GOVERNMENT OF TAMIL NADU

ഹയർ സെക്കന്ററി രണ്ടാം വർഷം

HIGHER SECONDARY SECOND YEAR

ഗണിതം

MATHEMATICS

വാല്യം - I

VOLUME - I

MALAYALAM MEDIUM

Department of School Education

Untouchability is Inhuman and a Crime

12th_Maths_MAL_Vol1_FP.indd 1 2/25/2023 12:04:56 PM

Government of Tamil Nadu

First Edition - 2021

Revised Edition - 2022, 2023

Reprint - 2024

(Published under new syllabus)

Content Creation

State Council of Educational
Research and Training

© SCERT 2021

Printing & Publishing

Tamil Nadu Textbook and Educational
Services Corporation

www.textbooksonline.tn.nic.in

EE_Malayalam_FM.indd 2 03-01-2024 10:46:15

പുസ്തകം ഉപയോഗിക്കുന്ന വിധം ?

സ്കോപ്പ് ഓഫ് ഗണിതം

- ഉന്നതവിദ്യാഭ്യാസത്തിന്റെ അവസരങ്ങൾ കോഴ്സുകൾ സ്ഥാപനങ്ങൾ മത്സര പരീക്ഷകൾ എന്നിവയെ കുറിച്ചുള്ള അറിവു പകരുന്നു.
- വിദ്യാഭ്യാസശ്രേണിയിലേയ്ക്ക് കയറിപ്പറ്റുന്നതിന് സഹായിക്കും വിധം സാമ്പത്തിക സഹായത്തിനുള്ള സാധ്യത

പഠന ലക്ഷ്യങ്ങൾ

- യൂണിറ്റിലേയ്ക്കുള്ള തിരിഞ്ഞു നോട്ടം
- ഓരോ യൂണിറ്റിലേയും പഠന ലക്ഷ്യങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള വ്യക്തത വരുത്തൽ.

- ആശയങ്ങളെ കുറിച്ചും, തെളിവുകളെ കുറിച്ചുമുള്ള കാഴ്ചപ്പാട്
- വീഡിയോകൾ, ആനിമേഷൻസ്.

ഐ.സി.റ്റി

- ആയശങ്ങളെ കുറിച്ചുള്ള ഒരു വിശകലനം വർദ്ധിപ്പിക്കൽ
- ആശയങ്ങളെ കുറിച്ച് മനസ്സിലാക്കുന്നതിനുള്ളതും, അറിവ് മെച്ചപ്പെടുത്തുന്നതിനുമുള്ള ഒരു കാഴ്ചപ്പാട്
- ഒരു യൂണിറ്റും മറ്റൊരു യൂണിറ്റും തമ്മിലുള്ള ആശയങ്ങൾ ബന്ധിപ്പിക്കൽ.
- ക്ലാസ്സ് റൂമിലുള്ള പ്രായോഗിക പഠനത്തിലുമുള്ള ഡിജിറ്റൽ മികവ് ഉപ യോഗിക്കൽ.

സംഗ്രഹം

- ഓരോ അദ്ധ്യായത്തിലെയും ആശയങ്ങളെ കുറിച്ചും, മുഖ്യ വിവരങ്ങളെ കുറിച്ചുമുള്ള പുനരവലോകനം.

വിശകലനം

- അഭ്യാസത്തിലെ ചോദ്യങ്ങൾ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നതിലൂടെ കുട്ടികൾക്ക് ലഭിക്കുന്ന അറിവ് പരിശോധിക്കൽ.

റഫറൻസ് ബുക്കുകൾ

- കൂടുതൽ അറിവു കിട്ടുന്നതിനു വേണ്ടി വായിക്കുന്ന ബുക്കുകളുടെ എണ്ണം.

ഉയർന്ന ചിന്താഗതിക്കുള്ള സാധ്യത

- ഉന്നത മത്സര പരീകൾക്കായി ജെ.ഇ.ഇ, മാത്സ് ഒളിംപ്യാഡ് എന്നിവയിലേയ്ക്കു വേണ്ടി കുട്ടികളെ പരിശീലിപ്പിക്കുന്നതിനു വേണ്ടിയും. അവയുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ചോദ്യങ്ങൾ ചെയ്തു പരിശീലിക്കുവാനും ഇത്തരത്തിലുള്ള ബുക്കുകളിൽ അനുബന്ധപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട്.

പദപരിചയം

- അടിക്കടി ഉപയോഗിക്കുന്ന തമിഴിന് സമാനമായ ഗണിത പദങ്ങൾ.

ഗണിത പഠനങ്ങൾ

ശരിയായ പഠനം എന്നത് ആശയങ്ങളെ ആഴത്തിൽ മനസ്സിലാക്കി പഠിക്കുക എന്നതാണ്. ഓരോ അധ്യയം തുടങ്ങുന്നത് ആമുഖം, പഠനലക്ഷ്യം, സിദ്ധാന്തങ്ങൾ, ഫലങ്ങൾ, തെളിവുകൾ എന്നിവയോടു കൂടിയാണ്. ഇതിനെ ത്തുടർന്ന് പ രിഹരിക്കപ്പെട്ട പ്രശ്നങ്ങളും, അഭ്യാസങ്ങളും ഇതുമായി ബന്ധപ്പെട്ട് പല തരത്തിലുണ്ട്. പ്രശ്നം നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നതിലൂടെ വിദ്യാർത്ഥിയുടെ കഴിവ് വർദ്ധിക്കാൻ സാധിക്കുന്നു. അതിനാൽ അധ്യാപകരുടെ പങ്ക് എന്നത് കുട്ടികളുടെ പ്രശ്നം പരിഹരിച്ചു കൊടുക്കുന്നതും, അതുമായി ബന്ധപ്പെട്ട് പ്രശ്നങ്ങൾ സ്വന്തമായി ചെയ്യുന്നതിന് തയ്യാറാക്കുന്നു എന്നതാണ്. ഹയർസെക്കന്ററി പഠനത്തിന്റെ രണ്ടാം വർഷമെന്നത് ഉന്നത വിദ്യാഭ്യാസത്തിലേയ്ക്കുള്ള അടിസ്ഥാനമാണ്. അതിനാൽ ഈ പുസ്തകത്തിൽ ഊന്നൽ നൽകിയിട്ടുള്ള എല്ലാ ആശയങ്ങൾക്കും അതിന്റേതായ പ്രാധാന്യം നൽകി കുട്ടികൾ മനസ്സിലാക്കേണ്ടതാണ്.

12th_Maths_MAL_Vol1_FP.indd 3 2/25/2023 12:04:57 PM

ഉള്ളടക്കം

ഗണിതശാസ്ത്രം

അദ്ധ്യായം	പാഠവിവരം	പേജ്	മാസം
1	**മാട്രിക്സുകളുടേയും ഡിറ്റർമിനന്റുകളുടേയും പ്രയോഗങ്ങൾ**	**1**	**ജൂൺ**
1.1	ആമുഖം	1	
1.2	ഒരു നോൺ സിംഗുലർ സമചതുമാട്രിക്സിന്റെ വിപരീതം	2	
1.3	ഒരു മാട്രിക്സിന്റെ എലിമെന്ററി പരിവർത്തനം	16	
1.4	മാട്രിക്സുകളുടെ പ്രയോഗങ്ങൾ: രേഖീയ സമീകരണങ്ങളുടെ പരിഹാര സംവിധാനം	27	
1.5	മാട്രിസസ്സിന്റെ പ്രയോഗങ്ങൾ: റാങ്ക് രീതിയനുസരിച്ച് രേഖീയ സമീകരണങ്ങളുടെ സ്ഥിരത	38	
2	**സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകൾ**	**52**	**ജൂലൈ**
2.1	സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകളുടെ ആമുഖം	52	
2.2	സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകൾ	54	
2.3	സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകളുടെ അടിസ്ഥാന ബീജഗണിത സവിശേഷതകൾ	58	
2.4	സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയുടെ സംയോജനം	60	
2.5	സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകളുടെ മോഡൂലസ്	66	
2.6	സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകളുടെ ജ്യാമിതിയും ലോക്കസും	73	
2.7	സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയുടെ പോളാർ രൂപവും ഓയ്ലർ രൂപവും	75	
2.8	ഡി മൂവീസ് സിദ്ധാന്തവും അതിന്റെ പ്രായോഗികതകളും	83	
3	**സമവാക്യങ്ങളുടെ സിദ്ധാന്തം**	**97**	**ജൂലൈ**
3.1	ആമുഖം	97	
3.2	പോളിനോമിയൽ സമവാക്യങ്ങളുടെ അടിസ്ഥാനങ്ങൾ	99	
3.3	വിറ്റായുടെ സൂത്രങ്ങളും പോളിനോമിയൽ സമീകരണത്തിന്റെ രൂപീകരണവും	100	
3.4	ബഹുപദ വ്യംജകങ്ങളുടെ മൂലകങ്ങളുടെ സ്വഭാവവും, ഗുണാങ്കങ്ങളുടെ സ്വഭാവവും	107	
3.5	പോളിനോമിയൽ സമവാക്യങ്ങളുടെ ജ്യാമിതിയിലെ പ്രയോഗങ്ങൾ	111	
3.6	ഉയർന്ന കൃതിയുള്ള പോളിനോമിയൽ സമീകരണങ്ങളുടെ മൂലങ്ങൾ	112	
3.7	പോളിനോമിലിന്റെ കൂടുതൽ വിവരങ്ങൾ	113	
3.8	മറ്റൊരു വിവരങ്ങൾ ഒന്നുമില്ലാത്ത പോളിനോമിയൽ സമീകരണം	118	
3.9	ഡെസ്കാർട്ട്സ് നിയമം	124	
4	**വിപരീത ത്രികോണമിതി ഫലനം**	**129**	**ജൂലൈ/ ആഗസ്റ്റ്**
4.1	ആമുഖം	129	
4.2	ചില അടിസ്ഥാന ആശയങ്ങൾ	130	

12th_Maths_MAL_Vol1_FP.indd 4 2/25/2023 12:04:57 PM

4.3	സൈൻ ഫലനവും വിപരീത സൈൻ ഫലനവും	133	
4.4	കൊസൈൻ ഫലനവും വിപരീത കൊസൈൻ ഫലനവും	138	
4.5	ടാൻജന്റ് ഫലനവും വിപരീത ടാൻജന്റ് ഫലനവും	143	
4.6	കൊസീക്കന്റ് ഫലനവും വിപരീത കൊസീക്കന്റ് ഫലനവും	148	
4.7	സീക്കന്റ് ഫലനവും വിപരീത സീക്കന്റ് ഫലനവും	149	
4.8	കോടാൻജന്റ് ഫലനവും വിപരീത കോടാൻജന്റ് ഫലനവും	151	
4.9	വിപരീത ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളുടെ പ്രധാന മൂല്യം	153	
4.10	വിപരീത ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളുടെ സവിശേഷതകൾ	155	
5	**ദ്വിമാന വിശ്ലേഷിക ജ്യാമിതി-II**	**172**	**ആഗസ്റ്റ്**
5.1	ആമുഖം	172	
5.2	വൃത്തം	173	
5.3	കോണിക്സ്	182	
5.4	കോണിക് വിഭജനങ്ങൾ	197	
5.5	കോണിക്കിന്റെ പാരാമെട്രിക് രൂപം	199	
5.6	കോണിക്കിന്റെ സ്പർശരേഖയും ലംബരേഖയും	201	
5.7	നിത്യ ജീവിതത്തിൽ കോണിക്കിന്റെ പ്രയോഗങ്ങൾ	207	
6	**സദിശ ബീജഗണിതത്തിന്റെ പ്രയോഗങ്ങൾ**	**221**	**ആഗസ്റ്റ്/ സെപ്റ്റംബർ**
6.1	ആമുഖം	221	
6.2	സദിശങ്ങൾക്ക് ജ്യാമിതീയ ആമുഖം	222	
6.3	അഭിശ ഗുണനവും സഭിശ ഗുണനവും	224	
6.4	അദിശ ട്രിപ്പിൾ ഗുണനം	231	
6.5	സദിശ ട്രിപ്പിൾ ഗുണനം	238	
6.6	ജേക്കോബിയുടെ സർവ്വസമവാക്യവും ലെഗ്രാഞ്ചിയുടെ സർവ്വസമവാക്യവും	239	
6.7	ത്രിമാന ജ്യാമിതിയിലേക്ക് സദിശങ്ങളുടെ പ്രയോഗം	242	
6.8	തലത്തിന്റെ സമവാക്യം വിവിധ രൂപത്തിൽ	255	
6.9	ഒരു തലത്തിലെ ബിന്ദുവിന്റെ ബിംബം	273	
6.10	ഒരു നേർരേഖയുംഒരു തലവും സന്ധിക്കുന്ന ബിന്ദു	274	
ഉത്തരങ്ങൾ		**282**	
പദപരിചയം		**292**	

GEK8O

ഇ ബുക്ക്

N9UVC

വിലയിരുത്തൽ

12th_Maths_MAL_Vol1_FP.indd 5 2/25/2023 12:04:57 PM

12th_Maths_MAL_Vol1_FP.indd 6

ഹയർ സെക്കന്ററി പഠനം പൂർത്തിയാക്കിയശേഷമുള്ള സാധ്യത



EXAMS

Joint Entrance Examination (JEE) Main	
Purpose	For Admission in B. E./B. Tech., B. Arch., B. Planning
Eligibility	Class 12 pass (PCM)
Application Mode	Online
Source	http://jeemain.nic.in
JEE Advanced	
Purpose	Admission in UG programmes in IITs and ISM Dhanbad
Eligibility	Class 12 Pass (PCM)
Application Mode	Online
Source	http://jeeadv.iitd.ac.in/
Indian Maritime University Common Entrance Test	
Purpose	Admission in Diploma in Nautical Science (DNS) leading to BSc. (Nautical Science)
Eligibility	Class 12 (PCM)
Application Mode	By post
Source	www.imu.edu.in/index.php
Indian Navy B.Tech Entry Scheme	
Purpose	Admission in Indian Navy B.Tech course
Eligibility	Class 12 passed
Application Mode	Online
Source	www.nausena-bharti.nic.in/index.php



EXAMS

Indian Navy Sailors Recruitment	
Purpose	Admission in 24 weeks Basic training at INS Chilka followed by Professional training
Eligibility	Class 12 (Maths and Physics/Chem./Bio/Computer Sc.)
Application Mode	Online, By Post
Source	www.nausena-bharti.nic.in/index.php
Defence Indian Army Technical Entry Scheme (TES)	
Purpose	Technical Entry to Army
Eligibility	Class 12 PCM
Application Mode	Online
Source	www.joinindianarmy.nic.in/
National Defence Academy and Naval Academy Examination (I)	
Purpose	Admission to Army and Air Force wings of NDA and 4 years B. Tech course for the Indian Naval Academy Course (INAC)
Eligibility	Class 12 Passed
Application Mode	Online
Source	www.upsc.gov.in/

2/25/2023 12:04:57 PM

12th_Maths_MAL_Vol1_FP.indd 7

ഹയർ സെക്കന്ററി പഠനം പൂർത്തിയാക്കിയശേഷമുള്ള സാധ്യത



EXAMS

- If you have aspiration to become a scientist/teacher, you can do degree course in mathematics in any college of your choice. Doing B.Sc., mathematics with your knowledge which acquired in XII standard mathematics will definitely elevate you to a better career.
- There are some institutions such as IIT's, IISc., ISI's and Anna University which admit students at XII Standard level for their Integrated Courses leading to the award of M.Sc., degree in mathematics/engineering/Statistics/ Computer Science .

In Mathematics, the following degrees programmes are offered:

- 3-year BSc	- 4-year Integrated B.Sc-B.Ed.
- 3-year B. Math	- 4-year BS
- 4-year B. Tech	- 5-year Integrated M.Sc /MS

BITSAT

Purpose- For admission to Integrated First Degree Programmes in BITS Pilani, Goa & Hyderabad campuses.

National Aptitude Test in Architecture (NATA)

Purpose- Admission to B.Arch. program

Kishore Vaigyanik Protsahan Yojana (KVPY)

Purpose- Fellowship and admission to IISc Banglore in 4 year BS Degree

Indian Statistical Institute (ISI) Admission

Purpose-Admission in B Stat (Hons), B Math (Hons)

Chennai Mathematical Institute

Purpose- Admission in BSc (Hons) in Mathematics and Computer Science, BSc (Hons) in Mathematics and Physics



Job Opportunities

- You have acquired sufficient analytical still to appear for competitive examinations conducted by various organizations such as TNPSC, UPSC, BSRB, RSB.
- You are placed with better opportunity to get recruitment directly into some of the top Multi National Companies.
- You can plan to take up engineering degree course to acquire BE/B.TECH in any of the leading Technical Institutions/Universities/Engineering colleges. Institutions such as IIT's , IISc, NIT's conduct All India Level Entrance Examinations to admit students.

• Indian Forest Services	• Scientist Jobs in ISRO, DRDO, CSIR labs
• Union Public Service Commission	• Staff Selection Commission
• Indian Defense Services	• Public Sector Bank
• Tax Assistant	• Statistical Investigator
• Combined Graduate Level Exam	• Tamil Nadu Public Service Commission
• Teaching Profession	

2/25/2023 12:04:58 PM

12th_Maths_MAL_Vol1_FP.indd 8

Scholarship and Research Opportunities



FINANCIAL ASSISTANCE

- **Scholarship for Graduate and Post – Graduate courses**
- **NTSE at the end of X (from class XI to Ph.D)**
- **International Olympiad: for getting stipend for Higher Education in Science and Mathematics**
- **DST – INSPIRE Scholarships (for UG and PG)**
- **DST – INSPIRE Fellowships (for Ph.D)**
- **UGC National Fellowships (for Ph.D)**
- **Indira Gandhi Fellowship for Single Girl Child (for UG and PG)**
- **Moulana Azad Fellowship for minorities (for Ph.D)**
- **In addition various fellowships for SC / ST / PWD / OBC etc are available. (Visit website of University Grants Commission (UGC) and Department of Science and Technology (DST))**
- **University Fellowships**
- **Tamil Nadu Collegiate Education fellowship.**



RESEARCH INSTITUTIONS

NAME OF THE INSTITUTION	WEBSITE
Indian Institute of Science (IISc) Bangalore	www.iisc.ac.in
Chennai Mathematical Institute (CMI) Chennaie	www.cmi.ac.in
Tata Institue of Fundamental Research (TIFR) Mumbai	www.tifr.res.in
Indian Institute of Space Science and Technology (IIST) Trivandrum	www.iist.ac.in
National Institute of Science Education and Research (NIS-ER)	www.niser.ac.in
Birla Institute of Technology and Science, Pilani	www.bits-pilani.ac.in
Indian Institute of Science Education and Research	www.iiseradmission.in
Anna University	https://www.annauniv.edu/
Indian Institute of Technology in various places (IIT's)	www.iitm.ac.in
National Institute of Technology (NITs)	www.nitt.edu
Central Universities	www.cucet.ac.in
State Universities	www.ugc.ac.in
Tamil Nadu agricultural University (tnau.ac.in)	tnau.ac.in
International Institute of Information Technology	www.iiit.ac.in
The Institute of Mathematical Sciences (IMSC) Chennai.	www.imsc.res.in
Hyderabad Central university, Hyderabad.	www.uohyd.ac.in
Delhi University, Delhi	www.du.ac.in
Mumbai University, Mumbai	www.mu.ac.in
Savithiri Bai Phule Pune University, Pune	www.unipune.ac.in

2/25/2023 12:04:59 PM

അദ്ധ്യായം

1

മാട്രിക്സുകളുടേയും ഡിറ്റർമിനന്റുകളുടേയും പ്രയോഗങ്ങൾ

GWEX7

"ആർക്കിമിഡീസ്, ന്യൂട്ടൺ, ഗാസ് എന്നിവരെപ്പോലെ ഏറ്റവും വലിയ ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞർ എല്ലായ്പ്പോഴും സിദ്ധാന്തത്തേയും പ്രയോഗങ്ങളെയും തുല്യ അളവിൽ ഏകികരിച്ചു."

-ഫെലിക്സ് ക്ലൈൻ

1.1 ആമുഖം



കാൾ ഫ്രഡറിക്ക് ഗാസ്സ്
(1777-1855)
ജർമ്മൻ ഗണിത ഭൗതിക ശാസ്ത്രജ്ഞൻ

യഥാർത്ഥ ലോക പ്രശ്നങ്ങളുടെ ഗണിത ശാസ്ത്ര മോഡലുകളായി ഉയർന്നുവരുന്ന ലീനിയർ സമീകരണങ്ങൾ കൈകാര്യം ചെയ്യുന്നതിൽ മാട്രിക്സ് വളരെ പ്രധാന പ്പെട്ടതും ഒഴിച്ച് കൂടാനാവാത്തതുമാണ്. രേഖീയ സമീകരണങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണം കണ്ടുപിടിയ്ക്കാൻ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞരായ ഗാസ്സ്, ജോർഡാൻ, കേയ്ലി, ഹാമിൽട്ടൺ എന്നിവർ വികസിപ്പിച്ചെടുത്ത മാട്രിക്സുകളുടെ സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച് വരുന്നു.

ഈ അദ്ധ്യായത്തിൽ രേഖീയ സമീകരണങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണത്തിന് മാട്രിക് സുകളുടെ ചില പ്രയോഗങ്ങൾ ഞങ്ങൾ അവതരിപ്പിക്കുന്നു. വ്യക്തമായി പറഞ്ഞാ ൽ നാല് രീതികൾ അതായത് (i) മാട്രിക്സ് വിപരീത രീതി (ii) ക്രാമർ നിയമം (iii) ഗാസ്സിയൻ എലിമിനേഷൻ രീതി (iv) റാങ്ക് രീതി. ഇതിനെ കുറിച്ച് പഠിക്കുന്ന തിനു മുമ്പ് മറ്റ് ചില കാര്യങ്ങൾ പരിചയപ്പെടുത്താം (i) നോൺസിംഗുളർ ചതുര മാട്രിക്സിന്റെ വിപരീതം (ii)ഒരു മാട്രികസിന്റെ റാങ്ക് (iii) വരിയുടെയും നിരയു ടെയും എലിമെന്ററി പരിവർത്തനം (iv) രേഖീയ സമീകരണങ്ങളുടെ സ്ഥിരത.

പഠന ലക്ഷ്യങ്ങൾ

ഈ പാഠഭാഗം മുഴുവനാകുമ്പോൾ വിദ്യാർത്ഥികൾക്ക് വ്യക്തമായി വിവരിക്കാനാവുന്നത്

- രേഖീയ സമീകരണങ്ങളുടെ വിവിധ രീതിയിലുള്ള നിർദ്ധാരണം
  - സമചതുരമാട്രിക്സിന്റെ അഡ്ജോയിന്റ്
  - നോൺസിംഗുളർ മാട്രിക്സിന്റെ വിപരിതം
  - എലിമെന്ററി വരി അല്ലെങ്കിൽ തിരപ്രവർത്തന രീതി
  - വരി എക്കലോൺ രൂപം
  - മാട്രിക്സിന്റെ റാങ്ക്
- പരിപ്രവർത്തനരീതി ഉപയോഗിച്ച് നോൺസിംഗുളർ മാട്രിക്സുകളുടെ വിപരീതം കണ്ട്പിടിക്കാൽ
- രേഖീയ സമീകരണങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണം കാണാൻ ചില തന്ത്രങ്ങൾ വിവരിക്കുന്നുണ്ട്
  - മാട്രിക്സ് വിപരിത രീതി
  - ക്രാമർ നിയമം
  - ഗാസ്സിയൻ എലിമിനേഷൻ രീതി
- സമജാതീയമല്ലാത്ത രേഖീയ സമീകരണങ്ങളുടെ സ്ഥിരത പരിശോധിക്കൽ
- സമജാതീയമായ രേഖീയ സമീകരണങ്ങളുടെ നോൺട്രിവിയൽ നിർദ്ധാരണം പരിശോധിക്കൽ

Mal_12th_Maths_Vol1_CH 1_Matrices.indd 1 14-02-2023 17:44:46

1.2 ഒരു നോൺ സിംഗുലർ സമചതുരമാട്രിക്സിന്റെ വിപരീതം

ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സിന്റെ ഡിറ്റർമിനന്റ് മൂല്യം പൂജ്യമാല്ലെങ്കിൽ ആ സമചതുര മാട്രിക്സിനെ **നോൺ സിംഗുലർ** എന്നും അതിന്റെ സിറ്റർമിതന്റ് മൂല്യം പൂജ്യമാണെങ്കിൽ ആ **മാട്രിക്സിനെ സിംഗുലർ** എന്നും വിളിക്കുന്നു. ഒരു മാട്രിക്സിനെ ഒരു അദിശം (scalar) കൊണ്ട് ഗുണിക്കുക, രണ്ട് മാട്രിക്സുകളുടെ സങ്കലനം, രണ്ട് മാട്രിക്സുകളുടെ ഗുണനം എന്നിവയെ കുറിച്ച് ഇതിനകം പഠിച്ചു. എന്നാൽ മാട്രിക്സ് എന്ന് പറയുന്നത് സംഖ്യകളുടെ ഒരു ക്രമീകരണം മാത്രമായത് കൊണ്ടും സംഖ്യാ മൂല്യമില്ലാത്തത് കൊണ്ടും ഒരു മാട്രിക്സിനെ മറ്റൊരു മാട്രിക്സ് കൊണ്ട് ഹരിക്കാൻ ഒരു നിയമം രൂപപ്പെടുത്താൻ കഴിയില്ല. ഒരു മാറടിക്സിന്റെ ക്രമം n ആണെന്ന് പറയുമ്പോൾ അർത്ഥമാക്കുന്നത് n വരികളും നിരകളും ഉള്ള ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സാണ്. $x \neq 0$, എന്ന വാസ്തവിക സംഖ്യയിൽ $y\left(=\frac{1}{x}\right)$, നിലനിൽക്കുക. ഇതിനെ x ന്റെ വിപരീതം അല്ലെങ്കിൽ വ്യുൽക്രമം എന്ന് പറയുന്നു. ഇവിടെ $xy = yx = 1$ ഇതേ രീതിയിൽ മാട്രിക്സിന്റെ കാര്യത്തിൽ ചിന്തിച്ചാൽ തന്നിരിക്കുന്ന ഒരു മാട്രിക്സ് A യ്ക്ക് മറ്റൊരു മാട്രിക്സ് B തിരഞ്ഞ് പിടിച്ച് AB യുടെയും BA യുടെയും ഗുണനം സാധ്യമാകുകയും $AB = BA = I$, യുമാണെങ്കിൽ I യെ അനന്യമാട്രിക്സ് എന്ന് പറയും.

ഈ വിഭാഗത്തിൽ നോൺ സിംഗുലർ മാട്രിക്സുകളെക്കുറിച്ച് നിർവ്വചിക്കുകയും ഒരു നോൺ സിംഗുലർ മാട്രിക്സിന്റെ വിപരീതം അദ്വിതീയമാണ് എന്ന് തെളിയിക്കുകയും ചെയ്യും. വിപരീതമാട്രിക്സുകളുടെ ഗുണങ്ങളെ കുറിച്ച് ഇവിടെ പഠിക്കും. ഇതിനെല്ലാത്തിനും നമുക്ക് സമചതുര മാട്രിക്സിന്റെ അഡ്ജോയിന്റ് എന്ന ഒരു മാട്രിക്സ് ആവശ്യമാണ്.

1.2.1 ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സിന്റെ അഡ്ജോയിന്റ്

ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സിലെ അംഗങ്ങളുടെ കോഫാക്റ്ററുകളുടെ (സഹഘടകം) ഗുണങ്ങളെ കുറിച്ച് നമ്മൾ ഓർക്കുന്നു. ക്രമം n ആയ ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സിന്റെ ഡിറ്റർമിനന്റ് മൂല്യത്തെ $|A|$ അല്ലെങ്കിൽ $\det(A)$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. i^{th} വരിയും j^{th} നിരയും സംഗമിക്കുന്ന ഇടത്തിലെ അംഗത്തിനെ a_{ij} എന്ന് കുറിക്കുന്നു. i^{th} വരിയും j^{th} നിരയും ഒഴിവാക്കിയാൽ $(n-1)$. ക്രമം ഉള്ള ഒരു ഉപമാട്രിക്സ് ലഭിക്കും. അതിന്റെ ഡിറ്റർമിനന്റ് മൂല്യത്തെ a_{ij}. യുടെ മൈനർ എന്ന് പറയുന്നു. ഇതിനെ M_{ij}. കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. M_{ij}. യുടെയും $(-1)^{i+j}$ യുടെയും ഗുണനഫലത്തെ a_{ij}. യുടെ കോഫാക്റ്റർ എന്ന് പറയുന്നു. ഇതിനെ A_{ij}. കൊണ്ട് കുറിക്കുന്നു. $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സിന്റെ അംഗങ്ങളെയും അവയുടെ കോഫാക്റ്ററുകളെയും ബന്ധിപ്പിക്കുന്ന പ്രധാന കാര്യം എന്തെന്നാൽ ഒരേ വരിയിലെ തന്നെ അംഗങ്ങളുടെയും അവയുടെ അനുബന്ധ കോഫാക്റ്ററുകളുടെയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ ആകെ തുക ആ മാട്രിക്സിന്റെ ഡിറ്റർമിനന്റ് മൂല്യത്തിന് തുല്യമാകുന്നു. അതേ പോലെ ഒരു വരിയിലെ അംഗങ്ങളുടെയും മറ്റൊരു വരിയിലെ അംഗങ്ങളുടെ അനുബന്ധ കോഫാക്റ്ററുകളുടെയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ ആകെ തുക പൂജ്യം ആകുന്നു.

$$\text{അതായത് } a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} |A| & \text{if } i = j \quad \text{എങ്കിൽ} \\ 0 & \text{if } i \neq j, \quad \text{എങ്കിൽ} \end{cases}$$

ഇതിൽ $|A|$ സമചതുരമാട്രിക്സ് A യുടെ ഡിറ്റർമിനന്റ് ആകുന്നു. ഇതിൽ $|A|$ ഇതിനെ ഡിറ്റർമിനന്റ് A എന്ന് ഉച്ചരിക്കുന്നു. അല്ലാതെ മോടുലസ്സ് A എന്നല്ല. ഇതിൽ ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടത് $|A|$ എന്നത് ഒരു വാസ്തവിക സംഖ്യയാണ് അതുകൊണ്ട് അത് നെഗറ്റീവും ആകാം (ഋണാങ്കം)

ഉദാഹരണത്തിന് $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2(1-2) - 1(1-2) + 1(2-2) = -2 + 1 + 0 = -1.$

നിർവ്വചനം 1.1

A എന്നത് ക്രമം n. ആയ ഒരു ചതുരമാട്രിക്സ് എന്നിരിക്കട്ടെ. അതിലെ ഓരോ അംഗമായ a_{ij} യ്ക്കും പകരം അതിന്റെ അനുബന്ധ കോഫാക്റ്റർ മൂല്യം കൊടുത്താൽ ലഭിക്കുന്ന മാട്രിക്സിനെ A യുടെ കോഫാക്റ്റർ മാട്രിക്സ് എന്നു പറയും. ഈ കോഫാക്ടർ മാട്രിക്സിന്റെ വരിയെ നിരയാക്കിയും നിരയെ വരിയാക്കിയും എഴുതിയാൽ കിട്ടുന്ന മാട്രിക്സിനെ A യുടെ അഡ്ജോയിന്റ് മാട്രിക്സ് ($\text{adj } A.$) എന്നും നിർവ്വചിക്കുന്നു.

Mal_12th_Maths_Vol1_CH 1_Matrices.indd 2 14-02-2023 17:44:59

കുറിപ്പ്

adj A എന്നത് n ക്രമം ഉള്ള ഒരു സമചതുരമാട്രിക്സ് ആണ്. $\text{adj } A = \left[A_{ij}\right]^T = \left[(-1)^{i+j} M_{ij}\right]^T$.

ക്രമം 3 ആയ ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സിന്റെ (adj A) താഴെ കൊടുക്കുന്നു :

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} +M_{11} & -M_{12} & +M_{13} \\ -M_{21} & +M_{22} & -M_{23} \\ +M_{31} & -M_{32} & +M_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}.$$

സിദ്ധാന്തം 1.1

ക്രമം n ആയ എല്ലാ സമ ചതുര മാട്രിക്സ് A യ്ക്കും ബാധകമായത് $A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A| I_n$.

തെളിവ്

എളുപ്പത്തിനായി $n = 3$ മാത്രം എടുത്ത് സിദ്ധാന്തം തെളിയിക്കാം.

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. പരിഗണിക്കുക

അപ്പോൾ നമുക്കു ലഭിക്കുന്നവ

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = |A|, \quad a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0, \quad a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} = 0;$$
$$a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} = 0, \quad a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = |A|, \quad a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33} = 0;$$
$$a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13} = 0, \quad a_{31}A_{21} + a_{32}A_{22} + a_{33}A_{23} = 0, \quad a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} = |A|.$$

മുകളിലെ സമവാക്യങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചാൽ നമുക്കു ലഭിക്കുന്നത്

$$A(\text{adj}A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix} = |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = |A| I_3 \qquad \ldots (1)$$

$$(\text{adj}A)A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix} = |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = |A| I_3, \qquad \ldots (2)$$

ഇതിൽ I_3 എന്നത് അനന്യ മാട്രിക്സ് ആകുന്നു. അതിന്റെ ക്രമം 3 ആണ്.

സമവാക്യങ്ങൾ (1) ഉം (2) ഉം കണക്കാക്കുമ്പോൾ നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നത് $A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A| I_3$. ■

കുറിപ്പ്

A എന്നത് ക്രമം n ആയ ഒരു സിംഗുലർ മാട്രിക്സ് ആണെങ്കിൽ $|A| = 0$ ആയിരിക്കും. അപ്പോൾ $A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = O_n$, ഇവിടെ O_n എന്നത് ക്രമം n. ആയ പൂജ്യം മാട്രിക്സ് ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം 1.1

$A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$, എങ്കിൽ $A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A| I_3$. തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$$|A| = \begin{vmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 8(21-16) + 6(-18+8) + 2(24-14) = 40 - 60 + 20 = 0.$$

Mal_12th_Maths_Vol1_CH 1_Matrices.indd 3 14-02-2023 17:45:15

അഡ്ജോയിന്റിന്റെ നിർവ്വചന പ്രകാരം നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നത്

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} (21-16) & -(-18+8) & (24-14) \\ -(-18+8) & (24-4) & -(-32+12) \\ (24-14) & -(-32+12) & (56-36) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 10 \\ 10 & 20 & 20 \\ 10 & 20 & 20 \end{bmatrix}.$$

$$A(\text{adj } A) = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 10 & 10 \\ 10 & 20 & 20 \\ 10 & 20 & 20 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 40-60+20 & 80-120+40 & 80-120+40 \\ -30+70-40 & -60+140-80 & -60+140-80 \\ 10-40+30 & 20-80+60 & 20-80+60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0I_3 = |A| I_3,$$

അതുപോലെ

$$(\text{adj } A)A = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 10 \\ 10 & 20 & 20 \\ 10 & 20 & 20 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 40-60+20 & -30+70-40 & 10-40+30 \\ 80-120+40 & -60+140-80 & 20-80+60 \\ 80-120+40 & -60+140-80 & 20-80+60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0I_3 = |A| I_3.$$

ആയതിനാൽ, $A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A| I_3.$

1.2.2 ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സിന്റെ വിപരീതത്തിന്റെ നിർവ്വചനം

നിർവ്വചനം 1.2

A എന്നത് ക്രമം n. ആയ ഒരു സമചതുരമാട്രിക്സ് എന്നിരിക്കട്ടെ. അതേ ക്രമം n. ആയ ഒരു സമചതുരമാട്രിക്സ് B നിലനിൽക്കുകയും $AB = BA = I_n$, ആകുകയും ചെയ്താൽ മാട്രിക്സ് B യെ മാട്രിക്സ് A. യുടെ വിപരീതം എന്ന് പറയും.

സിദ്ധാന്തം 1.2

ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സിന് വിപരീതമുണ്ടെങ്കിൽ അത് അദ്വിതീയമാണ്.

തെളിവ്

ക്രമം n ആയ ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സിന് വിപരീതം നിലനിൽക്കുന്നു. എന്നിരിക്കട്ടെ ഒപ്പം തന്നെ A യ്ക്ക് രണ്ട് വിപരീതമുണ്ടെിന്നും അവ B യും C യും ആണെന്നും കരുതുക $AB = BA = I_n$, $AC = CA = I_n$ ആകുന്നു.

ഈ സമവാക്യങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചാൽ നമുക്ക് ലഭിയ്ക്കുന്നത്

$$C = CI_n = C(AB) = (CA)B = I_nB = B.$$

അങ്ങനെ വിപരീതം അദ്വിതീയമാണെന്ന് തെളിഞ്ഞു.

അടയാളം : A യുടെ വിപരീതം A^{-1}. എന്ന അടയാളം കൊണ്ട് കുറിക്കുന്നു.

കുറിപ്പ്

$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$

Mal_12th_Maths_Vol1_CH 1_Matrices.indd 4 14-02-2023 17:45:26

സിദ്ധാന്തം 1.3

A ക്രമം n. ആയ ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സ് എന്നിരിക്കട്ടെ. ഇവിടെ A നോൺസിംഗുലർ ആണെങ്കിൽ മാത്രമേ A^{-1} നിലനിൽക്കുള്ളൂ.

തെളിവ്

A^{-1} നിലനിൽക്കുന്നു എന്ന് കരുതുക അപ്പോൾ $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

ഡിറ്റർമിനന്റുകളുടെ ഗുണനനിയമം അനുസരിച്ച് കിട്ടുന്നത്

$\det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}) = \det(A^{-1})\det(A) = \det(I_n) = 1$. അപ്പോൾ, $|A| = \det(A) \neq 0$.

അങ്ങനെ A നോൺ സിംഗുലർ.

മറിച്ച് A നോൺസിംഗുലർ എന്ന് സങ്കല്പിക്കുക.

അപ്പോൾ $|A| \neq 0$. സിദ്ധാന്തം 1.1, അനുസരിച്ച് ലഭിയ്ക്കുന്നത്

$$A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A| I_n.$$

ഇതിനെ $|A|$, കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്നത് $A\left(\frac{1}{|A|}\text{adj } A\right) = \left(\frac{1}{|A|}\text{adj } A\right)A = I_n$.

ഇപ്രകാരം നമുക്ക് $AB = BA = I_n$. ആയ $B = \frac{1}{|A|}\text{adj } A$ കണ്ടെത്താൻ സാധിക്കും

അപ്പോൾ A യുടെ വിപരീതം ആയ $\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj } A.}$ നിലനിൽക്കും

നിരൂപണം

ഒരു സിംഗുലർ മാട്രിക്സ് വിപരീതം ഇല്ല കാരണം അതിന്റെ ഡിറ്റർമിനന്റ് പൂജ്യം ആണ്.

ഉദാഹരണം 1.2

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ നോൺസിംഗുലർ ആണെങ്കിൽ A^{-1}. കണ്ടുപിടിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

ആദ്യം adj A. കണ്ടുപിടിക്കാം. നിർവ്വചനം അനുസരിച്ച് $\text{adj } A = \begin{bmatrix} +M_{11} & -M_{12} \\ -M_{21} & +M_{22} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

A നോൺ സിംഗുലർ ആയത് കൊണ്ട്, $|A| = ad - bc \neq 0$.

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj } A$, ആയത് കൊണ്ട് നമുക്ക് $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$. ലഭിക്കും.

ഉദാഹരണം 1.3

$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -5 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. എന്ന മാട്രിക്സിന്റെ വിപരീതം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -5 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. എന്നിരിക്കട്ടെ. അപ്പോൾ $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -5 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2(7) + (-12) + 3(-1) = -1 \neq 0.$

ആയതുകൊണ്ട്, A^{-1} നിലനിൽക്കും. ഇപ്പോൾ നമുക്ക്,

Mal_12th_Maths_Vol1_CH 1_Matrices.indd 5 14-02-2023 17:45:41

$$\text{adj}\,A = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 7 & 12 & -1 \\ 9 & 15 & -1 \\ -10 & -17 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 7 & 9 & -10 \\ 12 & 15 & -17 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

ആയത് കൊണ്ട്, $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj}\,A) = \frac{1}{(-1)}\begin{bmatrix} 7 & 9 & -10 \\ 12 & 15 & -17 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -9 & 10 \\ -12 & -15 & 17 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

1.2.3 മാട്രിക്സുകളുടെ വിപരീതങ്ങളുടെ ഗുണങ്ങൾ

നോൺസിംഗുലർ മാട്രിക്സുകളിൽ ഞങ്ങൾ ചില സിദ്ധാന്തങ്ങൾ പ്രസ്താവിക്കുകയും തെളിയിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു.

സിദ്ധാന്തം 1.4

മാട്രിക്സ് A നോൺസിംഗുലർ ആണെങ്കിൽ

(i) $\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$ (ii) $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$ (iii) $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$ ഇവിടെ λ എന്നത് ഒരു പൂജ്യമല്ലത്ത അദിശം ആകുന്നു.

തെളിവ്

A നോൺസിംഗുലർ മാട്രിക്സ് എന്നിരിയ്ക്കട്ടെ അപ്പോൾ $|A| \neq 0$ ആകുകയും A^{-1} നിലനിൽക്കുകയും ചെയ്യും. നിർവ്വചനമനുസരിച്ച്

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n. \qquad \ldots(1)$$

(i) സമവാക്യം (1), ഉപയോഗിച്ചാൽ $\left|AA^{-1}\right| = \left|A^{-1}A\right| = |I_n|$. ലഭിയ്ക്കും.

ഡിറ്റർമിനന്റുകളുടെ ഗുണനനിയമം ഉപയോഗിച്ചാൽ $|A|\left|A^{-1}\right| = |I_n| = 1$.

അപ്പോൾ, $\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$.

(ii) വീണ്ടും സമവാക്യം (1), ഉപയോഗിച്ചാൽ $\left(AA^{-1}\right)^T = \left(A^{-1}A\right)^T = \left(I_n\right)^T$. ലഭിയ്ക്കും.

ഇവിടെ ട്രാൻസ്പോസിന്റെ വിപരീത നിയമം അനുസരിച്ച് ലഭിച്ചത്

$\left(A^{-1}\right)^T A^T = A^T\left(A^{-1}\right)^T = I_n$. ഇപ്പോൾ $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$. ആകുന്നു.

(iii) λ എന്നത് പൂജ്യമല്ലാത്ത അദിശം ആയത് കൊണ്ടും, അതുപോലെ (1), ഉപയോഗിച്ചും

$(\lambda A)\left(\frac{1}{\lambda}A^{-1}\right) = \left(\frac{1}{\lambda}A^{-1}\right)(\lambda A) = I_n$. ലഭിക്കുന്നു.

അതുകൊണ്ട്, $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$.

സിദ്ധാന്തം 1.5 (ലെഫ്റ്റ് ക്യാൻസലേഷൻ നിയമം)

A, B, C എന്നിവ ക്രമം n. ആയ സമചതുരമാട്രിക്സുകളാണെന്നിരിക്കട്ടെ. A നോൺ സിംഗുലാർ ആകുകയും $AB = AC$, യും ആണെങ്കിൽ $B = C$. ആയിരിക്കും.

തെളിവ്

A നോൺസിംഗുലർ ആയത് കൊണ്ട് A^{-1} നിലനിൽക്കുകയും $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. ആയിരിക്കും. $AB = AC$ എടുത്ത് അതിന്റെ ഇരുവശത്തും മുന്നിലായി A^{-1}, കൊണ്ട് ഗുണിക്കുകയും അപ്പോൾ ലഭിക്കുന്നത് $A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC)$. ഇനി മാട്രിക്സ് ഗുണനത്തിലെ അസോസ്സിയേറ്റീവ് സവിശേഷതയും വിപരീത മാട്രിക്സിന്റെ സവിശേഷതയുമെ കൂടി ഉപയോഗിച്ചാൽ $B = C$. എന്ന് ലഭിക്കുന്നതായിരിക്കും.

Mal_12th_Maths_Vol1_CH 1_Matrices.indd 6 14-02-2023 17:45:56

സിദ്ധാന്തം 1.6 (റൈറ്റ് ക്യാൻസലേഷൻ നിയമം)

A, B, C എന്നിവ ക്രമം n. ആയ സമ ചതുരമാട്രിക്സുകളാണെന്നിരിക്കട്ടെ. A നോൺ സിംഗുലർ ആകുകയും $BA = CA$, യും ആണെങ്കിൽ $B = C$. ആയിരിക്കും.

തെളിവ്

A നോൺസിംഗുലർ ആയത് കൊണ്ട് A^{-1} നിലനിൽക്കുകയും $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. ആയിരിക്കും. $BA = CA$ എടുത്ത് അതിന്റെ ഇരുവശത്തും പിന്നിലായി A^{-1}, കൊണ്ട് ഗുണനം ചെയ്യുക. അപ്പോൾ $(BA)A^{-1} = (CA)A^{-1}$. ലഭിക്കും. ഇനി മാട്രിക്സ് ഗുണനത്തിലെ അസോസിയേറ്റീവ് സവിശേഷതയും വിപരീതമാട്രിക്സിന്റെ സവിശേഷതയും കൂടി ഉപയോഗിച്ചാൽ $B = C$. ലഭിക്കും. ■

കുറിപ്പ്

A സിംഗുലറും $AB = AC$ അല്ലെങ്കിൽ $BA = CA$, യും ആണെങ്കിൽ B യും C യും തുല്യമാകണമെന്നില്ല. ഉദാഹരത്തിന് ചുവടെയുള്ള മാട്രിക്സ് പരിഗണിക്കാം:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

ഇതിൽ നിന്നും മനസ്സിലാക്കുന്നത് $|A| = 0$ യും $AB = AC$ യും മാണ്, പക്ഷേ $B \neq C$

സിദ്ധാന്തം 1.7 വിപരീതങ്ങൾക്കായുള്ള എതിർ നിയമം

A യും B യും ഒരേ ക്രമമുള്ള നോൺസിംഗുലർ മാട്രിക്സുകളാണെങ്കിൽ അവയുടെ ഗുണനഫലം AB യും നോൺ സിംഗുലർ ആയിരിക്കും. ഒപ്പം തന്നെ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. മാണ്.

തെളിവ്

A യും B യും ഒരേ ക്രമം n. ആയ രണ്ട് നോൺസിംഗുലർ മാട്രിക്സുകളാണെന്ന് അനുമാനിക്കുക. അപ്പോൾ $|A| \neq 0$, $|B| \neq 0$, ആകുകയും A^{-1} ഉം B^{-1} നില നിൽക്കുകയും അവയുടെ ക്രമം ഒരേ പോലെ n. ഉം ആയിരിക്കും. അതുപോലെ AB യുടെ ഗുണനക്രമവും $B^{-1}A^{-1}$ ന്റെ ഗുണനക്രമവും n. ആയിരിക്കും. ഡിറ്റർമിനന്റുകളുടെ ഗുണനനിയമം ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ $|AB| = |A||B| \neq 0$. ലഭിക്കും. അപ്പോൾ AB നോൺ സിംഗുലർ

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (A(BB^{-1}))A^{-1} = (AI_n)A^{-1} = AA^{-1} = I_n;$$
$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = (B^{-1}(A^{-1}A))B = (B^{-1}I_n)B = B^{-1}B = I_n.$$

അതായത് $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. ■

സിദ്ധാന്തം 1.8 ഇരട്ട വിപരീത നിയമം

A നോൺ സിംഗുലർ ആണെങ്കിൽ A^{-1} ഉം നോൺ സിംഗുലർ ആയിരികയും $(A^{-1})^{-1} = A$. യും ആയിരിക്കും.

തെളിവ്

A മാട്രിക്സ് നോൺസിംഗുലർ എന്ന് അനുമാനിക്കുക. അപ്പോൾ $|A| \neq 0$, A^{-1} നിലനിൽക്കും.

അപ്പോൾ $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ ഉം നോൺസിംഗുലർ ഒപ്പം തന്നെ, $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

$$AA^{-1} = I \Rightarrow \left(AA^{-1}\right)^{-1} = I \Rightarrow \left(A^{-1}\right)^{-1} A^{-1} = I. \qquad \ldots (1)$$

സമവാക്യം (1), ന്റെ ഇരുവശത്തും പിന്നിലായി A കൊണ്ട് ഗുണനം ചെയ്യുമ്പോൾ നമുക്ക് $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

എന്ന് ലഭിക്കും. ■

Mal_12th_Maths_Vol1_CH 1_Matrices.indd 7 14-02-2023 17:46:11

സിദ്ധാന്തം 1.9

A എന്നത് ക്രമം n ആയ നോൺ സിംഗുലർ സമചതുര മാട്രിക്സ് ആണെങ്കിൽ

(i) $(\text{adj } A)^{-1} = \text{adj}\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{|A|}A$ (ii) $|\text{adj } A| = |A|^{n-1}$

(iii) $\text{adj}(\text{adj } A) = |A|^{n-2} A$ (iv) $\text{adj}(\lambda A) = \lambda^{n-1}\text{adj}(A)$, ഇവിടെ λ എന്നത് പൂജ്യമല്ലാതെ ഒരു അദിശം

(v) $|\text{adj}(\text{adj}A)| = |A|^{(n-1)^2}$ (vi) $(\text{adj } A)^T = \text{adj}\left(A^T\right)$

തെളിവ്

A ഒരു നോൺ സിംഗുലർ സമചതുരമാട്രിക്സ് ആയത് കൊണ്ട് $|A| \neq 0$ ആയിരിക്കും. അതുകൊണ്ട്

(i) $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}(\text{adj } A) \Rightarrow \text{adj } A = |A| A^{-1} \Rightarrow (\text{adj } A)^{-1} = \left(|A| A^{-1}\right)^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\left(A^{-1}\right)^{-1} = \dfrac{1}{|A|}A$.

$\text{adj } A = |A| A^{-1}$ ൽ A യ്ക്ക് പകരം A^{-1} നൽകിയാൽ ലഭിക്കുന്നത് $\text{adj}\left(A^{-1}\right) = \left|A^{-1}\right|\left(A^{-1}\right)^{-1} = \dfrac{1}{|A|}A$.

അങ്ങനെ നമുക്ക് ലഭിക്കും $(\text{adj } A)^{-1} = \text{adj}\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{|A|}A$.

(ii) $A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A| I_n \Rightarrow \det\left(A(\text{adj } A)\right) = \det\left((\text{adj } A)A\right) = \det\left(|A| I_n\right)$

$\Rightarrow |A||\text{adj } A| = |A|^n \Rightarrow |\text{adj } A| = |A|^{n-1}$.

(iii) ക്രമം n, ഉം നോൺസിംഗുലാറുമായ ഏതൊരു മാട്രിക്സ് B യിലും $B(\text{adj } B) = (\text{adj } B)B = |B| I_n$. ആയിരിക്കും.

$B = \text{adj } A$. നൽകുക. അപ്പോൾ ലഭിക്കുന്നത് $(\text{adj } A)(\text{adj}(\text{adj } A)) = |\text{adj } A| I_n$.

$|\text{adj } A| = |A|^{n-1}$ ആയത് കൊണ്ട് നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നത്, $(\text{adj } A)(\text{adj}(\text{adj } A)) = |A|^{n-1} I_n$.

ഇതിന്റെ ഇരുവശവും മുന്നിലായി A, കൊണ്ട് ഗുണനം ചെയ്യുമ്പോൾ നമുക്ക് ലഭിക്കും.

$A\left((\text{adj } A)\left(\text{adj } (\text{adj } A)\right)\right) = A\left(|A|^{n-1} I_n\right)$.

മാട്രിക്സ് ഗുണനത്തിന്റെ അസ്സോസ്സിയേറ്റീവ് സവിശേഷത ഉപയോഗിച്ചാൽ ലഭിക്കും.

$\left(A(\text{adj } A)\right)\text{adj}(\text{adj } A) = A\left(|A|^{n-1} I_n\right)$.

അപ്പോൾ കിട്ടും $\left(|A| I_n\right)\left(\text{adj}(\text{adj } A)\right) = |A|^{n-1} A$. അതായത്, $\text{adj}(\text{adj } A) = |A|^{n-2} A$.

(iv) $\text{adj}(A) = |A| A^{-1}$ ഇതിൽ A യ്ക്ക് പകരം λA നൽകിയാൽ ലഭിക്കുന്നത്

$\text{adj}(\lambda A) = |\lambda A|(\lambda A)^{-1} = \lambda^n |A| \dfrac{1}{\lambda} A^{-1} = \lambda^{n-1}|A| A^{-1} = \lambda^{n-1}\text{adj}(A)$ ഇവിടെ λ പൂജ്യം അല്ലാത്ത അദിശം ആകുന്നു.

(v) ഇവിടെ (iii) അനുസരിച്ച് $\text{adj}(\text{adj } A) = |A|^{n-2} A$ ഇതിന്റെ രണ്ട് വശത്തും ഡിറ്റർമിനന്റ് എടുത്താൽ

$|\text{adj}(\text{adj}A)| = \left||A|^{n-2} A\right| = \left(|A|^{(n-2)}\right)^n |A| = |A|^{n^2-2n+1} = |A|^{(n-1)^2}$.

(vi) $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\text{adj } A$ ഇതിൽ A യ്ക്കുപകരം A^T നൽകിയാൽ $\left(A^T\right)^{-1} = \dfrac{1}{|A^T|}\text{adj}\left(A^T\right)$ ഇതിൽ

നിന്നും $\text{adj}\left(A^T\right) = |A^T|\left(A^T\right)^{-1} = |A|\left(A^{-1}\right)^T = \left(|A| A^{-1}\right)^T = \left(|A| \dfrac{1}{|A|}\text{adj } A\right)^T = (\text{adj } A)^T$.

Mal_12th_Maths_Vol1_CH 1_Matrices.indd 8 14-02-2023 17:46:33

കുറിപ്പ്

ക്രമം 3 ഉം നോൺസിംഗുലാറും ആയ ഒരു മാട്രിക്സാണ് A എങ്കിൽ $|A| \neq 0$ ആകും. അപ്പോൾ സിദ്ധാന്തം 1.9 ലെ (ii) പ്രയോഗിച്ചാൽ ലഭിയ്ക്കും $|\text{adj}A| = |A|^2$ അതുപോലെ $|\text{adj } A|$ പോസിറ്റീവുമാണ് അങ്ങനെയെങ്കിൽ നമുക്ക് ലഭിക്കും $|A| = \pm\sqrt{|\text{adj } A|}$.

$$A^{-1} = \pm\frac{1}{\sqrt{|\text{adj } A|}}\text{adj } A.$$

സവിശേഷത (iii) അനുസരിച്ച് കിട്ടുന്നത് $A = \frac{1}{|A|}\text{adj}(\text{adj } A)$.

ക്രമം 3 ആയ നോൺസിംഗുലർ മാട്രിക്സാണ് A എങ്കിൽ നമുക്ക് ലഭിയ്ക്കും $A = \pm\frac{1}{\sqrt{|\text{adj } A|}}\text{adj}(\text{adj } A)$.

ഉദാഹരണം 1.4

A എന്നത് ഒറ്റ സംഖ്യാക്രമമുള്ള ഒരു നോൺ സിംഗുലാർ മാട്രിക്സാണ് എങ്കിൽ $|\text{adj } A|$ പോസിറ്റീവ് എന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

നോൺസിംഗുലാറും ക്രമം $2m+1$, ആയ ഒരു മാട്രിക്സാണ് A എന്നിരിക്കട്ടെ ഇവിടെ $m = 0,1,2,\cdots$ ഇവിടെ $|A| \neq 0$ അതുപോലെ സിദ്ധാന്തം 1.9 ലെ (ii) അനുസരിച്ച് $|\text{adj } A| = |A|^{(2m+1)-1} = |A|^{2m}$.

$|A|^{2m}$ എപ്പോഴും പോസിറ്റീവ് ആയതിനാൽ $|\text{adj } A|$ യും പോസിറ്റീവ് ആയിരിക്കും.

ഉദാഹരണം 1.5

$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 7 & 7 & -7 \\ -1 & 11 & 7 \\ 11 & 5 & 7 \end{bmatrix}$. ആണെങ്കിൽ മാട്രിക്സ് A കണ്ടുപിടിക്കുക

നിർദ്ധാരണം

ആദ്യം $|\text{adj}(A)| = \begin{vmatrix} 7 & 7 & -7 \\ -1 & 11 & 7 \\ 11 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 7(77-35) - 7(-7-77) - 7(-5-121) = 1764 > 0.$

അപ്പോൾ ലഭിയ്ക്കും

$$A = \pm\frac{1}{\sqrt{|\text{adj } A|}}\text{adj}(\text{adj } A) = \pm\frac{1}{\sqrt{1764}}\begin{bmatrix} +(77-35) & -(-7-77) & +(-5-121) \\ -(49+35) & +(49+77) & -(35-77) \\ +(49+77) & -(49-7) & +(77+7) \end{bmatrix}^T$$

$$= \pm\frac{1}{42}\begin{bmatrix} 42 & 84 & -126 \\ -84 & 126 & 42 \\ 126 & -42 & 84 \end{bmatrix}^T = \pm\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

ഉദാഹരണം 1.6

$\text{adj } A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, ഇതാണെങ്കിൽ A^{-1}. കാണുക.

Mal_12th_Maths_Vol1_CH 1_Matrices.indd 9 14-02-2023 17:46:43

നിർദ്ധാരണം

$$|\text{adj } A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 9 \ .$$

$$A^{-1} = \pm\frac{1}{\sqrt{|\text{adj}(A)|}}\text{adj}(A) = \pm\frac{1}{\sqrt{9}}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \pm\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} .$$

ഉദാഹരണം 1.7

A സിമ്മെട്രിക് ആണെങ്കിൽ $\text{adj } A$ യും സിമ്മെട്രിക് എന്നത് തെളിയിക്കുക

നിർദ്ധാരണം

A സിമെട്രിക് എന്ന് കരുതുക. എങ്കിൽ $A^T = A$ അതേപോലെ സിദ്ധാന്തം 1.9 (vi) ൽ നിന്ന് ലഭിയ്ക്കുന്നത്
$\text{adj}\left(A^T\right) = \left(\text{adj } A\right)^T \Rightarrow \text{adj } A = \left(\text{adj } A\right)^T \Rightarrow \text{adj } A$ സിമ്മെട്രിക്

സിദ്ധാന്തം 1.10

A യും B യും ക്രമം n ആയ രണ്ട് നോൺസിംഗുലർ സമചതുര മാട്രിക്സുകളാണെങ്കിൽ

$$\text{adj}(AB) = (\text{adj } B)(\text{adj } A).$$

തെളിവ്

$\text{adj}(A) = |A|\,A^{-1}$ ൽ, A യ്ക്ക് പകരം AB കൊടുത്താൽ

$$\text{adj}(AB) = |AB|\,(AB)^{-1} = \left(|B|\,B^{-1}\right)\left(|A|\,A^{-1}\right) = \text{adj}(B)\,\text{adj}(A) .$$

ഉദാഹരണം 1.8

ശരിയാണെന്ന് തെളിയിക്കുക $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$ $A = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ള A യിൽ നിന്നും $|A| = (2)(7) - (9)(1) = 14 - 9 = 5$. $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 7 & -9 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} & -\frac{9}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$.

അപ്പോൾ, $\left(A^{-1}\right)^T = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{9}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -9 & 2 \end{bmatrix}$. ... (1)

തന്നിട്ടുള്ള A, യിൽ നിന്ന് $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$. So $|A^T| = (2)(7) - (1)(9) = 5$.

അപ്പോൾ, $\left(A^T\right)^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -9 & 2 \end{bmatrix}$. ... (2)

(1), (2), എന്നിവ ഉപയോഗിച്ച് $\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1}$. അങ്ങനെ നമ്മൾ ഇത് ശരിയാണെന്ന് തെളിയിച്ചു.

Mal_12th_Maths_Vol1_CH 1_Matrices.indd 10 14-02-2023 17:46:56

ഉദാഹരണം 1.9

തെളിയിക്കുക $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ $A = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

നിർദ്ധാരണം

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+0 & 0+3 \\ -2+0 & -3-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -2 & -7 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{(0+6)}\begin{bmatrix} -7 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -7 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \ldots (1)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{(0+3)}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{(2-0)}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -7 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}. \quad \ldots (2)$$

(1) ലെയും (2) ലെയും മാട്രിക്സുകൾ തുല്യമായത് കൊണ്ട് $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ എന്ന് തെളിയിച്ചു. ■

ഉദാഹരണം 1.10

$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, എന്നതും $A^2 + xA + yI_2 = O_2$. ആണെങ്കിൽ x, y എന്നിവയുടെ മൂല്യം കാണുക. ശേഷം A^{-1}. കണ്ടുപിടിക്കുക

നിർദ്ധാരണം

$$A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 27 \\ 18 & 31 \end{bmatrix},$$

$$A^2 + xA + yI_2 = O_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 22 & 27 \\ 18 & 31 \end{bmatrix} + x\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 22+4x+y & 27+3x \\ 18+2x & 31+5x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

അപ്പോൾ ലഭിക്കും $22+4x+y=0, 31+5x+y=0, 27+3x=0$, $18+2x=0$.

അപ്പോൾ $x=-9$, $y=14$. അതുകൊണ്ട്, $A^2 - 9A + 14I_2 = O_2$.

ഇതിനെ A^{-1}, കൊണ്ട് മുന്നിൽ ഗുണിച്ചാൽ $A - 9I_2 + 14A^{-1} = O_2$. ഇപ്പോൾ കിട്ടുന്നത്

$$A^{-1} = \frac{1}{14}(9I_2 - A) = \frac{1}{14}\left(9\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

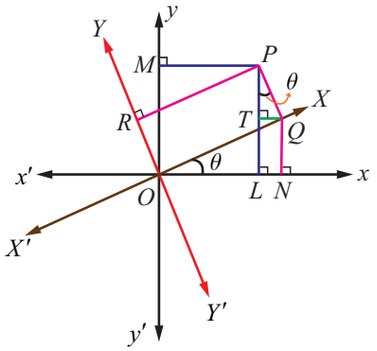
■

Mal_12th_Maths_Vol1_CH 1_Matrices.indd 11 14-02-2023 17:47:11

1.2.4 ജ്യാമിതിയിൻ മേൽ മാട്രിക്സിന്റെ പ്രയോഗം

ജ്യാമിതിയിൽ മാട്രിക്സിന്റെ പ്രയോഗത്തിന് വ്യാപകമായി ഉപയോഗിക്കുന്ന ഒരു പ്രത്യേക തരം നോൺ സിംഗുലർ മാട്രിക്സുണ്ട്. ചുരുക്കത്തിൽ ഇതിനെ ദ്വിമാന നിർദ്ദേശാങ്കതലത്തിൽ നമുക്ക് എടുക്കാം.

O എന്നത് മൂലബിന്ദുവും $x'Ox$, $y'Oy$ എന്നിവ x അക്ഷവും y അക്ഷവും ആണ്. ഈ നിർദ്ദേശാങ്ക സമ്പ്രദായമനുസരിച്ച് P എന്നത് ഈ തലത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവും (x, y) എന്നത് അതിന്റെ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങളുമാണ്. ചിത്രം 1.1 കാണിച്ചിട്ടുള്ളതു പോലെ മൂല ബിന്ദുവിൽ കൂടി കോൺ θ യെ കേന്ദ്രീകരിച്ച് x അക്ഷവും y അക്ഷവും ചുറ്റുമ്പോൾ $X'OX$, $Y'OY$ എന്നീ പുതിയ X അക്ഷവും Y അക്ഷവും ലഭിയ്ക്കുന്നു. (X,Y) എന്നത് P യുടെ പുതിയ നിർദ്ദേശാങ്ക സമ്പ്രദായത്തിലെ പുതിയ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങളാണ്.



ചിത്രം.1.1

$$x = OL = ON - LN = X\cos\theta - QT = X\cos\theta - Y\sin\theta ,$$

$$y = PL = PT + TL = QN + PT = X\sin\theta + Y\cos\theta .$$

ഈ സമീകരണങ്ങൾ ഒരു നിർദ്ദേശാങ്ക സമ്പ്രദായത്തെ മറ്റൊരു നിർദ്ദേശാങ്ക സമ്പ്രദായത്തിലോട്ടു പരിവർത്തനം ചെയ്യുന്നു. മുകളിൽ പറഞ്ഞ രണ്ട് സമീകരണങ്ങളുടേയും മാട്രിക്സ് രൂപം ഇപ്രകാരമാണ്.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}.$$

$W = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$. എന്നിരിയ്ക്കട്ടെ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = W\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ അതുപോലെ $|W| = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

അപ്പോൾ W ന് വിപരീതം ഉണ്ട് $W^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$. ഇവിടെ ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടത് $W^{-1} = W^T$. എന്നതാണ് വിപരീത പരിവർത്തനം താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സമവാക്യത്തിലൂടെ ലഭിയ്ക്കും

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = W^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{bmatrix}.$$

ഇവിടെ കിട്ടിയ പരിവർത്തനം $X = x\cos\theta - y\sin\theta$, $Y = x\sin\theta + y\cos\theta$.

ഈ പരിവർത്തനം **കമ്പ്യൂട്ടർ ഗ്രാഫിക്സിൽ** ഉപയോഗിക്കുകയും മാട്രിക്സ് $W = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$. നിർണ്ണയിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. ഇവിടെ ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടത് മാട്രിക്സ് W എന്നത് $W^{-1} = W^T$ എന്ന പ്രത്യേക സവിശേഷതയോടു കൂടി നിൽക്കുന്നു എന്നുള്ളതാണ് അതായത് $WW^T = W^TW = I$.

സിദ്ധാന്തം 1.3

$AA^T = A^TA = I$. ആണെങ്കിൽ ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സിനെ **ഓർത്തോഗൊണൽ** എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

കുറിപ്പ്

A നോൺസിംഗുലാറും $A^{-1} = A^T$. ഉം ആണെങ്കിൽ മാത്രം A **ഓർത്തോഗൊണൽ** ആണ്.

Mal_12th_Maths_Vol1_CH 1_Matrices.indd 12 14-02-2023 17:47:26

ഉദാഹരണം 1.11

$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ എന്ന മാട്രിക്സ് ഓർത്തോഗൊണൽ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}. \text{ Then, } A^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

$$AA^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\theta+\sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta-\sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta-\cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta+\cos^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 .$$

സമാന രീതിയിൽ തന്നെ $A^T A = I_2$. ലഭിയ്ക്കും. അതുകൊണ്ട് $AA^T = A^T A = I_2 \Rightarrow A$ ഓർത്തോഗൊണൽ ആണ്

ഉദാഹരണം 1.12

$A = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 6 & -3 & a \\ b & -2 & 6 \\ 2 & c & 3 \end{bmatrix}$ ഓർത്തോഗൊണൽ ആണെങ്കിൽ a, b, c എന്നിവ കാണുക ശേഷം A^{-1} കണ്ടുപിടിയ്ക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

A ഓർത്തൊഗൊണൽ ആയത് കൊണ്ട് $AA^T = A^T A = I_3$.

$$AA^T = I_3 \Rightarrow \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 6 & -3 & a \\ b & -2 & 6 \\ 2 & c & 3 \end{bmatrix}\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 6 & b & 2 \\ -3 & -2 & c \\ a & 6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 45+a^2 & 6b+6+6a & 12-3c+3a \\ 6b+6+6a & b^2+40 & 2b-2c+18 \\ 12-3c+3a & 2b-2c+18 & c^2+13 \end{bmatrix} = 49\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} 45+a^2=49 \\ b^2+40=49 \\ c^2+13=49 \\ 6b+6+6a=0 \\ 12-3c+3a=0 \\ 2b-2c+18=0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} a^2=4, b^2=9, c^2=36, \\ a+b=-1, a-c=-4, b-c=-9 \end{Bmatrix} \Rightarrow a=2, b=-3, c=6$$

അപ്പോൾ ലഭിയ്ക്കും $A = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 6 & -3 & 2 \\ -3 & -2 & 6 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ അങ്ങനെ, $A^{-1} = A^T = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 6 & -3 & 2 \\ -3 & -2 & 6 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$.

Mal_12th_Maths_Vol1_CH 1_Matrices.indd 13 14-02-2023 17:47:40

1.2.5 ക്രിപ്റ്റോഗ്രാഫിയിൻ മേൽ മാട്രിക്സുകളുടെ പ്രയോഗം



നോൺസിംഗുലാർ മാട്രിക്സുകളുടെ വിപരീതത്തിന്റെ ഒരു പ്രധാന പ്രയോഗം ക്രിപ്റ്റോ ഗ്രാഫിയിലാണ്. മറ്റുള്ളവർക്ക് അറിയാൻ പാടില്ലാത്ത വിധത്തിൽ രണ്ട് ആളുകൾ തമ്മിലുള്ള ആശയവിനിമയ കലയാണ് ക്രിപ്റ്റോഗ്രാഫി. ഇത് എൻക്രിപ്ഷൻ. ഡിക്രിപ്ഷൻ എന്നീ രണ്ട് ഘടകങ്ങളെ അടിസ്ഥാനമാക്കിയാണ് പ്രവർത്തിക്കുന്നത് **എൻക്രിപ്ഷൻ** എന്നാൽ ഒരു വിവരത്തെ വായിക്കാൻ കഴിയാത്ത രൂപത്തിലേക്ക് (കോഡ് രൂപം) പരിവർത്തനം ചെയ്യുന്ന പ്രക്രിയ. മറുവശത്ത് **ഡിക്രിപ്ഷൻ** എന്നാൽ കോഡ് ചെയ്ത സന്ദേശങ്ങളെ രൂപാന്തീകരണത്തിന്റെ യഥാർത്ഥ രൂപത്തിലേക്ക് പരിവർത്തനം ചെയ്യുന്ന പ്രക്രിയ എൻക്രിപ്ഷനും ഡിക്രിപ്ഷനും ഒരു രഹസ്യ സങ്കേതിക തന്ത്രം ആവശ്യമാണ്. അത് സന്ദേശം അയച്ച ആൾക്കും സ്വീകർത്താവിനും മാത്രം അറിയാമായിരിക്കും.

ഈ രഹസ്യത്തിനെ **കീ** എന്ന് പറയുന്നു. സന്ദേശം എൻക്രിപ്റ്റ് ചെയ്യുന്നതിന് നോൺസിംഗുലറായ ഒരു മാട്രിക്സ് പിന്നിൽ ഗുണിക്കുന്നതാണ്. കീ സൃഷ്ടിക്കുന്നതിനുള്ള ഒരു മാർഗ്ഗം. യഥാർത്ഥ സന്ദേശം വീണ്ടെടുക്കുന്നതിന് സ്വീകർത്താവ് ആ മാട്രിക്സിന്റെ വിപരീതം പിന്നിൽ ഗുണിച്ച് സന്ദേശം ഡീകോഡ് ചെയ്യുന്നു. എൻക്രിപ്ഷനു ഉപയോഗിക്കുന്ന മാട്രിക്സിനെ **എൻക്രിപ്ഷൻ മാട്രിക്സ് എന്നും (എൻകോഡിംഗ് മാട്രിക്സ്)** ഡീകോഡിങ്ങിന് ഉപയോഗിക്കുന്ന മാട്രിക്സിനെ **ഡിക്രിപ്ഷൻ മാട്രിക്സ് (ഡീകോഡിംഗ് മാട്രിക്സ്)** എന്നും വിളിക്കുന്നു.

എൻക്രിപ്ഷൻ ഡിക്രിപ്ഷൻ പ്രക്രിയകളെ ഒരു ഉദാഹരണം എടുത്ത് വിവരിയ്ക്കാം.

സന്ദേശം അയക്കുന്നയാളും സ്വീകർത്താവും അക്ഷരമാലയിലെ $A-Z$ മാത്രം ഉപയോഗിച്ച് സന്ദേശങ്ങൾ പരിഗണിക്കുന്നുവെന്ന് കരുതുക. യഥാക്രമം $A-Z$ അക്ഷരങ്ങൾക്ക് 1-26 അക്കങ്ങളും ശൂന്യമായ സ്ഥലത്ത് 0 നമ്പറും നൽകുന്നു. ലാളിത്യത്തിനായി സന്ദേശം അയക്കുന്നയാൾ സ്വന്തം ഇഷ്ടപ്രകാരം ക്രമം 3 ആയ നോൺ സിംഗുലർ മാട്രിക്സ് കൊണ്ട് പിന്നിൽ ഗുണിക്കുന്നത് കീ ആയി പ്രയോഗിക്കുന്നു. സന്ദേശം അയച്ചയാൾ തിരഞ്ഞെടുത്ത മാട്രിക്സിന്റെ വിപരീതം സ്വീകർത്താവ് പിന്നിൽ ഗുണനം ചെയ്യുന്നു.

ഉദാഹരണത്തിന് എൻകോഡിംഗ് മാട്രിക്സ്

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

R5BZX

ഒരാൾക്ക് അയക്കേണ്ട സന്ദേശം **"WELCOME"** ആണെന്നിരിക്കട്ടെ.

ഇവിടെ കീ ക്രമം 3 ആയ സമചതുര മാട്രിക്സ് കൊണ്ടു മുന്നിൽ ഗുണിക്കേണ്ടതിനാൽ ഈ സന്ദേശത്തെ നീളം 3 ഉള്ള തുണ്ടുകളായി വിഭജിച്ച് **(WEL), (COM), (E)** അക്കങ്ങളുടെ വരി മാട്രിക്സ് ശ്രേണിയിലേക്ക് പരിവർത്തനം ചെയ്യുന്നു.

[23 5 12],[3 15 13],[5 0 0].

ഇവിടെ അവസാനത്തെ വരി മാട്രിക്സിൽ രണ്ട് പൂജ്യം നൽകിയിട്ടുണ്ട് എന്തെന്നാൽ ആദ്യത്തെ അംഗമായി 5 രേഖപ്പെടുത്തുന്ന ഒരു വരി മാട്രിക്സ് ലഭിക്കുന്നതിന് വേണ്ടിയാണ്.

അടുത്തതായി താഴെ കാണുന്ന വിധം ഓരോ വരി മാട്രിക്സിന്റെ പിന്നിലും എൻകൊഡിംഗ് മാട്രിക്സ് കൊണ്ട് ഗുണനം ചെയ്ത് സന്ദേശത്തെ എൻകോഡ് ചെയ്യും:

അൺകോഡഡ് വരിമാട്രിക്സ്		എൻകോഡിംഗ് മാട്രിക്സ്		കോഡഡ് വരിമാട്രിക്സ്
$[23\ 5\ 12]$	$\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$	=		$[45\ -28\ 23];$
$[3\ 15\ 13]$	$\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$	=		$[46\ -18\ 3];$
$[5\ 0\ 0]$	$\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$	=		$[5\ -5\ 5].$

Mal_12th_Maths_Vol1_CH 1_Matrices.indd 14 14-02-2023 17:47:44

ഇവിടെ കിട്ടിയ എൻകോഡഡ് സന്ദേശം ഇതാണ് $[45\ \ -28\ \ 23]\ [46\ \ -18\ \ 3]\ [5\ \ -5\ \ 5]$

ഇവിടെ സ്വീകർത്താവ് വിപരീത കീ ഉപയോഗിച്ച് സന്ദേശത്തെ ഡീകോഡ് ചെയ്യും. അതായത് മാട്രിക്സ് A യുടെ വിപരീതം പിന്നിൽ ഗുണനം ചെയ്യും. അതായത് ഡീകോർഡിംഗ് മാട്രിക്സ്

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\operatorname{adj} A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}.$$

സ്വീകർത്താവ് താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന പോലെ കോഡഡ് സന്ദേശത്തെ ഡീകോഡ് ചെയ്യും.:

കോഡഡ് വരി മാട്രിക്സ്	ഡീകോഡിംഗ് മാട്രിക്സ്	ഡീകോഡ് ചെയ്യപ്പെട്ട വരി മാട്രിക്സ്

$$[45\ \ -28\ \ 23]\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}=[23\ \ 5\ \ 12];$$

$$[46\ \ -18\ \ 3]\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}=[3\ 15\ 13];$$

$$[5\ \ -5\ \ 5]\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}=[5\ \ 0\ \ 0].$$

ഇവിടെ $[23\ 5\ 12],[3\ 15\ 13],[5\ 0\ 0]$ എന്നത് ഡീകോഡ് ചെയ്ത വരി മാട്രിക്സുകളുടെ ശ്രേണിയാണ്.

അങ്ങനെ സ്വീകർത്താവ് സന്ദേശത്തെ **"WELCOME"** എന്ന് വായിക്കുന്നു.

അഭ്യാസം 1.1

1. താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള മാട്രിക്സുകളുടെ അഡ്ജോയിന്റ് കാണുക.

(i) $\begin{bmatrix}-3 & 4\\ 6 & 2\end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 3 & 4 & 1\\ 3 & 7 & 2\end{bmatrix}$ (iii) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 2\end{bmatrix}$

2. ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള മാട്രിക്സുകളുടെ വിപരീതം നിലവിലുണ്ടെങ്കിൽ കാണുക.:

(i) $\begin{bmatrix}-2 & 4\\ 1 & -3\end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix}5 & 1 & 1\\ 1 & 5 & 1\\ 1 & 1 & 5\end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 3 & 4 & 1\\ 3 & 7 & 2\end{bmatrix}$

3. $F(\alpha)=\begin{bmatrix}\cos\alpha & 0 & \sin\alpha\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha\end{bmatrix}$ എങ്കിൽ, $\left[F(\alpha)\right]^{-1}=F(-\alpha)$. എന്ന് തെളിയിക്കുക.

4. $A=\begin{bmatrix}5 & 3\\ -1 & -2\end{bmatrix}$ എങ്കിൽ, $A^2-3A-7I_2=O_2$.എന്ന് തെളിയിക്കുകാ ശേഷം A^{-1} കണ്ടാപിടിക്കുക.

5. $A=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}-8 & 1 & 4\\ 4 & 4 & 7\\ 1 & -8 & 4\end{bmatrix}$ എങ്കിൽ, $A^{-1}=A^T$. തെളിയിക്കുക.

Mal_12th_Maths_Vol1_CH 1_Matrices.indd 15 14-02-2023 17:47:54

6. $A=\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ എങ്കിൽ, $A(\text{adj } A)=(\text{adj } A)A=|A|I_2$. എന്ന് തെളിയിക്കുക

7. $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ and $B=\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$, എങ്കിൽ $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$. എന്ന് തെളിയിക്കുക

8. $\text{adj}(A)=\begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -3 & 12 & -7 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, ആണെങ്കിൽ A. കണ്ടുപിടിക്കുക.

9. $\text{adj}(A)=\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & -6 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, ആണെങ്കിൽ A^{-1}. കണ്ടുപിടിക്കുക

10. $\text{adj } A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. ആണെങ്കിൽ $\text{adj}(\text{adj}(A))$ കാണുക.

11. $A=\begin{bmatrix} 1 & \tan x \\ -\tan x & 1 \end{bmatrix}$, എങ്കിൽ $A^TA^{-1}=\begin{bmatrix} \cos 2x & -\sin 2x \\ \sin 2x & \cos 2x \end{bmatrix}$. എന്ന് തെളിയിക്കുക.

12. $A\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 14 & 7 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$ ആണെങ്കിൽ മാട്രിക്സ് A കാണുക.

13. $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $AXB=C$. ആണെങ്കിൽ X കാണുക.

14. $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ആണെങ്കിൽ, $A^{-1}=\frac{1}{2}\left(A^2-3I\right)$. എന്ന് തെളിയിക്കുക.

15. $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ എന്ന എൻക്രിപ്ഷൻ മാട്രിക്സിന്റെ വിപരീതം ഉപയോഗിച്ച് ലഭിച്ച രഹസ്യ സന്ദേശമായ $\begin{bmatrix} 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 20 & 4 \end{bmatrix}$ നെ ഡീക്രിപ്റ്റ് ചെയ്യുക. ഇതിനായി 1-26 വരെയുള്ള അക്കങ്ങൾക്ക് യഥാക്രമം ഇംഗ്ലീഷ് അക്ഷരമാലയിലെ $A-Z$ നൽകാം ശൂന്യ ഇടത്തിൽ 0 വും നൽകാം .

1.3 ഒരു മാട്രിക്സിന്റെ എലിമെന്ററി പരിവർത്തനം

എലിമെന്ററി വരി രീതിയും എലിമെന്ററി നിര രീതിയും വഴി ഒരു മാട്രിക്സിനെ മറ്റൊരു മാട്രിക്സിലേക്ക് പരിവർത്തനം ചെയ്യാൻ സാധിക്കും.

1.3.1 വരിയിലും നിരയിലുമുള്ള എലിമെന്ററി പ്രവർത്തനങ്ങൾ

മാട്രിക്സുകളിൽ പ്രയോഗിക്കുന്ന എലിമെന്ററി വരി (നിര) പരിവർത്തനങ്ങൾ:

(i) ഒരു മാട്രിക്സിലെ ഏതെങ്കിലും രണ്ട് വരി (നിര) പരസ്പരം മാറ്റുക.

(ii) ഒരു വരി (നിര) യ്ക്കു പകരം പൂജ്യമല്ലാത്ത സ്കെയ്ലർ കൊണ്ട് ഗുണനം ചെയ്ത വരി (നിര) എഴുതാം.

(iii) മാട്രിക്സിന്റെ ഒരു വരിയെ (നിര) ഇതേ വരിയുടെയും മാട്രിക്സിന്റെ മറ്റൊരു വരിയെ (നിര) പൂജ്യമല്ലാത്ത അദിശം കൊണ്ട് ഗുണിച്ചതിന്റെയും ആകെത്തുക ഉപയോഗിച്ച് മാറ്റി സ്ഥാപിക്കാം.

Mal_12th_Maths_Vol1_CH 1_Matrices.indd 16 14-02-2023 17:48:06

ഒരു മാട്രിക്സിലെ എലിമെന്ററി നിര പ്രവർത്തനത്തേയും എലിമെന്ററി വരി പ്രവർത്തനത്തേയുമാണ് എലിമെന്ററി പരിവർത്തനം എന്ന് പറയുന്നത്.

എലിമെന്ററി പരിവർത്തനം താഴെ പറയുന്ന പ്രതീകങ്ങളുപയോഗിച്ച് രേഖപ്പെടുത്തുന്നു:

(i) i^{th} വരിയും j^{th} വരിയും പരസ്പരം മാറ്റിയാൽ $R_i \leftrightarrow R_j$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കും.

(ii) i^{th} വരിയിലെ ഓരോ അംഗങ്ങളെയും പൂജ്യമല്ലാത്ത സ്ഥിരാങ്കം λ കൊണ്ട് ഗുണനം ചെയ്താൽ $R_i \to \lambda R_i$. എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

(iii) i^{th} വരിയുടെ കൂടെ പൂജ്യമല്ലാത്ത സ്ഥിരാങ്കം λ കൊണ്ട് ഗുണനം ചെയ്ത് j^{th} വരി സങ്കലനം ചെയ്താൽ $R_i \to R_i + \lambda R_j$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

ഇതേ അടയാളങ്ങൾ കൊണ്ട് തന്നെയാണ് നിര പരിവർത്തനങ്ങളെയും സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.

നിർവ്വചനം 1.4

ഒരേ ക്രമത്തിലുള്ള രണ്ട് മാട്രിക്സുകൾ A യും B യും സദൃശ്യമാണെന്ന് പറയണമെങ്കിൽ എലിമെന്ററി പരിവർത്തനത്തിലൂടെ ഒരു മാട്രിക്സിൽ നിന്ന് മറ്റൊന്ന് ലഭിക്കണം. A മാട്രിക്സും B മാട്രിക്സും സദൃശ്യമാണെന്ന് മനസ്സിലാക്കാൻ പ്രതീകാത്മകമായി $A \sim B$ എന്ന് എഴുതാം

ഉദാഹരണത്തിന് $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$. എന്നിരിക്കട്ടെ.

ഇതിൽ $R_2 \to R_2 + R_1$ എന്ന എലിമെന്ററി വരി പ്രവർത്തനം A യിൽ നടത്തിയാൽ B എന്ന ഒരു മാട്രിക്സ് ലഭിക്കുകയും അതിന്റെ രണ്ടാമത്തെ വരി A മാട്രിക്സിന്റെ രണ്ടാമത്തെ വരിയുടെയും ആദ്യത്തെ വരിയുടെയും തുകയായിരിക്കും.

ഇവിടെ $A \sim B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$. ലഭിക്കും.

മുകളിലുള്ള എലിമെന്ററി വരി പരിവർത്തനം:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}.$$ എന്ന് പ്രതിപാദിക്കുന്നു.

കുറിപ്പ്

എലിമെന്ററി പരിവർത്തനത്തിലൂടെ തന്നിരിക്കുന്ന ഒരു മാട്രിക്സ് മറ്റൊരു മാട്രിസുലേക്ക് രൂപാന്തരപ്പെടുന്നു. ഇവിടെ രൂപാന്തരപ്പെട്ട മാട്രിക്സ് തന്നിരിക്കുന്ന മാട്രിക്സിന് തുല്യമാകണമെന്നില്ല.

1.3.2 വരി എക്കലോൺ രൂപം

തന്നിട്ടുള്ള പൂജ്യമല്ലാത്ത ഒരു മാട്രിക്സിനെ എലിമെന്ററി വരി പ്രവർത്തനം വഴി ലഘുവായ രൂപത്തിലേക്ക് മാറ്റുന്നു. ഇതിനെ **വരി എക്കലോൺ രൂപം** എന്ന് വിളിക്കുന്നു. ഒരു വരി എക്കലോൺ രൂപത്തിൽ ചിലപ്പോൾ ചില വരിയിലെ അംഗങ്ങളെല്ലാം പൂജ്യമാകാനും സാധ്യതയുണ്ട്. അങ്ങനെയുള്ള വരികളെ **പൂജ്യം വരി** എന്നു പറയുന്നു. ഒരു പൂജ്യമല്ലാത്ത വരിയെന്നാൽ ആ വരിയിലെ കുറഞ്ഞ പക്ഷം ഒരു അംഗമെങ്കിലും പൂജ്യമല്ലാതിരിക്കണം.

ഉദാഹരണത്തിന് $\begin{bmatrix} 6 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ഈ മാട്രിക്സിൽ R_1 and R_2 എന്നിവ പൂജ്യമല്ലാത്തവരിയും R_3 പൂജ്യവരിയുമാണ്.

നിർവ്വചനം 1.5

പൂജ്യമല്ലാത്ത ഒരു മാട്രിക്സ് E **വരി എക്കലോൺ** രൂപത്തിലാണെന്ന് പറയണമെങ്കിൽ:

(i) E യുടെ എല്ലാ പൂജ്യവരികളും E യുടെ പൂജ്യമല്ലാത്ത വരിയുടെ താഴെ മാത്രമേ ഉണ്ടാകാൻ പാടുള്ളൂ.

(ii) E മാട്രിക്സിലെ ആദ്യത്തെ പൂജ്യമല്ലാത്ത അംഗം i വരിയിലെ j^{th} നിരയിൽ കാണുകയാണെങ്കിൽ i വരിയിലെ j^{th} നിലരയിലെ ആദ്യത്തെ പൂജ്യമല്ലാത്ത അംഗത്തിന്റെ താഴെയുള്ള എല്ലാ അംഗങ്ങളും പൂജ്യമായിരിക്കും.

(iii) മാട്രിക്സ് E യുടെ i^{th} വരിയിലെ ആദ്യത്തെ പൂജ്യമല്ലാത്ത അംഗം $(i+1)^{\text{th}}$ വരിയുടെ ആദ്യത്തെ പൂജ്യമല്ലാത്ത അംഗത്തിന്റെ ഇടത് വശത്തായിരിക്കും സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നത്.

Mal_12th_Maths_Vol1_CH 1_Matrices.indd 17 14-02-2023 17:48:13

കുറിപ്പ്

പൂജ്യമല്ലാത്ത ഒരു മാട്രിക്സ് വരി എക്കലോൺ രൂപത്തിലാണെന്ന് പറയണമെങ്കിൽ എല്ലാ പൂജ്യ വരികളും മാട്രിക്സിന്റെ താഴത്തെ വരികളായി കാണപ്പെടുകയും ഒപ്പം തന്നെ താഴത്തെ വരികളിലെ ആദ്യത്തെ പൂജ്യമല്ലാത്ത അംഗം ആ മാട്രിക്സിന്റെ മുകളിലത്തെ വരിയിലെ ആദ്യത്തെ പൂജ്യമല്ലാത്ത അംഗത്തിന്റെ വലത് വശത്തുമായി സ്ഥിതിചെയ്യും.

താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന മാട്രിക്സുകൾ വരി എക്കലോൺ രൂപത്തിലുള്ളവയാണ്. :(i) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,(ii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

മാട്രിക്സ് (i) പരിഗണിക്കാം. മാട്രിക്സിന്റെ അവസാനത്തെ വരിയിൽ നിന്ന് വരിവരിയായി മുകളിലേക്ക് പോകുക മൂന്നാമത്തെ വരി പൂജ്യവരിയാണ്. രണ്ടാമത്തെ വരിയിലെ ആദ്യത്തെ പൂജ്യമല്ലാത്ത അംഗം മൂന്നാമത്തെ നിരയിൽ കാണപ്പെടുകയും, അത് ആദ്യത്തെ വരിയിലെ ആദ്യത്തെ പൂജ്യമല്ലാത്ത അംഗം സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന രണ്ടാമത്തെ നിരയുടെ വലത് വശത്താണ് സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നത് അതുകൊണ്ട് മാട്രിക്സ് വരി എക്കലോൺ രൂപത്തിലാണ്.

ഇനി മാട്രിക്സ് (ii) പരിഗണിയ്ക്കാം. മാട്രിക്സിന്റെ അവസാനത്തെ വരിയിൽ നിന്ന് വരിവരിയായി മുകളിലേയ്ക്ക് പോകുക ഇവിടെ എല്ലാ വരിയും പൂജ്യമല്ലാത്തതാണ്. മാട്രിക്സിന്റെ മൂന്നാമത്തെ വരിയിലെ ആദ്യത്തെ പൂജ്യമല്ലാത്ത അംഗം നാലാമത്തെ നിരയിൽ കാണപ്പെടുകയും അത് രണ്ടാമത്തെ വരിയിലെ ആദ്യത്തെ പൂജ്യമല്ലാത്ത അംഗം സ്ഥിതി ചെയ്യുന്ന മൂന്നാമത്തെ നിരയുടെ വലത് വശത്തുമാണ് സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നത് രണ്ടാമത്തെ വരിയിലെ ആദ്യത്തെ പൂജ്യമല്ലാത്ത അംഗം, മൂന്നാമത്തെ നിരയിൽ കാണപ്പെടുകയും അത് ആദ്യത്തെ വരിയിലെ ആദ്യത്തെത പൂജ്യമല്ലാത്ത അംഗം സ്ഥിതി ചെയ്യുന്ന ഒന്നമത്തെ നിരയുടെ വലത് വശത്തുമാണ്.

അതുകൊണ്ട് മാട്രിക്സ് വരി എക്കലോൺ രൂപത്തിലാണ്. താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന മാട്രിക്സുകൾ വരി എക്കലോൺ രൂപത്തിലുള്ളവയല്ല:

$$\text{(i)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{(ii)} \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

മാട്രിക്സ് (i) പരിഗണിക്കാം. ഈ മാട്രിക്സിൽ മൂന്നാമത്തെ വരിയിലെ ആദ്യത്തെ പൂജ്യമല്ലാത്ത അംഗം രണ്ടാമത്തെ നിരയിൽ കാണപ്പെടുകയും അത് രണ്ടാമത്തെ വരിയിലെ ആദ്യത്തെ പൂജ്യമല്ലാത്ത അംഗം സ്ഥിതി ചെയ്യുന്ന മൂന്നാമത്തെ നിരയുടെ ഇടത് വശത്തുമാണ്. അതുകൊണ്ട് ഇത് വരി എക്കലോൺ രൂപത്തിലല്ല.

മാട്രിക്സ് (ii) പരിഗണിക്കാം. ഇവിടെ രണ്ടാമത്തെ വരിയിലെ ആദ്യത്തെ പൂജ്യമല്ലാത്ത അംഗം ഒന്നാമത്തെ നിരയിൽ കാണപ്പെടുകയും അത് ഒന്നാമത്തെ വരിയിലെ ആദ്യത്തെ പൂജ്യമല്ലാത്ത അംഗം സ്ഥിതി ചെയ്യുന്ന രണ്ടാമത്തെ നിരയുടെ ഇടത് വശത്തുമാണ് ഇവിടെ മാട്രിക്സ് വരി എക്കലോൺ രൂപത്തിലുള്ളതല്ല.

മാട്രിക്സ് $\left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ നെ വരി എക്കലോൺ രൂപത്തിലേക്ക് ചുരുക്കുന്നതിനുള്ള രീതി.

ആദ്യപടി

ആദ്യത്തെ വരി പരിശോധിക്കുക ആദ്യത്തെ വരി പൂജ്യം വരികയാണെങ്കിൽ ആദ്യത്തെ വരിയുടെ താഴെയുള്ള പൂജ്യമല്ലാത്ത വരിയുമായി പരസ്പരം മാറ്റുക. ഇതിൽ a_{11} പൂജ്യമല്ലെങ്കിൽ രണ്ടാമത്തെ പടിയിലേക്ക് പോകുക. അങ്ങനെയല്ലെങ്കിൽ ആദ്യത്തെ വരിയായ R_1 നെ അതിന് താഴെയുള്ള ആദ്യത്തെ നിരപൂജ്യമല്ലാത്ത ഏതെങ്കിലുമൊരു വരിയുമായി പരസ്പരം മാറ്റുക. ആദ്യത്തെ വരിയുടെ താഴെ ആദ്യത്തെ നിര പൂജ്യമല്ലാത്ത ഒരു വരി പോലും ലഭിച്ചില്ലെങ്കിൽ a_{12}. പരിഗണിയ്ക്കാം. ഇവിടെ a_{12}. പൂജ്യമല്ലെങ്കിൽ പടി രണ്ടിലേയ്ക്ക് പോകാം. അങ്ങനെയല്ലെങ്കിൽ ആദ്യത്തെ വരിയായ R_1 നെ അതിന് താഴെയുള്ള രണ്ടാമത്തെ നിര പൂജ്യമല്ലാത്ത ഏതെങ്കിലുമൊരു വരിയുമായി പരസ്പരം മാറ്റുക. ആദ്യത്തെ വരിയുടെ താഴെ രണ്ടാമത്തെ നിര പൂജ്യമല്ലാത്ത ഒരു വരിപോലും ലഭിച്ചില്ലെങ്കിൽ a_{13}. പരിഗണിയ്ക്കാം. അങ്ങനെ ആദ്യത്തെ വരിയിൽ പൂജ്യമല്ലാത്ത ഒരു അംഗം ലഭിക്കുന്നത് വരെ ഇത് തുടർന്ന് കൊണ്ടേയിരിക്കുക. ഈ പ്രക്രിയയെ പൈവോട്ടിംഗ് എന്ന് പറയുന്നു. ആദ്യത്തെ വരിയിലെ ആദ്യത്തെ പൂജ്യമല്ലാത്ത അംഗത്തിനെ ആദ്യത്തെ വരിയുടെ പൈവോട്ട് എന്ന് പറയുന്നു.

പടി രണ്ട്

ആദ്യത്തെ വരിയിലെ പൈവോട്ടിന് താഴെയുള്ള എല്ലാ അംഗങ്ങളെയും എലിമെന്ററി വരി പ്രവർത്തനം ഉപയോഗിച്ച് പൂജ്യമാക്കുക..

പടി മൂന്ന്

ഇനി അടുത്ത വരിയെ ആദ്യത്തെ വരിയായി കണക്കാക്കി അതിന് താഴെയുള്ള വരികളിൽ പടി ഒന്നും പടി രണ്ടും നടപ്പാക്കുക എല്ലാവരികളും തീരുന്നത് വരെ ഈ പ്രക്രിയ ആവർത്തിക്കുക.

Mal_12th_Maths_Vol1_CH 1_Matrices.indd 18 14-02-2023 17:48:17

ഉദാഹരണം 1.13

ഈ മാട്രിക്സിനെ $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ വരി എക്കലോൺ രൂപത്തിലേക്ക് ചുരുക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \to R_2 + 2R_1, \\ R_3 \to R_3 + R_1}} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - \frac{1}{2}R_2} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

കുറിപ്പ്

$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2/8} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. ഇതും തന്നിരിയ്ക്കുന്ന മാട്രിക്സിന്റെ ഒരു വരി എക്കലോൺ രൂപമാണ്.

അതിനാൽ ഒരു മാട്രിക്സിന്റെ വരി എന്നലോൺ രൂപം ഒരേ പോലെ ആകണമെന്നില്ല.

ഉദാഹരണം 1.14

മാട്രിക്സിനെ $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & 0 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ വരി എന്നലോൺ രൂപത്തിലേക്ക് ചുരുക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & 0 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 4R_1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 8 & 20 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - \frac{2}{3}R_2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & \frac{22}{3} & 16 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to 3R_2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 22 & 48 \end{bmatrix}.$$

1.3.3 മാട്രിക്സിന്റെ റാങ്ക്

ഒരു മാട്രിക്സിന്റെ റാങ്ക് നിർവ്വചിക്കാൻ മാട്രിക്സിന്റെ ഉപ മാട്രിക്സുകളെക്കുറിച്ചും മൈനറുകളെ കുറിച്ചും അറിയണം.

ഒരു മാട്രിക്സ് A യുടെ ചില വരികളും നിരകളും ഒഴിവാക്കിയാൽ ലഭിക്കുന്ന മാട്രിക്സിനെയാണ് മാട്രിക്സ് A യുടെ **ഉപമാട്രിക്സ്** എന്ന് പറയുന്നത്. ഒരു മാട്രിക്സിനെ അതിന്റെ തന്നെ ഉപമാട്രിക്സ് എന്ന് പറയുന്നു. എന്തെന്നാൽ തന്നിട്ടുള്ള മാട്രിക്സിൽ നിന്ന് പൂജ്യം വരിയും പൂജ്യം നിരയും ഒഴിവാക്കിയാൽ അതേ മാട്രിക്സ് തന്നെ ലഭിക്കുന്നു.

ഒരു മാട്രിക്സിന്റെ സമചതുര ഉപമാട്രിക്സിന്റെ ഡിറ്റർമിനന്റിന്റെ മൂല്യത്തിനെയാണ് ആ മാട്രിക്സിന്റെ മൈനർ എന്ന കാര്യം ഇവിടെ ഓർമ്മിക്കാം.

നിർവ്വചനം 1.6

ഒരു മാട്രിക്സിന്റെ A. ഏറ്റവും ഉയർന്ന അപ്രത്യക്ഷമാകാത്ത മൈനറിന്റെ ക്രമത്തിനെയാണ് ആ **മാട്രിക്സിന്റെ റാങ്ക്** A. എന്ന് പറയുന്നത്. ഇതിനെ $\rho(A)$. എന്ന് അടയാളം കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. പൂജ്യം മാട്രിക്സിന്റെ റാങ്ക് പൂജ്യം എന്ന് നിർവ്വചിക്കുന്നു.

Mal_12th_Maths_Vol1_CH 1_Matrices.indd 19 14-02-2023 17:48:21

കുറിപ്പ്

(i) ഒരു മാട്രിക്സിൽ കുറഞ്ഞ പക്ഷം പൂജ്യമല്ലാത്ത ഒരു അംഗമെങ്കിലുമുണ്ടെങ്കിൽ $\rho(A) \geq 1$.

(ii) ഒരു അനന്യമാട്രിക്സ് (identity) I_n ന്റെ റാങ്ക് n. ആയിരിക്കും.

(iii) ഒരു മാട്രിക്സ് A യുടെ റാങ്ക് r, ആവണമെങ്കിൽ A യ്ക്ക് കുറഞ്ഞ പക്ഷം ക്രമം r ഉള്ള ഒരു മൈനറെങ്കിലും അപ്രത്യക്ഷമാകാതിരിക്കുകയും ഒപ്പം തന്നെ ക്രമം $r+1$ ഉം അതിനു മുകളിലുമുള്ള എല്ലാ മൈനറുകളും അപ്രത്യക്ഷമാകുകയും ചെയ്യണം.

(iv) ഒരു മാട്രിക്സ് A യുടെ ക്രമം $m \times n$ ആണെങ്കിൽ $\rho(A) \leq \min\{m, n\}$ = കുറഞ്ഞമൂല്യം m, n.

(v) ക്രമം n ആയ ഒരു സമചതുരമാട്രിക്സിന്റെ $\rho(A) = n$. ആണെങ്കിൽ ആ മാട്രിക്സിന് വിപരീതം ഉണ്ട്.

ഉദാഹരണം 1.15

തന്നിട്ടുള്ള മാട്രിക്സുകളുടെ റാങ്ക് കാണുക: (i) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & -2 & 4 \\ 6 & 7 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

നിർദ്ധാരണം

(i) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$. എങ്കിൽ A യുടെ ക്രമം 3×3. $\rho(A) \leq \min\{3, 3\} = 3$. A യുടെ ഏറ്റവും ഉയർന്ന മൈനറുകളുടെ ക്രമം 3 മാട്രിക്സ് A യ്ക്ക് ക്രമം 3 ആയ ഒരേയൊരു മൈനറേയുള്ളൂ.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 3(6-6) - 2(6-6) + 5(3-3) = 0. \quad \rho(A) < 3.$$

അടുത്തതായി മാട്രിക്സ് A യുടെ ക്രമം 2 മൈനറുകൾ പരിഗണിയ്ക്കാം .

ക്രമം 2 മൈനറുകളുടെ ഡിറ്റർമിനന്റ് $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0$. $\rho(A) = 2$.

(ii) $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & -2 & 4 \\ 6 & 7 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. എങ്കിൽ A യുടെ ക്രമം 3×4. $\rho(A) \leq \min\{3, 4\} = 3$.

A യുടെ ഏറ്റവും ഉയർന്ന മൈനറുകളുടെ ക്രമം 3 മൂല്യം പൂജ്യമാകാത്ത ക്രമം 3 ആയ A യുടെ മൈനറുകളെ തിരഞ്ഞ് കണ്ടുപിടിയ്ക്കാം. ഇവിടെ എല്ലാ മൈനറുകളും പൂജ്യമാണ്

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \\ 6 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & 4 \\ 6 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 4 \\ 6 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \\ 7 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

അപ്പോൾ, $\rho(A) < 3$. അടുത്തതായി മൂല്യം പൂജ്യമാകാത്ത ക്രമം 2 ആയ A യുടെ മൈനറുകൾ തിരഞ്ഞ് കണ്ടുപിടിയ്ക്കാം.

ഇവിടെ $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 9 = 5 \neq 0$. അതുകൊണ്ട്, $\rho(A) = 2$.

നിരൂപണം

ഒരു മാട്രിക്സിന്റെ ക്രമം സാമാന്യം വലുതാണെങ്കിൽ ഉയർന്ന ക്രമത്തോടു കൂടിയ അപ്രത്യക്ഷമാകാത്ത മൈനറുകൾ ഉപയോഗിച്ച് റാങ്ക് കണ്ടുപിടിക്കുന്ന രീതി പ്രയാസകരമാണ്. മാട്രിക്സിന്റെ ക്രമം വളരെ ഉയർന്നതാണെങ്കിൽ പോലും മറ്റൊരു എളുപ്പ വഴി ഉപയോഗിച്ച് റാങ്ക് കണ്ടുപിടിക്കാൻ സാധിക്കും. അതായത് മാട്രിക്സിന്റെ സദൃശ്യ വരി എക്കലോൺ രൂപത്തിലേക്ക് പരിവർത്തനം ചെയ്ത് റാങ്ക് കണ്ടുപിടിക്കുന്നതാണ് ആ എളുപ്പവഴി ഒരു മാട്രിക്സ് വരി എക്കലോൺ രൂപത്തിലാണെങ്കിൽ പ്രധാന വികർണ്ണത്തിന് താഴെയുള്ള അംഗങ്ങളെല്ലാം (ഒരു മാട്രിക്സിന്റെ വികർണ്ണ അംഗങ്ങളായ $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \cdots$. ഇവയെ യോജിപ്പിക്കുന്ന നേർരേഖ) പൂജ്യം ആയിരിക്കും. അപ്പോൾ അതിന്റെ മൈനർ പൂജ്യമാണോ അല്ലെയോ എന്ന് കണ്ടുപിടിക്കുന്നത് എളുപ്പമായിരിക്കും.

Mal_12th_Maths_Vol1_CH 1_Matrices.indd 20 14-02-2023 17:48:33

ഉദാഹരണം 1.16

ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള വരി എക്കലോൺ രൂപത്തിലുള്ള മാട്രിക്സുകളുടെ റാങ്ക് കണ്ടുപിടിയ്ക്കുക:

(i) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -7 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 6 & 0 & -9 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

നിർദ്ധാരണം

(i) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -7 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. എങ്കിൽ A യുടെ ക്രമം 3×3, $\rho(A) \le 3$

ക്രമം 3 ആയ A യുടെ മൈനർ, $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -7 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2)(3)(1) = 6 \neq 0$. $\rho(A) = 3$.

ശ്രദ്ധിക്കേണ്ട കാര്യം ഇവിടെ മൂന്നും പൂജ്യവരികളല്ല.

(ii) $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. എങ്കിൽ A യുടെ ക്രമം 3×3, $\rho(A) \le 3$.

ക്രമം 3 ആയ ഒരേയൊരു മൈനർ $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-2)(5)(0) = 0$. $\because \rho(A) \le 2$.

ക്രമം 2 ആയ ധാരാളം മൈനറുകൾ ഇവിടെയുണ്ട്. ഉദാഹരണത്തിന് ക്രമം 2 ആയ ഒരു മൈനർ, $\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = (-2)(5) = -10 \neq 0$, $\rho(A) = 2$.

ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടത് ഇവിടെ പൂജ്യമല്ലാത്ത രണ്ട് വരികളുണ്ട്. മൂന്നാമത്തെ വരി പൂജ്യവരിയാണ്.

(iii) $A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -9 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. എങ്കിൽ A യുടെ ക്രമം 4×3, $\rho(A) \le 3$.

അവസാനത്തെ രണ്ട് വരികളും പൂജ്യവരികളാണ്. ക്രമം 2 ആയ ധാരാളം മൈനറുകളുണ്ട് ഉദാഹരണത്തിന്

ക്രമം 2 മൈനർ, $\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = (6)(2) = 12 \neq 0$, $\rho(A) = 2$.

ഇവിടെ പൂജ്യമല്ലാത്ത രണ്ട് വരികളാണുള്ളത്. മൂന്നാമത്തെയും നാലാമത്തെയും വരികൾ പൂജ്യം വരികളാണ്.

മുകളിൽ പറഞ്ഞ ഉദാഹരണത്തിൽ നിന്ന് മനസ്സിലാക്കേണ്ടത് ഒരു വരി എക്കലോൺ രൂപത്തിലുള്ള മാട്രിക്സിന്റെ റാങ്ക് എന്ന് പറയുന്നത് ആ മാട്രിക്സിന്റെ പൂജ്യമല്ലാത്ത വരികളുടെ എണ്ണമാണ്. ഈ നിരീക്ഷണം തെളിവ് നിരത്താതെ ഒരു സിദ്ധാന്തമായി അറിയിക്കുന്നു.

സിദ്ധാന്തം 1.11

ഒരു വരിഎക്കലോൺ രൂപത്തിലുള്ള മാട്രിക്സിന്റെ റാങ്ക് അതിലെ പൂജ്യമല്ലാത്ത വരികളുടെ എണ്ണമാണ്.

തെളിവ് നൽകാതെ തന്നിട്ടുള്ള ഈ സിദ്ധാന്തം പ്രയോഗിച്ച് വരി ഏക്കലോൺ രൂപത്തിലല്ലാത്ത ഒരു മാട്രിക്സിന്റെ റാങ്ക് കണ്ടുപിടിയ്ക്കാം

Mal_12th_Maths_Vol1_CH 1_Matrices.indd 21 14-02-2023 17:48:42

സിദ്ധാന്തം 1.12

പൂജ്യമല്ലാത്ത ഒരു മാട്രിക്സിന്റെ റാങ്ക് എന്നത് ആ മാട്രിക്സിന്റെ വരി എക്കലോൺ രൂപ മാട്രിക്സിലെ പൂജ്യമല്ലാത്ത വരികളുടെ എണ്ണത്തിനു തുല്യമാണ്.

ഉദാഹരണം 1.17

വരി എക്കലോൺ രൂപത്തിലേയ്ക്ക് ചുരുക്കി മാട്രിക്സ് $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ ന്റെ റാങ്ക് കണ്ടുപിടിയ്ക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$. എന്നിരിയ്ക്കട്ടെ എലിമെന്ററി വരിപ്രവർത്തനം പ്രയോഗിച്ചാൽ

$$A \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -6 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$. അവസാനത്തെ സദൃശ മാട്രിക്സ്.

വരി എക്കലോൺ രൂപത്തിലാണ്. അതിന് പൂജ്യമല്ലാത്ത 2 വരികളുണ്ട് , $\rho(A) = 2$.

ഉദാഹരണം 1.18

$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 & 3 \\ -3 & 4 & -2 & -1 \\ 6 & 2 & -1 & 7 \end{bmatrix}$ എക്കലോൺ രൂപത്തിലേക്ക് ചുരുക്കി റാങ്ക് കണ്ട്പിടിയ്ക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

A മാട്രിക്സ് എലിമെന്ററി വരി പ്രവർത്തനം നടപ്പാക്കിയാൽ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 & 3 \\ -3 & 4 & -2 & -1 \\ 6 & 2 & -1 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to 2R_2} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 & 3 \\ -6 & 8 & -4 & -2 \\ 6 & 2 & -1 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 + 3R_1} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 8 & 7 \\ 0 & 8 & -13 & -2 \end{bmatrix}.$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 4R_2} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & -45 & -30 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 \div (-15)} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

അവസാനത്തെ സദൃശ്യമാട്രിക്സ് വരി എക്കലോൺ രൂപത്തിലാണ്. ഇതിന് പൂജ്യമല്ലാത്ത മൂന്ന് വരിളുണ്ട്. അപ്പോൾ, $\rho(A) = 3$.

തന്നിരിക്കുന്ന മാട്രിക്സിനെ എലിമെന്ററി മാട്രിക്സ് എന്ന് വിളിക്കുന്ന ഒരു പ്രത്യേക തരം മാട്രിക്സ് കൊണ്ട് മുന്നിൽ ഗുണനം നടത്തി എലിമെന്ററി വരി പ്രവർത്തനം നിർവ്വഹിക്കാവുന്നതാണ്.

നിർവ്വചനം 1.7

ഒരു അനന്യമാട്രിക്സിൽ ഒരേയൊരു എലിമെന്ററി പരിവർത്തനം നടത്തി ലഭിക്കുന്ന മാട്രിക്സിനെയാണ് **എലിമെന്ററി മാട്രിക്സ്** എന്ന് പറയുന്നത്.

നിരൂപണം

നമ്മൾ ക്രമം 3 ആയ ഒരു മാട്രിക്സ് കൈകാര്യം ചെയ്യുകയാണെന്നിരിക്കട്ടെ. അപ്പോൾ എല്ലാ എലിമെന്ററി മാട്രിക്സുകളും ക്രമം 3 സമചതുര മാട്രിക്സുകളായിരിക്കുകയും അവ അനന്യമാട്രിക്സ് I_3 ൽ ഒരേയൊരു എലിമെന്ററി വരി പ്രവർത്തനം നടത്തി ലഭിച്ചവയുമാണ്. മാട്രിക്സ് A യിൽ നടത്തിയ എല്ലാ എലിമെന്ററി വരി പ്രവർത്തനങ്ങളും മാട്രിക്സ് A യെ എലിമെന്ററി മാട്രിക്സ് കൊണ്ട് മുന്നിൽ ഗുണനം നടത്തിയാൽ ലഭിക്കുന്നതാണ് അതേപോലെ തന്നെ മാട്രിക്സ് A യിൽ നടത്തിയ എല്ലാ എലിമെന്ററി നിരപ്രവർത്തനങ്ങളും മാട്രിക്സ് A യെ എലിമെന്ററി മാട്രിക്സ് കൊണ്ട് പിന്നിൽ ഗുണനം നടത്തിയാൽ ലഭിക്കുന്നതാണ് ഈ പാഠത്തിൽ എലിമെന്ററി വരി രീതി മാത്രമേ നമ്മൾ ചെയ്യുന്നുള്ളൂ.

Mal_12th_Maths_Vol1_CH 1_Matrices.indd 22 14-02-2023 17:48:47

ഉദാഹരണത്തിന് മാട്രിക്സ് $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. കണക്കാക്കുക.

നമ്മൾ മാട്രിക്സ് A, യിൽ നടത്തുന്ന പരിവർത്തനം $R_2 \to R_2 + \lambda R_3$ എന്നിരിക്കട്ടെ $\lambda \neq 0$

$$A \xrightarrow{R_2 \to R_2 + \lambda R_3} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+\lambda a_{31} & a_{22}+\lambda a_{32} & a_{23}+\lambda a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}. \qquad \ldots.(1)$$

ഇത് $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ എലിമെന്ററി മാട്രിക്സാണ് $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + \lambda R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

മാട്രിക്സ് A യുടെ മുന്നിൽ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ഗുണിച്ചാൽ,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+\lambda a_{31} & a_{22}+\lambda a_{32} & a_{23}+\lambda a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}. \qquad \ldots (2)$$

(1) ഉം (2) ഉം സമവാക്യങ്ങളിൽ നിന്ന് $A \xrightarrow{R_2 \to R_2 + \lambda R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$. ലഭിയ്ക്കും.

എലിമെന്ററി പരിവർത്തനം $R_2 \to R_2 + \lambda R_3$ മാട്രിക്സ് A യിൽ പ്രയോഗിച്ചാൽ ലഭിക്കുന്ന അതേ ഗുണം തന്നെയാണ് മാട്രിക്സ് A യെ എലിമെന്ററി മാട്രിക്സ് $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ കൊണ്ട് മുന്നിൽ ഗുണനം ചെയ്താൽ ലഭിക്കുന്നത്. അതുപോലെ തെളിയിക്കാവുന്നതാണ്,

(i) എലിമെന്ററി പരിവർത്തനം $R_2 \leftrightarrow R_3$ മാട്രിക്സ് A യിൽ പ്രയോഗിച്ചാൽ ലഭിക്കുന്ന അതേ ഗുണം തന്നെയാണ് മാട്രിക്സ് A യെ എലിമെന്ററി മാട്രിക്സ് $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. കൊണ്ട് മുന്നിൽ ഗുണനം ചെയ്താൽ ലഭിക്കുന്നത്.

(ii) എലിമെന്ററി പരിവർത്തനം $R_2 \to \lambda R_2$ മാട്രിക്സ് A യിൽ പ്രയോഗിച്ചാൽ ലഭിക്കുന്ന അതേ ഗുണം തന്നെയാണ് മാട്രിക്സ് A യെ എലിമെന്ററി മാട്രിക്സ് $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ കൊണ്ട് മുന്നിൽ ഗുണനം ചെയ്താൽ ലഭിക്കുന്നത്.

മേൽപ്പറഞ്ഞ ഫലങ്ങൾ തെളിവ് നൽകാതെ നിരത്തിയിരിക്കുന്നു.

Mal_12th_Maths_Vol1_CH 1_Matrices.indd 23 14-02-2023 17:48:56

സിദ്ധാന്തം 1.13

എലിമെന്ററി വരിപ്രവർത്തനത്തിന്റെ ഒരു ശ്രേണി തന്നെ പ്രയോഗിച്ച് എല്ലാ നോൺസിംഗുലർ മാട്രിക്സുകളെയും അനന്യമാട്രിക്സിലേക്ക് പരിവർത്തനം ചെയ്യാൻ സാധിക്കും.

മാകളിലെ സിദ്ധാന്തം തെളിയിക്കാൻ നമുക്ക് ഒരു മാട്രിക്സ് $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{bmatrix}$. പരിഗണിയ്ക്കാം.

ഇവിടെ, $|A|=12+3=15\neq 0$. അതുകൊണ്ട്, A നോൺസിംഗുലർ. നമുക്ക് എലിമെന്ററി വരി പ്രവർത്തനത്തിന്റെ ഒരു ശ്രേണി തന്നെ പ്രയോഗിച്ച് A യെ I_2 വിലേക്ക് പരിവർത്തനം ചെയ്യാം. അതിന് ആദ്യം A യിലെ a_{11} നെ 1 ആയി പരിവർത്തനം ചെയ്യുന്നതിന് ഒരു വരിപ്രവർത്തനം കണ്ടുപിടിയ്ക്കണം. ഇവിടെ $R_1\to\left(\frac{1}{2}\right)R_1$. എന്നതാണ് അതിന ാവശ്യമായി വരിപ്രവർത്തനം അനുബന്ധ എലിമെന്ററി മാട്രിക്സ് $E_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

അപ്പോൾ ലഭിയ്ക്കും $E_1A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \frac{-1}{2}\\ 3 & 4\end{bmatrix}$.

അടുത്തതായി നമുക്ക് E_1A യിലെ a_{11} എന്ന അംഗത്തിന് താഴെയുള്ള എല്ലാ അംഗങ്ങളെയും 0 ആക്കാം. അവിടെ ഒരു അംഗം a_{21} മാത്രമേയുള്ളൂ. .

ഇതിനാവശ്യമായ എലിമെന്ററി വരിപ്രവർത്തനം $R_2\to R_2+(-3)R_1$.

ഇവിടെ ശരിയായ എലിമെന്ററി മാട്രിക്സ് $E_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -3 & 1\end{bmatrix}$.

തുടർന്ന് ലഭിക്കും $E_2\left(E_1A\right)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{11}{2}\end{bmatrix}$.

അടുത്തതായി $E_2\left(E_1A\right)$ ലെ a_{22} എന്ന അംഗത്തിനെ 1 ആക്കി മാറ്റണം $R_2\to\left(\frac{2}{11}\right)R_2$. എന്ന എലിമെന്ററി വരി പ്രവർത്തനം വഴി സാധ്യമാകും.

ഇവിടെ ശരിയായ എലിമെന്ററി മാട്രിക്സ് $E_3=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{2}{11}\end{bmatrix}$.

തുടർന്ന് ലഭിയ്ക്കും $E_3\left(E_2\left(E_1A\right)\right)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{2}{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{11}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

അവസാനമായി $E_3\left(E_2\left(E_1A\right)\right)$ ലെ a_{12} എന്ന അംഗത്തിനെ 0 ആക്കി മാറ്റണം അതിന് $R_1\to R_1+\left(\frac{1}{2}\right)R_2$.

എന്ന എലിമെന്ററി വരിപ്രവർത്തനം വഴി സാധ്യമാകും. ഇവിടെ എലിമെന്ററി മാട്രിക്സ് $E_4=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

Mal_12th_Maths_Vol1_CH 1_Matrices.indd 24 14-02-2023 17:49:07

അപ്പോൾ കിട്ടുന്നത് $E_4\left(E_3\left(E_2\left(E_1A\right)\right)\right)=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I_2.$

മുകളിലുള്ള എലിമെന്ററി പരിവർത്തന ശ്രേണികളെ താഴെ കാണുന്ന വിധം എഴുതാം:

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1\to\left(\frac{1}{2}\right)R_1}\begin{bmatrix}1 & \frac{-1}{2}\\ 3 & 4\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2+(-3)R_1}\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{11}{2}\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2\to\left(\frac{2}{11}\right)R_2}\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1\to R_1+\left(\frac{1}{2}\right)R_2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

ഉദാഹരണം 1.19

തന്നിരിക്കുന്ന മാട്രിക്സ് $\begin{bmatrix}3 & 1 & 4\\ 2 & 0 & -1\\ 5 & 2 & 1\end{bmatrix}$ നോൺസിംഗുലർ എന്ന് കാണിക്കുക ശേഷം എലിമെന്ററി വരി പരിവർത്തനം വഴി അനന്യമാട്രിക്സിലേക്ക് ചുരുക്കുക

നിർദ്ധാരണം

$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 4\\ 2 & 0 & -1\\ 5 & 2 & 1\end{bmatrix}$. എങ്കിൽ, $|A|=3(0+2)-1(2+5)+4(4-0)=6-7+16=15\neq 0.$ അതുകൊണ്ട്, A നോൺസിംഗുലർ തുടർന്ന് അനന്യമാട്രിക്സ് ലക്ഷ്യമാക്കി മാട്രിക്സ് A യിൽ തുടർച്ചയായി വരി പ്രവർത്തനം നടത്തുമ്പോൾ:

$$\begin{bmatrix}3 & 1 & 4\\ 2 & 0 & -1\\ 5 & 2 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1\to\frac{1}{3}R_1}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3}\\ 2 & 0 & -1\\ 5 & 2 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1,\ R_3\to R_3-5R_1}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3}\\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{11}{3}\\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{17}{3}\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2\to\left(-\frac{3}{2}\right)R_2}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3}\\ 0 & 1 & \frac{11}{2}\\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{17}{3}\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-\frac{1}{3}R_2,\ R_3\to R_3-\frac{1}{3}R_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & \frac{11}{2}\\ 0 & 0 & -\frac{15}{2}\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3\to\left(-\frac{2}{15}\right)R_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & \frac{11}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1\to R_1+\frac{1}{2}R_3,R_2\to R_2-\frac{11}{2}R_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

1.3.4 ഗാസ്സ് ജോർഡാൻ രീതി

ക്രമം A ആയ ഒരു നോൺ സിംഗുലർ മാട്രിക്സാണ് n എന്നിരിക്കട്ടെ. $A.$ യുടെ വിപരീതം B ആണെന്നിരിക്കട്ടെ.

അപ്പോൾ $AB=BA=I_n$, I_n, ന്റെ സവിശേഷത അനുസരിച്ച് $A=I_nA=AI_n$ എന്ന് നമുക്ക് അറിയാം

ഇനി $A=I_nA$ എന്ന സമവാക്യം പരിഗണിയ്ക്കുക. …(1)

A നോൺസിംഗുലർ ആയത് കൊ സമവാക്യം (1) ന്റെ ഇരുവശങ്ങളിലും എലിമെന്ററി മാട്രിക്സുകളുടെ (വരിപ്രവർത്തനം) ശ്രേണി ഉപയോഗിച്ച് മുന്നിൽ ഗുണനം നടത്തുമ്പോൾ (1) ന്റെ ഇടത്വശത്ത് സ്ഥിതി ചെയ്യുന്ന I_n മാട്രിക്സ് $B.$ ആയി പരിവർത്തനം ചെയ്യപ്പെടും അതുപോലെ എലിമെന്ററി മാട്രിക്സുകളുടെ (വരിപ്രവർത്തനം) അതേ ശ്രേണി ഉപയോഗിച്ചാൽ (1) ന്റെവലത് വശത്തുള്ള I_n മാട്രിക്സ് $B.$ യായി പരിവർത്തനം ചെയ്യപ്പെടും. അപ്പോൾ സമവാക്യ (1), $I_n=BA.$ എന്ന് പരിവർത്തനപ്പെടും. അതുകൊണ്ട് A യുടെ വിപരീതം $B.$ യാകുന്നു. അതായത് $A^{-1}=B.$

Mal_12th_Maths_Vol1_CH 1_Matrices.indd 25 14-02-2023 17:49:16

കുറിപ്പ്

$E_1, E_2, \cdots, E_k$ എന്നിവ എലിമെന്ററി മാട്രിക്സുകളും $\left(E_k \cdots E_2 E_1\right) A = I_n$, മാണെങ്കിൽ $A^{-1} = E_k \cdots E_2 E_1$.

എലിമെന്ററി വരിപ്രവർത്തനം വഴി ഒരു നോൺസിംഗുലർ മാട്രിക്സ് A യെ I_n ലോട്ട് പരിവർത്തനം ചെയ്യുന്ന രീതിയാണ് **ഗാസ്സ്ജോർഡാൻ രീതി.** ഈ രീതിയിൽ A^{-1} കണ്ടുപിടിയ്ക്കാൻ താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള വഴികൾ ഉപയോഗിക്കാം :

പടി 1

ഓഗ്മെന്റഡ് മാട്രിക്സ് $\left[A \mid I_n\right]$ ലഭിക്കുവാനായി തന്നിട്ടുള്ള മാട്രിക്സ് A യുടെ വലത് വശത്ത് I_n എഴുതുക

പടി 2

അടുത്തതായി എലിമെന്ററി മാട്രിക്സുകൾ (വരിപ്രവർത്തനം) $E_1, E_2, \cdots, E_k$ കണ്ടുപിടിയ്ക്കുക ഒപ്പം $\left(E_k \cdots E_2 E_1\right) A = I_n$. ആയിരിക്കണം.

$E_1, E_2, \cdots, E_k$ മാട്രിക്സ് $\left[A \mid I_n\right]$. പ്രയോഗിക്കുക അപ്പോൾ $\left[\left(E_k \cdots E_2 E_1\right) A \mid \left(E_k \cdots E_2 E_1\right) I_n\right]$. ലഭിക്കും. അതായത്, $\left[I_n \mid A^{-1}\right]$.

ഉദാഹരണം 1.20

ഗാസ്സ് ജോർഡൻ രീതിയിൽ $A = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$, യുടെ വിപരീതം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

ഗാസ്സ് ജോർഡാൻ രീതി പ്രയോഗിക്കുമ്പോൾ നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നത്

$$\left[A \mid I_2\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to (-1)R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{5}R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & (1/5) & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to R_1 + 6R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & (6/5) & -1 \\ 0 & 1 & (1/5) & 0 \end{array}\right].$$

അങ്ങനെ ലഭിയ്ക്കും $A^{-1} = \begin{bmatrix} (6/5) & -1 \\ (1/5) & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

ഉദാഹരണം 1.21

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ഗാസ്സ് ജോർഡാൻ രീതിയിൽ A യുടെ വിപരീതം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

ഗാസ്സ് ജോർഡാൻ രീതി പ്രയോഗിക്കുമ്പോൾ ലഭിയ്ക്കുന്നത്

$$\left[A \mid I_3\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & (1/2) & (1/2) & (1/2) & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - 3R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & (1/2) & (1/2) & (1/2) & 0 & 0 \\ 0 & (1/2) & -(1/2) & -(3/2) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to 2R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & (1/2) & (1/2) & (1/2) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Mal_12th_Maths_Vol1_CH 1_Matrices.indd 26 14-02-2023 17:49:27

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - \frac{1}{2}R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 \to R_2 + R_3]{R_1 \to R_1 - R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

$$\text{So, } A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

അഭ്യാസം 1.2

1. മൈനർ രീതിയിൽ ചുവടെയുള്ള മാട്രിക്സുകളുടെ റാങ്ക് കാണുക:

(i) $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -7 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ (v) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 8 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

2. വരി ചുരുക്കൽ രീതിയിൽ മാട്രിക്സുകളുടെ റാങ്ക് കണ്ടുപിടിക്കുക:

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 7 & 11 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 3 & -8 & 5 & 2 \\ 2 & -5 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

3. ഗാസ്സ് ജോർഡാൻ രീതിയിൽ മാട്രിക്സുകളുടെ വിപരീതം കാണുക:

(i) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

1.4 മാട്രിക്സുകളുടെ പ്രയോഗങ്ങൾ: രേഖീയ സമീകരണങ്ങളുടെ പരിഹാര സംവിധാനം

മാട്രിക്സുകളുടെയും ഡിറ്റർമിനന്റുകളുടെയും പ്രയോഗങ്ങളിൽ പ്രധാനപ്പെട്ട ഒന്നാണ് രേഖീയ സമവാക്യങ്ങളുടെ പരിഹാരം കാണൽ. ജീവശാസ്ത്രം, രസതന്ത്രം, വാണിജ്യം, സാമ്പത്തിക ശാസ്ത്രം, ഭൗതികശാസ്ത്രം, എഞ്ചിനീയറിംഗ് എന്നിവയിൽ സംഭവിക്കുന്ന നിരവധി പ്രതിഭാസങ്ങളുടെ ഗണിതശാസ്ത്രമേ‍ാഡലുകളായി രേഖീയ സമവാക്യ സമ്പ്രദായം ഉയർന്ന് വരുന്നു. ഉദാഹരണത്തിന് സർക്യൂട്ട് സിദ്ധാന്തം, ഇൻപുട്ട് ഔട്ട്പുട്ട് മാതൃകകൾ എന്നിവ വിശകലനം ചെയ്യുന്നതിനും രേഖീയ സമവാക്യങ്ങളുടെ പരിഹാര സംവിധാനം ആവശ്യമാണ്.

1.4.1 രേഖീയ സമവാക്യങ്ങളുടെ രൂപീകരണം

ലളിതമായ ഒരു പ്രായോഗിക പ്രശ്നത്തിന്റെ ഗണിത ശാസ്ത്ര മാതൃക രൂപീകരിക്കുക വഴി രേഖീയ സമവാക്യങ്ങളുടെ അർത്ഥം മനസ്സിലാക്കാവുന്നതാണ്.

A, B, C എന്നീ മൂന്ന് പേർ അരിയും പഞ്ചസാരയും വാങ്ങാൻ വേണ്ടി സൂപ്പർമാർക്കറ്റിൽ പോകുന്നു. ആദ്യത്തെ വ്യക്തി A 5 കിലോഗ്രാം അരിയും 3 കിലോ ഗ്രാം പഞ്ചസാരയും വാങ്ങി ₹ 440 കൊടുത്തു. രണ്ടാമത്തെ വ്യക്തി B, 6 കിലോഗ്രാം അരിയും 2 കിലോഗ്രാം പഞ്ചസാരയും ₹ 400 ന് വാങ്ങി. മൂന്നാമത്തെ വ്യക്തി C, 8 കിലോഗ്രാം അരിയും 5 കിലോഗ്രാം പഞ്ചസാരയും ₹ 720 ന് വാങ്ങി. നമുക്ക് ഓരോ കിലോഗ്രാം അരിയ്ക്കും പഞ്ചസാരയ്ക്കും എത്ര രൂപയായി. എന്ന് കണ്ടുപിടിയ്ക്കുന്നതിന് ഒരു ഗണിതശാസ്ത്രമാതൃക രൂപീകരിയ്ക്കാം. ഒരു കിലോഗ്രാം അരിയുടെ വില x ഉം ഒരുകിലോഗ്രാം പഞ്ചസാരയുടെ വില y ഉം ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. ആദ്യത്തെ വ്യക്തി A, 5 കിലോഗ്രാം അരിയും 3 കിലോഗ്രാം പഞ്ചസാരയും വാങ്ങി ₹ 440 രൂപ കൊടുത്തു. അപ്പോൾ $5x + 3y = 440$. അതുപോലെ രണ്ടാമത്തെ വ്യക്തി B യുടെയും മൂന്നാമത്തെ വ്യക്തി C യുടെയും കാര്യങ്ങൾ കണക്കാക്കിയാൽ ലഭിക്കുന്നത് $6x + 2y = 400$ ഉം $8x + 5y = 720$ ആണ്. x, y എന്നിവ കണ്ടുപിടിയ്ക്കാനുള്ള ഗണിത ശാസ്ത്ര മാതൃകകൾ

$$5x + 3y = 440,\ 6x + 2y = 400,\ 8x + 5y = 720.$$

Mal_12th_Maths_Vol1_CH 1_Matrices.indd 27 14-02-2023 17:49:39

കുറിപ്പ്

മുകളിലുള്ള ഉദാഹരണത്തിൽ ഒരു സമവാക്യത്തെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്ന x, y എന്നിവയുടെ മൂല്യങ്ങൾ മറ്റ് സമവാക്യങ്ങളെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തും മറ്റൊരു വിധത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ സമവാക്യങ്ങൾ ഒരേ സമയം x, y എന്നിവയുടെ സമാന മൂല്യങ്ങളാൽ തൃപ്തിപ്പെടണം x, y എന്നിവയുടെ അത്തരം മൂല്യങ്ങൾ നിലവിലുണ്ടെങ്കിൽ അവ രേഖീയ സമവാക്യങ്ങളുടെ സമ്പ്രദായത്തിന് ഒരു പരിഹാരമാകുമെന്ന് പറയപ്പെടുന്നു. ഈ മൂന്ന് സമവാക്യത്തിലും x, y എന്നിവ ഏകഘാതത്തിലാണ് കാണപ്പെടുന്നത്. അതിനാൽ അവ x, y എന്നീ രണ്ട് അറിയപ്പെടാത്ത ചരങ്ങളിൽ രേഖീയ സമവാക്യങ്ങളുടെ ഒരു സമ്പ്രദായം ഉണ്ടാകുന്നു.

ഈ സമ്പ്രദുയത്തിൽ x, y എന്നീ രണ്ട് അറിയപ്പെടാത്ത ചരങ്ങളിൽ മൂന്ന് സമീകരണങ്ങളുണ്ട്.

ഈ സമീകരണങ്ങൾ ദ്വിമാന വിശകലന ജ്യാമിതിയിൽ മൂന്ന് നേർരേഖകളെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു.

1.4.2 രേഖീയ സമീകരണങ്ങളുടെ മാട്രിക്സ് രൂപം

അറിയപ്പെടാത്ത n ചരങ്ങളിലുള്ള m രേഖീയ സമീകരണങ്ങളുടെ ഒരു കൂട്ടം താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned} \qquad \ldots (1)$$

ഇവിടെ ഗുണാങ്കങ്ങൾ $a_{ij}, i = 1, 2, \cdots, m;\ j = 1, 2, \cdots, n$, മറ്റും $b_k, k = 1, 2, \cdots, m$ എന്നിവ സ്ഥിരാങ്കങ്ങളാണ് ഇവിടെ എല്ലാ b_k's യും പൂജ്യമാകുകയാണെങ്കിൽ മുകളിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സമീകരണങ്ങളുടെ കൂട്ടത്തെ സമജാതീയ സമീകരണങ്ങൾ എന്ന് പറയുന്നു. അതേ സമയം ഒരു b_k's എങ്കിലും പൂജ്യമാകാതിരുന്നാൽ വ്യത്യസ്ത **ജാതീയ സമീകരണങ്ങൾ** എന്ന് പറയുന്നു. $x_1, x_2, \cdots, x_n$ എന്നീ ചരങ്ങൾക്ക് പകരമായി $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ നില കൊള്ളുകയും (1) ലെ എല്ലാ സമീകരണങ്ങളെയും തൃപ്തിപ്പെടുത്തുകയും ചെയ്യുകയാണെങ്കിൽ ഈ ക്രമമായ $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ $n-$ റ്റുപ്പിൾനെ (1) ന്റെ നിർദ്ധാരണങ്ങൾ എന്ന് പറയുന്നു. മുകളിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള സമീകരണങ്ങളുടെ മാട്രിക്സ് രൂപം താഴെ കൊടുക്കുന്നു:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ എന്നത് $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$. എന്നിവയുടെ ഗുണാങ്കങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച്

രൂപീകരിച്ച ക്രമം $m \times n$ ആയ ഒരു മാട്രിക്സാണ്. $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ എന്നിവയുടെ ഗുണാങ്കങ്ങൾ ആദ്യത്തെ സമീകരണത്തിൽ കാണുന്ന അതേ ക്രമത്തിലാണ് A യുടെ ആദ്യത്തെ വരി രൂപീകരിച്ചിരിക്കുന്നത്. അതുപോലെയാണ് A യുടെ മറ്റുവരികളും രൂപീകരിച്ചിരിക്കുന്നത് m സമീകരണങ്ങളിലെയും x_1 ന്റെ ഗുണാങ്കങ്ങൾ അതേ ക്രമത്തിൽ എഴുതിയാണ് A യുടെ ആദ്യത്തെ നിര രൂപീകരിച്ചിരിക്കുന്നത് അതേ പോലെ തന്നെയാണ് മറ്റ് നിരകളും നിർമ്മിച്ചിരിക്കുന്നത്.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ എന്നത് $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$. എന്നീ അറിയപ്പെടാത്ത ചരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് $n \times 1$ ക്രമത്തിൽ നിർമ്മിച്ചിരിക്കുന്ന ഒരു നിര മാട്രിക്സാണ്.

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$ എന്നത് വലത് വശത്തെ സ്ഥിരാങ്കങ്ങളായ $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_m$. എന്നിവ ഉപയോഗിച്ച് $m \times 1$ ക്രമത്തിൽ നിർമ്മിച്ചിരിക്കുന്ന ഒരു മാട്രിക്സാണ്.

Mal_12th_Maths_Vol1_CH 1_Matrices.indd 28 14-02-2023 17:49:52

അപ്പോൾ നമുക്ക് ലഭിയ്ക്കും

$$AX = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = B.$$

$AX = B$ എന്നത് മാട്രിക്സുകൾ ഉൾപ്പെടുന്ന മാട്രിക്സ് സമവാക്യമായത് കൊണ്ട് ഇതിനെ രേഖീയ സമീകരണങ്ങൾ (1) ന്റെ മാട്രിക്സ് രൂപം എന്ന് പറയുന്നു. ഇതിനെ $\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$ ഓഗ്മെന്റഡ് മാട്രിക്സെന്നും മാട്രിക്സ് A യെ ഗുണാങ്ക മാട്രിക്സ് എന്നും പറയുന്നു. $[A \mid B]$. എന്നത് ഓഗ്മെന്റഡ് മാട്രിക്സിനെ കുറിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണത്തിന് $2x + 3y - 5z + 7 = 0, 7y + 2z - 3x = 17, 6x - 3y - 8z + 24 = 0$ എന്നീ രേഖീയ സമീകരണങ്ങളുടെ മാട്രിക്സ് രൂപം ഇതാണ് $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -3 & 7 & 2 \\ 6 & -3 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 17 \\ -24 \end{bmatrix}$.

1.4.3 രേഖീയ സമീകരണങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണം

രേഖീയ സമീകരണങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണങ്ങളുടെ അർത്ഥം വ്യക്തമാക്കുന്നതിന് താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സംഗതികൾ പരിഗണിയ്ക്കാം :

കെയ്സ് (i)

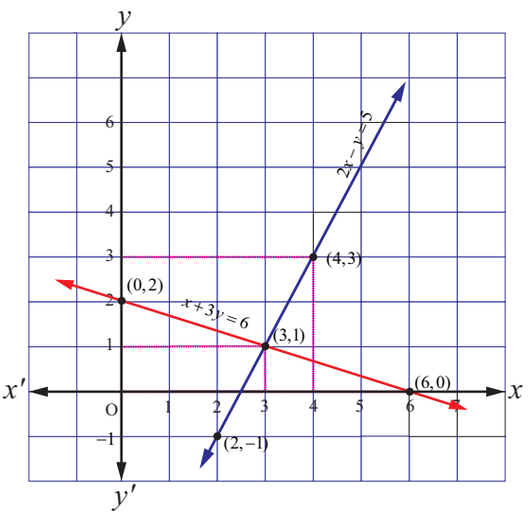
$$2x - y = 5, \quad \ldots (1)$$
$$x + 3y = 6. \quad \ldots (2)$$

എന്നീ സമീകരണങ്ങൾ പരിഗണിയ്ക്കുക. ഈ രണ്ട് സമീകരണങ്ങളും ദ്വിമാന വിശകലന ജ്യാമിതിയിൽ ഒരു ജോഡി നേർരേഖകളെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. (ചിത്രം 1.2) സമീകരണം (1) ഉപയോഗിച്ചാൽ

$$x = \frac{5 + y}{2}. \quad \ldots (3)$$

സമീകരണം (3) നെ സമീകരണം (2) ൽ പ്രതിപാദിച്ച് ലഘൂകരിയ്ക്കുമ്പോൾ $y = 1$ ലഭിക്കും. $y = 1$ സമീകരണം (1) ൽ പ്രതിപാദിയ്ച്ച് ലഘൂകരിക്കുമ്പോൾ $x = 3$. ലഭിയ്ക്കും.

$x = 3$, $y = 1$ എന്നീ മൂല്യങ്ങൾ സമീകരണങ്ങൾ (1) നെയും (2) നെയും തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്നു.



ചിത്രം 1.2

അതായത് സമീകരണം (1) ന്റെ നിർദ്ധാരണം തന്നെയാണ് സമീകരണം (2) ന്റെയും അതുകൊണ്ട് സമീകരണങ്ങൾ സ്ഥിരതയുള്ളതും $(3,1)$ എന്ന ഒരേയൊരു നിർദ്ധാരണം മാത്രമുള്ളതുമാകുന്നു.

$2x - y = 5$, $x + 3y = 6$ എന്നീ രണ്ട് നേർരേഖകൾ ഛേദിയ്ക്കുന്ന ബിന്ദു $(3,1)$ ആകുന്നു.

Mal_12th_Maths_Vol1_CH 1_Matrices.indd 29 14-02-2023 17:50:02

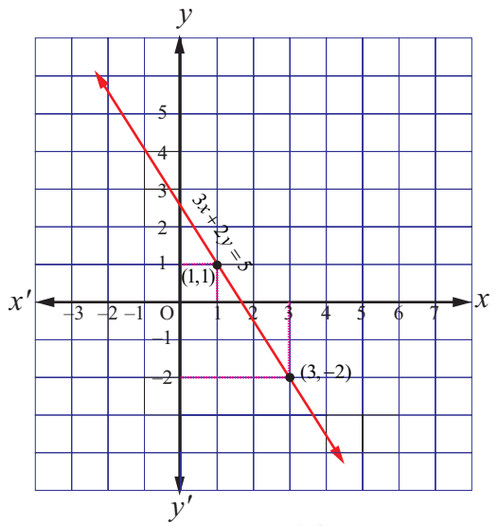
കെയ്സ് (ii)

$$3x+2y = 5, \qquad \ldots (1)$$

$$6x+4y = 10 \qquad \ldots (2)$$

എന്നീ സമീകരണങ്ങൾ പരിഗണിയ്ക്കുക. സമീകരണം (1) ഉപയോഗിച്ചാൽ

$$x = \frac{5-2y}{3} \text{ ലഭിക്കും.} \qquad \ldots (3)$$



ചിത്രം 1.3

സമീകരണം (3) നെ സമീകരണം (2) ൽ പ്രതിപാദിച്ച് ലഘൂകരിച്ചാൽ $0=0$ ലഭിയ്ക്കും. ഇത് നമുക്ക് മനസ്സിലാക്കിത്തരുന്നത് സമീകരണം (2) എന്നത് സമീകരണം (1) ന്റെ എലിമെന്ററി പരിവർത്തനമാണ് എന്നതാണ്. വാസ്തവത്തിൽ സമീകരണം (2) നെ 2 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ സമീകരണം (1) ലഭിയ്ക്കും. സമീകരണം (1) മാത്രമുപയോഗിച്ച് x, y എന്നിവയുടെ മൂല്യം കണ്ടുപിടിയ്ക്കുക സാധ്യമല്ല അതുകൊണ്ട് അറിയപ്പെടാത്ത ഏതെങ്കിലും ഒരു ചരത്തിന് എന്ന് ഒരു മൂല്യം സങ്കല്പിക്കാൻ നമ്മൾ നിർബന്ധതരാകുന്നു. ഉദാഹരത്തിന് $y=t$ ഇവിടെ t എന്നത് ഒരു വാസ്തവിക സംഖ്യ, അപ്പോൾ $x=\frac{5-2t}{3}$. സമീകരണം (1) ഉം (2) ഉം ദ്വിമാന വിശകലന ജ്യാമിതിയിൽ ഒരേയൊരു നേർരേഖയെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. (സാംഗമിക രേഖകൾ) ചിത്രം 1.3 കാണുക.

മറ്റൊരു വിധത്തി പറഞ്ഞാൽ t ഒരു വാസ്തവിക സംഖ്യയായത് കൊണ്ട് (സമീകരണം (1) ന്റെ നിർദ്ധാരണം തന്നെയാണ് സമീകരണം (2) ന്റെയും) സമീകരണങ്ങൾ സ്ഥിരതയുള്ളതും അനേകം നിർദ്ധാരണങ്ങളോടു കൂടിയതുമായിരിക്കും.

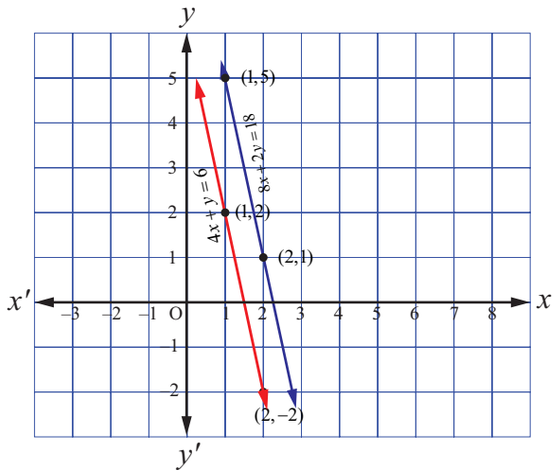
കെയ്സ് (iii)

$$4x+y = 6, \qquad \ldots (1)$$

$$8x+2y = 18. \qquad \ldots (2)$$

എന്നീ സമീകരണങ്ങൾ കണക്കാക്കാം സമീകരണം (1) ഉപയോഗിച്ചാൽ നമുക്ക് ലഭിയ്ക്കുന്നത്

$$x = \frac{6-y}{4} \qquad \ldots (3)$$



ചിത്രം 1.4

സമീകരണം (3) നെ സമീകരണം (2) ൽ പ്രതിസ്ഥാപിച്ച് ലഘൂകരിച്ചാൽ $12=18$ എന്ന് ലഭിക്കും.

ഇത് വൈരുദ്ധ്യമായ ഫലം തരുന്നത് കൊണ്ട് സമീകരണം (2) സമീകരണം (1) ൽ അസ്ഥിരമാണ്. അതുകൊണ്ട് സമീകരണം (1) ന്റെ നിർദ്ധാരണം സമീകരണം (2) ന്റെ നിർദ്ധാരണമാകുന്നില്ല.

മറ്റൊരുവിധത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ സമീകരണങ്ങൾ അസ്ഥിരവും നിർദ്ധാരണം ഇല്ലാത്തതുമാകുന്നു. ഇവിടെ രണ്ട് സമീകരണങ്ങളും ദ്വിമാന വിശകലന ജ്യാമിതിയിൽ രണ്ട് സമാന്തര നേർരേഖകളെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. (സംഗമിക്കാത്ത) ചിത്രം 1.4 സംഗമിക്കാത്ത രണ്ട് സമാന്തര രേഖകൾ ഒരിയ്ക്കലും രണ്ട് സമാന്തര രേഖകൾ ഒരിയ്ക്കലും വാസ്തവിക ബിന്ദുക്കളിൽ കൂട്ടിമുട്ടില്ല.

കുറിപ്പ്

(1) രേഖീയ സമീകരണങ്ങളിൽ ഏതെങ്കിലും രണ്ട് സമീകരണങ്ങൾ പരസ്പരം മാറ്റിയാലും അതിന്റെ നിർദ്ധാരണത്തിൽ വ്യത്യസം വരുന്നില്ല.

(2) ഒരു സമീകരണത്തിന്റെ സ്ഥാനത്ത് അതിനെ ശൂന്യമല്ലാത്ത സ്ഥിരാങ്കം കൊണ്ട് ഗുണിച്ച് കിട്ടുന്ന സമീകരണം വന്നാലും നിർദ്ധാരണത്തിന് മാറ്റം വരുന്നില്ല.

(3) ഒരു സമീകരണത്തിന്റെ സ്ഥാനത്ത് ആ സമീകരണവും പൂജ്യമല്ലാത്ത സ്ഥിരാങ്കം കൊണ്ട് ഗുണിച്ച മറ്റൊരു സമീകരണവും സങ്കലനം ചെയ്ത് കിട്ടുന്ന സമീകരണം വന്നാലും നിർദ്ധാരണത്തിൽ മാറ്റം വരുന്നില്ല.

Mal_12th_Maths_Vol1_CH 1_Matrices.indd 30 14-02-2023 17:50:10

നിർവ്വചനം 1.8

രേഖീയ സമീകരണങ്ങൾക്ക് കുറഞ്ഞ പക്ഷം ഒരു നിർദ്ധാരണമെങ്കിലുമുണ്ടെങ്കിൽ അവയ്ക്ക് **സ്ഥിരതയുണ്ട്** രേഖീയ സമീകരണങ്ങൾക്ക് നിർദ്ധാരണമൊന്നുമില്ലെങ്കിൽ അവ **അസ്ഥിരമാണ്**.

നിരൂപണം

രേഖീയ സമീകരണങ്ങളുടെ എണ്ണവും അറിയപ്പെടാത്ത ചരങ്ങളുടെ എണ്ണവും തുല്യമാണെങ്കിൽ ഗുണാങ്കമാട്രിക്സ് A ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സായിരിക്കും. അതുകൂടാതെ A ഒരു നോൺ സിംഗുലർ മാട്രിക്സാണെങ്കിൽ ആ സമീകരണങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണം താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഏതെങ്കിലും ഒരു രീതിയിൽ കണ്ടുപിടിയ്ക്കാവുന്നതാണ്. (i) മാട്രിക്സ് വിപരീത രീതി (ii) ക്രാമർ നിയമം (iii) ഗാസ്സിയൻ എലിമിനേഷൻ രീതി

1.4.3 (i) മാട്രിക്സ് വിപരീത രീതി

ഗുണാങ്ക മാട്രിക്സ് സമചതുരവും നോൺസിംഗുലാറുമാണെങ്കിൽ മാത്രമേ ഈ രീതി പ്രായോഗികമാകുകയുള്ളൂ.

$AX = B$, … (1) എന്ന മാട്രിക്സ് സമവാക്യം പരിഗണിയ്ക്കുക.

ഇവിടെ A സമചതുരവും നോൺസിംഗുലാറുമായ ഒരു മാട്രിക്സാണ്. ഇവിടെ A നോൺസിംഗുലാർ ആയത് കൊണ്ട് , A^{-1} നിലകൊള്ളും. അതുപോലെ $A^{-1}A = AA^{-1} = I$. ആയിരിക്കും.

സമവാക്യം (1) ന്റെ ഇരുവശത്തും മുന്നിലായിട്ട് A^{-1}, ഗുണിച്ചാൽ കിട്ടുന്നത് $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$. അതായത് $(A^{-1}A)X = A^{-1}B.$,

അപ്പോൾ $X = A^{-1}B.$ ലഭിയ്ക്കും

ഉദാഹരണം 1.22

മാട്രിക്സ് വിപരീത രീതിയിൽ രേഖീയ സമീകരണങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണം കാണുക:

$5x + 2y = 3,\ 3x + 2y = 5$.

നിർദ്ധാരണം

സമീകരണങ്ങളുടെ മാട്രിക്സ് രൂപം $AX = B$, $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$.

കാണാം $|A| = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 6 = 4 \neq 0$, അപ്പോൾ A^{-1} ഉണ്ട് $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$.

സൂത്രവാക്യം $X = A^{-1}B$, പ്രയോഗിച്ചാൽ ലഭിക്കുന്നത്

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 6-10 \\ -9+25 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -4 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-4}{4} \\ \frac{16}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

നിർദ്ധാരണം $(x = -1, y = 4)$.

ഉദാഹരണം 1.23

മാട്രിക്സ് വിപരീതിയിൽ സമീകരണങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണം കാണുക:

$2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 5,\quad x_1 - 2x_2 + x_3 = -4,\quad 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 3.$

നിർദ്ധാരണം

സമീകരണങ്ങളുടെ മാട്രിക് രൂപം $AX = B$,

$$\text{ഇതിൽ } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Mal_12th_Maths_Vol1_CH 1_Matrices.indd 31 14-02-2023 17:50:22

കാണാം $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 2(4+1)-3(-2-3)+3(-1+6) = 10+15+15 = 40 \neq 0$.

A^{-1} നിൽക്കുന്നുണ്ട്

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj } A) = \frac{1}{40}\begin{bmatrix} +(4+1) & -(-2-3) & +(-1+6) \\ -(-6+3) & +(-4-9) & -(-2-9) \\ +(3+6) & -(2-3) & +(-4-3) \end{bmatrix}^T = \frac{1}{40}\begin{bmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 5 & -13 & 1 \\ 5 & 11 & -7 \end{bmatrix}$$

$X = A^{-1}B$, പ്രയോഗിച്ചാൽ ലഭിയ്ക്കുന്നത്

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{40}\begin{bmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 5 & -13 & 1 \\ 5 & 11 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{40}\begin{bmatrix} 25-12+27 \\ 25+52+3 \\ 25-44-21 \end{bmatrix} = \frac{1}{40}\begin{bmatrix} 40 \\ 80 \\ -40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

അപ്പോൾ നിർദ്ധാരണം $(x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1)$.

ഉദാഹരണം 1.24

$A = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -7 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, ആണെങ്കിൽ AB , BA എന്നിവയുടെ ഗുണനഫലം കാണുക

ശേഷം $x - y + z = 4, x - 2y - 2z = 9, 2x + y + 3z = 1$. എന്നീ സമീകരണങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$$AB = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -7 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4+4+8 & 4-8+4 & -4-8+12 \\ -7+1+6 & 7-2+3 & -7-2+9 \\ 5-3-2 & -5+6-1 & 5+6-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} = 8I_3$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -7 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4+7+5 & 4-1-3 & 4-3-1 \\ -4+14-10 & 4-2+6 & 4-6+2 \\ -8-7+15 & 8+1-9 & 8+3-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} = 8I_3.$$

$$AB = BA = 8I_3.., \quad \left(\frac{1}{8}A\right)B = B\left(\frac{1}{8}A\right) = I_3.., \quad B^{-1} = \frac{1}{8}A.$$

തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണങ്ങൾ മാട്രിക്സ് രൂപത്തിൽ എഴുതിയാൽ

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{അതായത്,} \quad B\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{അപ്പോൾ,} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = B^{-1}\begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{8}A\right)\begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -7 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -16+36+4 \\ -28+9+3 \\ 20-27-1 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 24 \\ -16 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

അതായത് നിർദ്ധാരണം $(x = 3, y = -2, z = -1)$.

Mal_12th_Maths_Vol1_CH 1_Matrices.indd 32 14-02-2023 17:50:37

അഭ്യാസം 1.3

1. താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന രേഖീയ സമവാക്യങ്ങൾ മാട്രിക്സ് വിപരീത രീതി ഉപയോഗിച്ച് നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക:

   (i) $2x+5y=-2,\ x+2y=-3$ (ii) $2x-y=8,\ 3x+2y=-2$

   (iii) $2x+3y-z=9,\ x+y+z=9,\ 3x-y-z=-1$

   (iv) $x+y+z-2=0,\ 6x-4y+5z-31=0,\ 5x+2y+2z=13$

2. $A=\begin{bmatrix}-5 & 1 & 3\\ 7 & 1 & -5\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix}$, AB യുടെയും BA യുടെയും ഗുണനഫലം കാണുക അതിന് ശേഷം $x+y+2z=1, 3x+2y+z=7, 2x+y+3z=2$. എന്നീ സമീകരണങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണം കാണുക

3. നിശ്ചിത തുക പ്രതിമാസ ശമ്പളവും വാർഷിക വർദ്ധനവും ഉള്ള ഒരു ജോലിയിൽ ഒരാളെ നിയമിക്കുന്നു. മൂന്ന് വർഷത്തെ സേവനത്തിന് ശേഷം വരുന്ന ആദ്യ മാസവസാനം ₹ 19,800 ശമ്പളം ലഭിയ്ക്കും. അതുപോലെ ഒമ്പത് വർഷത്തെ സേവനത്തിന് ശേഷം വരുന്ന ആദ്യമാസവസാനം ₹ 23,400 ശമ്പളം ലഭിയ്ക്കും. എങ്കിൽ അദ്ദേഹത്തിന്റെ തുടക്കശമ്പളവും വാർഷിക വർദ്ധനവും കണ്ടുപിടിയ്ക്കുക (മാട്രിക്സ് വിപരീത രീതി ഉപയോഗിക്കുക)

4. നാല് പുരുഷൻമാരും നാല് വനിതകളും കൂടി മൂന്ന് ദിവസം കൊണ്ട് ഒരു ജോലി പൂർത്തിയാക്കുന്നു. അതേ ജോലി രണ്ട് പുരുഷൻമാരും അഞ്ച് വനിതകളും ചേർന്ന് നാല് ദിവസം കൊണ്ട് പൂർത്തിയാക്കുന്നു. എന്നാൽ അതേ ജോലി ഒരു പുരുഷൻ തനിച്ച് ചെയ്യാൻ എടുക്കുന്ന സമയവും ഒരു വനിത ആ ജോലി തനിച്ച് ചെയ്യാൻ എടുക്കുന്ന സമയവും മാട്രിക്സ് വിപരീത രീതി ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കുക.

5. A, B, C എന്നീ മൂന്ന് ചരക്കുകളുടെ വില യഥാക്രമം ഓരോ മാത്രയ്ക്കും ₹ x, y, z എന്നിവയാണ്. P എന്നൊരു വ്യക്തി 4 മാത്ര B വാങ്ങുകയും രണ്ട് മാത്ര A യും അഞ്ച് മാത്ര C യും വിൽക്കുകയും ചെയ്തു. R എന്നൊരു വ്യക്തി 2 മാത്ര A വാങ്ങുകയും മൂന്ന് മാത്ര B യും ഒരു മാത്ര C യും വിൽക്കുകയും ചെയ്തു. Q എന്ന വ്യക്തി ഒരു മാത്ര C വാങ്ങുകയും മൂന്ന് മാത്ര A യും ഒരു മാത്ര B വിൽക്കുകയും ചെയ്തു. ഈ ഇടപാടിൽ P, Q, R എന്നിവർക്ക് യഥാക്രമം ₹ 15,000, ₹ 1,000, ₹ 4,000 എന്നിങ്ങനെ ലഭിച്ചെങ്കിൽ ഓരോ മാത്ര A യുടെയും B യുടെയും C യുടെയും വില കണ്ടുപിടിയ്ക്കുക. (മാട്രിക്സ് വിപരീത രീതി ഉപയോഗിച്ച് നിർദ്ധാരണം കാണുക)

1.4.3 (ii) ക്രാമർ നിയമം

ഈ നിയമം പ്രാവർത്തികമാകമെങ്കിൽ ഗുണനാങ്ക മാട്രിക്സ് സമചതുരവും നോൺ സിംഗുലറുമായിരിക്കണം. ചുവടെയുള്ള സമീകരണങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് വിവരിയ്ക്കാം:

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,$$
$$a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3,$$

ഗുണനാങ്ക മാട്രിക്സ് $\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$ നോൺ സിംഗുലറാണ് $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\neq 0.$

$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$ എന്ന് കണക്കാക്കാം,

$$x_1\Delta=x_1\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}x_1 & a_{12} & a_{13}\\ a_{21}x_1 & a_{22} & a_{23}\\ a_{31}x_1 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 & a_{12} & a_{13}\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 & a_{22} & a_{23}\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\Delta_1$$

Mal_12th_Maths_Vol1_CH 1_Matrices.indd 33 14-02-2023 17:50:57

$\Delta \neq 0$, ആയത് കൊണ്ട് $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$.

അതുപോലെ തന്നെ $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$, ഇവിടെ $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$.

ക്രാമർ നിയമപ്രകാരം $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$,

ഇവിടെ $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$

കുറിപ്പ്

Δ യിലെ ആദ്യ നിരയിലെ അംഗങ്ങളായ a_{11}, a_{21}, a_{31} എന്നിവ മാറ്റി പകരം യഥാക്രമം b_1, b_2, b_3 നൽകിയാൽ Δ_1. ലഭിക്കും.

Δ യിലെ രണ്ടാമത്തെ നിരയിലെ അംഗങ്ങളായ a_{12}, a_{22}, a_{32} എന്നിവ മാറ്റി പകരം b_1, b_2, b_3 യഥാക്രമം നൽകിയാർ Δ_2. ലഭിയ്ക്കും.

Δ യിലെ മൂന്നാമത്തെ നിരയിലെ അംഗങ്ങളായ a_{13}, a_{23}, a_{33} എന്നിവ മാറ്റി പകരം b_1, b_2, b_3 യഥാക്രമം നൽകിയാൽ Δ_3. ലഭിക്കും.

ഇവിടെ $\Delta = 0$, ആയാൽ ക്രാമർ നിയമം പ്രായോഗികമല്ല.

ഉദാഹരണം 1.25

ക്രാമർ നിയമം അനുസരിച്ച് സമീകരണങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണം കാണുക

$x_1 - x_2 = 3, 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 17, x_2 + 2x_3 = 7.$

നിർദ്ധാരണം

ആദ്യം ഡിറ്റർമിനന്റുകളുടെ വില കണ്ടുപിടിയ്ക്കാം

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0, \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 17 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 12, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 17 & 4 \\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix} = -6, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 17 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 24.$$

ക്രാമർ നിയമമനുസരിച്ച് നമുക്ക് ലഭിയ്ക്കുന്നത് $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{12}{6} = 2,\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-6}{6} = -1,\ x_3 = \frac{24}{6} = 4.$

നിർദ്ധാരണം $(x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 4)$.

ഉദാഹരണം 1.26



ഒരു T20 മത്സരത്തിൽ അവസാന ഓവറിൽ ഒരു പന്ത് ബാക്കി നിൽക്കെ ചെന്നൈ സൂപ്പർ കിംഗ്സിന് ജയിക്കാൻ വെറും ആറ് റൺസ് ആവശ്യമാണ്. ബൗളർ അവസാന പന്ത് എറിയുകയും ക്രീസിലെ ബാറ്റ്സ്മാൻ അത് മുകളിലേക്ക് അടിക്കുകയും ചെയ്തു. പന്ത് ലംബ തലത്തിൽ ഒരു പാതയിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുകയും പാതയുടെ സമവാക്യം xy നിർദ്ദേശാങ്ക സമ്പ്രദായത്തിൽ $y = ax^2 + bx + c$ ആകുകയും തുടർന്ന് പന്ത് $(10,8), (20,16), (40,22)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുകയും ചെയ്തു.

ഈ മത്സരത്തിൽ ചെന്നൈ സൂപ്പർകിംഗ്സ് വിജയിച്ചു എന്ന് നിങ്ങൾക്ക് അനുമാനിക്കാനാകുമോ? നിങ്ങളുടെ ഉത്തരം ന്യായീകരിക്കുക. (എല്ലാ ദൂരവും മീറ്ററിലാണ് കണക്കാക്കുന്നത്. പന്തിന്റെ സഞ്ചാര പാത അതിർത്തി രേഖയുമായി $(70,0)$.) ലാണ് സംഗമിക്കുന്നത്.)

നിർദ്ധാരണം

$y = ax^2 + bx + c$ എന്ന പാത $(10,8), (20,16), (40,22)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്നു. ഈ ബിന്ദുക്കൾ പാതയുടെ സമവാക്യത്തിൽ പ്രതിസ്ഥാപിക്കുമ്പോൾ $100a + 10b + c = 8, 400a + 20b + c = 16,$ $1600a + 40b + c = 22$. എന്നിങ്ങനെ ലഭിക്കും. ക്രാമർ നിയമം പ്രയോഗിക്കാൻ നമ്മൾ കണ്ടുപിടിക്കുന്നത്

Mal_12th_Maths_Vol1_CH 1_Matrices.indd 34 14-02-2023 17:51:25

$$\Delta = \begin{vmatrix} 100 & 10 & 1 \\ 400 & 20 & 1 \\ 1600 & 40 & 1 \end{vmatrix} = 1000 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1000[-2+12-16] = -6000,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 10 & 1 \\ 16 & 20 & 1 \\ 22 & 40 & 1 \end{vmatrix} = 20 \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 8 & 2 & 1 \\ 11 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 20[-8+3+10] = 100,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 100 & 8 & 1 \\ 400 & 16 & 1 \\ 1600 & 22 & 1 \end{vmatrix} = 200 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 1 \\ 16 & 11 & 1 \end{vmatrix} = 200[-3+48-84] = -7800,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 100 & 10 & 8 \\ 400 & 20 & 16 \\ 1600 & 40 & 22 \end{vmatrix} = 2000 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 8 \\ 16 & 4 & 11 \end{vmatrix} = 2000[-10+84-64] = 20000.$$

ക്രാമർ നിയമം അനുസരിച്ച് $a = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{1}{60}, b = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{7800}{6000} = \frac{78}{60} = \frac{13}{10}, c = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -\frac{20000}{6000} = -\frac{20}{6} = -\frac{10}{3}.$

അപ്പോൾ പാതയുടെ സമവാക്യം $y = -\frac{1}{60}x^2 + \frac{13}{10}x - \frac{10}{3}.$

$x = 70,$ പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ $y = 6.$ ലഭിക്കും. അതിനർത്ഥം പന്ത് അതിർത്തി രേഖയ്ക്ക് മുകളിലൂടെ 6 മീറ്റർ ഉയരത്തിൽ പോകുകയും അതിർത്തി രേഖയ്ക്ക് തൊട്ടുമുമ്പായി നിൽക്കുന്ന ഒരു ഫീൽഡർക്ക് പന്ത് ചാടിപിടിക്കുക അസാധ്യവുമാണ്. അങ്ങനെ ആറ് റൺസ് ലഭിച്ച് ചെന്നൈ സൂപ്പർ കിംഗ്സ് വിജയിച്ചു..

അഭ്യാസം 1.4

1. രേഖീയ സമീകരണങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണം ക്രമാർ നിയമം അനുസരിച്ച് കാണുക:
   (i) $5x - 2y + 16 = 0, x + 3y - 7 = 0$
   (ii) $\frac{3}{x} + 2y = 12, \frac{2}{x} + 3y = 13$
   (iii) $3x + 3y - z = 11,\ 2x - y + 2z = 9,\ 4x + 3y + 2z = 25$
   (iv) $\frac{3}{x} - \frac{4}{y} - \frac{2}{z} - 1 = 0, \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z} - 2 = 0, \frac{2}{x} - \frac{5}{y} - \frac{4}{z} + 1 = 0$
2. ഒരു മത്സര പരീക്ഷയിൽ ഓരോ ശരിയുത്തരത്തിനും ഒരു മാർക്ക് നൽകുകയും ഓരോ തെറ്റുത്തരത്തിന് $\frac{1}{4}$ മാർക്ക് കുറയ്ക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. ഒരു വിദ്യാർത്ഥി 100 ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഉത്തരം എഴുതി 80 മാർക്ക് നേടിയെങ്കിൽ എത്ര ചോദ്യത്തിന് ശരിയുത്തരം നൽകി. (ക്രാമർ നിയമം അനുസരിച്ച് നിർദ്ധാരണം കാണുക).
3. ഒരു രസതന്ത്രജ്ഞന്റെ കൈയ്യിൽ 50% ആസിഡ് ഉള്ള ഒരു ലായനിയും 25% ആസിഡ് ഉള്ള മറ്റൊരു ലായനിയുമുണ്ട് എങ്കിൽ 10 ലിറ്റർ 40% ആസിഡ് ലായനി ഉണ്ടാക്കാൻ ഓരോ ലായനിയും എത്രമാത്രം ചേർക്കണം. (ക്രാമർ നിയമം ഉപയോഗിച്ച് നിർദ്ധാരണം കാണുക).
4. ഒരേ സമയം പമ്പുകൾ A, B എന്നിവ ഉപയോഗിച്ച് 10 മിനിറ്റു കൊണ്ട് ഒരു ഫിഷ് ടാങ്ക് നിറയ്ക്കാം. പമ്പ് B യ്ക്ക് ഒരേ നിരക്കിൽ അകത്തേക്കും പുറത്തേക്കും വെള്ളം പമ്പ് ചെയ്യാൻ കഴിയും. പമ്പ് B അശ്രദ്ധമായി റിവേഴ്സിൽ പ്രവർത്തിക്കുകയാണെങ്കിൽ 30 മിനിറ്റു കൊണ്ട് ടാങ്ക് നിറയും. എങ്കിൽ ഓരോ പമ്പും സ്വയം ടാങ്ക് നിറയ്ക്കാൻ എത്രസമയമെടുക്കും. (ക്രാമർ നിയമം ഉപയോഗിച്ച് നിർദ്ധാരണം കാണുക).

Mal_12th_Maths_Vol1_CH 1_Matrices.indd 35 14-02-2023 17:51:45

5. മൂന്ന് ആളുകളുള്ള ഒരു കുടുംബം ഭക്ഷണ ശാലയിൽ അത്താഴം കഴിയ്ക്കാൻ പോയി. 2 ദോശയ്ക്കും 3 ഇഡ്ഡലിയ്ക്കും 2 വടയ്ക്കും കൂടിയുള്ള വില ₹ 150. രണ്ട് ദോശയ്ക്കും രണ്ട് ഇഡ്ഡലിയ്ക്കും 4 വടയ്ക്കും കൂടിയുള്ള വില ₹ 200 അഞ്ച് ദോശയ്ക്കും ആറ് ഇഡ്ഡലിയ്ക്കും രണ്ട് വടയ്ക്കും കൂടിയുള്ള വില ₹ 250. ഈ കുടുംബത്തിന്റെ പക്കൽ ₹ 350 ഉണ്ട്. ഇവർ മൂന്ന് ദോശയും ആറ് ഇഡ്ഡലിയും ആറ് വടയും കഴിച്ചു വെങ്കിൽ അവരുടെ കൈവശമുള്ള തുകയ്ക്കുള്ളിൽ ബിൽ അടയ്ക്കാൻ അവർക്ക് സാധിക്കുമോ?

1.4.3 (iii) ഗാസ്സിയൻ എലിമിനേഷൻ രീതി

സിംഗലാറോ ദീർഘചതുര മാട്രിക്സോ ആണെങ്കിൽ കൂടി ഈ രീതി പ്രയോഗിയ്ക്കാം. ഇവിടെ നമ്മൾ പഠിച്ച പ്രതിസ്ഥാപിത രീതി ആവശ്യമാണ്. രേഖീയ സമീകരണങ്ങളുടെ ഓഗ്മെന്റഡ് മാട്രിക്സിനെ വരി എക്കലോൺ രൂപത്തിലേക്ക് ആദ്യം പരിവർത്തനം നടത്തിയശേഷം തിരിച്ച് സമീകരണ രൂപത്തിലേക്ക് മാറ്റി ബാക്ക് സബ് സിറ്റിറ്റ്യൂഷൻ രീതി ഉപയോഗിച്ച് നിർദ്ധാരണം കണ്ടുപിടിക്കാം.

ഉദാഹരണം 1.27

ഗാസ്സിയൻ എലിമിനേഷൻ രീതിയിൽ സമീകരണങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണം കാണുക :

$4x+3y+6z=25,\ x+5y+7z=13,\ 2x+9y+z=1.$

നിർദ്ധാരണം

ഓഗ്മെന്റ്ഡ് മാട്രിക്സിനെ എന്നലോൺ രൂപത്തിലേയ്ക്ക് മാറ്റുമ്പോൾ

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 6 & 25 \\ 1 & 5 & 7 & 13 \\ 2 & 9 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 7 & 13 \\ 4 & 3 & 6 & 25 \\ 2 & 9 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{R_2 \to R_2 - 4R_1, \\ R_3 \to R_3 - 2R_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 7 & 13 \\ 0 & -17 & -22 & -27 \\ 0 & -1 & -13 & -25 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{R_2 \to R_2 \div (-1), \\ R_3 \to R_3 \div (-1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 7 & 13 \\ 0 & 17 & 22 & 27 \\ 0 & 1 & 13 & 25 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to 17R_3 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 7 & 13 \\ 0 & 17 & 22 & 27 \\ 0 & 0 & 199 & 398 \end{array}\right].$$

എക്കലോൺ രൂപത്തിൽ നിന്ന് സദൃശ്യ സമീകരണങ്ങൾ എഴുതിയാൽ:

$$x+5y+7z = 13, \quad \ldots (1)$$

$$17y+22z = 27, \quad \ldots (2)$$

$$199z = 398. \quad \ldots (3)$$

(3) ൽ നിന്ന്, $z=\dfrac{398}{199}=2$ ലഭിയ്ക്കും.

പ്രതിസ്ഥാപിക്കാം (2) ൽ, $z=2$, $\quad y=\dfrac{27-22\times 2}{17}=\dfrac{-17}{17}=-1.$

പ്രതിസ്ഥാപിക്കാം (1) ൽ $z=2, y=-1$ (1), $\quad x=13-5\times(-1)-7\times 2=4.$

നിർദ്ധാരണം $(x=4, y=-1, z=2)$.

കുറിപ്പ്: മുകളിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന പോലെ അവസാനത്തെ സമീകരണത്തിൽ നിന്ന് ആദ്യത്തേതിലേക്ക് പോകുകന്ന രീതിയെയാണ് ബാക്ക് സബ്സ്റ്റിറ്റ്യൂഷൻ എന്ന് പറയുന്നത്.

ഉദാഹരണം 1.28

$v(t)$ t സമയം കൊണ്ട് ഒരു റോക്കറ്റിന്റെ മുകളിലേക്കുള്ള വേഗത $v(t)$ = എന്നതിന്റെ ഏകദേശ മൂല്യമായി $v(t)=at^2+bt+c, 0\le t\le 100$ എന്ന് കണക്കാക്കുന്നു. ഇവിടെ a, b, c എന്നിവ സ്ഥിരാംഗങ്ങൾ യഥാക്രമം $t=3, t=6$, $t=9$ സെക്കന്റുകളിൽ റോക്കറ്റിന്റെ വേഗത ഒരു സെക്കന്റിൽ യഥാക്രമം 64, 133, 208 മൈൽ ആണെങ്കിൽ $t=15$ സെക്കന്റിൽ റോക്കറ്റിന്റെ വേഗത എത്ര (ഗാസ്സിയൻ എലിമിനേഷൻ രീതി ഉപയോഗിക്കുക)



Mal_12th_Maths_Vol1_CH 1_Matrices.indd 36 14-02-2023 17:52:11

നിർദ്ധാരണം

ഇവിടെ $v(3)=64,\ v(6)=133,\ v(9)=208$, എന്നിവ തന്നിട്ടുള്ള സമവാക്യത്തിൽ പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ

$$9a+3b+c = 64,$$
$$36a+6b+c = 133,$$
$$81a+9b+c = 208 \text{ ലഭിയ്ക്കും.}$$

ഗാസ്സിയൽ എലിമിനേഷൻ രീതിയിൽ സമീകരണം നിർദ്ധാരണം ചെയ്യാം.

എലിമെന്ററി വരി പ്രവർത്തനം വഴി ഓഗ്മെന്റഡ് മാട്രിക്സിനെ സദൃശ്യ വരി എക്കലോൺ രൂപത്തിലേക്ക് ചുരുക്കിയാൽ ലഭിയ്ക്കുന്നത്

$$[A\mid B]=\left[\begin{array}{ccc|c}9&3&1&64\\36&6&1&133\\81&9&1&208\end{array}\right]\xrightarrow{R_2\to R_2-4R_1,\,R_3\to R_3-9R_1}\left[\begin{array}{ccc|c}9&3&1&64\\0&-6&-3&-123\\0&-18&-8&-368\end{array}\right]\xrightarrow{R_2\to R_2\div(-3),\,R_3\to R_3\div(-2)}\left[\begin{array}{ccc|c}9&3&1&64\\0&2&1&41\\0&9&4&184\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3\to 2R_3}\left[\begin{array}{ccc|c}9&3&1&64\\0&2&1&41\\0&18&8&368\end{array}\right]\xrightarrow{R_3\to R_3-9R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}9&3&1&64\\0&2&1&41\\0&0&-1&-1\end{array}\right]\xrightarrow{R_3\to(-1)R_3}\left[\begin{array}{ccc|c}9&3&1&64\\0&2&1&41\\0&0&1&1\end{array}\right].$$

വരി എക്കലോൺ മാട്രിക്സിൽ നിന്നും സദൃശ്യ സമീകരണങ്ങൾ എഴുതിയാൽ

$9a+3b+c=64,\ 2b+c=41,\ c=1.$

ബാക്ക് സബ്സ്റ്റിറ്റ്യൂഷൻ വഴി $c=1,\ b=\dfrac{(41-c)}{2}=\dfrac{(41-1)}{2}=20,\ a=\dfrac{64-3b-c}{9}=\dfrac{64-60-1}{9}=\dfrac{1}{3}.$

അപ്പോൾ ലഭിയ്ക്കും $v(t)=\dfrac{1}{3}t^2+20t+1.$ ഇനി $v(15)=\dfrac{1}{3}(225)+20(15)+1=75+300+1=376.$

അഭ്യാസം 1.5



1. ഗാസ്സിയൻ എലിമിനേഷൻ രീതിയിൽ സമീകരണങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണം കാണുക:

   (i) $2x-2y+3z=2,\ \ x+2y-z=3,\ \ 3x-y+2z=1$

   (ii) $2x+4y+6z=22,\ \ 3x+8y+5z=27,\ \ -x+y+2z=2$

2. ax^2+bx+c യെ യഥാക്രം $x+3, x-5,\ x-1,$ എന്നിവ കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ ലഭിയ്ക്കുന്ന ശിഷ്ടങ്ങൾ $21, 61, 9$ ആണെങ്കിൽ ഗാസ്സിയൻ എലിമിനേഷൻ രീതി ഉപയോഗിച്ച് a,b,c കാണുക.

3. മൂന്ന് ബോണ്ടുകളിലായി യഥാക്രമം $6\%, 8\%, 9\%$ എന്നീ വാർഷിക നിരക്കിൽ ₹ 65,000 തുക നിക്ഷേപിക്കുന്നു. മൊത്തം വാർഷിക വരുമാനം ₹ 4,800 ആണ്. രണ്ടാമത്തെ ബോണ്ടിൽ നിന്ന് ലഭിയ്ക്കുന്ന തുകയെക്കാൾ ₹ 600 കൂടുതലായി മൂന്നാമത്തെ ബോണ്ടിൽ നിന്ന് ലഭിയ്ക്കുന്നുവെങ്കിൽ ഓരോ ബോണ്ടിലും നിക്ഷേപിച്ച തുക എത്ര (ഗാസ്സിയൻ എലിമിനേഷൻ രീതി ഉപയോഗിക്കുക)

4. ഒരു ആൺ കുട്ടി $y=ax^2+bx+c$ എന്ന പാതയിലെ $(-6,8), (-2,-12), (3,8)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ കൂടി സഞ്ചരിക്കുന്നു. ആൺകുട്ടി തന്റെ സുഹൃത്തിനെ $P(7,60)$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ വച്ച് കണ്ടുമുട്ടാൻ ആഗ്രഹിക്കുന്നു. ഇത് സാധ്യമാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക (ഗാസ്സിയൻ എലിമിനേഷൻ രീതി)

Mal_12th_Maths_Vol1_CH 1_Matrices.indd 37 14-02-2023 17:52:42

1.5 മാട്രിസസ്സിന്റെ പ്രയോഗങ്ങൾ റാങ്ക് രീതിയനുസരിച്ച് രേഖീയ സമീകരണങ്ങളുടെ സ്ഥിരത

രേഖീയ സമീകരണങ്ങളുടെ സ്ഥിരതയെ കുറിച്ച് നേരത്തെ തന്നെ 1.3.3 വിഭാഗത്തിൽ നിർവ്വചിച്ചിട്ടുണ്ട് നമ്മളിപ്പോൾ റാങ്ക് രീതി ഉപയോഗിച്ച് പരിശോധിക്കുന്നു. താഴെ കൊടുത്തിരിയ്ക്കുന്ന സിദ്ധാന്തം തെളിവ് നൽകാതെ തന്നെ പ്രസ്താവിക്കുന്നു.

സിദ്ധാന്തം 1.14 (റൗഷ് - ക്യാപ്പെല്ലി സിദ്ധാന്തം)

ഗുണാങ്കമാട്രിക്സിന്റെ റാങ്ക് ഓഗ്മെന്റഡ് മാട്രിക്സിന്റെ റാങ്കിന് തുല്യമാണെങ്കിൽ അതായത് മാത്രമേ $AX = B$, രൂപത്തിൽ എഴുതിയ രേഖീയ സമീകരണങ്ങൾക്ക് സ്ഥിരതയുള്ളൂ $\rho(A) = \rho([A \mid B])$. എങ്കിൽ

താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഉദാഹരണങ്ങളിൽ ഈ സിദ്ധാന്തം പ്രയോഗിക്കുന്നു..

1.5.1 സമജാതീയമല്ലാത്ത രേഖീയ സമീകരണങ്ങൾ

ഉദാഹരണം 1.29

താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള രേഖീയ സമീകരണങ്ങളുടെ സ്ഥിരത പരിശോധിച്ച് നിർദ്ധാരണം സാധ്യമാണെങ്കിൽ കണ്ടുപിടിയ്ക്കുക: $x + 2y - z = 3,\ 3x - y + 2z = 1,\ x - 2y + 3z = 3,\ x - y + z + 1 = 0$.

നിർദ്ധാരണം

ഇവിടെ അറിയപ്പെടാത്ത ചരങ്ങൾ 3.

സമീകരണങ്ങളുടെ മാട്രിക്സ് രൂപം $AX = B$, ഇവിടെ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

ഓഗ്മെന്റഡ് മാട്രിക്സ് $[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right]$.

ഗാസ്സിയൻ എലിമിനേഷൻ രീതി $[A \mid B]$, ൽ പ്രയോഗിക്കുമ്പോൾ

$$[A \mid B] \xrightarrow{\substack{R_2 \to R_2 - 3R_1, \\ R_3 \to R_3 - R_1, \\ R_4 \to R_4 - R_1,}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -7 & 5 & -8 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{R_2 \to (-1)R_2, \\ R_3 \to (-1)R_3, \\ R_4 \to (-1)R_4}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & -5 & 8 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{R_3 \to 7R_3 - 4R_2, \\ R_4 \to 7R_4 - 3R_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & -8 & -32 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 \div (-8)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{R_4 \to R_4 - R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$[A \mid B]$. യുടെ വരി എക്കലോൺ രൂപത്തിൽ പൂജ്യമല്ലാത്ത, 3 വരികളുണ്ട് അതുകൊണ്ട് $\rho([A \mid B]) = 3$.

A യുടെ വരി എക്കലോൺ രൂപം $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. ഇതിൽ ശൂന്യമല്ലാത്ത 3 വരിയുണ്ട്, അതുകൊണ്ട് $\rho(A) = 3$.

Mal_12th_Maths_Vol1_CH 1_Matrices.indd 38 14-02-2023 17:53:05

അതായത്, $\rho(A) = \rho([A \mid B]) = 3$.

സദൃശ്യ സമീകരണങ്ങൾ എക്കലോൺ രൂപത്തിൽ നിന്ന് എടുത്ത് എഴുതിയാൽ

$x + 2y - z = 3,\ 7y - 5z = 8,\ z = 4,\ 0 = 0.$

അവസാന സമീകരണം $0 = 0$ അർത്ഥമുള്ളതാണ് ബാക്ക് സബ്സ്റ്റിറ്റ്യൂഷൻ വഴി

$$\begin{aligned} z &= 4 \\ 7y - 20 &= 8 \qquad \Rightarrow \quad y = 4, \\ x &= 3 - 8 + 4 \quad \Rightarrow \quad x = -1. \end{aligned}$$

നിർദ്ധാരണം $(x = -1, y = 4, z = 4)$. (ശ്രദ്ധിക്കുക A സമചതുര മാട്രിക്സല്ല.)

ഇവിടെ സമീകരണങ്ങൾക്ക് സ്ഥിരതയും ഒരേയൊരു നിർദ്ധാരണത്തോടു കൂടിയതുമാകുന്നു.

ഉദാഹരണം 1.30

താഴെ കൊടുത്തുട്ടുള്ള രേഖീയ സമീകരണങ്ങളുടെ സ്ഥിരത പരിശോധിച്ച് നിർദ്ധാരണം സാധ്യമാണെങ്കിൽ കണ്ടുപിടിയ്ക്കുക: $4x - 2y + 6z = 8,\ x + y - 3z = -1,\ 15x - 3y + 9z = 21.$

നിർദ്ധാരണം

അറിയപ്പെടാത്ത ചരങ്ങളുടെ എണ്ണം 3.

സമീകരണങ്ങളുടെ മാട്രിക്സ് രൂപം $AX = B$, ഇവിടെ

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & -3 \\ 15 & -3 & 9 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \\ 21 \end{bmatrix}.$$

ഓഗ്മെന്റഡ് മാട്രിക്സ് $[A \mid B]$, യിൽ എലിമെന്ററി വരി പ്രവർത്തനം പ്രയോഗിച്ചാൽ,

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 6 & 8 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \\ 15 & -3 & 9 & 21 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 4 & -2 & 6 & 8 \\ 15 & -3 & 9 & 21 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{R_2 \to R_2 - 4R_1, \\ R_3 \to R_3 - 15R_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -6 & 18 & 12 \\ 0 & -18 & 54 & 36 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{R_2 \to R_2 \div (-6), \\ R_3 \to R_3 \div (-18)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

അപ്പോൾ, $\rho(A) = \rho([A \mid B]) = 2 < 3$. എക്കലോൺ രൂപത്തിൽ നിന്നും ചുവടെയുള്ള സദൃശ്യസമീകരണങ്ങൾ ലഭിക്കും

$$x + y - 3z = -1,\ y - 3z = -2,\ 0 = 0.$$

സദൃശ്യ സമീകരണങ്ങളിൽ നോൺ ട്രിവിയൽ സമീകരണം രണ്ടെണ്ണവും അറിയപ്പെടാത്ത ചരങ്ങൾ 3 എണ്ണവും ഉൾപ്പെടുന്നു. അതിനാൽ അറിയപ്പെടാത്ത രണ്ട് ചരങ്ങളിലുള്ള രണ്ട് സമീകരണങ്ങൾ ലഭിക്കുന്നതിന് നമ്മുടെ ഇഷ്ടപ്രകാരം ഏതെങ്കിലുമൊരു ചരത്തിന് ഏകപക്ഷീയമായി ഒരു വാസ്തവിക സംഖ്യ നൽകാം. അത് $z = t$ എന്നിരിക്കട്ടെ. ഇവിടെ t വാസ്തവിക സംഖ്യയാണ്. അപ്പോൾ $y = 3t - 2,\ x = -1 - (3t - 2) + 3t = 1$ ലഭിയ്ക്കും. അതായത് നിർദ്ധാരണങ്ങൾ $(x = 1, y = 3t - 2, z = t)$, t വാസ്തവിക സംഖ്യം ഒരു പരാമീറ്റർ മാത്രമുള്ള കുടുംബത്തിൽ ഉൾപ്പെടുന്ന നിർദ്ധാരണങ്ങളാണ് മുകളിൽ ലഭിച്ചത്. ഇവിടെ സമീകരണങ്ങൾ സ്ഥിരതയുള്ളതും അനന്തമായ നിർദ്ധാരണങ്ങളോടു കൂടിയതും അവയെല്ലാം തന്നെ ഒരു പരാമീറ്റർ മാത്രമുള്ള കുടുംബത്തിലെ അംഗങ്ങളുമാണ്.

കുറിപ്പ്

മുകളിൽ കൊടുത്ത ഉദാഹരണത്തിൽ സമചതുര മാട്രിക്സ് A സിംഗുലാറാണ് അതു കൊണ്ട് മാട്രിക്സ് വിപരീതം രീതി ഉപയോഗിച്ച് സമീകരണങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണം സാധ്യമല്ല. പക്ഷേ ഇവിടെ ഗാസ്സിയൻ എലിമിനേഷൻ രീതി ഉപയോഗിച്ച് സമീകരണങ്ങൾ സ്ഥിരതയോടു കൂടിയതാണോ അല്ലെയോ എന്ന് തീരുമാനിക്കാൻ സാധിക്കും. അടുത്ത ഉദാഹരണവും മറ്റ് രീതികളെ അപേക്ഷിച്ച് ഗാസ്സിയൻ എലിമിനേഷൻ രീതിയുടെ മേധാവിത്വം സ്ഥിരീകരിക്കുന്നു.

Mal_12th_Maths_Vol1_CH 1_Matrices.indd 39 14-02-2023 17:53:35

ഉദാഹരണം 1.31

താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന രേഖീയ സമീകരണങ്ങളുടെ സ്ഥിരത പരിശോധിച്ച് നിർദ്ധാരണം സാധ്യമാണെങ്കിൽ കണ്ടുപിടിയ്ക്കുക : $x-y+z=-9,\ 2x-2y+2z=-18,\ 3x-3y+3z+27=0.$

നിർദ്ധാരണം

ഇവിടെ അറിയപ്പെടാത്ത ചരങ്ങൾ 3.

സമീകരണങ്ങളുടെ മാട്രിക്സ് രൂപം $AX=B,$ ഇവിടെ

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&-2&2\\3&-3&3\end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-9\\-18\\-27\end{bmatrix}.$$

ഓഗ്മെന്റഡ് മാട്രിക്സായ $[A\,|\,B]$, യിൽ എലിമെന്ററി വരിപ്രവർത്തനം നടത്തുമ്പോൾ ലഭിയ്ക്കുന്നത്

$$[A\,|\,B]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&-9\\2&-2&2&-18\\3&-3&3&-27\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{R_2\to R_2-2R_1,\\ R_3\to R_3-3R_1}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&-9\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right].$$

$\rho(A)=\rho([A\,|\,B])=1<3.$

എക്കലോൺ രൂപത്തില നിന്നും ലഭിക്കുന്ന സദൃശ്യ സമീകരണങ്ങൾ $x-y+z=-9,\ \ 0=0,\ 0=0.$

സദൃശ്യ സമീകരണത്തിൽ അറിയപ്പെടാത്ത മൂന്ന് ചരങ്ങളുള്ള ഒരു നോൺ ട്രിവിയൽ സമീകരണമുണ്ട്.

ഏകപക്ഷീയമായി $y=s, z=t$ എന്നിങ്ങനെ എടുത്താൽ $x-s+t=-9;$ അഥവാ $x=-9+s-t.$ ലഭിയ്ക്കും.

അപ്പോൾ നിർദ്ധാരണം $\left(x=-9+s-t, y=s, z=t\right)$, ഇവിടെ $s,\ t$ എന്നിവ പരാമീറ്ററുകളാണ്

രണ്ട് പരാമീറ്റർ ഉൾപ്പെടുന്ന കുടുംബത്തിലെ നിർദ്ധാരണങ്ങളാണ് ഇവ.

ഇവിടെ സമീകരണങ്ങൾ സ്ഥിരതയുള്ളതും അനന്തമായ നിർദ്ധാരണങ്ങളോട് കൂടിയതും അവയെല്ലാം രണ്ട് പരാമീറ്ററുകളുള്ള കുടുംബത്തിലെ നിർദ്ധാരണങ്ങളുമാണ്.

ഉദാഹരണം 1.32

ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള സമീകരണങ്ങളുടെ സ്ഥിരത പരിശോധിക്കുക

$x-y+z=-9,\ 2x-y+z=4,\ 3x-y+z=6, 4x-y+2z=7.$

നിർദ്ധാരണം

ഇവിടെ അറിയപ്പെടാത്ത ചരങ്ങളുടെ എണ്ണം 3.

സമീകരണങ്ങളുടെ മാട്രിക്സ് രൂപം $AX=B,$ ഇവിടെ

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&-1&1\\3&-1&1\\4&-1&2\end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-9\\4\\6\\7\end{bmatrix}.$$

ഓഗ്മെന്റഡ് മാട്രിക്സ് $[A\,|\,B]$, യിൽ എലിമെന്ററി വരിപ്രവർത്തനം പ്രയോഗിക്കുമ്പോൾ

$$[A\,|\,B]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&-9\\2&-1&1&4\\3&-1&1&6\\4&-1&2&7\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{R_2\to R_2-2R_1,\\ R_3\to R_3-3R_1,\\ R_4\to R_4-4R_1}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&-9\\0&1&-1&22\\0&2&-2&33\\0&3&-2&43\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{R_3\to R_3-2R_2,\\ R_4\to R_4-3R_2}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&-9\\0&1&-1&22\\0&0&0&-11\\0&0&1&-23\end{array}\right]\xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_4}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&-9\\0&1&-1&22\\0&0&1&-23\\0&0&0&-11\end{array}\right]$$

അതായത്, $\rho(A)=3$, $\quad\rho([A\,|\,B])=4.\quad\rho(A)\neq\rho([A\,|\,B]).$

Mal_12th_Maths_Vol1_CH 1_Matrices.indd 40 14-02-2023 17:54:03

എന്നലോൺ രൂപം ഉപയോഗിച്ച് സമീകരണങ്ങളുടെ സദൃശം രൂപം എഴുതുമ്പോൾ

$x-y+z=-9,\quad y-z=22,\ z=-23,\quad 0=-11.$ ലഭിയ്ക്കും

അവസാനത്തെ സമവാക്യം വൈരുദ്ധ്യമുള്ളതാണ്.

അതുകൊണ്ട് സമീകരണങ്ങൾ അസ്ഥിരവും നിർദ്ധാരണം ഇല്ലാത്തതുമാകുന്നു.

റൗഷ്-ക്യാപ്പെല്ലി സിദ്ധാന്തം അനുസരിച്ച് ഉള്ള നിയമങ്ങൾ താഴെ കൊടുക്കുന്നു.

- സമീകരണങ്ങൾ അറിയപ്പെടാത്ത n ചരങ്ങളോടു കൂടിയതും $\rho(A)=\rho([A\,|\,B])=n,$ ആണെങ്കിൽ $AX=B,$ സ്ഥിരതയുള്ളതും ഒരേയൊരു നിർദ്ധാരണത്തോടു കൂടിയതുമാകുന്നു.
- $AX=B,$ അറിയപ്പെടാത്ത n ചരങ്ങളോടു കൂടിയതും $\rho(A)=\rho([A\,|\,B])=n-k, k\neq 0$ യുമാണെങ്കിൽ സമീകരണങ്ങൾ സ്ഥിരതയുള്ളതും അനന്തമായ നിർദ്ധാരണത്തോടു കൂടിയതും അവയെല്ലാം k പരാമീറ്റർകളുള്ള കുടുംബത്തിലെ അംഗങ്ങളുമാണ്. അതായത് അറിയപ്പെടാത്ത മൂന്ന് ചരങ്ങളുള്ള സമീകരണങ്ങളുടെ $\rho(A)=\rho([A\,|\,B])=2,$ എന്നിരിയ്ക്കട്ടെ എങ്കിൽ സമീകരണങ്ങൾ അനന്തമായ നിർദ്ധാരണങ്ങളോടു കൂടിയവയും അവയെല്ലാം ഒരു പരാമീറ്റർ മാത്രം ഉൾപ്പെടുന്ന കുടുംബത്തിലെ അംഗങ്ങളുമായിരിക്കും. അതേപോലെ തന്നെ അറിയപ്പെടാത്ത മൂന്ന് ചരങ്ങളുള്ള സമീകരണങ്ങളുടെ $\rho(A)=\rho([A\,|\,B])=1,$ എന്നിരിയ്ക്കട്ടെ എങ്കിൽ സമീകരണങ്ങൾ അനന്തമായ നിർദ്ധാരണങ്ങളോടു കൂടിയവയും അവയെല്ലാം രണ്ട് പരാമീറ്റർ ഉൾപ്പെടുന്ന കുടുംബത്തിലെ അംഗങ്ങളുമായിരിക്കും.
- $\rho(A)\neq\rho([A\,|\,B]),$ എന്നിരിയ്ക്കട്ടെ എങ്കിൽ $AX=B$ അസ്ഥിരവും നിർദ്ധാരണ ഒന്നും തന്നെ ഇല്ലാത്തവയുമാകുന്നു.

ഉദാഹരണം 1.33

ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള സമീകരണങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണങ്ങൾ ഒരു പരാമീറ്റർ കുടുംബത്തിലെ അംഗങ്ങളാണെങ്കിൽ a,b,c എന്നിവയുടെ അവസ്ഥ കാണുക: $x+y+z=a,\ x+2y+3z=b,\ 3x+5y+7z=c.$

നിർദ്ധാരണം

ഇവിടെ അറിയപ്പെടാത്ത ചരങ്ങൾ 3.

സമീകരണങ്ങളുടെ മാട്രിക്സ് രൂപം $AX=B,$ ഇവിടെ $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\\3&5&7\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}.$

ഓഗ്മെന്റഡ് മാട്രിക്സ് $[A\,|\,B],$ യിൽ എലിമെന്ററി വരി പരിവർത്തനം പ്രയോഗിച്ചാൽ

$$[A\,|\,B]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a\\1&2&3&b\\3&5&7&c\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{R_2\to R_2-R_1,\\ R_3\to R_3-3R_1}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a\\0&1&2&b-a\\0&2&4&c-3a\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-2R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a\\0&1&2&b-a\\0&0&0&(c-3a)-2(b-a)\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a\\0&1&2&b-a\\0&0&0&(c-2b-a)\end{array}\right].$$

നിർദ്ധാരണങ്ങൾ ഒരു പാരാമിറ്റർ കുടുംബത്തിലെ അംഗങ്ങളായത് കൊണ്ട് നിശ്ചയമായും

$\rho(A)=\rho([A,B])=2.$ ആയിരിക്കും അപ്പോൾ എക്കലോൺ രൂപത്തിലെ മൂന്നാമത്തെ വരി പൂജ്യമാകണം

$c-2b-a=0\ \Rightarrow\ c=a+2b.$

ഉദാഹരണം 1.34

$x+2y+z=7,\ x+y+\lambda z=\mu, x+3y-5z=5$ എന്നീ സമീകരണങ്ങളിൽ λ , μ എന്നിവയുടെ മൂല്യങ്ങൾ കണ്ടുപിടിയ്ക്കുക

(i) നിർദ്ധാരണമില്ല (ii) ഒരേയൊരു നിർദ്ധാരണം (iii) അനന്തമായ നിർദ്ധാരണം.

Mal_12th_Maths_Vol1_CH 1_Matrices.indd 41 14-02-2023 17:54:37

നിർദ്ധാരണം

ഇവിടെ അറിയപ്പെടാത്ത ചരങ്ങൾ 3.

സമീകരണങ്ങളുടെ മാട്രിക്സ് രൂപം $AX = B$, ഇവിടെ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 3 & -5 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 \\ \mu \\ 5 \end{bmatrix}$.

ഓഗ്മെന്റഡ് മാട്രിക്സ് $[A \mid B]$, യിൽ എലിമെന്ററി വരിപ്രവർത്തനം പ്രയോഗിച്ചാൽ

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & \lambda & \mu \\ 1 & 3 & -5 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & -5 & 5 \\ 1 & 1 & \lambda & \mu \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{R_2 \to R_2 - R_1, \\ R_3 \to R_3 - R_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -6 & -2 \\ 0 & -1 & \lambda - 1 & \mu - 7 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda - 7 & \mu - 9 \end{array}\right].$$

(i) $\lambda = 7$, $\mu \neq 9$ എങ്കിൽ, $\rho(A) = 2$, $\rho([A \mid B]) = 3$. $\rho(A) \neq \rho([A \mid B])$. ആയത് കൊണ്ട് സമീകരണങ്ങൾക്ക് സ്ഥിരതയുമില്ല നിർദ്ധാരണവുമില്ല.

(ii) $\lambda \neq 7$, μ ഒരു വാസ്തവിക സംഖ്യ $\rho(A) = 3$, $\rho([A \mid B]) = 3$.

അപ്പോൾ $\rho(A) = \rho([A \mid B]) = 3 =$ അറിയപ്പെടാത്ത ചരങ്ങളുടെ എണ്ണം സമീകരണങ്ങൾക്ക് സ്ഥിരതയുമുണ്ട് ഒരേയൊരു നിർദ്ധാരണവുമായിരിക്കും.

(iii) $\lambda = 7$, $\mu = 9$, എങ്കിൽ $\rho(A) = 2$, $\rho([A \mid B]) = 2$.

അപ്പോൾ, $\rho(A) = \rho([A \mid B]) = 2 <$ അറിയപ്പെടാത്ത ചരങ്ങളുടെ എണ്ണം അതുകൊണ്ട് സമീകരണങ്ങൾക്ക് സ്ഥിരതയും മൂന്ന് അനന്തമായ നിർദ്ധാരണങ്ങളോട് കൂടിയവയുമായിരിക്കും.

അഭ്യാസം 1.6

1. ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള സമീകരണങ്ങളുടെ സ്ഥിരത പരിശോധിച്ച് നിർദ്ധാരണം സാധ്യമാണെങ്കിൽ റാങ്ക് രീതിയിൽ കണ്ടുപിടിയ്ക്കുക.

   (i) $x - y + 2z = 2, \quad 2x + y + 4z = 7, \quad 4x - y + z = 4$

   (ii) $3x + y + z = 2, \quad x - 3y + 2z = 1, \quad 7x - y + 4z = 5$

   (iii) $2x + 2y + z = 5, \quad x - y + z = 1, \quad 3x + y + 2z = 4$

   (iv) $2x - y + z = 2, \quad 6x - 3y + 3z = 6, \quad 4x - 2y + 2z = 4$

2. $kx - 2y + z = 1, \quad x - 2ky + z = -2, \quad x - 2y + kz = 1$ എന്നീ സമീകരണങ്ങൾക്ക്

   (i) നിൽദ്ധാരണം ഒന്നുമില്ലെങ്കിൽ (ii)ഒരേയൊരു നിർദ്ധാരണമുണ്ടെങ്കിൽ (iii) അനന്തമായ നിർദ്ധാരണമുണ്ടെങ്കിൽ k യുടെ മൂല്യങ്ങൾ കണ്ടുപിടിയ്ക്കുക

3. $2x + 3y + 5z = 9$, $7x + 3y - 5z = 8$, $2x + 3y + \lambda z = \mu$, എന്നീ സമീകരണങ്ങളിൽ λ, μ എന്നിവയുടെ മൂല്യങ്ങൾ കണ്ടുപിടിയ്ക്കുക

   (i) നിർദ്ധാരണം ഇല്ല (ii) ഒരേയൊരു നിർദ്ധാരണം (iii) അനന്തമായ നിർദ്ധാരണം.

Mal_12th_Maths_Vol1_CH 1_Matrices.indd 42 14-02-2023 17:55:04

1.5.2 സമജാതീയ രേഖീയ സമീകരണങ്ങൾ

ഒരു കൂട്ടം സമജാതീയ രേഖീയ സമവാക്യങ്ങൾ ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0, \end{aligned} \qquad \ldots (1)$$

ഇവിടെ ഗുണാങ്കങ്ങൾ $a_{ij}, i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n$ സ്ഥിരാങ്കങ്ങളാണ് $x_1 = 0, x_2 = 0, \cdots, x_n = 0.$ എന്നീ നിർ ദ്ധാരണങ്ങൾ സമീകരണങ്ങൾ (1) ൽ തൃപ്തിപ്പെടുന്നുണ്ട്. ഈ നിർദ്ധാരണങ്ങൾ (1) ന്റെ ട്രിവിയൽ നിർദ്ധാരണ ങ്ങൾ എന്ന് അറിയപ്പെടുന്നു. മറ്റൊരു തരത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ (1) ന് എപ്പോഴും നിർദ്ധാരണം ഉണ്ടായിരിക്കും. മുക ളിലെ സമീകരണങ്ങൾ $AX = O_{m \times 1}$, എന്ന മാട്രിക്സ് രൂപത്തിൽ എഴുതിയാൽ

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, O_{m \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$O_{m \times 1}$ എന്നതിനെ ലളിതമായി ഇംഗ്ലീഷ് അക്ഷരമാലയിലെ വലിയ അക്ഷരം O കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. O പൂജ്യം നിരമാട്രിക്സ് ആയത് കൊണ്ട് $\rho(A) = \rho([A \mid O]) \leq m.$ എന്നത് എപ്പോഴും പാലിക്കപ്പെടും. അതുകൊണ്ട് റൗഷ്-ക്യാപ്പെല്ലി സിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച് സമജാതീയ രേഖീയ സമീകരണളെല്ലാം എപ്പോഴും സ്ഥിരതയുള്ളതായിരിക്കും.

ഒരു പക്ഷെ $m < n,$ എന്നിരിക്കട്ടെ ഇവിടെ സമീകരണങ്ങളുടെ എണ്ണത്തെക്കാളും അറിയപ്പെടാത്ത ചരങ്ങളുടെ എണ്ണം കൂടുതലായിരിക്കും അപ്പോൾ $\rho(A) = \rho([A \mid O]) < n.$ അങ്ങനെയെങ്കിൽ സമീകരണങ്ങൾ (1) ന് നേ ാൺട്രിവിയൽ നിർദ്ധാരണങ്ങളായിരിക്കും. ചിലപ്പോൾ $m = n,$ ആണെങ്കിൽ സമീകരണങ്ങളുടെയും അറിയപ്പെടാത്ത ചരങ്ങളുടെയും എണ്ണം തുല്യമായിരിക്കും.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n &= 0, \end{aligned} \qquad \ldots (2)$$

രണ്ട് സാധ്യതകളാണ് ഉയരുന്നത്.

കെയ്സ് (i)

$\rho(A) = \rho([A \mid O]) = n,$ ആണെങ്കിൽ സമീകരണങ്ങൾ (2) ന് ഒരേയൊരു നിർദ്ധാരണമേ ഉണ്ടാകുകയുള്ളൂ അവ ട്രിവിയൽ നിർദ്ധാരണവുമായിരിക്കും. $\rho(A) = n,$ ആയത്കൊണ്ട് $|A| \neq 0.$ അതുകൊണ്ട് ട്രിവിയൽ നിർദ്ധാ രണങ്ങൾക്ക് $|A| \neq 0$ ആയിരിക്കും

കെയ്സ് (ii)

$\rho(A) = \rho([A \mid O]) < n,$ ആണെങ്കിൽ സമീകരണങ്ങൾ (2) ന് നോൺട്രിവിയൽ നിർദ്ധാരണമായിരിക്കും. $\rho(A) < n,$ ആയത്കൊണ്ട് $|A| = 0.$ മറ്റൊരു വിധത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ ഗുണാങ്കമാട്രിക്സിന്റെ ഡിറ്റർമിനന്റ് മൂല്യം പൂജ്യമാണെങ്കിൽ സമജാതീയ രേഖീയ സമീകരണങ്ങൾ (2) ന് നോൺ ട്രിവിയൽ നിർദ്ധാരണമായിരിക്കും. ചിലപ്പോൾ $m > n,$ ആണെങ്കിൽ അറിയപ്പെടാത്ത ചരങ്ങളുടെ എണ്ണത്തെക്കാൾ കൂടുതലായിരിക്കും. സമീകരണ ങ്ങളുടെ എണ്ണം എലിമെന്ററി പരിവർത്തനം നടത്തി ചുരുക്കുമ്പോൾ $\rho(A) = \rho([A \mid O]) \leq n.$ ലഭിയ്ക്കും.

Mal_12th_Maths_Vol1_CH 1_Matrices.indd 43 14-02-2023 17:55:31

ഉദാഹരണം 1.35

നിർദ്ധാരണം കാണുക.

$x+2y+3z=0,\ 3x+4y+4z=0,\ 7x+10y+12z=0.$

നിർദ്ധാരണം

ഇവിടെ സമീകരണങ്ങളുടെ എണ്ണം അറിയപ്പെടാത്ത ചരങ്ങളുടെ എണ്ണവും തുല്യമാണ്.

ഗാസ്സിയൻ എലിമിനേഷൻ രീതിയിൽ ഓഗ്മെന്റഡ് മാട്രിക്സിനെ എക്കലോൺ രൂപത്തിലേക്ക് മാറ്റുമ്പോൾ

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\3&4&4&0\\7&10&12&0\end{array}\right]\xrightarrow[R_3\to R_3-7R_1]{R_2\to R_2-3R_1,}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\0&-2&-5&0\\0&-4&-9&0\end{array}\right]\xrightarrow[R_3\to R_3\div(-1)]{R_2\to R_2\div(-1),}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\0&2&5&0\\0&4&9&0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-2R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\0&2&5&0\\0&0&-1&0\end{array}\right]\xrightarrow{R_3\to R_3\div(-1)}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\0&2&5&0\\0&0&1&0\end{array}\right].$$

അപ്പോൾ, $\rho(A)=\rho([A\,|\,O])=3=$ അറിയപ്പെടാത്ത ചരങ്ങളുടെ എണ്ണം

അതുകൊണ്ട് സമീകരണങ്ങൾക്ക് ഒരേയൊരു നിർദ്ധാരണം മാത്രം. $x=0,\ y=0,\ z=0$ എന്നിവ എല്ലായിപ്പോഴും സമജാതീയ സമീകരണങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണമായത് കൊണ്ട് ഇവിടെ $x=0,\ y=0,\ z=0.$ എന്ന ആ ഒരേയൊരു നിർദ്ധാരണം ട്രിവിയൽ നിർദ്ധാരണമായിരിക്കും.

കുറിപ്പ്

മുകളിലത്തെ ഉദാഹരണത്തിൽ നിന്ന് മനസ്സിലാകുന്നത്

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\3&4&4\\7&10&12\end{vmatrix}=1(48-40)-2(36-28)+3(30-28)=8-16+6=-2\neq 0.$$

ഉദാഹരണം 1.36

നിർദ്ധാരണം കാണുക: $x+3y-2z=0,\ 2x-y+4z=0,\ x-11y+14z=0.$

നിർദ്ധാരണം

അറിയപ്പെടാത്ത ചരങ്ങളുടെ എണ്ണം 3.

ഗാസ്സിയൻ എലിമിനേഷൻ രീതിയിൽ ഓഗ്മെന്റഡ് മാട്രിക്സിനെ എക്കലോൺ രൂപത്തിലേക്ക് മാറ്റുമ്പോൾ

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&-2&0\\2&-1&4&0\\1&-11&14&0\end{array}\right]\xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-2R_1,}\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&-2&0\\0&-7&8&0\\0&-14&16&0\end{array}\right]\xrightarrow[R_3\to R_3\div(-2)]{R_2\to R_2\div(-1),}\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&-2&0\\0&7&-8&0\\0&7&-8&0\end{array}\right]\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&-2&0\\0&7&-8&0\\0&0&0&0\end{array}\right].$$

അപ്പോൾ, $\rho(A)=\rho([A\,|\,O])=2<3=$ അറിയപ്പെടാത്ത ചരങ്ങളുടെ എണ്ണം

അതുകൊണ്ട് നിർദ്ധാരണങ്ങൾ ഒരു പരാമീറ്റർ കുടുംബത്തിലെ അംഗങ്ങളാണ്

എക്കലോൺ രൂപത്തിൽ നിന്ന് സമീകരണം എഴുതിയാൽ

$x+3y-2z=0,\qquad 7y-8z=0,\qquad 0=0.$

ഇവിടെ $z=t,$ കണക്കാക്കാം, t എന്നത് ഒരു വാസ്തവിക സംഖ്യ ബാക്ക് സബ്സ്റ്റിറ്റ്യൂഷൻ വഴി,

Mal_12th_Maths_Vol1_CH 1_Matrices.indd 44 14-02-2023 17:55:38

$$z = t,$$

$$7y - 8t = 0 \;\Rightarrow\; y = \frac{8t}{7},$$

$$x + 3\left(\frac{8t}{7}\right) - 2t = 0 \;\Rightarrow\; x + \frac{24t - 14t}{7} = 0 \;\Rightarrow\; x = -\frac{10t}{7}.$$

നിർദ്ധാരണം $\left(x = -\frac{10t}{7}, y = \frac{8t}{7}, z = t\right)$, ഇവിടെ t ഒരു വാസ്തവിക സംഖ്യ

ഉദാഹരണം 1.37

നിർദ്ധാരണം കാണുക: $x + y - 2z = 0, 2x - 3y + z = 0, 3x - 7y + 10z = 0, 6x - 9y + 10z = 0.$

നിർദ്ധാരണം

ഇവിടെ സമീകരണങ്ങളുടെ എണ്ണം 4, അറിയപ്പെടാത്ത ചരങ്ങളുടെ എണ്ണം 3. ഓഗ്മെന്റഡ് മാട്രിക്സിനെ എക്കലോൺ രൂപത്തിലേക്ക് ചുരുക്കുമ്പോൾ

$$[A \mid O] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -7 & 10 & 0 \\ 6 & -9 & 10 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{R_2 \to R_2 - 2R_1, \\ R_3 \to R_3 - 3R_1, \\ R_4 \to R_4 - 6R_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & -10 & 16 & 0 \\ 0 & -15 & 22 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{R_2 \to R_2 \div (-5), \\ R_3 \to R_3 \div (-2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -8 & 0 \\ 0 & -15 & 22 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{R_3 \to R_3 - 5R_2, \\ R_4 \to R_4 + 15R_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{R_3 \to R_3 \div (-3), \\ R_4 \to R_4 \div 7}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_4 \to R_4 - R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

അതായത്, $\rho(A) = \rho([A \mid O]) = 3 =$ അറിയപ്പെടാത്ത ചരങ്ങളുടെ എണ്ണം

അത്കൊ≠ സമീകരണങ്ങൾക്ക് ട്രിവിയൽ നിർദ്ധാരണം മാത്രമേയുള്ളൂ.

ഉദാഹരണം 1.38

താഴെ കാണുന്ന സമീകരണങ്ങൾക്ക് നോൺട്രിവിയൽ നിർദ്ധാരണമാണെങ്കിൽ λ യുടെ മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കുക

$$(3\lambda - 8)x + 3y + 3z = 0,\; 3x + (3\lambda - 8)y + 3z = 0,\; 3x + 3y + (3\lambda - 8)z = 0$$

നിർദ്ധാരണം

ഇവിടെ അറിയപ്പെടാത്ത ചരങ്ങൾ 3. സമീകരണങ്ങൾക്ക് സ്ഥിരതയും നോൺട്രിവിയൽ നിർദ്ധാരണവും ഉണ്ടെങ്കിൽ ഗുണാങ്കമാട്രിക്സിന്റെ റാങ്കും ഓഗ്മെന്റഡ് മാട്രിക്സിന്റെ റാങ്കും തുല്യമാകുകയും അത് 3 ൽ താഴെ ആയിരിക്കുകയും ചെയ്യും. അതുകൊണ്ട് ഗുണാങ്ക മാട്രിക്സിന്റെ ഡിറ്റർമിനന്റ് മൂല്യം പൂജ്യം ആയിരിക്കും.

അപ്പോൾ

$$\begin{vmatrix} 3\lambda - 8 & 3 & 3 \\ 3 & 3\lambda - 8 & 3 \\ 3 & 3 & 3\lambda - 8 \end{vmatrix} = 0 \text{ അല്ലെങ്കിൽ } \begin{vmatrix} 3\lambda - 2 & 3\lambda - 2 & 3\lambda - 2 \\ 3 & 3\lambda - 8 & 3 \\ 3 & 3 & 3\lambda - 8 \end{vmatrix} = 0 \; (R_1 \to R_1 + R_2 + R_3 \text{ പ്രയോഗിച്ചാൽ})$$

$$\text{അല്ലെങ്കിൽ } (3\lambda - 2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3\lambda - 8 & 3 \\ 3 & 3 & 3\lambda - 8 \end{vmatrix} = 0 \; (R_1 \text{ ൽ നിന്ന് } (3\lambda - 2) \text{ പുറത്തെടുത്താൽ})$$

Mal_12th_Maths_Vol1_CH 1_Matrices.indd 45 14-02-2023 17:55:45

അല്ലെങ്കിൽ $(3\lambda-2)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 3\lambda-11 & 0\\ 0 & 0 & 3\lambda-11\end{vmatrix} = 0$ ($R_2 \to R_2-3R_1, R_3 \to R_3-3R_1$ പ്രയോഗിച്ചാൽ)

$(3\lambda-2)(3\lambda-11)^2\ 0$. അപ്പോൾ $\lambda=\frac{2}{3}$ യും $\lambda=\frac{11}{3}$.

രസതന്ത്രത്തിന് രേഖീയ സമജാതീയ സമീകരണങ്ങളുടെ ഒരു പ്രയോഗം ഞങ്ങൾ ഇപ്പോൾ നൽകുന്നു. ഇരുവശത്തുമുള്ള ആറ്റങ്ങളുടെ എണ്ണം പരിശോധിച്ച് കൊണ്ട് രാസപ്രവർത്തന സമവാക്യം തുലനം ചെയ്യുന്നതിനെ കുറിച്ച് നിങ്ങൾക്ക് ഇതിനകം അറിയാം. നേരിട്ടുള്ള ഒരു രീതി ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം 1.39

ഗാസ്സിയൻ എലിമിനേഷൻ രീതി ഉപയോഗിച്ച് രാസപ്രവർത്തന സമവാക്യം തുലനം ചെയ്യുക:

$C_5H_8+O_2 \to CO_2+H_2O.$

(ഐസോപ്രീൻ എന്ന ജൈവ സംയുക്തം കത്തുമ്പോൾ നടക്കുന്ന പ്രതിപ്രവർത്തനമാണ് മുകളിൽ പറഞ്ഞത്)

നിർദ്ധാരണം

ഇവിടെ x_1, x_2, x_3, x_4 എന്നീ പോസിറ്റീവായ പൂർണ്ണാങ്കങ്ങളാണ് തിരയുന്നത്

$x_1C_5H_8+x_2O_2=x_3CO_2+x_4H_2O$ . .. (1)

സമവാക്യം (1) ന്റെ ഇടത് വശത്തും വലത് വശത്തുമുള്ള കാർബൺ ആറ്റങ്ങളുടെ എണ്ണം തുല്യമാകണം

$5x_1=x_3 \Rightarrow 5x_1-x_3=0$ അപ്പോൾ സമജാതീയ രേഖിയ സമീകരണം ലഭിക്കും. ... (2)

അതുപോലെ ഹൈഡ്രജൻ ആറ്റവും ഓക്സിജൻ ആറ്റവും കണക്കിലെടുത്താൽ യഥാക്രമം

$8x_1=2x_4 \Rightarrow 4x_1-x_4=0$, ... (3)

$2x_2=2x_3+x_4 \Rightarrow 2x_2-2x_3-x_4=0$. ... (4)

സമവാക്യങ്ങൾ (2), (3), (4) എന്നിവ അറിയാത്ത നാല് ചരങ്ങളിലുള്ള സമജാതീയ രേഖീയ സമീകരണങ്ങളായി മാറി.

ഓഗ്മെന്റഡ് മാട്രിക്സ് $[A\,|\,B]=\left[\begin{array}{cccc|c}5 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 4 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0\end{array}\right]$.

ഗാസ്സിയൻ എലിമിനേഷൻ രീതി ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്നത്

$$[A\,|\,B] \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{cccc|c}4 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 5 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0\end{array}\right] \xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{cccc|c}4 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0\\ 5 & 0 & -1 & 0 & 0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3\to 4R_3-5R_1} \left[\begin{array}{cccc|c}4 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -4 & 5 & 0\end{array}\right].$$

അതായത്, $\rho(A)=\rho([A\,|\,B])=3<4=$ അറിയാത്ത ചരങ്ങളുടെ എണ്ണം

സമീകരണങ്ങൾ സ്ഥിരതയുള്ളതും അനന്തമായ നിർദ്ധാരണങ്ങളോടു കൂടിയവയുമാണ്.

എക്കലോൺ രൂപത്തിൽ നിന്ന് സമീകരണങ്ങൾ എഴുതിയാൽ ലഭിക്കുന്നത്

$4x_1-x_4=0, 2x_2-2x_3-x_4=0, -4x_3+5x_4=0.$

അതുകൊണ്ട് അറിയാത്ത ചരങ്ങളിൽ ഒരെണ്ണം ഏകപക്ഷീയമായി തിരഞ്ഞെടുത്ത് ശൂന്യമല്ലാത്ത ഒരു വാസ്തവിക സംഖ്യ നൽകും.

നമ്മൾ ഇവിടെ തിരഞ്ഞെടുത്തത് $x_4=t, t\neq 0$. ബാക്ക് സബ്സ്റ്റിറ്റ്യൂഷൻ വഴി $x_3=\frac{5t}{4}, x_2=\frac{7t}{4}, x_1=\frac{t}{4}$. ലഭിയ്ക്കും.

Mal_12th_Maths_Vol1_CH 1_Matrices.indd 46 14-02-2023 17:55:56

x_1, x_2, x_3, x_4 എന്നിവ പോസിറ്റീവ് പൂർണ്ണാങ്കമായതിനാൽ $t = 4$. തിരഞ്ഞെടുക്കാം

അപ്പോൾ $x_1 = 1, x_2 = 7, x_3 = 5,$ $x_4 = 4.$ എന്നിങ്ങനെ ലഭിയ്ക്കും

തുലനം ചെയ്ത സമവാക്യം $C_5H_8 + 7O_2 \rightarrow 5CO_2 + 4H_2O.$ ആണ്.

ഉദാഹരണം 1.40

ചുവടെയുള്ള സമീകരണങ്ങൾക്ക് $px + by + cz = 0,\ ax + qy + cz = 0,\ ax + by + rz = 0$ നോൺ ട്രിവിയൽ നിർദ്ധാരണവും ഒപ്പം $p \neq a, q \neq b, r \neq c,$ യുമാണെങ്കിൽ $\frac{p}{p-a} + \frac{q}{q-b} + \frac{r}{r-c} = 2.$ എന്ന് തെളിയിക്കുക

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണങ്ങൾക്ക് $px + by + cz = 0, ax + qy + cz = 0, ax + by + rz = 0$ നോൺട്രിവിയൽ നിർദ്ധാരണമാണെന്ന് അനുമാനിക്കുക.

അപ്പോൾ $\begin{vmatrix} p & b & c \\ a & q & c \\ a & b & r \end{vmatrix} = 0.$ ഇതിൽ $R_2 \rightarrow R_2 - R_1$, $R_3 \rightarrow R_3 - R_1$ എന്ന് പ്രയോഗിക്കുമ്പോൾ

ലഭിയ്ക്കുന്നത് $\begin{vmatrix} p & b & c \\ a-p & q-b & 0 \\ a-p & 0 & r-c \end{vmatrix} = 0.$ ആതായത് $\begin{vmatrix} p & b & c \\ -(p-a) & q-b & 0 \\ -(p-a) & 0 & r-c \end{vmatrix} = 0.$

ഇവിടെ $p \neq a, q \neq b, r \neq c,$ ആയത് കൊണ്ട് $(p-a)(q-b)(r-c)\begin{vmatrix} \frac{p}{p-a} & \frac{b}{q-b} & \frac{c}{r-c} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ എന്ന് ലഭിയ്ക്കും.

അങ്ങനെ $\begin{vmatrix} \frac{p}{p-a} & \frac{b}{q-b} & \frac{c}{r-c} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$ ഇവിടെ ഡിറ്റർമിനന്റ് വിപുലീകരിച്ചാൽ

ലഭിയ്ക്കുന്നത് $\frac{p}{p-a} + \frac{b}{q-b} + \frac{c}{r-c} = 0.$

അതായത്, $\frac{p}{p-a} + \frac{q-(q-b)}{q-b} + \frac{r-(r-c)}{r-c} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{p}{p-a} + \frac{q}{q-b} + \frac{r}{r-c} = 2.$

അഭ്യാസം 1.7

1. സമജാതീയ സമീകരണങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണം കാണുക.
   (i) $3x + 2y + 7z = 0,\quad 4x - 3y - 2z = 0,\quad 5x + 9y + 23z = 0$
   (ii) $2x + 3y - z = 0,\quad x - y - 2z = 0,\quad 3x + y + 3z = 0$

2. ചുവടെ കൊടുക്കുന്ന സമീകരണങ്ങൾ $x + y + 3z = 0,\ 4x + 3y + \lambda z = 0,\ 2x + y + 2z = 0$ എന്നിവയ്ക്ക് (i) ഒരേയൊരു നിർദ്ധാരണം (ii) നോൺ ട്രിവിയൽ നിർദ്ധാരണം ആണെങ്കിൽ λ യുടെ മൂല്യങ്ങൾ കാണുക.

3. ഗാസ്സിയൻ എലിമിനേഷൻ രീതി ഉപയോഗിച്ച് രാസപ്രവർത്തന സമവാക്യം തുലനം ചെയ്യുക:
   $C_2H_6 + O_2 \rightarrow H_2O + CO_2$

Mal_12th_Maths_Vol1_CH 1_Matrices.indd 47 14-02-2023 17:56:09

അഭ്യാസം 1.8

ശരിയായ ഉത്തരം അല്ലെങ്കിൽ ഏറ്റവും അനുയോജ്യമായ ഉത്തരം തിരഞ്ഞെടുക്കുക:

1. $|\text{adj}(\text{adj}\, A)| = |A|^9$, എങ്കിൽ സമചതുര മാട്രിക്സ് A യുടെ ക്രമം എത്ര

(1) 3 (2) 4 (3) 2 (4) 5

2. A ഒരു 3×3 നോൺസിംഗുലർ മാട്രിക്സാണ് മാത്രവുമല്ല $AA^T = A^TA$ ഉം $B = A^{-1}A^T$, ഉം ആണെങ്കിൽ $BB^T =$

(1) A (2) B (3) I_3 (4) B^T

3. $A=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{bmatrix}$, $B=\text{adj}\, A$, $C=3A$, എങ്കിൽ $\dfrac{|\text{adj}\, B|}{|C|} =$

(1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{9}$ (3) $\frac{1}{4}$ (4) 1

4. $A\begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 0\\ 0 & 6\end{bmatrix}$, എങ്കിൽ $A =$

(1) $\begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & 4\end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix}4 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix}4 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$

G7MSC

5. $A=\begin{bmatrix}7 & 3\\ 4 & 2\end{bmatrix}$, എങ്കിൽ $9I_2 - A =$

(1) A^{-1} (2) $\dfrac{A^{-1}}{2}$ (3) $3A^{-1}$ (4) $2A^{-1}$

6. $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 5\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 0\end{bmatrix}$ എങ്കിൽ $|\text{adj}\,(AB)| =$

(1) −40 (2) −80 (3) −60 (4) −20

7. ഒരു 3×3 മാട്രിക്സ് A യുടെ അഡ്ജോയിന്റ് ആണ്, $P=\begin{bmatrix}1 & x & 0\\ 1 & 3 & 0\\ 2 & 4 & -2\end{bmatrix}$, $|A|=4$, എങ്കിൽ x എത്ര

(1) 15 (2) 12 (3) 14 (4) 11

8. $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\ 2 & -2 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{bmatrix}$, $A^{-1}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$ എങ്കിൽ a_{23} യുടെ മൂല്യമെത്ര

(1) 0 (2) −2 (3) −3 (4) −1

9. A, B, C എന്നിവ വിപരീതം സാധ്യമായ ഏതെങ്കിലും ഒരേ ക്രമത്തിലുള്ള മാട്രിക്സുകളാണെങ്കിൽ താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ളവയിൽ ശരിയല്ലാത്തത് ഏത് ?

(1) $\text{adj}\, A = |A|\, A^{-1}$ (2) $\text{adj}(AB) = (\text{adj}\, A)(\text{adj}\, B)$

(3) $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$ (4) $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

10. $(AB)^{-1}=\begin{bmatrix}12 & -17\\ -19 & 27\end{bmatrix}$, $A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{bmatrix}$, എങ്കിൽ $B^{-1} =$

(1) $\begin{bmatrix}2 & -5\\ -3 & 8\end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix}8 & 5\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix}8 & -5\\ -3 & 2\end{bmatrix}$

Mal_12th_Maths_Vol1_CH 1_Matrices.indd 48 14-02-2023 17:56:36

11. $A^T A^{-1}$ സിമ്മെട്രിക് എങ്കിൽ $A^2 =$

(1) A^{-1} (2) $(A^T)^2$ (3) A^T (4) $(A^{-1})^2$

12. A ഒരു നോൺ സിംഗുലർ മാട്രിക്സ്, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$, $(A^T)^{-1} =$

(1) $\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

13. $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ x & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$, $A^T = A^{-1}$,എങ്കിൽ x ന്റെ മൂല്യം

(1) $\frac{-4}{5}$ (2) $\frac{-3}{5}$ (3) $\frac{3}{5}$ (4) $\frac{4}{5}$

14. $A = \begin{bmatrix} 1 & \tan\frac{\theta}{2} \\ -\tan\frac{\theta}{2} & 1 \end{bmatrix}$, $AB = I_2$, എങ്കിൽ $B =$

(1) $\left(\cos^2\frac{\theta}{2}\right)A$ (2) $\left(\cos^2\frac{\theta}{2}\right)A^T$ (3) $(\cos^2\theta)I$ (4) $\left(\sin^2\frac{\theta}{2}\right)A$

15. $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, $A(\text{adj } A) = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$, എങ്കിൽ $k =$

(1) 0 (2) $\sin\theta$ (3) $\cos\theta$ (4) 1

16. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ ഒപ്പം $\lambda A^{-1} = A$, എങ്കിൽ λ is

(1) 17 (2) 14 (3) 19 (4) 21

17. $\text{adj } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$, $\text{adj } B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ എങ്കിൽ $\text{adj}(AB)$ is

(1) $\begin{bmatrix} -7 & -1 \\ 7 & -9 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -2 & -10 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} -7 & 7 \\ -1 & -9 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} -6 & -2 \\ 5 & -10 \end{bmatrix}$

18. ഈ മാട്രിക്സിന്റെ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ റാങ്ക്

(1) 1 (2) 2 (3) 4 (4) 3

19. If $x^a y^b = e^m, x^c y^d = e^n, \Delta_1 = \begin{vmatrix} m & b \\ n & d \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & m \\ c & n \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, എങ്കിൽ യഥാക്രമം x, y എന്നിവയുടെ മൂല്യം,

(1) $e^{(\Delta_2/\Delta_1)}, e^{(\Delta_3/\Delta_1)}$ (2) $\log(\Delta_1/\Delta_3), \log(\Delta_2/\Delta_3)$

(3) $\log(\Delta_2/\Delta_1), \log(\Delta_3/\Delta_1)$ (4)) $e^{(\Delta_1/\Delta_3)}, e^{(\Delta_2/\Delta_3)}$

Mal_12th_Maths_Vol1_CH 1_Matrices.indd 49 14-02-2023 17:57:02

20. ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ളവയിൽ ഏത്/ഏതൊക്കെയാണ് ശരിയുത്തരം ?

(i) ഒരു സിമ്മെട്രിക് മാട്രിക്സിന്റെ അഡ്ജോയിന്റും സിമ്മെട്രിക് മാട്രിക്സായിരിക്കും.

(ii) ഒരു വികർണ്ണമാട്രിക്സിന്റെ അഡ്ജോയിന്റും വികർണ്ണമാട്രിക്സായിരിക്കും.

(iii) A ക്രമം n ആയ ഒരു സമചതുരമാട്രിക്സും λ അദിശവുമാണെങ്കിൽ $\text{adj}(\lambda A) = \lambda^n \text{adj}(A)$.

(iv) $A(\text{adj}A) = (\text{adj}A)A = |A| I$

(1) മാത്രം (i) (2) (ii) ഉം (iii) (3) (iii) ഉം (iv) (4) (i) ഉം (ii) ഉം (iv)

21. $\rho(A) = \rho([A \mid B])$, ആണെങ്കിൽ രേഖീയ സമീകരണങ്ങൾ $AX = B$ യ്ക്ക്

(1) സ്ഥിരതയും ഒരേയൊരു നിർദ്ധാരണവും (2) സ്ഥിരതയുണ്ട്

(3) സ്ഥിരതയും അനേകം നിർദ്ധാരണവും (4) സ്ഥിരതയില്ല

22. സമീകരണങ്ങൾ $x + (\sin\theta)y - (\cos\theta)z = 0, (\cos\theta)x - y + z = 0, (\sin\theta)x + y - z = 0$ എന്നിവയ്ക്ക് നോൺട്രിവിയൽ നിർദ്ധാരണവും $0 \le \theta \le \pi$ യുമാണെങ്കിൽ θ യുടെ മൂല്യമെത്ര

(1) $\frac{2\pi}{3}$ (2) $\frac{3\pi}{4}$ (3) $\frac{5\pi}{6}$ (4) $\frac{\pi}{4}$

23. അനന്തമായ നിർദ്ധാരണങ്ങളുള്ള രേഖീയ സമീകരണങ്ങളുടെ ഓഗ്മെന്റഡ് മാട്രിക്സ് $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & \lambda-7 & \mu+5 \end{bmatrix}$

ആണെങ്കിൽ λ , μ എന്നിവയുടെ മൂല്യം

(1) $\lambda = 7, \mu \neq -5$ (2) $\lambda = -7, \mu = 5$ (3) $\lambda \neq 7, \mu \neq -5$ (4) $\lambda = 7, \mu = -5$

24. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ $4B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & x \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ B മാട്രിക്സ് A , മാട്രിക്സിന്റെ വിപരീതമാണെങ്കിൽ x ന്റെ മൂല്യം

(1) 2 (2) 4 (3) 3 (4) 1

25. $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, എങ്കിൽ $\text{adj}(\text{adj}\, A)$ എത്ര

(1) $\begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 6 & -6 & 8 \\ 4 & -6 & 8 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} -3 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

ചുരുക്കം

(1) സമചതുര മാട്രിക്സ് $A =$ യുടെ അഡ്ജോയിന്റ് = A യുടെ കോഫാക്റ്റർ മാട്രിക്സിന്റെ പരിവർത്തനം

(2) $A(\text{adj}\, A) = (\text{adj}\, A)A = |A| I_n$.

(3) $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}\, A.$

(4) (i) $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ (ii) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ (iii) $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$, ഇവിടെ λ പൂജ്യമല്ലാത്ത അദിശം

Mal_12th_Maths_Vol1_CH 1_Matrices.indd 50 14-02-2023 17:57:18

(5) (i) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. (ii) $(A^{-1})^{-1} = A$

(6) ക്രമം n ആയ നോൺസിംഗുലർ സമചതുര മാട്രിക്സാണ് A എങ്കിൽ

(i) $\left(\text{adj } A\right)^{-1} = \text{adj}\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{|A|}A$ (ii) $|\text{adj } A| = |A|^{n-1}$

(iii) $\text{adj}\left(\text{adj } A\right) = |A|^{n-2}A$ (iv) $\text{adj}(\lambda A) = \lambda^{n-1}\text{adj}(A)$, λ പൂജ്യമല്ലാത്ത അദിശം

(v) $|\text{adj}(\text{adj } A)| = |A|^{(n-1)^2}$ (vi) $(\text{adj } A)^T = \text{adj}\left(A^T\right)$

(vii) $\text{adj}(AB) = (\text{adj } B)(\text{adj } A)$

(7) (i) $A^{-1} = \pm\frac{1}{\sqrt{|\text{adj } A|}}\text{adj } A$. (ii) $A = \pm\frac{1}{\sqrt{|\text{adj } A|}}\text{adj}\left(\text{adj } A\right)$.

(8) (i) ഒരു മാട്രിക്സ് A ഓർത്തോഗൊണൽ ആണെങ്കിൽ $AA^T = A^TA = I$

(ii) മാട്രിക്സ് A നോൺസിംഗുലർ ആകുകയും $A^{-1} = A^T$ ഉം എങ്കിൽ, എങ്കിൽ മാത്രം മാട്രിക്സ് A ഓർത്തോഗൊണൽ ആയിരിക്കും.

(9) രേഖീയ സമീകരണങ്ങൾ $AX = B$ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്ന രീതികൾ

(i) മാട്രിക്സ് വിപരീത രീതി $X = A^{-1}B, |A| \neq 0$

(ii) ക്രാമർ നിയമം $x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, z = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \Delta \neq 0$.

(iii) ഗാസ്സിയൻ എലിമിനേഷൻ രീതി

(10) (i) $\rho(A) = \rho([A\,|\,B])$ = അറിയാത്ത ചരങ്ങളുടെ എണ്ണം, എങ്കിൽ സമീകരണങ്ങൾക്ക് ഒരേയൊരു നിർദ്ധാരണം.

(ii) $\rho(A) = \rho([A\,|\,B]) <$ അറിയാത്ത ചരങ്ങളുടെ എണ്ണം എങ്കിൽ സമീകരണങ്ങൾക്ക് അനന്തമായ നിർദ്ധാരണങ്ങൾ

(iii) $\rho(A) \neq \rho([A\,|\,B])$ എങ്കിൽ സമീകരണങ്ങൾ അസ്ഥിരവും നിർദ്ധാരണമില്ലാത്തതുമാണ്.

(11) സമജാതീയ രേഖീയ സമീകരണങ്ങൾ $AX = 0$

(i) $|A| \neq 0$ ആണെങ്കിൽ ട്രിവിയൽ നിർദ്ധാരണം.

(ii) $|A| = 0$ ആണെങ്കിൽ നോൺ ട്രിവിയൽ നിർദ്ധാരണം.

ഐസിറ്റി കോർണർ

https://ggbm.at/vchq92pg അല്ലെങ്കിൽ QR കോഡ് സ്കാൻ ചെയ്യുക

ബ്രൗസർ തുറന്ന് തന്നിട്ടുള്ള URL ലിങ്ക് ചെയ്യുക. (അല്ലെങ്കിൽ) QR കോഡ് സ്കാൻ ചെയ്യുക. അപ്പോൾ "12th Standard Mathematics" എന്ന് പേരുള്ള ജിയോജീബ്ര വർക്ക് ബുക്ക് തുറക്കും. വർക്ക് ബുക്കിന്റെ ഇടത് ഭാഗത്ത് പാഠ പുസ്തകത്തെ ആസ്പദമാക്കി അനേകം അദ്ധ്യായങ്ങളുണ്ട്. "Applications of Matrices and Determinants"എന്ന അദ്ധ്യായത്തിൽ ചെയ്യുക. നിങ്ങൾക്ക് ഈ പാഠഭാഗത്തെ സംബന്ധിച്ച് നിരവധി വർക്ക് ഷീറ്റുകൾ ലഭിയ്ക്കും. "Application Matrices−Problem" എന്നവർക്ക് ഷീറ്റ് തെരഞ്ഞെടുക്കുക.

S62YB

Mal_12th_Maths_Vol1_CH 1_Matrices.indd 51 14-02-2023 17:57:32

അദ്ധ്യായം

2

സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകൾ

"മിക്കവാറും നിലനിൽക്കുന്നതും അല്ലാത്തതുമായ ഉദയചരങ്ങൾ പോലുള്ള മികച്ചതും അതിശകരമായ ഭാവന സൂത്രമാണ് സാങ്കൽപ്പിക സംഖ്യകൾ"

- ഗോട്ട്ഫ്രീഡ് ലെബ്നിസ്



റാഫേൽ ബോംബെല്ലി
(1526-1572)

സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകളുടെ പൂർണ്ണ വികാസത്തിന് പല ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞരും സംഭാവന നൽകി. സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകളിലെ നിയമങ്ങൾ സങ്കലനം, വ്യവകലനം, ഗുണിതം, ഹരണം എന്നിവയെ വികസിപ്പിച്ചെടുത്തത് ഇറ്റാലിയൻ ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞനായ റാഫേൽ ബോംബെല്ലി ആണ്. സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകളുടെ ബീജഗണിതം വികസിപ്പിച്ചതിൽ ഏറ്റവും മികച്ച വ്യക്തിയായിട്ടാണ് അഹേത്തെ കണക്കാക്കുന്നത്. അദ്ദേഹത്തിന്റെ നേട്ടങ്ങളുടെ ബഹുമാനാർത്ഥം ഒരു ചന്ദ്ര ഗർത്തത്തിന് ബോംബെല്ലി എന്ന് പേരിട്ടു.

യഥാർത്ഥ ജീവിത സന്ദർഭം

രണ്ട് ഭാഗങ്ങൾ ഒരേ സമയം വ്യത്യസ്തപ്പെടുന്ന ഒരു പ്രതിഭാസത്തെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നതിന് സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകൾ ഉപയോഗപ്രദമാണ്. ഉദാഹരണമായി ആൾട്ടർനേറ്റിങ്ങ് വൈദ്യുതി, വൈദ്യുത കാന്തിക സിഗ്നലുകൾ ഉപയോഗിക്കുന്ന എഞ്ചിനീയർമാർ, ഡോക്ടർമാർ, ശാസ്ത്രജ്ഞർ, വാഹന ഡിസൈൻമാർ ശക്തമായ സിഗ്നലുകൾ ലഭിക്കാൻ സങ്കിർണ്ണ സംഖ്യകൾ ഉപയോഗിക്കേണ്ടതുണ്ട് സിഗ്നൽ പ്രോസസ്സിംഗ്, കണ്ട്രോൾ സിദ്ധാന്തം, വൈദ്യുത കാന്തികത, ഫ്ലൈയുഡ് ഡൈനാമിക്സ്, ക്വാണ്ടം മെക്കാനിക്സ്, കാർട്ടോഗ്രാഫി, വൈബ്രേഷൻ വിശകലനം എന്നിവയിൽ സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകൾക്ക് ശക്തമായ പ്രയോഗങ്ങൾ ഉണ്ട്.

പഠന ലക്ഷ്യങ്ങൾ

ഈ അദ്ധ്യായം പൂർത്തിയാകുമ്പോൾ വിദ്യാർത്ഥികൾക്ക് ഇവ ചെയ്യാനാകും:

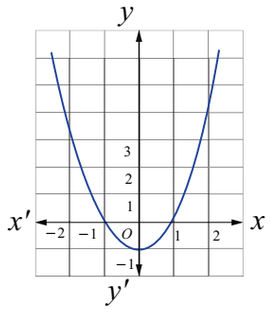
- സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകളിൽ ബീജഗണിത ക്രിയകൾ ചെയ്യുന്നതിന്
- ആർഗാണ്ട് തലത്തിലെ സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകളെ അടയാളപ്പെടുത്തുക
- സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയുടെ സംയോജനവും മോഡുലസും കണ്ടെത്തുക
- സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയുടെ പോളാർ രൂപവും ഓയ്ലർ രൂപവും കണ്ടെത്തുക
- ഡി മൂവീസ് സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച് സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകളുടെ nാം മൂലകങ്ങൾ കണ്ടെത്തുക.

2.1 സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകളുടെ ആമുഖം

സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകൾ അവതരിപ്പിക്കുന്നതിനു മുമ്പ് നെഗറ്റീവ് വർഗ്ഗം ഉള്ള ഒരു വാസ്തവിക സംഖ്യ നിലവിലുണ്ടോ? എന്ന ചോദ്യത്തിന് ഉത്തരം കണ്ടെത്താം അതിനുള്ള ഉത്തരം ലഭിക്കുന്നതിന് ലളിതമായ ഉദാഹരണങ്ങൾ നോക്കാം. 1,2 എന്നീ സമവാക്യങ്ങൾ പരിഗണിക്കുക.

സമവാക്യം 1	സമവാക്യം 2
$x^2 - 1 = 0$	$x^2 + 1 = 0$
$x = \pm\sqrt{1}$	$x = \pm\sqrt{-1}$
$x = \pm 1$	$x = \pm ?$

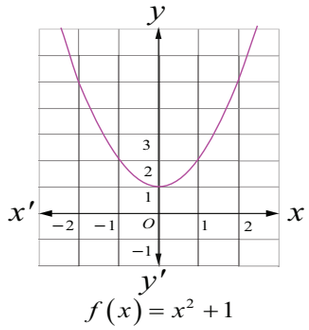
Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 52 14-02-2023 18:03:22



$f(x) = x^2 - 1$

ചിത്രം. 2.1

സമവാക്യം 1 ന് രണ്ട് വാസ്തവിക നിർധാരണങ്ങളുണ്ട്. x ലുള്ള ഒരു സമീകരണം നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നത് $f(x) = x^2 - 1$ ന്റെഗ്രാഫ് x അക്ഷത്തിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന x അന്തഃഖണ്ഡങ്ങളായ $(-1, 0)$, $(1, 0)$ എന്നിവ കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് തുല്യമാണെന്ന് നമുക്കറിയാം $x = -1$, $x = 1$.



$f(x) = x^2 + 1$

ചിത്രം 2.2

അതേ യുക്തി പ്രകാരം, **സമവാക്യം 2** ന് വാസ്തവിക നിർദ്ധാരണങ്ങൾ ഇല്ല, കാരണം $f(x) = x^2 + 1$ ന്റെ ഗ്രാഫ് x അക്ഷത്തിൽ സന്ധിക്കുന്നില്ല.

കാരണം, നമ്മൾ ഒരു വാസ്തവിക സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗം കാണുമ്പോൾ നെഗറ്റീവ് വാസ്തവിക സംഖ്യ ലഭിക്കുന്നത് അസാധ്യമാണ്. സമവാക്യം 2 ന് പരിഹാരങ്ങളുണ്ടെങ്കിൽ -1 ന്റെ വർഗ്ഗ മൂലമായി നമ്മൾ ഒരു സാങ്കൽപിക സംഖ്യ സൃഷ്ടിക്കണം. ഈ സാങ്കൽപ്പിക യൂണിറ്റ് $\sqrt{-1}$ നെ i എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. സാങ്കല്പിക സംഖ്യ i എന്നാൽ $i^2 = -1$ ൽ നിന്നുള്ള സന്ദേശമാണ്. നമുക്ക് ഈ വസ്തുത ഉപയോഗിച്ച് i ന്റെ മറ്റ് ഘാതങ്ങൾ നമുക്ക് കണ്ടു പിടിക്കാം.

2.1.1 സാങ്കൽപ്പിക സംഖ്യ i ന്റെ ഘാതങ്ങൾ

$i^0 = 1,\ i^1 = i$	$i^2 = -1$	$i^3 = i^2 i = -i$	$i^4 = i^2 i^2 = 1$
$(i)^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{(i)^2} = -i$	$(i)^{-2} = -1$	$(i)^{-3} = i$	$(i)^{-4} = 1 = i^4$

ഏതൊരു പൂർണ്ണാങ്കം n നും i^n ന് സാധ്യമായ നാല് മൂല്യങ്ങൾ മാത്രമേയുള്ളൂ. അവ n ന്റെ ഏതൊരു മൂല്യമായിരുന്നാലും 4 കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ ശിഷ്ടം 0, 1, 2, 3 ആയിരിക്കും. അതായത് $n \le -4$ അല്ലെങ്കിൽ $n \ge 4$ ആയിരിക്കുമ്പോൾ, ഡിവിഷൻ അൽഗോരിതം ഉപയോഗിച്ച് n നെ $n = 4q + k$ എന്ന് എഴുതാൻ സാധിക്കും. ഇവിടെ $0 \le k < 4$ ഉം k, q ഉം പൂർണ്ണാങ്കങ്ങളാണ്.

$$(i)^n = (i)^{4q+k} = (i)^{4q}(i)^k = \left((i)^4\right)^q (i)^k = (1)^q (i)^k = (i)^k$$

ഉദാഹരണം 2.1

താഴെ കാണുന്നവയെ ലഘൂകരിക്കുക

(i) i^7 (ii) i^{1729} (iii) $i^{-1924} + i^{2018}$ (iv) $\sum_{n=1}^{102} i^n$ (v) $i\, i^2\, i^3 \cdots i^{40}$

നിർദ്ധാരണം

(i) $(i)^7 = (i)^{4+3} = (i)^3 = -i$; (ii) $i^{1729} = i^{1728}\, i^1 = i$

(iii) $(i)^{-1924} + (i)^{2018} = (i)^{-1924+0} + (i)^{2016+2} = (i)^0 + (i)^2 = 1 - 1 = 0$

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 53 14-02-2023 18:03:38

(iv) $\sum_{n=1}^{102} i^n = \left(i^1+i^2+i^3+i^4\right)+\left(i^5+i^6+i^7+i^8\right)+\cdots+\left(i^{97}+i^{98}+i^{99}+i^{100}\right)+i^{101}+i^{102}$

$= \left(i^1+i^2+i^3+i^4\right)+\left(i^1+i^2+i^3+i^4\right)+\cdots+\left(i^1+i^2+i^3+i^4\right)+i^1+i^2$

$= \{i+(-1)+(-i)+1\}+\{i+(-1)+(-i)+1\}+\cdots\ldots+\{i+(-1)+(-i)+1\}+i+(-1)$

$= 0+0+\cdots 0+i-1$

$= -1+i$ (ഈ സംഖ്യയേതാണ്?)

(v) $i\, i^2\, i^3 \cdots i^{40} = i^{1+2+3+\cdots+40} = i^{\frac{40\text{x}41}{2}} = i^{820} = i^0 = 1.$

ഫലം: i യുടെ തുടർച്ചയായ നാല് ഘാതങ്ങളുടെ തുക പൂജ്യമാണ്. അതായത് $i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

കുറിപ്പ്

(i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ a, b എന്നിവയിൽ ഒന്നെങ്കിലും നെഗറ്റീവ് അല്ലാത്തപക്ഷം മാത്രമേ സാധ്യതയുള്ളൂ.

ഉദാഹരണത്തിന്, $6 = \sqrt{36} = \sqrt{(-4)(-9)} = \sqrt{(-4)}\sqrt{(-9)} = (2i)(3i) = 6i^2 = -6$, ഒരു വൈരുദ്ധ്യമാണ്.

ഞങ്ങൾ എടുത്തതിനാൽ, $\sqrt{(-4)(-9)} = \sqrt{(-4)}\sqrt{(-9)}$, ഇത് ഒരു വൈരുദ്ധ്യമാണ്.

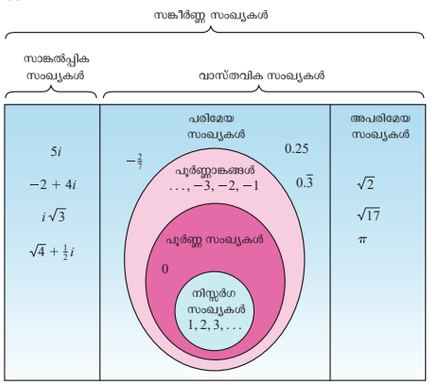
$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ a, b എന്നിവയിൽ ഒന്നെങ്കിലും നെഗറ്റീവ് അല്ലാത്തപക്ഷം മാത്രമേ സാദ്ധ്യതയുള്ളൂ..

(ii) $y \in \mathbb{R}$, $y^2 \geq 0$

$$\sqrt{(-1)(y^2)} = \sqrt{(y^2)(-1)}$$

$$\sqrt{(-1)}\sqrt{(y^2)} = \sqrt{(y^2)}\sqrt{(-1)}$$

$$iy = yi.$$



അഭ്യാസം 2.1

താഴെ കാണുന്നവയെ ലഘൂകരിക്കുക:

1. $i^{1947} + i^{1950}$
2. $i^{1948} - i^{-1869}$
3. $\sum_{n=1}^{12} i^n$
4. $i^{59} + \frac{1}{i^{59}}$
5. $i\, i^2 i^3 \cdots i^{2000}$
6. $\sum_{n=1}^{10} i^{n+50}$

2.2 സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകൾ

വാസ്തവിക സംഖ്യ സമ്പ്രദായത്തിൽ $x^2 + 1 = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന് ഒരു നിർദ്ധാരണം ഇല്ലെന്ന് ഞങ്ങൾ കണ്ടു. പൊതുവേ വാസ്തവിക നിർദ്ധാരണമില്ലാത്ത വാസ്തവിക ഗുണകവുമായി പോളിനോമിയൽ സമവാക്യങ്ങൾ ഉണ്ട്. അത്തരം പോളിനോമിയൽ സമവാക്യങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണങ്ങൾ ഉൾക്കൊള്ളുന്നതിനായി ഞങ്ങൾ വാസ്തവിക സംഖ്യ സമ്പ്രദായം വലുതാക്കുന്നു.

സങ്കീർണ്ണമായ സംഖ്യ സമ്പ്രദായത്തെ നിർവചിക്കാൻ ഇത് ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞൻമാരെ പ്രേരിപ്പിച്ചു..

(i) ചതുരാകൃതിയിലുള്ള സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകൾ

(ii) അർഗാണ്ട് പ്രതലം

(iii) സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകളിലെ ബീജഗണിത പ്രവർത്തനങ്ങൾ

സാങ്കല്പിക യൂണിറ്റ് i ഉള്ള സംഖ്യ സമ്പ്രദായത്തിന്റെ വിപുലീകരണമാണ് സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യ സമ്പ്രദായം.

$i^2 = -1$ എന്ന സവിശേഷതയുള്ള സാങ്കല്പിക യൂണിറ്റ് i നെ x, y എന്ന രണ്ട് വാസ്തവിക സംഖ്യകൾ കൊണ്ട് കൂട്ടുകയും ഗുണിക്കുകയും ചെയ്യുമ്പോൾ നമുക്ക് $x + iy$ എന്ന സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യ ലഭിക്കും. ചിഹ്നം '+' വെക്ടർ സങ്കലനമായി കണക്കാക്കണം. കാൾ ഫ്രീഡ്രിക് ഗാസ് (1777-1855) ആണ് ഇത് അവതരിപ്പിച്ചത്.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 54 14-02-2023 18:03:54

2.2.1 ചതുരാകൃതിയിലുള്ള രൂപം

നിർവ്വചനം 2.1 (സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയുടെ ചതുരാകൃതിയിലുള്ള രൂപം)

ഒരു സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യ $x+iy$ (അല്ലെങ്കിൽ $x+yi$) എന്ന രൂപത്തിലാണ്. ഇവിടെ x, y എന്നിവ വാസ്തവിക സംഖ്യകളാണ്. x നെ വാസ്തവിക ഭാഗം എന്നും y നെ സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയുടെ സാങ്കൽപ്പിക ഭാഗം എന്നും വിളിക്കുന്നു.

$x=0$ ആണെങ്കിൽ, സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യ പൂർണ്ണമായും സാങ്കൽപ്പികമാണെന്ന് പറയപ്പെടുന്നു. $y=0$ ആണെങ്കിൽ, സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യ വാസ്തവികമാണെന്ന് പറയുന്നു. ഇവിടെ വാസ്തവികവും പൂർണ്ണ സാങ്കൽപ്പികവുമായ ഒരേയൊരു സംഖ്യയാണ് പൂജ്യം. $x+iy$ എന്ന സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയുടെ സ്റ്റാൻഡേർഡ് ചതുരാകൃതിയിലുള്ള രൂപത്തെ z എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുകയാണെങ്കിൽ $x=\mathrm{Re}(z)$ എന്നും $y=\mathrm{Im}(z)$ എന്നും നമുക്ക് എഴുതാം.

ഉദാഹരണമായി $\mathrm{Re}(5-i7)=5$, $\mathrm{Im}(5-i7)=-7$, $\alpha+i\beta,\ \beta\neq 0$ എന്ന സംഖ്യകളെ സാങ്കൽപ്പിക (വാസ്തവികമല്ലാത്ത സങ്കീർണ്ണം) സംഖ്യകൾ എന്ന് വിളിക്കുന്നു. സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകളുടെ തുല്യത ഇനിപ്പറയുന്ന രീതിയിൽ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നു.

നിർവ്വചനം 2.2

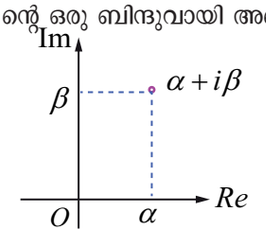
രണ്ട് സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകൾ $z_1=x_1+iy_1$ ഉം $z_2=x_2+iy_2$ എന്നിവ തുല്യമാണെങ്കിൽ മാത്രം $\mathrm{Re}(z_1)=\mathrm{Re}(z_2)$ ഉം $\mathrm{Im}(z_1)=\mathrm{Im}(z_2)$. അതായത് $x_1=x_2$ ഉം $y_1=y_2$.

ഉദാഹരണത്തിന്, if $\alpha+i\beta=-7+3i$, എങ്കിൽ $\alpha=-7$, $\beta=3$.

2.2.2 അർഗാ≠ പ്രതലം

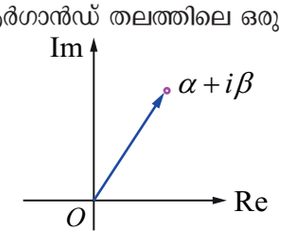
ഒരു സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യ $z=x+iy$ എന്നത് ഒരു നിശ്ചിത ജോഡി വാസ്തവിക സംഖ്യകളാൽ അനന്യമായി നിർണ്ണയിക്കപ്പെടുന്നു. $3-8i$, 6, $-4i$ എന്നീ സംഖ്യകൾ യഥാക്രമം $(3,-8),(6,0),(0,-4)$ എന്നിവയ്ക്ക് തുല്യമാണ്. ഇതിൽ ഒരു നിർദ്ദേശാങ്ക തലത്തിൽ $z=x+iy$ എന്ന സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയെ (x,y) എന്ന ബിന്ദുവുമായി ബന്ധിപ്പിക്കാൻ നമുക്ക് കഴിയും. സങ്കീർണ്ണമായ ഒരു സംഖ്യയെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നതിന് x അക്ഷത്തെ വാസ്തവിക അക്ഷമായും y അക്ഷത്തെ സാങ്കൽപ്പിക അക്ഷമായും കണക്കാക്കുന്നുവെങ്കിൽ xy - പ്രതലത്തിനെ സങ്കീർണ്ണതലം അല്ലെങ്കിൽ ആർഗാൻഡ് തലം എന്ന് വിളിക്കുന്നു. സ്വിസ് ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞനായ ജീൻ അർഗാണ്ട് (1768 – 1822) ന്റെ പേരിലാണ് ഇതിന് പേര് നൽകിയിരിക്കുന്നത്.

ഒരു സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയെ ഒരു പോയിന്റ് മാത്രമല്ല, വെക്ടർ പോയിന്റും ചെയ്യുന്ന സ്ഥാനവും പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. സംഖ്യ പോയിന്റും, വെക്ടർ എന്നിവയെല്ലാം ഒരേ അക്ഷരം z കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കും. സമാന്തര സ്ഥാന ചലനങ്ങളിലൂടെ പരസ്പരം ലഭിക്കുന്ന എല്ലാ വെക്ടറുകളും പതിവുപോലെ നമ്മൾ തിരിച്ചറിയുന്നു. ഈ അദ്ധ്യായത്തിൽ $\mathbb{C}$ എന്നത് എല്ലാ സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകളുടെ ഗണത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ജ്യാമിതീയമായി, ഒരു സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയെ $\mathbb{R}^2$ ന്റെ ഒരു ബിന്ദുവായി അല്ലെങ്കിൽ ആർഗാൻഡ് തലത്തിലെ ഒരു വെക്ടറായി കാണാനാകും..



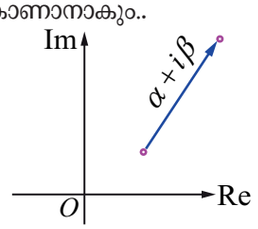
സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യ ഒരു ബിന്ദുവായി

ചിത്രം 2.3



സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയെ ഒരു പൊസിക്ഷൻ വെക്ടറായി, ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്ന് ബിന്ദുവരെ

ചിത്രം 2.4



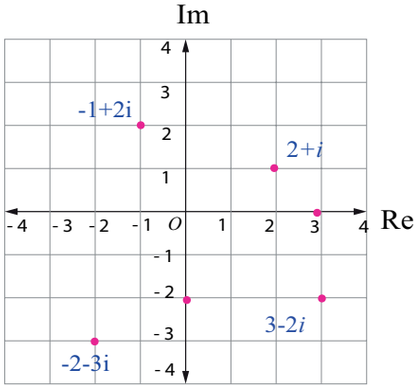
സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയെ വെക്ടറായി

ചിത്രം 2.5

വിശദീകരണം 2.1

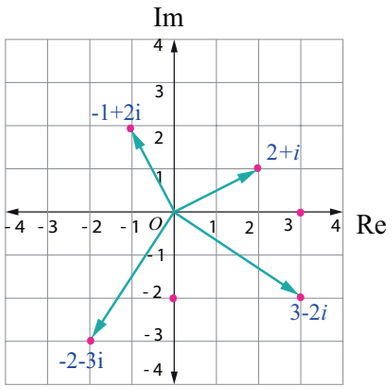
ചില സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകൾ ഇതാ: $2+i$, $-1+2i$, $3-2i$, $0-2i$, $3+\sqrt{-2}$, $-2-3i$, $\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$, $3+0i$. അവയിൽ ചിലത് ആർഗാണ്ട് തലത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 55 14-02-2023 18:04:10



സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയെ ബിന്ദുവായി

ചിത്രം 2.6



സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയെ വെക്ടറായി

ചിത്രം 2.7

2.2.3 സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകളിലെ ബീജഗണിത ക്രിയകൾ

ഈ വിഭാഗത്തിൽ, സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യ സമ്പ്രദായത്തിന്റെ ബീജഗണിത ജ്യാമിതീയ ഘടനയെ കുറിച്ച് നമ്മൾ പഠിക്കുന്നു. വാസ്തവിക സംഖ്യകളുടെ അനുബന്ധ ഗുണവിശേഷതകൾ അറിയാമെന്ന് നമ്മൾ അനുമാനിക്കുന്നു.

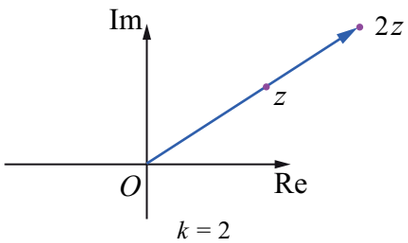
(i) സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകളുടെ സ്കെയിലർ ഗുണനം:

$z = x + iy$ ഉം $k \in \mathbb{R}$, എങ്കിൽ

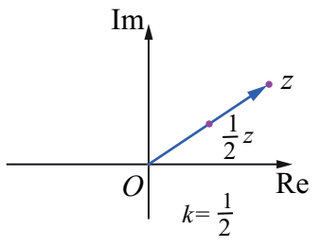
$k\,z = (kx) + (ky)\,i$.

പ്രത്യേകിച്ച് $0\,z = 0$, $1z = z$, $(-1)z = -z$.

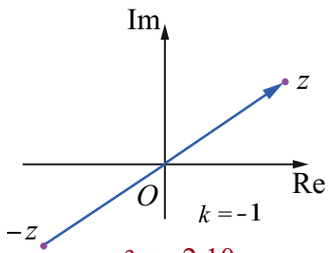
താഴെ കാണുന്ന ചിത്രത്തിൽ $k = 2, \frac{1}{2}, -1$ എങ്കിൽ $k\,z$



ചിത്രം 2.8



ചിത്രം 2.9



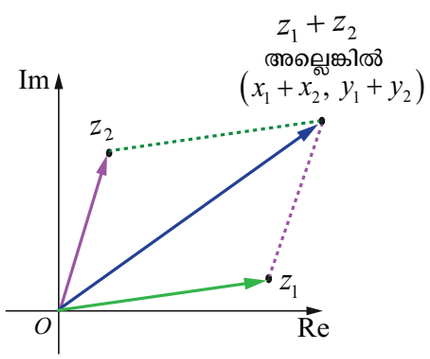
ചിത്രം 2.10

(ii) സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകളുടെ സങ്കലനം:

$z_1 = x_1 + iy_1$ ഉം $z_2 = x_2 + iy_2$, എങ്കിൽ, ഇവിടെ $x_1, x_2, y_1,$ ഉം $y_2 \in$

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) \\ &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \\ z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2). \end{aligned}$$

വെക്ടറുകളുടെ നീളം, ദിശ എന്നിവയാൽ സവിശേഷതയുണ്ടെന്നും തന്നിരിക്കുന്ന വെക്ടറിന് കീഴിൽ മാറ്റമില്ലെന്നും ഞങ്ങൾ ഇതിനകം കണ്ടു. $z_1 = x_1 + iy_1$ ഉം $z_2 = x_2 + iy_2$ ഉം ആയിരിക്കുമ്പോൾ സമാന്തരചലന നിയമം, ആകെ തുക ഉപയോഗിച്ച് $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ എന്നത് $(x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$ എന്ന ബിന്ദുവിനെ കുറിക്കുന്നു. ഈ ബിന്ദുവും ഒരു വെക്ടറിനെ നിർദ്ദേശാങ്കവുമായി യോജിക്കുന്നു. ആയതിനാൽ z_1, z_2, $z_1 + z_2$ എന്ന ബിന്ദുക്കൾ സങ്കീർണ്ണ തലത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതു പോലെ ലഭിക്കും. (ചിത്രം 2.11)



ചിത്രം 2.11

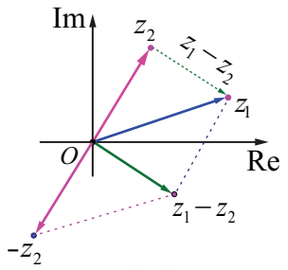
Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 56 14-02-2023 18:04:22

(iii) സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകളുടെ വ്യവകലനം

അതുപോലെ $z_1 - z_2$ ന്റെ വ്യത്യാസവും ഒരു പൊസിഷൻ വെക്ടറായി വരയ്ക്കാം. അതിന്റെ പ്രാരംഭ ബിന്ദു മൂലബിന്ദുവും, അവസാന ബിന്ദു $(x_1 - x_2,\ y_1 - y_2)$ വും ആണ്. എങ്കിൽ

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= z_1 + (-z_2) \\ &= (x_1 + iy_1) + (-x_2 - iy_2) \\ &= (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \end{aligned}$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$



ചിത്രം 2.12

ഇവിടെ ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടത് വെക്ടർ $z_1 - z_2$ ന്റെ വ്യത്യാസത്തെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്ന വെക്ടർ മൂലബിന്ദുവിനു പകരം z_2 ന്റെ അവസാന പോയിന്റുമായി ചേർന്ന് z_1 ന്റെ അഗ്രത്തിലേക്ക് വരയ്ക്കാം. ഇത്തരത്തിലുള്ള പ്രാതിനിധ്യം വ്യത്യാസ ഓപ്പറേറ്ററുടെ അർത്ഥത്തെയോ ആവിഷ്കാരത്തെയോ മാറ്റില്ല. z_1, z_2 എന്നിവയുടെ അഗ്രത്തിൽ ചേരുന്ന വെക്ടറുകളുടെ വ്യത്യാസം (പച്ച) ഡോട്ട് ഇട്ട വരിയിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.

(iv) സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകളുടെ ഗുണനം

സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകളായ z_1, z_2 എന്നിവയുടെ ഗുണനം നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത്

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{aligned}$$

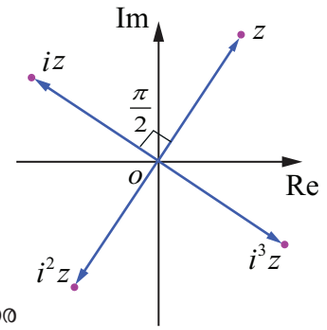
$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

z_1, z_2 എന്നീ രണ്ട് സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം ഒരു വെക്ടർ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്ന ഒരു സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയാണെങ്കിലും ആ വെക്ടർ z_1, z_2 എന്നീ വെക്ടറുകളുടെ അതേ തലത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു. അപ്പോൾ ഈ ഗുണനഫലം സ്കെയിലാർ ഗുണനഫലമോ വെക്ടർ ബീജഗണിതത്തിൽ ഉപയോഗിക്കുന്ന വെക്ടർ ഗുണനഫലമോ അല്ല.

പരാമർശം

സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യ z നെ i കൊ$\neq$ ഗുണിക്കുമ്പോൾ

$$\begin{aligned} z &= x + iy, \text{ എങ്കിൽ} \\ iz &= i(x + iy) \\ &= -y + ix. \end{aligned}$$



ചിത്രം 2.13

സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യ iz എന്നത് z എന്ന സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയെ എതിർ ഘടികാര ദിശയിൽ മൂലബിന്ദുവിൽ നിന്ന് 90° അല്ലെങ്കിൽ $\frac{\pi}{2}$ റേഡിയസിന്റെ ഭ്രമണമാണ്. പൊതുവേ, ഒരു സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയുടെ ഗുണനം i തുടർച്ചയായി മൂലബിന്ദുവിൽ നിന്ന് എതിർ ഘടികാര ദിശയിൽ z ൽ ഭ്രമണം ചെയ്യുന്നു.

വിശദീകരണം 2.2

$z_1 = 6 + 7i$, $z_2 = 3 - 5i$. എങ്കിൽ $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$

(i) $$\begin{aligned} (3 - 5i) + (6 + 7i) &= (3 + 6) + (-5 + 7)i = 9 + 2i \\ (6 + 7i) - (3 - 5i) &= (6 - 3) + (7 - (-5))i = 3 + 12i. \end{aligned}$$

$z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 4 + 7i$. എങ്കിൽ $z_1 z_2$

(ii) $$\begin{aligned} (2 + 3i)(4 + 7i) &= (2 \times 4 - 3 \times 7) + i(2 \times 7 + 3 \times 4) \\ &= (8 - 21) + (14 + 12)i = -13 + 26i. \end{aligned}$$

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 57 14-02-2023 18:04:44

ഉദാഹരണം 2.2

സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകൾ $(2+i)x+(1-i)y+2i-3$ ഉം $x+(-1+2i)y+1+i$ സമമാണെങ്കിൽ വാസ്തവിക സംഖ്യയായ x, y ന്റെ മൂല്യം കാണുക

നിർദ്ധാരണം

$$z_1 = (2+i)x+(1-i)y+2i-3=(2x+y-3)+i(x-y+2) \text{ ഉം}$$

$$z_2 = x+(-1+2i)y+1+i=(x-y+1)+i(2y+1) \text{ എന്നിരിക്കട്ടെ.}$$

തന്നിട്ടുള്ളതിൽ $z_1 = z_2$.

$$(2x+y-3)+i(x-y+2)=(x-y+1)+i(2y+1).$$

വാസ്തവികവും സാങ്കൽപ്പികവുമായ ഭാഗങ്ങൾ പ്രത്യേകം സമീകരിക്കുമ്പോൾ

$$2x+y-3 = x-y+1 \quad \Rightarrow \quad x+2y=4.$$

$$x-y+2 = 2y+1 \quad \Rightarrow \quad x-3y=-1.$$

മുകളിലുള്ള സമവാക്യങ്ങൾ പരിഹരിക്കുമ്പോൾ

$$x=2 \ , \ y=1.$$

അഭ്യാസം 2.2

1. താഴെ കാണുന്ന പ്രശ്നങ്ങളെ വിലയിരുത്തുക $z=5-2i$, $w=-1+3i$

   (i) $z+w$ (ii) $z-iw$ (iii) $2z+3w$

   (iv) zw (v) $z^2+2zw+w^2$ (vi) $(z+w)^2$.

2. $z=2+3i$, എന്ന സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യ നൽകിയാൽ, ആർഗാൻഡ് ഡയഗ്രാമിലെ സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകളെ പ്രതിനിധീകരിക്കുക.

   (i) $z, iz, z+iz$ (ii) $z, -iz$ ഉം $z-iz$.

3. സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകൾ $(3-i)x-(2-i)y+2i+5$ ഉം $2x+(-1+2i)y+3+2i$ സമമാണെങ്കിൽ വാസ്തവിക സംഖ്യയായ x, y യുടെ മൂല്യം കാണുക

2.3 സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകളുടെ അടിസ്ഥാന ബീജഗണിത സവിശേഷതകൾ

സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകളുടെ സങ്കലനത്തിന്റെയും ഗുണനത്തിന്റെയും സവിശേഷതകൾ വാസ്തവിക സംഖ്യകൾക്ക് തുല്യമാണ് അടിസ്ഥാന ബീജഗണിത സവിശേഷതകൾ ഞങ്ങൾ ഇവിടെ പട്ടികപ്പെടുത്തുകയും അവയിൽ ചിലത് പരിശോധിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു.

2.3.1 സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകളുടെ സവിശേഷതകൾ

സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകൾ സങ്കലനം ഉപയോഗിച്ച് ഇനിപ്പറയുന്ന സവിശേഷതകളെ തൃപ്തിപ്പെടുന്നു.	സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകൾ ഗുണനത്തിന് കീഴിൽ ഇനിപ്പറയുന്ന സവിശേഷതകളെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്നു.
(i) **സംവൃത നിയമം** ഏതെങ്കിലും രണ്ട് സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകൾ z_1 ഉം z_2 അവയുടെ തുക z_1+z_2 ഒരു സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യ കൂടിയാണ്	(i) **സംവൃത നിയമം** ഏതെങ്കിലും രണ്ട് സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകൾ z_1 ഉം z_2 അവയുടെ ഗുണനഫലം $z_1 z_2$ ഒരു സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യ കൂടിയാണ്.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 58 14-02-2023 18:05:03

(ii) **ക്രമവിനിമേയ നിയമം** എതെങ്കിലും രണ്ട് സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകൾ z_1 , z_2 $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.	(ii) **ക്രമ വിനിമേയ നിയമം** ഏതെങ്കിലും രണ്ട് സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകൾ z_1 , z_2 ന് $z_1 z_2 = z_2 z_1$.
(iii) **സംയോജന നിയമം** ഏതെങ്കിലും മൂന്ന് സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകൾ z_1, z_2 , z_3 ന് $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.	(iii) **സംയോജന നിയമം** ഏതെങ്കിലും മൂന്ന് സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകൾ z_1, z_2 , z_3 ന് $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$.
(iv) **സങ്കലനത്തിന്റെ അനന്യത** ഓരോ സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യ z നും ഒരു സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യ $0 = 0 + 0i$ ഉണ്ട് ഇവിടെ, $z + 0 = 0 + z = z$ സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യ $0 = 0 + 0i$ ആണ് സങ്കലനത്തിന്റെ അനന്യത	(iv) **ഗുണനത്തിന്റെ അനന്യത** ഓരോ സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യ z നും ഒരു സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യ $1 = 1+0i$ ഉണ്ട് ഇവിടെ, $z1 = 1z = z$ സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യ $1 = 1 + 0i$ ആണ് ഗുണനത്തിന്റെ അനന്യത
(v) **സങ്കലനത്തിന്റെ വിപരീതം** ഓരോ സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യ z നും ഒരു സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യ $-z$ ഉണ്ട് ഇവിടെ, $z + (-z) = (-z) + z = 0.$ $-z$ ആണ് z ന്റെ സങ്കലന വിപരീതം.	(v) **ഗുണനത്തിന്റെ വിപരീതം** ഓരോ പൂജ്യമല്ലാത്ത സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യ z, നും ഒരു സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യ w ഉണ്ട് ഇവിടെ, $z\,w = w\,z = 1.$ w ആണ് z ന്റെ ഗുണന വിപരീതം w നെ സൂചിപ്പിക്കുന്നത് z^{-1} ആണ്.
(vi) **വിതരണ നിയമം (ഗുണനം സങ്കലനത്തിൽ വിതരണം ചെയ്യുന്നു)** ഏതെങ്കിലും മൂന്ന് സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകൾ z_1, z_2, z_3 ന് $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ ഉം $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$.	

ഇനി നമുക്ക് ചില സവിശേഷതകൾ തെളിയിക്കാം.

സവിശേഷത

സങ്കലനത്തിന്റെ ക്രമവിനിമേയ നിയമം

ഏത് രണ്ട് സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകൾ z_1 , z_2 നും $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

തെളിവ്

$z_1 = x_1 + iy_1$ ഉം $z_2 = x_2 + iy_2$, എന്നിരിക്കട്ടെ x_1, x_2, y_1 , ഉം $y_2 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) \\ &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \\ &= (x_2 + x_1) + i(y_2 + y_1) \qquad (x_1, x_2, y_1, \text{ ഉം } y_2 \in \mathbb{R} \text{ ആയതുകൊണ്ട് }) \\ &= (x_2 + iy_2) + (x_1 + iy_1) \\ &= z_2 + z_1 . \end{aligned}$$

സവിശേഷത

ഗുണനത്തിന്റെ വിപരീത നിയമം

$z = x + iy$ എന്ന പൂജ്യമല്ലാത്ത സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയുടെ ഗുണനത്തിന്റെ വിപരീതം $\dfrac{x}{x^2 + y^2} + i\dfrac{-y}{x^2 + y^2}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 59 14-02-2023 18:05:20

തെളിവ്

ഗുണന വിപരീതം സങ്കലനത്തെക്കാൾ വ്യക്തത കുറവാണ്.

$z^{-1} = u + iv$ എന്നത് $z = x + iy$ നെ വിപരീതം എന്നിരിക്കട്ടെ

$$\begin{aligned} \text{എങ്കിൽ } z\,z^{-1} &= 1 \\ (x+iy)(u+iv) &= 1 \\ (xu - yv) + i(xv + uy) &= 1 + i0 \end{aligned}$$

വാസ്തവികവും സാങ്കൽപ്പിക ഭാഗങ്ങൾ പ്രത്യേകം സമീകരിക്കുമ്പോൾ

$$xu - yv = 1 \text{ ഉം } xv + uy = 0 .$$

മേൽപറഞ്ഞ സമവാക്യങ്ങൾ പരിഹരിക്കുമ്പോൾ u , v

$$u = \frac{x}{x^2+y^2} \text{ ഉം } v = \frac{-y}{x^2+y^2} . \ (\because z \text{ ഒരു പൂജ്യമല്ലാത്ത } \Rightarrow x^2 + y^2 > 0)$$

$z = x + iy$, എങ്കിൽ $z^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2}$.($\because$ $z = 0$ ആണെങ്കിൽ z^{-1} നെ നിർവചിക്കാൻ കഴിയില്ല).

മുകളിലുള്ള ഉദാഹരണത്തിൽ സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യ z ന്റെ വിപരീതമായ z^{-1} ന്റെ നിലനിൽപ്പിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയുടെ വിപരീതം കാണുവനായി നമുക്ക് $z^{-1} = \frac{1}{z}$ എന്ന് ഉപയോഗിക്കാം. സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യ z_1 , z_2 , $z_2 \neq 0$ എങ്കിൽ z_1 ന്റെയും $\frac{1}{z_2}$ ന്റെയും ഗുണനഫലത്തെ $\frac{z_1}{z_2}$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. മറ്റു സവിശേഷതകളേയും ഇതുപോലെ തെളിയിക്കാം. അടുത്ത വിഭാഗത്തില സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകളുടെ സംയോജനം ഉപയോഗിച്ച് സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകളുടെ വിപരീതം കണ്ടുപിടിക്കാം.

സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകൾ ഘാതാങ്ക നിയമങ്ങളെ അനുസരിക്കുന്നു

(i) $z^m z^n = z^{m+n}$ (ii) $\frac{z^m}{z^n} = z^{m-n}$, $z \neq 0$ (iii) $\left(z^m\right)^n = z^{mn}$ (iv) $\left(z_1 z_2\right)^m = {z_1}^m {z_2}^m$

അഭ്യാസം 2.3

1. $z_1 = 1 - 3i$, $z_2 = -4i$ ഉം $z_3 = 5$ എങ്കിൽ തെളിയിക്കുക

   (i) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (ii) $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$.

2. $z_1 = 3$, $z_2 = -7i$ ഉം $z_3 = 5 + 4i$ എങ്കിൽ തെളിയിക്കുക

   (i) $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ (ii) $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$.

3. $z_1 = 2 + 5i$, $z_2 = -3 - 4i$ ഉം $z_3 = 1 + i$, എങ്കിൽ z_1, z_2 , z_3 ന്റെ സങ്കലന വിപരീതവും ഗുണന വിപരീതവും കാണുക.

2.4 സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയുടെ സംയോജനം

ഈ വിഭാഗത്തിൽ ഒരു സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയുടെ സംയോജനത്തെ കുറിച്ചും അതിന്റെ ജ്യാമിതീയ പ്രാതിനിധ്യത്തെ കുറിച്ചും നമ്മൾ പഠിക്കുന്നു.

നിർവ്വചനം 2.3

$x + iy$ എന്ന സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയുടെ സംയോജനം $x - iy$ എന്ന സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയായി നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നു.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 60 14-02-2023 18:05:40

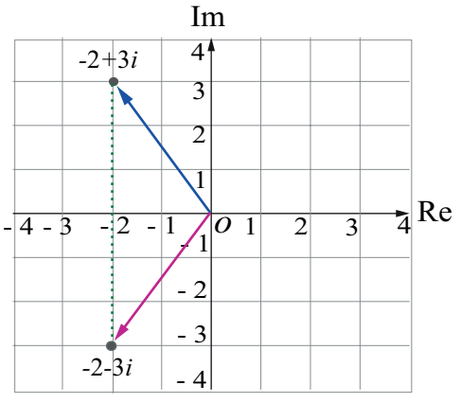
z എന്ന സങ്കീർണ്ണ സംയോജനത്തെ $\overline{z}$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. z എന്ന സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയുടെ സംയോജനം ലഭിക്കാൻ, z ൽ i ന് പകരം $-i$ എന്ന് മാറ്റുക. ഉദാഹരണത്തിന് $2-5i$ എന്നത് $2+5i$ ന്റെ സംയോജനമാണ്. സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയുടെയും അതിന്റെ സംയോജനത്തിന്റെയും ഗുണനഫലം ഒരു വാസ്തവിക സംഖ്യയാണ്.

ഉദാഹരണത്തിന്, (i) $(x+iy)(x-iy)=x^2-(iy)^2=x^2+y^2$

(ii) $(1+3i)(1-3i)=(1)^2-(3i)^2=1+9=10$.

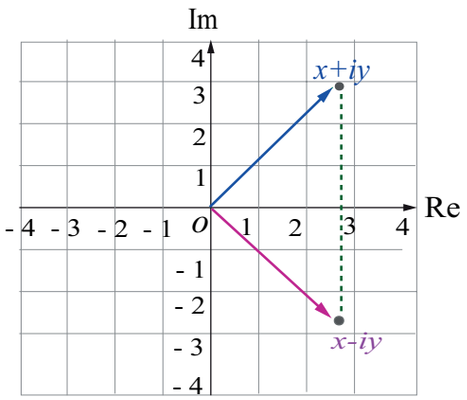
ജ്യാമിതീയമായി, വാസ്തവിക അക്ഷത്തിൽ z നെ പ്രതിഫലിപ്പിച്ചാണ് z ന്റെ സംയോജനം ലഭിക്കുന്നത്..

2.4.1 സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയുടെ സംയോജനത്തിന്റെ ജ്യാമിതീയ പ്രാതിനിധ്യം



സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയുടെ സംയോജനം

ചിത്രം 2.14



സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയുടെ സംയോജനം

ചിത്രം 2.15

കുറിപ്പ്

രണ്ട് സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകൾ $x+iy$ ഉം $x-iy$ ഉം പരസ്പരം സംയോജകങ്ങൾ ആണ്. സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകളുടെ വിഭജനത്തിൽ സംയോജനം ഉപയോഗപ്രദമാണ്. ഛേദത്തിലെ സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയെ വാസ്തവിക സംഖ്യയാക്കി മാറ്റുന്നതിന് ഛേദത്തിലെ സംയോജനം കൊണ്ട് അംശവും ഛേദവും ഗുണിക്കേണ്ടതാണ്. ഈ പ്രക്രിയ ഛേദത്തിനെ പരിമേയമാക്കി കരണികളെ നീക്കം ചെയ്യുന്നതിന് സമമാണ്.

2.4.2 സങ്കീർണ്ണ സംയോജനങ്ങളുടെ സവിശേഷതകൾ

(1) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$

(2) $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$

(3) $\overline{z_1 z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$

(4) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}},\ z_2\neq 0$

(5) $\mathrm{Re}(z)=\frac{z+\overline{z}}{2}$

(6) $\mathrm{Im}(z)=\frac{z-\overline{z}}{2i}$

(7) $\overline{(z^n)}=(\overline{z})^n$, n ഒരു പൂർണ്ണാങ്കമാണ്

(8) z ഒരു വാസ്തവിക സംഖ്യ എങ്കിൽ മാത്രം $z=\overline{z}$

(9) z ഒരു പൂർണ്ണ സാങ്കൽപ്പികം എങ്കിൽ മാത്രം $z=-\overline{z}$

(10) $\overline{\overline{z}}=z$

ചില സവിശേഷതകൾ പരിശോധിക്കാം.

സവിശേഷത

ഏത് രണ്ട് സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകൾ z_1, z_2 ,നും $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$.

തെളിവ്

$z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$, എന്നിരിക്കട്ടെ $x_1, x_2, y_1, y_2\in\mathbb{R}$

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)}$$

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 61 14-02-2023 18:05:51

$$= \overline{(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)} = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2)$$
$$= (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2)$$
$$= \overline{z_1} + \overline{z_2}\ .$$

ഇതിനെ ഗണിതീയ ആഗമനം ഉപയോഗിച്ച് പരിമിത എണ്ണം സംഖ്യകളായി പൊതുവായി പറയുമ്പോൾ: $\overline{z_1 + z_2 + z_3 + \cdots z_n} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3} + \cdots + \overline{z_n}$.

സവിശേഷത

$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$ ഇവിടെ $x_1, x_2, y_1,$ ഉം $y_2 \in \mathbb{R}$

തെളിവ്

$z_1 = x_1 + iy_1$ ഉം $z_2 = x_2 + iy_2$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

എങ്കിൽ, $z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$.

$\overline{z_1 z_2} = \overline{(x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)} = (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$,

$\overline{z}_1 \overline{z}_2 = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$.

$\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \overline{z}_2$.

സവിശേഷത

സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യ z ഒരു പൂർണ്ണ സാങ്കല്പികം എങ്കിൽ മാത്രം $z = -\overline{z}$

തെളിവ്

$z = x + iy$. എന്നിരിക്കട്ടെ, നിർവചന പ്രകാരം $\overline{z} = x - iy$

$z = -\overline{z}$

$\Leftrightarrow \quad x + iy = -(x - iy)$

$\Leftrightarrow \quad 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\Leftrightarrow z$ ഒരു പൂർണ്ണ സാങ്കല്പികം.

ഇതുപോലെ, സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകളുടെ മറ്റുള്ള സവിശേഷതകളെ സ്ഥിതികരിക്കാം..

ഉദാഹരണം 2.3

$\frac{3+4i}{5-12i}$ നെ $x + iy$ എന്ന രൂപത്തിൽ എഴുതുക, എന്നിട്ട് വാസ്തവികവും സാങ്കല്പികവുമായ ഭാഗങ്ങളെ കാണുക

നിർദ്ധാരണം

$\frac{3+4i}{5-12i}$ ന്റെ വാസ്തവികവും സാങ്കല്പികവുമായ ഭാഗങ്ങളെ കാണുന്നതിന് ആദ്യം $x + iy$ എന്ന ചതുരാകൃതിയിലുള്ള രൂപത്തിലേക്ക് മാറ്റാം. രണ്ട് സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകളുടെ ഭിന്നകത്തെ ലഘൂകരിക്കുന്നതിന്, ഛേദത്തിന്റെ സമാന്തരകരണി കൊണ്ട് അംശത്തേയും ഛേദത്തേയും ഗുണിക്കുമ്പോൾ ഛേദത്തിലെ i നെ ഒഴിവാക്കാം.

$$\frac{3+4i}{5-12i} = \frac{(3+4i)(5+12i)}{(5-12i)(5+12i)}$$
$$= \frac{(15-48)+(20+36)i}{5^2+12^2}$$
$$= \frac{-33+56i}{169} = -\frac{33}{169} + i\frac{56}{169}\ .$$

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 62 14-02-2023 18:06:07

$\frac{3+4i}{5-12i} = -\frac{33}{169}+i\frac{56}{169}$. ഇത് $x+iy$ എന്ന രൂപത്തിലാണ്.

അതിനാൽ, വാസ്തവിക ഭാഗം $-\frac{33}{169}$ ഉം സാങ്കല്പിക ഭാഗം $\frac{56}{169}$ ഉം ആണ്.

ഉദാഹരണം 2.4

$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3-\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$ നെ ചതുരാകൃതി രൂപത്തിൽ ലഘൂകരിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i-1}{1+1} = \frac{2i}{2} = i \text{ ഉം,}$$

$$\frac{1-i}{1+i} = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{-1} = \frac{1}{i} = -i.$$

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3-\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3 = i^3-(-i)^3 = -i-i = -2i.$$

ഉദാഹരണം 2.5

$\frac{z+3}{z-5i} = \frac{1+4i}{2}$, എങ്കിൽ z നെ സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയുടെ ചതുരാകൃതി രൂപം കാണുക

നിർദ്ധാരണം

ഇവിടെ $\frac{z+3}{z-5i} = \frac{1+4i}{2}$

$$\Rightarrow 2(z+3) = (1+4i)(z-5i)$$

$$\Rightarrow 2z+6 = (1+4i)z+20-5i$$

$$\Rightarrow (2-1-4i)z = 20-5i-6$$

$$\Rightarrow z = \frac{14-5i}{1-4i} = \frac{(14-5i)(1+4i)}{(1-4i)(1+4i)} = \frac{34+51i}{17} = 2+3i.$$

ഉദാഹരണം 2.6

$z_1 = 3-2i$ ഉം $z_2 = 6+4i$, എങ്കിൽ $\frac{z_1}{z_2}$ ന്റെ ചതുരാകൃതിയിലുള്ള രൂപം കാണുക

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ള z_1, z_2 എന്നീ മൂല്യങ്ങളിൽ നിന്ന് $\frac{z_1}{z_2} = \frac{3-2i}{6+4i} = \frac{3-2i}{6+4i}\times\frac{6-4i}{6-4i}$

$$= \frac{(18-8)+i(-12-12)}{6^2+4^2} = \frac{10-24i}{52} = \frac{10}{52}-\frac{24i}{52}$$

$$= \frac{5}{26}-\frac{6}{13}i.$$

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 63 14-02-2023 18:06:24

ഉദാഹരണം 2.7

$z=(2+3i)(1-i)$ എങ്കിൽ, z^{-1} കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

ഇവിടെ $z=(2+3i)(1-i)=(2+3)+(3-2)i=5+i$

$$\Rightarrow \quad z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{1}{5+i}\ .$$

അംശത്തേയും ഛേദത്തേയും ഛേദത്തിന്റെ സമാന്തര കരണികൊണ്ട് ഗുണിക്കുമ്പോൾ

$$z^{-1}=\frac{(5-i)}{(5+i)(5-i)}=\frac{5-i}{5^2+1^2}=\frac{5}{26}-i\frac{1}{26}$$

$$\Rightarrow \quad z^{-1}=\frac{5}{26}-i\frac{1}{26}.$$

ഉദാഹരണം 2.8

(i) $\left(2+i\sqrt{3}\right)^{10}+\left(2-i\sqrt{3}\right)^{10}$ ഒരു വാസ്തവികവും (ii) $\left(\frac{19+9i}{5-3i}\right)^{15}-\left(\frac{8+i}{1+2i}\right)^{15}$ ഒരു പൂർണ്ണ സാങ്കല്പികമെന്ന് കാണിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

(i) $z=\left(2+i\sqrt{3}\right)^{10}+\left(2-i\sqrt{3}\right)^{10}$, എങ്കിൽ

$$\overline{z}=\overline{\left(2+i\sqrt{3}\right)^{10}+\left(2-i\sqrt{3}\right)^{10}}$$

$$=\overline{\left(2+i\sqrt{3}\right)^{10}}+\overline{\left(2-i\sqrt{3}\right)^{10}} \qquad \left(\because \overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}\right)$$

$$=\left(\overline{2+i\sqrt{3}}\right)^{10}+\left(\overline{2-i\sqrt{3}}\right)^{10} \qquad \left(\because \overline{(z^n)}=(\overline{z})^n\right)$$

$$=\left(2-i\sqrt{3}\right)^{10}+\left(2+i\sqrt{3}\right)^{10}=z$$

$\overline{z}=z \Rightarrow z$ ഒരു വാസ്തവികം.

(ii) $$z=\left(\frac{19+9i}{5-3i}\right)^{15}-\left(\frac{8+i}{1+2i}\right)^{15}.$$

ഇവിടെ, $\frac{19+9i}{5-3i}=\frac{(19+9i)(5+3i)}{(5-3i)(5+3i)}$

$$=\frac{(95-27)+i(45+57)}{5^2+3^2}=\frac{68+102i}{34}$$

$$=2+3i\ . \qquad (1)$$

$$\frac{8+i}{1+2i}=\frac{(8+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}$$

$$=\frac{(8+2)+i(1-16)}{1^2+2^2}=\frac{10-15i}{5}$$

$$=2-3i\ . \qquad (2)$$

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 64 14-02-2023 18:06:38

$$z = \left(\frac{19+9i}{5-3i}\right)^{15} - \left(\frac{8+i}{1+2i}\right)^{15}$$

$$\Rightarrow \quad z = (2+3i)^{15} - (2-3i)^{15}. \qquad \text{((1) ഉം (2) ൽ നിന്നും)}$$

നിർവചനം അനുസരിച്ച്, $\overline{z} = \overline{\left((2+3i)^{15} - (2-3i)^{15}\right)}$

$$= \left(\overline{2+3i}\right)^{15} - \left(\overline{2-3i}\right)^{15} \qquad \text{(സംയോജനങ്ങളുടെ സവിശേഷത ഉപയോഗിച്ച്)}$$

$$= (2-3i)^{15} - (2+3i)^{15} = -\left((2+3i)^{15} - (2-3i)^{15}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \overline{z} = -z.$$

$z = \left(\frac{19+9i}{5-3i}\right)^{15} - \left(\frac{8+i}{1+2i}\right)^{15}$ ഒരു സാങ്കല്പികമാണ്. ■

അഭ്യാസം 2.4

1. താഴെ കാണുന്നവയെ ചതുരാകൃതിയിൽ എഴുതുക:

   (i) $\overline{(5+9i)+(2-4i)}$ (ii) $\frac{10-5i}{6+2i}$ (iii) $\overline{3i} + \frac{1}{2-i}$

2. $z = x + iy$, എങ്കിൽ താഴെ കാണുന്നവയെ ചതുരാകൃതിയിൽ എഴുതുക?

   (i) $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)$ (ii) $\mathrm{Re}(i\overline{z})$ (iii) $\mathrm{Im}(3z + 4\overline{z} - 4i)$

3. $z_1 = 2-i$, $z_2 = -4+3i$, എങ്കിൽ $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$ ന്റെ വിപരീതം കാണുക.

4. സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകൾ u, v, w എന്നിവയെ ബന്ധിപ്പിക്കുന്നത് $\frac{1}{u} = \frac{1}{v} + \frac{1}{w}$ എങ്കിൽ

   $v = 3-4i$ ഉം $w = 4+3i$, ഉപയോഗിച്ച് u നെ ചതുരാകൃതിയിൽ കാണുക.

5. താഴെ കാണുന്ന സവിശേഷതകളെ തെളിയിക്കുക:

   (i) z ഒരു വാസ്തവികം $\Leftrightarrow z = \overline{z}$ (ii) $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$ ഉം $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$

6. $\left(\sqrt{3}+i\right)^n$ ൽ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ പോസിറ്റീവ് പൂർണ്ണാങ്കം n നെ കാണുക

   (i) വാസ്തവികം (ii) പൂർണ്ണ സാങ്കല്പികം.

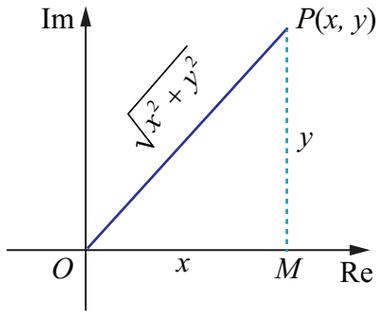
7. (i) $\left(2+i\sqrt{3}\right)^{10} - \left(2-i\sqrt{3}\right)^{10}$ ഒരു സാങ്കല്പികവും

   (ii) $\left(\frac{19-7i}{9+i}\right)^{12} + \left(\frac{20-5i}{7-6i}\right)^{12}$ ഒരു വാസ്തവികവുമെന്ന് കാണിക്കുക.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 65 14-02-2023 18:06:55

2.5 സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകളുടെ മോഡുലസ്

വാസ്തവിക സംഖ്യകളുടെ വാസ്തവിക മൂല്യം എന്നത് ആ സംഖ്യയിൽ നിന്നും മധ്യം വരെയുള്ള ദൂരമാണ്. അതേപോലെ ഒരു സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയുടെ വാസ്തവിക മൂല്യം അളക്കുന്നതിന് സങ്കീർണ്ണ തലത്തിലെ മൂല ബിന്ദുവിൽ നിന്നും സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യ വരെയുള്ള ദൂരമാണ്. $z = x + iy$ എന്ന സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയിൽ ദൂരം എന്നത് മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണ്ണമാണ്. ഇവിടെ ഒരു വശത്തിന്റെ ദൂരം x ഉം മറ്റേ വശം y ഉം ആണ്.



ചിത്രം 2.16

നിർവ്വചനം 2.4

$z = x + iy$, എങ്കിൽ z ന്റെ മോഡുലസിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നത് $|z|$. ഇവിടെ $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

അതുപോലെ, ഉദാഹരണത്തിന് (i) $|i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$

(ii) $|-12i| = \sqrt{0^2 + (-12)^2} = 12$

(iii) $|12 - 5i| = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = \sqrt{169} = 13$

കുറിപ്പ്

$z = x + iy$, എങ്കിൽn $\bar{z} = x - iy$, $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = (x)^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$.

$$|z|^2 = z\bar{z} .$$

2.5.1 സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകളുടെ മോഡുലസിന്റെ സവിശേഷതകൾ

(1) $|z| = |\bar{z}|$

(2) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ (ത്രികോണ അസമീകരണം)

(3) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

(4) $|z_1 - z_2| \ge ||z_1| - |z_2||$

(5) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \neq 0$

(6) $|z^n| = |z|^n$, ഇവിടെ n ഒരു പൂർണ്ണാങ്കം

(7) $\mathrm{Re}(z) \le |z|$

(8) $\mathrm{Im}(z) \le |z|$

ചില സവിശേഷതകളെ നമുക്ക് തെളിയിക്കാം.

സവിശേഷത ത്രികോണ അസമീകരണം

ഏത് രണ്ട് സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകളായ Z_1, Z_2 നും $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$.

തെളിവ്

ഇവിടെ
$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) && (\because |z|^2 = z\bar{z}) \\ &= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) && (\because \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\ &= z_1\bar{z}_1 + (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) + z_2\bar{z}_2 \\ &= z_1\bar{z}_1 + \left(z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2}\right) + z_2\bar{z}_2 && (\because \bar{\bar{z}} = z) \end{aligned}$$

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 66 14-02-2023 18:07:09

$$= |z_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2) + |z_2|^2 \qquad (\because\ 2\,\mathrm{Re}(z) = z + \overline{z})$$

$$\leq |z_1|^2 + 2|z_1\overline{z_2}| + |z_2|^2 \qquad (\because\ \mathrm{Re}(z) \leq |z|)$$

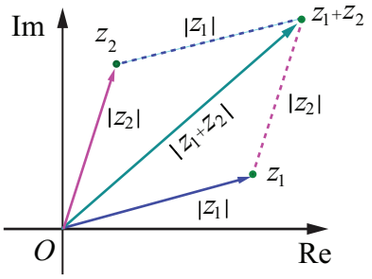
$$= |z_1|^2 + 2|z_1|\,|z_2| + |z_2|^2 \qquad (\because |z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2| \text{ ഉം } |z| = |\overline{z}|)$$

$$\Rightarrow\ |z_1 + z_2|^2 \leq \left(|z_1| + |z_2|\right)^2$$

$$\Rightarrow |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

ജ്യാമിതീയ വ്യാഖ്യാനം

O, z_1 അല്ലെങ്കിൽ z_2, $z_1 + z_2$ എന്നീ ശീർഷങ്ങളുള്ള ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന ത്രികോണം പരിഗണിക്കുക. ത്രികോണത്തിലെ $z_1 + z_2$ എന്ന വെക്ടറിന്റെ വംശത്തിന്റെ നീളം മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളുടെ ആകെ തുകയ്ക്ക് അധികമാവുകയില്ല. ഈ സവിശേഷതയാണ് "ത്രികോണത്തിന്റെ അസമീകരണം" എന്ന സവിശേഷതയായി വിളിക്കുന്നത്..



ചിത്രം 2.17

ഇതിനെ ഗണിതീയ ആഗമനം ഉപയോഗിച്ച് പരിമിത എണ്ണം സംഖ്യകളായി പൊതുവായി പറയുമ്പോൾ :

$|z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3| + \cdots + |z_n|$ ഇവിടെ $n = 2, 3, \cdots$.

സവിശേഷത സങ്കീർണ്ണ തലത്തിലെ z_1, z_2 എന്ന രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾക്ക് ഇടയിലുള്ള ദൂരം $|z_1 - z_2|$ ആകുന്നു.

$z_1 = x_1 + iy_1$ ഉം $z_2 = x_2 + iy_2$, എങ്കിൽ

$$|z_1 - z_2| = |(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i|$$

$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\,.$$

നിരൂപണം

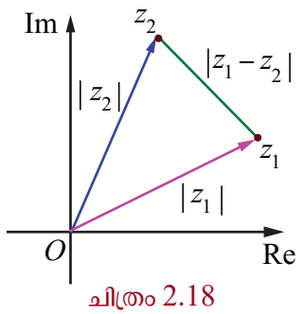
സങ്കീർണ്ണ തലത്തിലെ z_1 , z_2 എന്ന രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾക്ക് ഇടയിലുള്ള ദൂരം $|z_1 - z_2|$ ആകുന്നു.

നമ്മൾ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങളെ മൂലബിന്ദു, z_1 ഉം z_2 എന്നും പരിഗണിക്കുമ്പോൾ, ഇവിടെ

$|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ ഉം

$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.



ചിത്രം 2.18

സവിശേഷത ഗുണന ഫലത്തിന്റെ മോഡുലസ്, മോഡുലസുകളുടെ ഗുണന ഫലത്തിന് തുല്യമാകുന്നു.

ഏത് രണ്ട് സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകൾ z_1 ഉം z_2 , നും $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

തെളിവ്

ഇവിടെ, $|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2})$ $\qquad (\because |z|^2 = z\,\overline{z})$

$= (z_1)(z_2)(\overline{z_1})(\overline{z_2})$ $\qquad (\because \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2})$

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 67 14-02-2023 18:07:29

$$= \left(z_1\overline{z_1}\right)\left(z_2\overline{z_2}\right) = |z_1|^2\,|z_2|^2 \qquad (\text{ക്രമ വിനിമേയം } z_2\overline{z_1} = \overline{z_1}z_2)$$

$$|z_1z_2| = |z_1||z_2|.$$

കുറിപ്പ്

ഇതിനെ ഗണിതീയ ആഗമനം ഉപയോഗിച്ച് പരിമിത എണ്ണം സംഖ്യകളായി പൊതുവായി പറയുമ്പോൾ :

$$|z_1z_2z_3\cdots z_n| = |z_1||z_2||z_3|\cdots|z_n|$$

അതായത് സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകളുടെ ഗുണിത ഫലത്തിന്റെ മോഡുലസ് സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയുടെ മോഡുലസുകളുടെ ഗുണിത ഫലത്തിന് തുല്യമാകുന്നു.

അതുപോലെ നമുക്ക് സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയുടെ മോഡുലസിന്റെ മറ്റ് സവിശേഷതകളെ തെളിയിക്കാനാകും.

ഉദാഹരണം 2.9

$z_1 = 3+4i,\ \ z_2 = 5-12i,\ \ z_3 = 6+8i$, എങ്കിൽ $|z_1|, |z_2|, |z_3|, |z_1+z_2|, |z_2-z_3|$, ഉം $|z_1+z_3|$ മൂല്യം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

കൊടുത്തിട്ടുള്ള z_1, z_2, z_3 എന്ന മൂല്യത്തിൽ നിന്നും $|z_1| = |3+4i| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$

$$|z_2| = |5-12i| = \sqrt{5^2+(-12)^2} = 13$$

$$|z_3| = |6+8i| = \sqrt{6^2+8^2} = 10$$

$$|z_1+z_2| = |(3+4i)+(5-12i)| = |8-8i| = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$$

$$|z_2-z_3| = |(5-12i)-(6+8i)| = |-1-20i| = \sqrt{401}$$

$$|z_1+z_3| = |(3+4i)+(6+8i)| = |9+12i| = \sqrt{225} = 15$$

എല്ലാ അവസ്ഥകളിലും ത്രികോണ അസമീകരണം തൃപ്തികരമാണെന്ന് ശ്രദ്ധിക്കുക.

$|z_1+z_3| = |z_1|+|z_3| = 15$ (എന്തുകൊണ്ട്?)

ഉദാഹരണം 2.10

താഴെ കാണുന്നവയെ കാണുക (i) $\left|\dfrac{2+i}{-1+2i}\right|$ (ii) $\left|\overline{(1+i)}(2+3i)(4i-3)\right|$ (iii) $\left|\dfrac{i(2+i)^3}{(1+i)^2}\right|$

നിർദ്ധാരണം

(i) $$\left|\frac{2+i}{-1+2i}\right| = \frac{|2+i|}{|-1+2i|} = \frac{\sqrt{2^2+1^2}}{\sqrt{(-1)^2+2^2}} = 1. \qquad \left(\because \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},\ z_2 \neq 0\right)$$

(ii) $$\left|\overline{(1+i)}(2+3i)(4i-3)\right| = \left|\overline{(1+i)}\right|\,|2+3i|\,|4i-3| \qquad \left(\because |z_1z_2z_3| = |z_1||z_2||z_3|\right)$$

$$= |1+i|\,|2+3i|\,|-3+4i| \qquad \left(\because |z| = |\overline{z}|\right)$$

$$= \left(\sqrt{1^2+1^2}\right)\left(\sqrt{2^2+3^2}\right)\left(\sqrt{(-3)^2+4^2}\right)$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{13}\right)\left(\sqrt{25}\right) = 5\sqrt{26}.$$

(iii) $$\left|\frac{i(2+i)^3}{(1+i)^2}\right| = \frac{|i|\,|(2+i)^3|}{|(1+i)^2|} = \frac{1|2+i|^3}{|1+i|^2} = \frac{\left(\sqrt{4+1}\right)^3}{\left(\sqrt{2}\right)^2} \quad \left(\because \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},\ z_2 \neq 0\right)$$

$$= \frac{\left(\sqrt{5}\right)^3}{2} = \frac{5\sqrt{5}}{2}.$$

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 68 14-02-2023 18:07:49

ഉദാഹരണം 2.11

ഇവയിലേത് ബിന്ദുവാണ് മധ്യത്തിൽ നിന്നും അകലെ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നത് $i, -2+i, 3$?

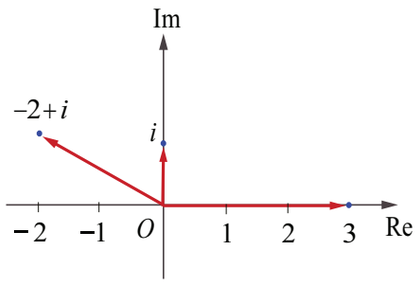
നിർദ്ധാരണം

മൂലബിന്ദുവിൽ നിന്നും $z = i, -2+i,$ ഉം 3 വരെയുള്ള ദൂരം

$$|z| = |i| = 1$$

$$|z| = |-2+i| = \sqrt{(-2)^2+1^2} = \sqrt{5}$$

$$|z| = |3| = 3$$



ചിത്രം 2.19

$1 < \sqrt{5} < 3$ ആയതിനാൽ മൂലബിന്ദുവിൽ നിന്ന് ഏറ്റവും അകലെയുള്ള ബിന്ദു 3 ആണ്.

ഉദാഹരണം 2.12

z_1 , z_2 , z_3 എന്ന സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകളും $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_1 + z_2 + z_3| = 1$ ഉം ആണെങ്കിൽ,

$\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right|$ യുടെ മൂല്യം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1, \text{ ആയതിനാൽ}$$

$$|z_1|^2 = 1 \Rightarrow z_1\bar{z}_1 = 1, |z_2|^2 = 1 \Rightarrow z_2\bar{z}_2 = 1, \ |z_3|^2 = 1 \Rightarrow z_3\bar{z}_3 = 1$$

അതുകൊണ്ട്, $\bar{z}_1 = \frac{1}{z_1}, \bar{z}_2 = \frac{1}{z_2}$, ഉം $\bar{z}_3 = \frac{1}{z_3}$ ആയതുകൊണ്ട്

$$\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right| = \left|\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}\right|$$

$$= \overline{|z_1+z_2+z_3|} = |z_1+z_2+z_3| = 1.$$

ഉദാഹരണം 2.13

$|z| = 2$ എങ്കിൽ $3 \le |z+3+4i| \le 7$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

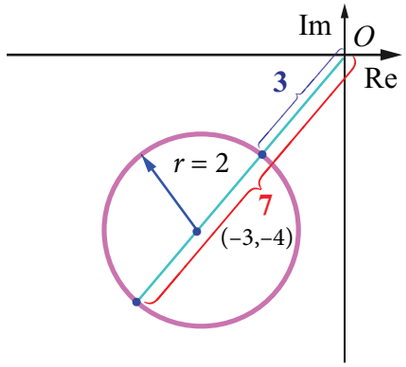
$$|z+3+4i| \le |z| + |3+4i| = 2+5 = 7$$

$$|z+3+4i| \le 7 \qquad (1)$$

$$|z+3+4i| \ge \big||z| - |3+4i|\big| = |2-5| = 3$$

$$|z+3+4i| \ge 3 \qquad (2)$$

(1) ഉം (2), ൽ നിന്നും $3 \le |z+3+4i| \le 7$ നമുക്ക് കിട്ടും.



ചിത്രം 2.20

കുറിപ്പ്

ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ മൂല്യവും ഏറ്റവും കൂടിയ മൂല്യവും കണ്ടെത്താൻ $\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1+z_2| \le |z_1| + |z_2|$ നെ ഉപയോഗിക്കാം

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 69 14-02-2023 18:08:05

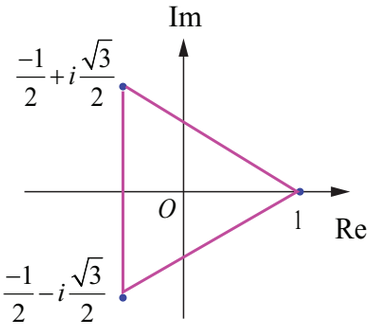
ഉദാഹരണം 2.14

പോയിന്റുകൾ $1,\ \frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ബിന്ദുക്കൾ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

ഇവിടെ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ തുല്യമാണെന്ന് തെളിയിച്ചാൽ മതി.

$z_1=1,\ \ z_2=\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ z_3=\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ എന്നിരിക്കട്ടെ.



ചിത്രം 2.21

ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം

$$|z_1-z_2| = \left|1-\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right| = \left|\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$|z_2-z_3| = \left|\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{3}$$

$$|z_3-z_1| = \left|\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-1\right| = \left|\frac{-3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{3}$$

വശങ്ങൾ തുല്യമായതിനാൽ, നൽകിയിരുന്ന ബിന്ദുക്കൾ ഒരു സമദുജത്രികോണമായി മാറുന്നു. ■

ഉദാഹരണം 2.15

$z_1, z_2,\ z_3$ എന്നത് സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകളും $|z_1|=|z_2|=|z_3|=r>0$, $z_1+z_2+z_3\neq 0$ എങ്കിൽ

$\left|\frac{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}{z_1+z_2+z_3}\right|=r$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$$|z_1| = |z_2|=|z_3|=r \Rightarrow z_1\bar{z}_1=z_2\bar{z}_2=z_3\bar{z}_3=r^2$$

$$\Rightarrow z_1 = \frac{r^2}{\bar{z}_1},\quad z_2=\frac{r^2}{\bar{z}_2},\quad z_3=\frac{r^2}{\bar{z}_3}$$

$$z_1+z_2+z_3 = \frac{r^2}{\bar{z}_1}+\frac{r^2}{\bar{z}_2}+\frac{r^2}{\bar{z}_3}$$

$$= r^2\left(\frac{\bar{z}_2\bar{z}_3+\bar{z}_1\bar{z}_3+\bar{z}_1\bar{z}_2}{\bar{z}_1\bar{z}_2\bar{z}_3}\right)$$

$$|z_1+z_2+z_3| = |r^2|\left|\frac{\overline{z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2}}{\overline{z_1z_2z_3}}\right| \qquad (\because \bar{z}_1+\bar{z}_2=\overline{z_1+z_2})$$

$$= r^2\frac{|z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2|}{|z_1||z_2||z_3|} \quad (\because |z|=|\bar{z}| \text{ ഉം } |z_1z_2z_3|=|z_1||z_2||z_3|)$$

$$|z_1+z_2+z_3| = r^2\frac{|z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2|}{r^3}=\frac{|z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2|}{r}$$

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 70 14-02-2023 18:08:23

$$\Rightarrow \quad \frac{\left|z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2\right|}{\left|z_1+z_2+z_3\right|} = r. \qquad (z_1+z_2+z_3 \neq 0 \text{ എന്ന് തന്നിട്ടുണ്ട്})$$

എങ്കിൽ, $\left|\frac{z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2}{z_1+z_2+z_3}\right| = r.$

ഉദാഹരണം 2.16

$z^2=\overline{z}$ എന്ന സമവാക്യത്തിന് നാല് നിർദ്ധാരണങ്ങൾ ഉണ്ടെന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

ഇവിടെ, $z^2 = \overline{z}$.

$$\Rightarrow |z|^2 = |z|$$

$$\Rightarrow |z|(|z|-1) = 0,$$

$$\Rightarrow |z| = 0, \text{ അല്ലെങ്കിൽ } |z|=1.$$

$|z| = 0 \Rightarrow z=0$ ഒരു നിർദ്ധാരണമാണ്, $|z| = 1 \Rightarrow z\overline{z}=1 \Rightarrow \overline{z}=\frac{1}{z}$.

ഇവിടെ $z^2 = \overline{z} \Rightarrow z^2 = \frac{1}{z} \Rightarrow z^3 = 1.$

ഇതിന്, പൂജ്യമല്ലാത്ത മൂന്ന് നിർദ്ധാരണങ്ങളുണ്ട് പൂജ്യം നിർദ്ധാരണവും ചേർത്താൽ , ആകെ നാല് നിർദ്ധാരണങ്ങളുണ്ട്.

2.5.2 സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗ മൂലങ്ങൾ

$a+ib$ യുടെ വർഗ്ഗമൂലം $x+iy$ എന്നിരിക്കട്ടെ

അതായത് $\sqrt{a+ib} = x+iy$ ഇവിടെ $x, y \in \mathbb{R}$

$$a+ib = (x+iy)^2 = x^2-y^2+i2xy$$

വാസ്തവികവും സാങ്കൽപിക ഭാഗങ്ങളും പ്രത്യേകം സമീകരിക്കുമ്പോൾ

$$x^2-y^2 = a,\ 2xy = b$$

$$(x^2+y^2)^2 = (x^2-y^2)^2+4x^2y^2 = a^2+b^2$$

$$x^2+y^2 = \sqrt{a^2+b^2}\ ,\ x^2+y^2 \text{ പോസിറ്റീവ് ആണ്}$$

$$x^2-y^2 = a \text{ ഉം } x^2+y^2 = \sqrt{a^2+b^2}\ , \text{ ഉം സമീകരിക്കുമ്പോൾ}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}\ ;\ y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}.$$

$2xy=b$ ആയതിനാൽ, b പോസിറ്റീവ് ആയിരിക്കുമ്പോൾ x, y എന്നിവയ്ക്ക് ഒരേ ചിഹ്നമുണ്ടെന്ന് വ്യക്തമാണ്, അതുപോലെ b നെഗറ്റീവ് ആയിരിക്കുമ്പോൾ x, y എന്നിവയ്ക്ക് വ്യത്യസ്ത ചിഹ്നങ്ങളാണ്.

$$\sqrt{a+ib} = \pm\left(\sqrt{\frac{|z|+a}{2}}+i\frac{b}{|b|}\sqrt{\frac{|z|-a}{2}}\right), \text{ ഇവിടെ } b\neq 0. \quad \left(\because \mathrm{Re}(z)\leq|z|\right)$$

സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗമൂലം കണ്ടെത്തുന്നതിനുള്ള സൂത്രവാക്യം

$$\sqrt{a+ib} = \pm\left(\sqrt{\frac{|z|+a}{2}}+i\frac{b}{|b|}\sqrt{\frac{|z|-a}{2}}\right), \text{ ഇവിടെ } z=a+ib \text{ ഉം } b\neq 0.$$

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 71 14-02-2023 18:08:50

കുറിപ്പ്

b നെഗറ്റീവ് ആണെങ്കിൽ, $\frac{b}{|b|}=-1$, x നും y നും വ്യത്യസ്ത ചിഹ്നമാണ്.

b പോസിറ്റീവ് ആണെങ്കിൽ, $\frac{b}{|b|}=1$, x നും y നും ഒരേ ചിഹ്നമാണ്.

ഉദാഹരണം 2.17

$6-8i$ എന്ന സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗമൂലം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$|6-8i| = \sqrt{6^2+(-8)^2} = 10$ എന്ന് കണക്കാക്കാം.

വർഗ്ഗമൂലത്തിന്റെ സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ

$$\begin{aligned}\sqrt{6-8i} &= \pm\left(\sqrt{\frac{10+6}{2}}-i\sqrt{\frac{10-6}{2}}\right) \quad (\because b \text{ നെഗറ്റീവ് ആണ്, } \frac{b}{|b|}=-1)\\ &= \pm\left(\sqrt{8}-i\sqrt{2}\right)\\ &= \pm\left(2\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right).\end{aligned}$$

അഭ്യാസം 2.5

1. താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകളുടെ മേഡുലസ് കാണുക

   (i) $\frac{2i}{3+4i}$ (ii) $\frac{2-i}{1+i}+\frac{1-2i}{1-i}$ (iii) $(1-i)^{10}$ (iv) $2i(3-4i)(4-3i)$.

2. ഏത് രണ്ട് സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകൾ z_1, z_2 നും, $|z_1|=|z_2|=1$ ഉം $z_1z_2\neq -1$, എങ്കിൽ $\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ ഒരു വാസ്തവിക സംഖ്യയെന്ന് തെളിയിക്കുക.

3. $10-8i$, $11+6i$ ഇവയിൽ ഏത് ബിന്ദുക്കളിലൊന്നാണ് $1+i$ ന് ഏറ്റവും അടുത്തുള്ളത്.

4. $|z|=3$, എങ്കിൽ $7\leq|z+6-8i|\leq 13$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

5. $|z|=1$, എങ്കിൽ $2\leq|z^2-3|\leq 4$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

6. $|z|=2$, എങ്കിൽ $8\leq|z+6+8i|\leq 12$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

7. സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകൾ z_1, z_2, z_3 യും $|z_1|=1$, $|z_2|=2$, $|z_3|=3$, $|z_1+z_2+z_3|=1$ ഉം എങ്കിൽ, $|9z_1z_2+4z_1z_3+z_2z_3|=6$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

8. z, iz, $z+iz$ എന്നീ ശീർഷങ്ങളാൽ രൂപം കൊണ്ടാ ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം 50 ചതുരശ്ര യൂണിറ്റാണെങ്കിൽ $|z|$ ന്റെ മൂല്യം കാണുക.

9. $z^3+2\bar{z}=0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന് അഞ്ച് നിർദ്ധാരണങ്ങളുണ്ടെക്ക് തെളിയിക്കുക.

10. വർഗ്ഗമൂലം കാണുക (i) $4+3i$ (ii) $-6+8i$ (iii) $-5-12i$.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 72 14-02-2023 18:09:28

2.6 സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകളുടെ ജ്യാമിതിയും ലോക്കസും

ഈ വിഭാഗത്തില സങ്കിർണ്ണ തലത്തിൽ സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയുടെ ജ്യാമിതീയ ആവിഷ്കാരം കാർട്ടീഷ്യൻ രൂപത്തിലുള്ള z ന്റെ ലോക്കസുനേയും കുറിച്ച് പഠിക്കാം.

ഉദാഹരണം 2.18

$z = 3 + 2i$ എന്ന സങ്കിർണ്ണ സംഖ്യ നൽകിയാൽ, z, iz, and $z + iz$ നെ ഒരു ആർഗാണ്ട് തലത്തിൽ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. ഈ സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകൾ സമപാർശ്വ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങളാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$z = 3 + 2i.$ എന്ന് നൽകിയാൽ

$$iz = i(3 + 2i) = -2 + 3i$$

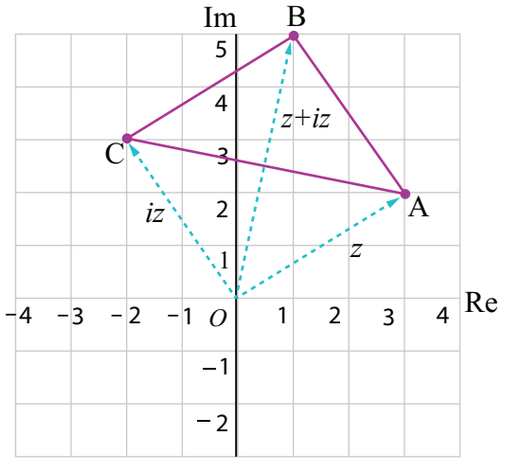
$$z + iz = (3 + 2i) + i(3 + 2i) = 1 + 5i$$

A, B, C എന്നിവ യഥാക്രമം z, $z + iz$, ഉം iz എന്നിരിക്കട്ടെ.

$$AB^2 = \left|(z + iz) - z\right|^2 = \left|-2 + 3i\right|^2 = 13$$

$$BC^2 = \left|iz - (z + iz)\right|^2 = \left|-3 - 2i\right|^2 = 13$$

$$CA^2 = \left|z - iz\right|^2 = \left|5 - i\right|^2 = 26$$



ചിത്രം 2.22

$AB^2 + BC^2 = CA^2$ ഉം $AB = BC$, ΔABC ഒരു സമപാർശ്വമട്ടത്രികോണമാണ്..

നിർവ്വചനം 2.5 (വൃത്തം)

ഒരു തലത്തിൽ , ഒരു സ്ഥിര ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് തുല്യ അകലത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ ലോക്കസിനെ വൃത്തം എന്ന് നിർവചിക്കുന്നു. സ്ഥിര ബിന്ദുവിനെ കേന്ദ്രമെന്നും തുല്യ അകലത്തെ വൃത്തത്തിന്റെ വ്യസാർദ്ധം എന്നും പറയുന്നു..

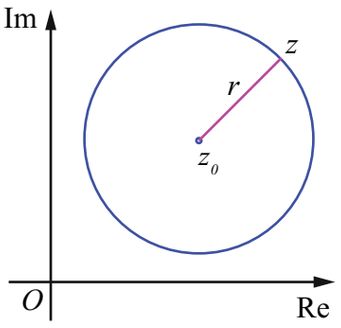
വൃത്തത്തിന്റെ സങ്കീർണ്ണ രൂപത്തിന്റെ സമവാക്യം

z ന്റെ ലോക്കസ്സിനെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്ന സമവാക്യം $|z - z_0| = r$, ഇവിടെ z_0 എന്നത് സ്ഥിര സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയും r എന്നത് സ്ഥിര പോസിറ്റീവ് വാസ്തവിക സംഖ്യയും കൂടാതെ z ൽ നിന്ന് എല്ല ബിന്ദുക്കൾ z_0 നും ഇടയിലുള്ള ദൂരം r ആണ് .

അതായത് $|z - z_0| = r$ എന്നത് വൃത്തത്തിന്റെ സങ്കീർണ്ണ രൂപത്തിന്റെ സമവാക്യമാണ്. (ചിത്രം 2.23 നോക്കുക.)

(i) $|z - z_0| < r$ എന്നത് വൃത്തത്തിന്റെ ആന്തരിക ബിന്ദുക്കളെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു.

(ii) $|z - z_0| > r$ എന്നത് വൃത്തത്തിന്റെ ബാഹ്യ ബിന്ദുക്കളെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു.



ചിത്രം 2.23

വിശദീകരണം 2.3

$$|z| = r \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = r$$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = r^2$, എന്നത് മൂലബിന്ദു കേന്ദ്രവും r വ്യാസാർദ്ധമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 73 14-02-2023 18:09:52

ഉദാഹരണം 2.19

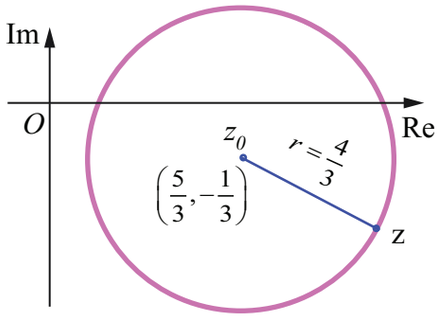
$|3z-5+i|=4$ എന്നത് വൃത്തത്തെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നുവെന്ന് കാണിക്കുക. കൂടാതെ കേന്ദ്രവും വ്യാസാർദ്ധവും കാണുക .

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ള സമവാക്യം $|3z-5+i|=4$ നെ

$$3\left|z-\frac{5-i}{3}\right|=4 \Rightarrow \left|z-\left(\frac{5}{3}-\frac{i}{3}\right)\right| = \frac{4}{3}$$ എന്ന് എഴുതാം.

ഇത് $|z-z_0|=r$ എന്ന രൂപത്തിലാണ്. കൂടാതെ ഇത് വൃത്തത്തെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. ഇവിടെ കേന്ദ്രവും വ്യാസാർദ്ധവും യഥാക്രമം $\left(\frac{5}{3},-\frac{1}{3}\right)$ യും $\frac{4}{3}$ ഉം ആകുന്നു.



ചിത്രം 2.24

ഉദാഹരണം 2.20

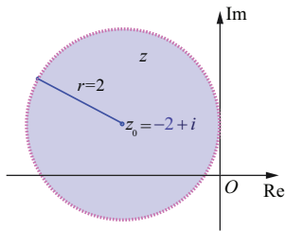
$|z+2-i|<2$ എന്നത് വൃത്തത്തിന്റെ ആന്തരിക ബിന്ദുക്കളെ പ്രതിനിധീകരിുന്നുവെന്ന് തെളിയിക്കുക. കൂടാതെ കേന്ദ്രവും വ്യാസാർദ്ധവും കാണുക. .

നിർദ്ധാരണം

$|z+2-i|=2$ എന്ന സമവാക്യത്തെ പരിഗണിക്കുക..

ഇതിനെ, $|z-(-2+i)|=2$ എന്ന് എഴുതാം.

മേൽപറഞ്ഞ സമവാക്യം കേന്ദ്രം $z_0=-2+i$ ഉം വ്യാസാർദ്ധം $r=2$ ഉം എന്ന വൃത്തത്തെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. അതുകൊണ്ട് $|z+2-i|<2$ എന്നത് കേന്ദ്രം $-2+i$ ഉം വ്യാസാർദ്ധം 2 ഉം ഉള്ള വൃത്തത്തിന്റെ ആന്തരിക ബിന്ദുക്കളെ ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നതുപോലെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു.



ചിത്രം 2.25

ഉദാഹരണം 2.21

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള z ന്റെ ലോക്കളുകളുടെ കാർട്ടീഷ്യൻ രൂപം കാണുക.

(i) $|z|=|z-i|$ (ii) $|2z-3-i|=3$

നിർദ്ധാരണം

(i) ഇവിടെ $|z| = |z-i|$

$$\Rightarrow |x+iy| = |x+iy-i|$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y-1)^2}$$

$$\Rightarrow x^2+y^2 = x^2+y^2-2y+1$$

$$\Rightarrow 2y-1 = 0\,.$$

(ii) ഇവിടെ $|2z-3-i| = 3$

$$|2(x+iy)-3-i| = 3\,.$$

ഇരുഭാഗത്തും വർഗ്ഗം കാണുമ്പോൾ

$$|(2x-3)+(2y-1)i|^2 = 9$$

$$\Rightarrow (2x-3)^2+(2y-1)^2 = 9$$

$\Rightarrow 4x^2+4y^2-12x-4y+1 = 0$, എന്നതാണ് കാർട്ടീഷ്യൻ രൂപത്തിലുള്ള z ന്റെ ലോക്കസ്സ്

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 74 14-02-2023 18:10:22

അഭ്യാസം 2.6

1. $z = x + iy$ എന്ന സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയും $\left|\frac{z-4i}{z+4i}\right| = 1$ ഉം ആണെങ്കിൽ z ന്റെ ലോക്കസ് ഒരു വാസ്തവിക അക്ഷമാണെന്ന് കാണിക്കുക.

2. $z = x + iy$ എന്ന സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയും $\text{Im}\left(\frac{2z+1}{iz+1}\right) = 0$, ഉം ആണെങ്കിൽ z ന്റെ ലോക്കസ്സ് $2x^2 + 2y^2 + x - 2y = 0.$ എന്ന് കാണിക്കുക.

3. താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയിൽ കാർട്ടീഷ്യൻ രൂപത്തിലുള്ള $z = x + iy$ ന്റെ ലോക്കസിനെ കാണുക:
   (i) $\left[\text{Re}(iz)\right]^2 = 3$ (ii) $\text{Im}[(1-i)z + 1] = 0$ (iii) $|z+i| = |z-1|$ (iv) $\bar{z} = z^{-1}$.

4. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള സമവാക്യങ്ങൾ ഒരു വൃത്തത്തെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നുവെന്ന് കാണിക്കുക. കൂടാതെ കേന്ദ്രവും വ്യാസാർദ്ധവും കാണുക.
   (i) $|z-2-i| = 3$ (ii) $|2z+2-4i| = 2$ (iii) $|3z-6+12i| = 8$.

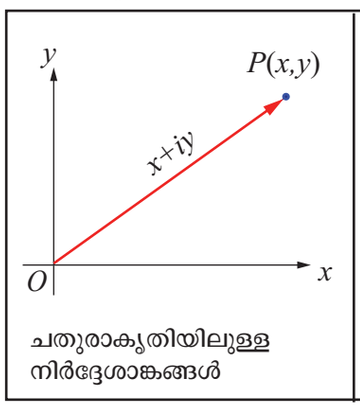
5. താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയിൽ $z = x + iy$ യുടെ ലോക്കസിന്റെ കാർട്ടഷ്യൻ സമവാക്യം കാണുക:
   (i) $|z-4| = 16$ (ii) $|z-4|^2 - |z-1|^2 = 16$.

2.7 സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയുടെ പോളാർ രൂപവും ഓയ്‌ലർ രൂപവും

സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകളുടെ സങ്കലനവും വ്യവകലനവും ചെയ്യുമ്പോൾ നമ്മൾ ചതുരാകൃതിയിലുള്ള രൂപം ഉപയോഗിക്കുന്നു. അതിന് കാരണം, വാസ്തവിക ഭാഗങ്ങൾ തമ്മിൽ കൂട്ടുകയും സാങ്കല്പിക ഭാഗങ്ങൾ തമ്മിൽ കൂട്ടുകയും ചെയ്യുന്നു അല്ലെങ്കിൽ വാസ്തവിക ഭാഗങ്ങൾ തമ്മിൽ കുറയ്ക്കുകയും സാങ്കല്പിക ഭാഗങ്ങൾ തമ്മിൽ കുറയ്ക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. ഗുണനം ചെയ്യുമ്പോൾ അല്ലെങ്കിൽ സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയുടെ കൃതികൾ അല്ലെങ്കിൽ മൂലങ്ങൾ കാണുമ്പോൾ, നമ്മൾ പോളാർ രൂപം എന്ന ഇതര രൂപം ഉപയോഗിക്കുന്നു. കാരണം, ചതുരാകൃതിയിലുള്ള രൂപത്തേക്കാൾ പോളാർ രൂപത്തിൽ കണക്കു കൂട്ടാൻ എളുപ്പമാണ്.

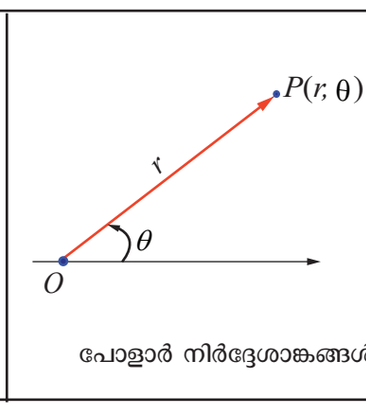
2.7.1 സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയുടെ പോളാർ രൂപം

പോളാർ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ മറ്റൊരു കൂട്ടം പാരാമീറ്ററുകൾ രൂപപ്പെടുത്തുകയും മൂലബിന്ദുവിൽ നിന്ന് $z = x + iy$ എന്ന ബിന്ദു വരെയുള്ള വെക്ടറിന് അളവും ദിശയും നൽകുന്നു. പോളാർ നിർദ്ദേശാങ്ക സമ്പ്രദായത്തിലുള്ള സ്ഥിര ബിന്ദു O നെ പോൾ എന്നും പോളിൽ നിന്നും ഉത്ഭവിക്കുന്ന തിരശ്ചീന രേഖയെ പ്രാരംഭ രേഖ (പോളാർ അക്ഷം) എന്ന് പറയുന്നു. r എന്നത് പോളിൽ നിന്നും P എന്ന ബിന്ദുവരെയുള്ള ദൂരവും θ എന്നത് OP എന്ന രേഖയെ പ്രാരംഭ രേഖയിൽ നിന്നും എതിർ ഘടികാര ദിശയിൽ അളക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന ചെരിവ് കോൺ ആണ്. എങ്കിൽ r ഉം θ യും P എന്ന പോളാർ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങളുടെ ക്രമജോഡികളായി (r, θ) എഴുതാം. പോളാർ നിർദ്ദേശാങ്ക സമ്പ്രദായത്തിന്റെ മേൽ ചുമത്തുമ്പോൾ ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നതുപോലെ മാറും.



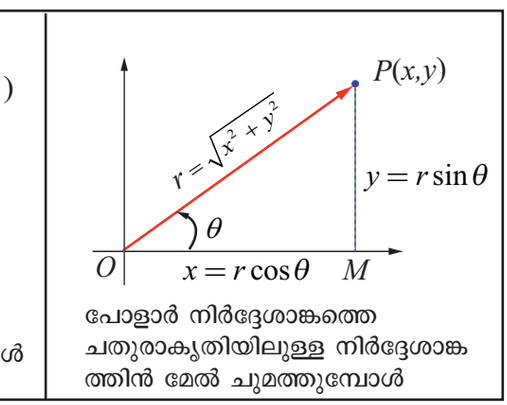
ചതുരാകൃതിയിലുള്ള നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ

ചിത്രം 2.26



പോളാർ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ

ചിത്രം 2.27



പോളാർ നിർദ്ദേശാങ്കത്തെ ചതുരാകൃതിയിലുള്ള നിർദ്ദേശാങ്കത്തിൻ മേൽ ചുമത്തുമ്പോൾ

ചിത്രം 2.28

$$x = r\cos\theta \quad \ldots(1)$$

$$y = r\sin\theta. \quad \ldots(2)$$

ഏത് പൂജ്യമല്ലാത്ത സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യ $z = x + iy$ നെ $z = r\cos\theta + i\, r\sin\theta.$ എന്ന് എഴുതാം

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 75 14-02-2023 18:10:35

നിർവചനം 2.6

പോളാർ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങളായ r ഉം θ യും $P(x, y)$ എന്ന ബിന്ദുവിനെ യോജിപ്പിക്കുന്ന പൂജ്യമല്ലാത്ത ഒരു സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയാണ് $z = x + iy$. എങ്കിൽ സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യ P യുടെ പോളാർ രൂപം അല്ലെങ്കിൽ ത്രികോണമിതി രൂപം

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \text{ ആണ്.}$$

സൗകര്യപ്രദമായി, പോളാർ രൂപത്തിനെ

$$z = x + iy = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) = r\,cis\,\theta. \text{ എന്ന് എഴുതാം}$$

r ന്റെ മൂല്യത്തിനെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നത് സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യ z ന്റെ കേവല വില അല്ലെങ്കിൽ മോഡുലസ് എന്നാണ്. കോൺ θ യെ സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയുടെ ആർഗ്യുമെന്റ് (argument) അല്ലെങ്കിൽ (amplitude) ആംപ്ലിറ്റ്യൂഡ് ആയി കണക്കാക്കുകയും അതിനെ $\theta = \arg(z)$ എന്നും സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

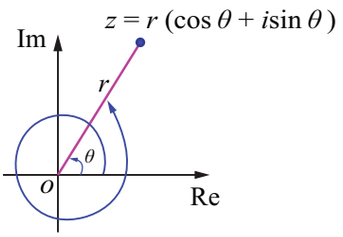
(i) $z = 0$, എങ്കിൽ ആർഗ്യുമെന്റ് θ നിർവചിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ല. അതിൽ നിന്നും പോളാർ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ $z \neq 0$ എന്ന് മനസ്സിലാക്കാം.

(ii) സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യ $z = x + iy$ ന്റെ പോളാർ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ (r, θ) എങ്കിൽ സംയോജനം $\overline{z} = x - iy$ ന്റെ പോളാർ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ $(r, -\theta)$ എന്നാണ്.

(1) ഉം (2) ഉം വർഗ്ഗം കണ്ട് കൂട്ടിയതിന്റെ വർഗ്ഗ മൂലം r $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(2) നെ (1) കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ, $\dfrac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \dfrac{y}{x} \Rightarrow \tan\theta = \dfrac{y}{x}$.

രീതി (i) z നെ ഒരു വ്യാസാർദ്ധ വെക്ടറായി ആവിഷ്കരിക്കുമ്പോൾ പോസിറ്റീവ് അക്ഷത്തിൽ z ൽ ഉണ്ടാകുന്ന കോണിനെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നത് θ റേഡിയസിലുള്ള ഒരു വാസ്തവിക സംഖ്യയായിട്ടാണ് θ എന്ന കോണിന് സാദ്ധ്യമായ അനന്ത മൂല്യങ്ങളുണ്ട്, അവയിൽ നെഗറ്റീവും 2π യുടെ പൂർണ്ണാങ്ക ഗുണിതങ്ങളുമായി വ്യത്യസ്തപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. ഈ മൂല്യങ്ങൾ $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ എന്ന സമവാക്യം ഉപയോഗിച്ച് കണക്കാക്കപ്പെടുന്നു. ഇവിടെ z എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ ചതുർത്ഥാംശം വ്യക്തമാക്കേണ്ടതാണ്. θ യുടെ ഓരോ മൂല്യവും z ന്റെ ആർഗ്യുമെന്റ് എന്ന് വിളിക്കുന്നു. കൂടാതെ എല്ലാ മൂല്യങ്ങളേയും 2π കൊണ്ട് കൂട്ടേണ്ടതാണ്. ഇതിനെ $\arg z$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

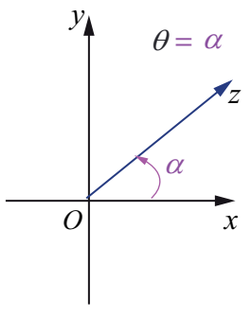
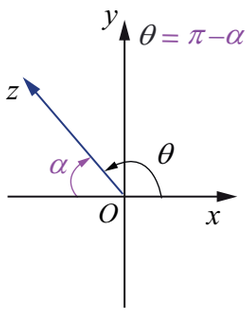
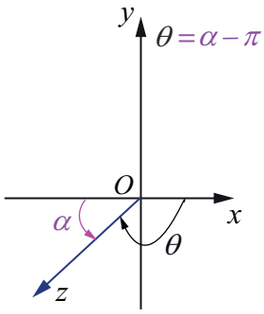
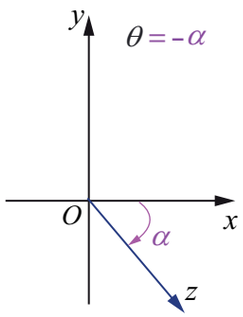


ചിത്രം 2.29

രീതി (ii) ഇവിടെ θ യുടെ മൂല്യം അദ്വിതീയമാണെങ്കിൽ അതിനെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്ന നിബന്ധനയാണ് $-\pi < \theta \leq \pi$. ഈ മൂല്യത്തെ θ യുടെ പ്രധാന്യമൂല്യം അല്ലെങ്കിൽ z ന്റെ പ്രധാന ആർഗ്യുമെന്റ് എന്ന് പറയുന്നു. കൂടാതെ ഇതിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നത് $\text{Arg}\,z$ എന്നാണ്.

ശ്രദ്ധിക്കുക, $-\pi < \text{Arg}(z) \leq \pi$ അല്ലെങ്കിൽ $-\pi < \theta \leq \pi$

സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയുടെ പ്രധാന ആർഗ്യുമെന്റ്

I- ചതുർത്ഥാംശം	II- ചതുർത്ഥാംശം	III- ചതുർത്ഥാംശം	IV- ചതുർത്ഥാംശം
			
$\theta = \alpha$	$\theta = \pi - \alpha$	$\theta = \alpha - \pi$	$\theta = -\alpha$

ചിത്രം 2.30

ചിത്രം 2.31

ചിത്രം 2.32

ചിത്രം 2.33

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 76 14-02-2023 18:10:45

പ്രധാന മൂല്യത്തെ പൊതു മൂല്യത്തിൽ നിന്ന് വേർതിരിയാൻ ഇവിടെ വലിയ അക്ഷരം A ആണ് ഉപയോഗിക്കുന്നത്.

ഇവിടെ, പ്രധാന കോൺ θ കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന്, സാധാരണയായി $\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$ എന്ന് കണക്കുകൂട്ടുകയും ഉചിതമായ രീതിയിൽ α യെ π കൊണ്ട് കൂട്ടുകയോ കുറയ്ക്കുകയോ ചെയ്യാം.

$$\arg z = Arg\ z + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$$

ആർഗ്യുമെന്റിന്റെ ചില സവിശേഷതകളാണ്

(1) $\arg(z_1\ z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$

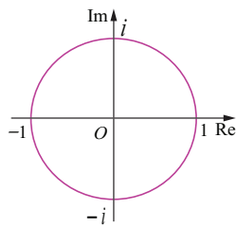
(2) $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$

(3) $\arg(z^n) = n\ \arg\ z$

(4) $\cos\theta + i\sin\theta$ യുടെ മാറിമാറി വരുന്ന രൂപങ്ങൾ $\cos(2k\pi+\theta)+i\sin(2k\pi+\theta),\ k \in \mathbb{Z}$ ആണ്.

ഉദാഹരണമായി, $1, i, -1,\ -i$ യുടെ പ്രധാന ആർഗ്യുമെന്റും താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു :-

z	1	i	-1	$-i$
$Arg(z)$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$-\frac{\pi}{2}$
$\arg z$	$2n\pi$	$2n\pi+\frac{\pi}{2}$	$2n\pi+\pi$	$2n\pi-\frac{\pi}{2}$



ചിത്രം 2.34

വിശദീകരണം

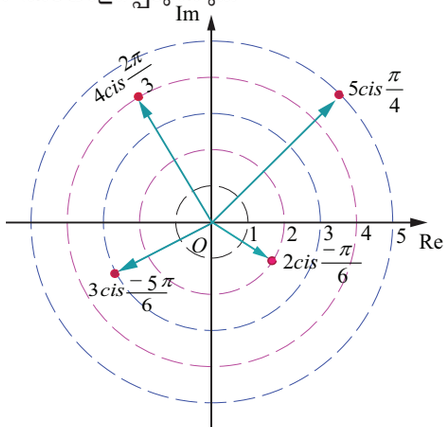
താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകളെ സങ്കീർണ്ണ തലത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തുക

(i) $5\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

(ii) $4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

(iii) $3\left(\cos\frac{-5\pi}{6}+i\sin\frac{-5\pi}{6}\right)$

(iv) $2\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.



ചിത്രം 2.35

2.7.2 സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയുടെ ഓയ്‌ലർ രൂപം

താഴെ കാണുന്ന സർവ്വ സമവാക്യമാണ് ഓയ്‌ലർ സൂത്രവാക്യം

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

ഓയ്‌ലർ സൂത്രവാക്യം നൽകുന്ന പോളാർ രൂപം $z = re^{i\theta}$ ആണ്.

കുറിപ്പ്

ഗുണനം ചെയ്യുമ്പോൾ അല്ലെങ്കിൽ സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയുടെ കൃതികൾ അല്ലെങ്കിൽ മൂലങ്ങൾ കാണുമ്പോൾ ഓയ്‌ലർ രൂപം നമുക്ക് ഉപയോഗിക്കാം.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 77 14-02-2023 18:10:58

ഉദാഹരണം 2.22

താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള സങ്കീർണ്ണ സസംഖ്യകളുടെ മോഡുലസും പ്രധാന ആർഗ്യുമെന്റും കാണുക.

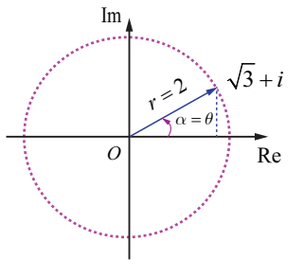
(i) $\sqrt{3}+i$ (ii) $-\sqrt{3}+i$ (iii) $-\sqrt{3}-i$ (iv) $\sqrt{3}-i$

നിർദ്ധാരണം

(i) $\sqrt{3}+i$

$$\text{മോഡുലസ്} = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2} = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$



ചിത്രം 2.36

$\sqrt{3}+i$ എന്ന സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യ, I ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നതിനാൽ

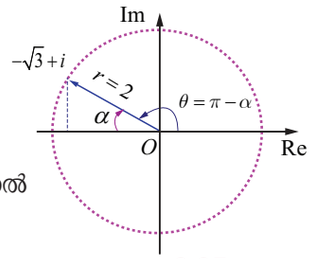
പ്രധാന മൂല്യം $\theta = \alpha = \frac{\pi}{6}$.

$\sqrt{3}+i$ ന്റെ മോഡുലസും പ്രധാന ആർഗ്യുമെന്റും യഥാക്രമം 2 ഉം $\frac{\pi}{6}$ ഉം ആണ്.

(ii) $-\sqrt{3}+i$

മോഡുലസ് = 2 ഉം

$$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$



ചിത്രം 2.37

$-\sqrt{3}+i$ എന്ന സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യ II ചതുർത്ഥാംശത്തില സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നതിനാൽ

പ്രധാനമൂല്യം

$$\theta = \pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

$-\sqrt{3}+i$ ന്റെ മോഡുലസും പ്രധാന ആർഗ്യുമെന്റും യഥാക്രമം 2 ഉം $\frac{5\pi}{6}$ ഉം ആണ്.

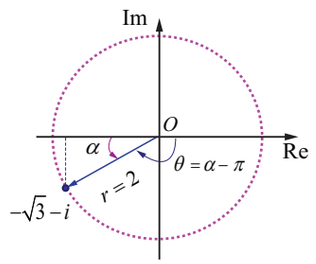
(iii) $-\sqrt{3}-i$

$r = 2$ ഉം $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

$-\sqrt{3}-i$ എന്ന സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യ III ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നതിനാൽ,

പ്രധാനമൂല്യം,

$$\theta = \alpha - \pi = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5\pi}{6}.$$



ചിത്രം 2.38

$-\sqrt{3}-i$ ന്റെ മോഡുലസും പ്രധാന ആർഗ്യുമെന്റും യഥാക്രമം 2 ഉം $-\frac{5\pi}{6}$ ഉം ആണ്.

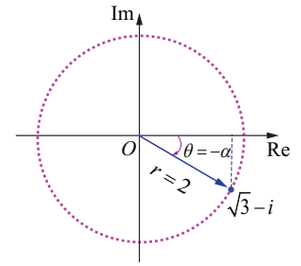
(iv) $\sqrt{3}-i$

$r = 2$ ഉം $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യ IV ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നതിനാൽ,

പ്രധാന മൂല്യം,

$$\theta = -\alpha = -\frac{\pi}{6}$$



ചിത്രം 2.39

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 78 14-02-2023 18:11:07

$\sqrt{3}-i$ ന്റെ മോഡുലസും പ്രധാന ആർഗ്യുമെന്റും

യഥാക്രമം 2 ഉം $-\frac{\pi}{6}$ ആണ്.

മേൽപറഞ്ഞ നാല് രീതികളികലും മോഡുലസ് തുല്യമാണ്. പക്ഷേ ആർഗ്യുമെന്റുകൾ സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യ ഏത് ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ നിലകൊള്ളുന്നു എന്നതിനെ ആശ്രയിച്ചാണ്..

ഉദാഹരണം 2.23

സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യ (i) $-1-i$ (ii) $1+i\sqrt{3}$ യെ പോളാർ രൂപത്തിൽ പ്രതിനിധീകരിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

(i) $-1-i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ എന്നിരിക്കട്ടെ

ഇവിടെ $r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| = \tan^{-1}1 = \frac{\pi}{4}.$$

സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യ $-1-i$ III ചതുർഭാഗത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നതിനാൽ,

പ്രധാന മൂല്യം $\theta = \alpha - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}$

$$-1-i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} - i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

$$-1-i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right)-i\sin\left(\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right)\right),\ k\in\mathbb{Z}.$$

കുറിപ്പ്

k യുടെ വിവിധ മൂല്യങ്ങളെ ആശ്രയിച്ച് നമുക്ക് വിവിധ ഇതര പോളാർ രൂപങ്ങൾ ലഭിക്കുന്നു.

(ii) $1+i\sqrt{3}$

$$r = |z| = \sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{3}$$

അതിനാൽ $\arg(z) = \frac{\pi}{3}$.

$1+i\sqrt{3}$ യുടെ പോളാർ രൂപം

$$1+i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)\right),\ k\in\mathbb{Z}.$$

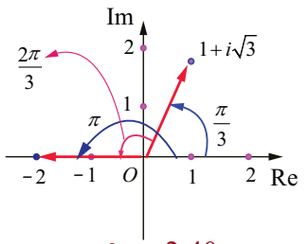
Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 79 14-02-2023 18:11:19

ഉദാഹരണം 2.24

പ്രധാന ആർഗ്യുമെന്റ് $\operatorname{Arg} z$, ഇവിടെ $z=\dfrac{-2}{1+i\sqrt{3}}$.

നിർദ്ധാരണം

$$\begin{aligned}\arg z &= \arg\frac{-2}{1+i\sqrt{3}}\\ &= \arg(-2)-\arg\left(1+i\sqrt{3}\right) \quad \left(\because \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg z_1-\arg z_2\right)\\ &=\left(\pi-\tan^{-1}\left(\frac{0}{2}\right)\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right)\\ &= \pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}\end{aligned}$$



ചിത്രം 2.40

$\arg z$ ന്റെ മൂല്യങ്ങളിൽ ഒന്നാണ് $\dfrac{2\pi}{3}$.

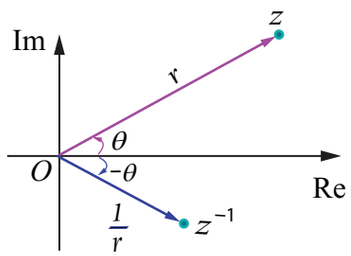
$\dfrac{2\pi}{3}$, $-\pi$ നും π നും ഇടയിലാണ്. പ്രധാന ആർഗ്യുമെന്റ് $\operatorname{Arg} z$ $\dfrac{2\pi}{3}$ ആണ്.

പോളാർ രൂപത്തിന്റെ സവിശേഷതകൾ

സവിശേഷത 1 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$, എങ്കിൽ $z^{-1}=\dfrac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)$.

തെളിവ്

$$\begin{aligned}z^{-1}&=\frac{1}{z}=\frac{1}{r(\cos\theta+i\sin\theta)}\\ &=\frac{(\cos\theta-i\sin\theta)}{r(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta-i\sin\theta)}\\ &=\frac{(\cos\theta-i\sin\theta)}{r(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}\\ z^{-1}&=\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta).\end{aligned}$$



ചിത്രം 2.41

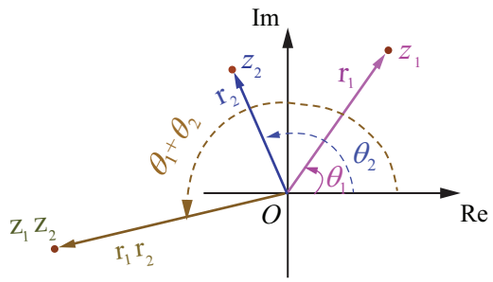
സവിശേഷത 2

$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$ ഉം $z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$,
എങ്കിൽ $z_1z_2=r_1r_2\left(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\right)$.

തെളിവ്

$$\begin{aligned}z_1&=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1) \text{ and}\\ z_2&=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ z_1z_2=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$



ചിത്രം 2.42

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 80 14-02-2023 18:11:37

$$= r_1 r_2 \left((\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2) + i(\sin\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_2 \cos\theta_1) \right)$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) \right).$$

കുറിപ്പ്

$$\arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2 = \arg(z_1) + \arg(z_2).$$

സവിശേഷത 3

$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ ഉം $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, എങ്കിൽ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right]$.

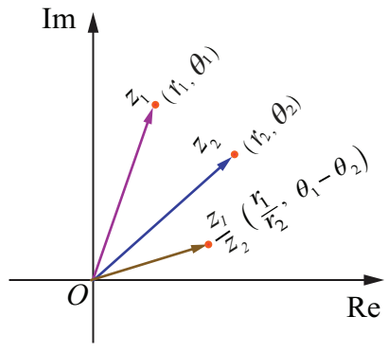
തെളിവ് : z_1 ന്റെയും z_2 ന്റെയും പോളാർ രൂപം ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \frac{(\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2) + i(\sin\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_2 \cos\theta_1)}{\cos^2\theta + \sin^2\theta}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right).$$



ചിത്രം 2.43

കുറിപ്പ്

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \theta_1 - \theta_2 = \arg(z_1) - \arg(z_2).$$

ഉദാഹരണം 2.25

$\frac{3}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \cdot 6\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$ ന്റെ ചതുരാകൃതിയിലെ ഗുണനഫലം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$$\frac{3}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \cdot 6\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)(6)\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6}\right)\right)$$

$$= 9\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$$

$$= 9\left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)\right)$$

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 81 14-02-2023 18:11:50

$$= 9\left(-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$= 9\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)=-\frac{9\sqrt{3}}{2}-\frac{9i}{2}$$, ഇത് ചതുര രൂപത്തിലാണ്.

ഉദാഹരണം 2.26

ഭിന്നകം $\dfrac{2\left(\cos\frac{9\pi}{4}+i\sin\frac{9\pi}{4}\right)}{4\left(\cos\left(\frac{-3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{-3\pi}{2}\right)\right)}$ നെ ചതുര രൂപത്തിൽ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$$\frac{2\left(\cos\frac{9\pi}{4}+i\sin\frac{9\pi}{4}\right)}{4\left(\cos\left(\frac{-3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{-3\pi}{2}\right)\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{9\pi}{4}-\left(\frac{-3\pi}{2}\right)\right)+i\sin\left(\frac{9\pi}{4}-\left(\frac{-3\pi}{2}\right)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{9\pi}{4}+\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{9\pi}{4}+\frac{3\pi}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{15\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{15\pi}{4}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\left(4\pi-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(4\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$\dfrac{2\left(\cos\frac{9\pi}{4}+i\sin\frac{9\pi}{4}\right)}{4\left(\cos\left(\frac{-3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{-3\pi}{2}\right)\right)} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}-i\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}-i\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ ഇത് ചതുര രൂപത്തിലാണ്.

ഉദാഹരണം 2.27

$z=x+iy$ ഉം $\arg\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)=\dfrac{\pi}{2}$, എങ്കിൽ $x^2+y^2=1$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

ഇവിടെ, $\dfrac{z-1}{z+1} = \dfrac{x+iy-1}{x+iy+1}=\dfrac{(x-1)+iy}{(x+1)+iy} = \dfrac{\left[(x-1)+iy\right]\left[(x+1)-iy\right]}{\left[(x+1)+iy\right]\left[(x+1)-iy\right]}$

$$\Rightarrow \quad \frac{z-1}{z+1} = \frac{(x^2+y^2-1)+i(2y)}{(x+1)^2+y^2}.$$

$$\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{2y}{x^2+y^2-1}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2y}{x^2+y^2-1} = \tan\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow x^2+y^2-1=0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2 = 1.$$

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 82 14-02-2023 18:12:05

അഭ്യാസം 2.7

1. താഴെ കാണുന്ന സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകളെ പോളാർ രൂപമായി എഴുതുക

(i) $2+i2\sqrt{3}$ (ii) $3-i\sqrt{3}$ (iii) $-2-i2$ (iv) $\dfrac{i-1}{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}}$.

2. സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകളുടെ ചതുരാകൃതിയിലുള്ള രൂപം കണ്ടെത്തുക

(i) $\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ (ii) $\dfrac{\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}}{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$.

3. $(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)(x_3+iy_3)\cdots(x_n+iy_n)=a+ib$, എങ്കിൽ

(i) $\left(x_1^{\,2}+y_1^{\,2}\right)\left(x_2^{\,2}+y_2^{\,2}\right)\left(x_3^{\,2}+y_3^{\,2}\right)\cdots\left(x_n^{\,2}+y_n^{\,2}\right)=a^2+b^2$

(ii) $\sum_{r=1}^{n}\tan^{-1}\left(\frac{y_r}{x_r}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

4. $\dfrac{1+z}{1-z}=\cos 2\theta+i\sin 2\theta$, എങ്കിൽ $z=i\tan\theta$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

5. $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0$, എങ്കിൽ

(i) $\cos 3\alpha+\cos 3\beta+\cos 3\gamma=3\cos(\alpha+\beta+\gamma)$

(ii) $\sin 3\alpha+\sin 3\beta+\sin 3\gamma=3\sin(\alpha+\beta+\gamma)$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

6. $z=x+iy$ ഉം $\arg\left(\frac{z-i}{z+2}\right)=\frac{\pi}{4}$ ഉം, എങ്കിൽ $x^2+y^2+3x-3y+2=0$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

2.8 ഡി മൂവീസ് സിദ്ധാന്തവും അതിന്റെ പ്രായോഗികതകളും



ഡി മൂവീസ്
1667–1754

ത്രികോണമിതിയിൽ സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ച ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞരിൽ ഒരാളായിരുന്നു അബ്രഹാം ഡി മൂവീസ് (1667–1754) .

അദ്ദേഹത്തിന്റെ പേരിൽ അറിയപ്പെടുന്ന $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=(\cos n\theta+i\sin n\theta)$ എന്ന സൂത്രവാക്യം ജ്യാമിതിയുടെ മണ്ഡലത്തിൽ നിന്നും ത്രികോണമിതിയെ പുറത്തെത്തിക്കുന്നതിൽ പ്രധാന പങ്കുവഹിക്കുന്നു.

2.8.1 ഡി മൂവിസ് സിദ്ധാന്തം

ഡി മൂവിസ് സിദ്ധാന്തം

ഏത് സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയായ $\cos\theta+i\sin\theta$ ഉം ഏതെങ്കിലും പൂർണ്ണ സംഖ്യ n ഉം നൽകിയാൽ,

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

ഉപസിദ്ധാന്തം

(1) $(\cos\theta-i\sin\theta)^n=\cos n\theta-i\sin n\theta$ (2) $(\cos\theta+i\sin\theta)^{-n}=\cos n\theta-i\sin n\theta$

(3) $(\cos\theta-i\sin\theta)^{-n}=\cos n\theta+i\sin n\theta$ (4) $\sin\theta+i\cos\theta=i(\cos\theta-i\sin\theta)$.

സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകൾ ലളിതമാക്കുന്നതിനും സമവാക്യങ്ങളുടെ പിഹാരം കണ്ടെത്തുന്നതിനും ഇപ്പോൾ നമുക്ക് ഡി മൂവിസ് സിദ്ധാന്തം പ്രയോഗിക്കാം.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 83 14-02-2023 18:12:21

ഉദാഹരണം 2.28

$z=(\cos\theta+i\sin\theta)$ എങ്കിൽ, $z^n+\frac{1}{z^n}=2\cos n\theta$ and $z^n-\frac{1}{z^n}=2i\sin n\theta$ ഉം എന്ന് കാണിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$z=(\cos\theta+i\sin\theta)$ എന്ന് എടുത്താൽ.

ഡി മൂവീസ് സിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച് ,

$$z^n = (\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

$$\frac{1}{z^n} = z^{-n}=\cos n\theta-i\sin n\theta$$

$$z^n+\frac{1}{z^n} = (\cos n\theta+i\sin n\theta)+(\cos n\theta-i\sin n\theta)$$

$$z^n+\frac{1}{z^n} = 2\cos n\theta\,.$$

ഇതുപോലെ,

$$z^n-\frac{1}{z^n} = (\cos n\theta+i\sin n\theta)-(\cos n\theta-i\sin n\theta)$$

$$z^n-\frac{1}{z^n} = 2i\sin n\theta\,.$$

ഉദാഹരണം 2.29

$\left(\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6}\right)^{18}$ നെ ലഘൂകരിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$$\text{ഇവിടെ, } \sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6} = i\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

ഇരുഭാഗത്തും കൃതി 18 ഉയർത്തുമ്പോൾ,

$$\left(\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6}\right)^{18} = (i)^{18}\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{18}$$

$$= (-1)\left(\cos\frac{18\pi}{6}-i\sin\frac{18\pi}{6}\right)$$

$$= -(\cos 3\pi-i\sin 3\pi)=1+0i\,.$$

$$\therefore\quad \left(\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6}\right)^{18} = 1\,.$$

ഉദാഹരണം 2.30

ലഘൂകരിക്കുക: $\left(\frac{1+\cos 2\theta+i\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta-i\sin 2\theta}\right)^{30}$.

നിർദ്ധാരണം

$z = \cos 2\theta+i\sin 2\theta$ എന്ന് എടുത്താൽ.

$|z| = |z|^2=z\bar{z}=1$, നമുക്ക് $\bar{z}=\frac{1}{z}=\cos 2\theta-i\sin 2\theta$ എന്ന് കിട്ടും.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 84 14-02-2023 18:12:38

$$\frac{1+\cos 2\theta + i\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta - i\sin 2\theta} = \frac{1+z}{1+\frac{1}{z}} = \frac{(1+z)z}{z+1} = z\,.$$

$$\left(\frac{1+\cos 2\theta + i\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta - i\sin 2\theta}\right)^{30} = z^{30} = \left(\cos 2\theta + i\sin 2\theta\right)^{30}$$

$$= \cos 60\theta + i\sin 60\theta\,.$$

ഉദാഹരണം 2.31

ലഘൂകരിക്കുക (i) $(1+i)^{18}$ (ii) $(-\sqrt{3}+3i)^{31}$.

നിർദ്ധാരണം

(i) $(1+i)^{18}$

$1+i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ എന്ന് എടുത്താൽ

നമുക്ക് $r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$; $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$ കിട്ടും,

$\theta = \alpha = \frac{\pi}{4}$ ($\because$ $1+i$ I ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു)

$$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

ഇരുഭാഗത്തും കൃതി 18 ഉയർത്തുമ്പോൾ,

$$(1+i)^{18} = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{18} = \sqrt{2}^{18}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{18}.$$

ഡി മൂവിസ് സിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച്,

$$(1+i)^{18} = 2^9\left(\cos\frac{18\pi}{4} + i\sin\frac{18\pi}{4}\right)$$

$$= 2^9\left(\cos\left(4\pi+\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(4\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2^9\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$(1+i)^{18} = 2^9(i) = 512i\,.$$

(ii) $(-\sqrt{3}+3i)^{31}$

$-\sqrt{3}+3i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ എന്ന് എടുത്താൽ

നമുക്ക് $r = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$,

$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{3}{-\sqrt{3}}\right| = \tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ കിട്ടും,

$\theta = \pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ ($\because$ $-\sqrt{3}+3i$ II ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു)

$$-\sqrt{3}+3i = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 85 14-02-2023 18:12:55

ഇരുവശത്തും കൃതി 31 ഉയർത്തുമ്പോൾ,

$$\begin{aligned}(-\sqrt{3}+3i)^{31} &= \left(2\sqrt{3}\right)^{31}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^{31}\\ &= \left(2\sqrt{3}\right)^{31}\left(\cos\left(20\pi+\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(20\pi+\frac{2\pi}{3}\right)\right)\\ &= \left(2\sqrt{3}\right)^{31}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\\ &= \left(2\sqrt{3}\right)^{31}\left(\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right)\\ &= \left(2\sqrt{3}\right)^{31}\left(-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\left(2\sqrt{3}\right)^{31}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).\end{aligned}$$

2.8.2 സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയുടെ n^{th} ാം മൂലങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുന്നത്

സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകളുടെ മൂലങ്ങൾ നേടുന്നതിന് ഡി മൂവിസിന്റെ സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിക്കാം. n ഒരു പോസിറ്റീവ് പൂർണ്ണ സംഖ്യയായും ω യെ ഒരു സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയായും കരുതുമ്പോൾ z ന്റെ n ാം മൂലങ്ങൾ $z^{1/n}$ നെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു

ഇവിടെ $\omega^n = z$ ....(1)

$\omega = \rho\left(\cos\phi + i\sin\phi\right)$ ഉം

$z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) = r\left(\cos\left(\theta+2k\pi\right)+i\sin\left(\theta+2k\pi\right)\right),\ k\in\mathbb{Z}$ എന്നിരിക്കട്ടെ

w എന്നത് z ന്റെ n ാം മൂലം എങ്കിൽ,

$$\omega^n = z$$

$$\Rightarrow\ \rho^n\left(\cos\phi+i\sin\phi\right)^n = r\left(\cos\left(\theta+2k\pi\right)+i\sin\left(\theta+2k\pi\right)\right),\ k\in\mathbb{Z}$$

ഡി മൂവിസ് സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച്,

$$\rho^n\left(\cos n\phi+i\sin n\phi\right) = r\left(\cos\left(\theta+2k\pi\right)+i\sin\left(\theta+2k\pi\right)\right),\ k\in\mathbb{Z}$$

മോഡുലളുകളും ആർഗ്യുമെന്റുകളും താരതമ്യം ചെയ്യുമ്പോൾ

$$\rho^n = r \text{ ഉം } n\phi = \theta+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\rho = r^{1/n} \text{ ഉം } \phi = \frac{\theta+2k\pi}{n}, k\in\mathbb{Z}.$$

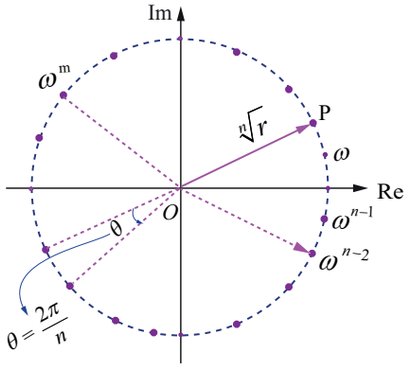
ω യുടെ മൂല്യങ്ങൾ $r^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right),\ k\in\mathbb{Z}.$

എന്നാലും k യുടെ അനന്തമൂല്യങ്ങൾ കാരണം, ω യുടെ വ്യത്യസ്ത മൂല്യങ്ങൾ കിട്ടുന്നതിന് നമുക്ക് $k = 0,1,2,3,\ldots,n-1$ എന്ന് നല്കാം. $k = n, n+1, n+2,\ldots$ എന്നാകുമ്പോൾ നമുക്ക് അതേ മൂലങ്ങൾ ക്രമമായ ഇടവേളകളിൽ (ചക്രീയമായി) കിട്ടുന്നു. അതുകൊണ്ട് സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യ $z = r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$ യുടെ n ാം മൂലം

$$z^{1/n} = r^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right),\ k=0,1,2,3,\ldots,n-1.$$

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 86 14-02-2023 18:13:14

$\omega = \sqrt[n]{r}e^{\frac{i(\theta+2k\pi)}{n}}$, എന്ന് നിശ്ചയിച്ചാൽ സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയുടെ n ാം മൂലങ്ങളുടെ സൂത്രവാക്യത്തിന് ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതു പോലെ ജ്യാമിതീയ ആവിഷ്കാരമുണ്ട് ശ്രദ്ധിക്കുക, $|\omega| = \sqrt[n]{r}$ ന്റെ എല്ലാ n മൂലകങ്ങൾക്കും തുല്യമോഡുലസ് $\sqrt[n]{r}$ ആയതുകൊണ്ട് ഇവ കേന്ദ്രം മൂലബിന്ദുവും വ്യാസാർദ്ധം $\sqrt[n]{r}$ ഉം ഉള്ള വൃത്തത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു. കൂടാതെ n മൂലങ്ങൾ വൃത്തത്തിൽ തുല്യ ഇടവേളകളിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു. കാരണം അടുത്തടുത്തുള്ള n ാം മൂലങ്ങൾ അവയുടെ ആർഗ്യുമെന്റിൽ $\frac{2\pi}{n}$. ൽ വ്യത്യസ്തപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു.



സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയുടെ n ാം മൂല്യം

ചിത്രം 2.44

നിരൂപണം

(1) ഡി മൂവിസ് സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ പൊതു രൂപം

x ഒരു പരിമേയമെങ്കിൽ $\cos x\theta + i\sin x\theta$ ന്റെ മൂല്യങ്ങളിലൊന്നാണ് $(\cos\theta + i\sin\theta)^x$.

(2) യൂണിറ്റ് വൃത്തത്തിന്റെ പോളാർ രൂപം

$$z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \text{ എന്ന് എടുത്താൽ}$$
$$|z|^2 = |\cos\theta + i\sin\theta|^2$$
$$\Rightarrow |x+iy|^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$
$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

$|z| = 1$ നെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നത് കേന്ദ്രം മൂലബിന്ദുവായ ഒരു യൂണിറ്റ് വൃത്തം (ആരം ഒന്ന്) ആണ്.

2.8.3 ഒന്നിന്റെ n^{th} ാം മൂലം

n എന്നത് പോസിറ്റീവ് പൂർണ്ണാങ്കമെങ്കിൽ $z^n = 1$, എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണങ്ങളാണ് ഒന്നിന്റെ n ാം മൂലങ്ങൾ $z^n = 1$ എന്ന സമവാക്യം പോളാർ രൂപത്തിൽ എഴുതുമ്പോൾ

$$z^n = \cos(0 + 2k\pi) + i\sin(0 + 2k\pi) = e^{i2k\pi}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

ഡി മൂവീസ് സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച്, ഒന്നിന്റെ n ാം മൂലം താഴെ തന്നിട്ടുള്ള സമവാക്യം ഉപയോഗിച്ച് നമുക്ക് കാണാം:

$$z = \left(\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right) = e^{\frac{i2k\pi}{n}}, k = 0,1,2,3,\ldots,n-1 . \quad \ldots (1)$$

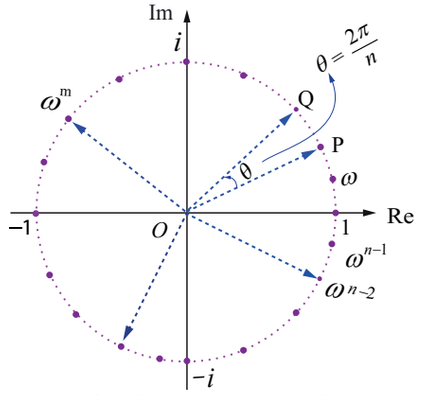
$z^n = 1$. എങ്കിൽ മാത്രം തന്നിട്ടുള്ള പോസിറ്റീവ് പൂർണ്ണാങ്കം n ൽ ഒരു സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയായ z നെ ഒന്നിന്റെ n ാം മൂലം എന്ന് പറയുന്നു.

സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയെ ω എന്ന് സൂചിപ്പിച്ചാൽ

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}} = \cos\frac{2\pi i}{n} + i\sin\frac{2\pi i}{n}$$
$$\Rightarrow \omega^n = \left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^n = e^{2\pi i} = 1.$$

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 87 14-02-2023 18:13:28

അതുകൊണ്ട്, ω ഒന്നിന്റെ n ാം മൂലം ആണ്. സമവാക്യം (1) ൽ നിന്നും സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകൾ $1, \omega, \omega^2, \cdots, \omega^{n-1}$ ആണ് ഒന്നിന്റെ n ാം മൂലങ്ങൾ. ചിത്രം 2.45 ൽ കാണിച്ചിട്ടുള്ളതു പോലെ സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകൾ $1, \omega, \omega^2, \cdots, \omega^{n-1}$ സങ്കീർണ്ണ തലത്തിലെ യൂണിറ്റ് വൃത്തത്തിനകത്ത് വരയ്ക്കപ്പെടുന്ന സമബഹുഭുജത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങളാണ്. ശ്രദ്ധിക്കുക, എല്ലാ n ാം മൂലങ്ങളുടെയും മോഡുലസ് 1 ആയതിനാൽ ബിന്ദുക്കൾ കേന്ദ്രം മൂലബിന്ദുവും വ്യാസാർദ്ധം 1 ഉം ഉള്ള വൃത്തത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു. കാരണം അടുത്തടുത്തുള്ള n ാം മൂലങ്ങൾ അവയുടെ ആർഗ്യുമെന്റിൽ $\frac{2\pi}{n}$ ൽ വ്യത്യസ്തപെട്ടിരിക്കുന്നു .



ഒന്നിന്റെ n ാം മൂല്യങ്ങൾ

ചിത്രം 2.45

ഒന്നിന്റെ n ാം മൂലങ്ങളായ $1, \omega, \omega^2, \cdots, \omega^{n-1}$ എന്നത് ഗുണന ക്രമാനുപാത അനുക്രമത്തിൽ പൊതു അനുപാതം ω എന്നുമിരിക്കട്ടെ .

$$\therefore\ 1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{n-1}=\frac{1-\omega^n}{1-\omega}=0 \qquad \because\ \omega^n=1,\ \omega\neq 1.$$

ഒന്നിന്റെ n ാം മൂലങ്ങളുടെ കൂട്ടുതുക
$1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{n-1}=0$ ആണ്.

ഒന്നിന്റെ n n ാം മൂലങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം

$$1\omega\omega^2\cdots\omega^{n-1} = \omega^{0+1+2+3+\cdots+(n-1)} = \omega^{\frac{(n-1)n}{2}}$$

$$= \left(\omega^n\right)^{\frac{(n-1)}{2}} = \left(e^{i2\pi}\right)^{\frac{(n-1)}{2}} = \left(e^{i\pi}\right)^{n-1} = (-1)^{n-1}$$

ഒന്നിന്റെ എല്ലാ n ാം മൂലങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം
$1\omega\omega^2\cdots\omega^{n-1}=(-1)^{n-1}.$

$|\omega|=1$, ഇവിടെ $\omega\bar{\omega}=|\omega|^2=1$; അതിനാൽ $\bar{\omega}=\omega^{-1}\Rightarrow(\bar{\omega})^k=\omega^{-k},\ 0\le k\le n-1$

$$\omega^{n-k}=\omega^n\omega^{-k}=\omega^{-k}=(\bar{\omega})^k,\ 0\le k\le n-1$$

അതുകൊണ്ട് , $\omega^{n-k}=\omega^{-k}=\left(\bar{\omega}\right)^k,\ 0\le k\le n-1.$

കുറിപ്പ്

(1) ഒന്നിന്റെ n n ാം മൂലങ്ങൾ എല്ലാം തന്നെ ഗുണന ക്രമാനുപാത അനുക്രമത്തിലായിരിക്കും

(2) ഒന്നിന്റെ n n ാം മൂലങ്ങളുടെ കൂട്ടുതുക എപ്പോഴും പൂജ്യമായിരിക്കും.

(3) ഒന്നിന്റെ n n ാം മൂലങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം $(-1)^{n-1}$ നു തുല്യമാണ്.

(4) ഒന്നിന്റെ എല്ലാ n n ാം മൂലങ്ങളും കേന്ദ്രം മൂലബിന്ദുവും വ്യാസാർദ്ധം 1 ഉം ആയ വൃത്തത്തിന്റെ പരിധിയിൽ നില കൊള്ളുന്നു. കൂടാതെ ഈ മൂലങ്ങൾ വൃത്തത്തെ n സമഭാഗങ്ങളായി വിഭജിക്കുകയും അത് n വശങ്ങളുള്ള ബഹുഭുജമായും രൂപം കൊള്ളുന്നു.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 88 14-02-2023 18:13:40

ഉദാഹരണം 2.32

ഒന്നിന്റെ ഘനമൂലങ്ങളെ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

നമുക്ക് കാണേണ്ടത് $1^{\frac{1}{3}}$, $z=1^{\frac{1}{3}}$ എന്ന് എടുക്കുമ്പോൾ $z^3=1$.

പോളാർ രൂപത്തിൽ $z^3=1$ നെ ഇങ്ങനെ എഴുതാം

$$z^3=\cos(0+2k\pi)+i\sin(0+2k\pi)=e^{i2k\pi},\ k=0,\ 1,\ 2,\cdots.$$

$$z=\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right)=e^{i\frac{2k\pi}{3}},\ k=0,\ 1,\ 2\ .$$

$k=0,1,2$, എന്ന് എടുക്കുമ്പോൾ,

$$k=0,\quad z=\cos 0+i\sin 0=1\ .$$

$$k=1,\quad z=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$$

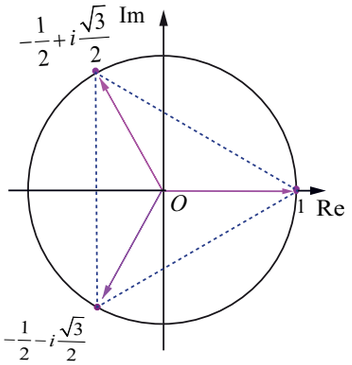
$$=-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\ .$$

$$k=2,\quad z=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=-\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

ഒന്നിന്റെ ഘനമൂലങ്ങൾ

$$1,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\ \Rightarrow\ 1,\omega,\text{ ഉം }\ \omega^2,\ \text{ ഇവിടെ }\ \omega=e^{i\frac{2\pi}{3}}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}.$$



ഒന്നിന്റെ ഘനമൂലങ്ങൾ

ചിത്രം 2.46

ഉദാഹരണം 2.33

ഒന്നിന്റെ നാലാം മൂലങ്ങളെ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

നമുക്ക് കാണേണ്ടത് $1^{\frac{1}{4}}$, $z=1^{\frac{1}{4}}$ എന്ന് എടുക്കുമ്പോൾ $z^4=1$.

പോളാർ രൂപത്തിൽ $z^4=1$ നെ ഇങ്ങനെ എഴുതാം

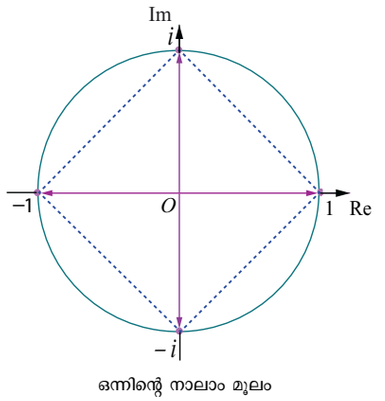
$$z^4=\cos\left(0+2k\pi\right)+i\sin\left(0+2k\pi\right)=e^{i2k\pi},k=0,\ 1,\ 2,\ldots.$$

$$z=\cos\left(\frac{2k\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{4}\right)=e^{i\frac{2k\pi}{4}},\ k=0,1,2,3.$$

$k=0,1,2,3$, എന്ന് എടുക്കുമ്പോൾ,

$$k=0,\qquad z=\cos 0+i\sin 0=1\ .$$

$$k=1,\qquad z=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=i\ .$$



ഒന്നിന്റെ നാലാം മൂലം

ചിത്രം 2.47

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 89 14-02-2023 18:13:58

$k=2,\qquad z=\cos\pi+i\sin\pi=-1.$

$k=3,\qquad z=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}=-i.$

ഒന്നിന്റെ നാലാം മൂലങ്ങൾ $1, i, -1, -i \Rightarrow 1, \omega, \omega^2$ ഉം ω^3 ഇവിടെ $\omega = e^{i\frac{2\pi}{4}} = i$.

കുറിപ്പ്

(i) ഈ അദ്ധ്യായത്തിൽ അക്ഷരം ω യെ ഒന്നിന്റെ n ാം മൂലമായിട്ടാണ് ഉപയോഗിക്കുന്നത്. അതുകൊണ്ട് ω യുടെ മൂല്യം n നെ ആശ്രയിച്ച് ചുവടെയുള്ള പട്ടികയിൽ കാണിച്ചിട്ടുണ്ട്.

n ന്റെ മൂല്യം	2	3	4	5	⋯	k
ω യുടെ മൂല്യം	$e^{i\frac{2\pi}{2}}$	$e^{i\frac{2\pi}{3}}$	$e^{i\frac{2\pi}{4}}$	$e^{i\frac{2\pi}{5}}$	⋯	$e^{i\frac{2\pi}{k}}$

(ii) സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യ $z\,e^{i\theta}$ എന്നത് z നെ θ റേഡിയൻസിൽ മൂലബിന്ദുവിൽ നിന്ന് എതിർ ഘടികാര ദിശയിൽ ചുറ്റുമ്പോൾ കിട്ടുന്നതാണ്.

ഉദാഹരണം 2.34

സമവാക്യം നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക $z^3+8i=0$, $z\in\mathbb{C}$.

നിർദ്ധാരണം

$z^3+8i=0$, എന്ന് എടുത്താൽ

$$z^3 = -8i$$

$$= 8(-i) = 8\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right), k\in\mathbb{Z}.$$

$$z = \sqrt[3]{8}\left(\cos\left(\frac{-\pi+4k\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi+4k\pi}{6}\right)\right),\ k=0,1,2.$$

$k=0,1,2$, എന്ന് എടുക്കുമ്പോൾ,

$k=0,\qquad z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}-i$

$k=1,\qquad z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=2=2(0+i)=0+2i=2i.$

$k=2,\qquad z = 2\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)=2\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$$= 2\left(-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=-\sqrt{3}-i.$$

z ന്റെ മൂലങ്ങൾ $\sqrt{3}-i,\ 2i$, ഉം $-\sqrt{3}-i$.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 90 14-02-2023 18:14:16

ഉദാഹരണം 2.35

$\sqrt{3}+i$ യുടെ എല്ലാ ഘനമൂലങ്ങളെ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

നമുക്ക് കാണേണ്ടത് $\left(\sqrt{3}+i\right)^{\frac{1}{3}}$, $z=\left(\sqrt{3}+i\right)^{\frac{1}{3}}$ എന്നിരിക്കട്ടെ, എങ്കിൽ $z^3 = \sqrt{3}+i = r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$.

എങ്കിൽ, $r = \sqrt{3+1}=2$, ഉം $\alpha=\theta=\frac{\pi}{6}$ ($\because \sqrt{3}+i$ I ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു)

$$\therefore \quad z^3 = \sqrt{3}+i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \quad z = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi+12k\pi}{18}\right)+i\sin\left(\frac{\pi+12k\pi}{18}\right)\right),\ k=0,1,2.$$

$k=0,1,2$ എന്ന് എടുക്കുമ്പോൾ,

$k=0$, $\quad z = 2^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\pi}{18}+i\sin\frac{\pi}{18}\right)$;

$k=1$, $\quad z = 2^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{13\pi}{18}+i\sin\frac{13\pi}{18}\right)$;

$k=2$, $\quad z = 2^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{25\pi}{18}+i\sin\frac{25\pi}{18}\right)=2^{\frac{1}{3}}\left(-\cos\frac{7\pi}{18}-i\sin\frac{7\pi}{18}\right)$.

ഉദാഹരണം 2.36

z_1, z_2 ഉം z_3 എന്നത് $|z|=2$ എന്ന വൃത്തത്തിന്റെ ഉള്ളിൽ വരയ്ക്കാവുന്ന സമഭുജ ത്രികോണത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങളെന്നിരിക്കട്ടെ, $z_1=1+i\sqrt{3}$, എങ്കിൽ z_2 ഉം z_3 ഉം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$|z|=2$ എന്നത് കേന്ദ്രം $(0,0)$ ഉം വ്യാസാർദ്ധം 2 ഉള്ള വൃത്തത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

A, B, C എന്നത് തന്നിട്ടുള്ള ത്രികോണത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങൾ എന്നിരിക്കട്ടെ, z_1, z_2, ഉം z_3 എന്നത് $|z|=2$, എന്ന വൃത്തത്തിന്റെ ഉള്ള വരയ്ക്കാവുന്ന സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങളായതുകൊണ്ട് AB, BC, CA എന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ മൂലബിന്ദുവിൽ $\frac{2\pi}{3}$ റേഡിയൻസിൽ (120 ഡിഗ്രി) ലഭിക്കുന്നു. (ത്രികോണത്തിന്റെ പരിധി).

(സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യ $ze^{i\theta}$ എന്നത് z നെ θ റേഡിയൻസിൽ മൂലബിന്ദുവിൽ നിന്ന് എതിർ ഘടികാര ദിശയിൽ ചുറ്റുമ്പോൾ കിട്ടുന്നതാണ്.)

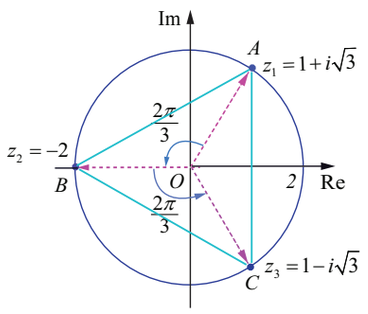
അതുകൊണ്ട് z_2 ഉം z_3 യും z_1 നെ യഥാക്രമം $\frac{2\pi}{3}$ ഉം $\frac{4\pi}{3}$ യിലും ചുറ്റുമ്പോൾ കിട്ടുന്നതാണ്.

തന്നിട്ടുള്ളതിൽ $\quad \overrightarrow{OA} = z_1 = 1+i\sqrt{3}$;

$$\overrightarrow{OB} = z_1 e^{i\frac{2\pi}{3}} = \left(1+i\sqrt{3}\right)e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$= \left(1+i\sqrt{3}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= \left(1+i\sqrt{3}\right)\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-2;$$



ചിത്രം 2.48

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 91 14-02-2023 18:14:34

$$\overrightarrow{OC} = z_1 e^{i\frac{4\pi}{3}} = z_2 e^{i\frac{2\pi}{3}} = -2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$= -2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= -2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3}\,.$$

$z_2 = -2$, ഉം $z_3 = 1 - i\sqrt{3}\,.$

അഭ്യാസം 2.8

1. $\omega \neq 1$ എന്നത് ഒന്നിന്റെ ഘനമൂലമെങ്കിൽ $\frac{a+b\omega+c\omega^2}{b+c\omega+a\omega^2} + \frac{a+b\omega+c\omega^2}{c+a\omega+b\omega^2} = -1$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

2. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^5 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5 = -\sqrt{3}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

3. $\left(\frac{1+\sin\frac{\pi}{10} + i\cos\frac{\pi}{10}}{1+\sin\frac{\pi}{10} - i\cos\frac{\pi}{10}}\right)^{10}$ ന്റെ മൂല്യം കാണുക.

4. $2\cos\alpha = x + \frac{1}{x}$ ഉം $2\cos\beta = y + \frac{1}{y}$, എങ്കിൽ,

   (i) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2\cos(\alpha - \beta)$ (ii) $xy - \frac{1}{xy} = 2i\sin(\alpha + \beta)$

   (iii) $\frac{x^m}{y^n} - \frac{y^n}{x^m} = 2i\sin(m\alpha - n\beta)$ (iv) $x^m y^n + \frac{1}{x^m y^n} = 2\cos(m\alpha + n\beta)$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

5. $z^3 + 27 = 0$ എന്ന സമവാക്യം നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക.

6. $\omega \neq 1$ ഒന്നിന്റെ ഘനമൂലമെങ്കിൽ $(z-1)^3 + 8 = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ മൂലങ്ങൾ

   $-1,\ 1-2\omega,\ 1-2\omega^2$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

7. $\sum_{k=1}^{8}\left(\cos\frac{2k\pi}{9} + i\sin\frac{2k\pi}{9}\right)$. ന്റെ മൂല്യം കാണുക.

8. $\omega \neq 1$ ഒന്നിന്റെ ഘനമൂലമെങ്കിൽ

   (i) $(1-\omega+\omega^2)^6 + (1+\omega-\omega^2)^6 = 128.$

   (ii) $(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^4)(1+\omega^8)\cdots(1+\omega^{2^{11}}) = 1$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

9. $z = 2 - 2i$, എങ്കിൽ മൂലബിന്ദുവിൽ നിന്ന് എതിർ ഘടികാര ദിശയിൽ θ റേഡിയൻസിൽ z ന്റെ ഭ്രമണം കാണുക

   (i) $\theta = \frac{\pi}{3}$ (ii) $\theta = \frac{2\pi}{3}$ (iii) $\theta = \frac{3\pi}{2}$.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 92 14-02-2023 18:14:48

അഭ്യാസം 2.9

ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുത്തെഴുതുക :

1. $i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3}$

(1) 0 (2) 1 (3) -1 (4) i

2. $\sum_{n=1}^{13}(i^n + i^{n-1})$ ന്റെ മൂല്യം

(1) $1+i$ (2) i (3) 1 (4) 0

3. ആർഗാണ്ട് തലത്തിലെ സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകളായ $z, iz, , z+iz$ ഉപയോഗിച്ച് കിട്ടുന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം

(1) $\frac{1}{2}|z|^2$ (2) $|z|^2$ (3) $\frac{3}{2}|z|^2$ (4) $2|z|^2$

4. ഒരു സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയുടെ സംയോജനം $\frac{1}{i-2}$ ആണ്. എങ്കിൽ ആ സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യ

(1) $\frac{1}{i+2}$ (2) $\frac{-1}{i+2}$ (3) $\frac{-1}{i-2}$ (4) $\frac{1}{i-2}$

5. $z = \frac{\left(\sqrt{3}+i\right)^3 (3i+4)^2}{(8+6i)^2}$, എങ്കിൽ $|z|$ നു സമം

(1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 3

6. z ഒരു പൂജ്യമല്ലാത്ത സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയും $2iz^2 = \bar{z}$ ഉം എങ്കിൽ $|z| =$

(1) $\frac{1}{2}$ (2) 1 (3) 2 (4) 3

7. $|z-2+i| \le 2$, എങ്കിൽ $|z|$ ന്റെ ഏറ്റവും ഉയർന്ന മൂല്യം

(1) $\sqrt{3}-2$ (2) $\sqrt{3}+2$ (3) $\sqrt{5}-2$ (4) $\sqrt{5}+2$

8. $\left|z-\frac{3}{z}\right| = 2$, എങ്കിൽ $|z|$ ന്റെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ മൂല്യം

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 5

9. $|z|=1$, എങ്കിൽ $\frac{1+z}{1+\bar{z}}$ ന്റെ മൂല്യം ആണ്

(1) z (2) $\bar{z}$ (3) $\frac{1}{z}$ (4) 1

10. $|z| - z = 1+2i$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണം

(1) $\frac{3}{2}-2i$ (2) $-\frac{3}{2}+2i$ (3) $2-\frac{3}{2}i$ (4) $2+\frac{3}{2}i$

11. $|z_1|=1$, $|z_2|=2$, $|z_3|=3$ ഉം $|9z_1z_2 + 4z_1z_3 + z_2z_3| = 12$, എങ്കിൽ $|z_1+z_2+z_3|$ യുടെ മൂല്യം

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

12. z എന്നത് ഒരു സങ്കീർണ്ണസംഖ്യയും $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ഉം $z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}$, എങ്കിൽ $|z|$ is

(1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 3

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 93 14-02-2023 18:15:09

13. z_1, z_3, z_3 എന്നത് സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകളും $z_1+z_2+z_3=0$ ഉം $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ ഉം എങ്കിൽ $z_1^{\,2}+z_2^{\,2}+z_3^{\,2}=$

(1) 3 (2) 2 (3) 1 (4) 0

14. $\frac{z-1}{z+1}$ പൂർണ്ണ സാങ്കല്പികമെങ്കിൽ, $|z|=$

(1) $\frac{1}{2}$ (2) 1 (3) 2 (4) 3

15. $z=x+iy$ എന്ന സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയും $|z+2|=|z-2|$ ഉം എങ്കിൽ, z ന്റെ ലോക്കസ്സ്

(1) വാസ്തവിക അക്ഷം (2) സാങ്കല്പിക അക്ഷം (3) ദീർഘ വൃത്തം (4) വൃത്തം

16. $\frac{3}{-1+i}$ ന്റെ പ്രധാന ആർഗ്യുമെന്റ്

(1) $\frac{-5\pi}{6}$ (2) $\frac{-2\pi}{3}$ (3) $\frac{-3\pi}{4}$ (4) $\frac{-\pi}{2}$

17. $(\sin 40^\circ + i\cos 40^\circ)^5$ ന്റെ പ്രധാന ആർഗ്യുമെന്റ്

(1) -110° (2) -70° (3) 70° (4) 110°

18. $(1+i)(1+2i)(1+3i)\cdots(1+ni)=x+iy$, എങ്കിൽ $2\cdot5\cdot10\cdots(1+n^2)=$

(1) 1 (2) i (3) x^2+y^2 (4) $1+n^2$

19. $\omega\neq1$ എന്നത് ഒന്നിന്റെ ഘനമൂലവും $(1+\omega)^7=A+B\omega$, എങ്കിൽ $(A,B)=$

(1) $(1,0)$ (2) $(-1,1)$ (3) $(0,1)$ (4) $(1,1)$

20. $\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^2}{4i\left(1-i\sqrt{3}\right)}$ എന്ന സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയുടെ പ്രധാന ആർഗ്യുമെന്റ്

(1) $\frac{2\pi}{3}$ (2) $\frac{\pi}{6}$ (3) $\frac{5\pi}{6}$ (4) $\frac{\pi}{2}$

21. $x^2+x+1=0$ യുടെ മൂലങ്ങൾ α, β എങ്കിൽ $\alpha^{2020}+\beta^{2020}=$

(1) -2 (2) -1 (3) 1 (4) 2

22. $\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$ എന്നതിൽ എല്ലാ നാല് മൂലങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം

(1) -2 (2) -1 (3) 1 (4) 2

23. $\omega\neq1$ എന്നത് ഒന്നിന്റെ ഘനമൂലവും $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -\omega^2-1 & \omega^2\\ 1 & \omega^2 & \omega^7\end{vmatrix}=3k$ ഉം എങ്കിൽ, $k=$

(1) 1 (2) -1 (3) $\sqrt{3}i$ (4) $-\sqrt{3}i$

24. $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$ ന്റെ മൂല്യം

(1) $cis\frac{2\pi}{3}$ (2) $cis\frac{4\pi}{3}$ (3) $-cis\frac{2\pi}{3}$ (4) $-cis\frac{4\pi}{3}$

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 94 14-02-2023 18:15:34

25. $\omega = cis\,\frac{2\pi}{3}$, എങ്കിൽ $\begin{vmatrix} z+1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & z+\omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & z+\omega \end{vmatrix} = 0$ എന്നതിൽ വ്യത്യസ്ത മൂലങ്ങളുടെ എണ്ണം

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

സംഗ്രഹം

ഈ അധ്യായത്തിൽ നമ്മൾ പഠിച്ചത്

ഒരു സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയുടെ ചതുരാകൃതിയിലുള്ള രൂപം $x+iy$ (അല്ലെങ്കിൽ $x+yi$) ആണ്, ഇവിടെ x ഉം y ഉം വാസ്തവിക സംഖ്യകളാണ്.

$z_1 = x_1 + iy_1$ ഉം $z_2 = x_2 + iy_2$ എന്നീ രണ്ട് സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകൾ സമമാണ് എങ്കിൽ മാത്രം $\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2)$ ഉം $\mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2)$. അതായത് $x_1 = x_2$ ഉം $y_1 = y_2$.

$x+iy$ എന്ന സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയുടെ സംയോജനത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നത് $x-iy$ എന്ന സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയായിട്ടാണ്.

സങ്കീർണ്ണ സംയോജനത്തിന്റെ സവിശേഷതകൾ

(1) $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

(2) $\overline{z_1-z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

(3) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$

(4) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, $z_2 \neq 0$

(5) $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$

(6) $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$

(7) $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$, ഇവിടെ n ഒരു പൂർണ്ണാങ്കമാണ്

(8) z ഒരു വാസ്തവിക സംഖ്യ എങ്കിൽ മാത്രം $z = \overline{z}$

(9) z ഒരു പൂർണ്ണ സാങ്കൽപ്പികം എങ്കിൽ മാത്രം $z = -\overline{z}$

(10) $\overline{\overline{z}} = z$

$z = x+iy$, എങ്കിൽ $\sqrt{x^2+y^2}$ നെ z ന്റെ മോഡുലസ് എന്നു വിളിക്കുന്നു. ഇതിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നത് $|z|$ എന്നാണ്.

സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകളുടെ മോഡുലസിന്റെ സവിശേഷതകൾ

(1) $|z| = |\overline{z}|$

(2) $|z_1+z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (ത്രികോണ അസമീകരണം)

(3) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

(4) $|z_1 - z_2| \geq \big||z_1| - |z_2|\big|$

(5) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \neq 0$

(6) $|z^n| = |z|^n$, ഇവിടെ n ഒരു പൂർണ്ണാങ്കമാണ്

(7) $\mathrm{Re}(z) \leq |z|$

(8) $\mathrm{Im}(z) \leq |z|$

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 95 14-02-2023 18:15:36

സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗ മൂലത്തിന്റെ സൂത്രവാക്യം

$$\sqrt{a+ib}=\pm\left(\sqrt{\frac{|z|+a}{2}}+i\frac{b}{|b|}\sqrt{\frac{|z|-a}{2}}\right),\ \text{ഇവിടെ}\ z=a+ib\ \text{ഉം}\ b\neq 0.$$

$P(x,y)$ ന്റെ പോളാർ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങളായ r ഉം θ യും ഒരു പൂജ്യമല്ലാത്ത സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയായ $z=x+iy$ നെ സൂചിപ്പിക്കുന്നുവെങ്കിൽ P എന്ന സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയുടെ പോളാർ രൂപം അല്ലെങ്കിൽ ത്രികോണമിതി രൂപം എന്നത്

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)\ \text{ആണ്.}$$

പോളാർ രൂപത്തിന്റെ സവിശേഷതകൾ

സവിശേഷത 1: $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$, എങ്കിൽ $z^{-1}=\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)$.

സവിശേഷത 2: $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$ ഉം $z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$,

എങ്കിൽ $z_1z_2=r_1r_2\left(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\right)$.

സവിശേഷത 3: $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$ ഉം $z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$,

എങ്കിൽ $\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\right]$.

ഡിമൂവീസ് സിദ്ധാന്തം

(a) **തന്നിട്ടുള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരു സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യ $\cos\theta+i\sin\theta$ ഉം n എന്ന പൂർണ്ണാങ്കവുമെങ്കിൽ $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$**

(b) **x എന്നത് പരിമേയ സംഖ്യ എങ്കിൽ, $(\cos\theta+i\sin\theta)^x$ ൽ ഏതെങ്കിലും ഒരു മൂലമാണ് $\cos x\theta+i\sin x\theta$.**

സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യ $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ യുടെ n ാം മൂലം

$$z^{1/n}=r^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right),\ k=0,1,2,3,\ldots,n-1.$$

ഐ.സി.റ്റി കോർണർ

https://ggbm.at/vchq92pg അല്ലെങ്കിൽ QR കോഡിനെ സ്കാൻ ചെയ്യുക

ബ്രൗസർ തുറന്ന് തന്നിട്ടുള്ള URL ലിങ്ക് ടൈപ്പ് ചെയ്യുക. (അല്ലെങ്കിൽ) QR കോഡിനെ സ്കാൻ ചെയ്യുക. അപ്പോൾ "12th Standard Mathematics" എന്ന പേരുള്ള ജിയോജീബ്ര വർക്ക് ബുക്ക് ഓപ്പൺ ആകും. വർക്ക് ബുക്കിന്റെ ഇടതു ഭാഗത്ത് പാഠഭാഗത്തെ ആസ്പദമാക്കി അനേകം ഭാഗങ്ങളുണ്ട്. "Complex Numbers" എന്ന പേരുള്ള അദ്ധ്യായത്തിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്യുക. നിങ്ങൾക്ക് അതിൽ ഈ പാഠഭാഗത്തെ അനുബന്ധിച്ച് അനേകം വർക്ക് ഷീറ്റുകൾ ലഭിക്കും. "Geometrical Meaning" എന്ന വർക്ക് ഷീറ്റ് സെലക്ട് ചെയ്യുക.

CPL9J

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 96 14-02-2023 18:15:48

അദ്ധ്യായം

3

സമവാക്യങ്ങളുടെ സിദ്ധാന്തം

ADFU5

"ഒരാളുടെ സമവാക്യത്തിൽ സൗന്ദര്യം നേടുക എന്ന കാഴ്ചപ്പാടിൽ നിന്ന് ഒരാൾ പ്രവർത്തിക്കുന്നുയെങ്കിൽ ഒരാൾക്ക് ശരിക്കും ഉൾക്കാഴ്ചയുണ്ടെങ്കിൽ ഒരാൾ തീർച്ചയായും പുരോഗതിയുടെ പാതയിലാണെന്ന് തോന്നുന്നു."

- പോൾ ഡിറാക്

3.1 ആമുഖം

ഗണിതത്തിലെ പുരാതനമായ പ്രശ്നങ്ങളിലൊന്ന് ബീജഗണിത സമവാക്യങ്ങൾ പരിഹരിക്കുകയാണ്, പ്രത്യേകിച്ചും ബഹുപദവ്യംജകം സമവാക്യങ്ങളുടെ മൂലകൾ കണ്ടെത്തൽ, ക്രിസ്തുവിന് മുൻപ് 2000 ൽ (BCE) സുമേറിയൻ, ബാബിലോണിയൻ രാജ്യങ്ങളിൽ നിന്നാരംഭിച്ച് ഈജിപ്ത്, ഗ്രീസ്, ഇന്ത്യ, അറേബ്യ, ചൈന തുടങ്ങി ലോകത്തിന്റെ എല്ലാ ഭാഗങ്ങളിലെയും ഗണിതഘാസ്ത്രജ്ഞരും തത്വചിന്തകരും ബഹുപദവ്യംജകം (പോളിനോമിയൽ) സമവാക്യങ്ങൾ പരിഹരിക്കാൻ ശ്രമിച്ചു.



ആബൽ
(1802-1829)

പുരാതന ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞർ പ്രശ്നങ്ങളും പരിഹാരങ്ങളും പൂർണ്ണമായും വാക്കുകളാൽ പ്രസ്താവിച്ചു. അവർ പ്രത്യേക പ്രശ്നങ്ങൾക്ക് ശ്രമിച്ചു. പക്ഷേ, പൊതുവായതല്ല. നെഗറ്റീവ് സംഖ്യകൾ ഉൾപ്പെടുന്ന ദ്വിഘാത സമവാക്യങ്ങൾ ആദ്യമായി പരിഹരിച്ചത് ബ്രഹ്മഗുപ്തനാണ്. യുക്ലിഡ്, ഡയോഫാന്റ്സ്, ബ്രഹ്മഗുപ്തൻ, ഒമർഖയാം, ഹിബോനാസി, ഡെസ്കാർട്ടസ്, റൂഫിനി എന്നിവർ പോളിനോമിയൽ സമവാക്യങ്ങളിൽ പ്രവർത്തിച്ച ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞരിൽ ചിലരാണ്. അഞ്ചാം ഡിഗ്രി സമവാക്യങ്ങൾക്ക് പരിഹാരം കാണാൻ ബീജഗണിത സൂത്രവാക്യം ഇല്ലെന്നാന്ന് റൂഫിനി വാദിച്ചത്. പിൻ തുടരാൻ ബുദ്ധിമുട്ടായ സുവിസ്തരമായ വാദമാണ് അദ്ദേഹം നൽകിയത്. അവസാനം 1823 ൽ നോർവിജിയൻ ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞനായ ആബെൽ അത് തെളിയിച്ചു.



ഒരു നിർമ്മാണ കമ്പനി തങ്ങളുടെ ഉല്പന്നം ചതുരാകൃതിയിലുള്ള ബോക്സുകളിൽ നിറയ്ക്കാൻ ആഗ്രഹിക്കുന്നുവെന്ന് കരുതുക. അടിത്തറയുടെ നീളം വീതിയെക്കാൾ ആറ് യൂണിറ്റ് കൂടുതലായി ബോക്സുകൾ നിർമ്മിക്കാൻ ഇത് പദ്ധതിയിടുന്നു. കൂടാതെ ബോക്സിന്റെ ഉയരം നീളത്തിന്റെ ശരാശരിയും അടിത്തറയുടെ വീതിയും ആയിരിക്കണം. വ്യാപ്തം നിശ്ചയിക്കുമ്പോൾ ബോക്സിന്റെ വശങ്ങളുടെ സാധ്യമായ എല്ലാ അളവുകളും അറിയാൻ കമ്പനി ആഗ്രഹിക്കുന്നു.

അടിത്തറയുടെ വീതി x ആയിരിക്കട്ടെ നീളം $x+6$ ഉം അതിന്റെ ഉയരം $x+3$. യും ആകട്ടെ. അതു കൊണ്ട് ബോക്സിന്റെ വ്യപ്തം $x(x+3)(x+6)$ ആണ്. വ്യപ്തം 2618 ക്യൂബിക് യൂണിറ്റാണെന്ന് കരുതുക അപ്പോൾ നമ്മൾ $x^3+9x^2+18x=2618$ ആയിരിക്കണം. മുകളിലുള്ള സമവാക്യം തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്ന ഒരു x കണ്ടെത്താൻ നമുക്ക് കഴിയും. തുടർന്ന് നമുക്ക് ആവശ്യമുള്ള അളവിന്റെ ഒരു ബോക്സ് സംയോജിപ്പിക്കാൻ കഴിയും.

നമുക്ക് ഒരു വൃത്തം അറിയാം. ഒരു നേർരേഖയ്ക്ക് രണ്ട് ബിന്ദുവിൽ കൂടുതൽ വിഭജിക്കാൻ കഴിയില്ല. എന്നാൽ ഇത് എങ്ങനെ തെളിയിക്കാനാകും. അത്തരം പ്രസ്താവനകൾ തെളിയിക്കാൻ ഗണിത സമവാക്യങ്ങൾ ഞങ്ങളെ സഹായിക്കുന്നു. ഉത്ഭവസ്ഥാനവും ആരം r ഉം ഉള്ള വൃത്തത്തെ $x^2+y^2=r^2$, xy-തലം $x^2+y^2=r^2$ എന്ന സമവാക്യത്താൽ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. ഒരേ സമതലത്തിൽ ഒരു വരി $ax+by+c=0$ എന്ന സമവാക്യം നൽകുന്നുവെന്ന് നമുക്കറിയാം. വൃത്തത്തിന്റെ വിഭജന ബിന്ദുവും നേർരേഖയും രണ്ട് സമവാക്യങ്ങളെയും തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്ന പോയിന്റുകളാണ്. മറ്റൊരു വിധത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ ഒരേ സമയത്തെ സമവാക്യങ്ങളുടെ പരിഹാരങ്ങൾ.

$$x^2+y^2=r^2 \text{ ഉം } ax+by+c=0$$

വിഭജനത്തിന്റെ പോയിന്റുകൾ നൽകുന്നു. മുകളിലുള്ള സമവാക്യ വ്യവസ്ഥ പരിഹരിക്കുന്നതിലൂടെ നമുക്ക് അവ പരസ്പരം സ്പർശിക്കുന്നുണ്ടോ രണ്ട് ബിന്ദുകളിൽ വിഭജിക്കുന്നുണ്ടോ അല്ലെങ്കിൽ പരസ്പരം വിഭജിക്കുന്നില്ലേ എന്ന് നിഗമനം ചെയ്യാം.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 97 14-02-2023 18:25:41

ഒരു കോമ്പസും റൂളറും ഉപയോഗിച്ച് മാത്രം ജ്യാമിതീയ വസ്തുക്കൾ നിർമ്മിക്കുന്നതിൽ ചില പുരാതന പ്രശ്നങ്ങളുണ്ട് (യൂണിറ്റുകൾ അടയാളപ്പെടുത്താതെ നേരായ അറ്റം) ഉദാഹരണത്തിന്, ഒരു സാധാരണ ഷഡ്ഭുജവും 17 വംശങ്ങളുള്ള ഒരു സാധാരണ പോളിഗണം നിർമ്മിക്കാവുന്നതാണ് അതേ സമയം, ഒരു സാധാരണ സമചതുർഭുജം 18 വശങ്ങളുള്ള ഒരു സാധാരണ പോളിഗണും നിർമ്മിക്കാൻ സാധ്യമല്ല. ഒരു കോമ്പസും റൂളറും മാത്രം ഉപ യോഗിക്കുന്നത് ചില ജ്യാമിതീയ രീതികൾ, പ്രത്യേകിച്ച് താഴേപറയുന്ന മൂന്ന് നിർമ്മിക്കാൻ കഴിയില്ല:

- ഒരു കോണിനെ മൂന്നായി ഖണ്ഡിക്കുന്നു (ഒരു നിശ്ചിത കോണിനെ മൂന്ന് തുല്യകോണുകളായി വിഭജിക്കുന്നു).
- ഒരു വൃത്തത്തെ സ്ക്യയറിംഗ് (നൽകിയ വൃത്തത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണമുള്ള ഒരു ചതുരം നിർമ്മിക്കുന്നു.) ശ്രീനിയവാസ രാമാനുജൻ തന്റെ കുറിപ്പ് പുസ്തകത്തിൽ ഒരു ഏകദേശ പരിഹാരം നൽകിയിട്ടുണ്ട്
- ഘാതത്തിനെ ഇരട്ടിയാകുക (ഘാതത്തിന്റെ വ്യാപ്തം രണ്ട് മടങ്ങാണ് ഘാത രൂപീകരിക്കാൻ).

ഈ ജ്യാമിതീയ പ്രശ്നങ്ങൾ പോളിനോമിയലുകളിലെ പ്രശ്നങ്ങളായി പരിവർത്തനം ചെയ്തതിനുശേഷം മാത്രമാണ് ഈ പുരാതന പ്രശ്നങ്ങൾ പരിഹരിക്കപ്പെടുന്നത്. വാസ്തവത്തിൽ ഈ നിർമ്മാണങ്ങൾ അസാധ്യമാണ്. അസാധ്യത തെളിയിക്കുന്നതിനുള്ള വളരെ മികച്ച ഒരു ഉപകരണമാണ് ഗണിത ശാസ്ത്രം.

ഒരു യഥാർത്ഥ ജീവിത പ്രശ്നം പരിഹരിക്കുമ്പോൾ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞർ പ്രശ്നത്തെ ഗണിതശാസ്ത്ര പ്രശ് നമാക്കി മാറ്റുന്നു. അറിയപ്പെടുന്ന ഗണിത ശാസ്ത്ര സാങ്കേതിക വിദ്യകൾ ഉപയോഗിച്ച് ഗണിത ശാസ്ത്രം പ്രശ് നം പരിഹരിക്കുന്നു. തുടർന്ന് ഗണിത ശാസ്ത്ര പരിഹാരത്തെ യഥാർത്ഥ ജീവിത പ്രശ്നത്തിന്റെ പരിഹാരമായി മാറ്റുന്നു. യഥാർത്ഥ ജീവിതത്തിലെ മിക്ക പ്രശ്നങ്ങളും ഗണിത ശാസ്ത്ര പ്രശ്നമായി മാറുന്ന ചക്രങ്ങൾ ഒരു ഗണിത സമവാക്യത്തിൽ അവസാനിക്കുന്നു. ഒരു ബോക്സിന്റെ അളവ് തീരുമാനിക്കുന്നതിലെ പ്രശ്നങ്ങൾ ചർച്ച ചെയ്യുമ്പോൾ ചില ജ്യാമിതീയ ഫലങ്ങൾ തെളിയിക്കുന്നതും, നിർമ്മാണങ്ങൾ അസാധ്യമാണെന്ന് തെളിയിക്കുന്നതും പോളിനോമിയൽ സമവാക്യങ്ങളുമായി യോജിക്കുന്നു.

ഈ അധ്യായത്തിൽ സമവാക്യങ്ങളെ കുറിച്ച് ചില സിദ്ധാന്തങ്ങൾ പഠിക്കുന്നു. പ്രത്യേകിച്ചും. പോളിനോമി യൽ സമവാക്യത്തെ കുറിച്ചും അതിന്റെ പരിഹാരത്തെ കുറിച്ചും. പോളിനോമിയൽ സമവാക്യങ്ങളുടെ ചില സവിശേഷതകൾ തന്നിരിക്കുന്ന മൂലസംഖ്യ കൊണ്ട് പോളിനോമിയൽ സമവാക്യങ്ങളുടെ രൂപീകരണം, ബീജ ഗണിതത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനസിദ്ധാന്തം, പോളിനോമിയൽ സമവാക്യത്തിന്റെ പോസിറ്റീവും നെഗറ്റീവുമായ മൂലങ്ങളെ കുറിച്ച് അറിയുക എന്നിവ ഞങ്ങൾ പഠിക്കുന്നു. ഈ ആശയങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ചില തരത്തിലുള്ള പോളിനോമിയൽ സമവാക്യങ്ങൾ പരിഹരിക്കുക. എന്ന ലക്ഷ്യത്തിലെത്തുന്നു. പോളിനോമിയൽ സമവാക്യങ്ങൾക്കായി വികസിപ്പിച്ച ചില പോളിനോമിയൽ ഇതര സമവാക്യ വിദ്യകൾ പരിഹരിക്കാനും ഞങ്ങൾ പഠിക്കുന്നു.

പഠന ലക്ഷ്യങ്ങൾ

ഈ അധ്യായം പൂർത്തിയാക്കുമ്പോൾ, വിദ്യാർത്ഥികൾക്ക് കഴിയും

- മൂലങ്ങളിൽ നൽകിയിരിക്കുന്ന വ്യവസ്ഥകളെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്ന പോളിനോമിയൽ സമവാക്യങ്ങൾ രൂപ പ്പെടുത്തുക.
- ഉയർന്ന ഡിഗ്രിയുടെ പോളിനോമിയൽ സമവാക്യങ്ങൾ പരിഹരിക്കുന്നതിനുള്ള വിദ്യകൾ പ്രദർശിപ്പിക്കുക.
- ചില മൂലങ്ങൾ സങ്കീർണ്ണമേ, അല്ലെങ്കിൽ കരണി യുക്തിരഹിതവും യുക്തി സഹവുമാണെന്ന് സമവാക്യങ്ങൾ പരിഹരിക്കുക.
- പരസ്പര സമവാക്യങ്ങൾ തിരിച്ചറിയുകയും പരിഹരിക്കുകയും ചെയ്യുക.
- വ്യുൽക്രമ സമീകരണങ്ങളെ തെളിക്കുകയും, തിരച്ചറിയുകയും ചെയ്യുക.
- ഡെസ്കാർട്ട്സ് നിയമം ഉപയോഗിച്ച് ഒരു പോളിനോമിയൽ സമവാക്യത്തിന്റെ പോസിറ്റീവ്, നെഗറ്റീവ് മൂലകളുടെ എണ്ണം നിർണ്ണയിക്കുക.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 98 14-02-2023 18:25:41

.3.2 പോളിനോമിയൽ സമവാക്യങ്ങളുടെ അടിസ്ഥാനങ്ങൾ

3.2.1 വ്യത്യസ്ത തരം പോളിനോമയൽ സമവാക്യങ്ങൾ

ഏതൊരു നെഗറ്റീവ് ഇതര സംഖ്യയ്ക്കും n ഒരു ചരം x ലെ ഡിഗ്രി n ന്റെ പോളിനോമിയൽ നൽകിയ ഒരു പദപ്രയോഗമാണെന്ന് നമുക്കറിയാം

$$P \equiv P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad \ldots (1)$$

ഇവിടെ $a_r \in \mathbb{C}$ സ്ഥിരതയുള്ളവയാണ്, $r = 0,1,2,\ldots,n$ ഉള്ള $a_n \neq 0$. x ചരം യഥാർത്ഥമോ അല്ലെങ്കിൽ സങ്കീർണ്ണമോ ആണ്.

ഒരു പോളിനോമിയൽ P യുടെ എല്ലാ ഗുണകങ്ങളും യഥാർത്ഥമാകുമ്പോൾ **"$\mathbb{R}$ ൽ മുഴുവനുമുള്ള പോളിനോമിയൽ P"** എന്ന് പറയുന്നു. അതുപോലെ തന്നെ **"$\mathbb{C}$ ൽ മുഴുവനുള്ള പോളിനോമിയൽ P"** പോലുള്ള **" $\mathbb{Q}$ മുഴുവനുള്ള പോളിനോമിയൽ P", " $\mathbb{Z}$ മുഴുവനുള്ള പോളിനോമിയൽ P"** സാങ്കേതികമായി ഉപയോഗിക്കുന്നു.

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ നിർവചിച്ച P ഫലനത്തെ പോളിനോമിയൽ ഫലനം എന്ന് വിളിക്കുന്നു. സമവാക്യം

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \quad \ldots (2)$$

ഇതിനെ പോളിനോമിയൽ സമവാക്യം എന്ന് വിളിക്കുന്നു

ചില $c \in \mathbb{C}$, $a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \cdots + a_1 c + a_0 = 0$ ആണെങ്കിൽ c യെ പോളിനോമിയലിന്റെ പൂജ്യം (1) എന്നും പോളിനോമിയൽ സമവാക്യത്തിന്റെ മൂലം അല്ലെങ്കിൽ നിർദ്ധാരണം (2) എന്നും വിളിക്കുന്നു.

ഒരു ചരം x ലെ സമവാക്യത്തിന്റെ മൂലം c ആണെങ്കിൽ നമ്മൾ അതിനെ "$x = c$ ഒരു മൂലം" എന്ന് എഴുതുന്നു. a_r എന്ന സ്ഥിരതയെ ഗുണാങ്കങ്ങൾ എന്ന് വിളിക്കുന്നു. ഒരു ഗുണാങ്കത്തെ മുൻനിര ഗുണകം എന്നും ഒരു x^n എന്ന പദം എന്നും വിളിക്കുന്നു. പ്രധാന പദം ഗുണാങ്കങ്ങൾ ഏതെങ്കിലും സംഖ്യ യഥാർത്ഥമോ സങ്കീർണ്ണമോ ആകാം മുൻനിര ഗുണകം ഒരു പൂജ്യമല്ലാത്ത എന്നതാണ് ഞങ്ങൾ വരുത്തിയ ഏക നിയന്ത്രണം പ്രമുഖ ഗുണാങ്കം പോളിനോമിയലിനെ ഏകചരം പോളിനോമിയൽ എന്ന് വിളിക്കുന്നു..

പരാമർശം:

ഇനിപ്പറയുന്നവ ഞങ്ങൾ ശ്രദ്ധിക്കുന്നു:

- x ന്റെ എല്ലാ മൂല്യങ്ങൾക്കും പോളിനോമിയൽ ഫലനങ്ങൾ നിർവ്വചിച്ചിരിക്കുന്നു.
- ഓരോ പൂജ്യമല്ലാത്ത സ്ഥിരാങ്കവും ഡിഗ്രി 0. ന്റെ പോളിനോമിയലാണ്.
- സ്ഥിരമായ 0 എന്നത് **പൂജ്യം പോളിനോമിയൽ** എന്നറിയപ്പെടുന്ന ഒരു പോളിനോമിയലാണ്, അതിന്റെ ബിരുദം നിർവചിച്ചിട്ടില്ല.
- ഒരു പോളിനോമിയലിന്റെ ഡിഗ്രി ഒരു നെഗറ്റീവ്യല്ലാത്ത സംഖ്യയാണ്.
- മുൻനിരഗുണാങ്കം 0 ഉള്ള ഏക പോളിനോമിയലാണ് പൂജ്യം പോളിനോമിയൽ.
- ഡ്രിഗ്രി രണ്ടിലെ പോളിനോമിയലുകളെ **ദ്വിഘാത പോളിനോമിയലുകൾ** എന്ന് വിളിക്കുന്നു.
- മൂന്നാമത്തെ ഡിഗ്രിയുടെ പോളിനോമിയലുകളെ **ത്രിഘാത പോളിനോമിയലുകൾ** എന്ന് വിളിക്കുന്നു.
- നാലാം ഡിഗ്രിയുടെ പോളിനോമിയലിനെ **ചതുർഘാത പോളിനോമിയലുകൾ** എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

x ന്റെ കൃതികളുടെ അവരോഹണ ക്രമത്തിലാണ് സാധാരണ പോളിനോമിയൽ എഴുതുന്നത്. അതായത് നാം പോളിനോമികൾ എഴുതുമ്പോൾ ഉയർന്ന കൃതിയുള്ള പദം (പ്രധാന പദം) ആദ്യ പദമായി സ്ഥിരാങ്കം അവസാന പദമായിരിക്കും.

ഉദാഹരണത്തിന് $2x + 3y + 4z = 5$ ഉം $6x^2 + 7x^2y^3 + 8z = 9$ ഉം x, y, z എന്നീ മൂന്നു ചരങ്ങളുള്ള സമീകരണങ്ങളാണ് $x^2 - 4x + 5 = 0$ എന്നത് x എന്ന ഒരു ചരം മാത്രമുള്ള സമീകരണമാണ്. മുമ്പുള്ള ക്ലാസ്സുകളിൽ ത്രികോണമിതി സമീകരണങ്ങൾ, രേഖീയ സമീകരണ സംമ്പ്രദായങ്ങൾ, ചില പോളിനോമിയൽ സമീകരണങ്ങൾ എന്നിവ നാം നിർദ്ധാരണം ചെയ്തിട്ടുണ്ട്.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 99 14-02-2023 18:25:50

x^2-5x+6 എന്ന പോളിനോമിലിന്റെ ഒരു പൂജ്യം 3 ആണെങ്കിൽ $x^2-5x+6=0$ എന്ന സമീകരണത്തിന്റെ ഒരു മൂലം അഥവാ നിർദ്ധാരണം 3 എന്നും നമുക്ക് അറിയാം. $\cos x=\sin x$ ഉം $\cos x+\sin x=1$ ഉം x എന്ന ഒരു ചരം മാത്രമുള്ള സമീകരണങ്ങൾ കൂടെ ആണെന്ന് നാം ശ്രദ്ധിക്കണം. എന്തിരുന്നാലും $\cos x-\sin x$ ഉം $\cos x+\sin x-1$ പോളിനോമിലുകൾ അല്ലെന്നും അതിനാൽ $\cos x=\sin x$ ഉം $\cos x+\sin x=1$ ഉം പോളിനോമിയൽ സമീകരണങ്ങൾ അല്ലെന്നും കാണാം തുടർന്ന് നാം പരിഗണിക്കുന്നത് പോളിനോമിയൽ സമീകരണങ്ങളും ഒരു ചരമാത്രമുള്ള പോളിനോമിയൽ സമീകരണങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് നിർദ്ധാരണം ചെയ്യാൻ കഴിയുന്ന സമീകരണങ്ങളും ആണ്.

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$ എന്നത് $\mathbb{R}$, ഉള്ള ഒരു സർവ്വസമവാക്യവും, $\sin x+\cos x=1$ ഉം $\sin^3 x+\cos^3 x=1$ ഉം സമീകരണങ്ങളാണെന്നും നാം ഓർക്കുക.

പോളിനോമിലിന്റെ ഗുണാങ്കങ്ങൾ വാസ്തവികം അല്ലെങ്കിൽ സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകളും, എന്നാൽ ഘാതങ്ങൾ എല്ലായിപ്പോഴും നെഗറ്റീവ് അല്ലാത്ത പൂർണ്ണാങ്കങ്ങളും ആയിരിക്കുന്നത് പ്രത്യേകം ശ്രദ്ധിക്കുക. ഉദാഹരണത്തിന് $3x^{-2}+1$, $5x^{\frac{1}{2}}+1$ ഉം എന്നീ വ്യംജങ്ങൾ പോളിനോമിലുകൾ അല്ല. പോളിനോമിയികളെയും പോളിനോമിൽ സമീകരണങ്ങളെയും, പ്രത്യേകിച്ച് ദ്വിഘാത സമീകരണങ്ങളെ കുറിച്ച് നമ്മൾ നേരത്തെ പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഈ ഭാഗത്ത് ഇവയെ നാം പെട്ടെന്ന് ഓർത്ത് എടുക്കുകയും കൂടുതൽ ആശയങ്ങൾ വീശിക്കുകയുമാണ് ചെയ്യുന്നത്. .

3.2.2 ദ്വിഘാത സമീകരണങ്ങൾ

$ax^2+bx+c=0$ എന്ന ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന് b^2-4ac യെ വിവേചകം എന്ന് വിളിക്കുന്നു. ഇതിനെ സാധാരണ Δ എന്ന് കുറിക്കുന്നു. $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ യും $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ യും $ax^2+bx+c=0$ ന്റെ മൂലകങ്ങളാണ് നമുക്ക് അറിയാം. ഈ രണ്ട് മൂലകങ്ങളെയും സാധാരണയായി $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ എന്ന് ചേർത്ത് എഴുതാം. $a\neq 0$ എന്നത് ഉറപ്പിച്ച് പറയേണ്ടതില്ല. കാരണം ax^2+bx+c യെ ഒരു ദ്വിഘാത പോളിനോമിയൽ എന്നാണ്, പറയുന്നത് അതിനാൽ $a\neq 0$.

കൂടാതെ നമ്മൾ പഠിച്ചിട്ടുള്ളത് $\Delta=0$ എങ്കിൽ എങ്കിൽ മാത്രം മൂലങ്ങൾ തുല്യമാണ്. a,b,c എന്നിവ വാസ്തവികമാകുമ്പോൾ

- $\Delta>0$ എങ്കിൽ, എങ്കിൽ മാത്രം മൂലങ്ങൾ വാസ്തവികം വ്യത്യസ്തവുമായിരിക്കും
- $\Delta<0$ എങ്കിൽ, എങ്കിൽ മാത്രം ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന് വാസ്തവിക മൂലങ്ങളില്ല എന്ന് എമുക്ക് അറിയാം.

3.3 വിറ്റായുടെ സൂത്രങ്ങളും പോളിനോമിയൽ സമീകരണത്തിന്റെ രൂപീകരണവും

ഫ്രഞ്ച് ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞന്റെ ബഹുപദവ്യംജകത്തിൻ മേലുള്ള പ്രവർത്തനമാണ് ആധുനിക ബീജഗണിതത്തിന് ഊടും ഭാവും നൽകിയത്.

3.3.1 ദ്വിഘാത സമീകരണങ്ങളുള്ള വിറ്റായുടെ സൂത്രം

$ax^2+bx+c=0$ എന്ന ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന്റെ മൂലങ്ങൾ α യും β യും ആയാൽ

HQF8L

$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)=ax^2-a(\alpha+\beta)x+a(\alpha\beta)=0$.

ഒരേ ഘാതമുള്ള ഗുണാങ്കങ്ങളെ തുല്യപ്പെടുത്തിയാൽ

$\alpha+\beta=\frac{-b}{a}$ യും $\alpha\beta=\frac{c}{a}$ ആണെന്ന് കാണാം.

അതുകൊണ്ട് α യും β യും മൂലങ്ങളായ ദ്വിഘാത സമീകരണ $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$ ആയിരിക്കും. അതായത്

$$x^2-(\text{മൂലങ്ങളുടെ തുക})\,x+\text{മൂലങ്ങളുടെ ഗുണനം}=0. \qquad \ldots(1)$$

എന്നത് തന്നിട്ടുള്ള മൂലങ്ങളെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്ന ദ്വിഘാത സമീകരണ ആയിരിക്കും

കുറിപ്പ്

വാസ്തവത്തിൽ α യും β യും മൂലങ്ങളായ ഒരു ദ്വിഘാത സമീകരണമാണ് $P(x)=0$ എങ്കിൽ പൂജ്യമല്ലാത്ത ഏതൊരു സ്ഥിരാങ്കം c യ്ക്കും $cP(x)$ എന്നതും α യും β യും മൂലങ്ങളായ ഒരു ദ്വിഘാത സമീകരണമായിരിക്കും.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 100 14-02-2023 18:26:09

മുൻ ക്ലാസ്സുകളിൽ മേൽപറഞ്ഞ മൂലങ്ങളും ഗുണാങ്കങ്ങളും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം ഉപയോഗിച്ച് α യും β യും മൂലങ്ങളായിട്ടുള്ള ദ്വിഘാത സമീകരണം നാം നിർമ്മിച്ചിട്ടുണ്ട്. വാസ്തവത്തിൽ അതു പോലുള്ള ഒരു സമീകരണമാണ് (1) യിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത്. ഉദാഹരണമായി 3 ഉം 4 ഉം മൂലങ്ങളായിട്ടുള്ള ഒരു ദ്വിഘാത സമീകരണം $x^2-7x+12=0$. ആയിരിക്കും.

ഇത് കൂടാതെ തന്നിട്ടുള്ള പോളിനോമിയൽ സമീകരണത്തിന്റെ മൂലങ്ങളുടെ ഫലനങ്ങൾ മൂലങ്ങളായി വരുന്ന പുതിയ പോളിനോമിയൽ സമീകരണങ്ങൾ നമുക്ക് നിർമ്മിക്കാൻ ആകും. ഈ പ്രക്രിയയിൽ തന്നിട്ടുള്ള പോളിനോമിയൽ സമീകരണത്തിന്റെ മൂലങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കാതെ തന്നെ പുതിയ പോളിനോമിയൽ സമീകരണം നമുക്ക് രൂപീകരിയ്ക്കാൻ ആകും. ഉദാഹരണമായി, തന്നിട്ടുള്ള പോളിനോമിയിലിന്റെ മൂലങ്ങളോട് രണ്ട് കൂട്ടിയാൽ കിട്ടുന്ന മൂലങ്ങളുള്ള ഒരു പോളിനോമിയൽ സമീകരണം നാം നിർമ്മിക്കുന്നത് എങ്ങനെയെന്ന് ചുവടെ തന്നിട്ടുണ്ട്.

ഉദാഹരണം 3.1

$17x^2+43x-73=0$ എന്ന ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന്റെ രണ്ട് മൂലങ്ങളാണ് α യും β യും എങ്കിൽ $\alpha+2$ ഉം $\beta+2$ ഉം മൂലങ്ങളായ ഒരു ദ്വിഘാത സമവാക്യം നിർമ്മിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$17x^2+43x-73=0$, എന്നതിന്റെ മൂലങ്ങളാണ് α ഉം β യും ആയാൽ നമുക്ക് $\alpha+\beta=\frac{-43}{17}$, $\alpha\beta=\frac{-73}{17}$.

$\alpha+2$ ഉം $\beta+2$.എന്നീ മൂലങ്ങളുള്ള ദ്വിഘാത സമവാക്യം നിർമ്മിക്കാൻ ഞങ്ങൾ ആഗ്രഹിക്കുന്നു. അത്തരമൊരു ദ്വിഘാത സമവാക്യം നിർമ്മിക്കുന്നതിന് കണക്കാക്കേണ്ടത്,

$$\text{മൂലങ്ങളുടെ തുക} = \alpha+\beta+4 = \frac{-43}{17}+4 = \frac{25}{17}$$

$$\text{മൂലങ്ങളുടെ ഗുണനം} = \alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4 = \frac{-73}{17}+2\left(\frac{-43}{17}\right)+4 = \frac{-91}{17}.$$

അതിനാൽ ആവശ്യമായ മൂലകങ്ങളുള്ള ഒരു ദ്വിഘാത സമവാക്യം $x^2-\frac{25}{17}x-\frac{91}{17}=0$.

ഈ സമവാക്യത്തെ 17 നെ കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ ലഭിക്കുന്നത് $17x^2-25x-91=0$

ഒരു ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന്റെ മൂലങ്ങളാണ് $\alpha+2$ യും $\beta+2$ യും.

ഉദാഹരണം 3.2

$2x^2-7x+13=0$ എന്ന ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന്റെ മൂലകങ്ങൾ α ഉം β ഉം ആണെങ്കിൽ അതിന്റെ മൂലങ്ങൾ α^2, β^2 ആയിട്ടുള്ള ഒരു ദ്വിഘാത സമീകരണം നിർമ്മിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന്റെ രണ്ട് മൂലങ്ങളാണ് α, β യും, അതുകൊണ്ട് $\alpha+\beta=\frac{7}{2}$, $\alpha\beta=\frac{13}{2}$.

പുതിയ ദ്വിഘാത സമീകരണം നിർമ്മിക്കുക,

$$\text{മൂലങ്ങളുടെ തുക} = \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\frac{-3}{4}.$$

$$\text{മൂലങ്ങളുടെ ഗുണനം} = \alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=\frac{169}{4}$$

ആവശ്യപ്പെട്ട സമീകരണം $x^2+\frac{3}{4}x+\frac{169}{4}=0$. നമ്മൾ കാണുന്നത്

$4x^2+3x+169 = 0$ എന്ന ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന്റെ മൂലങ്ങൾ α^2, β^2 യും.

പരാമർശം

ഉദാഹരണങ്ങൾ 3.1, 3.2, എന്നിവയിൽ അറിയപ്പെടുന്ന $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$ എന്നിവ ഉപയോഗിച്ച് നമ്മൾ മൂലങ്ങളുടെ ആകെ തുകയും ഗുണനവും കണക്കാക്കി. ഈ രീതിയിൽ നമുക്ക് ആവശ്യമുള്ള മൂലകങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ദ്വിഘാത സമവാക്യം നിർമ്മിക്കാൻ കഴിയും. ഒരു പുതിയ ദ്വിഘാത സമവാക്യത്തിന്റെ മൂലങ്ങളുടെ ആകെ തുകയും, ഗുണനവും തന്നിരിക്കുന്ന ദ്വിഘാത സമവാക്യത്തിന്റെ മൂലങ്ങളുടെ ആകെ തുകയും തുല്യമായ ഗുണനവും ഉപയോഗിച്ച് എഴുതാം. തന്നിരിക്കുന്ന സമവാക്യം ഞങ്ങൾ തെളിയിച്ചില്ലെന്ന് ഞങ്ങൾ ശ്രദ്ധിക്കുന്നു. ഈ ചുമതല പൂർത്തിയാക്കിതിനു ശേഷവും α, β എന്നിവയുടെ മൂല്യങ്ങൾ ഞങ്ങൾക്ക് അറിയില്ല..

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 101 14-02-2023 18:26:20

3.3.2 പോളിനോമിയൽ സമവാക്യങ്ങൾക്കായുള്ള വിയറ്റയുടെ സൂത്രം

ദ്വിഘാത പോളിനോമിയലിനായി ഞങ്ങൾ പഠിച്ച കാര്യങ്ങളെ ഉയർന്ന ഡിഗ്രിയിലെ പോളിനോമിയലുകളിലേക്ക് വ്യാപിപ്പിക്കാം. ഈ വിഭാഗത്തിൽ ഉയർന്ന ഡിഗ്രിയിലുള്ള ഒരു പോളിനോമിലിന്റെ പൂജ്യങ്ങളുടെ ഗുണാങ്കങ്ങളുമായുള്ള ബന്ധത്തെ കുറിച്ച് പഠിക്കുന്നു. പൂജ്യങ്ങളെ കുറിച്ചുള്ള ചില വിവരങ്ങൾ അറിയുമ്പോൾ ഉയർന്ന ഡിഗ്രിയുടെ പോളിനോമിയിലുകൾ എങ്ങനെ രൂപീകരിയ്ക്കാമെന്നും ഞങ്ങൾ പഠിക്കുന്നു. ഈ അധ്യായത്തിൽ ഡിഗ്രി n ന്റെ പോളിനോമിയിലിന്റെ പൂജ്യങ്ങൾ അല്ലെങ്കിൽ ഡിഗ്രി n ന്റെ പോളിനോമിയൽ സമവാക്യത്തിന്റെ മൂലങ്ങൾ ഞങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു.

3.3.2 (a) ബീജഗണിതത്തിന്റെ അടിസ്ഥാന സിദ്ധാന്തം

$P(x)=0$ എന്ന പോളിനോമിയൽ സമവാക്യത്തിന്റെ മൂലസംഖ്യ a യും $P(x)$ ന്റെ ഒരു ഘടകമാണ് $(x-a)$ അതുകൊണ്ട് ഡിഗ്രി $(P(x))\geq 1$ a, b എന്നിവ $P(x)=0$ യുടെ മൂലങ്ങളാണെങ്കിൽ $(x-a)(x-b)$ എന്നിവ $P(x)$ ന്റെ ഒരു ഘടകമാണ് അതിനാൽ ഡിഗ്രി $(P(x))\geq 2$ അതുപോലെ n മൂലകങ്ങളുള്ള $P(x)=0$ ആണെങ്കിൽ അതിന്റെ ഡിഗ്രി മറ്റു പദങ്ങളെക്കാൾ വലുതോ n ന് തുല്യമോ ആയിരിക്കും. മറ്റൊരു വിധത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ ഡിഗ്രി n ന്റെ പോളിനോമിയൽ സമവാക്യത്തിന് n മൂലകളിൽ കൂടുതൽ ഉണ്ടാകരുത്.

മുമ്പത്തെ ക്ലാസ്സുകളിൽ "ആധികരിക്കലിനെ" കുറിച്ച് നമ്മൾ പഠിച്ചു. "അധിരിക്കൽ" എന്നതു കൊണ്ട് ഞങ്ങൾ എന്താണ് ഉദ്ദേശിച്ചയെന്ന് നമുക്ക് ഓർമ്മിക്കാം. $(x-a)^k$ എന്നത് $P(x)=0$ എന്ന പോളിനോമിയൽ സമവാക്യത്തിന്റെ ഘടകമാണോ എന്ന് നമുക്ക് അറിയാം. $(x-a)^{k+1}$ എന്നത് പോളിനോമയൽ സമവാക്യം $P(x)=0$ എന്നതിന്റെ ഘടകമല്ല. പിന്നെ a യെ k ആധികരിക്കലിന്റെ മൂലങ്ങൾ എന്ന് വിളിക്കുന്നു. ഉദാഹരണത്തിന് $x^2-6x+9=0$, $x^3-7x^2+159x-9=0$ എന്നീ സമവാക്യങ്ങളുടെ ഗുണകം 2 ന്റെ മൂല്യ സംഖ്യ 3 ആണ്. സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകളെ ഗുണങ്ങളായി നമ്മൾ ഉപയോഗിക്കാൻ പോകുന്നില്ലെങ്കിലും $x^2-(4+2i)x+3+4i=0$, $x^4-8x^3+26x^2-40x+25=0.$ എന്നീ പോളിനോമിയലുകൾക്കുള്ള ഗുണിതം 2 ന്റെ മൂല സംഖ്യ $2+i$ എന്നത് എടുത്തു പറയേണ്ടതാണ്. ഒരു പോളിനോമിയൽ സമവാക്യത്തിന്റെ ഗുണിതത്തിന്റെ മൂലസംഖ്യ a ആണെങ്കിൽ a യെ പോളിനോമിയൽ സമവാക്യത്തിന്റെ ലളിതമായ മൂല സംഖ്യ എന്ന് വിളിക്കാം.

$P(x)=0$ വിന് n ഗുണിതങ്ങളോട് കൂടിയ മൂല സംഖ്യകൾ ഉണ്ടെങ്കിൽ ഇതിന്റെ ഡിഗ്രി n നെക്കാൾ വലുതും അല്ലെങ്കിൽ n ന് തുല്യവുമാണെന്ന് നമുക്ക് കാണാം. മറ്റൊരു വിധത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ ഡിഗ്രി n മൂലസംഖ്യകളുള്ള ഒരു പോളിനോമിയൽ സമവാക്യം, മൂല സംഖ്യകളെ അവയുടെ ഗുണിതത്തോട് കണക്കാക്കിയാലും n മൂലസംഖ്യകളെക്കാൾ കൂടുതൽ കാണില്ല..

സമവാക്യ സിദ്ധാന്തത്തിലെ ഒരു പ്രധാന സിദ്ധാന്തമാണ് ബീജഗണിതത്തിന്റെ അടിസ്ഥാന സിദ്ധാന്തം തെളിവ്, പാഠ്യക്രമത്തിന്റെ പരിധിക്കപ്പുറ ഉള്ളതിനാൽ തെളിവില്ലാതെ ഞങ്ങൾ അത് പ്രസ്താവിക്കുന്നു.

സിദ്ധാന്തം 3.1 (ബീജഗണിതത്തിന്റെ അടിസ്ഥാന സിദ്ധാന്തം)
ഡിഗ്രി $n\geq 1$ ന്റെ ഓരോ പോളിനോമിയൽ സമവാക്യത്തിനും $\mathbb{C}$ യിൽ കുറഞ്ഞത് ഒരു മൂല സംഖ്യയുണ്ട്.

ഇത് ഉപയോഗിച്ച് ഡിഗ്രി n ന്റെ ഒരു പോളിനോമിയൽ സമവാക്യത്തിന് $\mathbb{C}$ ൽ കുറഞ്ഞത് n മൂലസംഖ്യ ഉണ്ടെന്ന് നമുക്ക് തെളിയിക്കാൻ ആകും

ഡിഗ്രി n ന്റെ പോളിനോമിയൽ സമവാക്യത്തിന് മുകളിലുള്ള ഈ ചർച്ചയ്ക്കൊപ്പം മൂലസംഖ്യകൾ അവയുടെ ഗുണിതങ്ങളുമായി കണക്കാക്കുമ്പോൾ $\mathbb{C}$ ൽ കൃത്യമായി n മൂല സംഖ്യകളുണ്ട്.

ഈ പ്രസ്താവനയെ ബീജഗണിതത്തിന്റെ അടിസ്ഥാന സിദ്ധാന്തമായി ചില എഴുത്തുകാർ പ്രസ്താവിക്കുന്നു.

3.3.2(b) വിറ്റേഴ്സ് സൂത്രം

(i) ഡിഗ്രി 3 ന്റെ പോളിനോമിയൽ സമവാക്യത്തിനായുള്ള വിയറ്റയുടെ സൂത്രം

ഇപ്പോൾ ഉയർന്ന ഡിഗ്രി പോളിനോമിയലുകളുമായി ഇത്തരം ബന്ധങ്ങൾ ഞങ്ങൾ നേടുന്നു

$$ax^3+bx^2+cx+d = 0.$$

ബീജഗണിതത്തിന്റെ അതിശയകരമായ സിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച് ഇതിന് മൂന്നു മൂലകങ്ങളുണ്ട്. അതിന്റെ മൂലകങ്ങൾ α, β, γ യും ആണ്. അതുകൊണ്ട് നമുക്ക്

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 102 14-02-2023 18:26:36

$$ax^3+bx^2+cx+d \;=\; a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

വലതു വശത്ത് വികസിപ്പിക്കുന്നത് നൽകുന്നത്,

$$ax^3-a(\alpha+\beta+\gamma)x^2+a(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-a(\alpha\beta\gamma)\,.$$

സമാനശക്തികളുടെ ഗുണാങ്കങ്ങൾ താരതമ്യം ചെയ്യുമ്പോൾ ഞങ്ങൾ നേടുന്നു

$$\alpha+\beta+\gamma \;=\; \frac{-b}{a},\;\; \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\; \alpha\beta\gamma=\frac{-d}{a}\,.$$

$a\neq 0$ പോളിനോമിയൽ, സമവാക്യത്തിന്റെ ഡിഗ്രി 3 ആയതിനാൽ നമുക്ക് a ഉണ്ട്, അതിനാൽ a കൊണ്ട് ഹരിക്കാൻ അർത്ഥവത്താണ്. ഒരു മോണിക് പോളിനോമിലിന്റെ മൂലങ്ങൾ α , β , γ യും ആണെങ്കിൽ

$$\text{ഗുണാങ്കം } x^2 \;=\; -\big(\alpha+\beta+\gamma\big),$$

$$x \text{ ന്റെ ഗുണാങ്കം} \;=\; \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\,,$$

$$\text{സ്ഥിരമായ പദം} \;=\; -\alpha\beta\gamma\,.$$

(ii) ഡിഗ്രി $n>3$ പോളിനോമിയൽ സമവാക്യത്തിനായുള്ള വിയറ്റയുടെ സൂത്രം

ഉയർന്ന ഡിഗ്രി മോണിക് പോളിനോമിയൽ സമവാക്യത്തിനും ഇത് ബാധകമാണ്. ഡിഗ്രി n ന്റെ ഒരു മോണിക് പോളിനോമിയൽ സമവാക്യത്തിന് മൂലങ്ങൾ $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ എങ്കിൽ

$$\begin{aligned}
x^{n-1} \text{ ന്റെ ഗുണാങ്കം} &= \sum\nolimits_1 &&= -\sum\alpha_1\\
x^{n-2} \text{ ന്റെ ഗുണാങ്കം} &= \sum\nolimits_2 &&= \sum\alpha_1\alpha_2\\
x^{n-3} \text{ ന്റെ ഗുണാങ്കം} &= \sum\nolimits_3 &&= -\sum\alpha_1\alpha_2\alpha_3\\
x \text{ ന്റെ ഗുണാങ്കം} &= \sum\nolimits_{n-1} &&= (-1)^{n-1}\sum\alpha_1\alpha_2...\alpha_{n-1}\\
x^0 \text{ ന്റെ ഗുണാങ്കം} = \text{സ്ഥിരപദം} &= \sum\nolimits_n &&= (-1)^n\,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n
\end{aligned}$$

$\sum\alpha_1$ എല്ലാ മൂലങ്ങളുടെയും ആകെത്തുകയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. $\sum\alpha_1\alpha_2$ എല്ലാ മൂലങ്ങളുടേയും ഗുണത്തിന്റെ ആകെത്തുകയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. $\sum\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ ഒരു സമയം മൂന്ന് എടുത്ത എല്ലാ മൂലങ്ങളുടെയും ഗുണത്തിന്റെ ആകെതുകയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. അതുപോലെ ക്വാർട്ടിക് സമീകരണത്തിന്റെ മൂലകളാണ് $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ അതുകൊണ്ട് $\sum\alpha_1$ നെ എഴുതുന്നത് $\sum\alpha$, $\sum\alpha_1\alpha_2$ യും $\sum\alpha\beta$ നെ എഴുതുന്നത്, അതുകൊണ്ട് നമുക്ക്

$$\begin{aligned}
\sum\alpha &= \alpha+\beta+\gamma+\delta\\
\sum\alpha\beta &= \alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta\\
\sum\alpha\beta\gamma &= \alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta\\
\sum\alpha\beta\gamma\delta &= \alpha\beta\gamma\delta
\end{aligned}$$

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 103 14-02-2023 18:26:46

മൂലങ്ങൾ വ്യക്തമായ സംഖ്യാരൂപത്തിൽ ലഭ്യമാകുമ്പോൾ, ഞങ്ങൾ ഈ സൗകര്യപ്രദമായ നൊട്ടേഷനുകളും ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഉയർന്ന ഗുണിതത്തിന്റെ മൂലങ്ങൾ കൈകാര്യം ചെയ്യുമ്പോൾ നാം ശ്രദ്ധിക്കണം. ഉദാഹരണത്തിന് ഒരു ക്യൂബിക് സമവാക്യത്തിന്റെ മൂലങ്ങൾ $1, 2, 2$, ആണെങ്കിൽ $\sum\alpha = 5$, $\sum\alpha\beta = (1\times 2)+(1\times 2)+(2\times 2) = 8$

മൂലകങ്ങളിലുള്ള ചർച്ചയിൽ നിന്ന്, ഞങ്ങൾ ഒരു മോണിക് പോളിനോമിയൽ സമവാക്യത്തിന്, ആകെ തുക x^{n-1} ന്റെ ഗുണാങ്കം (-1) കൊണ്ട് ഗുണിച്ചതും മൂലങ്ങളുടെ ഗുണനം $(-1)^n$ എന്ന സ്ഥിരമായ പദമാണ്.

ഉദാഹരണം 3.3

α, β, γ എന്നിവ $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ മൂലങ്ങളുണ്ടെങ്കിൽ ഗുണാങ്കം $\sum\frac{1}{\beta\gamma}$ അടിസ്ഥാന മൂല്യം കണ്ടെത്തുക.

നിർദ്ധാരണം

α , β , γ എന്നീ സമവാക്യത്തിന്റെ മൂലകളാണ് $x^3 + px^2 + qx + r = 0$,

$$\sum\nolimits_1 \ \alpha+\beta+\gamma \ = -p \ , \ \sum\nolimits_3 \ \alpha\beta\gamma = -r \, .$$

$$\sum\frac{1}{\beta\gamma} \ = \frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}+\frac{1}{\alpha\beta} = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma} = \frac{-p}{-r} = \frac{p}{r} \ .$$

3.3.2 (c) തന്നിട്ടുള്ള മൂലങ്ങളിൽ നിന്ന് പോളിനോമിയൽ സമീകരണത്തിന്റെ രൂപീകരണം

മൂലങ്ങൾ അറിയണമെങ്കിൽ ദ്വിഘാത സമീകരണം നിർമ്മിക്കാൻ നമുക്ക് അറിയാം. മൂലങ്ങൾ അറിയാമെങ്കിൽ ഉയർന്ന കൃതിയിലുള്ള പോളിനോമിയൽ സമവാക്യങ്ങൾ എങ്ങനെ രൂപീകരിക്കാമെന്നാണ് ഇപ്പോൾ ഞങ്ങൾ പഠിക്കുന്നത് $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ മൂലങ്ങളായ കൃതി n ആയിട്ടുള്ള ഒരു പോളിനോമിയൽ സമീകരണം എങ്ങനെയാണ് നമ്മൾ കണ്ടുപിടിക്കുന്നത് ? ഘടകങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി പോളിനോമിയൽ സമീകരണം എഴുതുന്നതാണ് ഒരു മാർഗ്ഗം. അതായത് $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ മൂലങ്ങളായിട്ടുള്ള പോളിനോമിയൽ സമീകരണം

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots(x-\alpha_n) = 0$$

ആണ് എന്നാൽ പോളിനോമിയൽ സമീകരണം എഴുതുന്നതിനുള്ള സാധാരണ മാർഗ്ഗം അല്ല ഇത്. കൂടുതൽ കണക്ക് കൂട്ടൽ ഉൾപ്പെടുന്ന അടിസ്ഥാന രൂപത്തിലുള്ള പോളിനോമിയൽ സമീകരണമാണ് നമുക്ക് എഴുതേണ്ടത് എന്നാൽ ഗുണാങ്കങ്ങളും, മൂലങ്ങളും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം ഉപയോഗിച്ച് പോളിനോമിയൽ സമീകരണം നമുക്ക് നേരിട്ട് എഴുതാൻ സാധിക്കും. എന്ന് മാത്രമല്ല മുഴുവൻ പോളിനോമിയൽ സമീകരണവും കണ്ടുപിടിക്കാതെ പ്രത്യേകിച്ച് ഏതെങ്കിലും ഒരു x ഘാതത്തിന്റെ ഗുണാങ്കം എഴുതുക സാധ്യമാണ് .

α , β , γ എന്നീ ത്രിഘാത പോളിനോമിയൽ സമീകരണം

$$x^3 - (\alpha+\beta+\gamma)x^2 + (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma = 0 \, .$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ എന്നീ മൂലങ്ങളുള്ള ഒരു n ഡിഗ്രി പോളിനോമിയൽ $\sum\alpha_1, \sum\alpha_1\alpha_2, \sum\alpha_1\alpha_2\alpha_3, \ldots$ എന്നിവയെ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നു

$$x^n - \left(\sum\alpha_1\right)x^{n-1} + \left(\sum\alpha_1\alpha_2\right)x^{n-2} - \left(\sum\alpha_1\alpha_2\alpha_3\right)x^{n-3} + \cdots + (-1)^n\,\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n = 0$$

ഉദാഹരണമായി 1, -2, 3 എന്നീ മൂലങ്ങൾ ഉള്ള ഒരു പോളിനോമിയൽ സമീകരണം

$$x^3 - (1-2+3)x^2 + \big(1\times(-2)+(-2)\times 3+3\times 1\big)x - 1\times(-2)\times 3 = 0$$

ഇതിനെ ലഘൂകരിക്കുമ്പോൾ $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$.എന്ന് മാറുന്നു.

$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ എന്നത് $(x-1)(x+2)(x-3) = 0$ എന്ന വിപുലീകരണം പരിശോധിക്കുന്നതിന് താത്പര്യമാണ്.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 104 14-02-2023 18:26:56

ഉദാഹരണം 3.4

$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e = 0$, $a \neq 0$ എന്ന സമീകരണത്തിന്റെ മൂലങ്ങളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുക കാണുക?

നിർദ്ധാരണം

$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e = 0$ എന്ന സമീകരണത്തിന്റെ മൂലങ്ങൾ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

നമുക്ക് കിട്ടുന്നത്

$$\sum_1 = \alpha+\beta+\gamma+\delta = -\frac{b}{a},$$

$$\sum_2 = \alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta = \frac{c}{a},$$

$$\sum_3 = \alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta = -\frac{d}{a},$$

$$\sum_4 = \alpha\beta\gamma\delta = \frac{e}{a}.$$

ബീജഗണിത സർവ്വസമവാക്യം പ്രയോഗിച്ച്.

$$(a+b+c+d)^2 \equiv a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd),$$

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2 = (\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2-2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta)$$

$$= \left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\left(\frac{c}{a}\right)$$

$$= \frac{b^2-2ac}{a^2}.$$

ഉദാഹരണം 3.5

$x^3+ax^2+bx+c = 0$ എന്ന ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന്റെ മൂലങ്ങൾ $p:q:r$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ആകുന്നതിലുള്ള നിബന്ധന കാണുക .

നിർദ്ധാരണം

മൂലങ്ങളുടെ അംശബന്ധം $p:q:r$, $p\lambda, q\lambda, r\lambda$ എന്നീ മൂലങ്ങളെ അനുമാനിക്കുക.

$$\sum_1 = p\lambda+q\lambda+r\lambda = -a, \quad \ldots.(1)$$

$$\sum_2 = (p\lambda)(q\lambda)+(q\lambda)(r\lambda)+(r\lambda)(p\lambda) = b, \quad \ldots.(2)$$

$$\sum_3 = (p\lambda)(q\lambda)(r\lambda) = -c, \quad \ldots.(3)$$

നമുക്ക് കിട്ടുന്നു

$$(1) \Rightarrow \lambda = -\frac{a}{p+q+r} \quad \ldots.(4)$$

$$(3) \Rightarrow \lambda^3 = -\frac{c}{pqr} \quad \ldots..(5)$$

സമവാക്യം (4) നെ (5), ൽ കൊടുക്കുക

$$\left(-\frac{a}{p+q+r}\right)^3 = -\frac{c}{pqr} \Rightarrow pqra^3 = c(p+q+r)^3.$$

ഉദാഹരണം 3.6

$x^3+ax^2+bx+c = 0$ എന്ന ഘന സമവാക്യത്തിന്റെ മൂലങ്ങളുടെ വർഗ്ഗങ്ങൾ മൂലങ്ങളായി വരുന്ന സമീകരണം രൂപീകരിക്കുക.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 105 14-02-2023 18:27:12

നിർദ്ധാരണം

α, β, γ എന്നതിന്റെ മൂലങ്ങൾ $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

$$\sum_1 = \alpha + \beta + \gamma = -a, \quad \ldots.(1)$$

$$\sum_2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = b, \quad \ldots.(2)$$

$$\sum_3 = \alpha\beta\gamma = -c. \quad \ldots.(3)$$

$\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ എന്ന മൂലങ്ങൾ രൂപീകരിക്കുന്ന രീതി

അതുകൊണ്ട് (1), (2), (3), നിന്നും:

$$\sum_1 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = (-a)^2 - 2(b) = a^2 - 2b,$$

$$\sum_2 = \alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 = (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 - 2((\alpha\beta)(\beta\gamma) + (\beta\gamma)(\gamma\alpha) + (\gamma\alpha)(\alpha\beta))$$

$$= (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 - 2\alpha\beta\gamma(\beta + \gamma + \alpha) = (b)^2 - 2(-c)(-a) = b^2 - 2ca$$

$$\sum_3 = \alpha^2\beta^2\gamma^2 = (\alpha\beta\gamma)^2 = (-c)^2 = c^2.$$

ആയതിനാൽ ആവശ്യമായ സമവാക്യം

$$x^3 - \left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right)x^2 + \left(\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2\right)x - \alpha^2\beta^2\gamma^2 = 0.$$

$$x^3 - \left(a^2 - 2b\right)x^2 + \left(b^2 - 2ca\right)x - c^2 = 0.$$

ഉദാഹരണം 3.7

p വാസ്തവികമാണെങ്കിൽ $4x^2 + 4px + p + 2 = 0$ എന്ന സമീകരണത്തിന്റെ സ്വഭാവം p എന്നത് അടിസ്ഥാനമാക്കി ചർച്ച ചെയ്യുക.

നിർദ്ധാരണം

വിവേചനം $\Delta = (4p)^2 - 4(4)(p+2) = 16(p^2 - p - 2) = 16(p+1)(p-2)$ അതുകൊണ്ട്, നമുക്ക് കിട്ടുന്നത്.

$\Delta < 0$ എങ്കിൽ $-1 < p < 2$

$\Delta = 0$ എങ്കിൽ $p = -1$, $p = 2$

$\Delta > 0$ എങ്കിൽ $-\infty < p < -1$ അല്ലെങ്കിൽ $2 < p < \infty$

തന്നിരിക്കുന്ന പോളിനോമിയൽ

സാങ്കൽപിക മൂല്യം എങ്കിൽ $-1 < p < 2$;

തുല്യയഥാർത്ഥ മൂല്യം എങ്കിൽ $p = -1$ അല്ലെങ്കിൽ $p = 2$;

വ്യത്യസ്ത യഥാർത്ഥ മൂല്യം എങ്കിൽ $-\infty < p < -1$ അല്ലെങ്കിൽ $2 < p < \infty$.

അഭ്യാസം 3.1

1. ഒരു സമചതുര ബോക്സിന്റെ വശങ്ങൾ യഥാക്രമം 1, 2, 3 യൂണിറ്റ് വർദ്ധിപ്പിക്കുകയാണെങ്കിൽ വ്യാപ്തം 52 യൂണിറ്റ് വർദ്ധിപ്പിക്കുന്നു. അതു കൊണ്ട് സമചതുര ഘനികയുടെ വ്യാപ്തം കാണുക.
2. (i) $1, 2$ ഉം 3 (ii) $1, 1$ ഉം -2 (iii) $2, \frac{1}{2}$ ഉം 1. എന്നിവ ദ്വിഘാത സമവാക്യത്തിന്റെ മൂലങ്ങളാണെന്ന് പരിഹരിക്കുക
3. α, β, γ aഎന്നിവ എന്ന ത്രിഘാത ബഹുപദത്തിന്റെ മൂലകങ്ങളാണെങ്കിൽ താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള മൂലകങ്ങളോടു കൂടിയ ത്രിഘാത ബഹുപദം രൂപീകരിക്കുക $x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0$,

   (i) $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$ (ii) $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ (iii) $-\alpha, -\beta, -\gamma$
4. മൂലത്തിന്റെ ഗുണനം 1 ആണെങ്കിൽ $3x^3 - 16x^2 + 23x - 6 = 0$ എന്നിവയുടെ സമവാക്യങ്ങൾ തെളിയിക്കുക.
5. $2x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 3 = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ മൂലകളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുക കാണുക.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 106 14-02-2023 18:27:28

6. രണ്ട് മൂലകളുടെ അംശബന്ധം $x^3-9x^2+14x+24=0$ എങ്കിൽ $3:2$ എന്ന സമീകരണം തെളിയിക്കുക.

7. α,β , γ എന്ന പോളിനോമിയൽ സമീകരണത്തിന്റെ മൂലങ്ങൾ $ax^3+bx^2+cx+d=0$, എങ്കിൽ ഗുണാങ്കത്തിന്റെ പദം $\sum\frac{\alpha}{\beta\gamma}$ എന്നിവയുടെ വില കാണുക.

8. α,β,γ , δ എന്ന പോളിനോമിയൽ സമീകരണത്തിന്റെ മൂലങ്ങൾ $2x^4+5x^3-7x^2+8=0$, എങ്കിൽ പൂർണ്ണാങ്ക ഗുണാങ്കത്തിന്റെ ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന്റെ മൂലങ്ങളും $\alpha+\beta+\gamma+\delta$, $\alpha\beta\gamma\delta$.

9. $lx^2+nx+n=0$ എന്ന സമീകരണത്തിന്റെ മൂലങ്ങൾ p യും q യും ആണെങ്കിൽ $\sqrt{\frac{p}{q}}+\sqrt{\frac{q}{p}}+\sqrt{\frac{n}{l}}=0$ എന്ന് കാണുക .

10. $x^2+px+q=0$, $x^2+p'x+q'=0$ എന്നീ സമീകരണത്തിന് ഒരു പൊതു മൂലമുണ്ട് അതിന് തുല്യ $\frac{pq'-p'q}{q-q'}$ അല്ലെങ്കിൽ $\frac{q-q'}{p'-p}$ എന്ന് കാണുക.

11. 12 മിറ്റർ ഉയരമുള്ള മരം രണ്ടായി മുറിഞ്ഞു. മുറിഞ്ഞു വീണ ഭാഗത്തിന്റെ നീളത്തിന്റെ ഘന മൂലമാണ് ബാക്കി നിൽക്കുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ ഉയരം എന്ന് കണ്ടെത്തി. മുറിച്ച് മാറ്റപ്പെട്ട ഭാഗത്തിന്റെ ഉയരം കാണുന്നതിനുള്ള സൂത്രം ഗണിത ശാസ്ത്ര പ്രശ്നമായി രൂപപ്പെടുത്തുക.

3.4 ബഹുപദ വ്യംജകങ്ങളുടെ മൂലകങ്ങളുടെ സ്വഭാവവും, ഗുണാങ്കങ്ങളുടെ സ്വഭാവവും

3.4.1 സാങ്കൽപ്പിക മൂലങ്ങൾ

$\alpha+i\beta$, $\alpha-i\beta$ എന്നീ മൂലങ്ങളുള്ള ദ്വിഘാത സമവാക്യത്തിന്റെ യഥാർത്ഥ ഗുണാങ്കങ്ങൾ. ഉയർന്നഡിഗ്രി പോളിനോമിയലുകൾക്കും ഇത് ശരിയാണെന്ന് ഈ വിഭാഗത്തിൽ ഞങ്ങൾ തെളിയിക്കും.

സമവാക്യ സിദ്ധാന്തത്തിലെ വളരെ പ്രധാനപ്പെട്ട സിദ്ധാന്തങ്ങളിലൊന്ന് ഞങ്ങൾ ഇപ്പോൾ തെളിയിക്കുന്നു.

സിദ്ധാന്തം 3.2 (സങ്കീർണ്ണമായ സംയോജിത മൂല സിദ്ധാന്തം)

ഒരു സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യ z_0 യഥാർത്ഥ ഗുണാങ്കങ്ങളുള്ള ഒരു പോളിനോമിയൽ സമവാക്യത്തിന്റെ മൂലമാണെങ്കിൽ അതിന്റെ സങ്കീർണ്ണമായ സംയോജന $\overline{z}_0$ ഒരു മൂലമാണ്.

തെളിവ്

$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_o=0$ എന്നത് യഥാർത്ഥ ഗുണാങ്കങ്ങളുള്ള ഒരു പോളിനോമിയൽ സമവാക്യം. പോളിനോമിയൽ സമവാക്യം പോളിനോമിയൽ സമവാക്യത്തിന്റെ മൂലങ്ങളാണ്. z_0 അതുകൊണ്ട്, $P(z_0)=0$.

$$\begin{aligned}
P(\overline{z_0}) &= a_n\overline{z}_0^n+a_{n-1}\overline{z}_0^{n-1}+\cdots+a_1\overline{z}_0+a_0\\
&= a_n\overline{z_0^{\,n}}+a_{n-1}\overline{z_0^{\,n-1}}+\cdots+a_1\overline{z_0}+a_0\\
&= \overline{a_n}\,\overline{z_0^{\,n}}+\overline{a_{n-1}}\,\overline{z_0^{\,n-1}}+\cdots+\overline{a_1}\,\overline{z_0}+\overline{a_0} \quad (a_r=\overline{a_r} \text{ എല്ലാ } r \text{ ന്റെ യും യഥാർത്ഥ } a_r \text{ ആണ്})\\
&= \overline{a_nz_0^{\,n}}+\overline{a_{n-1}z_0^{\,n-1}}+\cdots+\overline{a_1z_0}+\overline{a_0}\\
&= \overline{a_nz_0^{\,n}+a_{n-1}z_0^{\,n-1}+\cdots+a_1z_0+a_0} \quad = \overline{P(z_0)}=\overline{0}=0\,.
\end{aligned}$$

അതായത് $P(\overline{z}_0)=0$; ഇത് സൂചിപ്പിക്കുന്നത് z_0 ഒരു മൂലം ആയിരിക്കുമ്പോൾ (അതായത് $P(z_0)=0$), അതിന്റെ സംയോജിത $\overline{z}_0$ യും ഒരു മൂലമാണ്. ■

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 107 14-02-2023 18:27:42

2 ഒരു സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയാണോ എന്ന ഒരാളുടെ ചോദ്യത്തിന് അതെ എന്ന് ഉത്തരം നൽകാൻ അധികം കുട്ടികൾക്കും സംശയമാണ്. എല്ലാ പൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾ പരിമേയ സംഖ്യകൾ എന്നത് പോലെ എല്ലാം വാസ്തവിക സംഖ്യകളും സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകളാണെന്ന് നമുക്ക് അറിയാം. അതിനാൽ വ്യക്തമായി പ്രതിപാതിയ്ക്കാനുള്ളത് ഒരു സങ്കീർങ്ങ സംഖ്യ വാസ്തവിക സംഖ്യയല്ല എന്നാണ്. അത് വ്യക്തമാക്കാനായി $\beta \neq 0$ ആയിട്ടുള്ള $\alpha + i\beta$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ള സംഖ്യകളെ വാതവികമല്ലാത്ത സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യ എന്ന പദം ഉപയോഗിച്ച് നാം സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ചില രചിതാക്കൾ ഇത്തരം സംഖ്യകളെ സാങ്കല്പിക സംഖ്യയെന്നും വിളിക്കാറുണ്ട്

നിരൂപണം 1

$\beta \neq 0$ ആകുന്ന $\overline{z}_0 = \alpha - i\beta$ എന്ന് പരിഗണിച്ചാൽ, $z_0 = \alpha + i\beta$, $\alpha + i\beta$ ഗുണാങ്കങ്ങൾ വാസ്ത വികമായുള്ള $P(x) = 0$ എന്ന പോളിനോമിയൽ സമീകരണത്തിന്റെ ഒരു മൂലം $\alpha - i\beta$ ആയാൽ സങ്കീർണ്ണ സംയോജന മൂല സിദ്ധാന്തം (Complex Conjugate Root Theorem) അനുസരിച്ച് $\alpha - i\beta$ യും $P(x) = 0$ ത്തിന്റെ ഒരു മൂലം ആയിരിക്കും. സാധാരണയായി മേൽ പറഞ്ഞ പ്രസ്താവനയെ സങ്കീർണ്ണ മൂലങ്ങൾ ജോടികളായി ലഭിക്കുന്നു എന്ന് പറയാം. എന്നാൽ യഥാർത്ഥത്തിൽ ഇത് അർത്ഥമാക്കുന്നത് പോളിനോമയൽ സമീകരണത്തിന്റെ ഗുണാങ്കങ്ങൾ വാസ്തമായിരിക്കേ വാസ്തവമല്ലാത്ത സങ്കീർണ്ണ മൂലങ്ങൾ അഥവാ സാങ്കൽപിക മൂലങ്ങൾ സംയോജന ജോടികളായിരിക്കും

നിരൂപണം 2

ഇതിൽ നിന്ന് വാസ്തവിക ഗുണാങ്കങ്ങളുള്ള കൃതി സംഖ്യയായിട്ടുള്ള ഏതൊരു പോളിനോമിയൽ സമീകരണത്തിനും കുറഞ്ഞത് ഒരു വാസ്തവിക മൂലമായിരിക്കും. ഉണ്ടാകും. യഥാർത്ഥത്തിൽ വാസ്തവിക ഗുണാങ്കങ്ങളുള്ള കൃതി ഒറ്റ സംഖ്യയായുള്ള പാളിനോമിയൽ സമീകരണത്തിന്റെ വാസ്തവിക മൂലങ്ങളുടെ എണ്ണം എല്ലായിപ്പോഴും ഒറ്റ സംഖ്യയായിരിക്കും. അതുപോലെ വാസ്തവിക ഗുണാങ്കങ്ങളുള്ള ഇരട്ട കൃതിയിലുള്ള ഒരു പോ ളിനോമിയൽ സമീകരണത്തിന്റെ വാസ്തവിക മൂലങ്ങളുടെ എണ്ണം എല്ലായിപ്പോഴും ഒരു ഇരട്ട സംഖ്യയായിരിക്കും.

ഉദാഹരണം 3.8

$2 - \sqrt{3}\,i$ ഒരു മൂലമായിട്ടുള്ള വാസ്തവിക ഗുണാങ്കങ്ങൾ ഉള്ളതുമായോ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ കൃതിയിലുള്ള ഏകഘാത പോളിനോമിയൽ സമീകരണം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$2 - \sqrt{3}\,i$ ആവശ്യപ്പെട്ട ഒരു വാസ്തവിക ഗുണാങ്കങ്ങളുള്ള പോളിനോമിയലിന്റെ ഒരു മൂലമായതിനാൽ $2 + \sqrt{3}\,i$ യും ഒരു മൂലം ആയിരിക്കും. ആയതിനാൽ മൂലങ്ങളുടെ തുക 4 മൂലങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം 7 ആണ്. അതുകൊണ്ട് $x^2 - 4x + 7 = 0$ ആണ് ആവശ്യപ്പെട്ട ഏകഘാത പോളിനോമിയൽ സമീകരണം.

3.4.2 അപരിമേയ മൂലങ്ങൾ

$ax^2 + bx + c = 0$ എന്ന ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന്റെ ഗുണാങ്കങ്ങളെ പരിമേയങ്ങളായി തന്നെ നിയന്ത്രിക്കു കയാണെങ്കിൽ നമുക്ക് ചില രസകരമായ ഫലങ്ങൾ ലഭിക്കും. a, b, c എന്നിവ പരിമേയങ്ങളായിട്ടുള്ള ദ്വിഘാത സമീകരണം $ax^2 + bx + c = 0$ യെ നമ്മൾ പരിഗണി,ാം. സാധാരണയായി $\Delta = b^2 - 4ac$ എന്നും r_1, r_2 എന്നിവ മൂലങ്ങളും പരിഗണിക്കാം. ഈ സാഹചര്യത്തിൽ $\Delta = 0$ ആകുമ്പോൾ $r_1 = r_2$ എന്ന് കിട്ടും; ഈ മൂലം ഒരു വാസ്തവിക മാത്രമല്ല ഒരു പരിമേയ സംഖ്യ കൂടിയായിരിക്കും.

Δ പോസിറ്റീവ് ആകുമ്പോൾ $\sqrt{\Delta}$ യുടെ വില $\mathbb{R}$ ൽ നിലനിൽക്കുന്നുയെന്നും രണ്ട് വ്യത്യാസ വാസ്തവിക മൂലങ്ങൾ നമുക്ക് ലഭിക്കും എന്നും നിസംശയം പറയാം. എന്നാൽ a, b, c എന്നിവയുടെ ചില മൂല്യങ്ങൾക്ക് $\sqrt{\Delta}$ പരിമേയമാകുകയും മറ്റു വിലകൾക്ക് അപരിമേയമാകുകയും ചെയ്യും.

$\sqrt{\Delta}$ പരിമേയമാണെങ്കിൽ r_1, r_2 എന്നിവ രണ്ടും പരിമേയമായിരിക്കും.

$\sqrt{\Delta}$ അപരിമേയമാണെങ്കിൽ r_1, r_2 എന്നിവ രണ്ടും അപരിമേയമായിരിക്കും.

ഉടനെ പെട്ടെന്ന് നമുക്ക് കിട്ടുന്ന ചോദ്യം $\Delta > 0$ എങ്കിൽ $\sqrt{\Delta}$ എപ്പോൾ പരിമേയമാകും എപ്പോൾ അപരി മേയമാകും? ഈ ചോദ്യത്തിന് ഉത്തരം നല്കാൻ ഗുണാങ്കങ്ങൾ പരിമേയ സംഖ്യകളായിരുന്നാൽ Δ യും പരി മേയമാകും എന്നത് ആദ്യം നമ്മൾ നിരീക്ഷിക്കേണ്ടതാണ്. അതു $(m, n) = 1$ ആയാൽ ചില പോസിറ്റീവ് പൂർ ണ്ണാങ്കങ്ങൾ m നും n നും $\Delta = \frac{m}{n}$ ആയിരിക്കും. ഇവിടെ (m, n) എന്നത് m ന്റെയും n ന്റെയും ഉ.സ.ഭ യാണ്

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 108 14-02-2023 18:27:53

സൂചിപ്പിക്കുന്നത്. ഇപ്പോൾ $\sqrt{\Delta}$ പരിമേയം എങ്കിലും എങ്കിൽ മാത്രവും m നും n നും പൂർണ്ണ വർഗ്ഗങ്ങളാണ് എന്നത് എളുപ്പത്തിൽ മനസ്സിലാക്കാം. ഇത് കൂടാതെ $\sqrt{\Delta}$ അപരിമേയം എങ്കിലും എങ്കിൽ മാത്രവും m, n എന്നിവയിൽ ഏതെങ്കിലും ഒന്ന് ഒരു പൂർണ്ണ വർഗ്ഗമായിരിക്കും.

p യും q യും പരിമേയ സംഖ്യകളും $\sqrt{q}$ അപരിമേയായ $p+\sqrt{q}$ എന്ന തരത്തിലുള്ള അപരിമേയ സംഖ്യകൾ നമുക്ക് പരിചിതമാണ്. ഇത്തരത്തിൽ ഉള്ള സംഖ്യകളെ കരിണികൾ **(surds)** എന്ന് വിളിക്കുന്നു. സാങ്കൽപിക മൂലങ്ങളുടെ കാര്യത്തിൽ എല്ലാ ഗുണാങ്കങ്ങൾ പരിമേയ സംഖ്യകളായിട്ടുള്ള ഒരു പോളിനോമിലിന്റെ ഒരു മൂലമാണ് $p+\sqrt{q}$ എങ്കിൽ $p-\sqrt{q}$ എന്നത് അതേ പോളിനോമിയൽ സമീകരണത്തിന്റെ മറ്റൊരു മൂലമായിരിക്കും എന്ന് നമുക്ക് തെളിയിക്കാൻ കഴിയുന്നു. ഏത് കൃതിയിലുള്ള പോളിനോമിയൽ സമീകരണത്തിന് ഇത് ശരിയാണെങ്കിലും സാങ്കല്പിക മൂലങ്ങളുടെ തെളിവ് ഉപയോഗിക്കുന്ന രീതി ഉപയോഗിച്ച് ഇത് തെളിയിക്കാവുന്നതാണ്. സിദ്ധാന്തം 3.3 ൽ ഉള്ള ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന് മാത്രമായി ഇത് നാം പ്രസ്താവിക്കുകയും തെളിയിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു.

സിദ്ധാന്തം തെളിയിക്കുന്നതിന് മുൻപായി, $a+bc$ ഒരു പരിമേയ സംഖ്യയായിട്ടുള്ളതും, a യും b യും പരിമേയ സംഖ്യകളും c ഒരു അപരിമേയ സംഖ്യയാണെങ്കിൽ b യുടെ വില പൂജ്യമായിരിക്കണം എന്നും അത് കൂടാതെ $a+bc=0$ ആണെങ്കിൽ a യും b യും പൂജ്യമായിരിക്കണമെന്നും നാം ഓർക്കേണ്ടതാണ്

ഉദാഹരണമായി $a+b\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$ എങ്കിൽ b യുടെ വില പൂജ്യമായിരിക്കും. $a+b\sqrt{2}=0$ ആണെങ്കിൽ $a=b=0$ ആയിരിക്കും. ഇപ്പോൾ ഇവിടെ തന്നിട്ടുള്ള പൊതുവായ ഫലം പ്രസ്താവിക്കുകയും തെളിയിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു.

സിദ്ധാന്തം 3.3

$\sqrt{q}$ അപരിമേയമാകുന്ന പരിമേയസംഖ്യകളാണ് p യും q യും എന്നിരിക്കട്ടെ പരിമേയ സംഖ്യകൾ ഗുണാങ്കങ്ങളായിട്ടുള്ള ഒരു ദ്വിഘാത സമീകരണത്തിന്റെ ഒരു മൂലം $p+\sqrt{q}$ എങ്കിൽ അതേ സമീകരണത്തിന്റെ തന്നെ മറ്റേ മൂലം $p-\sqrt{q}$ ആയിരിക്കും.

തെളിവ്

ഈ സിദ്ധാന്തം തെളിയിക്കാനായി ദ്വിഘാത സമീകരണം ഒരു ഏകചര പോളിനോമിയൽ സമീകരണം എന്ന് അനുമാനിക്കാം. ഏക ചരമല്ലാത്ത പോളിനോമിയൽ സമീകരണങ്ങളുടെ ഫലങ്ങൾ നമുക്ക് ഇതേ രീതിയിൽ തന്നെ തെളിയിക്കാം.

$\sqrt{q}$ ഒരു അപരിമേയമാണെങ്കിൽ p യും q യും പരിമേയ സംഖ്യകളാണ് b യും c യും പരിമേയ സംഖ്യകളായിട്ടുള്ള സമീകരണം $x^2+bx+c=0$ എന്നതിന്റെ മൂലം $p+\sqrt{q}$ ആണ്.

α ഒരു മൂലം, മൂലങ്ങളുടെ തുക കണക്കാക്കിയാൽ നമുക്ക് കിട്ടുന്നത് $\alpha+p+\sqrt{q} = -b$

എങ്കിൽ $\alpha+\sqrt{q}=-b-p\in\mathbb{Q}$. എന്നത് $-b-p$ s എന്ന് എടുക്കുക, $\alpha+\sqrt{q}=s$.

നമുക്ക് കിട്ടുന്നത്

$$\alpha = s-\sqrt{q}\,.$$

മൂലങ്ങളുടെ ഗുണനം കണക്കാക്കിയാൽ, കിട്ടുന്ന

$$(s-\sqrt{q})(p+\sqrt{q}) = c$$

ആയതിനാൽ $(sp-q)+(s-p)\sqrt{q}=c\in\mathbb{Q}$. അതുകൊണ്ട് $s-p=0$, $s=p$ നമുക്ക് കിട്ടുന്നത് $\alpha=p-\sqrt{q}$. മറ്റേ മൂലം $p-\sqrt{q}$ ആയിരിക്കും. ■

നിരൂപണം

സിദ്ധാന്തം 3.3 ന്റെ പ്രസ്താവന കുഴയ്ക്കുന്ന ഒന്നാണ്. പരിമേയ ഗുണാങ്കങ്ങളുള്ള ഒരു പോളിനോമിയൽ സമീകരണത്തിന്റെ അപരിമേയ മൂലങ്ങൾ ജോടികളായി ലഭിക്കും. എന്ന രീതിയിൽ സിദ്ധാന്തത്തെ ഹ്രസ്വമാക്കുന്നതിന് നമ്മൾ തിടുക്കപ്പെടരുത്. ഇത് ശരിയല്ല.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 109 14-02-2023 18:28:05

ഉദാഹരണത്തിന് $x^3-2=0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന് ഒരു അപരിമേയ മൂല മാത്രമേയുള്ളൂ അത് $\sqrt[3]{2}$ അതേ യുക്തിപരമായ രണ്ട് മൂലങ്ങൾ സാങ്കൽപിക സംഖ്യകളാണ് (അവ എന്തൊക്കെയാണ്).

ഉദാഹരണം 3.9

$2-\sqrt{3}$ ഒരു മൂലമുള്ള സങ്കീർണ്ണ ഗുണാങ്കങ്ങളുള്ള ചെറിയ ഡിഗ്രിയുടെ പോളിനോമിയൽ സമവാക്യം കണ്ടെത്തുക?

നിർദ്ധാരണം

$2-\sqrt{3}$ ഒരു മൂലവും സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയുടെ ഗുണാങ്കവും അതിൽ $2+\sqrt{3}$ ഒരു മൂലവുമുണ്ട്. ആവശ്യമുള്ള പോളിനോമിയൽ സമവാക്യം തന്നിട്ടുണ്ട്

$$x^2-(\text{മൂലങ്ങളുടെ തുക})\ x+\text{മൂലങ്ങളുടെ ഗുണനം}=0$$

അതുകൊണ്ട്, $x^2-4x+1=0$ ഒരു ആവശ്യമായ സമവാക്യമാണ്.

കുറിപ്പ്

"പരിമേയ ഗുണാങ്കങ്ങൾ" എന്ന പദം വളരെ പ്രധാനമാണെന്ന് ഞങ്ങൾ ശ്രദ്ധിക്കുന്നു. അല്ലാത്തപക്ഷം $x-(2-\sqrt{3})=0$ ഒരു പോളിനോമിയൽ സമവാക്യം, അത് $2-\sqrt{3}$ മൂലയായി ഉണ്ടെങ്കിലും $2+\sqrt{3}$ അല്ല. തെളിവില്ലാതെ ഞങ്ങൾ ഇനിപ്പറയുന്ന ഫലം പ്രസ്താവിക്കുന്നു.

സിദ്ധാന്തം 3.4

$\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$ എന്നിവ അപരിമേയ സംഖ്യകളായ രണ്ട് പരിമേയ സംഖ്യകൾ p , q എന്ന് എടുത്താൽ, ഇവിടെ $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$ എന്നിവയിൽ ഒന്ന് മറ്റൊന്നിന്റെ പരിമേയ ഗുണിതമല്ല. $\sqrt{p}+\sqrt{q}$ എന്നത് ഒരു പരിമേയ ഗുണാങ്കങ്ങളുള്ള ഒരു പോളിനോമിലിന്റെ ഒരു മൂലമാണെങ്കിൽ $\sqrt{p}-\sqrt{q}, -\sqrt{p}+\sqrt{q}$, $-\sqrt{p}-\sqrt{q}$ എന്നിവയിലും അതേ പോളിനോമിലിന്റെ മൂലങ്ങളായിരിക്കും.

ഉദാഹരണം 3.10

ഒരു മൂല്യമായി $\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$ ഉള്ള പൂർണ്ണ ഗുണാങ്കത്തിന്റെ പോളിനോമിയൽ സമവാക്യം രൂപപ്പെടുത്തുക?.

നിർദ്ധാരണം

$\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$ ഒരു മൂലമാണ്, $x-\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$ ഒരു ഘടകം. വർഗ്ഗമൂലത്തിൽ വെളിയിലുള്ളതിനെ നീക്കം ചെയ്യണം $x+\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$ വേറൊരു ഘടകവും അതിന്റെ ഗുണനം കാണുക.

$$\left(x+\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}\right)\left(x-\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}\right)=x^2-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\ .$$

നമുക്ക് ഇപ്പോഴും ലക്ഷ്യത്തിൽ എത്താൻ സാധിക്കില്ല, അതുകൊണ്ട് വേറൊരു ഘടകത്തിനെ ചേർക്കുക $x^2+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ അങ്ങനെ അതിന്റെ ഗുണനം കാണുക

$$\left(x^2-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\left(x^2+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)=x^4-\frac{2}{3}\ .$$

$3x^4-2=0$ എന്നത് ആവശ്യമായ പോളിനോമിയൽ സമവാക്യത്തിന്റെ പൂർണ്ണ ഗുണാങ്കം.

സമവാക്യം പരിഹരിക്കാതെ തന്നിരിക്കുന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ മൂലങ്ങളുടെ സ്വഭാവം ഇപ്പോൾ ഞങ്ങൾ തിരിച്ചറിയുന്നു. നിഷേധാത്മകത, സമത്വം 0 മുതൽ സമത്വം $\Delta=b^2-4ac$ ന്റെ പോസിറ്റിവിറ്റി .

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 110 14-02-2023 18:28:17

3.4.3 പരിമേയ മൂലങ്ങൾ

ഒരു ദ്വിഘാത സമവാക്യത്തിന്റെ എല്ലാ ഗുണാങ്കങ്ങളും പൂർണ്ണ സംഖ്യകളാണെങ്കിൽ Δ ഒരു പൂർണ്ണ സംഖ്യയാണ്. അത് എപ്പോൾ പോസിറ്റീവ്, നമുക്ക് ഉണ്ട്. Δ പരിമേയ സംഖ്യയാണെങ്കിൽ Δ ഒരു തികഞ്ഞ പൂർണ്ണ വർഗ്ഗമാണെങ്കിൽ മാത്രം. മറ്റൊരു വിധത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ പൂർണ്ണ സംഖ്യയോട് കൂടിയ Δ, $ax^2+bx+c=0$ പരിമേയ സംഖ്യകൾക്ക് മൂലങ്ങളുണ്ട് എങ്കിൽ $\sqrt{\Delta}$ ഒരു തികഞ്ഞ പൂർണ്ണ വർഗ്ഗമാണെന്ന് മാത്രം.

പരിമേയ ഗുണാങ്കങ്ങളുള്ള പോളിനോമിയൽ സമീകരണങ്ങളെ കുറിച്ച് നാം ഇതുവരെ ചർച്ച ചെയ്ത് പൂർണ്ണാങ്ക ഗുണാങ്കങ്ങളായിട്ടുള്ള പോളിനോമിയൽ സമീകരണങ്ങളെ ഇവ ഉൾകൊള്ളുന്നു എന്നിവയാണ്. വാസ്തവത്തിൽ ഗുണാങ്കങ്ങളുടെ ഛേദങ്ങളുടെ പൊതു ഗുണിതം കൊണ്ട് പരിമേയ ഗുണാങ്കങ്ങളുള്ള ഒരു പോളിനോമിയലിനെ ഗുണിക്കുമ്പോൾ അതെ മൂലങ്ങൾ ഉള്ള പൂർണ്ണാങ്ക ഗുണാങ്കങ്ങളുള്ള മറ്റൊരു പോളിനോമിയൽ നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നു. തിർച്ചയായും, ഈ സാഹചര്യം നാം വളരെ ശ്രദ്ധാപൂർവ്വം കൈകാര്യം ചെയ്യേണ്ടതാണ്. ഉദാഹരണത്തിന് പരിമേയ ഗുണാങ്കങ്ങളുള്ള കൃതി ആയ ഏകഘാത പോളിനോമിയലിന് $\frac{1}{2}$ എന്ന ഒരു മൂലമുണ്ട് അതേ സമയം $\frac{1}{2}$ മൂലമായിട്ടുള്ള പൂർണ്ണാങ്ക ഗുണാങ്കങ്ങളുള്ള ഒരു ഏകപദം പോളിനോമിയൽ ഉണ്ടാകില്ല.

ഉദാഹരണം 3.11

$2x^2-6x+7=0$ ന്റെ യഥാർത്ഥ വിലയെ x എന്ന സമവാക്യം തൃപ്തികരമല്ല എന്ന് തെളിയിക്കുക?

നിർദ്ധാരണം

$\Delta=b^2-4ac=-20<0$. സാങ്കൽപിക സംഖ്യകളുടെ മൂലകളാണ്.



ഉദാഹരണം 3.12

$x^2+2(k+2)x+9k=0$ എന്നതിന് തുല്യ മൂലകളുണ്ടെങ്കിൽ k യുടെ വില കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

ഇവിടെ $\Delta=b^2-4ac=0$ തുല്യ മൂലങ്ങമാണ് $4(k+2)^2=4(9)k$ [. എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു $k=4$ അല്ലെങ്കിൽ 1 എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം 3.13

$x^2-2px+p^2-q^2+2qr-r^2=0$ എന്ന മൂലങ്ങളുടെ സമവാക്യം പരിമേയ സംഖ്യയാണെങ്കിൽ p,q,r എന്നിവ പരിമേയ സംഖ്യയെന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

പരിമേയ സംഖ്യയുടെ മൂലങ്ങൾ എങ്കിൽ $\Delta=b^2-4ac=(-2p)^2-4\left(p^2-q^2+2qr-r^2\right)$.

ഈ വ്യംജകം $4\left(q^2-2qr+r^2\right)$ അല്ലെങ്കിൽ $4(q-r)^2$ എന്നത് ഒരു പൂർണ്ണ വർഗ്ഗം അതുകൊണ്ട് മൂലങ്ങൾ പരിമേയ സംഖ്യയാണ്.

3.5 പോളിനോമിയൽ സമവാക്യങ്ങളുടെ ജ്യാമിതിയിലെ പ്രയോഗങ്ങൾ

ചില ജ്യാമിതീയ സവിശേഷതകൾ പോളിനോമിയൽ സമവാക്യങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് തെളിയിക്കപ്പെടുന്നു. കുറച്ച് ജ്യാമിതീയ സവിശേഷതകൾ ഞങ്ങൾ ഇവിടെ ചർച്ച ചെയ്യുന്നു.

ഉദാഹരണം 3.14

രണ്ടിൽ കൂടുതൽ ബിന്ദുക്കൾ ഒരു രേഖയേയും വൃത്തത്തേയും ഖണ്ഡിക്കുന്നില്ല എന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

അനുയോജ്യമായ രീതിയിൽ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ തെരഞ്ഞെടുക്കുക. $x^2+y^2=r^2$ എന്നത് വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യവും $y=mx+c$ എന്നത് നേർരേഖ സമവാക്യമാകുന്നു. വൃത്തത്തിന്റെ ബിന്ദുവും നേർരേഖയുടെ ബിന്ദുവും സമകാലിക സമവാക്യത്തെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തി ഖണ്ഡിക്കുന്നു എന്ന് നമുക്ക് അറിയാം

$$x^2+y^2=r^2 \qquad \ldots (1)$$

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 111 14-02-2023 18:28:26

$$y = mx + c \qquad \ldots (2)$$

(1) ൽ, y യ്ക്ക് പകരം $mx + c$ എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിക്കുന്നു. നമുക്ക്

$$x^2 + (mx + c)^2 - r^2 = 0$$

ദ്വിഘാത സമവാക്യത്തെ പോലെ

$$(1 + m^2)x^2 + 2mcx + (c^2 - r^2) = 0 . \qquad \ldots (3)$$

സമവാക്യത്തിന് രണ്ടിൽ കൂടുതൽ പരിഹാരങ്ങൾ ഉണ്ടാകരുത്, അതിനാൽ ഒരു വരിയും വൃത്തവും രണ്ട് ബിന്ദുക്കളിൽ കൂടുതൽ കടന്ന് പോകരുത്.

രണ്ട് ചരങ്ങളുള്ള രണ്ട് സമീകരണങ്ങളുടെ സമ്പ്രദായത്തെ പ്രതിസാവനം ഉപയോഗിച്ച് ഒരു ദ്വിഘാത സമീകരണം നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്ന പ്രശ്നമാക്കി മാറ്റുന്നത് രസകരമായ ഒന്നാണ്.

ഇത് കൂടാതെ നാം ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടത് ചുരുക്കിയ ദ്വിഘാത പോളിനോമിലിന്റെ ഗുണാങ്കങ്ങൾ വാസ്തവികമെങ്കിൽ, രണ്ട് മൂലങ്ങളും വാസ്തവികം അല്ലെങ്കിൽ രണ്ടാം സാങ്കൽപികം ആയിരിക്കും. രണ്ടു മൂലങ്ങളും സാങ്കൽപിക സംഖ്യകൾ എങ്കിൽ വൃത്തവും, നേർരേഖയും പരസ്പരം ഖണ്ഡിക്കുന്നില്ല എന്ന് നമുക്ക് സമർഥിക്കാം. വാസ്തവിക മൂലങ്ങളുടെ കാര്യത്തിൽ ഒന്നുകിൽ അവ വ്യത്യസ്തം അല്ലെങ്കിൽ പോളിനോമിയലിന്റെ മൂലങ്ങളുടെ ഗുണികം ആയിരിക്കും. അവ വ്യത്യസ്തമാണെങ്കിൽ (2) ൽ പ്രതിസ്ഥാപിക്കുമ്പോൾ y യുടെ രണ്ട് മൂല്യങ്ങൾ നമുക്ക് ലഭിക്കുകയും അതിലൂടെ രണ്ട് പ്രതിഛേദ ബിന്ദുക്കളും ലഭിക്കുന്നു. തുല്യ മൂലങ്ങളാണ് നമുക്ക് ഉള്ളതെങ്കിൽ നേർരേഖ വൃത്തത്തെ സ്പർശിക്കുന്ന ഒരു സ്പർശ രേഖയായിരിക്കുമെന്ന് നമുക്ക് പറയാം. പോളിനോമിയൽ (3) ന് ലളിതമായ ഒരേ ഒരു വാസ്തവിക മൂലം ഇല്ല എങ്കിൽ ഒരു രേഖ വൃത്തത്തെ ഒരേ ഒരു ബിന്ദുവിൽ ഖണ്ഡിക്കുകയില്ല.

കുറിപ്പ്

തെളിയിക്കാൻ 3.14 ഉദാഹരണത്തിൽ ഉപയോഗിച്ചതിന് സമാനമായ ഒരു സാങ്കേതിക വിദ്യ ക്രമീകരിക്കാം

- രണ്ട് വൃത്തങ്ങൾക്ക് രണ്ട് ബിന്ദുവിൽ കൂടുതൽ വിഭജിക്കാൻ കഴിയില്ല.
- ഒരു വൃത്തത്തിനും ദീർഘ വൃത്തത്തിനും നാല് ബിന്ദുവിൽ കൂടുതൽ വിഭജിക്കാൻ കഴിയില്ല.

അഭ്യാസം 3.2

1. k യഥാർത്ഥമാണെങ്കിൽ k ന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ $2x^2 + kx + k = 0$ എന്ന പോളിനോമിയൽ സമവാക്യത്തിന്റെ മൂലകളുടെ സ്വഭാവം ചർച്ച ചെയ്യുക?.
2. $2 + \sqrt{3}i$ എന്ന മൂല്യം ഉപയോഗിച്ച് പരിമേയ ഗുണാങ്കത്തിന്റെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ (മിനിമം) ഡിഗ്രി പോളിനോമിയൽ സമവാക്യം കണ്ടെത്തുക.
3. $2i + 3$ എന്ന മൂല്യം ഉപയോഗിച്ച് പരിമേയ ഗുണാങ്കത്തിന്റെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ (മിനിമം) ഡിഗ്രി പോളിനോമിയലിന്റെ സമവാക്യം കണ്ടെത്തുക.
4. $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ എന്ന മൂല്യം ഉപയോഗിച്ച് പരിമേയ ഗുണാങ്കത്തിന്റെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ (മിനിമം) ഡിഗ്രി പോളിനോമിയലിന്റെ സമവാക്യം കണ്ടെത്തുക.
5. ഒരു നേർരേഖയ്ക്കും പരാബോളയ്ക്കും രണ്ട് ബിന്ദുവിൽ കൂടുതൽ വിഭജിക്കാൻ കഴിയില്ലെന്ന് തെളിയിക്കുക.

3.6 ഉയർന്ന കൃതിയുള്ള പോളിനോമിയൽ സമീകരണങ്ങളുടെ മൂലങ്ങൾ

സമീകരണം $P(x) = 0$ എന്നതിന് ഒരു പോളിനോമിയൽ സമീകരണമെന്ന് വിളിക്കാം എന്ന് നമുക്ക് അറിയാം. പോളിനോമിയൽ സമീകരണത്തിന്റെ മൂലം അഥവാ പൂജ്യം അതിന്റെ പോളിനോമിയൽ സമീകരണത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണത്തിന് സമമാണ്. അതിനാൽ ഈ രണ്ട് സാങ്കേതികതയും നമുക്ക് ഉപയോഗിക്കാം.

ഒരു സംഖ്യ ഒരു പോളിനോമിയൽ സമീകരണത്തിന്റെ മൂലമാണോ അല്ലയോ എന്ന് പ്രതിസ്ഥാവനത്തിലൂടെ വളരെ എളുപ്പത്തിൽ സമർപ്പിക്കാനാകുമെന്ന് നമുക്ക് അറിയാം. എന്നാൽ മൂലങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുമ്പോൾ, ദ്വിഘാത സമീകരണമാണെങ്കിൽ പ്രശ്നം ലളിതവും ഉയർന്ന കൃതിയിലുള്ള പോളിനോമിലിക് പൊതുവെ എളുപ്പവുമല്ല.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 112 14-02-2023 18:28:32

ഗുണാങ്കങ്ങൾ, നാല് അടിസ്ഥാനഗണിത ക്രിയകൾ (സങ്കലനം, ഗുണനം, വ്യവകലനം, ഹരണം) പരിമേയ ഘാതങ്ങൾ (വർഗ്ഗം, ഘനം, വർഗ്ഗമൂലം, ഘനമൂലം തുടങ്ങിയ പരിമേയ സംഖ്യയുടെ ഘാതം) തുടങ്ങിയവ ഉപയോഗിച്ച് എഴുതാവുന്ന ഒരു പോളിനോമിയൽ സമീകരണത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണത്തെ സമ്മൂലമായ നിർദ്ധാരണം എന്ന് വിളിക്കുന്നു. അഞ്ചോ അതിൽ കൂടുതലോ കൃതിയായിട്ടുള്ള പൊതുവായ പോളിനോമിയൽ സമീകരണത്തിന്റെ സമ്മൂലമായ നിർദ്ധാരണം എഴുതുക എന്നത് അസാദ്യമെന്നാണ് ഏഞ്ചൽ തെളിയിച്ചിട്ടുള്ളത്.

EPBK6

ഉയർന്ന കൃതിയിലുള്ള പോളിനോമിയൽ സമീകരണങ്ങൾ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നതിന് പോളിനോമിയൽ സമീകരണങ്ങളെ കുറിച്ച് ഇനി നാം പ്രതിപാദിക്കുന്ന ചില ഫലങ്ങൾ ഉപയോഗപ്രദമാണ്.

- ഒരു ചരത്തിലുള്ള എല്ലാ പോളിനോമിലും $\mathbb{R}$ നിന്നും $\mathbb{R}$ ലേക്കുള്ള ഒരു തുടർ ഫലനമാണ് .
- ഇരട്ട കൃതിയുള്ള ഒരു പോളിനോമിയൽ സമീകരണം $P(x)=0$ ന് $P(x)\to\pm\infty$ ആകുമ്പോൾ $P(x)\to\infty$ ആണ്. അതിനാൽ ഇരട്ട കൃതിയുള്ള പോളിനോമിയിന്റെ ഗ്രാഫ് ഇടതു വശത്ത് മുകളിൽ നിന്ന് തുടങ്ങി വലതു വശത്ത് മുകളിൽ അവസാനിക്കുന്നു.
- 11 ാം തരത്തിലെ പാഠപുസ്തകത്തിൽ വൊളിയം I ൽ ഫലനങ്ങളുടെ ഗ്രാഫ് വരയിൽ ചർച്ച ചെയ്യപ്പെട്ട എല്ലാ ഫലങ്ങളും പോളിനോമിയികളുടെ ഗ്രാഫിൽ പ്രയോഗിക്കാം. ഉദാഹരണത്തിന് ഒരു പോളിനോമി ലിന്റെ സ്ഥിരാങ്കം മാറുമ്പോൾ ഗ്രാഫ് മുകളിലേക്കോ താഴേക്കോ മാത്രം മാറുന്നു.
- ഏത് പോളിനോമിലിനേയും എത്ര പ്രാവശ്യവും ഡിഫർൻസേറ്റ് ചെയ്യാവുന്നതാണ്.
- $P(x)=0$ എന്ന പോളിനോമിയൽ സമീകരണത്തിന്റെ വാസ്തവിക മൂലങ്ങൾ $P(x)=0$ യുടെ ഗ്രാഫ് x അക്ഷത്തെ ഖണ്ഡിക്കുന്ന x അക്ഷത്തിലെ ബിന്ദുക്കളായിരിക്കും.
- $P(a)$ യും $P(b)$ യും വ്യത്യസ്ത ചിഹ്നങ്ങളാകുന്ന രണ്ടു വാസ്തവിക സംഖ്യകളാണ് a യും b യും എങ്കിൽ
  - $P(c)=0$ ആകുന്ന c എന്ന ഒരു ബിന്ദു സംഖ്യാ രേഖയിൽ ഉണ്ടാകും .
  - അതായത് a യ്ക്കും b യ്ക്കും ഇടയിൽ ഒരു മൂലം ഉണ്ടാകും.
  - ഇത്തരം ബിന്ദുക്കൾ ഇടയിൽ ഒരേ ഒരു മൂലം തന്നെ ഉണ്ടാകണമെന്ന് നിർബന്ധമില്ല $3,5,7,\ldots$ തുടങ്ങി എണ്ണം മൂലങ്ങളും ഉണ്ടാകാം. അതായത് a യും b യ്ക്കും ഇടയിലുള്ള വാസ്തവിക മൂലങ്ങളുടെ എണ്ണം ഒറ്റ സംഖ്യയായിരിക്കും, ഇരട്ടയാകില്ല.

എന്നിരുന്നാലും മൂലങ്ങളെ കുറിച്ചുള്ള ചില വിവരങ്ങൾ നമുക്ക് അറിയാമെങ്കിൽ നമുക്ക് മറ്റ് മൂലങ്ങൾ കാണാൻ ശ്രമിക്കാവുന്നതാണ്. ഉദാഹരണത്തിന് കൃതി 6 ആയിട്ടുള്ള പരിമേയ ഗുണാങ്കങ്ങളുള്ള ഒരു പോളിനോ മിയൽ സമീകരണത്തിന്റെ രണ്ടു മൂലങ്ങൾ $2+3i$ യും $4-\sqrt{5}$ യും എന്ന് അറിയാമെങ്കിൽ ഉടൻ തന്നെ $2-3i$ യും $4+\sqrt{5}$ നും പോളിനോമിയൽ സമീകരണത്തിന്റെ മൂലങ്ങളാണെന്ന് നമുക്ക് തീരുമാനിക്കാനാകും. അങ്ങനെ അന ുയോജ്യമായ ഘടകങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ഹരണം നടത്തിയാൽ പ്രസ്തുത പ്രശ്നത്തെ ചുരുക്കി രണ്ടാം കൃതിയിലുള്ള സമീകരണമാക്കി പ്രശ്നത്തെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യാം. ഈ ഭാഗത്ത് ചില വിവരങ്ങൾ നമുക്ക് ഉള്ളപ്പോൾ ഉയർന്ന കൃതിയലുള്ള പോളിനോമികളുടെ മുലങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിനുള്ള ചില മാർഗ്ഗങ്ങൾ നമുക്ക് പഠിക്കാം.

3.7 പോളിനോമിലിന്റെ കൂടുതൽ വിവരങ്ങൾ

ഉയർന്ന ഡിഗ്രി പോളിനോമിയലുകൾ പരിഹരിക്കാൻ കഴിയുന്നതിനെ കുറിച്ച് അധിക വിവരങ്ങൾ ചർച്ച ചെയ്യുന്നു. ചിലപ്പോൾ അധിക വിവരങ്ങൾ നേരിട്ട് നൽകും, അതായത്, ഒരു മൂലം $2+3i$ ചില സമയങ്ങളിൽ ആകെ തുക പോലുള്ള അധിക വിവരങ്ങൾ, പോളിനോമിയലിന്റെ നിരീക്ഷണങ്ങൾ വഴി കണ്ടെത്തേണ്ടതുണ്ട്.

3.7.1 സാങ്കൽപികവും കരിണിയുടെ മൂലങ്ങൾ

യഥാർത്ഥ ഗുണങ്ങളുള്ള ഒരു ദ്വിഘാത പോളിനോമിയലിന്റെ സാങ്കൽപ്പിക മൂലമാണ് $\alpha+i\beta$ എങ്കിൽ $\alpha-i\beta$ ഒരു മൂലം കൂടിയാണ് . അതിനാൽ $(x-(\alpha+i\beta))$, $(x-(\alpha-i\beta))$ എന്നിവ പോളിനോമിയലിന്റെ ഘടക ങ്ങളാണ്. അതിനാൽ അവരുടെ ഉൽപ്പന്നം ഒരു ഘടകമാണ്. മറ്റൊരു വിധത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ $x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2$ ഒരു ഘടകമാണ്. നമുക്ക് പോളിനോമിയലിനെ ഈ ഘടകവുമായി വിഭജിച്ച് അറിയാവുന്ന സാങ്കേതിക വിദ്യകളാൽ പരിഹരിക്കാവുന്ന രണ്ടാമത്തെ ഡിഗ്രി ഘടകങ്ങൾ നേടാം. ഇത് ഉപയോഗിച്ച് നമുക്ക് കണ്ടെത്താൻ കഴിയും. പോളിനോമിയലിന്റെ എല്ലാ മൂലങ്ങളും.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 113 14-02-2023 18:28:40

$2+\sqrt{3}$ എന്നത് പരിമേയ ഗുണാങ്കങ്ങളുള്ള ഒരു ദ്വിഘാത പോളിനോമിയൽ സമവാക്യത്തിന്റെ ഒരു മൂലമാണ്, തുടർന്ന് $2-\sqrt{3}$ ഒരു മൂലം കൂടിയാണ്. അതിനാൽ അവയുടെ ഗുണനം $(x-(2+\sqrt{3}))(x-(2-\sqrt{3}))$ ഒരു ഘടകമാണ്. അതായത് x^2-4x+1 ഒരു ഘടകമാണ്. ഞങ്ങൾ ഈ ഘടകവുമായി പോളിനോമിയലിനെ വിഭജിക്കാനും ഘടകത്തെ രണ്ടാമത്തെ ഡിഗ്രി ഘടകമായി നേടാനും അറിയാവുന്ന സാങ്കേതിക വിദ്യകളാൽ പരിഹരിക്കാനും കഴിയും. ഇത് ഉപയോഗിച്ച് ദ്വിഘാത സമവാക്യത്തിന്റെ എല്ലാ മൂലങ്ങളും നമുക്ക് കണ്ടെത്താൻ കഴിയും. ഈ $2+\sqrt{3}$ ന് കരിണികൾക്കും സാങ്കേതികത ബാധകമാണ്.

പരിമേയ ഗുണാങ്കമുള്ള ആറാം ഡിഗ്രി പോളിനോമിയലിന്റെ സാങ്കൽപ്പിക മൂലവും കരണി മൂലവും അറിയാമെങ്കിൽ , ഘട്ടം ഘട്ടമായി ആറാം ഡിഗ്രി പോളിനോമിയൽ സമവാക്യം പരിഹരിക്കുന്നതിനുള്ള പ്രശ്നം ഒരു ദ്വിഘാത സമവാക്യം പരിഹരിക്കുന്നതിനുള്ള പ്രശ്നമായി ഞങ്ങൾ കുറിച്ചേക്കാം.

ഉദാഹരണം 3.15

$x^6-13x^5+62x^4-126x^3+65x^2+127x-140=0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ മൂലങ്ങളാണ്, $2+i$ യും $3-\sqrt{2}$ യും എങ്കിൽ എല്ലാ മൂലങ്ങളും കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

സമീകരണത്തിന്റെ ഗുണാങ്കങ്ങളെല്ലാം പരിമേയ സംഖ്യകളായിരുന്നാലും $2+i$ യും $3-\sqrt{2}$ നും മൂലങ്ങളായിരുന്നാൽ $2-i$, $3+\sqrt{2}$ യും തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണത്തിന്റെ മൂലങ്ങൾ ആയിരിക്കും. $(x-(2+i))$, $(x-(2-i)),(x-(3-\sqrt{2}))$, $(x-(3+\sqrt{2}))$ അതിനാൽ

$$((x-(2+i))(x-(2-i))(x-(3-\sqrt{2}))(x-(3+\sqrt{2}))$$

എന്നിവ ഘടകങ്ങളായിരിക്കും. അതിനാൽ അവയുടെ ഗുണനഫലം തന്നിട്ടുള്ള പോളിനോമിയൽ സമീകരണത്തിന്റെ ഒരു ഘടകമായിരിക്കും അതായത്,

$$(x^2-4x+5)(x^2-6x+7)$$

ഒരു ഘടകമാണ്. പോളിനോമിയൽ സമീകരണത്തെ ഈ ഘടകം കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ നമുക്ക് (x^2-3x-4) എന്ന മറ്റേ ഘടകം കിട്ടുന്നു. ഇതിൽ നിന്ന് 4, -1 നും മറ്റു രണ്ടു മൂലങ്ങളാണെന്ന് നമുക്ക് ലഭിക്കും. അതിനാൽ

$$2+i,2-i,3+\sqrt{2},3-\sqrt{2},-1,\ 4$$

എന്നിവ തന്നിട്ടുള്ള പോളിനോമിയൽ സമീകരണത്തിന്റെ മൂലങ്ങളായിരിക്കും. ■

3.7.2 ഇരട്ട കൃതിയുള്ള പോളിനോമിയൽ സമീകരണം

$P(x)$ നെ പോളിനോമിയൽ സമീകരണത്തിന്റെ കൃതി $2n$, x ന്റെ ഇരട്ട കൃതികൾ മാത്രം (അതായത് കൃതികൾ ഒറ്റ സംഖ്യയായ ഗുണാങ്കങ്ങൾ 0) എങ്കിൽ x^2 പകരം y എഴുതിയാൽ കൃതി n ആയിട്ടുള്ള y യുടെ ഒരു പോളിനോമിയൽ സമീകരണം നമുക്ക് കിട്ടും $y_1, y_2, \cdots y_n$ എന്നിവ ഈ പോളിനോമിലിന്റെ മൂലങ്ങളായിരിക്കട്ടെ എങ്കിൽ $x^2=y_r$, എന്ന n സമീകരണങ്ങൾ പരിഗണിച്ച് ഓരോ y_r നും x ന്റെ രണ്ട് മൂല്യങ്ങൾ നമുക്ക് കണ്ടു പിടിക്കാൻ ആകും. ഇത്തരത്തിലുള്ള $2n$ സംഖ്യകൾ തന്നിട്ടുള്ള x ലുള്ള പോളിനോമിയിലുള്ള സമീകരണത്തിന്റെ മൂലങ്ങളായിരിക്കും .

ഉദാഹരണം 3.16

$x^4-9x^2+20=0$ എന്ന സമീകരണം നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണം

$$x^4-9x^2+20=0.$$

ഇത് ഒരു നാലാമത്തെ ഡിഗ്രി സമീകരണമാണ്. ഇവിടെ x^2 ന് പകരം y കൊടുത്താൽ നമുക്ക് ദ്വിഘാത സമീകരണം കിട്ടുന്നു

$$y^2-9y+20=0.$$

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 114 14-02-2023 18:28:54

$y^2-9y+20=0$ പരിഹാരമായി 4, 5 എന്നത് $x^2=4$, $x^2=5$ എന്നിവ എടുക്കുന്നതിലൂടെ നമുക്ക് $2,-2,\sqrt{5},-\sqrt{5}$ ലഭിക്കുന്നു. തന്നിരിക്കുന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണങ്ങളാണ്.

മുകളിൽ പറഞ്ഞ സാങ്കേതിക പോളിനോമിയൽ $x^6-17x^3+30=0$, $ax^{2k}+bx^k+c=0$ പൊതു പോളിനോമിയൽ സമീകരണത്തിലും പ്രയോഗിക്കാമെന്ന് ഞങ്ങൾ ശ്രദ്ധിക്കുന്നു. $a_nx^{kn}+a_{n-1}x^{k(n-1)}+\cdots+a_1x^k+a_0=0$ ഇവിടെ k എതെങ്കിലും പോസിറ്റീവ് സംഖ്യ.

3.7.3 എല്ലാ ഗുണാങ്കങ്ങളുടെയും പൂജ്യം തുക

$P(x)=0$ ഒരു പോളിനോമിയൽ സമവാക്യം അനുവദിക്കുക. അതായത് ഗുണാങ്കത്തിന്റെ ആകെത്തുക പൂജ്യമാണ്. ഗുണാങ്കങ്ങളുടെ ആകെത്തുക എന്താണ്? ഗുണാങ്കങ്ങളുടെ ആകെത്തുക $P(1)$. അല്ലാതെ മറ്റൊന്നുമല്ല. എല്ലാ ഗുണാങ്കങ്ങളുടെയും ആകെത്തുക പൂജ്യമാണ് അതായത് $P(1)=0$ എന്നത് 1 $P(x)$ ന്റെ ഒരു മൂലം ആണെന്ന് പറയുന്നു. സമവാക്യം പരിഹരിക്കുന്നതിനുള്ള ബാക്കി പ്രശ്നം എളുപ്പമാണ്.

ഉദാഹരണം 3.17

$x^3-3x^2-33x+35=0$ എന്ന സമവാക്യം പരിഹരിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

പോളിനോമിയലിന്റെ ഗുണാങ്കങ്ങളുടെ ആകെത്തുക 0. ആണ്. അതിനാൽ 1 പോളിനോമിയലിന്റെ ഒരു മൂലമാണ്. ബാക്കിയുള്ള മൂലങ്ങളെ കണ്ടുപിടിക്കാൻ $x^3-3x^2-33x+35$ നെ $x-1$ കൊണ്ട് ഹരിക്കുകയും, $x^2-2x-35$ നെ ശിഷ്ടമായി കിട്ടുന്നു. ഇതിനെ കണ്ടുപിടിക്കുമ്പോൾ 7, -5 മൂലങ്ങളാകും അതായത് $1,7,-5$ എന്നിവ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ നിർദ്ധാരങ്ങളാണ്.

3.7.4 ഒറ്റ ഗുണാങ്കങ്ങളുടെ കൃതിയും, ഇരട്ട ഗുണാങ്കങ്ങളുടെ കൃതിയുടെ തുകയും തുല്യം

$P(x)=0$ എന്നത് ഒരു പോളിനോമിയൽ സമവാക്യമാണ് അതായത് ഒറ്റ ഗുണാങ്കങ്ങളുടെ കൃതിയും ഇരട്ട ഗുണാങ്കങ്ങളുടെ കൃതികളുടെ ആകെത്തുക തുല്യമാണ്. യഥാർത്ഥത്തിൽ എന്താണ് ഇതിനർത്ഥം? $P(x)=0$ ലെ ഡിഗ്രിയുടെ ഗുണാങ്കം ആണെങ്കിൽ $P(-x)=0$ ലെ അതേ ഡിഗ്രിയുടെ ഗുണാങ്കം $-a$ ആണ്. രണ്ടിന്റെയും ഇരട്ട പദങ്ങളുടെ ഗുണാങ്കം $P(x)=0$, $P(-x)=0$ എന്നിവ തുല്യമാണ്. അതിനാൽ നൽകിയിരിക്കുന്ന വ്യവസ്ഥ സൂചിപ്പിക്കുന്നത് $P(-x)=0$ ന്റെ ഗുണാങ്കങ്ങളുടെയും ആകെത്തുക പൂജ്യമാണെന്നും അതിനാൽ 1 $P(-x)=0$ ന്റെ ഒരു മൂലം ആണെന്നും -1 എന്നത് $P(x)=0$ ന്റെ ഒരു മൂലം ആണെന്ന് പറയുന്നു. സമവാക്യം പരിഹരിക്കുന്നതിനുള്ള ബാക്കി പ്രശ്നം എളുപ്പമാണ്.

ഉദാഹരണം 3.18

$2x^3+11x^2-9x-18=0$ എന്ന സമവാക്യം നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക.

നിർദ്ധാരണം

ഒറ്റ കൃതിയുള്ള ഗുണാങ്കങ്ങളും ഇരട്ട കൃതിയുള്ള ഗുണാങ്കങ്ങളുടെ ആകെത്തുക തുല്യമാണെന്ന് ഞങ്ങൾ നിരീക്ഷിക്കുന്നു. അതിനാൽ -1 എന്നത് സമവാക്യത്തിന്റെ ഒരു മൂലമാണ്. മറ്റ് മൂലകൾ കണ്ടെത്തുന്നതിന് ഞങ്ങൾ $2x^3+11x^2-9x-18$ നെ $x+1$ കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ $2x^2+9x-18$ എന്ന ശിഷ്ടം കിട്ടുന്നു. ഇതിനെ തെളിയിക്കുമ്പോൾ $\frac{3}{2}$,-6 എന്നിവ മൂലങ്ങളാണ്. അതു പോലെ തന്നിരിക്കുന്ന സമീകരണത്തിന് $-6,-1,\frac{3}{2}$ എന്നീ മൂലങ്ങളും അല്ലെങ്കിൽ നിർദ്ധാരണങ്ങളുമുണ്ട്.

3.7.5 ശ്രേണി രീതിയിലുള്ള മൂലങ്ങൾ

ഉയർന്ന ഡിഗ്രി പോളിനോമിയൽ സമീകരണത്തിനെ തെളിയിക്കുമ്പോൾ സമവാക്യത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണവും അല്ലെങ്കിൽ പോളിനോമയിലെ കുറിച്ചും ചില വിവരങ്ങൾ നമുക്ക് ആവശ്യമുണ്ട്. മൂലങ്ങൾ കൂട്ടു സമാന്തര ശ്രേണിയിലും മൂലങ്ങൾ ഗുണന ക്രമാനു പാത ശ്രേണി അത്തരം വിവരങ്ങൾ ഈ രീതിയിലാണ് ഞങ്ങൾ സമവാക്യങ്ങളെ കുറിച്ച് ചർച്ച ചെയ്യുന്നത്.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 115 14-02-2023 18:29:11

ഉദാഹരണം 3.19

$x^3 + px^2 + qx + r = 0$ ന്റെ മൂലങ്ങൾ ഗണിത ശ്രേണിയിൽ പരിഹാരത്തിലാണെന്ന വ്യവസ്ഥ നേടുക.

നിർദ്ധാരണം

മൂലങ്ങൾ ഗണിത ശ്രേണിയിൽ ആയിരിക്കട്ടെ. എന്നിട്ട് നമുക്ക് അവയെ $\alpha - d, \alpha, \alpha + d$ എന്ന രൂപത്തിൽ അനുമാനിക്കാം.

വിയറ്റയുടെ സൂത്രം പ്രയോഗിക്കുന്നത് $(\alpha - d) + \alpha + (\alpha + d) = -\frac{p}{1} = p \Rightarrow 3\alpha = -p \Rightarrow \alpha = -\frac{p}{3}$.

എന്നാൽ തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണത്തിന്റെ ഒരു മൂലമാണ് α അതിനാൽ

$$\left(-\frac{p}{3}\right)^3 + p\left(-\frac{p}{3}\right)^2 + q\left(-\frac{p}{3}\right) + r = 0 \Rightarrow 9pq = 2p^3 + 27r$$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

ഉദാഹരണം 3.20

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ എന്ന സമീകരണത്തിന്റെ മൂലങ്ങൾ ഗുണന ക്രമാനുപാത ശ്രേണിയിലാണെന്ന് വ്യവസ്ഥ ചെയ്യുക അതിൽ $a, b, c, d \neq 0$ എന്ന് അവസ്ഥ കണ്ടെത്തുക.

നിർദ്ധാരണം

മൂലങ്ങൾ ജ്യാമിതീയ ശ്രേണിയിലാണ്.

അപ്പോൾ, നമുക്ക് $\frac{\alpha}{\lambda}, \alpha, \alpha\lambda$ എന്ന രൂപത്തിൽ അനുമാനിക്കാം .

വിയറ്റയുടെ സൂത്രവാക്യം പ്രയോഗിക്കുമ്പോൾ നമുക്ക്

$$\sum_1 = \alpha\left(\frac{1}{\lambda} + 1 + \lambda\right) = -\frac{b}{a} \quad \ldots (1)$$

$$\sum_2 = \alpha^2\left(\frac{1}{\lambda} + 1 + \lambda\right) = \frac{c}{a} \quad \ldots (2)$$

$$\sum_3 = \alpha^3 = -\frac{d}{a}. \quad \ldots (3)$$

(2) നെ (1) കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ നമുക്ക് കിട്ടുന്നു

$$\alpha = -\frac{c}{b} \quad \ldots (4)$$

(3) ൽ (4) നെ കൊടുത്താൽ നമുക്ക് കിട്ടുന്നത് $\left(-\frac{c}{b}\right)^3 = -\frac{d}{a} \Rightarrow ac^3 = db^3$.

ഉദാഹരണം 3.21

$x^3 + px^2 + qx + r = 0$ ലെ മൂലങ്ങൾ അനുപാത ശ്രേണിയിൽ (H) ആണെങ്കിൽ $9pqr = 27r^2 + 2q^3$. എന്ന് തെളിയിക്കുക ഇതിൽ $p, q, r \neq 0$

നിർദ്ധാരണം

മൂലങ്ങൾ അനുപാത ശ്രേണിയിലാണ് (HP) എന്നിരുന്നാൽ അതിന്റെ വ്യുൽക്രമം ഗണിത ശ്രേണിയിലും, സമീകരണത്തിന്റെ മൂലകളും

$$\left(\frac{1}{x}\right)^3 + p\left(\frac{1}{x}\right)^2 + q\left(\frac{1}{x}\right) + r = 0 \Leftrightarrow rx^3 + qx^2 + px + 1 = 0. \quad \ldots (1)$$

കൂട്ട സമാന്തര അനുക്രമം (1) ന്റെ മൂലയാണ്, ചിന്തിക്കൂ $\alpha - d, \alpha, \alpha + d$.

വിറ്റേഴ്സ് സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച്

$$\sum_1 = (\alpha - d) + \alpha + (\alpha + d) = -\frac{q}{r} \Rightarrow 3\alpha = -\frac{q}{r} \Rightarrow \alpha = -\frac{q}{3r}.$$

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 116 14-02-2023 18:29:24

നമ്മൾ കുറിക്കുക (1) ന്റെ ഒരു മൂലമാണ് α അതുകൊണ്ട് നമുക്ക് കിട്ടുന്നത്

$$r\left(-\frac{q}{3r}\right)^3+q\left(-\frac{q}{3r}\right)^2+p\left(-\frac{q}{3r}\right)+1=0\Rightarrow -q^3+3q^3-9pqr+27r^2=0\Rightarrow 9pqr=2q^3+27r^2\,.$$

ഉദാഹരണം 3.22

$x^3-6x^2-4x+24=0$ എന്ന സമീകരണത്തിന്റെ മൂലങ്ങൾ കൂട്ടുസമാന്തര ശ്രേണിയിലാണുള്ളതെന്ന് അറിയാം എങ്കിൽ അതിന്റെ മൂലങ്ങൾ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$a-d, a, a+d$ എന്നിവ മൂലങ്ങളാണ്. മൂലകളുടെ തുക $3a$ ആണ് അത് സമവാക്യം 6 ന് തുല്യം അതുകൊണ്ട് $3a=6$, $a=2$ മൂലങ്ങളുടെ ഗുണനം a^3-ad^2 അത് സമീകരണത്തിന് -24 തുല്യമാണ് a യുടെ വില കൊടുക്കുമ്പോൾ $8-2d^2=-24$, $d=\pm 4$ നമുക്ക് $d=4$ എങ്കിൽ $-2,2,6$ എന്നിവ മൂലങ്ങളാണെന്ന് എടുക്കുക $d=-4$, എങ്കിൽ $6,2,-2$ എന്നിവ സമീകരണത്തിന്റെ മൂലങ്ങളാണ് (വിപരീത ഓർഡറിന്റെ ഒരേ മൂലകൾ).

അഭ്യാസം 3.3

1. ഘന സമവാക്യം നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക : $2x^3-x^2-18x+9=0$ അതിന്റെ രണ്ട് മൂലങ്ങളുടെ ആകെ തുക അപ്രത്യക്ഷമായാൽ.
2. മൂലകൾ ഒരു കൂട്ടുസമാന്തര അനുക്രമമാണെങ്കിൽ $9x^3-36x^2+44x-16=0$ എന്നതിന്റെ സമീകരണം തെളിയിക്കുക.
3. മൂലകൾ ഒരു സമഗുണിത ഗുണനക്രമാനുപാതമാണെങ്കിൽ $3x^3-26x^2+52x-24=0$ എന്നതിന്റെ സമീകരണം തെളിയിക്കുക.
4. ഒരു മൂലം മറ്റു രണ്ട് മൂലങ്ങളുടെ തുകയുടെ ഇരട്ടിയാണെങ്കിൽ k കണ്ടുപിടിച്ച് $2x^3-6x^2+3x+k=0$ എന്ന സമീകരണം നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുകട.
5. $1+2i$, $\sqrt{3}$ നും രണ്ടു പൂജ്യങ്ങളാണെന്ന് അറിയാമെങ്കിൽ പോളിനോമിയൽ $x^6-3x^5-5x^4+22x^3-39x^2-39x+135$ ന്റെ എല്ലാ പൂജ്യങ്ങളും കാണുക.
6. (i) $2x^3-9x^2+10x=3$, (ii) $8x^3-2x^2-7x+3=0$ എന്നീ ത്രിഘാത സമീകരണം നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക.
7. $x^4-14x^2+45=0$ എന്ന സമീകരണം നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക.

3.7.6 ഭാഗികമായി ഘടകങ്ങളായിക്കിയ പോളിനോമിലുകൾ

$(ax+b)(cx+d)(px+q)(rx+s)+k=0$, $k\neq 0$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ള ചതുർഘാത പോളിനോമിയൽ സമീകരണങ്ങളെ $(\alpha x^2+\beta x+\lambda)(\alpha x^2+\beta x+\mu)+k=0$ എന്ന രൂപത്തിൽ മാറ്റയെഴുതാം.

അടുത്ത രണ്ട് ഉദാഹരണങ്ങളിലൂടെ ഈ സാഹചര്യത്തെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നതിനുള്ള രീതികൾ നമ്മൾ വിശദീകരിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം 3.23

തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണം

$$(x-2)(x-7)(x-3)(x+2)+19 = 0$$ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക.

നിർദ്ധാരണം

അനുയോജ്യമായ പ്രതിസ്ഥാപന രീതി കൈകൊണ്ട് ഈ നാലാം കൃതി സമീകരണത്തെ മാറ്റി എഴുതി നമുക്ക് നിർദ്ധാരണം ചെയ്യാൻ ആകും

$$(x-2)(x-3)(x-7)(x+2)+19 = 0\,.$$

എന്നതിനെ മാറ്റി എഴുതുമ്പോൾ

$$(x^2-5x+6)(x^2-5x-14)+19 = 0\,.$$

x^2-5x നെ y, എന്ന് എടുത്താൽ സമീകരണം $(y+6)(y-14)+19=0;$ എന്ന രീതിയിൽ ആയി തീരും

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 117 14-02-2023 18:29:40

അതായത്,

$$y^2 - 8y - 65 = 0.$$

ഇതിനെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുമ്പോൾ $y = 13$ നും $y = -5$ നും നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നു.

ഇതിനെ പ്രതിസ്ഥാപിക്കുമ്പോൾ നമുക്ക് $x^2 - 5x - 13 = 0$, $x^2 - 5x + 5 = 0$

എന്നീ രണ്ട് ദ്വിഘാത സമീകരണങ്ങൾ ലഭിക്കുന്നു. ഇതിനെ സാധാരണ രീതിയിൽ നിർദ്ധാരണം ചെയ്താൽ $\frac{5 \pm \sqrt{77}}{2}, \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$ എന്നീ നിർദ്ധാരണങ്ങൾ ലഭിക്കും.

ഉദാഹരണം 3.24

നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക $(2x-3)(6x-1)(3x-2)(x-2) - 5 = 0$.

നിർദ്ധാരണം

$$(2x-3)(3x-2)(6x-1)(x-2) - 5 = 0.$$

എന്നത് തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണത്തിന് സമമാണ്. മുകളിലുള്ള സമീകരണത്തെ കണക്ക് കൂട്ടൽ നടത്തുമ്പോൾ

$(6x^2 - 13x + 6)(6x^2 - 13x + 2) - 5 = 0$ ലഭിക്കും.

$y = 6x^2 - 13x$, എന്ന് എടുത്താൽ,

$$(y+6)(y+2) - 5 = 0$$

ഇത് $$y^2 + 8y + 7 = 0.$$

ഇതിനെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുമ്പോൾ $y = -1$, $y = -7$ ലഭിക്കുന്നു.

y യുടെ ഈ മൂല്യങ്ങൾ $y = 6x^2 - 13x$, ൽ പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ

$$6x^2 - 13x + 1 = 0$$

$6x^2 - 13x + 7 = 0$ എന്നിവ ലഭിക്കും.

ഈ രണ്ട് സമീകരണങ്ങളെയും നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുമ്പോൾ

$$x = 1, x = \frac{7}{6}, x = \frac{13 + \sqrt{145}}{12}, \quad x = \frac{13 - \sqrt{145}}{12}$$

എന്നിവ തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണത്തിന്റെ മൂലങ്ങളായി ലഭിക്കും.

അഭ്യാസം 3.4

1. നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക : (i) $(x-5)(x-7)(x+6)(x+4) = 504$ (ii) $(x-4)(x-7)(x-2)(x+1) = 16$

2. നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക : $(2x-1)(x+3)(x-2)(2x+3) + 20 = 0$

3.8 മറ്റൊരു വിവരങ്ങൾ ഒന്നുമില്ലാത്ത പോളിനോമിയൽ സമീകരണം

3.8.1 പരിമേയ മൂല സിദ്ധാന്തം

ശ്രമ പുരശ്രമ രീതി ഉപയോഗിച്ച് ചില പോളിനോമിയൽ സമീകരണങ്ങളുടെ വളരെ കുറച്ച് മൂലങ്ങൾ നമുക്ക് കാണാം സാധിക്കും. ഉദാഹരണത്തിന്

$4x^3 - 8x^2 - x + 2 = 0$ എന്ന സമീകരണം നമുക്ക് പരിഗണിക്കാം ... (1)

ഈ അദ്ധ്യായത്തിൽ നാം ചർച്ച ചെയ്ത ഏതൊരു രീതി ഉപയോഗിച്ചും നിർദ്ധാരണം ചെയ്യാൻ ആകാത്ത ഒരു മൂന്നാം കൃതി സമീകരണമാണ് ഇത് (1) ൽ തന്നിട്ടുള്ള പോളിനോമിയിലെ $P(x)$ എന്ന് സൂചിപ്പിച്ചാൽ $P(2) = 0$ എന്ന് കാണാൻ സാധിക്കുകയും അതിനാൽ $(x-2)$ ഒരു ഘടകമാണെന്ന് പറയാനാകും പ്രശ്നത്തിന്റെ ബാക്കിയുള്ള ഭാഗം വളരെ എളുപ്പത്തിൽ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യാനാകും, അതിനെ ഒരു അഭ്യാസമായി മാറ്റി വച്ചിട്ടുണ്ട്.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 118 14-02-2023 18:29:54

ഉദാഹരണം 3.25

$x^3 - 5x^2 - 4x + 20 = 0$ എന്ന സമീകരണം നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണത്തിലെ ബഹുപദവുംജകത്തിനെ $P(x)$ എന്ന് സൂചിപ്പിച്ചാൽ $P(2) = 0$ ആണ് അതിനാൽ ബഹുപദവുംജകത്തിന്റെ ഒരു മൂലം 2 ആയിരിക്കും. മറ്റു മൂലങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കാൻ തന്നിട്ടുള്ള പോളിനോമിയൽ $x^3 - 5x^2 - 4x + 20$ നെ $x - 2$ കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ $Q(x) = x^2 - 3x - 10$ ഹരണഫലമായി ലഭിക്കും $Q(x) = 0$ യെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുമ്പോൾ -2 നും 5 നും മൂലങ്ങളായി ലഭിക്കും. അതിനാൽ തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണത്തിന്റെ മൂലങ്ങൾ $2, -2, 5$ എന്നിവയാണ്. ■

ശ്രമ പുനഃശ്രമ രീതിയിലൂടെ ഒരു സംഖ്യയെ ഒരു മൂലമായി സങ്കൽപിക്കുക എന്നത് ഒരു എളുപ്പമാർഗ്ഗമല്ല. എന്നാൽ ഗുണാങ്കങ്ങൾ പൂർണ്ണാങ്കങ്ങളാകുമ്പോൾ മുന്നിട്ട് നിൽക്കുന്ന ഗുണാങ്കവും സ്ഥിരാങ്കവും ഉപയോഗിച്ച് ചില പരിമേയ സംഖ്യകളെ സാധ്യത മൂലങ്ങളായി നമുക്ക് പട്ടികപെടുത്താനാകും. ഇത്തരത്തിലുള്ള പരിമേയ മൂലങ്ങളുടെ സാധ്യത പട്ടിക തയ്യാറാകുന്നതിന് പരിമേയ മൂല സിദ്ധാന്തം നമ്മെ സഹായിക്കുന്നു. പരിമേയ ഗുണാങ്കങ്ങളുള്ള ഒരു പോളിനോമിയിലെ അനുയോജ്യമായ സംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ച് ഗുണിക്കുന്നതിലൂടെ അതെ മൂലങ്ങളുള്ള പൂർണ്ണാങ്ക ഗുണാങ്കങ്ങളിലെ പോളിനോമിയൽ നമുക്ക് എഴുതാൻ ആകുമെന്ന കാര്യം നാം ഓർക്കേണ്ടതാണ്. അതുകൊണ്ട് താഴെ തന്നിട്ടുള്ള പരിമേയ മൂലസിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച് പരിമേയ ഗുണാങ്കങ്ങളുള്ള പോളിനോമിയലിന്റെ ചില മൂലങ്ങൾ നമുക്ക് സങ്കൽപിക്കാനും തെളിവില്ലാതെ സിദ്ധാന്തം മാത്രം ഇവിടെ പ്രസ്താവിച്ചിട്ടുണ്ട്.



സിദ്ധാന്തം 3.5 (പരിമേയ മൂല സിദ്ധാന്തം)

പൂർണ്ണാങ്ക ഗുണാങ്കങ്ങളുള്ള ഒരു പോളിനോമിയിലാണ് $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, $a_0 \neq 0$ എന്ന് എടുത്താൽ $(p, q) = 1$ ആയിട്ടുള്ള $\frac{p}{q}$, പോളിനോമിയിലിന്റെ ഒരു മൂലമാണെങ്കിൽ p എന്നത് a_0 ഒരു ഘടകവും q എന്നത് a_n ഒരു ഘടകവുമായിരിക്കും.

$a_n = 1$ ആകുമ്പോൾ $\frac{p}{q}$ എന്ന ഒരു പരിമേയ മൂലമുണ്ടെങ്കിൽ സിദ്ധാന്തം 3.5 പ്രകാരം q എന്നത് a_n ന്റെ ഘടകവുമാണ്. അതിനാൽ $q = \pm 1$. ആയിരിക്കും. അതുകൊണ്ട് p ഒരു പൂർണ്ണാങ്കമായിരിക്കും. അതുകൊണ്ട് പൂർണ്ണാങ്ക ഗുണ്ണാങ്കങ്ങളുള്ള ഒരു ഏകതം പോളിനോമിയലിന് പൂർണ്ണാങ്കങ്ങളല്ലാത്ത പരിമേയ മൂലങ്ങൾ ഉണ്ടാകില്ല അതുകൊണ്ട് $a_n = 1$ ആകുമ്പോൾ എല്ലായിപ്പോഴും ഒരു പരിമേയ മൂലമുണ്ടെങ്കിൽ നിശ്ചയമായും അത് ഒരു പൂർണ്ണാങ്കവും അത് a_0 നെ നിശേഷം ഹരിക്കുന്നതും ആയിരിക്കും. (ഒരു പൂർണ്ണാങ്കം a കൊണ്ട് ഒരു പൂർണ്ണാങ്കം b യെ നിശേഷം ഹരിക്കണമെങ്കിൽ ചില പൂർണ്ണാങ്കം d യ്ക്ക് $b = ad$ ആയിരിക്കും)

ഉദാഹരണമായി $x^2 - 5x - 6 = 0$ എന്ന സമീകരണം നമുക്ക് പരിഗണിക്കാം. 6 ന്റെ ഘടകങ്ങൾ $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ എന്നിവയാണ്. പരിമേയ മൂല സിദ്ധാന്തത്തിൽ നിന്ന് $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ എന്നിവ സമീകരണത്തിന്റെ സാധ്യമായ നിർദ്ധാരണങ്ങളായെന്ന് നമുക്ക് അനുമാനിക്കാം ഇത് എല്ലാം തന്നെ നിർദ്ധാരണങ്ങളായെന്ന് ഇത് അർത്ഥമാകുന്നില്ല -1 , 6 എന്നീ രണ്ടു വിലകൾ സമീകരണത്തെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുകയും മറ്റ് വിലകൾ സമീകരണത്തെ തൃപ്തിപ്പെടുന്നതുമല്ല.

എന്ന് മാത്രമല്ല $x^2 + 4 = 0$ എന്ന സമീകരണം നാം പരിഗണിച്ചാൽ, പരിമേയ മൂല സിദ്ധാന്തം പ്രകാരം, $\pm 1, \pm 2, \pm 4$; എന്നിവ സാധ്യമായ നിർദ്ധാരണങ്ങളാണ്, എന്നാൽ ഇവ ഒന്നും തന്നെ നിർദ്ധാരണമല്ല നിർദ്ധാരണം സങ്കൽപ്പിക്കാൻ മാത്രമാണ് പരിമേയ മൂല സിദ്ധാന്തം നമ്മെ സഹായിക്കുന്നത്, നിർദ്ധാരണം നമുക്ക് നൽകുന്നില്ല.

ഉദാഹരണം 3.26

$2x^3 + 3x^2 + 2x + 3 = 0$ ന്റെ മൂലങ്ങൾ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

നമുക്കുള്ള സൂചനകളിൽ നിന്ന് $a_n = 2$ നും $a_0 = 3$ ആണ്. $\frac{p}{q}$ പോളിനോമിലിന്റെ ഒരു പൂജ്യമാണെങ്കിൽ $(p, q) = 1$, ആകുമ്പോൾ p കൊണ്ട് 3 നേയും q കൊണ്ട് 2 നേയും നിശേഷം ഹരിക്കാൻ ആകും. p യുടെ സാധ്യതമായ വിലകൾ $1, -1, 3, -3$ നും q ന്റെ സാധ്യമായ വിലകൾ $1, -1, 2, -2$ നും ആണെന്ന് വ്യക്തമാണ്.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 119 14-02-2023 18:30:09

ഈ p യും q യും ഉപയോഗിച്ച് $\pm\frac{1}{1}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{3}{1}$ തുടങ്ങിയ ഭിന്നങ്ങൾ മാത്രം നമുക്ക് രൂപീകരിക്കാൻ ആകും. സാധ്യമായ ഈ എട്ട് വിലകളിൽ നിന്നും പ്രതിസ്ഥാപനത്തിലൂടെ $\frac{-3}{2}$ മാത്രമാണ് പരിമേയ പൂജ്യമെന്ന് നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നത്. മറ്റ് പൂജ്യങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കാൻ $2x^3+3x^2+2x+3$ എന്ന പോളിനോമിയിലെ $2x+3$ കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ x^2+1 ഹരണഫലവും ശിഷ്ടവും പൂജ്യവും ലഭിപ്പിക്കുന്നു. $x^2+1=0$ നെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുമ്പോൾ i, $-i$ എന്നിവ മൂലങ്ങളായി ലഭിക്കുന്നു. അതിനാൽ $\frac{-3}{2}, -i, i$ എന്നിവയാണ് തന്നിട്ടുള്ള പോളിനോമിയൽ സമീകരണത്തിന്റെ മൂലങ്ങൾ.

3.8.2 വ്യുൽക്രമ സമീകരണങ്ങൾ

$2x^6-3x^5+\sqrt{2}x^4+7x^3+\sqrt{2}x^2-3x+2=0$ എന്ന സമീകരണത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണം α എന്ന് എടുത്താൽ. ... (1)

$\alpha \neq 0$ (എന്ത് കൊണ്ട്?)

$$2\alpha^6-3\alpha^5+\sqrt{2}\alpha^4+7\alpha^3+\sqrt{2}\alpha^2-3\alpha+2 = 0.$$

(1) ന്റെ ഇടതു വശത്ത് x ന് പകരം $\frac{1}{\alpha}$ പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ

$$2\left(\frac{1}{\alpha}\right)^6-3\left(\frac{1}{\alpha}\right)^5+\sqrt{2}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^4+7\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3+\sqrt{2}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2-3\left(\frac{1}{\alpha}\right)+2$$

$$= \frac{2-3\alpha+\sqrt{2}\alpha^2+7\alpha^3+\sqrt{2}\alpha^4-3\alpha^5+2\alpha^6}{\alpha^6} = \frac{0}{\alpha^6} = 0.$$

അതിനാൽ $\frac{1}{\alpha}$ യും (1) ന്റെ ഒരു നിർദ്ധാരണമായിരിക്കും. അതുപോലെ

$$2x^5+3x^4-4x^3+4x^2-3x-2 = 0 \quad \text{... (2)}$$

എന്ന സമീകരണത്തിന്റെ ഒരു നിർദ്ധാരണം α ആണെങ്കിൽ $\frac{1}{\alpha}$ യും (2) ന്റെ ഒരു സമീകരണമായിരിക്കും.

സമവാക്യത്തിൽ x ന് പകരം $\frac{1}{x}$ കൊടുത്താൽ കിട്ടുന്ന പോളിനോമിയൽ സമീകരണം പഴയ സമവാക്യം തന്നെ ആയിരിക്കുമെന്ന് സമീകരണം (1), (2) എന്നിവയുടെ പൊതുവായ പ്രത്യേകതയാണ്. ഉടനെ നമ്മുടെ ഉള്ളിൽ ഉണ്ടാകുന്ന ചോദ്യം "തന്നിരിക്കുന്ന സമീകരണത്തെ കാണുന്ന മാത്രയിൽ തന്നെ ഇത്തരം പ്രത്യേകതയുണ്ടെന്ന് നമുക്ക് തിരിച്ചറിയാനാകുമോ?" താഴെ തന്നിട്ടുള്ള സിദ്ധാന്തം 3.6 ഇതിനുള്ള ഉത്തരം നൽകും.

നിർവ്വചനം 3.1

കൃതി n ആയിട്ടുള്ള $P(x)$ എന്ന ഒരു പോളിനോമിയൽ ഒരു വ്യുൽക്രമ പോളിനോമിയൽ എന്ന് പറയണമെങ്കിൽ തന്നിട്ടുള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരു നിബന്ധന ശരിയായിരിക്കണം:

(i) $P(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$ (ii) $P(x) = -x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$.

കൃതി n ആയിട്ടുള്ള ഒരു പോളിനോമിയൽ $P(x)$ തരം I ൽപ്പെട്ട വ്യുൽക്രമ പോളിനോമിയൽ ആകണമെങ്കിൽ $P(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$ ആയിരിക്കണം.

കൃതി n ആയിട്ടുള്ള ഒരു പോളിനോമിയൽ $P(x)$ തരം II ആയിട്ടുള്ള വ്യുൽക്രമ പോളിനോമിയൽ ആകണമെങ്കിൽ $P(x) = -x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$ ആയിരിക്കണം.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 120 14-02-2023 18:30:23

സിദ്ധാന്തം 3.6

(i) $a_n = a_0, \quad a_{n-1} = a_1, \quad a_{n-2} = a_2 \cdots$

(ii) $a_n = -a_0, a_{n-1} = -a_1, a_{n-2} = -a_2, \cdots$ ഇനിപ്പറയുന്ന രണ്ട് പ്രസ്താവനകളിലൊന്ന് ശരിയാണെങ്കിൽ $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, $(a_n \neq 0)$ എന്ന പോളിനോമിയൽ സമവാക്യം ഒരു പരസ്പര സമവാക്യമാണ്

തെളിവ്

പോളിനോമിയൽ സമവാക്യം പരിഗണിക്കുക

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 . \qquad \ldots (1)$$

(1) ൽ x നെ $\frac{1}{x}$ കൊണ്ട് മാറ്റുക. നമുക്ക് കിട്ടുന്നത്

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{a_n}{x^n} + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_{n-2}}{x^{n-2}} + \cdots + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_1}{x} + a_0 = 0 . \qquad \ldots (2)$$

(2) നെ x^n കൊണ്ട് രണ്ട് വശവും ഗുണിക്കുമ്പോൾ നമുക്ക് കിട്ടുന്നത്

$$x^n P\left(\frac{1}{x}\right) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n = 0 . \qquad \ldots (3)$$

(1) ന് ഒരു വ്യുൽക്രമ സമീകരണം $\Leftrightarrow$ $P(x) = \pm\, x^n P\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow (1), (3)$ തുല്യമാണ് .

ഇത് സാധ്യമാണെങ്കിൽ $\Leftrightarrow$ $\frac{a_n}{a_0} = \frac{a_{n-1}}{a_1} = \frac{a_{n-2}}{a_2} = \cdots = \frac{a_2}{a_{n-2}} = \frac{a_1}{a_{n-1}} = \frac{a_0}{a_n}$.

അനുപാതം λ യ്ക്ക് തുല്യമാണെങ്കിൽ ഇപ്പോൾ നമുക്ക് കിട്ടുന്നത് $\frac{a_n}{a_0} = \lambda$, $\frac{a_0}{a_n} = \lambda$. ഈ സമവാക്യങ്ങളെ ഗുണിക്കുമ്പോൾ നമുക്ക് കിട്ടുന്നത് $\lambda^2 = 1.$, $\lambda = 1$, $\lambda = -1$ എന്നീ രണ്ട് രീതികൾ കിട്ടുന്നു.

രീതി (i) :

$\lambda = 1$ നമുക്ക് ഇവിടെ $a_n = a_0$, $a_{n-1} = a_1$, $a_{n-2} = a_2$, $\cdots$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

അതായത് (1) മത്തെ ഗുണാങ്കത്തിന്റെ ആരംഭവും അവസാനത്തെ ഗുണാങ്കത്തിനും തുല്യമാണ്.

രീതി (ii) :

$\lambda = -1$ നമുക്ക് ഇവിടെ $a_n = -a_0$, $a_{n-1} = -a_1$, $a_{n-2} = -a_2$, $\cdots$.

അതായത് (1) ൽ ആരംഭ ഗുണാങ്കവും അവസാന ഗുണാങ്കവും വിലയിൽ തുല്യമാണെങ്കിൽ ചിഹ്നങ്ങൾ വിപരീതമാണ്.

കുറിപ്പ്

തരം I ൽ പറയുന്ന വ്യുൽക്രമം സമവാക്യങ്ങളിൽ ആരംഭ ഗുണാങ്കവും അവസാന ഗുണാങ്കവും തുല്യമാണ്. $6x^5 + x^4 - 43x^3 - 43x^2 + x + 6 = 0$ എന്ന സമവാക്യം തരം I ൽ ഉദാഹരണമാണ്.

തരം II ൽ പറയുന്ന വ്യുൽക്രമ സമവാക്യങ്ങളിൽ ആരംഭ ഗുണാങ്കവും അവസാന ഗുണാങ്കവും വിലയിൽ തുല്യമാണെങ്കിൽ ചിഹ്നങ്ങൾ വിപരീതമാണ്.

$6x^5 - 41x^4 + 97x^3 - 97x^2 + 41x - 6 = 0$ എന്ന സമവാക്യം തരം II ൽ ഉദാഹരണമാണ്.

നിരൂപണം

(i) ഒരു വ്യുൽക്രമ സമീകരണത്തിന് 0 ഒരു നിർദ്ധാരണമല്ല.

(ii) ഗുണാങ്കവും, നിർദ്ധാരണവും ഒരിക്കലും വാസ്തവിക സംഖ്യകളാകണമെന്ന് പരിമിതപ്പെടുത്തിയിട്ടില്ല.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 121 14-02-2023 18:30:39

(iii) ഈ പ്രസ്താവനയിൽ $P(x)=0$ എന്നത് ഒരു പോളിനോമിയൽ സമവാക്യമാണെങ്കിൽ α ഒരു മൂലവും $\frac{1}{\alpha}$ മറ്റൊരു മൂലവും ആണെങ്കിൽ $P(x)=0$ എന്ന പോളിനോമിയൽ സമവാക്യം ഒരു വ്യുൽക്രമ സമവാക്യമായിരിക്കണമെന്നുമില്ല. ഉദാഹരണത്തിന് $2x^3-9x^2+12x-4=0$ എന്നത് ഒരു പോളിനോമിയൽ സമവാക്യത്തിന്റെ മൂലങ്ങളാണ് $2, 2, \frac{1}{2}$. $x^3P\left(\frac{1}{x}\right)\neq\pm P(x)$ എന്നും ഇത് ഒരു വ്യുൽക്രമ സമീകരണമല്ല എന്നതും ശ്രദ്ധിക്കുക. $a_{n-r}=a_r$ അല്ലെങ്കിൽ $a_{n-r}=-a_r$, $r=0, 1, 2,...n$ പ്രകാരം വ്യുൽക്രമ സമീകരണങ്ങളെ തരം I, തരം II എന്നിങ്ങനെ തിരിച്ചിട്ടുണ്ട്. തെളിവില്ലാതെ ചില ഫലങ്ങൾ ഇവിടെ പ്രസ്താവിച്ചിരിക്കുന്നു

- തരം I ലുള്ള ഒറ്റ കൃതിയിൽ വരുന്ന വ്യുൽക്രമ സമീകരണത്തിന്റെ ഒരു നിർദ്ധാരണം നിർബന്ധമായും $x=-1$ ആയിരിക്കും.
- തരം II ലുള്ള ഇരട്ട കൃതി വ്യുൽക്രമ സമീകരണത്തിന്റെ മദ്ധ്യപദം 0 ആയിരിക്കും. കൂടാതെ $x=1$, $x=-1$ എന്നിവ നിർദ്ധാരണങ്ങളായിരിക്കും.
- ഒരു ഇരട്ട വ്യുൽക്രമ സമീകരണത്തിന് $x+\frac{1}{x}$ അല്ലെങ്കിൽ $x-\frac{1}{x}$ ന് പകരം y എന്ന് എടുത്താൽ, നമുക്ക് ആദ്യത്തെ പോളിനോമിലിന്റെ കൃതിയുടെ പകുതി കൃതിയായി ഒരു പോളിനോമിയൽ കിട്ടുന്നു. ഈ പോളിനോമിയൽ സമീകരണത്തിനെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുമ്പോൾ തന്നിട്ടുള്ള പോളിനോമലിന്റെ സമീകരണത്തിന്റെ മൂലങ്ങൾ നമുക്ക് കിട്ടും.

ഉദാഹരണത്തിന്,

$$6x^6-35x^5+56x^4-56x^2+35x-6=0$$

എന്ന പോളിനോമിയൽ സമീകരണം പരിഗണിച്ചാൽ അത് തരം II പട്ട ഇരട്ട കൃതിയിലുള്ള ഒരു വ്യുൽക്രമ സമീകരണമാണെന്ന് കാണാം. അതുകൊണ്ട് 1 നും -1 നും ഈ സമീകരണത്തിന്റെ രണ്ട് നിർദ്ധാരങ്ങളും കൂടാതെ x^2-1 തന്നിട്ടുള്ള പോളിനോമിലിന്റെ ഒരു ഘടകം ആയിരിക്കും. തന്നിട്ടുള്ള പോളിനോമിലെ x^2-1 എന്ന ഘടകം ഉപയോഗിച്ച് ഹരിച്ചാൽ നമുക്ക് $6x^4-35x^3+62x^2-35x+6$ എന്ന ഘടകം കിട്ടും ഈ ഘടകത്തെ x^2 കൊണ്ട് ഹരിച്ചതിനു ശേഷം പദങ്ങളെ പുനക്രമീകരണം നടത്തിയാൽ $6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-35\left(x+\frac{1}{x}\right)+62$ എന്ന് കിട്ടും. $u=\left(x+\frac{1}{x}\right)$ എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ ഇത് $6(u^2-2)-35u+62$ എന്ന ഒരു ദ്വിഘാത പോളിനോമിയൽ ആയി മാറുന്നു, ഇതിനെ $6u^2-35u+50$ എന്ന് ലഘൂകരിക്കുന്നു. നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുമ്പോൾ $u=\frac{10}{3}, \frac{5}{2}$ എന്ന് കിട്ടുന്നു. $u=\frac{10}{3}$ എന്ന് എടുത്താൽ $x=3, \frac{1}{3}$ എന്നും $u=\frac{5}{2}$ എന്ന് എടുത്താൽ $x=2, \frac{1}{2}$ എന്നും കിട്ടും. അതുകൊണ്ട് ആവശ്യപ്പെട്ട നിർദ്ധാരണം $+1, -1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}$ എന്നിവ ആയിരിക്കും.

ഉദാഹരണം 3.27

$7x^3-43x^2=43x-7$ എന്ന സമീകരണത്തെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ള സമവാക്യത്തെ $7x^3-43x^2-43x+7=0$ എന്ന് എഴുതാം.

ഇത് തരം I ൽ പെടുന്ന ഒറ്റ കൃതിയിലുള്ള ഒരു വ്യുൽക്രമ സമീകരണമാണ്. അതിനാൽ -1 ഇതിന്റെ ഒരു നിർദ്ധാരണവും $x+1$ ഒരു ഘടകവുമായിരിക്കും. $7x^3-43x^2-43x+7$ എന്ന പോളിനോമിയലിന് $x+1$ എന്ന ഘടകം കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ $7x^2-50x+7$ എന്ന ഹരണ ഫലം ലഭിക്കുന്നു. ഇതിനെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുമ്പോൾ 7, $\frac{1}{7}$ എന്നിവ മൂലങ്ങളായി ലഭിക്കുന്നു. അതു കൊണ്ട് തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണങ്ങൾ $-1, \frac{1}{7}, 7$ എന്നിവയാണ്. ■

ഉദാഹരണം 3.28

തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണത്തിനെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക: $x^4-10x^3+26x^2-10x+1=0$.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 122 14-02-2023 18:30:54

നിർദ്ധാരണം

ഈ സമീകരണം തരം I ൽപ്പെട്ട ഇരട്ട കൃതിയിലുള്ള വ്യുൽക്രമ സമീകരണമാണ്. അതിനെ എഴുതുന്നത്

$x^2\left[\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-10\left(x+\frac{1}{x}\right)+26\right]=0$ എങ്കിൽ $x\neq 0$, $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-10\left(x+\frac{1}{x}\right)+26=0$

$y=x+\frac{1}{x}$. എന്നിരിക്കട്ടെ എങ്കിൽ നമുക്ക്

$\left(y^2-2\right)-10y+26=0 \Rightarrow y^2-10y+24=0 \Rightarrow (y-6)(y-4)=0 \Rightarrow y=6$ അല്ലെങ്കിൽ $y=4$

രീതി (i)

$y=6 \quad \Rightarrow x+\frac{1}{x}=6 \Rightarrow x=3+2\sqrt{2}, x=3-2\sqrt{2}$.

രീതി (ii)

$y=4 \Rightarrow x+\frac{1}{x}=4 \Rightarrow x=2+\sqrt{3}, x=2-\sqrt{3}$

$3\pm 2\sqrt{2}, 2\pm\sqrt{3}$ എന്നീ മൂലകൾ കിട്ടുന്നു

3.8.3 പോളിനോമിയലല്ലാത്ത സമവാക്യങ്ങൾ

പോളിനോമിയൽ അല്ലാത്ത ചില സമീകരണങ്ങളെ പോളിനോമിയൽ സമീകരണം ഉപയോഗിച്ച് നിർദ്ധാരണം ചെയ്യാവുന്നതാണ്. ഉദാഹരണത്തിന് $\sqrt{15-2x}=x$ എന്ന സമീകരണം നമുക്ക് പരിഗണിക്കാം. ഇത് ഒരു പോളിനോമിയൽ സമീകരണമല്ലെന്ന് ആദ്യമേ തന്നെ നമുക്ക് അനുമാനിക്കാം. ഇരുവശവും വർഗ്ഗം കണ്ടാൽ നമുക്ക് $x^2+2x-15=0$ കിട്ടും. ഈ പോളിനോമിയൽ സമീകരണം എങ്ങനെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യണമെന്ന് നമുക്ക് അറിയാം. പോളിനോമിയൽ സമീകരണത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണങ്ങളിൽ നിന്ന് തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണം നമുക്ക് പരിശോധിക്കാം 3 നും -5 നും $x^2+2x-15=0$ ത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണങ്ങശ എന്നത് വ്യക്തമാണ്. $\sqrt{\bullet}$ ത്തിന്റെ നെഗറ്റീവല്ലാത്ത വിലകൾ സ്വീകരിക്കുന്നതായി സങ്കൽപ്പിച്ചാൽ $x=3$ എന്നത് ഒരേ ഒരു നിർദ്ധാരണമായിരിക്കും. അല്ലെങ്കിൽ $x=-5$ എന്നത് മറ്റൊരു നിർദ്ധാരണം കൂടെ നമുക്ക് ലഭിക്കും.

ഉദാഹരണം 3.29: തന്നിരിക്കുന്ന സമീകരണം നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക

$$2\cos^2 x-9\cos x+4=0. \qquad \ldots (1)$$

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണത്തിന്റെ ഇടതു വശം x ന്റെ ഒരു പോളിനോമിയലല്ല. പക്ഷേ അത് ഒരു പോളിനോമിയൽ പോലെ തോന്നും. സത്യത്തിൽ നമുക്ക് ഇതിനെ $\cos x$ ന്റെ ഒരു പോളിനോമിയൽ എന്ന് പറയാം. സമീകരണം (1) നെ പോളിനോമിയൽ സമീകരണങ്ങളെ കുറിച്ചുള്ള അറിവിന്റെ വെളിച്ചത്തിൽ നമുക്ക് നിർദ്ധാരണം ചെയ്യാം. $\cos x$ ന് പകരം y നൽകിയാൽ നമുക്ക് $2y^2-9y+4=0$ എന്ന പോളിനോമിയൽ സമീകരണം ലഭിക്കും. ഇത് 4 ലും $\frac{1}{2}$ യും നിർദ്ധാരണങ്ങളാണ്.

ഇതിൽ നിന്നും $\cos x=4$ അല്ലെങ്കിൽ $\cos x=\frac{1}{2}$. എന്ന് നമ്മൾ സമർത്ഥിക്കുന്നു. പക്ഷെ $\cos x=4$ എന്നത് ഒരിക്കലും സാധ്യമല്ല. $\cos x=\frac{1}{2}$ എന്ന് എടുത്താൽ ഇത് തൃപ്തിപ്പെടുന്ന അനന്തം വാസ്തവിക സംഖ്യകൾ x എന്ന് നമുക്ക് കിട്ടും വാസ്തവത്തിൽ എല്ലാ $n\in\mathbb{Z}$ നും $x=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$ എന്നിവ തന്നിരിക്കുന്ന സമീകരണം (1) ന്റെ നിർദ്ധാരണങ്ങളായിരിക്കും.

സമീകരണം $\cos^2 x-9\cos x+20=0$, എന്ന് എടുത്ത് മുകളിൽ വിവരിച്ച ഘട്ടങ്ങൾ ആവർത്തിച്ചാൽ ഈ സമീകരണത്തിന് നിർദ്ധാരണങ്ങളില്ല എന്ന് കാണാം.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 123 14-02-2023 18:31:09

നിരൂപണം

നമുക്ക് അറിയാം

- പ്രതിസ്ഥാപിച്ചു കിട്ടിയ പോളിനോമിയൽ സമീകരണത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണങ്ങൾ എല്ലാം തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണങ്ങളാകില്ല;
- പോളിനോമിയൽ എന്നു തോന്നിക്കുന്ന തരത്തിലുള്ള പോളിനോമിയൽ അല്ലാത്ത സമീകരണത്തിന് അനന്തം നിർദ്ധാരണങ്ങളായിരിക്കാം;
- ഇതു പോലുള്ള സമീകരണങ്ങൾക്ക് നിർദ്ധാരണമില്ലാതെയും ഇരിക്കും.
- അടിസ്ഥാന ബീജഗണിത സിദ്ധാന്തം പോളിനോമിയൽക്കായി മാത്രമാണ് തെളിയിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നത്, പോളിനോമിയൽ അല്ലാത്ത വ്യംജകങ്ങൾക്ക് നമുക്ക് കൃതിയെ കുറിച്ച് സംസാരിക്കാൻ സാധിക്കില്ല. ആയതിനാൽ അടിസ്ഥാന ബീജഗണിത സിദ്ധാന്തം പോളിനോമിയൽ അല്ലാത്ത സമീകരണങ്ങൾക്ക് ബാധകമാണോ എന്നതിൽ ആശങ്ക വേണ്ട.

അഭ്യാസം 3.5

1. തന്നിരിക്കുന്ന സമവാക്യങ്ങൾ തെളിയിക്കുക

   (i) $\sin^2 x - 5\sin x + 4 = 0$ (ii) $12x^3 + 8x = 29x^2 - 4$

2. പരിമേയ മൂലങ്ങൾ പരിശോധിക്കുക

   (i) $2x^3 - x^2 - 1 = 0$ (ii) $x^8 - 3x + 1 = 0$.

3. $8x^{\frac{3}{2n}} - 8x^{\frac{-3}{2n}} = 63$ എന്ന് തെളിയിക്കുക

4. $2\sqrt{\frac{x}{a}} + 3\sqrt{\frac{a}{x}} = \frac{b}{a} + \frac{6a}{b}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

5. സമവാക്യങ്ങൾ തെളിയിക്കുക

   (i) $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$ (ii) $x^4 + 3x^3 - 3x - 1 = 0$

6. $4^x - 3(2^{x+2}) + 2^5 = 0$ എന്ന് തൃപ്തിപ്പെടുന്ന എല്ലാ യഥാർത്ഥ സംഖ്യകളും കാണുക.

7. $\frac{1}{3}$ ഒരു നിർദ്ധാരണമെങ്കിൽ $6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0$ എന്ന സമവാക്യം തെളിയിക്കുക.

3.9 ഡെസ്കാർട്ട്സ് നിയമം

ഈ ഭാഗത്ത് $\mathbb{R}$ ലുള്ള പോളിനോമയിന്റെ പോസ്റ്റീവ് മൂലങ്ങളുടെ എണ്ണം, നെഗറ്റീവ് മൂലങ്ങളുടെ എണ്ണം വാസ്തവികമല്ലാത്ത സങ്കീർണ്ണ മൂലങ്ങളുടെ എണ്ണം എന്നിവയുടെ ചില പരിധികളെയാണ് ചർച്ച ചെയ്യുന്നത്. ഈ പരിധികൾ കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിനുള്ള ശക്തമായ ഉപകരണമാണ് ഡെസ്കാർട്ട്സ് നിയമം.

3.9.1 ഡെസ്കാർട്ട്സ് നിയമത്തിന്റെ പ്രസ്താവന

ഈ നിയമം ചർച്ച ചെയ്യുന്നതായി പോളിനോമിയിലിലെ ഗുണാങ്കങ്ങളുടെ ചിഹ്നം മാറ്റുക എന്ന ധാരണ ആദ്യം അവതരിപ്പിക്കണം.

$2x^7 - 3x^6 - 4x^5 + 5x^4 + 6x^3 - 7x + 8$ എന്ന പോളിനോമിയൽ പരിഗണിക്കുക

ഈ പോളിനോമിയിൽ ഗുണാങ്കങ്ങളുടെ ചിഹ്നങ്ങളെ ' + ' യും ' − ' യും ഉപയോഗിച്ച് ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന പോലെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു

$$+, -, -, +, +, -, +$$

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 124 14-02-2023 18:31:15

x^2 ന് നാം ഒരു ചിഹ്നം നൽകിയിട്ടില്ല എന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക. 4 ചിഹ്ന മാറ്റങ്ങൾ (x^6, x^4, x^1, x^0 എന്നീ പദങ്ങളിൽ) സംഭവിക്കുന്നത് നാം ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടതാണ്.

നിർവ്വചനം 3.2

ഒരു പോളിനോമിയൽ $P(x)$ ലെ j കൃതിയായിട്ടുള്ള x ഗുണാങ്കത്തിന് ചിഹ്നം മാറ്റം സംഭവിച്ചു എന്ന് പറയുന്നത് x^{j+1} ന്റെയും x^j യുടെയും ഗുണാങ്കങ്ങളുടെ അല്ലെങ്കിൽ x^{j-1} ന്റെയും x^j യുടെ ഗുണാങ്കങ്ങളുടെ ചിഹ്നങ്ങൾ വ്യത്യസ്തമാകുമ്പോഴാണ്. (പൂജ്യം ഗുണാങ്കത്തിന് അതിന് തൊട്ട് മുമ്പ് വരുന്ന പൂജ്യമല്ലാത്ത ഗുണാങ്കത്തിന്റെ ചിഹ്നം നാം സ്വീകരിക്കുന്നു)

ചിഹ്ന മാറ്റങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിൽ നിന്ന് ഡസ്ക്കാർട്ട് നിയമം ഉപയോഗിച്ച് പോളിനോമിയിന്റെ മൂലങ്ങളെ കുറിച്ചുള്ള ചില വിവരങ്ങൾ നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നു. ഈ ഭാഗത്ത് തെളിവ് ആവശ്യമില്ലാത്ത കാരണത്താൽ തെളിവില്ലാതെ സിദ്ധാന്തം മാത്രം നാം പ്രസ്താവിച്ചിരിക്കുന്നു.

സിദ്ധാന്തം 3.7 (ഡസ്ക്കാർട്ട് നിയമം)

വാസ്തവിക ഗുണാങ്കങ്ങളുള്ള ഒരു പോളിനോമിയലിന്റെ പോസ്റ്റീവ് പൂജ്യങ്ങളുടെ എണ്ണം p, $P(x)$, ന്റെ ഗുണാങ്കങ്ങളുടെ ചിഹ്ന മാറ്റങ്ങളുടെ എണ്ണം s ആയാൽ $s-p$ എന്നത് നെഗറ്റീവ് അല്ലാത്ത ഒരു ഇരട്ട പൂർണ്ണാങ്കമായിരിക്കും.

$P(x)$ എന്ന ഒരു പോളിനോമിലിന്റെ പോസ്റ്റീവ് മൂലങ്ങളുടെ എണ്ണം $P(x)$ ന്റെ ഗുണാങ്കങ്ങളുടെ ചിഹ്നമാറ്റങ്ങളുടെ എണ്ണത്തെക്കാൾ കൂടുതലായിരിക്കില്ല എന്നാണ് സിദ്ധാന്തം പ്രസ്താവിച്ചിരിക്കുന്നത്. ഇത് കൂടാതെ $P(x)$ ന്റെ ഗുണുങ്കങ്ങളുടെ ചിഹ്നം വ്യത്യാസങ്ങളുടെ എണ്ണവും പോളിനോമിയൽ $P(x)$ ന്റെ പോസ്റ്റീവ് മൂലങ്ങളുടെ എണ്ണം തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം ഇരട്ട സംഖ്യയായിരിക്കും. $P(x)$. ന്റെ ഒരു നെഗറ്റീവ് പൂജ്യം $P(-x)$ ന്റെ ഒരു പോസിറ്റീവ് പൂജ്യം ആയതിനാൽ സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച് $P(x)$ എന്ന പോളിനോമി യ ലിന്റെ നെഗറ്റീവ് ഇത് കൂടാതെ $P(x)$ ന്റെ ഗുണാങ്കങ്ങളുടെ ചിഹ്നം വ്യത്യാസങ്ങളുടെ എണ്ണവും പോളിനോമിയൽ $P(x)$ ന്റെ പോസ്റ്റീവ് മൂലങ്ങളുടെ എണ്ണവും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം ഇരട്ട സംഖ്യയായിരിക്കും.

$P(x)$ ന്റെ ഒരു നെഗറ്റീവ് പൂജ്യം $P(-x)$ ന്റെ ഒരു പോസ്റ്റീവ് പൂജ്യം ആയതിനാൽ സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച് $P(x)$ എന്ന പോളിനോമിലിന്റെ നെഗറ്റീവ് പൂജ്യങ്ങളുടെ എണ്ണം $P(-x)$ ന്റെ ഗുണാങ്കങ്ങളുടെ ചിഹ്നമാറ്റങ്ങളുടെ എണ്ണത്തെക്കാൾ കൂടുതൽ ആകില്ല എന്നും $P(-x)$ ന്റെ ഗുണാങ്കങ്ങളുടെ ചിഹ്ന വ്യത്യാസങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിന്റെയും $P(x)$ എന്ന പോളിനോമിയിലിന്റെ നെഗറ്റീവ് പൂജ്യങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിന്റെയും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം ഇരട്ട സംഖ്യയാണെന്നും നമുക്ക് സമർപ്പിക്കാം

ചില പോസ്റ്റീവ് പൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾ k യ്ക്ക് x^k കൊണ്ട് ഒരു പോളിനോമിയലിനെ ഗുണിക്കുന്നത് പോളിനോമിയലിന്റെ പോസ്റ്റീവ് പൂജ്യങ്ങളുടെ എണ്ണത്തേയോ ഗുണാങ്കങ്ങളുടെ ചിഹ്നം മാറ്റങ്ങളുടെ എണ്ണത്തേയോ ബാധിക്കുകയില്ല, പോളിനോമിയിലിന്റെ സ്ഥിരാങ്കത്തെ കുറിച്ച് നമ്മൾ ചിന്തിക്കേണ്ടതില്ല. ചില പുസ്തക രചിതാക്കൾ പോളിനോമിലിന്റെ സ്ഥരാങ്കം പൂജ്യം അല്ലാതാകണമെന്ന് ചിന്തിക്കുന്നു.

ഡസ്ക്കാർട്ട് നിയമത്തിൽ 0 എന്നത് ഒരു മൂലമായി പ്രസ്താവിച്ചിട്ടില്ല എന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക എന്നാൽ പതിവ് രൂപത്തിൽ എഴുതപ്പെട്ട പോളിനോമിലിന്റെ കാഴ്ചയിൽ നിന്ന് 0 പോളിനോമിലിന്റെ ഒരു മൂലം ആണോ അല്ലയോ എന്ന് ഒരാൾക്ക് പറയാൻ കഴിയും. ചില പോളിനോമിലുകളിലൂടെ ഡസ്ക്കാർട്ടിന്റെ നിയമം നമുക്ക് സ്ഥികരീക്കാവുന്നതാണ്.

3.9.2 പരിധികൾ കൈവരിയ്ക്കുക

3.9.2 (a) വാസ്തവിക മൂലങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിന്റെ പരിധി

$P(x)=(x+1)(x-1)(x-2)(x+i)(x-i)$ എന്ന പോളിനോമിലിന്റെ പൂജ്യങ്ങൾ $-1, 1, 2, -i, i$. ഈ പോളിനോമിലിന്റെ സാധാരണ രൂപം x^5-2x^4-x+2.നാലും പൂജ്യം കൃതിയായിട്ടുള്ള പദങ്ങളിൽ പോളിനോമിയൽ $P(x)$, 2 ചിഹ്ന മാറ്റം. ഇത് കൂടാതെ,

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 125 14-02-2023 18:31:27

$$P(-x) = -x^5 - 2x^4 + x + 2$$

അതിന് ഒരു ചിഹ്നമാറ്റമാണ് ഉള്ളത്. നമ്മുടെ ഡസ്ക്കാർട്ട് നിയമം അനുസരിച്ച് $P(x)$ എന്ന പോളിനോമിലിന്റെ പോസ്റ്റീവ് പൂജ്യങ്ങളുടെ എണ്ണം 2 ൽ കൂടുതലോ നെഗറ്റീവ് പൂജ്യങ്ങളുടെ എണ്ണം 1 ൽ കൂടുതലോ ആകില്ല. $x^5 - 2x^4 - x + 2$ എന്ന പോളിനോമിയിലിന് $1, 2$ എന്നീ പോസ്റ്റീവ് പൂജ്യങ്ങളും -1 എന്ന നെഗറ്റീവ് പൂജ്യവും ഉണ്ട്. അതിനാൽ പോസ്റ്റീവ് പൂജ്യത്തിന്റെ പരിധി 2 നും നെഗറ്റീവ് പൂജ്യത്തിന്റെ പരിധി 1 നും കൈവരിക്കപ്പെട്ടു i , $-i$ എന്നിവ പോസിറ്റീവോ, നെഗറ്റീവോ, അല്ലെന്ന് ഞാൻ ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടതാണ്.

$(x+2)(x+3)(x+i)(x-i)$ എന്നത് $-2, -3, -i, i$. എന്നീ പൂജ്യങ്ങൾ ഉള്ള പോളിനോമിയൽ ആണെന്ന് നമുക്ക് അറിയാം $P(x)$ എന്ന പോളിനോമിയലിനെ അതിന്റെ സാധാരണ രൂപത്തിൽ $x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 5x + 6$ എന്ന് എഴുതാം.

$P(x)$ എന്ന ഈ പോളിനോമിയലിന് ഒരു ചിഹ്ന മാറ്റവുമില്ല എന്നും $P(-x) = x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6$ എന്നത് 4 ചിഹ്നമാറ്റമുണ്ടെന്ന് കാണാം. ഡസ്കാർട്ട് നിയമപ്രകാരം പോളിനോമിയൽ $P(x)$ ന്റെ പോസ്റ്റീവ് പൂജ്യങ്ങളുടെ എണ്ണം 0 നേക്കാൾ കൂടുതലോ നെഗറ്റീവ് പൂജ്യങ്ങളുടെ എണ്ണം 4 ൽ കൂടുതലോ ആകാൻ പാടില്ല.

ഉദാഹരണമായി മറ്റൊരു പോളിനോമിയിൽ,

$$x^n - {}^nC_1 x^{n-1} + {}^nC_2 x^{n-2} - {}^nC_3 x^{n-3} + \cdots + (-1)^{n-1}\, {}^nC_{(n-1)} x + (-1)^n$$ കൂടെ പരിഗണിക്കാം.

ഇത് $(x-1)^n$ ന്റെ വിപുലീകരണമാണ്. ഈ പോളിനോമിലിന്റെ ഗുണാങ്കങ്ങളിൽ n ചിഹ്ന മാറ്റങ്ങളും $P(-x)$ ന്റെ ഗുണാങ്കങ്ങളിൽ ചിഹ്ന മാറ്റങ്ങളില്ല എന്ന് കാണാം. ഇത് കാണിക്കുന്നത് പോളിനോമിയലിന്റ പോസ്റ്റീവ് പൂജ്യങ്ങളുടെ എണ്ണം n നേക്കാൾ കൂടിയില്ല എന്നും പോളിനോമിലിന്റെ നെഗറ്റീവ് പൂജ്യങ്ങളുടെ എണ്ണം 0 യേക്കാൾ കൂടില്ല എന്നുമാണ്. നെഗറ്റീവ് പൂജ്യത്തെ കുറിച്ചുള്ള പ്രസ്താവന നൽകുന്നത് പോളിനോമിലിന് നെഗറ്റീവ് പൂജ്യങ്ങൾ ഒന്നുമില്ല എന്ന ആവശ്യമായ വിവരമാണ്. എന്നാൽ പോസിറ്റീവ് പൂജ്യങ്ങളുടെ പ്രസ്താവന നൽകുന്നത് പോസിറ്റീവ് പൂജ്യങ്ങളെ കുറിച്ചുള്ള നല്ല വിവരങ്ങളല്ല, വാസ്തവത്തിൽ കൃതി n ആയിട്ടുള്ള ഒരു പോളിനോമിലിന്റെ പൂജ്യങ്ങളുടെ എണ്ണം n തിനെക്കാൾ കൂടില്ല, അതിനാൽ പോസ്റ്റീവ് പൂജ്യങ്ങളുടെ എണ്ണം n നെക്കാൾ കൂടില്ല എന്നതിനാൽ കൃതിമായ n പോസ്റ്റീവ് പൂജ്യങ്ങൾ ഉണ്ടെന്ന് പറയാനാകില്ല.

3.9.2 (b) സാങ്കല്പിക (വാസ്തവികമല്ലാത്ത) മൂലകങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിന്റെ പരിധി

ഡെസ്കാർട്ട്സ് നിയമം ഉപയോഗിച്ച് സാങ്കൽപിക മൂലങ്ങൾ എണ്ണത്തിന് ഒരു താഴ്ന്ന പരിധി കണക്കാക്കാൻ നമുക്ക് സാധിക്കും. ഡിഗ്രി n ന്റെ $P(x)$ ന്റെ ഗുണാങ്കങ്ങളിലെ ചിഹ്ന മാറ്റങ്ങളുടെ എണ്ണം സൂചിപ്പിക്കുക, k സംഖ്യയെ സൂചിപ്പിക്കാൻ അനുവദിക്കുക, $P(-x)$ ന്റെ ഗുണാങ്കങ്ങളിലെ ചിഹ്നമാറ്റങ്ങളുടെ $P(x)$ എന്ന പോളിനോമിയലിനായി കുറഞ്ഞത് $n-(m+k)$ സാങ്കൽപ്പിക മൂലങ്ങളെങ്കിലും ഉണ്ട്. മൂലങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിന്റെയും അനുയോജ്യമായ ചിഹ്നമാറ്റങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിന്റെയും വ്യത്യാസം ഒരു ഇരട്ട സംഖ്യയാണെന്ന് നിമത്തിന്റെ മറ്റൊരു നിർണയപ്രകാരം പ്രത്യേക സാഹചര്യങ്ങളിൽ മൂലങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിന്റെ പരിധി നിശ്ചയിക്കാവുന്നതാണ്.

ഉദാഹരണം 3.30

$9x^9 + 2x^5 - x^4 - 7x^2 + 2$ എന്ന പോളിനോമിയൽ ഏകദേശം ആറ് സാങ്കൽപിക മൂലങ്ങൾ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ള പോളിനോമിയൽ $P(x)$ ന് 2 ചിഹ്ന മാറ്റങ്ങളുണ്ടെന്ന് വ്യക്തമാക്കുക. അതിനാൽ $P(x)$ ന്റെ പോസിറ്റീവ് മൂലങ്ങളുടെ എണ്ണം 2 ൽ കൂടില്ല. ഇത് കൂടാതെ $P(-x) = -9x^9 - 2x^5 - x^4 - 7x^2 + 2$, ൽ ഒരു ചിഹ്നമാറ്റമാണുള്ളത്. അതിനാൽ നെഗറ്റീവ് മൂലങ്ങളുടെ എണ്ണം ഒന്നിൽ കൂടില്ല. പൂജ്യം ഇവിടെ ഒരു മൂലമല്ല എന്നത് വ്യക്തമാണ്. അതു കൊണ്ട് ഏറ്റവും കൂടിയത് 3 വാസ്തവിക മൂലങ്ങളും അതിനാൽ സാങ്കൽപിക മൂലങ്ങളുടെ എണ്ണം ഏറ്റവും കുറഞ്ഞത് ആറ് ആയിരിക്കും.

പരാമർശം മേൽ സൂചിപ്പിച്ച കാര്യങ്ങളിൽ നിന്ന് ഡസ്കാർട്ട് നിയമത്തിലൂടെ പോസിറ്റീവ് മൂലങ്ങളുടെ നെഗറ്റീവ് മൂലങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിന്റെ കൂടിയ പരിധിയാണ് ലഭിക്കുന്നുവെന്ന് ശ്രദ്ധിക്കുക പോസിറ്റീവ് മൂലങ്ങളുടെയോ, നെഗറ്റീവ് മൂലങ്ങളുടെയോ കൃത്യമായ എണ്ണം ഡസ്കാർട്ടിന്റെ നിയമം നൽകുന്നില്ല. എന്നാൽ പോസിറ്റീവ്, നെഗറ്റീവ് വാസ്തവികമല്ലാത്ത മൂലങ്ങളുടെ കൃതിമായ എണ്ണം ചില പോളിനോമിലികൾക്ക് കൃത്യമായി എഴുതാൽ നമുക്ക് ആകും. കൂടാതെ മൂലങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിനുള്ള ഒരു രീതിയും ഇത് നൽകുന്നില്ല.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 126 14-02-2023 18:31:42

ഉദാഹരണം 3.31

തന്നിട്ടുള്ള പോളിനോമികളുടെ മൂലങ്ങളുടെ സ്വഭാവം ചർച്ച ചെയ്യുക:

(i) $x^{2018}+1947x^{1950}+15x^8+26x^6+2019$ (ii) $x^5-19x^4+2x^3+5x^2+11$

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ളവയിൽ പോളിനോമിയലുകളെ $P(x)$ എന്ന് കരുതാം.

(i) $P(x)$ ന്റെയും $P(-x)$ ന്റെയും ചിഹ്നമാറ്റങ്ങളുടെ എണ്ണവും പൂജ്യമായതിനാൽ പോസിറ്റീവ് മൂലങ്ങളോ നെഗറ്റീവ് മൂലങ്ങളോ ഇല്ല. പൂജ്യം ഒരു മൂലമല്ലയെന്ന് വ്യക്തമാണ്. അതിനാൽ പോളിനോമിയലിന് വാസ്തവിക മൂലങ്ങൾ ഇല്ലെന്നും പോളിനോമിയൽ മൂലങ്ങൾ എല്ലാം തന്നെ സാങ്കൽപിക മൂലങ്ങളായെന്ന് കാണാം.

(ii) $P(x)$ ന്റെയും $P(-x)$ ന്റെയും ചിഹ്നമാറ്റങ്ങളുടെ എണ്ണം യഥാക്രം 2, 1 ആണ്. അതിനാൽ ഇതിന് കൂടിയത് രണ്ട് പോസിറ്റീവ് മൂലങ്ങളും ഒരു നെഗറ്റീവ് മൂലവും ഉണ്ടാവാം. $P(-x)$ ന്റെ ഗുണാങ്കങ്ങളുടെ ചിഹ്നമാറ്റങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിന്റെയും നെഗറ്റീവ് മൂലങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിന്റെയും വ്യത്യാസം ഇരട്ട സംഖ്യയായതിനാൽ നെഗറ്റീവ് മൂലങ്ങളുടെ എണ്ണം പൂജ്യം അല്ല എന്ന് നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നു. അതു കൊണ്ട് നെഗറ്റീവ് മൂലങ്ങളുടെ എണ്ണം 1 ആണ് $P(x)$ ന്റെ ഗുണാങ്കങ്ങളുടെ ചിഹ്ന മാറ്റങ്ങളുടെ എങ്ങത്തിന്റെയും പോസിറ്റീവ് മൂലങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിന്റെയും വ്യത്യാസം ഇരട്ട സംഖ്യയായതിനാൽ പോസ്റ്റീവ് മൂലങ്ങളുടെ എണ്ണം പൂജ്യം അല്ലെങ്കിൽ 2 എന്ന് നമുക്ക് കിട്ടുന്നു. എന്നാൽ ഗുണാങ്കങ്ങളുടെ തുക പൂജ്യം ആയതിനാൽ 1 ഒരു മൂലമാണ്. അതിനാൽ രണ്ടേ രണ്ട് പോസിറ്റീവ് മൂലങ്ങൾ നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നു. മാത്രമല്ല മറ്റ് രണ്ട് മൂലങ്ങൾ സാങ്കൽപിക സംഖ്യകളുമാണ്. ■

അഭ്യാസം 3.6

1. തന്നിട്ടുള്ള പോളിനോമിയൽ സമീകരണം $9x^9-4x^8+4x^7-3x^6+2x^5+x^3+7x^2+7x+2=0$. വിന് സാധ്യമായ ഏറ്റവും കൂടിയ പോസിറ്റീവ് നെഗറ്റീവ് മൂലങ്ങളുടെ എണ്ണം ചർച്ച ചെയ്യുക.
2. തന്നിട്ടുള്ള പോളിനോമിയൽ സമീകരണം x^2-5x+6, $x^2-5x+16$ സാധ്യമായ ഏറ്റവും കൂടിയ പോസിറ്റീവ് നെഗറ്റീവ് പൂജ്യങ്ങളുടെ എണ്ണം ചർച്ച ചെയ്യുക. കൂടാതെ ഗ്രാഫ് ഏകദേശ രൂപം വരയ്ക്കുക.
3. $x^9-5x^5+4x^4+2x^2+1=0$ എന്ന സമീകരണത്തിന് ഏറ്റവും കുറഞ്ഞത് 6 സാങ്കൽപ്പിക നിർദ്ധാരങ്ങൾ ഉണ്ടെന്ന് തെളിയിക്കുക.
4. $x^9-5x^8-14x^7=0$ എന്ന സമീകരണത്തിന്റെ പോസിറ്റീവ് നെഗറ്റീവ് മൂലങ്ങളുടെ എണ്ണം കണ്ടുപിടിക്കുക.
5. $x^9+9x^7+7x^5+5x^3+3x$ എന്ന പോളിനോമിയലിന്റെ വാസ്തവിക പൂജ്യങ്ങളുടെയും സാങ്കൽപിക പൂജ്യങ്ങളുടെയും കൃത്യമായ എണ്ണം കാണുക.



അഭ്യാസം 3.7

ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുത്തെഴുതുക :



1. x^3+64 ന്റെ പൂജ്യം
   (1) 0 (2) 4 (3) $4i$ (4) -4
2. f, g എന്നീ പോളിനോമിയലുകളിലെ കൃതികൾ യഥാക്രമം m, n ഉം, $h(x)=(f\circ g)(x)$, ആയാൽ h ന്റെ ഡിഗ്രി
   (1) mn (2) $m+n$ (3) m^n (4) n^m
3. x ൽ ഉള്ള പോളിനോമിയൽ സമവാക്യത്തിന്റെ ഡിഗ്രി n ആണെങ്കിൽ അത് എല്ലായ്പ്പോഴും
   (1) n വ്യത്യസ്ത മൂലങ്ങൾ (2) n യഥാർത്ഥ മൂലങ്ങൾ (3) n സാങ്കൽപിക മൂലങ്ങൾ (4) ഏതെങ്കിലും ഒരു മൂലം.
4. x^3+px^2+qx+r, ന്റെ പൂജ്യങ്ങളാണ് α, β, γ എങ്കിൽ $\sum\frac{1}{\alpha}$ യുടെ
   (1) $-\frac{q}{r}$ (2) $-\frac{p}{r}$ (3) $\frac{q}{r}$ (4) $-\frac{q}{p}$
5. പരിമേയ മൂല സിദ്ധാന്ത പ്രകാരം $4x^7+2x^4-10x^3-5$ ന് ഏത് സംഖ്യയാണ് പരിമേയ പൂജ്യത്തിന് സാധ്യമല്ലാത്തത്?
   (1) -1 (2) $\frac{5}{4}$ (3) $\frac{4}{5}$ (4) 5

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 127 14-02-2023 18:31:59

6. $x^3 - kx^2 + 9x$ എന്ന പോളിനൊമിയൽ യഥാക്രമം മൂന്ന് യഥാർത്ഥ പൂജ്യങ്ങൾ എങ്കിൽ മാത്രം k ക്കു സാധ്യമായത്

(1) $|k| \leq 6$ (2) $k = 0$ (3) $|k| > 6$ (4) $|k| \geq 6$

7. $[0, 2\pi]$ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്ന $\sin^4 x - 2\sin^2 x + 1$ ലെ യഥാർത്ഥ സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം

(1) 2 (2) 4 (3) 1 (4) ∞

8. $x^3 + 12x^2 + 10ax + 1999$ എന്നതിന് തീർച്ചയായും ഒരു പോസ്റ്റീവ് പൂജ്യമുണ്ടെങ്കിൽ

(1) $a \geq 0$ (2) $a > 0$ (3) $a < 0$ (4) $a \leq 0$

9. $x^3 + 2x + 3$ എന്ന പോളിനോമിയലിന്

(1) ഒരു നെഗറ്റീവും രണ്ട് സാങ്കൽപ്പിക മൂലങ്ങളും (2) ഒരു പോസിറ്റീവും രണ്ട് സാങ്കൽപ്പിക മൂലങ്ങളും

(3) മൂന്ന് യഥാർത്ഥ പൂജ്യങ്ങൾ (4) പൂജ്യങ്ങളില്ല

10. $\sum_{j=0}^{n} {}^nC_r(-1)^r x^r$ എന്ന പോളിനോമിയലിന്റെ പൂജ്യങ്ങളുടെ എണ്ണം കാണുക

(1) 0 (2) n (3) $< n$ (4) r

സംഗ്രഹം

ഈ അധ്യായത്തിൽ നമ്മൾ പഠിച്ചത്

- n>3 ഡിഗ്രി, 2,3, യുള്ള പോളിനോമിയൽ സമവാക്യത്തിന്റെ വിറ്റേയുടെ സൂത്രം.
- **ബീജഗണിതത്തിലെ അടിസ്ഥാന സിദ്ധാന്തം:** ഒരു മൂലമെങ്കിലും $\mathbb{C}$ യുള്ള ഡിഗ്രി $n \geq 1$ ഉള്ള ബഹുപദവ്യംജകം (പോളിനോമിയൽ).
- **സങ്കീർണ്ണ സംയോജന മൂല സിദ്ധാന്തം** : പോളിനോമിലിന്റെ ഗുണാങ്കങ്ങൾ വാസ്തിവീകമാകുമ്പോൾ സാങ്കൽപ്പിക (യഥാർത്ഥ മല്ലാത്ത) മൂലങ്ങൾ സംയോജം ജോഡികളായി ലഭിക്കും.
- **പരിമേയ സംഖ്യയുടെ മൂല സിദ്ധാന്തം**: $a_n \neq 0$ യും $a_0 \neq 0$ ആയുള്ള പൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾ ഗുണാങ്കമായിട്ടുള്ള $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ എന്ന ഒരു പോളിനോമിയൽ പരിഗണിക്കാം. a_0 ഘടകം p യും a_n ഘടകം q ആയ പോളിനോമിയൽ മൂല $(p, q) = 1$ എങ്കിൽ $\frac{p}{q}$ ആണ് .
- ചില പ്രത്യേക തരം പോളിനോമിയൽ സമവാക്യങ്ങൾ പരിഹരിക്കാനുള്ള മാർഗ്ഗങ്ങൾ പോലെയുള്ള പോളിനോമിയലുകൾ ഭാഗീകമായി ഘടകങ്ങളാക്കിയ പോളിനോമിയലുകൾ, ഗുണകങ്ങളുടെ ആകെത്തുകയുള്ള പോളിനോമിയലുകൾ പൂജ്യം പരസ്പരം സമവാക്യങ്ങൾ.
- **ഡെസ്കാർട്ടസ് നിയമം :** p എന്നത് $P(x)$ എന്ന പോളിനോമിലിന്റെ പോസ്റ്റീവ് മൂലങ്ങളുടെ എണ്ണവും s എന്നത് $P(x)$ ന്റെ ഗുണാങ്കങ്ങളുടെ അടയാള മാറ്റങ്ങളുടെ എണ്ണവുമായ $s - p$ എന്നത് നെഗറ്റീവല്ലാത്ത ഒരു ഇരട്ട സംഖ്യയായിരിക്കും.

ഐ.സി.റ്റി കോർണർ

https://ggbm.at/vchq92pg അല്ലെങ്കിൽ QR കോഡിനെ സ്കാൻ ചെയ്യുക

ബ്രൗസർ തുറന്ന് തന്നിട്ടുള്ള URL ലിങ്ക് ടൈപ്പ് ചെയ്യുക (അല്ലെങ്കിൽ) QR കോഡിനെ സ്കാൻ ചെയ്യുക. അപ്പോൾ പന്ത്രണ്ടാം തരം ഗണിതം എന്ന പേരുള്ള ജിയോജീബ്ര വർക്ക് ബുക്ക് ഓപ്പൺ ആകും വർക്ക് ബുക്കിന്റെ ഇടതു ഭാഗത്ത് പാഠഭാഗത്തെ ആസ്പദമാക്കി അനേകം ഭാഗങ്ങളുണ്ട് "സമീകരണങ്ങളുടെ സിദ്ധാന്തം" എന്ന പേരുള്ള അധ്യായത്തിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്യുക. നിങ്ങൾക്ക് അതിൽ ഈ പാഠഭാഗത്തെ അനുബന്ധിച്ച് അനേകം വർക്ക് ഷീറ്റുകൾ ലഭിക്കും "മൂലകങ്ങൾക്കും ഗുണാങ്കങ്ങൾക്കും ഇടയിലുള്ള ബന്ധം" എന്ന വർക്ക് ഷീറ്റ് സെലക്റ്റ് ചെയ്യുക.

FCVU6

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 128 14-02-2023 18:32:10

അദ്ധ്യായം

4

വിപരീത ത്രികോണമിതി ഫലനം

QBML8

"ഗണിത ശാസ്ത്രത്തിന്റെ ശക്തി പലപ്പോഴും ഒരു കാര്യത്തെ മറ്റൊന്നിലേക്ക്, ജ്യാമിതിയെ ഭാഷയിലേക്ക് മാറ്റുക എന്നതാണ് "

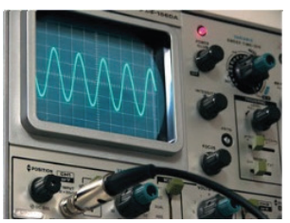
- മാർക്കസ് ഡു സാറ്റോയ്

4.1 ആമുഖം



ജോൺ F.W. ഹെർഷേൽ

ദൈനം ദിന ജീവിതത്തിൽ, അളവുപകരണങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് പരിഹരിക്കാൻ കഴിയാത്ത പ്രശ്നങ്ങൾക്ക് പരിഹാരം കാണുന്നതിന് പരോക്ഷ അളവ് ഉപയോഗിക്കുന്നു. അളവുപകരണങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കാതെ തന്നെ പർവതങ്ങളുടെയും ഉയരമുള്ള കെട്ടിടങ്ങളുടെയും ഉയരം തുടങ്ങിയ അളവുകൾ കണ്ടെത്താൻ ത്രികോണമിതി നമ്മെ സഹായിക്കുന്നു. ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളും അവയുടെ വിപരീത ഫലനങ്ങളും എഞ്ചിനീയറിംഗിലും ഭൗതീക ശാസ്ത്രം ഉൾപ്പെടുന്ന മറ്റു ശാസ്ത്രങ്ങളിലും വ്യാപകമായി ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ട് വശങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ത്രികോണം നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നതിന് മാത്രമല്ല $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$, $\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx$ മുതലായ പ്രത്യേക തരം സമകലനങ്ങൾ (Integrals) വിലയിരുത്തുന്നതിനും അവ നമ്മെ സഹായിക്കുന്നു. സൈൻ (sine) ഫലത്തിന്റെ വിപരീത ത്രികോണമിതി ഫലനമായ $\arcsin(x)$ എന്നതിന് $\sin^{-1} x$ എന്ന ചിഹ്നം നൽകിയത് ബ്രിട്ടീഷ് ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞനായ **ജോൺ എഫ്. ഡബ്ല്യൂ. ഹെർഷേൽ (1792-1871)** ആണ്. തന്റെ പിതാവിനൊപ്പം ചേർന്നുള്ള അദ്ദേഹത്തിന്റെ പ്രവർത്തനങ്ങൾക്ക് 1826 ൽ റോയൽ ആസ്ട്രോണമിക്കൽ സൊസൈറ്റിയിൽ നിന്ന് സ്വർണ്ണമെഡൽ ലഭിച്ചു.

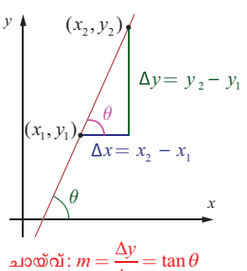


വൈദ്യുത സിഗ്നലുകളെ സൈൻ ഫലനത്തിന്റേതു പോലുള്ള ഗ്രാഫുകളായി പരിവർത്തനം ചെയ്യുന്ന ഒരു വൈദ്യുതോപകരണമാണ് ഓസിലോസ്കോപ്പ് വിവിധ നിയന്ത്രണങ്ങളുപയോഗിച്ച് സൈൻ വക്രങ്ങളുടെ ബാഹുല്യം, അന്തരം, ദശവ്യതിയാനം എന്നിവ മാറ്റാൻ നമുക്ക് സാധിക്കും. മനുഷ്യന്റെ ഹൃദയമിടിപ്പ് അളക്കുന്നതുപോലുള്ള നിരവധി പ്രയോഗങ്ങൾ ഓസിലോസ്കോപ്പിനുണ്ട്. ഇവിടെയെല്ലാം ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങൾ പ്രധാന പങ്കു വഹിക്കുന്നു.

പലപ്പോഴും വിപരീത ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുന്ന ചില ലളിതമായ സാഹചര്യങ്ങൾ നമുക്ക് പരിഗണിക്കാം.

വിശദീകരണം-1 (ചായ്‌വ് പ്രശ്നം)

$y = mx + b$ എന്ന ഒരു നേർരേഖ പരിഗണിക്കാം. രേഖ x -അക്ഷവുമായുണ്ടാക്കുന്ന കോൺ θ ചായ്‌വ് m ഉപയോഗിച്ച് നമുക്ക് കണ്ടുപിടിക്കാം. ചായ്‌വ് അല്ലെങ്കിൽ ചെരിവ് m എന്നതിനെ ഒരു ഫലനത്തിന്റെ മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്കായി നിർവ്വചിക്കാം. സാധാരണയായി $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ എന്ന് കണക്കാക്കിയിരിക്കുന്നു. മട്ടത്രികോണത്തിൽ നിന്ന് (ചിത്രം 4.1) $\tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ആണ്. അതിനാൽ $\tan\theta = m$ കാണുന്നതിനായി **"വിപരീത ടാൻജന്റ് ഫലനം"** എന്ന വിപരീത ത്രികോണമിതി ഫലനം നമുക്കാവശ്യമാണ്.

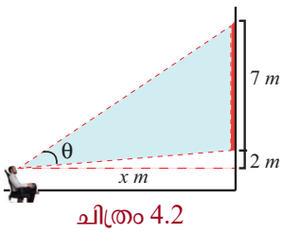


ചിത്രം 4.1

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 4 Inverse Trigonometry.indd 129 14-02-2023 14:25:53

വിശദീകരണം -2 (സിനിമാശാലയിലെ തിരശ്ശീല)

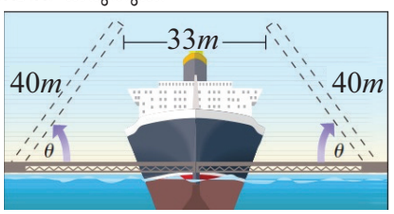
ഒരു സിനിമാശാലയിലെ തിരശ്ശീലയ്ക്ക് 7 m ഉയരം ഉണ്ട് എന്ന് കരുതുക. സിനിമ കാണാൻ ഇരിക്കുന്ന ഒരാളുടെ വീക്ഷണ രേഖയ്ക്ക് 2 m മുകളിലായാണ് തിരശ്ശീലയുടെ കീഴ്ഭാഗം കണ്ണിൽ നിന്നും തിരശ്ശീലയുടെ കീഴ്ഭാഗത്തേയ്ക്ക് വരയ്ക്കുന്ന രേഖയും കണ്ണിൽ നിന്നും തിരശ്ശീലയുടെ മുകൾ ഭാഗത്തേയ്ക്ക് വരയ്ക്കുന്ന രേഖയും തമ്മിലുണ്ടാകുന്ന കോണിനെ വീക്ഷണ കോൺ എന്നു പറയുന്നു. ചിത്രം 4.2 ൽ വീക്ഷണ കോൺ θ യാണ്. വീക്ഷണ കോൺ θ യെ $\theta(x) = \tan^{-1}\left(\frac{9}{x}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{2}{x}\right)$ എന്ന ഫലനമായെഴുതാം. വീക്ഷണ കോൺ θ എന്നത് x ന്റെ ഒരു ഫലനമാണെന്ന് കാണാം.



ചിത്രം 4.2

വിശദീകരണം -3 (ഡ്രോബ്രിഡ്ജ്)

ചിത്രം 4.3 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതു പോലെ ഒരു ഇരട്ട ഡ്രോബ്രിഡ്ജ് ഉണ്ടെന്ന് കരുതുക. ഓരോ പാലത്തിനും 40 m വീതം നീളം ഉണ്ട്. 33 m വീതിയുള്ള ഒരു കപ്പലിന് ഈ വഴിയിലൂടെ കടന്നുപോകണം. കപ്പൽ സുഗമമായി ഈ വഴിയിലൂടെ കടന്നുപോകാൻ ഇരു പാലങ്ങളും തുറക്കേണ്ട ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ കോണളവ് θ കാണുവാൻ വിപരീത ത്രികോണമിതി ഫലനം നമ്മെ സഹായിക്കുന്നു.



ചിത്രം 4.3

വാസ്തവിക സംഖ്യകളുടെ ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങൾ യൂണിറ്റ് വൃത്തം ഉപയോഗിച്ച് 11-ാം ക്ലാസ്സിൽ നമ്മൾ ചർച്ച ചെയ്തിട്ടുണ്ട്. കോണളവുകൾ റേഡിയനിൽ ആണ്. വിപരീത ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളും അവയുടെ ഗ്രാഫുകളും പ്രത്യേകതകളും ആണ് ഈ അദ്ധ്യായത്തിൽ നമ്മൾ പഠന വിഷയമാക്കുന്നത്. നമ്മുടെ ചർച്ചയിൽ $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ എന്നിവ യഥാക്രമം വാസ്തവിക സംഖ്യകൾ, പൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾ എന്നിവയുടെ ഗണങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ആറ് ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളുടെയും തവണകൾ, രംഗം എന്നിവയുടെ നിർവ്വചനങ്ങൾ ഓർമ്മിച്ചെടുക്കാം.

പഠന ലക്ഷ്യങ്ങൾ

ഈ അദ്ധ്യായം പൂർണ്ണമാകുമ്പോൾ ഒരു വിദ്യാർത്ഥിക്ക് ഇവ ചെയ്യാൻ കഴിയും

- വിപരീത ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങൾ നിർവ്വചിക്കുന്നതിന്
- വിപരീത ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളുടെ പ്രധാന മൂല്യം വിലയിരുത്തുന്നതിന്
- ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളുടെയും അവയുടെ വിപരീത ഫലനങ്ങളുടെയും ഗ്രാഫുകൾ വരയ്ക്കുന്നതിന്
- വിപരീത ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളുടെ സവിശേഷതകൾ പ്രയോഗിക്കുകയും ഗണിത വാക്യങ്ങൾ വിലയിരുത്തുകയും ചെയ്യുന്നതിന്

4.2 ചില അടിസ്ഥാന ആശയങ്ങൾ

നിർവ്വചനം 4.1 (ആനുകാലികത)

ഒരു വാസ്തവിക സംഖ്യാ ഫലനം **ആനുകാലിക ഫലനമാകാൻ** നിലവിലുള്ള ഒരു സംഖ്യ $p > 0$ ന് f ന്റെ മണ്ഡലത്തിലുള്ള എല്ലാ x നും f ന്റെ മണ്ഡലത്തിലെ $x + p$ ക്ക് $f(x + p) = f(x)$ ആയിരിക്കണം.

ഇത്തരത്തിലുള്ള എല്ലാ ചെറിയ സംഖ്യകളേയും f എന്ന ഫലനത്തിന്റെ **ആന്തരം** എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണത്തിന് $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{cosec} x$, $\sec x$, e^{ix} എന്നിവ 2π റേഡിയൻ അന്തരമുള്ള ആനുകാലിക ഫലനങ്ങളും $\tan x$ ഉം $\cot x$ ഉം π റേഡിയൻ അന്തരമുള്ള ആനുകാലിക ഫലനങ്ങളും ആണ്.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 4 Inverse Trigonometry.indd 130 14-02-2023 14:25:57

നിർവ്വചനം 4.2 (ഒറ്റ, ഇരട്ട ഫലനങ്ങൾ)

ഒരു വാസ്തവിക മൂല്യ ഫലനം f ഒരു **ഇരട്ട ഫലനമാകാൻ** f ന്റെ മണ്ഡലത്തിലെ എല്ലാ x നും $-x$ എന്നത് f ന്റെ മണ്ഡലത്തിലെ അംഗമാവുകയും $f(-x)=f(x)$ ആവുകയും വേണം.

ഒരു വാസ്തവിക മൂല്യ ഫലനം f ഒരു **ഒറ്റഫലനമാകാൻ** f ന്റെ മണ്ഡലത്തിലെ എല്ലാ x നും $-x$ എന്നത് f ന്റെ മണ്ഡലത്തിലെ അംഗമാവുകയും $f(-x)=-f(x)$ ആവുകയും വേണം.

ഉദാഹരണത്തിന് x^3, $\sin x$, $\operatorname{cosec} x$, $\tan x$, $\cot x$ എന്നിവയെല്ലാം **ഒറ്റ ഫലനങ്ങളും** x^2, $\cos x$, $\sec x$ എന്നിവ **ഇരട്ട ഫലനങ്ങളും** ആണ്.

പരാമർശം

$f=g\pm h$ ന്റെ അന്തരം ല.സാ.ഗു $\{g$ യുടെ അന്തരം, h ന്റെ അന്തരം$\}$ ആയിരിക്കും അവ നിലനിൽക്കുമ്പോഴെല്ലാം.

ഉദാഹരണത്തിന് $y=\cos 6x+\sin 4x$ ന്റെ അന്തരം π യും $y=\cos x-\sin x$ ന്റെ അന്തരം 2π യും ആണ്.

4.2.1 ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളുടെ മണ്ഡലവും രംഗവും

ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളുടെ മണ്ഡലവും രംഗവും ചുവടെയുള്ള പട്ടികയിൽ തന്നിട്ടുണ്ട്.

ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങൾ	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\operatorname{cosec} x$	$\sec x$	$\cot x$
മണ്ഡലം	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}\setminus\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}, n\in\mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{R}\setminus\{n\pi,\ n\in\mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}\setminus\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}, n\in\mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{R}\setminus\{n\pi,\ n\in\mathbb{Z}\}$
രംഗം	$[-1,\ 1]$	$[-1,\ 1]$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}\setminus(-1,\ 1)$	$\mathbb{R}\setminus(-1,\ 1)$	$\mathbb{R}$

4.2.2 ഫലനങ്ങളുടെ ഗ്രാഫുകൾ

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ എന്നത് ഒരു വാസ്തവിക മൂല്യ ഫലനവും മണ്ഡലത്തിലെ x എന്ന ബിന്ദുവിന് f എന്ന ഫലനത്തിന്റെ വില $f(x)$ ഉം ആയാൽ $\big(x, f(x)\big), x\in\mathbb{R}$ എന്ന എല്ലാ ബിന്ദുക്കളുടെയും ഗണത്തെ f എന്ന ഫലനത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് നിർണയിക്കുന്നു. പൊതുവായി, xy - തലത്തിലെ എല്ലാ ഗ്രാഫുകളും ഫലനത്തെ പ്രതിനിധീകരിക്കണമെന്നില്ല. എന്നിരുന്നാലും ഒരു ഗ്രാഫ് ലംബരേഖാ പരീക്ഷണം വിജയിച്ചാൽ (ഏതൊരു ലംബരേഖയും ഒരു ഗ്രാഫിനെ ഏറ്റവും കൂടിയത് ഒരു ബിന്ദുവിൽ ഖണ്ഡിക്കണം) ആ ഗ്രാഫ് ഒരു ഫലനത്തെ പ്രതിനിധീകരിക്കും. ഒരു ഫലനം പഠിക്കാനുള്ള ഏറ്റവും നല്ല മാർഗ്ഗം അതിന്റെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുകയും ഗ്രാഫിലൂടെ അതിന്റെ സവിശേഷതകൾ വിശകലനം ചെയ്യുകയുമാണ്.

കാലാനുസൃതമായി ആനുകാലികത ഉൾപ്പെടുന്ന വേലിയേറ്റം, രാപ്പകൽ ചക്രം പോലുള്ള നിരവധി പ്രതിഭാസങ്ങൾ നാം ദിനംപ്രതി കാണുന്നു. ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങൾ ആനുകാലികമായതിനാൽ ഇത്തരം പ്രതിഭാസങ്ങളെ ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളിലൂടെ പഠിക്കാൻ കഴിയും ഒരു ഗ്രാഫിന്റെ രൂപത്തിൽ ഒരു ത്രികോണമിതി ഫലനത്തെ ചിത്രീകരിച്ചിരിക്കുന്നത്, ആനുകാലികത ഉൾപ്പെടുന്ന പ്രതിഭാസങ്ങളുടെ സവിശേഷതകൾ വിശകലനം ചെയ്യാൻ നമ്മെ സഹായിക്കുന്നു.

xy -തലത്തിൽ ത്രികോണമിതി ഫലനത്തെ ഗ്രാഫ് ചെയ്യുന്നതിന്, റേഡിയനിലുള്ള കോൺ അളവ് x നെ സ്വതന്ത്രചരമായും y യെ ആശ്രിത ചരമായും ഉപയോഗിക്കണം. സൈൻ ഫലനത്തെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നതിന് $y=\sin x$ ഉപയോഗിക്കുന്ന രീതിയിൽ തന്നെ മറ്റു ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളെയും സൂചിപ്പിക്കാവുന്നതാണ്. തുടർന്നുള്ള ഭാഗങ്ങളിൽ ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളുടെയും വിപരീത ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളുടെയും ഗ്രാഫുകൾ എങ്ങനെ വരയ്ക്കാമെന്ന് നമുക്ക് ചർച്ച ചെയ്യാം.

4.2.3 ഒരു ഗ്രാഫിന്റെ ബാഹുല്യവും അന്തരവും

x - അക്ഷത്തിൽ നിന്നുള്ള ഗ്രാഫിന്റെ പരമാവധി ദൂരമാണ് അതിന്റെ ബാഹ്യല്യം അതിനാൽ ഒരു ഫലനത്തിന്റെ ബാഹുല്യം x - അക്ഷത്തിൽ നിന്നുള്ള അതിന്റെ കൂടിയ അല്ലെങ്കിൽ കുറഞ്ഞളയരമാണ്. ഒരു പൂർണ്ണചക്രം പൂർത്തിയാക്കുന്നതിന് ഫലനത്തിന് ആവശ്യമായ ദൂരമാണ് അതിന്റെ അന്തരം.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 4 Inverse Trigonometry.indd 131 14-02-2023 14:26:17

പരാമർശം

(i) ഒരു ആനുകാലിക ഫലനത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് അതിന്റെ അന്തരത്തിന്റെ ദൈർഘ്യം ഇടവേളയായുള്ള ഗ്രാഫിന്റെ ഭാഗങ്ങൾ ആവർത്തിച്ചു വരുന്നതായിരിക്കും.

(ii) ഒരു ഒറ്റഫലനത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് മൂലബിന്ദുവിന് അനുരൂപ്യവും ഇരട്ട ഫലനത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് y - അക്ഷത്തിന് അനുരൂപവുമാണ്.

4.2.4 വിപരീത ഫലനങ്ങൾ

ഒരു മൂല്യം നൽകിയാൽ അതിന്റെ ഉത്തരമായി ഒരു അദ്വിതീയ മൂല്യം തിരികെ ലഭിക്കുന്ന ഒരു നിയമമാണ് ഫലനം എന്നത് ഓർക്കുക. ഒരു വിപരീത ഫലനം സാധ്യമാകുന്നതിന് മേൽപറഞ്ഞ നിർവ്വഹണപരമായ ആവശ്യകത നിറവേറ്റേണ്ടതുണ്ട്. ഒരു ഉദാഹരണത്തിന്റെ സഹായത്തോടെ ഇത് നമുക്ക് വിശദീകരിക്കാം.

സമാനമായ ഇരട്ടകൾ അടങ്ങിയിട്ടില്ലാത്ത എല്ലാ മനുഷ്യരുടെയും ഒരു ഗണം നമുക്ക് പരിഗണിക്കാം. നമ്മുടെ ഗണത്തിലുള്ള ഓരോ മനുഷ്യനും ഓരോ രക്തഗ്രൂപ്പും ഓരോ DNA ഘടനയും ഉണ്ട്. ഇവ ഒരു വ്യക്തി ഇൻപുട്ടും രക്തഗ്രൂപ്പ് അഥവാ DNA ഘടന ഔട്ട്പുട്ടുമായ ഫലനങ്ങളാണ്. ഒരേ രക്തഗ്രൂപ്പിൽപ്പെട്ട അനേകം ആൾക്കാരുണ്ടെന്ന് നമുക്കറിയാം, എന്നാൽ DNA ഘടന ഓരോ വ്യക്തിക്കും ഓരോന്നായിരിക്കും. നമുക്ക് പിന്നിലേക്ക് മാപ്പ് ചെയ്യാമോ? ഉദാഹരണത്തിന് നിങ്ങൾക്ക് രക്തഗ്രൂപ്പ് അറിയാമെങ്കിൽ അത് ഏത് വ്യക്തിയുടെ രക്തമാണെന്ന് പ്രത്യേകിച്ച് തിരിച്ചറിയാമോ? ഉത്തരം ഇല്ല എന്നാണ്. മറുവശത്ത് നിങ്ങൾക്ക് ഒരു DNA ഘടന അറിയാമെങ്കിൽ അതേ DNA ഘടനയുള്ള ഒരേയൊരു വ്യക്തിയെ നമ്മുടെ ഗണത്തിൽ നിന്ന് അറിയാനാകും. DNA ഉദാഹരണം പോലെ ഒരു ഫലനം വൺ-ടു-വൺ ആയിരിക്കുമ്പോൾ പിന്നിലേക്ക് മാപ്പിംഗ് സാധ്യമാണ്. വിപരീത മാപ്പിംഗിനെ വിപരീത ഫലനം എന്നു പറയുന്നു. മറ്റൊരു തരത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ ഒരു ഫലനംചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തിയെ വിപരീത ഫലനം പഴയ പടിയാക്കുന്നു.

ഏതൊരു മട്ടത്രികോണത്തിനും, ഒരു ന്യൂനകോണും ഒരു വശവും തന്നിരുന്നാൽ മറ്റ് കോണുകളും വശങ്ങളും നമുക്ക് കണ്ടെത്താനാകുന്നു. പക്ഷേ, ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ട് വശങ്ങൾ മാത്രമാണ് നമുക്ക് തന്നിരിക്കുന്നതെങ്കിൽ, വശങ്ങളുടെ അനുപാതത്തിൽ നിന്ന് ഒരു കോണിലേക്ക് നയിക്കുന്നതിന് ഒരു ചിട്ടയായ പ്രവർത്തനം തന്നെ നമുക്കാവശ്യമാണ്. ഒരു ത്രികോണമിതി ഫലനത്തിന് വിപരീതമെന്ന ആശയം ആവശ്യമായി വരുന്നത് ഇവിടെയാണ്.

ഒരു ത്രികോണമിതി ഫലനവും അവയുടെ മണ്ഡലങ്ങളിൽ വൺ-ടു-വൺ അല്ലെന്ന് നമുക്കറിയാം ഉദാഹരണത്തിന് $\sin\theta = 0.5$ എന്ന സമവാക്യത്തെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്ന $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}, -\frac{11\pi}{6}, \cdots$ തുടങ്ങി അനേകം വിലകൾ നമുക്കുണ്ട്. അതിനാൽ തന്നിരിക്കുന്ന $\sin\theta$ യ്ക്ക് ഒരേയൊരു θ വില കണ്ടെത്താൻ കഴിയില്ല. ഒരേ മൂല്യത്തിലേക്ക് ഒന്നിലധികം കോണുകൾ മാപ്പിംഗ് ചെയ്യുന്ന പ്രശ്നത്തെ തരണം ചെയ്യാൻ വിപരീത ത്രികോണമിതി ഫലനം നിർവ്വചിക്കുന്നതിന് മുമ്പ് നാം നമ്മുടെ മണ്ഡലത്തെ ഉചിതമായി ക്രമീകരിക്കേണ്ടതാണ്.

ഒരു ത്രികോണമിതി ഫലനത്തിന്റെ വിപരീതം നിർമ്മിക്കുന്നതിന് ഫലനത്തിന്റെ ഇടവേളയിൽ നിന്ന് ഫലനം വൺ-ടു-വൺ ആകുന്ന ഏറ്റവും ചെറിയ ഇടവേള നാമെടുക്കുന്നു. എന്നാൽ ഫലനത്തിന്റെ രംഗം പൂർണമായും ഫലനത്തിന്റെ ഇടവേളയിലുള്ള രംഗം തന്നെയായിരിക്കും. ഈ അദ്ധ്യായത്തിൽ ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളുടെ വിപരീതങ്ങളെ അവയുടെ നിയന്ത്രിത മണ്ഡലങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് നാം നിർവ്വചിക്കുന്നു.

4.2.5 വിപരീത ഫലനങ്ങളുടെ ഗ്രാഫുകൾ

f എന്നത് ഒരു ബൈജെക്ടീവ് ഫലനം എന്നെടുത്താൽ f ന്റെ വിപരീതം f^{-1} ആയിരിക്കും. $y = f(x)$ എങ്കിൽ, എങ്കിൽ മാത്രം $x = f^{-1}(y)$ ആണ്. അതുകൊണ്ട് f ന്റെ ഗ്രാഫിലെ ഒരു ബിന്ദു (a, b) എങ്കിൽ, എങ്കിൽ മാത്രം (b, a) എന്നത് f^{-1} ന്റെ ഗ്രാഫിലെ ഒരു സമാന ബിന്ദു ആയിരിക്കും. ഗ്രാഫ് f ന്റെ x, y അക്ഷങ്ങൾ പരസ്പരം മാറ്റിയാൽ f^{-1} ന്റെ ഗ്രാഫ് ലഭിക്കുമെന്ന് ഇത് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. മറ്റൊരു വിധത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ f^{-1} ന്റെ ഗ്രാഫ് $y = x$ എന്ന നേർരേഖ അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ള f ന്റെ ദർപ്പണ പ്രതിബിംബം ആയിരിക്കും. അല്ലെങ്കിൽ f^{-1} ന്റെ ഗ്രാഫ് $y = x$ എന്ന നേർരേഖ അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ള f ന്റെ പ്രതിഫലനമായിരിക്കും.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 4 Inverse Trigonometry.indd 132 14-02-2023 14:26:24

4.3 സൈൻ ഫലനവും വിപരീത സൈൻ ഫലനവും

സൈൻ ഫലനം എന്നത് $\mathbb{R}$ മണ്ഡലവും $[-1, 1]$ രംഗവുമായ ഒരു ഫലനമാണെന്ന് ഓർക്കുക. സൈൻ ഫലനം വിപരീത സൈൻ ഫലനം എന്നിവയെ നമുക്ക് യഥാക്രമം $y = \sin x$, $y = \sin^{-1} x$ അല്ലെങ്കിൽ $y = \arcsin(x)$ എന്നെഴുതാം. ഇവിടെ -1 എന്നത് ഒരു ഘാതം അല്ല. ഇത് വിപരീതത്തെ ആണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത് വ്യുൽക്രമത്തെ അല്ല.

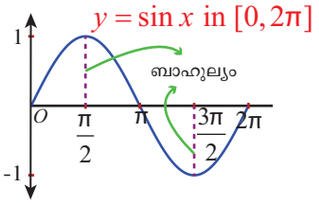
$\sin(x + 2\pi) = \sin x$ എന്നത് എല്ലാ വാസ്തവിക സംഖ്യ x നും ശരിയാണെന്ന് നമുക്കറിയാം. അതുപോലെ എല്ലാ x നും $0 < p < 2\pi$ യിൽ $\sin(x + p)$ എന്നത് എല്ലായ്പ്പോഴും $\sin x$ ന്തുല്യമാകണമെന്നില്ല. ആയതിനാൽ സൈൻ ഫലനത്തിന്റെ അന്തരം 2π ആണ്.

4.3.1 സൈൻ ഫലനത്തിന്റെ ഗ്രാഫ്

സൈൻ ഫലനത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് എന്നത് $y = \sin x$ ന്റെ ഗ്രാഫ് ആണ്, ഇവിടെ x വാസ്തവിക സംഖ്യയാണ്. സൈൻ ഫലനം 2π അന്തരമുള്ള ഒരു ആനുകാലിക ഫലനം ആയതിനാൽ സൈൻ ഫലനത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് $\cdots$, $[-2\pi, 0]$, $[0, 2\pi]$, $[2\pi, 4\pi]$, $[4\pi, 6\pi]$, $\ldots$ തുടങ്ങിയ ഓരോ ഇടവേളയിലും ഒരേ പാറ്റേൺ ആവർത്തിക്കുന്നു. അതിനാൽ $x \in [0, 2\pi]$ ലുള്ള ഗ്രാഫിന്റെ ഭാഗം നിർണ്ണയിക്കാൻ ഇത് മതിയാകും. $y = \sin x$, $x \in [0, 2\pi]$ യുടെ ഗ്രാഫിലെ (x, y) ബിന്ദുക്കൾക്കായി അറിയപ്പെടുന്ന ചില നിർദ്ദേശാങ്ക ജോടികൾ തിരിച്ചറിയുന്നതിന് ഇനിപ്പറയുന്ന പട്ടിക നിർമ്മിക്കാം.

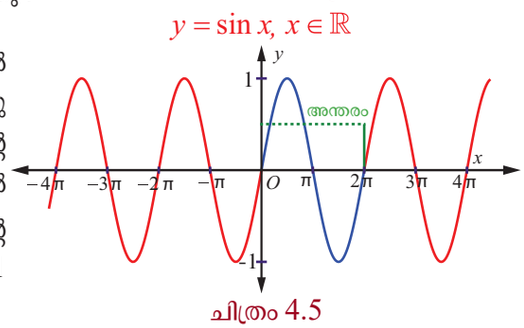
x (റേഡിയനിൽ)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = \sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0

$y = \sin x$, $0 \le x \le 2\pi$ യുടെ ഗ്രാഫ് ആധാര ബിന്ദുവിൽ നിന്നാണ് ആരംഭിക്കുന്നതെന്ന് വ്യക്തമാണ്. x ന്റെ വില 0 ൽ നിന്നും $\frac{\pi}{2}$ ലേക്ക് കൂടുമ്പോൾ $y = \sin x$ ന്റെ വില 0 ൽ നിന്നും 1 ലേക്ക് കൂടുന്നു x ന്റെ വില $\frac{\pi}{2}$ ൽ നിന്നും π ലേക്കും തുടർന്ന് $\frac{3\pi}{2}$ ലേക്കും കൂടുമ്പോൾ y യുടെ വില 1 ൽ നിന്നും 0 ലേക്കും തുടർന്ന് -1 ലേക്കും കുറയുന്നു. x ന്റെ വില $\frac{3\pi}{2}$ ൽ നിന്ന് 2π ലേക്ക് കൂടുമ്പോൾ y യുടെ വില -1 ൽ നിന്നും 0 ലേക്ക് കൂടുന്നു. പട്ടികയിലുള്ള ബിന്ദുക്കളെ അടയാളപ്പെടുത്തി അവയെ ഒഴുക്കൻ വക്രമുപയോഗിച്ച് യോജിപ്പിക്കുക. ഗ്രാഫിന്റെ ഭാഗം ചിത്രം 4.4 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു .



ചിത്രം 4.4

2π അന്തരമുള്ള ആനുകാലിക ഫലനം $y = \sin x$ ൽ മുകളിലുള്ള ഗ്രാഫിന്റെ ഭാഗം $[0, 2\pi]$ എന്ന ഇടവേളയുടെ ഇരു വശത്തും ആവർത്തിച്ചു വരുന്നതാണ്. $y = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ ന്റെ പൂർണ്ണമായ ഗ്രാഫ്. സൈൻ ഫലനത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് ചിത്രം 4.5 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. 0 മുതൽ 2π വരെയുള്ള വക്രത്തിന്റെ ഭാഗത്തെ ഒരു ചക്രം എന്ന് വിളിക്കുന്നു. അതിന്റെ ബാഹുല്യം 1 ആണ്.



ചിത്രം 4.5

കുറിപ്പ്

$0 \le x \le \pi$ ൽ $\sin x \ge 0$ എന്നത് I ഉം II ഉം ചതുർത്ഥാംശങ്ങളിലുള്ള സൈൻ ഫലനത്തിന്റെ മൂല്യങ്ങളുമായും $\pi < x < 2\pi$ ൽ $\sin x < 0$ എന്നത് III ഉം IV ഉം ചതുർത്ഥാംശങ്ങളിലുള്ള സൈൻ ഫലനത്തിന്റെ മൂല്യങ്ങളുമായും യോജിക്കുന്നത് നിരീക്ഷിക്കുക.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 4 Inverse Trigonometry.indd 133 14-02-2023 14:26:47

4.3.2 സൈൻ ഫലനത്തിന്റെ സവിശേഷതകൾ

$y = \sin x$ ന്റെ ഗ്രാഫിൽ നിന്ന് സൈൻ ഫലനത്തിന്റെ ഇനിപ്പറയുന്ന സവിശേഷതകൾ നമുക്ക് നിരീക്ഷിക്കാം:

(i) വക്രത്തിൽ വിടവോ വിരാമങ്ങളോ ഉണ്ടാകില്ല. സൈൻ ഫലനം തുടർച്ചയാണ്.

(ii) ഗ്രാഫ് ആധാര ബിന്ദുവിന് അനുരൂപ്യമായതിനാൽ സൈൻ ഫലനം ഒറ്റ ഫലനമാണ്.

(iii) സൈൻ ഫലനത്തിന് ഏറ്റവും കൂടിയ വിലയായ 1 ലഭിക്കുന്നത് $x = \cdots, -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \cdots$ ലും ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വിലയായ -1 ലഭിക്കുന്നത് $x = \cdots, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \cdots$. ലും ആണ്. മറ്റൊരു വിധത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ എല്ലാ, $x \in \mathbb{R}$ നും $-1 \leq \sin x \leq 1$ ആണ് .

4.3.3 വിപരീത സൈൻ ഫലനവും അതിന്റെ സവിശേഷതകളും

സൈൻ ഫലനം അതിന്റെ മുഴു മണ്ഡലമായ $\mathbb{R}$ ൽ വൺ-ടു-വൺ അല്ല. $-1 \leq b \leq 1$ ലുള്ള എല്ലാ തിരശ്ചീന രേഖ $y = b$ യും $y = \sin x$ എന്ന ഗ്രാഫിൽ അനന്തം ബിന്ദുക്കളിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. മറ്റൊരു വിധത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ സൈൻ ഫലനം തിരശ്ചീന രേഖാ പരീക്ഷണത്തിൽ വിജയിക്കുന്നില്ല. ഇത് ഒരു ഫലനത്തിന്റെ വൺ-ടു-വൺ നില തീരുമാനിക്കാനുള്ള ഉപകരണമാണ്. മണ്ഡലം $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ എന്നതിലേക്ക് പരിമിതപ്പെടുത്തിയാൽ രംഗം $[-1, 1]$ ആയിട്ടുള്ള ഒരു വൺ-ടു-വൺ, ഓൺടു (ബൈജെക്ഷൻ) ഫലനമായി സൈൻ ഫലനം മാറും. ഇപ്പോൾ മണ്ഡലം $[-1, 1]$ ഉം രംഗം $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ഉം ആയിട്ടുള്ള വിപരീത സൈൻ ഫലനം നമുക്ക് നിർവ്വചിക്കാം.

നിർവ്വചനം 4.3

$\sin y = x$ ആയിട്ടുള്ള ഒരേയൊരു സംഖ്യ $y = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ യെ $-1 \leq x \leq 1$, ന് $\sin^{-1} x$ എന്ന് നിർവ്വചിക്കാം. മറ്റൊരു വിധത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ വിപരീത സൈൻ ഫലനം $\sin^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ എന്നതിനെ എല്ലാ $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ക്കും $\sin^{-1}(x) = y$ എങ്കിൽ, എങ്കിൽ മാത്രം $\sin y = x$ എന്ന് നിർവ്വചിക്കുന്നു.

കുറിപ്പ്

(i) സൈൻ ഫലനം പരിമിത മണ്ഡലം $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ൽ വൺ-ടു-വൺ ഉം എന്നാൽ മൂലബിന്ദു അടങ്ങിയിട്ടുള്ള മറ്റു വലിയ ഇടവേളയിൽ അല്ലതാനും.

(ii) $\sin^{-1} x$ ന്റെ രംഗമായ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ എന്ന ഇടവേളയിൽ കൊസൈൻ ഫലനം നെഗറ്റീവല്ലാത്തതാകുന്നു. ഇന്റഗ്രൽ കാൽക്കുലസിൽ ത്രികോണമിതിയുടെ ചില പ്രയോഗങ്ങൾക്ക് ഈ നിരീക്ഷണം വളരെ പ്രാധാന്യമുള്ളതാണ്.

(iii) വിപരീത സൈൻ ഫലനത്തെ കുറിച്ച് നാം പറയുമ്പോഴെല്ലാം,
$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$, $\sin^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ എന്നിവ നമുക്കാവശ്യമാണ്.

(iv) വൺ-ടു-വൺ ഉം രംഗം $[-1, 1]$ ഉം ആയ സൈൻ ഫലനത്തിന്റെ മണ്ഡലത്തെ,
$\cdots\left[-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}\right], \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right] \cdots$ എന്നിവയിലേതെങ്കിലുമൊന്നായി വേണമെങ്കിലും പരിമിതപ്പെടുത്താം .

(vi) പരിമിത മണ്ഡലം $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ നെ സൈൻ ഫലനത്തിന്റെ പ്രധാന മണ്ഡലം എന്നും $-1 \leq x \leq 1$ ലെ $y = \sin^{-1} x$ ന്റെ വിലകളെ $y = \sin^{-1} x$ എന്ന ഫലനത്തിന്റെ പ്രധാന വിലകൾ എന്നും വിളിക്കുന്നു.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 4 Inverse Trigonometry.indd 134 14-02-2023 14:27:01

$y = \sin^{-1} x$ ന്റെ നിർവ്വചനത്തിൽ നിന്ന് ഇനിയുള്ളവ നമുക്ക് നിരീക്ഷിക്കാം:

(i) $y = \sin^{-1} x$ എങ്കിൽ, എങ്കിൽ മാത്രം $x = \sin y$, ഇവിടെ $-1 \le x \le 1$ ഉം $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ ഉം ആണ്.

(ii) $|x| \le 1$ എങ്കിൽ $\sin\left(\sin^{-1} x\right) = x$ ഉം $|x| > 1$ എങ്കിൽ $\sin\left(\sin^{-1} x\right) = x$ അർത്ഥശൂന്യവും ആണ് .

(iii) $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ എങ്കിൽ $\sin^{-1}\left(\sin x\right) = x$ ആയിരിക്കും. ഇവിടെ $\sin^{-1}(\sin 2\pi) = 0 \neq 2\pi$ എന്നത് ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടതാണ് .

(iv) $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$ എങ്കിൽ $\sin^{-1}\left(\sin x\right) = \pi - x$ ആയിരിക്കും. ഇവിടെ $-\frac{\pi}{2} \le \pi - x \le \frac{\pi}{2}$ എന്നത് ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടതാണ് .

(v) $y = \sin^{-1} x$ എന്നത് ഒരു ഒറ്റ ഫലനമാണ്.

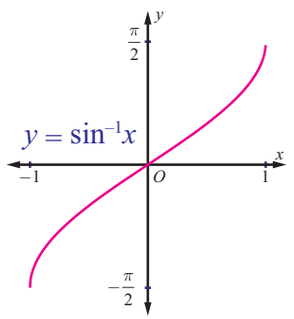
പരാമർശം

$\sin x = \frac{1}{2}$, $x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ എന്നീ സമവാക്യങ്ങൾ തമ്മിൽ നമുക്ക് വേർതിരിക്കാം. $\sin x = \frac{1}{2}$ എന്ന സമവാക്യം നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നതിന് ഒരാൾ $\sin x = \frac{1}{2}$ ആകുന്ന $(-\infty, \infty)$ എന്ന ഇടവേളയിലെ എല്ലാ x വിലകളും കാണണം. എന്നിരുന്നാലും, $x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ ൽ നിന്ന് x കാണാൻ, ഒരാൾ $\sin x = \frac{1}{2}$ ആകുന്നതിനുള്ള $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ എന്ന ഇടവേളയിലുള്ള ഒരേയൊരു വില കണ്ടാൽ മതിയാകും.

4.3.4 വിപരീത സൈൻ ഫലനത്തിന്റെ ഗ്രാഫ്

വിപരീത സൈൻ ഫലനം, $\sin^{-1}:[-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $[-1, 1]$ എന്ന ഇടവേളയിലെ ഒരു വാസ്തവിക സംഖ്യ x ഇൻപുട്ട് ആയി സ്വീകരിച്ച് $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ എന്ന ഇടവേളയിലെ ഒരു വാസ്തവിക സംഖ്യ y ഔട്ട്പുട്ട് ആയി തരുന്നു. പതിവുപോലെ $y = \sin^{-1} x$ എന്ന സമവാക്യം ഉപയോഗിച്ച് ചില (x, y) ബിന്ദുക്കൾ നമുക്ക് കണ്ടുപിടിച്ച് അവയെ xy-തലത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്താം x വില -1 ൽ നിന്നും 1 ലേക്ക് കൂടുമ്പോൾ y വില $-\frac{\pi}{2}$ ൽ നിന്നും $\frac{\pi}{2}$ ലേക്ക് കൂടുന്നതായി നമുക്ക് കാണാം ഒരു ഒഴുക്കൻ വക്രം ഉപയോഗിച്ച് ഈ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിച്ചാൽ $y = \sin^{-1} x$ ന്റെ ഗ്രാഫ് ചിത്രം 4.6 ൽ കാണുന്നതു പോലെ ലഭിക്കുന്നു .

x	y
-1	$-\frac{\pi}{2}$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$
0	0
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{4}$
1	$\frac{\pi}{2}$



ചിത്രം 4.6

കുറിപ്പ്

$y = \sin^{-1} x$ ന്റെ ഗ്രാഫ്

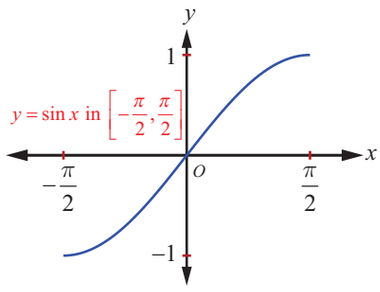
(i) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ എന്ന ഇടവേളയിലുള്ള $y = \sin x$ ന്റെ മുഴുവൻ ഭാഗവും $y = x$ എന്ന നേർരേഖയിൽ പ്രതിഫലിപ്പിക്കുന്നതിലൂടെ അല്ലെങ്കിൽ $y = \sin x$ ന്റെ ഗ്രാഫിൽ x, y അക്ഷങ്ങളെ പരസ്പരം മാറ്റുന്നതിലൂടെ ലഭിക്കുന്നു .

(ii) മൂലബിന്ദു വഴി കടന്നു പോകുന്നു.

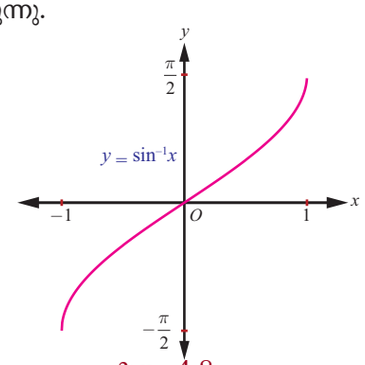
(iii) മൂലബിന്ദുവിന് അനുരൂപ്യം ആയതിനാൽ $y = \sin^{-1} x$ എന്നത് ഒരു ഒറ്റ ഫലനം ആണ്.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 4 Inverse Trigonometry.indd 135 14-02-2023 14:27:21

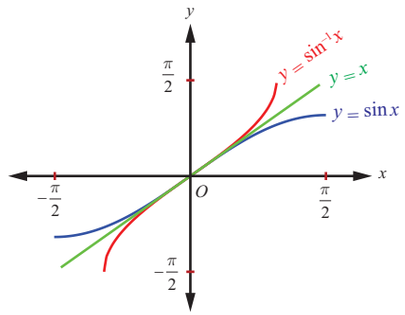
മെച്ചപ്പെട്ടഗ്രാഹ്യത്തിനായി $y = \sin x,\ -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$, $y = \sin^{-1} x,\ -1 \le x \le 1$ എന്നീരണ്ട്ഫലനങ്ങളുടെയും ഗ്രാഫുകൾ നാം ഒരുമിച്ച് ചിത്രീകരിക്കുന്നു.



ചിത്രം 4.7



ചിത്രം 4.8



ചിത്രം 4.9

ചിത്രം 4.9 വ്യക്തമാക്കുന്നത് $y = \sin^{-1} x$ ന്റെ ഗ്രാഫ് $y = \sin x,\ -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$, ന്റെ ഗ്രാഫിന്റെ $y = x$ എന്ന നേർരേഖയിലുള്ള ദർപ്പണ പ്രതിബിംബം എന്നാണ്. കൂടാതെ, സൈൻ ഫലനവും വിപരീത സൈൻ ഫലനവും മൂലബിന്ദുവിന് അനുരൂപ്യമാണ്.

ഉദാഹരണം 4.1

$\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ ന്റെ പ്രധാന മൂല്യം കാണുക (റേഡിയനിലും ഡിഗ്രിയിലും).

നിർദ്ധാരണം

$\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = y$ എന്നെടുത്താൽ $\sin y = -\frac{1}{2}$ ആയിരിക്കും.

$\sin^{-1} x$ ന്റെ പ്രധാന മൂല്യത്തിന്റെ രംഗം $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ആണ്, കൂടാതെ $\sin y = -\frac{1}{2}$ ആയിട്ടുള്ള $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ നമുക്ക് കണ്ടുപിടിക്കാം. $y = -\frac{\pi}{6}$ എന്നത് വ്യക്തമാണ്.

അതിനാൽ $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ ന്റെ പ്രധാന മൂല്യം $-\frac{\pi}{6}$ ആണ്. ഇത് ഡിഗ്രിയിൽ ആകുമ്പോൾ $-30°$ ആണ്.

ഉദാഹരണം 4.2

നിലവിലുള്ളതാണെങ്കിൽ $\sin^{-1}(2)$ ന്റെ പ്രധാന മൂല്യം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$y = \sin^{-1} x$ is ന്റെ മണ്ഡലം $[-1,\ 1]$ ആയതിനാലും $2 \notin [-1, 1]$ ആയതിനാലും, $\sin^{-1}(2)$ നിലനിൽക്കില്ല.

ഉദാഹരണം 4.3

പ്രധാന മൂല്യം കാണുക

(i) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (ii) $\sin^{-1}\left(\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$ (iii) $\sin^{-1}\left(\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$.

നിർദ്ധാരണം

നമുക്കറിയാവുന്ന $\sin^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ നെ

$-1 \le x \le 1$ ലും $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ ലും $\sin^{-1} x = y$ എങ്കിൽ, എങ്കിൽ മാത്രം $x = \sin y$ എന്ന് തന്നിട്ടുണ്ട്. അതിനാൽ,

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 4 Inverse Trigonometry.indd 136 14-02-2023 14:27:35

(i) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{4}$, കാരണം $\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ കൂടാതെ $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(ii) $\sin^{-1}\left(\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=-\frac{\pi}{3}$, കാരണം $-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

(iii) $\sin^{-1}\left(\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)=\sin^{-1}\left(\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right)=\sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}$, കാരണം $\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

ഉദാഹരണം 4.4

$\sin^{-1}\left(2-3x^2\right)$ ന്റെ മണ്ഡലം കാണുക

നിർദ്ധാരണം

$\sin^{-1}(x)$ ന്റെ മണ്ഡലം $[-1,1]$ ആണെന്ന് നമുക്കറിയാം.

ഇത് നയിക്കുന്നത് $-1\le 2-3x^2\le 1$ ലേക്കാണ്, ഇതിൽ നിന്നും $-3\le -3x^2\le -1$.

അപ്പോൾ, $-3\le -3x^2$, $x^2\le 1$ ... (1)

കൂടാതെ $-3x^2\le -1$, $x^2\ge\frac{1}{3}$ ... (2)

സമവാക്യം (1) ഉം (2) ഉം സംയോജിപ്പിച്ചാൽ, $\frac{1}{3}\le x^2\le 1$. എന്ന് കിട്ടും. അതായത്, $\frac{1}{\sqrt{3}}\le|x|\le 1$, ഇതിൽ നിന്നും

$x\in\left[-1,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right]\cup\left[\frac{1}{\sqrt{3}},1\right]$, എന്ന് കിട്ടും. കാരണം $a\le|x|\le b$ $x\in[-b,-a]\cup[a,b]$.

അഭ്യാസം 4.1

1. തന്നിട്ടുള്ളവയിൽ x ന്റെ എല്ലാ മൂല്യങ്ങളും കാണുക

   (i) $-10\pi\le x\le 10\pi$, $\sin x=0$ (ii) $-3\pi\le x\le 3\pi$, $\sin x=-1$.

2. അന്തരവും ബാഹുല്യവും കാണുക

   (i) $y=\sin 7x$ (ii) $y=-\sin\left(\frac{1}{3}x\right)$ (iii) $y=4\sin(-2x)$.

3. $0\le x<6\pi$ ൽ $y=\sin\left(\frac{1}{3}x\right)$ ന്റെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക.

4. മൂല്യം കാണുക: (i) $\sin^{-1}\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ (ii) $\sin^{-1}\left(\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$.

5. x ന്റെ ഏത് മൂല്യത്തിനാണ് $\sin x=\sin^{-1}x$ ആകുന്നത് ?

6. തന്നിട്ടുള്ളവയുടെ മണ്ഡലം കാണുക

   (i) $f(x)=\sin^{-1}\left(\frac{x^2+1}{2x}\right)$ (ii) $g(x)=2\sin^{-1}(2x-1)-\frac{\pi}{4}$.

7. $\sin^{-1}\left(\sin\frac{5\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{5\pi}{9}\sin\frac{\pi}{9}\right)$ ന്റെ മൂല്യം കാണുക.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 4 Inverse Trigonometry.indd 137 14-02-2023 14:27:56

4.4 കൊസൈൻ ഫലനവും വിപരീത കൊസൈൻ ഫലനവും

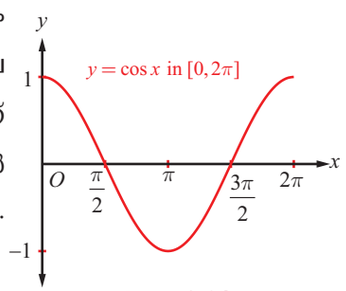
മണ്ഡലം $\mathbb{R}$ ഉം രംഗം $[-1, 1]$ ഉം ആയിട്ടുള്ള ഒരു ഫലനമാണ് കൊസൈൻ ഫലനം. കൊസൈൻ ഫലനത്തെ $y = \cos x$ എന്നും വിപരീത കൊസൈൻ ഫലനത്തെ $y = \cos^{-1} x$ അല്ലെങ്കിൽ $y = \arccos(x)$ എന്നും നമുക്ക് എഴുതാം. എല്ലാ വാസ്തവിക സംഖ്യ x നും $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ ആയതിനാലും എല്ലാ $x \in \mathbb{R}$ നും $0 < p < 2\pi$ ക്കും $\cos(x + p)$ എന്നത് $\cos x$ ന് തുല്യമല്ലാത്തതിനാലും, $y = \cos x$ ന്റെ അന്തരം 2π ആണ്.

4.4.1 കൊസൈൻ ഫലനത്തിന്റെ ഗ്രാഫ്

$y = \cos x$ ന്റെ ഗ്രാഫാണ് കൊസൈൻ ഫലനത്തിന്റെ ഗ്രാഫ്, ഇവിടെ x ഒരു വാസ്തവിക സംഖ്യയാണ്. കൊസൈൻ ഫലനത്തിന്റെ അന്തരം 2π ആയതിനാൽ കൊസൈൻ ഫലനത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് $\cdots, [-4\pi, -2\pi]$, $[-2\pi, 0]$, $[0, 2\pi]$, $[2\pi, 4\pi]$, $[4\pi, 6\pi]$, $\cdots$ എന്നീ ഇടവേളകളിൽ ഒരേ പാറ്റേൺ തന്നെ ആവർത്തിച്ചു വരുന്നതാണ്. അതുകൊണ്ട്, $x \in [0, 2\pi]$ ഭാഗത്തു മാത്രമുള്ള കൊസൈൻ ഫലനത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് കണ്ടുപിടിച്ചാൽ മതിയാകും. $x \in [0, 2\pi]$ യിൽ $y = \cos x$ ന്റെ ഗ്രാഫിലെ അറിയാവുന്ന ചില (x, y) നിർദ്ദേശാങ്ക ജോടികൾ തിരിച്ചറിയുന്നതിന് ഇനിപ്പറയുന്ന പട്ടിക നമുക്ക് നിർമ്മിക്കാം .

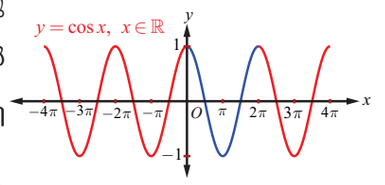
x (റേഡിയനിൽ)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = \cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

$0 \le x \le 2\pi$ യിൽ $y = \cos x$ ന്റെ ഗ്രാഫ് $(0,1)$ ൽ തുടങ്ങുന്നു എന്ന് പട്ടിക കാണിക്കുന്നു. x ന്റെ വില 0 ൽ നിന്നും π ലേക്ക് കൂടുമ്പോൾ $y = \cos x$ ന്റെ വില 1 ൽ നിന്ന് -1 ലേക്ക് കുറയുന്നു. x ന്റെ വില π യിൽ നിന്നും 2π ലേക്ക് കൂടുമ്പോൾ y യുടെ വില -1 ൽ നിന്ന് 1 ലേക്ക് കൂടുന്നു. പട്ടികയിലെ ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തി അവയെ ഒരു ഒഴുക്കൻ വക്രം ഉപയോഗിച്ച് യോജിപ്പിക്കുക. ഗ്രാഫിന്റെ ഭാഗം ചിത്രം 4.10 ൽ കാണിച്ചിട്ടുണ്ട് .



ചിത്രം 4.10

മേൽ സൂചിപ്പിച്ച ഭാഗം $[0, 2\pi]$ എന്ന ഇടവേളയുടെ ഇരുവശത്തും ആവർത്തിച്ചു വരുന്നതാണ് $x \in \mathbb{R}$ ൽ $y = \cos x$ ന്റെ ഗ്രാഫ് എന്ന് ചിത്രം 4.11 ൽ കാണാം. $\cos x$ ന്റെ വില ഒന്നാം ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ $\left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$ പോസിറ്റീവും രണ്ടാം ചതുർത്ഥാംശത്തിലും $\left(\frac{\pi}{2} < x \le \pi\right)$ മൂന്നാം ചതുർത്ഥാംശത്തിലും $\left(\pi < x < \frac{3\pi}{2}\right)$ നെഗറ്റീവും നാലാം ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ $\left(\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right)$ വീണ്ടും പോസിറ്റീവും ആകുന്നതായി കൊസൈൻ ഫലനത്തിന്റെ ഗ്രാഫിൽ നിന്നും നമുക്ക് നിരീക്ഷിക്കാവുന്നതാണ്



ചിത്രം 4.11

കുറിപ്പ്

എല്ലാ x നും $\cos(-x) = \cos x$ ആണെന്ന് ഗ്രാഫിൽ നിന്നും നമുക്ക് കാണാം $y = \cos x$ എന്നത് ഒരു ഇരട്ട ഫലനമാണെന്ന വസ്തുത ഇത് ഉറപ്പിക്കുന്നു.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 4 Inverse Trigonometry.indd 138 14-02-2023 14:28:18

4.4.2 കൊസൈൻ ഫലനത്തിന്റെ സവിശേഷതകൾ

$y = \cos x$ ന്റെ ഗ്രാഫിൽ നിന്നും കൊസൈൻ ഫലനത്തിന്റെ ഇനിപ്പറയുന്ന സവിശേഷതകൾ നമുക്ക് നിരീക്ഷിക്കാം:

(i) വക്രത്തിൽ വിടവോ വിരാമങ്ങളോ ഉണ്ടാകില്ല. കൊസൈൻ ഫലനം തുടർച്ചയാണ്.

(ii) ഗ്രാഫ് y - അക്ഷത്തിന് അനുരൂപ്യം ആയതിനാൽ കൊസൈൻ ഫലനം ഇരട്ട ഫലനമാണ്.

(iii) കൊസൈൻ ഫലനത്തിന് ഏറ്റവും കൂടിയ വിലയായ 1 ലഭിക്കുന്നത് $x = \ldots, -2\pi, 0, 2\pi, \ldots$ ലും ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വിലയായ -1 ലഭിക്കുന്നത് $x = \ldots, -\pi, \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots.$ ലും ആണ്. മറ്റൊരു വിധത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ എല്ലാ $x \in \mathbb{R}$ നും $-1 \leq \cos x \leq 1$ ആണ് .

പരാമർശം

(i) $y = \cos x$ ന്റെ ഗ്രാഫിനെ വലതുവശത്ത് $\frac{\pi}{2}$ റേഡിയേൻ മാറ്റിയാൽ $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ ന്റെ ഗ്രാഫ് ലഭിക്കുന്നു. ഇത് $y = \sin x$ ന്റെ ഗ്രാഫിന് സമമാണ്. $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ എന്നത് നിരീക്ഷിക്കുക.

(ii) $y = A\sin\alpha x$, $y = B\cos\beta x$ എന്നിവ എല്ലായ്പ്പോഴും $-|A| \leq A\sin\alpha x \leq |A|$, $-|B| \leq B\cos\beta x \leq |B|$ എന്നീ അസമതകളെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്നു. $y = \mathrm{A}\sin\alpha x$ ന്റെ ബാഹ്യല്യവും അന്തരവും യഥാക്രമം $|A|$, യും $\frac{2\pi}{|\alpha|}$ യും $y = B\cos\beta x$ ന്റെ ബാഹുല്യവും അന്തരവും യഥാക്രമം $|B|$ യും $\frac{2\pi}{|\beta|}$ യും ആയിരിക്കും.

$y = A\sin\alpha x$, $y = B\cos\beta x$ എന്നീ ഫലനങ്ങൾ **സൈനുസോയിഡൽ ഫലനങ്ങൾ** എന്ന് അറിയപ്പെടുന്നു.

(iii) $y = A\sin\alpha x$, $y = B\cos\beta x$ എന്നിവയുടെ ഗ്രാഫ് ലഭിക്കുന്നതിന് യഥാക്രമം $\left[0, \frac{2\pi}{|\alpha|}\right]$, $\left[0, \frac{2\pi}{|\beta|}\right]$ എന്നീ ഇടവേളകളിലെ ഗ്രാഫുകളെ വിപുലീകരിച്ചാൽ മതിയാകും.



പ്രയോഗങ്ങൾ

കാലക്രമേണ ആവർത്തിക്കുന്ന വേലിയേറ്റം, വാർഷിക താപനില എന്നിവ പോലുള്ള പ്രകൃതിയിലെ പ്രതിഭാസങ്ങൾ പലപ്പോഴും സൈനുസോയിഡുകൾ ഉപയോഗിച്ചാണ് രൂപപ്പെടുത്തുന്നത്. ഉദാഹരണത്തിന് $y = d + a\cos(bt - c)$ എന്ന സൈനുസോയിഡൽ ഫലനത്തിന്റെ പൊതുരൂപം ഉപയോഗിച്ച് വേലിയേറ്റ മാതൃക സൃഷ്ടിക്കാൻ ഇനിപ്പറയുന്ന ഘട്ടങ്ങൾ നാം നൽകുന്നു:

(i) സൈനുസോയിഡൽ ഗ്രാഫിന്റെ (ഫലനം) ബാഹ്യല്യം എന്നത് ഗ്രാഫിന്റെ y - വിലയിൽ ഏറ്റവും വലിയ വിലയുടെയും ഏറ്റവും ചെറിയ വിലയുടെയും വ്യത്യാസത്തിന്റെ കേവല വിലയുടെ പകുതിയാണ്.
അങ്ങനെ, **ബാഹുല്യം** , $a = \frac{1}{2}(\max - \min)$; മധ്യരേഖ $y = d$, ഇവിടെ $d = \frac{1}{2}(\max + \min)$

(ii) **അന്തരം**, $p = 2 \times$ (വലുതിൽ നിന്നും ചെറുതിലേക്കുള്ള സമയം) ; $b = \frac{2\pi}{p}$

(iii) $c = b\times$ വലിയ വില കിട്ടുന്ന സമയം.

മാതൃക -1

കപ്പലിന്റെ അടിത്തട്ടിന്റെ വെള്ളത്തിലെ ആഴം തിരമാലയ്ക്കനുസരിച്ച് വ്യത്യാസപ്പെടുന്നു. തന്നിട്ടുള്ള പട്ടിക വിവിധ സമയങ്ങളിൽ വെള്ളത്തിന്റെ ആഴം (മീറ്ററിൽ) കാണിക്കുന്നു.

സമയം, t	12 am	2 am	4 am	6 am	8 am	10 am	12 noon
ആഴം	3.5	4.2	3.5	2.1	1.4	2.1	3.5

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 4 Inverse Trigonometry.indd 139 14-02-2023 14:28:36

t സമയത്തിൽ വെള്ളത്തിന്റെ ആഴം കാണാൻ $y = d + a\cos(bt - c)$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ള ഒരു സൈനു സോഡിയൽ ഫലനം നമുക്ക് രൂപീകരിക്കാം. ഇവിടെ $a = 1.4$; $d = 2.8$; $p = 12$; $b = \frac{\pi}{6}$; $c = \frac{\pi}{3}$.

ആവശ്യപ്പെട്ട സൈനുസോയിഡൽ ഫലനം $y = 2.8 + 1.4\cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{3}\right)$ ആണ്.

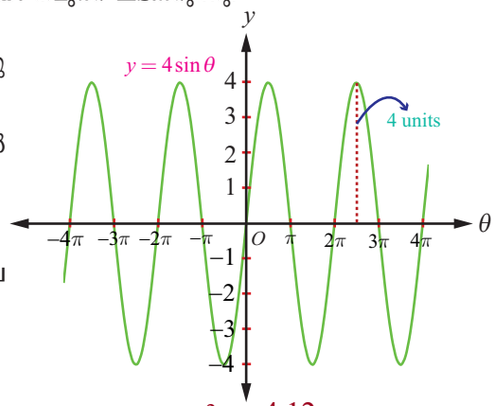
കുറിപ്പ്

സൈൻ, കൊസൈൻ ഫലനങ്ങളുടെ പരിവർത്തനങ്ങൾ നിരവധി പ്രയോഗങ്ങളിൽ ഉപയോഗപ്രദമാണ്. ഒരു വൃത്താകാര ചലനത്തെ എല്ലായ്പ്പോഴും സൈൻ അല്ലെങ്കിൽ കൊസൈൻ ഫലനം ഉപയോഗിച്ച് മാതൃക രൂപപ്പെടുത്തുന്നു.

മാതൃക -2

മൂലബിന്ദു കേന്ദ്രവും വ്യാസാർദ്ധം 4 ഉം ഉള്ള ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ പരിധിയിലൂടെ ഒരു ബിന്ദു സഞ്ചരിക്കുന്നു. ആ ബിന്ദുവിന്റെ y - നിർദ്ദേശാങ്കം ഭ്രമണകോണിന്റെ ഒരു ഫലനമായി നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നു.

കേന്ദ്രം മൂലബിന്ദുവും വ്യാസാർദ്ധം a യും ആയിട്ടുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ y - നിർദ്ദേശാങ്കം $y = a\sin\theta$ ആണ്, ഇവിടെ θ എന്നത് ഭ്രമണകോൺ ആണ്. ഈ സാഹചര്യത്തിൽ $y(\theta) = 4\sin\theta$ എന്ന സമീകരണം നമുക്ക് കിട്ടുന്നു. ഇവിടെ θ റേഡിയനിലും, ബാഹുല്യം 4 ഉം അന്തരം 2π ഉം ആണ്. $\sin\theta$ എന്ന ഫലനത്തിന്റെ y - മൂല്യങ്ങളുടെ 4 ന്റെ ഒരു ഘടകമായ ലംബ വിസ്താരത്തിന് ബാഹുല്യം 4 കാരണമാകുന്നു.



ചിത്രം 4.12

4.4.3 വിപരീത കൊസൈൻ ഫലനവും അതിന്റെ സവിശേഷതകളും

കൊസൈൻ ഫലനം അതിന്റെ മുഴു മണ്ഡലമായ $\mathbb{R}$ ൽ വൺ-ടു-വൺ അല്ല. എന്നിരുന്നാലും, കൊസൈൻ ഫലനം അതിന്റെ പരിമിത മണ്ഡലമായ $[0, \pi]$ ൽ വൺ-ടു-വൺ ഉം അതേ പരിമിത മണ്ഡലത്തിൽ തന്നെ രംഗം $[-1, 1]$ ഉം ആണ്. ഇപ്പോൾ മണ്ഡലം $[-1, 1]$ ഉം രംഗം $[0, \pi]$ ഉം ആയ വിപരീത കൊസൈൻ ഫലനം നമുക്ക് നിർവ്വചിക്കാം.

നിർവ്വചനം 4.4

$\cos y = x$ എങ്കിൽ ഒരേയൊരു സംഖ്യ $y \in [0, \pi]$ യെ $-1 \le x \le 1$, ൽ $\cos^{-1} x$ എന്ന് നിർവ്വചിക്കാം. മറ്റൊരു വിധത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ, വിപരീത കൊസൈൻ ഫലനം $\cos^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$ എന്നതിനെ എല്ലാ $y \in [0, \pi]$ ക്കും $\cos^{-1}(x) = y$ എങ്കിൽ, എങ്കിൽ മാത്രം $\cos y = x$ എന്ന് നിർവ്വചിക്കുന്നു.

കുറിപ്പ്

(i) $\cos^{-1} x$ ന്റെ രംഗമായ $[0, \pi]$ എന്ന ഇടവേളയിൽ സൈൻ ഫലനം നെഗറ്റീവ് അല്ലാത്തതാകുന്നു. ഇന്റഗ്രൽ കാൽക്കുലസിലെ ചില ത്രികോണമിതി പ്രയോഗങ്ങൾക്ക് ഈ നിരീക്ഷണം വളരെ പ്രധാനമാണ്.

(ii) വിപരീത കൊസൈൻ ഫലനത്തെക്കുറിച്ച് നമ്മൾ പറയുമ്പോഴെല്ലാം $\cos x : [0, \pi] \to [-1, 1]$ ഉം $\cos^{-1} x : [-1, 1] \to [0, \pi]$ നമുക്കാവശ്യമാണ് .

(iii) കൊസൈൻ ഫലനത്തിന്റെ മണ്ഡലത്തെ $\cdots, [-\pi, 0], [\pi, 2\pi], \cdots,$ എന്നിവയിലേതെങ്കിലുമൊന്നായി വേണമെങ്കിലും പരിമിതപ്പെടുത്താം, ഇവിടെ ഫലനം വൺ-ടു-വൺ ഉം അതിന്റെ രംഗം $[-1, 1]$ ഉം ആണ്

പരിമിത മണ്ഡലം $[0, \pi]$ യെ കൊസൈൻ ഫലനത്തിന്റെ പ്രധാന മണ്ഡലം എന്നും $-1 \le x \le 1$ ലുള്ള y വിലകളെ $y = \cos^{-1} x$ എന്ന ഫലനത്തിന്റെ പ്രധാന വിലകൾ എന്നും വിളിക്കുന്നു.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 4 Inverse Trigonometry.indd 140 14-02-2023 14:28:50

$y = \cos^{-1} x$ ന്റെ നിർവ്വചനത്തിൽ നിന്ന് ഇനിപ്പറയുന്നവ നമുക്ക് നിരീക്ഷിക്കാം:

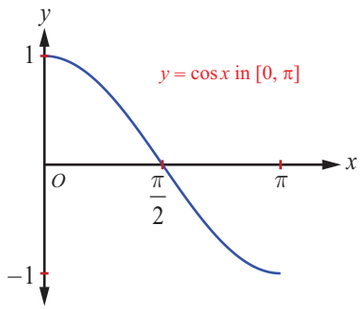
(i) $y = \cos^{-1} x$ എങ്കിൽ, എങ്കിൽ മാത്രം $x = \cos y$ ഇവിടെ $-1 \le x \le 1$ ഉം $0 \le y \le \pi$ ഉം ആണ് .

(ii) $|x| \le 1$ എങ്കിൽ $\cos\left(\cos^{-1} x\right) = x$ ഉം $|x| > 1$ എങ്കിൽ അർത്ഥശൂന്യവും ആണ്.

(iii) $0 \le x \le \pi$ എങ്കിൽ $\cos^{-1}\left(\cos x\right) = x$, $0 \le x \le \pi$ എന്നത് $\cos^{-1} x$ ന്റെ രംഗം ആണ്. ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടത് $\cos^{-1}\left(\cos 3\pi\right) = \pi$ എന്നതാണ്

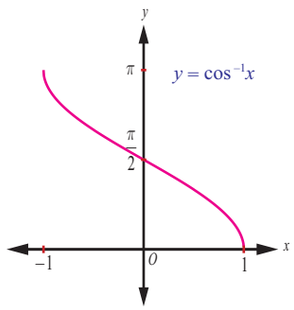
4.4.4 വിപരീത കൊസൈൻ ഫലനത്തിന്റെ ഗ്രാഫ്

വിപരീത കൊസൈൻ ഫലനം $\cos^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$, $[-1, 1]$ എന്ന ഇടവേളയിലെ ഒരു വാസ്തവിക സംഖ്യ x ഇൻപുട്ട് ആയി സ്വീകരിച്ച് $[0, \pi]$ എന്ന ഇടവേളയിലെ ഒരു വാസ്തവിക സംഖ്യ y ഔട്ട് പുട്ട് ആയി തരുന്നു. (കോൺ അളവ് റേഡിയനിൽ) $y = \cos^{-1} x$ എന്ന സമീകരണം ഉപയോഗിച്ച് ചില (x, y) ബിന്ദുക്കൾ നമുക്ക് കണ്ടുപിടിച്ച് അവയെ xy - തലത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്താം. x ന്റെ വില -1 ൽ നിന്നും 1 ലേക്ക് കൂടുമ്പോൾ y യുടെ വില π യിൽ നിന്നും 0 ലേക്ക് കുറയുന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക. വിപരീത കൊസൈൻ ഫലനം മണ്ഡലത്തിൽ തുടർച്ചയായതും ആണ്. തലത്തിലെ ബിന്ദുക്കളെ ഒരു ഒഴുക്കൻ വക്രം ഉപയോഗിച്ച് യോജിപ്പിച്ചാൽ നമുക്ക് ചിത്രം 4.14 ൽ കാണിച്ചിട്ടുള്ളതു പോലെ $y = \cos^{-1} x$ ന്റെ ഗ്രാഫ് ലഭിക്കും.



ചിത്രം 4.13

x	y
-1	π
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
0	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{4}$
1	0



ചിത്രം 4.14

കുറിപ്പ്

(i) x , y അക്ഷങ്ങൾ പരസ്പരം മാറ്റുന്നതിലൂടെ $y = \cos x$ ന്റെ ഗ്രാഫിൽ നിന്നും $y = \cos^{-1} x$ ന്റെ ഗ്രാഫ് ലഭിക്കുന്നു.

(ii) $y = \cos^{-1} x$ എന്ന ഫലനത്തിന് x - അന്ത:ഖണ്ഡം 1 ഉം y - അന്തഃഖണ്ഡം $\frac{\pi}{2}$ ഉം ആണ് .

(iii) $y = \cos^{-1} x$ ന്റെ ഗ്രാഫ് മൂലബിന്ദുവിനോ, y - അക്ഷത്തിനോ അനുരൂപ്യം അല്ല.

ഉദാഹരണം 4.5

$\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ന്റെ പ്രധാന മൂല്യം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = y$ എന്നെടുത്താൽ, $\cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$y = \cos^{-1} x$ ന്റെ പ്രധാന മൂല്യങ്ങളുടെ രംഗം $[0, \pi]$ ആണ്.

എന്നാൽ $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ഉം, $\frac{\pi}{6} \in [0, \pi]$ ഉം ആണ്. അതുകൊണ്ട് $y = \frac{\pi}{6}$

അതിനാൽ $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ന്റെ പ്രധാന മൂല്യം $\frac{\pi}{6}$ ആകുന്നു .

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 4 Inverse Trigonometry.indd 141 14-02-2023 14:29:08

ഉദാഹരണം 4.6

വില കാണുക (i) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (ii) $\cos^{-1}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$ (iii) $\cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$

നിർദ്ധാരണം

$\cos^{-1} x:[-1, 1]\to[0,\ \pi]$ എന്നത്

$-1\le x\le 1$ നും $0\le y\le\pi$ ക്കും $\cos^{-1} x = y$ എങ്കിൽ, എങ്കിൽ മാത്രം $x=\cos y$ എന്ന് നമുക്കറിയാം.

അതിനാൽ

(i) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{3\pi}{4}$, എന്തുകൊണ്ടെന്നാൽ $\frac{3\pi}{4}\in[0,\pi]$ ഉം $\cos\frac{3\pi}{4}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(ii) $\cos^{-1}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=\cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=\frac{\pi}{3}$, എന്തു കൊണ്ടെന്നാൽ $-\frac{\pi}{3}\notin[0,\pi]$, പക്ഷേ $\frac{\pi}{3}\in[0,\pi]$

(iii) $\cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)=\frac{5\pi}{6}$, എന്തുകൊണ്ടെന്നാൽ $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ ഉം

$\frac{5\pi}{6}\in[0,\pi]$.

ഉദാഹരണം 4.7

$\cos^{-1}\left(\frac{2+\sin x}{3}\right)$ ന്റെ മണ്ഡലം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

നിർവ്വചനത്തിൽ നിന്ന് $y=\cos^{-1} x$ ന്റെ മണ്ഡലം $-1\le x\le 1$ അല്ലെങ്കിൽ $|x|\le 1$ ആണ്. അതിനാൽ ഇത് $-1\le\frac{2+\sin x}{3}\le 1$ ലേക്ക് നയിക്കുന്നു, ഇത് $-3\le 2+\sin x\le 3$ ന് സമമാണ്.

അതുകൊണ്ട്, $-5\le\sin x\le 1$, $-1\le\sin x\le 1$, ഇത് നൽകുന്നത്

$-\sin^{-1}(1)\le x\le\sin^{-1}(1)$ അല്ലെങ്കിൽ $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$.

അങ്ങനെ $\cos^{-1}\left(\frac{2+\sin x}{3}\right)$ ന്റെ മണ്ഡലം $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ ആണെന്ന് കാണാം.

അഭ്യാസം 4.2

1. തന്നിട്ടുള്ളവയിൽ x ന്റെ എല്ലാ വിലകളും കാണുക

   (i) $-6\pi\le x\le 6\pi$ ഉം $\cos x=0$ (ii) $-5\pi\le x\le 5\pi$ ഉം $\cos x=-1$.

2. $\cos^{-1}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]\ne-\frac{\pi}{6}$ ന് കാരണം പ്രസ്താവിക്കുക.

3. $\cos^{-1}(-x)=\pi-\cos^{-1}(x)$ എന്നത് ശരിയാണോ? നിങ്ങളുടെ ഉത്തരം സാധൂകരിക്കുക.

4. $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ ന്റെ പ്രധാന മൂല്യം കാണുക.

5. വില കാണുക

   (i) $2\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ (ii) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+\sin^{-1}(-1)$

   (iii) $\cos^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{17}-\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{\pi}{17}\right)$.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 4 Inverse Trigonometry.indd 142 14-02-2023 14:29:27

6. തന്നിട്ടുള്ളവയുടെ മണ്ഡലം കാണുക (i) $f(x)=\sin^{-1}\left(\frac{|x|-2}{3}\right)+\cos^{-1}\left(\frac{1-|x|}{4}\right)$ (ii) $g(x)=\sin^{-1}x+\cos^{-1}x$

7. $\frac{\pi}{2}<\cos^{-1}(3x-1)<\pi$ എന്ന അസമത നിലനിൽക്കുന്നത് x ന്റെ ഏത് വിലയ്ക്കാണ് ?

8. തന്നിട്ടുള്ളവയുടെ മൂല്യം കാണുക

(i) $\cos\left(\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)+\sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)\right)$ (ii) $\cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)+\cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$.

4.5 ടാൻജന്റ് ഫലനവും വിപരീത ടാൻജന്റ് ഫലനവും

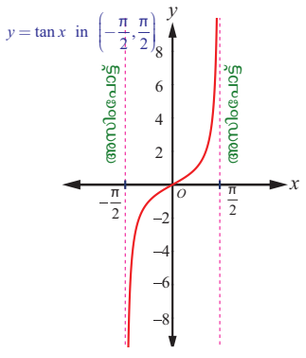
കെട്ടിടങ്ങൾ, പർവ്വതങ്ങൾ, കൊടിമരം തുടങ്ങിയവയുടെ ഉയരം, അകലം എന്നിവ കാണുന്നതിനാണ് $y=\tan x$ എന്ന ടാൻജന്റ് ഫലനം ഉപയോഗിക്കുന്നതെന്ന് നമുക്കറിയാം. $y=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ ന്റെ മണ്ഡലത്തിൽ ഛേദം പൂജ്യമാകുന്ന x വിലകൾ ഉണ്ടാകില്ല. അതിനാൽ $x=\cdots,-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\cdots$ എന്നിവയിൽ ടാൻജന്റ് ഫലനത്തിന്റെ മണ്ഡലം $\left\{x:x\in\mathbb{R},x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}=\bigcup_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{2k+1}{2}\pi,\frac{2k+3}{2}\pi\right)$ ഉം രംഗം $(-\infty,\infty)$ ഉം ആണ്. $y=\tan x$ എന്ന ടാൻജന്റ് ഫലനത്തിന്റെ അന്തരം π ആയിരിക്കും.

4.5.1 ടാൻജന്റ് ഫലനത്തിന്റെ ഗ്രാഫ്

ആവർത്തിച്ചുള്ള ഇടവേളകളിൽ ഫലനത്തിന്റെ മൂല്യങ്ങൾ കണ്ടെത്താൻ ടാൻജന്റ് ഫലനത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് ഉപയോഗപ്രദമാണ്. ടാൻജന്റ് ഫലനം ഒരു ഒറ്റഫലനമായതിനാൽ $y=\tan x$ ന്റെ ഗ്രാഫ് മൂലബിന്ദുവിന് അനുരൂപ്യം ആണ്. ടാൻജന്റ് ഫലനത്തിന്റെ അന്തരം π ആയതിനാൽ, π ദൈർഘ്യമുള്ള ചില ഇടവേളകളിലെ ഗ്രാഫ് നമുക്ക് നിർണ്ണയിക്കേണ്ടതുണ്ട് $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ ൽ $y=\tan x$ ന്റെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുന്നതിനായി $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ എന്ന ഇടവേള പരിഗണിച്ച് ചുവടെയുള്ള പട്ടിക തയ്യാറാക്കാം.

x (റേഡിയനിൽ)	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$y=\tan x$	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

ഇപ്പോൾ, ബിന്ദുക്കളെ അടയാളപ്പെടുത്തി അവയെ ഒരു ഒഴുക്കൻ വക്രം ഉപയോഗിച്ച് യോജിപ്പിക്കുമ്പോൾ $y=\tan x$ ന്റെ ഒരു ഭാഗീകമായ ഗ്രാഫ് ലഭിക്കുന്നു. ഇവിടെ $-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}$. x ന്റെ വില $\frac{\pi}{2}$ നോടടുത്തും $\frac{\pi}{2}$ നെക്കാൾ ചെറുതും ആകുമ്പോൾ $\sin x$ ന്റെ വില 1 നോടടുത്തും $\cos x$ ന്റെ വില 0 നോടടുത്തും വരും. അതുകൊണ്ട് x ന്റെ വില $\frac{\pi}{2}$ നോടടുക്കുമ്പോൾ $\frac{\sin x}{\cos x}$ എന്ന അനുപാതം പോസിറ്റീവും വലുതും അങ്ങനെ ∞ ലേക്ക് അടുക്കുന്നതുമാകും.

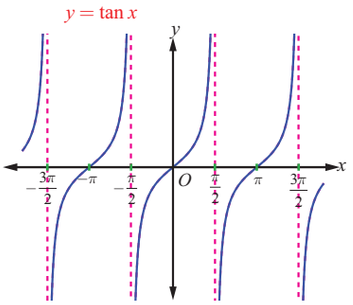


ചിത്രം 4.15

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 4 Inverse Trigonometry.indd 143 14-02-2023 14:29:44

അതുകൊണ്ട് $x=\frac{\pi}{2}$ എന്ന രേഖ ഗ്രാഫിന്റെ ഒരു ലംബ അനന്തസ്പർശം ആയിരിക്കും. അതുപോലെ x ന്റെ വില $-\frac{\pi}{2}$ നോടടുക്കുമ്പോൾ $\frac{\sin x}{\cos x}$ എന്ന അനുപാതം മൂല്യത്തിൽ വലുതും നെഗറ്റീവും ആയി ഇത് $-\infty$ ലേക്ക് അടുക്കുന്നതുമാകുന്നു. അതുകൊണ്ട് $x=-\frac{\pi}{2}$ എന്ന രേഖയും ഗ്രാഫിന്റെ ഒരു ലംബ അനന്തസ്പർശം ആയിരിക്കും. ആയതിനാൽ ചിത്രം 4.15 ൽ കാണിച്ചിട്ടുള്ളതു പോലെ $y=\tan x$ ന്റെ ഗ്രാഫിന്റെ $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ ലുള്ള ഒരു ഭാഗം നമുക്ക് കിട്ടുന്നു. $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ എന്ന ഇടവേളയെ $y=\tan x$ ന്റെ പ്രധാനമണ്ഡലം എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

ടാൻജന്റ് ഫലനം $n\in\mathbb{Z}$ ൽ $x=(2n+1)\frac{\pi}{2}$ ഒഴികെയുള്ള എല്ലാ വാസ്തവിക സംഖ്യകൾക്കും നിർവ്വചിച്ചിട്ടുള്ളതിനാലും ഇത് കൂടുന്ന ഫലനം ആയതിനാലും $n\in\mathbb{Z}$ ൽ $x=(2n+1)\frac{\pi}{2}$, തുടങ്ങിയ ലംബ അനന്തസ്പർശങ്ങൾ നമുക്കുണ്ട്. $y=\tan x$ ന്റെ ഭാഗങ്ങൾ ഓരോന്നും $n\in\mathbb{Z}$ ൽ $x=n\pi$ ക്ക് അനുരൂപ്യം ആണ്. $y=\tan x$ ന്റെ സമ്പൂർണ്ണ ഗ്രാഫ് ചിത്രം 4.16 ൽ കാണിച്ചിട്ടുണ്ട്. .



ചിത്രം 4.16

കുറിപ്പ്

ഗ്രാഫിൽ നിന്ന് $0<x<\frac{\pi}{2}$ ലും $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$ ലും $y=\tan x$ പോസിറ്റീവും $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ ലും $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$ ലും $y=\tan x$ നെഗറ്റീവും എന്ന് കാണാവുന്നതാണ്.

4.5.2 ടാൻജന്റ് ഫലനത്തിന്റെ സവിശേഷതകൾ

$y=\tan x$ ന്റെ ഗ്രാഫിൽ നിന്ന് ടാൻജന്റ് ഫലനത്തിന്റെ ഇനിപ്പറയുന്ന സവിശേഷതകൾ നമുക്ക് നിരീക്ഷിക്കാവുന്നതാണ്.

(i) ഗ്രാഫ് തുടർച്ചയുമല്ല $x=(2n+1)\frac{\pi}{2},\ n\in\mathbb{Z}$ എന്നിവ വിരാമ ബിന്ദുക്കളും ആണ്.

(ii) $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ ലുള്ള ഭാഗീകമായ ഗ്രാഫ് മൂലബിന്ദുവിന് അനുരൂപ്യമാണ്.

(iii) $x=(2n+1)\frac{\pi}{2},\ n\in\mathbb{Z}$ തുടങ്ങിയ അനേകം അനന്ത സ്പർശങ്ങൾ ഇതിനുണ്ട്.

(iv) ടാൻജന്റ് ഫലനത്തിന് ഏറ്റവും കൂടിയ വിലയോ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വിലയോ ഇല്ല.

പരാമർശം

(i) $y=a\tan bx$ ന്റെ ഗ്രാഫ് $-\frac{\pi}{2|b|}<x<\frac{\pi}{2|b|}$ ൽ $\frac{\pi}{|b|}$ അന്തരമുള്ള ഒരു പൂർണ്ണ ചക്രത്തിലൂടെ കടന്നു പോകുന്നു

(ii) $y=a\tan bx$ ന് $x=\frac{\pi}{2|b|}+\frac{\pi}{|b|}k,\ k\in\mathbb{Z}$ എന്നീ നേർരേഖകൾ അനന്തസ്പർശങ്ങൾ ആയിരിക്കും.

(iii) ടാൻജന്റ് ഫലനത്തിന് ഏറ്റവും കൂടിയവിലയോ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വിലയോ ഇല്ലാത്തതിനാൽ $\tan x$ ന്റെ ബാഹുല്യം നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ല.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 4 Inverse Trigonometry.indd 144 14-02-2023 14:30:00

4.5.3 വിപരീത ടാൻജന്റ് ഫലനവും അതിന്റെ സവിശേഷതകളും

ടാൻജന്റ് ഫലനം അതിന്റെ മുഴുമണ്ഡലമായ $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$ ൽ വൺ-ടു-വൺ അല്ല. എങ്കിലും $\tan x:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ ഒരു ബൈജക്ടീവ് ഫലനമാണ്. ഇപ്പോൾ, $\mathbb{R}$ മണ്ഡലവും $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ രംഗവുമായ വിപരീത ടാൻജന്റ് ഫലനം നമുക്ക് നിർവ്വചിക്കാം.

നിർവ്വചനം 4.5

$\tan y = x$. എങ്കിൽ ഏതൊരു വാസ്തവിക സംഖ്യ x നും ഒരേയൊരു സംഖ്യ y $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ യെ $\tan^{-1}x$ എന്ന് നിർവ്വചിക്കാം. മറ്റൊരുവിധത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ വിപരീത ടാൻജന്റ് ഫലനം $\tan^{-1}:(-\infty,\infty)\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ നെ $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ ൽ $\tan^{-1}(x)=y$ എങ്കിൽ, എങ്കിൽ മാത്രം $\tan y = x$ എന്ന് നിർവ്വചിച്ചിരിക്കുന്നു .

$y=\tan^{-1}x$, ന്റെ നിർവ്വചനത്തിൽ നിന്ന് ഇനിപ്പറയുന്നവ നമുക്ക് നിരീക്ഷിക്കാം:

(i) എല്ലാ $x\in\mathbb{R}$ നും $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$ നും $y=\tan^{-1}x$ എങ്കിൽ, എങ്കിൽ മാത്രം $x=\tan y$ ആണ്.

(ii) ഏതൊരു വാസ്തവിക സംഖ്യ x നും $\tan\left(\tan^{-1}x\right)=x$ ഉം $y=\tan^{-1}x$ ഒരു ഒറ്റ ഫലനവുമാണ്.

(iii) $\tan^{-1}\left(\tan x\right)=x$ എങ്കിൽ, എങ്കിൽ മാത്രം $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ ആണ്. ഇവിടെ ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടത് $\tan^{-1}\left(\tan\pi\right)=0$ ആണ് π അല്ല.

കുറിപ്പ്

(i) എപ്പോഴെല്ലാം നാം വിപരീത ടാൻജന്റ് ഫലനത്തെ കുറിച്ച് പറയുന്നോ, അപ്പോഴെല്ലാം, $\tan:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ ഉം $\tan^{-1}:\mathbb{R}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ ഉം ആണ്.

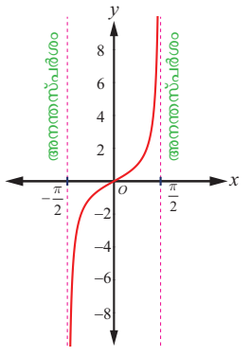
(ii) നിയന്ത്രിത മണ്ഡലം $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ നെ ടാൻജന്റ് ഫലനത്തിന്റെ പ്രധാന മണ്ഡലം എന്നു വിളിക്കുന്നു. കൂടാതെ , $x\in\mathbb{R}$ ൽ $y=\tan^{-1}x$ ന്റെ വിലകൾ $y=\tan^{-1}x$ എന്ന ഫലനത്തിന്റെ പ്രധാന മൂല്യങ്ങൾ എന്ന് അറിയപ്പെടുന്നു.

4.5.4 വിപരീത ടാൻജന്റ് ഫലനത്തിന്റെ ഗ്രാഫ്

മുഴുവൻ വാസ്തവിക സംഖ്യാരേഖ മണ്ഡലവും $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ രംഗവുമായുള്ള ഒരു ഫലനമാണ് $y=\tan^{-1}x$. $-\frac{\pi}{2}$ ലും $\frac{\pi}{2}$ ലും ടാൻജന്റ് ഫലനം നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ല എന്നത് പ്രത്യേകം ശ്രദ്ധിക്കുക. അതുകൊണ്ട് $y=\tan^{-1}x$ ന്റെ ഗ്രാഫ് നിർബന്ധമായും $y=-\frac{\pi}{2}$, $y=\frac{\pi}{2}$ എന്നീ രേഖകൾക്കിടയിലും ഒരിക്കലും ആ രേഖകളെ സ്പർശിക്കുകയുമില്ല. മറ്റൊരു വിധത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ $y=-\frac{\pi}{2}$, $y=\frac{\pi}{2}$ എന്നീ രണ്ടു രേഖകളും $y=\tan^{-1}x$ ന്റെ തിരശ്ചീന അനന്തസ്പർശങ്ങളാണ്.

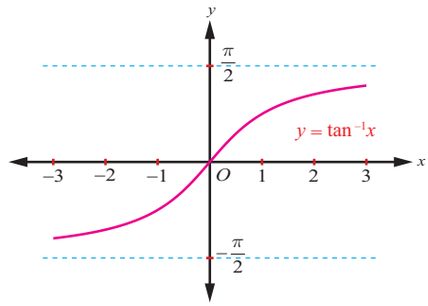
$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ എന്ന മണ്ഡലത്തിലെ $y=\tan x$ ന്റെയും $(-\infty,\infty)$ എന്ന മണ്ഡലത്തിലെ $y=\tan^{-1}x$ ന്റെയും ഗ്രാഫുകളാണ് യഥാക്രമം ചിത്രം 4.17 ചിത്രം 4.18 എന്നിവയിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 4 Inverse Trigonometry.indd 145 14-02-2023 14:30:22



ചിത്രം 4.17

x	y
-1	$-\frac{\pi}{4}$
0	0
$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$
1	$\frac{\pi}{4}$



ചിത്രം 4.18

കുറിപ്പ്

(i) വിപരീത ടാൻജന്റ് ഫലനം $(-\infty, \infty)$ എന്ന മണ്ഡലത്തിൽ നിർബന്ധ വർദ്ധിതവും തുടർച്ചയും ആണ്.

(ii) $y = \tan^{-1} x$ ന്റെ ഗ്രാഫ് മൂലബിന്ദുവഴി കടന്നുപോകുന്നു.

(iii) $y = \tan^{-1} x$ ന്റെ ഗ്രാഫ് മൂലബിന്ദുവിന് അനുരൂപ്യമായതിനാൽ ഇത് ഒരു ഒറ്റഫലനമാണ്.

ഉദാഹരണം 4.8

$\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)$ ന്റെ പ്രധാനമൂല്യം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right) = y$ എന്നെടുത്താൽ, $\tan y = \sqrt{3}$. അതിനാൽ, $y = \frac{\pi}{3}$ എന്തുകൊണ്ടെന്നാൽ $\frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

അതുകൊണ്ട് $\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)$ ന്റെ പ്രധാനമൂല്യം $\frac{\pi}{3}$ ആണ്.

ഉദാഹരണം 4.9

(i) $\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)$ (ii) $\tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{5}\right)$ (iii) $\tan\left(\tan^{-1}(2019)\right)$ എന്നിവ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

(i) $\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right) = \tan^{-1}\left(\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = -\frac{\pi}{3}$, എന്തുകൊണ്ടെന്നാൽ $-\frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

(ii) $\tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{5}\right)$.

$\tan\theta = \tan\frac{3\pi}{5}$ ആകുന്നതിനുള്ള $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ നമുക്ക് കണ്ടുപിടിക്കണം.

ടാൻജന്റ് ഫലനത്തിന്റെ അന്തരം π ആയതിനാൽ, $\tan\frac{3\pi}{5} = \tan\left(\frac{3\pi}{5} - \pi\right) = \tan\left(-\frac{2\pi}{5}\right)$.

അതുകൊണ്ട് $\tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{5}\right) = \tan^{-1}\left(\tan\left(-\frac{2\pi}{5}\right)\right) = -\frac{2\pi}{5}$, എന്തുകൊണ്ടെന്നാൽ $-\frac{2\pi}{5} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

(iii) $\tan\left(\tan^{-1} x\right) = x, x \in \mathbb{R}$ ആയതിനാൽ, $\tan\left(\tan^{-1}(2019)\right) = 2019$.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 4 Inverse Trigonometry.indd 146 14-02-2023 14:30:36

ഉദാഹരണം 4.10

$\tan^{-1}(-1)+\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ ന്റെ വില കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$\tan^{-1}(-1)=y$ എന്നെടുത്താൽ, $\tan y=-1=-\tan\frac{\pi}{4}=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

$-\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ ആയതിനാൽ, $\tan^{-1}(-1)=-\frac{\pi}{4}$ ആണ്.

അപ്പോൾ, $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=y$ ൽ നിന്ന് $\cos y=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$.

$\frac{\pi}{3}\in[0,\pi]$ ആയതിനാൽ, $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$ ആണ്.

അപ്പോൾ, $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)=y$ ൽ നിന്ന് $\sin y=-\frac{1}{2}=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

$-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ ആയതിനാൽ, $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$ ആണ്.

അതുകൊണ്ട്, $\tan^{-1}(-1)+\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{12}$.

ഉദാഹരണം 4.11

$\tan\left(\sin^{-1}x\right)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1<x<1$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$x=0$ ആയാൽ, ഇരുവശങ്ങളും 0 ന് തുല്യമാകും. ... (1)

$0<x<1$ എന്ന് വിചാരിക്കുക

$\theta=\sin^{-1}x$ ആയാൽ, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ ആണ്. അപ്പോൾ, $\sin\theta=\frac{x}{1}$ ൽ നിന്ന് $\tan\theta=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

ആയതിനാൽ, $\tan\left(\sin^{-1}x\right)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. ... (2)

$-1<x<0$ എന്ന് വിചാരിക്കുക. എങ്കിൽ, $\theta=\sin^{-1}x$ ൽ നിന്ന്, $-\frac{\pi}{2}<\theta<0$ എന്ന് കിട്ടുന്നു. അപ്പോൾ, $\sin\theta=\frac{x}{1}$ ൽ നിന്ന് $\tan\theta=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

ഈ സാഹചര്യത്തിലും, $\tan\left(\sin^{-1}x\right)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. ... (3)

സമവാക്യങ്ങൾ (1), (2), (3) എന്നിവ $\tan\left(\sin^{-1}x\right)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1<x<1$ എന്ന് സ്ഥാപിക്കുന്നു.

അഭ്യാസം 4.3

1. തന്നിട്ടുള്ള ഫലനങ്ങളുടെ മണ്ഡലം കാണുക :

   (i) $\tan^{-1}\left(\sqrt{9-x^2}\right)$ (ii) $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(1-x^2\right)-\frac{\pi}{4}$.

2. തന്നിട്ടുള്ളവയുടെ മൂല്യം കാണുക (i) $\tan^{-1}\left(\tan\frac{5\pi}{4}\right)$ (ii) $\tan^{-1}\left(\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 4 Inverse Trigonometry.indd 147 14-02-2023 14:30:52

3. തന്നിട്ടുള്ളവയുടെ വില കാണുക

(i) $\tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)$ (ii) $\tan\left(\tan^{-1}(1947)\right)$ (iii) $\tan\left(\tan^{-1}(-0.2021)\right)$.

4. തന്നിട്ടുള്ളവയുടെ വില കാണുക (i) $\tan\left(\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)-\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$

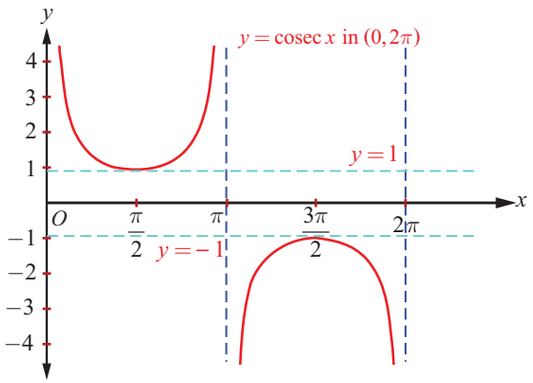
(ii) $\sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)-\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)\right)$. (iii) $\cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)\right)$.

4.6 കൊസീക്കന്റ് ഫലനവും വിപരീത കൊസീക്കന്റ് ഫലനവും

സൈൻ ഫലനം പോലെ തന്നെ കൊസീക്കന്റ് ഫലനവും 2π അന്തരമുള്ള ഒരു ഒറ്റ ഫലനമാണ്. $y=\operatorname{cosec} x$ എന്ന കൊസീക്കന്റ് ഫലനത്തിന്റെ വിലകൾ 2π ദൈർഘ്യമുള്ള ഓരോ ഇടവേളയിലും ആവർത്തിക്കുന്നു. $y=\operatorname{cosec} x=\frac{1}{\sin x}$ എന്നത് $\sin x=0$ ൽ നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ല എന്നത് നിരീക്ഷിക്കുക. അതുകൊണ്ട്, കൊസീക്കന്റ് ഫലനത്തിന്റെ മണ്ഡലം $\mathbb{R}\setminus\{n\pi : n\in\mathbb{Z}\}$ ആണ്. $-1\le\sin x\le 1$ ആയതിനാൽ $y=\operatorname{cosec} x$ എന്ന ഫലനം -1 നും 1 നും ഇടയിൽ ഉള്ള ഒരു വിലയും നൽകില്ല. അതുകൊണ്ട് കൊസീക്കന്റ് ഫലനത്തിന്റെ രംഗം $(-\infty,1]\cup[1,\infty)$ ആയിരിക്കും .

4.6.1 കൊസിക്കന്റ് ഫലനത്തിന്റെ ഗ്രാഫ്

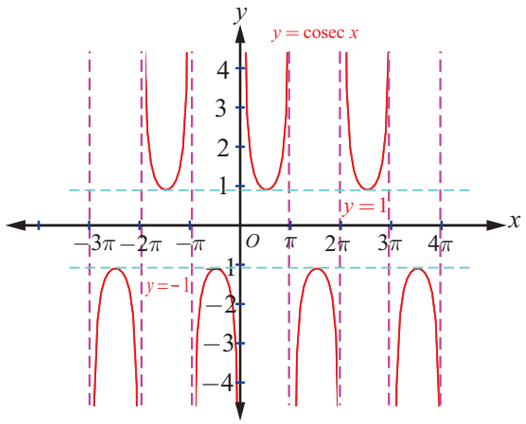
$(0,\ 2\pi)$ എന്ന ഇടവേളയിൽ $x=\pi$ എന്ന ബിന്ദു ഒഴികെ മറ്റെല്ലായിടത്തും കൊസീക്കന്റ് ഫലനം തുടർച്ചയാണ്. ഇതിന് ഏറ്റവും വലിയ അല്ലെങ്കിൽ ഏറ്റവും ചെറിയ വില ഇല്ല. ലഘുവായി പറഞ്ഞാൽ $y=\operatorname{cosec} x$ ന്റെ വില $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ ൽ ∞ ൽ നിന്നും 1 ലേക്ക് കുറയുകയും $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$ ൽ 1 ൽ നിന്നും ∞ ലേക്ക് കൂടുകയും ചെയ്യുന്നു. വീണ്ടും $x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$ ൽ ഇത് $-\infty$ ൽ നിന്നും -1 ലേക്ക് കൂടുകയും $x\in\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ ൽ -1 ൽ നിന്നും $-\infty$ ലേക്ക് കുറയുകയും ചെയ്യുന്നു.



ചിത്രം 4.19

$x\in(0,2\pi)\setminus\{\pi\}$ ലുള്ള $y=\operatorname{cosec} x$ ന്റെ ഗ്രാഫ് ചിത്രം 4.19 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. ഈ ഭാഗത്തുള്ള ഗ്രാഫ് $\cdots,(-4\pi,-2\pi)\setminus\{-3\pi\}$, $(-2\pi,0)\setminus\{-\pi\}$, $(2\pi,4\pi)\setminus\{3\pi\},(4\pi,6\pi)\setminus\{5\pi\},\cdots$ തുടങ്ങിയ ഇടവേളകളിൽ ആവർത്തിക്കുന്നു

$y=\operatorname{cosec} x$ പൂർണ്ണമായ ഗ്രാഫ് ചിത്രം 4.20 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.



ചിത്രം 4.20

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 4 Inverse Trigonometry.indd 148 14-02-2023 14:31:07

4.6.2 വിപരീത കോസീക്കന്റ് ഫലനം

$\text{cosec} : \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \to (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ എന്ന കൊസീക്കന്റ് ഫലനം $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ എന്ന നിയന്ത്രിത മണ്ഡലത്തിൽ ബൈജെക്ടീവ് ആണ്. അതുകൊണ്ട് $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ മണ്ഡലവും $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ രംഗവുമായി വിപരീത കൊസീക്കന്റ് ഫലനം നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു.

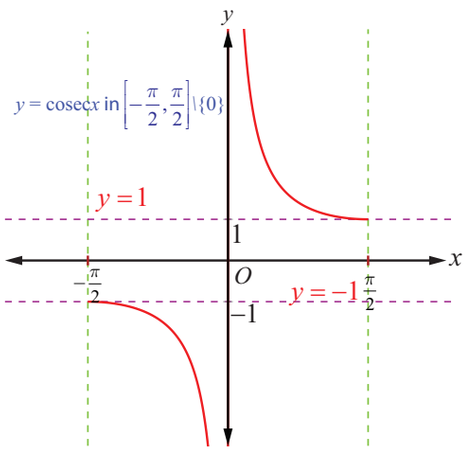
നിർവ്വചനം 4.6

വിപരീത കൊസീക്കന്റ് ഫലനം $\text{cosec}^{-1} : (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \to \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ നെ $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ ൽ $\text{cosec}\, y = x$ എങ്കിൽ, എങ്കിൽ മാത്രം $\text{cosec}^{-1}(x) = y$ എന്ന് നിർവ്വചിക്കുന്നു.

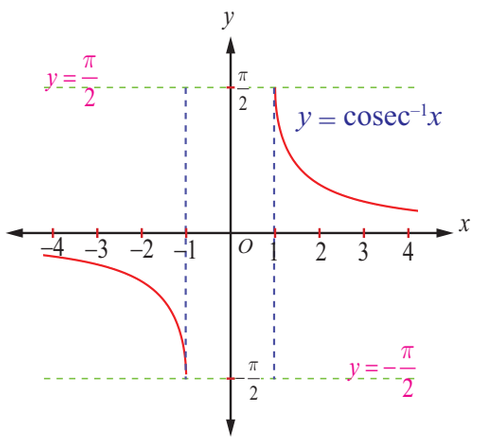
4.6.3 വിപരീത കൊസീക്കന്റ് ഫലനത്തിന്റെ ഗ്രാഫ്

$\mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ മണ്ഡലവും $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$ രംഗവുമായിട്ടുള്ള ഒരു ഫലനമാണ് $y = \text{cosec}^{-1} x$ എന്ന വിപരീത കൊസീക്കന്റ് ഫലനം. അതായത്, $\text{cosec}^{-1} : (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \to \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

പ്രധാന മണ്ഡലത്തിലെ കൊസീക്കന്റ് ഫലനത്തിന്റെ ഗ്രാഫ്, യോജിച്ച മണ്ഡലത്തിലെ വിപരീത കൊസീക്കന്റ് ഫലനത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് എന്നിവ യഥാക്രമം ചിത്രം 4.21 ചിത്രം 4.22 എന്നിവ കാണിക്കുന്നു.



ചിത്രം 4.21



ചിത്രം 4.22

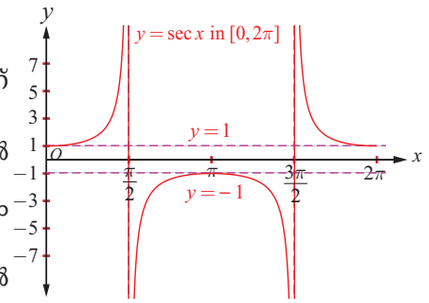
4.7 സീക്കന്റ് ഫലനവും വിപരീത സീക്കന്റ് ഫലനവും

സീക്കന്റ് ഫലനത്തെ കൊസൈൻ ഫലനത്തിന്റെ വ്യുൽക്രമമായിട്ടാണ് നിർവ്വചിച്ചിരിക്കുന്നത്. അതുകൊണ്ട്, $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$ നെ $\cos x = 0$ ആകുന്നത് ഒഴിവാക്കിയ എല്ലാ x വിലകൾക്കും നിർവ്വചിച്ചിരിക്കുന്നു. അതിനാൽ $y = \sec x$ ന്റെ മണ്ഡലം $\mathbb{R} \setminus \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2} : n \in \mathbb{Z}\right\}$ ആണ്. $-1 \le \cos x \le 1$ ആയതിനാൽ $(-1, 1)$ ലെ വിലകൾ $y = \sec x$ നൽകില്ല. അതിനാൽ സീക്കന്റ് ഫലനത്തിന്റെ രംഗം $(-\infty, 1] \cup [1, \infty)$ ആണ്. സീക്കന്റ് ഫലനത്തിന് ഏറ്റവും ഉയർന്ന വിലയോ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വിലയോ ഇല്ല. $y = \sec x$ എന്ന ഫലനം 2π അന്തരമുള്ള ഒരു ആനുകാലിക ഫലനമാണ്, കൂടാതെ ഇതൊരു ഇരട്ട ഫലനവുമാണ്.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 4 Inverse Trigonometry.indd 149 14-02-2023 14:31:20

4.7.1 സീക്കന്റ് ഫലനത്തിന്റെ ഗ്രാഫ്

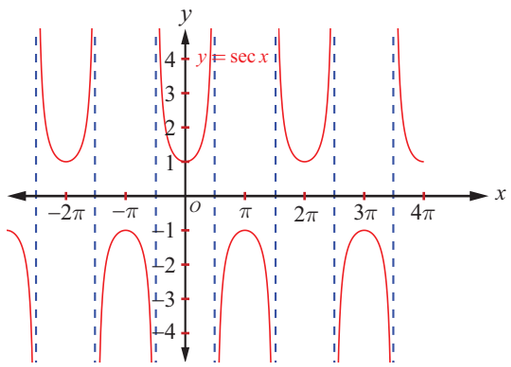
$0 \le x \le 2\pi$, $x \ne \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ വിലുള്ള സീക്കന്റ് ഫലനത്തിന്റെ ഗ്രാഫാണ് ചിത്രം 4.23 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്. ഒന്ന്, നാല് ചതുർത്ഥാംശങ്ങളിൽ അഥവാ $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ എന്ന ഇടവേളയിൽ പോസിറ്റീവ് വിലകൾ മാത്രവും രണ്ട്, മൂന്ന് ചതുർത്ഥാംശങ്ങളിൽ അഥവാ $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ എന്ന ഇടവേളയിൽ നെഗറ്റീവ് വിലകൾ മാത്രവുമാണ് $y = \sec x$ നൽകുന്നത് .



ചിത്രം 4.23

$0 \le x \le 2\pi$, $x \ne \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ ൽ സീക്കന്റ് ഫലനം തുടർച്ചയാണ്. സീക്കന്റ് ഫലനത്തിന്റെ വില $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ ൽ 1 ൽ നിന്നും ∞ ലേക്കും $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ ൽ $-\infty$ ൽ നിന്നും -1 ലേക്കും കൂടുന്നു. ഇത് $x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ ൽ -1 ൽ നിന്നും $-\infty$ ലേക്കും $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ ൽ ∞ ൽ നിന്നും 1 ലേക്കും കുറയുന്നു

$y = \sec x$ അന്തരം 2π ഉള്ള ഒരു ആനുകാലിക ഫലനമായതിനാൽ $0 \le x \le 2\pi$, $x \ne \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ ലുള്ള ഗ്രാഫിന്റെ അതേ ഖണ്ഡം തന്നെ $\left[2\pi, 4\pi\right] \setminus \left\{\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right\}, \left[4\pi, 6\pi\right] \setminus \left\{\frac{9\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}\right\}$,… ലും …, $\left[-4\pi, -2\pi\right] \setminus \left\{-\frac{7\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}\right\}$, $\left[-2\pi, 0\right] \setminus \left\{-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right\}$ ലും ആവർത്തിക്കുന്നു



ചിത്രം 4.24

ഇപ്പോൾ $y = \sec x$ ന്റെ പൂർണ്ണമായ ഗ്രാഫ് ചിത്രം 4.24 ൽ കാണിച്ചിട്ടുണ്ട്.

4.7.2 വിപരീത സീക്കന്റ് ഫലനം

$\sec x : \left[0, \pi\right] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \to \mathbb{R} \setminus \left(-1, 1\right)$ എന്ന സീക്കന്റ് ഫലനം നിയന്ത്രിത മണ്ഡലമായ $\left[0, \pi\right] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ ൽ ബൈജെക്ടീവ് ആണ്. അതുകൊണ്ട് മണ്ഡലം $\mathbb{R} \setminus \left(-1, 1\right)$ ഉം രംഗം $\left[0, \pi\right] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ ഉം ആയിട്ടുള്ള സീക്കന്റ് ഫലനത്തെ നിർവ്വചിച്ചിരിക്കുന്നു.

നിർവ്വചനം 4.7

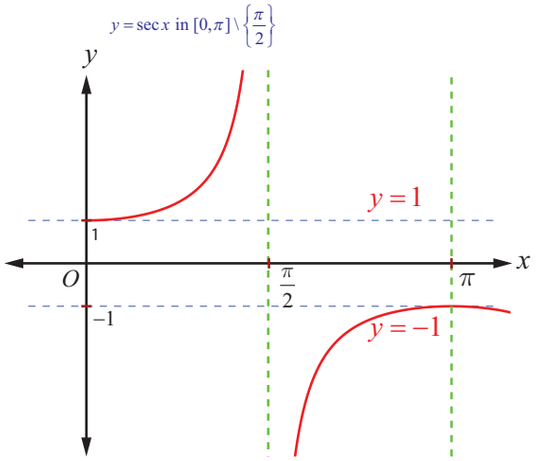
വിപരീത സീക്കന്റ് ഫലനം $\sec^{-1} : \mathbb{R} \setminus \left(-1, 1\right) \to \left[0, \pi\right] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ നെ $y \in \left[0, \pi\right] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ ൽ എപ്പോഴെല്ലാം $\sec y = x$ ആകുന്നോ അപ്പോഴെല്ലാം $\sec^{-1}(x) = y$ എന്ന് നിർവ്വചിക്കുന്നു.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 4 Inverse Trigonometry.indd 150 14-02-2023 14:31:36

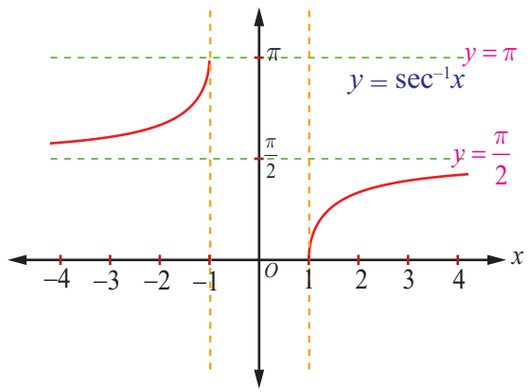
4.7.3 വിപരീത സീക്കന്റ് ഫലനത്തിന്റെ ഗ്രാഫ്

$\mathbb{R}\setminus(-1,1)$ മണ്ഡലവും $[0,\pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ രംഗവുമായിട്ടുള്ള ഒരു ഫലനമാണ് $y=\sec^{-1}x$ എന്ന വിപരീത സീക്കന്റ് ഫലനം. അതായത്, $\sec^{-1}:\mathbb{R}\setminus(-1,1)\to[0,\pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.

പ്രധാന മണ്ഡലത്തിലെ സീക്കന്റ് ഫലനത്തിന്റെ ഗ്രാഫ്, യോജിച്ച മണ്ഡലത്തിലെ വിപരീത സീക്കന്റ് ഫലനത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് എന്നിവ യഥാക്രമം ചിത്രം 4.25 ലും ചിത്രം 4.26 ലും കാണിച്ചിട്ടുണ്ട്.



ചിത്രം 4.25



ചിത്രം 4.26

പരാമർശം

$y=\sec x$ അല്ലെങ്കിൽ $\operatorname{cosec} x$ ന്റെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കാനുള്ള ഒരു നല്ല മാർഗ്ഗം:

(i) $y=\cos x$ അല്ലെങ്കിൽ $\sin x$ ന്റെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക

(ii) x -അന്തഃഖണ്ഡങ്ങളിലൂടെ കുത്തനെയുള്ള അനന്ത സ്പർശങ്ങൾ വരച്ചിട്ട് y വിലകളുടെ വ്യുൽക്രമം എടുക്കുക.

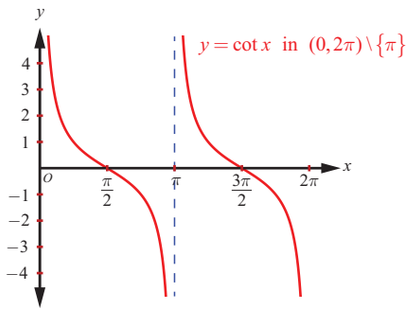
4.8 കോടാൻജന്റ് ഫലനവും വിപരീത കോടാൻജന്റ് ഫലനവും

കോടാൻജന്റ് ഫലനത്തെ $\cot x=\frac{1}{\tan x}$ എന്ന് തന്നിട്ടുണ്ട് $\tan x=0$ അല്ലെങ്കിൽ $x=n\pi, n\in\mathbb{Z}$ ഒഴികെയുള്ള എല്ലാ വാസ്തവിക സംഖ്യ x നും ഇത് നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. അതിനാൽ കോടാൻജന്റ് ഫലനത്തിന്റെ മണ്ഡലം $\mathbb{R}\setminus\{n\pi : n\in\mathbb{Z}\}$ ഉം രംഗം $(-\infty,\infty)$ ഉം ആണ്. $\tan x$ പോലെ തന്നെ കോടാൻജന്റ് ഫലനവും ഒരു ഒറ്റഫലനവും π അന്തരമുള്ള ഒരു ആനുകാലിക ഫലനവും ആണ്.

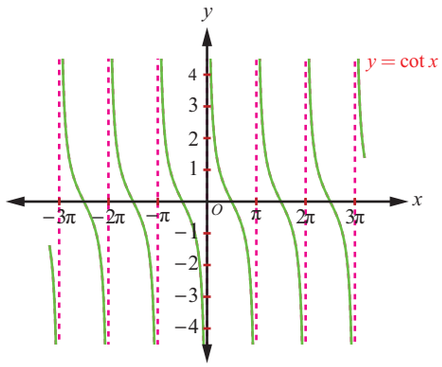
4.8.1 കോടാൻജന്റ് ഫലനത്തിന്റെ ഗ്രാഫ്

കോടാൻജന്റ് ഫലനം $(0,2\pi)\setminus\{\pi\}$ എന്ന ഗണത്തിൽ തുടർച്ചയാണ്. ആദ്യം നമ്മൾ വരയ്ക്കേണ്ടത് $(0,2\pi)\setminus\{\pi\}$ ലുള്ള കോടാൻജന്റ് ഫലനത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് ആണ്. ഒന്ന്, മൂന്ന് ചതുർത്ഥാംശങ്ങളിൽ കോടാൻജന്റ് ഫലനത്തിന്റെ വില പോസിറ്റീവ് മാത്രമായും രണ്ട്, നാല് ചതുർത്ഥാംശങ്ങളിൽ ഇത് നെഗറ്റീവ് മാത്രമായും എടുത്തിരിക്കുന്നു. കോടാൻജന്റ് ഫലനത്തിന് ഏറ്റവും ഉയർന്ന മൂല്യമോ ഏറ്റവും താഴ്ന്ന മൂല്യമോ ഇല്ല. കോടാൻജന്റ് ഫലനത്തിന്റെ വില $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ ൽ ∞ ൽ നിന്നും 0 ലേക്കും $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$ ൽ 0 ൽ നിന്നും $-\infty$ ലേക്കും $x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ ൽ ∞ ൽ നിന്നും 0 ലേക്കും $x\in\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ ൽ 0 ൽ നിന്നും $-\infty$ ലേക്കും കുറയുന്നു.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 4 Inverse Trigonometry.indd 151 14-02-2023 14:31:49



ചിത്രം 4.27



ചിത്രം 4.28

$x \in (0, 2\pi) \setminus \{\pi\}$ ലുള്ള $y = \cot x$ ന്റെ ഗ്രാഫ് ചിത്രം 4.27 ൽ കാണിച്ചിട്ടുണ്ട്. $(0, 2\pi) \setminus \{\pi\}$ ലുള്ള ഗ്രാഫിന്റെ അതേഖണ്ഡം തന്നെ $(2\pi, 4\pi) \setminus \{3\pi\}, (4\pi, 6\pi) \setminus \{5\pi\}, \cdots$ ലും $(-4\pi, -2\pi) \setminus \{-3\pi\}, (-2\pi, 0) \setminus \{-\pi\}$ ലും ആവർത്തിക്കുന്നു. $\mathbb{R} \setminus \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$ എന്ന മണ്ഡലത്തിലുള്ള കോടാൻജന്റ് ഫലനത്തിന്റെ പൂർണ്ണമായ ഗ്രാഫ് ചിത്രം 4.28 ൽ കാണിച്ചിട്ടുണ്ട് .

4.8.2 വിപരീത കോടാൻജന്റ് ഫലനം

മുഴു മണ്ഡലമായ $\mathbb{R} \setminus \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$ ൽ കോടാൻജന്റ് ഫലനം വൺ-ടു-വൺ അല്ല. എങ്കിലും നിയന്ത്രിത മണ്ഡലമായ $(0, \pi)$ ൽ $\cot : (0, \pi) \to (-\infty, \infty)$ എന്ന ഫലനം ബൈജക്ടീവ് ആണ്. അതുകൊണ്ട് $(-\infty, \infty)$ മണ്ഡലവും $(0, \pi)$ രംഗവുമായുള്ള വിപരീത കോടാൻജന്റ് ഫലനം നമുക്ക് നിർവ്വചിക്കാം.

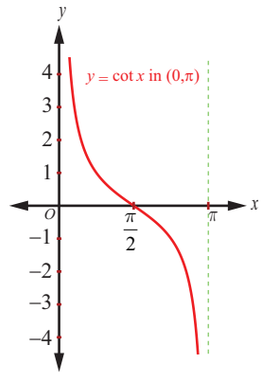
നിർവ്വചനം 4.8

വിപരീത കോടാൻജന്റ് ഫലനം $\cot^{-1} : (-\infty, \infty) \to (0, \pi)$ യെ $y \in (0, \pi)$ ക്ക് $\cot^{-1}(x) = y$ എങ്കിൽ, എങ്കിൽ മാത്രം $\cot y = x$ എന്ന് നിർവ്വചിക്കുന്നു.

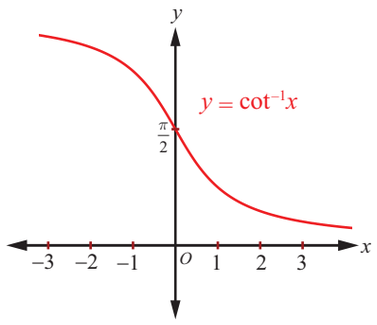
4.8.3 വിപരീത കോടാൻജന്റ് ഫലനത്തിന്റെ ഗ്രാഫ്

മണ്ഡലം $\mathbb{R}$ ഉം രംഗം $(0, \pi)$ ഉം ആയ ഫലനം $y = \cot^{-1} x$ ആണ് വിപരീത കോടാൻജന്റ് ഫലനം. അതായത് , $\cot^{-1} x : (-\infty, \infty) \to (0, \pi)$.

പ്രധാന മണ്ഡലത്തിലെ കോടാൻജന്റ് ഫലനത്തിന്റെ ഗ്രാഫ്, യോജിച്ച മണ്ഡലത്തിലെ വിപരീത കോടാൻജന്റ് ഫലനത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് എന്നിവ യഥാക്രമം ചിത്രം 4.29 ലും ചിത്രം 4.30 ലും കാണിക്കുന്നു.



ചിത്രം 4.29



ചിത്രം 4.30

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 4 Inverse Trigonometry.indd 152 14-02-2023 14:32:02

4.9 വിപരീത ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളുടെ പ്രധാന മൂല്യം

x എന്ന ഒരു ബിന്ദുവിലെ വിപരീത ത്രികോണമിതി ഫലനത്തിന്റെ പ്രധാന മൂല്യം x എന്ന ബിന്ദുവിലെ തന്നെ വിപരീത ഫലനത്തിന്റെ മൂല്യമാണെന്നത് ഓർമ്മിക്കുക. ഇത് പ്രധാന ശാഖയുടെ രംഗത്തിലാണുള്ളത് ഉദാഹരണത്തിന് $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ന്റെ പ്രധാന മൂല്യം $\frac{\pi}{6}$ ആണ്, എന്തുകൊണ്ടെന്നാൽ $\frac{\pi}{6} \in [0, \pi]$ ആണ്. സംഖ്യകൾ തുല്യമായ ഒന്ന് പോസിറ്റീവും മറ്റൊന്ന് നെഗറ്റീവും ആയിട്ടുള്ള രണ്ട് വിലകൾ ഉള്ളപ്പോൾ വിപരീത ത്രികോണമിതി ഫലനത്തിന്റെ പ്രധാനമൂല്യം പോസിറ്റീവ് ആയിരിക്കും. ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളുടെ പ്രധാനമണ്ഡലവും രംഗവും വിപരീത ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളുടെ പ്രധാനമണ്ഡലവും രംഗവും ഇപ്പോൾ നമുക്ക് പട്ടികപ്പെടുത്താം.

ഫലനം	പ്രധാന മണ്ഡലം	രംഗം
sine	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$[-1,1]$
cosine	$[0, \pi]$	$[-1,1]$
tangent	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$\mathbb{R}$
cosecant	$\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$	$\mathbb{R} \setminus (-1, 1)$
secant	$[0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$	$\mathbb{R} \setminus (-1,1)$
cotangent	$(0, \pi)$	$\mathbb{R}$

വിപരീത ഫലനം	മണ്ഡലം	പ്രധാന മൂല്യശാഖയുടെ രംഗം
$\sin^{-1}$	$[-1,1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\cos^{-1}$	$[-1,1]$	$[0, \pi]$
$\tan^{-1}$	$\mathbb{R}$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
cosec^{-1}	$\mathbb{R} \setminus (-1,1)$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$
$\sec^{-1}$	$\mathbb{R} \setminus (-1,1)$	$[0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$
$\cot^{-1}$	$\mathbb{R}$	$(0, \pi)$

ഉദാഹരണം 4.12

തന്നിട്ടുള്ളവയുടെ പ്രധാന മൂല്യം കാണുക

(i) $\text{cosec}^{-1}(-1)$ (ii) $\sec^{-1}(-2)$.

നിർദ്ധാരണം

(i) $\text{cosec}^{-1}(-1) = y$ എങ്കിൽ, $\text{cosec}\, y = -1$

$y = \text{cosec}^{-1} x$ ന്റെ പ്രധാനമൂല്യശാഖയുടെ രംഗം $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$ ഉം $\text{cosec}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, ഉം ആയതിനാൽ

$y = -\frac{\pi}{2}$ എന്ന് കിട്ടുന്നു. $-\frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$ എന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക.

അതുകൊണ്ട് $\text{cosec}^{-1}(-1)$ ന്റെ പ്രധാനമൂല്യം $-\frac{\pi}{2}$ ആണ്.

(ii) $y = \sec^{-1}(-2)$ എങ്കിൽ, $\sec y = -2$.

നിർവ്വചനത്തിൽ നിന്ന് $y = \sec^{-1} x$ ന്റെ പ്രധാന മൂല്യശാഖയുടെ രംഗം $[0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ ആണ്.

$\sec y = -2$ ആയിട്ടുള്ള y $[0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ നമുക്ക് കാണാം.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 4 Inverse Trigonometry.indd 153 14-02-2023 14:32:23

പക്ഷേ, $\sec y = -2 \Rightarrow \cos y = -\frac{1}{2}$ ആണ്.

ഇപ്പോൾ, $\cos y = -\frac{1}{2} = -\cos\frac{\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3}$, അതുകൊണ്ട് $y = \frac{2\pi}{3}$.

$\frac{2\pi}{3} \in [0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ ആയതിനാൽ, $\sec^{-1}(-2)$ ന്റെ പ്രധാന മൂല്യം $\frac{2\pi}{3}$ ആണ്.

ഉദാഹരണം 4.13

$\sec^{-1}\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ ന്റെ വില കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$\sec^{-1}\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \theta$ എന്നെടുത്താൽ, $\sec\theta = -\frac{2}{\sqrt{3}}$, ഇവിടെ $\theta \in [0,\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$. അതിനാൽ, $\cos\ \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ഇപ്പോൾ, $\cos\ \frac{5\pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. ആയതിനാൽ, $\sec^{-1}\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{5\pi}{6}$.

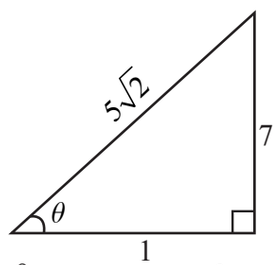
ഉദാഹരണം 4.14

$\cot^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) = \theta$ ആണെങ്കിൽ $\cos\theta$ യുടെ വില കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

നിർവചനത്തിൽ നിന്ന്, $\cot^{-1} x \in (0, \pi)$.

അതുകൊണ്ട് $\cot^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) = \theta$. അതിനാൽ $\theta \in (0, \pi)$.



പക്ഷേ, $\cot^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) = \theta$. അതുകൊണ്ട് $\cot\theta = \frac{1}{7}$ അങ്ങനെ $\tan\theta = 7$. ഇവിടെ θ ഒരു ന്യൂനകോൺ ആണ്.

$\tan\theta = \frac{7}{1}$, ഉപയോഗിച്ച് ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നതുപോലെ ഒരു മട്ടത്രികോണം നമുക്ക് നിർമ്മിക്കാം.

അതിനാൽ, $\cos\theta = \frac{1}{5\sqrt{2}}$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

ഉദാഹരണം 4.15

$\cot^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right) = \sec^{-1} x$, $|x| > 1$ എന്ന് കാണിക്കുക.

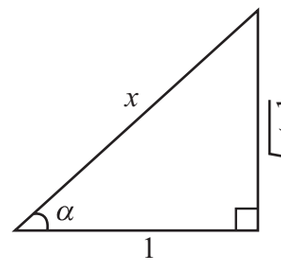
നിർദ്ധാരണം

$\cot^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right) = \alpha$ എന്നെടുത്താൽ, $\cot\alpha = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, ഇവിടെ α ഒരു ന്യൂനകോണാണ്.

തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളിൽ നിന്ന് ഒരു മട്ടത്രികോണം നമുക്ക് നിർമ്മിക്കാം.

ത്രികോണത്തിൽ നിന്ന്, $\sec\alpha = \frac{x}{1} = x$. അതുകൊണ്ട്, $\alpha = \sec^{-1} x$.

ആയതിനാൽ, $\cot^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right) = \sec^{-1} x$, $|x| > 1$.



അഭ്യാസം 4.4

1. തന്നിട്ടുള്ളവയുടെ പ്രധാന മൂല്യം കാണുക

(i) $\sec^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ (ii) $\cot^{-1}\left(\sqrt{3}\right)$ (iii) $\text{cosec}^{-1}\left(-\sqrt{2}\right)$

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 4 Inverse Trigonometry.indd 154 14-02-2023 14:32:40

2. തന്നിട്ടുള്ളവയുടെ മൂല്യം കാണുക

(i) $\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)-\sec^{-1}(-2)$ (ii) $\sin^{-1}(-1)+\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+\cot^{-1}(2)$

(iii) $\cot^{-1}(1)+\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\sec^{-1}\left(-\sqrt{2}\right)$

4.10 വിപരീത ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളുടെ സവിശേഷതകൾ

വിപരീത ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളുടെ ചില സവിശേഷതകൾ ഈ ഭാഗത്ത് നാം പരിശോധിക്കുകയാണ്. ചർച്ച ചെയ്യേണ്ട സവിശേഷതകൾ വിപരീത ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളുടെ പ്രധാന മൂല്യ ശാഖകൾക്കുള്ളിലും അവ നിർവ്വചിച്ചിരിക്കുന്നിടത്തും നിലനിൽക്കുന്നതാണ്.

സവിശേഷത-I

(i) $\sin^{-1}(\sin\theta)=\theta, \quad \theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. (ii) $\cos^{-1}(\cos\theta)=\theta, \quad \theta\in[0,\pi]$.

(iii) $\tan^{-1}(\tan\theta)=\theta, \quad \theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. (iv) $\text{cosec}^{1}(\text{cosec}\,\theta)=\theta, \quad \theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\setminus\{0\}$

(v) $\sec^{-1}(\sec\theta)=\theta, \quad \theta\in[0,\pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$. (vi) $\cot^{-1}(\cot\theta)=\theta, \quad \theta\in(0,\pi)$.

തെളിവ്

മേൽപ്പറഞ്ഞിട്ടുള്ള എല്ലാ ഫലനങ്ങളും അതാതു വിപരീത ഫലനങ്ങളുടെ നിർവ്വചനങ്ങളിൽ നിന്ന് ലഭിക്കുന്നു. ഉദാഹരണത്തിന്, (i) $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ ൽ $\sin\theta=x$ എന്നെടുത്താൽ, വിപരീത സൈൻ ഫലനത്തിന്റെ നിർവ്വചനത്തിൽ നിന്ന്,

$\sin\theta=x$ ൽ നിന്ന് $\theta=\sin^{-1}x$.

അതുകൊണ്ട്, $\sin^{-1}\left(\sin\theta\right)=\theta$.

സവിശേഷത -II

(i) $\sin\left(\sin^{-1}x\right)=x, \quad x\in[-1,1]$. (ii) $\cos\left(\cos^{-1}x\right)=x, \quad x\in[-1,1]$

(iii) $\tan\left(\tan^{-1}x\right)=x, \quad x\in\mathbb{R}$ (iv) $\text{cosec}\left(\text{cosec}^{-1}x\right)=x, \quad x\in\mathbb{R}\setminus(-1,1)$

(v) $\sec\left(\sec^{-1}x\right)=x, \quad x\in\mathbb{R}\setminus(-1,1)$ (vi) $\cot\left(\cot^{-1}x\right)=x, \quad x\in\mathbb{R}$

തെളിവ്

(i) $x\in[-1,1]$ ന് , $\sin^{-1}x$ വ്യക്തമായി നിർവചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്.

$\sin^{-1}x=\theta$ എന്നെടുത്താൽ , നിർവ്വചനത്തിൽ നിന്ന് $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ ഉം $\sin\theta=x$ ഉം ആണ്.

അതുകൊണ്ട്, $\sin\theta=x$ ൽ നിന്ന് $\sin\left(\sin^{-1}x\right)=x$.

ഇതുപോലെ തന്നെ മറ്റു ഫലങ്ങളും തെളിയിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്.

കുറിപ്പ്

(i) ഏതൊരു ത്രികോണമിതി ഫലനം $y=f(x)$, നും f ന്റെ രംഗത്തിലെ എല്ലാ x നും $f\left(f^{-1}(x)\right)=x$ എന്ന് നമുക്ക് കിട്ടും $f^{-1}(x)$ ന്റെ നിർവചനത്തിൽ നിന്നാണ് ഇത് ലഭിക്കുന്നത്. $g^{-1}(x)=\sin^{-1}x$ or $\cos^{-1}x$, ആയിട്ടുള്ള $f\left(g^{-1}(x)\right)$ നമുക്ക് തന്നിട്ടുള്ള പ്രശ്നങ്ങൾ പരിഹരിക്കുന്നതിനായി വിപരീത ത്രികോണമിതി ഫലനം നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്ന രീതിയിൽ ഒരു ത്രികോണം വരയ്ക്കേണ്ടത് ആവശ്യമാണ്. ഉദാഹരണത്തിന്, $\cot\left(\sin^{-1}x\right)$ കാണുന്നതിനായി $\sin^{-1}x$.ഉപയോഗിച്ച് ഒരു ത്രികോണം വരയ്ക്കേണ്ടതാണ്. എന്നിരുന്നാലും, $f^{-1}[f(x)]$ ന്റെ രൂപത്തിലുള്ള വ്യജ്ഞകത്തിൽ നാം കുറച്ചു കൂടി ശ്രദ്ധാലുവായിരിക്കണം.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 4 Inverse Trigonometry.indd 155 14-02-2023 14:33:05

(ii) ആറ് ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളിൽ ഏതെങ്കിലും ഒരു ഫലനം f ന് $f^{-1}[f(x)]$ കണക്കാക്കുന്നതിന്.

(a) x വില f ന്റെ നിയന്ത്രിത മണ്ഡലത്തിൽ (പ്രധാന മണ്ഡലം) ആണെങ്കിൽ $f^{-1}[f(x)] = x$.

(b) x വില f ന്റെ നിയന്ത്രിത മണ്ഡലത്തിൽ അല്ല എങ്കിൽ $f(x) = f(x_1)$ ആകുന്ന തരത്തിൽ നിയന്ത്രിത മണ്ഡലത്തിലെ ഒരു x_1 കാണുക. അപ്പോൾ $f^{-1}[f(x)] = x_1$ ആയിരിക്കും.

ഉദാഹരണത്തിന്,

$$\sin^{-1}(\sin x) = \begin{cases} x & \text{if } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x_1 & \text{if } x \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \end{cases}$$

ഇവിടെ $\sin x = \sin x_1$ ഉം $x_1 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ഉം ആണ്.

സവിശേഷത - III (വ്യുൽക്രമവിപരീത സർവ്വ സമവാക്യങ്ങൾ)

(i) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{cosec}^{-1} x$, if $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$. (ii) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \sec^{-1} x$, if $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$.

(iii) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \cot^{-1} x & \text{if } x > 0 \\ -\pi + \cot^{-1} x & \text{if } x < 0. \end{cases}$

തെളിവ്

(i) $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ എങ്കിൽ, $\frac{1}{x} \in [-1, 1]$ ഉം $x \neq 0$ ഉം ആയിരിക്കും.

$\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \theta$ എന്നെടുത്താൽ നിർവ്വചനത്തിൽ നിന്ന്, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$ ഉം $\sin\theta = \frac{1}{x}$ ഉം ആയിരിക്കും.

അതിനാൽ, $\operatorname{cosec}\theta = x$ ആകും, ഇതിൽ നിന്ന് $\theta = \operatorname{cosec}^{-1} x$ ലഭിക്കുന്നു.

അപ്പോൾ, $\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \theta = \operatorname{cosec}^{-1} x$ അതുകൊണ്ട്, $\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{cosec}^{-1} x$, $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$.

ഇതുപോലെ മറ്റ് ഫലങ്ങളും തെളിയിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്.

സവിശേഷത-IV (പ്രതിഫലന സർവ്വ സമവാക്യങ്ങൾ)

(i) $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x$, $x \in [-1, 1]$.

(ii) $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x$, $x \in \mathbb{R}$.

(iii) $\operatorname{cosec}^{-1}(-x) = -\operatorname{cosec}^{-1} x$, $|x| \geq 1$ or $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$.

(iv) $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x$, $x \in [-1, 1]$.

(v) $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1} x$, $|x| \geq 1$ or $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$.

(vi) $\cot^{-1}(-x) = \pi - \cot^{-1} x$, $x \in \mathbb{R}$.

തെളിവ്

(i) $x \in [-1, 1]$ എങ്കിൽ, $-x \in [-1, 1]$ ആയിരിക്കും. അതിനാൽ, $\sin^{-1}(-x)$ വ്യക്തമായി നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടതാകുന്നു.

$\sin^{-1}(-x) = \theta$ എന്നെടുത്താൽ $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ഉം $\sin\theta = -x$ ഉം ആയിരിക്കും.

അപ്പോൾ, $\sin\theta = -x$ ൽ നിന്ന് $x = -\sin\theta = \sin(-\theta)$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 4 Inverse Trigonometry.indd 156 14-02-2023 14:33:28

$x = \sin(-\theta)$ ൽ നിന്ന്, $\sin^{-1} x = -\theta$ എന്ന് നമുക്ക് ലഭിക്കും, ഇതിൽ നിന്ന് $\theta = -\sin^{-1} x$ എന്ന് കിട്ടുന്നു. ആയതിനാൽ $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x$.

(iv) $x \in [-1, 1]$ എങ്കിൽ, $-x \in [-1, 1]$ ആയിരിക്കും. അതിനാൽ, $\cos^{-1}(-x)$ വ്യക്തമായി നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടതാകുന്നു

$\cos^{-1}(-x) = \theta$ എന്നെടുത്താൽ $\theta \in [0, \pi]$ ഉം $\cos\ \theta = -x$ ഉം ആയിരിക്കും.

അപ്പോൾ, $\cos\theta = -x$ ഇതിൽ നിന്നും $x = -\cos\theta = \cos(\pi - \theta)$.

അതിനാൽ, $\pi - \theta = \cos^{-1} x$, ൽ നിന്ന് $\theta = \pi - \cos^{-1} x$ ലഭിക്കുന്നു.

അതുകൊണ്ട് , $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x$.

ഇതുപോലെ മറ്റു ഫലങ്ങളും തെളിയിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്.

കുറിപ്പ്

(i) ഒരു വൺ-ടു-വൺ ആയിട്ടുള്ള ഒറ്റ ഫലനത്തിന്റെ വിപരീത ഫലനം ഒരു ഒറ്റ ഫലനമായിരിക്കും. ഉദാഹരണത്തിന് സൈൻ ഫലനം നിയന്ത്രിത മണ്ഡലമായ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ൽ വൺ-ടു-വൺ ഉം ഒറ്റ ഫലനവും ആയതിനാൽ $y = \sin^{-1} x$ ഒരു ഒറ്റഫലനമാണ്.

(ii) ഒരു ഇരട്ട ഫലനത്തിന്റെ വിപരീത ഫലനം ഇരട്ടയാണോ? 0 ഒഴികെ നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുള്ള ഒരു ഇരട്ട ഫലനവും വൺ-ടു-വൺ അല്ലാത്തതിനാൽ ഈ ചോദ്യം അപ്രസക്തമാകുന്നു

സവിശേഷത -V (സഹഫലന വിപരീത സർവ്വ സമവാക്യങ്ങൾ)

(i) $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2},\ x \in [-1, 1].$ (ii) $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2},\ x \in \mathbb{R}.$

(iii) $\text{cosec}^{-1} x + \sec^{-1} x = \frac{\pi}{2},\ x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1),\ |x| \geq 1.$

തെളിവ്

(i) ഇവിടെ, $x \in [-1, 1]$ ആണ്. $\sin^{-1} x = \theta$ എന്നെടുത്താൽ, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ഉം $\sin\theta = x$ ഉം ആയിരിക്കും.

$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\pi}{2} - \theta \leq \pi$ എന്നത് ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടതാണ്.

അതുകൊണ്ട്, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta = x$, ആണ് ഇതിൽ നിന്ന് $\cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} x$ കിട്ടുന്നു.

ആയതിനാൽ, $\cos^{-1} x + \sin^{-1} x = \frac{\pi}{2},\ |x| \leq 1.$

(ii) $\cot^{-1} x = \theta$ എന്നെടുത്താൽ, $\cot\theta = x,\ 0 < \theta < \pi,\ x \in \mathbb{R}$ ആയിരിക്കും.

അപ്പോൾ, $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta = x.$ ... (1)

അതിനാൽ, $x \in \mathbb{R}$ ന് $\tan(\tan^{-1} x) = x$ ഉം (1) ൽ നിന്ന് $\tan(\tan^{-1} x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ ഉം ലഭിക്കും.

ആയതിനാൽ, $\tan(\tan^{-1} x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \cot^{-1} x\right)$ ആകും ... (2)

$0 < \cot^{-1} x < \pi$ ൽ നിന്ന് $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - \cot^{-1} x < \frac{\pi}{2}$ ആണെന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക.

അതുകൊണ്ട്, (2) ൽ നിന്ന് $\tan^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \cot^{-1} x$ ലഭിക്കും. അതുകൊണ്ട്, $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2},\ x \in \mathbb{R}.$

ഇതുപോലെ, (iii) ഉം തെളിയിക്കാവുന്നതാണ്.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 4 Inverse Trigonometry.indd 157 14-02-2023 14:33:48

സവിശേഷത -VI

(i) $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y = \sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right), \quad x^2+y^2\le 1 \text{ or } xy<0.$

(ii) $\sin^{-1}x-\sin^{-1}y = \sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}\right), \quad x^2+y^2\le 1 \text{ or } xy>0.$

(iii) $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y=\cos^{-1}\left[xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right], \quad x+y\ge 0.$

(iv) $\cos^{-1}x-\cos^{-1}y=\cos^{-1}\left[xy+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right], \quad x\le y.$

(v) $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right), \qquad xy<1.$

(vi) $\tan^{-1}x-\tan^{-1}y=\tan^{-1}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right) \qquad xy>-1.$

തെളിവ്

(i) $A=\sin^{-1}x$ എന്നെടുത്താൽ, $x=\sin A$ ആയിരിക്കും; ഇവിടെ $A\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ ഉം $|x|\le 1$ ഉം $\cos A$ പോസിറ്റീവും ആണ്

$B=\sin^{-1}y$ എന്നെടുത്താൽ, $y=\sin B$ ആയിരിക്കും; ഇവിടെ $B\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ ഉം $|y|\le 1$ ഉം $\cos B$ പോസിറ്റീവും ആണ്

അപ്പോൾ, $\cos A=+\sqrt{1-\sin^2 A}=\sqrt{1-x^2}$ ഉം $\cos B=+\sqrt{1-\sin^2 B}=\sqrt{1-y^2}$ ഉം ആണ്.

അതിനാൽ, $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

$= x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}$, ഇവിടെ $|x|\le 1$; $|y|\le 1$ ഉം, $x^2+y^2\le 1$ ഉം ആയിരിക്കും

അതുകൊണ്ട്, $A+B=\sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right)$

അതിനാൽ, $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y = \sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right)$ ആണ്, ഇവിടെ $x^2+y^2\le 1$ അല്ലെങ്കിൽ $xy<0$ ആയിരിക്കും.

ഇതുപോലെ മറ്റു ഫലങ്ങളും തെളിയിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്.

സവിശേഷത -VII

(i) $2\tan^{-1}x=\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right), |x|<1$ (ii) $2\tan^{-1}x=\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right), \ x\ge 0$

(iii) $2\tan^{-1}x=\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right), |x|\le 1.$

തെളിവ്

(i) സവിശേഷത VI (v) ൽ $y=x$ എന്നെടുത്താൽ ,ആവശ്യപ്പെട്ട ഫലമായ

$2\tan^{-1}x=\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right), |x|<1$ ലഭിക്കും.

(ii) $\theta=2\tan^{-1}x$ എന്നെടുത്താൽ, $\tan\frac{\theta}{2}=x$ ആയിരിക്കും.

സർവ്വസമവാക്യം $\cos\theta=\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{1-x^2}{1+x^2}$ ൽ നിന്നും $\theta=\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 4 Inverse Trigonometry.indd 158 14-02-2023 14:34:18

ആയതിനാൽ, $2\tan^{-1}x=\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right),\ x\geq 0$.

ഇതുപോലെ മറ്റു ഫലങ്ങളും തെളിയിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്.

സവിശേഷത -VIII

(i) $\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)=2\sin^{-1}x \quad |x|\leq\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\leq x\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(ii) $\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)=2\cos^{-1}x \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\leq x\leq 1$.

തെളിവ്

(i) $x=\sin\theta$ എന്നെടുത്താൽ,

$2x\sqrt{1-x^2}=2\sin\theta\cos\theta=\sin 2\theta$

അതുകൊണ്ട്, $2\theta=\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$. അതിനാൽ, $\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)=2\sin^{-1}x$.

(ii) $x=\cos\theta$ എന്നെടുത്താൽ,

$2x\sqrt{1-x^2}=2\cos\theta\sin\theta=\sin 2\theta$, ഇതിൽ നിന്നും

$2\theta=\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$ എന്ന് ലഭിക്കും. അതിനാൽ $\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)=2\cos^{-1}x$.

സവിശേഷത -IX

(i) $\sin^{-1}x=\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}\ ,\ 0\leq x\leq 1$. (ii) $\sin^{-1}x=-\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}\ ,\ -1\leq x<0$.

(iii) $\sin^{-1}x=\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right),\ -1<x<1$. (iv) $\cos^{-1}x=\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}\ ,\ 0\leq x\leq 1$.

(v) $\cos^{-1}x=\pi-\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}\ ,-1\leq x<0$. (vi) $\tan^{-1}x=\sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ എങ്കിൽ $x>0$

തെളിവ്

(i) $\sin^{-1}x=\theta$ എന്നെടുത്താൽ, $\sin\theta=x$ ആയിരിക്കും $0\leq x\leq 1$, ആയാൽ $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$ എന്ന് ലഭിക്കും.

$\cos\theta=\sqrt{1-x^2}$ ൽ നിന്ന് $\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}=\theta=\sin^{-1}x$.

അതിനാൽ, $\sin^{-1}x=\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}\ ,\ 0\leq x\leq 1$.

(ii) $-1\leq x\leq 0$ ഉം $\sin^{-1}x=\theta$ എന്നും വിചാരിച്ചാൽ $-\frac{\pi}{2}\leq\theta<0$ ആയിരിക്കും.

അതുകൊണ്ട്, $\sin\theta=x$ ഉം $\cos(-\theta)=\sqrt{1-x^2}$ ഉം ആണ്, കാരണം ($\cos\theta>0$)

അതിനാൽ, $\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}=-\theta=-\sin^{-1}x$ ആയതിനാൽ, $\sin^{-1}x=-\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$.

ഇതുപോലെ മറ്റു ഫലങ്ങളും തെളിയിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു.

സവിശേഷത-X

(i) $3\sin^{-1}x=\sin^{-1}(3x-4x^3),\ x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$. (ii) $3\cos^{-1}x=\cos^{-1}(4x^3-3x),\ x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 4 Inverse Trigonometry.indd 159 14-02-2023 14:34:42

തെളിവ്

(i) $x = \sin\theta$ എന്നെടുത്താൽ, $\theta = \sin^{-1} x$ ആയിരിക്കും.

അപ്പോൾ, $3x - 4x^3 = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta = \sin 3\theta$.

അതിനാൽ, $\sin^{-1}(3x - 4x^3) = 3\theta = 3\sin^{-1} x$.

ഇതുപോലെ തന്നെ മറ്റെ ഫലവും തെളിയിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു.

പരാമർശം

(i) $\sin^{-1}(\cos x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x, & x \in [0, \pi] \\ \frac{\pi}{2} - y, & x \notin [0, \pi], \quad \cos x = \cos y, y \in [0, \pi] \end{cases}$

(ii) $\cos^{-1}(\sin x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \frac{\pi}{2} - y, & x \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \sin x = \sin y,\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$

ഉദാഹരണം 4.16

തെളിയിക്കുക $\frac{\pi}{2} \le \sin^{-1} x + 2\cos^{-1} x \le \frac{3\pi}{2}$.

നിർദ്ധാരണം

$\sin^{-1} x + 2\cos^{-1} x = \sin^{-1} x + \cos^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} + \cos^{-1} x$

$0 \le \cos^{-1} x \le \pi$ എന്ന് നമുക്കറിയാം. അതിനാൽ, $\frac{\pi}{2} + 0 \le \cos^{-1} x + \frac{\pi}{2} \le \pi + \frac{\pi}{2}$.

അതുകൊണ്ട്, $\frac{\pi}{2} \le \sin^{-1} x + 2\cos^{-1} x \le \frac{3\pi}{2}$.

ഉദാഹരണം 4.17

ലഘൂകരിക്കുക (i) $\cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{3}\right)\right)$ (ii) $\tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

(iii) $\sec^{-1}\left(\sec\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)$ (iv) $\sin^{-1}[\sin 10]$

നിർദ്ധാരണം

(i) $\cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{3}\right)\right)$. $\cos^{-1} x$ ന്റെ പ്രധാനമൂല്യങ്ങളുടെ രംഗം $[0, \pi]$ ആണ്.

$\frac{13\pi}{3} \notin [0, \pi]$, ആയതിനാൽ $\frac{13\pi}{3}$ യെ $\frac{13\pi}{3} = 4\pi + \frac{\pi}{3}$ എന്ന് നമുക്കെഴുതാം. ഇവിടെ $\frac{\pi}{3} \in [0,\ \pi]$.

അപ്പോൾ, $\cos\left(\frac{13\pi}{3}\right) = \cos\left(4\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3}$.

അതിനാൽ, $\cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{3}\right)\right) = \cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3} \in [0, \pi]$.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 4 Inverse Trigonometry.indd 160 14-02-2023 14:34:55

(ii) $\tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$.

$\tan^{-1}x$ ന്റെ പ്രധാന രംഗമായ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ലെ അംഗമല്ല $\frac{3\pi}{4}$ എന്നത് ഓർക്കുക .

അതുകൊണ്ട് $\frac{3\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$ എന്ന് നമുക്കെഴുതാം.

അപ്പോൾ, $\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$. ഇവിടെ, $-\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

ആയതിനാൽ, $\tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \tan^{-1}\left(\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = -\frac{\pi}{4}$, കാരണം $-\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

(iii) $\sec^{-1}\left(\sec\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)$.

$\sec^{-1}x$ ന്റെ പ്രധാന രംഗമായ $[0, \pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ ലെ അംഗമല്ല $\frac{5\pi}{3}$ എന്നത് ഓർക്കുക.

$\frac{5\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3}$ എന്ന് നമുക്കെഴുതാം. അപ്പോൾ, $\sec\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \sec\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sec\left(\frac{\pi}{3}\right)$. ഇവിടെ, $\frac{\pi}{3} \in [0, \pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.

ആയതിനാൽ, $\sec^{-1}\left(\sec\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right) = \sec^{-1}\left(\sec\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}$.

(iv) $\sin^{-1}[\sin 10]$

$\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ എങ്കിൽ, $\sin^{-1}(\sin\theta) = \theta$ ആണെന്ന് നമുക്കറിയാം. $\frac{\pi}{2} \simeq \frac{11}{7}$ എന്ന ഏകദേശവില പരിഗണിച്ചാൽ,

$10 \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ എന്ന് നമുക്ക് സമർത്ഥിക്കാം. പക്ഷേ, $(10 - 3\pi) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

അപ്പോൾ , $\sin 10 = \sin\left(3\pi + (10 - 3\pi)\right) = \sin(\pi + (10 - 3\pi) = -\sin(10 - 3\pi) = \sin(3\pi - 10)$.

ആയതിനാൽ, $\sin^{-1}[\sin 10] = \sin^{-1}\left[\sin\left(3\pi - 10\right)\right] = 3\pi - 10$, $(3\pi - 10) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

ഉദാഹരണം 4.18

തന്നിട്ടുള്ളവയുടെ മൂല്യം കാണുക (i) $\sin\left[\frac{\pi}{3} - \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$ (ii) $\cos\left[\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)\right]$

(iii) $\tan\left[\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2a}{1+a^2}\right) + \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)\right]$.

നിർദ്ധാരണം

(i) $\sin\left[\frac{\pi}{3} - \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = \sin\left[\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

(ii) $\cos\left[\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)\right]$ പരിഗണിക്കുക. $\cos^{-1}\left(\frac{1}{8}\right) = \theta$ എന്നെടുത്താൽ, $\cos\theta = \frac{1}{8}$. ഇവിടെ $\theta \in [0, \pi]$.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 4 Inverse Trigonometry.indd 161 14-02-2023 14:35:13

അപ്പോൾ, $\cos\theta = \frac{1}{8}$ ൽ നിന്ന് $2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = \frac{1}{8}$. അതിനാൽ, $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{3}{4}$, കാരണം $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ പോസിറ്റീവ് ആണ്.

അതുകൊണ്ട്, $\cos\left[\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)\right] = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{3}{4}$.

(iii) $\tan\left[\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2a}{1+a^2}\right) + \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)\right]$

$a = \tan\theta$ എന്നെടുത്താൽ.

$$\tan\left[\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2a}{1+a^2}\right) + \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)\right] = \tan\left[\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right) + \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right)\right]$$

$$= \tan\left[\frac{1}{2}\sin^{-1}(\sin 2\theta) + \frac{1}{2}\cos^{-1}(\cos 2\theta)\right] = \tan[2\theta] = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2a}{1-a^2}.$$

ഉദാഹരണം 4.19

തെളിയിക്കുക $\tan(\cos^{-1}x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad |x| < 1, x \neq 0.$

നിർദ്ധാരണം

$\cos^{-1}x = \theta$ എന്നെടുത്താൽ, $x = \cos\theta$. ഇവിടെ, $-1 \le x \le 1$

അപ്പോൾ, $\tan(\cos^{-1}x) = \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, |x| < 1, x \neq 0.$

ഉദാഹരണം 4.20

വിലകാണുക $\sin\left[\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) + \sec^{-1}\left(\frac{5}{4}\right)\right]$

നിർദ്ധാരണം

$\sec^{-1}\frac{5}{4} = \theta$ എന്നെടുത്താൽ, $\sec\theta = \frac{5}{4}$. അതിനാൽ, $\cos\theta = \frac{4}{5}$.

കൂടാതെ, $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$, ഇത് നൽകുന്നത് $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$.

അതിനാൽ, $\sec^{-1}\left(\frac{5}{4}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$, $\sin^{-1}\frac{3}{5} + \sec^{-1}\left(\frac{5}{4}\right) = 2\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$.

$|x| \le \frac{1}{\sqrt{2}}$ എങ്കിൽ, $\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = 2\sin^{-1}x$ എന്ന് നമുക്കറിയാം.

$\frac{3}{5} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ആയതിനാൽ, $2\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = \sin^{-1}\left(2\times\frac{3}{5}\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{24}{25}\right)$ എന്ന് കിട്ടും.

അതിനാൽ, $\sin\left[\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) + \sec^{-1}\left(\frac{5}{4}\right)\right] = \sin\left(\sin^{-1}\left(\frac{24}{25}\right)\right) = \frac{24}{25}$, കാരണം $\frac{24}{25} \in [-1, 1]$.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 4 Inverse Trigonometry.indd 162 14-02-2023 14:35:33

ഉദാഹരണം 4.21

തെളിയിക്കുക (i) $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$ (ii) $2\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=\tan^{-1}\frac{31}{17}$

നിർദ്ധാരണം

(i) $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$, $xy<1$ എന്ന് നമുക്കറിയാം.

അതുകൊണ്ട് , $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\tan^{-1}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)}=\tan^{-1}(1)=\frac{\pi}{4}$.

(ii) $2\tan^{-1}x=\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$, $-1<x<1$ എന്ന് നമുക്കറിയാം.

അതുകൊണ്ട് , $2\tan^{-1}\frac{1}{2}=\tan^{-1}\frac{2\left(\frac{1}{2}\right)}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$.

അതിനാൽ, $2\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=\tan^{-1}\frac{4}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=\tan^{-1}\left(\frac{\frac{4}{3}+\frac{1}{7}}{1-\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{1}{7}\right)}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{31}{17}\right)$.

ഉദാഹരണം 4.22

$\cos^{-1}x+\cos^{-1}y+\cos^{-1}z=\pi$, $0<x,y,z<1$ എങ്കിൽ,

$x^2+y^2+z^2+2xyz=1$ എന്ന് കാണിക്കുക

നിർദ്ധാരണം

$\cos^{-1}x=\alpha$, $\cos^{-1}y=\beta$. എന്നെടുത്താൽ, $x=\cos\alpha$, $y=\cos\beta$.

$\cos^{-1}x+\cos^{-1}y+\cos^{-1}z=\pi$ ൽ നിന്ന് $\alpha+\beta=\pi-\cos^{-1}z$. ... (1)

അപ്പോൾ, $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$.

(1) ൽ നിന്ന് $\cos\left(\pi-\cos^{-1}z\right)=xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$.

$-\cos\left(\cos^{-1}z\right)=xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$ എന്ന് കിട്ടും.

അതുകൊണ്ട് , $-z=xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$ എന്നതിൽ നിന്ന്, $-xy-z=-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$.

ഇരുവശവും വർഗ്ഗം കണ്ട് ലഘൂകരിച്ചാൽ, $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$.

ഉദാഹരണം 4.23

$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ എന്നത് d പൊതു വ്യത്യാസം ആയിട്ടുള്ള ഒരു സമാന്തര അനുക്രമം ആയാൽ,

$\tan\left[\tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_1a_2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_2a_3}\right)+\ldots+\tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_na_{n-1}}\right)\right]=\frac{a_n-a_1}{1+a_1a_n}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

ഇപ്പോൾ, $\tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_1a_2}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{a_2-a_1}{1+a_la_2}\right)=\tan^{-1}a_2-\tan^{-1}a_1$.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 4 Inverse Trigonometry.indd 163 14-02-2023 14:35:51

അതുപോലെ, $\tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_2a_3}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{a_3-a_2}{1+a_2a_3}\right) = \tan^{-1}a_3 - \tan^{-1}a_2$.

ആഗമന പ്രക്രിയ തുടർന്നാൽ,

$$\tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_na_{n-1}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{a_n-a_{n-1}}{1+a_{n-1}a_n}\right) = \tan^{-1}a_n - \tan^{-1}a_{n-1}.$$

കുത്തനെ കൂട്ടിയാൽ,

$$\tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_1a_2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_2a_3}\right)+\ldots+\tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_na_{n-1}}\right) = \tan^{-1}a_n - \tan^{-1}a_1.$$

$$\tan\left[\tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_1a_2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_2a_3}\right)+\ldots+\tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_na_{n-1}}\right)\right] = \tan[\tan^{-1}a_n - \tan^{-1}a_1]$$

$$= \tan\left[\tan^{-1}\left(\frac{a_n-a_1}{1+a_la_n}\right)\right] = \frac{a_n-a_1}{1+a_la_n}.$$

ഉദാഹരണം 4.24 നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക $\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\frac{1}{2}\tan^{-1}x \qquad x>0.$

നിർദ്ധാരണം

$\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\frac{1}{2}\tan^{-1}x$ ൽ നിന്ന്, $\tan^{-1}1-\tan^{-1}x=\frac{1}{2}\tan^{-1}x$ കിട്ടുന്നു.

അതുകൊണ്ട്, $\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}\tan^{-1}x$ എന്നത് $\tan^{-1}x=\frac{\pi}{6}$ ആയി ചുരുങ്ങുന്നു.

അതിനാൽ, $x=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

ഉദാഹരണം 4.25 നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക $\sin^{-1}x>\cos^{-1}x$

നിർദ്ധാരണം

$\sin^{-1}x>\cos^{-1}x$ എന്ന് തന്നിട്ടുണ്ട്. ഇവിടെ $-1\le x\le 1$ ആണ്.

ഇരുവശവും $\sin^{-1}x$, കൂട്ടിയാൽ

$\sin^{-1}x+\sin^{-1}x>\cos^{-1}x+\sin^{-1}x$ എന്നത് $2\sin^{-1}x>\frac{\pi}{2}$ ആയി ചുരുങ്ങുന്നു.

സൈൻ ഫലനം $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ എന്ന ഇടവേളയിൽ വർദ്ധിതമായതിനാൽ $x>\sin\frac{\pi}{4}$ അല്ലെങ്കിൽ $x>\frac{1}{\sqrt{2}}$.

നിർദ്ധാരണ ഗണം $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},1\right]$ ആയിരിക്കും.

ഉദാഹരണം 4.26

തെളിയിക്കുക $\cot(\sin^{-1}x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, -1\le x\le 1,\ x\neq 0$

നിർദ്ധാരണം

$\sin^{-1}x=\theta$ എന്നെടുത്താൽ, $x=\sin\theta,\ x\neq 0,$ ൽ നിന്ന് $\theta\in\left[\frac{-\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ എന്ന് നമുക്ക് കിട്ടും.

ആയതിനാൽ, $\cos\theta\ge 0$, $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-x^2}$.

അതിനാൽ, $\cot(\sin^{-1}x)=\cot\theta=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, |x|\le 1,\ x\neq 0$

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 4 Inverse Trigonometry.indd 164 14-02-2023 14:36:10

ഉദാഹരണം 4.27: നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക: $\tan^{-1}2x+\tan^{-1}3x=\frac{\pi}{4}$, $6x^2<1$.

നിർദ്ധാരണം

ഇപ്പോൾ, $\tan^{-1}2x+\tan^{-1}3x = \tan^{-1}\left(\frac{2x+3x}{1-6x^2}\right)$, കാരണം $6x^2<1$.

അതുകൊണ്ട് , $\tan^{-1}\left(\frac{5x}{1-6x^2}\right) = \frac{\pi}{4}$, ഇതിൽ നിന്ന് $\frac{5x}{1-6x^2}=\tan\frac{\pi}{4}=1$.

അതിനാൽ, $1-6x^2 = 5x$, ഇത് നൽകുന്നത് $6x^2+5x-1=0$

ആയതിനാൽ, $x=\frac{1}{6},-1$. പക്ഷേ, $x=-1$ എന്നത് $6x^2<1$ നെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്നില്ല.

$x=-1$ എന്നത് സമീകരണത്തിന്റെ ഇടതു വശം നെഗറ്റീവും വലതുവശം പോസിറ്റീവും ആക്കുന്നതായി കാണുന്നു. അതിനാൽ, $x=-1$ ഒരു നിർദ്ധാരണം അല്ല. അതുകൊണ്ട് $x=\frac{1}{6}$ എന്നത് സമവാക്യത്തിന്റെ ഒരേയൊരു നിർദ്ധാരണമാണ്.

ഉദാഹരണം 4.28

നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക: $\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x-2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)=\frac{\pi}{4}$.

നിർദ്ധാരണം

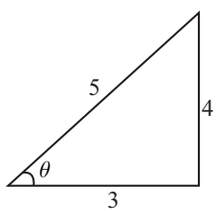
ഇപ്പോൾ, $\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x-2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \tan^{-1}\left[\frac{\frac{x-1}{x-2}+\frac{x+1}{x+2}}{1-\frac{x-1}{x-2}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)}\right]=\frac{\pi}{4}$.

അതിനാൽ, $\frac{\frac{x-1}{x-2}+\frac{x+1}{x+2}}{1-\frac{x-1}{x-2}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)} = 1$. ഇതിനെ ലഘൂകരിച്ചാൽ $2x^2-4=-3$ കിട്ടുന്നു.

അതുകൊണ്ട് , $x^2 = \frac{1}{2}$ ഇതിൽ നിന്ന് $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

ഉദാഹരണം 4.29

നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക: $\cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right) = \sin\left\{\cot^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)\right\}$.



നിർദ്ധാരണം

$\sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ എന്ന് നമുക്കറിയാം.

അതിനാൽ, $\cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. ...(1)

$\cot^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)=\theta$ എന്നെടുത്താൽ, $\cot\theta=\frac{3}{4}$ θ ഒരു ന്യൂനകോൺ ആണ് .

രേഖാചിത്രത്തിൽ നിന്ന് $\sin\left\{\cot^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)\right\}=\sin\theta=\frac{4}{5}$ ... (2)

(1) ഉം (2) ഉം തന്നിട്ടുള്ള സമവാക്യത്തിൽ ഉപയോഗിച്ചാൽ $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{4}{5}$, ഇതിൽ നിന്ന് $\sqrt{1+x^2}=\frac{5}{4}$

അതിനാൽ, $x=\pm\frac{3}{4}$.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 4 Inverse Trigonometry.indd 165 14-02-2023 14:36:30

അഭ്യാസം 4.5

1. സാധ്യമാണെങ്കിൽ തന്നിട്ടുള്ളവയുടെ മൂല്യം കാണുക. സാധ്യമല്ലെങ്കിൽ കാരണം എഴുതുക.

   (i) $\sin^{-1}\left(\cos\pi\right)$ (ii) $\tan^{-1}\left(\sin\left(-\frac{5\pi}{2}\right)\right)$ (iii) $\sin^{-1}\left[\sin 5\right]$.

2. സൂചക ചിത്രത്തിന്റെ സഹായത്തോടെ തന്നിട്ടുള്ള വ്യജ്ഞകത്തിന്റെ x ലുള്ള മൂല്യം കാണുക.

   (i) $\sin\left(\cos^{-1}\left(1-x\right)\right)$ (iii) $\cos\left(\tan^{-1}\left(3x-1\right)\right)$ (iii) $\tan\left(\sin^{-1}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)$.

3. മൂല്യം കാണുക:

   (i) $\sin^{-1}\left(\cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\right)$ (ii) $\cot\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}+\sin^{-1}\frac{4}{5}\right)$ (iii) $\tan\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}+\cot^{-1}\frac{3}{2}\right)$.

4. തെളിയിക്കുക:

   (i) $\tan^{-1}\frac{2}{11}+\tan^{-1}\frac{7}{24}=\tan^{-1}\frac{1}{2}$ (ii) $\sin^{-1}\frac{3}{5}-\cos^{-1}\frac{12}{13}=\sin^{-1}\frac{16}{65}$.

5. തെളിയിക്കുക: $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\tan^{-1}\left[\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}\right]$.

6. $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\pi$ എങ്കിൽ, $x+y+z=xyz$ എന്ന് കാണിക്കുക.

7. തെളിയിക്കുക: $\tan^{-1}x+\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}=\tan^{-1}\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$, $|x|<\frac{1}{\sqrt{3}}$.

8. ലഘൂകരിക്കുക: $\tan^{-1}\frac{x}{y}-\tan^{-1}\frac{x-y}{x+y}$.

9. നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക:

   (i) $\sin^{-1}\frac{5}{x}+\sin^{-1}\frac{12}{x}=\frac{\pi}{2}$ (ii) $2\tan^{-1}x=\cos^{-1}\frac{1-a^2}{1+a^2}-\cos^{-1}\frac{1-b^2}{1+b^2}$, $a>0,\ b>0$.

   (iii) $2\tan^{-1}\left(\cos x\right)=\tan^{-1}\left(2\operatorname{cosec}x\right)$ (iv) $\cot^{-1}x-\cot^{-1}\left(x+2\right)=\frac{\pi}{12}$, $x>0$.

10. തന്നിട്ടുള്ള സമവാക്യത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണം മൂല്യങ്ങളുടെ എണ്ണം കാണുക
    $\tan^{-1}\left(x-1\right)+\tan^{-1}x+\tan^{-1}\left(x+1\right)=\tan^{-1}\left(3x\right)$.

അഭ്യാസം 4.6

16R30

ശരിയുത്തരം തെരഞ്ഞെടുത്തെഴുതുക.

1. $0\le x\le\pi$ ൽ $\sin^{-1}\left(\cos x\right)$ ന്റെ മൂല്യം

   (1) $\pi-x$ (2) $x-\frac{\pi}{2}$ (3) $\frac{\pi}{2}-x$ (4) $x-\pi$

2. $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=\frac{2\pi}{3}$ എങ്കിൽ; $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y$

   (1) $\frac{2\pi}{3}$ (2) $\frac{\pi}{3}$ (3) $\frac{\pi}{6}$ (4) π

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 4 Inverse Trigonometry.indd 166 14-02-2023 14:36:48

3. $\sin^{-1}\frac{3}{5}-\cos^{-1}\frac{12}{13}+\sec^{-1}\frac{5}{3}-\operatorname{cosec}^{-1}\frac{13}{12}=$

(1) 2π (2) π (3) 0 (4) $\tan^{-1}\frac{12}{65}$

4. $\sin^{-1}x=2\sin^{-1}\alpha$ യ്ക്ക് ഒരു നിർദ്ധാരണമാണ് ഉള്ളതെങ്കിൽ,

(1) $|\alpha|\le\frac{1}{\sqrt{2}}$ (2) $|\alpha|\ge\frac{1}{\sqrt{2}}$ (3) $|\alpha|<\frac{1}{\sqrt{2}}$ (4) $|\alpha|>\frac{1}{\sqrt{2}}$

5. $\sin^{-1}(\cos x)=\frac{\pi}{2}-x$ സാധ്യമായത്

(1) $-\pi\le x\le 0$ (2) $0\le x\le\pi$ (3) $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$ (4) $-\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{3\pi}{4}$

6. $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y+\sin^{-1}z=\frac{3\pi}{2}$ എങ്കിൽ, $x^{2017}+y^{2018}+z^{2019}-\frac{9}{x^{101}+y^{101}+z^{101}}$ ന്റെ മൂല്യം

(1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 3

7. ചില $x\in R$ ന് $\cot^{-1}x=\frac{2\pi}{5}$ എങ്കിൽ, $\tan^{-1}x$ ന്റെ മൂല്യം

(1) $-\frac{\pi}{10}$ (2) $\frac{\pi}{5}$ (3) $\frac{\pi}{10}$ (4) $-\frac{\pi}{5}$

8. $f(x)=\sin^{-1}\sqrt{x-1}$ എന്ന് നിർവ്വചിച്ചിട്ടുള്ള ഫലനത്തിന്റെ മണ്ഡലം

(1) $[1,\ 2]$ (2) $[-1,\ 1]$ (3) $[0,1]$ (4) $[-1,\ 0]$

9 $x=\frac{1}{5}$ എങ്കിൽ, $\cos\left(\cos^{-1}x+2\sin^{-1}x\right)$ ന്റെ മൂല്യം

(1) $-\sqrt{\frac{24}{25}}$ (2) $\sqrt{\frac{24}{25}}$ (3) $\frac{1}{5}$ (4) $-\frac{1}{5}$

10. $\tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{2}{9}\right)=$

(1) $\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ (2) $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ (3) $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ (4) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

11. $f(x)=\sin^{-1}\left(x^2-3\right)$ ഒരു ഫലനമാണെങ്കിൽ, x അംഗമാകുന്നത്

(1) $[-1,1]$ (2) $\left[\sqrt{2},\ 2\right]$

(3) $\left[-2,-\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2},\ 2\right]$ (4) $\left[-2,-\sqrt{2}\right]$

12. $\cot^{-1}2$ ഉം $\cot^{-1}3$ ഉം ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ട് കോണുകളാണെങ്കിൽ മൂന്നാമത്തെ കോൺ

(1) $\frac{\pi}{4}$ (2) $\frac{3\pi}{4}$ (3) $\frac{\pi}{6}$ (4) $\frac{\pi}{3}$

13. $\sin^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{4}\right)-\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{3}{x}}\right)=\frac{\pi}{6}$ എങ്കിൽ, x മൂലമായി വരുന്ന സമവാക്യം

(1) $x^2-x-6=0$ (2) $x^2-x-12=0$ (3) $x^2+x-12=0$ (4) $x^2+x-6=0$

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 4 Inverse Trigonometry.indd 167 14-02-2023 14:37:15

14. $\sin^{-1}\left(2\cos^2 x-1\right)+\cos^{-1}\left(1-2\sin^2 x\right)=$

(1) $\frac{\pi}{2}$ (2) $\frac{\pi}{3}$ (3) $\frac{\pi}{4}$ (4) $\frac{\pi}{6}$

15. $\cot^{-1}\left(\sqrt{\sin\alpha}\right)+\tan^{-1}\left(\sqrt{\sin\alpha}\right)=u$ എങ്കിൽ, $\cos 2u$ =

(1) $\tan^2\alpha$ (2) 0 (3) -1 (4) $\tan 2\alpha$

16. $|x|\le 1$ എങ്കിൽ, $2\tan^{-1}x-\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$ =

(1) $\tan^{-1}x$ (2) $\sin^{-1}x$ (3) 0 (4) π

17. $\tan^{-1}x-\cot^{-1}x=\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്

(1) നിർദ്ധാരണം ഇല്ല (2) ഒരേയൊരു നിർദ്ധാരണം

(3) രണ്ട് നിർദ്ധാരണം (4) അനന്തം നിർദ്ധാരണങ്ങൾ

18. $\sin^{-1}x+\cot^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$ എങ്കിൽ, x =

(1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (3) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

19. $\sin^{-1}\frac{x}{5}+\operatorname{cosec}^{-1}\frac{5}{4}=\frac{\pi}{2}$ എങ്കിൽ, x ന്റെ മൂല്യം

(1) 4 (2) 5 (3) 2 (4) 3

20. $|x|<1$ ൽ $\sin(\tan^{-1}x)$, =

(1) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (2) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (3) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (4) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 4 Inverse Trigonometry.indd 168 14-02-2023 14:37:26

സംഗ്രഹം

വിപരീത ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങൾ

വിപരീത സൈൻ ഫലനം	വിപരീത കൊസൈൻ ഫലനം	വിപരീത ടാൻജന്റ് ഫലനം	വിപരീത കൊസീക്കന്റ് ഫലനം	വിപരീത സീക്കന്റ് ഫലനം	വിപരീത കോടാൻജന്റ് ഫലനം
മണ്ഡലം $[-1,1]$	മണ്ഡലം $[-1,1]$	മണ്ഡലം $\mathbb{R}$	മണ്ഡലം $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$	മണ്ഡലം $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$	മണ്ഡലം $\mathbb{R}$
രംഗം $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	രംഗം $[0,\pi]$	രംഗം $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	രംഗം $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]-\{0\}$	രംഗം $[0,\pi]-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$	രംഗം $(0,\pi)$
ആനുകാലിക ഫലനമല്ല	ആനുകാലിക ഫലനമല്ല	ആനുകാലിക ഫലനമല്ല	ആനുകാലിക ഫലനമല്ല	ആനുകാലിക ഫലനമല്ല	ആനുകാലിക ഫലനമല്ല
ഒറ്റഫലനം	ഫലനം ഒറ്റയോ ഇരട്ടയോ അല്ല	ഒറ്റഫലനം	ഒറ്റഫലനം	ഫലനം ഒറ്റയോ ഇരട്ടയോ അല്ല	ഫലനം ഒറ്റയോ ഇരട്ടയോ അല്ല
നിർബന്ധ വർദ്ധിത ഫലനം	നിർബന്ധ ന്യൂന ഫലനം	നിർബന്ധ വർദ്ധിത ഫലനം	മണ്ഡലത്തിനുള്ളിൽ നിർബന്ധ ന്യൂന ഫലനം	മണ്ഡലത്തിനുള്ളിൽ നിർബന്ധ ന്യൂന ഫലനം	നിർബന്ധ ന്യൂന ഫലനം
വൺ-ടു-വൺ ഫലനം	വൺ-ടു-വൺ ഫലനം	വൺ-ടു-വൺ ഫലനം	വൺ-ടു-വൺ ഫലനം	വൺ-ടു-വൺ ഫലനം	വൺ-ടു-വൺ ഫലനം

വിപരീത ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങളുടെ സവിശേഷതകൾ

സവിശേഷത -I

(i) $\sin^{-1}(\sin\theta)=\theta$, $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

(ii) $\cos^{-1}(\cos\theta)=\theta$, $\theta\in[0,\pi]$

(iii) $\tan^{-1}(\tan\theta)=\theta$, $\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

(iv) $\operatorname{cosec}^{-1}(\operatorname{cosec}\theta)=\theta$, $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\setminus\{0\}$

(v) $\sec^{-1}(\sec\theta)=\theta$, $\theta\in[0,\pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

(vi) $\cot^{-1}(\cot\theta)=\theta$, $\theta\in(0,\pi)$

സവിശേഷത-II

(i) $\sin\left(\sin^{-1}x\right)=x$, $x\in[-1,1]$

(ii) $\cos\left(\cos^{-1}x\right)=x$, $x\in[-1,1]$

(iii) $\tan\left(\tan^{-1}x\right)=x$, $x\in\mathbb{R}$

(iv) $\operatorname{cosec}\left(\operatorname{cosec}^{-1}x\right)=x$, $x\in\mathbb{R}\setminus(-1,1)$

(v) $\sec\left(\sec^{-1}x\right)=x$, $x\in\mathbb{R}\setminus(-1,1)$

(vi) $\cot\left(\cot^{-1}x\right)=x$, $x\in\mathbb{R}$

സവിശേഷത -III (വ്യുൽക്രമ വിപരീത സർവ്വ സമവാക്യങ്ങൾ)

(i) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\operatorname{cosec}x$, $x\in\mathbb{R}\setminus(-1,1)$.

(ii) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\sec x$, $x\in\mathbb{R}\setminus(-1,1)$

(iii) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\begin{cases}\cot^{-1}x & \text{if } x>0\\ -\pi+\cot^{-1}x & \text{if } x<0.\end{cases}$

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 4 Inverse Trigonometry.indd 169 14-02-2023 14:37:46

സവിശേഷത -IV(പ്രതിഫലന സർവ്വ സമവാക്യങ്ങൾ)

(i) $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x, \quad x \in [-1, 1]$.

(ii) $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x, x \in \mathbb{R}$.

(iii) $\operatorname{cosec}^{-1}(-x) = -\operatorname{cosec}^{-1} x, \ |x| \geq 1$ അല്ലെങ്കിൽ $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$.

(iv) $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x, x \in [-1, 1]$.

(v) $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1} x, \ |x| \geq 1$ അല്ലെങ്കിൽ $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$.

(vi) $\cot^{-1}(-x) = \pi - \cot^{-1} x, \quad x \in \mathbb{R}$.

സവിശേഷത -V (സഹഫലന വിപരീത സർവ്വ സമവാക്യങ്ങൾ)

(i) $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}, \ x \in [-1, 1].$ (ii) $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2}, \ x \in \mathbb{R}.$

(iii) $\operatorname{cosec}^{-1} x + \sec^{-1} x = \frac{\pi}{2}, \ x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ അല്ലെങ്കിൽ $|x| \geq 1$.

സവിശേഷത -VI

(i) $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y = \sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right), \quad x^2 + y^2 \leq 1$ അല്ലെങ്കിൽ $xy < 0$.

(ii) $\sin^{-1} x - \sin^{-1} y = \sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right), \quad x^2 + y^2 \leq 1$ അല്ലെങ്കിൽ $xy > 0$.

(iii) $\cos^{-1} x + \cos^{-1} y = \cos^{-1}\left[xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right], \quad x + y \geq 0$.

(iv) $\cos^{-1} x - \cos^{-1} y = \cos^{-1}\left[xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right], \quad x \leq y$.

(v) $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right), \quad xy < 1$.

(vi) $\tan^{-1} x - \tan^{-1} y = \tan^{-1}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right), \quad xy > -1$.

സവിശേഷത -VII

(i) $2\tan^{-1} x = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right), \ |x| < 1$ (ii) $2\tan^{-1} x = \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right), \ x \geq 0$

(iii) $2\tan^{-1} x = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right), \ |x| \leq 1$

സവിശേഷത -VIII

(i) $\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = 2\sin^{-1} x, \quad |x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ അല്ലെങ്കിൽ $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(ii) $\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = 2\cos^{-1} x, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1$.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 4 Inverse Trigonometry.indd 170 14-02-2023 14:38:12

സവിശേഷത -IX

(i) $\sin^{-1} x = \cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$, $0 \le x \le 1$. (ii) $\sin^{-1} x = -\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$, $-1 \le x < 0$.

(ii) $\sin^{-1} x = \tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$, $-1 < x < 1$. (iv) $\cos^{-1} x = \sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$, $0 \le x \le 1$.

(v) $\cos^{-1} x = \pi - \sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$, $-1 \le x < 0$. (vi) $\tan^{-1} x = \sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$, $x > 0$.

സവിശേഷത -X

(i) $3\sin^{-1} x = \sin^{-1}(3x - 4x^3)$, $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. (ii) $3\cos^{-1} x = \cos^{-1}(4x^3 - 3x)$, $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

ഐ.സി.റ്റി. കോർണർ

https://ggbm.at/vchq92pg അല്ലെങ്കിൽ QR കോഡിനെ സ്കാൻ ചെയ്യുക

ബ്രൗസർ തുറന്ന് തന്നിട്ടുള്ള URL ലിങ്ക് ടൈപ്പ് ചെയ്യുക (അല്ലെങ്കിൽ) QR കോഡിനെ സ്കാൻ ചെയ്യുക. അപ്പോൾ "12th Standard Mathematics" എന്ന പേരുള്ള ജിയോജീബ്ര വർക്ക് ബുക്ക് ഓപ്പൺ ആകും. വർക്ക് ബുക്കിന്റെ ഇടതു ഭാഗത്ത് പാഠഭാഗത്തെ ആസ്പദമാക്കി അനേകം ഭാഗങ്ങളുണ്ട് "Inverse Trigonometric Functions" എന്ന പേരുള്ള അദ്ധ്യായത്തിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്യുക. നിങ്ങൾക്ക് അതിൽ ഈ പാഠഭാഗത്തെ അനുബന്ധിച്ച് അനേകം വർക്ക് ഷീറ്റുകൾ ലഭിക്കും "Graph of Inverse Trigonometric Functions" എന്ന വർക്ക് ഷീറ്റ് സെലക്ട് ചെയ്യുക.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 4 Inverse Trigonometry.indd 171 14-02-2023 14:38:21

അദ്ധ്യായം

5

ദ്വിമാന വിശ്ലേഷക ജ്യാമിതി-II

J8VGA

"ഓരോ ബുദ്ധിമുട്ടും സാധ്യമായതും പരിഹരിക്കുന്നതിന് ആവശ്യമായതുമായ ഭാഗങ്ങളായി വിഭജിക്കുക"

റീനെ ഡെസ്കാർട്ട്സ്



റീനെ ഡെസ്കാർട്ട്സ്
1596 – 1650

5.1 ആമുഖം

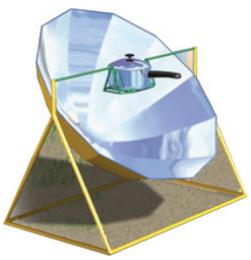
ജ്യാമിതീയ രൂപങ്ങളായ ബിന്ദുക്കൾ, നേർരേഖകൾ, വൃത്തം, പരാബോള, ദീർഘവൃത്തം, ഹൈപ്പർബോള എന്നിവ കാർട്ടീഷ്യൻ രീതിയിൽ കുറിക്കുന്നതിന് ദ്വിമാന വിശ്ലേഷക ജ്യാമിതി ഉപയോഗിക്കുന്നു. രണ്ടായിരം വർഷങ്ങൾക്ക് മുമ്പ് ($\approx$ 2– 1 BC (BCE)) പുരാതന ഗ്രീക്കുകാർ കോണിക് വളവുകൾ കണ്ടുപിടിച്ചു. അതിനു കാരണം അവ പഠിക്കുന്നത് ആവേശകരമായ ആശയങ്ങൾ ഉയർത്തി വെല്ലുവിളികൾ നിറഞ്ഞതും, രസകരവുമാണെന്ന് മനസ്സിലാക്കി. ഇവയുടെ പ്രയോഗങ്ങൾ അവർക്ക് സങ്കൽപ്പിക്കാൻ കഴിയുമായിരുന്നില്ല.

17 ാം നൂറ്റാണ്ടിന്റെ ആദ്യപകുതിയിൽ ഡെസ്കാർട്ട്സ്, ഫെർമാറ്റ്, കെപ്ളർ, ന്യൂട്ടൺ, യൂലർ, ലിബ്നിസ്, എൽ ഹോപ്പിറ്റൽ, ക്ലെയ്റൗട്ട്, ക്രാമർ, ജേക്കോബിസ് തുടങ്ങിയ മഹാൻമാരായ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞരാൽ വിശ്ലേഷക ജ്യാമിതി വികസിപ്പിച്ചെടുത്തു.

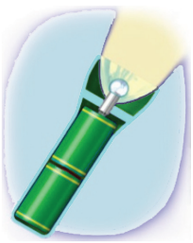
ജ്യാമിതീയ പരിഹാരത്തിന് ബീജഗണിത വിദ്യകൾ സ്ഥാപിക്കേണ്ടതിന്റെ ആവശ്യകതയെ അടിസ്ഥാന മാക്കിയാണ് വിശ്ലേഷക ജ്യാമിതി വളർന്നത് ഈ മേഖലയിലെ പ്രസ്തുത വികസനവും വ്യവസായം, വൈദ്യം ശാസ്ത്ര ഗവേഷണം എന്നിവ കീഴടക്കി.

ജർമ്മൻ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനും കൂടാതെ ഭൗതിക ശാസ്ത്രജ്ഞനുമായ ജോഹന്നാസ് കെപ്ലർ വികസി പ്പിച്ചെടുത്ത ഗ്രഹങ്ങളുടെ ചലനങ്ങളുടെ സിദ്ധാന്തത്തിൽ ഭൂമി ഉൾപ്പെടെയുള്ള സൗരയൂഥത്തിലെ എല്ലാഗ്രഹങ്ങളും സൂര്യനെ കേന്ദ്രമാക്കി ദീർഘവൃത്താകൃതിയിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നുവെന്നും, വിപരീത ചതുര നിയമത്താൽ ഒരു കേന്ദ്രത്തിൽ സൂര്യനുമായുള്ള പരിക്രമണം മറ്റ് ജോലികൾക്ക് വഴിയൊരുക്കിയതായും യൂക്ലിഡിയൻ ജ്യാമിതിയിൽ പറയുന്നുണ്ട്. ബഹിരാകാശ വളവുകളെ കുറിച്ചുള്ള ചിട്ടയായ പഠനത്തിൽ യൂലർ നിർദ്ദേശാങ്ക രീതി പ്രയോഗിച്ചിട്ടുണ്ട്. ആൽബർട്ട് ഐൻസ്റ്റൈൻ തന്റെ ആപേക്ഷികതാ സിദ്ധാന്തത്തിൽ ഇതിനെ ഉപയോഗിച്ചിട്ടുണ്ട്.

ഗിയറുകൾ, ഡാമുകളിലെ വെന്റുകൾ, ചക്രങ്ങൾ എന്നിവ ഉൾപ്പെടുന്ന വിവിധ മേഖലകളിലെ പ്രയോഗങ്ങൾ, വൃത്തങ്ങളുടെ സവിശേഷതകളെ അടിസ്ഥാനമക്കിയുള്ള പ്രയോഗങ്ങൾ, ത്രികോണമിതിയെ അടിസ്ഥാന മാക്കിയുള്ള പ്രയോഗങ്ങൾ, സോളാർ കുക്കറുകൾ, ഹെഡ് ലൈറ്റുകൾ, തൂക്കുപാലങ്ങൾ തിരയൽ ലൈറ്റുകൾ എന്നിവ പരാബോളയെ അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ളവയാണ്. കമാനങ്ങൾ, വൈദ്യശാസ്ത്ര രംഗത്തെ ലിത്തോട്രിപ്സി, വിസ്പറിംഗ് ഗ്യാലറികൾ, ദീർഘ വൃത്തത്തിന്റെ സവിശേഷതകളെ അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ള നെ-ഡി-യാഗ് ലേസറുകളും, ഗിയറുകളും, ഹൈപ്പർ ബോളയെ അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ള ദൂരദർശിനി, തണുപ്പിക്കൽ ടവറുകൾ, കപ്പലുകളും വിമാനങ്ങളും ഇറക്കുന്ന സ്ഥലങ്ങൾ എന്നിവ ചിലതാണ്.



ചിത്രം 5.1



ചിത്രം 5.2



ചിത്രം 5.3

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 172 14-02-2023 18:35:26



ചിത്രം 5.4



ചിത്രം 5.5

ഓൺലൈനിൽ ഓർഡർ ചെയ്തിരിക്കുന്ന ഒരു വണ്ടിയിലുള്ള ബുക്കുകളെ കൊണ്ടുചേർക്കുന്ന പണിയിൽ ഒരു ഡ്രൈവർ ഏർപ്പെട്ടിരുന്നു. ആ ട്രക്കിന്റെ വീതി 3 മീ ഉയരം 2.7 മീറ്ററുമാണ്. ട്രക്കിനെ ഡ്രൈവർ ഓടിച്ചുകൊണ്ടിരുന്നപ്പോൾ ഒരു അർദ്ധ വൃത്ത തുരങ്കത്തിന്റെ കവാടത്തിൽ ജാഗ്രത! എന്ന ബോർഡ് കണ്ടു അതിൽ തുരങ്കത്തിന് 3 മീ ഉയരമാണ് എന്ന് എഴുതിയിരുന്നു മറ്റൊരു ജാഗ്രത ബോർഡിൽ തുരങ്കത്തിന് 12 മീ വീതിയാണെന്നും കണ്ടു. എങ്കിൽ ആ തുരങ്കത്തിന്റെ വളവിൽ കൂടി ആ ട്രക്കിന് ചെല്ലാൻ സാധിക്കുമോ? ഇതുപോലുള്ള ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഈ അദ്ധ്യായത്തിന്റെ അവസാനം ഉത്തരം നൽകാൻ കഴിയും.



ചിത്രം 5.6

പഠന ലക്ഷ്യങ്ങൾ

ഈ അദ്ധ്യായം പൂർത്തിയാകുമ്പോൾ വിദ്യാർത്ഥികൾ മനസ്സിലാക്കുന്നത്

- വൃത്തം, പരാബോള, ദീർഘവൃത്തം, ഹൈപ്പർബോള എന്നിവയുടെ സ്റ്റാൻഡേർഡ് രൂപത്തിലുള്ള സമവാക്യം മനസ്സിലാക്കൽ,
- വ്യത്യസ്ത കോണിക്കുകളുടെ സമവാക്യത്തിൽ നിന്നും കേന്ദ്രം, ശീർഷങ്ങൾ, ഫോക്കസ്സുകൾ മുതലായവ കണ്ടുപിടിക്കൽ,
- വിവിധ തരത്തിലുള്ള കോണിക്കുകളുടെ സ്പർശരേഖകളും, ലംബരേഖകളും നിർമ്മിക്കൽ,
- കോണിക്സും അവയുടെ വിഭജന രീതികളെ കുറിച്ചും മനസ്സിലാക്കൽ,
- കോണിന്റെ പരാമെട്രിക് രൂപങ്ങളും അവയുടെ പ്രയോഗങ്ങളും മനസ്സിലാക്കൽ.
- നിത്യജീവിതത്തിൽ കോണിക്സിന്റെ പ്രയോഗങ്ങൾ മനസ്സിലാക്കൽ.

5.2 വൃത്തം

വൃത്തം എന്ന വാക്ക് ഗ്രീക്ക് പദത്തിൽ നിന്നും ഉണ്ടായതാണ്. കൂടാതെ 17 ാം നൂറ്റാണ്ടിൽ വൃത്തങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള കുറിപ്പുകൾ ഉണ്ട്. പ്രകൃതിയിൽ നമുക്ക് ചന്ദ്രൻ, സൂര്യൻ, വെള്ളത്തിലെ ചുഴികൾ എന്നിവ പോലുള്ള വൃത്തരൂപങ്ങളെ കാണാം. ചക്രങ്ങൾ പോലുള്ള അനുബന്ധ കണ്ടുപിടിത്തങ്ങൾക്കൊപ്പം ആധുനിക യന്ത്രങ്ങൾ മിക്കതും ഉണ്ടായത് വൃത്തത്തിൽ നിന്നുമാണ്. ഗണിത ശാസ്ത്രത്തിൽ ജ്യാമിതി, ജ്യോതിശാസ്ത്രം എന്നിവ വികസിപ്പിക്കുന്നതിന് പ്രചോദനം നൽകാൻ വൃത്തത്തിന്റെ പഠനം സഹായിച്ചിട്ടുണ്ട്. ആറ്റത്തിന്റെ ബോഹർ സോമർഫെൽഡ് സിദ്ധാന്തത്തിൽ ഇലക്ട്രോൺ ഭ്രമണപഥം വൃത്താകാര രൂപത്തിലാണ്.

നിർവചനം 5.1

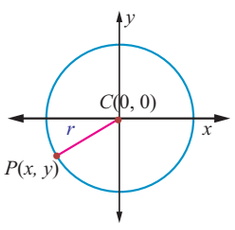
ഒരു തലത്തിലുള്ള ഒരു നിശ്ചിത ബിന്ദുവിൽ നിന്നും നിശ്ചിത അകലത്തിൽ അതേ തലത്തിൽ മറ്റൊരു ബിന്ദു സഞ്ചരിച്ചാൽ ലഭിക്കുന്ന പാതയാണ് വൃത്തം. ആ നിശ്ചിത ബിന്ദു എല്ലായ്പ്പോഴും സ്ഥിരമാണ്.

ആ നിശ്ചിത ബിന്ദുവിനെ വൃത്തകേന്ദ്രം എന്നും നിശ്ചിത അകലത്തെ ആരം എന്നും വിളിക്കുന്നു.

5.2.1 സ്റ്റാൻഡേർഡ് രൂപത്തിലുള്ള വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം

(i) കേന്ദ്രം (0, 0) യും ആരം r ഉം ആയ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം

കേന്ദ്രം $C(0,0)$ ആരം r കൂടാതെ $P(x,y)$ എന്നത് ഒരു ചലിക്കുന്ന ബിന്ദു എന്നിരിക്കട്ടെ. P എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ (x,y) എന്നത് $P(x,y)$ എന്നാണ് എടുത്തിട്ടുള്ളത്.



ചിത്രം 5.7

$$CP = r \quad \text{അതായത്} \quad CP^2 = r^2$$

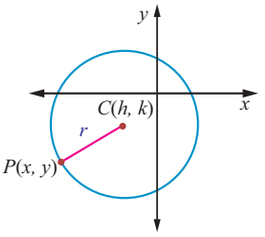
അതിനാൽ $(x-0)^2 + (y-0)^2 = r^2$

അതായത് $x^2 + y^2 = r^2$

കേന്ദ്രം $(0,0)$ ആരം r ആയുള്ള വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യമാണിത്.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 173 14-02-2023 18:35:34

(ii) വൃത്തകേന്ദ്രം (h, k) യും ആരം r ഉം ആയ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം



ചിത്രം 5.8

കേന്ദ്രം $C(h,k)$ യും ആരം r ഉം $P(x,y)$ ഒരു ചലിക്കുന്ന ബിന്ദുവുമാണ്.

അപ്പോൾ, $CP = r$ അതിനാൽ $CP^2 = r^2$.

അതായത്, $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$. ഇത് വൃത്തത്തിന്റെ സ്റ്റാൻഡേർഡ് രൂപത്തിലുള്ള സമവാക്യമാണ്. ഇത് സെന്റർ റേഡിയസ് എന്നും അറിയപ്പെടുന്നു.

ഈ സമവാക്യത്തെ വികസിപ്പിക്കുമ്പോൾ

$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$. എന്ന് ലഭിക്കുന്നു

ഇവിടെ $2g = -2h, 2f = -2k, c = h^2 + k^2 - r^2$, എന്നെടുത്താൽ

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, എന്ന പൊതുസമവാക്യം ലഭിക്കുന്നു. ഇതിനെ വൃത്തത്തിന്റെ പൊതുസമവാക്യം എന്ന് പറയുന്നു.

സമവാക്യം $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ എന്നത് രണ്ടാം കൃതി സമവാക്യമാണ്. x, y ഇവയുടെ സവിശേഷതകൾ :

(i) ഇത് x, y എന്നിവയിലുള്ള രണ്ടാമത്തെ ഡിഗ്രി സമവാക്യമാണ്,

(ii) x^2 ന്റെ ഗുണാങ്കം $= y^2$ ന്റെ ഗുണാങ്കം $\neq 0$,

(iii) xy യുടെ ഗുണാങ്കം $= 0$.

നേരെ മറിച്ച് ഈ മൂന്ന് സവിശേഷതകളുള്ള ഒരു സമവാക്യം എല്ലായ്പ്പോഴും ഒരു വൃത്തത്തെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നുവെന്ന് തെളിയിക്കുന്നു.

$$ax^2 + ay^2 + 2g'x + 2f'y + c = 0 \quad \ldots (1)$$

ഇത് x, y എന്നിവയിലെ രണ്ടാമത്തെ ഡിഗ്രി സമവാക്യത്തിന്റെ സവിശേഷതകളായ (i), (ii) കൂടാതെ (iii) എന്നിവയാണ്. ഇവിടെ $a \neq 0$, a കൊണ്ട് (1) നെ ഹരിക്കുക

$$x^2 + y^2 + \frac{2g'}{a}x + \frac{2f'}{a}y + \frac{c'}{a} = 0 \text{ എന്ന് കിട്ടുന്നു.} \quad \ldots (2)$$

$\frac{g'}{a} = g, \frac{f'}{a} = f$ കൂടാതെ $\frac{c'}{a} = c$, എന്ന് എടുത്താൽ, സമവാക്യം (2) എന്ന് മാറും $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$.

g^2, f^2 ഇവ തമ്മിൽ കൂട്ടി, കുറയ്ക്കുമ്പോൾ $x^2 + 2gx + g^2 + y^2 + 2fy + f^2 - g^2 - f^2 + c = 0$ താഴെ പറയുന്ന സമവാക്യം കിട്ടുന്നു

$$\Rightarrow (x+g)^2 + (y+f)^2 = g^2 + f^2 - c$$

$$\Rightarrow (x-(-g))^2 + (y-(-f))^2 = \left(\sqrt{g^2 + f^2 - c}\right)^2$$

ഇത് കേന്ദ്രം C $(-g, -f)$ ഉം ആരം $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$ യും ആയ വൃത്തത്തിന്റെ സ്റ്റാൻഡേർഡ് രൂപം ആണ്.

അതിനാൽ സമവാക്യം (1) കേന്ദ്രം $(-g, -f) = \left(\frac{-g'}{a}, \frac{-f'}{a}\right)$ യും

ആരം $= \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \frac{1}{a}\sqrt{g'^2 + f'^2 - c'a}$ ആയ ഒരുവൃത്തത്തെ കുറിക്കുന്നു.

കുറിപ്പ്

കേന്ദ്രം $(-g, -f)$ കൂടാതെ ആരം $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$ ആയ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ എന്ന വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം.

(i) $g^2 + f^2 - c > 0$ എങ്കിൽ ഒരു യഥാർത്ഥ വൃത്തത്തെ കുറിക്കുന്നു;

(ii) $g^2 + f^2 - c = 0$ എങ്കിൽ ഒരു പോയിന്റ് വൃത്തത്തെ കുറിക്കുന്നു;

(iii) $g^2 + f^2 - c < 0$ എങ്കിൽ ഒരു സാങ്കൽപ്പിക വൃത്തത്തെ കുറിക്കുന്നു.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 174 14-02-2023 18:35:57

ഉദാഹരണം 5.1

കേന്ദ്രം $(-3,-4)$ ഉം ആരം 3 യൂണിറ്റുമായ വൃത്തത്തിന്റെ പൊതുസമവാക്യം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

സ്റ്റാൻഡേർഡ് രൂപത്തിലുള്ള വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

അതുകൊണ്ട് $\Rightarrow (x-(-3))^2+(y-(-4))^2 = 3^2$

$\Rightarrow (x+3)^2+(y+4)^2 = 3^2$

$\Rightarrow x^2+y^2+6x+8y+16 = 0$.

സിദ്ധാന്തം 5.1

$lx+my+n=0$ എന്ന നേർരേഖയും $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ എന്ന വൃത്തവും തമ്മിൽ ഛേദിക്കുന്ന ബിന്ദുവഴി ചെല്ലുന്ന വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം

$x^2+y^2+2gx+2fy+c+\lambda(lx+my+n)=0$, $\lambda \in \mathbb{R}^1$ എന്ന രൂപത്തിൽ ആയിരിക്കും.

തെളിവ്

വൃത്തം $\quad S : x^2+y^2+2gx+2fy+c = 0$, ... (1)

നേർരേഖ $\quad L : lx+my+n = 0$. ... (2)

അപ്പോൾ $S+\lambda L=0$ എന്നെടുക്കുക. അതായത് $x^2+y^2+2gx+2fy+c+\lambda(lx+my+n)=0$ ... (3)

x, y പദങ്ങളും സ്ഥിരാങ്കങ്ങളും ഗ്രൂപ്പ് ചെയ്യുമ്പോൾ കിട്ടുന്നത്

$x^2+y^2+x(2g+\lambda l)+y(2f+\lambda m)+c+\lambda n=0$ ഇത് x, y ലെ രണ്ടാം കൃതി സമവാക്യമാണ്. ഇവിടെ xy പദം ഇല്ല. കൂടാതെ x^2, y^2 തുല്യമാണ്. അതിനാൽ $S+\lambda L=0$ എന്നത് ഒരു വൃത്തത്തെ കുറിക്കുന്നു. (α,β) എന്ന ബിന്ദു S കൂടാതെ L നെ വെട്ടുന്ന ബിന്ദുവായതിനാൽ (1), (2) നെ സംതൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്നു. അതു പോലെ (3) നെയും തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്നു.

ഉദാഹരണം 5.2

$3x+y+5=0$ എന്ന ഞാൺ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന $x^2+y^2=16$ എന്ന വൃത്തത്തിന് തുല്യ വ്യാസമുള്ളതുമായ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

സിദ്ധാന്തം 5.1 അനുസരിച്ച് x^2+y^2-16 എന്ന വൃത്തവും $(3x+y+5)=0$ എന്ന നേർരേഖയും തമ്മിൽ ഛേദിക്കുന്ന ബിന്ദുവഴി ചെല്ലുന്ന വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം $x^2+y^2-16+\lambda(3x+y+5)=0$.

ഈ വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം $\left(\frac{-3\lambda}{2},\frac{-\lambda}{2}\right)$ ഇത് $3x+y+5=0$ എന്ന നേർരേഖയിൽ ഉള്ളതിനാൽ.

$$3\left(\frac{-3\lambda}{2}\right)-\frac{\lambda}{2}+5 = 0,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-9\lambda}{2}-\frac{\lambda}{2}+5 = 0,$$

$$\Rightarrow \quad -5\lambda+5 = 0,$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = 1.$$

അതിനാൽ, ആവശ്യമായ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം $x^2+y^2+3x+y-11=0$.

ഉദാഹരണം 5.3

$x^2+y^2-6x+4y+c=0$ എന്ന വൃത്തത്തിന്റെ c യുടെ എല്ലാ മൂല്യങ്ങൾക്കും $x+y-1=0$ എന്ന നേർരേഖ വ്യാസമാകുമോ എന്ന് കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ള വൃത്തത്തിന്റെ മദ്ധ്യബിന്ദു $(3,-2)$ ഇത് $x+y-1=0$ ൽ ഉണ്ട്. അതിനാൽ $x+y-1=0$ എന്ന നേർരേഖ c യുടെ എല്ലാ മൂല്യങ്ങൾക്കും വൃത്തത്തിന്റെ മദ്ധ്യബിന്ദു വഴി കടന്നു ചെല്ലും. അതിനാൽ $x+y-1=0$ എന്ന രേഖ c യുടെ എല്ലാ മൂല്യങ്ങൾക്കും വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസമാകും.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 175 14-02-2023 18:36:21

സിദ്ധാന്തം 5.2

ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസത്തിന്റെ അഗ്രങ്ങൾ (x_1, y_1) കൂടാതെ (x_2, y_2) ആണെങ്കിൽ ആ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$ ആകുന്നു.

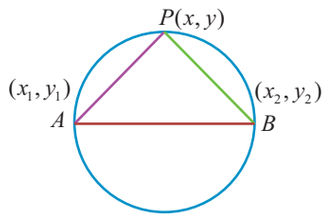
പ്രസ്താവന

AB എന്ന വ്യാസത്തിന്റെ അഗ്രബിന്ദുക്കൾ $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ എന്നിരിക്കട്ടെ. കൂടാതെ $P(x, y)$ എന്നത് വൃത്തത്തിലുള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദു. അപ്പോൾ $\angle APB = \frac{\pi}{2}$ (അർദ്ധ വൃത്തത്തിന്റെ കോൺ)

AP, PB ഇവയുടെ ഗുണനഫലം -1.

$\left(\frac{(y-y_1)}{(x-x_1)}\right)\left(\frac{(y-y_2)}{(x-x_2)}\right) = -1$ ഇതിൽ നിന്നും വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം

$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.



ചിത്രം 5.9

ഉദാഹരണം 5.4

$(-4,-2)$ കൂടാതെ $(1,1)$ എന്ന ബിന്ദുക്കളെ വ്യാസമാക്കിയുള്ള വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

സിദ്ധാന്തം 5.2 അനുസരിച്ച് (x_1, y_1) കൂടാതെ (x_2, y_2) എന്ന ബിന്ദുക്കളെ വ്യാസമാക്കിയുള്ള വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x+4)(x-1)+(y+2)(y-1) = 0$$

$\Rightarrow$ $x^2+y^2+3x+y-6=0$ എന്നത് വൃത്തത്തിന്റെ വശ്യമായ സമവാക്യമാണ്.

സിദ്ധാന്തം 5.3

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ എന്ന വൃത്തവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട് $P(x_1, y_1)$ എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനം,

$x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c$ യുടെ വില $\begin{cases} >0 & \text{അല്ലെങ്കിൽ} \\ =0 & \text{അല്ലെങ്കിൽ} \\ <0. \end{cases}$

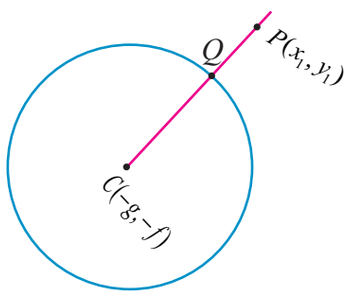
വൃത്തത്തിൽ അടങ്ങിയിരിക്കുന്ന തലം വൃത്തത്തിന് പുറത്തോ ഉള്ളിലോ അല്ലെങ്കിൽ മുകളിലോ ആയിരിക്കും

തെളിവ്

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ എന്ന വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം C $(-g,-f)$ വ്യാസാർദ്ധം $r=\sqrt{g^2+f^2-c}$, $P(x_1, y_1)$ എന്നത് ഒരു തലത്തിലെ ബിന്ദു എന്നിരിക്കട്ടെ.

CP യെ യോജിപ്പിക്കുക, CP വൃത്തത്തെ Q എന്ന ബിന്ദുവിൽ സ്പർശിക്കുന്നു

P എന്ന ബിന്ദു $|CP|$ യുടെ മൂല്യം $\begin{cases} >|CQ| & \text{അല്ലെങ്കിൽ} \\ =|CQ| & \text{അല്ലെങ്കിൽ} \\ <|CQ|. \end{cases}$



ചിത്രം 5.10

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 176 14-02-2023 18:36:42

$$\Rightarrow \quad \text{അതായത് } CP^2 \text{ ന്റെ മൂല്യം } \begin{cases} > r^2 & \text{അല്ലെങ്കിൽ} \\ = r^2 & \text{അല്ലെങ്കിൽ } \{CQ=r\} \\ < r^2. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad (x_1+g)^2+(y_1+f)^2 \text{ ന്റെ മൂല്യം } \begin{cases} > g^2+f^2-c & \text{അല്ലെങ്കിൽ,} \\ = g^2+f^2-c & \text{അല്ലെങ്കിൽ,} \\ < g^2+f^2-c. \end{cases}$$

അതായത് $\Rightarrow$ $x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c$ യുടെ മൂല്യം $\begin{cases} > 0 & \text{or, അല്ലെങ്കിൽ,} \\ = 0 & \text{or, അല്ലെങ്കിൽ,} \\ < 0. \end{cases}$

ഉദാഹരണം 5.5

$x^2+y^2-6x-8y+12=0$ എന്ന വൃത്തവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട $(2,3)$ എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനം നിർണ്ണയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

(x_1, y_1) എന്നത് $(2, 3)$ എന്നെടുക്കുക

$$x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c = 2^2+3^2-6\times 2-8\times 3+12,$$
$$= 4+9-12-24+12 = -11<0.$$

അതിനാൽ $(2,3)$ എന്ന ബിന്ദു വൃത്തത്തിനുള്ളിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു.

ഉദാഹരണം 5.6

$3x+4y-12=0$ എന്ന രേഖയുടെ നിർദ്ദേശാങ്ക അക്ഷം A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ സ്പർശിക്കുന്നു. എങ്കിൽ AB വ്യാസമായിട്ടുള്ള വൃത്തത്തതിന്റെ സമവാക്യം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$3x+4y=12,$ ന്റെ അന്തഃഖണ്ഡരൂപം $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$. അതിനാൽ ബിന്ദുക്കൾ A $(4,0)$ കൂടാതെ B $(0,3)$ എന്നിവയാണ്.

വ്യാസത്തിന്റെ രൂപത്തിലുള്ള വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2) = 0$$
$$(x-4)(x-0)+(y-0)(y-3) = 0$$
$$x^2+y^2-4x-3y = 0.$$

ഉദാഹരണം 5.7

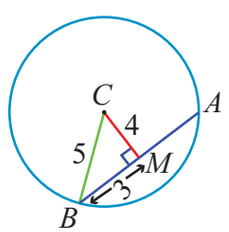
$3x+4y+10=0$ എന്ന നേർരേഖ മദ്ധ്യബിന്ദു $(2,1)$ ഉള്ള ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ 6 സെ.മീ നീളമുള്ള ഒരു ഞാണിനെ ഛേദിക്കുന്നു. ആ വൃത്തത്തിന്റെ പൊതുസമവാക്യം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

കേന്ദ്രം $C(2,1)$ ആയ വൃത്തത്തിൽ $3x+4y+10=0$ എന്ന നേർരേഖ AB എന്ന ഞാണിനെ ഛേദിക്കുന്നു. AB യുടെ മദ്ധ്യബിന്ദു M എന്നെടുക്കുക

$AM = BM = 3$. BMC ഒരു സമകോണ ത്രികോണം.

$$CM = \frac{|3(2)+4(1)+10|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 4.$$



ചിത്രം 5.11

പൈതഗോറസ്സ് സിദ്ധാന്തം അനുസരിച്ച്

$$BC^2 = BM^2+MC^2 = 3^2+4^2 = 25.$$

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 177 14-02-2023 18:36:57

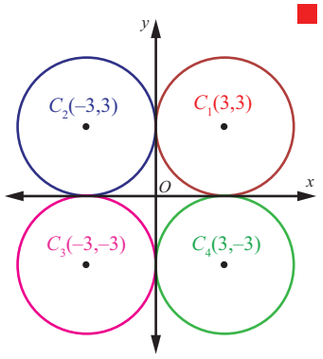
BC = 5 = ആരം.

ആവശ്യമായ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം $(x-2)^2+(y-1)$ = 5^2

അതായത് $x^2+y^2-4x-2y-20=0$.

ഉദാഹരണം 5.8

3 മാത്ര ആരമുള്ള ഒരു വൃത്തം രണ്ട് അക്ഷങ്ങളിലും സ്പർശിക്കുന്നുവെങ്കിൽ സാധ്യമായ എല്ലാ വൃത്തങ്ങളുടെയും പൊതുരൂപങ്ങളുടെ സമവാക്യം കാണുക.



ചിത്രം 5.12

നിർദ്ധാരണം

വൃത്തം രണ്ട് അക്ഷങ്ങളിലും സ്പർശിക്കുമ്പോൾ കേന്ദ്രത്തിന്റെ ദൂരം രണ്ട് അക്ഷങ്ങളിലും 3 മാത്രകളാണ്. അതിനാൽ കേന്ദ്രം $(\pm3,\pm3)$ ആയിരിക്കും. ആരം 3 ഉള്ള നാല് വൃത്തങ്ങളുടെ സമവാക്യം $x^2+y^2\pm6x\pm6y+9=0$ ആണ്.

ഉദാഹരണം 5.9

$3x^2+(a+1)y^2+6x-9y+a+4=0$ എന്ന വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രവും ആരവും കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

x^2 = ന്റെ ഗുണാങ്കം y^2 ന്റെ ഗുണാങ്കം (രണ്ടാം കൃതി സമവാക്യത്തിന്റെ സവിശേഷത (ii) അനുസരിച്ച്).

അതായത്, $3=a+1$, $a=2$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

അതിനാൽ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം

$$3x^2+3y^2+6x-9y+6 = 0$$

$$x^2+y^2+2x-3y+2 = 0$$

കേന്ദ്രം $\left(-1,\frac{3}{2}\right)$ കൂടാതെ ആരം $r=\sqrt{1+\frac{9}{4}-2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

ഉദാഹരണം 5.10

$(1,1)$, $(2,-1)$, കൂടാതെ $(3,2)$ എന്നീ മൂന്ന് ബിന്ദുക്കൾ വഴി ചെല്ലുന്ന വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

വൃത്തത്തിന്റെ പൊതു സമവാക്യം

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c = 0 \quad \ldots (1)$$

ഇത് $(1,1),(2,-1)$ കൂടാതെ $(3,2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ വഴി ചെല്ലുന്നതിനാൽ.

$$2g+2f+c = -2, \quad \ldots (2)$$

$$4g-2f+c = -5, \quad \ldots (3)$$

$$6g+4f+c = -13. \quad \ldots (4)$$

(2) – (3) ൽ നിന്നും $-2g+4f = 3$. ... (5)

(4) – (3) ൽ നിന്നും $2g+6f = -8$. ... (6)

(5) + (6) ൽ നിന്നും $f = -\frac{1}{2}$

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 178 14-02-2023 18:37:13

$f = -\frac{1}{2}$ എന്ന വിലയെ (6) ൽ, $g = -\frac{5}{2}$.

$f = -\frac{1}{2}$, $g = -\frac{5}{2}$ പ്രതിയിടുക, (2) , $c = 4$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

അതിനാൽ ആവശ്യമായ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം

$$x^2 + y^2 + 2\left(-\frac{5}{2}\right)x + 2\left(-\frac{1}{2}\right)y + 4 = 0$$

അതായത് $\Rightarrow$ $x^2 + y^2 - 5x - y + 4 = 0$.

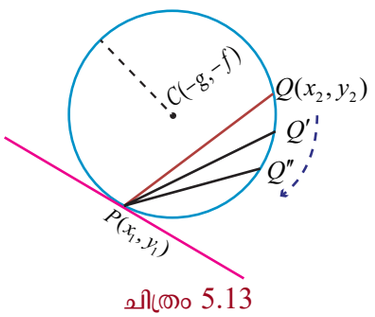
കുറിപ്പ്

ഒരു വൃത്തത്തിലെ മൂന്ന് ബിന്ദുക്കൾ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യത്തെ ഏകപക്ഷീയമായി നിർണ്ണയിക്കുന്നു. നേരേ മറിച്ച് കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നും തുല്യദൂരത്തിലുള്ള മൂന്ന് ബിന്ദുക്കൾ ഒരു വൃത്തത്തെ രൂപീകരിക്കുന്നു.

5.2.2 *P* എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്നും വൃത്തത്തിലേക്ക് വരയാവുന്ന സ്പർശ രേഖയുടേയും, ലംബരേഖയുടേയും സമവാക്യം

ഒരു നേർരേഖ ഒരു വൃത്തത്തെ ഒരേ ഒരു ബിന്ദുവിൽ മാത്രം സ്പർശിക്കുകയാണെങ്കിൽ അതിനെ സ്പർരേഖ എന്ന് പറയുന്നു. സ്പർശബിന്ദുവാഴി സ്പർശരേഖക്ക് ലംബമായി കടന്നുപോകുന്ന രേഖയെ ലംബരേഖ എന്നും പറയുന്നു.

$P(x_1, y_1)$ കൂടാതെ $Q(x_2, y_2)$ എന്നിവ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ എന്ന വൃത്തത്തിനുള്ളിലുള്ള രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ.



ചിത്രം 5.13

അതിനാൽ $x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0$ ... (1)

$x_2^2 + y_2^2 + 2gx_2 + 2fy_2 + c = 0$,,, (2)

(2) − (1) ൽ നിന്ന്

$x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 + 2g(x_2 - x_1) + 2f(y_2 - y_1) = 0$

$(x_2 - x_1)(x_2 + x_1 + 2g) + (y_2 - y_1)(y_2 + y_1 + 2f) = 0$

$$\frac{x_2 + x_1 + 2g}{y_2 + y_1 + 2f} = -\frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$$

അതിനാൽ PQ ന്റെ ചായ്‌വ് $= -\frac{(x_1 + x_2 + 2g)}{(y_1 + y_2 + 2f)}$.

$Q \to P$, ആയാൽ PQ എന്ന ഞാൺ P യിലെ സ്പർശരേഖയായി മാറും

സ്പർശരേഖയുടെ ചായ്‌വ് $-\frac{(2x_1 + 2g)}{(2y_1 + 2f)} = -\frac{(x_1 + g)}{(y_1 + f)}$.

അതിനാൽ സ്പർശരേഖയുടെ ചായ്‌വ് $y - y_1 = -\frac{(x_1 + g)}{(y_1 + f)}(x - x_1)$. ഇതിൽ നിന്നും,

$yy_1 + fy - y_1^2 - fy_1 + xx_1 - x_1^2 + gx - gx_1 = 0$

$xx_1 + yy_1 + gx + fy - (x_1^2 + y_1^2 + gx_1 + fy_1) = 0$ ...(1)

(x_1, y_1) എന്ന ബിന്ദു വൃത്തത്തിനുള്ളിലായതിനാൽ $x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0$

അതിനാൽ, $-(x_1^2 + y_1^2 + gx_1 + fy_1) = gx_1 + fy_1 + c$. ...(2)

(2) നെ (1), ൽ പ്രതിസ്ഥാപിക്കുമ്പോൾ (x_1, y_1) എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സ്പർശരേഖയുടെ സമവാക്യം

$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 179 14-02-2023 18:37:35

അതിനാൽ ലംബരേഖയുടെ സമവാക്യം $(y-y_1) = \frac{(y_1+f)}{(x_1+g)}(x-x_1)$

$$\Rightarrow \quad (y-y_1)(x_1+g) = (y_1+f)(x-x_1)$$

$$\Rightarrow \quad x_1(y-y_1)+g(y-y_1) = y_1(x-x_1)+f(x-x_1)$$

$$\Rightarrow \quad yx_1 - xy_1 + g(y-y_1) - f(x-x_1) = 0\,.$$

കുറിപ്പ്

(1) $x^2+y^2 = a^2$ എന്ന വൃത്തത്തിന്റെ (x_1, y_1) എന്ന ബിന്ദുവിൽ കൂടിയുള്ള സ്പർശരേഖയുടെ സമവാക്യം $xx_1 + yy_1 = a^2$.

(2) $x^2+y^2 = a^2$ എന്ന വൃത്തത്തിന്റെ (x_1, y_1) എന്ന ബിന്ദുവിൽ കൂടിയുള്ള ലംബരേഖയുടെ സമവാക്യം $x^2+y^2 = a^2$ is $xy_1 - yx_1 = 0$.

(3) ലംബരേഖ വൃത്തത്തിന്റെ മദ്ധ്യ ബിന്ദുവഴി ചെല്ലുന്നു.

5.2.3 $x^2 + y^2 = a^2$ എന്ന വൃത്തത്തിന് $y = mx + c$ എന്ന നേർരേഖ സ്പർശരേഖയായിരിക്കാനുള്ള വ്യവസ്ഥ

$y = mx + c$ എന്ന രേഖ $x^2 + y^2 = a^2$. എന്ന വൃത്തത്തെ സ്പർശിക്കുമ്പോൾ ആ വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം $(0,0)$ കൂടാതെ a ആണ്.

(i) ഒരു നേർരേഖ സ്പർശരേഖയാകാനുള്ള വ്യവസ്ഥ

$(0,0)$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്നും $y - mx - c = 0$ എന്ന രേഖയുടെ ലംബദൂരം

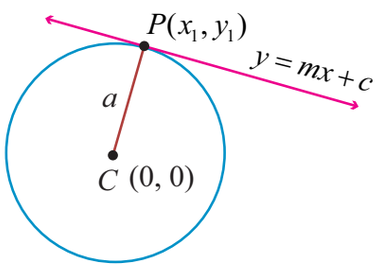
$$\left|\frac{0 - m.0 - c}{\sqrt{1+m^2}}\right| = \frac{|c|}{\sqrt{1+m^2}}\,.$$

ഇത് ദൂരത്തിന് തുല്യമായിരിക്കണം. അതിനാൽ $\frac{|c|}{\sqrt{1+m^2}} = a$ അല്ലെങ്കിൽ $c^2 = a^2(1+m^2)$.

അങ്ങനെ $y = mx + c$ എന്ന നേർരേഖ $x^2 + y^2 = a^2$ എന്ന വൃത്തത്തിന് സ്പർശരേഖയാകുന്നതിനുള്ള വ്യവസ്ഥ $c^2 = a^2(1+m^2)$.

(ii) സ്പർശബിന്ദു

$x^2 + y^2 = a^2$ എന്ന വൃത്തത്തെ, $y = mx + c$ എന്ന നേർരേഖ (x_1, y_1) എന്ന ബിന്ദുവിൽ സ്പർശിക്കുന്നു.



ചിത്രം 5.14

എങ്കിൽ $y_1 = mx_1 + c$. ... (1)

(x_1, y_1) ൽ സ്പർശരേഖയുടെ സമവാക്യം $xx_1 + yy_1 = a^2$.

$$yy_1 = -xx_1 + a^2 \qquad \ldots (2)$$

സമവാക്യം (1) ഉം (2) ഒരേ നേർരേഖയെ കുറിയ്ക്കുന്നു. അതിനാൽ ഗുണാങ്ക ആനുപാതികമായിരിക്കും.

അതായത്, $\frac{y_1}{1} = \frac{-x_1}{m} = \frac{a^2}{c}$

$$y_1 = \frac{a^2}{c}, x_1 = \frac{-a^2 m}{c},\ c = \pm a\sqrt{1+m^2}\,.$$

അതിനാൽ സ്പർശ ബിന്ദുക്കൾ $\left(\frac{-am}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{a}{\sqrt{1+m^2}}\right)$

$$\left(\frac{am}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{-a}{\sqrt{1+m^2}}\right).$$

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 180 14-02-2023 18:37:57

കുറിപ്പ്

P എന്ന ബിന്ദുവിലുള്ള വൃത്തത്തിന്റെ സ്പർശരേഖയുടെ സമവാക്യം, $y = mx \pm a\sqrt{1+m^2}$.

നിർദ്ധാരണം 5.4

$x^2 + y^2 = a^2$ എന്ന വൃത്തത്തിന് വെളിയിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്നും രണ്ട് സ്പർശരേഖകൾ വരയ്ക്കാം.

തെളിവ്

തന്നിട്ടുള്ള ബിന്ദു $P(x_1, y_1)$ സ്പർശരേഖയുടെ സമവാക്യം $y = mx \pm a\sqrt{1+m^2}$. ഇത് (x_1, y_1) വഴി ചെല്ലുന്നു. അതുകൊണ്ട്,

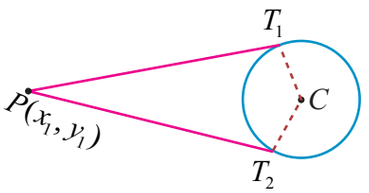
$$y_1 = mx_1 \pm a\sqrt{1+m^2}$$

$y_1 - mx_1 = a\sqrt{1+m^2}$. ഇരുവശങ്ങളുടേയും വർഗ്ഗം കാണുക

$$(y_1 - mx_1)^2 = a^2(1+m^2)$$

$$y_1^2 + m^2x_1^2 - 2mx_1y_1 - a^2 - a^2m^2 = 0$$

$$m^2(x_1^2 - a^2) - 2mx_1y_1 + (y_1^2 - a^2) = 0 .$$



ചിത്രം 5.15

m ലെ സർവ്വസമവാക്യം m ന് രണ്ട് മൂല്യങ്ങൾ നൽകുന്നു.

ഈ മൂല്യങ്ങൾ $x^2 + y^2 = a^2$ എന്ന വൃത്തത്തിന് രണ്ട് സ്പർശരേഖകൾ നൽകുന്നു.

കുറിപ്പ്

(1) (x_1, y_1) എന്ന ബിന്ദു വൃത്തത്തിന് വെളിയിലായാൽ രണ്ട് സ്പർശരേഖകളും യഥാർത്ഥമാകും.

(2) (x_1, y_1) എന്ന ബിന്ദു വൃത്തത്തിന് അകത്തായാൽ രണ്ട് സ്പർശരേഖകളും സാങ്കല്പികം.

(3) (x_1, y_1) എന്ന ബിന്ദു വൃത്തത്തിലാണെങ്കിൽ രണ്ട് സ്പർശരേഖകളും യോജിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം 5.11

$x^2 + y^2 = 25$ എന്ന വൃത്തത്തിൽ $P(-3, 4)$ ഇതിന്റെ സ്പർശരേഖയും, ലംബരേഖയും കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

വൃത്തത്തിലെ $P(x_1, y_1)$ എന്ന ബിന്ദുവിലേയ്ക്കുള്ള സ്പർശരേഖയുടെ സമവാക്യം $xx_1 + yy_1 = a^2$.

അതായത് , $x(-3) + y(4) = 25$

$$-3x + 4y = 25$$

ലംബരേഖ സമവാക്യം $xy_1 - yx_1 = 0$

അതായത് , $4x + 3y = 0$.

ഉദാഹരണം 5.12

$x^2 + y^2 = 9$, എന്ന വൃത്തത്തിന് $y = 4x + c$ ഒരു സ്പർശരേഖ ആയാൽ c യുടെ വില കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

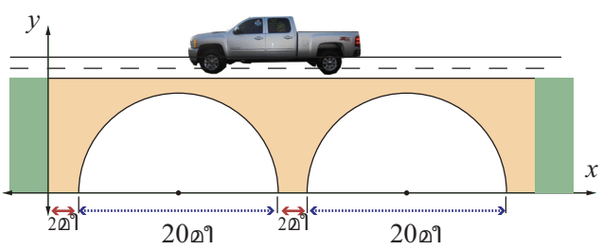
$x^2 + y^2 = a^2$ എന്ന വൃത്തത്തിന് $y = mx + c$ ഒരു നേർരേഖ ആയാൽ സമവാക്യം $c^2 = a^2(1+m^2)$ ആകുന്നു

അതിനാൽ, $c = \pm\sqrt{9(1+16)}$

$$c = \pm 3\sqrt{17} .$$

ഉദാഹരണം 5.13

ജലസേചന കനാലിന് മുകളിലുള്ള പാലത്തിന് അർദ്ധവൃത്താകൃതിയിലുള്ള രണ്ട് ദ്വാരങ്ങളുണ്ട്. അവ ഓരോന്നിനും 20 മീറ്റർ നീളവും 2 മീറ്റർ വീതിയുമാണ്. ചിത്രം 5.16 ഉപയോഗിച്ച് മാതൃകാ കമാനങ്ങളുടെ സമവാക്യം കാണുക.



ചിത്രം 5.16

നിർദ്ധാരണം

O_1 O_2 എന്നിവ അർദ്ധ വൃത്താകൃതിയിലുള്ള ദ്വാരങ്ങളുടെ കേന്ദ്രം.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 181 14-02-2023 18:38:21

ആദ്യത്തെ ദ്വാരത്തിന്റെ കേന്ദ്രം $O_1\ (12,0)$, $r=10$ ഇതിൽ നിന്നും ആദ്യത്തെ അർദ്ധ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം

$$(x-12)^2+(y-0)^2=10^2$$
$$\Rightarrow x^2+y^2-24x+44=0,\ y>0.$$

രണ്ടാമത്തെ ദ്വാരത്തിന്റെ കേന്ദ്രം $O_2\ (34,0)$, $r=10$ രണ്ടാമത്തെ അർദ്ധ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം

$$(x-34)^2+y^2=10^2$$
$$\Rightarrow x^2+y^2-68x+1056=0,\ y>0.$$

അഭ്യാസം 5.1

1. ആരം 5 സെന്റീമീറ്ററും, x- അക്ഷം ആധാരബിന്ദുവഴി കടന്നു ചെല്ലുന്നതുമായ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക.
2. മദ്ധ്യബിന്ദു $(2,-1)$ ഉം $(3,6)$ എന്ന ബിന്ദുവഴി ചെല്ലുന്നതുമായ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക.
3. രണ്ട് അക്ഷങ്ങളെയും സ്പർശിച്ച് ചെല്ലുന്നതും $(-4,-2)$ എന്ന ബിന്ദുവഴി കടന്നുപോകുന്നതുമായ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക.
4. മദ്ധ്യബിന്ദു $(2,3)$ ഉം $3x-2y-1=0$ കൂടാത $4x+y-27=0$ എന്ന രേഖകളെ ഛേദിക്കുന്ന ബിന്ദു വഴി ചെല്ലുന്നതുമായ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക.
5. ഒരു വ്യാസത്തിന്റെ അഗ്രബിന്ദുക്കൾ $(3,4)$ ഉം $(2,-7)$ ഉം ആയിട്ടുള്ള വൃത്തത്തിന്റെ സമീകരണം കാണുക.
6. $(1,0)$, $(-1,0)$ കൂടാതെ $(0,1)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ വഴി ചെല്ലുന്ന വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക.
7. 9π ചതുരശ്ര മീറ്റർ വിസ്തീർണ്ണമുള്ള വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസം $x+y=5$ കൂടാതെ $x-y=1$ എന്ന നേർ രേഖകളിൽ ആണെങ്കിൽ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക.
8. $y=2\sqrt{2}x+c$ എന്ന നേർരേഖ $x^2+y^2=16$ എന്ന വൃത്തത്തിന്റെ സ്പർശരേഖയാണെങ്കിൽ c യുടെ മൂല്യം കാണുക.
9. $x^2+y^2-6x+6y-8=0$ എന്ന വൃത്തത്തിന്റെ $(2,2)$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ കൂടി കടന്നുപോകുന്ന സ്പർശരേഖ, ലംബരേഖ എന്നിവയുടെ സമവാക്യം കാണുക.
10. $(-2,1),(0,0)$ കൂടാതെ $(-4,-3)$ എന്ന ബിന്ദുക്കൾ $x^2+y^2-5x+2y-5=0$ എന്ന വൃത്തത്തിന് ആന്തരികമാണോ, ബാഹ്യമാണോ എന്ന് കാണുക.
11. ഇനിപ്പറയുന്ന വൃത്തങ്ങളുടെ കേന്ദ്രവും ആരവും കാണുക.
    (i) $x^2+(y+2)^2=0$ (ii) $x^2+y^2+6x-4y+4=0$
    (iii) $x^2+y^2-x+2y-3=0$ (iv) $2x^2+2y^2-6x+4y+2=0$
12. $3x^2+(3-p)xy+qy^2-2px=8pq$ എന്നത് ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യമെങ്കിൽ p, q ഇവയുടെ വില കാണുക കൂടാതെ ആ വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രവും, ആരവും കാണുക.

T5AV3

5.3. കോണിക്സ്

സിദ്ധാന്തം 5.2

ഒരു തലത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ ലോക്കസ് ആണ് കോണിക്. അതിനാൽ ഒരു നിശ്ചിത സ്ഥാനത്ത് നിന്ന് അതിന്റെ ദൂരം നിശ്ചിത ബിന്ദു അടങ്ങിയിട്ടില്ലാത്ത ഒരു നിശ്ചിത രേഖയിൽ നിന്നുള്ള ദൂരത്തിന് സ്ഥിരമായ അനുപാതം ആയിരിക്കും.

നിശ്ചിത ബിന്ദുവിനെ **ഫോക്കസ്** എന്നും നിശ്ചിത രേഖയെ **ഡയറക്ട്രിക്സ്** എന്നും കൂടാതെ സ്ഥിര അനുപാതത്തെ **ഉത്കേന്ദ്രത** എന്നും വിളിക്കുന്നു. ഇതിനെ e എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

(i) ഈ സ്ഥിരാങ്കം $e=1$ ആണെങ്കിൽ കോണിക്കിനെ പരാബോള എന്ന് വിളിക്കുന്നു

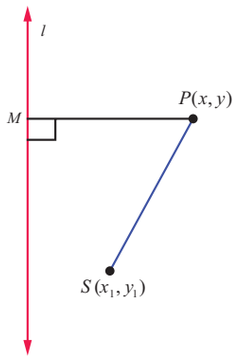
(ii) ഈ സ്ഥിരാങ്കം $e<1$ ആണെങ്കിൽ കോണിക്കിനെ ഒരു ദീർഘവൃത്തം എന്ന് വിളിക്കുന്നു

(iii) ഈ സ്ഥിരാങ്കം $e>1$ ആണെങ്കിൽ കോണിക്കിനെ ഹൈപ്പർബോള എന്ന് വിളിക്കുന്നു

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 182 14-02-2023 18:38:42

5.3.1 കോണിക്കിന്റെ പൊതു സമവാക്യം

$S(x_1, y_1)$ നെ ഫോക്കസ് എന്നും, l നെ ഡയറക്ട്രിക്സ് എന്നും e യെ ഉത്കേന്ദ്രത എന്നും $P(x, y)$ ഒരു ചലിക്കുന്ന ബിന്ദുവെന്നും ഇരിക്കട്ടെ. കോണിക്കിന്റെ നിർവ്വചനം അനുസരിച്ച്,



ചിത്രം 5.17

$$\frac{SP}{PM} = \text{സ്ഥിരാങ്കം} = e \text{ ഉത്കേന്ദ്രത}, \qquad \ldots(1)$$

$$SP = \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$$

PM = $P(x, y)$ ൽ നിന്നും $lx+my+n=0$ എന്ന രേഖയിലേയ്ക്കുള്ള ലംബദൂരം

$$= \left|\frac{lx+my+n}{\sqrt{l^2+m^2}}\right|.$$

(1) കൂടാതെ $SP^2 = e^2PM^2$

$$\Rightarrow (x-x_1)^2+(y-y_1)^2 = e^2\left[\frac{lx+my+n}{\sqrt{l^2+m^2}}\right]^2.$$

മുകളിലുള്ള സമവാക്യത്തെ ലഘൂകരിക്കുമ്പോൾ പൊതുവായ $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, എന്ന രണ്ടാം ഡിഗ്രി സമവാക്യം രൂപപ്പെടുന്നു.

ഇവിടെ $A = 1-\frac{e^2l^2}{l^2+m^2}$, $B = \frac{2lme^2}{l^2+m^2}$, $C = 1-\frac{e^2m^2}{l^2+m^2}$

ഇപ്പോൾ,

$$B^2-4AC = \frac{4l^2m^2e^4}{\left(l^2+m^2\right)^2} - 4\left(1-\frac{e^2l^2}{l^2+m^2}\right)\left(1-\frac{e^2m^2}{l^2+m^2}\right)$$

$$= 4\left(e^2-1\right)$$

ഇതിൽ നിന്നും:

(i) $B^2-4AC = 0 \Leftrightarrow e=1 \Leftrightarrow$ അതിനാൽ കോണിക് ഒരു പരാബോള ആകുന്നു,

(ii) $B^2-4AC<0 \Leftrightarrow 0<e<1 \Leftrightarrow$ അതിനാൽ കോണിക് ഒരു ദീർഘ വൃത്തമാകുന്നു,

(iii) $B^2-4AC>0 \Leftrightarrow e>1 \Leftrightarrow$ അതിനാൽ കോണിക് ഒരു ഹൈപ്പർബോളയാകുന്നു.

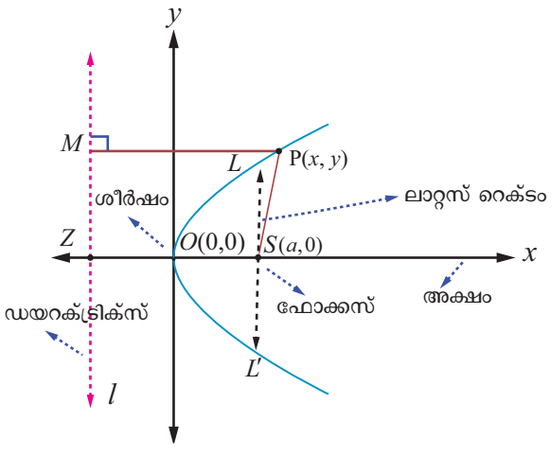
5.3.2 പരാബോള

പരാബോളയ്ക്ക് $e=1$ ആയതിനാൽ ഒരു തലത്തിൽ ഫോക്കസ്സിൽ നിന്നും ഡയറക്ട്രിക്സിൽ നിന്നും തുല്യ അകലത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെ ലോക്കസ്സ് ആ പരാബോള.

(i) ശീർഷം (0, 0) ആയ പരാബോളയുടെ അടിസ്ഥാന രൂപം

S നെ ഫോക്കസ്സ് എന്നും l നെ ഡയറക്ട്രിക്സ് എന്നും എടുക്കുക.

l എന്ന രേഖയ്ക്ക് ലംബമായി SZ വരയ്ക്കുക. SZ നെ നീട്ടി x - അക്ഷം എന്നും SZ ന്റെ ലംബദ്വിഭാജകം നീട്ടിയതിനെ y -അക്ഷം എന്നും ഈ ലംബദ്വിഭാജകം SZ മായി ചേരദിക്കുന്ന ബിന്ദു ആണ് മൂലബിന്ദും.



ചിത്രം 5.18

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 183 14-02-2023 18:38:56

$SZ = 2a$ യാൽ S എന്നത് $(a,0)$ കൂടാതെ ഡയറട്രിക്സിന്റെ സമവാക്യം $x + a = 0$ എന്നാണ്.

$P(x, y)$ എന്നത് പരാബോളയിലെ ഒരു ചലിക്കുന്ന ബിന്ദു ഡയറട്രിക്സിന് ചെങ്കുത്തായി PM വരയ്ക്കുക, പരാബോളയുടെ നിർവ്വചനം അനുസരിച്ച് $e = \frac{SP}{PM} = 1$. അതായത്, $SP^2 = PM^2$.

അപ്പോൾ, $(x-a)^2 + y^2 = (x+a)^2$. ഇതിനെ ചുരുക്കുമ്പോൾ $y^2 = 4ax$ എന്ന് കിട്ടുന്നു. **ഇത് പരാബോളയുടെ സമവാക്യമാണ്.**

പരാബോളയുടെ മറ്റ് സ്റ്റാൻഡേർഡ് രൂപങ്ങൾ $y^2 = -4ax, x^2 = 4ay$ കൂടാതെ $x^2 = -4ay$ എന്നിവയാണ്.

സിദ്ധാന്തം 5.3

- ഡയറക്ട്രിക്സിന് ലംബമായി ഫോക്കസിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന രേഖയെ **അക്ഷം** എന്ന് വിളിക്കുന്നു.
- പരാബോളയുടെ വക്രത്തോടു കൂടിയ അക്ഷത്തിന്റെ വിഭജന ബിന്ദുവിനെ പരാബോളയുടെ **ശീർഷം** എന്ന് പറയുന്നു.
- പരാബോളയുടെ ഏതൊരു ഞാണും ഫോക്കസ് വഴി ചെല്ലുകയാണെങ്കിൽ അതിനെ പരാബോളയുടെ **ഫോക്കൽ ഞാൺ** എന്ന് വിളിക്കുന്നു.
- അക്ഷത്തിന് ലംബമായ ഫോക്കൽ ഞാണിന്റെ നീളത്തെ പരാബോളയുടെ **ലാറ്റസ് റെക്ടം** എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം 5.14

$y^2 = 4ax$ എന്ന പരാബോളയുടെ നീളവും, ലാറ്റസ് റെക്ടറും കണ്ടുപിടിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

പരാബോളയുടെ സമവാക്യം $y^2 = 4ax$.

ലാറ്റസ് റെക്ടം LL', $(a,0)$ എന്ന ഫോക്കസിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നു (ചിത്രം 5.18 നോക്കുക)

അതിനാൽ L എന്നത് (a, y_1) ആണ്.

അതായത് $y_1^2 = 4a^2$.

$$y_1 = \pm 2a.$$

പരാബോളയുടെ ലാറ്റസ് റെക്ടം $(a,2a)$ കൂടാതെ $(a,-2a)$ ആണ്.

പരാബോളയുടെ നീളം $LL' = 4a$.

കുറിപ്പ്

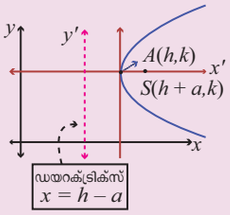
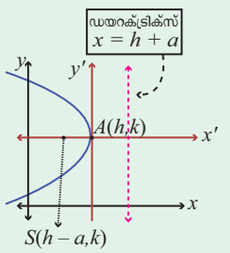
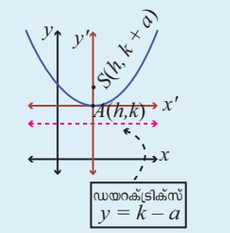
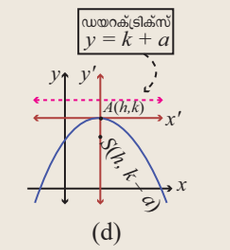
അടിസ്ഥാന രൂപത്തിലുള്ള പരാബോള $y^2 = 4ax$ ന്റെ ശീർഷം $(0,0)$ ഉം അക്ഷം x - അക്ഷവും ഫോക്കസ്സ് $(a,0)$ ഉം ആയിരിക്കും. പരാബോള $y^2 = 4ax$ പൂർണ്ണമായും x- അക്ഷത്തിന്റെ ഋണം അല്ലാത്ത ഭാഗത്താണ്. $y^2 = 4ax$ ൽ y യ്ക്ക് പകരം $-y$ കൊടുത്താലും സമവാക്യം മാറ്റമില്ലാതെ തുടരുന്നു. അതുകൊണ്ട് പരാബോള $y^2 = 4ax$, x- അക്ഷത്തിന് പ്രതിസാമ്യമാണ്. അതായത് $y^2 = 4ax$ ന്റെ അക്ഷവും പ്രതിസാമ്യതയും x- അക്ഷം തന്നെയാണ്

(ii) ശീർഷം (h,k) ആയിട്ടുള്ള പരാബോള

ശീർഷം (h,k) യും പ്രതിസാമ്യ അക്ഷം x - അക്ഷത്തിന് സമാന്തരവുമാകുമ്പോൾ പരാബോളയുടെ സമവാക്യം $(y-k)^2 = 4a(x-h)$ അല്ലെങ്കിൽ $(y-k)^2 = -4a(x-h)$ (ചിത്രം 5.19, 5.20).

ശീർഷം (h,k) യും പ്രതിസാമ്യ അക്ഷം y -അക്ഷത്തിന് സമാന്തരവുമാകുമ്പോൾ പരാബോളയുടെ സമവാക്യം $(x-h)^2 = 4a(y-k)$ അല്ലെങ്കിൽ $(x-h)^2 = -4a(y-k)$ (ചിത്രം 5.21, 5.220)

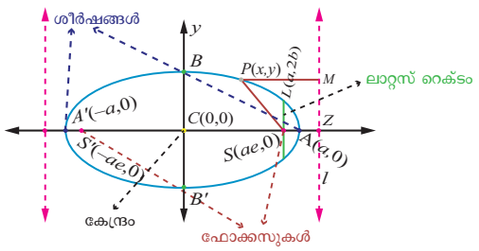
Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 184 14-02-2023 18:39:17

സമവാക്യം	ഗ്രാഫ്	ശീർഷങ്ങൾ	ഫോക്കസ്സ്	പ്രതിസാമ്യ അക്ഷം	ഡയറക്ട്രിക്സ് അക്ഷം	ലാറ്റക്സ് റെക്ടരത്തിന്റെ നീളം
$(y-k)^2 = 4a(x-h)$	 (a) $(y-k)^2 = 4a(x-h)$ യുടെ ഗ്രാഫ് ചിത്രം 5.19	(h,k)	$(h+a,0+k)$	$y=k$	$x=h-a$	$4a$
$(y-k)^2 = -4a(x-h)$	 (b) $(y-k)^2 = -4a(x-h)$ യുടെ ഗ്രാഫ് ചിത്രം 5.20	(h,k)	$(h-a,0+k)$	$y=k$	$x=h+a$	$4a$
$(x-h)^2 = 4a(y-k)$	 (c) $(x-h)^2 = 4a(y-k)$ യുടെ ഗ്രാഫ് ചിത്രം 5.21	(h,k)	$(0+h,a+k)$	$x=h$	$y=k-a$	$4a$
$(x-h)^2 = -4a(y-k)$	 (d) $(x-h)^2 = -4a(y-k)$ യുടെ ഗ്രാഫ് ചിത്രം 5.22	(h,k)	$(0+h,-a+k)$	$x=h$	$y=k+a$	$4a$

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 185 14-02-2023 18:39:33

5.3.3 ദീർഘ വൃത്തം

ഒരു തലത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു ബിന്ദുവിന് ഒരു സ്ഥിരബിന്ദു (focus) ൽ നിന്നുള്ള ദൂരവും ഡയറക്ട്രിക്സിൽ നിന്നുള്ള ദൂരവും തമ്മിലുള്ള സ്ഥിര അനുപാതം (ഉൾകേന്ദ്രത) 1 ൽ കുറവായിരുന്നാൽ ആ ബിന്ദുവിന്റെ ലോക്കസ്സിനെ ദീർഘ വൃത്തം എന്ന് പറയുന്നു സ്ഥിരാനുപാതത്തെ e $(0 < e < 1)$ എന്ന് കുറിക്കുന്നു.



ചിത്രം 5.23

(i) ദീർഘ വൃത്തത്തിന്റെ അടിസ്ഥാന രൂപത്തിൽ സമവാക്യം

S ഒരു ഫോക്കസും l ഡയറക്ട്രിക്സും, e എന്നത് ഉത്കേന്ദ്രതയും $(0 < e < 1)$, $P(x, y)$ എന്നത് ഒരു ചലിക്കുന്ന ബിന്ദുവുമാണ്. l ന് ലംബമായി SZ കൂടാതെ PM വരയ്ക്കുക.

A, A' എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ SZ നെ ആന്തരികമായും ബാഹ്യമായും $e:1$ എന്ന അനുപാതത്തിൽ വിഭജിക്കുന്നു. $AA' = 2a$ എന്നെടുക്കുക. AA' ൽ ലംബ ദ്വിഭാജി ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദു C എന്നിരിക്കട്ടെ. എങ്കിൽ $CA = a$, $CA' = a$, C എന്നത് മൂലബിന്ദുവും CZ എന്ന രേഖ x - അക്ഷമായും AA' ന്റെ ലംബദ്വിഭാജി y - അക്ഷമായും സ്വീകരിച്ചാൽ.

നിർവ്വചനം അനുസരിച്ച്,

$$\frac{SA}{AZ} = \frac{e}{1} \qquad \text{കൂടാതെ} \qquad \frac{SA'}{A'Z} = \frac{e}{1}$$

$$SA = eAZ \qquad SA' = eA'Z$$

$$CA - CS = e(CZ - CA) \qquad A'C + CS = e(A'C + CZ)$$

$$a - CS = e(CZ - a) \quad \ldots (1) \qquad a + CS = e(a + CZ) \quad \ldots (2)$$

$(2)+(1) \rightarrow CZ = \frac{a}{e}$ കൂടാതെ $(2)-(1) \rightarrow CS = ae$.

അതിനാൽ M എന്നത് $\left(\frac{a}{e}, y\right)$ കൂടാതെ S എന്നത് $(ae, 0)$.

കോണിക്സിന്റെ നിർവ്വചനം അനുസരിച്ച് , $\frac{SP}{PM} = e \Rightarrow SP^2 = e^2 PM^2$

$$\Rightarrow (x - ae)^2 + (y - 0) = e^2\left[\left(x - \frac{a}{e}\right)^2 + 0\right]$$

ഇതിനെ ചുരുക്കുമ്പോൾ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1$ കിട്ടുന്നു.

$1 - e^2$ എന്നത് ഒരു ധന അളവ് ആയതിനാൽ $b^2 = a^2(1 - e^2)$ എന്നെഴുതാം

$ae = c$, $b^2 = a^2 - c^2$ എന്നെഴുതാം.

അപ്പോൾ P യുടെ ലോക്കസ് $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ എന്ന് കിട്ടുന്നു. ഇത് അടിസ്ഥാന രൂപത്തിലുള്ള ഒരു ദീർഘ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യമാണ്. കൂടാതെ ഇത് x, y അക്ഷങ്ങൾക്ക് പ്രതിസാമ്യമാണ്.

സിദ്ധാന്തം 5.4

(1) AA' എന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തെ ദീർഘവൃത്തത്തിന്റെ ദീർഘാക്ഷം എന്ന് വിളിക്കുന്നു. ഇതിന്റെ നീളം $2a$ ആണ്.

(2) BB' എന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തെ ദീർഘവൃത്തത്തിന്റെ ഹ്രസ്വാക്ഷം എന്ന് വിളിക്കുന്നു. ഇതിന്റെ നീളം $2b$ ആണ്.

(3) രേഖാഖണ്ഡം CA = രേഖാഖണ്ഡം CA' = **അർദ്ധ ദീർഘ അക്ഷം = a** കൂടാതെ രേഖാഖണ്ഡം CB = രേഖാഖണ്ഡം CB' = **അർദ്ധ അക്ഷം = b** .

(4) പ്രതിസാമ്യത പ്രകാരം $S'(-ae, 0)$ എന്നത് ഫോക്കസ്സും $x = -\frac{a}{e}$ എന്നത് ഡയറക്ട്രിക്സ് l' എന്നും എടുത്താൽ അതേ ദീർഘവൃത്തം ലഭിക്കും.

അങ്ങനെ ഒരു ദീർഘവൃത്തത്തിന്, $S(ae, 0)$, $S'(-ae, 0)$ എന്നിങ്ങനെ രണ്ട് ഫോക്കസ്സുകളും $A(a, 0)$ കൂടാതെ $A'(-a, 0)$ എന്നിങ്ങനെ രണ്ട് ശീർഷങ്ങളും, $x = \frac{a}{e}$, $x = -\frac{a}{e}$ എന്നിങ്ങനെ രണ്ട് ഡയറക്ട്രിക്സുകളും ഉണ്ടെന്ന് കാണാം.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 186 14-02-2023 18:40:01

ഉദാഹരണം 5.15

ദീർഘവൃത്തം $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ന്റെ ലാറ്റസ് റെക്ടത്തിന്റെ നീളം കാണുക .

നിർദ്ധാരണം

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ എന്ന ദീർഘവൃത്തത്തിന്റെ ലാക്റ്റസ് റെക്ട LL' (ചിത്രം 5.22) $S(ae,0)$ വഴി ചെല്ലുന്നു.

അതിനാൽ L (ae,y_1) .

$$\frac{a^2e^2}{a^2}+\frac{{y_1}^2}{b^2}=1$$

$$\frac{{y_1}^2}{b^2}=1-e^2$$

$${y_1}^2=b^2(1-e^2)$$

$$=b^2\left(\frac{b^2}{a^2}\right) \quad \left(\text{കാരണം } e^2=1-\frac{b^2}{a^2}\right)$$

$$y_1=\pm\frac{b^2}{a}.$$

അതായത് ലാറ്റസ് റെക്ടത്തിന്റെ അഗ്ര ബിന്ദുക്കൾ L കൂടാതെ L' എന്നിവ യഥാക്രമം $\left(ae,\frac{b^2}{a}\right)$ കൂടാതെ $\left(ae,-\frac{b^2}{a}\right)$ എന്നിവയാണ് .

ലാറ്റസ് റെക്ടത്തിന്റെ നീളം $LL'=\frac{2b^2}{a}$.

(ii) കേന്ദ്രം (h,k) ആയ ദീർഘ വൃത്തത്തിന്റെ വിവിധ തരങ്ങൾ

(a) x- അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായ ദീർഘാക്ഷം

ദീർഘവൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം (ചിത്രം 5.24)

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1,\ a>b \text{ ആണ്}$$

ദീർഘാക്ഷത്തിന്റെ നീളം $2a$ ആണ്. കൂടാതെ ഹ്രസ്വാക്ഷത്തിന്റെ നീളം $2b$ ആണ്. നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ $(h+a,k)$ കൂടാതെ $(h-a,k)$ എന്നിവയാണ്. ഫോക്കസ്സുകളുടെ നിർദ്ദേശാങ്കം $(h+c,k)$ കൂടാതെ $(h-c,k)$ ഇവിടെ $c^2=a^2-b^2$.

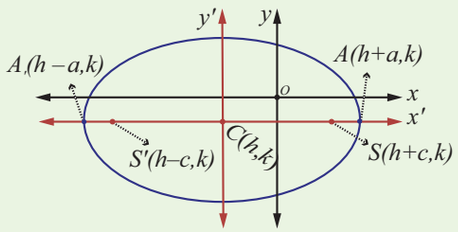
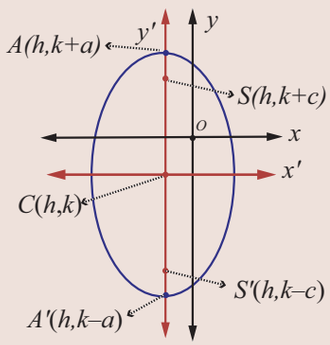
(b) y- അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായ ദീർഘാക്ഷം

ദീർഘവൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം (ചിത്രം 5.25)

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1,\ a>b \text{ ആണ്}$$

ദീർഘാക്ഷത്തിന്റെ നീളം $2a$. കൂടാതെ ഹ്രസ്വാക്ഷത്തിന്റെ നീളം $2b$. ആണ്. അപ്പോൾ നിദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ $(h,k+a)$ കൂടാതെ $(h,k-a)$, എന്നിവയാണ്. ഫോക്കസ്സുകളുടെ നിർദ്ദേശാങ്കം $(h,k+c)$ കൂടാതെ $(h,k-c)$, ഇവിടെ $c^2=a^2-b^2$.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 187 14-02-2023 18:40:19

സമവാക്യം	കേന്ദ്രം	ദീർഘാക്ഷം	ശീർഷങ്ങൾ	ഫോക്കസുകൾ
$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \quad \boxed{a^2>b^2}$  ചിത്രം 5.24 (a) ദീർഘാക്ഷം x- അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമാണ് ഫോക്കസ്സുകൾ കേന്ദ്രത്തിന്റെ c യൂണിറ്റ് വലതു വശത്തും c യൂണിറ്റ് ഇടതുവശത്തും ആയിരിക്കും, ഇവിടെ $c^2=a^2-b^2$.	(h,k)	x-അക്ഷത്തിന് സമാന്തരം	$(h-a,k)$ $(h+a,k)$	$(h-c,k)$ $(h+c,k)$
$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1 \quad \boxed{a^2>b^2}$  ചിത്രം 5.25 (b) ദീർഘാക്ഷം y- അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമാണ് ഫോക്കസ്സുകൾ കേന്ദ്രത്തിന്റെ c യൂണിറ്റ് വലതു വശത്തും c യൂണിറ്റ് ഇടതുവശത്തും ആയിരിക്കും, ഇവിടെ $c^2=a^2-b^2$.	(h,k)	y-അക്ഷത്തിന് സമാന്തരം	$(h,k-a)$ $(h,k+a)$	$(h,k-c)$ $(h,k+c)$

നിർദ്ധാരണം 5.5

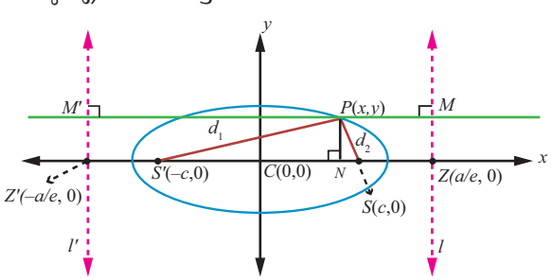
ദീർഘവൃത്തത്തിലെ ഏത് ബിന്ദുവിന്റെയും ഫോക്കൽ ദൂരത്തിന്റെ ആകെ തുക ദീർഘാക്ഷത്തിന്റെ നീളത്തിന് തുല്യമാണ്.

തെളിവ്

$P(x,y)$ എന്നത് ദീർഘവൃത്തം $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ലെ ഒരു ബിന്ദു എന്നിരിക്കട്ടെ.

P വഴി MM' വരയ്ക്കുക. ഇത് ഡയറക്ട്രിക്സുകൾ l, l' ന് ലംബമായിരിക്കും.

x - അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായ PN വരയ്ക്കുക.



ചിത്രം 5.26

നിർവചനം അനുസരിച്ച് $SP = ePM$

$= eNZ$

$= e[CZ-CN]$

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 188 14-02-2023 18:40:31

$$= e\left[\frac{a}{2} - x\right] = a - ex \qquad \ldots (1)$$

$$\begin{aligned} SP' &= ePM' \\ &= e[CN + CZ'] \\ &= e\left[x + \frac{a}{e}\right] = ex + a \end{aligned} \qquad \ldots (2)$$

$$SP + S'P = a - ex + a + ex = 2a$$

32USZ

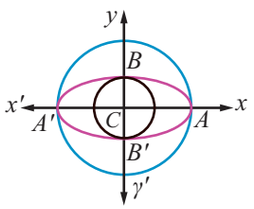
കുറിപ്പ്

$b = a$, ആയിരിക്കുമ്പോൾ $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, എന്ന സമവാക്യം $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$ എന്ന് മാറും. വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം (h, k) ഉം വ്യാസാർദ്ധം a ആണ്.

$b = a$ ആയിരിക്കുമ്പോൾ, $e = \sqrt{1 - \frac{a^2}{a^2}} = 0$. **അതിനാൽ വൃത്തത്തിന്റെ ഉത്കേന്ദ്രത പൂജ്യമാണ്.**

$\frac{SP}{PM} = 0 \rightarrow PM \rightarrow \infty$. അതായത് വൃത്തത്തിന്റെ ഡയറക്ട്രിക്സ് അനന്തമാണ്.

കുറിപ്പ്



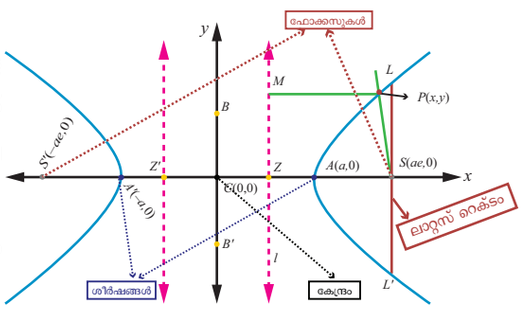
ചിത്രം 5.27

ദീർഘാക്ഷം വ്യാസമായി വരുന്ന വൃത്തമാണ് ഓക്സിലറി വൃത്തം അല്ലെങ്കിൽ പരിവൃത്തം. ഹ്രസ്വാക്ഷം വ്യാസമായി വരുന്ന വൃത്തമാണ് അന്തർവൃത്തം. ഇവയുടെ സമവാക്യം യഥാക്രമം $x^2 + y^2 = a^2$ കൂടാതെ $x^2 + y^2 = b^2$ ആകുന്നു.

5.3.4 ഹൈപ്പർബോള

ഒരു തലത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു ബിന്ദുവിനും ഒരു സ്ഥിരബിന്ദു (focus) ൽ നിന്നുള്ള ദൂരവും ഡയറക്ട്രിക്സിൽ നിന്നുള്ള ദൂരവും തമ്മിലുള്ള അനുപാതം (ഉൾകേന്ദ്രത) 1- ൽ കൂടുതലായിരുന്നാൽ ആ ബിന്ദുവിന്റെ ലോക്കസ്സിനെ ഹൈപ്പർബോള എന്ന് പറയുന്നു. സ്ഥിരാനുപാതത്തെ e $(e > 1)$ എന്ന് കുറിക്കുന്നു.

(i) കേന്ദ്രം (0, 0) ആയ സ്റ്റാൻഡേർഡ് രൂപത്തിലുള്ള ആയ ഹൈപ്പർബോളയുടെ സമവാക്യം



ചിത്രം 5.28

S എന്നത് ഫോക്കസ്സും, e എന്നത് ഡയറക്ട്രിക്സിലുള്ള ഒരു രേഖയും $e > 1$ ഒരു ഉത്കേന്ദ്രതയുമായാൽ $P(x, y)$ എന്നത് ഒരു ചലിക്കുന്ന ബിന്ദുവായിരിക്കും. SZ കൂടാതെ PM എന്നിവ l ന് ലംബമായി വരയ്ക്കുക.

A, A' എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ SZ നെ $e:1$ എന്ന അനുപാതത്തിൽ ആന്തരികമായും ബാഹ്യമായും വിഭജിക്കുന്നു.

$AA' = 2a$ എന്നെടുക്കുക AA' ൽ ലംബ ദ്വിഭാജി ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദു C എന്നിരിക്കട്ടെ എങ്കിൽ $CA = CA' = a$. C എന്നത് മൂല ബിന്ദുവും CZ എന്ന രേഖ x - അക്ഷമായും AA' ന്റെ ലംബ ദ്വിഭാജി y -അക്ഷമായും സ്വീകരിച്ചാൽ.

നിർവചനത്തിൽ നിന്ന്, $\frac{AS}{AZ} = e$ കൂടാതെ $\frac{A'S}{A'Z} = e$.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 189 14-02-2023 18:41:00

$\Rightarrow \quad AS = eAZ$ $\qquad\qquad$ $A'S = eA'Z$

$\Rightarrow \quad CS - CA = e(CA - CZ)$ $\qquad\qquad$ $A'C + CS = e(A'C + CZ)$

$\Rightarrow \quad CS - a = e(a - CZ) \ldots (1)$ $\qquad\qquad$ $a + CS = e(a + CZ) \ldots (2)$

$(1)+(2)$ ൽ നിന്നും $CS = ae$ കൂടാതെ $(2)-(1)$ ൽ നിന്നും $CZ = \frac{a}{e}$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

അതിനാൽ S ന്റെ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ $(ae, 0)$, $PM = x - \frac{a}{e}$ കൂടാതെ ടയറക്ട്രിക്സിന്റെ സമവാക്യം $x - \frac{a}{e} = 0$ എന്ന് കിട്ടുന്നു..

$P(x, y)$ എന്നത് ഹൈപ്പർബോളയിലുള്ള ഒരു ബിന്ദു കോണിക്സിന്റെ നിർവചനം അനുസരിച്ച്.

$$\frac{SP}{PM} = e \;\Rightarrow\; SP^2 = e^2 PM^2 .$$

അതിനാൽ $(x-ae)^2 + (y-0)^2 = e^2\left(x - \frac{a}{e}\right)^2$

$\Rightarrow \quad (x-ae)^2 + y^2 = (ex - a)^2$

$\Rightarrow \quad (e^2-1)x^2 - y^2 = a^2(e^2-1)$

$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(e^2-1)} = 1$ കാരണം $e > 1, a^2\left(e^2-1\right) > 0$. $a^2(e^2-1) = b^2$ എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ നമുക്ക് P യുടെ ലോക്കസ് $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ എന്ന് കിട്ടുന്നു. ഇത് ഹൈപ്പർബോളയുടെ സ്റ്റാൻഡേർഡ് രൂപത്തിലുള്ള സമവാക്യമാണ്. കൂടാതെ ഇത് x അക്ഷത്തിനും y അക്ഷത്തിനും പ്രതിസാമ്യമാണെന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക. ഇവിടെ $ae = c$ എന്നെടുക്കുക $b^2 = c^2 - a^2$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

സിദ്ധാന്തം 5.5

(1) AA' എന്ന രേഖാഖണ്ഡം $2a$ നീളമുള്ള തിരഛ്ശീന അക്ഷമാണ്.

(2) BB' എന്ന രേഖാഖണ്ഡം $2b$ നീളമുള്ള സംയോജിത അക്ഷമാണ്.

(3) രേഖാഖണ്ഡം CA = രേഖാഖണ്ഡം CA' = **അർദ്ധ നിരശ്ചീന അക്ഷം = a**

രേഖാഖണ്ഡം CB = രേഖാഖണ്ഡം CB' = **അർദ്ധ സംയോജിത അക്ഷം = b** .

(4) പ്രതിസാമ്യത പ്രകാരം $S'(-ae, 0)$ ഫോക്കസായും, $x = -\frac{a}{e}$ ഡയറക്ട്രിക്സ് ആയും l' അതേ ഹൈപ്പർബോളയായും എടുക്കുന്നു. എങ്കിൽ നമുക്ക് ഒരു ഹൈപ്പർബോളക്ക് $S(ae, 0)$, $S'(-ae, 0)$ എന്നീ രണ്ട് ഫോക്കസുകളും $A(a, 0)$ കൂടാതെ $A'(-a, 0)$ എന്നീ രണ്ട് ശീർഷങ്ങളും കൂടാതെ $x = \frac{a}{e}$ കൂടാതെ $x = -\frac{a}{e}$ എന്നീ രണ്ട് ഡയറക്ട്രിസുകളും ഉണ്ടെന്ന് കാണാം.

ഹൈപ്പർബോളയുടെ ലാക്റ്റസ് റെക്ടത്തിന്റെ നീളം $\frac{2b^2}{a}$ എന്ന് ദീർഘവൃത്തത്തിന് കിട്ടിയതുപോലെ കിട്ടാം.

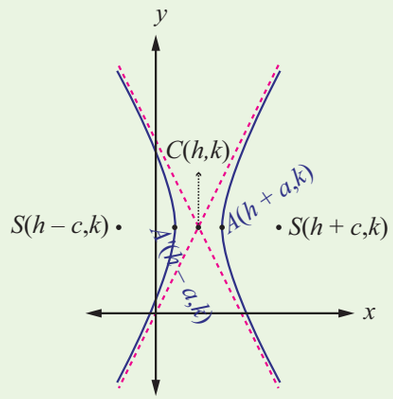
അനന്തതാസ്പർശകം

$y = f(x)$ എന്ന് നിർവചിച്ചിരിക്കുന്ന വക്രത്തിലെ ഒരു ബിന്ദു $P(x, y)$ ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്ന് കൂടുതൽ കൂടുതൽ അകലങ്ങളിലേക്ക് സഞ്ചരിക്കുമ്പോൾ P യും ഒരു സ്ഥിരരേഖയും തമ്മിലുള്ള അകലം പൂജ്യത്തോട് അടുക്കുന്നു. ഈ സ്ഥിരരേഖയെ അനന്തതാസ്പർശകം എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

ഹൈപ്പർബോളയ്ക്ക് അനന്തതാസ്പർശകം ഉണ്ട്. എന്നാൽ പരാബോളയ്ക്കും ദീർഘവൃത്തത്തിനും ഇല്ല എന്നും ശ്രദ്ധിക്കുക.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 190 14-02-2023 18:41:47

(ii) കേന്ദ്രം (h, k) ആയ ഹൈപ്പർബോളയുടെ തരങ്ങൾ



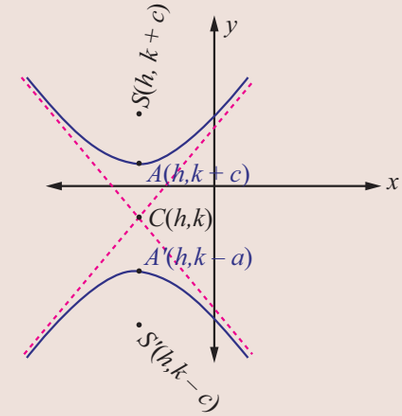
ചിത്രം 5.29

(a) x-അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായ തിരശ്ചീന അക്ഷം

(a) x-അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായ തിരശ്ചീന അക്ഷം.

കേന്ദ്രം $C(h,k)$ ആയ ഹൈപ്പർബോളയുടെ സമവാക്യം (ചിത്രം 5.29) $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ ആണ്. ശീർഷത്തിന്റെ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ $A(h+a,k)$ കൂടാതെ $A'(h-a,k)$ ഫോക്കസ്സുകളുടെ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ $S(h+c,k)$ കൂടാതെ $S'(h-c,k)$ ഇവിടെ $c^2=a^2+b^2$.

ഡയറക്ട്രിക്സുകളുടെ സമവാക്യങ്ങൾ $x=h\pm\frac{a}{e}$.



ചിത്രം 5.30

(b) y-അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായ തിരശ്ചീന അക്ഷം

(b) y-അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായ തിരശ്ചീന അക്ഷം

കേന്ദ്രം $C(h,k)$ ആയ ഹൈപ്പർബോളയുടെ സമവാക്യം (ചിത്രം 5.30)

$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$ ആണ്. ശീർഷത്തിന്റെ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ $A(h,k+a)$, $A'(h,k-a)$. ഫോക്കസ്സുകളുടെ നിർദ്ദേശങ്ങൾ $S(h,k+c)$, $S'(h,k-c)$, ഇവിടെ $c^2=a^2+b^2$.

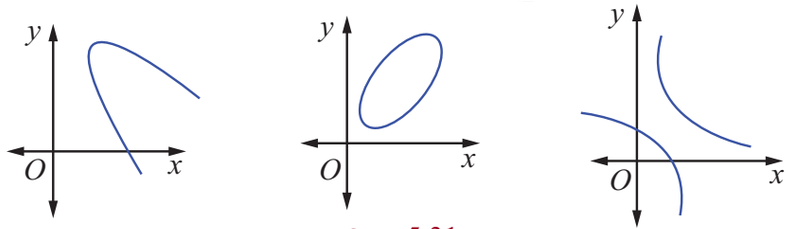
ഡയറക്ട്രിക്സുകളുടെ സമവാക്യങ്ങൾ $y=k\pm\frac{a}{e}$.

കുറിപ്പ്

(1) ഹൈപ്പർബോളയുടെ തിരശ്ചീന അക്ഷത്തെ വ്യാസമാക്കി വരയുന്ന വൃത്തത്തെ ഹൈപ്പർബോളയുടെ സഹായ വൃത്തം എന്ന് വിളിക്കുന്നു. ഇതിന്റെ സമവാക്യം $x^2+y^2=a^2$ എന്നാക്കുന്നു.

(2) ഹൈപ്പർബോളയിലെ ഏതൊരു ബിന്ദുവിൽ നിന്നും ഫോക്കസ്സിലേക്കുള്ള അകലങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം സ്ഥിരമായിരിക്കുകയും ഇത് തിരശ്ചീന അക്ഷത്തിന്റെ നീളത്തിന് തുല്യമായിരിക്കുകയും ചെയ്യും. അതായത് $|PS-PS'|=2a$ (ദീർഘവൃത്തത്തിന് സമാനമായി തെളിയിക്കാം)

ഇതുവരെ നാം പരാബോളയുടെ നാല് സ്റ്റാൻഡേർഡ് രൂപങ്ങളെ കുറിച്ചും, രണ്ട് തരം ദീർഘ വൃത്തങ്ങൾ കൂടാതെ രണ്ട് തരം ഹൈപ്പർബോളകളെ കുറിച്ചും ചർച്ച ചെയ്തു. ഇതുകൂടാതെ ഈ സ്റ്റാൻഡേർഡ് രൂപത്തിൽ തരംതിരിക്കാൻ സാധിക്കാത്ത ധാരാളം പരാബോളകൾ, ദീർഘ വൃത്തങ്ങൾ, ഹൈപ്പർബോളകൾ എന്നിവയുണ്ട്. ഉദാഹരണത്തിന് താഴെപറയുന്ന പരാബോള, ദീർഘവൃത്തം, ഹൈപ്പർബോള എന്നിവയെ പരിഗണിക്കാം.

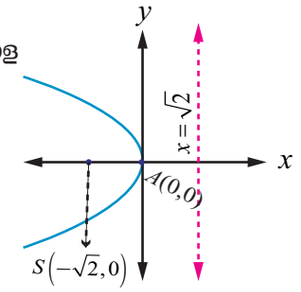


ചിത്രം 5.31

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 191 14-02-2023 18:41:59

ഉദാഹരണം 5.16

ഫോക്കസ് $\left(-\sqrt{2},0\right)$ ഡയറക്ട്രിക്സ് $x=\sqrt{2}$ എന്നിവ ഉപയോഗിച്ച് പരാബോള യുടെ സമവാക്യം കണ്ടെത്തുക .



ചിത്രം 5.32

നിർദ്ധാരണം

പരാബോള ഇടതുവശത്തേയ്ക്ക് തുറന്നതും x - അക്ഷത്തിന് പ്രതിസാമ്യവും ശീർഷം $(0,0)$ ഉം ആണ്.

അതിനാൽ ആവശ്യമായ പരാബോളയുടെ സമവാക്യം

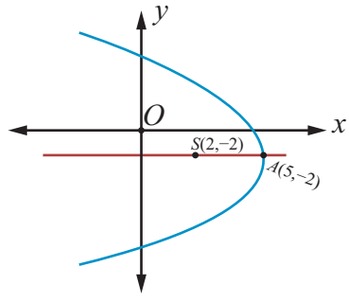
$$(y-0)^2 = -4\sqrt{2}(x-0)$$

$$\Rightarrow \quad y^2 = -4\sqrt{2}\,x\,.$$

ഉദാഹരണം 5.17

ശീർഷകം $(5,-2)$ ഉം ഫോക്കസ് $(2,-2)$ ഉം ആയ പരാബോളയുടെ സമവാക്യം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം



ചിത്രം 5.33

തന്നിട്ടുള്ളവ $A(5,-2)$ കൂടാതെ ഫോക്കസ് $S(2,-2)$ ഫോക്കസ് ദൂരം $AS=a=3$.

പരാബോള ഇടതുവശത്തേക്ക് തുറന്നതും x -അക്ഷത്തിന് സമാന്തരവുമാണ്.

അതിനാൽ ആവശ്യമായ പരാബോളയുടെ സമവാക്യം

$$(y+2)^2 = -4(3)(x-5)$$

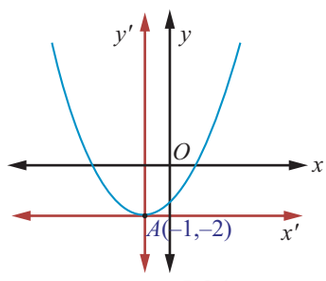
$$\Rightarrow \quad y^2+4y+4 = -12x+60$$

$$\Rightarrow \quad y^2+4y+12x-56 = 0\,.$$

ഉദാഹരണം 5.18

ശീർഷം $(-1,-2)$ ഉം അക്ഷം y - അക്ഷത്തിന് സമാന്തരവും $(3,6)$ എന്ന ബിന്ദുവഴി ചെല്ലുന്നതുമായ പരാബോളയുടെ സമവാക്യം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം



ചിത്രം 5.34

അക്ഷം y - അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായതിനാൽ ആവശ്യമായ സമവാക്യം

$$(x+1)^2 = 4a(y+2)\,.$$

ഇത് $(3,6)$ എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നു ചെല്ലുന്നതിനാൽ

$$(3+1)^2 = 4a(6+2)$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}\,.$$

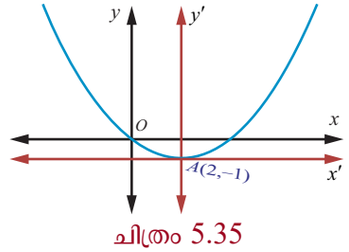
പരാബോളയുടെ സമവാക്യം $(x+1)^2 = 2(y+2)$ എന്നതിനെ ലഘൂകരിക്കുമ്പോൾ,

$x^2+2x-2y-3 = 0$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

ഉദാഹരണം 5.19

$x^2-4x-5y-1=0.$ എന്ന പരാബോളയുടെ ശീർഷം, ഫോക്കസ്, ടയറക്ട്രിക്സ് കൂടാതെ ലാറ്റസ് റെക്ടം എന്നിവ കാണുക

നിർദ്ധാരണം



ചിത്രം 5.35

പരാബോളയുടെ സമവാക്യം,

$$x^2-4x-5y-1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2-4x = 5y+1$$

$$\Rightarrow \quad x^2-4x+4 = 5y+1+4\,.$$

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 192 14-02-2023 18:42:18

$\Rightarrow \quad (x-2)^2 = 5(y+1)$ ഇത് സ്റ്റാൻഡേർഡ് രൂപത്തിലാണ്, $4a = 5$ കൂടാതെ ശീർഷം $(2,-1)$ ഉം, ഫോക്കസ് $\left(2, \frac{1}{4}\right)$ ഉം ആകുന്നു.

ഡയറക്ട്രിക്സിന്റെ സമവാക്യം $y - k + a = 0$

$$y + 1 + \frac{5}{4} = 0$$

$$4y + 9 = 0 .$$

ലാറ്റക്സ് റെക്ടത്തിന്റെ നീളം 5 യൂണിറ്റ്.

ഉദാഹരണം 5.20

ഫോക്കസ്സുകൾ $(\pm 2, 0)$, ശീർഷങ്ങൾ $(\pm 3, 0)$ ആയ ദീർഘവൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക.

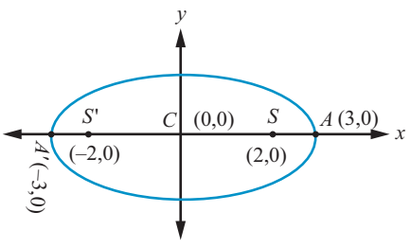
നിർദ്ധാരണം

ചിത്രം 5.36, ൽ നിന്നും

$SS' = 2c$ കൂടാതെ $2c = 4$; $A'A = 2a = 6$

$\Rightarrow \quad c = 2$ കൂടാതെ $a = 3$,

$\Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 4 = 5$.



ചിത്രം 5.36

$a > b$ ആയതിനാൽ ദീർഘാക്ഷം x - അക്ഷത്തിലാണ് കേന്ദ്രം (0, 0) കൂടാതെ ഫോക്കസ്സുകൾ $(\pm 2, 0)$.

അതിനാൽ ദീർഘ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$.

ഉദാഹരണം 5.21

ഉൾകേന്ദ്രത (eccentricity) $\frac{1}{2}$, ഫോക്കസുകളിൽ ഒരെണ്ണം $(2,3)$ ഒരു ഡയറക്ട്രിക്സ് $x = 7$ ആണ്. എങ്കിൽ ദീർഘവൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക. കൂടാതെ ദീർഘവൃത്തത്തിന്റെ ദീഘ, ഹ്രസ്വ അക്ഷങ്ങളുടെ നീളം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

കോണിക്സിന്റെ നിർവചനം അനുസരിച്ച്, $\frac{SP}{PM} = e$ അല്ലെങ്കിൽ $SP^2 = e^2 PM^2$.

അപ്പോൾ, $(x-2)^2 + (y-3)^2 = \frac{1}{4}(x-7)^2$

$\Rightarrow \quad 3x^2 + 4y^2 - 2x - 24y + 3 = 0$

$\Rightarrow \quad 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + 4(y-3)^2 = 3\left(\frac{1}{9}\right) + 4 \times 9 - 3 = \frac{100}{3}$

$\Rightarrow \quad \frac{\left(x - \frac{1}{3}\right)^2}{\frac{100}{9}} + \frac{(y-3)^2}{\frac{100}{12}} = 1$ ഇത് സ്റ്റാൻഡേർഡ് രൂപം ആണ്.

അതുകൊണ്ട് ദീർഘാക്ഷത്തിന്റെ നീളം $= 2a = 2\sqrt{\frac{100}{9}} = \frac{20}{3}$ കൂടാതെ

ഹ്രസ്വാക്ഷത്തിന്റെ നീളം $= 2b = 2\sqrt{\frac{100}{12}} = \frac{10}{\sqrt{3}}$.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 193 14-02-2023 18:42:35

ഉദാഹരണം 5.22

$4x^2+36y^2+40x-288y+532=0$ എന്ന കോണിക്സിന്റെ ദീർഘ, ഹ്രസ്വ അക്ഷത്തിന്റെ നീളം, ഫോക്കസ്സ്, കൂടാതെ ശീർഷങ്ങൾ എന്നിവ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$4x^2+36y^2+40x-288y+532=0$ എന്നതിൽ x, y എന്നിവയെ പൂർണ്ണ വർഗ്ഗമാക്കുക,

$$4(x^2+10x+25-25)+36(y^2-8y+16-16)+532 = 0,$$

$$4(x^2+10x+25)+36(y^2-8y+16) = -532+100+576$$

$$4(x+5)^2+36(y-4)^2 = 144.$$

ഇരുവശവും 144 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ

$$\frac{(x+5)^2}{36}+\frac{(y-4)^2}{4}=1.$$

ഇത് കേന്ദ്രം $(-5,4)$ ഉള്ള ഒരു ദീർഘവൃത്തമാണ്. ദീർഘാക്ഷം x - അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമാണ്, ദീർഘാക്ഷത്തിന്റെ നീളം 12 ഉം ഹ്രസ്വാക്ഷത്തിന്റെ നീളം 4 ഉം ആണ്. വികർണ്ണങ്ങൾ $(1,4)$ കൂടാതെ $(-11,4)$ ആകുന്നു.

$$\text{ഇപ്പോൾ, } c^2 = a^2-b^2 = 36-4 = 32$$

$$\text{കൂടാതെ } c = \pm 4\sqrt{2}.$$

അതിനാൽ ഫോക്കസ്സുകൾ $\left(-5-4\sqrt{2},4\right)$ കൂടാതെ $\left(-5+4\sqrt{2},4\right)$.

ദീർഘാക്ഷത്തിന്റെ നീളം $= 2a = 12$ യൂണിറ്റുകൾ

ഹ്രസ്വാക്ഷത്തിന്റെ നീളം $= 2b = 4$ യൂണിറ്റുകൾ.

ഉദാഹരണം 5.23

$4x^2+y^2+24x-2y+21=0$, എന്ന ദീർഘ വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം, ശീർഷങ്ങൾ കൂടാതെ ഫോക്കസ്സ് എന്നിവ കാണുക. കൂടാതെ ലാറ്റസ് റെക്ടത്തിന്റെ നീളം 2 ആണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

പദങ്ങളെ പുനക്രമീകരിക്കുമ്പോൾ ദീർഘവൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം

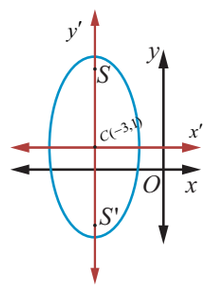
$$4x^2+24x+y^2-2y+21 = 0$$

$$\text{അതായത്, } 4\left(x^2+6x+9-9\right)+\left(y^2-2y+1-1\right)+21 = 0,$$

$$4(x+3)^2-36+(y-1)^2-1+21 = 0,$$

$$4(x+3)^2+(y-1)^2 = 16,$$

$$\frac{(x+3)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{16} = 1.$$



ചിത്രം 5.37

കേന്ദ്രം $(-3,1)$ $a=4$, $b=2$, കൂടാതെ ദീർഘാക്ഷം y - അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമാണ്

$$c^2 = 16-4=12$$

$$c = \pm 2\sqrt{3}.$$

അതിനാൽ ഫോക്കസ്സുകൾ $\left(-3,2\sqrt{3}+1\right)$ കൂടാതെ $\left(-3,-2\sqrt{3}+1\right)$.

ശീർഷങ്ങൾ $\left(-3,\pm 4+1\right)$. അതായത് $(-3,5)$ കൂടാതെ $(-3,-3)$,

ലാറ്റസ് റെക്ടത്തിന്റെ നീളം $= \frac{2b^2}{a} = 2$ മാത്രകൾ. (ചിത്രം. 5.37)

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 194 14-02-2023 18:42:58

ഉദാഹരണം 5.24

ശീർഷങ്ങൾ $(0,\pm4)$ കൂടാതെ ഫോക്കസ്സ് $(0,\pm6)$ ആയ ഹൈപ്പർബോളയുടെ സമവാക്യം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

ഫോക്കസ്സുകളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖയുടെ മദ്ധ്യ ബിന്ദുവാണ് $C(0,0)$ (ചിത്രം 5.38).

തിരശ്ചീന അക്ഷം y - അക്ഷമാണ്

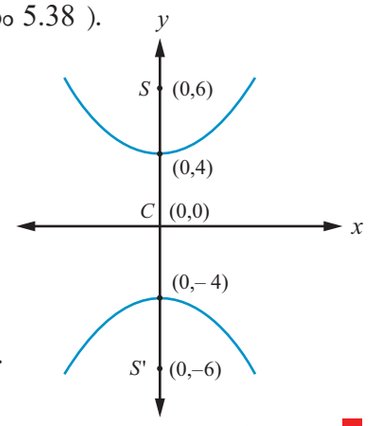
$$AA' = 2a \Rightarrow 2a = 8,$$

$$SS' = 2c = 12, c = 6$$

$$a = 4$$

$$b^2 = c^2 - a^2 = 36 - 16 = 20.$$

അതിനാൽ ആവശ്യമായ ഹൈപ്പർബോളയുടെ സമവാക്യം $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{20} = 1.$



ചിത്രം 5.38

ഉദാഹരണം 5.25

$9x^2 - 16y^2 = 144$ എന്ന ഹൈപ്പർബോളയുടെ ശീർഷങ്ങൾ, ഫോക്കസ് എന്നിവ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$9x^2 - 16y^2 = 144$ എന്ന സമവാക്യത്തെ അടിസ്ഥാന രൂപത്തിലാക്കിയാൽ,

$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

തിരശ്ചീന അക്ഷം x - അക്ഷത്തിലാണ് അതിനാൽ ശീർഷങ്ങൾ $(-4,0)$ കൂടാതെ $(4,0)$;

കൂടാതെ $c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25,\ c = 5.$

അതിനാൽ ഫോക്കസ്സ് $(-5,0)$ കൂടാതെ $(5,0)$.

ഉദാഹരണം 5.26

$11x^2 - 25y^2 - 44x + 50y - 256 = 0$ എന്ന ഹൈപ്പർബോളയുടെ കേന്ദ്രം, ഫോക്കസ്സ്, ഉൾകേന്ദ്രത എന്നിവ കാണുക

നിർദ്ധാരണം

ഹൈപ്പർബോളയുടെ സമവാക്യത്തിലെ പദങ്ങളെ പുനക്രമീകരിച്ച് അടിസ്ഥാന രൂപത്തിലാക്കുക,

$$11(x^2 - 4x) - 25(y^2 - 2y) - 256 = 0$$

$$11(x-2)^2 - 25(y-1)^2 = 256 - 44 + 25$$

$$11(x-2)^2 - 25(y-1)^2 = 275$$

$$\frac{(x-2)^2}{25} - \frac{(y-1)^2}{11} = 1.$$

കേന്ദ്രം $(2,1)$, $a^2 = 25, b^2 = 11$

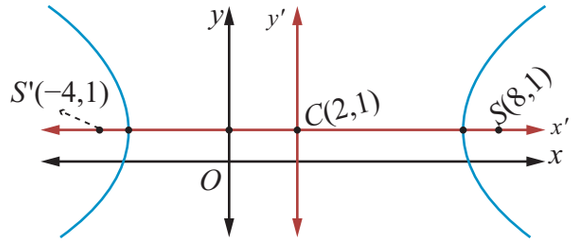
$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$= 25 + 11 = 36$$

അതിനാൽ, $c = \pm 6$

$e = \frac{c}{a} = \frac{6}{5}$ ഫോക്കസ്സിന്റെ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ $(8,1)$ കൂടാതെ $(-4,1)$ (ചിത്രം 5.39).

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 195 14-02-2023 18:43:19



ചിത്രം 5.39

ഉദാഹരണം 5.27

ഹാലിയുടെ ധൂമകേതുവിന്റെ ഭ്രമണ പഥം (ചിത്രം 5.51) 36.18 ജ്യോതിശാസ്ത്ര യൂണിറ്റ് നീളവും 9.12 വീതിയും ഉള്ള ഒരു ദീർഘ വൃത്തമാണ്. അതിന്റെ ഉൾകേന്ദ്രത കണ്ടെത്തുക.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ളവ $2a = 36.18,\ 2b = 9.12$ ഇതിൽ നിന്നും,

$$e = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \frac{\sqrt{\left(\frac{36.18}{2}\right)^2 - \left(\frac{9.12}{2}\right)^2}}{\frac{36.18}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{(18.09)^2-(4.56)^2}}{(8.09)} \approx 0.97\,.$$

കുറിപ്പ്

ഒരു അസ്ട്രോണമിക്കൽ യൂണിറ്റ് (സൂര്യനും ഭൂമിയും ഇടയിലുള്ള ശരാശരി ദൂരം) 1,49,597,870 കി.മീ ആണ് ഇത് ഭൂമിയുടെ ഭ്രമണപഥത്തിന്റെ അർദ്ധ ദീർഘാക്ഷത്തിന്റെ നീളം ആയിരിക്കും.

അഭ്യാസം 5.2

1. താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഓരോന്നിനും പരാബോളയുടെ സമവാക്യം കാണുക:
   (i) ഫോക്കസ് $(4,0)$ കൂടാതെ ഡയറക്ട്രിക്സ് $x=-4$.
   (ii) y - അക്ഷത്തിന് പ്രതിസാമ്യവും $(2,-3)$ ലൂടെ കടന്നുപോകുന്നു.
   (iii) ശീർഷകം $(1,-2)$ കൂടാതെ ഫോക്കസ്സ് $(4,-2)$.
   (iv) ലാറ്റസ് റെക്ടത്തിന്റെ അഗ്ര ബിന്ദുക്കൾ $(4,-8)$ കൂടാതെ $(4,8)$.

2. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ഓരോന്നിനും ദിർഘവൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക:
   (i) ഫോക്കസ്സ് $(\pm 3,0), e=\frac{1}{2}$.
   (ii) ഫോക്കസ്സ് $(0,\pm 4)$ കൂടാതെ ദീർഘാക്ഷത്തിന്റെ അഗ്ര ബിന്ദുക്കൾ $(0,\pm 5)$.
   (iii) ലാറ്റസ് റെക്ടത്തിന്റെ നീളം 8, ഉൾകേന്ദ്രത $e=\frac{3}{5}$, കേന്ദ്രം (0, 0) കൂടാതെ ദീർഘാക്ഷം x - അക്ഷത്തിലാണ്.
   (iv) ലാറ്റസ് റെക്ടത്തിന്റെ നീളം 4 ഫോക്കസ്സുകൾക്കിടയിലുള്ള ദൂരം $4\sqrt{2}$ കേന്ദ്രം (0, 0) കൂടാതെ ദീർഘാക്ഷം y - അക്ഷമാണ്.

3. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ഓരോന്നിനും ഹൈപ്പർബോളയുടെ സമവാക്യം കാണുക:
   (i) ഫോക്കസ്സ് $(\pm 2,0)$, ഉത്കേന്ദ്രത $=\frac{3}{2}$.
   (ii) കേന്ദ്രം $(2,1)$, ഒരു ഫോക്കസ് $(8,1)$ അനുബന്ധ ഡയറക്ട്രിക്സ് $x=4$.
   (iii) $(5,-2)$ വഴിചെല്ലുന്നതും x അക്ഷത്തിലൂടെയുള്ള തിരശ്ചീന അക്ഷത്തിന്റെ നീളം 8 യൂണിറ്റുമാണ്.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 196 14-02-2023 18:43:31

4. താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയുടെ ശീർഷകം, ഫോക്കസ്സ്, ഡയറക്ട്രിക്സിന്റെ സമവാക്യം, ലാറ്റസ് റെക്ടത്തിന്റെ നീളം എന്നിവ കാണുക:

(i) $y^2 = 16x$ (ii) $x^2 = 24y$ (iii) $y^2 = -8x$

(iv) $x^2 - 2x + 8y + 17 = 0$ (v) $y^2 - 4y - 8x + 12 = 0$

5. കോണിക്കിന്റെ തരം തിരിച്ചറിഞ്ഞ് അവയുടെ കേന്ദ്രം, ഫോക്കസ്സ്, ശീർഷങ്ങൾ കൂടാതെ ഡയറക്ട്രിക്സ് എന്നിവ കാണുക:

(i) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ (ii) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{10} = 1$ (iii) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$ (iv) $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$

6. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ എന്ന ഹൈപ്പർബോളയുടെ ലാറ്റസ് റെക്ടത്തിന്റെ നീളം $\frac{2b^2}{a}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

7. ഹൈപ്പർബോളയിലെ ഏതൊരു ബിന്ദുവും P യിൽ നിന്നും അതിന്റെ ഫോക്കൽ ദൂരങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം തിരശ്ചീന അക്ഷത്തിന്റെ നീളത്തിന് തുല്യമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

8. താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള സമവാക്യങ്ങളിൽ നിന്നും കോണിക്കിന്റെ തരം തിരിച്ചറിഞ്ഞ് അവയുടെ കേന്ദ്രം ഫോക്കസ്, ശീർഷങ്ങൾ കൂടാതെ ഡയറക്ട്രിക്സ് എന്നിവ കാണുക :

(i) $\frac{(x-3)^2}{225} + \frac{(y-4)^2}{289} = 1$ (ii) $\frac{(x+1)^2}{100} + \frac{(y-2)^2}{64} = 1$ (iii) $\frac{(x+3)^2}{225} - \frac{(y-4)^2}{64} = 1$

(iv) $\frac{(y-2)^2}{25} - \frac{(x+1)^2}{16} = 1$ (v) $18x^2 + 12y^2 - 144x + 48y + 120 = 0$

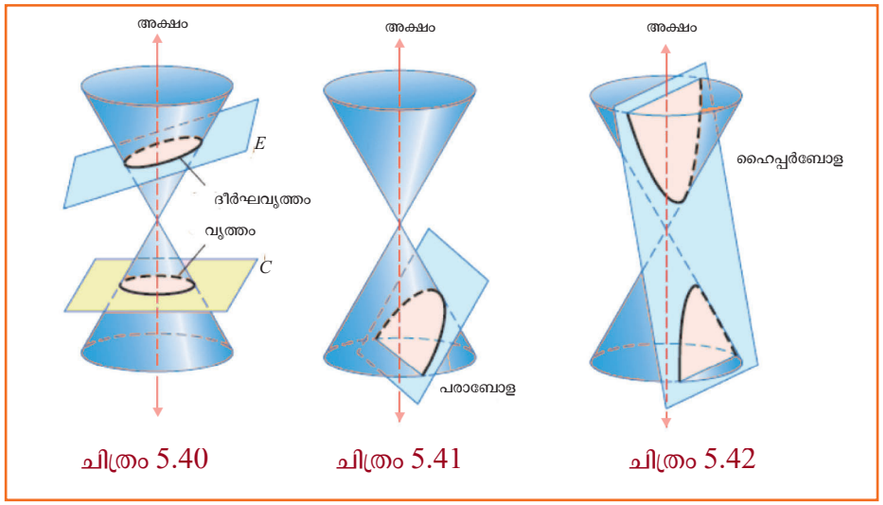
(vi) $9x^2 - y^2 - 36x - 6y + 18 = 0$

5.4 കോണിക് വിഭജനങ്ങൾ

ഭാഗം 5.3 ൽ ചർച്ച ചെയ്ത വക്രങ്ങളെ നിർണ്ണയിക്കുന്ന രീതിയെ കൂടാതെ കോണിക് വിഭജനങ്ങളുടെ ജ്യാമിതീയ വിവരണങ്ങൾ ഇവിടെ തന്നിട്ടുണ്ട്. വൃത്തം, ദീർഘവൃത്തം, പാരബോള, ഹൈപ്പർബോള, എന്നിവയുടെ ഗ്രാഫ് ലഭിക്കുന്നത് ഒരു ഇരട്ട വൃത്ത സ്തൂപികയെ ഒരു തലം ഉപയോഗിച്ച് വിഭജിക്കുമ്പോഴാണ്. ആയതിനാൽ ഈ ചിത്രങ്ങളെയെല്ലാം കോണിക് വിഭജനങ്ങൾ അല്ലെങ്കിൽ ലളിതമായ കോണിക് എന്ന് പറയുന്നു.

5.4.1 കോണിക് വിഭജനത്തിന്റെ ജ്യാമിതീയ വിവരണം

ഒരു ഇരട്ട വൃത്തസ്തൂപികയിലെ ഏതെങ്കിലും ഒന്നിൽ സ്തൂപികയുടെ അക്ഷത്തിന് ലംബമായുള്ള ഒരു തലം (തലം C) ഉപയോഗിച്ച് മുറിക്കുമ്പോൾ ഒരു വൃത്തം ലഭിക്കുന്നു. (ചിത്രം 5.40) ഇരട്ട വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ഏതെങ്കിലും ഒന്നിൽ അക്ഷത്തിന് ലംബമല്ലാതെ ചരിഞ്ഞ ഒരു തലം E ഉപയോഗിച്ച് മുറിച്ചാൽ ഒരു ദീർഘവൃത്തം ലഭിക്കും (ചിത്രം 5.40) തലം ഇരട്ടവൃത്തസ്തൂപികയിൽ ഏതെങ്കിലും ഒന്നിന്റെ പാർശ്വത്തിന് സമാന്തരമായാൽ ആ തലം വൃത്തസ്തൂപികയെ മുറിക്കുമ്പോൾ ഒരു പരാബോള ലഭിക്കുന്നു. (ചിത്രം 5.41) ഇരട്ട വൃത്തസ്തൂപികകളുടെ അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായ തലം ഉപയോഗിച്ച് രണ്ട് സ്തൂപികകളെയും മുറിക്കുമ്പോൾ ഹൈപ്പർബോള ലഭിക്കും (ചിത്രം 5.42).



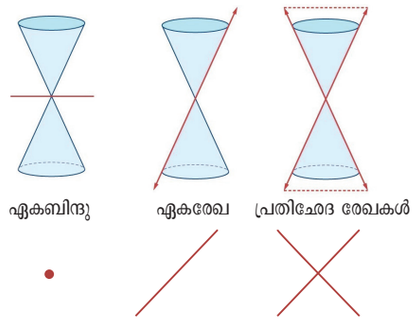
ചിത്രം 5.40 ചിത്രം 5.41 ചിത്രം 5.42

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 197 14-02-2023 18:43:45

5.4.2 അധഃപതിച്ച രൂപങ്ങൾ

കോണിക്കിന്റെ അധഃപതിച്ച രൂപങ്ങൾ (ചിത്രം 5.43) ഇരട്ട വൃത്തസ്തൂപികയെ വെട്ടുന്ന ഒരു തലത്തിന്റെ കോൺ കൂടാതെ അത് ശീർഷം വഴിയാണോ ചെല്ലുന്നത് എന്നതനുസരിച്ച് ഒരു ബിന്ദു, ഒരു നേർരേഖ, ഒരു ജോഡി രേഖകൾ, പ്രതിഛേദ രേഖകൾ അല്ലെങ്കിൽ ശൂന്യഗണമോ ആയിരിക്കും. തലം സിലിണ്ടറിന്റെ അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായാൽ അധഃപതിച്ച നിലയിൽ നിന്നും സിലിണ്ടറായി മാറും. കോണിക്കിനെ വെട്ടുന്ന തലം ഇരട്ട വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ ശീർഷം വഴിയായും അക്ഷത്തിന് ലംബമായും പോകുമ്പോൾ ഒരു ബിന്ദു കിട്ടുന്നു.

ഛേദിക്കുന്ന തലം ഇരട്ട വൃത്തസ്തൂപിക വഴിയായി ലംബമായി ചെല്ലുമ്പോൾ ഒരു നേർരേഖ അല്ലെങ്കിൽ ഒരു ജോഡി സ്പർശരേഖകൾ കിട്ടുന്നു. ഇത് പരാബോളയുടെ ഒരു അധഃപതിച്ച രൂപമാണ്. ഒരു കോണിക്കിന്റെ പൊതു സമവാക്യം $A = B = C = 0$ ൽ കൂടിയും ഛേദിക്കുന്ന തലം അക്ഷം വഴിയും, ഇരട്ട വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ കേന്ദ്രത്തിൽ കൂടിയും പോകുമ്പോൾ ഹൈപ്പർബോളയുടെ ഒരു അധഃപതിച്ച രൂപം കിട്ടുന്നു.



ചിത്രം 5.43

കുറിപ്പ്

ഒരു ദീർഘവൃത്തം $(0 < e < 1)$ എടുക്കുകയാണെങ്കിൽ $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ $e \to 0$, എങ്കിൽ $\frac{b}{a} \to 1$ അതായത്, $b \to a$ അല്ലെങ്കിൽ ദീർഘഛ്രസ്വ അക്ഷങ്ങളുടെ നീളം സമമാണ്. അതായത് ദിർഘവൃത്തം ഒരു വൃത്തമായി മാറുന്നു. $e \to 1$, ആണെങ്കിൽ $\frac{b}{a} \to 0$ കൂടാതെ ദീർഘവൃത്തം ഒരു നേർരേഖയായി മാറുന്നു. അതായത് ദീർഘവൃത്തം ഒരു പരന്നതാകും.

കുറിപ്പ്

ഒരു ഹൈപ്പർബോള $(e > 1)$ എടുക്കുകയാണെങ്കിൽ $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$, $e \to 1$, എങ്കിൽ $\frac{b}{a} \to 0$ അതായത് $e \to 1$, എങ്കിൽ b യുടെ വില a യുടെ വിലയെക്കാൾ ചെറുതാകും. കൂടാതെ ഹൈപ്പർബോള ഒരു കൂർമം ആയി മാറും. $e \to \infty$ എങ്കിൽ b എന്നത് a യുമായി വളരെ വലുതാണ്. അതായത് ഹൈപ്പർബോള ഒരു പരന്നതാകും.

5.4.3 കോണിക്കിന്റെ പൊതുസമവാക്യത്തിൽ നിന്ന് $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ ൽ നിന്നും കോണിക്സിനെ തിരിച്ചറിയൽ.

രണ്ടാം കൃതി സമവാക്യത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് താഴെപ്പറയുന്ന നിബന്ധനകൾക്ക് അനുസരിച്ച് ഒരു വൃത്തം, പരാബോള, ഒരു ദീർഘവൃത്തം, ഒരു ഹൈപ്പർബോള, ഒരു ബിന്ദു ,ഒരു ശൂന്യഗണം, ഒരു നേർരേഖ അല്ലെങ്കിൽ ഒരു ജോഡി നേർരേഖകൾ ആയിരിക്കും,

(1) $A = C = 1,\ B = 0, D = -2h,\ E = -2k,\ F = h^2 + k^2 - r^2$ ആണെങ്കിൽ പൊതു സമവാക്യം $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$, എന്ന് കിട്ടും. ഇത് ഒരു വൃത്തം ആകുന്നു.

(2) $B = 0$ കൂടാതെ A അല്ലെങ്കിൽ $C = 0$, ആണെങ്കിൽ പൊതുസമവാക്യം നാം പഠിച്ച ഏതെങ്കിലും ഒരു പരാബോള ആകാം.

(3) $A \neq C$ കൂടാതെ A കൂടാതെ C ഇവ രണ്ടും ഒരേ ചിഹ്നമായാൽ പൊതു സമവാക്യം ഒരു ദിർഘവൃത്തമാകും.

(4) $A \neq C$ കൂടാതെ A കൂടാതെ C ഇവ രണ്ടും വ്യത്യസ്ത ചിഹ്നമായാൽ പൊതുസമവാക്യം ഒരു ഹൈപ്പർ ബോള നൽകുന്നു.

(5) $A = C$ കൂടാതെ $B = D = E = F = 0$, ആണെങ്കിൽ പൊതുസമവാക്യം $x^2 + y^2 = 0$ എന്ന ബിന്ദുവായി മാറും.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 198 14-02-2023 18:43:59

(6) $A = C = F$ കൂടാതെ $B = D = E = 0$, ആണെങ്കിൽ പൊതുസമവാക്യം $x^2 + y^2 + 1 = 0$, എന്ന ശൂന്യ ഗണത്തെ നല്കും.

(7) $A \neq 0$ അല്ലെങ്കിൽ $C \neq 0$ കൂടാതെ ബാക്കിയുള്ളവ പൂജ്യവുമായാൽ, പൊതുസമവാക്യം നിർദ്ദേശാങ്ക അക്ഷങ്ങൾ ആകുന്നു.

(8) $A = -C$ കൂടാതെ വേറെ എല്ലാ സംഖ്യകളും പൂജ്യം ആണെങ്കിൽ പൊതുസമവാക്യം $x^2 - y^2 = 0$ എന്ന ഒരു ജോഡി നേർരേഖകൾ നൽകും.

ഉദാഹരണം 5.26

ഇനിപ്പറയുന്ന സമവാക്യങ്ങളിൽ നിന്നും കോണിക്കിന്റെ തരങ്ങളെ തിരിച്ചറിയുക:

(1) $16y^2 = -4x^2 + 64$ (2) $x^2 + y^2 = -4x - y + 4$

(3) $x^2 - 2y = x + 3$ (4) $4x^2 - 9y^2 - 16x + 18y - 29 = 0$

നിർദ്ധാരണം

ചോദ്യ നമ്പർ.	സമവാക്യം	നിബന്ധന	കോണിക്കിന്റെ തരം
1	$16y^2 = -4x^2 + 64$	3	ദീർഘവൃത്തം
2	$x^2 + y^2 = -4x - y + 4$	1	വൃത്തം
3	$x^2 - 2y = x + 3$	2	പരാബോള
4	$4x^2 - 9y^2 - 16x + 18y - 29 = 0$	4	ഹൈപ്പർബോള

അഭ്യാസം 5.3

താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള സമവാക്യങ്ങളിൽ നിന്നും കോണിക്കിന്റെ തരങ്ങളെ തിരിച്ചറിയുക.

1. $2x^2 - y^2 = 7$ 2. $3x^2 + 3y^2 - 4x + 3y + 10 = 0$ 3. $3x^2 + 2y^2 = 14$

4. $x^2 + y^2 + x - y = 0$ 5. $11x^2 - 25y^2 - 44x + 50y - 256 = 0$ 6. $y^2 + 4x + 3y + 4 = 0$

5.5 കോണിക്കിന്റെ പാരാമെട്രിക് രൂപം

5.5.1 പാരാമെട്രിക് സമവാക്യങ്ങൾ

$f(t)$ ഉം $g(t)$ ഉം 't' യിലെ ഫലനങ്ങളാണെന്ന് കരുതുക എങ്കിൽ $x = f(t)$, $y = g(t)$ എന്നീ സമീകരണങ്ങൾ കൂടിചേർന്ന് തലത്തിലെ ഒരു വക്രത്തെ നിർണ്ണയിക്കുന്നു. പൊതുവായി 't' യെ വസ്തുനിഷ്ടമല്ലാത്ത ഒരു ചരമായി കണ്ടാൽ ഇതിനെ **പാരാമീറ്റർ** എന്നും ഒരു വക്രത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ഈ രീതിയെ **പാരാമെട്രിക് സമീകരണങ്ങളെന്നും** വിളിക്കുന്നു. 't' യുടെ പ്രധാനമായ ഒരു സൂചന ഇത് സമയത്തെ കുറിക്കുന്നു. ഈ സൂചന പ്രകാരം $x = f(t)$, $y = g(t)$ എന്നീ സമീകരണങ്ങൾ വസ്തുവിന്റെ 't' സമയത്തുള്ള സ്ഥാനത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

അതുകൊണ്ട് ഒരു പാരാമെട്രിക് സമീകരണം മൂന്നാമതൊരു ചരത്തിൽ ഉള്ളതായിരിക്കും x, y എന്നിവയെ ഈ മൂന്നാംചരമായ പാരാമീറ്റർ ഉപയോഗിച്ച് ആവിഷ്കരിക്കും. ഒരു പാരാമീറ്റർ എല്ലായ്പ്പോഴും 't' ആകണമെന്നില്ല. കൂടുതൽ അംഗീകൃതമായ ഒന്നായിട്ടാണ് 't' ഉപയോഗിക്കുന്നത്. എന്നാൽ ഒരാൾക്ക് മറ്റ് ഏതൊരു ചരവും ഉപയോഗിക്കാം.

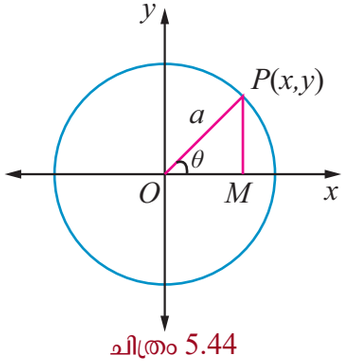
(i) $x^2 + y^2 = a^2$ എന്ന വൃത്തത്തിന്റെ പാരാമെട്രിക് രൂപം

$P(x, y)$ എന്നത് $x^2 + y^2 = a^2$ എന്ന വൃത്തത്തിനുള്ളിലുള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവാണെന്നിരിക്കട്ടെ OP യെ യോജിപ്പിച്ച് അത് x - അക്ഷത്തിൽ θ എന്ന കോണത്തെ ഉണ്ടാക്കുന്നു. x - അക്ഷത്തിന് ലംബമായി PM വരയ്ക്കുക, ത്രികോണം OPM ൽ നിന്നും

$$x = OM = a\cos\theta$$

$$y = MP = a\sin\theta$$

അതിനാൽ തന്നിട്ടുള്ള വൃത്തത്തിന്റെ നിർദ്ദേശാങ്കം $(a\cos\theta, a\sin\theta)$



ചിത്രം 5.44

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 199 14-02-2023 18:44:24

$x = a\cos\theta, y = a\sin\theta,\ 0 \le \theta \le 2\pi$ ഇവ $x^2 + y^2 = a^2$ എന്ന വൃത്തത്തിന്റെ പാരാമെട്രിക് സമവാക്യമാണ്.

നേരെമറിച്ച്, $x = a\cos\theta,\ y = a\sin\theta,\ 0 \le \theta \le 2\pi,$

എങ്കിൽ, $\frac{x}{a} = \cos\theta, \frac{y}{a} = \sin\theta$.

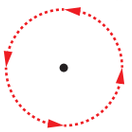
വർഗ്ഗം കണ്ട് കൂട്ടുമ്പോൾ,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

അങ്ങനെ $x^2 + y^2 = a^2$ എന്നത് കേന്ദ്രം $(0,0)$ ഉം വ്യാസാർദ്ധം a യൂണിറ്റുമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യമാണ് നൽകുന്നത്.

കുറിപ്പ്

(1) $x = a\cos t, y = a\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$ എന്നിവയും $x^2 + y^2 = a^2$ എന്ന വൃത്തത്തിന്റെ പാരാമെട്രിക് സമവാക്യങ്ങളെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. ഇവിടെ t എതിർ ഘടികാര ദിശയിൽ വർദ്ധിച്ചു വരുന്നു.


ചിത്രം 5.45

(2) $x = a\sin t, y = a\cos t, 0 \le t \le 2\pi$ എന്നിവയും $x^2 + y^2 = a^2$ എന്ന വൃത്തത്തിന്റെ പാരാമെട്രിക് സമവാക്യങ്ങളെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. ഇവിടെ, t എതിർ ഘടികാര ദിശയിൽ വർദ്ധിച്ചു വരുന്നു.


ചിത്രം 5.46

(ii) പരാബോള $y^2 = 4ax$ എന്നതിന്റെ പാരാമെട്രിക് രൂപം

$P(x_1, y_1)$ എന്നത് പരാബോളയിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവാണെന്നിരിക്കട്ടെ

$$y_1^2 = 4ax_1$$

$$(y_1)(y_1) = (2a)(2x_1)$$

$$\frac{y_1}{2a} = \frac{2x_1}{y_1} = t \quad (-\infty < t < \infty) \text{ പറയുക}$$

$$y_1 = 2at,\ 2x_1 = y_1 t$$

$$2x_1 = 2at(t)$$

$$x_1 = at^2$$

അതിനാൽ $y^2 = 4ax$ എന്ന പരാബോളയുടെ പാരാമെട്രിക് രൂപം $x = at^2, y = 2at, -\infty < t < \infty$.

നേരെമറിച്ച് $x = at^2$ കൂടാതെ $y = 2at, -\infty < t < \infty$, ഇതിൽ നിന്നും 't' യെ ഒഴിവാക്കുമ്പോൾ $y^2 = 4ax$ എന്ന സമവാക്യം കിട്ടുന്നു.

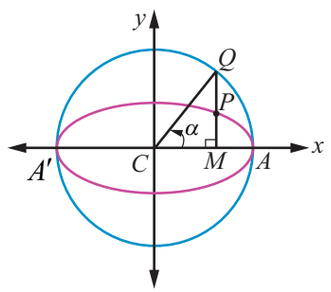
(iii) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ എന്ന ദീർഘവൃത്തത്തിന്റെ പാരാമെട്രിക് രൂപം

P എന്നത് ദീർഘവൃത്തത്തിലുള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവാണെന്നിരിക്കട്ടെ P യുടെ y - അക്ഷദൂരം MP എന്ന സഹായവൃത്തത്തെ Q ൽ കൂടിച്ചേർക്കുന്നു.

$$\angle ACQ = \alpha$$

$$\therefore\ CM = a\cos\alpha,\ MQ = a\sin\alpha$$

കൂടാതെ $Q(a\cos\alpha, a\sin\alpha)$



ചിത്രം 5.47

ഇപ്പോൾ P യുടെ x - നിർദ്ദേശാങ്കം $a\cos\alpha$, y നിർദ്ദേശാങ്കം y', എങ്കിൽ $P(a\cos\alpha, y')$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ എന്ന ദീർഘ വൃത്തത്തിനുള്ളിലാണ്.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 200 14-02-2023 18:44:54

അതിനാൽ $\cos^2\alpha + \frac{y'^2}{b^2} = 1$

$\Rightarrow$ $y' = b\sin\alpha$.

അതിനാൽ P യുടെ നിർദ്ദേശാങ്കം $(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$.

പാരാമീറ്റർ α യെ P യുടെ ഉൾകേന്ദ്രകോൺ എന്ന് വിളിക്കുന്നു. ഇവിടെ α എന്നത് CQ എന്ന രേഖയെ x - അക്ഷത്തോട് യോജിപ്പിക്കുന്ന കോൺ ആണ് CP യാൽ ഉണ്ടാകുന്ന കോൺ അല്ല.

അതിനാൽ ദീർഘ വൃത്തത്തിന്റെ പാരാമെട്രിക് സമവാക്യം $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$, ഇവിടെ θ ഒരു പാരാമിറ്റർ $0 \le \theta \le 2\pi$, കൂടാതെ $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$.

(iv) a $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ എന്ന ഹൈപ്പർബോളയുടെ പാരാമെട്രിക് രൂപം

അതുപോലെ ഒരു ഹൈപ്പർബോളയുടെ പാരാമെട്രിക് സമവാക്യം $x = a\sec\theta$, $y = b\tan\theta$, ഇവിടെ θ എന്നത് പാരാമീറ്റർ. $-\pi \le \theta \le \pi$, കൂടാതെ $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ ഒഴികെ.

ചുരുക്കത്തിൽ വൃത്തം, പരാബോള, ദീർഘവൃത്തം, ഹൈപ്പർബോള എന്നിവയുടെ പാരാമെട്രിക് സമവാക്യങ്ങൾ താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള പട്ടികയിൽ കൊടുത്തിട്ടുണ്ട്.

കോണിക്	പാരാമെട്രിക് സമവാക്യം	പാരാമീറ്റർ	പാരാമീറ്ററിന്റെ പരിധി	കോണിക്കിലുള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദു
വൃത്തം	$x = a\cos\theta$ $y = a\sin\theta$	θ	$0 \le \theta \le 2\pi$	'θ' അല്ലെങ്കിൽ $(a\cos\theta, a\sin\theta)$
പരാബോള	$x = at^2$ $y = 2at$	t	$-\infty < t < \infty$	't' അല്ലെങ്കിൽ $(at^2, 2at)$
ദീർഘവൃത്തം	$x = a\cos\theta$ $y = b\sin\theta$	θ	$0 \le \theta \le 2\pi$	'θ' അല്ലെങ്കിൽ $(a\cos\theta, b\sin\theta)$
ഹൈപ്പർബോള	$x = a\sec\theta$ $y = b\tan\theta$	θ	$-\pi \le \theta \le \pi$ ഒഴികെ $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$	'θ' അല്ലെങ്കിൽ $(a\sec\theta, b\tan\theta)$

കുറിപ്പ്

(1) പരാമെട്രിക് രൂപം എന്നത് കോണിക്കിലുള്ള ബിന്ദുക്കളെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. കൂടാതെ പാരാമീറ്റർ ഒരു സ്ഥിരാങ്കത്തിന്റെയും ചരത്തിന്റെയും പങ്ക് വഹിക്കുകയും അതേ സമയം കാർട്ടീഷ്യൻ രൂപം എന്നത് കോണിക്കിലെ ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ ലോക്കസ് ആണ്.

(2) ഒരു പാരമെട്രിക് പ്രാതിനിധ്യം അദ്വിതീയമായിരിക്കണമെന്നില്ല.

(3) പാരാമീറ്ററൈസേഷന്റെ ഉപയോഗം ചരങ്ങളുടെ എണ്ണത്തെ ഒന്നെങ്കിലും കുറയ്ക്കുന്നു.

5.6 കോണിക്കിന്റെ സ്പർശരേഖയും ലംബരേഖയും

കോണിക്സിനെ ഒരേ ഒരു ബിന്ദുവിൽ സ്പർശിച്ചു ചെല്ലുന്ന നേർരേഖയെ സ്പർശരേഖയെന്നും സ്പർശരേഖയ്ക്ക് ലംബമായി സ്പർശബിന്ദു വഴി കടന്നു ചെല്ലുന്ന നേർരേഖയ്ക്ക് ലംബരേഖ എന്നും പറയുന്നു.

5.6.1 $y^2 = 4ax$ എന്ന പരാബോളയുടെ സ്പർശരേഖയുടെയും ലംബരേഖയുടേയും സമവാക്യം

(i) സ്പർശരേഖയുടെ സമവാക്യത്തിന്റെ കാർട്ടീഷ്യൻ രൂപം

$P(x_1, y_1)$ കൂടാതെ $Q(x_2, y_2)$ എന്നിവ $y^2 = 4ax$ എന്ന പരാബോളയിലെ രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ.

അതിനാൽ, $y_1^2 = 4ax_1$, $y_2^2 = 4ax_2$,

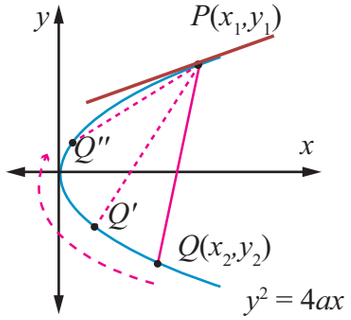
Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 201 14-02-2023 18:45:17

കൂടാതെ $y_1^2 - y_2^2 = 4a(x_1 - x_2)$.

ലഘൂകരിച്ചാൽ, $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{4a}{y_1 + y_2}$, ഇത് ഞാൺ PQ ന്റെ ചായ്‌വാണ്.

അതിനാൽ $(y - y_1) = \frac{4a}{y_1 + y_2}(x - x_1)$, എന്നത് ഞാൺ PQ ന്റെ സമവാക്യത്തെ കുറിക്കുന്നു.

$Q \to P$, അല്ലെങ്കിൽ $y_2 \to y_1$ ഞാൺ PQ എന്നത് P യുടെ സ്പർശ രേഖയായി മാറുന്നു.



ചിത്രം 5.48

അതിനാൽ (x_1, y_1) ന്റെ സ്പർശരേഖയുടെ സമവാക്യം

$$y - y_1 = \frac{4a}{2y_1}(x - x_1)$$ ഇവിടെ $\frac{2a}{y_1}$ എന്നത് സ്പർശരേഖയുടെ ചായ്‌വാണ് ... (1)

$$yy_1 - y_1^2 = 2ax - 2ax_1$$

$$yy_1 - 4ax_1 = 2ax - 2ax_1$$

$$\boxed{yy_1 = 2a(x + x_1)}$$

(ii) പാരാമെട്രിക് രൂപത്തിലുള്ള സ്പർശരേഖയുടെ സമവാക്യം

പരാബോളയിലെ $(at^2, 2at)$ എന്ന ബിന്ദുവിലെ സ്പർശരേഖയുടെ സമവാക്യം

$$y(2at) = 2a(x + at^2)$$

$$\boxed{yt = x + at^2}$$

(iii) കാർട്ടീഷ്യൽ രൂപത്തിലുള്ള ലംബരേഖയുടെ സമവാക്യം

(1) ൽ നിന്നും ലംബരേഖയുടെ ചായ്‌വ് $-\frac{y_1}{2a}$

അതിനാൽ **ലംബരേഖയുടെ സമവാക്യം**

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{2a}(x - x_1)$$

$$2ay - 2ay_1 = -y_1x + y_1x_1$$

$$xy_1 + 2ay = y_1(x_1 + 2a)$$

$$\boxed{xy_1 + 2ay = x_1y_1 + 2ay_1}$$

(iv) പാരാമെട്രിക് രൂപത്തിലുള്ള ലംബരേഖയുടെ സമവാക്യം

പാരാബോളയിലെ $(at^2, 2at)$ എന്ന ബിന്ദുവിലെ ലംബരേഖയുടെ സമവാക്യം

$$x2at + 2ay = at^2(2at) + 2a(2at)$$

$$2a(xt + y) = 2a(at^3 + 2at)$$

$$\boxed{y + xt = at^3 + 2at}$$

സിദ്ധാന്തം 5.6

തന്നിട്ടുള്ള ബിന്ദുവിൽ നിന്നും $y^2 = 4ax$ എന്ന പരാബോളയിലേക്ക് മൂന്ന് ലംബങ്ങൾ വരയ്ക്കാം. അവയിൽ ഒന്ന് എപ്പോഴും വാസ്തവികമായിരിക്കും.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 202 14-02-2023 18:45:46

തെളിവ്

$y^2 = 4ax$ എന്നത് തന്നിട്ടുള്ള പരാബോള കൂടാതെ (α, β) തന്നിട്ടുള്ള ബിന്ദുക്കൾ.

പാരാമെട്രിക് രൂപത്തിലുള്ള ലംബരേഖയുടെ സമവാക്യം

$$y = -tx + 2at + at^3 \quad \ldots (1)$$

ലംബരേഖയുടെ ചായ്‌വ് m ആണെങ്കിൽ $m = -t$.

അതിനാൽ (1) എന്ന സമവാക്യം $y = mx - 2am - am^3$ എന്ന് മാറുന്നു.

ഇത് (α, β) വഴി പോകുന്നതിനാൽ,

$$\beta = m\alpha - 2am - am^3$$

$$am^3 + (2a - \alpha)m + \beta = 0$$

ഇത് m ൽ ഉള്ള ഒരു ഘനസമീകരണമാണ്. ഇതിന് m ൽ മൂന്ന് മൂല്യങ്ങളുണ്ട്. അതിനാൽ ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് പരാബോളയിലേക്ക് മൂന്ന് ലംബരേഖകൾ വരയ്ക്കാം, വാസ്തവിക സമീകരണത്തിന്റെ സങ്കീർണ്ണ മൂലങ്ങൾ എല്ലായ്പ്പോഴും സംയോജന ജോഡികളായി ലഭിക്കുന്നതിനാലും (1) ഒരു ഒറ്റകൃതിയിലുള്ള സമീകരണം ആയതിനാലും ഇതിന് ഏറ്റവും കുറഞ്ഞത് ഒരു വാസ്തവിക മൂല്യമെങ്കിലും ഉണ്ടാകും ആയതിനാൽ പരാബോളയിലേയ്ക്കുള്ള ഒരു ലംബം എങ്കിലും വാസ്തവികം ആയിരിക്കും.

5.6.2 ദീർഘവൃത്തം ഹൈപ്പർബോള എന്നിവയുടെ സ്പർശരേഖയുടേയും ലംബരേഖയുടേയുടെ സമവാക്യം

(1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ എന്ന ദീർഘവൃത്തത്തിന്റെ സ്പർശരേഖയുടെ സമവാക്യം

(i) (x_1, y_1) ൽ $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$ കാർട്ടീഷ്യൻ രൂപം

(ii) 'θ' ൽ $\frac{x\cos\theta}{a} + \frac{y\sin\theta}{b} = 1$. പാരാമെട്രിക് രൂപം

(2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ എന്ന ദീർഘവൃത്തത്തിന്റെ ലംബരേഖയുടെ സമവാക്യം

(i) (x_1, y_1) ൽ $\frac{a^2x}{x_1} - \frac{b^2y}{y_1} = a^2 - b^2$ കാർട്ടീഷ്യൻ രൂപം

(ii) 'θ' ൽ $\frac{ax}{\cos\theta} - \frac{by}{\sin\theta} = a^2 - b^2$ പാരാമെട്രിക് രൂപം

(3) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ എന്ന ഹൈപ്പർബോളയുടെ സ്പർശരേഖയുടെ സമവാക്യം

(i) (x_1, y_1) ൽ $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$ കാർട്ടീഷ്യൻ രൂപം

(ii) 'θ' ൽ $\frac{x\sec\theta}{a} - \frac{y\tan\theta}{b} = 1$ പാരാമെട്രിക് രൂപം

(4) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ എന്ന ഹൈപ്പർബോളയുടെ ലംബരേഖയുടെ സമവാക്യം

(i) (x_1, y_1) ൽ $\frac{a^2x}{x_1} + \frac{b^2y}{y_1} = a^2 + b^2$ കാർട്ടീഷ്യൻ രൂപം

(ii) 'θ' ൽ $\frac{ax}{\sec\theta} + \frac{by}{\tan\theta} = a^2 + b^2$ പാരാമെട്രിക് രൂപം.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 203 14-02-2023 18:46:05

5.6.3 കോണിക് വിഭാജനത്തിന് $y = mx + c$ എന്ന നേർരേഖ സ്പർരേഖ ആകുന്നതിനുള്ള നിബന്ധന

(i) പരാബോള $y^2 = 4ax$

പരാബോള $y^2 = 4ax$ യിലെ ബിന്ദു (x_1, y_1) എന്നെടുത്താൽ ${y_1}^2 = 4ax_1$ ... (1)

പരാബോളയുടെ സ്പർശരേഖ $y = mx + c$ ... (2)

(x_1, y_1) എന്ന ബിന്ദുവിൽ പരാബോളയുടെ സ്പർശരേഖ 5.6.1 ൽ നിന്നും $yy_1 = 2a(x + x_1)$. ... (3)

(2) കൂടാതെ (3) എന്നിവ ഒരേ രേഖയെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നതിനാൽ ഗുണാങ്കങ്ങൾ ആനുപാതികമാണ്.

$$\frac{y_1}{1} = \frac{2a}{m} = \frac{2ax_1}{c}$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{2a}{m}, x_1 = \frac{c}{m}$$

അപ്പോൾ (1) $\left(\frac{2a}{m}\right)^2 = 4a\left(\frac{c}{m}\right)$ ആയി മാറുന്നു,

$$\Rightarrow \boxed{c = \frac{a}{m}}$$

അതുകൊണ്ട് സ്പർശബിന്ദു $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$ കൂടാതെ $y = mx + \frac{a}{m}$ എന്നത് പരാബോളയുടെ സ്പർശരേഖയുടെ സമവാക്യമാണ്.

$y = mx + c$ എന്ന നേർരേഖ ദീർഘവൃത്തത്തിനും അഥവാ ഹൈപ്പർബോളക്കും സ്പർശരേഖ ആകുന്നതിനുള്ള നിബന്ധന കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് പരാബോളയുടെ നിബന്ധന കണ്ടുപിടിച്ച അതേ രീതി തന്നെ പിൻതുടരാവുന്നതാണ്.

(ii) ദീർഘവൃത്തം $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$y = mx + c$ എന്ന നേർരേഖ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ എന്ന ദീർഘവൃത്തത്തിന്റെ സ്പർശരേഖയായിരിക്കുന്നതിനുള്ള നിബന്ധന $c^2 = a^2m^2 + b^2$, സ്പർശബിന്ദു $\left(-\frac{a^2m}{c}, \frac{b^2}{c}\right)$ കൂടാതെ സ്പർശരേഖയുടെ സമവാക്യം $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$.

(iii) ഹൈപ്പർബോള $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$y = mx + c$ എന്ന നേർരേഖ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ എന്ന ഹൈപ്പർബോളയ്ക്ക് സ്പർശരേഖയായിരിക്കുന്നതിനുള്ള നിബന്ധന $c^2 = a^2m^2 - b^2$, സ്പർശബിന്ദു $\left(-\frac{a^2m}{c}, -\frac{b^2}{c}\right)$ കൂടാതെ സ്പർശരേഖയുടെ സമവാക്യം $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$

കുറിപ്പ്

(1) $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$, ൽ $y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ അല്ലെങ്കിൽ $y = mx - \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ ഇവയിൽ ഏതെങ്കിലും ഒന്ന് ദീർഘവൃത്തത്തിന്റെ സ്പർശരേഖയായിരിക്കും, അല്ലാതെ രണ്ടുമല്ല.

(2) $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$, ൽ $y = mx + \sqrt{a^2m^2 - b^2}$ അല്ലെങ്കിൽ $y = mx - \sqrt{a^2m^2 - b^2}$ ഇവയിൽ ഏതെങ്കിലും ഒന്ന് ഹൈപ്പർബോളയുടെ സ്പർശരേഖയായിരിക്കും അല്ലാതെ രണ്ടുമല്ല.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 204 14-02-2023 18:46:28

ഫലങ്ങൾ

(1) ഒരു തലത്തിലെ ബാഹ്യബിന്ദുവിൽ നിന്നും (i) ഒരു പരാബോള (ii) ഒരു ദീർഘവൃത്തം (iii) ഒരു ഹൈപ്പർ ബോള എന്നിവയിലേക്ക് രണ്ട് സ്പർശരേഖകൾ വരയ്ക്കാം.

(2) ഒരു തലത്തിലെ ബാഹ്യബിന്ദുവിൽ നിന്നും (i) ഒരു ദീർഘവൃത്തം (ii) ഒരു ഹൈപ്പർബോള എന്നിവയിലേയ്ക്ക് നാല് ലംബരേഖകൾ വരയ്ക്കാം.

(3) ലംബ സ്പർശരേഖകൾ പരസ്പരം ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ ലോക്കസ്സ്

(i) $y^2 = 4ax$ എന്ന പരാബോളയ്ക്ക് $x = -a$ (ഡയറക്ട്രിക്സ്).

(ii) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ എന്ന ദീർഘവൃത്തത്തിന് $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ (ദീർഘവൃത്തത്തിന്റെ ഡയറക്ടർ വൃത്തം എന്ന് വിളിക്കുന്നു).

(iii) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ എന്ന ഹൈപ്പർബോളയ്ക്ക് $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$ (ഹൈപ്പർബോളയുടെ ഡയറക്ടർ വൃത്തം എന്ന് വിളിക്കുന്നു).

ഉദാഹരണം 5.28

$x^2 + 6x + 4y + 5 = 0$ എന്ന പരാബോളയ്ക്ക് $(1, -3)$ എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ ഉള്ള സ്പർശരേഖയുടേയും ലംബ രേഖയുടേയും സമവാക്യം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

പരാബോളയുടെ സമവാക്യം $x^2 + 6x + 4y + 5 = 0$.

$$x^2 + 6x + 9 - 9 + 4y + 5 = 0$$

$$(x+3)^2 = -4(y-1) \quad \ldots (1)$$

$X = x+3, Y = y-1$ എങ്കിൽ

സമവാക്യം (1) സ്റ്റാൻഡേർഡ് രൂപത്തിലാകുന്നു

$$X^2 = -4Y$$

സ്പർശരേഖയുടെ സമവാക്യം $XX_1 = -2(Y + Y_1)$

$(1, -3)$ ൽ $X_1 = 1 + 3 = 4; Y_1 = -3 - 1 = -4$

അതിനാൽ $(1, -3)$ ൽ സ്പർശരേഖയുടെ സമവാക്യം

$$(x+3)4 = -2(y - 1 - 4)$$

$$2x + 6 = -y + 5 .$$

$$2x + y + 1 = 0 .$$

$(1, -3)$ ൽ സ്പർശരേഖയുടെ ചായ്വ് -2, അതിനാൽ ലംബരേഖയുടെ ചായ്വ് $\frac{1}{2}$

അതുകൊണ്ട് $(1, -3)$ ൽ ലംബരേഖയുടെ സമവാക്യം

$$y + 3 = \frac{1}{2}(x - 1)$$

$$2y + 6 = x - 1$$

$$x - 2y - 7 = 0 .$$

ഉദാഹരണം 5.29

$x^2 + 4y^2 = 32$ എന്ന ദീർഘവൃത്തത്തിന് $\theta = \frac{\pi}{4}$ ആയിരിക്കുമ്പോൾ സ്പർശരേഖയുടേയും, ലംബ രേഖയുടേയും സമവാക്യം കാണുക.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 205 14-02-2023 18:46:59

നിർദ്ധാരണം

ദീർഘവൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം

$$x^2+4y^2 = 32$$
$$\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{8} = 1$$
$$a^2 = 32,\ b^2 = 8$$
$$a = 4\sqrt{2},\ b = 2\sqrt{2}$$

$\theta = \frac{\pi}{4}$ ൽ സ്പർശരേഖയുടെ സമവാക്യം

$$\frac{x\cos\frac{\pi}{4}}{4\sqrt{2}}+\frac{y\sin\frac{\pi}{4}}{2\sqrt{2}} = 1$$
$$\frac{x}{8}+\frac{y}{4} = 1$$
$$x+2y-8 = 0.$$

ലംബരേഖയുടെ സമവാക്യം

$$\frac{4\sqrt{2}x}{\cos\frac{\pi}{4}}-\frac{2\sqrt{2}y}{\sin\frac{\pi}{4}} = 32-8$$
$$8x-4y = 24$$
$$2x-y-6 = 0.$$

മറ്റൊരു രീതി

$\theta = \frac{\pi}{4}$ ആയാൽ,

$$(a\cos\theta,\ b\sin\theta) = \left(4\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4},\ 2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= (4,2)$$

$\therefore\ \theta = \frac{\pi}{4}$ ലും $(4,2)$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ ഉള്ളതുമായ സ്പർശരേഖയുടെ സമവാക്യം ഒന്നുതന്നെയാണ്.

കാർട്ടീഷ്യൻ രൂപത്തിൽ സ്പർശരേഖയുടെ സമവാക്യം

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2} = 1$$
$$x+2y-8 = 0$$

സ്പർശരേഖയുടെ ചായ്‌വ് $-\frac{1}{2}$

ലംബരേഖയുടെ ചായ്‌വ് 2

ലബേരേഖയുടെ സമവാക്യം

$$y-2 = 2(x-4)$$
$$y-2x+6 = 0.$$

അഭ്യാസം 5.4

1. $(5,2)$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്നും $2x^2+7y^2=14$ എന്ന ദീർഘവൃത്തത്തിലേക്ക് വരയാവുന്ന രണ്ട് സ്പർശരേഖകളുടെ സമവാക്യം കാണുക.
2. $10x-3y+9=0$. എന്ന നേർരേഖയ്ക്ക് സമാന്തരമായിട്ടുള്ള $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{64}=1$ എന്ന ഹൈപ്പർബോളയുടെ സ്പർശരേഖയുടെ സമവാക്യങ്ങൾ കാണുക?
3. $x-y+4=0$ എന്ന നേർരേഖ $x^2+3y^2=12$ എന്ന ദീർഘവൃത്തത്തിന്റെ ലംബരേഖയാണെന്ന് തെളിയിക്കുക. കൂടാതെ സ്പർശബിന്ദുവിന്റെ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ കാണുക.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 206 14-02-2023 18:47:53

4. $y^2 = 16x$ എന്ന പരാബോളയ്ക്ക് $2x + 2y + 3 = 0$ എന്ന നേർരേഖ ലംബമായാൽ, പരാബോളയുടെ ലംബരേഖയുടെ സമവാക്യം കാണുക .
5. $y^2 = 8x$ എന്ന പാരാബോളയ്ക്ക് $t = 2$ ൽ ഉള്ള സ്പർശരേഖയുകട സമവാക്യം കാണുക. (സൂചന പാരാമെട്രിക് രൂപം ഉപയോഗിക്കുക)
6. $12x^2 - 9y^2 = 108$ എന്ന ഹൈപ്പർബോളയ്ക്ക് $\theta = \frac{\pi}{3}$ ൽ ഉള്ള സ്പർശരേഖയുടേയും, ലംബരേഖയുടേയും സമവാക്യം കാണുക (സൂചന പാരാമെട്രിക് രൂപം ഉപയോഗിക്കുക).
7. $y^2 = 4ax$ എന്ന പരാബോളയുടെ 't_1', 't_2' എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെയുള്ള സ്പർശരേഖകൾ പരസ്പരം ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദു $\left[at_1t_2\,,\, a\left(t_1 + t_2\right)\right]$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.
8. $y^2 = 4ax$ എന്ന പരാബോളയിലെ 't_1' എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള ലംബരേഖ പരാബോളയെ വീണ്ടും 't_2' എന്ന ബിന്ദുവിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നുവെങ്കിൽ $t_2 = -\left(t_1 + \frac{2}{t_1}\right)$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

EP5ZM

5.7 നിത്യ ജീവിതത്തിൽ കോണിക്കിന്റെ പ്രയോഗങ്ങൾ

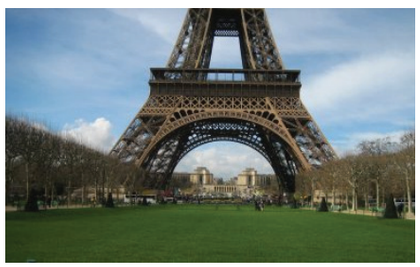
5.7.1 പരാബോള

പരാബോളയുടെ രസകരമായ പ്രയോഗങ്ങളിൽ അവയുടെ പ്രതിഫലനങ്ങളും പ്രകാശത്തിന്റെ സ്വീകർത്താക്കളും റേഡിയോ തരംഗങ്ങളും ഉൾപ്പെടുന്നു. ഉദാഹരണത്തിന് കാറിന്റെ ഹെഡ്ലൈറ്റുകളുടെ ക്രോസ് സെക്ഷൻ, ഫ്ളാഷ് ലൈറ്റുകൾ ഇവയിൽ പരാബോള ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഹെഡ്ലൈറ്റുകളിലെ ബൾബ്, ഫ്ളാഷ് ലൈറ്റുകൾ എന്നിവ ഫോക്കസിലാണ് സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നത് ആ ബിന്ദുവിൽ നിന്നുള്ള പ്രകാശം അതിന്റെ അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായി പ്രതിഫലിക്കുന്നു. (ചിത്രം 5.60) കായിക മത്സരങ്ങളിൽ ഉപയോഗിക്കുന്ന ഉപഗ്രഹങ്ങളുടെ തരങ്ങളും, ഫീൽഡ് മൈക്രോഫോണുകളും റേഡിയോ തരംഗങ്ങൾ അല്ലെങ്കിൽ ശബ്ദ തരംഗങ്ങൾ എന്നിവയും അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായി ഫോക്കസിലേക്ക് പ്രതിഫലിക്കുന്നു. (ചിത്രം 5.59) ഇതുപോലെ, സോളാർ പാചകത്തിനായി ഒരു പാരാബോളിക് മീറ്റർ ഒരു പാചകത്തിനുപയോഗിക്കുന്ന പാത്രത്തിൽ ഫോക്കസ്സിൽ ഘടിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു. (ചിത്രം 5.1) അച്ചുതണ്ടിന് സമാന്തരമായി വരുന്ന സൂര്യകിരണങ്ങൾ ഫോക്കസിൽ പ്രതിഫലിച്ച് പാചകത്തിന് ആവശ്യമായ ഉയർന്ന താപനില ഉൽപാദിപ്പിക്കുന്നു.

പരാബോളിക് കമാനങ്ങൾ ഏറ്റവും മികച്ച സ്ഥിരതയുള്ള ഘടനകളാണ് അവയിൽ ചിലത് ഇന്ത്യയിലെ ആന്ധ്രാപ്രദേശിലെ ഗോദാവരി നദിയുടെ പാലത്തിലെ കമാനങ്ങൾ ഫ്രാൻസിലെ പാരിസിലെ ഈഫൽ ടവർ എന്നിവയാണ്.



ചിത്രം 5.49

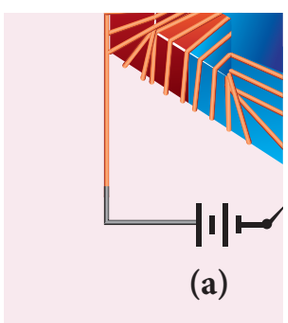


ചിത്രം 5.50

5.7.2 ദീർഘവൃത്തം

ജോഹന്നാസ് കെപ്ലർ പറയുന്നതനുസരിച്ച് സൗരയൂഥത്തിലെ എല്ലാ ഗ്രഹങ്ങളും സൂര്യനെ കേന്ദ്രമാക്കി ഒരു ദീർഘവൃത്താകൃതിയിൽ ചുറ്റുന്നു. ചില വാൽ നക്ഷത്രങ്ങളും സൂര്യനെ കേന്ദ്രമാക്കി ദീർഘവൃത്താകൃതിയിൽ ചുറ്റുന്നു. ഉദാഹരണമായി 75 വർഷത്തിൽ ഒരിക്കൽ ദൃശ്യമാകുന്ന ഹാലിയുടെ വാൽനക്ഷത്രം $e \approx 0.97$ ഉം ദീർഘവൃത്ത പാദയിൽ ചുറ്റുന്നു. (ചിത്രം 5.51) നമ്മുടെ ഉപഗ്രഹമായ ചന്ദ്രൻ ഭൂമിയെ കേന്ദ്രമാക്കി ദീർഘവൃത്താകൃതിയിൽ ചുറ്റുന്നു. മറ്റ് ഗ്രഹങ്ങളുടെ ഉപഗ്രഹങ്ങളും അവയുടെ ഗ്രഹങ്ങളെ ദീർഘവൃത്താകൃതിയിൽ ചുറ്റുന്നു.

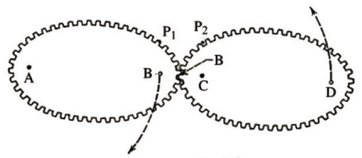
ദീർഘവൃത്ത കമാനങ്ങൾ പലപ്പോഴും അതിന്റെ സൗന്ദര്യത്തിനും സ്ഥിരതയ്ക്കും വേണ്ടിയാണ് നിർമ്മിച്ചിരിക്കുന്നത്. ഒരു സ്റ്റീംബോയിലറിന്റെ മുകൾഭാഗം ദീർഘവൃത്താകൃതിയിലാണ് ഉള്ളത്. അതിന്റെ ദീർഘ, ഹ്രസ്വാക്ഷങ്ങൾ 2:1 എന്ന അനുപാതത്തിലാണ്.



ചിത്രം 5.51

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 207 14-02-2023 18:48:15

ബോഹർ സോമർഫെൽഡ് സിദ്ധാന്തത്തിൽ ഇലക്ട്രോൺ ഭ്രമണപഥം വൃത്താകാരം അല്ലെങ്കിൽ ദീർഘവൃത്താകാര രൂപത്തിലാണ്. ചിലപ്പോൾ ഗിയറുകൾ (പ്രത്യേക ആവശ്യത്തിന്) ദീർഘവൃത്താകൃതിയിൽ ചുറ്റുന്നു.(ചിത്രം 5.52).



ചിത്രം 5.52

നമ്മുടെ ഭൂമിയുടെ ആകൃതി ഗോളാകൃതിയാണ്. ദീർഘവൃത്തത്തിന്റെ ഭ്രമണപഥം ഹ്രസ്വാക്ഷത്തിൽ മധ്യരേഖാ പ്രദേശത്ത് നീണ്ടും, ധ്രുവമേഖലയിൽ പരന്നും കാണപ്പെടുന്നു.

ദീർഘ വൃത്തത്തിന്റെ ഫോക്കസ്സിൽ നിന്ന് പുറത്തുവരുന്ന പ്രകാശത്തിന്റെ അല്ലെങ്കിൽ ശബ്ദത്തിന്റെ ഏത് കിരണവും ദീർഘവൃത്തത്തിൽ പതിച്ച് അതിൽ നിന്നും പ്രതിഫലിച്ച് മറ്റൊരു ഫോക്കസ്സിൽ (ചിത്രം 5.62) എത്തുന്നു. ഇത് ദീർഘവൃത്തത്തിന്റെ പ്രതിഫലന നിയമമാണ്. ഇതിനെ സംഭവരശ്മികളും, ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിലെ പ്രതിഫലിച്ച കിരണങ്ങളും എന്ന ആശയങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചാണ് തെളിയിച്ചത്.

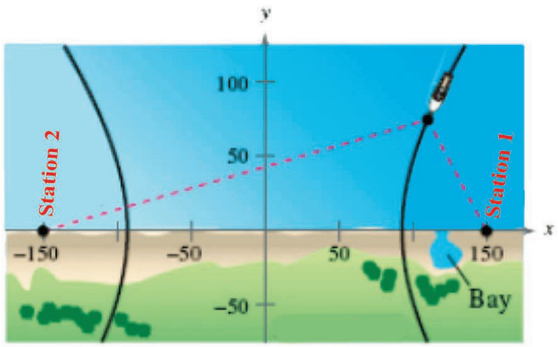
ലിത്തോട്രിപ്റ്റർ എന്നറിയപ്പെടുന്ന ഒരു ഉപകരണമാണ് വൈദ്യശാസ്ത്ര രംഗത്ത് ഉപയോഗിക്കുന്നത് (ചിത്രം 5.4, 5.63) ഇത് അൾട്രാ സൗണ്ട് ഉപയോഗിച്ച് വൃക്കയിലെ കല്ല് ഉടയ്ക്കുന്നു. ഇതിൽ നിന്നും പുറപ്പെടുന്ന അലകൾ ദീർഘവൃത്തത്തിൽ ഒരു ഫോക്കസ്സിൽ ആരംഭിച്ച് മറ്റൊര് ഫോക്കസ്സിലൂടെ ചെന്ന് വൃക്കയിലെ കല്ലിൽ പ്രതിഫലിക്കുന്നു. ഈ രീതിയിൽ ശസ്ത്രക്രിയയിലൂടെ ഭേദമാകാൻ എടുക്കുന്ന ദിവസത്തെക്കാൾ കുറച്ച് ദിവസമേ ഇതിന് എടുക്കുന്നുള്ളൂ. കൂടാതെ മരണസംഖ്യ കുറയ്ക്കാനും ശസ്ത്രക്രിയയുടെ എണ്ണം കുറയ്ക്കാനും ഇതിലൂടെ സാധിച്ചു.

5.7.3 ഹൈപ്പർബോള

ചില വാൽനക്ഷത്രങ്ങൾ സൂര്യനോടൊപ്പം ഹൈപ്പർബോളിക് പാതയിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്നു. അത്തരം വാൽനക്ഷത്രങ്ങൾ ദീർഘ വൃത്താകാര ഭ്രമണത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന വാൽ നക്ഷത്രങ്ങൾ ഒരു പ്രത്യേക ഇടവേളയിൽ സൂര്യന് അരുകിൽ വരുന്നതു പോൽ അല്ലാതെ ഒരേ ഒരു പ്രാവശ്യം മാത്രം സൂര്യനരുകിൽ വരുന്നു.

മുംബൈ വിമാനനിലയം (ചിത്രം 5.53) ഒരു പ്ലാനറ്റോറിയത്തിന്റെ പരിഛേദം, കപ്പലുകൾ നിർത്തുന്ന സ്ഥലം (ചിത്രം 5.54) ന്യൂക്ലിയർ പവർ പ്ലാന്റിലുള്ള കൂളിംഗ് ടവർ എന്നിവ പോലുള്ള വാസ്തുവിദ്യയിൽ ഹൈപ്പർ ബോളകൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു. (ചിത്രം 5.5)


ചിത്രം 5.53



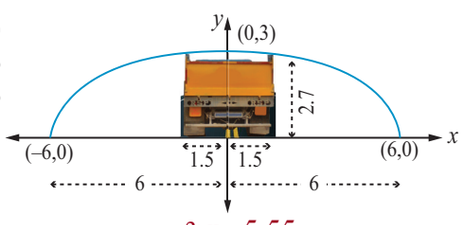
ചിത്രം 5.54

ഉദാഹരണം 5.30

വൺവേ റോഡിന് മുകളിലുള്ള ഒരു അർദ്ധ ദീർഘ വൃത്തത്തിന്റെ കമാനപാതയ്ക്ക് 3 മീറ്റർ ഉയരവും 12 മീറ്റർ വീതിയും ഉണ്ട്. ഒരു ട്രാക്കിന്റെ വീതി 3 മീറ്ററും ഉയരം 2.7 മീറ്ററുമാണ്. എങ്കിൽ ആ വാഹനത്തിന് ആ കമാനപാത വഴി പോകാൻ സാധിക്കുമോ? (ചിത്രം 5.6)

നിർദ്ധാരണം

ട്രക്കിന്റെ വീതി 3 മീറ്റർ ആയതിനാൽ അത് കമാനപാത വഴി പോകുന്നതിന് പാതയുടെ ഉയരം മദ്ധ്യഭാഗത്തു നിന്ന് 1.5 മീറ്റർ ദൂരത്തിൽ കമാനത്തിന്റെ ഉയരം കണക്കിടണം. ഈ ഉയരം 2.7 മീറ്ററോ അതിൽ കുറവോ ആണെങ്കിൽ ട്രക്ക് കമാനപാത വഴി ചെല്ലുന്നത് (ചിത്രം 5.6) അസാധ്യമാണ്.



ചിത്രം 5.55

ചിത്രത്തിൽ നിന്നും $a = 6$ കൂടാതെ $b = 3$ എന്നത് $\frac{x^2}{6^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ എന്ന ദിർഘവൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം നൽകുന്നു.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 208 14-02-2023 18:48:19

3 മീറ്റർ വീതിയുള്ള ട്രക്കിന്റെ അഗ്രം കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നും $x = 1.5$ മീ ദൂരത്തിൽ ആയിരിക്കും. കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നും 1.5 മീ ദൂരത്തിലുള്ള കമാനപാതയുടെ ഉയരം കാണാൻ $x = 1.5$ നെ സമവാക്യത്തിൽ പ്രതിയിട്ട് y ന്റെ വില കാണാം

$$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$y^2 = 9\left(1 - \frac{9}{144}\right)$$

$$= \frac{9(135)}{144} = \frac{135}{16}$$

$$y = \frac{\sqrt{135}}{4}$$

$$= \frac{11.62}{4}$$

$$= 2.90$$

അതിനാൽ കമാനത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നും 1.5 മീ ദൂരത്തിൽ കമാനത്തിന്റെ വളവിന്റെ ഉയരം 2.90 മീ ട്രക്കിന്റെ ഉയരം 2.7 മീ ആയതിനാൽ ട്രക്ക് കമാനപാതവഴി കടക്കും.

ഉദാഹരണം 5.31

സൂര്യനിൽ നിന്നും ഭൂമിയുടെ പരമാവധി കൂടിയതും കുറഞ്ഞതുമായ ദൂരം യഥാക്രമം 152×10^6 കി.മീ, 94.5×10^6 കി.മീ ദീർഘവൃത്തത്തിന്റെ ഭ്രമണപഥത്തിന്റെ ഒരു ഫോക്കസ്സിലാണ് സൂര്യൻ ഉള്ളത്. എങ്കിൽ സൂര്യനും മറ്റേ ഫോക്കസ്സിനും തമ്മിലുള്ള ദൂരം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

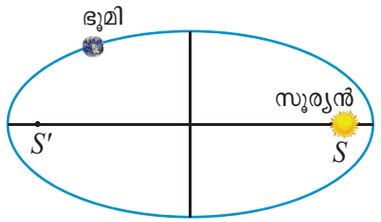
$AS = 94.5 \times 10^6$ കി.മീ, $SA' = 152 \times 10^6$ കി.മീ

$a + c = 152 \times 10^6$

$a - c = 94.5 \times 10^6$

കുറയ്ക്കുമ്പോൾ $2c = 57.5 \times 10^6 = 575 \times 10^5$ കി.മീ

സൂര്യനും മറ്റേ ഫോക്കസ്സിനും തമ്മിലുള്ള ദൂരം $SS' = 575 \times 10^5$ കി.മീ.



ചിത്രം 5.56

ഉദാഹരണം 5.32

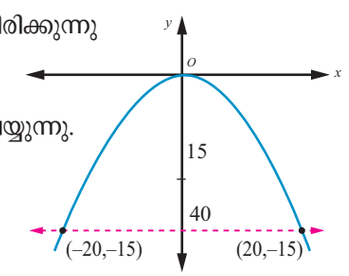
ഒരു പരാബോളിക് കമാനമായാണ് കോൺക്രീറ്റ് പാലം രൂപകൽപ്പന ചെയ്തിരിക്കുന്നത്. റോഡിനുമുകളിലുള്ള പാലത്തിന്റെ നീളം 40 മീ കൂടാതെ കമാനത്തിന്റെ പരമാവധി ഉയരം 15 മീ ആകുന്നു. എങ്കിൽ പരാബോളിക് കമാനത്തിന്റെ സമവാക്യം എഴുതുക.

നിർദ്ധാരണം

ഗ്രാഫിൽ നിന്ന് ശീർഷം $(0,0)$ കൂടാതെ പരാബോള താഴെ നോക്കി തുറന്നിരിക്കുന്നു

അതിനാൽ പരാബോളയുടെ സമവാക്യം $x^2 = -4ay$

$(-20,-15)$ കൂടാതെ $(20,-15)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ പരാബോളയിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു.



ചിത്രം 5.57

$$20^2 = -4a(-15)$$

$$4a = \frac{400}{15}$$

$$x^2 = \frac{-80}{3} \times y$$

അതിനാൽ സമവാക്യം $3x^2 = -80y$

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 209 14-02-2023 18:48:57

ഉദാഹരണം 5.33

പരാബോളിക് കമ്മ്യൂണിക്കേഷൻ ആന്റിനയ്ക്ക് അതിന്റെ ശീർഷത്തിൽ നിന്നും 2 മീറ്റർ അകലെയാണ് ഫോക്കസ്സ് ഉള്ളത്. ശീർഷത്തിൽ നിന്നും 3 മീറ്റർ അകലെ ഉള്ള ആന്റിനയുടെ വീതി കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

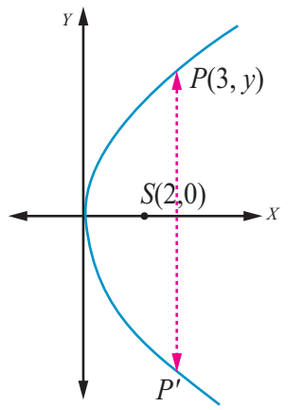
പരാബോളയുടെ സമവാക്യം $y^2 = 4ax$.

ഫോക്കസ്സ് ശീർഷത്തിൽ നിന്നും 2 മീറ്റർ അകലെ ആയതിനാൽ $a = 2$

അതിനാൽ പരാബോളയുടെ സമവാക്യം $y^2 = 8x$

ശീർഷത്തിൽ നിന്നും 3 മീ അകലെയാണ് പരാബോളയിലെ ബിന്ദു P എങ്കിൽ P എന്നത് $(3, y)$ ആയിരിക്കും

$$y^2 = 8\times 3$$
$$y = \sqrt{8\times 3}$$
$$= 2\sqrt{6}$$



ചിത്രം 5.58

ശീർഷത്തിൽ നിന്നും 3 മീ അകലെ ഉള്ള ആന്റിനയുടെ വീതി $4\sqrt{6}$ മീ ആകുന്നു.

5.7.4 പരാബോളയുടെ പ്രതിഫലന സവിശേഷത

ഒരു പരാബോളയുടെ ഫോക്കസിൽ നിന്ന് ഉത്ഭവിക്കുന്ന പ്രകാശം, ശബ്ദം അല്ലെങ്കിൽ റേഡിയോ തരംഗങ്ങൾ പരാബോളയുടെ അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായി പ്രതിഫലിക്കുന്നു. (ചിത്രം 5.60) അതുപോലെ തിരിച്ചും അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായി വരുന്ന രശ്മികൾ ഫോക്കസ്സിലേക്ക് തിരിച്ചുവിടുന്നു. (ചിത്രം 5.59).

ഉദാഹരണം 5.34

സൗരോർജ്ജത്തിനായി ഉപയോഗിക്കുന്ന പരാബോളയുടെ ആകൃതിയിലുള്ള കണ്ണാടിയെ നെടുകെ ഛേദിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന രൂപത്തിന്റെ സമീകരണം $y = \frac{1}{32}x^2$ ആണ്. ഓരോ പരാബോളയുടെയും ഫോക്കസ്സിൽ ഒരു താപീകരണ ട്യൂബ് ഉണ്ട് ഈ പരാബോള ശീർഷത്തിൽ നിന്ന് എത്ര ഉയരത്തിലാണ് ?

നിർദ്ധാരണം

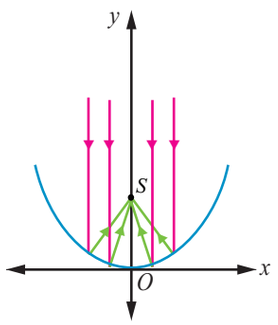
പരാബോളയുടെ സമവാക്യം

$$y = \frac{1}{32}x^2$$

അതായത $\quad x^2 = 32y$; ശീർഷം $(0,0)$

$$= 4(8)y$$

$$\Rightarrow a = 8$$



ചിത്രം 5.59

അതിനാൽ താപീകരണ ട്യൂബ് $(0, a)$ എന്ന ഫോക്കസ്സിൽ സ്ഥാപിക്കണം. ആയതിനാൽ താപീകരണ ട്യൂബ് പരാബോളയുടെ ശീർഷത്തിൽ നിന്നും 8 യൂണിറ്റ് ഉയരത്തിലാണ്.

ഉദാഹരണം 5.36

ഒരു തിരയൽ ലൈറ്റിന് പരാബോളാകൃതിയിലുള്ള കണ്ണാടിയുണ്ട്. (കുറുകെ ഛേദിക്കുമ്പോൾ ഒരു കിണ്ണത്തിന്റെ രൂപം ലഭിക്കുന്നു) പരാബോള കിണ്ണത്തിന്റെ ഒരു വക്കിൽ നിന്ന് മറ്റേ വക്ക് വരെയുള്ള അകലം 30 സെന്റീമീറ്ററും ആഴം 40 സെന്റീമീറ്ററുമാണ്. ബൾബ് ഫോക്കസ്സിലാണ് സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നത്.

(1) കണ്ണാടിയായി ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്ന പരാബോളയുടെ സമീകരണം എന്താണ്?

(2) പ്രകാശം ഏറ്റവും കൂടുതൽ ദൂരം കടന്നുചെല്ലാൻ ശീർഷത്തിൽ നിന്നും എത്ര അകലത്തിലായിരിക്കണം ബൾബിന്റെ സ്ഥാനം?

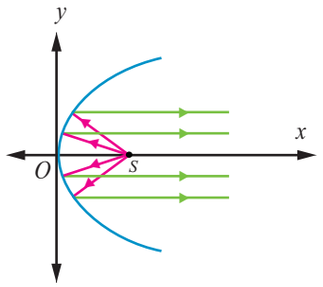
Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 210 14-02-2023 18:49:07

നിർദ്ധാരണം

ശീർഷം $(0,0)$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

പരാബോളയുടെ സമവാക്യം

$y^2 = 4ax$



ചിത്രം 5.60

(1) വ്യാസം 40 സെ.മീ കൂടാതെ ആഴം 30 സെ.മീ ഉം ആയതിനാൽ $(30,20)$ എന്ന ബിന്ദു പരാബോളയിൽ ആയിരിക്കും.

$$20^2 = 4a \times 30$$

$$4a = \frac{400}{30} = \frac{40}{3}.$$

സമവാക്യം $y^2 = \frac{40}{3}x$.

(2) ബൾബ് $(a,0)$ എന്ന ഫോക്കസ്സിലാണ് ആയതിനാൽ ശീർഷത്തിൽ നിന്ന് $\frac{10}{3}$ സെ.മീ അകലെയാണ് ബൾബിന്റെ സ്ഥാനം.

ഉദാഹരണം 5.37

ഒരു വീക്ഷണ ലെൻസ് സമ്പ്രദായത്തിന്റെ ഭാഗമായുള്ള ദിർഘവൃത്തത്തിന്റെ സമീകരണം $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ ആകുന്നു. ഈ സമ്പ്രദായത്തിന്റെ ഭാഗമായ പരാബോളയുടെ ഫോക്കസ്സും ദീർഘവൃത്തത്തിന്റെ വലതു ഫോക്കസ്സും ഒന്നുതന്നെയാണ്. പരാബോള വലത് ഭാഗത്തേക്ക് തുറന്നതും, ശീർഷം മൂലബിന്ദുവുമാണ്. പരാബോളയുടെ സമീകരണം കണ്ടുപിടിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

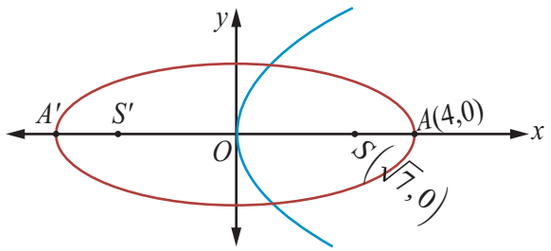
തന്നിരിക്കുന്ന ദീർഘവൃത്തത്തിൽ $a^2 = 16, b^2 = 9$

കൂടാതെ $c^2 = a^2 - b^2$

$c^2 = 16 - 9$

$= 7$

$c = \pm\sqrt{7}$



ചിത്രം 5.61

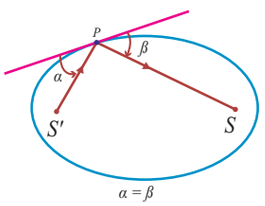
അതിനാൽ ഫോക്കസ്സ് $F\left(\sqrt{7},0\right), F'\left(-\sqrt{7},0\right)$. പരാബോളയുടെ ഫോക്കസ്സ് $\left(\sqrt{7},0\right) \Rightarrow a = \sqrt{7}$.

പരാബോളയുടെ സമവാക്യം $y^2 = 4\sqrt{7}x$.

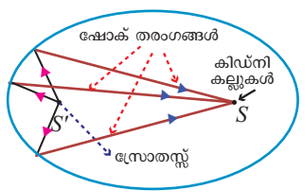
5.7.5 ദീർഘവൃത്തത്തിന്റെ പ്രതിഫലന സവിശേഷത

ഫോക്കസ്സുകളിൽ നിന്ന് ദീർഘവൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിലേയ്ക്കുള്ള രേഖകൾ ആ ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള സ്പർശരേഖയുമായി തുല്യ കോണുകൾ ഉണ്ടാക്കുന്നു. (ചിത്രം 5.62).

ഒരു ഫോക്കസ്സിൽ നിന്ന് പുറപ്പെടുന്ന പ്രകാശം, ശബ്ദം അല്ലെങ്കിൽ റേഡിയോ തരംഗങ്ങൾ ദീർഘ വൃത്തത്തിന്റെ ഏതൊരു ബിന്ദു P യിലും തട്ടി മറ്റെ ഫോക്കസ്സിൽ എത്തുന്നു (ചിത്രം 5.63).



ചിത്രം 5.62



ചിത്രം 5.63

ഉദാഹരണം 5.37

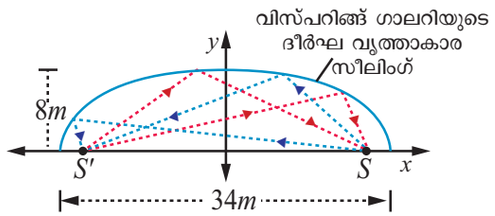
ഒരു വിസ്പറിംഗ് ഗാലറിയായി $34m$ മീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു മുറി നിർമ്മിച്ചിരിക്കുന്നു. ചിത്രം 5.64 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതു പോലെ മുറിയിൽ ഒരു ദീർഘവൃത്താകൃതിയിലുള്ള സീലിംഗ് ഉണ്ട്. സീലിംഗിന്റെ പരമാവധി ഉയരം $8m$ ആണെങ്കിൽ, ഫോക്കസ്സുകൾ എവിടെയാണെന്ന് നിർണ്ണയിക്കുക.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 211 14-02-2023 18:49:18

നിർദ്ധാരണം

ദീർഘ വൃത്താകൃതിയിലുള്ള സീലിംഗിന്റെ അർദ്ധ ദീർഘ അക്ഷത്തിന്റെ നീളം 17 മീ അർദ്ധ ഹ്രസ്വ അക്ഷത്തിന്റെ ഉയരം 8 മീ. അതിനാൽ

$$c^2 = a^2 - b^2 = 17^2 - 8^2$$
$$c = \sqrt{289-64} = \sqrt{225}$$
$$\simeq 15$$



ചിത്രം 5.64

ദീർഘവൃത്താകൃതിയിലുള്ള സീലിംഗിനായി ഫോക്കസ്സുകൾ അതിന്റെ പ്രധാന അച്ചുതണ്ടിൽ മധ്യഭാഗത്ത് നിന്ന് 15 മീറ്റർ അകലെ ഇരുവശത്തും സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു.

മുറിവില്ലാതെയുള്ള മെഡിക്കൽ അദ്ഭുതം

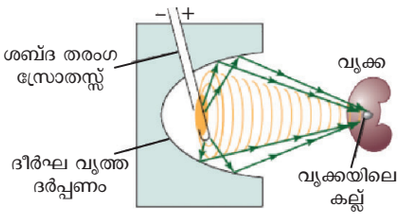
ഒരു ലിത്തോട്രിപ്റ്ററിൽ, ഉയർന്ന ആവൃത്തിയിലുള്ള ശബ്ദ തരംഗങ്ങൾ പുറപ്പെടുവിക്കുന്ന ഒരു സ്രോതസ്സ് ദീർഘവൃത്തത്തിന്റെ ഒരു ഫോക്കസ്സിൽ സ്ഥാപിച്ചിട്ടുണ്ട്. വൃക്കയിലെ കല്ല് ദീർഘവൃത്തത്തിന്റെ ദീർഘ വൃത്ത പ്രതിഫലനത്തിന്റെ സവിശേഷത പ്രകാരം ഒരു ഫോക്കസിൽ നിന്നും പുറപ്പെടുന്ന ശബ്ദതരംഗം അടുത്ത ഫോക്കസിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്ന വൃക്കയിലെ കല്ലിനെ പൊടിയാക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം 5.38

ദീർഘ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം $\frac{(x-11)^2}{484}+\frac{y^2}{64}=1$ (x, y ന്റെ അളവുകൾ സെന്റീമീറ്ററിലാണ്) എങ്കിൽ പ്രതിഫലിച്ച ശബ്ദതരംഗങ്ങൾ രോഗിയുടെ വൃക്കയിലുള്ള കല്ലിൽ വീഴുന്നതിന് രോഗിയുടെ സ്ഥാനം ഏതായിരിക്കും എന്ന് കാണുക?

നിർദ്ധാരണം

ദീർഘവൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം $\frac{(x-11)^2}{484}+\frac{y^2}{64}=1$. വൃക്കയിലെ കല്ലിനെ പൊടിയാക്കുന്നതിന് ശബ്ദതരംഗങ്ങൾ രൂപപ്പെടുന്ന സ്ഥലവും രോഗിയുടെ വൃക്കയിലെ കല്ലും ഫോക്കസുകളിൽ വരത്തക്ക വിധം രൂപീകരിക്കുക.



ചിത്രം 5.65

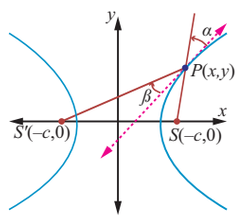
$$a^2 = 484 \text{ and } b^2 = 64$$
$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$= 484 - 64$$
$$= 420$$
$$c \simeq 20.5$$

അതിനാൽ രോഗിയുടെ വൃക്കയിലുള്ള കല്ല് ദീർഘവൃത്തത്തിന്റെ മധ്യത്തിൽ നിന്ന് 20.5 സെ.മീ അകലെ ആയിരിക്കും.

5.7.6 ഹൈപ്പർബോളയുടെ പ്രതിഫലന സവിശേഷത

ഫോക്കസ്സുകളിൽ നിന്ന് ദീർഘവൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിലേയ്ക്കുള്ള രേഖകൾ ആ ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള സ്പർശരേഖയുമായി തുല്യ കോണുകൾ ഉണ്ടാക്കുന്നു. (ചിത്രം 5.66).

പരാബോളയുടെ ഒരു ഫോക്കസ്സിൽ നിന്നും പുറപ്പെടുന്ന പ്രകാശം അല്ലെങ്കിൽ ശബ്ദം അല്ലെങ്കിൽ ശബ്ദതരംഗങ്ങൾ മറ്റൊരു ഫോക്കസ്സിൽ ദിർഘവൃത്താകൃതിയിൽ ലഭിക്കുന്നു. ഇത് ആഴക്കടലിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന കപ്പലുകളുടെ സ്ഥാനം കണ്ടെത്തുന്നതിന് ഉപയോഗിക്കുന്നു. (ചിത്രം 5.54).



ചിത്രം 5.66

ഉദാഹരണം 5.39

രണ്ട് ചുങ്കകാവൽ നിലയങ്ങൾ 600 കിലോമീറ്റർ അകലെ $A(0,0)$, $B(0,600)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു. P എന്ന ബിന്ദുവിലുള്ള ഒരു കപ്പലിൽ നിന്നും ദുരന്തത്തിനുള്ള അടയാളം രണ്ട് സ്റ്റേഷനുകൾക്കും അല്പ വ്യത്യസ്ത സമയങ്ങളിൽ ലഭിക്കുന്നു. സ്റ്റേഷൻ B യിൽ നിന്നുള്ളതിനേക്കാൾ 200 കിലോമീറ്റർ അകലെയാണ് കപ്പൽ A എന്ന് നിർണ്ണയിക്കപ്പെടുന്നു. എങ്കിൽ കപ്പലിന്റെ സ്ഥാനത്തു കൂടി കടന്നുപോകുന്ന ഹൈപ്പർ ബോളയുടെ സമവാക്യം കാണുക.

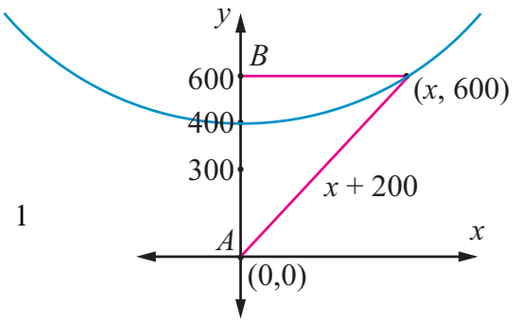
Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 212 14-02-2023 18:49:29

നിർദ്ധാരണം

രണ്ട് ചുങ്ക കാവൽ നിലയങ്ങൾ ഫോക്കസ്സുകളിലായതിനാൽ അവയുടെ കേന്ദ്രം $(0,300)$ എന്നത് ഹൈപ്പർ ബോളയുടെ കേന്ദ്രമാണ്. അതിനാൽ സമവാക്യം $\frac{(y-300)^2}{a^2}-\frac{(x-0)^2}{b^2}=1$. ... (1)

a, b എന്നിവയുടെ മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കാൻ ഹൈപ്പർബോളയിലുള്ള രണ്ട് ബിന്ദുക്കളെ തിരഞ്ഞെടുത്ത് മുകളിലുള്ള സമവാക്യത്തിൽ പ്രതിസ്ഥാപിക്കുക.

നിലയം A എന്നത് B യെക്കാളും 200 കിലോമീറ്റർ അകലെ ആയതിനാൽ $(0,400)$ എന്നത് ഹൈപ്പർ ബോളയിലുള്ള ഒരു ബിന്ദു $\frac{(400-300)^2}{a^2}-\frac{0}{b^2}=1$ $\frac{100^2}{a^2}=1$, $a^2=10000$ മറ്റൊരു ബിന്ദു $(x,600)$ ഹൈപ്പർ ബോളയിലാണ്. അതായത് $600^2+x^2=(x+200)^2$.



ചിത്രം 5.67

$$360000+x^2 = x^2+400x+40000$$
$$x = 800$$

(1), ൽ പ്രതിയിടുക $\frac{(600-300)^2}{10000}-\frac{(800-0)^2}{b^2} = 1$

$$9-\frac{640000}{b^2} = 1$$
$$b^2 = 80000$$

അതിനാൽ ഹൈപ്പർബോളയുടെ സമവാക്യം $\frac{(y-300)^2}{10000}-\frac{x^2}{80000}=1$

കപ്പൽ ഈ ഹൈപ്പർബോളയിൽ ഏതോ ഒരു സ്ഥലത്ത് സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു. മൂന്നാമത്തെ നിലയത്തിൽ നിന്നുള്ള വിവരം ഉപയോഗിച്ച് കൃത്യമായ സ്ഥാനം നിർണ്ണയിക്കാനാകും.

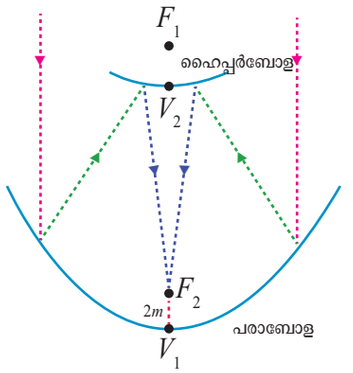
ഉദാഹരണം 5.40

ചില ദൂരദർശിനികളിൽ പരാബോളിക് കണ്ണാടിയും ഹൈപ്പർബോളിക് കണ്ണാടിയും പതിച്ചിട്ടുണ്ട്. (ചിത്രം 5.68) ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന ദൂരദർശിനിയിൽ പരാബോള, ഹൈപ്പർബോള എന്നിവയുടെ കേന്ദ്രബിന്ദു (ഫോക്കസ്) F_1 എന്നും പരാബോളയുടെ ശീർഷം 14 മീറ്ററുമാണ്. ഹൈപ്പർബോളയുടെ രണ്ടാമത്തെ ഫോക്കസ് F_2 പരാബോളയുടെ ശീർഷത്തിന് 2 മീറ്റർ മുകളിലാണ്. ഹൈപ്പർബോളയുടെ ശീർഷം F_1 ന് 1 മീറ്റർ താഴെയാണ്. ഹൈപ്പർബോളയുടെ കേന്ദ്രം ഉത്ഭവസ്ഥാനമായും ഫോക്കസുകൾ y - അക്ഷത്തിലുമായ ഹൈപ്പർബോളയുടെ സമവാക്യം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

V_1 എന്നത് പരാബോളയുടെ ശീർഷവും

V_2 എന്നത് ഹൈപ്പർബോളയുടെ ശീർഷവുമാണ്.



ചിത്രം 5.68

$$\overline{F_1F_2} = 14-2=12\text{മീ},\ 2c=12,\ c=6$$

ഹൈപ്പർബോളയുടെ ശീർഷത്തിലേക്കുള്ള കേന്ദ്രത്തിന്റെ ദൂരം $a=6-1=5$

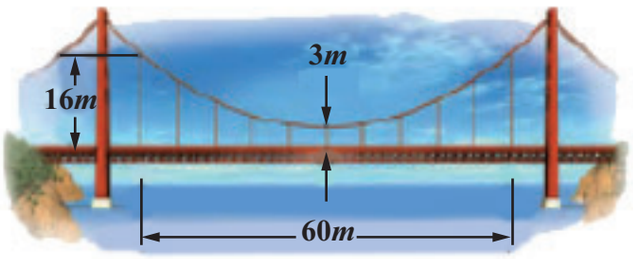
$$b^2 = c^2-a^2$$
$$= 36-25=11.$$

അതിനാൽ ഹൈപ്പർബോളയുടെ സമവാക്യം $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{11}=1$ ആണ്.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 213 14-02-2023 18:49:43

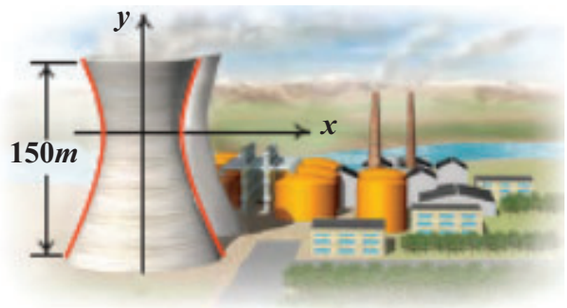
അഭ്യാസം 5.5

1. ഒരു പാലത്തിന് പരാബോളിക് കമാനത്തിന്റെ ആകൃതിയാണ്. അതിന്റെ മധ്യഭാഗത്തെ ഉയരം 10 മീറ്ററും അടിഭാഗം 30 മീറ്റർ വീതിയുമാണ്. എങ്കിൽ മധ്യഭാഗത്ത് നിന്നും ഇരുവശത്തേക്കും 6 മീറ്റർ അകലത്തിൽ കമാനത്തിന്റെ ഉയരം കാണുക.
2. നാലുവരിപ്പാതയ്ക്കായി ഒരു മലയിലൂടെയുള്ള തുരങ്കം തുടങ്ങുന്ന ഭാഗം ദീർഘവൃത്താകൃതിയിലാണ് പാതയുടെ ആകെ വീതി (തുടക്കത്തിലല്ല) 16 മീറ്ററും പാതയുടെ അറ്റങ്ങളിലുള്ള ഉയരം ഒരു ട്രക്കിന് കടന്ന് പോകാവുന്ന തരത്തിൽ 4 മീറ്ററും തുടക്കത്തിലെ ഏറ്റവും കൂടിയ ഉയരം ഏകദേശം 5 മീറ്ററും ആയാൽ തുറന്നഭാഗത്തിന് എത്ര വീതിയുണ്ടാകും?
3. ഒരു ജലധാര അതിന്റെ ഏറ്റവും കൂടിയ ഉയരമായ 4 മീറ്റർ കൈവരിക്കുന്നത് തുടക്കത്തിൽ നിന്നും തിരശ്ചീനമായി 0.5 മീറ്റർ അകലത്തിലാണ്. ജലധാര പരാബോളാകൃതിയിൽ ആണെങ്കിൽ തുടക്കത്തിൽ നിന്ന് 0.75 മീറ്റർ അകലത്തിലുള്ള ഉയരം കാണുക.
4. പരാബോളയുടെ കുറുകെയുള്ള ഛേദം ഉപയോഗിച്ച് ഒര് എഞ്ചിനീയർ ഒരു ഉപഗ്രഹത്തിന്റെ ഡിഷ് രൂപകല്പന ചെയ്യുന്നു. ഡിഷിന്റെ മേൽഭാഗം 5 മീറ്റർ വീതിയും ശീർഷത്തിൽ നിന്നും ഫോക്കസ്സിലേയ്ക്കുള്ള ദൂരം 1.2 മീറ്ററുമാണ്
   (a) ശീർഷം ആധാരബിന്ദുവും, x - അക്ഷം പരാബോളയുടെ സമമിതി അക്ഷവുമായിട്ടുള്ള നിർദ്ദേശാങ്ക സമ്പ്രദായം രൂപീകരിച്ച് പരാബോളയുടെ സമവാക്യം കാണുക.
   (b) ശീർഷത്തിൽ നിന്ന് സാറ്റലൈറ്റ് ഡിഷിന്റെ ആഴം കാണുക.
5. ഒരു തൂക്കുപാലത്തിന്റെ 60 മീറ്റർ നീളത്തിലുള്ള റോഡ് ഭാഗത്ത് പരാബോള ആകൃതിയിലുള്ള കേബിൾ ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതു പോലെ സ്ഥാപിച്ചിട്ടുണ്ട്. റോഡ്ബെഡ്ഡിൽ കുത്തനെയുള്ള കേബിളുകൾ 6 മീറ്റർ അകലത്തിൽ സ്ഥാപിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഇത്തരത്തിലുള്ള ആദ്യ രണ്ട് കുത്തനെയുള്ള കേബിളുകളുടെ ശീർഷത്തിൽ നിന്നുള്ള നീളം കണക്കാക്കുക.



ചിത്രം 5.69

6. ഒരു ന്യൂക്ലിയർ കൂളിംഗ് ടവറിനെ കുറുകെ ഛേദിക്കുമ്പോൾ $\frac{x^2}{30^2}-\frac{y^2}{44^2}=1$ എന്ന സമീകരണത്തിലുള്ള ഒരു ഹൈപ്പർബോളയുടെ ആകൃതിയിലാണ് കിട്ടുന്നത്. ടവറിന് 150 മീറ്റർ ഉയരവും, ടവറിന്റെ മുകളിൽ നിന്ന് ഹൈപ്പർബോളയുടെ കേന്ദ്രത്തിലേക്കുള്ള അകലം ടവറിന്റെ ചുവട്ടിൽ നിന്ന് ഹൈപ്പർബോളയുടെ കേന്ദ്രത്തിലേക്കുള്ള അകലത്തിന്റെ പകുതിയാണ് ടവറിന്റെ മുകൾ ഭാഗത്തേയും കീഴ്ഭാഗത്തേയും വ്യാസം കാണുക.



ചിത്രം 5.70

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 214 14-02-2023 18:49:44

7. 1.2 മീറ്റൽ നീളമുള്ള ഒരു ദണ്ഡിന്റെ അഗ്രങ്ങൾ എല്ലായ്പ്പോഴും നിർദ്ദേശാങ്ക അക്ഷങ്ങളെ സ്പർശിച്ചു കൊണ്ട് ചലിക്കുന്നു. x - അക്ഷവുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്ന അഗ്രത്തിൽ നിന്നും 0.3 മീറ്റർ അകലത്തിലുള്ള P എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ ലോക്കസ്സ് ഒരു ദീർഘവൃത്തമാണ്. ഉൾകേന്ദ്രത കാണുക.

8. തറയിൽ നിന്നും 7.5 മീറ്റർ ഉയരത്തിലുള്ള തിരശ്ചീനമായ ഒരു പൈപ്പിന്റെ അഗ്രത്തിൽ നിന്നും വെള്ളം ഒഴുകുന്നത് ഒരു പരാബോളയുടെ രൂപത്തിലാണ്. പരാബോളയുടെ ശീർഷം പൈപ്പിന്റെ അഗ്രത്താണ്. പൈപ്പിൽ നിന്നും 2.5 മീറ്റർ താഴെയായി ഒഴുകുന്ന ജലത്തിന്റെ പുറത്തേക്കുള്ള വക്രം പൈപ്പിന്റെ അഗ്രത്തു കൂടെയുള്ള ലംബ രേഖയിൽ നിന്നും 3 മീറ്റർ അകലത്തിലാണ് ഈ ലംബ രേഖയിൽ നിന്ന് എത്ര അകലത്തിലാണ് തറയിൽ വെള്ളം പതിക്കുന്നത്?

9. ഒരു റോക്കറ്റ് പടക്കം കത്തിക്കുമ്പോൾ അത് ഒരു പരാബോളിക് പാതയിൽ ചെല്ലുന്നു. അതിന്റെ പരമാവധി ഉയരം 4 മീറ്റർ ചെല്ലുമ്പോൾ അത് കൊളുത്തിയ സ്ഥലത്തു നിന്നും 6 മീറ്റർ അകലെയാണ്. അവസാന മായി അത് ആരംഭ സ്ഥലത്ത് നിന്ന് 12 മീറ്റർ അകലെ നിലത്ത് എത്തുന്നു. എങ്കിൽ പ്രൊജക്ഷൻ കോൺ കണ്ടെത്തുക.

10. A , B എന്നിവ 10 കി.മീ അകലെയുള്ള രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ, വ്യത്യസ്ത സമയങ്ങളിൽ ആ സ്ഥലങ്ങളിൽ കേട്ട ഒരു സ്ഫോടനത്തിന്റെ ശബ്ദത്തിൽ നിന്ന് നിർണ്ണയിക്കുന്നത് സ്ഫോടനത്തിന്റെ സ്ഥാനം A എന്ന ബിന്ദു B എന്ന ബിന്ദുവിനെക്കാൾ 6 കി.മീ അരുകിലാണ്. സ്ഫോടനത്തിന്റെ സ്ഥാനം ഒരു പ്രത്യേക വളവിലേക്ക് പരിമിതപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നുവെന്ന് കാണിച്ച് അതിന്റെ സമവാക്യം കണ്ടെത്തുക.

അഭ്യാസം 5.6

6DPUC

ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുത്തെഴുതുക :

1. $(1,5)$ കൂടാതെ $(4,1)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ വഴി ചെല്ലുന്നതും y -അക്ഷത്തെ സ്പർശിക്കുന്നതുമായ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം $x^2+y^2-5x-6y+9+\lambda\left(4x+3y-19\right)=0$, λ യുടെ വില കാണുക

(1) $0,-\frac{40}{9}$ (2) 0 (3) $\frac{40}{9}$ (4) $\frac{-40}{9}$

2. ലാറ്റസ് റെക്ടം 8 ഉം ലോക്കസ്സുകൾ തമ്മിലുള്ള ദൂരത്തിന്റെ പകുതി സംയോജിത അക്ഷത്തിന്റെ നീളവുമായ ഹൈപ്പർബോളയുടെ ഉൾകേന്ദ്രത

(1) $\frac{4}{3}$ (2) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ (3) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (4) $\frac{3}{2}$

3. $x^2+y^2=4x+8y+5$ എന്ന വൃത്തം $3x-4y=m$ എന്ന നേർരേഖയുമായി രണ്ട് വ്യത്യസ്ത ബിന്ദുക്കളിൽ വിഭജിക്കുന്നുവെങ്കിൽ

(1) $15<m<65$ (2) $35<m<85$ (3) $-85<m<-35$ (4) $-35<m<15$

4. x - അക്ഷത്തെ $(1,0)$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ സ്പർശിക്കുന്നതും $(2,3)$ എന്ന ബിന്ദുവഴി കടന്നുചെല്ലുന്നതു മായ വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസത്തിന്റെ നീളം .

(1) $\frac{6}{5}$ (2) $\frac{5}{3}$ (3) $\frac{10}{3}$ (4) $\frac{3}{5}$

5. $3x^2+by^2+4bx-6by+b^2=0$ എന്ന വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം (ആരം)

(1) 1 (2) 3 (3) $\sqrt{10}$ (4) $\sqrt{11}$

6. $x^2-8x-12=0$ കൂടാതെ $y^2-14y+45=0$ എന്നീ വരികളാൽ രൂപം കൊണ്ട ഒരു ചതുരത്തിൽ ആലേഖനം ചെയ്ത വൃത്തത്തിന്റെ മധ്യഭാഗം

(1) $(4,7)$ (2) $(7,4)$ (3) $(9,4)$ (4) $(4,9)$

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 215 14-02-2023 18:50:01

7. $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ എന്ന നേർരേഖയ്ക്ക് സമാന്തരമായി $2x+4y=3$ എന്ന വൃത്തത്തിലേയ്ക്കുള്ള ലംബരേഖാ സമവാക്യം

(1) $x+2y=3$ (2) $x+2y+3=0$ (3) $2x+4y+3=0$ (4) $x-2y+3=0$

8. ഫോക്കസ്സുകൾ $F_1(3,0)$, $F_2(-3,0)$ ആയ $16x^2+25y^2=400$ ലെ ബിന്ദു $P(x,y)$ ആയാൽ PF_1+PF_2

(1) 8 (2) 6 (3) 10 (4) 12

9. $x+y=6$, $x+2y=4$ എന്നിവ രണ്ട് വ്യാസങ്ങളും $(6,2)$ എന്ന ബിന്ദു വഴി കടന്നു ചെല്ലുന്നതുമായ വൃത്തത്തിന്റെ ആരം

(1) 10 (2) $2\sqrt{5}$ (3) 6 (4) 4

10. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ എന്നീ ഹൈപ്പർബോളയുടെ ഫോക്കസ്സുകൾ ഉപയോഗിച്ച് രൂപം കൊണ്ട ചതുർഭുജത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം

(1) $4(a^2+b^2)$ (2) $2(a^2+b^2)$ (3) a^2+b^2 (4) $\frac{1}{2}(a^2+b^2)$

11. $y^2=4x$ എന്ന പരാബോളയുടെ ലാറ്റസ് റെക്ടത്തിന്റെ അഗ്രബിന്ദുക്കളിലൂടെയുള്ള ലംബ രേഖകൾ $(x-3)^2+(y+2)^2=r^2$ എന്ന വൃത്തത്തിന്റെ സ്പർശരേഖകളായാൽ r^2 ന്റെ വില

(1) 2 (2) 3 (3) 1 (4) 4

12. $y^2=12x$ എന്ന പരാബോളയുടെ ലംബമാണ് $x+y=k$ എങ്കിൽ k യുടെ വില

(1) 3 (2) -1 (3) 1 (4) 9

13. നിർദ്ദേശാങ്ക അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമായ വശങ്ങളുള്ള ദീർഘചതുരം R ന്റെ ഉള്ളിൽ $E_1 : \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ എന്ന ദീർഘവൃത്തം വരച്ചിട്ടുണ്ട്. $(0,4)$ എന്ന ബിന്ദുവഴി കടന്നു ചെല്ലുന്ന മറ്റൊരു ദീർഘവൃത്തം E_2 ദിർഘചതുരം R ന് ബാഹ്യമായി വരച്ചിട്ടുണ്ട്. ദീർഘവൃത്തത്തിന്റെ ഉൾകേന്ദ്രത

(1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{3}{4}$

14. $2x-y=1$ എന്ന നേർരേഖയ്ക്ക് സമാന്തരമായി $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ എന്ന ഹൈപ്പർബോളയ്ക്ക് സ്പർശ രേഖകൾ വരച്ചിട്ടുണ്ട്. ഹൈപ്പർബോളയിലെ സ്പർശരേഖകളുടെ സ്പർശബിന്ദുക്കളിൽ ഒരെണ്ണം

(1) $\left(\frac{9}{2\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ (2) $\left(\frac{-9}{2\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (3) $\left(\frac{9}{2\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (4) $\left(3\sqrt{3},-2\sqrt{2}\right)$

15. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ എന്ന ദീർഘവൃത്തത്തിന്റെ ഫോക്കസ്സ് വഴി കടന്നു ചെല്ലുന്നതും $(0,3)$ കേന്ദ്രവുമായിട്ടുള്ള വൃത്തത്തിന്റെ സമീകരണം

(1) $x^2+y^2-6y-7=0$ (2) $x^2+y^2-6y+7=0$

(3) $x^2+y^2-6y-5=0$ (4) $x^2+y^2-6y+5=0$

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 216 14-02-2023 18:50:33

16. $(1,1)$ കേന്ദ്രവും ആരം $r=1$ ഉം ആയിട്ടുള്ള വൃത്തമാണ് C എന്നിരിക്കട്ടെ. ആധാര ബിന്ദുവഴി കടന്നു ചെല്ലുന്നതും $(0,y)$ കേന്ദ്രവുമായിട്ടുള്ള T എന്ന വൃത്തം C യെ ബാഹ്യമായി സ്പർശിക്കുന്നുവെങ്കിൽ T യുടെ ആരം

(1) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{1}{4}$

17. കേന്ദ്രം ആധാരവും ദീർഘാക്ഷം x- അക്ഷവുമായിട്ടുള്ള ഒരു ദീർഘവൃത്തം പരിഗണിക്കുക. ഇതിന്റെ ഉൾകേന്ദ്രത $\frac{3}{5}$ ഉം ഫോക്കസ്സുകൾ തമ്മിലുള്ള അകലം 6 ഉം ആയാൽ ദീർഘവൃത്തത്തിന്റെ ദീർഘ, ഹ്രസ്വ അക്ഷങ്ങൾ വികർണ്ണങ്ങളായ ദീർഘവൃത്തത്തിൽ അന്തർലേഖനം ചെയ്തിട്ടുള്ള ചതുർഭുജത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം

(1) 8 (2) 32 (3) 80 (4) 40

18. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ എന്ന ദീർഘവൃത്തത്തിന്റെ അന്തർലേഖനം ചെയ്യാവുന്ന ഏറ്റവും വലിയ ദീർഘചതുരത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം

(1) $2ab$ (2) ab (3) $\sqrt{ab}$ (4) $\frac{a}{b}$

19. ഒരു ദീർഘവൃത്തത്തിൽ OB അർദ്ധ ഹ്രസ്വാക്ഷവും F ഉം F' ഉം ഫോക്കസ്സുകളും കോൺ FBF' മട്ടകോണും ആണ്. എങ്കിൽ ദീർഘവൃത്തത്തിന്റെ ഉൾകേന്ദ്രത

(1) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{4}$ (4) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

20. $(x-3)^2+(y-4)^2=\frac{y^2}{9}$ എന്ന ദീർഘവൃത്തത്തിന്റെ ഉൾകേന്ദ്രത

(1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{1}{3\sqrt{2}}$ (4) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

21. P എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്നും $y^2=4x$ എന്ന പരാബോളയിലേക്ക് വരക്കുന്ന രണ്ട് സ്പർശരേഖകളും മട്ടത്രികോണത്തിലാണെങ്കിൽ P യുടെ ലോക്കസ്സ്

(1) $2x+1=0$ (2) $x=-1$ (3) $2x-1=0$ (4) $x=1$

22. $(1,-2)$ വഴി കടന്നു ചെല്ലുന്നതും x അക്ഷത്തിൽ $(3,0)$ ൽ സ്പർശിക്കുന്നതുമായ വൃത്തം കടന്നു ചെല്ലുന്ന ബിന്ദു

(1) $(-5,2)$ (2) $(2,-5)$ (3) $(5,-2)$ (4) $(-2,5)$

23. $(-2,0)$ ൽ നിന്നുള്ള അകലം $x=\frac{-9}{2}$ ൽ നിന്നുള്ള അകലത്തിൽ $\frac{2}{3}$ മടങ്ങ് ആയിട്ടുള്ള ബിന്ദുവിന്റെ ലോക്കസ്സ്

(1) ഒരു പരാബോള (2) ഒരു ഹൈപ്പർബോള (3) ഒരു ദീർഘവൃത്തം (4) ഒരു വൃത്തം

24. $16x^2-9y^2=144$ എന്ന ഹൈപ്പർബോളയെ $y=mx+2\sqrt{5}$ എന്ന നേർരേഖ സ്പർശിക്കുമ്പോഴുള്ള m ന്റെ മൂല്യങ്ങൾ $x^2-(a+b)x-4=0$ ന്റെ മൂലങ്ങളാണെങ്കിൽ $(a+b)$ യുടെ വില

(1) 2 (2) 4 (3) 0 (4) -2

25. $x^2+y^2-8x-4y+c=0$ എന്ന വൃത്തത്തിലെ ഒരു വ്യാസത്തിന്റെ ഒരഗ്രത്തിന്റെ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ $(11,2)$ ആയാൽ അതിന്റെ മറ്റെ അഗ്രത്തിന്റെ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ

(1) $(-5,2)$ (2) $(-3,2)$ (3) $(5,-2)$ (4) $(-2,5)$

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 217 14-02-2023 18:50:57

സംഗ്രഹം

(1) ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ സ്റ്റാൻഡേർഡ് രൂപത്തിലുള്ള സമവാക്യം $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$.

(i) കേന്ദ്രം (h,k) (ii) വ്യാസാർദ്ധം ' r '

(2) പൊതുവായ രൂപത്തിലുള്ള വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$.

(i) കേന്ദ്രം $(-g,-f)$ (ii) വ്യാസാർദ്ധം $=\sqrt{g^2+f^2-c}$

(3) $lx+my+n=0$ എന്ന നേർരേഖയേയും $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ എന്ന വൃത്തത്തെയും തമ്മിൽ വിഭജിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ വഴി ചെല്ലുന്ന വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം
$x^2+y^2+2gx+2fy+c+\lambda(lx+my+n)=0, \lambda\in\mathbb{R}^1$ എന്നാണ്.

(4) ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസത്തിന്റെ അഗ്രങ്ങൾ (x_1,y_1) കൂടാതെ (x_2,y_2) ആണെങ്കിൽ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$ ആണ്.

(5) (x_1,y_1) എന്ന ബിന്ദുവിൽ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ എന്ന വൃത്തത്തിന്റെ സ്പർശരേഖയുടെ സമവാക്യം $xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$

(6) (x_1,y_1) എന്ന ബിന്ദുവിൽ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ എന്ന വൃത്തത്തിന്റെ ലംബരേഖയുടെ സമവാക്യം $yx_1-xy_1+g(y-y_1)-f(x-x_1)=0$.

പട്ടിക 1
സ്പർശരേഖയും ലംബരേഖയും

വക്രം	സമവാക്യം	സ്പർശരേഖയുടെ സമവാക്യം	ലംബരേഖയുടെ സമവാക്യം
വൃത്തം	$x^2+y^2=a^2$	(i) കാർട്ടീഷ്യൻ രൂപം $xx_1+yy_1=a^2$ (ii) പാരാമെട്രിക് രൂപം $x\cos\theta+y\sin\theta=a$	(i) കാർട്ടീഷ്യൻ രൂപം $xy_1-yx_1=0$ (ii) പാരാമെട്രിക് രൂപം $x\sin\theta-y\cos\theta=0$
പരാബോള	$y^2=4ax$	(i) $yy_1=2a(x+x_1)$ (ii) $yt=x+at^2$	(i) $xy_1+2y=2ay_1+x_1y_1$ (ii) $y+xt=at^3+2at$
ദീർഘവൃത്തം	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	(i) $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$ (ii) $\frac{x\cos\theta}{a}+\frac{y\sin\theta}{b}=1$	(i) $\frac{a^2x}{x_1}+\frac{b^2y}{y_1}=a^2-b^2$ (ii) $\frac{ax}{\cos\theta}-\frac{by}{\sin\theta}=a^2-b^2$
ഹൈപ്പർബോള	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	(i) $\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1$ (ii) $\frac{x\sec\theta}{a}-\frac{y\tan\theta}{b}=1$	(i) $\frac{a^2x}{x_1}+\frac{b^2y}{y_1}=a^2+b^2$ (ii) $\frac{ax}{\sec\theta}+\frac{by}{\tan\theta}=a^2+b^2$

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 218 14-02-2023 18:51:27

പട്ടിക 2

കോണിക് വിഭജനത്തിന് $y = mx + c$ എന്ന നേർരേഖ സ്പർശരേഖ ആകുന്നതിനുള്ള നിബന്ധന

കോണിക്	സമവാക്യം	സ്പർശരേഖയ്ക്കുള്ള നിബന്ധനകൾ	സ്പർശബിന്ദു	സ്പർശരേഖയുടെ സമവാക്യം
വൃത്തം	$x^2 + y^2 = a^2$	$c^2 = a^2(1+m^2)$	$\left(\frac{\mp am}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{\pm a}{\sqrt{1+m^2}}\right)$	$y = mx \pm \sqrt{1+m^2}$
പരാബോള	$y^2 = 4ax$	$c = \frac{a}{m}$	$\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$	$y = mx + \frac{a}{m}$
ദീർഘവൃത്തം	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$c^2 = a^2m^2 + b^2$	$\left(\frac{-a^2m}{c}, \frac{b^2}{c}\right)$	$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$
ഹൈപ്പർബോള	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$c^2 = a^2m^2 - b^2$	$\left(\frac{-a^2m}{c}, \frac{-b^2}{c}\right)$	$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$

പട്ടിക 3

പാരാമെട്രിക് രൂപം

കോണിക്	പാരാമെട്രിക് സമവാക്യം	പാരാമീറ്റർ	പാരമീറ്ററിന്റെ പരിധി	കോണിക്കിലുള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദു
വൃത്തം	$x = a\cos\theta$ $y = a\sin\theta$	θ	$0 \le \theta \le 2\pi$	'θ' അല്ലെങ്കിൽ $(a\cos\theta, a\sin\theta)$
പരാബോള	$x = at^2$ $y = 2at$	t	$-\infty < t < \infty$	't' അല്ലെങ്കിൽ $(at^2, 2at)$
ദീർഘവൃത്തം	$x = a\cos\theta$ $y = b\sin\theta$	θ	$0 \le \theta \le 2\pi$	'θ' അല്ലെങ്കിൽ $(a\cos\theta, b\sin\theta)$
ഹൈപ്പർബോള	$x = a\sec\theta$ $y = b\tan\theta$	θ	$-\pi \le \theta \le \pi$, $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ ഒഴികെ	'θ' അല്ലെങ്കിൽ $(a\sec\theta, b\tan\theta)$

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ എന്ന കോണിക്കിന്റെ പൊതു സമവാക്യത്തിൽ നിന്നും കോണിക്കിന്റെ തരങ്ങളെ കണ്ടുപിടിക്കൽ

രണ്ടാമത്തെ ഡിഗ്രി സമവാക്യത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് താഴെ പറയുന്ന നിബന്ധനകൾക്ക് അനുസരിച്ച് ഒരു വൃത്തം, പരാബോള, ഒരു ദീർഘവൃത്തം, ഒരു ഹൈപ്പർബോള, ഒരു ബിന്ദു, ഒരു ശൂന്യഗണം, ഒരു നേർരേഖ അല്ലെങ്കിൽ ഒരു ജോഡി നേർരേഖകൾ ആയിരിക്കും,

(1) $A = C = 1,\ B = 0, D = -2h,\ E = -2k,\ F = h^2 + k^2 - r^2$ എങ്കിൽ പൊതുസമവാക്യം $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$, എന്ന് കിട്ടുന്നു. ഇത് ഒരു വൃത്തമാണ്.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 219 14-02-2023 18:51:42

(2) $B = 0$, A അല്ലെങ്കിൽ $C = 0$, ആണെങ്കിൽ പൊതുസമവാക്യം നാം പഠിച്ച ഏതെങ്കിലും ഒരു പരാബോളയാകാം.

(3) $A \neq C$, A അല്ലെങ്കിൽ C ഇവ രണ്ടും ഒരേ ചിഹ്നമായിരുന്നാൽപൊതുസമവാക്യം ഒരു ദീർഘവൃത്തമാകും.

(4) $A \neq C$, A അല്ലെങ്കിൽ C ഇവ രണ്ടും വ്യത്യസ്ത ചിഹ്നമായിരുന്നാൽ പൊതുസമവാക്യം ഒരു ഹൈപ്പർബോളയാകും

(5) $A = C$ കൂടാതെ $B = D = E = F = 0$, ആണെങ്കിൽ പൊതുസമവാക്യം $x^2 + y^2 = 0$ എന്ന ബിന്ദുവായി മാറും.

(6) $A = C = F$ കൂടാതെ $B = D = E = 0$, എങ്കിൽ പൊതുസമവാക്യം $x^2 + y^2 + 1 = 0$, എന്ന ശൂന്യ ഗണമായി മാറും.

(7) $A \neq 0$ അല്ലെങ്കിൽ $C \neq 0$ യും മറ്റുള്ളവയും പൂജ്യം ആയാൽ, പൊതുസമവാക്യം നിർദ്ദേശാങ്ക അക്ഷം ആകും.

(8) $A = -C$ യും മറ്റുള്ളവയെല്ലാം പൂജ്യം ആയാൽ പൊതുസമവാക്യം $x^2 - y^2 = 0$ എന്ന ഒരു ജോഡി രേഖകൾ കിട്ടും.

ഐ.സി.റ്റി കോർണർ

https://ggbm.at/vchq92pg അല്ലെങ്കിൽ QR കോഡിനെ സ്കാൻ ചെയ്യുക

ബ്രൗസർ തുറന്ന്, തന്നിട്ടുള്ള URL ലിങ്ക് ടൈപ്പ് ചെയ്യുക (അല്ലെങ്കിൽ) QR കോഡിനെ സ്കാൻ ചെയ്യുക അപ്പോൾ "12th Standard Mathematics" എന്ന പേരുള്ള ജിയോജീബ്ര വർക്ക് ബുക്ക് ഓപ്പൺ ആകും. വർക്ക് ബുക്കിന്റെ ഇടതു ഭാഗത്ത് പാഠഭാഗത്തെ ആസ്പദമാക്കി അനേകം ഭാഗങ്ങളുണ്ട് “ദ്വിമാന വിശ്ലേഷക ജ്യാമിതി” എന്ന പേരുള്ള അദ്ധ്യായത്തിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്യുക. നിങ്ങൾക്ക് അതിൽ ഈ പാഠഭാഗത്തെ അനുബന്ധിച്ച് അനേകം വർക്ക് ഷീറ്റുകൾ ലഭിക്കും. "Geometrical Meaning" എന്ന വർക്ക് ഷീറ്റ് തെരഞ്ഞെടുക്കുക

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 220 14-02-2023 18:51:49

അദ്ധ്യായം

6

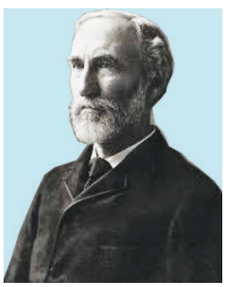
സദിശ ബീജഗണിതത്തിന്റെ പ്രയോഗങ്ങൾ

BD9XA

"അളവുമായി ബന്ധിപ്പിക്കുന്ന ഒരു ശാസ്ത്രമാണ് ഗണിതം. മറ്റുള്ളവയുമായി അളവുകളെ തുലനം ചെയ്യുകയോ ചെയ്യാതിരിക്കാനോ കഴിയുകയില്ല. ഓരോ വാദത്തിലും ഓരോന്നും മറ്റൊന്നിനാൽ മാറ്റി സ്ഥാപിക്കപ്പെടുമ്പോൾ രണ്ട്കാര്യങ്ങൾ തുല്യമാകും."

— ഹെർമൽ ഗുന്ദർ ഗ്രാസ്മാൻ

6.1 ആമുഖം



ജോസിയാ വില്ലിയാർഡ് ഗിബ്സ്
(1839 – 1903)

സദിശങ്ങളുടെ (വെക്ടറുകളുടെ) ആശയം XI ാം സ്റ്റാൻഡേർഡ് ടെക്സ്റ്റ് ബുക്കിൽ നമുക്ക് സുപരിതമാണ് (ലാറ്റിനിൽ വെക്ടസ് - ന്റെ അർഥം "വഹിക്കുക" എന്നാണ്) വെസ്സൽ (1745-1818) അർഗാണ്ട് (1768-1822) എന്നിവരുടെ ആശയങ്ങളിൽ നിന്നാണ് സദിശങ്ങളുടെ സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ ആധുനിക പതിപ്പ് ഉരുത്തിരിഞ്ഞത്. സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകളെ ജ്യാമിതീയമായി ഒരു നിർദ്ദേശാങ്കതലം നേർരേഖാ ഭാഗമായി വിവരിക്കാൻ അവർ ശ്രമിക്കുമ്പോൾ **ഒരു സദിശത്തിന് അളവും ദിശയും ഉണ്ടെന്നും അവയുടെ ആരംഭ ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനങ്ങൾ കണക്കിലെടുക്കാതെ ഒരേ അളവിലും ദിശയിലും ഉള്ള രണ്ട് സദിശങ്ങൾ എല്ലായ്പ്പോഴും തുല്യമാണെന്നും ഞങ്ങൾ കണ്ടു.**

രണ്ട് സദിശങ്ങളുടെ സങ്കലനം, ഒരു സദിശത്തെ അദിശം കൊണ്ടുള്ള ഗുണനം ഡോട്ട് ഗുണനം, ക്രോസ് ഗുണനം എന്നിവ $\vec{a}$ അല്ലെങ്കിൽ $a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ എന്ന ചിഹ്നത്തിലൂടെ അനിയന്ത്രിതമായ സദിശമായി സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഒരു നിശ്ചിത സദിശത്തിന്റെ ദിശയും അളവും മനസ്സിലാക്കാൻ മറ്റെല്ലാ ആശയങ്ങളും കുറച്ചു കൂടി കർക്കശമായി സദിശങ്ങളുടെ ജ്യാമിതീയ ആമുഖം ഞങ്ങൾ ഓർക്കുകയും ഇത് നേർരേഖകളുടെയും പ്രതലങ്ങളുടെയും സമവാക്യം ചർച്ച ചെയ്യാൻ ഉപയോഗപ്രദമവുകയും ചെയ്യും. മികച്ച ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞന്മാരായ ഗ്രാസ്മാൻ, ഹാമിൽട്ടൻ, ക്ലിഫോർഡ് ഗിബ്സ് എന്നിവരാണ് സദിശങ്ങളുടെ ഡോട്ട്, ക്രോസ് ഗുണനങ്ങൾ അവതരിപ്പിച്ച മുൻഗാമികൾ സദിശ ബീജഗണിതത്തിന് ഭൗതിക ശാസ്ത്രത്തിൽ കുറച്ച് നേരിട്ടുള്ള അപ്ലിക്കേഷനുകൾ ഉണ്ട്. കൂടാതെ ഭൗതികശാസ്ത്രം, എഞ്ചിനീയറിംഗ്, മെഡിസിൻ എന്നിവയിൽ സദിശ കാൽക്കുലസിനൊപ്പം ധാരാളം ആപ്ലിക്കേഷനുകളും ഉണ്ട്. അവയിൽ ചിലത് ചുവടെ പരാമർശിച്ചിരിക്കുന്നു.

- ഒരു സമാന്തര പൈപ്പിന്റെ വ്യാപ്തം കണക്കാക്കാൻ ആദിശ ട്രിപ്പിൾ ഗുണനം ഉപയോഗിക്കുന്നു.
- മെക്കാനിക്സിൽ, ചെയ്ത ജോലിയും ചുഴറ്റുബലവും കണ്ടെത്തുന്നതിന് ഡോട്ട്, ക്രോസ് ഗുണനം യഥാക്രമം ഉപയോഗിക്കുന്നു.
- സദിശങ്ങളുടെ ചുരുളും വ്യതിചലനവും അവതരിപ്പിക്കുന്നതിന് കാൽക്കുലസിനൊപ്പം സദിശ ബീജഗണിതവും ഉപയോഗിക്കുന്നു. വൈദ്യുത കാന്തികത, ഹൈഡ്രോ ഡൈനാമിക്സ്, രക്തചംക്രമണം, റോക്കറ്റ് വിക്ഷേപണം, ഉപഗ്രഹത്തിന്റെ പാത എന്നിവയുടെ പഠനത്തിൽ ചുരുളും വ്യതിചലനവും വളരെയധികം ഉപയോഗിക്കുന്നു.
- ബഹിരാകാശത്തെ രണ്ട് വിമാനങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ദൂരവും അവയുടെ പാതകൾ തമ്മിലുള്ള കോണും കണക്കാക്കാൻ ഡോട്ട്, ക്രോസ് ഗുണനം ഉപയോഗിക്കുന്നു.
- മേൽക്കൂരയുടെ ചരിവും സൂര്യന്റെ ദിശയും ശ്രദ്ധാപൂർവം പരിഗണിച്ച് കൂടുതൽ സൗരോർജ്ജം ഉൽപാദിപ്പിച്ച് സോളാർ പാനലുകൾ സ്ഥാപിക്കുന്നതിന് സദിശങ്ങളുടെ ഡോട്ട് ഗുണനത്തിന്റെ ലളിതമായ പ്രയോഗം ഉപയോഗിക്കുന്നു. സദിശ ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് ഒരാൾക്ക് ഒരു സോളാർ പാനൽ സൃഷ്ടിക്കുന്ന സൗരോർജ്ജത്തിന്റെ അളവ് കണക്കാക്കാം.
- ഉപഗ്രഹങ്ങളിലെ പാനലുകൾക്കിടയിലുള്ള കോണുകളുടെ ദൂരം അളക്കുന്നതിനും വിവിധ വ്യവസായങ്ങളിലെ പൈപ്പുകളുടെ ശൃംഖലകളുടെ നിർമ്മാണത്തിനും കോണുകളും ബീമുകളും തമ്മിലുള്ള ദൂരവും കണക്കാക്കുന്നതിൽ സിവിൽ എഞ്ചിനിയറിംഗിലെ ഘടനകൾ ഇവയിൽ സദിശ ബീജഗണിതം ഉപയോഗിക്കുന്നു.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 221 15-02-2023 16:20:57

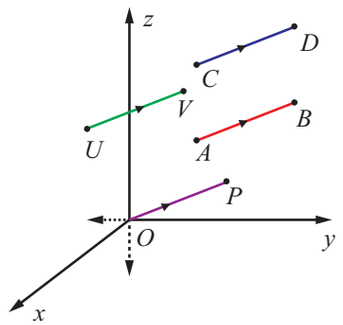
പഠന ലക്ഷ്യങ്ങൾ

ഈ അധ്യായം പൂർത്തിയാകുമ്പോൾ, വിദ്യാർത്ഥികൾക്ക് താഴെപ്പറയുന്നവ മനസ്സിലാക്കാൻ കഴിയും

- രണ്ടോ മൂന്നോ സദിശങ്ങളുടെ അദിശ, സദിശ ഗുണനങ്ങള ഉപയോഗിക്കാൻ
- ജ്യാമിതി ത്രികോണമിതി ഭൗതിക ശാസ്ത്രം എന്നിവയിലെ പ്രശ്നങ്ങൾ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യൽ
- പാരാമെട്രിക് രൂപത്തിൽ നേർരേഖയുടെ സമവാക്യങ്ങൾ നോൺ പാരാമെട്രിക് നിർദ്ദേശാങ്ക രൂപത്തിലെ വിവിധ സാഹചര്യങ്ങളെയും നിർദ്ധാരണം ചെയ്യൽ
- പാരാമെട്രിക്, നോൺ പാരാമെട്രിക് നിർദ്ദേശാങ്ക രൂപത്തിൽ തലത്തിന്റെ സമവാക്യങ്ങൾ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യൽ
- വരകൾക്കിടയിലെ കോണും വളഞ്ഞ (ചരിഞ്ഞ) വരകൾക്കിടയിലെ ദൂരവും കണ്ടെത്താൻ
- ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ ബിംബത്തിന്റെ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ കണ്ടെത്താൻ

6.2 സദിശങ്ങൾക്ക് ജ്യാമിതീയ ആമുഖം

ഒരു നേർരേഖയിലെ സദിശത്തെ $\vec{v}$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഒരു ത്രിമാന ഭാഗം $\mathbb{R}^3$ ന്റെ ആരംഭബിന്ദു $A = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ ഉം അവസാന ബിന്ദു $B = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ ഉം ഇതിനെ $\overrightarrow{AB}$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഒരു രേഖാഖണ്ഡത്തിന്റെ ഭാഗമായ AB യുടെ നീളം എന്നത് AB സദിശത്തിന്റെ അളവും ദിശയുമാണ്. ഇവിടെ ഒരു സദിശത്തെ പരസ്പരം മാറ്റാവുന്ന തരത്തിലെ ഇങ്ങനെ $\vec{v}$ അല്ലെങ്കിൽ $\overrightarrow{AB}$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാവുന്നതാണ്. $\mathbb{R}^3$ ലെ രണ്ട് സദിശങ്ങൾ $\overrightarrow{AB}$ യും $\overrightarrow{CD}$ യും തുല്യമാണെന്ന് പറയണമെങ്കിൽ AB യുടെയും CD യുടെയും നീളം തുല്യവും



ചിത്രം 6.1

സമാന്തരവും A യിൽ നിന്ന് B യിലേക്കും C യിൽ നിന്ന് D യിലേക്കും സമാന്തരവുമായിരിക്കും. $\overrightarrow{AB}$ യും $\overrightarrow{CD}$ യും തുല്യമാണെങ്കിൽ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ എന്ന് നമുക്ക് എഴുതാൻ കഴിയും. കൂടാതെ $\overrightarrow{CD}$ യെ $\overrightarrow{AB}$ യുടെ **ട്രാൻസിലേറ്റ്** എന്ന് പറയാം.

ഓരോ സദിശം $\overrightarrow{AB}$ യെയും $\mathbb{R}^3$ ൽ എവിടെയും ട്രാൻസിലേറ്റ് ചെയ്യപ്പെടുമെന്ന് നിരീക്ഷിക്കാൻ എളുപ്പമാണ്. ഇതിന്റെ ആരംഭ ബിന്ദു $U \in \mathbb{R}^3$ ഉം അവസാന ബിന്ദു $V \in \mathbb{R}^3$ ഉം അങ്ങനെ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{UV}$ പ്രത്യേകിച്ച് $\mathbb{R}^3$ ന്റെ ഒർജിൻ O എങ്കിൽ $P \in \mathbb{R}^3$ നെ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP}$ എന്ന് കാണാം. അങ്ങനെ സദിശം $\overrightarrow{OP}$ യെ P യുടെ **സ്ഥാന സദിശം** എന്ന് വിളിക്കാം. മാത്രമല്ല ഏതെങ്കിലും സദിശം $\vec{v}$ നമ്മൾ നിരീക്ഷിച്ചാൽ അതിന് സമാനമായ ഒരു ബിന്ദു $P \in \mathbb{R}^3$ നിലനിൽക്കുന്നെന്നും അത് P യുടെ സ്ഥാനസദിശം $\overrightarrow{OP}$ സദിശം $\vec{v}$ യ്ക്ക് തുല്യവുമാണ്. ഒരു സദിശം $\overrightarrow{AB}$ യുടെ ആരംഭ ബിന്ദു A യ്ക്ക് സമമായി അവസാന ബിന്ദു B ആയാൽ സദിശം $\overrightarrow{AB}$ യെ സീറോ സദിശം എന്ന് പറയാം. അടിസ്ഥാന സൂചകങ്ങൾ $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$, $\vec{0}$ എന്നിവ $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (0,0,0)$, എന്നീ ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാന സദിശത്തെ സൂചിപ്പിക്കാൻ യഥാക്രമം ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഏതൊരു ബിന്ദു $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ ന്റെ $a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ യെ (a_1, a_2, a_3), യുടെ സ്ഥാന സദിശം എന്ന് വിളിക്കാം. അത് ആരംഭബിന്ദു $(0,0,0)$ ഉം അവസാന ബിന്ദു (a_1, a_2, a_3) യും ആയ ഒരു നേരെയുള്ള നേർരേഖ ഭാഗമാണ് എല്ലാ വാസ്തവിക സംഖ്യകളും അദിശങ്ങളാണ്.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 222 15-02-2023 16:21:00

തന്നിട്ടുള്ള സദിശം $\overrightarrow{AB}$ **സദിശത്തിന്റെ നീളം** കണക്കാക്കുന്നത്

$$\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}\,,$$

അവിടെ A എന്നത് (a_1,a_2,a_3), B എന്നത് (b_1,b_2,b_3). ആണ് പ്രത്യേകിച്ച് (b_1,b_2,b_3), യുടെ സ്ഥാനസദിശം $\vec{b}$ എങ്കിൽ അതിന്റെ നീളം $\sqrt{{b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2}$ ഒരു സദിശത്തിന്റെ നീളം 1 ആണെങ്കിൽ അത് യൂണിറ്റ് സദിശം ആണ്. യൂണിറ്റ് സദിശത്തെ സൂചിപ്പിക്കാൻ $\hat{u}$ എന്ന ചിഹ്നം ഉപയോഗിക്കുന്നു. $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ എന്നിവയെ യൂണിറ്റ് സദിശമെന്നും $\vec{0}$ യെ പൂജ്യം നീളമുള്ള അദ്വിതീയ സദിശമെന്നും അറിയുക. സാഹചര്യം അനുസരിച്ച് 0 യുടെ ദിശയെ സൂചിപ്പിക്കാം.

ത്രിമാന സ്ഥലത്തെ സദിശത്തിന്റെ സങ്കലനവും അദിശഗുണനവും ഇങ്ങനെ നിർവചിക്കാം

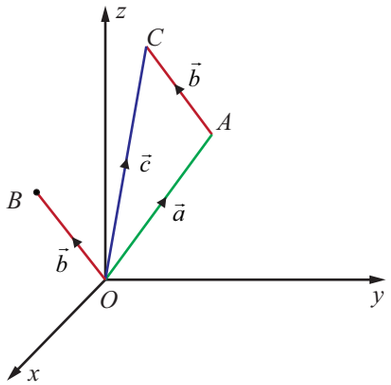
$$\vec{a}+\vec{b} = (a_1+b_1)\hat{i}+(a_2+b_2)\hat{j}+(a_3+b_3)\hat{k}\,.$$

$$\alpha\vec{a} = (\alpha a_1)\hat{i}+(\alpha a_2)\hat{j}+(\alpha a_3)\hat{k}\,;$$

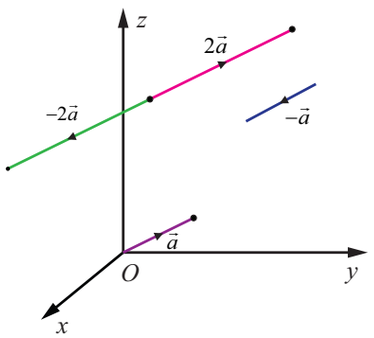
ഇവിടെ $$\vec{a} = a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k},\ \ \vec{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}\in\mathbb{R}^3,\ \ \alpha\in\mathbb{R}\,.$$

$\vec{a}+\vec{b}$ യുടെ ജ്യാമിതീയ വ്യാഖ്യാനം കാണാൻ, $\vec{a}$ യും $\vec{b}$ യും, യഥാക്രമം സ്ഥാന സദിശം എന്നെടുക്കുക. സദിശം $A=(a_1,a_2,a_3)$, $B=(b_1,b_2,b_3)$, $\vec{b}$ ന് യോജിച്ച ആരംഭബിന്ദു A യും അവസാന ബിന്ദു $C=(c_1,c_2,c_3)$ ലോട്ട് പരിവർത്തനം ചെയ്യുക. ചിത്രം 6.2 കാണുക $(c_1,c_2,c_3)\in\mathbb{R}^3$. എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാന സദിശം $\vec{c}$ എന്നത് (c_1,c_2,c_3) യ്ക്ക് സമമാണ് $\vec{a}+\vec{b}$.

സദിശം $\alpha\vec{a}$ എന്നത് $\vec{a}$ യ്ക്ക് സമാന്തരമായ ഒരു സദിശവും അതിന്റെ നീളം വലുതാക്കുകയോ $(\alpha>1)$ ചുരുക്കുകയോ $(0<\alpha<1)$. ചെയ്യാവുന്നതുമാണ് $\alpha<0$ എങ്കിൽ എന്നിട്ട് $\alpha\vec{a}$ യുടെ അളവ് എന്നത് $|\alpha|$ യുടെ $\vec{a}$ മടങ്ങും അതിന്റെ ദിശ $\vec{a}$ യുടെ എതിർ ദിശയുമാണ് പ്രത്യേകിച്ച് $\alpha=-1$ എങ്കിൽ , എന്നിട്ട് $\alpha\vec{a}=-\vec{a}$ ആയാൽ സദിശം ഒരേ നീളവും $\vec{a}$ യുടെ എതിർദിശയുമായിട്ടുള്ളതാണ്. ചിത്രം 6.3 കാണുക.



ചിത്രം 6.2



ചിത്രം 6.3

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 223 15-02-2023 16:21:02

6.3 അദിശ ഗുണനവും സദിശ ഗുണനവും

അടുത്തതായി നമ്മൾ രണ്ട് സദിശങ്ങളുടെ അദിശഗുണനവും സദിശഗുണനവും ഓർമ്മിച്ചെടുക്കുന്നു.

നിർവ്വചനം 6.1

രണ്ട് സദിശങ്ങൾ തന്നിട്ടുള്ളതിൽ $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ യും $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ അതിന്റെ അദിശ ഗുണത്തെ (ഡോട്ട് ഗുണനം) അതിനെ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുകയും ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കുകയും ചെയ്യാം

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

,

സദിശ ഗുണനം (ക്രോസ് ഗുണനം) ത്തെ $\vec{a}\times\vec{b}$, എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുകയും ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കുകയും ചെയ്യാം

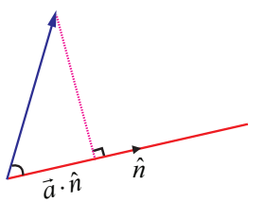
$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

കുറിപ്പ്

$\vec{a}\cdot\vec{b}$ അദിശവും $\vec{a}\times\vec{b}$ സദിശവുമാണ്.

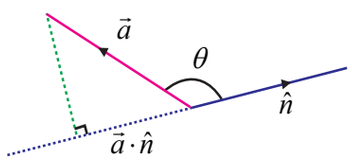
6.3.1 ജ്യാമിതീയ വ്യാഖ്യാനം

ജ്യാമിതീയമായി, $\vec{a}$ ഒരു അനിയന്ത്രിതമായ സദിശവും $\hat{n}$ ഒരു യൂണിറ്റ് സദിശവും എങ്കിൽ $\vec{a}\cdot\hat{n}$ എന്നത് $\vec{a}$ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്ന നേർരേഖയിലെ സദിശം $\hat{n}$ ന്റെ പ്രൊജക്ഷനാണ്. $\vec{a}\cdot\hat{n}$ യ്ക്കും $\vec{a}$ നും ഇടയിലുള്ള കോൺ ന്യൂനകോൺ എങ്കിൽ $\hat{n}$ ഒരു പോസിറ്റീവ് അളവ് ആയിരിക്കുകയും ചിത്രം 6.4 കാണുക. $\vec{a}$ യ്ക്കും $\hat{n}$ നും ഇടയിലുള്ള കോൺ, ബ്യൂഹത് കോൺ എങ്കിൽ, ഒരു നെഗറ്റീവ് അളവ് ആയിരിക്കുകയും ചെയ്യും. ചിത്രം 6.5 കാണുക.



പോസിറ്റീവ്ഡോട്ട് ഗുണനം

ചിത്രം 6.4



നെഗറ്റീവ് ഡോട്ട് ഗുണനം

ചിത്രം 6.5

$\vec{a}$ യും $\vec{b}$ യും പൂജ്യമല്ലാത്ത അനിയന്ത്രിത സദിശങ്ങളാണെങ്കിൽ $|\vec{a}\cdot\vec{b}| = \left||\vec{b}|\,\vec{a}\cdot\left(\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)\right| = \left||\vec{a}|\,\vec{b}\cdot\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right)\right|$ യും $|\vec{a}\cdot\vec{b}|$ എന്നത് $|\vec{b}|\vec{a}$ എന്ന സദിശം $\vec{b}$ എന്ന് സദിശത്തിന്റെ ദിശയിലേക്ക് പ്രൊജക്ട് ചെയ്യുന്നതോ $|\vec{a}|\vec{b}$ എന്ന സദിശം $\vec{a}$. എന്ന സദിശത്തിന്റെ ദിശയിലേക്ക് പ്രൊജക്ട് ചെയ്യുന്നതോ ആയ നേർരേഖാ നീളമാണ്. നമുക്ക് അറിയാം $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$, അവിടെ θ എന്നത് $\vec{a}$ യ്ക്കും $\vec{b}$ യ്ക്കും ഇടയിലുള്ള കോണാണ്. നമുക്ക് ഓർമ്മിക്കാൻ കഴിയും $\vec{a}$ യ്ക്കും $\vec{b}$ യ്ക്കും ഇടയിലുള്ള കോൺ എന്നത് $\vec{a}$ യുടെയും $\vec{b}$ യുടെയും ഘടികാര ദിശയിലെ എണ്ണപ്പെടുന്ന അളവാണ്.

$\vec{a}\times\vec{b}$ എന്ന സദിശം ഒരു $\vec{0}$ സദിശമോ അല്ലെങ്കിൽ $\vec{a}$ യ്ക്കും $\vec{b}$ യ്ക്കും സമാന്തരവും ഒരേ ബിന്ദുവിൽ തുടങ്ങുന്ന സദിശങ്ങളാൽ രൂപീകൃതമാക്കുന്ന സമാന്തരികത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം എന്നത് $\vec{a}$, $\vec{b}$ എന്നീ സദിശങ്ങളുടെ അളവും ഉള്ള സമാന്തരവും തലത്തിൽ ലംബവുമായി സദിശമോ ആയിരിക്കും. $\vec{a}$ യും $\vec{b}$ യും രണ്ട് പൂജ്യ മല്ലാത്ത സദിശങ്ങൾ എങ്കിൽ $\vec{a}\times\vec{b}$ യുടെ അളവ് ഈ സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിച്ച് കണക്കാക്കാം.

$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}||\sin\theta|$, ഇവിടെ θ എന്നത് $\vec{a}$ യ്ക്കും $\vec{b}$ യ്ക്കും ഇടയിലുള്ള കോൺ.

ഒരേ ആരംഭബിന്ദു ഉള്ള സദിശങ്ങളെ **കോടെർമിനസ്** സദിശങ്ങളെന്ന് പറയാം.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 224 15-02-2023 16:21:05

പരാമർശം

(1) പൂജ്യമല്ലാത്ത രണ്ട് സദിശങ്ങൾ $\vec{a}$ യ്ക്കും $\vec{b}$ യ്ക്കും ഇടയിലുള്ള കോൺ താഴെ കാണുന്ന സൂത്രവാക്യം വഴി കാണാം $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)$.

(2) $\vec{a}$ യും $\vec{b}$ യും സമാന്തരമാണെങ്കിൽ അവയ്ക്കിടയിലുള്ള കോൺ 0 അല്ലെങ്കിൽ π.

(3) $\vec{a}$ ഉം $\vec{b}$ ഉം ലംബമായാൽ അവയ്ക്കിടയിലുള്ള കോൺ $\frac{\pi}{2}$ അല്ലെങ്കിൽ $\frac{3\pi}{2}$.

സവിശേഷത

(1) $\vec{a}$ യും $\vec{b}$ യും പൂജ്യമല്ലാത്ത രണ്ട് സദിശങ്ങൾ എന്നിരിക്കട്ടെ എന്നാൽ

- $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ എങ്കിൽ മാത്രം $\vec{a}$ യും $\vec{b}$ യും പരസ്പരം ലംബമാണ്.
- $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ എങ്കിൽ മാത്രം $\vec{a}$ യും $\vec{b}$ യും പരസ്പരം സമാന്തരമാണ്.

(2) α ഒരു അദിശവും $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ എന്നിവ ഏതെങ്കിലും മൂന്ന് സദിശങ്ങളും ആയാൽ

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a},\ (\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c},\ (\alpha\vec{a})\cdot\vec{b} = \alpha(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot(\alpha\vec{b});$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = -(\vec{b}\times\vec{a}),\ (\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c},\ (\alpha\vec{a})\times\vec{b} = \alpha(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{a}\times(\alpha\vec{b}).$$

6.3.2 പ്രതല ത്രികോണമിതിയിൽ ഡോട്ട് ക്രോസ് ഗുണനങ്ങളുടെ പ്രയോഗങ്ങൾ

പ്രതല ത്രികോണമിതിയിൽ ചില സൂത്രവാക്യങ്ങൾ വാർത്തെടുക്കുന്നതിന് ഡോട്ട്, ക്രോസ് ഗുണനങ്ങളുടെ ചില ആശയങ്ങൾ നമ്മൾ പ്രയോഗിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം 6.1 (കൊസൈയിൻ സൂത്രവാക്യം)

പരിചിത ചിഹ്നങ്ങളാൽ ഏതൊരു ത്രികോണം ABC യിൽ സദിശ രീതി ഉപയോഗിച്ച് താഴെ പറയുന്നവ തെളിയിക്കുക.

(i) $a^2 = b^2+c^2-2bc\cos A$ (ii) $b^2 = c^2+a^2-2ca\cos B$

(iii) $c^2 = a^2+b^2-2ab\cos C$

നിർദ്ധാരണം

പരിചിത ചിഹ്നങ്ങളാൽ ഏതൊരു ത്രികോണം ABC യിലും $\overrightarrow{BC}=\vec{a}, \overrightarrow{CA}=\vec{b}$ യും $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$ എന്നാൽ $|\overrightarrow{BC}|=a, |\overrightarrow{CA}|=b, |\overrightarrow{AB}|=c$ യും $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

അതുകൊണ്ട്, $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{AB}$.

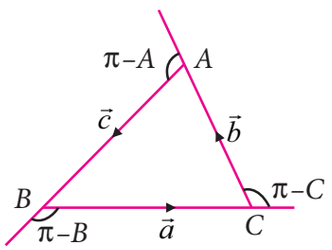
ഡോട്ട് ഗുണനം പ്രയോഗിച്ചാൽ നമുക്ക് കിട്ടുന്നു

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC} = (-\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{AB})\cdot(-\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{AB})$$

$$\Rightarrow\ |\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{CA}|^2+|\overrightarrow{AB}|^2+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow\ a^2 = b^2+c^2+2bc\cos(\pi-A)$$

$$\Rightarrow\ a^2 = b^2+c^2-2bc\cos A.$$



ചിത്രം 6.6

ഫലങ്ങൾ (ii) ഉം (iii) ഉം ഇതേ രീതിയിൽ തെളിയിക്കാം.

ഉദാഹരണം 6.2

പരിചിത ചിഹ്നങ്ങളാൽ ഏതൊരു ത്രികോണം ABC യിലും സദിശ രീതി ഉപയോഗിച്ച് താഴെപ്പറയുന്നവ തെളിയിക്കുക.

(i) $a = b\cos C+c\cos B$ (ii) $b = c\cos A+a\cos C$

(iii) $c = a\cos B+b\cos A$

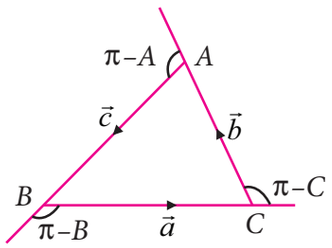
Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 225 15-02-2023 16:21:11

നിർദ്ധാരണം

പരിചിത ചിഹ്നങ്ങളാൽ ത്രികോണം ABC യിൽ, $\overrightarrow{BC}=\vec{a},\ \overrightarrow{CA}=\vec{b},\ \overrightarrow{AB}=\vec{c}$ എന്ന് നമുക്കറിയാം. അതുകൊണ്ട്

$$|\overrightarrow{BC}|=a,\ |\overrightarrow{CA}|=b,\ |\overrightarrow{AB}|=c,\quad \overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{AB}$$



ചിത്രം 6.7

ഡോട്ട് ഗുണനം ഉപയോഗിച്ച് നമുക്ക് കിട്ടുന്നു

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow\ |\overrightarrow{BC}|^2=-|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{CA}|\cos(\pi-C)-|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{AB}|\cos(\pi-B)$$

$$\Rightarrow\quad a^2=ab\cos C+ac\cos B$$

അതുകൊണ്ട് $a=b\cos C+c\cos B$. ഫലങ്ങൾ (ii) ഉം (iii) ഉം ഇതേ രീതിയിൽ തെളിയിക്കാം.

ഉദാഹരണം 6.3

സദിശ രീതിയിൽ $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ എന്ന് തെളിയിക്കും.

നിർദ്ധാരണം

$\hat{a}=\overrightarrow{OA}$ യും $\hat{b}=\overrightarrow{OB}$ യും യൂണിറ്റ് സദിശങ്ങൾ എന്നിരിക്കട്ടെ. അവ പോസിറ്റീവ് x - അക്ഷവുമായി യഥാക്രമം α, β എന്ന കോണുകൾ ഉണ്ടാക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. A യും B യും ചിത്രം 6.8 ൽ കാണിച്ചിട്ടുണ്ട് x - അക്ഷത്തിന് ലംബമായി AL ഉം BM ഉം വരയ്ക്കുക. എന്നാൽ $|\overrightarrow{OL}|=|\overrightarrow{OA}|\cos\alpha=\cos\alpha,\ |\overrightarrow{LA}|=|\overrightarrow{OA}|\sin\alpha=\sin\alpha$.

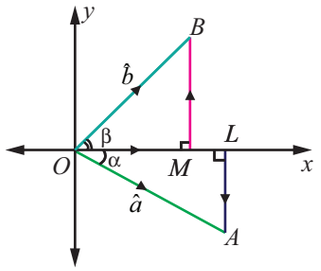
അതുകൊണ്ട്, $\overrightarrow{OL}=|\overrightarrow{OL}|\,\hat{i}\ =\ \cos\alpha\hat{i},\ \overrightarrow{LA}=\sin\alpha(-\hat{j})$.

ആയതിനാൽ, $\hat{a}\ =\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{LA}=\cos\alpha\hat{i}-\sin\alpha\hat{j}$. ... (1)

അതുപോലെ, $\hat{b}\ =\cos\beta\hat{i}+\sin\beta\hat{j}$ ... (2)

$\hat{a}$ യ്ക്കും $\hat{b}$ യ്ക്കും ഇടയിലുള്ള കോൺ $\alpha+\beta$,

$$\hat{a}\cdot\hat{b}\ =|\hat{a}||\hat{b}|\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha+\beta)\quad ... (3)$$



ചിത്രം 6.8

(1) , (2) ഇവയിൽ നിന്ന്

$$\hat{a}\cdot\hat{b}\ =(\cos\alpha\hat{i}-\sin\alpha\hat{j})\cdot(\cos\beta\hat{i}+\sin\beta\hat{j})=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.\quad ... (4)$$

(3), (4) ഇവയിൽ നിന്ന് $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ എന്ന് നമുക്ക് കിട്ടുന്നു.

ഉദാഹരണം 6.4

പരിചിത ചിഹ്നങ്ങളാൽ ഏതൊരു ത്രികോണം ABC യിൽ സദിശരീതിയിൽ $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

പരിചിത ചിഹ്നങ്ങളാൽ ത്രികോണം ABC യിൽ $\overrightarrow{BC}=\vec{a},\overrightarrow{CA}=\vec{b},\quad \overrightarrow{AB}=\vec{c}$. എന്നിട്ട് $|\overrightarrow{BC}|=a,|\overrightarrow{CA}|=b,$ $|\overrightarrow{AB}|=c$.

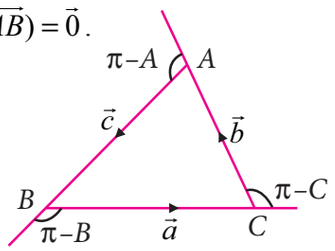
ത്രികോണം ΔABC യിൽ $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=0$ നമുക്കറിയാം $\overrightarrow{BC}\times(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})=\vec{0}$.

ലഘൂകരണത്തിലൂടെ ലഭിക്കുന്നത്,

$$\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{CA}\ =\ \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}.\qquad ... (1)$$

അതുപോലെ $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$, അതുകൊണ്ട്

നമുക്ക് കിട്ടുന്നു $\overrightarrow{CA}\times(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})\ =\ \vec{0}$.



ചിത്രം 6.9

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 226 15-02-2023 16:21:19

ലഘൂകരണത്തിലൂടെ നമുക്ക് കിട്ടുന്നു $\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{AB}$ ... (2)

സമീകരണം (1), (2) ഇവയിൽ നിന്ന് നമുക്ക് കിട്ടുന്നു

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{CA}\,.$$

അതുകൊണ്ട്, $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{CA}|$. അങ്ങനെ നമുക്ക് കിട്ടുന്നു

$$ca\sin(\pi - B) = bc\sin(\pi - A) = ab\sin(\pi - C)\,.$$

അതായത്, $ca\sin B = bc\sin A = ab\sin C$. abc കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്നത്,

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \quad \text{അല്ലെങ്കിൽ} \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

ഉദാഹരണം 6.5

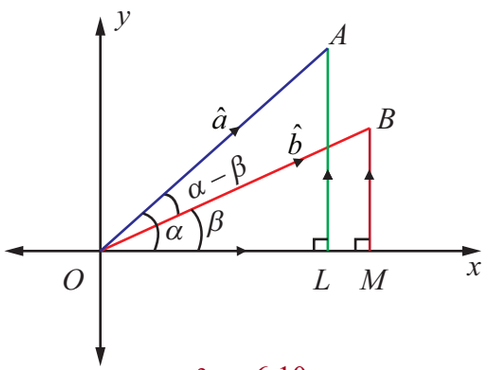
സദിശ രീതിയിൽ തെളിയിക്കുക $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$.

നിർദ്ധാരണം

$\hat{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ ഇവ x-അക്ഷത്തിന്റെ പോസിറ്റീവ് ദിശയിൽ α, β കോണുകൾഉണ്ടാക്കുന്നയൂണിറ്റ്സദിശങ്ങളെന്നിരിക്കട്ടെ, അവിടെ ചിത്രം 6.10 ൽ A യും B യും കാണിച്ചിട്ടുണ്ട്. എന്നിട്ട് നമുക്ക് ലഭിക്കുത്.

$\hat{a} = \cos\alpha\hat{i} + \sin\alpha\hat{j}$ ഉം $\hat{b} = \cos\beta\hat{i} + \sin\beta\hat{j}$,

$\hat{a}$ യ്ക്കും $\hat{b}$ യ്ക്കും ഇടയിലുള്ള കോൺ $\alpha-\beta$ യും സദിശങ്ങൾ $\hat{b}, \hat{a}, \hat{k}$ ഇവ ഒരു വലതു കൈ വ്യൂഹം ഉണ്ടാക്കുകയും ചെയ്യുന്നു.



ചിത്രം 6.10

അതിനാൽ നമുക്ക് കിട്ടുന്നു

$$\hat{b}\times\hat{a} = |\hat{b}||\hat{a}|\sin(\alpha-\beta)\hat{k} = \sin(\alpha-\beta)\hat{k}\,. \quad \text{... (1)}$$

മറുവശത്ത്,

$$\hat{b}\times\hat{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \end{vmatrix} = (\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)\hat{k} \quad \text{... (2)}$$

അതിനാൽ സമീകരണം (1), (2) ൽ നിന്ന് കിട്ടുന്നു

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\,.$$

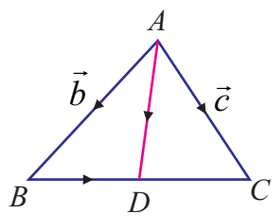
6.3.3 ജ്യാമിതിയിൽ ഡോട്ട്, ക്രോസ് ഗുണനത്തിന്റെ പ്രയോഗങ്ങൾ

ഉദാഹരണം 6.6 (അപ്പോളോനിയസ് സിദ്ധാന്തം)

ത്രികോണം ABC യിൽ BC എന്ന വശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദു D എങ്കിൽ, സദിശ രീതിയിൽ $|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 = 2(|\overrightarrow{AD}|^2 + |\overrightarrow{BD}|^2)$ തെളിയിക്കുക .

നിർദ്ധാരണം

A മൂലബിന്ദുവും B യുടെ സ്ഥാന സദിശം $\vec{b}$ യും C യുടെ സ്ഥാന സദിശം $\vec{c}$ യും എന്നിരിക്കട്ടെ BC യുടെ മധ്യബിന്ദു D അതിനാൽ D യുടെ സ്ഥാന സദിശം $\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$ ആണ്. അതുകൊണ്ട് നമുക്ക് കിട്ടുന്നു



ചിത്രം 6.11

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 227 15-02-2023 16:21:21

$$|\overrightarrow{AD}|^2 = \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD} \quad \left(\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)\cdot\left(\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right) = \frac{1}{4}(|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\vec{b}\cdot\vec{c}). \qquad \ldots (1)$$

ഇപ്പോൾ, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} - \vec{b} = \frac{\vec{c}-\vec{b}}{2}$.

ഇതിൽ നിന്നും, $|\overrightarrow{BD}|^2 = \overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BD} = \left(\frac{\vec{c}-\vec{b}}{2}\right)\cdot\left(\frac{\vec{c}-\vec{b}}{2}\right) = \frac{1}{4}(|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{c})$ ... (2)

ഇപ്പോൾ (1) ഉം (2) ഉം കൂട്ടിയാൽ കിട്ടുന്നു

അതുകൊണ്ട് , $|\overrightarrow{AD}|^2 + |\overrightarrow{BD}|^2 = \frac{1}{4}(|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\vec{b}\cdot\vec{c}) + \frac{1}{4}(|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\vec{b}\cdot c) = \frac{1}{2}(|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2)$

$\Rightarrow \quad |\overrightarrow{AD}|^2 + |\overrightarrow{BD}|^2 = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2)$.

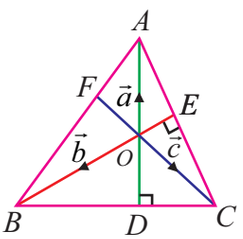
അതുകൊണ്ട് , $|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 = 2(|\overrightarrow{AD}|^2 + |\overrightarrow{BD}|^2)$

ഉദാഹരണം 6.7

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങളിൽ നിന്ന് എതിർ വശങ്ങളിലേക്ക് വരയ്ക്കുന്ന ഉന്നതികൾ (attitudes) ഒരു ബിന്ദുവിൽ സംഗമിക്കുന്നു എന്ന് സദിശരീതിയിൽ തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

ത്രികോണം ABC പരിഗണിക്കുക അതിൽ രണ്ട് ഉന്നതികൾ AD യും BE യും O ൽ സംഗമിക്കുന്നു. CO യെ നീട്ടി അത് AB യെ F ൽ സന്ധിക്കുന്നു. O യെ മൂലബിന്ദുവായി പരിഗണിച്ചാൽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$.



ചിത്രം 6.12

$\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ യ്ക്ക് ലംബമായതിനാൽ നമുക്കറിയാം $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{BC}$ യ്ക്ക് ലംബമായിരിക്കുകയും അതിനാൽ, ന മുക്ക് $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$ എന്ന് കിട്ടുന്നു. അതായത് $\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b}) = 0$ എന്തെന്നാൽ

$$\vec{a}\cdot\vec{c} - \vec{a}\cdot\vec{b} = 0. \qquad \ldots (1)$$

അതുപോലെ $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CA}$ യ്ക്ക് ലംബമായതിനാൽ നമുക്കറിയാം $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{CA}$ യ്ക്ക് ലംബമായിരിക്കുകയും അതിനാൽ നമുക്ക് $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CA} = 0$ കിട്ടുന്നു. അതായത് $\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{c}) = 0$ എന്തെന്നാൽ,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{b}\cdot\vec{c} = 0. \qquad \ldots (2)$$

(1) ഉം (2), ഉം സമവാക്യങ്ങൾ കൂട്ടിയാൽ, കിട്ടുന്നു $\vec{a}\cdot\vec{c} - \vec{b}\cdot\vec{c} = 0$. അതായത്, $\vec{c}\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = 0$.

അതായത്, $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{BA} = 0$. അതുകൊണ്ട്, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{OC}$ യ്ക്ക് ലംബമാവുകയും അതിലൂടെ $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{AB}$ യ്ക്ക് ലംബ മെന്ന് കിട്ടുന്നു. അങ്ങനെ C യിൽ നിന്ന് AB എന്ന വശത്തേക്ക് വരയ്ക്കുന്ന ലംബം O യിൽ കൂടി കടന്നു പോകുന്നു. അങ്ങനെ ഉന്നതികൾ.

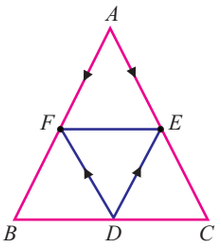
ഉദാഹരണം 6.8

ത്രികോണം ABC യിൽ, BC, CA , AB എന്നീ വശങ്ങളുള്ള മധ്യബിന്ദുക്കൾ യഥാക്രമം D, E, F സദിശ രീതി ഉപയോഗിച്ച് ΔDEF ന്റെ വിസ്തീർണ്ണം $\frac{1}{4}$ (ΔABC യുടെ വിസ്തീർണ്ണം) എന്ന് തെളിയിക്കുക?.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 228 15-02-2023 16:21:23

നിർദ്ധാരണം

ത്രികോണം ABC, യിൽ A മൂലബിന്ദുവായി പരിഗണിക്കുക. എന്നിട്ട് D, E, F എന്നിവയുടെ സ്ഥാന സദിശങ്ങള യഥാക്രമം $\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}, \frac{\overrightarrow{AC}}{2}, \frac{\overrightarrow{AB}}{2}$ സമീപവശങ്ങൾ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ എന്നീ രണ്ട് സദിശങ്ങളാൽ രൂപീകൃതമായ സാമാന്തരികത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$ ആയതിനാൽ ΔABC യുടെ വിസ്തീർണ്ണം $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$ ആകുന്നു. അതുപോലെ ΔDEF പരിഗണിച്ചാൽ നമുക്ക് കിട്ടുന്നു



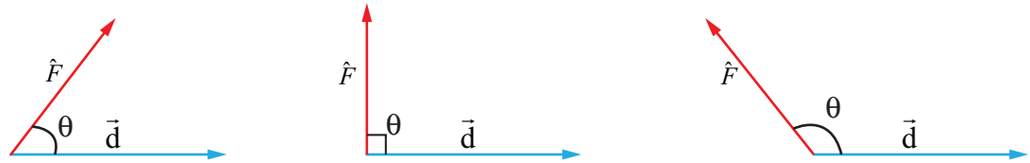
ചിത്രം 6.13

$$\begin{aligned}\Delta DEF \text{ ന്റെ വിസ്തീർണ്ണം} &= \frac{1}{2}|\overrightarrow{DE}\times\overrightarrow{DF}| \\ &= \frac{1}{2}|(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD})\times(\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AD})| \\ &= \frac{1}{2}\left|\frac{\overrightarrow{AB}}{2}\times\frac{\overrightarrow{AC}}{2}\right| \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|\right) \\ &= \frac{1}{4}\ (\Delta ABC \text{ യുടെ വിസ്തീർണ്ണം}).\end{aligned}$$

6.3.4 ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിൽ ഡോട്ട് ക്രോസ് ഗുണനത്തിന്റെ പ്രയോഗങ്ങൾ

നിർവ്വചനം 6.2

$\vec{d}$ എന്നത് ഒരു പോയിന്റിൽ നിന്ന് കണത്തിന്റെ സ്ഥാന ചലന സദിശമാണെങ്കിൽ സ്ഥിരമായ ഒരു ശക്തി $\vec{F}$ പ്രയോഗിച്ചതിന് ശേഷം ഒരു പോയിന്റിൽ നിന്ന് മറ്റൊരു പോയിന്റിലേക്ക് നീങ്ങുന്നു $w=\vec{F}\cdot\vec{d}$.



ചിത്രം 6.14

ബലത്തിന് ഒരു ന്യൂനകോണും സമകോണും, ബൃഹത്കോണും ഉണ്ടെങ്കിൽ ബലം ചെയ്ത ജോലി യഥാക്രമം പോസിറ്റീവ് പൂജ്യം, നെഗറ്റീവ് എന്നിവയാണ്.

ഉദാഹരണം 6.9

സ്ഥിര ബലങ്ങൾ $2\hat{i}+5\hat{j}+6\hat{k}$ ഉം $-\hat{i}-2\hat{j}-k$ ഉം ഒരു കണത്തിൽ പ്രവർത്തിക്കുമ്പോൾ $(4,-3,-2)$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്നും $(6,1,-3)$ ലേക്ക് സ്ഥാനമാറ്റം സംഭവിക്കുന്നു. ബലങ്ങൾ പ്രവർത്തിച്ച ആകെ ജോലി കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിരിക്കുന്ന ശക്തികളുടെ ഫലം $\vec{F}=(2\hat{i}+5\hat{j}+6\hat{k})+(-\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k})=\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k}$.

A യുടെയും B യുടെയും ബിന്ദുക്കൾ യഥാക്രമം $(4,-3,-2)$ ഉം $(6,1,-3)$ ഉം എന്നിരിക്കട്ടെ. എന്നിട്ട് ഒരു കണത്തിന്റെ സ്ഥാന ചലന സദിശം $\vec{d}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(6\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k})-(4\hat{i}-3\hat{j}-2\hat{k})=2\hat{i}+4\hat{j}-\hat{k}$.

അതുകൊണ്ട് ചെയ്ത ജോലി $w=\vec{F}\cdot\vec{d}=(\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k})\cdot(2\hat{i}+4\hat{j}-\hat{k})=9$ മാത്രകൾ.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 229 15-02-2023 16:21:25

ഉദാഹരണം 6.10

ബലങ്ങൾ $3\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}$ ഉം $2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ ഉം ഒരു കണത്തിൽ പ്രവർത്തിക്കുമ്പോൾ $(1,3,-1)$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് $(4,-1,\lambda)$ ലേക്ക് സ്ഥാനമാറ്റം സംഭവിക്കുന്നു. ബലങ്ങൾ ചെയ്ത ജോലി 16 മാത്രകൾ, λ യുടെ മൂല്യം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിരിക്കുന്ന ശക്തികളുടെ ഫലം $\vec{F}=(3\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k})+(2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})=5\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$.

കണത്തിന്റെ സ്ഥാനമാറ്റം

$$\vec{d}=(4\hat{i}-\hat{j}+\lambda\hat{k})-(\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})=(3\hat{i}-4\hat{j}+(\lambda+1)\hat{k}).$$

ബലം ചെയ്ത ജോലി 16 മാത്രകൾ തന്നിട്ടുണ്ട്

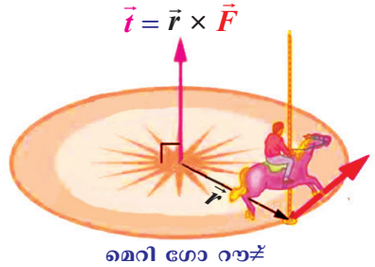
$$\vec{F}\cdot\vec{d}=16.$$

അതായത്, $(5\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})\cdot(3\hat{i}-4\hat{j}+(\lambda+1)\hat{k}=16\Rightarrow\lambda+20=16$.

അതുകൊണ്ട് , $\lambda=-4$.

നിർവ്വചനം 6.3

സ്ഥാനസദിശം $\vec{r}$ ഒരു പോയിന്റിൽ ഒരു ബലം $\vec{F}$ പ്രയോഗിച്ചാൽ കണികയിലെ ചുഴറ്റുബലം അല്ലെങ്കിൽ മൊമെന്റ് എന്നത് $\vec{t}=\vec{r}\times\vec{F}$ ആകുന്നു. ചുഴറ്റുബലത്തെ ഭ്രമണബലം എന്നും പറയാം.



ചിത്രം 6.15

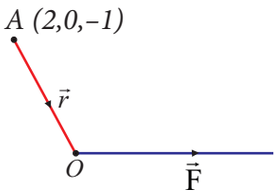
ഉദാഹരണം 6.11

$2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$, എന്ന ബലത്തിന്റെ പ്രവർത്തനരേഖ മൂലബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നു. $(2,0,-1)$ പോയിന്റിന്റെ ചുഴറ്റുബലത്തിന്റെ അളവും കൊസൈൻ ദിശയും കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$(2,0,-1)$ എന്ന പോയിന്റ് A എന്നിരിക്കട്ടെ A യുടെ സ്ഥാനസദിശം $\overrightarrow{OA}=2\hat{i}-\hat{k}$

അതുകൊണ്ട് $\vec{r}=\overrightarrow{AO}=-2\hat{i}+\hat{k}$.



ചിത്രം 6.16

എന്നിട്ട് തന്നിരിക്കുന്ന ബലം $\vec{F}=2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$. അതുകൊണ്ട് ചുഴറ്റുബലം

$$\vec{t}=\vec{r}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\-2&0&1\\2&1&-1\end{vmatrix}=-\hat{i}-2\hat{k}.$$

ചുഴറ്റുബലത്തിന്റെ അളവ് $=|-\hat{i}-2\hat{k}|=\sqrt{5}$ ഉം ചുഴറ്റുബലത്തിന്റെ കൊസൈൻ ദിശ $-\frac{1}{\sqrt{5}},0,-\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 230 15-02-2023 16:21:26

അഭ്യാസം 6.1

1. വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നും ഞാണിന്റെ മധ്യബിന്ദുവിലേക്ക് വരയ്ക്കുന്ന രേഖ, ഞാണിന് ലംബമാണെന്ന് സദിശ രീതിയിൽ തെളിയിക്കുക.
2. ഒരു സമപാർശ്വ ത്രികോണത്തിന്റെ ആധാരത്തിലേക്കുള്ള മധ്യമം ആധാരത്തിന് ലംബമാണെന്ന് സദിശ രീതിയിൽ തെളിയിക്കുക.
3. ഒരു അർദ്ധ വൃത്തത്തിലെ കോൺ സമകോൺ ആണെന്ന് സദിശ രീതിയിൽ തെളിയിക്കുക.
4. ഒരു സമചതുർ ഭുജത്തിന്റെ വികർണ്ണങ്ങൾ സമകോണിൽ സമഭാഗം ചെയ്യും എന്ന് സദിശ രീതിയിൽ തെളിയിക്കുക.
5. ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ വികർണ്ണങ്ങൾ തുല്യമായാൽ അതൊരു ദീർഘചതുരമായിരിക്കുമെന്ന് സദിശ രീതിയിൽ തെളിയിക്കുക.
6. AC യും BD യും വികർണ്ണങ്ങളായുള്ള ചതുർഭുജം $ABCD$ യുടെ വിസ്തീർണ്ണം $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BD}|$ ആണെന്ന് സദിശ രീതിയിൽ തെളിയിക്കുക.
7. ഒരേ സമാന്തര രേഖകൾക്കിടയിലും ഒരേ ആധാരവും ഉള്ള സാമാന്തരികങ്ങൾക്ക് തുല്യ വിസ്തീർണ്ണം ആണെന്ന് സദിശ രീതിയിൽ തെളിയിക്കുക.
8. ΔABC യുടെ കേന്ദ്രകം G എങ്കിൽ (ΔGAB യുടെ വിസ്തീർണ്ണം) = (ΔGBC യുടെ വിസ്തീർണ്ണം) = (ΔGCA യുടെ വിസ്തീർണ്ണം) $=\frac{1}{3}$ (ΔABC യുടെ വിസ്തീർണ്ണം) എന്ന് തെളിയിക്കുക
9. സദിശ രീതിയിൽ തെളിയിക്കുക $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.
10. സദിശ രീതിയിൽ തെളിയിക്കുക $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$,
11. സ്ഥിരബലങ്ങൾ $8\hat{i}+2\hat{j}-6\hat{k}$ ഉം $6\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$ ഉം ഒരു കണത്തിൽ പ്രവർത്തിക്കുമ്പോൾ $(1,2,3)$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്നും $(5,4,1)$ ലേക്ക് സ്ഥാനമാറ്റം സംഭവിക്കുന്നു. ബലങ്ങൾ പ്രവർത്തിച്ച ആകെ ജോലി കാണുക.
12. $3\hat{i}+4\hat{j}+5\hat{k}$, $10\hat{i}+6\hat{j}-8\hat{k}$ എന്നീ ദിശകളിൽ പ്രവർത്തിക്കുന്ന ബലങ്ങളുടെ അളവുകൾ യഥാക്രമം $5\sqrt{2}$, $10\sqrt{2}$ മാത്രകൾ ഒരു കണത്തിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുമ്പോൾ സ്ഥാന സദിശം $4\hat{i}-3\hat{j}-2\hat{k}$ ൽ നിന്ന് സ്ഥാനസദിശം $6\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}$ ലേക്ക് സ്ഥാനമാറ്റം വരുന്നു. ബലങ്ങൾ ചെയ്തജോലി കാണുക.
13. സ്ഥാനസദിശം $2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$ ഉള്ള സ്ഥാനത്തെക്കുറിച്ച് $3\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k}$ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്ന ബലത്തിന്റെ ചുഴറ്റുബലത്തിന്റെ അളവും കൊസൈൻ ദിശയും കാണുക അതിന്റെ സ്ഥാനസദിശം $4\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ ആണ്.
14. $8\hat{i}-6\hat{j}-4\hat{k}$ സ്ഥാനസദിശമായ ഒരു പോയിന്റിൽ പ്രവർത്തിക്കുന്ന ബലങ്ങൾ $-3\hat{i}+6\hat{j}-3\hat{k}$, $4\hat{i}-10\hat{j}+12\hat{k}$, $4\hat{i}+7\hat{j}$, $18\hat{i}+3\hat{j}-9\hat{k}$ എന്നിവ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്ന മൂന്ന് ശക്തികളുടെ ടോർക്ക് കാണുക.

6.4 അദിശ ട്രിപ്പിൾ ഗുണനം

നിർവ്വചനം 6.4

കൊടുക്കപ്പെട്ട മൂന്ന് സദിശങ്ങൾ $\vec{a},\vec{b}$, $\vec{c}$, അദിശം $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ യെ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ യുടെ **അദിശ ട്രിപ്പിൾ ഗുണനം** എന്ന് പറയാം.

പരാമർശം

$\vec{a}\cdot\vec{b}$ ഒരു അദിശം അതുകൊണ്ട് $(\vec{u}\cdot\vec{\ })\times\vec{\ }$ യ്ക്ക് ഒരു അർത്ഥവുമില്ല.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 231 15-02-2023 16:21:27

കുറിപ്പ്

കൊടുക്കപ്പെട്ട ഏത് മൂന്ന് സദിശങ്ങൾ $\vec{a},\vec{b}$, $\vec{c}$ യ്ക്കും താഴെ കൊടുക്കപ്പെട്ടവ അദിശ ട്രിപ്പിൾ ഗുണങ്ങളാണ്:

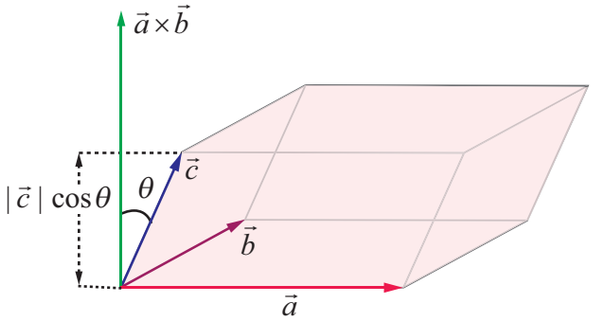
$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$, $(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}$, $(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$, $\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})$, $\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$,

$(\vec{b}\times\vec{a})\cdot\vec{c}$, $(\vec{c}\times\vec{b})\cdot\vec{a}$, $(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{b})$, $\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{c})$, $\vec{c}\cdot(\vec{b}\times\vec{a})$

അദിശ ട്രിപ്പിൾ ഗുണനത്തിന്റെ ജ്യാമിതീയ വ്യാഖ്യാനം

ജ്യാമിതീയമായി, ഒരു അദിശ ട്രിപ്പിൾ ഗുണനത്തിന്റെ കേവല വില എന്നത് വക്കുകൾ ഒരേ ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് ആരംഭിക്കുന്ന മൂന്ന് സദിശങ്ങൾ $\vec{a},\vec{b},\ \vec{c}$ യാൽ രൂപപ്പെടുന്ന ഒരു സമാന്തര പൈപ്പിന്റെ വ്യാപ്തം എന്നതാണ് വാസ്തവത്തിൽ $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ എന്ന സദിശത്തിന്റെ അളവ് എന്നത് $\vec{a}$ യും $\vec{b}$ യുമായി രൂപപ്പെടുന്ന സാമാന്തരികത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണവും അതിന്റെ ദിശ $(\vec{a}\times\vec{b})$ എന്നത് പ്രതല ത്തിന് ലംബവും $\vec{a}$ യ്ക്കും $\vec{b}$ യ്ക്കും സമാന്തരവുമാണ്.

അതുകൊണ്ട്, $|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|$ എന്നത് $|\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}||\cos\theta|$ അവിടെ θ എന്നത് $\vec{a}\times\vec{b}$ യ്ക്കും $\vec{c}$ യ്ക്കും ഇടയിലുള്ള കോൺ ആണ് ചിത്രം 6.17ൽ മൂന്ന് സമീപ സദിശങ്ങ ളാൽ രൂപപ്പെട്ട സമാന്തര പൈപ്പിന്റെ ഉയരമാണ് $|\vec{c}||\cos\theta|$ എന്ന് നമ്മൾ കണ്ടു. അങ്ങനെ സമാന്തര പൈപ്പിന്റെ വ്യാപ്തം, $|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|$ ആണ്.



ചിത്രം 6.17

അദിശ ട്രിപ്പിൾ ഗുണനം കണക്കാക്കുന്നതിന് താഴെപ്പറയുന്ന സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗപ്രദമാണ്.

സിദ്ധാന്തം 6.1

$\vec{a} = a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$, $\vec{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$ and $\vec{c}=c_1\hat{i}+c_2\hat{j}+c_3\hat{k}$, എങ്കിൽ

$$(\vec{a}\times b)\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

തെളിവ്

നിർവചനത്തിൽ നിന്നും, നമുക്കറിയാം

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}\cdot\vec{c}$$

$$= \left[(a_2b_3-a_3b_2)\hat{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\hat{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\hat{k}\right]\cdot(c_1\hat{i}+c_2\hat{j}+c_3\hat{k})$$

$$= (a_2b_3-a_3b_2)c_1+(a_3b_1-a_1b_3)c_2+(a_1b_2-a_2b_1)c_3$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ തെളിവ് പൂർത്തീകരിച്ചു.

6.4.1 അദിശ ട്രിപ്പിൾ ഗുണനത്തിന്റെ സവിശേഷതകൾ

സിദ്ധാന്തം 6.2

ഏത് മൂന്ന് സദിശങ്ങൾ $\vec{a},\vec{b},$ യ്ക്കും $\vec{c}$, $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 232 15-02-2023 16:21:29

തെളിവ്

$\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$, $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$, $\vec{c} = c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

എന്നിട്ട് $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$, by $R_1 \leftrightarrow R_3$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \text{ by } R_2 \leftrightarrow R_3$$

$$= (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\ .$$

സിദ്ധാന്തം തെളിയിച്ചു. ■

കുറിപ്പ്

സിദ്ധാന്തം 6.2 അനുസരിച്ച് അദിശ ട്രിപ്പിൾ ഗുണനത്തിൽ സദിശങ്ങളുടെ സംഭവങ്ങളുടെ ക്രമത്തിൽ മാറ്റം വരുത്താതെ ഡോട്ട് ക്രോസ് എന്നിവ പരസ്പരം കൈമാറ്റം ചെയ്യാൻ കഴിയും. ആവരണ ചിഹ്നങ്ങൾ, ആവരണ ചിഹ്നത്തിന് പുറത്ത് കിടക്കുന്ന രീതിയിലും ആവരണ ചിഹ്നത്തിനുള്ളിലെ സദിശം കിടക്കുന്നു എന്ന് സ്ഥാപിക്കുന്നു ഉദാഹരണത്തിന് നമുക്ക്

$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$, ഡോട്ട്, ക്രോസ് എന്നിവ പരസ്പരം മാറ്റാൻ കഴിയുന്നതിനാൽ.

$= (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}$, ഡോട്ട്, ഗുണനം ക്രമവിനിമേയമായതിനാൽ.

$= \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})$, ഡോട്ട്, ക്രോസ് എന്നിവ പരസ്പരം മാറ്റാൻ കഴിയുന്നതിനാൽ

$= (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$, ഡോട്ട്, ഗുണനം ക്രമവിനിമേയമായതിനാൽ

$= \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$, ഡോട്ട്, ക്രോസ് എന്നിവ പരസ്പരം മാറ്റാൻ കഴിയുന്നതിനാൽ

പ്രതീകങ്ങളുപയോഗിച്ചുള്ള അടയാളപ്പെടുത്തൽ

ഏത് മൂന്ന് സദിശങ്ങൾ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ യ്ക്കും അദിശ ട്രിപ്പിൾ ഗുണനം $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ എന്നതിനെ $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$ ഇതിനെ വായിക്കുന്നത് **ബോക്സ് $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$** ബോക്സിന്റെ വ്യാപ്തം (ദീർഘചതുര സമാന്തര പൈപ്പ്) അദിശ ട്രിപ്പിൾ ഗുണനത്തിന്റെ കേവല മൂല്യമായതിനാൽ, അദിശ ട്രിപ്പിൾ ഗുണനത്തെ **ബോക്സ് ഗുണനം** എന്ന് പറയാം.

കുറിപ്പ്

(1) $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a} = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = [\vec{b},\vec{c},\vec{a}]$

$[\vec{b},\vec{c},\vec{a}] = (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a} = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = [\vec{c},\vec{a},\vec{b}].$

മറ്റൊരു രീതിയിൽ പറഞ്ഞാൽ, $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = [\vec{b},\vec{c},\vec{a}] = [\vec{c},\vec{a},\vec{b}]$; അതായത് മൂന്ന് സദിശങ്ങളെ ഒരേ ചാക്രിയ ക്രമത്തിൽ അനുവദിച്ചാൽ, അദിശ ട്രിപ്പിൾ ഗുണനത്തിന്റെ മൂല്യം തുല്യമായിരിക്കും.

(2) രണ്ട് സദിശങ്ങളെ അതിന്റെ സ്ഥാനം വച്ച് പരസ്പരം മാറ്റിയാൽ അതിന്റെ അദിശ ട്രിപ്പിൾ ഗുണനം എന്നത് അദിശ ട്രിപ്പിൾ ഗുണനത്തിന്റെ മൂല്യം യഥാർത്ഥ മൂല്യത്തിന്റെ (-1) മടങ്ങ് ആകും,

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = [\vec{b},\vec{c},\vec{a}] = [\vec{c},\vec{a},\vec{b}] = -[\vec{a},\vec{c},\vec{b}] = -[\vec{c},\vec{b},\vec{a}] = -[\vec{b},\vec{a},\vec{c}]\ .$$

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 233 15-02-2023 16:21:35

സിദ്ധാന്തം 6.3

അദിശ ട്രിപ്പിൾ ഗുണനം, അദിശ ഗുണനവും സങ്കലനവും നിലനിർത്തുന്നു. അതായത്,

$$[(\vec{a}+\vec{b}),\vec{c},\vec{d}] = [\vec{a},\vec{c},\vec{d}]+[\vec{b},\vec{c},\vec{d}];$$
$$[\lambda\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \lambda[\vec{a},\vec{b},\vec{c}], \forall\lambda\in\mathbb{R}$$
$$[\vec{a},(\vec{b}+\vec{c}),\vec{d}] = [\vec{a},\vec{b},\vec{d}]+[\vec{a},\vec{c},\vec{d}];$$
$$[\vec{a},\lambda\vec{b},\vec{c}] = \lambda[\vec{a},\vec{b},\vec{c}], \forall\lambda\in\mathbb{R}$$
$$[\vec{a},\vec{b},(\vec{c}+\vec{d})] = [\vec{a},\vec{b},\vec{c}]+[\vec{a},\vec{b},\vec{d}];$$
$$[\vec{a},\vec{b},\lambda\vec{c}] = \lambda[\vec{a},\vec{b},\vec{c}], \forall\lambda\in\mathbb{R}.$$

തെളിവ്

അദിശ ഗുണനത്തിന്റെയും സദിശ ഗുണനത്തിന്റെയും സവിശേഷതകൾ ഉപയോഗിച്ച് നമുക്ക് കിട്ടുന്നു

$$\begin{aligned}[(\vec{a}+\vec{b}),\vec{c},\vec{d}] &= ((\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c})\cdot\vec{d}\\ &= (\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{d}\\ &= (\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{d}+(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{d}\\ &= [\vec{a},\vec{c},\vec{d}]+[\vec{b},\vec{c},\vec{d}]\\ [\lambda\vec{a},\vec{b},\vec{c}] &= ((\lambda\vec{a})\times\vec{b})\cdot\vec{c} = (\lambda(\vec{a}\times\vec{b}))\cdot\vec{c} = \lambda((\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}) = \lambda[\vec{a},\vec{b},\vec{c}].\end{aligned}$$

ഈ ഫലത്തിന്റെ ഒന്നാമത്തെ പ്രസ്താവന ഉപയോഗിച്ച് താഴെപ്പറയുന്നവ നമുക്ക് കിട്ടുന്നു.

$$\begin{aligned}[\vec{a},(\vec{b}\quad\vec{c}),\vec{d}] &= [(\vec{b}+\vec{c}),\vec{d},\vec{a}] = [\vec{b},\vec{d},\vec{a}]+[\vec{c},\vec{d},\vec{a}]\\ &= [\vec{a},\vec{b},\vec{d}]+[\vec{a},\vec{c},\vec{d}]\\ [\vec{a},\lambda\vec{b},\vec{c}] &= [\lambda\vec{b},\vec{c},\vec{a}] = \lambda[\vec{b},\vec{c},\vec{a}] = \lambda[\vec{a},\vec{b},\vec{c}].\end{aligned}$$

അതുപോലെ ബാക്കിയുള്ള സമാനതകൾ തെളിയിക്കാം.

XI ാം സ്റ്റാൻഡേർഡിലെ കോപ്ലനാർ സദിശങ്ങളെ കുറിച്ച് പഠിച്ചു. ഞങ്ങൾ അവയെ മൂന്ന് പൂജ്യമല്ലാത്ത സദിശങ്ങളായി പഠിച്ചു. അതിൽ ഒന്ന് മറ്റ് രണ്ടിന്റെയും രേഖീയ സംയോജനമായി പ്രകടിപ്പിക്കാം. കോപ്ലനാർ സദിശങ്ങളുടെ രൂപവത്ക്കരണത്തിനായി ഞങ്ങൾ ഇപ്പോൾ അദിശ ട്രിപ്പിൾ ഗുണനം ഉപയോഗിക്കുന്നു.

സിദ്ധാന്തം 6.4

പൂജ്യമല്ലാത്ത മൂന്ന് സദിശങ്ങളുടെ അദിശ ട്രിപ്പിൾ ഗുണനം പൂജ്യം എന്നായാൽ മാത്രമേ ആ മൂന്ന് സദിശങ്ങളും കോപ്ലനാർ ആകുകയുള്ളൂ.

തെളിവ്

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ എന്നിവ പൂജ്യമല്ലാത്ത സദിശങ്ങൾ എന്നിരിക്കട്ടെ എന്നാൽ,

$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=0 \Leftrightarrow \vec{c}$ $\vec{a}\times\vec{b}$ യ്ക്ക് ലംബമാകും

$\Leftrightarrow \vec{c}$, $\vec{a}$ യ്ക്കും $\vec{b}$ യ്ക്കും സമാന്തരമായ തലത്തിൽ ആയിരിക്കും

$\Leftrightarrow \vec{a},\vec{b},\vec{c}$ എന്നിവ കോപ്ലനാർ ആയിരിക്കും.

സിദ്ധാന്തം 6.5

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ എന്ന മൂന്ന് സദിശങ്ങൾ കോപ്ലനാർ ആകണമെങ്കിൽ കുറഞ്ഞപക്ഷം അവയിൽ ഒന്നെങ്കിലും പൂജ്യമല്ലാത്തതും $r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}=\vec{0}$ എന്നിരിക്കുകയും $r,s,t\in\mathbb{R}$ ആകുകയും ചെയ്യും.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 234 15-02-2023 16:21:37

തെളിവ്

$\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k},\ \vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k},\ \vec{c} = c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}$. എന്നിരിക്കട്ടെ നമുക്കറിയാം

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ എന്നിവ കോപ്ലനർ $\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow$ അവിടെ $r, s, t \in \mathbb{R}$ എന്നീ അദിശങ്ങൾ നിലനിൽക്കുന്നു,

$a_1r + a_2s + a_3t = 0,\ b_1r + b_2s + b_3t = 0,\ c_1r + c_2s + c_3t = 0$

$\Leftrightarrow$ അവിടെ $r, s, t \in \mathbb{R}$ എന്നീ അദിശങ്ങൾ നിലനിൽക്കുന്നു,

കുറഞ്ഞപക്ഷം അവയിൽ ഒന്നെങ്കിലും പൂജ്യമല്ലാത്തതും $r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} = \vec{0}$.

സിദ്ധാന്തം 6.6

മൂന്ന് സദിശങ്ങളുടെ രണ്ട് സിസ്റ്റം $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ഉം $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ ഉം എങ്കിൽ $\vec{p} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c}$,

$\vec{q} = x_2\vec{a} + y_2\vec{b} + z_2\vec{c}$, ഉം, $\vec{r} = x_3\vec{a} + y_3\vec{b} + z_3\vec{c}$, ആയാൽ

$$\left[\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}\right] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right].$$

തെളിവ്

സിദ്ധാന്തം 6.6 അനുസരിച്ച് $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ എന്നിവ

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

കോപ്ലനാർ അല്ലെങ്കിൽ $\vec{p} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c}$, $\vec{q} = x_2\vec{a} + y_2\vec{b} + z_2\vec{c}$, എന്നാൽ മൂന്ന് സദിശങ്ങളും $\vec{r}$ $x_3\vec{a} + y_3\vec{b} + z_3\vec{c}$ എന്നിവയും കോപ്ലാനർ അല്ലായിരിക്കും.

ഉദാഹരണം 6.12

$\vec{a} = -3\hat{i} - \hat{j} + 5\hat{k},\ \vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k},\ \vec{c} = 4\hat{j} - 5\hat{k}$, എങ്കിൽ $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം: മൂന്ന് സദിശങ്ങളുടെ അദിശ ട്രിപ്പിൾ ഗുണനത്തിന്റെ നിർവചനമനുസരിച്ച്,

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -5 \end{vmatrix} = -3.$$

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 235 15-02-2023 16:21:38

ഉദാഹരണം 6.13

$2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}, \hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$, $3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ എന്നീ സദിശങ്ങൾ ഒരേ ബിന്ദുവിൽ നിന്നുള്ള വക്കുകളോട് കൂടിയ സമാന്തരപൈപ്പിന്റെ വ്യാപ്തം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

ഒരേ ബിന്ദുവിൽ നിന്നുള്ള $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ എന്നീ വക്കുകളോട് കൂടിയ സമാന്തരപൈപ്പിന്റെ വ്യാപ്തം $|[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]|$ ന്റെ വ്യാപ്തം, ഇവിടെ $\vec{a}=2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$, $\vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$, $\vec{c}=3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$.

അതിനാൽ $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=\begin{vmatrix}2&-3&4\\1&2&-1\\3&-1&2\end{vmatrix}=-7$, സമാന്തരപൈപ്പിന്റെ വ്യാപ്തം $|-7|=7$ ഘനമാത്രകൾ.

ഉദാഹരണം 6.14

$\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$, $2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$, $3\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ എന്നീ സദിശങ്ങൾ കോപ്ലാനർ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

ഇവിടെ, $\vec{a}=\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$, $\vec{b}=2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$, $\vec{c}=3\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$

നമുക്കറിയാം $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ എന്നിവ കോപ്ലാനാർ ആകണമെങ്കിൽ $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=0$. ഇപ്പോൾ, $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=\begin{vmatrix}1&2&-3\\2&-1&2\\3&1&-1\end{vmatrix}=0$. അതുകൊണ്ട് കൊടുത്തിട്ടുള്ള മൂന്ന് സദിശങ്ങളും കോപ്ലാനാർ ആണ്.

ഉദാഹരണം 6.15

$2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$, $3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$, $\hat{i}+m\hat{j}+4\hat{k}$ എന്നിവ കോപ്ലനാർ എങ്കിൽ m ന്റെ മൂല്യം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

കൊടുത്തിട്ടുള്ള മൂന്ന് സദിശങ്ങളും കോപ്ലാനർ ആയതിനാൽ നമുക്കറിയാം $\begin{vmatrix}2&-1&3\\3&2&1\\1&m&4\end{vmatrix}=0\Rightarrow m=-3$.

ഉദാഹരണം 6.16

$(6,-7,0)$, $(16,-19,-4)$, $(0,3,-6)$, $(2,-5,10)$ എന്നീ നാല് ബിന്ദുക്കളും ഒരേ തലത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു എന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$A=(6,-7,0)$, $B=(16,-19,-4)$, $C=(0,3,-6)$, $D=(2,-5,10)$ എന്നിരിക്കട്ടെ നാല് ബിന്ദുക്കൾ A,B,C,D ഒരു തലത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു. എന്ന് തെളിയിക്കാൻ നമുക്ക് മൂന്ന് സദിശങ്ങൾ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ എന്നിവ കോപ്ലാനാർ എന്ന് തെളിയിച്ചാൽ മതി.

ഇപ്പോൾ, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(16\hat{i}-19\hat{j}-4\hat{k})-(6\hat{i}-7\hat{j})=10\hat{i}-12\hat{j}-4\hat{k}$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=-6\hat{i}+10\hat{j}-6\hat{k}$, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=-4\hat{i}+2\hat{j}+10\hat{k}$.

നമുക്കറിയാം $[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}]=\begin{vmatrix}10&-12&-4\\-6&10&-6\\-4&2&10\end{vmatrix}=0$.

അതുകൊണ്ട് മൂന്ന് സദിശങ്ങൾ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ എന്നിവ കോപ്ലാനർ ആകുന്നു. അതുകൊണ്ട് നാല് ബിന്ദുക്കൾ $A,B,C,\ D$ യും ഒരേ തലത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 236 15-02-2023 16:21:39

ഉദാഹരണം 6.17

മൂന്ന് സദിശങ്ങൾ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ എന്നിവ കോപ്ലാനാർ. ആയാൽ $\vec{a}+\vec{b},\vec{b}+\vec{c},\vec{c}+\vec{a}$ എന്നിവയും കോപ്ലാനാർ ആണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ എന്നിവ കോപ്ലാനർ ആയതിനാൽ നമുക്കറിയാം $[\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}]=0$. അദിശ ട്രിപ്പിൾ ഗുണനത്തിന്റെ സവിശേഷത അനുസരിച്ച് നമുക്ക് കിട്ടുന്നു

$$\begin{aligned}[\vec{a}+\vec{b},\vec{b}+\vec{c},\vec{c}+\vec{a}] &= [\vec{a},\vec{b}+\vec{c},\vec{c}+\vec{a}]+[\vec{b},\vec{b}+\vec{c},\vec{c}+\vec{a}]\\ &= [\vec{a},\vec{b},\vec{c}+\vec{a}]+[\vec{a},\vec{c},\vec{c}+\vec{a}]+[\vec{b},\vec{b},\vec{c}+\vec{a}]+[\vec{b},\vec{c},\vec{c}+\vec{a}]\\ &= [\vec{a},\vec{b},\vec{c}]+[\vec{a},\vec{b},\vec{a}]+[\vec{a},\vec{c},\vec{c}]+[\vec{a},\vec{c},\vec{a}]+[\vec{b},\vec{b},\vec{c}]+[\vec{b},\vec{b},\vec{a}]+[\vec{b},\vec{c},\vec{c}]+[\vec{b},\vec{c},\vec{a}]\\ &= [\vec{a},\vec{b},\vec{c}]+[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=2[a,b,c]=0\,.\end{aligned}$$

അതിനാൽ $\vec{a}+\vec{b},\ \vec{b}+\vec{c},\ \vec{c}+\vec{a}$ എന്നീ സദിശങ്ങൾ കോപ്ലനാർ ആണ്.

ഉദാഹരണം 6.18

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ എന്നിവ മൂന്ന് സദിശങ്ങൾ എങ്കിൽ $[\vec{a}+\vec{c},\ \vec{a}+\vec{b},\ \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}]=[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

സിദ്ധാന്തം 6.6 ഉപയോഗിച്ച് നമുക്ക് അറിയാം

$$[\vec{a}+\vec{c},\vec{a}+\vec{b},\ \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}] = \begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$$

$$= [\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\,.$$

അഭ്യാസം 6.2

1. $\vec{a}=\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k},\ \vec{b}=2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k},\ \vec{c}=3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$, എങ്കിൽ $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ കാണുക.
2. $-6\hat{i}+14\hat{j}+10\hat{k},\ 14\hat{i}-10\hat{j}-6\hat{k},\ 2\hat{i}+4\hat{j}-2\hat{k}$ എന്നീ സദിശങ്ങളാൽ രൂപീകൃതമാകുന്ന, ഒരു ബിന്ദുവിൽ സന്ധിക്കുന്ന വക്കുകളോട് കൂടിയ സമാന്തരപൈപ്പിന്റെ വ്യാപ്തം കാണുക.
3. $7\hat{i}+\lambda\hat{j}-3\hat{k},\ \hat{i}+2\hat{j}-\hat{k},\ -3\hat{i}+7\hat{j}+5\hat{k}$ എന്നീ സദിശങ്ങളാൽ രൂപീകൃതമാകുന്ന, ഒരു ബിന്ദുവിൽ സന്ധിക്കുന്ന വക്കുകളോട് കൂടിയ സമാന്തരപൈപ്പിന്റെ വ്യാപ്തം 90 ഘനമാത്രകൾ എങ്കിൽ λ യുടെ വില കാണുക.
4. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ എന്നീ കോപ്ലനാർ അല്ലാത്ത മൂന്ന് സദിശങ്ങൾ, ഒരു ബിന്ദുവിൽ സന്ധിക്കുന്ന വക്കുകൾ ഉള്ള സമാന്തരപൈപ്പിന്റെ വ്യാപ്തം 4 ഘനമാത്രകൾ എങ്കിൽ $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{b}\times\vec{c})+(\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{c}\times\vec{a})+(\vec{c}+\vec{a})\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$ യുടെ വില കാണുക.
5. $\vec{a}=-2\hat{i}+5\hat{j}+3\hat{k},\ \vec{b}=\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k}$ എന്നീ സദിശങ്ങളാൽ രൂപപ്പെടുന്ന സമാന്തര പൈപ്പിനെ ആധാര മാക്കി എടുത്തുകൊണ്ട് $\vec{c}=-3\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ എന്നീ സദിശങ്ങളാൽ രൂപപ്പെടും സമാന്തരപൈപ്പിന്റെ ഉന്നതി കാണുക.
6. $2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k},\ \hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k},\ 3\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$ എന്നീ മൂന്ന് സദിശങ്ങൾ കോപ്ലാനാർ ആണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.
7. $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k},\ \vec{b}=\hat{i}$, $\vec{c}=c_1\hat{i}+c_2\hat{j}+c_3\hat{k}$ എന്നിരിക്കട്ടെ $c_1=1$ $c_2=2$, അത്തരത്തിൽ $\vec{a},\vec{b}$, $\vec{c}$ എന്നിവ കോപ്ലാനാർ എങ്കിൽ c_3 കാണുക.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 237 15-02-2023 16:21:40

8. $\vec{a}=\hat{i}-\hat{k}, \vec{b}=x\hat{i}+\hat{j}+(1-x)\hat{k}, \vec{c}=y\hat{i}+x\hat{j}+(1+x-y)\hat{k}$, എങ്കിൽ $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$ x നെയോ y യെയോ ആശ്രയിക്കുന്നു. എന്ന് തെളിയിക്കുക.

9. $a\hat{i}+a\hat{j}+c\hat{k}, \hat{i}+\hat{k}, c\hat{i}+c\hat{j}+b\hat{k}$ എന്നീ സദിശങ്ങൾ കോപ്ലാനർ എങ്കിൽ c എന്നത് a യുടെയും b യുടെയും ഗുണന ക്രമാനുപാത മാധ്യമെന്ന് തെളിയിക്കുക.

10. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ എന്നിവ പൂജ്യമല്ലാത്ത സദിശങ്ങളും അത്തരത്തിൽ $\vec{a}$ യ്ക്കും $\vec{b}$ യ്ക്കും ലംബമായ യൂണിറ്റ് സദിശം $\vec{c}$. $\vec{a}$ യ്ക്കും $\vec{b}$ യ്ക്കും ഇടയിലുള്ള കോൺ $\frac{\pi}{6}$ എങ്കിൽ, $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]^2=\frac{1}{4}|\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

6.5 സദിശ ട്രിപ്പിൾ ഗുണനം

നിർവ്വചനം 6.5

കൊടുക്കപ്പെട്ട മൂന്ന് സെറ്റ് സദിശങ്ങൾ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, യ്ക്കും, സദിശം $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ യെ **സദിശ ട്രിപ്പിൾ ഗുണനം** എന്ന് പറയാം.

കുറിപ്പ്

കൊടുക്കപ്പെട്ട ഏത് മൂന്ന് സദിശങ്ങൾ $\vec{a},\vec{b},c$ യ്ക്കും താഴെപ്പറയുന്നവ സദിശ ട്രിപ്പിൾ ഗുണനങ്ങളാണ് :

$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$, $(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a}$, $(\vec{c}\times\vec{a})\times\vec{b}$, $\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})$, $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$, $\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})$

അറിയാവുന്ന സദിശ ഗുണനത്തിന്റെ സവിശേഷത ഉപയോഗിച്ച് നമുക്ക് താഴെപ്പറയുന്ന സിദ്ധാന്തം കിട്ടുന്നു.

സിദ്ധാന്തം 6.7

സദിശ ട്രിപ്പിൾ ഗുണനം താഴെപ്പറയുന്ന സവിശേഷതകൾ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്നു.

(1) $(\vec{a}_1+\vec{a}_2)\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{a}_1\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{a}_2\times(\vec{b}\times\vec{c}),\ (\lambda\vec{a})\times(\vec{b}\times\vec{c})=\lambda(\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})),\ \lambda\in\mathbb{R}$

(2) $\vec{a}\times((\vec{b}_1+\vec{b}_2)\times\vec{c}) = \vec{a}\times(\vec{b}_1\times\vec{c})+\vec{a}\times(\vec{b}_2\times\vec{c}),\ \vec{a}\times((\lambda\vec{b})\times\vec{c})=\lambda(\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})),\ \lambda\in\mathbb{R}$

(3) $\vec{a}\times(\vec{b}\times(\vec{c}_1+\vec{c}_2)) = \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}_1)+\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}_2),\ \vec{a}\times(\vec{b}\times(\lambda\vec{c}))=\lambda(\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})),\ \lambda\in\mathbb{R}$

പരാമർശം

സദിശ ട്രിപ്പിൾ ഗുണനം സംയോജനമല്ല ഇത് അർത്ഥമാക്കുന്നത് $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\neq(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$, ചില സദിശങ്ങൾ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ യ്ക്കും.

ന്യായീകരണം

$\vec{a}=\hat{i}$, $\vec{b}=\hat{i}$, $\vec{c}=\hat{j}$ എന്നെടുക്കുക, $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\hat{i}\times(\hat{i}\times\hat{j})=\hat{i}\times\hat{k}=-\hat{j}$, എന്നിട്ട്, $(\hat{i}\times\hat{i})\times\hat{j}=\vec{0}\times\hat{j}=\vec{0}$

അതുകൊണ്ട് $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\neq(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ എന്നാൽ.

താഴെയുള്ള സിദ്ധാന്തം, സദിശ ട്രിപ്പിൾ ഗുണനം കണക്കാക്കുന്നതിനുള്ള ഒരു ലളിതമായ സൂത്രവാക്യം നൽകുന്നു.

സിദ്ധാന്തം 6.8 (സദിശ ട്രിപ്പിൾ ഗുണനത്തിന്റെ വിപുലീകരണം)

ഏത് മൂന്ന് സദിശങ്ങൾ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ യ്ക്കും $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$ എന്ന് നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നു.

തെളിവ്

നിർദ്ദേശാങ്ക അക്ഷങ്ങൾ താഴെ കാണും വിധം തെരഞ്ഞെടുക്കുക :

$\vec{a}$, യുടെ പ്രവർത്തനരേഖയിൽ x-അക്ഷം തെരഞ്ഞെടുക്കുകയും, y-അക്ഷം തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നത് $\vec{b}$ യ്ക്ക് സമാന്തരമായി $\vec{a}$ കടന്നുപോകുന്ന തലത്തിലും z- അക്ഷം തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നത് $\vec{a}$ യും $\vec{b}$ യും അടങ്ങിയ തലത്തിന് ലംബമായുമാണ് എന്നിട്ട് നമുക്ക് അറിയാം.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 238 15-02-2023 16:21:45

$$\vec{a} = a_1\hat{i}$$
$$\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j}$$
$$\vec{c} = c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}$$

ഇപ്പോൾ, $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = a_1\hat{i}\times\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ b_1 & b_2 & 0\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$

$$= a_1\hat{i}\times\left(b_2c_3\hat{i} - b_1c_3\hat{j} + (b_1c_2 - b_2c_1)\hat{k}\right)$$
$$= -a_1b_1c_3\hat{k} + a_1(b_2c_1 - b_1c_2)\hat{j} \quad \ldots (1)$$
$$(\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b})\vec{c} = a_1c_1\times\left(b_1\hat{i} + b_2\hat{j}\right) - a_1b_1\left(c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}\right)$$
$$= a_1(b_2c_1 - b_1c_2)\hat{j} - a_1b_1c_3\hat{k} \quad \ldots (2)$$

(1), (2) എന്നീ സമവാക്യങ്ങളിൽ നിന്നും നമുക്ക് കിട്ടുന്നു,

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (a\cdot\vec{b})\vec{c}$$

കുറിപ്പ്

(1) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$, അവിടെ $\alpha = \vec{a}\cdot\vec{c}$, $\beta = -(\vec{a}\cdot\vec{b})$, അതിനാൽ അത് $\vec{b}$ യ്ക്കും $\vec{c}$ യ്ക്കും സമാന്തരമായ തലത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു.

(2) നമുക്ക് അറിയാവുന്നത്

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = -\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})$$
$$= -[(\vec{c}\cdot\vec{b})\vec{a} - (\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}]$$
$$= (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$$

അതുകൊണ്ട്, $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$, $\vec{a}$ യ്ക്കും $\vec{b}$ യ്ക്കും സമാന്തരമായ തലത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു.

(3) $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$, ൽ ബ്രായ്ക്കറ്റിനുള്ളിലെ സദിശങ്ങളെ പരിഗണിച്ചാൽ $\vec{b}$ യെ മധ്യ സദിശമെന്നും $\vec{a}$ യെ മധ്യത്തിലല്ലാത്ത സദിശമെന്നും വിളിക്കാം. അതുപോലെ $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ ൽ $\vec{b}$ യെ മധ്യസദിശമെന്നും $\vec{c}$ യെ മധ്യത്തിലല്ലാത്ത സദിശമെന്നും വിളിക്കാം എന്നിട്ട് ഈ സദിശങ്ങളുടെ സദിശ ട്രിപ്പിൾ ഗുണനം എന്നത്

λ (മധ്യസദിശം) $-\mu$ (മധ്യത്തിലല്ലാത്ത സദിശം) എന്നതിന് തുല്യമാണെന്ന് നമുക്ക് നിരീക്ഷിക്കാം.

അവിടെ λ എന്നത് മധ്യസദിശം ഒഴികെയുള്ള സദിശങ്ങളുടെ ഡോട്ട് ഗുണനവും μ എന്നത് മധ്യത്തിലല്ലാത്ത സദിശം ഒഴികെയുള്ള സദിശങ്ങളുടെ ഡോട്ട് ഗുണനവുമാണ്.

6.6 ജേക്കോബിയുടെ സർവ്വസമവാക്യവും ലെഗ്രാഞ്ചിയുടെ സർവ്വസമവാക്യവും

സിദ്ധാന്തം 6.9 (ജേക്കോബിയുടെ സർവ്വസമവാക്യം)
ഏത് മൂന്ന് സദിശങ്ങൾക്കും $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, നമുക്ക് അറിയാം $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) + \vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a}) + \vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{0}$.

തെളിവ്

സദിശ ട്രിപ്പിൾ ഗുണനത്തിന്റെ വിപുലീകരണം ഉപയോഗിച്ച് നമുക്ക് അറിയാം

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$$

$$\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a}) = (\vec{b}\cdot\vec{a})\vec{c} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$$

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 239 15-02-2023 16:21:51

$$\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = (\vec{c}\cdot\vec{b})\vec{a}-(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}\,.$$

മുകളിൽ പറഞ്ഞ സമവാക്യങ്ങൾ കൂട്ടുകയും രണ്ട് സദിശങ്ങളുടെ അദിശ ഗുണനം ക്രമവിനിമേയമാണ് എന്നതും ഉപയോഗിച്ച് നമുക്ക് കിട്ടുന്നു $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{0}$.

സിദ്ധാന്തം 6.10 (ലെഗ്രാഞ്ചിയുടെ സർവസമവാക്യം)

ഏത് നാല് സദിശങ്ങൾ $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$, യ്ക്കും നമുക്ക് അറിയാം $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})=\begin{vmatrix}\vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{a}\cdot\vec{d}\\ \vec{b}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{d}\end{vmatrix}$.

തെളിവ്

അദിശ ഗുണനത്തിൽ ഡോട്ട്, ക്രോസ് എന്നിവ പരസ്പരം മാറ്റാൻ കഴിയുന്നതിനാൽ നമുക്ക് കിട്ടുന്നു

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{d}))$$

$$= \vec{a}\cdot((\vec{b}\cdot\vec{d})\vec{c}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{d}) \text{ (സദിശ ട്രിപ്പിൾ ഗുണനത്തിന്റെ വിപുലീകരണത്താൽ)}$$

$$= (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d})-(\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c})$$

$$= \begin{vmatrix}\vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{a}\cdot\vec{d}\\ \vec{b}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{d}\end{vmatrix}$$

ഉദാഹരണം 6.19

$[\vec{a}\times\vec{b},\ \vec{b}\times\vec{c},\ \vec{c}\times\vec{a}]=[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]^2$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

അദിശ ട്രിപ്പിൾ ഗുണനത്തിന്റെ നിർവചനം ഉപയോഗിച്ച് നമുക്ക് കിട്ടുന്നു

$$[\vec{a}\times\vec{b},\ \vec{b}\times\vec{c},\ \vec{c}\times\vec{a}]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot[(\vec{b}\times\vec{c})\times(\vec{c}\times\vec{a})]. \quad \ldots(1)$$

സദിശ ട്രിപ്പിൾ ഗുണനത്തിൽ $(\vec{b}\times\vec{c})$ യെ ആദ്യ സദിശമായി പരിഗണിച്ചാൽ, നമുക്ക് കണ്ടുപിടിക്കാം

$$(\vec{b}\times\vec{c})\times(\vec{c}\times\vec{a}) = ((\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a})\vec{c}-((\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{c})\vec{a}=[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\vec{c}\,.$$

ഈ മൂല്യം (1) ൽ ഉപയോഗിച്ച് നമുക്ക് കിട്ടുന്നു

$$[\vec{a}\times\vec{b},\vec{b}\times\vec{c},\vec{c}\times\vec{a}] = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot([\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\vec{c})=[\vec{a},\vec{b},\vec{c}](\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]^2\,.$$

ഉദാഹരണം 6.20

$(\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}))\vec{a}=(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{a}\times\vec{c})$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിരിക്കുന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ വലതു വശത്തിലെ $(\vec{a}\times\vec{b})$ യെ ആദ്യസദിശമായി പരിഗണിക്കുകയും സദിശ ട്രിപ്പിൾ ഗുണനത്തിന്റെ വിപുലീകരണവും ഉപയോഗിച്ച് നമുക്ക് കിട്ടുന്നു

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{a}\times\vec{c}) = ((\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c})\vec{a}-((\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a})\vec{c}=(\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}))\vec{a}\,.$$

ഉദാഹരണം 6.21

ഏത് നാല് സദിശങ്ങൾ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, യ്ക്കും നമുക്ക്

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = [\vec{a},\vec{b},\vec{d}]\vec{c}-[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\vec{d}=[\vec{a},\vec{c},\vec{d}]\vec{b}-[\vec{b},\vec{c},\vec{d}]\vec{a}\,.$$

നിർദ്ധാരണം

$\vec{p}=(\vec{a}\times\vec{b})$ എന്നത് ഒരു ഏകാംഗ സദിശമായെടുക്കുകയും സദിശ ട്രിപ്പിൾ ഗുണനത്തിന്റെ വിപുലീകരണവും ഉപയോഗിച്ച് നമുക്ക് കിട്ടുന്നു

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = \vec{p}\times(\vec{c}\times\vec{d})$$

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 240 15-02-2023 16:21:54

$$= (\vec{p}\cdot\vec{d})\vec{c} - (\vec{p}\cdot\vec{c})\vec{d}$$

$$= ((\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{d})\vec{c} - ((\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c})\vec{d} = [\vec{a},\vec{b},\vec{d}]\vec{c} - [\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\vec{d}$$

അതുപോലെ $\vec{q} = \vec{c}\times\vec{d}$, എന്നെടുത്താൽ നമുക്ക് കിട്ടുന്നു

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{q}$$

$$= (\vec{a}\cdot\vec{q})\vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{q})\vec{a}$$

$$= [\vec{a},\vec{c},\vec{d}]\vec{b} - [\vec{b},\vec{c},\vec{d}]\vec{a}$$

ഉദാഹരണം 6.22

$\vec{a} = -2\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k},\ \vec{b} = 3\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k},\ \vec{c} = 2\hat{i} - 5\hat{j} + \hat{k}$, എങ്കിൽ $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ യും $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ യും കാണുക. അവ തുല്യമാണോ എന്ന് പ്രസ്താവിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

നിർവചനമനുസരിച്ച്, $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 7\hat{i} - 7\hat{k}$.

എന്നിട്ട്, $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 7 & 0 & -7 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = -35\hat{i} - 21\hat{j} - 35\hat{k}$ . ... (1)

$$\vec{b}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 14\hat{i} + 3\hat{j} - 13\hat{k}$$.

അടുത്തതായി, $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 3 & -2 \\ 14 & 3 & -13 \end{vmatrix} = -33\hat{i} - 54\hat{j} - 48\hat{k}$ . ... (2)

അതുകൊണ്ട് സമീകരണങ്ങൾ (1), (2) ൽ നിന്നും $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} \neq \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$.

ഉദാഹരണം 6.23

$\vec{a} = \hat{i} - \hat{j},\ \vec{b} = \hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k},\ \vec{c} = 3\hat{j} - \hat{k}$ എങ്കിൽ $\vec{d} = 2\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}$ എന്ന് പരിശോധിക്കുക,

(i) $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = [\vec{a},\vec{b},\vec{d}]\vec{c} - [\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\vec{d}$

(ii) $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = [\vec{a},\vec{c},\vec{d}]\vec{b} - [\vec{b},\vec{c},\vec{d}]\vec{a}$

നിർദ്ധാരണം (i)

നിർവചനമനുസരിച്ച്,

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 4\hat{i} + 4\hat{j},\ \vec{c}\times\vec{d} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 8\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}$$

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 241 15-02-2023 16:21:58

എന്നിട്ട് ,
$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 4 & 0 \\ 8 & -2 & -6 \end{vmatrix} = -24\hat{i}+24\hat{j}-40\hat{k} \quad \ldots (1)$$

മറുവശത്ത് നമുക്കറിയാം

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{d}]\vec{c}-[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\vec{d} = 28(3\hat{j}-\hat{k})-12(2\hat{i}+5\hat{j}+\hat{k}) = -24\hat{i}+24\hat{j}-40\hat{k} \quad \ldots (2)$$

അതുകൊണ്ട് (1) ഉം (2) ഉം സമീകരണത്തിൽ നിന്നും, സർവസമവാക്യം (i) പരിശോധിച്ചു. സർവസമവാക്യം (ii) പഠിതാവിന് പരിശോധിക്കുന്നതിനായി മാറ്റിവച്ചിട്ടുണ്ട്.

അഭ്യാസം 6.3

1. $\vec{a}=\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}, \vec{b}=2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}, \vec{c}=3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$, എങ്കിൽ (i) $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ (ii) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ കണ്ടു പിടിക്കുക.
2. ഏതൊരു സദിശം $\vec{a}$, യ്ക്കും $\hat{i}\times(\vec{a}\times\hat{i})+\hat{j}\times(\vec{a}\times\hat{j})+\hat{k}\times(\vec{a}\times\hat{k})=2\vec{a}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.
3. $[\vec{a}-\vec{b},\ \vec{b}-\vec{c},\ \vec{c}-\vec{a}]=0$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.
4. $\vec{a}=2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}, \vec{b}=3\hat{i}+5\hat{j}+2\hat{k}, \vec{c}=-\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$

   (i) $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$ (ii) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$

   എന്നത് പരിശോധിക്കുക
5. $\vec{a}=2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k},\ \vec{b}=-\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k},\ \vec{c}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ എന്നാൽ $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{c})$ ന്റെ മൂല്യം കാണുക.
6. $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ എന്നിവ കോപ്ലനാർ സദിശങ്ങൾ എങ്കിൽ $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=\vec{0}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.
7. $\vec{a}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}, \vec{b}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}, \vec{c}=3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ യും $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}$ യും എങ്കിൽ l,m,n എന്നിവയുടെ മൂല്യം കാണുക.
8. $\hat{b}$ യും $\hat{c}$ യും സമാന്തരമല്ലാത്തതും $\hat{a},\hat{b},\hat{c}$ എന്നിവ യൂണിറ്റ് സദിശങ്ങളും $\hat{a}\times(\hat{b}\times\hat{c})=\frac{1}{2}\hat{b}$ യും എങ്കിൽ $\hat{a}$ യ്ക്കും $\hat{c}$ യ്ക്കും ഇടയിലുള്ള കോൺ കാണുക?.

6.7 ത്രിമാന ജ്യാമിതിയിലേക്ക് സദിശങ്ങളുടെ പ്രയോഗം

നേർരേഖകളും, പ്രതലങ്ങളെയും ത്രിമാനത്തിൽ പഠിക്കാൻ സദിശങ്ങൾ മനോഹരമായ ഒരു സമീപനം നൽകുന്നു. എല്ലാ നേർരേഖകളും പ്രതലങ്ങളും $\mathbb{R}^3$ ന്റെ ഉപഗണങ്ങളാണ്. സംക്ഷിപ്തതയ്ക്കായി ഞങ്ങൾ നേർരേഖയെ വരി എന്ന് വിളിക്കുന്നു. ഒരു തലം, ഒരു ഉപരിതലമാണ്; അത് $\mathbb{R}^3$ ലെ ഒരു കൂട്ടം പോയിന്റുകളായി മനസ്സിലാക്കുന്നു. അതായത് A, B, C എന്നിവ സമരേഖീയമല്ലാത്ത ബിന്ദുക്കൾ ആണെങ്കിൽ അവയിൽ രണ്ടെണ്ണത്തിലൂടെ കടന്നു പോകുന്ന രേഖ P യുടെ ഉപഗണമാണ്. രണ്ട് പ്രതലങ്ങൾക്ക് പൊതുവായ ഒരു പോയിന്റെങ്കിലും മറുവശത്ത് ഇല്ലാത്ത ഒരു പോയിന്റെങ്കിലും ഉണ്ടെങ്കിൽ അവ തമ്മിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്നതായി പറയപ്പെടുന്നു. രണ്ട് പ്രതലങ്ങൾക്ക് ഒരേ ബിന്ദുക്കളാണുള്ളതെങ്കിൽ ആ രണ്ട് പ്രതലങ്ങൾ സമാനമായിരിക്കുമെന്ന് പറയാം. രണ്ട് പ്രതലങ്ങൾ സമാന്തരവും എന്നാൽ സമാനമല്ലാത്തതുമാകണമെങ്കിൽ അവയ്ക്ക് പൊതുവായ ബിന്ദു ഇല്ലാതിരിക്കണം. അതുപോലെ രണ്ട് പ്രതലങ്ങൾ വിഭജിക്കപ്പെടുന്നതിലൂടെ പൊതുവായ ഒരു കൂട്ടം പോയിന്റുകളായി ഒരു നേർരേഖയെ മനസ്സിലാക്കാം. ഈ വിഭാഗത്തിൽ ഒരു തലത്തിയെും നേർരേഖയുടെയും നിർദ്ദേശാങ്ക സമീകരണങ്ങളും, സദിശവും നമുക്ക് സദിശ രീതികൾ ഉപയോഗിച്ച് കാണാൻ കഴിയും ഒരു ജ്യാമിതീയ രൂപത്തിന്റെ സദിശ രൂപത്താൽ വസ്തുവിന്റെ ഓരോ പോയിന്റിലെയും സ്ഥാനസദിശം തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്ന ഒരു സമവാക്യം എന്നാണ് ഞങ്ങൾ അർത്ഥമാക്കുന്നത് ഈ സമവാക്യം ഒരു സദിശ സമവാക്യമോ അദിശ സമവാക്യമോ ആകാം.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 242 15-02-2023 16:22:00

6.7.1 ഒരു നേർരേഖയുടെ സമവാക്യത്തിന്റെ വ്യത്യസ്ത രൂപങ്ങൾ

ഒരു നേർരേഖ അദ്വിതീയമായി പരിഹരിക്കാൻ കഴിയും എങ്ങനെയെന്നാൽ

- നേർരേഖയിലെ പോയിന്റും നേർരേഖയുടെ ദിശയും തന്നിരുന്നാൽ
- നേർരേഖയിൽ രണ്ട് പോയിന്റുകൾ നൽകിയാൽ

നിർദ്ദേശാങ്ക രൂപത്തിലും സദിശ രൂപത്തിലും ഒരു നേർരേഖയുടെ സമവാക്യങ്ങൾ നമ്മൾ കണ്ടുപിടിച്ചിട്ടുണ്ട് സദിശ രൂപത്തിൽ ഒരു നേർരേഖയുടെ സമവാക്യം കണ്ടെത്തുന്നതിന് നേർരേഖയിൽ സ്ഥാന സദിശം $\vec{r}$ ഉള്ള അനിയന്ത്രിതമായ പോയിന്റ് P എടുക്കുകയും നൽകിയിരിക്കുന്ന വ്യവസ്ഥകൾ ഉപയോഗിച്ച് $\vec{r}$ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്ന ഒരു ബന്ധം നേടുകയും ചെയ്യുന്നു. ഈ ബന്ധത്തെ നേർരേഖയുടെ സദിശ സമവാക്യം എന്ന് വിളിക്കുന്നു. ഒരു നേർരേഖയുടെ സദിശ സമവാക്യം പാരാമീറ്ററുകൾ ഉൾപ്പെടാം അല്ലെങ്കിൽ ഉൾപ്പെടില്ല. ഒരു സദിശ സമവാക്യത്തിൽ പാരാമീറ്ററുകൾ ഉൾപ്പെടുന്നുവെങ്കിൽ അതിനെ പാരാമെട്രിക് രൂപത്തിൽ സദിശ സമവാക്യം എന്ന് വിളിക്കുന്നു. പാരാമീറ്റർ ഉൾപ്പെട്ടിട്ടില്ല എങ്കിൽ ആ സമവാക്യത്തെ നോൺ പാരാമെട്രിക് രൂപത്തിൽ സദിശ സമവാക്യം എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

6.7.2 നേർരേഖയിലെ ഒരു പോയിന്റും നേർരേഖയുടെ ദിശയും തന്നിരുന്നാൽ

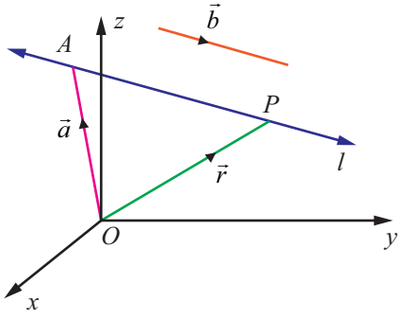
(a) സദിശ സമവാക്യം പാരാമെട്രിക് രൂപത്തിൽ

സിദ്ധാന്തം 6.11

തന്നിരിക്കുന്ന ഒരു സദിശം $\vec{b}$ യ്ക്ക് സമാന്തരവും സ്ഥാനസദിശം $\vec{a}$ യും ഉള്ള ഒരു നിശ്ചിത പോയിന്റിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന ഒരു നേർരേഖയുടെ സദിശ സമവാക്യം $\vec{r} = \vec{a} + t\vec{b}$ അവിടെ $t \in \mathbb{R}$.

തെളിവ്

ഒരു നിശ്ചിത പോയിന്റ് A യുടെ സ്ഥാന സദിശം $\vec{a}$ യും നേർരേഖയിൽ ഒരു അനിയന്ത്രിത പോയിന്റ് P യുടെ സ്ഥാന സദിശം $\vec{r}$ ഉം ആണെങ്കിൽ $\overrightarrow{AP} = \vec{r} - \vec{a}$.



ചിത്രം 6.18

$\overrightarrow{AP}$, $\vec{b}$ യ്ക്ക് സമാന്തരമായതിനാൽ നമുക്കറിയാം

$$\vec{r} - \vec{a} = t\vec{b}, \; t \in \mathbb{R} \qquad \ldots (1)$$

$$\text{or} \quad \vec{r} = \vec{a} + t\vec{b}, \; t \in \mathbb{R} \qquad \ldots (2)$$

ഇത് പാരാമെട്രിക് രൂപത്തിലുള്ള നേർരേഖയുടെ സദിശ സമവാക്യമാണ്.

പരാമർശം

നേർരേഖയിലെ ഏത് പോയിന്റുകളുടെയും സ്ഥാനസദിശം $\vec{a} + t\vec{b}$ ആയി എടുക്കുന്നു.

(b) സദിശ സമവാക്യത്തിന്റെ നോൺ പാരാമെട്രിക് രൂപം

$\overrightarrow{AP}$, $\vec{b}$, യ്ക്ക് സമാന്തരമായതിനാൽ നമുക്കറിയാം $\overrightarrow{AP} \times \vec{b} = \vec{0}$

അതായത്, $(\vec{r} - \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{0}$.

ഇത് നോൺ പാരാമെട്രിക് രൂപത്തിൽ നേർരേഖയുടെ സദിശസമവാക്യം എന്ന് അറിയപ്പെടുന്നു.

(c) നിർദ്ദേശാങ്ക സമവാക്യം

P എന്നത് (x, y, z) എന്ന് സങ്കല്പിക്കുക. A എന്നത് (x_1, y_1, z_1) യും $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ എന്നിട്ട് $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, $\vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$ എന്ന് സമവാക്യം (1) ൽ ആരോപിക്കുകയും $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ എന്നിവയുടെ ഗുണോത്തരങ്ങൾ താരതമ്യം ചെയ്യുകയും ചെയ്യുമ്പോൾ നമുക്ക് കിട്ടുന്നു

$$x - x_1 = tb_1, \; y - y_1 = tb_2, \; z - z_1 = tb_3 \qquad \ldots (4)$$

ഏകോപിച്ച് (4) നെ ഇങ്ങനെ എഴുതാം

$$\frac{x - x_1}{b_1} = \frac{y - y_1}{b_2} = \frac{z - z_1}{b_3} \qquad \ldots (5)$$

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 243 15-02-2023 16:22:02

ഇവയെ (x_1, y_1, z_1) എന്ന പോയിന്റ് വഴി കടന്നു പോകുന്നതും ദിശ അനുപാതങ്ങൾ b_1, b_2, b_3 ഉള്ള സദിശത്തിന് സമാന്തരവുമായ നേർരേഖയുടെ നിർദ്ദേശാങ്ക സമവാക്യങ്ങൾ അല്ലെങ്കിൽ സമമിതി സമവാക്യങ്ങള എന്ന് വിളിക്കാം.

പരാമർശം

(i) നേർരേഖ (5) ലെ എല്ലാ പോയിന്റും $(x_1 + tb_1, y_1 + tb_2, z_1 + tb_3)$ അവിടെ $t \in \mathbb{R}$ ഈ രൂപത്തിൽ ആയിരിക്കും.

(ii) ഒരു രേഖയുടെ ദിശ കൊസൈനുകൾ, ദിശ അനുപാതത്തതിന് ആനുപാതികമായതിനാൽ l, m, n എന്നിവ രേഖയുടെ ദിശ കൊസൈനുകൾ എങ്കിൽ, രേഖയുടെ നിർദ്ദേശാങ്ക സമവാക്യം എന്നത്

$$\frac{x - x_1}{l} \quad \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}.$$

(iii) (5) ൽ ഒന്നോ രണ്ടോ b_1, b_2, b_3 പൂജ്യമെങ്കിൽ ഇതിനർത്ഥം നമ്മൾ പൂജ്യം കൊണ്ട് ഹരിക്കുന്നുവെന്ന് അർത്ഥമാക്കുന്നില്ല, അതിനർത്ഥം അനുബന്ധ അംശം പൂജ്യം എന്നാണ് ഉദാഹരണത്തിന് $b_1 \neq 0,\ b_2 \neq 0$, $b_3 = 0$ എന്നാൽ $\frac{x - x_1}{b_1} = \frac{y - y_1}{b_2} = \frac{z - z_1}{0}$ ഇങ്ങനെ എഴുതണം $\frac{x - x_1}{b_1} = \frac{y - y_1}{b_2}, z - z_1 = 0$ ..

(iv) x - അക്ഷത്തിന്റെ ദിശ കൊസൈനുകൾ $1, 0, 0$ എന്ന് നമുക്കറിയാം അതുകൊണ്ട് x - അക്ഷത്തിന്റെ സമവാക്യങ്ങൾ $\frac{x - 0}{1} = \frac{y - 0}{0} = \frac{z - 0}{0}$ അല്ലെങ്കിൽ $x = t, y = 0, z = 0$, അവിടെ $t \quad \mathbb{R}$.

അതുപോലെ y - അക്ഷത്തിന്റെയും z - അക്ഷത്തിന്റെയും സമവാക്യങ്ങൾ യഥാക്രമം $\frac{x - 0}{0} = \frac{y - 0}{1} = \frac{z - 0}{0}$ ഉം $\frac{x - 0}{0} = \frac{y - 0}{0} = \frac{z - 0}{1}$ ഉം ആണ് .

6.7.3 കൊടുക്കപ്പെട്ട രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ വഴി കടന്നുപോകുന്ന നേർരേഖ

(a) സദിശ സമവാക്യത്തിന്റെ പാരാമെട്രിക് രൂപം

സിദ്ധാന്തം 6.12

സ്ഥാനസദിശങ്ങൾ യഥാക്രമം $\vec{a}$ യും $\vec{b}$ യും ഉള്ള രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ വഴി കടന്നുപോകുന്ന സദിശ സമവാക്യത്തിന്റെ പാരാമെട്രിക് രൂപം എന്നത് $\vec{r} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}), t \in \mathbb{R}$ ആകുന്നു.

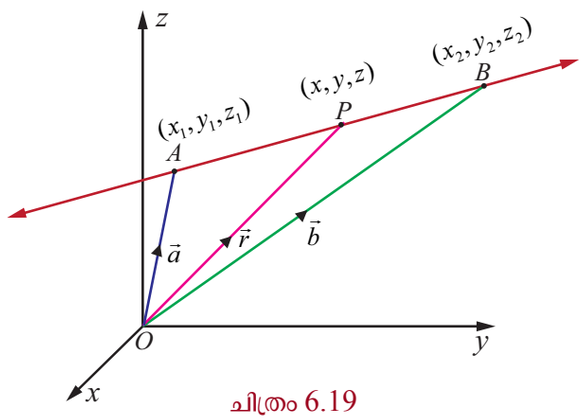
(b) സദിശസമവാക്യത്തിന്റെ നോൺ പാരാമെട്രിക് രൂപം

മുകളിൽപ്പറഞ്ഞ സമവാക്യത്തിന് സമാനമായി നോൺ പാരാമെട്രിക് രൂപത്തിൽ സദിശ സമവാക്യം ഇങ്ങനെ എഴുതാം

$$(\vec{r} - \vec{a}) \times (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{0}$$

(c) സമവാക്യം നിർദ്ദേശാങ്ക രൂപത്തിൽ

P എന്നത് (x, y, z) ഉം A എന്നത് (x_1, y_1, z_1) ഉം B എന്നത് (x_2, y_2, z_2) എന്ന് സങ്കല്പിക്കുക $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, $\vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} +$, $\vec{b} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} +$ എന്ന് സിദ്ധാന്തം 6.12 ൽ ആരോപിക്കുകയും $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ എന്നിവയുടെ ഗുണോത്തരങ്ങൾ താരതമ്യം ചെയ്യുകയും ചെയ്യുമ്പോൾ നമുക്ക് കിട്ടുന്നു $x - x_1 = t(x_2 - x_1), y - y_1 = t(y_2 - y_1), z - z_1 = t(z_2 - z_1)$ അതിനാൽ (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) എന്നീ രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ വഴി കടന്നുപോകുന്ന നേർരേഖയുടെ നിർദ്ദേശാങ്ക സമീകരണം എന്നത്



ചിത്രം 6.19

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 244 15-02-2023 16:22:04

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

മുകളിലെ സമവാക്യത്തിൽ നിന്നും (x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന ഒരു നേർരേഖയുടെ ദിശ അനുപാതങ്ങൾ $x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1$, എന്ന് ഞങ്ങൾ മനസ്സിലാക്കുന്നു. കൂടാതെ ഏത് മൂന്ന് സംഖ്യകൾ അവയ്ക്ക് ആനുപാതികമായാൽ പ്രത്യേകിച്ച് $x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z_2$.

ഉദാഹരണം 6.24

ഒരു നേർരേഖ $4\hat{i}+5\hat{j}-7\hat{k}$ യ്ക്ക് സമാന്തരവും $(1,2,-3)$ എന്ന ബിന്ദുവഴി കടന്നുപോകുകയും ചെയ്യുന്നു. (i) സദിശ സമവാക്യം പാരാമെട്രിക് രൂപത്തിൽ (ii) സദിശസമവാക്യം നോൺ പാരാമെട്രിക് രൂപത്തിൽ (iii) നേർരേഖയുടെ നിർദ്ദേശാങ്ക സമവാക്യങ്ങൾ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

ആവശ്യപ്പെട്ട നേർരേഖ $(1,2,-3)$.വഴി കടന്നുപോകുന്നു. അതുകൊണ്ട് ആ ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാന സദിശം എന്നത് $\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

$\vec{a}=\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$, $\vec{b}=4\hat{i}+5\hat{j}-7\hat{k}$ എന്നിട്ട് നമുക്കറിയാം

(i) ആവശ്യപ്പെട്ട നേർരേഖയുടെ സദിശ സമവാക്യം പാരാമെട്രിക് രൂപത്തിൽ $\vec{r}=\vec{a}+t\vec{b},\ t\in\mathbb{R}$.
അതുകൊണ്ട് , $\vec{r}=(\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})+t(4\hat{i}+5\hat{j}-7\hat{k}),\ t\in\mathbb{R}$.

(ii) ആവശ്യപ്പെട്ട നേർരേഖയുടെ സദിശസമവാക്യം നോൺ പാരാമെട്രിക് രൂപത്തിൽ $(\vec{r}-\vec{a})\times\vec{b}=\vec{0}$.
അതുകൊണ്ട് , $(\vec{r}-(\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}))\times(4\hat{i}+5\hat{j}-7\hat{k})=\vec{0}$.

(iii) ആവശ്യപ്പെട്ട നേർരേഖയുടെ നിർദ്ദേശാങ്ക സമവാക്യങ്ങൾ $\frac{x-x_1}{b_1}=\frac{y-y_1}{b_2}=\frac{z-z_1}{b_3}$.

ഇവിടെ, $(x_1,y_1,z_1)=(1,2,-3)$ ഉം ആവശ്യപ്പെട്ട നേർരേഖയുടെ ദിശ അനുപാതങ്ങൾ $4,5,-7$.ന് ആനുപാതികമാവുകയും ചെയ്യുന്നു. അതുകൊണ്ട് നേർരേഖയുടെ നിർദ്ദേശാങ്ക സമവാക്യങ്ങൾ $\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{5}=\frac{z+3}{-7}$.

ഉദാഹരണം 6.25

ഒരു നേർരേഖയുടെ സമവാക്യം പാരാമെട്രിക് രൂപത്തിൽ $\vec{r}=(3\hat{i}-2\hat{j}+6\hat{k})+t(2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k})$ ആണ് (i) നേർരേഖയുടെ ദിശ കൊസൈനുകൾ (ii) നേർരേഖയുടെ സദിശ സമവാക്യം നോൺ പാരാമെട്രിക് രൂപത്തിൽ (iii)നേർരേഖയുടെ നിർദ്ദേശാങ്ക സമവാക്യങ്ങൾ എന്നിവ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിരിക്കുന്ന സമവാക്യം $\vec{r}=\vec{a}+t\vec{b}$ നേർരേഖയുടെ സമവാക്യവുമായി താരതമ്യം ചെയ്യുമ്പോൾ നമുക്ക് കിട്ടുന്നു $\vec{a}=3\hat{i}-2\hat{j}+6\hat{k}$, $\vec{b}=2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$ അതുകൊണ്ട്,

(i) $\vec{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$, എങ്കിൽ ദിശ കൊസൈനുകൾ b_1,b_2,b_3 . ആകും. അതുകൊണ്ട് തന്നിരിക്കുന്ന നേർരേഖയുടെ ദിശ കൊസൈനുകൾ $2,-1,3$, ന് ആനുപാതികമാവുകയും ആയതിനാൽ തന്നിരിക്കുന്ന നേർരേഖയുടെ ദിശ കൊസൈനുകൾ $\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{-1}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}}$ ആണ്.

(ii) ഒരു നേർരേഖയുടെ സദിശ സമവാക്യം നോൺ പാരാമെട്രിക് രൂപത്തിൽ $(\vec{r}-\vec{a})\times\vec{b}=\vec{0}$ ആണ്.
അതുകൊണ്ട് , $(\vec{r}-(3\hat{i}-2\hat{j}+6\hat{k}))\times(2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k})=\vec{0}$.

(iii) ഇവിടെ $(x_1,y_1,z_1)=(3,-2,6)$ ഉം ദിശ അനുപാതങ്ങൾ $2,-1,3$ ഇവയ്ക്ക് ആനുപാതികവുമാണ്.

അതുകൊണ്ട് നേർരേഖയുടെ നിർദ്ദേശാങ്ക സമവാക്യങ്ങൾ $\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-6}{3}$ ആണ്.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 245 15-02-2023 16:22:06

ഉദാഹരണം 6.26

$\frac{-x-2}{4}=\frac{y+3}{-2}=\frac{2z-6}{3}$ എന്ന നേർരേഖയ്ക്ക് സമാന്തരവും $(-4,2,-3)$ എന്ന ബിന്ദുവഴി കടന്നു പോകുന്നതുമായ നേർരേഖയുടെ നിർദ്ദേശാങ്ക സമവാക്യങ്ങളും പാരാമെട്രിക് രൂപത്തിൽ സദിശ സമവാക്യവും കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിരിക്കുന്ന സമവാക്യം $\frac{x+2}{-4}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-3}{3/2}$ ഈ രീതിയിലെ മാറ്റിയെഴുതുകയും $\frac{x-x_1}{b_1}=\frac{y-y_1}{b_2}=\frac{z-z_1}{b_3}$

ഇതുമായി താരതമ്യം ചെയ്യുകയും ചെയ്താൽ നമുക്ക് കിട്ടും $\vec{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}=-4\hat{i}-2\hat{j}+\frac{3}{2}\hat{k}=-\frac{1}{2}(8\hat{i}+4\hat{j}-3\hat{k})$.

വ്യക്തമായി, $\vec{b}$, $8\hat{i}+4\hat{j}-3\hat{k}$ എന്ന സദിശത്തിന് സമാന്തരമാണ്. അതുകൊണ്ട് പാരാമെട്രിക് രൂപത്തിലുള്ള സദിശം $8\hat{i}+4\hat{j}-3\hat{k}$ സമാന്തരവും $(-4,2,-3)$ എന്ന ബിന്ദുവഴി കടന്നുപോകുന്ന തന്നിരിക്കുന്ന നേർരേഖയുടെ സദിശ സമവാക്യം എന്നത്

$$\vec{r}=(-4\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})+t(8\hat{i}+4\hat{j}-3\hat{k}),\ t\in\mathbb{R}.$$

അതുകൊണ്ട് തന്നിരിക്കുന്ന നേർരേഖയുടെ നിർദ്ദേശാങ്ക സമവാക്യങ്ങൾ

$$\frac{x+4}{8}=\frac{y-2}{4}=\frac{z+3}{-3}.$$

ഉദാഹരണം 6.27

$(-5,7,-4)$, $(13,-5,2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ വഴി കടന്നുപോകുന്ന നേർരേഖയുടെ നിർദ്ദേശാങ്ക സമവാക്യങ്ങളും പാരാമെട്രിക് രൂപത്തിൽ സദിശ സമവാക്യവും കാണുക നേർരേഖ xy-തലം കടന്നുപോകുന്ന ബിന്ദുവും കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$(-5,7,-4)$, $(13,-5,2)$,എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ വഴി നേർരേഖ കടന്നുപോകുന്നു. അതുകൊണ്ട് ഈ രണ്ട് ബിന്ദുക്കളും യോജിപ്പിച്ച് കിട്ടുന്ന നേർരേഖയുടെ ദിശ അനുപാതങ്ങൾ $18,-12,6$. അതായത് $3,-2,1$.

നേർരേഖ $3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ യ്ക്ക് സമാന്തരം, അതുകൊണ്ട് ആവശ്യപ്പെട്ട നേർരേഖയുടെ സദിശ സമവാക്യം,

- പാരാമെട്രിക് രൂപത്തിൽ $\vec{r}=(-5\hat{i}+7\hat{j}-4\hat{k})+t(3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k})$ അല്ലെങ്കിൽ $\vec{r}=(13\hat{i}-5\hat{j}+2\hat{k})+s(3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k})$ അവിടെ $s,\ t\in\mathbb{R}$.
- ആവശ്യപ്പെട്ട നേർരേഖയുടെ നിർദ്ദേശാങ്ക സമവാക്യങ്ങൾ $\frac{x+5}{3}=\frac{y-7}{-2}=\frac{z+4}{1}$ അല്ലെങ്കിൽ $\frac{x-13}{3}=\frac{y+5}{-2}=\frac{z-2}{1}$.

ഒരു അനിയന്ത്രിതമായ ബിന്ദു

$(3t-5,-2t+7,\ t-4)$ അല്ലെങ്കിൽ $(3s+13,-2s-5,\ s+2)$ എന്ന രൂപത്തിലാണ്.

നേർരേഖ xy-തലം കടന്നുപോകുന്നതിനാൽ z-നിർദ്ദേശാങ്കം സംഗമിക്കുന്ന ബിന്ദു പൂജ്യമാണ് അതുകൊണ്ട് നമുക്കറിയാം $t-4=0$, അതായത് $t=4$ അതിനാൽ നേർരേഖ xy- തലത്തിൽ $(7,-1,0)$ എന്ന ബിന്ദു വഴി കടന്നുപോകുന്നു.

ഉദാഹരണം 6.28

$\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{2}=-z$ എന്ന നേർരേഖ നിർദ്ദേശാങ്ക അക്ഷങ്ങളുമായി ഉണ്ടാകുന്ന കോൺ കണ്ടുപിടിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിരിക്കുന്ന നേർരേഖയ്ക്ക് സമാന്തരമായ യൂണിറ്റ് സദിശം $\hat{b}$ എങ്കിൽ, $\hat{b}=\frac{2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}}{|2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}|}=\frac{1}{3}(2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})$

.അതുകൊണ്ട് $\hat{b}$, യുടെ ദിശ കൊസൈനുകളുടെ നിർവചനത്തിൽ നിന്നും നമുക്കറിയാം

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 246 15-02-2023 16:22:07

$$\cos\quad = \frac{2}{3},\ \cos\beta = \frac{2}{3},\ \cos\gamma = -\frac{1}{3},$$

അവിടെ പോസിറ്റിവ് ദിശയിലെ x -അക്ഷവും y - അക്ഷവും z - അക്ഷവും യഥാക്രമം $\hat{b}$ യുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണുകളാണ് α, β, γ നിർദ്ദേശാങ്ക അക്ഷങ്ങളുമായി തിന്നിരിക്കുന്ന നേർരേഖ ഉണ്ടാക്കുന്ന അതേ കോൺ തന്നെയാണ് $\hat{b}$ നിർദ്ദേശാങ്ക അക്ഷവുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോൺ എന്നത് നമുക്കറിയാം യഥാക്രമം $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right),\ \beta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right),\ \gamma = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{3}\right)$.

6.7.4 രണ്ട് നേർരേഖകൾക്കിടയിലെ കോൺ

(a) സദിശ രൂപം

$\vec{r} = \vec{a} + s\vec{b}$, $\vec{r} = \vec{c} + t\vec{d}$ എന്നീ രണ്ട് നേർരേഖകൾക്കിടയിലുള്ള ന്യൂനകോൺ എന്നത് $\vec{b}$ യ്ക്കും $\vec{d}$ യ്ക്കും ഇടയിലുള്ള കോണിന് തുല്യമാണ് അതുകൊണ്ട്, $\cos\quad = \frac{|\vec{b}\cdot\vec{d}|}{|\vec{b}||\vec{d}|}$ അല്ലെങ്കിൽ $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{|\vec{b}\cdot\vec{d}|}{|\vec{b}||\vec{d}|}\right)$.

കുറിപ്പ്

(i) തന്നിരിക്കുന്ന രണ്ട് നേർരേഖകൾ $\vec{r} = \vec{a} + s\vec{b}$ യും $\vec{r} = \vec{c} + t\vec{d}$ സമാന്തരമായാൽ $\Leftrightarrow \theta = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = 1 \Leftrightarrow |\vec{b}\cdot\vec{d}| = |\vec{b}|\,|\vec{d}|$.

(ii) തന്നിരിക്കുന്നരണ്ട്നേർരേഖകൾ $\vec{r} = \vec{a} + s\vec{b}$ യും $\vec{r} = \vec{c} + t\vec{d}$ സമാന്തരമാകണമെങ്കിൽ $\vec{b} = \lambda\vec{d}$, എന്നത് ഏതെങ്കിലും ഒരു അദിശം λ.

(iii) തന്നിരിക്കുന്ന രണ്ട് നേർരേഖകൾ $\vec{r} = \vec{a} + s\vec{b}$, $\vec{r} = \vec{c} + t\vec{d}$ ലംബമാണെമെങ്കിൽ $\vec{b}\cdot\vec{d} = 0$.

(b) നിർദ്ദേശാങ്കരൂപം

രണ്ട് നേർരേഖകൾ $\frac{x-x_1}{b_1} = \frac{y-y_1}{b_2} = \frac{z-z_1}{b_3}$, $\frac{x-x_2}{d_1} = \frac{y-y_2}{d_2} = \frac{z-z_2}{d_3}$ നിർദ്ദേശാങ്ക രൂപത്തിൽ തന്നിരുന്നാൽ

അവയ്ക്കിടയിലെ ന്യൂനകോൺ $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{|b_1d_1 + b_2d_2 + b_3d_3|}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}\sqrt{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}}\right)$

കുറിപ്പ്

(i) b_1, b_2, b_3 യും d_1, d_2, d_3 എന്നീ ദിശ അനുപാതങ്ങളോട് കൂടിയ രണ്ട് നേർരേഖകൾ സമാന്തരമാകണമെങ്കിൽ $\frac{b_1}{d_1} = \frac{b_2}{d_2} = \frac{b_3}{d_3}$.

(ii) b_1, b_2, b_3 യും d_1, d_2, d_3 എന്നീ ദിശഅനുപാതങ്ങളോട് കൂടിയ രണ്ട് നേർരേഖകൾ ലംബമാകണമെങ്കിൽ $b_1d_1 + b_2d_2 + b_3d_3 = 0$.

(iii) തന്നിരിക്കുന്ന രണ്ട് നേർരേഖകളുടെ ദിശ അനുപാതങ്ങൾ l_1, m_1, n_1 ഉം l_2, m_2, n_2, ഉം എങ്കിൽ, തന്നിരിക്കുന്ന നേർരേഖകൾക്കിടയിലെ കോൺ $\cos\theta = |l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2|$.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 247 15-02-2023 16:22:09

ഉദാഹരണം 6.29

$\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}) + t(2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})$ എന്ന നേർരേഖയുടെയും $(5,1,4)$, $(9,2,12)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ വഴിയും കടന്നു പോകുന്ന നേർരേഖയ്ക്കും ഇടയിലുള്ള ന്യൂനകോൺ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

നമുക്കറിയാം $\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}) + t(2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})$ എന്ന നേർരേഖ $2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ എന്ന സദിശത്തിന് സമാന്തരമാണ്.

$(5,1,4)$, $(9,2,12)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിച്ചു വരയ്ക്കുന്ന നേർരേഖകളുടെ ദിശ അനുപാതങ്ങൾ $4,1,8$ ആയതിനാൽ ഈ നേർരേഖ $4\hat{i} + \hat{j} + 8\hat{k}$ എന്ന സദിശത്തിന് സമാന്തരമാണ്.

അതുകൊണ്ട് നേർരേഖകൾക്കിടയിലുള്ള ന്യൂനകോൺ

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{|\vec{b}\cdot\vec{d}|}{|\vec{b}||\vec{d}|}\right), \text{ അവിടെ } \vec{b} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k} \text{ യും } \vec{d} = 4\hat{i} + \hat{j} + 8\hat{k}.$$

$$\text{അതുകൊണ്ട്, } \theta = \cos^{-1}\left(\frac{|(2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})\cdot(4\hat{i} + \hat{j} + 8\hat{k})|}{|2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}||4\hat{i} + \hat{j} + 8\hat{k}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right).$$

ഉദാഹരണം 6.30

$\frac{x-4}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$, $\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-2}{2}$ എന്നീ നേർരേഖകൾക്കിടയിലുള്ള ന്യൂനകോൺ കാണുകയും അവ സമാന്തരമോ അല്ലെങ്കിൽ ലംബമോ എന്നു പ്രസ്താവിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

നേർരേഖകളുടെ പൊതുവായ നിർദ്ദേശാങ്ക സമവാക്യങ്ങൾ തന്നിരിക്കുന്ന സമവാക്യങ്ങളുമായി താരതമ്യം ചെയ്താൽ,

$$\frac{x-x_1}{b_1} \quad \frac{y-y_1}{b_2} = \frac{z-z_1}{b_3} \text{ ഉം } \frac{x-x_2}{d_1} = \frac{y-y_2}{d_2} = \frac{z-z_2}{d_3}$$

നമുക്ക് കാണാൻ കഴിയും $(b_1, b_2, b_3) = (2,1,-2)$ ഉം $(d_1, d_2, d_3) = (4,-4,2)$. അതുകൊണ്ട് രണ്ട് നേർരേഖകൾക്കുമിടയിലുള്ള ന്യൂനകോൺ

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{|(2)(4) + (1)(-4) + (-2)(2)|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}\sqrt{4^2 + (-4)^2 + 2^2}}\right) = \cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$ അങ്ങനെ രണ്ട് നേർരേഖകളും ലംബമാണ്.

ഉദാഹരണം 6.31

$A(6,7,5)$, $B(8,10,6)$ എന്നി ബിന്ദുക്കൾ വഴി കടന്നു പോകുന്ന നേർരേഖ $C(10,2,-5)$, $D(8,3,-4)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ വഴി കടന്നുപോകുന്ന നേർരേഖയ്ക്ക് ലംബമെന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$A(6,7,5)$, $B(8,10,6)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ വഴി കടന്നു പോകുന്ന നേർരേഖ $\vec{b} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ എന്ന സദിശത്തിന് സമാന്തരവും $C(10,2,-5)$, $D(8,3,-4)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ വഴി കടന്നുപോകുന്ന രേഖ $\vec{d} = \overrightarrow{CD} = -2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ എന്ന സദിശത്തിന് സമാന്തരവുമാണ്. അതുകൊണ്ട് രണ്ട് നേർരേഖകൾക്കുമിടയിലുള്ള കോൺ എന്നത് $\vec{b}$, $\vec{d}$ എന്നീ രണ്ട് സദിശങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള കോണിന് തുല്യമാണ്. അതിനാൽ

$$\vec{b}\cdot\vec{d} = (2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k})\cdot(-2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 0.$$

രണ്ട് സദിശങ്ങളും ലംബമാണ്, അതിനാൽ രണ്ട് നേർരേഖകളും ലംബമാണ്.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 248 15-02-2023 16:22:11

മറ്റൊരു രീതി

$A(6,7,5)$, $B(8,10,6)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന നേർരേഖയുടെ ദിശ അനുപാതങ്ങൾ $(b_1,b_2,b_3)=(2,3,1)$ യും $C(10,2,-5)$, $D(8,3,-4)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന നേർരേഖയുടെ ദിശ അനുപാതങ്ങൾ $(d_1,d_2,d_3)=(-2,1,1)$. $b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3=(2)(-2)+(3)(1)+(1)(1)=0$, ആയതിനാൽ രണ്ട് നേർരേഖകളും ലംബമാണ്.

ഉദാഹരണം 6.32

$\frac{x-1}{4}=\frac{2-y}{6}=\frac{z-4}{12}$, $\frac{x-3}{-2}=\frac{y-3}{3}=\frac{5-z}{6}$ എന്നീ നേർരേഖകൾ സമാന്തരമെന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

നമുക്ക് അറിയാം, $\frac{x-1}{4}=\frac{2-y}{6}=\frac{z-4}{12}$ എന്ന നേർരേഖ $4\hat{i}-6\hat{j}+12\hat{k}$ എന്ന സദിശത്തിന് സമാന്തരവും $\frac{x-3}{-2}=\frac{y-3}{3}=\frac{5-z}{6}$ എന്ന നേർരേഖ $-2\hat{i}+3\hat{j}-6\hat{k}$ എന്ന സദിശത്തിന് സമാന്തരവുമാണ്.

$4\hat{i}-6\hat{j}+12\hat{k}=-2(-2\hat{i}+3\hat{j}-6\hat{k})$, ആയതിനാൽ, രണ്ട് സദിശങ്ങൾ സമാന്തരമാണ്, അതിനാൽ രണ്ട് നേർരേഖകൾ സമാന്തരമാണ്.

അഭ്യാസം 6.4

1. $2\hat{i}-6\hat{j}+7\hat{k}$ എന്ന സദിശത്തിന് സമാന്തരവും സ്ഥാനസദിശം $4\hat{i}+3\hat{j}-7\hat{k}$ ഉള്ള ബിന്ദുവഴി കടന്നു പോകുന്ന നേർരേഖയുടെ നിർദ്ദേശാങ്ക സമവാക്യങ്ങളും, സദിശസമവാക്യം നോൺ പാരാമെട്രിക് രൂപത്തിലും കാണുക.
2. $\frac{x-1}{-4}=\frac{y+3}{5}=\frac{8-z}{6}$ എന്ന നേർരേഖയ്ക്ക് സമാന്തരവും $(-2,3,4)$ എന്ന ബിന്ദുവഴി കടന്നുപോകുന്നതുമായ നേർരേഖയുടെ നിർദ്ദേശാങ്ക സമവാക്യങ്ങളും സദിശസമവാക്യം പാരാമെട്രിക് രൂപത്തിലും കാണുക.
3. $(6,7,4)$, $(8,4,9)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ വഴി കടന്നുപോകുന്ന നേർരേഖ xz, yz എന്നീ തലങ്ങളെ സന്ധിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ കാണുക.
4. $(5,6,7)$, $(7,9,13)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ കടന്നുപോകുന്ന നേർരേഖയുടെ ദിശ കൊസൈനുകൾ കാണുക കൂടാതെ തന്നിരിക്കുന്ന രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ വഴി കടന്നുപോകുന്ന നേർരേഖയുടെ നിർദ്ദേശാങ്ക സമവാക്യങ്ങളും സദിശ സമവാക്യം പാരാമെട്രിക് രൂപത്തിലും കാണുക.
5. താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന നേർരേഖകൾക്കിടയിലെ ന്യൂനകോൺ കാണുക..
   (i) $\vec{r}=(4\hat{i}-\hat{j})+t(\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}),\ \vec{r}=(\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k})+s(-\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k})$
   (ii) $\frac{x+4}{3}=\frac{y-7}{4}=\frac{z+5}{5}$, $\vec{r}=4\hat{k}+t(2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$.
   (iii) $2x=3y=-z$ ഉം $6x=-y=-4z$.
6. ΔABC യുടെ ശീർഷങ്ങൾ $A(7,2,1), B(6,0,3)$, $C(4,2,4)$. $\angle ABC$ കാണുക.
7. $(2,1,4)$, $(a-1,4,-1)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന നേർരേഖ $(0,2,b-1)$, $(5,3,-2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചു കിട്ടുന്ന നേർരേഖയ്ക്ക് സമാന്തരമെങ്കിൽ a യുടെയും b യുടെയും മൂല്യം കാണുക.
8. $\frac{x-5}{5m+2}=\frac{2-y}{5}=\frac{1-z}{-1}$, $x=\frac{2y+1}{4m}=\frac{1-z}{-3}$ എന്നീ നേർരേഖകൾ പരസ്പരം ലംബമെങ്കിൽ m ന്റെ മൂല്യം കാണുക.
9. $(2,3,4),(-1,4,5)$, $(8,1,2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ സമരേഖീയമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 249 15-02-2023 16:22:12

6.7.5 രണ്ട് നേർരേഖകളുടെ പ്രതിഛേദബിന്ദു

$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{a_2}=\frac{z-z_1}{a_3}$ ഉം $\frac{x-x_2}{b_1}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{b_3}$ രണ്ട് നേർരേഖകൾ എങ്കിൽ, ആ നേർരേഖയിലെ എല്ലാ ബിന്ദുക്കകളും യഥാക്രമം $(x_1+sa_1, y_1+sa_2, z_1+sa_3)$, $(x_2+tb_1, y_2+tb_2, z_2+tb_3)$ എന്ന രൂപത്തിലായിരിക്കും. നേർരേഖകൾ സന്ധിക്കുകയാണെങ്കിൽ അവിടെ തീർച്ചയായും ഒരു പൊതു ബിന്ദു ഉണ്ടായിരിക്കും. അതുകൊണ്ട് പ്രതിഛേദബിന്ദുവിൽ, ചിലവിലകൾ s നും t യ്ക്കും നമുക്കറിയാം

$$(x_1+sa_1, y_1+sa_2, z_1+sa_3) = (x_2+tb_1, y_2+tb_2, z_2+tb_3)$$

$$\text{അതുകൊണ്ട്,}\quad x_1+sa_1 = x_2+tb_1, y_1+sa_2 = y_2+tb_2, z_1+sa_3 = z_2+tb_3$$

മുകളിലെ മൂന്ന് സമവാക്യങ്ങളിൽ ഏതെങ്കിലും രണ്ടെണ്ണം നിർദ്ധാരണം ചെയ്താൽ, നമുക്ക് s ന്റെയും t യുടെയും വിലകൾ കിട്ടും. s ഉം t യും ബാക്കിയുള്ള സമവാക്യത്തെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തിയാൽ, പ്രതിഛേദ രേഖകൾ ആകും അല്ലെങ്കിൽ നേർരേഖകൾ പ്രതിഛേദിക്കുന്നില്ല s ന്റെ വില ആരോപിച്ചാൽ (അല്ലെങ്കിൽ t യുടെ വില ആരോപിച്ചാൽ) നമുക്ക് നേർരേഖകളുടെയും പ്രതിഛേദബിന്ദു കിട്ടുന്നു.

തന്നിരിക്കുന്ന സമവാക്യങ്ങൾ സദിശ രൂപത്തിലാണെങ്കിൽ അതിനെ നിർദ്ദേശാങ്ക രൂപത്തിലാക്കുകയും പ്രതിഛേദ ബിന്ദു കണ്ടുപിടിക്കാൻ തുടരുകയും ചെയ്യുക.

ഉദാഹരണം 6.33

$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}$, $\frac{x-4}{5}=\frac{y-1}{2}=z$ എന്നീ നേർരേഖകളുടെ പ്രതിഛേദ ബിന്ദു കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}=s$ (എന്ന് പറയുക) യിലെ ഓരോ ബിന്ദുവും $(2s+1, 3s+2, 4s+3)$ എന്ന രൂപത്തിലും $\frac{x-4}{5}=\frac{y-1}{2}=z=t$ (എന്ന് പറയുക) യിലെ ഓരോ ബിന്ദുവും $(5t+4, 2t+1, t)$. എന്ന രൂപത്തിലുമാണ് അതുകൊണ്ട് ചില വിലകൾ s ഉം t യ്ക്കും പ്രതിഛേദബിന്ദുവിൽ നമുക്കറിയാം,

$$(2s+1, 3s+2, 4s+3) = (5t+4, 2t+1, t)$$

അതുകൊണ്ട്, $2s-5t=3, 3s-2t=-1, 4s-t=-3$. ആദ്യത്തെ രണ്ട് സമവാക്യങ്ങൾ നിർദ്ധാരണം ചെയ്താൽ നമുക്ക് $t=-1, s=-1$ എന്ന് കിട്ടുന്നു. s ന്റെയും t യുടെയും ഈ വിലകൾ മൂന്നാമത്തെ സമവാക്യത്തെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്നു. അതുകൊണ്ട് തന്നിരിക്കുന്ന നേർരേഖകൾ പ്രതിഛേദിക്കുന്നു t യുടെയോ അല്ലെങ്കിൽ s ന്റെയോ വിലകൾ ക്രമമായി ആരോപിച്ചാൽ പ്രതിഛേദബിന്ദു $(-1,-1,-1)$ ആകുന്നു.

6.7.6 രണ്ട് നേർരേഖകൾക്കിടയിലെ കുറഞ്ഞ ദൂരം

രണ്ട് നേർരേഖകളുടെ പ്രതിഛേദബിന്ദു കണ്ടുപിടിച്ചത് എങ്ങനെയെന്ന് കുറച്ച് മുമ്പ് നമ്മൾ വിശദീകരിച്ചതേ ഉള്ളൂ. കൂടാതെ തന്നിരിക്കുന്ന രണ്ട് നേർരേഖകൾ സമാന്തരമാണോ അല്ലയോ എന്ന് കണ്ടുപിടിക്കാൻ പഠിച്ചു കഴിഞ്ഞു.

നിർവ്വചനം 6.6

രണ്ട് നേർരേഖകൾ **കോപ്ലാനർ** എന്ന് പറയണമെങ്കിൽ അവ ഒരേ തലത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യണം.

കുറിപ്പ്

രണ്ട് നേർരേഖകൾ പ്രതിഛേദിക്കുന്നതോ, അല്ലെങ്കിൽ സമാന്തരമോ എങ്കിൽ, അവ കോപ്ലനാർ ആണ്.

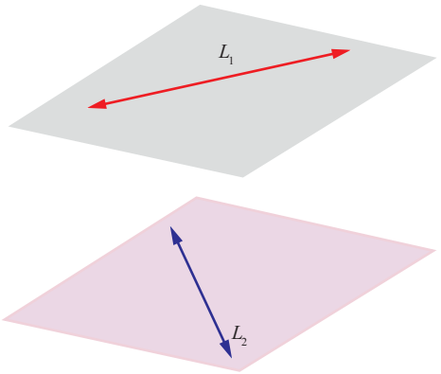
നിർവ്വചനം 6.7

ശൂന്യതയിലെ രണ്ട് നേർരേഖകൾ **ചരിഞ്ഞ രേഖകൾ** ആകണമെങ്കിൽ അവ സമാന്തരമല്ലാത്തതോ പ്രതിഛേദിക്കാത്തതോ ആയിരിക്കണം

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 250 15-02-2023 16:22:14

കുറിപ്പ്

രണ്ട് നേർരേഖകൾ ചരിഞ്ഞ രേഖകൾ എങ്കിൽ അവ നോൺ കോപ്ലനാർ ആയിരിക്കും. രണ്ട് നേർരേഖകൾ പ്രതിഛേദിക്കാത്തതോ സമാന്തരമോ അല്ലെങ്കിൽ അവയ്ക്കിടയിലെ അകലം പൂജ്യമായിരിക്കും. അവ സമാന്തരവും പ്രതിഛേദിക്കാത്തതുമാണെങ്കിൽ രണ്ട് സമാന്തര രേഖകൾക്കും ലംബമായി രേഖാ ഭാഗത്തിന്റെ നീളം അനുസരിച്ച് ദൂരം നിർണ്ണയിക്കപ്പെടുന്നു അതേ രീതിയിൽ, രണ്ട് ചരിഞ്ഞ രേഖകൾക്കിടയിലുള്ള ഏറ്റവും കുറഞ്ഞദൂരം രണ്ട് ചരിഞ്ഞ രേഖകൾക്കും ലംബമായി നേർരേഖാ ഭാഗത്തിന്റെ നീളം എന്ന് നിർവചിക്കപ്പെടുന്നു. രണ്ട് നേർ രേഖകൾ സമാന്തരമോ ചരിഞ്ഞതോ ആയിരിക്കും.



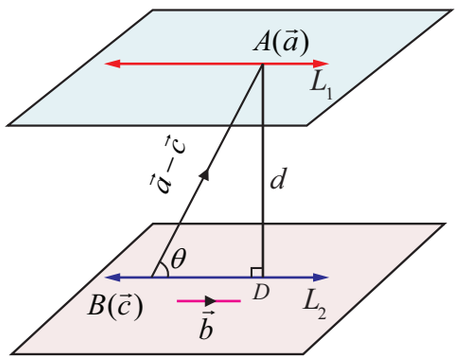
ചിത്രം 6.20

സിദ്ധാന്തം 6.13

$\vec{r} = \vec{a} + s\vec{b}$, $\vec{r} = \vec{c} + t\vec{b}$ എന്നീ രണ്ട് സമാന്തരരേഖകൾക്ക് ഇടയിലുള്ള ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ദൂരം എന്നത് $d = \dfrac{|(\vec{c}-\vec{a})\times\vec{b}|}{|\vec{b}|}$, അവിടെ $|\vec{b}| \neq 0$.

തെളിവ്

$\vec{r} = \vec{a} + s\vec{b}$, $\vec{r} = \vec{c} + t\vec{b}$ എന്നീ രണ്ട് സമാന്തരരേഖകൾ യഥാക്രമം L_1, L_2 എന്ന് സൂചിപ്പിച്ചിട്ടുണ്ട്. സ്ഥാന സദിശങ്ങൾ യഥാക്രമം $\vec{a}$ യും $\vec{b}$ യും ഉള്ള L_1, L_2 ഇവയിലെ രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ A, B എന്നിരിക്കട്ടെ തന്നിരിക്കുന്ന രണ്ട് നേർരേഖകളും $\vec{c}$ യ്ക്ക് സമാന്തരമാണ്.



ചിത്രം 6.21

തന്നിരിക്കുന്ന രണ്ട് നേർരേഖകൾക്ക് ലംബമാണ് AD എന്നിരിക്കട്ടെ. $\overrightarrow{AB}$ യ്ക്കും $\vec{b}$ യ്ക്കും ഇടയിലുള്ള ന്യൂനകോൺ θ എങ്കിൽ എന്നിട്ട്

$$\sin\theta = \frac{|\overrightarrow{AB}\times\vec{b}|}{|\overrightarrow{AB}|\,|\vec{b}|} = \frac{|(\vec{c}-\vec{a})\times\vec{b}|}{|\vec{c}-\vec{a}|\,|\vec{b}|} \qquad \ldots (1)$$

എന്നാൽ സമകോണ ത്രികോണം ABD യിൽ നിന്നും,

$$\sin\theta = \frac{d}{AB} = \frac{d}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{d}{|\vec{c}-\vec{a}|} \qquad \ldots (2)$$

(1), (2)ഇവയിൽ നിന്നും നമുക്കറിയാം $d = \dfrac{|(\vec{c}-\vec{a})\times\vec{b}|}{|\vec{b}|}$, അവിടെ $|\vec{b}| \neq 0$.

സിദ്ധാന്തം 6.14

$\vec{r} = \vec{a} + s\vec{b}$, $\vec{r} = \vec{c} + t\vec{d}$ എന്നീ രണ്ട് ചരിഞ്ഞ രേഖകൾക്കിടയിലെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ദൂരം എന്നത്

$$\delta = \frac{|(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{b}\times\vec{d})|}{|\vec{b}\times\vec{d}|}, \text{ അവിടെ } |\vec{b}\times\vec{d}| \neq 0$$

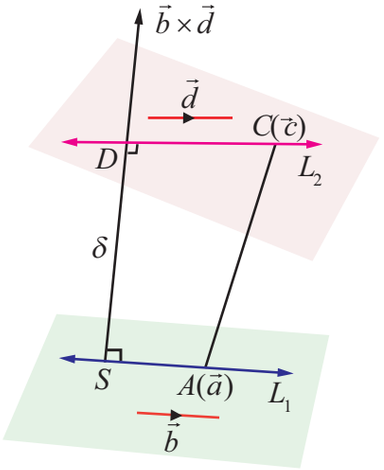
തെളിവ്

$\vec{r} = \vec{a} + s\vec{b}$, $\vec{r} = \vec{c} + t\vec{d}$ എന്നീ രണ്ട് ചരിഞ്ഞ രേഖകളെ യഥാക്രമം L_1, L_2 എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

സ്ഥാന സദിശങ്ങൾ യഥാക്രമം $\vec{a}$ യും $\vec{c}$ യും ഉള്ള L_1, L_2 ലെ ബിന്ദുക്കൾ A യും C യും എന്നിരിക്കട്ടെ.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 251 15-02-2023 16:22:17

ചരിഞ്ഞരേഖയുടെ സമവാക്യത്തിൽ നിന്നും L_1 സദിശം $\vec{b}$ യ്ക്ക് സമാന്തരവും L_2 സദിശം $\vec{d}$ യ്ക്കും സമാന്തരവുമാണ്. അതുകൊണ്ട് $\vec{b}\times\vec{d}$ രേഖകൾ L_1 ഉം L_2 വിനും ലംബമാണ്.



ചിത്രം 6.22

നേർരേഖാ ഭാഗം SD രണ്ട് രേഖകൾ L_1 നും L_2 വിനും ലംബമാണ്. എന്നിട്ട് സദിശം $\overrightarrow{SD}$ സദിശങ്ങൾ $\vec{b}$ യ്ക്കും $\vec{d}$ യ്ക്കും ലംബമായതിനാൽ അത് സദിശം $\vec{b}\times\vec{d}$ യ്ക്ക് സമാന്തരമാണ് .

അതുകൊണ്ട് $\dfrac{\vec{b}\times\vec{d}}{|\vec{b}\times\vec{d}|}$ എന്നത് $\overrightarrow{SD}$ യുടെ ദിശയിലുള്ള യൂണിറ്റ് സദിശമാണ്. എന്നാൽ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ദൂരം $|\overrightarrow{SD}|$ എന്നത് $\overrightarrow{AC}$ യിലേക്ക് $\overrightarrow{SD}$ യുടെ പ്രൊജക്ഷന്റെ കേവല വിലയാണ് അതായത് ,

$$\delta = |\overrightarrow{SD}| = |\overrightarrow{AC}\text{ . (ദിശയിലുള്ള യൂണിറ്റ് സദിശം }\overrightarrow{SD})| = \left|(\vec{c}-\vec{a})\cdot\frac{\vec{b}\times\vec{d}}{|\vec{b}\times\vec{d}|}\right|$$

$$\delta = \frac{|(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{b}\times\vec{d})|}{|\vec{b}\times\vec{d}|}\text{, അവിടെ } |\vec{b}\times\vec{d}| \neq 0\,.$$

കുറിപ്പ്

(i) സിദ്ധാന്തം 6.14 ൽ നിന്ന് മനസ്സിലാക്കാവുന്നത് $\vec{r}=\vec{a}+s\vec{b}$, $\vec{r}=\vec{c}+t\vec{d}$ എന്നീ നേർരേഖകൾ പരസ്പരം പ്രതിഛേദിക്കുകയാണെങ്കിൽ (അതായത് കോപ്ലാനർ) എങ്കിൽ $(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{b}\times\vec{d})=0$.

(2) $\dfrac{x-x_1}{b_1}=\dfrac{y-y_1}{b_2}=\dfrac{z-z_1}{b_3}$, $\dfrac{x-x_2}{d_1}=\dfrac{y-y_2}{d_2}=\dfrac{z-z_2}{d_3}$ എന്നീ രണ്ട് നേർരേഖകൾ പരസ്പരം പ്രതിഛേദിക്കുകയാണെങ്കിൽ (അതായത്, കോപ്ലനാർ) എങ്കിൽ നമുക്കറിയാം

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = 0$$

ഉദാഹരണം 6.34

$\vec{r}=(\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})+t(2\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k})$, $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z+3}{4}$ എന്നീ നേർരേഖകളുടെ പ്രതിഛേദ ബിന്ദുവഴി കടന്നുപോകുന്നതും അവ രണ്ട് നേർരേഖകൾക്കും ലംബവുമായ നേർരേഖയുടെ സദിശ സമവാക്യം പാരാമെട്രിക് രൂപത്തിൽ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

നേർരേഖയുടെ നിർദ്ദേശാങ്ക സമവാക്യങ്ങൾ $\vec{r}=(\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})+t(2\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k})$

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+1}{2}=s \quad (\text{പറയുക})$$

എന്നിട്ട് ഏത് ബിന്ദുവും നേർരേഖയിൽ $(2s+1,\ 3s+3,\ 2s-1)$ ഈ രൂപത്തിലാണ് ... (1)

രണ്ടാമത്തെ നേർരേഖയുടെ നിർദ്ദേശാങ്ക സമവാക്യം $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z+3}{4}=t$ (പറയുക)

എന്നിട്ട് ഏത് ബിന്ദുവും നേർരേഖയിൽ $(t+2,\ 2t+4, 4t-3)$ ഈ രൂപത്തിലാണ് ... (2)

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 252 15-02-2023 16:22:19

തന്നിരിക്കുന്ന നേർരേഖകൾ പ്രതിഛേദിക്കുകയാണെങ്കിൽ തീർച്ചയായും അവിടെ ഒരു പൊതുബിന്ദു ഉണ്ടായിരിക്കും. അതുകൊണ്ട് ചില $s,t \in \mathbb{R}$ നമുക്കറിയാം,

$$(2s+1,\ 3s+3,\ 2s-1) = (t+2,\ 2t+4,\ 4t-3).$$

x, y, z എന്നീ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ താരതമ്യം ചെയ്താൽ നമുക്ക് കിട്ടുന്നു

$$2s-t=1,\ 3s-2t=1,\ s-2t=-1.$$

മുകളിലെ മൂന്ന് സമവാക്യങ്ങളിൽ ആദ്യത്തെ രണ്ടെണ്ണം നിർദ്ധാരണം ചെയ്താൽ നമുക്ക് കിട്ടുന്നു. $s=1$, $t=1$. s ന്റെയും t യുടെയും വിലകൾ മൂന്നാമത്തെ സമവാക്യം തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്നു. അതുകൊണ്ട് നേർരേഖകൾ പ്രതിഛേദിക്കുന്നു.

ഇപ്പോൾ s ന്റെ വില (1) ലോ t യുടെ വില (2) ലോ ഉപയോഗിച്ച് രണ്ട് നേർരേഖകളുടെയും പ്രതിഛേദ ബിന്ദു $(3,6,1)$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

$\vec{b} = 2\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$, $\vec{d} = \hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k}$, $\vec{b}\times\vec{d} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 8\hat{i}-6\hat{j}+\hat{k}$ എന്നത് തന്നിരിക്കുന്ന നേർരേഖകൾക്ക് ലംബമാണ്. അതിനാൽ ആവശ്യപ്പെട്ട നേർരേഖ $(3,6,1)$ വഴി കടന്നു പോകുകയും തന്നിരിക്കുന്ന നേർരേഖകൾക്ക് ലംബമായി $(3,6,1)$ കടന്നു പോകുകയും $8\hat{i}-6\hat{j}+\hat{k}$ യ്ക്ക് സമാന്തരമായി കടന്നു പോകുന്നതിന് തുല്യമാണ്. അങ്ങനെ ആവശ്യപ്പെട്ട നേർരേഖയുടെ സമവാക്യം

$$\vec{r} = (3\hat{i}+6\hat{j}+\hat{k}) + m(8\hat{i}-6\hat{j}+\hat{k}),\ m \in \mathbb{R}.$$

ഉദാഹരണം 6.35

$\vec{r} = (2\hat{i}+6\hat{j}+3\hat{k}) + t(2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k})$, $\vec{r} = (2\hat{j}-3\hat{k}) + s(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})$ എന്നീ നേർരേഖകൾ സമാന്തരമാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക. അവയ്ക്കിടയിലെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ദൂരം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിരിക്കുന്ന സമവാക്യങ്ങൾ

$$\vec{r} = \vec{a}+s\vec{b},\ \vec{r} = \vec{c}+s\vec{d},$$

$\vec{a} = 2\hat{i}+6\hat{j}+3\hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$, $\vec{c} = 2\hat{j}-3\hat{k}$, $\vec{d} = \hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ ഇവയുമായി താരതമ്യം ചെയ്യുമ്പോൾ, നമുക്ക് കിട്ടുന്നത്

വ്യക്തമായി $\vec{b}$ എന്നത് $\vec{d}$ യുടെ ഒരു അദിശ ഗുണനം അല്ല. അതുകൊണ്ട് രണ്ട് സദിശങ്ങളും സമാന്തരമല്ല.

അങ്ങനെ രണ്ട് നേർരേഖകളും സമാന്തരമല്ല രണ്ട് നേർരേഖകൾക്കുമിടയിലെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ദൂരം

$$\delta = \frac{|(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{b}\times\vec{d})|}{|\vec{b}\times\vec{d}|}$$

ഇപ്പോൾ, $\vec{b}\times\vec{d} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$

അതുകൊണ്ട്, $(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{b}\times\vec{d}) = (-2\hat{i}-4\hat{j}-6\hat{k})\cdot(\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}) = 0$.

അതുകൊണ്ട് തന്നിരിക്കുന്ന രണ്ട് നേർരേഖകൾക്കിടയിലുള്ള ദൂരം പൂജ്യം ആകുന്നു. അങ്ങനെ തന്നിരിക്കുന്ന നേർരേഖകൾ പരസ്പരം പ്രതിഛേദിക്കുന്നു.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 253 15-02-2023 16:22:21

ഉദാഹരണം 6.36

തന്നിരിക്കുന്ന രണ്ട് നേർരേഖകൾ $\vec{r} = (2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) + t(-2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k})$ യ്ക്കും $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{2}$ നും ഇടയിലുള്ള ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ദൂരം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിരിക്കുന്ന നേർരേഖകളുടെ സദിശ സമവാക്യങ്ങൾ പാരാമെട്രിക് രൂപത്തിൽ

$$\vec{r} = (2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) + t(-2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}) \text{ ഉം}$$

$$\vec{r} = (3\hat{i} - 2\hat{k}) + t(2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})$$

ഇവയുമായി തന്നിരിക്കുന്ന രണ്ട് സമവാക്യങ്ങൾ താരതമ്യം ചെയ്താൽ നമുക്ക് കിട്ടുന്നു $\vec{r} = \vec{a} + t\vec{b}$, $\vec{r} = \vec{c} + s\vec{d}$

$$\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k},\ \vec{b} = -2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k},\ \vec{c} = 3\hat{i} - 2\hat{k},\ \vec{d} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}.$$

വ്യക്തമായി $\vec{b}$ എന്നത് $\vec{d}$ യുടെ ഒരു അദിശ ഗുണനമാണ്, ആയതിനാൽ രണ്ട് നേർരേഖകളും സമാന്തരമാണ് നമുക്കറിയാം, രണ്ട് സമാന്തര നേർരേഖകൾക്കിടയിലെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ദൂരം $d = \frac{|(\vec{c} - \vec{a}) \times \vec{b}|}{|\vec{b}|}$.

$$\text{ഇപ്പോൾ, } (\vec{c} - \vec{a}) \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -3 & -6 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 12\hat{i} + 14\hat{j} - 5\hat{k}$$

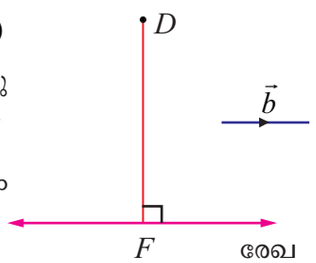
$$\text{അതുകൊണ്ട്, } d = \frac{|12\hat{i} + 14\hat{j} - 5\hat{k}|}{|-2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}|} = \frac{\sqrt{365}}{3}.$$

ഉദാഹരണം 6.37

$(-1, 2, 3)$ ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് $\vec{r} = (\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}) + t(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k})$ എന്ന നേർരേഖയിലേക്ക് വരയ്ക്കുന്ന ലംബത്തിന്റെ പാദത്തിന്റെ നിർദ്ദേശാങ്കം കാണുക. കൂടാതെ തന്നിരിക്കുന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് നേർരേഖയിലേക്കുള്ള ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ദൂരം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിരിക്കുന്ന സമവാക്യം $\vec{r} = (\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}) + t(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k})$, $\vec{r} = \vec{a} + t\vec{b}$ മായി താരതമ്യം ചെയ്താൽ $\vec{a} = \hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ നമുക്ക് കിട്ടുന്നു. തന്നിരിക്കുന്ന ബിന്ദു $(-1, 2, 3)$ നെ D എന്നും നേർരേഖയിൽ ഉള്ള ബിന്ദു $(1, -4, 3)$ നെ F എന്നും സൂചിപ്പിക്കുന്നു F എന്നത് D യിലിരുന്ന് നേർരേഖയിലേക്ക് വരച്ച ലംബത്തിന്റെ പാദമെങ്കിൽ F എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ രൂപം $(2t+1,\ 3t-4, t+3)$ ഉം $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OD} = (2t+2)\hat{i} + (3t-6)\hat{j} + t\hat{k}$.



ചിത്രം 6.23

$\vec{b}$ എന്നത് $\overrightarrow{DF}$ ലേക്കുള്ള ലംബമായതിനാൽ, നമുക്കറിയാം

$$\vec{b} \cdot \overrightarrow{DF} = 0 \Rightarrow 2(2t+2) + 3(3t-6) + 1(t) = 0 \Rightarrow t = 1$$

അതുകൊണ്ട് F ന്റെ നിർദ്ദേശാങ്കം $(3, -1, 4)$

ആകുന്നു. ഇപ്പോൾ കൊടുക്കപ്പെട്ട ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് കൊടുക്കപ്പെട്ട നേർരേഖയിലേക്കുള്ള ലംബദൂരം

$$DF = |\overrightarrow{DF}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{26} \text{ മാത്രകൾ.}$$

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 254 15-02-2023 16:22:22

അഭ്യാസം 6.5

1. $(5,2,8)$ എന്ന ബിന്ദുവഴി കടന്നുപോകുന്നതും $\vec{r}=(\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})+s(2\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k})$,

   $\vec{r}=(2\hat{i}-\hat{j}-3\hat{k})+t(\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k})$ എന്നീ നേർരേഖകൾക്ക് ലംബവുമായ നേർരേഖയുടെ നിർദ്ദേശാങ്ക സമവാക്യങ്ങളും സദിശ സമവാക്യം പാരാമെട്രിക് രൂപത്തിലും കാണുക.

2. $\vec{r}=(6\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k})+s(\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})$, $\vec{r}=(3\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k})+t(2\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k})$ എന്നീ നേർരേഖകൾ ചരിഞ്ഞ രേഖകൾ എന്ന് തെളിയിക്കുകയും കൂടാതെ അവയ്ക്കിടയിലെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ദൂരവും കാണുക.

3. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{4}$, $\frac{x-3}{1}=\frac{y-m}{2}=z$ എന്നീ നേർരേഖകൾ ഒരു ബിന്ദുവിൽ പ്രതിഛേദിക്കുന്നു എങ്കിൽ m ന്റെ വില കാണുക.

4. $\frac{x-3}{3}=\frac{y-3}{-1}, z-1=0$, $\frac{x-6}{2}=\frac{z-1}{3}, y-2=0$ എന്നീ നേർരേഖകൾ പ്രതിഛേദിക്കുന്നു എന്ന് തെളിയിക്കുക. കൂടാതെ പ്രതിഛേദബിന്ദുവും കാണുക.

5. $x+1=2y=-12z$, $x=y+2=6z-6$ എന്നീ നേർരേഖകൾ ചരിഞ്ഞരേഖ എന്ന് തെളിയിക്കുകയും അവ തമ്മിലുള്ള ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ദൂരവും കാണുക.

6. $(-1,2,1)$ എന്ന ബിന്ദുവഴി കടന്നു പോകുന്നതും $\vec{r}=(2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})+t(\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k})$ എന്ന നേർരേഖയ്ക്ക് സമാന്തരവുമായ നേർരേഖയുടെ സദിശ സമവാക്യം പാരാമെട്രിക് രൂപത്തിൽ കാണുകയും ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ദൂരവും കാണുക.

7. $(5,4,2)$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-1}{-1}$ എന്ന നേർരേഖയിലേക്ക് വരയ്ക്കുന്ന ലംബത്തിന്റെ പാദം കാണുക. കൂടാതെ ലംബത്തിന്റെ സമവാക്യവും കാണുക.

6.8 തലത്തിന്റെ സമവാക്യം വിവിധ രൂപത്തിൽ

ഒരു തലം എന്ന ആശയം നാം ഇതിനകം കണ്ടു കഴിഞ്ഞു.

നിർവ്വചനം 6.8

ഒരു തലത്തിന് ലംബമായിരിക്കുന്ന സദിശത്തെ ആ തലത്തിന് **നോർമൽ** എന്ന് വിളിക്കും.

കുറിപ്പ്

ഒരു തലത്തിലെ ഓരോ നോർമലും തലത്തിൽ കിടക്കുന്ന ഓരോ നേർരേഖയ്ക്കും ലംബമാണ്.

ഇനിപ്പറയുന്നവയിൽ ഏതെങ്കിലും ഒന്ന് നൽകിയിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ ഒരു തലം അദ്വിതീയമായി സ്ഥിരമായിരിക്കുന്നു:

- ഒരു തലത്തിന് യൂണിറ്റ് നോർമലും മൂലബിന്ദുവിൽ നിന്ന് തലത്തിന്റെ ദൂരവും
- ഒരു തലത്തിന്റെ ദൂരവും തലത്തിന് ഒരു നോർമലും
- ഒരു തലത്തിന്റെ മൂന്ന് സമരേഖീയമല്ലാത്ത ബിന്ദുക്കൾ
- ഒരു തലത്തിന്റെ ഒരു ബിന്ദുവും സമാന്തരമല്ലാത്ത രണ്ട് നേർരേഖകൾ, അല്ലെങ്കിൽ സമാന്തരമല്ലാത്ത സദിശങ്ങൾ അവ ഒരു തലത്തിന് സമാന്തരവുമാണ്
- ഒരു തലത്തിലെ രണ്ട് വ്യത്യസ്ത ബിന്ദുക്കൾ ഒരു നേർരേഖ അല്ലെങ്കിൽ പൂജ്യമല്ലാത്ത സദിശം തലത്തിന് സമാന്തരമായി, എന്നാൽ രണ്ട് ബിന്ദുക്കളിൽ ചേരുന്ന നേർരേഖയ്ക്ക് സമാന്തരമല്ല.

മുകളിലുള്ള സാഹചര്യങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് തലങ്ങളുടെ സദിശ, നിർദ്ദേശാങ്ക സമവാക്യങ്ങൾ നമുക്ക് കണ്ടെത്താം.

6.8.1 തലത്തിൽ ഒരു നോർമലും മൂലബിന്ദുവിൽ നിന്ന് തലത്തിലേക്ക് ഉള്ള ദൂരവും തന്നിരുന്നാൽ തലത്തിന്റെ സമവാക്യം

(a) നോർമൽ രൂപത്തിൽ ഒരു തലത്തിന്റെ സദിശ സമവാക്യം

സിദ്ധാന്തം 6.15

മൂലബിന്ദുവിൽ നിന്ന് പ്രതലത്തിലേക്കുള്ള ദൂരം p യും തലത്തിലേക്ക് നോർമൽ ആയ യൂണിറ്റ് സദിശം $\hat{d}$ എങ്കിൽ പ്രതലത്തിന്റെ സമവാക്യം $\vec{r}\cdot\hat{d}=p$.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 255 15-02-2023 16:22:24

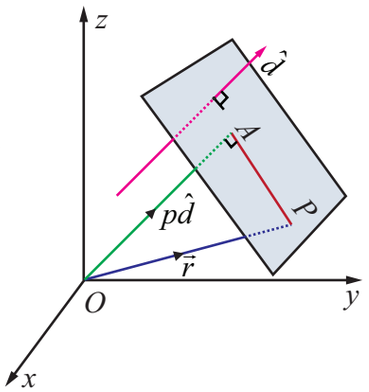
തെളിവ്

മൂലബിന്ദുവിൽ നിന്ന് തലത്തിലേക്കുള്ള ലംബദൂരം p എന്ന് കരുതുക.

മൂലബിന്ദു O യിൽ നിന്ന് തലത്തിലേക്ക് വരയ്ക്കുന്ന ലംബത്തിന്റെ പാദം A എന്നിരിക്കട്ടെ.

$\overrightarrow{OA}$ യുടെ ദിശയിലുള്ള യൂണിറ്റ് നോർമൽ സദിശം $\hat{d}$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

എന്നാൽ $\overrightarrow{OA} = p\hat{d}$.



ചിത്രം 6.24

$\vec{r}$ എന്നത് പ്രതലത്തിലുള്ള അനിയന്ത്രിതമായ ഒരു ബിന്ദു P യുടെ സ്ഥാന സദിശം എങ്കിൽ $\overrightarrow{AP}$ എന്നത് $\overrightarrow{OA}$ യ്ക്ക് ലംബമാകും .

അതുകൊണ്ട് , $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{OA} = 0 \Rightarrow (\vec{r} - p\hat{d})\cdot p\hat{d} = 0$

$\Rightarrow (\vec{r} - p\hat{d})\cdot \hat{d} = 0$

ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്നു $\vec{r}\cdot\hat{d} = p$ . ... (1)

മുകളിലത്തെ ഈ സമവാക്യത്തെ ഒരു തലത്തിന്റെ നോർമൽ രൂപത്തിൽ ഒരു തലത്തിന്റെ സദിശ സമവാക്യം എന്ന് പറയാം.

(b) നോർമൽ രൂപത്തിലുള്ള ഒരു തലത്തിന്റെ നിർദ്ദേശാങ്ക സമവാക്യം

$\hat{d}$ യുടെ ദിശകൊസൈനുകൾ l, m, n എന്നിരിക്കട്ടെ. അപ്പോൾ നമുക്കറിയാം $\hat{d} = l\hat{i} + m\hat{j} + n\hat{k}$.

അങ്ങനെ സമവാക്യം (1) ആയി തീരുന്നു

$$\vec{r}\cdot(l\hat{i} + m\hat{j} + n\hat{k}) = p$$

$P(x,y,z)$, എങ്കിൽ $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

അതുകൊണ്ട്, $(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})\cdot(l\hat{i} + m\hat{j} + n\hat{k}) = p$ അല്ലെങ്കിൽ $lx + my + nz = p$ ... (2)

സമവാക്യം (2) നെ നോർമൽ രൂപത്തിൽ ഒരു തലത്തിന്റെ **നിർദ്ദേശാങ്ക സമവാക്യം** എന്ന് പറയാം.

കുറിപ്പ്

(i) ഒരു തലം മൂലബിന്ദുവിൽ കൂടി കടക്കുകയാണെങ്കിൽ $p = 0$ അതുകൊണ്ട് തലത്തിന്റെ സമവാക്യം $lx + my + nz = 0.$ ആകുന്നു

(ii) $\vec{d}$ എന്നത് തലത്തിന്റെ നോർമൽ സദിശമെങ്കിൽ, $\hat{d}$ $\dfrac{\vec{d}}{|\vec{d}|}$ എന്നത് തലത്തിന്റെ യൂണിറ്റ് നോർമൽ.

അതുകൊണ്ട് തലത്തിന്റെ സദിശ സമവാക്യം $\vec{r}\cdot\dfrac{\vec{d}}{|\vec{d}|} = p$ അല്ലെങ്കിൽ $\vec{r}\cdot\vec{d} = q$ അവിടെ $q = p|\vec{d}|$

സമവാക്യം $\vec{r}\cdot\vec{d} = q$ എന്നത് സ്റ്റാൻഡേർഡ് രൂപത്തിലുള്ള തലത്തിന്റെ സദിശ സമവാക്യമാണ്.

കുറിപ്പ്

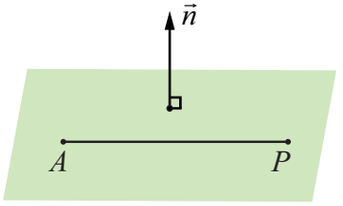
സ്റ്റാൻഡേർഡ് രൂപത്തിൽ $\vec{r}\cdot\vec{d} = q$, $\vec{d}$ ഒരു യൂണിറ്റ് നോർമൽ ആകേണ്ടതില്ല, q ലംബദൂരം ആകേണ്ടതില്ല.

6.8.2 ഒരു സദിശത്തിന് ലംബമായി ഒരു നിശ്ചിത ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നു പോകുന്ന ഒരു തലത്തിന്റെ സമവാക്യം

(a) സമവാക്യത്തിന്റെ സദിശ രൂപം

$\vec{a}$ എന്ന സ്ഥാനസദിശത്തോട് കൂടിയ A എന്ന ബിന്ദുവഴി കടന്നുപോകുന്ന ഒരു തലം പരിഗണിക്കുക, $\vec{n}$ എന്നത് തന്നിരിക്കുന്ന തലത്തിന്റെ നോർമൽ സദിശം ആണ്.

$\vec{r}$ എന്നത് തലത്തിലെ അനിയന്ത്രിതമായ ഒരു ബിന്ദു P യുടെ സ്ഥാന സദിശമെന്നിരിക്കട്ടെ.



ചിത്രം 6.25

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 256 15-02-2023 16:22:26

എന്നിട്ട് $\overrightarrow{AP}$, $\vec{n}$ ലംബമാണ്.

അതുകൊണ്ട് $\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}=0$ അത് നൽകുന്നത് $(\vec{r}-\vec{a})\cdot\vec{n}=0$ . ... (1)

ഇത് $\vec{n}$ ന് ലംബവും $\vec{a}$ സ്ഥാനസദിശവുമുള്ള ഒരു ബിന്ദു വഴി കടന്നുപോകുന്ന തലത്തിന്റെ സമവാക്യത്തിന്റെ സദിശ രൂപമാണ് .

കുറിപ്പ്

$$(\vec{r}-\vec{a})\cdot\vec{n}=0 \Rightarrow \vec{r}\cdot\vec{n}=\vec{a}\cdot\vec{n} \Rightarrow \vec{r}\cdot\vec{n}=q \text{ , അവിടെ } q=\vec{a}\cdot\vec{n}\,.$$

(b) സമവാക്യത്തിന്റെ നിർദ്ദേശാങ്ക രൂപം

$\vec{n}$ ന്റെ ദിശ അനുപാതങ്ങള a,b,c എങ്കിൽ നമുക്കറിയാം $\vec{n}=a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k}$ A എന്നത് (x_1,y_1,z_1) എന്ന് സങ്കല്പിക്കുക എന്നിട്ട് സമവാക്യം (1) ആയിത്തീരുന്നു. അതായത്

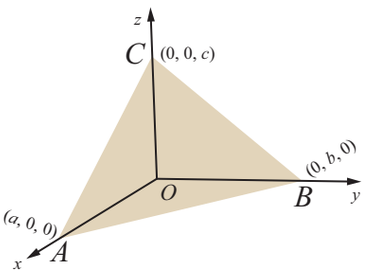
$((x-x_1)\hat{i}+(y-y_1)\hat{j}+(z-z_1)\hat{k})\cdot(a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k})=0$. ,

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1) = 0$$

ഇത് (x_1,y_1,z_1) എന്ന ബിന്ദുവഴി കടന്നുപോകുന്നതും ദിശ അനുപാതങ്ങൾ a,b,c എന്നിവ ഉള്ളതും സദിശത്തിന് നോർമലും ആയ തലത്തിന്റെ നിർദ്ദേശാങ്ക സമവാക്യം ആണ്.

6.8.3 ഒരു തലത്തിന്റെ സമവാക്യം അന്തഃഖണ്ഡരൂപത്തിൽ

യഥാക്രമം A,B,C എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ നിർദ്ദേശാങ്ക അക്ഷങ്ങളിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന തലം $\vec{r}\cdot\vec{n}=q$ എന്നിരിക്കട്ടെ, അങ്ങനെ അക്ഷങ്ങളിലെ അന്തഃഖണ്ഡങ്ങൾ $OA=a,\ OB=b,\ OC=c$ ഇപ്പോൾ A യുടെ സ്ഥാന സദിശം $a\hat{i}$. A തന്നിരിക്കുന്ന തലത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നതിനാൽ നമുക്കറിയാം $a\hat{i}\cdot\vec{n}=q$ അതിലൂടെ നമുക്ക് കിട്ടുന്നു $\hat{i}\cdot\vec{n}=\frac{q}{a}$ അതുപോലെ $b\hat{j}$, $c\hat{k}$ എന്നീ സദിശങ്ങൾ തന്നിരിക്കുന്ന തലത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നതിനാൽ $\hat{j}\cdot\vec{n}=\frac{q}{b}$, $\hat{k}\cdot\vec{n}=\frac{q}{c}$ ഉം $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$, $\vec{r}\cdot\vec{n}=q$ എന്ന് $x\hat{i}\cdot\vec{n}+y\hat{j}\cdot\vec{n}+z\hat{k}\cdot\vec{n}=q$ ൽ ആരോപിച്ചാൽ നമുക്ക് കിട്ടുന്നു $x\left(\frac{q}{a}\right)+y\left(\frac{q}{b}\right)+z\left(\frac{q}{c}\right)=q$ ..



ചിത്രം 6.26

qകൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ, നമുക്ക് കിട്ടുന്നു $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. ഇതിനെ x,y,z അക്ഷങ്ങളിൽ യഥാക്രമം a,b,c എന്നീ അന്തഃഖണ്ഡങ്ങളോട് കൂടിയ ഒരു തലത്തിന്റെ അന്തഃഖണ്ഡ രൂപത്തിലെ സമവാക്യം എന്ന് പറയാം.

സിദ്ധാന്തം 6.16

x,y,z ൽ ഉള്ള $ax+by+cz+d=0$ എന്ന ഏകഘാത സമവാക്യം ഒരു തലത്തെ പ്രതിനിധീകരിക്കും.

തെളിവ്

$ax+by+cz+d=0$ എന്ന സമവാക്യത്തെ സദിശ രൂപത്തിൽ താഴെ കാണും വിധം എഴുതാൻ കഴിയും

$(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})\cdot(a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k})=-d$ അല്ലെങ്കിൽ $\vec{r}\cdot\vec{n}=-d$.

സ്റ്റാൻഡേർഡ് രൂപത്തിൽ ഉള്ള ഒരു സമവാക്യത്തിന്റെ സദിശ രൂപമായതിനാൽ നൽകിയ സമവാക്യം $ax+by+cz+d=0$ ഒരു തലത്തെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു ഇവിടെ $\vec{n}=a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k}$ എന്നത് തലത്തിന് നോർമൽ സദിശമാണ്.

കുറിപ്പ്

ഒരു തലത്തിന്റെ പൊതുസമവാക്യം $ax+by+cz+d=0$ ൽ, a,b,c എന്നിവ തലത്തിന്റെ നോർമൽ ദിശ അനുപാതങ്ങളാണ്.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 257 15-02-2023 16:22:30

ഉദാഹരണം 6.38

മൂലബിന്ദുവിൽ നിന്ന് 12 മാത്രകൾ ദൂരത്തിലുള്ള $6\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ എന്ന സദിശത്തിന് ലംബമായുള്ള തലത്തിന്റെ സദിശ, നിർദ്ദേശാങ്ക സമവാക്യങ്ങൾ കാണുക .

നിർദ്ധാരണം

$\vec{d}=6\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ എന്നും $p=12$ എന്നുമിരിക്കട്ടെ.

$6\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ എന്ന സദിശത്തിന്റെ ദിശയിലുള്ള യൂണിറ്റ് സദിശം $\hat{d}$ എങ്കിൽ,

$$\hat{d}=\frac{\vec{d}}{|\vec{d}|}=\frac{1}{7}(6\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}).$$

$\vec{r}$ എന്നത് പ്രതലത്തിലുള്ള അനിയന്ത്രിതമായ ഒരു ബിന്ദു (x,y,z) ന്റെ സ്ഥാന സദിശമെങ്കിൽ തലത്തിന്റെ നോർമൽ രൂപത്തിലുള്ള സദിശ സമവാക്യം $\vec{r}\cdot\hat{d}=p$, ഉപയോഗിച്ച് നമുക്ക് കിട്ടുന്നത് $\vec{r}\cdot\frac{1}{7}(6\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})=12$.

$\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ എന്നത് മുകളിലെ സമവാക്യത്തിൽ ആരോപിച്ചാൽ, നമുക്ക് കിട്ടുന്നു. $(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})\cdot\frac{1}{7}(6\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})=12$. മുകളിലെ സമവാക്യത്തിൽ ഡോട്ട് ഗുണനം പ്രയോഗിക്കുകയും ലഘൂകരിക്കുകയും ചെയ്താൽ നമുക്ക് കിട്ടുന്നു $6x+2y-3z=84$, അത് ആവശ്യപ്പെട്ടതലത്തിന്റെ നിർദ്ദേശാങ്ക സമവാക്യമാണ്.

ഉദാഹരണം 6.39

ഒരു തലത്തിന്റെ നിർദ്ദേശാങ്ക സമവാക്യം $3x-4y+3z=-8$, എങ്കിൽ തലത്തിന്റെ സദിശ സമവാക്യം സ്റ്റാൻഡേർഡ് രൂപത്തിൽ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ എന്നത് തലത്തിൽ ഉള്ള ഒരു അനിയന്ത്രിത ബിന്ദു (x,y,z) ൽ സ്ഥാന സദിശം എങ്കിൽ തന്നിരിക്കുന്ന സമവാക്യം $(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})\cdot(3\hat{i}-4\hat{j}+3\hat{k})=-8$ അല്ലെങ്കിൽ $(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})\cdot(-3\hat{i}+4\hat{j}-3\hat{k})=8$ അതായത്, $\vec{r}\cdot(-3\hat{i}+4\hat{j}-3\hat{k})=8$ എന്നത് കൊടുക്കപ്പെട്ട തലത്തിന്റെ സ്റ്റാൻഡേർഡ് രൂപത്തിൽ സദിശ സമവാക്യമാണ്.

ഉദാഹരണം 6.40

$\vec{r}\cdot(3\hat{i}-4\hat{j}+12\hat{k})=5$ എന്ന തലത്തിൽ നോർമലിന്റെ ദിശ കൊസൈനുകൾ മറ്റും മൂലബിന്ദുവിൽ നിന്നും തലത്തിലേക്ക് ഉള്ള നോർമലിൻ നീളം എന്നിവയെയും കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$\vec{d}=3\hat{i}-4\hat{j}+12\hat{k}$, $q=5$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

$3\hat{i}-4\hat{j}+12\hat{k}$ യിൽ ദിശയിലുള്ള യൂണിറ്റ് സദിശം, $\hat{d}$ എങ്കിൽ $\hat{d}=\frac{1}{13}(3\hat{i}-4\hat{j}+12\hat{k})$ ആകും.

കൊടുക്കപ്പെട്ട സമവാക്യത്തെ 13 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ

$$\vec{r}\cdot\left(\frac{3}{13}\hat{i}-\frac{4}{13}\hat{j}+\frac{12}{13}\hat{k}\right)=\frac{5}{13}$$

ഇത് $\vec{r}\cdot\hat{d}=p$ എന്ന തലത്തിലെ നോർമൽ രൂപത്തിൽ ഉള്ള സമവാക്യം.

ഈ സമവാക്യത്തിൽ നിന്ന് $\hat{d}=\frac{1}{13}(3\hat{i}-4\hat{j}+12\hat{k})$ എന്നത് മൂലബിന്ദുവിൽ നിന്ന് തലത്തിലേക്ക് ഉള്ള യൂണിറ്റ് നോർമൽ സദിശമാണെന്ന് നമുക്ക് അറിയാം. അതതുകൊണ്ട് $\hat{d}$ യുടെ ദിശ കൊസൈനുകൾ $\frac{3}{13},\frac{-4}{13},\frac{12}{13}$ ഉം മൂലബിന്ദുവിൽ നിന്ന് തലത്തിലേക്ക് ഉള്ള ലംബത്തിന്റെ നീളം $\frac{5}{13}$ ആണ്.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 258 15-02-2023 16:22:31

ഉദാഹരണം 6.41

$4\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ എന്നത് സ്ഥാന സദിശമായുള്ള ബിന്ദുവഴി കടന്നു പോകുന്നതും $2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ എന്ന സദിശത്തിന് ലംബമായ തലത്തിന്റെ സദിശം കൂടാതെ നിർദ്ദേശാങ്ക സമവാക്യങ്ങളും കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

കൊടുക്കപ്പെട്ട ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാന സദിശം $\vec{a}=4\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ ഉം $\vec{n}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$, എങ്കിൽ കൊടുക്കപ്പെട്ട ബിന്ദു വഴി കടന്നുപോകുന്നതും തലത്തിന് ലംബവുമായ തലത്തിന്റെ സദിശ സമവാക്യം $(\vec{r}-\vec{a})\cdot\vec{n}=0$ അല്ലെങ്കിൽ $\vec{r}\cdot\vec{n}=\vec{a}\cdot\vec{n}$.

മുകളിലെ സമവാക്യത്തിൽ $\vec{a}=4\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$, $\vec{n}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ എന്നും

$\vec{r}\cdot(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}) = (4\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})\cdot(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})$ എന്നും ആരോപിച്ചാൽ നമുക്ക് കിട്ടുന്നു

അങ്ങനെ കൊടുക്കപ്പെട്ട തലത്തിന്റെ സദിശ സമവാക്യം $\vec{r}\cdot(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})=3$ ആണ്. $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ എങ്കിൽ നമുക്ക് തലത്തിന്റെ നിർദ്ദേശാങ്ക സമവാക്യം $2x-y+z=3$ എന്ന് നമുക്ക് കിട്ടുന്നു.

ഉദാഹരണം 6.42

ഒരു വ്യത്യസ്തമാകുന്ന തലം ചലിക്കുന്ന വിധത്തിൽ നീങ്ങുന്നു. നിർദ്ദേശാങ്ക അക്ഷങ്ങളിൽ അതിന്റെ അന്തഃഖണ്ഡങ്ങളുടെ വ്യുൽക്രമത്തിന്റെ ആകെത്തുക സ്ഥിരമായിരിക്കും തലം ഒരു നിശ്ചിത ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നു എന്ന് തെളിയിക്കുക

നിർദ്ധാരണം

x,y,z അക്ഷങ്ങളിൽ യഥാക്രമം a,b,c എന്ന അന്തഃഖണ്ഡങ്ങൾ ഉള്ള ഒരു തലത്തിന്റെ സമവാക്യം $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ നിർദ്ദേശാങ്ക അക്ഷങ്ങളിൽ അന്തഃഖണ്ഡങ്ങളുടെ വ്യുൽക്രമങ്ങളുടെ തുക ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യ ആയതിനാൽ നമുക്കറിയാം $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=k$, k ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യയും ഇതിനെ $\frac{1}{a}\left(\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{b}\left(\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{c}\left(\frac{1}{k}\right)=1$ എന്ന് എഴുതാം.

ഈ സമവാക്യം $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ ഉള്ള തലം $\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right)$ എന്ന നിശ്ചിത ബിന്ദുവഴി കടന്നു പോകുന്നു. ■

അഭ്യാസം 6.6

1. മൂലബിന്ദുവിൽ നിന്ന് 7 മാത്രകൾ അകലെയുള്ളതും നോർമലിന്റെ ദിശ അനുപാതങ്ങൾ $3,-4,5$ ഉള്ളതുമായ തലത്തിന്റെ സദിശ സമവാക്യം കാണുക.
2. $12x+3y-4z=65$. എന്ന തലം വരെയുള്ള നോർമലിന്റെ ദിശ കൊസൈനുകൾ കാണുക. കൂടാതെ ഒരു തലത്തിന്റെ സദിശ സമവാക്യത്തിന്റെ നോൺ പാരാമെട്രിക് രൂപവും, മൂല ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് തലത്തിലേക്ക് വരയ്ക്കപ്പെടുന്ന ലംബത്തിന്റെ ദൂരവും കാണുക.
3. $2\hat{i}+6\hat{j}+3\hat{k}$ എന്ന സ്ഥാന സദിശമുള്ള ബിന്ദുവഴി കടന്നുപോകുന്നതും $\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k}$ എന്ന സദിശത്തിന് ലംബവുമായ തലത്തിന്റെ സദിശ, നിർദ്ദേശാങ്ക സമവാക്യങ്ങൾ കാണുക.
4. $(-1,1,2)$ എന്ന ബിന്ദുവഴി കടന്നുപോകുന്നതും $3\sqrt{3}$ അളവും ഉള്ള തലം വരെയുള്ള നോർമൽ, നിർ ദ്ദേശാങ്ക അക്ഷങ്ങളുമായി ന്യൂനകോണുകൾ ഉണ്ടാകുന്നു. തലത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക.
5. നിർദ്ദേശാങ്ക അക്ഷങ്ങളിൽ $\vec{r}\cdot(6\hat{i}+4\hat{j}-3\hat{k})=12$ എന്ന തലം മുറിച്ചു കടക്കുന്ന അന്തഃഖണ്ഡങ്ങൾ കാണുക.
6. ഒരു തലം A,B,C എന്നിവിടങ്ങളിലെ നിർശോങ്ക അക്ഷങ്ങളുമായി സന്ധിക്കും വഴി ഉണ്ടാകുന്ന ത്രികോണം ABC യുടെ കേന്ദ്രകം (u,v,w), എങ്കിൽ തലത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 259 15-02-2023 16:22:32

6.8.4 സമരേഖീയമല്ലാത്ത തന്നിട്ടുള്ള മൂന്ന് ബിന്ദുക്കൾ വഴി കടന്നു പോകുന്ന തലത്തിന്റെ സമവാക്യം

(a) സദിശ സമവാക്യം പാരാമെട്രിക് രൂപത്തിൽ

സിദ്ധാന്തം 6.17

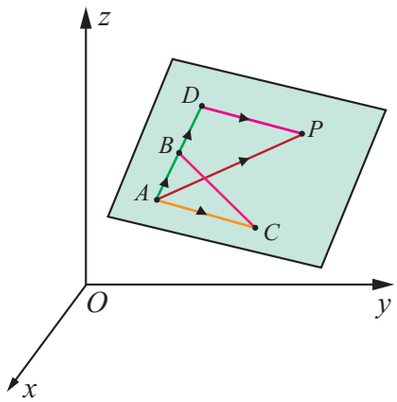
$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ എന്നത് കൊടുക്കപ്പെട്ട മൂന്ന് സമരേഖീയമല്ലാത്ത മൂന്ന് ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാന സദിശങ്ങൾ എങ്കിൽ, ഈ മൂന്ന് ബിന്ദുക്കൾ വഴി കടന്നു പോകുന്ന തലത്തിന്റെ സദിശ സമവാക്യം പാരാമെട്രിക് രൂപത്തിൽ

$$\vec{r}=\vec{a}+s(\vec{b}-\vec{a})+t(\vec{c}-\vec{a}),$$ ഇവിടെ $\vec{b}\neq\vec{0}$, $\vec{c}\neq\vec{0}$ കൂടാതെ $s, t\in\mathbb{R}$.

തെളിവ്

സമരേഖീയമല്ലാത്ത യഥാക്രമം $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ എന്ന സ്ഥാന സദിശമുള്ള സമരേഖീയമല്ലാത്ത മൂന്ന് ബിന്ദുക്കൾ A, B, C വഴി കടന്നു പോകുന്നു എന്ന് പരിഗണിക്കുക. അതിൽ കുറഞ്ഞത് രണ്ടെണ്ണം എങ്കിലും പൂജ്യമല്ലാത്ത സദിശങ്ങളാണ്. $\vec{b}\neq\vec{0}$, $\vec{c}\neq\vec{0}$ എന്ന് എടുക്കുക. $\vec{r}$ എന്നത് തലത്തിലെ അനിയന്ത്രിതമായ ബിന്ദു P യുടെ സ്ഥാനസദിശം എന്നിരിക്കട്ടെ. AB യിൽ ഒരു ബിന്ദു D എടുക്കുക. (നീട്ടിയത്) അങ്ങനെ $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ യ്ക്ക് സമാന്തരവും $\overrightarrow{DP}$, $\overrightarrow{AC}$ യ്ക്ക് സമാന്തരവുമാണ്. അതുകൊണ്ട് ,

$$\overrightarrow{AD} = s(\vec{b}-\vec{a}),\ \overrightarrow{DP}=t(\vec{c}-\vec{a}).$$



ചിത്രം 6.27

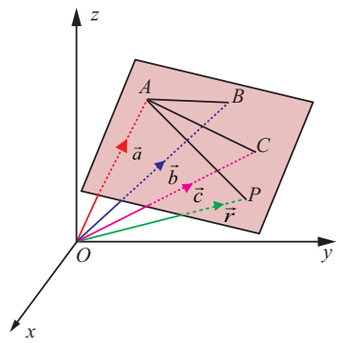
ഇപ്പോൾ ത്രികോണം ADP യിൽ നമുക്കറിയാം,

$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP}$ അല്ലെങ്കിൽ $\vec{r}-\vec{a}=s(\vec{b}-\vec{a})+t(\vec{c}-\vec{a})$, അവിടെ $\vec{b}\neq\vec{0}, \vec{c}\neq\vec{0}$ ഉം $s, t\in\mathbb{R}$. അതായത്, $\vec{r} = \vec{a}+s(\vec{b}-\vec{a})+t(\vec{c}-\vec{a})$.

ഇത് തന്നിരിക്കുന്ന സമരേഖീയമല്ലാത്ത മൂന്ന് ബിന്ദുക്കൾ വഴി കടന്നുപോകുന്ന തലത്തിന്റെ സദിശ സമവാക്യത്തിന്റെ പാരാമെട്രിക് രൂപമാണ്..

(b) സദിശ സമവാക്യത്തിന്റെ നോൺ പാരാമെട്രിക് രൂപം

യഥാക്രമം സ്ഥാന സദിശങ്ങൾ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ ഉള്ള തലത്തിലെ മൂന്ന് സമരേഖീയ മല്ലാത്ത ബിന്ദുക്കൾ A, B, C എന്നിരിക്കട്ടെ. അവയിൽ കുറഞ്ഞത് രണ്ടെണ്ണ മെങ്കിലും പൂജ്യമല്ലാത്ത സദിശങ്ങളാണ് $\vec{b}\neq\vec{0}$, $\vec{c}\neq\vec{0}$ എന്ന് എടുക്കുക. ഇപ്പോൾ $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$ ഉം $\overrightarrow{AC}=\vec{c}-\vec{a}$ ഉം ആണ് $(\vec{b}-\vec{a})$, $(\vec{c}-\vec{a})$ എന്നീ സദിശങ്ങൾ തലത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ എന്നിവ സമരേഖീയമല്ലാത്തതിനാൽ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ യ്ക്ക് സമാന്തരമല്ല അതുകൊണ്ട് $(\vec{b}-\vec{a})\times(\vec{c}-\vec{a})$ തലത്തിന് ലംബമാണ്.



ചിത്രം 6.28

$\vec{r}$ എന്നത് തലത്തിലെ അനിയന്ത്രിത ബിന്ദുവായ $P(x,y,z)$ ന്റെ സ്ഥാന സദിശമെങ്കിൽ $\vec{a}$ എന്ന സദിശം, സ്ഥാന സദിശമായ A എന്ന ബിന്ദുവഴി കടന്നുപോകുന്നതും $(\vec{b}-\vec{a})\times(\vec{c}-\vec{a})$ എന്ന സദിശത്തിന് ലംബവുമായ തലത്തിന്റെ സമവാക്യം

$$(\vec{r}-\vec{a})\cdot((\vec{b}-\vec{a})\times(\vec{c}-\vec{a})) = 0 \quad \text{അല്ലെങ്കിൽ} \quad [\vec{r}-\vec{a},\ \vec{b}-\vec{a},\ \vec{c}-\vec{a}]=0$$

ഇത് സമരേഖീയമല്ലാത്ത മൂന്ന് ബിന്ദുക്കൾ വഴി കടന്നുപോകുന്ന തലത്തിന്റെ സദിശ സമവാക്യം നോൺ പാരാമെട്രിക് രൂപത്തിൽ ഉള്ളത് ആണ്.

(c) സമവാക്യത്തിന്റെ നിർദ്ദേശാങ്ക രൂപം

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ സ്ഥാന സദിശത്തോട് കൂടിയ സമരേഖീയമല്ലാത്ത മൂന്ന് ബിന്ദുക്കൾ A, B, C എന്നിവയുടെ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ യഥാക്രമം $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)$, (x_3,y_3,z_3) യും $\vec{r}$ സ്ഥാന സദിശമുള്ള P എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ (x,y,z) എങ്കിൽ, നമുക്കറിയാം $\vec{a}=x_1\hat{i}+y_1\hat{j}+z_1\hat{k}$, $\vec{b}=x_2\hat{i}+y_2\hat{j}+z_2\hat{k}$, $\vec{c}=x_3\hat{i}+y_3\hat{j}+z_3\hat{k}$ $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 260 15-02-2023 16:22:34

ഈ സദിശങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് കൊടുത്തിട്ടുള്ള മൂന്ന് സമരേഖീയമല്ലാത്ത ബിന്ദുക്കളുടെ സദിശ സമവാക്യത്തിന്റെ നോൺ പാരാമെട്രിക് രൂപം സമമായി ഇങ്ങനെ എഴുതാം.

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

ഇത് മൂന്ന് സമരേഖീയമല്ലാത്ത ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന തലത്തിന്റെ നിർദ്ദേശാങ്ക സമവാക്യമാണ്.

6.8.5 തന്നിട്ടുള്ള ഒരു ബിന്ദുവഴി കടന്നുപോകുന്നതും സമാന്തരമല്ലാത്ത രണ്ട് സദിശങ്ങൾക്ക് സമാന്തരവും ആയ തലത്തിന്റെ സമവാക്യം

(a) സദിശസമവാക്യത്തിന്റെ പാരാമെട്രിക് രൂപം

$\vec{a}$ എന്ന സ്ഥാനസദിശത്തോട് കൂടിയ തന്നിട്ടുള്ള A എന്ന ബിന്ദുവഴി കടന്നുപോകുന്നതും, കൊടുത്തിട്ടുള്ള സമാന്തരമല്ലാത്ത $\vec{b}$, $\vec{c}$ എന്നീ രണ്ട് സദിശങ്ങൾക്ക് സമാന്തരവുമായ ഒരു തലം പരിഗണിക്കുക. തലത്തിൽ അനിയന്ത്രിതമായ ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദു P യുടെ സ്ഥാന സദിശം $\vec{r}$ എങ്കിൽ $(\vec{r}-\vec{a}), \vec{b}$, $\vec{c}$ എന്നിവ കോപ്ലാനാർ സദിശങ്ങളാകും. അതുകൊണ്ട് $(\vec{r}-\vec{a})$ എന്നത് $\vec{b}$ യും $\vec{c}$ യും ഉള്ള തലത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു. അതുകൊണ്ട് അവിടെ സദിശങ്ങൾ നിലനിൽക്കുന്നു. $s, t \in \mathbb{R}$ എങ്ങനെയെന്നാൽ $\vec{r}-\vec{a} = s\vec{b}+t\vec{c}$ അത് നല്കുന്നു.

$$\vec{r} = \vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c} \text{ , അവിടെ } s, t \in \mathbb{R} \qquad \ldots (1)$$

ഇത് കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഒരു ബിന്ദു വഴി കടന്നുപോകുന്നതും സമാന്തരമല്ലാത്ത രണ്ട് സദിശങ്ങൾക്ക് സമാന്തരവും ആയ തലത്തിന്റെ പാരാമെട്രിക് രൂപത്തിൽ സദിശ സമവാക്യമാണ്.

(b) സദിശ സമവാക്യത്തിന്റെ നോൺ പാരാമെട്രിക് രൂപം

സമവാക്യം (1) സമമായി എഴുതാൻ കഴിയും

$$(\vec{r}-\vec{a})\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = 0 \qquad \ldots (2)$$

ഇത് കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഒരു ബിന്ദുവഴി കടന്നുപോകുന്നതും സമാന്തരമല്ലാത്ത രണ്ട് സദിശങ്ങൾക്ക് സമാന്തരവുമായ തലത്തിന്റെ സദിശ സമവാക്യം നോൺ പാരാമെട്രിക് രൂപമാണ്.

(c) സമവാക്യത്തിന്റെ നിർദ്ദേശാങ്ക രൂപം

$\vec{a} = x_1\hat{i}+y_1\hat{j}+z_1\hat{k}$, $\vec{b} = b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$, $\vec{c} = c_1\hat{i}+c_2\hat{j}+c_3\hat{k}$ യും $\vec{r} = x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ ആയാൽ സമവാക്യം (2) സമമായി

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

ഇത് കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഒരു ബിന്ദു വഴി കടന്നുപോകുന്നതും സമാന്തരമല്ലാത്ത രണ്ട് സദിശങ്ങൾക്ക് സമാന്തരവുമായ തലത്തിന്റെ നിർദ്ദേശാങ്ക സമവാക്യം ആണ്.

6.8.6 കൊടുത്തിട്ടുള്ള രണ്ട് വ്യത്യസ്ത ബിന്ദുക്കൾ വഴി കടന്നുപോകുന്നതും പൂജ്യമല്ലാത്ത സദിശത്തിന് സമാന്തരവും ആയ തലത്തിന്റെ സമവാക്യം

(a) പാരാമെട്രിക് രൂപത്തിൽ സദിശ സമവാക്യം

$\vec{a}$, $\vec{b}$ എന്നീ സ്ഥാന സദിശങ്ങളോട് കൂടിയ രണ്ട് വ്യത്യസ്ത ബിന്ദുക്കൾ A , B ഇവ വഴിയായി കടന്നു പോകുന്നതും $\vec{c}$ എന്ന പൂജ്യമല്ലാത്തസദിശത്തിന് സമാന്തരവുമായ തലത്തിന്റെ പാരാമെട്രിക് രൂപത്തിൽ സദിശ സമവാക്യമാണ്.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 261 15-02-2023 16:22:35

$$\vec{r} = \vec{a} + s(\vec{b} - \vec{a}) + t\vec{c} \quad \text{അല്ലെങ്കിൽ} \quad \vec{r} = (1-s)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} \qquad \ldots (1)$$

ഇവിടെ $s, t \in \mathbb{R}, (\vec{b} - \vec{a})$, $\vec{c}$ യും സമാന്തരമല്ലാത്ത സദിശങ്ങളും.

(b) നോൺ പാരാമെട്രിക് രൂപത്തിൽ സദിശ സമവാക്യം

സമവാക്യം (1) നെ നോൺ പാരാമെട്രിക് സദിശത്തിന് തുല്യമായി എഴുതാം

$$(\vec{r} - \vec{a}) \cdot ((\vec{b} - \vec{a}) \times \vec{c}) = 0 \qquad \ldots (2)$$

അവിടെ $(\vec{b} - \vec{a})$ യും $\vec{c}$ യും സമാന്തരമല്ലാത്ത സദിശങ്ങൾ.

(c) സമവാക്യത്തിന്റെ നിർദ്ദേശാങ്കരൂപം

$\vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}, \vec{b} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}, \ \vec{c} = c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k} \neq \vec{0}$ കൂടാതെ $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, എങ്കിൽ സമവാക്യം (2) നെ ഇങ്ങനെ സമമായി എഴുതാം

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

ഇത് ആവശ്യപ്പെട്ട തലത്തിന്റെ നിർദ്ദേശാങ്ക സമവാക്യം.

ഉദാഹരണം 6.43

$(0,1,-5)$ എന്ന ബിന്ദു വഴി കടന്നുപോകുന്നതും $\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}) + s(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$ ഉം $\vec{r} = (\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}) + t(\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})$ എന്നീ നേർരേഖകൾക്ക് സമാന്തരവുമായ തലത്തിന്റെ നോൺ പാരാമെട്രിക് രൂപത്തിൽ സദിശ സമവാക്യവും, നിർദ്ദേശാങ്ക സമവാക്യവും കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

ആവശ്യമായ തലം $\vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}, \ \vec{c} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ എന്നീ സദിശങ്ങൾക്ക് സമാന്തരവും $\vec{a}$ സ്ഥാനസദിശവും ആയ $(0,1,-5)$ എന്ന ബിന്ദുവഴി കടന്നു പോകുന്നു എന്ന് കാണുന്നു. കൂടാതെ $\vec{b}$, $\vec{c}$ യ്ക്ക് സമാന്തരമല്ല എന്നും കാണുന്നു. ആവശ്യപ്പെട്ട തലത്തിന്റെ നോൺ പാരാമെട്രിക് രൂപത്തിൽ സദിശ സമവാക്യം $(\vec{r} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$.

...(1)

$\vec{a} = \hat{j} - 5\hat{k}$ യും $\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -9\hat{i} + 8\hat{j} - \hat{k}$ സമവാക്യം (1), ൽ ആരോപിച്ചാൽ കിട്ടുന്നു

$(\vec{r} - (\hat{j} - 5\hat{k})) \cdot (-9\hat{i} + 8\hat{j} - \hat{k}) = 0$, ആരോപിച്ചാൽ കിട്ടുന്നു

$$\vec{r} \cdot (-9\hat{i} + 8\hat{j} - \hat{k}) = 13 .$$

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ എന്നത് തലത്തിലുള്ള ഒരു അനിയന്ത്രിത ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാന സദിശം എങ്കിൽ, മുകളിലെ സമവാക്യത്തിൽ നിന്നും നമുക്ക് തലത്തിന്റെ നിർദ്ദേശാങ്ക സമവാക്യം $-9x + 8y - z = 13$ അല്ലെങ്കിൽ $9x - 8y + z + 13 = 0$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

ഉദാഹരണം 6.44

$(-1,2,0), \ (2,2-1)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ വഴി കടന്നുപോകുന്നതും $\frac{x-1}{1} = \frac{2y+1}{2} = \frac{z+1}{-1}$ എന്ന നേർ രേഖയ്ക്ക് സമാന്തരവുമായ തലത്തിന്റെ പാരാമെട്രിക് രൂപത്തിൽ സദിശ സമവാക്യം നോൺ പാരാമെട്രിക് രൂപത്തിൽ സദിശ സമവാക്യം, നിർദ്ദേശാങ്ക രൂപത്തിൽ സദിശസമവാക്യങ്ങൾ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

ആവശ്യപ്പെട്ട തലം കൊടുത്തിട്ടുള്ള നേർരേഖ, തലം $\vec{c} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ എന്ന സദിശത്തിന് സമാന്തരവും ആയ $\vec{a} = -\hat{i} + 2\hat{j}, \ \vec{b} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ എന്ന ബിന്ദുക്കൾ വഴി കടന്നു പോകും.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 262 15-02-2023 16:22:37

- തലത്തിന്റെ സമവാക്യം പാരാമെട്രിക് രൂപത്തിൽ $\vec{r}=\vec{a}+s\left(\vec{b}-\vec{a}\right)+t\vec{c}$, ഇവിടെ $s,\ t\ \in\mathbb{R}$, $\vec{r}=\left(-\hat{i}+2\hat{j}\right)+s\left(3\hat{i}-\hat{k}\right)+t\left(\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}\right)$, ഇവിടെ $s,t\in\mathbb{R}$.
- തലത്തിന്റെ സമവാക്യം നോൺ പാരാമെട്രിക് രൂപത്തിൽ $(\vec{r}-\vec{a})\cdot((\vec{b}-\vec{a})\times\vec{c})=0$.

ഇപ്പോൾ, $(\vec{b}-\vec{a})\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\3&0&-1\\1&1&-1\end{vmatrix}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ നമുക്കറിയാം,

$(\vec{r}-(-\hat{i}+2\hat{j}))\cdot(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})=0\Rightarrow\vec{r}\cdot(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})=3$

- $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ എന്നത് തലത്തിൽ ഉള്ള അനിയന്ത്രിതമായ ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനസദിശം എങ്കിൽ, മേൽപ്പറഞ്ഞ സമവാക്യത്തിൽ നിന്ന് തലത്തിന്റെ നിർദ്ദേശാങ്ക സമവാക്യം $x+2y+3z=3$ എന്ന് നമുക്ക് കിട്ടുന്നു.

അഭ്യാസം 6.7

1. $(2,3,6)$ എന്ന ബിന്ദുവഴി കടന്നുപോകുന്നതും $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{1}$, $\frac{x+3}{2}=\frac{y-3}{-5}=\frac{z+1}{-3}$ എന്നീ നേർരേഖകൾക്ക് സമാന്തരവുമായ തലത്തിന്റെ നോൺ പാരാമെട്രിക് രൂപത്തിൽ സദിശസമവാക്യവും നിർദ്ദേശാങ്ക സമവാക്യവും കാണുക
2. $(2,2,1)$, $(9,3,6)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ വഴി കടന്നു പോകുന്നതും $2x+6y+6z=9$ എന്ന തലത്തിന് ലംബവുമായ തലത്തിന്റെ നോൺ പാരാമെട്രിക് സദിശ സമവാക്യവും, നിർദ്ദേശാങ്ക സമവാക്യവും കാണുക.
3. $(2,2,1),(1,-2,3)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ വഴി കടന്നുപോകുന്നതും $(2,1,-3)$, $(-1,5,-8)$ എന്ന ബിന്ദുക്കൾ വഴി കടന്നുപോകുന്ന നേർരേഖയ്ക്ക് സമാന്തരവുമായ തലത്തിന്റെ പാരാമെട്രിക് സദിശ സമവാക്യവും നിർദ്ദേശാങ്ക സമവാക്യവും കാണുക.
4. $(1,-2,4)$ എന്ന ബിന്ദുവഴി കടന്നുപോകുന്നതും $x+2y-3z=11$ എന്ന തലത്തിന് ലംബവുമായ $\frac{x+7}{3}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z}{1}$ എന്ന നേർരേഖയ്ക്ക് സമാന്തരവുമായ തലത്തിന്റെ നോൺ പാരാമെട്രിക് സമവാക്യവും നിർദ്ദേശാങ്ക സമവാക്യവും കാണുക.
5. $\vec{r}=(\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k})+t(2\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k})$ എന്ന നേർരേഖ ഉൾപ്പെട്ട $\vec{r}\cdot(\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})=8$ എന്ന തലത്തിന് ലംബവുമായ തലത്തിന്റെ പാരാമെട്രിക് രൂപത്തിൽ സദിശ സമവാക്യവും, നിർദ്ദേശാങ്ക സമവാക്യവും കാണുക.
6. $(3,6,-2),(-1,-2,6)$, $(6,\ 4,\ -2)$ എന്നിവ സമരേഖീയമല്ലാത്ത മൂന്ന് ബിന്ദുക്കൾ വഴി കടന്നു ചെല്ലുന്നതുമായ തലത്തിന്റെ പാരാമെട്രിക് സദിശ, നോൺ പാരാമെട്രിക് സദിശ, നിർദ്ദേശാങ്ക സമവാക്യങ്ങൾ കാണുക.
7. $\vec{r}=\left(6\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\right)+s\left(-\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}\right)+t\left(-5\hat{i}-4\hat{j}-5\hat{k}\right)$ എന്ന തലത്തിൽ നോൺ പാരാമെട്രിക് സദിശ സമവാക്യം കൂടാതെ നിർദ്ദേശാങ്ക സമവാക്യങ്ങളും കാണുക.

6.8.7 ഒരു നേർരേഖ ഒരു തലത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നതിനുള്ള വ്യവസ്ഥ

നേർരേഖയിലെ ഓരോ ബിന്ദുവും തലത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുകയും തലത്തിന്റെ നോർമൽ, നേർരേഖയ്ക്ക് ലംബമായിരിക്കുകയും ചെയ്താൽ ഒരു നേർരേഖ ഒരു തലത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു എന്ന് ഞങ്ങൾ നിരീക്ഷിക്കുന്നു.

(i) $\vec{r}=\vec{a}+t\vec{b}$ എന്ന നേർരേഖ $\vec{r}\cdot\vec{n}=d$ എന്ന തലത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്താൽ, $\vec{a}\cdot\vec{n}=d$ എന്നിട്ട് $\vec{b}\cdot\vec{n}=0$ ആകും.

(ii) $\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$ എന്ന നേർരേഖ $Ax+By+Cz+D=0$ എന്ന തലത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്താൽ, $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$ ഉം $aA+bB+cC=0$ ഉം ആകും.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 263 15-02-2023 16:22:37

ഉദാഹരണം 6.45

$\frac{x-3}{-4}=\frac{y-4}{-7}=\frac{z+3}{12}$ എന്ന നേർരേഖ $5x-y+z=8$ എന്ന തലത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

ഇവിടെ, $(x_1,y_1,z_1)=(3,4,-3)$ കൂടാതെ നേർരേഖയുടെ ദിശ അനുപാതങ്ങൾ $(a,b,c)=(-4,-7,12)$ ആണ്. തലത്തിന്റെ നോർമലിന്റെ ദിശ അനുപാതങ്ങൾ $(A,B,C)=(5,-1,1)$ ആണ്.

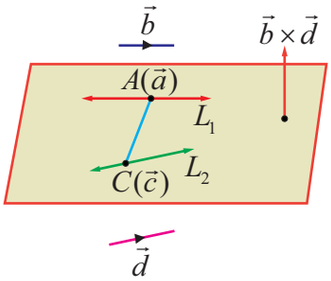
കൊടുത്തിട്ടുള്ള ബിന്ദു $(x_1,y_1,z_1)=(3,4,-3)$ എന്നത് $5x-y+z=8$ എന്ന തലത്തെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്നത് നമ്മൾ കാണുന്നു.

അടുത്ത്, $aA+bB+cC=(-4)(5)+(-7)(-1)+(12)(1)=-1\neq 0$. അതുകൊണ്ട് തലത്തിന്റെ നോർമൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള നേർരേഖയ്ക്ക് ലംബമല്ല. എന്തെന്നാൽ, കൊടുത്തിട്ടുള്ള നേർരേഖ തലത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നില്ല.

6.8.8 രണ്ട് നേർരേഖകൾ ഒരേ തലത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നതിനുള്ള നിബന്ധന

(a) സദിശ രൂപത്തിൽ ഉള്ള നിബന്ധന

$\vec{r}=\vec{a}+s\vec{b}$ ഉം $\vec{r}=\vec{c}+t\vec{d}$ എന്ന കൊടുത്തിട്ടുള്ള രണ്ട് സമാന്തരമല്ലാത്ത, ഒരു തലത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്ന നേർരേഖകൾ ആണ്. സ്ഥാന സദിശങ്ങൾ $\vec{a}$ യും $\vec{c}$ യും ഉള്ള ബിന്ദുക്കൾ A യും C യും എന്നിരിക്കട്ടെ. A യും C യും തലത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു. $\vec{b}$ യും $\vec{d}$ യും സദിശങ്ങൾ തലത്തിന് സമാന്തരമായ സദിശങ്ങൾ ആയതിനാൽ $\overrightarrow{AC}$, $\vec{b}\times\vec{d}$ എന്നത് തലത്തിന് ലംബമാകും അതായത്,



ചിത്രം 6.29

$$(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{b}\times\vec{d})\ =\ 0$$

ഇത് രണ്ട് നേർരേഖകൾ ഒരേ തലത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നതിന് ആവശ്യമായ സദിശ രൂപത്തിൽ ഉള്ള നിബന്ധനയാണ്.

(b) നിർദ്ദേശാങ്ക രൂപത്തിൽ ഉള്ള നിബന്ധന

$\frac{x-x_1}{b_1}=\frac{y-y_1}{b_2}=\frac{z-z_1}{b_3}$ ഉം $\frac{x-x_2}{d_1}=\frac{y-y_2}{d_2}=\frac{z-z_2}{d_3}$ എന്ന നേർരേഖകൾ ഒരേ തലത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുമെങ്കിൽ

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}=0$$

ഇത് രണ്ട് നേർരേഖകൾ ഒരേ തലത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നതിന് ആവശ്യമായ നിർദ്ദേശാങ്ക രൂപത്തിലെ ഉള്ള നിബന്ധനയാണ് .

6.8.9 ഒരേ തലത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്ന സമാന്തരമല്ലാത്ത രണ്ട് നേർരേഖകൾ ഉൾപ്പെട്ട തലത്തിന്റെ സമവാക്യം

(a) സദിശ സമവാക്യം പാരാമെട്രിക് രൂപത്തിൽ

$\vec{r}=\vec{a}+s\vec{b}$ ഉം $\vec{r}=\vec{c}+t\vec{d}$ ഉം ഒരേ തലത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്ന സമാന്തരമല്ലാത്ത രണ്ട് നേർരേഖകൾ എന്നിരിക്കട്ടെ. എന്നാൽ $\vec{b}\times\vec{d}\neq\vec{0}$ $\vec{r_0}$ എന്ന സദിശം സ്ഥാന സദിശമായ തലത്തിൽ ഉള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദു P എന്നിരിക്കട്ടെ അതായത് $\vec{r_0}-\vec{a},\vec{b},\vec{d}$ അതുപോലെ $\vec{r_0}-\vec{c},\vec{b},\vec{d}$ എന്നിവ ഒരേ തലത്തിലെ സദിശങ്ങളാണ്. അതിനാൽ $\vec{r_0}-\vec{a}=t\vec{b}+s\vec{d}$ അല്ലെങ്കിൽ $\vec{r_0}-\vec{c}=t\vec{b}+s\vec{d}$. എന്ന് നമുക്ക് കിട്ടുന്നു. അങ്ങനെയെങ്കിൽ $\vec{r}=\vec{a}+t\vec{b}+s\vec{d}$ അല്ലെങ്കിൽ $\vec{r}=\vec{c}+t\vec{b}+s\vec{d}$ എന്നത് പാരാമെട്രിക് രൂപത്തിൽ സദിശ സമവാക്യമാണ്.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 264 15-02-2023 16:22:42

(b) സദിശ സമവാക്യം നോൺ പാരാമെട്രിക് രൂപത്തിൽ

$\vec{r} = \vec{a} + s\vec{b}$ ഉം $\vec{r} = \vec{c} + t\vec{d}$ ഒരേ തലത്തിൽ ഉള്ള സമാന്തരമല്ലാത്ത രണ്ട് നേർരേഖകൾ എന്നിരിക്കട്ടെ എന്നിട്ട് $\vec{b} \times \vec{d} \neq \vec{0}$. P എന്നത് തലത്തിലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവും $\vec{r_0}$ അതിന്റെ സ്ഥാനസദിശവും എന്നിരിക്കട്ടെ. എന്നിട്ട് $\vec{r_0} - \vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$ അതുപോലെ $\vec{r_0} - \vec{c}, \vec{b}, \vec{d}$ ഉം ഒരേ തലത്തിലുള്ള സദിശങ്ങളാണ്അതുകൊണ്ട് നമുക്ക് കിട്ടുന്നു $\left(\vec{r_0} - \vec{a}\right).\left(\vec{b} \times \vec{d}\right) = 0$ അല്ലെങ്കിൽ $\left(\vec{r_0} - \vec{c}\right).\left(\vec{b} \times \vec{d}\right) = 0$. അങ്ങനെ $\left(\vec{r} - \vec{a}\right).\left(\vec{b} \times \vec{d}\right) = 0$ അല്ലെങ്കിൽ $\left(\vec{r} - \vec{c}\right).\left(\vec{b} \times \vec{d}\right) = 0$ എന്നത നോൺ പാരാമെട്രിക് രൂപത്തിൽ സദിശ സമവാക്യമാണ്.

(C) ഒരു തലത്തിന്റെ സമവാക്യം നിർദ്ദേശാങ്ക രൂപത്തിൽ

ഒരേ തലത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്ന രണ്ട് നേർരേഖകൾ ഉൾപ്പെട്ട തലത്തിന്റെ സമവാക്യം നിർദ്ദേശാങ്ക രൂപത്തിൽ

$$\frac{x-x_1}{b_1} = \frac{y-y_1}{b_2} = \frac{z-z_1}{b_3}, \quad \frac{x-x_2}{d_1} = \frac{y-y_2}{d_2} = \frac{z-z_2}{d_3}$$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{അല്ലെങ്കിൽ}$$

$$\begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = 0$$

ഉദാഹരണം 6.46

$\vec{r} = \left(-\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}\right) + s\left(3\hat{i} + 5\hat{j} + 7\hat{k}\right)$, $\vec{r} = \left(2\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}\right) + t\left(\hat{i} + 4\hat{j} + 7\hat{k}\right)$ എന്നീ നേർരേഖകൾ ഒരേ തലത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നവയെന്ന് തെളിയിക്കുക കൂടാതെ ഈ നേർരേഖകൾ ഉൾക്കൊണ്ടിട്ടുള്ള തലത്തിന്റെ സദിശ സമവാക്യം നോൺ പാരാമെട്രിക് രൂപത്തിൽ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

കൊടുത്തിട്ടുള്ള രണ്ട് സമവാക്യങ്ങളുമായി

$\vec{r} = \vec{a} + t\vec{b}$, $\vec{r} = \vec{c} + s\vec{d}$ ഇവ താരതമ്യം ചെയ്താൽ

നമുക്ക് കിട്ടുന്നു, $\vec{a} = -\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$, $\vec{b} = 3\hat{i} + 5\hat{j} + 7\hat{k}$, $\vec{c} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}$, $\vec{d} = \hat{i} + 4\hat{j} + 7\hat{k}$

തന്നിട്ടുള്ള രണ്ട് നേർരേഖകൾ ഒരു തലത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു എന്ന് നമുക്ക് അറിയാം; എങ്കിൽ $\left(\vec{c} - \vec{a}\right) \cdot \left(\vec{b} \times \vec{d}\right) = 0$

ഇവിടെ, $\vec{b} \times \vec{d} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 7\hat{i} - 14\hat{j} + 7\hat{k}$ യും $\vec{c} - \vec{a} = 3\hat{i} + 7\hat{j} + 11\hat{k}$

എന്നിട്ട്, $\left(\vec{c} - \vec{a}\right) \cdot \left(\vec{b} \times \vec{d}\right) = \left(3\hat{i} + 7\hat{j} + 11\hat{k}\right) \cdot \left(7\hat{i} - 14\hat{j} + 7\hat{k}\right) = 0$.

തന്നിരിക്കുന്ന രണ്ട് നേർരേഖകൾ ഒരേ തലത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു. തന്നിരിക്കുന്ന ഒരേ തലത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്ന രണ്ട് നേർരേഖകൾ ഉൾപ്പെട്ട തലത്തിന്റെ സദിശസമവാക്യം നോൺ പാരാമെട്രിക് രൂപത്തിൽ നമ്മൾ കണ്ടു പിടിച്ചു. ഒരേ തലത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്ന രണ്ട് നേർരേഖകൾ ഉൾപ്പെട്ട തലത്തെ നമുക്കറിയാം

$$\left(\vec{r} - \vec{a}\right) \cdot \left(\vec{b} \times \vec{d}\right) = 0$$

അത് നൽകുന്നത് $\left(\vec{r} - \left(-\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}\right)\right) \cdot \left(7\hat{i} - 14\hat{j} + 7\hat{k}\right) = 0$. എന്നത് ഒരേ തലത്തിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന രണ്ട് നേർരേഖകൾ ഉൾപ്പെട്ട തലത്തിന്റെ ആവശ്യപ്പെട്ട സദിശസമവാക്യം നോൺ പാരാമെട്രിക് രൂപത്തിലാണ് $\vec{r} \cdot \left(\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}\right) = 0$.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 265 15-02-2023 16:22:48

അഭ്യാസം 6.8

1. $\vec{r} = (5\hat{i} + 7\hat{j} - 3\hat{k}) + s(4\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k})$, $\vec{r} = \left(8\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}\right) + t\left(7\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}\right)$ എന്നീ നേർരേഖകൾ ഒരേ തലത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു എന്ന് തെളിയിക്കുക കൂടാതെ അവ സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന തലത്തിന്റെ സദിശ സമവാക്യവും കാണുക.
2. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{3}$, $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-5}{1}$ എന്നീ നേർരേഖകൾ ഒരേ തലത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു. എന്ന് തെളിയിക്കുക. കൂടാതെ ഈ നേർരേഖകൾ ഉൾപ്പെട്ട തലവും കാണുക.
3. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{m^2}$, $\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{m^2} = \frac{z-1}{2}$ എന്നി നേർരേഖകൾ ഒരേ തലത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു എങ്കിൽ m ന്റെ വ്യത്യസ്ത വാസ്തവിക മൂല്യങ്ങൾ കാണുക.
4. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{\lambda} = \frac{z}{2}$, $\frac{x+1}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{\lambda}$ എന്നി നേർരേഖകൾ ഒരേ തലത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു എങ്കിൽ λ യുടെ മൂല്യവും രണ്ട് നേർരേഖകൾ ഉൾപ്പെട്ട തലത്തിന്റെ സമവാക്യങ്ങളും കാണുക.

6.8.10 രണ്ട് തലങ്ങൾക്കിടയിലെ കോൺ

തന്നിട്ടുള്ള രണ്ട് തലങ്ങൾക്കിടയിലെ കോൺ അവയുടെ നോർമലുകൾക്കിടയിലെ കോണുകൾക്ക് സമമാണ്.

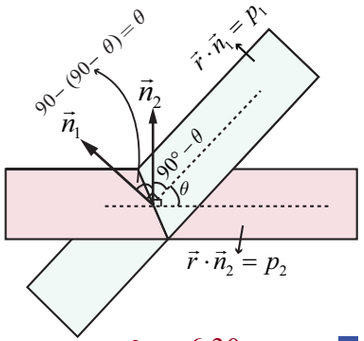
സിദ്ധാന്തം 6.18

$\vec{r} \cdot \vec{n}_1 = p_1$, $\vec{r} \cdot \vec{n}_2 = p_2$ എന്നീ രണ്ട് തലങ്ങൾക്കിടയിലെ ന്യൂനകോൺ θ എന്നത്

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}\right)$$

തെളിവ്

$\vec{r} \cdot \vec{n}_1 = p_1$, $\vec{r} \cdot \vec{n}_2 = p_2$ എന്നീ രണ്ട് തലങ്ങൾക്കിടയിലെ ന്യൂനകോൺ θ എങ്കിൽ, എന്നാൽ $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ എന്നീ നോർമൽ സദിശങ്ങൾക്ക് ഇടയിലെ ന്യൂന കോൺ θ , അതുകൊണ്ട് $\cos\theta = \left(\frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}\right) \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}\right)$ ... (1)



ചിത്രം 6.30

പരാമർശം

(i) $\vec{r} \cdot \vec{n}_1 = p_1$, $\vec{r} \cdot \vec{n}_2 = p_2$ എന്നീ രണ്ട് തലങ്ങൾ ലംബമെങ്കിൽ $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$ ആകും

(ii) $\vec{r} \cdot \vec{n}_1 = p_1$, $\vec{r} \cdot \vec{n}_2 = p_2$ എന്നീ രണ്ട് തലങ്ങൾ സമാന്തരം എങ്കിൽ $\vec{n}_1 = \lambda\vec{n}_2$, അവിടെ ഒരു അദിശം

(iii) $\vec{r} \cdot \vec{n} = p$ തലത്തിന് സമാന്തരമായ തലത്തിന്റെ സമവാക്യം $\vec{r} \cdot \vec{n} = k,\ k \in \mathbb{R}$

സിദ്ധാന്തം 6.19

$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ എന്നീ തലങ്ങൾക്കിടയിലെ ന്യൂനകോൺ θ എങ്കിൽ

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}\right)$$

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 266 15-02-2023 16:22:52

തെളിവ്

$\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ എന്നീ തലങ്ങളുടെ നോർമൽ സദിശങ്ങൾ യഥാക്രമം $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ ആണ് എന്നിട്ട് $\vec{n}_1=a_1\hat{i}+b_1\hat{j}+c_1\hat{k}$, $\vec{n}_2=a_2\hat{i}+b_2\hat{j}+c_2\hat{k}$ അതുകൊണ്ട് സിദ്ധാന്തം 6.18 ലെ സമവാക്യം (1) ഉപയോഗിച്ച് തലങ്ങൾക്കിടയിലെ ന്യൂനകോൺ θ എന്നത്

$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{\left|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2\right|}{\sqrt{a_1^{\,2}+b_1^{\,2}+c_1^{\,2}}\sqrt{a_2^{\,2}+b_2^{\,2}+c_2^{\,2}}}\right)$$

പരാമർശം

(i) $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ എന്നീ തലങ്ങൾ പരസ്പരം ലംബമെങ്കിൽ $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$ ആകും.

(ii) $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ എന്നീ തലങ്ങൾ സമാന്തരമെങ്കിൽ $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ ആകും

(iii) $ax+by+cz=p$ എന്ന തലത്തിന് സമാന്തരമായ തലത്തിന്റെ സമവാക്യം $ax+by+cz=k$, $k\in\mathbb{R}$

ഉദാഹരണം 6.47

$\vec{r}\cdot\left(2\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}\right)=11$, $4x-2y+2z=15$ എന്നീ തലങ്ങൾക്ക് ഇടയിലുള്ള ന്യൂനകോൺ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

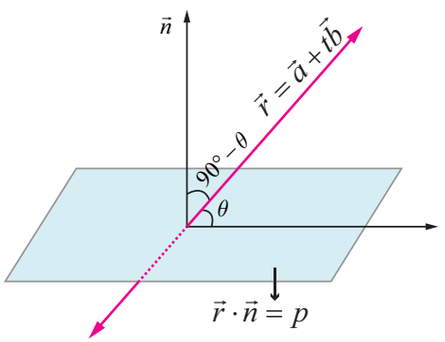
$\vec{r}\cdot\left(2\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}\right)=11$, $4x-2y+2z=15$ എന്നീ തലങ്ങൾക്ക് നോർമൽ സദിശങ്ങൾ യഥാക്രമം $\vec{n}_1=2\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}$, $\vec{n}_2=4\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}$ എന്നാണ്.

തലങ്ങൾക്കിടയിലെ ന്യൂനകോൺ θ എങ്കിൽ നമുക്കറിയാം

$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{\left|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2\right|}{\left|\vec{n}_1\right|\left|\vec{n}_2\right|}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{\left|\left(2\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}\right)\cdot\left(4\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}\right)\right|}{\left|2\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}\right|\left|4\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}\right|}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$$

6.8.11 ഒരു തലത്തിനും ഒരു നേർരേഖയ്ക്കും ഇടയിലെ കോൺ

ഒരു നേർരേഖയ്ക്കും ഒരു തലത്തിനും ഇടയിലുള്ള കോൺ എന്നത് തലത്തിന്റെ നോർമലിനും നേർരേഖയ്ക്കും ഇടയിലുള്ള കോണിന്റെ പൂരക കോണാകും.



ചിത്രം 6.31

$\vec{r}=\vec{a}+t\vec{b}$ എന്നത് നേർരേഖയുടെ സമവാക്യവും $\vec{u}\cdot\vec{\ }=$ എന്നത് തലത്തിന്റെ സമവാക്യവും എന്നിരിക്കട്ടെ $\vec{b}$ എന്നത് കൊടുത്തിട്ടുള്ള നേർരേഖയ്ക്ക് സമാന്തരവും $\vec{n}$ എന്നത് കൊടുത്തിട്ടുള്ള തലത്തിന് നോർമലായും ഇരിക്കും. തലത്തിനും നേർരേഖയും ഇടയിലുള്ള ന്യൂനകോൺ θ എങ്കിൽ $\vec{n}$ നും $\vec{b}$ യ്ക്കും ഇടയിലുള്ള ന്യൂനകോൺ $\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ ആകും,

അതുകൊണ്ട് $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta=\frac{\left|\vec{b}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{b}\right|\left|\vec{n}\right|}$

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 267 15-02-2023 16:22:53

അതിനാൽ തലത്തിനും നേർരേഖയ്ക്കും ഇടയിലുള്ള ന്യൂനകോൺ എന്നത് $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{|\vec{b}\cdot\vec{n}|}{|\vec{b}|\,|\vec{n}|}\right)$ ... (1)

നിർദ്ദേശാങ്ക രൂപത്തിൽ ഒരു നേർരേഖയുടെയും ഒരു തലത്തിന്റെയും സമവാക്യങ്ങൾ യഥാക്രമം $\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1}$, $ax+by+cz=p$ എങ്കിൽ $\vec{b}=a_1\hat{i}+b_1\hat{j}+c_1\hat{k}$, $\vec{n}=a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k}$. അതുകൊണ്ട് (1) ഉപയോഗിച്ച് ഒരു തലത്തിനും നേർരേഖയ്ക്കും ഇടയിലുള്ള ന്യൂനകോൺ θ എന്നത്

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{|aa_1+bb_1+cc_1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a_1^{\,2}+b_1^{\,2}+c_1^{\,2}}}\right)$$

പരാമർശം

(i) നേർരേഖ തലത്തിന് ലംബം എങ്കിൽ, ഈ നേർരേഖ തലത്തിന്റെ നോർമലിന് സമാന്തരമാകും. ആയതിനാൽ $\vec{b}$ എന്നത് $\vec{n}$ ന് ലംബമാണ്. എന്നാൽ $\vec{b}=\lambda\vec{n}$ ഇവിടെ $\lambda\in\mathbb{R}$ അത് നൽകുന്നത് $\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\frac{c_1}{c}$.

(ii) നേർരേഖ തലത്തിന് സമാന്തരമെങ്കിൽ, ഈ നേർരേഖ തലത്തിന്റെ നോർമലിന് ലംബമാകും. അതുകൊണ്ട്, $\vec{b}\cdot\vec{n}=0\Rightarrow aa_1+bb_1+cc_1=0$

ഉദാഹരണം 6.48

$\vec{r}=\left(2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}\right)+t\left(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\right)$ എന്ന നേർരേഖയ്ക്കും $2x-y+z=5$ എന്ന തലത്തിനും ഇടയിലുള്ള കോൺ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$\vec{r}=\vec{a}+t\vec{b}$ എന്ന നേർരേഖയ്ക്കും നോർമൽ സദിശം $\vec{n}$ ഉള്ള $\vec{r}\cdot\vec{n}=p$ എന്ന തലത്തിനും ഇടയിലുള്ള കോൺ $\theta=\sin^{-1}\left(\frac{|\vec{b}\cdot\vec{n}|}{|\vec{b}||\vec{n}|}\right)$.

ഇവിടെ, $\vec{b}=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{n}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$.

അതിനാൽ നമുക്ക് കിട്ടുന്നു $\theta=\sin^{-1}\left(\frac{|\vec{b}\cdot\vec{n}|}{|\vec{b}|\,|\vec{n}|}\right)=\sin^{-1}\left(\frac{\left|\left(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\right)\cdot\left(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\right)\right|}{\left|\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\right|\left|2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\right|}\right)=\sin^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ ■

6.8.12 ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് തലത്തിലേക്കുള്ള ദൂരം

(a) തലത്തിന്റെ സദിശ സമവാക്യം

സിദ്ധാന്തം 6.20

$\vec{u}$ സ്ഥാന സദിശമുള്ള ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് $\vec{r}\cdot\vec{n}=p$ എന്ന തലത്തിലേക്ക് ലംബ ദൂരം

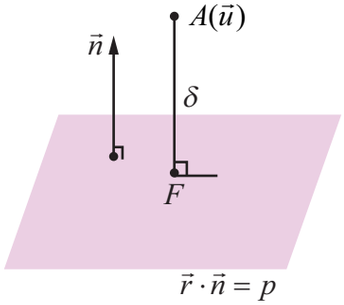
$$\delta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}-p|}{|\vec{n}|}.$$

തെളിവ്

A എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനസദിശം $\vec{u}$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 268 15-02-2023 16:22:55

$\vec{r}\cdot\vec{n}=p$ എന്ന തലത്തിലേക്ക് A എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് വരയ്ക്കുന്ന ലംബത്തിന്റെ പാദം F എന്നിരിക്കട്ടെ. F, A എന്നിവയെ യോജിപ്പിക്കുന്ന നേർരേഖ എന്നത് തലത്തിന്റെ നോർമൽ $\vec{n}$ ന് സമാന്തരമാകും. അങ്ങനെ അതിന്റെ സമവാക്യം $\vec{r}=\vec{u}+t\vec{n}$ ആകും.



ചിത്രം 6.32

എന്നാൽ F എന്നത് $\vec{r}=\vec{u}+t\vec{n}$ എന്ന നേർരേഖയുടെയും $\vec{r}\cdot\vec{n}=p$ എന്ന തലത്തിന്റെയും പ്രതിഛേദബിന്ദുവാണ് $\vec{r}_1$ എന്നത് F ന്റെ സ്ഥാന സദിശമെങ്കിൽ $\vec{r}_1=\vec{u}+t_1\vec{n}$, $t_1\in\mathbb{R}$ ഉം $\vec{r}_1\cdot\vec{n}=p$ ആകും ഈ സമവാക്യത്തിൽ നിന്നും $\vec{r}_1$ ഒഴിവാക്കിയാൽ, നമുക്ക് കിട്ടുന്നത്

$$\left(\vec{u}+t_1\vec{n}\right)\cdot\vec{n}=p,\quad t_1=\frac{p-\left(\vec{u}\cdot\vec{n}\right)}{\left|\vec{n}\right|^2}.$$

ഇപ്പോൾ, $$\overrightarrow{FA}=\vec{u}-\left(\vec{u}+t_1\vec{n}\right)\ =\ -t_1\vec{n}=\left(\frac{\left(\vec{u}\cdot\vec{n}\right)-p}{\left|\vec{n}\right|^2}\right)\vec{n}$$

അതുകൊണ്ട് A എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് കൊടുത്തിട്ടുള്ള തലത്തിലേക്കുള്ള ലംബ ദൂരം

$$\delta\ =\ \left|\overrightarrow{FA}\right|=\left|\left(\frac{\left(\vec{u}\cdot\vec{n}\right)-p}{\left|\vec{n}\right|^2}\right)\vec{n}\right|=\left|\frac{\left(\vec{u}\cdot\vec{n}\right)-p}{\left|\vec{n}\right|}\right|$$

AF എന്ന ലംബത്തിന്റെ പാദം F ന്റെ സ്ഥാന സദിശം

$$\vec{r}_1\ =\ \vec{u}+t_1\vec{n}\quad \text{അല്ലെങ്കിൽ}$$

$$\vec{r}_1\ =\ \vec{u}+\left(\frac{p-\vec{u}\cdot\vec{n}}{\left|\vec{n}\right|^2}\right)\vec{n}$$

(b) തലത്തിന്റെ സമവാക്യത്തിന്റെ നിർദ്ദേശാങ്ക രൂപം

$\vec{u}$ എന്ന കൊടുത്തിട്ടുള്ള സ്ഥാന സദിശം ഉള്ള ബിന്ദു $A\left(x_1,y_1,z_1\right)$ ഉം കൊടുത്തിട്ടുള്ള തലത്തിന്റെ നിർദ്ദേശാങ്ക സമവാക്യം $ax+by+cz=p$ എങ്കിൽ $\vec{u}=x_1\hat{i}+y_1\hat{j}+z_1\hat{k}$ ഉം $\vec{n}=a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k}$ ആണ് അതുകൊണ്ട് $\delta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}-p|}{|\vec{n}|}$ ൽ ഈ സദിശങ്ങളെ ഉപയോഗിച്ച്, കൊടുത്തിട്ടുള്ള ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് തലത്തിലേക്ക് ഉള്ള ലംബ ദൂരം നിർദ്ദേശാങ്ക രൂപത്തിൽ കിട്ടുന്നു

$$\delta=\left|\frac{ax_1+by_1+cz_1-p}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|=\frac{\left|ax_1+by_1+cz_1-p\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

പരാമർശം

മൂല ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് $ax+by+cz+d=0$ എന്ന തലത്തിലേക്കുള്ള ലംബദൂരം $\delta=\frac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

ഉദാഹരണം 6.49

$(2,5,-3)$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് $\vec{r}\cdot\left(6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}\right)=5$ എന്ന തലത്തിലേക്കുള്ള ദൂരം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

കൊടുത്തിട്ടുള്ള തലത്തിന്റെ സമവാക്യം $\vec{r}\cdot\vec{n}=p$, യുമായി താരതമ്യം ചെയ്താൽ, നമുക്ക് കിട്ടുന്നു $\vec{n}=6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 269 15-02-2023 16:22:57

$\vec{u}$ എന്ന സ്ഥാന സദിശമുള്ള ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് $\delta = \dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{n} - p|}{|\vec{n}|}$ എന്ന തലത്തിലേക്കുള്ള ലംബദൂരം $\vec{r}\cdot\vec{n} = p$ ആണ്. അതുകൊണ്ട് $\vec{u} = (2,5,-3) = 2\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k}$ ഉം $\vec{n} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ യും സൂത്രവാക്യത്തിൽ ആരോപിച്ചാൽ നമുക്ക് കിട്ടുന്നു

$$\delta = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{n} - p|}{|\vec{n}|} = \frac{\left|\left(2\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k}\right)\cdot\left(6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}\right) - 5\right|}{\left|6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}\right|} = 2 \text{ മാത്രകൾ.}$$

ഉദാഹരണം 6.50

$A(4,1,2)$, $B(7,5,4)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ വഴി കടന്നുപോകുന്ന നേർരേഖയും $x - y + z = 5$ എന്ന തലത്തിന്റെയും പ്രതിഛേദബിന്ദുവും $(5,-5,-10)$ എന്ന ബിന്ദുവും തമ്മിലുള്ള ദൂരം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുമ്പോൾ ഉള്ള നേർരേഖയുടെ സമവാക്യം നിർദ്ദേശാങ്ക രൂപത്തിൽ

$$\frac{x-4}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{2} = t \quad \text{(എന്നിരിക്കട്ടെ).}$$

അതുകൊണ്ട് ഈ നേർരേഖയിൽ അനിയന്ത്രിതമായ ഒരു ബിന്ദു $(3t+4, 4t+1, 2t+2)$ എന്നാകും. തലവവും നേർരേഖയും തമ്മിലുള്ള പ്രതിഛേദബിന്ദു കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് $x = 3t+4, y = 4t+1, z = 2t+2$ എന്ന് $x - y + z = 5$ ൽ എന്ന് നമ്മൾ ആരോപിക്കുകയും $t = 0$ എന്ന് കിട്ടുകയും ചെയ്യുന്നു. അതുകൊണ്ട് നേർരേഖയുടെ പ്രതിഛേദബിന്ദു (4, 1, 2) ആകുന്നു. ഇപ്പോൾ (4, 1, 2), $(5,-5,-10)$ എന്നീ രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം എന്നത്

$$\sqrt{(4-5)^2 + (1+5)^2 + (2+10)^2} = \sqrt{181} \text{ മാത്രകൾ.}$$

6.8.13 സമാന്തരമായ രണ്ട് തലങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള ദൂരം

സിദ്ധാന്തം 6.21

$ax + by + cz + d_1 = 0$, $ax + by + cz + d_2 = 0$ എന്നീ രണ്ട് സമാന്തരമായ തലങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള ദൂരം $\dfrac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ ആണ്.

തെളിവ്

$ax + by + cz + d_2 = 0$ എന്ന തലത്തിൽ ഉള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദു $A(x_1, y_1, z_1)$ എന്നിരിക്കട്ടെ, എന്നാൽ നമുക്കറിയാം

$ax_1 + by_1 + cz_1 + d_2 = 0 \Rightarrow ax_1 + by_1 + cz_1 = -d_2$

$A(x_1, y_1, z_1)$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് $ax + by + cz + d_1 = 0$ എന്ന തലത്തിലേക്കുള്ള ദൂരം

$$\delta = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

അങ്ങനെ $ax + by + cz + d_1 = 0$, $ax + by + cz + d_2 = 0$ എന്നീ സമാന്തരമായ രണ്ട് തലങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള ദൂരം എന്നത് $\delta = \dfrac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 270 15-02-2023 16:22:59

ഉദാഹരണം 6.51

$x+2y-2z+1=0$, $2x+4y-4z+5=0$ എന്നീ രണ്ട് സമാന്തരമായ തലങ്ങൾക്ക് ഇടയിലുള്ള അകലം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$ax+by+cz+d_1=0$, $ax+by+cz+d_2=0$ എന്നീ രണ്ട് സമാന്തരമായ തലങ്ങൾക്ക് ഇടയിലുള്ള അകലം $\delta=\frac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. ആണ് രണ്ടാമത്തെ സമവാക്യത്തെ ക്രമീകരിച്ച് $x+2y-2z+\frac{5}{2}=0$. ഇങ്ങനെ എഴുതുക. പൊതു സമവാക്യങ്ങളുമായി തന്നിരിക്കുന്ന സമവാക്യങ്ങളെ താരതമ്യം ചെയ്താൽ നമുക്ക് കിട്ടുന്നത് $a=1,b=2,c=-2,d_1=1,d_2=\frac{5}{2}$ ഈ വിലകൾ സൂത്രവാക്യത്തിൽ ആരോപിച്ചാൽ നമുക്ക് കിട്ടുന്നത് അകലം

$$\delta=\frac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{\left|1-\frac{5}{2}\right|}{\sqrt{1^2+2^2+\left(-2^2\right)}}=\frac{1}{2}$$ മാത്രകൾ.

ഉദാഹരണം 6.52

$\vec{r}\cdot\left(2\hat{i}-\hat{j}-2\hat{k}\right)=6$, $\vec{r}\cdot\left(6\hat{i}-3\hat{j}-6\hat{k}\right)=27$ എന്നീ തലങ്ങൾക്ക് ഇടയിലുള്ള അകലം കാണുക

നിർദ്ധാരണം

$\vec{r}\cdot(2\hat{i}-\hat{j}-2\hat{k})=6$ എന്ന തലത്തിലെ അനിയന്ത്രിതമായ ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാന സദിശം $\vec{u}$ എന്നിരിക്കട്ടെ. എന്നിട്ട് നമുക്കറിയാം

$$\vec{u}\cdot(2\hat{i}-\hat{j}-2\hat{k})=6\,. \qquad \ldots(1)$$

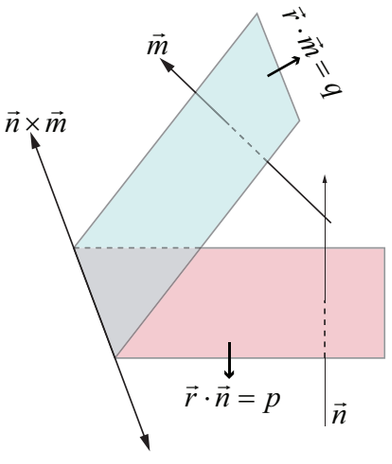
കൊടുത്തിട്ടുള്ള രണ്ട് തലങ്ങൾക്ക് ഇടയിലുള്ള അകലം δ എങ്കിൽ, δ എന്നത് $\vec{u}$ വിൽ നിന്ന് തലത്തിലേക്ക് ഉള്ള ലംബദൂരമാണ്

$$\vec{r}\cdot(6\hat{i}-3\hat{j}-6\hat{i})=27\,.$$

അതുകൊണ്ട്, $\delta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}-p|}{|\vec{n}|}=\left|\frac{\vec{u}\cdot(6\hat{i}-3\hat{j}-6\hat{k})-27}{\sqrt{6^2+(-3)^2+(-6)^2}}\right|=\left|\frac{3(\vec{u}\cdot(2\hat{i}-\hat{j}-2\hat{k}))-27}{9}\right|=\left|\frac{(3(6)-27}{9}\right|=1$ മാത്ര.

6.8.14 രണ്ട് തലങ്ങളുടെ പ്രതിഛേദരേഖയുടെ സമവാക്യം

$\vec{r}\cdot\vec{n}=p$ ഉം $\vec{r}\cdot\vec{m}=q$ ഉം സമാന്തരമല്ലാത്ത രണ്ട് തലങ്ങൾ എന്നിരിക്കട്ടെ $\vec{n}$ ഉം $\vec{m}$ ഉം യഥാക്രമം കൊടുത്തിട്ടുള്ള തലങ്ങളിലേക്കുള്ള ലംബമാണെന്ന് നമുക്കറിയാം അതുകൊണ്ട് തലങ്ങളുടെ പ്രതിഛേദ രേഖ $\vec{n}$ നും $\vec{m}$ നും ലംബമാണ് അതുകൊണ്ട് ഇത് സദിശം $\vec{n}\times\vec{m}$ ന് സമാന്തരമാണ് $\vec{n}\times\vec{m}=l_1\hat{i}+l_2\hat{j}+l_3\hat{k}$ എന്നിരിക്കട്ടെ.



ചിത്രം 6.33

$a_1x+b_1y+c_1z=p$, $a_2x+b_2y+c_2z=q$ എന്നിവ രണ്ട് തലങ്ങളുടെ സമവാക്യങ്ങൾ എന്ന് കരുതുക. തന്നിരിക്കുന്ന രണ്ട് തലങ്ങളുടെ പ്രതിഛേദ രേഖ നിർദ്ദേശാങ്ക തലങ്ങളിൽ ഒന്നെങ്കിലും വിഭജിക്കുന്നു. എളുപ്പവഴിയ്ക്കായി, നിർദ്ദേശാങ്ക തലം $z=0$ നേർരേഖയുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്നു എന്ന് സങ്കല്പിക്കുക $z=0$ എന്ന് ആരോപിച്ച് $a_1x+b_1y-p=0$, $a_2x+b_2y-q=0$.എന്നീ രണ്ട് സമവാക്യങ്ങൾ ലഭിക്കുന്നു. ഈ സമവാക്യങ്ങൾ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നതിലൂടെ യഥാക്രമം x,y ഇവയുടെ വിലകൾ x_1, y_1 എന്ന് കിട്ടുന്നു.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 271 15-02-2023 16:23:00

$l_1\hat{i}+l_2\hat{j}+l_3\hat{k}$, യ്ക്ക് സമാന്തരവും ആവശ്യപ്പെട്ട രേഖയിലെ ഒരു ബിന്ദുവാണ് $(x_1, y_1, 0)$ അതുകൊണ്ട് രേഖയുടെ സമവാക്യം $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{l_2}=\frac{z-0}{l_3}$.

6.8.15 തന്നിരിക്കുന്ന രണ്ട് തലങ്ങളുടെ പ്രതിഛേദ രേഖയിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന ഒരു തലത്തിന്റെ സമവാക്യം

സിദ്ധാന്തം 6.22

$\vec{r}\cdot\vec{n}_1=d_1$, $\vec{r}\cdot\vec{n}_2=d_2$ എന്നീ തലങ്ങളുടെ പ്രതിഛേദ രേഖയിലൂടെ കടന്നു പോകുന്ന തലത്തിന്റെ സദിശ സമവാക്യം $(\vec{r}\cdot\vec{n}_1-d_1)+\lambda(\vec{r}\cdot\vec{n}_2-d_2)=0$ ആണ് ഇവിടെ $\lambda\in\mathbb{R}$.

തെളിവ്

$$(\vec{r}\cdot\vec{n}_1-d_1)+\lambda(\vec{r}\cdot\vec{n}_2-d_2)=0 \qquad \ldots (1)$$

എന്ന സമവാക്യം പരിഗണിക്കുക

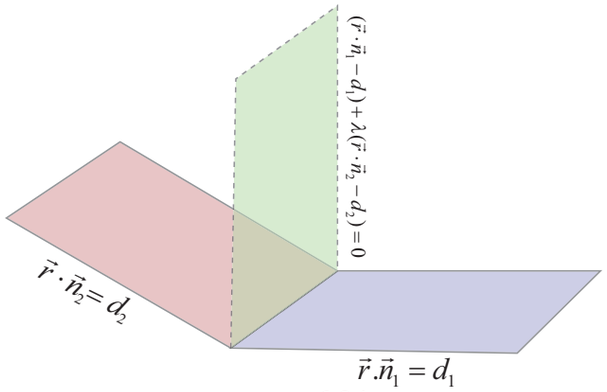
മുകളിലത്തെ സമവാക്യത്തെ ഇങ്ങനെ ലഘൂകരിക്കാൻ കഴിയും

$$\vec{r}\cdot(\vec{n}_1+\lambda\vec{n}_2)-(d_1+\lambda d_2)=0 \qquad \ldots (2)$$

$\vec{n}=\vec{n}_1+\lambda\vec{n}_2$, $d=(d_1+\lambda d_2)$.

എന്ന് ആരോപിച്ചാൽ സമവാക്യം (2) ഇങ്ങനെ ആയിത്തീരുന്നു

$$\vec{r}\cdot\vec{n}=d \qquad \ldots (3)$$



ചിത്രം 6.34

സമവാക്യം (3) ഒരു തലത്തെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. അങ്ങനെ സമവാക്യം (1) ഒരു തലത്തെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു.

തലത്തിന്റെ പ്രതിഛേദ രേഖയിലെ ഏതൊരു ബിന്ദുവിന്റെയും സ്ഥാന സദിശം $\vec{r}_1$ എന്നിരിക്കട്ടെ എന്നിട്ട് $\vec{r}_1$, $\vec{r}\cdot\vec{n}_1=d_1$, $\vec{r}\cdot\vec{n}_2=d_2$ എന്നീ രണ്ട് സമവാക്യങ്ങളെയും തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്നു

$$\vec{r}_1\cdot\vec{n}_1 = d_1 \qquad \ldots (4)$$

$$\vec{r}_2\cdot\vec{n}_2 = d_2 \qquad \ldots (5)$$

സമവാക്യം (4), (5) ഇവയിൽ നിന്ന് $\vec{r}_1$ സമവാക്യം (1) നെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്നു. അതിനാൽ പ്രതിഛേദരേഖയിലെ ഏതൊരു ബിന്ദുവും തലം (1) ൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു തലം (1) എന്നത് കൊടുത്തിട്ടുള്ള തലത്തിന്റെ പ്രതിഛേദരേഖ വഴി കടന്നുപോകുന്നു എന്ന് തെളിയിക്കുന്നു.

$a_1x+b_1y+c_1z=d_1$, $a_2x+b_2y+c_2z=d_2$ തലങ്ങൾ വഴി കടന്നു പോകുന്ന തലത്തിന്റെ നിർദ്ദേശാങ്ക സമവാക്യം

$(a_1x+b_1y+c_1z-d_1)+\lambda(a_2x+b_2y+c_2z-d_2)=0$ ആണ്.

ഉദാഹരണം 6.53

$\vec{r}\cdot(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})+1=0$, $\vec{r}\cdot(2\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k})=2$ എന്നീ തലങ്ങളുടെ പ്രതിഛേദ രേഖ വഴി കടന്നു പോകുന്നതും $(-1,2,1)$ എന്ന ബിന്ദു വഴി കടന്നു പോകുന്നതുമായ തലത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക .

നിർദ്ധാരണം

$\vec{r}\cdot\vec{n}_1=d_1$, $\vec{r}\cdot\vec{n}_2=d_2$ എന്ന തലങ്ങളുടെ പ്രതിഛേദ രേഖ വഴി കടന്നുപോകുന്ന തലത്തിന്റെ സമവാക്യം $(\vec{r}\cdot\vec{n}_1-d_1)+\lambda(\vec{r}\cdot\vec{n}_2-d_2)=0$ ആണ്

മുകളിലെ സമവാക്യത്തിൽ $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$, $\vec{n}_1=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{n}_2=2\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}$, $d_1=1, d_2=-2$ എന്ന് ആരോപിച്ചാൽ നമുക്ക് കിട്ടുന്നത്

$$(x+y+z+1)+\lambda(2x-3y+5z-2)=0$$

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 272 15-02-2023 16:23:02

ഈ തലം $(-1,2,1)$ എന്ന ബിന്ദുവഴി കടന്നുപോകുന്നതിനാൽ നമുക്ക് കിട്ടുന്നത് $\lambda=\frac{3}{5}$ ഉം എന്നാൽ ആവശ്യപ്പെട്ട തലത്തിന്റെ സമവാക്യം $11x-4y+20z=1$ ആണ്.

ഉദാഹരണം 6.54

$2x+3y-z+7=0$, $x+y-2z+5=0$ എന്നീ തലങ്ങളുടെ പ്രതിഛേദരേഖ വഴി കടന്നുപോകുന്നതും $x+y-3z-5=0$ എന്ന തലത്തിന് ലംബവുമായ തലത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$2x+3y-z+7=0$, $x+y-2z+5=0$ എന്നീ തലങ്ങളുടെ പ്രതിഛേദ രേഖ വഴി കടന്നുപോകുന്ന തലത്തിന്റെ സമവാക്യം $(2x+3y-z+7)+\lambda(x+y-2z+5)=0$ അല്ലെങ്കിൽ

$$(2+\lambda)x+(3+\lambda)y+(-1-2\lambda)z+(7+5\lambda)=0$$

ഈ തലം കൊടുത്തിട്ടുള്ള $x+y-3z-5=0$ എന്ന തലത്തിന് ലംബമായതിനാൽ ഈ രണ്ട് തലങ്ങളുടെ നോർമലുകൾ പരസ്പരം ലംബമാകും. അതുകൊണ്ട് നമുക്കറിയാം

$$(1)(2+\lambda)+(1)(3+\lambda)+(-3)(-1-2\lambda)z=0$$

അത് നല്കുന്ന $\lambda=-1$.അങ്ങനെ ആവശ്യപ്പെട്ട തലത്തിന്റെ സമവാക്യം

$$(2x+3y-z+7)-(x+y-2z+5)=0\Rightarrow x+2y+z+2=0\ .$$

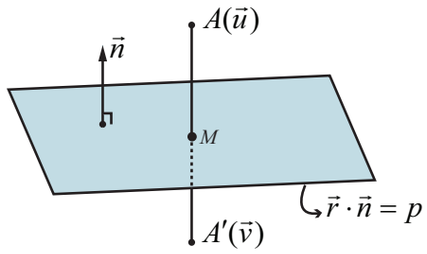
6.9 ഒരു തലത്തിലെ ബിന്ദുവിന്റെ ബിംബം

കൊടുത്തിട്ടുള്ള A എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാന സദിശം $\vec{u}$ എന്നിരിക്കട്ടെ. തലത്തിന്റെ സമവാക്യം $\vec{r}\cdot\vec{n}=p$ എന്നിരിക്കട്ടെ. ഒരു തലത്തിലെ A എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ ബിംബം A' ന്റെ സ്ഥാന സദിശം $\vec{v}$ എന്നിരിക്കട്ടെ എന്നിട്ട് $\overrightarrow{AA'}$ എന്നത് തലത്തിന് ലംബമാകും അതിനാൽ ഇത് $\vec{n}$ ന് സമാന്തരം എന്നിട്ട്

$$\overrightarrow{AA'}=\lambda\vec{n} \text{ അല്ലെങ്കിൽ } \vec{v}-\vec{u}=\lambda\vec{n}\ \Rightarrow\ \vec{v}=\vec{u}+\lambda\vec{n} \qquad \ldots(1)$$

AA' ന്റെ മധ്യബിന്ദു M എന്നിരിക്കട്ടെ എന്നാൽ M ന്റെ സ്ഥാന സദിശം $\frac{\vec{u}+\vec{v}}{2}$ ആകുന്നു. എന്നാൽ M തലത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു.

അതുകൊണ്ട്, $\left(\frac{\vec{u}+\vec{v}}{2}\right)\cdot\vec{n}=p$. ... (2)



ചിത്രം 6.35

സമവാക്യം (1) നെ സമവാക്യം (2) ൽ ആരോപിച്ചാൽ കിട്ടുന്നത്

$$\left(\frac{\vec{u}+\lambda\vec{n}+\vec{u}}{2}\right)\cdot\vec{n}=p\ \Rightarrow\ \lambda=\frac{2\left[p-(\vec{u}\cdot\vec{n})\right]}{|\vec{n}|^2}$$

അതുകൊണ്ട് A' ന്റെ സ്ഥാന സദിശം

$\vec{v}=\vec{u}+\frac{2[p-(\vec{u}\cdot\vec{n})]}{|\vec{n}|^2}$ ആണ്

കുറിപ്പ്

AA' ന്റെ മധ്യബിന്ദു M എന്നത് A എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് $\vec{r}\cdot\vec{n}=p$. എന്ന തലത്തിലേക്ക് വരയ്ക്കുന്ന ലംബത്തിന്റെ പാദമാകും. അതുകൊണ്ട് ലംബത്തിന്റെ പാദം M ന്റെ സ്ഥാനസദിശം .

$$\frac{\vec{u}+\vec{v}}{2}=\frac{\vec{u}}{2}+\frac{1}{2}\left(\vec{u}+\frac{2[p-(\vec{u}\cdot\vec{n})}{|\vec{n}|^2}\vec{n}\right)$$

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 273 15-02-2023 16:23:04

6.9.1 ഒരു തലത്തിലെ ബിന്ദുവിന്റെ ബിംബത്തിന്റെ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ

തലത്തിൽ ബിംബം കാണുന്നതിന് ആവശ്യമായ ബിന്ദു (a_1, a_2, a_3) ൽ സ്ഥാനസദിശം $\vec{u}$ എന്നിരിക്കട്ടെ എന്നിട്ട് $\vec{u} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$.

കൊടുക്കപ്പെട്ട തലത്തിന്റെ സമവാക്യം $ax + by + cz = d$ എന്നിരിക്കട്ടെ ഈ സമവാക്യത്തെ സദിശ രൂപത്തിൽ എഴുതിയാല നമുക്ക് കിട്ടുന്നു $\vec{r} \cdot \vec{n} = p$ അവിടെ $\vec{n} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ എന്നിട്ട് ബിംബത്തിന്റെ സ്ഥാനസദിശം എന്നത്

$$\vec{v} = \vec{u} + \frac{2\left[p - (\vec{u} \cdot \vec{n})\right]}{|\vec{n}|^2}\vec{n}.$$

If $\vec{v} = v_1\hat{i} + v_2\hat{j} + v_3\hat{k}$, എങ്കിൽ $v_1 = a_1 + 2a\alpha$, $v_2 = a_2 + 2a\alpha$, $v_3 = a_3 + 2a\alpha$

$$\text{അവിടെ } \alpha = \frac{2\left[p - (aa_1 + ba_2 + ca_3)\right]}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

ഉദാഹരണം 6.55

$\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ എന്ന സ്ഥാനസദിശം ഉള്ള ബിന്ദുവിന്റെ ബിംബത്തെ $\vec{r} \cdot \left(\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}\right) = 38$ എന്ന തലത്തിൽ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

ഇവിടെ, $\vec{u} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{n} = \hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}$, $p = 38$. $\vec{v}$

$\vec{u} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ $\quad$ $\vec{v} = \vec{u} + \frac{2\left[p - (\vec{u} \cdot \vec{n})\right]}{|\vec{n}|^2}\vec{n}$ എന്ന ബിംബത്തിന്റെ.

$$\vec{v} = \left(\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}\right) + \frac{2\left[38 - \left(\left(\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}\right) \cdot \left(\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}\right)\right)\right]}{\left(\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}\right) \cdot \left(\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}\right)}\left(\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}\right).$$

അതായത്, $\vec{v} = \left(\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}\right) + 2\left(\frac{38 - 17}{21}\right)\left(\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}\right) = 3\hat{i} + 6\hat{j} + 11\hat{k}$.

അതുകൊണ്ട് സ്ഥാന സദിശം $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ ഉള്ള ബിന്ദുവിന്റെ ബിംബം $3\hat{u} + 6\hat{} + 11\hat{}$ ആകുന്നു.

കുറിപ്പ്

$\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ എന്ന സ്ഥാനസദിശം ഉള്ള ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് കൊടുത്തിട്ടുള്ള തലത്തിലേക്ക് വയ്ക്കുന്ന ലംബത്തിന്റെ പാദം എന്നത്

$$\frac{(\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + (3\hat{i} + 6\hat{j} + 11\hat{k})}{2} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 7\hat{k}.$$

6.10 ഒരു നേർരേഖയുംഒരു തലവും സന്ധിക്കുന്ന ബിന്ദു

സിദ്ധാന്തം 6.23

$\vec{r} = \vec{a} + t\vec{b}$ നേർരേഖയും $\vec{r} \cdot \vec{n} = p$ എന്ന തലവവും സന്ധിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാന സദിശം $\vec{a} + \left(\frac{p - (\vec{a} \cdot \vec{n})}{\vec{b} \cdot \vec{n}}\right)\vec{b}$, ഇവിടെ $\vec{b} \cdot \vec{n} \neq 0$.

തെളിവ്

കൊടുത്തിട്ടുള്ള $\vec{r} = \vec{a} + t\vec{b}$ എന്ന തലത്തിന് സമാന്തരമല്ലാത്ത കൊടുത്തിട്ടുള്ള നേർരേഖയുടെ സമവാക്യം $\vec{r} \cdot \vec{n} = p$. എന്നിരിക്കട്ടെ അതുകൊണ്ട്, $\vec{b} \cdot \vec{n} \neq 0$.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 274 15-02-2023 16:23:05

തലത്തെ നേർരേഖ പ്രതിഛേദിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാന സദിശം $\vec{u}$ എന്നിരിക്കട്ടെ അതായത് t എന്ന വിലയ്ക്ക് $\vec{u}$ എന്നത് $\vec{r}=\vec{a}+t\vec{b}$, $\vec{r}\cdot\vec{n}=p$ എന്നിവയെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്നു. അതുകൊണ്ട് നമുക്ക് കിട്ടുന്നത്

$$\vec{u}=\vec{a}+t\vec{b} \quad \ldots (1)$$

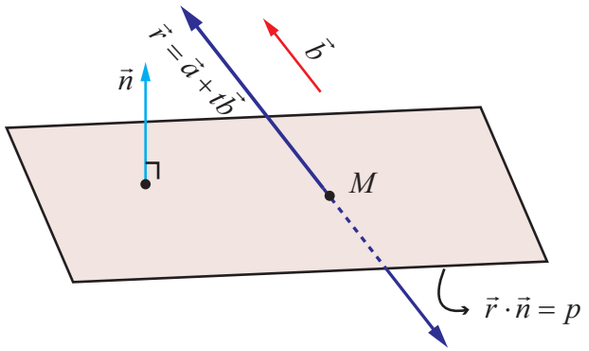
$$\vec{u}\cdot\vec{n}=p \quad \ldots (2)$$

സമവാക്യം (1) സമവാക്യം (2), ൽ ആരോപിച്ചാൽ നമുക്ക് കിട്ടുന്നു

$$\left(\vec{a}+t_1\vec{b}\right)\cdot\vec{n}=p$$

അല്ലെങ്കിൽ $\vec{a}\cdot\vec{n}+t_1\left(\vec{b}\cdot\vec{n}\right)=p$

അല്ലെങ്കിൽ $t_1=\dfrac{p-\left(\vec{a}\cdot\vec{n}\right)}{\vec{b}\cdot\vec{n}}$ ...(3)



ചിത്രം 6.36

സമവാക്യം (3) സമവാക്യം (1), ആരോപിച്ചാൽ നമുക്ക് കിട്ടുന്നു

$$\vec{u}=\vec{a}+\left(\frac{p-\left(\vec{a}\cdot\vec{n}\right)}{\vec{b}\cdot\vec{n}}\right)\vec{b},\ \vec{b}\cdot\vec{n}\neq 0$$

ഉദാഹരണം 6.56

$\vec{r}=\left(2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}\right)+t\left(3\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k}\right)$ എന്ന നേർരേഖ $x-y+z-5=0$ എന്ന തലത്തെ പ്രതിഛേദിക്കുന്ന നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

ഇവിടെ, $\vec{a}=2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k},\ \vec{b}=3\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k}$.

കൊടുത്തിട്ടുള്ള തലത്തിന്റെ സദിശ സമവാക്യം $\vec{r}\cdot\left(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\right)=5$ എന്നാൽ $\vec{n}=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ ഉം $p=5$ ഉം ആണ്.

$\vec{r}=\vec{a}+t\vec{b}$ എന്ന നേർരേഖയും $\vec{r}\cdot\vec{d}=p$ എന്ന തലവും പ്രതിഛേദിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാന സദിശം $\vec{u}=\vec{a}+\left(\dfrac{p-\left(\vec{a}\cdot\vec{n}\right)}{\vec{b}\cdot\vec{n}}\right)\vec{b}$, അവിടെ $\vec{b}\cdot\vec{n}\neq 0$ എന്ന് അറിയാം.

വ്യക്തമായി നമ്മൾ നിരീക്ഷിക്കുന്നു $\vec{b}\cdot\vec{n}\neq 0$.

ഇപ്പോൾ, $\dfrac{p-\vec{a}\cdot\vec{n}}{\vec{b}\cdot\vec{n}}=\dfrac{5-\left(2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}\right)\cdot\left(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\right)}{\left(3\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k}\right)\cdot\left(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\right)}=0$ അതുകൊണ്ട് കൊടുത്തിട്ടുള്ള നേർരേഖയും തലവും പ്രതിഛേദിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാന സദിശം

$$\vec{r}=\left(2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}\right)+(0)\left(3\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k}\right)=2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$$

അതായത് കൊടുത്തിട്ടുള്ള നേർരേഖ തലത്തെ പ്രതിഛേദിക്കുന്ന ബിന്ദു $(2,-1,2)$ ആകും.

മറ്റൊരു രീതി

കൊടുത്തിട്ടുള്ള നേർരേഖയുടെ നിർദ്ദേശാങ്ക സമവാക്യം $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z-2}{2}=t$ (എന്ന് പറയുക)

ഈ നേർരേഖയിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്ന ഏതൊരു ബിന്ദുവും $(3t+2,4t-1,2t+2)$ എന്ന രൂപത്തിലാണ്. കൊടുത്തിട്ടുള്ള നേർരേഖയും തലവും പ്രതിഛേദിക്കുന്നു. എങ്കിൽ ഈ ബിന്ദു $x-y+z-5=0$ എന്ന തലത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യും. അതിനാൽ, $(3t+2)-(4t-1)+(2t+2)-5=0\Rightarrow t=0$ അതുകൊണ്ട് കൊടുത്തതിട്ടുള്ള നേർരേഖ കൊടുത്തിട്ടുള്ള തലത്തെ $(2,-1,2)$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ പ്രതിഛേദിക്കുന്നു.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 275 15-02-2023 16:23:08

അഭ്യാസം 6.9

1. $\vec{r}\cdot\left(2\hat{i}-7\hat{j}+4\hat{k}\right)=3$, $3x-5y+4z+11=0$ എന്നീ തലങ്ങളുടെ പ്രതി ഛേദബിന്ദുവഴിയും $(-2,1,3)$ എന്ന ബിന്ദു വഴിയും കടന്നുപോകുന്ന തലത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക.
2. $x+2y+3z=2$, $x-y+z=3$ എന്നീ തലങ്ങളുടെ പ്രതിഛേദ ബിന്ദു വഴി കടന്നു പോകുന്നതും $(3,1,-1)$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് $\frac{2}{\sqrt{3}}$ അകലത്തിൽ ഉള്ളതുമായ തലത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക.
3. $\vec{r}=\left(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\right)+t\left(\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}\right)$ എന്ന നേർരേഖയ്ക്കും $\vec{r}\cdot\left(6\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}\right)=8$ എന്ന തലത്തിനും ഇടയിലുള്ള കോൺ കാണുക
4. $\vec{r}\cdot\left(\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}\right)=3$, $2x-2y+z=2$ എന്നീ തലങ്ങൾക്ക് ഇടയിലുള്ള കോൺ കാണുക.
5. $(3,4,-1)$ എന്ന ബിന്ദുവഴി കടന്നു പോകുന്നതും $2x-3y+5z+7=0$ എന്ന തലത്തിന് സമാന്തരവുമായ തലത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക. കൂടാതെ ഈ തലങ്ങൾക്ക് ഇടയിലുള്ള അകലവും കാണുക.
6. $(1,-2,3)$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് $x-y+z=5$ എന്ന തലത്തിലേക്ക് ഉള്ള ലംബത്തിന്റെ നീളം കാണുക.
7. $x-1=\frac{y}{2}=z+1$ എന്ന നേർരേഖയുടെയും $2x-y+2z=2$ എന്ന തലത്തിന്റെയും പ്രതിഛേദബിന്ദു കാണുക. കൂടാതെ നേർരേഖയ്ക്കും തലത്തിനും ഇടയിലുള്ള കോണും കാണുക.
8. $(4,3,2)$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് $x+2y+3z=2$ എന്ന തലത്തില വരയ്ക്കുന്ന ലംബത്തിന്റെ പാദത്തിന്റെ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ കാണുകയും, ലംബത്തിന്റെ നീളവും കാണുക.



അഭ്യാസം 6.10



കൊടുത്തിട്ടുള്ളവയിൽ നിന്ന് ശരിയായതോ അല്ലെങ്കിൽ ഏറ്റവും യോജിച്ചതോ ആയ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുത്തെഴുതുക :

1. $\vec{a}$, $\vec{b}$ എന്നിവ സമാന്തര സദിശങ്ങൾ എങ്കിൽ $[\vec{a},\vec{c},\vec{b}]$ യ്ക്ക് സമമായത്
   (1) 2 (2) -1 (3) 1 (4) 0
2. $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ എന്നിവ ഉൾപ്പെട്ട തലത്തിൽ $\vec{\alpha}$ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു എങ്കിൽ
   (1) $[\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}]=1$ (2) $[\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}]=-1$ (3) $[\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}]=0$ (4) $[\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}]=2$
3. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0$, എങ്കിൽ $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$ യുടെ മൂല്യം
   (1) $|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,|\vec{c}|$ (2) $\frac{1}{3}|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,|\vec{c}|$ (3) 1 (4) -1
4. $\vec{b}$ യ്ക്ക് ലംബവും $\vec{c}$ യ്ക്ക് സമാന്തരവുമായ $\vec{a}$ എന്ന പോലുള്ള മൂന്ന് യൂണിറ്റ് സദിശങ്ങൾ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ എങ്കിൽ $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ യ്ക്ക് സമാനമായത്
   (1) $\vec{a}$ (2) $\vec{b}$ (3) $\vec{c}$ (4) $\vec{0}$
5. $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=1$, എങ്കിൽ $\frac{\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})}{(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}}+\frac{\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})}{(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}}+\frac{\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})}{(\vec{c}\times\vec{b})\cdot\vec{a}}$ യുടെ മൂല്യം
   (1) 1 (2) -1 (3) 2 (4) 3
6. $\hat{i}+\hat{j}$, $\hat{i}+2\hat{j}$, $\hat{i}+\hat{j}+\pi\hat{k}$ എന്നീ സദിശങ്ങൾ വശങ്ങളോട് കൂടിയ സമാന്തര പൈപ്പിന്റെ വ്യാപ്തം
   (1) $\frac{\pi}{2}$ (2) $\frac{\pi}{3}$ (3) π (4) $\frac{\pi}{4}$

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 276 15-02-2023 16:23:10

7. $\vec{a}$ യും $\vec{b}$ യും യൂണിറ്റ് സദിശങ്ങളും $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}\times\vec{b}]=\frac{1}{4}$, യും എങ്കിൽ $\vec{a}$ യ്ക്കും $\vec{b}$ യ്ക്കും ഇടയിലുള്ള കോൺ

(1) $\frac{\pi}{6}$ (2) $\frac{\pi}{4}$ (3) $\frac{\pi}{3}$ (4) $\frac{\pi}{2}$

8. $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k},\ \vec{b}=\hat{i}+\hat{j},\ \vec{c}=\hat{i}$ യും $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$, യും എങ്കിൽ $\lambda+\mu$ ന്റെ മൂല്യം

(1) 0 (2) 1 (3) 6 (4) 3

9. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ എന്നിവ കോപ്ലനാർ അല്ലാത്ത, പൂജ്യമല്ലാത്ത സദിശങ്ങളും $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]=3$ യും എങ്കിൽ $\{[\vec{a}\times\vec{b}, \vec{b}\times\vec{c}, \vec{c}\times\vec{a}]\}^2$ യ്ക്ക് സമമായത്

(1) 81 (2) 9 (3) 27 (4)18

10. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ എന്നിവ മൂന്ന് നോൺ കോപ്ലനാർ യൂണിറ്റ് സദിശങ്ങളും $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{\sqrt{2}}$, യും എങ്കിൽ $\vec{a}$ യ്ക്കും $\vec{b}$ യ്ക്കും ഇടയിലുള്ള കോൺ

(1) $\frac{\pi}{2}$ (2) $\frac{3\pi}{4}$ (3) $\frac{\pi}{4}$ (4) π

11. $\vec{a}\times\vec{b},\ \vec{b}\times\vec{c},\ \vec{c}\times\vec{a}$ എന്നിവ ഒരു ബിന്ദുവിൽ സന്ധിക്കുന്ന വക്കുകൾ ഉള്ള സമാന്തരപൈപ്പിന്റെ വ്യാപ്തം 8 ഘനമാത്രകൾ എങ്കിൽ $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{b}\times\vec{c}),(\vec{b}\times\vec{c})\times(\vec{c}\times\vec{a})$, $(\vec{c}\times\vec{a})\times(\vec{a}\times\vec{b})$ എന്നിവ ഒരു ബിന്ദുവിൽ സന്ധിക്കുന്ന വക്കുകൾ ഉള്ള സമാന്തര പൈപ്പിന്റെ വ്യാപ്തം

(1) 8 ഘനമാത്രകൾ (2) 512 ഘനമാത്രകൾ (3) 64 ഘനമാത്രകൾ (4) 24 ഘനമാത്രകൾ

12. $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ എന്നീ സദിശങ്ങളെ പരിഗണിച്ചാൽ $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=\vec{0}$ ആകും P_1, P_2 എന്നീ ഒരു ജോടി സദിശങ്ങളും $\vec{a},\vec{b}$, $\vec{c},\vec{d}$ എന്നീ ഒരു ജോടി സദിശങ്ങളും സ്ഥിതി ചെയ്യുന്ന തലങ്ങൾ യഥാക്രമം P_1 , P_2 എന്നിരിക്കട്ടെ. എന്നാൽ P_1 നും P_2 നും ഇടയിലുള്ള കോൺ

(1) $0°$ (2) $45°$ (3) $60°$ (4) $90°$

13. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ എന്നിവ $\vec{b}\cdot\vec{c}\neq 0$, $\vec{a}\cdot\vec{b}\neq 0$ എന്നുള്ള മൂന്ന് സദിശങ്ങളും $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$, എങ്കിൽ $\vec{a}$ യും $\vec{c}$ യും എന്നിവ

(1) ലംബം (2) സമാന്തരം

(3) $\frac{\pi}{3}$ കോൺ ചരിവുള്ള (4) $\frac{\pi}{6}$ കോൺ ചരിവുള്ള

14. $\vec{a}=2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k},\ \vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}-5\hat{k},\ \vec{c}=3\hat{i}+5\hat{j}-\hat{k}$, എങ്കിൽ $\vec{a}$ യ്ക്ക് ലംബമായതും $\vec{b}$, $\vec{c}$ എന്നീ സദിശങ്ങള ഉൾക്കൊള്ളുന്ന തലത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്ന സദിശം

(1) $-17\hat{i}+21\hat{j}-97\hat{k}$ (2) $17\hat{i}+21\hat{j}-123\hat{k}$

(3) $-17\hat{i}-21\hat{j}+97\hat{k}$ (4) $-17\hat{i}-21\hat{j}-97\hat{k}$

15. $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-2}, z=2$, $\frac{x-1}{1}=\frac{2y+3}{3}=\frac{z+5}{2}$ എന്നീ രേഖകൾക്കിടയിലുള്ള കോൺ

(1) $\frac{\pi}{6}$ (2) $\frac{\pi}{4}$ (3) $\frac{\pi}{3}$ (4) $\frac{\pi}{2}$

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 277 15-02-2023 16:23:14

16. $\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-5}=\frac{z+2}{2}$ എന്ന നേർരേഖ $x+3y-\alpha z+\beta=0,$ എന്ന തലത്തില സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു എങ്കിൽ (α,β) എന്നത്

(1) $(-5,5)$ (2) $(-6,7)$ (3) $(5,-5)$ (4) $(6,-7)$

17. $\vec{r}=(\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})+t(2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k})$ എന്ന നേർരേഖയ്ക്കും $\vec{r}\cdot(\hat{i}+\hat{j})+4=0$ എന്ന തലത്തിനും ഇടയിലുള്ള കോൺ

(1) $0°$ (2) $30°$ (3) $45°$ (4) $90°$

18. $\vec{r}=(6\hat{i}-\hat{j}-3\hat{k})+t(-\hat{i}+4\hat{k})$ എന്ന നേർരേഖ $\vec{r}.(\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})=3$ എന്ന തലത്തെ സന്ധിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ എന്നത്

(1) $(2,1,0)$ (2) $(7,-1,-7)$ (3) $(1,2,-6)$ (4) $(5,-1,1)$

19. മൂലബിന്ദുവിൽ നിന്ന് $3x-6y+2z+7=0$ എന്ന തലത്തിലേക്ക് ഉള്ള അകലം

(1) (2) 1 (3) 2 (4) 3

20. $x+2y+3z+7=0,\ 2x+4y+6z+7=0$ എന്നീ തലങ്ങൾക്ക് ഇടയിലുള്ള അകലം എന്നത്

(1) $\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$ (2) $\frac{7}{2}$ (3) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ (4) $\frac{7}{2\sqrt{2}}$

21. ഒരു നേർരേഖയുടെ ദിശ കൊസൈനുകൾ $\frac{1}{c},\frac{1}{c},\frac{1}{c},$ എങ്കിൽ

(1) $c=\pm3$ (2) $c=\pm\sqrt{3}$ (3) $c>0$ (4) $0<c<1$

22. $\vec{r}=(\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k})+t(6\hat{j}-\hat{k})$ എന്ന സദിശ സമവാക്യം പ്രതിനിധീകരിക്കുന്ന നേർരേഖ കടന്നു പോകുന്ന ബിന്ദുക്കൾ

(1) $(0,6,-1)\,.\,(1,-2,-1)$ (2) $(0,6,-1)\,.\,(-1,-4,-2)$

(3) $(1,-2,-1)\,.\,(1,4,-2)$ (4) $(1,-2,-1)\,.\,(0,-6,1)$

23. മൂല ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് $(1,1,1)$ എന്ന ബിന്ദുവിക്കുള്ള അകലം എന്നത് $x+y+z+k=0$, എന്ന തലത്തിൽ നിന്ന് ആ ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലത്തിന്റെ പാതി എങ്കിൽ k യുടെ വിലകൾ

(1) ±3 (2) ±6 (3) $-3,9$ (4) $3,-9$

24. $\vec{r}.(2\hat{i}-\lambda\hat{j}+\hat{k})=3,\ \vec{r}.(4\hat{i}+\hat{j}-\mu\hat{k})=5$ എന്നീ തലങ്ങൾ സമാന്തരമെങ്കിൽ λ യുടെയും μ ന്റെയും വില

(1) $\frac{1}{2},-2$ (2) $-\frac{1}{2},2$ (3) $-\frac{1}{2},-2$ (4) $\frac{1}{2},2$

25. മൂലബിന്ദുവിൽ നിന്ന് $2x+3y+\lambda z=1,\ \lambda>0$ എന്ന തലത്തിലേക്കുള്ള ലംബത്തിന്റെ നീളം $\frac{1}{5}$, then എങ്കിൽ λ യുടെ വില

(1) $2\sqrt{3}$ (2) $3\sqrt{2}$ (3) 0 (4) 1

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 278 15-02-2023 16:23:16

സംഗ്രഹം

1. കൊടുത്തിട്ടുള്ള മൂന്ന് സദിശങ്ങൾ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ എങ്കിൽ അദിശം $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ എന്നത് $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ യുടെ **അദിശ ട്രിപ്പിൾ ഗുണനം** എന്ന് വിളിക്കുന്നു
2. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ എന്ന മൂന്ന് സദിശങ്ങൾ ഒരേ ബിന്ദുവിൽ സന്ധിക്കുന്ന വക്കുകളാൽ രൂപീകൃതമാകുന്ന സമാന്തരപൈപ്പിന്റെ വ്യാപ്തം $\left|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\right|$ ആകുന്നു.
3. പൂജ്യമല്ലാത്ത മൂന്ന് സദിശങ്ങളുടെ അദിശ ട്രിപ്പിൾ ഗുണനം പൂജ്യം എന്ന് ഇരുന്നാൽ മാത്രമേ മൂന്ന് സദിശങ്ങളും കോപ്ലനാർ ആകുക ഉള്ളൂ.
4. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ എന്നീ മൂന്ന് സദിശങ്ങൾ കോപ്ലനാർ എങ്കിൽ $r,s,t\in\mathbb{R}$ എന്നീ അദിശങ്ങൾ നിലനിൽക്കുകയും കുറഞ്ഞ പക്ഷം അവയിൽ ഒന്നെങ്കിലും പൂജ്യം അല്ലാതുകയും $r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}=\vec{0}$ ആകുകയും ചെയ്യും.
5. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ എന്നിവ മൂന്ന് സദിശങ്ങളുടെ ഏതെങ്കിലും രണ്ട് വ്യൂഹങ്ങൾ $\vec{p}=x_1\vec{a}+y_1\vec{b}+z_1\vec{c}$, $\vec{q}=x_2\vec{a}+y_2\vec{b}+z_2\vec{c}$, $\vec{r}=x_3\vec{a}+y_3\vec{b}+z_3\vec{c}$, എങ്കിൽ $\left[\vec{p},\vec{q},\vec{r}\right]=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]$.
6. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ എന്നിവ കൊടുത്തിട്ടുള്ള മൂന്ന് സദിശങ്ങൾക്ക് സദിശം $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ നെ **സദിശ ട്രിപ്പിൾ ഗുണനം** എന്ന് വിളിക്കാം.
7. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ എന്ന ഏതെങ്കിലും മൂന്ന് സദിശങ്ങൾക്ക് $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$ എന്ന് നമുക്കറിയാം.
8. $\vec{a}$ സ്ഥാന സദിശമുള്ള കൊടുത്തിട്ടുള്ള ബിന്ദുവഴി കടന്നുപോകുന്നതും കൊടുത്തിട്ടുള്ള സദിശം $\vec{b}$ യ്ക്ക് സമാന്തരമായ നേർരേഖയുടെ സദിശ സമവാക്യം പാരാമെട്രിക് രൂപത്തിൽ $\vec{r}=\vec{a}+t\vec{b}$, ഇവിടെ $t\in\mathbb{R}$. ആകും
9. (x_1,y_1,z_1) എന്ന ബിന്ദുവഴി കടന്നുപോകുന്നതും b_1,b_2,b_3 എന്നീ ദിശ അനുപാതത്തോടു കൂടിയ സദിശത്തിന് സമാന്തരവുമായ നേർരേഖയുടെ നിർദ്ദേശാങ്ക സമവാക്യം $\frac{x-x_1}{b_1}=\frac{y-y_1}{b_2}=\frac{z-z_1}{b_3}$.
10. $\frac{x-x_1}{b_1}=\frac{y-y_1}{b_2}=\frac{z-z_1}{b_3}$ എന്ന നേർരേഖയിൽ ഉള്ള ഏതൊരു ബിന്ദുവും $(x_1+tb_1,\ y_1+tb_2,\ z_1+tb_3)$ $t\in\mathbb{R}$. എന്ന രൂപത്തിലായിരിക്കും
11. $\vec{a}$, $\vec{b}$ എന്നീ സ്ഥാനസദിശങ്ങളുള്ള രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ വഴി കടന്നു പോകുന്നതുമായ നേർരേഖയുടെ പാരാമെട്രിക് രൂപത്തിൽ സദിശ സമവാക്യം $\vec{r}=\vec{a}+t\left(\vec{b}-\vec{a}\right), t\in\mathbb{R}$. ആണ്
12. (x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2) എന്നീ രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ വഴി കടന്നു പോകുന്ന നേർരേഖയുടെ നിർദ്ദേശാങ്ക സമവാക്യം $\frac{x\ \Re x_{ü}}{x_2\ \Re x_1}=\frac{y\ \ y}{y_2\ \ y_1}=\frac{z\ \ z}{z_2\ \ z_1}$.
13. $\vec{r}=\vec{a}+s\vec{b}$, $\vec{r}=\vec{c}+t\vec{d}$ എന്നീ രണ്ട് നേർരേഖയ്ക്കും ഇടയിലുള്ള ന്യൂനകോൺ θ എങ്കിൽ $\theta=\cos^{-1}\left(\frac{\left|\vec{b}\cdot\vec{d}\right|}{\left|\vec{b}\right|\left|\vec{d}\right|}\right)$
14. രണ്ട് നേർരേഖകൾ ഒരേ തലത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു. എങ്കിൽ അവയെ കോപ്ലനാർ എന്ന് പറയാം.
15. ശൂന്യതയിലെ സമാന്തരമല്ലാത്തതും പ്രതിഛേദിക്കാത്തതുമായ രണ്ട് രേഖകളെ **ചരിഞ്ഞ രേഖകൾ** എന്ന് വിളിക്കാം
16. രണ്ട് ചരിഞ്ഞ രേഖകൾക്ക് ഇടയിലുള്ള ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ദൂരം എന്നത് അവയ്ക്കിടയിലെ ലംബമായ രേഖാഖണ്ഡത്തിന്റെ നീളമായിരിക്കും.
17. $\vec{r}=\vec{a}+s\vec{b}$, $\vec{r}=\vec{c}+t\vec{d}$ എന്നീ രണ്ട് ചരിഞ്ഞ രേഖകൾക്ക് ഇടയിലുള്ള ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ദൂരം $\delta=\frac{\left|(\vec{c}-\vec{a})\cdot\left(\vec{b}\times\vec{d}\right)\right|}{\left|\vec{b}\times\vec{d}\right|}$ അവിടെ $|\vec{b}\times\vec{d}|\neq 0$.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 279 15-02-2023 16:23:20

18. $\vec{r} = \vec{a} + s\vec{b}$, $\vec{r} = \vec{c} + t\vec{d}$ എന്നീ രണ്ട് നേർരേഖകൾ പരസ്പരം പ്രതിഛേദിക്കുന്നു എങ്കിൽ $(\vec{c} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} \times \vec{d}) = 0$ ആകും

19. $\vec{r} = \vec{a} + s\vec{b}$, $\vec{r} = \vec{c} + t\vec{b}$ എന്നീ രണ്ട് സമാന്തര രേഖകൾക്ക് ഇടയിലുള്ള ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ദൂരം $d = \dfrac{\left|(\vec{c} - \vec{a}) \times \vec{b}\right|}{\left|\vec{b}\right|}$, അവിടെ $|\vec{b}| \neq 0$ ആണ്

20. $\dfrac{x - x_1}{b_1} = \dfrac{y - y_1}{b_2} = \dfrac{z - z_1}{b_3}$, $\dfrac{x - x_2}{d_1} = \dfrac{y - y_2}{d_2} = \dfrac{z - z_2}{d_3}$ എന്നീ രണ്ട് നേർരേഖകൾ പ്രതിഛേദിക്കുന്നു എങ്കിൽ $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = 0$ ആകും.

21. ഒരു തലത്തിന് ലംബമായ നേർരേഖയെ ആ തലത്തിന്റെ നോർമൽ എന്ന് വിളിക്കാം.

22. മൂലബിന്ദുവിൽ നിന്ന് തലത്തിലേക്കുള്ള ദൂരം p യും തലത്തിന് ലംബമായ യൂണിറ്റ് നോർമൽ സദിശം $\hat{d}$ യും എങ്കിൽ തലത്തിന്റെ സമവാക്യം $\vec{r} \cdot \hat{d} = p$ (നോർമൽ രൂപം)

23. നോർമൽ രൂപത്തിൽ തലത്തിന്റെ നിർദ്ദേശാങ്ക സമവാക്യം $lx + my + nz = p$ ആണ്

24. $\vec{a}$ സ്ഥാന സദിശം ഉള്ള ബിന്ദുവഴിയായി കടന്നുപോകുന്നതും $\vec{n}$ ന് ലംബവുമായ തലത്തിന്റെ സദിശ സമവാക്യം $(\vec{r} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$ ആണ് .

25. (x_1, y_1, z_1) എന്ന ബിന്ദുവഴിയായി കടന്നു പോകുന്നതും a,b,c എന്നിവ ദിശ അനുപാതങ്ങളുള്ള സദിശത്തിന് ലംബവുമായ തലത്തിന്റെ നിർദ്ദേശാങ്ക സമവാക്യം $a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$ ആണ്.

26. x, y, z അക്ഷങ്ങളിൽ യഥാക്രമം a,b,c എന്നീ അന്തഃഖണ്ഡങ്ങൾ ഉള്ള $\vec{r} \cdot \vec{n} = q$ എന്ന തലത്തിന്റെ അന്തഃഖണ്ഡ രൂപ സമവാക്യം $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$ എന്നാണ്.

27. സമരേഖീയമല്ലാത്ത മൂന്ന് ബിന്ദുക്കൾ വഴിയായി കടന്നുപോകുന്ന തലത്തിന്റെ പാരാമെട്രിക് രൂപത്തിൽ സദിശ സമവാക്യം $\vec{r} = \vec{a} + s(\vec{b} - \vec{a}) + t(\vec{c} - \vec{a})$ ആണ്.

28. സമരേഖീയമല്ലാത്ത മൂന്ന് ബിന്ദുക്കൾ വഴി കടന്നു പോകുന്ന തലത്തിന്റെ നിർദ്ദേശാങ്ക സമവാക്യം $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$.

29. ഒരു നേർരേഖയിൽ ഉള്ള ഓരോ ബിന്ദുവും തലത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുകയും കൂടാതെ തലത്തിന്റെ നോർമൽ നേർരേഖയ്ക്ക് ലംബവുമായാൽ, ആ നേർരേഖ തലത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യും.

30. $\vec{r} = \vec{a} + s\vec{b}$, $\vec{r} = \vec{c} + t\vec{d}$ എന്നീ സമാന്തരമല്ലാത്ത രണ്ട് നേർരേഖകൾ കോപ്ലനാർ എങ്കിൽ $(\vec{c} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} \times \vec{d}) = 0$

31. $\dfrac{x - x_1}{b_1} = \dfrac{y - y_1}{b_2} = \dfrac{z - z_1}{b_3}$, $\dfrac{x - x_2}{d_1} = \dfrac{y - y_2}{d_2} = \dfrac{z - z_2}{d_3}$ എന്നി നേർരേഖകൾ കോപ്ലനർ എങ്കിൽ $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = 0$

32. $\vec{r} = \vec{a} + s\vec{b}$, $\vec{r} = \vec{c} + t\vec{d}$ എന്നിവ ഒരേ തലത്തിൽ ഉള്ള രണ്ട് കോപ്ലനാർ രേഖകൾ ഉള്ള തലത്തിന്റെ നോൺ പാരാമെട്രിക് രൂപത്തിൽ സദിശ സമവാക്യം $(\vec{r} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} \times \vec{d}) = 0$ അല്ലെങ്കിൽ $(\vec{r} - \vec{c}) \cdot (\vec{b} \times \vec{d}) = 0$

33. $\vec{r} \cdot \vec{n}_1 = p_1$, $\vec{r} \cdot \vec{n}_2 = p_2$ എന്നീ രണ്ട് തലങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള ന്യൂനകോൺ θ എങ്കിൽ $\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}\right)$

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 280 15-02-2023 16:23:22

34. $\vec{r} = \vec{a} + t\vec{b}$ എന്ന നേർരേഖയ്ക്കും $\vec{r} \cdot \vec{n} = p$ എന്ന തലത്തിനും ഇടയിലുള്ള കോൺ θ എങ്കിൽ

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{\left|\vec{b} \cdot \vec{n}\right|}{\left|\vec{b}\right|\left|\vec{n}\right|}\right)$$

35. $\vec{u}$ എന്ന സ്ഥാനസദിശം ഉള്ള ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് $\vec{r} \cdot \vec{n} = p$ എന്ന തലത്തിലേക്കുള്ള ലംബദൂരം $\delta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n} - p|}{|\vec{n}|}$ ആണ്

36. (x_2, y_1, z_1) എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് $ax + by + cz = p$ എന്ന തലത്തിലേക്ക് ഉള്ള ലംബദൂരം $\delta = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - p|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

37. മൂലബിന്ദുവിൽ നിന്ന് $ax + by + cz + d = 0$ എന്ന തലത്തിലേക്ക് ഉള്ള ലംബദൂരം $\delta = \frac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

38. $ax + by + cz + d_1 = 0$, $ax + by + cz + d_2 = 0$ എന്നീ രണ്ട് സമാന്തര തലങ്ങൾക്ക് ഇടയിലുള്ള അകലം എന്നത് $\frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

39. $\vec{r} \cdot \vec{n}_1 = d_1$, $\vec{r} \cdot \vec{n}_2 = d_2$ എന്നീ തലങ്ങളുടെ പ്രതിഛേദബിന്ദു വഴി കടന്നുപോകുന്ന തലത്തിന്റെ സദിശ സമവാക്യം $(\vec{r} \cdot \vec{n}_1 - d_1) + \lambda(\vec{r} \cdot \vec{n}_2 - d_2) = 0$, അവിടെ $\lambda \in \mathbb{R}$ ആണ്.

40. $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$, $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ എന്നീ തലങ്ങളുടെ പ്രതിഛേദബിന്ദു വഴി കടന്നു പോകുന്ന തലത്തിന്റെ സമവാക്യം $(a_1x + b_1y + c_1z - d_1) + \lambda(a_2x + b_2y + c_2z - d_2) = 0$ ആണ്.

41. $\vec{r} = \vec{a} + t\vec{b}$ എന്ന നേർരേഖയും $\vec{r} \cdot \vec{n} = p$ എന്ന തലവും പ്രതിഛേദിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാന സദിശം $\vec{u} = \vec{a} + \left(\frac{p - (\vec{a} \cdot \vec{n})}{\vec{b} \cdot \vec{n}}\right)\vec{b}$, ഇവിടെ $\vec{b} \cdot \vec{n} \neq \vec{0}$ ആകും.

42. $\vec{r} \cdot \vec{n} = p$ എന്ന തലത്തിൽ $\vec{u}$ ന്റെ ബിംബത്തിന്റെ സ്ഥാന സദിശം $\vec{v}$ എങ്കിൽ $\vec{v} = \vec{u} + \frac{2\left[p - (\vec{u} \cdot \vec{n})\right]}{|n|^2}\vec{n}$.

ഐ.സി.റ്റി കോർണർ

https://ggbm.at/vchq92pg അല്ലെങ്കിൽ QR കോഡ് സ്കാൻ ചെയ്യുക

ബ്രൗസർ തുറക്കുക, താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന URL ലിങ്ക് ടൈപ്പ് ചെയ്യുക അല്ലെങ്കിൽ QR കോഡ് സ്കാൻ ചെയ്യുക. അപ്പോൾ ജിയോജിബ്ര വർക്ക് ബുക്കിൽ 12th സ്റ്റാൻഡേർഡ് മാത്തമാറ്റിക്സ് തുറന്ന് വരും വർക്ക് ബുക്കിന്റെ ഇടത് വശത്ത് നിങ്ങളുടെ ടെക്സ്റ്റ് ബുക്കുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ധാരാളം അധ്യായങ്ങൾ ഉണ്ട് സദിശ ബീജഗണിതത്തിന്റെ പ്രയോഗങ്ങൾ എന്ന പേരുള്ള അധ്യായം ക്ലിക്ക് ചെയ്യുക. ഈ അധ്യായവുമായ ബന്ധപ്പെട്ട ധാരാളം വർക്ക് ഷീറ്റുകൾ കാണാൻ കഴിയും അദിശ ട്രിപ്പിൾ ഗുണനം എന്ന വർക്ക് ഷീറ്റ് തെരഞ്ഞെടുക്കുക.

Mal_12th_Maths_EM_Vol1_CH 6 Vector Algebra.indd 281 15-02-2023 16:23:26

ഉത്തരങ്ങൾ

അഭ്യാസം 1.1

1. (i) $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 9 & -5 & -1 \end{bmatrix}$ (iii) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & +2 & 2 \end{bmatrix}$

2. (i) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ (ii) $\frac{1}{28}\begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 6 \end{bmatrix}$ (iii) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 9 & -5 & -1 \end{bmatrix}$

(8) $\pm\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ (9) $\pm\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & -6 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ (10) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(12) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ (13) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (15) സഹായം

അഭ്യാസം 1.2

1. (i) 1 (ii) 2 (iii) 2 (iv) 3 (v) 3 2. (i) 2 (ii) 3 (iii) 3

3. (i) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

അഭ്യാസം 1.3

1. (i) $x=-11, y=4$ (ii) $x=2, y=-4$
   (iii) $x=2, y=3, z=4$ (iv) $x=3, y=-2, z=1$
2. $x=2, y=1, z=-1$ 3. ₹ 18000, ₹ 600
4. 18 ദിവസങ്ങൾ, 36 ദിവസങ്ങൾ 5. ₹ 2000, ₹ 1000, ₹ 3000

അഭ്യാസം 1.4

1. (i) $x=-2, y=3$ (ii) $x=\frac{1}{2}, y=3$
   (iii) $x=2, y=3, z=4$ (iv) $x=1, y=3, z=3$
2. 84 3. 50% ആസിഡ് 6 ലിറ്റേഴ്സ്, 25% ആസിഡ് 4 ലിറ്റേഴ്സ്
4. പമ്പ് A : 15 മിനിട്ടുകൾ, പമ്പ് B : 30 മിനിട്ടുകൾ
5. ₹ 30/-, ₹ 10/-, ₹ 30/-, അതേ

അഭ്യാസം 1.5

1. (i) $x=-1, y=4, z=4$ (ii) $x=3, y=1, z=2$
2. $a=2, b=1, c=6$ 3. ₹ 30000, ₹ 15000, ₹ 20000
4. $a=1, b=3, c=-10$, അതേ

അഭ്യാസം 1.6

1. (i) $x=y=z=1$ (ii) $x=\frac{1}{10}(7-5t), y=\frac{1}{10}(5t-1), z=t, t\in\mathbb{R}$

Mal_Answers.indd 282 15-02-2023 16:30:59

(iii) നിർദ്ധാരണം ഇല്ല (iv) $x=\frac{1}{2}(s-t+2), y=s, z=t \text{ and } s,t\in\mathbb{R}$

2. (i) $k=1$ (ii) $k\neq 1, k\neq -2$ (iii) $k=-2$

3. (i) $\lambda=5$ (ii) $\lambda\neq 5, \mu\neq 9$ (iii) $\lambda=5, \mu=9$

അഭ്യാസം 1.7

1. (i) $x=-t, y=-2t, z=t, t\in\mathbb{R}$ (ii) ട്രിവിയൽ നിർദ്ധാരണം മാത്രം

2. (i) $\lambda\neq 8$ (ii) $\lambda=8$

3. $2C_2H_6+7O_2\rightarrow 6H_2O+4Co_2$

അഭ്യാസം 1.8

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(2)	(3)	(2)	(3)	(4)	(2)	(4)	(4)	(2)	(1)
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
(2)	(4)	(1)	(2)	(4)	(3)	(2)	(1)	(4)	(4)
21	22	23	24	25					
(2)	(4)	(4)	(4)	(1)					

അഭ്യാസം 2.1

1. $-1-i$ 2. $1+i$ 3. 0 4. 0

5. 1 6. $1-i$

അഭ്യാസം 2.2

1. (i) $4+i$ (ii) $8-i$ (iii) $7+5i$ (iv) $1+17i$

(v) $15+8i$ (vi) $15+8i$

3. $x=-1,\ y=1$

അഭ്യാസം 2.3

3. $-z_1=-2-5i$, $z_1^{-1}=\frac{1}{29}(2-5i)$

$-z_2=3+4i$, $z_2^{-1}=\frac{1}{25}(-3+4i)$

$-z_3=-1-i$, $z_3^{-1}=\frac{1}{2}(1-i)$

അഭ്യാസം 2.4

1. (i) $7-5i$ (ii) $\frac{5}{4}(1-i)$ (iii) $\frac{2}{5}-\frac{14i}{5}$

2. (i) $\frac{x}{x^2+y^2}$ (ii) y (iii) $-y-4$

3. $\frac{1}{25}(-1-2i), \frac{1}{5}(-11+2i)$ (4) $\frac{1}{2}(7-i)$

6. (i) 6 (ii) 3

Mal_Answers.indd 283 15-02-2023 16:30:59

അഭ്യാസം 2.5

1. (i) $\frac{2}{5}$ (ii) $2\sqrt{2}$ (iii) 32 (iv) 50

4. $11+6i$

7. 10 9. (i) $\pm\left(\frac{3}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (ii) $\pm\left(\sqrt{2}-i2\sqrt{2}\right)$ (iii) $\pm(2-3i)$

അഭ്യാസം 2.6

3. (i) $y^2=3$ (ii) $x-y=0$ (iii) $x+y=0$ (iv) $x^2+y^2=1$

4. (i) $2+i, 3$ (ii) $-1+2i, 1$ (iii) $2-4i, \frac{8}{3}$

5. (i) $x^2+y^2-8x-240=0$ (ii) $6x+1=0$

അഭ്യാസം 2.7

1. (i) $4\left(\cos\left(2k\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(2kn+\frac{\pi}{3}\right)\right), k\in\mathbb{Z}$

(ii) $2\sqrt{3}\left(\cos\left(2k\pi-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(2k\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right), k\in\mathbb{Z}$

(iii) $2\sqrt{2}\left(\cos\left(2k\pi-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(2k\pi-\frac{3\pi}{4}\right)\right), k\in\mathbb{Z}$

(iv) $\sqrt{2}\left(\cos\left(2k\pi+\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(2k\pi+\frac{5\pi}{12}\right)\right), k\in\mathbb{Z}$

2. (i) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ (ii) $\frac{-i}{2}$

അഭ്യാസം 2.8

3. 1 5. $3\,\mathrm{cis}\frac{\pi}{3}, -3, 3\,\mathrm{cis}\frac{5\pi}{3}$ 7. -1

9. (i) $2e^{\frac{i\pi}{12}}$ (ii) $2e^{\frac{i5\pi}{12}}$ (iii) $2e^{\frac{i5\pi}{4}}$

അഭ്യാസം 2.9

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(1)	(1)	(1)	(2)	(3)	(1)	(4)	(1)	(1)	(1)
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
(2)	(2)	(4)	(2)	(2)	(3)	(1)	(3)	(4)	(4)
21	22	23	24	25					
(2)	(3)	(4)	(1)	(1)					

അഭ്യാസം 3.1

1. 8

2. (i) $x^3-6x^2+11x-6=0$ (ii) $x^3-3x-2=0$ (iii) $2x^3-7x^2+7x-2=0$

3. (i) $x^3+4x^2+12x+32=0$ (ii) $4x^3+3x^2+2x+1=0$ (ii) $x^3-2x^2+3x-4=0$

Mal_Answers.indd 284 15-02-2023 16:31:00

4. $2,3,\frac{1}{3}$ 5. 10 6. $\frac{21}{19},\frac{14}{19},\frac{136}{19}$ ഉം $6,4,-1$ 7. $\sum\frac{1}{\alpha}=\frac{c}{d},\sum\frac{\alpha}{\beta\gamma}=\frac{2ac-b^2}{ad}$

8. $2x^2+13x+20=0$ 11. $x^3-18x^2+109x-216=0$ 12. $x^3+x-12=0$

അഭ്യാസം 3.2

1. $k<0$, ആകുമ്പോൾ ബഹുപദവ്യംജകങ്ങൾക്ക് വാസ്തവിക മൂല്യങ്ങൾ ആണ്
   $k=0$ അല്ലെങ്കിൽ $k=8$, ആകുമ്പോൾ മൂല്യങ്ങൾ തുല്യവും വാസ്തവികവുമാണ്.
   $0<k<8$ ആകുമ്പോൾ മൂല്യങ്ങൾ വാസ്തവികമല്ല.
   $k>8$ ആകുമ്പോൾ മൂല്യങ്ങൾ വാസ്തവികവും വ്യത്യസ്തവുമാണ്.
2. $x^2-4x+7=0$ 3. $x^2-6x+13=0$ 4. x^4-16x^2+4

അഭ്യാസം 3.3

1. $-3,3,\frac{1}{2}$ 2 . $\frac{2}{3},\frac{4}{3},2$ 3. $\frac{2}{3},2,6$ 4. $k=2,\ 2,\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

5. $1-2i,1+2i,\sqrt{3},-\sqrt{3},\frac{1+\sqrt{37}}{2},\frac{1-\sqrt{37}}{2}$ 6. (i) $1,\frac{1}{2},3$ (ii) $-1,\frac{1}{2},\frac{3}{4}$ 7. $\pm3,\pm\sqrt{5}$

അഭ്യാസം 3.4

1. (i) $\{-2,3,-7,8\}$ (ii) $3,3,3+\sqrt{17},3-\sqrt{17}$ 2. $\left\{1,-2,\frac{-1+2\sqrt{5}}{2},\frac{-1-2\sqrt{5}}{2}\right\}$

അഭ്യാസം 3.5

1. (i) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, ആകുമ്പോൾ നിർദ്ധാരണം ഇല്ല $\sin x=4$ (ii) $2,-\frac{1}{4},\frac{2}{3}$

2. (i) $x=1$ (ii) ന് മൂല്യം ആകുമ്പോൾ എഴുതിയ 3. 4^n 4. $\frac{b^2}{4a},\frac{9a^3}{b^2}$

5. (i) $2,3,\frac{1}{2},\frac{1}{3}$ (ii) $+1,-1,\frac{-3+\sqrt{5}}{2},\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$

6. $-2,2,3$ 7. $\frac{1}{3},3,\frac{1}{2}$ ഉം 2

അഭ്യാസം 3.6

1. ഇതിന് കൂടിയ പക്ഷം ധനസംഖ്യ മൂല്യങ്ങളും ഉണ്ട്.
2. ഇതിന് കൂടിയ പക്ഷം ധനസംഖ്യ മൂല്യങ്ങൾ ഇല്ല.
4. ഇതിന് ഒരുധനവാസ്തവിക മൂല്യവും ഒരു ഋണ വാസതവിക മൂല്യവും ഉണ്ട്.
5. ധനവാസ്തവിക മൂല്യങ്ങളും ഇല്ല ഋണവാസ്തവിക മൂല്യങ്ങളും ഇല്ല.

അഭ്യാസം 3.7

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(4)	(1)	(3)	(2)	(2)	(4)	(1)	(3)	(1)	(2)

Mal_Answers.indd 285 15-02-2023 16:31:02

അഭ്യാസം 4.1

1. (i) $x = n\pi,\ n = 0, \pm1, \pm2, \ldots \pm10$ (ii) $x = (4n-1)\frac{\pi}{2},\ n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, 4$

2. (i) 1, $\frac{2\pi}{7}$ (ii) 1, 6π (iii) 4, π 4. (i) $\frac{\pi}{3}$ (ii) $-\frac{\pi}{4}$

5. $x = 0$ 6. (i) $\{-1, 1\}$ (ii) $[0, 1]$ 7. $\frac{\pi}{3}$

അഭ്യാസം 4.2

1. (i) $x = (2n+1)\frac{\pi}{2},\ n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5$ (ii) $x = (2n+1)\pi,\ n = 0, \pm1, \pm2, -3$

2. $-\frac{\pi}{6} \notin [0, \pi]$ 3. ശരി 4. $\frac{\pi}{3}$

5. (i) $\frac{5\pi}{6}$ (ii) $-\frac{\pi}{6}$ (iii) $\frac{24\pi}{119}$ 6. (i) $[-5, 5]$ (ii) $[-1, 1]$

7. $0 < x < \frac{1}{3}$ 8. (i) 0 (ii) $-\frac{7\pi}{12}$

അഭ്യാസം 4.3

1. (i) $[-3, 3]$ (ii) $\mathbb{R}$ 2. (i) $\frac{\pi}{4}$ (ii) $-\frac{\pi}{6}$

3. (i) $\frac{7\pi}{4}$ (ii) 1947 (iii) –0.2021 4. (i) ∞ (ii) $-\frac{2\sqrt{5}}{25}$ (iii) $\frac{24}{25}$

അഭ്യാസം 4.4

1. (i) $\frac{\pi}{6}$ (ii) $\frac{\pi}{6}$ (iii) $-\frac{\pi}{4}$ 2.(i) $-\frac{\pi}{3}$ (ii) $\cot^{-1}(2) - \frac{\pi}{6}$ (iii) $-\frac{5\pi}{6}$

അഭ്യാസം 4.5

1. (i) $-\frac{\pi}{2}$ (ii) $-\frac{\pi}{4}$ (iii) $5 - 2\pi$

2. (i) $\sqrt{2x - x^2}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{9x^2 - 6x + 2}}$ (iii) $\frac{2x+1}{\sqrt{3 - 4x - 4x^2}}$

3. (i) $\frac{\pi}{6}$ (ii) 0 (iii) $\frac{17}{6}$ 8. $\frac{\pi}{4}$

9. (i) $x = 13$ (ii) $x = \frac{a-b}{1+ab}$ (iii) $x = n\pi + \frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}$

(iv) $x = \sqrt{3}$

10. മൂന്ന്

Mal_Answers.indd 286 15-02-2023 16:31:05

അഭ്യാസം 4.6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(3)	(2)	(3)	(1)	(2)	(1)	(3)	(1)	(4)	(4)
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
(3)	(2)	(2)	(1)	(3)	(3)	(2)	(2)	(4)	(4)

അഭ്യാസം 5.1

1. $x^2+y^2\pm10y=0$ 2. $(x-2)^2+(y+1)^2=50$
3. $x^2+y^2+4x+4y+4=0$ or $x^2+y^2+20x+20y+100=0$ 4. $x^2+y^2-4x-6y-12=0$
5. $x^2+y^2-5x+3y-22=0$ 6. $x^2+y^2=1$
7. $x^2+y^2-6x-4y+4=0$ 8. ±12
9. $x-5y+8=0,\ x+5y-12=0$ 10. പുറം വശം, അകവശം, പുറം വശം

11. (i) $(0,-2),0$ (ii) $(-3,2),3$ (iii) $\left(\frac{1}{2},-1\right),\frac{\sqrt{17}}{2}$ (iv) $\left(\frac{3}{2},-1\right),\frac{3}{2}$

12. $p=q=3$, $(1,0),5$

അഭ്യാസം 5.2

1. (i) $y^2=16x$ (ii) $3x^2=-4y$ (iii) $(y+2)^2=12(x-1)$ (iv) $y^2=16x$

2. (i) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$ (ii) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ (iii) $\frac{16x^2}{625}+\frac{y^2}{25}=1$ (iii) $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{16}=1$

3. (i) $\frac{9x^2}{16}-\frac{9y^2}{20}=1$ (ii) $\frac{(x-2)^2}{12}-\frac{(y-1)^2}{24}=1$ (iii) $\frac{x^2}{16}-\frac{9y^2}{64}=1$

4.

	വെർട്ടക്സ്	ഫോക്കസ്	ഡയറെക്ട്രക്സിന്റെ സമവാക്യം	ലാറ്റസ് റെക്ടത്തിന്റെ നീളം
i.	$(0,0)$	$(4,0)$	$x=-4$	16
ii.	$(0,0)$	$(0,6)$	$y=-6$	24
iii.	$(0,0)$	$(-2,0)$	$x=2$	8
iv.	$(1,-2)$	$(1,4)$	$y=0$	8
v.	$(1,2)$	$(3,2)$	$x=-1$	8

Mal_Answers.indd 287 15-02-2023 16:31:06

5.

	കോണികിന്റെ തരം	കേന്ദ്രം	വെർട്ടിസിസുകൾ	ഫോക്കസുകൾ	ഡയറെക്ട്രിക്സ്
i.	എലിപ്സ്	$(0,0)$	$(\pm5,0)$	$(\pm4,0)$	$x=\pm\frac{25}{4}$
ii.	എലിപ്സ്	$(0,0)$	$(0,\pm\sqrt{10})$	$(0,\pm\sqrt{7})$	$y=\pm\frac{10}{\sqrt{7}}$
iii.	ഹൈപ്പർബോള	$(0,0)$	$(\pm5,0)$	$(\pm13,0)$	$x=\pm\frac{25}{13}$
iv.	ഹൈപ്പർബോള	$(0,0)$	$(0,\pm4)$	$(0,\pm5)$	$y=\pm\frac{16}{5}$

8.

	കോണിക്കിന്റെ തരം	കേന്ദ്രം	വെർട്ടിസിസുകൾ	ഫോക്കസുകൾ	ഡയറെക്ട്രിക്സ്
i.	എലിപ്സ്	$(3,4)$	$(3,21),(3,-13)$	$(3,12),(3,-4)$	$y=\frac{321}{8}$, $y=\frac{-257}{8}$
ii.	എലിപ്സ്	$(-1,2)$	$(-11,2),(9,2)$	$(-7,2),(5,2)$	$x=\frac{47}{3}$, $x=\frac{-53}{3}$
iii.	ഹൈപ്പർബോള	$(-3,4)$	$(-18,4),(12,4)$	$(-20,4),(14,4)$	$x=\frac{176}{17}$, $x=\frac{-276}{17}$
iv.	ഹൈപ്പർബോള	$(-1,2)$	$(-1,7),(-1,-3)$	$(-1,2+\sqrt{41})$ $(-1,2-\sqrt{41})$	$y=\frac{25}{\sqrt{41}}+2$, $y=\frac{-25}{\sqrt{41}}+2$
v.	എലിപ്സ്	$(4,-2)$	$(4,-2+3\sqrt{2})$, $(4,-2-3\sqrt{2})$	$(4,-2+\sqrt{6})$, $(4,-2-\sqrt{6})$	$y=-2+3\sqrt{6}$, $y=-2-3\sqrt{6}$
vi.	ഹൈപ്പർബോള	$(2,-3)$	$(3,-3),(1,-3)$	$(2+\sqrt{10}-3)$, $(2-\sqrt{10},-3)$	$x=\frac{1}{\sqrt{10}}+2$, $x=\frac{-1}{\sqrt{10}}+2$

Mal_Answers.indd 288 15-02-2023 16:31:06

അഭ്യാസം 5.3

1. ഹൈപ്പർബോള 2 വൃത്തം 3. വൃത്തം 4. വൃത്തം 5. ഹൈപ്പർബോള 6. പാരബോള

അഭ്യാസം 5.4

1. $x-y-3=0, x-9y+13=0$ 2. $10x-3y+32=0,\ 10x+3y-32=0$
3. $(-3,1)$ 4. $x-y+4=0$
5. $x-2y+8=0$ 6. $4x-3y-6=0, 3x+4y-12=0$

അഭ്യാസം 5.5

1. 8.4 മീ 2. 9.6 മീ 3. 3 മീ
4. $y^2=4.8x,\ 1.3m$ 5. $3.52m,\ 5.08m$ 6. 45.41മീ, 74.45മീ
7. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 8. $3\sqrt{3}m$ 9. $\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$ 10. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$

അഭ്യാസം 5.6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
(1)	(3)	(4)	(3)	(3)	(1)	(1)	(3)	(2)	(2)	(1)	(4)	(3)
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	---
(3)	(1)	(4)	(4)	(1)	(1)	(2)	(2)	(3)	(3)	(3)	(2)	---

അഭ്യാസം 6.1

11. 80 മാത്രകൾ 12. 69 മാത്രകൾ
13. $\sqrt{179}, \frac{3}{\sqrt{179}}, \frac{-11}{\sqrt{179}}, \frac{-7}{\sqrt{179}}$ 14. $-96\hat{i}+115\hat{j}+15\hat{k}$

അഭ്യാസം 6.2

1. 24 2. 720 ഘനമാത്രകൾ 3. -5
4. ± 12 5. $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ 6. കോപ്ലനാർ 7. 2

അഭ്യാസം 6.3

1. (i) $-2\hat{i}+14\hat{j}-22\hat{k}$ (ii) $22\hat{i}+14\hat{j}+2\hat{k}$ 5. -74
7. $l=0,\ m=10,\ n=-3$ 8. $\theta=\frac{\pi}{3}$

അഭ്യാസം 6.4

1. $\vec{r}-\left(4\hat{i}+3\hat{j}-7\hat{k}\right)\times\left(2\hat{i}-6\hat{j}+7\hat{k}\right)=\vec{0}$, $\frac{x-4}{2}=\frac{y-3}{-6}=\frac{z+7}{7}$
2. $\vec{r}=\left(-2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}\right)+t\left(-4\hat{i}+5\hat{j}-6\hat{k}\right)$, $\frac{x+2}{-4}=\frac{y-3}{5}=\frac{z-4}{-6}$
3. $\left(\frac{32}{0},0,\frac{47}{3}\right), (0,16,-11)$

Mal_Answers.indd 289 15-02-2023 16:31:07

4. $\left(\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{6}{7}\right)$, $\vec{r}=\left(5\hat{i}+6\hat{j}+7\hat{k}\right)+t\left(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k}\right)$ അല്ലെങ്കിൽ

$\vec{r}=\left(7\hat{i}+9\hat{j}+13\hat{k}\right)+t\left(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k}\right)$,

$\frac{x-5}{2}=\frac{y-6}{3}=\frac{z-7}{6}$ or $\frac{x-7}{2}=\frac{y-9}{3}=\frac{z-13}{6}$

5. (i) $0°$ (ii) $\cos^{-1}\left(\frac{3}{2\sqrt{3}}\right)$ (iii) $\frac{\pi}{2}$ 6. $\frac{\pi}{2}$ 7. $a=18, b=\frac{2}{3}$ 8. 1

അഭ്യാസം 6.5

1. $\vec{r}=\left(5\hat{i}+2\hat{j}+8\hat{k}\right)+t\left(2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}\right), t\in\mathbb{R}$, $\frac{x-5}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{-2}$
2. $\frac{7}{\sqrt{5}}$ മാത്രകൾ 3. $\frac{9}{2}$ 4. $(6,2,1)$ 5. 2 മാത്രകൾ
6. $\frac{\sqrt{83}}{\sqrt{6}}$ മാത്രകൾ 7. $(1,6,0)$, $\frac{x-5}{-4}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-2}{-2}$

അഭ്യാസം 6.6

1. $\vec{r}\cdot\left(\frac{3\hat{i}-4\hat{j}+5\hat{k}}{5\sqrt{2}}\right)=7$ 2. $\frac{12}{13},\frac{3}{13},\frac{-4}{13}$; $\vec{r}.\left(\frac{12\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}}{13}\right)=5$; 5
3. $\vec{r}\cdot\left(\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k}\right)=35$; $x+3y+5z=35$ 4. $\vec{r}\cdot\left(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}\right)=2$; $x+y+z=2$
5. x -നിർദ്ദേശാങ്കം $=2$, y- നിർദ്ദേശാങ്കം $=3$, z- നിർദ്ദേശാങ്കം $=-4$ 6. $\frac{x}{u}+\frac{y}{v}+\frac{z}{w}=3$

അഭ്യാസം 6.7

1. $\vec{r}\cdot\left(\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k}\right)=20$; $x-2y+4z-20=0$
2. $\vec{r}\cdot\left(3\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k}\right)=9$; $3x+4y-5z-9=0$
3. $\vec{r}=\left(2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}\right)+s\left(-\hat{i}-4\hat{j}+2\hat{k}\right)+t\left(3\hat{i}-4\hat{j}+5\hat{k}\right)s,t\in\mathbb{R}$;

   $12x-11y-16z+14=0$
4. $\vec{r}\cdot\left(\hat{i}+10\hat{j}+7\hat{k}\right)=9$; $x+10y+7z-9=0$
5. $\vec{r}\cdot\left(\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}\right)+s\left(2\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}\right)+t\left(\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}\right)s,t\in\mathbb{R}$; $9x-2y-5z+4=0$
6. $\vec{r}\cdot\left(3\hat{i}+6\hat{j}-2\hat{k}\right)+s\left(-4\hat{i}-8\hat{j}+8\hat{k}\right)+t\left(3\hat{i}-2\hat{j}\right)s,t\in\mathbb{R}$; $\vec{r}\cdot\left(2\hat{i}+3\hat{j}+4k\right)=16$;

   $2x+3y+4z-16=0$
7. $\vec{r}\cdot\left(3\hat{i}+5\hat{j}-7\hat{k}\right)=6$; $3x+5y-7z-6=0$

അഭ്യാസം 6.8

1. $\vec{r}\cdot\left(17\hat{i}-47\hat{j}-24\hat{k}\right)=172$ 2. $x+2y-z-4=0$
3. $m=\pm\sqrt{2}$ 4. $-2,2$, $y+z+1=0$, $y-z+1=0$

Mal_Answers.indd 290 15-02-2023 16:31:07

അഭ്യാസം 6.9

1. $15x-47y+28z-7=0$
2. $5x-11y+z-17=0$
3. $\sin^{-1}\left(\frac{8}{21}\right)$
4. $\cos^{-1}\left(\frac{2}{3\sqrt{6}}\right)$
5. $2x-3y+5z-11=0\,;\frac{4}{\sqrt{38}}$
6. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ മാത്രകൾ
7. $(2,2,0)$
8. $(3,-1,-1)\,;\sqrt{14}$ മാത്രകൾ.

അഭ്യാസം 6.10

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(4)	(3)	(1)	(2)	(3)	(3)	(1)	(1)	(1)	(2)
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
(3)	(1)	(2)	(4)	(4)	(2)	(3)	(4)	(2)	(1)
21	22	23	24	25					
(2)	(3)	(4)	(3)	(1)					

Mal_Answers.indd 291 15-02-2023 16:31:08

പദപരിചയം

പാഠം 1

മാട്രിക്സുകളുടെയും ഡിറ്റർമിനന്റുകളുടേയും പ്രയോഗങ്ങൾ

Adjoint matrix	അഡ്ജോയിന്റ് മാട്രിക്സ്
Inverse matrix	വിപരീത മാട്രിക്സ്
Rank	റാങ്ക്
Elementary transformation	എലിമെന്ററി പരിവർത്തനം
Echelon form	എക്കലോൺ രൂപം
Trivial solution	ട്രിവിയൻ നിർദ്ധാരണം
Non-trivial solution	നോൺട്രിവിയൻ നിർദ്ധാരണം
Augmented matrix	ഓഗ്മെന്റഡ് മാട്രിക്സ്
Consistent	സ്ഥിരത
Pivot	പൈവോട്ട്

പാഠം 2

സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകൾ

Complex numbers	സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യകൾ
Imaginary unit	സാങ്കല്പിക യൂണിറ്റ്
Rectangular form	ചതുരാകൃതിയിലുള്ള രൂപം
Argand Plane	ആർഗാണ്ട് തലം
Conjugate of a complex number	സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയുടെ സംയോജനം
Upper bound	മുകളിലത്തെ അതിർത്തി
Lower bound	താഴത്തെ അതിർത്തി
Polar form	പോളാർ രൂപം
Exponential form	ഘാത രൂപം
Trigonometric form	ത്രികോണമിതി രൂപം
Absolute value	കേവല വില
Modulus	മോഡുലസ്
Argument or amplitude	ആർഗ്യൂമെന്റ് ആംപ്ലിറ്റ്യൂഡ്
Principal argument	പ്രധാന ആർഗ്യൂമെന്റ്
Euler's form	ഓയ്ലർ രൂപം

പാഠം 3

സമവാക്യങ്ങളുടെ സിദ്ധാന്തം

Complex conjugate root theorem	സങ്കീർണ്ണ സംയോജന മൂല സിദ്ധാന്തം
Leading coefficient	മുഖ്യമായ ഗുണാങ്കം
Leading term	മുഖ്യ പദം
Monic polynomial	ഏകകൃതി ബഹുപദ വ്യംജകം
Non-polynomial equation	വാസ്തവികമല്ലാത്ത ബഹുപദ വ്യംജക സമീകരണം

MAL_EM_Vol1_Glossary.indd 292 14-02-2023 19:04:33

Non real complex number	വാസ്തവികമല്ലാത്ത സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യ
Quartic polynomial	ചതുർഘാത ബഹുപദ വ്യംജകം
Radical solution	കരിണി നിർദ്ധാരണം
Rational root Theorem	പരിമേയ മൂല സിദ്ധാന്തം
Reciprocal equation	വ്യുൽക്രമ സമീകരണം
Reciprocal polynomial	വ്യുൽക്രമ ബഹുപദ വ്യംജകം
Simple root	ലളിതമായ മൂലം
Zero polynomial	ബഹുപദ വ്യംജകം

പാഠം 4

വിപരീത ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങൾ

Inverse trigonometric functions	വിപരീത ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങൾ
Principal value	പ്രധാന മൂല്യം
Amplitude	ബാഹുല്യം
Period	അന്തരം
Principal domain	പ്രധാന മണ്ഡലം
Periodic function	ആനുകാലിക ഫലനം
Reciprocal inverse identities	വ്യുൽക്രമ വിപരീത ഏകതങ്ങൾ
Reflection identities	പ്രതിഫലന സർവ്വസമ വാക്യങ്ങൾ
Cofunction inverse identities	സഹഫലന വിപരീത ഏകതങ്ങൾ

പാഠം 5

ദ്വിമാന വിശ്ലേഷക ജ്യാമിതി

Circle	വൃത്തം
Parabola	പരാബോള
Ellipse	ദീർഘവൃത്തം
Hyperbola	ഹൈപ്പർബോള
Algebraic techniques	ബീജഗണിത സാങ്കേതികത
Geometrical problems	ജ്യാമിതീയ കണക്കുകൾ
Astronomy	ജ്യോതിശാസ്ത്രം
Conics	കോണിക്സ്
Focus	ഫോക്കസ്സ്
Directrix	ഡയറക്ട്രിക്സ്
Eccentricity	ഉൾകേന്ദ്രത
Focal chord	ഫോക്കസ് ഞാൺ

MAL_EM_Vol1_Glossary.indd 293 14-02-2023 19:04:33

Vertex	ശീർഷം
Latus rectum	ലാറ്റസ് റെക്ടം
Major axis	ദീർഘാക്ഷം
Minor axis	ഹ്രസ്വാക്ഷം
Transverse axis	തിരശ്ചീന അക്ഷം
Conjugate axis	സംയോജക അക്ഷം
Auxiliary circle	ഉപവൃത്തം
Incircle	അന്തർവൃത്തം
Asymptotes	അനന്തതാസ്പർശകം
Degenerate forms	അധഃപതിച്ച രൂപം
Double napped cone	ഇരട്ട വൃത്തസ്തൂപിക
Parametric equation	പാരാമെട്രിക് സമവാക്യം
Director circle	ദിശകവൃത്തം
Elliptic orbit	ദീർഘവൃത്ത പരിക്രമണം
Reflective property	പ്രതിഫലന സവിശേഷത

പാഠം 6

അദിശ ബീജഗണിതത്തിന്റെ പ്രയോഗങ്ങൾ

Box product	ബോക്സ് ഗുണനം
Line of intersection	ഛേദകരേഖ
Moment	മാത്ര
Normal	ലംബം
Parallelepiped	സമാന്തര ചലനം
Parameter	ഗണിത സമവാക്യത്തിലെ ഒരു സ്ഥിരരാശി
Plane	തലം
Rotaional force	ഭ്രമണശക്തി
Skew lines	വക്രരേഖകൾ
Torque	ചുഴറ്റൽ
Triple product	മൂന്നുമടങ്ങായ് ഗുണനം

MAL_EM_Vol1_Glossary.indd 294 14-02-2023 19:04:33

CLASS 12 VOL-1 — MATHEMATICS
MALAYALAM MEDIUM

Academic Coordinator

K. Chandrasekaran,
Lecturer, DIET, Chennai.

Reviewer

S. Sree Latha, P.G.T
TCK H.S.S., Padanthalumoodu.

M. Abilash , P.G.T
Arunachalam H.S.S., Thiruvattar.

List of Translators

L. Deepa Gopal, P.G.T
PPM H.S.S., Anducode.

Shabu K. Shin, P.G.T
St. Mary's H.S.S., Kaliyal.

N. Bindhu, B.T. Asst
St.ephrem's H.S.S., Sooriacode.

S. Chinchu, B.T. Asst
G.H.S.S., Kollemcode.

V.P. Priya, B.T. Asst
PPM H.S.S., Anducode.

A. Kumari Salma, B.T. Asst
Aided H.S.S., Arumanai.

K. Vijaya Kumari, B.T. Asst
St. Mary's H.S.S., Kaliyal.

EMIS Technology Team

R.M. Satheesh
State Coordinator Technical,
TN EMIS, Samagra Shiksha.

K.P. Sathya Narayana
IT Consultant,
TN EMIS, Samagra Shikaha

R. Arun Maruthi Selvan
Technical Project Consultant,
TN EMIS, Samagra Shiksha

Layout & Illustrations

Ranjith, Pixels Print Media,
Parasale, Kerala.

Wrapper Design

Kathir Arumugam

In-House QC

V Sridhar, C. Prasanth, S. Ashok

Coordination

Ramesh Munisamy

This book has been printed on 80 G.S.M.
Elegant Maplitho paper.

Printed by offset at:

Text Book Development Team.indd 295 19-03-2022 16:11:02

NOTE

Text Book Development Team.indd 296 19-03-2022 16:11:02