مساوات (4) ریمن تکملہ کی جانچ میں درمیانی - نقطہ کے قاعدہ کے طورپر جاناجاتا ہے۔

ریمارک (Remark)

(1) اگر ریمن تکملہ $\int_a^b f(x)dx$ موجود ہو تو پھر ریمن تکملہ $\int_a^x f(u)du$ ہر $x \in [a,b]$ کے لئے ایک اچھی طرح سے بیان شدہ حقیقی عدد ہے۔ لہٰذا، ہم $[a,b]$ میں تفاعل $F(x)$ کی وضاحت کرسکتے ہیں۔ اس طرح کہ $F(x) = \int_a^x f(u)du, x \in [a,b]$

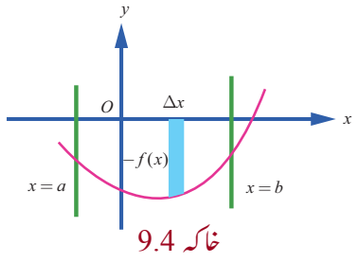
(2) اگر $f(x) \geq 0$ سب $x \in [a,b]$ کے لئے ہو تو پھر ریمن تکملہ $\int_a^b f(x)dx$ اس خطے کے ہندسی رقبے کے برابر ہے۔ جو $y = f(x)$ کے X–محور، خطوط $x = a$ اور $x = b$ ترسیم سے گھرا ہوا ہے۔ خاکہ 9.3 دیکھیں۔



خاکہ 9.3

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 9_App of Integration.indd 93
28-02-2023 15:03:09

(3) اگر $f(x) \geq 0$ سب $x \in [a,b]$ کے لئے ہو تو پھر ریمن تکملہ $\int_a^b f(x)dx$ اس خطے کے ہندسی رقبے کے منفی کے برابر ہے۔ جو $y = f(x)$، x-محور، خطوط $x = a$ اور $x = b$ کے ترسیم سے گھرا ہوا ہے۔ خاکہ 9.4 دیکھیں۔ اس صورت میں، خطے کا ہندسی رقبہ جو $y = f(x)$، x-محور، خطوط $x = a$ اور $x = b$ کے ترسیم سے گھرا ہوا ہے $\left|\int_a^b f(x)dx\right|$ کے ذریعے دیا گیا ہے۔



خاکہ 9.4

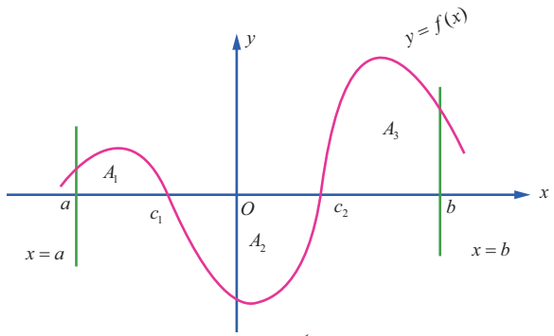
(4) اگر $f(x)$ مثبت کے ساتھ ساتھ $[a,b]$ میں منفی قیمتوں کو لیتا ہے تو پھر وقفہ $[a,b]$ کو ماتحت وقفوں $[a,c_1]$، $[c_1,c_2]$، $\cdots$، $[c_k,b]$ میں تقسیم کیا جاسکتا ہے۔ اس طرح کے $f(x)$ کے ماتحت ہر وقفہ میں ایک ہی علامت ہوتی ہے تو ریمن تکملہ $\int_a^b f(x)dx$ دیا گیا ہے۔

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \cdots + \int_{c_k}^b f(x)dx$$

اس صورت میں، اس خطے کا ہندسی رقبہ جو $y = f(x)$، x-محور، خطوط $x = a$ اور $x = b$ کے ترسیم سے گھرا ہوا ہے۔

$$\left|\int_a^{c_1} f(x)dx\right| + \left|\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx\right| + \cdots + \left|\int_{c_k}^b f(x)dx\right| \text{ کے ذریعے دیا گیا ہے۔}$$

مثال کے طور پر، تفاعل $f(x)$، $x \in [a,b]$ کے درج ذیل ترسیم پر غور کریں۔ خاکہ 9.5 دیکھیں۔ یہاں A_1، A_2 اور A_3 منفرد حصوں کے ہندسی رقبوں کی نشاندہی کرتا ہے تو معین تکملہ $\int_a^b f(x)dx$ دیا گیا ہے۔



خاکہ 9.5

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \int_{c_2}^b f(x)dx$$

$$= A_1 - A_2 + A_3 .$$

اس خطے کا ہندسی رقبہ جو $y = f(x)$، x-محور، خطوط $x = a$ اور $x = b$ کے ترسیم سے گھرا ہوا ہے۔وہ $A_1 + A_2 + A_3$ ہیں۔ مذکورہ بالا بحث کے پیش نظر، یہ واضح ہے کہ ایک ریمن تکملہ ہندسی رقبہ کی نمائندگی کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔

غور کیجئے (Note)

یہاں اگر ہم واضح طور پر ذکر نہیں کرتے ہیں، تو بھی یہ ہمیشہ سمجھا جاتا ہے کہ رقبوں کو مربع اکائیوں میں حجموں کو مکعب اکائیوں میں پیمائش کیا جاتا ہے۔

مثال 9.1

ریمن حاصل جمع کا استعمال کرے $\int_0^{0.5} x^2 dx$ کی قیمت کا اندازہ لگائیں جو مساوی چوڑائی کے 5 ماتحت وقفوں سے مطابقت رکھتے ہیں (i) بائیں خاتمہ کا قاعدہ (ii) دائیں خاتمہ کا قاعدہ اور (iii) درمیانی -نقطہ کا قاعدہ استعمال کریں۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 9_App of Integration.indd 94 28-02-2023 15:03:14

حل

یہاں $a = 0, b = 0.5, n = 5, f(x) = x^2$

تو ہر ماتحت وقفہ کی چوڑائی ہے

$$h = \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{0.5-0}{5} = 0.1.$$

وقفہ کی بانٹ نقاط کے ذریعے دی جاتی ہے۔

$$x_0 = 0,$$

$$x_1 = x_0 + h = 0 + 0.1 = 0.1$$

$$x_2 = x_1 + h = 0.1 + 0.1 = 0.2$$

$$x_3 = x_2 + h = 0.2 + 0.1 = 0.3$$

$$x_4 = x_3 + h = 0.3 + 0.1 = 0.4$$

$$x_5 = x_4 + h = 0.4 + 0.1 = 0.5$$

(i) مساوی چوڑائی Δx کے ساتھ ریمن حاصل جمع کے لئے بائیں خاتمہ کا قاعدہ ہے۔

$$S = \left[f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})\right]\Delta x.$$

$$\therefore S = \left[f(0) + f(0.1) + f(0.2) + f(0.3) + f(0.4)\right](0.1)$$

$$= \left[0.00 + 0.01 + 0.04 + 0.09 + 0.16\right](0.1) = 0.03$$

$\therefore \int_0^{0.5} x^2 dx$ کی تقریبی قیمت 0.03 ہے۔

(ii) مساوی چوڑائی Δx کے ساتھ ریمن حاصل جمع کے لئے دائیں خاتمہ کا قاعدہ ہے۔

$$S = \left[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)\right]\Delta x.$$

$$\therefore S = \left[f(0.1) + f(0.2) + f(0.3) + f(0.4) + f(0.5)\right](0.1)$$

$$= \left[0.01 + 0.04 + 0.09 + 0.16 + 0.25\right](0.1) = 0.055.$$

$\therefore \int_0^{0.5} x^2 dx$ کی تقریبی قیمت 0.055 ہے۔

(iii) مساوی چوڑائی Δx کے ساتھ ریمن حاصل جمع کے لئے درمیانی نقطے کا قاعدہ ہے۔

$$S = \left[f\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) + f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + \cdots + f\left(\frac{x_{n-1} + x_n}{2}\right)\right]\Delta x$$

$$\therefore S = \left[f(0.05) + f(0.15) + f(0.25) + f(0.35) + f(0.45)\right](0.1)$$

$$= \left[0.0025 + 0.0225 + 0.0625 + 0.1225 + 0.2025\right](0.1)$$

$$= 0.04125.$$

$\therefore \int_0^{0.5} x^2 dx$ کی تقریبی قیمت 0.04125 ہے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 9_App of Integration.indd 95 28-02-2023 15:03:20

مشق 9.1

1. بائیں خاتمہ کا قاعدہ (left-end rule) کا استعمال کرتے ہوئے $\int_1^{1.5} x\,dx$ کی تقریبی قیمت معلوم کرو جس کے بٹوارے $\{1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5\}$ ہیں۔
2. دائیں خاتمہ کا قاعدہ (Right-end rule) کا استعمال کرتے ہوئے $\int_1^{1.5} x^2\,dx$ کی تقریبی قیمت معلوم کروجس کے بٹوارے $\{1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5\}$ ہیں۔
3. درمیانی -نقطہ کا قاعدہ (Mid-point rule) کا استعمال کرتے ہوئے $\int_1^{1.5} (2-x)\,dx$ کی تقریبی قیمت معلوم کرو جس کے بٹوارے $\{1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5\}$ ہیں۔

9.2.2 $\int_a^b f(x)\,dx$ کی قیمت معلوم کرنے کے لئے حد ضابطہ (Limit Formula to Evaluate $\int_a^b f(x)\,dx$)

وقفہ $[a,b]$ کو n مساوی ماتحت وقفوں $[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-2},x_{n-1}],[x_{n-1},x_n]$ میں تقسیم کیجئے اس طرح کہ $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ تو ۔ $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \cdots = x_n - x_{n-1} = \frac{b-a}{n}$. ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$h = \frac{b-a}{n}$ درج کرنے سے ہمیں $x_i = a + ih, i = 1,2,\cdots,n.$ حاصل ہوتا ہے۔

معین تکملہ کی تعریف کی رو سے ہمیں حاصل ہوتاہے۔

$$\lim_{n\to\infty \text{ and } \max(x_i - x_{i-1})\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \quad \text{(دائیں خاتمہ کا قاعدہ)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right).$$

$$\therefore \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{r=1}^{n} f\left(a + (b-a)\frac{r}{n}\right).$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{r=0}^{n} f\left(a + (b-a)\frac{r}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{b-a}{n} f(a) + \frac{b-a}{n} \sum_{r=1}^{n} f\left(a + (b-a)\frac{r}{n}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{r=1}^{n} f\left(a + (b-a)\frac{r}{n}\right)$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx.$$

$$\therefore \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{r=1}^{n} f\left(a + (b-a)\frac{r}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{r=0}^{n} f\left(a + (b-a)\frac{r}{n}\right).$$

اگر $a = 0$ اور $b = 1$ ، تو ہمیں $\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n} f\left(\frac{r}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} f\left(\frac{r}{n}\right)$ حاصل ہوتا ہے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 9_App of Integration.indd 96 28-02-2023 15:03:26

مثال 9.2

$\int_0^1 xdx$ کی انتہائی حاصل جمع کے طور پر قیمت معلوم کیجئے:

حل

یہاں $f(x)=x$ ، $a=0$ اور $b=1$ ۔ لہذا، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} f\left(\frac{r}{n}\right) \Rightarrow \int_0^1 xdx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\frac{r}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left[1+2+\cdots+n\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$$

مثال 9.3

$\int_0^1 x^3dx$ کی انتہائی حاصل جمع کے طور پر قیمت معلوم کیجئے:

حل

یہاں $f(x)=x^3$ ، $a=0$ اور $b=1$ ۔ لہذا، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} f\left(\frac{r}{n}\right) \Rightarrow \int_0^1 x^3dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\frac{r^3}{n^3}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\left[1^3+2^3+\cdots+n^3\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

مثال 9.4

$\int_1^4 \left(2x^2+3\right)dx$ کی انتہائی حاصل جمع کے طور پر قیمت معلوم کیجئے:

حل

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{r=1}^{n} f\left(a+(b-a)\frac{r}{n}\right)$$ استعمال ہونے کا ضابطہ

یہاں، $b=4$ اور $a=1$, $f(x)=2x^2+3$ تو ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$f\left(a+(b-a)\frac{r}{n}\right) = f\left(1+(4-1)\frac{r}{n}\right) = f\left(1+\frac{3r}{n}\right) = 2\left(1+\frac{3r}{n}\right)^2+3 = 5+\frac{18r^2}{n^2}+\frac{12r}{n}$$

لہذا، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\int_1^4 (2x^2+3)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{r=1}^{n}\left(5+\frac{18r^2}{n^2}+\frac{12r}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{15}{n}\sum_{r=1}^{n}1+\frac{54}{n^3}\sum_{r=1}^{n}r^2+\frac{36}{n^2}\sum_{r=1}^{n}r\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{15}{n}n+\frac{54}{n^3}\left(1^2+2^2+\cdots+n^2\right)+\frac{36}{n^2}\left(1+2+\cdots+n\right)\right]$$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 9_App of Integration.indd 97 28-02-2023 15:03:31

$$= \lim_{n\to\infty}\left[15+\frac{54}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{36}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[15+9\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)+18\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= 15+9(1+0)(2+0)+18(1+0) = 51.$$

مشق 9.2

1. انتہائی حاصل جمع کے طور پر مندرجہ ذیل کی قیمت معلوم کیجئے:

(i) $\int_0^1 (5x+4)dx$ (ii) $\int_1^2 (4x^2-1)dx$

9.3 تکملہ احصا کے بنیادی نظریات اور ان کے استعمالات

(Fundamental Theorems of Integral Calculus and their Applications)

اوپر کی مثال سے ہم یہ مشاہدہ کرسکتے ہیں کہ $\int_a^b f(x)dx$ کی انتہائی حاصل جمع کے طورپر قیمت معلوم کرنا تھوڑا مشکل ہے، یہاں تک کہ اگر $f(x)$ ایک بہت ہی سادہ تفاعل ہے۔ نیوٹن (Newton) اور لیبنز (Leibnitz) دونوں نے کم و بیش ایک ہی وقت میں معین تکملہ کی قیمت معلوم کرنے کے آسان طریقے واضح کئے ہیں۔ ان کا طریقہ دو مشہور نظریہ جو پہلا بنیادی نظریہ اور دوسرا بنیادی نظریہ کہلاتے ہیں ان پر مشتمل ہے۔ یہ نظریے کسی تفاعل اور اس کے مخالف مشتق(اگر موجود ہے) کے درمیان تعلق قائم کرتے ہیں۔ درحقیقت ، دونوں نظریات تفریقی احصا اور تکملہ احصا کے درمیان ایک جوڑ فراہم کرتے ہیں۔ بغیر ثبوت کے ہم مندرجہ بالا اہم نظریوں کو نیچے بیان کرتے ہیں۔

مسئلہ 9.1 تکملہ احصا کا پہلا بنیادی نظریہ (First Fundamental Theorem of Integral Calculus)

اگر بند وقفہ $[a,b]$ پر $f(x)$ ایک مسلسل تفاعل ہے اور $F(x)=\int_a^x f(u)du$، $a<x<b$ تو $\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$. ہے۔ دوسرے الفاظ میں $f(x)$. کا مخالف مشتق $F(x)$ ہے۔

مسئلہ 9.2 تکملہ احصا کا دوسرا بنیادی نظریہ (Second Fundamental Theorem of Integral Calculus)

اگر بند وقفہ $[a,b]$ پر $f(x)$ ایک مسلسل تفاعل ہے اور $f(x)$ کا مخالف مشتق $F(x)$ ہے ، تو پھر

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a).$$

غور کیجئے (Note)

چونکہ معین تکملہ (ریمن تکملہ) $\int_a^b f(x)dx$, کی قیمت $F(b)-F(a)$ ہے، کوئی اختیاری مستقل مخالف مشتق $F(x)$ میں شامل کرنے پر منسوخ ہوجاتا ہے، لہذا، یہ ضروری نہیں ہے کہ اختیاری مستقل کو مخالف مشتق میں شامل کیا جائے، جب ہم معین تکملہ کی قیمت معلوم کررہے ہوں۔ مختصر میں ہم $F(b)-F(a)=\left[F(x)\right]_a^b$. لکھ سکتے ہیں۔ معین تکملہ کی ایک واحد قیمت ہوتی ہے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 9_App of Integration.indd 98 28-02-2023 15:03:34

تکملہ احصا کے دوسرے بنیادی مسئلے کے ذریعے معین تکملہ کی خصوصیات مندرجہ ذیل میں گرفت ہیں۔ وہ بغیر ثبوت کے یہاں بیان کئے گئے ہیں۔

خصوصیت 1: $a<b$، $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(u)\,du$

معین تکملہ میں متغیر کی تبدیلی آزاد ہے۔

خصوصیت 2: $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

اگر معین تکملہ کا انتہا ردِبدل ہو تو معین تکملہ میں منفی علامت ہوگا۔

خصوصیت 3: $a<c<b$، $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

خصوصیت 4: $\int_a^b[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$، جہاں، α اور β مستقل ہیں۔

خصوصیت 5: اگر $x=g(u)$، تو $\int_a^b f(x)dx=\int_c^d f(g(u))\frac{dg(u)}{du}du$ جہاں $g(c)=a$ اور $g(d)=b$

متبادل طور پر معین تکملہ کی قیمت معلوم کرنے میں یہ خصوصیات استعمال ہوتی ہیں۔

ہم مندرجہ ذیل بالا مثالوں کے ذریعے مذکورہ بالا خصوصیات کے استعمال کی وضاحت کرتے ہیں۔

مثال 9.5

$\int_0^3(3x^2-4x+5)dx$ کی قیمت معلوم کرو۔

حل

$$\begin{aligned}\int_0^3(3x^2-4x+5)dx &= \int_0^3 3x^2dx-\int_0^3 4x\,dx+\int_0^3 5\,dx\\ &= 3\int_0^3 x^2dx-4\int_0^3 x\,dx+5\int_0^3 dx\\ &= 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3-4\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3+5[x]_0^3\\ &= (27-0)-2(9-0)+5(3-0)\\ &= 27-18+15=24.\end{aligned}$$

■

مثال 9.6

$\int_0^1\frac{2x+7}{5x^2+9}dx$ کی قیمت معلوم کرو۔

حل

$$\int_0^1\frac{2x+7}{5x^2+9}dx = \int_0^1\frac{2x}{5x^2+9}dx+7\int_0^1\frac{dx}{(5x^2)+3^2}=\frac{1}{5}\log[5x^2+9]_0^1+\frac{7}{5}\int_0^1\frac{dx}{x^2+\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2}$$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 9_App of Integration.indd 99 28-02-2023 15:03:38

$$= \frac{1}{5}[\log 14 - \log 9] + \frac{7}{5} \times \frac{\sqrt{5}}{3} \left[\tan^{-1} \frac{x}{\left[\frac{3}{\sqrt{5}}\right]} \right]_0^1 = \frac{1}{5} \log \frac{14}{9} + \frac{7}{3\sqrt{5}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

مثال 9.7

$\int_0^1 [2x]\,dx$ کی قیمت معلوم کرو جہاں، $[\cdot]$ سب سے بڑی سالمی عدد تفاعل ہے۔

حل

$$\int_0^1 [2x]\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} [2x]\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 [2x]\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} 0\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 1\,dx = 0 + [x]_{\frac{1}{2}}^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

مثال 9.8

$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sec x \tan x}{1+\sec^2 x}\,dx$ کی قیمت معلوم کرو۔

حل

فرض کرو $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sec x \tan x}{1+\sec^2 x}\,dx$، $\sec x = u$ درج کریں۔ تو $\sec x \tan x\,dx = du$ ہے

جب $x = 0$، $u = \sec 0 = 1$۔ جب $x = \frac{\pi}{3}$، $u = \sec\frac{\pi}{3} = 2$۔

$$\therefore I = \int_1^2 \frac{du}{1+u^2} = [\tan^{-1} u]_1^2 = \tan^{-1}(2) - \tan^{-1} 1 = \tan^{-1}(2) - \frac{\pi}{4}.$$

مثال 9.9

$\int_0^9 \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx$ کی قیمت معلوم کرو۔

حل

فرض کرو $\sqrt{x} = u$۔ تو $x = u^2$، اور $dx = 2u\,du$ ہوگا۔

جب $x = 0$، $u = 0$۔ جب $x = 9$، $u = 3$۔

$$\therefore \int_0^9 \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx = \int_0^3 \frac{1}{u^2+u}(2u)\,du = 2\int_0^3 \frac{1}{1+u}\,du = 2\left[\log|1+u|\right]_0^3 = 2[\log 4 - 0] = \log 16.$$

مثال 9.10

$\int_1^2 \frac{x}{(x+1)(x+2)}\,dx$ کی قیمت معلوم کرو۔

حل

فرض کرو $I = \int_1^2 \frac{x}{(x+1)(x+2)}\,dx$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 9_App of Integration.indd 100 28-02-2023 15:03:45

$$I = \int_1^2 \left[\frac{-1}{(x+1)} + \frac{2}{x+2}\right] dx \qquad \text{(جزوی کثریں کا استعمال)}$$

$$= \left[-\log(x+1) + 2\log(x+2)\right]_1^2$$

$$= \log\left[\frac{(x+2)^2}{x+1}\right]_1^2$$

$$= \log\frac{16}{3} - \log\frac{9}{2}$$

$$= \log\frac{32}{27}.$$

مثال 9.11

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{(1+\sin\theta)(2+\sin\theta)} d\theta$ کی قیمت معلوم کرو۔

حل

فرض کرو $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{(1+\sin\theta)(2+\sin\theta)} d\theta$ ، $u = 1+\sin\theta$ درج کریں۔ تو $du = \cos\theta d\theta$ ہے

جب $\theta = 0$ ، $u = 1$ جب $\theta = \frac{\pi}{2}$ ، $u = 2$

$$\therefore I = \int_1^2 \frac{du}{u(1+u)} = \int_1^2 \frac{(1+u)-u}{u(1+u)} du = \int_1^2 \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}\right) du = \left[\log u - \log(1+u)\right]_1^2$$

$$= (\log 2 - \log 3) - (\log 1 - \log 2) = 2\log 2 - \log 3 = \log\frac{4}{3}.$$

مثال 9.12

$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\sin^{-1} x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$ کی قیمت معلوم کرو۔

حل

فرض کرو $I = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\sin^{-1} x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$

$u = \sin^{-1} x$ درج کریں تو $x = \sin u$ اور پھر $du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ ہوگا

جب $x = 0$ ، $u = 0$، جب $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $u = \frac{\pi}{4}$

$$\therefore I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{u}{\cos^2 u} du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} u\sec^2 u \, du = [u\tan u]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan u \, du = \left[u\tan u\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[\log\cos u\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\pi}{4} + \log\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2.$$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 9_App of Integration.indd 101 28-02-2023 15:03:50

مثال 9.13

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x}\right) dx$ کی قیمت معلوم کرو۔

حل

فرض کرو $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x}\right) dx$. تو ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{\frac{\sin x}{\cos x}} + \sqrt{\frac{\cos x}{\sin x}}\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin x \cos x}} dx = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2 \sin x \cos x}} dx$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x + \cos x) dx}{\sqrt{1 - (\sin x - \cos x)^2}} .$$

$u = \sin x - \cos x$ درج کریں تو پھر $du = (\cos x + \sin x) dx$ ہو گا

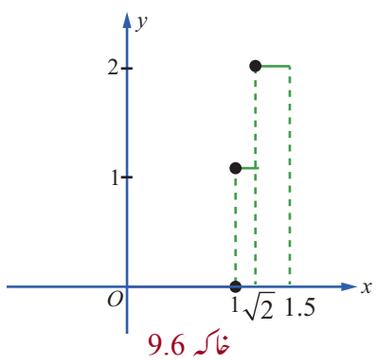
جب $x = 0$ ، $u = -1$ ۔ جب $x = \frac{\pi}{2}$ ، $u = 1$ ،

$$\therefore I = \sqrt{2} \int_{-1}^{1} \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \sqrt{2} [\sin^{-1} u]_{-1}^{1} = \sqrt{2} \left[\sin^{-1}(1) - \sin^{-1}(-1)\right] = \pi\sqrt{2} .$$

مثال 9.14

$\int_0^{1.5} \left[x^2\right] dx$ کی قیمت معلوم کرو، جہاں، $[x]$ سب سے بڑا سالم عدد تفاعل ہے۔

حل



خاکہ 9.6

ہم جانتے ہیں کہ سب سے بڑا سالم عدد تفاعل $[x]$ سب سے بڑا سالم عدد ہے جو x سے کم یا مساوی ہے۔ دوسرے الفاظ میں $[x] = n$ کی تعریف یہ ہے۔ اگر $n \le x < (n+1)$ ، جہاں n ایک سالم عدد ہے۔ اگر

$$[x^2] = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{if} \quad 1 \le x < \sqrt{2} \\ 2 & \text{if} \quad \sqrt{2} \le x \le 1.5 \end{cases}$$ تو ہمیں حاصل ہوتا ہے

ہم نوٹ کرتے ہیں کہ مذکورہ بالا تفاعل $[0,1.5]$ پر مسلسل نہیں ہے۔

لیکن یہ ماتحت وقفوں $[0,1)$ ، $[1,\sqrt{2})$ اور $[\sqrt{2},1.5]$ میں سے ہر ایک میں مسلسل ہے۔ یعنی، یہ $[0,1.5]$ پر ٹکڑاوار مسلسل ہے۔ خاکہ 9.6 دیکھیں۔ لہذا، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\int_0^{1.5} \left[x^2\right] dx = \int_0^{1} \left[x^2\right] dx + \int_1^{\sqrt{2}} \left[x^2\right] dx + \int_{\sqrt{2}}^{1.5} \left[x^2\right] dx = \int_0^{1} 0\, dx + \int_1^{\sqrt{2}} 1\, dx + \int_{\sqrt{2}}^{1.5} 2 dx$$

$$= 0 + (x)_1^{\sqrt{2}} + (2x)_{\sqrt{2}}^{1.5} = \left(\sqrt{2} - 1\right) + \left(3 - 2\sqrt{2}\right) = 2 - \sqrt{2}.$$

مثال 9.15

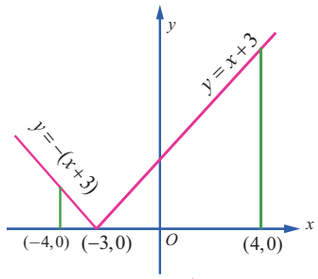
$\int_{-4}^{4} |x+3| \, dx$ کی قیمت معلوم کرو۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 9_App of Integration.indd 102 28-02-2023 15:03:56

حل

تعریف کی رو سے ہمارے پاس $|x+3|=\begin{cases} x+3 & \text{اگر } x\geq -3 \\ -x-3 & \text{اگر } x<-3 \end{cases}$

$y=|x+3|$ ، $-4\leq x\leq 4$ کی ترسیم کے لئے خاکہ 9.7 دیکھیں۔



خاکہ 9.7

$$\therefore \int_{-4}^{4}|x+3|\,dx = \int_{-4}^{-3}|x+3|\,dx+\int_{-3}^{4}|x+3|\,dx = \int_{-4}^{-3}(-x-3)\,dx+\int_{-3}^{4}(x+3)\,dx$$

$$= \left[-\frac{x^2}{2}-3x\right]_{-4}^{-3}+\left[\frac{x^2}{2}+3x\right]_{-3}^{4}$$

$$= \left(-\frac{9}{2}+9\right)-\left(-\frac{16}{2}+12\right)+\left(\frac{16}{2}+12\right)-\left(\frac{9}{2}-9\right)=\left(\frac{9}{2}\right)-4+20+\left(\frac{9}{2}\right)=25\,.$$

اس کے بعد ہم خصوصیت 5 کے استعمال کو واضح کرنے کے لئے مثالیں دیں گے۔

مثال 9.16

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{4+5\sin x}=\frac{1}{3}\log_e 2$ ثابت کرو۔

حل

$u=\tan\frac{x}{2}$ درج کریں تو پھر $\sin x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2u}{1+u^2}, du=\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx\Rightarrow dx=\frac{2du}{1+u^2}$ ہو گا۔

جب $x=0$ $u=\tan 0=0$، جب $x=\frac{\pi}{2}$ ، $u=\tan\frac{\pi}{4}=1$

$$\therefore I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{4+5\sin x}=\int_0^1\frac{\frac{2du}{1+u^2}}{4+5\left(\frac{2u}{1+u^2}\right)}=\int_0^1\frac{du}{2u^2+5u+2}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{du}{u^2+\frac{5}{2}u+1}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{du}{\left(u+\frac{5}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\left[\frac{1}{2}\times\frac{1}{2\times\left(\frac{3}{4}\right)}\log\left(\frac{\left(u+\frac{5}{4}\right)-\frac{3}{4}}{\left(u+\frac{5}{4}\right)+\frac{3}{4}}\right)\right]_0^1=\frac{1}{3}\left[\log\left(\frac{u+\frac{1}{2}}{u+2}\right)\right]_0^1=\frac{1}{3}\log 2\,.$$

غور کیجئے (Note)

ہم متبادل کا طریقہ استعمال کرتے ہوئے $\int\frac{dx}{a\cos x+b\sin x+c}$ کی قسم کا مخالف مشتق معلوم کرنے کے لئے $u=\tan\frac{x}{2}$ کو درج کرنے پر اس طرح $dx=\frac{2du}{1+u^2}$، $\sin x=\frac{2u}{1+u^2}$، $\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$۔

مثال 9.17

$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x\,dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}=\frac{\pi}{4}$ ثابت کرو۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 9_App of Integration.indd 103 28-02-2023 15:04:01

حل

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x\, dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x\, dx}{\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x\, dx}{1 - \frac{1}{2}(2\sin x \cos x)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin 2x\, dx}{2 - \sin^2 2x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin 2x\, dx}{1 + \cos^2 2x}.$$

$u = \cos 2x$ درج کرو، تو $du = -2\sin 2x\, dx$

جب $x = 0$، ہمارے پاس $u = \cos 0 = 1$ ہے۔ جب $x = \frac{\pi}{4}$، ہمارے پاس $u = \cos\frac{\pi}{2} = 0$ ہے۔

$$\therefore I = \int_1^0 \frac{-du}{1+u^2} = \int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = \left[\tan^{-1} u\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

مثال 9.18

$a,\ b > 0$، ثابت کرو۔ جہاں $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} = \frac{1}{ab}\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$

حل

I درج کرو، $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x\, dx}{a^2\tan^2 x + b^2}.$

$u = \tan x$ درج کرو، تو $du = \sec^2 x\, dx$

جب $x = 0$، ہمارے پاس $u = \tan 0 = 0$ ہے۔ جب $x = \frac{\pi}{4}$، ہمارے پاس $u = \tan\frac{\pi}{4} = 1$ ہے۔

$$\therefore I = \int_0^1 \frac{du}{a^2u^2 + b^2} = \frac{1}{a^2}\int_0^1 \frac{du}{u^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{1}{a^2}\left[\frac{a}{b}\tan^{-1}\left(\frac{au}{b}\right)\right]_0^1 = \frac{1}{ab}\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right).$$

ہم معین تکملہ کی کچھ اور خصوصیات واضح کرتے ہیں۔

خصوصیت 6

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$$

ثبوت

فرض کرو $u = a+b-x$. تو، ہمیں $dx = -du$ حاصل ہوگا۔

جب $x = a$، $u = a+b-a = b$ ہے۔ جب $x = b$، ہمیں $u = a+b-b = a$ حاصل ہوتا ہے۔

$$\therefore \int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(a+b-u)(-du) = \int_a^b f(a+b-u)du$$

$$= \int_a^b f(a+b-x)dx.$$

غور کیجئے (Note)

مندرجہ بالا خصوصیات میں a کو 0 اور b کو a سے تبدیل کرنے پر ہمیں مندرجہ خاصیت ملتی ہے۔

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx.$$

مثال 9.19

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin x + \cos x}\, dx$ کی قیمت معلوم کرو۔

حل

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin x + \cos x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x}\, dx \text{ , چونکہ } \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\log(\sec x + \tan x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\log(\sqrt{2}+1) - \log(1+0)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\log(\sqrt{2}+1).$$

خصوصیت 7

$$\int_0^{2a} f(x)\, dx = \int_0^a \left[f(x) + f(2a-x)\right] dx.$$

ثبوت

$$\int_0^{2a} f(x)\, dx = \int_0^a f(x)\, dx + \int_a^{2a} f(x)\, dx \quad \text{خصوصیت 3 سے ہمیں} \quad (1)...$$

آیئے ہم $x = 2a-u$ کا متبادل $\int_a^{2a} f(x)dx$ میں بنائے ۔ تو $dx = -du.$ ہو گا۔

جب $x = a$ ہو تو ہمیں $u = 2a-a = a$ حاصل ہوتا ہے۔ جب $x = 2a$ ہو تو ہمیں $u = 2a-2a = 0$ حاصل ہوتا ہے۔

$$\int_a^{2a} f(x)dx = \int_a^0 f(2a-u)(-du) = \int_0^a f(2a-u)du = \int_0^a f(2a-x)dx \quad (2)...$$

مساوات (2) کو (1) میں درج کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\int_0^{2a} f(x)\, dx = \int_0^a f(x)\, dx + \int_0^a f(2a-x)\, dx$$

$$= \int_0^a \left[f(x) + f(2a-x)\right] dx.$$

خصوصیت 8

اگر $f(x)$ ایک جفت تفاعل ہے تو $\int_{-a}^a f(x)\, dx = 2\int_0^a f(x)\, dx.$

(یاد کریں کہ تفاعل $f(x)$ ایک جفت تفاعل ہے، اگر اور صرف اگر $f(-x) = f(x).$)

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 9_App of Integration.indd 105 28-02-2023 15:04:17

ثبوت

خصوصیت 3 سے ہمیں

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \quad \text{...(1)}$$

تکملہ $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx$ میں آیئے ہم $x = -u$ کا متبادلہ کریں ۔ تو $dx = -du$ ہو گا۔

جب $x = -a$، تو ہمیں $u = a$ حاصل ہوتا ہے۔ جب $x = 0$ ، تو ہمیں $u = 0$ حاصل ہوتا ہے۔اس طرح ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(-u)(-du) = \int_{0}^{a} f(-u)\,du = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx \quad \text{...(2)}$$

مساوات (2) کو (1) میں درج کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

■

خصوصیت 9

اگر $f(x)$ ایک طاق تفاعل ہو تو $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$ ہو گا۔

(یاد کریں کہ تفاعل $f(x)$ ایک طاق تفاعل ہے اگر اور صرف اگر $f(-x) = -f(x)$)

ثبوت

خصوصیت 3 سے ہمیں

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \quad \text{...(1)}$$

$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx$ پر غور کریں۔اس تکملہ میں ،آیئے ہم $x = -u$ کا متبادلہ کریں ، تو $dx = -du$. ہو گا

جب $x = -a$ ہو تو ہمیں $u = a$ حاصل ہوتا ہے؛ جب $x = 0$ ہوتو ہمیں $u = 0$ حاصل ہوتا ہے ۔ اس طرح ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(-u)(-du) = \int_{0}^{a} f(-u)\,du = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx \quad \text{...(2)}$$

مساوات (2) کو (1) میں درج کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx - \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0$$

■

خصوصیت 10

اگر $f(2a-x) = f(x)$, ہو، تو $\int_{0}^{2a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$ ہو گا۔

ثبوت

خصوصیت 7 سے ہمیں

$$\int_{0}^{2a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} [f(x) + f(2a-x)]\,dx. \quad \text{...(1)}$$

مساوات (1) میں $f(2a-x) = f(x)$ شرط درج کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\int_{0}^{2a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} [f(x) + f(x)]\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

■

خصوصیت 11

اگر $f(2a-x) = -f(x)$ ہو، تو $\int_{0}^{2a} f(x)\,dx = 0$ ہو گا۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 9_App of Integration.indd 106 28-02-2023 15:04:26

ثبوت

خصوصیت 7 سے ہمیں

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^{a} [f(x) + f(2a-x)]\,dx. \qquad \text{(1)...}$$

مساوات (1) میں $f(2a-x) = -f(x)$ کی شرط درج کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^{a} [f(x) - f(x)]\,dx = 0$$

■

خصوصیت 12

$$\int_0^{a} x\, f(x)\,dx = \frac{a}{2}\int_0^{a} f(x)\,dx \quad \text{اگر } f(a-x) = f(x) \text{ ہو۔}$$

ثبوت

$$I = \int_0^{a} x\, f(x)\,dx \quad \text{فرض کرو} \qquad \text{(1)...}$$

$$I = \int_0^{a} (a-x) f(a-x)\,dx \quad \text{، پھر}$$

$$= \int_0^{a} (a-x) f(x)\,dx \quad \text{، کیونکہ } f(a-x) = f(x)$$

$$\therefore I = \int_0^{a} (a-x) f(x)\,dx \qquad \text{(2)...}$$

مساوات (1) اور (2) کو جمع کرنے سے

$$2I = \int_0^{a} (x + a - x) f(x)\,dx$$

$$= a\int_0^{a} f(x)\,dx.$$

$$\therefore I = \frac{a}{2}\int_0^{a} f(x)\,dx.$$

■

غور کیجئے (Note)

یہ خصوصیت LHS کی تکمیل میں موجود جذر (Factor) x کو نکالنے میں مدد کرتا ہے۔

مثال 9.20

ثابت کرو $\int_0^{\pi} g(\sin x)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\sin x)dx$ جہاں، $g(\sin x)$ ایک $\sin x$ کا تفاعل ہے۔

حل

ہم جانتے ہیں

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^{a} f(x)\,dx. \quad \text{اگر } f(2a-x) = f(x)$$

$2a = \pi$ اور $f(x) = g(\sin x)$ لینے پر،

$$g(\sin(\pi - x)) = g(\sin x) = f(x) = f(2a-x) \quad \text{، پھر}$$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 9_App of Integration.indd 107 28-02-2023 15:04:32

$$\therefore \int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^{a} f(x)\,dx .$$

$$\int_0^{\pi} g(\sin x)\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\sin x)\,dx .$$

نتیجہ

$$\int_0^{\pi} g(\sin x)\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\sin x)\,dx.$$

غور کیجئے (Note)

مذکورہ بالا نتیجہ $\int_0^{\pi} g(\sin x)\,dx$ قسم کے معین تکملہ کی جانچ میں مفید ہے۔

مثال 9.21

$\int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x}\,dx$ کی قیمت معلوم کرو۔

حل

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x}\,dx \quad \text{فرض کرو}$$

$$= \int_0^{\pi} x\,\frac{1}{1+\sin x}\,dx$$

فرض کرو $f(x) = \frac{1}{1+\sin x}$. پھر، $f(\pi - x) = \frac{1}{1+\sin(\pi - x)} = \frac{1}{1+\sin x} = f(x)$

$$\therefore \int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x}\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\sin x}\,dx, \quad \left(\because \int_0^{a} x\,f(x)\,dx = \frac{a}{2}\int_0^{a} f(x)\,dx \text{ اگر } f(a-x) = f(x)\right)$$

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x}\,dx, \qquad \int_0^{\pi} g(\sin x)\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\sin x)\,dx \text{ ، کیونکہ}$$

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\,dx \qquad \int_0^{a} f(x)\,dx = \int_0^{a} f(a-x)\,dx \text{ ، کیونکہ}$$

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x}\,dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec^2\frac{x}{2}\,dx$$

$$= \pi\left[\tan\frac{x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi\left[\tan\frac{\pi}{4} - \tan 0\right] = \pi .$$

مثال 9.22

ثابت کرو $\int_0^{2\pi} g(\cos x)\,dx = 2\int_0^{\pi} g(\cos x)\,dx$، جہاں، $g(\cos x)$ ایک $\cos x$ کا تفاعل ہے۔

حل

$f(x) = g(\cos x)$ اور $2a = 2\pi$ لینے پر،

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 9_App of Integration.indd 108 28-02-2023 15:04:38

$$f(2a-x) = f(2\pi - x) = g(\cos(2\pi - x)) = g(\cos x) = f(x) \text{ تو}$$

$$\therefore \int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^{a} f(x)\,dx .$$

$$\therefore \int_0^{2\pi} g(\cos x)\,dx = 2\int_0^{\pi} g(\cos x)\,dx .$$

نتیجہ

$$\int_0^{2\pi} g(\cos x)\,dx = 2\int_0^{\pi} g(\cos x)\,dx.$$

غور کیجئے (Note)

مذکورہ بالا نتیجہ $\int_0^{2\pi} g(\cos x)\,dx$ قسم کے معین تکملہ کی جانچ میں مفید ہے۔

مثال 9.23

اگر $f(x) = f(a+x)$، تو $\int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^{a} f(x)\,dx$

حل

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^{a} f(x)\,dx + \int_a^{2a} f(x)\,dx \quad \text{ہم لکھ سکتے ہیں} \quad (1)...$$

$\int_a^{2a} f(x)\,dx$ پر غور کریں

$x = a+u$ درج کرنے سے ہمیں $dx = du$ حاصل ہوتا ہے؛ جب $x = a$، $u = 0$ اور جب $x = 2a$، $u = a$ ہے

$$\therefore \int_a^{2a} f(x)\,dx = \int_0^{a} f(a+u)\,du = \int_0^{a} f(u)\,du, \text{ کیونکہ } f(x) = f(a+x)$$

$$= \int_0^{a} f(x)\,dx \quad (2)...$$

مساوات (1) اور (2) کو جمع کرنے سے

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^{a} f(x)\,dx .$$

مثال 9.24

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx.$ کی قیمت معلوم کرو۔

حل

فرض کرو $f(x) = x\cos x$ تو $f(-x) = (-x)\cos(-x) = -x\cos x = -f(x)$

تو $f(x) = x\cos x$ ایک طاق تفاعل ہے۔

لہذا، طاق تفاعل $f(x)$ کے لئے، خاصیت کا استعمال سے، $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$,

$\therefore \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = 0.$ ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

مثال 9.25

$\int_{-\log 2}^{\log 2} e^{-|x|}\,dx$ کی قیمت معلوم کرو۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 9_App of Integration.indd 109 28-02-2023 15:04:44

حل

فرض کرو $f(x) = e^{-|x|}$ تو $f(-x) = e^{-|-x|} = e^{-|x|} = f(x)$

تو $f(x)$ ایک جفت تفاعل ہے۔

لہٰذا، $\int_{-\log 2}^{\log 2} e^{-|x|}\,dx = 2\int_{0}^{\log 2} e^{-|x|}\,dx = 2\int_{0}^{\log 2} e^{-x}\,dx = 2(-e^{-x})_0^{\log 2} = 2(-e^{-\log 2} + e^0) = 2\left(-e^{\log\frac{1}{2}} + 1\right)$

$= 2\left(-\frac{1}{2}+1\right) = 1.$ ■

مثال 9.26

$\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}\,dx.$ کی قیمت معلوم کرو۔

حل

فرض کرو $I = \int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}\,dx$ ...(1)

مساوات (1) میں ضابطہ $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ کا استعمال کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$I = \int_0^a \frac{f(a-x)}{f(a-x)+f(a-(a-x))}\,dx$$

$$= \int_0^a \frac{f(a-x)}{f(x)+f(a-x)}\,dx \quad \text{...(2)}$$

مساواتیں (1) اور (2) کو جمع کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$2I = \int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}\,dx + \int_0^a \frac{f(a-x)}{f(x)+f(a-x)}\,dx$$

$$= \int_0^a \frac{f(x)+f(a-x)}{f(x)+f(a-x)}\,dx$$

$$= \int_0^a dx = a.$$

لہٰذا، $I = \frac{a}{2}$ ہمیں حاصل ہو گا۔ ■

مثال 9.27

ثابت کرو $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan x)dx = \frac{\pi}{8}\log 2.$

حل

آیئے $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan x)dx$ درج کریں۔ ...(1)

مساوات (1) میں خاصیت $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$ کا استعمال کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left[1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left[1+\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan x}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan x}\right]dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left[1+\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right]dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left[\frac{1+\tan x+1-\tan x}{1+\tan x}\right]dx$$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 9_App of Integration.indd 110 28-02-2023 15:04:50

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left[\frac{2}{1+\tan x}\right] dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\log 2 - \log(1+\tan x)\right] dx$$

$$= \log 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan x) dx$$

$$= \frac{\pi}{4}\log 2 - I$$

تو ہمیں $2I = \frac{\pi}{4}\log 2$ حاصل ہو گا۔ لہذا، ہمیں $I = \frac{\pi}{8}\log 2.$ حاصل ہو گا۔

مثال 9.28

ثابت کرو $\int_0^1 \left(\tan^{-1} x + \tan^{-1}(1-x)\right) dx = \frac{\pi}{2} - \log_e 2$

حل

$$I = \int_0^1 \left(\tan^{-1} x + \tan^{-1}(1-x)\right) dx$$

$$= \int_0^1 \tan^{-1} x \, dx + \int_0^1 \tan^{-1}(1-x) \, dx$$

$$= \int_0^1 \tan^{-1} x \, dx + \int_0^1 \tan^{-1}(1-(1-x)) \, dx \,, \quad \text{چونکہ } \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$$

$$= \int_0^1 \tan^{-1} x \, dx + \int_0^1 \tan^{-1} x \, dx$$

$$= 2\int_0^1 \tan^{-1} x \, dx$$

$$= \left[2\int u dv\right]_0^1, \qquad \text{جہاں، } u = \tan^{-1} x \text{ اور } dv = dx$$

$$= 2\left[uv - \int v du\right]_0^1 \quad \text{بالحصص کے ذریعے تکملہ کا استعمال کرنے پر،}$$

$$= 2\left(x\tan^{-1} x - \int x \frac{dx}{1+x^2}\right)_0^1 = 2\left(x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right)\right)_0^1 = \frac{\pi}{2} - \log 2$$

مثال 9.29

$\int_2^3 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{5-x}+\sqrt{x}} dx.$ کی قیمت معلوم کرو۔

حل

آیئے $I = \int_2^3 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{5-x}+\sqrt{x}} dx$ درج کریں (1)...

ضابطہ $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$ کا استعمال کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$I = \int_2^3 \frac{\sqrt{(2+3-x)}}{\sqrt{5-(2+3-x)}+\sqrt{(2+3-x)}} dx = \int_2^3 \frac{\sqrt{5-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{5-x}} dx \quad \text{(2)...}$$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 9_App of Integration.indd 111 28-02-2023 15:04:56

(1) اور (2) کو جمع کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$2I = \int_2^3 \frac{\sqrt{x}+\sqrt{5-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{5-x}}\,dx = \int_2^3 dx = [x]_2^3 = 3-2 = 1\,.$$

لہٰذا، $I = \frac{1}{2}$ ہمیں حاصل ہوگا۔

مثال 9.30

$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+a^x}\,dx$ کی قیمت معلوم کرو۔

حل

فرض کرو $I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+a^x}\,dx$ (1)...

$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$ کا استعمال کرکے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2(\pi-\pi-x)}{1+a^{\pi-\pi-x}}\,dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2(-x)}{1+a^{-x}}\,dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} a^x \left(\frac{\cos^2 x}{a^x+1}\right) dx \quad \text{(2)...}$$

(1) اور (2) کو جمع کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$2I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{a^x+1}(a^x+1)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\,dx$$

$$= 2\int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx \qquad (\text{چنانچہ، } \cos^2 x \text{ ایک جفت تفاعل ہے})$$

لہٰذا، $I = \int_0^{\pi} \frac{(1+\cos 2x)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x+\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}[\pi] = \frac{\pi}{2}$

مشق 9.3

1. مندرجہ ذیل معین تکملہ کی قیمت معلوم کیجئے:

(i) $\int_3^4 \frac{dx}{x^2-4}$ (ii) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+2x+5}$ (iii) $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$

(iv) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right) dx$ (v) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos\theta}\,\sin^3\theta\,d\theta$ (vi) $\int_0^1 \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\,dx$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 9_App of Integration.indd 112 28-02-2023 15:05:01

2. تکمیل کی خصوصیات کا استعمال کرتے ہوئے درج ذیل تکملہ کی قیمت معلوم کرو۔

(i) $\int_{-5}^{5} x\cos\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)dx$

(ii) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^5 + x\cos x + \tan^3 x + 1)\,dx$

(iii) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\ dx$

(iv) $\int_{0}^{2\pi} x\log\left(\frac{3+\cos x}{3-\cos x}\right)dx$

(v) $\int_{0}^{2\pi} \sin^4 x\cos^3 x\,dx$

(vi) $\int_{0}^{1} |5x-3|\ dx$

(vii) $\int_{0}^{\sin^2 x} \sin^{-1}\sqrt{t}\ dt + \int_{0}^{\cos^2 x} \cos^{-1}\sqrt{t}\ dt,\ \ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

(viii) $\int_{0}^{1} \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\ dx$

(ix) $\int_{0}^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\sin x}dx$

(x) $\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} \frac{1}{1+\sqrt{\tan x}}dx$

(xi) $\int_{0}^{\pi} x\left[\sin^2(\sin x)+\cos^2(\cos x)\right]dx$

9.4 برنولی کا ضابطہ (Bernoulli's Formula)

$\int u(x)v(x)dx$ قسم کے غیر معین تکملہ، کی قیمت معلوم کرنا بہت آسان ہوجا تا ہےجب u ، x میں ایک کثیر رقمی تفاعل ہو (یعنی، $u(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$) اور $v(x)$ کو سادگی کے ساتھ مسلسل تکملہ کیا جاسکتا ہے۔ اس کام کو پورا کرنے میں **برنولی کا ضابطہ** بہت مفید ہے۔ اصل میں یہ ضابطہ بالحصص کے ذریعہ تکمیل کے ضابطہ کا پھیلاؤ ہے۔ یہ ضابطہ اخذ کرنے کے لئے ہم مندرجہ ذیل علامت کااستعمال کرتے ہیں۔

$$u^{(1)} = \frac{du}{dx},\quad u^{(2)} = \frac{du^{(1)}}{dx},\quad u^{(3)} = \frac{du^{(2)}}{dx},\ \ldots\ldots$$

$$v_{(1)} = \int v dx,\ v_{(2)} = \int v_{(1)}dx,\ v_{(3)} = \int v_{(2)}dx,\ldots\ldots$$

تو، ہمیں

$$dv_{(1)} = v dx,\ dv_{(2)} = v_{(1)}dx,\ dv_{(3)} = v_{(2)}dx,\ \ldots\ldots$$

بالحصص تکمیل کے ذریعے، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned}\int uv dx &= \int u dv_{(1)} = uv_{(1)} - \int v_{(1)}du = uv_{(1)} - \int v_{(1)}\frac{du}{dx}dx\\ &= uv_{(1)} - \int u^{(1)}dv_{(2)}\\ &= uv_{(1)} - \left(u^{(1)}v_{(2)} - \int v_{(2)}du^{(1)}\right)\\ &= uv_{(1)} - u^{(1)}v_{(2)} + \int v_{(2)}\frac{du^{(1)}}{dx}dx\end{aligned}$$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 9_App of Integration.indd 113 28-02-2023 15:05:11

$$= uv_{(1)} - u^{(1)}v_{(2)} + \int u^{(2)} dv_{(3)}$$

$$= uv_{(1)} - u^{(1)}v_{(2)} + \left(u^{(2)}v_{(3)} - \int v_{(3)} du^{(2)}\right)$$

$$= uv_{(1)} - u^{(1)}v_{(2)} + u^{(2)}v_{(3)} - \int v_{(3)} du^{(2)} .$$

اس طرح آگے بڑھتے ہوئے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\int uv dx = uv_{(1)} - u^{(1)}v_{(2)} + u^{(2)}v_{(3)} - u^{(3)}v_{(4)} + \cdots$$

مذکورہ بالا نتیجہ دو تفاعل کی ضرب کے لئے برنولی کا ضابطہ کہلاتا ہے۔

غور کیجئے (Note)

چونکہ x کا کثیر رقمی تفاعل u ہے، متواتر مشتق $u^{(m)}$ صفر ہوجائے گا۔ جب m ایک مثبت سالم عدد ہو اور اس کے بعد مزید مُشتق صفر ہی ہونگے۔ لہذا، اوپر دئے گئے ضابطہ کے دائیں جانب کے حصے میں صرف محدود اعداد کی رقمیں ہیں۔

مثال 9.31

جب n ایک مثبت سالم عدد ہو تو $\int_0^{\pi} x^2 \cos nx\, dx$ کی قیمت معلوم کرو۔

حل

$u = x^2$ اور $v = \cos nx$ لینے پر، اور برنولی کے ضابطہ کے استعمال پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$I = \int_0^{\pi} x^2 \cos nx\, dx = \left[\left(x^2\right)\left(\frac{\sin nx}{n}\right) - \left(2x\right)\left(-\frac{\cos nx}{n^2}\right) + (2)\left(-\frac{\sin nx}{n^3}\right)\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2\pi(-1)^n}{n^2}, \quad \text{کیونکہ، } \sin n\pi = 0 \text{ اور } \cos n\pi = (-1)^n$$

مثال 9.32

$\int_0^1 e^{-2x}(1 + x - 2x^3)\, dx$ کی قیمت معلوم کرو۔

حل

$u = 1 + x - 2x^3$ اور $v = e^{-2x}$ لینے پر، اور برنولی کے ضابطہ کے استعمال پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$I = \int_0^1 e^{-2x}(1 + x - 2x^3)\, dx$$

$$= \left[(1+x-2x^3)\left(\frac{e^{-2x}}{-2}\right) - \left(1-6x^2\right)\left(\frac{e^{-2x}}{4}\right) + (-12x)\left(\frac{e^{-2x}}{-8}\right) - (-12)\left(\frac{e^{-2x}}{16}\right)\right]_0^1$$

$$= \left[\frac{e^{-2x}}{16}\left(16x^3 + 24x^2 + 16x\right)\right]_0^1$$

$$= \frac{7}{2e^2} .$$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 9_App of Integration.indd 114 28-02-2023 15:05:18

مثال 9.33

جب n ایک مثبت سالم ہو، تو $\int_0^{2\pi} x^2 \sin nx\, dx$ کی قیمت معلوم کرو۔

حل

$u = x^2$ اور $v = \sin nx$ لینے پر اور برنولی کے ضابطہ کے استعمال پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$I = \int_0^{2\pi} x^2 \sin nx\, dx = \left[\left(x^2\right)\left(-\frac{\cos nx}{n}\right) - (2x)\left(-\frac{\sin nx}{n^2}\right) + (2)\left(\frac{\cos nx}{n^3}\right)\right]_0^{2\pi}$$

$$= \left[\left(4\pi^2\right)\left(-\frac{1}{n}\right) - 0 + (2)\left(\frac{1}{n^3}\right)\right] - \left[0 - 0 + (2)\left(\frac{1}{n^3}\right)\right], \quad \text{کیونکہ، } \sin 2n\pi = 0 \text{ اور } \cos 2n\pi = 1$$

$$= -\frac{4\pi^2}{n} + \frac{2}{n^3} - \frac{2}{n^3} = -\frac{4\pi^2}{n}. \quad \blacksquare$$

مثال 9.34

$\int_{-1}^{1} e^{-\lambda x}(1-x^2)\, dx$ کی قیمت معلوم کرو۔

حل

$u = 1 - x^2$ اور $v = e^{-\lambda x}$ لینے پر اور برنولی کے ضابطہ کے استعمال پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$I = \int_{-1}^{1} e^{-\lambda x}(1-x^2)\, dx = \left[(1-x^2)\left(\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right) - (-2x)\left(\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2}\right) + (-2)\left(\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda^3}\right)\right]_{-1}^{1}$$

$$= 2\left(\frac{e^{-\lambda}}{\lambda^2}\right) + 2\left(\frac{e^{-\lambda}}{\lambda^3}\right) + 2\left(\frac{e^{\lambda}}{\lambda^2}\right) - 2\left(\frac{e^{\lambda}}{\lambda^3}\right)$$

$$= \frac{2}{\lambda^2}\left(e^{\lambda} + e^{-\lambda}\right) - \frac{2}{\lambda^3}\left(e^{\lambda} - e^{-\lambda}\right). \quad \blacksquare$$

مشق 9.4

درج ذیل کی قیمت معلوم کرو۔

1. $\int_0^1 x^3 e^{-2x}\, dx$
2. $\int_0^1 \frac{\sin(3\tan^{-1}x)\tan^{-1}x}{1+x^2}\, dx$
3. $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{e^{\sin^{-1}x}\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$
4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos 2x\, dx$

9.5 نا مناسب تکملے (Improper Integrals)

ریمن تکملہ $\int_a^b f(x)dx$ کی تعریف میں، تکمیل کا وقفہ $[a,b]$ محدود ہے اور $f(x)$ کے $[a,b]$ کے ہر نقطے پر محدود ہے۔بہت سے طبعی اطلاقات میں مندرجہ ذیل تکملہ کے اقسام پیدا ہوئے ہیں۔

$$\int_a^{\infty} f(x)\, dx,\ \int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx,\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx,$$

جہاں، a ایک حقیقی عدد ہے اور تکملہ کے وقفہ میں $f(x)$ ایک مسلسل تفاعل ہے۔ انہیں مندرجہ ذیل میں ریمن تکملوں کے حدوں کے طور پر بیان کیا گیا ہے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 9_App of Integration.indd 115 28-02-2023 15:05:25

(i) $\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^{t} f(x)\,dx$

(ii) $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^{a} f(x)\,dx$

(iii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} f(x)\,dx$

انہیں پہلی قسم کے نامناسب تکملے کہا جاتا ہے۔ اگر حدیں موجود ہیں تو نامناسب تکملوں کو متقارب (Convergent) کہا جاتا ہے۔

غور کیجئے (Note)

تکملہ احصا کے بنیادی نظریہ کے ذریعے ، وہاں ایک تفاعل $F(t)$ موجود ہے۔اس طرح کہ

$$\int_a^t f(x)\,dx = F(t)-F(a)$$

$$\therefore \int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}[F(t)-F(a)] = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^{\infty}.$$

مثال 9.35

$\int_b^{\infty} \frac{1}{a^2+x^2}\,dx$, $a>0, b\in\mathbb{R}$. کی قیمت معلوم کرو۔

حل

ہمارے پاس، $\int_b^{\infty} \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}\right]_b^{\infty} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\infty - \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{b}{a} = \frac{1}{a}\left[\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{b}{a}\right]$

غور کیجئے (Note)

مندرجہ بالا مثال سے، ہمیں حاصل ہوتا ہے

(i) $\int_0^{\infty} \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\left[\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}0\right] = \frac{\pi}{2a}$.

(ii) $\int_a^{\infty} \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\left[\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}1\right] = \frac{1}{a}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right] = \frac{\pi}{4a}$.

(iii) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t}\frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty} 2\int_0^t \frac{1}{a^2+x^2}\,dx$, (کیونکہ $\frac{1}{a^2+x^2}$ ایک جفت تفاعل ہے)

$$= 2\int_0^{\infty}\frac{1}{a^2+x^2}\,dx = 2\left(\frac{\pi}{2a}\right) = \frac{\pi}{a}.$$

مثال 9.36

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4\sin^2 x+5\cos^2 x}$ کی قیمت معلوم کرو۔

حل

فرض کرو ، $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4\sin^2 x+5\cos^2 x}$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 9_App of Integration.indd 116 28-02-2023 15:05:32

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x}{4\tan^2 x + 5}\,dx$$ (شمارکنندہ اور نسب نما دونوں کی تقسیم $\cos^2 x$ سے کریں)

فرض کرو $u = \tan x$ ہے۔ تو $du = \sec^2 x\,dx$ ہوگا۔

جب $x = 0$ ہو، $u = \tan 0 = 0$ ہوگا۔

جب $x = \frac{\pi}{2}$ ہو، $u = \tan\frac{\pi}{2} = \infty$ ہوگا۔

$$\therefore I = \int_0^{\infty} \frac{du}{4u^2 + 5}$$ (یہ ایک نامناسب تکملہ ہے)

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\infty} \frac{du}{\left[u^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right]} = \frac{1}{4}\times\frac{2}{\sqrt{5}}\left[\tan^{-1}\left(\frac{u}{\frac{\sqrt{5}}{2}}\right)\right]_0^{\infty} = \frac{1}{2\sqrt{5}}(\tan^{-1}\infty - \tan^{-1}0) = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4\sqrt{5}}$$

مشق 9.5

1. درج ذیل کی قیمت معلوم کرو۔

(i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+5\cos^2 x}$ (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5+4\sin^2 x}$

9.6 تخفیف ضابطہ (Reduction Formulae)

چند معین تکملہ کی قیمت کو قوت نما تخفیف طریقے سے معلوم کیا جاسکتا ہے۔

اس حصے میں ہم مندرجہ ذیل معین تکملہ کی قیمتیں معلوم کرسکتے ہیں۔

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx\,,\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx\,,\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\cos^n x\,dx\,,\ \int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx$$

ہم نامناسب تکمیل $\int_0^{\infty} e^{-x}x^n\,dx$ کی قیمت بھی حاصل کرسکتے ہیں۔

تخفیف ضابطہ کے حصول کے طریقہ میں مندرجہ ذیل مرحلے ہیں:

مرحلہ 1: تکملہ میں قوت نما (مثبت سالم اعداد) n کی شناخت کرنا۔

مرحلہ 2: دئے گئے تکملہ کو I_n کے طور پر درج کریں۔

مرحلہ 3: بالحصص کے ذریعے تکمیل (Integration by parts) کو استعمال کرکے I_{n-1} یا I_{n-2} کے لحاظ سے I_n کی مساوات کا حاصل کرنا۔

اس نتیجہ کے مساوات کو I_n کا تخفیف ضابطہ کہا جاتا ہے۔ ہم نے ذیل میں بغیر ثبوت کے کچھ تخفیف ضابطوں کی فہرست دی ہے۔

تخفیفی ضابطہ I: اگر $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ تو، $I_n = \frac{(n-1)}{n} I_{n-2}$، $n \geq 2$

تخفیفی ضابطہ II: اگر $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ تو، $I_n = \frac{(n-1)}{n} I_{n-2}$، $n \geq 2$

تخفیفی ضابطہ III: اگر $I_{m,n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\cos^n x\,dx$ تو، $I_{m,n} = \frac{(n-1)}{m+n} I_{m,n-2}$، $n \geq 2$

تخفیفی ضابطہ IV: اگر $I_{m,n} = \int_0^1 x^m\,(1-x)^n dx$ تو، $I_{m,n} = \frac{n}{m+n+1} I_{m,n-1}$، $n \geq 1$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 9_App of Integration.indd 117 28-02-2023 15:05:40

تخفیف ضابطہ I اور II کو استعمال کرکے ہم مندرجہ ذیل نتیجہ کو حاصل کرتے ہیں۔(بغیر کے ثبوت کے بیان)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx = \begin{cases} \frac{(n-1)}{n}\times\frac{(n-3)}{(n-2)}\times\cdots\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}, & \text{اگر } n = 2,4,6,\cdots \\ \frac{(n-1)}{n}\times\frac{(n-3)}{(n-2)}\times\cdots\times\frac{2}{3}, & \text{اگر } n = 3,5,7,\cdots \end{cases}$$

غور کیجئے (Note)

مثال کے طور پر ہمارے پاس ہے،

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\, dx = \frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\times 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x\, dx = \frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}$$

مثال 9.37

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2 x + \cos^4 x\right) dx$ کی قیمت معلوم کرو۔

حل

■ دیا گیا ہے $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2 x + \cos^4 x\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\, dx = \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} + \frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{16}$

مثال 9.38

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{vmatrix} \cos^4 x & 7 \\ \sin^5 x & 3 \end{vmatrix} dx$ کی قیمت معلوم کرو۔

حل

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(3\cos^4 x - 7\sin^5 x\right) dx = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\, dx - 7\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\, dx$$

■ $$= 3\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} - 7\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{3} = \frac{9\pi}{16} - \frac{56}{15}$$

تخفیف ضابطہ (III) کو دہرانے سے ہم درج ذیل نتائج (بغیر ثبوت کے) حاصل کرسکتے ہیں۔

(i) اگر n جفت ہے اور m جفت ہے،

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\, \cos^n x\, dx = \frac{(n-1)}{(m+n)}\frac{(n-3)}{(m+n-2)}\frac{(n-5)}{(m+n-4)}\cdots\frac{1}{(m+2)}\frac{(m-1)}{m}\frac{(m-3)}{(m-2)}\frac{(m-5)}{(m-4)}\cdots\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}$$

(ii) اگر n طاق ہے اور m ایک مثبت سالم عدد (جفت یا طاق) ہو تو

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\, \cos^n x\, dx = \frac{(n-1)}{(m+n)}\frac{(n-3)}{(m+n-2)}\frac{(n-5)}{(m+n-4)}\cdots\frac{2}{(m+3)}\frac{1}{(m+1)}$$

غور کیجئے (Note)

اگر m اور n میں ایک طاق ہے تو پھر یہ آسان ہے کہ $\cos x$ کی قوت طاق طور پر حاصل کرسکتے ہیں۔ مثال کے طور پر اگر m طاق ہے اور n جفت ہو تو

■ $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\, \cos^n x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, \cos^m x\, dx = \frac{(m-1)}{(n+m)}\frac{(m-3)}{(n+m-2)}\frac{(m-5)}{(n+m-4)}\cdots\frac{2}{(n+3)}\frac{1}{(n+1)}.$$

مثال 9.39

درج ذیل کی قیمتیں معلوم کیجئے:

(i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\, \cos^6 x\, dx$

(ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\, \cos^4 x\, dx$

حل

(i) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^6 x\, dx = \frac{(6-1)}{(6+4)} \cdot \frac{(6-3)}{(6+4-2)} \cdot \frac{(6-5)}{(6+4-4)} \cdot \frac{(4-1)}{(4)} \cdot \frac{(4-3)}{(4-2)} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{(5)}{(10)} \frac{(3)}{(8)} \frac{(1)}{(6)} \frac{(3)}{(4)} \frac{(1)}{(2)} \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{512}$$

اس کے علاوہ، $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^6 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos^4 x\, dx = \frac{(3)}{(10)} \frac{(1)}{(8)} \frac{(5)}{(6)} \frac{(3)}{(4)} \frac{(1)}{(2)} \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{512}$$

(ii) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \cos^4 x\, dx = \frac{(3)}{(9)} \frac{(1)}{(7)} \frac{(4)}{(5)} \frac{(2)}{(3)} = \frac{(4)}{(9)} \frac{(2)}{(7)} \frac{(1)}{(5)} = \frac{8}{315}$$

اس کے علاوہ، $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \cos^4 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^5 x\, dx = \frac{(4)}{(9)} \frac{(2)}{(7)} \frac{(1)}{(5)} = \frac{8}{315}$$

مثال 9.40

$\int_0^{2a} x^2 \sqrt{2ax - x^2}\, dx$ کی قیمت معلوم کرو۔

حل

$x = 2a\cos^2\theta$ درج کریں۔ تو $dx = -4a\cos\theta\sin\theta\, d\theta$

جب $x = 0$ ہو، $2a\cos^2\theta = 0$ ہوگا۔ اور اس لئے $\theta = \frac{\pi}{2}$. جب $x = 2a$، $2a\cos^2\theta = 2a$ اور اس لئے $\theta = 0$ ہوگا۔
لہذا، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$I = \int_0^{2a} x^2 \sqrt{2ax - x^2}\, dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} 4a^2 \cos^4\theta \sqrt{4a^2\cos^2\theta - 4a^2\cos^4\theta}(-4a\cos\theta\sin\theta)d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4a^2\cos^4\theta 2a\cos\theta\sin\theta(4a\cos\theta\sin\theta)d\theta$$

$$= 32a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6\theta\sin^2\theta\, d\theta$$

$$= 32a^4 \times \frac{1}{8} \times \frac{5}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi a^4}{8}$$

مثال 9.41

$\int_0^1 x^5 \left(1 - x^2\right)^5 dx$ کی قیمت معلوم کرو۔

حل

$x = \sin\theta$ درج کریں۔ تو $dx = \cos\theta\, d\theta$

جب $x = 0$، $\sin\theta = 0$ تو اس لئے $\theta = 0$۔ جب $x = 1$، $\sin\theta = 1$ اور اس لئے $\theta = \frac{\pi}{2}$ ہوگا۔
لہذا، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\theta\left(1 - \sin^2\theta\right)^5 \cos\theta\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\theta\cos^{11}\theta\, d\theta = \frac{10}{16} \times \frac{8}{14} \times \frac{6}{12} \times \frac{4}{10} \times \frac{2}{8} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{336}.$$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 9_App of Integration.indd 119 28-02-2023 15:05:58

تخفیف ضابطہ (1) کو دہرانے سے ، ہم درج ذیل نتائج (بغیر ثبوت کے) حاصل کرسکتے ہیں۔

■ $\int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \frac{m! \times n!}{(m+n+1)!}$ جہاں، m اور n مثبت سالم اعداد ہیں۔

مثال 9.42

$\int_0^1 x^3 (1-x)^4 dx$ کی قیمت معلوم کرو۔

حل

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \frac{m! \times n!}{(m+n+1)!}.$$

■ $$\therefore \int_0^1 x^3 (1-x)^4 dx = \frac{3! \times 4!}{(3+4+1)!} = \frac{3! \times 4!}{8!} = \frac{3\times2\times1\times4\times3\times2\times1}{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1} = \frac{1}{280}.$$

مشق 9.6

1. درج ذیل کی قیمت معلوم کرو۔

(i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x\, dx$ (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 x\, dx$ (iii) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^6 2x\, dx$ (iv) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^5 3x\, dx$

(v) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^4 x\, dx$ (vi) $\int_0^{2\pi} \sin^7 \frac{x}{4}\, dx$ (vii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta \cos^5\theta\, d\theta$ (viii) $\int_0^1 x^2 (1-x)^3\, dx$

9.7 گاما تکملہ (Gamma Integral)

اس حصے میں ہم مخصوص نامناسب تکملہ $\int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx$ کے بارے میں مطالعہ کرتے ہیں، جہاں، n ایک مثبت سالم عدد ہے۔یہاں، ہمارے پاس ہے

$$e^{\circ} = \lim_{x\to\infty} e^x = \infty \text{ اور } e^{-\infty} = \lim_{x\to\infty} e^{-x} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty} e^x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

لو پتھل اصول (L'Hôpital's rule) کے قاعدے کے تحت ، ہر مثبت سالم عدد m کے لئے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\lim_{x\to\infty} x^m e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^m}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{m!}{e^x} = 0$$

مثال 9.43

ثابت کرو $\int_0^\infty e^{-x} x^n dx = n!$ جہاں، n ایک مثبت سالم عدد ہے۔

حل

بالحصص کے ذریعے تکمیل کا استعمال کرکے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\int_0^\infty e^{-x} x^n dx = \left[x^n\left(-e^{-x}\right)\right]_0^\infty - \int_0^\infty \left(-e^{-x}\right)\left(nx^{n-1}\right) dx = n\int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx$$

فرض کرو $I_n = \int_0^\infty e^{-x} x^n dx$ تو $I_n = nI_{n-1}$ ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

تو ہمیں حاصل ہوتا ہے $I_n = n(n-1)I_{n-2}$

اس طرح آگے بڑھتے ہوئے آخر کار ہمیں حاصل ہوتا ہے

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 9_App of Integration.indd 120 28-02-2023 15:06:05

$$I_n = n(n-1)(n-2)\cdots(2)(1)I_0$$

مگر، $I_0 = \int_0^\infty e^{-x}x^0dx = \left(-e^{-x}\right)_0^\infty = 0+1=1$ تو ہمیں $I_n = n(n-1)(n-2)\cdots(2)(1) = n!$ حاصل ہوتا ہے

لہذا، ہمیں حاصل ہوتا ہے

نتیجہ

$\int_0^\infty e^{-x}x^n dx = n!$ ، جہاں، n ایک غیر منفی سالم عدد ہے۔

غور کیجئے (Note)

تکملہ $\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx$ ہر مثبت سالم عدد $n \geq 1$ کے لئے ایک واحد مثبت سالم عدد کی وضاحت کرتا ہے۔

تعریف 9.1

$\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx$ کو **گاما تکملہ** کہا جاتا ہے۔ اس کو $\Gamma(n)$ کے ذریعے ظاہر کیا جاتا ہے اور اس کو "گاما آف n" سے پڑھا جاتا ہے۔

غور کیجئے (Note)

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n).$$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}x^0dx = \left(-e^{-x}\right)_0^\infty = 0+1=1,$$

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx.$$

$$= (n-1)!,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

مثال 9.44

$\int_0^\infty e^{-ax}x^n dx$ کی قیمت معلوم کرو۔ جہاں، $a > 0$

حل

$t = ax$ کے متبادل سے ہمیں $dt = adx$ حاصل ہوتا ہے $x = 0 \Rightarrow t = 0$ اور $x = \infty \Rightarrow t = \infty$

لہذا، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\int_0^\infty e^{-ax}x^n dx = \int_0^\infty e^{-t}\left(\frac{t}{a}\right)^n \frac{dt}{a} = \frac{1}{a^{n+1}}\int_0^\infty e^{-t}t^n dt$$

$$= \frac{1}{a^{n+1}}\int_0^\infty e^{-x}x^n dx = \frac{n!}{a^{n+1}}.$$

اس طرح

$$\int_0^\infty e^{-ax}x^n dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

مثال 9.45

ثابت کرو $\Gamma(n) = 2\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2n-1}dx$

حل

$x = \sqrt{u}$ متبادل کا استعمال کرتے ہوئے ہمیں $dx = \frac{1}{2\sqrt{u}}du$ حاصل ہوتا ہے۔

جب $x = 0$ ہو، ہمیں $u = 0$ حاصل ہوگا۔ جب $x = \infty$ ہو، ہمیں $u = \infty$ حاصل ہوگا۔

$$\therefore 2\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2n-1}dx = 2\int_0^\infty e^{-u}\left(\sqrt{u}\right)^{2n-1}\frac{1}{2\sqrt{u}}du = \int_0^\infty e^{-u}u^{n-1}du = \Gamma(n).$$

مثال 9.46

$\int_0^{\infty} \frac{x^n}{n^x} dx$ کی قیمت معلوم کرو۔ جہاں، n ایک مثبت سالم عدد $n \geq 2$ ہے۔

حل

$n = e^{\log_e n}$ ضابطہ کا استعمال کرکے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^n}{n^x} dx = \int_0^{\infty} n^{-x} x^n dx = \int_0^{\infty} \left(e^{\log n}\right)^{-x} x^n dx = \int_0^{\infty} e^{-x \log n} x^n dx .$$

$u = x \log n$ متبادل کا استعمال کرنے سے $dx = \frac{du}{\log n}$ ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

جب $x = 0$ ہو، ہمیں $u = 0$ حاصل ہوگا۔ جب $x = \infty$ ہو، ہمیں $u = \infty$ حاصل ہوگا۔

$$\therefore I = \int_0^{\infty} e^{-u} \left(\frac{u}{\log n}\right)^n \frac{du}{\log n}$$

$$= \frac{1}{(\log n)^{n+1}} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{(n+1)-1} du = \frac{\Gamma(n+1)}{(\log n)^{n+1}} = \frac{n!}{(\log n)^{n+1}} .$$

مشق 9.7

درج ذیل کی قیمت معلوم کرو۔

1. (i) $\int_0^{\infty} x^5 e^{-3x} dx$ (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\tan x}}{\cos^6 x} dx$

2. اگر $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} x^3 dx = 32$، $\alpha > 0$ ، α معلوم کیجئے۔

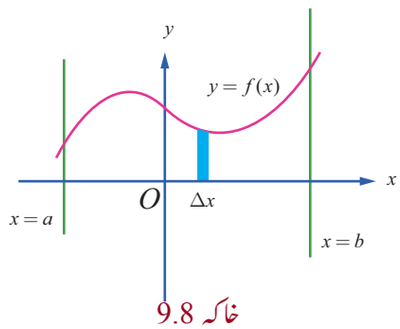
9.8 تکمیل سے گھری مستوی رقبہ کی تشخیص (Evaluation of a Bounded Plane Area by Integration)

اس باب کے ابتدا میں ، ہم پہلے ہی ایک ہندسی نقطہ نظر کے ذریعے معین تکملہ کی تعریف پیش کرچکے ہیں۔ اس نقطہ نظر میں، ہم نے نوٹ کیا ہے کہ جب بھی معین تکملہ کا تکمیل غیر منفی ہوتا ہے تو معین تکملہ ہندسی رقبے کو حاصل کرتا ہے۔موجودہ حصّے میں ، ہم مستوی منحنیوں سے گھرے مستوی خطوط کے رقبوں کا پتہ کرنے اس نقطہ نظر کا استعمال کرتے ہیں۔

9.8.1 ایک منحنی ، خطوط $x = a$ اور $x = b$ اور x – محور سے گھرے ہوئے خطہ کا رقبہ

(Area of the region bounded by a curve, x – axis and the lines $x = a$ and $x = b$)

صورت حال (i)



خاکہ 9.8

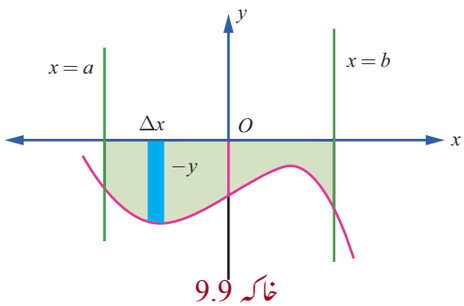
مان لیں کہ $y = f(x)$، $a \leq x \leq b$ ایک مسلسل منحنی کے حصہ کی مساوات ہوں جو x – محور کے اوپر واقع ہے (یعنی، یہ حصہ پہلے ربع یا دوسرے ربع میں واقع ہے) خطوط $x = a$ اور $x = b$ کے درمیان میں ہے۔ خاکہ 9.8 دیکھیں۔ تو منحنی کے حصے کے ہر نقطہ کے لئے $y \geq 0$ ہوگا۔ منحنی، x – محور اور طولی مختص (Ordinates) $x = a$ اور $x = b$ سے گھرے ہوئے خطہ پر غور کریں ۔ اس کو نوٹ کرنا ضروری ہے کہ y اس کی علامت (sign) دئے گئے خطہ میں نہیں بدلتا تو خطہ کا رقبہ A مندرجہ ذیل کے طور پر پایاجاتاہے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 9_App of Integration.indd 122 28-02-2023 15:06:19

y – محور کے مثبت سمت میں مشاہدہ کرتے ہیں جس میں خطہ کو ابتدائی عمودی پتیوں (باریک مستطیل) کے شکل میں چھوٹی چھوٹی پتیوں میں تقسیم کیاجاتا ہے۔ جس کی اونچائی y اور چوڑائی Δx ہے۔ پھر یہ ساری عمودی پتیوں کے رقبہ کاانتہائی حاصل جمع ہی A ہے۔

لہذا، ہمیں $A = \lim_{a\le x\le b} \sum -y\Delta x = -\int_a^b y\,dx = \left|\int_a^b y\,dx\right|$ حاصل ہوتا ہے۔

صورت حال (ii)



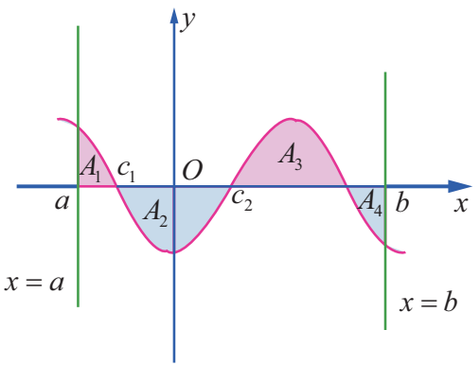
خاکہ 9.9

مان لیں $y = f(x), a \le x \le b$ ایک مسلسل منحنی کے حصہ کی مساوات ہوں جو x - محور کے نیچے واقع ہے (یعنی، یہ حصہ تیسرے ربع یا چوتھے ربع میں واقع ہے) ۔ تو منحنی کے حصے کے ہر نقطہ کے لئے $y \le 0$ ہوگا۔ اس کو نوٹ کرنا ضروری ہے کہ y اس کی علامت (sign) دئے گئے خطہ میں نہیں بدلتا۔ منحنی ،x - محور اور طولی مختص (Ordinates) $x = a$ اور $x = b$ سے گھرے ہوئے خطہ پر غور کریں ۔ خاکہ 9.9 دیکھیں۔ خطہ کا رقبہ A مندرجہ ذیل کے طور پر پایاجاتاہے۔

y – محور کے منفی سمت میں مشاہدہ کرتے ہیں جس میں خطہ کو ابتدائی عمودی پتیوں (باریک مستطیل) کے شکل میں چھوٹی چھوٹی پتیوں میں تقسیم کیاجاتا ہے۔ جس کی اونچائی $|y| = -y$ اور چوڑائی Δx ہے۔ پھر یہ ساری عمودی پتیوں کے رقبہ کا انتہائی حاصل جمع ہی A ہے۔

لہذا، ہمیں $A = \lim_{a\le x\le b} \sum -y\Delta x = -\int_a^b y\,dx = \left|\int_a^b y\,dx\right|$ حاصل ہوتا ہے۔

صورت حال (iii)



خاکہ 9.10

مان لیں $y = f(x), a \le x \le b$ ایک مسلسل منحنی کے حصہ کی مساوات ہوں جو x –محور کے اوپر کے ساتھ نیچے بھی پایاجاتا ہے (یعنی، یہ چاروں ربعوں میں پایاجاتا ہے۔) مستوی XY – میں $y = f(x)$ کی ترسیم کھینچئے۔یہ ترسیم x - محور کے اوپر اور نیچے متبادل ہے اور اسے طولی مختص $x = a$ اور $x = b$ کے درمیان روک دیا گیا ہے۔ وقفہ $[a,b]$ کو ماتحت وقفوں $[a,c_1]$ ، $[c_1,c_2]$، ...، $[c_k,b]$ میں تقسیم کریں۔ ایسا کہ $f(x)$ کی علامت ہر ایک ماتحت وقفوں پر ایک ہی ہو۔ صورت حال (i) اور (ii) کو استعمال کرنے سے ماتحت وقفوں کہ تعلق سے ہم خطوں کے ہندسی رقبوں کو انفرادی طور پر حاصل کرسکتے ہیں۔

لہذا، اس خطے کا ہندسی رقبہ جو $y = f(x)$ کے ترسیم سے،x - محور ، خطوط $x = a$ اور $x = b$ سے گھرا ہوا ہے اور اس کو اس طرح سے $\left|\int_a^{c_1} f(x)dx\right| + \left|\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx\right| + \cdots + \left|\int_{c_k}^{b} f(x)dx\right|$ دیا گیا ہے۔

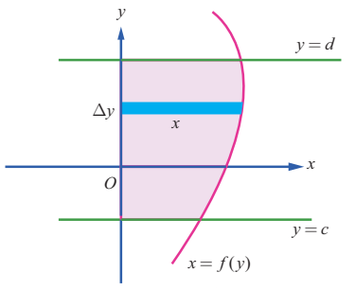
مثال کے طور پر ، خاکہ 9.10 میں سیاہ کردہ خطہ پر غور کریں ۔یہاں A_1 ، A_2 ، A_3 اور A_4 انفرادی حصوں کے ہندسی رقبوں کی نشاندہی کرتا ہے تو کل رقبہ $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \int_a^{c_1} f(x)dx + \left|\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx\right| + \int_{c_2}^{c_3} f(x)dx + \left|\int_{c_3}^{b} f(x)dx\right|$ دیا گیا ہے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 9_App of Integration.indd 123 28-02-2023 15:06:24

9.8.2 ایک منحنی ، خطوط y = c اور y = d اور y– محور سے گھرے ہوئے خطہ کا رقبہ

(Area of the region bounded by a curve, y– axis and the lines y = c and y = d)

صورت حال (iv)



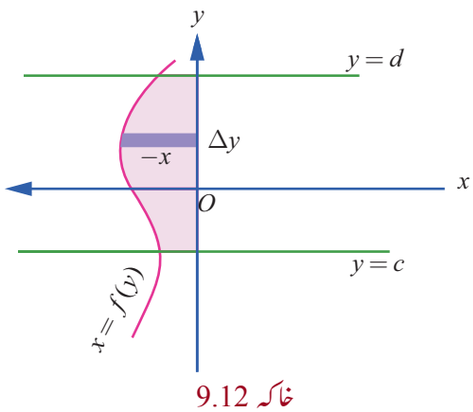
خاکہ 9.11

مان لیں $x = f(y)$، $c \le y \le d$ ایک مسلسل منحنی کے حصے کی مساوات ہوں جو y – محور کے دائیں طرف واقع ہے(یعنی، یہ حصہ پہلے ربع یا چوتھے ربع میں واقع ہے) تو منحنی کے حصّے کے ہر نقطہ کے لئے $x \ge 0$ ہوگا۔ اس کو نوٹ کرنا ضروری ہے کہ x اس کی علامت (sign) دئے گئے خطہ میں نہیں بدلتا۔

منحنی ،y – محور اور خطوط $y = c$ اور $y = d$ سے گھرے ہوئے خطہ پر غور کریں ہیں ۔ اس خطے کا خاکہ 9.11 کے مطابق بتایا گیا ہے۔ خطہ کا رقبہ A مندرجہ ذیل کے طور پر معلوم کرسکتے ہیں۔

x – محور کے مثبت سمت میں مشاہدہ کرتے ہیں جس میں خطہ کو باریک افقی پتیوں (باریک مستطیل) کے شکل میں چھوٹی چھوٹی پتیوں میں کاٹا جاتا ہے۔ جس کی لمبائی x اور چوڑائی Δy ہے۔ پھر یہ ساری افقی پتیوں کے رقبے کا انتہائی حاصل جمع ہی A ہے۔ لہذا، ہمیں $A = \lim \sum_{c \le y \le d} x\Delta y = \int_c^d x\,dy$ حاصل ہوتا ہے۔

صورت حال (v)



خاکہ 9.12

مان لیں کہ $x = f(y)$، $c \le y \le d$ ایک مسلسل منحنی کے حصے کی مساوات ہوں جو y – محور کے بائیں طرف واقع ہے(یعنی، یہ حصہ دوسرا یا تیسرا ربع میں واقع ہے) تو منحنی کے حصے کے ہر نقطہ کے لئے $x \le 0$ ہوگا۔ اس کو نوٹ کرنا ضروری ہے کہ x اس کی علامت (sign) دئے گئے خطہ میں نہیں بدلتا۔

منحنی ،y – محور اور $y = c$ اور $y = d$ خطوط سے گھرے ہوئے خطہ پر غور کریں۔ اس خطے کا خاکہ 9.12 کے مطابق بتایا گیا ہے۔ خطہ کا رقبہ A مندرجہ ذیل کے طور پر معلوم کرسکتے ہیں۔

x – محور کے مثبت سمت میں مشاہدہ کرتے ہیں جس میں خطہ کو باریک افقی پتیوں (باریک مستطیل) کے شکل میں چھوٹی چھوٹی پتیوں میں تقسیم جاتا ہے۔ جس کی لمبائی $-x = |x|$ اور چوڑائی Δy ہے۔ پھر یہ ساری افقی پتیوں کے رقبہ کا انتہائی حاصل جمع ہی A ہے۔

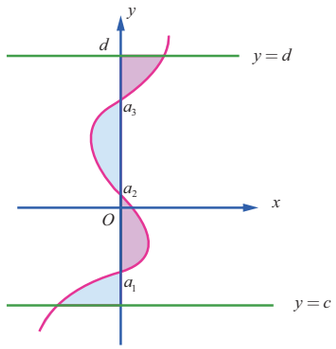
لہذا، ہمیں $A = \lim \sum_{c \le y \le d} (-x)\Delta y = -\int_c^d x\,dy = \left|\int_c^d x\,dy\right|$ حاصل ہوتا ہے۔

صورت حال (vi)

مان لیں $x = f(y)$، $c \le y \le d$ ایک مسلسل منحنی کے حصے کی مساوات ہوں جو y – محور کے دائیں طرف کے ساتھ بائیں جانب بھی پایا جاتا ہے (یعنی، یہ چاروں ربعوں میں پایاجاتا ہے) ۔ مستوی XY – میں $x = f(y)$ کی ترسیم کھینچئے۔ یہ ترسیم y – محور کے دائیں اور بائیں طرف متبادل ہے اور اسے خطوط $y = c$ اور $y = d$ کے درمیان روک دیا گیا ہے۔ وقفہ $[c, d]$ کو ماتحت وقفوں $[c, a_1]$ ، $[a_1, a_2]$ ، ...، $[a_k, d]$ میں تقسیم کریں۔ جیسا کہ $f(y)$ کی علامت ہر ایک ماتحت وقفوں پر ایک ہی ہو۔ صورت حال (iii) اور (vi) کو استعمال کرنے سے ماتحت وقفوں

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 9_App of Integration.indd 124 28-02-2023 15:06:27

کہ متعلق سے ہم خطوں کے ہندسی رقبوں کو انفرادی طور پر حاصل کرسکتے ہیں۔



خاکہ 9.13

لہذا، اس خطے کا ہندسی رقبہ A جو $x = f(y)$ کی ترسیم سے، y - محور اور خطوط $y = c$ اور $y = d$ سے گھرا ہوا ہے۔اور اس کو اس طرح سے دیا گیا ہے۔

$$A = \left|\int_{c}^{a_1} f(y)dy\right| + \left|\int_{a_1}^{a_2} f(y)dy\right| + \cdots + \left|\int_{a_k}^{d} f(y)dy\right|$$

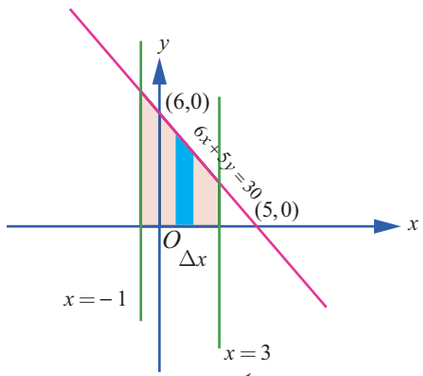
مثال کے طور پر ، خاکہ 9.13 میں سیاہ کردہ خطہ پر غور کریں ۔یہاں B_1 ، B_2 ، B_3 اور B_4 انفرادی حصوں کے ہندسی رقبوں کی نشاندہی کرتا ہے تو کل رقبہ B جو $x = f(y)$ منحنی سے، y - محور اور خطوط $y = c$ اور $y = d$ سے گھرا ہوا ہے۔اور اس کو اس طرح سے دیا گیا ہے۔

$$\begin{aligned} B &= B_1 + B_2 + B_3 + B_4 \\ &= \left|\int_{c}^{a_1} f(y)dy\right| + \int_{a_1}^{a_2} f(y)dy + \left|\int_{a_2}^{a_3} f(y)dy\right| + \int_{a_3}^{d} f(y)dy \end{aligned}$$

مثال 9.47

خط $6x + 5y = 30$ ، x - محور اور خطوط $x = -1$ اور $x = 3$ سے گھرے ہوئے خطہ کا رقبہ معلوم کرو۔

حل



خاکہ 9.14

اس خطہ کا خاکہ 9.14 میں دیا گیا ہے۔ یہ x - محور کے اوپر واقع ہے۔ لہذا، مطلوبہ رقبہ دیا گیا ہے۔

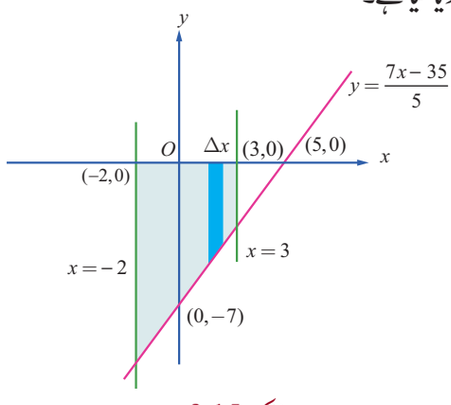
$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{3} y\,dx = \int_{-1}^{3}\left(\frac{30-6x}{5}\right)dx = \left(\frac{30x-3x^2}{5}\right)_{-1}^{3} \\ &= \left(\frac{90-27}{5}\right) - \left(\frac{-30-3}{5}\right) = \frac{96}{5}. \end{aligned}$$

مثال 9.48

خط $7x - 5y = 35$ ، x - محور اور خطوط $x = -2$ اور $x = 3$ سے گھرے ہوئے خطہ کا رقبہ معلوم کرو۔

حل

اس خطہ کا خاکہ 9.15 میں دیا گیا ہے۔ یہ x - محور کے اوپر واقع ہے۔ لہذا، مطلوبہ رقبہ دیا گیا ہے۔



خاکہ 9.15

$$\begin{aligned} A &= \left|\int_{-2}^{3} y\,dx\right| = \left|\int_{-2}^{3}\left(\frac{7x-35}{5}\right)dx\right| \\ &= \frac{1}{5}\left|\left(7\left(\frac{x^2}{2}\right) - 35x\right)_{-2}^{3}\right| \\ &= \frac{1}{5}\left|\left(\left(\frac{63}{2}\right) - 105\right) - (84)\right| = \frac{63}{2}. \end{aligned}$$

مثال 9.49

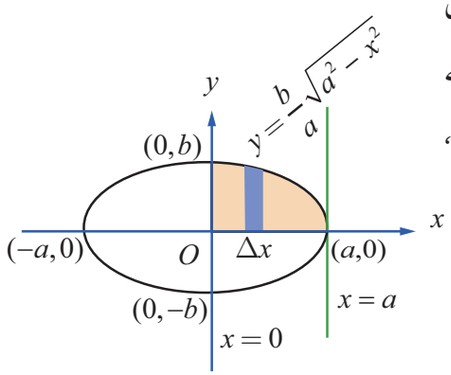
بیضوی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ سے گھرے ہوئے خطے کا رقبہ معلوم کرو۔

حل

یہ بیضوی دونوں بڑے اور چھوٹے محور سے متشاکل ہے۔ اس کا خاکہ 9.16 میں دیا گیا ہے۔ لہذا، y – محور کی مثبت سمت کو دیکھتے ہوئے ، مطلوبہ رقبہ اس خطے کے رقبے سے چار گنا ہوتا ہے۔ جو پہلے ربع کے حصے میں بیضوی کے حصے سے جڑا ہوا ہے۔،

$\left(y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}, 0<x<a\right)$، x – محور، $x=0$ اور $x=a$ ۔

لہذا، عمودی پتیاں لینے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔



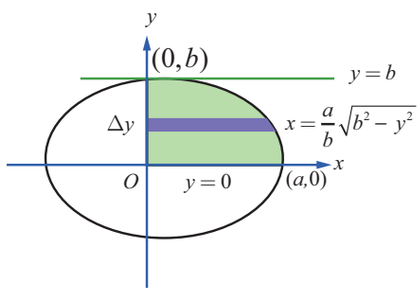
خاکہ 9.16

$$A = 4\int_0^a y\,dx = 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$= \frac{4b}{a}\left[\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^a = \frac{4b}{a}\times\frac{\pi a^2}{4} = \pi ab$$

غور کیجئے (Note)

x – محور کی مثبت سمت کو دیکھتے ہوئے مطلوبہ رقبہ اس خطے کا رقبہ سے چار گنا ہوتا ہے۔ جو پہلے ربع $\left(x=\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}, 0<y<b\right)$، y – محور، $y=0$ اور $y=b$ کے حصے میں بیضوی کے حصے سے جڑا ہوا ہے۔ لہذا، افقی پتیاں(خاکہ 9.17 دیکھیں) لینے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے



خاکہ 9.17

$$A = \int_0^a x\,dy = 4\int_0^b \frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}\,dy$$

$$= \frac{4a}{b}\left[\frac{y\sqrt{b^2-y^2}}{2}+\frac{b^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{y}{b}\right)\right]_0^b = \frac{4a}{b}\times\frac{\pi b^2}{4} = \pi ab$$

غور کیجئے (Note)

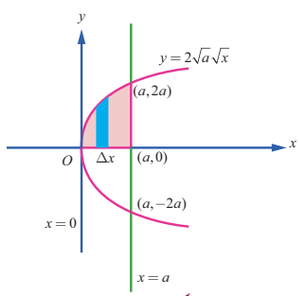
مندرجہ بالا نتائج میں $b=a$ درج کرنے سے ہمیں معلوم ہوگا کہ دائرہ $x^2+y^2=a^2$ سے گھرے ہوئے خطہ کا رقبہ πa^2 ہے۔

مثال 9.50

مکافی $y^2=4ax$ اور اس کا وتر خاص (Latus rectum) کے درمیان گھرے ہوئے خطہ کا رقبہ معلوم کرو۔

حل

وتر خاص کی مساوات $x=a$ ہے۔ یہ مکافی کو نقاط $L(a,2a)$ اور $L_1(a,-2a)$ میں کاٹتا ہے ۔ اس مطلوبہ رقبہ خاکہ 9.18 میں دیا گیا ہے۔ تشاکل کے ذریعے سے مطلوبہ رقبہ مکافی $y=2\sqrt{a}\sqrt{x}$ ، x – محور، $x=0$ اور $x=a$ ، کے حصہ سے گھرے ہوئے رقبہ کا دگنا A ہوگا۔



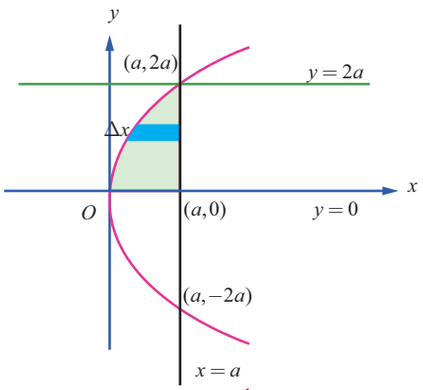
خاکہ 9.18

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 9_App of Integration.indd 126 28-02-2023 15:06:39

لہذا، عمودی پتیاں لینے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$A = 2\int_0^a y\,dx = 2\int_0^a 2\sqrt{a}\sqrt{x}\,dx = 4\sqrt{a}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^a$$

$$= 4\sqrt{a}\times\frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}} = \frac{8a^2}{3}$$



خاکہ 9.19

غور کیجئے (Note)

x – محور کی مثبت سمت کو دیکھتے ہوئے اور افقی پتیاں بنانے سے (خاکہ 9.19 دیکھیں) ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$A = 2\int_0^{2a}(a-x)dy = 2\int_0^{2a}\left(a-\frac{y^2}{4a}\right)dy$$

$$= 2\left(ay-\frac{y^3}{12a}\right)_0^{2a} = 2\left(2a^2-\frac{8a^3}{12a}\right) = \frac{8a^2}{3}.$$

غور کیجئے (Note)

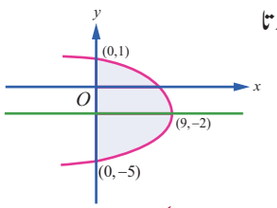
یہ دیکھنا کافی دلچسپ ہے کہ مذکورہ بالا رقبہ (وتر خاص) اونچائی کے دوتہائی حصّے سے برابر ہے(ماسکہ اور راس کے درمیان کا فاصلہ)۔ اس سے مکافی قوسوں کے رقبوں کے لئے ارشمیدس کے ضابطے کی تصدیق ہوتی ہے۔ جس میں کہا گیا ہے کہ مکافی قوس کے اندر کا رقبہ مستطیل رقبہ کا دوتہائی ہے۔ جس میں قوس کی قاعدہ کو لمبائی اور قوس کی اونچائی کو چوڑائی کے طور پر ظاہر کرتے ہیں۔ قاعدہ(وترخاص) کے ساتھ مثلث کا چارتہائی رقبہ اور اونچائی دونوں مساوی ہیں(ماسکہ اور ر اس کے درمیان کا فاصلہ)۔

مثال 9.51

مکافی $x = 5-4y-y^2$ اور y – محور سے گھرے ہوئے خطہ کا رقبہ معلوم کرو۔

حل

مکافی کی مساوات $(y+2)^2 = -(x-9)$ ہے۔ یہ مکافی y – محور پر، $(0,-5)$ اور $(0,1)$ سے گزرتا ہے۔ماسکہ $(9,-2)$ پر اور مکافی کا محور $y=-2$ ہے۔ مطلوبہ رقبہ خاکہ 9.20 سے ظاہر کیا گیا ہے۔



خاکہ 9.20

x – محور کی مثبت سمت کو دیکھتے ہوئے اور افقی پتیاں بنانے سے، مطلوبہ رقبہ A دیا گیا ہے۔

$$A = \int_{-5}^{1} x\,dy = \int_{-5}^{1}(5-4y-y^2)dy = \left[5y-2y^2-\frac{y^3}{3}\right]_{-5}^{1} = \frac{8}{3}-\left(-\frac{100}{3}\right) = 36.$$

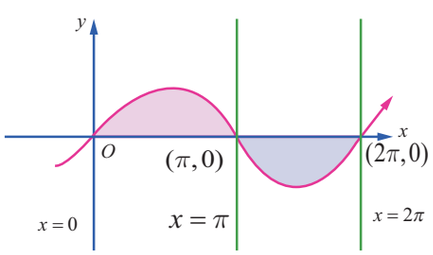
غور کیجئے (Note)

پچھلے مسئلہ کی طرح ہم پھر سے ارشمیدس کے ضابطے کی تصدیق کرتے ہیں کہ مکافی قوس کا رقبہ اونچائی کی قاعدہ کے دوتہائی حصّے کے برابر ہے۔

مثال 9.52

سائن منحنی $y = \sin x$، خطوط $x=0$ اور $x=2\pi$ اور x – محور سے گھرے ہوئے خطہ کا رقبہ معلوم کرو۔

حل



خاکہ 9.21

مطلوبہ رقبہ خاکہ 9.21 میں دیا گیا ہے۔ خطہ کا ایک حصّہ $x=0$ اور $x=\pi$ کے درمیان x – محور کے اوپر پایا جاتا ہے اور دوسرا حصّہ $x=\pi$ اور $x=2\pi$ کے درمیان x – محور کے نیچے کے حصّہ میں پایا جاتا ہے۔ تو مطلوبہ رقبہ دیا گیا ہے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 9_App of Integration.indd 127 28-02-2023 15:06:44

$$A = \int_0^{\pi} y\,dx + \left|\int_{\pi}^{2\pi} y\,dx\right| = \int_0^{\pi} \sin x\,dx + \left|\int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,dx\right| = \left[-\cos x\right]_0^{\pi} + \left|\left[-\cos x\right]_{\pi}^{2\pi}\right|$$

$$= \left[-\cos\pi + \cos 0\right] + \left|\left[-\cos 2\pi + \cos\pi\right]\right| = 2 + \left|-2\right| = 4\,.$$

غور کیجئے (Note)

اگر ہم معین تکملہ $\int_0^{2\pi} \sin x\,dx$ کی قیمت معلوم کریں تو ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = \left[-\cos x\right]_0^{2\pi} = \left[-\cos 2\pi\right] - \left[-\cos 0\right] = 0\,.$$

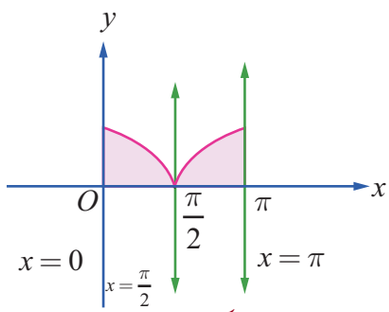
تو $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$ اس خطہ کی نمائندگی نہیں کرتا جو منحنی $y = \sin x$ ، x - محور ، خطوط $x = 0$ اور $x = 2\pi$ سے گھرا ہوا ہے۔

مثال 9.53

منحنی $y = |\cos x|$ ، خطوط $x = 0$ اور $x = \pi$ اور x - محور سے گھرے ہوئے خطہ کا رقبہ معلوم کرو۔

حل

دیا گیا منحنی خط $y = \begin{cases} \cos x, 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ -\cos x, \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}$ ہے۔



خاکہ 9.22

یہ x - محور کے اوپر پایا جاتا ہے۔ مطلوبہ رقبہ خاکہ 9.22 سے ظاہر کیا گیا ہے۔ تو مطلوبہ رقبہ دیا گیا ہے۔

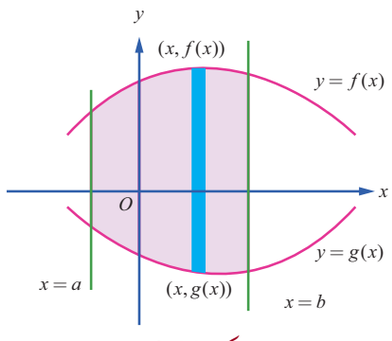
$$A = \int_0^{\pi} y\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos x)\,dx = \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= \left[1 - 0\right] - \left[0 - 1\right] = 2\,.$$

9.8.3 دو منحنی کے درمیان گھرے ہوئے خطہ کا رقبہ (Area of the region bounded between two curves)

صورت حال (i)

فرض کرو کہ XOY - مستوی (Plane) میں $y = f(x)$ اور $y = g(x)$ دو منحنی کے مساوات ہیں۔اس طرح سے کہ تمام $x \in [a,b]$ کے لئے $f(x) \ge g(x)$ ہے۔ ہم دو منحنی کے درمیان گھرے ہوئے خطہ کا رقبہ A معلوم کرنا چاہتے ہیں جس کا طولی مختص $x = a$ اور $x = b$ ہے۔



خاکہ 9.23

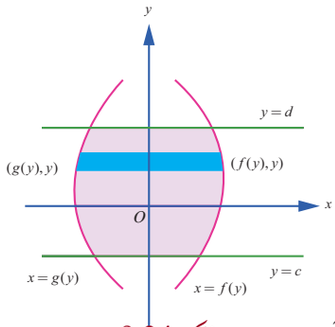
مطلوبہ رقبہ خاکہ 9.23 سے ظاہر کیا گیا ہے۔ A معلوم کرنے کے لئے ہم اس خطے کو چوڑائی Δx اور اونچائی $f(x) - g(x)$ کی پتلی عمودی پٹیوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ یہ ضروری ہے کہ تمام $x \in [a,b]$ کے لئے $f(x) - g(x) \ge 0$ ہے۔پہلے کی طرح عمودی پٹیوں کے رقبوں کا انتہائی حاصل جمع ہی مطلوبہ رقبہ ہے۔ لہذا، ہمیں $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$ حاصل ہوتا ہے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 9_App of Integration.indd 128 28-02-2023 15:06:51

غور کیجئے (Note)

y – محور کے مثبت سمت کو دیکھتے ہوئے منحنی $y=f(x)$ کو اوپری منحنی (U) اور منحنی $y=g(x)$ کو نچلی منحنی (L) کے طور پر کہا جاتا ہے۔ اس طرح ہمیں $A=\int_a^b [y_U - y_L]dx$ حاصل ہوتا ہے۔

صورت حال (ii)



خاکہ 9.24

فرض کرو کہ XOY – مستوی(Plane) میں $x=f(y)$ اور $x=g(y)$ دو منحنی کے مساوات ہیں۔اس طرح سے کہ تمام $y\in[c,d]$ کے لئے $f(y)\geq g(y)$ ہے۔ ہم دو منحنی اور خطوط $y=c$ اور $y=d$ کے درمیان گھرے ہوئے خطہ کا رقبہ A معلوم کرنا چاہتے ہیں ۔

مطلوبہ رقبہ خاکہ 9.24 سے ظاہر کیا گیا ہے۔ A معلوم کرنے کے لئے x – محور کے مثبت سمت کو دیکھتے ہیں اور اس خطے کی چوڑائی Δy اور اونچائی $f(y)-g(y)$ کو افقی پتیوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ یہ ضروری ہے کہ تمام $y\in[c,d]$ کے لئے $f(y)-g(y)\geq 0$ ہے۔پہلے کی طرح افقی پتیوں کے رقبوں کا انتہائی حاصل جمع ہی مطلوبہ رقبہ ہے۔ لہذا، ہمیں $A=\int_c^d [f(y)-g(y)]dy$ حاصل ہوتا ہے۔

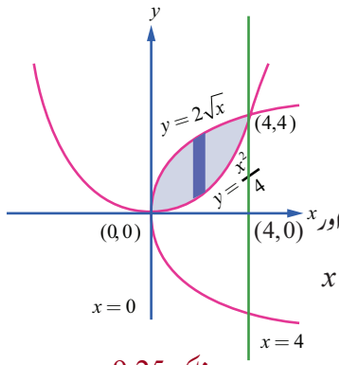
غور کیجئے (Note)

x – محور کی مثبت سمت کو دیکھتے ہوئے منحنی $x=f(y)$ کو دائیں منحنی (R) اور منحنی $y=g(x)$ کو بائیں منحنی (L) کے طور پر کہا جاتا ہے۔ اس طرح ہمیں $A=\int_a^b [x_R - x_L]dy$ حاصل ہوتا ہے۔

مثال 9.54

دو مکافیوں $y^2=4x$ اور $x^2=4y$ کے درمیان گھرے ہوئے خطے کا رقبہ معلوم کرو۔

حل



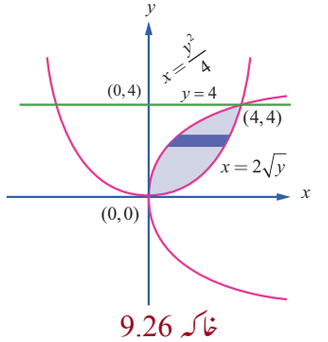
خاکہ 9.25

پہلے ہم دو مکافیوں کے تقاطع کے نقاط حاصل کرتے ہیں۔ اس کے لئے ہم بیک وقت $y^2=4x$ اور $x^4=64x$ حل کرتے ہیں: ان کے درمیان y کو نکالنے سے ہمیں $x^4=64x$ اور $x=0$ اور $x=4$ حاصل ہوتا ہے ۔ پھر تقاطع کے نقاط $(0,0)$ اور $(4,4)$ ہیں۔ مطلوبہ خطہ کا خاکہ 9.25 میں دیا گیا ہے۔

y – محور کی سمت کو دیکھتے ہوئے ، بالائی حد کی مساوات $y=2\sqrt{x}$ ، $0\leq x\leq 4$ کے لئے اور نچلی حد کی مساوات $y=\frac{x^2}{4}$ ، $0\leq x\leq 4$ کے لئے تو مطلوبہ رقبہ Δ ہے۔

$$A=\int_0^4 (y_U - Y_L)\,dx=\int_0^4\left(2\sqrt{x}-\frac{x^2}{4}\right)dx=\left[2\left(\frac{2x^{3/2}}{3}\right)-\frac{x^3}{12}\right]_0^4=\left[2\left(\frac{2\times 8}{3}\right)-\frac{64}{12}\right]-0=\frac{16}{3}$$

غور کیجئے (Note)



خاکہ 9.26

x – محور کے مثبت سمت کو دیکھتے ہوئے دائیں حدود کی منحنی $x^2=4y$ ہے اور بائیں حدود کی منحنی $y^2=4x$ ہے۔ خاکہ 9.26 دیکھیں۔ دائیں حد کی مساوات $x=2\sqrt{y}$ ، $0\leq y\leq 4$ کے لئے ہے اور بائیں حد کی مساوات $x=\frac{x^2}{4}$ ، $0\leq y\leq 4$ کے لئے ہے ، تو مطلوبہ رقبہ A ہے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 9_App of Integration.indd 129
28-02-2023 15:07:02

$$A=\int_0^4 (x_R-x_L)\,dx=\int_0^4\left(2\sqrt{y}-\frac{y^2}{4}\right)dy=\left[2\left(\frac{2y^{3/2}}{3}\right)-\frac{y^3}{12}\right]_0^4=\left[2\left(\frac{2\times 8}{3}\right)-\frac{64}{12}\right]-0=\frac{16}{3}$$

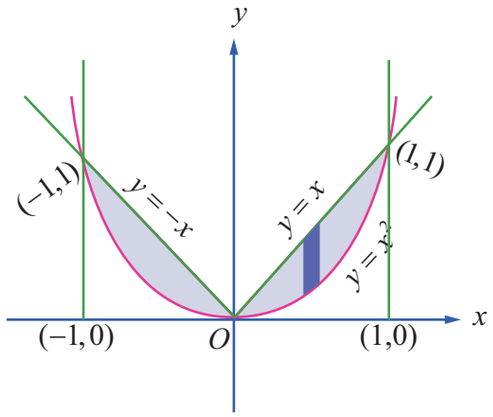
مثال 9.55

مکافی $y=x^2$ اور منحنی $y=|x|$ کے درمیان گھرے ہوئے خطہ کا رقبہ معلوم کرو۔

حل

دونوں منحنی y – محور کے متعلق متناکل ہیں۔

منحنی $y=|x|$ ہے۔ $y=\begin{cases} x & \text{اگر } x\geq 0 \\ -x & \text{اگر } x\leq 0 \end{cases}$



خاکہ 9.27

یہ مکافی $y=x^2$ کو نقاط $(1,1)$ اور $y=x$ پر قطع کرتا ہے۔

منحنیوں سے گھرے ہوئے خطہ کا رقبہ خاکہ 9.27 میں دیا گیا ہے۔ یہ پہلی ربع کے ساتھ دوسری ربع میں بھی پایا جاتا ہے۔ متناکل سے، مطلوبہ رقبہ پہلے ربع کا دگنا ہے۔

پہلے ربع میں، $y=x$، $0\leq x\leq 1$ بالائی منحنی ہے اور پچھلا منحنی $y=x^2$، $0\leq x\leq 1$ ہے۔ لہذا، مطلوبہ رقبہ دیا گیا ہے۔

$$A = 2\int_0^1 [y_U-y_L]\,dx=2\int_0^1 [x-x^2]\,dx$$

$$= 2\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}.$$

مثال 9.56

خطوط $y=\cos x$، $y=\sin x$، $x=\frac{\pi}{4}$ اور $x=\frac{5\pi}{4}$ سے گھرے ہوئے خطہ کا رقبہ معلوم کرو۔

حل

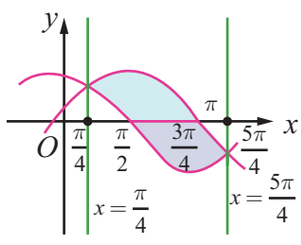
خاکہ 9.28 میں خطہ کا نقشہ دیا گیا ہے۔ خطہ کا بالائی حد $y=\sin x$، $\frac{\pi}{4}\leq x\leq\frac{5\pi}{4}$ کے لئے اور نچلا حد $y=\cos x$، $\frac{\pi}{4}\leq x\leq\frac{5\pi}{4}$ کے لئے ہے تو مطلوبہ رقبہ دیا گیا ہے۔

$$A = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (y_U-y_L)\,dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(\sin x-\cos x)dx=\left[-\cos x-\sin x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}$$

$$= \left(-\sin\frac{5\pi}{4}-\cos\frac{5\pi}{4}\right)-\left(-\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \left(-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)-\left(-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$



خاکہ 9.28

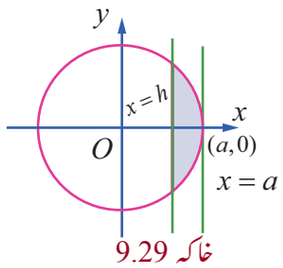
12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 9_App of Integration.indd 130 28-02-2023 15:07:08

مثال 9.57

دائرہ $x^2+y^2=a^2$ سے منسلک خطے کو $x=h$ خط کے ذریعے دو حصّوں میں تقسیم کیا جاتا ہے تو چھوٹے حصّے کا رقبہ معلوم کرو۔

حل

چھوٹے حصّے کا خاکہ 9.29 میں دیا گیا ہے۔یہاں $0<h<a$ ہے۔ x - محور کے متعلق تکامل کے ذریعے چھوٹے حصّہ کا رقبہ بذریعہ دیا جاتا ہے۔



خاکہ 9.29

$$A = 2\int_h^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = 2\left[\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right]_h^a$$

$$= 2\left[0+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}(1)\right]-2\left[\frac{h\sqrt{a^2-h^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{h}{a}\right)\right]$$

$$= a^2\left(\frac{\pi}{2}\right)-h\sqrt{a^2-h^2}-a^2\sin^{-1}\left(\frac{h}{a}\right)$$

$$= a^2\left[\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}\left(\frac{h}{a}\right)\right]-h\sqrt{a^2-h^2}$$

$$= a^2\cos^{-1}\left(\frac{h}{a}\right)-h\sqrt{a^2-h^2}$$

مثال 9.58

مکافی $y^2=4x$ ، خط $x+y=3$ اور y - محور سے گھرے ہوئے پہلے ربع کے خطہ کا رقبہ معلوم کرو۔

حل

پہلے ہم مکافی y^2-4x اور $x+y=3$ کا نقطۂ تقاطع کو معلوم کرتے ہیں۔

$$x+y=3 \Rightarrow y=3-x.$$

$$\therefore y^2=4x \Rightarrow (3-x)^2=4x$$

$$\Rightarrow x^2-10x+9=0$$

$$\Rightarrow x=1, x=9$$

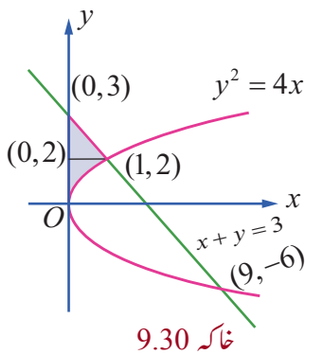
$x=1$ کو $x+y=3$ میں $\Leftarrow$ $y=2$ اور $x=9$ کو $x+y=3$ میں $\Leftarrow$ $y=-6$

تقاطع نقاط $(1,2)$ اور $(9,-6)$ ہیں

خط $x+y=3$ ، y - محور پر $(0,3)$ نقطہ پر ملتی ہے۔

مطلوبہ رقبہ خاکہ 9.30 میں دیا گیا ہے۔

y - محور کے سمت کو دیکھتے ہوئے دائیں حد کی منحنی پر دیا گیا ہے۔



خاکہ 9.30

$$x = \begin{cases} \frac{y^2}{4}, & 0\le y\le 2 \\ 3-y, & 2\le y\le 3 \end{cases}$$

$$\therefore A = \int_0^2 x\,dy+\int_2^3 x\,dy = \int_0^2 \frac{y^2}{4}\,dy+\int_2^3 (3-y)\,dy$$

$$= \left(\frac{y^3}{12}\right)_0^2+\left(3y-\frac{y^2}{2}\right)_2^3 = \left(\frac{8}{12}-0\right)+\left(9-\frac{9}{2}\right)-\left(6-\frac{4}{2}\right)=\frac{7}{6}$$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 9_App of Integration.indd 131 28-02-2023 15:07:16

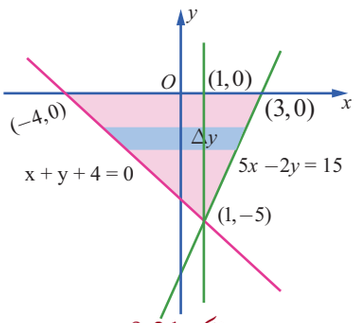
مثال 9.59

خطوط $5x-2y=15$ ، $x+y+4=0$ اور x - محور سے گھرے ہوئے خطہ کا رقبہ تکمیل کے ذریعے معلوم کرو۔

حل

خطوط $5x-2y=15$ ، $x+y+4=0$ نقطہ $(1,-5)$ میں قطع کرتے ہیں۔ خط $5x-2y=15$ ، x - محور میں نقطہ $(3,0)$ پر ملتا ہے۔ خط $x+y+4=0$ ، x - محور میں نقطہ $(-4,0)$ پر ملتا ہے۔ مطلوبہ سیاہ کردہ رقبہ خاکہ 13.9 میں دیا گیا ہے۔ یہ x - محور کے نیچے ہے۔ عمودی پٹیوں یا افقی پٹیوں کے ذریعے اس کا حساب لگایا جاسکتا ہے۔

جب ہم محوری پٹیوں سے حساب کرتے ہیں اس خطے کو $x=1$ کے ذریعے دو ذیلی خطے میں تقسیم ہوگا۔ تو ہمیں حاصل ہوگا۔



خاکہ 9.31

$$
\begin{aligned}
A &= \left|\int_{-4}^{1} y\,dx\right| + \left|\int_{1}^{3} y\,dx\right| \\
&= \left|\int_{-4}^{1} (-4-x)\,dx\right| + \left|\int_{1}^{3} \left(\frac{5x-15}{2}\right) dx\right| \\
&= \left|\left(-4x-\frac{x^2}{2}\right)_{-4}^{1}\right| + \left|\left(\frac{5x^2}{4}-\frac{15x}{2}\right)_{1}^{3}\right| \\
&= \left|\left(-\frac{9}{2}\right)-(8)\right| + \left|\left(-\frac{45}{4}\right)-\left(-\frac{25}{4}\right)\right| \\
&= \frac{25}{2}+5 \\
&= \frac{35}{2}
\end{aligned}
$$

جب ہم افقی پٹیوں سے حساب کرتے ہیں، اس خطے کو تقسیمِ ثانی کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔ اس صورت میں، یہ رقبہ خط $5x-2y=15$ کے دائیں طرف اور خط $x+y+4=0$ کے بائیں طرف سے گھرا ہے۔ تو ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-5}^{0} [x_R - x_L]\,dy = \int_{-5}^{0} \left[\frac{15+2y}{5} - (-4-y)\right] dy \\
&= \int_{-5}^{0} \left[7+\frac{7y}{5}\right] dy = \left[7y+\frac{7y^2}{10}\right]_{-5}^{0} \\
&= 0-\left[-35+\frac{35}{2}\right] = \frac{35}{2}
\end{aligned}
$$

■

غور کیجئے (Note)

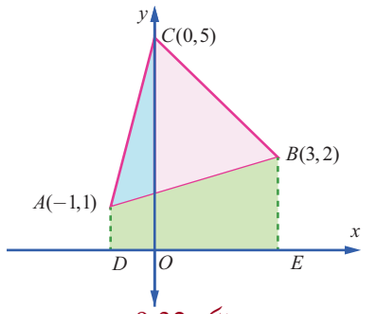
یہ خط مثلث کی شکل کا ہے جس کا قاعدہ '7' اکائیاں اور اونچائی '5' اکائیاں ہے۔ لہٰذا، اس کا رقبہ بغیر تکملہ کے $\frac{35}{2}$ ہے۔

مثال 9.60

تکمیل کا استعمال کرکے ایک مثلث CBA سے گھرے ہوئے خطہ کا رقبہ معلوم کرو۔ جس کی راسیں A، Bاور C بالترتیب $(-1,1)$ ، $(3,2)$ اور $(0,5)$ ہیں۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 9_App of Integration.indd 132 28-02-2023 15:07:22

حل



خاکہ 9.32

خاکہ 9.32 دیکھیں۔

AB کی مساوات $\frac{y-1}{2-1}=\frac{x+1}{3+1}$ (یا) $y=\frac{1}{4}(x+5)$ ہے۔

BC کی مساوات $\frac{y-5}{2-5}=\frac{x-0}{3-0}$ (یا) $y=-x+5$ ہے۔

AC کی مساوات $\frac{y-1}{5-1}=\frac{x+1}{0+1}$ (یا) $y=4x+5$ ہے۔

$\therefore$ ΔABC کا رقبہ = $DACO$ کا رقبہ + $OCBE$ کا رقبہ − $DABE$ کا رقبہ

$$= \int_{-1}^{0}(4x+5)\,dx+\int_{0}^{3}(-x+5)\,dx-\frac{1}{4}\int_{-1}^{3}(x+5)\,dx$$

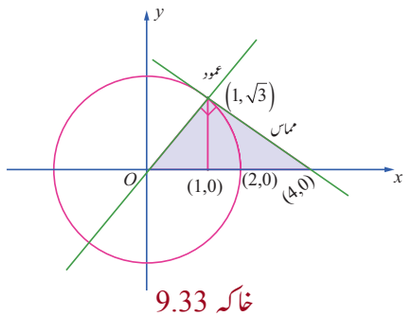
$$= \left[\frac{4x^2}{2}+5x\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{x^2}{2}+5x\right]_{0}^{3}-\frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2}+5x\right]_{-1}^{3}$$

$$= 0-(+2-5)+\left(-\frac{9}{2}+15\right)-0-\frac{1}{4}\left[\frac{9}{2}+15\right]+\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}-5\right]=\frac{15}{2}$$

مثال 9.61

تکمیل کا استعمال کرکے ، دائرہ $x^2+y^2=4$ کا نقطہ $\left(1,\sqrt{3}\right)$ میں مماس اور عمود اور x − محور سے گھرے ہوئے خطہ کا رقبہ معلوم کرو۔

حل



خاکہ 9.33

ہمیں یہ یاد ہے کہ نقطہ (x_1,y_1) میں دائرہ $x^2+y^2=a^2$ کے مماس کی مساوات $xx_1+yy_1=a^2$ ہے تو نقطہ $\left(1,\sqrt{3}\right)$ میں دائرہ $x^2+y^2=4$ کے مماس کی مساوات $x+y\sqrt{3}=4$ ہے۔ یعنی، $y=-\frac{1}{\sqrt{3}}(x-4)$ ، مماس x − محور میں نقطہ $(4,0)$ پر ملتا ہے۔ مماس کا میلان $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ ہے، تو عمود کا میلان $\sqrt{3}$ ہے اور لہذا، عمود کی مساوات $y-\sqrt{3}=\sqrt{3}(x-1)$ ہے؛ یعنی، $y=\sqrt{3}x$ اور یہ مبدا سے گزرتا ہے۔ مطلوبہ رقبہ جڑے ہوئے شکل میں سیاہ کردہ ہے اس کو دو طریقوں سے معلوم کرسکتے ہیں۔

طریقہ 1

y − محور کے مثبت سمت کو دیکھتےہوئے ، مطلوبہ رقبہ x − محور ، $y=\sqrt{3}x$ اور $x+y\sqrt{3}=4$ سے گھر ہوا رقبہ ہے۔ لہذا، اس کو $\int_a^b y\,dx$ کا ضابطہ استعمال کرکے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اس کے لئے ہمیں خطے کو تحتی خطوں میں تقسیم کرنا ہوگا، ایک تحتی خطہ جو x − محور ، عمود $y=\sqrt{3}x$ اور $x=1$ خط گھرا ہوا ہے، دوسرا تحتی خطہ جو x − محور ، مماس $x+y\sqrt{3}=4$ اور خط $x=1$ سے گھرا ہوا ہے۔

$$\therefore \text{ مطلوبہ رقبہ } = \int_0^1 y\,dx+\int_1^4 y\,dx=\int_0^1\sqrt{3}x\,dx+\int_1^4\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}(x-4)\right]dx$$

$$= \left[\sqrt{3}\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{x^2}{2}-4x\right)\right]_1^4 = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{8}{\sqrt{3}}-\frac{7}{2\sqrt{3}}=2\sqrt{3}\,.$$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 9_App of Integration.indd 133 28-02-2023 15:07:30

طریقہ 2

x - محور کے سمت کو دیکھتے ہوئے، مطلوبہ رقبہ، $y=\sqrt{3}x$ اور $x+y\sqrt{3}=4$، $y=0$ اور $y=\sqrt{3}$ کے درمیان گھرے ہوئے خطے کا رقبہ ہے۔ لہٰذا، اس کو $\int_c^d (x_R - x_L)\,dy$ ضابطہ استعمال کرکے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

یہاں $c=0$، $d=\sqrt{3}$، x_R، مماس $x+y\sqrt{3}=4$ میں x کی قیمت ہے۔ اور x_L عمود $y=\sqrt{3}x$ میں x کی قیمت ہے۔

$$\therefore \text{ مطلوبہ رقبہ } = \int_c^d (x_R - x_L)\,dy = \int_0^{\sqrt{3}} \left(\left(4 - y\sqrt{3}\right) - \frac{y}{\sqrt{3}} \right) dy$$

$$= \left[\left(4y - \frac{y^2}{2}\sqrt{3} \right) - \frac{y^2}{2\sqrt{3}} \right]_0^{\sqrt{3}}$$

$$= 4\sqrt{3} - \frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

$y=f_1(x)$، $y=f_2(x)$، خطوط $x=a$ اور $x=b$ جہاں، $a<b$ سے گھرے ہوئے خطے کا رقبہ معلوم کرنے کا قاعدہ:

ایک اختیاری (Arbitrary) خط کھینچئے جو y - محور کے متوازی ہوں جو مستوی خطہ کو کاٹے۔ پہلے، خطہ میں داخل ہونے والے خط کا نقطہ کا y - محدود معلوم کریں۔ اسے y_{ENTRY} کہاجاتا ہے۔ اس کے بعد خطہ سے باہر نکلنے والے خط کے نقطہ کا y - محدود معلوم کریں۔ اسے y_{EXIT} کہاجاتا ہے۔ یہ دونوں y_{ENTRY} اور y_{EXIT} حدود منحنی کی مساواتوں سے پائے جاتے ہیں۔ تو مطلوبہ رقبہ $\int_a^b [y_{EXIT} - y_{ENTRY}]\,dx$ دیا گیا ہے۔

$x=g_1(y)$، $x=g_2(y)$، خطوط $y=c$ اور $y=d$ جہاں، $c<d$ سے گھرے ہوئے خطے کا رقبہ معلوم کرنے کا قاعدہ:

ایک اختیاری (Arbitrary) خط کھینچئے جو x - محور کے متوازی ہو جو مستوی خطہ کو کاٹے۔

پہلے، خطہ میں داخل ہونے والے خط کے نقطہ کا x - محدود معلوم کریں۔ اسے x_{ENTRY} کہاجاتا ہے۔

اس کے بعد خطہ سے باہر نکلنے والے خط کے نقطہ کا x - محدود معلوم کریں۔اسے x_{EXIT} کہاجاتا ہے۔ یہ دونوں x_{ENTRY} اور x_{EXIT} حدود منحنی کی مساواتوں سے پائے جاتے ہیں، تو مطلوبہ رقبہ $\int_c^d [x_{EXIT} - x_{ENTRY}]\,dy$ دیا گیا ہے۔

مشق 9.8

1. $3x-2y+6=0$، $x=-3$، $x=1$ اور x - محور سے گھرے ہوئے خطہ کا رقبہ معلوم کرو۔
2. $2x-y+1=0$، $y=-1$، $y=3$ اور y - محور سے گھرے ہوئے خطہ کا رقبہ معلوم کرو۔
3. منحنی $2+x-x^2+y=0$، x - محور، $x=-3$ اور $x=3$ سے گھرے ہوئے خطہ کا رقبہ معلوم کرو۔
4. خط $y=2x+5$ اور مکافی $y=x^2-2x$ سے گھرے ہوئے خطہ کا رقبہ معلوم کرو۔
5. منحنی $y=\sin x$ اور $y=\cos x$ اور خطوط $x=0$ اور $x=\pi$ کے درمیان گھرے ہوئے خطہ کا رقبہ معلوم کرو۔
6. $y=\tan x$، $y=\cot x$ اور خطوط $x=0$، $x=\frac{\pi}{2}$ اور $y=0$ سے گھرے ہوئے خطہ کا رقبہ معلوم کرو۔
7. مکافی $y^2=x$ اور خط $y=x-2$ سے گھرے ہوئے خطہ کا رقبہ معلوم کرو۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 9_App of Integration.indd 134 28-02-2023 15:07:38

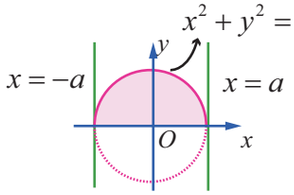
8. ایک باپ اپنی بیوی ، بیٹی اور بیٹے کو اپنے مربع کھیت جو $x=0$ ، $x=4$ ، $y=4$ اور $y=0$ ، جو منحنی $y^2=4x$ اور $x^2=4y$ کے ہمراہ ہے، کھیت کو تین مساوی حصّوں میں تقسیم کرکے دینا چاہتاہے۔ کیا یہ تقسیم ممکن ہے؟ اگر ایسا ہوتو ہر ایک کے لئے دستیاب رقبہ معلوم کرو۔

9. منحنی $y=(x-2)^2+1$ میں ادنیٰ نقطہ P پر ہے۔ منحنی پرایک نقطہ Q ایسا ہے کہ جہاں، PQ کا میلان 2 ہے۔ منحنی اور وتر PQ (Chord) سے گھرا ہوا رقبہ معلوم کرو۔

10. دائرہ $x^2+y^2=16$ اور مکافی $y^2=6x$ کا عام خطہ کا رقبہ معلوم کرو۔

9.9 محور کے گرد گھومنے والے رقبہ کے ذریعے حاصل کردہ ٹھوس کا حجم
(Volume of a solid obtained by revolving area about an axis)

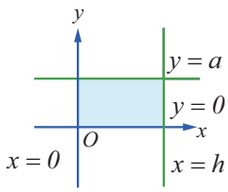
ایک مستحکم محور (Fixed axis) کے بارے میں گردش کردہ ٹھوس کے حجم کو معلوم کرنے کے لئے معین تکملہ کا استعمال کیا جاتا ہے۔ ایک مستحکم محور کی گردش تک پہنچے والی ایک ٹھوس شئے کا مطلب یہ ہے کہ جب ایک دیے گئے مستوی میں مستوی کا خطہ ایک مستحکم محور میں مکمل گردش تک پہنچتا ہے تو ایک ٹھوس پیدا ہوتا ہے۔مثال کے طور پر، دائرہ $x^2+y^2=a^2$ کے اندر نصف مدوّر مستوی خطہ اور x - محور کے اوپر غور کریں۔ خاکہ 9.34 دیکھیں۔



خاکہ 9.34

اگر یہ خطہ x - محور میں ایک مکمل گردش دیتا ہے (ریڈینس $360^\circ=2\pi$ کا گردش) تو یہ ٹھوس جو کرّہ ہے پیدا ہوتا ہے۔

اسی طرح ، اگر آپ نصف قطر a اور اونچائی h کے ذریعے قائم مدوّر استوانہ تیار کرنا چاہتے ہیں تو xy- مستوی میں خطِ مستقیم $y=0$ ، $y=a$ ، $x=0$ اور $x=h$ کے درمیان گھرے ہوئے مستطیلی مستوی خطہ پر غور کرسکتے ہیں۔ خاکہ 9.35 دیکھیں۔ اگر اس خطہ کو x - محور کے ذریعے ایک مکمل گردش دیتے ہیں (ریڈینس $360^\circ=2\pi$ کا گردش) اسے ٹھوس استوانہ کہتے ہیں



خاکہ 9.35

ہم اپنے آپ کو x - محور یا y - محور کے متعلق ٹھوس کا گردش کردہ حجم حاصل کرنے تک محدود رکھتے ہیں۔جب بھی x - محور کے متعلق گردش کردہ ٹھوس پر غور کیا جاتاہے تو مستوی کا خطہ جو x - محور کے متعلق گھوماجاتا ہے تو وہ x - محور کے اوپر پایاجاتاہے۔تو اس خطہ میں $y\geq 0$ ہے۔جب بھی y - محور کے متعلق گردش کردہ ٹھوس پر غور کیا جاتا ہےتو مستوی کا خطہ جو y - محور کے متعلق گھوماجاتاہے تو وہ y - محور کے اوپر پایاجاتا ہے۔ تو اس خطہ میں $x\geq 0$ ہے۔ منحنی $y=f(x)$ ، x - محور اور خطوط $x=a$ اور $x=b>a$ پہلاربع سے گھرے ہوئے مستوی خطہ میں گردش کردہ ٹھوس کا حجم x - محور کے متعلق معلوم کرنے کے لئے ہم ضابطے کو معلوم کریں گے۔ ضابطے کا اخذ جو استوانہ کے حجم کا ضابطہ πr^2h سے مبنی ہے۔ جس کا نصف قطر r اور اونچائی h ہے۔

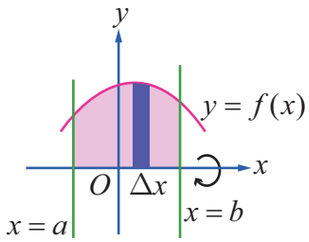
فرض کرو کہ ہرخطہ y - محور کے متوازی خطوط $x=a$ اور $x=b>a$ کے درمیان پایاجاتا ہے جو منحنی $y=f(x)$ کو ٹھیک ایک نقطہ میں پہلے ربع کے اندر کاٹتاہے۔ $[a,b]$ کو n قطوں x_1 ، x_2 ، ... ، x_{n-1} میں اس طرح تقسیم کیاجاتاہے۔ کہ

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b,\ x_i-x_{i-1}=\Delta x=\frac{b-a}{n},\ i=1,2,\ldots,n$$

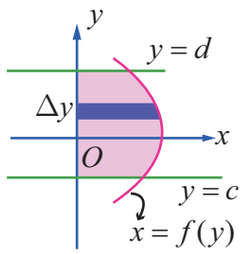
ہر ایک $i=0,1,2,\ldots,n-1$ ، x_i اور $x_i+\Delta x$ کی طولی مختص کے درمیان xy- مستوی کا وہ خطہ جو x - محور اور منحنی $y=f(x)$ کے درمیان پایاجاتاہے۔ جس کا رقبہ $y_i\Delta x$ ہے۔ جس کی تقریبی قیمت بہت چھوٹے مستطیل کے ذریعے معلوم کرسکتے ہیں، جہاں، $y_i=f(x_i)$ جب منحنی $y=f(x)$ ، x - محور اور خطوط $x=a$ اور $x=b$ سے گھرے ہوئے مستوی خطہ کو x - محور کے متعلق 360° گردش میں گھمایاجاتا ہے۔ $x=x_i$ میں ہر ایک بہت چھوٹا مستطیل بھی گردش کرتا ہے اور ایک ابتدائی ٹھوس پیدا کرتا ہے جو نصف قطر y_i اور اونچائی

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 9_App of Integration.indd 135 28-02-2023 15:07:45

Δx کے ساتھ تقریباً ایک پتلی استوانہ پتی ہوتا ہے۔ خاکہ 9.36 دیکھیں۔ $x = x_i$ میں استوانی پتی کا حجم $\pi y_i^2 \Delta x$، $i = 0,1,2,...,n-1$ دیا گیا ہے۔ ان تمام ابتدائی حجموں کے حاصل جمع سے ہمیں گردش کردہ ٹھوس کا تقریبی حجم $\sum_{i=0}^{n-1} \pi y_i^2 \Delta x$ ملتا ہے ۔ فرض کرو کہ n وسیع سے وسیع تر $(n \to \infty)$ بنتا ہے۔ تاکہ $(\Delta x \to 0)$ چھوٹے سے چھوٹا ہو جاتا ہے تو گردش کردہ ٹھوس کا حجم $\sum_{i=0}^{n-1} \pi y_i^2 \Delta x$ پالیتا ہے۔ لہٰذا، گردش کردہ ٹھوس کا حجم $\pi \int_a^b y^2 dx$ ہے۔



خاکہ 9.36



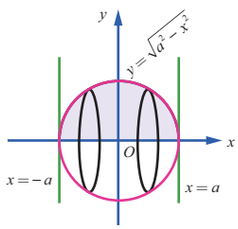
خاکہ 9.37

اس طرح سے ، ہم منحنی $x = f(y)$، y – محور اور خطوط $y = c$ اور $y = d$ سے گھرے ہوئے خطہ y – محور کے متعلق گردش کردہ ٹھوس کا حجم دریافت کرنے کا ضابطہ معلوم کرسکتے ہیں۔ منحنی $x = f(y)$ ، خطوط $y = c$ اور $y = d > c$ کے درمیان y – محور کے دائیں طرف پایا جاتا ہے۔ فرض کرو کہ ہر خط x – محور کے متوازی جو خطوط $y = c$ اور $y = d > c$ کے درمیان منحنی $x = f(y)$ کو ٹھیک ایک نقطہ میں پہلے ربع کے اندر کاٹا جاتا ہے۔ خاکہ 9.37 دیکھیں تو گردش کردہ ٹھوس کا حجم $\pi \int_c^d x^2 dy$ سے دیا گیا ہے۔

مثال 9.62

ایک کرّہ کا حجم معلوم کرو جس کا نصف قطر 'a' ہے۔

حل



خاکہ 9.38

دائرہ $x^2 + y^2 = a^2$ اور x – محور کے درمیان منسلک بالائی نصف دائرہ نما خطہ کو گھومنے سے ہمیں نصف قطر 'a' کا کرہ مل جاتا ہے۔ خاکہ 9.38 دیکھیں۔

$y = \sqrt{a^2 - x^2}$ ، x – محور ، خطوط $x = -a$ اور $x = a$ اس خطہ کے حدود ہیں ۔ لہٰذا، کرّہ کا حجم دیا گیا ہے۔

$$V = \pi \int_{-a}^{a} y^2 dx = \pi \int_{-a}^{a} \left(a^2 - x^2\right) dx$$

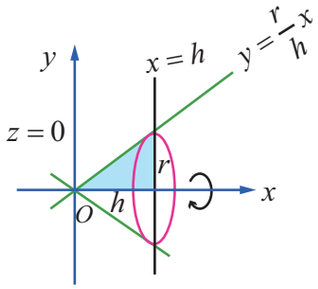
$$= 2\pi \int_0^a \left(a^2 - x^2\right) dx \quad \text{کیونکہ تکمیل } \left(a^2 - x^2\right) \text{ ایک جفت تفاعل ہے}$$

$$= 2\pi \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} \right)_0^a = 2\pi \left(a^3 - \frac{a^3}{3} \right) = \frac{4}{3}\pi a^3$$

مثال 9.63

ایک قائم مدوّر مخروط کا حجم معلوم کرو جس کے قاعدے کا نصف قطر r اور اونچائی h ہے۔

حل



خاکہ 9.39

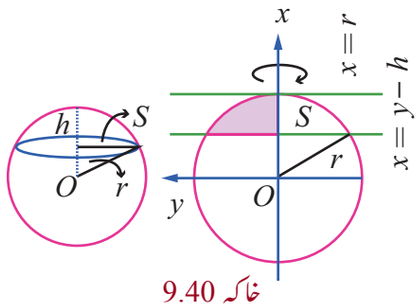
پہلے ربع میں $y = \frac{r}{h}x$ ، x – محور ، خطوط $x = 0$ اور $x = h$ سے گھرے ہوئے مثلثی خطہ پر غور کریں۔ خاکہ 9.39 دیکھیں۔ x – محور کے متعلق خطہ کو گردش کرانے سے ہمیں قاعدہ کا نصف قطر r اور اونچائی h کا ایک مخروط مل جاتا ہے۔ لہٰذا، مخروط کا حجم دیا گیا ہے۔

$$V = \pi \int_0^h y^2 dx = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx = \pi \left(\frac{r}{h}\right)^2 \int_0^h x^2 dx = \pi \left(\frac{r}{h}\right)^2 \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 9_App of Integration.indd 136 28-02-2023 15:07:51

مثال 9.64

کروی ٹوپی کا حجم معلوم کرو جس کی اونچائی h ہے جو نصف قطر r والے کرّہ سے کاٹا گیا ہے۔



خاکہ 9.40

حل

دائرہ $x^2+y^2=r^2$، $x-$ محور، خطوط $x=r-h$ اور $x=r$ سے گھرا ہوا خطہ جو پہلے ربع میں واقع ہے، $x-$ محور کے گرد گھومتے ہیں، تو قائم کردہ ٹھوس ایک کروی ٹوپی ہے جس کی اونچائی h جو نصف قطر r والے کرّہ سے کاٹا گیا ہے۔ خاکہ 9.40 دیکھیں۔ لہذا، مطلوبہ حجم دیا گیا ہے۔

$$V = \pi\int_{r-h}^{r} y^2dx = \pi\int_{r-h}^{r}\left(r^2-x^2\right)dx = \pi\left(r^2x-\frac{x^3}{3}\right)_{r-h}^{r}$$

$$= \pi\left(r^2\left(r-\left(r-h\right)\right)-\frac{\left(r^3-\left(r-h\right)^3\right)}{3}\right) = \pi\left(r^2h-\frac{\left(r^3-\left(r^3-3r^2h+3rh^2-h^3\right)\right)}{3}\right)$$

$$= \pi\left(\frac{3rh^2-h^3}{3}\right) = \frac{1}{3}\pi h^2\left(3r-h\right)$$

■

غور کیجئے (Note)

ہم اوپر والے حجم کو ٹوپی کے نصف قطر کے حساب سے دوبارہ لکھ سکتے ہیں۔

اگر ρ نصف قطر ہو تو $\rho^2+\left(r-h\right)^2=r^2$ ہو گا۔

تو ہمیں $r=\frac{\rho^2+h^2}{2h}$، r کو نکالنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

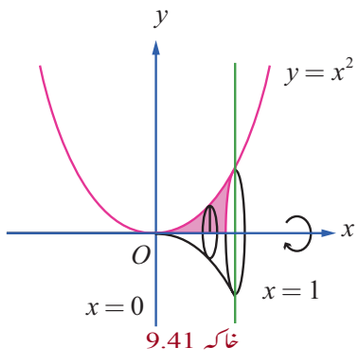
$$V=\frac{1}{3}\pi h^2\left[3\left(\frac{\rho^2+h^2}{2h}\right)-h\right]=\frac{1}{3}\pi h\left[\left(\frac{3\rho^2+h^2}{2}\right)\right]=\frac{1}{6}\pi h\left(3\rho^2+h^2\right)$$

مثال 9.65

مکافی $y=x^2$، $x-$ محور، طولی مختص $x=0$ اور $x=1$ سے گھرے ہوئے خطہ $x-$ محور کے متعلق گھومنے سے قائم ہونے والے ٹھوس کا حجم معلوم کرو۔

حل

$x-$ محور کے متعلق جو خطہ گھوما جائے گا اس کا خاکہ 9.41 میں دیا گیا ہے۔ لہذا، مطلوبہ حجم دیا گیا ہے



خاکہ 9.41

$$V = \pi\int_0^1 y^2dx$$

$$= \pi\int_0^1\left(x^2\right)^2dx$$

$$= \pi\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1$$

$$= \pi\left[\frac{1}{5}-0\right]=\frac{\pi}{5}$$

■

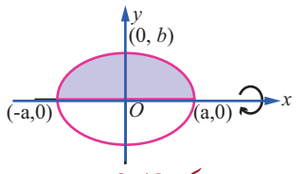
مثال 9.66

اعلیٰ محور کے گرد بیضوی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$، $a>b$ سے گھرے ہوئے خطہ کو گھمانے سے قائم ہونے والے ٹھوس کا حجم معلوم کرو۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 9_App of Integration.indd 137 28-02-2023 15:07:56

حل

بیضوی دونوں محوروں کے متعلق متناکل ہے۔ اعلیٰ محور x - محور کے ساتھ واقع ہے۔ گھومے ہوئے خطہ کا خاکہ 9.42 میں دیا گیا ہے۔ لہٰذا، مطلوبہ حجم دیا گیا ہے۔



خاکہ 9.42

$$V = \pi\int_{-a}^{a} y^2\,dx = \pi\int_{-a}^{a} \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 - x^2\right)dx$$

$$= \frac{2\pi b^2}{a^2}\int_{0}^{a}\left(a^2 - x^2\right)dx \quad \text{کیونکہ یہ تکمیل ایک جفت تفاعل ہے}$$

$$= \frac{2\pi b^2}{a^2}\left(a^2x - \frac{x^3}{3}\right)_0^a = \frac{2\pi b^2}{a^2}\left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{2\pi b^2}{a^2}\left(\frac{2a^3}{3}\right) = \frac{4\pi ab^2}{3}$$

غور کیجئے (Note)

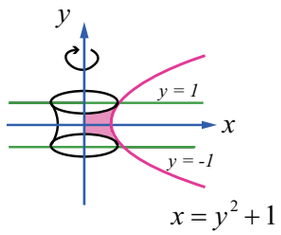
اگر خطہ ، جو بیضوی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ سے گھرا ہوا ہے y - محور کے متعلق گھمایا جائے تو گردش کردہ ٹھوس کا حجم $\frac{4\pi a^2 b}{3}$ ہوگا۔اس ٹھوس کو بیضوی مجسم کہتے ہیں۔

مثال 9.67

مکافی $x = y^2+1$ ، y - محور اور خطوط $y=1$ اور $y=-1$ کے درمیان گھرے ہوئے خطہ کو y - محور کے متعلق گھمانے سے قائم ہونے والے ٹھوس کا حجم تکمیل کے ذریعے معلوم کرو۔

حل

مکافی $x = y^2+1$ ، $y^2 = x-1$ ہے ۔ یہ x - محور کے متعلق متناکل ہے اور اس کا راس $(1,0)$ اور ماسکہ $\left(\frac{5}{4},0\right)$ ہے گردش کردہ خطہ کا خاکہ (سیاہ کردہ) 9.43 میں دیا گیا ہے۔ لہٰذا، مطلوبہ حجم دیا گیا ہے۔



خاکہ 9.43

$$V = \pi\int_{-1}^{1} x^2\,dy$$

$$= \pi\int_{-1}^{1}\left(y^2+1\right)^2\,dy$$

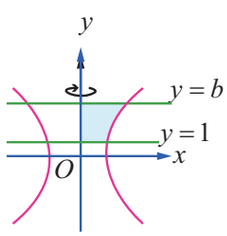
$$= 2\pi\int_{0}^{1}\left(y^4+2y^2+1\right)dy \quad \text{کیونکہ یہ تکمیل ایک جفت تفاعل ہے}$$

$$= 2\pi\left(\frac{y^5}{5}+2\frac{y^3}{3}+y\right)_0^1 = 2\pi\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{3}+1\right) = \frac{56}{15}\pi$$

مثال 9.68

منحنی $y=\frac{3}{4}\sqrt{x^2-16}$ ، $x\geq 4$ ، y - محور اور خطوط $y=1$ اور $y=6$ کے درمیان گھرے ہوئے خطہ کو y - محور کے متعلق گھمانے سے قائم ہونے والے ٹھوس کا حجم تکمیل کے ذریعے معلوم کرو۔

حل



خاکہ 9.44

ہم نوٹ کرتے ہیں $y=\frac{3}{4}\sqrt{x^2-16} \Rightarrow \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ ۔ تو دی گئی منحنی ، خطوط $y=1$ اور $y=6$ کے درمیان ہزلولی (Hyperbola) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ کا ایک حصّہ ہے اور یہ x - محور کے اوپر واقع ہے۔

گردش کردہ خطہ کا خاکہ 9.44 میں دیا گیاہے۔ کیونکہ گردش کردہ y - محور کے متعلق ہوتا ہے، ہم ہزلولی کے حصّے کو

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 9_App of Integration.indd 138 28-02-2023 15:08:02

مساوات $x = \frac{4}{3}\sqrt{9+y^2}$ کے طور پر لکھتے ہیں۔ تو قائم ہونے والے ٹھوس کا حجم بذریعہ دیا گیا ہے۔

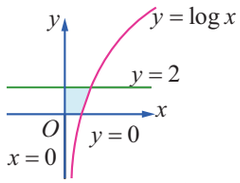
$$V = \pi\int_1^6 x^2 dy = \pi\int_1^6 \left(\frac{4}{3}\sqrt{9+y^2}\right)^2 dy = \pi\left(\frac{16}{9}\right)\int_1^6 \left(9+y^2\right)dy$$

$$= \pi\left(\frac{16}{9}\right)\left(9y+\frac{y^3}{3}\right)_1^6 = \pi\left(\frac{16}{9}\right)\left[\left(54+72\right)-\left(9+\frac{1}{3}\right)\right] = \frac{5600}{27}\pi$$

■

مثال 9.69

منحنی $y = \log x$ ، $y = 0$ ، $x = 0$ اور $y = 2$ سے گھرے ہوئے خطہ کو y – محور کے متعلق گھمانے سے قائم ہونے والے ٹھوس کا حجم تکمیل کے ذریعے معلوم کرو۔



خاکہ 9.45

حل

گردش کردہ خطہ کا خاکہ 9.45 میں دیا گیا ہے۔

کیونکہ گردش کردہ y – محور کے متعلق ہوتا ہے۔تو قائم ہونے والے ٹھوس کا حجم بذریعہ دیا گیا ہے۔

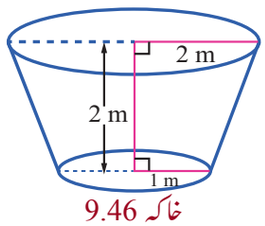
$$V = \pi\int_0^2 x^2 dy = \pi\int_0^2 \left(e^y\right)^2 dy = \pi\int_0^2 e^{2y} dy$$

$$= \pi\left[\frac{e^{2y}}{2}\right]_0^2 = \frac{\pi}{2}\left(e^4-1\right).$$

■

مشق 9.9

1. تکمیل کے ذریعے، x – محور کے گرد گھومنے کے ذریعہ پیدا ہونے والے ٹھوس کا حجم معلوم کریں جو $y = 2x^2$ ، $y = 0$ اور $x = 1$ خطہ سے منسلک ہے۔
2. تکمیل کے ذریعے، x – محور کے گرد گھومنے کے ذریعہ پیدا ہونے والے ٹھوس کا حجم معلوم کریں جو $y = e^{-2x}$ ، $y = 0$، $x = 0$ اور $x = 1$ خطہ سے منسلک ہے۔
3. تکمیل کے ذریعے، y – محور کے گرد گھومنے کے ذریعہ پیدا ہونے والے ٹھوس کا حجم معلوم کریں جو $x^2 = 1+y$ ، اور $y = 3$ خطہ سے منسلک ہے۔
4. ترسیم $y = x$ اور $y = x^2$ کے درمیان منسلک خطہ کو R سے اشارہ کیا گیا ہے، جب R کو $360°$ کے ذریعے x – محور پر گھمایا جاتا ہے تو حاصل ہونے والا حجم معلوم کرو۔



خاکہ 9.46

5. تکمیل کے ذریعے، ڈبے کا حجم معلوم کرو جو ایک قائم مدوّر مخروطی کا مقطوعہ (Circular conical frustum) کی شکل میں ہے جو خاکہ 9.46 میں دیا گیا ہے۔
6. ایک تربوز (Watermelon) کی بیضوی شکل ہوتی ہے جو ایک بیضوی کے اعلیٰ محور پر گردش کرنے سے حاصل کی جاسکتی ہے جس کا اعلیٰ محور 20 سم اور ادنیٰ محور 10 سم ہے۔ تکمیل کے ذریعے اس کا حجم معلوم کرو۔

مشق 9.10

دیئے گئے چار حل میں سے صحیح یا سب سے مناسب جواب کا انتخاب کریں۔

1. $\int_0^{\frac{2}{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$ کی قیمت ہے۔

(1) $\frac{\pi}{6}$ (2) $\frac{\pi}{2}$ (3) $\frac{\pi}{4}$ (4) π

OZX86

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 9_App of Integration.indd 139 28-02-2023 15:08:07

.2 $\int_{-1}^{2}|x|\,dx$ کی قیمت ہے۔

(1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{3}{2}$ (3) $\frac{5}{2}$ (4) $\frac{7}{2}$

.3 $n\in\mathbb{Z}$ کی کسی بھی قیمت کے لئے $\int_{0}^{\pi} e^{\cos^2 x}\cos^3[(2n+1)x]\,dx$ ہے۔

(1) $\frac{\pi}{2}$ (2) π (3) 0 (4) 2

.4 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos x\,dx$ کی قیمت ہے

(1) $\frac{3}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) 0 (4) $\frac{2}{3}$

.5 $\int_{-4}^{4}\left[\tan^{-1}\left(\frac{x^2}{x^4+1}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{x^4+1}{x^2}\right)\right]dx$ کی قیمت ہے۔

(1) π (2) 2π (3) 3π (4) 4π

.6 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{2x^7-3x^5+7x^3-x+1}{\cos^2 x}\right)dx$ کی قیمت ہے۔

(1) 4 (2) 3 (3) 2 (4) 0

.7 اگر $f(x)=\int_{0}^{x} t\cos t\,dt$ تو $\frac{df}{dx}=$

(1) $\cos x - x\sin x$ (2) $\sin x + x\cos x$ (3) $x\cos x$ (4) $x\sin x$

.8 $y^2=4x$ اور اس کے وتر خاص کے درمیان کا رقبہ ہے۔

(1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{4}{3}$ (3) $\frac{8}{3}$ (4) $\frac{5}{3}$

.9 $\int_{0}^{1} x(1-x)^{99}\,dx$ کی قیمت ہے۔

(1) $\frac{1}{11000}$ (2) $\frac{1}{10100}$ (3) $\frac{1}{10010}$ (4) $\frac{1}{10001}$

.10 $\int_{0}^{\pi}\frac{dx}{1+5^{\cos x}}$ کی قیمت ہے۔

(1) $\frac{\pi}{2}$ (2) π (3) $\frac{3\pi}{2}$ (4) 2π

.11 اگر $\frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(n)}=90$ ہو تو n کی قیمت ہے۔

(1) 10 (2) 5 (3) 8 (4) 9

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 9_App of Integration.indd 140 28-02-2023 15:08:14

12. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^3 3x\, dx$ کی قیمت ہے۔

(1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{2}{9}$ (3) $\frac{1}{9}$ (4) $\frac{1}{3}$

13. $\int_0^{\pi} \sin^4 x\, dx$ کی قیمت ہے۔

(1) $\frac{3\pi}{10}$ (2) $\frac{3\pi}{8}$ (3) $\frac{3\pi}{4}$ (4) $\frac{3\pi}{2}$

14. $\int_0^{\infty} e^{-3x} x^2 dx$ کی قیمت ہے۔

(1) $\frac{7}{27}$ (2) $\frac{5}{27}$ (3) $\frac{4}{27}$ (4) $\frac{2}{27}$

15. اگر $\int_0^{a} \frac{1}{4+x^2}\, dx = \frac{\pi}{8}$ ہو تو a کی قیمت ہے۔

(1) 4 (2) 1 (3) 3 (4) 2

16. x - محور کے متعلق $y^2 = x(a-x)$ سے گھرے ہوئے خطہ کا گردش کردہ ٹھوس کا رقبہ ہے۔

(1) πa^3 (2) $\frac{\pi a^3}{4}$ (3) $\frac{\pi a^3}{5}$ (4) $\frac{\pi a^3}{6}$

17. اگر $f(x) = \int_1^{x} \frac{e^{\sin u}}{u}\, du$، اور $x > 1$, $\int_1^{3} \frac{e^{\sin x^2}}{x}\, dx = \frac{1}{2}[f(a) - f(1)]$ ہو تو a کی ممکن قیمتوں میں سے ایک ہے۔

(1) 3 (2) 6 (3) 9 (4) 5

18. $\int_0^{1} \left(\sin^{-1} x\right)^2\, dx$ کی قیمت ہے۔

(1) $\frac{\pi^2}{4} - 1$ (2) $\frac{\pi^2}{4} + 2$ (3) $\frac{\pi^2}{4} + 1$ (4) $\frac{\pi^2}{4} - 2$

19. $\int_0^{a} \left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^3 dx$ کی قیمت ہے۔

(1) $\frac{\pi a^3}{16}$ (2) $\frac{3\pi a^4}{16}$ (3) $\frac{3\pi a^2}{8}$ (4) $\frac{3\pi a^4}{8}$

20. اگر $\int_0^{x} f(t)\, dt = x + \int_x^{1} t f(t)\, dt$، ہو تو $f(1)$ کی قیمت ہے۔

(1) $\frac{1}{2}$ (2) 2 (3) 1 (4) $\frac{3}{4}$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 9_App of Integration.indd 141 28-02-2023 15:08:22

خلاصہ (SUMMARY)

1. حاصل جمع کے انتہا کے طور پر معین تکملہ (Definite integral as the limit of a sum)

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{r=1}^{n} f\left(a+(b-a)\frac{r}{n}\right) \quad \text{(i)}$$

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n} f\left(\frac{r}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} f\left(\frac{r}{n}\right) \quad \text{(ii)}$$

2. معین تکملہ کے خصوصیات (Properties of definite integrals)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(u)\,du \quad \text{(i)} \qquad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \quad \text{(ii)}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx \quad \text{(iii)} \qquad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad \text{(iv)}$$

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx \quad \text{(v)} \qquad \int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a [f(x)+f(2a-x)]\,dx \quad \text{(vi)}$$

(vii) اگر $f(x)$ ایک جفت تفاعل ہو، تو $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$ ہوگا۔

(viii) اگر $f(x)$ ایک طاق تفاعل ہو، تو $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$ ہوگا۔

(ix) اگر $f(2a-x) = f(x)$ ہو، تو $\int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$ ہوگا۔

(x) اگر $f(2a-x) = -f(x)$ ہو، تو $\int_0^{2a} f(x)\,dx = 0$ ہوگا۔

(xi) $\int_0^a x f(x)\,dx = \frac{a}{2}\int_0^a f(x)\,dx$ اگر $f(a-x) = f(x)$ ہو۔

3. برنولی کا ضابطہ (Bernoulli's Formula)

$$\int uv\,dx = uv_{(1)} - u^{(1)}v_{(2)} + u^{(2)}v_{(3)} - u^{(3)}v_{(4)} + \cdots$$

4. تخفیف ضابطہ (Reduction Formulae)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \begin{cases} \frac{(n-1)}{n}\times\frac{(n-3)}{(n-2)}\times\cdots\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}, & \text{اگر } n = 2,4,6,\cdots \\ \frac{(n-1)}{n}\times\frac{(n-3)}{(n-2)}\times\cdots\times\frac{2}{3}, & \text{اگر } n = 3,5,7,\cdots \end{cases} \quad \text{(i)}$$

(ii) اگر n جفت ہے اور m جفت ہے،

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\cos^n x\,dx = \frac{(n-1)}{(m+n)}\frac{(n-3)}{(m+n-2)}\frac{(n-5)}{(m+n-4)}\cdots\frac{1}{(m+2)}\frac{(m-1)}{m}\frac{(m-3)}{(m-2)}\frac{(m-5)}{(m-4)}\cdots\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}$$

(iii) اگر n طاق ہے اور m ایک مثبت سالم عدد (جفت یا طاق) ہو تو،

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\cos^n x\,dx = \frac{(n-1)}{(m+n)}\frac{(n-3)}{(m+n-2)}\frac{(n-5)}{(m+n-4)}\cdots\frac{2}{(m+3)}\frac{1}{(m+1)}$$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 9_App of Integration.indd 142 28-02-2023 15:08:23

5. گاما ضابطے (Gamma Formulae)

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx = (n-1)! \qquad \text{(ii)}\ \int_0^\infty e^{-ax}x^n dx = \frac{n!}{a^{n+1}}\ \text{(i)}$$

6. منحنی اور خطوط سے گھرے ہوئے خطہ کا رقبہ (Area of the region bounded by a curve and lines)

(i) ایک منحنی، x - محور کے اوپر اور خطوط $x=a$ اور $x=b$ سے گھرے ہوئے خطہ کا رقبہ $A=\int_a^b y\,dx$ ہے۔

(ii) ایک منحنی، x - محور کے نیچے اور خطوط $x=a$ اور $x=b$ سے گھرے ہوئے خطہ کا رقبہ $A = -\int_a^b y\,dx = \left|\int_a^b y\,dx\right|$ ہے۔

(iii) y - محور کے دائیں طرف کے منحنی، خطوط $y=c$ اور $y=d$ سے گھرے ہوئے خطہ کا رقبہ $A=\int_c^d x\,dy$ ہے۔

(iv) y - محور کے بائیں طرف کے منحنی، خطوط $y=c$ اور $y=d$ سے گھرے ہوئے خطہ کا رقبہ $A=-\int_c^d x\,dy = \left|\int_c^d x\,dy\right|$ ہے۔

(v) اگر $f(x)\geq g(x)$، تو منحنیوں اور خطوط $x=a$ ، $x=b$ سے گھرا ہوا رقبہ

$$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx = \int_a^b (y_U - y_L)\,dx \text{ ہے}$$

(vi) اگر $f(y)\geq g(y)$ ، تو منحنیوں اور خطوط $y=c$ اور $y=d$ سے گھرا ہوا رقبہ

$$A=\int_c^d [f(y)-g(y)]\,dy = \int_c^d (x_R - x_L)\,dy \text{ ہے}$$

7. گردش کردہ ٹھوس کا حجم (Volume of the solid of revolution)

(i) x - محور کے متعلق گردش کردہ ٹھوس کا حجم $V=\pi\int_a^b y^2dx$ ہے

(ii) y - محور کے متعلق گردش کردہ ٹھوس کا حجم $V=\pi\int_c^d x^2dy$ ہے

ICT کارنر

https://ggbm.at/dy9kwgbt or Scan the QR Code

براؤزر کھولیں اور دیا گیا URL کڑی (Link) ٹائپ کریں (یا) QR کوڈ اسکین کریں۔ جیوگیبرا (GeoGebra) ورک بک " 12 ویں جماعت ریاضی جلد - 2 " کھلے گی۔ ورک بک کے بائیں جانب آپ کی درسی کتاب سے متعلق ابواب ہیں۔ "تکملہ کے اطلاقات **(Applications of Integration)**" نامی باب پر کلک (Click) کریں۔ آپ باب سے متعلق متعدد ورک شیٹ دیکھ سکتے ہیں۔ تمام ورک شیٹ دیکھیں۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 9_App of Integration.indd 143 28-02-2023 15:08:25

باب
10

عام تفرقی مساوات
Ordinary Differential Equations

ریاضی انسانی روح کی سب سے خوبصورت اور طاقتور تخلیق ہے۔
- Stefan Banach

10.1 تعارف (Introduction)

حوصلہ افزائی اور ابتدائی ترقی (Motivation and Early Developments)

بس ہم کچھ حقیقی زندگی کے صورتِ حالوں کو دیکھتے ہیں جہاں،

- گلولہ ،راکٹ، مصنوعی سیارہ اور سیاروں کی نقل وحرکت۔
- چارج یا بجلی کا حلقہ (سوکیوٹ) میں موجود ہونا۔
- ایک چھڑی پر یا ایک سلیب میں تر سیل ۔
- کسی تار یا جھلی کا ارتعاش وغیرہ۔

طے کرنا ہے ۔ اس طرح کے مسائل کی ریاضی کی تشکیل بعض سائنس قوانین کے تحت امتیازی مساوات کے طور پر سامنے آتی ہے ۔ اِن قوانین میں مختلف مقدار کے لحاظ سے ایک یا ایک سے زیادہ مقدار کی مختلف شرحیں شامل ہیں۔ اِس طرح سائنس قوانین ریاضی کی مساوات کے طور پر ظاہر ہوتے ہیں۔ جس میں مشتق یعنی، تفرقی مساوات شامل ہیں۔

علم ہندسہ، میکانکس ، طبعیات ، کیمیاء اور انجینئرنگ مطالعہ کے مسائل سے مختلف تفرقی مساوات پیدا ہوتے ہیں۔ ہم نے ابتدائی جماعتوں میں "شرح" کے بارے میں مطالعہ کیا ہے ۔ یہ تبدیلی کی فوری شرح کے طور پر بھی جانا جاتا ہے۔ جسے $\frac{dy}{dx}$ کے نام سے بھی تعبیر کیا جاتا ہے۔

ہم نے تبدیلی کی شرح اور نامعلوم افعال کے درمیان کچھ تعلقات ذیل میں دیئے ہیں۔جو حقیقی زندگی کی صورتِ حالوں میں پیش آتے ہیں۔

(a) y کے لحاظ سے x کی تبدیلی کی شرح براہِ راست y کے متناسب ہے۔:

$$\frac{dy}{dx} = ky .$$

(b) y کے لحاظ سے x کی تبدیلی شرح براہِ راست y^2 اور x کے حاصلِ ضرب کے متناسب ہے۔

$$\frac{dy}{dx} = ky^2x$$

(c) y کے لحاظ سے x کی تبدیلی کی شرح y کے معکوسی متناسب میں ہے۔

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k}{y}$$

(d) y کے لحاظ سے x کی تبدیلی کی شرح براہِ راست y^2 کے متناسب میں اور $\sqrt{x}$ کے معکوسی تناسب میں ہے۔

$$\frac{dy}{dx} = k\frac{y^2}{\sqrt{x}}$$

ایک تفرقی مساوات ایک ایسی مساوات ہے جس میں نامعلوم تفاعلات کے کچھ مشتقات پائے جاتے ہیں۔ بہت سے معاملات میں آزاد متغیر کو وقت کے طور پر جاتا ہے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 10_Differential Equation.indd 144 28-02-2023 15:57:43

فطری یا "حقیقی زندگی" کے مسئلہ پر ریاضی کے طریقوں کا اطلاق کرنے کے لئے ہمیں ریاضی کی رقموں میں مسئلہ کو واضح کرنا ہوگا، یعنی، ہمیں مسئلے کے لئے ایک ریاضی نمونہ بنانا چاہئے۔ بہت سارے فطری مسئلات کو بدلتی مقدار کے مابین تعلقات کی فکر ہے۔چونکہ تبدیلی کی شرح کی تشخیص ریاضی کے لحاظ سے مشتق ہیں ، لہٰذا، ریاضی کے نمونے میں اکثر کسی انجانے تفاعلات اور اِس کے متعلق ایک یا زیادہ مشتقات مساوات ہیں۔ یہ مساوات تفرقی مساوات ہیں۔ سائنس اور انجینئرنگ میں ان کی بنیادی اہمیت ہے۔ کیونکہ بہت سارے فطری قوانین نیز تعلقات تفرقی مساوات کی شکل میں پیش کئے جاتے ہیں۔ تفرقی مساوات آبادی میں اضافے یا تابکاری گھلنا میں شامل ریاضی کے نمونے کی وضاحت میں بہت کارآمد ہیں۔ حیاتیاتی علوم اور معاشیات کا مطالعہ تفرقی مساوات کے استعمال کے بغیر نامکمل ہے۔



جان برنولی
Johann Bernoulli
(1667-1748)

علم ہندسہ اور طبیعیات مسئلوں کو حل کرنے کے لئے نیوٹن اور لیبنیزنے کیلکوس کے ساتھ تفرقی مساوات کے موضوع کی ایجاد کی جو برنولی خاندان ، ایلر اور دیگر افراد کے نیوٹنین فزکس کی ترقی میں اہم کردار ادا کیا۔ ہماری روزمرہ کی زندگی میں تفرقی مساوات کے کچھ استعمالات موبائل فون، موٹرکاروں، ہوائی جہازوں، موسم کی پیش گوئی ،انٹرنیٹ، صحت کی دیکھ بھال یا بہت ساری روز مرہ کی سرگرمیوں میں پائے جاتے ہیں۔

اِس باب میں، ہم پہلے ترتیب کی تفرقی مساوات اور ان کے حل تلاش کرنے کے کچھ طریقوں کو متعارف کراتے اور ان پر تبادلہ خیال کرتے ہیں۔

Learning Objectives — سیکھنے کے مقاصد

اس باب کی تکمیل کے بعد طلباء قابل بن جائیگے:

- تفرقی مساوات کی درجہ بندی کرنے۔
- تفرقی مساوات کی تعمیر۔
- تفرقی مساوات کی ترتیب اور درجہ تلاش کرنا۔
- متغیر علحیدگی، متبادل ، تکملہ جزوِ ضربی کے طریقوں کا استعمال کرتے ہوئے تفرقی مساوات حل کرنا۔
- حقیقی زندگی میں تفرقی مساوات کا اطلاق کرنا۔

10.2 تفرقی مساوات، ترتیب اور درجہ (Differential Equation, Order, and Degree)

تعریف 10.1

ایک **تفرقی مساوات** کوئی مساوات ہے جس میں کسی نامعلوم تفاعل کا کم سے کم ایک مشتق یاتو عام مشتق یا جزوی مشتق ہوتا ہے۔

مثال کے طورپر، $y = f(x)$ جہاں، y انحصار متغیر ہے۔(f ایک نامعلوم تفاعل ہے،) اور x ایک آزاد متغیر ہے۔

(1) مساوات $\frac{dy}{dx} = 0$ ایک تفرقی مساوات ہے۔

(2) مساوات $\frac{dy}{dx} = \sin x$ ایک تفرقی مساوات ہے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 10_Differential Equation.indd 145 28-02-2023 15:57:44

(3) مساوات $\frac{dy}{dx}+y=7x+5$ ایک تفرقی مساوات ہے۔

(4) مساوات $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+y=\sin x$ ایک تفرقی مساوات ہے۔

(5) مساوات $e^{\frac{dy}{dx}}=\ln x, x>0$ ایک تفرقی مساوات ہے۔

(6) مساوات $\tan^{-1}\left(\frac{d^2y}{dx^2}+y^2+2x\right)=\frac{dy}{dx}$ ایک تفرقی مساوات ہے۔

تعریف 10.2 ایک تفرقی مساوات کی ترتیب (Order of a differential equation)

ایک تفرقی مساوات کی **ترتیب** بیان کردہ مساوات میں سب سے زیادہ ترتیب والی مشتق جو موجود ہے۔

اس طرح، اگر مساوات میں نامعلوم تفاعل y کا سب سے زیادہ ترتیب مشتق k^{th} ہے۔تو اِس تفرقی مساوات کی ترتیب k ہے۔واضح طور پر k ایک مثبت صحیح عدد ہونا چاہئے۔

مثال کے طور پر $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^{\frac{2}{3}}-3\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}+4=0$ ایک تفرقی مساوات ہے جس کی ترتیب 3 ہے۔

تعریف 10.3 ایک تفرقی مساوات کا درجہ (Degree of a differential equation)

اگر کوئی تفرقی مساوات کثیر رقمی مساوات کی شکل میں ظاہر نہ ہو جس میں اعلیٰ ترین ترتیب کی مشتق خاص رقم ہو تو تفرقی مساوات کی **درجہ** کی وضاحت نہیں کی گئی ہے۔

دوسرے لفظوں میں، ایک تفرقی مساوات کا درجہ، جب تفرقی مساوات (کثیر رقمی شکل میں اظہار کرنے کے بعد) مندرجہ ذیل شرائط کو پوار کرتی ہے تو تفرقی مساوات میں شامل اعلیٰ ترین مشتق ، مشتق کی قوت ہوتی ہے۔

(i) مساوات میں شامل تمام مشتق جزء کی قوتوں سے آزاد ہیں، اگر کوئی ہے تو

(ii) اعلیٰ ترتیب سے ماخوذ کسی ماولائی تفاعل مثالثیات یا قوت نما کی دلیل نہیں ہونی چاہئے۔ کسی بھی اصطلاح کا اعداد جس میں اعلیٰ ترین ترتیب مشتق ہوتا ہے وہ x, y یا کچھ نچلے درجہ مشتق لیکن اس کی ماقبل کے ماقبل مثلثی ، قوت نمائی اور لوگارتمی تفاعل کے طور پر نہیں ہے۔

اگر مذکورہ بالا شرائط میں سے ایک یا زیادہ متفاوت مساوات سے مطمئن نہیں ہیں۔ تو سب سے پہلے متعود شکل میں کمی کردی جانی چاہئے ۔جس میں یہ مذکورہ بالا تمام شرائط کو پورا کرتا ہے۔

اگر کسی تفرقی مساوات کو متعدد مساوات کی شکل کے لئے قابل فہم نہ ہو جس میں اعلیٰ ترین ترتیب مشتق ہے جس میں معروف اصطلاح ہے تو تفرقی مساوات کی درجہ کی وضاحت نہیں کی گئی ہے۔

اگر آپ کو ان شرائط سے بخوبی مراعات نہ ہو کہ کسی مختلف تفرقی مساوات کی درجہ (ڈگری) کا تعین کرنا مشکل ہو سکتا ہے۔ جس کے تحت تفرقی مساوات کا درجہ (ڈگری) کی تعریف کی گئی ہو لہٰذا، دی گئی ۔ حل شدہ مثالوں کو احتیاط سے دیکھیں اور محض جانچ پڑتال کے ذریعہ دیئے گئے۔تفرقی مساوات کی ڈگری (درجہ) معلوم کرنے کی تکنیک میں عبارت حاصل کریں۔

درجہ (ڈگری) (معلوم کرنے کے حساب کتاب) کے لئے مثالیں۔

(1) تفرقی مساوات پر غور کریں۔ $3y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3-\frac{d^2y}{dx^2}=\sin x^2$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 10_Differential Equation.indd 146 28-02-2023 15:57:45

یہاں، شامل (سب سے زیادہ ترتیب) مشتق 2 ہے اور اس کی قوت 1 کا ترتیب اور 2 کا درجہ 1 ہے۔

(2) تفرقی مساوات پر غور کریں $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = y\frac{d^3y}{dx^3}$

چونکہ اس مساوات میں جزوی قوتیں شامل ہیں۔ لہٰذا، ہمیں پہلے ان سے چھٹکارہ حاصل کرنا چاہئے مساوات کو مربع کرنے پر ہمیں ملتا ہے۔

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = y^2\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2.$$

اب ہم واضح طورپر یہ کہہ سکتے ہیں۔ کہ سب سے زیادہ ترتیب مشتق 3 کی ہے۔ اعظم ترتیب 3 لہٰذا، تفرقی مساوات کا ترتیب ہے۔اور چونکہ تفرقی مساوات میں اس کی قوت 2 ہے اس سے مساوات کا درجہ (ڈگری) 2 ہے۔

(3) تفرقی مساوات پر غور کریں $\sin\left(\frac{dy}{dx}\right)+\frac{d^2y}{dx^2}+3x=0$

یہاں، سب سے زیادہ ترتیب (آرڈر) مشتق 2 کی ہے۔ پہلی مشتق سائن کی وجہ سے دیئے گئے تفرقی مساوات کو کثیر رقمی مساوات کے طور پر ظاہر نہیں کیا جاسکتا۔ اسلئے تفرقی مساوات کی ترتیب 2 ہے اور یہ مشتق میں ایک کثیر رقمی مساوات نہیں ہے اور اس طرح درجہ (ڈگری) کی وضاحت نہیں کی گئی ہے۔

(4) مساوات پر غور کریں $e^{\frac{d^2y}{dx^2}}+\sin(x)\frac{dy}{dx}=2$

یہاں، اعظم ترتیب مشتق (ترتیب 2) سے ماخوذ ایک قوت نمایانہ تفاعل میں ملوث ہے۔ اس کا اظہار سرے سے $\frac{d^2y}{dx^2}$ کے ساتھ کثیر رقمی (مساوات) کے طورپر نہیں کیا جاسکتا۔تومساوات کا درجہ (ڈگری) کی وضاحت نہیں کی جاتی ہے۔مساوات کی ترتیب 2 ہے۔

(5) مزید یہ کہ درج ذیل تفرقی مساوات میں درجہ (ڈگری) نہیں ہے۔

(i) $e^{\frac{dy}{dx}}+\frac{dy}{dx}=0$ (ii) $\log\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)+\frac{dy}{dx}=0$ اور (iii) $\cos\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)+2\frac{d^2y}{dx^2}=0$.

(6) تفرقی مساوات $10(y''')^4+7(y'')^5+\sin(y')+5=0$ کی ترتیب 3 ہے۔ لیکن اس کے درجہ (ڈگری) کی وضاحت نہیں کی گئی ہے۔

(7) تفرقی مساوات $\cos(y')y'''+5y''+7y'=\sin x$ کی ترتیب 3 ہے اور درجہ (ڈگری) کی وضاحت نہیں کی گئی ہے۔

ریمارک (Remark)

مشاہدہ کریں کہ تفرقی مساوات کا درجہ (ڈگری) ہمیشہ ایک مثبت عدد ہوتا ہے۔

مثال 10.1

درج ذیل تفرقی مساوات کے ترتیب اور درجہ (اگر موجود ہیں) کا تعین کریں

(i) $\frac{dy}{dx}=x+y+5$

(ii) $\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)^3+4\left(\frac{dy}{dx}\right)^7+6y=5\cos 3x$

(iii) $\frac{d^2y}{dx^2}+3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=x^2\log\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$

(iv) $3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\left[4+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}$

(v) $dy+(xy-\cos x)dx=0$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 10_Differential Equation.indd 147 28-02-2023 15:57:48

حل

(i) اس مساوات میں (سب سے زیادہ ترتیب)اعظم ترتیب مشتق $\frac{dy}{dx}$ ہے۔جس کی قوت1 ہے۔

لہٰذا، دیئے گئے تفرقی مساوات کی ترتیب1 اور درجہ 1 ہے۔

(ii) یہاں،(سب سے زیادہ ترتیب)اعظم ترتیب مشتق $\frac{d^4y}{dx^4}$ ہے جس کی قوت 3 ہے۔

لہٰذا، دیئے گئے تفرقی مساوات کی ترتیب 4 اور درجہ 3 ہے۔

(iii) دیئے گئے تفرقی مساوات میں، (سب سے زیادہ ترتیب)اعظم ترتیب مشتق $\frac{d^2y}{dx^2}$ ہے جس کی قوت 1 ہے۔

لہٰذا، دیئے گئے تفرقی مساوات کی ترتیب 2 ہے۔

دیئے ہوئے تفرقی مساوات اس کے مشتقات میں ایک کثیر رقمی مساوات نہیں ہے اس لئے اس کی درجہ (ڈگری) کی وضاحت نہیں کی گئی ہے۔

(iv) دیئے گئے تفرقی مساوات $3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\left[4+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}$

دونوں طرف مربع کرنے پر ہم حاصل کرتے ہیں۔ $9\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2=\left[4+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3$

اس مساوات میں سب سے زیادہ ترتیب مشتق $\frac{d^2y}{dx^2}$ ہے جس کی قوت 2 ہے۔

لہٰذا، دیئے گئے تفرقی مساوات ترتیب 2 اور درجہ 2 کی ہے۔

(v) ترتیب ایک والی تفرقی مساوات $dy+(xy-\cos x)dx=0$ ہے درجہ 1 کے ساتھ، کیونکہ مساوات $\frac{dy}{dx}+xy-\cos x=0$ کو اس طرح دوبارہ لکھا جاسکتا ہے۔

مشق 10.1

1. مندرجہ ذیل تفرقی مساوات میں سے ہر ایک کے لئے اس کی ترتیب، درجہ (اگر موجود ہو) کا تعین کریں ۔

(i) $\frac{dy}{dx}+xy=\cot x$

(ii) $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^{\frac{2}{3}}-3\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}+4=0$

(iii) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=x\sin\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$

(iv) $\sqrt{\frac{dy}{dx}}-4\frac{dy}{dx}-7x=0$

(v) $y\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{x}{\left(\frac{dy}{dx}\right)+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}$

(vi) $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}=0$

(vii) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)}$

(viii) $\frac{d^2y}{dx^2}=xy+\cos\left(\frac{dy}{dx}\right)$

(ix) $\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}+\int ydx=x^3$

(x) $x=e^{xy\left(\frac{dy}{dx}\right)}$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 10_Differential Equation.indd 148 28-02-2023 15:57:51

10.3 تفرقی مساوات کی درجہ بندی (Classification of Differential Equations)

تعریف 10.4 عام تفرقی مساوات (Ordinary Differential Equation)

اگر کسی تفرقی مساوات میں ایک آزاد متغیر کے لحاظ سے ایک یا ایک سے زیادہ تفاعلات کے صرف عام مشتق ہیں کہا جاتا ہے کہ یہ ایک **عام تفرقی مساوات** ہے۔

تعریف 10.5 جزوی تفرقی مساوات (Partial Differential Equation)

ایک مساوات جس میں دو یا زیادہ آزاد متغیر کے ایک یا زیادہ تفاعلات کے صرف جزوی مشتقات شامل ہوتے ہیں وہ **جزوی تفرقی مساوات** کہلاتا ہے۔

مثال کے طور پر، فرض کرو y نامعلوم تفاعل کو ظاہر کرتا ہے اور x آزاد متغیر ہیں پھر

$\frac{dy}{dx}+2y=e^{-x}$، $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}-5y=0$ اور $\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}=3x-4y$ چند عام تفرقی مساوات کی مثالیں ہیں۔

مثال کے طور پر $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ اور $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-2\frac{\partial u}{\partial t}$ چند جزوی تفرقی مساوات کی مثالیں ہیں۔

اس باب میں، ہم صرف عام تفرقی مساوات پر بحث کریں گے۔

چند جزوی تفرقی مساوات کو دو مختلف قسموں میں درجہ بندی کیا جاتا ہے۔ یعنی، **خطی** عام تفرقی مساوات اور **غیر خطی** عام تفرقی مساوات

تعریف 10.6

ایک عام خطی عام تفرقی مساوات جس کی ترتیب n ہو کوئی بھی تفرقی مساوات ہے جس کو درج ذیل شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0y=g(x) \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

جہاں، ضریب $a_n(x)\neq 0, a_0(x), a_1(x), \ldots, a_{n-1}(x)$ اور $g(x)$ کوئی آزاد متغیر x کی تفاعل ہے (جس میں صفر تفاعل بھی شامل ہے)

غور کیجئے (Note)

(1) خطی تفرقی مساوات کے بارے میں نوٹ کرنے کی اہم بات یہ ہے کہ تفاعل $y(x)$ کے کوئی حاصل ضربی اور اس کے مشتق اور نہ ہی تفاعل ورنہ ہی مشتقات پہلی قوت کے علاوہ کسی اور قوت کے پائے جاتے ہیں۔

(2) کوئی ماورائی تفاعلات (علم مثلثی یا لوگارتملک وغیرہ) y کا یا اس کا کوئی مشتق تفرقی مساوات میں نہیں پایا جاتا ہے۔

(3) یہ بھی نوٹ کریں کہ نہ تو تفاعل ہے اور نہ ہی مشتق کسی اور تفاعل کے اندر ہے، مثال کے طور پر $\sqrt{y'}$ یا $e^{y'}$

(4) ضریب (سرعدد) $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_{n-1}(x)$ اور $g(x)$ صفر یا غیر صفری تفاعلات یا مستقل یا غیر مستقل تفاعلات خطی یا غیر خطی تفاعلات ہوسکتے ہیں۔ صرف تفاعل، $y(x)$ اور اس کے مشتقات تفرقی مساوات خطی ہے یا نہیں کی وضاحت میں استعمال ہوتے ہیں۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 10_Differential Equation.indd 149 28-02-2023 15:57:53

تعریف 10.7

غیر خطی تفرقی مساوات محض ایک ہے جو خطی نہیں ہے۔

اگر $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ کے ضریبوں کا انحصار متغیر y یا اس کے مشتقات پر مشتمل ہے یا اگر $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ کی قوتیں جیسا کہ $(y')^2$، مساوات میں ظاہر ہوتی ہیں، تو تفرقی مساوات غیر خطی ہے۔ نیز انحصار متغیر کے غیر خطی تفاعلات یا اس کے مشتقات جیسے $\sin y$ یا $e^{y'}$ خطی مساوات میں ظاہر نہیں ہوسکتے ہیں ۔

مثال کے طور پر۔

(1) $\frac{dy}{dx} = ax^3$, $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 0$ اور $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$ خطی تفرقی مساوات ہیں جب کہ

$y\frac{dy}{dx} + \sin x = 0$ غیر خطی تفرقی مساوات ہے۔

(2) $y'' + 2x^3y' = 7xy + x^2$ دوسری ترتیب والا عام خطی تفرقی مساوات ہے۔

(3) $y'' + y' = \sqrt{x}$ دوسری ترتیب والا عام خطی تفرقی مساوات ہے۔

(4) $y^2 + y' = \sqrt{x}$ پہلی ترتیب والا عام خطی تفرقی مساوات ہے۔

(5) $y' = x\sin(y)$ پہلی ترتیب والا عام غیر خطی تفرقی مساوات ہے۔

(6) $y'' = y\sin(x)$ دوسری ترتیب والا عام خطی تفرقی مساوات ہے ۔

تعریف 10.8

اگر (1) میں $g(x) = 0$ ہوتو مذکورہ بالا مساوات کو **ہم جنس** کہا جاتا ہے۔ورنہ اسے **غیر ہم جنس** کہتے ہیں۔

ریمارک (Remark)

اگر $y_i(x),\ i = 1, 2$ ہم جنس مساوات کے کوئی دو حل ہیں۔

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0 \quad \ldots(2)$$

پھر. $a_n(x)y_i^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y_i^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y_i(x) + a_0(x)y_i(x) = 0,\ i = 1, 2$

فرض کریں کہ $u(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$

جہاں، c_1 اور c_2 اختیاری مستقل ہیں۔ پھر اس کی آسانی سے تصدیق کی جاسکتی ہے کہ $u(x)$ بھی (2) کا حل ہے۔

اس طرح پہلی ترتیب خطی مساوات کو $y' + p(x)y = f(x)$ لکھا جا سکتا ہے۔

پہلی ترتیب (آرڈر) تفرقی مساوات جو اس طرح نہیں لکھا جاسکتا وہ غیر خطی ہے۔ چونکہ $y = 0$ واضح طور پر ہم جنس مساوات $y' + p(x)y = 0$ کا ایک حل ہے، ہم اسے معمولی حل کہتے ہیں۔ کوئی دوسرا حل غیر معمولی ہے۔درحقیقت یہ ایک عام ہم جنس تفرقی مساوات کے لئے بھی صحیح ہے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 10_Differential Equation.indd 150 28-02-2023 15:57:58

10.4 تفرقی مساوات کی تشکیل (Formation of Differential Equations)

10.4.1 طبعیاتی حالات سے تفرقی مساوات کی تشکیل
(Formation of Differential equations from Physical Situations)

اب ہم تفرقی مساراتوں کے چند نمونوں کی وضاحت کرتے ہیں جو حقیقی زندگی کے مسلوں سے ابھرتے ہیں .

نمونہ1 نیوٹن کا قانون یا کُلیہ (Newton's Law)



نیوٹن کے حرکت کے دوسرے کلیہ کے مطابق، مستقل پیمانے پر کمیت m کے ساتھ فوری اسراع a کا تعلق $F = ma$ مساوات کے ذریعہ شئے پر عمل کرنے والی قوت F سے ہے۔ آزاد گرنے کی صورت میں، کسی شئے کو زمینی سطح سے بلندی $h(t)$ سے چھوڑا جاتا ہے۔اس کے بعد نیوٹن کا دوسرا کلیہ تفرقی مساوات $m\frac{d^2h}{dt^2} = f\left(t, h(t), \frac{dh}{dt}\right)$ کے ذریعہ بیان کیا گیا ہے۔ جہاں، m شئے کی کمیت h زمین کی سطح سے اُونچائی ہے۔ وقت کے تفاعل کے طور پر یہ نامعلوم اونچائی کی دوسری ترتیب (آرڈر) تفرقی مساوات ہے۔

نمونہ 2 آبادی میں اضافہ کا نمونہ (Population Growth Model)



جب بھی نسل میں اضافہ ہوگا۔ آبادی بڑھ جائے گی۔ مثال کے طور پر، خرگوش کو اپنی آبادی کے طور پر لیں۔خرگوش کی زیادہ تعداد سے خرگوش کے بچوں کی تعداد زیادہ ہوتی ہے۔ جیسے جیسے وقت بڑھتا ہے خرگوشوں کی آبادی بڑھ جاتی ہے۔ اگر اس وقت آبادی کے حیوی کمیت کے اضافہ کی شرح $N(t)$ اس وقت t آبادی کے حیوی کمیت کے متناسب ہوتو آبادی پر حکمرانی کرنے والی تفرقی مساوات $\frac{dN}{dt} = rN$ کے ذریعہ دیا جاتا ہے۔ جہاں، $r > 0$ شرح نمو ہے۔

نمونہ3 منطقی نمونہ کا خاکہ (Logistic Growth Model)

جس شرح سے بیماری پھیلتی ہے (یعنی، متاثرہ افراد کی تعداد N میں اضافہ کی شرح) ایک مقررہ آبادی L میں متاثرہ افراد کی تعداد اور اُن کی تعداد جو ابھی متاثر نہیں ہوئے ہیں۔ دونوں کے حاصل ضرب کے متناسب ہے۔

$$\frac{dN}{dL} = kN(L-N),\ \ k > 0\,.$$

مشق 10.2

1. مندرجہ ذیل ہر طبعیات بیانات کو تفرقی مساوات کی شکل میں ظاہر کریں۔

(i) موجودہ Q مقدار کے متناسب شرح پر ریڈیم کشی۔

(ii) شہر کی آبادی P ، اس کی آبادی اور 5,00,000 کے درمیان فرق اور آبادی کے حاصل ضرب کے متناسب شرح سے بڑھتی ہے۔

(iii) کسی خاص مادے کے لئے، درجہ حرارت کے لحاظ سے بخارات کے دباؤ P کی تبدیلی کی شرح بخارات کے دباؤ کے متناسب اور درجہ حرارت T کے مربع کے برعکس متناسب ہے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 10_Differential Equation.indd 151 28-02-2023 15:58:00

(vi) ایک بچت کی رقم مسلسل طور پر ہر سال 8% سود مرکب ادا کرتی ہے ۔ اس کے علاوہ کسی اور سرمایہ کاری سے حاصل ہونے والی آمدنی میں سالانہ کی شرح سے مسلسل رقم ₹ 400 جمع ہوجاتی ہے۔

2. فرض کریں کہ ایک کروی بارش کا قطرہ اس کے سطح کے رقبے کے متناسب شرح سے بخارات بن جاتا ہے۔ بارش کے قطرے کے نصف قطر کی تبدیلی کی شرح کو شامل کر کے ایک تفرقی مساوات کی تشکیل کریں۔

10.4.2 ہندسی مسائل سے تفرقی مساوات کی تشکیل

(Formation of Differential Equations from Geometrical Problems)

چند مستقلوں سے پیمائش کئے گئے تفاعلات کے ایک خاندان کو دیئے جانے پر ، اس طرح کے مستقلوں کو خارج کرکے ایک تفرقی مساوات قائم کی جاسکتی ہے۔مثال کے طور پر مستقل A اور B کا خاتمہ $y = \mathrm{A}\,e^{x} + \mathrm{B}\,e^{-x}$ ، سے ایک تفرقی مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$ حاصل ہوتا ہے۔

منحنی خطوط خاندان کے ایک مساوات پر غور کریں، جس میں n اختیاری مستقل موجود ہوں، ان مستقلوں کو نہ رکھنے والے مساوات کی تشکیل کے لئے، آیئے ہم ذیل میں آگے بڑھیں۔

دی گئی مساوات کو حسب مُراد لگاتار n مترتیب تفرق کریں، n تفرقی مساوات حاصل کریں۔پھر دی گئی n مساوات سے بنی $(n+1)$ مساوات سے اور نئے حاصل کردہ مساوات جس میں n مسلسل تفرق سے پیدا ہونے والی مساوات میں سے اختیاری مستقلوں کو خارج کریں۔ خاتمے کا نتیجہ مطلوبہ تفرقی مساوات فراہم کرتا ہے۔جس میں لازمی طور پر n ترتیب کا مشتق ہونا ضروری ہے۔

مثال 10.2

مبداء سے گزرنے والے تمام خطوط مستقیم کے لئے تفرقی مساوات معلوم کریں۔

حل

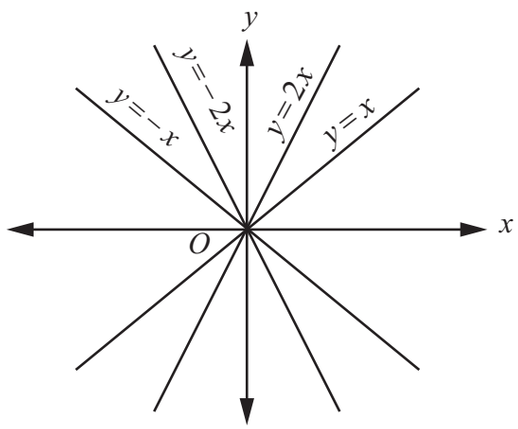
خطوط مستقیم کا خاندان جو مبداء $y = mx$ سے گزرتا ہے۔ جہاں، m اختیاری مستقل ہے۔ ... (1)

x کے لحاظ سے دونوں طرف تفریق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{dy}{dx} = m \quad \ldots (2)$$

مساوات (1) اور (2) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $y = x\frac{dy}{dx}$ یہ مطلوبہ تفرقی مساوات ہے۔

مشاہدہ کریں کہ دی گئی مساوات $y = mx$ میں صرف ایک اختیاری مستقل ہے۔ اور اس لئے ہمیں ترتیب ایک کا تفرقی مساوات حاصل ہوتا ہے۔



خاکہ 10.1

مثال 10.3

مساوات $y = \mathrm{A}\cos x + \mathrm{B}\sin x$ سے اختیاری مستقلات A اور B کو ختم کرکے تفرقی مساوات کو تشکیل دیں۔

حل

دیا گیا ہے $y = \mathrm{A}\cos x + \mathrm{B}\sin x$ ... (1)

کامیابی کے ساتھ دوبارہ (1) کو فرق کرنے پر ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{dy}{dx} = -\mathrm{A}\sin x + \mathrm{B}\cos x \quad \ldots (2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\mathrm{A}\cos x - \mathrm{B}\sin x = -(\mathrm{A}\cos x + \mathrm{B}\sin x) \quad \ldots (3)$$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 10_Differential Equation.indd 152 28-02-2023 15:58:03

(1) کو (3) میں درج کرنے پر ہمیں $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$ موزوں تفرقی مساوات کے بطور ملتا ہے۔

مثال 10.4

نقاط $(a,0)$ اور $(-a,0)$ سے گزرنے والے دائروں کے خاندان کی تفرقی مساوات کو معلوم کریں۔

حل

نقاط $(a,0)$ اور $(-a,0)$ سے گزرنے والے دائرے کا مرکز $y-$ محور پر ہے۔

فرض کرو $(0,b)$ دائرہ کا مرکز ہے تو، دائرہ کا نصف قطر $\sqrt{a^2+b^2}$ ہے۔

لہٰذا، دائروں کے خاندان کے مساوات جو نقاط $(a,0)$ اور $(-a,0)$ سے گزرتے ہیں۔وہ $x^2+(y-b)^2=a^2+b^2$، b ایک اختیاری مستقل ہے۔ ... (1)

x کے لحاظ سے (1) کے دونوں طرف فرق کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$2x+2(y-b)\frac{dy}{dx}=0\Rightarrow y-b=-\frac{x}{\frac{dy}{dx}}\Rightarrow b=\frac{x}{\frac{dy}{dx}}+y$$

b کی قیمت (1) میں درج کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$x^2+\frac{x^2}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=a^2+\left(\frac{x}{\frac{dy}{dx}}+y\right)^2$$

$$\Rightarrow x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+x^2=a^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left[x+y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^2$$

$$\Rightarrow \left(x^2-y^2-a^2\right)\frac{dy}{dx}-2xy=0\,,$$ جو مطلوبہ تفرقی مساوات ہے۔

مثال 10.5

مکافی $y^2=4ax$ کے خاندان کے لئے تفرقی مساوات کو معلوم کریں جہاں، a ایک اختیاری مستقل ہے۔

حل

خطوط مکافی کے خاندان کی مساوات $y^2=4ax$ دی گئی ہے۔ a ایک اختیاری مستقل ہے۔ ... (1)

(1) کو x کے لحاظ سے دونوں جانب فرق کرنے سے، ہمیں $2y\frac{dy}{dx}=4a \Rightarrow a=\frac{y}{2}\frac{dy}{dx}$ حاصل کرتے ہیں۔

(1) میں a کی قیمت کو درج کرنے پر اور مختصر کرنے پر ہمیں $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x}$ تفرقی مساوات کے طور پر ملتا ہے۔

مثال 10.6

تمام بیضویوں شکل کے خاندان کے لئے تفرقی مساوات معلوم کریں۔جس کا ماسکہ $x-$ محور پر اور مرکز مبداء پر ہے۔

حل

تمام بیضویوں شکل کے خاندان کی مساوات جس کا ماسکہ $x-$ محور پر اور مرکز مبداء پر ہے اس طرح کہ

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ a>b$ دی گئی ہے۔ ... (1)

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 10_Differential Equation.indd 153 28-02-2023 15:58:08

جہاں، a اور b اختیاری مستقلات ہیں۔

(1) کو x کے لحاظ سے کو فرق کرنے پر ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \frac{x}{a^2}+\frac{y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0 \quad \text{(2)....}$$

(2) کو x کے لحاظ سے فرق کرنے پر ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\left[y\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]=0 \Rightarrow \frac{1}{a^2}=-\frac{1}{b^2}\left[y\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]$$

$\frac{1}{a^2}$ قیمت مساوات (2) میں درج کرنے پر اور مختصر کرنے پر ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$-\frac{1}{b^2}\left[y\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]x+\frac{y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow xy\frac{d^2y}{dx^2}+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-y\frac{dy}{dx}=0$$

جو مطلوبہ تفرقی مساوات ہے۔

ریمارک (Remark)

ایک اختیاری مستقل کے خاتمے کے نتیجے میں پہلی ترتیب کا تفرقی مساوات برآمد ہوتا ہے۔اور یہ کہ دو اختیاری مستقلات کو ختم کرنے سے دوسرے ترتیب کی تفرقی مساوات کا باعث بنتا ہے۔

مشق 10.3

1. تفرقی مساوات معلوم کریں خاندان کے (i) سطح میں تمام غیر عمودی خطوط (ii) سطح میں تمام غیر اُفقی خطوط
2. $x^2+y^2=r^2$ دائرہ کو چھونے والی تمام خطوط مستقیم کی تفرقی مساوات تشکیل دیں۔
3. دائروں کے خاندان کی تفرقی مساوات معلوم کریں۔جو مبداء سے گزرتے ہیں اور x - محور پر اپنے مراکز رکھتے ہیں۔
4. مکافی کے خاندان جن کے لیٹس ریکٹم $4a$ والے اور جن کے محور، x - محور کے متوازی ہیں ان کی تفرقی مساوات معلوم کریں۔
5. مکافوں کے ایک خاندانی کے تفرقی مساوات معلوم کریں جس کا راس $(0,-1)$ پر اور محور y - محور کے ہم راہ ہے۔
6. ماسکہ y - محور پر اور مرکز مبداء پر رکھنے والے تمام بیضویوں کے خاندان کے تفرقی مساوات معلوم کریں۔
7. منحنی خطوط کے خاندان سے متعلق تفرقی مساوات معلوم کریں جس کی نمائندگی، مساوات $y=Ae^{8x}+Be^{-8x}$ کے ذریعہ کی جاتی ہے۔ جہاں، A اور B اختیاری مستقلات ہیں
8. $xy=ae^x+be^{-x}+x^2$ کے ذریعہ پیش کردہ منحنی خط کی تفرقی مساوات معلوم کریں۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 10_Differential Equation.indd 154 28-02-2023 15:58:11

10.5 عام تفرقی مساوات کا حل (Solution of Ordinary Differential Equations)

تعریف 10.9

ایک تفرقی مساوات کا **حل** آزاد متغیر کے معاملے میں انحصار متغیر (متغیرات) (s) کے لئے ایک اظہار ہے جو تفرقی مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔

احتیاط

(i) اس کی کوئی گارنٹی نہیں ہے کہ تفرقی مساوات کا حل ہو۔

مثال کے طور پر $\left(y'(x)\right)^2 + y^2 + 1 = 0$ کا کوئی حل نہیں ہے۔ چونکہ $\left(y'(x)\right)^2 = -\left(y^2+1\right)$ اور $y'(x)$ اسلئے حقیقی نہیں ہو سکتا ہے۔

(ii) نیز، اگر تفرقی مساوات کا حل، اگر موجود ہو تو، منفرد نہیں ہے۔

مثال کے طور پر تفاعلات $y = 2e^{2x}$ ، $y = e^{2x}$ ، $y = \sqrt{8}e^{2x}$ ایک ہی مساوات $\frac{dy}{dx} - 2y = 0.$ کے حل ہیں دراصل

$y = ce^{2x},\ c \in \mathbb{R},$ ، تمام تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} - 2y = 0.$ کے حل ہیں۔

اس طرح، ایک تفرقی مساوات کے تمام ممکنہ حل پیش کرنے کے لئے ہم ایک تفرقی مساوات کے عام حل کے تصور کو متعارف کراتے ہیں۔

تعریف 10.10 عام حل (General solution)

وہ حل جس میں اتنے اختیاری مستقلوں ہوں جتنی اس تفرقی مساوات کی ترتیب ہے اسے **عام حل** کہلاتے ہیں۔

ریمارک (Remark)

عام حل میں تمام ممکنہ حل شامل ہیں اور عام طور پر اختیاری مستقلیں (عام تفرقی مساوات کی صورت میں) یا اختیاری تفاعل (خاص تفرقی مساوات کی صورت میں) شامل ہیں

تعریف 10.11 مخصوص حل (Particular solution)

اگر ہم تفرقی مساوات کے عام حل میں اختیاری مستقلات کو مخصوص قیمتیں دیتے ہیں تو نتیجہ حل کو ایک مخصوص حل کہا جاتا ہے۔

ریمارک (Remark)

(i) اکثر ہم اضافی شرائط دے کر تفرقی مساوات کا مخصوص حل (خاص حل) تلاش کرتے ہیں۔

(ii) $y' = f(x, y)$ پہلی ترتیب کے تفرقی مساوات عام حل xy - منحنی خطوط کے ایک پیمائشی خاندان کی نمائندگی کرتا ہے۔

مثال کے طور پر، $y = ce^{2x},\ c \in \mathbb{R},$ تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} - 2y = 0.$ کا عام حل ہے۔

مثال کے طور پر ہم پہلے ہی دیکھ چکے ہیں کہ $y = a\cos x + b\sin x$ ، $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ دوسرے ترتیب کی تفرقی مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔ چونکہ اس میں دو اختیاری مستقلات شامل ہیں، یہ $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$. کا عام حل ہے۔ $a = 1$ ، $b = 0$ عام حل میں درج کرنے پر ہمیں $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ تفرقی مساوات کا مخصوص حل $y = \cos x$ حاصل ہوتا ہے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 10_Differential Equation.indd 155 28-02-2023 15:58:14

استعمال میں، اختیاری مستقلات کو ختم کرکے تفرقی مساوات پیدا نہیں ہوتی ہے۔وہ اکثر انجینئرنگ، کے تمام شعبوں سائنس اور یہاں، تک کہ سماجی سائنس میں بہت سے طبعیاتی مسئلات کی تحقیقات کرتے ہوئے پیدا ہوتے ہیں۔ زیادہ تر تفرقی مساوات متغیرات پر کچھ شرائط کے ساتھ ہوتے ہیں۔ تاکہ دی گئی شرائط کو پورا کرتے ہوئے منفرد حل نکالا جاسکے۔

مثال 10.7

بتائیے کہ $x^2 + y^2 = r^2$ جہاں، r مستقل ہے۔ وہی $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ تفرقی مساوات کا حل ہے۔

حل

دیا گیا ہے کہ $x^2 + y^2 = r^2$ ، $r \in \mathbb{R}$ .. (1)

دی گئی مساوات میں ٹھیک ایک اختیاری مستقل موجود ہے۔

لہٰذا، ہمیں دی گئی مساوات کو ایک بار فرق کرنا ہوگا، (1) کو x کے کے لحاظ سے فرق کرنے پر $2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$ حاصل ہوتا ہے ۔

جس کا مطلب ہے ۔ $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

اس طرح $x^2 + y^2 = r^2$ تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ کو مطمن کرتا ہے۔

لہٰذا، $x^2 + y^2 = r^2$ تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ کا حل ہے۔

مثال 10.8

بتائیے کہ $y = mx + \frac{7}{m}, m \neq 0$ تفرقی مساوات $xy' + 7\frac{1}{y'} - y = 0$ کا حل ہے۔

حل

دی گئی تفاعل $y = mx + \frac{7}{m}$ جہاں، m ایک اختیاری مستقل ہے۔ ... (1)

x کے لحاظ سے مساوات (1) کے دونوں جانب فرق کرنے سے ہمیں $y' = m$ حاصل ہوتا ہے۔

y' اور y کی قدر کو دیئے گئے، تفرقی مساوات میں درج کرنے پر

ہمیں $xy' + \frac{7}{y'} - y = xm + \frac{7}{m} - mx - \frac{7}{m} = 0$ حاصل ہوتا ہے۔

لہٰذا، دی گئی تفاعل تفرقی مساوات $xy' + 7\frac{1}{y'} - y = 0$ کا حل ہے۔

مثال 10.9

بتائیے کہ $y = 2\left(x^2 - 1\right) + Ce^{-x^2}$ تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} + 2xy - 4x^3 = 0$ کا حل ہے۔

حل

دی گئی تفاعل $y = 2\left(x^2 - 1\right) + Ce^{-x^2}$ ہے جہاں، C ایک اختیاری مستقل ہے۔ ...(1)

x کے لحاظ سے (1) کے دونوں جانب فرق کرنے پر $\frac{dy}{dx} = 4x - 2xCe^{-x^2}$، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$\frac{dy}{dx}$ اور y کی قدر دیئے گئے تفرقی مساوات میں درج کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 10_Differential Equation.indd 156 28-02-2023 15:58:18

$$\frac{dy}{dx}+2xy-4x^3 = 4x-2xCe^{-x^2}+2x\left[2\left(x^2-1\right)+Ce^{-x^2}\right]-4x^3 = 0$$

لہٰذا، دی گئی تفاعل، تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx}+2xy-4x^3=0$ کا حل ہے۔

مثال 10.10

بتائیے کہ $y=a\cos(\log x)+b\sin\left(\log x\right), x>0$ تفرقی مساوات $x^2y''+xy'+y=0$ کا حل ہے۔

حل

دی گئی تفاعل $y=a\cos(\log x)+b\sin\left(\log x\right)$ ...(1)

جہاں، a,b دواختیاری مستقلات ہیں۔ ان دونوں اختیاری مستقلات کو ختم کرنے کے لئے ہمیں دیئے گئے تفاعل کو دوبار تسلسل کے ساتھ فرق کرنا پڑے گا۔

x کے لحاظ سے (1) کو فرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$y'=-a\sin\left(\log x\right)\cdot\frac{1}{x}+b\cos\left(\log x\right)\cdot\frac{1}{x} \Rightarrow xy'=-a\sin\left(\log x\right)+b\cos\left(\log x\right).$$

ایک بار پھر x کے لحاظ اس کو فرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$xy''+y'=-a\cos\left(\log x\right)\cdot\frac{1}{x}-b\sin\left(\log x\right)\cdot\frac{1}{x} \Rightarrow x^2y''+xy'+y=0.$$

لہٰذا، $y=a\cos(\log x)+b\sin\left(\log x\right)$ دیئے گئے تفرقی مساوات کا حل ہے۔

مشق 10.4

1. یہ بتائیے کہ مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک کا اظہار اس کے مقابل تفرقی مساوات کا حل ہے۔

   $y=2x^2; xy'=2y$ (i)

   $y=ae^x+be^{-x}; y''-y=0$ (ii)

2. m کی قیمت معلوم کریں اس طرح کہ $y=e^{mx}$ دیئے گئے تفرقی مساوات کا حل ہو۔

   $y'+2y=0$ (i) $y''-5y'+6y=0$ (ii)

3. کسی بھی نقطہ پر ایک منحنی کے مماس کا ڈھلوان اس نقطہ پر اس کے طولی مختص کے مقلوب کا چارگناہ زیادہ ہے۔ وہ منحنی نقطہ (2,5) سے گزرتی ہے۔ منحنی کی مساوات معلوم کریں۔

4. بتائیے کہ $y=e^{-x}+mx+n$ تفرقی مساوات $e^x\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)-1=0$ کا حل ہے۔

5. بتائیے $y=ax+\frac{b}{x}, x\neq 0$ تفرقی مساوات $x^2y''+xy'-y=0$ کا حل ہے۔

6. بتائیے کہ $y=ae^{-3x}+b$ جہاں، a اور b اختیاری مستقلات ہیں، تفرقی مساوات $\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}=0$ کا حل ہے۔

7. بتائیے کہ منحنی خطوط $y^2=2a\left(x+a^{\frac{2}{3}}\right)$ کے خاندان کی نمائندگی کرنے والی تفرقی مساوات جہاں، a ایک مثبت پیمائشی ہے۔

   $\left(y^2-2xy\frac{dy}{dx}\right)^3=8\left(y\frac{dy}{dx}\right)^5$ ہے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 10_Differential Equation.indd 157 28-02-2023 15:58:23

8. بتائیے کہ $y = a\cos bx$ تفرقی مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} + b^2y = 0$ کا حل ہے۔

اب ہم پہلے ترتیب (ترتیب) اور پہلی درجہ (ڈگری) کے چند قسم کے تفرقی مساوات کو حل کرنے کے کچھ معیاری طریقوں پر تبادلہ خیال کرتے ہیں۔

10.6 پہلے ترتیب اور پہلے درجہ والی تفرقی مساوات کا حل

(Solution of First Order and First Degree Differential Equations)

10.6.1 متغیروں کا علیحدہ پذیر طریقہ (Variables Separable Method)

تفرقی مساوات کو حل کرنے میں، متغیرات کی علیحدگی ابتدا میں لیبنتز نے متعارف کروائی تھی اور بعد میں اسے 1694 سال میں جان برنولی نے تشکیل دی تھی۔

پہلے ترتیب والا تفرقی مساوات علیحدہ ہے اگر وہ اس طرح $h(y)y' = g(x)$ لکھا جاتا ہے۔جہاں، بائیں جانب y' اور تفاعل y کا حاصل ضرب ہے اور دائیں جانب x کا تفاعل ہے۔ اس شکل میں علیٰحدہ پذیر تفرقی مساوات کو دوبارہ لکھنا متغیرات کو الگ کرنے کا طریقہ کہلاتا ہے۔ اگر مساوات میں تغیرات کو الگ کیا جاسکے تو پہلے ترتیب کی تفرقی مساوات کا حل تلاش کرنا آسان ہوگا۔

$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$ کی شکل والی مساوات کو **علیحدہ متغیر والی** مساوات یا صرف **علیحدہ پذیر** مساوات کہلاتا ہے۔

دی گئی تفرقی مساوات کو دوبارہ لکھیں۔ $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = -\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy$ ...(1)

(1) کے دونوں اطراف کے تکملہ سے دیئے گئے تفرقی مساوات $\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = -\int\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy + C$ عام حل برآمد ہوتا ہے بطور جہاں،

C ایک اختیاری مستقل ہے۔

ریمارک (Remark)

1. دونوں طرف اختیاری مستقلات کو شامل کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔کیونکہ دونوں اختیاری مستقل ایک ہی اختیاری مستقل طور پر ایک ساتھ مل جاتے ہیں۔
2. اس اختیاری مستقل کے ساتھ ایک حل تفرقی مساوات کا عام حل ہے۔

تفرقی مساوات کو حل کرنے کو "ایک تفرقی مساوات کو تکمل" کرنے کے طور پر بھی کہا جاتا ہے۔چونکہ تفرقی مساوات کا حل تلاش کرنے کے عمل میں تکمل شامل ہوتا ہے۔

مثال 10.11

حل کریں۔ $\left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx} = 1+y^2$

حل

دیا گیا ہے۔ $\left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx} = 1+y^2$ ...(1)

دی گئی مساوات متغیرات کی علیحدہ پذیر شکل میں لکھی گئی ہے۔

$$\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2} \quad \text{...(2)}$$

(2) کے دونوں طرف تکمل کرنے پر ہمیں $\tan^{-1}y = \tan^{-1}x + C$ حاصل ہوتا ہے۔ ...(3)

لیکن $\tan^{-1}y - \tan^{-1}x = \tan^{-1}\left(\frac{y-x}{1+xy}\right)$ ...(4)

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 10_Differential Equation.indd 158 28-02-2023 15:58:26

(4) کو (3) میں استعمال کرنے سے $\tan^{-1}\left(\frac{y-x}{1+xy}\right)=C$، جس کا مطلب کہیے، $\frac{y-x}{1+xy}=\tan C=a$ ہوتا ہے۔

اس طرح $y-x=a(1+xy)$ مطلوبہ مساوات دیتا ہے۔

مثال 10.12

$\left(1+x^3\right)dy-x^2ydx=0$ کا خاص حل معلوم کریں جو $y(1)=2$ صورت حال کو پورا کرے۔

حل

$(1+x^3)dy-x^2ydx=0$ دیا گیا ہے۔

اُوپر کی مساوات $\frac{dy}{y}-\frac{x^2}{1+x^3}dx=0$ کو اس طرح لکھا گیا ہے۔

دونوں جانب تکمل کرنے پر $\log y-\frac{1}{3}\log(1+x^3)=C_1$ حاصل ہوتا ہے۔جس کا مطلب

$$3\log y-\log(1+x^3)=\log C$$

اس طرح، $$\log(1+x^3)+\log C=3\log y$$

حل کرنے پر $$\log C(1+x^3)=\log y^3$$

لہٰذا، $y^3=C(1+x^3)$ دیئے ہوئے تفرقی مساوات کا عام حل پیش کرتا ہے۔ یہ دیا جاتا ہے کہ جب $x=1,\ y=2$ پھر

$2^3=C(1+1)\implies C=4$ اور اس وجہ سے خاص حل $y^3=4(1+x^3)$ ہے۔

10.6.2 متبادل کا طریقہ (Substitution Method)

فرض کرو تفرقی مساوات کی شکل $\frac{dy}{dx}=f(ax+by+c)$ اس طرح ہے

(i) اگر $a\neq 0$ اور $b\neq 0$ تو متبادل $ax+by+c=z$ دی گئی مساوات کو متغیرات کی علیٰحدہ پذیر کی شکل میں بدل دیتا ہے۔

(ii) اگر $a=0$ یا $b=0$ تو تفرقی مساوات پہلے سے ہی علیحدہ پذیر کی شکل میں ہے۔

مثال 10.13

حل کریں ۔ $y'=\sin^2\left(x-y+1\right)$

حل

$y'=\sin^2\left(x-y+1\right)$ دیا گیا ہے۔

$z=x-y+1$ ڈالنے پر $\frac{dz}{dx}=1-\frac{dy}{dx}$ ہے۔

اس طرح دی گئی مساوات $1-\frac{dz}{dx}=\sin^2 z$ ہو مختصر ہو جاتی ہے۔

یعنی، $$\frac{dz}{dx}=1-\sin^2 z=\cos^2 z$$

متغیر کو الگ کرنے پر $\frac{dz}{\cos^2 z}=dx$ (یا) $\sec^2 z\,dz=dx$

تکمل کرنے پر $\tan z=x+C$، حاصل ہوتا ہے۔ (یا) $\tan\left(x-y+1\right)=x+C$.

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 10_Differential Equation.indd 159 28-02-2023 15:58:33

مثال 10.14

حل کریں $\frac{dy}{dx} = \sqrt{4x+2y-1}$

حل

$z = 4x+2y-1$ لینے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{dz}{dx} = 4+2\frac{dy}{dx} = 4+2\sqrt{z}$$

لہٰذا، $\frac{dz}{4+2\sqrt{z}} = dx$

تکمل کرنے پر، $\int\frac{dz}{4+2\sqrt{z}} = x+C$

$z = u^2$ لینے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\int\frac{dz}{4+2\sqrt{z}} = \int\frac{udu}{u+2} = u-2\log|u+2|+C,$$

یا $\sqrt{z}-2\log\left|\sqrt{z}+2\right| = x+C$

جس سے $z = 4x+2y-1$ کو درج کرنے پر ہمیں عام حل حاصل ہوتا ہے۔

$$\sqrt{4x+2y-1}-2\log\left|\sqrt{4x+2y-1}+2\right| = x+C$$

مثال 10.15

حل کریں۔ $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y+5}{2(x-y)+7}$

حل

$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y+5}{2(x-y)+7}$ دیا گیا ہے۔

$z = x-y$ لینے پر

$$\frac{dz}{dx} = 1-\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 1-\frac{dz}{dx}$$

اس لئے دیا گیا مساوات مختصر ہو جاتا ہے۔

$$1-\frac{dz}{dx} = \frac{z+5}{2z+7}$$

$$\frac{dz}{dx} = 1-\frac{z+5}{2z+7}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z+2}{2z+7}$$

متغیرات کو علیحدہ کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{2z+7}{z+2}dz = dx$$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 10_Differential Equation.indd 160 28-02-2023 15:58:37

$$\frac{2(z+2)+3}{(z+2)}dz = dx$$

$$\left(2+\frac{3}{z+2}\right)dz = dx$$

دونوں جانب تکمل کرنے پر ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$2z+3\log|z+2| = x+C$$

یعنی، $2(x-y)+3\log|x-y+2| = x+C$

مثال 10.16

حل کریں $\frac{dy}{dx} = (3x+y+4)^2$

حل

دیئے ہوئے تفرقی مساوات کو حل کرنے کے لئے ہم متبادل $3x+y+4 = z$ لیتے ہیں۔

x کے لحاظ میں فرق کرنے پر ہم $\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 3$ حاصل کرتے ہیں۔ تو دی گئی تفرقی مساوات $\frac{dz}{dx} = z^2+3$ بن جاتی ہے۔

اس مساوات میں متغیرات علیحدہ ہوجاتے ہیں۔ تو متغیر کو علیحدہ کرنے اور تکمل کرنے سے ،ہمیں دیئے گئے تفرقی مساوات کا عام حل مل جاتا ہے۔بطور $\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{3x+y+4}{\sqrt{3}}\right) = x+C$

مشق 10.5

1. اگر F ایک مستقل طاقت ہے جو بڑے پیمانے پر کمیت M کے آٹوموبائل کی موٹر سے تیار ہوتا ہے۔ تو اس کی رفتار V $M\frac{dV}{dt} = F-kV$ کے ذریعہ دی جاتی ہے۔ جہاں، k ایک مستقل ہے V کو t کے لحاظ میں بیان کریں دیا گیا ہے۔
   $V=0$ جب کہ $t=0$
2. عمودی طور پر گرنے والے پیراشوٹ کی رفتار v ، مساوات $v\frac{dv}{dx} = g\left(1-\frac{v^2}{k^2}\right)$، کو پوراکرتی ہے۔جہاں، g اور k مستقلات ہیں۔ اگر v اور x دونوں ابتدا میں صفر ہو تو x کے لحاظ سے v معلوم کریں۔
3. منحنی کی مساوات معلوم کریں جس کا میلان $\frac{y-1}{x^2+x}$ ہے اور جو نقطہ $(1,0)$ سے گزرتی ہے۔
4. مندرجہ ذیل تفرقی مساوات کو حل کریں۔

(i) $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$

(ii) $ydx+\left(1+x^2\right)\tan^{-1}x\,dy = 0$

(iii) $\sin\frac{dy}{dx} = a,\ y(0)=1$

(iv) $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}+x^3e^y$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 10_Differential Equation.indd 161 28-02-2023 15:58:40

(v) $\left(e^{y}+1\right)\cos x\ dx+e^{y}\sin x\ dy=0$

(vi) $\left(ydx-xdy\right)\cot\left(\frac{x}{y}\right)=ny^{2}dx$

(vii) $\frac{dy}{dx}-x\sqrt{25-x^{2}}=0$

(viii) $x\cos y\ dy=e^{x}\left(x\log x+1\right)dx$

(ix) $\tan y\frac{dy}{dx}=\cos\left(x+y\right)+\cos\left(x-y\right)$

(x) $\frac{dy}{dx}=\tan^{2}\left(x+y\right)$

10.6.3 ہم جنسی شکل یا ہم جنسی تفرقی مساوات
(Homogeneous Form or Homogeneous Differential Equation)

تعریف 10.12 n درجہ والی ہم جنسی تفاعل (Homogeneous Function of degree n)

ایک تفاعل $f(x,y)$ کو متغیرات x اور y میں ڈگری (درجہ) n کا ایک ہم جنسی تفاعل کہا جاتا ہے۔اگر، کچھ $n\in\mathbb{R}$ کے لئے تمام مناسب x,y اور t کے لئے $f(tx,ty)=t^{n}f(x,y)$ اسے **اُیلر ہم جنسی** کے نام سے جانا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر،

(i) $f(x,y)=6x^{2}+2xy+4y^{2}$ x اور y میں، درجہ دو، والا ایک ہم جنسی تفاعل ہے۔

(ii) $f(x,y)=x^{3}+\left(\sin x\right)e^{y}$ مگر ہم جنسی تفاعل نہیں ہے۔

اگر $f(x,y)$ درجہ صفر کا ایک ہم جنسی تفاعل ہے تو پھر g ایک تفاعل موجود ہے اس طرح کہ $f(x,y)$ ہمیشہ $g\left(\frac{x}{y}\right)$ کی شکل یا $g\left(\frac{y}{x}\right)$ میں ظاہر کیا جاتا ہے۔

تعریف 10.13 ہم جنسی تفرقی مساوات (Homogeneous Differential Equation)

ایک عام مساوات کو **ہم جنسی شکل** میں ہے کہا جاتا ہے اگر تفرقی مساوات کو اس طرح لکھا جائے $\frac{dy}{dx}=g\left(\frac{y}{x}\right)$

احتیاط

لفظ "ہم جنسی" جو تعریف 10.7 اور تعریف 10.12 میں استعمال کئے گئے ہیں۔ دونوں ایک دوسرے سے الگ ہیں۔

ریمارک (Remark)

(i) تفرقی مساوات $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ (تفرقی شکل میں) **ہم جنسی** کہلاتی ہے۔اگر M اور N **یکساں درجہ کے ہم جنسی تفاعلات** ہیں۔

(ii) مذکورہ بالا مساوات اس طرح بھی $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ لکھی جاسکتی ہے (مشتق شکل میں)جہاں، $f(x,y)=-M(x,y)/N(x,y)$ صاف طور پر صفر درجہ والی ہم جنسی ہے۔

مثال کے طور پر،

(1) $\left(x^{2}-3y^{2}\right)dx+2xy\ dy=0$ تفرقی مساوات پر غور کریں دی گئی مساوات کو $\frac{dy}{dx}=\frac{3y^{2}-x^{2}}{2xy}=\frac{3}{2}\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y/x}\right)$ دوبارہ لکھا گیا ہے اس طرح $\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y/x}\right)=g\left(\frac{y}{x}\right)$. دی گئی مساوات کا اظہار اس طرح ہوتا ہے۔ لہذا، $\left(x^{2}-3y^{2}\right)dx+2xy\ dy=0$ ایک ہم جنسی تفرقی مساوات ہے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 10_Differential Equation.indd 162 28-02-2023 15:58:45

(2) تاہم تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx}=\frac{x^3+y^2}{2x^3-xy^2}$ ہم جنسی نہیں ہے۔(تصدیق کریں!)

ایک ہم جنسی تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx}=g\left(\frac{y}{x}\right)$ کا حل معلوم کرنے کے لئے متبادل $v=\frac{y}{x}$ پر غور کریں۔ پھر $y=xv$ اور $\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$ اس طرح دی گئی تفرقی مساوات $x\frac{dv}{dx}=f(v)-v$ بن جاتی ہے۔ جو متغیروں کا علیحدہ پذیر طریقہ استعمال کرکے حل کیا جاتا ہے۔یہ مندرجہ ذیل نتیجہ کی طرف جاتا ہے۔

مسئلہ 10.1

اگر $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ ایک ہم جنسی مساوات ہے تو، متغیر $y=vx$, کی تبدیلی سے متغیرات x اور v میں متغیروں کی علیحدہ مساوات میں تبدیل ہوجاتی ہے۔

مثال 10.17

حل کریں $\left(x^2-3y^2\right)dx+2xydy=0$

حل

ہم جانتے ہیں کہ دی گئی مساوات ہم جنسی ہے۔

اب دی گئی مساوات کو دوبارہ اس طرح لکھ سکتے ہیں $\frac{dy}{dx}=\frac{3y}{2x}-\frac{x}{2y}$

$y=vx$ لینے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $v+x\frac{dv}{dx}=\frac{3v}{2}-\frac{1}{2v}$ (یا) $x\frac{dv}{dx}=\frac{v^2-1}{2v}$

متغیرات کو علیحدہ کرنے پر ہم حاصل کرتے ہیں۔ $\frac{2vdv}{v^2-1}=\frac{dx}{x}$

تکمیل کرنے پر ہم حاصل کرتے ہیں $\log\left|v^2-1\right|=\log|x|+\log|C|$

لہٰذا، $\left|v^2-1\right|=|Cx|$ جہاں، C ایک اختیاری مستقل ہے۔

اب v کو $\frac{y}{x}$ میں بدلنے پر ہم $\left|\frac{y^2}{x^2}-1\right|=|Cx|$ حاصل کرتے ہیں۔

پھر ہمیں ملتا ہے۔ $\left|y^2-x^2\right|=\left|Cx^3\right|$

لہٰذا، $y^2-x^2=kx^3$ یا $\pm Cx^3=y^2-x^2$ عام حل دیتا ہے۔ ■

مثال 10.18

حل کریں $\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx-xdy=0,\quad y(1)=0$

حل

دی گئی تفرقی مساوات ہم جنسی ہے (تصدیق کریں)

اب دی گئی مساوات کو تفرقی شکل میں لکھنے پر $\frac{dy}{dx}=\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}$

چونکہ x کی ابتدائی قیمت 1 ہے۔ہم $x>0$ پر غور کرتے ہیں اور $x=\sqrt{x^2}$ لیتے ہیں۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 10_Differential Equation.indd 163 28-02-2023 15:58:50

$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$ ہمیں حاصل ہوتا ہے

$y=vx$ لیں، پھر $v+x\frac{dv}{dx}=v+\sqrt{1+v^2}$ ، جو بن جاتا ہے۔ $x\frac{dv}{dx}=\sqrt{1+v^2}$

متغیروں کو علیحدہ کرنے پر، $\frac{dv}{\sqrt{v^2+1}}=\frac{dx}{x}$ حاصل ہوتا ہے۔

تکمیل کرنے پر $\log\left|v+\sqrt{v^2+1}\right|=\log|x|+\log|C|$ یا $v+\sqrt{v^2+1}=xC$ پھر ہم حاصل کرتے ہیں

v میں $\frac{y}{x}$ تبدیل کرنے پر ہم حاصل کرتے ہیں۔ $\frac{y}{x}+\sqrt{\frac{y^2}{x^2}+1}=Cx$ (یا) $y+\sqrt{x^2+y^2}=Cx^2$ یہ دیئے ہوئے تفرقی مساوات کا عام حل ہے۔

C کی قیمت معلوم کرنے کے لئے ہم دی ہوئی شرط $y=0$ جب $x=1$ ہوتو، لیتے ہیں ۔ تو $C=1$ حاصل ہوتا ہے۔

اس طرح $y+\sqrt{x^2+y^2}=x^2$ دیئے گئے تفرقی مساوات کا خاص حل ہے۔

مثال 10.19

حل کریں $(2x+3y)\,dx+(y-x)\,dy=0$

حل

$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+3y}{x-y}$ دی گئی مساوات کو اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

یہ ایک ہم جنسی مساوات ہے۔

$y=vx$ لینے پر ہم $v+x\frac{dv}{dx}=\frac{2+3v}{1-v}$ حاصل کرتے ہیں۔

اسی طرح، $-\frac{1}{2}\left[\frac{2v+2}{v^2+2v+2}-\frac{4}{(v+1)^2+1}\right]dv=\frac{dx}{x}$ (یا) $\frac{1-v}{(1+v)^2+1}dv=\frac{dx}{x}$ (یا) $x\frac{dv}{dx}=\frac{2+2v+v^2}{1-v}$

دونوں جانب تکمیل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $-\frac{1}{2}\log\left|v^2+2v+2\right|+2\tan^{-1}(v+1)=\log|x|+\log|C|$

(یا) $\log\left|v^2+2v+2\right|-4\tan^{-1}(v+1)=-2\log|x|-2\log|C|$

(یا) $\log\left|v^2+2v+2\right|+\log|x|^2-4\tan^{-1}(v+1)=-2\log|C|$

(یا) $\log\left|(v^2+2v+2)x^2\right|-4\tan^{-1}(v+1)=-2\log|C|$

اب v کو $\frac{y}{x}$ میں تبدیل کرنے پر ہمیں $\log\left|y^2+2xy+2x^2\right|-4\tan^{-1}\left(\frac{x+y}{x}\right)=k$ حاصل ہوتا ہے۔ جہاں،

$k=-2\log|C|$ مطلوبہ حل دیتا ہے ۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 10_Differential Equation.indd 164 28-02-2023 15:58:55

مثال 10.20

$y^2 + x^2 \frac{dy}{dx} = xy \frac{dy}{dx}$ حل کریں

حل

$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy - x^2}$ دی گئی مساوات کو اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

یہ ایک ہم جنسی تفرقی مساوات ہے۔

$y = vx$ سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $x \frac{dv}{dx} = \frac{v}{v-1}$

متغیروں کو علیحدہ کرنے پر $\frac{v-1}{v} dv = \frac{dx}{x}$

تکمیل کرنے پر $v - \log|v| = \log|x| + \log|C|$ (یا) $v = \log|vxC|$، حاصل کرتے ہیں۔

v کو $\frac{y}{x}$ میں تبدیل کرنے پر $y = ke^{y/x}$ (یا) $|Cy| = e^{y/x}$ (یا) $\frac{y}{x} = \log|Cy|$ ہمیں ملتا ہے۔ (کیسے!) جو مطلوبہ حل ہے۔ ■

مثال 10.21

حل کریں $\left(1 + 2e^{x/y}\right) dx + 2e^{x/y} \left(1 - \frac{x}{y}\right) dy = 0$

حل

$\frac{dx}{dy} = \frac{\left(\frac{x}{y} - 1\right) 2e^{x/y}}{1 + 2e^{x/y}} = g\left(\frac{x}{y}\right)$ دی گئی مساوات کو اس طرح لکھ سکتے ہیں۔ ...(1)

مساوات (1) میں $\frac{x}{y}$ کی ظاہری شکل سے پتہ چلتا ہے کہ $x = vy$ مناسب متبادل ہے۔

$x = vy$ لینے پر ہمیں $y \frac{dv}{dy} = -\frac{2e^v + v}{1 + 2e^v}$ حاصل ہوتا ہے۔

متغیروں کو علحیدہ کرنے پر، ہمیں $\frac{1 + 2e^v}{v + 2e^v} dv = -\frac{dy}{y}$ حاصل ہوتا ہے۔

تکمیل کرنے پر ہم حاصل کرتے ہیں۔

$\log|2e^v + v| = -\log|y| + \log|C|$ (یا) $\log|2ye^v + vy| = \log|C|$ (یا) $2ye^v + vy = \pm C$.

v کو $\frac{x}{y}$ بدلنے پر $2ye^{x/y} + x = k$ ہمیں ملتا ہے۔ جہاں، $k = \pm C$، جس سے مطلوبہ حل ملتا ہے۔ ■

مشق 10.6

درج ذیل تفرقی مساواتوں کو حل کریں:

1. $\left[x + y\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right] dx = x\cos\left(\frac{y}{x}\right) dy$

2. $\left(x^3 + y^3\right) dy - x^2 y dx = 0$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 10_Differential Equation.indd 165 28-02-2023 15:59:00

3. $ye^{\frac{x}{y}}dx=\left(xe^{\frac{x}{y}}+y\right)dy$

4. $2xydx+\left(x^2+2y^2\right)dy=0$

5. $\left(y^2-2xy\right)dx=\left(x^2-2xy\right)dy$

6. $x\frac{dy}{dx}=y-x\cos^2\left(\frac{y}{x}\right)$

7. $\left(1+3e^{\frac{y}{x}}\right)dy+3e^{\frac{y}{x}}\left(1-\frac{y}{x}\right)dx=0$، جب $y=0$ $x=1$ دیا گیا ہے۔

8. $\left(x^2+y^2\right)dy=xy\,dx$، $y\left(x_0\right)=e$ اور $y(1)=1$ دیا گیا ہے۔ x_0 کی قیمت معلوم کریں۔

10.7 اول درجہ کی خطی تفرقی مساواتیں (First Order Linear Differential Equations)

ایک اول درجہ کی خطی تفرقی مساوات کی صورت

$$\frac{dy}{dx}+Py=Q \quad \text{....(1)}$$

جہاں، P اور Q صرف x کے تفاعل ہیں۔

یہاں، y کی کوئی مضروب اور اس کے مشتق $\frac{dy}{dx}$ نہیں پائے جاتے ہیں اور انحصار متغیر y اور اس کا مشتق آزاد متغیر x کے لحاظ میں صرف اول درجہ میں ہوتا ہے۔

(1) کو تکمیل کے لئے $\frac{dy}{dx}+Py=0$، ہم جنسی مساوات پر غور کریں۔ ....(2)

مساوات (2) کو مندرجہ ذیل طور پر تکمیل کیا جاسکتا ہے۔

$\frac{dy}{y}=-Pdx$ متغیروں کی علیحدہ پذیر ہے

تکمیل کرنے پر ہمیں $ye^{\int Pdx}=C$ حاصل ہوتا ہے۔

اب $e^{\int Pdx}\frac{dy}{dx}+y.Pe^{\int Pdx}=\frac{d}{dx}\left(ye^{\int Pdx}\right)$

$=e^{\int Pdx}\left(\frac{dy}{dx}+Py\right)=Qe^{\int Pdx}$ ((1) کو استعمال کرکے) ....(3)

(3) کے دونوں جانب x کے لحاظ میں تکمیل کرنے پر ہمیں دیئے گئے تفرقی مساوات کا حل اس طرح حاصل ہوتا ہے۔

$$ye^{\int Pdx}=\int Qe^{\int Pdx}dx+C\,.$$

یہاں، $e^{\int Pdx}$ کو (1) کا تکملی **جزوضربی** کہتے ہیں۔

ریمارک (Remark)

1. خطی تفرقی مساوات کا حل

$y\times(I.F)=\int Q(I.F)dx+C$ یہاں، C اختیاری مستقل ہے۔

2. تکمیلی جزو ضربی $e^{\int Pdx}$ میں P ضریب ہے y کے تفرقی مساوات میں بشرطیکہ $\frac{dy}{dx}$ کا ضریب اکائی ہو۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 10_Differential Equation.indd 166 28-02-2023 15:59:05

3. ایک اول درجہ کی تفرقی مساوات کی صورت $\frac{dx}{dy}+Px=Q$ جہاں، P اور Q صرف y کے تفاعل ہیں۔یہاں، x کی کو مصنوع اور اس کے مشتق $\frac{dx}{dy}$ نہیں پائے جاتے ہیں اور انحصار متغیر x اس کا مشتق آزاد متغیر y کے لحاظ سے صرف اول درجہ میں ہوتا ہے۔

اس معاملے میں حل $xe^{\int Pdy}=\int Qe^{\int Pdy}dy+C$ اس طرح دیا جاتا ہے۔

مثال 10.22

$\frac{dy}{dx}+2y=e^{-x}$ حل کریں۔

حل

$\frac{dy}{dx}+2y=e^{-x}$ دیا گیا ہے۔ ...(1)

یہ ایک خطی تفرقی مساوات ہے۔

یہاں، $Q=e^{-x}\ ;P=2$

$$\int Pdx=\int 2dx=2x$$

اس طرح، $\text{I.F}.=e^{\int Pdx}=e^{2x}$

لہٰذا، (1) کا حل $ye^{\int Pdx}=\int Qe^{\int Pdx}dx+C$ ہے۔

یعنی، $y=e^{-x}+Ce^{-2x}$ یا $ye^{2x}=e^{x}+C$ یا $ye^{2x}=\int e^{-x}e^{2x}dx+C$ مطلوبہ حل ہے۔

مثال 10.23

$\left[y\left(1-x\tan x\right)+x^2\cos x\right]dx-xdy=0$ حل کریں۔

حل

دی گئی مساوات کو دوبارہ اسی طرح لکھا جاسکتا ہے۔ $\frac{dy}{dx}+\frac{\left(x\tan x-1\right)}{x}y=x\cos x$

یہ ایک خطی تفرقی مساوات ہے۔یہاں، $Q=x\cos x\ ;P=\frac{\left(x\tan x-1\right)}{x}$

$$\int Pdx=\int\frac{\left(x\tan x-1\right)}{x}dx=-\log|\cos x|-\log|x|=-\log|x\cos x|=\log\frac{1}{|x\cos x|}$$

اس طرح، $\text{I}.\text{F}=e^{\int Pdx}=e^{\log\frac{1}{|x\cos x|}}=\frac{1}{x\cos x}$

لہٰذا، حل یہ ہے۔ $ye^{\int Pdx}=\int Qe^{\int Pdx}dx+C$

یعنی، $y\frac{1}{x\cos x}=\int\left(x\cos x\right)\frac{1}{x\cos x}dx+C$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 10_Differential Equation.indd 167 28-02-2023 15:59:09

$$y\frac{1}{x\cos x} = x + C$$ (یا)

$y = x^2\cos x + Cx\cos x$ (یا) یہ مطلوبہ حل ہے۔

مثال 10.24

$\frac{dy}{dx} + 2y\cot x = 3x^2\operatorname{cosec}^2 x$ حل کریں۔

حل

$\frac{dy}{dx} + 2y\cot x = 3x^2\operatorname{cosec}^2 x$ دی گئی مساوات ہے۔

یہ ایک خطی تفرقی مساوات ہے۔ یہاں، $P = 2\cot x\ ;\ Q = 3x^2\operatorname{cosec}^2 x$

$$\int P dx = \int 2\cot x dx = 2\log|\sin x| = \log|\sin x|^2 = \log\sin^2 x$$

اس طرح $\text{I.F} = e^{\int P dx} = e^{\log\sin^2 x} = \sin^2 x$

لہٰذا، حل یہ ہے۔ $ye^{\int P dx} = \int Qe^{\int P dx}dx + C$

یعنی، $y\sin^2 x = \int 3x^2\operatorname{cosec}^2 x\cdot\sin^2 x dx + C = \int 3x^2 dx + C = x^3 + C$

لہٰذا، $y\sin^2 x = x^3 + C$ مطلوبہ حل ہے۔

مثال 10.25

$\left(1+x^3\right)\frac{dy}{dx} + 6x^2y = 1 + x^2$ ۔ حل کریں۔

حل

یہاں، $\frac{dy}{dx}$ کے ضریب کو اکائی بنانے کے لئے دونوں جانب $\left(1+x^3\right)$ تقسیم کریں۔

پھر $\frac{dy}{dx} + \frac{6x^2y}{1+x^3} = \frac{1+x^2}{1+x^3}$ مساوات یہ ہے۔

یہ y میں ایک خطی تفرقی مساوات ہے۔

یہاں، $P = \frac{6x^2}{1+x^3}; Q = \frac{1+x^2}{1+x^3}$

$$\int P dx = \int\frac{6x^2}{1+x^3}dx = 2\log\left|1+x^3\right| = \log\left|1+x^3\right|^2 = \log\left(1+x^3\right)^2$$

اس طرح $\text{I.F.} = e^{\int P dx} = e^{\log\left(1+x^3\right)^2} = \left(1+x^3\right)^2$

لہٰذا، حل یہ ہے $ye^{\int P dx} = \int Qe^{\int P dx}dx + C$

یعنی، $y\left(1+x^3\right)^2 = \int\frac{1+x^2}{1+x^3}\left(1+x^3\right)^2 dx + C = \int\left(1+x^2\right)\left(1+x^3\right)dx + C = \int\left(1+x^2+x^3+x^5\right)dx + C$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 10_Differential Equation.indd 168 28-02-2023 15:59:14

$$y\left(1+x^3\right)^2 = x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^6}{6}+C$$ (یا)

اور $y = \frac{1}{(1+x^3)^2}\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^6}{6}+C\right]$ یہ مطلوبہ حل ہے۔

مثال 10.26

$ye^y dx = \left(y^3+2xe^y\right)dy$ حل کریں

حل

$\frac{dx}{dy}-\frac{2}{y}x = y^2e^{-y}$ دی گئی مساوات کو اس طرح لکھ سکتے ہیں

یہ ایک خطی تفرقی مساوات ہے۔ یہاں، $P = -\frac{2}{y};\ Q = y^2e^{-y}$

$$\int pdy = \int -\frac{2}{y}dy = -2\log|y| = \log|y|^{-2} = \log\left(\frac{1}{y^2}\right),$$

یہاں، $\text{I.F} = e^{\int Pdy} = e^{\log\left(\frac{1}{y^2}\right)} = \frac{1}{y^2}$

لہٰذا، $xe^{\int Pdy} = \int Qe^{\int Pdy}dy + C$ حل یہ ہے۔

یعنی، $x\left(\frac{1}{y^2}\right) = \int y^2e^{-y}\left(\frac{1}{y^2}\right)dy + C = \int e^{-y}dy + C = -e^{-y} + C$

$x = -y^2e^{-y} + Cy^2$ (یا) یہ مطلوبہ حل ہے۔

مشق 10.7

مندرجہ ذیل خطی تفرقی مساواتوں کو حل کریں۔

1. $\cos x\frac{dy}{dx} + y\sin x = 1$
2. $\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx} - xy = 1$
3. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \sin x$
4. $\left(x^2+1\right)\frac{dy}{dx} + 2xy = \sqrt{x^2+4}$
5. $\left(2x-10y^3\right)dy + ydx = 0$
6. $x\sin x\frac{dy}{dx} + \left(x\cos x + \sin x\right)y = \sin x$
7. $\left(y - e^{\sin^{-1}x}\right)\frac{dx}{dy} + \sqrt{1-x^2} = 0$
8. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{(1-x)\sqrt{x}} = 1-\sqrt{x}$
9. $\left(1+x+xy^2\right)\frac{dy}{dx} + \left(y+y^3\right) = 0$
10. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x\log x} = \frac{\sin 2x}{\log x}$
11. $(x+a)\frac{dy}{dx} - 2y = (x+a)^4$
12. $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2 x}{1+x^3} - \frac{3x^2}{1+x^3}y$
13. $x\frac{dy}{dx} + y = x\log x$
14. $x\frac{dy}{dx} + 2y - x^2\log x = 0$
15. $\frac{dy}{dx} + \frac{3y}{x} = \frac{1}{x^2}$، جب $x = 1$، $y = 2$ دیا گیا ہے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 10_Differential Equation.indd 169 28-02-2023 15:59:20

10.8 اوّل درجہ کی عام تفرقی مساواتوں کے استعمالات
(Applications of First Order Ordinary Differential Equations)

زندگی کے حقیقی مسائل کو حل کرنے میں تفرقی مساوات کے موضوع وسیع پیمانے پر استعمال ہوتے ہیں۔ تفرقی مساوات کے حل آئندہ وقت ، یا کسی نامعلوم مقام پر نظام کے طرز عمل کی پیش گوئی کے لئے استعمال کئے جاتے ہیں ۔ بہت سارے مسئلوں میں جس شرح سے مقدار میں تبدیلی آتی ہے۔ وہ مقدار اور / یا وقت کا ایک دیا ہوا تفاعل ہوتا ہے۔ مقصد خود مقدار کو تلاش کرنا ہے۔ اگر x وقت t پر موجود مقدار کو ظاہر کرتا ہے۔تو فوری شرح t وقت میں مقدار کی تبدیلی $\frac{dx}{dt}$ ہوتی ہے۔ اس سے $\frac{dx}{dt} = f(x,t)$ شکل کا ایک تفرقی مساوات حاصل ہوتا ہے۔اس حصے میں ہم صرف اس قسم کے مسائل پر غور کریں گے ، مزید شرح سے ، صرف فوری شرح سے مراد ہے۔

10.8.1 آبادی میں اضافہ (Population growth)

اب ہم ایک آبادی (مثال کے طورپر ، انسانی ، جانور یا بیکٹریا کالونی) کی افزائش کو وقت t کے ایک تفاعل کے طور پر سمجھتے ہیں۔

فرض کریں کہ $x(t)$ آبادی کی مقدار کسی وقت t میں ہے۔ اگرچہ کی $x(t)$ سالم-قدر کی ہے، لیکن ہم $x(t)$ کو تقریباً ایک تفرقی مساوات کے طور پر اور تفرقی مساوات کی تکنیک کو $x(t)$ کا تعین کرنے کے لئے لاگو کیا جاسکتا ہے۔ فرض کریں کہ آبادی اس وقت موجود آبادی کی مقدار کے براہ راست متناسب شرح سے بڑھتی ہے پھر ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{dx}{dt} = kx \quad \text{جہاں، } k \text{ متناسب کا مستقل ہے۔} \qquad \ldots (1)$$

یہاں، $k > 0$ ، چونکہ، آبادی ہمیشہ بڑھتی ہے۔

تفرقی مساوات کا حل $x(t) = Ce^{kt}$ جہاں، C تکمیل کا مستقل ہے۔ ابتدائی شرطوں کی مدد سے C اور k کی قیمتوں کا تعین کیا جاتا ہے۔ اسی طرح ، آبادی وقت کے ساتھ تیزی سے بڑھتی ہے۔آبادی میں اضافے کے اس قانون کو **مالتھیوسین قانون** کہاجاتا ہے۔

مثال 10.27

آبادی میں اضافہ موجودہ تعداد کے متناسب ہے۔ اگر کالونی کی آبادی 50 سال میں دوگناہو جائے تو کتنے سالوں میں آبادی تین گنا ہوجائے گی؟

حل

فرض کرو $x(t)$ وقت t میں آبادی ہے۔پھر $\frac{dx}{dt} = kx$

متغیرات کو علحیدہ کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتاہے۔ $\frac{dx}{x} = kdt$

دونوں جانب تکمیل کرنے پر، $\log|x| = kt + \log|C|$ (یا) $x = Ce^{kt}$ جہاں، C ایک اختیاری مستقل ہے۔

فرض کرو x_0 آبادی ہے جب $t = 0$ ہوتو $C = x_0$ معلوم کریں۔

اس طرح $x = x_0 e^{kt}$ حاصل ہوتا ہے۔

اب $x = 2x_0$ جب $t = 50$ ہے اور اس طرح $k = \frac{1}{50}\log 2$

لہٰذا، $x = x_0 2^{\frac{t}{50}}$ کسی بھی وقت t پر آبادی ہے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 10_Differential Equation.indd 170 28-02-2023 15:59:24

فرض کرو کہ آبادی t_1 برسوں میں تین گنا بڑھ جاتی ہے۔

یعنی، $t = t_1$ جب، $x = 3x_0$

اس طرح $t_1 = 50\left(\frac{\log 3}{\log 2}\right)$، چنانچہ آبادی میں تگنا اضافہ $50\left(\frac{\log 3}{\log 2}\right)$ سالوں میں ہو گا۔

10.8.2 تابکار کشی (Radioactive decay)

جوہر کا مرکزی پروٹان اور نیوٹران کے امتزاج پر مشتمل ہوتا ہے۔ ان میں سے بہت سے پروٹان اور نیوٹران کے امتزاج غیر مستحکم ہیں۔ یعنی، یہ جوہر ات کا خاتمہ یا کسی اور مادے کے جوہر میں منتقل ہوتا ہے۔اس طرح کے مرکزوں کو **تابکار** کہاجاتا ہے۔

یہ فرض کیا جاتا ہے کہ جس شرح $\frac{dA}{dt}$ سے کسی مادے کے مرکزوں کا خاتمہ ہوتا ہےوہ وقت t میں باقی $A(t)$ مقدار کے متناسب ہوتا ہے۔

اس طرح ، مطلوبہ تفرقی مساوات (2).... $\frac{dA}{dt} \propto A$ یا $\frac{dA}{dt} = kA$ جہاں، k تناسب کا مستقل ہے۔یہاں، $k < 0$ چونکہ، کشی ہوتی ہے۔

ریمارک (Remark)

مساوات (1) اور (2) سے ہم دیکھتے ہیں کہ تفرقی مساوات ایک جیسے ہیں ، لیکن فرق صرف علامتوں کی تشریح اور تناسب کے مستقل میں ہے۔ترقی کے لئے جیسا کہ مساوات (1) میں $k > 0$ اور مساوات (2) کی اسی صورت حال میں کشی ، $k < 0$ کی توقع کرتے ہیں۔

ایک ہی تفرقی مساوات متعدد امتیازی مظاہرات کے لئے ریاضی کے نمونہ کا کام کرسکتا ہے۔

مثال 10.28

ایک تابکار النسوٹوپ کی ابتدائی کمیت 200mg ہوتی ہے جو دوسال بعد 50mg کم ہو جاتی ہے۔ کسی بھی باقی وقت میں النسوٹوپ کی مقدار کے لئے کے لئے ایک اظہار معلوم کریں ۔ اس کی نصف زندگی کیا ہے؟ (نصف زندگی کا مطلب ہے کہ ایک مخصوص النسوٹوپ کی تابکاری کے لئے اس کی اصل قیمت کی آدھی قیمت پر گرنے کے لئے لیا گیا وقت)۔

حل

فرض کرو کہ A کمیت ہے t سالوں کے بعد باقی رہ جانے والے النسوٹوپ کی اور $-k$ تناسب کا مستقل ہے، جہاں، $k > 0$ تجزیہ کی شرح کو $\frac{dA}{dt} = -kA$ کے ذریعہ بتایا گیا ہے۔ جہاں منفی اشارہ کرتا ہے کہ کمیت میں کمی ہورہی ہے یہ ایک علیحدہ مساوات ہے۔ متغیروں کو علحیدہ کرنے پر، ہمیں $\frac{dA}{A} = -kdt$ حاصل ہوتا ہے۔

دونوں جانب تکمیل کرنے پر حاصل ہوتا ہے۔ $\log|A| = -kt + \log|C|$ یا $A = Ce^{-kt}$

یہ دیا گیا ہے کہ ابتدائی کمیت 200mg ہے یعنی، $A = 200$ جب $t = 0$ اور اس طرح $C = 200$ حاصل ہو گا۔

اس طرح مزید ، $A = 150$ جب $t = 2$ اور چنانچہ، $k = \frac{1}{2}\log\left(\frac{4}{3}\right)$

لہٰذا، $A(t) = 200e^{-\frac{t}{2}\log\left(\frac{4}{3}\right)}$ یہ باقی t سالوں کے بعد کی النسوٹوپ کی کمیت ہے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 10_Differential Equation.indd 171 28-02-2023 15:59:27

نصف زندگی t_h، $A = 100\text{mg}$ کے مطابق وقت ہے۔

اس طرح، $t_h = \dfrac{2\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log\left(\frac{3}{4}\right)}$

10.8.3 نیوٹن کا سرد / سرگرم کا قانون (Newton's Law of cooling / warming)



ایک کپ میں $150°$ کافی لیں اور اس کو $80°C$ کمرے میں ٹیبل پر رکھیں اور غور کریں۔ کافی کے درجہ حرارت کا کیا ہوتا ہے؟ ہم مشاہدہ کریں کہ کافی کا کپ ٹھنڈا ہوجائے گا جب تک کہ وہ کمرے کی درجہ حرارت پر نہ پہنچ جائے۔



اب آپ فریج سے گلاس میں $35°$ ٹھنڈا پانی لیں اور اسے $80°C$ کمرے میں ٹیبل پر رکھیں اور غور کریں۔ ٹھنڈے پانی کے درجہ حرارت کا کیا ہوا؟ اسی طرح ہم مشاہدہ کرسکتے ہیں کہ پانی گرم ہو گا جب تک کہ وہ کمرے کے درجہ حرارت تک نہ پہنچے۔

نیوٹن کے سرد یا سرگرم کے قانون کے مطابق جس شرح سے جسم کا درجہ حرارت بدلا جاتا ہے۔ وہ جسم کے درجہ حرارت اور اس کے آس پاس کے درمیانے درجے کے نام نہاد **محیطی درجہ حرارت** کے درمیان فرق کے متناسب ہے۔ اگر $T(t)$ کسی t وقت میں جسم کے درجہ حرارت کی نمائندگی کرتا ہے۔ T_m اردگرد کے وسط کا درجہ حرارت اور $\dfrac{dT}{dt}$ جس شرح سے جسم کا درجہ حرارت بدلتا ہے۔ پھر نیوٹن کا سرد (یا سرگرم) کا قانوں $\dfrac{dT}{dt} \propto T - T_m$ یا $\dfrac{dT}{dt} = k\left(T - T_m\right)$ ہے۔ جہاں، k تناسب کا مستقل ہے۔ دونوں صورتوں میں، سرد ہونا یا گرم ہونا۔ اگر T_m مستقل ہے تو اس کا مطلب $k < 0$ ہے۔

مثال 10.29

قتل کی تفتیش میں، ایک لاش ایک جاسوس کے ذریعہ ٹھیک 8 p.m. کو ملی چوکنا رہنے کے لئے جاسوس نے جسم کے درجہ حرارت کی پیمائش بھی کی اور اسے 70°F پایا۔ دوگھنٹے بعد، جاسوس نے جسم کے درجہ حرارت کو دوبارہ ناپ لیا اور اسے 60°F پایا گیا۔ اگر کمرے کا درجہ حرارت 50°F ہے۔ اور یہ فرض کرلیا جائے کہ مرنے سے پہلے اس شخص کے جسمانی درجہ حرارت 98.6°F تھی، تو قتل کس وقت ہوا؟

$$\left[\log(2.43) = 0.88789; \quad \log(0.5) = -0.69315\right]$$

حل

فرض کرو کہ T کو کسی بھی وقت میں جسم کا درجہ حرارت t ہے اور 0 کا وقت 8 p.m. لیا جاتا ہے۔

نیوٹن کے سرد قانوں کے تحت، $\dfrac{dT}{dt} = k\left(T - 50\right)$ یا $\dfrac{dT}{T-50} = k\,dt$.

دونوں جانب تکمیل کرنے پر ہمیں $\log|50 - T| = kt + \log C$ یا $50 - T = Ce^{kt}$ حاصل ہوتا ہے۔

جب $t = 0$، $T = 70$ اور اس طرح $C = -20$

جب $t = 2$، $T = 60$ ہمارے پاس $-10 = -20e^{k2}$ ہے۔

اسی طرح، $k = \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{1}{2}\right)$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 10_Differential Equation.indd 172 28-02-2023 15:59:31

لہٰذا، $50-T=-20e^{\frac{1}{2}t\log\left(\frac{1}{2}\right)}$ یا $T=50+20\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}}$ حل ہے۔

اب ہمیں t کی قیمت معلوم کرنی چاہئے جس کے لئے $T(t)=98.6$ اور $t=2\left(\frac{\log\left(\frac{48.6}{20}\right)}{\log\left(\frac{1}{2}\right)}\right)\approx -2.56$

ایسا لگتا ہے کہ اس شخص کو تقریباً 5.30 p.m. کو قتل کیا گیا تھا۔

10.8.4 مرکب کے مسائل (Mixture problems)

مرکب کے مسائل کیمیائی صنعت میں کثرت سے پائے جاتے ہیں۔ اب ہم بتاتے ہیں کہ ایک ہی ٹینگ پر مشتمل بنیادی نمونہ (ماڈل) کو کیسے حل کیا جائے۔



خاکہ 10.2

کسی مادہ S کو مستقل شرح پر کتنی سمانہ میں کسی خاص آمیزہ میں بہنے دیا جاتا ہے۔ اور اس کو لگاتار ہلاتے ہوئے یکساں رکھاجاتا ہے۔ مزید، ایک ایسی صورت حال میں یہ یکساں آمیزہ بیک وقت کسی اور شرح پر سمانہ سے باہر نکل جاتا ہے۔ اب ہم آمیزہ میں موجود مادیے کی مقدار S کو وقت t پر معلوم کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ x کی وقت t پر موجود S کی مقدار کو ظاہر کرتا ہے۔ t کے لحاظ سے x کی تبدیلی کی شرح $\frac{dx}{dt}$ ہے۔ اگر IN اس شرح کی نشاندہی کرتا ہے جس پر S آمیزہ میں داخل ہوتا ہے اور OUT اس شرح کی نشاندہی کرتا ہے جس پر یہ باہر جاتا ہے۔پھر ہمارے پاس مساوات یہ $\frac{dx}{dt}=IN-OUT$ ہے ۔

مثال 10.30

ایک ٹینگ کے l 1000 پانی میں 100 gm گرام نمک تحلیل کیا گیا ہے۔ نمکین (نمکین نمک (Brine) کا ایک اعلی ارتکاز محلول ہے (عام طور پر سوڈیم کلورئیڈ) پانی میں l 10 لیٹر فی منٹ کی شرح سے بہتا ہے۔) اور ہر لیٹر میں 5 گرام تحلیل نمک ہوتا ہے ہلچل کے ذریعے ٹینک کا مرکب یکساں رکھا جاتا ہے۔ نمکین پانی 10 لیٹر فی منٹ کے لحاظ سے باہر نکل جائے گا ۔ کسی بھی وقت t میں نمک کی مقدار معلوم کریں ۔

حل

فرض کرو کہ $x(t)$ ٹینک میں نمک کی مقدار ہے وقت t میں، اس کی تبدیلی شرح، باہر بہاؤ کی شرح – اندر بہاؤ کی شرح= $\frac{dx}{dt}$ ہے۔

اب، 5 گرام 10 لیٹر میں 50 گرام نمک کی آمد کرتا ہے۔ اس کے علاوہ نمکین پانی کا اخراج 10 لیٹر فی منٹ ہے۔ یہ ٹینک میں نمکین پانی کی کُل مقدار میں سے $10/1000=0.01$ ہے۔ لہٰذا، نمک کا اخراج 0.01 گنا $x(t)$ کا ہے۔یعنی، $0.01x(t)$

$\frac{dx}{dt}=50-0.01x=-0.01(x-5000)$ اس طرح ماڈل کے لئے تفرقی مساوات ہے۔

$\frac{dx}{x-5000}=-(0.01)dt$ اس کو اس طرح بھی لکھا جاتا ہے۔

دونوں جانب تکمیل کرنے پر ہمیں $\log|x-5000|=-0.01t+\log C$ حاصل ہوتا ہے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 10_Differential Equation.indd 173 28-02-2023 15:59:35

یا $x - 5000 = Ce^{-0.01t}$ یا $x = 5000 + Ce^{-0.01t}$

ابتدائی طور پر، جب $t = 0$، $x = 100$ چونکہ، $100 = 5000 + C$ اسی طرح، $C = -4900$

لہٰذا، وقت t میں ٹینک میں نمک کی مقدار $x = 5000 - 4900e^{-0.01t}$ ہے۔

مشق 10.8

1. ایک خاص بیکٹیریا کی پرورش میں بیکٹیریا کی تعداد میں اضافے کی شرح موجودہ تعداد کے متناسب ہے۔ 5 گھنٹے میں یہ تعداد تین گنا بڑھ جانے پر، معلوم کریں کہ 10 گھنٹوں کے بعد کتنے بیکٹیریا موجود ہونگے؟
2. کسی بھی وقت t میں شہر کی آبادی معلوم کریں، بشرطیکہ آبادی میں اضافے کی شرح اس وقت آبادی کے متناسب اور 40 سال کے عرصے میں آبادی 3,00,000 سے 4,00,000 ہوتی ہے۔
3. ایک برقی حلقہ کے لئے ایک برق لاقوت کی مساوات جس میں مزاحمت اور خود کو امالیت کرنے کی صلاحیت $E = Ri + L\frac{di}{dt}$ ہے۔ جہاں، E حلقہ (سرکٹ) جو دی جانے والی برق زار قوت ہے R مزاحمت اور L مالیت کا ضریب ہے۔ وقت t میں بہاؤ i معلوم کریں جب $E = 0$ ہو۔
4. $10\ m/s$ کی رفتار سے چلنے والی محرک کشتی کا انجن بند ہے۔ دیا گیا ہے کہ اس کے بعد کے کسی بھی وقت میں (انجن بند کرنے کے بعد) پسماندگی اُس وقت کے رفتار کے برابر ہے انجن کو بند کرنے کے 2 سکنڈ کے بعد کی رفتار کو معلوم کریں۔
5. فرض کریں کہ ایک شخص ₹10,000 روپئے ایک بینک اکاؤنٹ میں 5% سالانہ شرح سے جو مسلسل مرکب ہوتی ہے، جمع کرتا ہے۔ 18 ماہ بعد اس کے بینک اکاؤنٹ میں کتنی رقم ہوگی؟
6. فرض کریں کہ جس شرح پر تابکاری نیوکلئی مرکزۃ زوال پذیر ہے اس طرح کے نیوکلئی (مرکزہ) کی تعداد کے متناسب جو کسی نمونے میں موجود ہے۔ ایک خاص نمونے میں تابکاری مرکزہ کی اصل تعداد میں 10% کا حصّہ 100 سال کی مدت میں منتشر ہوتا ہے۔ 1000 سال بعد اصلی تابکاری مرکزہ کا کتنا فیصد باقی رہے گا۔
7. $100^\circ C$ درجہ حرارت پر پانی 10 منٹ میں $80^\circ C$ تک ٹھنڈا ہوتا ہے $25^\circ C$ کمرے کے درجہ حرارت میں، معلوم کریں

   (i) 20 منٹ کے بعد پانی کا درجہ حرارت

   (ii) درجہ حرارت $40^\circ C$ ہو $\left[\log_e \frac{11}{15} = -0.3101;\ \log_e 5 = 1.6094\right]$
8. 10.00 A.M. پر ایک عورت اپنے مائکروویو سے ایک گرم انشٹنٹ کافی لے کر اُسے ٹھنڈا ہونے کے لئے قریبی کچن کے کاونٹر پر رکھ دیتی ہے۔ اس وقت کافی کا درجہ حرارت $180^\circ F$, تھا۔اور 10 منٹ بعد یہ $160^\circ F$ تھا۔ فرِض کریں کہ کچن کا فوری درجہ حرارت $70^\circ F$ تھا۔

   (i) 10.15A.M. میں کافی کا درجہ حرارت کتنا تھا؟ $\left[\log_e \frac{9}{11} = -0.2006\right]$

   (ii) اس عورت کو کافی پینا پسند ہے جب اس کا درجہ حرارت $130^\circ F$ اور $140^\circ F$ کے درمیان ہو اسے کس وقت کافی پینا چاہئے؟

   $\left[\log_e \frac{6}{11} = -0.6061\right]$

   (iii) $\left[\log_e \frac{7}{11} = -0.4519\right]$
9. $100^\circ C$ پر اُبلتے ہوئے پانی کا ایک برتن $t = 0$ وقت پر چولہے پر سے نکال دیا جاتا ہے۔ اور کچن میں ٹھنڈا کرنے کے لئے چھوڑ دیا جاتا ہے 5 منٹ کے بعد پانی کا درجہ حرارت کم ہوکر $80^\circ C$ ہوگیا ہے مزید 5 منٹ بعد، یہ $65^\circ C$ پر گرگیا ہو تو، کچن کے درجہ حرارت کا تعین کریں۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 10_Differential Equation.indd 174 28-02-2023 15:59:39

10. ایک ٹینک میں ابتدا میں 50 لیٹر خالص پانی ہوتا ہے۔ وقت $t = 0$ کے شروع میں ایک نمکین پانی جس میں 2 گرام تحلیل نمک ہوتا ہے۔ 3 لیٹر فی منٹ کی شرح سے ٹینک میں بہتا ہے۔ اس مرکب کو ہلچل کے ذریعہ یکساں رکھا جاتا ہے۔ اور اچھی طرح سے ہلچل مچا ہوا مرکب بیک وقت اسی شرح پر ٹینک سے باہر نکلتا ہے۔ کسی بھی وقت $t > 0$ پر ٹینک میں موجود نمک کی مقدار معلوم کریں۔

FL6EV

مشق 10.9

دیے گئے چار حل میں سے صحیح یا سب سے مناسب جواب کا انتخاب کریں۔

1. تفرقی مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^{1/3} + x^{1/4} = 0$ کی ترتیب (ترتیب) اور درجہ بالترتیب ہیں۔

(1) 2, 3 (2) 3, 3 (3) 2, 6 (4) 2, 4

2. تفرقی مساوات جو منحنی خطوط کے خاندان $y = A\cos(x + B)$, کی نمائندگی کرتی ہے۔ جہاں، A اور B پیمائشی ہیں۔

(1) $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$ (2) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ (3) $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ (4) $\frac{d^2x}{dy^2} = 0$

3. تفرقی مساوات $\sqrt{\sin x}\,(dx + dy) = \sqrt{\cos x}\,(dx - dy)$ کا ترتیب اور درجہ ہے۔

(1) 1, 2 (2) 2, 2 (3) 1, 1 (4) 2, 1

4. نصف قطر 'a' اور مرکز (h, k) پر رہنے والے تمام دائروں کے تفرقی مساوات کی ترتیب

(1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) 1

5. منحنی خطوط کے خاندان $y = Ae^x + Be^{-x}$, جہاں، A اور B اختیاری مستقلات کی تفرقی مساوات ہے۔

(1) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ (2) $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$ (3) $\frac{dy}{dx} + y = 0$ (4) $\frac{dy}{dx} - y = 0$

6. تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ کا عام حل ہے۔

(1) $xy = k$ (2) $y = k\log x$ (3) $y = kx$ (4) $\log y = kx$

7. تفرقی مساوات $2x\frac{dy}{dx} - y = 3$ کا حل نمائندگی کرتا ہے۔

(1) خطوط مستقیم (2) دائرے (3) مکافی (4) بیضوی

8. $\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$ کا حل یہ ہے۔

(1) $y = ce^{\int pdx}$ (2) $y = ce^{-\int pdx}$ (3) $x = ce^{-\int pdy}$ (4) $x = ce^{\int pdy}$

9. تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} + y = \frac{1+y}{\lambda}$ کا تکملی جزو ضربی ہے۔

(1) $\frac{x}{e^\lambda}$ (2) $\frac{e^\lambda}{x}$ (3) λe^x (4) e^x

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 10_Differential Equation.indd 175 28-02-2023 15:59:46

10. تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ کا تکمیلی جزوضربی x ہے پھر $P(x)$

(1) x (2) $\frac{x^2}{2}$ (3) $\frac{1}{x}$ (4) $\frac{1}{x^2}$

11. تفرق مساوات $y(x)=1+\frac{dy}{dx}+\frac{1}{1\cdot 2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+....$ کا درجہ

(1) 2 (2) 3 (3) 1 (4) 4

12. اگر p اور q تفرقی مساوات $y\frac{dy}{dx}+x^3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)+xy=\cos x$ کا ترتیب اور درجہ ہے تب،

(1) $p<q$ (2) $p=q$ (3) $p>q$ (4) p موجود ہے اور q موجود نہیں ہیں۔

13. تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0$ کا حل

(1) $y+\sin^{-1}x=c$ (2) $x+\sin^{-1}y=0$ (3) $y^2+2\sin^{-1}x=C$ (4) $x^2+2\sin^{-1}y=0$

14. تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx}=2xy$ کا حل

(1) $y=Ce^{x^2}$ (2) $y=2x^2+C$ (3) $y=Ce^{-x^2}+C$ (4) $y=x^2+C$

15. تفرقی مساوات $\log\left(\frac{dy}{dx}\right)=x+y$ کاعام حل

(1) $e^x+e^y=C$ (2) $e^x+e^{-y}=C$ (3) $e^{-x}+e^y=C$ (4) $e^{-x}+e^{-y}=C$

16. $\frac{dy}{dx}=2^{y-x}$ کا حل

(1) $2^x+2^y=C$ (2) $2^x-2^y=C$ (3) $\frac{1}{2^x}-\frac{1}{2^y}=C$ (4) $x+y=C$

17. تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\frac{\phi\left(\frac{y}{x}\right)}{\phi'\left(\frac{y}{x}\right)}$ کا حل

(1) $x\phi\left(\frac{y}{x}\right)=k$ (2) $\phi\left(\frac{y}{x}\right)=kx$ (3) $y\phi\left(\frac{y}{x}\right)=k$ (4) $\phi\left(\frac{y}{x}\right)=ky$

18. اگر $\sin x$ تکمیلی جزوضربی ہے تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx}+Py=Q$ کا، پھر P

(1) $\log\sin x$ (2) $\cos x$ (3) $\tan x$ (4) $\cot x$

19. ترتیب n اور $n+1$ کے عام حل میں اختیاری مستقل کی تعداد بالترتیب ہے۔

(1) $n-1,\ n$ (2) $n,\ n+1$ (3) $n+1,\ n+2$ (4) $n+1,\ n$

20. تیسرے ترتیب کے تفرقی مساوات کے خاص حل میں اختیاری مستقل کی تعداد ہے۔

(1) 3 (2) 2 (3) 1 (4) 0

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 10_Differential Equation.indd 176 28-02-2023 15:59:52

.21 تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+1}{x+1}$ کا تکمیلی جزو ضربی ہے۔

(1) $\frac{1}{x+1}$ (2) $x+1$ (3) $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ (4) $\sqrt{x+1}$

.22 کسی بھی سال t میں آبادی P ایسی ہے کہ آبادی میں اضافے کی شرح آبادی کے متناسب ہے پھر

(1) $P=Ce^{kt}$ (2) $P=Ce^{-kt}$ (3) $P=Ckt$ (4) $P=C$

.23 P کچھ مادوں کی مقدار ہے جو وقت t کے بعد رہ گئے ہیں۔ اگر مادے کے بخارات کی شرح باقی مقدار کے متناسب ہے، پھر

(1) $P=Ce^{kt}$ (2) $P=Ce^{-kt}$ (3) $P=Ckt$ (4) $Pt=C$

.24 اگر تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx}=\frac{ax+3}{2y+f}$ کا حل ایک دائرے کی نمائندگی کرتا ہے۔ تو a کی قدر ہے

(1) 2 (2) -2 (3) 1 (4) -1

.25 منحنی خطوط $y=f(x)$ کا میلان کسی بھی نقطہ پر $\frac{dy}{dx}=3x^2$ دیا گیا ہے اور یہ نقطہ (-1,1) سے گزرتا ہے۔ پھر منحنی خط کی مساوات ہے۔

(1) $y=x^3+2$ (2) $y=3x^2+4$ (3) $y=3x^3+4$ (4) $y=x^3+5$

خلاصہ (SUMMARY)

1. ایک تفرقی مساوات کوئی مساوات ہے جس میں کسی نامعلوم تفاعل کا کم سے کم ایک مشتق ہوتا ہے۔یا تو عام مشتق یا جزوی مشتق ہوتا ہے۔
2. ایک تفرقی مساوات کی ترتیب بیان کردہ مساوات میں سب سے زیادہ ترتیب والی مشتق جو موجود ہے۔
3. اگر کسی تفرقی مساوات کو کثیر رقمی شکل میں قابل فہم بنایا جائے تو پھر اعلیٰ ترین ترتیب مشتق میں ظاہر ہونے والی لازمی قوت کو تفرقی مساوات کا درجہ کہا جاتا ہے۔
4. اگر کوئی تفرقی مساوات کثیر رقمی مساوات کی شکل میں ظاہر نہ ہو جس میں اعلیٰ ترین ترتیب کی مشتق خاص رقم ہو تو تفرقی مساوات کی درجہ کی وضاحت نہیں کی گئی ہے۔
5. اگر کسی تفرقی مساوات میں ایک آزاد متغیر کے لحاظ سے ایک یا ایک سے زیادہ تفاعلات کے صرف عام مشتق ہیں کہا جاتا ہے کہ یہ ایک عام تفرقی مساوات ہے۔
6. ایک مساوات جس میں دو یا زیادہ آزاد متغیر کے ایک یا زیادہ تفاعلات کے صرف جزوی مشتقات شامل ہوتے ہیں وہ جزوی تفرقی مساوات کہلاتا ہے۔
7. ایک اختیاری مستقل کے خاتمے کے نتیجے میں پہلی ترتیب کا تفرقی مساوات برآمد ہوتا ہے۔اور یہ کہ دو اختیاری مستقلات کو ختم کرنے سے دوسرے ترتیب کی تفرقی مساوات کا باعث بنتا ہے۔
8. ایک تفرقی مساوات کا حل آزاد متغیر کے معاملے میں انحصار متغیر (متغیرات)(s) کے لئے ایک اظہار ہے جو تفرقی مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔
9. وہحل جس میں اتنے اختیاری مستقلوں ہوں جتنی اس تفرقی مساوات کی ترتیب ہے اسے عام حل کہلاتے ہیں۔
10. اگر ہم تفرقی مساوات کے عام حل میں اختیاری مستقلات کو مخصوص قیمتیں دیتے ہیں تو نتیجہ حل کو ایک مخصوص حل کہا جاتا ہے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 10_Differential Equation.indd 177 28-02-2023 15:59:54

11. $f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$ کی شکل والی مساوات کو علیحدہ متغیر والی مساوات یا صرف علیحدہ پذیر مساوات کہلاتا ہے۔

12. ایک تفاعل $f(x,y)$ کو متغیر x اور y میں ڈگری (درجہ) n کا ایک ہم جنسی تفاعل کہا جاتا ہے۔اگر $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$ کچھ $n \in \mathbb{R}$ کے لئے تمام مناسب x, y اور t کے لئے یہ کی ہم جنسی کے نام سے جانا جاتا ہے۔

13. اگر $f(x,y)$ درجہ صفر کا ایک ہم جنسی تفاعل ہے تو پھر g ایک تفاعل موجود ہے اس طرح کہ $f(x,y)$ ہمیشہ $g\left(\frac{x}{y}\right)$ یا $g\left(\frac{y}{x}\right)$ کی شکل میں ظاہر کیا جاتا ہے۔

14. ایک عام مساوات کو ہم جنسی شکل میں ہے کہا جاتا ہے اگر تفرقی مساوات کو اس طرح لکھا جائے $\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right)$

15. تفرقی مساوات $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ (تفرقی شکل میں) ہم جنسی کہلاتی ہے۔اگر M اور N یکساں درجہ کے ہم جنسی تفاعلات ہیں۔

16. ایک اول درجہ کی خطی تفرقی مساوات کی صورت $Q = \frac{dy}{dx} + Py$ جہاں، P اور Q صرف x کے تفاعل ہیں۔یہاں، y کا کوئی مصنوع اور اس کے مشتق $\frac{dy}{dx}$ نہیں پائے جاتے ہیں اور انحصار متغیر y اور اس کا مشتق آزاد متغیر x کے لحاظ میں صرف اول درجہ میں ہوتا ہے۔ تفرقی مساوات کا حل اس طرح حاصل ہوتا ہے۔

$$ye^{\int P dx} = \int Qe^{\int P dx} dx + C .$$

یہاں، $e^{\int P dx}$ کو (1) کا تکمیلی جزوضربی کہتے ہیں۔

17. ایک اول درجہ کی تفرقی مساوات کی صورت $\frac{dx}{dy} + Px = Q$ جہاں، P اور Q صرف y کے تفاعل ہیں۔یہاں، x کا کوئی مصنوع اور اس کے مشتق $\frac{dx}{dy}$ نہیں پائے جاتے ہیں اور انحصار متغیر x اور اس کا مشتق آزاد متغیر y کے لحاظ سے صرف اول درجہ میں ہوتا ہے۔ اس معاملے میں حل $xe^{\int P dy} = \int Qe^{\int P dy} dy + C$ اس طرح دیا جاتا ہے۔

18. اگر t وقت پر موجود مقدار x سے ظاہر ہوتا ہے۔تو فوری شرح t وقت میں مقدار کی تبدیلی $\frac{dx}{dt}$ ہوتی ہے۔ اس سے $\frac{dx}{dt} = f(x,t)$ شکل کا ایک تفرقی مساوات حاصل ہوتا ہے۔

ICT کارنر

https://ggbm.at/dy9kwgbt or Scan the QR Code

بروزر کھولیئے اور دئے گئے لنک ٹیپ کریں (یا) کوڈ کو اسکین کریں۔ "12 ویں جماعت ریاضی - باب 2" نامی ورک بک کھلے گی۔ ورک بک کے بائیں جانب تمہاری کتاب کے اسباق ہوں گے۔ "عام تفرقی مساوات" نامی باب پر کلک کریں۔ اس باب سے تعلق رکھنے والے بہت سارے ورک شیٹ دیکھ سکتے ہو۔ تمام ورک شیٹوں کو دیکھیں۔

باب
11

امکانی بٹوارے
(Probability Distributions)

امکانی نظریہ کچھ نہیں فہم عامہ کی احتساب میں تبدیل ہے
لے پلیس۔

سریعی متغیر کی تاریخ اور نقشہ سازی کی شروعات نظیری عرصہ سے حقیقی اعداد تک کا مطالعہ دلچسپی کا موضوع رہا ہے۔اس کی جدید تشریح یقینی طور پر سیٹوں (sets) اور نقشوں (1900) کی ایجاد کے بعد ہوئی ہے ، لیکن جیسا کہ ایریمی نکوکا کہنا ہے کہ سریعی متغیرات کا استعمال بہت پہلے سے کیا جاتا تھا۔ ریاضی دانوں نے نقشے کے ذریعے سریعی متغیر کی ترجمانی کرنے کی ضرورت محسوس کی۔ 1812 میں ، لے پلیس نے اپنی کتاب امکانی تجزیاتی نظریہ (Theory analytique des probabilities) شائع کی جس میں انہوں نے اعدادوشمار میں بہت سارے بنیادی نتائج پیش کیے۔ اس مقالے کا پہلا نصف امکان کے طریقوں اور مسائل کے متعلق ہے اور دوسرا نصف شماریاتی اطلاق سے تعلق رکھتا ہے۔


لے پلیس
(1749-1827)

Learning Objectives
سیکھنے کے مقاصد

اس باب کے اختتام پر
- سریعی متغیر، منفصل اور مسلسل سریعی متغیرات کی تعریف
- امکانی مجموعی (کثافت) تفاعل کی تعریف
- مجموعی بٹوارے تفاعلات (C.D.F) کے ذریعے سے امکانی مجموعی (کثافت) تفاعل محسوب کرنا
- امکانی مجموعی (کثافت) تفاعل کے ذریعے سے مجموعی بٹوارے تفاعل کا حاصل کرنا
- سریعی متغیر کا اوسط اور اختلاف محسوب کرنا
- برنولی (Bernoulli) اور دو رُکنی بٹاؤ کی شناخت اور استعمال کرنا

11.1 تعارف (Introduction)

ایک نظیری عرصہ کا تصوّر منصوبہ تجربہ کا ممکن نتائج پر مکمل بیان 11ویں جماعت کی دوسری جلد میں آچکا ہے۔
اس باب میں ہم تفاعل جو کہ سریعی متغیر ہے سریعی تجربہ کے نظیری عرصہ پر متعین ہے اور اس کے امکانی بٹوارے کے بارے میں سیکھیں گے۔

11.2 سریعی متغیر (Random Variable)

سریعی تجربہ کے نتائج ایک آسان شئے نہیں ہے جو تصور سے ظاہر ہوسکے۔ بہت سے سریعی تجربات جن پر ہم نے غور کیا کہ ممکن نتائج کے تفصیلات ہی نظیری عرصہ S ہے۔ یعنی، ایک تجربہ کے نتائج یا نظیری عرصہ S کے نقاط اعداد ہونے کی ضرورت نہیں ہے۔مثال کے طور پر سریعی تجربہ میں ایک سکّہ کا اچھالنا جس کے نتائج H (سر) اور T (پشت) ہیں۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 11_Probability Distributions.indd 179 28-02-2023 16:28:24

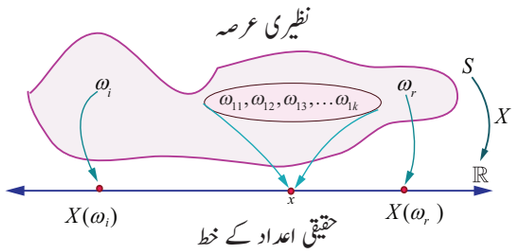
تھوڑے صورت حالوں میں سریعی تجربہ کے نتیجوں کو عددی قیمتوں سے رابطہ کرنے کی ضرورت پڑھتی ہے اس لئے ہم سریعی تجربہ کے ہر ایک نتیجہ کو کے ہر ایک عناصر کو عددی قیمتوں کے ساتھ متعین S عدد سے تعین کرتے ہیں۔ کہئے سر کے لئے '1' اور پشت کے لئے '0'۔ اس طرح سے نظیری عرصہ کرنا سریعی متغیر (*random variable*) کہلاتا ہے۔ ایک سریعی متغیر ایک تفاعل ہے۔ غرض سریعی متغیر ذیل سے تعریف کیا جاتا ہے۔

تعریف 11.1

سریعی متغیر X ایک تفاعل S ہے۔ جو نظیری عرصہ $\mathbb{R}$ سے حقیقی عدد کو تعین کرتا ہے۔ اس طرح سے معکوس عکس کے نقاط یا تحتی مجموعے یا $\mathbb{R}$ کے وقفے نظیری عرصہ S کے موقع ہیں۔ جس کے لئے امکان کو مہیا کیا گیا ہے۔

ہم حروف تہجی (alphabet) کے بڑے حروف کو استعمال کرتے ہیں۔ اس طرح سے سریعی متغیر کو X ، Y اور Z سے ظاہر کرتے ہیں اور سریعی متغیر کے ممکن نتائج کے چھوٹے حروف x، y اور z سے ظاہر کرتے ہیں۔

فرض کریں کہ $S=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3,...\}$ ایک سریعی تجربہ کا نظیری عرصہ ہے اور $\mathbb{R}$ کو حقیقی خط سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ تو ایک سریعی متغیر X ایک حقیقی قیمتوں پر مبنی تفاعل (real valued function) S، پر واضح ہے اور اس کو $X : S \to \mathbb{R}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اگر ω ایک S, کا نظیری نقطہ ہے تو $X(\omega)$ ایک حقیقی عدد ہے۔



خاکہ 11.1

وسعت سٹ $X(\omega)$ کا مجموعہ ہے جیسا کہ $\omega \in S$ وسعت سٹ R_x سے ظاہر کیا جاتا ہے اور $R_x=\{X(\omega)/\omega \in S\}$

ذیل کے خاکہ 11.1 میں چند میپنگ کے نظیری نقاط ω_i دیئے گئے ہیں یا نظیری عرصہ S کے موقع جن کا حقیقی خط R ہے۔

مثلاً اگر x کی ممکن قیمت X ہو تو اس کے لئے $\omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{13},...\omega_{1k} \in S$، x ہوتو $\{\omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{13},...\omega_{1k}\}$ کا معکوس عکس کہلاتا ہے۔

یعنی، کا ایک موقع ہے۔

یعنی، $X^{-1}(x) = \{\omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{13},...\omega_{1k}\}$، S کا ایک موقع ہے۔

تشریح 11.1

فرض کرو کہ ایک سکہ کو ایک مرتبہ اچھالا جاتا ہے تو اس کا نظیری عرصہ نظیری نقطہ H (سر) اور T (پشت) پر مشتمل ہے۔

یعنی، وہ $S = \{T, H\}$

فرض کرو کہ $X : S \to \mathbb{R}$ سر کی تعداد ہو تو

$X(H) = 1$. اور $X(T) = 0$

لہذا، X ایک سریعی متغیر ہے جس کی قیمتیں 0 اور 1 ہیں۔ اگر $X(\omega)$ سروں کی تعداد کو ظاہر کرے تو

$$X(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{، } \omega = \text{پشت (T)} \text{ کے لئے} \\ 1 & \text{، } \omega = \text{سر (H)} \text{ کے لئے} \end{cases}$$

مثال 11.1

فرض کرو کہ دو سکوں کو ایک مرتبہ اچھالا جاتا ہے۔ اگر X پشت (T) کی تعداد کو ظاہر کریں تو معلوم کرو کہ (i) نظیری عرصہ (ii) 1 کا معکوس عکس اور متغیر کی قیمتیں اور (iii) معکوس عکس کے عناصر کی تعداد معلوم کرو۔

حل

(i) نظیری عرصہ $S = \{H,T\} \times \{H,T\}$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 11_Probability Distributions.indd 180 28-02-2023 16:28:27

یعنی، $S=\{TT, TH, HT, HH\}$

(ii) فرض کرو کہ $X: S \to \mathbb{R}$ پشت کی تعداد ہوتو،

$X(TT) = 2$ (پشت 2)

$X(TH) = 1$ (پشت 1)

$X(HT) = 1$ (پشت 1)

اور $X(HH) = 0$ (پشت 0)

ہوتو، X سریعی متغیر 0، 1 اور 2 کی قیمتیں لیتا ہے۔

فرض کرو کہ $X(\omega)$ پشتوں کی گنتی کو ظاہر کرتا ہے تو

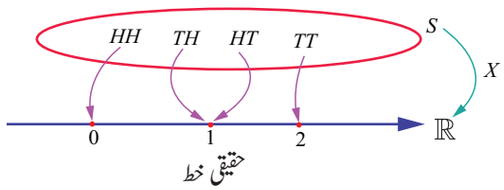
$X(\omega)=\begin{cases}2 & \text{اگر } \omega = TT\\ 1 & \text{اگر } \omega = HT, TH\\ 0 & \text{اگر } \omega = HH\end{cases}$ حاصل ہوگا۔

1 کا معکوس عکس $\{TH, HT\}$ یعنی $X^{-1}(\{1\})=\{TH, HT\}$ ہیں۔

(iii) سریعی متغیر کی قیمت اور معکوس عکس کے عناصر کی تعداد جدول میں ہے۔

کل	2	1	0	سریعی متغیر کی قیمتیں
4	1	2	1	معکوس عکس کے عناصر کی تعداد

نظیری عرصہ



ایک $X(.)$ میپنگ S سے $\mathbb{R}$ تک

خاکہ 11.2

مثال 11.2

دو غیر جانب دار پانسے بیک وقت ایک مرتبہ اچھالے جاتے ہیں۔ اگر X دو پانسہ کی کل حاصل جمع کو ظاہر کرتا ہے تو معلوم کرو کہ (i) نظیری عرصہ (ii) سریعی متغیر X کی قیمتیں اور(iii) 10 کا معکوس عکس اور (vi) X میں معکوس عکس کے عناصر کی تعداد معلوم کرو۔

حل

(i) نظیری عرصہ

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

$$S=\begin{Bmatrix}(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)\\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)\\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)\\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6)\\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)\\ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\end{Bmatrix}$$

36 ترتیب وار جوڑیوں میں سے (α, β) جہاں α اور β کی قیمت سالم اعداد 1 اور 6 کے درمیان میں ہے جو نقشہ میں دیا گیا ہے۔ پانسے کے اعداد کا حاصل جمع کے نقاط (α, β) کو X کے طور پر مہیا کرتے ہیں۔ یعنی، $X(\alpha, \beta) = \alpha + \beta$

لہذا،

$X(1,1) = 1+1=2$

$X(1,2) = X(2,1)=3$

$X(1,3) = X(2,2)=X(3,1)=4$

$X(1,4) = X(2,3)=X(3,2)=X(4,1)=5$

$X(1,5) = X(2,4)=X(3,3)=X(4,2)=X(5,1)=6$

$X(1,6) = X(2,5)=X(3,4)=X(4,3)=X(5,2)=X(6,1)=7$

$$X(2,6) = X(3,5) = X(4,4) = X(5,3) = X(6,2) = 8$$
$$X(3,6) = X(4,5) = X(5,4) = X(6,3) = 9$$
$$X(4,6) = X(5,5) = X(6,4) = 10$$
$$X(5,6) = (6,5) = 11$$
$$X(6,6) = 12.$$

(ii) سریعی متغیر X کی حاصل کردہ قیمتیں 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

(iii) 10 کا معکوس عکس $\{(4,6), (5,5), (6,4)\}$

(iv) معکوس عکس کی کل تعداد نیچے دی گئی ہے۔

سریعی متغیر کی قیمتیں	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	کل
معکوس عکس کے عناصر کی تعداد	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1	36

مثال 11.3

ایک کوزہ جس میں 2 سفید گیند اور 3 سرخ گیند موجود ہیں۔ کوزے میں سے 3 گیندوں کو سریعی طور پر انتخاب کرتے ہیں۔ اگر X چنے گئے سرخ گیندوں کی تعداد کو ظاہر کرتی ہے تو سریعی متغیر X کی لی گئی قیمتیں اور اس کے معکوس عکس کی تعداد معلوم کرو۔

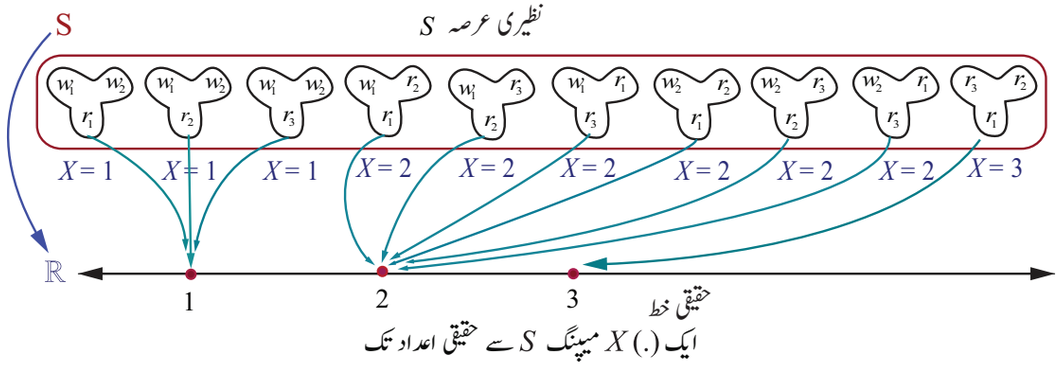
حل

فرض کرو کہ سفید اور سرخ گیندیں w_1، w_2، r_1، r_2 اور r_3 ہیں۔

نظیری عرصہ $5c_3 = 10$ مختلف 3 جسامت والی نظیروں پر مشتمل ہے۔

یعنی، $S = \{w_1w_2r_1,\ w_1w_2r_2,\ w_1w_2r_3,\ w_1r_1r_2,\ w_1r_2r_3,\ w_1r_1r_3,\ w_2r_1r_2,\ w_2r_2r_3,\ w_2r_1r_3,\ r_1r_2r_3\}$

سریعی متغیر X، قیمتیں 1، 2 اور 3 لیتا ہے۔



ایک $X(.)$ میپنگ S سے حقیقی اعداد تک

خاکہ 11.3

سریعی متغیر X کی قیمتیں	1	2	3	کل
معکوس عکس کے عناصر کی تعداد	3	6	1	10

ریمارک (Remark)

اگر X سفید گیندوں کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے تو X کی حاصل کردہ قیمتیں 0، 1، 2 ہیں اور معکوس عکس کے عناصر کی تعداد،

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 11_Probability Distributions.indd 182 28-02-2023 16:28:34

سریعی متغیر X کی قیمتیں	0	1	2	کل
معکوس عکس کے عناصر کی تعداد	1	6	3	10

تشریح 11.2

150 طلباء کے ایک جماعت کو 4 بسوں میں سیر کے لئے لے جایا جاتا ہے۔ پہلی بس میں 38 طلباء، دوسری بس میں 36 طلباء، تیسری بس میں 32 طلباء اور باقی کے طلباء 4 ویں بس میں بالترتیب موجود ہیں۔ جب بس اپنی منزل کو پہنچتی ہے تو بس میں موجودہ 150 طلباء میں سے سریعی طور پر ایک طالب علم کو انتخاب کیا جاتا ہے۔

اگر X سے مراد بس میں موجود طلباء کی تعداد جس میں سے 1 طالب علم سریعی طور پر چناگیاہو تو X کی قیمت 32، 36، 38 اور 44 ہوگی۔

مثال 11.4

6 سفید اور 4 سیاہ گیندوں پر مشتمل کوزے میں سے دو گیندوں کو سریعی طور پر انتخاب کیا جاتا ہے۔ فرض کرو کہ ہر ایک سیاہ گیند کے انتخاب پر ₹30 کی جیت اور ہر ایک سفید گیند کے انتخاب پر ₹20 کی ہار ہوتی ہے۔ اگر X انعامی رقم کو ظاہر کرتی ہے تو X کی قیمتیں اور معکوس عکس کی تعداد معلوم کرو۔

حل

انتخاب کردہ ممکن مواقع (i) دونوں گیندیں سیاہ ہوسکتی ہیں، یا (ii) ایک سفید اور ایک سیاہ، یا (iii) دونوں سفید ہیں۔ لہذا، X ایک سریعی متغیر ہے۔ جس کی قیمتیں،

$X = ₹\ 2(30) = ₹\ 60$ (دونوں سیاہ گیندیں)

$X = ₹\ 30 - ₹\ 20 = ₹\ 10$ (ایک سیاہ اور ایک سفید گیند)

$X = ₹\ 2(-20) = -₹\ 40$ (دونوں سفید گیندیں)

لہذا، X کی قیمتیں 60، 10 اور -40 حاصل ہوتی ہیں۔

نوٹ: 40 کا معکوس عکس $\{b_1b_2, b_1b_3, b_1b_4, b_2b_3, b_2b_4, b_3b_4.\}$ ہے۔

سریعی متغیر X کی قیمتیں	60	10	-40	کل
معکوس عکس کے عناصر کی تعداد	6	24	15	45

$\binom{6}{0}\binom{4}{2}$ $\binom{6}{1}\binom{4}{1}$ $\binom{6}{2}\binom{4}{0}$ $\binom{10}{2}$

تشریح 11.3

ایک سکہ کو سر آنے تک اچھالا جاتا ہے۔

اس کا نظیری عرصہ $S = \{H, TH, TTH, TTTH, \ldots\}$ ہے۔

فرض کرو کہ X سکہ کو سر آنے تک اچھالنے کے گنتی کو ظاہر کرتی ہے۔

تو سریعی متغیر X کی حاصل کردہ قیمتیں 1، 2، 3،... ہیں۔

تشریح 11.4

فرض کرو کہ N خریدار وں کی تعدادہے جو ہلپ ڈیسک کے پاس ایک وقت کے مدّت میں قطار میں کھڑی ہے تو نظیری عرصہ ایک غیر منفی سالم اعداد کا مجموعہ ہوناچاہئے ۔ یعنی، $S = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ اور N ایک سریعی متغیر ہے جس کی قیمتیں 0، 1، 2، 3،... ہیں۔

تشریح 11.5

اگر ایک تجربہ میں بجلی کے بلب کی زندگی کا مشاہدہ کیا جاتا ہے تو بجلی کے بلب کی زندگی ہی اس کا نظیری عرصہ ہوگا۔ لہذا، نظیری عرصہ $S = [0, \infty)$ ہے۔فرض کرو کہ X بجلی کے بلب کی زندگی کو اشارہ کرتا ہے ، تو X ایک سریعی متغیر ہے جس کی قیمتیں $[0, \infty)$ میں ہونگی۔

تشریح 11.6

فرض کرو کہ D ایک تھالی (disk) ہے۔ جس کا نصف قطر r ہے۔ فرض کرو کہ D میں سے ایک نقطہ سریعی طور پر منتخب کیا جا تا ہے۔ اگر X تھالی (disk) کے مرکز اوراس سے نقطہ کے فاصلہ کو اشارہ کرتا ہے تو نظیری عرصہ $S = D$ ہے اور X ایک سریعی متغیر ہے جو 0 سے r کی قیمتیں لیتا ہے۔ یعنی، $X(\omega) \in [0, r]$, for $\omega \in S$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 11_Probability Distributions.indd 183 28-02-2023 16:28:36

مشق 11.1

1. اگر X پشت کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے جب کہ تین سکوں کو بیک وقت اچھالا جائے تو سریعی متغیر X کی قیمتیں اور معکوس عکس کی تعداد معلوم کرو۔
2. 52 تاش کے پتوں میں سے 2 پتہ کو سریعی طور پر بیک وقت لیا جاتا ہے ۔ اگر سیاہ پتہ کی تعداد کو سریعی متغیر سے لیاجائے تو سریعی متغیر X کی قیمتیں اور معکوس عکسوں کے نقطوں کی تعداد معلوم کرو۔
3. ایک کوزے کے اندر 5 آم اور 4 سیب ہیں۔ 3 پھل کو سریعی طور پر لیا جاتا ہے۔ اگر سیب کی تعداد کو سریعی متغیر سے لیا جائے تو سریعی متغیر X کی قیمتیں اور معکوس عکسوں کے نقطوں کی کل تعداد معلوم کرو۔
4. 6 سرخ اور 8 سیاہ گیند والے کوزے میں سے 2 گیند سریعی طورپر انتخاب کیا جاتا ہے۔ فرض کرو کہ ₹15 کی جیت سرخ گیند کے انتخاب پر اور ₹10 کی ہار سیاہ گیند کے انتخاب پر ملتی ہے ۔ اگر X جیت کی رقم کو ظاہر کرتی ہے تو X کی قیمتیں اور معکوس عکسوں کی تعداد معلوم کرو۔
5. ایک چھ ضلع والا پانسہ میں '2' ایک چہرے میں لکھتے ہیں۔ '3' کو دو چہروں میں لکھتے ہیں اور '4' کو باقی چہروں میں لکھتے ہیں۔ پانسہ کو دو مرتبہ اچھالاجاتا ہے۔ اگر X دو اچھال کی حاصل جمع کی تعداد کو ظاہر کرتا ہےتو سریعی متغیر X کی قیمتیں اور معکوس عکسوں کے نقاط کی تعداد معلوم کرو۔

11.3 سریعی متغیر کے اقسام (Types of Random Variable)

اس باب میں ہم سریعی متغیر کی صرف دو قسموں کا علم حاصل کرینگے۔ فرض کرو کہ پہلی قسم کی سریعی متغیر جو کہ زیادہ سے زیادہ گنتی کی تعداد کو ظاہر کرتی ہے اور دوسری رقم جو سریعی متغیر کی مسلسل گنتی کو ظاہر کرتی ہے وہ دو قسمیں یہ ہیں۔

(i) منفصل سریعی متغیر (مقدار کو گنتے ہیں۔)

(ii) مسلسل سریعی متغیر (مقدار کے ناپ طول ہیں۔)

11.3.1 منفصل سریعی متغیر (Discrete random variables)

اس حصّے میں ہم بحث کرنے جارہے ہیں۔

(i) منفصل سریعی متغیر (Discrete random variables)

(ii) امکانی کمیتی تفاعل (Probability mass function)

(iii) مجموعی بٹوارے تفاعل (Cumulative distribution function)

(iv) امکانی کمیتی تفاعل سے مجموعی بٹوارے تفاعل کا حاصل کرنا۔

(v) مجموعی بٹوارے تفاعل سے امکانی کمیتی تفاعل کا حاصل کرنا۔

اگر سریعی متغیر کا وسعت سٹ منفصل سٹ کی تعداد میں ہے تو سریعی متغیر کا معکوس محدود یا قابل گنتی لامحدود ہوگا۔ ایسی سریعی متغیر کو منفصل سریعی متغیر کہا جاتا ہے۔ ایک سریعی متغیر جو منفصل نظیری عرصہ سے تعین کیا گیا ہے کہ وہ منفصل ہے۔

تعریف 11.2 (منفصل سریعی متغیر) (Discrete Random Variable)

ایک سریعی متغیر X جو نظیری عرصہ S سے حقیقی عدد $\mathbb{R}$ کو تعین کرتا ہے۔ وہ منفصل سریعی متغیر کہلاتا ہے۔ اگر X کی وسعت ایک قابل گنتی ہو۔ یعنی، X ایک محدود یا قابل گنتی لامحدود تعداد کی قیمتیں اختیار کرتی ہے۔ جہاں سٹ S کی ہر قیمت مثبت امکان ہو اور کل ایک ہو۔

ریمارک (Remark)

مثلاً یہ بھی ممکن ہے کہ مسلسل نظیری عرصہ سے منفصل سریعی متغیر کو معلوم کرسکتے ہیں۔

(i) مسلسل نظیری عرصہ $S=[0,1]$ ہو تو سریعی متغیر $X(\omega)=10$ کے تمام $\omega \in S$ دیا گیا ہے۔ ایک منفصل سریعی متغیر ہے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 11_Probability Distributions.indd 184 28-02-2023 16:28:37

(ii) مسلسل نظیری عرصہ $S=[0,20]$ ہو تو سریعی متغیر دیا گیا ہے، $X(\omega)=\begin{cases}1 & \omega\in[0,10)\text{ کے لئے}\\ 2 & \omega\in[10,20]\text{ کے لئے}\end{cases}$ ایک منفصل سریعی متغیر ہے۔

11.3.2 امکانی کمیتی تفاعل (Probability Mass Function)

امکان جس کا مفصل سریعی متغیر X کے لئے جانے والے خاص قیمت x ہو تو $P(X=x)$ ہیں، اس کو کثرت سے $f(x)$ یا $p(x)$ سے اشارہ کیا جا تا ہے۔ تفاعل $f(x)$ کو عام طور پر امکانی کمیتی تفاعل کہا جاتا ہے۔چند مصنفین کا کہنا ہے کہ اس کو امکانی تفاعل یا تعددِ تفاعل بھی کہہ سکتے ہیں۔ اس باب میں جب سریعی متغیر ایک منفصل ہو تو عام اصطلاحات کے طور پر امکانی کمیتی تفاعل کا استعمال ہوتا ہے اور اس کو عام طور پر pmf سے بھی ظاہر کرتے ہیں۔

تعریف 11.3 (امکانی کمیتی تفاعل) (Probability mass function)

اگر X ایک منفصل سریعی تغیر ہو جس کی منفصل قیمتیں $x_1,x_2,x_3,\ldots x_n\ldots,$ ہو تو تفاعل کو $f(.)$ یا $p(.)$ سے اشارہ کرتے ہیں اور اس کی وضاحت ہے

$$f(x_k)=P(X=x_k),\quad \text{کے لئے}\quad k=1,2,3,\ldots n,\ldots$$

اس کو X کا امکانی کمیتی تفاعل کہتے ہیں۔

مسئلہ 11.1 (بغیر ثبوت کے)

تفاعل $f(x)$ ایک امکانی کمیتی تفاعل ہے جب $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n\ldots.$ صحیح قیمتوں کے مجموعے کے لئے اگر صرف اور صرف مندرجہ ذیل خصوصیات کو مطمئن کرے۔

(i) $f(x_k)\geq 0$ کے لئے $k=1,2,3,\ldots n,\ldots$ اور (ii) $\sum_k f(x_k)=1$

غور کیجئے (Note)

(i) مجموعے کے امکانات $\{f(x_k)=P(X=x_k),\quad k=1,2,3,\ldots n,\ldots\}$ کو **منفصل سریعی متغیر کے امکانی بٹورے** کہا جا تا ہے۔

(ii) چونکہ، سریعی متغیر ایک تفاعل ہے تو اس کو اس طرح پیش کیا جاسکتا ہے۔

(a) جدول شکل سے (b) ترسیم شکل سے اور (c) اظہار کی شکل سے

مثال 11.5

دو سکے بیک وقت اچھالے جاتے ہیں۔ سروں کی تعداد واقع ہونے والے امکانی کمیتی تفاعل کو معلوم کرو۔

حل

نظیری عرصہ $S=\{H,T\}\times\{H,T\}$

یعنی، $S=\{TT, TH, HT, HH\}$

فرض کرو کہ X ایک سریعی متغیر جو سروں کی تعداد کو اشارہ کرتی ہے۔ لہذا،

$$X(TT)=0,\ X(TH)=1,$$

$$X(HT)=1,\ \text{اور}\ X(HH)=2.$$

ہوتو، X سریعی متغیر سے حاصل ہونے والی قیمتیں 0، 1 اور 2 ہیں۔

کل	2	1	0	سریعی متغیر کی قیمتیں
4	1	2	1	معکوس عکس کے عناصر کی تعداد

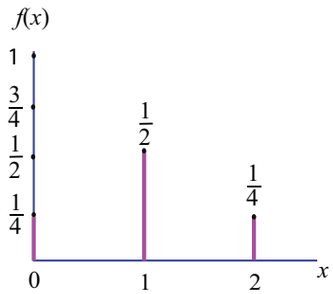
12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 11_Probability Distributions.indd 185 28-02-2023 16:28:41

امکانات دیے گئے ہیں،

$$f(0) = P(X=0) = \frac{1}{4},$$

$$f(1) = P(X=1) = \frac{1}{2}$$

$$f(2) = P(X=2) = \frac{1}{4} \quad \text{اور}$$



امکانی کمیتی تقاعل $f(x)$

خاکہ 11.4

تقاعل $f(x)$ اس شرطوں کو مطمئن کرتی ہے۔

(i) $f(x) \geq 0$, کے لئے $x = 0, 1, 2$

(ii) $\sum_x f(x) = \sum_{x=0}^{x=2} f(x) = f(0) + f(1) + f(2)$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$$

لہذا، $f(x)$ ایک امکانی کمیتی تقاعل ہے۔

امکانی کمیتی تقاعل اس طرح سے دیا گیا ہے۔

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

(یا)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{کے لئے } x = 0 \\ \frac{1}{2} & \text{کے لئے } x = 1 \\ \frac{1}{4} & \text{کے لئے } x = 2 \end{cases}$$

مثال 11.6

دو پانسہ بیک وقت ایک مرتبہ اُچھالے جاتے ہیں تو عدد 4 کے تعداد حاصل ہونے کا امکانی کمیتی تقاعل معلوم کرو۔

حل

فرض کرو کہ X ایک سریعی متغیر ہو جس کی قیمتیں x چار کی تعداد ہیں۔

نظیری عرصہ S جدول میں دیا گیا ہے۔

$$S = \begin{Bmatrix} (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6) \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6) \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6) \\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6) \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6) \\ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \end{Bmatrix}$$

جہاں $S = \{(i, j)\}$ $i = 1, 2, 3 \ldots, 6$ اور $j = 1, 2, 3, \ldots 6$

لہذا، X کی حاصل کردہ قیمتیں 0، 1 اور 2 ہیں۔

ہم مشاہدہ کرتے ہیں۔

(i) اگر $X = 0$، کے لئے (i, j) $i \neq 4$، $j \neq 4$

(ii) اگر $X = 1$،

$$(1,4),(2,4),(3,4),(5,4),(6,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,5),(4,6)$$

(iii) اگر $X = 2$، $(4,4)$

لہذا،

سریعی متغیر X کی قیمتیں	0	1	2	کل
معکوس عکس کے عناصر کی تعداد	25	10	1	36

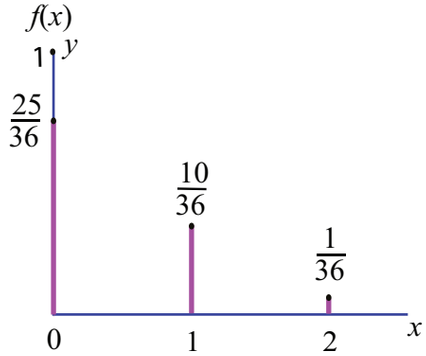
12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 11_Probability Distributions.indd 186 28-02-2023 16:28:45

اس کے امکانات

$$f(0) = P(X=0) = \frac{25}{36},$$

$$f(1) = P(X=1) = \frac{10}{36}$$

$$f(2) = P(X=2) = \frac{1}{36} \quad \text{اور}$$



امکانی کمیتی تفاعل $f(x)$ کا

خاکہ 11.5

واضح طور پر تفاعل $f(x)$ شرطوں کو مطمئن کرتی ہے۔

(i) $f(x) \geq 0, \quad x = 0, 1, 2$ کے لئے اور

(ii) $\sum_x f(x) = \sum_{x=0}^{x=2} f(x) = f(0)+f(1)+f(2) = 1$

$$= \frac{25}{36}+\frac{10}{36}+\frac{1}{36} = 1$$

پیش کردہ امکانی کمیتی تفاعل ہے

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

(یا)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{25}{36} & \text{کے لئے } x=0 \\ \frac{10}{36} & \text{کے لئے } x=1 \\ \frac{1}{36} & \text{کے لئے } x=2 \end{cases}$$

11.3.3 مجموعی بٹوارے تفاعل یا بٹوارے تفاعل (Cumulative Distribution Function or Distribution Function)

بہت سے حالات میں امکان معلوم کرتے وقت ایک سریعی متغیر X کی حاصل کردہ قیمت حقیقی عدد x سے کم ہو یا مساوی ہونے کا مشاہدہ کرتے ہیں۔ ہر ایک حقیقی عدد x کو $F(x) = P(X \leq x)$ سے لکھا جائے تو $F(x)$ کو **سریعی متغیر کا مجموعی بٹوارے تفاعل** یا **بٹوارے تفاعل** کہا جاتا ہے اور اس کو عام طور پر cdf سے بھی ظاہر کیا جاتا ہے۔

تعریف 11.4 (مجموعی بٹوارے تفاعل - cdf) (cumulative distribution function)

منفصل سریعی متغیر X کا مجموعی بٹوارے تفاعل $F(x)$ جو قیمتیں $x_1, x_2, x_3, \ldots$ لیتا ہے۔ اس طرح کہ $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$ امکانی کمیتی تفاعل $f(x_i)$ کے ساتھ۔

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i), \qquad x \in \mathbb{R}$$ ہے۔

منفصل سریعی متغیر کے بٹوارے تفاعل کو منفصل بٹوارے تفاعل کہتے ہیں۔ حالانکہ امکانی کمیتی تفاعل $f(x)$ صرف مجموعہ کی منفصل قیمتیں $x_1, x_2, x_3, \ldots,$ کے لئے واضح ہوتا ہے، تو مجموعی بٹوارے تفاعل $F(x)$ تمام حقیقی قیمتیں $x \in \mathbb{R}$. کے لئے بیان ہوتا ہے۔

امکانی کمیتی تفاعل کو استعمال کر کے ہم مجموعی بٹوارے تفاعل معلوم کرسکتے ہیں۔

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 11_Probability Distributions.indd 187 28-02-2023 16:28:50

اگر X صرف محدود رقموں کی قیمتیں $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ کو لیتا ہے۔ جہاں، $x_1 < x_2 < x_3 <, \cdots < x_n$ ہو تو درج ذیل میں مجموعی بٹوارے تفاعل کو دیا گیا ہے۔

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < x_1 \\ f(x_1), & x_1 \le x < x_2 \\ f(x_1) + f(x_2), & x_2 \le x < x_3 \\ f(x_1) + f(x_2) + f(x_3), & x_3 \le x < x_4 \\ \vdots & \vdots \\ f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n), & x_n \le x < \infty \end{cases}$$

منفصل سریعی متغیر X کے لئے مجموعی بٹوارے تفاعل مندرجہ ذیل کے خصوصیات کو مطمئن کرتی ہے۔

(i) $0 \le F(x) \le 1$ تمام $x \in \mathbb{R}$ کے لئے

(ii) $F(x)$ ایک حقیقی قیمت غیر- گھٹاؤ تفاعل ہے۔ ($x < y$ ہو تو $F(x) \le F(y)$)

(iii) $F(x)$ دائیں مسلسل تفاعل ہے۔ $\left(\lim_{x \to a+} F(x) = F(a)\right)$.

(iv) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0$

(v) $\lim_{x \to +\infty} F(x) = F(+\infty) = 1$

(vi) $P(x_1 < X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

(vii) $P(X > x) = 1 - P(X \le x) = 1 - F(x)$

(viii) $P(X = x_k) = F(x_k) - F(x_k^-)$

غور کیجئے (Note)

چند مصنفین مجموعی بٹوارے تفاعل $F(x)$ کی تعریف دائیں مسلسل کے بجائے بائیں مسلسل کا استعمال کرتے ہیں۔

11.3.4 امکانی کمیتی تفاعل سے مجموعی بٹوارے تفاعل
(Cumulative Distribution Function from Probability Mass function)

دونوں امکانی کمیتی تفاعل اور مجموعی بٹوارے تفاعل ایک منفصل سریعی متغیر X کے تمام امکانی معلومات رکھتے ہیں۔ X کا امکانی بٹوارے کو ان میں سے کسی ایک کے ذریعے معلوم کیا جا سکتا ہے۔ حقیقت میں منفصل سریعی متغیر X کے بٹوارے تفاعل F کو X کا امکانی کمیتی تفاعل $f(x)$ سے بھی اظہار کیا جاسکتا ہے اور اس کے برعکس بھی ہے۔

مثال 11.7

ایک سریعی متغیر X کا امکانی کمیتی تفاعل $f(x)$ ہو تو

x	1	2	3	4
$f(x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

معلوم کرو۔ (i) اس کا مجموعی بٹوارے تفاعل (ii) $P(X \le 3)$ اور (iii) $P(X \ge 2)$

حل

(i) منفصل سریعی متغیر کا مجموعی بٹوارے تفاعل کی تعریف کے ذریعے

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} P(X = x_i)$$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 11_Probability Distributions.indd 188 28-02-2023 16:28:53

$P(X<1) = 0$ کے لئے $-\infty < x < 1$.

$$F(1) = P(X \le 1) = \sum_{x_i \le x} P(X = x_i) = \sum_{-\infty}^{1} P(X = x) = P(X<1) + P(X=1) = 0 + \frac{1}{12} = \frac{1}{12}.$$

$$F(2) = P(X \le 2) = \sum_{-\infty}^{2} P(X = x) = P(X<1) + P(X=1) + P(X=2).$$

$$= 0 + \frac{1}{12} + \frac{5}{12} = \frac{1}{2}.$$

$$F(3) = P(X \le 3) = \sum_{-\infty}^{3} P(X = x) = P(X<1) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3).$$

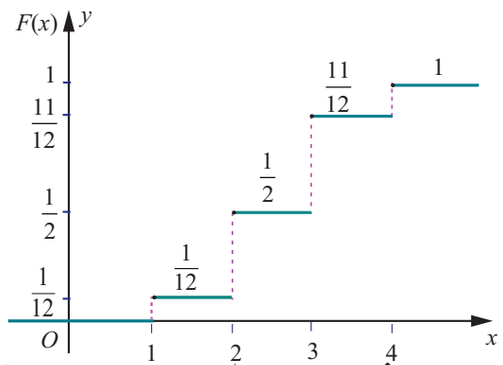
$$= 0 + \frac{1}{12} + \frac{5}{12} + \frac{5}{12} = \frac{11}{12}.$$

$$F(4) = P(X \le 4) = \sum_{-\infty}^{4} P(X = x) = P(X<1) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4).$$

$$= 0 + \frac{1}{12} + \frac{5}{12} + \frac{5}{12} + \frac{1}{12} = 1.$$

لہذا، مجموعی بٹوارے تفاعل ہے۔

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 1 \\ \frac{1}{12}, & 1 \le x < 2 \\ \frac{1}{2}, & 2 \le x < 3 \\ \frac{11}{12}, & 3 \le x < 4 \\ 1, & 4 \le x < \infty \end{cases}$$



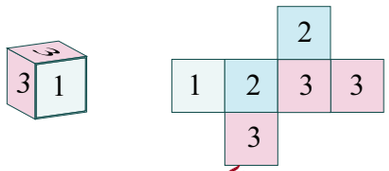
خاکہ 11.6 مجموعی بٹوارے تفاعل $F(x)$

(ii) $P(X \le 3) = F(3) = \frac{11}{12}$.

(iii) $P(X \ge 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \le 1) = 1 - F(1) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$.

مثال 11.8

ایک چھ ضلع والا پانسہ میں '1' کو ایک چہرہ میں '2' کو اس کے دو چہرہ میں اور '3' کو باقی چہروں سے نشاندہی کرتے ہیں۔ پانسہ کو دو مرتبہ پھینکا جاتا ہے۔ اگر X دو اچھال کے حاصل جمع کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے۔



خاکہ 11.7

(i) امکانی کمیتی تفاعل معلوم کرو۔

(ii) مجموعی بٹوارے تفاعل معلوم کرو۔

(iii) $P(3 \le X < 6)$ معلوم کرو۔ (iv) $P(X \ge 4)$ معلوم کرو۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 11_Probability Distributions.indd 189 28-02-2023 16:28:57

حل

چنانچہ، X دو پانسہ کے حاصل جمع کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے تو اس کی حاصل کردہ قیمتیں 2، 3، 4، 5 اور 6 ہیں۔

نظیری عرصہ **S** سے ہمیں حاصل ہوگا،

سریعی متغیر کی قیمتیں	2	3	4	5	6	کل
معکوس عکسوں کے عناصر کی تعداد	1	4	10	12	9	36

نظیری عرصہ **S**

I \ II	1	2	2	3	3	3
1	2	3	3	4	4	4
2	3	4	4	5	5	5
2	3	4	4	5	5	5
3	4	5	5	6	6	6
3	4	5	5	6	6	6
3	4	5	5	6	6	6

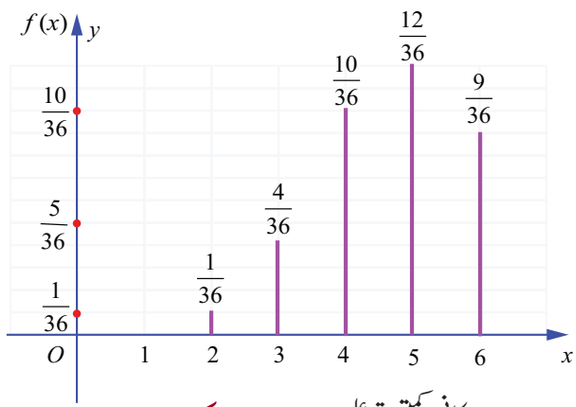
$$P(X=2) = \frac{1}{36}, \quad P(X=3) = \frac{4}{36}$$

$$P(X=4) = \frac{10}{36}, \quad P(X=5) = \frac{12}{36},$$

اور $P(X=6) = \frac{9}{36}$.

(i) امکانی کمیتی تفاعل

x	2	3	4	5	6
$f(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{9}{36}$



امکانی کمیتی تفاعل **خاکہ 11.8**

(ii) مجموعی بٹوارے تفاعل

منفصل سریعی متغیر کا مجموعی بٹوارے تفاعل کی تعریف سے ہمیں حاصل ہوگا،

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} P(X = x_i)$$

$P(X < x) = 0$ کے لئے $-\infty < X < 2$.

$$F(2) = P(X \le 2) = \sum_{-\infty}^{2} P(X = x) = P(X < 2) + P(X = 2) = 0 + \frac{1}{36} = \frac{1}{36}.$$

$$F(3) = P(X \le 3) = \sum_{-\infty}^{3} P(X = x) = P(X < 2) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0 + \frac{1}{36} + \frac{4}{36} = \frac{5}{36}.$$

$$F(4) = P(X \le 4) = \sum_{-\infty}^{4} P(X = x) = P(X < 2) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$$

$$= 0 + \frac{1}{36} + \frac{4}{36} + \frac{10}{36} = \frac{15}{36}.$$

$$F(5) = P(X \le 5) = \sum_{-\infty}^{5} P(X = x) = P(X < 2) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$$

$$= 0 + \frac{1}{36} + \frac{4}{36} + \frac{10}{36} + \frac{12}{36} = \frac{27}{36}.$$

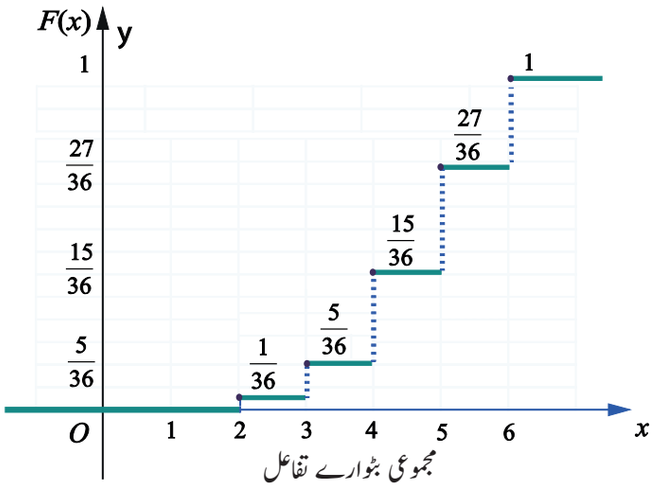
12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 11_Probability Distributions.indd 190 28-02-2023 16:29:02

$$F(6) = P(X \le 6) = \sum_{-\infty}^{6} P(X = x)$$

$$= P(X < 2) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6)$$

$$= 0 + \frac{1}{36} + \frac{4}{36} + \frac{10}{36} + \frac{12}{36} + \frac{9}{36} = 1$$

لہذا، مجموعی بٹوارے تفاعل ہے۔



مجموعی بٹوارے تفاعل

خاکہ 11.9

$$\begin{cases} 0 & \text{کے لئے } -\infty < x < 2 \\ \frac{1}{36} & \text{کے لئے } 2 \le x < 3 \\ \frac{5}{36} & \text{کے لئے } 3 \le x < 4 \\ \frac{15}{36} & \text{کے لئے } 4 \le x < 5 \\ \frac{27}{36} & \text{کے لئے } 5 \le x < 6 \\ 1 & \text{کے لئے } 6 \le x < \infty \end{cases}$$

(iii) $P(3 \le X < 6) = \sum_{x=3}^{5} P(X = x_i) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$

$$= \frac{4}{36} + \frac{10}{36} + \frac{12}{36} = \frac{26}{36} .$$

(iv) $P(X \ge 4) = \sum_{x=4}^{\infty} P(X = x_i)$

$$= P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6)$$

$$= \frac{10}{36} + \frac{12}{36} + \frac{9}{36} = \frac{31}{36} .$$

11.3.5 مجموعی بٹوارے تفاعل سے امکانی کمیتی تفاعل
(Probability Mass Function from Cumulative Distribution Function)

ایک منفصل سریعی متغیر X کے لئے مجموعی بٹوارے تفاعل F میں ہر ایک x_i پر اچھال ہے۔ اور وہ اچھال متواتر $x_i's$ کے درمیان مستقل ہے، x_i پر اچھال کی اونچائی $f(x_i)$ ہے؛ اس طرح سے x_i پر امکان F سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 11_Probability Distributions.indd 191 28-02-2023 16:29:05

فرض کرو کہ X ایک منفصل سریعی متغیر ہے جو قیمتیں $x_1, x_2, x_3, \ldots$ لیتا ہے، اس طرح کہ، $x_1 < x_2, < x_3 \cdots$ اور $F(x_i)$ ایک بٹوارے تفاعل ہے۔ تو امکانی کمیتی تفاعل $f(x_i)$ اس طرح سے دیا گیا ہے۔

$$f(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1}), \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

غور کیجئے (Note)

$x = a$ پر تفاعل $\mathrm{F}(x)$ کا اچھال $\left|F(a^+) - F(a^-)\right|$ ہے۔ چونکہ، F ایک غیر گھٹاؤ اور دائیں طرف مسلسل ہے مجموعی بٹوارے تفاعل F کا اچھال $P(X = x) = F(x) - F(x^-)$ ہے۔ یہاں، یہ اچھال (غیر مسلسل کی وجہ سے) امکان کے طور پر کام کرتا ہے۔ یعنی، مجموعی بٹوارے تفاعل کا غیر مسلسل مجموعہ ایک انتہائی قابل شمار ہے۔

مثال 11.9

منفصل سریعی متغیر X کا امکانی کمیتی تفاعل $f(x)$ معلوم کرو جس کا مجموعی بٹوارے تفاعل $\mathrm{F}(x)$ دیا گیا ہے۔

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < -2 \\ 0.25 & -2 \le x < -1 \\ 0.60 & -1 \le x < 0 \\ 0.90 & 0 \le x < 1 \\ 1 & 1 \le x < \infty \end{cases}$$

اور مزید معلوم کرو۔ (i) $P(X < 0)$ اور (ii) $P(X \ge -1)$

حل

چنانچہ، X ایک منفصل سریعی متغیر ہے۔ دیئے گئے معطیات سے X کی حاصل کردہ قیمتیں -2 ، -1 ، 0 ، اور 1 ہیں۔

منفصل سریعی متغیر X کے لئے ، تعریف سے ہمیں، $f(x) = P(X = x)$ حاصل ہوگا۔

چنانچہ، $\mathrm{F}(x)$ کی بائیں ہاتھ کی حد $x = -2$ پر $F(-2^-)$ ہوگا۔

$$f(-2) = P(X = -2) = F(-2) - F(-2^-) = 0.25 - 0 = 0.25.$$

اس طرح دوسرے اچھالی نقطے سے ہمیں حاصل ہوگا،

$$f(-1) = P(X = -1) = F(-1) - F(-2) = 0.60 - 0.25 = 0.35.$$

$$f(0) = P(X = 0) = F(0) - F(-1) = 0.90 - 0.60 = 0.30,$$

$$f(1) = P(X = 1) = F(1) - F(0) = 1 - 0.90 = 0.10.$$

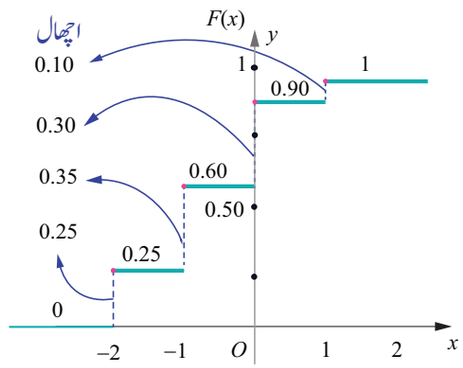
لہذا، امکانی کمیتی تفاعل

x	-2	-1	0	1
$f(x)$	0.25	0.35	0.30	0.10

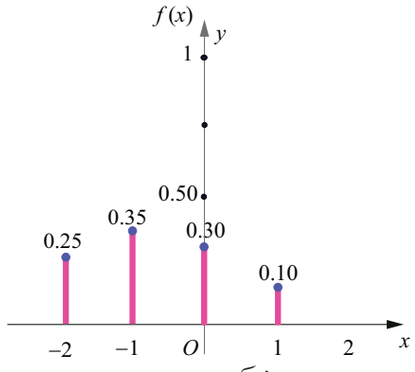
بٹوارے تفاعل $\mathrm{F}(x)$ کا اچھال $x = -2, -1, 0,$ اور 1 پر ہے۔ یہ اچھال بالترتیب 0.25، 0.35، 0.30 اور 0.1 درج ذیل کے نقشے میں ظاہر کیا گیا ہے۔

یہ اچھال امکانی کمیتی تفاعل کو واضح کرتا ہے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 11_Probability Distributions.indd 192 28-02-2023 16:29:10



بٹوارے تفاعل $F(x)$ اور ہر ایک x_i پر اچھال



امکانی کمیتی تفاعل $f(x)$

خاکہ 11.10

(i) $P(X<0)=\sum_{-\infty}^{-1}P(X=x)=P(X=-2)+P(X=-1)=0.25+0.35=0.60$.

(ii) $P(X\geq -1)=\sum_{-1}^{1}P(X=x)=P(X=-1)+P(X=0)+P(X=1)=0.35+0.30+0.10=0.75$

مثال 11.10

ایک سریعی متغیر X کا مندرجہ ذیل امکانی کمیتی تفاعل دیا گیا ہے۔

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	k	$2k$	$6k$	$5k$	$6k$	$10k$

معلوم کرو۔ (i) $P(2<X<6)$ (ii) $P(2\leq X<5)$ (iii) $P(X\leq 4)$ (iv) $P(3<X)$

حل

چونکہ، دیا گیا تفاعل ایک امکانی کمیتی تفاعل ہے جس کا کل امکان 1 ہے۔ یعنی، $\sum_x f(x)=1$

دئے گئے معطیات سے $k+2k+6k+5k+6k+10k=1$

$$30k=1 \Rightarrow k=\frac{1}{30}$$

لہذا، امکانی کمیتی تفاعل

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	$\frac{1}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{5}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{10}{30}$

(i) $P(2<X<6)=f(3)+f(4)+f(5)=\frac{6}{30}+\frac{5}{30}+\frac{6}{30}=\frac{17}{30}$.

(ii) $P(2\leq X<5)=f(2)+f(3)+f(4)=\frac{2}{30}+\frac{6}{30}+\frac{5}{30}=\frac{13}{30}$.

(iii) $P(X\leq 4)=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=\frac{1}{30}+\frac{2}{30}+\frac{6}{30}+\frac{5}{30}=\frac{14}{30}$.

(iv) $P(3<X)=f(4)+f(5)+f(6)=\frac{5}{30}+\frac{6}{30}+\frac{10}{30}=\frac{21}{30}$.

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 11_Probability Distributions.indd 193 28-02-2023 16:29:15

مشق 11.2

1. تین سکے بیک وقت اچھالے جاتے ہیں ۔ سروں کی تعداد واقع ہونے کا امکانی کمیتی تفاعل معلوم کرو۔
2. ایک چہروں والے پانسہ میں' 1' ایک چہرہ میں، '3' دو چہروں میں اور '5' باقی تین چہروں میں نشاندہی کرتے ہیں پانسہ کو دو مرتبہ پھینکا جاتا ہے۔ اگر X دو اچھال کے حاصل جمع کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے تو معلوم کرو

(i) امکانی کمیتی تفاعل (ii) مجموعی بٹوارے تفاعل

(iii) $P(4 \le X < 10)$ (iv) $P(X \ge 6)$

3. 4 بچوں والے خاندانوں میں لڑکوں اور لڑکیوں کے مساوی امکانات کو فرض کرتے ہوئے امکانی کمیتی تفاعل اور مجموعی بٹوارے تفاعل معلوم کرو۔
4. فرض کرو کہ ایک منفصل سریعی متغیر صرف 0، 1، 2 کی قیمتیں لے سکتا ہے تو امکانی کمیتی تفاعل کی تشریح دی گئی ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{k}, & \text{کے لئے } x = 0, 1, 2 \\ 0 & \text{ورنہ} \end{cases}$$

(i) k کی قیمت (ii) مجموعی بٹوارے تفاعل (iii) $P(X \ge 1)$ معلوم کریں۔

5. ایک منفصل سریعی متغیر کا مجموعی بٹوارے تفاعل دیا گیا ہے۔

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < -1 \\ 0.15 & -1 \le x < 0 \\ 0.35 & 0 \le x < 1 \\ 0.60 & 1 \le x < 2 \\ 0.85 & 2 \le x < 3 \\ 1 & 3 \le x < \infty \end{cases}$$

تو معلوم کریں۔ (i) امکانی کمیتی تفاعل (ii) $P(X < 1)$ اور (iii) $P(X \ge 2)$

6. ایک سریعی متغیر X کا امکانی کمیتی تفاعل مندرجہ ذیل دیا گیا ہے۔

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	k^2	$2k^2$	$3k^2$	$2k$	$3k$

تو معلوم کریں۔ (i) k کی قیمت (ii) $P(2 \le X < 5)$ اور (iii) $P(3 < X)$

7. ایک منفصل سریعی متغیر کا مجموعی بٹوارے تفاعل دیا گیا ہے۔

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{کے لئے } -\infty < x < 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{کے لئے } 0 \le x < 1 \\ \dfrac{3}{5} & \text{کے لئے } 1 \le x < 2 \\ \dfrac{4}{5} & \text{کے لئے } 2 \le x < 3 \\ \dfrac{9}{10} & \text{کے لئے } 3 \le x < 4 \\ 1 & \text{کے لئے } 4 \le x < \infty \end{cases}$$

تو معلوم کریں۔ (i) امکانی کمیتی تفاعل (ii) $P(X < 3)$ اور (iii) $P(X \ge 2)$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 11_Probability Distributions.indd 194 28-02-2023 16:29:18

11.4 مسلسل بٹوارے (Continuous Distributions)

اس حصّے میں ہم سیکھنے جارہے ہیں۔

(i) مسلسل سریعی متغیر (Continuous random variable)

(ii) امکانی کثافت تفاعل (Probability density function)

(iii) بٹوارے تفاعل (مجموعی بٹوارے تفاعل)

(iv) امکانی کثافت تفاعل سے بٹوارے تفاعل (cdf) کا تعین کرنا

(v) بٹوارے تفاعل (cdf) سے امکانی کثافت تفاعل (pdf) کا تعین کرنا

بعض اوقات کسی پیمائش جیسے تانبے کے تار میں کرنٹ یا بجلی کے بلب کی عمر کی لمبائی، حقیقی تعداد کے وقفے میں کسی بھی قیمت کو قبول کرسکتے ہیں۔ تب ہی اس پیمائش کی درستگی ممکن ہے۔ سریعی متغیر جو اس پیمائش کی نمائندگی کرتا ہے اُس کو **مسلسل** سریعی متغیر کہاجاتاہے۔ سریعی متغیر کے وسعت میں حقیقی اعداد کے وقفے میں تمام قیمتیں شامل ہیں۔ یعنی، وسعت حقیقی اعداد کا مسلسل سمجھاجاسکتا ہے۔

11.4.1 مسلسل سریعی متغیر کی تعریف (The definition of continuous random variable)

تعریف 11.5 (مسلسل سریعی متغیر) (Continuous Random Variable)

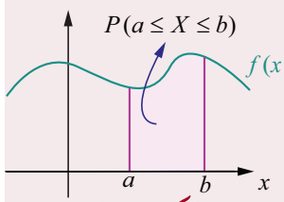
فرض کروکہ S ایک نظیری عرصہ ہے اور $X : S \to R$ ایک سریعی متغیر ہے جو R کے ایک سٹ I میں کسی بھی قیمت کو لیتاہے۔ اگر $P(X = x) = 0$ ، I کے ہر ایک x کے لئے ہو تو X کو **مسلسل سریعی متغیر** کہا جاتا ہے ۔

11.4.2 امکانی کثافت تفاعل (Probability density function)

تعریف 11.6 (امکانی کثافت تفاعل) (Probability density function)

ایک غیر منفی حقیقی عدد تفاعل $f(x)$ کو **امکانی کثافت تفاعل** کہا جاتا ہے۔ اگر مسلسل سریعی متغیر X کے ہر ایک ممکن نتائج x کے لئے $x \in [a,b]$ ہے۔ خصوصیات رکھتا ہو،

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\, dx$$



خاکہ 11.11

مسئلہ 11.2 (بغیر ثبوت کے)

ایک تفاعل $f(.)$ چند مسلسل سریعی متغیر X کے لئے امکانی کثافت تفاعل ہے اگر اور صرف اگر وہ مندرجہ ذیل خصوصیات کو مطمئن کرتا ہے۔

(i) $f(x) \ge 0$ ، تمام x کے لئے اور (ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

غور کیجئے (Note)

اگر X ایک مسلسل سریعی متغیر ہو تو مذکورہ بالا تعریف سے،

$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\, dx,$ جس کا مطلب، $P(X = a) = \int_a^a f(x)\, dx = 0$

یعنی جب X کسی ایک خاص قیمت کو لیتا ہے تو امکان صفر ہوجاتاہے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 11_Probability Distributions.indd 195 28-02-2023 16:29:20

11.4.3 بٹوارے تفاعل (مجموعی بٹوارے تفاعل) (Distribution function (Cumulative distribution function))

تعریف 11.7 (مجموعی بٹوارے تفاعل) (Cumulative Distribution Function)

امکانی کثافت $f(x)$ کے ساتھ مسلسل سریعی متغیر X کا **بٹوارے تفاعل یا مجموعی بٹوارے تفاعل** $F(x)$ ہے۔

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du, \qquad -\infty < u < \infty .$$

ریمارک (Remark)

(1) منفصل کے معاملے میں $f(a) = P(X = a)$ امکان ہے جس میں X قیمت a لیتا ہے۔

مسلسل کے معاملے میں، $x = a$ میں $f(x)$ امکان نہیں ہے جس میں X قیمت a لیتا ہے۔

یعنی، $f(a) \neq P(X = a)$، اگر X ایک مسلسل قسم کا ہے، $P(X = a) = 0$، $a \in \mathbb{R}$ کے لئے

(2) جب سریعی متغیر مسلسل ہو تو منفصل میں استعمال حاصل جمع کو تکمیل میں تبدیل کیا جاسکتا ہے۔

(3) مسلسل سریعی متغیر کے لئے،

$$P(a < X < b) = P(a \le X < b) = P(a < X \le b) = P(a \le X \le b)$$

(4) مسلسل سریعی متغیر کے بٹوارے تفاعل کو مسلسل بٹوارے تفاعل کہاجاتا ہے۔

11.4.3.1 بٹوارے تفاعل کی خصوصیات (Properties of distribution function)

مسلسل سریعی متغیر X کے لئے، مجموعی بٹوارے تفاعل مندرجہ ذیل کے خصوصیات کو مطمئن کرتا ہے۔

(i) $0 \le F(x) \le 1$

(ii) $F(x)$ ایک حقیقی قیمت اور غیر- گھٹاؤ ہے۔ یعنی، اگر $x < y$ ہو تو

$$F(x) \le F(y)$$

(iii) $F(x)$ ہر جگہ مسلسل ہے۔

(iv) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0$ اور $\lim_{x \to \infty} F(x) = F(+\infty) = 1$

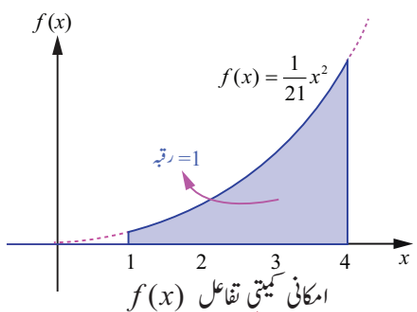
(v) $P(X > x) = 1 - P(X \le x) = 1 - F(x)$

(vi) $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$

مثال 11.11

مستقل C کی قیمت معلوم کرو اس طرح کہ، اگر $f(x) = \begin{cases} Cx^2 & 1 < x < 4 \\ 0 & \text{ورنہ} \end{cases}$ کثافت تفاعل ہو اور

(i) $P(1.5 < X < 3.5)$ (ii) $P(X \le 2)$ (iii) $P(3 < X)$ معلوم کرو۔



امکانی کمیتی تفاعل $f(x)$

خاکہ 11.12

حل

چونکہ، دی گئی تفاعل ایک امکانی کثافت تفاعل ہے،

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$$

یعنی، $\int_{-\infty}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{4} f(x)\,dx + \int_{4}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

دی گئی معلومات سے،

$$\int_{-\infty}^{1} 0\,dx + \int_{1}^{4} Cx^2\,dx + \int_{4}^{\infty} 0\,dx = 1.$$

$$0 + C\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^4 + 0 = 1, \quad \Rightarrow C\left[\frac{64-1}{3}\right] = 1 \quad \Rightarrow 21C = 1 \quad \Rightarrow C = \frac{1}{21}.$$

چنانچہ، امکانی کثافت تفاعل ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{21}x^2 & 1 < x < 4 \\ 0 & \text{ورنہ} \end{cases}$$

چونکہ، $f(x)$ ایک مسلسل ہے، جب X کسی ایک خاص قیمت کے مساوی ہو تو امکان صفر ہے۔ لہٰذا، جب سریعی متغیر مسلسل ہو تو کوئی ایک یا دونوں نشانیاں $<$ سے $\leq$ اور $>$ سے $\geq$ تبادلہ ہو سکتا ہے۔ اس طرح،

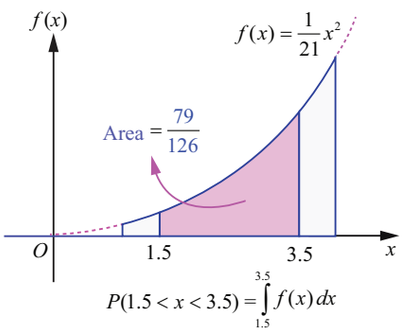
(i) $P(1.5 < X < 3.5) = P(1.5 \leq X < 3.5) = P(1.5 < X \leq 3.5) = P(1.5 \leq X \leq 3.5)$

لہٰذا،

$$P(1.5 < X < 3.5) = \int_{1.5}^{3.5} f(x)\,dx = \frac{1}{21}\int_{1.5}^{3.5} x^2\,dx$$

$$= \frac{1}{21}\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{1}{21}\left(\frac{(3.5)^3 - (1.5)^3}{3}\right)$$

$$= \frac{79}{126}.$$



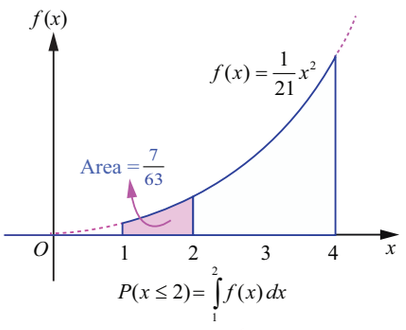
خاکہ 11.13

(ii) $P(X \leq 2) = \int_{-\infty}^{2} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{2} f(x)\,dx$

لہٰذا،

$$P(X \leq 2) := 0 + \frac{1}{21}\int_1^2 x^2\,dx = \frac{1}{21}\left(\frac{x^3}{3}\right)_1^2$$

$$= \frac{1}{21}\left(\frac{2^3 - 1^3}{3}\right) = \frac{7}{63}.$$



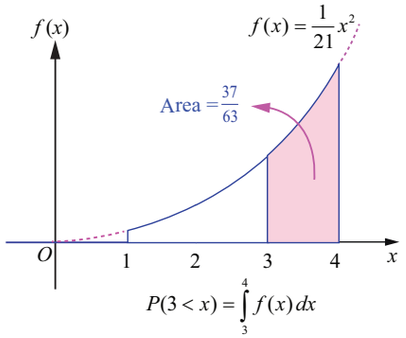
خاکہ 11.14

(iii) $P(3 < X) = \int_{3}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{3}^{4} f(x)\,dx + \int_{4}^{\infty} f(x)\,dx$

لہٰذا،

$$= \frac{1}{21}\int_3^4 x^2\,dx + 0 = \frac{1}{21}\left(\frac{x^3}{3}\right)_3^4.$$

$$= \frac{1}{21}\left(\frac{4^3 - 3^3}{3}\right) = \frac{37}{63}$$



خاکہ 11.15

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 11_Probability Distributions.indd 197 28-02-2023 16:29:27

11.4.4 امکانی کثافت تفاعل سے بٹوارے تفاعل (Distribution function from Probability density function)

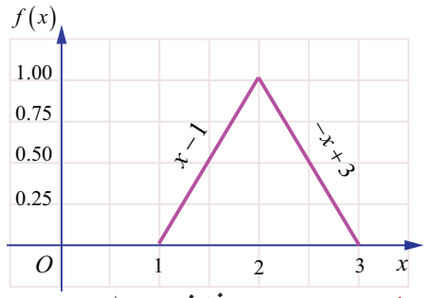
مسلسل سریعی متغیر X کا امکانی کثافت تفاعل اور مجموعی بٹوارے تفاعل (یا بٹوارے تفاعل) X کی تمام امکانی معلومات پر مشتمل ہے۔ X کی امکانی بٹوارے کا تعین ان دونوں میں سے کسی ایک کے ذریعے ہوتا ہے۔ آئیے ہم امکانی کثافت تفاعل $f(x)$ سے مسلسل سریعی متغیر X کے بٹوارے تفاعل F تعین کرنے کا طریقہ اور اس کا برعکس بھی سیکھیں گے۔

مثال 11.12

اگر سریعی متغیر X امکانی کثافت تفاعل $f(x)$ کے ساتھ دیا گیا ہو،

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & 1\le x<2 \\ -x+3, & 2\le x<3 \\ 0 & \text{ورنہ} \end{cases}$$

تو معلوم کریں۔ (i) بٹوارے تفاعل $F(x)$ (ii) $P(1.5\le X\le 2.5)$



خاکہ 11.16 امکانی کثافت تفاعل

حل

(i) تعریف سے، $F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$

جب، $x<1$

$$F(x) = P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} 0\,du=0$$

جب، $1\le x<2$

$$F(x) = P(X\le x)=\int_{-\infty}^{1} 0du+\int_{1}^{x}(u-1)\,du$$

$$= 0+\left[\frac{(u-1)^2}{2}\right]_1^x=\frac{(x-1)^2}{2}$$

جب، $2\le x<3$

$$F(x) = P(X\le x)=\int_{-\infty}^{1} 0du+\int_{1}^{2}(u-1)\,du+\int_{2}^{x}(3-u)\,du$$

$$= 0+\left[\frac{(u-1)^2}{2}\right]_1^2+\left[-\frac{(3-u)^2}{2}\right]_2^x$$

$$= \frac{1^2-0}{2}+\frac{1-(3-x)^2}{2}=1-\frac{(3-x)^2}{2}$$

جب، $x\ge 3$

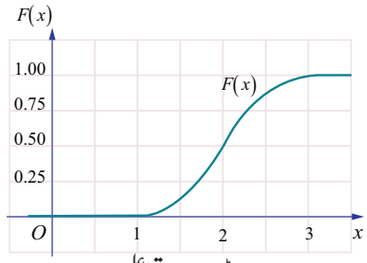
$$F(x) = P(X\le x)=\int_{-\infty}^{1} 0du+\int_{1}^{2}(u-1)\,du+\int_{2}^{3}(3-u)\,du+\int_{3}^{x}0\,du$$

$$= \int_{-\infty}^{1} 0du+\int_{1}^{2}(u-1)\,du+\int_{2}^{3}(3-u)\,du+\int_{3}^{x}0\,du$$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 11_Probability Distributions.indd 198 28-02-2023 16:29:31

$$= 0 + \left[\frac{(u-1)^2}{2}\right]_1^2 + \left[-\frac{(3-u)^2}{2}\right]_2^3 + 0$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$



بٹوارے تفاعل
خاکہ 11.17

$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 1 \\ \frac{(x-1)^2}{2}, & 1 \le x < 2 \\ 1 - \frac{(3-x)^2}{2}, & 2 \le x < 3 \\ 1 & 3 \le x < \infty \end{cases}$ سے حاصل ہو گا،

(ii) $P(1.5 \le X \le 2.5) = F(2.5) - F(1.5)$

$$= \left(1 - \frac{(3-2.5)^2}{2}\right) - \left(\frac{(1.5-1)^2}{2}\right)$$

$$= \frac{1.75 - 0.25}{2} = 0.75$$

or

$$P(1.5 \le X \le 2.5) = \int_{1.5}^{2.5} f(x)\,dx = \int_{1.5}^{2} (x-1)\,dx + \int_{2}^{2.5} (-x+3)\,dx = 0.75.$$

جائزہ لیں : (i) کیا F(x) ہر جگہ مسلسل ہے۔

(ii) خاکہ 11.17 سے، مثلث کا رقبہ $= \frac{1}{2}bh = 1$

11.4.5 امکانی بٹوارے تفاعل سے امکانی کثافت تفاعل
(Probability density function from Probability distribution function.)

آئے ہم مسلسل سریعی متغیر X کا بٹوارے تفاعل F(x) سے امکانی کثافت تفاعل $f(x)$ کا تعین کرنے کا طریقے سیکھیں۔

فرض کرو کہ ایک مسلسل سریعی متغیر X کا بٹوارے تفاعل $F(x)$ ہو تو امکانی کثافت تفاعل $f(x)$ دیا گیا ہے۔

$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x)$ ، جہاں بھی مشتق موجود ہو۔

مثال 11.13

اگر سریعی متغیر X بٹوارے تفاعل F(x) کے ساتھ دیا گیا ہے،

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \le x < 1. \\ 1, & 1 \le x \end{cases}$$

تو معلوم کریں۔ (i) امکانی کثافت تفاعل $f(x)$ (ii) $P(0.2 \le X \le 0.7)$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 11_Probability Distributions.indd 199 28-02-2023 16:29:34

حل

(i) $f(x)$ کے مسلسل نقاط پر $F(x)$ کو x، کے لحاظ سے تفریق کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & 0\le x<1\\ 0, & x\ge 1\end{cases}$$

امکانی کثافت تفاعل $f(x)$، $x=0$ پر یا $x=1$ پر میں غیر مسلسل ہے۔ ہم کسی بھی طرح $f(0)$ اور $f(1)$ کی وضاحت کریں گے۔ $f(0)=1$ اور $f(1)=0$ منتخب کرکے۔

لہذا، امکانی کثافت تفاعل $f(x)$ ہے۔

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x<1\\ 0, & \text{ورنہ}\end{cases}$$

(ii)
$$P(0.2\le X\le 0.7) = F(0.7)-F(0.2)$$
$$= 0.7-0.2=0.5$$

یا

$$P(0.2\le X\le 0.7) = \int_{0.2}^{0.7} f(x)\,dx=\int_{0.2}^{0.7} 1\,dx=0.5\,.$$

ریمارک (Remark)

تعریف سے $P(X\le x)=F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$، $F(x)$ یا $f(x)$ ان میں سے کسی کو بھی استعمال کرکے امکان $P(a<X<b)$ حاصل کیا جا سکتا ہے۔

غور کیجئے (Note)

ہم مندرجہ بالا امکانی کثافت تفاعل کی وضاحت اس طرح سے بھی کر سکتے ہیں۔

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{ورنہ}\end{cases}\quad \text{یا}\quad f(x)=\begin{cases}1, & 0<x\le 1\\ 0, & \text{ورنہ}\end{cases}\quad \text{یا}\quad f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & \text{ورنہ}\end{cases}$$

مثال 11.14

سریعی متغیر X کا امکانی کثافت تفاعل $f(x)=\begin{cases}k & 1\le x\le 5\\ 0 & \text{ورنہ}\end{cases}$ دیا گیا ہے۔

تو معلوم کریں۔ (i) بٹوارے تفاعل (ii) $P(X<3)$ (iii) $P(2<X<4)$ (iv) $P(3\le X)$

حل

چونکہ، $f(x)$ ایک امکانی کثافت تفاعل ہے، $f(x)\ge 0$ اور $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1$

یعنی، $\int_{-\infty}^{1} 0\,dx+\int_{1}^{5} k\,dx+\int_{5}^{\infty} 0\,dx=1$

$$0+k(x)_1^5+0=1\Rightarrow 4k=1\Rightarrow k=\frac{1}{4}.$$

لہذا، امکانی کثافت تفاعل

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & 1\le x\le 5\\ 0, & \text{ورنہ}\end{cases}$$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 11_Probability Distributions.indd 200 28-02-2023 16:29:38

(i) بٹوارے تفاعل

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du \quad \text{بٹوارے تفاعل}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du = \int_{-\infty}^{x} 0\,du = 0 \quad \text{جب، } x < 1 \text{ ،}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du = \int_{-\infty}^{1} 0\,du + \int_{1}^{x} \frac{1}{4}\,du = \frac{1}{4}(x-1) \quad \text{جب، } 1 \le x < 5 \text{ ،}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du = \int_{-\infty}^{1} 0\,du + \int_{1}^{5} \frac{1}{4}\,du + \int_{5}^{x} 0\,du = 1 \quad \text{جب، } x \ge 5 \text{ ،}$$

لہذا،
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \dfrac{x-1}{4}, & 1 \le x \le 5 \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$

(ii) $P(X < 3) = P(X \le 3) = F(3) = \dfrac{3-1}{4} = \dfrac{1}{2}$ (چونکہ، F(x) مسلسل ہے)

(iii) $P(2 < X < 4) = P(2 \le X \le 4) = F(4) - F(2) = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$

(iv) $P(3 \le X) = P(X \ge 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

مثال 11.15

فرض کرو X کہ ایک سریعی متغیر ہے جو کسی برقی سازو سامان کی زندگی کے وقت کی نشاندہی کرتا ہے۔ جس کا امکانی کثافت تفاعل

$$f(x) = \begin{cases} k\,e^{-2x} & \text{کے لئے } x > 0 \\ 0 & \text{کے لئے } x \le 0. \end{cases}$$

تو معلوم کریں۔ (i) k کی قیمت (ii) بٹوارے تفاعل (iii) $P(X < 2)$

(iv) X کے کم از کم چارا کائی وقت کا امکان معلوم کرو۔ (v) $P(X = 3)$

حل

چونکہ، $f(x)$ ایک امکانی کثافت تفاعل ہے ، $f(x) \ge 0$ اور $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

یعنی، $\int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\infty} k\,e^{-2x}\,dx = 1$

$$0 + k\left(\frac{e^{-2x}}{-2}\right)_0^{\infty} = 1 \Rightarrow k\left(\frac{e^{-\infty} - e^{0}}{-2}\right) = 1 \Rightarrow k = 2\,.$$

لہذا، امکانی کثافت تفاعل

$$f(x) = \begin{cases} 2\,e^{-2x} & \text{کے لئے } x > 0 \\ 0 & \text{کے لئے } x \le 0 \end{cases}$$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 11_Probability Distributions.indd 201 28-02-2023 16:29:44

(ii) بٹوارے تفاعل

بٹوارے تفاعل کی تعریف سے، $F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$

جب، $x \le 0$ $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du = \int_{-\infty}^{x} 0\,du = 0$

جب، $x > 0$ $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du = \int_{-\infty}^{0} 0\,du + \int_{0}^{x} 2e^{-2u}\,du = 2\left(\frac{e^{-2u}}{-2}\right)_{0}^{x} = 1 - e^{-2x}$

اس سے ہمیں حاصل ہوگا، $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{کے لئے } x \le 0 \\ 1-e^{-2x} & \text{کے لئے } x > 0 \end{cases}$

(iii) $P(X < 2) = P(X \le 2) = F(2) = 1 - e^{-2\times 2} = 1 - e^{-4}$ (چونکہ، F(x) ایک مسلسل ہے)

(iv) X کے کم از کم چار اکائی وقت کا امکان

$$P(X \ge 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - F(4) = 1 - (1 - e^{-2\times 4}) = e^{-8}.$$

(v) مسلسل کے معاملے میں، $x = a$ میں $f(x)$ امکان نہیں ہے جس میں X قیمت a لیتا ہے۔ یعنی، $x = a$ پر $f(x)$ اور $P(X = a)$. غیر مساوی ہیں۔ اگر X ایک مسلسل قسم کا ہو تو $a \in \mathbb{R}$ کے لئے $P(X = a) = 0$ ہے۔ لہٰذا، $P(X = 3) = 0$

مشق 11.3

1. X کا امکانی کثافت تفاعل $f(x) = \begin{cases} k\,x\,e^{-2x} & \text{کے لئے } x > 0 \\ 0 & \text{کے لئے } x \le 0 \end{cases}$ دیا گیا ہو تو k کی قیمت معلوم کریں۔

2. X کا امکانی کثافت تفاعل $f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ 2-x & 1 \le x < 2 \\ 0 & \text{ورنہ} \end{cases}$ ہو تو معلوم کریں۔

(i) $P(0.2 \le X < 0.6)$ (ii) $P(1.2 \le X < 1.8)$ (iii) $P(0.5 \le X < 1.5)$

3. فرض کرو کہ دودھ کے بوتل پر روزانہ فروخت ہونے والے دودھ کی مقدار کو کم از کم 200 لیٹر اور زیادہ سے زیادہ 600 لیٹر سے تقسیم کیا جاتا ہے۔ جس کا امکانی کثافت تفاعل $f(x) = \begin{cases} k & 200 \le x \le 600 \\ 0 & \text{ورنہ} \end{cases}$ ہو تو معلوم کریں۔

(i) k کی قیمت (ii) بٹوارے تفاعل (iii) روزانہ 300 لیٹر اور 500 لیٹر کے درمیانی فروخت ہونے کا امکان کیا ہوگا ؟

4. X کا امکانی کثافت تفاعل $f(x) = \begin{cases} k\,e^{-\frac{x}{3}} & \text{کے لئے } x > 0 \\ 0 & \text{کے لئے } x \le 0 \end{cases}$ دیا گیا ہو تو معلوم کریں۔

(i) k کی قیمت (ii) بٹوارے تفاعل (iii) $P(X < 3)$

(iv) $P(5 \le X)$ (v) $P(X \le 4)$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 11_Probability Distributions.indd 202 28-02-2023 16:29:49

5. اگر سریعی متغیر X امکانی کثافت تفاعل $f(x)$ کے ساتھ دیا گیا ہے۔

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & -1\le x<0 \\ -x+1, & 0\le x<1 \\ 0 & \text{ورنہ} \end{cases}$$

ہو تو معلوم کریں۔ (i) بٹوارے تفاعل $F(x)$ (ii) $P(-0.5\le X\le 0.5)$

6. اگر سریعی متغیر X بٹوارے تفاعل $F(x)$ کے ساتھ دیا گیا ہے۔

$$F(x)=\begin{cases} 0, & -\infty<x<0 \\ \frac{1}{2}\left(x^2+x\right) & 0\le x<1 \\ 1, & 1\le x<\infty \end{cases}$$

ہو تو معلوم کریں۔ (i) امکانی کثافت تفاعل $f(x)$ (ii) $P(0.3\le X\le 0.6)$

11.5 ریاضی توقع (Mathematical Expectation)

سریعی متغیر کی ایک اہم خاصیت اس کا **توقع** ہے۔ توقع کے معنی متوقع قیمت، اوسط اور پہلا موقع ہے۔

ریاضی کی توقع کی تعریف عددی اوسط کے روایتی خیال سے چلتی ہے۔

n اعداد $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ کا عددی اوسط ہے۔

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}.$$

n اعداد $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ کے پورے مجموعوں کو خلاصہ کرنے اور اس کی خصوصیات بتانے کے لئے ایک قیمت یعنی اوسط کا استعمال کیا جاتا ہے۔

تشریح 11.7

ان دس اعداد پر غور کریں ۔ $6, 2, 5, 5, 2, 6, 2, -4, 1, 5$

$$\text{اوسط} = \frac{6+2+5+5+2+6+2-4+1+5}{10}=3.$$

اگر دس اعداد $6, 2, 5, 5, 2, 6, 2, -4, 1, 5$ کو ایک سریعی متغیر X کی قیمتوں کے طور پر سمجھا جاتا ہے۔ جس کا امکانی کمیتی تفاعل دیا گیا ہے۔

x	-4	1	2	5	6
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$

اوپر دئے گئے اوسط حساب کو اس طرح سے بھی دوبارہ لکھا جاسکتا ہے۔

$$-4\times\frac{1}{10}+1\times\frac{1}{10}+2\times\frac{3}{10}+5\times\frac{3}{10}+6\times\frac{2}{10}=3.$$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 11_Probability Distributions.indd 203 28-02-2023 16:29:51

اس تشریح سے پتہ چلتاہے کہ کسی بھی سریعی متغیر کی اوسط یا متوقع کی قیمت کو سریعی متغیر کی ہر قیمت اور اس کے مقابل امکان کے حاصل ضرب کے مجموعے سے حاصل کیا جا سکتاہے تو۔

اوسط = $\sum$ (امکانات) × (x کی قیمت)

یہ سچ ہے اگر سریعی متغیر ایک منفصل ہے۔ مسلسل سریعی متغیر کی صورت میں ریاضی کی توقع بنیادی طور پر ایک جیسی ہوتی ہے جس میں خلاصے کو تکملہ کے ذریعے تبدیل کر کے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

سریعی متغیر X کی امکانی بٹوارے کا خلاصہ کرنے کے لئے اکثر دو مقداریں استعمال ہوتی ہیں۔ اعداد و شمار کے لحاظ سے ایک مرکزی رجحان ہے اور دوسرا انتشار یا امکانی بٹوارے کا تغیرہے۔ اوسط ایک امکانی بٹوارے کے مرکزی رجحان کا ایک پیمانہ ہے اور اختلاف انتشارکا ایک پیمانہ یا بٹوارے میں تغیرات ہے۔ لیکن یہ دونوں پیمانے کسی امکانی بٹوارے کی الگ الگ شناخت نہیں کرتے ہیں۔ یعنی، دو مختلف بٹوارے کا اوسط اور اختلاف ایک ہی ہوسکتا ہے۔ پھر بھی یہ پیمانے X کے امکانی بٹوارے کے مطالعہ میں آسان اور مفید ہے۔

11.5.1 اوسط (Mean)

11.8 تعریف (اوسط) (Mean)

فرض کیجئے کہ X امکانی کمیت (یا) کثافت تفاعل $f(x)$ کے ساتھ ایک سریعی متغیر ہے۔ **X کی متوقع قیمت یا اوسط یا ریاضی توقع جسے** $E(X)$ یا μ کے ذریعے ظاہر کرسکتے ہیں۔

$$E(X)=\begin{cases}\sum\limits_{x} x\,f(x) & \text{اگر } X \text{ ایک منفصل ہے}\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx & \text{اگر } X \text{ ایک مسلسل ہے}\end{cases}$$

متوقع قیمت عام طور پر کوئی عام قیمت نہیں ہوتی ہے جو سریعی متغیرلے سکتی ہے۔ یہ سریعی متغیر کی متوقع قیمت کی تشریح کرنے میں اکثرمددگار ثابت ہوتا ہے۔کیونکہ تجربہ کی متعدد آزاد تکرار پر متغیر کی طویل مدت اوسطی قیمت ہوتی ہے۔

مسئلہ 11.3 (بغیر ثبوت کے)

فرض کرو کہ X ایک سریعی متغیر ہے جس میں امکانی کمیت یا کثافت تفاعل $f(x)$ ہے۔ $g(X)$ **تفاعل کی متوقع قیمت**، ایک نیا سریعی متغیر ہے۔

$$E(g(X))=\begin{cases}\sum\limits_{x} g(x)\,f(x) & \text{اگر } g(x) \text{ ایک منفصل ہے}\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\,f(x)\,dx & \text{اگر } g(x) \text{ ایک مسلسل ہے}\end{cases}$$

اگر $g(X)=x^k$ ہو تو مندرجہ بالا مسئلہ سے متوقع قیمت مل جاتی ہے جو سریعی متغیر X کا مبدا کے بارے میں ***k-th*** لمحہ کہا جاتا ہے۔ لہذا، سریعی متغیر X کا مبدا کے بارے میں ***k-th*** ویں لمحے ہے۔

$$E(X^k)=\begin{cases}\sum\limits_{x} x^k\,f(x) & \text{اگر } X \text{ ایک منفصل ہے}\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k\,f(x)\,dx & \text{اگر } X \text{ ایک مسلسل ہے}\end{cases}$$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 11_Probability Distributions.indd 204 28-02-2023 16:29:52

غور کیجئے (Note)

جب $k = 0$، تعریف کی رو سے

$$E(1) = \begin{cases} \sum_{x} f(x) = 1 & \text{اگر } X \text{ ایک منفصل ہے} \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 & \text{اگر } X \text{ ایک مسلسل ہے} \end{cases}$$

11.5.2 اختلاف (Variance)

اختلاف ایک شماریاتی پیمانہ ہے جو ہمیں بتاتا ہے کہ اعداد و شمار کی مجموعے، کے اوسط قیمت سے کیسے معطیاتی پیمانے مختلف ہوتے ہیں۔ ریاضی کے لحاظ سے معطیاتی مجموعے کے حسابی اوسط سے انحراف کے مربع کا اوسط اختلاف ہے شرائط تغیر، پھیلاؤ اور انتشار مترادفات ہیں اور حوالہ دیتے ہیں کے بٹوارے کس طرح پھیلتی ہیں۔

تعریف 11.9 اختلاف (Variance)

سریعی متغیر X کا **اختلاف** جو $\mathrm{Var}(X)$ یا $V(X)$ یا $\sigma^2 (\text{or } \sigma_x{}^2)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$V(X) = E(X - E(X))^2 = E(X-\mu)^2$$

اختلاف کا جذرالمربع **معیاری انحراف** کہلاتا ہے۔ یعنی معیاری انحراف $\sigma = \sqrt{V(X)}$ ہے۔ سریعی متغیر کا اختلاف اور معیاری انحراف ہمیشہ غیر منفی ہیں۔

11.5.3 ریاضی توقع اور اختلاف کی خصوصیات (Properties of Mathematical expectation and variance)

(i) $E(aX+b) = aE(X)+b$، جہاں a اور b مستقل ہیں

ثبوت

فرض کرو کہ X ایک منفصل سریعی متغیر ہے۔

$$E(aX+b) = \sum_{i=1}^{\infty} (ax_i + b) f(x_i) \qquad \text{(تعریف کی رو سے)}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \left(ax_i f(x_i) + bf(x_i)\right)$$

$$= a\sum_{i=1}^{\infty} x_i f(x_i) + b\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)$$

$$= aE(X) + b(1) \qquad \left(\because \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) = 1\right)$$

$$E(aX+b) = aE(X)+b\,.$$

اسی طرح جب X ایک مسلسل سریعی متغیر ہو تو، ہم حاصل جمع کے بجائے تکملہ کے ذریعے اسے ثابت کرسکتے ہیں۔

منطقی نتیجہ 1: $E(aX) = aE(X)$ (جب $b = 0$)
منطقی نتیجہ 2: $E(b) = b$ (جب $a = 0$)

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 11_Probability Distributions.indd 205 28-02-2023 16:29:56

(ii) $Var(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$

ثبوت

ہم جانتے ہیں $E(x) = \mu$

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X-\mu)^2 \\ &= E(X^2 - 2X\mu + \mu^2) \\ &= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 \qquad \text{(چنانچہ } \mu \text{ ایک مستقل ہے)} \\ &= E(X^2) - 2\mu\mu + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2 \end{aligned}$$

$$Var(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

سریعی متغیر X کا اختلاف معلوم کرنے کے لئے متبادلہ ضابطہ ہے

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

■

(iii) $Var(aX+b) = a^2 Var(X)$ ، جہاں a اور b مستقل ہیں

ثبوت

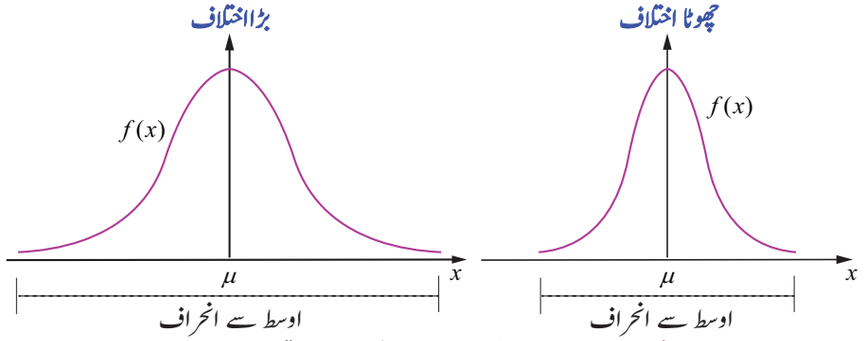
$$\begin{aligned} Var(aX+b) &= E\left((aX+b) - E(aX+b)\right)^2 \\ &= E\left(aX + b - aE(X) - b)\right)^2 \\ &= E\left(aX - aE(X)\right)^2 \\ &= E\left(a(X - E(X))\right)^2 \\ &= a^2 E\left(X - E(X)\right)^2. \end{aligned}$$

$Var(aX+b) = a^2 Var(X)$ لہذا،

■

منطقی نتیجہ 3:	$V(aX) = a^2 V(X)$	($b = 0$ جب)
منطقی نتیجہ 4:	$V(b) = 0$	($a = 0$ جب)

اوسط μ کے بارے میں سریعی متغیر کی قیمت کا انحراف کے معلومات اختلاف ہمیں فراہم کرتا ہے۔ اگر σ^2 چھوٹا رہا تو سریعی قیمت اوسط کے لحاظ سے ایک دوسرے کے قریب ہونگے۔ اسی طرح سے اگر σ^2 بڑا رہا تو سریعی قیمت اوسط کے لحاظ سے زیادہ بکھرے ہوئے ہونگے۔



خاکہ 11.18 ایک ہی اوسط کے ساتھ مختلف اختلاف

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 11_Probability Distributions.indd 206 28-02-2023 16:30:01

مذکورہ بالا نقشہ یہ دکھاتا ہے کہ دو مسلسل سریعی متغیر کے pdfs جو گھنٹی کے شکل کا منحنی ہے اور ایک ہی اوسط اور مختلف اختلاف کے ساتھ ہیں۔

مثال 11.16

فرض کرو کہ $f(x)$ ذیل میں دئے گئے ایک امکانی کمیتی تفاعل کی نمائندگی کرتا ہے۔

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	c^2	$2c^2$	$3c^2$	$4c^2$	c	$2c$

تو معلوم کرو (i) c کی قیمت (ii) اوسط اور اختلاف

حل

چنانچہ $f(x)$ ایک امکانی کمیتی تفاعل ہے، تمام x کے لئے $f(x) \geq 0$ اور $\sum_x f(x) = 1$

اس طرح $\sum_x f(x) = 1$

$$c^2 + 2c^2 + 3c^2 + 4c^2 + c + 2c = 1$$

$$c = \frac{1}{5} \text{ یا } -\frac{1}{2}.$$

چنانچہ، $f(x) \geq 0$ تمام x کے لئے، c، کی ممکن قیمت $\frac{1}{5}$ ہے۔

لہذا، امکانی کمیتی تفاعل

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

(ii) مندرجہ ذیل جدول کا استعمال کرکے اوسط اور اختلاف معلوم کرو۔

x	$f(x)$	$x\,f(x)$	$x^2 f(x)$
1	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$
2	$\frac{2}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{8}{25}$
3	$\frac{3}{25}$	$\frac{9}{25}$	$\frac{27}{25}$
4	$\frac{4}{25}$	$\frac{16}{25}$	$\frac{64}{25}$
5	$\frac{1}{5}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{25}{5}$
6	$\frac{2}{5}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{72}{5}$
	$\sum f(x) = 1$	$\sum x\,f(x) = \frac{115}{25}$	$\sum x^2 f(x) = \frac{585}{25}$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 11_Probability Distributions.indd 207 28-02-2023 16:30:07

اوسط: $$E(X) = \sum x\, f(x) = \frac{115}{25} = 4.6$$

اختلاف: $$V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = \sum x^2\, f(x) - \left(\sum x\, f(x)\right)^2$$

$$= \frac{585}{25} - \left(\frac{115}{25}\right)^2 = 23.40 - 21.16 = 2.24$$

لہذا، اوسط اور اختلاف بالترتیب 4.6 اور 2.24 ہیں۔

مثال 11.17

8 سفید گیند اور 4 سیاہ گیندوالے کوزے میں سے 2 گیند کو سریعی طور پر انتخاب کیا جاتاہے۔ فرض کرو کہ ہر ایک سیاہ گیند کے انتخاب پر ₹ 20 کی جیت اور ہر ایک سفید گیند کے انتخاب پر ₹ 10 کی ہار ہوتی ہے۔ متوقع جیت کی رقم اور اختلاف معلوم کرو۔

حل

فرض کرو کہ X جیت کی رقم کو اشارہ کرتا ہے۔ انتخاب کردہ ممکن موقع ہیں (i) دونوں سیاہ گیند ہوں یا (ii) ایک سفید اور ایک سیاہ یا (iii) دونوں سفید ہوں۔ لہذا، X ایک سریعی متغیر ہے جس کی تعریف اس طرح کی جاتی ہے۔

X = ₹ 2(20) = ₹ 40 (دونوں سیاہ گیندیں)

X = ₹ 20 − ₹ 10 = ₹10 (ایک سیاہ اور ایک سفید گیند)

X = ₹ (−20) = − ₹ 20 (دونوں سفید گیندیں)

لہذا، X قیمتیں 40، 10 اور 20− لیتا ہے۔

$n = 12$ گیندوں کی کل تعداد

$\binom{12}{2} = \frac{12\times11}{1\times2} = 66$ 2 گیندوں کو منتخب کرنے کے طریقوں کی کل تعداد

$\binom{4}{2} = 6$ 2 سیاہ گیندوں کو منتخب کرنے کے طریقوں کی تعداد

$\binom{8}{1}\binom{4}{1} = 32$ 1 سیاہ گیند اور 1 سفید گیند منتخب کرنے کے طریقوں کی تعداد

$\binom{8}{2} = 28$ 2 سفید گیندوں کو منتخب کرنے کے طریقوں کی تعداد

سریعی متغیر X کی قیمتیں	40	10	−20	کل
معکوس عکسوں میں عناصر کی تعداد	6	32	28	66

امکانی کمیتی تفاعل

X	40	10	−20	کل
$f(x)$	$\frac{6}{66}$	$\frac{32}{66}$	$\frac{28}{66}$	1

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 11_Probability Distributions.indd 208 28-02-2023 16:30:12

اوسط :

$$E(X) = \sum x\, f(x) = 40 \cdot \left(\frac{6}{66}\right) + 10 \cdot \left(\frac{32}{66}\right) + (-20) \cdot \left(\frac{28}{66}\right) = 0$$

یعنی متوقع جیت کی رقم '0' ہے۔

اختلاف :

$$E(X^2) = \sum x^2\, f(x) = 40^2 \cdot \left(\frac{6}{66}\right) + 10^2 \cdot \left(\frac{32}{66}\right) + (-20)^2 \cdot \left(\frac{28}{66}\right) = \frac{4000}{11}$$

$$\left(E(X)\right)^2 = 0^2 = 0$$

یہ دیتا ہے $V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = \frac{4000}{11} - 0 = \frac{4000}{11}$

لہذا ، $E(X) = 0$ اور $\mathrm{Var}(X) = \frac{4000}{11}$.

مثال 11.18

سریعی متغیر X کا اوسط اور اختلاف معلوم کرو جس کا امکانی کثافت تفاعل ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{کے لئے } x \geq 0 \\ 0 & \text{ورنہ} \end{cases}$$

حل

مشاہدہ کریں کہ دیا گیا بٹوارہ مسلسل ہے۔

اوسط :

$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$ تعریف سے (ہم بالحصص کے ذریعے تکملہ یا برونولی کے ضابطہ کو استعمال کرسکتے ہیں)

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\left(\lambda e^{-\lambda x}\right) dx + \int_{0}^{\infty} x\left(\lambda e^{-\lambda x}\right) dx$$

$$= 0 + \lambda \int_{0}^{\infty} x\left(e^{-\lambda x}\right) dx$$

$$= 0 + \lambda \left(\frac{\lfloor 1}{\lambda^2}\right) \quad \left(\int_{0}^{\infty} x^n e^{-\alpha x} dx = \frac{\lfloor n}{\alpha^{n+1}}\right.$$ (مثبت سالم عدد n کے لئے گاما تکملہ کا استعمال)

$$= \frac{1}{\lambda}$$

اختلاف :

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, f(x)\, dx$ تعریف سے (ہم بالحصص کے ذریعے تکملہ یا برونولی کے ضابطہ کو استعمال کرسکتے ہیں)

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\left(\lambda e^{-\lambda x}\right) dx + \int_{0}^{\infty} x^2\left(\lambda e^{-\lambda x}\right) dx$$

$$= 0 + \lambda \int_{0}^{\infty} x^2\left(e^{-\lambda x}\right) dx$$

$$= 0 + \lambda \left(\frac{\lfloor 2}{\lambda^3}\right) = \frac{2}{\lambda^2}$$ (مثبت سالم عدد کے لئے گاما تکملہ کا استعمال)

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 11_Probability Distributions.indd 209 28-02-2023 16:30:17

$$Var(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 \quad \text{لہذا،}$$

$$= \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

لہذا، اوسط اور اختلاف بالترتیب $\frac{1}{\lambda}$ اور $\frac{1}{\lambda^2}$ ہیں۔

مشق 11.4

1. سریعی متغیر X کا امکانی کمیتی تفاعل درج ذیل دیا گیا ہے اوسط اور اختلاف معلوم کرو۔

(i) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & x = 2,5 \\ \frac{1}{5} & x = 0,1,3,4 \end{cases}$

(ii) $f(x) = \begin{cases} \frac{4-x}{6} & x = 1, 2, 3 \end{cases}$

(iii) $f(x) = \begin{cases} 2(x-1) & 1 < x < 2 \\ 0 & \text{ورنہ} \end{cases}$

(iv) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} & \text{کے لئے } x > 0 \\ 0 & \text{ورنہ} \end{cases}$

2. 4 سرخ گیندیں اور 3 سیاہ گیندیں والے ایک کوزے میں سے 2 گیندوں کو تسلسل طور پر غیر متبادل (without replacement) نکالا جاتا ہے۔ فرض کرو کہ X سرخ گیندوں کے نکالنے کی ممکن نتائج کو ظاہر کرتا ہے تو امکانی کمیتی تفاعل اور X کا اوسط معلوم کرو۔

3. اگر μ اور σ^2 ایک منفصل سریعی متغیر X کا اوسط اور اختلاف ہو اور $E(X+3) = 10$ اور $E(X+3)^2 = 116$ ہو تو μ اور σ^2 معلوم کرو۔

4. چار سکوں کو ایک مرتبہ پھینکا جاتا ہے تو امکانی کمیتی تفاعل اور سروں کی تعداد حاصل ہونے کا اوسط اور اختلاف معلوم کرو۔

5. ایک مسافر ریل (passenger train) ہر آدھے گھنٹے کے بعد ایک اسٹیشن پر وقتی طور پر آتی ہے۔ ہر صبح ایک طالب علم اپنے گھر سے ریل اسٹیشن کے لئے روانہ ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ X وقت کی مقدار کی نشاندہی کرتا ہے (منٹ میں)، جو کہ طالب علم ریل اسٹیشن پہنچتے کے وقت سے ریل کا انتظار کرنے تک ہے۔ یہ معلوم رہے کہ X کا pdf ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{30} & 0 < x < 30 \\ 0 & \text{ورنہ} \end{cases}$$

سریعی متغیر X کی متوقع قیمت اور اس کی تشریح معلوم کرو۔

6. تیار کردہ کمپیوٹر میں استعمال ہونے والے الیکٹرانک آلہ میں ہزاروں گھنٹوں میں ناکامی کا وقت جس کا کثافت تفاعل

$$f(x) = \begin{cases} 3e^{-3x} & x > 0 \\ 0 & \text{ورنہ} \end{cases}$$

ہو تو اس الیکٹرانک آلہ کی متوقع زندگی معلوم کرو۔

7. سریعی متغیر X کا امکانی کمیتی تفاعل دیا گیا ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} 16\,x\,e^{-4x} & \text{کے لئے } x > 0 \\ 0 & \text{کے لئے } x \le 0 \end{cases}$$

تو X کا اوسط اور اختلاف معلوم کرو۔

8. 600 ٹکٹوں والی لاٹری 200 ₹ کا ایک انعام، 100 ₹ کے چار انعامات اور 50 ₹ کے چھ انعامات دیتی ہے۔ اگر ایک ٹکٹ کی قیمت 2 ₹ ہو تو ٹکٹ کے متوقع نفع کی رقم معلوم کرو۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 11_Probability Distributions.indd 210 28-02-2023 16:30:20

11.6 نظریاتی بٹوارے : چند مخصوص منفصل بٹوارے
(Theoretical Distributions: Some Special Discrete Distributions)

پچھلے حصوں میں ہم مختلف امکانی بٹوارے کے اوسط اور اختلاف کے بارے میں بحث کر چکے ہیں۔اب ہم خصوصی اہمیت کے چند منفصل امکانی بٹوارے کے بارے سیکھیں گے۔

اس حصّے میں ہم مندرجہ ذیل منفصل بٹواروں کو سیکھتے ہیں۔

(i) ایک نقطہ بٹوارے (The One point distribution) (ii) دو نقطہ بٹوارے (The Two point distribution)

(iii) برنولی بٹوارے (The Bernoulli distribution) (vi) دو رُکنی بٹوارے (The Binomial distribution)

11.6.1 ایک نقطہ بٹوارے (The One point distribution)

سریعی متغیر X کے پاس ایک نقطہ بٹوارہ ہے، اگر کوئی نقطہ x_0 موجود ہو اس طرح کہ، امکانی کمیتی تفاعل $f(x)$ کی وضاحت $f(x)=P(X=x_0)=1$ ہو،

یعنی، امکانی کمیت ایک نقطہ پر مجمع ہے۔

مجموعی بٹوارے تفاعل

$$F(x)=\begin{cases}0 & -\infty<x<x_0\\ 1 & x_0\le x<\infty\end{cases}$$

اوسط :

$$E(X) = \sum_x x\,f(x)=x_0\times 1=x_0$$

اختلاف :

$$V(X) = E(X^2)-\big(E(X)\big)^2=\sum_x x^2 f(x)-\big(x_0\big)^2={x_0}^2-{x_0}^2=0$$

لہذا، اوسط اور اختلاف بالترتیب x_0 اور 0 ہیں۔

11.6.2 دو نقطہ بٹوارے (The Two point distribution)

(a) **غیر متشاکل صورت :** سریعی متغیر X ایک دونقطہ بٹوارہ ہے اگر وہاں دو قیمتیں x_1 اور x_2 موجود ہوں تو اس طرح کہ،

$$f(x)=\begin{cases}p & \text{کے لئے } x=x_1\\ 1-p & \text{کے لئے } x=x_2\end{cases}\quad \text{جہاں، } 0<p<1$$

مجموعی بٹوارے تفاعل

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{اگر} \quad x<x_1\\ p & \text{اگر} \quad x_1\le x<x_2\\ 1 & \text{اگر} \quad x\ge x_2\end{cases}$$

اوسط :

$$E(X) = \sum_x x\,f(x)=x_1\times p+x_2\times(1-p)=px_1+qx_2 \quad \text{جہاں، } q=1-p.$$

اختلاف :

$$V(X) = E(X^2)-\big(E(X)\big)^2=\sum_x x^2 f(x)-\big(px_1+qx_2\big)^2$$

$$= \big({x_1}^2p+{x_2}^2q\big)-\big(px_1+qx_2\big)^2=pq\big(x_2-x_1\big)^2$$

اوسط اور اختلاف بالترتیب px_1+qx_2 اور $pq\big(x_2-x_1\big)^2$ ہیں۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 11_Probability Distributions.indd 211 28-02-2023 16:30:24

(b) تشاکل صورت :

جب $p = q = \frac{1}{2}$ ہو تو دونقطہ بٹوارے بن جاتا ہے،

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{کے لئے } x = x_1 \\ \frac{1}{2} & \text{کے لئے } x = x_2 \end{cases}$$

اور مجموعی بٹوارے تفاعل

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } x < x_1 \\ \frac{1}{2} & \text{اگر } x_1 \le x < x_2 \\ 1 & \text{اگر } x \ge x_2 \end{cases}$$

اوسط اور اختلاف بالترتیب $\frac{x_1 + x_2}{2}$ اور $\frac{(x_2 - x_1)^2}{4}$ ہیں۔

11.6.3 برنولی بٹوارے (The Bernoulli distribution)



جیک برنولی
(1654 - 1705)

آزاد انہ تجربے جن کا مستقل کامیابی کا امکان p ہے ۔ پہلے سوئس ریاضی دان جیک برنولی (1654–1705) نے مطالعہ کیا۔ 1713 میں ان کی وفات کے 8 سال بعد ان کے بھتیجے نکولس نے شائع کردہ اپنی کتاب دی آرٹ آف کن جک ٹرنگ (*The Art of Conjecturing*) میں برنولی نے ظاہر کیا کہ اگر اس طرح کہ آزمائشوں کی تعداد بڑی ہوئی ہو تاتو ان کا تناسب جو کامیابیوں کا تھا وہ p کے قریب ہو گا۔

امکانی تجربہ میں سوئس ریاضی دان **جیک برنولی** کے نام پر مشتمل **برنولی بٹوارے سریعی متغیر** کے **منفصل امکانی بٹوارے** ہیں۔ برنولی تجربہ ایک سریعی تجربہ ہوتا ہے جہاں نتائج کو باہمی خصوصی اور مکمل طور پر دو طریقوں سے ایک میں درجہ بندی کی جاتی ہے، کہو کامیابی یا ناکامی (مثلاً سر یا پشت، ناقص شئے یا اچھی شئے، زندگی یا موت، یا بہت سے دوسرے مکمل جوڑے) برنولی تجربہ کا ایک سلسلہ اس وقت پایاجاتاہے جہاں ایک برنولی تجربہ متعددآزاد بار کیاجاتاہے تاکہ کامیابی کا امکان بھی تجربہ سے تجربہ تک ایک ہی رہے ہیں۔برنولی نمونہ تیار کرنے کے لئے کسی بھی غیر معمولی تجربے کی وضاحت کی جاتی ہے۔

تعریف 11.10 برنولی بٹوارے (Bernoulli's distribution)

فرض کرو کہ، X ایک سریعی متغیر ہے، جو برنولی تجربہ سے وابستہ ہے جسے وضاحت کرنے پر جہاں 1 = (کامیابی) X اور 0 = (ناکامی) X ، اس طرح کہ،

$$f(x) = \begin{cases} p & x = 1 \\ q = 1 - p & x = 0 \end{cases} \quad \text{جہاں،} \quad 0 < p < 1 \text{ ,}$$

ہو تو X کو برنولی سریعی متغیر اور $f(x)$ کو برنولی بٹوارہ کہا جاتا ہے۔

یا مساوی طور پر

اگر سریعی متغیر X برنولی کے بٹوارے کی پیروی کررہا ہو کامیابی کے امکان p کے ساتھ $X \sim Ber(p)$ سے نشاندہی کی جاسکتی ہے۔ جہاں p کو پیمائشی کہاجاتاہے تو X کاامکانی کمیتی تفاعل

$$f(x) = p^x (1-p)^{1-x}, \quad x = 0, 1$$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 11_Probability Distributions.indd 212 28-02-2023 16:30:27

برنولی بٹوارہ کا مجموعی بٹوارہ

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{اگر } x<0\\ q=1-p & \text{اگر } 0\le x<1\\ 1 & \text{اگر } x\ge 1\end{cases}$$

اوسط :

$$E(X)=\sum_x x\,f(x)=1\times p+0\times(1-p)=p\,,$$

نوٹ کریں چونکہ X صرف 0 اور 1 کی قیمتیں لیتا ہیں، لہذا اس کی متوقع قیمت p کو "کبھی نہیں دیکھا" جاسکتا ہے۔

اختلاف :

$$V(X)=E(X^2)-\big(E(X)\big)^2=\sum_x x^2 f(x)-p^2$$
$$=\left(1^2p+0^2q\right)-p^2=p(1-p)=pq \quad \text{جہاں، } q=1-p$$

اگر X ایک برنولی سریعی متغیر ہے جو p پیمائش کے ساتھ برنولی بٹوارے کی پیروی کرتا ہے، اوسط μ اور اختلاف σ^2 ہیں۔

$$\mu=p \qquad \text{اور} \qquad \sigma^2=pq$$

جب $p=q=\frac{1}{2}$ ہو تو برنولی بٹوارہ درج ذیل بنتا ہے۔

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & \text{کے لئے } x=0\\ \frac{1}{2} & \text{کے لئے } x=1\end{cases}$$

اور مجموعی بٹوارہ

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{اگر } x<0\\ \frac{1}{2} & \text{اگر } 0\le x<1\\ 1 & \text{اگر } x\ge 1\end{cases}$$

اوسط اور اختلاف بالترتیب $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{4}$ ہیں۔

11.6.4 دو رکنی بٹوارے (The Binomial Distribution)

دو رکنی بٹوارے ایک اہم بٹوارے ہیں جو بعض معاملوں میں بار بار آزاد تجربوں کے لئے لاگو ہوتے ہیں جہاں صرف دو ہی ممکن نتائج ہوتے ہیں: سر یا پشت، کامیابی یا ناکامی ، ناقص شئے یا اچھی شئے، یا ایسے بہت سے دوسرے ممکن جوڑے۔ غالباً ایک درختی نقشہ کے ساتھ ضرب کا قاعدہ استعمال کرتے ہوئے ہر نتائج کے امکان کا حساب لگایاجاسکتا ہے۔

فرض کرو کہ ایک سکہ ایک مرتبہ پھینکاجاتاہے، فرض کرو کہ X سروں کی تعداد کی نشاندہی کرتا ہے۔ تو $X\sim Ber(p)$ ہے۔کیونکہ ہم امکان p یا $1-p$. کے ساتھ سر $(X=1)$ یا پشت $(X=0)$ کو حاصل کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ ایک سکے کو n مرتبہ پھینکا جائے ، فرض کرو کہ X سروں کی تعداد کی نشاندہی کرتا ہے تو X قیمتوں 0، 1، 2... n ، کو لیتا ہے، سروں کی تعداد x حاصل کرنے کا امکان دیا گیا ہے۔

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x},\ x=0,1,2,\ldots,n.$$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 11_Probability Distributions.indd 213 28-02-2023 16:30:30

$X = x$ ، x سروں کا مجموعہ n مرتبہ پھینکے جانے سے مطابقت رکھتا ہے۔ یعنی، $\binom{n}{x}$ سروں کے طریقوں پر اور باقی $n-x$ پشت پر ۔ لہذا ان نتائج میں سے ہر ایک کا امکان $p^x(1-p)^{n-x}$ کے برابر ہے۔

دو رکنی مسئلہ کو لاگو کرنے کے لئے موزوں ہے جب n کی تعداد 30 سے کم ہو۔

تعریف 11.11 دو رکنی سریعی متغیر (Binomial random variable)

ایک منفصل سریعی متغیر X کو دو رکنی سریعی متغیر بھی کہاجاتا ہے۔ اگر X لگاتار n - تجربوں سے کامیابیوں کی تعداد ہے۔ اس طرح کہ،

(i) n- لگاتار چلنے والے تجربہ آزاد ہیں اور n محدود ہے۔

(ii) ہر تجربہ کے نتیجے میں صرف دو ہی ممکن نتائج ہوتے ہیں جس پر 'کامیابی' یا 'ناکامی' کا لیبل(lebal) لگا ہوتا ہے۔

(iii) ہر تجربے میں کامیاب امکان جسے p کے طور پر ظاہر کرتے ہیں وہ مستقل رہتا ہے۔

تعریف 11.12 دو رکنی بٹوارے (Binomial distribution)

جب n- آزاد تجربے ہو ں تو دو رکنی سریعی متغیر X کامیابیوں کے امکان p کے ساتھ اور ناکامی کے لئے $q = 1-p$ کی تعداد کے برابر ہو تو یہ **دو رکنی بٹوارے** کہلاتا ہے۔ جس کی نشاندہی $X \sim B(n, p)$. ۔ X کا امکانی کمیتی تفاعل

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \qquad x = 0,1,2,...,n.$$

بٹوارے کا نام دو رکنی پھیلاؤ سے حاصل کیا گیا ہے۔ a اور b مستقلوں کے لئے ہو تو دو رکنی پھیلاؤ ہے۔

$$(a+b)^n = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} a^x b^{n-x}$$

فرض کرو کہ p کسی ایک تجربہ میں کامیابی کے امکان کو ظاہر کرتا ہے تو $a = p$ اور $b = 1-p$ کے ساتھ دو رکنی پھیلاؤ کا استعمال کر کے ہم دیکھتے ہیں کہ دو رکنی سریعی متغیر کے لئے امکانات کا حاصل جمع 1 ہے۔ چونکہ تجربہ میں ہر آزمائش کو دو نتائج میں درجہ بندی کیا جاتا ہے، { کامیابی ، ناکامی }۔ اس بٹوارے کو" دو" -رکنی کہا جاتا ہے۔

اگر X دو رکنی سریعی متغیر ہے جو پیمائش p اور n کے ساتھ دو رکنی بٹوارے کی پیروی کرتا ہے تو اس کا اوسط μ اور اختلاف σ^2 ہے۔

$$\mu = np \quad \text{اور} \quad \sigma^2 = np(1-p)$$

متوقع قیمت عام طور پر کوئی قیمت نہیں رکھتی ہےجو سریعی متغیر لے سکے۔ سریعی متغیر کے متوقع قیمت کی تشریح کرنے میں اکثر مددگار ثابت ہوا ہے۔ کیونکہ تجربہ کے متعدد آزاد تکرار کے مقابلے میں متغیر کی طویل مدت اوسط قیمت ہے۔ **دو رکنی بٹوارے** کی شکل **تثاکل** ہوتی ہے جب $p = 0.5$ یا n بڑا ہو۔

جب، $p = q = \frac{1}{2}$ ہو تو دو رکنی بٹوارے درج ذیل بنتا ہے۔

$$f(x) = \binom{n}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{n-x}, \qquad x = 0,1,2,...,n.$$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 11_Probability Distributions.indd 214 28-02-2023 16:30:34

یعنی،

$$f(x)=\binom{n}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^n, \qquad x=0,1,2,\ldots,n.$$

اوسط اور اختلاف بالترتیب $\frac{n}{2}$ اور $\frac{n}{4}$ ہیں۔

مثال 11.19

مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک کے لئے دو رکنی بٹوارے معلوم کرو۔

(i) 5 سکہ ایک مرتبہ پھینک دئے جاتے ہیں اور X سروں کی تعداد کو ظاہر کرتی ہے۔

(ii) ایک پانسہ 10 مرتبہ اچھالا جاتا ہے اور X عدد 4 کے ظاہر ہونے کی تعداد کی نشاندہی کرتا ہے۔

حل

(i) 5 سکہ ایک مرتبہ پھینکا جاتا ہے، چونکہ سکے منصفانہ سکّے ہیں اور سر آنے کا امکان $p=\frac{1}{2}$ اور $q=1-p=\frac{1}{2}$

فرض کرو کہ X، 5 سکوں میں سروں کے ظاہر ہونے کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے تو X ایک دو رکنی سریعی متغیر ہے، جو

0، 1، 2، 3، 4 اور 5 قیمتیں لیتا ہے، جس $n=5$ اور $p=\frac{1}{2}$ کے ساتھ۔ یعنی، $X\sim B\left(5,\frac{1}{2}\right)$.

لہذا، دو رکنی بٹوارہ،

$$f(x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}, \qquad x=0,1,2,\ldots,n$$

بن جاتا ہے،

$$f(x)=\binom{5}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{n-x}, \qquad x=0,1,2,\ldots,5.$$

یعنی، $$f(x)=\binom{5}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^n, \qquad x=0,1,2,\ldots,n$$

ایک پانسہ 10 مرتبہ اچھالا جاتاہے اور X عدد 4 کے ظاہر ہونے کی تعداد کی نشاندہی کرتا ہے تو X دورکنی سریعی متغیر ہے، جو

0، 1، 2، 3، ...، 10، قیمتیں لیتا ہے، جس $n=10$ اور $p=\frac{1}{6}$ کے ساتھ ۔ یعنی، $X\sim B\left(10,\frac{1}{6}\right)$.

پانسہ میں عدد 4 حاصل ہونے کا امکان $p=\frac{1}{6}$ اور $q=1-p=\frac{5}{6}$

لہذا، دو رکنی بٹوارہ،

$$f(x)=\binom{10}{x}\left(\frac{1}{6}\right)^x\left(\frac{5}{6}\right)^{10-x}, \qquad x=0,1,2,\ldots,10.$$

مثال 11.20

ایک انتخابی امتحان میں دس سوالات ہوتے ہیں۔ ہر سوال کے لئے چار جوابات ہیں، جن میں 1 صحیح جواب ہے۔ فرض کرو کہ ایک طالب علم اندازہ لگا کر جواب دیتا ہے اور اگر X صحیح جواب کی تعداد کو ظاہر کرتا ہےتو معلوم کرو (i) دو رکنی بٹوارے (ii) طالب علم کو 7 صحیح جوابات ملنے کا امکان (iii) کم از کم ایک صحیح جواب ملنے کا امکان۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 11_Probability Distributions.indd 215 28-02-2023 16:30:38

حل

(i) چونکہ، X کامیابی کی تعداد کی نشاندہی کرتا ہے تو X کا حاصل کردہ قیمت 0، 1، 2، 3، ...، 10، تک کی قیمتیں لیتا ہے۔

کامیابی کا امکان $p=\frac{1}{4}$ ہے اور ناکامی $q=1-p=\frac{3}{4}$ اور $n=10$ ہے۔

لہذا، X دو رکنی بٹوارے کی پیروی کرتا ہے، $X \sim B\left(10,\frac{1}{4}\right)$

$$f(x)=\binom{10}{x}\left(\frac{1}{4}\right)^{x}\left(\frac{3}{4}\right)^{10-x}, \quad x=0,1,2,...,10$$ ہمیں حاصل ہوگا

(ii) 7 صحیح جوابات کا امکان

$$P(X=7)=f(7)=\binom{10}{7}\left(\frac{1}{4}\right)^{7}\left(\frac{3}{4}\right)^{10-7}=120\left(\frac{3^3}{4^{10}}\right)$$

طالب علم کو 7 صحیح جوابات ملنے کا امکان $120\left(\frac{3^3}{4^{10}}\right)$ ہے۔

(iii) کم از کم ایک صحیح جواب ملنے کا امکان

$$P(X\geq 1)=1-P(X<1)=1-P(X=0)$$
$$=1-\binom{10}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^{0}\left(\frac{3}{4}\right)^{10}=1-\left(\frac{3}{4}\right)^{10}.$$

کم از کم ایک صحیح جواب ملنے کا امکان $1-\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$ ہے۔

مثال 11.21

دو رکنی متغیر X کا اوسط اور اختلاف بالترتیب 2 اور 1.5 ہیں تو معلوم کرو۔

(i) $P(X=0)$ (ii) $P(X=1)$ (iii) $P(X\geq 1)$

حل

امکانات معلوم کرنے کے لئے پیمائشیں n اور p کی قیمتوں کا جاننا ضروری ہے ۔ دیا گیا ہے،

$np=2$ = اوسط اور $npq=1.5$ = اختلاف

$\frac{npq}{np}=\frac{1.5}{2}=\frac{3}{4}$ سے حاصل ہوگا

$$q=\frac{3}{4} \text{ اور } p=1-q=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

$np=2$، سے حاصل ہوتا ہے، $n=\frac{2}{p}=8$ لہذا، $X \sim B\left(8,\frac{1}{4}\right)$

لہذا، دو رکنی بٹوارہ ہے،

$$P(X=x)=f(x)=\binom{8}{x}\left(\frac{1}{4}\right)^{x}\left(\frac{3}{4}\right)^{8-x} \qquad x=0,1,2,...8$$

(i) $$P(X=0)=f(0)=\binom{8}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^{0}\left(\frac{3}{4}\right)^{8-0}=\left(\frac{3}{4}\right)^{8}$$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 11_Probability Distributions.indd 216 28-02-2023 16:30:45

(ii) $$P(X=1) = f(1) = \binom{8}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^{1}\left(\frac{3}{4}\right)^{8-1} = 2\left(\frac{3}{4}\right)^{7}$$

(iii) $$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{8}$$

مثال 11.22

ABC کمپنی کے تیار کردہ مصنوعات میں اوسطاً 20% مصنوعات ناقص پائے گئے ہیں۔ اگر ہم ان میں سے 6 مصنوعات کو سریعی طور پر منتخب کرتے ہیں اور X ناقص مصنوعات کی تعداد کی نشاندہی کرتا ہے تو مندرجہ ذیل امکانات معلوم کرو۔ (i) دو مصنوعات ناقص ہیں۔ (ii) زیادہ سے زیادہ ایک مصنوعات ناقص ہو (iii) کم از کم دو مصنوعات ناقص ہیں۔

حل

$n = 6$ دیا گیا ہے۔

$\frac{20}{100}$ ناقص مصنوعات کو منتخب کرنے کا امکان ہے۔ یعنی، $p = \frac{1}{5}$

چونکہ، X ناقص مصنوعات کی نشاندہی کرتا ہے تو X، 0، 1، 2، 3، ...، 6، قیمتیں لیتا ہے۔

$p = \frac{1}{5}$ ناقص (کامیابی) کا امکان، $q = 1 - p = \frac{4}{5}$ ناکامی کے لئے اور $n = 6$ ہے۔

لہذا، X دو رکنی بٹوارے کی پیروی کرتا ہے اور $X \sim B\left(6, \frac{1}{5}\right)$ ظاہر کیا گیا ہے۔

$f(x) = \binom{6}{x}\left(\frac{1}{5}\right)^{x}\left(\frac{4}{5}\right)^{6-x}, \quad x = 0,1,2,...,6.$ سے حاصل ہوگا

(i) دو ناقص مصنوعات کا امکان

$$P(X=2) = f(2) = \binom{6}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^{2}\left(\frac{4}{5}\right)^{6-2} = 15\left(\frac{4^4}{5^6}\right)$$

(ii) زیادہ سے زیادہ ایک ناقص مصنوعات کا امکان

$$P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1)$$

$$= \binom{6}{0}\left(\frac{1}{5}\right)^{0}\left(\frac{4}{5}\right)^{6-0} + \binom{6}{1}\left(\frac{1}{5}\right)^{1}\left(\frac{4}{5}\right)^{6-1}$$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)^{6} + (6)\left(\frac{4^5}{5^6}\right) = 2\left(\frac{4}{5}\right)^{5}$$

زیادہ سے زیادہ ایک ناقص مصنوع کا امکان $2\left(\frac{4}{5}\right)^{5}$ ہے۔

(iii) کم از کم دو ناقص مصنوعات کا امکان

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - 2\left(\frac{4}{5}\right)^{5}$$

کم از کم دو ناقص مصنوعات کا امکان $1 - 2\left(\frac{4}{5}\right)^{5}$ ہے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 11_Probability Distributions.indd 217 28-02-2023 16:30:51

مشق 11.5

1. دو رکنی بٹوارے $B(n,p)$ میں $P(X=k)$ کی قیمت معلوم کرو جہاں

(i) $n=6,\ p=\frac{1}{3},\ k=3$ (ii) $n=10,\ p=\frac{1}{5},\ k=4$ (iii) $n=9,\ p=\frac{1}{2},\ k=7$

2. کسی ایک تجربہ میں Mr.Q کاایک نشانہ کو مارنے کا امکان $\frac{1}{4}$ ہے۔ فرض کرو کہ وہ 10 بارنشانے کو مارنے کی کوشش کرتا ہے۔ نشانے کو مارنے کا امکان (i) ٹھیک 4 مرتبہ اور (ii) کم از کم ایک مرتبہ معلوم کرو۔

3. دو رکنی بٹوارے کا استعمال کرتے ہوئے درج ذیل تجربات کے لئے X کا اوسط اور اختلاف معلوم کرو۔

(i) ایک سکہ 100 مرتبہ پھینکا جاتا ہے اور X سروں کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے ۔

(ii) ایک سکہ 240 مرتبہ پھینکا جاتا ہے اور X عدد '4' ظاہر ہونے کی تعداد کی نشاندہی کرتا ہے ۔

4. برقی ٹسٹ میں کسی خاص آلے کی برداشت کرنے کی صلاحیت کا امکان $\frac{3}{4}$ ہو تو 5 میں سے ٹھیک 3 آلات کی برداشت کی صلاحیت کا امکان معلوم کرو۔

5. ایک فروخت کرنے والا ایک خاص قسم کا برقی آلہ کسی کارخانےدار سے خریدتا ہے۔ کارخانےدار اشارہ کرتا ہے کہ آلے کی ناقص شرح 5% ہے۔(Retailer) خردہ فروش کا انسپکٹر(inspector) سریعی طور پر شپمنٹ(shipment) میں سے 10 اشیاء کو منتخب کرتا ہے تو

(i) کم از کم ایک ناقص شئے (ii) ٹھیک دو ناقص اشیاء ہونے کا امکان معلوم کرو ؟

6. ایک فلورسنٹ لائٹ میں کم از کم 600 گھنٹوں کی کارآمد زندگی ہونے کا امکان 0.9 ہے اور اس طرح کے 12 لائٹ ہیں تو معلوم کرو۔

(i) ٹھیک 10 میں کم از کم 600 گھنٹوں کی کارآمد زندگی ہونے کا امکان

(ii) کم از کم 11 لائٹ کم از کم 600 گھنٹوں کی کارآمد زندگی ہونے کا امکان

(iii) کم از کم 2 لائٹ کم از کم 600 گھنٹوں کی کارآمد زندگی نہیں گزارنے کا امکان

7. دو رکنی متغیر کا اوسط اور معیاری انحراف بالترتیب 6 اور 2 ہیں تو معلوم کرو۔

(i) امکانی کمیتی تفاعل (ii) $P(X=3)$ (iii) $P(X\geq 2)$

8. اگر $X\sim B(n,p)$ اس طرح کہ $4P(X=4)=P(X=2)$ اور $n=6$ ہو تو X کا بٹوارہ ، اوسط اور معیاری انحراف معلوم کرو۔

9. 5 آزاد تجربہ پر مشتمل دو رکنی بٹوارے میں 1 اور 2 کامیابیوں کا امکان بالترتیب 0.4096 اور 0.2048 ہے، سریعی متغیر کااوسط اور اختلاف معلوم کرو۔



مشق 11.6

دئے گئے چار حل میں سے صحیح یا سب سے مناسب جواب کا انتخاب کریں۔



1. فرض کرو کہ X سریعی متغیر جس کا امکانی کثافت تفاعل ۔

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{x^3} & x\geq 1\\ 0 & x<1\end{cases}$$

مندرجہ ذیل میں سے کونسا بیان صحیح ہے؟

(1) اوسط اور اختلاف دونوں موجود ہوں (2) اوسط موجود ہے مگر اختلاف موجود نہ ہو

(3) اوسط اور اختلاف دونوں موجودنہ ہوں (4) اختلاف موجود ہو مگر اوسط موجود نہ ہو

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 11_Probability Distributions.indd 218 28-02-2023 16:30:54

2. $2l$ لمبائی والی چھڑی کو سریعی طور پر دو ٹکڑوں میں توڑا جاتا ہے۔ دونوں ٹکڑوں میں سے مختصر کا امکانی کثافت تفاعل

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{l} & 0<x<l\\ 0 & l\le x<2l\end{cases}$$ ہے۔

دونوں ٹکڑوں میں سے مختصر کا اوسط اور اختلاف بالترتیب ہیں۔

(1) $\frac{l}{2}, \frac{l^2}{3}$ (2) $\frac{l}{2}, \frac{l^2}{6}$ (3) $l, \frac{l^2}{12}$ (4) $\frac{l}{2}, \frac{l^2}{12}$

3. ایک ایسے کھیل پر غور کریں جہاں کھلاڑی چھ چہروں والے پانسہ کو اچھالتا ہے ۔ اگر 6 کا چہرہ ظاہر ہو تو کھلاڑی ₹36 جیت جاتا ہے، ورنہ وہ k^2 ₹ ہار جاتا ہے۔ جہاں k وہ چہرہ ہے جو اوپر آتا ہے۔ $k=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ اس کھیل میں جیتنے کے لئے متوقع رقم ₹ ہے۔

(1) $\frac{19}{6}$ (2) $-\frac{19}{6}$ (3) $\frac{3}{2}$ (4) $-\frac{3}{2}$

4. ایک چھ چہروں والا پانسہ 1، 2، 3، 4، 5، 6 اور ایک چار چہروں والا پانسہ 1، 2، 3، 4، کو پھینکا جاتا ہے اور اس کا حاصل جمع کا تعین کرتے ہیں۔ فرض کرو کہ حاصل جمع کے سریعی متغیر کو X سے اشارہ کیا جاتا ہے تو 7 کے معکوس عکس کے عناصر کی تعداد معلوم کرو۔

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

5. سریعی متغیر X کے دو رکنی بٹوارے $n=25$ اور $p=0.8$ کے ساتھ X کا معیاری انحراف ہے۔

(1) 6 (2) 4 (3) 3 (4) 2

6. فرض کرو کہ جب سکے کو n بار پھینکا جاتا ہے تو سروں کی تعداد اور پشتوں کی تعداد کے درمیان فرق کو X نمائندگی کرتا ہے تو پھر X کی ممکن قیمتیں ہیں۔

(1) $i+2n,\ i=0,1,2...n$ (2) $2i-n,\ i=0,1,2...n$ (3) $n-i,\ i=0,1,2...n$ (4) $2i+2n,\ i=0,1,2...n$

7. اگر ایک تفاعل $f(x)=\frac{1}{12}$، $a<x<b$ کے لئے ایک مسلسل سریعی متغیر X کے امکانی کثافت تفاعل کی نمائندگی کرے تو مندرجہ ذیل میں سے کونسی a اور b کی قیمتیں نہیں ہو سکتی؟

(1) 0 اور 12 (2) 5 اور 17 (3) 7 اور 19 (4) 16 اور 24

8. ایک ہی اسکول سے 160 طلبہ پر مشتمل 4 بسیں فٹ بال کے میدان روانہ ہوئی۔ بسوں میں بالترتیب 42، 36، 43 اور 48 طلباء شامل ہیں۔ ایک طالب علم کو سریعی طور پر انتخاب کیا جاتا ہے۔ اگر X ان طلباء کی تعداد کی نشاندہی کریں جو سریعی طور پر طالب علم کو لے کر بس میں سوار تھے۔ 4 بس ڈرائیوروں میں سے ایک کو سریعی طور پر منتخب کیا گیا ہے ۔ اگر Y اس بس میں طلباء کی تعداد کی نشاندہی کریں تو $E(X)$ اور $E(Y)$ بالترتیب ہیں۔

(1) 50, 40 (2) 40, 50 (3) 40.75, 40 (4) 41, 41

9. دو سکوں کو اچھالا جاتا ہے۔ پہلے سکّے پر سر آنے کا امکان 0.6 ہے اور دوسرے کا امکان 0.5 ہے۔ فرض کرو کہ اچھال کے نتائج آزاد ہیں اور X سروں کی کل تعداد کے مساوی ہے۔ $E(X)$ کی قیمت ہے۔

(1) 0.11 (2) 1.1 (3) 11 (4) 1

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 11_Probability Distributions.indd 219 28-02-2023 16:30:57

10. متعدد انتخابی امتحان میں 5 سوالوں میں سے ہر ایک کے 3 ممکنہ بگاڈ کے جوابات ہیں۔ قیاس کے مطابق ایک طالب علم کو 4 یا اس سے زیادہ صحیح جوابات دینے کا امکان ہے۔

(1) $\frac{11}{243}$ (2) $\frac{3}{8}$ (3) $\frac{1}{243}$ (4) $\frac{5}{243}$

11. اگر $P(X=0) = 1 - P(X=1)$، اگر $E(X) = 3\mathrm{Var}(X)$ ہو تو $P(X=0)$ ہے۔

(1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{2}{5}$ (3) $\frac{1}{5}$ (4) $\frac{1}{3}$

12. اگر X ایک دورکنی سریعی متغیر ہے جس کی متوقع قیمت 6 اور اختلاف 2.4 ہو تو $P(X=5)$ ہے۔

(1) $\binom{10}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^6\left(\frac{2}{5}\right)^4$ (2) $\binom{10}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{10}$

(3) $\binom{10}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^4\left(\frac{2}{5}\right)^6$ (4) $\binom{10}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^5\left(\frac{2}{5}\right)^5$

13. سریعی متغیر X کا امکانی کثافت تفاعل $f(x) = \begin{cases} ax+b & 0<x<1 \\ 0 & \text{ورنہ} \end{cases}$ ہے

اور $E(X) = \frac{7}{12}$ ہو تو a اور b بالترتیب ہیں۔

(1) 1 اور $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$ اور 1 (3) 1 اور 2 (4) 2 اور 1

14. فرض کرو کہ X کی قیمتیں 0، 1 اور 2 میں سے کسی ایک کو لیتا ہے۔ اگر کچھ مستقل k کے لئے $P(X=i) = k\,P(X=i-1)$، $i=1,2$ کے لئے اور $P(X=0) = \frac{1}{7}$ ہو تو k کی قیمت معلوم کرو۔

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

15. مندرجہ ذیل میں سے کونسا منفصل سریعی متغیر ہے۔

I. ایک دن میں کسی مخصوص سگنل میں کراسنگ کرنے والے کاروں کی تعداد

II. ایک لمحے میں ریل کے ٹکٹ خریدنے کے لئے قطار میں موجود گاہکوں کی تعداد

III. ٹیلیفوں کال مکمل کرنے کے لئے لیا گیا وقت

(1) I اور II (2) صرف II (3) صرف III (4) II اور III

16. اگر $f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le a \\ 0 & \text{ورنہ} \end{cases}$ ایک سریعی متغیر کا امکانی کثافت تفاعل ہو تو a کی قیمت ہے۔

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

17. سریعی متغیر کا امکانی کمیتی تفاعل اس طرح بیان کیا گیا ہے۔

x	–2	–1	0	1	2
$f(x)$	k	$2k$	$3k$	$4k$	$5k$

ہو تو $E(X)$ مساوی ہے۔

(1) $\frac{1}{15}$ (2) $\frac{1}{10}$ (3) $\frac{1}{3}$ (4) $\frac{2}{3}$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 11_Probability Distributions.indd 220 28-02-2023 16:31:01

18. فرض کرو کہ X کا ایک برنولی بٹوارہ ہو جس کا اوسط 0.4 ہو تو $(2X-3)$ کا اختلاف ہے۔

(1) 0.24 b) 0.48 (3) 0.6 (4) 0.96

19. اگر 6 تجربوں میں، X دو رکنی متغیر ہے جو $9P(X=4) = P(X=2)$ رشتے کی پیروی کرتا ہے، تو کامیابی کا امکان

(1)0.125 (2) 0.25 (3) 0.375 (4) 0.75

20. ایک کمپیوٹر سیلز مین کے اپنی معاضی کے تجربات سے جانتا ہے کہ وہ شوروم میں داخل ہونے والے ہر 20 گاہکوں میں سے ایک کے پاس کمپیوٹر فروخت کرتا ہے۔ اس کا کیا امکان ہے کہ وہ اگلے تین میں سے ٹھیک دو گاہکوں کو کمپیوٹر فروخت کرے گا۔

(1) $\frac{57}{20^3}$ (2) $\frac{57}{20^2}$ (3) $\frac{19^3}{20^3}$ (4) $\frac{57}{20}$

خلاصہ (SUMMARY)

- **سریعی متغیر** X ایک تفاعل ہے۔ جو نظیری عرصہ S سے حقیقی عدد $\mathbb{R}$ کو تعین کرتا ہے۔ اس طرح سے معکوس عکس کے نقاط یا تختی مجموعہ یا $\mathbb{R}$ کا وقفہ نظیری عرصہ S کے موقع ہیں۔ جس کے لئے امکان کو مہیا کیا گیا ہے۔
- ایک سریعی متغیر X جو نظیری عرصہ S سے حقیقی عدد $\mathbb{R}$ کو تعین کرتا ہے۔ وہ منفصل سریعی متغیر کہلاتا ہے۔ اگر X کی وسعت ایک قابل گنتی ہو۔ یعنی X ایک محدود یا قابل گنتی لامحدود تعداد کی قیمتیں اختیار کرتی ہے۔ جہاں سٹ S کی ہر قیمت مثبت امکان ہو اور کل ایک ہو۔
- اگر X ایک منفصل سریعی تغیر ہو جس کی منفصل قیمتیں x_1، x_2، x_3، ....، x_n،...، ہو تو تفاعل کو $f(.)$ یا $p(.)$ سے اشارہ کرتے ہیں اور اس کی وضاحت ہے۔ $f(x_k) = P(X = x_k)$، کے لئے $k = 1,2,3,...n,...$ تو اس کو X کا امکانی کمیتی تفاعل کہتے ہیں۔
- تفاعل $f(x)$ ایک امکانی کمیتی تفاعل

$$\text{(i) } f(x_k) \geq 0 \text{ کے لئے } k = 1,2,3,...n,... \text{ اور (ii) } \sum_k f(x_k) = 1$$

- منفصل سریعی متغیر X کا مجموعی بٹوارے تفاعل $F(x)$ جو قیمتیں $x_1, x_2, x_3, \ldots$ لیتا ہے۔ اس طرح کہ $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$ امکانی کمیتی تفاعل $f(x_i)$ کے ساتھ۔

$$\text{ہے۔ } F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i), \qquad x \in \mathbb{R}$$

- فرض کرو کہ X ایک منفصل سریعی متغیر ہے جو قیمتیں x_1، x_2، x_3، ... لیتا ہے۔ اس طرح کہ $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$ اور $F(x_i)$ ایک بٹوارے تفاعل ہے۔ تو امکانی کمیتی تفاعل $f(x_i)$ کو اس طرح $f(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1}),\ i = 1,2,3, \ldots$ دیا گیا ہے۔
- فرض کرو کہ S ایک نظیری عرصہ اور $X : S \longrightarrow R$ ایک سریعی متغیر ہے جو $\mathbb{R}$ کے ایک سٹ I میں کسی بھی قیمت کو لیتا ہے۔ I کے ہر ایک x کے لئے اگر $P(X = x) = 0$ ہو تو X کو **مسلسل سریعی متغیر** کہا جاتا ہے۔
- ایک غیر-منفی حقیقی اعداد تفاعل $f(x)$ کو **امکانی کثافت تفاعل** کہا جاتا ہے۔ اگر ہر ایک ممکن نتائج x کے لئے، $x \in [a,b]$ مسلسل سریعی متغیر X کے لئے۔

$$\text{خصوصیت رکھتا ہو ۔ } P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 11_Probability Distributions.indd 221 28-02-2023 16:31:02

- فرض کرو کہ ایک مسلسل سریعی متغیر X کا بٹوارے تفاعل $F(x)$ ہو تو امکانی کثافت تفاعل $f(x)$ دیا گیا ہے۔

$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}=F'(x)$ ، جہاں بھی مشتق موجود ہے۔

- فرض کرو کہ X ایک سریعی متغیر ہے جس میں امکانی کمیت (یا) کثافت تفاعل $f(x)$ ہے۔ X کی **متوقع قیمت یا اوسط یا ریاضی توقع** جسے $E(x)$ یا μ کے ذریعے ظاہر کرسکتے ہیں۔

$$E(X)=\begin{cases}\sum_{x} x\,f(x) & \text{اگر } X \text{ ایک منفصل ہے}\\ \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx & \text{اگر } X \text{ ایک مسلسل ہے}\end{cases}$$

- سریعی متغیر X کا **اختلاف** جو $\mathrm{Var}(X)$ یا $V(X)$ یا $\sigma^2(\text{or } \sigma_x^{\,2})$ سے ظاہر کیا جاتا ہے ۔

$$V(X)=E(X-E(X))^2=E(X-\mu)^2$$

ریاضی توقع اور اختلاف کی خصوصیات

(i) $E(aX+b)=aE(X)+b$، جہاں a اور b مستقل ہیں

منطقی نتیجہ 1: $E(aX)=aE(X)$ (جب $b=0$)

منطقی نتیجہ 2: $E(b)=b$ (جب $a=0$)

(ii) $Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

(iii) $Var(aX+b)=a^2Var(X)$ ، جہاں a اور b مستقل ہیں

منطقی نتیجہ 3: $V(aX)=a^2V(X)$ (جب $b=0$)

منطقی نتیجہ 4: $V(b)=0$ (جب $a=0$)

- فرض کرو کہ، X ایک سریعی متغیر ہے، جسے برنولی تجربہ کہ وابستہ سے وضاحت کرنے پر جہاں 1 = (کامیابی) X اور 0 = (ناکامی) X ، اس طرح سے ہے،

$$f(x)=\begin{cases}p & x=1\\ q=1-p & x=0\end{cases}\qquad \text{جہاں،}\quad 0<p<1,$$

ہو تو X کو برنولی سریعی متغیر اور $f(x)$ کو برنولی بٹوارہ کہا جاتا ہے۔

- اگر X ایک برنولی سریعی متغیر ہے جو p پیرامیٹر کے ساتھ برنولی بٹوارے کی پیروی کرتا ہے، اوسط μ اور اختلاف σ^2 ہیں۔

$\mu=p$ اور $\sigma^2=pq$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 11_Probability Distributions.indd 222 28-02-2023 16:31:04

- ایک منفصل سریعی متغیر X کو دو رکنی سریعی متغیر بھی کہا جاتا ہے۔ اگر X لگاتار n - تجربوں سے کامیابیوں کی تعداد ہے۔ اس طرح کہ،

  (i) n- لگاتار چلنے والی تجربہ آزاد ہیں اور n محدود ہے۔

  (ii) ہر تجربہ کے نتیجے میں صرف دو ہی ممکن نتائج ہوتے ہیں جس پر 'کامیابی' یا 'ناکامی' کا لیبل(lebal) لگا ہوتا ہے۔

  (iii) ہر تجربے میں کامیاب کا امکان جسے p کے طور پر ظاہر کرتے ہیں وہ مستقل رہتا ہے۔
- جب n- آزاد تجربے ہو ں تو دو رکنی سریعی متغیر X کامیابیوں کے امکان p کے ساتھ اور ناکامی کے لئے $q = 1 - p$ کے برابر ہو تو یہ **دو رکنی بٹوارے** کہلاتا ہے۔ جس کی نشاندہی $X \sim B(n, p)$. ۔ X کا امکانی کمیتی تفاعل

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

- اگر X دو رکنی سریعی متغیر ہے جو پیمائشی p اور n کے ساتھ دو رکنی بٹوارے کی پیروی کرتا ہے تو اس کا اوسط μ اور اختلاف σ^2 ہے۔

$$\mu = np \quad \text{اور} \quad \sigma^2 = np(1-p)$$

ICT کارنر

https://ggbm.at/dy9kwgbt or Scan the QR Code

براؤزر کھولیں اور دیا گیا URL لنک (link) ٹائپ کریں (یا) QR کوڈ اسکین کریں۔ جیوگیبرا (GeoGebra) ورک بک "12 ویں جماعت کے ریاضی جلد -2" کھلے گا۔ ورک بک کے بائیں جانب آپ کی درسی کتاب سے متعلق ابواب ہیں۔ "**امکانی بٹوارے**" نامی باب پر کلک(click) کریں۔ آپ اس باب سے متعلق متعدد ورک شیٹ دیکھ سکتے ہیں۔ تمام ورک شیٹ دیکھیں۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 11_Probability Distributions.indd 223 28-02-2023 16:31:05

باب
12

مجرد ریاضی
(Discrete Mathematics)

"نوجوانوں ریاضی میں آپ چیزوں کو نہیں سمجھتے ہیں آپ ان کی عادت ڈال لیتے ہیں"

جان وین نیومین

12.1 تعارف (Introduction)



جان وین نیومین
(1903-1957)

ریاضیات کو وسیع طورپر دو اقسام میں درجہ بندی کرسکتے ہیں : **مسلسل ریاضی** - یہ **بے شمار لامحدود (uncountably infinite)** صحیح اعداد کے مجموعوں کے نتائج پر مبنی ہے ۔یہ اس حقیقت کی خصلت بیان کرتا ہے کہ کوئی دو حقیقی اعداد کے درمیان ہمیشہ ایک بے شمار لامحدود اعداد کا مجموعہ ہے۔ مثال کے طور پر، مسلسل ریاضی میں ایک تفاعل کو بغیر کسی وقفہ کہ ہموار منحنی میں باندھا جاسکتا ہے۔

غیر مسلسل ریاضی - اس میں منفرد قیمتیں شامل ہیں جو یا تو **محدود ہیں یا لامحدود گنتی (finite or countably infinite)** کے ہیں۔یعنی دو نقطوں کے بی، چ یا تو محدود یا تو لامحدود گنتی کے نقاط ہیں ۔ مثال کے طورپر اگر ہمارے پاس ایک محدود اشیاء کا مجموعہ ہے۔ تفاعل کی وضاحت ان اشیاء کی ترتیبوار جوڑیوں کی فہرست کے طور پر کی جاسکتی ہے ان جوڑیوں کو مکمل فہرست کے طورپر پیش کیا جاسکتا ہے۔

19 ویں صدی کے آخر میں اور 20 ویں صدی کے ابتداء میں جو ریاضی دان تھے انھوں نے ریاضی کی ایک نئی شاخ دریافت کی جسے مجرد ریاضی کہتے ہیں۔ جو طبعی اعداد کے مجموعے کی طرح محدود یا گنتی کے لامحدود مجموعہ کے نظریہ کی بنیاد پر مشتمل ہے۔ان مجموعوں کو **مجرد مجموعے** کہتے ہیں۔ ان مجموعوں کی خوبصورتی یہ ہے کہ طبعی اعداد کے مجموعہ سے ان مجموعوں کو ایک کو ایک طور پر مطابقت کرسکتے ہیں۔ تو مجرد مجموعے کے عناصروں کو سلسلہ کے طورپر ترتیب دیا جاسکتا ہے۔ مجرد مجموعہ (Discrete set) کی ایک مخصوص خاصیت یہ ہے کہ کسی بھی لاتعداد مجموعہ یعنی حقیقی اعداد کے مجموعوں کی طرح کے کوئی لاتعداد مجموعہ میں موجود نہیں ہے۔ جہاں، عناصر بغیر کسی وقفہ کے مسلسل تقسیم کئے گئے ہیں۔

ہر ایک اس حقیقت سے واقف ہے کہ کمپیوٹر کے استعمالات ہماری زندگی کے ہر قدم میں ایک اہم کردار ادا کرتے ہیں۔ نتیجہ میں **کمپیوٹر سائنس** جزوی طورپر واضح قسم کی ایک سائنس بن گئی ہے۔ اور ایک قابل حساب مجرد مجموعوں کی جامع تفصیل بن گئی ہے۔ اور بھی جدید پروگرامنگ زبانوں کو اس طرح ڈیزائن کیا گیا ہے۔ کہ وہ جامع انداز میں وضاحتوں کے مناسب ہیں۔یہ سائنس دانوں کا مجرد مجموعوں کے بنیاد پر الگورتمون (algorithms) کو تیار کرنے کے لئے اپنے آپ کو سیکھنے اور تیار کرنے کو مجبور کرتا ہے۔

مجرد ریاضی کو پڑھنے کا اہم فائدہ یہ ہے کہ اس کے نتائج مسائل کو حل کرنے کی صلاحیت اور قابلیت میں بہت اچھے اوزار کے طورپر کام کرتے ہیں اور انھیں بہتر بنانے میں استعمال ہوتے ہیں۔ مجرد ریاضی کی چند **شاخیں امتزاج (combinatorics)، ریاضی منطق (mathematical logic)، بولین الجبراء (boolean algebra)، ترسیم کا نظریہ (graph theory)، کوڈنگ کا نظریہ (coding theory)** وغیرہ ہیں۔ **مجرد ریاضی، کے چند موضوعات جیسے تبدیلی، اجتماعات اور ریاضی قیاس (permutations, combinations, and mathematical induction)** کو ہم پچھلے سال ہی بحث کرچکے ہیں موجودہ باب میں، مجرد ریاضی کے دو موضوعات جیسے **بائنری اعمال** اور **ریاضی منطق (mathematical logic)** پر بحث کریں گے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 12_Discrete Mathematics.indd 224 28-02-2023 15:37:34

علامتیں (Symbols)

$\in$ – شامل ہے
$\ni$ – اس طرح کے
$\forall$ – ہر ایک
$\Rightarrow$ – ظاہر کرتا ہے۔
$\exists$ – وجود ہے۔

عام طور پر 'عمل' ایک ہی وقت میں ایک یا ایک سے زیادہ عناصر پر عمل کرنے کا طریقہ کی وضاحت کرتا ہے۔مثال کے طور پر، $\mathbb{Z}$ میں موجود منفی عنصر معلوم کرنے کے لئے ایک وقت میں ایک ہی عنصر شامل کیا جاتا ہے۔ اس لئے یہ **یونری عمل (unary operation)** کہلاتا ہے اس کے برعکس $\mathbb{Z}$ میں موجود کوئی دو عناصر کا حاصل جمع معلوم کرنے کے لئے ایک ہی وقت میں دو عناصر کو شامل کیا جاتا ہے اس قسم کے عمل کو **بائنری عمل (binary operation)** کہتے ہیں اور عام طور پر n عناصر کو شامل کرنے والا عمل **n-نئری عمل (n-ary operation)** طریقہ کہتے ہیں۔ $n \in \mathbb{N}$ اس حصے میں بائنری اعمال کے بارے میں تفصیل بحث کو دیش کیا گیا ہے۔



Learning Objectives سیکھنے کے مقاصد

اس باب کے خاتمہ پر طلباء قابل بن جائیں گے۔

- بائنری عمل کی وضاحت کرنا اور اس کے مختلف خصوصیات کو جانچنا۔
- بولین میٹرکس پر بائنری عمل کی وضاحت اور اس کے مختلف خاصیتوں کو جانچنا۔
- ماڈلر کلاسس پر بائنری عمل کی وضاحت اور اس کے مختلف خاصیتوں کو جانچنا۔
- سادہ اور مرکب بیانات کی شناخت کرنا۔
- منطقی تعلقات کی وضاحت اور حقیقی جدول کی تصنیف کرنا۔
- ٹاٹولوجی، تضاد اور اتفاق کی شناخت کرنا۔
- منطقی معادل قائم کرنا اور دوہرے اصول کو استعمال کرنا۔

12.2 بائنری اعمال (Binary Operations)

12.2.1 تعارفیں (Definitions)

$\mathbb{R}$ پر بنیادی ریاضی عمل **جمع** $(+)$ **تفریق** $(-)$ **ضرب** $(\times)$ **تقسیم** $(\div)$ ہیں۔ 19 ویں صدی کے پچھلے حصے اور 20 ویں صدی کے نامور ریاضی دان جیسے ایبل و کیلی، کاشی اور دوسروں نے حسب معمولی بنیادی ریاضی طریقوں کو مطمئن کرنے والے خاصیتوں کو عام کرنا چاہتے تھے۔اس حد تک کہ انھوں نے **محوری نقطہ نظر (axiomatic approach)** سے نئے تجدیدی الجبرائی ڈھانچے کی مرتب کی اس نئی الجبراء کی شاخ جو تجدیدی الجبرائی ڈھانچے سے تعلق رکھتا ہے **اسے تجدیدی الجبراء (abstract algebra)** کہتے ہیں۔

شروعات کے لئے، فرض کریں کوئی دو طبعی اعداد کو شامل کرکے استعمال ہونے والے بنیادی ریاضی عمل جیسے جمع اور ضرب کی ایک سادہ مثال

$$m+n \in \mathbb{N};\ m \times n \in \mathbb{N},\ \forall m,n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$$

مندرجہ بالا دو طریقوں میں ہر ایک طریقہ ذیل کے مشاہدہ کو تسلیم کرتا ہے :

(1) ایک ہی وقت میں $\mathbb{N}$ کے دوعناصر پر عمل کرتے ہیں۔

(2) حاصل ہونے والا عنصر (نتیجہ) بھی $\mathbb{N}$ کا ایک عنصر ہے۔

کسی غیر معدوم مجموعہ پر اس طرح واضح عمل **بائنری عمل یا بائنری مرکب** کہلاتا ہے۔ جو کے تجدیدی الجبراء کے مجموعہ پر متعین ہے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 12_Discrete Mathematics.indd 225 28-02-2023 15:37:36

تعریف 12.1

غیر معدوم مجموعے S پر واضح عمل $*$ بائنری عمل S پر کہلاتا ہے۔اگر درجہ ذیل شرائط مطمئن ہوں:

(i) یہ عمل $*$ ہر ایک ترتیب وار جوڑی $(a,b) \in S \times S$ کے لئے واضح ہونا ضروری ہے۔

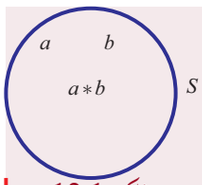
(ii) ہر ترتیب وار جوڑی $(a,b) \in S \times S$ کے لئے یہ S کے ایک مخصوص عنصر $a*b$ کو تعین کرتا ہے

دوسرے الفاظ میں، کوئی بھی بائنری عمل $*$ S پر ایک اصول ہے جو S کے عناصر یعنی **ہر ترتیب وار جوڑی** کو S کے ایک مخصوص **عنصر** سے تعین کرتا ہے اور $*$ کو **تفاعل (میپنگ)** جس کی داخلی قیمت کارتیسی حاصل ضرب $S \times S$ سے اور S میں خارجی قیمت سے سمجھا جاتا ہے۔

$$*: S \times S \to S \; ; \; *(a,b) = a*b \in S$$ ، جہاں، $a*b$ ایک مخصوص عنصر ہے۔

ایک بائنری عمل کی تعریف اس طرح کی جاتی ہے $*: S \times S \to S \; ; \; *(a,b) = a*b \in S$ مطالبہ کرتا ہے کہ خارجی قیمت $a*b$ دیئے گئے مجموعہ S میں رہنا چاہئے اور اس کے تکمیلی مجموعے میں نہیں۔تو ہم یہ کہتے ہیں کہ ' $*$ ، S پر بند ہے' یا ' S **بند** ہے $*$ کے لحاظ' سے ہے۔اس خاصیت کو **شمولیتی خصوصیت** کہتے ہیں۔

تعریف 12.2



خاکہ 12.1

کوئی غیر معدوم مجموعہ جس پر ایک یا ایک سے زیادہ بائنری اعمال واضح کرتے ہیں **الجبرائی ساخت** کہلاتا ہے۔

S پر $*$ بائنری عمل کی تعریف کا دوسرا طریقہ یہ ہے کہ جہاں $a*b$ مخصوص ہے $\forall a,b \in S$ اور $a*b \in S$

غور کیجئے (Note)

نتیجہ کے طور پر ہر بائنری عمل شمولیتی خصوصیت کو مطمئن کرتا ہے۔

غور کیجئے (Note)

عمل $*$ صرف ایک علامت ہے جو $+$ ، $\times$ ، $-$ ، $\div$، میٹرکس کی جمع میٹرکس کی ضرب، وغیرہ اس مجموعے پر منحصر ہے جس پر وہ واضح ہوتا ہے۔

مثال کے طور پر، $+$ اور $\times$، $\mathbb{N}$ پر بائنری ہیں، $-$ ، $\mathbb{N}$ پر بائنری **نہیں** ہے۔

اس کی تصدیق کرنے کے لئے، فرض کریں $(3,4) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ۔

$$* = (a, b) = -(3, 4) = 3 - 4 = -1 \notin \mathbb{N}$$

لہٰذا، $-$ $\mathbb{N}$ پر ایک **بائنری عمل نہیں** ہے۔ اس لئے $\mathbb{N}$ بڑھایا جاتا ہے $\mathbb{Z}$ تک، تاکہ $-$ $\mathbb{Z}$. پر بائنری عمل بن جائے لہٰذا $\mathbb{Z}$ بند ہے۔ $+$ ، $\times$ اور $-$ کے لحاظ سے لہٰذا، $(\mathbb{Z}, +, \times, -)$ ایک الجبرائی ساخت ہے۔

مشاہدے

بائنری طریقہ اس مجموعے پر منحصر ہے جس پر وہ متعین ہے۔

(a) عمل $-$ $\mathbb{N}$ پر **بائنری عمل نہیں** ہے۔ مگر $\mathbb{Z}$ پر بائنری ہے۔ سیٹ $\mathbb{N}$ بڑھایا جاتا ہے کہ منفی اعداد کو شامل کر سکیں۔ شامل شدہ سیٹ کو ہم $\mathbb{Z}$ کہتے ہیں۔

(b) $\mathbb{Z}$ پر عمل $\div$ $\mathbb{Z}$ پر بائنری عمل نہیں ہے۔ مثال کے طور پر $(1,2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ کیلئے $(1, 2) = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ ہے۔ لہٰذا، $\mathbb{Z}$ ، $\mathbb{Q}$ تک بڑھایا جاتا ہے۔

(c) یہ ایک معروف حقیقت ہے کہ بنیادی ریاضی میں 0 سے تقسیم واضح نہیں ہے۔اس لئے $\div$ مجموعہ $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ پر بائنری عمل ہے لہٰذا، $+$ ، $\times$ ، $-$ ، اور $\mathbb{Q}$ پر بائنری عمل ہیں۔ اور $\div$، $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ پر بائنری عمل ہے۔

اب سوال اس بارے میں ہے کہ $\mathbb{Q}$ سے $\mathbb{R}$ اور پھر $\mathbb{R}$ سے $\mathbb{C}$ کو بڑھانے کے وجوہات کو دیکھئے۔چنانچہ ایک عددی نظام کی ضرورت ہے جہاں صرف بنیادی ریاضی اعمال جیسے $+$ ، $\times$ ، $-$ ، $\div$ ہی نہیں بلکہ مساوات جیسے "$x^2 - 2 = 0$" اور "$x^2 + 1 = 0$" کی جزروں کو بھی شامل کیا جائے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 12_Discrete Mathematics.indd 226 28-02-2023 15:37:39

لہٰذا، غیر ناطق اعداد (irrational numbers) اور خیالی اعداد (imaginary numbers) کے مجموعہ کو موجودہ نظام کے ساتھ ملایا جائے (باب 3 دیکھیں) لہٰذا، کیلئے $\mathbb{R}$ اور $\mathbb{C}$ حاصل ہوتا ہے۔ سب سے بڑا عددی نظام $\mathbb{C}$ واجبی طور پر $\mathbb{N}$، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$ اور $\mathbb{R}$ کو تحتی مجموعوں کے طور پر شامل کر لیتا ہے۔

عددی نظام / عمل	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{Q}\setminus\{0\}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\mathbb{C}\setminus\{0\}$
$+$	بائنری	بائنری	بائنری	بائنری	بائنری	بائنری نہیں	بائنری نہیں	بائنری نہیں
$-$	بائنری نہیں	بائنری	بائنری	بائنری	بائنری	بائنری نہیں	بائنری نہیں	بائنری نہیں
$\times$	بائنری	بائنری	بائنری	بائنری	بائنری	بائنری	بائنری	بائنری
$\div$	بائنری نہیں	بائنری نہیں	بائنری نہیں	بائنری نہیں	بائنری نہیں	بائنری	بائنری	بائنری

جدول 12.1

مثال 12.1

ذیل میں دئے گئے بالترتیب مجموعوں کے اعمال میں بائنری عمل (شمولیتی خاصیت) کی جانچ کرو۔

$$a*b=a+3ab-5b^2;\forall a,b\in\mathbb{Z}$$

حل

(i) چونکہ $\times$، $\mathbb{Z}$ پر بائنری عمل ہے۔ $a,\ b\in\mathbb{Z}\Rightarrow a\times b=ab\in\mathbb{Z}$ اور $b\times b=b^2\in\mathbb{Z}$ .....(1)

یہ حقیقت کہ $+$، $\mathbb{Z}$ پر بائنری عمل ہے اور $3ab=(ab+ab+ab)\in\mathbb{Z}\Leftarrow(1)$ اور

$5b^2=(b^2+b^2+b^2+b^2+b^2)\in\mathbb{Z}$ .....(2)

اور $a\in\mathbb{Z}$ اور $3ab\in\mathbb{Z}$ کا مطلب ہے۔ $a+3ab\in\mathbb{Z}$ .....(3)

(2)، (3) $\mathbb{Z}$ پر $-$ کی شمولیتی خصوصیت تسلیم کرتا ہے۔ $a*b=(a+3ab-5b^2)\in\mathbb{Z}$ چونکہ $a*b$، $\mathbb{Z}$ میں شامل ہے۔* $\mathbb{Z}$ پر ایک بائنری عمل ہے۔

(ii) اس سوال میں $a*b$ خارج قسمت کی شکل میں ہے چونکہ 0 سے تقسیم غیر واضح ہے ۔ نسب نما $b-1$ کا غیر صفر ہونا لازم ہے، یہ بات صاف ہے۔

کہ $b-1=0$ اگر $b=1$ ہے، چونکہ $1\in\mathbb{Q}$، * پورے $\mathbb{Q}$ پر ایک بائنری عمل نہیں ہے البتہ یہ معلوم کیا جاتا ہے۔ کہ $\mathbb{Q}$ سے 1 کو نکال دینے پر $\mathbb{Q}\setminus\{1\}$ میں $a*b$ خارج (output) موجود ہوتا ہے۔ لہٰذا، *، $\mathbb{Q}\setminus\{1\}$ پر ایک بائنری عمل ہے۔

12.2.2 بائنری عمل کی چند اور خصوصیات (Some more properties of a binary operation)

متبادلی خصوصیت (Commutative property)

کوئی بھی بائنری عمل * جو کہ نامعدوم مجموعہ S پر واضح ہے۔ متبادل خصوصیت کو تسلیم کرتا ہے، اگر

$a*b=b*a\ \ \forall a,b\in S$ ہو۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 12_Discrete Mathematics.indd 227 28-02-2023 15:37:43

مربوطی خصوصیت (Associative property)

کوئی بھی بائنری عمل $*$ جو کہ نا معدوم مجموعہ S پر واضح ہے۔ مربوطی خصوصیت کو تسلیم کرتا ہے اگر

$a*(b*c)=(a*b)*c \quad \forall a,b,c \in S$ ہو۔

متماثل کی موجودگی خصوصیت (Existence of identity property)

ایک عنصر $e \in S$ *متماثل عنصر* S کا ہوگا۔ جبکہ بائنری عمل $*$ کے اندر اگر تمام $a \in S$ کے لئے ہمارے پاس $a*e=a$ اور $e*a=a$ ہو۔

معکوس کی موجودگی خصوصیت (Existence of inverse property)

ایک متماثل عنصر e موجود ہے اور اگر تمام $a \in S$ کے لئے S میں b موجود ہو اس طرح کے $a*b=e$ اور $b*a=e$ تو $a, b \in S$ کا *معکوس عنصر* کہلاتا ہے۔ اس طرح کے معاملوں میں، ہم $b=a^{-1}$ لکھتے ہیں۔

غور کیجئے (Note)

a^{-1} S کا ایک عنصر ہے، اور اس کو ہم a کا معکوس پڑھ سکتے ہیں اور $\frac{1}{a}$ سے نہیں۔

غور کیجئے (Note)

(i) $\mathbb{Z}$ میں *ضربی متماثل* 1 ہے اور یہی صرف ایک عنصر ہے جو $n \cdot 1 = 1 \cdot n = n$، $\forall n \in \mathbb{Z}$ خصوصیت رکھتا ہے۔

(ii) *کوئی بھی عنصر کا ضربی معکوس* فرض کرو کہ 2 جو $\mathbb{Q}$ میں ہے اس کا $\frac{1}{2}$ ہے اور دوسرا کوئی بھی غیر صفر ناطق عدد x نہیں ہوگا جو $2 \cdot x = x \cdot 2 = 1$ خصوصیت رکھتا ہو۔

غور کیجئے (Note)

جب بھی کوئی ریاضی بیان "ہر ایک کے لئے" یا "سب کے لئے" کہا جاتا ہے تو اس کو جوڑی یا تین عنصر کے لئے ثابت کرنا ہوگا تمام تین عنصر یا جوڑی کے لئے ثابت کرنا آسان نہیں ہے۔ اس قسم کی تعریفوں کو استعمال کرکے بیانات کے منفی کو ثابت کرسکتے ہیں۔ یعنی "سب کے لئے" یا "ہر ایک کے لئے" "غیر موجود" کا منفی یعنی بیان کے منفی کو قائم کرنے کے لئے اس طرح کے ایک جوڑے یا تین عنصر تیار کریں۔

متماثل اور معکوس کے وجود کی منفردت کے سوالات کو جانچنا ہے۔ مندرجہ ذیل نظریات زیادہ عام شکل میں ان نتائج کو ثابت کرسکتے ہیں۔

مسئلہ 12.1 متماثل کی منفردت (Uniqueness of Identity)

الجبرائی ساخت میں متماثل عنصر (اگر موجود ہو) منفرد ہونا لازمی ہے۔

ثبوت

فرض کرو کہ $(S,*)$ ایک الجبرائی ساخت ہے۔ فرض کرو S کا متماثل عنصر S میں موجود ہے۔

یہ ثابت کرنا ہے کہ متماثل عنصر منفرد ہے۔ اگر e_1 اور e_2 دو متماثل عنصر S میں ہیں۔

متماثل خصوصیت کے مطابق پہلے e_1 کو متماثل اور e_2 کو فرضی عنصر کی طرح S میں لینے سے

$e_2 * e_1 = e_1 * e_2 = e_2$ .....(1)

e_1 اور e_2 کے کرداروں کو متبادل کرنے سے $e_1 * e_2 = e_2 * e_1 = e_1$ ....(2)

(1) اور (2) سے $e_1 = e_2$. لہٰذا، متماثل عنصر منفرد ہے، ثابت ہوا۔

مسئلہ 12.2 معکوس کی منفردت (Uniqueness of Inverse)

الجبرائی ساخت میں معکوس عنصر (اگر موجود ہو) منفرد ہونا لازمی ہے۔

ثبوت

فرض کرو الجبرائی ساخت $(S,*)$ ہے۔ اور $a \in S$ ہے۔ فرض کرو a کا معکوس بھی S میں موجود ہے۔ a کا معکوس منفرد ہے۔ ثابت کرنا ہوگا جبکہ S میں معکوس عنصر کی موجودگی S میں متماثل عنصر e کی موجودگی کو ظاہر کرتی ہے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 12_Discrete Mathematics.indd 228 28-02-2023 15:37:46

فرض کرو کہ $a \in S$، a کا معکوس (اگر موجود ہو) منفرد ہوگا ثابت کرنا ہے۔

فرض کرو کہ a کے دو معکوس ہیں a_1، a_2

a_1 کو a کا معکوس قیاس کرنے پر $a * a_1 = a_1 * a = e$ .....(1)

a_2 کو a کا معکوس قیاس کرنے پر $a * a_2 = a_2 * a = e$ اسی طرح .....(2)

$a_1 = a_1 * e = a_1 * (a * a_2) = (a_1 * a) * a_2 = e * a_2 = a_2$ ((1) اور (2) سے)

لہٰذا، $a_1 = a_2$، a کا معکوس منفرد ہے۔ثبوت مکمل ہوا۔

مثال 12.2

تصدیق کریں $\mathbb{Z}$ پر $+$ ارتھمیٹک عمل کے لئے (i) شمولیتی خصوصیت (ii) متبادلی خصوصیت (iii) مربوطی خصوصیت (iv) متماثل کا وجود (v) معکوس کا وجود۔

حل

(i) $\forall m, n \in \mathbb{Z}, m+n \in \mathbb{Z}$ لہٰذا، $+$، $\mathbb{Z}$ پر بائنری عمل ہے۔

(ii) اسی طرح $m+n = n+m, \forall m, n \in \mathbb{Z}$ ہے، متبادلی خصوصیت مطمئن ہوئی۔

(iii) $\forall m, n, p \in \mathbb{Z}, m+(n+p) = (m+n)+p$ مربوطی خصوصیت مطمئن ہوئی۔

(iv) $m+e = e+m = m \Rightarrow e = 0.$ یعنی، $\exists\ 0 \in \mathbb{Z} \ni (m+0) = (0+m) = m$ لہٰذا متماثل کا وجود یقیناً ہے۔

(v) $\forall m \in \mathbb{Z}, \exists\ -m \in \mathbb{Z}$ یعنی، $m+m' = m'+m = 0 \Rightarrow m' = -m.$

$\ni m+(-m) = (-m)+m = 0$ لہٰذا، معکوس کاوجود یقیناً ہے ہم دیکھتے ہیں کہ جمعی معکوس $+$ $\mathbb{Z}$ پر اوپر دیئے گئے پانچ خصوصیات کو مطمئن کرتا ہے۔

غور کریں کہ **جمعی تماثل** 0 ہے; اور کسی سالم عدد m کا **جمعی معکوس** $-m$ ہے۔

مثال 12.3

تصدیق کریں، $\mathbb{Z}$ پر $-$ ارتھمیٹک عمل کے لئے (i) شمولیتی خصوصیت (ii) متبادلی خصوصیت (iii) مربوطی خصوصیت (iv) متماثل کا وجود (v) معکوس کا وجود۔

حل

(i) $-$ چونکہ $\mathbb{N}$ پر بائنری نہیں ہے; مگر $\mathbb{Z}$ پر بائنری ہے۔ $-$ کی $\mathbb{Z}$ پر مطمئن اور خاصیتوں کی تصدیق کرنے کے لئے چند سادی قیمتوں کا استعمال کر کے کرسکتے ہیں۔

(ii) $m = 4$ اور $n = 5$ لینے پر $(m-n) = (4-5) = -1$ اور $(n-m) = (5-4) = 1$ لہٰذا، $(m-n) \neq (n-m)$، $\mathbb{Z}$ پر $-$ عمل متبادلی خصوصیت نہیں رکھتا ہے۔

(iii) مربوطی خصوصیت کو تصدیق کرنے کے لئے قیمت $m = 4, n = 5$ اور $p = 7$ لینے پر $(m-n)-p$ اور $m-(n-p)$

$(m-n)-p = (4-5)-7 = (-1-7) = -8$ .....(1)

$m-(n-p) = 4-(5-7) = (4+2) = 6$ ...(2)

لہٰذا، (1) اور (2) سے $(m-n)-p \neq m-(n-p)$

لہٰذا، $-$، $\mathbb{Z}$ میں مربوطی نہیں ہے۔

(iv) متماثل غیر موجودہ ہے (کیوں؟)

(v) معکوس غیر موجودہ ہے (کیوں؟)

مثال 12.4

تصدیق کریں، تمام جفت اعداد کا مجموعہ $= \mathbb{Z}_e$ پر ارتھمیٹک عمل کے لئے $+$ (i) شمولیتی خصوصیت (ii) متبادلی خصوصیت(iii) مربوطی خصوصیت (iv) متماثل کا وجود (v) معکوس کا وجود۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 12_Discrete Mathematics.indd 229 28-02-2023 15:37:51

حل

فرض کرو تمام **جفت اعداد** کا مجموعہ $\mathbb{Z}_e = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots,-6,-4,-2,0,2,4,6,\ldots\}$.

ہم تصدیق کریں گے $\mathbb{Z}_e$ پر $+$ سے مطمئن خصوصیات

(i) دو جفت اعداد کا حاصل جمع بھی جفت عدد ہو گا کیونکہ۔

$m,n \in \mathbb{Z}$ اور $y = 2n$ ، $x, y \in \mathbb{Z}_e \Rightarrow x = 2m$

لہٰذا $(x+y) = 2m+2n = 2(m+n) \in \mathbb{Z}_e$ میں $+$ بائنری عمل ہے۔ $\mathbb{Z}_e$

(ii) $\forall x, y \in \mathbb{Z}_e$ ، $(x+y) = 2(m+n) = 2(n+m) = (2n+2m) = (y+x)$

لہٰذا، $+$ میں متبادلی خصوصیت ہے۔

(iii) اسی طرح ہم دیکھ سکتے ہیں کہ $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}_e$ ، $(x+y)+z = x+(y+z)$

چنانچہ مربوطی خصوصیت صحیح ہے۔

(iv) اب ہم $x = 2k$ لیں تو $2k+e = e+2k = 2k \Rightarrow e = 0$.

تب $\forall x \in \mathbb{Z}_e,\ \exists 0 \in \mathbb{Z}_e \ni x+0 = 0+x = x$

لہٰذا، 0 متماثل عنصر ہے۔

(v) $x = 2k$ اور x' اس کا معکوس لینے پر ہمارے پاس ہے۔ $2k+x' = 0 = x'+2k \Rightarrow x' = -2k$ یعنی، $x' = -x$

اس لئے $\forall x \in \mathbb{Z}_e, \exists -x \in \mathbb{Z}_e \ni x+(-x) = (-x)+x = 0$

لہٰذا، $x \in \mathbb{Z}_e$ کا معکوس $-x$ ہے۔

مثال 12.5

تصدیق کرو، $\mathbb{Z}_e$ = تمام طاق سالم اعداد کا مجموعہ پر ارتھیٹک عمل $+$ کیلئے (i) شمولیتی خصوصیت (ii) متبادلی خصوصیت (iii) مربوطی خصوصیت (iv) متماثل کا وجود (v) معکوس کا وجود۔

حل

فرض کرو کہ $\mathbb{Z}_o$ تمام **طاق اعداد** کا مجموعہ $\mathbb{Z}_o = \{2k+1 : k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots,-5,-3,-1,1,3,5,\ldots\}$ ہے، $\mathbb{Z}_o$ میں $+$ **بائنری عمل نہیں** ہے۔ کیونکہ $x = 2m+1, y = 2n+1, x+y = 2(m+n)+2$ ، تمام m اور n. کے لئے جفت ہے۔ مثال کے طور پر فرض کرو طاق اعداد، $3,7 \in \mathbb{Z}_o$ جس کا حاصل جمع $3+7 = 10$ جو جفت عدد ہے اس لحاظ سے $x, y \in \mathbb{Z}_0$ ہو تو $(x+y) \notin \mathbb{Z}_0$. دوسرے خصوصیات کی جانکاری حاصل کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔کیونکہ $+$ بائنری عمل نہیں ہے۔

مثال 12.6

مندرجہ ذیل دئے گئے مجموعے پر عمل کیلئے تصدیق کرو کہ (i) شمولیتی خصوصیت (ii) متبادلی خصوصیت (iii) مربوطی خصوصیت $\forall a, b \in \mathbb{N}; (a*b) = a^b$ (قوتی خصوصیت)۔

حل

(i) $\forall a, b \in \mathbb{N}$ جو $a*b = a^b \in \mathbb{N}$ صحیح ہے۔ لہٰذا، $*$ $\mathbb{N}$ پر **بائنری عمل** ہے۔

(ii) $a*b = a^b$ اور $b*a = b^a$ ، $a = 2$ اور $b = 3$ لینے پر $b*a = 3^2 = 9$ مگر $a*b = 2^3 = 8$

لہٰذا، $a*b$ ، $b*a$ کے مساوی نہیں ہے۔ لہٰذا، $*$ **متبادلی خصوصیت میں نہیں** ہے۔

(iii) دوبارہ فرض کرو کہ $a*(b*c) = a*(b^c) = a^{(b^c)}$ ، $a = 2$ ، $b = 3$ اور $c = 4$ لینے پر

پھر، $a*(b*c) = 2*(3*4) = 2^{3^4} = 2^{81}$

مگر $(a*b)*c = (a^b)*c = (a^b)^c = a^{(bc)} = a^{bc} = 2^{12}$

لہٰذا $*$ کی $\mathbb{N}$ میں **مربوطی خصوصیت نہیں** ہے۔ $a*(b*c) \neq (a*b)*c$

غور کریں: اس بائنری عمل میں متماثل اور معکوس خصوصیت نہیں ہے۔(جواز دیں)

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 12_Discrete Mathematics.indd 230 28-02-2023 15:37:57

مثال 12.7

مندرجہ ذیل مجموعہ پر عمل کے لئے تصدیق کریں (i) شمولیتی خصوصیت (ii) متبادلی خصوصیت (iii) مربوطی خصوصیت (iv) متماثل کا وجود (v) معکوس کا وجود خصوصیت; $m*n=m+n-mn \quad m,n\in\mathbb{Z}$

حل

(i) $m+n-mn$ کا نتیجہ واضح طور پر ایک سالم عدد ہے لہٰذا، $*$، $\mathbb{Z}$ پر **بائنری عمل** ہے۔

(ii) $\forall m,n\in\mathbb{Z}\ m*n=m+n-mn=n+m-nm=n*m,$ اس لئے $*$ کی **متبادلی خصوصیت** ہے۔

(iii) فرض کرو

$$(m*n)*p=(m+n-mn)*p=(m+n-mn)+p-(m+n-mn)p$$
$$=m+n+p-mn-mp-np+mnp \quad \ldots(1)$$

اس طرح $m*(n*p)=m*(n+p-np)=m+(n+p-np)-m(n+p-np)$

$$=m+n+p-np-mn-mp+mnp \quad \ldots(2)$$

(1) اور (2) سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ $m*(n*p)=(m*n)*p$ لہٰذا، $*$ کی **مربوطی خصوصیت** ہے۔

(iv) e ایک سالم عدد ہے جسے پتہ کرنا ہے ایسے کہ

$$m*e=e*m=m,\ \forall m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m+e-m\ e=m$$
$$\Rightarrow e\ (1-m)=0\Rightarrow e=0 \text{ یا } m=1.$$

مگر m ایک اختیاری سالم عدد ہے۔اور 1 کے یکساں ہونا ضروری نہیں ہے اس لئے ایک ہی امکان جو ہے $e=0$ لہٰذا، $m*0=0*m=m,\ \forall m\in\mathbb{Z}$ 0 متماثل عنصر ہے اس لئے **متماثل کا وجود** ثابت ہوا۔

(v) اگر عنصر $m'\in\mathbb{Z}$ ہے جسے پتہ کرتا ہے اس طرح ہے کہ $m*m'=m'*m=e=0,\ \forall m\in\mathbb{Z}$ ،

$m*m'=0\Rightarrow m+m'-m\ m'=0\Rightarrow m'=\dfrac{m}{m-1}$، اگر $m=1$، m' غیر واضح ہے۔ جب $m=2,\ m'$ ایک سالم عدد ہے، مگر $m=2$ کے سوائے m کے تمام قیمتوں کے لئے m' کو سالم عدد ہونے کی ضرورت نہیں ہے۔لہٰذا $\mathbb{Z}$ **میں معکوس خصوصیت نہیں** ہے۔

12.2.3 بولین میٹرکس پر چند بائنری اعمال (Some binary operations on Boolean Matrices)

تعریف 12.3

ایک **بولین میٹرکس** حقیقی میٹرکس ہے جس کے اندراجات یا تو 0 ہے یا 1 ہیں۔

غور کرو بولین اندراجات 0 سے 1 تک کو کئی الگ طریقوں سے واضح کیا جاتا ہے۔برقی سوئچ کو "on اور off" کرنے میں گراف تھیوری میں، "شریک میٹرکس" (adjacency matrix) وغیرہ میں بولین اندراجات 0 اور 1 استعمال ہوتا ہے۔ ہمارے جائزہ میں ہم اسی طرح کے بولین میٹرکس استعمال کریں گے ۔

ذیل کے دو قسم کے اعمال تمام بولین میٹرکسوں کے مجموعہ پر واضح کرتے ہیں ۔

فرض کرو کہ $A=\left[a_{ij}\right]$ اور $B=\left[b_{ij}\right]$ کوئی دو بولین میٹریکس **یکساں قسم** ہیں۔جو ان کا **ملنا** $\vee$ اور **شامل** ہونا $\wedge$ کو اس طرح متعین کرسکتے ہیں۔

تعریف 12.4: A اور B کا ملاپ (Join of A and B)

$$A\vee B=\left[a_{ij}\right]\vee\left[b_{ij}\right]=\left[a_{ij}\vee b_{ij}\right]=\left[c_{ij}\right]$$

جہاں c_{ij} = 1، اگر $a_{ij}=1$ یا $b_{ij}=1$

0، اگر دونوں $a_{ij}=0$ اور $b_{ij}=0$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 12_Discrete Mathematics.indd 231 28-02-2023 15:38:02

تعریف 12.5: A اور B کا شامل ہونا (Meet of A and B)

$$A \wedge B = [a_{ij}] \wedge [b_{ij}] = [a_{ij} \wedge b_{ij}] = [c_{ij}] \quad \text{جہاں} \quad \left.\begin{matrix} 1، \text{اگر دونوں } a_{ij}=1 \text{ اور } b_{ij}=1 \\ 0، \text{اگر یا تو } a_{ij}=0 \text{ یا } b_{ij}=0 \end{matrix}\right\} = c_{ij}$$

یہ بات صاف ہے کہ $(a \vee b) = \max\{a,b\}$ ؛ $(a \wedge b) = \min\{a,b\}$، $a,b \in \{0,1\}$

مثال 12.8

فرض کرو کہ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ یکساں قسم کے کوئی دو بولین میٹرکس ہیں۔ $A \vee B$ اور $A \wedge B$ معلوم کرو۔

حل

$$\text{پھر} \quad A \vee B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \vee 1 & 1 \vee 1 \\ 1 \vee 0 & 1 \vee 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \wedge B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \wedge 1 & 1 \wedge 1 \\ 1 \wedge 0 & 1 \wedge 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ملاپ اور شامل کی مطمئن خصوصیات (Properties satisfied by join and meet)

فرض کرو کہ $\mathbb{B}$ تمام یکساں قسم کے بولین میٹرکسوں کا مجموعہ ہے یہاں ہم صرف ملاپ اور شامل ہونا کے خصوصیات بیان کرتے ہیں۔

شمولیتی خصوصیت

$A, B \in \mathbb{B}$، $A \vee B = [a_{ij}] \vee [b_{ij}] = [a_{ij} \vee b_{ij}] \in \mathbb{B}$ (کیونکہ $(a_{ij} \vee b_{ij})$ یا تو 0 ہے یا تو 1، $\forall i, j$). $\vee$ $\mathbb{B}$ پر ایک بائنری عمل ہے۔

مربوطی خصوصیت

$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C, \ \forall A, B, C \in \mathbb{B}$. $\vee$ مربوطی (associative) ہے۔

تماثل خصوصیت کی موجودگی

$\forall A \in \mathbb{B}$، $\exists$ صفر میٹریکس $0 \in \mathbb{B}$ ، $A \vee 0 = 0 \vee A = A \ni$ $\vee$ کے لئے تماثل عنصر صفر میٹرکس ہے۔

معکوس خصوصیت کی موجودگی

کوئی میٹرکس $A \in \mathbb{B}$ کے لئے میٹرکس $B \in \mathbb{B}$ دریافت کرنا ناممکن ہے۔

ایسا کہ $A \vee B = B \vee A = 0$ ہو تو اس لئے معکوس موجود نہیں ہے۔

چنانچہ یہ تصدیق کیا جاتا ہے کہ ملاپ عمل $\vee$ مطمئن کرتا ہے۔ (i) شمولیتی خصوصیت (ii) متبادلی خصوصیت (iii) مربوطی خصوصیت (iv) میٹرکس تماثل میٹرکس $U = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ پر کی موجودگی $\mathbb{B}$ اور (v) معکوس کی موجودگی غیر یقینی ہے۔

12.2.4 ماڈولر حسابی (Modular Arithmetic)

بنیادی حسابی اعمال جیسے میٹرکس کا جمع، میٹرکس کا ضرب، بولین میٹرکس (Boolean matrices) کے شامل ہونا اور ملاپ کے خصوصیات پر بحث کرتے ہوئے ہم اس حصہ میں ایک نئے عمل (Modular Arithmetic) پر بحث کریں گے۔ ماڈولرار تمیٹکس سے مراد کوئی عدد a کو مثبت سالم عدد n (>1) سے تقسیم کرنے کا طریقہ کو ماڈولس کہتے ہیں۔اور a کو بچت b، modulo n سے یکساں کرنا ہے اور اسے اس طرح لکھا جاتا ہے۔ $a \equiv b \pmod{n}$ اس طرح پڑھتے ہیں، ماڈولو n میں a مماثل ہے b سے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 12_Discrete Mathematics.indd 232 28-02-2023 15:38:06

یہاں $a \equiv b \pmod{n}$ کا مطلب $a-b=n\cdot k$ کوئی سالم k کے لئے اور b ادنی غیر منفی سالم عدد ہے a جب n سے تقسیم ہوتا ہے۔
مثال کے طور پر، $25 \equiv 4 \pmod 7, -20 \equiv -2 \pmod 3 \equiv 1 \pmod 3$ اور $15 \equiv 0 \pmod 5$ وغیرہ۔ مزید سالم اعداد کا مجموعہ جب n سے تقسیم کیا جاتا ہے تو بچت $0,1,2,\ldots,n-1$ ملتا ہے $\mathbb{Z}_5$ کے معاملے میں

$$
\begin{aligned}
[0] &= \{\ldots,-15,-10,-5,0,5,10,15,\ldots\} \\
[1] &= \{\ldots,-14,-9,-4,1,\ 6,11,\ \ldots\} \\
[2] &= \{\ldots,-13,-8,-3,2,7,12,\ldots] \\
[3] &= \{\ldots,-12,-7,-2,3,8,13,\ldots\} \\
[4] &= \{\ldots,-11,-6,-1,4,9,14,\ldots\}.
\end{aligned}
$$

ہم اس طرح لکھتے ہیں $\mathbb{Z}_5 = \{[0],[1],[2],[3],[4]\}$ ہر ایک جماعت میں، کوئی دو اعداد modulo 5 کے مطابق ہیں۔

2007 سے پہلے، 10 ہندسی ISBN (International Standard Book Number) عددی نظام میں ارتھمیٹک ماڈولر استعمال ہوتا تھا۔ مثال کے طور پر، آخری ہندسہ برابری کی جانچ کے لئے ہے۔یہ مجموعہ $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,X\}$ سے ہے ISBN اعداد میں 81-7808-755-**3** آخری ہندسہ 3 اس طرح حاصل ہوتا ہے۔

$$1*8+2*1+3*7+4*8+5*0+6*8+7*7+8*5+9*5=8+2+21+32+0+48+49+40+45=245 \equiv 3 \pmod{11}$$

متبادل کے طور پر، وزن شدہ رقم کو الٹے انداز میں محسوب کیا جاتا ہے۔

$$9*8+8*1+7*7+6*8+5*0+4*8+3*7+2*5+1*5=245 = \mathbf{3} \pmod{11}.$$

ان دونوں طریقوں سے ہمیں عدد 3 حاصل ہوتا ہے۔

2007 کے بعد، 13 ہندسی ISBN عددی نظام اختیار کیا گیا۔ پہلے 12 ہندسے بائیں سے دائیں (From left to right) وزن شدہ اعداد $3,1,3,1,\ldots$ سے ضرب کئے جاتے ہیں دائیں سے شروع کرکے بائیں تک، اس کے بعد وزن شدہ رقم کو محسوب کیا جاتا ہے۔ 10 کا، اعلیٰ ضربی لیا جاتا ہے پھر فرق محسوب کیا جاتا ہے پھر اس کا جمعی معکوس modulo 10 13 واں ہندسہ ہے۔
مثال کے طور پر، ISBN عدد **5**-978-81-931995-6 کو غور کریں۔ 12 ہندسوں کو دائیں سے بائیں لیں۔

9	7	8	8	1	9	3	1	9	9	5	6
1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3
9	21	8	24	1	27	3	3	9	27	5	18

آخری صف کا جمع 155 ہے۔ 10 ضربی کا قریبی (اعلیٰ) سالم عدد 160 ہے۔ فرق 160-155=5 اس کا جمعی معکوس modulo 10 میں **5** ہے۔
جو ISBN اعداد کا 13 واں ہندسہ ہے۔

مجموعہ $\mathbb{Z}_n$ پر 2 نئے اعمال جیسے **جمعی ماڈولو Addition modulo $n(+_n)$** اور **ضربی ماڈولو Multiplication modulo $n(\times_n)$** کی وضاحت کرتے ہیں، جس میں n سے کم تمام غیر منفی سالم اعداد Arithmetic modulo کے اندر موجود ہیں۔

تعریف 12.6

(i) جمعی ماڈولو n کی تعریف اس طرح ہے۔
فرض کرو کہ $a,b \in \mathbb{Z}_n$، تو
n سے تقسیم ہونے پر $a+b$ کا بچت $n = a +_n b$۔

(ii) ضربی ماڈولو n کی تعریف اس طرح ہے۔
فرض کرو کہ $a,b \in \mathbb{Z}_n$، تو
n سے تقسیم ہونے پر $a\times b$ کا بچت $a \times_n b$ ہے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 12_Discrete Mathematics.indd 233 28-02-2023 15:38:10

مثال 12.9

$\mathbb{Z}_5$ پر $+_5$ عمل کے لئے جمعی ماڈولو 5 کے جدول کے استعمال سے تصدیق کرو۔ (i) شمولیتی خصوصیت (ii) تبادلی خاصیت (iii) مربوطی خاصیت (iv) تماثل کی موجودگی (v) معکوس کی موجودگی۔

حل

ہم جانتے ہیں $\mathbb{Z}_5 = \{[0], [1], [2], [3], [4]\}$، جمعی ماڈولو 5 کا مطابق ذیل میں دیا گیا ہے۔

جماعتیں $\{[0],[1],[2],[3],[4]\}$ کو ظاہر کرنے کیلئے ہم بچت $\{0,1,2,3,4\}$ کو لیں گے۔

$+_5$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

جدول 12.2

(i) چونکہ جدول کا ہر خانہ $\mathbb{Z}_5$ کے ٹھیک ایک عنصر سے بھرا ہوا ہے۔ $a +_5 b$ کا نتیجہ منفرد ہے اور اس لئے $+_5$ ایک بائنری عمل ہے۔

(ii) داؤں وتر کے لحاظ سے اندراجات متناسب ہیں۔ تو $+_5$ متبادلتی خاصیت رکھتا ہے۔

(iii) مربوطی خصوصیت کی تصدیق کرنے کے لئے جدول کو براہ راست استعمال نہیں کرسکتے اس لئے اسے حسب معمول تصدیق کریں گے۔

مثال کے طور پر، $(2 +_5 3) +_5 4 = 0 +_5 4 = 4 \pmod 5$

اور $2 +_5 (3 +_5 4) = 2 +_5 2 = 4 \pmod 5$

لہٰذا، $(2 +_5 3) +_5 4 = 2 +_5 (3 +_5 4)$

اس طرح سے تمام ممکن تہروں کے ساتھ تصدیق کرسکتے ہیں اور بالا آخر یہ بتایا جاتا ہے کہ $+_5$ مربوطی ہے۔

(iv) 0 کی سربراہی صف اور 0 کی سربراہی قطار یکساں ہے۔ لہٰذا منفرد عنصر 0 ہے۔

(v) معکوس کی موجودگی یقینی ہے، اس شرط پر کے منفرد 0 ہر صف اور ہر قطار میں موجود ہو۔جدول 12.2 سے، یہ ظاہر ہوتا ہے کہ یہ خاصیت صحیح ہے۔ $\mathbb{Z}_5$ کے کوئی ایک عنصر کے معکوس معلوم کرنے کا طریقہ مثلاً عنصر 2 کا نیچے دیا گیا ہے۔

پہلے تماثل عنصر 0 کا مقام معلوم کرو جو تیسری صف میں 2 کی سربراہی میں ہے۔ III صف میں افقی طور پر چل کر 0 تک پہنچیں پھر عمودی طور پر 0 سے اوپر IV ویں میں قطار چلیں، کیونکہ 0 تیسری صف اور IV ویں قطار میں ہے۔ IV ویں قطار میں اوپر سب سے کے مقام میں عنصر 3 ہے۔ یہ عنصر 3 کوئی نہیں بلکہ 2 کا معکوس ہے۔ کیونکہ $2 +_5 3 = 0 \pmod 5$ اس طریقے سے، $\mathbb{Z}_5$ کہ ہر ایک عنصر کا معکوس معلوم کرسکتے ہیں۔ غور کریں کہ 0 کا معکوس 0، 1 کا 4، 2 کا 3 اور 4 کا 1 ہے۔

مثال 12.10

بچتوں کا مجموعہ پر عمل $\times_{11}$ کے لئے $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ کے تختی سیٹ $A = \{1,3,4,5,9\}$ تصدیق کریں،

(i) شمولیتی خصوصیت (ii) تبادلی خصوصیت (iii) مربوطی خصوصیت (iv) تماثل کی موجودگی (v) معکوس کی موجودگی۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 12_Discrete Mathematics.indd 234 28-02-2023 15:38:11

حل

$\times_{11}$ عمل کے لئے جدول ذیل میں دیا گیا ہے۔

	1	3	4	5	9
1	1	3	4	5	9
3	3	9	1	4	5
4	4	1	5	9	3
5	5	4	9	3	1
9	9	5	3	1	4

جدول 12.3

پہلی مثال میں استعمال کئے گئے طریقے کو اس میں بھی استعمال کریں۔ A پر $\times_{11}$ کی خصوصیات کی تصدیق کا مختصر خلاصہ ذیل میں دیا گیا ہے۔

(i) چونکہ ہر خانے میں A کا ٹھیک ایک عنصر موجود ہے۔ $\times_{11}$ A پر ایک **بائنری عمل** ہے۔

(ii) داؤں وتر کے لحاظ سے اندراجات متناسب ہیں۔ لہٰذا، $\times_{11}$ **متبالی خاصیت** رکھتا ہے۔

(iii) ہمیشہ کی طرح، **متبادلتی خصوصیت** صحیح ہے۔

(iv) عنصر 1 کی سربراہی میں صف اور قطار کے تمام اندراجات یکساں ہیں۔اس لئے 1 منفرد **عنصر** ہے۔

(v) کیونکہ منفرد 1 موجود ہے ہر صف اور ہر قطار میں، **معکوس کی موجودگی** $\times_{11}$ کے لئے یقینی ہے۔ 1 کا معکوس 1 ہے۔ 3 کا 4، 4 کا 3، 5 کا 9 اور 9 کا 5 ہے۔

مشق 12.1

1. معلوم کرو کہ $*$ نیچے دیئے گئے مجموعوں پر ایک بائنری عمل ہے۔

(i) $\mathbb{R}$ پر $a*b=a.|b|$ (ii) $A=\{1,2,3,4,5\}$ پر $a*b=\min(a,b)$

(iii) $(a*b)=a\sqrt{b}$ $\mathbb{R}$ پر بائنری ہے

2. $\mathbb{Z}$ پر $*$ کی تعریف $\forall m,n\in\mathbb{Z}:(m*n)=m^n+n^m$. کیا $*$ $\mathbb{Z}$ پر بائنری ہے؟

3. $\mathbb{R}$ پر $*$ کی تعریف فرض کرو کہ $(a*b)=a+b+ab-7$ ہے۔کیا $*$ ، $\mathbb{R}$ پر بائنری ہے؟ اگر ہے تو $3*\left(\frac{-7}{15}\right)$ معلوم کرو۔

4. فرض کرو $A=\{a+\sqrt{5}b:a,b\in\mathbb{Z}\}$. تصدیق کرو A پر حسب معمول ضرب بائنری عمل ہے۔

5. (i) $*$ عمل کی $\mathbb{Q}$ پر تعریف ذیل میں دی گئی ہے۔ $a*b=\left(\frac{a+b}{2}\right);\ a,b\in\mathbb{Q}$ شمولتی مربوطی اور متبادلی خصوصیات $\mathbb{Q}$ پر $*$، مطمئن کرتا ہے۔جانچ کریں؟

(ii) $*$ عمل کی $\mathbb{Q}$ پر تعریف ذیل میں دی گئی ہے۔ $a*b=\left(\frac{a+b}{2}\right);\ a,b\in\mathbb{Q}$، $\mathbb{Q}$ پر $*$ عمل کے لئے منفرد کی موجودگی اور معکوس کی موجودگی کی جانچ کریں؟

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 12_Discrete Mathematics.indd 235 28-02-2023 15:38:14

6. ذیل کے جدول کو بھرتی کرو تاکہ $A=\{a,b,c\}$ پر $*$ بائنری عمل متبادلی ہو۔

$*$	a	b	c
a	b		
b	c	b	a
c	a		c

7. ذیل کے جدول سے سیٹ $A=\{a,b,c,d\}$ پر $*$ بائنری عمل کی وضاحت پر غور کریں۔

$*$	a	b	c	d
a	a	c	b	d
b	d	a	b	c
c	c	d	a	a
d	d	b	a	c

کیا یہ متبادلی اور ہے یا مربوطی ہے ؟

8. فرض کرو، $A=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&0&1\end{pmatrix}$، $B=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}$، $C=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}$ یکساں قسم کے کوئی تین بولین میٹرکس ہوں تو معلوم کرو۔ (i) $A\vee B$ (ii) $A\wedge B$ (iii) $(A\vee B)\wedge C$ (vi) $(A\wedge B)\vee C$

9. (i) فرض کرو کہ $M=\left\{\begin{pmatrix}x&x\\x&x\end{pmatrix}:x\in R-\{0\}\right\}$ اور فرض کرو $*$ میٹرکس کا ضرب ہے۔ جانچ کریں کے کیا M، $*$ کے اندر بند ہے۔ اگر اس طرح ہو تو M پر $*$ سے مطمئن متبادلی اور مربوطی خصوصیات کی جانچ کریں۔

(ii) فرض کرو کہ $M=\left\{\begin{pmatrix}x&x\\x&x\end{pmatrix}:x\in R-\{0\}\right\}$ اور فرض کرو $*$ میٹرکس کا ضرب ہے طے کریں کہ کیا M، $*$ کے اندر بند ہے۔ M پر $*$ عمل کے لئے منفرد کی موجودگی اور معکوس کی موجودگی دریافت کریں۔

10. (i) فرض کرو کہ A، $\mathbb{Q}\setminus\{1\}$ ہے۔ $*$ پر A کی وضاحت $x*y=x+y-xy$ سے کریں، کیا A پر $*$ بائنری ہے؟ اگر ہو، تو A پر $*$ سے مطمئن ہونے والے متبادلی اور مربوطی خصوصیات کی جانچ کریں۔

(ii) فرض کرو کہ A، $\mathbb{Q}\setminus\{1\}$ ہے۔ A پر $*$ کی وضاحت $x*y=x+y-xy$ سے کریں، کیا A پر $*$ بائنری ہے؟ اگر ہو، تو A پر $*$ عمل کے لئے منفرد کی موجودگی اور معکوس کی موجودگی دریافت کریں۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 12_Discrete Mathematics.indd 236 28-02-2023 15:38:16

12.3 ریاضی منطق (Mathematical Logic)


جارج بولے
(1815-1864)

جارج بولے خود پڑھے ہوئے انگریزی ریاضی دان، فلسفی اور منطقی تھے۔ **بولین الجبراء** میں انکے نتائج بائنری اعداد پر مختلف شعبوں میں اہم کردار ، خاص طورپر کمپیوٹر اپلیکیشن میں ہوا۔ انھوں نے نشانی منطق تصور کا تعارف کیا اور منطقی ریاضی کی تیزی سے ترقی میں بہت ان کے نتائج بہت مدد گار ہوئے۔

معروف یونانی فلاسفر ارسطو [Aristotle (384-322BC(BCE))] نے منطق پر پہلی کتاب لکھی ۔ جرمن فلسفی اور ریاضی دان گاٹ فریڈ لیبنیتز (Gottfried Leibnitz) جنہوں نے سترویں صدی میں منطق میں علامتوں کا استعمال کرنے کا نظریہ تیار کیا بعد میں جارج بولے اور آگسٹس ڈی مورگن 19 ویں صدی میں پر وان چڑھایا۔ جارج بولے نے حقیقت کو تشکیل دی کہ منطق ریاضی سے بہت تعلق رکھتا ہے۔جب منطق، علامتیں اور الجبراء کو ایک ساتھ ملایا جائے ۔ 19 ویں صدی کے آخر اور 20 ویں صدی کے اوّل میں ریاضی منطق پر وان چڑھا۔

1930 میں محققین نے دیکھا (مرنے کے بستر پر نیومن کا قول تھا: 0 اور 1 دنیا پر حکمرانی کریں گے) کہ بائنری اعداد 0 اور 1 بجلی کے سرکیوٹس کا تجزیہ کرنے کے لئے استعمال کئے جاتے ہیں اور اس طرح الیکٹرانک کمپیوٹر ڈیزائن کرنے کے لئے بھی استعمال کیا جاتا ہے۔ آج ڈیجیٹل کمپیوٹر اور الیکٹرانک سرکیوٹس بائنری ارتھمیٹک کو نافذ کرنے کے لئے ڈیزائن کئے جاتے ہیں۔ ہم زبان کی طرح اور استخراجی نظام ریاضی اور کمپیوٹر سائنسکا مطالعہ ریاضی منطق سے کرتے ہیں۔

عام طورپر منطق درست دلیل کا مطالعہ ہے لیکن ریاضی منطق ہمیں علم کو مختصر ریاضی طریقے میں نمائندگی کی اجازت دیتا ہے اور صحیح اصولوں کے استعمال سے درست نتیجے قائم کرنے کی اجازت دیتا ہے۔ یہ کمپیوٹر سائنس کے لئے قوتی آلہ مانا جاتا ہے کیونکہ یہ خصوصاً پروگراموں کی درستگی کی تصدیق میں استعمال ہوتا ہے۔

12.3.1 بیان اوراس کی حقیقی قیمت (Statement and its truth value)

ریاضی منطق کا آسان ترین حصہ **تجویزی منطق (Propositional Logic)** ہے، بیانات اور تجویزات اس کے اہم ترین عمارتی سہارے ہیں۔عام طورپر مواصلات کو زبان کے استعمال کی ضرورت ہوتی ہے۔ جس کے ذریعہ ہم ہمارے تجربہ فراہم کرسکتے ہیں۔ جیسا کہ،

PY1CA

(1) اعلانیہ (قطعی قسم)
(2) لازمی (ایک حکم یا درخواست قسم)
(3) عجیب و غریب (جذبات ، جوش وخروش کی قسم)
(4) سوالیہ (سوال کے قسم)
(5) کھلا قسم

تعریف 12.7

کسی بھی **اعلانیہ جملہ** کو بیان یا تجویز کہتے ہیں۔ جو یا تو **صحیح** ہو یا **غلط** ہو۔مگر دونوں نہیں کوئی بھی لازمی جملہ جیسا کہ عجائب ، حکم اور کوئی بھی سوالیہ **جملہ تجویز** نہیں ہوسکتا۔

بیان کی **سچی قیمت** کا تعلق اس **خاص بیان** کی سچائی اور جھوٹ سے ہے۔

سچ بیان کا **سچ** اس کی **سچ قیمت** ہے، اور اُسے T یا 1 کے ذریعہ ظاہر کیا جاتا ہے۔ اور جھوٹے جملے کی حقیقی قیمت جھوٹ ہے۔ اور اسے F یا 0 کے ذریعہ ظاہر کیا جاتا ہے۔

ایک **کھلا جملہ** وہ ہے۔ جس کی سچائی شرائط کے مطابق مختلف ہوسکتی ہے۔ جسے جملے میں بیان نہیں کیا جاسکتا۔ مثال کے طورپر (i) $x \times 7 = 35$ ایک کھلا جملہ ہے۔ جس کی حقیقی قدر x کی قدر پر منحصر ہے۔ یعنی اگر $x = 5$ ہوتو یہ سچ ہے اور اگر $x \neq 5$ ہوتو یہ غلط ہے۔
(ii) وہ برا آدمی ہے یہ ایک کھلا جملہ ہے۔ رائے ایک فرد سے دوسرے فرد کی مختلف ہوسکتی ہے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 12_Discrete Mathematics.indd 237 28-02-2023 15:38:17

مثال 12.11

مندرجہ ذیل جملوں میں درست بیان کی شناخت کریں۔

حل

(1) مونٹ ایورسٹ دنیا کا سب سے اونچا پہاڑ ہے۔

(2) $3+4=8$

(3) $7+5>10$

(4) وہ کتاب مجھے دو۔

(5) $(10-x)=7$

(6) کیا خوبصورت پھول ہے یہ !

(7) آپ کہاں جارہے ہیں؟

(8) آپ کو کامیابی مبارک ہو۔

(9) یہ آخر کی پہلے سے شروعات ہے۔

جملے (1) اور (3) حقیقی قیمت T ہے اور (2) کے لئے F لہٰذا یہ بیانات ہیں۔جملہ (5) صحیح ہے جب $x=3$ ہو، اور غلط ہے جب $x\neq 3$ ہو۔ لہٰذا یہ صحیح یا غلط ہو گا مگر دونوں نہیں اس لئے یہ بھی بیان ہے۔

جملے (4)، (6)، (7)، (8) بیانات نہیں ہیں۔ کیونکہ (4) حکم، (6) عجیب، (7) سوالیہ اور (8) یہ جملہ کسی دوسروں کا خواہش اظہار ہے۔ (9) متناقض ہے۔

12.3.2 مرکب بیانات منطقی رابطے اور حقیقی جدولیں (Compound Statements, Logical Connectives, and Truth Tables)

تعریف 12.8 (آسان اور مرکب بیان) (Simple and Compound Statements)

وہ جملہ جس کو دو یا دو سے زیادہ بیان میں پھر سے تقسیم نہیں کرسکتے۔ **جوہری بیان** یا **آسان بیان** کہلاتے ہیں۔ دو یا دو سے زیادہ آسان جملوں کو ملا کر بنایا جانے والا جملہ **مرکب بیان** کہلاتا ہے۔ یا **سالماتی بیان** کہلاتا ہے۔لہٰذا ہمیں یہ معلوم ہوا کہ جملہ یا تو آسان یا مرکب ہو گا۔

آسان بیان کی مثال

مثال 12.11 میں جملے (1)، (2) اور (3) آسان بیان ہیں۔

مرکب بیانات کی مثال

فرض کرو کہ جملہ "1 مفرد عدد نہیں ہے۔ اور اوٹی کیرلا میں واقع ہے"

نوٹ کرو کہ دیا گیا جملہ دو آسان جملوں کا مجموعہ ہے:

p : 1 مفرد عدد نہیں ہے۔

q : اوٹی کیرلا میں واقع ہے۔

لہٰذا یہ آسان جملہ نہیں ہے۔ اور یہ مرکب جملہ ہے۔

اوپر دئے گئے بحث کے مطابق کوئی آسان بیان T یا F قیمت لے سکتا ہے۔لہٰذا اسے متغیر کی طرح سلوک کیا جاسکتا ہے۔ اور اس متغیر کو **بیانی متغیر** یا **تجویزی متغیر** کہتے ہیں۔ تجویزی متغیر کو عام طور پر $p, q, r \ldots$ سے ظاہر کرسکتے ہیں۔

تعریف 12.9 منطقی رابطے (Logical Connectives)

دو یا دوسے زیادہ جملوں کو مربوط کرنے کے لئے ہم جو الفاظ یا لفظوں کا مجموعہ جیسے "اور" "یا" "اگر-پھر" "اگر اور صرف اگر" اور "نہیں" اس صورت میں استعمال کرتے ہیں۔ان مربوط لفظوں کو **منطقی رابطے** کہتے ہیں۔

آسان جملے سے مرکب جملے مرتب کرنے کے لئے ہم چیز مربوط استعمال کرتے ہیں چند بنیادی منطقی رابطے جو **نفی** (**negation (not)**) **جوڑ (اور)** (**conjunction (and)**) اور **علیحدگی (یا)** (**disjunction(or)**)

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 12_Discrete Mathematics.indd 238 28-02-2023 15:38:18

تعریف 12.10

ایک یا ایک سے زیادہ جملوں کو چند منطقی رابطوں کے ذریعے ملاکر بنایا جانے والا اظہار **ضابطہ بیان** کہلاتا ہے۔

تعریف 12.11 (حقیقی جدول) (Truth Table)

جدول جو سادے بیانات کی حقیقی قیمتیں اور مرکب بیانات کی حقیقی قیمتوں کے درمیانی رابطہ کو ظاہر کرتا ہے اور ان سادے بیانات کے استعمال سے تشکیل پاتا ہے **حقیقی جدول** کہلاتا ہے۔

تعریف 12.12

(i) فرض کرو کہ p ایک آسان جملہ ہے۔ p کا **نفی** وہ بیان ہے جس کی حقیقی قیمت اس p کے برعکس ہوگی۔ اور اس کو $\neg p$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس کو p کا نفی پڑھیں ۔$\neg p$ کی حقیقی قیمت T ہے۔ اگر p کی F ہو، ورنہ یہ F ہے۔

(ii) فرض کرو کہ p اور q دو آسان بیانات ہیں اس کو **مربوط** کرکے یعنی p اور q کو ملاکر بنائے جانے والے مربوط جس کو $p \wedge q$ سے اظہار کیا جاتا ہے۔ اس کو ’p مربوط q‘ پڑھیں یا ’p ہیٹ q‘ پڑھیں۔ $p \wedge q$ کی حقیقی قیمت T ہے۔ جب بھی p اور q دونوں T ہوں تو T ورنہ F ہوگا۔

(iii) متغیر بیان وہ مرکب بیان ہے دو آسان بیانوں کو ’یا‘ لفظ جوڑ کر بنایا جائے یعنی p اور q کو یالفظ جوڑ کر بنائیں اس کو $p \vee q$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔اور اس کو یوں پڑھیں ’p علحیدہ q‘’p کپ q‘ $p \vee q$ کی حقیقی قیمت F ہے۔ جب بھی p اور q دونوں F ہوں ورنہ T ہوگا۔

منطقی مربوط اور اس کے حقیقی جدول (Logical Connectives and their Truth Tables)

(1) نفی کے لئے حقیقی جدول (نفی [¬]) (Truth Table for NOT [¬] (Negation))

$\neg p$ کے لئے حقیقی جدول

p	$\neg p$
T	F
F	T

جدول 12.4

(2) اور کے لئے حقیقی جدول (جوڑ [∧]) (Truth table for AND [∧] (Conjunction))

$p \wedge q$ کا حقیقی جدول

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

جدول 12.5

یا کے لئے حقیقی جدول (علیحدگی [∨]) (The truth tables for OR [∨] (Disjunction))

$p \vee q$ کا حقیقی جدول

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

جدول 12.6

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 12_Discrete Mathematics.indd 239 28-02-2023 15:38:19

مثال 12.12

$\neg p$، $p \wedge q$، $p \vee q$ اور $q \vee \neg p$ کے تعلق بیانات لکھیں ۔ جہاں p 'سردی ہے' اور q 'بارش ہورہی ہے'

حل

(1) $\neg p$: سردی نہیں ہے۔

(2) $p \wedge q$: سردی اور بارش ہورہی ہے۔

(3) $p \vee q$: سردی یا بارش ہورہی ہے۔

(4) $q \vee \neg p$: بارش ہورہی ہے یا سردی نہیں ہے۔

غور کریں کہ $\neg p$ ضابطہ بیان میں صرف ایک متغیر p ہے۔ اس کے حقیقی جدول میں $2 = (2^1)$ صفیں ہیں۔ بقیہ $p \wedge q$ اور $p \vee q$ ہر ایک ضابطے بیان میں دو متغیر p اور q ہیں۔ دونوں کے حقیقی جدول میں $4 = (2^2)$ صفیں ہیں۔ عام طورپر، ہم یہ جان سکتے ہیں کہ اگر ضابطے بیان میں n متغیر ہیں، تو اس کے حقیقی جدول میں 2^n صفیں ہونگے۔

مثال 12.13

مندرجہ ذیل ضابطے بیان کے لئے کتنے صفوں کی ضرورت ہوگی؟

(i) $p \vee \neg t \wedge (p \vee \neg s)$ (ii) $((p \wedge q) \vee (\neg r \vee \neg s)) \wedge (\neg t \wedge v)$

حل

(i) $(p \vee \neg t) \wedge (p \vee \neg s)$ کے 3 متغیر ہیں جو p ، s اور t ہیں۔ لہٰذا حقیقی جدول میں $2^3 = 8$ صفیں ہونگی۔

(ii) $((p \wedge q) \vee (\neg r \vee \neg s)) \wedge (\neg t \wedge v)$ میں 6 متغیر ہیں جو p، q، r، s، t، اور v ہیں۔ لہٰذا حقیقی جدول میں $2^6 = 64$ صفیں ہونگی۔

شرطیہ بیان (Conditional Statement)

تعریف 12.13

شرطیہ بیان کسی دو بیانوں p اور q کا وہ بیان ہے "اگر p تو q " اور اس کو $p \to q$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔یہاں p کو **مفروضے** یا **مقدم** اور q کو **نتیجہ** یا **اختتام** کہتے ہیں۔ $p \to q$ غلط ہوگا صرف اگر p صحیح اور q غلط ہوگا۔ ورنہ یہ صحیح ہوگا۔

$p \to q$ کے لئے حقیقی جدول

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

جدول 12.7

مثال 12.14

فرض کرو کہ $p \to q$:اگر آج پیر ہوتو، $4 + 4 = 8$

یہاں جزوبیانات p اور q دئے گئے جزو ہیں۔

p : آج پیر ہے؛ $q : 4 + 4 = 8$

$p \to q$ کی حقیقی قیمت T ہے۔ چونکہ q کا اختتام T ہے۔

اور یہ بھی غور کریں کہ $p \to q$ میں p اور q کو انگریزی معنی کے لحاظ سے برتاؤ نہ کریں اور یہ بھی ضروری نہیں کہ p اور q کا کوئی تعلق ہو۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 12_Discrete Mathematics.indd 240 28-02-2023 15:38:21

نتائج (Consequences)

شرطیہ بیان $p \to q$ سے تین اور شرطیہ بیانات اخذ کئے جاتے ہیں وہ نیچے دیئے گئے ہیں۔

(i) متضاد بیان $q \to p$ (Converse statement)

(ii) برعکس بیان $\neg p \to \neg q$ (Inverse statement)

(iii) مثبت متضاد بیان $\neg q \to \neg p$ (Contrapositive statement)

مثال 12.15

نیچے دئے گئے دو بیانات p اور q کے لئے (i) شرطیہ بیان (ii) متضاد بیان (iii) برعکس بیان اور (iv) مثبت تضاد بیان لکھیں۔

p : مفرد اعداد لامحدود ہیں۔ q : اوٹی کیرلا میں واقع ہے۔

حل

p اور q کے لئے شرطیہ بیانوں کی چار قسمیں بالترتیب نیچے دیئے گئے ہیں۔

(i) $p \to q$:(شرطیہ بیان) "اگر مفرد اعداد لامحدود ہیں تو اوٹی کیرلا میں واقع ہے"۔

(ii) $q \to p$:(متضادبیان) "اگر اوٹی کیرلا میں واقع ہے تو مفرد اعداد لامحدود ہیں"۔

(iii) $\neg p \to \neg q$: (برعکس بیان) اگر مفرد اعداد لامحدود نہیں ہیں تو اوٹی کیرلا میں واقع نہیں ہے۔

(iv) $\neg q \to \neg p$:(مثبت متضاد بیان) اگر اوٹی کیرلا میں واقع نہیں ہے تو مفرد اعداد لامحدود نہیں ہیں۔

دہری شرطیہ بیان (Bi-conditional Statement)

تعریف 12.14

دوبیانات p اور q کے لئے دہری شرطیہ بیان وہ ہے جو "p صرف اور صرف اگر q" ہو اور اس کو $p \leftrightarrow q$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس کی حقیقی قیمت T جب p اور q دونوں کی یکساں حقیقی قیمت ہو۔ورنہ یہ غلط ہوگا۔

$p \leftrightarrow q$ کے لئے حقیقی جدول

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

جدول 12.8

مخصوص یا [$\bar{\vee}$] (Exclusive OR (EOR))

تعریف 12.15

فرض کرو کہ کوئی دوبیانات میں p اور q تو p EOR q یہ ایسا مرکب بیان ہے جس کی حقیقی قیمت کا فیصلہ یا تو p یا q سے ہوسکتا ہے۔ مگر دونوں کی قیمتوں سے نہیں اس کو $p \bar{\vee} q$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ $p \bar{\vee} q$ کی حقیقی قیمت T ہے۔جب بھی p یا q، T ہوورنہ یہ F ہوگا۔ $p \bar{\vee} q$ کا حقیقی جدول نیچے دیا گیا ہے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 12_Discrete Mathematics.indd 241 28-02-2023 15:38:22

$p \bar{\vee} q$ کے لئے حقیقی جدول

p	q	$p \bar{\vee} q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

جدول 12.9

مثال 12.16

$(p \bar{\vee} q) \wedge (p \bar{\vee} \neg q)$ کا حقیقی جدول تیار کرو۔

p	q	$\neg q$	r : $(p \bar{\vee} q)$	s: $(p \bar{\vee} \neg q)$	$r \wedge s$
T	T	F	F	T	F
T	F	T	T	F	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	F	T	F

جدول 12.10

اس نتیجہ کو حقیقی جدول کے بجائے بھی ثابت کرسکتے ہیں۔اس کا ثبوت منطقی مساوات کے مطالعہ کے بعد فراہم کیا جاسکتا ہے۔

12.3.3 ٹاٹولوجی ،تضاد اور اتفاق (Tautology, Contradiction, and Contingency)

تعریف 12.16

ایک بیان **ٹاٹولوجی** کہلاتا ہے۔اگر اس کی حقیقی قیمت ہمیشہ T ہو چاہے اس کے جزوبیانوں کی حقیقی قیمتیں بلالحاظ T ہوں یا نہ ہوں۔ اس کو $\mathbb{T}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

تعریف 12.17

ایک بیان **تضاد** کہلاتا ہے۔ اگر اس کی حقیقی قیمت ہمیشہ F ہو چاہے اس کے جزوبیانوں کی حقیقی قیمتیں بلا لحاظ F ہوں یا نہ ہوں، اس کو $\mathbb{F}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

تعریف 12.18

ایک بیان جو نہ تو ٹاٹولوجی ہو اور نہ تضاد ہو **اتفاق** کہلاتا ہے۔

مشاہدات

1. ٹاٹولوجی کے لئے ضابطہ، بیان کے مقابل قطار میں تمام داخلے T ہونگے۔
2. تضاد کے لئے ضابطہ، بیان کے مقابل قطار میں تمام داخلے F ہونگے۔
3. ٹاٹولوجی کا نفی تضاد ہے اور تضاد کا نفی ٹاٹولوجی ہے۔
4. ایک بیان اور اس کے نفی کا متغیر ٹاٹولوجی ہے۔ ایک بیان اور اس کے نفی کا مربوط تضاد ہے۔ یعنی $p \vee \neg p$ **ٹاٹولوجی** ہے۔اور $p \wedge \neg p$ **تضاد** ہے ۔ حقیقی جدولوں کے ذریعہ جو نیچے دئے گئے ہیں آسانی سے دیکھا جاسکتا ہے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 12_Discrete Mathematics.indd 242 28-02-2023 15:38:23

ٹاٹولوجی کے لئے مثال

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
T	F	T
F	T	T

جدول 12.11

$p \vee \neg p$ کی آخری قطار میں صرف T ہے۔ $p \vee \neg p$ ٹاٹولوجی ہے۔

تِضاد کے لئے مثال

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
T	F	F
F	T	F

جدول 12.12

چونکہ آخری قطار میں صرف F ہے۔ $p \wedge \neg p$ تضاد ہے۔

غور کیجئے (Note)

جدول 12.10 کے آخری قطار کا تمام داخلے F ہیں۔ اور لہٰذا، $(p \bar{\vee} q) \wedge (p \bar{\vee} \neg q)$ ایک تضاد ہے۔

اتفاق کے لئے مثال

p	q	$p \leftrightarrow q$	$\neg q$	$p \rightarrow \neg q$	$\neg(p \rightarrow \neg q)$	$(p \leftrightarrow q) \wedge \neg(p \rightarrow \neg q)$
T	T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	T	F	F
F	T	F	F	T	F	F
F	F	T	T	T	F	F

جدول 12.13

اوپر دئے گئے جدول میں، آخری قطار کے تمام داخلے T اور F کا جموع ہیں ۔ دیا گیا جملہ نہ ہی ٹاٹولوجی اور نہ ہی تضاد ہے، یہ اتفاق ہے۔

12.3.4 تنویت (دہراپن) (Duality)

تعریف 12.19

ضابطبیان دہراپن $\vee$ سے $\wedge$، $\wedge$ سے $\vee$، T سے F اور F سے T میں تبدیل کرنے سے بنتا ہے۔ **ٹاٹولوجی** کے $\mathbb{T}$ کو **تضاد** کے $\mathbb{F}$ سے، اور $\mathbb{F}$ کو $\mathbb{T}$ میں تبدیل کرنے سے دہراپن حاصل کرسکتے ہیں۔

ریمارک (Remark)

(1) دہرے ڈھونڈنے پر $\neg$ نشان تبدیل نہیں ہوتا ۔

(2) دہرے کا دوہرا خود بیان ہوتا ہے۔

(3) مخصوص بیان $\mathbb{T}$ (ٹاٹولوجی) اور $\mathbb{F}$ (تضاد) ایک دوسرے کے لئے دہرے ہیں۔

(4) T سے F تبدیل ہوگا اور اسی طرح برعکس۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 12_Discrete Mathematics.indd 243 28-02-2023 15:38:24

دہرے پن کا اصول (Principle of Duality)

اگر مرکب بیان S_1 کے پاس صرف $\neg$، $\wedge$ اور $\vee$ ہیں۔اور بیان S_2، S_1 جو S_1 میں $\wedge$ کو $\vee$ اور $\vee$ کو $\wedge$ تبدیل کرکے طلوع ہوتا ہے تو S_1 ایک ٹاٹولوجی ہے، اگر صرف اور صرف S_2 تضاد ہے۔

مثال کے طور پر

(i) $(p \wedge q) \vee (r \vee s) \wedge \mathbb{T}$ کا دہرا $(p \vee q) \wedge (r \wedge s) \vee \mathbb{F}$ ہے۔

(ii) $p \wedge [\neg q \vee (p \wedge q) \vee \neg r]$ کا دہرا $p \vee [\neg q \wedge (p \vee q) \wedge \neg r]$ ہے۔

12.3.5 منطقی معادل (Logical Equivalence)

تعریف 12.20

کوئی دو مرکب بیانات A اور B کو **منطقی برابری** کہا جاتا ہے ۔ یا صرف برابری کہا جاتا ہے، اگر حقیقی جدول میں موجود A اور B کے مقابل قطاریں **یکساں** حقیقی قیمتیں رکھتے ہیں۔ **منطقی معادل** کے بیانات A اور B کو اس طرح ظاہر کیا جاتا ہے $A \equiv B$ یا $A \Leftrightarrow B$

تعریف سے یہ صاف ظاہر ہوتا ہے۔

اگر A اور B منطقی معادل ہیں، تو $A \Leftrightarrow B$ ایک **ٹاٹولوجی** ہے۔

معادل کے چند کلیے (Some Laws of Equivalence)

1. آئیڈم پوٹنٹ کلیے (Idempotent Laws)

(i) $p \vee p \equiv p$ (ii) $p \wedge p \equiv p$.

ثبوت

p	p	$p \vee p$	$p \wedge p$
T	T	T	T
F	F	F	F

جدول 12.14

اوپر کے حقیقی جدول میں دونوں p کے لئے، $p \vee p$ اور $p \wedge p$ یکساں حقیقی قیمتیں رکھتے ہیں ۔ لہٰذا $p \vee p \equiv p$ اور $p \wedge p \equiv p$

2. متبادلی کلیے (Commutative Laws)

(i) $p \vee q \equiv q \vee p$ (ii) $p \wedge q \equiv q \wedge p$.

ثبوت (i)

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	F

جدول 12.15

$p \vee q$ اور $q \vee p$ کی مقابل قطاریں یکساں ہیں۔ لہٰذا، $p \vee q \equiv q \vee p$

اسی طرح (ii) $p \wedge q \equiv q \wedge p$ کو ثابت کرسکتے ہیں۔

3. مربوطی کلیے (Associative Laws)

(i) $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ (ii) $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$.

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 12_Discrete Mathematics.indd 244 28-02-2023 15:38:27

ثبوت

مربوطی کلیہ ثابت کرنے کے لئے ضروری حقیقی جدول ذیل میں دیا گیا ہے۔

p	q	r	$p \vee q$	$q \vee r$	$(p \vee q) \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T
T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	F	F	F

جدول 12.16

$(p \vee q) \vee r$ اور $p \vee (q \vee r)$ کی مقابل قطاریں یکساں ہیں۔

لہٰذا، $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$

اسی طرح (ii) $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ کو ثابت کیا جاسکتا ہے۔

4. تقسیمی کلیے (Distributive Laws)

(i) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (ii) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

ثبوت (i)

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	F
F	F	T	F	F	F	T	F
F	F	F	F	F	F	F	F

جدول 12.17

$p \vee (q \wedge r)$ اور $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ کی مقابل قطاریں یکساں ہیں۔ لہٰذا، $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ اسی طرح (ii) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ کو ثابت کیا جاسکتا ہے۔

5. منفردتی کلیے (Identity Laws)

(i) $p \vee \mathbb{F} \equiv p$ اور $p \vee \mathbb{T} \equiv \mathbb{T}$ (ii) $p \wedge \mathbb{T} \equiv p$ اور $p \wedge \mathbb{F} \equiv \mathbb{F}$

p	$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$	$p \vee \mathbb{T}$	$p \vee \mathbb{F}$
T	T	F	T	T
F	T	F	T	F

جدول 12.18

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 12_Discrete Mathematics.indd 245 28-02-2023 15:38:30

(i) $p \vee \mathbb{T}$ اور $\mathbb{T}$ کے مقابل قطاروں کے داخلے یکساں ہیں۔ اور لہٰذا یہ معادل ہیں $p \vee \mathbb{F}$ اور p کے مقابل قطاروں کے داخلے یکساں ہیں۔اور لہٰذا یہ معادل ہیں۔

دونوں طرف سے (دہری)

(ii) $p \wedge \mathbb{T} \equiv p$ اور $p \wedge \mathbb{F} \equiv \mathbb{F}$ کو ثابت کیا جاسکتا ہے۔

6. تکمیلی کلیے (Complement Laws)

(i) $p \vee \neg p \equiv \mathbb{T}$ اور $p \wedge \neg p \equiv \mathbb{F}$ (ii) $\neg\mathbb{T} \equiv \mathbb{F}$ اور $\neg\mathbb{F} \equiv \mathbb{T}$

ثبوت

p	$\neg p$	$\mathbb{T}$	$\neg\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$	$\neg\mathbb{F}$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
T	F	T	F	F	T	T	F
F	T	T	F	F	T	T	F

جدول 12.19

(i) $p \vee \neg p$ اور $\mathbb{T}$ کے مقابل قطاروں کے داخلے یکساں ہیں اور لہٰذا یہ معادل ہیں۔ $p \wedge \neg p$ اور $\mathbb{F}$ کے مقابل قطاروں کے داخلے یکساں ہیں اور لہٰذا یہ معادل ہیں۔

(ii) $\neg\mathbb{T}$ اور $\mathbb{F}$ کے مقابل قطاروں کے داخلے یکساں ہیں اور لہٰذا یہ معادل ہیں۔ $\neg\mathbb{F}$ اور $\mathbb{T}$ کے مقابل قطاروں کے داخلے یکساں ہیں اور لہٰذا یہ معادل ہیں۔

7. چڑھاؤ کلیے یا دوہرے منفی کلیے (Involution Law or Double Negation Law)

$$\neg(\neg p) \equiv p$$

ثبوت

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
T	F	T
F	T	F

جدول 12.20

$\neg(\neg p)$ اور p کے مقابل قطاروں کے داخلے یکساں ہیں۔اور لہٰذا یہ معادل ہیں۔

8. ڈی مارگن کے کلیے (de Morgan's Laws)

(i) $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ (ii) $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

ثبوت (i)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	F	F	T	T
F	F	T	T	F	T	T

جدول 12.21

$\neg(p \wedge q)$ اور $\neg p \vee \neg q$ کے مقابل قطاروں کے داخلے یکساں ہیں۔اور لہٰذا یہ معادل ہیں۔لہٰذا $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

دہرے پن سے (ii) $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ کو ثابت کیا جاسکتا ہے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 12_Discrete Mathematics.indd 246 28-02-2023 15:38:33

9. جذب کلیے (Absorption Laws)

(i) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ (ii) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \vee (p \wedge q)$	$p \wedge (p \vee q)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T
F	T	F	T	F	F
F	F	F	F	F	F

جدول 12.22

(i) $p \vee (p \wedge q)$ اور p کے مقابل قطاروں کے داخلے یکساں ہیں۔اورلہٰذا یہ معادل ہیں۔

(ii) $p \wedge (p \vee q)$ اور p کے مقابل قطاروں کے داخلے یکساں ہیں۔اورلہٰذا یہ معادل ہیں۔

مثال 12.17

معادلی خاصیت قائم کریں: $p \to q \equiv \neg p \vee q$

حل

p	q	$\neg p$	$p \to q$	$\neg p \vee q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

جدول 12.23

$p \to q$ اور $\neg p \vee q$ کے مقابل قطاروں کے داخلے یکساں ہیں۔اورلہٰذا یہ معادل ہیں۔

مثال 12.18

شرط کے ساتھ دوشرط کو ملانے والی معادلی خاصیت قائم کریں: $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$

حل

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$p \leftrightarrow q$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T

جدول 12.24

$p \leftrightarrow q$ اور $(p \to q) \wedge (q \to p)$ کے مقابل قطاروں کے داخلے یکساں ہیں۔ اورلہٰذا یہ معادل ہیں۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 12_Discrete Mathematics.indd 247 28-02-2023 15:38:35

مثال 12.19

معادل خاصیت کو استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں۔ $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

حل

12.15 اور 12.16 مسالوں کے استعمال سے یہ حاصل کرسکتے ہیں۔

$$p \leftrightarrow q \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \quad \ldots (1)$$

$$\equiv (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \quad \text{(متبادلی کلیہ)} \quad \ldots (2)$$

$$\equiv (\neg p \wedge (p \vee \neg q)) \vee (q \wedge (p \vee \neg q)) \quad \text{(تقسیمی کلیہ)}$$

$$\equiv (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge p) \vee (q \wedge \neg q) \quad \text{(تقسیمی کلیہ)}$$

$$\equiv \mathbb{F} \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge p) \quad \vee \mathbb{F} \; ; \text{(تکمیلی کلیہ)}$$

$$\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge p) \; ; \text{(انفرادیتی کلیہ)}$$

$$\equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \; ; \text{(متبادلی کلیہ)}$$

آخری میں (1) بن جاتا ہے۔ $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

مشق 12.2

1. فرض کرو کہ p : مشتری ایک سیارہ ہے اور q : ہندوستان ایک جزیرہ ہے۔ کوئی دو آسان بیانات ہیں ۔ ذیل کے بیانات کو زبانی جملے میں وضاحت کرتے ہوئے پیش کریں۔

(i) $\neg p$ (ii) $p \wedge \neg q$ (iii) $\neg p \vee q$ (iv) $p \rightarrow \neg q$ (v) $p \leftrightarrow q$

2. بیانی متغیرات p اور q کو استعمال کرتے ہوئے ذیل کے ہر جملوں کو علامتی شکل میں لکھئے ۔

(i) 19 ایک مفرد عدد نہیں ہے اور ایک مثلث کے تمام زاویے یکساں ہیں۔

(ii) 19 ایک مفردعدد ہے یا مثلث کے تمام زاویے یکساں نہیں ہیں۔

(iii) 19 ایک مفرد عدد ہے اور مثلث کے تمام زاویے یکساں ہیں۔

(iv) 19 ایک مفرد عدد نہیں ہے۔

3. ذیل کے ہر ایک بیان کی صحیح قیمت طے کریں ۔

(i) اگر $6+2=5$ ہو، تو دودھ سفید ہے۔

(ii) چین یورپ میں ہے یا $\sqrt{3}$ ایک سالم عدد ہے۔

(iii) یہ صحیح نہیں ہے کہ $5+5=9$ یا زمین ایک سیارہ ہے۔

(iv) 11 ایک مفرد عدد ہے اور مستطیل کے تمام ضلع یکساں ہیں۔

4. ذیل کے جملوں میں سے کونسا تجویز ہے؟

(i) $4+7=12$ (ii) تم کیا کررہے ہو؟ (iii) $3^n \leq 81, n \in \mathbb{N}$

(iv) مورہمارا قومی پرندہ ہے۔ (v) یہ پہاڑ کتنا اونچا ہے۔

5. ذیل کے ہر ایک مفہوم کا برعکس متضاد اور مثبت متضاد لکھئے۔

(i) اگر x اور y اعداد ہیں اس طرح کے $x = y$ ہے پھر $x^2 = y^2$

(ii) اگر چار ضلعی ایک مربع ہے پھروہ ایک مستطیل ہے۔

6. ذیل کے بیانات کے لئے صحیح جدول تصنیف کرو۔

(i) $\neg p \wedge \neg q$ (ii) $\neg(p \wedge \neg q)$ (iii) $(p \vee q) \vee \neg q$ (iv) $(\neg p \rightarrow r) \wedge (p \leftrightarrow q)$

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 12_Discrete Mathematics.indd 248 28-02-2023 15:38:39

7. تصدیق کریں کہ ذیل کی مرکب تجویزیں ٹاٹولوجی یا تضاد یا اتفاق ہیں۔

(i) $(p \wedge q) \wedge \neg(p \vee q)$ (ii) $\big((p \vee q) \wedge \neg p\big) \to q$

(iii) $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \to q)$ (iv) $\big((p \to q) \wedge (q \to r)\big) \to (p \to r)$

8. بتائیے کہ (i) $\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$ (ii) $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

9. ثابت کریں کہ $q \to p \equiv \neg p \to \neg q$

10. بتائیے کہ $p \to q$ اور $q \to p$ معادل نہیں ہیں۔

11. بتائیے کہ $\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$

12. صحیح جدول استعمال کئے بغیر جانچ کریں کہ دیا گیا بیان $p \to (q \to p)$ ایک ٹاٹولوجی ہے۔ یا تضاد ہے۔

13. صحیح جدول استعمال کرتے ہوئے جانچ کریں کہ بیانات $\neg(p \vee q) \vee (\neg p \wedge q)$ اور $\neg p$ منطقی معادل ہے۔

14. صحیح جدول استعمال کرے بغیر ثابت کریں کہ $p \to (q \to r) \equiv (p \wedge q) \to r$

15. صحیح جدول استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں کہ $p \to (\neg q \vee r) \equiv \neg p \vee (\neg q \vee r)$

AXZN2

مشق 12.3

دیے گئے چار حل میں سے صحیح یا سب سے مناسب جواب کا انتخاب کریں۔

1. ایک بائنری عمل مجموعہ S پر ایک تفاعل ہے اس سے

(1) $S \to S$ (2) $(S \times S) \to S$ (3) $S \to (S \times S)$ (4) $(S \times S) \to (S \times S)$

2. تفریق ان میں ایک بائنری عمل نہیں ہے۔

(1) $\mathbb{R}$ (2) $\mathbb{Z}$ (3) $\mathbb{N}$ (4) $\mathbb{Q}$

3. مندرجہ ذیل میں سے کونسا $\mathbb{N}$ پر ایک بائنری عمل ہے؟

(1) تفریق (2) ضرب (3) تقسیم (4) ان میں سے تمام

4. حقیقی اعداد کے مجموعہ $\mathbb{R}$ میں '$*$' کی وضاحت اس طرح ہے۔ ذیل میں سے کونسا $\mathbb{R}$ پر بائنری عمل نہیں ہے؟

(1) $a * b = \min(a \cdot b)$ (2) $a * b = \max(a, b)$

(3) $a * b = a$ (4) $a * b = a^b$

5. $a * b = \dfrac{ab}{7}$ میں عمل $*$ کی وضاحت کس میں بائنری عمل نہیں ہے۔

(1) $\mathbb{Q}^+$ (2) $\mathbb{Z}$ (3) $\mathbb{R}$ (4) $\mathbb{C}$

6. مجموعہ $\mathbb{Q}$ میں وضاحت $a \odot b = a + b + ab$ ہے تو y کی کونسی قیمت کے لئے، $3 \odot (y \odot 5) = 7$؟

(1) $y = \dfrac{2}{3}$ (2) $y = \dfrac{-2}{3}$ (3) $y = \dfrac{-3}{2}$ (4) $y = 4$

7. اگر حقیقی اعداد پر $a * b = \sqrt{a^2 + b^2}$ ہو، تو $*$ ہے۔

(1) متبادلی ہے مربوطی نہیں (2) مربوطی ہے متبادلی نہیں

(3) متبادلی اور مربوطی دونوں ہے (4) متبادلی بھی نہیں اور مربوطی بھی نہیں

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 12_Discrete Mathematics.indd 249 28-02-2023 15:38:44

8. ذیل کے کس بیانات کی صحیح قیمت T ہے؟

(1) $\sin x$ ایک جفت تفاعل ہے

(2) ہر مربع میٹرکس غیر نادر ہے۔

(3) پیچیدہ عدد اور اس کے زوجی کا حاصل ضرب خالص خیالی ہے۔

(4) $\sqrt{5}$ ایک غیر ناطق عدد ہے۔

9. ذیل کے کن بیانات کی صحیح قیمت F ہے؟

(1) چینئی ہندوستان میں ہے یا $\sqrt{2}$ ایک سالم عدد ہے۔

(2) چینئی ہندوستان میں ہے یا $\sqrt{2}$ ایک غیرناطق عدد ہے۔

(3) چینئی چین میں ہے یا $\sqrt{2}$ ایک سالم عدد ہے۔

(4) چینئی چین میں ہے یا $\sqrt{2}$ ایک غیر ناطق عدد ہے۔

10. اگر ایک مرکب بیان تین سادہ بیانات پر مشتمل ہے تو پھر صحیح جدول میں موجود صفوں کی تعداد ۔

(1) 9 (2) 8 (3) 6 (4) 3

11. ذیل میں سے کونسا $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$ بیان کا معکوس ہے؟

(1) $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ (2) $\neg(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$

(3) $(\neg p \vee \neg q) \rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ (4) $(\neg p \wedge \neg q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$

12. ذیل میں سے کونسا بیان $(p \vee q) \rightarrow r$ کا مثبت تضاد ہے؟

(1) $\neg r \rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ (2) $\neg r \rightarrow (p \vee q)$

(3) $r \rightarrow (p \wedge q)$ (4) $p \rightarrow (q \vee r)$

13. $(p \wedge q) \vee \neg q$ کے لئے صحیح جدول نیچے دیا گیا ہے۔

p	q	$(p \wedge q) \vee (\neg q)$
T	T	(a)
T	F	(b)
F	T	(c)
F	F	(d)

ذیل میں کونسا صحیح ہے؟

	(a)	(b)	(c)	(d)
(1)	T	T	T	T
(2)	T	F	T	T
(3)	T	T	F	T
(4)	T	F	F	F

14. $\neg(p \vee \neg q)$ کے صحیح جدول کے آخری قطار میں صحیح قیمت 'F' کے لئے قطعی نتائج کی تعداد۔

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 12_Discrete Mathematics.indd 250 28-02-2023 15:38:47

15. کسی دو تجویزوں p اور q کے لئے، ذیل میں سے کونسا غلط ہے؟

(1) $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ (2) $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

(3) $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \vee \neg q$ (4) $\neg(\neg p) \equiv p$

16.

p	q	$(p \wedge q) \rightarrow \neg p$
T	T	(a)
T	F	(b)
F	T	(c)
F	F	(d)

$(p \wedge q) \rightarrow \neg p$ کی صحیح قیمت کے لئے ذیل میں سے کونسا صحیح ہے؟

	(a)	(b)	(c)	(d)
(1)	T	T	T	T
(2)	F	T	T	T
(3)	F	F	T	T
(4)	T	T	T	F

17. $\neg(p \vee q) \vee [p \vee (p \wedge \neg r)]$ کا دہرا

(1) $\neg(p \wedge q) \wedge [p \vee (p \wedge \neg r)]$ (2) $(p \wedge q) \wedge [p \wedge (p \vee \neg r)]$

(3) $\neg(p \wedge q) \wedge [p \wedge (p \wedge r)]$ (4) $\neg(p \wedge q) \wedge [p \wedge (p \vee \neg r)]$

18. تجویز $p \wedge (\neg p \vee q)$ ہے۔

(1) ایک ٹاٹولوجی (2) ایک تضاد

(3) $p \wedge q$ کو منطقی معادل ہے۔ (4) $p \vee q$ کو منطقی معادل ہے۔

19. ذیل کے ہر ایک بیان کی صحیح قیمت طے کریں۔

(a) $4+2=5$ اور $6+3=9$ (b) $3+2=5$ اور $6+1=7$

(c) $4+5=9$ اور $1+2=4$ (d) $3+2=5$ اور $4+7=11$

	(a)	(b)	(c)	(d)
(1)	F	T	F	T
(2)	T	F	T	F
(3)	T	T	F	F
(4)	F	F	T	T

20. ذیل میں سے کونسا صحیح نہیں ہے۔

(1) ایک نفی بیان کا نفی خود ایک بیان ہے۔

(2) اگر صحیح جدول کے آخری قطار میں صرف T موجود ہے۔تو وہ ٹاٹولوجی ہے۔

(3) اگر صحیح جدول کے آخری قطار میں صرف F موجود ہے تو وہ تضاد ہے۔

(4) اگر p اور q کوئی دو بیانیں ہیں تو $p \leftrightarrow q$ ٹاٹولوجی ہے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 12_Discrete Mathematics.indd 251 28-02-2023 15:38:50

خلاصہ (SUMMARY)

(1) **بائنری عمل:** کوئی غیر معدوم مجموعہ S پر بائنری عمل $*$ ایک اصول ہے جو S میں موجود عناصر a,b کی پر ترتیب وار جوڑیوں (a,b) کو S کے ایک مخصوص عنصر $a*b$ سے جوڑتا ہے۔

(2) **متبادلی خصوصیت:** کوئی بھی بائنری عمل $*$ جو کہ نامعدوم مجموعہ S پر واضح ہے۔ متبادل خصوصیت کو تسلیم کرتا ہے۔ اگر $a*b=b*a \quad \forall a,b\in S$ ہو۔

(3) **مربوطی خصوصیت:** کوئی بھی بائنری عمل $*$ جو کہ معدوم مجموعہ S پر واضح ہے۔ مربوطی خصوصیت کو تسلیم کرتا ہے اگر $a*(b*c)=(a*b)*c \quad \forall a,b,c\in S$ ہو۔

(4) **متماثل کی موجودگی خصوصیت:** ایک عنصر $e\in S$، S کا **متماثل عنصر** ہوگا۔ بائنری عمل $*$ کے اندر اگر تمام $a\in S$ کے لئے $a*e=a$ اور $e*a=a$ ہو۔

(5) **معکوس کی موجودگی خصوصیت:** اگر ایک متماثل عنصر e موجود ہے اور اگر تمام $a\in S$ کے لئے S میں b موجود ہو اس طرح کہ $a*b=e$ اور $b*a=e$ تو $b\in S$، a کا **معکوس عنصر** کہلاتا ہے۔ اس طرح کے معاملوں میں ہم $b=a^{-1}$ لکھتے ہیں۔

(6) **متماثل کی منفردت:** الجبرائی ساخت میں متماثل عنصر (اگر موجود ہو) منفرد ہوگا۔

(7) **معکوس کے منفردت:** الجبرائی ساخت میں معکوس عنصر (اگر موجود ہو) منفرد ہوگا۔

(8) ایک **بولین میٹرکس** حقیقی میٹرکس ہے جس کے اندر اجات یا تو 0 یا 1 ہیں۔

(9) **ماڈولر حسابی:** فرض کریں کہ کوئی سالم عدد n 1 سے بڑا ہے۔ **معین ضروب (modulus)** کہلاتا ہے۔ ہم یہ کہتے ہیں کہ سالم اعداد a اور b (congruent modulo) n ہیں۔ اگر $a-b$، n سے تقسیم پزیر ہے۔ دوسرے الفاظ میں $a\equiv b \pmod n$ کا مطلب $a-b=n\cdot k$ کوئی سالم عدد کے k کے لئے اور b **ادنیٰ غیر منفی سالمی بچت** ہے۔ جب a، n سے تقسیم پذیر ہے۔ $(0\le b\le n-1)$

(10) ریاضی منطق (Mathematical logic) ریاضی علامتوں کے ذریعے دلیلوں کا مطالعہ ہے۔

(11) فرض کرو کہ p ایک آسان جملہ ہے۔ p کا نفی وہ بیان ہے جس کی حقیقی قیمت اس p کے برعکس ہوگی۔ اور اس کو $\neg p$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس کو p کا نفی پڑھیں۔ $\neg p$ کی حقیقی قیمت T ہے۔ اگر p کی F ہو، ورنہ یہ F ہے۔

(12) فرض کرو کہ p اور q دو آسان بیانات ہیں اس کو مربوط کرکے یعنی p اور q کو ملاکر بنائے جانے والے مربوط جس کو $p\wedge q$ سے اظہار کیا جاتا ہے۔ اس کو 'p مربوط q' پڑھیں یا 'p ہیٹ q' پڑھیں۔ $p\wedge q$ کی حقیقی قیمت T ہے۔ جب بھی p اور q دونوں T ہوں تو T ورنہ F ہوگا۔

(13) متغیر بیان وہ مرکب بیان ہے دو آسان بیانوں کو 'یا' لفظ جوڑ کر بنایا جائے یعنی p اور q کو یالفظ جوڑ کر بنائیں اس کو $p\vee q$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔اور اس کو یوں پڑھیں 'p علحیدہ q'' p کپ q' $p\vee q$ کی حقیقی قیمت F ہے۔ جب بھی p اور q دونوں F ہوں ورنہ T ہوگا۔

(14) کوئی دو بیانات p اور q **شرطی بیان (conditional statement)** وہ بیان ہے۔ 'اگر p پھر q' اور اسے $p\to q$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ بیان $p\to q$ کی صحیح قیمت (truth value) F ہے۔ جب کہ q کی صحیح قیمت F اور p کی صحیح قیمت T ہے۔ ورنہ اس کی صحیح قیمت T ہے۔

(15) کوئی دو بیانات p اور q **دوہری شرطیہ بیان (bi-conditional statement)** وہ بیان ہے۔ 'p اگر صرف اور صرف اگر q' اور اسے $p\leftrightarrow q$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ بیان $p\leftrightarrow q$ کی صحیح قیمت T ہے۔ جب بھی دونوں p اور q کی یکساں صحیح قیمت ہیں۔ ورنہ اس کی صحیح قیمت F ہے۔

(16) ایک بیان ٹاٹولوجی کہلاتا ہے۔اگر اس کی حقیقی قیمت ہمیشہ T ہو چاہے اس کے جزوبیانوں کی حقیقی قیمتیں بلالحاظ T ہوں یا نہ ہوں۔ اس کو $\mathbb{T}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 12_Discrete Mathematics.indd 252 28-02-2023 15:38:52

(17) ایک بیان تضاد کہلاتا ہے۔ اگر اس کی حقیقی قیمت ہمیشہ F ہو چاہے اس کے جزوبیانوں کی حقیقی قیمتیں بلا لحاظ F ہوں یا نہ ہوں، اس کو $\mathbb{F}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

(18) ایک بیان جو نہ تو ٹاٹولوجی ہو اور نہ تضاد ہو اتفاق کہلاتا ہے۔

(19) کوئی دو مرکب بیانات A اور B کو منطقی برابری کہا جاتا ہے ۔ یا صرف برابری کہا جاتا ہے، اگر حقیقی جدول میں موجود A اور B کے مقابل قطاریں یکساں حقیقی قیمتیں رکھتے ہیں۔ منطقی معادل کے بیانات A اور B کو اس طرح ظاہر کیا جاتا ہے $A \equiv B$ یا $A \Leftrightarrow B$

تعریف سے یہ صاف ظاہر ہوتا ہے۔

(20) **معادل کے چند کلیے**

آئیڈم پوٹنٹ کلیے	$p \vee p \equiv p$ (i)	$p \wedge p \equiv p$ (ii)
متبادلی کلیے	$p \vee q \equiv q \vee p$ (i)	$p \wedge q \equiv q \wedge p$ (ii)
مربوطی کلیے	$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ (i)	$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ (ii)
تقسیمی کلیے	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (i)	
	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (ii)	
منفرد تی کلیے	$p \vee \mathbb{F} \equiv \mathbb{F}$ اور $p \vee \mathbb{T} \equiv \mathbb{T}$ (i)	
	$p \wedge \mathbb{F} \equiv \mathbb{F}$ اور $p \wedge \mathbb{T} \equiv \mathbb{T}$ (ii)	
تکمیلی کلیے	$p \vee \neg p \equiv \mathbb{T}$ اور $p \wedge \neg p \equiv \mathbb{F}$ (i)	
	$\neg \mathbb{T} \equiv \mathbb{F}$ اور $\neg \mathbb{F} \equiv \mathbb{T}$ (ii)	
چڑھاؤ کلیے یا دہرا منفی کلیے	$\neg(\neg p) \neg p$	
ڈی مارگن کے کلیے	$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ (i)	$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \vee \neg q$ (ii)
جذب کلیے	$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ (i)	$p \wedge (p \vee q) \equiv p$ (ii)

ICT کارنر

https://ggbm.at/dy9kwgbt or Scan the QR Code

بروزر کھولیئے اور دیے گئے URL لنک ٹیپ کیجئے (یا) QR کوڈ کو اسکین کیجئے۔ "12 ویں جماعت ریاضی جلد-2" Geo Gebra (جیوجبرا) نامی ورک بک کھلے گی۔ ورک بک کے بائیں جانب تمہاری کتاب کے اسباق ہوں گے۔ "**مجرد ریاضی**" نامی باب پر کلک کریں۔ اس باب سے تعلق رکھنے والے بہت سارے ورک شیٹ دکھائی دینگے تمام ورک شیٹوں کا معالعہ کیجئے۔

12th_Maths_Vol 2_Urdu_CH 12_Discrete Mathematics.indd 253 28-02-2023 15:38:54

جوابات (ANSWERS)

باب 7

مشق 7.1

(1) (i) 21 m/s (ii) 15 m/s اور 27 m/s

(2) (2)(i) 5sec (ii) 128 ft/s (iii)160 ft/s

(3) (i) 1,2 sec (ii) 34 m (iii) $-6\ m/s^2$, $6\ m/s^2$

(4) 75 اکائیاں (5) $\frac{1}{2}$ kg/m, $\frac{1}{6}$ kg/m

(6) 20π sq.cm/s (7) 2π km/s (8) $\frac{9}{10\pi}$ m/min

(9) (i) $\frac{-8}{3}$ m/s (ii) 26.83 sq.m/sec (10) 70 km/hr

مشق 7.2

(1) (i) 7 (ii) ∞ (2) $(1,0)$

(3) $(0,3)$ اور $(4,-25)$ (4) $(2,-1)$ اور $(-2,1)$

(5) (i) $2x+y=2\,;x-2y=1$ (ii) $2x-y=-2\,;x+2y=4$

(iii) $x-y=0\,;x+y=\pi$ (iv) $4x+2y=5\,;2x-4y=-5$

(6) $12x-y=15\,;12x-y=-17$ (7) $x+2y=7\,;x+2y=-1$

(8) $(2\cos t)x+(7\sin t)y=14\,;\ (7\sin t)x-(2\cos t)y=45\sin t\cos t$ (9) $\tan^{-1}(3)$

مشق 7.3

(1) (i) $x=0$ پر مسلسل نہیں ہے۔ (ii) $x=\frac{\pi}{2}$ پر مسلسل نہیں ہے۔ (iii) $f(2)\neq f(7)$

(2) (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $-2+2\sqrt{2}$ (iii) $\frac{9}{4}$

(3) (i) $x=0$ پر مسلسل نہیں ہے۔ (ii) $x=\frac{-1}{3}$ پر تفرق نہیں ہے۔

(4) (i) $\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ (ii) 7

(6) 320 km (8) نہیں، چنانچہ، $f'(x)$ میں وقفہ $(0,2)$ پر 2.5 نہیں ہوگا۔

مشق 7.4

(1) (i) $e^x=1+\frac{x}{\lfloor 1}+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\cdots$ (ii) $\sin x=x-\frac{x^3}{\lfloor 3}+\frac{x^5}{\lfloor 5}-\frac{x^7}{\lfloor 7}+\cdots$

(iii) $\cos x=1-\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^4}{\lfloor 4}-\frac{x^6}{\lfloor 6}+\cdots$

(iv) $\log(1-x)=-\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots\right)$

(v) $\tan^{-1}(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots$ (vi) $\cos^2 x=1-\frac{2x^2}{\lfloor 2}+\frac{2^3x^4}{\lfloor 4}-\frac{2^5x^6}{\lfloor 6}+\cdots$

(2) $\log x=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\frac{1}{4}(x-1)^4+\cdots$

(3) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\frac{1}{\lfloor 1}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{\lfloor 2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{1}{\lfloor 3}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\cdots\right)$

(4) $f(x)=-(x-1)+(x-1)^2$

12th_Maths_Vol 2_UM_Answers.indd 254 28-02-2023 16:59:13

مشق 7.5

(1) $\frac{1}{2}$ (2) 2 (3) ∞ (4) 1 (5) 0 (6) 0

(7) $\frac{-3}{2}$ (8) 1 (9) e (10) 1 (11) $\frac{1}{\sqrt{e}}$

مشق 7.6

(1) (i) مطلق زیادتی $= -1$, مطلق کمی $= -26$

(ii) مطلق زیادتی $= 16$, مطلق کمی $= -1$

(iii) مطلق زیادتی $= 9$, مطلق کمی $= -\frac{9}{8}$

(iv) مطلق زیادتی $= \frac{3\sqrt{3}}{2}$, مطلق کمی $= 0$

(2) (i) $(-2,1)$ پر سختی سے گھٹتا, $(1,\infty)$ اور $(-\infty,-2)$ پر سختی سے بڑھتا

مقامی کمی $= -7$ مقامی زیادتی $= 20$

(ii) $(5,\infty)$ پر سختی سے گھٹتا اور $(-\infty,5)$ پر سختی سے بڑھتا۔ مقامی انتہاء نہیں ہے۔

(iii) $(-\infty,\infty)$ پر سختی سے بڑھتا۔ مقامی انتہاء نہیں ہے۔

(iv) $(1,\infty)$ پر سختی سے بڑھتا, $(0,1)$ پر سختی سے گھٹتا۔ مقامی کمی $= \frac{1}{3}$

(v) $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$ اور $\left(\frac{7\pi}{4},2\pi\right)$ پر سختی سے بڑھتا۔

$\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$ اور $\left(\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right)$ پر سختی سے گھٹتا۔ مقامی زیادتی $= \frac{11}{2}$ پر $x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\neq}{4}$.

مقامی کمی $= \frac{9}{2}$ پر $x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\neq}{4}$.

مشق 7.7

(1) (i) $(2,4)$ پر مقعر نیچے کی جانب۔ $(4,\infty)$ اور $(-\infty,2)$ پر مقعر اوپر کی جانب

$(4,0)$ اور $(2,-16)$ مڑنے کے نقاط

(ii) $\left(\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right)$ پر مقعر اوپر کی جانب۔ $\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$ اور $\left(\frac{7\pi}{4},2\pi\right)$ پر مقعر نیچے کی جانب

$\left(\frac{3\pi}{4},0\right)$ اور $\left(\frac{7\pi}{4},0\right)$ مڑنے کے نقاط

(iii) $(0,\infty)$ پر مقعر نیچے کی جانب۔ $(-\infty,0)$ پر مقعر اوپر کی جانب

$(0,0)$ مڑنے کے نقاط

(2) (i) مقامی کمی $= -2$; مقامی زیادتی $= 2$ (ii) مقامی کمی $= -\frac{1}{e}$

(iii) مقامی کمی $= 0$; مقامی زیادتی $= \frac{1}{e^2}$

(3) $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$ پر سختی سے بڑھتا۔ $\left(\frac{1}{2},\infty\right)$ اور $(-\infty,-1)$ پر سختی سے بڑھتا

مقامی کمی $= -\frac{3}{4}$, مقامی زیادتی $= 6$

$\left(-\frac{1}{4},\frac{21}{8}\right)$ مڑنے کے نقاط۔ $\left(-\frac{1}{4},\infty\right)$ پر مقعر اوپر کی جانب; $\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right)$ پر مقعر نیچے کی جانب

12th_Maths_Vol 2_UM_Answers.indd 255 28-02-2023 16:59:29

مشق 7.8

(1) $6, 6$ (2) $2\sqrt{5}, 2\sqrt{5}$ (3) 50 (4) 100m^2 (5) 9cm , 6cm (6) 1200m

(7) $10\sqrt{2}, 10\sqrt{2}$ (9) $\sqrt{2}r, \frac{r}{\sqrt{2}}$ (10) 6cm , 6cm , 3cm (11) $32 \neq, 0$

مشق 7.9

(1) (i) $x=-1, x=1, y=1$ (ii) $x=-1, y=x-1,$ (iii) $y=-3, y=3$

(iv) $y=x-9, x=-3$

مشق 7.10

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(1)	(2)	(2)	(2)	(1)	(2)	(3)	(4)	(3)	(1)
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
(3)	(4)	(3)	(4)	(2)	(3)	(3)	(1)	(4)	(3)

باب 8

مشق 8.1

1. (i) 3.0074 2. (i) 24.73 (ii) 1.9688 (iii) 2.963
3. (i) $7x-4$ (ii) $\frac{9-4x}{5}$ (iii) $\frac{x+1}{4}$
4. (i) $0.0225\pi\ \text{cm}^2$, (ii) $0.006\,\text{cm}^2$ (iii) 0.6%
5. (i) $80\pi\ cm^3$ میں حجم گھٹتا ہے۔ (ii) $16\pi\ cm^2$ میں سطحی رقبہ گھٹتا ہے۔ 6. 1%

مشق 8.2

1. (i) $\frac{2(1-2x)^2(8x-7)}{(3-4x)^2}dx$ (ii) $\frac{4}{3}\frac{\cos 2x}{(3+\sin 2x)^{\frac{1}{3}}}dx$ (iii) $e^{x^2-5x+7}[(2x-5)\cos(x^2-1)-2x\sin(x^2-1)]dx$
2. (i) 0.7 (ii) 0.18 3. (i) $\Delta f = 3.125,\ df = 2.0$ (ii) $\Delta f = 0.11,\ df = 0.1$
4. 3.0013029 5. (i) $\frac{6}{\pi}$ cm (ii) $\frac{40}{\pi}\%$ 6. $30\pi\ mm^3$ 7. $0.4\pi\ mm^2$ 8. 8000
9. (i) $\simeq 3$ الفاظ (ii) $\simeq 1$ لفظ 10. $5.25\pi, 4.76\%$ 11. $60\ cm^3, 61.2\ cm^3$

مشق 8.3

1. $\frac{1}{8}$ 2. 1 4. $\cos(1)$

مشق 8.4

1. (i) 27, −14 (ii) 11, −4 (iii) 2, 0, 4 (iv) $e^2\left((\log 2)-1\right), e^2(1+\log 8)$
3. $\frac{x^2-y^2}{x^2y}, \frac{y^2-x^2}{y^2x}+3z^2, 6yz$ 4. $\frac{3\left(x^2+y^2+z^2\right)}{\left(x^3+y^3+z^3\right)}$
5. (i) $e^y+6x,\ 6y,\ xe^y,\ e^y+6x$

(ii) $\frac{-15}{(5x+3y)^2}, \frac{-25}{(5x+3y)^2}, \frac{-9}{(5x+3y)^2}, \frac{-15}{(5x+3y)^2}$ (iii) $3,\ 2-25\cos 5x,\ 0,\ 3$

10. (i) $72x+84y+0.04xy-0.05x^2-0.05y^2-2000$

(ii) 24 ، −48 ، y کو ایک مستقل رکھیں اور x کو زیادہ کرنے سے نفع میں اضافہ ہوتا ہے۔

12th_Maths_Vol 2_UM_Answers.indd 256 28-02-2023 16:59:49

مشق 8.5

1. $6x-7y-7$ 2. $-(x+20y+16)$ 3. $(2x-y)dx+\left(-x+\frac{1}{2}y\right)dy$

4. $(y+z)dx+(x+z)dy+(y+x)dz$

مشق 8.6

1. $e^t\left(2e^t\sin t+3\sin^4 t+e^t\cos t+12\sin^3 t\cos t\right)$, 1

2. $\left(1+e^{2t}\right)^2\left[\cos^3 t\left(1+e^{2t}\right)-\sin t\sin 2t\left(1+e^{2t}\right)+6e^{2t}\sin t\cos^2 t\right]$

3. $4e^{2t}$ 4. $-e^{-2t}\left[\sin 2t-\cos 2t\right]$ 5. $18e^{3s}-3e^s\cos s+3e^s\sin s-4\sin s\cos s$, 15

6. $\frac{3e}{1+e^2}+2\tan^{-1}e$, $\frac{e}{1+e^2}$

7. $te^{st^2}\left[t\sin\left(s^2t\right)+2s\cos\left(s^2t\right)\right]$, $\frac{du}{dt}=se^{st^2}\left[2t\sin\left(s^2t\right)+s\cos\left(s^2t\right)\right]$, $e\left[\sin(1)+2\cos(1)\right]$, $e\left[2\sin(1)+\cos(1)\right]$

8. $3s^3(e^{3t}+s^2e^{-t})$, $3s^2e^t(e^{2t}-5e^{-2t}s^2)$ 9. $2u(1+2v)$, $2\left(u^2-v\right)$, 3, $\frac{-3}{2}$

مشق 8.7

1. (i) ہم جنس نہیں ہے۔ (ii) ہم جنس ہے، درجہ 3

(iii) ہم جنس ہے، درجہ 0 (iv) ہم جنس نہیں ہے۔ 6.5

مشق 8.8

1	2	3	4	5	6	7	8
(2)	(2)	(2)	(4)	(3)	(2)	(4)	(2)
9	10	11	12	13	14	15	
(4)	(1)	(2)	(3)	(2)	(4)	(1)	

باب 9

مشق 9.1

1. 0.6 2. 0.855 3. 0.375

مشق 9.2

1. (i) $\frac{13}{2}$ (ii) $\frac{25}{3}$

مشق 9.3

1. (i) $\frac{1}{4}\log\frac{5}{3}$ (ii) $\frac{\pi}{8}$ (iii) $\frac{\pi}{2}-1$ (iv) $e^{\frac{\pi}{2}}$ (v) $\frac{8}{21}$ (vi) $\frac{1}{2}$

2. (i) 0 (ii) π (iii) $\frac{\pi-2}{4}$ (iv) 0 (v) 0 (vi) $\frac{13}{10}$ (vii) $\frac{\pi}{4}$

(viii) $\frac{\pi}{8}\log 2$ (ix) $\frac{\pi}{2}(\pi-2)$ (x) $\frac{\pi}{8}$ (xi) $\frac{\pi^2}{2}$

مشق 9.4

1. $\frac{3}{8}-\frac{19}{8}e^{-2}$ 2. $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{12}+\frac{1}{9}\right)$ 3. $1+e^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\pi}{4}-1\right]$ 4. $-\frac{\pi}{4}$

مشق 9.5

1. (i) $\frac{\pi}{2\sqrt{6}}$ (ii). $\frac{\pi}{6\sqrt{5}}$

12th_Maths_Vol 2_UM_Answers.indd 257 28-02-2023 17:00:03

مشق 9.6

1. (i) $\frac{63\neq}{512}$ (ii) $\frac{16}{35}$ (iii) $\frac{5\pi}{64}$ (iv) $\frac{8}{45}$ (v) $\frac{\pi}{32}$ (vi) $\frac{64}{35}$ (vii) $\frac{1}{24}$ (viii) $\frac{1}{60}$

مشق 9.7

1. (i) $\frac{5!}{3^6}$ (ii) 29 (2) $\frac{1}{8}$

مشق 9.8

1. 7.5 2. 2 3. 15 4. 36 5. $2\sqrt{2}$ 6. $\log 2$ 7. $\frac{9}{2}$ 8. $\frac{16}{3}$، ہاں 9. $\frac{4}{3}$ 10. $\frac{4}{3}\left(4\pi+\sqrt{3}\right)$

مشق 9.9

1. $\frac{4\pi}{5}$ 2. $\frac{\pi}{4}\left[1-e^{-4}\right]$ 3. 8π 4. $\frac{2\pi}{15}$ 5. $\frac{14}{3}\pi m^3$ 6. $\frac{1000}{3}\pi cm^3$

مشق 9.10

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(1)	(3)	(3)	(4)	(4)	(3)	(3)	(3)	(2)	(1)
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
(4)	(2)	(2)	(4)	(4)	(4)	(3)	(4)	(2)	(1)

باب 10

مشق 10.1

1. (i) 1,1 (ii) 3,2 (iii) 2, موجود نہیں ہے۔ (iv) 1, 2 (v) 1,4
   (vi) 2,2 (vii) 2,6 (viii) 2, موجود نہیں ہے۔ (ix) 3,1 (x) 1, 1

مشق 10.2

1. (i) $\frac{dQ}{dt}=kQ$ (ii) $\frac{dP}{dt}=kP(500000-P)$ (iii) $\frac{dP}{dT}=\frac{kP}{T^2}$ (iv) $\frac{dx}{dt}=\frac{2x}{25}+400$ 2. $\frac{dr}{dt}=-k$

مشق 10.3

1. (i) $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ (ii) $\frac{d^2x}{dy^2}=0$ 2. $r^2\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]=\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)^2$

3. $x^2+2xy\frac{dy}{dx}-y^2=0$ 4. $2ay''+y'^3=0$ 5. $xy'-2y-2=0$ 6. $xy'^2+xyy''-yy'=0$

7. $\frac{d^2y}{dx^2}=64y$ 8. $xy''+2y'+x^2-xy-2=0$

مشق 10.4

2. (i) $m=-2$ (ii) $m=2,3$ 3. $2y^2=x+48$

مشق 10.5

1. $F=(F-kV)e^{\frac{kt}{M}}$ 2. $k^2\left(1-e^{-\frac{2gx}{k^2}}\right)=v^2$ 3. $y=\frac{1-x}{1+x}$

4. (i) $\sin^{-1}y=\sin^{-1}x+C$ (ii) $y\tan^{-1}x=C$ (iii) $\sin\left(\frac{y-1}{x}\right)=a$ (iv) $e^x+e^{-y}+\frac{x^4}{4}=C$

(v) $\left(e^y+1\right)\sin x=C$ (vi) $\sin\left(\frac{x}{y}\right)=e^{nx+c}$ (vii) $3y=-\left(25-x^2\right)^{\frac{3}{2}}+3C$ (viii) $\sin y=e^x\log x+C$

12th_Maths_Vol 2_UM_Answers.indd 258 28-02-2023 17:00:19

(ix) $\sec y = 2\sin x + C$ (x) $\frac{1}{2}\left[(x+y)+\sin(x+y)\cos(x+y)\right] = x + C$

مشق 10.6

1. $\sin\left(\frac{y}{x}\right) = \log|Cx|$ 2. $y = Ce^{\frac{x^3}{3y^3}}$ 3. $e^{\frac{x}{y}} = \log|Cy|$ 4. $3x^2y + 2y^3 = C$
5. $xy^2 - x^2y = C$ 6. $C = xe^{\tan\left(\frac{y}{x}\right)}$ 7. $y + 3xe^{\frac{y}{x}} = 3$ 8. $x_0 = \pm\sqrt{3}e$

مشق 10.7

1. $y = \sin x + C\cos x$ 2. $y = \frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}} + C\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ 3. $(y+\cos x)x = \sin x + C$
4. $y\left(x^2+1\right) = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+4} + \frac{1}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2+4}\right| + C$ 5. $xy^2 = 2y^5 + C$
6. $xy\sin x + \cos x = C$ 7. $ye^{\sin^{-1}x} = \frac{e^{2\sin^{-1}x}}{2} + C$ 8. $y\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) = x + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$
9. $xy + \tan^{-1}y = C$ 10. $y\log x + \frac{\cos 2x}{2} = C$ 11. $2y = (x+a)^4 + 2C(x+a)^2$
12. $y\left(1+x^3\right) = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$ 13. $4yx = 2x^2\log x - x^2 + 4C$
14. $x^2y = \frac{x^4}{4}\log x - \frac{x^4}{16} + C$ 15. $2x^3y = x^2 + 3$

مشق 10.8

1. 10 گھنٹوں کے بعد بیکٹیریا کی تعداد 9 گنا اضافے ہوتے ہیں۔

2. $P = 300000\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{t}{40}}$ 3. $i = Ce^{-\frac{Rt}{L}}$ 4. $v = \frac{10}{e^2}$ 5. $P = 10000e^{0.075}$

6. 1000 سال بعد اصلی تابکاری مرکزہ کا $\frac{9^{10}}{10^8}$ فیصد باقی رہے گا۔

7. (i) $65.33°C$ (ii) $51.91\ mts$

8. (i) $T \simeq 151°F$ (ii) $t = 22.523$. اس عورت کو تقریباً 10.22 اور 10.30 کے درمیان میں کافی پینا پسند ہے۔

9. 20° 10. $x = 100\left(1 - e^{\frac{-3t}{50}}\right)$

مشق 10.9

Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	(1)	(2)	(3)	(2)	(2)	(3)	(3)	(2)	(2)	(3)
Q	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	(3)	(3)	(1)	(1)	(2)	(3)	(2)	(4)	(2)	(4)
Q	21	22	23	24	25					
A	(1)	(1)	(2)	(2)	(1)					

باب 11

مشق 11.1

(1)

سریعی متغیر کی قیمتیں	0	1	2	3	کل
معکوس عکس کے عناصر کی تعداد	1	3	3	1	8

12th_Maths_Vol 2_UM_Answers.indd 259 28-02-2023 17:00:35

(2)

سریعی متغیر کی قیمتیں	0	1	2	کل
معکوس عکس کے عناصر کی تعداد	325	676	325	1326

(3)

سریعی متغیر کی قیمتیں	0	1	2	3	کل
معکوس عکس کے عناصر کی تعداد	4	30	40	10	84

(4)

سریعی متغیر کی قیمتیں	–20	5	30	کل
معکوس عکس کے عناصر کی تعداد	28	48	15	91

(5)

سریعی متغیر کی قیمتیں	4	5	6	7	8	کل
معکوس عکس کے عناصر کی تعداد	1	4	10	12	9	36

مشق 11.2

(1) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{8} & \text{کے لئے } x=0,3\\ \frac{3}{8} & \text{کے لئے } x=1,2\end{cases}$

(2) (i)

x	2	4	6	8	10	کل
$f(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{9}{36}$	1

(2) (ii) $F(x)=\begin{cases}0 & \text{کے لئے } x<2\\ \frac{1}{36} & \text{کے لئے } 2\le x<4\\ \frac{5}{36} & \text{کے لئے } 4\le x<6\\ \frac{15}{36} & \text{کے لئے } 6\le x<8\\ \frac{27}{36} & \text{کے لئے } 8\le x<10\\ 1 & \text{کے لئے } 10\le x<\infty\end{cases}$ (iii) $\frac{13}{18}$ (iv) $\frac{31}{36}$

(3) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4} & \text{کے لئے } x=1,3\\ \frac{1}{16} & \text{کے لئے } x=0,4\\ \frac{3}{8} & \text{کے لئے } x=2\end{cases}$, $F(x)=\begin{cases}0 & \text{کے لئے } x<0\\ \frac{1}{16} & \text{کے لئے } 0\le x<1\\ \frac{5}{16} & \text{کے لئے } 1\le x<2\\ \frac{11}{16} & \text{کے لئے } 2\le x<3\\ \frac{15}{16} & \text{کے لئے } 3\le x<4\\ 1 & \text{کے لئے } 4\le x<\infty\end{cases}$

(4) (i) 8 (ii) $F(x)=\begin{cases}0 & \text{کے لئے } x<0\\ \frac{1}{8} & \text{کے لئے } 0\le x<1\\ \frac{3}{8} & \text{کے لئے } 1\le x<2\\ 1 & \text{کے لئے } 2\le x<\infty\end{cases}$ (iii) $\frac{7}{8}$

(5) (i)

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0.15	0.20	0.25	0.25	0.15

(ii) $P(X<1)=0.35$ (iii) $P(X\ge 2)=0.40$

12th_Maths_Vol 2_UM_Answers.indd 260 28-02-2023 17:00:43

(6) (i) $\frac{1}{6}$ (ii) $\frac{17}{36}$ (iii) $\frac{5}{6}$

(7) (a)

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

(b) $\frac{4}{5}$ (c) $\frac{2}{5}$

مشق 11.3

(1) 4

(2) (i) 0.16 (ii) 0.3 (iii) 0.75

(3) (i) $\frac{1}{400}$

(ii) $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{کے لئے} \quad x<200 \\ \frac{x}{400}-\frac{1}{2} & \text{کے لئے} \quad 200\le x\le 600 \\ 1 & \text{کے لئے} \quad x>600 \end{cases}$

(iii) $\frac{1}{2}$

(4) (i) $\frac{1}{3}$ (ii) $1-e^{-\frac{x}{3}}$ (iii) $1-e^{-1}$ (iv) $e^{-\frac{5}{3}}$ (v) $1-e^{-\frac{4}{3}}$

(5) (i) $F(x)=\begin{cases} 0 & x\le -1 \\ \frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2} & -1\le x<0 \\ -\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2} & 0\le x<1 \\ 1 & 1\le x \end{cases}$ (ii) 0.75

(6) (i) $f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{1}{2}(2x+1) & 0\le x<1 \\ 0 & 1\le x \end{cases}$ (ii) 0.285

مشق 11.4

(1) (i) 2.3 , 2.81 (ii) 1.67 , 0.56 (iii) $\frac{5}{3}, \frac{1}{18}$ (iv) 2,4

(2) $\frac{8}{7}$

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$

(3) 7 , 16

(4) 2 , 1

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

(5) 15 منٹ (6) $\frac{1}{3}$ (7) $\frac{1}{2}, \frac{1}{8}$ (8) نقصان ₹. 0.50

12th_Maths_Vol 2_UM_Answers.indd 261 28-02-2023 17:00:55

مشق 11.5

(1) (i) $\frac{160}{729}$ (ii) $210\left(\frac{1}{5}\right)^4\left(\frac{4}{5}\right)^6$ (iii) $\binom{9}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7\left(\frac{1}{2}\right)^2$ (2) (i) $\binom{10}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^6$ (ii) $1-\frac{3^{10}}{4^{10}}$

(3) (i) 50, 25 (ii) 40, $\frac{100}{3}$ (4) $\frac{270}{1024}$ (5) (i) $1-0.95^{10}$ (ii) $\binom{10}{2}(0.05)^2(0.95)^8$

(6) (i) $\binom{12}{10}(0.9)^{10}(0.1)^2$ (ii) $2.1(0.9)^{11}$ (iii) $1-\left[2.1(0.9)^{11}\right]$

(7) (i) $\binom{18}{x}\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{18-x}$ (ii) $\binom{18}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^{15}$ (iii) $1-\frac{20}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{17}$

(8) $\binom{6}{x}\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{6-x}$, 2 , $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (9) 1, $\frac{4}{5}$

مشق 11.6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(2)	(4)	(2)	(4)	(4)	(2)	(4)	(3)	(2)	(1)
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
(4)	(4)	(1)	(2)	(1)	(1)	(4)	(4)	(2)	(1)

باب 12

مشق 12.1

1. (i) ہاں، $*$، $\mathbb{R}$ پر بائنری عمل ہے۔ (ii) ہاں، $*$، A پر بائنری عمل ہے۔
(iii) نہیں، $*$، $\mathbb{R}$ پر بائنری عمل نہیں ہے۔

2. نہیں، $*$، $\mathbb{Z}$ پر بائنری عمل نہیں ہے۔ 3. $\frac{-88}{15}$

4. ہاں، A پر ضرب بائنری عمل ہے۔

5. (i) $\mathbb{Q}$ پر دیا گیا $*$ عمل شمولتی، مربوطی ہے، مگر متبادلی نہیں ہے۔
(ii) منفرد موجود نہیں ہے۔ اور معکوس بھی موجود نہیں ہے۔

6.

$*$	a	b	c
a	b	c	a
b	c	b	a
c	a	a	c

7. نہیں، دیا گیا عمل مربوطی اور متبادلی نہیں ہے۔

8. (i) $A \vee B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $A \wedge B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

12th_Maths_Vol 2_UM_Answers.indd 262 28-02-2023 17:01:06

(iii) $(A \vee B) \wedge C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (iv) $(A \wedge B) \vee C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

10. (i) مربوطی اور متبادلی ہے۔
(ii) منفرد اور معکوس موجود ہے۔

مشق 12.2

1. (i) $\neg p$: مشتری کوئی سیارہ نہیں ہے۔ (ii) $p \wedge \neg q$: مشتری ایک سیارہ ہے اور ہندوستان کوئی جزیرہ نہیں ہے۔

(iii) $\neg p \vee q$: مشتری کوئی سیارہ نہیں ہے یا ہندوستان ایک جزیرہ ہے۔

(iv) $p \rightarrow \neg q$: اگر مشتری ایک سیارہ ہے تو ہندوستان جزیرہ نہیں ہے۔

(v) $p \leftrightarrow q$ مشتری ایک سیارہ ہے اگر صرف اور صرف ہندوستان ایک جزیرہ ہے۔

2. (i) $\neg p \wedge q$ (ii) $p \vee \neg q$ (iii) $p \wedge q$ (iv) $\neg p$

3. (i) $p \rightarrow q \equiv \mathbb{T}$ (ii) $p \vee q \equiv \mathbb{F}$ (iii) $\neg p \vee q \equiv \mathbb{T}$ (iv) $p \wedge q \equiv \mathbb{F}$

4. (i), (iii) اور (iv) تجویز ہیں

5. (i) **برعکس:** اگر x اور y اعداد ہیں اس طرح کے $x^2 = y^2$ ہوتو، $x = y$ ہوگا۔

متضاد: اگر x اور y اعداد ہیں اس طرح کے $x \neq y$ ہوتو، $x^2 \neq y^2$ ہوگا۔

مثبت متضاد: اگر x اور y اعداد ہیں اس طرح کے $x^2 \neq y^2$ ہوتو، $x \neq y$ ہوگا۔

(ii) **برعکس:** اگر چار ضلعی ایک مستطیل ہوتو، وہ ایک مربع ہوگا۔

متضاد: اگر چار ضلعی ایک مربع نہیں ہوتو، وہ ایک مستطیل نہیں ہوگا۔

مثبت متضاد: اگر چار ضلعی ایک مستطیل نہیں ہوتو، وہ ایک مربع نہیں ہوگا۔

6. (i) $\neg p \wedge \neg q$ کا حقیقی جدول

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

(ii) $\neg(\neg p \wedge \neg q)$ کا حقیقی جدول

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$
T	T	F	F	T
T	F	T	T	F
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T

12th_Maths_Vol 2_UM_Answers.indd 263 28-02-2023 17:01:12

(iii) $(p \vee q) \vee \neg q$ کا حقیقی جدول

p	q	$\neg q$	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee \neg q$
T	T	F	T	T
T	F	T	T	T
F	T	F	T	T
F	F	T	F	T

(iv) $(\neg p \rightarrow r) \wedge (p \leftrightarrow q)$ کا حقیقی جدول

p	q	r	$\neg p$	$(\neg p \rightarrow r)$	$p \leftrightarrow q$	$(\neg p \rightarrow r) \wedge (p \leftrightarrow q)$
T	T	T	F	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T
T	F	T	F	T	F	F
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	T	T	F	F
F	T	F	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T	T
F	F	F	T	F	T	F

7. (i) تضاد (ii) ٹاٹولوجی (iii) اتفاق (iv) ٹاٹولوجی

12. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ یہ ایک ٹاٹولوجی ہے۔

13. ہاں یہ بیان منطقی قائم کرتا ہے

مشق 12.3

دیے گئے حل میں سے صحیح یا سب سے مناسب جواب کا انتخاب کریں۔

Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	(2)	(3)	(2)	(4)	(2)	(2)	(3)	(4)	(3)	(2)
Q	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	(4)	(1)	(3)	(3)	(3)	(2)	(4)	(3)	(1)	(4)

12th_Maths_Vol 2_UM_Answers.indd 264 28-02-2023 17:01:14

فرہنگ الفاظ و معنی (GLOSSARY)

باب 7
تفرقی احصاء کے استعمالات (اطلاقات)

related rates	تعلقی شرح
mean value theorem	اوسط قیمت مسئلہ
indeterminate forms	غیر متعین شکلیں
stationary points	ساکن نقطہ
critical points	فاصل نقطہ
monotonicity of functions	ایک سری،
absolute extremum	مطلق انتہاء
relative extremum	متعلق انتہاء
Concave	مقعری
Convex	محدبی
point of inflection	مڑنے کے نقاط
Symmetry	تشاکل

باب 8
تفریقیاں اور جزوی مشتق

Differential	تفرقی
Partial Derivatives	جزوی مشتقیں
Harmonic	ہم آہنگ
Homogeneous	ہم جنس
Absolute error	مطلق غلطی
Relative error	متعلقہ غلطی
Percentage error	فیصد غلطی

باب 9
تکملہ کے اطلاقات

Definite integral	معین تکملہ
Reduction formula	تخفیف ضابطہ
Gamma integral	گاما تکملہ
Bounded region	گھرا ہوا علاقہ

باب 10
عام تفرقی مساوات

order	ترتیب
Linear	خطی
Degree	درجہ
arbitrary constant	اختیاری مستقل
dependent variable	انحصار متغیر
independent variable	آزاد متغیر
integrating factor	تکمیلی جزوضربی
homogeneous function	ہم جنسی تفاعلات

12th_Maths_Vol 2_UM_Glossary.indd 265 28-02-2023 15:39:27

باب 11
امکانی بٹوارے

bernoulli random variable	برنولی سریعی متغیر
binomial distribution	دو رکنی بٹوارے
binomial random variable	دو رکنی سریعی متغیر
continuous random variable	مسلسل سریعی متغیر
cumulative distribution function	مجموعی بٹوارے تفاعل
discrete random variable	منفصل سریعی متغیر
mathematical expectation	ریاضی توقع
probability density function	امکانی کثافت تفاعل
probability mass function	امکانی کمیتی تفاعل
random variable	سریعی متغیر

باب 12
مجرد ریاضی

Absorption law	جذب کلیے
Algebraic structure	الجبرائی ڈھانچہ
Biconditional statement	دہری شرطیہ بیان
Binary Operation	بائنری عمل
Boolean Algebra	بولین الجبراء
Boolean Matrix	بولین میٹرکس
Coding theory	کوڈنگ کا نظریہ
Compound statement	مرکب بیان
Conditional statement	شرطیہ بیان
Conjunction	جوڑ
Contradiction	تضاد
Contra positive	مثبت متضاد
Disjunction	علیحدگی
Duality	ثنویت
Hypothesis	مفروضے
Involution law	چڑھاؤ کلیے
Logical connectives	منطقی تعلقات
Logical equivalent	منطقی معادل
Negation	نفی
Paradox	متفاقض
Simple statement	آسان بیان
Tautology	ٹاٹولوجی
Truth table	حقیقی جدول

12th_Maths_Vol 2_UM_Glossary.indd 266 28-02-2023 15:39:27

BOOKS FOR REFERENCE

(1) Larson R.E. Larson, B.H. Edwards, and R.P. Hostetle. *Calculus with Analytical Geometry, Fifth Edition.* D.C. Heath and Company, (1994).

(2) Smith R.T. Smith and R.B. Miltons. *Calculus concepts and connections*. McGraw Hill Company, (2006).

(3) Courant R. Courant and F. John. *Introduction to Calculus and Analysis; Volume One.* Inter Science Publishers, a Division of John Wiley and Sons, (1965).

(4) G.B. Thomas, et.al., *Thoma's Calculus,* Addison Wesley (2004).

(5) G.F. Simmons, *Calculus and Analytic Geometry.*

(6) Ulrich L.Rohde, G.C.Jain & Ajay K.Poddar. *Introduction to Integral Calculus.*

(7) Adrian Banner. *The Calculus,* Princeton University Press.

(8) Jerry Farlow, James E. Hall. Jean Marie McDill, and Beverly H. West, *Differential Equations and Linear Algebra*, (2nd Edition) Pearson Education, Inc, New York, (2007).

(9) Dennis G. Zill, *A First Course in Differential Equations with modeling Applications* (9th Edition), Brooks/Cole. Cengage Learning, Belmont, C.A, 2009.

(10) Shepley L.Ross, *Introduction to Ordinary Differential Equations*, Fourth Edition.

(11) William Feller ,John Wiley and sons., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications,* Vol. 1, 3rd Edition.

(12) Paul G. Hoel, Sidney C. Port, Charles J. Stone. *Introduction to Probability Theory*, (**1st Edition**) Published by Houghtion Mifflin.

(13) Bernard Kolman & Robert C. Busby; *Discrete Mathematics structured for Computer Science,* Second Edition Prentice hall of India Pvt. Ltd, New Delhi.

(14) Kenneth H.Rosen, *Discrete Mathematics and the Applications*, seventh Edition. Tata McGraw Hill Education Pvt ltd, New Delhi(2011).

(15) Trembly J.P.& Manohar, *Discrete Mathematical Structure with Applications to Computer Science(1st edition)*. Published by Mcgraw Hill.

12th_Maths_Vol 2_UM_Books for Reference_25-07-2020.indd 267 4/21/2022 7:21:38 PM

Class 12 - Mathematics - Volume 2 - Urdu Medium

Text Book Translators and Reviewers ریاضی برائے بارھویں جماعت

Academic Coordinator & Head

Dr. Mrs. S. Shameem,
Deputy Director, SCERT,
Chennai.

Reviewer and Coordinator

A. Sheema Akthar,
Head Mistress, Govt. Hr. Sec. School
Nagavedu, Ranipet Dt. - 631002

Translators

K. Anser Basha,
B.T. Asst., Anaikar Oriental (Arabic)
Hr, Sec, School, Ambur – 635802

M. Mohammed Nasir,
B.T. Asst., Mazharul Uloom Hr. Sec. School,
Ambur – 635802

T.H. Mohamed Younus,
P.G. Asst., Islamiah Boys Hr, Sec, School,
Melvisharam–632509

A. Haseena Begum,
P.G. Asst., Govt Urdu Hr, Sec, School,
Hosur – 635109

G. Ashraf Ali,
B.T. Asst., Islamiah Boys Hr, Sec, School,
Melvisharam – 632509

V.K. Masiha Tanzeem,
B.T. Asst., Hasnath-E-Jaria
Girls Hr, Sec, School, Ambur – 635802

M. N. Althaf Hussain
B.T. Asst., Murthuzaviya Or. Hr. Sec. School,
Triplicane, Chennai – 600005

Y. K. Sajjad Ahmad
B.T. Asst., Muslim Hr. Sec. School,
Triplicane, Chennai – 600005

H.M. Fahmeena Begum
B.T. Asst., Murthuzaviya Or. Hr. Sec. School,
Triplicane, Chennai – 600005

Layout

B. Ravi Kumar, Erode
S. Santhosh Kumar, Thiruvarur
V. S. Johnsmith, Kanyakumari

Typing

S.K. Anwar Ahmed,
Siddiqua graphic, Chennai

Inhouse -QC

V. Sridhar

Coordinator

Ramesh Munisamy

EMIS Technology Team

R.M. Satheesh
State Coordinator Technical,
TN EMIS, Samagra Shiksha.

K.P. Sathya Narayana
IT Consultant,
TN EMIS, Samagra Shikaha.

R. Arun Maruthi Selvan
Technical Project Consultant,
TN EMIS, Samagra Shiksha.

تعلیمی سربراہ اور معاون

ڈاکٹر ایس شمیم صاحبہ
، ڈپٹی ڈائریکٹر ، ایس سی ای آر ٹی
چنئی۔

نظر ثانی اور معاون

اے شیما اختر
ہیڈ مسٹرس،جی ہیچ یس یس، ناگویڈ،رانی پیٹ – 631002

مترجمین

کے انصر باشاہ
بی۔ ٹی۔ اسسٹنٹ ، آنیکار اورینٹل(عربی) ہائیر سکنڈری اسکول
آمبور – 635802

یم محمد ناصر
بی۔ ٹی۔ اسسٹنٹ، مظہر العلوم ہائیر سکنڈری اسکول
آمبور – 635802

ٹی۔ایچ۔ محمد یونس
پی۔جی ۔اسسٹنٹ ، اسلامیہ بایس ہائیر سکنڈری اسکول
میل وشارم – 632509

اے۔حسینہ بیگم
پی۔جی ۔اسسٹنٹ ، گورنمنٹ اردو ہائیر سکنڈری اسکول
ہوسر – 635109

اشرف علی۔جی
بی۔ ٹی۔ اسسٹنٹ، اسلامیہ بایس ہائیر سکنڈری اسکول
میل وشارم۔ 632509

وی. کی. مسیحا تنظیم
بی۔ ٹی۔ اسسٹنٹ، حسناتھ ای جریا گرلز ہائر سیکنڈری اسکول
آمبور – 635802

یم۔ین۔الطاف حسین
بی۔ٹی۔اسسٹنٹ، مرتضویہ اورینٹل ہائیر سیکنڈری اسکول
ٹرپلیکن، چنئی – 600005

سجاد احمد وائی۔ کے
بی۔ ٹی۔ اسسٹنٹ، مسلم ہائیر سکینڈری اسکول
ٹرپلیکن، چنئی – 600005

ایچ یم فہمینہ بیگم
بی۔ٹی۔اسسٹنٹ، مرتضویہ اورینٹل ہائیر سیکنڈری اسکول
ٹرپلیکن، چنئی – 600005

This book has been printed on 80 G.S.M.
Elegant Maplitho Paper.

Printed by Web Offset at :

12th_Maths_UM_Text Book Translator Team.indd 268 4/21/2022 7:09:58 PM