GOVERNMENT OF TAMIL NADU

పన్నెండవ తరగతి

HIGHER SECONDARY SECOND YEAR

గణితశాస్త్రము

MATHEMATICS

భాగము –II

VOLUME –II

TELUGU MEDIUM

Department of School Education

Untouchability is Inhuman and a Crime

00_12th_Maths_Telugu_Medium_Front_Page.indd 1 03/03/2023 17:41:14

Government of Tamil Nadu

First Edition - 2021

Revised Edition - 2022, 2023

Reprint - 2024

(Published under New Syllabus)

Content Creation

State Council of Educational Research and Training

© SCERT 2021

Printing & Publishing

Tamil NaduTextbook and Educational Services Corporation

www.textbooksonline.tn.nic.in

00_12th_Maths_Telugu_Medium_Front_Page.indd 2 03/03/2023 17:41:14

విషయసూచిక

గణితశాస్త్రము భాగము -II

అధ్యాయము	పాఠ్యశీర్షిక	పుట సంఖ్య	నెల
7	**అవకలన గణిత అనువర్తనాలు**	**1**	**అక్టోబర్**
7.1	పరిచయము	1	
7.2	ఉత్పన్నాల అర్థము	2	
7.3	మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతము	17	
7.4	శ్రేణుల విస్తరణ	23	
7.5	అనిశ్చిత రూపాలు	27	
7.6	మొదటి ఉత్పన్నాల (అవకలజము) అనువర్తనాలు	34	
7.7	రెండవ అవకలనం యొక్క అనవర్తనాలు	42	
7.8	సర్వోత్త సమీకతరణము యొక్క అనువర్తనాలు	47	
7.9	సౌష్ఠవము మరియు అనంత స్పర్శరేఖలు	50	
7.10	వక్రరేఖలను గీయడం	53	
8	**అవకలనులు మరియు పాక్షిక అవకలనులు**	**61**	**అక్టోబర్ / నవంబర్**
8.1	పరిచయము	61	
8.2	రేఖీయ ఉజ్జాయింపు మరియు అవకలనములు	63	
8.3	చాలా చరరాశులు గల ప్రమేయాలు	72	
8.4	రెండు చరరాశులు గల ప్రమేయాల అవధి మరియు అవిచ్ఛిన్నత	75	
8.5	పాక్షిక అవకలనులు	78	
8.6	ఎక్కువ చరరాశులు గల ప్రమేయాల రేఖీయ ఉజ్జాయింపు మరియు అవకలనము	84	
9	**సమాకలనముల అనువర్తనాలు**	**95**	**నవంబర్ / డిసంబర్**
9.1	పరిచయము	95	
9.2	నిశ్చిత సమాకలనమును అవధుల మొత్తముగా చూపుట	97	
9.3	సమాకలన గణితము యొక్క ప్రాథమిక సిద్ధాంతాలు మరియు వాటి అనువర్తనాలు	103	
9.4	బెర్నౌలీస్ సూత్రము :	120	
9.5	అపక్రమ సమాకలనములు	122	
9.6	క్షయకరణ సూత్రాలు	124	
9.7	గామా సమాకలనం	128	
9.8	సమాకలన పద్ధతి ద్వారా పరిబద్ధ తలం వైశాల్యమును గణించడం	130	
9.9	ఒక అక్షమును అనుసరించి భ్రమణ వైశాల్యము పొందే ఘన వస్తువు యొక్క ఘనపరిమాణము.	144	

00_12th_Maths_Telugu_Medium_Front_Page.indd 3 03/03/2023 17:41:14

10	**సాధారణ అవకలన సమీకరణములు**	**154**	**డిసంబర్**
10.1	పరిచయము	154	
10.2	అవకలన సమీకరణాలు, తరగతి మరియు అంతస్థు	155	
10.3	అవకలన సమీకరణముల వర్గీకరణ	159	
10.4	అవకలన సమీకరణములను రూపొందించుట	161	
10.5	సాధారణ అవకలన సమీకరణం యొక్క సాధన	165	
10.6	మొదటి తరగతి, మొదటి అంతస్థు అవకలన సమీకరణముల సాధన	168	
10.7	మొదటి తరగతి రేఖీయ అవకలన సమీకరణములు	177	
10.8	మొదటి తరగతి అవకలన సమీకరణముల యొక్క అనువర్తనములు	181	
11	**సంభావ్యతా విభాజనములు**	191	**జనవరి**
11.1	పరిచయము	191	
11.2	యాదృచ్ఛిక చరరాశి	192	
11.3	యాదృచ్ఛిక చరరాశి రకములు	196	
11.4	అవిచ్ఛిన్న విభాజనములు	207	
11.5	గణితపరంగా అంచనా	215	
11.6	సిద్ధాంతిక విభాజనాలు: కొన్ని ప్రత్యేక వివిక్త విభాజనాలు	223	
12	**విలక్షణ గణితము**	237	**జనవరి**
12.1	పరిచయం	237	
12.2	యుగ్మ పరిక్రియలు	238	
12.3	తార్కిక గణితము	251	
	జవాబులు	270	
	పదకోశములు	282	

DGORK

అంతర్జాల పుస్తకము

MVH21

మూల్యాంకనము

00_12th_Maths_Telugu_Medium_Front_Page.indd 4 03/03/2023 17:41:14

అధ్యాయము

7

అవకలన గణిత అనువర్తనాలు

"అత్యధికంగా లేదా అత్యల్పంగా
అర్థము లేకుండా ఈ ప్రపంచములో ఏదీ జరగదు"

– లియోనార్డ్ యూలర్

7.1 పరిచయము (Introduction)

7.1.1 పూర్వ అభివృద్ధి (Early Developments)



Rudolf Otto Sigismund Lipschitz
1832-1903

ఏదైనా ఒకటి అది ఎలా మారుతుందో నిర్ధారించడానికి దానిని చిన్న భాగాలుగా విభజించడం (అతి సూక్ష్మభాగాలు) అనేది అవకలన గణితం యొక్క ప్రాథమిక లక్ష్యం. ఈ కారణం వలనే, నేటి అవకలన గణితమును పూర్వము అతి సూక్ష్మ అవకలన గణితం అని పిలిచేవారు. విజ్ఞానశాస్త్రం ఆవిర్భావంతో సమకాలీనమైన భౌతిక శాస్త్రం, ఖగోళ శాస్త్రంలోని సమస్యలు అవకలన గణితం యొక్క అనువర్తనాలే. 18–వ శతాబ్దము వరకు పైన పేర్కొనబడిన అనువర్తనాల కొరకే అవకలన గణితము ఉపయోగపడెను. 18వ శతాబ్దము చివరకు లాప్లాస్ మరియు లెగ్రాంజ్‌లు బలములకు సంబంధించిన పూర్తి అధ్యయమునకు విశ్లేషణ ప్రభావిత రంగమునకు తీసుకు వచ్చేంత వరకు 18వ శతాబ్దమంతా వచ్చిన ఈ అనువర్తనములు అభివృద్ధి చెందుతూ వచ్చినది.

అవకలనాల అనువర్తనాల అభివృద్ధి కొరకు లెజ్యూన్ డిరిబ్లెట్, రీమాన్ వాన్ న్యూమాన్, హీన్, క్రోనెకర్, లిప్ష్చిట్జ్, క్రిస్టోఫల్, కిర్చాఫ్, బెల్ట్రామి మరియు ఎందరో ఆ శతాబ్దపు ప్రముఖ భౌతిక శాస్త్రవేత్తలు కృషి చేసారు.

- జ్యామితి మరియు గతిశాస్త్రములలో అవకలన గణితము ఉపయోగపడుచున్నది.
- ప్రమేయం యొక్క ఉత్పన్నాలు, వ్యయం, బలం ఒకే ప్రక్రియలోని పదార్థాలు, లాభాలు మొదలైన వాటిని సూచిస్తాయి. ప్రమేయంలోని మార్పులో గల స్థితిని నిర్ణయించడానికి మరియు ప్రమేయాల ద్వారా ప్రాతినిధ్యం వహిస్తున్న పరిమాణాల యొక్క విపరీతమైన విలువలను నిర్ణయించడానికి ఉపయోగిస్తారు.
- ఇంజనీరింగ్ మరియు విజ్ఞానశాస్త్రాలలోని క్రొత్త రక సమస్యలలో ప్రమేయం యొక్క ఉత్పన్నాలు ప్రముఖపాత్రను పోషిస్తుంది.
- సాంఘిక శాస్త్రము మరియు వైద్యశాస్త్రాలలో కూడా అవకలనగణితములోని అనువర్తనాలను ఉపయోగిస్తారు.
- ఈ అధ్యాయంలో ప్రమేయం యొక్క మొదటి రెండు ఉత్పన్నాలను ఉపయోగించి, ప్రమేయం యొక్క స్వభావం, $y = f(x)$ వక్రం యొక్క రేఖాచిత్రం మరియు $f(x)$ యొక్క స్థాన తీవ్రత (గరిష్ఠ లేదా కనిష్ఠ) నిర్ణయించబడుతాయి. అదనంగా $f(x)$ యొక్క గరిష్ఠ ఉత్పన్నం ను (అవి ఉన్నట్లైతే) ఉపయోగించి ఒక బిందువు వెంబడి $f(x)$ యొక్క శ్రేణి విస్తరణను కూడా చర్చించబడినది.

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_7.indd 1 03/03/2023 17:42:49

అభ్యసన లక్ష్యాలు

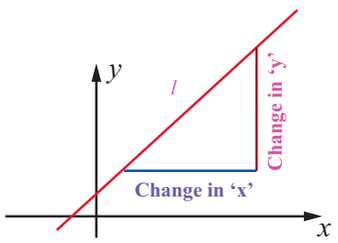
ఈ అధ్యాయం అభ్యసించిన తరువాత విద్యార్థులు ఈ క్రింది వాటి గురించి తెలుసుకొంటారు.

- రేఖగణిత సమస్య సాధనలో అవకలనలను ఉపయోగించుట.
- భౌతిక సమస్యలలో ఉత్పన్నాలను ఉపయోగించుట.
- వక్రం యొక్క ఏకరీతియత, కుంభాకారత్వం మరియు పుటాకారత్వం వంటి స్వభావాలను గుర్తించుట.
- ఉత్పన్నాలను నమూనా వాస్తవ సమయ సమస్యలకు అంత్య విలువలను గణించుటకు ఉపయోగిస్తారు.
- బహుపదులు మరియు ఇతర ప్రమేయాల యొక్క వక్రాలను కనుగొనుట.

7.2 ఉత్పన్నాల అర్థము (Meaning of Derivatives)

7.2.1 వాలుగా ఉత్పన్నం (Derivative as slope)

వాలు లేదా ఒక రేఖ యొక్క ప్రవణత: పటం 7.1 లో చూపిన విధంగా l అనే ఒక క్షితిజ లంబంకాని రేఖను తీసుకొనుము. ఇచ్చిన రేఖ l పై ప్రారంభ బిందువుతో ఏదొక పొడవు గల పరిమిత క్షితిజ సమాంతర రేఖా ఖండమును తీసుకొనుము. మరియు ఈ క్షితిజ సమాంతర రేఖను చివరి నుండి ప్రారంభించి క్షితిజ లంబరేఖా ఖండము ఇచ్చు రేఖను తాకు వరకు తీసుకొనుము. దీనిని క్షితిజ లంబం పొడవుకు క్షితిజ సమాంతర పొడవుకు గల నిష్పత్తి ఎల్లప్పుడూ ఒక స్థిరాంకం అని గమనించగలరు. ఈ నిష్పత్తినే l అనే రేఖ యొక్క వాలు అంటారు. దీనిని m తో సూచిస్తారు.



పటము 7.1

వాలును ఉపయోగించి ఒక రేఖ స్వభావమైన పెరుగుదల లేదా తరుగుదలను గుర్తించవచ్చు. ఒక రేఖ యొక్క పెరుగుదల లేదా తరుగుదల అనేది వరుసగా $m>0$ లేదా $m<0$ ఆధారంగా చెప్పవచ్చు. $m=0$ అయినప్పుడు y విలువలో ఎటువంటి మార్పు ఉండదు. XY తలంలో $y=mx+c$ అనేది ఒక సరళరేఖను సూచిస్తుంది అని గుర్తించుకోండి. ఇక్కడ m అనేది సరళరేఖ వాలును సూచిస్తుంది.

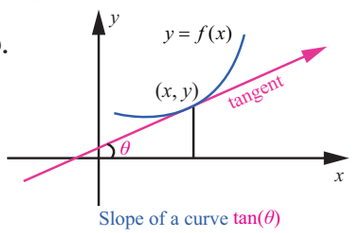
వాలు లేదా వక్రం యొక్క ప్రవణత: $y=f(x)$ ను ఒక వక్రము అనుకొనుము. రెండు విభిన్న బిందువులు $(x, f(x))$ మరియు $(x+h, f(x+h))$ కలిపే రేఖ యొక్క వాలు

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \text{ (న్యూటన్ భాగఫలం).} \qquad ...(1)$$

అవధి $h\to 0$ తీసుకోగా పొందు విలువ

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x), \text{ (న్యూటన్ భాగఫలం యొక్క అవధి)} \qquad ... (2)$$

ఇది (x, y) లేదా $(x, f(x))$ బిందువుల వద్ద. వక్రం యొక్క వాలు అగును.



Slope of a curve tan(θ)

పటము 7.2

విశేషాంశము

(x, y) బిందువు వద్ద $y=f(x)$ వక్ర స్పర్శరేఖ చేయు కోణము. θ అయిన, (x, y) వద్ద వక్రము యొక్క వాలు $f'(x)=\tan\theta$, ఇక్కడ θ ను X అక్షము నుండి అపసవ్య దిశలో కొలువబడును. గమనించవలసినది ఏమనగా $f'(x)$ ను $\frac{dy}{dx}$ గా సూచిస్తారు మరియు దీనిని తక్షణ మార్పు రేటు అని కూడా అంటారు. ఒక

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_7.indd 2 03/03/2023 17:42:54

అంతరంలోని మార్పు రేటు యొక్క సగటును న్యూటన్ భాగఫలమును ఉపయోగించి గణించవచ్చును.

ఉదాహరణ 7.1

ప్రమేయం $f(x)=x^2, x\in[0,2]$ కు ఉపఅంతరాలు $[0,0.5],[0.5,1],[1,1.5],[1.5,2]$ లలో సగటు మార్పు రేటును గణించుము. మరియు $x=0.5,1,1.5,2$ బిందువుల వద్ద తక్షణ మార్పురేటును కనుగొనండి.

సాధన

ఇచ్చిన ప్రమేయంకు $[a,b]$ అంతరం లో సగటు మార్పు రేటులో $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, ఇక్కడ x బిందువు వద్ద తక్షణ మార్పు రేటు $f'(x)$ అవి వరుసగా $b+a$ మరియు $2x$ అగును.

మార్పురేటు

a	b	x	సగటు రేటు $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=b+a$	తక్షణ రేటు $f'(x)=2x$
0	0.5	0.5	**0.5**	**1**
0.5	1	1	**1.5**	**2**
1	1.5	1.5	**2.5**	**3**
1.5	2	2	**3.5**	**4**

పట్టిక 7.1

7.2.2 మార్పు రేటుగా అవకలనం (Derivative as rate of change)

వాలును నిర్ణయించడానికి అవకలనం ఏవిధంగా ఉపయోగపడిందో మనము చూశాము. ఒక చరరాశి దృష్ట్యా మరొక చరరాశి యొక్క మార్పు రేటును నిర్ణయించడానికి కూడా అవకలనం ఉపయోగపడుతుంది. జనాభా పెరుగుదల, రేటు ఉత్పత్తి రేటు, నీటి ప్రవాహ రేటు, వేగము మరియు త్వరణం వీటికి కొన్ని ఉదాహరణలుగా చెప్పవచ్చు.

మార్పు రేటు యొక్క సాధారణ ఉపయోగం సరళరేఖలో కదిలే వస్తువు యొక్క చలనమును వివరించడం. అటువంటి సమస్యలలో, చలనరేఖను నియమించబడిన మూలబిందువుతో క్షితిజ సమాంతరం లేదా నిలువు రేఖలను ఉపయోగించి సూచించడం సాంప్రదాయం. అటువంటి రేఖలలో చలనము పురోగమన దిశలో ఉంటే ధనాత్మక దిశ (సానుకూల దిశ)గా పరిగణిస్తాము. మరియు తిరోగమన దిశలో ఉంటే ఋణాత్మక దిశ (ప్రతికూల దిశ)గా పరిగణిస్తాము.

కాలము t యొక్క ప్రమేయమును స్థాన ప్రమేయముగా చెప్పబడును. కావున ప్రమేయం $s(t)$ వస్తువు యొక్క స్థానం (మూల బిందువు ఆధారంగా)ను సూచించును. దీనిని $s=f(t)$ తో సూచిస్తారు. t కాలం వద్ద వేగం మరియు త్వరణములను వరుసగా $v(t)=\frac{ds}{dt}$ మరియు $a(t)=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}$ లతో సూచిస్తారు.

విశేషాంశము

క్రింది విశేషాంశములను గమనించడం సులభం

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_7.indd 3 03/03/2023 17:42:57

(1) దిశతో సంబంధం లేకుండా, వేగము యొక్క ఖచ్చిత విలువను వడి (Speed) అంటారు. కావున వడి $= |v(t)| = \left|\frac{ds}{dt}\right|$.

(2)
- కణం విశ్రాంతి స్థితిలో ఉన్నప్పుడు $v(t) = 0$.
- కణం పురోగమనం గా (ముందకు) చలించినపుడు $v(t) > 0$.
- కణం తిరోగమనం గా (వెనుకకు) చలించినపుడు $v(t) < 0$.
- కణం యొక్క దిశను మార్చినపుడు, $v(t)$ గుర్తులలో మార్పు జరుగును.

(3) t_1 మరియు t_2 కాల బిందువుల మధ్య t_c అనే కాలబిందువు ఉండిన $(t_1 < t_c < t_2)$ ఇచ్చట కణం యొక్క దిశను మార్పు చేసినట్లైతే కణం t_1 నుండి t_2 కాలములో, ప్రయాణం చేసిన మొత్తం దూరాన్ని ఈ విధంగా లెక్కిస్తారు.
$|s(t_1) - s(t_c)| + |s(t_c) - s(t_2)|$.

(4) భూ ఉపరితలమునకు సమీపంలో గల అన్ని వస్తువులు ఒకే స్థిరమైన త్వరణంలో భూమిపైకి చేరుతుంది. ఒక వస్తువుపై గాలి నిరోదం లేనప్పుడు లేదా తక్కువగా ఉన్నప్పుడు ఆ వస్తువుపై పనిచేసే ఏకైక బలం గురుత్వాకర్షణ బలం మాత్రమే. అయితే ఆ వస్తువు భూమిపై క్రిందకు చేరును విధానాన్ని స్వేచ్ఛా పతనం అని అంటారు.

ఒక వస్తువును $t = 0$ సమయంలో s_0 అనే తొలి ఎత్తు వద్ద దాని ప్రారంభ వేగం v_0 తో పైకి విసిరిన క్రింది సమీకరణాలను తృప్తిపరుచును. $a = -g$, $v = -gt + v_0$, $s = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + s_0$.

ఇక్కడ, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ లేదా 32 ft/s^2.

మన దైనందిన జీవితములో గల పరిమాణము లకు సంబంధించిన కొన్ని ఉదాహరణలు క్రింద ఇవ్వబడినవి. ఇవి మరొక పరిమాణము దృష్ట్యా మార్పు రేటు.

1) క్షితిజ సమాంతర ఎత్తు దృష్ట్యా క్షితిజ నిలువు ఎత్తులోని మార్పురేటు అనునది వాలు అగును.
2) కాలం దృష్ట్యా స్థాన భ్రంశములోని మార్పురేటును వేగం అంటారు.
3) కాలం దృష్ట్యా వేగంలోని మార్పురేటును త్వరణము అని అంటారు.
4) రేఖీయ దూరము దృష్ట్యా ఒక కొండ యొక్క ఏటువాలులోని మార్పు రేటును ఆ కొండ యొక్క వాలుతనము అంటారు.

క్రింద ఇవ్వబడిన రెండు పరిస్థితులను పరిశీలించండి.

- ఒక వ్యక్తి చెన్నై నుండి ధర్మపురికి కారును నిరంతరాయంగా నడుపుతున్నాడు. ప్రయాణ దూరము (కిలోమీటర్లలో) ను $D(t)$ అను కాలప్రమేయముగా వ్యక్తపరుస్తారు. ఒకతను $D'(3) = 70$ ను పొందెను అనుటకు అర్థమేమి?

$t = 3$ అయినప్పుడు దూరంలోని మార్పురేటు 70 kmph అగును.

- కాలం t దృష్ట్యా నీటి వనరులలోని నీరు ఇంకిపోతున్నది. t రోజులలో నీటి వనరులలోని నీరు ఇంకిపోవడాన్ని $V(t)$ గా వ్యక్తపరిచారు. వక్రరేఖ $y = V(t)$ వక్రమునకు $t = 7$ వద్ద స్పర్శరేఖ వాలు -3 అంటే అర్థమేమి?

గత 7 రోజులలో ప్రతి రోజు 3 యూనిట్ల నీరు ఇంకిపోతున్నది అని అర్థం. అదేవిధంగా మనదైనందిన

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_7.indd 4 03/03/2023 17:43:00

జీవిత సమస్యలలోని మార్పురేటు అనే భావన ఎంతగానో ఉపయోగపడును. ఇప్పుడు మనం మరికొన్ని ఉదాహరణలతో వివరిస్తాము.

ఉదాహరణ 7.2

ఇరువైపులా పూతపూయబడిన 10 మీటరు పొడవు గల ఒక కడ్డీ యొక్క ఉష్ణోగ్రత T సెల్సియస్‌లలో x అనునది పొడవు యొక్క ప్రమేయం $T = x(10-x)$ గా ఇవ్వబడినది. కడ్డీ యొక్క మధ్యబిందువు వద్ద ఉష్ణోగ్రతలోని మార్పురేటు సున్న అని నిరూపించండి.

సాధన

ఇచ్చిన ప్రమేయం $T = 10x - x^2$ కావున ఒక చివర నుంచి ఏదేని దూరంలో ఏర్పడు మార్పురేటు $\frac{dT}{dx} = 10 - 2x$ గా ఇవ్వబడినది కడ్డీ యొక్క మధ్యబిందువు $x = 5$ అగును, $x = 5$ ని ప్రతిక్షేపించగా $\frac{dT}{dx} = 0$ ను మనం పొందవచ్చు. ■

ఉదాహరణ 7.3

ఒక వ్యక్తి ఆంగ్ల పరీక్ష కోసం 100 పదాలను నేర్చుకొన్నాడు. నేర్చుకొన్న తరువాత t రోజులలో అతనికి గుర్తుండే పదాల సంఖ్య $W(t) = 100 \times (1-0.1t)^2,\ 0 \le t \le 10$ గా ఇవ్వబడినది. నేర్చుకొన్న 2 రోజుల తరువాత ఆ వ్యక్తి పదాలను మరచిపోయే మార్పు రేటు ఎంత?

సాధన

మన దగ్గర,

$$\frac{d}{dt}W(t) = -20 \times (1-0.1t).$$

$$t = 2, \text{వద్ద}, \ \frac{d}{dt}W(t) = -16.$$

ఆ వ్యక్తి నేర్చుకున్న 2 రోజుల తరువాత 16 పదాలను మరచిపోగలడు. ■

ఉదాహరణ 7.4

ఒక కణం కదిలే దూరం $s(t) = \frac{t^3}{3} - t^2 + 3$ అనే నియమం ను అనుసరించి ఉంటుంది కణం కొంత దూరం. ఏ సమయం వద్ద కణం యొక్క వేగం మరియు త్వరణం శూన్యం అగును.

సాధన

$$'t' \text{ కాలంలో కదిలిన దూరం } s = \frac{t^3}{3} - t^2 + 3.$$

$$'t' \text{ కాలం వద్ద వేగం } v(t) = \frac{ds}{dt} = t^2 - 2t.$$

$$'t' \text{ కాలం వద్ద త్వరణం } a(t) = \frac{dV}{dt} = 2t - 2.$$

$t^2 - 2t = 0$ అయిన వేగం శూన్యం అగును అంటే $t = 0, 2$. $2t - 2 = 0$ అయిన త్వరణం శూన్యం అగును అంటే కాలం $t = 1$ అగును. ■

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_7.indd 5 03/03/2023 17:43:04

ఉదాహరణ 7.5

భూమి నుంచి నేరుగా పైకి విసరబడిన కణం t సెకను కాలంలో s అడుగుల ఎత్తును చేరును. ఇక్కడ $s(t)=128t-16t^2$

(i) కణం చేరే గరిష్ఠ ఎత్తును లెక్కించండి?

(ii) కణం భూమిని తాకినప్పుడు దాని వేగం ఎంత?

సాధన

(i) కణం యొక్క వేగం $v(t)$ శూన్యం అయినప్పుడు అది గరిష్ఠ ఎత్తును చేరును.

ఇప్పుడు t కాలం వద్ద కణం యొక్క వేగమును కనుగొనవలెను.

$v(t)=\frac{ds}{dt}=128-32t$

$v(t)=0 \Rightarrow 128-32t=0 \Rightarrow t=4$.

4 సెకనుల తరువాత కణం గరిష్ఠ ఎత్తును చేరును.

$t=4$ వద్ద ఎత్తు $s(4)=128(4)-16(4)^2=256$ అడుగులు.

(ii) $s=0$ వద్ద కణం భూమిని తాకును.

$s=0 \Rightarrow 128t-16t^2=0$

$\Rightarrow t=0, 8$ సెకనులు.

$t=8$ సెకనుల వద్ద కణం భూమిని చేరును. భూమిని చేరునప్పుడు కణం యొక్క వేగం $v(8)=-128$ అడుగులు/సెకను ■

ఉదాహరణ 7.6

ఒక కణం క్షితిజ సమాంతర రేఖ వెంబడి కదులుతుంది. దాని స్థానం ఎల్లప్పుడు $t\geq 0$ అయిన $s(t)=t^3-6t^2+9t+1$ గా ఇవ్వబడినది. ఇక్కడ s ను మీటర్లలో t ను సెకనులలో కొలుస్తారు.

(i) కణం ఏ సమయంలో విశ్రాంతి స్థితిని పొందును?

(ii) కణం ఏ సమయంలో దాని దిశను మారుస్తుంది?

(iii) మొదటి 2 సెకనులలో కణం ప్రయాణం చేసిన మొత్తం దూరాన్ని కనుగొనండి.

సాధన

ఇవ్వబడినది $s(t)=t^3-6t^2+9t+1$ అవకలనం చేయగా $v(t)=3t^2-12t+9$ మరియు $a(t)=6t-12$.

(i) $v(t)=0$ అయిన కణం విశ్రాంతి స్థితిని పొందుతుంది. $v(t)=3(t-1)(t-3)=0$, $t=1$మరియు $t=3$

(ii) $v(t)$ యొక్క గుర్తులు మారినప్పుడు కణం యొక్క దిశలో మార్పు జరుగును

ఇప్పుడు $0\leq t<1$ అయిన రెండూ $(t-1)$ మరియు $(t-3)<0$ కావున $v(t)>0$ అగును.

$1<t<3$ అయిన $(t-1)>0$ మరియు $(t-3)<0$ కావున $v(t)<0$ అగును.

$t>3$ అయిన రెండూ $(t-1)$, $(t-3)>0$ కావున $v(t)>0$

$t=1$ మరియు $t=3$ అయిన కణం దాని దిశను మార్చుకొనును.

(iii) $t=0$ నుండి $t=2$ వరకు కణం ప్రయాణం చేసిన మొత్తం దూరం $|s(0)-s(1)|+|s(1)-s(2)|=|1-5|+|5-3|=6$ మీటర్లు. ■

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_7.indd 6 03/03/2023 17:43:10

7.2.3 సాపేక్ష రేట్లు (Related rates)

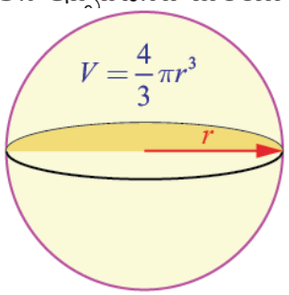
సాపేక్ష రేట్ల సమస్య అనేది కనీసం రెండు మారుతున్న పరిమాణాన్ని కలిగి ఉన్న సమస్య మరియు మారుతున్న రేటును గుర్తించేటప్పుడు అన్నింటిపైన తగిన సమాచారం ఇవ్వాలి. ఉదాహరణకు రెండు వేర్వేరు దిశల్లో ప్రయాణించే రెండు వాహనాల వేగం, వారి వ్యక్తిగత వేగం మరియు దిశలు తెలుసుకొనుట ద్వారా వాటిని వేరుచేసి వాటి వడి తగ్గించవచ్చు.

ఉదాహరణ 7.7

ఒక గోళాకార బెలూన్‌లోనికి సెకనుకు 1000 సెం.మీ^{3} రేటుతో గాలిని నింపుతున్నాము. వ్యాసార్ధము 7 సెం.మీగా ఉన్నప్పుడు, బెలూన్ వ్యాసార్ధము ఏ రేటున మారును? అదేవిధంగా గోళం యొక్క ఉపరితల వైశాల్య మార్పు రేటును లెక్కించుము.

సాధన

r వ్యాసార్ధంగా గల బెలూన్ యొక్క ఘనపరిమాణం $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ $\frac{dV}{dt}=1000$ అని ఇవ్వబడినది మరియు మనం $\frac{dr}{dt}$ విలువను $r=7$ అయినపుడు కనుగొనవలెను.



పటము 7.3

$$\frac{dV}{dt}=3\times\frac{4}{3}\pi r^2\times\frac{dr}{dt}.$$

$r=7$ మరియు $\frac{dV}{dt}=1000$ ను ప్రతిక్షేపించగా $1000=4\pi\times49\times\frac{dr}{dt}$.

కావున, $\frac{dr}{dt}=\frac{1000}{4\times49\times\pi}=\frac{250}{49\pi}$.

బెలూన్ యొక్క ఉపరితల వైశాల్యం $S=4\pi r^2$ కావున $\frac{dS}{dt}=8\pi\times r\times\frac{dr}{dt}$

$\frac{dr}{dt}=\frac{250}{49\pi}$ మరియు $r=7$ ని ప్రతిక్షేపించగా, మనం పొందునది.

$$\frac{dS}{dt}=8\pi\times7\times\frac{250}{49\pi}=\frac{2000}{7}.$$

కావున వ్యాసార్ధంలోని మార్పురేటు $\frac{250}{49\pi}$ సెం.మీ/సెకను మరియు ఉపరితల వైశాల్యం మార్పురేటు $\frac{2000}{7}$ సెం.మీ^{2}/సెకను

ఉదాహరణ 7.8

$Px+3P-16x=234$ సమీకరణం ఒక వస్తువు యొక్క ధరకు , లంభించే యూనిట్ల సంఖ్య (సరఫరా) కు గల సంబంధమును తెలుపును. ఇక్కడ P అనేది ఒక వస్తువు, యొక్క ధర రూపాయిలలో (₹) మరియు x అనునది యూనిట్ల సంఖ్య. 90 యూనిట్లు అందుబాటులో ఉన్నప్పుడు మరియు వారానికి 15 యూనిట్లు చొప్పున సరఫరా రేటు పెరుగుతుంటే t దృష్ట్యా ధరలో మార్పు రేటును కనుగొనుమా.

సాధన

మన వద్ద $$P=\frac{234+16x}{x+3}$$

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_7.indd 7 03/03/2023 17:43:14

కావున, $\frac{dP}{dt} = -\frac{186}{(x+3)^2} \times \frac{dx}{dt}$.

$x = 90, \frac{dx}{dt} = 15$, లను ప్రతిక్షేపించగా $\frac{dP}{dt} = -\frac{186}{93^2} \times 15 = -\frac{10}{31} \approx -0.32$ రూపాయలు/వారం, ధర మార్పు అనునది వారమునకు ₹ 0.32 రేటున తగ్గును.

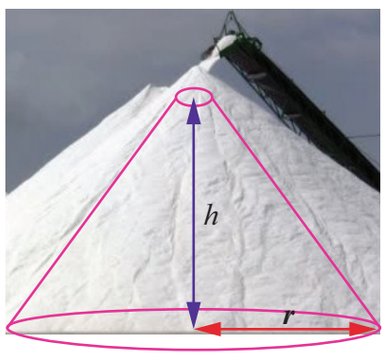
ఉదాహరణ 7.9

ఒక కన్వేయర్ బెల్టునుంచి నిమిషానికి 30 క్యూబిక్ మీటర్ల చొప్పున ఉప్పును పోసిన అది ఒక శంఖువు ఆకారాన్ని కలిగియుండును దీని భూమి వృత్తాకారంగాను. ఎత్తు మరియు వ్యాసాలు ఎల్లప్పుడు సమానము. శంఖువు ఎత్తు 10 మీటర్లు ఉన్నప్పుడు శంఖువు యొక్క ఎత్తు ఎంత వేగంతో పెరుగును?

సాధన

ఎత్తు మరియు భూ వ్యాసార్ధాలు వరుసగా h మరియు r అయిన $h = 2r$ అగును. ఉప్పు యొక్క ఘనపరిమాణం V అనుకొనిన

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{12}\pi h^3$; $\frac{dV}{dt} = 30$ మీ^{3}/నిమిషం.



పటము 7.4

అందువలన, $\frac{dV}{dt} = \frac{1}{4}\pi h^2 \frac{dh}{dt}$

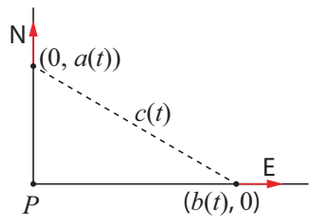
అందువలన, $\frac{dh}{dt} = 4\frac{dV}{dt} \cdot \frac{1}{\pi h^2}$

$\frac{dh}{dt} = 4 \times 30 \times \frac{1}{100\pi}$

$= \frac{6}{5\pi}$ మీ/నిమిషం.

ఉదాహరణ 7.10 (రెండు రాశులకు సంబంధించిన రేటు సమస్యలు)

ఒక రహదారి ఉత్తరం నుండి దక్షిణం వైపు వెళ్ళుతూ అది P బిందువు వద్ద తూర్పు నుండి పడమరకు వెళ్ళే రహదారిని కలుస్తుంది. మొదటి రహదారిలో A అనే కారు ఉత్తరం వైపు మరియు B అనే కారు తూర్పు వైపు రెండవ రహదారిలో నడుస్తున్నవి. ఒక నిర్ణిత సమయంలో A కారు ఉత్తరాన P బిందువుకు 10 కిలోమీటర్ల దూరంలో 80 కి.మీ/గ నడుస్తున్నది. అదే సమయంలో B కారు P బిందువుకు 15 కిలోమీటర్ల దూరంలో 100 కి.మీ/గ వేగంతో నడుస్తున్నది. రెండు కార్ల మధ్య దూరం ఎంత వేగంగా మారుతుంది?



పటము 7.5

సాధన

t కాలం వద్ద P బిందువు $a(t)$నుండి ఉత్తరం వైపు కారు A కు గల దూరం $a(t)$ అనుకొనుము. t కాలం వద్ద P బిందువు నుండి తూర్పు వైపు కారు B కు గల దూరం $b(t)$ అనుకొనుము. t కాలం వద్ద A, B కార్ల మధ్య దూరం $c(t)$ అనుకొనుము. పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం $c(t)^2 = a(t)^2 + b(t)^2$.

అవకలనం చేయగా $2c(t)c'(t) = 2a(t)a'(t) + 2b(t)b'(t)$.

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_7.indd 8 03/03/2023 17:43:19

$$c' = \frac{aa' + bb'}{c} = \frac{aa' + bb'}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

విలువలను ప్రతిక్షేపించగా

$$c' = \frac{(10 \times 80) + (15 \times 100)}{\sqrt{10^2 + 15^2}} = \frac{460}{\sqrt{13}} \approx 127.6 \text{ కి.మీ/గం}$$

నిర్ణిత సమయంవద్ద

అభ్యాసము 7.1

1. సరళ రేఖపై చలించే ఒక కణం t సెకనులలో మూలబిందువు నుంచి చలించే దూరం $s = 2t^2 + 3t$ మీటర్లు
   (i) $t = 3$ మరియు $t = 6$ సెకనుల మధ్య సరాసరి వేగమును కనుగొనండి.
   (ii) $t = 3$ మరియు $t = 6$ సెకనులలో తక్షణ వేగమునులను కనుగొనండి.
2. ఒక కెమరా అనుకోకుండా 400 అడుగుల ఎత్తైన కొండ పైభాగము నుంచి పడినది. t సెకనులలో అది ప్రయాణం చేసిన దూరం $s = 16t^2$
   (i) కెమెరా భూమిని తాకడానికి ఎంత సమయం పడుతుంది?
   (ii) కెమెరా భూమిని చేరే చివరి 2 సెకనులలో దాని సరాసరి వేగం ఎంత?
   (iii) కెమెరా భూమిని తాకునప్పుడు దాని తక్షణ వేగం ఎంత?
3. సరళ రేఖపై $s(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t - 4$ నియమాన్ని పాటిస్తూ ఒక కణంచలిస్తుంది. ఇక్కడ $t \geq 0$
   (i) కణం ఏ సమయం వద్ద దాని దిశను మారుస్తుంది?
   (ii) మొదటి 4 సెకెనులలో కణం ప్రయాణం చేసిన మొత్తం దూరాన్ని కనుగొనండి?
   (iii) కణం యొక్క వేగం శూన్యమనైనప్పుడల్లా దాని త్వరణమును కనుగొనండి?
4. భుజం పొడవు x గా గల ఒక ఘనం యొక్క ఘనపరిమాణం $v = x^3$, $x = 5$. యూనిట్లు అయినప్పుడు x దృష్ట్యా ఘనపరిమాణములో మార్పు రేటును కనుగొనుము.
5. ఒక సన్నని కడ్డీ యొక్క ద్రవ్యరాశి $m(x)$ (కిలోగ్రాములలో), పొడవు x (మీటర్లలో) అయిన $m(x) = \sqrt{3x}$ గా ఇవ్వబడినది. కడ్డీ పొడవు $x = 3$ మరియు $x = 27$ మీటర్ల ఉన్నప్పుడు పొడవు దృష్ట్యా ద్రవ్యరాశిలో ఏర్పడు మార్పురేటును కనుగొనండి.
6. నిలకడగా ఉన్న నీటిలో రాయిని విసిరినపుడు నీటిలో ఏక కేంద్ర వృత్తాలుగా అలలు ఏర్పడుతాయి. r వ్యాసార్ధంగా గల బాహ్య అల సెకనుకు 2 సెం.మీ చొప్పున స్థిర రేటున పెరుగుతున్నది. వృత్తం యొక్క వ్యాసార్ధం 5 సెం.మీ ఉన్నప్పుడు చెదిరిన నీటి అలల యొక్క మొత్తం వైశాల్యములో మార్పు రేటును కనుక్కోండి?
7. ఓడ పైగల దీపం (టార్చ్) ప్రతి 10 సెకన్లకు ఒక భ్రమణం చేయును. ఇది తీర రేఖ నుండి 5 కిలోమీటర్ల దూరంలో లంగరు వేయబడిన ఓడ నందు కలదు. ఈ దీపం తీరంతో చేయు కోణం 45° అయినప్పుడు తీరరేఖ వెంబడి కాంతి పుంజం ఎంత వేగముతో కదులుతుంది?
8. తలక్రిందులుగా ఉంచిన ఒక క్రమాకార శంఖువు ఆకారంలో గల ఒక నీటి తొట్టె లోతు 12 మీ మరియు పైనున్న వృత్తాకార వ్యాసార్ధము 5 మీ. నిమిషానికి 10 ఘన మీటర్లు వేగముతో నీరు తొట్టెలోనికి ప్రవహిస్తున్నది. 8 మీటర్ల లోతులో నీరు ఉన్నప్పుడు నీటి మట్టం ఎత్తు పెరుగు వేగము ఎంత?
9. 17 మీటర్లు పొడవు గల నిచ్చెన గోడకు ఏటవాలుగా అమర్చబడియున్నది. నిచ్చెన యొక్క ఆధారం గోడ నుంచి 5మీ/సె రేటుతో దూరంగా లాగబడును. నిచ్చెన యొక్క క్రిందిభాగం గోడ నుంచి 8 మీటర్ల దూరంలో ఉన్నప్పుడు

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_7.indd 9 03/03/2023 17:43:21

(i) నిచ్చెన యొక్క పైభాగం ఎంత వేగంతో గోడ నుండి క్రిందకు వెళ్ళును?

(ii) నిచ్చెన గోడ మరియు నేల ద్వారా ఏర్పడిన త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యం ఏ రేటున మారుతుంది?

10. ఒక పోలీసు వాహనం రహదారి కూడలి వద్ద ఉత్తరం వైపున నుండి తూర్పువైపు వెళ్ళే కారును వెంబడిస్తుంది. పోలీసు వాహనం కూడలి నుంచి ఉత్తరాన 0.6కి.మీ మరియు కారు కూడలి నుంచి తూర్పున 0.8 కి.మీ దూరంలో ఉన్నప్పుడు, రాడార్ (జాడ తెలిపే) పరికరం సహాయంతో వారి వాహనాల మధ్య దూరం 20 కి.మీ/గ రేటుతో పెరుగుతూ ఉన్నది. పోలీసు వాహనం గంటకు 60 కి.మీ వేగముతో కదులుతుంటే కారు వేగం ఎంత?

7.2.4 స్పర్శరేఖ మరియు అభిలంబరేఖల సమీకరణాలు (Equations of Tangent and Normal)

లీబ్నిజ్ ప్రకారం వక్రరేఖపై చాలా దగ్గరగా ఉండే ఒక జత బిందువుల ద్వారా పోవు సరళరేఖను స్పర్శరేఖ అంటారు.

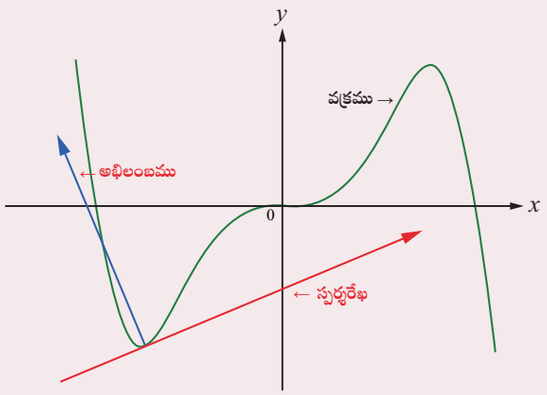
నిర్వచనం 7.1

ఇచ్చిన ఒక బిందువు వద్ద ఒక వక్రతలమునకు స్పర్శరేఖ అనునది ఈ బిందువు వద్ద తాకు సరళరేఖ అగును.

నిర్వచనం 7.2

వక్రంపై ఏదైన బిందువు గుండా పోవు స్పర్శరేఖకు లంబంగా గల సరళరేఖను ఆ బిందువు వద్ద అభిలంబరేఖ అంటారు.

పటం 7.7లో వక్రంపై ఒక బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ మరియు అభిలంబ రేఖలు వివరించబడినవి.



పటము 7.6

$y = f(x)$ ను ఒక వక్రరేఖగా పరిగణించండి.

ఒక వక్రముపై గల (a,b) బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణం

$$y-b=(x-a)\times\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(a,b)} \text{ లేదా } y-b=f'(a)\cdot(x-a).$$

ఇదే వక్రంపై, అదే బిందువు వద్ద అభిలంబ రేఖ సమీకరణం పొందు క్రమములో అభిలంబ రేఖ, స్పర్శరేఖకు లంబంగా ఉంటుందని మనం గ్రహించాలి. అందువలన (a,b) బిందువు వద్ద అభిలంబ రేఖ వాలు అనేది స్పర్శరేఖ వాలు యొక్క విలోమానికి ఋణాత్మకం అగును అది $-\left(\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right)_{(a,b)}$

అందువలన అభిలంబరేఖ సమీకరణం

$$(y-b)=-\left(\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right)_{(a,b)}\times(x-a) \text{ లేదా } (y-b)\times\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(a,b)}=-(x-a).$$

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_7.indd 10 03/03/2023 17:43:23

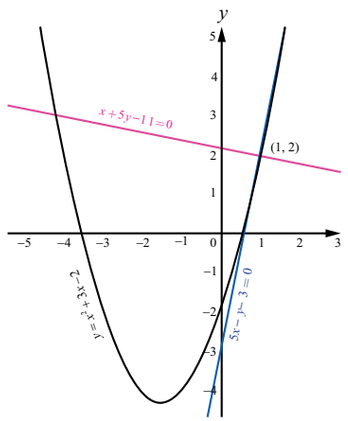
విశేషాంశము

(i) వక్రంపై ఒక బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ క్షితిజ సమాంతరంగా ఉంటే ఆ బిందువు వద్ద అవకలనం 0. అందువలన (x_1, y_1) బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణం $y = y_1$ మరియు అభిలంబరేఖ సమీకరణం $x = x_1$ అగును.

(ii) వక్రంపై ఒక బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ క్షితిజ లంబముగా ఉండే ఆ బిందువు వద్ద అవకలనం అనంతం (∞) అగును. అందువలన (x_1, y_1) బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణం $x = x_1$ మరియు అభిలంబ రేఖ సమీకరణం $y = y_1$ అగును.

ఉదాహరణ 7.11

$y = x^2 + 3x - 2$ వక్రానికి $(1,2)$ బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ మరియు అభిలంబ రేఖ సమీకరణాన్ని కనుగొనుము.



పటము 7.7

సాధన

$\frac{dy}{dx} = 2x + 3$ కావున, $(1,\ 2)$ వద్ద $\frac{dy}{dx} = 5$ అగును.

కావలసిన స్పర్శరేఖ సమీకరణం

$(y - 2) = 5(x - 1) \Rightarrow 5x - y - 3 = 0$.

$(1,2)$ బిందువు వద్ద అభిలంబ రేఖ వాలు $-\frac{1}{5}$ అగును.

కావలసిన అభిలంబ రేఖ సమీకరణం

$(y - 2) = -\frac{1}{5}(x - 1) \Rightarrow x + 5y - 11 = 0$.

ఉదాహరణ 7.12

$y = x^3 - 3x^2 + x - 2$ అనే వక్రంపై ఏ బిందువుల వద్ద గీయబడిన స్పర్శరేఖ $y = x$ కు సమాంతరముగా ఉండును.

సాధన

$y = x$ రేఖ యొక్క వాలు 1. వక్రముపై బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ వాలుకూడా 1 అయిన ఇచ్చిన వక్రము యొక్క స్పర్శరేఖ ఈ రేఖకు సమాంతరము అగును.

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x + 1 = 1$$

$$3x^2 - 6x = 0.$$

కావున, $x = 0$ మరియు $x = 2$.

$(0, -2)$ మరియు $(2, -4)$ బిందువుల వద్ద గీయబడు స్పర్శరేఖ $y = x$ రేఖకు సమాంతరముగా ఉంటుంది.

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_7.indd 11 03/03/2023 17:43:27

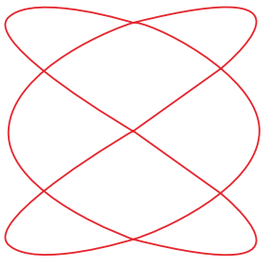
ఉదాహరణ 7.13

ఏదైనా ఒక బిందువు వద్ద లిసాజౌస్ వక్రము $x = 2\cos 3t$ మరియు $y = 3\sin 2t, t \in \mathbb{R}$ కు స్పర్శరేఖ మరియు అభిలంబ రేఖాసమీకరణాలను కనుగొనండి.

సాధన

ఇచ్చిన వక్రము ఒక వృత్తము మరియు ఒక దీర్ఘవృత్తము కాదు. మీ కొరకు వక్రమును పటము 7.9 లో చూపబడినది.

$x = 2\cos 3t; y = 3\sin 2t$



లిసాజౌస్ వక్రము

పటము 7.8

$$\text{ఇప్పుడు, } \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

$$= -\frac{6\cos 2t}{6\sin 3t} = -\frac{\cos 2t}{\sin 3t}.$$

ఏదైనా బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ

$$y - 3\sin 2t = -\frac{\cos 2t}{\sin 3t}(x - 2\cos 3t)$$

$$x\cos 2t + y\sin 3t = 3\sin 2t\sin 3t + 2\cos 2t\cos 3t.$$

అభిలంబ రేఖ వాలు, విలోమ స్పర్శరేఖ వాలుకు ఋణాత్మకము. కావున వాలు $\frac{\sin 3t}{\cos 2t}$. అందువలన అభిలంబ రేఖ సమీకరణము

$$y - 3\sin 2t = \frac{\sin 3t}{\cos 2t}(x - 2\cos 3t).$$

$$x\sin 3t - y\cos 2t = 2\sin 3t\cos 3t - 3\sin 2t\cos 2t = \sin 6t - \frac{3}{2}\sin 4t.$$

7.2.5 రెండు వక్రాల మధ్యగల కోణము (Angle between two curves)

నిర్వచనం 7.3

రెండు వక్రాలు ఒక బిందువు వద్ద ఖండించుకొన్నప్పుడు ఆ వక్రరేఖల యొక్క స్పర్శరేఖల మధ్య గల కోణము ఒక లఘు కోణముగా నిర్వచించబడితే, దానిని రెండు వక్రాల మధ్య గల కోణముగా చెప్పవచ్చును.

ఇచ్చిన రెండు వక్రాలు ఒక బిందువు వద్ద ఖండించుకొనునప్పుడు స్పర్శరేఖల వాలును ఉపయోగించి రెండు వక్రాల మధ్యగల కోణమును గణించవచ్చును. $y = m_1x + c_1$, $y = m_2x + c_2$ అను రెండు సరళ రేఖల మధ్యగల లఘు కోణము θ అయిన

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}\right| \qquad \ldots (3)$$

ఇక్కడ m_1, m_2 లు పరిమితమైనవి.

విశేషాంశములు

(i) (x_1, y_1) బిందువు వద్ద రెండు వక్రాలు సమాంతరంగా ఉంటే $m_1 = m_2$.

(ii) (x_1, y_1) బిందువు వద్ద రెండు వక్రములు ఒకదానికొకటి లంబము అయిన m_1 మరియు m_2 లు వ్యవస్థితమయ్యి పరిమితముగా ఉన్నచో $m_1m_2 = -1$

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_7.indd 12 03/03/2023 17:43:32

ఉదాహరణ 7.14

$y = x^2$ మరియు $y = (x-3)^2$ ల మధ్యగల కోణమును కనుగొనండి.

సాధన

రెండు వక్రాల ఖండన బిందువును కనుగొనవలెను. రెండు సమీకరణములను పోల్చగా $x^2 = (x-3)^2$ నుంచి $x = \frac{3}{2}$ పొందుదాము. అందువలన ఖండన బిందువు $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$, θ అనేది రెండు వక్రముల మధ్య కోణము అనుకొనుము. ఇచ్చిన వక్రరేఖల యొక్క వాలులు క్రింది విధముగా యుండును.

$$y = x^2, \text{ వక్రానికి}$$

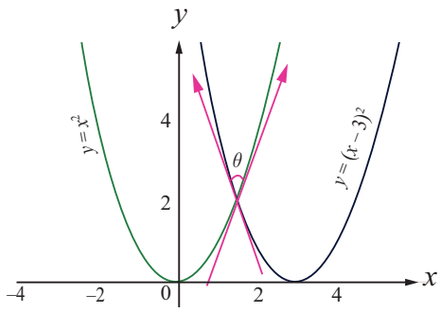
$$\frac{dy}{dx} = 2x.$$

$\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$ వద్ద $m_1 = \frac{dy}{dx} = 3.$

$$y = (x-3)^2, \text{ వక్రానికి}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2(x-3).$$

$\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$ వద్ద $m_2 = \frac{dy}{dx} = -3.$



పటము 7.9

(3)ను ఉపయోగించి మనము పొందునది

$$\tan\theta = \left|\frac{3-(-3)}{1-9}\right| = \frac{3}{4}$$

$$\text{అందువలన, } \theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right).$$

ఉదాహరణ 7.15

$y = x^2$ మరియు $x = y^2$ ఖండన బిందువులు $(0,0)$ మరియు $(1,1)$ ల వద్ద వక్రాల మధ్యగల కోణమును కనుగొనండి.

సాధన

మనము ఇప్పుడు వక్రాల వాలును కనుగొంటాము

$y = x^2$ వక్రము యొక్క వాలు m_1 అనుకొనుము.

$$m_1 = \frac{dy}{dx} = 2x.$$

$x = y^2$ వక్రము యొక్క వాలు m_2 అనుకొనుము.

$$m_2 = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}.$$

$(0,0)$ మరియు $(1,1)$ వద్ద కోణాలు వరుసగా θ_1 మరియు θ_2 అనుకొందాము.

$(0,0)$ బిందువు వద్ద $\tan\theta_1 = \left|\frac{2x - \frac{1}{2y}}{1 + (2x)\left(\frac{1}{2y}\right)}\right|$ యొక్క హారములో $0 \times \infty$ అను అనిశ్చిత రూపము వచ్చును. కావున అవధి ప్రక్రియ ద్వారా చేయగా

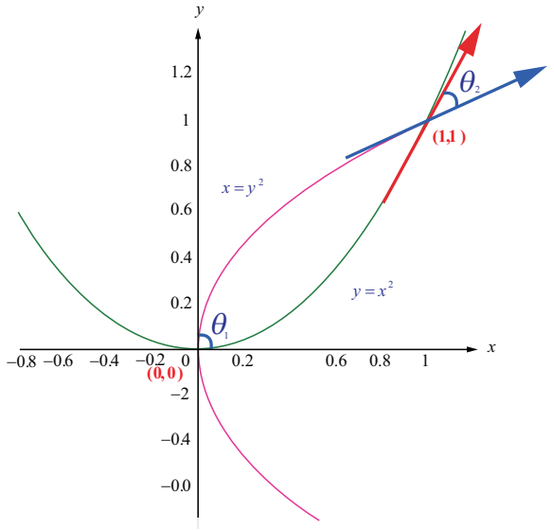
02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_7.indd 13 03/03/2023 17:43:36

$$\tan\theta_1 = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{2x-\frac{1}{2y}}{1+(2x)\left(\frac{1}{2y}\right)}\right|$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{4xy-1}{2(y+x)}\right|$$

$$= \infty$$

$$\theta_1 = \tan^{-1}(\infty) = \frac{\pi}{2} \text{ వచ్చును.}$$



పటము 7.10

$(1,1)$ వద్ద $m_1 = 2,\ m_2 = \frac{1}{2}$

$$\tan\theta_2 = \left|\frac{2-\frac{1}{2}}{1+(2)\left(\frac{1}{2}\right)}\right|$$

$$= \frac{3}{4}$$

$$\theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \text{ వచ్చును.}$$

ఉదాహరణ 7.16

ధన x అక్షముతో కూడిన $y = \sin x$ అనే వక్రము యొక్క ఖండన కోణమును కనుగొనుము.

సాధన

$y = \sin x$ అనే వక్రము ధన x అక్షమును ఖండించునపుడు $y = 0$ అగును. ఇది $x = n\pi,\ n = 1,2,3,..$ అని ఇచ్చును. ఇప్పుడు $\frac{dy}{dx} = \cos x, x = n\pi$ వద్ద వాలు కోణం $\cos(n\pi) = (-1)^n$ అగును. కావున కావలసిన ఖండన కోణం.

$$\tan\theta = \left|\frac{(-1)^n - 0}{1+(-1)^n(0)}\right| = 1 \qquad \forall \text{ n అనునది బేసి}$$

ఉదాహరణ 7.17

$ax^2 + by^2 = 1$ మరియు $cx^2 + dy^2 = 1$ వక్రాలు ఒకదానికొకటి లంబముగా ఖండించుకొనిన,

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{c} - \frac{1}{d} \text{ అని చూపండి.}$$

సాధన

రెండు వక్రాలు (x_0, y_0) బిందువు వద్ద ఖండించిన, $(a-c)x_0^2 + (b-d)y_0^2 = 0$ వచ్చుటకు దారి తీయును. (x_0, y_0) ఖండన బిందువు వద్ద వక్రాల యొక్క వాలును కనుగొనవలెను. వక్రాల యొక్క వాలు క్రింది విధంగా కనుగొనవచ్చును.

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_7.indd 14 03/03/2023 17:43:41

$ax^2 + by^2 = 1$ వక్రంకు వాలు $= \frac{dy}{dx} = -\frac{ax}{by}$.

$cx^2 + dy^2 = 1$ వక్రంకు వాలు $= \frac{dy}{dx} = -\frac{cx}{dy}$.

ఇక్కడ రెండు వక్రాలు లంబముగా ఖండించుకొనిన. (x_0, y_0) ఖండన బిందువు వద్ద రెండు వక్రాల వాలుల లబ్ధం -1 అగును. అందువలన రెండు వక్రాలు (x_0, y_0) వద్ద లంబంగా ఖండించుకొనిన

$$\left(-\frac{ax_0}{by_0}\right) \times \left(-\frac{cx_0}{dy_0}\right) = -1.$$

$$acx_0^2 + bdy_0^2 = 0,$$

దీనితోపాటు $(a-c)x_0^2 + (b-d)y_0^2 = 0$ వచ్చును

$$\frac{a-c}{ac} = \frac{b-d}{bd}.$$

$$\frac{1}{c} - \frac{1}{a} = \frac{1}{d} - \frac{1}{b}.$$

అందువలన, $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{c} - \frac{1}{d}$.

విశేషాంశము

పై ఉదాహరణ విపర్యయము కూడా ఋజువైనది. $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{c} - \frac{1}{d}$ నియమాన్ని అనుసరించి వక్రాలు లంబముగా ఖండించుకొంటాయి అని సులువుగా అంచనా వేయవచ్చు.

ఉదాహరణ 7.18

దీర్ఘవృత్తము $x^2 + 4y^2 = 8$ మరియు అతిపరావలయం $x^2 - 2y^2 = 4$ లంబముగా ఖండించుకొనునని నిరూపించండి.

సాధన

రెండు వక్రాలు యొక్క ఖండన బిందువును (a, b) అనుకొందాము. కావున

$$a^2 + 4b^2 = 8 \text{ మరియు } a^2 - 2b^2 = 4 \quad \ldots (4)$$

దీనికి (a, b) వద్ద రెండు వక్రాల వాలుల లబ్ధము -1 అని చూపిన సరిపోవును.

$x^2 + 4y^2 = 8$ ని x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$2x + 8y\frac{dy}{dx} = 0$$

అందువలన $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{4y}$.

(a, b) వద్ద $\frac{dy}{dx} = m_1 = -\frac{a}{4b}$.

$x^2 - 2y^2 = 4$ ని x, దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_7.indd 15 03/03/2023 17:43:47

$$2x - 4y\frac{dy}{dx} = 0$$

అందువలన, $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2y}$.

(a,b) వద్ద $\frac{dy}{dx} = m_2 = \frac{a}{2b}$.

అందువలన, $m_1 \times m_2 = \left(-\frac{a}{4b}\right)\times\left(\frac{a}{2b}\right) = -\frac{a^2}{8b^2}$ ... (5)

(4)లో అనుపాత నిష్పత్తిని ఉపయోగించిన

$$\frac{a^2}{-16-16} = \frac{b^2}{-8+4} = \frac{1}{-2-4}$$ వచ్చును.

$\frac{a^2}{b^2} = \frac{32}{4} = 8$ ని (5)లో ప్రతిక్షేపించగా $m_1 \times m_2 = -1$ వచ్చును. కావున ఈ రెండు వక్రాలు లంబముగా ఖండించుకొనును.

అభ్యాసము 7.2

1. క్రింద ఇవ్వబడిన వక్రాలుకు ఇచ్చిన బిందువుల వద్ద స్పర్శరేఖ వాలును కనుగొనండి.

   (i) $y = x^4 + 2x^2 - x$ వద్ద $x = 1$ (ii) $x = a\cos^3 t, y = b\sin^3 t$ వద్ద $t = \frac{\pi}{2}$.

2. $y = x^2 - 5x + 4$ అనే వక్రము యొక్క స్పర్శరేఖ ఏ బిందువు వద్ద $3x + y = 7$ అనే సరళ రేఖకు సమాంతరముగా ఉండును.

3. $y = x^3 - 6x^2 + x + 3$ అనే వక్రము యొక్క అభిలంబ రేఖ ఏ బిందువు వద్ద $x + y = 1729$ సరళరేఖకు సమాంతరముగా ఉంటుంది.

4. $y^2 - 4xy = x^2 + 5$ అనే వక్రమునకు ఏ బిందువుల వద్ద స్పర్శరేఖ క్షితిజ సమాంతరముగా ఉండును.

5. క్రింద ఇవ్వబడిన బిందువుల వద్ద వక్రాలకు స్పర్శరేఖ మరియు అభిలంబ రేఖలను కనుగొనుము.

   (i) $y = x^2 - x^4$ $(1,0)$ వద్ద (ii) $y = x^4 + 2e^x$ $(0,2)$ వద్ద

   (iii) $y = x\sin x$ $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ వద్ద (iv) $x = \cos t, y = 2\sin^2 t$ $t = \frac{\pi}{3}$ వద్ద

6. $y = 1 + x^3$ అను వక్రము యొక్క స్పర్శరేఖ $x + 12y = 12$ అనే రేఖకు లంబముగా ఉంటే ఆ స్పర్శరేఖ సమీకరణములను కనుగొనండి.

7. $y = \frac{x+1}{x-1}$ అను వక్రము యొక్క స్పర్శరేఖ $x + 2y = 6$ అను రేఖకు సమాంతరముగా ఉంటే ఆ స్పర్శరేఖ సమీకరణములను కనుగొనండి.

8. $x = 7\cos t$ మరియు $y = 2\sin t, t \in \mathbb{R}$ అను వక్రముపై ఏదేని ఒక బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ, మరియు అభిలంబరేఖ సమీకరణమును కనుగొనండి.

9. $xy = 2$ అనే లంబ అతిపరావలయానికి $x^2 + 4y = 0$ అనే పరావలయం మధ్య గల కోణమును కనుగొనండి.

10. $x^2 - y^2 = r^2$ మరియు $xy = c^2$ ఇక్కడ c, r లు స్థిరాంకాలుగా గల వక్రాలు లంబముగా ఖండించుకొంటాయి అని చూపండి.

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_7.indd 16 03/03/2023 17:43:54

7.3 మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతము (Mean Value Theorem)

మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతము రెండు బిందువుల మధ్య ఒక బిందువు యొక్క వ్యవస్థితమును నిర్ధారిస్తుంది. ఈ బిందువు వద్ద వక్రము యొక్క స్పర్శరేఖ వక్రము యొక్క ఆ రెండు బిందువులను కలుపు స్పర్శజ్యా (సీకెంటుకు) సమాంతరంగా ఉంటుంది.

సిద్ధాంతము 7.1 (మధ్యగత మూల్య సిద్ధాంతము)

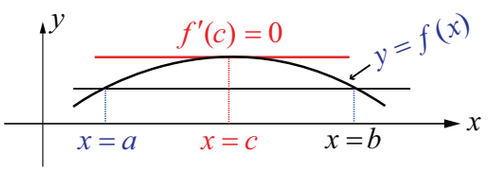
ఒక సంవృత అంతరము $[a,b]$ నందు f అవిచ్ఛిన్నమైనప్పుడు $f(a)$ మరియు $f(b)$ లను కలిపివాని మధ్య గల ఏదేని ఒక సంఖ్య C అయితే $f(x)=c$ అగునట్లు ఈ సంవృత అంతరము $[a,b]$ లో కనీసముగా x అను ఒక సంఖ్య ఉంటుంది.

7.3.1 రోల్స్ సిద్ధాంతము (Rolle's Theorem)

సిద్ధాంతము 7.2 (రోల్స్ సిద్ధాంతము)

సంవృత అంతరము $[a,b]$ నందు $f(x)$ అవిచ్ఛిన్నము మరియు వివృత అంతరము $[a,b]$ లో అవకలనీయం అనుకొందాము. $f(a)=f(b)$ అయితే $f'(c)=0$ అగునట్లు కనీసం ఒక బిందువు $c\in(a,b)$ గా ఉంటుంది.

ఈ సిద్ధాంతమును జ్యామితీయంగా క్రింది విధంగా అర్థము చేసుకొనవచ్చును. $x=a$ వద్ద ప్రారంభించి పటము 7.12లో వలె వక్రము వెంబడి $x=b$ వైపు కదిలే స్పర్శరేఖ ఒక చోట x అక్షమునకు సమాంతరముగా ఉండునట్లు $c\in(a,b)$ వ్యవస్థితము.



పటము 7.11

ఉదాహరణ 7.19

$f(x)=x^2(1-x)^2, x\in[0,1]$ ప్రమేయం రోల్స్ సిద్ధాంతాన్ని తృప్తిపరచిన, 'c' విలువను కనుగొనండి.

సాధన

$f(0)=0=f(1), f(x)$ అనునది సంవృతాంతరం $[0,1]$ లో అవిచ్ఛిన్నం మరియు వివృతాంతరం $(0,1)$ లో అవకలనీయం.

$$f'(x) = 2x(1-x)(1-2x).$$

$f'(c) = 0$ కావున $c=0,1,$ మరియు $\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{2}\in(0,1).$$

ఉదాహరణ 7.20

అంతరం $\left(\frac{1}{2},2\right)$ లో $f(x)=x+\frac{1}{x}, x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$ ప్రమేయం రోల్స్ సిద్ధాంతాన్ని తృప్తిపరచు విలువను కనుగొనుము.

సాధన

$f(x)$ అనునది అంతరము $\left[\frac{1}{2},2\right]$ లో అవిచ్ఛిన్నం, మరియు అంతరం $\left(\frac{1}{2},2\right)$ లో . అవకలనీయం

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2}=f(2)$ రోల్స్ సిద్ధాంతం ప్రకారం, $c\in\left(\frac{1}{2},2\right)$ అంతరంలో వ్యవస్థితం అగును.,

$f'(c)=1-\frac{1}{c^2}=0\Rightarrow c^2=1$ నుంచి $c=\pm1$ అగును. $1\in\left(\frac{1}{2},2\right)$, కావున మనము $c=1$ ను తీసుకొనవలెను

ఉదాహరణ 7.21

$f(x)=\log\left(\dfrac{x^2+6}{5x}\right)$, అను ప్రమేయమున అంతరం $[2,3]$ లో రోల్స్ సిద్ధాంతాన్ని తృప్తిపరచిన 'c' విలువను కనుగొనండి.

సాధన

$f(2)=0=f(3)$ మరియు, $f(x)$ అను ప్రమేయం $[2,3]$ అంతరంలో అవిచ్ఛిన్నం మరియు $(2,3)$ అంతరంలో అవకలనీయం

$$f'(x) = \frac{x^2-6}{x(x^2+6)}$$

$f'(c) = 0$ కావున

$$\frac{c^2-6}{c(c^2+6)} = 0$$

$$c = \pm\sqrt{6}$$

$$c = +\sqrt{6} \in (2,3).$$

$-\sqrt{6} \notin (2,3)$ అని గమనించవచ్చును. కావున $c=+\sqrt{6}$, రోల్స్ సిద్ధాంతమును తృప్తిపరచును.

రోల్స్ సిద్ధాంతాన్ని ఉపయోగించి, ఒక అంతరములోని బీజగణితము యొక్క సమీకరణమును సాధించకుండానే ఎన్ని మూలాలు ఉన్నాయో కనుగొనవచ్చును.

ఉదాహరణ 7.22

$x^4+2x^3-2=0$ సమీకరణమును సాధారణముగా సాధించకుండా $(0,1)$ అంతరంలో ఈ సమీకరణం ఒకే ఒక్క వాస్తవ మూలాన్ని కలిగియుండునని చూపుము.

సాధన

$f(x)=x^4+2x^3-2$ అనుకొనిన, $f(x)$ అనునది $[0,1]$ అంతరంలో అవిచ్ఛిన్నంగాను, మరియు $(0,1)$ అంతరంలో అవకలనీయంగా ఉన్న

$$f'(x) = 4x^3+6x^2. \text{ If } f'(x)=0 \text{ అయిన,}$$

$$2x^2(2x+3) = 0.$$

అందువలన, $x = 0,-\dfrac{3}{2}$ కాని $0,-\dfrac{3}{2} \notin (0,1)$.

కావున, $f'(x) > 0,\ \forall x \in (0,1)$.

అందువలన రోల్స్ సిద్ధాంతము ప్రకారము $f(a)=0=f(b)$ అగునట్లు $a,b \in (0,1)$ వ్యవస్థితము కాదు.కావున $(0,1)$ అంతరంలో సమీకరణం $f(x)=0$ కు రెండు మూలాలు లేవు. కాని $f(0)=-2<0$ మరియు $f(1)=1>0$ అనునది వక్రము $y=f(x)$, x-అక్షమును 0 మరియు 1 ల మధ్య ఒకే ఒకసారి ఖండించును అని చెప్పును. మధ్యగత విలువ సిద్ధాంతము ప్రకారం సమీకరణము $x^4+2x^3-2=0$ కు $(0,1)$ అంతరములో ఒకే ఒక విలువను కలిగియున్నది.

రోల్స్ సిద్ధాంతము యొక్క అనువర్తనాలు క్రింది విధముగా యుండును.

ఉదాహరణ 7.23

రోల్స్ సిద్ధాంతము ఉపయోగించి బహుపది $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ యొక్క రెండు విభిన్న వాస్తవ మూలాల మధ్య $na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_1$ అను బహుపదికి ఒక మూలముంటుందని నిరూపించుము.

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_7.indd 18 03/03/2023 17:44:08

సాధన

$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0$ అనుకొనుము. $P(x)$ కు రెండు వాస్తవ మూలాలు $\alpha<\beta$ అనుకొనిన $P(\alpha)=P(\beta)=0$ $P(x)$అనునది $[\alpha,\beta]$ అంతరములో అవిచ్ఛిన్నముగాను, మరియు (α,β) అంతరములో అవకలనీయం కావున రోల్స్ సిద్ధాంతము ప్రకారము $P'(\gamma)=0$ అగునట్లు $\gamma\in(\alpha,\beta)$ వ్యవస్థితము అగును.

కావున $P'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_1$ ఫలితం ఋజువైనది. ■

ఉదాహరణ 7.24

$x^4-6x^3-11x^2+24x+28$ అను బహుపది యొక్క మూలాలు 2 మరియు 7 అని ఇచ్చిన $(2,7)$ అంతరంలో $2x^3-9x^2-11x+12$ బహుపదికి ఒక మూలం ఉంటుందని నిరూపించుము.

సాధన

ఉదాహరణ 7.23ను ఉపయోగించగా

$$P(x)=x^4-6x^3-11x^2+24x+28,\ \alpha=2,\ \beta=7$$

$$\frac{P'(x)}{2}=2x^3-9x^2-11x+12=Q(x)\text{, (అనుకొనిన).}$$

ఇది, $Q(x)$ బహుపదికి $(2,7)$అంతరంలో ఒక మూలమును కలిగియుంటుదని చెప్పవచ్చును.

సరిచూడగా

$$Q(2) = 16-36-22+12=28-58=-30<0$$

$$Q(7) = 686-441-77+12=698-518=180>0$$

పై విధముగా $Q(x)$ బహుపదికి $(2,7)$ అంతరములో ఒక మూలం కలిగియుండవచ్చును అని మనము చూడవచ్చును. ■

విశేషాంశము

క్రింద తెలుపబడిన ప్రమేయాలకు రోల్స్ సిద్ధాంతమును అనువర్తించలేము.

(1) ప్రమేయము $f(x)=|x|, x\in[-1,1]$ కు $f(-1)=1=f(1)$ అయినను రోల్స్ సిద్ధాంతమును అనువర్తించలేము ఎందుకనగా $x=0$ వద్ద $f(x)$ అవకలనీయం కాదు.

(2) ప్రమేయం

$$f(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ x, & 0<x\le 1\end{cases}.$$

$f(0)=f(1)=1$ అయినను రోల్స్ సిద్ధాంతమును అనువర్తించలేము ఎందుకనగా. $f(x)$ వద్ద $x=0$ అవిచ్ఛిన్నము కాదు.

(3) ప్రమేయం $f(x)=\sin x,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ కు $f(x)$ సంవృతాంతరం $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ లో అవిచ్ఛిన్నము, వివృతాంతరం $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ లో అవకలనీయం అయినను రోల్స్ సిద్ధాంతమును అనువర్తించలేము ఎందుకనగా కాని $0=f(0)\neq f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ $f(x)$ అనే ప్రమేయము సంవృతాంతరం $[a,b]$ వద్ద అవిచ్ఛిన్నం మరియు వివృతాంతరం (a,b) వద్ద అవకలనీయం మరియు $f(a)\neq f(b)$ అయిన రోల్స్ సిద్ధాంతమును క్రింది విధంగా సాధారణీకరించవచ్చును.

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_7.indd 19 03/03/2023 17:44:14

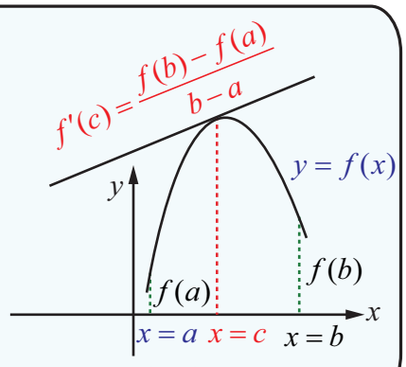
7.3.2 లెగ్రాంజ్ మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతము (Lagrange's Mean Value Theorem)

సిద్ధాంతము 7.3

$f(x)$ అను ప్రమేయం సంవృతాంతరం $[a,b]$ లో అవిచ్ఛిన్నం మరియు వివృతాంతరం (a,b) లో అవకలనీయం అనుకొందాము. $(f(a), f(b)$ లు సమానం కానవసరం లేదు)

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$ అ (6) అగునట్లు

$c \in (a,b)$ వ్యవస్థితమగును.



పటము 7.12

విశేషాంశము

$f(a) = f(b)$ అయిన లెగ్రాంజ్ మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతము నుండి రోల్స్ సిద్ధాంతము లభించును. కావున ఇది త్రిప్పబడిన రోల్స్ సిద్ధాంతము అగును.

విశేషాంశము

పై సిద్ధాంతము యొక్క భౌతిక అర్థము ఒక సంఖ్య $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ అనేది (a,b) పై $f(x)$ లో ఏర్పడే సరాసరి రేటు అగును. $f'(c)$ అనేది తక్షణ మార్పు.

లెగ్రాంజ్ మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతము యొక్క జ్యామితీయ అర్థము ఏదో ఒక అంతర్గత బిందువు వద్ద తక్షణ మార్పు రేటు. మొత్తము అంతరంలో సగటు మార్పు రేటుకు సమానం. దీనిని క్రింది విధంగా వివరించవచ్చును.

ఒక కారు శూన్యం నుండి 200 మీటర్లు ప్రయాణం చేయడానికి కేవలం 8 సెకనులు పట్టినది. కారు యొక్క సరాసరి వేగం 8 సెకనులలో $\frac{200}{8} = 25$ మీ/సె. మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతము ప్రకారము ప్రయాణ సమయములో ఏదో ఒక సమయములో స్పీడో మీటర్ (వేగ మాపిని) 90కి.మీ/ గంట సూచించిన అది ఖచ్చితముగా 25 మీ/సెకనుకు సమానమగును.

సిద్ధాంతము 7.4

$f(x)$ అను ప్రమేయం సంవృతాంతరం $[a,b]$ లో అవిచ్ఛిన్నం మరియు వివృతాంతరం (a,b) లో అవకలనీయం మరియు $f'(x) > 0,\ \forall x \in (a,b)$ అయిన $x_1, x_2 \in [a,b]$, కు $x_1 < x_2$ అయితే $f(x_1) < f(x_2)$ అగును.

నిరూపణ

మధ్యగత విలువ సిద్ధాంతం ప్రకారం $c \in (x_1, x_2) \subset (a,b)$ వ్యవస్థితం అయిన

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c)$$

$f'(c) > 0$, మరియు $x_2 - x_1 > 0$ అయిన $f(x_2) - f(x_1) > 0$.

చివరికి $x_1 < x_2$, ఉంటే $f(x_1) < f(x_2)$ వచ్చును.

విశేషాంశము

$f'(x) < 0,\ \ \forall x \in (a,b)$ అయితే $x_1, x_2 \in [a,b]$ కు $x_1 < x_2$ అగునట్లు $f(x_1) < f(x_2)$ గా ఉంటుంది. దీని యొక్క నిరూపణ అదేవిధంగా ఉంటుంది.

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_7.indd 20 03/03/2023 17:44:21

ఉదాహరణ 7.25

ప్రమేయం $f(x)=x-x^2$, $1\le x\le 2$ కు $(1,2)$ అంతరంలో మధ్యగత విలువ సిద్ధాంతాన్ని తృప్తిపరిచే విలువలను కనుగొనండి.

సాధన

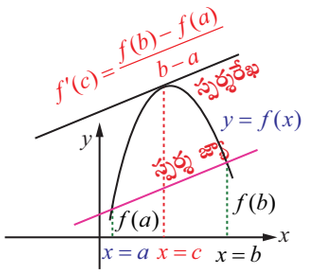
$f(1)=0$ మరియు $f(2)=-2$, $1<x<2$ లో $f(x)$ నిర్వచితం మరియు అవకలనీయం అని స్పష్టం అగును. కావున మధ్యగత విలువ సిద్ధాంతం ప్రకారం $c\in(1,2)$ క్రింది విధముగా ఉండునట్లు వ్యవస్థితము.

$$f'(c) = \frac{f(2)-f(1)}{2-1}=1-2c$$

$$1-2c = -2 \Rightarrow c=\frac{3}{2}.$$

జ్యామితీయ అర్థము (Geometrical meaning)

జ్యామితీయంగా మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతము ప్రకారము $x=a$ మరియు $x=b$ ల మధ్య $y=f(x)$ వక్రము యొక్క స్పర్శ జ్యా అనునది ఏదేని $c\in(a,b)$ వద్ద వక్రము యొక్క స్పర్శరేఖకు సమాంతరముగా ఉంటుంది.



పటము 7.13

లెగ్రాంజ్ మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతము యొక్క పరిణామాలు (MVT)

అవకలనులకు మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతము యొక్క మూడు ముఖ్య పరిణామాలు గలదు.

(1) ఒక ప్రమేయం యొక్క ఏకరీతీయతను నిర్ధారించవచ్చును.(సిద్ధాంతము 7.4)

(2) (a,b) లో అన్ని x లకు $f'(x)=0$ అయితే (a,b) లో f ఒక స్థిర ప్రమేయము అగును.

(3) అన్ని x కు $f'(x)=g'(x)$ అయిన $f(x)=g(x)+C$, ఇక్కడ C స్థిరాంకము.

7.3.3 అనువర్తనాలు (Applications)

ఉదాహరణ 7.26

ఒక టోల్ రహదారిపై లారి 80కి.మీ/గ వేగ అవధిలో ప్రయాణం చేస్తున్నది. లారి 2 గంటలలో 164 కి.మీ ప్రయాణం చేసింది. టోల్ రోడ్డు పూర్తి అయిన తరువాత అధిక వేగముతో వెళ్ళినందు వలన లారీ యజమానికి అతివేగంగా వాహనం నడపబడిందని ఒక నోటీసు ఇవ్వబడినది. దీనిని మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతము పరంగా చర్చించుము.

సాధన

లారీ 't' గంటలలో ప్రయాణం చేసిన దూరం $f(t)$ అనుకొనిన, ఇది $[0,2]$ లో అవిచ్ఛిన్నం ప్రమేయం మరియు $(0,2)$ లో అవకలనీయం. ఇప్పుడు $f(0)=0$ మరియు $f(2)=164$ మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతం క్రింది విధంగా ఉండునట్లు ఒక కాలము c వ్యవస్థితం అగును.

$$f'(c)=\frac{164-0}{2-0}=82>80.$$

లారీ 2 గంటల్లో ప్రయాణించేటప్పుడు ఏదో ఒక సమయములో 80 కి.మీ/గంట వేగం కంటే ఎక్కువ వేగం ప్రయాణించి ఉండాలి. అందువలన వేగముకు సంబంధించిన నోటీసు ఇవ్వబడుట సమర్థనీయం.

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_7.indd 21 03/03/2023 17:44:27

ఉదాహరణ 7.27

అన్ని x విలువలకు $f(x)$ అవకలనీయం అయితే $f'(x) \le 29$ మరియు $f(2) = 17$ గా ఉన్నచో $f(7)$ యొక్క గరిష్ఠ విలువ ఎంత?

సాధన

మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతము ప్రకారము $'c' \in (2,7)$ క్రింది విధంగా ఉండునట్లు వ్యవస్థితం.

$$\frac{f(7)-f(2)}{7-2} = f'(c) \le 29.$$

అందువలన, $f(7) \le 5 \times 29 + 17 = 162$

$f(7)$ యొక్క గరిష్ఠ విలువ 162 అగును.

ఉదాహరణ 7.28

మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతము ఆధారముగా $|\sin\alpha - \sin\beta| \le |\alpha - \beta|$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ను నిరూపించుము.

సాధన

$f(x) = \sin x$ వివృతాంతరములో అవకలనీయం మరియు $[\alpha, \beta]$ ను అంతరముగా తీసుకొనిన మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతము ప్రకారము $c \in (\alpha, \beta)$ క్రింది విధంగా ఉండునట్లు వ్యవస్థితమగును.

$$\frac{\sin\beta - \sin\alpha}{\beta - \alpha} = f'(c) = \cos(c)$$

$$\left|\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\alpha - \beta}\right| = |\cos(c)| \le 1$$

అందువలన, $|\sin\alpha - \sin\beta| \le |\alpha - \beta|$.

విశేషాంశము

పై సమస్యలో $\beta = 0$ అయిన $|\sin\alpha| \le |\alpha|$ ను పొందవచ్చు.

ఉదాహరణ 7.29

ఒక ఫ్రీజర్ నుంచి ధర్మామీటరును మరుగుతున్న నీటిలో వేసిన ధర్మామీటరు యొక్క ఉష్ణోగ్రత 22 సెకనులలో $-10^\circ C$ నుండి $100^\circ C$ కు పెరిగింది. t కాలం వద్ద ఉష్ణోగ్రతలో మార్పు రేటు సెకనుకు $5^\circ C$ అగును అని నిరూపించుము.

సాధన

t కాలం వద్ద ఉష్ణోగ్రత ప్రమేయము $f(t)$ అనుకొనిన. మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతము ప్రకారం

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$= \frac{100-(-10)}{22}$$

$$= \frac{110}{22}$$

$$= 5^\circ C \text{ సెకను.}$$

t కాలం వద్ద ఉష్ణోగ్రతలో తక్షణ మార్పు రేటు సెకనుకు $5^\circ C$ అగును.

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_7.indd 22 03/03/2023 17:44:33

అభ్యాసము 7.3

1. క్రింద ఇవ్వబడిన ప్రమేయాలలోని అంతరాలకు ఎందుకు రోల్స్ సిద్ధాంతము వర్తించదో వివరించండి.

(i) $f(x)=\left|\frac{1}{x}\right|,\ x\in[-1,1]$ (ii) $f(x)=\tan x, x\in[0,\pi]$

(iii) $f(x)=x-2\log x, x\in[2,7]$

2. రోల్స్ సిద్ధాంతమును ఉపయోగించి క్రింద ఇవ్వబడిన ప్రమేయాలకు x యొక్క ఏ విలువ వద్ద స్పర్శరేఖ x అక్షానికి సమాంతరముగా ఉంటుందో కనుగొనండి.

(i) $f(x)=x^2-x,\ x\in[0,1]$ (ii) $f(x)=\frac{x^2-2x}{x+2},\ x\in[-1,6]$

(iii) $f(x)=\sqrt{x}-\frac{x}{3},\ x\in[0,9]$

3. క్రింద ఇవ్వబడిన ప్రమేయాలలోని, అంతరాలకు లెగ్రాంజ్ మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతము ఎందుకు వర్తించుదో వివరించండి.

(i) $f(x)=\frac{x+1}{x}, x\in[-1,2]$ (ii) $f(x)=|3x+1|,\ x\in[-1,3]$

4. లెగ్రాంజ్ మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతమును ఉపయోగించి అంతరం యొక్క చివరి బిందువుల వద్ద చ్ఛేదన రేఖ x యొక్క ఏ బిందువు స్పర్శరేఖకు సమాంతరముగా ఉంటుంది?

(i) $f(x)=x^3-3x+2,\ x\in[-2,2]$ (ii) $f(x)=(x-2)(x-7),\ x\in[3,11]$

5. మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతం యొక్క అంతిమ విలువను చూపండి.

(i) ధనాత్మక సంఖ్యల యొక్క ఒక సంవృతాంతరం $[a,b]$ పై $f(x)=\frac{1}{x}$ అనునది $\sqrt{ab}$ అగును.

(ii) ఏదో ఒక అంతరం $[a,b]$ పై $f(x)=Ax^2+Bx+C$ అనునది $\frac{a+b}{2}$. అగును.

6. రేసు కారు యొక్క డ్రైవరు 20కి.మీ మైలురాయి వద్ద కలడు. అతని వేగము గంటకు 150కి.మీ మించకపోతే తరువాత 2గంటలలో అతను చేరుకొనే గరిష్ఠ దూరము ఎంత?

7. $f(x)$ అనే ప్రమేయము అన్ని $1\le x\le 4$ కు $f'(x)\le 1$ అయిన $f(4)-f(1)\le 3$ అని నిరూపించండి.

8. $f(0)=-1, f(2)=4$ మరియు అన్ని x లకు $f'(x)\le 2$ అగునట్లు $f(x)$ అను అవకలనీయ ప్రమేయం వ్యవస్థితమగునా?

9. $f(x)=x(x+3)e^{-\frac{\pi}{2}}, -3\le x\le 0$ వక్రమునను x అక్షానికి సమాంతరంగా స్పర్శరేఖ గీయునట్లు వక్రముపై ఒక బిందువు ఉంటుందని చూపుము.

10. మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతమును ఉపయోగించి $a>0, b>0$ కు $|e^{-a}-e^{-b}|<|a-b|$ అని నిరూపించండి.

7.4 శ్రేణుల విస్తరణ (Series Expansions)

అనంత అవకలనీయ ప్రమేయాలకు టేలర్ శ్రేణి మరియు మెక్లారిన్ శ్రేణులను విస్తరించవచ్చు.

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_7.indd 23 03/03/2023 17:44:38

సిద్ధాంతము 7.5

(అ) టేలర్ శ్రేణి

$x=a$ వద్ద $f(x)$ అనే అనంత అవకలనీయ ప్రమేయం అనుకొందాము. $(a-\varepsilon, a+\varepsilon), \varepsilon>0$ అంతరంలో $f(x)$ ను క్రింది రూపంలో విస్తరించవచ్చును.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots.$$

ఆ) మెక్లారిన్ శ్రేణి

$a=0$ అయిన విస్తరణ రూపము

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots.$$

నిరూపణ

$(x-a)$ యొక్క ఘాతములో $f(x)$ శ్రేణిని విస్తరించగా

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x-a)^n \quad \ldots (7)$$

$x=a$ ని ప్రతిక్షేపించగా, $A_0 = f(a)$ వచ్చును. (7)ను అవకలనం చేయగా,

$$f'(x) = 1!A_1 + \sum_{n=2}^{\infty} nA_n(x-a)^{n-1} \quad \ldots (8)$$

$x=a$ ని ప్రతిక్షేపించగా $A_1 = f'(a)$, (8)ని అవకలనం చేయగా వచ్చునది

$$f''(x) = 2!A_2 + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)A_n(x-a)^{n-2} \quad \ldots (9)$$

$x=a$ ని ప్రతిక్షేపించగా $A_2 = \frac{f''(a)}{2!}$, (9)ని అవకలనం చేయగా వచ్చునది

$$f'''(x) = 3!A_3 + \sum_{n=4}^{\infty} n(n-1)(n-2)A_n(x-a)^{n-3} \quad \ldots (10)$$

(10) ని $(k-3)$ సార్లు అవకలనం చేయగా వచ్చునది

$$f^{(k)}(x) = k!A_k + \sum_{n=k+1}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1)A_n(x-a)^{n-k} \quad \ldots(11)$$

$x=a$ ని ప్రతిక్షేపించగా, $A_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ వచ్చును. ఈ సిద్ధాంతము ఋజువైనది.

$x=a$ బిందువు పరంగా ఒక ప్రమేయమును విస్తరించడం అనేది $(x-a)$ యొక్క ఘాతాలకు సమానము. కావలసిన ఘాతాలకు తగ్గట్టు మనము ఇచ్చిన ప్రమేయమును అవకలనం చేయవలసిన అవసరం గలదు. మరియు దీనిని $x=a$ వద్ద గణించవచ్చును. ఇది $(x-a)$ యొక్క కావలసిన ఘాతాల గుణకాల విలువను ఇచ్చును.

ఉదాహరణ 7.30

$-1 < x \leq 1$కొరకు $\log(1+x)$ ని మెక్లారిన్ శ్రేణిలో 4 శూన్యేతర పదాల వరకు విస్తరించండి.

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_7.indd 24 03/03/2023 17:44:45

సాధన

$f(x)=\log(1+x)$ అనుకొనుము. $f(x)$ యొక్క మెక్లారిన్ శ్రేణి $f(x)=\sum_{n=0}^{n=\infty}a_n x^n$ ఇక్కడ $a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$

$f(x)$ అను ప్రమేయం యొక్క వివిధ అవకలనలను $x=0$ వద్ద గణించి క్రింద ఇవ్వబడినది.

ప్రమేయం మరియు దాని అవకలనులు	$\log(1+x)$ మరియు దాని అవకలనులు	$x=0$ వద్ద విలువ
$f(x)$	$\log(1+x)$	0
$f'(x)$	$\dfrac{1}{1+x}$	1
$f''(x)$	$-\dfrac{1}{(1+x)^2}$	-1
$f'''(x)$	$\dfrac{2}{(1+x)^3}$	2
$f^{(iv)}(x)$	$-\dfrac{6}{(1+x)^4}$	-6

పట్టిక 7.2

ఇచ్చిన ప్రమేయములో విలువను ప్రతిక్షేపించి సూక్ష్మీకరించగా కావలసిన విస్తరణ క్రింది విధముగా మనకు లభించును.

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots \quad ;-1<x\le 1.$$

ఉదాహరణ 7.31

$-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ కు x యొక్క ఆరోహణ ఘాతాలలో 5వ ఘాతము వరకు $\tan x$ ను విస్తరించుము.

సాధన

$f(x)=\tan x$, అనుకొనుము. $f(x)$ యొక్క మెక్లారిన్ శ్రేణి

$$f(x)=\sum_{n=0}^{n=\infty}a_n x^n \text{ , ఇక్కడ, } a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\ .$$

$x=0$ వద్ద $f(x)$ యొక్క వివిధ అవకలనులను గణించుటను క్రింద ఇవ్వబడినది.

ఇప్పుడు,

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(\tan x)=\sec^2(x)$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(\sec^2(x))=2\sec x\cdot\sec x\cdot\tan x=2\sec^2 x\cdot\tan x$$

$$f'''(x) = \frac{d}{dx}(2\sec^2(x)\cdot\tan x)=2\sec^2(x)\cdot\sec^2 x+\tan x\cdot 4\sec x\cdot\sec x\cdot\tan x$$

$$= 2\sec^4 x+4\sec^2 x\cdot\tan^2 x$$

$$f^{(iv)}(x) = 8\sec^3 x\cdot\sec x\cdot\tan x + 4\sec^2 x\cdot 2\tan x\cdot\sec^2 x + 8\sec x\cdot\sec x\cdot\tan x\cdot\tan^2 x$$

$$= 16\sec^4 x\tan x + 8\sec^2 x\cdot\tan^3 x$$

$$f^{(v)}(x) = 16\sec^4 x\cdot\sec^2 x + 64\sec^3 x\cdot\sec x\cdot\tan x\cdot\tan x + 8\sec^2 x\cdot 3\tan^2 x\cdot\sec^2 x$$

$$+16\sec x\cdot\sec x\cdot\tan x\cdot\tan^3 x$$

$$= 16\sec^6 x + 88\sec^4 x\cdot\tan^2 x + 16\sec^2 x\cdot\tan^4 x.$$

ప్రమేయం మరియు దాని అవకలనులు	$\tan x$ మరియు దాని అవకలనులు	$x=0$ వద్ద విలువ
$f(x)$	$\tan x$	0
$f'(x)$	$\sec^2 x$	1
$f''(x)$	$2\sec^2 x\tan x$	0
$f'''(x)$	$2\sec^4 x + 4\sec^2 x\cdot\tan^2 x$	2
$f^{(iv)}(x)$	$16\sec^4 x\cdot\tan x + 8\sec^2 x\cdot\tan^3 x$	0
$f^{(v)}(x)$	$16\sec^6 x + 88\sec^4 x\cdot\tan^2 x + 16\sec^2 x\cdot\tan^4 x$	16

పట్టిక 7.3

ఈ ప్రమేయములో విలువలను ప్రతిక్షేపించి సూక్ష్మీకరించగా కావలసిన విస్తరణ మనకు క్రింది విధంగా లభించును.

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots \quad ; -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

ఉదాహరణ 7.32

$x=2$ ద్వారా మొదటి మూడు శూన్యేతర పదాల వరకు. $\frac{1}{x}$ యొక్క టేలర్ శ్రేణిని విస్తరించండి.

సాధన

$f(x)=\frac{1}{x}$ అనుకొనుము. $f(x)$ యొక్క టేలర్ శ్రేణి

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n (x-2)^n \text{ , ఇక్కడ } a_n = \frac{f^{(n)}(2)}{n!}.$$

$x=2$ వద్ద ప్రమేయం $f(x)$ యొక్క వివిధ అవకలనులను గణించి.

ప్రమేయం మరియు దాని అవకలనులు	$\frac{1}{x}$ మరియు దాని అవకలనులు	$x=2$ వద్ద విలువ
$f(x)$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{2}$
$f'(x)$	$-\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{4}$

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_7.indd 26 07/03/2023 17:32:33

$f''(x)$	$\frac{2}{x^3}$	$\frac{1}{4}$
$f'''(x)$	$-\frac{6}{x^4}$	$-\frac{3}{8}$

పట్టిక 7.4

ఇచ్చిన ప్రమేయములో విలువలను ప్రతిక్షేపించి సూక్ష్మీకరించగా కావలసిన విస్తరణ క్రింది విధముగా మనకు లభించును.

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\frac{(x-2)}{1!} + \frac{1}{4}\frac{(x-2)^2}{2!} - \frac{3}{8}\frac{(x-2)^3}{3!} + \cdots$$

అది, $$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} - \frac{(x-2)}{4} + \frac{(x-2)^2}{8} - \frac{(x-2)^3}{16} + \cdots$$

అభ్యాసము 7.4

1. క్రింది ప్రమేయాలకు మెక్లారిన్ శ్రేణిని విస్తరించండి.

(i) e^x (ii) $\sin x$ (iii) $\cos x$

(iv) $\log(1-x)\,; -1 \le x < 1$ (v) $\tan^{-1}(x)\ ; -1 \le x \le 1$ (vi) $\cos^2 x$

2. $\log x$ అను ప్రమేయమును $x=1$ ద్వారా $x>0$ కు మూడు శూన్యేతర పదాలకు టేలర్ శ్రేణి విస్తరించండి.

3. $x-\frac{\pi}{4}$ ఆరోహణ ఘాతాలలో గల $\sin x$ మూడు శూన్యేతర పదములకు విస్తరించుము.

4. $x-1$ యొక్క ఘాతాలలో బహుపది $f(x) = x^2 - 3x + 2$ ను విస్తరించుము.

7.5 అనిశ్చిత రూపాలు (Indeterminate Forms)

ఈ విభాగములో వివిధ అనిశ్చిత రూపాలు మరియు వాటిని ఎదుర్కొనేటప్పుడు అవధులను గణించే పద్ధతులను మనము చర్చిస్తాము.

7.5.1 అవధుల ప్రక్రియ (A Limit Process)

అవధులను గణించునపుడు

$$\lim_{x\to\alpha} R(x)$$

$R(x)$ అనే ఒక ప్రమేయం అవధులను లెక్కించునపుడు

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\times\infty,\ \infty-\infty,\ 1^\infty,\ 0^0,\ \infty^0$$ పరిస్థితులను మనం గమనించవచ్చు.

మనము వానికి ఒక సంఖ్య యొక్క రూపము గలదని చెబుతాము. కాని సంఖ్యల యొక్క సాధారణ సంకలనము మరియు గుణకార నియమములను వాటి స్థిరమైన ఒక పద్ధతిలో వానికి విలువలను కేటాయించలేము. ఇటువంటి సమాసములను అనిశ్చిత రూపాలు అంటారు. ఇవి సంఖ్యలు కానప్పటికీ ఈ అనిశ్చిత రూపాలు ఒక ప్రమేయము యొక్క అవధిని కనుగొనుటలో ఒక ఉపయోగకరమైన పాత్రను వహిస్తుంది.

సున్న లేదా ∞ ను సమీపించు లవము మరియు హారములను కలిగిన భిన్నాల యొక్క అవధులను గణించుటకు, జాన్ బెర్నౌలి అవకలజాలను ఉపయోగించి ఒక నియమమును కనుగొన్నాడు. ఈ నియమము ఎల్ హాపిటల్ ($'l'$Hôpita$'l'$) నియమముగా ఈ రోజులలో తెలుసును. (దీనిని లోపిటల్‌గా ఉచ్చరిస్తారు.) ఫ్రెంచి గొప్ప వ్యక్తి గుయిలౌమ్ డి ఎల్ హపిటాల్ జ్ఞాపకార్థం ఈ నియమమునకు అతని పేరు పెట్టారు. ఈయన వ్రాసిన అవకలన గణిత తొలి పరిచయం (introductory differential calculus) అను పుస్తకములో ఈ నియమాన్ని మొదటగా ముద్రించారు.

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_7.indd 27 03/03/2023 17:45:02

7.5.2 'l' హోపిటల్ నియమము (The 'l'Hôpita'l's Rule)

$f(x)$, $g(x)$ లు అవకలనీయ ప్రమేయాలు మరియు $g'(x) \neq 0$ అయిన,

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to a} g(x)$. అయిన $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty = \lim\limits_{x\to a} g(x)$. అయిన $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

7.5.3 అనిశ్చిత రూపాలు (Indeterminate forms) $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\times\infty, \infty-\infty$

ఉదాహరణ 7.33

$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}\right)$ ను గణించండి..

సాధన

$x=1$ ని ప్రమేయములో అది అనిశ్చిత ప్రతిక్షేపించిన అవి అవిచ్ఛిన్న రూపం $\dfrac{0}{0}$ ను ఇచ్చును. ప్రమేయం యొక్క లవము మరియు హారము రెండునూ అంతస్థ 2గా గల బహుపదులు. ఇవి అవకలనీయాలు. కావున ''l' హపిటాల్ నియమమును ఉపయోగించిన మనకు లభించునది

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{2x-3}{2x-4}\right)$$
$$= \frac{1}{2}.$$

లవాన్ని మరియు హారాన్ని కారణాంక పరచి అవధులను లెక్కించవచ్చు.

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3} = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-3)}.$$

ఉదాహరణ 7.34

$\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{x^n-a^n}{x-a}\right)$ అవధిని గణించండి.

సాధన

$x=a$ ని ప్రమేయములో ప్రతిక్షేపించగా అనిశ్చిత రూపం $\dfrac{0}{0}$ వచ్చును. ఇచ్చిన ప్రమేయం యొక్క లవము, హారములు బహుపదులు. ఇవి రెండునూ అవకలనీయమములు

కావున అవకలనం చేసి l' హోపిటల్ నియమాన్ని అనువర్తింపజేసిన

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{x^n-a^n}{x-a}\right) = \lim_{x\to a}\left(\frac{n\times x^{n-1}}{1}\right)$$
$$= n\times a^{n-1}.$$

ఉదాహరణ 7.35

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin mx}{x}\right)$ అవధిని గణించండి.

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_7.indd 28 03/03/2023 17:45:08

సాధన

$x=0$ ని ప్రమేయంలో ప్రతిక్షేపించిన అనిశ్చిత రూపం $\frac{0}{0}$ వచ్చును. కావున *"l'* హాపిటల్ నియమాన్ని వర్తింపజేసి అవధిని సాధింపవచ్చు.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin mx}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{m\times\cos mx}{1}\right)$$

$$= m$$

మరొక ఉదాహరణకు అవధి వ్యవస్థితం కాదు.

ఉదాహరణ 7.36

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x^2}\right)$ అవధిని గణించండి.

సాధన

$x=0$ ని ప్రమేయములో ప్రతిక్షేపించగా, అనిశ్చిత రూపం $\frac{0}{0}$ వచ్చును. కావున *"l'* హాపిటల్ నియమాన్ని వర్తింపజేసిన

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\cos x}{2x}\right) = \infty$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\sin x}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\cos x}{2x}\right) = -\infty$$

కుడి, ఎడమ అవధులు సమానము కావు, కావున అవధి వ్యవస్థితము కాదు.

విశేషాంశము

$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\cos x}{2x}\right)$ కు మరల *"l'* హాపిటల్ నియమాన్ని వర్తింపజేసిన చివరకు

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\cos x}{2x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{-\sin x}{2}\right) = 0\,.$$

ఇది సత్యంకాదు. ఎందుకనగా ఇది అనిశ్చిత రూపం కాదు.

ఉదాహరణ 7.37

$\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{1-\cos m\theta}{1-\cos n\theta}\right) = 1$, అయిన $m=\pm n$ అని చూపాలి.

సాధన

$x=0$ ని ప్రమేయంలో ప్రతిక్షేపించగా అనిశ్చిత రూపం $\left(\frac{0}{0}\right)$ వచ్చును. కావున *"l'* హాపిటల్ నియమం ప్రకారం

$$\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{1-\cos m\theta}{1-\cos n\theta}\right) = \lim_{\theta\to 0}\left(\frac{m\sin m\theta}{n\sin n\theta}\right)$$

ఉదాహరణ 7.35ను ఉపయోగించిన

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{m}{n}\times\left(\frac{\frac{\sin m\theta}{\theta}}{\frac{\sin n\theta}{\theta}}\right) = \frac{m^2}{n^2}$$

అందువలన $m^2 = n^2$

$m = \pm n$.

ఉదాహరణ 7.38

$\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{\log(1-x)}{\cot(\pi x)}\right)$ ను గణించండి.

సాధన

ఇది అనిశ్చిత రూపం $\dfrac{\infty}{\infty}$ కావున *''l'* హాపిటల్ నియమం ప్రకారం

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\log(1-x)}{\cot(\pi x)} = \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{-\frac{1}{1-x}}{-\pi\operatorname{cosec}^2(\pi x)}\right) \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\text{రూపం}\right)$$

సూక్ష్మీకరించగా పొందునది

$$= \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{\sin^2(\pi x)}{\pi(1-x)}\right). \quad \left(\frac{0}{0}\text{రూపం}\right)$$

మరలా *''l'* హాపిటల్ నియమాన్ని అనువర్తించగా పొందునది

$$= \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{2\pi\sin(\pi x)\cdot\cos(\pi x)}{-\pi}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1^-}\left(-2\sin(\pi x)\cdot\cos(\pi x)\right)$$

$$= 0\,.$$

ఉదాహరణ 7.39

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$ ను గణించండి.

సాధన

ఇది $\infty-\infty$ అనిశ్చిత రూపం. ఈ అవధిని సాధించవలెనన్నా మొదట $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ రూపంలోకి మార్చవలెను. తరువాత *'l'* హాపిటల్ నియమాన్ని అనువర్తింప చేయవలెను.

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^x-x-1}{x(e^x-1)}\right). \quad \left(\frac{0}{0}\text{రూపం}\right)$$

ఇక్కడ,

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^x-x-1}{x(e^x-1)}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^x-1}{xe^x+e^x-1}\right) \quad \left(\frac{0}{0}\text{రూపం}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^x}{xe^x+2e^x}\right)=\frac{1}{2}\,.$$

ఉదాహరణ 7.40

$\lim\limits_{x\to 0^+} x\log x$ ను గణించండి.

సాధన

ఇది $(0\times\infty)$ అనిశ్చిత రూపం, దీనిని సాధించవలెనన్నా మొదట $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ ని మార్చిన తరువాత *'l'* హాపిటల్ నియమాన్ని అనువర్తింపజేయవలెను

$$\lim_{x\to 0^+} x\log x = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\log x}{\frac{1}{x}}\right) \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\ \text{form}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\right) = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0\,.$$

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_7.indd 30 03/03/2023 17:45:17

ఉదాహరణ 7.41

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+17x+29}{x^4}\right)$ ను గణించండి.

సాధన

ఇది అనిశ్చిత రూపం $\dfrac{\infty}{\infty}$ కావున *'l'* హాపిటల్ నియమం ప్రకారం

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+17x+29}{x^4}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+17}{4x^3}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{12x^2}\right) = 0.$$

ఉదాహరణ 7.42

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{e^x}{x^m}\right), m\in N$ ను గణించండి.

సాధన

ఇది అనిశ్చిత రూపం $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

కావున *'l'* హపిటల్ నియమం ప్రకారం

రూపాలను గణన చేయడానికి $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^m} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{m!}$

$$= \infty.$$

7.5.4 అనిశ్చిత రూపం $0^0, 1^\infty$ మరియు ∞^0 చేయడానికి

ఈ అనిశ్చిత రూపాలు గణన మనము మొదట సంయుక్త ప్రమేయం యొక్క అవధిపై సిద్ధాంతాన్ని తెలియజేస్తాం.

సిద్ధాంతము 7.6

$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$ వ్యవస్థితం మరియు అది L అని అనుకొనిన మరియు $x=L$ వద్ద $f(x)$ అనే అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయం అయితే

$$\lim_{x\to\alpha} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to\alpha} g(x)\right).$$

అవధులను గణించు విధానము (The evaluation procedure for evaluating the limits)

(1) $A=\lim\limits_{x\to a} g(x)$ అనుకొనిన, సంవర్గమానమును తీసుకొని ఈ ప్రమేయం యొక్క అవిచ్ఛిన్నతను నిర్ధారించడానికి $A>0$ ను ఊహించవలెను. $\log A = \lim\limits_{x\to a}\log(g(x))$ వచ్చును. $f(x)=\log x$ కు పై సిద్ధాంతాన్ని ఉపయోగించగా అవధి.

$$\lim_{x\to a}\log(g(x)) = \log\left(\lim_{x\to a} g(x)\right).$$

(2) $\lim_{x\to a}\log(g(x))$ యొక్క అవధులు $\left(\frac{0}{0}\right)$ లేదా $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ రూపాలు అయిన *'l'* హాపిటల్ నియమము ఉపయోగించి సాధించాలి.

(3) మూల్యాంకనము చేసిన అవధి α అనుకొనిన, అవసరమైన అవధి e^{α} అగును.

ఉదాహరణ 7.43

'l' హాపిటల్ నియమాన్ని ఉపయోగించి $\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ అని ఋజువు చేయండి.

సాధన

ఇది అనిశ్చిత రూపం 1^{∞}, $g(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ అనుకొనిన ఇరువైపులా సంవర్గమును తీసుకొనిన

$$\log g(x) = \frac{\log(1+x)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\log(g(x)) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\log(1+x)}{x}\right) \quad \left(\frac{0}{0}\text{రూపం}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{1}{1+x}}{1}\right) \qquad (\textit{'l'}\text{హాపిటల్ నియమము})$$

$$= 1\ .$$

$$\text{కాని, } \lim_{x\to 0^+}\log g(x) = \log\left(\lim_{x\to 0^+} g(x)\right)$$

$$\text{అందువలన, } \log\left(\lim_{x\to 0^+} g(x)\right) = 1.$$

దీనిని ఘాతాంకపరచగా మనకు $\lim_{x\to 0^+} g(x) = e$.

ఉదాహరణ 7.44

$\lim_{x\to\infty}(1+2x)^{\frac{1}{2\log x}}$ ను గణించండి.

సాధన

ఇది ∞^0 అనిశ్చిత రూపం

$$g(x) = (1+2x)^{\frac{1}{2\log x}} \text{ అని తీసుకొందాం.}$$

ఇరువైపులా సంవర్గమానము తీసుకొనిన

$$\log g(x) = \frac{\log(1+2x)}{2\log x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\log g(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\log(1+2x)}{2\log x}\right) \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\text{రూపం}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{2}{1+2x}}{\frac{2}{x}}\right) \qquad (\textit{'l'}\text{హాపిటల్ నియమము})$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+2x}\right) \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\text{రూపం}\right)$$

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_7.indd 32 03/03/2023 17:45:28

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \text{ అయిన,}$$

$$\lim_{x\to\infty} \log g(x) = \log\left(\lim_{x\to\infty} g(x)\right).$$

దీనిని ఘాతాంక పరచగా మనకు కావలసిన అవధి $\sqrt{e}$ అగును.

ఉదాహరణ 7.45

$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$ ను సాధించండి.

సాధన

$g(x) = x^{\frac{1}{1-x}}$ అనుకొనుము, $x\to 1$ అయిన ఇది అనిశ్చిత రూపము 1^{∞} ఇరువైపులా సంవర్గమానము తీసుకొనిన

$$\log g(x) = \frac{\log x}{1-x}.$$

$$\text{అందువలన, } \lim_{x\to 1} \log g(x) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{\log x}{1-x}\right) \quad \left(\frac{0}{0} \text{ రూపం}\right).$$

$'l'$ హాపిటల్ నియమము అనువర్తించిన

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\frac{1}{x}}{-1}\right) = -1.$$

$$\text{కాని, } \lim_{x\to 1} \log g(x) = \log\left(\lim_{x\to 1} g(x)\right).$$

దీనిని ఘాతాంక పరచగా మనము పొందునది

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

అభ్యాసము 7.5

క్రింది వానిని గణన చేయండి. అవసరమైన $'l'$ హాపిటల్ నియమమును ఉపయోగించండి.

1. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$
2. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-3}{x^2-5x+3}$
3. $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\log x}$
4. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sec x}{\tan x}$
5. $\lim_{x\to\infty} e^{-x}\sqrt{x}$
6. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$
7. $\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{2}{x^2-1} - \frac{x}{x-1}\right)$
8. $\lim_{x\to 0^+} x^x$
9. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$
10. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}$
11. $\lim_{x\to 0^+} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$
12. A_0 అనే ప్రారంభ మొత్తమును ఒక సంవత్సరమునకు n సార్లు r వడ్డీరేటున చక్రవడ్డీ పద్ధతిలో పెట్టుబడి చేయబడినది. t సంవత్సరములో పెట్టుబడి విలువ $A = A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$ ఇక్కడ చక్రవడ్డీ అనునది నిరంతర వడ్డీ (అనగా $n\to\infty$) గా లెక్కించినచో $A = A_0 e^{rt}$. అనునది t సంవత్సరాల తరువాత మొత్తమును చూపును.

7.6 మొదటి ఉత్పన్నాల (అవకలజము) అనువర్తనాలు (Applications of First Derivative)

మొదటి ఉత్పన్నాలను ఉపయోగించే ఒక $f(x)$ అను ప్రమేయమునకు ఏక దిష్టత (monotonicity) (ఆరోహణ లేదా అవరోహణ) అను స్వభావమును, ప్రదేశములలో గల నిర్ధిష్ట బిందువు వద్ద స్థానిక తీవ్రతను (గరిష్ఠ లేదా కనిష్ఠ) కనుగొనుట.

7.6.1 ప్రమేయము యొక్క ఏకదిష్టత (Monotonicity of functions)

ఒక ప్రమేయము యొక్క ఆరోహణ లేదా అవరోహణ అను స్వభావము గురించి తెలుపనది ఏకదిష్టత అగును.

నిర్వచనం 7.4

ప్రతి $a,b \in I$ లకు $a<b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$ అయితే I అంతరములో $f(x)$ ప్రమేయమును ఆరోహణ ప్రమేయము అని అంటారు.

నిర్వచనం 7.5

ప్రతి $a,b \in I$ లకు $a<b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$, అయితే I అంతరములో $f(x)$ ప్రమేయమును అవరోహణ ప్రమేయము అని అంటారు.

$f(x)=x$ అనే ప్రమేయము పూర్తి వాస్తవ సంఖ్య రేఖ లో ఆరోహణ ప్రమేయము కాని $f(x)=-x$ అనే ప్రమేయము పూర్తివాస్తవ సంఖ్యా రేఖ లో అవరోహణ ప్రమేయము. సాధారణంగా కొన్ని అంతరాలలో ప్రమేయం ఆరోహణమగును మరియు కొన్ని వేర్వేరు అంతరాలలో ప్రమేయం అవరోహణమగును. ఉదాహరణకు ప్రమేయం $f(x)=|x|$, $(-\infty,0]$ అంతరంలో అవరోహణము మరియు $[0,\infty)$ అంతరంలో ఆరోహణం. ఇటువంటి ప్రమేయాల ఏకదిష్టతను సులభముగా గుర్తించవచ్చును. అయితే కొన్ని చర ప్రమేయాల ఏకదిష్టతను వాస్తవ సంఖ్య యొక్క ఒక అంతరములో ఎలా నిర్ధారించవచ్చు? దినికి క్రింది సిద్ధాంతము (నిరూపణ లేనిది) ఉపయోగపడును.

సిద్ధాంతము 7.7

$f(x)$ అనే ప్రమేయము వివృతాంతరం (a,b) లో అవకలనీయం అయితే

(1) $\frac{d}{dx}(f(x)) \geq 0, \forall x \in (a,b)$, (1)

అయితే (a,b) అంతరంలో $f(x)$ ఆరోహణం అని అంటారు.

(2) $\frac{d}{dx}(f(x)) > 0, \forall x \in (a,b)$ అయితే, ... (2)

$f(x)$, (a,b) అంతరంలో $f(x)$ ఖచ్చిత ఆరోహణం అని అంటారు.

సిద్ధాంతము 7.3 నుంచి పైన పేర్కొన్నవి ఋజువు చేయబడినవి.

(3) $\frac{d}{dx}(f(x)) \leq 0, \forall x \in (a,b)$ ...(3) అయితే (a,b) అంతరములో $f(x)$ ఆవరోహణం అని అంటారు.

(4) $\frac{d}{dx}(f(x)) < 0, \forall x \in (a,b)$ ... (4) అయితే (a,b) అంతరములో $f(x)$ ఖచ్చితంగా అవరోహణం అని అంటారు.

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_7.indd 34 03/03/2023 17:45:41

విశేషాంశము

క్రింది వాస్తవాన్ని గమనించడం చాలా ముఖ్యము. I అంతరముపై $f(x)$ అనే అవకలనీయ ప్రమేయం ఖచ్చితంగా ఆరోహణం అయిన. ప్రతి $x \in I$ కు $f'(x) > 0$, అని చెప్పుట అసత్యము ఉదాహరణకు $y = x^3$, $x \in (-\infty, \infty)$, తీసుకొనిన, ఇది $(-\infty, \infty)$ పై ఖచ్చితంగా ఆరోహణం. దీని నిరూపణకు $a > b$ అనుకొనుము. $f(a) > f(b)$ అని నిరూపించవలెను. దీనికొరకు $a^3 - b^3 > 0$ అని ఋజువు చేయాలి.

ఇప్పుడు,

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2) \\ &= (a-b)\frac{1}{2}(2a^2 + 2ab + 2b^2) \\ &= (a-b)\frac{1}{2}\left((a+b)^2 + a^2 + b^2\right) \\ &> 0 \text{ కావున } a - b > 0 \text{ బ్రాకెట్ లోపల గల ఇతర పదాలు } > 0. \end{aligned}$$

అందువలన ద్విఘాత సమాసము ఎల్లప్పుడూ ధనాత్మకము. (దీని విలువ $a = b = 0$ అయినప్పుడు మాత్రమే శూన్యమగును. ఇది $a < b$ తో విరుద్ధంగా ఉంటుంది) కావున $y = x^3$ ప్రమేయం $(-\infty, \infty)$ లో ఖచ్చితంగా ఆరోహణము. కాని $f'(x) = 3x^2$ యొక్క విలువ $x = 0$ వద్ద శూన్యముకు సమానము.

నిర్వచనం 7.6

$f'(x_0) = 0$ అయిన $f(x)$ అవకలనీయ ప్రమేయము యొక్క స్థిరబిందువు $(x_0, f(x_0))$ అగును.

నిర్వచనం 7.7

$f'(x_0) = 0$ లేదా $f(x)$ వ్యవస్థితం అయిన $f(x)$ ప్రమేయము యొక్క సందిగ్ధ బిందువు $(x_0, f(x_0))$ అగును కానిచో

గమనిక

(x, y) అనేది f యొక్క స్థిరబిందువు లేదా సందిగ్ధ బిందువు ఇక్కడ x. f యొక్క ప్రదేశము లో ఉన్నచో దానిని స్థిరమైన సంఖ్య లేదా సందిగ్ధ సంఖ్య అంటారు.

ప్రతి స్థిర బిందువు సందిగ్ధ బిందువు కావచ్చు, కాని అన్ని సందిగ్ధ బిందువులు స్థిరబిందువులు కానవసరము లేదు. ఉదాహరణకు ప్రమేయము $f(x) = |x - 17|$ కు సందిగ్ధ బిందువు $(17, 0)$ కాని కావున $(17, 0)$ స్థిర బిందువు కాదు. ప్రమేయమునకు $x = 17$ వద్ద ఉత్పన్నాలు ఉండవు.

ఉదాహరణ 7.46

ప్రమేయము $f(x) = x^2 + 2$ $(2, 7)$ అంతరములో ఖచ్చితంగా ఆరోహణము అనియూ మరియు $(-2, 0)$ అంతరములో ఖచ్చితముగా అవరోహణము అని నిరూపించుము.

సాధన

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x > 0, \forall x \in (2, 7) \text{ మరియు} \\ f'(x) &= 2x < 0, \forall x \in (-2, 0) \end{aligned}$$

అందువలన ఋజువు పూర్తయినది.

ఉదాహరణ 7.47

$f(x)=x^2-2x-3$ ప్రమేయం $(2,\infty)$ లో ఖచ్చితంగా ఆరోహణమని చూపండి.

సాధన

$f(x)=x^2-2x-3$ కావున $f'(x)=2x-2>0\ \forall\ x\in(2,\infty)$, అందువలన $(2,\infty)$ లో $f(x)$ ఖచ్చితంగా ఆరోహణము.

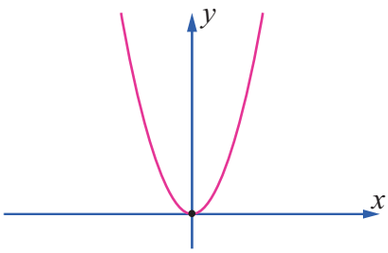
7.6.2 సంపూర్ణ గరిష్ఠం మరియు కనిష్ఠం (Absolute maxima and minima)

ఒక అంతరములో ప్రమేయం యొక్క అతి పెద్ద మరియు అతి చిన్న విలువలను సంపూర్ణ గరిష్ఠ మరియు సంపూర్ణ కనిష్ఠాలుగా వివరించును.

నిర్వచనం 7.8

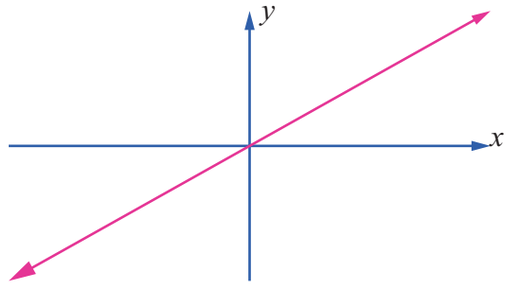
$f(x)$ ప్రమేయం యొక్క ప్రదేశం D లో గల బిందువు x_0 అనుకొనుము $f(x_0)\geq f(x)\forall x\in D$ అయితే $f(x_0)$ ను D పై $f(x)$ కు గరిష్ఠ విలువ అని, $f(x_0)\leq f(x)\forall x\in D$ అయితే $f(x_0)$ ను D పై $f(x)$ కు కనిష్ఠ విలువ అని అంటారు.

సాధారణముగా, ఇచ్చిన అంతరములో ఒక ప్రమేయం ఖచ్చితంగా సంపూర్ణ గరిష్ఠ లేదా సంపూర్ణ కనిష్ఠ విలువలను కలిగియుంటుందని హామీ ఇవ్వలేము. క్రింద ఇవ్వబడిన పటాలలో చూపిన అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయము అనంతమైన అంతరం లేదా పరిమిత వివృతాంతరములో సంపూర్ణ గరిష్ఠ లేదా సంపూర్ణ కనిష్ఠాలను కలిగియుండవచ్చు లేదా కలిగియుండక పోవచ్చు అని చూపిస్తున్నది.



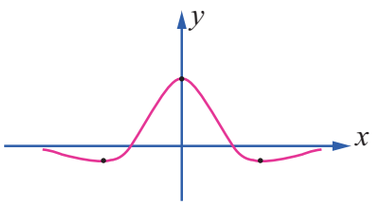
పటము 7.14

$(-\infty,\infty)$ పై $f(x)$ కు సంపూర్ణ కనిష్ఠం. గలదు కాని సంపూర్ణ గరిష్ఠం లేదు.



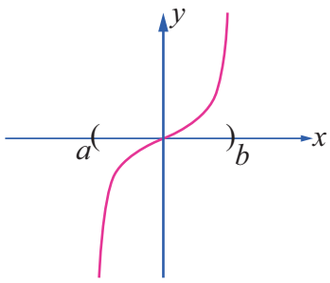
పటము 7.15

$(-\infty,\infty)$ పై $f(x)$ కు సంపూర్ణ తీవ్రత లేదు.



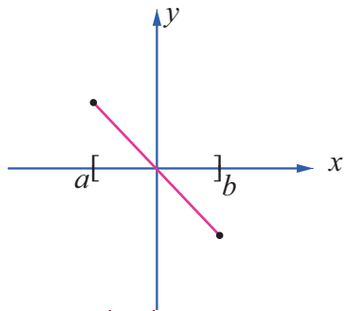
పటము 7.16

$(-\infty,\infty)$ పై $f(x)$ కు సంపూర్ణ గరిష్ఠం మరియు సంపూర్ణ కనిష్ఠం గలదు.



పటము 7.17

(a,b) పై $f(x)$ కు సంపూర్ణ తీవ్రత లేదు.



పటము 7.18

$[a,b]$ పై $f(x)$ కు సంపూర్ణ గరిష్ఠం మరియు సంపూర్ణ కనిష్ఠం గలదు.

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_7.indd 36 03/03/2023 17:45:55

ప్రతి సంవృతాంతరములో ఒక అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయము సంపూర్ణ గరిష్ఠ మరియు సంపూర్ణ కనిష్ఠం అను రెండు విలువలు తప్పక కలిగియుంటుందని క్రింది సిద్ధాంతము చూపును.

సిద్ధాంతము 7.8 (పరమ విలువ సిద్ధాంతము) (Extreme Value Theorem)

ఒక సంవృతాంతర $[a,b]$ పై $f(x)$ అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయం అయితే $[a,b]$ పై f కు సంపూర్ణ గరిష్ఠ మరియు సంపూర్ణ కనిష్ఠం అను రెండు విలువలు కలిగియుండును.

$f(x)$ యొక్క సంపూర్ణ అంత్య విలువలు సంవృతాంతరం $[a,b]$ యొక్క చివరి బిందువుల వద్ద లేదా వివృతాంతరం (a,b) లోపల సంభవిస్తుంది. ఒక సంపూర్ణ అంత్య విలువ లోపల సంభవిస్తే అది తప్పనిసరిగా $f(x)$ యొక్క సందిగ్ధ సంఖ్యల వద్ద సంభవిస్తుంది. అందువలన సంవృతాంతరం $[a,b]$ పై అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయం యొక్క సంపూర్ణ తీవ్రతను క్రింది విధానాన్ని ఉపయోగించి కనుగొనవచ్చును.

సంవృతాంతరం $[a,b]$ పై $f(x)$ అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయం యొక్క సంపూర్ణ తీవ్రతను కనుగొనే విధానాలు

సోపానం 1 : (a,b) లో $f(x)$ యొక్క సందిగ్ధ సంఖ్యలను కనుగొనాలి.

సోపానం 2 : అన్ని సందిగ్ధ సంఖ్యల వద్ద మరియు అంత్య బిందువులు a మరియు b ల వద్ద $f(x)$ విలువను గణించవలెను.

సోపానం 3 : సంవృతాంతరం $[a,b]$ పై సంపూర్ణ గరిష్ఠము లేదా సంపూర్ణ కనిష్ఠము అనేది వరుసగా సోపానము 2లోని అతి పెద్ద లేదా అతి చిన్న విలువలు అగును.

ఉదాహరణ 7.48

$[-3,2]$ పై $f(x)=2x^3+3x^2-12x$ ప్రమేయము యొక్క సంపూర్ణ గరిష్ఠ మరియు కనిష్ఠ విలువలను కనుగొనండి.

సాధన

ఇచ్చిన ప్రమేయమును అవకలనము చేయగా,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2+6x-12 \\ &= 6(x^2+x-2) \\ f'(x) &= 6(x+2)(x-1) \end{aligned}$$

అయితే, $f'(x)=0 \Rightarrow x=-2,1 \in (-3,2)$.

అందువలన $x=-2,1$ అనునది సందిగ్ధ బిందువులు $x=-3,2$ అను చివరి బిందువులు మరియు $x=-2,1$ అను సందిగ్ధ బిందువు ల వద్ద $f(x)$ ను గణించుము. $f(-3)=9$, $f(2)=4$, $f(-2)=20$ మరియు $f(1)=-7$ ను పొందవచ్చు.

$x=-2$ వద్ద సంపూర్ణ గరిష్ఠ విలువ 20 మరియు $x=1$ వద్ద సంపూర్ణ కనిష్ఠ విలువ -7 అగును. ■

ఉదాహరణ 7.49

సంవృతాంతరం $[0,2\pi]$ పై $f(x)=3\cos x$ ప్రమేయము యొక్క సంపూర్ణ గరిష్ఠ మరియు సంపూర్ణ కనిష్ఠ విలువలను కనుగొనండి.

సాధన

ఇచ్చిన ప్రమేయమును అవకలనము చేయగా, $f'(x)=-3\sin x$. ■

$f'(x)=0 \Rightarrow \sin x=0 \Rightarrow x=\pi \in (0,2\pi)$ $x=0, 2\pi$ మరియు సందిగ్ధ సంఖ్య $x=\pi$ వద్ద $f(x)$ ను గణించవలెను. $f(0)=3$, $f(2\pi)=3$, మరియు $f(\pi)=-3$.

$x=0,\ 2\pi$ ల వద్ద గరిష్ఠ విలువ 3 మరియు $x=\pi$ వద్ద కనిష్ఠ విలువ -3 అగును.

7.6.3 ఒక అంతరములో సాపేక్ష తీవ్రత (Relative Extrema on an Interval)

$f(x)$ అను ప్రమేయమునందు x_0 ను కలిగిన ఒక వివృతాంతరములో $f(x_0)$ అనునది గరిష్ఠ విలువ అయితే x_0 వద్ద $f(x)$ అను ప్రమేయముకు సాపేక్ష గరిష్ఠ విలువ గలదని అంటారు. అదేవిధముగా $f(x_0)$ ను కలిగియుండు ఒక వివృతాంతరములో $f(x_0)$ అనునది కనిష్ఠ విలువ అయితే x_0 వద్ద $f(x)$ అను ప్రమేయముకు సాపేక్ష కనిష్ఠ విలువ గలదని అంటారు.

సాపేక్ష గరిష్ఠము అనేది పూర్తి ప్రదేశమునకు అతి పెద్ద విలువ కానవసరంలేదు. అలాగే సాపేక్ష కనిష్ఠము అనేది పూర్తి ప్రదేశమునకు అతి చిన్న విలువ కానవసరంలేదు. అందువలన ఇక్కడ, పూర్తి ప్రదేశములో 1 కన్నా ఎక్కువ సాపేక్ష గరిష్ఠము లేదా సాపేక్ష కనిష్ఠములు ఉండవచ్చును.

వివృత లేదా సంవృతాంతరం I పై $\forall x \in I \subset D$ ను గణించిన $f(x)$ యొక్క విలువలలో ఒక ప్రమేయము యొక్క అంత్య విలువల (గరిష్ఠము లేదా కనిష్ఠము) అనేవి ఆ ప్రమేయము యొక్క సాపేక్ష అంత్యములు అని అంటారు. సాధారణముగా ఒక ప్రమేయము యొక్క లేదా సాపేక్ష అంత్య విలువ ఒక సందిగ్ధ బిందువు వద్ద పొందబడును. ఒక ప్రమేయము స్థానిక అంత్య విలువ లేకుండా $x = c$ వద్ద సందిగ్ధ బిందువును కలిగియుంటుందని గమనించవలెను. ఉదాహరణకు, మూల బిందువు వద్ద $y = x^3$ మరియు $y = x^{\frac{1}{3}}$ అను రెండు ప్రమేయాలు సందిగ్ధ బిందువులను కలిగియున్నాయి. కాని మూల బిందువు వద్ద ఈ ప్రమేయాలకు ఒక స్థానిక అంత్య విలువ కూడా లేదు.

సిద్ధాంతము 7.9 (ఫెర్మాట్) (Fermat)

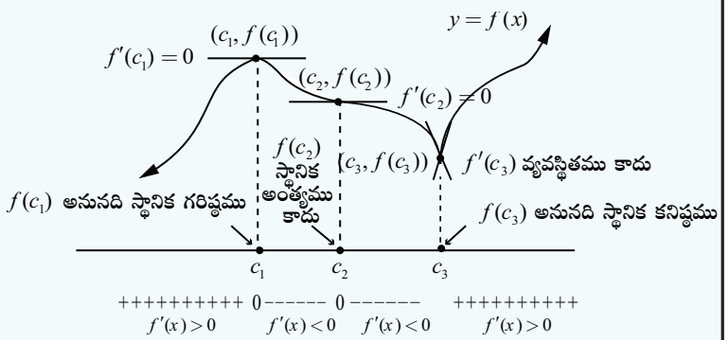
$x = c$ వద్ద $f(x)$ సాపేక్ష అంత్యమును (తీవ్రత) కలిగియున్నచో c ఒక సందిగ్ధ సంఖ్య అగును. ఇక్కడ $f'(x)$ వ్యవస్థితం కాని x విలువల వద్ద లేదా $f'(x) = 0$ సమీకరణము యొక్క సాధనలుగా ఒక ప్రమేయము యొక్క సందిగ్ధ సంఖ్యలను పొందుతాము.

7.6.4 మొదటి ఉత్పన్నాల పరీక్ష ఉపయోగించి అంత్యము (Extrema using First Derivative Test)

ఒక ప్రమేయము ఏ అంతరములో ఆరోహణము లేదా అవరోహణము అగునని నిర్ధారించిన తరువాత ఆ ప్రమేయము యొక్క సాపేక్ష అంత్యములను స్థానీకరించుట అంత కష్టమేమి కాదు. ఇచ్చిన ప్రమేయం $f(x)$ యొక్క సాపేక్ష అంత్యము సంభవించే స్థానం లేదా బిందువులను గ్రాఫ్ $y = f(x)$ ద్వారా గమనించవచ్చును. ఏదియేమైనప్పటికీ ఖచ్చితమైన బిందువు మరియు ప్రమేయము యొక్క అంత్య విలువను కనుగొనడానికి మనము ప్రమేయముపై కొన్ని పరీక్షలను ఉపయోగించాలి. ఆ పరీక్ష లలో ఒకటి మొదటి ఉత్పన్నాల పరీక్ష, అది క్రింది సిద్ధాంతాల ద్వారా నిర్వచించబడును.

సిద్ధాంతము 7.10 (మొదటి ఉత్పన్నాల పరీక్ష) (First Derivative Test)

c ను కలిగియున్న ఒక వివృతాంతరము I లో $f(x)$ అవిచ్ఛిన్నమైన, ప్రమేయము $f(x)$ యొక్క సందిగ్ధ బిందువు $(c, f(c))$ అనుకొందాము. ఈ అంతరలములో $f(x)$ అనునది c వద్ద అవకలనీయం అయితే $f(x)$ ను క్రింది విధంగా వర్గీకరించవచ్చును. (I అంతరములో ఎడమ నుండి కుడికి కదిలినప్పుడు)



పటము 7.19

(i) c వద్ద $f'(x)$ ఋణాత్మకము నుండి ధనాత్మకానికి మారినట్లైతే. $f(x)$ కు $f(c)$ స్థానిక కనిష్ఠం అగును.

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_7.indd 38 03/03/2023 17:46:08

(ii) c వద్ద $f'(x)$ ధనాత్మకము నుండి ఋణాత్మకానికి మారినట్లైతే. $f(x)$ కు $f(c)$ స్థానిక గరిష్ఠం అగును.

(iii) $f'(x)$ అనేది c కు ఇరువైపులా ధనాత్మకము లేదా c కు ఇరువైపులా ఋణాత్మకము అయిన $f(c)$ అనేది స్థానిక కనిష్ఠము కాదు మరియు స్థానక కనిష్ఠం కాదు.

ఉదాహరణ 7.50

$f(x)=x^2-4x+4$ ప్రమేయము యొక్క ఏకదిష్టత అంతరములను మరియు దీని నుండి స్థానిక అంత్యములను కనుగొనండి.



సాధన

$$f(x) = (x-2)^2,$$

$f'(x) = 2(x-2)=0$ నుంచి $x=2$ వచ్చును.

ఏకదిష్టత అంతరములు $(-\infty,2)$ మరియు $(2,\infty)$ $x\in(-\infty,2)$ కు $f'(x)>0$ కావున $(-\infty,2)$ పై $f(x)$ ఖచ్చిత అవరోహణము అగును. $x\in(2,\infty)$ కు $f'(x)>0$ కావున $(2,\infty)$ పై ప్రమేయము $f(x)$ ఖచ్చిత ఆరోహణము అగును. ఎందుకనగా ప్రమేయము $f(x)$ $x=2$ ద్వారా పోవునపుడు $f'(x)$ గుర్తు ఋణాత్మకం నుండి ధనాత్మకమునకు మారును. $x=2$ వద్ద $f(x)$ కు స్థానిక కనిష్ఠము గలదు. ఆ స్థానిక కనిష్ఠ విలువ $f(2)=0$ అగును. ■

ఉదాహరణ 7.51

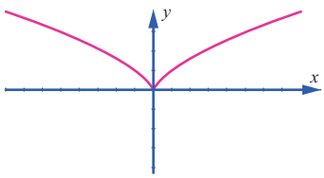
$f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ ప్రమేయము యొక్క ఏక దిష్ఠత అంతరములను కనుగొనుము మరియు దానినుంచి స్థానిక అంత్యములను కనుగొనుము.

సాధన

మన వద్ద $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ అయిన $f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}$. $f'(x)\neq 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ మరియు $x=0$ వద్ద $f'(x)$ వ్యవస్థితం కాదు. అందువలన విరామ బిందువులు ఉండవు కాని $x=0$ వద్ద సందిగ్ధ బిందువు ఉండును.

అంతరం	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$ యొక్క గుర్తు	−	+
ఏకదిష్ఠత	ఖచ్చితముగా అవరోహణం	ఖచ్చితముగా ఆరోహణం

పట్టిక 7.5



పటము 7.20

ఎందుకనగా ప్రమేయము $x=0$ గుండా పోయినప్పుడు $f'(x)$ గుర్తు ఋణాత్మకం నుండి ధనాత్మకముగా మారినది. కావున దీనికి $x=0$ వద్ద స్థానిక కనిష్ఠం గలదు. $x=0$ వద్ద స్థానిక కనిష్ఠ విలువ $f(0)=0$. ఇక్కడ స్థిర బిందువు కాని సందిగ్ధ బిందువు వద్ద స్థానిక కనిష్ఠము వచ్చినది అని గమనించగలరు. ■

ఉదాహరణ 7.52

ప్రమేయము $f(x)=x-\sin x$ వాస్తవరేఖపై ఆరోహణమని నిరూపించుము స్థానిక తీవ్రత ఉనికిని చర్చించండి.

సాధన

$f'(x)=1-\cos x\geq 0$ కావున $x=2n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$ బిందువుల వద్ద మరియు శూన్యం. ఈ ప్రమేయము వాస్తవరేఖపై ప్రమేయము ఆరోహణమగును.

$x = 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$ గుండా పోవునప్పుడు $f'(x)$ గుర్తు లో మార్పు లేదు. కావున, మొదటి అవకలన పరీక్ష ద్వారా ఇచ్చట స్థానిక తీవ్రత లేదు అని చెప్ప వచ్చును.

ఉదాహరణ 7.53

$f(x) = \log(1+x) - \frac{x}{1+x}, x > -1$ అను ప్రమేయము యొక్క ఏకదిష్టత మరియు స్థానిక తీవ్రతను చర్చించండి. దీని నుండి ప్రదేశము కనుగొనండి. ఇక్కడ $\log(1+x) > \frac{x}{1+x}$

సాధన

$$f(x) = \log(1+x) - \frac{x}{1+x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{x}{(1+x)^2}.$$

$$f'(x) \text{ అనునది } \begin{cases} < 0 & \text{అయిన } -1 < x < 0 \\ = 0 & \text{అయిన } x = 0 \\ > 0 & \text{అయిన } x > 0 \end{cases}$$

$x > 0$ కు $f(x)$ ఖచ్చితముగా ఆరోహణం మరియు x<0 కు $f'(x)$ అవరోహణం. $x = 0$ గుండా పోవునప్పుడు $f'(x)$ విలువ ఋణాత్మకము నుండి ధనాత్మకమునకు మారును. కావున $x > 0$ వద్ద స్థానిక కనిష్ఠ విలువ కలిగియున్నదని మొదటి అవకలన పరీక్ష తెలుపును. అది $f(0) = 0$. అదే విధముగా $x > 0$ అయిన $f(x) > f(0) = 0$ క్రింది దానిని ఇచ్చును.

$$(0,\infty) \text{ పై. } \log(1+x) - \frac{x}{1+x} > 0 \Rightarrow \log(1+x) > \frac{x}{1+x}$$

ఉదాహరణ 7.54

ప్రమేయము $f(x) = x\log x + 3x$ యొక్క ఏకదిష్టత అంతరము మరియు స్థానిక తీవ్రతను కనుగొనండి.

సాధన

ప్రతి $x \in (0,\infty)$ వద్ద ఇచ్చిన ప్రమేయము నిర్వచింపబడినది మరియు అవకలనీయం

$$f(x) = x\log x + 3x.$$

అందువలన $f'(x) = \log x + 1 + 3 = 4 + \log x.$

$4 + \log x = 0$ విరామ బిందువులను ఇచ్చును.

అది $x = e^{-4}$. అగును.

అందువలన ఏకదిష్టత అంతరములు $(0, e^{-4})$ మరియు (e^{-4}, ∞) అగును. $x = e^{-5} \in (0, e^{-4})$, వద్ద $f'(e^{-5}) = -1 < 0$ కావున $(0, e^{-4})$ అంతరలములో ఖచ్చితముగా అవరోహణము.

$x = e^{-3} \in (e^{-4}, \infty)$ వద్ద $f'(e^{-3}) = 1 > 0$ కావున (e^{-4}, ∞) అంతరములో ఖచ్చితముగా ఆరోహణము. $x = e^{-4}$ ద్వారా పోవునప్పుడు $f'(x)$ ఋణాత్మకము నుండి ధనాత్మకమునకు మారును. కావున $x = e^{-4}$ వద్ద స్థానీక కనిష్ఠము కలదని మొదటి ఉత్పన్నాల పరీక్ష మనకు తెలియజేయును. మరియు అది $f(e^{-4}) = -e^{-4}$.

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_7.indd 40 03/03/2023 17:46:23

ఉదాహరణ 7.55

ప్రమేయము $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ ఏ అంతరములో ఏకదిష్టం మరియు స్థానిక తీవ్రతను కలిగి ఉందునో కనుగొనండి.

సాధన

ఇచ్చిన ప్రమేయము అన్ని $x\in(-\infty,\infty)$ లో నిర్వచించబడుతుంది మరియు అవకలనీయం

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

$$f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

$-\frac{2x}{(1+x^2)^2} = 0$ ద్వారా అనునది విరామ బిందువగును. $x=0$.

అందువలన $(-\infty,0)$ మరియు $(0,\infty)$ అంతరములో ఏకదిష్టతను కలిగియుండును.

$(-\infty,0)$ అంతరంలో $f(x)$ ఖచ్చితముగా ఆరోహణము, ఎందుకనగా ఈ అంతరములో $f'(x)>0$ మరియు $(0,\infty)$ అంతరంలో $f(x)$ ఖచ్చితముగా అవరోహణము ఎందుకనగా ఈ అంతరములో $f(x)<0$. $x=0$ ద్వారా పోవునప్పుడు $f'(x)$ ధనాత్మకం నుండి ఋణాత్మకమునకు మారును. కావున $x=0$ వద్ద స్థానిక గరిష్ఠము ఇక్కడ గలదని మొదటి ఉత్పన్నాల పరీక్ష మనకు తెలియజేయును. మరియు ఆ స్థానిక గరిష్ఠ విలువ $f(0)=1$.

ఉదాహరణ 7.56

ప్రమేయము $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ ఏ అంతరములో ఏకదిష్ఠత మరియు స్థానిక తీవ్రత కలిగి యుండునో కనుగొనుము.

సాధన

అన్ని $x\in(-\infty,\infty)$ వద్ద ప్రమేయము నిర్వచించబడును మరియు అవకలనీయం.

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2},$$

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

$1-x^2 = 0$ ద్వారా $x=\pm1$ అనునవి విరామ బిందువులు అగును.

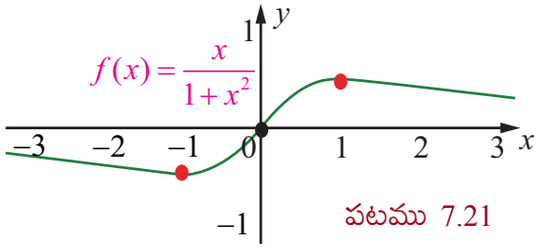
$(-\infty,-1),(-1,1)$ మరియు $(1,\infty)$ అంతరములో ఏకదిష్ఠత అగును.

అంతరం	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$ యొక్క గుర్తులు	−	+	−
ఏకదిష్టత	ఖచ్చితంగా అవరోహణం	ఖచ్చితంగా ఆరోహణం	ఖచ్చితంగా అవరోహణం

పట్టిక 7.6

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_7.indd 41 03/03/2023 17:46:28

$(-\infty,-1)$ మరియు $(1,\infty)$ పై $f(x)$ ఖచ్చితంగా అవరోహణం $(-1,1)$ పై ఖచ్చితంగా ఆరోహణం.



పటము 7.21

$x=-1$ గుండా పోయినపుడు $f'(x)$ ఋణాత్మకం నుండి ధనాత్మకముగా కు మారును, మొదటి అవకలన పరీక్ష ప్రకారం $x=-1$ వద్ద స్థానిక కనిష్ఠం గలదు. మరియు స్థానిక కనిష్ఠ విలువ $f(-1)=-\frac{1}{2}$, $x=1$ గుండా పోయిన $f'(x)$ ధనాత్మకం నుండి ఋణాత్మకంగా మారును. కావున మొదటి అవకలన పరీక్ష ప్రకారం $x=1$ వద్ద స్థానిక గరిష్ఠ విలువగలదు మరియు. స్థానిక గరిష్ఠ విలువ $f(1)=\frac{1}{2}$.

అభ్యాసము 7.6

1. క్రింద ఇవ్వబడిన ప్రమేయము యొక్క సంవృతాంతరములో సంపూర్ణ అంత్యమును (సంపూర్ణ తీవ్రతను) కనుగొనండి.

(i) $f(x)=x^2-12x+10$; $[1,7]$ (ii) $f(x)=3x^4-4x^3$; $[-1,2]$

(iii) $f(x)=6x^{\frac{4}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}$; $[-1,1]$ (iv) $f(x)=2\cos x+\sin 2x$; $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

2. క్రింద ఇవ్వబడిన ప్రమేయాలు ఏ అంతరములో ఏకదిష్ఠత మరియు స్థానిక తీవ్రత కలిగియున్నవి?

(i) $f(x)=2x^3+3x^2-12x$ (ii) $f(x)=\frac{x}{x-5}$

(iii) $f(x)=\frac{e^x}{1-e^x}$ (iv) $f(x)=\frac{x^3}{3}-\log x$

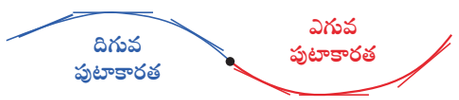
(v) $f(x)=\sin x\cos x+5,\ x\in(0,2\pi)$

OFWQ9

7.7 రెండవ అవకలనం యొక్క అనవర్తనాలు (Applications of Second Derivative)

ఒక ప్రమేయము యొక్క కుంభాకారత, పుటాకారత పరివర్తన బిందువులను మరియు స్థానిక అంత్యములను రెండవ అవకలనమును ఉపయోగించి కనుగొనవచ్చును.

7.7.1 కుంభాకారత, పుటాకారత మరియు పరివర్తన బిందువులు (Concavity, Convexity, and Points of Inflection)



పటము 7.22

ఒక గ్రాఫ్‌లో స్పర్శరేఖ ఒక బిందువునకు సమీపములో గ్రాఫ్‌నకు పై భాగమున ఉన్నట్లయితే ఆ గ్రాఫ్‌ను, ఆ బిందువు వద్ద దిగువ పుటాకారత (ఎగువ కుంభాకారత) అని అంటారు. ఒక గ్రాఫ్‌లో స్పర్శరేఖ ఒక బిందువుకు సమీపములో గ్రాఫ్‌కు దిగువ భాగమున ఉన్నట్లయితే ఆ గ్రాఫ్‌ను ఆ బిందువు వద్ద ఎగువ పుటాకారత (దిగువ కుంభాకారత) అని అంటారు. దీనిని ప్రక్క గ్రాఫ్ నుండి సులభముగా గ్రహించవచ్చును.

నిర్వచనం 7.8

ఒక వివృతాంతరం $I=(a,b)$ లో $f(x)$ అనే ప్రమేయమునకు రెండవ అవకలనం వ్యవస్థితమైన $f(x)$ ను ఈ విధముగా చెప్పవచ్చు.

(i) I పై $f'(x)$ ఖచ్చితంగా ఆరోహణమైతే ఆ ప్రమేయంను వివృత అంతరం I పై ఎగువ పుటాకారత అంటారు.

(ii) I పై $f'(x)$ ఖచ్చితంగా ఆరోహణమైతే ఆ ప్రమేయంను వివృతాంతరము I పై దిగువ పుటాకారత అంటారు.

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_7.indd 42 03/03/2023 17:46:36

విశ్లేషణాత్మకముగా ఇచ్చిన $y=f(x)$ గ్రాఫ్ యొక్క ప్రమేయము అవకలనీయ అయిన పుటాకారతను క్రింది ఫలితాలు ఇచ్చును.

సిద్ధాంతము 7.11 (పుటాకారత పరీక్ష) (Test of Concavity)

(i) ఒక వివృతాంతరం I పై $f''(x)>0$ అయితే I పై $f(x)$ ఎగువ పుటాకారత.

(ii) ఒక వివృతాంతరం I పై $f''(x)<0$ అయితే I పై $f(x)$ దిగువ పుటాకారత

విశేషాంశము

(1) $[a,b]$ అంతరముపై నిర్వచించిన ఎగువ కుంభాకార ప్రమేయము యొక్క ఏదైనా స్థానిక గరిష్ఠ విలువ కూడా ఈ అంతరములో దాని సంపూర్ణ గరిష్ఠం అగును.

(2) $[a,b]$ అంతరముపై నిర్వచించిన దిగువ కుంభాకార ప్రమేయము యొక్క ఏదైనా స్థానిక కనిష్ఠ విలువ కూడా ఈ అంతరములో దాని సంపూర్ణ కనిష్ఠం అగును.

(3) ఇక్కడ ఒకేఒక్క సంపూర్ణ గరిష్ఠ (మరియు ఒక సంపూర్ణ కనిష్టం) ఉంటుంది. కాని ఒకటి కన్నా ఎక్కువ స్థానిక గరిష్ఠ లేదా కనిష్ఠం కలదు.

పరివర్తన బిందువులు

నిర్వచనం 7.9

ఒక గ్రాఫ్ ఎగువ పుటాకారత నుంచి దిగువ పుటాకారతకు మార్పు చెందిన లేదా దిగువ పుటాకారత నుంచి ఎగువ పుటాకారతకు మార్పు చెందిన, ఆ బిందువులను $f(x)$ యొక్క పరివర్తన బిందువులు అంటారు.

సిద్ధాంతము 7.12 (పరివర్తన బిందువుల పరీక్ష) (Test for Points of Inflection)

(i) $f''(c)$ వ్యవస్థితము మరియు $x=c$ గుండా పోవునప్పుడు $f''(c)$ దాని గుర్తును మార్చుకొననట్లయితే $(c,f(c))$ బిందువును f గ్రాఫ్ యొక్క పరివర్తన బిందువు అగును.

(ii) పరివర్తన బిందువు వద్ద $f''(c)$ వ్యవస్థితమైన $f''(c)=0$ అగును.

విశేషాంశము

$y=f(x)$ వక్రముపై పరివర్తన బిందువు స్థానాన్ని నిర్ధారించడానికి $f''(x)$ గుర్తు మార్పు చెందించు బిందువులను కనుగొనవలసిన అవసరము గలదు. మృదువైన వక్రానికి (పదునైన మూలలు లేవు) ఇవి సంభవించాలన్నా

(i) $f''(x)=0$ లేదా

(ii) $f''(x)$ ఒక బిందువువద్ద వ్యవస్థితం కాదు.

విశేషాంశము

(1) $f''(c)$ వ్యవస్థితం కాకపోయిన $(c,f(c))$ పరివర్తన బిందువు అగుటకు వీలగును. ఉదాహరణకు $c=0$ వద్ద $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$.

(2) $(c,f(c))$ బిందువు వద్ద $f''(c)=0$ అగును. కాని ఆ బిందువు పరివర్తన బిందువు కానవసరము లేదు. ఉదాహరణకు $c=0$ వద్ద $f(x)=x^4$

(3) పరివర్తన బిందువు విరామ బిందువు కానవసరం లేదు. ఉదాహరణకు $f(x)=\sin x$ అయితే $f'(x)=\cos x$ మరియు $f''(x)=-\sin x$ అందువలన $(\pi,0)$ పరివర్తన బిందువు కాని $f(x)$ కు విరామ బిందువు కాదు.

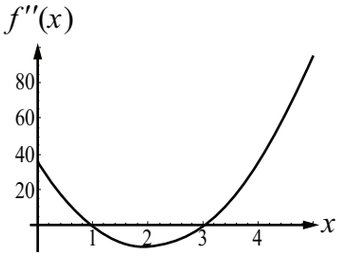
ఉదాహరణ 7.57

వక్రము $f(x)=(x-1)^3\cdot(x-5), x\in\mathbb{R}$ యొక్క పుటాకారత అంతరములను గుర్తించండి. పరివర్తన బిందువు ఉంటే కనుగొనండి.

సాధన

ఇచ్చిన ప్రమేయము తరగతి 4గా గల బహుపది

ఇప్పుడు,
$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-1)^3+3(x-1)^2\cdot(x-5)\\ &= 4(x-1)^2\cdot(x-4)\\ f''(x) &= 4((x-1)^2+2(x-1)\cdot(x-4))\\ &= 12(x-1)\cdot(x-3)\end{aligned}$$



పటము 7.23

ఇప్పుడు,
$$f''(x)=0 \Rightarrow x=1, x=3.$$

పుటాకారత అంతరములు పట్టిక 7.7లో పట్టికీకరించబడినది.

అంతరం	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
$f''(x)$ యొక్క గుర్తు	+	−	+
పుటాకారత	ఎగువ పుటాకారత	దిగువ పుటాకారత	ఎగువ పుటాకారత

పట్టిక 7.7

$(-\infty,1)$ మరియు $(3,\infty)$ అంతరములో వక్రం ఎగువ పుటాకారతను కలిగియుండును.

$(1,3)$ అంతరంలో వక్రం దిగువ పుటాకారతను కలిగియుండును.

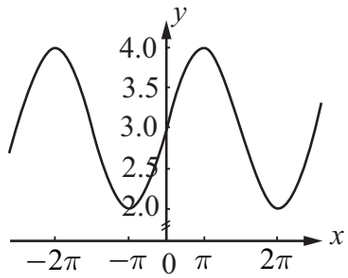
$x=1$ మరియు $x=3$, గుండా పోయిన $f''(x)$ యొక్క గుర్తులు మారును. $(1,f(1))=(1,0)$ మరియు $(3,f(3))=(3,-16)$ అనునవి $y=f(x)$ గ్రాఫ్ యొక్క పరివర్తన బిందువులు. $f''(x)$ వక్రం యొక్క గుర్తులు మారడాన్ని ప్రక్క పటము నుండి గుర్తించవచ్చు. ■

ఉదాహరణ 7.58

$y=3+\sin x$ వక్రానికి పుటాకారత యొక్క అంతరంలను కనుగొనుము.

సాధన

ఇచ్చిన ప్రమేయము 2π కాల వ్యవధిలో ఆవర్తన ప్రమేయం మరియు ప్రతి ఆవర్తన అంతరములో విరామ బిందువు మరియు పరివర్తన బిందువులను కలిగియుండును.



పటము 7.24

$$\frac{dy}{dx}=\cos x \text{ మరియు } \frac{d^2y}{dx^2}=-\sin x$$

ఇక్కడ, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\sin x=0 \Rightarrow x=n\pi$.

$(-\pi,\pi)$ అంతరం తీసుకొని, దానిని రెండు ఉప అంతరాలుగా విభజించగా $(-\pi,0)$ మరియు $(0,\pi)$

$(-\pi,0)$ అంతరములో $\dfrac{d^2y}{dx^2}>0$ అగును. అందువలన ప్రమేయం ఎగువ పుటాకారత అగును..

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_7.indd 44 03/03/2023 17:46:52

$(0,\pi)$ అంతరములో $\frac{d^2y}{dx^2}<0$ అగును. అందువలన ప్రమేయం దిగువ పుటాకార అగును. కావున $(0,3)$ పరివర్తన బిందువు (పటము 7.25లో చూపబడింది) $(n\pi,(n+1)\pi)$ ని వక్రము యొక్క పుటాకారాన్ని చర్చించడానికి సాధారణ అంతరముగా పరిగణించాలి. ఇక్కడ n ఏదైనా ఒక పూర్ణ సంఖ్య ఇది ముందుగా చర్చించిన దానిని $(n\pi,3)$ గా నిర్ధారిస్తుంది. కావున ఇది పరివర్తన బిందువులు.

7.7.2 రెండవ అవకలన పరీక్షను ఉపయోగించి తీవ్రత (Extrema using Second Derivative Test)

రెండవ అవకలన పరీక్ష : రెండవ అవకలన పరీక్ష సందిగ్ధ బిందువులు తీవ్రత విలువలు మరియు పుటాకార భావనలను సంబంధపరచుటకు ఇది ఒక సాధనముగా కలదు. ఇది ప్రమేయము యొక్క గ్రాఫ్‌లో ఒక సందిగ్ధ బిందువు స్థానిక కనిష్ఠ లేదా గరిష్ఠంగా గలదో అని కనుగొనుటకు ఉపయోగపడుతుంది.

సిద్ధాంతము 7.13 రెండవ అవకలన పరీక్ష (The Second Derivative Test)

$f'(c)=0$ కు, c ఒక సందిగ్ధ బిందువు అనుకొనుము. c యొక్క సమీప స్థానాలలో $f'(x)$ మరియు $f''(c)$ లు వ్యవస్థితం అగును. $f''(c)<0$ అయితే f కు c వద్ద సాపేక్ష గరిష్ఠ విలువ గలదు. మరియు $f''(c)>0$ అయిన c వద్ద సాపేక్ష కనిష్ఠ విలువ గలదు. $f''(c)=0$ అయిన ఈ పరీక్ష ఎటువంటి సమాచారము ఇవ్వదు.

ఉదాహరణ 7.59

$f(x)=x^4+32x$ ప్రమేయం యొక్క స్థానిక తీవ్రతను కనుగొనండి.

సాధన

మన వద్ద

$$f'(x) = 4x^3+32=0 \text{ నుంచి } x^3=-8 \text{ వస్తుంది.}$$
$$\Rightarrow x = -2$$

మరియు $f''(x) = 12x^2$.

$x=-2$ వద్ద $f''(-2)>0$ అయిన ప్రమేయముకు స్థానిక కనిష్ఠ విలువ గలదు. స్థానిక కనిష్ఠ విలువ $f(-2)=-48$. అందువలన తీవ్ర బిందువు $(-2,-48)$.

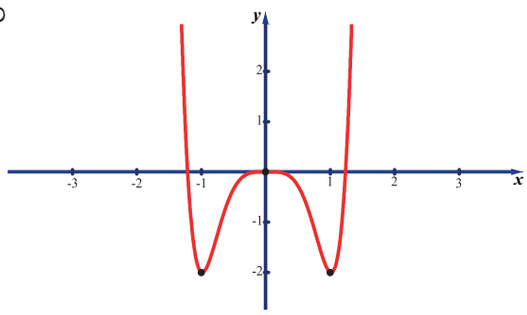
ఉదాహరణ 7.60

$f(x)=4x^6-6x^4$ ప్రమేయం యొక్క స్థానిక తీవ్రతను కనుగొనండి.

సాధన

x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$f'(x) = 24x^5-24x^3$$
$$= 24x^3(x^2-1)$$
$$= 24x^3(x+1)(x-1)$$



పటము 7.25

$f'(x)=0 \Rightarrow x=-1, 0, 1$. సందిగ్ధ సంఖ్యలు $x=-1,0,1$.

$f''(x)=120x^4-72x^2=24x^2(5x^2-3)$.

$\Rightarrow f''(-1)=48,\ f''(0)=0,\ f''(1)=48.$

రెండవ అవకలన పరీక్ష చేత $f''(-1)$ మరియు $f''(1)$ లు ధనాత్మకం కావున ప్రమేయం $f(x)$ కు స్థానిక కనిష్ఠ విలువ కలిగియున్నది. కాని అది $x=0$ వద్ద $f''(0)=0$ కావున స్థాన తీవ్రతకు రెండవ అవకలన పరీక్ష ఎటువంటి సమాచారము ఇవ్వదు. అందువలన మొదటి అవకలన పరీక్షకు తిరిగి వెళ్ళిన ఏకదిష్ట యొక్క అంతరాలు పట్టికలో కలవు. ఇవి పట్టిక 7.8లో చూపబడినది.

అంతరం	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,^\circ)$
$f'(x)$ యొక్క గుర్తు	−	+	−	+
ఏకదిష్టం	ఖచ్చితంగా అవరోహణం	ఖచ్చితంగా ఆరోహణం	ఖచ్చితంగా అవరోహణం	ఖచ్చితంగా ఆరోహణం

పట్టిక 7.8

మొదటి అవకలన పరీక్ష ప్రకారం $x=-1$ వద్ద $f(x)$ కు స్థానిక కనిష్ఠం ఉంటుంది. స్థానిక కనిష్ఠ విలువ -2 .ప్రమేయం $f(x)$ కు స్థానిక గరిష్ఠం గలదు. $x=0$ వద్ద స్థానిక గరిష్ఠ విలువ 0. $x=1.$ వద్ద $f(x)$ ప్రమేయంకు స్థానిక కనిష్ఠం గలదు. స్థానిక కనిష్ఠ విలువ $-2.$

విశేషాంశము

రెండవ అవకలనం అదృశ్యమైనప్పుడు మనకు తీవ్రత గురించి ఎటువంటి సమాచారంలేదు. మనం మొదటి అవకలన పరీక్షను ఉపయోగించి ప్రమేయము యొక్క తీవ్రతను కనుగొనాలి!

ఉదాహరణ 7.61

$x+y=10$ రేఖపై x^2y^2 ప్రమేయం యొక్క స్థానిక గరిష్ఠ మరియు స్థానిక కనిష్ఠ విలువను కనుగొనండి.

సాధన

ఇచ్చిన ప్రమేయమును క్రింది విధముగా వ్రాసిన $f(x)=x^2(10-x)^2$.

$$f(x) = x^2(100-20x+x^2)=x^4-20x^3+100x^2$$

ఇప్పుడు, $$f'(x) = 4x^3-60x^2+200x=4x(x^2-15x+50)$$

$$f'(x) = 4x(x^2-15x+50)=0\Rightarrow x=0,\ 5,\ 10$$

అందువలన $$f''(x) = 12x^2-120x+200$$

$f(x)$ యొక్క విరామ బిందువులు $x=0,\ 5,\ 10$ ఈ బిందువుల వద్ద $f''(x)$ యొక్క విలువలు వరుసగా $200,-100,\ 200.$ $x=0$ వద్ద స్థానిక కనిష్ఠ విలువ కలిగియున్నది. ఆ స్థానిక విలువ $f(0)=0.$ $x=5$ వద్ద స్థానిక గరిష్ఠ విలువ $f(5)=625.$ $x=10,$ వద్ద దీనికి కనిష్ఠ విలువ ఉంటుంది. ఆ కనిష్ఠ విలువ $f(10)=0.$

అభ్యాసము 7.7

1. క్రింది ప్రమేయాల యొక్క పుటాకారత అంతరాలు మరియు పరివర్తన బిందువులను అంతరాన్ని కనుగొనండి.

(i) $f(x)=x(x-4)^3$ (ii) $f(x)=\sin x+\cos x,\ 0<x<2\pi$ (iii) $f(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$

2. రెండవ అవకలన పరీక్షను ఉపయోగించి క్రింది ప్రమేయాల స్థానిక తీవ్రతను కనుగొనండి.

(i) $f(x)=-3x^5+5x^3$ (ii) $f(x)=x\log x$ (iii) $f(x)=x^2e^{-2x}$

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_7.indd 46 03/03/2023 17:47:09

3. $f(x)=4x^3+3x^2-6x+1$ ప్రమేయముకు ఏకదిష్టత అంతరములు, స్థానిక తీవ్రత, పుటాకారత అంతరాలు మరియు పరివర్తన బిందువులను కనుగొనుము.

7.8 సర్వోత్త సమీకతరణము యొక్క అనువర్తనాలు (Applications in Optimization)

సర్వోత్త సమీకతరణము అనేది తీవ్రత విలువలను (గరిష్ఠ లేదా కనిష్ఠ) నిర్ధిష్ట నిబంధనలు ఆదారంగా కనుగొనే ఒక ప్రక్రియ.

అంత్య లేదా సర్వోత్త సమీకతరణము సమస్యలను సాధించే విధానం.

సందర్భము 1 : ఇచ్చిన సమస్యకు తగిన బొమ్మను మరియు సమస్యకు సంబంధించిన పరిమాణమును గుర్తించాలి.

సందర్భము 2 : పరిమాణాన్ని గరిష్ఠీకరించుటకు లేదా కనిష్ఠీకరించడానికి ఒక సమాసమును కనుగొనండి.

సందర్భము 3 : సమస్య యొక్క ఇచ్చిన పరిస్థితులను ఉపయోగించి, పరిమాణం యొక్క తీవ్రతను లెక్కించాలి.

సందర్భము 4 : సమస్యలో ఇచ్చిన నియమాలకు అనుగుణంగా ఈ రాశుల యొక్క ఆమోదయోగ్యమైన అంతరాలను కనుగొనండి.

సందర్భము 5 : తీవ్రత యొక్క సాంకేతికతను ఉపయోగించి (సంపూర్ణ తీవ్రత, మొదటి అవకలన పరీక్ష లేదా రెండవ అవకలన పరీక్ష) గరిష్ఠ లేదా కనిష్టాన్ని పొందుతాము.

ఉదాహరణ 7.62

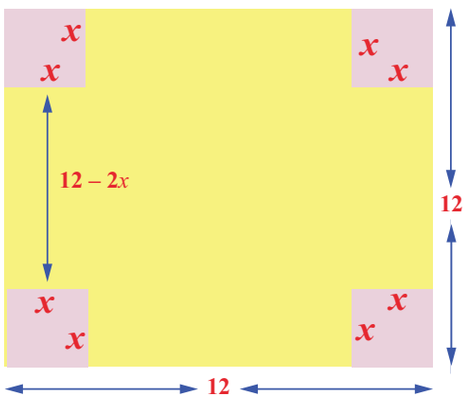
మన వద్ద 12 యూనిట్ పరిమాణముతో సన్నని చదరపు ఫలక కలదు మరియు ఆ ఫలకం మూలల నుంచి చిన్న చతురస్రాలను కత్తిరించి, భుజాలను మడతపెట్టి తెరచియుంచిన పెట్టెను తయారుచేయాలనుకొన్నాము. ప్రశ్న ఏమిటంటే పెట్టె యొక్క ఘనపరిమాణం గరిష్ఠంగా ఉండుటకు కత్తిరించవలసిన చతురస్ర పరిమాణమును కనుగొనుము.

సాధన

x = కత్తిరించవలసిన ప్రతి చిన్న చతురస్రపు పొడవు

V = మడత ద్వారా పొందిన పెట్టె యొక్క ఘనపరిమాణం

రెండు మూలల వద్ద x పొడవుతో చదరపును కత్తిరించిన తరువాత ఆధారం పొడవు $12-2x$. మడత తరువాత పెట్టెలోతు x కావున ఘనపరిమాణం $V=x\times(12-2x)^2$, $x=0$ లేదా 6 ఉన్నప్పుడు ఘనపరిమాణం శూన్యం మరియు అందువల్ల పెట్టె లభించదు. కావున $V=x\times(12-2x)^2, x\in(0,6)$ వద్ద సమస్యను గరిష్ఠీకరించాలి.



పటము 7.26

ఇప్పుడు, $\frac{dV}{dx} = (12-2x)^2-4x(12-2x)$

$= (12-2x)(12-6x)$.

$\frac{dV}{dx}=0$ అయిన విరామ బిందువులు $x=2,6$ వచ్చును. $6\notin(0,6)$ కావున $x=2$ వద్ద ఒకే ఒక విరామ బిందువు విలువ $x=2\in(0,6)$ అగును. $x=2$ ద్వారా పోయిన $\frac{dV}{dx}$ ధనాత్మకము నుండి ఋణాత్మకమునకు దాని గుర్తు మారును. $x=2$ వద్ద గరిష్ఠ ఘనపరిమాణం V వచ్చును. స్థానిక గరిష్ఠ ఘనపరిమాణం $V=128$ యూనిట్లు. అందువలన 2 యూనిట్ల కత్తిరింపు భాగం మాత్రము గరిష్ఠం అగును. ■

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_7.indd 47 03/03/2023 17:47:13

ఉదాహరణ 7.63

ఒక యూనిట్ వృత్తం $x^2+y^2=1$ పై $(1,1)$ నుండి సమీప మరియు సుదూరములోని బిందువులను కనుగొనండి.

సాధన

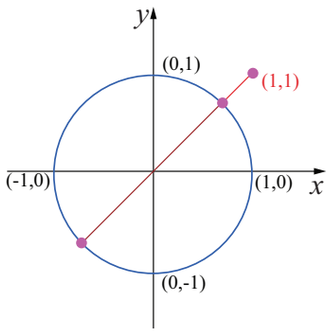
$(1,1)$ బిందువు నుండి ఏదైనా బిందువు (x,y) కు మధ్య గల దూరం $d=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$. తీవ్రతరం d కి బదులుగా సౌలభ్యం కోసం మనము $D=d^2=(x-1)^2+(y-1)^2$ లెక్కిస్తాము $x^2+y^2=1$ (షరతులకు లోబడి ఉంటుంది.) ఇప్పుడు $\frac{dD}{dx}=2(x-1)+2(y-1)\times\frac{dy}{dx}$. $x^2+y^2=1$ ని x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా $\frac{dy}{dx}$ ను గణించవచ్చు. అందువలన $2x+2y\frac{dy}{dx}=0$ నుంచి $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$ పొందవచ్చు.

ఈ విలువను ప్రతిక్షేపించగా, $\frac{dD}{dx}=2(x-1)+2(y-1)\left(-\frac{x}{y}\right)$

$$=\frac{2[xy-y-xy+x]}{y}$$

$$\frac{dD}{dx}=2\left[\frac{x-y}{y}\right]=0$$

$$\Rightarrow x=y$$



పటము 7.27

కావున (x,y) అనునది వృత్తం $x^2+y^2=1$ పై కలదు. $2x^2=1$ ని పొందవచ్చు. $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ అగును. అందువలన $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ బిందువుల వద్ద ఏదైనా తీవ్రత దూరమును పొందవచ్చు.

తీవ్రతను పొందుటకు రెండవ అవకలన పరీక్షను వర్తింప చేసిన

$$\frac{d^2D}{dx^2}=2\frac{y^2+x^2}{y^3}.$$

విలువ $\left(\frac{d^2D}{dx^2}\right)_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}>0$; $\left(\frac{d^2D}{dx^2}\right)_{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}<0$.

దీనినుంచి సమీప మరియు సుదూర బిందువులు వరుసగా $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ మరియు $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

సమీప మరియు సుదూరములు వరుసగా $\sqrt{2}-1$ మరియు $\sqrt{2}+1$.

ఉదాహరణ 7.64

ఒక ఉక్కు మిల్లులో ఒక రోజుకు తక్కువ నాణ్యత గల ఉక్కు x టన్నులు, ఎక్కువ నాణ్యత గల ఉక్కు 7 టన్నుల ఉత్పత్తి సామర్థ్యం కలదు. ఇక్కడ $y=\frac{40-5x}{10-x}$. తక్కువ నాణ్యత గల ఉక్కు మార్కెట్ ధర, ఎక్కువ నాణ్యత గల మార్కెట్ ధరలో సగం ఉంటే, అధిక నగదు పొందాలంటే తక్కువ నాణ్యత గల ఉక్కు మరియు ఎక్కువ నాణ్యత గల ఉక్కు సరియైన ఉత్పత్తులు ఎంత?

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_7.indd 48 03/03/2023 17:47:21

సాధన

తక్కువ నాణ్యత గల ఉక్కు ధర ప్రతి టన్నుకు ₹p అనుకొనిన మరియు ఎక్కువ నాణ్యత గల ఉక్కు ధర టన్నుకు ₹$2p$ అగును.

ప్రతిరోజు పొందు నగదు మొత్తం $R = px + 2py = px + 2p\left(\frac{40-5x}{10-x}\right)$ అందువలన సమస్య సాధనకు R ను గరిష్ఠపరచవలెను. R ను x దృష్ట్యా అవకలనం చేసి సూక్ష్మీకరించగా, మనము పొందునది.

$$R = p\left(\frac{80-x^2}{10-x}\right)$$

$$\frac{dR}{dx} = p\left(\frac{x^2-20x+80}{(10-x)^2}\right)$$

$$\frac{d^2R}{dx^2} = -\frac{40p}{(10-x)^3}$$

$$\frac{dR}{dx} = 0 \Rightarrow x^2-20x+80=0 \text{ కావున } x = 10 \pm 2\sqrt{5}$$

$x = 10-2\sqrt{5}$, వద్ద $\frac{d^2R}{dx^2} < 0$

కావున, R గరిష్ఠం అగును, ఇం $10-2\sqrt{5}$ అయిన ఎం $5-\sqrt{5}$. తక్కువ నాణ్యత గల ఉక్కు,, ఎక్కువ నాణ్యత గల ఉక్కును వరుసగా $10-2\sqrt{5}$ మరియు $5-\sqrt{5}$ ల టన్నుల ఉక్కును ప్రతి రోజు ఉక్కు మిల్లు నుండి ఉత్పత్తి చేయవచ్చు. ■

ఉదాహరణ 7.65

ఇచ్చిన వైశాల్యము యొక్క అన్ని దీర్ఘచతురస్రాలలో కనీస చుట్టుకొలత చతురస్రమునకు ఉంటుందని నిరూపించుము.

సాధన

x, y లు దీర్ఘచతురస్ర భుజాలు అయిన, దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యము $xy = k$ (ఇవ్వబడినది) దీర్ఘచతురస్ర చుట్టుకొలత P అనేది $2(x+y)$, $xy = k$ నిబంధనను అనుసరించి $2(x+y)$ ను కనిష్ఠ పరచాలి. $P(x) = 2\left(x + \frac{k}{x}\right)$ అనుకొనిన

$$P'(x) = 2\left(1 - \frac{k}{x^2}\right)$$

$$P'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{k}\,.$$

x, y, లు దీర్ఘచతురస్రం యొక్క భుజములు కావున $x = \sqrt{k}$ ఒక సందిగ్ధ సంఖ్య.

$P''(x) = \frac{4k}{x^3}$ మరియు $P''(\sqrt{k}) > 0 \Rightarrow$, $x = \sqrt{k}$ వద్ద $P(x)$ కనిష్ఠ విలువను కలిగి వుంటుంది.

$x = \sqrt{k}$ ని $xy = k$ లో ప్రతిక్షేపించగా $y = \sqrt{k}$ ను పొందవచ్చు. ఇచ్చిన వైశాల్యము యొక్క దీర్ఘచతురస్రము కనిష్ఠ చుట్టుకొలత కలిగిన చతురస్రము అగును. ■

అభ్యాసము 7.8

1. రెండు ధన సంఖ్యల మొత్తము 12 మరియు వాటి లబ్ధం గరిష్ఠంగా ఉండేటట్లు ఆ సంఖ్యలను కనుగొనండి.

2. రెండు ధనసంఖ్యల లబ్ధం 20 మరియు వాటి మొత్తం కనిష్ఠంగా ఉండేటట్లు ఆ సంఖ్యలను కనుగొనండి.

3. ఇచ్చిన $x+y=10$ కు x^2+y^2 యొక్క కనిష్ఠ విలువను కనుగొనుము.

4. ఒక తోట దీర్ఘచతురస్రాకారములో కలదు. దీనికి తీగతో కంచె వేయబడినది. 40 మీటర్ల తీగతో కంచె వేయబడిన తోట యొక్క గరిష్ఠ వైశాల్యమును కనుగొనుము.

5. 24 సెం.మీ^{2} కొలతలు కలిగిన ఒక దీర్ఘచతురస్రాకారపు పేజి ముద్రించబడింది. పేజి పైన మరియు క్రింద 15 సెం.మీ మార్జిన్ కలదు. పేజి యొక్క ఇతర వైపులు 1 సెం.మీ మార్జిన్ కలదు. కాగితమును వాడు వైశాల్యము కనిష్ఠమగునట్లు ఆ పేజీ యొక్క కొలతలను కనుగొనుము.

6. ఒక రైతు నది ప్రక్కన ఉన్న దీర్ఘచతురస్రాకార పచ్చిక బయళ్ళు కంచె వేయదలిచెను. పశువులకు గడ్డి అందించుటకు పచ్చిక బయళ్ళు 1,80,000 చదరపు మీటర్లు ఉండాలి. నది వైపు ఉన్న అంచుకు కంచె అవసరం లేదు. కంచెను నిర్మించడానికి అవసరమైన కనీస కంచె పొడవును కనుగొనుము.

7. 10సెం.మీ వ్యాసార్ధం గల వృత్తం లోపల గరిష్ఠ వైశాల్యము గల దీర్ఘచతురస్రాకారం యొక్క కొలతలు కనుగొనండి.

8. ఇవ్వబడిన చుట్టుకొలతలు గల అన్ని దీర్ఘచతురస్రాలలో చతురస్రముకు గరిష్ఠ వైశాల్యము ఉంటుందని నిరూపించుము.

9. r వ్యాసార్ధంగా గల అర్ధవృత్తములో ఏర్పడే అతి పెద్ద దీర్ఘచతురస్రం యొక్క కొలతలను కనుగొనండి.

10. ఒక తయారీదారుడు ఆధారంని భూమి చతురస్రంగాను మరియు ఉపరితల వైశాల్యం 108 చదరపు సెం.మీ ఉండునట్లు ఒక తెరిచిన పెట్టెను రూపకల్పన చేయాలనుకొన్నాడు. గరిష్ఠ ఘనపరిమాణం పొందటానికి పెట్టె యొక్క కొలతలను కనుగొనండి.

11. స్థూపము యొక్క ఘనపరిమాణ సూత్రము $V=\pi r^2 h$ గా ఇవ్వబడినది. $r+h=6$ అయిన ఘనపరిమాణము యొక్క గరిష్ఠ మరియు కనిష్ఠ విలువలను కనుగొనండి.

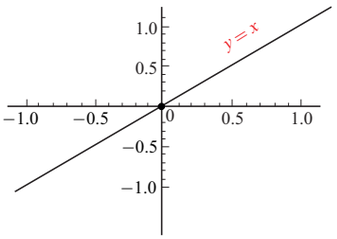
12. ఆధార వ్యాసార్ధం a సెం.మీ మరియు ఎత్తు b సెం.మీగా గల ఒక బోలు శంఖువు బల్లపై కలదు. శంఖువు క్రింద దాచగల పెద్ద స్థూపము యొక్క ఘనపరిమాణము అనునది శంఖువు ఘనపరిమాణమునకు $\frac{4}{9}$ రెట్లు అని చూపండి.

7.9 సౌష్ఠవము మరియు అనంత స్పర్శరేఖలు (Symmetry and Asymptotes)

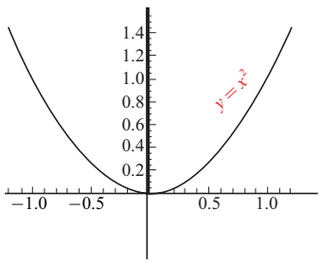
7.9.1 సౌష్ఠవము (Symmetry)

క్రింది వక్రాలను గమనించండి. వాటిలో ప్రతి ఒకటి ఒకబిందువు మరియు ఒక రేఖా దృష్ట్యా సౌష్ఠవము అను, కొన్ని ప్రత్యేక ధర్మములను కలిగియున్నది.

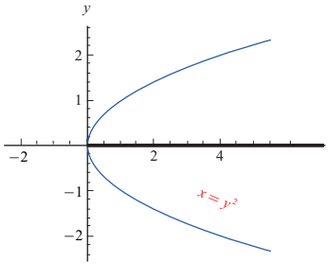
02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_7.indd 50 03/03/2023 17:47:29



పటము 7.28



పటము 7.29



పటము 7.30

మనం ఇప్పుడు సౌష్ఠవమును క్రింది విధముగా నిర్వచించవచ్చును.

ఒక చిత్రం లేదా ఒక వక్రరేఖ అనేది ఒక రేఖ దృష్ట్యా మరొక చిత్రము యొక్క ప్రతిబింబము అయితే, మనం ఆ చిత్రం లేదా వక్రరేఖను రేఖ దృష్ట్యా సౌష్ఠవముఅంటారు. ఆ రేఖను సౌష్ఠవ రేఖ అంటారు.

ఒక వక్రము ఒక బిందువు దృష్ట్యా θ కోణము భ్రమణం చెందినప్పుడు ఆ వక్రములో మార్పులేనట్లయితే ఆ వక్రము ఆ బిందువు దృష్ట్యా θ కోణ భ్రమణ సౌష్ఠవము కలిగివున్నదని అంటారు.

ఒక వక్రరేఖ అనేక రేఖలు దృష్ట్యా సౌష్ఠవంగా ఉండవచ్చును. ముఖ్యముగా, నిరూపకాక్షల దృష్ట్యా సౌష్ఠవమును మరియు మూల బిందువు దృష్ట్యా సౌష్ఠవమును పరిశీలిస్తాము. గణితపరంగా ఒక వక్రమును $f(x,y)=0$ ను క్రిందివిధముగా చెప్పవచ్చును.

- **y- అక్షము ఆధారముగా సౌష్ఠవము:** $f(x,y)=f(-x,y)\ \forall x,y$ లేదా వక్రము యొక్క గ్రాఫ్ మీద (x,y) బిందువు ఉంటే $(-x,y)$ కూడ ఉంటుంది. మనం $y-$ అక్షము మీద అద్దం ఉంచితే అద్దం యొక్క ఒక వైపు గల వక్రరేఖ యొక్క ప్రాంతం మరియు అద్దం యొక్క మరొక వైపు ఉన్న వక్రత యొక్క ప్రాంతం ఒకేవిధంగా ఉంటుంది.
- **x- అక్షము ఆధారముగా సౌష్ఠవము:** $f(x,y)=f(x,-y)\ \forall x,y$ లేదా వక్రము యొక్క గ్రాఫ్ మీద (x,y) బిందువు ఉంటే $(x,-y)$ కూడ ఉంటుంది. మనం x అక్షము మీద అద్దం ఉంచితే అద్దం యొక్క ఒక వైపు గల వక్రరేఖ యొక్క ప్రాంతం మరియు అద్దం యొక్క మరొక వైపు ఉన్న వక్రత యొక్క ప్రాంతం ఒకేవిధంగా ఉంటుంది.
- **మూల బిందువు ఆధారముగా సౌష్ఠవము:** $f(x,y)=f(-x,-y)\ \forall x,y$ లేదా వక్రం యొక్క గ్రాఫ్ మీద (x,y) బిందువు ఉంటే $(-x,-y)$ కూడ ఉంటుంది.మూలబిందువు ఆధారంగా వక్రమును 180° భ్రమణం చేసిన ఆ వక్రంలో ఎటువంటి మార్పురాదు.

పైన తెలిపిన వాటికి ఉదాహరణలు $x=y^2, y=x^2$ మరియు $y=x$ వరుసగా x- అక్షము, y- అక్షము మూలబిందువుల దృష్ట్యా సౌష్ఠవము.

7.9.2 అనంత స్పర్శరేఖలు (Asymptotes)

$y=f(x)$ అనే వక్రం యొక్క అనంత స్పర్శరేఖ ఒక సరళరేఖ. ఇది వక్రానికి ∞ వద్ద స్పర్శరేఖ అగును. మరొక విధముగా వక్రరేఖ మరియు సరళరేఖల మధ్య దూరం వక్రము మీది బిందువులు అనంతమును సమీపిస్తున్నకొద్ది సున్నను సమీపించును అని చెప్పవచ్చును. ఇచ్చట మూడు రకాల అనంత స్పర్శరేఖలు గలవు. అవి

1. **క్షితిజ సమాంతర అనంత స్పర్శరేఖ:** ఇది x- అక్షమునకు సమాంతరముగా ఉండును. $y=f(x)$ వక్రమునకు $y=L$ సరళరేఖ క్షితిజ సమాంతర అనంత స్పర్శరేఖ కావుటకు $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ లేదా $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ కావలెను.

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_7.indd 51 03/03/2023 17:47:36

2. **క్షితిజ లంబ అనంత స్పర్శరేఖ :** ఇది y అక్షమునకు సమాంతరముగా ఉండును. $y=f(x)$ వక్రమునకు $x=a$ క్షితిజ లంబ అనంత స్పర్శరేఖ కావుటకు $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty$ లేదా $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$ కావలెను.

3. **వాలు అనంత స్పర్శరేఖ :** లవములోని బహుపది అంతస్థ హారములోని బహుపది అంతస్థ కంటే ఎక్కువగా ఉన్న వాలు అనంత స్పర్శరేఖ ఏర్పడును.

లవమును హారముతో పొడుగు భాగహారం లేదా సంశ్లేషణ భాగహార పద్ధతిలో భాగించిన వాలు అనంత స్పర్శరేఖను కనుగొనవచ్చును.

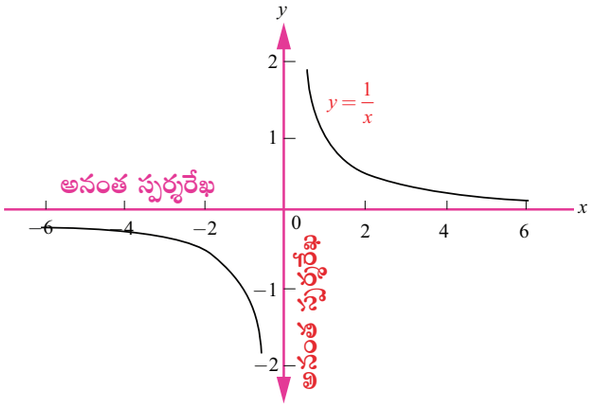
ఉదాహరణ 7.66

$f(x)=\dfrac{1}{x}$ ప్రమేయము యొక్క అనంత స్పర్శరేఖలను కనుగొనండి.

సాధన

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$ మరియు $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=\infty$ కలదు. అందువలన y - అక్షము లేదా $x=0$ కావలసిన క్షితిజ లంబ అనంత స్పర్శరేఖ.

రెండు అక్షాల దృష్ట్యా వక్రము సౌష్టవము కావున $y=0$ లేదా x -అక్షం కూడా ఒక అనంత స్పర్శరేఖ అందువలన ఈ (దీర్ఘ అతిపరావలయం) వక్రముకు క్షితిజ సమాంతరముగా మరియు క్షితిజ లంబ అనంత స్పర్శరేఖలు గలవు.



పటము 7.31 ■

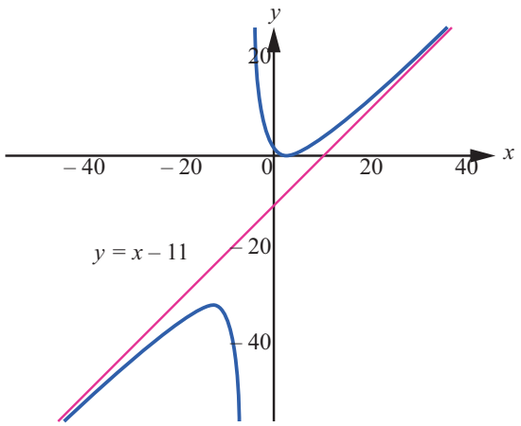
ఉదాహరణ 7.67

$f(x)=\dfrac{x^2-6x+7}{x+5}$ ప్రమేయము యొక్క వాలు అనంత స్పర్శరేఖను కనుగొనండి.

సాధన

ఇచ్చిన ప్రమేయములో లవములో గల బహుపది అంతస్థ (2nd) హారం లో గల బహుపది అంతస్థ (1st) కంటే ఎక్కువ. కావున వాలు అనంత స్పర్శరేఖ గలదని మనకు తెలుసు. దీనిని కనుగొనుటకు లవమును హారముతో పొడుగు భాగహారం చేయగా.

$$\begin{array}{r} x-11 \\ x+5\overline{)\,x^2-6x+7} \\ \underline{x^2+5x} \\ -11x+7 \\ \underline{-11x-55} \\ 62 \end{array}$$



పటము 7.32

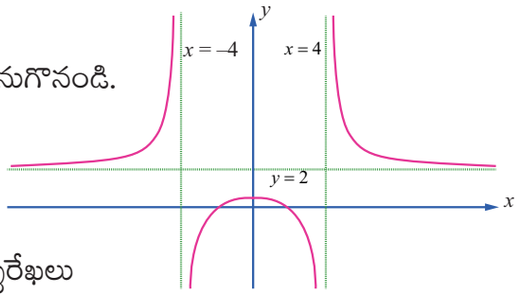
శేషమును కనుగొనడానికి దీర్ఘ భాగహారం పూర్తి చేయవలసిన అవసరము లేదని గమనించండి. మనకు రేఖ యొక్క సమీకరణాన్ని రూపొందించే పదాలు మాత్రమే అవసరము. వాలు అనంత స్పర్శరేఖ $y=x-11$ అగును.

ప్రమేయము యొక్క గ్రాఫ్‌లో చూపినట్లుగా వక్రర $y=x-11$ అను వాలు అనంత స్పర్శరేఖను సమీపిస్తుంది. కాని దానిని ఎప్పుడూ దాటదు. ■

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_7.indd 52 03/03/2023 17:47:40

ఉదాహరణ 7.68

$f(x)=\dfrac{2x^2-8}{x^2-16}$ వక్రము యొక్క అనంత స్పర్శరేఖలను కనుగొనండి.



పటము 7.33

సాధన

$\lim\limits_{x\to -4^+}\dfrac{2x^2-8}{x^2-16}=-\infty$ మరియు $\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{2x^2-8}{x^2-16}=\infty$. కావున

$x=-4$ మరియు $x=4$ లు క్షితిజ లంబ అనంత స్పర్శరేఖలు

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-8}{x^2-16}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{8}{x^2}}{1-\frac{16}{x^2}}=2$$

$$\text{మరియు}\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-8}{x^2-16}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{8}{x^2}}{1-\frac{16}{x^2}}=2$$

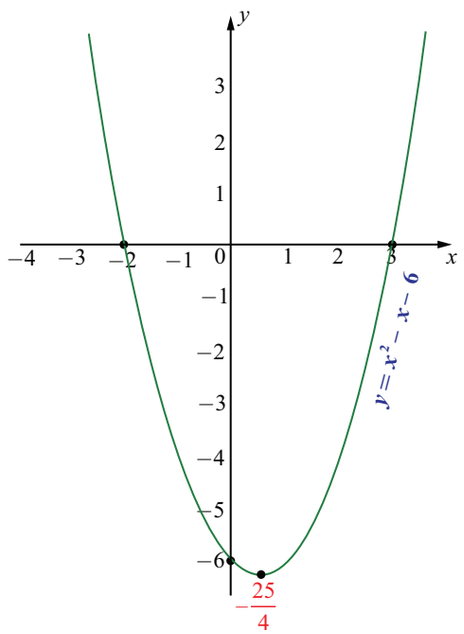
అందువలన $y=2$ క్షితిజ సమాంతర అనంత స్పర్శరేఖ అగును. దీనిని సంశ్లేషణ భాగహార పద్ధతిలో కనుగొనవచ్చును. ■

7.10 వక్రరేఖలను గీయడం (Sketching of Curves)

ప్రమేయాల గ్రాఫ్ చేతి సహాయంతో లేదా డ్రాయింగ్ సాఫ్ట్‌వేర్ సహాయముతో గీయునప్పుడు మనము పూర్తి గ్రాఫ్‌ను చూపలేము. వక్రములో కొంత భాగాన్ని మాత్రమే గీయవచ్చు. ఇక్కడ ముఖ్యమైన ప్రశ్న ఏమిటంటే ఏ విభాగాన్ని గీయాలి మరియు ఆ విభాగాన్ని ఎలా నిర్ణయించుకోవాలి. దీనికొరకు ప్రమేయాల అవకలజాలను మనము ఉపయోగించుకొందాము.

ఒక ప్రమేయపు గ్రాఫ్ యొక్క ఒక మంచి దీర్ఘచతురస్ర ప్రదర్శనను నిర్ధారించుటకు కొన్ని మార్గదర్శకాలు మనకు క్రిందివ్వబడినది.

(i) ఒక ప్రమేయము యొక్క ప్రదేశము మరియు వ్యాప్తి
(ii) వక్రరేఖల అంతర ఖండన బిందువులు (ఏదైనా ఉంటే)
(iii) ప్రమేయము యొక్క సంక్లిష్ట బిందువు లు (సందిగ్ధ బిందువులు)
(iv) ప్రమేయము యొక్క ప్రాదేశిక పరిమిత విలువలు (స్థానిక తీవ్రత)
(v) పుటాకారత అంతరాలు
(vi) పరివర్తన బిందువులు (ఏదైనా ఉంటే)
(vii) వక్రం యొక్క అనంత స్పర్శరేఖలు (ఏదైనా ఉంటే)



పటము 7.34

ఉదాహరణ 7.69

$y=f(x)=x^2-x-6$ వక్రరేఖను గీయండి.

సాధన

ఇచ్చిన ప్రమేయాన్ని కారణాంక పరచగా

$y=f(x)=(x-3)(x+2)$.

(1) ప్రమేయం $f(x)$ యొక్క ప్రదేశం వాస్తవ రేఖ మొత్తం అగును.

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_7.indd 53 03/03/2023 17:47:45

(2) $y=0$ ఉంచిన $x=-2,3$ ను పొందవచ్చు. అందువలన x- అంతరఖండాలు (-2, 0) మరియు $(3,0)$, $x=0$ ఉంచిన $y=-6$ వచ్చును. కావున y- అంతరఖండం $(0,-6)$ వచ్చును

(3) $f'(x)=2x-1$ అందువలన $x=\frac{1}{2}$ వద్ద వక్రరేఖ యొక్క సంక్లిష్ట బిందువు (సందిగ్ధ బిందువు) వచ్చును.

(4) $f''(x)=2>0, \forall x$ అందువలన $x=\frac{1}{2}$ వద్ద వక్రానికి స్థానిక కనిష్ఠ విలువ పొందును. అది $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{25}{4}$

(5) ప్రమేయం యొక్క వ్యాప్తి $y \geq -\frac{25}{4}$.

(6) $f''(x)=2>0, \forall x$ కావున ప్రమేయం పూర్తి వాస్తవరేఖపై ఎగువ పుటాకారత గా ఉండును.

(7) $f(x)=2 \neq 0, \forall x$ కావున ప్రమేయమునకు పరివర్తన బిందువులు లేవు.

(8) వక్రరేఖకు అనంత స్పర్శరేఖలు లేవు.

వక్రరేఖ యొక్క చిత్తు పటము కుడివైపున చూపబడింది.

ఉదాహరణ 7.70

$y=f(x)=x^3-6x-9$ వక్రరేఖను గీయండి.

సాధన

ఇచ్చిన ప్రమేయాన్ని కారణాంక పరచగా

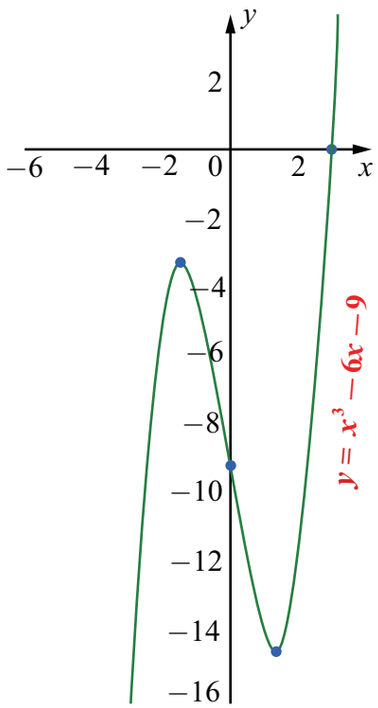
$$y=f(x)=(x-3)(x^2+3x+3).$$

(1) $f(x)$ ప్రమేయం యొక్క ప్రదేశం మరియు వ్యాప్తి పూర్తి వాస్తవరేఖ అగును.

(2) $y=0$ ని ప్రతిక్షేపించగా $x=3$ ని పొందగలం మిగిలిన రెండు మూలలు కల్పితాలు. అందువలన x- అంతరఖండం $(3,0)$ $x=0$ ప్రతిక్షేపించగా $y=-9$ లభించును. కావున y- అంతరఖండం $(0,-9)$

(3) $f'(x)=3(x^2-2)$ కావున వక్రం యొక్క సంక్లిష్ట బిందువు $x=\pm\sqrt{2}$ వద్ద వచ్చును.

(4) $f''(x)=6x$ అందువలన $x=\sqrt{2}$ వద్ద $f''\left(\sqrt{2}\right)=6\sqrt{2}>0$ కావున వక్రము స్థానిక కనిష్ఠ విలువను కలిగియున్నది. స్థానిక కనిష్ఠ విలువ $f\left(\sqrt{2}\right)=-4\sqrt{2}-9$ ఇదే విధముగా $x=-\sqrt{2}$ వద్ద $f''\left(-\sqrt{2}\right)=-6\sqrt{2}<0$ కావున వక్రానికి స్థానిక గరిష్ఠ విలువ కలిగియుండును. స్థానిక గరిష్ఠ విలువ $f\left(-\sqrt{2}\right)=4\sqrt{2}-9$.



పటము 7.35

(5) $f''(x)=6x>0, \forall x>0$ ప్రమేయం ధన వాస్తవ రేఖపై ఎగువ పుటాకారతగా ఉండును. $f''(x)=6x<0, \forall x<0$ ప్రమేయం ఋణ వాస్తవరేఖలో దిగువ పుటాకారతగా ఉండును.

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_7.indd 54 03/03/2023 17:47:53

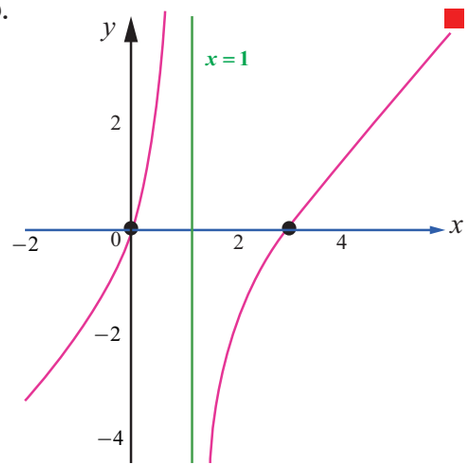
(6) $x=0$ వద్ద $f''(x)=0$, మరియు $x=0$ గుండా పోవునప్పుడు $f''(x)$ గుర్తు మార్పుచెందును. అందువలన పరివర్తన బిందువులు $(0, f(0))=(0,-9)$

(7) వక్రరేఖకు అనంత స్పర్శరేఖలు లేవు.

వక్రరేఖ యొక్క చిత్తు పటము ముందు పేజిలో కుడివైపు కలదు.

ఉదాహరణ 7.71

$y=\dfrac{x^2-3x}{(x-1)}$ వక్రరేఖను గీయండి.



పటము 7.36

సాధన

ఇచ్చిన ప్రమేయమును కారణాంకపరచగా

$$y=f(x)=\frac{x(x-3)}{(x-1)}.$$

(1) $f(x)$ ప్రమేయము యొక్క ప్రదేశం మరియు వ్యాప్తులు వరుసగా $R\setminus\{1\}$ మరియు పూర్తి వాస్తవ రేఖ అగును.

(2) $y=0$ ని ప్రతిక్షేపించగా $x=0,3$ అని లభించును.

అందువలన x - అంతరఖండం $(3, 0)$ $x=0$ ని. ప్రతిక్షేపించగా $y=0$ లభించును. అందువలన వక్రం మూల బిందువు గుండా పోవును.

(3) $f'(x)=\dfrac{x^2-2x+3}{(x-1)^2}$ మరియు $x=1$ వద్ద వక్రరేఖకు సంక్లిష్ట బిందువు లభించును. $f'(1)$ వ్యవస్థితం కాదు. కాని $x^2-2x+3=0$ కు వాస్తవ మూలలు లేవు అందువలన $x=1$ వద్ద మాత్రమే సంక్లిష్ట బిందువును కలిగియుండును.

(4) $x=1$ అనునది ప్రమేయం యొక్క ప్రదేశములో లేదు. మరియు $f'(x)\neq 0\ \forall\ x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ అందువలన స్థానిక గరిష్ఠం లేదా స్థానిక కనిష్ఠ విలువ లేదు.

(5) $f''(x)=-\dfrac{4}{(x-1)^3}\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $x<1$, అయిన $f''(x)>0$ అగును. కావున $(-\infty,1)$ అంతరంలో వక్రరేఖ ఎగువ పుటాకారంగా ఉండును. మరియు $x>1$, అయిన $f''(x)<0$ అగును. కావున $(1,\infty)$ అంతరంలో వక్రరేఖ దిగువ పుటాకారంగా ఉండును. $f''(x)\neq 0\ x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ అందువలన $f(x)$ కు పరివర్తన బిందువు లేదు.

(6) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-3x}{(x-1)}=+\infty$ మరియు $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-3x}{(x-1)}=-\infty$ కావున $x=1$ ఒక క్షితిజ లంబ అనంత స్పర్శరేఖ అగును. ఈ వక్రము యొక్క చిత్తు పటము పైన చూపబడినది.

ఉదాహరణ 7.72

$y=\dfrac{3x}{x^2-1}$ ప్రమేయము యొక్క గ్రాఫ్ గీయండి.

సాధన

(1) $f(x)$ యొక్క ప్రదేశం $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

(2) $f(-x,-y)=f(x,y)$, కావున మూలబిందువు దృష్ట్యా వక్రం సౌష్ఠవం.

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_7.indd 55 03/03/2023 17:48:01

(3) $y=0$ ప్రతిక్షేపించగా $x=0$ ను పొందవచ్చును. అందువలన x - అంతరఖండం $(0,0)$

(4) $x=0$ ప్రతిక్షేపించగా $y=0$ ను పొందవచ్చును. అందువలన y - అంతరఖండం $(0,0)$

(5) ఏకదిష్టతను గుర్తించడానికి మొదటి అవకలనం చేయగా $f'(x)=\frac{-3(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$

అందువలన $x=-1,1$ వద్ద $f'(x)$ వ్యవస్థితం కాదు. కావున సంక్లిష్ట సంఖ్యలు $x=-1,1$

పట్టిక 7.9 లో ఏకదిష్టత అంతరాలు ఇవ్వబడినది.

అంతరం	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$ యొక్క గుర్తు	–	–	–
ఏకదిష్టత	ఖచ్చితంగా అవరోహణం	ఖచ్చితంగా అవరోహణం	ఖచ్చితంగా అవరోహణం

పట్టిక 7.9

(6) $f'(x)$ సంక్లిష్ట సంఖ్యలు గుండా పోవునప్పుడు దాని గుర్తులో ఎటువంటి మార్పులేదు. కావున స్థానిక తీవ్రత లేదు.

(7) పుటాకారతను గుర్తించుటకు రెండవ అవకలనం చేయగా $f''(x)=\frac{6x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$,

$f''(x)=0\Rightarrow x=0$ మరియు $x=-1,1$ వద్ద $f''(x)$ వ్యవస్థితం కాదు.

పట్టిక 7.10 లో పుటాకారం యొక్క అంతరాలు ఇవ్వబడినది.

అంతరం	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$f''(x)$ యొక్క గుర్తు	–	+	–	+
పుటాకారత	దిగువ పుటాకారం	ఎగువ పుటాకారం	దిగువ పుటాకారం	ఎగువ పుటాకారం

పట్టిక 7.10

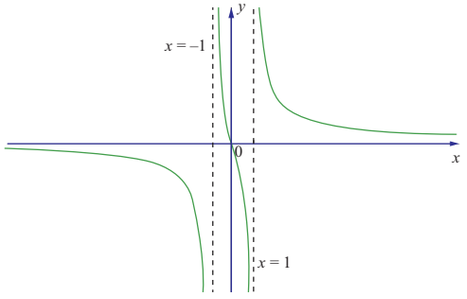
(8) $x=-1$ మరియు 1 అనునవి $f(x)$ యొక్క ప్రదేశములో లేవు మరియు $x=0$ వద్ద రెండవ అవకలనం శూన్యం మరియు $x=0$ గుండా వెళ్ళిన $f''(x)$ యొక్క గుర్తు ధనాత్మకం నుండి ఋణాత్మకమునకు మారుతున్నది అందువలన పరివర్తన బిందువులు $(0, f(0))=(0,0)$.

(9) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{3x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{3}{x-\frac{1}{x}}=0$.

అందువలన $y=0$ క్షితిజ సమాంతర అనంత స్పర్శరేఖలు $x=\pm1$ అయిన హారము శూన్యం అగును.

$\lim\limits_{x\to-1^-}\frac{3x}{x^2-1}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{3x}{x^2-1}=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to1^-}\frac{3x}{x^2-1}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{3x}{x^2-1}=\infty$.



పటము 7.37

అందువలన $x=-1$ మరియు $x=1$ క్షితిజ లంబ అనంత స్పర్శ రేఖలు వక్రం యొక్క చిత్తు పటము కుడివైపు చూపబడినది.

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_7.indd 56 03/03/2023 17:48:07

అభ్యాసము 7.9

1. క్రింది వక్రాలకు అనంత స్పర్శరేఖలు కనుగొనండి.

(i) $f(x)=\frac{x^2}{x^2-1}$ (ii) $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$ (iii) $f(x)=\frac{3x}{\sqrt{x^2+2}}$

(iv) $f(x)=\frac{x^2-6x-1}{x+3}$ (v) $f(x)=\frac{x^2+6x-4}{3x-6}$

2. ఈ క్రింది ప్రమేయాలకు గ్రాఫ్ గీయండి.

(i) $y=-\frac{1}{3}(x^3-3x+2)$ (ii) $y=x\sqrt{4-x}$ (iii) $y=\frac{x^2+1}{x^2-4}$

(iv) $y=\frac{1}{1+e^{-x}}$

అభ్యాసము 7.10

HFJWN

ఇచ్చిన నాలుగు ప్రత్యామ్నాయాలలో ఖచ్చితమైన లేదా అనుకూల జవాబును ఎన్నుకోండి.

1. ఒక గోళం యొక్క ఘనపరిమాణము సెకనుకు 3π సెం.మీ^{3} రేటుతో పెరుగును. వ్యాసార్ధం $\frac{1}{2}$ సెం.మీ అయిన వ్యాసార్ధంలోని మార్పు రేటు

(1) 3 సెం.మీ/ సెకను (2) 2 సెం.మీ/ సెకను (3) 1 సెం.మీ/ సెకను (4) $\frac{1}{2}$ సెం.మీ/ సెకను

2. ఒక బెలూన్ 10మీ/సె వద్ద నిటారుగా పోతున్నది. ఒక పరిశీలకుడు బెలూన్‌ను భూమిపై విడిచిన స్థానం నుండి 40మీ దూరంలో గలడు. బెలూన్ భూమికి 30 మీటర్ల ఎత్తులో ఉన్నప్పుడు బెలూన్ యొక్క నిమ్న కోణంలో వైవిధ్యం రేటు ను సెకనుకు రేడియన్లలో కనుగొనుము.

(1) $\frac{3}{25}$ రేడియన్స్/ సెకను (2) $\frac{4}{25}$ రేడియన్స్/ సెకను

(3) $\frac{1}{5}$ రేడియన్స్/ సెకను (4) $\frac{1}{3}$ రేడియన్స్/ సెకను

3. t కాలంలో ఏదైనా కణం క్షితిజ సమాంతర రేఖ వెంబడి కదులు స్థానము $s(t)=3t^2-2t-8$. ఏ కాలం వద్ద కణం నిశ్చల స్థితి పొందును.

(1) $t=0$ (2) $t=\frac{1}{3}$ (3) $t=1$ (4) $t=3$

4. ఒక రాయిని నిలువుగా పైకి విసిరిన, t కాలంలో అది చేరిన ఎత్తు $x=80t-16t^2$ గా ఇవ్వబడినది. ఆ రాయి గరిష్ఠ ఎత్తు చేరుకాలము t సెకనులలో

(1) 2 (2) 2.5 (3) 3 (4) 3.5

5. $6y=x^3+2$ ఏ బిందువు వద్ద y- నిరూపకము మార్పు x- నిరూపకము మార్పుకు 8 సార్లు ఉంటుంది.

(1) (4,11) (2) (4,−11) (3) (−4,11) (4) (−4,−11)

6. వక్రము $f(x)=\sqrt{8-2x}$ మీద ఒక బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ వాలు -0.25 అయిన ఆ బిందువు యొక్క అబ్సిస్సా (x- నిరూపకము)

(1) -8 (2) -4 (3) -2 (4) 0

7. $x=\frac{\pi}{12}$ వద్ద వక్రరేఖ $f(x)=2\cos 4x$ యొక్క అభిలంబ రేఖ వాలు

(1) $-4\sqrt{3}$ (2) -4 (3) $\frac{\sqrt{3}}{12}$ (4) $4\sqrt{3}$

8. $y^2-xy+9=0$ వక్రానికి స్పర్శరేఖ ఎప్పుడు లంబంగా ఉంటుంది.

(1) $y=0$ (2) $y=\pm\sqrt{3}$ (3) $y=\frac{1}{2}$ (4) $y=\pm 3$

9. మూల బిందువు వద్ద $y^2=x$ మరియు $x^2=y$ ల మధ్య కోణం

(1) $\tan^{-1}\frac{3}{4}$ (2) $\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$ (3) $\frac{\pi}{2}$ (4) $\frac{\pi}{4}$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cot x-\frac{1}{x}\right)$ యొక్క విలువ

(1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) ∞

11. $\sin^4 x+\cos^4 x$ ప్రమేయం ఏ అంతరంలో ఆరోహణం

(1) $\left[\frac{5\pi}{8},\frac{3\pi}{4}\right]$ (2) $\left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{8}\right]$ (3) $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ (4) $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

12. $x^3-3x^2, x\in[0,3]$ ప్రమేయంనకు రోల్స్ సిద్ధాంతం ఇచ్చు సంఖ్య

(1) 1 (2) $\sqrt{2}$ (3) $\frac{3}{2}$ (4) 2

13. $\frac{1}{x}$, $x\in[1,9]$ ప్రమేయంనకు మధ్యగత విలువ సిద్ధాంతం ఇచ్చు సంఖ్య

(1) 2 (2) 2.5 (3) 3 (4) 3.5

14. $|3-x|+9$ ప్రమేయం యొక్క కనిష్ఠ విలువ

(1) 0 (2) 3 (3) 6 (4) 9

15. $y=e^x\sin x, x\in[0,2\pi]$ వద్ద వక్రరేఖకు గరిష్ఠ వాలు గల స్పర్శరేఖ

(1) $x=\frac{\pi}{4}$ (2) $x=\frac{\pi}{2}$ (3) $x=\pi$ (4) $x=\frac{3\pi}{2}$

16. $x^2e^{-2x}, x>0$ ప్రమేయం యొక్క గరిష్ఠ విలువ

(1) $\frac{1}{e}$ (2) $\frac{1}{2e}$ (3) $\frac{1}{e^2}$ (4) $\frac{4}{e^4}$

17. $x^2-y^2=4$ వక్రము పై $(6,0)$ బిందువుకు అతి సమీప బిందువు

(1) $(2,0)$ (2) $\left(\sqrt{5},1\right)$ (3) $\left(3,\sqrt{5}\right)$ (4) $\left(\sqrt{13},-\sqrt{3}\right)$

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_7.indd 58 03/03/2023 17:48:22

18. రెండు సంఖ్యల వర్గాల మొత్తం 200 అయిన ఆ రెండు ధన సంఖ్యల లబ్ధం యొక్క గరిష్ఠ విలువ

(1) 100 (2) $25\sqrt{7}$ (3) 28 (4) $24\sqrt{14}$

19. $y = ax^4 + bx^2$ వక్రం, $ab > 0$ తో

(1) క్షితిజ సమాంతర స్పర్శరేఖ లేదు (2) ఎగువ పుటాకారం

(3) దిగువ పుటాకారం (4) పరివర్తన బిందువులు లేవు

20. $y = (x-1)^3$ వక్రం యొక్క పరివర్తన బిందువు

(1) $(0,0)$ (2) $(0,1)$ (3) $(1,0)$ (4) $(1,1)$

సారాంశము

- $y = f(x)$ అయిన, x దృష్ట్యా y లోని తక్షణ మార్పురేటును $\frac{dy}{dx}$ తో సూచిస్తారు.
- $y = f\big(g(t)\big)$ అయిన, $\frac{dy}{dt} = f'\big(g(t)\big)\cdot g'(t)$ ని గొలుసు నియమం అంటారు.
- $y = f(x)$ వక్రం కు (a,b) వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణము $y - b = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(a,b)}(x-a)$ లేదా $y - b = f'(a)(x-a)$
- రోల్స్ సిద్ధాంతము

  సంవృతాంతరము $[a,b]$ లో $f(x)$ ప్రమేయం అవిచ్ఛిన్నము మరియు వివృతాంతరం (a,b) లో అవకలనీయం మరియు $f(a) = f(b)$ అయిన $f'(c) = 0$ అగునట్లు $c \in (a,b)$ వ్యవస్థితము.
- లెగ్రాంజ్ మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతము

  $f(x)$ ప్రమేయం సంవృతాంతరం $[a,b]$ లో అవిచ్ఛిన్నం మరియు వివృతాంతరం (a,b) లో అవకలనీయం (ఎక్కడ $f(a)$, $f(b)$ లు సమానం కానవసరం లేదు) అయిన $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ అగునట్లు $c \in (a,b)$ వ్యవస్థితము అగును.
- టేలర్ శ్రేణి

  $f(x)$ అనే ప్రమేయానికి $x = a$ వద్ద అనంత అవకలనీయాలు, ఉన్నచో $(x-a, x+a)$ అంతరములో $f(x)$ ను $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{\lfloor n}(x-a)^n = f(a) + \frac{f'(a)}{\lfloor 1}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{\lfloor n}(x-a)^n + \cdots$ అను శ్రేణిగా విస్తరించవచ్చును.
- మెక్లారిన్ శ్రేణి

  టేలర్ శ్రేణిలో $a = 0$ అయిన విస్తరణ రూపం

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{\lfloor n}(x)^n = f(0) + \frac{f'(0)}{\lfloor 1}(x) + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{\lfloor n}(x^n) + \cdots$$

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_7.indd 59 03/03/2023 17:48:30

- *'l'* హోపిటల్ నియమం (*'l'*Hôpita*'l*'s rule)

  $f(x)$ మరియు $g(x)$ లు అవకలనీయ ప్రమేయాలు మరియు $g'(x) \neq 0$ అయిన

  $\lim_{x\to a} f(x) = 0 = \lim_{x\to a} g(x)$. అయిన $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

  $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty = \lim_{x\to a} g(x)$. అయిన $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

- $f(x)$ అనే ప్రమేయం వివృతాంతరం (a,b) లో అవకలనీయం అయిన $\frac{d}{dx}(f(x)) > 0 \ \forall x \in (a,b)$ అయితే (a,b) అంతరంలో $f(x)$ ఖచ్చితంగా ఆరోహణం.

  $\frac{d}{dx}(f(x)) < 0, \forall x \in (a,b)$ అయిన (a,b) అంతరంలో $f(x)$ ఖచ్చితముగా అవరోహణం.

- సంవృతాంతరములో $[a,b]$ పై $f(x)$ అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయం సంపూర్ణ తీవ్రతను కనుగొనే విధానాలు

సందర్భము 1– (a,b) లో $f(x)$ కు సందిగ్ధ సంఖ్యను కనుగొనుము.

సందర్భము 2 – సందిగ్ధ సంఖ్యల వద్ద మరియు a, b ల అంత్య బిందువుల వద్ద $f(x)$ ను సాధించాలి.

సందర్భము 3 – సందర్భము 2 లోని ఎక్కువ మరియు తక్కువ విలువలను సంవృతాంతరం $[a,b]$ లో $f(x)$ యొక్క సంపూర్ణ గరిష్ఠ విలువ మరియు సంపూర్ణ కనిష్ఠ విలువ అంటారు.

- మొదటి అవకలన పరీక్ష

  $f(x)$ ప్రమేయం యొక్క సందిగ్ధ బిందువు $(c, f(c))$, c ని కలిగియున్న వివృతాంతరం I లో $f(x)$ అవిచ్ఛిన్నమైన, c బిందువు కలిగిన అంతరంలో $f(x)$ అవకలనీయం అయితే $f(c)$ ని క్రింది విధంగా వర్గీకరించవచ్చు. (I అంతరములో ఎడమ నుండి కుడికి వెళ్ళునప్పుడు)

  (i) c వద్ద $f'(x)$ ఋణాత్మకం నుండి ధనాత్మకమునకు మారిన $f(x)$ కు $f(c)$ స్థానిక కనిష్ఠం.

  (ii) c వద్ద $f'(x)$ ధనాత్మకం నుండి ఋణాత్మకమునకు మారిన $f(x)$ కు $f(c)$ స్థానిక గరిష్ఠం.

  (iii) c అనేది $f'(x)$ కు ఇరువైపులా ధనాత్మకము లేదా $f(c)$ ఇరువైపులా ఋణాత్మకము అయితే $f(x)$ స్థానిక ఋణాత్మకం లేదా స్థానిక ధనాత్మకం కావచ్చు.

- రెండవ అవకల పరీక్ష

  $f'(c) = 0$ అయిన c ఒక సందిగ్ధ బిందువు అగును. c యొక్క సమీప స్థానాలలో $f''(x)$ మరియు $f'(c)$ లు వ్యవస్థితం అగును. c వద్ద $f''(c) < 0$ అయితే f కు సాపేక్ష గరిష్ఠ విలువ మరియు c వద్ద $f''(c) > 0$ అయితే f కు సాపేక్ష కనిష్ఠ విలువ ఉండును. కాని $f''(c) = 0$ అయితే ఈ పరీక్షకు సమాచారము లేదు.

అంతర్జాల కృత్యము ICT CORNER

https://ggbm.at/dy9kwgbt or Scan the QR Code

బ్రౌజరును తెరచి ఇవ్వబడిన వంటి URL లింక్‌ను టైపు చేయుము లేదా QR సంకేతమును స్కాన్ చేయుము. "12వ తరగతి గణితశాస్త్రము, భాగము–2" అను శీర్షికతో జియోజీబ్రా వర్క్‌బుక్ తెరువబడును. ఎడమ వైపున మీ పాఠ్యపుస్తకమునకు సంబంధించిన అధ్యాయములు చూపించబడియుండును. "అవకలన గణితము యొక్క అనువర్తనములు" అను పాఠ్య శీర్షిక గల అధ్యాయముపై క్లిక్ చేయుము. అక్కడ ఈ అధ్యాయమునకు సంబంధించిన అనేక వర్క్‌షీట్లు ప్రదర్శింపబడును. వాటిని సాధించుము.

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_7.indd 60 03/03/2023 17:48:37

అధ్యాయము
8

అవకలనులు మరియు పాక్షిక అవకలనులు

IGKR1

"చేదు అనుభవములను రుచించని అతను తీపి అనుభవములను సంపాదించ లేడు."

– గాడ్ ఫ్రైడ్ విల్ హెల్మ్ లిబ్నిజ్

8.1 పరిచయము

మనము నిజ జీవితంలో అనేక ప్రమేయాలను గమనించవలసి వస్తుంది. మనము చాలా సందర్భములో స్వతంత్ర చరరాశిలో కలుగు మార్పుకు అనుగుణంగా ప్రమేయంలో జరుగు మార్పును అంచనా చేయవలెను. ఇచ్చట కొన్ని నిజజీవిత సందర్భములు ఇవ్వబడినవి.

- ఒక పలుచని వృత్తాకార లోహపు పాత్రను ఏకరీతిగా వేడి చేసినప్పుడు, దాని వ్యాసార్ధము పెరుగుదలకు అనుగుణంగా దాని వైశాల్యం కూడా పెరుగుతుంది. ఒకవేళ మనము వ్యాసార్ధములోని పెరుగుదలను సుమారుగా లెక్కించ గలిగిన, ఆ వృత్తాకార పాత్రలో కలుగు వైశాల్య పెరుగుదలను మనము ఏవిధంగా అంచనా వేయగలము?
- తలక్రిందులుగా త్రిప్పబడిన ఒక క్రమ వృత్తాకార శంఖు తొట్టిని నీటితో నింపుతున్నాము అనుకుందాము. ఈ ప్రక్రియలో సమయ మార్పుకు అనుగుణంగా నీటిమట్టం యొక్క ఎత్తు, వ్యాసార్ధము మరియు తొట్టి లోని నీటి ఘనపరిమాణములో మార్పు జరుగును. అతి తక్కువ కాలాంతరములో ఎత్తు మరియు వ్యాసార్ధములోని మార్పును లెక్కించగలిగితే, ఆ కాల అంతరములో నీటి ఘనపరిమాణంలో కలుగు మార్పును మనము ఏవిధంగా అంచనా వేయగలము?
- ఒక ప్రయోగదలం నుండి అంతరిక్షమునకు ఒక ఉపగ్రహమును ప్రయోగింపబడుతున్నది అనుకుందాము. దీనిని పరిశీలించుటకు ప్రయోగదలం నుండి సురక్షిత దూరంలో ఒక కెమెరా అమర్చబడినది. ఉపగ్రహం పైకి ఎగురుతున్న కొలది కెమెరా యొక్క నిమ్న కోణము మార్పు చెందును. అతి తక్కువ కాల అంతరములో రెండు వరుస నిమ్నకోణములు మనకు తెలిసిన, ఆ కాల అంతరంలో ఉపగ్రహము ఎంత ఎత్తుకు ఎగురునని మనము ఎలా అంచనా వేయగలము?

ఇటువంటి ప్రశ్నల సమాధానమునకు ఈ ప్రమేయాలకు సంబంధించిన ఏక ఘాతీయ ఉజ్జాయింపు మరియు అవకలనాలను కనుగొనుటకు మనము అవకలన మరియు పాక్షిక అవకలన ఉపాయమును ఉపయోగించవలెను.



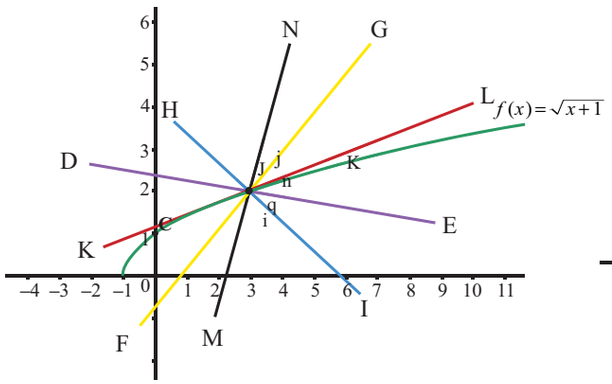
Godfried W Leibniz
(1646 - 1716)

మన ముందు అధ్యాయాలలో, ఒక వాస్తవ చరరాశి గల వాస్తవ విలువ గల ప్రమేయం యొక్క అవకలన భావనను నేర్చుకొన్నాము మరియు మనము అవకలన అనువర్తనమును ఉపయోగించి ఒక ప్రమేయం యొక్క ప్రదేశములో దాని ఆంత్యములను (extremum) కనుగొనుట మరియు ప్రమేయం యొక్క రేఖాచిత్రమును గీయుటను నేర్చుకొన్నాము. ఈ అధ్యాయములో అవకలనము యొక్క మరొక అనువర్తనము ఏదేని ఒక బిందువు వద్ద ఒక ప్రమేయం యొక్క విలువను అంచనా వేయటను నేర్చుకొంటాము. అరేఖీయ (ఏకఘాతీయం కాని) ప్రమేయాలను ఉపయోగించి

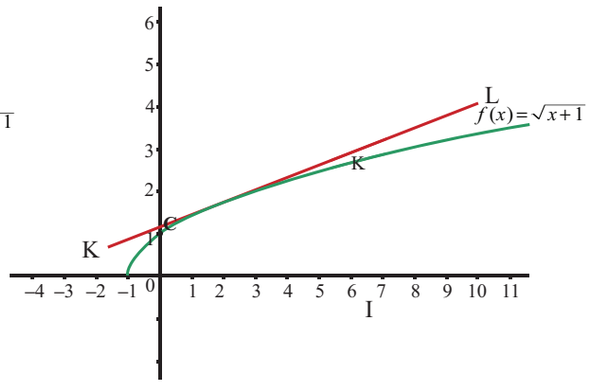
02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_8.indd 61 03/03/2023 18:04:24

లెక్కించుట కన్నా $y = mx + b$, అను రేఖీయ ప్రమేయాల ఏక ఘాతీయను ఉపయోగించి లెక్కించుట సులభము.

ఉదాహరణకు $f(x) = \sqrt{x+1},\ g(x) = 2x - 7$ అను రెండు ప్రమేయాల విలువను $x = 3.25$ వద్ద లెక్కించవలెనని అనుకుందాము. వీనిలో ఏది లెక్కించుటకు సులభమైనది? $x = 3.25$ కన్నా $g(3.25)$. అనునది విలువను గణించుటకు సులభమైనదని మనకు తెలుసును. $f(3.25)$ విలువను గణించుటలో కలుగు దోషమును మనము అంగీకరించుటకు సిద్ధంగా ఉన్నట్లయితే, $x = 3$ కు సమీపములో f యొక్క ఉజ్జాయింపు విలువను కనుగొనుటకు మనము ఏక ఘాతీయ (రేఖీయ) ప్రమేయమును కనుగొనవచ్చును. మరియు దీనిని $f(3.25)$ యొక్క ఉజ్జాయింపు విలువను పొందుటకు ఉపయోగించవచ్చును. ఒక ఎక ఘాతీయ ప్రమేయం యొక్క రేఖా చిత్రము నిలువు వరుస (లంబ రేఖ) కాదని మనకు తెలుసు. ఒక ప్రమేయం యొక్క గ్రాఫ్ పై ఇవ్వబడిన బిందువు ద్వారా పోవు అనంత సరళ రేఖలలో ఒక స్పర్శరేఖ మాత్రమే ప్రమేయం యొక్క సరియైన ఉజ్జాయింపు విలువను ఇవ్వగలదు. ఎందుకనగా (3,2) బిందువుకు సమీపంలో f యొక్క రేఖాచిత్రం చూడడానికి ఇంచుమించు ఒక సరళరేఖగా ఉంటుంది.



పటము 8.1



పటము 8.2 స్పర్శరేఖ

పైన ఇవ్వబడిన పటముల నుండి, $x = 3$ ద్వారా పోవు సరళరేఖలలో $x = 3$ వద్దగల ప్రమేయం $f(x)$ రేఖా చిత్రం యొక్క స్పర్శరేఖ మాత్రమే బిందువు $x = 3$ కు సమీపంలో సరైన ఉజ్జాయింపు విలువను ఇవ్వగలదని స్పష్టమగుచున్నది. ప్రాథమికంగా ఇవ్వబడిన ప్రమేయమును ఎన్నుకోబడిన (3,2) బిందువు వద్ద **ఏక ఘాతీయం** చేయబడినది. ఈ విషయమును లోపల (Input) వచ్చిన మార్పుకు అనుగుణంగా ఎన్నుకోబడిన బిందువుకు సమీపంలో ప్రమేయం $f(x)$ యొక్క విలువలోని మార్పును గణించుటలో ఉపయోగించవచ్చును. ప్రమేయములో వచ్చిన మార్పును ఉజ్జాయింపు చేయు మరియు ఇవ్వబడిన బిందువుకు సమీపంలో ప్రమేయం ఉజ్జాయింపు విలువను గణించుటలో చాలా ఉపయోగకరంగా ఉండు **"అవకలనము"** అను విషయమును పరిచయం చేయుటకు **"అవకలని"**ను మనము ఉపయోగిస్తాము. అవకలని అనునది మార్పు రేటును తక్షణమే కొలుచును. కానీ అవకలనము అనునది ప్రమేయ విలువలో వచ్చిన మార్పును ఉజ్జాయింపును గణించును మరియు అవకలనమును తరువాత వచ్చు అవకలన సమీకరణ సాధనలో మరియు ఖచ్చిత సమాకలనములను ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి ద్వారా లెక్కించుటలో ఉపయోగిస్తాము.

అవకలనములు నేర్చుకొన్న తరువాత మనము ఎక్కువ చరరాశులు గల వాస్తవ విలువ ప్రమేయాలపై శ్రద్ధ చూపిస్తాము. దీనికొరకు **"పాక్షిక అవకలనము"**ను పరిచయం చేయవలెను. ఇది ఒక చరరాశి గల వాస్తవ విలువ ప్రమేయము యొక్క సాధారణీకరించబడిన ఒక విషయ భావన. మనము ఎందుకు ఒకటి కన్నా ఎక్కువ చరరాశులు గల ప్రమేయాలను పరిగణలోకి తీసుకోవాలి? దీని సాధారణ పరిస్థితిని తీసుకోవడం ద్వారా వివరించవచ్చును. ఒక కంపెనీ వారు కలము మరియు నోట్‌బుక్స్ ఉత్పత్తి చేస్తున్నారని అనుకుందాము. ఆ కంపెనీ వారు గరిష్ట లాభము పొందడానికి ఉత్పత్తి చేయవలసిన వస్తువుల సంఖ్యను గణించవలెను. దీనిని కనుగొనుటకు

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_8.indd 62 03/03/2023 18:04:26

వాని ఆదాయము, ధర మరియు లాభ ప్రమేయాలను విశ్లేషణ చేయవలెను. ఈ ప్రమేయాలు రెండు చరరాశులు (కలము, నోట్ పుస్తకము) గలవి. ఇదే విధముగా మనము ఒక బాక్స్ యొక్క ఘనపరిమాణమును పరిగణలో తీసుకుంటే పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తు అను మూడు చరరాశులు గల ప్రమేయమును తీసుకొనవలెను. ఒక దేశము యొక్క ఆర్థిక వ్యవస్థ అనునది చాలా రంగాలపై ఆధారపడి యుండును. కావున ఇది చాలా చరరాశులపై ఆధారపడును. ఒకటి కన్నా ఎక్కువ చరరాశులు గల ప్రమేయాలను పరిగణలోకి తీసుకోవాల్సిన అవసరమును మరియు ముఖ్యత్వమును ఈ సందర్భము మనకు వివరిస్తున్నది మరియు ఒకటి కన్నా ఎక్కువ చరరాశుల ప్రమేయాల **"అవకలన"** అను భావనను అభివృద్ధి చేయవలెను. రెండు మరియు మూడు చరరాశులు గల ప్రమేయాల **"అవకలనము"** అను భావనను కూడా మనము అభివృద్ధి పరచవలెను. మరియు దీని యొక్క మరికొన్ని అనువర్తనాలను పరిగణలో తీసుకుంటాము. ఈ అధ్యాయంలో మనము వాస్తవ విలువ ప్రమేయాలు మాత్రమే పరిగణలోకి తీసుకుంటాము.

అభ్యసన లక్ష్యాలు

ఈ అధ్యాయం యొక్క చివరన, విద్యార్థులు క్రింది విషయాలను నేర్చుకుంటారు.

- ఒక బిందువు వద్ద ఒక చరరాశి గల ప్రమేయం యొక్క రేఖీయ ఉజ్జాయింపును లెక్కిస్తారు.
- గణన యంత్రము లేకుండా ప్రమేయం యొక్క రేఖీయ ఉజ్జాయింపు పద్ధతి ద్వారా ఆ ప్రమేయ విలువను ఉజ్జాయింపు చేయగలరు.
- ఒక ప్రమేయం యొక్క అవకలనమును చేయగలరు.
- నిజ జీవిత సమస్యలకు అవకలనము, రేఖీయ ఉజ్జాయింపును అనువర్తించుట తెలుసుకుంటారు.
- ఒకటి కన్నా ఎక్కువ చరరాశులు గల ప్రమేయాల పాక్షిక అవకలనములను కనుగొంటారు.
- రెండు లేదా అంతకన్నా ఎక్కువ చరరాశుల గల ప్రమేయం యొక్క రేఖీయ ఉజ్జాయింపును గమనించగలరు.
- ఎక్కువ చరరాశులు గల ప్రమేయము ఇచ్చినప్పుడు, అది సమ ఘాతీయమా? లేదా అసమ ఘాతీయమా? అని కనుగొనగలరు.
- సమ ఘాతీయ ప్రమేయాలకు ఆయిలర్స్ సిద్ధాంతమును అనువర్తించగలరు.

8.2 రేఖీయ ఉజ్జాయింపు మరియు అవకలనములు

8.2.1 రేఖీయ ఉజ్జాయింపు

ఈ విభాగంలో మనము ఒక బిందువు వద్ద రేఖీయ ఉజ్జాయింపును పరిచయం చేసుకుంటాము. రేఖీయ ఉజ్జాయింపు పద్ధతిని ఉపయోగించి ఎన్నుకోబడిన ఒక బిందువు వద్ద ప్రమేయ విలువను మనము అంచనా వేస్తాము. ఒక చరరాశి గల వాస్తవ విలువ ప్రమేయం యొక్క అవకలనమును మనము పరిచయం చేసుకుంటాము. ఇది వాటి యొక్క అనువర్తనములలో కూడా ఉపయోగకరంగా ఉంటుంది.

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ అను అవకలనీయ ప్రమేయమును తీసుకుంటాము. మరియు $x\in(a,b)$, x వద్ద f అవకలనీయమైన,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x) \qquad \ldots (1)$$

Δx చిన్నదైన, (1) నుండి

$$f(x+\Delta x)-f(x) \approx f'(x)\Delta x\,; \qquad \ldots (2)$$

ఇది $f(x+\Delta x) \approx f(x)+f'(x)\Delta x$ కు సమానత్వము, ... (3)

E6WQ4

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_8.indd 63 03/03/2023 18:04:28

ఇచ్చట $\approx$ అనునది **"ఉజ్జాయింపు"**కు సమానము. మరియు స్వతంత్ర చరరాశి x నుంచి $x+\Delta x$ కు మార్పు చెందిన, ప్రమేయం యొక్క విలువ $f(x)$ నుంచి $f(x+\Delta x)$ కు మార్పు చెందును. Δx అనునది చిన్నదైన మరియు అవుట్‌పుట్‌లో వచ్చిన మార్పును Δf లేదా Δy గా సూచిస్తారు. సమీకరణము .(2)ను క్రింది విధంగా మార్పు చేసి వ్రాయవచ్చును.

$$\text{అవుట్‌పుట్ లోని మార్పు } = \Delta y = \Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x .$$

$f(x)$ మరియు $f'(x)\Delta x$ లనుపయోగించి $f(x+\Delta x)$ విలువ ఉజ్జాయింపునకు సమీకరణము (3) ఉపయోగపడును. ఒక స్థిర బిందువు x_0కు, $y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0), x \in \mathbb{R}$ అనునది f యొక్క రేఖా చిత్రమునకు $(x_0, f(x_0))$ బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖను ఇస్తుంది. ఇది x_0 సమీపంలో ప్రమేయం f నకు సరైన ఉజ్జాయింపును ఇస్తుంది. దీని ద్వారా రేఖీయ ఉజ్జాయింపును క్రింది విధంగా నిర్వచించవచ్చును.

నిర్వచనము 8.1 (రేఖీయ ఉజ్జాయింపు)

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ అవకలనీయ ప్రమేయము మరియు $x_0 \in (a,b)$ అనుకొనుము. x_0 వద్ద f యొక్క రేఖీయ ఉజ్జాయింపు L ను

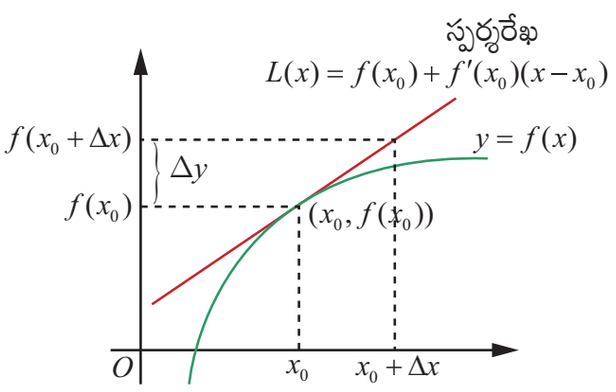
$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0), \quad \forall x \in (a,b) \text{ గా నిర్వచించారు.} \qquad \ldots (4)$$

(3) మరియు (4) ల నుండి

$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$, గా గమనించవచ్చును

ఇది $f(x+\Delta x)$ యొక్క విలువ ఉజ్జాయింపునకు ఉపయోగపడును.

x_0 వద్ద f యొక్క రేఖీయ ఉజ్జాయింపు x అనునది x_0 కు దగ్గరగా ఉన్నట్లయితే $f(x)$ యొక్క సరియైన ఉజ్జాయింపును ఇచ్చును. ఎందుకనగా x_0 వద్ద f అవిచ్ఛికం ద్వారా x, x_0 ను సమీపిస్తున్నపుడు



పటము 8.3 స్పర్శరేఖ ద్వారా రేఖీయ ఉజ్జాయింపు

$$\text{దోషము } = f(x) - L(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) \qquad \ldots (5)$$

శూన్యమును సమీపిస్తుంది. మరియు ఏదేని ఒక బిందువు $x \in (a,b)$ $f(x) = mx + c$ యొక్క రేఖీయ ఉజ్జాయింపు $L(x) = (mx_0 + c) + m(x-x_0) = mx + c = f(x)$ ఈ సందర్భములో రేఖీయ ఉజ్జాయింపు అసలు ప్రమేయమే అగును. (ఇది ఆశ్చర్యంగా లేదా!).

ఉదాహరణ 8.1

$x_0 = 3$ వద్ద $f(x) = \sqrt{1+x}, x \geq -1$ యొక్క రేఖీయ ఉజ్జాయింపును కనుగొనుము. రేఖీయ ఉజ్జాయింపు నుపయోగించి $f(3.2)$ ను అంచనా వేయుము.

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_8.indd 64 03/03/2023 18:04:34

సాధన

సమీ (4), నుండి $L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ $x_0 = 3, \Delta x = 0.2$ కావున $f(3) = \sqrt{1+3} = 2$ మరియు ,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \text{ మరియు } f'(3) = \frac{1}{2\sqrt{1+3}} = \frac{1}{4}.$$

కావున, $L(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-3) = \frac{x}{4} + \frac{5}{4}$ అనునది కావలసిన రేఖీయ ఉజ్జాయింపును ఇచ్చును.

ఇప్పుడు, $f(3.2) = \sqrt{4.2} \approx L(3.2) = \frac{3.2}{4} + \frac{5}{4} = 2.050$.

దీనిని గణించుటకు గణన యంత్రమును ఉపయోగించిన మనకు $\sqrt{4.2} = 2.04939$ అని లభించును. ■

8.2.2 దోషములు: సంపూర్ణ దోషము, సాపేక్ష (సంబంధ) దోషము మరియు దోష శాతము

ఉజ్జాయింపు విలువను కనుగొనునప్పుడు దోషము వచ్చును. ఈ విభాగము నందు (4) ద్వారా వచ్చు రేఖీయ ఉజ్జాయింపును దోషంగా మనము పరిగణిస్తాము. మనము దోషము యొక్క వివిధ రకాలను తెలుసుకొంటాము. $h = x - x_0$, గా తీసుకొన్న $x = x_0 + h$ అని మనకు లభించును.

సమీ. (5) నుంచి $E(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h$. ... (6) గా మారును.

$E(0) = 0$ అని గమనించుము మరియు x_0 వద్ద f యొక్క అవిచ్ఛిన్నము నుంచి $\lim_{h \to 0} E(h) = 0$ అని మనము ఇంతకుముందే పరిశీలించి యున్నాము. అదనంగా, f అవకలనీయమైన, (1) నుంచి క్రింది విధంగా వచ్చును.

$$\lim_{h \to 0} \frac{E(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) = 0.$$

x_0 వద్ద f అవకలనీయమైనప్పుడు పై సమీకరణము h శూన్యమును సమీపించే వేగం కన్నా $E(h)$ శూన్యమును సమీపించే వేగము ఎక్కువ అని సూచిస్తున్నది. ఇప్పుడు, క్రింది విధంగా నిర్వచించవచ్చు ను.

నిర్వచనము 8.2

ఒక నిర్ణీత పరిమాణము కనుగొనవలెనని అనుకుందాము. దీని యొక్క ఖచ్చిత విలువను **(వాస్తవ) విలువ** (**actual value**) కొన్నిసార్లు కొన్ని ఉజ్జాయింపు పద్ధతుల ద్వారా దాని యొక్క **ఉజ్జాయింపు విలువను** (**approximate value**) పొందుతాము. ఈ సందర్భములో సంపూర్ణ దోషమును క్రింది విధంగా నిర్వచిస్తాము.

సంపూర్ణ దోషము= వాస్తవ విలువ– ఉజ్జాయింపు విలువ

కావున రేఖీయ ఉజ్జాయింపు పద్ధతి ద్వారా సమీ. (6) సంపూర్ణ దోషమును అందిస్తుంది. రేఖీయ ఉజ్జాయింపును ఒక ఉదాహరణ ద్వారా తెలుసుకొంటాము.

ఉదాహరణ 8.2

$\sqrt{9.2}$ యొక్క ఉజ్జాయింపు విలువను గణన యంత్రమును ఉపయోగించకుండా రేఖీయ ఉజ్జాయింపు పద్ధతినుపయోగించి కనుగొనుము.

సాధన

$\sqrt{9.2}$ యొక్క ఉజ్జాయింపు విలువను రేఖీయ ఉజ్జాయింపు ద్వారా మనము కనుగొనవలెను. $f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$ అనునది సమీ. (3) లో గలదు. దీనికొరకు సరియగు ప్రమేయము f ను ఒక బిందువు x_0 మరియు Δx లను గుర్తించవలెను. పైన గల ఉజ్జాయింపు సమానత్వపు కుడివైపు నుపయోగించి గణన యంత్రమును లేకుండా గణించగలము. కావున మనము $f(x)=\sqrt{x}, x_0=9$ మరియు $\Delta x=0.2$గా తీసుకొనవలెను. తరువాత, $f'(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{9}}$ మరియు

$$\sqrt{9.2} \approx f(9)+f'(9)(0.2)=3+\frac{0.2}{6}=3.03333 \text{ అగును.}$$

ఇప్పుడు, గణన యంత్రమును ఉపయోగించి $\sqrt{9.2}=3.03315$ పోల్చడానికి మనము కనుగొంటాము. మన ఉజ్జాయింపు 3 దశాంస స్థానములకు ఖచ్చితంగా గలదు మరియు దోషము $3.03315-3.03333=-0.00018$ (మరొకరు $f(x)=\sqrt{1+x}, x_0=8$ మరియు $\Delta x=0.2$ గా కూడా తీసుకోవచ్చని గమనించగలరు. కావున f మరియు x_0 లను తీసుకోవడమనేది ఏకైకంగా ఉండవలసిన అవసరం లేదు.)

కావున పై ఉదాహరణలో సంపూర్ణ దోషము $3.03315-3.03333=-0.00018$. అగును. సంపూర్ణ దోషము అనేది దోష విలువను సూచించును. కానీ ఉజ్జాయింపు ఎంత సరైనదని సూచించదు. దీనిని తెలుసుకొనుటకు క్రింద ఇచ్చిన రెండు సందర్భములను గమనిస్తాము.

సందర్భము 1: ఏదో ఒక దాని సహజ విలువ 5 మరియు దాని ఉజ్జాయింపు విలువ 4 అని తీసుకుందాము. సంపూర్ణ దోషము $5-4=1$ అగును.

సందర్భం 2: ఏదో ఒక దాని సహజ విలువ 100 మరియు దాని ఉజ్జాయింపు విలువ 95 అని తీసుకొందాము. సంపూర్ణ దోషము $100-95=5$ అగును. కావున, సందర్భము 1 లోని సంపూర్ణ దోషము సందర్భము 2 కన్నా చిన్నది.

ఈ రెండు ఉజ్జాయింపులలో ఏది సరైన ఉజ్జాయింపు మరియు ఎందుకు? సంపూర్ణ దోషము, ఉజ్జాయింపు సరైనదా, కాదా అనుదానిని గూర్చి స్పష్టతను ఇవ్వదు. సాపేక్ష దోషము (relative error) లేదా దోష శాతము (క్రింద నిర్వచించబడినది) లను గణించుట ద్వారా ఉజ్జాయింపు ఎంత సరైనదని మనము సులభంగా అర్థం చేసుకొనగలము. వాస్తవ విలువ 'సున్నా' అయిన మన ఉజ్జాయింపు విలువ వాస్తవ విలువకు ఎంత సమీపంలో ఉంటుందని మనము తెలుసుకొనవచ్చును. కావున వాస్తవ విలువ సున్నా కానిచో క్రింది విధంగా నిర్వచిస్తాము.

నిర్వచనము 8.3

వాస్తవ విలువ సున్నా కానిచో,

$$\text{సాపేక్ష దోషము} = \frac{\text{వాస్తవ విలువ} - \text{ఉజ్జాయింపు విలువ}}{\text{వాస్తవ విలువ}}$$

$$\text{దోష శాతము} = \text{సాపేక్ష దోషము} \times 100 .$$

గమనిక: సంపూర్ణ దోషమునకు ప్రమాణము ఉంది, కానీ సాపేక్ష దోషము మరియు దోష శాతములకు ప్రమాణము లేదు.

పై ఉదాహరణలలో క్రింది దానిని గమనించగలరు.

మొదటి సందర్భములో

సాపేక్ష దోషము $=\frac{1}{5}=0.2$; మరియు దోష శాతము $=\frac{1}{5}\times 100=20\%$.

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_8.indd 66 03/03/2023 18:04:41

రెండవ సందర్భములో

సాపేక్ష దోషము $=\frac{5}{100}$; మరియు దోష శాతము $\frac{5}{100}\times 100 = 5\%$.

కావున, రెండవ ఉజ్జాయింపు మొదటి ఉజ్జాయింపు కన్నా సరైనది. సాపేక్ష దోషము లేదా దోష శాతమును గణించుటకు మనము దేనికైతే ఉజ్జాయింపు చేస్తున్నామో దాని యొక్క వాస్తవ విలువ తెలిసి ఉండవలెను.

కొన్ని ఉదాహరణలను తీసుకొందాము.

ఉదాహరణ 8.3

ఒక సబ్బు బుడగ ఆకారము గోళము అని తీసుకొందాము. సబ్బు బుడగ వ్యాసార్ధము 5సెం.మీ నుండి 5.2సెం.మీకు పెరిగిన, దాని ఉపరితల వైశాల్యములోని పెరుగుదలను రేఖీయ ఉజ్జాయింపు పద్ధతి ద్వారా ఉజ్జాయింపు చేయుము. మరియు దోష శాతమును గణించుము.

సాధన

'r' వ్యాసార్ధముగా గల గోళ ఉపరితల వైశాల్యము $S(r) = 4\pi r^2$ ను గుర్తు చేసుకొందాం. ఖచ్చిత మార్పును ఈ సూత్రమును ఉపయోగించి కనుగొనవచ్చును. మనము రేఖీయ ఉజ్జాయింపు పద్ధతి ద్వారా దాని యొక్క మార్పును, ఉజ్జాయింపును కనుగొనుటకు ప్రయత్నిస్తాము, కావున (4)నుపయోగించి,

$$\begin{aligned}\text{ఉపరితల వైశాల్యములో మార్పు} &= S(5.2) - S(5) \approx S'(5)(0.2)\\ &= 8\pi(5)(0.2) = 8\pi \text{ సెం.మీ}^2\end{aligned}$$

ఖచ్చిత మార్పును గణించిన

$$S(5.2) - S(5) = 108.16\pi - 100\pi = 8.16\pi \text{ సెం.మీ}^2.$$

$$\text{దోష శాతము} = \text{సాపేక్ష దోషము} \times 100 = \frac{8.16\pi - 8\pi}{8.16\pi}\times 100 = 1.9607\%$$ ■

ఉదాహరణ 8.4

ఒక క్రమ వృత్తాకార స్థూపం వ్యాసార్ధం $r = 10$ సెం.మీ మరియు ఎత్తు $h = 20$ సెం.మీ, స్థూప వ్యాసార్ధము 10 సెం.మీ నుండి 10.1 సెం.మీ కు పెరిగి మరియు ఎత్తులో మార్పు లేదని తీసుకొందాము. స్థూప ఘనపరిమాణములోని మార్పును అంచనా వేయుము. దానితో పాటు సాపేక్ష దోషము మరియు దోష శాతములను కనుగొనుము.

సాధన

వృత్తాకార స్థూప ఘనపరిమాణము $V = \pi r^2 h$ ను గుర్తుచేసుకొందాం. ఇచ్చట r అనునది వ్యాసార్ధం మరియు h అనునది ఎత్తు అగును. కావున మనకు $V(r) = \pi r^2 h = 20\pi r^2$.

$$V(10.1) - V(10) \approx \left.\frac{dV}{dt}\right|_{r=10} (10.1 - 10) = 20\pi 2(10(0.1)).$$

ఘనపరిమాణంలో మార్పు 40π సెం.మీ^{3} గా అంచనా వేయగలము.

ఘనపరిమాణములో మార్పు యొక్క ఖచ్చిత గణన (లెక్కింపు)

$$V(10.1) - V(10) = 2040.2\pi - 2000\pi = 40.2\pi \text{ సెం.మీ}^3.$$

$$\text{కావున సాపేక్ష దోషము} = \frac{40.2\pi - 40\pi}{40.2\pi} = \frac{1}{201} = 0.00497\text{; మరియు}$$

$$\text{దోష శాతము} = \text{సాపేక్ష దోషము} \times 100 = \frac{1}{201}\times 100 = 0.497\%\text{. అగును.}$$ ■

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_8.indd 67 03/03/2023 18:04:44

అభ్యాసము 8.1

1. $f(x)=\sqrt[3]{x}$ గా తీసుకొందాము. $x=27$ వద్ద రేఖీయ ఉజ్జాయింపును కనుగొనుము. రేఖీయ ఉజ్జాయింపు నుపయోగించి $\sqrt[3]{27.2}$ ను ఉజ్జాయించుము లేదా కనుగొనుము..
2. ఉజ్జాయింపు విలువను కనుగొనుటకు రేఖీయ ఉజ్జాయింపు నుపయోగించుము.

   (i) $(123)^{\frac{2}{3}}$ (ii) $\sqrt[4]{15}$ (iii) $\sqrt[3]{26}$

3. క్రింది ఇచ్చిన ప్రమేయాల రేఖీయ ఉజ్జాయింపును సూచించిన బిందువుల వద్ద కనుగొనుము.

   (i) $f(x)=x^3-5x+12,\ x_0=2$ (ii) $g(x)=\sqrt{x^2+9},\ x_0=-4$

   (iii) $h(x)=\dfrac{x}{x+1},\ x_0=1$

4. ఒక వృత్తాకార తట్ట యొక్క వ్యాసార్ధము వాస్తవ పొడవును 12.5 సెం.మీ కు బదులుగా 12.65 సెం.మీగా కొలిచారు. వృత్తాకార తట్ట వైశాల్యములో మార్పు కనుగొనుటలో క్రింది వాటిని కనుగొనుము.

   (i) సంపూర్ణ దోషము (ii) సాపేక్ష దోషము (iii) దోష శాతము

5. ఒక గోళమును 10 సెం.మీ వ్యాసార్ధం గల మంచుతో తయారు చేసారు. దీని వ్యాసార్ధం 10 సెం.మీ నుండి 9.8 సెం.మీకు తగ్గినది. క్రింది వాటికి ఉజ్జాయింపులను కనుగొనుము.

   (i) ఘనపరిమాణములో మార్పు (ii)ఉపరితల వైశాల్యములో మార్పు

6. పొడవు l గా గల ఏకైక పెండులము ఒక పూర్తి డోలనము చేయుటకు పట్టు కాలము T అయిన సమీకరణము $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ ఇచ్చును. ఇచ్చట g ఒక స్థిరాంకము. l విలువలోని దోష శాతము 2 కు అనుగుణంగా T విలువ యొక్క దోష శాత ఉజ్జాయింపును కనుగొనుము.
7. ఒక సంఖ్య యొక్క n వ వర్గమూలం యొక్క దోష శాతము, ఆ సంఖ్య యొక్క దోష శాతముకు $\dfrac{1}{n}$ సార్లు ఉంటుందని చూపుము.

8.2.3 అవకలనములు

"అవకలనము"ను పరిచయం చేయుటకు అవకలని అను భావనను మరల ఇక్కడ ఉపయోగిస్తాము. సమీ॥ (1)ను తీసుకొందాము.

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}. \qquad ...(7)$$

ఇచ్చట, లిబ్నిజ్ ఉపయోగించిన సూచిక $\dfrac{df}{dx}$ ఆయనది భేదముల భాగఫలము యొక్క అవధి. దీనిని x దృష్ట్యా y యొక్క **అవకలన గుణకము** అంటారు. $\dfrac{df}{dx}$ ను df మరియు dx ల భాగఫలముగా తీసుకోవడం భావ్యమగునా? మరొక విధంగా అవకలనిను df మరియు dx ల భాగఫలముకు సమానమగునట్లు df మరియు dx లకు అర్థమును ఆపాదించుట సాధ్యమగునా, అవును కొన్ని సందర్భములలో వీలగును. ఉదాహరణకు, $f(x)=mx+c, m, c$లు స్థిరాంకములు మరియు $y=f(x)$. ప్రతి $x\in\mathbb{R}$ మరియు Δx కు,

$$\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)=m\Delta x=f'(x)\Delta x$$

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_8.indd 68 03/03/2023 18:04:48

(2) మరియు (3)ల సమానత్వము నిరూపణగును. ఈ సందర్భములో సరళ రేఖ వెంబడి x మరియు $y(=f)$ లో మార్పు జరుగును. ఈ సందర్భములో మనకు

$$\frac{f \text{ లోని మార్పు}}{x \text{ లోని మార్పు}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx}.$$

కావున ఈ సందర్భములో అవకలని $\frac{df}{dx}$ అనునది df మరియు dxల భాగఫలం అగును. $df = \Delta f = dy$ మరియు $dx = \Delta x$ గా తీసుకొనిన f యొక్క అవకలనమును క్రింది విధంగా నిర్వచించగలము.

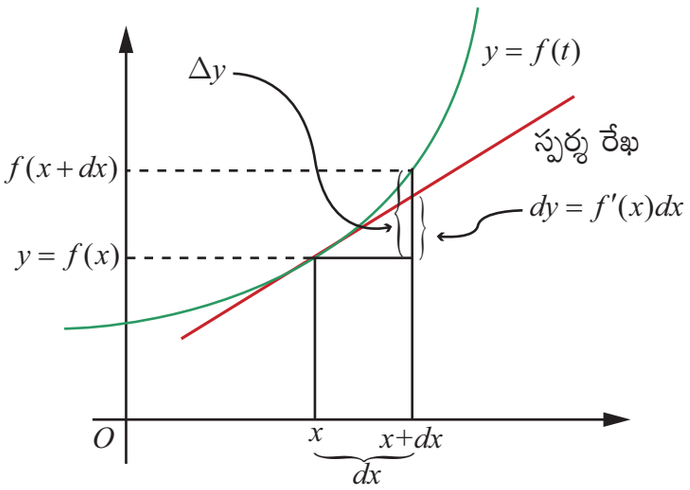
నిర్వచనము 8.4

$x \in (a,b)$ కు $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ అను అవకలనీయ ప్రమేయాలను తీసుకొందాము. మరియు x కు Δx అను పెరుగుదల ఇచ్చిన,

$$df = f'(x)\Delta x \qquad \ldots (8)$$

గా f యొక్క అవకలనమును మనము నిర్వచించాము.

మొదట మనము క్రింది దానిని గమనిస్తాము. $f(x) = x$ అయిన (8) నుంచి $dx = f'(x)\Delta x = 1\Delta x$ మనకు లభించును. దీనికి అర్థము అవకలనము $dx = \Delta x$ ఇది x అక్షములోని మార్పు. (8) ఇచ్చు అవకలనము $df = f'(x)dx$ కు సమానము.



పటము 8.4

రేఖీయ ఉజ్జాయింపు మరియు అవకలనము

తరువాత మనము అవకలనమును $y = f(x)$ లను ఒక చల అవకలనీయ ప్రమేయమునకు శోధిస్తాము. $y = f(x)$ రేఖా చిత్రం వెంబడి $\Delta f = f(x+dx) - f(x)$ ఫలితము (అవుట్ పుట్) లో వచ్చే మార్పును ఇచ్చును మరియు $f'(x)$ అనునది $(x, f(x))$ వద్ద స్పర్శరేఖ వాలును ఇచ్చును. dy లేదా df అనునవి స్పర్శ రేఖ వెంబడి f యొక్క పెరుగుదలను సూచించును. పై పరిశీలన మూలంగా $dy = f'(x)dx$ అని మనకు లభించును.

పటము నుండి $\Delta f \approx dy = df = f'(x)dx$ అని స్పష్టమగును మరియు $f'(x)$ ను Δf మరియు Δxల విభక్తముగా ఇంచుమించుగా చూడవచ్చును. కావున మనము $\frac{df}{dx}$ ను df మరియు dx ల విభక్తంగా వివరించ వచ్చును.

ముఖ్యమైన విషయము (Remark)

ఒక ప్రమేయం యొక్క అవకలని మరల ఒక ప్రేమేయమని మనకు తెలుసు. మరొక విధంగా, f యొక్క అవకలనము df స్వతంత్ర చరరాశి యొక్క ప్రమేయం మాత్రమే కాదు. కానీ $dx = \Delta x$ అను ఇన్పుట్ (input) లోని మార్పు పై ఆధారపడును. కావున x మరియు dx రెండు పరిణామములు మార్పు జరుగు ప్రమేయము df అగును. పటము 8.4 నుండి $\Delta f \approx df$ గా మనము పరిశీలించగలం.

క్రింది పట్టికలో కొన్ని ప్రమేయాల అవకలనిలను, వాని అవకలనములను పోల్చుట కొరకు ప్రక్కప్రక్కన ఇవ్వబడినవి.

వ. సం.	ప్రమేయము	అవకలని	అవకలనము
1	$f(x)=x^n$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$df=nx^{n-1}dx$
2	$f(x)=\cos(x^2+7x)$	$f'(x)=-\sin(x^2+7x)(2x+7)$	$df=-\sin(x^2+7x)(2x+7)dx$
3	$f(x)=\cot(x^2)$	$f'(x)=-\operatorname{cosec}^2(x^2)2x$	$df=-\operatorname{cosec}^2(x^2)2x\,dx$
4	$f(x)=\sin^{-1}(x)$	$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$df=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$
5	$f(x)=\tan^{-1}x$	$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$	$df=\frac{1}{1+x^2}dx$
6	$f(x)=e^{x^3-5x+7}$	$f'(x)=e^{x^3-5x+7}(3x^2-5)$	$df=e^{x^3-5x+7}(3x^2-5)dx$
7	$f(x)=\log(x^2+1)$	$f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$	$df=\frac{2x}{x^2+1}dx$

ఇప్పుడు మనము అవకలనముల ధర్మములను చూడబోతున్నాము. అవకలనము నిర్వచనము నుండి ఈ ఫలితాలను సులభంగా పొందవచ్చు మరియు అవకలన నియమములను పొందవచ్చును.

అవకలన ధర్మములు

ఇచ్చట వాస్తవ చరరాశులు గల వాస్తవ విలువ ప్రమేయాలను మనము తీసుకొందాము.

(1) f ఒక స్థిర ప్రమేయమైన, దాని $df=0$ అగును.

(2) $f(x)=x$ తత్సమ ప్రమేయమైన, దాని $df=1dx$ అగును.

(3) $c\in\mathbb{R}$ మరియు f అవకలనము అయిన $d(cf)=cf'(x)dx$ అగును.

(4) f,g లు అవకలనము అయిన $d(f+g)=df+dg=f'(x)dx+g'(x)dx$ అగును.

(5) f,g లు అవకలనీయములైన, $d(fg)=fdg+gdf=(f(x)g'(x)+f'(x)g(x))dx$ అగును.

(6) f,g లు అవకలనీయములైన, $d(f/g)=\frac{gdf-fdg}{g^2}=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}dx$ అగును. ఇచ్చట, $g(x)\neq 0$.

(7) f,g లు అవకలనీయములు మరియు $h=f\circ g$ అయిన $dh=f'(g(x))g'(x)dx$ అగును.

(8) $h(x)=e^{f(x)}$, అయిన $dh=e^{f(x)}f'(x)dx$ అగును.

(9) ప్రతి x కు $f(x)>0$ మరియు $g(x)=\log(f(x))$, అయిన $dg=\frac{f'(x)}{f(x)}dx$ అగును.

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_8.indd 70 03/03/2023 18:05:01

ఉదాహరణ 8.5

$f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ అవకలనీయ ప్రమేయాలు. $d(fg) = fdg + gdf$. అని చూపుము.

సాధన

$f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ అవకలనీయ ప్రమేయాలు మరియు $h(x) = f(x)g(x)$ గా తీసుకొందాం. అవకలనీయ ప్రమేయాల లబ్ధము h, (a,b) పై అవకలనీయమగును. కావున నిర్వచనం నుండి $dh = h'(x)dx$. ఇప్పుడు గుణకార నియమమునుపయోగించి $h'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$.

కావున $$dh = h'(x)dx = (f(x)g'(x) + f'(x)g(x))dx = f(x)g'(x)dx + f'(x)g(x)dx$$
$$= f(x)dg + g(x)df = fdg + gdf$$

ఉదాహరణ 8.6

$g(x) = x^2 + \sin x$, అవకలనము dg ను గణించుము?

సాధన

g అవకలనీయమని గమనించుము మరియు $g'(x) = 2x + \cos x$.

కావున $dg = (2x + \cos x)dx$.

ఉదాహరణ 8.7

10 సెం.మీ గల గోళం వ్యాసార్ధం 0.1 సెం.మీ తగ్గిన, ఘనపరిమాణములోని తగ్గుదలను సుమారుగా గణించుము.

సాధన

గోళం ఘనపరిమాణం $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, ఇచ్చట వ్యాసార్ధం $r > 0$ కావున అవకలనము $dV = 4\pi r^2 dr$ మరియు

$$\Delta V \approx dV = 4\pi(10)^2(9.9\text{-}10) \text{ సెం.మీ}^3$$
$$= 4\pi 10^2(-0.1) \text{ సెం.మీ}^3$$
$$= -40\pi \text{ సెం.మీ}^3 \text{ అగును.}$$

మనము $dr = (9.9 - 10)$ సెం.మీ గా ఉపయోగిస్తామని గమనించుము. ఎందుకనగా వ్యాసార్ధము 10 నుండి 9.9 గా తగ్గినది. సమాధానములోని ఋణాత్మక గుర్తు గోళం ఘనపరిమాణం 40π సెం.మీ తగ్గునని చూపును.

అభ్యాసము 8.2

1. క్రింది ఇవ్వబడిన ప్రతి ప్రమేయముకు అవకలనము dy ను కనుగొనుము:

   (i) $y = \frac{(1-2x)^3}{3-4x}$ (ii) $y = (3 + \sin(2x))^{2/3}$ (iii) $y = e^{x^2-5x+7} \cos(x^2 - 1)$

2. $f(x) = x^2 + 3x$ కు df ను కనుగొనుము మరియు క్రింది వానికి గణించుము.

   (i) $x = 2$ మరియు $dx = 0.1$ (ii) $x = 3$ మరియు $dx = 0.02$

3. x మరియు Δx విలువలకు ప్రమేయం f యొక్క Δf మరియు df లను కనుగొని మరియు పోల్చుము.

   (i) $f(x) = x^3 - 2x^2; x = 2, \ \Delta x = dx = 0.5$

   (ii) $f(x) = x^2 + 2x + 3; \ x = -0.5, \ \Delta x = dx = 0.1$

4. $\log_{10} e = 0.4343$ అనుకొందాము. $\log_{10} 1003$ యొక్క ఉజ్జాయింపు విలువను కనుగొనుము.

5. ఒక వృక్ష కాండము వ్యాసము 30 సెం.మీ తరువాత సంవత్సరమునకు వృత్త పరిధి 6 సెం.మీ పెరిగినది.

(i) వృక్ష వ్యాసము ఉజ్జాయింపుగా ఎంత పెరిగినది?

(ii) వృక్షము యొక్క మధ్యచ్ఛేద వైశాల్యము ఎంత శాతము పెరిగినది?

6. ఒక నిర్దిష్ట పక్షి యొక్క గుడ్డు ఇంచుమించు గోళాకారము. పెంకు యొక్క అంతర వ్యాసార్ధం 5 మి.మీ మరియు బాహ్య వ్యాసార్ధము 5.3 మి.మీ. పెంకు యొక్క ఘనపరిమాణమును ఉజ్జాయింపుగా కనుగొనుము.

7. మానవుని యొక్క ధమని యొక్క మధ్యచ్ఛేదము వృత్తాకారము అనుకొందాము. రోగి ధమని విస్తరింపునకు ఔషధము ఇచ్చారు. ధమని వ్యాసార్ధము 2 మి.మీ నుండి 2.1 మి.మీకు పెరిగినది, దాని మధ్యచ్ఛేద వైశాల్యము సుమారుగా ఎంత పెరిగినది?

8. క్రొత్తగా అభివృద్ధి చేసిన పట్టణములో ఓటు హక్కు గల జనాభా పెరుగుదల (వేలలో) $V(t)=30+12t^2-t^3,\ 0\le t\le 8$ ఇచ్చట t కాలము సంవత్సరములలో తెలిపిన ప్రమేయముకు అనుగుణంగా ఉంటుందని అంచనా వేశారు. కాలము 4 నుండి $4\frac{1}{6}$ సంవత్సరములకు మార్పు చెందిన ఓటర్లలోని మార్పును సుమారుగా కనుగొనుము?

9. x గంటలలో ఒక వ్యక్తి y పదములు నేర్చుకొనుటకు సంబంధము $y=52\sqrt{x},\ 0\le x\le 9$. x క్రింది విధంగా మార్పు చెందినపుడు ఆ వ్యక్తి నేర్చుకొన్న ఉజ్జాయింపు పదముల సంఖ్యను కనుగొనుము?

(i) 1 నుండి 1.1 గంటలకు? (ii) 4 నుండి 4.1 గంటలకు?

10. ఒక వృత్తాకార ప్లేట్ వేడి ప్రభావంతో ఏకరీతిగా విస్తరించును. దీని వ్యాసార్ధము 10.5 సెం.మీ నుండి 10.75 సెం.మీ కు పెరిగినపుడు, వైశాల్యములోని మార్పు యొక్క ఉజ్జాయింపును కనుగొని మరియు వైశాల్యములోని ఉజ్జాయింపు మార్పు శాతమును కూడా కనుగొనుము.

11. 10 సెం.మీ అంచు గల ఘనము యొక్క ముఖాలను పెయింట్‌తో 0.2 సెం.మీ మందం ఉండేలా పూత పూయబడినది. అవకలనములను ఉపయోగించి ఈ ఘనమును పూత పూయుటకు ఎంత ఘన సెం.మీల పెయింట్ కావలెను అని ఉజ్జాయింపుగా కనుగొనుము. ఈ ఘనమును పూతపూయుటకు వాడిన పెయింట్ పరిమాణమును లెక్కించుము.

8.3 చాలా చరరాశులు గల ప్రమేయాలు

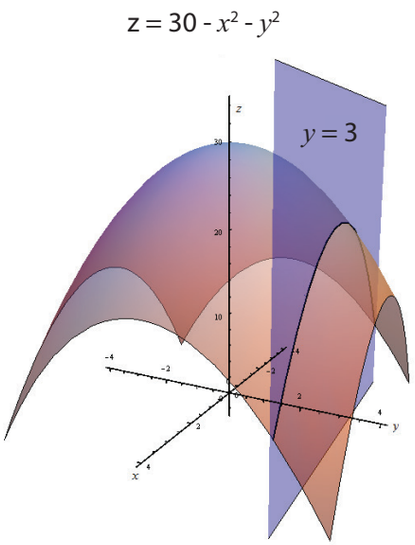
మనము కొన్ని విషయాలను పునశ్చరణ చేసుకొందాము. x యొక్క ప్రమేయము f ఇవ్వబడినది. బాగుగా అవగాహన చేసుకొనుటకు $y=f(x)$ గ్రాఫ్‌ను మనము గీస్తాము. ఇది xy-తలంలో ఒక వక్రము అగును. మరియు $x=a$ వద్ద f యొక్క అవకలనము $f'(a)$, $x=a$ వద్ద f మొక్క గ్రాఫ్‌నకు స్పర్శ రేఖ యొక్క వాలును సూచించును. పరిచయములో మనము ఒకటి కన్నా ఎక్కువ చరరాశులు గల ప్రమేయాల ఆవశ్యకతను తెలుసుకొన్నాము. ఒకటి కన్నా ఎక్కువ చరరాశులుగల ప్రమేయాలను అవగాహన చేసుకొనుటకు కొన్ని భావనలను వృత్తి చేయవలెను. మొదట మనము రెండు చరరాశులు గల ప్రమేయాలను తీసుకొందాము. $F(x,y)$ అనునది x మరియు y లో ఒక ప్రమేయం అనుకొందాము. F గ్రాఫ్‌ను పొందడానికి xyz - అంతరంలో $z=F(x,y)$ గ్రాఫ్‌ను గీయాలి. దీనితో పాటు, రెండు చరరాశులు గల ప్రమేయాల అవిచ్ఛిన్నము, పాక్షిక అవకలనులు అను భావనను మనము వృద్ధి చేయవలెను.

ఒక ఉదాహరణను చూస్తాము. $x,y\in\mathbb{R}$ కు $g(x,y)=30-x^2-y^2$, దత్త బిందువు $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ కు $z=30-x^2-y^2$ గ్రాఫ్ నందు z -నిరూపకమును ఇచ్చును. $(x,y,30-x^2-y^2)$ బిందువు నందు

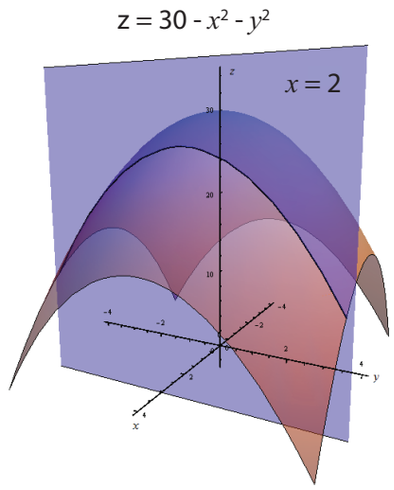
02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_8.indd 72 03/03/2023 18:05:12

$30-x^2-y^2$, xy-తలంలో (x,y) బిందువుకు ఎత్తులో అమరియుండును. ఉదాహరణకు బిందువు $(2,3)\in\mathbb{R}^2$ కు బిందువు $(2,3,30-2^2-3^2)=(2,3,17)$, g యొక్క గ్రాఫ్‌లో ఉంటుంది. $y=3$ విలువను స్థిరము చేసిన $g(x,3)=-x^2+21$ ప్రమేయము x చరరాశి పై మాత్రమే ఆధారపడును. దీని యొక్క గ్రాఫ్ వక్రమగును. ఇదేవిధంగా $x=2$ విలువను స్థిరము చేసిన $g(2,y)=26-y^2$ ప్రమేయం y చరరాశిపై మాత్రమే ఆధారపడును. ప్రతి సందర్భంలో ను ఫలిత ప్రమేయం యొక్క గ్రాఫ్ ద్విఘాతీయము (వర్గము) అగును. ఇది పరావలయం $z=g(x,y)$ నుంచి పొందు ఉపరితలమును ఘనపరావలయం (paraboloid) అంటారు.

$g(x,3)=21-x^2$ ఒక పరావలయమును సూచించునని గమనించుము. $y=3$ తలములో $z=30-x^2-y^2$ ఉపరితలమును ఛేధించినపుడు ఈ పరావలయమును పొందవచ్చును. (పటము 8.5ను చూడుము) ఇదేవిధముగా $g(2,y)=26-y^2$ సూచించు పరావలయము $x=2$ తలము $z=30-x^2-y^2$ ఉపరితలము ఛేధించినపుడు లభించును. (పటము8.6ను చూడుము) క్రిందిచ్చిన గ్రాఫ్‌లు పైన చర్చించిన విషయాలను వివరించును.



పటము 8.5



పటము 8.6

ఇదే పద్ధతిలో, x,y అను రెండు చరరాశులు గల ప్రమేయం F ను తీసుకొందాము. సమీకరణం $z=F(x,y)$ ద్వారా ఈ ప్రమేయము త్రిమితీయ అంతరంలో దృశ్యకరణమగును. సాధారణంగా, ఇది $\mathbb{R}^3$ లో ఉపరితలమును సూచించును.

8.3.1 ఒక చరరాశిగల ప్రమేయం యొక్క అవధి మరియు అవిచ్ఛిన్నముల పునశ్చరణ

దీని తరువాత మనము రెండు చరరాశులు గల ప్రమేయము యొక్క అవిచ్ఛన్నమును పరిశీలిస్తాము. దీనిని అవగాహన చేసుకొనుటకు మొదట ఒక చరరాశి గల ప్రమేయం యొక్క అవిచ్ఛన్నమును పునశ్చరణ చేసుకొనవలెను. క్రిందిచ్చిన అవిచ్ఛన్న నిర్వచనమును మనము 11వ తరగతిలో చూసి యున్నాము.

ఒక ప్రమేయము $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, బిందువు $x_0\in(a,b)$ వద్ద క్రింది వాటిని పాటించిన అవిచ్ఛిన్నము అంటారు.

(1) x_0 వద్ద f నిర్వచితము కావలెను. (2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ వ్యవస్థితము (3) $L=f(x_0)$

అవిచ్ఛిన్నములోని ముఖ్యమైన విషయము పైన సూచించిన రెండవ నియమం అవగాహనలో కలదు. x, x_0 కు అతిసమీపమునకు చేరుకోగలదు. $f(x)$, L కు అతి సమీపంగా వచ్చును. అనుదానిని $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ గా మనము వ్రాస్తాము.

క్లుప్తంగా మరియు స్పష్టంగా అవగాహన చేసుకోవడానికి సమీప అంతర (neighbourhood) పదములలో రెండవ నియమమును మరల వ్రాసుకొందాము. ఇది రెండు చరరాశులు గల ప్రమేయాల అవిచ్ఛిన్నతను చర్చించినపుడు ఉపయోగపడును.

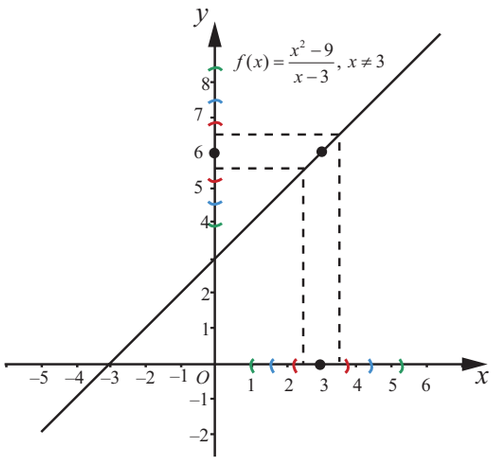
నిర్వచనము 8.5 (ఒక ప్రమేయము యొక్క అవధి)

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ మరియు $x_0\in(a,b)$ తీసుకుందాము. L యొక్క $\varepsilon>0$ ప్రతి సమీప అంతరము $(L-\varepsilon,L+\varepsilon)$, కు $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$ అయినపుడు $f(x)\in(L-\varepsilon,L+\varepsilon)$ అగునట్లు x_0 యొక్క $\delta>0$ కు $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset(a,b)$ అను సమీప అంతర వ్యవస్థితం అయితే, $x=x_0$ వద్ద f యొక్క అవధి L అని అంటారు.

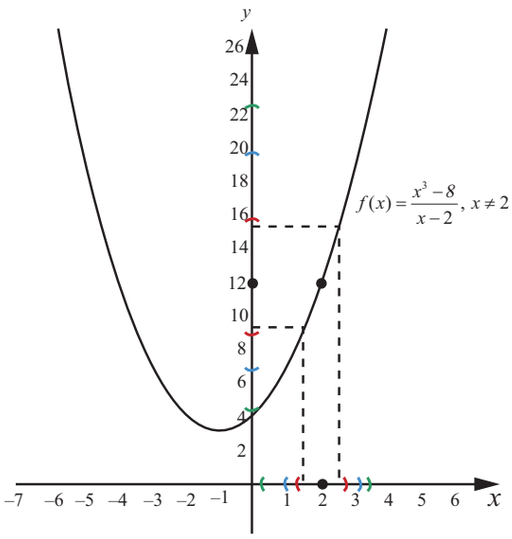
పై నియమమును సమీప అంతర పదములలో నిర్వచించినట్లు (సంపూర్ణ విలువ లేదా) మాడులస్ సంకేతంతో క్రింది విధంగా నిర్వచించవచ్చును.

ప్రతి $\forall\varepsilon>0$ కు $|f(x)-L|<\varepsilon$ అగునట్లు $0<|x-x_0|<\delta$ అయినప్పుడల్లా $\exists\ \delta>0$ వ్యవస్థితం అగును. $(\exists\ \delta>0)$

దీనిని క్రింది విధంగా అర్థం చేసుకొనవచ్చును. $x\neq x_0$ అయినప్పుడల్లా మరియు x_0 నుంచి δ దూరంలో x ఉన్న L నుంచి ε దూరంలో $f(x)$ ఉంటుంది. క్రింది పటములు ε మరియు δ లు ఒకదానిపై ఒకటి ఏవిధంగా ఆధారపడును అనుదానిని వివరించును.



పటము 8.7



పటము 8.8

క్రింది నియమాలను మనము XIవ తరగతిలో తెలుసుకొన్నాము. క్రింది నియమములను పాటించినప్పుడు వీలైతే x_0 తప్ప, x_0 యొక్క సమీప అంతరంలో నిర్వచించబడిన ప్రమేయము f కు x_0 వద్ద అవధి ఉందని చెప్పగలము.

(1) $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=L_1$ (కుడివైపు అవధి) వ్యవస్థితం (2) $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=L_2$ (ఎడమవైపు అవధి) వ్యవస్థితం

(3) $L_1=L_2$.

$f(x_0)=L$ అనుకొందాము. $L=L_1=L_2$ అయితే $x=x_0$ వద్ద ప్రమేయం f అవిచ్ఛిన్నము అంటారు. గమనించవలసిన విషయం ఏమనగా ఒక చరరాశి గల ప్రమేయం యొక్క అవధి మరియు అవిచ్ఛిన్నతలో సమీప అంతరము ముఖ్యమైన పాత్ర వహించును. ఈ సందర్భములో $r>0$ అయినప్పుడు ఒక బిందువు

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_8.indd 74 03/03/2023 18:05:20

$x_0 \in \mathbb{R}$ యొక్క సమీప అనంతరం చూడడానికి $(x_0 - r, x_0 + r)$ లా ఉంటుంది. రెండు చరరాశులు గల ప్రమేయాల అవధి మరియు అవిచ్ఛిన్నతను తెలుసుకొనుటకు మనము ఒక బిందువు $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ యొక్క సమీప అంతరమును నిర్వచించవలసిన అవసరం ఉంది. కావున, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ మరియు $r > 0$ కు, ఒక బిందువు (u,v) యొక్క r-సమీప అంతరము అనేది ఒక సమితి అగును. అది

$$B_r((u,v)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-u)^2 + (y-v)^2 < r^2\}.$$

కావున ఒక బిందువు (u,v) యొక్క ఒక r-సమీప అంతరము అనేది (u,v) కేంద్రం, మరియు వ్యాసార్ధము $r > 0$ గా గల ఒక open disc అగును. సమీప అంతరం నుంచి కేంద్రమును తొలగించినట్లయితే దానిని **మినహాయింపు సమీప అంతరము** అంటారు.

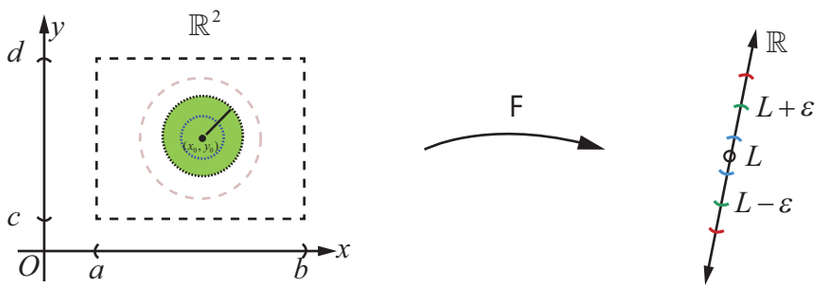
8.4 రెండు చరరాశులు గల ప్రమేయాల అవధి మరియు అవిచ్ఛిన్నత

నిర్వచనము 8.6 (ప్రమేయము యొక్క అవధి)

$A = \{(x,y) \mid a < x < b, c < y < d\} \subset \mathbb{R}^2, F : A \to \mathbb{R}$ తీసుకొందాం. ఈ క్రింది నియమములను పాటించిన F కు (u,v) వద్ద అవధి L ఉందని అంటారు.

$\varepsilon > 0$, L యొక్క ప్రతి సమీప అంతరము $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ కు

$(x,y) \in B_\delta((u,v)) \setminus \{(u,v)\}, \delta > 0 \Rightarrow f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ అగునట్లు ఒక δ- సమీప అంతరము (u,v) యొక్క $B_\delta((u,v)) \subset A$ వ్యవస్థితము. అవధి వ్యవస్థితమైన దానిని $\lim\limits_{(x,y)\to(u,v)} F(x,y) = L$ గా సూచిస్తాము.



పటము 8.9 ప్రమేయం యొక్క అవధి

ఒక చరరాశి గల ప్రమేయ అవధిని కనుగొను ప్రక్రియను, రెండు చరరాశులు గల ప్రమేయ అవధిని కనుగొను ప్రక్రియతో పోల్చినప్పుడు ఒక లోతైన సూక్ష్మ భేదం గలదు. ఇచ్చట (x,y) అనునది (u,v) ను **ప్రతి వీలగు** (u,v) మార్గంలో చేరుతున్నప్పుడు $F(x,y)$ యొక్క విలువలు ఒకే విలువ L ను చేరుతున్నది. (సరళ రేఖ మార్గాలుకాని మార్గాలను కలిపి) అవధి కనుగొను ప్రక్రియను పటము 8.9 వివరించును.

ఒక చరరాశిగల ప్రమేయాల అన్ని అవధి నియమములు (అవధి సిద్ధాంతములు) అనేక చరరాశులు గల ప్రమేయాలకు కూడా వర్తించును.

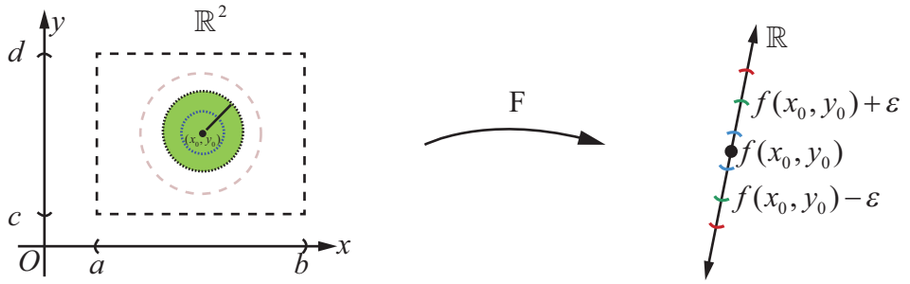
ప్రస్తుతం ఒక చరరాశి గల ప్రమేయాల అవిచ్ఛిన్నత ద్వారా, రెండు చరరాశులు గల ప్రమేయాల అవిచ్ఛిన్నతను క్రింది విధంగా నిర్వచించవచ్చును.

నిర్వచనము 8.7 (అవిచ్ఛిన్నత)

$A = \{(x,y) \mid a < x < b, c < y < d\} \subset \mathbb{R}^2, F : A \to \mathbb{R}$ అనుకొందాం. (u,v) వద్ద F అవిచ్ఛిన్నము అని క్రింది నియమములను పాటించినప్పుడు చెప్పవచ్చును.

(1) (u,v) వద్ద F నిర్వచితము. (2) $\lim\limits_{(x,y)\to(u,v)} F(x,y) = L$ వ్యవస్థితము (3) $L = F(u,v)$.

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_8.indd 75 03/03/2023 18:05:25



పటము 8.10 ప్రమేయము యొక్క అవిచ్ఛిన్నత

విశేషాంశాలు (Remark)

(1) పటము 8.10 లో $L=F(x_0,y_0)$ తీసుకొనుటలో (x_0,y_0) వద్ద అవిచ్ఛిన్నతను వివరించును.

(2) $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ల అవిచ్ఛిన్నతలను పైన వివరించిన విధంగా నిర్వచించవచ్చును.

రెండు చరరాశులు గల ప్రమేయాల అవిచ్ఛిన్నతను వివరించుటకు కొన్ని ఉదాహరణలను తీసుకొంటాము.

ఉదాహరణ 8.8

ప్రతి $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ కు $f(x,y)=\dfrac{3x-5y+8}{x^2+y^2+1}$ గా తీసుకుందాము. $\mathbb{R}^2$ పై f అవిచ్ఛిన్నము అని చూపును.

సాధన

$(a,b)\in\mathbb{R}^2$ ఒక చల బిందువు అనుకొందాము. (a,b) వద్ద f యొక్క అవిచ్ఛినతను మనము అన్వేషిస్తాము. అనగా, అవిచ్ఛిన్నము యొక్క అన్ని మూడు నియమముల ద్వారా (a,b) వద్ద f ను సరిచూస్తాము.

మొదటి నియమమును సరిచూచుటకు, $f(a,b)=\dfrac{3a-5b+8}{a^2+b^2+1}$ నిర్వచితమని గమనించుము.

తరువాత మనము $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ వ్యవస్థతమా? కాదా? అని కనుగొనవలెను.

కావున మనము $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)}(3x-5y+8)=3a-5b+8$ మరియు $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)}(x^2+y^2+1)=a^2+b^2+1\neq 0$ గణిస్తాము.

కావున, అవధి ధర్మముల ద్వారా క్రింది వాటిని చూడగలము.

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=\frac{\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)}(3x-5y+8)}{\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)}(x^2+y^2+1)}=\frac{3a-5b+8}{a^2+b^2+1}=f(a,b)$$ = L వ్యవస్థితము.

ఇప్పుడు మనము $\lim\limits_{x,y\to(a,b)} f(x,y)=L=f(a,b)$ అని గమనించగలము. f అనునది (a,b) వద్ద f యొక్క అన్ని మూడు అవిచ్ఛిన్నత నియమములను తృప్తిపరచినది. ఇచ్చట $\mathbb{R}^2$ లో (a,b) ఒక చర బిందువు. కావున మనము $\mathbb{R}^2$ యొక్క ప్రతి బిందువు వద్ద f అవిచ్ఛిన్నమని నిర్ధారించవచ్చును. ■

ఉదాహరణ 8.9

$(x,y)\neq(0,0)$ మరియు $f(0,0)=0$ అయితే $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ గా తీసుకొందాం. $(0,0)$ వద్ద f అవిచ్ఛిన్నము కాదని మరియు $\mathbb{R}^2$ లో మిగిలిన బిందువుల వద్ద అవిచ్ఛిన్నమని చూపుము.

సాధన

ప్రతి $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ కు f నిర్వచితమని గమనించుము. $(a,b)\neq(0,0)$ వద్ద అవిచ్ఛిన్నమని మొదట సరిచూస్తాము. ఉదాహరణకు, $(a,b)=(2,5)$ గా తీసుకుందాము, తరువాత $f(2,5)=\dfrac{10}{29}$: పై ఉదాహరణ వలె $\lim\limits_{(x,y)\to(2.5)} xy=2(5)=10$ మరియు $\lim\limits_{(x,y)\to(2.5)} x^2+y^2=2^2+5^2=29\neq 0$ గణించుము.

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_8.indd 76 03/03/2023 18:05:31

$$\lim_{(x,y)\to(2,5)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{10}{29}.$$

$f(2,5) = \frac{10}{29} = \lim_{(x,y)\to(2,5)} \frac{xy}{x^2+y^2}$, కావున $(2,5)$ వద్ద f అవిచ్ఛిన్నము.

ఖచ్చితంగా ఇదేవిధంగా ప్రతి $(a,b) \neq (0,0)$ వద్ద f అవిచ్ఛిన్నమని మనము చూపవచ్చును. ఇప్పుడు మనము $(0,0)$ వద్ద అవిచ్ఛిన్నతను సరి చూస్తాము. నిర్వచనము నుండి $f(0,0) = 0$. తరువాత మనము $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ వ్యవస్థితమా లేదా కనగొనవలెను.

మొదట $(0,0)$ ద్వారా పోవు $y = mx$ సరళ రేఖల వెంబడి అవధిని సరిచూస్తాము.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{(1+m^2)x^2} = \frac{m}{1+m^2} \neq f(0,0),\ m \neq 0 \text{ అయినప్పుడు.}$$

m యొక్క వేర్వేరు విలువలకు, $\frac{m}{1+m^2}$ వేర్వేరు విలువలు మనకు లభించినవి. కావున మనము $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ **వ్యవస్థితం కాదు** అని మనము నిర్ధారించవచ్చును. $(0,0)$ వద్ద f అవిచ్ఛిన్నము కాదు. ■

ఉదాహరణ 8.10

$(x,y) \neq (0,0)$ మరియు $g(0,0) = 0$ అయితే $g(x,y) = \frac{2x^2y}{x^2+y^2}$ ను తీసుకొందాం. $\mathbb{R}^2$ లో g అవిచ్ఛిన్నమని నిరూపించుము.

సాధన

ప్రతి $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ కు ప్రమేయము g నిర్వచితమా అని పరిశీలిస్తాము. పై ఉదాహరణల ద్వారా దీనిని సరి చూడటం సులభము, కావున అన్ని $(x,y) \neq (0,0)$ బిందువుల వద్ద g అవిచ్ఛిన్నం. ఇప్పుడు మనము $(0,0)$ వద్ద g యొక్క అవిచ్ఛిన్నతను సరి చూస్తాము. దీనికొరకు $(0,0)$ వద్ద g కు అవధి L మరియు $L = g(0,0) = 0$ అయితే ఈ క్రింది దానిని మనము తీసుకొంటాము.

$$|g(x,y) - g(0,0)| = \left|\frac{2x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| = \frac{2|x^2y|}{|x^2+y^2|} = \frac{2|xy||x|}{x^2+y^2} \leq \frac{(x^2+y^2)|x|}{x^2+y^2} \leq |x| \qquad \ldots (9)$$

పైన గల చివరి సోపానంలో మనము ప్రతి $x, y \in \mathbb{R}$ కు $2|xy| \leq x^2+y^2$ అని గమనించండి. ($0 \leq (x-y)^2$ గా తీసుకొన్న తరువాత ఇది ఉపయోగించాం) $(x,y) \to (0,0)$ అయితే $|x| \to 0$ అగును. తరువాత (9) నుంచి $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^2+y^2} = 0 = g(0,0)$ అగును. ఇది $(0,0)$ వద్ద g అవిచ్ఛిన్నము అని నిరూపించును. కావున, $\mathbb{R}^2$ యొక్క ప్రతి బిందువు వద్ద g అవిచ్ఛిన్నము అగును. ■

అభ్యాసము 8.3

1. అవధి వ్యవస్థితమైతే, $\lim_{(x,y)\to(1,2)} g(x,y)$, ను కనుగొనుము. ఇక్కడ $g(x,y) = \frac{3x^2-xy}{x^2+y^2+3}$.

2. అవధి వ్యవస్థితమైతే $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos\left(\frac{x^3+y^2}{x+y+2}\right)$ ను గణించుము.

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_8.indd 77 03/03/2023 18:05:38

3. $(x,y) \neq (0,0)$ కు $f(x,y) = \dfrac{y^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ అయిన $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ అని చూపుము.

4. అవధి వ్యవస్థితమైతే $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \cos\left(\dfrac{e^x \sin y}{y}\right)$ ను కనుగొనుము.

5. $(x,y) \neq (0,0)$ మరియు $f(0,0) = 0$ కు $g(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ ను తీసుకుందాము.

(i) ప్రతి $y = mx, m \in \mathbb{R}$ రేఖ వెంబడి $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$ అని చూపుము.

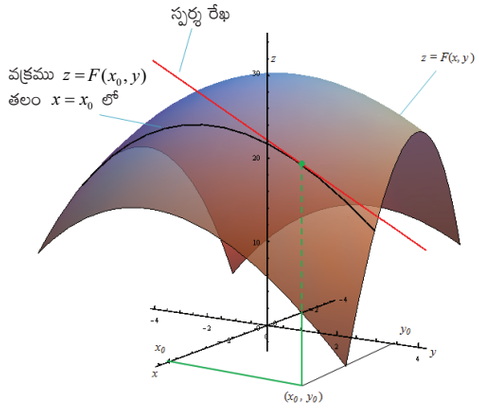
(ii) ప్రతి $y = kx^2, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ పరావలయం వెంబడి $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \dfrac{k}{1+k^2}$ అని చూపుము.

6. ప్రతి $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ వద్ద $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{y^2 + 1}$ అవిచ్ఛిన్నమని నిరూపించుము.

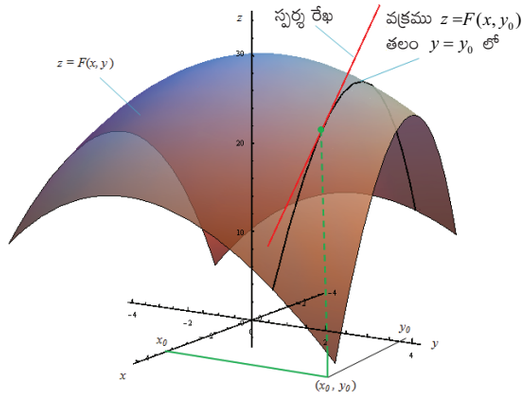
7. $x \neq 0$ మరియు $g(0,0) = 1$ కు $g(x,y) = \dfrac{e^y \sin x}{x}$ తీసుకొందాం. $(0,0)$ వద్ద g అవిచ్ఛిన్నమని చూపుము.

8.5 పాక్షిక అవకలనులు

ఈ విభాగంలో, ఒక చరరాశిగల ప్రమేయపు అవకలనుల భావనను ఏ విధంగా ఎక్కువ చరరాశులు గల వాస్తవ విలువ ప్రమేయమును సాధారణీకరిస్తామని మనము చూస్తాము. మొదట మనము రెండు చరరాశులు గల ప్రమేయాలను తీసుకొందాము. $A = \{(x,y) | a < x < b, c < y < d\} \subset \mathbb{R}^2$ మరియు వాస్తవ విలువ ప్రమేయం $F : A \to \mathbb{R}$ తీసుకుందాం. $(x_0, y_0) \in A$ తీసుకుందాం మరియు మనము చరరాశి x లో మాత్రమే వచ్చు మార్పు దృష్ట్యా (x_0, y_0) వద్ద F యొక్క మార్పు రేటును కనుగొనుటలో ఆసక్తిని చూపిస్తాము. $F(x, y_0)$ అనునది x లో మాత్రమే ప్రమేయమగునని మనము పైన చూపించి యున్నాము. మరియు ఇది ఉపరితలం $z = F(x,y)$ ను $y = y_0$ తలంతో చేదించినప్పుడు పొందు ఒక వక్రమును సూచించును. కావున మనము x దృష్ట్యా $F(x, y_0)$ యొక్క అవకలనిను కనుగొనుట ద్వారా $x = x_0$ వద్ద వక్రము $F(x, y_0)$ కు స్పర్శ రేఖ యొక్క వాలును గూర్చి చర్చిస్తాము మరియు దీనిని $x = x_0$ వద్ద లెక్కిస్తాము. ఇదే విధముగా మనము y దృష్ట్యా $F(x_0, y)$ యొక్క అవకలనిను కనుగొనుట ద్వారా $y = y_0$ వద్ద వక్రము $F(x_0, y)$ యొక్క స్పర్శరేఖ వాలును కనుగొనవచ్చును. క్రింద ఇవ్వబడినవి పాక్షిక అవకలనుల నిర్వచన ప్రేరణకు ముఖ్యమైన విషయాలు.



పటము 8.11



పటము 8.12

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_8.indd 78 03/03/2023 18:05:43

నిర్వచనము 8.8

$A=\{(x,y)|a<x<b, c<y<d\}\subset\mathbb{R}^2, F:A\to\mathbb{R}$ మరియు $(x_0,y_0)\in A$ తీసుకొందాం.

(i) $$\lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h,y_0)-F(x_0,y_0)}{h} \quad \ldots (10)$$

వ్యవస్థితమయితే $(x_0,y_0)\in A$ వద్ద x దృష్ట్యా F కు పాక్షిక అవకలని ఉందని మనము చెప్పగలము. ఈ సందర్భములో అవధి విలువను $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)$ గా సూచిస్తాము.

(ii) $$\lim_{k\to 0}\frac{F(x_0,y_0+k)-F(x_0,y_0)}{k} \quad \ldots (11)$$

వ్యవస్థితమయితే $(x_0,y_0)\in A$ వద్ద y దృష్ట్యా F కు పాక్షిక అవకలని ఉందని మనము చెప్పగలం. ఈ సందర్భంలో అవధి విలువను $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)$ గా సూచిస్తాము.

విశేషాంశాలు (Remarks)

1. మూడు లేదా అంతకన్నా ఎక్కువ చరరాశుల గల ప్రమేయాల పాక్షిక అవకలనలను ఖచ్చితంగా ఇదే పద్ధతిలో నిర్వచించవచ్చును.
2. ∂F ను **"పాక్షికము F"**గా మరియు ∂x ను **"పాక్షికము x"**గా మనము చదువుతాము. మనము $\frac{\partial F}{\partial x}$ ను **పాక్షికము** x ద్వారా "dho F by dho x" **పాక్షికము** F గా చదువుతాము. దీనిని దో F బై దో x గా కూడా చదువుతాము.
3. ఇదేవిధంగా, $\frac{\partial F}{\partial x}$ను పాక్షికము y ద్వారా పాక్షికం F గా లేదా దో F బై దో y గా చదువుతాము.
4. కొన్నిసార్లు $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)$ ను $F_x(x_0,y_0)$ గా $\left.\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\right|_{(x_0,y_0)}$ గా కూడా సూచిస్తాము.
   ఇదేవిధంగా $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)$ ను $F_y(x_0,y_0)$ లేదా $\left.\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right|_{(x_0,y_0)}$ గా కూడా సూచిస్తాము.
5. x దృష్ట్యా F యొక్క పాక్షిక అవకలని కనుగొనునప్పుడు ఒక ముఖ్యమైన విషయమును గమనించాలి. y చరరాశిని స్థిరాంకముగా భావించి x దృష్ట్యా అవకలనిను కనుగొనవలెను. అనగా మనము ఏ చరరాశి దృష్ట్యా పాక్షిక అవకలని కనుగొంటామో, అది తప్ప మిగిలిన చరరాశులన్నింటిని స్థిరాంకంగా భావిస్తాము. అందుకే దీనిని "**పాక్షిక అవకలని**" అంటారు.
6. A యొక్క ప్రతి బిందువు వద్ద F కు x దృష్ట్యా పాక్షిక అవకలని ఉంటే మనము A లో $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)$ వ్యవస్థితమని చెపుతాము. ఈ సందర్భములో A లో $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)$ మరలను ఒక వాస్తవ విలువ ప్రమేయం అని గమనించగలరు.
7. అవకలనం యొక్క అన్ని ధర్మములు (**మొత్తం, లబ్ధము, విభక్త మరియు గొలుసు నియమాలు**) మరియు సూత్రాలును పాక్షిక అవకలనము కూడా పాటిస్తుందని మనము సులభంగా గ్రహించగలము.

ఒక చరరాశిగల ప్రమేయం ఒక బిందువు వద్ద అవకలనీయమైన ఆ బిందువు వద్ద అవిచ్ఛిన్నతను పునఃశ్చరణ చేసుకుందాం. x, y అను రెండు చరరాశులు గల ప్రమేయం F కు $\frac{\partial F}{\partial x}(u,v)$ మరియు $\frac{\partial F}{\partial y}(u,v)$ లను మనము నిర్వచించాము. ఒక బిందువు (u,v) వద్ద F యొక్క పాక్షిక అవకలనము వ్యవస్థితమైన, బిందువు (u,v) వద్ద F అవిచ్ఛిన్నమగునా? ఇది అన్ని సందర్భములలో జరగదని క్రింది ఉదాహరణ ద్వారా తెలుసుకొనవచ్చును.

ఉదాహరణ 8.11

$xy \neq 0$ అయితే $f(x,y)=0$ మరియు $xy=0$ అయితే $f(x,y)=1$ అనుకొందాం.

(i) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ ను లెక్కించుము.

(ii) $(0,0)$ వద్ద f అవిచ్ఛిన్నము కాదని చూపుము.

సాధన

x, y –అక్షాలపై f విలువ 1 మరియు $\mathbb{R}^2$ మీద మిగిలిన స్థానాలలో f విలువ '0' అని గమనిస్తాము. కావున ఈ విధంగా లెక్కిస్తాము.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1-1}{h} = 0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{1-1}{k} = 0.$$

ఇది (i) ను పూర్తి చేసినది.

ఇప్పుడు (ii) కొరకు $y=x$ రేఖ వెంబడి $(x,y)\to(0,0)$ కు f యొక్క అవధిని లెక్కిస్తాము. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$ ఎందుకనగా $y=x$ రేఖ వెంబడి $x\neq 0, f(x,y)=0$ కానీ $f(0,0)=1\neq 0$ కావున f వద్ద $(0,0)$ అవిచ్ఛిన్నముకాదు.

ఉదాహరణ 8.12

ప్రతి $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ కు $F(x,y)=x^3y+y^2x+7$ గా తీసుకొందాం. $\frac{\partial F}{\partial x}(-1,3)$ మరియు $\frac{\partial F}{\partial y}(-2,1)$ లను లెక్కించుము.

సాధన

మొదట మనము $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)$ గణిస్తాము, తరువాత $(-1,3)$ వద్ద దీనిని గణిస్తాము. మనము ఇంతకుముందు పరిశీలించాము y ను స్థిరాంకముగా తీసుకొని x దృష్ట్యా అవకలనిను కనుగొంటాము. అది,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial(x^3y+y^2x+7)}{\partial x} = \frac{\partial(x^3y)}{\partial x}+\frac{\partial(y^2x)}{\partial x}+\frac{\partial(7)}{\partial x}$$

$$= 3x^2y+y^2+0$$

$$= 3x^2y+y^2.$$

కావున $\frac{\partial F}{\partial x}(-1,3) = 3(-1)^2 3+3^2 = 18$.

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_8.indd 80 03/03/2023 18:05:55

తరువాత ఇదేవిధంగా y దృష్ట్యా పాక్షిక అవకలనిను కనుగొంటాము.

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial(x^3y+y^2x+7)}{\partial y} = \frac{\partial(x^3y)}{\partial y}+\frac{\partial(y^2x)}{\partial y}+\frac{\partial(7)}{\partial y}$$

$$= x^3+2yx+0$$

$$= x^3+2yx\,.$$

కావున మనకు $\frac{\partial F}{\partial y}(-2,1)=(-2)^3+2(1)(-2)=-12$ గా కలదు.

పై ఉదాహరణలో $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=3x^2y+y^2$ అని గమనించుము. ఇది రెండు చరరాశులు గల ప్రమేయము కావున x లేదా y దృష్ట్యా ఈ ప్రమేయాలకు పాక్షిక అవకలనులను తీసుకొంటాము. దీనికి మనము $G(x,y)=3x^2y+y^2$ గా తీసుకొంటే, దీని నుంచి $\frac{\partial G}{\partial x}=6xy$ అగును. $G(x,y)=\frac{\partial F}{\partial x}$ అయిన $\frac{\partial G}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)=6xy$. దీనిని $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ గా సూచిస్తాము. దీనిని x దృష్ట్యా F యొక్క రెండవ తరగతి పాక్షిక అవకలని అంటారు. మరియు $\frac{\partial G}{\partial y}=3x^2+2y$, $G(x,y)=\frac{\partial F}{\partial x}$ అయిన $\frac{\partial G}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)=3x^2+2y$ అగును. దీనిని మనము $\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}$ గా సూచిస్తాము. దీనిని x,y ల దృష్ట్యా F యొక్క మిశ్రమ పాక్షిక అవకలని అంటారు. ఇదేవిధంగా $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)=3x^2+2y$ ను మనము లెక్కిస్తాము.

మరియు y దృష్ట్యా $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$ ను పాక్షికంగా అవకలనం చేస్తే $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ మనకు లభించును. దీనిని y దృష్ట్యా F యొక్క రెండవ తరగతి పాక్షిక అవకలని అంటారు. కావున $\{(x,y)\mid a<x<b,\, c<y<d\}\subset\mathbb{R}^2$ ఏదేని ఉపసమితికి ప్రమేయం $\neq$ ను నిర్వచించిన దానికి క్రింది సంకేతములను సూచిస్తాము.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)=F_{xx},\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)=F_{xy}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)=F_{yx},\quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)=F_{yy}$$

పైవన్నింటిని F యొక్క రెండవ తరగతి పాక్షిక అవకలనులు అంటారు. ఇదేవిధంగా ఉన్నతి తరగతి పాక్షిక అవకలనములను నిర్వచించగలము. ఉదాహరణకు, $\frac{\partial^3 F}{\partial y^2\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\right)$ మరియు $\frac{\partial^3 F}{\partial x\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\right)$

పాక్షిక అవకలనముపై మరికొన్ని ఉదాహరణలను చూస్తాము.

ఉదాహరణ 8.13

అన్ని $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ కు $f(x,y)=\sin(xy^2)+e^{x^3+5y}$ తీసుకొందాం. $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ మరియు $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ లను గణించుము.

సాధన

మొదట మనము $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ ను కనుగొంటాము. f రెండు ప్రమేయాల మొత్తమని గమనించుము మరియు కావున

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\sin(xy^2)+\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{x^3+5y}\right)\\ &= \cos(xy^2)\frac{\partial}{\partial x}(xy^2)+e^{x^3+5y}\frac{\partial}{\partial x}(x^3+5y)\\ &= \cos(xy^2)y^2+e^{x^3+5y}3x^2.\end{aligned}$$

ఇదే విధంగా,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\sin(xy^2)+\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x^3+5y}\right)\\ &= \cos(xy^2)\frac{\partial}{\partial y}(xy^2)+e^{x^3+5y}\frac{\partial}{\partial y}(x^3+5y)\\ &= \cos(xy^2)2xy+5e^{x^3+5y}.\end{aligned}$$

తరువాత మనము క్రింది దానిని తీసుకొందాం.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\cos(xy^2)+3x^2e^{x^3+5y}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial y}(y^2\cos(xy^2))+\frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2e^{x^3+5y}\right)\\ &= 2y\cos(xy^2)+y^2\left(-\sin(xy^2)2xy\right)+3x^2e^{x^3+5y}5\\ &= 2y\cos(xy^2)-2xy^3\sin(xy^2)+15x^2e^{x^3+5y}.\end{aligned}$$

చివరగా,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\cos(xy^2)2xy+5e^{x^3+5y}\right)\\ &= -\sin(xy^2)y^2\,2xy+\cos(xy^2)2y+5e^{x^3+5y}3x^2\\ &= 2y\cos(xy^2)-2xy^3\sin(xy^2)+15x^2e^{x^3+5y}.\end{aligned}$$

మనము మొదట సంకలన నియమము, తరువాత సోపానములో గొలుసు నియమమును మూడవ సోపానములో గుణకార నియమమును మనము ఉపయోగించాము. మరియు, మనము $f_{xy}=f_{yx}$ అని చూడగలము. ఇది యాదృచ్ఛికమా? లేదా ప్రతిసారి ఇది సత్యమా? వాస్తవంగా, కొన్ని బిందువుల వద్ద $f_{xy}\neq f_{yx}$ అగును. క్రింది సిద్ధాంతములు $f_{xy}=f_{yx}$ కు నిబంధనలను ఇస్తుంది.

సిద్ధాంతము 8.1 (క్లాయిరాట్స్ సిద్ధాంతము)

$A=\{(x,y)\,|\,a<x<b, c<y<d\}\subset\mathbb{R}^2$, $F:A\to\mathbb{R}$ తీసుకొందాము. f_{xy} మరియు f_{xy} లు A లో వ్యవస్థితమయ్యి A లో అవిచ్ఛిన్నములు అయిన A $f_{xy}=f_{yx}$ అగును.

ఈ దశలో మనము నిరూపణను వదిలేస్తాము.

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_8.indd 82 03/03/2023 18:06:07

ఉదాహరణ 8.14

అన్ని $w(x,y)=xy+\dfrac{e^y}{y^2+1}$ కు $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ అనుకొందాం. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial y\partial x}$ మరియు $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$ లను గణించుము.

సాధన

మొదట మనము $\dfrac{\partial w}{\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial(xy)}{\partial x}+\dfrac{\partial\left(\dfrac{e^y}{y^2+1}\right)}{\partial x}$ ను లెక్కిస్తాము.

ఇది $\dfrac{\partial w}{\partial x}(x,y)=y+0$ ను ఇచ్చును. మరియు $\dfrac{\partial^2 w}{\partial y\partial x}(x,y)=1$ అగును. మరొకవిధంగా,

$$\frac{\partial w}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial(xy)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\dfrac{e^y}{y^2+1}\right)}{\partial y}.$$

$$=x+\frac{(y^2+1)e^y-e^y 2y}{(y^2+1)^2}.$$

కావున $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}(x,y)=1$.

నిర్వచనము 8.9

$A=\{(x,y)\mid a<x<b, c<y<d\}\subset\mathbb{R}^2$ గా తీసుకొనుము ఒక ప్రమేయము $u:A\to\mathbb{R}^2$ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ ను తృప్తిపరచినట్లయితే u ను హార్మోనిక్ (**Harmonic**) అని అంటారు ఈ సమీకరణమును లాప్లాస్ యొక్క సమీకరణం అంటారు.

ఉష్ణవాహకము, స్థిర విద్యుత్ క్షేత్రము, ద్రవ ప్రవాహాలు మొదలగు వాటిని నేర్చుకొనుటలో లాప్లాస్ సమీకరణము ఉపయోగపడుతుంది.

ఉదాహరణ 8.15

ప్రతి $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ కు $u(x,y)=e^{-2y}\cos(2x)$ తీసుకొందాము. $\mathbb{R}^2$ లో u హార్మోనిక్ ప్రమేయమని నిరూపించుము.

సాధన

$\mathbb{R}^2$ లో u, లాప్లాస్ సమీకరణము తృప్తిపరచునని మనము నిరూపించవలెను. $u_x(x,y)=e^{-2y}(-2)\sin(2x)$ అని పరిశీలిస్తాము. మరియు $u_{xx}(x,y)=e^{-2y}(-2)(2)\cos(2x)$ అగును.

ఇదేవిధంగా, $u_y(x,y)=e^{-2y}(-2)\cos(2x)$ మరియు $u_{yy}(x,y)=(-2)(-2)e^{-2y}\cos(2x)$.

కావున, $u_{xx}+u_{yy}=-4e^{-2y}\cos(2x)+4e^{-2y}\cos(2x)=0$.

అభ్యాసము 8.4

1. ఇచ్చిన బిందువుల వద్ద క్రింది ప్రమేయాల పాక్షిక అవకలనులను కనుగొనుము.

   (i) $f(x,y)=3x^2-2xy+y^2+5x+2,\quad (2,-5)$

(ii) $g(x,y) = 3x^2 + y^2 + 5x + 2, \quad (1,-2)$

(iii) $h(x,y,z) = x\sin(xy) + z^2x, \quad \left(2, \frac{\pi}{4}, 1\right)$

(iv) $G(x,y) = e^{x+3y}\log(x^2+y^2), (-1,1)$

2. క్రిందివ్వబడిన ప్రమేయాలకు f_x, f_y, లను కనుగొనుము మరియు $f_{xy} = f_{yx}$ అని నిరూపించుము.

(i) $f(x,y) = \frac{3x}{y+\sin x}$ (ii) $f(x,y) = \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$ (iii) $f(x,y) = \cos(x^2 - 3xy)$

3. $U(x,y,z) = \frac{x^2+y^2}{xy} + 3z^2y$, అయితే $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}$ మరియు $\frac{\partial U}{\partial z}$ లను కనుగొనుము.

4. $U(x,y,z) = \log(x^3+y^3+z^3)$, అయితే $\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}$ లను కనుగొనుము.

5. క్రింద ఇవ్వబడిన ప్రతి ప్రమేయముకు g_{xy}, g_{xx}, g_{yy} మరియు g_{yx} లను కనుగొనుము.

(i) $g(x,y) = xe^y + 3x^2y$ (ii) $g(x,y) = \log(5x+3y)$

(iii) $g(x,y) = x^2 + 3xy - 7y + \cos(5x)$

6. $w(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, (x,y,z) \neq (0,0,0)$ అనుకొందాం. $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$ అని నిరూపించుము.

7. $V(x,y) = e^x(x\cos y - y\sin y)$, అయితే $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$ అని నిరూపించుము.

8. $w(x,y) = xy + \sin(xy)$, అయితే $\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ అని నిరూపించుము.

9. $v(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz$, అయితే $\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y}$ అని చూపుము.

10. ఒక కంపెనీ ప్రతివారం రెండు రకాలైన గణన యంత్రమునులను ఉత్పత్తి చేయును, అందులో x సంఖ్యలను A రకంగానూ మరియు y సంఖ్యలను B రకంగానూ తయారు చేయును. వాటి వారాంతర ఆదాయము మరియు వెల ప్రమేయాలు (రూపాయలలో) వరుసగా $R(x,y) = 80x + 90y + 0.04xy - 0.05x^2 - 0.05y^2$ మరియు $C(x,y) = 8x + 6y + 2000$.

(i) లాభ ప్రమేయము $P(x,y)$ ను కనుగొనుము.

(ii) $\frac{\partial P}{\partial x}(1200,1800)$ మరియు $\frac{\partial p}{\partial y}(1200,1800)$ కనుగొని ఈ ఫలితములను విశ్లేషించుము.

8.6 ఎక్కువ చరరాశులు గల ప్రమేయాల రేఖీయ ఉజ్జాయింపు మరియు అవకలనము

ఈ అధ్యాయ ప్రారంభములో మనము ఒక చరరాశి గల ప్రమేయాల రేఖీయ ఉజ్జాయింపు మరియు అవకలనములను నేర్చుకొన్నాము. ఇచ్చట మనము రెండు చరరాశులు మరియు మూడు చరరాశులు గల ప్రమేయాలకు ఇదే విధమైన విషయమును పరిచయము చేస్తాము. సాధారణంగా ఎక్కువ చరరాశులు గల

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_8.indd 84 03/03/2023 18:06:20

ప్రమేయాలకు ఈ భావనలను ఇదేవిధంగా నిర్వచించగలము.

నిర్వచనము 8.10

$A=\{(x,y)\,|\,a<x<b, c<y<d\}\subset\mathbb{R}^2, F:A\to\mathbb{R}$, మరియు $(x_0,y_0)\in A$ తీసుకొందాం.

(i) $(x_0,y_0)\in A$ వద్ద F యొక్క రేఖీయ ఉజ్జాయింపు

$$L(x,y)=F(x_0,y_0)+\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}(x-x_0)+\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}(y-y_0)$$ గా నిర్వచించబడినది. ... (12)

(ii) F యొక్క అవకలనము

$$dF=\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)dx+\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)dy$$ గా నిర్వచించాము ... (13)

ఇచ్చట $dx=\Delta x$ మరియు $dy=\Delta y$

ఇచ్చట, మనము 3 చరరాశులు గల ప్రమేయాలకు రేఖీయ ఉజ్జాయింపు మరియు అవకలనములను outline ఇచ్చాము. వాస్తవంగా, ఎక్కువ చరరాశులు గల వాస్తవ విలువ ప్రమేయాలకు రేఖీయ ఉజ్జాయింపు మరియు అవకలనములను మనము నిర్వచించగలము. కానీ మనము కేవలం మూడు చరరాశులకు మాత్రమే పరిమితము చేస్తాము.

నిర్వచనము 8.11

$A=\{(x,y,z)\,|\,a<x<b, c<y<d,\ e<z<f\}\subset\mathbb{R}^3, F:A\to\mathbb{R}$ మరియు $(x_0,y_0,z_0)\in A$.

(i) $(x_0,y_0,z_0)\in A$ వద్ద F యొక్క రేఖీయ ఉజ్జాయింపును

$$L(x,y,z)=F(x_0,y_0,z_0)+\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}(x-x_0)+\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}(y-y_0)+\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}(z-z_0);$$ గా నిర్వహించాము.

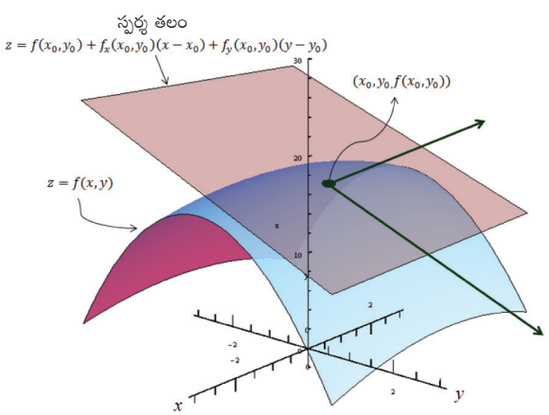
...(14)

(ii) F యొక్క అవకలనములకు

$$dF=\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)dx+\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)dy+\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)dz$$ గా నిర్వచించాము. ...(15))

ఇచ్చట, $dx=\Delta x, dy=\Delta y$ మరియు $dz=\Delta z$,

జ్యామితీయముగా, ఒక చరరాశి ప్రమేయముకు ఒక బిందువు f వద్ద రేఖీయ ఉజ్జాయింపు అనునది x_0 వద్ద $y=f(x)$ గ్రాఫ్ యొక్క స్పర్శరేఖను సూచించును. ఇదేవిధముగా రెండు చరరాశులు గల ప్రమేయం F కు ఒక బిందువు (x_0,y_0) వద్ద రేఖీయ ఉజ్జాయింపు అనునది (x_0,y_0) బిందువు వద్ద $z=F(x,y)$ గ్రాఫ్ యొక్క స్పర్శ తలమును సూచించును.



పటము 8.13

స్పర్శతలం ద్వారా రేఖీయ ఉజ్జాయింపు

ఉదాహరణ 8.16

$w(x,y,z) = x^2y + y^2z + z^2x, x, y, z \in \mathbb{R}$ అయిన అవకలనం dw ను కనుగొనుము.

సాధన

w_x, w_y మరియు w_z లను మొదట కనుగొందాం.

ఇప్పుడు $w_x = 2xy + z^2, w_y = 2yz + x^2$ మరియు $w_z = 2zx + y^2$.

(15) ద్వారా అవకలనం

$$dw = (2xy + z^2)dx + (2yz + x^2)dy + (2zx + y^2)dz .$$

ఉదాహరణ 8.17

$U(x,y,z) = x^2 - xy + 3\sin z, x, y, z \in \mathbb{R}$ అనుకొందాం. $(2,-1,0)$ వద్ద U యొక్క రేఖీయ ఉజ్జాయింపును కనుగొనుము.

సాధన

(14) ద్వారా రేఖీయ ఉజ్జాయింపును

$$L(x,y,z) = U(x_0,y_0,z_0) + \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}(x-x_0) + \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}(y-y_0) + \left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}(z-z_0)$$ ఇచ్చును.

ఇప్పుడు $U_x = 2x - y, U_y = -x$ మరియు $U_z = 3\cos z$.

ఇక్కడ $(x_0,y_0,z_0) = (2,-1,0)$, కావున $U_x(2,-1,0) = 5,\ U_y(2,-1,0) = -2$ మరియు $U_z(2,-1,0) = 3$.

$L(x,y,z) = 6 + 5(x-2) - 2(y+1) + 3(z-0) = 5x - 2y + 3z - 6$ అగును అనునది $(2,-1,0)$ వద్ద U లకు కావలసిన రేఖీయ ఉజ్జాయింపు అగును.

అభ్యాసము 8.5

1. $w(x,y) = x^3 - 3xy + 2y^2, x, y \in \mathbb{R}$, అయిన $(1,-1)$ వద్ద w కు రేఖీయ ఉజ్జాయింపును కనుగొనుము..
2. $z(x,y) = x^2y + 3xy^4, x, y \in \mathbb{R}$ అయిన $(2,-1)$ వద్ద z కు రేఖీయ ఉజ్జాయింపును కనుగొనుము.
3. $v(x,y) = x^2 - xy + \frac{1}{4}y^2 + 7, x, y \in R$, అయిన అవకలనము dv కనుగొనుము.
4. $V(x,y,z) = xy + yz + zx, x, y, z \in \mathbb{R}$ తీసుకుందాం. అవకలనము dV కనుగొనుము.

8.6.1 ప్రమేయ నియమము యొక్క ప్రమేయము

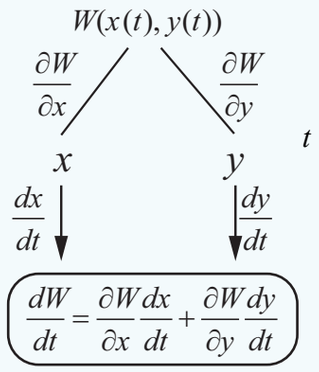
x, y లను రెండు చరరాశులుగల ప్రమేయం F అనుకొందాం. కొన్నిసార్లు ఈ చరరాశులు ఒ కే ప్రదేశము కలిగి ఉన్న ఒక చరరాశి గల ప్రమేయాలు కావచ్చు. ఈ సందర్భములో, ప్రమేయం F చివరికి ఒక చరరాశి పై మాత్రమే ఆధారపడును. కావున మనము ఈ F ను ఒక చరరాశి గల ప్రమేయముగా మనము భావించగలము మరియు $\frac{dF}{dt}$ గూర్చి నేర్చుకొంటాము. వాస్తవానికి ఇది యాదృచ్ఛికం కాదు. ఇది నిరూపించబడినది.

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_8.indd 86 03/03/2023 18:06:30

సిద్ధాంతము 8.2

$W(x,y)$ అనేది x, y అను రెండు చరరాశులు గల ప్రమేయము దీని పాక్షిక అవకలనులు $\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}$ చర రాశులు x, y లు ఏక చరరాశి t యొక్క ఆవకలనీయ ప్రమేయాలు అయితే W అనునది t యొక్క ఆవకలనీయ ప్రమేయమగును. మరియు

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial W}{\partial y}\frac{dy}{dt} \qquad ...(16)$$



పటము 8.14

పై సిద్ధాంతమును వివరించుటకు క్రింది ఉదాహరణను తీసుకొందాం.

ఉదాహరణ 8.18

$F(x,y) = x^2 - 2y^2 + 2xy$ కు పై సిద్ధాంతమును సరి చూడుము మరియు $x(t) = \cos t, y(t) = \sin t, t \in [0, 2\pi]$.

సాధన

$F(x,y) = x^2 - 2y^2 + 2xy$ మరియు $x(t) = \cos t, y(t) = \sin t$ అనుకొందాం.

తరువాత $F(x,y) = \cos^2 t - 2\sin^2 t + 2\cos t \sin t$ మరియు F, ఒక చరరాశి t గల ప్రమేయంగా మారును. కావున గొలుసు నియమము ఉపయోగించి మనము

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt} &= 2\cos t(-\sin t) - 4\sin t\cos t + 2(-\sin^2 t + \cos^2 t)\\ &= -6\cos t\sin t + 2(-\sin^2 t + \cos^2 t) \text{ గా గమనించవచ్చు.}\end{aligned}$$

మరొక విధముగా, మనము ఈ క్రింది విధముగా గమనించవచ్చును.

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} &= (2x+2y)\frac{dx}{dt} + (2x-4y)\frac{dy}{dt}\\ &= 2(\cos t + \sin t)(-\sin t) + 2(\cos t - 2\sin t)(\cos t)\\ &= -6\cos t\sin t + 2(-\sin^2 t + \cos^2 t)\\ &= \frac{dF}{dt}.\end{aligned}$$

ఉదాహరణ 8.19

$g(x,y) = x^2 - yx + \sin(x+y)$, $x(t) = e^{3t}$, $y(t) = t^2$, $t \in \mathbb{R}$ అనుకొందాం. $\frac{dg}{dt}$ ను కనుగొనుము.

సాధన

వృక్ష పటము ద్వారా దీనిని మనము లెక్కిస్తాము.

కావున మొదట మనము $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$, $\frac{dx}{dt}$ మరియు $\frac{dy}{dt}$ లను కనుగొనవలెను.

ఇప్పుడు, $\frac{\partial g}{\partial x} = 2x - y + \cos(x+y)$, $\frac{\partial g}{\partial y} = -x + \cos(x+y)$, $\frac{dx}{dt} = 3e^{3t}$ మరియు $\frac{dy}{dt} = 2t$.

కావున

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$= \big(2x - y + \cos(x+y)\big)3e^{3t} + \big(-x + \cos(x+y)\big)\big(2t\big)$$

$$= (2e^{3t} - t^2 + \cos(e^{3t} + t^2))3e^{3t} + (-e^{3t} + \cos(e^{3t} + t^2))(2t)$$

$$= 6e^{6t} - 3t^2e^{3t} + 3e^{3t}\cos(e^{3t} + t^2) - 2te^{3t} + 2t\cos(e^{3t} + t^2)\,.$$

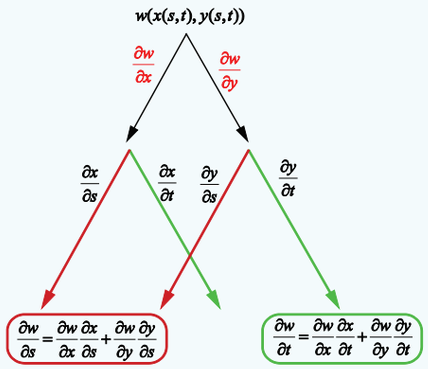
అలాగే కొన్నిసార్లు మన $W(x,y)$, $x = x(s,t)$ మరియు $y = y(s,t)$ ఇక్కడ $s,t \in \mathbb{R}$ అగునట్లు ఉండును. తరవాత W ను మనము s మరియు t లపై ఆధారపడిన ప్రమేయంగా అనుకోగలము. s,t ల దృష్ట్యా x,y ల రెండింటికి పాక్షిక అవకలనులు ఉన్నట్లయితే మరియు W కు x,y ల దృష్ట్యా పాక్షిక అవకలనము ఉంటుంది. ఇప్పుడు మనము W యొక్క పాక్షిక అవకలనములను s మరియు t దృష్ట్యా క్రింది సిద్ధాంతమును ఉపయోగించి కనుగొనగలము.

సిద్ధాంతము 8.3

$W(x,y)$ అనేది పాక్షిక అవకలనులు $\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}$. కలిగియున్న రెండు చరరాశులు x,y లు గల ప్రమేయము. రెండు చరరాశులు $x = x(s,t)$ కు మరియు $y = y(s,t)$ ఇక్కడ $s,t \in \mathbb{R}$ మరియు s మరియు t దృష్ట్యా పాక్షిక అవకలనులు కలిగి ఉన్నట్లయితే

$$\frac{\partial W}{\partial s} = \frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}, \qquad \ldots (17)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}. \qquad \ldots (18)$$



పటము 8.15

నిరూపణను మనము ఇక్కడ వదిలేస్తాము. పై సిద్ధాంతము చాలా ఉపయోగకరమైనది. ఉదాహరణకు ఒక పరిస్థితి పరిగణించడం $x = r\cos\theta$ మరియు $y = r\sin\theta, r \geq 0$ మరియు $\theta \in \mathbb{R}$ (నిరూపక వ్యవస్థ రూప నుంచి పరామితి రూపమునకు మార్చినప్పుడు) పై సిద్ధాంతమును n చరరాశులు గల ప్రమేయాలకు సాధారణీకరించవచ్చును.

ఒక ఉదాహరణను తీసుకొందాం.

ఉదాహరణ 8.20

$g(x,y) = 2y + x^2, x = 2r - s, y = r^2 + 2s, r,s \in \mathbb{R}$ అనుకుందాం. $\frac{\partial g}{\partial r}, \frac{\partial g}{\partial s}$ లను కనుగొనుము.

సాధన

ఇక్కడ మనము మరల $\frac{\partial g}{\partial r}, \frac{\partial g}{\partial s}$ లను కనుగొనుటకు వృక్ష చిత్రమును ఉపయోగిస్తాము.

కావున దీనిని కనుగొంటాము. $\frac{\partial g}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial g}{\partial y} = 2,\ \frac{\partial x}{\partial r} = 2,\ \frac{\partial x}{\partial s} = -1,\ \frac{\partial y}{\partial r} = 2r$ మరియు $\frac{\partial y}{\partial s} = 2$.

ఇప్పుడు $$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = 2x(2) + 2(2r) = 12r - 4s\,.$$

మరియు, $$\frac{\partial g}{\partial s} = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = 2x(-1) + (2)2 = 2s - 4r + 4\,.$$

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_8.indd 88 03/03/2023 18:06:42

అభ్యాసము 8.6

1. $u(x,y)=x^2y+3xy^4$, $x=e^t$ మరియు $y=\sin t$, అయితే $\frac{du}{dt}$ ను కనుగొని $t=0$ వద్ద దీనిని గణించుము.

2. $u(x,y,z)=xy^2z^3$, $x=\sin t$, $y=\cos t$, $z=1+e^{2t}$, అయితే $\frac{du}{dt}$ ను కనుగొనుము.

3. $w(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, $x=e^t$, $y=e^t\sin t$ మరియు $z=e^t\cos t$, అయితే $\frac{dw}{dt}$ ను కనుగొనుము.

4. $U(x,y,z)=xyz$, $x=e^{-t}$, $y=e^{-t}\cos t$, $z=\sin t$, $t\in\mathbb{R}$ తీసుకొందాం. $\frac{dU}{dt}$ ను కనుగొనుము.

5. $w(x,y)=6x^3-3xy+2y^2$, $x=e^s$, $y=\cos s$, $s\in\mathbb{R}$, అయితే $\frac{dw}{ds}$ ను కనుగొని $s=0$ వద్ద దీనిని గణించుము.

6. $z(x,y)=x\tan^{-1}(xy)$, $x=t^2$, $y=se^t$, $\quad s,t\in\mathbb{R}$ అయితే $s=t=1$ వద్ద $\frac{\partial z}{\partial s}$ మరియు $\frac{\partial z}{\partial t}$ ను కనుగొనుము.

7. $U(x,y)=e^x\sin y$, ఇచ్చట $x=st^2$, $y=s^2t$, $s,t\in\mathbb{R}$ తీసుకొందాం. $\frac{\partial U}{\partial s},\frac{\partial U}{\partial t}$ కనుగొనుము. మరియు వీటిని $s=t=1$ వద్ద గణించుము.

8. $z(x,y)=x^3-3x^2y^3$, ఇక్కడ $x=se^t, y=se^{-t}$, $\quad s,t\in\mathbb{R}$ తీసుకొందాం. $\frac{\partial z}{\partial s}$ మరియు $\frac{\partial z}{\partial t}$ లను కనుగొనుము.

9. $W(x,y,z)=xy+yz+zx$, $x=u-v$, $y=uv$, $z=u+v$, $\quad u,v\in\mathbb{R}$ అనుకొందాం. $\frac{\partial W}{\partial u}$ మరియు $\frac{\partial W}{\partial v}$ కనుగొనుము. మరియు $\left(\frac{1}{2},1\right)$ వద్ద వీటిని గణించుము.

8.6.2 సమఘాతీయ ప్రమేయాలు మరియు ఆయిలర్స్ సిద్ధాంతము

నిర్వచనము 8.12

(అ) $A=\{(x,y)\,|\,a<x<b,\ c<y<d\}\subset\mathbb{R}^2$, $F:A\to\mathbb{R}$ అనుకొందాము. ప్రతి $\lambda\in\mathbb{R}$ కు $F(\lambda x,\lambda y)=\lambda^p F(x,y)$ అగునట్లు p అను ఒక స్థిరాంకము వ్యవస్థితమైన F ను మనము A లో సమఘాతీయ ప్రమేయము అంటారు. ఇచ్చట λ, x, y లను $(\lambda x,\lambda y)\in A$ అగునట్లు పరిమితం చేయబడినది. ఈ స్థిరాంకము p ను F యొక్క పరిమాణము అంటారు.

(ఆ) $B=\{(x,y,z)\,|\,a<x<b,\ c<y<d,\ u<z<v\}\subset\mathbb{R}^3$, $G:B\to\mathbb{R}$ అనుకొందాం. ప్రతి $\lambda\in\mathbb{R}$ కు $G(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=\lambda^p G(x,y,z)$ అగునట్లు p అను ఒక స్థిరాంకము వ్యవస్థితమైన G ను మనము B లో సమఘాతీయ ప్రమేయము అంటారు. ఇచ్చట λ, x, y, z లను $(\lambda x,\lambda y,\lambda z)\in B$ అగునట్లు పరిమితం చేయబడినది. ఈ స్థిరాంకం p ను G యొక్క పరిమాణము అంటారు.

గమనిక: ఏ చరరాశితో నైనా భాగించవచ్చు. కానీ సున్నాతో భాగించుటను నివారించడానికి λ, x, y, z లను అనుకూలంగా పరిమితం చేయబడిన వాస్తవ సంఖ్యలు అంటారు.

సాధారణ అవకలన సమీకరణంలో ఈ రకమైన ప్రమేయాలు ముఖ్యమైనవి. (అధ్యాయము 10) కొన్ని ఉదాహరణలను తీసుకుందాము.

$F(x,y) = x^3 - 2y^3 + 5xy^2,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$ తీసుకొందాం. తరువాత

$$F(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^3 - 2(\lambda y)^3 + 5(\lambda x)(\lambda y)^2 = \lambda^3(x^3 - 2y^3 + 5xy^2)$$

కావున F అనునది పరిమాణం 3 గా గల సమఘాతీయ ప్రమేయము అగును.

మరొక విధంగా,

$G(x,y) = e^{x^2} + 3y^2$ అనునది సమఘాతీయ ప్రమేయం కాదు.

ఎందుకనగా $G(\lambda x, \lambda y) = e^{(\lambda x)^2} + 3(\lambda y)^2 \neq \lambda^p G(x,y)$

ఏదేని $\lambda \neq 1$ మరియు ఏదేని p కు.

ఉదాహరణ 8.21

$F(x,y) = \dfrac{x^2 + 5xy - 10y^2}{3x + 7y}$ ను పరిమాణం 1 గా గల సమాఘాతీయ ప్రమేయమని నిరూపించుము.

సాధన

మనము గణిస్తాము

$$F(\lambda x, \lambda y) = \frac{(\lambda x)^2 + 5(\lambda x)(\lambda y) - 10(\lambda y)^2}{3\lambda x + 7\lambda y} = \frac{\lambda^2}{\lambda}\left(\frac{x^2 + 5xy - 10y^2}{3x + 7y}\right) = \lambda F(x,y)$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ కు, కావున F అనునది పరిమాణం 1 గా గల ఒక సమఘాతీయ ప్రమేయము అగును.

మనము సమఘాతీయ ప్రమేయాలపై లియోనార్డ్ ఆయిలర్స్ సిద్ధాంతమును క్రింది విధంగా నిర్వచిస్తాము. ■

నిర్వచనము 8.13 (ఆయిలర్స్)

$A = \{(x,y) \mid a < b,\ c < y < d\} \subset \mathbb{R}^2$, $F : A \to \mathbb{R}^2$ తీసుకొందాము. F అవిచ్ఛిన్న పాక్షిక అవకలనులను కలిగి మరియు A పై పరిమాణం p గా గల సమఘాతీయం అయిన

$$x\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = pF(x,y)\ \forall\ (x,y) \in A.$$

$B = \{(x,y,z) \mid a < x < b,\ c < y < d,\ u < z < v\} \subset \mathbb{R}^3$, $F : B \to \mathbb{R}^3$. F అవిచ్ఛిన్న పాక్షిక అవకలనులను కలిగి మరియు B పై పరిమాణం p గా గల సమఘాతీయమైన

$$x\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) + y\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) + z\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = pF(x,y,z)\ \forall\ (x,y,z) \in B.$$

మనము దీని నిరూపణను వదిలి వేస్తాము. n చరరాశులు గల సమ ఘాతీయ ప్రమేయాలకు పై సిద్ధాంతము సత్యము. మరియు ఇది మొదటి తరగతి పాక్షిక అవకలనుల నిర్ణీత గణనలకు ఈ సిద్ధాంతము ఉపయోగపడును.

ఉదాహరణ 8.22

$u = \sin^{-1}\left(\dfrac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)$ అయిన $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{1}{2}\tan u$ అని చూపుము.

సాధన

u సమ ఘాతీయము కాదని గమనించుము. కావున u కు ఆయిలర్స్ సిద్ధాంతమును ఉపయోగించ లేము.

కానీ, $f(x,y) = \dfrac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \sin u$ గా మార్చిన సమఘాతీయం అగును. ఎందుకనగా,

$$f(tx,ty) = \frac{tx+ty}{\sqrt{tx}+\sqrt{ty}} = t^{1/2} f(x,y),\ \forall\ x,y,t \geq 0.$$

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_8.indd 90 03/03/2023 18:06:56

f అనునది $\frac{1}{2}$ పరిమాణముతో సమఘాతీయము లేదా $\frac{1}{2}$ పరిమాణముతో f సమఘాతీయము మరియు ఆయిలర్స్ సిద్ధాంతము నుండి

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{2}f(x,y).$$

ఇప్పుడు $f=\sin u$ ప్రతిక్షేపించగా, పై సమీకరణము క్రింది విధంగా మారును.

$$x\frac{\partial(\sin u)}{\partial x}+y\frac{\partial(\sin u)}{\partial y}=\frac{1}{2}\sin u$$

$$x\cos u\frac{\partial u}{\partial x}+y\cos u\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2}\sin u \qquad \ldots (19)$$

ఇరువైపుల $\cos u$ చే భాగించిన, మనకు లభించునది.

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2}\tan u\,.$$

గమనిక:

ఈ సమస్యను మనము నేరుగా సాధించవచ్చును. కాని దీని గణనకు ఎక్కువ సమయం పట్టును. ■

అభ్యాసము 8.7

1. ఈ క్రింద ఇవ్వబడిన ప్రమేయాలు (దత్త సందర్భములో) సమఘాతీయమా? లేదా కనుగొనుము. ఒకవేళ సమఘాతీయమైన పరిమాణమును కనుగొనుము.

   (i) $f(x,y)=x^2y+6x^3+7$ (ii) $h(x,y)=\dfrac{6x^2y^3-\pi y^5+9x^4y}{2020x^2+2019y^2}$

   (iii) $g(x,y,z)=\dfrac{\sqrt{3x^2+5y^2+z^2}}{4x+7y}$ (iv) $U(x,y,z)=xy+\sin\left(\dfrac{y^2-2z^2}{xy}\right)$.

2. $f(x,y)=x^3-2x^2y+3xy^2+y^3$ అనునది సమఘాతీయమని నిరూపించి, దాని పరిమాణమును కనుగొనుము? f కు ఆయిలర్స్ సిద్ధాంతమును సరిచూడుము.

3. $g(x,y)=x\log\left(\dfrac{y}{x}\right)$ అనునది సమఘాతీయమని నిరూపించి, దీని పరిణామమును కనుగొనుము? g కు ఆయిలర్స్ సిద్ధాంతమును సరిచూడుము.

4. $u(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x+y}}$, అయిన $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{3}{2}u$ అని నిరూపించుము.

5. $v(x,y)=\log\left(\dfrac{x^2+y^2}{x+y}\right)$, అయిన $x\dfrac{\partial v}{\partial x}+y\dfrac{\partial v}{\partial y}=1$ అని నిరూపించుము.

6. $w(x,y,z)=\log\left(\dfrac{5x^3y^4+7y^2xz^4-75y^3z^4}{x^2+y^2}\right)$, అయిన $x\dfrac{\partial w}{\partial x}+y\dfrac{\partial w}{\partial y}+z\dfrac{\partial w}{\partial z}$ ను కనుగొనుము..

అభ్యాసము 8.8

ఇచ్చిన 4 ప్రత్యామ్నాయములలో సరియైన సమాధానమును లేదా మిక్కిలి సరియైన సమాధానమును ఎన్నుకొనుము.

1. ఒక వృత్తాకార ఫలక (నమూనా) (template) యొక్క వ్యాసార్ధము 10 సెం.మీ., వ్యాసార్ధమును కొలుచుటలో ఉజ్జాయింపు దోషము 0.02 సెం.మీ ఫలక యొక్క వైశాల్యము గణించుటలో గల దోష శాతము.
   (1) 0.2% (2) 0.4% (3) 0.04% (4) 0.08%

2. 31 యొక్క 5వ వర్గమూల దోష శాతము, దాని యొక్క దోష శాతములో ఎన్నిసార్లు ఉంటుంది?
   (1) $\frac{1}{31}$ (2) $\frac{1}{5}$ (3) 5 (4) 31

3. $u(x,y)=e^{x^2+y^2}$ అయిన $\frac{\partial u}{\partial x}$ కు సమానము.
   (1) $e^{x^2+y^2}$ (2) $2xu$ (3) x^2u (4) y^2u

4. $v(x,y)=\log(e^x+e^y)$, అయిన $\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}$ కు సమానము.
   (1) e^x+e^y (2) $\frac{1}{e^x+e^y}$ (3) 2 (4) 1

   WZTMJ

5. $w(x,y)=x^y$ లు $x>0$ అయిన $\frac{\partial w}{\partial x}$ కు సమానము.
   (1) $x^y\log x$ (2) $y\log x$ (3) yx^{y-1} (4) $x\log y$

6. $f(x,y)=e^{xy}$ అయిన $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ కు సమానము.
   (1) xye^{xy} (2) $(1+xy)e^{xy}$ (3) $(1+y)e^{xy}$ (4) $(1+x)e^{xy}$

7. ఒక సమ ఘనము యొక్క భుజము 4 సెం.మీ, కొలుచుటలో దోషము 0.1 సెం.మీ అయిన ఘనపరిమాణము కొలుచుటలో గల దోషమును కనుగొనుము.
   (1) 0.4 cu.సెం.మీ (2) 0.45 cu.సెం.మీ (3) 2 cu.సెం.మీ (4) 4.8 cu.సెం.మీ

8. ఒక సమ ఘనముయొక్క ఉపరితల వైశాల్యము $S=6x^2$. దీని భుజము పొడవు x_0 నుంచి x_0+dx గా మారినపుడు ఉపరితల వైశాల్యంలోని మార్పు
   (1) $12x_0+dx$ (2) $12x_0dx$ (3) $6x_0dx$ (4) $6x_0+dx$

9. భుజము x మీటర్లుగా గల సమఘనము యొక్క భుజము 1% పెరిగినప్పుడు దాని ఘనపరిమాణం V లోని ఉజ్జాయింపు మార్పు
   (1) $0.3xdx$ మీ^{3} (2) $0.03x$ మీ^{3} (3) $0.03x^2$ మీ^{3} (4) $0.03x^3$ మీ^{3}

10. $g(x,y)=3x^2-5y+2y^2, x(t)=e^t$ మరియు $y(t)=\cos t$ అయిన $\frac{dg}{dt}$ కు సమానము
    (1) $6e^{2t}+5\sin t-4\cos t\sin t$ (2) $6e^{2t}-5\sin t+4\cos t\sin t$
    (3) $3e^{2t}+5\sin t+4\cos t\sin t$ (4) $3e^{2t}-5\sin t+4\cos t\sin t$

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_8.indd 92 03/03/2023 18:07:10

11. $f(x)=\frac{x}{x+1}$, అయిన దీని యొక్క అవకలనము.

(1) $\frac{-1}{(x+1)^2}dx$ (2) $\frac{1}{(x+1)^2}dx$ (3) $\frac{1}{x+1}dx$ (4) $\frac{-1}{x+1}dx$

12. $u(x,y)=x^2+3xy+y-2019$ అయిన $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(4,-5)}$ కు సమానము.

(1) -4 (2) -3 (3) -7 (4) 13

13. $g(x)=\cos x$, $x=\frac{\pi}{2}$ వద్ద రేఖీయ ఉజ్జాయింపు

(1) $x+\frac{\pi}{2}$ (2) $-x+\frac{\pi}{2}$ (3) $x-\frac{\pi}{2}$ (4) $-x-\frac{\pi}{2}$

14. $w(x,y,z)=x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$, అయిన $\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$ is

(1) $xy+yz+zx$ (2) $x(y+z)$ (3) $y(z+x)$ (4) 0

15. $f(x,y,z)=xy+yz+zx$, అయిన f_x-f_z కు సమానము.

(1) $z-x$ (2) $y-z$ (3) $x-z$ (4) $y-x$

సారాంశము

- $x_0\in(a,b)$ మరియు $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ ఒక అవకలనీయ ప్రమేయమును తీసుకొందాం. $L(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\forall x\in(a,b)$, అనునది x_0 వద్ద f యొక్క రేఖీయ ఉజ్జాయింపు L ను ఇస్తుంది.
- సంపూర్ణ దోషము = సహజ విలువ – ఉజ్జాయింపు విలువ

  సాపేక్ష దోషము $=\frac{\text{సంపూర్ణ దోషము}}{\text{సహజ దోషము}}$

  దోషశాతము = సాపేక్ష దోషము $\times 100$

  (లేదా)

  $\frac{\text{సంపూర్ణ దోషము}}{\text{సహజ దోషము}}\times 100$
- $x\in(a,b)$ కు $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ ఒక అవకలనీయ ప్రమేయము మరియు x లోని పెరుగుదల Δx అనుకొందాం. f యొక్క అవకలనము $df=f'(x)\Delta x$ గా నిర్వచింపబడినది.
- ఒక చరరాశి గల ప్రమేయం యొక్క అన్ని అవధుల నియమములు (అవధి సిద్ధాంతములు) అధిక చరరాశులు గల ప్రమేయాలకు కూడా సత్యము అగును.
- $A=\{(x,y)\mid a<x<b,\ c<y<d\}\subset\mathbb{R}^2, F:A\to\mathbb{R}$ మరియు $(x_0,y_0)\in A$ అనుకొందాం.

  (i) $\lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h,y_0)-F(x_0,y_0)}{h}$ వ్యవస్థితమైన $(x_0,y_0)\in A$ వద్ద x దృష్ట్యా F కు పాక్షిక అవకలనము ఉంటుంది. మరియు దీనిని $\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$ గా సూచిస్తాము.

$\lim_{k\to 0}\frac{F(x_0,y_0+k)-F(x_0,y_0)}{k}$ వ్యవస్థి తమైన $(x_0,y_0)\in A$ వద్ద y దృష్ట్యా F కు పాక్షిక అవకలనము ఉంటుంది మరియు దీనిని $\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$ గా సూచిస్తాము.

- క్లారియన్ట్స్ సిద్ధాంతము: $A=\{(x,y)|\, a<x<b,\, c<y<d\}\subset\mathbb{R}^2$, $F:A\to\mathbb{R}$ తీసుకొందాం. A లో f_{xy} మరియు f_{yx} వ్యవస్థితం మరియు A లో అవిచ్ఛిన్నమైన A లో $f_{xy}=f_{yx}$ అగును.
- $A=\{(x,y)|\, a<x<b,\, c<y<d\}\subset\mathbb{R}^2$ తీసుకొందాం. ఒక ప్రమేయము $U:A\to\mathbb{R}$, $\forall(x,y)\in A$ ను $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, తృప్తిపరిచిన దానిని హార్మోనిక్ ప్రమేయము అంటారు. ఈ సమీకరణమును లాప్లాస్ సమీకరణము అంటారు.
- $A=\{(x,y)|\, a<x<b,\, c<y<d\}\subset\mathbb{R}^2$, $F:A\to\mathbb{R}$ మరియు $(x_0,y_0)\in A$.

  (i) $(x_0,y_0)\in A$ వద్ద F యొక్క రేఖీయ ఉజ్జాయింపు

  $L(x,y)=F(x_0,y_0)+\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}(x-x_0)+\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}(y-y_0)$ గా నిర్వచించబడినది.

  (ii) F యొక్క అవకలనము $dF=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy$ గా నిర్వచించారు. ఇచ్చట $\Delta x=dx$ మరియు $\Delta y=dy$.
- x మరియు y అను రెండు చరరాశులు గల ప్రమేయము w ను తీసుకొందాం. ఇచ్చట x మరియు yలు ఒకే చరరాశి tగా గల ప్రమేయాలు అయితే $\frac{dw}{dt}=\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$
- x మరియు y అను రెండు చరరాశులు గల ప్రమేయము w ను తీసుకొందాం. ఇచ్చట x మరియు y, s మరియు t అను చరరాశులు గల ప్రమేయాలు అయితే $\frac{\partial w}{\partial s}=\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}$, $\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$
- $A=\{(x,y)|\, a<x<b,\, c<y<d\}\subset\mathbb{R}^2$, $F:A\to\mathbb{R}^2$. తీసుకొందాం. F అనునది p పరిమాణంతో A లో సమఘాతీయం మరియు పాక్షిక అవకలనులను కలిగి ఉంటే $x\frac{\partial F}{\partial x}+y\frac{\partial F}{\partial y}=pF$.

అంతర్జాల కృత్యము (ICT CORNER)

https://ggbm.at/dy9kwgbt or Scan the QR Code

బ్రౌజర్‌ని ఓపెన్ చేయుము ఇవ్వబడిన URL లింకును టైపు చేయము లేదా QR కోడ్‌ను స్కాన్ చేయుము. జియోజీబ్రా అను వర్క్‌బుక్ "12వ తరగతి గణితము భాగము – 2" పేరుమీద ఓపెన్ అగును. వర్క్‌బుక్ యొక్క ఎడమవైపున మీ అచ్చు పుస్తకమునకు సంబంధించిన అధ్యాయములు ఉంటుంది. "అవకలనములు మరియు పాక్షిక అవకలనులు" పై క్లిక్ చేయుము. ఈ అధ్యాయమునకు సంబంధించిన చాలా వర్క్ షీట్స్ కనబడును. అన్ని వర్క్‌షీట్స్‌ను పరిశీలించుము.

02_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_8.indd 94 03/03/2023 18:07:24

అధ్యాయము

9

సమాకలనముల అనువర్తనాలు

"నాకు నిలబడడానికి ఒక స్థలాన్ని ఇవ్వండి, నేను భూమిని కదిలిస్తాను"

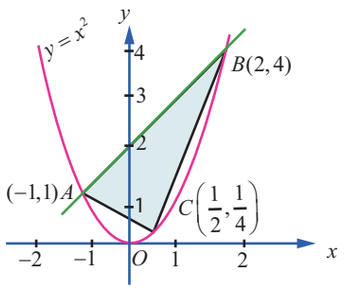
-ఆర్కిమెడీస్

9.1 పరిచయము



Archimedes of Syracuse (288BC(BCE)-212BC(BCE)) was a Greek mathematician, physicist, engineer, inventor

జ్యామితీయ వస్తువుల వైశాల్యాలు మరియు ఘనపరిమాణాలు గణన చేయడంలో అద్భుతమైన ఆవిష్కరణాలు చేసిన ప్రాచీన గణితశాస్త్రవేత్తలలో ఆర్కిమెడీస్ ఒకరు. పటములో చూపినట్లుగా గల ఒక పరావలయం మరియు సరళరేఖల మధ్య పరివేష్ఠితమైన ప్రాంతము వైశాల్యము. వాని మధ్య అంతర్లిఖించబడ్డ త్రిభుజ వైశాల్యానికి $\frac{4}{3}$ రెట్లు ఉంటుందని ఆర్కిమెడీస్ నిరూపించారు. (పటము 9.1ను చూడండి)



పటము 9.1

ఆర్కిమెడీస్ ఒక ప్రాంతాన్ని అనేక చిన్న ప్రాంతాలుగా విభజించి, వాటి వైశాల్యాల మొత్తమును కనుగొనడం ద్వారా ఆ ప్రాంత వైశాల్యాన్ని కనుగొన్నాడు. ఈ అవధుల భావన అనునది నిశ్చిత సమాకలని యొక్క నిర్వచనములో అంతర్గతముగా ఉన్నది. ఈ భావనను మనము నిర్ధిష్ట జ్యామితీయ ఆకారాల వైశాల్యాలు మరియు ఘనపరిమాణములు కనుగొనడంలో అనువర్తింపబడును.

అభ్యసన లక్ష్యాలు

ఈ అధ్యాయమును పూర్తిచేయడం ద్వార విద్యార్థులు ఈ క్రింది సామర్థ్యాలను పొందుతారు.

- నిశ్చిత సమాకలనిని అవధుల మొత్తముగా నిర్వచించడం
- నిశ్చిత సమాకలనిని జ్యామితీయంగా చూపడం
- సమాకలన గణితము యొక్క ప్రాథమిక సిద్ధాంతాన్ని ఉపయోగించడం
- వ్యతిరేక ఉత్పన్నాలను కనుగొనుటను నిశ్చిత సమాకలని ద్వారా గణించడం
- నిశ్చిత సమాకలని యొక్క ధర్మాలను రాబట్టడం
- అనిశ్చిత అపక్రమ సమాకలనాలను మరియు గామా సమాకలనాలను గుర్తించడం
- క్షయకరణ సూత్రాలను ఉత్పాదించడం
- నిశ్చిత సమాకలనాలను అనువర్తించి సమతల ప్రాంత వైశాల్యాలను గణించడం
- నిశ్చిత సమాకలనాలను అనువర్తించి భ్రమణములో గల ఘన వస్తువుల ఘనపరిమాణమును గణించడం

03_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_9.indd 95 03/03/2023 18:10:40

మనము ఇంతకుముందు చదివిన ప్రమేయము $f(x)$ యొక్క వ్యతిరేక ఉత్పన్నాలను గుర్తుతెచ్చుకొందాం. $\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$ అయ్యే విధంగా ఒక ప్రమేయం $F(x)$ ఉంటే $F(x)$ ను, $f(x)$ యొక్క వ్యతిరేక ఉత్పన్నం అంటారు.

ఇది ఏకైకం కాదు. ఎందుకంటే, ఇక్కడ C అనునది స్థిరాంకము. కనుక మనకు $\frac{d}{dx}[F(x)+C]=\frac{d}{dx}[F(x)]=f(x)$ లభించును. $f(x)$ యొక్క వ్యతిరేక ఉత్పన్నం $F(x)$ అయితే $f(x)$ ప్రమేయం యొక్క వ్యతిరేక ఉత్పన్నం $F(x)+C$ కూడా $f(x)$ అవుతుంది. $f(x)$ యొక్క అన్ని వ్యతిరేక ఉత్పన్నాలు స్థిరంకాలలో మాత్రమే విభిన్నముగా ఉంటాయని గమనించండి. $f(x)$ యొక్క వ్యతిరేక ఉత్పన్నమును సాధారణముగా x సంబంధించి $f(x)$ యొక్క అనిశ్చిత సమాకలనముగా పిలువబడుతుంది. దీనిని $\int f(x)dx$ చే సూచిస్తారు.

అనిశ్చిత సమాకలనము యొక్క బాగుగా తెలిసిన ధర్మము రేఖీయ ధర్మము. $\int[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx=\alpha\int f(x)dx+\beta\int g(x)dx$, ఇక్కడ α, β లు స్థిరాంకాలు.

క్రింది పట్టికలో కొన్ని ప్రమేయములు మరియు వాటి వ్యతిరేక ఉత్పన్నాలు ఇవ్వబడ్డాయి. (అనిశ్చిత సమాకలనాలు)

ప్రమేయం ($f(x)$)	అనిశ్చిత సమాకలనం ($\int f(x)dx$)
K ఒక స్థిరాంకం	$Kx+C$
$(ax+b)^n$ ఇక్కడ $a\neq 0$ మరియు b లు స్థిరాంకాలు మరియు $n\neq -1$	$\frac{1}{a}\left[\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}\right]+C$
$\frac{1}{ax+b}$ ఇక్కడ $a\neq 0$ మరియు b లు స్థిరాంకాలు	$\frac{1}{a}\log_e\lvert(ax+b)\rvert+C$
e^{ax} ఇక్కడ a అనునది సున్నాకాని స్థిరాంకము.	$\frac{e^{ax}}{a}+C$
$\sin(ax+b)$ ఇక్కడ $a\neq 0$ మరియు b లు స్థిరాంకాలు.	$-\frac{\cos(ax+b)}{a}+C$
$\cos(ax+b)$ ఇక్కడ $a\neq 0$ మరియు b లు స్థిరాంకాలు.	$\frac{\sin(ax+b)}{a}+C$
$\tan(ax+b)$ ఇక్కడ $a\neq 0$ మరియు b లు స్థిరాంకాలు.	$\frac{1}{a}\log\lvert\sec(ax+b)\rvert+C$
$\cot(ax+b)$ ఇక్కడ $a\neq 0$ మరియు b లు స్థిరాంకాలు.	$\frac{1}{a}\log\lvert\sin(ax+b)\rvert+C$
$\sec(ax+b)$ ఇక్కడ $a\neq 0$ మరియు b లు స్థిరాంకాలు.	$\frac{1}{a}\log\lvert\sec(ax+b)+\tan(ax+b)\rvert+C$
$\operatorname{cosec}(ax+b)$ ఇక్కడ $a\neq 0$ మరియు b ఇది ఒక స్థిరాంకము.	$-\frac{1}{a}\log\lvert\operatorname{cosec}(ax+b)-\cot(ax+b)\rvert+C$

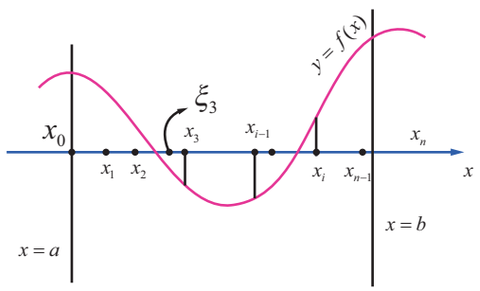
03_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_9.indd 96 03/03/2023 18:10:48

$\frac{1}{a^2+x^2}$, ఇక్కడ $a \neq 0$ ఇది ఒక స్థిరాంకము.	$\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C$
$\frac{1}{a^2-x^2}$, ఇక్కడ $a \neq 0$ ఇది ఒక స్థిరాంకము.	$\frac{1}{2a}\log_e\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\|+C$
$\frac{1}{x^2-a^2}$, ఇక్కడ $a \neq 0$ ఇది ఒక స్థిరాంకము.	$\frac{1}{2a}\log_e\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\|+C$
$\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$, ఇక్కడ a ఇది ఒక స్థిరాంకము.	$\log_e\left\|x+\sqrt{a^2+x^2}\right\|+C$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$, ఇక్కడ $a \neq 0$ ఇది ఒక స్థిరాంకము.	$\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$, ఇక్కడ a ఇది ఒక స్థిరాంకము.	$\log_e\left\|x+\sqrt{x^2-a^2}\right\|+C$
$\sqrt{a^2+x^2}$, ఇక్కడ a ఇది ఒక స్థిరాంకము.	$\frac{x\sqrt{a^2+x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\log_e\left\|x+\sqrt{a^2+x^2}\right\|+C$
$\sqrt{a^2-x^2}$, ఇక్కడ a ఇది ఒక స్థిరాంకము.	$\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C$
$\sqrt{x^2-a^2}$, ఇక్కడ a ఇది ఒక స్థిరాంకము.	$\frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2}-\frac{a^2}{2}\log_e\left\|x+\sqrt{x^2-a^2}\right\|+C$

9.2 నిశ్చిత సమాకలనమును అవధుల మొత్తముగా చూపుట

9.2.1 రేమన్ సమాకలనము

వాస్తవ విలువైన, సంవృత ప్రమేయం $f(x)$ ను సరిహద్దుగా మరియు సంవృత అంతరాలు $[a,b]$, $a<b$. గా నిర్వచించబడినది అనుకొనుము. ప్రమేయం $f(x)$ అంతరం $[a,b]$ పైన ఒకే విధమైన గుర్తును కలిగియుండకపోవచ్చు. అనగా $f(x)$ కు $[a,b]$ అంతరముపై ధన మరియు ఋణ విలువలను కలిగియుండవచ్చు. పటము 9.2లో చూపిన విధముగా అంతరం $[a,b]$ ను n ఉపఅంతరాలుగా విభజించిన, అనగా $[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-2},x_{n-1}],[x_{n-1},x_n]$ అలాగే $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$. ప్రతి ఉపఅంతరంలో $[x_{i-1},x_i], i=1,2,\cdots,n,$ అను ఏకపక్షమైన వాస్తవ సంఖ్యను తీసుకొనుము. అలాగే ξ_i మొత్తం $x_{i-1}\leq\xi_i\leq x_i$.



పటము 9.2

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}) = f(\xi_1)(x_1-x_0)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+\cdots+f(\xi_n)(x_n-x_{n-1}) \quad \ldots.(1)$$ అనుకొనుము.

(1)లో గల మొత్తమును, $[a,b]$. యొక్క $[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-1},x_n]$ అను విభాజనాలకు సంబంధించిన $f(x)$ యొక్క రీమాన్ మొత్తము అంటారు. $x_{i-1}\leq\xi_i\leq x_i$, అను నిబంధనను తృప్తిపరచు అనంత ξ_i విలువలు ఉన్నందువలన $[a,b]$. యొక్క $[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-1},x_n]$ అను అదే విభాజనమునకు సంబంధించిన $f(x)$

03_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_9.indd 97 03/03/2023 18:10:55

యొక్క రీమాన్ మొత్తములు అనంతంగా ఉంటాయి. అవధి ప్రక్రియ ప్రకారము $n \to \infty$ మరియు గరిష్ఠ $\left(x_i - x_{i-1}\right) \to 0$ అయిన (1) లోని మొత్తము పరిమిత విలువ A ను సమీపించును. ఈ విలువ A ను $f(x)$ పై x దృష్ట్యా $[a,b]$ యొక్క **నిశ్చిత సమాకలనం** అని అంటారు. దీనిని $f(x)$ పై $[a,b]$ యొక్క **రీమాన్ సమాకలనము** అని కూడా అంటారు. మరియు దీనిని $\int_a^b f(x)dx$ గా సూచిస్తారు. దీనిని $f(x)$ దృష్ట్యా a నుంచి b కు ఇంటగ్రల్ ఆఫ్ $f(x)$ అని చదువుతారు. $a = b$, అయిన $\int_a^a f(x)dx = 0.$ అగును.

గమనిక

ప్రస్తుత అధ్యాయములో $[a,b]$ అంతరంలో $f(x)$ సంవృత ప్రమేయం అవిచ్ఛిన్నం అనుకొనుము. అంతేగాక $[a,b]$ అంతరంలో $f(x)$ యొక్క **రీమాన్ సమాకలనము** $[a,b]$ అంతరంపై ముక్కల వారిగా అవిచ్ఛిన్న సంవృత ప్రమేయాలు $\int(x)$ కు వ్యవస్థితం. $\int$ గుర్తును నిశ్చిత సమాకలనం మరియు అనిశ్చిత సమాకలనం రెండింటికి ఉపయోగిస్తాము. దీనికికారణమును సమాకలన గణితము యొక్క ప్రాథమిక సిద్ధాంతము మనకు స్పష్టము చేయును. ఇక్కడ x ను మన ఇష్టప్రకారము ఎన్నుకొన్న విలువ మాత్రమే కావున చలరాశి x అనునది **డమ్మీ** అగును. గరిష్ఠ $\left(x_i - x_{i-1}\right) \to 0$ అయినపుడు $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du$ అగును. ప్రతి ఉపాంతరం $[x_{i-1}, x_i]$ యొక్క అన్ని మూడు బిందువులు x_{i-1}, ξ_i, మరియు x_i ఒక బిందువువద్దకు తీసుకొని రాబడును. ఉపాంతరము $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,2,\cdots,n$ లోను ξ_i లను గణించు బిందువును ఎన్నుకొనుటకు అనంత మార్గాలు గలదని మనము ఇంతకు ముందే సూచించాము. $\xi_i = x_{i-1}$, $i = 1,2,\cdots,n$ ను తీసుకొనిన,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty \text{ and } \max(x_i - x_{i-1})\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}). \qquad \ldots(2) \text{ అగును.}$$

ఈ సమీకరణము (2)ను రీమాన్ సమాకలనమును గణించుటకు "**ఎడమ-అంతిమ నియమము**" అంటారు.

$\xi_i = x_i$, $i = 1,2,\cdots,n$,ను తీసుకొన్నప్పుడు,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty \text{ and } \max(x_i - x_{i-1})\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}). \qquad \ldots(3)$$

సమీకరణము (3)ను రీమాన్ సమాకలనమును గణించుటకు" **కుడి-అంతిమ నియమము**" అంటారు.

$\xi_i = \dfrac{x_{i-1} + x_i}{2}$, $i = 1,2,\cdots,n$, ను తీసుకొన్నప్పుడు

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty \text{ and } \max(x_i - x_{i-1})\to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)(x_i - x_{i-1}). \qquad \ldots(4)$$

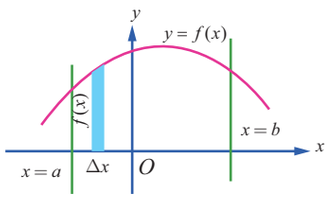
సమీకరణము (4)ను రీమాన్ సమాకలనమును గణించుటకు "**మధ్య-బిందువు నియమము**" అంటారు.

03_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_9.indd 98 03/03/2023 18:11:02

విశేషాంశాలు

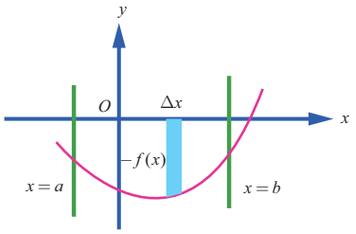
(1) రీమాన్ సమాకలనము $\int_a^b f(x)dx$ ఉండినట్లైతే, రీమాన్ సమాకలనం $\int_a^x f(u)du$ కూడా ప్రతి $x \in [a,b]$ కు బాగుగా నిర్వచించబడిన వాస్తవ సంఖ్య అవుతుంది. కావున అంతరం $[a,b]$ పై $F(x)$ ప్రమేయమును $F(x) = \int_a^x f(u)du, x \in [a,b]$ అగునట్లు నిర్వచించవచ్చును.

(2) ప్రతి $x \in [a,b]$ కు $f(x) \geq 0$ అయితే రీమాన్ సమాకలనం $\int_a^b f(x)dx$ అనునది $y = f(x)$ యొక్క రేఖాచిత్రము, x అక్షము $x = a$ మరియు $x = b$ లతో అంతరవేష్టితమైన ప్రాంత వైశాల్యమునకు సమానము అగును. దీనిని పటము 9.3లో చూడవచ్చును.



పటము 9.3

(3) ప్రతి $x \in [a,b]$ కు $f(x) \leq 0$ అయితే రీమాన్ సమాకలనం $\int_a^b f(x)dx$ అనునది $y = f(x)$ యొక్క రేఖాచిత్రము, x అక్షము $x = a$ మరియు $x = b$ రేఖలతో అంతరవేష్టితమైన ప్రాంతం నందు జ్యామితీయ వైశాల్యము యొక్క ఋణాత్మకమునకు సమానము అగును. దీనిని పటము 9.4లో చూడవచ్చును. ఈ సందర్భములో $y = f(x)$ యొక్క రేఖాచిత్రము x అక్షము, $x = a$ మరియు $x = b$ రేఖలతో అంతరవేష్టితమైన ప్రాంతము యొక్క జ్యామితీయ వైశాల్యము $\left|\int_a^b f(x)dx\right|$ నుంచి లభించును.



పటము 9.4

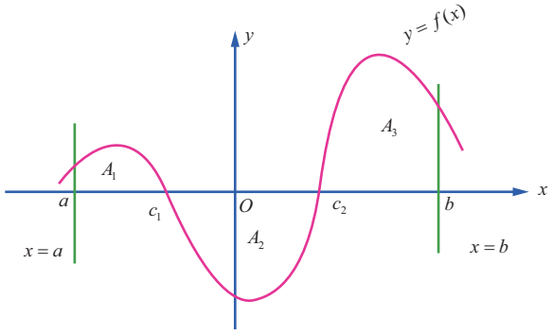
(4) $[a,b]$ పై $f(x)$ ధన మరియు ఋణ విలువలను కలిగియున్నట్లైతే అంతరము $[a,b]$ ను ప్రతిఉపాంతరాలు $[a,c_1], [c_1,c_2], \cdots, [c_k,b]$ లో అంతటా $f(x)$ ఒకే విధమైన గుర్తు ఉండునట్లు విభజించవచ్చును. కావున రీమాన్ సమాకలనం $\int_a^b f(x)dx$ క్రింది విధముగా లభించును.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \cdots + \int_{c_k}^b f(x)dx.$$

ఈ సందర్భములో $y = f(x)$ యొక్క రేఖాచిత్రము, x అక్షము $x = a$ మరియు $x = b$ రేఖలతో అంతరవేష్టితమైన ప్రాంతము యొక్క జ్యామితీయ వైశాల్యం క్రింది విధముగా లభించును.

$$\left|\int_a^{c_1} f(x)dx\right| + \left|\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx\right| + \cdots + \left|\int_{c_k}^b f(x)dx\right|.$$

ఉదాహరణకు, పటము 9.5లో గల $f(x), x \in [a,b]$ యొక్క రేఖాచిత్రమును చూడుము. ఇచ్చట, A_1, A_2 మరియు A_3 లు వేర్వేరు భాగాల జ్యామితీయ వైశాల్యమును సూచించును. నిశ్చిత సమాకలనం $\int_a^b f(x)dx$ క్రింది దాని నుండి లభించును.



పటము 9.5

03_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_9.indd 99 03/03/2023 18:11:10

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \int_{c_2}^{b} f(x)dx$$
$$= A_1 - A_2 + A_3 .$$

$y = f(x)$ యొక్క రేఖాచిత్రము, $x-$ అక్షములో $x = a$ మరియు $x = b$ రేఖలతో అంతర్వేష్టితమైన జ్యామితీయ ప్రాంత వైశాల్యము $A_1 - A_2 + A_3$ అగును. పై చర్చ నుండి రీమాన్ సమాకలన జ్యామితీయ వైశాల్యమును సూచించవలసిన అవసరంలేదని స్పష్టం అగుచున్నది.

గమనిక

మనము స్పష్టముగా ప్రస్తావించకపోయిన వైశాల్యమును చదరపు ప్రమాణాలలో మరియు ఘనపరిమాణమును ఘన ప్రమాణాలుగా కొలుస్తారు.

ఉదాహరణ 9.1

$\int_0^{0.5} x^2 dx$ యొక్క విలువను రీమాన్ సమాకలన మొత్తాలను ఉపయోగించి సమాన వెడల్పులులో గల 5 ఉపాంతరాలుగా విభజించి అంచనా వేయండి. (i) ఎడమ- అంతిమ నియమం (ii) కుడి- అంతిమ నియమం (iii) మధ్య- బిందువు నియమం

సాధన

ఇక్కడ $a = 0, b = 0.5, n = 5, f(x) = x^2$

కావున ప్రతి ఉపాంతరం వెడల్పు

$$h = \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{0.5-0}{5} = 0.1 .$$ అగును.

అంతరం యొక్క విభజన క్రింది బిందువులచే లభించును.

$$x_0 = 0,$$
$$x_1 = x_0 + h = 0 + 0.1 = 0.1$$
$$x_2 = x_1 + h = 0.1 + 0.1 = 0.2$$
$$x_3 = x_2 + h = 0.2 + 0.1 = 0.3$$
$$x_4 = x_3 + h = 0.3 + 0.1 = 0.4$$
$$x_5 = x_4 + h = 0.4 + 0.1 = 0.5$$

(i) సమాన వెడల్పు Δx తో రీమాన్ మొత్తానికి ఎడమ- అంతిమ నియమం

$$S = \left[f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})\right]\Delta x .$$
$$\therefore S = \left[f(0) + f(0.1) + f(0.2) + f(0.3) + f(0.4)\right](0.1)$$
$$= \left[0.00 + 0.01 + 0.04 + 0.09 + 0.16\right](0.1) = 0.03$$

$\therefore \int_0^{0.5} x^2 dx$ యొక్క ఉజ్జాయింపు విలువ 0.03.

03_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_9.indd 100 03/03/2023 18:11:15

(ii) సమాన వెడల్పు Δx తో రీమాన్ మొత్తానికి కుడి- అంతిమ నియమం

$$S = \left[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\right]\Delta x.$$

$$\therefore S = \left[f(0.1)+f(0.2)+f(0.3)+f(0.4)+f(0.5)\right](0.1)$$

$$= \left[0.01+0.04+0.09+0.16+0.25\right](0.1) = 0.055.$$

$\therefore \int_0^{0.5} x^2dx$ యొక్క ఉజ్జాయింపు విలువ 0.055.

(iii) సమాన వెడల్పు Δx తో రీమాన్ మొత్తానికి మధ్య-బిందువు నియమం

$$S = \left[f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)+f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\cdots+f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right)\right]\Delta x$$

$$\therefore S = \left[f(0.05)+f(0.15)+f(0.25)+f(0.35)+f(0.45)\right](0.1)$$

$$= \left[0.0025+0.0225+0.0625+0.1225+0.2025\right](0.1)$$

$$= 0.04125.$$

$\therefore \int_0^{0.5} x^2dx$ యొక్క ఉజ్జాయింపు విలువ 0.04125.

అభ్యాసము 9.1

1. $\{1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5\}$ విభజనలతో ఎడమ- అంతిమ నియమాన్ని వర్తింపచేయడం ద్వారా $\int_1^{1.5} xdx$ యొక్క ఉజ్జాయింపు విలువను కనుగొనండి.
2. $\{1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5\}$ విభనలతో కుడి- అంతిమ నియమాన్ని వర్తింపచేయడం ద్వారా $\int_1^{1.5} x^2dx$ యొక్క ఉజ్జాయింపు విలువను కనుగొనండి.
3. $\{1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5\}$ విభనలతో మధ్య- బిందువు నియమాన్ని వర్తింపచేయడం ద్వారా $\int_1^{1.5} (2-x)dx$ యొక్క ఉజ్జాయింపు విలువను కనుగొనండి.

9.2.2 $\int_a^b f(x)dx$ ను గణించుటకు అవధి సూత్రము

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ $[a,b]$ ను $[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-2},x_{n-1}],[x_{n-1},x_n]$ అను అగునట్లు n సమాన ఉపాంతరములుగా విభజించినట్లైతే $x_1-x_0 = x_2-x_1 = \cdots = x_n-x_{n-1} = \frac{b-a}{n}$. అగును. $h = \frac{b-a}{n}$. అని తీసుకొనిన, $x_i = a+ih, i = 1,2,\cdots,n.$ అని మనకు లభించును.

కావున నిశ్చిత సమాకలనం నిర్వచనం నుండి మనకు లభించునది

$\lim_{n\to\infty \text{ మరియు } \max(x_i-x_{i-1})\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i-x_{i-1})$ (కుడి అంతిమ నియమం)

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right).$$

03_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_9.indd 101 03/03/2023 18:11:21

$$\therefore \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{r=1}^{n} f\left(a+(b-a)\frac{r}{n}\right).$$

గమనిక:- $\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{r=0}^{n} f\left(a+(b-a)\frac{r}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{b-a}{n}f(a)+\frac{b-a}{n}\sum_{r=1}^{n} f\left(a+(b-a)\frac{r}{n}\right)\right]$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{r=1}^{n} f\left(a+(b-a)\frac{r}{n}\right)$$

$$= \int_a^b f(x)dx .$$

$$\therefore \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{r=1}^{n} f\left(a+(b-a)\frac{r}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{r=0}^{n} f\left(a+(b-a)\frac{r}{n}\right).$$

$a=0$ మరియు $b=1$, అయితే మనకు లభించునది $\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=0}^{n} f\left(\frac{r}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} f\left(\frac{r}{n}\right)$.

ఉదాహరణ 9.2

$\int_0^1 xdx$, ను అవధి మొత్తముగా గణించండి

సాధన

ఇక్కడ $f(x)=x$, $a=0$ మరియు $b=1$ గా తీసుకొనుము.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} f\left(\frac{r}{n}\right) \Rightarrow \int_0^1 xdx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\frac{r}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}[1+2+\cdots+n]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}.$$

ఉదాహరణ 9.3

$\int_0^1 x^3dx$, ను అవధి మొత్తముగా గణించండి.

సాధన

ఇక్కడ $f(x)=x^3$, $a=0$ మరియు $b=1.$ గా తీసుకొనుము.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} f\left(\frac{r}{n}\right) \Rightarrow \int_0^1 x^3dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\frac{r^3}{n^3}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\left[1^3+2^3+\cdots+n^3\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

03_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_9.indd 102 03/03/2023 18:11:27

ఉదాహరణ 9.4

$\int_1^4 \left(2x^2+3\right)dx$, ను అవధి మొత్తముగా గణించండి.

సాధన

మనం సూత్రాన్ని ఉపయోగించగా

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{r=1}^{n} f\left(a+(b-a)\frac{r}{n}\right)$$

ఇక్కడ $f(x)=2x^2+3,\ a=1$ మరియు $b=4$.

కావున, మనకు లభించునది

$$f\left(a+(b-a)\frac{r}{n}\right)= f\left(1+(4-1)\frac{r}{n}\right)= f\left(1+\frac{3r}{n}\right)=2\left(1+\frac{3r}{n}\right)^2+3=5+\frac{18r^2}{n^2}+\frac{12r}{n}.$$

అందువలన

$$\int_1^4 (2x^2+3)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{r=1}^{n}\left(5+\frac{18r^2}{n^2}+\frac{12r}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{15}{n}\sum_{r=1}^{n}1+\frac{54}{n^3}\sum_{r=1}^{n}r^2+\frac{36}{n^2}\sum_{r=1}^{n}r\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{15}{n}n+\frac{54}{n^3}\left(1^2+2^2+\cdots+n^2\right)+\frac{36}{n^2}\left(1+2+\cdots+n\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[15+\frac{54}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{36}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[15+9\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)+18\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= 15+9(1+0)(2+0)+18(1+0)=51.$$

అభ్యాసము 9.2



1. క్రింది సమాకలనములకు అవధి మొత్తమును గణించండి.

(i) $\int_0^1 (5x+4)dx$ (ii) $\int_1^2 (4x^2-1)dx$

9.3 సమాకలన గణితము (Integral Calculus) యొక్క ప్రాథమిక సిద్ధాంతాలు మరియు వాటి అనువర్తనాలు

మనము పైన పేర్కొన ఉదాహరణలలో $f(x)$ సరళ ప్రమేయం అయినప్పటికీ $\int_a^b f(x)dx$ యొక్క అవధి మొత్తాన్ని కనుగొనడం చాలా శ్రమతో కూడుకొన్నది. నిశ్చిత సమాకలన గణితము సులభ పద్ధతిని న్యూటన్ మరియు లిబ్నిజ్ ఇరువురూ ఇంచుమించు ఒకే సమయములో ఉత్పాదించారు. సమాకలన గణితము యొక్క మొదటి ప్రాథమిక సిద్ధాంతము మరియు రెండవ ప్రాథమిక సిద్ధాంతము అను ప్రసిద్ధిగాంచిన సిద్ధాంతముల ఆధారముగా వీరి పద్ధతులను ఉత్పాదించారు. ఈ సిద్ధాంతము ఒక ప్రమేయము మరియు దాని వ్యతిరేఖ

03_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_9.indd 103 03/03/2023 18:11:32

ఉత్పన్నం (వ్యవస్థితమైన)నకు గల సంబంధమును ఏర్పరుచును. వాస్తవముగా ఈ రెండు సిద్ధాంతములు అవకలన మరియు సమాకలన గణితముల మధ్య అనుసంధానమును ఏర్పరచును. పైన పేర్కొన్న ముఖ్య సిద్ధాంతములను నిరూపణ లేకుండా మనము క్రింది విధముగా నిర్వచించుకొందాం.

సిద్ధాంతము 9.1 (సమాకలన గణితము యొక్క మొదటి ప్రాథమిక సిద్ధాంతము)

$f(x)$ సంవృత అంతరం $[a,b]$ పై నిర్వచింపబడిన ఒక అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయము మరియు $F(x)=\int_a^x f(u)du,\ a<x<b$ అయిన $\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$. మరొకవిధముగా $F(x)$ యొక్క వ్యతిరేఖ ఉత్పన్నం $f(x)$. అగును.

సిద్ధాంతము 9.2 (సమాకలన గణితము యొక్క రెండవ ప్రాథమిక సిద్ధాంతము)

$f(x)$ సంవృత అంతరం $[a,b]$ పై నిర్వచింపబడిన ఒక అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయము మరియు $F(x)$ యొక్క వ్యతిరేఖ ఉత్పన్నం $f(x)$, అయిన $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

గమనిక

$F(b)-F(a)$ అనునది నిశ్చిత సమాకలనం (రీమాన్ సమాకలనం) $\int_a^b f(x)dx$, యొక్క విలువ కావున నిశ్చిత సమాకలనమును గణించునపుడు వ్యతిరేఖ ఉత్పన్నం $F(x)$ కు కలపబడిన ఏదేని చలస్థిరాంకము రద్దగును. మరియు వ్యతిరేఖ ఉత్పన్నమునకు ఒక చల స్థిరాంకమును కలుప వలసిన అవసరములేదు. దీనిని సంక్షిప్తముగా $F(b)-F(a)=\left[F(x)\right]_a^b$. అని మనము వ్రాస్తాము. నిశ్చిత సమాకలనము యొక్క విలువ ఏకైకము.

సమాకలన గణితము యొక్క రెండవ ప్రాథమిక సిద్ధాంతము ద్వారా నిశ్చిత సమాకలనం ఈ క్రింది లక్షణాలు కలిగియుంటాయి. అవి: ఋజువు లేకుండా ఇక్కడ పేర్కొనబడ్డాయి.

ధర్మము 1 : $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(u)\,du,\ a<b$

అనగా నిశ్చిత సమాకలనం చలరాశుల యొక్క మార్పుపై ఆధారపడి ఉండదు.

ధర్మము 2 : $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

అనగా అవధులు పరస్పరం మార్చుకొంటే నిశ్చిత సమాకలనం విలువ ఋణాంకం అగును.

ధర్మము 3 : $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx,\ a<c<b$

ధర్మము 4 : $\int_a^b[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$, ఇక్కడ α మరియు β లు స్థిరాంకాలు

ధర్మము 5 : $x=g(u)$, అయితే, $\int_a^b f(x)dx=\int_c^d f(g(u))\frac{dg(u)}{du}du$ ఇక్కడ $g(c)=a$ మరియు $g(d)=b$.

03_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_9.indd 104 03/03/2023 18:11:36

ఈ ధర్మము ప్రతిక్షేపణ చేయడం ద్వారా నిశ్చిత సమాకలనం గణించుటకు ఉపయోగించబడుతుంది, మనము పై ధర్మముల వాడకాన్ని ఈ క్రింది ఉదాహరణల ద్వారా వివరించవచ్చును.

ఉదాహరణ 9.5

$\int_0^3 (3x^2 - 4x + 5)dx$ యొక్క విలువను గణించండి.

సాధన

$$\begin{aligned}\int_0^3 (3x^2 - 4x + 5)dx &= \int_0^3 3x^2 dx - \int_0^3 4x\ dx + \int_0^3 5\,dx \\ &= 3\int_0^3 x^2 dx - 4\int_0^3 x\,dx + 5\int_0^3 dx \\ &= 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 - 4\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 + 5[x]_0^3 \\ &= (27-0) - 2(9-0) + 5(3-0) \\ &= 27 - 18 + 15 = 24\,.\end{aligned}$$

ఉదాహరణ 9.6

$\int_0^1 \frac{2x+7}{5x^2+9}dx$ యొక్క విలువను గణించండి.

సాధన

$$\int_0^1 \frac{2x+7}{5x^2+9}dx = \int_0^1 \frac{2x}{5x^2+9} + 7\int_0^1 \frac{dx}{(5x^2)+3^2} = \frac{1}{5}\log[5x^2+9]_0^1 + \frac{7}{5}\int_0^1 \frac{dx}{x^2+\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{5}[\log 14 - \log 9] + \frac{7}{5}\times\frac{\sqrt{5}}{3}\left[\tan^{-1}\frac{x}{\left[\frac{3}{\sqrt{5}}\right]}\right]_0^1 = \frac{1}{5}\log\frac{14}{9} + \frac{7}{3\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{\sqrt{5}}{3}\,.$$

ఉదాహరణ 9.7

$\int_0^1 [2x]dx$ ను గణించండి. ఇక్కడ [·] గరిష్ఠ పూర్ణసంఖ్య ప్రమేయము.

సాధన

$$\int_0^1 [2x]dx = \int_0^{\frac{1}{2}} [2x]dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 [2x]dx = \int_0^{\frac{1}{2}} 0\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 1\,dx = 0 + [x]_{\frac{1}{2}}^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,.$$

03_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_9.indd 105 03/03/2023 18:11:41

ఉదాహరణ 9.8

$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sec x \tan x}{1+\sec^2 x}\,dx$ ను గణించండి.

సాధన

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sec x \tan x}{1+\sec^2 x}\,dx, \quad \sec x = u \text{ . గా తీసుకొనుము, } \sec x \tan x\, dx = du .$$

అయితే $x = 0,\ u = \sec 0 = 1$. అయితే $x = \frac{\pi}{3},\ u = \sec\frac{\pi}{3} = 2$ అయినఅప్పుడు.

$$\therefore I = \int_1^2 \frac{du}{1+u^2} = [\tan^{-1} u]_1^2 = \tan^{-1}(2) - \tan^{-1} 1 = \tan^{-1}(2) - \frac{\pi}{4} .$$

ఉదాహరణ 9.9

$\int_0^9 \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx$ ను గణించండి.

సాధన

$\sqrt{x} = u$ గా తీసుకొంటే, అప్పుడు $x = u^2$ మరియు $dx = 2u\,du$.

అప్పుడు $x = 0$, $u = 0$. అప్పుడు $x = 9$, $u = 3$.

$$\therefore \int_0^9 \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx = \int_0^3 \frac{1}{u^2+u}(2u)du = 2\int_0^3 \frac{1}{1+u}du = 2\Big[\log|1+u|\Big]_0^3 = 2[\log 4 - 0] = \log 16 .$$

ఉదాహరణ 9.10

$\int_1^2 \frac{x}{(x+1)(x+2)}\,dx$ ను గణించండి.

సాధన

$$I = \int_1^2 \frac{x}{(x+1)(x+2)}\,dx \text{ గా తీసుకొనుము.}$$

$$I = \int_1^2 \left[\frac{-1}{(x+1)} + \frac{2}{x+2}\right]dx \text{ (పాక్షిక భిన్నాలను ఉపయోగించగా)}$$

$$= \left[-\log(x+1) + 2\log(x+2)\right]_1^2$$

$$= \log\left[\frac{(x+2)^2}{x+1}\right]_1^2$$

$$= \log\frac{16}{3} - \log\frac{9}{2}$$

$$= \log\frac{32}{27} .$$

03_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_9.indd 106 03/03/2023 18:11:49

ఉదాహరణ 9.11

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{(1+\sin\theta)(2+\sin\theta)} d\theta$ ను గణించండి.

సాధన

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{(1+\sin\theta)(2+\sin\theta)} d\theta \text{ గా తీసుకొనుము. } u = 1+\sin\theta \text{ , } du = \cos\theta d\theta$$

.

$\theta = 0, u = 1$. అగును. $\theta = \frac{\pi}{2}, u = 2$.

$$\therefore I = \int_1^2 \frac{du}{u(1+u)} = \int_1^2 \frac{(1+u)-u}{u(1+u)} du = \int_1^2 \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}\right) du = \left[\log u - \log(1+u)\right]_1^2$$

$$= (\log 2 - \log 3) - (\log 1 - \log 2) = 2\log 2 - \log 3 = \log\frac{4}{3}.$$

ఉదాహరణ 9.12

$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\sin^{-1} x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$ ను గణించండి.

సాధన

$$I = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\sin^{-1} x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx \text{ .అనుకొందాం.}$$

$u \sin^{-1} x$. గా తీసుకొంటే, అప్పుడు, $x = \sin u$ మరియు, $du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

$x = 0, u = 0$. అయినప్పుడు $x = \frac{1}{\sqrt{2}}, u = \frac{\pi}{4}$.

$$\therefore I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{u}{\cos^2 u} du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} u \sec^2 u \, du = [u\tan u]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan u \, du = \left[u\tan u\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[\log\cos u\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\pi}{4} + \log\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2 .$$

ఉదాహరణ 9.13

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x}\right) dx$ ను గణించండి.

సాధన

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x}\right) dx \text{ . అనుకొందాం.}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{\frac{\sin x}{\cos x}} + \sqrt{\frac{\cos x}{\sin x}} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin x \cos x}} dx = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2 \sin x \cos x}} dx$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x + \cos x) dx}{\sqrt{1 - (\sin x - \cos x)^2}}.$$

$u = \sin x - \cos x$ గా తీసుకొనుము, అప్పుడు, $du = (\cos x + \sin x) dx$.

$x = 0, u = -1$. అయినప్పుడు $x = \frac{\pi}{2}, u = 1$.

$$\therefore I = \sqrt{2} \int_{-1}^{1} \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \sqrt{2} [\sin^{-1} u]_{-1}^{1} = \sqrt{2} \left[\sin^{-1}(1) - \sin^{-1}(-1) \right] = \pi\sqrt{2} \quad .$$

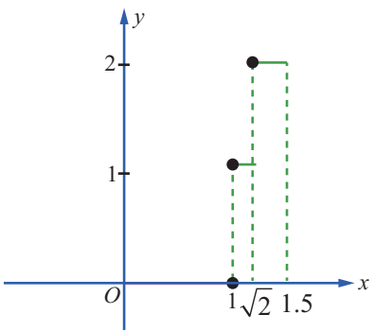
ఉదాహరణ 9.14

$\int_0^{1.5} \left[x^2 \right] dx$, ను గణించండి. ఇక్కడ $[x]$ గరిష్ఠ పూర్ణసంఖ్య ప్రమేయం.

సాధన

గరిష్ఠ పూర్ణసంఖ్య ప్రమేయము $[x]$ అనునది x. కు సమానము లేదా దీనికన్నా తక్కువైన అతి పెద్ద పూర్ణసంఖ్య అవుతుంది. మరొక విధంగా $[x] = n$ ఒక పూర్ణసంఖ్యగా ఉండి $n \le x < (n+1)$ అయితే n గా దీనిని నిర్వచించవచ్చును.

కావున మనకు లభించునది $[x^2] = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{if} \quad 1 \le x < \sqrt{2} \\ 2 & \text{if} \quad \sqrt{2} \le x \le 1.5 \end{cases}$ అయితే



పటము. 9.6

$[0,1.5]$ పై పైప్రమేయము అవిచ్ఛిన్నము కాదని మనము గమనించగలము. కాని ఈ ప్రమేయము $[0,1), [1,\sqrt{2})$ మరియు $[\sqrt{2},1.5]$ ప్రతి ఉపాంతరములలో అవిచ్ఛిన్నము అనగా ఇది $[0,1.5]$ పై ముక్కల వారిగా అవిచ్ఛిన్నము అగును. పటము 9.6 చూడుము. మనకు లభించునది

$$\int_0^{1.5} \left[x^2 \right] dx = \int_0^{1} \left[x^2 \right] dx + \int_1^{\sqrt{2}} \left[x^2 \right] dx + \int_{\sqrt{2}}^{1.5} \left[x^2 \right] dx = \int_0^{1} 0 \, dx + \int_1^{\sqrt{2}} 1 \, dx + \int_{\sqrt{2}}^{1.5} 2 dx$$

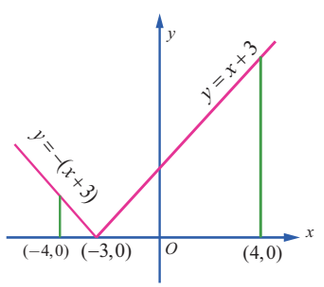
$$= 0 + (x)_1^{\sqrt{2}} + (2x)_{\sqrt{2}}^{1.5} = \left(\sqrt{2} - 1 \right) + \left(3 - 2\sqrt{2} \right) = 2 - \sqrt{2}.$$

ఉదాహరణ 9.15

$\int_{-4}^{4} |x+3| \, dx$ ను గణించండి.

సాధన

నిర్వచనము నుంచి $|x+3| = \begin{cases} x+3, & x \ge -3 \text{ అయితే} \\ -x-3, & x < -3 \text{ అయితే} \end{cases}$



పటము. 9.7

03_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_9.indd 108 03/03/2023 18:12:02

$-4 \le x \le 4$ లో $y = |x+3|$ యొక్క రేఖాచిత్రమునకు పటము 9.7ను చూడుము.

$$\therefore \int_{-4}^{4} |x+3|\,dx = \int_{-4}^{-3} |x+3|\,dx + \int_{-3}^{4} |x+3|\,dx = \int_{-4}^{-3} (-x-3)\,dx + \int_{-3}^{4} (x+3)\,dx$$

$$= \left[-\frac{x^2}{2} - 3x\right]_{-4}^{-3} + \left[\frac{x^2}{2} + 3x\right]_{-3}^{4}$$

$$= \left(-\frac{9}{2}+9\right) - \left(-\frac{16}{2}+12\right) + \left(\frac{16}{2}+12\right) - \left(\frac{9}{2}-9\right) = \left(\frac{9}{2}\right) - 4 + 20 + \left(\frac{9}{2}\right) = 25.$$

ధర్మము 5 యొక్క అనువర్తనాన్ని వివరించడానికి కొన్ని ఉదాహరణలు క్రింద ఇవ్వబడ్డాయి.

ఉదాహరణ 9.16

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4+5\sin x} = \frac{1}{3}\log_e 2$ అని నిరూపించండి.

సాధన

$u = \tan\frac{x}{2}$. గా తీసుకొనుము. అప్పుడు, $\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2u}{1+u^2}, du = \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\,dx \Rightarrow dx = \frac{2du}{1+u^2}$.

$x = 0, u = \tan 0 = 0$. అయిన $x = \frac{\pi}{2}, u = \tan\frac{\pi}{4} = 1$ అయినప్పుడు

$$\therefore I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4+5\sin x} = \int_0^1 \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{4+5\left(\frac{2u}{1+u^2}\right)} = \int_0^1 \frac{du}{2u^2+5u+2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{du}{u^2+\frac{5}{2}u+1}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{du}{\left(u+\frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \left[\frac{1}{2}\times\frac{1}{2\times\left(\frac{3}{4}\right)}\log\left(\frac{\left(u+\frac{5}{4}\right)-\frac{3}{4}}{\left(u+\frac{5}{4}\right)+\frac{3}{4}}\right)\right]_0^1 = \frac{1}{3}\left[\log\left(\frac{u+\frac{1}{2}}{u+2}\right)\right]_0^1 = \frac{1}{3}\log 2.$$

గమనిక

$\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + c}$ వ్యుతిరేక ఉత్పన్నాలను అంచనా వేయడానికి $u = \tan\frac{x}{2}$ తీసుకోవడం ద్వారా మనము ప్రతిక్షేపణ పద్ధతిని ఉపయోగించిన $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \sin x = \frac{2u}{1+u^2}, dx = \frac{2du}{1+u^2}$ అగును.

ఉదాహరణ 9.17

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x\,dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \frac{\pi}{4}$ అని నిరూపించుము.

03_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_9.indd 109 03/03/2023 18:12:07

సాధన

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x\, dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x\, dx}{\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x\, dx}{1 - \frac{1}{2}(2\sin x \cos x)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin 2x\, dx}{2 - \sin^2 2x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin 2x\, dx}{1 + \cos^2 2x}.$$

$u = \cos 2x$, గా తీసుకొంటే, అప్పుడు, $du = -2\sin 2x\, dx$.

$x = 0$, అప్పుడు $u = \cos 0 = 1$. అయితే, $x = \frac{\pi}{4}$, అయితే $u = \cos\frac{\pi}{2} = 0$.

$$\therefore I = \int_1^0 \frac{-du}{1+u^2} = \int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = \left[\tan^{-1} u\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

ఉదాహరణ 9.18

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} = \frac{1}{ab}\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$, అని నిరూపించండి. ఇక్కడ $a,\ b > 0$.

సాధన

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x\, dx}{a^2\tan^2 x + b^2}$$ అనుకొందాం.

$u = \tan x$ గా తీసుకొంటే, $du = \sec^2 x\, dx$ అయితే

అగును $x = 0$, అయితే $u = \tan 0 = 0$. $x = \frac{\pi}{4}$,అగును. $u = \tan\frac{\pi}{4} = 1$.

$$\therefore I = \int_0^1 \frac{du}{a^2u^2 + b^2} = \frac{1}{a^2}\int_0^1 \frac{du}{u^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{1}{a^2}\left[\frac{a}{b}\tan^{-1}\left(\frac{au}{b}\right)\right]_0^1 = \frac{1}{ab}\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right).$$

నిశ్చిత సమాకలనము యొక్క మరికొన్ని ధర్మాలను ఉత్పాదిస్తాము.

ధర్మము 6

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$$

నిరూపణ

$u = a+b-x$. గా తీసుకొంటే $dx = -du$ అగును.

$x = a$ అయితే $u = a+b-a = b$. అగును $x = b$, అయితే $u = a+b-b = a$ అగును

$$\therefore \int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(a+b-u)(-du) = \int_a^b f(a+b-u)du$$

$$= \int_a^b f(a+b-x)dx\,.$$

03_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_9.indd 110 03/03/2023 18:12:17

గమనిక

పైధర్మములో a బదులు 0 మరియు b బదులు a ను స్థానమార్పిడి చేయడం వలన మనకు ఈ క్రింది ధర్మములు లభిస్తుంది.

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx\,.$$

ఉదాహరణ 9.19

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin x+\cos x}\,dx$ ను గణించండి.

సాధన

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin x+\cos x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x+\sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x}\,dx\,,\ \text{ఇక్కడ}\ \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\log(\sec x+\tan x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\log(\sqrt{2}+1)-\log(1+0)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\log(\sqrt{2}+1)\,.$$

ధర్మము 7

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a \left[f(x)+f(2a-x)\right]dx.$$

నిరూపణ

3వ ధర్మము నుండి $\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_a^{2a} f(x)\,dx\,.$ (1)

$\int_a^{2a} f(x)dx\,.$ లో $x = 2a-u$ అని ప్రతిక్షేపించిన, $dx = -du.$ అగును

$x = a$ అయితే $u = 2a-a = a$ అగును $x = 2a$ అయితే $u = 2a-2a = 0$ అగును, కావున

$$\int_a^{2a} f(x)dx = \int_a^0 f(2a-u)(-du) = \int_0^a f(2a-u)du = \int_0^a f(2a-x)dx$$ పొందుతాము...(2)

03_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_9.indd 111 03/03/2023 18:12:23

(1)వ సమీకరణములో సమీకరణము (2)ను ప్రతిక్షేపించగా

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(2a-x)\,dx$$

$$= \int_0^a [f(x)+f(2a-x)]\,dx.$$

ధర్మము 8

$f(x)$ అనునది సరిప్రమేయమైతే $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$ అగును.

$f(-x) = f(x).$ అనే ప్రమేయము సరి ప్రమేయము అయితే అయినప్పుడు మాత్రమే $f(x)$ అగును అని గుర్తుచేసుకొందాం.

నిరూపణ

నిరూపణ: ధర్మము (3) నుండి

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx.$$

సమాకలనం $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx$ లో $x = -u.$ అని ప్రతిక్షేపించిన $dx = -du.$ అగును.

$x = -a$, అయితే $u = a$, అయితే $x = 0$, అగును. కావున మనకు లభించునది $u = 0$,

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_a^0 f(-u)(-du) = \int_0^a f(-u)\,du = \int_0^a f(-x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx. \quad \ldots (2)$$

(1)వ సమీకరణములో సమీకరణము (2)ను ప్రతిక్షేపించగా, మనకు లభించునది

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$

ధర్మము 9

$f(x)$ అనునది బేసి ప్రమేయము అయితే $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$

$f(x)$ అనే ప్రమేయము బేసి ప్రమేయము అయితే అయినప్పుడు మాత్రమే $f(-x) = -f(x).$ అని గుర్తుచేసుకోవాలి.

నిరూపణ

ధర్మము (3) నుండి

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx. \quad \ldots (1)$$

$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx.$ లో ప్రతిక్షేపణ, $x = -u.$ అయితే, $dx = -du.$

$x = -a$, అయితే $u = a$; అయితే $x = 0$, $u = 0$. అగును. కావున మనకు లభించునది

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_a^0 f(-u)(-du) = \int_0^a f(-u)\,du = \int_0^a f(-x)\,dx = -\int_0^a f(x)\,dx. \quad \ldots (2)$$

(1)వ సమీకరణములో సమీకరణము (2)ను ప్రతిక్షేపించగా,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx = 0$$

03_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_9.indd 112 03/03/2023 18:12:33

ధర్మము 10

$f(2a-x)=f(x)$, అయితే $\int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^{a} f(x)\,dx.$

నిరూపణ

ధర్మము 7 నుండి

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^{a}\left[f(x)+f(2a-x)\right]dx. \qquad ...(1)$$

సమీకరణము (1)లో $f(2a-x)=f(x)$ ను ప్రతిక్షేపించగా

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^{a}\left[f(x)+f(x)\right]dx = 2\int_0^{a} f(x)\,dx.$$

ధర్మము 11

$f(2a-x)=-f(x)$, అయితే $\int_0^{2a} f(x)\,dx = 0.$

నిరూపణ

ధర్మము 7 నుండి

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^{a}\left[f(x)+f(2a-x)\right]dx. \qquad ... (1)$$

సమీకరణము (1)లో $f(2a-x)=-f(x)$ ను ప్రతిక్షేపించగా

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^{a}\left[f(x)-f(x)\right]dx = 0.$$

ధర్మము 12

$\int_0^{a} x\,f(x)\,dx = \frac{a}{2}\int_0^{a} f(a-x)=f(x)$. అయితే $.f(x)\,dx$

నిరూపణ

$$I = \int_0^{a} x\,f(x)\,dx \qquad -(1) \text{ అనుకొందాం}$$

అప్పుడు $I = \int_0^{a}(a-x)f(a-x)\,dx$, ఇక్కడ $\int_0^{a} g(x)\,dx = \int_0^{a} g(a-x)\,dx$

$$= \int_0^{a}(a-x)f(x)\,dx, \text{ ఇక్కడ } f(a-x)=f(x).$$

$$\therefore I = \int_0^{a}(a-x)f(x)\,dx \qquad ... (2)$$

(1) మరియు (2)లను కూడగా

$$2I = \int_0^{a}(x+a-x)f(x)\,dx$$

03_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_9.indd 113 03/03/2023 18:12:38

$$= a\int_0^a f(x)\,dx\,.$$

$$\therefore I = \frac{a}{2}\int_0^a f(x)\,dx\,.$$

గమనిక

LHS యొక్క సమాకలనంలో గల x యొక్క కారణాంకమును తొలగించడానికి ఈ ధర్మము మనకు సహాయపడును.

ఉదాహరణ 9.20

$\int_0^{\pi} g(\sin x)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\sin x)dx$ అని చూపుము. ఇక్కడ $g(\sin x)$ అనునది $\sin x$ యొక్క ప్రమేయము.

సాధన

$\int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$ ఇక్కడ $f(2a-x) = f(x)$ అని మనకు తెలుసు.

$2a = \pi$ మరియు $f(x) = g(\sin x)$.

$$f(2a-x) = g(\sin(\pi - x)) = g(\sin x) = f(x)\,.$$

$$\therefore \int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx\,.$$

$$\int_0^{\pi} g(\sin x)\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\sin x)\,dx\,.$$

ఫలితము

$$\int_0^{\pi} g(\sin x)\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\sin x)\,dx.$$

గమనిక

పై ఫలితము రకము $\int_0^{\pi} g(\sin x)\,dx$ రూపంలో గల నిశ్చితమైన సమాకలనులను అంచనా వేయడానికి ఉపయోగపడుతుంది.

ఉదాహరణ 9.21

$\int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x}dx$ ను గణించండి.

సాధన

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x}dx\,.$$

$$= \int_0^{\pi} x\,\frac{1}{1+\sin x}dx \text{ గా తీసుకొంటే}$$

$$f(x) = \frac{1}{1+\sin x}\,.\ \text{అయితే}\ f(\pi - x) = \frac{1}{1+\sin(\pi - x)} = \frac{1}{1+\sin x} = f(x)$$

03_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_9.indd 114 03/03/2023 18:12:44

$$\therefore \int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x}\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\sin x}\,dx, \ (\because \int_0^a x\,f(x)\,dx = \frac{a}{2}\int_0^a f(x)\,dx \text{ if } f(a-x)=f(x))$$

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x}\,dx, \text{ ఇక్కడ } \int_0^{\pi} g(\sin x)\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\sin x)\,dx$$

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\,dx \text{ ఇక్కడ } \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$$

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x}\,dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec^2\frac{x}{2}\,dx$$

$$= \pi\left[\tan\frac{x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi\left[\tan\frac{\pi}{4} - \tan 0\right] = \pi \ .$$

ఉదాహరణ 9.22

$\int_0^{2\pi} g(\cos x)\,dx = 2\int_0^{\pi} g(\cos x)\,dx$; (ఇక్కడ $g(\cos x)$ అనునది $\cos x$ యొక్క ప్రమేయము) అని నిరూపించుము,

సాధన

$2a = 2\pi$ మరియు $f(x) = g(\cos x)$గా తీసుకొనుము.

అప్పుడు, $f(2a-x) = f(2\pi - x) = g(\cos(2\pi - x)) = g(\cos x) = f(x)$

$$\therefore \int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx \ .$$

$$\therefore \int_0^{2\pi} g(\cos x)\,dx = 2\int_0^{\pi} g(\cos x)\,dx \ .$$

ఫలితము

$\int_0^{2\pi} g(\cos x)\,dx = 2\int_0^{\pi} g(\cos x)\,dx.$ గా నిరూపణ అయినది.

గమనిక

పై ఫలితము రకం $\int_0^{2\pi} g(\cos x)\,dx.$ రూపములో గల నిశ్చితమైన సమాకలనులను అంచనా వేయడానికి ఉపయోగపడుతుంది.

ఉదాహరణ 9.23

$f(x) = f(a+x)$, అయితే $\int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$ అగును అని నిరూపించండి.

సాధన

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_a^{2a} f(x)\,dx \text{ గా వ్రాయగా} \qquad \ldots (1)$$

$\int_a^{2a} f(x)\,dx$ ను తీసుకొందాం.

$x = a+u$, ప్రతిక్షేపించిన $dx = du$; అగును. $x = a$ అయిన $u = 0$ మరియు $x = 2a$ అయితే $u = a$ అగును

$$\therefore \int_a^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(a+u)\,du = \int_0^a f(u)\,du \text{, since } f(x) = f(a+x)$$

$$= \int_0^a f(x)\,dx. \qquad \ldots (2)$$

సమీకరణము (1)లో (2)వ సమీకరణము ప్రతిక్షేపించగా

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx \text{ అగును.}$$

ఉదాహరణ 9.24

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx.$ ను గణించండి.

సాధన

$f(x) = x\cos x$ అయిన, $f(-x) = (-x)\cos(-x) = -x\cos x = -f(x).$

$f(x) = x\cos x$ అనునది ఒక బేసి ప్రమేయము $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = 0.$ అగును.

$f(x)$, $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$, అనే బేసి ప్రమేయమునకు ధర్మమును ఉపయోగించగా

$$\therefore \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = 0.$$

ఉదాహరణ 9.25

$\int_{-\log 2}^{\log 2} e^{-|x|}\,dx$ ను గణించండి.

సాధన

$f(x) = e^{-|x|}$. గా తీసుకొంటే, అప్పుడు $f(-x) = e^{-|-x|} = e^{-|x|} = f(x)$

ఇక్కడ $f(x)$ అనే ప్రమేయం, ఒక సరి ప్రమేయం.

$$\int_{-\log 2}^{\log 2} e^{-|x|}\,dx = 2\int_0^{\log 2} e^{-|x|}\,dx = 2\int_0^{\log 2} e^{-x}\,dx = 2(-e^{-x})_0^{\log 2} = 2(-e^{-\log 2} + e^0) = 2\left(-e^{\log\frac{1}{2}} + 1\right)$$

$$= 2\left(-\frac{1}{2} + 1\right) = 1.$$

ఉదాహరణ 9.26

$\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}\,dx.$ ను గణించండి.

03_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_9.indd 116 03/03/2023 18:12:59

సాధన

$$I = \int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}\,dx \qquad \ldots (1)$$

సమీకరణము (1)లో $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ ను ప్రతిక్షేపించగా,

$$I = \int_0^a \frac{f(a-x)}{f(a-x)+f(a-(a-x))}\,dx$$

$$= \int_0^a \frac{f(a-x)}{f(x)+f(a-x)}\,dx. \qquad \ldots (2)$$

సమీకరణము (1), (2)లను కూడగా,

$$2I = \int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}\,dx + \int_0^a \frac{f(a-x)}{f(x)+f(a-x)}\,dx$$

$$= \int_0^a \frac{f(x)+f(a-x)}{f(x)+f(a-x)}\,dx$$

$$= \int_0^a dx = a.$$

అందువల్ల $I = \frac{a}{2}$ మనకు లభించును.

ఉదాహరణ 9.27

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan x)dx = \frac{\pi}{8}\log 2.$ అని నిరూపించండి.

సాధన

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan x)dx \text{ అనుకొనుము} \qquad \ldots (1)$$

సమీకరణము (1)లో $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$ అను ధర్మమును ప్రతిక్షేపించగా,

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left[1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left[1+\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan x}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan x}\right]dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left[1+\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right]dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left[\frac{1+\tan x+1-\tan x}{1+\tan x}\right]dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left[\frac{2}{1+\tan x}\right]dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\log 2 - \log(1+\tan x)\right]dx$$

$$= \log 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan x)dx$$

$$= \frac{\pi}{4}\log 2 - I$$

కావున $2I = \frac{\pi}{4}\log 2$. మనకు లభించును,

$$\therefore\ I = \frac{\pi}{8}\log 2. \text{ అగును.}$$

03_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_9.indd 117 03/03/2023 18:13:05

ఉదాహరణ 9.28

$\int_0^1 \left(\tan^{-1} x + \tan^{-1}(1-x)\right) dx = \frac{\pi}{2} - \log_e 2$ అని నిరూపించండి.

సాధన

$I = \int_0^1 \left(\tan^{-1} x + \tan^{-1}(1-x)\right) dx$ అనుకొనుము.

$= \int_0^1 \tan^{-1} x \, dx + \int_0^1 \tan^{-1}(1-x) \, dx$ ను ప్రతిక్షేపించగా

$= \int_0^1 \tan^{-1} x \, dx + \int_0^1 \tan^{-1}(1-(1-x)) \, dx$, ఇక్కడ $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$

$= \int_0^1 \tan^{-1} x \, dx + \int_0^1 \tan^{-1} x \, dx$

$= 2\int_0^1 \tan^{-1} x \, dx$

$= \left[2\int u dv\right]_0^1$, ఇక్కడ $u = \tan^{-1} x$ మరియు $dv = dx$

$= 2\left[uv - \int v du\right]_0^1$, ఇక్కడ విభాగ సమాకలనులను ఉపయోగించగా

$= 2\left(x\tan^{-1} x - \int x \frac{dx}{1+x^2}\right)_0^1 = 2\left(x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right)\right)_0^1 = \frac{\pi}{2} - \log 2$

ఉదాహరణ 9.29

$\int_2^3 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{5-x}+\sqrt{x}} dx$. ను గణించండి.

సాధన

$I = \int_2^3 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{5-x}+\sqrt{x}} dx$ అనుకొనుము ... (1)

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$, ను ఉపయోగించగా

$I = \int_2^3 \frac{\sqrt{(2+3-x)}}{\sqrt{5-(2+3-x)}+\sqrt{(2+3-x)}} dx = \int_2^3 \frac{\sqrt{5-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{5-x}} dx$ ... (2)

సమీకరణము (1), (2) లను కూడగా

$2I = \int_2^3 \frac{\sqrt{x}+\sqrt{5-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{5-x}} dx = \int_2^3 dx = [x]_2^3 = 3-2 = 1$.

కావున $I = \frac{1}{2}$ అగును.

03_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_9.indd 118 03/03/2023 18:13:11

ఉదాహరణ 9.30

$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+a^x}\, dx$ ను గణించండి.

సాధన

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+a^x}\, dx \text{ అనుకొనుము} \quad \ldots (1)$$

$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$ ను ఉపయోగించగా,

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2(\pi-\pi-x)}{1+a^{\pi-\pi-x}}\, dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2(-x)}{1+a^{-x}}\, dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} a^x \left(\frac{\cos^2 x}{a^x+1}\right) dx \quad \ldots (2)$$

సమీకరణము (1), (2)లను కూడగా

$$2I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{a^x+1}(a^x+1)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\, dx$$

$$= 2\int_0^{\pi} \cos^2 x\, dx \text{ (ఇక్కడ since } \cos^2 x \text{ ఒక సరిప్రమేయము)}$$

ఇక్కడ $I = \int_0^{\pi} \frac{(1+\cos 2x)}{2}\, dx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}[\pi] = \frac{\pi}{2}$.

అభ్యాసము 9.3

1. ఈ క్రింది నిశ్చితమైన సమాకలనులను గణించండి.

(i) $\int_3^4 \frac{dx}{x^2-4}$ (ii) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+2x+5}$ (iii) $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, dx$

(iv) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right) dx$ (v) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos\theta}\sin^3\theta\, d\theta$ (vi) $\int_0^1 \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\, dx$

2. సమాకలన ధర్మములను ఉపయోగించి క్రింది సమాకలనులను గణించండి.

(i) $\int_{-5}^{5} x\cos\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right) dx$ (ii) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^5 + x\cos x + \tan^3 x + 1)\, dx$

(iii) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\, dx$ (iv) $\int_0^{2\pi} x\log\left(\frac{3+\cos x}{3-\cos x}\right) dx$

03_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_9.indd 119 03/03/2023 18:13:18

(v) $\int_0^{2\pi} \sin^4 x \cos^3 x \, dx$

(vi) $\int_0^1 |5x-3| \, dx$

(vii) $\int_0^{\sin^2 x} \sin^{-1}\sqrt{t}\ dt + \int_0^{\cos^2 x} \cos^{-1}\sqrt{t}\ dt, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

(viii) $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\, dx$

(ix) $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\sin x} dx$

(x) $\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} \frac{1}{1+\sqrt{\tan x}} dx$

(xi) $\int_0^{\pi} x\left[\sin^2(\sin x) + \cos^2(\cos x)\right] dx$

9.4 బెర్నౌలీస్ సూత్రము :

u అనేది x లో బహుపద ప్రమేయము (అనగా $u(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$) మరియు $v(x)$ ను వరుసగా సులభముగా సమాకలనం చేయగలిగినపుడు $\int u(x)v(x)dx$ రూపంలోని అనిశ్చిత సమాకలమును గణన చేయుట చాలా సులభము. ఇది బెర్నౌలీస్ సూత్రమని పిలువబడే సూత్రము ద్వారా సాధ్యమగును. ఈ సూత్రము అనునది విభాగ సమాకలన సూత్రము యొక్క విస్తరణ. ఈ సూత్రమును ఉత్పాదించుటకు, మనము క్రింది సంకేతమును ఉపయోగిస్తాము.

$$u^{(1)} = \frac{du}{dx},\ u^{(2)} = \frac{du^{(1)}}{dx},\ u^{(3)} = \frac{du^{(2)}}{dx},\ \cdots\cdots$$
$$v_{(1)} = \int v dx,\ v_{(2)} = \int v_{(1)} dx,\ v_{(3)} = \int v_{(2)} dx, \cdots\cdots$$

తరువాత,

$$dv_{(1)} = v dx,\ dv_{(2)} = v_{(1)} dx,\ dv_{(3)} = v_{(2)} dx,\ \cdots\cdots$$

విభాగ సమాకలన సూత్రము ద్వారా

$$\begin{aligned}
\int uv dx &= \int u dv_{(1)} = uv_{(1)} - \int v_{(1)} du = uv_{(1)} - \int v_{(1)} \frac{du}{dx} dx \\
&= uv_{(1)} - \int u^{(1)} dv_{(2)} \\
&= uv_{(1)} - \left(u^{(1)}v_{(2)} - \int v_{(2)} du^{(1)}\right) \\
&= uv_{(1)} - u^{(1)}v_{(2)} + \int v_{(2)} \frac{du^{(1)}}{dx} dx \\
&= uv_{(1)} - u^{(1)}v_{(2)} + \int u^{(2)} dv_{(3)} \\
&= uv_{(1)} - u^{(1)}v_{(2)} + \left(u^{(2)}v_{(3)} - \int v_{(3)} du^{(2)}\right) \\
&= uv_{(1)} - u^{(1)}v_{(2)} + u^{(2)}v_{(3)} - \int v_{(3)} du^{(2)} .
\end{aligned}$$

ఈ విధముగా కొనసాగించడం వలన,

$$\int uv dx = uv_{(1)} - u^{(1)}v_{(2)} + u^{(2)}v_{(3)} - u^{(3)}v_{(4)} + \cdots .$$

03_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_9.indd 120 03/03/2023 18:13:30

పై ఫలితమును రెండు ప్రమేయాల గుణకార లబ్ధముల సమాకలనమునకు బెర్నౌలీస్ సూత్రము అంటారు.

గమనిక

u, x లో ఒక బహుపది ప్రమేయము మరియు ఏదేని ధన పూర్ణసంఖ్య m కు వరుస అవకలని $u^{(m)}$ సున్న అగును. కావున తరువాత అవకలనములు సున్న మాత్రమే అవుతుంది. పై సూత్రము యొక్క కుడివైపు పరిమిత సంఖ్యలో మాత్రమే పదాలను కలిగియుంటుంది.

ఉదాహరణ 9.31

$\int_0^{\pi} x^2 \cos nx\, dx$, ను గణించండి n ఒక ధన పూర్ణసంఖ్య.

సాధన

$u = x^2$ మరియు $v = \cos nx$, గా తీసుకొని, బెర్నౌలీస్ సూత్రమును అనువర్తింపచేసిన

$$I = \int_0^{\pi} x^2 \cos nx\, dx = \left[\left(x^2\right)\left(\frac{\sin nx}{n}\right) - (2x)\left(-\frac{\cos nx}{n^2}\right) + (2)\left(-\frac{\sin nx}{n^3}\right) \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2\pi(-1)^n}{n^2}, \text{ కావున } \cos n\pi = (-1)^n \text{ and } \sin n\pi = 0.$$

ఉదాహరణ 9.32

$\int_0^1 e^{-2x}(1 + x - 2x^3)\, dx$ ను గణించండి.

సాధన

$u = 1 + x - 2x^3$ మరియు $v = e^{-2x}$, గా తీసుకొనుము. బెర్నౌలీ సూత్రమును అనువర్తింపచేసిన

$$I = \int_0^1 e^{-2x}(1 + x - 2x^3)\, dx$$

$$= \left[(1 + x - 2x^3)\left(\frac{e^{-2x}}{-2}\right) - \left(1 - 6x^2\right)\left(\frac{e^{-2x}}{4}\right) + (-12x)\left(\frac{e^{-2x}}{-8}\right) - (-12)\left(\frac{e^{-2x}}{16}\right) \right]_0^1$$

$$= \left[\frac{e^{-2x}}{16}\left(16x^3 + 24x^2 + 16x\right) \right]_0^1$$

$$= \frac{7}{2e^2}.$$

ఉదాహరణ 9.33

$\int_0^{2\pi} x^2 \sin nx\, dx$, ను గణించండి n ఒక ధన పూర్ణసంఖ్య

సాధన

$u = x^2$ మరియు $v = \sin nx$, గా తీసుకొని, బెర్నౌలీ సూత్రమును అనువర్తింపచేసిన

$$I = \int_0^{2\pi} x^2 \sin nx\, dx = \left[\left(x^2\right)\left(-\frac{\cos nx}{n}\right) - (2x)\left(-\frac{\sin nx}{n^2}\right) + (2)\left(\frac{\cos nx}{n^3}\right) \right]_0^{2\pi}$$

03_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_9.indd 121 03/03/2023 18:13:37

$$= \left[\left(4\pi^2\right)\left(-\frac{1}{n}\right) - 0 + (2)\left(\frac{1}{n^3}\right)\right] - \left[0 - 0 + (2)\left(\frac{1}{n^3}\right)\right], \text{ కావున } \cos 2n\pi = 1 \text{ మరియు } \sin 2n\pi = 0$$

$$= -\frac{4\pi^2}{n} + \frac{2}{n^3} - \frac{2}{n^3} = -\frac{4\pi^2}{n}.$$

ఉదాహరణ 9.34

$\int_{-1}^{1} e^{-\lambda x}(1-x^2)\,dx$ ను గణించండి.

సాధన

$u = 1 - x^2$ మరియు $v = e^{-\lambda x}$, గా తీసుకొని, బెర్నౌలీ సూత్రమును అనువర్తింపచేసిన

$$I = \int_{-1}^{1} e^{-\lambda x}(1-x^2)\,dx = \left[(1-x^2)\left(\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right) - (-2x)\left(\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2}\right) + (-2)\left(\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda^3}\right)\right]_{-1}^{1}$$

$$= 2\left(\frac{e^{-\lambda}}{\lambda^2}\right) + 2\left(\frac{e^{-\lambda}}{\lambda^3}\right) + 2\left(\frac{e^{\lambda}}{\lambda^2}\right) - 2\left(\frac{e^{\lambda}}{\lambda^3}\right)$$

$$= \frac{2}{\lambda^2}\left(e^{\lambda} + e^{-\lambda}\right) - \frac{2}{\lambda^3}\left(e^{\lambda} - e^{-\lambda}\right).$$

అభ్యాసము 9.4

క్రింది వాటిని గణించండి.

1. $\int_0^1 x^3 e^{-2x}\,dx$ 2. $\int_0^1 \frac{\sin(3\tan^{-1}x)\tan^{-1}x}{1+x^2}\,dx$ 3. $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{e^{\sin^{-1}x}\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ 4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos 2x\,dx$

9.5 అపక్రమ సమాకలనములు (Improper Integrals)

రీమాన్ సమాకలనము $\int_a^b f(x)dx$ ను నిర్వచించునప్పుడు సమాకలన అంతరం $[a,b]$ పరిమితం మరియు $f(x)$ అనునది $[a,b]$ అంతరంలో గల ప్రతి బిందువు వద్ద పరిమితముగా ఉండును. కొన్ని భౌతిక అనువర్తనాలలో క్రింది రకాల సమాకలనాలు లభించును.

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx,\ \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx,\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx,$$

ఇచ్చట a వాస్తవ సంఖ్య మరియు $f(x)$ అనునది సమాకలన అంతరములో అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయం అగును. ఎఱ సమాకలనములను రీమాన్ సమాకలనుల యొక్క అవధులు క్రింది విధముగా నిర్వచించారు.

(i) $$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx$$

(ii) $$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^a f(x)\,dx$$

03_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_9.indd 122 03/03/2023 18:13:45

(iii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t} f(x)\,dx$

వీటిని మొదటి రకానికి చెందిన అపక్రమ సమాకలనాలు అంటారు. ఇవి అవధులను కలిగియుంటే ఆ అపక్రమ సమాకలనాలను అభిసరణము అంటారు.

గమనిక

సమాకలన సిద్ధాంతము యొక్క ప్రాథమిక సిద్ధాంతము ప్రకారము $F(t)$ అను ప్రమేయము క్రింది విధముగా వ్యవస్థితం అగును.

$$\int_a^t f(x)\,dx = F(t)-F(a)$$

$$\therefore \int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}[F(t)-F(a)] = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^{\infty}.$$

ఉదాహరణ 9.35

$\int_b^{\infty} \frac{1}{a^2+x^2}\,dx$, $a>0, b\in\mathbb{R}$ ను గణించండి.

సాధన

$$\int_b^{\infty} \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}\right]_b^{\infty} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\infty - \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{b}{a} = \frac{1}{a}\left[\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{b}{a}\right].$$

గమనిక

పై ఉదాహరణము నుండి

(i) $\int_0^{\infty} \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\left[\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}0\right] = \frac{\pi}{2a}.$

(ii) $\int_a^{\infty} \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\left[\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}1\right] = \frac{1}{a}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right] = \frac{\pi}{4a}.$

(iii) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t}\frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty} 2\int_0^t \frac{1}{a^2+x^2}\,dx$, కావున $\frac{1}{a^2+x^2}$ సరి ప్రమేయము.

$$= 2\int_0^{\infty}\frac{1}{a^2+x^2}\,dx = 2\left(\frac{\pi}{2a}\right) = \frac{\pi}{a}.$$

ఉదాహరణ 9.36

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4\sin^2 x+5\cos^2 x}$ ను గణించండి.

సాధన

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4\sin^2 x+5\cos^2 x}$$

03_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_9.indd 123 03/03/2023 18:13:53

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x}{4\tan^2 x + 5}\, dx$$ { (లవము, హారములను $\cos^2 x$ చే భాగించగా)

$u = \tan x$. అయితే $du = \sec^2 x\, dx$

అయినప్పుడు $x = 0, u = \tan 0 = 0$

అయినప్పుడు $x = \frac{\pi}{2}, u = \tan\frac{\pi}{2} = \infty$.

$\therefore I = \int_0^{\infty} \frac{du}{4u^2 + 5}$ (ఇది ఒక అపక్రమ సమాకలనం)

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\infty} \frac{du}{\left[u^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right]} = \frac{1}{4} \times \frac{2}{\sqrt{5}} \left[\tan^{-1}\left(\frac{u}{\frac{\sqrt{5}}{2}}\right)\right]_0^{\infty} = \frac{1}{2\sqrt{5}}(\tan^{-1}\infty - \tan^{-1} 0) = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4\sqrt{5}}.$$

అభ్యాసము 9.5

1. క్రింది వాటిని గణించండి.

(i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + 5\cos^2 x}$ (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5 + 4\sin^2 x}$

9.6 క్షయకరణ సూత్రాలు (Reduction Formulae)

కొన్ని నిశ్చిత సమాకలనాలను సంక్షిప్త క్షయకరణ పద్ధతులలో గణించవచ్చును. ఈ విభాగములో క్రింది నిశ్చిత సమాకలనముల విలువలను పొందవచ్చును.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx\,,\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx\,,\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x\, dx\,,\ \int_0^1 x^m (1-x)^n\, dx\,.$$

అపక్రమ సమాకలనం $\int_0^{\infty} e^{-x} x^n\, dx$ విలువను కూడా పొందవచ్చును.

క్షయకరణ సూత్రమును క్రింది దశలలో పొందవచ్చును.

దశ 1 : సమాకలనం నందు సూచిక n ను గుర్తించవలెను. (ధన పూర్ణసంఖ్య)

దశ 2 : సమాకలనమును I_n గా తీసుకొనవలెను.

దశ 3 : విభాగ సమాకలన సూత్రమును ఉపయోగించి I_n సమీకరణమును I_{n-1} లేదా I_{n-2} పదములుగానమార్చవలెనుయ

ఫలిత సమీకరణములను I_n యొక్క క్షయకరణ సూత్రములు అంటారు.

కొన్ని క్షయకరణ సూత్రములను నిరూపణ లేకుండా క్రింద ఇవ్వబడినవి.

క్షయకరణ సూత్రము I : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$, అయితే $I_n = \frac{(n-1)}{n} I_{n-2}$, $n \geq 2$.

క్షయకరణ సూత్రము II : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$, అయితే $I_n = \frac{(n-1)}{n} I_{n-2}$ $n \geq 2$.

03_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_9.indd 124 03/03/2023 18:14:02

క్షయకరణ సూత్రము III : $I_{m,n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x \, dx$, అయితే $I_{m,n} = \frac{(n-1)}{m+n} I_{m,n-2}, n \geq 2$.

క్షయకరణ సూత్రము IV : $I_{m,n} = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx$, అయితే $I_{m,n} = \frac{n}{m+n+1} I_{m,n-1}, n \geq 1$.

క్షయకరణ సూత్రాలు I మరియు II లను ఉపయోగించి క్రింది ఫలితాలను పొందవచ్చును. (ఋజువు లేకుండా):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx = \begin{cases} \frac{(n-1)}{n} \times \frac{(n-3)}{(n-2)} \times \cdots \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}, & \text{if } n = 2,4,6,\cdots \\ \frac{(n-1)}{n} \times \frac{(n-3)}{(n-2)} \times \cdots \times \frac{2}{3}, & \text{if } n = 3,5,7,\cdots \end{cases}$$

గమనిక

మనకు గల వివరణలు

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \, dx = \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \times 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x \, dx = \frac{5}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}$$

ఉదాహరణ 9.37

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2 x + \cos^4 x\right) dx$ ను గణించండి.

సాధన

ఇచ్చిన $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2 x + \cos^4 x\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \, dx = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{16}$.

ఉదాహరణ 9.38

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{vmatrix} \cos^4 x & 7 \\ \sin^5 x & 3 \end{vmatrix} dx$ ను గణించండి.

సాధన

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(3\cos^4 x - 7\sin^5 x\right) dx = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \, dx - 7\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \, dx$$

$$= 3 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} - 7 \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{9\pi}{16} - \frac{56}{15}.$$

క్షయకరణ సూత్రము III ను పునరావృతంగా వర్తింపచేయడం ద్వారా క్రింది ఫలితాలను పొందవచ్చును. (ఋజువు లేకుండా)

(i) n సరిసంఖ్య మరియు m సరిసంఖ్య అయితే

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x \, dx = \frac{(n-1)}{(m+n)} \frac{(n-3)}{(m+n-2)} \frac{(n-5)}{(m+n-4)} \cdots \frac{1}{(m+2)} \frac{(m-1)}{m} \frac{(m-3)}{(m-2)} \frac{(m-5)}{(m-4)} \cdots \frac{1}{2} \frac{\pi}{2}$$

03_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_9.indd 125 03/03/2023 18:14:12

(ii) n బేసి సంఖ్య మరియు m ఏదైనా ధన పూర్ణసంఖ్య (సరి లేక బేసి) అయినప్పుడు

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x \, dx = \frac{(n-1)}{(m+n)} \frac{(n-3)}{(m+n-2)} \frac{(n-5)}{(m+n-4)} \cdots \frac{2}{(m+3)} \frac{1}{(m+1)}.$$

గమనిక

m మరియు n లలో ఒకటి బేసి సంఖ్య అయితే అది $\cos x$ యొక్క ఘాతము కూడా బేసి సంఖ్యగా ఉండటానికి వీలవుతుంది. ఉదాహరణకు m బేసిసంఖ్యగాను, n విలువ సరిసంఖ్య అయిన

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^m x \, dx = \frac{(m-1)}{(n+m)} \frac{(m-3)}{(n+m-2)} \frac{(m-5)}{(n+m-4)} \cdots \frac{2}{(n+3)} \frac{1}{(n+1)}.$$

ఉదాహరణ 9.39

క్రింది విలువలను కనుగొనుము.

(i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^6 x \, dx$ (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \cos^4 x \, dx$

సాధన

(i) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^6 x \, dx = \frac{(6-1)}{(6+4)} \cdot \frac{(6-3)}{(6+4-2)} \cdot \frac{(6-5)}{(6+4-4)} \cdot \frac{(4-1)}{(4)} \cdot \frac{(4-3)}{(4-2)} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{(5)}{(10)} \frac{(3)}{(8)} \frac{(1)}{(6)} \frac{(3)}{(4)} \frac{(1)}{(2)} \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{512}$$

అదేవిధముగా, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^6 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos^4 x \, dx = \frac{(3)}{(10)} \frac{(1)}{(8)} \frac{(5)}{(6)} \frac{(3)}{(4)} \frac{(1)}{(2)} \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{512}$

(ii) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \cos^4 x \, dx = \frac{(3)}{(9)} \frac{(1)}{(7)} \frac{(4)}{(5)} \frac{(2)}{(3)} = \frac{(4)}{(9)} \frac{(2)}{(7)} \frac{(1)}{(5)} = \frac{8}{315}$$

అదేవిధముగా, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \cos^4 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^5 x \, dx = \frac{(4)}{(9)} \frac{(2)}{(7)} \frac{(1)}{(5)} = \frac{8}{315}$

ఉదాహరణ 9.40

$\int_0^{2a} x^2 \sqrt{2ax - x^2} \, dx$ ను గణించుము.

సాధన

$x = 2a\cos^2\theta$. గా తీసుకొనిన, $dx = -4a\cos\theta\sin\theta d\theta$.

$x = 0$, $2a\cos^2\theta = 0$ అయిన $\theta = \frac{\pi}{2}$. కావున $x = 2a$, $2a\cos^2\theta = 2a$ అయిన $\theta = 0$.

అందువలన

$$I = \int_0^{2a} x^2 \sqrt{2ax - x^2} \, dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} 4a^2 \cos^4\theta \sqrt{4a^2\cos^2\theta - 4a^2\cos^4\theta}(-4a\cos\theta\sin\theta) d\theta$$

03_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_9.indd 126 03/03/2023 18:14:22

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4a^2 \cos^4\theta 2a\cos\theta\sin\theta(4a\cos\theta\sin\theta)d\theta$$

$$= 32a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6\theta\sin^2\theta\, d\theta$$

$$= 32a^4 \times \frac{1}{8}\times\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} = \frac{5\pi a^4}{8}\ .$$

ఉదాహరణ 9.41

$\int_0^1 x^5\left(1-x^2\right)^5 dx$ ను గణించుము.

సాధన

$x = \sin\theta$.గా తీసుకొనిన, $dx = \cos\theta d\theta$.

$x = 0$, $\sin\theta = 0$ అయితే $\theta = 0$. కావున $x = 1$, $\sin\theta = 1$ అయితే $\theta = \frac{\pi}{2}$ కావున.

అందువలన

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\theta\left(1-\sin^2\theta\right)^5\cos\theta\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\theta\cos^{11}\theta\, d\theta = \frac{10}{16}\times\frac{8}{14}\times\frac{6}{12}\times\frac{4}{10}\times\frac{2}{8}\times\frac{1}{6} = \frac{1}{336}.$$

క్షయకరణ సూత్రము III ను పునరావృతముగా వర్తింపచేయడం ద్వారా క్రింది ఫలితాలను పొందవచ్చును. (బుజువు లేకుండా)

$\int_0^1 x^m\ (1-x)^n dx = \frac{m!\times n!}{(m+n+1)!}$, ఇచ్చట m మరియు n ధన పూర్ణసంఖ్య

ఉదాహరణ 9.42

$\int_0^1 x^3\left(1-x\right)^4 dx$ ను గణించండి.

సాధన

$$\int_0^1 x^m\left(1-x\right)^n dx = \frac{m!\times n!}{(m+n+1)!}.$$

$$\therefore \int_0^1 x^3\left(1-x\right)^4 dx = \frac{3!\times 4!}{(3+4+1)!} = \frac{3!\times 4!}{8!} = \frac{3\times2\times1\times4\times3\times2\times1}{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1} = \frac{1}{280}.$$

అభ్యాసము 9.6

1. క్రింది వాటిని గణించండి.

(i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x\ dx$ (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 x\ dx$ (iii) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^6 2x\ dx$ (iv) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^5 3x\ dx$

(v) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos^4 x\ dx$ (vi) $\int_0^{2\pi} \sin^7\frac{x}{4}\ dx$ (vii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\cos^5\theta\, d\theta$ (viii) $\int_0^1 x^2(1-x)^3\ dx$

03_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_9.indd 127 03/03/2023 18:14:31

9.7 గామా సమాకలనం (Gamma Integral)

ఈ విభాగములో ప్రత్యేక అపక్రమ సమకలనం యొక్క రూపము గురించి మనము అభ్యసిస్తాము. $\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx$ ఇచ్చట n ఒక ధనపూర్ణసంఖ్య. అందువలన

$$e^{\infty} = \lim_{x\to\infty} e^x = \infty \text{ మరియు } e^{-\infty} = \lim_{x\to\infty} e^{-x} = \frac{1}{\lim_{x\to\infty} e^x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

l హాపిటాల్ యొక్క నియమము ప్రకారము ప్రతి m ధన పూర్ణసంఖ్యలుకు

$$\lim_{x\to\infty} x^m e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^m}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{m!}{e^x} = 0 \text{ అగును.}$$

ఉదాహరణ 9.43

$\int_0^\infty e^{-x}x^n dx = n!$, అని చూపుము. n అనునది ధన పూర్ణసంఖ్య

సాధన

విభాగ సమాకలన సూత్రమును వర్తింపచేయుట ద్వారా

$$\int_0^\infty e^{-x}x^n dx = \left[x^n\left(-e^{-x}\right)\right]_0^\infty - \int_0^\infty \left(-e^{-x}\right)\left(nx^{n-1}\right)dx = n\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx.$$

$$I_n = \int_0^\infty e^{-x}x^n dx \text{ .అయితే, } I_n = nI_{n-1}.$$

కావున, $I_n = n(n-1)I_{n-2}$.

ఇదేవిధంగా కొనసాగించడం వలన చివరన మనకు లభించునది

$$I_n = n(n-1)(n-2)\cdots(2)(1)I_0.$$

కాని, $I_0 = \int_0^\infty e^{-x}x^0 dx = \left(-e^{-x}\right)_0^\infty = 0+1 = 1$.

కావున, $I_n = n(n-1)(n-2)\cdots(2)(1) = n!$. మనకు లభించును

ఫలితము

$\int_0^\infty e^{-x}x^n dx = n!$, కావున మనము పొందు n ఒక ఋణేతర పూర్ణసంఖ్య.

గమనిక

ప్రతి ధన పూర్ణసంఖ్య $n \geq 1$ కు సమాకలనం $\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx$ ఒక ఏకైక ధన పూర్ణసంఖ్యను నిర్వచించును.

నిర్వచనము 9.1

$\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx$ ను గామా సమాకలనం అంటారు. దీనిని $\Gamma(n)$ తో సూచిస్తారు. మరియు దీనిని 'n' యొక్క "గామా" గా చదవవలెను.

గమనిక

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n).$$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}x^0 dx = \left(-e^{-x}\right)_0^\infty = 0+1 = 1,$$

03_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_9.indd 128 03/03/2023 18:14:40

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx .$$
$$= (n-1)!,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

ఉదాహరణ 9.44

$\int_0^\infty e^{-ax} x^n dx$,ను గణించుము. ఇక్కడ $a > 0$.

సాధన

$t = ax$, గా ప్రతిక్షేపించగా, $dt = adx$ అగును. మరియు $x = 0 \Rightarrow t = 0$ and $x = \infty \Rightarrow t = \infty$.

అందువలన,

$$\int_0^\infty e^{-ax} x^n dx = \int_0^\infty e^{-t} \left(\frac{t}{a}\right)^n \frac{dt}{a} = \frac{1}{a^{n+1}} \int_0^\infty e^{-t} t^n dt$$
$$= \frac{1}{a^{n+1}} \int_0^\infty e^{-x} x^n dx = \frac{n!}{a^{n+1}} .$$

ఈ విధముగా

$$\int_0^\infty e^{-ax} x^n dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

ఉదాహరణ 9.45

$\Gamma(n) = 2\int_0^\infty e^{-x^2} x^{2n-1} dx$. అని చూపుము.

సాధన

$x = \sqrt{u}$, ను ప్రతిక్షేపించగా $dx = \frac{1}{2\sqrt{u}} du$.

$x = 0$, అయితే $u = 0$.అయితే $x = \infty$, అయితే $u = \infty$.

$$\therefore 2\int_0^\infty e^{-x^2} x^{2n-1} dx = 2\int_0^\infty e^{-u} \left(\sqrt{u}\right)^{2n-1} \frac{1}{2\sqrt{u}} du = \int_0^\infty e^{-u} u^{n-1} du = \Gamma(n) .$$

ఉదాహరణ 9.46

$\int_0^\infty \frac{x^n}{n^x} dx$, ను గణించుము. ఇక్కడ n ధన పూర్ణసంఖ్య ≥ 2 .

సాధన

$n = e^{\log_e n}$, సూత్రమును ఉపయోగించిన మనకు లభించునది

$$I = \int_0^\infty \frac{x^n}{n^x} dx = \int_0^\infty n^{-x} x^n dx = \int_0^\infty \left(e^{\log n}\right)^{-x} x^n dx = \int_0^\infty e^{-x \log n} x^n dx .$$

$u = x \log n$, ను ప్రతిక్షేపించగా $dx = \frac{du}{\log n}$ అని మనకు లభించును.

$x = 0$, అయితే $u = 0$. $x = \infty$, అయితే $u = \infty$.

$$\therefore I = \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{\log n}\right)^n \frac{du}{\log n}$$
$$= \frac{1}{(\log n)^{n+1}} \int_0^\infty e^{-u} u^{(n+1)-1} du = \frac{\Gamma(n+1)}{(\log n)^{n+1}} = \frac{n!}{(\log n)^{n+1}} .$$

అభ్యాసము 9.7

క్రింది వాటిని గణించుము.

1. (i) $\int_0^{\infty} x^5\, e^{-3x}\, dx$ (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\tan x}}{\cos^6 x}\, dx$

2. $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} x^3 dx = 32,\ \alpha > 0$, అయితే α విలువను కనుగొనుము.

GM1S3

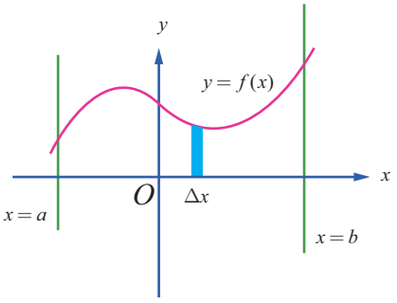
9.8 సమాకలన పద్ధతి ద్వారా పరిబద్ధ తలం వైశాల్యమును గణించడం

ఈ అధ్యాయము ప్రారంభములో జ్యామితీయ విధానం ద్వారా నిశ్చిత సమాకలనమును ఇంతకుముందే మనము పరిచయము చేసియున్నాము. నిశ్చిత సమాకలనం యొక్క విలువ ధనాత్మక జ్యామితీయ వైశాల్యమును నిశ్చిత సమాకలనం ఇస్తుంది. ప్రస్తుత ఈ విభాగములో తలము యొక్క వక్రాలతో పరిబద్ధమైన తలము యొక్క ప్రాంత వైశాల్యమును కనుగొనుటకు మనము ఒక విధానమును అనుసరిస్తాము.

9.8.1 వక్రరేఖ, x – అక్షము మరియు రేఖలు $x = a$ మరియు $x = b$ లతో పరిబద్ధమైన ప్రాంత వైశాల్యము

సందర్భము (i)

$x = a$ మరియు $x = b$ రేఖల మధ్య x – అక్షము పైభాగమున $y = f(x),\ a \le x \le b$ అను సమీకరణపు అవిచ్ఛిన్న వక్రములతో పరిబద్ధమైన ప్రాంతమును తీసుకొందాము. (అనగా మొదటి పాదము లేదా రెండవ పాదములో ఇమిడి యున్న ప్రాంతము) పటము 9.8లో చూడుము. తరువాత వక్రము యొక్క ప్రాంతములో గల ప్రతి బిందువుకు $y \ge 0$ అగును. నిరూపకాలు $x = a$, $x = b$, x – అక్షము మరియు వక్రరేఖలతో పరిబద్ధమైన ప్రాంతమును తీసుకొందాము. ఈ భాగములో y యొక్క గుర్తు మార్పు చెందదు అను ముఖ్య విషయమును గమనించుము. కావున A యొక్క ప్రాంత వైశాల్యము క్రింది విధముగా ఉండును.

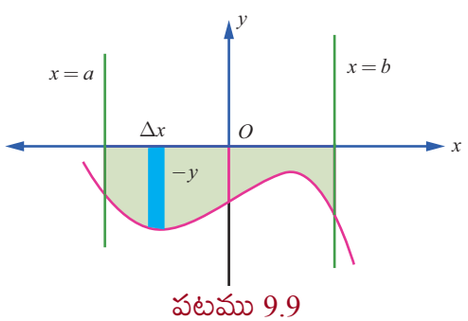


పటము 9.8

y – అక్షము యొక్క ధనాత్మక దిశలో పయనించినప్పుడు ఆ ప్రాంతమును Δx వెడల్పుతో y ఎత్తుగా గల ప్రాథమిక లంబ విభాగాలుగా (సన్నని దీర్ఘచతురస్రములుగా) విభజించిన A అనునది క్షితిజ లంబ విభాగాల వైశాల్యము యొక్క అవధి మొత్తమును తెలియచేయును. కావున $A = \lim \sum_{a \le x \le b} -y\Delta x = -\int_a^b y dx = \left|\int_a^b y dx\right|$ అని మనకు లభించును.

సందర్భము (ii)

$x = a$ మరియు $x = b$ అను రేఖలకు మధ్యను, x – అక్షమునకు క్రింది భాగమున (అనగా III లేదా IV వ పాదములలో) గల అవిచ్ఛిన్న వక్రరేఖా సమీకరణము $y = f(x),\ a \le x \le b$ ల మధ్య పరిబద్ధ ప్రాంతమును తీసుకొందాము. తరువాత వక్రం యొక్క ప్రాంతములో ప్రతి బిందువుకు $y \le 0$ అగును. ఈ ప్రాంతములో y యొక్క గుర్తు మార్పు చెందదు అను ముఖ్య విషయమును



పటము 9.9

03_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_9.indd 130 03/03/2023 18:14:55

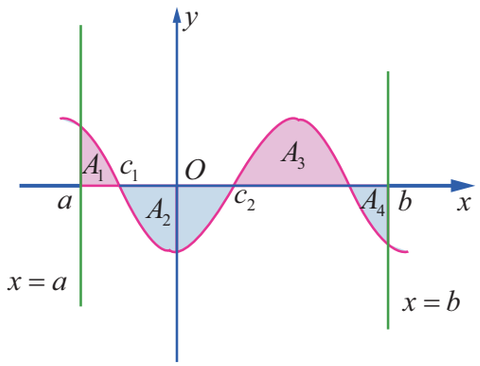
గమనించుము. నిరూపకాలు $x=a$ మరియు $x=b$, $x-$ అక్షము మరియు వక్రరేఖలుచే పరిబద్ధమైన ప్రాంత వైశాల్యమును తీసుకొందాం. పటము 9.9ని చూడుము. ఈ ప్రాంత వైశాల్యమును క్రింది విధముగా కనుగొంటాము.

$y-$ అక్షము యొక్క ఋణాత్మక దిశలో గమనించినప్పుడు ఆ ప్రాంతమును ప్రాథమిక విభాగాల (సన్నని దీర్ఘచతురస్రాకారం) ఎత్తు $|y|=-y$ మరియు వెడల్పు Δx గా ఉండునట్లు విభజింపవలెను. A అనునది లంబ విభాగాల వైశాల్యము యొక్క అవధి మొత్తమును తెలియజేయును.

కావున $A=\lim\limits_{a\le x\le b}\sum -y\Delta x=-\int_a^b y\,dx=\left|\int_a^b y\,dx\right|$ అని మనకు లభించును.

సందర్భము (iii)

$y=f(x)$, $a\le x\le b$ అను అవిచ్ఛిన్న వక్ర సమీకరణముచే



పటము 9.10

$x-$ అక్షమునకు పైన అలాగే దిగువున గల ప్రాంతమును తీసుకొందాము. (అనగా ఈ ప్రాంతము అన్ని పాదములలో ఉంటుంది) $XY-$ తలములో $y=f(x)$ యొక్క రేఖాచిత్రమును గీయుము. ఈ రేఖాచిత్రము అక్షమునకు పైన మరియు క్రింద ఉంటుంది. మరియు ఇది నిరూపకాలు $x=a$, $x=b$. మరియు $[a,b]$ ల మధ్య అంతరఖండనం చేయును. అంతరం $[a,c_1]$, $[c_1,c_2],\cdots,[c_k,b]$ అను ప్రతి ఉపాంతరములో $f(x)$ కు ఒకే గుర్తు ఉండునట్లు విభజించుము. సందర్భము 1 మరియు 2 లను ఉపయోగించి ఈ ఉపాంతరములకు సంబంధించిన ప్రాంతముల యొక్కవైశాల్యమును విడివిడిగా పొందవచ్చును.

కావున రేఖలు $y=f(x)$ మరియు $x=a$, అక్షము మరియు $x=b$ యొక్క రేఖాచిత్రముచే పరిబద్ధమైన ప్రాంతము యొక్క జ్యామితీయ వైశాల్యము క్రింది విధముగా లభించును.

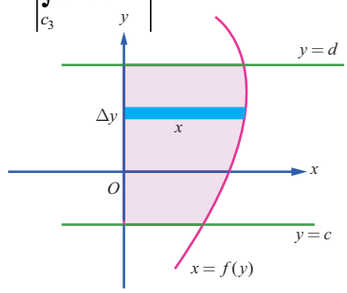
$$\left|\int_a^{c_1} f(x)dx\right|+\left|\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx\right|+\cdots+\left|\int_{c_k}^{b} f(x)dx\right|.$$

పటము. 9.10

నందు ఛాయచేయబడిన ప్రాంతమును A_1, A_2, A_3 మరియు A_4 లు రేఖాగణిత వైశాల్యముల భాగాలుగా తీసుకొనిన A యొక్క మొత్త వైశాల్యము క్రింద ఇవ్వబడినది.

$$A=A_1+A_2+A_3+A_4=\int_a^{c_1} f(x)dx+\left|\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx\right|+\int_{c_2}^{c_3} f(x)dx+\left|\int_{c_3}^{b} f(x)dx\right|.$$

9.8.2 ఒక వక్రరేఖ, y– అక్షము మరియు $y=c$ మరియు $y=d$ అను రేఖలతో పరిబద్ధమైన ప్రాంత వైశాల్యము



పటము 9.11

సందర్భము (iv)

$y-$ అక్షమునకు కుడివైపున అవిచ్ఛిన్న వక్రరేఖ (మొదటవ లేదా నాల్గవ పాదము) సమీకరణము $x=f(y),\ c\le y\le d$ లతో పరిబద్ధమైన ప్రాంతమును

03_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_9.indd 131 03/03/2023 18:15:00

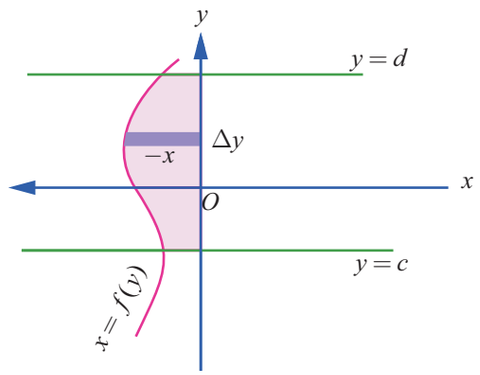
తీసుకొందాం. ఈ ప్రాంతములో ప్రతి బిందువు $x \geq 0$ అగును. ఈ భాగములో x యొక్క గుర్తు మార్పు చెందదు అని గమనించుము.

వక్రం $y-$ అక్షము, $y=c$ మరియు $y=d$ రేఖలతో పరిబద్ధమైన ప్రాంతము (పటము 9.11లో చూపబడినది) కావున భాగము A యొక్క వైశాల్యమును క్రింది విధముగా గణించెదము.

$x-$ అక్షమునకు సానుకూల దిశలో వెళ్ళినప్పుడు ఈ ప్రాంతమును పొడవు x గా మరియు వెడల్పు Δy గాను కలిగిన క్షితిజ సమాంతర విభాగాలుగా విభజించుము. ఇచ్చట A అనునది క్షితిజ సమాంతరాల విభాగాల వైశాల్యముల మొత్తము అవధి అగును. కావున $A = \lim \sum_{c\leq y\leq d} x\Delta y = \int_c^d x dy$

సందర్భము (v)

$x = f(y),\ c \leq y \leq d$.అను సమీకరణ అవిచ్ఛిన్న వక్రరేఖతో $y-$ అక్షమునకు ఎడమవైపు గల ప్రాంతమును తీసుకొందాము. ఈ ప్రాంతములో ప్రతి బిందువు $x \leq 0$ గా ఉండును. ఈ భాగములో x యొక్క గుర్తు మార్పుచెందదు అని గమనించెదము. వక్రం $y-$ అక్షము, $y=c$ మరియు $y=d$ రేఖలతో పరిబద్ధమైన ప్రాంతమును పటము 9.12లో చూపబడినది. కావున ఈ ప్రాంతము యొక్క వైశాల్యమును క్రింది విధముగా గణించెదము.



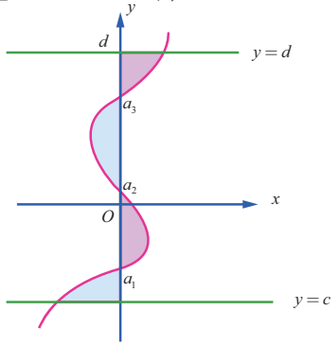
పటము 9.12

$x-$ అక్షమునకు సానుకూల దిశలో వెళ్ళినప్పుడు ఆ సరిహద్దు ప్రాంతము పొడవు $|x| = -x$ గా మరియు వెడల్పు Δy గాను కలిగిన క్షితిజ సమాంతర విభాగాలుగా విభజించుము. ఇచ్చట A అనునది క్షితిజ సమాంతర విభాగాల వైశాల్యముల మొత్తము అవధి అదును.

కావున $A = \lim \sum_{c\leq y\leq d} (-x)\Delta y = -\int_c^d x\, dy = \left|\int_c^d x\, dy\right|$.

సందర్భము (vi)

$x = f(y),\ c \leq y \leq d$ అను అవిచ్ఛిన్న వక్రరేఖా సమీకరణములో గల ఒక ప్రాంతము $y-$ అక్షమునకు ఇరువైపులా ఒకదాని తరువాత ఒకటి క్రమముగా (అన్ని పాదములలోను ఉండవచ్చును) కలదు. $x = f(y)$ గ్రాఫును $XY-$ తలమునందు గీయువలెను. ఈ గ్రాఫు $y-$ అక్షమునకు ఒకదాని తరువాత ఒకటి కుడి, ఎడమ వైపున ఉండి రేఖలు $y=c$ మరియు $y=d$ లకు మధ్య అంతర ఖండం చేయును. $[c,d]$ అంతరమును $[c,a_1],\ [a_1,a_2],\cdots,\ [a_k,d]$ అను ప్రతి ఉపాంతరములుగా ను ఒకే గుర్తు యుండునట్లు విభజింపుము. సందర్భము 3 మరియు సందర్భము 4 లను అనువర్తింపజేసిన ఒక్కొక్క ఉప అంతరమునకు సంబంధించిన రేఖాగణిత వైశాల్యమును విడివిడిగా పొందవచ్చును.



పటము 9.13

కావున $x = f(y)$. y- అక్షము , రేఖలు $y=c$ మరియు $y=d$ లు సరిహద్దులుగా గల రేఖాగణిత ప్రాంత వైశాల్యము

$$A = \left|\int_c^{a_1} f(y)dy\right| + \left|\int_{a_1}^{a_2} f(y)dy\right| + \cdots + \left|\int_{a_k}^{d} f(y)dy\right|.$$

03_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_9.indd 132 03/03/2023 18:15:07

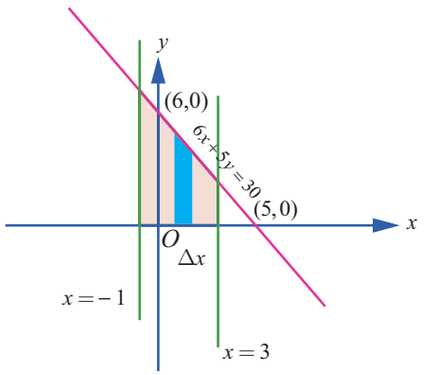
పటము 9.13 నందు ఛాయచేయబడిన ప్రాంతమును B_1, B_2, B_3 మరియు B_4 లు రేఖాగణిత వైశాల్యముల బాగాలుగా తీసుకొనిన , $x = f(y)$ వక్రము $y-$అక్షము ంఖలు $y = c$ మరియు $y = d$ లు సరిహద్దులుగా గల B యొక్క మొత్త వైశాల్యము క్రింద ఇవ్వబడినది

$$B = B_1 + B_2 + B_3 + B_4$$

$$= \left|\int_c^{a_1} f(y)dy\right| + \int_{a_1}^{a_2} f(y)dy + \left|\int_{a_2}^{a_3} f(y)dy\right| + \int_{a_3}^{d} f(y)dy \text{ అగును.}$$

ఉదాహరణ 9.47

$6x + 5y = 30$ రేఖ, $x-$ అక్షము, రేఖలు $x = -1$ మరియు $x = 3$ లచే పరిబద్ధమైన ప్రాంత వైశాల్యమును కనుగొనుము.



పటము 9.14

సాధన

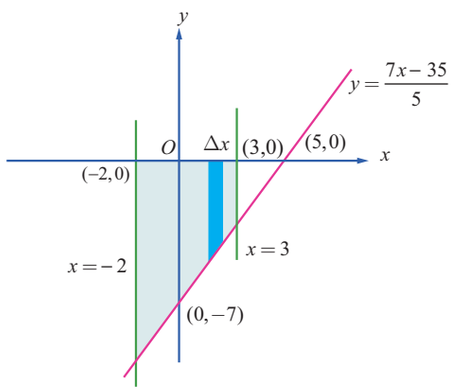
పటము 9.14 నందు ఈ ప్రాంతము చూపబడినది. ఇది $x-$ అక్షమునకు పై భాగమున గలదు. అందువలన కావలసిన వైశాల్యము,

$$A = \int_{-1}^{3} y\,dx = \int_{-1}^{3}\left(\frac{30-6x}{5}\right)dx = \left(\frac{30x-3x^2}{5}\right)_{-1}^{3}$$

$$= \left(\frac{90-27}{5}\right) - \left(\frac{-30-3}{5}\right) = \frac{96}{5}.$$

ఉదాహరణ 9.48

$7x - 5y = 35$ రేఖ, $x-$ అక్షము, రేఖలు $x = -2$ మరియు $x = 3$ లచే పరిబద్ధమైన ప్రాంత వైశాల్యమును కనుగొనుము.



పటము 9.15

సాధన

పటము 9.15 నందు ఈ ప్రాంతము చూపబడినది. ఇది $x-$ అక్షమునకు క్రింది భాగమున కలదు. కావలసిన వైశాల్యము

$$A = \left|\int_{-2}^{3} y\,dx\right| = \left|\int_{-2}^{3}\left(\frac{7x-35}{5}\right)dx\right|$$

$$= \frac{1}{5}\left|\left(7\left(\frac{x^2}{2}\right) - 35x\right)_{-2}^{3}\right|$$

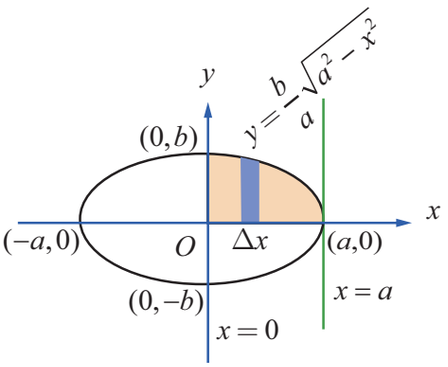
$$= \frac{1}{5}\left|\left(\left(\frac{63}{2}\right) - 105\right) - (84)\right| = \frac{63}{2}.$$

ఉదాహరణ 9.49

దీర్ఘవృత్తము $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ చే పరిబద్ధమైన ప్రాంత వైశాల్యమును కనుగొనుము.

సాధన

దీర్ఘవృత్తము దీర్ఘాక్షము మరియు హ్రస్వాక్షములతో సౌష్ఠవముగా ఉండును. పటము 9.16 నందు చూపబడినది. y అక్షమునకు సానుకూల దిశలో తీసుకోవడం వలన దీర్ఘవృత్తం యొక్క మొత్త వైశాల్యము A విలువ $\left(y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}, 0<x<a\right)$, x- అక్షము, $x=0$ మరియు $x=a$ లచే మొదటి పాదములో పరిబద్ధమైన ప్రాంత వైశాల్యమునకు నాలుగు రెట్లుంటుంది.



పటము 9.16

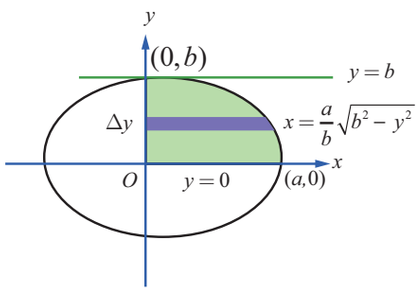
కావున నిలువు విభాగాలను తీసుకోవడం ద్వారా మనం పొందునది

$$A = 4\int_0^a y\,dx = 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$= \frac{4b}{a}\left[\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^a = \frac{4b}{a}\times\frac{\pi a^2}{4} = \pi ab$$

గమనిక

x అక్షము యొక్క సానుకూల దిశలో చూసిన, కావలసిన వైశాల్యము A అనునది ($\left(x=\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}, 0<y<b\right)$ y అక్షము, $y=0$ మరియు $y=b$ లతో మొదటి పాదములో పరిబద్ధమైన ప్రాంత వైశాల్యమునకు నాలుగురెట్లు ఉంటుంది. అందువలన క్షితిజ సమాంతర విభాగాలు తీసుకొనిన, (పటము 9.17 చూడుము) మనకు లభించునది



పటము 9.17

$$A = \int_0^a x\,dy = 4\int_0^b \frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}\,dy$$

$$= \frac{4a}{b}\left[\frac{y\sqrt{b^2-y^2}}{2}+\frac{b^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{y}{b}\right)\right]_0^b = \frac{4a}{b}\times\frac{\pi b^2}{4} = \pi ab\,.$$

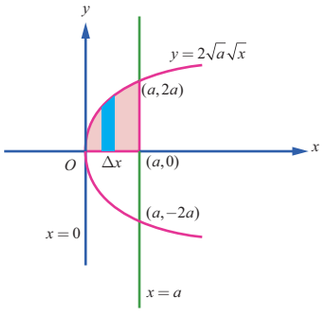
గమనిక

పై ఫలితము నందు $b=a$ ను ప్రతిక్షేపించగా, $x^2+y^2=a^2$ అను వృత్త పరిబద్ధమైన ప్రాంత వైశాల్యము πa^2 అగును.

03_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_9.indd 134 03/03/2023 18:15:18

ఉదాహరణ 9.50

పరావలయము $y^2 = 4ax$ నకు మరియు నాభిలంబ రేఖకు మధ్యగల సరిహద్దు ప్రాంత వైశాల్యమును కనుగొనుము.



పటము 9.18

సాధన

నాభి లంబరేఖ సమీకరణము $x = a$ ఇది పరావలయమును $L(a, 2a)$ మరియు $L_1(a, -2a)$ అను బిందువుల వద్ద ఖండించును. మనకు కావలసిన ప్రాంత వైశాల్యమును పటము 9.18 నందు ఛాయచేసి చూపబడినది. సౌష్ఠవము ద్వారా, కావలసిన వైశాల్యము A అనునది పరావలయము పరిబద్ధమైన ప్రాంత వైశాల్యమునకు రెండురెట్లు ఉంటుందని చెప్పవచ్చును.

$y = 2\sqrt{a}\sqrt{x}, x$-అక్షము, $x = 0$ and $x = a$.

కావున నిలువు భాగాలను తీసుకొనిన, మనకు లభించునది

$$A = 2\int_0^a y\,dx = 2\int_0^a 2\sqrt{a}\sqrt{x}\,dx = 4\sqrt{a}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^a$$

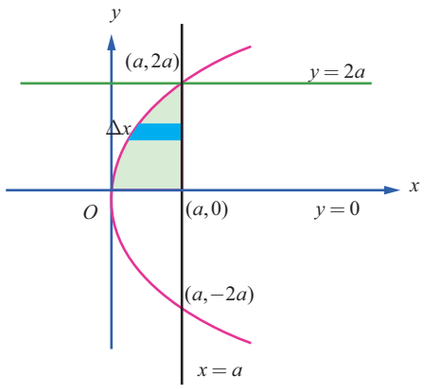
$$= 4\sqrt{a} \times \frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}} = \frac{8a^2}{3}.$$

గమనిక

x అక్షమునకు సానుకూల దిశలో సమాంతర విభాగాలను తీసుకొనిన (పటము 9.19 నందు చూపబడినది)

$$A = 2\int_0^{2a}(a - x)dy = 2\int_0^{2a}\left(a - \frac{y^2}{4a}\right)dy$$

$$= 2\left(ay - \frac{y^3}{12a}\right)_0^{2a} = 2\left(2a^2 - \frac{8a^3}{12a}\right) = \frac{8a^2}{3}.$$



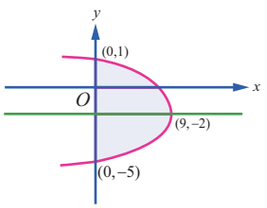
పటము 9.19

గమనిక

పైన పేర్కొన్న వైశాల్యము అనునది ఆధారము (నాభిలంబము) మరియు ఎత్తు (నాభి మరియు శీర్షముల మధ్య దూరము)ల లబ్ధమునకు మూడింట రెండింతలకు సమానము. ఇది, పరావలయాకార ఆర్చ్‌ల యొక్క వైశాల్యమునకు ఆర్కిమెడీస్ సూత్రమును సరిచూసును. పరావలయాకార ఆర్చ్ క్రింద గల వైశాల్యము అనునది ఆర్చ్ యొక్క ఆధారము పొడువుగా మరియు ఆర్చ్ యొక్క ఎత్తు వెడల్పుగా గల దీర్ఘచతురస్రాకార వైశాల్యమునకు మూడింట – రెండింతలు అగును. ఇది ఆధారము (నాభి లంబము) మరియు ఎత్తు (నాభి మరియు శీర్షమునకు మధ్య గల దూరము) గల త్రిభుజ వైశాల్యమునకు మూడింట – నాలుగింతలు కూడా సమానమగును.

ఉదాహరణ 9.51

$x = 5 - 4y - y^2$ అను పరావలయం మరియు y- అక్షములలో పరిబద్ధమైన ప్రాంత వైశాల్యము కనుగొనుము.



పటము 9.20

సాధన

పరావలయము యొక్క సమీకరణము $(y+2)^2 = -(x-9)$ ఈ పరావలయము y అక్షమునకు $(0,-5)$ మరియు $(0,1)$ బిందువుల వద్ద ఖండించును. శీర్షము $(9,-2)$ మరియు పరావలయము యొక్క అక్షము $y = -2$ మనకు కావలసిన ప్రాంతము పటము 9.20 నందు

03_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_9.indd 135 03/03/2023 18:15:24

చూపబడినది. $x-$ అక్షమునకు సానుకూల దిశలో తీసుకోవడం వలన క్షితిజ సమాంతర విభాగాల ప్రాంత వైశాల్యము A క్రింది దాని నుండి లభించును

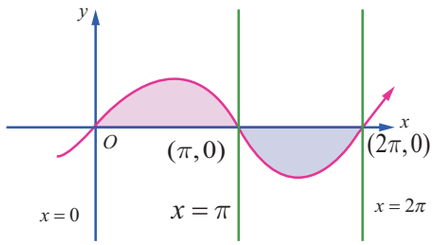
$$A=\int_{-5}^{1} x\,dy=\int_{-5}^{1}(5-4y-y^2)\,dy=\left[5y-2y^2-\frac{y^3}{3}\right]_{-5}^{1}=\frac{8}{3}-\left(-\frac{100}{3}\right)=36.$$

గమనిక

పై లెక్క ప్రకారము, పరావలయాకార ఆర్చ్ వైశాల్యము అనునది దాని యొక్క ఆధారము మరియు ఎత్తుల లబ్ధమునకు మూడింట – రెండింతలకు సమానమని ఆర్కిమెడిస్ సూత్రమును మనము ఇంకొకసారి సరిచూడవచ్చును.

ఉదాహరణ 9.52

$y=\sin x$ అను సైన్ వక్రరేఖకు, రేఖలు $x=0$ మరియు $x=2\pi$ x అక్షములలో పరిబద్ధమైన ప్రాంత వైశాల్యమును కనుగొనుము.



పటము 9.21

సాధన

కావలసిన వైశాల్యమును పటము 9.21 నందు చూపబడినది. ఒక భాగ వైశాల్యము $x-$ అక్షమునకు పై భాగములో $x=0$ మరియు $x=\pi$ ల మధ్యలో, రెండవ భాగపు వైశాల్యము $x-$ అక్షమును క్రింది భాగములో $x=\pi$ మరియు $x=2\pi$ ల మధ్య గలదు. ఇ

$$A=\int_0^{\pi} y\,dx+\left|\int_{\pi}^{2\pi} y\,dx\right|=\int_0^{\pi}\sin x\,dx+\left|\int_{\pi}^{2\pi}\sin x\,dx\right|=\left[-\cos x\right]_0^{\pi}+\left|\left[-\cos x\right]_{\pi}^{2\pi}\right|$$

$$=\left[-\cos\pi+\cos 0\right]+\left|\left[-\cos 2\pi+\cos\pi\right]\right|=2+\left|-2\right|=4.$$

గమనిక

$\int_0^{2\pi}\sin x\,dx$, నిశ్చిత సమాకలనమును మనము లెక్కించిన, మనకు లభించునది

$$\int_0^{2\pi}\sin x\,dx=\left[-\cos x\right]_0^{2\pi}=\left[-\cos 2\pi\right]-\left[-\cos 0\right]=0.$$

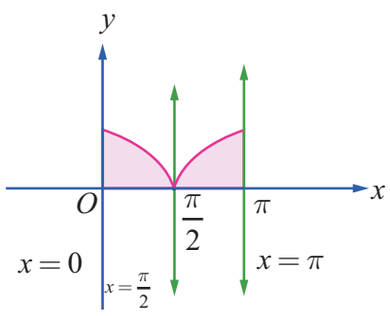
కావున $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$ అనునది $y=\sin x$ వక్రరేఖకు, $x-$ అక్షమునకు, రేఖలు $x=0$ మరియు $x=2\pi$ ల మధ్య ప్రాంత వైశాల్యమును చూపదు.

ఉదాహరణ 9.53

$y=|\cos x|$ వక్రరేఖకు, రేఖలు , $x=0$ మరియు $x=\pi$, x అక్షములలో పరిబద్ధమైన ప్రాంత వైశాల్యమును కనుగొనుము.

సాధన

ఇవ్వబడిన వక్రరేఖ $y=\begin{cases}\cos x, 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\\ -\cos x, \dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi\end{cases}$



పటము 9.22

03_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_9.indd 136 03/03/2023 18:15:33

ఇది $x-$ అక్షమునకు పైభాగమునందు కలదు. కావలసిన వైశాల్యము పటము 9.22లో గీచి చూపబడినది. కావున కావలసిన వైశాల్యము

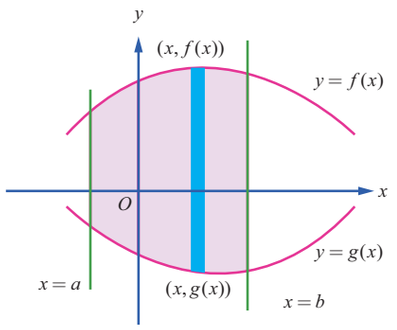
$$A = \int_0^{\pi} y\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos x)\,dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - [\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= [1-0]-[0-1] = 2\,.$$

9.8.3 రెండు వక్రముల మధ్య గల ప్రాంత వైశాల్యము

సందర్భము (i)

$XOY-$ తలము నందు $y=f(x)$ మరియు $y=g(x)$ అను రెండు వక్రరేఖ సమీకరణాలు ప్రతి $x\in[a,b]$ కు $f(x)\geq g(x)$ అగునట్లు అనుకొందాము. ఈ రెండు వక్రములకు నిరూపకాలు $x=a$ మరియు $x=b$ లతో పరిబద్ధమైన ప్రాంత వైశాల్యమును A గా తీసుకొనవలయును.



పటము 9.23

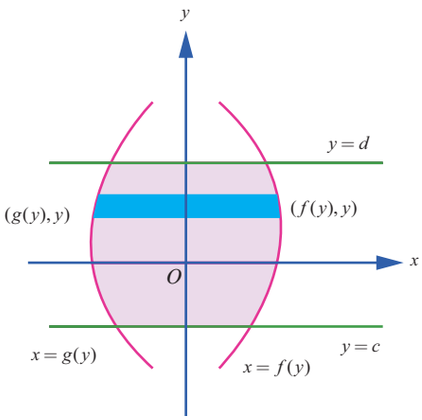
కావలసిన వైశాల్యమును పటము 9.23 నందు ఛాయచేయబడినది. ఈ ప్రాంతము A ను సన్నని క్షితిజ నిలువు విభాగాలుగా వాని వెడల్పు Δx గా ఎత్తు $f(x)-g(x)$ గా తీసుకొని విభజింపవలెను. ముఖ్యముగా ప్రతి $x\in[a,b]$ కు $f(x)-g(x)\geq 0$ అని గమనించుము. మనకు కావలసిన వైశాల్యము విలువ, క్షితిజ నిలువు విభాగాల వైశాల్యముల అవధి మొత్తము అగును. $A=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$

గమనిక

$y-$ అక్షమును సానుకూల దిశలో తీసుకోవడం వలన $y=f(x)$ ను ఎగువ వక్రరేఖ (U) గాను మరియు $y=g(x)$ ను దిగువ వక్రరేఖ (L) గాను మారును. అందువలన వైశాల్యము $A=\int_a^b [y_U - y_L]dx$

సందర్భము (ii)

$XOY-$ తలము నందు $x=f(y)$ మరియు $x=g(y)$ అను రెండు వక్రరేఖ సమీకరణాలు ప్రతి $y\in[c,d]$ కు $f(y)\geq g(y)$ అగునట్లు గలదని అనుకొందాము. ఈ రెండు వక్రములకు, రేఖలు $y=c$ మరియు $y=d$ మధ్య గల ప్రాంత వైశాల్యమును A గా తీసుకొనవలయును. కావలసిన వైశాల్యమును పటము 9.24 నందు ఛాయచేసి చూపబడినది. $x-$ అక్షమునకు సానుకూల దిశలో తీసుకొని A ను సన్నని క్షితిజ సమ విభాగాలుగా దాని వెడల్పు Δy గా మరియు ఎత్తు $f(y)-g(y)$ తీసుకొని విభజింపవలయును. ముఖ్యముగా ప్రతి $y\in[c,d]$ కు $f(y)-g(y)\geq 0$ అని గమనించుము. మనకు కావలసిన వైశాల్యము విలువ క్షితిజ సమాంతర విభాగాల మొత్త వైశాల్యముల అవధి మొత్తము అగును.



పటము 9.24

$$A=\int_c^d [f(y)-g(y)]dy\,.$$

03_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_9.indd 137 03/03/2023 18:15:43

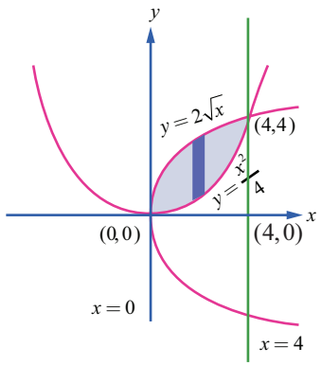
గమనిక

$x-$ నకు సానుకూల దిశలో విలువలను తీసుకోవడము వలన వక్రరేఖ $x=f(y)$ ను కుడివైపు వక్రరేఖ (R) గాను మరియు వక్రరేఖ $x=f(y)$ ను ఎడమవైపు వక్రరేఖ (L) గాను మారును.

వైశాల్యము $A=\int_a^b [x_R - x_L]dy$

ఉదాహరణ 9.54

పరావలయములు $y^2=4x$ మరియు $x^2=4y$ ల మధ్య పరిబద్ధమగు ప్రాంత వైశాల్యమును కనుగొనుము.



పటము 9.25

సాధన

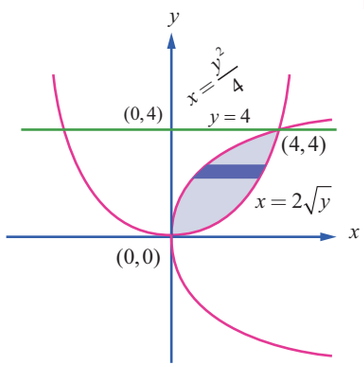
మొదట మనము పరావలయములు ఖండ బిందువులను కనుగొనవలయును. దీని కొరకు $y^2=4x$ మరియు $x^2=4y$ లను సాధించవలయును. దీని నుంచి y విలువను తొలగించడము వలన $x^4=64x$ వచ్చును. పటము 9.25 కావున $x=0$ మరియు $x=4$ లభించును. ఖండ బిందువులు $(0,0)$ మరియు $(4,4)$ అగును. కావలసిన వైశాల్యము పటము 9.25 నందు ఛాయచేసి చూపబడినది.

y - అక్షము దిశలో గమనించినప్పుడు కు $0\le x\le 4$ ఎగువ హద్దు సమీకరణము $y=2\sqrt{x}$ మరియు $0\le x\le 4$ కు దిగువ హద్దు సమీకరణము $y=\frac{x^2}{4}$ అగును. కావున కావలసిన వైశాల్యము Δ విలువ

$$A=\int_0^4 (y_U - Y_L)\,dx=\int_0^4\left(2\sqrt{x}-\frac{x^2}{4}\right)dx=\left[2\left(\frac{2x^{3/2}}{3}\right)-\frac{x^3}{12}\right]_0^4=\left[2\left(\frac{2\times 8}{3}\right)-\frac{64}{12}\right]-0=\frac{16}{3}\ .$$

గమనిక

x అక్షమును ధనాత్మక దిశలో తీసుకోవడము వలన కుడి హద్దు వక్ర రేఖ $x^2=4y$ మరియు ఎడమ హద్దు వక్రరేఖ $y^2=4x$ లను పటము 9.26 నందు చూపించియున్నారు. $0\le y\le 4$ కు కుడి హద్దుగా గల సమీకరణము $x=2\sqrt{y}$ మరియు $0\le y\le 4$ కు ఎడమ హద్దుగా గల సమీకరణము $x=\frac{y^2}{4}$ అగును. కావున మనకు కావలసిన వైశాల్యము A



పటము 9.26

$$A=\int_0^4 (x_R - x_L)\,dx=\int_0^4\left(2\sqrt{y}-\frac{y^2}{4}\right)dy=\left[2\left(\frac{2y^{3/2}}{3}\right)-\frac{y^3}{12}\right]_0^4=\left[2\left(\frac{2\times 8}{3}\right)-\frac{64}{12}\right]-0=\frac{16}{3}$$

ఉదాహరణ 9.55

$x^2=y$ అను పరావలయము మరియు $y=|x|$ వక్రరేఖల మధ్య పరిబద్ధమైన ప్రాంత వైశాల్యమును కనుగొనుము.

సాధన

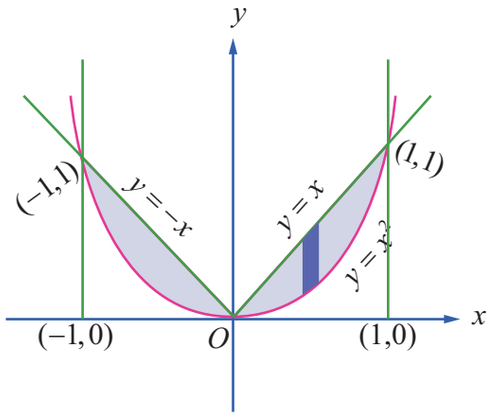
y అక్షమును అనుసరించి రెండు వక్రములు సౌష్ఠవములు.

వక్రరేఖ $y=|x|$ అయితే $y=\begin{cases} x & \text{if } x\ge 0 \\ -x & \text{if } x\le 0 \end{cases}$.

03_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_9.indd 138 03/03/2023 18:15:51

దీనికి, $x^2 = y$ అను పరావలయమునకు ఖండన బిందువులు $(1,1)$ మరియు $(-1,1)$ రెండు వక్రాలకు పరిబద్ధ ప్రాంతము పటము 9.27 నందు ఛాయచేసి చూపబడినది.

ఈ ప్రాంతము మొదటి మరియు రెండవ పాదములలో యుండును. సౌష్ఠవముగా యుండడం వలన కావలసిన వైశాల్యము మొదటి పాద వైశాల్యమునకు రెండురెట్లుగా యుండును.



పటము 9.27

మొదటి పాదము నందు ఎగువ వక్రరేఖ $y = x, 0 \le x \le 1$ గాను మరియు దిగువ వక్రరేఖ $y = x^2, 0 \le x \le 1$ గాను ఉండును. కావలసిన వైశాల్యము

$$A = 2\int_0^1 [y_U - y_L]\,dx = 2\int_0^1 [x - x^2]\,dx$$

$$= 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

ఉదాహరణ 9.56

$y = \cos x$, మరియు $y = \sin x$ అను వక్రములో $x = \frac{\pi}{4}$ మరియు $x = \frac{5\pi}{4}$ రేఖల మధ్య పరిబద్ధమైన ప్రాంత వైశాల్యమును కనుగొనుము.

సాధన

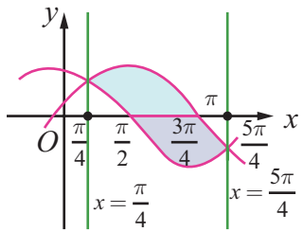
పటము 9.28 నందు ఈ ప్రాంతము ఛాయచేసి చూపబడినది. $\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{5\pi}{4}$ కు ఎగువ హద్దు గల ప్రాంతము $y = \sin x$ మరియు $\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{5\pi}{4}$,దిగువ హద్దు గల ప్రాంతము $y = \cos x$ అగును. మనకు కావలసిన వైశాల్యము A

$$A = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (y_U - y_L)\,dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x)\,dx = \left[-\cos x - \sin x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}$$

$$= \left(-\sin\frac{5\pi}{4} - \cos\frac{5\pi}{4}\right) - \left(-\sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \left(-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) - \left(-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$



పటము 9.28

ఉదాహరణ 9.57

$x^2 + y^2 = a^2$ అను వృత్త ప్రాంతమును $x = h$ అను రేఖ రెండు వృత్త ఖండములుగా విభజించిన, అల్ప వృత్తఖండము వైశాల్యమును కనుగొనుము.

03_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_9.indd 139 03/03/2023 18:15:57

సాధన

అల్ప వృత్త ఖండము పటము 9.28 నందు ఛాయచేసి చూపబడినది. ఇచ్చట $0 < h < a$ x అక్షము నకు సౌష్ఠవముగా ఉన్నందున కావలసిన అల్ప వృత్త ఖండ వైశాల్యము.

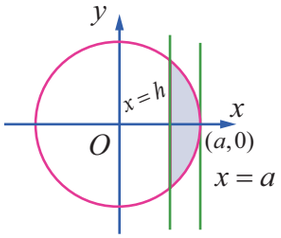
$$A = 2\int_h^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = 2\left[\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right]_h^a$$

$$= 2\left[0 + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}(1)\right] - 2\left[\frac{h\sqrt{a^2-h^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{h}{a}\right)\right]$$

$$= a^2\left(\frac{\pi}{2}\right) - h\sqrt{a^2-h^2} - a^2\sin^{-1}\left(\frac{h}{a}\right)$$

$$= a^2\left[\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\left(\frac{h}{a}\right)\right] - h\sqrt{a^2-h^2}$$

$$= a^2\cos^{-1}\left(\frac{h}{a}\right) - h\sqrt{a^2-h^2}\ .$$



పటము 9.29

ఉదాహరణ 9.58

$y^2 = 4x$ -పరావలయం, $x + y = 3$ అను రేఖ మరియు y - అక్షములచే మొదటి పాదములో పరిబద్ధమగు ప్రాంత వైశాల్యమును కనుగొనుము.

సాధన

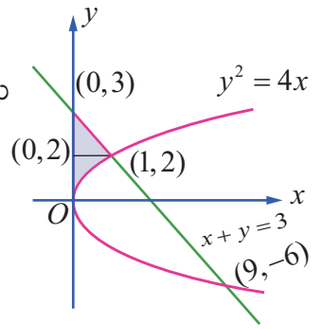
మొదట మనము $x + y = 3$ మరియు $y^2 - 4x$ ల ఖండన బిందువులను కనుగొనవలెను.

$$x + y = 3 \Rightarrow y = 3 - x\ .$$

$$\therefore y^2 = 4x \Rightarrow (3-x)^2 = 4x$$

$$\Rightarrow x^2 - 10x + 9 = 0$$

$$\Rightarrow x = 1, x = 9\ .$$



పటము 9.30

$\therefore x = 1$ ను $x + y = 3 \Rightarrow y = 2$, లో ప్రతిక్షేపించగా $x = 9$ ను $x + y = 3 \Rightarrow y = -6$.

$\therefore (1,2)$ లో ప్రతిక్షేపించగా $(9,-6)$ వచ్చును.

$x + y = 3$ అను రేఖ y అక్షమును $(0,3)$. బిందువు వద్ద కలియును.

కావలసిన ప్రాంతము వైశాల్యము పటము 9.30 నందు ఛాయచేసి చూపబడినది.

y - అక్షమునకు సానుకూల దిశలో గల కుడి సరిహద్దు వక్రరేఖ

$$x = \begin{cases} \frac{y^2}{4}, & 0 \le y \le 2 \\ 3 - y, & 2 \le y \le 3 \end{cases}$$

$$\therefore A = \int_0^2 x\, dy + \int_2^3 x\, dy = \int_0^2 \frac{y^2}{4}\, dy + \int_2^3 (3-y)\, dy$$

$$= \left(\frac{y^3}{12}\right)_0^2 + \left(3y - \frac{y^2}{2}\right)_2^3 = \left(\frac{8}{12} - 0\right) + \left(9 - \frac{9}{2}\right) - \left(6 - \frac{4}{2}\right) = \frac{7}{6}\ .$$

03_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_9.indd 140 03/03/2023 18:16:06

ఉదాహరణ 9.59

$5x-2y=15,\ ,\ x+y+4=0$ అను రేఖలు మరియు x- అక్షములతో పరిబద్ధమగు ప్రాంత వైశాల్యమును సమాకలనము ద్వారా కనుగొనుము.

సాధన

$5x-2y=15,\ x+y+4=0$ రేఖల ఖండన బిందువు $(1,-5)$, $5x-2y=15$ రేఖ x అక్షమును $(3,0)$ బిందువు వద్ద $x+y+4=0$ రేఖ x- అక్షమును $(-4,0)$ బిందువు వద్ద కలియును. కావలసిన వైశాల్యము పటము 9.31 నందు ఛాయచేసి చూపబడినది. ఈ ప్రాంతము x అక్షమునకు క్రింది వైపున గలదు. ఈ ప్రాంతమును లెక్కించడానికి క్షితిజ లంబ విభాగాలు లేదా క్షితిజ సమాంతర విభాగాలను తీసుకొనవలయును.

క్షితిజ లంబ విభాలను తీసుకొనిన $x=1$ రేఖ ఈ ప్రాంతమును రెండు ఉప ప్రాంతాలుగా విభజించును.

$$A = \left|\int_{-4}^{1} y\,dx\right| + \left|\int_{1}^{3} y\,dx\right|$$

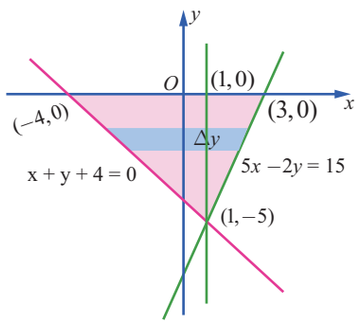
$$= \left|\int_{-4}^{1}(-4-x)\,dx\right| + \left|\int_{1}^{3}\left(\frac{5x-15}{2}\right)dx\right|$$

$$= \left|\left(-4x-\frac{x^2}{2}\right)_{-4}^{1}\right| + \left|\left(\frac{5x^2}{4}-\frac{15x}{2}\right)_{1}^{3}\right|$$

$$= \left|\left(-\frac{9}{2}\right)-(8)\right| + \left|\left(-\frac{45}{4}\right)-\left(-\frac{25}{4}\right)\right|$$

$$= \frac{25}{2}+5$$

$$= \frac{35}{2}.$$



పటము 9.31

క్షితిజ సమాంతర విభాగాలను తీసుకొనిన ఉప ప్రాంతాలుగా విభజింపనవసరం లేదు. $5x-2y=15$ రేఖ కుడి వైపు గల ప్రాంతము మరియు $x+y+4=0$ రేఖ ఎడమ వైపు గల ప్రాంతమగును.

$$A = \int_{-5}^{0}[x_R - x_L]\,dy = \int_{-5}^{0}\left[\frac{15+2y}{5}-(-4-y)\right]dy$$

$$= \int_{-5}^{0}\left[7+\frac{7y}{5}\right]dy = \left[7y+\frac{7y^2}{10}\right]_{-5}^{0}$$

$$= 0-\left[-35+\frac{35}{2}\right] = \frac{35}{2}.$$

గమనిక

భూమి 7 యూనిట్లుగాను, ఎత్తు 5 యూనిట్లుగా గల త్రిభుజాకార ప్రాంత వైశాల్యమును $\frac{35}{2}$ గా సమాకలనం చేయకుండానే చెప్పవచ్చును.

03_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_9.indd 141 03/03/2023 18:16:13

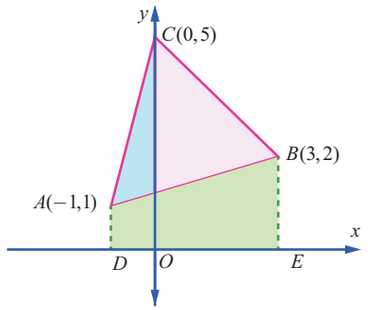
ఉదాహరణ 9.60

$(-1,1)$, $(3,2)$, మరియు $(0,5)$ లు $A, B,$ మరియు C ల శీర్షాలుగా గల ABC త్రిభుజము లో

పరిబద్ధమగు ప్రాంత వైశాల్యమును సమాకలన పద్ధతిని ఉపయోగించి కనుగొనుము.

సాధన

పటము 9.32 ను చూడుము.



పటము 9.32

AB సమీకరణము $\frac{y-1}{2-1}=\frac{x+1}{3+1}$ లేదా $y=\frac{1}{4}(x+5)$

BC సమీకరణము $\frac{y-5}{2-5}=\frac{x-0}{3-0}$ లేదా $y=-x+5$

AC సమీకరణము $\frac{y-1}{5-1}=\frac{x+1}{0+1}$ లేదా $y=4x+5$

$\therefore$ వైశాల్యము ΔABC = వైశాల్యము $DACO$+ వైశాల్యము of $OCBE$ − వైశాల్యము of $DABE$

$$= \int_{-1}^{0}(4x+5)\,dx+\int_{0}^{3}(-x+5)\,dx-\frac{1}{4}\int_{-1}^{3}(x+5)\,dx$$

$$= \left[\frac{4x^2}{2}+5x\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{x^2}{2}+5x\right]_{0}^{3}-\frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2}+5x\right]_{-1}^{3}$$

$$= 0-(+2-5)+\left(-\frac{9}{2}+15\right)-0-\frac{1}{4}\left[\frac{9}{2}+15\right]+\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}-5\right]=\frac{15}{2}$$

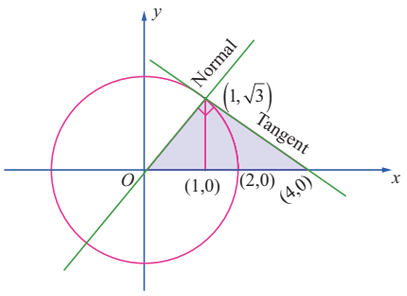
■

ఉదాహరణ 9.61

వృత్తము $x^2+y^2=4$ నకు $\left(1,\sqrt{3}\right)$ బిందువు వద్ద గీయబడిన స్పర్శరేఖ మరియు అభిలంబ రేఖలు x అక్షముతో పరిబద్ధమగు ప్రాంత వైశాల్యమును సమాకలనము ద్వారా కనుగొనుము.

సాధన

వృత్తము $x^2+y^2=a^2$ నకు (x_1,y_1) బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖా సమీకరణం $xx_1+yy_1=a^2$ కావున $x^2+y^2=4$ నకు $\left(1,\sqrt{3}\right)$ బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖా సమీకరణము $x+y\sqrt{3}=4$.అగును. అనగా $y=-\frac{1}{\sqrt{3}}(x-4)$ స్పర్శరేఖ x-అక్షమును $(4,0)$ బిందువు వద్ద కలియును.



పటము 9.33

స్పర్శరేఖ వాలు $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, కావున అభిలంబ రేఖ వాలు విలువ $\sqrt{3}$ అగును.

అభిలంబ రేఖ సమీకరణము $y-\sqrt{3}=\sqrt{3}(x-1)$; ఇది $y=\sqrt{3}x$ మరియు ఇది మూలబిందువు గుండా పోవును. ప్రక్క పటములో వైశాల్యము ఛాయచేయబడినది. ఈ వైశాల్యమును రెండు పద్ధతులలో కనుగొనవచ్చును.

పద్ధతి 1

y- అక్షమునకు ధనాత్మక దిశలో తీసుకొనిన, x- అక్షము $y=\sqrt{3}x$ మరియు $x+y\sqrt{3}=4$ రేఖలతో పరిబద్ధమైన ప్రాంత వైశాల్యమును కనుగొనుటకు $\int_a^b y\,dx$ సూత్రమును అనువర్తింపచేయవలెను. దీని కొరకు అంతరమును రెండు ఉప అంతరములుగా విభజించి ఒక ఉప అంతరమును x- అక్షము అభిలంబము $x=1$

03_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_9.indd 142 03/03/2023 18:16:22

మరియు రేఖ x- లతో పరబద్ధమదు ప్రాంతముగాను, రెండవ అంతరమును $y=\sqrt{3}x$ x- అక్షము స్పర్శరేఖ $x+y\sqrt{3}=4$ మరియు రేఖ $x=1$ లతో పరిబద్ధమగు ప్రాంతముగా తీసుకొనిన కావలసిన వైశాల్యము

$$\therefore \text{అగును } = \int_0^1 y\,dx+\int_1^4 y\,dx=\int_0^1 \sqrt{3}x\,dx+\int_1^4\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}(x-4)\right]dx$$

$$=\left[\sqrt{3}\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{x^2}{2}-4x\right)\right]_1^4=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{8}{\sqrt{3}}-\frac{7}{2\sqrt{3}}=2\sqrt{3}\,.$$

పద్ధతి 2

x- అక్షము సానుకూల దిశలో తీసుకొనిన, $y=\sqrt{3}x$ మరియు $x+y\sqrt{3}=4$, $y=0$ లతో పరిబద్ధమైన ప్రాంత వైశాల్యమును కనుగొనుటకు,

$\int_c^d (x_R-x_L)\,dy$ సూత్రమును ఉపయోగిస్తాము.

ఇచ్చట $c=0$, $d=\sqrt{3}$, x_R అనునది స్పర్శరేఖ $x+y\sqrt{3}=4$ యొక్క x గాను మరియు x_L అనునది అభిలంబము $y=\sqrt{3}x$ యొక్క x విలువ గాను, తీసుకొనిన

$$\therefore \text{కావలసిన వైశాల్యము } = \int_c^d (x_R-x_L)\,dy=\int_0^{\sqrt{3}}\left(\left(4-y\sqrt{3}\right)-\frac{y}{\sqrt{3}}\right)dy$$

$$=\left[\left(4y-\frac{y^2}{2}\sqrt{3}\right)-\frac{y^2}{2\sqrt{3}}\right]_0^{\sqrt{3}}$$

$$=4\sqrt{3}-\frac{3}{2}\sqrt{3}-\frac{3}{2\sqrt{3}}=2\sqrt{3}\,.$$

$y=f_1(x), y=f_2(x)$ రేఖలు $x=a$ మరియు $x=b$, $a<b$ లతో పరిబద్ధమగు ప్రాంత వైశాల్యమును కనుగొనుటకు పని నియమములు

y అక్షమునకు సమాంతరముగా ఒక చలరేఖను తల ప్రాంతమును ఖండించునట్లు గీయవలెను. ఎక్కడైతే ఈ రేఖ ప్రాంతములో ప్రవేశించునో ఆ బిందువు యొక్క y నిరూపకము y_{ENTRY} అంటారు. ఎక్కడైతే రేఖ ఆ ప్రాంతము నుండి నిష్క్రమించునో ఆ బిందువు యొక్క y నిరూపకమును y_{EXIT} అంటారు. y_{ENTRY} మరియు y_{EXIT} అను రెండు విలువలను పరిబద్ధ వక్రరేఖ సమీకరణము నుండి కనుగొనవచ్చును. కావలసిన వైశాల్యమును $\int_a^b [y_{EXIT}-y_{ENTRY}]\,dx$ ను ఉపయోగించి కనుగొనవచ్చును.

$x=g_1(y), x=g_2(y)$, రేఖలు $y=c$ మరియు $y=d$, $c<d$ పరిబద్ధమైన ప్రాంత వైశాల్యమును కనుగొనుటకు పని నియమము

x అక్షమునకు సమాంతరముగా తల ప్రాంతమును ఖండించునట్లు ఒక చలరేఖను గీయవలెను.

ఎక్కడైతే రేఖ ఈ ప్రాంతములో ప్రవేశించునో ఆ బిందువు యొక్క x నిరూపకమును x అంటారు. ఎక్కడైతే రేఖ ఆ ప్రాంతము నుండి నిష్క్రమించునో ఆ బిందువు యొక్క x నిరూపకమును x_{EXIT} అంటారు. x_{ENTRY} మరియు x_{EXIT} విలువలను పరిబద్ధ వక్రరేఖా సమీకరణము నుండి కనుగొనవచ్చును. కావలసిన వైశాల్యము $\int_c^d [x_{EXIT}-x_{ENTRY}]\,dy$ ను ఉపయోగించి కనుగొనవచ్చును.

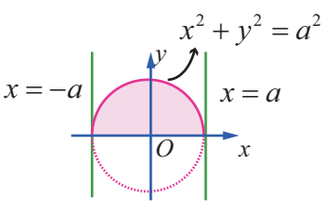
03_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_9.indd 143 03/03/2023 18:16:29

అభ్యాసము 9.8

1. $3x-2y+6=0$, $x=-3$, $x=1$ మరియు x- అక్షములతో పరిబద్ధమగు ప్రాంత వైశాల్యమును కనుగొనుము.
2. $2x-y+1=0$, $y=-1$, $y=3$ మరియు y- అక్షములతో పరిబద్ధమగు ప్రాంత వైశాల్యమును కనుగొనుము.
3. వక్రరేఖ $2+x-x^2+y=0$, x- అక్షము $x=-3$ మరియు $x=3$ లతో పరిబద్ధమగు ప్రాంత వైశాల్యమును కనుగొనుము.
4. పరావలయం $y=2x+5$ రేఖ $y=x^2-2x$ లతో పరిబద్ధమగు ప్రాంత వైశాల్యమును కనుగొనుము.
5. వక్రరేఖలు $y=\sin x$ మరియు $y=\cos x$ రేఖలు $x=0$ మరియు $x=\pi$ లతో పరిబద్ధ ప్రాంత వైశాల్యమును కనుగొనుము.
6. $y=\tan x$, $y=\cot x$ మరియు రేఖలు $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $y=0$. లతో పరిబద్ధ ప్రాంత వైశాల్యమును కనుగొనుము.
7. పరావలయం $y^2=x$ మరియు రేఖ $y=x-2$ తో పరిబద్ధమగు ప్రాంత వైశాల్యమును కనుగొనుము.
8. ఒక కుటుంబ పెద్ద తన చతురస్రాకార పొలమును మూడు సమాన భాగములుగా చేసి భార్యకు, కుమార్తెకు మరియు కుమారునికి పంచి ఇవ్వాలని అనుకొన్నాడు. ఆ పొలమునకు $x=0$, $x=4$, $y=4$ మరియు $y=0$ అను వక్రములు సరిహద్దులుగా కలవు. ఆ పొలమును సమానముగా విభజించడం సాధ్యమేనా? సాధ్యమైతే ఒక్కొక్కరికి విభజించి ఇచ్చిన ప్రాంత వైశాల్యమును కనుగొనుము.
9. వక్రరేఖ $y=(x-2)^2+1$ నందు P వద్ద కనిష్ఠ బిందువు గలదు. PQ వాలు 2 గా ఉండునట్లు వక్రరేఖపై Q బిందువును తీసుకొనుము. వక్రరేఖ మరియు జ్యా PQ లతో పరిబద్ధమగు ప్రాంత వైశాల్యమును కనుగొనుము.
10. $x^2+y^2=16$ అను వృత్తము మరియు $y^2=6x$ అను పరావలయమునకు మధ్య గల ఉమ్మడి ప్రాంత వైశాల్యమును కనుగొనుము.

9.9 ఒక అక్షమును అనుసరించి భ్రమణ వైశాల్యము పొందే ఘన వస్తువు యొక్క ఘనపరిమాణము.

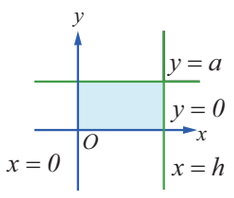
నిశ్చిత సమాకలన అనువర్తనాల ద్వారా స్థిర అక్షము వెంబడి భ్రమణము చెందు ఘన వస్తువుల ఘనపరిమాణమును కనుగొనవచ్చును. స్థిర అక్షము వెంబడి ఘనవస్తువు భ్రమణము అనగా ఇచ్చిన తలము నందు ఒక తల ప్రాంతము స్థిర అక్షము వెంబడి ఒక పూర్తి భ్రమణము చెందడం వలన ఒక ఘనము లభించును. ఉదాహరణకు వృత్తము $x^2+y^2=a^2$ -లో గల అర్ధవృత్తాకార తల ప్రాంతమును అక్షమునకు పైభాగము నందు తీసుకొనుము. ఇది పటము 9.34 నందు చూపబడినది.



పటము 9.34

x-అక్షము వెంబడి ఒక పూర్తి భ్రమణము చెందడం వలన ($360^\circ=2\pi$ రేడియన్లు) లభించే ఘన వస్తువును ఒక గోళము అంటారు.

అదేవిధముగా వ్యాసార్ధము a మరియు ఎత్తు h తో లంబ వృత్తాకార స్థూపమును పొందడానికి, xy తలము నందు సరళ రేఖలు $y=0$, $y=a$, $x=0$ మరియు $x=h$ లతో పరిబద్ధమైన దీర్ఘచతురస్రాకార తల ప్రాంతమును తీసుకొనుము. పటము 9.35 నందు చూపబడినది. ఈ ప్రాంతము x అక్షము వెంబడి ఒక పూర్తి భ్రమణము ($360^\circ=2\pi$ రేడియన్లు) చెందడం వలన ఏర్పడు ఘనమును స్థూపము అంటారు.



పటము 9.35

03_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_9.indd 144 03/03/2023 18:16:37

ఒక తలము యొక్క ప్రాంతపు భ్రమణము x అక్షము వెంబడి భ్రమణము చెందిన ఆ ఘన వస్తువు x అక్షమునకు పైభాగములో ఉండును. కావున ఈ ప్రాంతము నందు $y \geq 0$ అగును. ఒక తలము యొక్క ప్రాంతము y–అక్షము వెంబడి భ్రమణము చెందిన లభించు ఘన వస్తువును y అక్షమునకు కుడి వైపున ఉండును. కావున ఈ ప్రాంతము నందు $x \geq 0$ అగును.

వక్రరేఖ $y = f(x)$, x-అక్షము మరియు రేఖలు $x = a$, $x = b > a$ లతో పరిబద్ధ ప్రాంతము x-అక్షము వెంబడి భ్రమణము చేయగా మొదటి పాదములో ఏర్పడు ఘన వస్తువు యొక్క ఘనపరిమాణమును కనుగొను సూత్రమును ఉత్పాదిస్తాము. ఈ సూత్ర ఉత్పాదన అనేది వ్యాసార్ధము r ఎత్తు h గా గల స్థూపము యొక్క ఘనపరిమాణము $\pi r^2 h$ సూత్ర ఆధారంగా జరుగును.

y-అక్షమునకు సమాంతరముగా గల ప్రతి రేఖ $x = a$ మరియు $x = b > a$ రేఖలకు మధ్యలో వుండి, వక్రరేఖ $y = f(x)$ ను మొదటి పాదంలో ఖచ్చితముగా ఒక బిందువు వద్ద ఖండించును అని అనుకొనుము. $[a, b]$ అంతరమును $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ ల ద్వారా n విభాగాలుగా

$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$, $x_i - x_{i-1} = \Delta x = \frac{b-a}{n}$, $i = 1, 2, ..., n$. అగునట్లు విభజించుము.

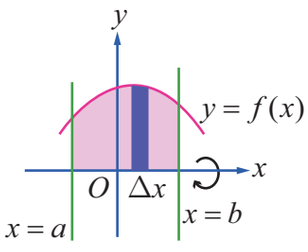
ప్రతి $i = 0, 1, 2, ..., n-1$ కు xy తలము నందు x_i మరియు $x_i + \Delta x$ ల మధ్య గల ప్రాంతము నందు x-అక్షము మరియు వక్రరేఖ $y = f(x)$ ల మధ్య యుండును. దీనిని దాదాపుగా అనంతమైన దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యములుగా గల $y_i \Delta x$ యుండును.

ఇచ్చట $y_i = f(x_i)$

$y = f(x)$ వక్రరేఖ, రేఖలు $x = a$ మరియు $x = b$ లు , x- అక్షము వెంబడి 360^0 భ్రమణం చెందిన $x = x_i$ వద్ద ప్రతి అనంతమైన దీర్ఘచతురస్రాలు భ్రమణం చెందడం వలన ఏర్పడు ప్రాథమిక ఘనవస్తువు అనేది వ్యాసార్ధము y_i గా మరియు ఎత్తు Δx గా గల పలుచని స్థూపాకార డిస్క్‌గా ఉజ్జాయింపు చేయబడును. పటము 9.36 చూడుము.

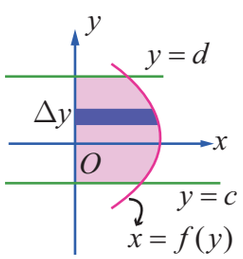
ఈ స్థూపాకార డిస్క్ ఘనపరిమాణము $x = x_i$ వద్ద $\pi y_i^2 \Delta x$, $i = 0, 1, 2, ..., n-1$. గా ఉండును. ఈ ఘనపరిమాణాల ప్రాథమిక విలువలను కూడగా వచ్చు మొత్తము ఘన వస్తువు యొక్క భ్రమణాల ఘనపరిమాణము $\sum_{i=0}^{n-1} \pi y_i^2 \Delta x$ గా వుండును.

n విలువలను పైకి పెరిగేటట్లు $(n \to \infty)$ మరియు Δx విలువలకు చిన్నచిన్నవిగా $(\Delta x \to 0)$ అగునట్లు తీసుకొనుము. అప్పుడు $\sum_{i=0}^{n-1} \pi y_i^2 \Delta x$ అనేది భ్రమణం వలన ఏర్పడిన ఘనపరిమాణము అగును.
కావున $\pi \int_a^b y^2 dx$ అనేది భ్రమణం వలన ఏర్పడిన ఘన వస్తువు ఘనపరిమాణము అగును.



పటము 9.36

అదేవిధముగా, వక్రరేఖ $x = f(y)$, y- అక్షము మరియు రేఖలు $y = c$ మరియు $y = d$ లుతో పరిబద్ధమైన y అక్షము వెంబడి భ్రమణం చెందు ప్రాంతము యొక్క ఘనపరిమాణము సూత్రమును మనము కనుగొనవచ్చును. వక్రరేఖ $x = f(y)$ అక్షముకు కుడివైపున రేఖలు $y = c$ మరియు $y = d > c$ ల మధ్యలో ఉండును. x అక్షమునకు సమాంతరముగా ఉండు ప్రతి రేఖ $y = c$ మరియు $y = d > c$ రేఖలకు



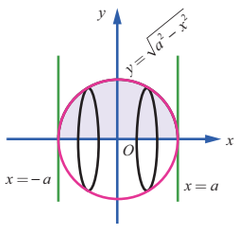
పటము 9.37

03_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_9.indd 145 03/03/2023 18:16:45

మధ్యలో వక్రరేఖ $x = f(y)$ ను మొదటి పాదములో ఖచ్చితముగా ఒక బిందువు వద్ద ఖండించును అనుకొనుము. పటము 9.37 నందు చూపబడినది. ఘన వస్తువు భ్రమణాల ఘనపరిమాణము $\pi\int_c^d x^2\,dy$ గా ఉండును.

ఉదాహరణ 9.62

వ్యాసార్ధము a గా గల గోళము ఘనపరిమాణము కనుగొనుము.



పటము 9.38

సాధన

వృత్తము $x^2 + y^2 = a^2$ మరియు x- అక్షముల మధ్య గల ఎగువ అర్ధవృత్తాకార ప్రాంత భ్రమణము చెందిన వ్యాసార్ధము a గా గల గోళము మనకు లభించును. పటము 9.38 నందు చూపబడినది.

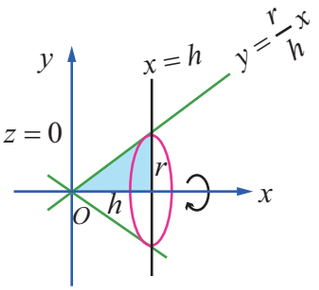
$y = \sqrt{a^2 - x^2}$, x- అక్షము, రేఖలు $x = -a$ మరియు $x = a$ అనునవి ప్రాంతము యొక్క సరిహద్దులు. అయినచో గోళము యొక్క ఘనపరిమాణము $V = \pi\int_{-a}^{a} y^2\,dx = \pi\int_{-a}^{a}\left(a^2 - x^2\right)dx$

$$= 2\pi\int_0^a \left(a^2 - x^2\right)dx \text{ , (సమాకలని } \left(a^2 - x^2\right) \text{ అనునది సరిప్రమేయము కావున)}$$

$$= 2\pi\left(a^2x - \frac{x^3}{3}\right)_0^a = 2\pi\left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi a^3 .$$

ఉదాహరణ 9.63

వ్యాసార్ధము r మరియు ఎత్తు h గల లంబ వృత్తాకార శంఖువు యొక్క ఘనపరిమాణమును కనుగొనుము.



పటము 9.39

సాధన

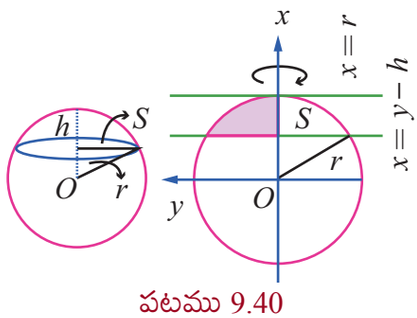
రేఖ $y = \frac{r}{h}x$, X-అక్షము $x = 0$ మరియు $x = h$ రేఖలతో లను పరిబద్ధమైన మొదటి పాదములో గల త్రిభుజాకార ప్రాంతమును తీసుకొందాం. పటము 9.39 నందు చూపబడినది. ఈ ప్రాంతము x-అక్షము వెంబడి భ్రమణం చేయగా భూవ్యాసార్ధము r మరియు ఎత్తు h గా గల శంఖువు లభించును.

కావున శంఖువు యొక్క ఘనపరిమాణము

$$V = \pi\int_0^h y^2\,dx = \pi\int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx = \pi\left(\frac{r}{h}\right)^2\int_0^h x^2\,dx = \pi\left(\frac{r}{h}\right)^2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

ఉదాహరణ 9.64

వ్యాసార్ధము r గా గల గోళము నుండి వ్యాసార్ధము r మరియు ఎత్తు h గా గల గోళాకార టోపీ వేరుచేయబడినది. దీని ఘనపరిమాణమును కనుగొనుము.



పటము 9.40

సాధన

వృత్తము $x^2 + y^2 = r^2$ మొదటి పాద ప్రాంత x- అక్షము, రేఖలు $x = r - h$ మరియు $x = r$ లతో పరిబద్ధమైన x- అక్షము వెంబడి భ్రమణం చెందిన ఘన వస్తువు పొందు h ఎత్తు r వ్యాసార్ధము గల గోళాకార టోపీ అగును.

03_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_9.indd 146 03/03/2023 18:16:50

పటము 9.40 నందు చూపబడినది. అందువలన కావలసిన ఘనపరిమాణము

$$V = \pi\int_{r-h}^{r} y^2dx = \pi\int_{r-h}^{r}\left(r^2-x^2\right)dx = \pi\left(r^2x-\frac{x^3}{3}\right)_{r-h}^{r}$$

$$= \pi\left(r^2\left(r-\left(r-h\right)\right)-\frac{\left(r^3-\left(r-h\right)^3\right)}{3}\right) = \pi\left(r^2h-\frac{\left(r^3-\left(r^3-3r^2h+3rh^2-h^3\right)\right)}{3}\right)$$

$$= \pi\left(\frac{3rh^2-h^3}{3}\right) = \frac{1}{3}\pi h^2\left(3r-h\right).$$

గమనిక

పై ఘనపరిమాణమును భూ వ్యాసార్ధముగా తీసుకొని తిరిగి వ్రాయవచ్చును.

ρ అనునది టోపీ యొక్క వ్యాసార్ధము అయిన $\rho^2+\left(r-h\right)^2=r^2$

కావున మనకు $r=\dfrac{\rho^2+h^2}{2h}$. r, విలువను ప్రతిక్షేపించగా

$$V=\frac{1}{3}\pi h^2\left[3\left(\frac{\rho^2+h^2}{2h}\right)-h\right]=\frac{1}{3}\pi h\left[\left(\frac{3\rho^2+h^2}{2}\right)\right]=\frac{1}{6}\pi h\left(3\rho^2+h^2\right)$$ లభించును.

ఉదాహరణ 9.65

పరావలయం $y=x^2$, x-అక్షము $x=0$ మరియు $x=1$ రేఖలతో పరిబద్ధమైన ప్రాంతము x- అక్షము ద్వారా భ్రమణం చెందడం వలన ఏర్పడు ఘన వస్తువు యొక్క ఘనపరిమాణమును కనుగొనుము.

సాధన

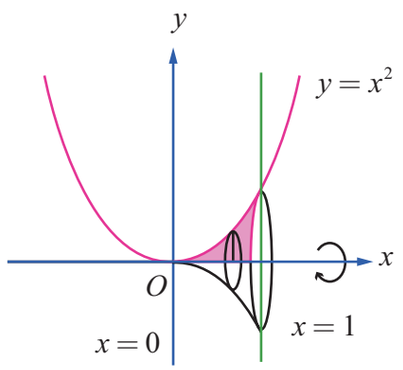
x- అక్షము వెంబడి భ్రమణం చెందు ప్రాంతము పటము 9.41 నందు చూపబడినది. కావున కావలసిన ఘనపరిమాణము

$$V = \pi\int_0^1 y^2dx$$

$$= \pi\int_0^1\left(x^2\right)^2dx$$

$$= \pi\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1$$

$$= \pi\left[\frac{1}{5}-0\right]=\frac{\pi}{5}.$$



పటము 9.41

ఉదాహరణ 9.66

దీర్ఘ వృత్తము $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, a>b$ తో పరిబద్ధమైన ప్రాంతమును దీర్ఘాక్షము వెంబడి భ్రమణం చెందడం వలన ఏర్పడు ఘనవస్తువు యొక్క ఘనపరిమాణమును కనుగొనుము.

సాధన

దీర్ఘవృత్తము రెండు అక్షములకు సౌష్ఠవముగా కలదు. భ్రమణం చెందు ప్రాంతము పటము 9.42 నందు

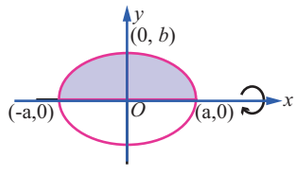
03_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_9.indd 147 03/03/2023 18:16:56

ఛాయచేయబడినది. మనకు కావలసిన ఘనపరిమాణము

$$V = \pi\int_{-a}^{a} y^2dx = \pi\int_{-a}^{a} \frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)dx$$

$$= \frac{2\pi b^2}{a^2}\int_0^a \left(a^2-x^2\right)dx \text{ , (సమాకలనం సరిప్రమేయం కావున)}$$

$$= \frac{2\pi b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)_0^a = \frac{2\pi b^2}{a^2}\left(a^3-\frac{a^3}{3}\right) = \frac{2\pi b^2}{a^2}\left(\frac{2a^3}{3}\right) = \frac{4\pi ab^2}{3}$$



పటము 9.42

గమనిక

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ అను దీర్ఘవృత్తం, y- అక్షము వెంబడి భ్రమణం చెందిన ఏర్పడు ఘనవస్తువు యొక్క ఘనపరిమాణం $\frac{4\pi a^2b}{3}$ గా ఉండును. ఈ ఘనవస్తువు దీర్ఘవృత్తకారంగా పిలువబడును.

ఉదాహరణ 9.67

పరావలయం $x=y^2+1$, y- అక్షము మరియు రేఖలు $y=1$ లతో పరిబద్ధ ప్రాంతం $y=-1$ అక్షము వెంబడి భ్రమణం చెందిన ఏర్పడు ఘన వస్తువు ఘనపరిమాణమును సమాకలనం ద్వారా కనుగొనుము.

సాధన

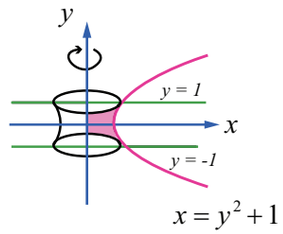
పరావలయము $x=y^2+1$ అనునది $y^2=x-1$ అగును. ఇది x అక్షమునకు సౌష్ఠవముగా వుండును. కావున శీర్షము $(1,0)$ బిందువు మరియు నాభి $\left(\frac{5}{4},0\right)$ పటము 9.43 నందు మనకు కావలసిన ఘనపరిమాణము

$$V = \pi\int_{-1}^{1} x^2dy$$

$$= \pi\int_{-1}^{1}\left(y^2+1\right)^2dy$$

$$= 2\pi\int_0^1\left(y^4+2y^2+1\right)dy \text{ , సమాకలన ప్రమేయం కావున}$$

$$= 2\pi\left(\frac{y^5}{5}+2\frac{y^3}{3}+y\right)_0^1 = 2\pi\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{3}+1\right) = \frac{56}{15}\pi \text{ .}$$



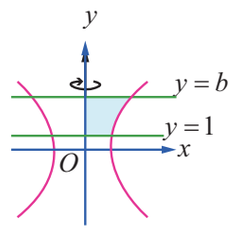
పటము 9.43

ఉదాహరణ 9.68

వక్రరేఖ $y=\frac{3}{4}\sqrt{x^2-16}$, $x\geq 4$ అక్షము మరియు రేఖలు $y=1$ మరియు $y=6$ లతో పరిబద్ధమైన ప్రాంతం y అక్షము వెంబడి భ్రమణము చెందడం వలన ఏర్పడు ఘనవస్తువు యొక్క ఘనపరిమాణమును కనుగొనుము.

సాధన

వక్రరేఖ $y=\frac{3}{4}\sqrt{x^2-16} \Rightarrow \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. దీనిని గమనించిన ఇది అతిపరావలయము యందు గల వక్రరేఖలోని ఒక భాగము $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ రేఖలు $y=1$ మరియు $y=6$ ల మధ్యలో x- అక్షమునకు పైభాగములో వుండును



పటము 9.44

03_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_9.indd 148 03/03/2023 18:17:03

ఇది పటము 9.45 నందు ఛాయచేసి చూపబడినది.

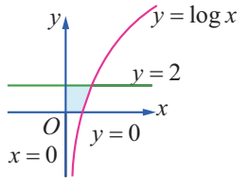
y- అక్షము వెంబడి భ్రమణం చెందడం వలన అతిపరావలయంలోని ఒక భాగము $x=\frac{4}{3}\sqrt{9+y^2}$ కావున ఘన వస్తువు యొక్క ఘనపరిమాణం విలువ

$$V = \pi\int_1^6 x^2dy = \pi\int_1^6\left(\frac{4}{3}\sqrt{9+y^2}\right)^2 dy = \pi\left(\frac{16}{9}\right)\int_1^6\left(9+y^2\right)dy$$

$$= \pi\left(\frac{16}{9}\right)\left(9y+\frac{y^3}{3}\right)_1^6 = \pi\left(\frac{16}{9}\right)\left[\left(54+72\right)-\left(9+\frac{1}{3}\right)\right] = \frac{5600}{27}\pi$$

ఉదాహరణ 9.69

వక్రరేఖలు $y=\log x$, $y=0$, $x=0$ మరియు $y=2$ లతో పరిబద్ధమైన ప్రాంతం y- అక్షము వెంబడి భ్రమణం చెందడం వలన ఉత్పన్నమయ్యే ఘన వస్తువు యొక్క ఘనపరిమాణమును సమాకలనం ద్వారా కనుగొనుము.



పటము 9.45

సాధన

పటము 9.45 నందు భ్రమణ ప్రాంతము ఛాయచేయబడినది.

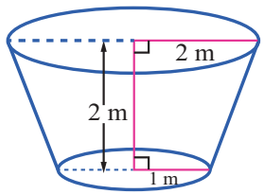
కావున y- అక్షము వెంబడి భ్రమణం చెందు ఘన వస్తువు యొక్క ఘనపరిమాణము

$$V = \pi\int_0^2 x^2dy = \pi\int_0^2\left(e^y\right)^2 dy = \pi\int_0^2 e^{2y}dy$$

$$= \pi\left[\frac{e^{2y}}{2}\right]_0^2 = \frac{\pi}{2}\left(e^4-1\right).$$

అభ్యాసము 9.9

1. $y=2x^2$, $y=0$ మరియు $x=1$ లలో పరిబద్ధమైన x-అక్షము వెంబడి భ్రమణం చెందుట వలన ఏర్పడు ఘన వస్తువు యొక్క ఘనపరిమాణమును సమాకలనము ద్వారా కనుగొనుము.
2. $y=e^{-2x}$ $y=0, x=0$ మరియు $x=1$ లలో పరిబద్ధమైన ప్రాంతము x- అక్షము వెంబడి భ్రమణం చెందుట వలన ఏర్పడు ఘన వస్తువు యొక్క ఘనపరిమాణమును సమాకలనం ద్వారా కనుగొనుము.
3. $x^2=1+y$ మరియు $y=3$ లలో పరిబద్ధమైన ప్రాంతము y-అక్షము వెంబడి భ్రమణం చెందుట వలన ఏర్పడు ఘన వస్తువు యొక్క ఘనపరిమాణమును సమాకలనం ద్వారా కనుగొనుము.
4. $y=x$ మరియు $y=x^2$ వక్రరేఖల మధ్య పరివేష్టిత ప్రాంతమును R తో సూచించిన, R ను x-అక్షము వెంబడి 360° భ్రమణం చెందించుట వలన ఏర్పడు ఘన వస్తువు యొక్క ఘనపరిమాణమును కనుగొనుము.
5. పటము 9.46లో చూపబడిన విధముగా ఒక పాత్ర లంబ వృత్తాకార శంఖువు ఖండం రూపంలో గలదు. అయితే ఆ పాత్ర ఘనపరిమాణమును సమాకలన పద్ధతిలో కనుగొనుము.



పటము 9.46

6. దీర్ఘాక్షము 20సెం.మీ, హ్రస్వాక్షము 10సెం.మీ గల ఒక దీర్ఘవృత్తము దాని దీర్ఘాక్షమును ఆధారముగా చేసుకొని పరిభ్రమించడం వలన ఒక పుచ్చకాయ లాంటి దీర్ఘఘనాకారం ఏర్పడినది. సమాకలనమును ఉపయోగించి దాని ఘనపరిమాణమును కనుగొనుము.

03_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_9.indd 149 03/03/2023 18:17:08

అభ్యాసము 9.10

క్రింద ఇవ్వబడిన నాలుగు విలువల యందు సరియైన లేదా దాదాపుగా ఖచ్చితమైన సమాధానమును తెలుపుము.

1. $\int_0^{\frac{2}{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$ యొక్క విలువ

   (1) $\frac{\pi}{6}$ (2) $\frac{\pi}{2}$ (3) $\frac{\pi}{4}$ (4) π

2. $\int_{-1}^{2} |x|\, dx$ యొక్క విలువ

   (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{3}{2}$ (3) $\frac{5}{2}$ (4) $\frac{7}{2}$

3. యొక్క ఏదైనా విలువ $n \in \mathbb{Z}$, $\int_0^{\pi} e^{\cos^2 x} \cos^3[(2n+1)x]\, dx$ విలువ

   (1) $\frac{\pi}{2}$ (2) π (3) 0 (4) 2

4. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x\, dx$ యొక్క విలువ

   (1) $\frac{3}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) 0 (4) $\frac{2}{3}$

5. $\int_{-4}^{4} \left[\tan^{-1}\left(\frac{x^2}{x^4+1}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{x^4+1}{x^2}\right)\right] dx$ యొక్క విలువ

   (1) π (2) 2π (3) 3π (4) 4π

6. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{2x^7 - 3x^5 + 7x^3 - x + 1}{\cos^2 x}\right) dx$ యొక్క విలువ

   (1) 4 (2) 3 (3) 2 (4) 0

7. $f(x) = \int_0^x t \cos t\, dt$, అయితే $\frac{df}{dx} =$

   (1) $\cos x - x \sin x$ (2) $\sin x + x \cos x$ (3) $x \cos x$ (4) $x \sin x$

8. $y^2 = 4x$ మరియు నాభి లంబరేఖకు మధ్యగల వైశాల్యం విలువ

   (1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{4}{3}$ (3) $\frac{8}{3}$ (4) $\frac{5}{3}$

9. $\int_0^1 x(1-x)^{99} dx$ యొక్క విలువ

   (1) $\frac{1}{11000}$ (2) $\frac{1}{10100}$ (3) $\frac{1}{10010}$ (4) $\frac{1}{10001}$

03_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_9.indd 150 03/03/2023 18:17:17

10. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+5^{\cos x}}$ యొక్క విలువ

(1) $\frac{\pi}{2}$ (2) π (3) $\frac{3\pi}{2}$ (4) $2\neq$

11. $\frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(n)} = 90$ అయితే n విలువ

(1) 10 (2) 5 (3) 8 (4) 9

12. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^3 3x\, dx$ యొక్క విలువ

(1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{2}{9}$ (3) $\frac{1}{9}$ (4) $\frac{1}{3}$

13. $\int_0^{\pi} \sin^4 x\, dx$ యొక్క విలువ

(1) $\frac{3\pi}{10}$ (2) $\frac{3\pi}{8}$ (3) $\frac{3\pi}{4}$ (4) $\frac{3\pi}{2}$

14. $\int_0^{\infty} e^{-3x} x^2 dx$ యొక్క విలువ

(1) $\frac{7}{27}$ (2) $\frac{5}{27}$ (3) $\frac{4}{27}$ (4) $\frac{2}{27}$

15. $\int_0^{a} \frac{1}{4+x^2}\, dx = \frac{\pi}{8}$ అయితే a విలువ

(1) 4 (2) 1 (3) 3 (4) 2

16. x- అక్షమును అనుసరించి $y^2 = x(a-x)$ తో భ్రమణం చెందు వస్తువు యొక్క ప్రాంతం ఘనపరిమాణం విలువ

(1) πa^3 (2) $\frac{\pi a^3}{4}$ (3) $\frac{\pi a^3}{5}$ (4) $\frac{\pi a^3}{6}$

17. If $f(x) = \int_1^{x} \frac{e^{\sin u}}{u}\, du, x>1$ మరియు $\int_1^{3} \frac{e^{\sin x^2}}{x}\, dx = \frac{1}{2}[f(a) - f(1)]$, అయితే a

(1) 3 (2) 6 (3) 9 (5)

18. $\int_0^{1} \left(\sin^{-1} x\right)^2\, dx$ యొక్క విలువ

(1) $\frac{\pi^2}{4} - 1$ (2) $\frac{\pi^2}{4} + 2$ (3) $\frac{\pi^2}{4} + 1$ (4) $\frac{\pi^2}{4} - 2$

19. $\int_0^{a} \left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^3 dx$ యొక్క విలువ

(1) $\frac{\pi a^3}{16}$ (2) $\frac{3\pi a^4}{16}$ (3) $\frac{3\pi a^2}{8}$ (4) $\frac{3\pi a^4}{8}$

20. $\int_0^{x} f(t)\, dt = x + \int_x^{1} tf(t)\, dt$, అయితే $f(1)$ యొక్క విలువ

(1) $\frac{1}{2}$ (2) 2 (3) 1 (4) $\frac{3}{4}$

03_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_9.indd 151 03/03/2023 18:17:27

సారాంశము

1) అవధుల మొత్తమునకు నిశ్చిత సమాకలనము

(i) $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{r=1}^{n} f\left(a+(b-a)\frac{r}{n}\right)$

(ii) $\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n} f\left(\frac{r}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} f\left(\frac{r}{n}\right).$

2) నిశ్చిత సమాకాలన లక్షణాలు

(i) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(u)\,du$

(ii) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

(iii) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

(iv) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$

(v) $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$

(vi) $\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a [f(x)+f(2a-x)]\,dx.$

(vii) $f(x)$ అనునది సరిప్రమేయము అయితే $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$

(ix) $f(x)$ అనునది బేసిప్రమేయము అయితే $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$

(x) $f(2a-x) = f(x)$, అయితే $\int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$

(xi) $f(2a-x) = -f(x)$, అయితే $\int_0^{2a} f(x)\,dx = 0.$

(xii) $\int_0^a x\,f(x)\,dx = \frac{a}{2}\int_0^a f(x)\,dx$ if $f(a-x) = f(x)$

3) బెర్నౌలీ సూత్రము

$$\int uvdx = uv_{(1)} - u^{(1)}v_{(2)} + u^{(2)}v_{(3)} - u^{(3)}v_{(4)} + \cdots.$$

4) క్షయకరణ సూత్రాలు

(i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \begin{cases} \frac{(n-1)}{n}\times\frac{(n-3)}{(n-2)}\times\cdots\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}, & \text{if } n = 2,4,6,\cdots \\ \frac{(n-1)}{n}\times\frac{(n-3)}{(n-2)}\times\cdots\times\frac{2}{3}, & \text{if } n = 3,5,7,\cdots \end{cases}$

(ii) n సరిసంఖ్య మరియు m సరిసంఖ్య అయితే

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,\cos^n x\,dx = \frac{(n-1)}{(m+n)}\frac{(n-3)}{(m+n-2)}\frac{(n-5)}{(m+n-4)}\cdots\frac{1}{(m+2)}\frac{(m-1)}{m}\frac{(m-3)}{(m-2)}\frac{(m-5)}{(m-4)}\cdots\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}$$

(iii) n విలువ బేసి సంఖ్య మరియు m విలువ ఏదైనా ధన పూర్ణాంకం (సరి లేదా బేసి) అయితే

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,\cos^n x\,dx = \frac{(n-1)}{(m+n)}\frac{(n-3)}{(m+n-2)}\frac{(n-5)}{(m+n-4)}\cdots\frac{2}{(m+3)}\frac{1}{(m+1)}.$$

03_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_9.indd 152 03/03/2023 18:17:29

5) గామా సూత్రాలు

(i) $\Gamma(n) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx = (n-1)!$ (ii) $\int_0^{\infty} e^{-ax} x^n dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$

6) వక్రరేఖ మరియు రేఖలకు మధ్యగల ప్రాంత వైశాల్యము

(i) వక్రరేఖ x అక్షమునకు పై భాగము మరియు వక్ర రేఖలు $x = a$, $x = b$ లతో పరిబద్ధమైన ప్రాంత వైశాల్యము $A = \int_a^b y dx$.

(ii) వక్రరేఖ, x అక్షమునకు క్రింది భాగము మరియు రేఖలు $x = a$, $x = b$ లతో పరిబద్ధమైన ప్రాంత వైశాల్యము $A = -\int_a^b y dx = \left| \int_a^b y dx \right|$.

(iii) వక్రరేఖ, y అక్షమునకు కుడి వైపు మరియు $y = c$, $y = d$ ల మధ్య పరిబద్ధమైన ప్రాంత వైశాల్యము $A = \int_c^d x dy$.

(iv) వక్రరేఖ, y అక్షమునకు ఎడమ వైపు మరియు $y = c$, $y = d$ ల మధ్య పరిబద్ధమైన ప్రాంత వైశాల్యము $A = -\int_c^d x dy = \left| \int_c^d x dy \right|$.

(v) $f(x) \geq g(x)$ అయితే వక్ర రేఖ మరియు రేఖలు $x = a, x = b$ ల మధ్య పరిబద్ధమైన ప్రాంత వైశాల్యము,

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b (y_U - y_L) dx$$

(vi) $f(y) \geq g(y)$ అయితే వక్రరేఖ మరియు రేఖలు $y = c, y = d$ ల మధ్య పరిబద్ధమైన ప్రాంత వైశాల్యము

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)] dy = \int_c^d (x_R - x_L) dy$$

7) భ్రమణాల వలన ఏర్పడు ఘనవస్తువు యొక్క ఘనపరిమాణము

(i) x-అక్షము వెంబడి భ్రమణం చెందడం వలన ఏర్పడు ఘన వస్తువు యొక్క ఘనపరిమాణము $V = \pi \int_a^b y^2 dx$.

(ii) y-అక్షము వెంబడి భ్రమణం చెందడం వలన ఏర్పడు ఘన వస్తువు యొక్క ఘనపరిమాణము $V = \pi \int_c^d x^2 dy$.

అంతర్జాల కృత్యము

https://ggbm.at/dy9kwgbt or Scan the QR Code

బ్రౌజరును తెరచి ఇవ్వబడిన వంటి URL లింక్‌ను టైపు చేయుము లేదా QR సంకేతమును స్కాన్ చేయుము. **"12వ తరగతి గణితశాస్త్రము, భాగము-2"** అను శీర్షికతో జియోజీబ్రా వర్క్‌బుక్ తెరువబడును. ఎడమ వైపున మీ పాఠ్యపుస్తకమునకు సంబంధించిన అధ్యాయములు చూపించబడియుండును. **"సమాకలనముల అనువర్తనాలు"** అను పాఠ్య శీర్షిక గల అధ్యాయముపై క్లిక్ చేయుము. అక్కడ ఈ అధ్యాయమునకు సంబంధించిన అనేక వర్క్‌షీట్లు ప్రదర్శింపబడును. వాటిని సాధించుము.

EF10Y

03_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_9.indd 153 03/03/2023 18:17:32

అధ్యాయము
10

సాధారణ అవకలన సమీకరణములు

"గణితము మానవుని భావనలో మిక్కిలి
అందమైన మరియు శక్తివంతమైన సృష్టి".

- -స్టీఫెన్ బనాక్

10.1 పరిచయము

ప్రేరణ మరియు పాఠ్యాంశ అభివృద్ధి నిత్యజీవితంలో

- ప్రక్షేపకము, రాకెట్, ఉప గ్రహములు మరియు గ్రహముల కదలికలు
- విద్యుత్ వలయంలో గల విద్యుత్ సరఫరా లేక విద్యుత్ ఛార్జింగ్
- ఒక కడ్డీ లేక ఇనుప ఫలక మీదుగా వెళ్ళే ఉష్ణ ప్రసరణ
- ఒక కమ్మీ లేక పలుచటి రేకులలో ఏర్పడు కంపనాలు

మొదలగు వాటిని కనుగొనవచ్చును.ఇటువంటి విషయాలను గణిత సమీకరణముగా ఏర్పాటు చేసేటప్పుడు కొన్ని శాస్త్ర నిబంధనలు ఆధారంగా అవకలన పమీకరణములు ఏర్పడుచున్నవి. ఈ నిబంధనలు ఒకటి లేక అంతకంటే ఎక్కువ అంటే మిగిలిన కొలతలను బట్టి మారుతూ ఉండును. కావున శాస్త్ర నిబంధనలు అవకలనము గల గణిత సమీకరణములుగా అంటే అవకలన సమీకరణాలుగా ఏర్పడుచున్నవి.

జ్యామితి, యంత్ర గతి శాస్త్రము, భౌతిక శాస్త్రము, రసాయన శాస్త్రము మరియు ఇంజనీరింగ్ వంటి వాటిలో అవకలన సమీకరణాలును ఎక్కువగా ఉపయోగిస్తున్నారు. ముందు తరగతులలో మార్పు రేటు గురించి చదివి యున్నాము. దీనిని తక్షణ మార్పు రేటు అని కూడా అంటారు. దీనిని $\frac{dy}{dx}$ తో సూచిస్తారు.

కొన్ని తెలియని ప్రమేయాలకు, వాటి మార్పు రేటుకు మధ్య గల సంబంధము క్రింద ఇవ్వబడినది.

(అ) x బట్టి y మార్పు రేటు y కు అనులోమానుపాతంలో కలదు.

$$\frac{dy}{dx} = ky .$$

(ఆ) x ను బట్టి y యొక్క మార్పు రేటు y^2 మరియు y యొక్క లబ్ధమునకు విలోమానుపాతంలో కలదు.

$$\frac{dy}{dx} = ky^2x .$$

(ఇ) x ను బట్టి y యొక్క మార్పు రేటు y^2 కు విలోమానుపాతంలో కలదు.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k}{y} .$$

(ఈ)x ను బట్టి y యొక్క మార్పు రేటు y^2 కు అనులోమానుపాతంలో $\sqrt{x}$ కు విలోమానుపాతంలో కలదు:

$$\frac{dy}{dx} = k\frac{y^2}{\sqrt{x}} .$$

అవకలన సమీకరణం అనేది ఒక సమీకరణం. దీనిలో తెలియని ప్రమేయాల యొక్క కొన్ని అవకలజములు చాలా సందర్భాలలో ..... సాధారణంగా కాలమును స్వతంత్ర చరరాశిగా తీసుకొంటాము.

04_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_10.indd 154 03/03/2023 18:20:48

భౌతిక లేదా నిజజీవిత సమస్యలకు గణిత పద్ధతులను వర్తింప చేయుటకు మనము సమస్యను గణితపరంగా రూపొందించాలి. అనగా సమస్యకు గణిత నమూనాను నిర్మించాలి. అనేక భౌతిక సమస్యలు మారుతున్న పరిమాణాల మధ్య సంబంధాన్ని కలిగి ఉంటాయి. ఎందుకంటే మార్పు రేట్లు గణిత శాస్త్రంలో అవకలజము చేతే సూచించబడుతాయి. గణిత నమూనాలు తరచుగా తెలియని ప్రమేయాలకు సంబంధించిన సమీకరణాలు మరియు ఒకటి లేదా ఎక్కువ సమీకరణాలుగా కనబడుతున్నవి. అటువంటి సమీకరణములు అవకలన సమీకరణముగా, శాస్త్ర,సాంకేతిక రంగములలోను భౌతిక ధర్మాలను సంబంధంగల అవకలన సమీకరణములో ఎక్కువ ప్రాముఖ్యత వహించు విధంగా కలదు. జనాభా పెరుగుదల లేక రేడియో ధార్మిక క్షీణత (క్షయం) వంటి వాటిని గణిత సమీకరణములో తెలుపునపుడు అవకలన సమీకరణాలను ఉపయోగిస్తున్నారు. వృక్ష శాస్త్రము మరియు అర్థశాస్త్రములలో కూడా అవకలన సమీకరణాలు ఉపయోగపడుతున్నాయి.


Johann Bernoulli
(1667-1748)

రేఖాగణితము మరియు భౌతిక శాస్త్రములో గల సమస్యల సాధనను కనుగొనుటకు న్యూటన్ మరియు లిబ్నెజ్ వారిచే కనుగొనబడినదే ఈ అవకలన సమీకరణము. బెర్నోలీ, ఆయిలర్ వంటి వారిచే అభివృద్ధి చేయబడిన న్యూటన్ భౌతిక శాస్త్రములో అవకలన సమీకరణాలు ముఖ్యపాత్ర వహిస్తున్నది. మనము నిత్య జీవితంలో ఉపయోగించే సెల్‌ఫోన్, కారులలో, విమానములలో, వాతావరణ హెచ్చరికలలో, ఆరోగ్య రక్షణలో అంతర్జాలములను ఉపయోగించుటలో అవకలన సమీకరణము ఉపయోగపడుతున్నది.

ఈ అధ్యాయములో, మొదటి తరగతి సాధారణ అవకలన సమీకరణము గురించి వాటి సాధనను కనుగొను కొన్ని పద్ధతులను గురించి నేర్చుకొంటాము.

అభ్యసన లక్ష్యాలు

ఈ పాఠ్యాంశమును నేర్చుకొన్న తరువాత విద్యార్థులు క్రింది వాటిని నేర్చుకొంటారు.

- అవకలన సమీకరణాలను వర్గీకరించుట.
- అవకలన సమీకరణాలను నిర్మించుట.
- అవకలన సమీకరణాలకు తరగతి మరియు అంతస్థు కనుగొనుట.
- చర రాశులను వేరుచేయడం, ప్రతిక్షేపించడం, సమాకలనం కారణాంకాలను ఉపయోగించి అవకలన సమీకరణాలు సాధించవచ్చు.
- నిత్యజీవితంలో అవకలన సమీకరణాలను ఉపయోగించుట.

10.2 అవకలన సమీకరణాలు, తరగతి మరియు అంతస్థు

నిర్వచనము 10.1

ఏవైనా ఒక సమీకరణము ఒక ప్రమేయమునకు కనీసము ఒక సాధారణ అవకలజము లేక **పాక్షిక అవకలజము** ఉన్నచో ఆ సమీకరణమును అవకలన సమీకరణము అంటారు.

ఉదాహరణకు $y = f(x)$ ఇక్కడ y ఆధారిత చల రాశి (f అనేది తెలియని ప్రమేయము) మరియు x ఒక స్వతంత్ర చలరాశి.

(1) $\frac{dy}{dx} = 0$ ఒక అవకలన సమీకరణము.

(2) $\frac{dy}{dx} = \sin x$ ఒక అవకలన సమీకరణము.

(3) $\frac{dy}{dx} + y = 7x + 5$ ఒక అవకలన సమీకరణము.

(4) $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = \sin x$ ఒక అవకలన సమీకరణము.

(5) $e^{\frac{dy}{dx}} = \ln x, x > 0$ ఒక అవకలన సమీకరణము.

(6) $\tan^{-1}\left(\frac{d^2y}{dx^2} + y^2 + 2x\right) = \frac{dy}{dx}$ ఒక అవకలన సమీకరణము.

నిర్వచనము 10.2 (అవకలన సమీకరణము యొక్క తరగతి (క్రమం)

ఒక అవకలన సమీకరణములో గల అతి పెద్ద అవకలజ తరగతిను ఆ సమీకరణం యొక్క **తరగతి** అంటారు.

కావున, ఒక సమీకరణములో గల తెలియని ప్రమేయం యొక్క అతిపెద్ద తరగతి క్రమం గల అవకలనం k వ అవకలనం అయితే, ఆ విధమైన సమీకరణము తరగతి k ఇక్కడ k అనునది ఒక ధనాత్మక పూర్ణ సంఖ్య.

ఉదాహరణకు, $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^{\frac{2}{3}} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 4 = 0$ అనే అవకలన సమీకరణము తరగతి 3.

నిర్వచనము 10.3 (అవకలన సమీకరణం యొక్క అంతస్థు)

ఒక అవకలన సమీకరణమును బహుపద సమాస రూపంలో వ్రాయగలిగిన, ఆ సమీకరణంలో గల అతి పెద్ద తరగతి కలిగిన అవకలనము యొక్క సమాకలన ఘాతము ఆ సమీకరణం యొక్క **అంతస్థు** అగును.

ఇంకో విధంగా బహుపద సమాన రూపంలో వ్రాయబడిన ఒక అవకలన సమీకరణము క్రింది నిబంధనలను తృప్తి పరచవలెనన్న, ఆ సమీకరణములో గల అతి పెద్ద తరగతి గల అవకలనం యొక్క ఘాతము అవకలన సమీకరణం యొక్క **అంతస్థు** అంటారు.

(i) సమీకరణములో గల అన్ని అవకలనాల ఘాతములు భిన్నములుగా ఉండకూడదు.

(ii) అతి పెద్ద తరగతి గల అవకలనము చరరాశిగా గల పారదర్శక ప్రమేయం, త్రికోణమితీయ ప్రమేయం, లేక ఘాతాంక ప్రమేయం వంటి ప్రమేయంగా ఉండకూడదు. గరిష్ఠ తరగతి గల అవకలనముగల ఏ ఒక్క పదం యొక్క గుణకము x, y, లేదా కనిష్ఠ తరగతి గల అవకలజము వంటి వాటిలో ఒకటే చరరాశి గల ప్రమేయం వుండవచ్చు.

కానీ, అవకలజములను చరరాశులుగా గల మిగిలిన పారదర్శక, పారదర్శక త్రికోణమితీయ సంవర్గమాన, ఘాతాంక ప్రమేయంగా ఉండకూడదు.

పైన తెలిపిన నిబంధనలలో ఒకటి లేక అంతకన్నా ఎక్కువ నిబంధనలను ఒక అవకలన సమీకరణము తృప్తిపరచనట్లైతే పై తెలిపిన అన్ని నిబంధనలు తృప్తిపరచే విధంగా బహుపద సమాస రూపంలో ఆ అవకలన సమీకరణమును మార్చి వ్రాయువలెను.

ఒక అవకలన సమీకరణమును గరిష్ట తరగతి గల అవకలనం యొక్క మొదటి పదముగా గల బహుపద సమాస సమీకరణముగా వ్రాయుటకు వీలు లేనప్పుడు ఆ సమీకరణము యొక్క తరగతిని నిర్వచించలేము. అవకలన సమీకరణము అంతస్థు కనుగొనుటకు నిబంధనలలో తెలిపిన సూక్ష్మనైపుణ్యాలను సరిగ్గా అర్థం

04_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_10.indd 156 03/03/2023 18:20:50

చేసుకొనని యెడల, ఆ అవకలన సమీకరణ అంతస్థును కనుగొనటం సులభతరం కాదు. కావున క్రింద ఇవ్వబడిన ఉదాహరణలలో వివరించిన పద్ధతులను బాగా గమనించి అవకలన సమీకరణముల యొక్క అంతస్థును కనుగొనుటను తెలుసుకొనవచ్చును.

అంతస్థును కనుగొనుటకు ఉదాహరణలు:

(1) $3y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - \frac{d^2y}{dx^2} = \sin x^2$ అవకలన సమీకరణమును తీసుకొనుము.

గరిష్ట అవకలజ తరగతి 2 మరియు దాని అంతస్థు 1. కావున అవకలన సమీకరణము యొక్క తరగతి 2 మరియు అంతస్తు 1.

(2) $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = y\frac{d^3y}{dx^3}$ అవకలన సమీకరణమును తీసుకొనుము.

ఈ సమీకరణంలో భిన్న ఘాతములు ఉండుటవలన భిన్న ఘాతములను తొలగించవలెను. కావున సమీకరణమునకు ఇరువైపులా వర్గము చేయగా మనము పొందునది.

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = y^2\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2.$$

అంతస్థును ఈ సమీకరణములో గల గరిష్ఠ అవకలజ తరగతి 3. కావున అవకలన సమీకరణం యొక్క తరగతి 3 మరియు అవకలన సమీకరణములోకి అంతస్తులు 2.

(3) $\sin\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{d^2y}{dx^2} + 3x = 0$ అవకలన సమీకరణం తీసుకొనుము.

ఇక్కడ అతిపెద్ద అవకలజ తరగతి 2 మరియు ఇవ్వబడిన అవకలన సమీకరణమును బహుపద సమీకరణముగా వ్యక్తపరచలేము. కావున ఈ రకమైన అవకలన సమీకరణం యొక్క అంతస్థు నిర్వచించలేము.

(4) $e^{\frac{d^2y}{dx^2}} + \sin(x)\frac{dy}{dx} = 2$ సమీకరణము తీసుకొనుము.

ఇక్కడ, గరిష్ఠ తరగతి అవకలజ (తరగతి 2) మరియు ఈ అవకలజము యొక్క ఘాత ప్రమేయం. అవకలన సమీకరణమును బహుపద సమీకరణముగా వ్యక్తపరచలేము. కావున ఈ రకమైన అవకలన సమీకరణము యొక్క అంతస్థును $\frac{d^2y}{dx^2}$ నిర్వచించలేము. సమీకరణము తరగతి 2 అగును.

(5) క్రింద అవకలన సమీకరణములకు అంతస్థు కనుగొనలేము.

(i) $e^{\frac{dy}{dx}} + \frac{dy}{dx} = 0$ (ii) $\log\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \frac{dy}{dx} = 0$ (iii) $\cos\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + 2\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$

(6) $10(y''')^4 + 7(y'')^5 + \sin(y') + 5 = 0$ యొక్క అవకలన సమీకరణము తరగతి 3. అయితే ఈ సమీకరణం యొక్క అంతస్థు నిర్వచింపబడలేదు.

(7) $\cos(y')y''' + 5y'' + 7y' = \sin x$ యొక్క అవకలన సమీకరణము తరగతి 3. అయిన ఈ సమీకరణము యొక్క అంతస్థు నిర్వచించబడలేదు.

గమనిక

ఒక అవకలన సమీకరణము యొక్క అంతస్థు ఎల్లప్పుడూ ఒక ధనాత్మక పూర్ణసంఖ్యగా ఉంటుందని గమనించవలెను.

04_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_10.indd 157 03/03/2023 18:20:52

ఉదాహరణ 10.1

క్రింద ఇవ్వబడిన అవకలన సమీకరణములకు తరగతి మరియు అంతస్థులను కనుగొనుము.

(i) $\frac{dy}{dx} = x + y + 5$ (ii) $\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)^3 + 4\left(\frac{dy}{dx}\right)^7 + 6y = 5\cos 3x$

(iii) $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = x^2 \log\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ (iv) $3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \left[4 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}$

(v) $dy + (xy - \cos x)dx = 0$

సాధన

(i) ఈ సమీకరణములో గరిష్ఠ తరగతి గల్గిన అవకలజము $\frac{dy}{dx}$ అవుతుంది. దీని అంతస్థు 1.

కావున ఇవ్వబడిన అవకలన సమీకరణము యొక్క తరగతి 1 మరియు అంతస్తు 1.

(ii) ఇక్కడ గరిష్ఠ తరగతి కలిగిన అవకలజము $\frac{d^4y}{dx^4}$ దీని ఘాతము 3.

కావున ఇవ్వబడిన అవకలన సమీకరణము యొక్క తరగతి 4, అంతస్థు 3.

(iii) ఇవ్వబడిన అవకలన సమీకరణములో పెద్ద తరగతి కలిగిన అవకలజము $\frac{d^2y}{dx^2}$ దీని ఘాతము 1.

కావున ఈ సమీకరణం యొక్క తరగతి 2.

ఇవ్వబడిన అవకలన సమీకరణమును దాని అవకలజముల నుండి బహుపద సమీకరణముగా వ్రాయుటకు వీలుకాదు. కావున ఈ సమీకరణము యొక్క అంతస్థును నిర్వచించలేము.

(iv) ఇవ్వబడిన అవకలన సమీకరణములు $3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \left[4 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}$

ఇరువైపులా వర్గము చేయగా $9\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = \left[4 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3$.

ఈ సమీకరణంలో గరిష్ఠ అవకలజ తరగతి $\frac{d^2y}{dx^2}$ లో ఘాతము 2.

కావున అవకలన సమీకరణము యొక్క తరగతి 2 మరియు అంతస్థు 2 అగును.

(v) $dy + (xy - \cos x)dx = 0$ అనునది అంతస్థు 1 గా గల మొదటి తరగతి అవకలన సమీకరణము.

కావున ఈ సమీకరణమును $\frac{dy}{dx} + xy - \cos x = 0$ గా వ్రాయవచ్చును.

అభ్యాసము 10.1

1. క్రింది అవకలన సమీకరణలకు తరగతి మరియు అంతస్థు (ఉన్నచో) కనుగొనుము.

(i) $\frac{dy}{dx} + xy = \cot x$ (ii) $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^{\frac{2}{3}} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 4 = 0$

(iii) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = x\sin\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ (iv) $\sqrt{\frac{dy}{dx}} - 4\frac{dy}{dx} - 7x = 0$

04_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_10.indd 158 03/03/2023 18:20:56

(v) $y\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{x}{\left(\frac{dy}{dx}\right)+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}$ (vi) $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}=0$

(vii) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)}$ (viii) $\frac{d^2y}{dx^2}=xy+\cos\left(\frac{dy}{dx}\right)$

(ix) $\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}+\int ydx=x^3$ (x) $x=e^{xy\left(\frac{dy}{dx}\right)}$

10.3 అవకలన సమీకరణముల వర్గీకరణ

నిర్వచనము 10.4: (సాధారణ అవకలన సమీకరణము)

ఒక అవకలన సమీకరణము ఒకే ఒక స్వతంత్ర చరరాశిని బట్టి ఒకటి లేదా అంతకన్నా ఎక్కువ ప్రమేయాన్ని కలిగియున్న యెడల, ఆ సమీకరణము **సాధారణ అవకలన సమీకరణము** అని అంటారు.

నిర్వచనము 10.5: (పాక్షిక అవకలన సమీకరణము)

ఒక అవకలన సమీకరణము ఒకటి లేక అంతకన్నా ఎక్కువ ప్రమేయాల పాక్షిక అవకలజము మాత్రము కలిగివున్నచో, ఆ సమీకరణమును **పాక్షిక అవకలన సమీకరణము** అని అంటారు.

ఉదాహరణకు, తెలియని ప్రమేయం x స్వతంత్ర చరరాశి y గా అనుకొన్న తర్వాత

$\frac{dy}{dx}+2y=e^{-x}$, $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}-5y=0$ మరియు $\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}=3x-4y$ అనేవి సాధారణ అవకలన సమీకరణములు.

$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$ మరియు $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-2\frac{\partial u}{\partial t}$ అనేవి పాక్షిక అవకలన సమీకరణాలకు ఉదాహరణలు.

ఈ అధ్యాయంలో సాధారణ అవకలన సమీకరణాల గురించి మాత్రమే నేర్చుకొంటున్నాము. సాధారణ అవకలన సమీకరణములను రెండు రకాలుగా వర్గీకరించవచ్చు. అవి: **రేఖీయ** సాధారణ అవకలన సమీకరణము మరియు **అరేఖీయ** సాధారణ అవకలన సమీకరణము.

నిర్వచనము 10.6

n తరగతి గల **రేఖీయ సాధారణ అవకల సమీకరణము సాధారణ** రూపం క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చు.

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0y=g(x) \quad \ldots (1)$$

ఇక్కడ గుణకములు $a_n(x)\neq 0, a_0(x), a_1(x), \ldots, a_{n-1}(x)$ మరియు $g(x)$ అని స్వతంత్ర చరరాశి x ను బట్టి ప్రమేయం అగును. (శూన్య ప్రమేయంతో కలిపి)

గమనిక

(1) ముఖ్యంగా గమనించవలసిన విషయం ఏమంటే రేఖీయ అవకలన సమీకరణములో ఒక ప్రమేయం $y(x)$ తో దాని అవకలజము యొక్క లబ్ధముగా ఉండదు. మరియు ఒక ప్రమేయము లేక దాని అవకలజము యొక్క ఘాతము 1 కన్నా ఎక్కువగా ఉండదు.

04_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_10.indd 159 03/03/2023 18:20:59

(2) రేఖీయ అవకలన సమీకరణములో y ను బట్టి అపారదర్శక ప్రమేయాలు (త్రికోణమితి లేక సంవర్గమానాలు మొదలగు) లేక అవకలన సమీకరణములు ఉండవు.

(3) ఒక ప్రమేయం లేదా దాని అవకలజము మరియొక ప్రమేయంలో గల చరరాశిగా ఉండదు. ఉదాహరణకు $\sqrt{y'}$ లేక $e^{y'}$.

(4) గుణకములు $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_{n-1}(x)$ మరియు $g(x)$ అనేవి శూన్య లేక శూన్యేతర ప్రమేయాలుగాను, స్థిరాంకము లేదా స్థిరాంకం లేని ప్రమేయాలుగాను, రేఖీయ లేక అరేఖీయ ప్రమేయాలుగానో ఉండవచ్చు. ఒక అవకలన సమీకరణము సవళము అనే విషయాన్ని ధ్రువీకరించుటకు, ఒక ప్రమేయం $y(x)$ మరియు దాని అవకలజములు మాత్రము ఉపయోగపడుతాయి.

నిర్వచనము 10.7

రేఖీయముకాని అవకలన సమీకరణమును అరేఖీయ అవకలన సమీకరణము అని కూడా అంటారు.

ఒక అవకలన సమీకరణములో $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ లో y అనే ఆధారిత చరరాశి లేక దాని అవకలజము లేదా $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$, $(y')^2$ వంటి ఘాతములు ఉన్నచో, ఆ అవకలన సమీకరణము అరేఖీయ అవకలన సమీకరణము అవుతుంది.

ఉదాహరణకు,

(1) $\frac{dy}{dx} = ax^3$, $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 0$ మరియు $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$ అనేవి రేఖీయ సాధారణ అవకలన సమీకరణం. కానీ $y\frac{dy}{dx} + \sin x = 0$ అనేది అరేఖీయ అవకలన సమీకరణము.

(2) $y'' + 2x^3y' = 7xy + x^2$ అనేది రెండవ తరగతి, రేఖీయ సాధారణ అవకలన సమీకరణము.

(3) $y'' + y' = \sqrt{x}$ అనేది రెండవ తరగతి రేఖీయ సాధారణ అవకలన సమీకరణము.

(4) $y^2 + y' = \sqrt{x}$ అనేది మొదటి తరగతి రేఖీయ సాధారణ అవకలన సమీకరణము.

(5) $y' = x\sin(y)$ అనేది మొదటి తరగతి రేఖీయ సాధారణ అవకలన సమీకరణము.

(6) $y'' = y\sin(x)$ అనేది రెండవ తరగతి రేఖీయ సాధారణ అవకలన సమీకరణము.

నిర్వచనము 10.8

సమీకరణము (1) లో $g(x) = 0$ అయిన, ఆ సమీకరణమును **సమఘాత** సమీకరణము అంటారు. లేకపోతే ఆ సమీకరణమును **అసమఘాత** సమీకరణము అని అంటారు.

వాక్యాలు

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0 \quad \ldots(2)$$

అనే సమీకరణము యొక్క రెండు సాధనలు $y_i(x),\ i = 1, 2$ అయిన

$a_n(x)y_i^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y_i^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y_i(x) + a_0(x)y_i(x) = 0,\ i = 1, 2$ అవుతుంది.

$u(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, ఇక్కడ c_1, c_2 అనేవి ఏవైనా రెండు స్థిరాంకములు అనుకొనిన $u(x)$ అనేది(2) యొక్క సాధన అవుతుందన్న విషయాన్ని సులభముగా సరిచూడవచ్చు.

04_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_10.indd 160 03/03/2023 18:21:04

కావున మొదటి తరగతి రేఖీయ సమీకరణమును $y' + p(x)y = f(x)$ గా వ్రాయవచ్చు. వ్రాయలేని మొదటి తరగతి అవకలన సమీకరణము అరేఖీయమగును. $y = 0$ అనేది $y' + p(x)y = 0$ అనే సమీకరణము యొక్క సాధన అనే తెలియుట వలన ఈ సాధనను అల్పమైన సాధన అని పిలవవచ్చు. ఈ సమీకరణము యొక్క ఇతర సాధనలను అల్పముకాని సాధనలు అని అంటారు. ఇది సామాన్య రేఖీయ సమఘాత అవకలన సమీకరణము అంటారు. ఈ సమీకరణము యొక్క ఇతర సాధనలు అపారదర్శకం, ఇది రేఖీయ సమఘాత అవకలన సమీకరణమునకు సత్యమును.

10.4 అవకలన సమీకరణములను రూపొందించుట

10.4.1 భౌతిక పరిస్థితుల నుండి అవకలన సమీకరణములను రూపొందించుట

నిత్యజీవితంలో ఏ విధంగా అవకలన సమీకరణములను నమూనాలుగా ఏర్పరచు విధానాన్ని వివరించుటకు మనము కొన్ని నమూనా పరిశీలిద్దాం.

మాదిరి 1: (న్యూటన్ సిద్ధాంతము)



న్యూటన్ రెండవ గమన సిద్ధాంతము ప్రకారం m అనే ద్రవ్యరాశి కలిగిన ఒక వస్తువుపై F అనే బలము ప్రయోగించినపుడు ఏర్పడు త్వరణం a అనేది $F = ma$ అని సమీకరణం ద్వారా పొందుచున్నాము. పైనుండి క్రింద పడు వస్తువు భూ మట్టమునకు పైన $h(t)$ ఎత్తు నుండి విడుదల చేయబడుచున్నది. న్యూటన్ రెండవ గమన సూత్రమును $m\frac{d^2h}{dt^2} = f\left(t, h(t), \frac{dh}{dt}\right)$ అవకలన సమీకరణంలో వివరించబడుతుచున్నది. ఇక్కడ m వస్తువు ద్రవ్యరాశి h అనేది భూ మట్టమునకు పైనున్న ఎత్తు. ఇది కాలాన్ని బట్టితెలియని ఎత్తును సూచించు రెండవ తరగతి అవకలన సమీకరణము.

మాదిరి 2: (జనాభా పెరుగుదల)



పిల్లల సంఖ్య పెరిగేకొద్దీ జనాభా పెరుగుతుంది. ఉదాహరణకు కుందేళ్ళ పెరుగుదలను మనము ఉదాహరణగా తీసుకొనిన, కుందేళ్ళ సంఖ్య ఎక్కువైనప్పుడు కుందేళ్ళ పిల్లల సంఖ్య ఎక్కువగును. కాలము పెరిగినపుడు కుందేళ్ళ పెరుగుదల పెరుగుచున్నది. t కాలంలో పెరుగుదల రేటు $N(t)$. కుందేళ్ళ పెరుగుదలకు అనుపాతంలో ఉన్నచో, పెరుగుదలను నిర్ణయించు అవకలన సమీకరణము $\frac{dN}{dt} = rN$ ఇక్కడ $r > 0$ అనేది పెరుగుదల రేటు.

మాదిరి 3: (లాజిస్టిక్ పెరుగుదల)

ఒక నిర్ణీత ప్రదేశంలో గల జనాభా L లో రోగము వ్యాప్తి చెందు రేటు (వ్యాధి లక్షణాలు గల ప్రజల సంఖ్య N) వ్యాధి లక్షణాలు గల ప్రజల సంఖ్యను వ్యాధి లక్షణాలు లేని ప్రజల సంఖ్యను గుణించగా వచ్చునది.

$$\frac{dN}{dr} = kN(L - N),\ k > 0.$$

అభ్యాసము 10.2

1. క్రింద ఉన్న భౌతిక ప్రవచనాలను అవకలన సమీకరణాలుగా వ్యక్తపరుచుము.
   (i) రేడియం యొక్క క్షీణత రేటు మొత్తం Q కు అనులోమానుపాతములో ఉండును.

04_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_10.indd 161 03/03/2023 18:21:06

(ii) ఒక నగరం జనాభా P యొక్క పెరుగుదల రేటు అనునది జనాభాకు, 5,00,000 మరియు జనాభాకు మధ్య గల వ్యత్యాసముల లబ్ధమునకు అనులోమానుపాతంలో వుండును.

(iii) ఒక నిర్దిష్ట పదార్థము యొక్క భాష్పీభవన పీడనం P లోని మార్పురేటు అనునది ఉష్ణోగ్రత దృష్ట్యా, భాష్పీభవన పీడనానికి అనులోమానుపాతంలోనూ, ఉష్ణోగ్రత వర్గమునకు విలోమానుపాతంలోను ఉండును.

(iv) ఒక పొదుపు మొత్తం సంవత్సరానికి ఇచ్చే 8% వడ్డీ నిరంతరంగా అసలుతో చేర్చబడుతుంది. మరొక పెట్టుబడి నుండి ప్రతి సంవత్సరం లభించే లాభం ₹ 400 ఈ మొత్తముతో నిరంతరంగా కలపబడుతుంది.

2. ఒక గోళాకార నీటి బొట్టు దాని ఉపరితలం అనుపాతంలో ఆవిరియగును. నీటి బొట్టు వ్యాసార్ధము మార్పురేటు అవకలన సమీకరణము రూపంలో చూపుము.

10.4.2 రేఖా గణిత సమస్యల నుండి అవకలన సమీకరణములను ఏర్పరచుట

కొన్ని స్థిరాంకములను ఉప విభాగాలుగా కల్గిన ఇవ్వబడిన ప్రమేయాలకు ఆ ప్రమేయములో గల స్థిరాంకములను తొలగించి అవకలన సమీకరణముగా వ్రాయవచ్చును. ఉదాహరణకు $y = \mathrm{A}\,e^{x} + \mathrm{B}\,e^{-x}$ సమీకరణము నుండి A, B స్థిరాంకములను తొలగించడం ద్వారా $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$ అవకలన సమీకరణము పొందవచ్చు.

n స్థిరాంకములు గల ఒక వక్ర కుటుంబ సమీకరణం తీసుకొనిన, స్థిరాంకములులేని అవకలన సమీకరణమును ఏర్పరచుటకు కావలసిన నిబంధనలను తెలుసుకొంటాము.

ఇవ్వబడిన సమీకరణము n తరగతి అవకలజములుగా తీసుకోవడం ద్వారా ఆ సమీకరణం n అవకలన సమీకరణాలను పొందవచ్చును. ఇవ్వబడిన సమీకరణమును ఆ సమీకరణమును వెంబడించు n సార్లు విభజించుట వలన వచ్చు n క్రొత్త సమీకరణమును వెంబడించు $(n+1)$ సమీకరణముల నుండి n స్థిరాంకమును తొలగించిన తరువాత, n పెరుగుదల అవకలజము కలిగిన కావలసిన అవకలన సమీకరణము వచ్చును.

ఉదాహరణ 10.2

ఆది బిందువు ద్వారా పోవు సరళరేఖా కుటుంబమునకు అవకలన సమీకరణమును కనుగొనుము.

సాధన

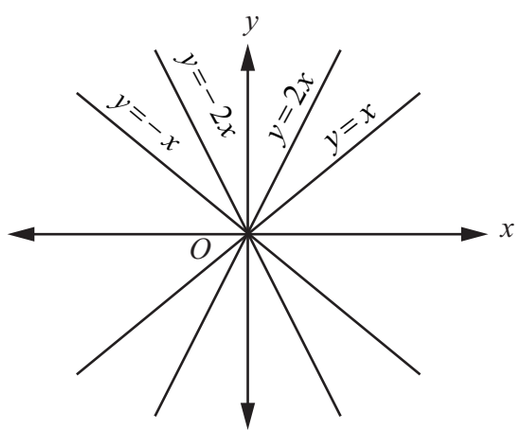
ఆది బిందువు ద్వారా పోవు రేఖీయ రేఖా కుటుంబ సమీకరణము $y = mx$ ఇక్కడ m అనేది ఏదైనా ఒక స్థిరాంకము. ... (1)

ఇరువైపులా x దృష్ట్యా అవకలజము చేయగా

$$\frac{dy}{dx} = m\,. \qquad \ldots (2)$$

సమీకరణములు (1) మరియు (2)ల నుండి మనము పొందునది $y = x\frac{dy}{dx}$ ఇదియే కావలసిన అవకలన సమీకరణము.

ఇవ్వబడిన $y = mx$ సమీకరణము ఒకే ఒక స్థిరాంకమును మాత్రము కలిగి ఉన్నది. కావున మనము మొదటి తరగతి అవకలజ సమీకరణమును ఉపయోగిస్తామని గమనించవచ్చును.



పటము 10.1

04_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_10.indd 162 03/03/2023 18:21:08

ఉదాహరణ 10.3

$y = \mathrm{A}\cos x + \mathrm{B}\sin x$ సమీకరణము నుండి A, B చర స్థిరాంకములను తొలగించి అవకలన సమీకరణమును ఏర్పరచుము.

సాధన

ఇవ్వబడినది $y = \mathrm{A}\cos x + \mathrm{B}\sin x$ ... (1)

(1) ను రెండుసార్లు అవకలజం చేయగా మనము పొందునది

$$\frac{dy}{dx} = -\mathrm{A}\sin x + \mathrm{B}\cos x\,. \quad \text{... (2)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\mathrm{A}\cos x - \mathrm{B}\sin x = -(\mathrm{A}\cos x + \mathrm{B}\sin x)\,. \quad \text{... (3)}$$

సమీకరణము (1)ని (3)లో ప్రతిక్షేపించగా $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ కావలసిన అవకలన సమీకరణము. ■

ఉదాహరణ 10.4

$(a,0)$ మరియు $(-a,0)$ బిందువుల ద్వారా పోగు వృత్త కుటుంబముల అవకలన సమీకరణము ను కనుగొనుము.

సాధన

$(a,0)$ మరియు $(-a,0)$ బిందువుల ద్వారా పోవు వృత్త కేంద్రము y-అక్షముపై కలదు.

వృత్త కేంద్రము $(0,b)$ అనుకుంటే వృత్త వ్యాసార్ధం $\sqrt{a^2+b^2}$ కావున $(a,0)$ మరియు $(-a,0)$ అనే బిందువుల ద్వారా పోవు వృత్త కుటుంబ సమీకరణము

$x^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2$, b ఇక్కడ b అనేది ఏదైనా ఒక చర స్థిరాంకము. ... (1)

(1) వ సమీకరణమును ఇరువైపులా x దృష్ట్యా అవకలజము చేయగా

$$2x + 2(y-b)\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow y - b = -\frac{x}{\frac{dy}{dx}} \Rightarrow b = \frac{x}{\frac{dy}{dx}} + y\,.$$

b విలువను (1)లో ప్రతిక్షేపించగా మనము పొందునది

$$x^2 + \frac{x^2}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = a^2 + \left(\frac{x}{\frac{dy}{dx}} + y\right)^2$$

$$\Rightarrow x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x^2 = a^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left[x + y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^2$$

$\Rightarrow \left(x^2 - y^2 - a^2\right)\frac{dy}{dx} - 2xy = 0$, ఇదియే కావలసిన అవకలన సమీకరణము. ■

ఉదాహరణ 10.5

$y^2 = 4ax$ అనే పరావలయకుటుంబమునకు అవకలన సమీకరణమును కనుగొనుము. ఇక్కడ a అనేది ఏదైనా ఒక చర స్థిరాంకము.

సాధన

పరావలయ సమీకరణము $y^2 = 4ax$, ఇక్కడ a అనేది ఒక చర స్థిరాంకము. ... (1)

సమీకరణము ఇరువైపులా x దృష్ట్యా అవకలజము చేయగా మనం పొందునది $2y\frac{dy}{dx}=4a \Rightarrow a=\frac{y}{2}\frac{dy}{dx}$

a విలువను (1)లో ప్రతిక్షేపించగా, మనము పొందునది $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x}$ అనేది అవకలన సమీకరణము.

ఉదాహరణ 10.6

x-అక్షముపై నాభి మరియు ఆది బిందువులో కేంద్రముగా కలిగిన దీర్ఘ వృత్త కుటుంబం యొక్క అవకలన సమీకరణము కనుగొనుము.

సాధన

x-అక్షముపై నాభి మరియు ఆది బిందువు కేంద్రముగా గల దీర్ఘ వృత్త కుటుంబ సమీకరణము

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ a>b \quad \ldots (1)$$

ఇక్కడ a, b అనేవి చర స్థిరాంకంములు.

(1) వ సమీకరణము ఇరువైపులా x దృష్ట్యా అవకలజం చేయగా

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \frac{x}{a^2}+\frac{y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0 \quad \ldots (2)$$

(2) వ సమీకరణము ఇరువైపులా x దృష్ట్యా అవకలజం చేయగా

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\left[y\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]=0 \Rightarrow \frac{1}{a^2}=-\frac{1}{b^2}\left[y\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]$$

$\frac{1}{a^2}$ విలువను (2) వ సమీకరణములో ప్రతిక్షేపించి మరియు సూక్ష్మీకరించగా, మనము పొందునది.

$$-\frac{1}{b^2}\left[y\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]x+\frac{y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow xy\frac{d^2y}{dx^2}+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-y\frac{dy}{dx}=0$$

ఇదియే కావలసిన అవకలన సమీకరణము.

విశేషాంశము:

ఒక స్థిరాంకము గల సమీకరణము నుండి ఆ స్థిరాంకము తొలగించుట ద్వారా మొదటి తరగతి అవకలజ సమీకరణము మరియు రెండు స్థిరాంకములు గల సమీకరణము నుండి రెండు స్థిరాంకములు తొలగించుట ద్వారా రెండవ తరగతి అవకలజ సమీకరణమును మరియు ఇదేవిధంగా కొనసాగిస్తూ కొనసాగును.

అభ్యాసము 10.3

1. ఒక తలములో (i) అన్ని క్షితిజ లంబముకాని (ii) అన్ని క్షితిజ సమాంతరముకాని కుటుంబ రేఖలకు అవకలన సమీకరణము కనుగొనుము.
2. $x^2+y^2=r^2$ వృత్తమును స్పర్శించు అన్ని రేఖీయ రేఖలకు అవకలన సమీకరణములను కనుగొనుము.
3. ఆది బిందువుల ద్వారా పోవు, కేంద్రము x-అక్షముపై గల వృత్తకుటుంబముల అవకలన సమీకరణములను కనుగొనుము.
4. నాభిలంబము $4a$ మరియు x-అక్షమునకు సమాంతరముగా అక్షములు గల పరావలయకుటుంబమునకు అవకలన సమీకరణము కనుగొనుము.
5. శీర్షము $(0,-1)$ మరియు y-అక్షమును అక్షముగా గల పరావలయకుటుంబమునకు అవకలన సమీకరణము కనుగొనుము.

04_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_10.indd 164 03/03/2023 18:21:16

6. ఆది బిందువును కేంద్రముగా, y-అక్షముపై నాభిగా గల దీర్ఘ వృత్తకుటుంబమునకు అవకలన సమీకరణము కనుగొనుము.
7. $y = Ae^{8x} + Be^{-8x}$ సమీకరణములు గల వక్రకుటుంబమునకు అవకలన సమీకరణము కనుగొనుము AB అనునవి చర స్థిరాంకములు.
8. $xy = ae^{x} + be^{-x} + x^{2}$ సమీకరణము ద్వారా సూచించువక్రరేఖకు అవకలన సమీకరణమును కనుగొనుము.

10.5 సాధారణ అవకలన సమీకరణం యొక్క సాధన

నిర్వచనము 10.9 : (అవకలన సమీకరణము యొక్క సాధన)

ఒక అవకలన సమీకరణమును తృప్తిపరిచే ఆధారిత చరరాశిని స్వతంత్ర చరరాశితో సంబంధ పరచు సమాసమును ఆ సమీకరణము యొక్క **సాధన** అవుతుంది.

గమనిక

(i) ప్రతి అవకలన సమీకరణమునకు ఒక సాధన కలిగియుండునని ఖచ్చితంగా చెప్పలేము.
ఉదాహరణకు $(y'(x))^2 + y^2 + 1 = 0$ అవకలన సమీకరణ సాధన లేదు. $(y'(x))^2 = -(y^2 + 1)$ కావున $y'(x)$ వాస్తవము కాదు.

(ii) ఒక అవకలన సమీకరణమునకు సాధన ఉన్నచో ఆ సాధన ఏకైకంగా ఉండును.
ఉదాహరణకు $y = e^{2x}, y = 2e^{2x}$, $y = \sqrt{8}e^{2x}$ అనే ప్రమేయాలు $\frac{dy}{dx} - 2y = 0.$ అనే అవకలన సమీకరణానికి సాధన అగును. $y = ce^{2x}$, $c \in \mathbb{R}$, ప్రమేయాలు అన్ని $\frac{dy}{dx} - 2y = 0.$ అవకలన సమీకరణానికి సాధన అవుతుంది. కావున ఒక అవకలన సమీకరణానికి సాధ్యం గల అన్ని సాధనలను నిర్దేశించిన ఒక అవకలన సమీకరణము యొక్క ఉమ్మడి సాధన అని గమనించవలెను.

నిర్వచనము 10.10 : (సాధారణ సాధన)

ఒక అవకలన సమీకరణము సాధనలో గల స్థిరాంకముల సంఖ్య, ఆ అవకలన సమీకరణము తరగతికి సమానముగా ఉన్నచో, ఆ సాధనను ఆ సమీకరణము యొక్క **సాధారణ సాధన** అంటారు.

విశేషాంశము

ఒక అవకలన సమీకరణములో సాధ్యము గల అన్ని సాధనలు **సాధారణ సాధనలో** ఉండును. సాధారణ అవకలన సమీకరణములోని సాధారణ సాధనలోని చర స్థిరాంకములు, పాక్షిక అవకలన సమీకరణంలోని సాధారణ చర ప్రమేయాలు కలిగి ఉంటుంది.

నిర్వచనము 10.11 : (ప్రత్యేకమైన సాధన)

ఒక అవకలన సమీకరణము యొక్క సాధారణ సాధనలో గల చర స్థిరాంకములకు నిర్దేశించిన విలువలను ఇవ్వడం ద్వారా వచ్చు సాధనను ప్రత్యేకమైన సాధన అంటారు.

విశేషాంశము

(i) తరచుగా అధికమైన నిబంధనలను ఇవ్వడం ద్వారా ఒక అవకలన సమీకరణమునకు నిర్దేశించిన సాధనలు పొందవచ్చు.

(ii) $y' = f(x, y)$ అనే మొదటి తరగతి అవకలజ సమీకరణము యొక్క సాధారణ సాధన xy - తలములో మొదటి పరామితి గల వక్రమును సూచించుచున్నది.

04_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_10.indd 165 03/03/2023 18:21:19

ఉదాహరణకు $y = ce^{2x},\ c \in \mathbb{R}$ అనేది $\frac{dy}{dx} - 2y = 0$. అనే అవకలన సమీకరణము యొక్క సాధారణ సాధన అవుతుంది.

$y = a\cos x + b\sin x$ అనే $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ అనే రెండవ తరగతి అవకలజ సమీకరణమును తృప్తి పరచునని ఇంతకు ముందే చదివియున్నాము. ఇది రెండు చర స్థిరాంకములు కలిగి ఉన్నందు వల్ల, $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ అవకలన సమీకరణమునకు సాధారణ సాధన అవుతుంది. $a = 1,\ b = 0$ అనే సాధారణ సాధనలో మనకు లభించు $y = \cos x$ అనేది $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ అవకలన సమీకరణమునకు ప్రత్యేక సాధన అవుతుంది.

సాధారణంగా చర స్థిరాంకములను తొలగించుట ద్వారా అవకలన సమీకరణము తలెత్తదు. అవకలన సమీకరణాలు సాధారణంగా సాంకేతిక విజ్ఞానం మరియు సాంఘిక విజ్ఞానం వంటి అన్ని విభాగములలో ఆచరణాత్మక సంఘటనలను అన్వేషించుటకు ఉపయోగపడును. ఇవ్వబడిన నిబంధనలను తృప్తిపరచే విధంగా ఒక అవకలన సమీకరణమునకు ఏకైక సాధన కనుగొనుటకు, సాధారణంగా చరరాశులపై గల కొన్ని నిబంధనలను ఈ సమీకరణములో ఇవ్వబడి యుండును.

ఉదాహరణ 10.7

$x^2 + y^2 = r^2$ ఇక్కడ r అనేది స్థిరాంకము, దీని యొక్క అవకలన సమీకరణము $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ అని చూపుము.

సాధన

ఇవ్వబడిన సమీకరణము $x^2 + y^2 = r^2, r \in \mathbb{R}$ ... (1)

ఈ సమీకరణం ఒకే ఒక స్థిరాంకం కలిగియున్నది.

కావున ఇవ్వబడిన సమీకరణమును ఒక్కసారి మాత్రమే (1) ను x దృష్ట్యా అవకలజము చేయగా మనం పొందునది

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

కావున $x^2 + y^2 = r^2,\ \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ అవకలన సమీకరణమును తృప్తి పరచును.

కావున $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ అవకలన సమీకరణము యొక్క సాధన $x^2 + y^2 = r^2$ అనేది. ■

ఉదాహరణ 10.8

$y = mx + \frac{7}{m}, m \neq 0$ అనేది $xy' + 7\frac{1}{y'} - y = 0$ అవకలన సమీకరణమునకు సాధన అని చూపుము.

సాధన

ఇవ్వబడిన ప్రమేయం $y = mx + \frac{7}{m}$ ఇక్కడ m ఒక స్థిరాంకము. ... (1)

(1)వ సమీకరణమును x దృష్ట్యా ఇరువైపులా అవకలనము చేయగా మనము పొందునది $y' = m$

y' మరియు y యొక్క విలువలను ఇవ్వబడిన అవకలన సమీకరణములో ప్రతిక్షేపించగా

$xy' + \frac{7}{y'} - y = xm + \frac{7}{m} - mx - \frac{7}{m} = 0$ వచ్చును.

కావున ఇవ్వబడిన ప్రమేయం $xy' + 7\frac{1}{y'} - y = 0$ అవకలన సమీకరణమునకు సాధన అవుతుంది. ■

04_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_10.indd 166 03/03/2023 18:21:23

ఉదాహరణ 10.9

$y = 2\left(x^2 - 1\right) + Ce^{-x^2}$ అనేది $\frac{dy}{dx} + 2xy - 4x^3 = 0$ అవకలన సమీకరణమునకు సాధన అవుతుందని చూపుము.

సాధన

ఇవ్వబడిన ప్రమేయం $y = 2\left(x^2 - 1\right) + Ce^{-x^2}$ ఇక్కడ C ఒక స్థిరాంకం ...(1)

(1) ను సమీకరణము ఇరువైపులా x దృష్ట్యా అవకలజం చేయగా $\frac{dy}{dx} = 4x - 2xCe^{-x^2}$.

$\frac{dy}{dx}$ మరియు y విలువలను ఇవ్వబడిన అవకలన సమీకరణములో ప్రతిక్షేపించగా

$\frac{dy}{dx} + 2xy - 4x^3 = 4x - 2xCe^{-x^2} + 2x\left[2\left(x^2 - 1\right) + Ce^{-x^2}\right] - 4x^3 = 0$ వచ్చును.

కావున ఇవ్వబడిన ప్రమేయం $\frac{dy}{dx} + 2xy - 4x^3 = 0$ అవకలన సమీకరణమునకు సాధన అవుతుంది. ■

ఉదాహరణ 10.10

$y = a\cos(\log x) + b\sin\left(\log x\right), x > 0$ అనేది $x^2y'' + xy' + y = 0$ అవకలన సమీకరణమునకు సాధన అవుతుందని చూపుము.

సాధన

ఇవ్వబడిన ప్రమేయము $y = a\cos(\log x) + b\sin\left(\log x\right)$ ...(1)

ఇక్కడ a, b లు ఏవైనా రెండు స్థిరాంకములు. ఈ రెండు స్థిరాంకములు తొలగించుటకు ఇవ్వబడిన ప్రమేయం (1)ను ఇరువైపులా x దృష్ట్యా అవకలజం చేయగా మనము పొందునది

$$y' = -a\sin\left(\log x\right)\cdot\frac{1}{x} + b\cos\left(\log x\right)\cdot\frac{1}{x} \Rightarrow xy' = -a\sin\left(\log x\right) + b\cos\left(\log x\right).$$

x దృష్ట్యా, మరలా అవకలనము చేయగా

$xy'' + y' = -a\cos\left(\log x\right)\cdot\frac{1}{x} - b\sin\left(\log x\right)\cdot\frac{1}{x} \Rightarrow x^2y'' + xy' + y = 0$ అని పొందుతాము.

కావున, $y = a\cos(\log x) + b\sin\left(\log x\right)$ అనేది ఇవ్వబడిన అవకలన సమీకరణమునకు సాధన అవుతుంది. ■

అభ్యాసము 10.4

1. క్రింద ఇవ్వబడిన సమీకరణములు ప్రతి ఒక్కటి వాటికెదురుగా ఇవ్వబడిన అవకలన సమీకరణము యొక్క సాధన అని చూపుము.

   (i) $y = 2x^2$; $xy' = 2y$

   (ii) $y = ae^x + be^{-x}$; $y'' - y = 0$

2. $y = e^{mx}$ అనే ప్రమేయం ఇవ్వబడిన అవకలన సమీకరణమునకు సాధన అయితే m యొక్క విలువను కనుగొనుము.

   (i) $y' + 2y = 0$ (ii) $y'' - 5y' + 6y = 0$

04_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_10.indd 167 03/03/2023 18:21:29

3. ఏదైనా ఒక బిందువువద్ద ఒక వక్రము యొక్క స్పర్శ రేఖ వాలు, ఆ బిందువు యొక్క y నిరూపకము దూరంలో 4 రెట్లకు వ్యుత్క్రమము అగును. వక్రము (2,5) బిందువు ద్వారా పోవుచున్నచో, వక్రము యొక్క సమీకరణం కనుగొనుము.

4. $y = e^{-x} + mx + n$ అనేది $e^x\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) - 1 = 0$ అవకలన సమీకరణమునకు సాధన అవుతుందని చూపుము.

5. $y = ax + \frac{b}{x}, x \neq 0$ అనేది $x^2y'' + xy' - y = 0$ అవకలన సమీకరణమునకు సాధన అవుతుందని చూపుము.

6. $y = ae^{-3x} + b$ అనేది $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} = 0$ అవకలన సమీకరణమునకు సాధన అవుతుందని చూపుము. ఇక్కడ a, b అనేవి రెండు స్థిరాంకములు.

7. $y^2 = 2a\left(x + a^{\frac{2}{3}}\right)$ వక్రమును సూచించు అవకలన సమీకరణము $\left(y^2 - 2xy\frac{dy}{dx}\right)^3 = 8\left(y\frac{dy}{dx}\right)^5$ అవుతుందని చూపుము. ఇక్కడ a అనేది ధనాత్మక పరామితి ....

8. $y = a\cos bx$ అనేది $\frac{d^2y}{dx^2} + b^2y = 0$ అవకలన సమీకరణమునకు సాధ్యం అవుతుందని చూపుము.

మొదటి తరగతి, మొదటి అంతస్థు అవకలన సమీకరణమునకు సాధనను కనుగొను పద్ధతుల గురించి ఇప్పుడు తెలుసుకొందాం.

10.6 మొదటి తరగతి, మొదటి అంతస్థు అవకలన సమీకరణముల సాధన

10.6.1 చరరాశుల విభజన పద్ధతి

అవకలన సమీకరణముల చరరాశులను విభజించి సాధించే పద్ధతిని మొదటి లిబ్నిజ్ అనునతడు పరిచయవం చేసెను. దాని తర్వాత 1694 లో జాన్ –బెర్నోలీ అనునతను దీనిని క్రమబద్ధీకరించెను.

మొదటి తరగతి అవకలన సమీకరణము $h(y)y' = g(x)$ రూపంలో వ్రాయగలిగిన ఆ సమీకరణము యొక్క చరరాశులు విభజన కలిగినది. ఇక్కడ y' మరియు y యొక్క ప్రమేయముల లబ్ధము ఎడమవైపు, x ప్రమేయం ఈ సమీకరణమునకు కుడివైపు ఉండును. అవకలన సమీకరణమును విభజించి ఈ విధంగా వ్రాయు పద్ధతిని చరరాశుల విభజన పద్ధతి అంటారు.

మొదటి తరగతి అవకలన సమీకరణము చరరాశులను విభజించి వ్రాయుటకు వీలైన ఆ సమీకరణము యొక్క సాధన కనుగొనుట సులువు. $f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$ రూపంలో గల సమీకరణమును **చరరాశులు విభజించదగినది** లేదా చరరాశులు **విభజించిన సమీకరణము** అని అంటారు.

ఇవ్వబడిన అవకలన సమీకరణమును $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = -\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy$ ...(1)

రూపంలో వ్రాయుము. (1) వ సమీకరణము ఇరువైపులా సమాకలనము చేయగా వచ్చునది

$\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = -\int\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy + C$ అనేది చర స్థిరాంకము.

విశేషాంశాలు:

1. ఇరువైపులా ఉన్న చర స్థిరాంకములను సమగ్రపరిచి ఒకే చర స్థిరాంకముగా మార్చడం వల్ల సమీకరణం యొక్క సాధన తెలుసుకొనేటప్పుడు చర స్థిరాంకములను ఇరువైపులా చేర్చనవసరం లేదు.
2. ఈ చర స్థిరాంకములతో వచ్చు సాధన అవకలన సమీకరణము యొక్క సాధారణ సాధన అని అంటారు.

04_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_10.indd 168 03/03/2023 18:21:32

ఒక అవకలన సమీకరణము సాధన కనుగొనే పద్ధతిలో సమాకలనము ఉపయోగించుట వలన అవకలన సమీకరణ సాధనను సమాకలన అవకలన సమీకరణము సాధన అని అంటారు.

ఉదాహరణ 10.11

సాధించుము $\left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx}=1+y^2$.

సాధన

ఇవ్వబడినది $\left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx} = 1+y^2$ ... (1)

ఇవ్వబడిన సమీకరణమునకు చరరాశులను విభజించగా

$$\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2}$$ ... (2) గా వ్రాయవచ్చు.

(2)వ సమీకరణము ఇరువైపులా సమాకలనం చేయగా మనం పొందునది $\tan^{-1} y = \tan^{-1} x + C$. ... (3)

$$\text{కానీ } \tan^{-1} y - \tan^{-1} x = \tan^{-1}\left(\frac{y-x}{1+xy}\right).$$ ... (4)

(3) మరియు (4) సమీకరణములను ఉపయోగించి $\tan^{-1}\left(\frac{y-x}{1+xy}\right) = C \Rightarrow \frac{y-x}{1+xy} = \tan C = a$ (అనుకొనుము)

కావున, $y-x = a(1+xy)$ ఇదియే కావలసిన సాధన. ■

ఉదాహరణ 10.12

$y(1)=2$ నిబంధనను తృప్తి చేయు $\left(1+x^3\right)dy - x^2 y dx = 0$ అవకలన సమీకరణము యొక్క నిర్దేశిత (ప్రత్యేకమైన) సాధనను కనుగొనుము.

సాధన

ఇవ్వబడినది $(1+x^3)dy - x^2 y dx = 0$.

పై సమీకరణాన్ని $\frac{dy}{y} - \frac{x^2}{1+x^3}dx = 0$ గా వ్రాయవచ్చును.

ఇరువైపులా సమాకలనం చేయగా మనం పొందునది

$$\log y - \frac{1}{3}\log(1+x^3) = C_1 \Rightarrow 3\log y - \log(1+x^3) = \log C.$$

$$\text{కావున, } 3\log y = \log(1+x^3) + \log C,$$

$$\log y^3 = \log C(1+x^3).$$

కావున, ఇవ్వబడిన సమీకరణము యొక్క సాధారణ సాధన $y^3 = C(1+x^3)$ $x=1, y=2$ అయినపుడు కావున, ఇవ్వబడిన సమీకరణము యొక్క నిర్దేశిత సాధన $y^3 = 4(1+x^3)$. ■

04_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_10.indd 169 03/03/2023 18:21:38

10.6.2 ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి

$\frac{dy}{dx} = f(ax+by+c)$ రూపంలో గల అవకలన సమీకరణము తీసుకొనుము.

(i) $a \neq 0$ మరియు $b \neq 0$ అయిన, $ax+by+c=z$ అని ప్రతిక్షేపించిన ఇవ్వబడిన సమీకరణము యొక్క చరరాశుల విభజన రూపంలోకి మారును.

(ii) $a=0$ లేక $b=0$ అయిన ఇవ్వబడిన అవకలన సమీకరణము చరరాశులు విభజించే విధంగా ఉండును.

ఉదాహరణ 10.13

సాధించుము $y' = \sin^2(x-y+1)$.

సాధన

$$y' = \sin^2(x-y+1) \text{ ఇవ్వబడినది}$$

$$z = x-y+1, \text{ గా ప్రతిక్షేపించగా } \frac{dz}{dx} = 1-\frac{dy}{dx}.$$

కావున, ఇవ్వబడిన సమీకరణము $1-\frac{dz}{dx} = \sin^2 z$ గా మారును

$$\text{అనగా } \frac{dz}{dx} = 1-\sin^2 z = \cos^2 z.$$

$$\text{చరరాశులను విభజించగా } \frac{dz}{\cos^2 z} = dx \text{ (లేక) } \sec^2 z\,dz = dx.$$

ఇరువైపులా సమాకలనం చేయగా పొందునది $\tan z = x+C$ (లేక) $\tan(x-y+1) = x+C$. ■

ఉదాహరణ 10.14

సాధించుము: $\frac{dy}{dx} = \sqrt{4x+2y-1}$.

సాధన

$z = 4x+2y-1$, గా ప్రతిక్షేపించిన

$$z' = 4+2y' = 4+2\sqrt{z}$$

$$\text{కావున } \frac{dz}{4+2\sqrt{z}} = dx.$$

ఇరువైపులా సమాకలనం చేయగా $\int \frac{dz}{4+2\sqrt{z}} = x+C$.

$z = u^2$ గా ప్రతిక్షేపించగా

$$\int \frac{dz}{4+2\sqrt{z}} = \frac{u\,du}{u+2} = u-2\ln|u+2|+C,$$

$$\text{లేక } \sqrt{z}-2\ln(\sqrt{z}+2) = x+C$$

$z = 4x+2y-1$, గా ప్రతిక్షేపించిన మనము పొందు సాధారణ సాధన

$$\sqrt{4x+2y-1}-2\ln\left(\sqrt{4x+2y-1}+2\right) = x+C.$$ ■

04_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_10.indd 170 03/03/2023 18:21:45

ఉదాహరణ 10.15

$\frac{dy}{dx}=\frac{x-y+5}{2(x-y)+7}$ ను సాధించుము.

సాధన

ఇవ్వబడినది $=\!=\frac{x-y+5}{2(x-y)+7}$

$=\!=dx$ గా ప్రతిక్షేపించిన

$\frac{dz}{dx}=\frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx}\ 1-\frac{dz}{dx}\ 1-\frac{dz}{dx}$

కావున ఇవ్వబడిన సమీకరణము

$1-\frac{dz}{dx}=\frac{z+5}{2z+7}$ గా మారును.

$=1-\frac{z+5}{2z+7}$

$\frac{dz}{dx}=\frac{2z+7}{z+2}dz$

చరరాశులను విభజించుట ద్వారా మనము పొందునది

$\frac{2z+7}{z+2}dz=dx$

$\frac{2(z+2)+3}{(z+2)}dz=dx$

$\left(2+\frac{3}{z+2}\right)dz=dx$

ఇరువైపులా సమాకలనం చేయగా

$$2z+3\log|z+2=x+C$$

అనగా $2(x-y)+3\log|x-y+2|=x+C$ ■

ఉదాహరణ 10.16

సాధించుము: $\frac{dy}{dx}=(3x+y+4)^2$.

సాధన

ఇవ్వబడిన సమీకరణమును సాధించుటకు $3x+y+4=z$ ప్రతిక్షేపించవలెను.

x దృష్ట్యా అవకలజము చేయగా, మనము పొందునది $\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}-3$. కావున ఇవ్వబడిన అవకలన సమీకరణము $\frac{dz}{dx}=z^2+3$ గా మారును.

04_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_10.indd 171 03/03/2023 18:21:47

ఈ సమీకరణలో చరరాశులు విభజించబడినవి. కావున ఇరువైపులా సమాకలనం చేయగా ఇవ్వబడిన అవకలన సమీకరణము $\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{3x+y+4}{\sqrt{3}}\right)=x+C$ గా మారును. ■

అభ్యాసము 10.5

1. ద్రవ్యరాశి M గా గల ఆటోమొబైల్ మోటార్ స్థిరమైన బలము F అయిన, దాని వేగము V ను $M\frac{dV}{dt}=F-kV$ సమీకరణముతో సూచించబడినది. k అనేది స్థిరాంకము $t=0$ అయిన $V=0$ గా ఇవ్వబడినపుడు v ను t రూపంలో వ్రాయుము.
2. నిటారుగా పడు పారాషూట్ దిశా వేగము v ను $v\frac{dv}{dx}=g\left(1-\frac{v^2}{k^2}\right)$ సమీకరణము ను తృప్తిపరచును. ఇక్కడ g మరియు k అనేవి స్థిరాంకములు. కావున మొదటి దశలో v మరియు x శూన్యమైన, v ను x రూపంలో వ్రాయుము.
3. ఒక వక్రము యొక్క వాలు $\frac{y-1}{x^2+x}$ వక్రము $(1,0)$ అనే బిందువు ద్వారా పోయిన, ఆ వక్రము యొక్క సమీకరణమును కనుగొనుము.
4. క్రింది అవకలన సమీకరణములను సాధించుము.

(i) $\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$

(ii) $ydx+\left(1+x^2\right)\tan^{-1}x\,dy=0$

(iii) $\sin\frac{dy}{dx}=a,\ y(0)=1$

(iv) $\frac{dy}{dx}=e^{x+y}+x^3e^y$

(v) $\left(e^y+1\right)\cos x\,dx+e^y\sin x\,dy=0$

(vi) $\left(ydx-xdy\right)\cot\left(\frac{x}{y}\right)=ny^2dx$

(vii) $\frac{dy}{dx}-x\sqrt{25-x^2}=0$

(viii) $x\cos y\,dy=e^x\left(x\log x+1\right)dx$

(ix) $\tan y\frac{dy}{dx}=\cos\left(x+y\right)+\cos\left(x-y\right)$

(x) $\frac{dy}{dx}=\tan^2\left(x+y\right)$

10.6.3 సమఘాత రూపం లేక సమఘాత అవకలన సమీకరణము

నిర్వచనము 10.12 : (n అంతస్థు గల సమఘాత ప్రమేయం)

$n\in\mathbb{R}$ మరియు తగిన విధంగా పరిమితం చేయబడిన x,y మరియు t కు $f(tx,ty)=t^nf(x,y)$ అయిన x,y చరరాశులుగా కల్గిన ప్రమేయం $f(x,y)$ అంతస్థులో **సమఘాత ప్రమేయం** అంటారు. దీనిని **అయిలర్ సమఘాతీయం** అని కూడా అంటారు.

ఉదాహరణకు,

(i) $f(x,y)=6x^2+2xy+4y^2$ అనేది రెండవ అంతస్థు గల సమఘాత ప్రమేయం.

(ii) కాని $f(x,y)=x^3+\left(\sin x\right)e^y$ సమఘాత ప్రమేయం కాదు.

04_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_10.indd 172 03/03/2023 18:21:52

$f(x,y)$ అంతస్థు '0' గా గల **సమఘాత ప్రమేయం** అయిన, $f(x,y)$ ను ఎల్లప్పుడూ $g\left(\frac{y}{x}\right)$ లేక $g\left(\frac{x}{y}\right)$ రూపంలో వ్రాయునట్లు g ప్రమేయం ఉండును.

నిర్వచనము 10.13: (సమఘాత అవకలన సమీకరణము)

ఒక సాధారణ అవకలన సమీకరణమును $\frac{dy}{dx}=g\left(\frac{y}{x}\right)$ రూపంలో వ్రాయగలిగిన ఆ సమీకరణము **సమఘాత అవకలన సమీకరణ రూపంలో** ఉన్నదని చెప్పవచ్చు.

గమనిక

నిర్వచనము 10.7లో ఉపయోగించిన సమఘాత పదం 10.8 నిర్వచనములో ఉపయోగించిన సమఘాత పదం వేర్వేరు.

విశేషాంశము

(i) M మరియు N అనేవి ఒకే అంతస్థు గల **సమఘాత** ప్రమేయాలైన, $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ అవకలన సమీకరణమును **సమఘాత సమీకరణము** అని అంటారు.

(ii) పై సమీకరణమును, $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ (అవకలజ రూపము) గా వ్రాయవచ్చు. ఇక్కడ $f(x,y)=-M(x,y)/N(x,y)$ అవుతుంది. ఈ ప్రమేయం అంతస్థు 0 గా గల సమఘాత ప్రమేయం అని చెప్పవచ్చు.

ఉదాహరణకు

(1) $\left(x^2-3y^2\right)dx+2xy\,dy=0$ అవకలన సమీకరణము అనుకొనిన ఇవ్వబడిన సమీకరణమును $\frac{dy}{dx}=\frac{3y^2-x^2}{2xy}=\frac{3}{2}\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y/x}\right)$ గా వ్రాయవచ్చు. అందువల్ల ఇవ్వబడిన సమీకరణమును $\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y/x}\right)=g\left(\frac{y}{x}\right)$గా రాయవచ్చు. కావున $\left(x^2-3y^2\right)dx+2xy\,dy=0$ సమీకరణము సమఘాత అవకలన సమీకరణము అవుతుంది.

(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^3+y^2}{2x^3-xy^2}$ అవకలన సమీకరణము సమఘాత సమీకరణం కాదు (సరిచూడుము)

$\frac{dy}{dx}=g\left(\frac{y}{x}\right)$ అవకలన సమీకరణము సాధన కనుగొనుటకు $v=\frac{y}{x}$ ప్రతిక్షేపించిన తరువాత $y=xv$ మరియు $\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$ అవుతుంది. అందువల్ల ఇవ్వబడిన అవకలన సమీకరణము $x\frac{dv}{dx}=f(v)-v$ గా మారును. ఈ సమీకరణము యొక్క సాధనను చరరాశులను విభజించు పద్ధతి ద్వారా కనుగొనవచ్చు.

సిద్ధాంతము 10.1

$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ సమఘాత సమీకరణము అయిన, $y=vx$, ను ప్రతిక్షేపించి, చరరాశిని మార్చడం వలన ఈ సమీకరణము v మరియు x విభజించే చరరాశులు గల సమీకరణముగా మారుతుంది.

04_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_10.indd 173 03/03/2023 18:21:56

ఉదాహరణ 10.17

సాధించుము $\left(x^2-3y^2\right)dx+2xydy=0$.

సాధన

ఇవ్వబడిన సమీకరణము సమఘాత సమీకరణము అని మనకు తెలుసు

ఇప్పుడు, ఇవ్వబడిన సమీకరణమును $\frac{dy}{dx} = \frac{3y}{2x}-\frac{x}{2y}$ గా వ్రాయవచ్చు.

$y=vx$, అయిన, $v+x\frac{dv}{dx} = \frac{3v}{2}-\frac{1}{2v}$ లేక $x\frac{dv}{dx}=\frac{v^2-1}{2v}$.

చరరాశులను విభజించి వ్రాసిన $\frac{2vdv}{v^2-1} = \frac{dx}{x}$ ను పొందుతాము.

ఇరువైపులా సమాకలనం చేయగా, $\log\left|v^2-1\right| = \log|x|+\log|C|$,

కావున $\left|v^2-1\right| = |Cx|$, ఇక్కడ C అనేది స్థిరాంకము.

ఇప్పుడు v by $\frac{y}{x}$ కు బదులు $\left|\frac{y^2}{x^2}-1\right| = |Cx|$ ప్రతిక్షేపించిన.

కావున, $\left|y^2-x^2\right| = \left|Cx^3\right|$.

అందువల్ల, $y^2-x^2 = \pm Cx^3$ (లేక) $y^2-x^2=kx^3$ ఇదియే ఇవ్వబడిన సమీకరణము యొక్క సాధారణ సాధన అవుతుంది. ■

ఉదాహరణ 10.18

సాధించుము $\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx-xdy=0,\quad y(1)=0$.

సాధన

ఇచ్చిన సమీకరణం సమఘాత సమీకరణము (సరి చూడుము!).

ఇవ్వబడిన సమీకరణమును $\frac{dy}{dx}=\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}$ అవకలన సమీకరణ రూపంలో వ్రాయవచ్చు.

x యొక్క ప్రారంభ విలువ 1 అయినందువల్ల $x>0$ అని అనుకొనుము. $x=\sqrt{x^2}$ గా తీసుకొందాము.

$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$.

$y=vx$ అనుకొన్న తరువాత $v+x\frac{dv}{dx}=v+\sqrt{1+v^2}$ దీని నుండి $x\frac{dv}{dx}=\sqrt{1+v^2}$ పొందవచ్చు.

చరరాశులను వేరుపరచిన $\frac{dv}{\sqrt{v^2+1}}=\frac{dx}{x}$.

పై సమీకరణమును ఇరువైపులా సమాకలనం చేయగా

$\log\left|v+\sqrt{v^2+1}\right|=\log|x|+\log|C|$ లేక $v+\sqrt{v^2+1}=xC$.

04_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_10.indd 174 03/03/2023 18:22:02

'v' బదులు $\frac{y}{x}$ ప్రతిక్షేపించిన మనకు లభించునది $\frac{y}{x}+\sqrt{\frac{y^2}{x^2}+1}=Cx$ (లేక) $y+\sqrt{x^2+y^2}=Cx^2$

ఇదియే ఇవ్వబడిన అవకలన సమీకరణమునకు సాధారణ సాధన అవుతుంది.

$x=1$ అయిన $y=0$ అను నిబంధనను ఉపయోగించి $C=1$ ను పొందుతాము.

కావున ఇవ్వబడిన అవకలన సమీకరణము యొక్క నిర్దేశిత సాధన $y+\sqrt{x^2+y^2}=x^2$

ఉదాహరణ 10.19

సాధించుము $(2x+3y)dx+(y-x)dy=0$.

సాధన

ఇవ్వబడిన సమీకరణమును $\frac{dy}{dx}=\frac{2x+3y}{x-y}$ గా వ్రాయవచ్చు.

ఈ సమీకరణము సమఘాత సమీకరణము అవుతుంది.

$y=vx$ అనుకొనుము. $v+x\frac{dv}{dx}=\frac{2+3v}{1-v}$.

$x\frac{dv}{dx}=\frac{2+2v+v^2}{1-v}$ లేక $\frac{1-v}{(1+v)^2+1}dv=\frac{dx}{x}$ లేక $-\frac{1}{2}\left[\frac{2v+2}{v^2+2v+2}-\frac{4}{(v+1)^2+1}\right]dv=\frac{dx}{x}$.

ఇరువైపులా సమాకలనం చేయగా $-\frac{1}{2}\log|v^2+2v+2|+2\tan^{-1}(v+1)=\log|x|+\log|C|$

లేక $\log|v^2+2v+2|-4\tan^{-1}(v+1)=-2\log|x|-2\log|C|$

లేక $\log|v^2+2v+2|+\log|x|^2-4\tan^{-1}(v+1)=-2\log|C|$

లేక $\log|(v^2+2v+2)x^2|-4\tan^{-1}(v+1)=-2\log|C|$.

$v=\frac{y}{x}$ గా ప్రతిక్షేపించిన, $\log|y^2+2xy+2x^2|-4\tan^{-1}\left(\frac{x+y}{x}\right)=k$, ఇక్కడ $k=-2\log|C|$ ఇదియే కావలసిన సాధన.

ఉదాహరణ 10.20

సాధించుము $y^2+x^2\frac{dy}{dx}=xy\frac{dy}{dx}$.

సాధన

ఇవ్వబడిన సమీకరణమును $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{xy-x^2}$ గా వ్రాయవచ్చు.

ఈ సమీకరణము సమఘాత అవకలన సమీకరణము.

$y=vx$. గా ప్రతిక్షేపింటిన, $x\frac{dv}{dx}=\frac{v}{v-1}$.

చరరాశులను విభజించి వ్రాయిగా, $\frac{v-1}{v}dv=\frac{dx}{x}$.

04_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_10.indd 175 03/03/2023 18:22:07

ఇరువైపులా సమాకలనం చేయగా $v-\log|v| = \log|x|+\log|C|$ లేదా $v=\log|vxC|$.

$v=\frac{y}{x}$,ప్రతిక్షేపించిన, $\frac{y}{x}=\log|Cy|$ లేక $|Cy|=e^{y/x}$ లేక $y=ke^{y/x}$ ఇది ఇవ్వబడిన అవకలన సమీకరణము యొక్క సాధన అవుతుంది (ఎలా!)

ఉదాహరణ 10.21

సాధించుము $\left(1+2e^{x/y}\right)dx+2e^{x/y}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$.

సాధన

ఇవ్వబడిన సమీకరణమును $\frac{dx}{dy}=\frac{\left(\frac{x}{y}-1\right)2e^{x/y}}{1+2e^{x/y}}=g\left(\frac{x}{y}\right)$ గా వ్రాయవచ్చు. ...(1)

(1) వ సమీకరణములో $\frac{x}{y}$ ఉండుటవలన $x=vy$ గా ప్రతిక్షేపించవలెను.

$x=vy$ ను (1) లో ప్రతిక్షేపించిన, $y\frac{dv}{dy}=-\frac{2e^v+v}{1+2e^v}$ వచ్చును.

చరరాశులను విభజించిన $\frac{1+2e^v}{v+2e^v}dv=-\frac{dy}{y}$.

ఇరువైపులా అవకలనం చేయగా

$\log|2e^v+v|=-\log|y|+\log|C|$ లేక $\log|2ye^v+vy|=\log|C|$ లేక $2ye^v+vy=\pm C$

$v=\frac{x}{y}$ గా ప్రతిక్షేపించిన, $2ye^{x/y}+x=k$, ఇక్కడ $k=\pm C$,ఇదియే కావలసిన సాధన అవుతుంది.

అభ్యాసము 10.6

క్రింద ఇవ్వబడిన అవకలన సమీకరణములను సాధించుము.

1. $\left[x+y\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right]dx=x\cos\left(\frac{y}{x}\right)dy$
2. $\left(x^3+y^3\right)dy-x^2ydx=0$
3. $ye^{\frac{x}{y}}dx=\left(xe^{\frac{x}{y}}+y\right)dy$
4. $2xydx+\left(x^2+2y^2\right)dy=0$
5. $\left(y^2-2xy\right)dx=\left(x^2-2xy\right)dy$
6. $x\frac{dy}{dx}=y-x\cos^2\left(\frac{y}{x}\right)$
7. $\left(1+3e^{\frac{y}{x}}\right)dy+3e^{\frac{y}{x}}\left(1-\frac{y}{x}\right)dx=0$, $x=1$ అయిన $y=0$ గా ఇవ్వబడినది.
8. $\left(x^2+y^2\right)dy=xy\,dx$. $y(1)=1$ మరియు $y(x_0)=e$ గా ఇవ్వబడిన. x_0 యొక్క విలువ కనుగొనుము..

04_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_10.indd 176 03/03/2023 18:22:13

10.7 మొదటి తరగతి రేఖీయ అవకలన సమీకరణములు

మొదటి తరగతి అవకలన సమీకరణ రూపం

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q. \qquad \ldots (1)$$

ఇక్కడ P మరియు Q లు x లో మాత్రమే ప్రమేయాలు. ఈ సమీకరణములో y మరియు దాని అవకలజము $\frac{dy}{dx}$ ఈ రెండింటిలో లబ్ధము ఉండదు. ఆధారిత చరరాశి y మరియు స్వతంత్ర చరరాశి x దృష్ట్యా దాని అవకలజము మొదలగునవి మొదటి అంతస్థు గల సమీకరణముగా ఉండును.

సాధన

(1)వ సమీకరణము సమాకలనం చేయుటకు మొదట $\frac{dy}{dx} + Py = 0.$ ...(2) ను సమఘాత సమీకరణముగా అనుకొనుము.

(2) వ సమీకరణమును క్రింది విధంగా సమాకలనము చేయవచ్చు.



చరరాశులను విభజించి వ్రాయగా $\frac{dy}{y} = -Pdx.$

సమాకలనం చేయగా మనకు వచ్చునది $ye^{\int Pdx} = C.$

ఇప్పుడు $\frac{d}{dx}\left(ye^{\int Pdx}\right) = e^{\int Pdx}\frac{dy}{dx} + y.Pe^{\int Pdx}$

$= e^{\int Pdx}\left(\frac{dy}{dx} + Py\right) = Qe^{\int Pdx}$ ... (3), (1) నుండి

(3) వ సమీకరణమును ఇరువైపులా x దృష్ట్యా సమాకలనము చేయగా ఇవ్వబడిన అవకలన సమీకరణముకు సాధన వచ్చును.

$$ye^{\int Pdx} = \int Qe^{\int Pdx}dx + C.$$

ఇక్కడ $e^{\int Pdx}$ ను సమీకరణము (1) యొక్క **సమాకలన కారణాంకం** అని అంటారు. ■

విశేషాంశములు

1. రేఖీయ అవకలన సమీకరణము యొక్క సాధన

   $y \times$ (సమాకలన కారణాంకం) $= \int Q$ (సమాకలన కారణాంకము) $dx + C$, ఇక్కడ C అనేది చర స్థిరాంకము.

2. ఇవ్వబడిన అవకలన ..... సమీకరణములో $\frac{dy}{dx}$ యొక్క గుణకము 1గా ఉన్నప్పుడు సమాకలన కారణాంకము $e^{\int Pdx}$ లో గల P ను y యొక్క గుణకము అవుతుంది.

3. $\frac{dx}{dy} + Px = Q$ మొదటి అంతస్థు అవకలన సమీకరణములో P మరియు Q లు y లో ప్రమేయాలు. ఈ సమీకరణములో x మరియు $\frac{dx}{dy}$ యొక్క లబ్ధము ఉండదు. ఆధారిత చరరాశి x మరియు స్వతంత్ర చరరాశి y ను బట్టి దాని అవకలనము అంతస్థు 1 గా మాత్రము ఉండును.
   ఈ అవకలన సమీకరణము యొక్క సాధన $xe^{\int Pdy} = \int Qe^{\int Pdy}dy + C$ అవుతుంది.

04_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_10.indd 177 03/03/2023 18:22:17

ఉదాహరణ 10.22

సాధించు $\frac{dy}{dx}+2y=e^{-x}$.

సాధన

$$\text{ఇది } \frac{dy}{dx}+2y = e^{-x} \qquad \ldots (1)$$

(అనే రేఖీయ అవకలన సమీకరణ రూపంలో గలదు)

ఇక్కడ, $P=2$; $Q=e^{-x}$.

$$\int P\,dx = \int 2\,dx = 2x.$$

$$\text{సమాకలన కారణము (స.కా)} = e^{\int P\,dx} = e^{2x}.$$

$$\text{కావున (1)వ సమీకరణము సాధన } ye^{\int P\,dx} = \int Qe^{\int P\,dx}\,dx + C.$$

$ye^{2x} = \int e^{-x}e^{2x}\,dx + C$ లేక $ye^{2x} = e^{x} + C$ లేక $y = e^{-x} + Ce^{-2x}$ ఇదియే (1)వ సమీకరణము సాధన. ■

ఉదాహరణ 10.23

సాధించుము $\left[y\left(1-x\tan x\right)+x^2\cos x\right]dx - x\,dy = 0$.

సాధన

ఇవ్వబడిన సమీకరణమును $\frac{dy}{dx}+\frac{\left(x\tan x-1\right)}{x}y = x\cos x$ గా వ్రాయవచ్చు.

ఇది రేఖీయ అవకలన సమీకరణము ఇక్కడ $P=\frac{\left(x\tan x-1\right)}{x}$; $Q = x\cos x$.

$$\int P\,dx = \int \frac{\left(x\tan x-1\right)}{x}\,dx = -\log|\cos x| - \log|x| = -\log|x\cos x| = \log\frac{1}{|x\cos x|}.$$

$$\text{కావున సమాకాలన కారణాంకము (స.కా)} = e^{\int P\,dx} = e^{\log\frac{1}{|x\cos x|}} = \frac{1}{x\cos x}$$

$$\text{సాధన } ye^{\int P\,dx} = \int Qe^{\int P\,dx}\,dx + C$$

$$y\frac{1}{x\cos x} = \int \left(x\cos x\right)\frac{1}{x\cos x}\,dx + C$$

$$\text{లేక } y\frac{1}{x\cos x} = x + C$$

$$\text{లేక } y = x^2\cos x + Cx\cos x \text{ అనేది కావలసిన సాధన.}$$ ■

ఉదాహరణ 10.24

సాధించుము: $\frac{dy}{dx}+2y\cot x = 3x^2\operatorname{cosec}^2 x$.

04_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_10.indd 178 03/03/2023 18:22:22

సాధన

ఇవ్వబడిన సమీకరణము, $\frac{dy}{dx}+2y\cot x=3x^2\operatorname{cosec}^2 x$.

ఇది రేఖీయ అవకలన సమీకరణము $P=2\cot x$; $Q=3x^2\operatorname{cosec}^2 x$.

$$\int P\,dx=\int 2\cot x\,dx=2\log|\sin x|=\log|\sin x|^2=\log\sin^2 x.$$

కావున సమాకలనము కారణాంకము $:e^{\int P\,dx}=e^{\log\sin^2 x}=\sin^2 x$.

కావున సమీకరణము యొక్క సాధన $ye^{\int P\,dx}=\int Qe^{\int P\,dx}dx+C$.

$$y\sin^2 x=\int 3x^2\operatorname{cosec}^2 x\cdot\sin^2 x\,dx+C=\int 3x^2\,dx+C=x^3+C.$$

$y\sin^2 x=x^3+C$ కావలసిన సాధన.

ఉదాహరణ 10.25

సాధించుము $\left(1+x^3\right)\frac{dy}{dx}+6x^2y=1+x^2$.

సాధన

$\frac{dy}{dx}$ యొక్క గుణకము '1' గా ఉండవలెను. కావున సమీకరణము ఇరువైపులా $\left(1+x^3\right)$ తో భాగించవలెను.

$$\frac{dy}{dx}+\frac{6x^2y}{1+x^3}=\frac{1+x^2}{1+x^3}.$$

ఇది y లో రేఖీయ అవకలన సమీకరణము.

ఇక్కడ, $P=\frac{6x^2}{1+x^3}$; $Q=\frac{1+x^2}{1+x^3}$

$$\int P\,dx=\int\frac{6x^2}{1+x^3}dx=2\log\left|1+x^3\right|=\log\left|1+x^3\right|^2=\log\left(1+x^3\right)^2$$

సమాకలన కారణాంకం $=e^{\int P\,dx}=e^{\log\left(1+x^3\right)^2}=\left(1+x^3\right)^2$

సాధన $ye^{\int P\,dx}=\int Qe^{\int P\,dx}dx+C$.

$$y\left(1+x^3\right)^2=\int\frac{1+x^2}{1+x^3}\left(1+x^3\right)^2dx+C=\int\left(1+x^2\right)\left(1+x^3\right)dx+C=\int\left(1+x^2+x^3+x^5\right)dx+C$$

లేక $y\left(1+x^3\right)^2=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^6}{6}+C$

మరియు $y=\frac{1}{(1+x^3)^2}\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^6}{6}+C\right]$ ఇదియే కావలసిన సాధన.

04_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_10.indd 179 03/03/2023 18:22:28

ఉదాహరణ 10.26

సాధించుము: $ye^{y}dx=\left(y^{3}+2xe^{y}\right)dy$.

సాధన

ఇచ్చిన సమీకరణమును $\frac{dx}{dy}-\frac{2}{y}x=y^{2}e^{-y}$ గా వ్రాయవచ్చు.

ఇది ఒక రేఖీయ అవకలన సమీకరణము $P=-\frac{2}{y};\ Q=y^{2}e^{-y}$.

$$\int pdy = \int -\frac{2}{y}dy=-2\log|y|=\log|y|^{-2}=\log\left(\frac{1}{y^{2}}\right),$$

$$\text{సమాకలన కారణాంకము} = e^{\int Pdy}=e^{\log\left(\frac{1}{y^{2}}\right)}=\frac{1}{y^{2}}.$$

$$\text{సాధన } xe^{\int Pdy} = \int Qe^{\int Pdy}dy+C$$

$$x\left(\frac{1}{y^{2}}\right) = \int y^{2}e^{-y}\left(\frac{1}{y^{2}}\right)dy+C=\int e^{-y}dy+C=-e^{-y}+C$$

$$\text{లేక } x = -y^{2}e^{-y}+Cy^{2} \text{ కావలసిన సాధన.}$$

అభ్యాసము 10.7

క్రింది రేఖీయ అవకలన సమీకరణములను సాధించుము.

1. $\cos x\frac{dy}{dx}+y\sin x=1$
2. $\left(1-x^{2}\right)\frac{dy}{dx}-xy=1$
3. $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=\sin x$
4. $\left(x^{2}+1\right)\frac{dy}{dx}+2xy=\sqrt{x^{2}+4}$
5. $\left(2x-10y^{3}\right)dy+ydx=0$
6. $x\sin x\frac{dy}{dx}+\left(x\cos x+\sin x\right)y=\sin x$
7. $\left(y-e^{\sin^{-1}x}\right)\frac{dx}{dy}+\sqrt{1-x^{2}}=0$
8. $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{\left(1-x\right)\sqrt{x}}=1-\sqrt{x}$
9. $\left(1+x+xy^{2}\right)\frac{dy}{dx}+\left(y+y^{3}\right)=0$
10. $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x\log x}=\frac{\sin 2x}{\log x}$
11. $\left(x+a\right)\frac{dy}{dx}-2y=\left(x+a\right)^{4}$
12. $\frac{dy}{dx}=\frac{\sin^{2}x}{1+x^{3}}-\frac{3x^{2}}{1+x^{3}}y$
13. $x\frac{dy}{dx}+y=x\log x$
14. $x\frac{dy}{dx}+2y-x^{2}\log x=0$
15. $\frac{dy}{dx}+\frac{3y}{x}=\frac{1}{x^{2}}$, $x=1$ అయిన $y=2$

04_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_10.indd 180 03/03/2023 18:22:34

10.8 మొదటి తరగతి అవకలన సమీకరణముల యొక్క అనువర్తనములు

ప్రపంచములోని వాస్తవ సమస్యలను సమస్యలను సాధించుటలో అవకలన సమీకరణముల అనువర్తనములు ఎక్కువ ప్రాముఖ్యతను వహిస్తున్నది. భవిష్యత్తులో తెలియని ఒక కృత్యమును ముందుగానే గుణించుటలో అవకలన సమీకరణముల సాధనలు ఉపయోగపడుచున్నది. ఒక వస్తువు అంతస్థు x అయిన t కాలములో ఆ అంతస్థు మార్పు రేటు. $\frac{dx}{dt}$ దీని నుండి $\frac{dx}{dt} = f(x,t)$ రూపంలో గల అవకలన సమీకరణమును పొందుతాము. ఈ పాఠ్యాంశములో ఈ విధమైన సమస్యలను మాత్రము సాధిస్తాం. కాలము మారు రేటును మార్పు రేటు అని పిలుస్తాము.

10.8.1 జనాభా పెరుగుదల

ఒక వస్తువు ఉనికి పెరుగుదల (ఉదాహరణకు జనాభా పెరుగుట, జంతువుల సంతతి పెరుగుట లేదా బ్యాక్టీరియా పెరుగుదల) కాలము t ను తీసుకుందాము.

t కాలములో వస్తువు ఉనికి $x(t)$ అనుకొనుము. $x(t)$ అనేది పూర్ణసంఖ్య విలువ గల ప్రమేయంగా ఉన్నచో, దాదాపు $x(t)$ ను అవకలజ ప్రమేయం అనుకొని అవకలన సమీకరణం యొక్క వ్యూహలను ఉపయోగించి $x(t)$ ను కనుగొంటాము. వస్తువు ఉనికి మార్పు రేటు ఆ సమయంలో ప్రారంభ ఉనికికి అనులోమానుపాతంలో ఉండును.

$\frac{dx}{dt} = kx$, ఇక్కడ k అనేది అనుపాత స్థిరాంకము. ... (1)

వస్తువు ఉనికి ఎప్పుడూ పెరగడం వలన $k > 0$.

ఈ అవకలన సమీకరణం సాధన $x(t) = Ce^{kt}$, ఇక్కడ C అనేది సమాకాలన స్థిరాంకం C మరియు k విలువలను ప్రారంభ నిబంధనలను ఉపయోగించి కనుగొనవచ్చు. కావున ఉనికి $x(t)$ అనేవి ఘాతములలో పెరుగును. వస్తువు యొక్క ఉనికి పెరుగుదల నియమమును **మాల్థూసియన్ నియమము** అంటారు.

ఉదాహరణ 10.27

జనాభా పెరుగుదల ప్రస్తుత సంఖ్యకు అనులోమానుపాతంలో ఉంటుంది. 50 సంవత్సరాలలో ఒక కాలనీ యొక్క జనాభా రెట్టింపు అయిన, ఎన్ని సంవత్సరములలో మూడు రెట్లగును?

సాధన

$x(t)$ అనేది t సమయంలో గల జనాభా అయితే $\frac{dx}{dt} = kx$.

చరరాశులను విభజించిన మనము పొందునది $\frac{dx}{x} = kdt$.

ఇరువైపులా సమాకలనం చేయగా $\log|x| = kt + \log|C|$ లేక $x = Ce^{kt}$, C అనేది చర స్థిరాంకము.

$t = 0$ అయిన x_0 జనాభా అనుకొంటే $C = x_0$ అవుతుంది.

కావున $x = x_0 e^{kt}$.

$t = 50$ అయిన $x = 2x_0$, కావడం వలన $k = \frac{1}{50}\log 2$.

కావున, t కాలములో జనాభా $x = x_0 2^{\frac{t}{50}}$.

t_1 కాలములో జనాభా మూడు రెట్లు అగును అని అనుకొనుము.

04_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_10.indd 181 03/03/2023 18:22:38

అనగా $t = t_1$ అయిన $x = 3x_0$, కావడం వలన $t_1 = 50\left(\frac{\log 3}{\log 2}\right)$

కావున, $50\left(\frac{\log 3}{\log 2}\right)$ సంవత్సరములో జనాభా మూడు రెట్లగును. ■

10.8.2 రేడియో ధార్మిక క్షయం (క్షీణత)

కేంద్రంలో గల అణువు ప్రోటాన్లు మరియు న్యూట్రానుల సమ్మేళనము. ప్రోటాన్లు మరియు న్యూట్రాన్లు కలయిక అస్థిరంగా ఉండును. ఆ విధమైన అణువులు క్షయం లేక మరియొక వస్తువు అణువుగా మారును. ఇటువంటి అణువులు **రేడియోధార్మికతను** కలిగియుండును.

ఒక పదార్థము యొక్క క్షయం రేటు $\frac{dA}{dt}$ t కాలములో మిగిలిన ఆ పదార్థము యొక్క కొలత $A(t)$ అనులోమానుపాతంలో ఉండును.

కావున కావలసిన అవకలన సమీకరణము $\frac{dA}{dt} \propto A$ లేక $\frac{dA}{dt} = kA$ ...(2), ఇక్కడ k అనేది అనుపాత స్థిరాంకము. ఇక్కడ $k < 0$.

విశేషాంశములు

(1) మరియు (2)వ సమీకరణముల నుండి అవకలన సమీకరణాలు ఒకే రకంగా కలవు; కాని వాటి గుర్తులు (చిహ్నాలు) మరియు అనుపాత స్థిరాంకముల యొక్క వివరణలో వ్యత్యాసము ఉండును. (1)లో పెరుగుదల ఉన్నప్పుడు $k > 0$ సమీకరణం (2)లో క్షీణత ఉన్నప్పుడు $k < 0$ అవుతుంది.

ఒక అవకలన సమీకరణము అనేక విభిన్న దృగ్విషయాలకు గణిత నమూనాగా అందచేయబడుతుంది.

ఉదాహరణ 10.28

ఒక రేడియో ధార్మిక ఐసోటోపు ప్రారంభ ద్రవ్యరాశి 200 మి.గ్రా. 2 సంవత్సరముల తరువాత దాని ద్రవ్యరాశి 50 మి.గ్రా తగ్గును. t కాలములో మిగిలిన ఐసోటోపు ద్రవ్యరాశి సమాసమును కనుగొనుము. దాని అర్ధ జీవిత కాలం ఎంత? (అర్ధజీవితకాలం అనగా పేర్కొన్న ఐసోటోపు రేడియో ధార్మికత దాని అసలు విలువ సగానికి పడిపోయే సమయం.)

సాధన

A ను t సంవత్సరములో మిగిలిన ఐసోటోపు యొక్క ద్రవ్యరాశి అనుకొనుము. k ను అను పాత స్థిరాంకము అనుకొనుము. ఇక్కడ $k > 0$ రేడియో ధార్మిక ఐసోటోపు క్షీణత రేటు $\frac{dA}{dt} = -kA$, ఇక్కడ '-' గుర్తు ద్రవ్యరాశి తరుగుదలను సూచించును. చరరాశులను వేరు చేయగా $\frac{dA}{A} = -kdt$ పొందుతాము.

ఇరువైపులా సమాకలనం చేయగా $\log|A| = -kt + \log|C|$ లేక $A = Ce^{-kt}$.

ప్రారంభ ద్రవ్యరాశి 200మి.గ్రా. అనగా $t = 0$ ఉన్నప్పుడు $A = 200$ అవుతుంది. కావున (1)వ సమీకరణము నుండి $C = 200$ పొందుతాము.

$A = 200e^{-kt}$.

మరియు $t = 2$ అయినపుడు $A = 150$ అగుటవలన $k = \frac{1}{2}\log\left(\frac{4}{3}\right)$.

కావున t సంవత్సరములకు తరువాత మిగిలిన ఐసోటోపు ద్రవ్యరాశి $A(t) = 200e^{-\frac{t}{2}\log\left(\frac{4}{3}\right)}$

04_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_10.indd 182 03/03/2023 18:22:42

$A = 100$ మి.గ్రా. గా తగ్గే కాలము అర్ధ జీవితకాలము t_h అవుతుంది.

కావున, $t_h = \dfrac{2\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log\left(\frac{3}{4}\right)}$.

10.8.3 న్యూటన్ శీతలీకరణ / వెచ్చని నియమము



$80°C$ గల గదిలో ఒక కప్పులో గల కాఫీ ఉష్ణోగ్రత $150°$ అనుకొనుము. కాఫీ యొక్క ఉష్ణోగ్రత ఏమవుతుంది? కాఫీ ఉష్ణోగ్రత గది ఉష్ణోగ్రత వచ్చు వరకు తగ్గుటను గమనించవచ్చును. ఇప్పుడు ఉష్ణోగ్రత $80°C$ గల గదిలో శీతలీకరణ పెట్టె నుండి తీసి ఉంచిన చల్లటి నీటి ఉష్ణోగ్రత $35°$ అనుకొనుము. చల్లటి నీటి ఉష్ణోగ్రత ఏమవుతుంది? పైన తెలిపిన విధానంగానే నీటి ఉష్ణోగ్రత గది ఉష్ణోగ్రత వచ్చు వరకు పెరుగుటను గమనించవచ్చు.



న్యూటన్ శీతలీకరణ/వెచ్చని నియమము ప్రకారము, ఒక వస్తువు యొక్క ఉష్ణోగ్రత మార్పు రేటు వస్తు **ఉష్ణోగ్రత** మరియు పరిసర మాధ్యముల మధ్య వ్యత్యాసానికి అనులోమానుపాతములో ఉంటుంది. అందువల్ల దీనిని **పరిసర ఉష్ణోగ్రత** అని అంటారు. t కాలములో వస్తువు ఉష్ణోగ్రత $T(t)$. T_m అనేది పరిసర ఉష్ణోగ్రత, ఉష్ణోగ్రత మార్పు రేటు $\dfrac{dT}{dt}$ గా ఉన్నచో న్యూటన్ శీతలీకరణ/వెచ్చని నియమము ప్రకారము $\dfrac{dT}{dt} \propto T - T_m$ లేక $\dfrac{dT}{dt} = k\left(T - T_m\right)$ ఇక్కడ k అనేది అనుపాత స్థిరాంకము. శీతలీకరణ లేక వెచ్చనిగా ఉండు రెండు స్థితులలో T_m ఒక స్థిరాంకము అయిన $k < 0$ అవుతుంది.

ఉదాహరణ 10.29

ఒక దర్యాప్తు దారుడు ఒక హత్య కోసం విచారణ జరిపేటప్పుడు హత్య చేయబడిన శరీరం రాత్రి 8 గంటలకు కనుగొనెను. ముందు జాగ్రత్తతో దర్యాప్తుదారుడు శరీర ఉష్ణోగ్రతను $70°F$ గుర్తించెను. రెండు గంటల తరువాత శరీర ఉష్ణోగ్రత $60°F$ గా ఉండుట గుర్తించెను. శరీరం ఉన్న గది ఉష్ణోగ్రత $50°F$ చనిపోక ముందు ఆ శరీర ఉష్ణోగ్రత $98.6°F$ గా ఉన్నచో, ఆ వ్యక్తి హత్య గావించబడిన సమయము కనుగొనుము.

$\left[\log(2.43) = 0.88789;\quad \log(0.5) = -0.69315\right]$

సాధన

t సమయంలో శరీర ఉష్ణోగ్రత T అనుకొనుము. రాత్రి 8 గంటలను $t = 0$ గా అనుకొనుము.

న్యూటన్ శీతలీకరణ నియమము ప్రకారము $\dfrac{dT}{dt} = k\left(T - 50\right)$ లేక $\dfrac{dT}{T - 50} = dt$.

ఇరువైపులా సమాకలనం చేయగా $\log|50 - T| = kt + \log C$ లేక $50 - T = Ce^{kt}$.

$t = 0$ అయినపుడు $T = 70$ కావడం వలన $C = -20$

$t = 2$ అయినపుడు $T = 60$ కావడం వలన $-10 = -20e^{k2}$.

కావున, $k = \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

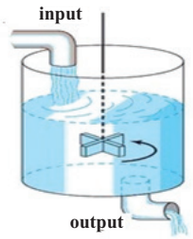
$50-T=-20e^{\frac{1}{2}t\log\left(\frac{1}{2}\right)}$ లేక $T=50+20\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}}$

$T(t)=98.6$ గా ఉన్నప్పుడు t యొక్క విలువను కనుగొనవలెను $t=2\left(\frac{\log\left(\frac{48.6}{20}\right)}{\log\left(\frac{1}{2}\right)}\right)\approx -2.56$

కావున ఆ వ్యక్తి చనిపోయేటప్పుడు దాదాపు సాయంత్రం 5.30 గంటలు. ■

10.8.4 మిశ్రమ సమస్యలు

రసాయన పరిశ్రమలో మిశ్రమ సమస్యలు ఎక్కువగా ఉపయోగపడుచున్నవి. ఒక ట్యాంకును ఆధారంగా తీసుకొని మిశ్రమ సమస్యల సాధనను వివరించవచ్చు.



పటము. 10.2

ఒక పదార్థము S ఒక పాత్రలో ఒక స్థిరనిష్పత్తిలో గల మిశ్రమము. ఈ మిశ్రమమును బాగా కలియబెట్టడం ద్వారా ఈ మిశ్రమమును స్థిరంగా ఉంచుతుంది. ఆ విధమైన సందర్భములో ఈ స్థిరమైన మిశ్రమము ఒకే సమయంలో మరొక నిష్పత్తిలో పాత్ర నుండి బయటకు వస్తుందని అనుకొనుము. ఇప్పుడు t సమయంలో ఆ మిశ్రమంలో గల పదార్థము S యొక్క పరిమాణమును మనము తెలుసుకొంటాము.

't' సమయంలో పదార్థము 'S' ను x అనుకొనుము మరియు $\frac{dx}{dt}$ అవకలజమును t దృష్ట్యా x లోని మార్పు రేటు అనుకొనుము. IN అనేది పదార్థము S పాత్రలో గల మిశ్రమము రేటు. OUT అనేది మిశ్రమము పాత్రలో నుండి బయటకి వచ్చే రేటును సూచిస్తుంది. $\frac{dx}{dt}=IN-OUT$ అనే సమీకరణమును పొందుతాము.

ఉదాహరణ 10.30

ఒక తొట్టెలో గల 1000 లీటర్ల నీరు 100 గ్రాము ఉప్పును కరిగియున్నది. బ్రియిన్ (*Brine*) (బ్రియిలీ అనగా గాఢ ఉప్పునీరు) బ్రియిన్ ఒక నిమిషమునకు 10 లీటర్ల చొప్పున నీటిలో కలుపబడుతున్నది. ప్రతి లీటరు నీటిలో 5 గ్రాముల ఉప్పు కరిగి ఉన్నది. నీటి తొట్టెలో గల నీరు క్రమంగా కలుపుతూ స్థిరంగా ఉంచబడినది. బ్రియిన్ 1 నిమిషమునకు 10 లీటర్ల చొప్పున బయటకు పోవుచున్నది. t సమయంలో తొట్టెలో గల ఉప్పు పరిమాణమును కనుగొనుము.

సాధన

t కాలములో తొట్టెలో గల ఉప్పు పరిమాణము $x(t)$ అనుకొనుము. దీని మార్పు రేటు $\frac{dx}{dt}=\text{in flow rate}-\text{out flow rate}$.

ఒక లీటరు నీటిలో 5 గ్రాముల ఉప్పు కరిగించి తొట్టెలో వదలడం వలన 10 లీటర్ల నీటిలో 50 గ్రాముల ఉప్పు తొట్టెలో గల నీటిలో కరిగి ఉండును. తొట్టెలో నుండి ఉప్పు ద్రావణము (బ్రియిన్) ఒక నిమిషమునకు 10 లీటర్ల చొప్పున బయటకు పంపిస్తుంది. ఇది తొట్టెలో గల మొత్తము ఉప్పు ద్రావణంలో $10/1000=0.01$ రేట్లగును. కావున t సమయంలో గల ఉప్పు పరిమాణము $x(t)$ యొక్క 0.01 రెట్లగును. అనగా $0.01x(t)$ అవుతుంది.

కావున ఈ విధమైన అవకలన సమీకరణము $\frac{dx}{dt}=50-0.01x=-0.01(x-5000)$

ఈ సమీకరణమును $\frac{dx}{x-5000}=-(0.01)dt$ గా వ్రాయవచ్చు.

04_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_10.indd 184 03/03/2023 18:22:50

సమీకరణము ఇరువైపులా సమాకలనం చేయగా $\log|x-5000| = -0.01t + \log C$

లేక $x - 5000 = Ce^{-0.01t}$ లేక $x = 5000 + Ce^{-0.01t}$

ప్రారంభములో $t = 0$ అయినపుడు $x = 100$

$100 = 5000 + C \Rightarrow C = -4900$.

కావున t సమయంలో తొట్టెలో గల ఉప్పు పరిమాణము $x = 5000 - 4900e^{-0.01t}$ ■

అభ్యాసము 10.8

1. బ్యాక్టిరియా అభివృద్ధిలో బ్యాక్టిరియా సంఖ్య పెరుగుదల రేటు ప్రస్తుత సంఖ్యకు అనులోమానుపాతంలో ఉంటుంది. 5 గంటలలో బ్యాక్టిరియా పెరుగుదల మూడురెట్లయిన, 10 గంటలలో ఎన్ని బ్యాక్టిరియాలు పెరుగును?
2. ఒక నగరంలో జనాభా పెరుగుదల రేటు t సమయంలో గల జనాభా రేటుకు అనులోమానుపాతంలో ఉండును. నగరంలోని జనాభా 40 సంవత్సరములలో 3,00,000 నుండి 4,00,000 గా అధికమైనది t సమయంలో ఆ నగరం యొక్క జనాభాను కనుగొనుము.
3. విద్యుత్ నిరోధము మరియు స్వీయ ప్రేరణ గల ఒక విద్యుత్ వలయం యొక్క విద్యుత్ ఛాలక బలం సమీకరణం $E = Ri + L\frac{di}{dt}$ ఇక్కడ E అనేది విద్యుత్ వలయంలో ఇవ్వబడిన విద్యుత్ ఛాలక బలం. R విద్యుత్ నిరోధము మరియు L ను విద్యుత్ ప్రేరణ గుణకము అవుతుంది. $E = 0$ అయినపుడు కాలము t లో విద్యుత్‌ను కనుగొనుము.
4. సెకనుకు 10 మీటర్ల వేగముతో పనిచేయు ఒక మోటారు బోటు యంత్రము నిలిపివేయబడియున్నది. దాని తరువాత ఏదైనా ఒక సమయంలో (యంత్రము నిలిపిన తరువాత) మోటారు బోటు వేగము తగ్గు రేటు ఆ సమయంలో దాని దిశావేగమునకు సమానంగా కలదు అని ఇవ్వబడినది. యంత్రము నిలిపిన రెండు సెకనుల తరువాత మోటారు బోటు దిశావేగమును కనుగొనుము.
5. ఒకడు సంవత్సరమునకు 5% చొప్పున చక్రవడ్డీతో ₹10,000 లను బ్యాంకులో జమ చేసెను. 18 నెలల తరువాత అతని బ్యాంకు ఖాతాలో ఎంత మొత్తము ఉండును?
6. ఒక నమూనాలో కనపడు రేడియో ధార్మిక క్షయము ఆ సమయంలో ఆ నమూనాలో కనపడు కేంద్రకాల సంఖ్యకు అనులోమానుపాతంలో ఉండును. 100 సంవత్సరాల కాల వ్యవధిలో ఒక నమూనాలో ప్రారంభంలో కనబడు రేడియో ధార్మిక కేంద్రకాల సంఖ్యలో 10% క్షయంగా కలదు. 1000 సంవత్సరముల చివరలో ప్రారంభంలో కనబడు రేడియోధార్మిక కేంద్రాల సంఖ్యకు ఎంత మిగిలి ఉండును?
7. ఉష్ణోగ్రత $25^\circ C$ గా గల ఒక గదిలో ఉంచిన నీటి ఉష్ణోగ్రత $100^\circ C$ గా కలదు. 10 నిమిషాలలో నీటి ఉష్ణోగ్రత $80^\circ C$ గా తగ్గుతుంది. అయితే
   (i) 20 నిమిషాల తర్వాత నీటి ఉష్ణోగ్రత
   (ii) $40^\circ C$ గా ఉష్ణోగ్రత ఉన్నప్పుడు సమయమును కనుగొనుము

   $\left[\log_e \frac{11}{15} = -0.3101;\ \log_e 5 = 1.6094\right]$
8. ఉదయం 10.00 గంటలకు ఒక గృహిణి తన మైక్రోవేవ్ (microwave) పొయ్యి నుండి వేడిగా ఉన్న కాఫీని బయటకు తీసి దాని చల్లబరుచుటకు దగ్గరలో గల వంట గదిలో ఉంచెను. ఆ సమయంలో

04_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_10.indd 185 03/03/2023 18:22:52

కాఫీ ఉష్ణోగ్రత $180^{\circ}F$, 10 నిమిషాల తరువాత దాని ఉష్ణోగ్రత $160^{\circ}F$ గా తగ్గును. వంటగది స్థిరమైన ఉష్ణోగ్రత $70^{\circ}F$ అయితే

(i) ఉదయం 10.15 గంటలకు కాఫీ ఉష్ణోగ్రతను కనుగొనుము? $\left[\log\frac{9}{11}=-0.2006\right]$

(ii) ఉష్ణోగ్రత $130^{\circ}F$ కు $140^{\circ}F$ కు మధ్యలో ఉన్నప్పుడు ఆమె కాఫీని త్రాగదలచిన ఏ సమయంలో ఆమె కాఫీ త్రాగవలెను? $\left[\log\frac{6}{11}=-0.6061\right],\left[\log\frac{7}{11}=-0.4519\right]$

9. ఒక పాత్రలో $100^{\circ}C$ ఉష్ణోగ్రతలో మసలు (మరిగే) నీరు $t=0$ సమయంలో పొయ్యి మీద నుంచి దింపి చల్లబడుటకు వంటగదిలో ఉంచెను. 5 నిమిషాల తరువాత నీటి ఉష్ణోగ్రత $80^{\circ}C$ గా తగ్గును మరియొక 5 నిమిషాల తరువాత ఉష్ణోగ్రత $65^{\circ}C$ గా తగ్గిన యెడల వంటగది ఉష్ణోగ్రతను కనుగొనుము.

10. ప్రారంభంలో ఒక తొట్టెలో 50 లీటర్ల స్వచ్ఛమైన నీరు కలదు. ప్రారంభ సమయం $t=0$ సమయంలో ఒక లీటరు నీటిలో 2 గ్రాముల కరిగించిన ఉప్పు ద్రావణము ఒక నిమిషమునకు 3 లీటర్ల చొప్పున తొట్టెలో వదలబడుచున్నది. ఈ ద్రావణము క్రమంగా కలిపి స్థిరంగా ఉంచబడుతుంది. అదే సమయంలో బాగా కలుపబడిన ఈ ద్రావణం అదే అనుపాతంలో తొట్టె నుండి వెలుపలికి పంపబడును. $t>0$ సమయంలో తొట్టెలో గల ఉప్పు పరిమాణమును కనుగొనుము.

అభ్యాసము 10.9

FL6EV

ఇవ్వబడిన నాలుగింటి నుండి సరియైన జవాబును ఎన్నుకొనుము.

1. $\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^{1/3}+x^{1/4}=0$ అవకలన సమీకరణము యొక్క తరగతి మరియు అంతస్థు క్రమంగా

(1) 2, 3 (2) 3, 3 (3) 2, 6 (4) 2, 4

2. $y=\mathrm{A}\cos(x+B)$, A, B అనేవి పరామితులు సమీకరణ వక్ర కుటుంబము యొక్క అవకలన సమీకరణాలు

(1) $\frac{d^2y}{dx^2}-y=0$ (2) $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$ (3) $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ (4) $\frac{d^2x}{dy^2}=0$

3. $\sqrt{\sin x}\,(dx+dy)=\sqrt{\cos x}\,(dx-dy)$ అవకలన సమీకరణము యొక్క తరగతి మరియు అంతస్థు

(1) 1, 2 (2) 2, 2 (3) 1, 1 (4) 2, 1

4. కేంద్రము (h,k) మరియు వ్యాసార్ధము 'a' గల వృత్తము యొక్క అవకలన సమీకరణము యొక్క తరగతి

(1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) 1

5. $y=\mathrm{A}e^{x}+\mathrm{B}e^{-x}$, ఇక్కడ A, B అనేవి చర స్థిరాంకములు, గల అవకలన సమీకరణము

(1) $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$ (2) $\frac{d^2y}{dx^2}-y=0$ (3) $\frac{dy}{dx}+y=0$ (4) $\frac{dy}{dx}-y=0$

6. $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$ యొక్క సాధారణ సాధన

04_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_10.indd 186 03/03/2023 18:22:58

(1) $xy = k$ (2) $y = k \log x$ (3) $y = kx$ (4) $\log y = kx$

7. $2x\frac{dy}{dx} - y = 3$ యొక్క సాధన –తో సూచిస్తారు.

(1) రేఖీయ రేఖలు (2) వృత్తములు (3) పరావలయం (4) దీర్ఘ వృత్తము

8. $\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$ యొక్క సాధన

(1) $y = ce^{\int pdx}$ (2) $y = ce^{-\int pdx}$ (3) $x = ce^{-\int pdy}$ (4) $x = ce^{\int pdy}$

9. $\frac{dy}{dx} + y = \frac{1+y}{\lambda}$ అనే అవకలన సమీకరణము యొక్క సమాకలన కారణాంకము.

(1) $\frac{x}{e^{\lambda}}$ (2) $\frac{e^{\lambda}}{x}$ (3) λe^{x} (4) e^{x}

10. $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ అవకలన సమీకరణము యొక్క సమాకలన కారణాంకము x అయిన $P(x)$ అనేది

(1) x (2) $\frac{x^2}{2}$ (3) $\frac{1}{x}$ (4) $\frac{1}{x^2}$

11. $y(x) = 1 + \frac{dy}{dx} + \frac{1}{1\cdot 2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + \ldots.$ అవకలన సమీకరణము యొక్క అంతస్థు

(1) 2 (2) 3 (3) 1 (4) 4

12. p మరియు q అనేవి క్రమముగా $y\frac{dy}{dx} + x^3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + xy = \cos x$ అవకలన సమీకరణము యొక్క తరగతి మరియు అంతస్థు అయిన

(1) $p < q$ (2) $p = q$

(3) $p > q$ (4) p వ్యవస్థితమగును మరియు q వ్యవస్థితము కాదు.

13. $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$ అవకలన సమీకరణము యొక్క సాధన

(1) $y + \sin^{-1} x = c$ (2) $x + \sin^{-1} y = 0$ (3) $y^2 + 2\sin^{-1} x = C$ (4) $x^2 + 2\sin^{-1} y = 0$

14. $\frac{dy}{dx} = 2xy$ అవకలన సమీకరణము యొక్క సాధన

(1) $y = Ce^{x^2}$ (2) $y = 2x^2 + C$ (3) $y = Ce^{-x^2} + C$ (4) $y = x^2 + C$

15. $\log\left(\frac{dy}{dx}\right) = x + y$ అవకలన సమీకరణము యొక్క సాధారణ సాధన

(1) $e^x + e^y = C$ (2) $e^x + e^{-y} = C$ (3) $e^{-x} + e^y = C$ (4) $e^{-x} + e^{-y} = C$

16. $\frac{dy}{dx} = 2^{y-x}$ యొక్క సాధన

(1) $2^x + 2^y = C$ (2) $2^x - 2^y = C$ (3) $\frac{1}{2^x} - \frac{1}{2^y} = C$ (4) $x + y = C$

17. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{\phi\left(\frac{y}{x}\right)}{\phi'\left(\frac{y}{x}\right)}$ అవకలన సమీకరణము యొక్క సాధన

(1) $x\phi\left(\frac{y}{x}\right) = k$ (2) $\phi\left(\frac{y}{x}\right) = kx$ (3) $y\phi\left(\frac{y}{x}\right) = k$ (4) $\phi\left(\frac{y}{x}\right) = ky$

18. $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ రేఖీయ అవకలన సమీకరణము సమాకలన కారణాంకము $\sin x$ అయిన P అనేది

(1) $\log \sin x$ (2) $\cos x$ (3) $\tan x$ (4) $\cot x$

19. తరగతి n మరియు $n+1$ కలిగిన అవకలన సమీకరణము యొక్క సాధారణ సాధనలో గల చర స్థిరాంకముల సంఖ్య క్రమముగా

(1) $n-1,\ n$ (2) $n,\ n+1$ (3) $n+1,\ n+2$ (4) $n+1,\ n$

20. మూడవ తరగతి అవకలన సమీకరణము యొక్క సాధనలో గల చర స్థిరాంకముల సంఖ్య

(1) 3 (2) 2 (3) 1 (4) 0

21. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+1}{x+1}$ అవకలన సమీకరణము యొక్క సమాకలన కారణాంకము

(1) $\frac{1}{x+1}$ (2) $x+1$ (3) $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ (4) $\sqrt{x+1}$

22. ఏదైనా ఒక సంవత్సరము t లో జనాభా P యొక్క పెరుగుదల రేటు జనాభాకు అనులోమానుపాతంలో ఉన్నచో

(1) $P = Ce^{kt}$ (2) $P = Ce^{-kt}$ (3) $P = Ckt$ (4) $P = C$

23. t కాలమునకు తరువాత మిగిలిన ఒక వస్తువు అంతస్థ P పదార్థం యొక్క భాష్పీభవన రేటు మిగిలిన మొత్తానికి అనులోమానుపాతంలో ఉన్నచో అప్పుడు

(1) $P = Ce^{kt}$ (2) $P = Ce^{-kt}$ (3) $P = Ckt$ (4) $Pt = C$

24. $\frac{dy}{dx} = \frac{ax+3}{2y+f}$ అవకలన సమీకరణము సాధన ఒక వృత్తమును సూచించిన a యొక్క విలువ

(1) 2 (2) –2 (3) 1 (4) –1

25. $y = f(x)$ వక్రము యొక్క ఏదైనా ఒక బిందువు వద్ద వాలు $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ ఇవ్వబడినది. వక్రము (-1,1) బిందువు ద్వారా పోయినచో, ఆ వక్ర సమీకరణము

(1) $y = x^3 + 2$ (2) $y = 3x^2 + 4$ (3) $y = 3x^3 + 4$ (4) $y = x^3 + 5$

సారాంశము

1. ఏదైనా ఒక సమీకరణము ఒక తెలియని ప్రమేయం యొక్క కనీసం ఒక సాధారణ అవకలజము లేదా పాక్షిక అవకలజము కలిగి ఉన్నచో ఆ సమీకరణము అవకలన సమీకరణము అగును.
2. ఒక అవకలన సమీకరణములో కనబడు అతిపెద్ద అవకలజమునే ఆ సమీకరణము యొక్క తరగతి

04_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_10.indd 188 03/03/2023 18:23:11

అవుతుంది.

3. ఒక అవకలన సమీకరణము, బహుపద సమాస రూపంలో వ్రాయగలిగిన, ఆ సమీకరణములో కనబడు అతిపెద్ద తరగతి పూర్ణసంఖ్య ఘాతమును ఆ సమీకరణము యొక్క అంతస్థు అంటారు.
4. ఒక అవకలన సమీకరణములో అతిపెద్ద తరగతి గల అవకలన సమీకరణమును మొదటి తరగతి గల బహుపద సమాసముగా వ్రాయ వీలుకాకపోతే ఆ సమీకరణము యొక్క అంతస్థును నిర్వచించలేము.
5. ఒక అవకలన సమీకరణము ఒకే ఒక స్వతంత్ర చరరాశిని బట్టి ఒకటి లేదా అంతకన్నా ఎక్కువ ప్రమేయాల సాధారణ అవకలజలను కలిగివున్నచో, ఆ సమీకరణమును సాధారణ అవకలన సమీకరణము అంటారు.
6. ఒక అవకలన సమీకరణము ఒకటి లేదా అంతకన్నా ఎక్కువ ప్రమేయాల పాక్షిక అవకలజములు మాత్రము కలిగియున్న ఆ సమీకరణమును పాక్షిక అవకలన సమీకరణము అంటారు.
7. ఒకే స్థిరాంకము గల సమీకరణము నుండి ఆ స్థిరాంకమును తొలగించుట వలన మొదటి తరగతి అవకలన సమీకరణము మరియు రెండవ తరగతి స్థిరాంకము గల సమీకరణము నుండి రెండు స్థిరాంకములను తొలగించుట వలన రెండవ తరగతి అవకలన సమీకరణము మరియు ఇదే విధంగా నిరంతరంగా, తొలగించు స్థిరాంకములకు తగిన విధముగా తరగతి గల్గిన అవకలన సమీకరణములను పొందవచ్చు.
8. ఒక అవకలన సమీకరణమును తృప్తి పరచు విధంగా ఆధారిత చరరాశులను స్వతంత్ర చరరాశులతో సంబంధపరచు సమాసము ఆ సమీకరణము యొక్క సాధన అవుతుంది.
9. ఒక అవకలన సమీకరణము సాధనలో గల చర స్థిరాంకముల సంఖ్య, ఆ అవకలన సమీకరణము యొక్క తరగతికి సమానంగా ఉన్నచో, ఆ సాధన అనునది ఆ సమీకరణము యొక్క సాధారణ సాధన అవుతుంది.
10. ఒక అవకలన సమీకరణము యొక్క సాధారణ సాధనలో గల చర స్థిరాంకములకు నిర్దేశించిన విలువలను ఇవ్వడం ద్వారా పొందు సాధన ప్రత్యేక సాధన అగును.
11. $f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$ రూపంలో గల సమీకరణమును చర రాశులను విభజించడం లేదా చర రాశుల విభజన సమీకరణము అంటారు.
12. $n \in \mathbb{R}$ మరియు తగిన విధంగా పరిమితం చేయబడిన x, y మరియు t లకు $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ అయిన x, y లను చర రాశులుగా కలిగిన ప్రమేయం $f(x, y)$ nవ అంతస్థులో సమఘాతీయ ప్రమేయం అని అంటారు. దీనినే ఆయిలర్ సమఘాతీయం అని కూడా అంటారు.
13. $f(x, y)$ అనేది అంతస్థు '0' గల సమఘాతీయ ప్రమేయం అయిన, $f(x, y)$ ను ఎప్పుడూ $g\left(\frac{y}{x}\right)$ లేక $g\left(\frac{x}{y}\right)$ రూపంలో తెల్పే విధంగా g ప్రమేయం ఉండును.
14. ఒక సాధారణ అవకలన సమీకరణమును $\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right)$ రూపంలో వ్రాయగల్గిన, ఆ సమీకరణము సమఘాతీయ రూపంలో కలదని చెప్పవచ్చు.
15. M మరియు N అనేవి ఒకే అంతస్తు గల సమఘాతీయ ప్రమేయాలు అయిన, అవకలజ రూపంలో గల $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ అవకలన సమీకరణము యొక్క సమఘాతీయము అంటారు.
16. మొదటి తరగతి అవకలన సమీకరణ రూపము $\frac{dy}{dx} + Py = Q$.
ఇక్కడ P మరియు Q లు x లో మాత్రం గల ప్రమేయాలు ఈ సమీకరణములో y మరియు దాని అవకలజము $\frac{dy}{dx}$ ల లబ్ధము ఉండదు. ఆధారిత చరరాశి y మరియు స్వతంత్ర చరరాశి x ను గుణించుటకు దాని అవకలజము మొదటి అంతస్థుగా ఉండును. ఇవ్వబడిన అవకలన సమీకరణము

04_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_10.indd 189 03/03/2023 18:23:14

యొక్క సాధన $ye^{\int Pdx} = \int Qe^{\int Pdx}dx + C$ గా వచ్చును. ఇక్కడ $e^{\int Pdx}$ సమీకరణము (1) యొక్క సమాకలన కారణాంకము అంటారు.

17. $\frac{dx}{dy} + Px = Q$ మొదటి తరగతి సమీకరణములో P మరియు Q లు y లో మాత్రము గల ప్రమేయాలు, ఈ సమీకరణములో x మరియు $\frac{dx}{dy}$ లు లబ్ధముగా ఉండదు. ఆధారిత చరరాశి x మరియు స్వతంత్ర చరరాశి y ను గుణించుటకు దాని అవకలజము యొక్క అంతస్థు $xe^{\int Pdy} = \int Qe^{\int Pdy}dy + C$.

18. t సమయంలో ఒక పరిమాణముల మొత్తము x అయిన t కాలములో ఆ పరిమాణము మార్పు రేటు $\frac{dx}{dt}$.

$\frac{dx}{dt} = f(x,t)$ రూపం అవకలన సమీకరణానికి దారి తీస్తుంది.

అంతర్జాల కృత్యము

https://ggbm.at/dy9kwgbt or Scan the QR Code

బ్రౌజరును తెరచి ఇవ్వబడిన వంటి URL లింక్‌ను క్లిక్ చేయుము లేదా QR సంకేతమును స్కాన్ చేయుము. **"12వ తరగతి గణితశాస్త్రము, భాగము-2"** అను శీర్షికతో జియోజీబ్రా వర్క్‌బుక్ తెరువబడును. ఎడమ వైపున మీ పాఠ్యపుస్తకమునకు సంబంధించిన అధ్యాయములు చూపించబడియుండును. **"సాధారణ అవకలన సమీకరణములు"** అను పాఠ్య శీర్షిక గల అధ్యాయముపై క్లిక్ చేయుము. అక్కడ ఈ అధ్యాయమునకు సంబంధించిన అనేక వర్క్‌షీట్లు ప్రదర్శింపబడును. వాటిని సాధించుము.

04_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_10.indd 190 03/03/2023 18:23:15

అధ్యాయము
11

సంభావ్యతా విభాజనములు

"సంభావ్యత సిద్ధాంతము అనేది గణించుటకు సూక్ష్మీకరించిన లోకజ్ఞానము తప్ప వేరేమి కాదు".

– లాప్లాస్



Laplace
(1749-1827)

యాదృచ్ఛిక చరరాశులు, ప్రతిరూప ఆవరణము నుండి వాస్తవ సంఖ్యలకు జత చేయుటను ఏవిధంగా వికసింపచేయునో అనునది మరియు దాని చరిత్ర రెండునూ ఒక ఆసక్తికరమైన అంశము. వీటి ఆధునిక వివరణ సమితులు మరియు జతచేయు (Maps) పద్ధతులు ఆవిష్కరణ (1900) తరువాత సంభవించినవి. కాని యాదృచ్ఛిక చరరాశులు అంతకుముందే ఉపయోగించబడినట్లు (ఎరిమెన్‌కో) చెప్పెను. యాదృచ్ఛిక చరరాశులను జతలు వివరించు అవసరం గలదని గణితశాస్త్రవేత్తలు భావించారు. 1812లో లాప్లాస్, *Theory analytique des probabilities* అను పుస్తకమును ప్రచురించెను. దీనియందు సాంఖ్యకశాస్త్రములో గల చాలా ప్రాథమిక ఫలితాలను అతను తెలియజేసెను. ఈ పుస్తకము యొక్క మొదటి అర్ధభాగములో సంభావ్యత పద్ధతులు మరియు వాటి సమస్యలను చర్చించారు మరియు రెండవ అర్ధభాగములో సాంఖ్యకశాస్త్ర అనువర్తనాలను వివరించారు.

అభ్యసన లక్ష్యాలు

ఈ అధ్యాయము పూర్తయిన తర్వాత విద్యార్థులు చేయగలిగినవి

- యాదృచ్ఛిక చరరాశి అవిచ్ఛిన్న మరియు వివక్త చరరాశులను నిర్వచించుట
- సంభావ్యత ద్రవ్య (సాంద్రత) ప్రమేయమును నిర్వచించుట.
- సంచిత విభాజన ప్రమేయము నుండి సంభావ్యత ద్రవ్యరాశి (సాంద్రత) ప్రమేయమును పొందుట.
- సంభావ్యత ద్రవ్య (సాంద్రత) ప్రమేయము నుండి సంచిత విభాజన ప్రమేయమును పొందుట.
- యాదృచ్ఛిక చరరాశులకు అంకమధ్యమము, విస్తృతిలను గణించుట.
- బెర్‌నౌలి మరియు ద్విపద విభాజనములను గుర్తించుట మరియు ప్రయోగించుట.

11.1 పరిచయము

ప్రతిరూప ఆవరణ (sample space) యొక్క భావనను మహోన్నత తరగతి మొదటి సంవత్సరము భాగము 2లో అభివృద్ధిపరచబడినది. ఇది ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగము యొక్క సాధ్యమగు అన్ని ఫలితాలను సంపూర్ణముగా వివరించును.

ఈ అధ్యాయము నందు, యాదృచ్ఛిక ప్రయోగము మరియు వాటి యొక్క సంభావ్యతా విభాజనాల ప్రతిరూప ఆవరణలో నిర్వచింపబడిన ప్రమేయము గురించి మనము నేర్చుకొంటాము. ఈ ప్రమేయమును యాదృచ్ఛిక చరరాశి అంటారు.

05_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_11.indd 191 23-01-2023 16:46:01

11.2 యాదృచ్ఛిక చరరాశి

యాదృచ్ఛిక ప్రయోగము యొక్క పర్యవసానమును సంకేత రూపములో సూచించుట సులభతరము కాదు. అనేక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగముల నందు సాధ్యమయ్యే పర్యవసానములు వివరణను ప్రతిరూప ఆవరణము S గా పరిగణించబడును. అంటే ప్రయోగము యొక్క ప్రతిరూప ఆవరణలోని పర్యవసానములు లేదా బిందువులు సంఖ్యలు కానవసరము లేదు. ఉదాహరణకు, ఒక నాణెమును ఎగురవేసినప్పుడు, ఫలితాలు H (బొమ్మ) లేదా T (బొరుసు). కొన్ని సందర్భములలో యాదృచ్ఛిక ప్రయోగపు ఫలితాలను సంఖ్యా విలువలతో వ్యవహరించుట అవసరమగును. అందువలన ఘటన యొక్క ఫలితాలకు సంఖ్యలను కేటాయించగలము. ఉదాహరణకు, బొమ్మకు 1 మరియు బొరుసుకు 0. ప్రతిరూప ఆవరణము S లోని మూలకములకు ఈ విధమైన సంఖ్యావిలువల కేటాయింపు అనునది యాదృచ్ఛిక చరరాశి అగును. యాదృచ్ఛిక చరరాశి ఒక ప్రమేయమగును.

నిర్వచనము 11.1

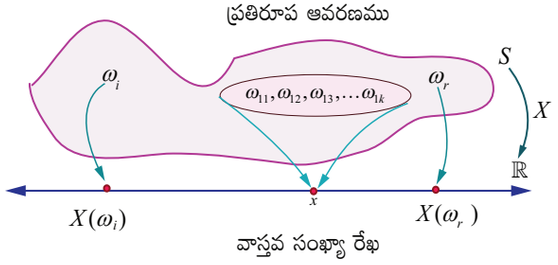
యాదృచ్ఛిక చరరాశి (X) అనునది ప్రతిరూప ఆవరణము S నుండి వాస్తవ సంఖ్య $\mathbb{R}$ కు నిర్వచింపబడిన ప్రమేయము. ఈ ప్రమేయము బిందువుల యొక్క విలోమ ప్రతిబింబము లేదా ఉపసమితి లేదా $\mathbb{R}$ యొక్క అంతరం అను S లోని ఘటనకు సంభావ్యత కేటాయించబడినట్లు నిర్వచించబడును.

ఆంగ్లభాష వర్ణమాలలోని పెద్ద అక్షరాలు X, Y, Z లు యాదృచ్ఛిక చరరాశులుగాను, చిన్న అక్షరాలు x, y, z లను సాధ్యమైన విలువలను సూచించుటకు ఉపయోగించెదము.

$S=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3,\ldots\}$ యాదృచ్ఛిక ఘటన యొక్క ప్రతిరూప ఆవరణముగాను మరియు $\mathbb{R}$ ని వాస్తవరేఖగాను తీసుకొనిన, యాదృచ్ఛిక చరరాశి X అనునది S పై నిర్వచింపబడిన ఒక వాస్తవ విలువ ప్రమేయము మరియు దీనిని $X: S \to \mathbb{R}$ గా సూచిస్తాము. ω, S లోని ఒక ఆవరణ బిందువు అయిన $X(\omega)$ ఒక వాస్తవ సంఖ్య అగును.

$\omega \in S$ కు $X(\omega)$ లు సేకరణను వ్యాప్తి సమితి అంటారు. ఈ వ్యాప్తి సమితిని R_x తో సూచిస్తారు. $R_x=\{X(\omega)/\omega \in S\}$

కొన్ని ఆవరణ బిందువులు ω_i లేదా S అను ప్రతిరూప ఆవరణ యొక్క కొన్ని ఘటనలు వాస్తవ సంఖ్యా రేఖ R పై జత చేయుటను పటము 11.1లో చూపబడినది.



పటము. 11.1

$\omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{13}, \ldots \omega_{1k} \in S$ లకు x అనునది X యొక్క సాధ్యమగు విలువలు అయిన $\{\omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{13}, \ldots \omega_{1k}\}$ ను x యొక్క విలోమ ప్రతిబింబము అంటారు.

అనగా $X^{-1}(x)=\{\omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{13}, \ldots \omega_{1k}\}$ అనునది S లోని ఒక ఘటన.

మాదిరి ఉదాహరణ 11.1

ఒక నాణెము ఒకసారి ఎగురవేయబడినది. ప్రతిరూప ఆవరణము, H (బొమ్మ) మరియు T (బొరుసు) అను రెండు ఆవరణ బిందువులను కలిగియున్నది.

అది $S=\{T, H\}$

$X: S \to \mathbb{R}$ బొమ్మల సంఖ్యను సూచించినయెడల $X(T)=0$ మరియు $X(H)=1$ అగును.

కావున X ఒక యాదృచ్ఛిక చరరాశి 0 మరియు 1 విలువను తీసుకొనును.

$X(\omega)$ బొమ్మల సంఖ్యను సూచించిన యెడల

05_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_11.indd 192 23-01-2023 16:46:05

$$X(\omega)=\begin{cases}0\,, & \omega = \text{బొరుసు}\\ 1\,, & \omega = \text{బొమ్మ}\end{cases}$$

ఉదాహరణ 11.1

ఒకే సమయములో రెండు నాణెములు ఎగురవేయబడెను. X బొరుసుల సంఖ్యను సూచించినయెడల (i) ప్రతిరూప ఆవరణమును వ్రాయుము. (ii) 1 యొక్క విలోమ ప్రతిబింబము కనుగొనుము. (iii) యాదృచ్ఛిక చరరాశి యొక్క విలువలను మరియు వాటి విలోమ ప్రతిబింబము నందు మూలకముల సంఖ్యను కనుగొనుము.

సాధన

(i) ప్రతిరూప ఆవరణము $S=\{H,T\}\times\{H,T\}$

$S=\{TT,\ TH,\ HT,\ HH\}$

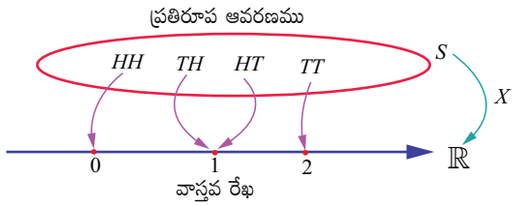
(ii) $X:S\to\mathbb{R}$ బొరుసుల సంఖ్య అయిన

$X(TT) = 2$ (2 బొరుసులు)

$X(TH) = 1$ (1 బొరుసు)

$X(HT) = 1$ (1 బొరుసు)

మరియు $X(HH) = 0$ (0 బొరుసు).



పటము. 11.2

యాదృచ్ఛిక చరరాశి X తీసుకొను విలువలు 0, 1 మరియు 2

$X(\omega)$ బొరుసుల సంఖ్యను సూచించినయెడల,

$$X(\omega)=\begin{cases}2\,, \omega = TT & \text{అయినప్పుడు}\\ 1\,, \omega = HT,\ TH & \text{అయినప్పుడు}\\ 0\,, \omega = HH & \text{అయినప్పుడు}\end{cases}$$

1 యొక్క పూర్వబింబము $\{TH,\ HT\}$, అంటే $X^{-1}(\{1\})=\{TH,HT\}$.

(iii) విలోమ ప్రతిబింబము నందు ఉన్న మూలకముల సంఖ్య పట్టికలో చూపబడినది.

యాదృచ్ఛిక చరరాశి యొక్క విలువలు	0	1	2	మొత్తము
విలోమ ప్రతిబింబము నందు మూలకముల సంఖ్య	1	2	1	4

ఉదాహరణ 11.2

ఒక జత నిష్పాక్షికమైన పాచికలు దొర్లించబడెను. X అనునది రెండు పాచికల మొత్తమును సూచించిన (i) ప్రతిరూప ఆవరణము (ii) యాదృచ్ఛిక చరరాశి X తీసుకొను విలువలు (iii) 10 యొక్క విలోమ ప్రతిబింబము మరియు (iv) X యొక్క విలోమ ప్రతిబింబము నందు మూలకముల సంఖ్యను వ్రాయుము.

సాధన

(i) ప్రతిరూప ఆవరణము

$S=\{1,2,3,4,5,6\}\times\{1,2,3,4,5,6\}$,

(α,β) అను 36 క్రమయుగ్మములను కలిగియున్నది. α , β లు 1 నుండి 6 వరకు గల ఏ పూర్ణసంఖ్యనైన తీసుకొనును. (α,β) నందు పాచికపై ముఖ విలువల మొత్తము X గా నిర్ణయించబడును.

$$S=\begin{Bmatrix}(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)\\(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\\(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\\(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)\\(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)\\(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\end{Bmatrix}$$

05_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_11.indd 193 03/03/2023 17:22:43

అది $X(\alpha,\beta)=\alpha+\beta$.

కావున

$$X(1,1) = 1+1=2$$
$$X(1,2) = X(2,1)=3$$
$$X(1,3) = X(2,2)=X(3,1)=4$$
$$X(1,4) = X(2,3)=X(3,2)=X(4,1)=5$$
$$X(1,5) = X(2,4)=X(3,3)=X(4,2)=X(5,1)=6$$
$$X(1,6) = X(2,5)=X(3,4)=X(4,3)=X(5,2)=X(6,1)=7$$
$$X(2,6) = X(3,5)=X(4,4)=X(5,3)=X(6,2)=8$$
$$X(3,6) = X(4,5)=X(5,4)=X(6,3)=9$$
$$X(4,6) = X(5,5)=X(6,4)=10$$
$$X(5,6) = (6,5)=11$$
$$X(6,6) = 12.$$

(ii) యాదృచ్ఛిక చరరాశి X యొక్క విలువలు 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

(iii) 10 యొక్క విలోమ ప్రతిబింబములు $\{(4,6),(5,5),(6,4)\}$.

(iv) విలోమ ప్రతిబింబములు యొక్క సంఖ్య క్రింద తెలుపబడినది.

యాదృచ్ఛిక చరరాశి యొక్క విలువలు	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	మొత్తము
విలోమ ప్రతిబింబములు నందు మూలకముల సంఖ్య	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1	36

ఉదాహరణ 11.3

ఒక పెట్టెలో 2 తెల్లని మరియు 3 ఎర్రని బంతులు కలవు. యాదృచ్ఛికముగా 3 బంతులు ఎంపికచేయబడినవి. X అనునది ఎర్రని బంతుల సంఖ్యను సూచించినయెడల, యాదృచ్ఛిక చరరాశి X యొక్క విలువలు మరియు వాటి విలోమ ప్రతిబింబముల సంఖ్యను కనుగొనుము.

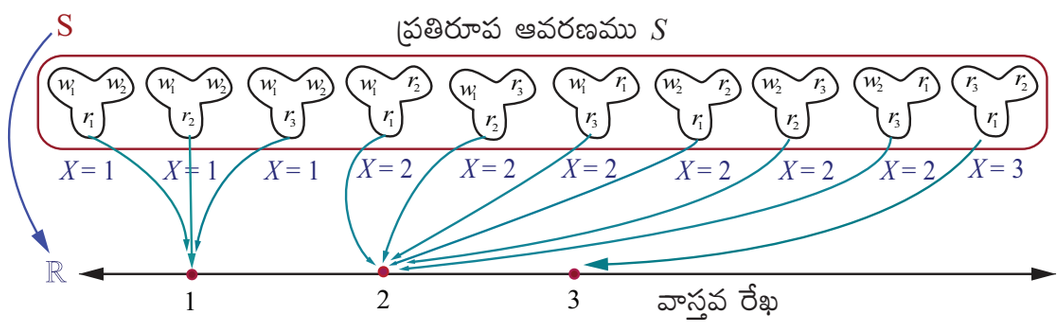
సాధన

తెల్లని బంతులను w_1, w_2, గాను ఎరుపు బంతులను r_1, r_2, r_3 గాను తీసుకొనిన,

ప్రతిరూప ఆవరణములో $5c_3 = 10$,పరిమాణము 3గా గల వేర్వేరు ఆవరణములు కలిగియుండును.

అవి: $S=\{w_1w_2r_1,\ w_1w_2r_2,\ w_1w_2r_3,\ w_1r_1r_2,\ w_1r_2r_3,\ w_1r_1r_3,\ w_2r_1r_2,\ w_2r_2r_3,\ w_2r_1r_3,\ r_1r_2r_3\}$.

యాదృచ్ఛిక చరరాశి X యొక్క విలువలు 1, 2, మరియు 3.



పరివర్తనము X (.) S నుండి వాస్తవ సంఖ్యలకు

పటము 11.3

05_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_11.indd 194 23-01-2023 16:46:14

యాదృచ్ఛిక చరరాశి యొక్క విలువలు X	1	2	3	మొత్తము
విలోమ ప్రతిబింబము నందు మూలకముల సంఖ్య	3	6	1	10

విశేషాంశము

X అనునది తెల్లని బంతులను సూచించినయెడల, X యొక్క విలువలు 0,1, 2 మరియు విలోమ ప్రతిబింబము నందు గల మూలకములు

యాదృచ్ఛిక చరరాశి X యొక్క విలువ	0	1	2	మొత్తము
విలోమ ప్రతిబింబము నందు గల మూలకముల సంఖ్య	1	6	3	10

మాదిరి ఉదాహరణ 11.2

150 మంది విద్యార్థులను 4 బస్సులలో విహారయాత్రకు తీసుకెళ్ళిరి. మొదటి బస్సు నందు 38 మంది విద్యార్థులు, రెండవ బస్సునందు 36 మంది విద్యార్థులు, మూడవ బస్సునందు 32 మంది విద్యార్థులు, మిగిలినవారు నాల్గవ బస్సులో కలరు. బస్సు గమ్యాన్ని చేరిన తరువాత 150 మంది విద్యార్థులలో ఒకరిని ఎంచుకొనిరి.

X అనునది యాదృచ్ఛికముగా ఎంపికచేయబడిన, విద్యార్థి వున్న బస్సునందు గల విద్యార్థుల సంఖ్యగా తీసుకొనిన యెడల X యొక్క విలువలు 32, 36, 38, మరియు 44 .

ఉదాహరణ 11. 4

6 తెల్లని, 4 నల్లని బంతులు గల పాత్ర నుండి యాదృచ్ఛికముగా 2 బంతులు ఎన్నుకోబడినవి. ఒక నల్లని బంతిని ఎంపికచేసిన ₹ 30 ని పొందగలరు. తెల్లని బంతిని ఎంపికచేసిన ₹ 20 ని కోల్పోగలరు. X అనునది గెలిపొందిన డబ్బుని సూచించినయెడల X యొక్క విలువలను, మరియు X యొక్క విలోమ ప్రతిబింబములను కనుగొనుము.

సాధన

సాధ్యమయ్యే ఘటనల ఎంపిక (i) రెండు బంతులు నల్లనివి. (ii) ఒక నల్లని బంతి, మరియు ఒక తెల్లని బంతి లేదా (iii) రెండు తెల్లనివి. అందువలన యాదృచ్ఛిక చరరాశి X తీసుకొను విలువలు,

X (రెండు నల్లని బంతులు) = ₹ 2(30) = ₹ 60

X (ఒక నల్లని మరియు ఒక తెల్లని బంతి) = ₹ 30 – ₹ 20 = ₹ 10

X (రెండు తెల్లని బంతులు) = ₹ 2(– 20) = – ₹ 40

$\therefore$ X యొక్క విలువలు 60,10, మరియు – 40.

గమనిక : 40 యొక్క విలోమ ప్రతిబింబము $\{b_1b_2, b_1b_3, b_1b_4, b_2b_3, b_2b_4, b_3b_4.\}$

యాదృచ్ఛిక చరరాశి X యొక్క విలువలు	60	10	– 40	మొత్తము
విలోమ ప్రతిబింబము నందు గల మూలకముల సంఖ్య	6	24	15	45

$\binom{6}{0}\binom{4}{2}$ $\binom{6}{1}\binom{4}{1}$ $\binom{6}{2}\binom{4}{0}$ $\binom{10}{2}$

మాదిరి ఉదాహరణ 11.3

బొమ్మ నంభవించువరకు ఒక నాణెమును ఎగురవేయబడినది. ప్రతిరూప ఆవరణము $S = \{H, TH, TTH, TTTH, \ldots\}$. , బొమ్మ సంభవించు వరకు నాణెము ఎగురవేయు సంఖ్యను X అని తీసుకొనిన , యాదృచ్ఛిక చరరాశి X తీసుకొను విలువలు $1, 2, 3, \ldots$

మాదిరి ఉదాహరణ 11.4

నిర్ణీత సమయములో వరుసలో నున్న వినియోగదారులలో సేవా బల్లను చేరుకొన్న వినియోగదారుల సంఖ్యను N అని తీసుకొనిన, ప్రతిరూప ఆవరణము అనేది ఋణేతర పూర్ణసంఖ్య సమితి అగును. అనగా $S = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ మరియు యాదృచ్ఛిక చరరాశి N తీసుకొను విలువలు 0, 1, 2, 3, …

05_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_11.indd 195 23-01-2023 16:46:15

మాదిరి ఉదాహరణ 11.5

విద్యుత్ బల్బు యొక్క జీవిత కాలమును గణించే ప్రయోగము నందు ప్రతిరూప ఆవరణము అనునది విద్యుత్ బల్బు యొక్క జీవితకాలముగా ఉండును. కావున, ప్రతిరూప ఆవరణము $S=[0,\infty)$, X అనునది బల్బు యొక్క జీవితకాలమును సూచించిన యెడల, X యాదృచ్ఛిక చరరాశి $[0,\infty)$. విలువలను తీసుకొనును.

మాదిరి ఉదాహరణ 11.6

D అను చట్రము యొక్క వ్యాసార్ధము r , యాదృచ్ఛికముగా D నందు ఒక బిందువు ఎన్నుకొనబడెను. X అనునది కేంద్రము నుండి బిందువుకు గల దూరమును సూచించును. ప్రతిరూప ఆవరణము $S=D$ మరియు X , యాదృచ్ఛిక చరరాశి 0 నుండి r వరకు గల ఏ సంఖ్యనైనను తీసుకొనును. అంటే, $X(\omega)\in[0,r],,\omega\in S$.

అభ్యాసము 11.1

1. మూడు నిష్పాక్షిక నాణెములు ఒకేసారి ఎగురవేయబడెను. బొరుసుల సంఖ్యను X గా తీసుకొనిన X . యొక్క విలువలు మరియు దాని విలోమ ప్రతిబింబములను కనుగొనుము.
2. 52 పేకముక్కల కట్ట నుండి 2 ముక్కలు ఒకదాని తరువాత మరొకటి తీయబడినవి. నలుపు ముక్కల సంఖ్యను యాదృచ్ఛిక చరరాశి X గా తీసుకొనిన యాదృచ్ఛిక చరరాశి యొక్క విలువను మరియు దాని విలోమ ప్రతిబింబములో బిందువు కనుగొనుము.
3. ఒక పాత్రనందు 5 మామిడి పండ్లు మరియు 4 ఆపిల్ పండ్లు కలవు. యాదృచ్ఛికముగా 3 పండ్లు తీయబడినవి. ఆపిల్ పండ్లు తీయు సంఖ్యను యాదృచ్ఛిక చరరాశిగా తీసుకొనిన, యాదృచ్ఛిక చరరాశి యొక్క విలువను మరియు దాని విలోమప్రతిబింబములొ బిందువుల సంఖ్యను కనుగొనుము.
4. 6 ఎరుపు, ఎనిమిది (8) నల్లని బంతులు కల ఒక పాత్ర నుండి రెండు బంతులు తీయబడినవి. ఒక ఎరుపు బంతిని తీసిన, ₹ 15 గెలుచుకొనగలము. ఒక నల్లని బంతిని తీసిన ₹ 10 ని కోల్పోగలము. X అనునది గెలుపొందిన మొత్తమైన, X యొక్క విలువలు మరియు దాని విలోమ ప్రతిబింబములో బిందువుల సంఖ్యను కనుగొనుము.
5. ఆరు ముఖములు గల పాచికనందు ఒక తలమున '2', రెండు తలములలో '3' మరియు మిగిలిన మూడు తలములలో '4' గుర్తించబడెను. పాచిక రెండుసార్లు దొర్లించబడెను. రెండు ప్రయోగముల మొత్తమును X గా తీసుకొనిన, యాదృచ్ఛిక చరరాశి X యొక్కవిలువని మరియు దాని పూర్వబింబములో గల బిందువుల సంఖ్యను కనుగొనుము.

11.3 యాదృచ్ఛిక చరరాశి రకములు

ఈ అధ్యాయములో మనము యాదృచ్ఛిక చరరాశుల యొక్క రెండు రకాలను అభ్యసించునట్లు పరిమితం చేయబడినవి. అందులో ఒకటి లెక్కించదగిన సంఖ్యలో విలువలను కలిగిన యాదృచ్ఛిక చరరాశి మరియు మరొకటి అవిచ్ఛిన్న విలువలను కలిగిన యాదృచ్ఛిక చరరాశి. అవి

(i) వివక్త యాదృచ్ఛిక చరరాశి (పరిమాణమును లెక్కించుటకు)
(ii) అవిచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చరరాశి (పరిమాణమును కొలుచుటకు)

11.3.1 వివక్త (విచ్ఛిన్న) యాదృచ్ఛిక చరరాశులు

ఈ అధ్యాయము నందు

(i) విచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చరరాశులు
(ii) సంభావ్యత ద్రవ్యరాశి ప్రమేయము
(iii) సంచిత విభాజనాల ప్రమేయము
(iv) సంభావ్యత ద్రవ్యవిభాజనా ప్రమేయము నుండి సంచిత విభాజనా ప్రమేయమును పొందుట.

05_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_11.indd 196 23-01-2023 16:46:17

(v) సంచిత విభాజనా ప్రమేయము నుండి సంభావ్యత ద్రవ్య ప్రమేయమును పొందుట. యాదృచ్ఛిక చరరాశి యొక్క వ్యాప్తి సమితి విచ్ఛిన్న సమితిగా ఉన్నప్పుడు యాదృచ్ఛిక చరరాశి యొక్క విలోమ ప్రతిబింబము, పరిమితముగాను, లేదా లెక్కించగల అపరిమితముగాను యుండును. అటువంటి యాదృచ్ఛిక చరరాశిని విచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చరరాశి అని పిలుస్తారు. విచ్ఛిన్న ప్రతిరూప ఆవరణముపై నిర్వచింపబడిన యాదృచ్ఛిక చరరాశి విచ్ఛిన్నము (వివక్త) అగును.

నిర్వచనము 11.2 (వివక్త యాదృచ్ఛిక చరరాశి) (లేదా) విచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చరరాశి

ప్రతిరూప ఆవరణము S నుండి వాస్తవ సంఖ్యలు $\mathbb{R}$ కు నిర్వచింపబడిన యాదృచ్ఛిక చరరాశి X యొక్క వ్యాప్తి లెక్కించదగినదైన దానిని వివక్త యాదృచ్ఛిక చరరాశి అని అంటారు. X యొక్క వ్యాప్తి లెక్కించదగినది అనగా పరిమిత లేదా లెక్కించ వీలగు అనంత సంఖ్యలో విలువలను కలిగియుండును. సమితి S లోని ఈ ప్రతి విలువకు ధనాత్మక సంభావ్యత ఉండును. మరియు ఈ విలువల సంభావ్యతల మొత్తము 1 అగును..

విశేషాంశము

అవిచ్ఛిన్న ప్రతిరూప ఆవరణము నందు కూడా విచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చరరాశిని నిర్వచించుటకు సాధ్యమగును.

(i) అవిచ్ఛిన్న ప్రతిరూప ఆవరణము $S=[0,1]$, నందు యాదృచ్ఛిక చరరాశి $X(\omega)=10\ \forall\ \omega\in S$, ని నిర్వచించిన అది విచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చరరాశి అగును.

(ii) అవిచ్ఛిన్న ప్రతిరూప ఆవరణము $S=[0,20]$ నకు యాదృచ్ఛిక చరరాశి $X(\omega)=\begin{cases}1, & \omega\in[0,10)\\ 2, & \omega\in[10,20]\end{cases}$ అనునది విచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చరరాశిగా నిర్వచించబడును..

11.3.2 సంభావ్యత ద్రవ్యరాశి ప్రమేయము

విచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చరరాశి X, ప్రత్యేక విలువ x ని తీసుకొనినప్పుడు, దాని సంభావ్యత $P(X=x)$ ని $f(x)$ లేదా $p(x)$ గా సూచించబడును. $f(x)$ ని సంభావ్యత ద్రవ్య ప్రమేయముగా పేర్కొనబడును. కాని రచయితలు $f(x)$ ని సంభావ్యత ప్రమేయము లేదా పౌనఃపున్య ప్రమేయముగా సూచించారు. ఈ అధ్యాయము నందు యాదృచ్ఛిక చరరాశి X విచ్ఛిన్నముగా ఉన్నప్పుడు, సంభావ్యత ద్రవ్యరాశి ప్రమేయము అను సాధారణ పదజాలమును ఉపయోగించారు. మరియు దీని యొక్క సాధారణ సంక్షిప్తీకరణ pmf అగును.

నిర్వచనము 11.3 (సంభావ్యతా ద్రవ్య ప్రమేయము)

X అనునది $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n \ldots$, అను విచ్ఛిన్న విలువలను కలిగిన విచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చరరాశి అయినప్పుడు ప్రమేయము $f(.)$ లేదా $p(.)$ ని

$$f(x_k)=P(X=x_k), \qquad \text{for } k=1,2,3,\ldots n,\ldots$$

గా నిర్వచించిన ఈ ప్రమేయమును X యొక్క సంభావ్యత ద్రవ్యరాశి ప్రమేయము అని అంటారు.

సిద్ధాంతము 11.1 (నిరూపణ లేకుండా)

$f(x)$ అను ప్రమేయము $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n \ldots$ అను వాస్తవ విలువలకు క్రింది సమితి ధర్మములను తృప్తిపరచునప్పుడు మాత్రమే $f(x)$ సంభావ్యత ద్రవ్య ప్రమేయమగును.

(i) $f(x_k)\geq 0$, $k=1,2,3,\ldots n,\ldots$ మరియు (ii) $\sum_k f(x_k)=1$

గమనిక

(i) సంభావ్యత విలువల సమితి $\{f(x_k)=P(X=x_k),\quad k=1,2,3,\ldots n,\ldots\}$ ను విచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక

05_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_11.indd 197 23-01-2023 16:46:20

చరరాశి యొక్క సంభావ్యత విభాజనము అని కూడా పిలుస్తారు.

(ii) యాదృచ్ఛిక చరరాశి అనునది ప్రమేయమయినందున, దీనిని

(a) పట్టిక పద్ధతి, (b) రేఖాచిత్ర పద్ధతి (c) సమాస రూపముగాను ప్రదర్శించబడును.

ఉదాహరణ 11.5

రెండు నిష్పాక్షిక నాణెములు ఎగురవేయబడెను. (ఒక నిష్పాక్షిక నాణెమును రెండుసార్లు ఎగురవేయుటకు సమానము) దీని యందు తిరగబడు బొమ్మల సంఖ్యకు సంభావ్యత ద్రవ్య ప్రమేయమును కనుగొనుము.

సాధన

ప్రతిరూప ఆవరణము $S = \{H,T\}\times\{H,T\}$

అంటే, $S = \{TT, TH, HT, HH\}$

X బొమ్మల సంఖ్యను సూచించు యాదృచ్ఛిక చరరాశియైన,

$X(TT) = 0$, $X(TH) = 1$,

$X(HT) = 1$, మరియు $X(HH) = 2$.

యాదృచ్ఛిక చరరాశి X యొక్క విలువలు $0, 1$ మరియు 2

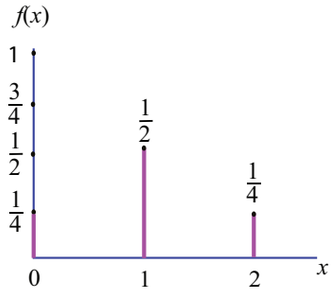
యాదృచ్ఛిక చరరాశి యొక్క విలువలు	0	1	2	మొత్తము
విలోమ ప్రతిబింబములందు మూలకముల సంఖ్య	1	2	1	4

ఇవ్వబడిన సంభావ్యతలు

$$f(0) = P(X=0) = \frac{1}{4},$$

$$f(1) = P(X=1) = \frac{1}{2}$$

మరియు $f(2) = P(X=2) = \frac{1}{4}$



$f(x)$ యొక్క సంభావ్యత ద్రవ్యరాశి ప్రమేయము

పటము 11.4

$f(x)$ ప్రమేయము క్రింది నియమములను తృప్తిపరచెను.

(i) $f(x) \geq 0$, $x = 0, 1, 2$ అయిన

(ii) $\sum_x f(x) = \sum_{x=0}^{x=2} f(x) = f(0)+f(1)+f(2)$

$$= \frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4} = 1$$

అందువలన $f(x)$ సంభావ్యత ద్రవ్యరాశి ప్రమేయమగును.

సంభావ్యత ద్రవ్య ప్రమేయము దిగువ ఇవ్వబడినది

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

(లేదా)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & x = 0 \text{ అయిన} \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \text{ అయిన} \\ \frac{1}{4}, & x = 2 \text{ అయిన} \end{cases}$$

ఉదాహరణ 11.6

ఒక జత నిష్పాక్షిక పాచికలు దొర్లించబడెను. 4 అనే సంఖ్యను పొందడానికి సంభావ్యత ద్రవ్య ప్రమేయమును కనుగొనుము.

05_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_11.indd 198 23-01-2023 16:46:25

సాధన

X ఒక యాదృచ్ఛిక చరరాశి. x అనునది 4నే సంఖ్యగా తీసుకొందాము.

ప్రతిరూప ఆవరణము S పట్టికలో చూపబడెను.

$$S=\begin{Bmatrix}(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)\\(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\\(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\\(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)\\(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)\\(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\end{Bmatrix}$$

దీనిని క్రింది విధముగా కూడా వ్రాయగలము.

$S=\{(i,j)\}$, ఇక్కడ $i=1,2,3\ldots,6$ మరియు $j=1,2,3,\ldots 6$

X యొక్క విలువలు 0, 1, మరియు 2 గా తీసుకొనుము.

మనము గమనించవలసినవి.

(i) $X=0,\ (i,j)$ for $i\neq 4,\ j\neq 4,$ గా ఉండునప్పుడు

(ii) $X=1,\ (1,4),(2,4),(3,4),(5,4),(6,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,5),(4,6)$ గా ఉండునప్పుడు

(iii) $X=2,\ (4,4)$, గా ఉండునప్పుడు

అందువలన,

యాదృచ్ఛిక చరరాశి X యొక్క విలువలు	0	1	2	మొత్తము
విలోమ ప్రతిబింబములందు మూలకముల సంఖ్య	25	10	1	36

సంభావ్యతలు

$$f(0) = P(X=0)=\frac{25}{36},$$

$$f(1) = P(X=1)=\frac{10}{36}$$

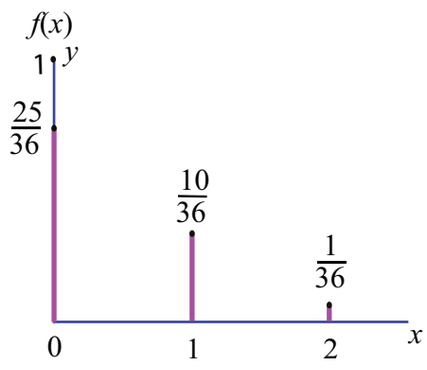
మరియు $f(2) = P(X=2)=\frac{1}{36}$

$f(x)$ ప్రమేయము, తృప్తిపరచు నియమములు

(i) $f(x)\geq 0,, x=0,\ 1,\ 2$ విలువలకు మరియు

(ii) $\sum\limits_{x} f(x)=\sum\limits_{x=0}^{x=2} f(x)=f(0)+f(1)+f(2)=1$

$$=\frac{25}{36}+\frac{10}{36}+\frac{1}{36}=1$$



$f(x)$ యొక్క సంభావ్యతా ద్రవ్యరాశి ప్రమేయము

పటము 11.5

సంభావ్యత ద్రవ్యరాశి ప్రమేయము పట్టికలో చూపబడినది.

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

(లేదా) $$f(x)=\begin{cases}\frac{25}{36}, & x=0 \text{ అయిన}\\ \frac{10}{36}, & x=1 \text{ అయిన}\\ \frac{1}{36}, & x=2 \text{ అయిన}\end{cases}$$

11.3.3 సంచిత విభాజనా ప్రమేయము లేదా విభాజనా ప్రమేయము

చాలా సందర్భములలో సంభావ్యతను గణించునప్పుడు, యాదృచ్ఛిక చరరాశి X యొక్క పరిశోధించు విలువ ఒక వాస్తవ సంఖ్య x. కు సమముగాను లేదా తక్కువగాను ఉండును. ప్రతి వాస్తవ సంఖ్య x ను

05_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_11.indd 199 23-01-2023 16:46:29

$F(x)=P(X\le x)$ గా వ్రాసినప్పుడు $F(x)$ ని యాదృచ్ఛిక చరరాశి యొక్క సంభావ్యత విభాజనా ప్రమేయము లేదా విభాజనా ప్రమేయము అని పేర్కొనగలము. దీని యొక్క సాధారణ సంక్షిప్తీకరణ cdf అగును. .

నిర్వచనము 11.4 (సంచిత విభాజనా ప్రమేయము)

సంభావ్యత ద్రవ్య ప్రమేయము $F(x)$ మరియు $x_1<x_2<x_3<\cdots$ అగునట్లు $x_1, x_2, x_3, \ldots$ విలువలను తీసుకొను x అను విచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చరరాశి యొక్క సంచిత విభాజన ప్రమేయము $F(x)$ అనునది $x\in\mathbb{R}$ కు,

$$F(x)=P(X\le x)=\sum_{x_i\le x} f(x_i),$$ అగును.

విచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చర యొక్క విభాజన ప్రమేయమును విచ్ఛిన్న విభాజన ప్రమేయము అని పేర్కొనుము. అయిననూ, సంభావ్యతో ద్రవ్య ప్రమేయము $f(x)$ ని విచ్ఛిన్న విలువలు $x_1,x_2,x_3,\ldots,$ కు మాత్రము నిర్వచించబడును. సంచిత విభాజన ప్రమేయము $F(x)$ అన్ని వాస్తవ విలువలు $x\in\mathbb{R}$. కు నిర్వచించబడును.

సంభావ్యత ద్రవ్యరాశి ప్రమేయమునుపయోగించి సంచిత విభాజన ప్రమేయమును గణించగలము.

$$F(x)=P(X\le x)=\sum_{x_i\le x} f(x_i)=\sum_{x_i\le x} P(X=x_i)$$

X అనునది $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ అను పరిమిత విలువలను మాత్రము తీసుకొనినప్పుడు మరియు $x_1<x_2<x_3<,\cdots<x_n,$ అయిన సంచిత విభాజన ప్రమేయము క్రింది విధముగా ఉండును.

$$F(x)=\begin{cases}0, & -\infty<x<x_1\\ f(x_1), & x_1\le x<x_2\\ f(x_1)+f(x_2), & x_2\le x<x_3\\ f(x_1)+f(x_2)+f(x_3), & x_3\le x<x_4\\ \vdots & \vdots\\ f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n), & x_n\le x<\infty\end{cases}$$

విచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చరరాశి X నకు, సంచిత విభాజన ప్రమేయము క్రింది ధర్మాలను తృప్తిపరచును.

(i) $0\le F(x)\le 1$, యొక్క అన్ని విలువలకు $x\in\mathbb{R}$.

(ii) $F(x)$ అనునది అవరోహణముకాని వాస్తవ విలువ గల ప్రమేయము $\left(x<y, F(x)\le F(y)\right)$.

(iii) $F(x)$ అనునది కుడి అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయము $\left(\lim_{x\to a+} F(x)=F(a)\right)$.

(iv) $\lim_{x\to-\infty} F(x)=F(-\infty)=0$.

(v) $\lim_{x\to+\infty} F(x)=F(+\infty)=1$.

(vi) $P(x_1<X\le x_2)=F(x_2)-F(x_1)$.

(vii) $P(X>x)=1-P(X\le x)=1-F(x)$.

(viii) $P(X=x_k)=F(x_k)-F(x_k^-)$.

గమనిక

కొందరు రచయితలు సంచిత విభాజన ప్రమేయము $F(x)$ యొక్క నిర్వచనము నందు కుడి అవిచ్ఛిన్నమునకు బదులు ఎడమ అవిచ్ఛిన్నమును ఉపయోగించిరి.

05_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_11.indd 200 23-01-2023 16:46:34

11.3.4 సంభావ్యత ద్రవ్య ప్రమేయము నుండి సంచిత విభాజనా ప్రమేయము

విచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చరరాశి X యొక్క సంభావ్యత ద్రవ్యరాశి ప్రమేయము మరియు సంచిత విభాజన ప్రమేయము అను రెండు ప్రమేయములకు సంబంధించిన సంభావ్యత వివరములను X కలిగియుండును. X యొక్క సంభావ్యతా విభాజనాన్ని రెండింటిలో ఏ ఒక్కటైన నిర్ణయించును. విచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చరరాశి X యొక్క విభాజన ప్రమేయము F ని X యొక్క సంభావ్యత ద్రవ్య ప్రమేయము X పదములలో వ్యక్తపరచగలము మరియు దీని విపర్యయము సత్యమగును.

ఉదాహరణ 11.7

యాదృచ్ఛిక చరరాశి X యొక్క సంభావ్యత ద్రవ్యరాశి ప్రమేయము $f(x)$

x	1	2	3	4
$f(x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

గా

ఉన్నప్పుడు (i) సంచిత విభాజన ప్రమేయమును (ii) $P(X \le 3)$ యొక్క విలువను (iii) $P(X \ge 2)$ విలువను కనుగొనుము.

సాధన

(i) నిర్వచనము ప్రకారము, విచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చరరాశి యొక్క సంచిత విభాజన ప్రమేయము

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} P(X = x_i)$$

$-\infty < x < 1$ గా ఉన్నప్పుడు $P(X < 1) = 0$ అగును.

$$F(1) = P(X \le 1) = \sum_{x_i \le x} P(X = x_i) = \sum_{-\infty}^{1} P(X = x) = P(X < 1) + P(X = 1) = 0 + \frac{1}{12} = \frac{1}{12}.$$

$$F(2) = P(X \le 2) = \sum_{-\infty}^{2} P(X = x) = P(X < 1) + P(X = 1) + P(X = 2).$$

$$= 0 + \frac{1}{12} + \frac{5}{12} = \frac{1}{2}.$$

$$F(3) = P(X \le 3) = \sum_{-\infty}^{3} P(X = x) = P(X < 1) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3).$$

$$= 0 + \frac{1}{12} + \frac{5}{12} + \frac{5}{12} = \frac{11}{12}.$$

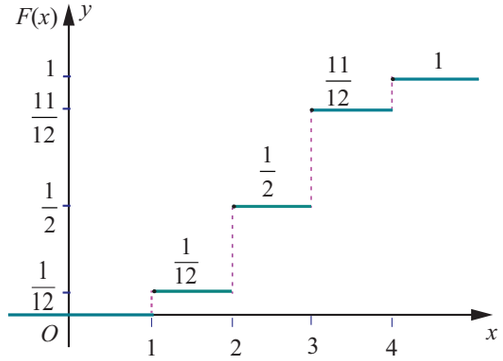
$$F(4) = P(X \le 4) = \sum_{-\infty}^{4} P(X = x) = P(X < 1) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4).$$

$$= 0 + \frac{1}{12} + \frac{5}{12} + \frac{5}{12} + \frac{1}{12} = 1.$$

సంచిత విభాజన ప్రమేయము

05_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_11.indd 201 23-01-2023 16:46:38

$$F(x)=\begin{cases}0, & -\infty < x < 1\\ \frac{1}{12}, & 1 \le x < 2\\ \frac{1}{2}, & 2 \le x < 3\\ \frac{11}{12}, & 3 \le x < 4\\ 1, & 4 \le x < \infty\end{cases}$$



సంచిత విభాజన ప్రమేయము

పటము 11.6

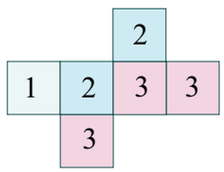
(ii) $P(X \le 3) = F(3) = \frac{11}{12}$.

(iii) $P(X \ge 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \le 1) = 1 - F(1) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$.

ఉదాహరణ 11.8

ఆరు ముఖములు కలిగిన పాచికనందు ఒక ముఖములో '1', రెండు ముఖములలో '2', మిగిలిన మూడు ముఖములలో '3' గుర్తించబడెను. పాచిక రెండుసార్లు దొర్లించబడెను. X అనునది ముఖ విలువల మొత్తమును గుర్తించిన యెడల





పటము 11.7

(i) సంభావ్యత ద్రవ్య– ప్రమేయమును

(ii) సంచిత విభాజన ప్రమేయమును

(iii) $P(3 \le X < 6)$ ను (iv) $P(X \ge 4)$ ను కనుగొనుము.

సాధన:

X అనునది రెండు దొర్లింపులలో మొత్తమును సూచించిన, దాని యొక్క విలువలు 2, 3, 4, 5, మరియు 6. ప్రతిరూప ఆవరణము **S** నుండి

యాదృచ్ఛిక చరరాశి యొక్క విలువలు	2	3	4	5	6	మొత్తము
విలోమ ప్రతిబింబములందు మూలకముల సంఖ్య	1	4	10	12	9	36

ప్రతిరూప ఆవరణము **S**

I \ II	1	2	2	3	3	3
1	2	3	3	4	4	4
2	3	4	4	5	5	5
2	3	4	4	5	5	5
3	4	5	5	6	6	6
3	4	5	5	6	6	6
3	4	5	5	6	6	6

$P(X=2) = \frac{1}{36}$, $P(X=3) = \frac{4}{36}$

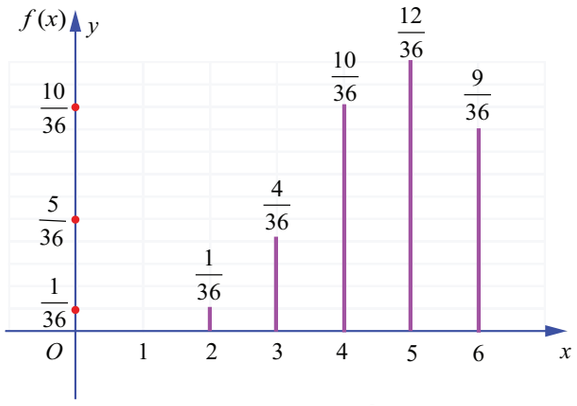
$P(X=4) = \frac{10}{36}$, $P(X=5) = \frac{12}{36}$, మరియు

$P(X=6) = \frac{9}{36}$.

05_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_11.indd 202 23-01-2023 16:46:41

(i) సంభావ్యత ద్రవ్య ప్రమేయము

x	2	3	4	5	6
$f(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{9}{36}$



సంభావ్యత ద్రవ్యరాశి ప్రమేయము

పటము. 11.8

(ii) సంచిత విభాజన ప్రమేయము

విచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చరరాశి యొక్క సంచిత విభాజన ప్రమేయము నిర్వచనము ప్రకారము,

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} P(X = x_i),$$

$-\infty < X < 2$. గా ఉన్నప్పుడు $P(X < x) = 0$ అగును.

$$F(2) = P(X \le 2) = \sum_{-\infty}^{2} P(X = x) = P(X < 2) + P(X = 2) = 0 + \frac{1}{36} = \frac{1}{36}.$$

$$F(3) = P(X \le 3) = \sum_{-\infty}^{3} P(X = x) = P(X < 2) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0 + \frac{1}{36} + \frac{4}{36} = \frac{5}{36}.$$

$$F(4) = P(X \le 4) = \sum_{-\infty}^{4} P(X = x) = P(X < 2) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$$

$$= 0 + \frac{1}{36} + \frac{4}{36} + \frac{10}{36} = \frac{15}{36}.$$

$$F(5) = P(X \le 5) = \sum_{-\infty}^{5} P(X = x) = P(X < 2) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$$

$$= 0 + \frac{1}{36} + \frac{4}{36} + \frac{10}{36} + \frac{12}{36} = \frac{27}{36}.$$

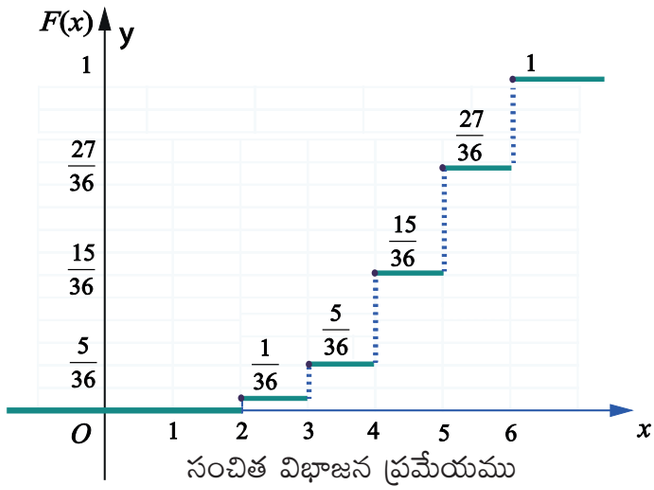
$$F(6) = P(X \le 6) = \sum_{-\infty}^{6} P(X = x)$$

$$= P(X < 2) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6)$$

$$= 0 + \frac{1}{36} + \frac{4}{36} + \frac{10}{36} + \frac{12}{36} + \frac{9}{36} = 1.$$

సంచిత విభాజన ప్రమేయము

$$\begin{cases} 0 & , -\infty < x < 2 \text{ అయిన} \\ \frac{1}{36} & , 2 \le x < 3 \text{ అయిన} \\ \frac{5}{36} & , 3 \le x < 4 \text{ అయిన} \\ \frac{15}{36} & , 4 \le x < 5 \text{ అయిన} \\ \frac{27}{36} & , 5 \le x < 6 \text{ అయిన} \\ 1 & , 6 \le x < \infty \text{ అయిన} \end{cases}$$



సంచిత విభాజన ప్రమేయము

పటము. 11.9

05_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_11.indd 203 23-01-2023 16:46:45

(iii) $P(3 \le X < 6) = \sum_{x=3}^{5} P(X = x_i) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$

$$= \frac{4}{36} + \frac{10}{36} + \frac{12}{36} = \frac{26}{36} .$$

(iv) $P(X \ge 4) = \sum_{x=4}^{\infty} P(X = x_i)$

$$= P(X=4) + P(X=5) + P(X=6)$$

$$= \frac{10}{36} + \frac{12}{36} + \frac{9}{36} = \frac{31}{36} .$$

11.3.5 సంచిత విభాజన ప్రమేయము నుండి సంభావ్యత ద్రవ్య ప్రమేయము

విచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చరరాశి X యొక్క సంచిత విభాజన ప్రమేయము F అనునది ఒక్కొక్క x_i యొక్క విలువకు ఎత్తుకు ఎగురును. మరియు వెనువెంటనే గల $x_i's$ ల మధ్య స్థిరముగా ఉండును. ఒక్కొక్క x_i యొక్క ఎత్తు $f(x_i)$; ఈ విధముగా x_i వద్ద సంభావ్యత F నుండి పొందబడును.

X అనునది $x_1, x_2, x_3, \ldots, (x_1 < x_2, < x_3 \cdots)$ అను విలువలను కలిగిన విచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చరరాశి మరియు $F(x_i)$ విభాజన ప్రమేయము అయిన సంభావ్యత ద్రవ్య ప్రమేయము $f(x_i)$ క్రింద ఇవ్వబడినది.

$f(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1}), \quad i = 1, 2, 3, \ldots$

గమనిక

$x = a$ వద్ద $F(x)$ అను ప్రమేయము యొక్క ఎత్తు $\left|F(a^+) - F(a^-)\right|$.

F అనునది అవరోహణముకాని మరియు కుడివైపు అవిచ్ఛిన్నము అయిన సంచిత విభాజన ప్రమేయము F నకు $P(X = x) = F(x) - F(x^-)$ ఇచ్చట ఎత్తు (విచ్ఛిన్నత) వలన సంభావ్యతగా పరిగణించబడును. అనగా సంభావ్యత విభాజన ప్రమేయము యొక్క విచ్ఛిన్న సమితి ఇంచుమించు లెక్కించదగినది.

ఉదాహరణ 11.9

విచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చరరాశి $f(x)$ యొక్క సంచిత విభాజన ప్రమేయము X క్రింది విధముగా ఇవ్వబడినది. $F(x)$ యొక్క సంభావ్యత ద్రవ్యరాశి ప్రమేయమును కనుగొనుము.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < -2 \\ 0.25 & -2 \le x < -1 \\ 0.60 & -1 \le x < 0 \\ 0.90 & 0 \le x < 1 \\ 1 & 1 \le x < \infty \text{ మరియు} \end{cases}$$

(i) $P(X < 0)$ ని (ii) $P(X \ge -1)$. కనుగొనుము.

సాధన

X అనునది యాదృచ్ఛిక విచ్ఛిన్న చరరాశి, X యొక్క విలువలు $-2, -1, 0$ మరియు 1 . యాదృచ్ఛిక చరరాశి విచ్ఛిన్నమైనప్పుడు $f(x) = P(X = x)$

05_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_11.indd 204 23-01-2023 16:46:51

$x=-2$ వద్ద $F(x)$ యొక్క ఎడమ అవధి $F(-2^-)$ అగును.

$$f(-2) = P(X=-2) = F(-2) - F(-2^-) = 0.25 - 0 = 0.25.$$

అదేవిధముగా,

$$f(-1) = P(X=-1) = F(-1) - F(-2) = 0.60 - 0.25 = 0.35.$$

$$f(0) = P(X=0) = F(0) - F(-1) = 0.90 - 0.60 = 0.30,$$

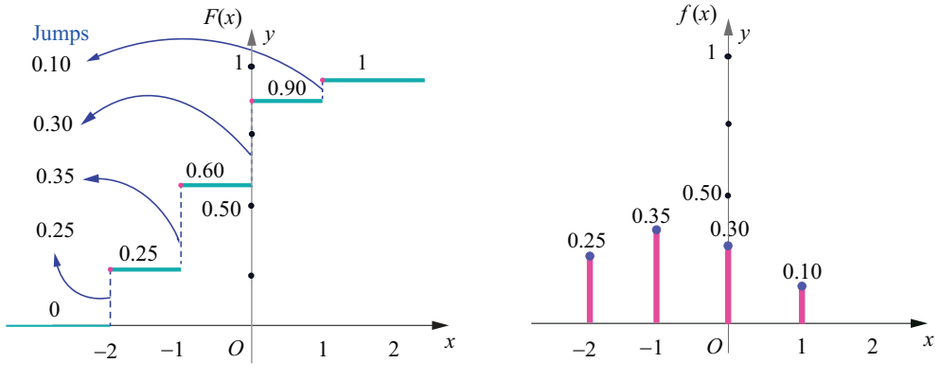
$$f(1) = P(X=1) = F(1) - F(0) = 1 - 0.90 = 0.10.$$

సంభావ్యత ద్రవ్యరాశి ప్రమేయము

x	-2	-1	0	1
$f(x)$	0.25	0.35	0.30	0.10

విభాజన ప్రమేయము $F(x)$ అనునది $x=-2, -1, 0,$ మరియు 1 వద్ద మార్పుచెందును. మార్పులు క్రమముగా 0.25, 0.35, 0.30, మరియు 0.1 పై పట్టికలో చూపబడినది.

ఈ మార్పులు సంభావ్యత ద్రవ్య ప్రమేయమును నిర్ణయించును.



విభాజన ప్రమేయము $F(x)$ మరియు ఒక్కొక్క x_i వద్ద మార్పులు

సంభావ్యత ద్రవ్య ప్రమేయము $f(x)$

పటము. 11.10

(i) $$P(X<0) = \sum_{-\infty}^{-1} P(X=x) = P(X=-2) + P(X=-1) = 0.25 + 0.35 = 0.60.$$

(ii) $$P(X \geq -1) = \sum_{-1}^{1} P(X=x) = P(X=-1) + P(X=0) + P(X=1) = 0.35 + 0.30 + 0.10 = 0.75$$

ఉదాహరణ 11.10

యాదృచ్ఛిక చరరాశి X యొక్క సంభావ్యత ద్రవ్య ప్రమేయము క్రింది విధముగా ఉన్నది.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	k	$2k$	$6k$	$5k$	$6k$	$10k$

(i) $P(2<X<6)$ (ii) $P(2 \leq X < 5)$ (iii) $P(X \leq 4)$ (iv) $P(3<X)$ ను కనుగొనుము.

సాధన

ఇవ్వబడిన ప్రమేయము సంభావ్యత ద్రవ్య ప్రమేయము. కావున దాని సంభావ్యతల మొత్తము ఒకటి.

$\sum_x f(x) = 1.$

05_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_11.indd 205 23-01-2023 16:46:57

ఇచ్చిన వివరముల నుండి $k+2k+6k+5k+6k+10k=1$

$$30k=1 \Rightarrow k=\frac{1}{30}$$

కావున సంభావ్యత ద్రవ్య ప్రమేయము

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	$\frac{1}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{5}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{10}{30}$

(i) $P(2<X<6) = f(3)+f(4)+f(5)=\frac{6}{30}+\frac{5}{30}+\frac{6}{30}=\frac{17}{30}$.

(ii) $P(2\le X<5) = f(2)+f(3)+f(4)=\frac{2}{30}+\frac{6}{30}+\frac{5}{30}=\frac{13}{30}$.

(iii) $P(X\le 4) = f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=\frac{1}{30}+\frac{2}{30}+\frac{6}{30}+\frac{5}{30}=\frac{14}{30}$.

(iv) $P(3<X) = f(4)+f(5)+f(6)=\frac{5}{30}+\frac{6}{30}+\frac{10}{30}=\frac{21}{30}$.

అభ్యాసము 11.2

1. మూడు నిష్పాక్షిక నాణెములు ఒకదాని తర్వాత ఒకటి ఎగురవేయబడినవి. బొమ్మలు సంభవించు సంఖ్యకు సంభావ్యత ద్రవ్య పమేయమును కనుగొనుము.
2. ఆరు ముఖములు కలిగిన పాచికనందు ఒక ముఖమునందు '1', రెండు ముఖములలో '3' మిగిలిన మూడు ముఖములలో '5' ను గుర్తించబడెను. పాచిక రెండుసార్లు దొర్లించబడెను. రెండు సార్లు విసిరిన పాచిక యొక్క ముఖవిలువల మొత్తము X గా తీసుకొనినపుడు
   (i) సంభావ్యత ద్రవ్య ప్రమేయము (ii) సంచిత విభాజన ప్రమేయము
   (iii) $P(4\le X<10)$ (iv) $P(X\ge 6)$ లను కనుగొనుము.
3. నలుగురు పిల్లలు కలిగిన కుటుంబములలో అమ్మాయిల సంఖ్యకు సంభావ్యత ద్రవ్యరాశి ప్రమేయము మరియు సంచిత విభాజన ప్రమేయమును కనుగొనుము. అమ్మాయిల, అబ్బాయిల సంభావ్యతలు సమానం అని ఊహించుకొనవలెను.
4. విచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చరరాశి యొక్క ఖచ్చితమైన విలువలు 0, 1, మరియు 2. సంభావ్యత ద్రవ్యరాశి ప్రమేయమును క్రింది విధముగా నిర్వచించబడెను.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+1}{k}, & x=0,1,2 \text{ నకు}\\ 0 & \text{లేకపోతే}\end{cases}$$

   (i) k యొక్క విలువను (ii) సంచిత విభాజన ప్రమేయము (iii) $P(X\ge 1)$ ను కనుగొనుము.
5. సంచిత విభాజనముల ప్రమేయమును విచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చరరాశికి క్రింది విధముగా ఇవ్వబడెను.

$$F(x)=\begin{cases}0, & -\infty<x<-1\\ 0.15, & -1\le x<0\\ 0.35, & 0\le x<1\\ 0.60, & 1\le x<2\\ 0.85, & 2\le x<3\\ 1, & 3\le x<\infty\end{cases}$$

05_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_11.indd 206 23-01-2023 16:47:00

(*i*) సంభావ్యత విభాజనముల ప్రమేయము (*ii*) $P(X<1)$ మరియు (*iii*) $P(X\geq 2)$ లను కనుగొనుము.

6. యాదృచ్ఛిక చరరాశి X యొక్క సంభావ్యత ద్రవ్య ప్రమేయము క్రింద ఇవ్వబడినది.

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	k^2	$2k^2$	$3k^2$	$2k$	$3k$

(i) k యొక్క విలువ (ii) $P(2\leq X<5)$ (iii) $P(3<X)$ ను కనుగొనుము.

7. విచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చరరాశి యొక్క సంచిత విభాజన ప్రమేయము దిగువ ఇవ్వబడినది

$$F(x)=\begin{cases}0 & ,-\infty<x<0 \text{ అయిన}\\ \frac{1}{2} & ,0\leq x<1 \text{ అయిన}\\ \frac{3}{5} & ,1\leq x<2 \text{ అయిన}\\ \frac{4}{5} & ,2\leq x<3 \text{ అయిన}\\ \frac{9}{10} & ,3\leq x<4 \text{ అయిన}\\ 1 & ,4\leq x<\infty \text{ అయిన}\end{cases}$$

(i) సంభావ్యత ద్రవ్యరాశి ప్రమేయము (ii) $P(X<3)$ (iii) $P(X\geq 2)$ లను కనుగొనుము.

11.4 అవిచ్ఛిన్న విభాజనములు

ఈ విభాగము నందు క్రింది వాటిని నేర్చుకొనగలము.

(i) అవిచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చరరాశి

(ii) సంభావ్యత సాంద్రత ప్రమేయము

(iii) విభాజన ప్రమేయము (సంచిత విభాజన ప్రమేయము)

(iv) సంభావ్యత సాంద్రత ప్రమేయము నుండి విభాజన ప్రమేయమును కనుగొనుట

(v) విభాజన ప్రమేయము నుండి సంభావ్యత సాంద్రత ప్రమేయమును కనుగొనుట.

కొన్ని సందర్భములలో రాగి తీగనందు విద్యుత్తును కొలుచునప్పుడు లేదా విద్యుత్ బల్బు యొక్క జీవిత కాలమును గణించునప్పుడు వాస్తవ సంఖ్యలలోని ఏ విలువనైనా ఊహించగలిగితే, ఏ కొలతలోనైన ఖచ్చితత్వం సాధ్యమగును. ఈ కొలతను సూచించు యాదృచ్ఛిక చరరాశి అనునది అవిచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చరరాశి అగును. యాదృచ్ఛిక చరరాశి యొక్క వ్యాప్తి వాస్తవ సంఖ్య ఆ అంతరములోని అన్ని విలువలను ఇముడ్చుకొనును. వ్యాప్తిని వాస్తవ సంఖ్యల అవిచ్ఛిన్నముగా ఊహించగలము.

11.4.1 అవిచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చరరాశి యొక్క నిర్వచనము

నిర్వచనము 11.5 (అవిచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చరరాశి)

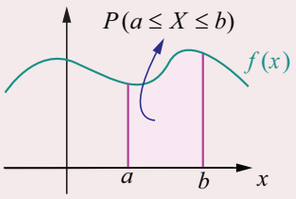
ప్రతిరూప ఆవరణమును S గా తీసుకొందాము మరియు యాదృచ్ఛిక చరరాశి $X:S\to R$, R నందు గల I సమితిలోని ఏ విలువనైనను తీసుకొనగలదు అని అనుకొనుము. I లోని ప్రతి x విలువ $P(X=x)=0$ గా ఉన్నప్పుడు X అనునది అవిచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చరరాశి అగును.

05_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_11.indd 207 23-01-2023 16:47:03

11.4.2 సంభావ్యత సాంద్రతా ప్రమేయము

నిర్వచనము 11.6 (సంభావ్యత సాంద్రతా ప్రమేయము)

$x \in [a,b]$ నందు సాధ్యమయ్యే ఫలితము ప్రతి $f(x)$ నకు అవిచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చరరాశి x యొక్క లక్షణము 1 గా ఉన్నప్పుడు ఋణాత్మకముకాని వాస్తవ విలువ ప్రమేయము $f(x)$ అనునది సంభావ్యత సాంద్రతా ప్రమేయమగును.



పటము. 11.11

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

సిద్ధాంతము 11.2 (నిరూపణ లేకుండా)

ఏదైనా యాదృచ్ఛిక అవిచ్ఛిన్న చరరాశి X క్రింది లక్షణములను తృప్తిపరచినప్పుడు మాత్రమే (ఉంటే అయినప్పుడు మాత్రమే) $f(.)$ అను ప్రమేయము సంభావ్యత సాంద్రతా ప్రమేయమగును.

(i) $f(x) \ge 0$, ప్రతి ఒక్క x విలువకు, మరియు (ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

గమనిక

పై నిర్వచనము ప్రకారము, X అవిచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చరరాశిగా ఉన్నప్పుడు

$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\,dx$, అనగా $P(X = a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0$

X ఏదైనా ఒక ప్రత్యేక విలువను తీసుకొనినప్పుడు సంభావ్యత విలువ సున్న అగును.

11.4.3 విభాజనా ప్రమేయము (సంచిత విభాజనా ప్రమేయము)

నిర్వచనము 11.7 (సంచిత విభాజనా ప్రమేయము)

$f(x)$ గా గల అవిచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చరరాశి X యొక్క విభాజనా ప్రమేయము లేదా సంచిత విభాజనా $f(x)$ ప్రమేయము అనునది $F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du, \quad -\infty < u < \infty$. అగును.

విశేషాంశము

(1) విచ్ఛిన్న సందర్భములో X యొక్క విలువ a గా ఉన్నప్పుడు, $f(a) = P(X = a)$ సంభావ్యత అవిచ్ఛిన్న సందర్భములో x యొక్క విలువ a అయిన, $x = a$ వద్ద $f(x)$ సంభావ్యత కాదు, అనగా $f(a) \ne P(X = a)$. , X అవిచ్ఛిన్న రకము అయిన $P(X = a) = 0$ కు $a \in \mathbb{R}$ అగును.

(2) యాదృచ్ఛిక చరరాశి అవిచ్ఛిన్నమైనప్పుడు, విచ్ఛిన్న పద్ధతిలో ఉపయోగించు సంకలనమునకు బదులు సమాకలనం వాడుదురు.

(3) అవిచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చరరాశికు $P(a < X < b) = P(a \le X < b) = P(a < X \le b) = P(a \le X \le b)$

(4) అవిచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చరరాశి యొక్క విభాజనా ప్రమేయమును అవిచ్ఛిన్న విభాజనా ప్రమేయమంటారు.

11.4.3.1 విభాజనా ప్రమేయము యొక్క ధర్మములు

అవిచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చరరాశి X యొక్క సంచిత విభాజనా ప్రమేయము క్రింది లక్షణములను తృప్తిపరచును.

(i) $0 \le F(x) \le 1$.

05_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_11.indd 208 23-01-2023 16:47:07

(ii) $F(x)$ అనునది వాస్తవ విలువ గల అవరోహణముకానిది అనగా $x < y$ అయిన యెడల $F(x) \le F(y)$

(iii) $F(x)$ అన్ని ప్రదేశములలో అవిచ్ఛిన్నముగా ఉండును.

(iv) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0$ మరియు $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = F(+\infty) = 1$.

(v) $P(X > x) = 1 - P(X \le x) = 1 - F(x)$.

(vi) $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$.

ఉదాహరణ 11.11

సాంద్రత ప్రమేయము $f(x) = \begin{cases} Cx^2 & 1 < x < 4 \\ 0 & \text{లేకపోతే,} \end{cases}$ గా ఉన్నప్పుడు స్థిరాంకము C విలువను కనుగొనుము. మరియు (i) $P(1.5 < X < 3.5)$ (ii) $P(X \le 2)$ (iii) $P(3 < X)$ లను గణించుము.

సాధన

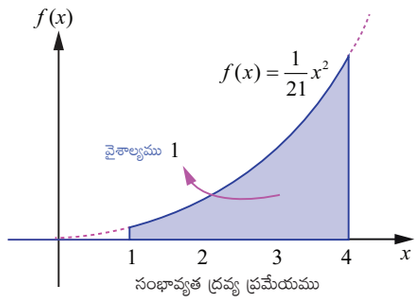
ఇవ్వబడిన ప్రమేయము సంభావ్యత సాంద్రత ప్రమేయమైనందున,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$$

$$\int_{-\infty}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{4} f(x)\,dx + \int_{4}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$$

ఇవ్వబడిన వివరముల ప్రకారము,

$$\int_{-\infty}^{1} 0\,dx + \int_{1}^{4} Cx^2\,dx + \int_{4}^{\infty} 0\,dx = 1.$$



పటము. 11.12

$$0 + C\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^4 + 0 = 1, \quad \Rightarrow C\left[\frac{64-1}{3}\right] = 1 \quad \Rightarrow 21C = 1 \quad \Rightarrow C = \frac{1}{21}.$$

సంభావ్యత ద్రవ్య ప్రమేయము

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{21}x^2 & 1 < x < 4 \\ 0 & \text{లేకపోతే} \end{cases}$$

$f(x)$ అవిచ్ఛిన్నమైనందున, X యొక్క ఏ ప్రత్యేక విలువకైనను సంభావ్యత సున్న. అందువలన, అవిచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చరరాశి యొక్క గుర్తులు $<$ ని $\le$ గాను మరియు $>$ ని $\ge$ గాను మార్చబడును. (ఒకదానినైనను లేదా రెండింటిని)

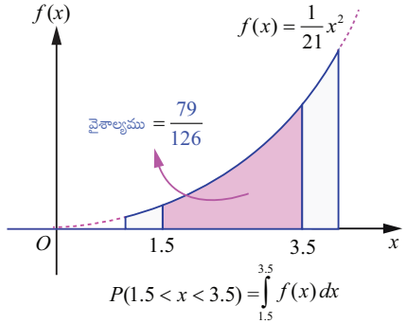
(i) $P(1.5 < X < 3.5) = P(1.5 \le X < 3.5) = P(1.5 < X \le 3.5) = P(1.5 \le X \le 3.5)$

కావున

$$P(1.5 < X < 3.5) = \int_{1.5}^{3.5} f(x)\,dx = \frac{1}{21}\int_{1.5}^{3.5} x^2\,dx$$

$$= \frac{1}{21}\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{1}{21}\left(\frac{(3.5)^3 - (1.5)^3}{3}\right)$$

$$= \frac{79}{126}.$$



పటము. 11.13

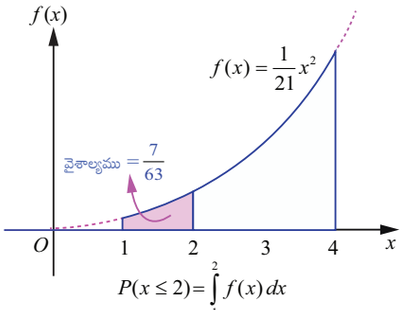
05_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_11.indd 209 23-01-2023 16:47:12

(ii) $P(X \le 2) = \int_{-\infty}^{2} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{2} f(x)\,dx$

కావున

$$P(X \le 2) := 0 + \frac{1}{21}\int_{1}^{2} x^2\,dx = \frac{1}{21}\left(\frac{x^3}{3}\right)_1^2$$

$$= \frac{1}{21}\left(\frac{2^3 - 1^3}{3}\right) = \frac{7}{63}.$$

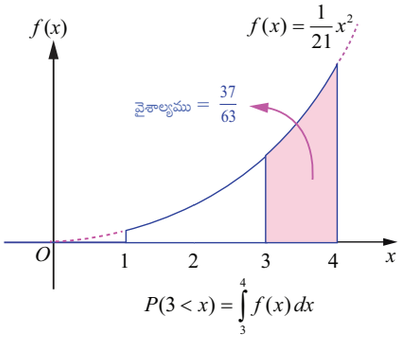


పటము. 11.14

(iii) $P(3 < X) = \int_{3}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{3}^{4} f(x)\,dx + \int_{4}^{\infty} f(x)\,dx$

$$= \frac{1}{21}\int_{3}^{4} x^2\,dx + 0 = \frac{1}{21}\left(\frac{x^3}{3}\right)_3^4.$$

$$= \frac{1}{21}\left(\frac{4^3 - 3^3}{3}\right) = \frac{37}{63}$$



పటము. 11.15

11.4.4 సంభావ్యత సాంద్రతా ప్రమేయము నుండి విభాజనా ప్రమేయము

అవిచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చరరాశి X యొక్క సంభావ్యత ద్రవ్య ప్రమేయము మరియు సంచిత విభాజనా ప్రమేయము (లేదా విభాజనా ప్రమేయము) రెండును X యొక్క అన్ని సంభావ్యత విషయములను కలిగియుండును. X యొక్క సంభావ్యతా విభాజనమును రెండింటిలో ఏ ఒక్కదాని ద్వారానైనను కనుగొనగలము. అవిచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చరరాశి X యొక్క విభాజనా ప్రమేయము $f(x)$ ను X యొక్క సంభావ్యత సాంద్రతా ప్రమేయము $f(x)$ నుండి కనుగొను పద్ధతులను అభ్యసిస్తాము. మరియు విపర్యయముగాను అభ్యసిస్తాము.

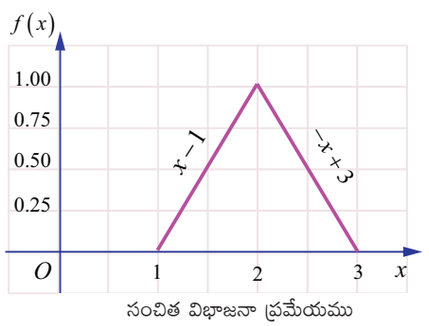
ఉదాహరణ 11.12

యాదృచ్ఛిక చరరాశి X యొక్క సంభావ్యత సాంద్రతా ప్రమేయము $f(x)$ క్రింద ఇవ్వబడినది.

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & 1 \le x < 2 \\ -x + 3, & 2 \le x < 3 \\ 0 & \text{లేకపోతే} \end{cases}$$

(i) విభాజనా ప్రమేయము $F(x)$

(ii) $P(1.5 \le X \le 2.5)$ ను కనుగొనుము.



సంచిత విభాజనా ప్రమేయము

పటము. 11.16

సాధన

(i) నిర్వచనము ప్రకారము $F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$

$x < 1$ గా ఉన్నప్పుడు, $F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,du = 0$.

05_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_11.indd 210 23-01-2023 16:47:15

$1 \le x < 2$ గా ఉన్నప్పుడు $F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{1} 0\,du + \int_{1}^{x} (u-1)\,du$

$$= 0 + \left[\frac{(u-1)^2}{2}\right]_1^x = \frac{(x-1)^2}{2}$$

$2 \le x < 3$ గా ఉన్నప్పుడు, $F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{1} 0\,du + \int_{1}^{2} (u-1)\,du + \int_{2}^{x} (3-u)\,du$

$$= 0 + \left[\frac{(u-1)^2}{2}\right]_1^2 + \left[-\frac{(3-u)^2}{2}\right]_2^x$$

$$= \frac{1^2-0}{2} + \frac{1-(3-x)^2}{2} = 1 - \frac{(3-x)^2}{2}$$

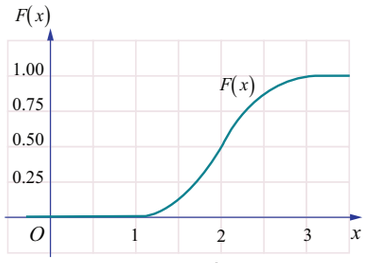
$x \ge 3$ గా ఉన్నప్పుడు, $F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{1} 0\,du + \int_{1}^{2} (u-1)\,du + \int_{2}^{3} (3-u)\,du + \int_{3}^{x} 0\,du$

$$= \int_{-\infty}^{1} 0\,du + \int_{1}^{2} (u-1)\,du + \int_{2}^{3} (3-u)\,du + \int_{3}^{x} 0\,du$$

$$= 0 + \left[\frac{(u-1)^2}{2}\right]_1^2 + \left[-\frac{(3-u)^2}{2}\right]_2^3 + 0$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 1 \\ \dfrac{(x-1)^2}{2}, & 1 \le x < 2 \\ 1 - \dfrac{(3-x)^2}{2}, & 2 \le x < 3 \\ 1 & 3 \le x < \infty \end{cases}$$



విభాజనా ప్రమేయము

పటము. 11.17

(ii) $P(1.5 \le X \le 2.5) = F(2.5) - F(1.5)$

$$= \left(1 - \frac{(3-2.5)^2}{2}\right) - \left(\frac{(1.5-1)^2}{2}\right)$$

$$= \frac{1.75 - 0.25}{2} = 0.75$$

లేదా

$$P(1.5 \le X \le 2.5) = \int_{1.5}^{2.5} f(x)\,dx = \int_{1.5}^{2} (x-1)\,dx + \int_{2}^{2.5} (-x+3)\,dx = 0.75.$$

05_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_11.indd 211 23-01-2023 16:47:20

సరిచూచుట: (i) $F(x)$ ప్రతిచోట అవిచ్ఛిన్నముగా ఉండుట.

(ii) పటము 11.16, నుండి త్రిభుజ వైశాల్యము $=\frac{1}{2}bh=1$.

11.4.5 సంభావ్యత విభాజనా ప్రమేయము నుండి సంభావ్యత సాంద్రతా ప్రమేయము

యాదృచ్ఛిక చరరాశి X యొక్క విభాజనాల ప్రమేయము $F(x)$ నుండి సంభావ్యత ద్రవ్య ప్రమేయము ను పొందు $f(x)$ పద్ధతిని తెలుసుకొనుట.

అవిచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చరరాశి X నకు $F(x)$ అనునది విభాజనా ప్రమేయము. సంభావ్యత ద్రవ్య ప్రమేయము $f(x)$ క్రింది విధముగా ఇవ్వబడినది. $f(x)=\frac{dF(x)}{dx}=F'(x)$, అవకలనం వ్యవస్థితమయినప్పుడు.

ఉదాహరణ 11.13

యాదృచ్ఛిక చరరాశి X యొక్క విభాజనా ప్రమేయము $F(x)$ క్రింది విధముగా ఇవ్వబడినది,

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x, & 0\le x<1\\ 1, & 1\le x\end{cases}$$ అయిన

(i) సంభావ్యత సాంద్రతా ప్రమేయము $f(x)$ (ii) $P(0.2\le X\le 0.7)$ ను కనుగొనుము.

సాధన

(i) $F(x)$ ని, $f(x)$ యొక్క అవిచ్ఛిన్న బిందువుల వద్ద, x దృష్ట్యా అవకలనము చేయునప్పుడు,

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & 0\le x<1\\ 0, & x\ge 1\end{cases}$$

సంభావ్యత సాంద్రతా ప్రమేయము $f(x)$, $x=0$ వద్ద లేదా $x=1$ వద్ద అవిచ్ఛిన్నము కాదు. $f(0)$ మరియు $f(1)$ ని ఏ పద్ధతిలోనైన నిర్వచించగలము. $f(0)=1$ మరియు $f(1)=0$ ని ఎంచుకొనిన, సంభావ్యత సాంద్రతా ప్రమేయము $f(x)$ అనునది

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x<1\\ 0, & \text{లేకపోతే}\end{cases}$$

(ii) $$P(0.2\le X\le 0.7)=F(0.7)-F(0.2)$$
$$=0.7-0.2=0.5$$

లేదా

$$P(0.2\le X\le 0.7)=\int_{0.2}^{0.7}f(x)\,dx=\int_{0.2}^{0.7}1\,dx=0.5.$$

విశేషాంశము

నిర్వచనము ప్రకారము, $P(X\le x)=F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(u)\,du$. $P(a<X<b)$ యొక్క సంభావ్యత $F(x)$ లేదా $f(x)$ ద్వారా కనుగొనగలము.

05_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_11.indd 212 23-01-2023 16:47:26

గమనిక

పైన తెలిపిన సంభావ్యత సాంద్రతా ప్రమేయమును, క్రిందివిధముగా కూడా నిర్వచించగలము.

$f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & \text{లేకపోతే}\end{cases}$ లేదా $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x\le 1\\ 0, & \text{లేకపోతే}\end{cases}$ లేదా $f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{లేకపోతే}\end{cases}$

ఉదాహరణ 11.14

యాదృచ్ఛిక చరరాశి X యొక్క సంభావ్యత సాంద్రతా ప్రమేయము $f(x)=\begin{cases}k & 1\le x\le 5\\ 0 & \text{లేకపోతే}\end{cases}$ అని ఇవ్వబడినది,

(i) విభాజనా ప్రమేయము (ii) $P(X<3)$ (iii) $P(2<X<4)$ (iv) $P(3\le X)$ లను కనుగొనుము.

సాధన

$f(x)$ అనునది సంభావ్యత సాంద్రతా ప్రమేయమయినందున, $f(x)\ge 0$ మరియు $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1$.

అనగా $\int_{-\infty}^{1} 0\,dx+\int_{1}^{5} k\,dx+\int_{5}^{\infty} 0\,dx=1$.

$$0+k\left(x\right)_1^5+0=1\Rightarrow 4k=1\Rightarrow k=\frac{1}{4}.$$

సంభావ్యత సాంద్రతా ప్రమేయము

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & 1\le x\le 5\\ 0, & \text{లేకపోతే}\end{cases}$$

(i) విభాజనా ప్రమేయము

విభాజనాల ప్రమేయము $F(x) = P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$.

$x<1$ గా ఉన్నప్పుడు, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du=\int_{-\infty}^{x} 0\,du=0$.

$1\le x<5$ గా ఉన్నప్పుడు, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du=\int_{-\infty}^{1} 0du+\int_{1}^{x}\frac{1}{4}du=\frac{1}{4}(x-1)$.

$x\ge 5$ గా ఉన్నప్పుడు, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du=\int_{-\infty}^{1} 0du+\int_{1}^{5}\frac{1}{4}du+\int_{5}^{x} 0\,du=1$.

కావున $F(x) = \begin{cases}0, & x<1\\ \frac{x-1}{4}, & 1\le x\le 5\\ 1, & x>5.\end{cases}$

(ii) $P(X<3) = P(X\le 3)=F(3)=\frac{3-1}{4}=\frac{1}{2}$ ($F(x)$ అవిచ్ఛిన్నమైనందున).

(iii) $P(2<X<4) = P(2\le X\le 4)=F(4)-F(2)=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

(iv) $P(3\le X) = P(X\ge 3)=1-P(X<3)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

05_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_11.indd 213 23-01-2023 16:47:33

ఉదాహరణ 11.15

X అను యాదృచ్ఛిక చరరాశి, విద్యుత్ ఉపకరణము యొక్క జీవితకాలమును సూచించిన యెడల, సంభావ్యత సాంద్రతా ప్రమేయము

$$f(x)=\begin{cases} k\,e^{-2x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$$

నకు (i) k విలువ (ii) విభాజనా ప్రమేయము (iii) $P(X<2)$

(iv) X యొక్క కనీస కొలత 4 అయిన సంభావ్యత ని కనుగొనుము. (v) $P(X=3)$

సాధన

(i) $f(x)$ సంభావ్యత సాంద్రతా ప్రమేయమయినందున, $f(x)\ge 0$ మరియు $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1$

అనగా, $\int_{-\infty}^{0} 0\,dx+\int_{0}^{\infty} k\,e^{-2x}dx = 1.$

$$0+k\left(\frac{e^{-2x}}{-2}\right)_0^{\infty} = 1 \Rightarrow k\left(\frac{e^{-\infty}-e^{0}}{-2}\right)=1 \Rightarrow k=2.$$

సంభావ్యత సాంద్రతా ప్రమేయము,

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x>0 \\ 0 \quad , & x\le 0 \end{cases}$$

(ii) విభాజనా ప్రమేయము

నిర్వచనము ప్రకారము, $F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$

$x\le 0$ గా ఉన్నప్పుడు, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du=\int_{-\infty}^{x} 0\,du=0.$

$x>0$ గా ఉన్నప్పుడు, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du=\int_{-\infty}^{0} 0du+\int_{0}^{x} 2e^{-2u}du=2\left(\frac{e^{-2u}}{-2}\right)_0^{x}=1-e^{-2x}.$

ఇందుమూలముగా $F(x) = \begin{cases} 0 \quad , & x\le 0 \\ 1-e^{-2x}, & x>0 \end{cases}$

(iii) $P(X<2)=P(X\le 2)=F(2)=1-e^{-2\times 2}=1-e^{-4}$ ($F(x)$ అవిచ్ఛిన్నమైనందున).

(iv) X యొక్క కనీస కొలత 4 అయినప్పుడు సంభావ్యత

$P(X\ge 4)=1-P(X<4)=1-F(4)=1-(1-e^{-2\times 4})=e^{-8}.$

(v) అవిచ్ఛిన్న పద్ధతిలో, $x=a$ వద్ద, $f(x)$ నకు, సంభావ్యత కాదు, అనగా $x=a$ వద్ద $f(x)$ అనునది $P(X=a)$ నకు సమముకాదు. X అనునది అవిచ్ఛిన్న రకమైనప్పుడు $P(X=a)=0$, $a\in\mathbb{R}$ కావున $P(X=3)=0$.

05_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_11.indd 214 23-01-2023 16:47:39

అభ్యాసము 11.3

1. X యొక్క సంభావ్యత సాంద్రతా ప్రమేయము, $f(x)=\begin{cases} k\,x\,e^{-2x}, & x>0 \\ 0 & , x\le 0 \end{cases}$.
అయిన k విలువను కనుగొనుము.

2. X సంభావ్యత సాంద్రతా ప్రమేయము, $f(x)=\begin{cases} x & , 0<x<1 \\ 2-x & , 1\le x<2 \\ 0 & , \text{లేకపోతే} \end{cases}$.

(i) $P(0.2\le X<0.6)$ (ii) $P(1.2\le X<1.8)$ (iii) $P(0.5\le X<1.5)$ లను కనుగొనుము.

3. ప్రతిరొజు పాలదుకాణము నందు విక్రయించు పాలకలత కనిష్ఠము 200 లీటర్లు మరియు గరిష్ఠము 600 లీటర్లును అని దాని సంభావ్యత సాంద్రతా ప్రమేయమునందు చూపబడినది.

$$f(x)=\begin{cases} k & 200\le x\le 600 \\ 0 & \text{లేకపోతే} \end{cases}$$

(i) k యొక్క విలువ (ii) విభాజనా ప్రమేయము

(iii) ప్రతిరోజు 300 లీటర్ల నుండి 500 లీటర్ల వరకు విక్రయించు సంభావ్యత విలువలను కనుగొనుము.

4. X యొక్క సంభావ్యత సాంద్రతా ప్రమేయము ఇవ్వబడినది, $f(x)=\begin{cases} k\,e^{-\frac{x}{3}}, & x>0 \\ 0 & , x\le 0 \end{cases}$

(i) k యొక్క విలువ (ii) విభాజనా ప్రమేయము (iii) $P(X<3)$

(iv) $P(5\le X)$ (v) $P(X\le 4)$ లను కనుగొనుము.

5. యాదృచ్ఛిక చరరాశి X యొక్క సంభావ్యత సాంద్రత ప్రమేయము $f(x)$ క్రింది విధముగా ఉన్నది.

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & -1\le x<0 \\ -x+1, & 0\le x<1 \\ 0 & \text{లేకపోతే} \end{cases}$$

(i) విభాజనాల ప్రమేయము $F(x)$ (ii) $P(-0.5\le X\le 0.5)$ లను కనుగొనుము.

6. యాదృచ్ఛిక చరరాశి X యొక్క విభాజనా ప్రమేయము $F(x)$ క్రింది విధముగా ఇవ్వబడినది.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & -\infty<x<0 \\ \frac{1}{2}\left(x^2+x\right), & 0\le x<1 \\ 1, & 1\le x<\infty \end{cases}$$

అయిన (i) సంభావ్యత సాంద్రతా ప్రమేయము $f(x)$ (ii) $P(0.3\le X\le 0.6)$ లను కనుగొనుము.

11.5 గణితపరంగా అంచనా (Mathematical Expectation)

యాదృచ్ఛిక చరరాశి యొక్క ముఖ్యమైన లక్షణములలో ఒకటి దాని యొక్క అంచనా. అంచనా యొక్క పర్యాయపదాలు అంచనా విలువ, అంకమధ్యమము మరియు మొదటి ప్రాముఖ్యత.

సంఖ్యాసగటు యొక్క సంప్రదాయ ఆలోచన నుండి గణిత అంచనా నిర్వచనము వచ్చినది.

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ అను n సంఖ్యల సంఖ్యా సగటు

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}.$$

05_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_11.indd 215 23-01-2023 16:47:43

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ అను n సంఖ్యల పూర్తిసేకరణను ఒక విలువతో సంగ్రహించుటకు లేదా (వర్గీకరించు)టకు సగటు ఉపయోగపడును.

మాదిరి ఉదాహరణ 11.7

6, 2, 5, 5, 2, 6, 2, −4, 1, 5 అను పది సంఖ్యలను తీసుకొనుము.

$$\text{సగటు } \frac{6+2+5+5+2+6+2-4+1+5}{10}=3.$$

యాదృచ్ఛిక చరరాశి X యొక్క విలువలు 6, 2, 5, 5, 2, 6, 2, −4, 1, 5 గా ఉన్నప్పుడు, సంభావ్యత ద్రవ్యరాశి ప్రమేయము క్రింది విధముగా ఇవ్వబడినది.

x	-4	1	2	5	6
$üü(\quad=\quad)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$

పైన ఇవ్వబడిన సగటు యొక్క లెక్కింపునకు క్రింది విధముగా తిరిగి వ్రాయగలము

$$-4\times\frac{1}{10}+1\times\frac{1}{10}+2\times\frac{3}{10}+5\times\frac{3}{10}+6\times\frac{2}{10}=3.$$

యాదృచ్ఛిక చరరాశి యొక్క ప్రతి విలువను దాని యొక్క సంభావ్యతతో లబ్ధముల మొత్తము నుండి ఆ యాదృచ్ఛిక చరరాశి యొక్క సరాసరి లేదా అంచనా విలువను పొందవచ్చును అని పై వివరణ సూచిస్తున్నది.

$$\text{సరాసరి } = \sum (x \text{ యొక్క విలువ}) \times \text{సంభావ్యత}$$

యాదృచ్ఛిక చరరాశి విచ్ఛిన్నమైనప్పుడు ఇది సరిపడును. అవిచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చరరాశి విషయములో గణిత పరంగా అంచనాను సంకలనములో సమకాలనులచేత మార్చుచేసిన సరియగును.

యాదృచ్ఛిక చరరాశి X యొక్క సంభావ్యత విభాజనములను సంగ్రహించుటకు రెండు రాశులు ఎక్కువగా ఉపయోగపడును. సాంఖ్యకశాస్త్రం పరంగా కేంద్రీయ స్థాన విలువ అనునది మరొకటి, సంభావ్యత విభాజనం యొక్క విస్తరణ లేదా (వైవిద్యము). సంభావ్యత విభాజనము నందు కేంద్రీయ స్థాన విలువ యొక్క కొలత అంకమధ్యమము మరియు విభాజనములో విస్తరణ లేదా (వైవిద్యము) యొక్క కొలత విస్తృతి అగును. కాని ఈ రెండు కొలతలు సంభావ్యత విభాజనందు ఏకైకముగా గర్తించలేదు. అనగా, రెండు వేర్వేరు విభాజనాలకు ఒకే అంకమధ్యమము మరియు విస్తృతి ఉండదు. ఈ కొలతలు సరియైనవి మరియు సంభావ్యత విభాజనమును అభ్యసించుటకు ఉపయోగపడును.

11.5.1 అంకమధ్యమము

నిర్వచనము 11.8 (అంకమధ్యమము)

యాదృచ్ఛిక చరరాశి X యొక్క సంభావ్యత ద్రవ్యరాశి లేదా సాంద్రత ప్రమేయము $f(x)$ అంచనా విలువ లేదా అంకమధ్యమము లేదా X యొక్క గణిత నిరీక్షణను $E(X)$ లేదా μ గా గుర్తించబడును.

$$E(X)=\begin{cases}\sum_x x\,f(x), & X \text{ వివిక్తమైనప్పుడు}\\ \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx, & X \text{ అవిచ్ఛిన్నమైనప్పుడు}\end{cases}$$

05_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_11.indd 216 23-01-2023 16:47:45

వాస్తవంగా అంచనా విలువ, యాదృచ్ఛిక చరరాశి తీసుకొను సాధారణ విలువకాదు. ఇది ఒక యాదృచ్ఛిక చరరాశి యొక్క అంచనా విలువను వివరించుటకు తరచుగా ఉపయోగపడును. ఇది ఒక ప్రయోగమును స్వతంత్రముగా చాలాసార్లు పునరావృతమయిన చరరాశి యొక్క దీర్ఘకాల సరాసరి విలువ అగును.

సిద్ధాంతము 11.3 (నిరూపణ లేకుండా)

యాదృచ్ఛిక చరరాశి X యొక్క సంభావ్యత ద్రవ్యరాశి లేదా సాంద్రత ప్రమేయము $f(x)$. $g(X)$ ప్రమేయము యొక్క గణిత నిరీక్షణ, ఒక క్రొత్త యాదృచ్ఛిక చరరాశి

$$E(g(X)) = \begin{cases} \sum_{x} g(x) f(x), & g(x) \text{ వివిక్తమైనప్పుడు} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\, dx, & g(x) \text{ అవిచ్ఛిన్నమైనప్పుడు} \end{cases}$$

పై సిద్ధాంతము నుండి పొందు $g(X) = x^k$ యొక్క అంచనా (నిరీక్షణ) విలువను యాదృచ్ఛిక చరరాశి X యొక్క మూలంతో k వ ప్రాముఖ్యత అని అంటారు.

$$E(X^k) = \begin{cases} \sum_{x} x^k f(x), & X \text{ వివిక్తమైనప్పుడు} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\, dx, & X \text{ అవిచ్ఛిన్నమైనప్పుడు} \end{cases}$$

గమనిక

$k = 0$, అయిన, నిర్వచనము ప్రకారము

$$E(1) = \begin{cases} \sum_{x} f(x) = 1, & X \text{ వివిక్తమైనప్పుడు} \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1, & X \text{ అవిచ్ఛిన్నమైనప్పుడు} \end{cases}$$

11.5.2 విస్తృతి

విస్తృతి అనునది సాంఖ్యాక కొలత. ఇది దత్తాంశము నుండి గణించిన విలువ (లేదా) సరాసరి విలువ నుండి ఏ విధముగా మార్పుచెందినదని తెలియజేయును. గణితపరంగా, విస్తృతి అనునది అంకమధ్యమము నుండి దత్తాంశములోని విలువలకు గల విచరనముల వర్గముల సరాసరి అగును.

నిర్వచనము 11.9 (విస్తృతి)

యాదృచ్ఛిక చరరాశి X యొక్క విస్తృతి $\text{Var}(X)$ లేదా $V(X)$ లేదా σ^2 (లేదా σ_x^2)) గా సూచించబడును.

$$V(X) = E(X - E(X))^2 = E(X - \mu)^2$$

విస్తృతి యొక్క వర్గమూలము క్రమవిచరనముగా పిలువబడును. అనగా క్రమవిచరనము $\sigma = \sqrt{V(X)}$. యాదృచ్ఛిక చరరాశి యొక్క విస్తృతి మరియు క్రమవిచరనము ఋణాత్మకము కానివి (లేదా) ధనాత్మకము.

05_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_11.indd 217 23-01-2023 16:47:47

11.5.3 గణిత నిరీక్షణ మరియు విస్తృతి యొక్క ధర్మములు

(i) $E(aX+b)=aE(X)+b$, a , b అనునవి స్థిరసంఖ్యలు.

నిరూపణ

X అనునది వివక్త యాదృచ్ఛిక చరరాశి

$$E(aX+b) = \sum_{i=1}^{\infty}(ax_i+b)f(x_i) \qquad \text{(నిర్వచనము నుండి)}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\left(ax_i f(x_i)+bf(x_i)\right)$$

$$= a\sum_{i=1}^{\infty}x_i f(x_i)+b\sum_{i=1}^{\infty}f(x_i)$$

$$= aE(X)+b(1) \qquad \left(\because \sum_{i=1}^{\infty}f(x_i)=1\right)$$

$$E(aX+b) = aE(X)+b\,.$$

ఇదేవిధముగా X అవిచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చరరాశిగా ఉన్నప్పుడు, సంకలనమునకు బదులుగా సమాకలనమును మార్చి నిరూపించగలము.

ఉపపత్తి 1:	$E(aX) = aE(X)$ ($b=0$ గా ఉన్నప్పుడు)
ఉపపత్తి 2:	$E(b) = b$ ($a=0$ గా ఉన్నప్పుడు)

(ii) $Var(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2$

నిరూపణ

$$E(x) = \mu$$

$$Var(X) = E(X-\mu)^2$$

$$= E(X^2-2X\mu+\mu^2)$$

$$= E(X^2)-2\mu E\left(X\right)+\mu^2 \qquad (\mu \text{ ఒక స్థిరాంకము})$$

$$= E(X^2)-2\mu\mu+\mu^2 = E(X^2)-\mu^2$$

$$Var(X) = E(X^2)-\left(E(X)\right)^2$$

యాదృచ్ఛిక చరరాశి X యొక్క విస్తృతి గణించుటకు సూత్రము

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}\,(X) = E(X^2)-\left(E(X)\right)^2$$

(iii) $Var(aX+b)=a^2Var(X)$, a మరియు b లు స్థిరసంఖ్యలు

నిరూపణ

$$Var(aX+b) = E\left((aX+b)-E(aX+b)\right)^2$$

$$= E\left(aX+b-aE(X)-b)\right)^2$$

$$= E\left(aX-aE(X)\right)^2$$

05_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_11.indd 218 23-01-2023 16:47:54

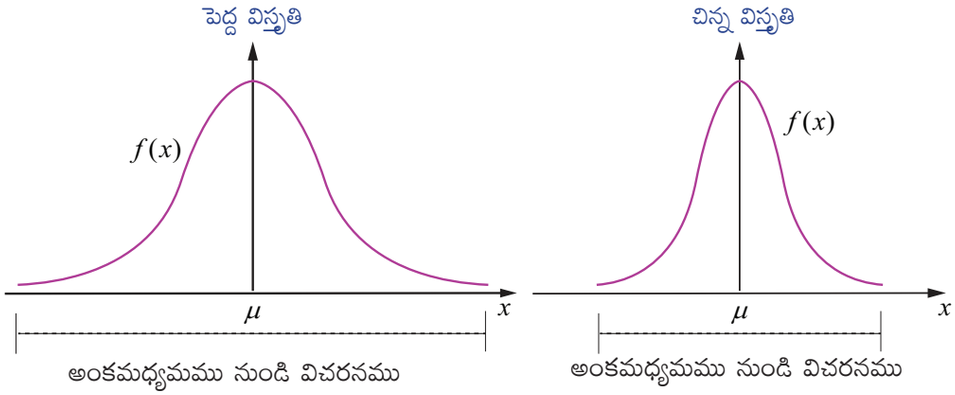
$$= E\left(a\left(X - E(X)\right)\right)^2$$

$$= a^2 E\left(X - E(X)\right)^2.$$

నిరూపణ $\quad Var(aX+b) = a^2 Var(X)$

ఉపపత్తి 3:	$V(aX) = a^2 V(X)$	($b = 0$ గా ఉన్నప్పుడు)
ఉపపత్తి 4:	$V(b) = 0$	($a = 0$ గా ఉన్నప్పుడు)

అంకమధ్యమము μ నుండి యాదృచ్ఛిక చరరాశి విలువలకు గల విచరనమునకు సంబంధించిన సమాచారమును విస్తృతి అందిస్తుంది. ఒక చిన్న σ^2 విలువ యాదృచ్ఛిక విలువలు అంకమధ్యమమునకు సమీపంలో ఉంటుందని తెలియజేస్తుంది. ఇదేవిధముగా ఒక పెద్ద σ^2 విలువ యాదృచ్ఛిక విలువలు అంకమధ్యమము నుండి దూరముగా చెల్లాచెదురుగా విస్తరించి ఉంటుందని తెలియజేస్తుంది.



ఒకే అంకమధ్యమములో వేరు వేరు విస్తృతులు

పటము. 11.18

పై పటము ఒకే అంకమధ్యమము వేరే విస్తృతులు గల రెండు అవిచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చరరాశుల pdf యొక్క గంటాకార వక్రాలను సూచిస్తున్నది.

ఉదాహరణ 11.16

క్రింద ఇవ్వబడిన $f(x)$ సంభావ్యత ద్రవ్యరాశి ప్రమేయమును చూపుచున్నది.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	c^2	$2c^2$	$3c^2$	$4c^2$	c	$2c$

(i) c యొక్క విలువను (ii) అంకమధ్యము మరియు విస్తృతి విలువను కనుగొనుము.

సాధన

(i) $f(x)$ సంభావ్యత ద్రవ్యరాశి ప్రమేయమైనందున x యొక్క అన్ని విలువలకు, $f(x) \geq 0$ మరియు $\sum_x f(x) = 1$.

కావున, $\quad \sum_x f(x) = 1$

$$c^2 + 2c^2 + 3c^2 + 4c^2 + c + 2c = 1$$

$$c = \frac{1}{5} \text{ లేదా } -\frac{1}{2}.$$

05_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_11.indd 219 23-01-2023 16:47:58

x యొక్క అన్ని విలువలకు, $f(x) \geq 0$ అయినందున c యొక్క సాధ్యమైన విలువ $\frac{1}{5}$ కావున, సంభావ్యత ద్రవ్య ప్రమేయము

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

(ii) అంకమధ్యమము, విస్తృతిని కనుగొనుటకు క్రింది పట్టికను ఉపయోగించగలము.

x	$f(x)$	$x\,f(x)$	$x^2 f(x)$
1	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$
2	$\frac{2}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{8}{25}$
3	$\frac{3}{25}$	$\frac{9}{25}$	$\frac{27}{25}$
4	$\frac{4}{25}$	$\frac{16}{25}$	$\frac{64}{25}$
5	$\frac{1}{5}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{25}{5}$
6	$\frac{2}{5}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{72}{5}$
	$\sum f(x) = 1$	$\sum x\,f(x) = \frac{115}{25}$	$\sum x^2 f(x) = \frac{585}{25}$

అంకమధ్యమము : $E(X) = \sum x\,f(x) = \frac{115}{25} = 4.6$

విస్తృతి : $V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = \sum x^2 f(x) - \left(\sum x\,f(x)\right)^2$

$$= \frac{585}{25} - \left(\frac{115}{25}\right)^2 = 23.40 - 21.16 = 2.24$$

కావున అంకమధ్యమము 4.6 మరియు విస్తృతి 2.24 అగును. ■

ఉదాహరణ 11.17

తెల్లని బంతులు 8 మరియు నల్లని బంతులు 4గా గల పాత్ర నుండి యాదృచ్ఛికముగా రెండు బంతులు ఎంపిక చేయబడెను. ఒక్కొక్క నల్లని బంతిని ఎంపిక చేసిన, ₹ 20 ని పొందగలము. మరియు తెల్లని బంతినిఎంపిక చేసిన ₹ 10 ను కోల్పోగలము. గెలుపొందు అంచనా విలువను మరియు విస్తృతిని కనుగొనుము.

సాధన

గెలుపొందు డబ్బును X గా తీసుకొనగలము. ఎంపికకు సాధ్యమయ్యే ఘటనలు (i) రెండు బంతులు నల్లనివి (ii) ఒకటి నల్లని, మరొకటి తెల్లని (iii) రెండు బంతులు తెల్లనివి. X యాదృచ్ఛిక చరరాశిని క్రింది విధముగా నిర్వచించగలము.

05_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_11.indd 220 23-01-2023 16:48:05

X (రెండు బంతులు నల్లనివి) = ₹ 2(20) = ₹ 40

X (ఒకటి నల్లని ఇంకొకటి తెల్లని బంతి) = ₹ 20 – ₹ 10 = ₹10

X (రెండు బంతులు తెల్లనివి) = ₹ (–20) = – ₹ 20

అందువలన X తీసుకొను విలువలు 40,10 మరియు –20

మొత్తము బంతుల సంఖ్య $n = 12$

రెండు బంతులను ఎంపిక చేయుటకు పద్ధతుల మొత్తము $= \binom{12}{2} = \frac{12\times11}{1\times2} = 66$

రెండు నల్లని బంతులను ఎంపికచేయుటకు పద్ధతుల సంఖ్య $= \binom{4}{2} = 6$

ఒక నల్లని, ఒక తెల్లని బంతిని ఎంపిక చేయుటకు పద్ధతులు $= \binom{8}{1}\binom{4}{1} = 32$

రెండు తెల్లని బంతులను ఎంపికచేయుట కొరకు పద్ధతులు $= \binom{8}{2} = 28$

యాదృచ్ఛిక చరరాశి X యొక్క విలువలు	40	10	–20	మొత్తము
విలోమ ప్రతిబింబములందు మూలకముల సంఖ్య	6	32	28	66

సంభావ్యత ద్రవ్యరాశి ప్రమేయము

X	40	10	–20	మొత్తము
$f(x)$	$\frac{6}{66}$	$\frac{32}{66}$	$\frac{28}{66}$	1

అంకమధ్యమము:

$$E(X) = \sum x\,f(x) = 40\cdot\left(\frac{6}{66}\right)+10\cdot\left(\frac{32}{66}\right)+(-20)\cdot\left(\frac{28}{66}\right) = 0$$

గెలుపొందు అంచనా విలువ 0 అగును.

విస్తృతి:

$$E(X^2) = \sum x^2\,f(x) = 40^2\cdot\left(\frac{6}{66}\right)+10^2\cdot\left(\frac{32}{66}\right)+(-20)^2\cdot\left(\frac{28}{66}\right) = \frac{4000}{11}$$

$$\left(E(X)\right)^2 = 0^2 = 0$$

ఇది అందించునది, $V(X) = E(X^2)-\left(E(X)\right)^2 = \frac{4000}{11}-0 = \frac{4000}{11}$

అందువలన $E(X) = 0$ మరియు $\mathrm{Var}(X) = \frac{4000}{11}$.

05_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_11.indd 221 23-01-2023 16:48:10

ఉదాహరణ 11.18

యాదృచ్ఛిక చరరాశి X యొక్క సంభావ్యత సాంద్రతా ప్రమేయము ఇవ్వబడినది.

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\geq 0 \text{ నకు}\\ 0 & \text{లేకపోతే}\end{cases}$$

అంకమధ్యమము మరియు విస్తృతిని కనుగొనుము.

సాధన

ఇవ్వబడిన విభాజనములు అవిచ్ఛిన్నమని తెలియుచున్నది.

అంకమధ్యమము:

నిర్వచనము ప్రకారము, $\mu = E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx$

(విభాగ సమకలన సూత్రము లేదా బెర్నాలి సూత్రము ఉపయోగించవచ్చును.)

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\left(\lambda e^{-\lambda x}\right)dx+\int_{0}^{\infty} x\left(\lambda e^{-\lambda x}\right)dx$$

$$= 0+\lambda\int_{0}^{\infty} x\left(e^{-\lambda x}\right)dx$$

$$= 0+\lambda\left(\frac{\lfloor 1}{\lambda^2}\right)\left(\text{ధనాత్మక సంఖ్య } n \text{ కు గామా సమాకలనం, } \int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x}dx=\frac{\lfloor n}{\alpha^{n+1}} \text{ ఉపయోగించగా}\right)$$

$$= \frac{1}{\lambda}$$

విస్తృతి:

నిర్వచనము ప్రకారము, $E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\,f(x)\,dx$

(విభాగ సమకలన సూత్రము లేదా బెర్నాలి సూత్రము ఉపయోగించవచ్చును.)

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\left(\lambda e^{-\lambda x}\right)dx+\int_{0}^{\infty} x^2\left(\lambda e^{-\lambda x}\right)dx$$

$$= 0+\lambda\int_{0}^{\infty} x^2\left(e^{-\lambda x}\right)dx$$

$$= 0+\lambda\left(\frac{\lfloor 2}{\lambda^3}\right)=\frac{2}{\lambda^2} \quad \text{(ధనాత్మక వాస్తవసంఖ్యలకు, గామా సమాకలనము ద్వారా)}$$

$$\therefore Var(X) = E(X^2)-\left(E(X)\right)^2$$

$$= \frac{2}{\lambda^2}-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2=\frac{1}{\lambda^2}$$

అంకమధ్యమము $\frac{1}{\lambda}$ మరియు విస్తృతి $\frac{1}{\lambda^2}$.

అభ్యాసము 11.4

1. యాదృచ్ఛిక చరరాశి X యొక్క సంభావ్యత ద్రవ్యరాశి ప్రమేయము క్రింద ఇవ్వబడినది. వాటి అంకమధ్యమము మరియు విస్తృతిని కనుగొనుము.

05_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_11.indd 222 23-01-2023 16:48:14

(i) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{10} & x=2,5\\ \frac{1}{5} & x=0,1,3,4\end{cases}$ (ii) $f(x)=\begin{cases}\frac{4-x}{6} & x=1,\,2,\,3\end{cases}$

(iii) $f(x)=\begin{cases}2(x-1) & 1<x<<2\\ 0 & \text{లేకపోతే}\end{cases}$ (iv) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} & x>0 \text{ అయిన}\\ 0 & \text{లేకపోతే}\end{cases}$

2. నాలుగు ఎర్రని బంతులు మరియు మూడు నల్లని బంతులు గల పాత్ర నుండి యాదృచ్ఛికముగా ఒకదాని తర్వాత ఒకటిగా (తీసిన బంతిని తిరిగి పెట్టని విధముగా) రెండు బంతులు తీయబడినవి. X అనునది ఎర్రని బంతులను తీయుటకు సాధ్యమయ్యే ఫలితములు, సంభావ్యత ద్రవ్య ప్రమేయము మరియు X యొక్క అంకమధ్యమమును కనుగొనుము.

3. విచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చరరాశి X యొక్క అంకమధ్యమము μ గాను, విస్తృతిని σ^2 గాను తీసుకొనిన, $E(X+3)=10$ మరియు $E(X+3)^2=116$ గా ఇవ్వబడినది. μ ని మరియు σ^2 ని కనుగొనుము.

4. నిష్పాక్షికమైన నాలుగు నాణెములు ఒకేసారి ఎగురవేయబడెను. బొమ్మల సంఖ్యను పొందడానికి కావలసిన సంభావ్యత ద్రవ్య ప్రమేయము, అంకమధ్యమము మరియు విస్తృతిని, కనుగొనుము.

5. ప్రతి అర్ధగంటకు ప్రయాణికుల రైలు సరియైన సమయములో నిలయమును చేరుకొనును. ఒక విద్యార్థి ప్రతిరోజు ఉదయమున, ఇంటి నుండి రైలు నిలయమునకు చేరుకొనును. X అనునది కాలమును నిమిషాలలో సూచించిన, అనగా రైలు నిలయమును చేరుకొన్న తర్వాత రైలు కొరకు వేచియున్న సమయము X యొక్క pdf ఇవ్వబడినది.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{30} & 0<x<30\\ 0 & \text{లేకపోతే}\end{cases}$$

యాదృచ్ఛిక చరరాశి X యొక్క అంచనా విలువ కనుగొనుము మరియు విశ్లేషణ చేయుము.

6. సంగణక యంత్రము తయారీకి ఉపయోగపడు విద్యుత్ ఉపకరణ వైఫల్య సమయము యొక్క సాంద్రత ప్రమేయము

$$f(x)=\begin{cases}3e^{-3x} & x>0\\ 0 & \text{లేకపోతే}\end{cases}$$

విద్యుత్ ఉపకరణము యొక్క అంచనా కాలమును కనుగొనుము.

7. యాదృచ్ఛిక చరరాశి X యొక్క సంభావ్యత సాంద్రతా ప్రమేయము

$$f(x)=\begin{cases}16\,x\,e^{-4x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

X అంకమధ్యమము మరియు విస్తృతిలను కనుగొనుము

8. 600 టికెట్లు కలిగిన లాటరీ నందు ఒక బహుమతి ₹200, నాలుగు బహుమతులు ₹100, ఆరు బహుమతులు ₹ 50.గా ఇవ్వబడినది ఒక టికెట్ ధర ₹ 2 అయిన, టికెట్ యొక్క ఊహించిన మొత్తము లాభము కనుగొనుము

11.6 సిద్ధాంతిక విభాజనాలు: కొన్ని ప్రత్యేక వివక్త విభాజనాలు

ఇంతకు ముందు విభాగమునందు అంకమధ్యమము మరియు విస్తృతికి సంబంధించిన అనేక సాధారణ సంభావ్యతలు చూపబడెను. ఇప్పుడు ప్రత్యేక ముఖ్యత్వమును కలిగిన వివక్త సంభావ్యత విభాజనాలను నేర్చుకొనగలము.

05_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_11.indd 223 23-01-2023 16:48:17

ఈ అధ్యాయము నందు క్రింది వివక్ష విభాజనాలను నేర్చుకొనగలము.

(i) ఒక బిందు విభాజనము (ii) రెండు బిందువు విభాజనము

(iii) బెర్‌నోలి విభాజనము (iv) ద్విపద విభాజనము

11.6.1 ఒక బిందువు విభాజనము

X అను యాదృచ్ఛిక చరరాశి x_0 అను సంభావ్యత ద్రవ్యరాశి ప్రమేయము $f(x)$ అగునట్లు ఒక బిందువు వ్యవస్థితమయిన $f(x)=P(X=x_0)=1$ నకు ఒక బిందువు విభాజనము గలదని అంటారు. అనగా సంభావ్యత ద్రవ్యరాశి ఒక బిందువు వద్ద కేంద్రీకృతమగును. సంచిత విభాజనా ప్రమేయము

$$F(x)=\begin{cases}0 & -\infty<x<x_0\\ 1 & x_0\le x<\infty\end{cases}$$

అంకమధ్యమము

$$E(X) = \sum_x x\,f(x)=x_0\times 1=x_0$$

విస్తృతి

$$V(X) = E(X^2)-\left(E(X)\right)^2=\sum_x x^2 f(x)-\left(x_0\right)^2={x_0}^2-{x_0}^2=0$$

కావున అంకమధ్యమము x_0 మరియు విస్తృతి 0 అగును.

11.6.2 రెండు బిందువుల విభాజనము

అ) అసౌష్ఠవ సందర్భము: X అను యాదృచ్ఛిక చరరాశి, x_1 మరియు x_2 లు క్రింది విధముగా నిర్వచితమగునట్లు

x_1 మరియు x_2 విలువలు వ్యవస్థితమైన, x కు రెండు బిందువుల విభాజనము గలదని అంటారు.

$f(x)=\begin{cases}p & \text{for } x=x_1\\ 1-p & \text{for } x=x_2\end{cases}$ ఇచ్చట $0<p<1$.

సంచిత విభాజనా ప్రమేయము

$$F(x)=\begin{cases}0 & , \quad x<x_1\\ p & , \ x_1\le x<x_2\\ 1 & , \quad x\ge x_2\end{cases}$$

అంకమధ్యమము :

$$E(X) = \sum_x x\,f(x)=x_1\times p+x_2\times(1-p)=px_1+qx_2 \text{ అయిన } q=1-p.$$

విస్తృతి :

$$V(X) = E(X^2)-\left(E(X)\right)^2=\sum_x x^2 f(x)-\left(px_1+qx_2\right)^2$$

$$= \left({x_1}^2 p+{x_2}^2 q\right)-\left(px_1+qx_2\right)^2=pq\left(x_2-x_1\right)^2$$

అంకమధ్యమము px_1+qx_2 మరియు విస్తృతి $pq\left(x_2-x_1\right)^2$

ఆ) సౌష్ఠవ సందర్భము:

$p=q=\frac{1}{2}$ గా ఉన్నప్పుడు, రెండు బిందువుల విభాజనము,

05_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_11.indd 224 23-01-2023 16:48:21

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & x=x_1 \text{ అయిన}\\ \frac{1}{2}, & x=x_2 \text{ అయిన}\end{cases}$$

మరియు సంచిత విభాజనా ప్రమేయము

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<x_1 \quad \text{అయినప్పుడు}\\ \frac{1}{2}, & x_1\le x<x_2 \quad \text{అయినప్పుడు}\\ 1, & x\ge x_2 \quad \text{అయినప్పుడు}\end{cases}$$

అంకమధ్యమము $\frac{x_1+x_2}{2}$ మరియు విస్తృతి $\frac{(x_2-x_1)^2}{4}$.

11.6.3 బెర్నౌలి విభాజనము

స్వతంత్ర ప్రయత్నాలలో గెలుపు p యొక్క స్థిర సంభావ్యత, స్విస్ గణితశాస్త్రజ్ఞులు జాక్వస్ బెర్నౌలి (1654–1705) చేత మొదట చదవబడినది. ఆయన బంధువైన నికోలస్ "*The Art of Conjecturing*" అను పుస్తకమును ఆయన మరణము తర్వాత 8 సంవత్సరములకు 1713 లో ప్రచురించెను. ప్రయత్నాల సంఖ్య అధికమైన, వాటి నిష్పత్తి, గెలుపు p కి దగ్గరగా ఉండునని బెర్నౌలి చూపించెను.



జాకోబ్ బెర్నౌలి (1654 - 1705)

సంభావ్యత సిద్ధాంతములో, యాదృచ్ఛిక చరరాశి యొక్క విచ్ఛిన్న సంభావ్యత విభాజనమును స్విస్ గణితశాస్త్రవేత్త జాకోబ్ బెర్నౌలి జ్ఞాపకార్థము బెర్నౌలి విభాజనముగా నామకరణము చేశారు.

ఒక బెర్నౌలి ప్రయోగము అనునది ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగము. ఇచ్చట ఫలితమును గెలుపు లేదా ఓటమి అను రెండు పరస్పర వివర్జిత మరియు సంపూర్ణ పద్ధతులలో ఒకటిగీ వర్గీకరించబడును. (ఉదాహరణ: బొమ్మలు లేదా బొరుసులు, లోపం గల వస్తువు లేదా లోపంలేని వస్తువు, జీవనము లేదా మరణము లాగా చాలా వీలగు జతలు) గెలుపు సంభావ్యత ప్రతి ప్రయత్నమునకు ఒకే విధముగా ఉండునట్లు బెర్నౌలి ప్రయోగము స్వతంత్రంగా చాలాసార్లు జరిగినప్పుడు బెర్నౌలి ప్రయత్నాల శ్రేణి ఏర్పడును. ఏదేని అల్పముకాని ప్రయోగమును బెర్నౌలి నమూనాద్వారా పొందునట్లు వైరుధ్యపరచవచ్చును.

నిర్వచనము 11.10: బెర్నౌలు విభాజనము

X అను యాదృచ్ఛిక చరరాశి బెర్నౌలి ప్రయత్నాలకు సంబంధించిన $f(x)$ క్రింది విధముగా ఉండునట్లు X (గెలుపు) $=1$ మరియు X (ఓటమి) $=0$, అగునట్లు నిర్వచించారు.

$$f(x)=\begin{cases}p & x=1\\ q=1-p & x=0\end{cases} \qquad \text{ఎక్కడ} \quad 0<p<1 \quad ,$$

గా ఉండునో X అనునది బెర్నౌలి యాదృచ్ఛిక చరరాశి మరియు $f(x)$ ను బెర్నౌలి విభాజనముగా పిలువబడెను. లేదా క్రింది విధముగా నిర్వచించగలము.

బెర్నౌలి విభాజనమునకు చెందిన యాదృచ్ఛిక చరరాశి X కి గెలుపు సంభావ్యత p ను $X\sim Ber(p)$, గా సూచించారు. ఇచ్చట p ను పరామితి అంటారు. అయిన X యొక్క సంభావ్యత ప్రమేయము $f(x)=p^x(1-p)^{1-x}, \quad x=0,1$.

05_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_11.indd 225 23-01-2023 16:48:23

బెర్నౌలి విభాజనము యొక్క సంచిత విభాజనాలు,

$$F(x)=\begin{cases}0 & , \quad x<0 \quad \text{అయిన}\\ q=1-p & , \quad 0\le x<1 \quad \text{అయిన}\\ 1 & , \quad x\ge 1 \quad \text{అయిన}\end{cases}$$

అంకమధ్యమము :

$$E(X) = \sum_x x\, f(x) = 1\times p + 0\times(1-p) = p\,,$$

గమనించవలసిన విషయము ఏమనగా X అనునది కేవలము 0 మరియు 1 విలువలను మాత్రమే తీసుకొనును. దీని అంచనా విలువ p ని ఎక్కడ చూడలేము.

విస్తృతి :

$$V(X) = E(X^2)-\big(E(X)\big)^2 = \sum_x x^2 f(x) - p^2$$

$$= \left(1^2 p + 0^2 q\right) - p^2 = p(1-p) = pq \quad \text{ఇక్కడ } q=1-p \text{ అగును.}$$

X అనునది పరామితి p గల బెర్నౌలి విభాజనమును అనుసరించు ఒక బెర్నౌలి యాదృచ్ఛిక చరరాశి అయిన అంకమధ్యమము μ మరియు విస్తృతి σ^2 లు $\mu = p$ మరియు $\sigma^2 = pq$ అగును.

$p=q=\frac{1}{2}$ అయినప్పుడు బెర్నౌలి విభాజనము క్రింది విధముగా ఉంటుంది.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\,, & x=0 \quad \text{అయిన}\\ \frac{1}{2}\,, & x=1 \quad \text{అయిన}\end{cases}$$

మరియు సంచిత విభాజనాలు

$$F(x)=\begin{cases}0 \ , & x<0 \quad \text{అయిన}\\ \frac{1}{2} \ , & 0\le x<1 \quad \text{అయిన}\\ 1 \ , & x\ge 1 \quad \text{అయిన}\end{cases}$$

అంకమధ్యమము $\frac{1}{2}$ మరియు విస్తృతి $\frac{1}{4}$ అగును.

11.6.4 ద్విపద విభాజనము

ద్విపద విభాజనము ఒక ముఖ్యమైన విభాజనము. ఇది కొన్ని సందర్భాలలో రెండు సాధ్యమైన ఫలితాలు కలిగిన పునరావృత స్వతంత్ర ప్రయత్నాలకు ఇది వర్తించును. రెండు ఫలితాలు బొమ్మ లేదా బొరుసు, ఓటమి లేదా గెలుపు; దోషమున్న వస్తువు లేదా మంచి వస్తువు లేదా సాధ్యమైన జతలు; ప్రతి ఫలితముల సంభావ్యతను లబ్ద నియమమునుపయోగించి వీలైతే వృక్షపటము ద్వారా గణించగలము.

ఒకవేళ నాణెమును ఒకసారి ఎగురవేసినచో దాని. బొమ్మల సంఖ్యను X గా తీసుకొనుము. అయిన $X \sim Ber(p),$, ఎందుకనగా బొమ్మ $(X=1)$ ని లేదా బొరుసు $(X=0)$ లను సంభావ్యత p లేదా $1-p.$ గా పొందగలము.

ఒకవేళ నాణెమును n సార్లు ఎగురవేయబడినదని తీసుకొనుము. X ను బొమ్మల సంఖ్యగా తీసుకొనుము. అయిన X తీసుకొను విలువలు $0, 1, 2, \ldots, n.$ బొమ్మల సంఖ్యను పొందుటకు x యొక్క సంభావ్యత

05_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_11.indd 226 23-01-2023 16:48:26

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x},\ x=0,\ 1,\ 2,\ ...,\ n.$$

$X=x$, అనునది x వరుసలలో గల n బొమ్మలను, సూచించును. అనగా $\binom{n}{x}$ మార్గములలో బొమ్మలు మరియు మిగిలినవి $n-x$ బొరుసులు. ప్రతి ఒక్క పర్యవసానమునకు, సంభావ్యత $p^x(1-p)^{n-x}$. అగును. n యొక్క విలువ చిన్నసంఖ్య, 30 కన్నా తక్కువైనప్పుడు ద్విపద సిద్ధాంతమును ఉపయోగించుటకు అనుగుణముగా ఉండును.

నిర్వచనము 11.11: ద్విపద యాదృచ్ఛిక చరరాశి

ఒక వివక్త యాదృచ్ఛిక చరరాశి X, n పునరావృత ప్రయత్నాలలో, X అనునది గెలుపుల సంఖ్య క్రింది నియమాలను పాటించిన X - ను ద్విపద యాదృచ్ఛిక చరరాశి అంటారు.

(i) n- పునరావృత ఘటనలు స్వతంత్రము మరియు n పరిమితమైనది.

(ii) ఒక్కొక్క ప్రయత్నం యొక్క ప్రతిఫలము రెండు సాధ్యమయ్యే ఫలితములు ఓటమి లేదా గెలుపుగా గుర్తించబడును.

(iii) ఒక్కొక్క ప్రయత్నములో గెలుపుల సంభావ్యత p గా గుర్తించబడును మరియు ఇది స్థిరముగా ఉండును.

నిర్వచనము 11.12 : ద్విపద విభాజనము

X అను ద్విపద యాదృచ్ఛిక చరరాశి, n స్వతంత్ర ప్రయత్నాలలో p గెలుపు సంభావ్యత, $q=1-p$ ఓటమి సంభావ్యత గల గెలుపుల సంఖ్యకు సమానము. దీనినే ద్విపద విభాజనము అంటారు. మరియు దీనిని $X\sim B(n,p)$. గా సూచిస్తారు. X యొక్క సంభావ్యత ద్రవ్యరాశి ప్రమేయము క్రింది విధముగా ఉంటుంది.

$$f(x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x},\qquad x=0,1,2,...,n.$$

ద్విపద విస్తరణ నుండి ఈ విభాజనం పేరుపొందబడెను. స్థిరసంఖ్యలు $a,\ b$ కి ద్విపద విస్తరణ

$$(a+b)^n=\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}a^xb^{n-x}$$

ఒక ప్రయత్నము నందు సంభావ్యత గెలుపుని p గా తీసుకొందాము. $a=p$, $b=1-p$ గా తీసుకొనిన ద్విపద యాదృచ్ఛిక చరరాశి యొక్క సంభావ్యతల మొత్తము 1 అగును. ఒక్కొక్క ప్రయోగములో ప్రతి ప్రయత్నము గెలుపు, ఓటమి అను రెండు ఫలితములుగా వర్గీకరించబడును. ఈ విభాజనాలు ద్విపద విభాజనాలుగా పిలువబడును.

ద్విపద విభాజనమునకు చెందిన ద్విపద యాదృచ్ఛిక చరరాశి X నకు పరామితులు μ మరియు p అయిన అంకమధ్యమము μ మరియు విస్తృతి σ^2 , $\mu=np$ మరియు $\sigma^2=np(1-p)$ అగును.

అంచనా విలువ సాధారణముగా యాదృచ్ఛిక చరరాశి యొక్క విలువను తీసుకొనుట అనునది సాధారణము కాదు. స్వతంత్ర పునరావృత ప్రయోగాలలో దీర్ఘ కాల పద్ధతిన యాదృచ్ఛిక చరరాశి యొక్క అంకమధ్యమమును కనుగొనునట్లు యాదృచ్ఛిక చరరాశి యొక్క నిరీక్షణ విలువను తెలుపుటకు ఇది ఉపయోగపడును. $p=0.5$ లేదా n గరిష్ఠముగా ఉన్నప్పుడు ద్విపద విభాజనముల ఆకారము సౌష్ఠవముగా ఉండును.

05_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_11.indd 227 23-01-2023 16:48:29

అయిన ద్విపద విభాజనము $p = q = \frac{1}{2}$

$$f(x) = \binom{n}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-x}, \quad x = 0,1,2,...,n.$$

$$f(x) = \binom{n}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}, \quad x = 0,1,2,...,n.$$

అంకమధ్యమము $\frac{n}{2}$ మరియు విస్తృతి $\frac{n}{4}$

ఉదాహరణ 11.19

క్రింద ఇవ్వబడిన ఒక్కొక్క దానికి ద్విపద విభాజనమును కనుగొనుము.

(i) నిష్పాక్షిక నాణెములు ఐదింటిని ఒకేసారి ఎగురవేయబడినవి, అందులో X బొమ్మలు సంఖ్యను సూచించును.

(ii) నిష్పాక్షిక పాచికను 10 సార్లు దొర్లించబడెను, అందులో 4 లభించుటను X గా సూచించబడును.

సాధన

(i) నిష్పాక్షిక నాణెములు ఐదింటిని ఎగురవేయబడెను. బొమ్మ లభించు సంభావ్యత, ఒక నాణెమునందు $p = \frac{1}{2}$ మరియు $q = 1 - p = \frac{1}{2}$.

X అనునది ఐదు నాణెములలో బొమ్మలు పడుట. X అనునది ద్విపద యాదృచ్ఛిక చరరాశి తీసుకొను విలువలు 0, 1,2,3,4 మరియు 5,

అయిన $n = 5$ మరియు $p = \frac{1}{2}$ అయిన $X \sim B\left(5, \frac{1}{2}\right)$.

ద్విపద సంభావ్యత

$$f(x) = \binom{n}{x} p^{x}(1-p)^{n-x}, \quad x = 0,1,2,...,n$$

$$f(x) = \binom{5}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-x}, \quad x = 0,1,2,...,5 \text{ గా మారును.}$$

ఇది $f(x) = \binom{5}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}, \quad x = 0,1,2,...,n$

(ii) ఒక నిష్పాక్షిక పాచికను 10 సార్లు దొర్లించబడెను. 4 లభించు సంఖ్యను X గా తీసుకొనిన, యాదృచ్ఛిక చరరాశి X తీసుకొను విలువలు 0, 1, 2, ... 10 నందు $n = 10$ అయిగా $p = \frac{1}{6}$

పాచిక నందు 4 ని పొందుటకు $p = \frac{1}{6}$ మరియు $q = 1 - p = \frac{5}{6}$.

ద్విపద విభాజనము

$$f(x) = \binom{10}{x}\left(\frac{1}{6}\right)^{x}\left(\frac{5}{6}\right)^{10-x}, \quad x = 0,1,2,...,10.$$

05_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_11.indd 228 23-01-2023 16:48:34

ఉదాహరణ 11.20

ఒక బహుళ ఎంపిక పరీక్ష నందు పది ప్రశ్నలు కలవు, ఒక్కొక్కటి నాలుగు విభిన్న సమాధానములు కలిగినది, ఒకటి మాత్రమే సరియైనది. ఒక విద్యార్థి ఊహించి సమాధానము చేయునప్పుడు, సరియైన సమాధానమును X గా తీసుకొనిన (i) ద్విపద సంభావ్యత (ii) విద్యార్థి ఏడు సరియైన సమాధానములను పొందుటకు సంభావ్యత (iii) కనీసము ఒక్క సరియైన సమాధానమును పొందుటకు సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన

(i) X ను గెలుపుల సంఖ్యగా తీసుకొనిన, X యొక్క విలువలు $0,1,2,...,10$,

X గెలుపునకు సంభావ్యత $p=\frac{1}{4}$ మరియు $q=1-p=\frac{3}{4}$, అందువలన $n=10$.

ఇది అందించునది, $f(x) = \binom{10}{x}\left(\frac{1}{4}\right)^x\left(\frac{3}{4}\right)^{10-x}, \quad x=0,1,2,...,10$

(ii) ఏడు సరియైన సమాధానములను పొందుటకు సంభావ్యత

$$P(X=7) = f(7)=\binom{10}{7}\left(\frac{1}{4}\right)^7\left(\frac{3}{4}\right)^{10-7} = 120\left(\frac{3^3}{4^{10}}\right)$$

విద్యార్థి ఏడు సరియైన సమాధానములను పొందుటకు సంభావ్యత $120\left(\frac{3^3}{4^{10}}\right)$.

(iii) కనీసము ఒక్క సరియైన సమాధానమును పొందుటకు సంభావ్యత

$$P(X\geq 1) = 1-P(X<1)=1-P(X=0)$$

$$=1-\binom{10}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^{10} = 1-\left(\frac{3}{4}\right)^{10}.$$

విద్యార్థి కనీసము ఒక్క సరియైన సమాధానమును పొందుటకు సంభావ్యత $1-\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$.

ఉదాహరణ 11.21

ద్విపద చరరాశి X యొక్క అంకమధ్యము 2 మరియు విస్తృతి 2 అయిన 1.5. అయిన

(i) $P(X=0)$ (ii) $P(X=1)$ (iii) $P(X\geq 1)$ ని కనుగొనుము.

సాధన

సంభావ్యతలను కనుగొనుటకు, n మరియు p యొక్క విలువలు కావలెను.

అంకమధ్యమము $= np=2$, విస్తృతి $= npq=1.5$

అనగా, $\frac{npq}{np}=\frac{1.5}{2}=\frac{3}{4}$

$q=\frac{3}{4}$ మరియు $p=1-q=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

$np=2$, నుండి $n=\frac{2}{p}=8$. కావున $X\sim B\left(8,\frac{1}{4}\right)$.

ద్విపద విభాజనము

$$P(X=x) = f(x)=\binom{8}{x}\left(\frac{1}{4}\right)^x\left(\frac{3}{4}\right)^{8-x} \qquad x=0,1.2,...8$$

05_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_11.indd 229 23-01-2023 16:48:40

(i) $$P(X=0) = f(0) = \binom{8}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^{8-0} = \left(\frac{3}{4}\right)^8$$

(ii) $$P(X=1) = f(1) = \binom{8}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^{8-1} = 2\left(\frac{3}{4}\right)^7$$

(iii) $$P(X \geq 1) = 1 - P(X<1) = 1 - P(X=0) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^8$$ ■

ఉదాహరణ 11.22

ABC కంపెనీ నందు తయారయిన వస్తువులలో సరాసరిగా 20% లోపమైనవిగా తెలియుచున్నవి. యాదృచ్ఛికముగా వాటి నుండి ఆరు వస్తువులను ఎంపిక చేసిన, X అనునది లోపమున్న వస్తువులను సూచించునప్పుడు (i) రెండు వస్తువులు లోపమున్నవి, (ii) అత్యధికముగా ఒక వస్తువు లోపము (iii) కనీసము రెండు వస్తువులు లోపమునకు సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన

$n=6$ లోపమున్న వస్తువును ఎంపిక చేయుటకు సంభావ్యత $p = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$,

X అనునది లోపమున్న వస్తువులను చూపించిన, X యొక్క విలువలు $0,1,2,...,6$

లోపమున్న వస్తువు (గెలుపునకు) సంభావ్యత $p = \frac{1}{5}$ మరియు ఓటమి $q = 1-p = \frac{4}{5}$ మరియు $n=6$

X యొక్క ద్విపద విభాజనాలు $X \sim B\left(6, \frac{1}{5}\right)$. గా సూచించబడును.

అనగా $$f(x) = \binom{6}{x}\left(\frac{1}{5}\right)^x\left(\frac{4}{5}\right)^{6-x}, \quad x = 0,1,2,...,6.$$

(i) రెండు వస్తువులు లోపముగా ఉండుటకు సంభావ్యత

$$P(X=2) = f(2) = \binom{6}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^{6-2} = 15\left(\frac{4^4}{5^6}\right)$$

(ii) అత్యధికముగా ఒక వస్తువు లోపమయిన సంభావ్యత

$$P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1)$$

$$= \binom{6}{0}\left(\frac{1}{5}\right)^0\left(\frac{4}{5}\right)^{6-0} + \binom{6}{1}\left(\frac{1}{5}\right)^1\left(\frac{4}{5}\right)^{6-1}$$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)^6 + (6)\left(\frac{4^5}{5^6}\right) = 2\left(\frac{4}{5}\right)^5$$

అత్యధికముగా ఒక వస్తువు లోపమునకు సంభావ్యత $2\left(\frac{4}{5}\right)^5$.



05_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_11.indd 230 23-01-2023 16:48:45

(iii) కనీసము రెండు వస్తువులు లోపమగుటకు సంభావ్యత

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - 2\left(\frac{4}{5}\right)^5$$

కనీసము రెండు వస్తువులు లోపమగుటకు సంభావ్యత $1 - 2\left(\frac{4}{5}\right)^5$.

అభ్యాసము 11.5

1. $P(X = k)$ కి ద్విపద విభాజనము, $B(n, p)$ ని కనుగొనుము.

   (i) $n = 6,\ p = \frac{1}{3},\ k = 3$ (ii) $n = 10,\ p = \frac{1}{5},\ k = 4$ (iii) $n = 9,\ p = \frac{1}{2},\ k = 7$

2. ఏ ప్రయత్నమునైనను లక్ష్యాన్ని చేధించుటకు సంభావ్యత $\frac{1}{4}$. ఇతను ఈ లక్ష్యాన్ని 10 సార్లు ప్రయత్నించెను. (i) ఖచ్చితముగా 4 సార్లు (ii) కనీసము ఒకసారి లక్ష్యాన్ని చేధించుటకు సంభావ్యతను కనుగొనుము.

3. ద్విపద విభాజనములను ఉపయోగించి, X యొక్క అంకమధ్యము, విస్తృతిని క్రింది ప్రయోగములకు కనుగొనుము.

   (i) నిష్పాక్షిక నాణెము 100 సార్లు ఎగురవేసినప్పుడు,

   (ii) అందులో X అనునది బొమ్మల సంఖ్యను సూచించును.

   (iii) ఒక పాచిక 240 సార్లు దొర్లించబడెను. అందులో X ను నాలుగు సంభవించు సంఖ్యగా తీసుకొనుము.

4. ఒక విధమైన భాగమునకు, విద్యుత్‌పరీక్ష నుండి బయటపడు సంభావ్యత $\frac{3}{4}$. ఖచ్చితముగా 5లో మూడు భాగములు పరీక్ష నుంచి బయటపడుటకు సంభావ్యత ను కనుగొనుము?

5. విద్యుత్ భాగముల తయారీదారి నుండి చిల్లర వ్యాపారి కొన్నింటిని తీసుకొనెను. లోప రేటును 5%గా తయారుదారు సూచించెను. చిల్లర వ్యాపారి దగ్గర ఉన్న 10 వస్తువులను యాదృచ్ఛికముగా తనిఖీదారి పరిశోధనకు తీసుకొనెను. (i) కనీసము ఒక్కటి లోపము (ii) ఖచ్చితముగా రెండు లోపముండుటకు సంభావ్యత ఏది?

6. ఫ్లోరెసెంట్ బల్బు ని ఉపయోగించు కాలము కనీసము 600 గంటలకు సంభావ్యత 0.9 గా ఉన్నది. ఈ విధమైన 12 బల్బులకు క్రింది సంభావ్యతలను కనుగొనుము.

   (i) ఖచ్చితముగా 10 బల్బులు ను ఉపయోగించు కనీస వినియోగ కాలము 600 గంటలు

   (ii) కనీసము 11 బల్బులను ఉపయోగించు వినియోగ కాలము 600 గంటలు

   (iii) కనీసము 2 బల్బులను ఉపయోగించు వినియోగ కాలము 600 గంటలు లేకుండుటకు

7. ద్విపద చరరాశి X యొక్క అంకమధ్యమము 6, క్రమవిచరనము 2 అయిన, (i) సంభావ్యత ద్రవ్యరాశి ప్రమేయము (ii) $P(X = 3)$ (iii) $P(X \geq 2)$ లను కనుగొనుము.

8. $X \sim B(n, p)$ నకు, $4P(X = 4) = P(X = 2)$ మరియు $n = 6$ అయిన విభాజనము, అంకమధ్యమము మరియు X యొక్క క్రమవిచరనమును కనుగొనుము.

9. 5 స్వతంత్ర ప్రయోగాలలో ద్విపద విభాజనము నందు మొదటి గెలుపునకు 0.4096, రెండవ గెలుపునకు 0.2048 సంభావ్యతలయిన, యాదృచ్ఛిక చరరాశి యొక్క అంకమధ్యమము మరియు విస్తృతిని కనుగొనుము.

05_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_11.indd 231 23-01-2023 16:48:48

అభ్యాసము 11.6

సరియైన లేదా తగిన సమాధానమును ఇవ్వబడిన 4 ప్రత్యామ్నాయముల నుండి ఎన్నుకొనుము.

1. యాదృచ్ఛిక చరరాశి X యొక్క సంభావ్యత సాంద్రతా ప్రమేయము

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{x^3} & x\geq 1\\ 0 & x<1\end{cases}$$

WLIQ7

క్రింది ప్రవచనాలలో ఏది సరియైనది?

(1) అంకమధ్యమము మరియు విస్తృతి వర్తించును

(2) అంకమధ్యమము ఉండును, కాని విస్తృతి రాదు

(3) అంకమధ్యమము, విస్తృతి రెండూ వర్తించవు.

(4) విస్తృతి వచ్చును, కాని అంకమధ్యమము రాదు.

2. $2l$ పొడవు గల ఒక కమ్మి యాదృచ్ఛికముగా రెండు ముక్కలుగా విరగగొట్టబడెను. రెండింటిలో చిన్నదానికి సంభావ్యత సాంద్రతా ప్రమేయము

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{l} & 0<x<l\\ 0 & l\leq x<2l\end{cases}$$

రెండింటిలో చిన్నదానికి అంకమధ్యమము మరియు విస్తృతి వరుసగా

(1) $\frac{l}{2}, \frac{l^2}{3}$ (2) $\frac{l}{2}, \frac{l^2}{6}$ (3) $l, \frac{l^2}{12}$ (4) $\frac{l}{2}, \frac{l^2}{12}$

3. ఒక ఆటగాడు ఆరు ముఖములు గల నిష్పాక్షిక పాచికను ఒక ఆటనందు విసిరెను. ముఖములో 6 సంభవించిన యెడల, ఆటగాడు ₹36 ను పొందునట్లు, లేకపోతే ₹k^2 ని కోల్పోయినట్లు ఇక్కడ k అనునది $k=\{1, 2, 3, 4, 5\}$. ఆటనందు గెలుచుటకు మొత్తం అంచనా ₹ లలో

(1) $\frac{19}{6}$ (2) $-\frac{19}{6}$ (3) $\frac{3}{2}$ (4) $-\frac{3}{2}$

4. ఆరు ముఖములు కలిగిన ఒక జత పాచికలలో 1, 2, 3, 4, 5, 6 గుర్తించబడెను. మరియు 1, 2, 3, 4 అను నాలుగు ముఖముల పాచికను దొర్లించి నపుడు దాని ముఖముల మొత్తము కనుగొనబడెను. యాదృచ్ఛిక చరరాశి X అనేది మొత్తమును సూచించును. విలోమ ప్రతిబింబము 7గా గల మూలకాల సంఖ్య

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

5. ద్విపద విభాజనము నందు యాదృచ్ఛిక చరరాశి X నకు, $n = 25$, $p = 0.8$ అయిన X యొక్క క్రమవిచరనము

(1) 6 (2) 4 (3) 3 (4) 2

6. ఒక నాణెమును n సార్లు ఎగురవేయబడెను. బొమ్మలు లభించు సంఖ్య మరియు బొరుసులు లభించు సంఖ్య యొక్క వ్యత్యాసము X గా తీసుకొనబడును. X యొక్క సాధ్యమయ్యే విలువలు

(1) $i+2n$, $i = 0,1,2...n$ (2) $2i–n$, $i = 0,1,2...n$ (3) $n–i$, $i = 0,1,2...n$ (4) $2i+2n$, $i = 0,1,2...n$

7. $f(x)=\frac{1}{12}$, $a<x<b$ అనునది సంభావ్యత సాంద్రతా ప్రమేయములో, X అనునది అవిచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చరరాశి అయిన, క్రిందివాటిలో ఏవి a మరియు b విలువలు కావు.

(1) 0 మరియు 12 (2) 5 మరియు 17 (3) 7 మరియు 19 (4) 16 మరియు 24

05_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_11.indd 232 23-01-2023 16:48:50

8. 160 మంది విద్యార్థులను 4 బస్సులలో ఒకే పాఠశాల నుండి ఫుట్‌బాల్ మైదానమునకు తీసుకెళ్ళిరి. బస్సులు క్రమముగా 42, 36, 34 మరియు 48 మంది విద్యార్థులను తీసుకెళ్ళెను. యాదృచ్ఛికముగా ఒక విద్యార్థిని ఎంపికచేయబడెను. యాదృచ్ఛికముగా ఎంపిక చేసిన విద్యార్థి ప్రయాణించిన బస్సు నందు గల విద్యార్థుల సంఖ్యను X గా తీసుకొనబడెను. 4 బస్సుల లో డ్రైవర్లును యాదృచ్ఛికముగా ఎంపికచేయబడెను. ఆ బస్సునందు గల విద్యార్థుల సంఖ్య Y అయిన $E(X)$ మరియు $E(Y)$ లు క్రమముగా

(1) $50, 40$ (2) $40, 50$ (3) $40.75, 40$ (4) $41, 41$

9. రెండు నాణెములు తిప్పబడెను. మొదటి నాణెము నందు బొమ్మ వచ్చుటకు సంభావ్యత 0.6 మరియు రెండవ దాని సంభావ్యత 0.5. త్రిప్పుల ఫలితములు స్వతంత్రమైన మరియు X అనునది బొమ్మల మొత్తమయిన, $E(X)$ యొక్క విలువ

(1) 0.11 (2) 1.1 (3) 11 (4)1

10. బహుళ ఎంపిక పరీక్షనందు 5 ప్రశ్నలలో ఒక్కొక్క దానికి 3 సాధ్యమైన విధ్వంసక విలువలు ఇవ్వబడెను. ఒక విద్యార్థి 4 లేదా అంతకంటే ఎక్కువైన సమాధానములను ఊహించడానికి సంభావ్యత

(1) $\frac{11}{243}$ (2) $\frac{3}{8}$ (3) $\frac{1}{243}$ (4) $\frac{5}{243}$

11. If $P(X=0) = 1 - P(X=1)$. If $E(X) = 3\text{Var}(X)$, అయిన $P(X=0)$ నకు

(1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{2}{5}$ (3) $\frac{1}{5}$ (4) $\frac{1}{3}$

12. X అనునది ద్విపద యాదృచ్ఛిక చరరాశి మరియు దాని అంచనా విలువ 6, విస్తృతి 2.4 అయిన $P(X=5)$ అనునది

(1) $\binom{10}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^6\left(\frac{2}{5}\right)^4$ (2) $\binom{10}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{10}$

(3) $\binom{10}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^4\left(\frac{2}{5}\right)^6$ (4) $\binom{10}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^5\left(\frac{2}{5}\right)^5$

13. యాదృచ్ఛిక చరరాశి X యొక్క సంభావ్యత సాంద్రతా ప్రమేయము

$$f(x) = \begin{cases} ax+b, & 0<x<1 \\ 0 \quad , & \text{లేకపోతే} \end{cases}$$

మరియు $E(X) = \frac{7}{12}$, అయిన a మరియు b యొక్క విలువలు క్రమముగా

(1) 1 మరియు $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$ మరియు 1 (3) 2 మరియు 1 (4) 1 మరియు 2

14. 0, 1, మరియు 2 విలువలలో X ఏదైనా ఒక విలువను తీసుకొనిన, ఇక్కడ k స్థిర సంఖ్య అయిన $P(X=i) = k\,P(X=i-1)$, $i=1,2$ మరియు $P(X=0) = \frac{1}{7}$ అయిన k యొక్క విలువ

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

15. క్రింది వాటిలో ఏది వివక్త యాదృచ్ఛిక చరరాశి?

I. ఒక రోజులో ప్రత్యేక సిగ్నల్ దగ్గర దాటు కార్ల సంఖ్య .

II. నిర్ణీత సమయమునందు రైలు టికెట్లు కొనుటకు వరుసలో నిలబడు ప్రయాణికుల సంఖ్య

05_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_11.indd 233 23-01-2023 16:48:54

III. ఒక టెలిఫోన్ కాల్‌ని పూర్తిగా తీసుకొను సమయము

(1) I మరియు II (2) II మాత్రము (3) III మాత్రము (4) II మరియు III

16. $f(x)=\begin{cases}2x & 0\le x\le a\\ 0 & \text{లేకపోతే}\end{cases}$ యాదృచ్ఛిక చరరాశి యొక్క సంభావ్యత సాంద్రతా ప్రమేయమయిన, a యొక్క విలువ

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

17. సంభావ్యత ద్రవ్య ప్రమేయమునకు యాదృచ్ఛిక చరరాశి దిగువ ఇవ్వబడినది.

x	–2	–1	0	1	2
$f(x)$	k	$2k$	$3k$	$4k$	$5k$

$E(X)$ యొక్క విలువ:

(1) $\frac{1}{15}$ (2) $\frac{1}{10}$ (3) $\frac{1}{3}$ (4) $\frac{2}{3}$

18. X అనునది బెర్నౌలి విభాజనము, అంకమధ్యమము 0.4 మరియు విస్తృతి $(2X–3)$ నకు విలువ

(1) 0.24 b) 0.48 (3) 0.6 (4) 0.96

19. X అను ద్విపద చరరాశి యొక్క 6 ప్రయత్నాలలో ఇవ్వబడిన సంబంధము $9P(X=4) = P(X=2)$ అయిన, గెలుపునకు సంభావ్యత

(1)0.125 (2) 0.25 (3) 0.375 (4) 0.75

20. సంగణకమును విక్రయించు ఒకరు వారి పూర్వఅనుభవము నుండి దుకాణమునకు విచ్చేసిన 20 మందిలో ఒకరికి ఒక సంగణకమును విక్రయించబడెను. తర్వాత వచ్చు ముగ్గురు వినియోగదారులలో ఖచ్చితంగా రెండు సంగణకములను విక్రయించుటకు సంభావ్యత ఎంత?

(1) $\frac{57}{20^3}$ (2) $\frac{57}{20^2}$ (3) $\frac{19^3}{20^3}$ (4) $\frac{57}{20}$

సారాంశము

- యాదృచ్ఛిక చరరాశి అనునది ఒక ప్రమేయము ప్రతిరూప ఆవరణము S నుండి వాస్తవ సంఖ్యలు $\mathbb{R}$ నకు నిర్వచింపబడినది. విలోమ ప్రతిబింబముల బిందువులు లేదా ఉపసమితి లేదా $\mathbb{R}$ యొక్క తరగతులు అనునవి S నందు గల ఘటన దానికి సంభావ్యత కేటాయించబడును.
- యాదృచ్ఛిక చరరాశి X యొక్క వ్యాప్తి లెక్కించదగినపుడు అనగా దీనిని పరిమితి (లేదా) లెక్కించగల అపరమిత విలువను మాత్రమే తీసుకొన్నపుడు. ప్రతి రూప ఆవరణము S నందు గల వాస్తవసంఖ్య $\mathbb{R}$ ను విచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చరరాశి అంటారు. S యొక్క ధనాత్మక సంభావ్యత విలువ మొత్తము 1 అగును.
- Xఅనునది $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n \ldots$, అను విచ్ఛిన్న విలువలను కలిగిన విచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చరరాశి అయినప్పుడు ప్రమేయము $f(.)$ లేదా $p(.)$ ని $f(x_k) = P(X = x_k), k = 1,2,3,\ldots n,\ldots$ గాను, X యొక్క సంభావ్యత ద్రవ్య ప్రయోగముగాను పిలువబడును.

05_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_11.indd 234 23-01-2023 16:48:55

- $f(x)$ అను ప్రమేయము సంభావ్యత ద్రవ్య ప్రమేయము అయిన,

  (i) $f(x_k) \geq 0,\ k = 1,2,3,...n,...$ మరియు (ii) $\sum_k f(x_k) = 1$ అగును.

- సంచిత విభాజనా ప్రమేయము. $F(x)$ అనే విచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చరరాశి X యొక్క విలువలు $x_1, x_2, x_3,...$ మరియు $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$ గా ఉన్నప్పుడు సంభావ్యత ద్రవ్య ప్రమేయము $f(x_i)$ అనునది

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i), \quad x \in \mathbb{R}$$

- X అనునది $x_1, x_2, x_3,...$ $(x_1 < x_2 < x_3,...)$ అను విలువలను కలిగిన విచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చరరాశి మరియు $F(x_i)$ విభాజనా ప్రమేయము అయిన సంభావ్యత ద్రవ్య ప్రమేయము $f(x_i)$ క్రింది విధముగా ఇవ్వబడినది. $f(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1}),\ i = 1,2,3,\ ...$
- అవిచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చరరాశి, ప్రతిరూప ఆవరణము S గాను మరియు యాదృచ్ఛిక చరరాశి $X : S \to R$ నందు $\mathbb{R}$ లో గల I సమితి నుండి ఏ విలువనైనను తీసుకొనగలదు. I లోని ప్రతి యొక్క X విలువ $P(X = x) = 0$ గా ఉన్నప్పుడు x అనునది అవిచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చరరాశి అగును.
- $x \in [a,b]$ నందు ప్రతి x యొక్క సాధ్యమయ్యే ఫలితమునకు అవిచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చరరాశి X యొక్క లక్షణము $P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$ గా ఉన్నప్పుడు ఋణాత్మకముకాని వాస్తవ విలువ ప్రమేయము $f(x)$ అనునది సంభావ్యత సాంద్రతా ప్రమేయమగును.

- అవిచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చరరాశి X యొక్క విభాజనా ప్రమేయము $F(x)$ అయిన దాని యొక్క సంభావ్యతా సాంద్రత ప్రమేయము $f(x)$ క్రింది విధముగా ఇవ్వబడినది.

$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x)$, ఉత్పన్నము వర్తించునప్పుడు.

- యాదృచ్ఛిక చరరాశి X యొక్క సంభావ్యత విభాజన ప్రమేయము $f(x)$ అయిన దాని అంచనా విలువ లేదా అంకమధ్యమము లేదా X యొక్క గణిత అంచనా $E(x)$ లేదా μ గా సూచిస్తారు.

$$E(X) = \begin{cases} \sum_x xf(x) & X \text{ వివిక్త} \\ \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx & X \text{ అవిచ్ఛిన్నమైనప్పుడు} \end{cases}$$

- యాదృచ్ఛిక చరరాశి X యొక్క విస్తృతిని $V(X)$ లేదా σ^2 (లేదా σ_x^2) గా సూచిస్తారు.

$$V(X) = E(X - E(X))^2 = E(X - \mu)^2$$

గణిత అంచనా మరియు విస్తృతి యొక్క ధర్మములు

(i) $E(aX + b) = aE(X) + b$, a మరియు b అనునవి స్థిరసంఖ్యలు

ఉపపత్తి 1: $E(aX) = aE(X)$	($b = 0$ అయినప్పుడు)
ఉపపత్తి 2: $E(b) = b$	($a = 0$ అయినప్పుడు)

05_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_11.indd 235 23-01-2023 16:48:57

(ii) $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

(iii) $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$ నందు a మరియు b లు స్థిర సంఖ్యలు

ఉపపత్తి 3: $V(aX) = a^2V(X)$	($b = 0$ అయినప్పుడు)
ఉపపత్తి 4: $V(b) = 0$	($a = 0$ అయినప్పుడు)

- బెర్నౌలి ప్రయోగము నందు యాదృచ్ఛిక చరరాశి X ని, X (గెలుపు) = 1 మరియు X (ఓటమి) = 0 గా నిర్వచించబడును.

$$f(x) = \begin{cases} p & , x = 1 \\ q = 1 - p & , x = 0 \end{cases} \text{ నందు } 0 < p < 1$$

- X ని బెర్నౌలి యాదృచ్ఛిక చరరాశి అనియు, $f(x)$ ని బెర్నౌలి విభాజనమని పిలువబడును.
- బెర్నౌలి విభాజనము నందు X అనునది బెర్నౌలి యాదృచ్ఛిక చరరాశి అయిన వాటి కొలతలు p, అంకమధ్యమము μ మరియు విస్తృతి σ^2 అయిన

$$\mu = p \text{ మరియు } \sigma^2 = pq$$

- వివక్త యాదృచ్ఛిక చరరాశి X అనునది ద్విపద యాదృచ్ఛిక చరరాశిగా పిలువబడును. X అనునది n-ఆవృత ఘటనములందు గెలుపుల సంఖ్య అయినప్పుడు
  (i) n- ఆవృత ప్రయోగాలు స్వతంత్రము మరియు n పరిమితమైనవి.
  (ii) ఒక్కొక్క ప్రయోగము యొక్క ఫలితము 2 సాధ్యమైన పర్యావసానములను కలిగియుండును. అవి గెలుపు లేదా ఓటమిగా సూచించబడును.
  (iii) ఒక్కొక్క ప్రయోగములో గెలుపు యొక్క సంభావ్యతను p గా పేర్కొనబడును మరియు అది స్థిరముగా ఉండును.
- ద్విపద యాదృచ్ఛిక చరరాశి X, గెలుపుల సంఖ్యకు సమానముగాను, గెలుపు యొక్క సంభావ్యత p మరియు $q = 1 - p$ ఓటమికిగాను, n స్వతంత్ర ప్రయోగాలలో ద్విపద విభాజనము క్రింది విధముగా నిర్వచించబడెను. $X \sim B(n, p)$. సంభావ్యత ద్రవ్య ప్రమేయము $f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n.$
- X అనునది ద్విపద యాదృచ్ఛిక చరరాశి కొలతలు p మరియు n గా గల ద్విపద విభాజనము నందు అంకమధ్యమము μ, విస్తృతి σ^2 అనగా $\mu = np$ మరియు $\sigma^2 = np(1-p)$.

అంతర్జాల కృత్యము (ICT CORNER)

https://ggbm.at/dy9kwgbt లేదా Scan the QR Code

బ్రౌజరును తెరచి ఇవ్వబడిన వంటి URL లింక్‌ను టైపు చేయుము (లేదా) QR సంకేతమును స్కాన్ చేయుము. "12వ తరగతి గణితశాస్త్రము, భాగము-2" అను శీర్షికతో జియోజీబ్రా వర్క్‌బుక్ తెరువబడును. ఎడమ వైపున మీ పాఠ్యపుస్తకమునకు సంబంధించిన అధ్యాయములు చూపించబడియుండును. "సంభావ్యతా విభాజనములు" అను పాఠ్య శీర్షిక గల అధ్యాయముపై క్లిక్ చేయుము. అక్కడ ఈ అధ్యాయమునకు సంబంధించిన అనేక వర్క్‌షీట్లు ప్రదర్శింపబడును. వాటిని సాధించుము.



05_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_11.indd 236 23-01-2023 16:48:57

అధ్యాయము
12

విలక్షణ గణితము

PAIU1

"యువకుడా! గణితంలోని సూక్ష్మనైపుణ్యాలు అర్థం కాకపోయినా వాటిని నీవు మరల మరలా ఉపయోగించడం ద్వారా పరిచయమవుతాయి."

– జాన్ వాన్ న్యూమాన్

12.1 పరిచయం



John von Neumann
(1903-1957)

గణితశాస్త్రమును విస్తృతంగా రెండు వర్గాలుగా వర్గీకరించవచ్చు.
నిరంతర గణితము అనునది అనంతమైన వాస్తవ సంఖ్యల సమితికి సంబంధించిన ఫలితాలపై ఆధారపడి ఉండును. ఏదైనా రెండు వాస్తవ సంఖ్యల మధ్య లెక్కలేనన్ని అనంత సంఖ్యల సమితి ఉంటుంది. ఉదాహరణకు నిరంతర గణితములో గల ప్రమేయం విరామము లేని ఒక సులభమైన వక్రమును పోలియుండును. విలక్షణ గణితము అనునది పరిమిత లేక లెక్కించగలిగిన అపరిమితమైన వేరువేరు విలువలను కలిగి ఉంటుంది. ఈ విధానం రెండు బిందువుల మధ్య పరిమిత లేక లెక్కించదగిన అపరిమితమైన బిందువులను కలిగి ఉండును. ఉదాహరణకు ఒక పరిమిత సమితిలోని మూలకాల నుండి వచ్చు ఒక ప్రమేయమును నిర్వచించి వాటిని క్రమయుగ్మాల జతగా అమర్చిన పిదప క్రమయుగ్మముల జతలను పట్టిక రూపంలో చూపించే విధంగా నిర్వచించవచ్చును.

19వ శతాబ్దం చివరిలో, 20వ శతాబ్దం మొదటిలో నివసించిన గణిత మేధావులు విలక్షణ గణితము అనే క్రొత్త విభాగమును నిర్మించారు. ఈ విభాగములో గల భావనలు సహజ సంఖ్యల సమితి వలె పరిమిత లేదా లెక్కించదగిన అపరితమైన సమితులు గల మూలకాలను ఆధారంగా చేసుకునియుండును. ఈ విధమైన సమితులను విలక్షణ సమితులు అని అంటారు. విలక్షణ గణితం యొక్క ప్రత్యేక లక్షణం ఈ సమితి నుండి సహజ సంఖ్యల సమితికి మూలకాల మధ్య అన్వేక సంబంధం వీలగుచున్నది. కావున విలక్షణ మూలకాలు కలిగిన ఒక సమితిని ఏర్పరచవచ్చు. విలక్షణ సమితి యొక్క ప్రత్యేక లక్షణం అనునది అపరిమిత సమితి అనగా వాస్తవ సంఖ్యా సమితిలో మూలకాలను అంతరము లేకుండా అమర్చుట.

మన జీవిన విధానంలో సంఘణక అనువర్తనాలు ముఖ్యమైన పాత్రను పోషిస్తుందనే విషయం అందరికీ తెలుసు. పర్యవసానంగా సంఘణక విజ్ఞానము పాక్షికంగా స్పష్టమైన అవగాహన మరియు గమనించదగిన వివక్ష సమితుల యొక్క సంక్షిప్త వివరణ శాస్త్రంగా మారింది. ఆధునిక ప్రోగ్రామింగ్ భాషలను సంక్షిప్త పద్ధతిలో వర్ణనలకు అనువైన విధంగా రూపొందించాలి. ఈ విలక్షణ సమితుల ఆధారంగా సోపానక్రమమును రూపొందించడానికి సంఘణక శాస్త్రవేత్తలకు శిక్షణ ఇవ్వబడింది.

విలక్షణ గణితాన్ని అధ్యయనం చేయడం యొక్క ప్రధాన ప్రయోజనం ఏమిటంటే, దాని ఫలితాలు తార్కికం మరియు సమస్యలను పరిష్కరించే సామర్థ్యాలను మెరుగుపరచడానికి చాలా మంచి సాధనంగా ఉపయోగపడతాయి. విలక్షణ గణిత శాస్త్రములోని కొన్ని శాఖలు కాంబినెటరీస్, మ్యాథమెటికల్ లాజిక్, బూలియన్ ఆల్జీబ్రా, గ్రాఫ్ థియరీ, కోడింగ్ థియరీ మొదలైనవి. మునుపటి సంవత్సరంలో ప్రస్తారాలు,

06_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_12.indd 237 24-01-2023 11:26:16

సంయోగాలు మరియు గణితానుగమనము అను కొన్ని విషయాలను విలక్షణ గణితములో చర్చించబడ్డాయి. ప్రస్తుత అధ్యాయములో యుగ్మ పరిక్రియలు మరియు తార్కిక గణితము అనే రెండు అంశాలు చర్చించబడ్డాయి.

చిహ్నాలు

$\in$	–	చెందినది
$\ni$	–	ప్రతి దానికి
$\forall$	–	ప్రతి యొక్క
$\Rightarrow$	–	అదే అర్థమునిచ్చు
$\exists$	–	ఉంది

సాధారణంగా పరిక్రియ అనే పదం ఒకే సమయంలో ఒకటి లేక అంతకంటే ఎక్కువ మూలకాలపై పనిచేసే ప్రక్రియను సూచిస్తుంది. ఉదా॥ $\mathbb{Z}$ లో ఋణాత్మక మూలకమనేది ఒకేసారి వస్తుంది. కాబట్టి దీనిని యూనరి పరిక్రియ అని అంటారు. మరొక రకంగా $\mathbb{Z}$ లో రెండు మూలకాల మొత్తమును కనుగొనుటకు ఉపయోగించే ప్రక్రియనే యుగ్మ పరిక్రియ అంటారు. సాధారణంగా n మూలకాలకు సంబంధించిన పరిక్రియలను n-పరిక్రియలు అంటాము, $n \in \mathbb{N}$ ఈ విభాగంలో యుగ్మ పరిక్రియల గురించి వివరణాత్మకగా చర్చిస్తాం.

అభ్యసన లక్ష్యాలు

ఈ అధ్యాయము పూర్తయిన తర్వాత విద్యార్థులు నేర్చుకొనగలుగు అంశాలు

- యుగ్మ పరిక్రియను నిర్వచించడం మరియు వివిధ లక్షణాలను పరిశీలించడం.
- బూలియన్ మాత్రికలపై యుగ్మ పరిక్రియను నిర్వచించడం మరియు వివిధ లక్షణాలను ధృవీకరించండి.
- మాపక తరగతులపై యుగ్మ పరిక్రియను నిర్వచించడం మరియు వివిధ లక్షణాలను పరిశీలించండి.
- సాధారణ మరియు సమ్మేళన ప్రకటనలను గుర్తించడం.
- తార్కిక అనుసంధానాలను నిర్వచించడం మరియు సత్య పట్టికలను నిర్మించడం.
- పునరుత్త, విరోధాభాసం మరియు తుల్య ప్రవచనాలను గుర్తించడం.
- తార్కిక సమానత్వాన్ని ఏర్పరచడం మరియు ద్వంద్వ సూత్రాన్ని వర్తింపజేయడం.

12.2 యుగ్మ పరిక్రియలు

12.2.1 నిర్వచనాలు

$\mathbb{R}$ పై ప్రాథమిక అంకగణిత కార్యకలాపాలను సంకలనం (+), వ్యవకలనం (−), గుణకారం (×), మరియు విభజన (÷). 19వ శతాబ్దం చివరి భాగంలో మరియు 20వ శతాబ్దంలో అబెల్, కేలే, కాసి మరియు ఇతర ప్రముఖ గణిత శాస్త్రవేత్తలు ఈ సాధారణ గణిత పరిక్రియల ద్వారా సంతృప్తి చెంది, వాటి లక్షణాలను సాధారణీకరించడానికి ప్రయత్నించారు. ఈ దిశగా వారు అక్ష సంబంధ విధానం ద్వారా క్రొత్త అముక్త బీజగణిత నిర్మాణాలను అభివృద్ధి చేశారు. ఈ అముక్త బీజగణిత నిర్మాణాలతో వ్యవహరించే బీజగణితం యొక్క ఈ క్రొత్త శాఖను సంక్షిప్త బీజగణితం అంటారు. దీనినే నిర్దేశించిన రూపంలో $m+n \in \mathbb{N}$; $m \times n \in \mathbb{N}$, $\forall m, n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ వ్రాయవచ్చు. పైన తెలిపిన రెండు విభిన్న పరిక్రియలు క్రింది ధర్మాలను తృప్తిపరచుటను గమనించవచ్చు.

06_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_12.indd 238 24-01-2023 11:26:18

1) ఒకే సమయంలో సరిగ్గా $\mathbb{N}$ యొక్క రెండు మూలకాలు పరిక్రియ చేయబడతాయి.

2) ఫలిత మూలకము అనేది $\mathbb{N}$ యొక్క మూలకము అగును. ఏదేని శూన్యేతర మూలకాలను కలిగిన సమితిలో నిర్వచించబడిన పరిక్రియను యుగ్మ పరిక్రియ లేదా యుగ్మ కూర్పు అంటారు.

నిర్వచనం 12.1

ఒక శూన్యేతర సమితి S పై నిర్వచించబడిన $*$ అనే ఏదైనా ఒక పరిక్రియ యుగ్మ పరిక్రియగా పిలువబడాలంటే ఈ క్రింది ధర్మములను కలిగియుండవలెను.

(i) $S\times S$ లో గల ప్రతి క్రమయుగ్మముల జత (a,b) కు $*$ అనే పరిక్రియ ఖచ్చితంగా నిర్వచించబడవలెను.

(ii) $S\times S$ లో ప్రతి క్రమయుగ్మాల జత (a,b)కు S లో $a*b$ అనే ఒకే ఒక మూలకం ఉండును.

మరో మాటలో చెప్పాలంటే, S పై ఏదైనా యుగ్మ పరిక్రియ $*$ యొక్క ప్రతి క్రమయుగ్మాల జత మూలకాలను S ఏకైక మూలకాన్ని కేటాయిస్తుంది. అలాగే కార్టీషియన్ లబ్దం $S\times S$ మరియు S లోని ఫలితములతో ఒక ప్రమేయం ప్రతిసర్జకముగా పరిగణించబడుతుంది.

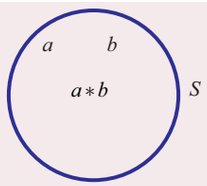
$*: S\times S \to S$; $*(a,b) = a*b \in S$, ఇక్కడ $a*b$ అనునది ఒక ఏకైక మూలకం.

$*$ యొక్క ఫలితం $a*b$ ఎల్లప్పుడూ ఖచ్చితంగా 'S' లో అమరి యుండవలెను మరియు 'S' కు వెలుపల అమరియుండకూడదు. ఈ సందర్భములో 'S' పరిక్రియ ద్వారా S అనునది సంవృతము అగును. ఈ ధర్మాన్ని సంవృత ధర్మం అంటారు.

నిర్వచనం 12.2

ఏదేని శూన్యేతర సమితిలో ఒకటి లేదా అంతకంటే ఎక్కువ యుగ్మ పరిక్రియలు నిర్వచించబడిన మూలకాలు కలిగిన సమితిని బీజగణిత నిర్మాణము అంటారు.

$*$ అనే యుగ్మ పరిక్రియను S పై క్రింది విధంగా నిర్వచించవచ్చు. $\forall a,b \in S, a*b$ అనునది ఒక ఏకైక మూలకం మరియు $a*b \in S$.



పటము. 12.1

గమనిక

పై నిర్వచనం నుండి ప్రతి యుగ్మ పరిక్రియ సంవృత ధర్మాన్ని సంతృప్తి పరుస్తుందని తెలియుచున్నది.

గమనిక

$*$ అనే పరిక్రియ కేవలం ఒక గుర్తు +, ×, −, ÷ మాత్రిక సంకలనం, మాత్రికల గుణకారం, మాత్రిక భాగాహారం మొదలగునవి. వాటిని నిర్వచించబడిన సమితిని బట్టి ఉంటుంది.

ఉదాహరణకు + మరియు × అనేవి $\mathbb{N}$ పై యుగ్మమైనప్పటికీ తీసివేత − అనేది యుగ్మ పరిక్రియ $(3,4) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ పై కాదు. దీనిని ధృవీకరించడానికి $(3,4) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$$*(a,b) = -(3,4) = 3-4 = -1 \notin \mathbb{N}.$$

అందువల్ల − అనేది $\mathbb{N}$ పై యుగ్మ పరిక్రియ కాదు. అదేవిధంగా $\mathbb{N}$ ను $\mathbb{Z}$ కు విస్తరించినప్పుడు − అనేది $\mathbb{Z}$ పై యుగ్మ పరిక్రియ అవుతుంది. అందువలన $\mathbb{Z}$ అనేది +, × మరియు − కు సంబంధించిన సంవృత ధర్మమవుతుంది. అందువలన $(\mathbb{Z}, +, \times, -)$ ఒక బీజగణిత నిర్మాణము.

పరిశీలనలు

యుగ్మ పరిక్రియ నిర్వచించిన సమితిపై ఆధారపడి ఉంటుంది.

(అ) పరిక్రియ '−' అనేది $\mathbb{N}$ పై యుగ్మ పరిక్రియ కాదు, కానీ ఇది $\mathbb{Z}$ పై యుగ్మ పరిక్రియ అవుతుంది. $\mathbb{N}$ అనే సమితిలో ఋణ సంఖ్యలను చేర్చి, దానిని విస్తరించిన అది $\mathbb{Z}$ అనే సమితిని సూచిస్తుంది.

06_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_12.indd 239 24-01-2023 11:26:20

(ఆ) పరిక్రియ ÷ అనేది $\mathbb{Z}$ పై యుగ్మ పరిక్రియ కాదు. ఉదాహరణకు, $(1,2)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}, \div(1,\ 2)=\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$ అందువల్ల $\mathbb{Z}$ ను $\mathbb{Q}$ లోకి మరింత విస్తరించాలి.

(ఇ) ప్రాథమిక అంకగణితములో 0 ద్వారా భాగాహారం నిర్వచించబడలేదని తెలిసిన వాస్తవం. కాబట్టి ÷ ఈ విధంగా +, ×, − అనేవి $\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ పై యుగ్మ పరిక్రియ అగును మరియు ÷ అనేది $\mathbb{Q}$ పై యుగ్మ పరిక్రియ సమితి అవుతుంది.

ఇప్పుడు $\mathbb{Q}$ ని $\mathbb{R}$ కి మరియు $\mathbb{R}$ ని $\mathbb{C}$ కి విస్తరించడానికి గల కారణాల గురించి చర్చించునప్పుడు $+, -, \times, \div$ వంటి ప్రాథమిక అంకగణిత పరిక్రియలతో $x^2-2=0$ మరియు $x^2+1=0$ సమీకరణ మూలాలు కలిగిన ఒక సంఖ్యా వ్యవస్థ అవసరమగుచున్నది. కాబట్టి ప్రస్తుత వ్యవస్థతో పాటు కరణీయ సంఖ్యలు మరియు కల్పిత సంఖ్యలు (imaginary numbers) సేకరణ (అధ్యాయం 3 చూడండి) పర్యవసానంగా $\mathbb{R}$ మరియు $\mathbb{C}$ లు లభించినవి. అతిపెద్ద సంఖ్యా వ్యవస్థ '$\mathbb{C}$' అనేది క్రమంగా ఇతర సంఖ్య వ్యవస్థలైన $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ మరియు $\mathbb{R}$ లకు ఉప సమితులుగా ఉంటుంది.

సంఖ్యా వ్యవస్థ / పరిక్రియ	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{Q}\setminus\{0\}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\mathbb{C}\setminus\{0\}$
+	యుగ్మ	యుగ్మ	యుగ్మ	యుగ్మ	యుగ్మ	యుగ్మ కాదు	యుగ్మ కాదు	యుగ్మ కాదు
−	యుగ్మ కాదు	యుగ్మ	యుగ్మ	యుగ్మ	యుగ్మ	యుగ్మ కాదు	యుగ్మ కాదు	యుగ్మ కాదు
×	యుగ్మ	యుగ్మ	యుగ్మ	యుగ్మ	యుగ్మ	యుగ్మ	యుగ్మ	యుగ్మ
÷	యుగ్మ కాదు	యుగ్మ కాదు	యుగ్మ కాదు	యుగ్మ కాదు	యుగ్మ కాదు	యుగ్మ	యుగ్మ	యుగ్మ

పట్టిక 12.1

ఉదాహరణ 12.1

క్రింది పరిక్రియ యొక్క యుగ్మ పరిక్రియ (సంవృత ధర్మము)ను పరిశీలించండి.

(i) $a*b=a+3ab-5b^2; \forall a,b\in\mathbb{Z}$

సాధన

(i) × అనేది $\mathbb{Z}$ పైన యుగ్మ పరిక్రియ కాబట్టి $a, b\in\mathbb{Z}\Rightarrow a\times b=ab\in\mathbb{Z}$ మరియు $b\times b=b^2\in\mathbb{Z}$ ... (1)

+ అనేది $\mathbb{Z}$ పైన యుగ్మ పరిక్రియ మరియు (1) $\Rightarrow 3ab=(ab+ab+ab)\in\mathbb{Z}$ మరియు $5b^2=(b^2+b^2+b^2+b^2+b^2)\in\mathbb{Z}$. .... (2)

అలాగే $a\in\mathbb{Z}$ మరియు $3ab\in\mathbb{Z}\ \Rightarrow\ a+3ab\in\mathbb{Z}$. ... (3)

(2), (3) లో నుండి $\mathbb{Z}$ పై − యుగ్మ పరిక్రియ వలన $a*b=(a+3ab-5b^2)\in\mathbb{Z}$ వచ్చును. కావున $a*b\in\mathbb{Z}$ అగుటవలన * అనేది $\mathbb{Z}$ పై సంవృత ధర్మము కలిగియున్నది.

ఈ ఉదాహరణలో, $a*b$ ఒక భిన్న రూపంలో కలదు. 0 తో బాగించడం నిర్వచింపబడుట వలన

06_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_12.indd 240 24-01-2023 11:26:23

12.2.2 కొన్ని ముఖ్యమైన యుగ్మ పరిక్రియ నియమాలు

వినిమయ ధర్మం

ఒక శూన్యేతర సమితి S పై యుగ్మ పరిక్రియ $*$ అనేది వినిమయ ధర్మము $a*b=b*a$ ను తృప్తిపరచిన $\forall a,b\in S$

సహచర ధర్మం

ఒక శూన్యేతర సమితి S పై యుగ్మ పరిక్రియ $*$ అనేది సహచర ధర్మమును తృప్తిపరచిన

$$a*(b*c)=(a*b)*c \quad \forall a,b,c\in S.$$

తత్సమ ధర్మం

$e\in S$ అనేది తత్సమ మూలకం మరియు $*$ పరిక్రియ S మీద తత్సమ ధర్మమును పాటించిన $a*e=a$ మరియు $e*a=a$.

విలోమ ధర్మము

$a\in S$ మరియు b అనేది S లో ఉంది అని అనుకుంటే అప్పుడు $a*b=e$ మరియు $b*a=e$ అయితే b అనేది a కి విలోమం అని అంటారు. కాబట్టి $b=a^{-1}$.

గమనిక

a^{-1} అనేది S లో విలోమ మూలకము. a^{-1} ని a యొక్క విలోమము అని అందురు. అయితే దానిని $\frac{1}{a}$ అని చెప్పలేము.

గమనిక

(i) $1\in\mathbb{Z}$ అనేది ఒక గుణకార తత్సమము '$\mathbb{Z}$' లో ఒకే ఒక మూలకం మాత్రమే ఈ ధర్మాన్ని కలిగియుండును. కావున $n\cdot 1=1\cdot n=n,\ \forall n\in\mathbb{Z}$.

(ii) $\mathbb{Q}$ లో 2 యొక్క గుణకార విలోమము $\frac{1}{2}$ అవుతుంది. మరియు ఏదేని శూన్యేతర అకరణీయ సంఖ్య ను x గా తీసుకుంటే $2\cdot x=x\cdot 2=1$.

గమనిక

గణిత ప్రకటన "ప్రతి" లేదా అనుదానిని ప్రతి సంబంధపరచినపుడు అది ప్రతి జత లేదా మూడు అంశాలకు నిరూపించబడాలి. ప్రతి జత లేదా మూడు అంశాలకు నిరూపించటం అంత సులభం కాదు. కానీ ప్రకటన యొక్క తిరస్కరణను నిరూపించడానికి ఈ రకమైన నిర్వచనాలు ఉపయోగించవచ్చు. అంటే "ప్రతి ఒక్కరికి" లేదా "అందరికీ" నిరాకరించడం ఉనికిలో లేదు. కాబట్టి ప్రతిపాదన యొక్క తిరస్కరణను స్థాపించడానికి అటువంటి జత లేదా మూడు అంశాలను ఏర్పరచుటకు ప్రయత్నించవచ్చు. ఆ విధంగా జరగనప్పుడు, ఇవ్వబడిన ప్రతిపాదన తత్సమం సరియైనది కాదని చెప్పవచ్చు.మరియు విలువ మీ యొక్క ఉనికి మరియు ప్రత్యేకత యొక్క ప్రశ్నలను పరిశీలించాలి. క్రింది సిద్ధాంతాలు ఈ ఫలితాలనుమరింత సాధారణ రూపంలో రుజువు చేస్తాయి.

సిద్ధాంతం 12.1 తత్సమం యొక్క ఏకైకత

బీజగణిత నిర్మాణంలో తత్సమ మూలకం (ఉనికిలో ఉంటే) ఏకైకంగా ఉంటుంది.

నిరూపణ

$(S,*)$ బీజగణిత నిర్మాణంగా అనుకొనుము మరియు S యొక్క తత్సమ మూలకం S ఉంది అని ఊహించుకొనుము.

06_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_12.indd 241 24-01-2023 11:26:26

తత్సమ మూలకం ఏకైకమైనదని నిరూపించవలెను. కాబట్టి S యొక్క తత్సమ మూలకాలు e_1, e_2 అని అనుకుందాం.

S లో మొదట e_1 ని తత్సమ మూలకంగాను, e_2 ను S యొక్క మూలకంగా తీసుకుంటే

తత్సమ ధర్మం ప్రకారం $e_2 * e_1 = e_1 * e_2 = e_2$ ... (1)

e_1 మరియు e_2 లను పరస్పరం మార్చిన, $e_1 * e_2 = e_2 * e_1 = e_1$ ...(2)

(1) మరియు (2) ల నుండి $e_1 = e_2$ తత్సమ మూలకం ఏకైకం అని ఋజువయ్యింది.

సిద్ధాంతం 12.2 (విలోమ ఏకైకం)

ఒక బీజగణిత నిర్మాణంలో ఒక మూలకము యొక్క విలోమం ఏకైకంగా ఉంటుంది. (ఉనికిలో ఉంటే)

నిరూపణ

$(S, *)$ ఒక బీజగణిత నిర్మాణముగా అనుకొనుము.మరియు a కి విలోమము $a \in S$ లో ఉంది అని ఊహించుకొనుము. 'S' లో గల ప్రతి మూలకమునకు ఒకే ఒక విలోమ మూలకము మాత్రమే ఉంటుంది అని నిర్వచించలేము. S లో విలోమ మూలకం ఉంటే దానిలో తత్సమ మూలకము 'e' ఖచ్చితంగా ఉంటుంది.

$a \in S$ అనుకొంటే S లో గల మూలకము a కు ఒకే ఒక విలోమ మూలకం మాత్రమే కలదని నిరూపించుము.

a యొక్క విలోమ మూలకాలు a_1, a_2 అనుకొనుము.

a యొక్క విలోమం a_1 గా తీసుకుంటే $a * a_1 = a_1 * a = e$ ...(1)

తర్వాత a_2 ను a యొక్క విలోమంగా తీసుకుంటే $a * a_2 = a_2 * a = e$ ...(2)

సమీకరణం (1) మరియు (2)ల నుండి $a_1 = a_1 * e = a_1 * (a * a_2) = (a_1 * a) * a_2 = e * a_2 = a_2$.

$a_1 = a_2$ కాబట్టి a కి ఏకైక విలోమం ఉంటుంది అని ఋజువైనది.

ఉదాహరణ 12.2

$(\mathbb{Z}, +)$ లందు (i) సంవృత ధర్మం (ii) వినిమయ ధర్మం (iii) సహచర ధర్మం (iv) తత్సమ ధర్మం మరియు (v) విలోమ ధర్మాన్ని సరి చూడండి.

సాధన

(i) $m + n \in \mathbb{Z}, \forall m, n \in \mathbb{Z}$ కావున '+' అనేది $\mathbb{Z}$ పై యుగ్మ పరిక్రియ అగును.

(ii) $m + n = n + m, \forall m, n \in \mathbb{Z}$ కావున ఇది వినిమయ ధర్మాన్ని సంతృప్తి పరుస్తుంది.

(iii) $m + (n + p) = (m + n) + p$, $\forall m, n, p \in \mathbb{Z}$, కావున ఇది సహచర్య సహచర ధర్మాన్ని తృప్తి పరుస్తుంది.

(iv) $m + e = e + m = m \Rightarrow e = 0$. కావున $\exists\ 0 \in \mathbb{Z} \ni (m + 0) = (0 + m) = m$. కావున తత్సమ ధర్మం కలదు.

(v) $m + m' = m' + m = 0 \Rightarrow m' = -m$. కావున $\forall m \in \mathbb{Z}, \exists\ -m \in \mathbb{Z}\ \ni$

$m + (-m) = (-m) + m = 0$ కావున విలోమ ధర్మం కలదు. ఈ విధంగా సంకలనం $+$, $\mathbb{Z}$ పై మిగిలిన 5 ధర్మములను తృప్తి పరచును.

గమనిక:- సంకలన తత్సమము 0 మరియు m యొక్క సంకలన విలోమము $-m$ అగును.

06_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_12.indd 242 24-01-2023 11:26:29

ఉదాహరణ 12.3

$(\mathbb{Z}, -)$ నందు (i) సంవృత ధర్మం (ii) వినిమయ ధర్మం (iii) సహచర్య ధర్మం (iv) తత్సమ ధర్మం మరియు (v) విలోమ ధర్మాన్ని సరి చూడండి.

సాధన

(i) $\mathbb{N}$ పైన – యుగ్మ పరిక్రియ కాదు. కాని $\mathbb{Z}$ పైన యుగ్మ పరిక్రియ అవుతుంది.

$m, n \in z \Rightarrow m - n$ లేదా $n - m \in z$

(ii) దీనిని కొన్ని విలువల ద్వారా పరిశీలించుము $m = 4$, $n = 5$ అయిన $(m-n) = (4-5) = -1$ మరియు $(n-m) = (5-4) = 1$

కావున $(m-n) \neq (n-m)$ కావున పరిక్రియ – ద్వారా $\mathbb{Z}$ పైన వినిమయ ధర్మం లేదు.

(iii) సహచర ధర్మం: $m = 4, n = 5$ మరియు $p = 7$ అయిన $(m-n)-p$ మరియు $m-(n-p)$.

$(m-n)-p = (4-5)-7 = (-1-7) = -8$ ...(1)

$m-(n-p) = 4-(5-7) = (4+2) = 6$. ...(2)

సమీకరణం (1) మరియు (2) నుండి $(m-n)-p \neq m-(n-p)$.

కావున పరిక్రియ ' – ' ద్వారా $\mathbb{Z}$ పైన సహచర ధర్మం లేదు.

(iv) తత్సమం నిర్వచించలేదు (ఎందుకు)

(v) విలోమం నిర్వచించలేదు (ఎందుకు)

ఉదాహరణ 12.4

$\mathbb{Z}_e$ అనునది సరి పూర్ణసంఖ్యల సమితి అయితే, $(\mathbb{Z}_e, +)$ లో క్రింది నియమాలను సరి చూడండి. (i) సంవృత ధర్మం (ii) వినిమయ ధర్మం (iii) సహచర ధర్మం (iv) తత్సమ ధర్మం మరియు (v) విలోమ ధర్మం.

సాధన

సరి పూర్ణసంఖ్యల సమితి $\mathbb{Z}_e = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{..., -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, ...\}$.

$(\mathbb{Z}_e, +)$ మీద ధర్మాలను సరి చూద్దాం

(i) ఏవైనా రెండు సరిపూర్ణసంఖ్యల మొత్తం ఒక సరిపూర్ణ సంఖ్య

ఎందుకనగా $x, y \in \mathbb{Z}_e \Rightarrow x = 2m$ మరియు $y = 2n$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

కావున $(x+y) = 2m + 2n = 2(m+n) \in \mathbb{Z}_e$. కావున యుగ్మ పరిక్రియ $\mathbb{Z}_e, +$ పై సంవృత ధర్మం కలదు.

(ii) $\forall x, y \in \mathbb{Z}_e, (x+y) = 2(m+n) = 2(n+m) = (2n+2m) = (y+x)$.

కావున యుగ్మ పరిక్రియ ' +' ద్వారా $\mathbb{Z}_e$ పై వినిమయ ధర్మం కలదు.

(iii) అదే విధంగా $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}_e$, $(x+y)+z = x+(y+z)$.
కావున సహచర ధర్మం నిజమగును.

(iv) $x = 2k$ తీసుకుని $2k + e = e + 2k = 2k \Rightarrow e = 0$.

కాబట్టి $\forall x \in \mathbb{Z}_e$, $\exists 0 \in \mathbb{Z}_e \ni x + 0 = 0 + x = x$.

కావున 0 తత్సమ మూలకం.

(v) $x = 2k$ అయితే x యొక్క విలోమం x' గా తీసుకుంటే క్రింది విధంగా వచ్చును.
$2k + x' = 0 = x' + 2k \Rightarrow x' = -2k$. *i.e.,* $x' = -x$.

కాబట్టి $\forall x \in \mathbb{Z}_e, \exists -x \in \mathbb{Z}_e \ni x + (-x) = (-x) + x = 0$

కావున x యొక్క విలోమం x' అవుతుంది. లేదా $-x$ యొక్క విలోమం $-x$ అవుతుంది.

06_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_12.indd 243 24-01-2023 11:26:34

ఉదాహరణ 12.5

$\mathbb{Z}_o$ అనునది బేసి పూర్ణసంఖ్యల సమితి అయిన $(\mathbb{Z}_o, +)$ లో క్రింది నియమాలను సరి చూడండి. (i) సంవృత ధర్మం, (ii) వినిమయ ధర్మం, (iii) సహచర ధర్మం, (iv) తత్సమ ధర్మం మరియు (v) విలోమ ధర్మం.

సాధన

అన్ని బేసి పూర్ణసంఖ్యల సమితి $\mathbb{Z}_o = \{2k+1 : k \in \mathbb{Z}\} = \{..., -5, -3, -1, 1, 3, 5, ...\}$ అనుకొనుము. $+$ అనేది $\mathbb{Z}_o$ పై యుగ్మ పరిక్రియ కాదు. ఎందుకనగా $x = 2m+1, y = 2n+1$ అనేటప్పుడు $x + y = 2(m+n)+2$ అనేది అన్ని m, n లకు సరిసంఖ్యగా ఉండును. ఉదాహరణకు $3, 7 \in \mathbb{Z}_o$ అనే రెండు బేసి సంఖ్యలు తీసుకొనుము. వాటి మొత్తం $3+7=10$ సరి సంఖ్య $10 \notin \mathbb{Z}_o$ కాబట్టి $\mathbb{Z}_o$, $+$ మీద సంవృతం కాదు. కాబట్టి మిగతా ధర్మములను సరి చూడనవసరం లేదు. ■

ఉదాహరణ 12.6

క్రింద ఇవ్వబడిన సమితి పై పరిక్రియలు (i) సంవృత ధర్మం (ii) వినిమయ ధర్మం మరియు (iii) సహచర ధర్మం.

కలిగియున్నదా అని సరి చూడుము $(a * b) = a^b ; \forall a, b \in \mathbb{N}$

సాధన

(i) $a * b = a^b \in \mathbb{N}; \forall a, b \in \mathbb{N}$ సత్యము. కావున $*$ అనే యుగ్మ పరిక్రియ $\mathbb{N}$ పై సంవృతము.

(ii) $a * b = a^b$ మరియు $b * a = b^a$. $a = 2$ మరియు $b = 3$, అని ఉంచితే $a * b = 2^3 = 8$ అయితే $b * a = 3^2 = 9$

కావున $a * b$ అనునది $b * a$ కి సమానం కాదు. అందువలన $*$ అనే యుగ్మ పరిక్రియ $\mathbb{N}$ పై వినిమయ ధర్మమును సంతృప్తి పరచదు.

(iii) తర్వాతి పరిగణన $a * (b * c) = a * (b^c) = a^{(b^c)}$ అని అనుకొనుము. $a = 2$, $b = 3$ మరియు $c = 4$.

అని తీసుకుంటే తర్వాత $a * (b * c) = 2 * (3 * 4) = 2^{3^4} = 2^{81}$

అయితే $(a * b) * c = (a^b) * c = (a^b)^c = a^{(bc)} = a^{bc} = 2^{12}$

అందువలన $a * (b * c) \neq (a * b) * c$ కావున $\mathbb{N}$ మీద సహచర ధర్మం లేదు.

గమనిక: ఈ యుగ్మ పరిక్రియలో తత్సమం మరియు విలోమం లేదు. (సమర్థించండి) ■

ఉదాహరణ 12.7

క్రింద ఇవ్వబడిన సమితిపై పరిక్రియలను (i) సంవృత ధర్మం, (ii) వినిమయ ధర్మం, (iii) సహచర ధర్మం, (iv) తత్సమ ధర్మం మరియు (v) విలోమ ధర్మం

$m * n = m + n - mn;\ m, n \in \mathbb{Z}$

సాధన

(i) $*$ అనే యుగ్మ పరిక్రియ $m + n - mn$ యొక్క ఫలితం ఒక పూర్ణసంఖ్య. కావున ఇది $\mathbb{Z}$ పైన సంవృతమగును.

(ii) $m * n = m + n - mn = n + m - nm = n * m$, $\forall m, n \in \mathbb{Z}$. కావున $*$ వినిమయ ధర్మాన్ని కలిగియున్నది.

(iii) పరిగణన $(m * n) * p = (m + n - mn) * p = (m + n - mn) + p - (m + n - mn)\, p$

$$= m + n + p - mn - mp - np + mnp \quad \ldots (1)$$

అదేవిధంగా $m * (n * p) = m * (n + p - np) = m + (n + p - np) - m(n + p - np)$

$$= m + n + p - np - mn - mp + mnp \quad \ldots (2)$$

06_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_12.indd 244 24-01-2023 11:26:40

(1) మరియు (2)ల నుండి, $m*(n*p)=(m*n)*p$ అందువలన $*$ సహచర ధర్మం కలిగియున్నది.

(iv) e ఒక పూర్ణసంఖ్య అయితే

$m*e=e*m=m,\ \forall m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m+e-m\ e=m$

అయితే m అనునది ఒక యాదృచ్ఛిక పూర్ణసంఖ్య మరియు అది ఒకటికి సమానం కావలసిన అవసరం లేదు. కావున $e=0$ సాధ్యం. $m*0=0*m=m,\ \forall m\in\mathbb{Z}$. అందువల్ల '0' తత్సమ మూలకం మరియు తత్సమం అవుతుంది.

(v) ఒక మూలకము $m'\in\mathbb{Z}$ నిర్వచిస్తే $m*m'=m'*m=e=0,\ \forall m\in\mathbb{Z}$.

$m*m'=0\Rightarrow m+m'-m\ m'=0\Rightarrow m'=\dfrac{m}{m-1}$. m=1 అయినప్పుడు m' నిర్వచించలేము.

$m=2$ అయినప్పుడు m' ఒక పూర్ణసంఖ్య అయితే m=2 తప్ప m యొక్క అన్ని విలువలకు m' అనునది పూర్ణసంఖ్య కానవసరం లేదు. కావున $\mathbb{Z}$ లో విలోమమును నిర్వచించలేము. ■

12.2.3 బూలియన్ మాత్రికలపై కొన్ని యుగ్మ పరిక్రియలు

నిర్వచనం 12.3

ఒక నిజ మాత్రికలో ప్రతి మూలకము 0 లేక 1 గా ఉన్నచో ఆ మాత్రికను బూలియన్ మాత్రిక అని అంటారు.

బూలియన్ మూలకాలు 0 మరియు 1 ను అనేక విధాలుగా నిర్వచించవచ్చునని గమనించాలి. విద్యుత్ స్విచ్‌లో "on మరియు off" గ్రాఫ్ సిద్ధాంతంలో 'ఆసన్న మాత్రిక' మొదలగునవి. బూలియన్ మూలకాలుగా 0 మరియు 1ని ఉపయోగిస్తారు. మనము అదే రకమైన బూలియన్ మాత్రికను చర్చిస్తాం.

బూలియన్ మాత్రికలో రెండు రకాలైన పరిక్రియలు నిర్వచించడమైనది.

ఒకే రకమైన రెండు బూలియన్ మాత్రికలు $A=\left[a_{ij}\right]$ మరియు $B=\left[b_{ij}\right]$ వాటిని చేర్చడం $\vee$ మరియు కలుసుకోవడం $\wedge$ లను క్రింది విధంగా నిర్వచించడమైనది.

నిర్వచనం12.4: A మరియు B లను చేర్చడం

$$A\vee B=\left[a_{ij}\right]\vee\left[b_{ij}\right]=\left[a_{ij}\vee b_{ij}\right]=\left[c_{ij}\right]$$

$$\text{ఇక్కడ } c_{ij}=\begin{cases}1, & a_{ij}=1 \quad \text{లేదా} \quad b_{ij}=1\\ 0, & a_{ij}=0 \ \text{మరియు} \ b_{ij}=0\end{cases}$$

నిర్వచనం 12.5: A మరియు B ల కలయిక

$$A\wedge B=\left[a_{ij}\right]\wedge\left[b_{ij}\right]=\left[a_{ij}\wedge b_{ij}\right]=\left[c_{ij}\right] \text{ ఇక్కడ } c_{ij}=\begin{cases}1, & a_{ij}=1 \ \text{మరియు} \ b_{ij}=1\\ 0, & a_{ij}=0 \quad \text{లేదా} \quad b_{ij}=0\end{cases}$$

$(a\vee b)=\max\{a,b\}$; $(a\wedge b)=\min\{a,b\}$, $a,b\in\{0,1\}$.

ఉదాహరణ 12.8

$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ ఒకే రకమైన బూలియన్ మాత్రికలయితే $A\vee B$ మరియు $A\wedge B$ లను కనుగొనండి.

06_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_12.indd 245 24-01-2023 11:26:45

సాధన

$$\text{తర్వాత } A \vee B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \vee 1 & 1 \vee 1 \\ 1 \vee 0 & 1 \vee 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \wedge B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \wedge 1 & 1 \wedge 1 \\ 1 \wedge 0 & 1 \wedge 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

చేర్చడం మరియు కలుసుకోవడం తృప్తిపరిచే ధర్మాలు

$\mathbb{B}$ అనేది ఒకే రకమైన బూలియన్ మాత్రికల సమితి. ఇప్పుడు 'B' పై చేర్చడం మరియు కలుసుకోవడం సంబంధించిన ధర్మాలు చూస్తాం.

సంవృత ధర్మము

$A, B \in \mathbb{B},\ A \vee B = [a_{ij}] \vee [b_{ij}] = [a_{ij} \vee b_{ij}] \in \mathbb{B}$ (ఎందుకంటే $(a_{ij} \vee b_{ij})$ అయితే 0 కాని లేదా 1 అగును $\forall i, j$) కావున $\vee$ అనే పరిక్రియ $\mathbb{B}$ పై సంవృతంగా ఉండును.

సహచర ధర్మము

$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C,\ \forall A, B, C \in \mathbb{B}$. కావున $\vee$ అను పరిక్రియ $\mathbb{B}$ పై సహచర ధర్మమును కలిగి వుండును.

తత్సమ ధర్మము:

$\forall A \in \mathbb{B}$, $\exists$ శూన్య మాత్రిక $0 \in \mathbb{B} \ni A \vee 0 = 0 \vee A = A$. $\vee$ యొక్క తత్సమ మూలకం శూన్య మాత్రిక అవుతుంది.

విలోమ ధర్మము:

ఏదైనా ఒక మాత్రిక $A \in \mathbb{B}$ కు $A \vee B = B \vee A = 0$ అనే సమీకరణాన్ని తృప్తిపరచే విధంగా $B \in \mathbb{B}$ విలోమ మూలకము $\mathbb{B}$ లో ఉండదు. అదేవిధంగా కలుసుకోవడం $\wedge$ అనే పరిక్రియ క్రింది వాటిని తృప్తిపరుస్తుంది అని చూడవచ్చును.

(i)సంవృతధర్మము (ii)వినిమయధర్మము (iii)సహచరధర్మము (iv) $U = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ అనేది $\mathbb{B}$లో తత్సమమాత్రికఅగును.

(v) విలోమ మూలకాలు ఉంటాయని నిర్వచించలేము.

12.2.4 అంకగణిత మాపము:

ఈ విభాగము నందు అంకగణిత పరిక్రియలో మాత్రిక సంకలనము మరియు గుణకారము, బూలియన్ మాత్రికల చేర్చడం మరియు కలపడంతో పాటు అంకగణిత మాపం అను క్రొత్త పరిక్రియ గురించి చర్చించెదము. అంకగణిత మాపం ద్వారా ఏదేని సంఖ్య a ను ఒక ధనాత్మక పూర్ణసంఖ్య n తో భాగించు పద్ధతిని మాపము అంటారు మరియు a, b అనే రెండు పూర్ణసంఖ్యలకు మధ్య గల వ్యత్యాసము n మాపం అయిన, 'a' ని 'b' అను శేషంతో సమన్వయపరిచినపుడు దాని మాపం 'm' అగును.

దీనిని క్రింది విధంగా వ్రాయగలము $a \equiv b$ (మాపం n) దీని ప్రకారము $a - b = n \cdot k$, $k \in \mathbb{Z}$ మరియు a ని n చే భాగించినపుడు 'b' అనేది కనిష్ఠ ధనాత్మక పూర్ణసంఖ్య అగును.

ఉదాహరణకు $25 \equiv 4 (\text{మాపం } 7), -20 \equiv -2 (\text{మాపం } 3) \equiv 1 (\text{మాపం } 3)$ మరియు $15 \equiv 0 (\text{మాపం } 5)$ మొదలైనవి. పూర్ణసంఖ్యల సమితిని n తో భాగించినపుడు వచ్చు శేషములు $0, 1, 2, \ldots, n-1$ $\mathbb{Z}_5$ లో

$$[0] = \{\ldots, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \ldots\}$$

$$[1] = \{\ldots, -14, -9, -4, 1, 6, 11, \ldots\}$$

06_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_12.indd 246 24-01-2023 11:26:49

$$[2] = \{\ldots,-13,-8,-3,2,7,12,\ldots]$$
$$[3] = \{\ldots,-12,-7,-2,3,8,13,\ldots\}$$
$$[4] = \{\ldots,-11,-6,-1,4,9,14,\ldots\}.$$ వాటిని

UMQL5

$\mathbb{Z}_5 = \{[0],[1],[2],[3],[4]\}$. గా వ్రాయవచ్చును. ప్రతి తరగతి నందు ఏదైనా రెండు సంఖ్యల మాపము 5 కు సమన్వయం కలిగి యుండును.

2007 కు ముందు, అంకగణిత మాపమును ఉపయోగించి 10 అంకెల సంఖ్యా వ్యవస్థ నందు ఉపయోగించిరి. ఉదాహరణకు చివరి అంకెల జతను సరిచూచుటకు ఇది $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,X\}$ అను సమితి నుండి వచ్చును. 81-7808-755-3, అనే ISBN సంఖ్యల చివరి అంకె 3 ను క్రిందివిధంగా పొందగలము.

$1*8+2*1+3*7+4*8+5*0+6*8+7*7+8*5+9*5 = 8+2+21+32+0+48+49+40+45=245 \equiv 3$। (మాపము 11).

మరొక విధంగా సగటు మొత్తమును ప్రతిలోమ పద్ధతి ద్వారా గణించగలము.

$9*8+8*1+7*7+6*8+5*0+4*8+3*7+2*5+1*5=245 = 3$ (మాపము 11).

రెండు విధములుగా కూడినా ఒకే సమాధానం 3 అని గమనించవచ్చు.

2007 తర్వాత 13 అంకెల ISBN సంఖ్యా వ్యవస్థ నందు ఉపయోగించిరి. (ఎడమవైపు నుండి కుడివైపుకు) కుడివైపు నుండి ప్రారంభించి ఎడమ వైపునకు వాటి సగటులైన 3,1,3,1,.... లతో గణించినపుడు మొదటి 12 అంకెలు (ఎడమ వైపు నుండి కుడివైపు) లభించును. దీని నుండి సగటు మొత్తమును గణించగలము. 10 యొక్క గరిష్ట గుణిజాలను తీసుకొని దాని వ్యత్యాసమును గణించగలము. దీని సంకలన విలోమ మాపము10 అనేది 13వ అంకెగా ఉండును.

ఉదాహరణకు ISBN (అంతర్జాతీయ ప్రామాణిక పుస్తకాల సంఖ్య)లో 978-81-931995-6-5, 12 అంకెలను ఎడమ నుంచి కుడికి తీసుకొనుము.

9	7	8	8	1	9	3	1	9	9	5	6
1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3
9	21	8	24	1	27	3	3	9	27	5	18

చివరి అడ్డు వరుసలోని అంకెల మొత్తము 155, 160 అనునది సమీప (గరిష్ఠ) పూర్ణసంఖ్య 10 యొక్క గుణిజము అగును. వాటి వ్యత్యాసము 160-155=5, దీని 10 యొక్క సంకలన విలోమ మాపము 5 అగును మరియు అది ISBN సంఖ్య నందు 13వ అంకెగా వుండును.

అంకగణిత మాపము నందు n కంటే తక్కువ గల ధనాత్మక పూర్ణసంఖ్యల సమితి $\mathbb{Z}_n$ నందు సంకలన మాపము $n(+_n)$ మరియు గుణకారం మాపము $n(\times_n)$ అను రెండు క్రొత్త పరిక్రియలు నిర్వచించబడును.

నిర్వచనము 12.6

(i) సంకలనం మాపం n ను ఈ క్రింది విధంగా నిర్వచిస్తాము.

$a,b \in \mathbb{Z}_n$ అప్పుడు

$a +_n b =$ n చేత భాగించినపుడు $a+b$ యొక్క శేషం

(ii) గుణక మాపము n ను ఈ క్రింది విధంగా నిర్వచిస్తాము.

$a,b \in \mathbb{Z}_n$. అప్పుడు

$a \times_n b =$ $a \times b$ ను n తో భాగిస్తే వచ్చే శేషం.

06_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_12.indd 247 24-01-2023 11:26:51

ఉదాహరణ 12.9

$\mathbb{Z}_5$ మీద సంకలనం మాపము 5 $(+_5)$ పట్టికను ఉపయోగించి క్రింది ధర్మాలను సరి చూడండి. (i) సంవృత ధర్మం (ii) వినిమయ ధర్మం (iii) సహచర ధర్మం (iv) తత్సమ ధర్మం (v) విలోమ ధర్మం

సాధన

$\mathbb{Z}_5 = \{[0], [1], [2], [3], [4]\}$, సంకలనం మాపం 5గా తీసుకొన్నప్పుడు వచ్చే శేషములు $\{0,1,2,3,4\}$ లను $\{[0],[1],[2],[3],[4]\}$ తరగతులను సూచించును.

$+_5$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

పట్టిక 12.2

(i) పై పట్టికలోని ఒక్కొక్క గది $\mathbb{Z}_5$, నందు గల ఒకే ఒక విలువను $a +_5 b$ యొక్క ఫలితము ఏకైకముగా ఉండును. మరియు $+_5$ అనునది యుగ్మ పరిక్రియ అగును.

(ii) ప్రధాన వికర్ణము నందు గల విలువలు సౌష్ఠవ ధర్మమును కలిగియుండుట వలన +5లో వినిమయం ఉండును.

(iii) సహచర ధర్మమును సరిచూచుటకు పై పట్టిక ఉపయోగపడదు. దీనిని సాధారణముగా సరిచూడవలెను.

$(2 +_5 3) +_5 4 = 0 +_5 4 = 4$ (మాపము 5)

మరియు $2 +_5 (3 +_5 4) = 2 +_5 2 = 4$ (మాపము 5)

కాబట్టి $(2 +_5 3) +_5 4 = 2 +_5 (3 +_5 4)$.

ఈ విధంగా కొనసాగిస్తూ పోతే ఏవేని మూడు విలువలను తీసుకొని సరి చూడవచ్చు మరియు చివరగా .యుగ్మ పరిక్రియ +5లో సహచర ధర్మము కలదు.

(iv) పట్టికలో 0 కు అడ్డు వరుస నిలువ వరుస ఒకే విధముగా ఉండును. కావున $0 \in \mathbb{Z}$ అనేది తత్స మూలకం అగును.

(v) ప్రతి నిలువు వరుస మరియు అడ్డు వరుసలలో తత్సమము '0' అయినపుడు మాత్రమే విలోమము సాధ్యమగును. ఈ లక్షణము పట్టిక 12.2 నందు స్పష్ఠముగా ఉన్నది. కావున $\mathbb{Z}_5$ నందు ఏదైనా ఒక్క విలువ '2'నకు విలోమము క్రింది విధముగా ఉండును.

'2' ను ప్రధానంగా గల మూడవ అడ్డు వరుసలో తత్సమ విలువ '0'ని చేరుకొన్నప్పుడు అది నాల్గవ నిలువు వరుసలో కలదు. నాల్గవ నిలువు వరుసపై భాగములో గల విలువ 3 అగును. '3' అను విలువ 2 యొక్క విలోమము అగును. ఎందుకనగా $2 +_5 3 = 0$ (మాపం 5). ఈ పద్ధతిలో $\mathbb{Z}_5$ నందు గల ఒక్కొక్క విలువకు విలోమమును కనిపెట్టగలము. '0' యొక్క విలోమము '0', '1' యొక్క విలోమము 4, 2 యొక్క విలోమము 3, 3 యొక్క విలోమము 2 మరియు 4 యొక్క విలోమము 1 అగును.

06_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_12.indd 248 24-01-2023 11:26:53

ఉదాహరణ 12.10

$\times_{11}$ పరిక్రియలో ఏర్పడిన శేషం కలిగిన సమితి $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ యొక్క ఉపసమితి $A=\{1,3,4,5,9\}$ అయితే ఈ క్రింది ధర్మాలను సరి చూడండి.

(i) సంవృత ధర్మం (ii) వినిమయ ధర్మం (iii) సహచర ధర్మం (iv) తత్సమ ధర్మం (v) విలోమ ధర్మం.

సాధన

$\times_{11}$ పరిక్రియతో ఏర్పడే పట్టిక

$\times_{11}$	1	3	4	5	9
1	1	3	4	5	9
3	3	9	1	4	5
4	4	1	5	9	3
5	5	4	9	3	1
9	9	5	3	1	4

పట్టిక 12.3

పై ఉదాహరణ నందు పరిక్రియలను వివరించిన విధంగా A మీద $\times_{11}$ పరిక్రియ లక్షణాలను సరిచూడవలసిన పద్ధతి దిగువ ఇవ్వబడినది.

(i) ప్రతి పెట్టె నందు గల మూలకములు ఏకైకము కావున $\times_{11}$ అనునది A మీద యుగ్మ పరిక్రియ అగును.

(ii) ప్రధాన వికర్ణములోని మూలకాలు సౌష్ఠవము. కావున $\times_{11}$ నకు వినిమయ ధర్మం వర్తించును.

(iii) సహచర ధర్మం సత్యమని పట్టిక ద్వారా చెప్పవచ్చును.

(iv) పట్టికలో 1ని ప్రధానంగా కలిగిన అడ్డు వరుస మరియు నిలువు వరుసలు ఒకే విధంగా ఉన్నవి. కావున '1' అనునది తత్సమ మూలకమౌతుంది.

(v) ప్రతి అడ్డు వరుస మరియు ప్రతి నిలువవరసలో తత్సమము '1' ఉన్నందున పరిక్రియ $\times_{11}$ కు విలోమము వర్తించును. కవున 1 యొక్క విలోమము 1,3 యొక్క విలోమము 4, 4 యొక్క విలోమము 3, 5 యొక్క విలోమము 9, మరియు 9 యొక్క విలోమము 5 అగును. ■

అభ్యాసం 12.1

1. ఈ క్రింద ఇవ్వబడిన సమితులలో $*$ యుగ్మ పరిక్రియ అవుతుందా అని కనుగొనండి.
   (i) $\mathbb{R}$ మీద $a*b=a.|b|$
   (ii) $A=\{1,2,3,4,5\}$ మీద $a*b=$ కనీసం (a,b)
   (iii) $(a*b)=a\sqrt{b}$ అనునది $\mathbb{R}$ మీద యుగ్మ పరిక్రియ
2. $\mathbb{Z}$ మీద $*$ అనే పరిక్రియ క్రింది విధంగా నిర్వచించబడినది. $(m*n)=m^n+n^m : \forall m,n\in\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ మీద $*$ యుగ్మమగునా?
3. $\mathbb{R}$ మీద $*$ అనే పరిక్రియ క్రింది విధంగా నిర్వచించబడినది. $(a*b)=a+b+ab-7$. $\mathbb{R}$ మీద $*$ యుగ్మమగునా? మరియు $3*\left(\frac{-7}{15}\right)$ ని కనుగొనుము.

06_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_12.indd 249 24-01-2023 11:26:54

4. $A=\{a+\sqrt{5}b : a,b\in\mathbb{Z}\}$ అయిన A మీద సాధారణ గుణకారం. యుగ్మ పరిక్రియ అగునా?

5. (i) $\mathbb{Q}$ మీద $*$ అనే పరిక్రియ క్రింది విధంగా నిర్వచింపబడినది. $a*b=\left(\frac{a+b}{2}\right)$; $a,b\in\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}$ మీద $*$ అనే పరిక్రియ సంవృతము, వినిమయము మరియు సహచర ధర్మాలను సరిచూడుము.

(ii) $\mathbb{Q}$ మీద $*$ అనే పరిక్రియ క్రింది విధముగా నిర్వచించబడినది. $a*b=\left(\frac{a+b}{2}\right)$; $a,b\in\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}$ మీద $*$ అనే పరిక్రియలో తత్సమము మరియు విలోమ నియమములను సరిచూడుము.

6. $A=\{a,b,c\}$ మీద $*$ అనే యుగ్మ పరిక్రియను ఉపయోగించి క్రింది పట్టికను వినిమయం ద్వారా పూరించండి.

$*$	a	b	c
a	b		
b	c	b	a
c	a		c

7. $A=\{a,b,c,d\}$ అను సమితి మీద $*$ అనే యుగ్మ పరిక్రియను క్రింది పట్టికకు వినిమయ మరియు సహచర ధర్మములు వర్తించునా?

$*$	a	b	c	d
a	a	c	b	d
b	d	a	b	c
c	c	d	a	a
d	d	b	a	c

8. ఏవైనా మూడు ఒకేరకమైన బూలియన్ మాత్రికలు

$A=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}$ అయిన

(i) $A\vee B$ (ii) $A\wedge B$ (iii) $(A\vee B)\wedge C$ (iv) $(A\wedge B)\vee C$ ని కనుగొనండి.

9. (i) $M=\left\{\begin{pmatrix}x&x\\x&x\end{pmatrix} : x\in R-\{0\}\right\}$ మరియు $*$ అనే పరిక్రియ మాత్రిక గుణకారము అయిన M : మీద $*$ అనే పరిక్రియ సంవృత ధర్మాన్ని పాటిస్తుందా అని కనుగొనుము. అలాగే M : మీద $*$ అనే పరిక్రియలో వినిమయ మరియు సహచర ధర్మాలను కూడా పరీక్షించండి.

(ii) $M=\left\{\begin{pmatrix}x&x\\x&x\end{pmatrix} : x\in R-\{0\}\right\}$ మరియు $*$ అనే పరిక్రియ మాత్రిక గుణకారము అయిన M : మీద $*$ అనే పరిక్రియ సంవృత ధర్మాన్ని పాటిస్తుందా అని కనుగొనుము. అలాగే M : మీద $*$ అనే పరిక్రియలో తత్సమము మరియు విలోమ ధర్మములను కూడా పరీక్షించండి.

06_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_12.indd 250 24-01-2023 11:26:57

10. (i) A అనేది $\mathbb{Q}\setminus\{1\}$ గా నిర్వచించబడెను. A మీద $*$ ను $x*y=x+y-xy$ గా నిర్వచించిన $*$ యుగ్మమగునా? అలా అయితే వినిమయం మరియు సహచర ధర్మాలను A మీద $*$ పరిక్రియలను పరీక్షించండి.

(ii) A అనేది $\mathbb{Q}\setminus\{1\}$ గా తీసుకొనుము. A మీద పరిక్రియ $*$ ను $x*y=x+y-xy$ గా నిర్వచించబడెను. A మీద $*$ యుగ్మమగునా? అలా అయితే తత్సమము మరియు విలోమ ధర్మాలను A మీద $*$ పరిక్రియను పరీక్షించండి.

12.3 తార్కిక గణితము

జార్జ్‌బూలే ఒక స్వీయ బోధన, ఆంగ్ల గణిత శాస్త్రవేత్త, తత్వవేత్త మరియు తార్కిక వేత్త. యుగ్మ సంఖ్యలతో కూడిన బూలియన్ బీజగణితముపై అతని ఫలితాలు వివిధ రంగాలలో ముఖ్యమైన పాత్రను పోషించును. ప్రత్యేకంగా సంగణక అనువర్తనాలలో దీనిని ఎక్కువగా ఉపయోగించారు. అతను తార్కిక ఆలోచనలను చిహ్నాల ద్వారా ప్రవేశపెట్టాడు మరియు తార్కిక గణితము యొక్క అభివృద్ధికి వీటి ఫలితములు సహాయపడెను.

ప్రఖ్యాత గ్రీకు తత్వవేత్త అరిస్టాటిల్ (స.శ.పూ. 384 – 332) తార్కికం నందు మొదటి పుస్తకం రచించిరి. తార్కికము సంజ్ఞలు మరియు బీజగణితముతో సంబంధపడినది అను భావనను జార్జ్ బూలే ప్రతిపాదించెను. 17వ శతాబ్దమునకు చెందిన ప్రసిద్ధ గణిత మరియు జర్మన్ తత్వవేత్త అయిన గాట్‌ఫ్రైడ్ లిబ్నిట్ తార్కిక సంజ్ఞల భావనను రూపొందించెను. తర్వాత ఈ భావన 19వ శతాబ్దములో జార్జ్ బూలే మరియు ఆగస్టస్ డీమోర్గాన్ చేత గుర్తించబడెను. 19వ శతాబ్దం చివరలో మరియు 20వ శతాబ్దంలో తార్కిక గణితం అభివృద్ధిపరచబడినది.


జార్జ్ బూలే
(1815-1864)

1930లో పరిశోధకులు (న్యూమాన్ తన మరణ సమయంలో 0 మరియు 1 సంఖ్యలు ప్రపంచాన్ని పరిపాలిస్తుంది అని ప్రకటించారు.) 0 మరియు 1 అను యుగ్మ సంఖ్యలను ఉపయోగించి విద్యుత్ వలయాలను సంగ్రహించుటకు మరియు విద్యుత్ సంగణకములను రూపొందించుటకు ఉపయోగపడును అనిగుర్తించిరి. నేడు యుగ్మ అంకగణితమును పాటించుటకు అంక సంగణకములు మరియు విద్యుత్ వలయాలు రూపొందించబడినవి. తార్కిక గణితమును భాషగాను మరియు గణితము మరియు సంగణక విజ్ఞానంను పరిశోధించు వ్యవస్థగాను మనము చదివెదము.

సాధారణంగా తార్కికం అనేది ఒక హేతుబద్ధమైన అధ్యయనం. కాని గణిత తార్కిక గణితమనే జ్ఞానమును ఖచ్చితమైన గణిత మార్గములో ప్రాతినిధ్యం వహించుటకు అనుమతినిస్తుంది మరియు సమితిలో పాటించవలసిన నియమాలను హేతుబద్ధమైన అనుమతితో రూపొందించుటకు ఇది తోడ్పడును. ఇది సంగణక విజ్ఞానం నందు శక్తివంతమైన సాధనంగా పరిగణించబడుతుంది. ఎందువలన కార్యక్రమాలు ఖచ్చితత్వమును ధృవీకరించడానికి ఉపయోగపడును.

12.3.1 ప్రవచనము మరియు దాని యొక్క సత్య విలువ:

తార్కిక గణిత యొక్క సాధారణ భాగమనేది తార్కిక అనుపాత ప్రవచనం లేదా ప్రతిపాదనల భాగములను నిర్మించుటగును. ఎక్కువగా మన ఆలోచనలును భాష ద్వారా ప్రసారం చేయడానికి దీని అవసరముంటుంది. అవి వాక్యాల రూపంలో కూడా ఉంటాయి.

వివిధ రకాల వాక్యాలు:

(1) ప్రకటించు / ధృడమైన వాక్యం

(2) ఆదేశ వాక్యం

06_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_12.indd 251 24-01-2023 11:26:57

(3) ఉద్వేగ వాక్యం

(4) ప్రశార్థక వాక్యం

(5) బహిర్గత వాక్యం



నిర్వచనము 12.7

ఏదైనా ధృడమైన వాక్యమును ప్రవచనము లేదా ప్రతిపాదన అంటాము. ఇది సత్యము లేదా అసత్యము కావచ్చును, కానీ రెండూ కాదు.

ఏదైనా ఆదేశ వాక్యమును ఆశ్చర్యకరం, ఆదేశం లేదా ప్రశార్థక వాక్యము. ప్రతిపాదనగా ఉండనవసరము లేదు.

ఒక ప్రవచనము యొక్క సత్య విలువ అనునది ప్రత్యేక ప్రవచనము యొక్క సత్యమైనా కావచ్చు లేదా అసత్యమైనా కావచ్చు. సత్య ప్రవచనము యొక్క సత్య విలువ సత్యము. మరియు దీనిని T లేదా 1 గా సూచిస్తాము. అసత్య ప్రవచనం యొక్క సత్య విలువ అసత్యం. మరియు దీనిని F లేదా 0 గా సూచిస్తాము.

బహిర్గత వాక్యము అనేది ఒక వాక్యము మరియు అది కొన్ని నిబంధనలకు అనుగుణంగా మార్పు చెందును. కాని దానిని ప్రవచనము నందు సూచించలేము. ఉదాహరణకు (i) $x \times 7 = 35$ ఇది బహిర్గత వాక్యము. దీని సత్య విలువ x మీద ఆధారపడి ఉంటుంది. అనగా $x = 5$ అయితే సత్యమని, $x \neq 5$, అయితే అసత్యమని చెప్తాము. (ii) అతను ఒక చెడు వ్యక్తి అనునది బహిర్గత వాక్యము అగును. ఈ విషయం ఒక వ్యక్తి నుంచి మరొక వ్యక్తికి సంబంధించిన విషయముపై ఆధారపడి ఉంటుంది.

ఉదాహరణ 12.11

ఈ క్రింది వాక్యములలో సరియైన ప్రవచనాలను గుర్తించండి.

సాధన:

(1) మౌంట్ ఎవరెస్ట్ ప్రపంచంలోనే ఎత్తైన శిఖరం.

(2) $3 + 4 = 8$.

(3) $7 + 5 > 10$.

(4) నాకు ఆ పుస్తకం ఇవ్వండి.

(5) $(10 - x) = 7$.

(6) ఈ పువ్వు ఎంత అందంగా ఉంది!

(7) మీరు ఎక్కడికి వెళ్తున్నారు?

(8) మీ విజయానికి అభినందనలు.

(9) ఇది ముగింపు యొక్క ప్రారంభం.

(1) మరియు (3) ప్రవచనములు యొక్క సత్య విలువ T , అయితే (2)కు అసత్యము F కావున ఇవి ప్రవచనములు.

ప్రవచనము (5) అనునది $x = 3$ కి సత్యము మరియు $x \neq 3$ కి అసత్యం. కావున ఇది సత్యము లేదా అసత్యంగా ఉండును. అయితే రెండూ కాదు. కాబట్టి ఇది కూడా ప్రవచనము అగును.

06_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_12.indd 252 24-01-2023 11:26:58

వాక్యములు (4), (6), (7), (8)లు ప్రవచనాలు కాదు. ఎందుకంటే (4) అనేది ఆదేశము, (6) అనేది ఆశ్చర్యకరము, (7) అనేది ప్రశ్నార్థకము (8) అనేది ఒకరి కోరికలను వ్యక్తపరిచే వాక్యము మరియు (9) అనేది ఒక అర్థరహితమైనది.

12.3.2 సంయుక్త ప్రవచనములు, తార్కిక అనుసంధానాలు మరియు సత్య పట్టికలు:

నిర్వచనము 12.8 (సరళ మరియు సంయుక్త ప్రవచనములు)

ఒక ప్రవచనాన్ని రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ ప్రవచనాలుగా విభజించడానికి వీలు కాని ప్రవచనాలను సరళ ప్రవచనములని లేదా పరమాణు ప్రవచనము అని అంటారు. రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ సరళ ప్రవచనాల కలయికను సంయుక్త ప్రవచనాలని లేదా అణు ప్రవచనాలని అంటాము. కావున ఏ ప్రవచనమైననూ సరళ ప్రవచనముగాను లేదా సంయుక్త ప్రవచనముగా మాత్రమే ఉండవలెను.

సరళ ప్రవచనములకు ఉదాహరణ:

ఉదాహరణ 12.11 లో (1), (2), (3) వాక్యాలు సరళ ప్రవచనాలు.

సంయుక్త ప్రవచనములకు ఉదాహరణ:

" 1 అనేది ప్రధాన సంఖ్య కాదు మరియు కేరళలో ఊటీ ఉంది" అనే ప్రవచనము తీసుకొనుము.

గమనిక: పై ప్రవచనము క్రింద ఇవ్వబడిన రెండు సరళ ప్రవచనముల కలయిక.

p : 1 అనేది ప్రధాన సంఖ్య కాదు.

q : కేరళలో ఊటీ ఉంది.

ఇది సరళ ప్రవచనము కాదు అయితే సంయుక్త ప్రవచనం.

పై చర్చల నుండి ఏదైనా సరళ ప్రవచనము అనేది T (సత్యము) లేదా F (అసత్యము) విలువ కావచ్చును. కాబట్టి దీనిని చరరాశిగా భావిస్తారు. ఈ చరరాశిని చర ప్రవచనము లేదా చర ప్రతిపాదన అంటాము. చర ప్రవచనాలను $p, q, r, \ldots$ లుగా సూచిస్తారు.

నిర్వచనం 12.9 (తార్కిక అనుసంధానములు)

రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ సరళ వాక్యాలను అనుసంధానం చేసేటప్పుడు "మరియు", "లేదా", "ఉంటే అప్పుడు", "ఉంటే మరియు మాత్రమే" మరియు "కాదు"వంటి పదాలు లేదా పదాల కలయికను మనము ఉపయోగించెదము. ఈ అనుసంధాన పదములు తార్కిక సంధానములుగా పిలువబడును.

సరళ ప్రవచనము నుంచి ఒక సంయుక్త ప్రవచనాన్ని నిర్మించడానికి కొన్ని అనుసంధానాలు ఉపయోగపడును. కొన్ని ప్రాథమిక తార్కిక అనుసంధానములు వ్యతిరేకం (కాదు), సముచ్ఛయము (మరియు), వైకల్పితము (లేదా).

నిర్వచనం 12.10

ఒక ప్రవచన సూత్రము అనేది కొన్ని తార్కిక అనుసంధానముతో ఒకటి లేదా అంతకంటే ఎక్కువ ప్రవచనాల కలయికతో కూడిన ప్రవచనము.

నిర్వచనము 12.11 సత్య పట్టిక

సరళ ప్రవచనముల యొక్క సత్య విలువలు మరియు సంయుక్త ప్రవచనముల యొక్క సత్య విలువల మధ్య గల సంబంధాన్ని ఉపయోగించి సరళ ప్రవచనాలను పొందుటను సత్య పట్టిక అంటారు.

06_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_12.indd 253 24-01-2023 11:26:59

నిర్వచనము 12.12

(i) p ఒక సరళ ప్రవచనము అయినప్పుడు దాని వ్యతిరేత ప్రవచనము యొక్క సత్య విలువ p యొక్క సత్యమునకు వ్యతిరేకము. దీనిని $\neg p$ గా సూచిస్తాము.దీనిని p కాదు అని చదువవలెను.$\neg p$ సత్య విలువ T అయితే p యొక్క సత్య విలువ F లేదంటే p యొక్క సత్య విలువ T అయితే $\neg p$ యొక్క సత్య విలువ F అగును.

(ii) p మరియు q లు రెండు సరళ ప్రవచనములు, ఆ రెండు ప్రవచనములు కలిపి రాయడం వల్ల ఏర్పడిన ప్రవచనమును సముచ్చయ ప్రవచనము ఉంటారు. దీనిని p మరియు q దీనిని $p \wedge q$ గా సూచిస్తాము మరియు దీనిని p సముచ్చయము q అని చదువవలెను. p మరియు q ప్రవచనాలు రెండూ సత్యమై, వాటి $p \wedge q$ యొక్క సత్య విలువ సత్యము T అవుతుంది. మిగిలినసందర్భాలలో అసత్యము F అవుతుంది.

(iii) రెండు సరళ ప్రవచనాలు p మరియు q లతో ఏర్పడిన సంయుక్త ప్రవచనమును వైకల్పికం చేయుట ద్వారా ఏర్పడిన ప్రవచనమును $p \vee q$ దీనిని p లేదా q సూచిస్తాము. p మరియు q లు రెండు అసత్యమైనప్పుడు మాత్రమే వాటి వైకల్పిక ప్రవచనము యొక్క సత్య విలువ అసత్యము F. మిగిలిన సందర్భాలలో సత్యము T అవుతుంది.

తార్కిక అనుసంధానాలు మరియు వాటి యొక్క సత్య పట్టికలు

(1) వ్యతిరేకమునకు సత్య పట్టిక (కాదు)

$\neg p$ కోసం సత్య పట్టిక

p	$\neg p$
T	F
F	T

పట్టిక 12.4

(2) సముచ్చయంయునకు సత్య పట్టిక (మరియు)

$p \wedge q$ కొరకు సత్య పట్టిక

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

పట్టిక 12.5

(3) వైకల్పికమునకు సత్య పట్టిక (లేదా)

$p \vee q$ కొరకు సత్య పట్టిక

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

పట్టిక 12.6

06_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_12.indd 254 24-01-2023 11:27:00

ఉదాహరణ 12.12

p, అనునది 'చల్లగా ఉంది' మరియు q అనునది 'వర్షము పడుతున్నది' అను వాక్యములకు అనుగుణమైన పదములతో ప్రవచనాలను వ్రాయండి $\neg p,\ p \wedge q, p \vee q$ మరియు $q \vee \neg p$.

సాధన

(1) $\neg p$: చల్లగా లేదు

(2) $p \wedge q$: చల్లగా ఉంది మరియు వర్షం పడుతున్నది.

(3) $p \vee q$: చల్లగా ఉంది లేదా వర్షం పడుతున్నది.

(4) $q \vee \neg p$: వర్షం పడుతున్నది లేదా చల్లగా లేదు.

ప్రవచన సూత్రము గమనించినప్పుడు $\neg p$ కి ఒకే ఒక చరరాశి p మరియు దాన్ని సత్య పట్టికలో $2 = (2^1)$ అడ్డు వరుసలు ఉంటాయి. ప్రతి ప్రవచనం సూత్రములో $p \wedge q$ మరియు $p \vee q$ లలో రొండు చరరాశులు p మరియు q అను రెండు చరరాశులను కలిగి ఉండును. దానిలో ప్రతి దానికి సత్య పట్టికలో $4 = (2^2)$ అడ్డు వరసలుంటాయి. సాధారణంగా n చరరాశులంటే దాని సత్య పట్టికలో 2^n అడ్డువరసలుంటాయి.

ఉదాహరణ 12.13

క్రింది ప్రవచన సూత్రాలను అనుసరించడానికి ఎన్ని అడ్డువరుసలు అవసరం అగును?

(i) $p \vee \neg t \wedge (p \vee \neg s)$ (ii) $((p \wedge q) \vee (\neg r \vee \neg s)) \wedge (\neg t \wedge v)$

సాధన:

(i) $(p \vee \neg t) \wedge (p \vee \neg s)$ లో p, s, మరియు t అను మూడు చరరాశులు ఉంటాయి. కావున సత్య పట్టికలో $2^3 = 8$ అడ్డు వరసలుంటాయి.

(ii) $((p \wedge q) \vee (\neg r \vee \neg s)) \wedge (\neg t \wedge v)$ లో p, q, r, s, t మరియు v అను 6 చరరాశులు ఉన్నాయి. కావున సత్య పట్టికలో $2^6 = 64$ అడ్డు వరుసలుంటాయి.

అనుషంగికము

నిర్వచనం 12.13

p మరియు q అనే రెండు ప్రవచనాల యొక్క అనుషంగికము 'p అయితే q' మరియు ఇది $p \to q$ చే సూచించబడుతుంది. ఇక్కడ p ను దత్తాంశము లేదా పూర్వపదము అని పిలుస్తారు. మరియు q ను ముగింపు లేదా ఫలితము అంటారు. p సత్యము మరియు q అసత్యమైతే మాత్రమే $p \to q$ అసత్యం లేకపోతే అది సత్యం.

$p \to q$ కొరకు సత్య పట్టిక

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

పట్టిక 12.7

ఉదాహరణ 12.14

$p \to q$ ను పరిగణించండి. ఈరోజు సోమవారమైతే, $4 + 4 = 8$

ఇక్కడ p మరియు q అను సంయుక్త ప్రవచనాలు క్రింది విధంగా ఇవ్వబడినవి.

p: ఈరోజు సోమవారం; q: $4 + 4 = 8$.

06_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_12.indd 255 24-01-2023 11:27:03

$p \to q$ యొక్క సత్య విలువ T, ఎందుకంటే q అనునది T కనుక.

ఒక ముఖ్యమైన విషయం ఏమిటంటే ఆంగ్లంలో p మరియు q యొక్క ప్రవచనాల అర్థములను యథాతథంగా పరిగణలోనికి తీసుకొని $p \to q$ ను అమలు చేయకూడదు. p కి q తో సంబంధం ఉండవలసిన అవసరం లేదు.

ఫలితములు

$p \to q$ యొక్క అనుషంగికము నుండి మరో మూడు అనుషంగికములు ఉద్భవించినాయి. అవి క్రింది ఇవ్వబడ్డాయి.

(i) $q \to p$ **విపర్యయ ప్రవచనము.**

(ii) $\neg p \to \neg q$ **విలోమ ప్రవచనము.**

(iii) $\neg q \to \neg p$ **ప్రతి వర్తితము.**

ఉదాహరణ 12.15

p మరియు q అను రెండు ప్రవచనాలు క్రింది విధంగా ఇవ్వబడ్డాయి.

p : ప్రధాన సంఖ్యలు అనంతము q: కేరళలో ఊటీ ఉంది అయితే క్రింది వాటిని వ్రాయండి.

(i) అనుషంగికము (ii) విపర్య ప్రవచనము

(iii) విలోమ ప్రవచనము (iv) ప్రతి వర్తిత ప్రవచనము

సాధన

p మరియు q లకు నాలుగు రకాలైన నిబంధన ప్రవచనములు క్రింది విధంగా ఇవ్వబడినవి.

(i) $p \to q$: (అనుషంగికము) "ప్రధాన సంఖ్యలు అనంతం అయినప్పుడు కేరళలో ఊటీ ఉంది."

(ii) $q \to p$: (విపర్యయ ప్రవచనము) "కేరళలో ఊటీ ఉంది అయినప్పుడు ప్రధాన సంఖ్యలు అనంతము."

(iii) $\neg p \to \neg q$ (విలోమ ప్రవచనం) "ప్రధాన సంఖ్యలు అనంతరం కాదు అయినప్పుడు కేరళలో ఊటీ లేదు."

(iv) $\neg q \to \neg p$ (ప్రతివర్తిత ప్రవచనము) "ఊటీ కేరళలో లేదు అయినప్పుడు ప్రధాన సంఖ్యలు అనంతరం

ద్విముఖానుషంగికము:

నిర్వచనము 12.14

p మరియు q లు రెండు ప్రవచనాలు. దాని ద్విముఖానుషంగికము అనేది 'p ఉంటే మరియు అయినప్పుడు మాత్రమే q మరియు $p \leftrightarrow q$ గా సూచిస్తాము. p మరియు q అను రెండు ఒకే సత్య విలువలను మరియు ఒకే అసత్యవిలువలను కలిగినపుడు మాత్రమే $p \leftrightarrow q$ సత్యమగును. ఆవిధంగా లేనిచో అది అసత్యమగును.

$p \leftrightarrow q$ సత్య పట్టిక

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

పట్టిక 12.8



06_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_12.indd 256 24-01-2023 11:27:05

ప్రత్యేకమైన లేదా (EOR)[$\bar{\vee}$]

నిర్వచనం 12.15

p మరియు q లు రెండు ప్రవచనాలు అయిన p EOR q అనేది ఒక సంయుక్త ప్రవచనము. దాని సత్య విలువ p లేదా q ద్వారా నిర్ణయించబడుతుంది. కానీ రెండు కాదు. దీనిని $p \bar{\vee} q$ గా సూచిస్తాము. $p \bar{\vee} q$ యొక్క సత్య విలువ T గా ఉండాలంటే, p లేదా q సత్యవిలువ T గా ఉండాలి. లేకపోతే అది F. అగును. $p \bar{\vee} q$ యొక్క సత్య పట్టిక క్రింద ఇవ్వబడింది.

$p \bar{\vee} q$ సత్య పట్టిక

p	q	$p \bar{\vee} q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

పట్టిక 12.9

ఉదాహరణ 12.16

$(p \bar{\vee} q) \wedge (p \bar{\vee} \neg q)$ కు సత్య పట్టికను నిర్మించండి.

p	q	$\neg q$	r : $(p \bar{\vee} q)$	s: $(p \bar{\vee} \neg q)$	$r \wedge s$
T	T	F	F	T	F
T	F	T	T	F	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	F	T	F

పట్టిక 12.10

పై పట్టికను సత్య పట్టికలను ఉపయోగించకుండా నిరూపించవచ్చును. తార్కిక సమానత్వాన్ని అధ్యయనం చేసిన తరువాత ఈ సాధన అందించబడుతుంది.

12.3.3 పునరుక్తి, విరుద్ధత మరియు అనిశ్చితము

నిర్వచనము 12.16

ఒక ప్రవచనము యొక్క సత్య విలువ సంయుక్త ప్రవచనము యొక్క విలువలతో సంబంధం లేకుండా ఎల్లప్పుడూ 'T' గా ఉన్నప్పుడు మాత్రమే పునరుక్తి అగును. దీనిని '$\mathbb{T}$' తో సూచిస్తారు.

నిర్వచనం 12.17

ఒక ప్రవచనము యొక్క సత్య విలువ సంయుక్త ప్రవచనము యొక్క విలువలతో సంబంధం లేకుండా ఎల్లప్పుడూ 'F' గా ఉన్నప్పుడు మాత్రమే విరుద్ధత అని అంటారు. దీనిని '$\mathbb{F}$' తో సూచిస్తారు.

నిర్వచనము 12.18

పునరుక్తి మరియు విరుద్ధత లేని ప్రవచనమును 'అనిశ్చితము' అని అంటారు.

06_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_12.indd 257 24-01-2023 11:27:06

పరిశీలనలు

1. పునరుక్తి నందు నిలువు వరుసలోని ప్రవచనాల సత్య విలువ *'T'*ను కలిగి ఉండవలెను.
2. విరుద్ధత నందు నిలువు వరుసలోని ప్రవచనాల సత్య విలువ *'F'*ను కలిగి ఉండవలెను.
3. పునరుక్తి యొక్క వ్యతిరేకము విరుద్ధత అగును మరియు విరుద్ధత యొక్క వ్యతిరేకము పునరుక్తి అగును.
4. వ్యతిరేక ప్రవచనం యొక్క వైకల్పికము పునరుక్తి అగును మరియు వ్యతిరేక ప్రవచనము యొక్క సముచ్చయము అనునది విరుద్ధత అగును. $p \vee \neg p$ అనునది పునరుక్తి మరియు $p \wedge \neg p$ అనునది విరుద్ధత అగును. దీని యొక్క సత్య పట్టికలు క్రింద ఇవ్వబడినవి.

పునరుక్తికి ఉదాహరణ

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
T	F	T
F	T	T

పట్టిక 12.11

$p \vee \neg p$ యొక్క చివర నిలువు వరుసలో *'T'* మాత్రమే ఉంది. కావున $p \vee \neg p$. అనునది పునరుక్తి అగును.

విరుద్ధతకు ఉదాహరణ

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
T	F	F
F	T	F

పట్టిక 12.12

$p \wedge \neg p$ యొక్క చివర నిలువ వరుసలో *'F'* మాత్రమే ఉంది, కావున $p \wedge \neg p$ ని విరుద్ధత అని చెప్పవచ్చు.

గమనిక

పట్టిక 12.10లో చివర నిలువు వరుసలో అన్నీ *'F'*ను కలిగి ఉంది, కావున $(p \bar{\vee} q) \wedge (p \bar{\vee} \neg q)$ ఒక విరుద్ధత అగును.

అనిశ్చితకు ఉదాహరణ

p	q	$p \leftrightarrow q$	$\neg q$	$p \rightarrow \neg q$	$\neg(p \rightarrow \neg q)$	$(p \leftrightarrow q) \wedge \neg(p \rightarrow \neg q)$
T	T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	T	F	F
F	T	F	F	T	F	F
F	F	T	T	T	F	F

పట్టిక 12.13

పై పట్టికలో చివరి నిలువు వరుసలో గల విలువల సమ్మేళనమే T మరియు F అగును. కావున ఇది పునరుక్తి మరియు విరుద్ధత కాదు. కావున దీనిని అనిశ్చితి అంటారు.

06_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_12.indd 258 24-01-2023 11:27:08

12.3.4 ద్వంద్వత్వం

నిర్వచనం 12.19

ద్వంద్వ ప్రవచనము యొక్క సూత్రములో $\vee$ బదులుగా $\wedge$ ను; $\wedge$ కు బదులుగా $\vee$ ను; T కు బదులుగా F ను; F కు బదులుగా T ను తీసుకొంటాము. ద్వంద్వము నందు $\mathbb{T}$ (పునరుక్తి) కి బదులుగా $\mathbb{F}$ (విరుద్ధత) ను మరియు $\mathbb{F}$ కు బదులుగా $\mathbb{T}$ ను తీసుకొంటాము.

విశేషాంశాలు

(1) ద్వంద్వాన్ని కనుగొనేటప్పుడు వ్యతిరేక ($\neg$) గుర్తు మార్చబడదు.

(2) ద్వంద్వం యొక్క ద్వంద్వం దానికదే ప్రవచనము.

(3) ప్రత్యేకమైన ప్రవచనములు $\mathbb{T}$ (పునరుక్తి) మరియు $\mathbb{F}$ (విరుద్ధత) ఒకదానికొకటి ద్వంద్వాలు.

(4) T ను F గా మార్చినపుడు మరియు దీని విపర్యయం సత్యమగును.

ద్వంద్వ సూత్రములు

S_1 అనే సంయుక్త ప్రవచనములో $\neg$, $\wedge$ మరియు $\vee$ లు మాత్రమే ఉండును. మరియు $\vee$ ను $\vee$ కు బదులుగా $\wedge$ ను మార్చి నమోదు చేయడం ద్వారా S_1 నుండి S_2 ప్రవచనమును పొందినప్పుడు మాత్రమే S_1 ఒక పునరుక్తి అగును. S_1 అనునది పునరుక్తి అయితే మాత్రమే S_2 విరుద్ధత అగును. దీని విపర్యయము నిజమగును.

ఉదాహరణ కొరకు

(i) $(p \vee q) \wedge (r \wedge s) \vee \mathbb{F}$ యొక్క ద్వంద్వం $(p \wedge q) \vee (r \vee s) \wedge \mathbb{T}$.

(ii) $p \wedge [\neg q \vee (p \wedge q) \vee \neg r]$ యొక్క ద్వంద్వం $p \vee [\neg q \wedge (p \vee q) \wedge \neg r]$.

12.3.5 తార్కిక సమానత్వము సత్య పట్టికలో

నిర్వచనం 12.20

సత్య పట్టికలో A మరియు B కి అనుగుణమైన నిలువు వరుసలో ఒకేలాంటి సత్య విలువలను కలిగి ఉన్నప్పుడు మాత్రమే A మరియు B అను సంయుక్త ప్రవచనములు సమానత్వము లేదా సరళ సమానత్వము అగును. A మరియు B ప్రవచనాల యొక్క తార్కిక సమానత్వాన్ని $A \equiv B$ లేదా $A \Leftrightarrow B$ గా సూచించెదము.

నిర్వచనము నుండి A మరియు B లు తార్కికంగా సమానమైతే $A \Leftrightarrow B$ తప్పనిసరిగా పునరుక్తి అవుతుంది.

సమానత్వం యొక్క కొన్ని ధర్మాలు

1. మార్పు రహిత నియమాలు (ధర్మాలు)

(i) $p \vee p \equiv p$ (ii) $p \wedge p \equiv p$.

నిరూపణ

p	p	$p \vee p$	$p \wedge p$
T	T	T	T
F	F	F	F

పట్టిక 12.14

పై సత్య పట్టికలో p, $p \vee p$ మరియు $p \wedge p$ లు ఒకే సత్య విలువను కలిగి ఉన్నవి. కావున $p \vee p \equiv p$ మరియు $p \wedge p \equiv p$.

06_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_12.indd 259 24-01-2023 11:27:10

2. వినిమయ ధర్మములు

(i) $p \vee q \equiv q \vee p$ (ii) $p \wedge q \equiv q \wedge p$.

నిరూపణ (i)

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	F

పట్టిక 12.15

$p \vee q$ మరియు $q \vee p$ నిలువు వరుసలు ఒకే రకమైన సత్య విలువలు కలిగియున్నవి. కావున $p \vee q \equiv q \vee p$ ఇదేవిధంగా (ii) $p \wedge q \equiv q \wedge p$ ను నిరూపించ వచ్చును.

3. సహచర ధర్మములు

(i) $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ (ii) $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$.

నిరూపణ

సహచర ధర్మాన్ని నిరూపించుటకు కావలసిన సత్యపట్టిక క్రింద ఇవ్వబడినది.

p	q	r	$p \vee q$	$q \vee r$	$(p \vee q) \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T
T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	F	F	F

పట్టిక 12.16

$(p \vee q) \vee r$ మరియు $p \vee (q \vee r)$ యొక్క నిలువ వరుసలు ఒకే రకంగా ఉన్నాయి.

కావున $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$

ఇదేవిధంగా (ii) $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ గా నిరూపించవచ్చును.

4. విభాగ ధర్మములు

(i) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (ii) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

నిరూపణ (i)

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	F
F	F	T	F	F	F	T	F
F	F	F	F	F	F	F	F

పట్టిక 12.17

06_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_12.indd 260 24-01-2023 11:27:13

$p \vee (q \wedge r)$ మరియు $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ నిలువు వరుసలు సర్వసమానము. కావున $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

ఇదే విధంగా (ii) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ ను నిరూపించవచ్చును.

5. తత్సమ ధర్మములు

(i) $p \vee \mathbb{T} \equiv \mathbb{T}$ మరియు $p \vee \mathbb{F} \equiv p$ (ii) $p \wedge \mathbb{T} \equiv p$ మరియు $p \wedge \mathbb{F} \equiv \mathbb{F}$

p	$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$	$p \vee \mathbb{T}$	$p \vee \mathbb{F}$
T	T	F	T	T
F	T	F	T	F

పట్టిక 12.18

(i) సత్య పట్టికలో $p \vee \mathbb{T}$ మరియు $\mathbb{T}$ నిలువు వరుసల విలువలు సమానం. కావున అవి సమానత్వము అగును. $p \vee \mathbb{F}$ మరియు p నిలువు వరుసల సత్య విలువలు సమానం, కావున అవి సమానత్వం అగును.

(ii) ఇదే విధంగా $p \wedge \mathbb{T} \equiv p$ మరియు $p \wedge \mathbb{F} \equiv \mathbb{F}$ ను నిరూపించవచ్చును.

6. పూరక ధర్మములు

(i) $p \vee \neg p \equiv \mathbb{T}$ మరియు $p \wedge \neg p \equiv \mathbb{F}$ (ii) $\neg \mathbb{T} \equiv \mathbb{F}$ మరియు $\neg \mathbb{F} \equiv \mathbb{T}$

నిరూపణ

p	$\neg p$	$\mathbb{T}$	$\neg \mathbb{T}$	$\mathbb{F}$	$\neg \mathbb{F}$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
T	F	T	F	F	T	T	F
F	T	T	F	F	T	T	F

పట్టిక 12.19

(i) పై పట్టికలో $p \vee \neg p$ మరియు $\mathbb{T}$ నిలువు వరుసల విలువలు సమానము కావున అవి సమానత్వము అగును. $p \wedge \neg p$ మరియు $\mathbb{F}$ నిలువు వరుసల విలువలు సమానము కావున అవి సమానత్వము అగును.

(ii) పై పట్టికలో $\neg \mathbb{T}$ మరియు $\mathbb{F}$ నిలువు వరుసల విలువలు సమానము కావున అవి సమానత్వము అగును. $\neg \mathbb{F}$ మరియు $\mathbb{T}$ నిలువు వరుసల విలువలు సమానము కావున అవి సమానత్వము అగును..

7. అంతర్వలన ధర్మము లేదా రెట్టింపు వ్యతిరేక ధర్మము

$\neg(\neg p) \equiv p$

నిరూపణ

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
T	F	T
F	T	F

పట్టిక 12.20

పై పట్టికలో p మరియు $\neg(\neg p)$నిలువు వరుసల విలువలు సమానము కావున అవి సమానత్వము అగును.

8. డి- మార్గన్ ధర్మము

(i) $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ (ii) $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

06_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_12.indd 261 24-01-2023 11:27:16

నిరూపణ (i)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	F	F	T	T
F	F	T	T	F	T	T

పట్టిక 12.21

పైపై పట్టికలో $\neg(p \wedge q)$ మరియు $\neg p \vee \neg q$ నిలువు వరుసల విలువలు సమానం. కావున అవి సమానత్వమగును. అందువలన (i) $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ (ii) $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ ను నిరూపించవచ్చును.

9. శోషణధర్మము

(i) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ (ii) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

నిరూపణ: –

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \vee (p \wedge q)$	$p \wedge (p \vee q)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T
F	T	F	T	F	F
F	F	F	F	F	F

పట్టిక 12.22

(i) $p \vee (p \wedge q)$ మరియు p నిలువు వరుసల సత్య విలువలు సమానం. కావున అవి కూడా సమానత్వమగును.

(ii) $p \wedge (p \vee q)$ మరియు p నిలువు వరుసల సత్య విలువలు సమానం. కావున అవి కూడా సమానత్వమగును.

ఉదాహరణ 12.17

$p \to q \equiv \neg p \vee q$ సమానత్వ ధర్మమును స్థాపించుము.

సాధన

p	q	$\neg p$	$p \to q$	$\neg p \vee q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

పట్టిక 12.23

$p \to q$ మరియు $\neg p \vee q$ నిలువు వరుసల సత్య విలువలు సమానము. కావున అవి సమానత్వమగును. ■

06_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_12.indd 262 24-01-2023 11:27:18

ఉదాహరణ 12.18

అనుషంగికము మరియు ద్విముఖానుషంగికములను అనుసరించి సమానత్వ ధర్మాన్ని ప్రతిపాదించుము.

$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

సాధన

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$p \leftrightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T

పట్టిక 12.24

$p \leftrightarrow q$ మరియు $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ నిలువు వరుసల సత్య విలువలు సమానం. కావున అవి సమానత్వమగును.

ఉదాహరణ 12.19

సమానత్వ ధర్మాన్ని ఆధారంగా చేసుకొని $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ నిరూపించండి?

సాధన

ఉదాహరణ 12.15 మరియు 12.16 ను ఉపయోగించి

$$p \leftrightarrow q \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \quad \ldots (1)$$

$$\equiv (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \text{ (వినిమయ ధర్మం)} \quad \ldots (2)$$

$$\equiv (\neg p \wedge (p \vee \neg q)) \vee (q \wedge (p \vee \neg q)) \text{ (విభాగ ధర్మం)}$$

$$\equiv (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge p) \vee (q \wedge \neg q) \text{ (విభాగ ధర్మం)}$$

$$\equiv \mathbb{F} \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge p) \vee \mathbb{F}; \text{ (పూరక ధర్మం)}$$

$$\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge p); \text{ (తత్సమ ధర్మం)}$$

$$\equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q); \text{ (వినిమయ ధర్మం)}$$

చివరగా (1) నుండి $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$.

అభ్యాసము 12.2

1. p : బృహస్పతి అనేది ఒక గ్రహం మరియు q : భారతదేశం అనునది ఒక ద్వీపకల్పము అనునవి రెండు సరళ ప్రవచనాలు, దీని ద్వారా క్రింది ప్రవచనాలను వాక్యాక రూపంలో వ్రాయుము. ఈ

   (i) $\neg p$ (ii) $p \wedge \neg q$ (iii) $\neg p \vee q$ (iv) $p \rightarrow \neg q$ (v) $p \leftrightarrow q$

2. క్రింది వాటిని p మరియు q ప్రవచనాల చరరాశులను ఉపయోగించే ప్రతి వాక్యాన్ని చిహ్నాల రూపంలో వ్రాయండి.

   (i) 19 ప్రధాన సంఖ్య కాదు మరియు త్రిభుజం యొక్క అన్ని కోణాలు సమానంగా ఉంటాయి.

   (ii) 19 ప్రధాన సంఖ్య లేదా త్రిభుజం యొక్క అన్ని కోణాలు సమానం కాదు.

   (iii) 19 ప్రధాన సంఖ్య మరియు త్రిభుజం యొక్క అన్ని కోణాలు సమానంగా ఉంటాయి.

   (iv) 19 ప్రధాన సంఖ్య కాదు

06_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_12.indd 263 24-01-2023 11:27:22

3. క్రింది ప్రవచనాలకు సత్య విలువలను కనుగొనుము.

(i) $6+2=5$ అయిన పాలు తెల్లగా ఉండును.

(ii) చైనా ఐరోపాలో ఉంది లేదా $\sqrt{3}$ ఒక పూర్ణసంఖ్య.

(iii) $5+5=9$ నిజము కాదు లేదా భూమి ఒక గ్రహం

(iv) 11 అనునది ప్రధాన సంఖ్య మరియు దీర్ఘచతురస్రం యొక్క అన్ని భుజాలు సమానం.

4. క్రింది వాక్యాలలో ఏది ప్రతిపాదన అగును?

(i) $4+7=12$ (ii) మీరు ఏమి చేస్తున్నారు? (iii) $3^n \leq 81, n \in \mathbb{N}$

(iv) నెమలి మన జాతీయ పక్షి (v) ఈ పర్వతం ఎంతో ఎత్తుగా ఉంది!

5. విపర్యం, విలోమము మరియు ప్రతివర్తితమును క్రింద ఇవ్వబడిన వాటికి వ్రాయుము.

(i) x మరియు y లు సంఖ్యలు, కావున $x=y$ అయినపుడు $x^2=y^2$ అగును.

(ii) చతుర్భుజం ఒక చతురస్రమయితే అది ఒక దీర్ఘ చతురస్రం అగును.

6. క్రింది ప్రవచనములకు సత్య పట్టికను నిర్మాణము చేయుము.

(i) $\neg p \wedge \neg q$ (ii) $\neg(p \wedge \neg q)$ (iii) $(p \vee q) \vee \neg q$ (iv) $(\neg p \rightarrow r) \wedge (p \leftrightarrow q)$

7. క్రింది సంయుక్త ప్రతిపాదనలో ఏది పునరుక్తి లేదా విరుద్ధత లేదా అనిశ్చితి అగునని సరి చూడుము.

(i) $(p \wedge q) \wedge \neg(p \vee q)$ (ii) $\big((p \vee q) \wedge \neg p\big) \rightarrow q$

(iii) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \rightarrow q)$ (iv) $\big((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)\big) \rightarrow (p \rightarrow r)$

8. (i) $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ (ii) $\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$ అని చూపండి.

9. $q \rightarrow p \equiv \neg p \rightarrow \neg q$ నిరూపించుము?

10. $p \rightarrow q$ మరియు $q \rightarrow p$ లు సమానత్వం కాదు అని చూపుము.

11. $\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$ అని చూపుము.

12. సత్య పట్టికను ఉపయోగించకుండా $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ అనే ప్రవచనము ఒక పునరుక్తి లేదా విరుద్ధతను కలిగియుండునని సరిచూడుము.

13. సత్య పట్టికను ఉపయోగించి $\neg(p \vee q) \vee (\neg p \wedge q)$ మరియు $\neg p$ అను ప్రవచనములు తార్కికంగా సమానత్వము అని సరిచూడుము.

14. సత్య పట్టికను ఉపయోగించకుండా $p \rightarrow \big(q \rightarrow r\big) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$ అని నిరూపించుము.

15. సత్య పట్టికనుపయోగించి $p \rightarrow (\neg q \vee r) \equiv \neg p \vee (\neg q \vee r)$ అని నిరూపించుము.

AXZN2

అభ్యాసము 12.3

ఇచ్చిన నాలుగు ప్రత్యామ్నాయాల నుండి సరైన సమాధానమును ఎంపిక చేయండి.

1. ఒక సమితి S పై యుగ్మపరిక్రియ ఒక ప్రమేయం అగుటకు

(1) $S \rightarrow S$ (2) $\big(S \times S\big) \rightarrow S$ (3) $S \rightarrow \big(S \times S\big)$ (4) $\big(S \times S\big) \rightarrow \big(S \times S\big)$

2. వ్యవకలనం అనునది యుగ్మ పరిక్రియ కాదు

(1) $\mathbb{R}$ (2) $\mathbb{Z}$ (3) $\mathbb{N}$ (4) $\mathbb{Q}$

06_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_12.indd 264 24-01-2023 11:27:27

3. క్రింది వాటిలో $\mathbb{N}$ పై ఏది యుగ్మ పరిక్రియ అగును?

(1) వ్యవకలనం (2) గుణకారము (3) భాగహారం (4) పైవన్నీ

4. వాస్తవ సంఖ్యల సమితి $\mathbb{R}$ పై $*$ ను క్రింది విధంగా నిర్వచించబడెను. దానిలో ఏది $\mathbb{R}$ పై యుగ్మ పరిక్రియ కాదు?

(1) $a*b=$కనీసము $(a\cdot b)$ (2) $a*b=$ గరిష్ఠ (a,b)

(3) $a*b=a$ (4) $a*b=a^b$

5. $*$ అనే పరిక్రియను $a*b=\frac{ab}{7}$ గా నిర్వచించలేనప్పుడు క్రింది వాటిలో దేనిపై యుగ్మ పరిక్రియ కాదు.

(1) $\mathbb{Q}^+$ (2) $\mathbb{Z}$ (3) $\mathbb{R}$ (4) $\mathbb{C}$

6. $\mathbb{Q}$ సమితిని $a\odot b=a+b+ab$ గా నిర్వచించుము మరియు y యొక్క ఏ విలువకు $3\odot(y\odot 5)=7$?

(1) $y=\frac{2}{3}$ (2) $y=\frac{-2}{3}$ (3) $y=\frac{-3}{2}$ (4) $y=4$

7. వాస్తవ సంఖ్యలపై $a*b=\sqrt{a^2+b^2}$ అయితే $*$ అనేది ఒక

(1) వినిమయం అయితే సహచరం కాదు (2) సహచరం అయితే వినిమయం కాదు

(3) వినిమయం మరియు సహచర ధర్మం (4) వినిమయం మరియు సహచరం రెండూ కాదు

8. క్రింది ప్రవచనాలలో ఏది సత్య విలువ 'T' అగును?

(1) $\sin x$ అనేది సరి ప్రమేయం

(2) ప్రతి చతురస్ర మాత్రిక అసాధారణం

(3) సంకీర్ణ సంఖ్యలు మరియు దాని యొక్క సంయుగ్మముల లబ్ధము అనునది ఖచ్చితమైన కల్పిత సంఖ్య

(4) $\sqrt{5}$ కరణీయ సంఖ్య

9. క్రింది ప్రవచనాలలో దేని సత్య విలువ F అగును?

(1) చెన్నై భారతదేశంలో కలదు లేదా $\sqrt{2}$ అనునది ఒక పూర్ణసంఖ్య.

(2) చెన్నై భారతదేశంలో కలదు లేదా $\sqrt{2}$ కరణీయ సంఖ్య.

(3) చెన్నై చైనాలో కలదు లేదా $\sqrt{2}$ అనునది ఒక పూర్ణసంఖ్య.

(4) చెన్నై చైనాలో కలదు లేదా $\sqrt{2}$ కరణీయ సంఖ్య.

10. ఒక సంయుక్త ప్రవచనములో 3 సరళ ప్రవచనాలున్నప్పుడు దాని సత్య పట్టిక నందు ఎన్ని అడ్డు వరుసలు ఉంటాయి?

(1) 9 (2) 8 (3) 6 (4) 3

11. ఈ క్రింది వాటిలో $(p\vee q)\rightarrow(p\wedge q)$ కు ఏది విలోమ ప్రవచనం అగును?

(1) $(p\wedge q)\rightarrow(p\vee q)$ (2) $\neg(p\vee q)\rightarrow(p\wedge q)$

(3) $(\neg p\vee\neg q)\rightarrow(\neg p\wedge\neg q)$ (4) $(\neg p\wedge\neg q)\rightarrow(\neg p\vee\neg q)$

12. క్రింది వాటిలో $(p\vee q)\rightarrow r$ కు ఏది ప్రతివర్తిత ప్రవచనము అగును?

(1) $\neg r\rightarrow(\neg p\wedge\neg q)$ (2) $\neg r\rightarrow(p\vee q)$

(3) $r\rightarrow(p\wedge q)$ (4) $p\rightarrow(q\vee r)$

06_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_12.indd 265 24-01-2023 11:27:32

13. $(p \wedge q) \vee \neg q$ యొక్క సత్య పట్టిక క్రింద ఇవ్వబడినది.

p	q	$(p \wedge q) \vee (\neg q)$
T	T	(ఎ)
T	F	(బి)
F	T	(సి)
F	F	(డి)

అయితే క్రింది వాటిలో ఏది సత్యం?

	(ఎ)	(బి)	(సి)	(డి)
(1)	T	T	T	T
(2)	T	F	T	T
(3)	T	T	F	T
(4)	T	F	F	F

14. $\neg(p \vee \neg q)$ సత్య పట్టిక యొక్క చివరి నిలువు వరుసలో సత్య విలువ 'F' లభించుటకు ముఖ విలువల సంఖ్య?

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

15. p మరియు q .....లు రెండు ప్రతిపాదనలు కావున క్రింది వాటిలో ఏది సరియైనది కాదు?

(1) $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ (2) $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

(3) $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \vee \neg q$ (4) $\neg(\neg p) \equiv p$

16.

p	q	$(p \wedge q) \rightarrow \neg p$
T	T	(ఎ)
T	F	(బి)
F	T	(సి)
F	F	(డి)

$(p \wedge q) \rightarrow \neg p$ సత్య పట్టిక నందు క్రింది వాటిలో ఏది సరైనది?

	(ఎ)	(బి)	(సి)	(డి)
(1)	T	T	T	T
(2)	F	T	T	T
(3)	F	F	T	T
(4)	T	T	T	F

17. $\neg(p \vee q) \vee [p \vee (p \wedge \neg r)]$ యొక్క ద్వంద్వతం

(1) $\neg(p \wedge q) \wedge [p \vee (p \wedge \neg r)]$ (2) $(p \wedge q) \wedge [p \wedge (p \vee \neg r)]$

(3) $\neg(p \wedge q) \wedge [p \wedge (p \wedge r)]$ (4) $\neg(p \wedge q) \wedge [p \wedge (p \vee \neg r)]$

06_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_12.indd 266 03/03/2023 17:36:55

18. $p \wedge (\neg p \vee q)$ ప్రతిపాదన అనేది

(1) పునరుక్తి (2) విరుద్ధత

(3) $p \wedge q$ కు తార్కిక సమానత్వము (4) $p \vee q$ కు తార్కిక సమానత్వము

19. క్రింద ఇవ్వబడిన ప్రవచనాలకు సత్య విలువను కనుగొనుము.

(a) $4+2=5$ మరియు $6+3=9$ (b) $3+2=5$ మరియు $6+1=7$

(c) $4+5=9$ మరియు $1+2=4$ (d) $3+2=5$ మరియు $4+7=11$

	(ఎ)	(బి)	(సి)	(డి)
(1)	F	T	F	T
(2)	T	F	T	F
(3)	T	T	F	F
(4)	F	F	T	T

20. క్రింది వాటిలో ఏది సత్యం కాదు?

(1) వ్యతిరేక ప్రవచనము యొక్క వ్యతిరేకత దానికదే ప్రవచనము అగును.

(2) సత్య పట్టికలో చివర నిలువ వరుసలన్నీ T మాత్రమే కలిగియుంటే అది పునరుక్తి అగును.

(3) సత్య పట్టికలో చివరి నిలువు వరుసలన్నీ F మాత్రమే కలిగియుంటే అది విరుద్ధత అగును.

(4) p మరియు q అనునవి రెండు ప్రవచనాలైనప్పుడు మాత్రమే $p \leftrightarrow q$ అనేది ఒక పునరుక్తి అగును.

సారాంశము

(1) **యుగ్మ పరిక్రియ :** S అనే శూన్యేతర సమితి నందు $*$ అనే యుగ్మ పరిక్రియను S నందు గల మూలకాల క్రమయుగ్మాల జత (a,b) తో అనుసంధానించినపుడు S అను ఏకైక మూలకము a,b నందు ఉండును.

(2) **వినిమయ ధర్మం:** – S అనే శూన్యేతర సమితి నందు $*$ అనే యుగ్మ పరిక్రియను $a*b=b*a,\ \forall a,b \in S$ గా నిర్వచించినపుడు మాత్రమే వినిమయ ధర్మము అగును.

(3) **సహచర ధర్మం:** – S అనే శూన్యేతర సమితి నందు $*$ అనే యుగ్మ పరిక్రియను $a*(b*c)=(a*b)*c,\ \forall a,b,c \in S$ గా నిర్వచించినపుడు మాత్రమే సహచర ధర్మము అగును.

(4) **తత్సమ ధర్మం:** – S అనే శూన్యేతర సమితికి చెందిన మూలకము $e \in S$ కు $*$ అనే యుగ్మ పరిక్రియను $a*e=a$ మరియు $e*a=a$ గా నిర్వచించినపుడు మాత్రమే e అనునది S యొక్క తత్సమ మూలకము అగును.

(5) **విలోమ ధర్మము:** – S అనే శూన్యేతర సమితికి చెందిన ఏదైనా మూలకము $a \in S$ కు e అనే తత్సమ మూలకము వర్తించినపుడు ఏదైనా మూలకము $b \in S$ కు $a*b=e$ మరియు $b*a=e$ గా నిర్వచించినపుడు మాత్రమే b యొక్క విలోమము a అగును. దీనిని $b=a^{-1}$ గా వ్రాయగలము.

(6) **తత్సమం ఏకైకం :** – బీజగణిత నిర్మాణము నందు తత్సమ మూలకం వర్తించినపుడు అది ఏకైక మూలకమగును.

(7) **విలోమం ఏకైకం :** – బీజగణిత నిర్మాణము నందు విలోమ మూలకం వర్తించినపుడు అది ఏకైకం అగును.

(8) **బూలియన్ మాత్రిక:** బూలియన్ మాత్రిక అనునది వాస్తవ మాత్రిక కావున వాటి విలువలు 0 లేదా 1 అగును.

06_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_12.indd 267 24-01-2023 11:27:39

(9) **అంకగణిత మాపము:** – a మరియు b లు ఏదేని రెండు పూర్ణసంఖ్యలు మరియు n అనునది ఒకటి కంటే ఎక్కువగా గల ధన పూర్ణసంఖ్య కావున $b-a$ ని n చే భాగించుటను మాపము అంటారు. వేరేవిధంగా చెప్పిన $a \equiv b$ (మాపము n) అర్థము $a-b=n\cdot k$, ఇక్కడ k ఒక పూర్ణసంఖ్య మరియు $(0 \le b \le n-1)$ లో, a ని n చేత భాగించినపుడు b అనేది కనీస ధనాత్మక పూర్ణసంఖ్య శేషమగును.

(10) గణిత చిహ్నాల ద్వారా తార్కిక గణితమును అభ్యసించవచ్చు.

(11) p అనునది సాధారణ ప్రవచనము. p యొక్క వ్యతిరేకత కూడా ఒక ప్రవచనము. కావున దాని సత్య విలువ p కి వ్యతిరేకమగును. దీనిని $\neg p$ గా సూచిస్తాము మరియు దీనిని p కానిదిగా చదువగలము. p యొక్క సత్య విలువ F అయినప్పుడు $\neg p$ యొక్క సత్య విలువ T అగును. అట్లులేని యెడల F అగును.

(12) p మరియు q లు ఏవైనా రెండు సరళ ప్రవచనాలు. కావున వాటిని 'మరియు' అను పదముతో కలిపినప్పుడు p మరియు q ల యొక్క సముచ్చయం ఏర్పడును. దీనిని $p \wedge q$ గా సూచిస్తాము. మరియు దీనిని p సముచ్చయము q లేదా p టోపి q గా చదువగలము. p మరియు q ల సత్య విలువ T అయినప్పుడు మాత్రమే $p \wedge q$ యొక్క సత్య విలువ T అగును. అట్లులేని యెడల F అగును.

(13) p మరియు q ఏవైనా రెండు సరళ ప్రవచనాలు, కావున వాటిని 'లేదా' అను పదముతో కలిపినప్పుడు p మరియు q ల యొక్క వైకల్పికము ఏర్పడును. దీనిని $p \vee q$ గా సూచిస్తాము. మరియు దీనిని p వైకల్పికము q లేదా p గిన్నె q అని చదువగలము. p మరియు q ల సత్య విలువ F అయినప్పుడు మాత్రమే $p \wedge q$ యొక్క సత్య విలువ F అగును. అట్లులేని యెడల T అగును.

(14) p మరియు q లు రెండు ఏవైనా రెండు ప్రవచనాల అనుషంగికము p అయితే q అగును. మరియు దీనిని $p \to q$ అని సూచిస్తాము. q యొక్క సత్య విలువ F మరియు p యొక్క సత్య విలువ T అయినప్పుడు $p \to q$ యొక్క సత్య విలువ F అగును. అట్లులేనియెడల దీని యొక్క సత్య విలువ T అగును.

(15) p మరియు q లు ఏదేని రెండు ప్రవచనాల ద్విముఖానుషంగికము p ఉంటే అయినప్పుడు మాత్రమే q మరియు దీనిని $p \leftrightarrow q$ గా సూచిస్తారు. p మరియు q ప్రవచనముల సత్య విలువలు ఒకే విధంగా ఉంటే మాత్రమే $p \leftrightarrow q$ సత్య విలువ T అగును. అట్లులేనియెడల దీని యొక్క సత్యయ విలువ F అగును.

(16) దత్త ప్రవచనం యొక్క సత్య విలువ వాటిలోని ప్రవచనాల సత్య విలువతో ప్రమేయం లేకుండా ఎల్లప్పుడూ T గా ఉన్నప్పుడు మాత్రమే ఆ ప్రవచనము పునరుక్తి అగును. దీనిని $\mathbb{T}$ గా సూచిస్తారు.

(17) దత్త ప్రవచనం యొక్క సత్య విలువ వాటిలోని ప్రవచనాల సత్య విలువతో ప్రమేయం లేకుండా ఎల్లప్పుడూ F గా ఉన్నప్పుడు మాత్రమే ఆ ప్రవచనము విరుద్ధత అగును. దీనిని $\mathbb{F}$ గా సూచిస్తారు.

(18) పునరుక్తి మరియు విరుద్ధత లేని ప్రవచనాలను అనిశ్చితి అంటారు.

(19) సత్య పట్టికలో A మరియు B ల నిలువు వరుసలకు అనుగుణంగా సమాన సత్య విలువలను కలిగియున్నప్పుడు ఏవైనా A మరియు B అను రెండు సంయుక్త ప్రవచనాలు తార్కిక సమానత్వము పొందుతాయని చెప్పవచ్చును. A మరియు B ప్రవచనాల తార్కిక సమానత్వమును $A \equiv B$ లేదా $A \Leftrightarrow B$ గా సూచిస్తాము. మరియు A మరియు B లు తార్కిక సమానత్వమైనప్పుడు $A \leftrightarrow B$ అనునది ఖచ్చితముగా పునరుక్తి అగును.

06_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_12.indd 268 24-01-2023 11:27:41

(20) కొన్ని సమానత్వ నియమాలు:

విలక్షణ ధర్మాలు: (i) $p \vee p \equiv p$ (ii) $p \wedge p \equiv p$.

వినిమయ ధర్మాలు: (i) $p \vee q \equiv q \vee p$ (ii) $p \wedge q \equiv q \wedge p$.

సహచర ధర్మాలు: (i) $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ (ii) $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$.

విభజన ధర్మాలు లేదా విభాగ ధర్మాలు :

(i) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

(ii) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

తత్సమ ధర్మాలు:

(i) $p \vee \mathbb{T} \equiv \mathbb{T}$ మరియు $p \vee \mathbb{F} \equiv p$

(ii) $p \wedge \mathbb{T} \equiv p$ మరియు $p \wedge \mathbb{F} \equiv \mathbb{F}$

పూరక ధర్మాలు:

(i) $p \vee \neg p \equiv \mathbb{T}$ మరియు $p \wedge \neg p \equiv \mathbb{F}$

(ii) $\neg\, \mathbb{T} \equiv \mathbb{F}$ మరియు $\neg\, \mathbb{F} \equiv \mathbb{T}$

ద్వంద్వ వ్యతిరేక ధర్మము: $\neg(\neg p) \neg p$

ధీమార్గన్ ధర్మాలు: (i) $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ (ii) $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \vee \neg q$

శోషణ ధర్మాలు: (i) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ (ii) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

అంతర్జాల కృత్యము (ICT CORNER)

https://ggbm.at/dy9kwgbt or Scan the QR Code

బ్రౌజరును తెరచి ఇవ్వబడిన వంటి URL లింక్‌ను టైపు చేయుము లేదా QR సంకేతమును స్కాన్ చేయుము. "12వ తరగతి గణితశాస్త్రము, భాగము-2" అను శీర్షికతో జియోజీబ్రా వర్క్‌బుక్ తెరువబడును. ఎడమ వైపున మీ పాఠ్యపుస్తకమునకు సంబంధించిన అధ్యాయములు చూపించబడియుండును. "విలక్షణ గణితము" అను పాఠ్య శీర్షిక గల అధ్యాయముపై క్లిక్ చేయుము. అక్కడ ఈ అధ్యాయమునకు సంబంధించిన అనేక వర్క్‌షీట్లు ప్రదర్శింపబడును. వాటిని సాధించుము.

06_12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_12.indd 269 24-01-2023 11:27:44

జవాబులు

అధ్యాయం 7

అభ్యాసము 7.1

(1) (i) 21మీ/సె (ii) 15 మీ/సె మరియు 27 మీ/సె

(2) (2)(i) 5 సెకెను (ii) 128 అ/సె (iii)160 అ/సె

(3) (i) 1,2 సెకెను (ii) 34 మీ (iii) –6 మీ / సె^{2}, 6 మీ / సె^{2}

(4) 75 యూనిట్లు (5) $\frac{1}{2}$ కి.గ్రా/మీ, $\frac{1}{6}$ కి.గ్రా/మీ,

(6) 20π చ.సెం/సె (7) 2π కి.మీ/సె (8) $\frac{9}{10\pi}$ మీ/ని

(9) (i) $\frac{-8}{3}$ మీ/సె (ii) 26.83 చ.మీ/సె (10) 70 కి.మీ/గం

అభ్యాసము 7.2

(1) (i) 7 (ii) ∞ (2) $(1,0)$

(3) $(0,3)$ మరియు $(4,-25)$ (4) $(2,-1)$ మరియు $(-2,1)$

(5) (i) $2x+y=2\,;x-2y=1$ (ii) $2x-y=-2\,;x+2y=4$

(iii) $x-y=0\,;x+y=\pi$ (iv) $4x+2y=5\;;2x-4y=-5$

(6) $12x-y=15;12x-y=-17$ (7) $x+2y=7\,;x+2y=-1$

(8) $(2\cos t)x+(7\sin t)y=14\,;\,(7\sin t)x-(2\cos t)y=45\sin t\cos t$ (9) $\tan^{-1}(3)$

అభ్యాసము 7.3

(1) (i) $x=0$ వద్ద అవిచ్ఛినము కాదు (ii) $x=\frac{\pi}{2}$ వద్ద అవిచ్ఛినము కాదు (iii) $f(2)\neq f(7)$

(2) (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $-2+2\sqrt{2}$ (iii) $\frac{9}{4}$

(3) (i) $x=0$ వద్ద అవిచ్ఛినము కాదు (ii) $x=\frac{-1}{3}$ వద్ద అవకలనము కాదు

(4) (i) $\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ (ii) 7

(6) 320 కి.మీ (8) లేదు ఎందుకనగా $(0,2)$ మధ్య $f'(x)$ విలువ 2.5 గా ఉండుటకు వీలులేదు.

అభ్యాసము 7.4

(1) (i) $e^x=1+\frac{x}{\lfloor 1}+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\cdots$ (ii) $\sin x=x-\frac{x^3}{\lfloor 3}+\frac{x^5}{\lfloor 5}-\frac{x^7}{\lfloor 7}+\cdots$

(iii) $\cos x=1-\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^4}{\lfloor 4}-\frac{x^6}{\lfloor 6}+\cdots$ (iv) $\log(1-x)=-\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots\right)$

(v) $\tan^{-1}(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots$ (vi) $\cos^2 x=1-\frac{2x^2}{\lfloor 2}+\frac{2^3x^4}{\lfloor 4}-\frac{2^5x^6}{\lfloor 6}+\cdots$

07_12th_Maths_Telugu_Medium_Answers.indd 270 23-01-2023 17:05:57

(2) $\log x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \cdots$

(3) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \frac{1}{\lfloor 1}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{\lfloor 2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{1}{\lfloor 3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \cdots\right)$

(4) $f(x) = -(x-1) + (x-1)^2$

అభ్యాసము 7.5

(1) $\frac{1}{2}$ (2) 2 (3) ∞ (4) 1 (5) 0 (6) 0

(7) $\frac{-3}{2}$ (8) 1 (9) e (10) 1 (11) $\frac{1}{\sqrt{e}}$

అభ్యాసము 7.6

(1) (i) సంపూర్ణ గరిష్ఠ విలువ = -1, సంపూర్ణ కనిష్ఠ విలువ = -26

(ii) సంపూర్ణ గరిష్ఠ విలువ = 16, సంపూర్ణ కనిష్ఠ విలువ = -1

(iii) సంపూర్ణ గరిష్ఠ విలువ = 9, సంపూర్ణ కనిష్ఠ విలువ = $-\frac{9}{8}$

(iv) సంపూర్ణ గరిష్ఠ విలువ = $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, సంపూర్ణ కనిష్ఠ విలువ = 0

(2) (i) $(-\infty, -2)$ నందు ఖచ్చిత ఆరోహణ, $(1, \infty)$ మరియు $(-2, 1)$ నందు ఖచ్చిత అవరోహణ,

గరిష్ఠ పరివర్తనము = 20 కనిష్ఠ పరివర్తనము = -7

(ii) $(-\infty, 5)$ మరియు $(5, \infty)$. నందు ఖచ్చిత అవరోహణము. పరివర్తన తీవ్రత లేదు.

(iii) $(-\infty, \infty)$. ఖచ్చిత ఆరోహణము పరివర్తన తీవ్రత లేదు.

(iv) $(0,1)$ నందు ఖచ్చిత అవరోహణము $(1, \infty)$ నందు ఖచ్చిత ఆరోహణము పరివర్తన తీవ్రత $= \frac{1}{3}$

(v) $\left(0, \frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$, మరియు $\left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right)$ నందు ఖచ్చిత ఆరోహణము.

$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ మరియు $\left(\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$ నందు ఖచ్చిత అవరోహణము పరివర్తన

తీవ్రత $= \frac{11}{2}$, $x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ నందు

$x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} = \frac{9}{2}$ కనిష్ఠ పరివర్తనము.

అభ్యాసము 7.7

(1) (i) $(-\infty, 2)$ మరియు $(4, \infty)$ నందు ఎగువ పటాకారత, $(2,4)$ నందు దిగువ పుటాకారత, స్థానిక తీవ్రత $(2, -16)$ మరియు $(4, 0)$

(ii) $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$ నందు ఎగువ పటాకారత $\left(0, \frac{3\pi}{4}\right)$ మరియు $\left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right)$ నందు దిగుబ

07_12th_Maths_Telugu_Medium_Answers.indd 271 23-01-2023 17:06:10

పుటాకారత స్థానిక తీవ్రత $\left(\frac{3\pi}{4},0\right)$ మరియు $\left(\frac{7\pi}{4},0\right)$

(iii) $(0,\infty)$ నందు ఎగువ పుటాకారత. $(-\infty,0)$ నందు దిగువ పుటాకారత, స్థానిక తీవ్రత $(0,0)$

(2) (i) కనిష్ఠ పరివర్తనము = -2 ; గిరిష్ఠ పరివర్తనము $=2$

(ii) కనిష్ఠ పరివర్తనము= $-\frac{1}{e}$

(iii) కనిష్ఠ పరివర్తనము = 0 ; గిరిష్ఠ పరివర్తనము $=\frac{1}{e^2}$

(3) $(-\infty,-1)$ మరియు $\left(\frac{1}{2},\infty\right)$ నందు ఖచ్చిత ఆరోహణ, $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$ నందు ఖచ్చిత ఆరోహణము,

గరిష్ఠ పరివర్తనము = 6 కనిష్ఠ పరివర్తనము = $-\frac{3}{4}$, $\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right)$ నందు ఎగువ పుటాకారత,

దిగువ పుటాకారత $\left(-\frac{1}{4},\infty\right)$ నందు స్థానిక తీవ్రత $\left(-\frac{1}{4},\frac{21}{8}\right)$

అభ్యాసము 7.8

(1) $6,6$ (2) $2\sqrt{5},2\sqrt{5}$ (3) 50 (4) 100 మీ^{2} (5) 9 సెం.మీ, 6 సెం.మీ (6) 1200మీ

(7) $10\sqrt{2},10\sqrt{2}$ (9) $\sqrt{2}r,\frac{r}{\sqrt{2}}$ (10) 6 సెం.మీ, 6 సెం.మీ, 3 సెం.మీ (11) $32\pi,0$

అభ్యాసము 7.9

(1) (i) $x=-1,x=1,y=1$ (ii) $x=-1,y=x-1,$ (iii) $y=-3,y=3$

(iv) $y=x-9,x=-3$

అభ్యాసము 7.10

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(1)	(2)	(2)	(2)	(1)	(2)	(3)	(4)	(3)	(1)
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
(3)	(4)	(3)	(4)	(2)	(3)	(3)	(1)	(4)	(3)

అధ్యాయం 8

అభ్యాసము 8.1

1. (i) 3.0074 2. (i) 24.73 (ii) 1.9688 (iii) 2.963

3. (i) $7x-4$ (ii) $\frac{9-4x}{5}$ (iii) $\frac{x+1}{4}$

4. (i)0.0225π సెం.మీ^{2}, (ii) 0.006 సెం.మీ^{2} (iii) 0.6%

5. (i) ఘన పరిమాణము 80π ఘ.సెం.మీ గా తగ్గును.

(ii) ఉపరితల వైశాల్యము 16π చ.మీ.గా తగ్గును

6. 1%

07_12th_Maths_Telugu_Medium_Answers.indd 272 23-01-2023 17:06:20

అభ్యాసము 8.2

1. (i) $\frac{2(1-2x)^2(8x-7)}{(3-4x)^2}dx$ (ii) $\frac{4}{3}\frac{\cos 2x}{(3+\sin 2x)^{\frac{1}{3}}}dx$

   (iii) $e^{x^2-5x+7}[(2x-5)\cos(x^2-1)-2x\sin(x^2-1)]dx$

2. (i) 0.7 (ii) 0.18 3. (i) $\Delta f = 3.125$, $df = 2.0$ (ii) $\Delta f = 0.11$, $df = 0.1$

4. 3.0013029 5. (i) $\frac{6}{\pi}$ సెం.మీ (ii) $\frac{40}{\pi}\%$ 6. 30π ఘ.మి.మీ 7. 0.4π చ.మి.మీ 8. 8000

9. (i) $\simeq 3$ పదములకు (ii) $\simeq 1$ పదము 10. 5.25π, 4.76% 11. 60 ఘ.సెం.మీ, 61.2 ఘ.సెం.మీ

అభ్యాసము 8.3

1. $\frac{1}{8}$ 2. 1 4. cos(1)

అభ్యాసము 8.4

1. (i) 27, −14 (ii) 11, −4 (iii) 2, 0, 4 (iv) $e^2\left((\log 2)-1\right), e^2(1+\log 8)$

3. $\frac{x^2-y^2}{x^2y}, \frac{y^2-x^2}{y^2x}+3z^2, 6yz$ 4. $\frac{3\left(x^2+y^2+z^2\right)}{\left(x^3+y^3+z^3\right)}$

5. (i) e^y+6x, $6y$, xe^y, e^y+6x

   (ii) $\frac{-15}{(5x+3y)^2}, \frac{-25}{(5x+3y)^2}, \frac{-9}{(5x+3y)^2}, \frac{-15}{(5x+3y)^2}$ (iii) 3, $2-25\cos 5x$, 0, 3

10. (i) $72x+84y+0.04xy-0.05x^2-0.05y^2-2000$ (ii) 24, −48, y ని స్థిరముగాను మరియు x ని అధికపరచునపుడు లాభము పెరుగును.

అభ్యాసము 8.5

1. $6x-7y-7$ 2. $-(x+20y+16)$ 3. $(2x-y)dx+\left(-x+\frac{1}{2}y\right)dy$

4. $(y+z)dx+(x+z)dy+(y+x)dz$

అభ్యాసము 8.6

1. $e^t\left(2e^t\sin t+3\sin^4 t+e^t\cos t+12\sin^3 t\cos t\right)$, 1

2. $\left(1+e^{2t}\right)^2\left[\cos^3 t\left(1+e^{2t}\right)-\sin t\sin 2t\left(1+e^{2t}\right)+6e^{2t}\sin t\cos^2 t\right]$

3. $4e^{2t}$ 4. $-e^{-2t}\left[\sin 2t-\cos 2t\right]$ 5. $18e^{3s}-3e^s\cos s+3e^s\sin s-4\sin s\cos s$, 15

6. $\frac{3e}{1+e^2}+2\tan^{-1}e, \frac{e}{1+e^2}$

7. $te^{st^2}\left[t\sin\left(s^2t\right)+2s\cos\left(s^2t\right)\right]$, $\frac{du}{dt}=se^{st^2}\left[2t\sin\left(s^2t\right)+s\cos\left(s^2t\right)\right]$, $e\left[\sin(1)+2\cos(1)\right]$, $e\left[2\sin(1)+\cos(1)\right]$

8. $3s^3(e^{3t}+s^2e^{-t})$, $3s^2e^t(e^{2t}-5e^{-2t}s^2)$ 9. $2u(1+2v)$, $2\left(u^2-v\right)$, 3, $\frac{-3}{2}$

07_12th_Maths_Telugu_Medium_Answers.indd 273 23-01-2023 17:06:42

అభ్యాసము 8.7

1. (i) అసమఘాతీయత (ii) సమఘాతీయత, అంతస్తు 3

(iii) సమఘాతీయత, అంతస్తు 0 (iv) అసమఘాతీయత 6. 5

అభ్యాసము 8.8

1	2	3	4	5	6	7	8
(2)	(2)	(2)	(4)	(3)	(2)	(4)	(2)
9	10	11	12	13	14	15	
(4)	(1)	(2)	(3)	(2)	(4)	(1)	

అధ్యాయం 9

అభ్యాసము 9.1

1. 0.6 2. 0.855 3. 0.375

అభ్యాసము 9.2

1. (i) $\frac{13}{2}$ (ii) $\frac{25}{3}$

అభ్యాసము 9.3

1. (i) $\frac{1}{4}\log\frac{5}{3}$ (ii) $\frac{\pi}{8}$ (iii) $\frac{\pi}{2}-1$ (iv) $e^{\frac{\pi}{2}}$ (v) $\frac{8}{21}$ (vi) $\frac{1}{2}$

2. (i) 0 (ii) π (iii) $\frac{\pi-2}{4}$ (iv) 0 (v) 0 (vi) $\frac{13}{10}$ (vii) $\frac{\pi}{4}$

(viii) $\frac{\pi}{8}\log 2$ (ix) $\frac{\pi}{2}(\pi-2)$ (x) $\frac{\pi}{8}$ (xi) $\frac{\pi^2}{2}$

అభ్యాసము 9.4

1. $\frac{3}{8}-\frac{19}{8}e^{-2}$ 2. $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{12}+\frac{1}{9}\right)$ 3. $1+e^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\pi}{4}-1\right]$ 4. $-\frac{\pi}{4}$

అభ్యాసము 9.5

1. (i) $\frac{\pi}{2\sqrt{6}}$ (ii). $\frac{\pi}{6\sqrt{5}}$

అభ్యాసము 9.6

1. (i) $\frac{63\pi}{512}$ (ii) $\frac{16}{35}$ (iii) $\frac{5\pi}{64}$ (iv) $\frac{8}{45}$ (v) $\frac{\pi}{32}$ (vi) $\frac{64}{35}$ (vii) $\frac{1}{24}$ (viii) $\frac{1}{60}$

అభ్యాసము 9.7

1. (i) $\frac{5!}{3^6}$ (ii) 29 (2) $\frac{1}{8}$

07_12th_Maths_Telugu_Medium_Answers.indd 274 23-01-2023 17:06:50

అభ్యాసము 9.8

1. 7.5 2. 2 3. 15 4. 36 5. $2\sqrt{2}$ 6. $\log 2$ 7. $\frac{9}{2}$ 8. అవును, $\frac{16}{3}$ 9. $\frac{4}{3}$ 10. $\frac{4}{3}\left(4\pi+\sqrt{3}\right)$

అభ్యాసము 9.9

1. $\frac{4\pi}{5}$ 2. $\frac{\pi}{4}\left[1-e^{-4}\right]$ 3. 8π 4. $\frac{2\pi}{15}$ 5. $\frac{14}{3}\pi$ మీ^{3} 6. $\frac{1000}{3}\pi$ సెం.మీ^{3}

అభ్యాసము 9.10

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(1)	(3)	(3)	(4)	(4)	(3)	(3)	(3)	(2)	(1)
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
(4)	(2)	(2)	(4)	(4)	(4)	(3)	(4)	(2)	(1)

అధ్యాయం 10

అభ్యాసము 10.1

1. (i) 1,1 (ii) 3,2 (iii) 2, వ్యవస్థితము కాదు (iv) 1, 2 (v) 1,4
(vi) 2,2 (vii) 2,6 (viii) 2, వ్యవస్థితము కాదు (ix) 3,1 (x) 1, వ్యవస్థితము కాదు

అభ్యాసము 10.2

1. (i) $\frac{dQ}{dt}=kQ$ (ii) $\frac{dP}{dt}=kP(500000-P)$ (iii) $\frac{dP}{dT}=\frac{kP}{T^2}$ (iv) $\frac{dx}{dt}=\frac{2x}{25}+400$ 2. $\frac{dr}{dt}=-k$

అభ్యాసము 10.3

1. (i) $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ (ii) $\frac{d^2x}{dy^2}=0$ 2. $r^2\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]=\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)^2$

3. $x^2+2xy\frac{dy}{dx}-y^2=0$ 4. $2ay''+y'^3=0$ 5. $xy'-2y-2=0$

6. $xy'^2+xyy''-yy'=0$ 7. $\frac{d^2y}{dx^2}=64y$ 8. $xy''+2y'+x^2-xy-2=0$

అభ్యాసము 10.4

2. (i) $m=-2$ (ii) $m=2,3$ 3. $2y^2=x+48$

అభ్యాసము 10.5

1. $F=(F-kV)e^{\frac{kt}{M}}$ 2. $k^2\left(1-e^{-\frac{2gx}{k^2}}\right)=v^2$ 3. $y=\frac{1-x}{1+x}$

4. (i) $\sin^{-1}y=\sin^{-1}x+C$ (ii) $y\tan^{-1}x=C$ (iii) $\sin\left(\frac{y-1}{x}\right)=a$ (iv) $e^x+e^{-y}+\frac{x^4}{4}=C$
(v) $\left(e^y+1\right)\sin x=C$ (vi) $\sin\left(\frac{x}{y}\right)=e^{nx+c}$ (vii) $3y=-\left(25-x^2\right)^{\frac{3}{2}}+3C$
(viii) $\sin y=e^x\log x+C$

07_12th_Maths_Telugu_Medium_Answers.indd 275 23-01-2023 17:07:08

(ix) $\sec y = 2\sin x + C$ (x) $\frac{1}{2}\left[(x+y)+\sin(x+y)\cos(x+y)\right] = x + C$

అభ్యాసము 10.6

1. $\sin\left(\frac{y}{x}\right) = \log|Cx|$ 2. $y = Ce^{\frac{x^3}{3y^3}}$ 3. $e^{\frac{x}{y}} = \log|Cy|$ 4. $3x^2y + 2y^3 = C$
5. $xy^2 - x^2y = C$ 6. $C = xe^{\tan\left(\frac{y}{x}\right)}$ 7. $y + 3xe^{\frac{y}{x}} = 3$ 8. $x_0 = \pm\sqrt{3}e$

అభ్యాసము 10.7

1. $y = \sin x + C\cos x$ 2. $y = \frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}} + C\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ 3. $(y+\cos x)x = \sin x + C$
4. $y\left(x^2+1\right) = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+4} + \frac{1}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2+4}\right| + C$ 5. $xy^2 = 2y^5 + C$
6. $xy\sin x + \cos x = C$ 7. $ye^{\sin^{-1}x} = \frac{e^{2\sin^{-1}x}}{2} + C$ 8. $y\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) = x + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$
9. $xy + \tan^{-1}y = C$ 10. $y\log x + \frac{\cos 2x}{2} = C$ 11. $2y = (x+a)^4 + 2C(x+a)^2$
12. $y\left(1+x^3\right) = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$ 13. $4yx = 2x^2\log x - x^2 + 4C$ 14. $x^2y = \frac{x^4}{4}\log x - \frac{x^4}{16} + C$
15. $2x^3y = x^2 + 3$

అభ్యాసము 10.8

1. 10 గంటల తరువాత బ్యాక్టీరియాల సంఖ్య అసలు వాటి కంటే 9 రెట్లు ఉండును.
2. $P = 300000\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{t}{40}}$ 3. $i = Ce^{-\frac{Rt}{L}}$ 4. $v = \frac{10}{e^2}$ 5. $P = 10000e^{0.075}$
6. $\frac{9^{10}}{10^8}$ % గల రేడియో ధారిక మూలకములు 1000 సంవత్సరముల తర్వాత కూడా ఒకే విధముగా ఉండును.
7. (i) $65.33°C$ (ii) 51.91 *mts* 8. (i) $T \simeq 151°F$
(ii) $t = 22.523$. సమారుగా 10.22 నుండి 10.30 లోపు ఆమె కాఫీ త్రాగియుండును.
9. 20° 10. $x = 100\left(1-e^{\frac{-3t}{50}}\right)$

అభ్యాసము 10.9

Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	(1)	(2)	(3)	(2)	(2)	(3)	(3)	(2)	(2)	(3)
Q	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	(3)	(3)	(1)	(1)	(2)	(3)	(2)	(4)	(2)	(4)
Q	21	22	23	24	25					
A	(1)	(1)	(2)	(2)	(1)					

07_12th_Maths_Telugu_Medium_Answers.indd 276 23-01-2023 17:07:25

అధ్యాయం 11

అభ్యాసము 11.1

(1)

యాదృచ్ఛిక చరరాశి యొక్క విలువ	0	1	2	3	మొత్తము
విలోమ ప్రతి బింబ బిందువుల సంఖ్య	1	3	3	1	8

(2)

యాదృచ్ఛిక చరరాశి యొక్క విలువ	0	1	2	మొత్తము
విలోమ ప్రతి బింబ బిందువుల సంఖ్య	325	676	325	1326

(3)

యాదృచ్ఛిక చరరాశి యొక్క విలువ	0	1	2	3	మొత్తము
విలోమ ప్రతి బింబ బిందువుల సంఖ్య	4	30	40	10	84

(4)

యాదృచ్ఛిక చరరాశి యొక్క విలువ	–20	5	30	మొత్తము
విలోమ ప్రతి బింబ బిందువుల సంఖ్య	28	48	15	91

(5)

యాదృచ్ఛిక చరరాశి యొక్క విలువ	4	5	6	7	8	మొత్తము
విలోమ ప్రతి బింబ బిందువుల సంఖ్య	1	4	10	12	9	36

అభ్యాసము 11.2

(1) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{8} & ; \ x=0,3\\ \frac{3}{8} & ; \ x=1,2\end{cases}$

(2) (i)

x	2	4	6	8	10	మొత్తము
$f(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{9}{36}$	1

(2) (ii) $F(x)=\begin{cases}0 & ; \quad x<2\\ \frac{1}{36} & ; \quad 2\le x<4\\ \frac{5}{36} & ; \quad 4\le x<6\\ \frac{15}{36} & ; \quad 6\le x<8\\ \frac{27}{36} & ; \quad 8\le x<10\\ 1 & ; \quad 10\le x<\infty\end{cases}$

(iii) $\frac{13}{18}$ (iv) $\frac{31}{36}$

(3) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4} & ; \ x=1,3\\ \frac{1}{16} & ; \ x=0,4\\ \frac{3}{8} & ; \ x=2\end{cases}$,

$F(x)=\begin{cases}0 & ; \quad x<0\\ \frac{1}{16} & ; \ 0\le x<1\\ \frac{5}{16} & ; \ 1\le x<2\\ \frac{11}{16} & ; \ 2\le x<3\\ \frac{15}{16} & ; \ 3\le x<4\\ 1 & ; \ 4\le x<\infty\end{cases}$

07_12th_Maths_Telugu_Medium_Answers.indd 277 23-01-2023 17:07:32

(4) (i) 8 (ii) $F(x)=\begin{cases}0 & ; \quad x<0\\ \frac{1}{8} & ; \quad 0\le x<1\\ \frac{3}{8} & ; \quad 1\le x<2\\ 1 & ; \quad 2\le x<\infty\end{cases}$ (iii) $\frac{7}{8}$

(5) (i)

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0.15	0.20	0.25	0.25	0.15

(ii) $P(X<1)=0.35$ (iii) $P(X\ge 2)=0.40$

(6) (i) $\frac{1}{6}$ (ii) $\frac{17}{36}$ (iii) $\frac{5}{6}$

(7) (a)

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

(b) $\frac{4}{5}$ (c) $\frac{2}{5}$

అభ్యాసము 11.3

(1) 4

(2) (i)0.16 (ii) 0.3 (iii) 0.75

(3) (i) $\frac{1}{400}$ (ii) $F(x)=\begin{cases}0 & ; \quad x<200\\ \frac{x}{400}-\frac{1}{2} & ; \quad 200\le x\le 600\\ 1 & ; \quad x>600\end{cases}$

(iii) $\frac{1}{2}$

(4) (i) $\frac{1}{3}$ (ii) $1-e^{-\frac{x}{3}}$ (iii) $1-e^{-1}$ (iv) $e^{-\frac{5}{3}}$ (v) $1-e^{-\frac{4}{3}}$

(5) (i) $F(x)=\begin{cases}0 & ; \quad x\le -1\\ \frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2} & ; -1\le x<0\\ -\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2} & ; \quad 0\le x<1\\ 1 & ; \quad 1\le x\end{cases}$ (ii) 0.75

(6) (i) $f(x)=F'(x)=\begin{cases}0 & ; \ x<0\\ \frac{1}{2}(2x+1) & ; \ 0\le x<1\\ 0 & ; \ 1\le x\end{cases}$ (ii) 0.285

07_12th_Maths_Telugu_Medium_Answers.indd 278 23-01-2023 17:07:42

అభ్యాసము 11.4

(1) (i) $2.3, 2.81$ (ii) $1.67, 0.56$ (iii) $\frac{5}{3}, \frac{1}{18}$ (iv) $2, 4$

(2) $\frac{8}{7}$

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$

(3) $7, 16$

(4) $2, 1$

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

(5) 15 నిమిషములు (6) $\frac{1}{3}$ (7) $\frac{1}{2}, \frac{1}{8}$ (8) నష్టం ₹. 0.50

అభ్యాసము 11.5

(1) (i) $\frac{160}{729}$ (ii) $210\left(\frac{1}{5}\right)^4\left(\frac{4}{5}\right)^6$ (iii) $\binom{9}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7\left(\frac{1}{2}\right)^2$ (2) (i) $\binom{10}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^6$ (ii) $1-\frac{3^{10}}{4^{10}}$

(3) (i) $50,\ 25$ (ii) $40, \frac{100}{3}$ (4) $\frac{270}{1024}$ (5) (i) $1-0.95^{10}$ (ii) $\binom{10}{2}(0.05)^2(0.95)^8$

(6) (i) $\binom{12}{10}(0.9)^{10}(0.1)^2$ (ii) $2.1(0.9)^{11}$ (iii) $1-\left[2.1(0.9)^{11}\right]$

(7) (i) $\binom{18}{x}\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{18-x}$ (ii) $\binom{18}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^{15}$ (iii) $1-\frac{20}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{17}$

(8) $\binom{6}{x}\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{6-x}$, 2, $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (9) $1, \frac{4}{5}$

అభ్యాసము 11.6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(2)	(4)	(2)	(4)	(4)	(2)	(4)	(3)	(2)	(1)
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
(4)	(4)	(1)	(2)	(1)	(1)	(4)	(4)	(2)	(1)

అధ్యాయం 12

అభ్యాసము 12.1

1. (i) అవును, $\mathbb{R}$ మీద $*$ ఒక యుగ్మ పరిక్రియ (ii) అవును, A మీద $*$ ఒక యుగ్మ పరిక్రియ
   (iii) లేదు, $\mathbb{R}$ మీద $*$ ఒక యుగ్మ పరిక్రియ
2. కాదు, $\mathbb{Z}$ మీద $*$ అనునది యుగ్మ పరిక్రియ 3. $\frac{-88}{15}$
4. అవును, A మీద సాధారణ గుణకారమనునది యుగ్మ పరిక్రియ అగును.
5. (i) $\mathbb{Q}$ మీద ఇవ్వబడిన పరిక్రియ $*$ అనునది సంవృత్తము మరియు వనిమయమగును కాని సహచరము కాదు.

07_12th_Maths_Telugu_Medium_Answers.indd 279 23-01-2023 17:08:00

(ii) తత్సమము వర్తించదు కావున విలోమము కూడా వర్తించదు.

6.

$*$	a	b	c
a	b	c	a
b	c	b	a
c	a	a	c

7. కాదు, ఇవ్వబడిన పరిక్రియ వినిమయ మరియు సహచరము కాదు.

8. (i) $A \vee B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $A \wedge B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(iii) $(A \vee B) \wedge C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (iv) $(A \wedge B) \vee C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

10. (i) ఇది వినిమయము మరియు సహచరము అగును

(ii) ఇది తత్సమ మరియు విలోమమగును.

అభ్యాసము 12.2

1. (i) $\neg p$: జూపిటర్ ఒక గ్రహము కాదు

(ii) $p \wedge \neg q$: జూపిటర్ అనునది ఒక గ్రహము మరియు ఇండియా ద్వీపకల్పము కాదు

(iii) $\neg p \vee q$: జూపిటర్ ఒక గ్రహము కాదు లేక ఇండియా ద్వీపకల్పమగును

(iv) $p \rightarrow \neg q$: జూపిటర్ ఒక గ్రహమైనపుడు ఇండియా ద్వీపకల్పము కాదు.

(v) $p \leftrightarrow q$ జూపిటర్ అనునది గ్రహముగా ఉంటే మాత్రము ఇండియా ఒక ద్వీపకల్పమగును.

2. (i) $\neg p \wedge q$ (ii) $p \vee \neg q$ (iii) $p \wedge q$ (iv) $\neg p$

3. (i) $p \rightarrow q$, $\mathbb{T}$ (ii) $p \vee q$, $\mathbb{F}$ (iii) $\neg p \vee q$, $\mathbb{T}$ (iv) $p \wedge q$, $\mathbb{F}$

4. (i), (iii) మరియు (iv) అనునవి అనుపాతములు

5. (i) **విరుద్ధత :** x మరియు y లు సంఖ్యలు, $x^2 = y^2$ అయిన $x = y$

విలోమము: x మరియు y లు సంఖ్యలు, $x \neq y$ అయిన $x^2 \neq y^2$

ప్రతివర్తితము: x మరియు y లు సంఖ్యలు $x^2 \neq y^2$ అయిన $x \neq y$

(ii) **విరుద్ధత ;** ఒక చతుర్భుజము దీర్ఘచతురస్రమయిన అది చతురస్రమగును.

విలోమము : చతుర్భుజము, చతురస్రము కానపుడు అది దీర్ఘచతురస్రము కాదు

పరివర్తితము ; ఒక చతుర్భుజము, దీర్ఘచతురస్రము కానపుడు, అది చతురస్రముకాదు

07_12th_Maths_Telugu_Medium_Answers.indd 280 23-01-2023 17:08:06

6. (i) సత్య పట్టిక $\neg p \wedge \neg q$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

(ii) సత్య పట్టిక $\neg(\neg p \wedge \neg q)$

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$
T	T	F	F	T
T	F	T	T	F
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T

(iii) సత్య పట్టిక $(p \vee q) \vee \neg q$

p	q	$\neg q$	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee \neg q$
T	T	F	T	T
T	F	T	T	T
F	T	F	T	T
F	F	T	F	T

(iv) సత్య పట్టిక $(\neg p \rightarrow r) \wedge (p \leftrightarrow q)$

p	q	r	$\neg p$	$(\neg p \rightarrow r)$	$p \leftrightarrow q$	$(\neg p \rightarrow r) \wedge (p \leftrightarrow q)$
T	T	T	F	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T
T	F	T	F	T	F	F
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	T	T	F	F
F	T	F	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T	T
F	F	F	T	F	T	F

7. (i) విరుద్ధత (ii) పునరుక్తి (iii) అనిచ్ఛిత్తి (iv) పునరుక్తి

12. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ అనునది పునరుక్తి అగును

13. అవును, ప్రవచనములు తార్కిక సమానత్వము.

అభ్యాసము 12.3

సరియైన సమాధానమును ఎన్నుకొనుము

Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	(2)	(3)	(2)	(4)	(2)	(2)	(3)	(4)	(3)	(2)
Q	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	(4)	(1)	(3)	(3)	(3)	(2)	(4)	(3)	(1)	(4)

పదకోశము

అధ్యాయము 7

అవకలన గణితము యొక్క అనవర్తనాలు

related rates	సాపేక్ష రేట్లు
mean value theorem	మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతము
indeterminate forms	అనిశ్చిత రూపాలు
stationary points	విరామ బిందువులు
critical points	సందిగ్ధ బిందువులు
monotonicity of functions	ప్రమేయము యొక్క ఏకదిష్టత
absolute extremum	సంపూర్ణ తీవ్రత
relative extremum	సాంపేక్ష తీవ్రత
Concave	పుటాకారము
Convex	కుంభాకారము
point of inflection	పరివర్తనా బిందువులు
Symmetry	సౌష్టవము

అధ్యాయము 8

అవకలనులు మరియు పాక్షిక అవకలనులు

Differential	అవకలనము
Partial Derivatives	పాక్షిక అవకలనములు
Harmonic	ఏకరితి
Homogeneous	సమఘాతీయ
Absolute error	సంపూర్ణ దోషము
Relative error	సాపేక్ష దోషము
Percentage error	దోషశాతము

అధ్యాయము 9

సమాకలనము యొక్క అనువర్తనములు

Definite integral	నిశ్చిత సమాకలనం
Reduction formula	క్షమకరణ సూత్రము
Gamma integral	గామా సమకలనము
Bounded region	పరిబద్ధమైన ప్రాతము

అధ్యాయము 10

సాధారణ అవకలన సమికరణములు

order	తరగతి
Linear	రేఖీయ
Degree	అంతస్థు
arbitrary constant	చర స్థిరాంకము
dependent variable	అస్వతంత్ర చరరాశి
independent variable	స్వతంత్ర చరరాశి
integrating factor	సమాకలన కారకము
homogeneous function	సమఘాతీయ ప్రమేయము

అధ్యాయము 11

సంభావ్యత విభాజనములు

bernoulli random variable	బెర్నోలీ మాదృచ్ఛిక చరరాశి
binomial distribution	ద్విపద విభాజనము
binomial random variable	ద్విపద మాదృచ్ఛిక చరరాశి
continuous random variable	అవిచ్ఛిన్న మాదృచ్ఛిక చరరాశి
cumulative distribution function	సంచిత విభాజనా ప్రమేయము
discrete random variable	వివక్త మాదృచ్ఛిక చరరాశి
mathematical expectation	గణిత పరంగా అంచనా
probability density function	సంభావ్యత సాంద్రతా ప్రమేయము
probability mass function	సంభావ్యత ద్రవ్య ప్రమేయము
random variable	యాదృచ్ఛిక చరరాశులు

అధ్యాయము 12

విలక్షణ గణితము

Absorption law	శోషణ నియమము

08_12th_Maths_Telugu_Medium_Glossary.indd 282 23-01-2023 17:14:27

Algebraic structure	బీజగణిత నిర్మాణము
Biconditional statement	ద్విముఖానుషంగికం
Binary Operation	యుగ్మ పరిక్రియ
Boolean Algebra	బూలీయన్ బీజగణితము
Boolean Matrix	బూలీయన్ మాత్రిక
Coding theory	గుప్తికరణ సిద్ధాంతము
Compound statement	సంయుక్త ప్రవచనము
Conditional statement	అనుషంగకం
Conjunction	సముచ్చయము
Contradiction	విరుద్ధత
Contra positive	ప్రతి వర్తితము

Disjunction	వైకల్పికము
Duality	ద్వంద్వత్వము
Hypothesis	దత్తాంశము
Involution law	అంతర్వలన ధర్మము
Logical connectives	తార్కిక అనుసంధానం
Logical equivalent	తార్కిక సమానత్వము
Negation	వ్యతిరేకము
Paradox	విరుద్ధము
Simple statement	సరళ ప్రవచనము
Tautology	పునరుక్తి
Truth table	సత్య పట్టిక

BOOKS FOR REFERENCE

(1) Larson R.E. Larson, B.H. Edwards, and R.P. Hostetle. *Calculus with Analytical Geometry, Fifth Edition.* D.C. Heath and Company, (1994).

(2) Smith R.T. Smith and R.B. Miltons. *Calculus concepts and connections*. McGraw Hill Company, (2006).

(3) Courant R. Courant and F. John. *Introduction to Calculus and Analysis; Volume One.* Inter Science Publishers, a Division of John Wiley and Sons, (1965).

(4) G.B. Thomas, et.al., *Thoma's Calculus,* Addison Wesley (2004).

(5) G.F. Simmons, *Calculus and Analytic Geometry.*

(6) Ulrich L.Rohde, G.C.Jain & Ajay K.Poddar. *Introduction to Integral Calculus.*

(7) Adrian Banner. *The Calculus,* Princeton University Press.

(8) Jerry Farlow, James E. Hall. Jean Marie McDill, and Beverly H. West, *Differential Equations and Linear Algebra*, (2nd Edition) Pearson Education, Inc, New York, (2007).

(9) Dennis G. Zill, *A First Course in Differential Equations with modeling Applications* (9th Edition), Brooks/Cole. Cengage Learning, Belmont, C.A, 2009.

(10) Shepley L.Ross, *Introduction to Ordinary Differential Equations*, Fourth Edition.

(11) William Feller ,John Wiley and sons., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications,* Vol. 1, 3rd Edition.

(12) Paul G. Hoel, Sidney C. Port, Charles J. Stone. *Introduction to Probability Theory*, (**1st Edition**) Published by Houghtion Mifflin.

(13) Bernard Kolman & Robert C. Busby; *Discrete Mathematics structured for Computer Science,* Second Edition Prentice hall of India Pvt. Ltd, New Delhi.

(14) Kenneth H.Rosen, *Discrete Mathematics and the Applications*, seventh Edition. Tata McGraw Hill Education Pvt ltd, New Delhi(2011).

(15) Trembly J.P.& Manohar, *Discrete Mathematical Structure with Applications to Computer Science(1st edition)*. Published by Mcgraw Hill.

08_12th_Maths_Telugu_Medium_Glossary.indd 283 23-01-2023 17:14:28

MATHEMATICS - CLASS -XII - VOLUME II
TELUGU MEDIUM

Academic Coordinators

Dr. M.Ethirajulu,
Senior Lecturer,
SCERT,
Chennai-6.

K. Chandrasekaran,
Lecturer, DIET,
Chennai-05

Reviewers

G. Kiran Kumar Reddy
P.G. Asst (Mathematics)
S.K.D.T HSS,
Villivakkam, Chennai-49

G. Sujana Sri
P.G. Asst (Mathematics)
K.T.C.T, Sowcarpet,
Chennai-01.

List of Translators

K. Geetha
P.G.Asst, (Mathematics)
G.H.S.S, P.M. Pakkam,
Thiruvallur

S.Mouli
P.G.Asst, (Mathematics)
G.H.S.S, Athimanjeripet,
Thiruvallur

T.Venkatachalapathi,
P.G.Asst, (Mathematics)
G.H.S.S, K.G. Kandigai,
Thiruvallur

K.Aruna Latha
P.G.Asst, (Mathematics)
G.B.H.S.S, Uthukottai
Thiruvallur

K. Ramesh kumar,
B.T.Asst, (Mathematics)
G.H.S, Kechalam,
Thiruvallur

E. Gurumurthy, B.T.(Maths),
(Mathematics)
S.K.P.D.Boys. H.S.S,
Chennai-1.

B.S. Jayalakshmi,
B.T.(Maths),
Sir Theyagaraya H.S.S.
Old Washermenpet
Chennai-21.

ICT Coordinator

D. Vasu Raj, P.G.T & HOD,
Dept of Mathematics,
KRM Public School,
Chennai.

EMIS Technology Team

R.M. Satheesh
State Coordinator Technical,
TN EMIS, Samagra Shiksha.

K.P. Sathya Narayana
IT Consultant,
TN EMIS, Samagra Shikaha

R. Arun Maruthi Selvan
Technical Project Consultant,
TN EMIS, Samagra Shiksha

Wrapper Design

Kathir Arumugam

In-House QC

Ashok kumar
Yogesh
Jerald Wilson
Kamatchi Balan Arumugam
Rajesh Thangappan
Sridhar
Arun Kamaraj Palanisamy

Coordination

Ramesh Munisamy

This book has been printed on 80 G.S.M.
Elegant Maplitho Paper.
Printed by Web Offset at :

08_12th_Maths_Telugu_Medium_Glossary.indd 284 23-01-2023 17:21:44