

GOVERNMENT OF TAMILNADU

برائے نویں جماعت

STANDARD NINE

حساب

MATHEMATICS

(URDU MEDIUM)

Department Of School Education

Untouchability is Inhuman and a Crime

9 maths introduction
Wednesday, March 13, 2019 10:55:23 PM

Government of TamilNadu

First Edition - 2018

Revised Edition - 2019, 2022, 2023

Reprint - 2020, 2021, 2024

(Published under new syllabus)

Content Creation

State Council of Educational
Research and Training

© SCERT 2018

Printing & Publishing

Tamil NaduTextbook and Educational
Services Corporation

www.textbooksonline.tn.nic.in

9 maths introduction
Wednesday, March 13, 2019 10:55:23 PM

فہرست مضامین
CONTENTS

اکائی	اسباق		صفحہ نمبر	مہینہ
1	مجموعوں کی زبان	SET LANGUAGE	1	
1.1	تمہید	Introduction	1	جون
1.2	مجموعے	Set	2	
1.3	مجموعوں کی نمائندگی	Representation of a Set	3	
1.4	مجموعوں کے اقسام	Types of Sets	6	
1.5	مجموعوں پر اعمال	Set Operations	12	
1.6	سٹ پر اعمال کی خصوصیات	Properties of Set Operations	19	
2	حقیقی اعداد	REAL NUMBERS	41	
2.1	تمہید	Introduction	41	جولائی
2.2	ناطق اعداد	Rational Numbers	42	
2.3	غیر ناطق اعداد	Irrational Numbers	45	
2.4	حقیقی اعداد	Real Numbers	55	
2.5	جذری ترقیم	Radical Notation	57	
2.6	سرڈ	Surds	60	
2.7	سرڈوں کو ناطقانا	Rationalisation of Surds	68	
2.8	سائنسی ترقیم	Scientific Notation	70	
3		ALGEBRA	78	
3.1	تمہید	Introduction	78	اگست
3.2	کثیر رقمیات	Polynomials	81	
3.3	مسئلہ باقی	Remainder Theorem	92	
3.4	الجبریائی تماثلات	Algebraic Identities	97	
3.5	اجزائے ضربی نکالنا	Factorisation	102	ستمبر
3.6	کثیر رقمیات کی تقسیم	Division of Polynomials	108	
3.7	مقسوم علیہ اعظم	Greatest Common Divisor (GCD)	114	
3.8	دو متغیرات والی خطی مساوات	Linear Equation in Two Variables	116	نومبر
4	علم ہندسہ	GEOMETRY	138	
4.1	تمہید	Introduction	138	جولائی
4.2	زاویوں کی قسمیں	Types of Angles	139	اگست
4.3	چار ضلعی	Quadrilaterals	144	اکتوبر
4.4	دائرے کے حصے	Parts of a Circle	159	نومبر
4.5	دائرے کے وتر کی خصوصیات	Properties of Chords of a Circle	162	
4.6	مدور چار ضلعی	Cyclic Quadrilaterals	170	
4.7	عملی علم ہندسہ	Practical Geometry	174	اگست

Untitled-1
Wednesday, January 25, 2023 4:06:29 PM

مہینہ	صفحہ نمبر	اسباق	اکائی
	185	COORDINATE GEOMETRY محدّدی علم ہندسہ	5
اکتوبر	185	Mapping the Plane مسطح کی خاکہ نگاری	5.1
	187	Devising a Coordinate System محددی نظام کو متعین کرنا	5.2
	193	Distance between any Two Points دو نقاط کا درمیانی فاصلہ	5.3
	203	The Mid-point of a Line Segment ایک قطاع خط کا وسطی نقطہ	5.4
نومبر	208	Points of Trisection of a Line Segment ایک قطاع خط کے تین مساوی حصوں کے نقاط	5.5
	210	Section Formula حصہ کا ضابطہ	5.6
	214	The Coordinates of the Centroid ایک ہندسی مرکز کے محدّدیں	5.7
	222	TRIGONOMETRY علم مثلث	6
دسمبر	222	Introduction تعارف	6.1
	228	Trigonometric Ratios of Some Special Angles بعض مخصوص زاویوں کے لئے علم مثلث کی نسبتیں	6.2
	233	Trigonometric Ratios for Complementary Angles متمم زاویوں کے لئے علم مثلث کی نسبتیں	6.3
	235	Method of using Trigonometric Table علم مثلث کی جدول کے استعمال کا طریقہ	6.4
	248	MENSURATION مساحت	7
جنوری	248	Introduction تعارف	7.1
	249	Herons Formula ہیرن کا ضابطہ	7.2
	251	Application of Herons Formula in Finding Areas of Quadrilaterals ہیرون کے ضابطہ کے استعمال سے چار ضلعی کا رقبہ معلوم کرنا	7.3
	253	Surface Area of Cuboid and Cube مکعب نما اور مکعب کا سطحی رقبہ	7.4
	258	Volume of Cuboid and Cube مکعب نما اور مکعب کا حجم	7.5
	266	STATISTICS شماریات	8
فروری	266	Introduction تعارف	8.1
	267	Collection of Data معطیات کو جمع کرنا	8.2
	269	Measures of Central Tendency مرکزی رجحان کی پیمائش	8.3
	269	Arithmetic Mean حسابی اوسط	8.4
	278	Median وسطانیہ	8.5
	284	Mode طرز	8.6
	291	PROBABILITY امکان	9
مارچ	291	Introduction تعارف	9.1
	292	Basic Ideas بنیادی تصورات	9.2
	295	Classical Approach کلاسیکی طرز عمل	9.3
	296	Empirical Approach تجرباتی طرز عمل	9.4
	299	Types of Events امکان کی قسمیں	9.5
	305	ANSWERS جوابات	

Untitled-1
Wednesday, January 25, 2023 4:06:30 PM

எண்ணென்ப ஏனை எழுத் தென்ப இவ்விரண்டும்
கண்ணென்ப வாழும் உயிர்க்கு - குறள் 392

Numbers and letters, they are known as eyes to humans, they are. Kural 392

اعداد اور الفاظ انسان کو اس کے دو آنکھوں کی طرح ہیں۔ تروکرل : 392

اس کتاب میں استعمال کئے گئے تصویری خاکے



"The essence of mathematics is not to make simple things complicated but to make complicated things simple" -S. Gudder

9 maths introduction
Wednesday, March 13, 2019 10:55:24 PM

SYMBOLS علامتیں

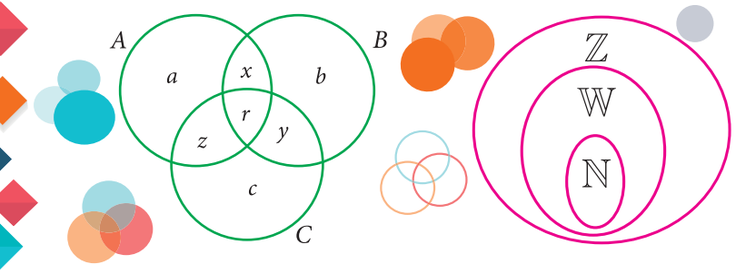
$=$	مساوی ہے
$\neq$	غیر مساوی ہے
$<$	کم ہے
$\leq$	کم ہے یا مساوی ہے
$>$	زیادہ ہے
$\geq$	زیادہ ہے یا مساوی ہے
$\approx$	معادل ہے
$\cup$	یونین یا اتحاد
$\cap$	انٹرسکشن یا تقاطع
$\mathbb{U}$	ہمہ گیر مجموعہ یا عظیم مجموعہ
$\in$	اس سے تعلق رکھتا ہے
$\notin$	اس سے تعلق نہیں رکھتا
$\subset$	موزوں تحتی مجموعہ ہے
$\subseteq$	اس کا تحتی مجموعہ ہے یا اس کے اندر ہے
$\nsubseteq$	اس کا تحتی مجموعہ نہیں ہے یا اس کے اندر نہیں ہے
$A' \text{ (or) } A^c$	A کا متمم
$\phi \text{ (or) } \{\ \}$	خالی مجموعہ یا معدوم مجموعہ
$n(A)$	مجموعہ A کے عناصر کی تعداد
$\|\|\|ly$	اسی طرح
$P(A)$	A کا قوتی مجموعہ
$\mathrm{P}(A)$	موقع A کا امکان

Δ	متشاکل فرق
$\mathbb{N}$	طبعی اعداد
$\mathbb{R}$	حقیقی اعداد
$\mathbb{W}$	صحیح اعداد
$\mathbb{Z}$	سالم اعداد
Δ	مثلث
$\angle$	زاویہ
$\perp$	عمودی ہے
$\parallel$	متوازی ہے
$\Longrightarrow$	ظاہر کرتا ہے
$\therefore$	چنانچہ
$\because$	کیوں کہ
$\lvert\ \rvert$	حقیقی قیمت
$\simeq$	تقریباً مساوی ہے
$\lvert \text{ (or) } :$	اس طرح کہ
$\equiv \text{ (or) } \cong$	متماثل
$\equiv$	متماثل
π	پئی
$\pm$	جمع یا تفریق
$\blacksquare$	ثبوت ختم ہوا

BYXRM
E-book

PFY9K
Evaluation

9 maths introduction
Wednesday, March 13, 2019 10:55:24 PM

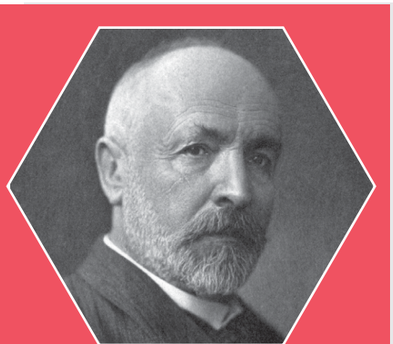


1

مجموعوں کی زبان (SET LANGUAGE)

A set is a many that allows itself to thought of as a one

-Georg Cantor



Georg Cantor
(AD (CE) 1845 - 1918)

مجموعوں کے مسئلے (سٹ تھیوری) کو جرمنی کے ریاضی دان جارج کینٹر (George cantor) نے ترقی دی۔ جسے آج علم ریاضی کی تقریباً تمام شاخوں میں استعمال کیا جاتا ہے۔ علم ریاضی کی تمام ساختیں (Structure) مجموعہ سے آسانی کے ساتھ اظہار کر سکتے ہیں۔

POKJA

سیکھنے کے مقاصد

- مختلف طریقوں سے ایک مجموعہ (سٹوں) کی وضاحت اور نمائندگی کرنا۔
- مختلف قسم کے مجموعوں (سٹوں) کی شناخت کرنا۔
- سٹ اور ان کے اعمال کو سمجھنا اور وِن نقشوں میں ان کو استعمال کرنا۔
- سٹوں کی مربوطی، متبادلتی اور تقسیمی خصوصیت کو معلوم کرنا۔
- ڈی مارگن کے کلیوں کو سمجھنا اور ان کی تصدیق کرنا۔
- سٹ کی زبان کو استعمال کر کے مختلف لفظی مسائل کو حل کرنا۔

1.1 تعارف :

ہمارے روزمرہ کی زندگی میں بار بار ایسے اشیاء کے مجموعوں کا سامنا کرنا پڑتا ہے جیسے کہ کتابیں، اسٹامپس (Stamps)، سکّے وغیرہ۔ اشیاء کو سٹوں میں پیش کرنے کا علم ریاضی کا ایک طریقہ ہے۔

مندرجہ ذیل کے تصویروں پر غور کریں۔ اور یہ کیا ظاہر کرتے ہیں۔

یہاں خاکہ 1.1 پھلوں کے مجموعے کو ظاہر کرتا ہے اور خاکہ 1.2 گھریلو اشیاء کے مجموعہ کو ظاہر کرتا ہے۔

9th Math 1. Set
Tuesday, March 12, 2019 2:23:57 PM

اگر ہم اوپر کی صورتوں پر غور کریں۔
ہماری توجہ انکی خصوصیات کی بنا پر اشیاء کا ایک مجموعہ کے لئے ایک انفرادی عنصر سے بدلا جاسکتا ہے۔ اس طرح کے ذخیرہ کو مجموعہ کہتے ہیں۔



خاکہ 1.2



خاکہ 1.1

1.2 مجموعہ (Set)

خوب واضح اشیاء کا ذخیرہ مجموعہ کہلاتا ہے۔

مجموعے کی خاصیت یہ ہے کہ اسکی وضاحت خوب سمجھائی گئی ہے۔یعنی ایک خاص عنصر سے پتہ چلے کہ وہ شئے مجموعہ کا عنصر ہے یا نہیں۔
مجموعے کے اشیاء کو عناصر کہتے ہیں۔

مثال کے طور پر

1۔ مرکزی کتب خانے کے تمام کتابوں کا مجموعہ

2۔ قوس قزح (Rainbow) کے تمام رنگوں کا مجموعہ

3۔ اعداد اولیٰ کا مجموعہ

اگر ہم متصل جدول کو دیکھتے ہیں تو (1)،(2) اور (4) جملے خوب واضح ہیں لہٰذا یہ مجموعے ہیں۔ (3) اور (5) میں اتنی وضاحت نہیں کیونکہ ان میں الفاظ ''اچھے'' اور خوبصورت پر متفق ہونا مشکل ہے۔ میں ایک طالب علم کو اچھا سمجھوں گا لیکن تم اس کو اچھا نہیں سمجھو گے۔ میں صفیہ کو خوبصورت سمجھوں گا ذخیرے۔لیکن تم اس کو خوبصورت نہیں سمجھو گے۔ چنانچہ ہم صرف واضح اشیاء کے ذخیرے کو مجموعہ سمجھو گے۔
جبکہ مشکوک (دو معنی) اشیاء کے ذخیرے کو مجموعہ نہیں سمجھو گے۔
لہٰذا (3) اور (5) مجموعہ نہیں ہیں۔

ذیل میں کونسے مجموعے ہیں؟

1۔ طبعی اعداد کا مجموعہ

2۔ انگریزی کے حروفِ تہجی کا مجموعہ.

3۔ ایک جماعت کے اچھے طلباء مجموعہ.

4۔ ہمارے ملک کے صوبوں کا مجموعہ.

5۔ ایک باغ کے خوبصورت پھولوں کا مجموعہ.

کارروائی 1

اپنے روزمرہ کی زندگی میں پیش آنے والے اشیاء کے ذخیروں کی مثالیں پیش کیجئے اور بحث کیجئے کہ ان میں سے کونسے مجموعے ہیں اور کونسے نہیں

نوٹ

- مجموعے کے عناصر صرف ایک ہی مرتبہ لکھا جائے۔
- مجموعے کے عناصر کے فہرست کی ترتیب کی تبدیلیل سے مجموعہ تبدیل نہیں ہوتا۔

یہ دونوں صورتیں طبعی اعداد کے ہیں۔فہرست.....1,2,3,4,5,6,7,8, اور فہرست.....1,3,2,4,5,7,6,8, دونوں مساوی ہیں۔جبکہ ان کی ترتیب مختلف ہے۔ چونکہ یہ جاننا ضروری ہے کہ کیا وہ شئے اس مجموعہ کا عنصر ہے یا نہیں اور فہرست میں اس عنصر کو کئی مرتبہ لکھنے کی ضرورت نہیں۔

9th Math 1. Set
Tuesday, March 12, 2019 2:23:58 PM

ترقیم (Notation)

علم طور پر مجموعوں کی نشاندہی انگریزی کے بڑے حروف جیسے A, B, P, Q, X, Y وغیرہ کی جاتی ہے۔

ایک مجموعے کے عناصر قوسیں { } (Curly brackets) سے ظاہر کرتے ہیں۔

اگر x یک عنصر ہے مجموعے A کا، تو اس طرح لکھنا چاہئے کہ $x \in A$,

اگر x مجموعے کا عنصر نہیں ہے اس طرح لکھنا چاہئے کہ $x \notin A$

مثال کے طور پر فرض کرو کہ مجموعہ $A = \{2,3,5,7\}$ ہو تو

2 مجموعہ A کا عنصر ہے اس طرح لکھئے $2 \in A$

5 مجموعہ A کا عنصر ہے اس طرح لکھئے $5 \in A$

6 مجموعہ A کا عنصر نہیں ہے اس طرح لکھئے $6 \notin A$

مثال 1.1

فرض کرو کہ مجموعہ { سجاد، حفیظ، افروز، ناصر } = A

تو موزوں علامت $\in$ یا $\notin$ سے خانہ پر کیجئے۔

i) A ..... افروز ii) A .....سجاد iii) A ..... آصف iv) A ..... تبریز

v) A ..... ناصر

حل :

i) افروز $\in$ A ii) سجاد $\in$ A iii) آصف $\in$ A iv) تبریز $\notin$ A

v) ناصر $\notin$ A

1.3 مجموعہ کی نمائندگی (Representation of a set)

طاق اعداد کے مجموعے کو کئی طریقوں سے وضاحت کی جاسکتی ہے۔

1۔ ''طاق اعداد کا مجموعہ'' یہ ایک اچھی وضاحت ہے۔ ہم اسکو اچھی طرح سمجھ سکتے ہیں۔

2۔ اسکو $\{1,3,5,....\}$ اس طرح سے لکھا جاسکتا ہے۔ اور آپ اسکا مطلب سمجھ سکتے ہیں۔

3۔ اور اس طرح بھی کیا جاسکتا ہے کہ تمام اعداد x کا مجموعہ جہاں x ایک طاق عدد ہے۔

یہ تمام مترادف اور مفید ہیں۔ مثال کے طور پر دو وضاحتیں ''مساوات $x-5=3$ کا تمام حل کا مجموعہ'' اور $\{8\}$ دونوں ایک ہی مجموعہ کی وضاحت ہیں۔

ایک مجموعہ کو ذیل کے تین طریقوں یا شکلوں میں سے کسی ایک کے ذریعے ظاہر کرسکتے ہیں۔

1.3.1 توضیحی طریقہ (Description Form)

توضیحی طریقہ میں ایک مجموعہ کو الفاظ میں وضاحت کیا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر i) انگریزی حروف تہجی کے تمام حروفِ علّت کا مجموعہ

ii) تمام صحیح اعداد کا مجموعہ

9th Math 1. Set
Tuesday, March 12, 2019 2:23:59 PM

1.3.2 سیٹ بلڈر طریقہ یا رول طریقہ (Set Builder Form or Rule Form)

سیٹ بلڈر طریقے میں، مجموعہ کے ہر عناصر کو ایک شرط کے ذریعے وضاحت کی جاتی ہے۔

غور کیجئے

علامت ':' یا '|' سے مراد ''اس طرح''

مثال کے طور پر (i) $A = \{x : x$ انگریزی کا ایک حرف تہجی ہے جو حروفِ علت ہے$\}$

(ii) $B = \{x | x$ ایک صحیح عدد ہے$\}$

1.3.3 روسٹر طریقہ یا جدولی طریقہ (Roster Form or Tabular Form)

ایک مجموعے کے عناصر کے ترتیب وار جوڑ دے کر قوسین $\{\ \}$ میں ظاہر کرنا روسٹر طریقہ کہلاتا ہے۔

غور کیجئے

مثال (ii) میں تین متواتر نقاط (...) جس کو حرف عبارت (ellipsis) کہا جاتا ہے۔ یہ عناصر کے سلسلے کو ظاہر کرتے ہیں۔

مثال کے طور پر

(i) $A = \{a, e, i, o, u\}$

(ii) $B = \{0,1,2,3,\ldots\}$

کیا اس شکل سے مجموعوں کو ہمیشہ ظاہر کرنا ممکن ہے؟

کارروائی – 2

ذیل کے جدول کو بالترتیب مجموعے کے طریقوں میں مکمل کیجئے۔

S.No.	توضیحی طریقہ	سیٹ بلڈر طریقہ	روسٹر طریقہ
1	10 سے کم تمام طبعی اعداد کا مجموعہ		
2		$\{x : x$ کا ضعف والا عدد 3 $x \in \mathbb{N}\}$	
3			$\{2,4,6,8,10\}$
4	ہفتے کے تمام دنوں کا مجموعہ		
5			$\{\ldots -3,-2,-1,0,1,2,3\ldots\}$

مثال 1.2

ذیل کے الفاظ کے حروف کو روسٹر طریقے میں لکھئے۔

i) ASSESSMENT ii) PRINCIPAL

حل :

(i) ASSESSMENT

$A = \{A, S, E, M, N, T\}$

(ii) PRINCIPAL

$B = \{P, R, I, N, C, A, L\}$

9th Math 1. Set
Tuesday, March 12, 2019 2:23:59 PM

مشق 1.1

1۔ ذیل میں سے کونسے مجموعے ہیں؟

i) 100 سے کم تمام عددِ اوّلی (Prime Number) کا مجموعہ

ii) ہندوستان کے امیر لوگوں کا مجموعہ

iii) ہندوستان کے تمام ندیوں کا مجموعہ

iv) اچھے ہاکی کے کھلاڑیوں کا مجموعہ

2۔ ذیل کے الفاظ کے حروف کو روسٹر طریقے میں لکھئے۔

i) INDIA ii) PARALLELOGRAM

iii) MISSISSIPPI iv) CZECHOSLOVAKIA

3۔ ذیل کے مجموعوں پر غور کیجئے۔ $A = \{0,3,5,8\}$ ، $B = \{2,4,6,10\}$ اور $C = \{12,14,18,20\}$

a) صحیح یا غلط بیان کیجئے۔

(i) $18 \in C$ (ii) $6 \notin A$ (iii) $14 \notin C$ (iv) $10 \in B$

(v) $5 \in B$ (vi) $0 \in B$

b) خالی جگہ پُر کیجئے۔

(i) $3 \in$ ____ (ii) $14 \in$ _____ (iii) 18 ____ B (iv) 4 _____ B

4۔ ذیل کے مجموعوں کو روسٹر طریقے میں لکھئے۔

i) $A =$ 20 سے کم کے تمام جفت طبعی اعداد کا مجموعہ

ii) $B = \{y : y = \frac{1}{2n}, n \in \mathbb{N}, n \leqslant 5\}$

iii) $C = \{x : x$ ایک کامل مکعب, $27 < n < 216\}$

iv) $D = \{x : x \in \mathbb{Z}, -5 < x \leqslant 2\}$

5۔ ذیل کے مجموعوں کو سٹ بلڈر طریقے لکھئے۔

i) B= یک روزہ بین الاقوامی (ODI) کرکٹ میں دوسورن (Double Century) بنانے والے ہندوستانی کھلاڑیوں کا مجموعہ۔

ii) $C = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots\}$

iii) $D =$ سال کے تمام عربی مہینوں کا مجموعہ

iv) $E =$ 9 سے کم کے طاق صحیح اعداد کا مجموعہ

9th Math 1. Set
Tuesday, March 12, 2019 2:23:59 PM

6۔ ذیل کے مجموعوں کو توضیحی طریقے میں لکھئے۔

i) P = {جنوری، جون، جولائی}

ii) Q = {7,11,13,1719,23, 29}

iii) R = {x:x∈ ℕ,x<5}

iv) S = {x:x ایک انگریزی حروفِ تہجی کا ایک حرف علّت}

1.4 مجموعے کے اقسام :

ایک دلچسپ مجموعہ جس کو خالی مجموعہ کہتے ہیں۔خالی مجموعہ کو کیوں اتنی اہمیت دینی چاہیئے؟

$x^2 + 1 = 0$ مساوات کے حلوں کے مجموعہ پر غور کریں ۔حقیقی اعداد کے مجموعہ کا کوئی بھی عنصر اسکا حل نہیں ہے۔اور اسی طرح وہ تمام مستطیلوں پر غور کریں جس کا کوئی ایک زاویہ 90 سے زیادہ ہوں۔اس طرح کا کوئی بھی مستطیل نہیں ہے لہٰذا یہ ایک خالی مجموعہ ہے۔

اسی وجہ سے خالی مجموعہ کی اہمیت، دلچسپی کا حامل ہے اس لئے یہ ایک خاص علامت کا مستحق بھی ہے۔

1.4.1 خالی مجموعہ (Null Set or Empty Set)

وہ مجموعہ جس میں کوئی عنصر نہ ہو **خالی مجموعہ** کہلاتا ہے یا **معدوم مجموعہ** کہلاتا ہے۔

خالی مجموعہ کو { } یا ∅ سے اظہار کیا جاتا ہے۔

ذرا سوچئے

کیا یہ مجموعہ {0} اور { ∅ } خالی مجموعے ہیں؟

مثال کے طور پر

i) A = {x:x ایک طاق سالم عدد اور 2 سے تقسیم پذیر}

A = { } یا ∅

ii) 1 اور 2 کے درمیان تمام سالم اعداد۔

1.4.2 یک عنصری مجموعہ (Singleton Set)

ایک مجموعہ جس میں صرف ایک عنصر پایا جاتا ہے تو اس مجموعہ کو یک **عنصری مجموعہ** کہتے ہے۔

مثال کے طور پر

i) A = {x : 3< x < 5, x∈ ℕ }

ii) تمام جفت اعداد اولی (Even prime numbers) کا مجموعہ

غور کیجئے

خالی مجموعہ کوئی بھی عنصر نہیں رکھتا،
اس طرح ∅ ایک محدود مجموعہ ہے۔

1.4.3 محدود مجموعہ (Finite Set)

اگر ایک مجموعہ جس میں محدود عناصر پائے جاتے ہیں تو اس کو **محدود مجموعہ** کہتے ہیں۔

9th Math 1. Set
Tuesday, March 12, 2019 2:24:00 PM

مثال کے طور پر

1۔ ایک خاندان کے افراد کا مجموعہ

2۔ انڈور یا اوٹڈور (Indoor or Outdoor) کھیلوں کا مجموعہ

3۔ اپنے اسکول میں سیکھے ہوئے تمام دائری اشیاء کا مجموعہ

4۔ $A = \{x : x$ ایک 36 کا جزوضربی ہے$\}$

ذرا سوچئے

کیا طبعی اعداد کا مجموعہ محدود مجموعہ ہے؟

1.4.4 لامحدود مجموعہ (Infinite Set)

اگر کسی مجموعے میں عناصر کی تعداد محدود نہ ہو تو اس مجموعہ کو **لامحدود مجموعہ** کہتے ہیں۔

مثال کے طور پر

i) $\{5,10,15,...\}$ ii) ایک خط کے تمام نقاط کا مجموعہ

مزید مجموعوں کے اقسام کو سمجھنے سے پہلے مجموعہ کے بنیادی عدد جاننا ضروری ہے۔

مجموعے کا بنیادی عدد (Cardinal Number Of a Set) اگر ایک مجموعہ محدود ہو تو اس میں موجود عناصر کی تعداد معلوم کر سکتے ہیں ایک مجموعے کے کل عناصر کی تعداد اس مجموعے کا بنیادی عدد کہلاتا ہے۔

مجموعے A کے بنیادی عدد کی نشاندہی $n(A)$ ہے۔

مثال 1.3 $A = \{1,2,3,4,5,7,9,11\}$ ہو تو مجموعہ A کا بنیادی عدد $n(A)$ معلوم کیجئے۔

ذرا سوچئے

اگر $A = \{1, b, b, \{4, 2\}, \{x, y, z\}, d, \{d\}\}$، تو $n(A)$ ____ ہے

حل

$A = \{1,2,3,4,5,7,9,11\}$

چونکہ مجموعہ A کے عناصر کی تعداد 8 ہے۔ $n(A) = 8$

1.4.5 معادل مجموعے

دو مجموعے A اور B معادل کہلاتے ہیں اگر وہ مجموعے مساوی تعداد والے عناصر رکھتے ہیں۔

جسے اس طرح لکھا جاتا ہے۔ $A \approx B$

اگر A اور B معادل ہوں گے جب کہ $n(A) = n(B)$

ذرا سوچئے

اگر $A = \{x : x$ ایک رنگ ہے جو ہندوستان کے قومی جھنڈے کا$\}$ اور $B = \{$سرخ، نیلا، سبز$\}$ کیا A اور B مجموعے معادل مجموعے ہیں؟

مثال کے طور پر

فرض کرو کہ مجموعے $A = \{$ بلّا، گیند $\}$ اور $B = \{$ تاریخ، جغرافیہ $\}$ اس میں مجموعہ A اور مجموعہ B معادل ہیں کیونکہ $n(A) = n(B) = 2$

مثال 1.4 $P = \{x : -3 \leqslant x \leqslant 0, x \in \mathbb{Z}\}$ اور 210 کے تمام اولی جزوضربی کا مجموعہ Q کیا P اور Q معادل ہیں؟

حل

$P = \{-3, -2, -1, 0\}$ $Q = \{2,3,5,7\}$، 210 کے اولی جزوضربی 2,3,5 اور 7 ہیں۔ $n(P) = 4$ اور $n(Q) = 4$

لہٰذا P اور Q معادل مجموعے ہیں۔

9th Math 1. Set
Tuesday, March 12, 2019 2:24:00 PM

1.4.6 مساوی مجموعے Equal Sets

دو مجموعے A اور B مساوی کہلاتے ہیں۔ جب وہ دونوں ایک ہی قسم کے عناصر رکھتے ہوں۔ ورنہ مجموعے نامساوی کہلائیں گے۔

بالفاظ دیگر دو مجموعے A اور B مساوی ہوں گے، اگر

i) A کا ہر ایک عنصر B میں ہو۔

ii) B کا ہر ایک عنصر A میں ہو۔

ذرا سوچئے

کیا یہ مجموعے $\varnothing, \{0\}, \{\varnothing\}$ مساوی یا معادل ہیں؟

مثال کے طور پر

فرض کرو کہ مجموعہ $A = \{1,2,3,4\}$ اور $B = \{4,2,3,1\}$

جب کہ A اور B مجموعوں میں ٹھیک یکساں عناصر موجود ہیں تو A اور B مساوی مجموعے ہیں۔

غور کیجئے

i) اگر A اور B مساوی مجموعے ہوں تو ہم یوں لکھتے ہیں $A=B$

ii) اگر A اور B غیر مساوی مجموعے ہوں تو ہم یوں لکھتے ہیں $A\neq B$

اگر کسی مجموعہ کے ایک یا کئی عناصر بار بار دھرایا جائے تو وہ مجموعہ نہیں بدلتی۔

مثال کے طور پر، اگر ہمیں دو مجموعے $A = \{a,b,c\}$ اور $B = \{a,a,b,b,b,c\}$ دیئے جائیں، تو ہم یوں $B=\{a,b,c\}$ لکھتے ہیں۔ چونکہ A کا ہر ایک عنصر B میں ہو اور B کا ہر ایک عنصر A میں ہو۔

غور کیجئے

ہر مساوی مجموعے، معادل ہوتے ہیں مگر ہر معادل مجموعے مساوی نہیں ہوسکتے۔ مثال کے طور پر $A=\{p,q,r,s,t\}$ اور $B=\{4,5,6,7,8\}$ یہاں $n(A)=n(B)$ ہیں۔ لہٰذا A اور B مجموعے معادل ہیں مگر مساوی نہیں۔

مثال 1.5

دو مجموعے $A = \{x:x\in N, 4\leq x\leq 8\}$ اور $B = \{4,5,6,7,8\}$، کیا A اور B مساوی ہیں؟

حل

$A = \{4,5,6,7,8\}$ اور $B = \{4,5,6,7,8\}$

A اور B مساوی مجموعے ہیں۔

1.5.1 ہمہ گیر مجموعہ (عظیم مجموعہ) (Universal Set)

مجموعے کے تمام عناصر جو ایک مخصوص بحث پر لئے جاتے ہیں اسے ہمہ گیر مجموعہ (عظیم مجموعہ) کہتے ہیں اور اس کی نشاندہی $\cup$ سے کی جاتی ہے۔

مثال کے طور پر

i) اگر فی الحال عناصر کی بحث طبعی اعداد پر ہو تو عظیم مجموعہ $\cup$ طبعی اعداد اسی کا ہوگا یعنی $\cup = \{x : x\in\mathbb{N}\}$

ii) اگر $A = \{$زمین، مریخ، مشتری$\}$ ہو تو عظیم مجموعہ $\cup$ میں نظام شمسی کے سارے ہونگے۔

9th Math 1. Set
Tuesday, March 12, 2019 2:24:01 PM

1.4.8 تحتی مجموعہ (Subset)

فرض کرکہ A اور B دو مجموعے ہیں۔ اگر A کا ہر عنصر B کے ہر عنصر سے تعلق رکھتا ہو تو A، تحتی مجموعہ ہے B کا $A \subseteq B$ سے اظہار کیا جاتا ہے۔

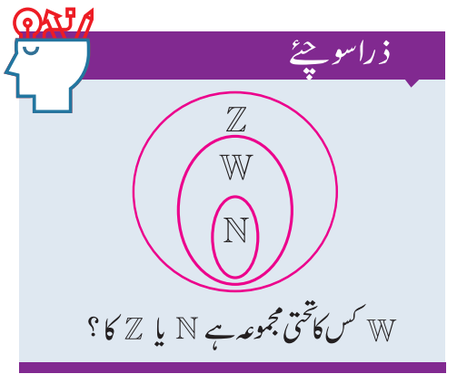
$A \subseteq B$ کو اس طرح پڑھا جاتا ہے "A تحتی مجموعہ ہے B کا"

اس طرح $A \subseteq B$، اگر $a \in A$ دلالت کرتا ہے کہ $a \in B (\text{implies})$

اگر A، B کا تحتی مجموعہ نہیں ہے تو اس کو $A \not\subset B$ کی طرح لکھا جاتا ہے۔

واضح طور پر اگر A تحتی مجموعہ ہے B کا تو $n(A) \leq n(B)$ ہوگا۔

کیونکہ A کا ہر عنصر B کا بھی عنصر، ہو تو مجموعہ B کے عناصر کم از کم A کے عناصر کی تعداد سے زیادہ ہو۔ اسکا برعکس بھی ٹھیک ہے۔ $n(A) \leq n(B)$



اگر $n(B) > n(A)$ ہو تو A کے عناصر کی تعداد B کے عناصر سے زیادہ ہو تو کم از کم A کا ایک عنصر B عنصر نہیں ہوسکتا، لہٰذا A تحتی مجموعہ نہیں ہے B کا۔

مثال کے طور پر

(i) $\{1\} \subseteq \{1,2,3\}$ (ii) $\{2,4\} \not\subseteq \{1,2,3\}$

مثال 1.6

صحیح جملہ بنانے کے لئے موزوں علامتوں $\subseteq$ یا $\not\subseteq$ سے خالی جگہ پُر کیجئے۔

(i) $\{10, 20, 30\}$ _____ $\{10, 20, 30, 40\}$ (ii) $\{p, q, r\}$ _____ $\{w, x, y, z\}$

حل

(i) $\{10,20,30\}$ —— $\{10,20,30,40\}$

چونکہ مجموعہ $\{10,20,30\}$ کا ہر عنصر مجموعہ $\{10,20,30,40\}$ کا عنصر ہے لہٰذا $\{10,20,30\} \subseteq \{10,20,30,40\}$

(ii) $\{p,q,r\}$ —— $\{w,x,y,z\}$

چونکہ مجموعہ $\{p,q,r\}$ کا عنصر مجموعہ $\{w,x,y,z\}$ کا عنصر نہیں ہے۔ لہٰذا $\{p,q,r\} \not\subseteq \{w,x,y,z\}$

کارروائی – 3

اپنے روزمرہ کی زندگی کے مرحلوں میں مجموعوں کا تحتی مجموعہ کی مثال پیش کیجئے اور اپنے دوستوں کے ساتھ ان مجموعوں پر بحث کیجئے۔

مثال 1.7

$A = \{a,b\}$ کے تمام تحتی مجموعے لکھئے۔

حل

$A = \{a,b\}$

A کے تحتی مجموعے $\varnothing$ ، $\{a\}$، $\{b\}$ اور $\{a,b\}$ ہیں۔

9th Math 1. Set
Tuesday, March 12, 2019 2:24:01 PM

غور کیجئے

- اگر $A \subseteq B$ اور $B \subseteq A$ تب $A = B$

  حقیقت میں ایسی حالت میں دو مجموعے A اور B مساوی کہلاتے ہیں۔

- یہ کہنا آسان نہیں۔فرض کرو کہ کوئی مجموعہ ہے۔خالی مجموعہ،A کا تحتی مجموعہ نہیں ہوتو ایسی صورت میں خالی مجموعہ کا کوئی عنصر x A کا عنصر نہ ہو۔مگر x کیسے خالی مجموعہ کا عنصر ہوسکتا ہے؟ یہ ناممکن ہے۔غرض خالی مجموعہ A کا تحتی مجموعہ ہے۔(کیا آپ کا سر گھوم رہا؟ اطمینان ہوجائے،آپ کے دوست کو سمجھائے تو اپنے آپ سمجھ جائیں گے۔)

- ہر مجموعہ خود اپنے مجموعہ ہی کا تحتی مجموعہ بھی ہے۔(کوشش کیجئے اور بحث کیجئے اس طرح کیوں ہے؟)

1.4.9 موزوں تحتی مجموعہ (Proper Subsets)

فرض کرو A اور B دو مجموعے ہیں۔اگر مجموعہ A تحتی مجموعہ ہے B کا اور $A \neq B$ ہوتو مجموعہ A موزوں تحتی مجموعہ ہے B کا۔

$A \subset B$ سے اظہار کرتے ہیں۔

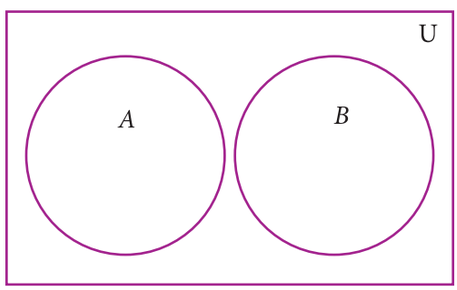
مثال کے طور پر

اگر $A = \{1,2,5\}$ اور $B = \{1,2,3,4,5\}$ ہوتو مجموعہ A موزوں تحتی مجموعہ ہے B کا یعنی $A \subset B$

1.4.10 جُدا مجموعے (Disjoint sets)

دو مجموعے A اور B جُدا مجموعے کہلاتے ہیں،اگر ان کے درمیان کوئی بھی عنصر مشترک نہ ہو۔ یا الفاظ دیگر،

اگر $A \cap B = \varnothing$، ہوتو A اور B جُدا مجموعے کہلاتے ہیں۔



خاکہ 1.3

مثال 1.8

تصدیق کیجئے کہ $A = \{20,22,23,24\}$ اور $B = \{25,30,40,45\}$ جُدا مجموعے ہیں۔

غور کیجئے

اگر $A \cap B \neq \varnothing$ ہوتو دو مجموعے A اور B کو ایک دوسرے کو ڈھکنے والے (منطبق) (Overlapping) ہوتے ہیں۔ غرض اگر دو مجموعوں میں کم از کم ایک عنصر مشترک ہوتو ان کو ڈھکنے والے مجموعے کہتے ہیں۔

حل

$A = \{20,22, 23, 24\}$, $B=\{25, 30, 40, 45\}$

$A \cap B = \{20,22, 23, 24\} \cap \{25, 30, 40, 45\}$

$= \{\ \}$

لہٰذا $A \cap B = \varnothing$, A اور B جدا مجموعے ہیں۔

9th Math 1. Set
Tuesday, March 12, 2019 2:24:02 PM

1.4.11 قوتی مجموعہ (Power Set)

مجموعہ A کے تمام تحتی مجموعوں کو مجموعہ A کے قوتی مجموعہ کہتے ہیں۔اس کو P(A) سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر i) اگر $A = \{2,3\}$ ہوتو A کا قوتی مجموعہ معلوم کیجئے۔

A کے تحتی مجموعے $\{2,3\}, \{3\}, \{2\}, \varnothing$ ہیں

A کا قوتی مجموعہ $P(A) = \{\varnothing, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}\}$

ii) اگر $A = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ ہوتو A کا قوتی مجموعہ $\{\varnothing, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\{\varnothing\}\}\}$

ایک اہم خاصیت

ہم پہلے سے جانتے ہیں کہ $n(A) \leq n[a(A)]$ مگر P(A) کتنا بڑا ہے؟ تھوڑی دیر کے لئے سوچئے اور دیکھئے کہ ذیل کے نتائج حاصل ہوتے ہیں۔

i) اگر $n(A) = m$ ہوتو $n[P(A)] = 2^m$

ii) مجموعہ A کے موزوں تحتی مجموعوں کی تعداد $n[P(A)] - 1 = 2^m - 1$

مثال 1.8 مجموعہ $X = \{a,b,c,x,y,z\}$ کے تحتی مجموعوں کی تعداد اور موزوں تحتی مجموعوں کی تعداد معلوم کیجئے۔

حل دیا گیا ہے $x = \{a,b,c,x,y,z\}$ ہوتو $n(X) = 6$

تحتی مجموعوں کی تعداد $= n[P(X)] = 2^6 = 64$

موزوں تحتی مجموعوں کی تعداد $= n[P(X)] - 1 = 2^6 - 1 = 64 - 1 = 63$

ذرا سوچئے

ایک مجموعہ میں صرف ایک غیر موزوں تحتی مجموعہ ہوگا۔ اس حقیقت کو کسی بھی قیمت کے مجموعے کے لئے تصدیق کیجئے۔

مشق 1.2

1۔ ذیل کے مجموعوں کے بنیادی عدد لکھئے۔

(i) $M = \{p, q, r, s, t, u\}$

(ii) $P = \{x : x = 3n+2, n \in \mathbb{W} \text{ and } x < 15\}$

(iii) $Q = \{y : y = \frac{4}{3n}, n \in \mathbb{N} \text{ and } 2 < n \leq 5\}$

(iv) $R = \{-5 \leq x < 5$ اور $x \in \mathbb{Z}$، $x : x$ ایک سالم عدد ہے$\}$

(v) S = 1882 اور 1906 کے درمیان تمام لیپ سالوں کا مجموعہ

2۔ ذیل کے مجموعوں پر، محدود یا لامحدود ہونے کی جانچ کیجئے۔

i) ٹملناڈو کے تمام ضلعوں کا مجموعہ = X

ii) ایک نقاط سے گذرنے والے تمام خطوط مستقیم کا مجموعہ = Y

iii) $A = \{ \quad : x \in \mathbb{Z}$ اور $x < 5\}$

iv) $B = \{x : x^2 - 5x + 6 = 0, x \in \mathbb{N}\}$

9th Math 1. Set
Tuesday, March 12, 2019 2:24:02 PM

3۔ ذیل کے مجموعوں میں کونسے معادل یا مساوی یا غیر مساوی مجموعے ہیں؟

i) A = انگریزی حروف تہجی کے حروف علّت کا مجموعہ B = لفظ "VOWEL" کے تمام حروف کا مجموعہ

ii) C = {2,3,4,5} D = {x:x $\in \mathbb{W}$, $1 < n < 5$}

iii) X = {x:x ایک حروف ہے لفظ "LIFE" کا } Y = {F,I,L,E}

iv) G = {x:x ایک عدد اول ہے اور $3 < x < 23$} H = { x : x 18 کا مقسوم علیہ ہے }

4۔ مندرجہ ذیل کے مجموعوں میں سے خالی مجموعہ یا ایک عنصری مجموعہ پہچانئے۔

(i) $A = \{x : x \in \mathbb{N}, 1 < x < 2\}$

(ii) B = 2 سے غیر تقسیم پذیر تمام جفت طبعی اعداد کا مجموعہ

(iii) $C = \{0\}$

(iv) D = چار ضلعوں والے تمام مثلثوں کا مجموعہ

5۔ بتایئے کہ مجموعے کی کونسی جوڑیاں جدا یا منطبق ہیں؟

(i) $A = \{f, i, a, s\}$ اور $B = \{a, n, f, h, s\}$

(ii) $D = \{x:x$ ایک جفت عدد اول ہے$\}$ اور $C = \{x > 2$ ایک عدد اول ہے$\}$

(iii) $F = \{x:x$، 3 کا ایک ضعف ہے۔ $x < 30\}$ اور $E = \{x : x$ 24 کا ایک جزِ ضربی ہے$\}$

6 ۔ اگر S, S = {مثلث، معین، دائرہ، مستطیل، مربع} کے ذیل کے تحتی مجموعہ کے عناصر کی فہرست ہے۔

i) 4 مساوی ضلعے والے شکلوں کا مجموعہ۔

ii) بغیر ضلعے والے شکلوں کا مجموعہ۔

iii) اندرونی زاویوں کا حاصلِ جمع $180°$ رکھنے والے نمونوں کا مجموعہ

iv) 5 ضلعے والے شکلوں کا مجموعہ

7۔ اگر $A = \{a, \{a,b\}\}$ ہوتو A کے تمام تحتی مجموعے لکھئے۔

8۔ ذیل کے مجموعوں کا قوتی مجموعہ لکھئے۔

(i) $A = \{a, b\}$ (ii) $B = \{1, 2, 3\}$ (iii) $D = \{p, q, r, s\}$ (iv) $E = \varnothing$

9۔ ذیل کے مجموعوں کا تحتی مجموعے اور موزوں تحتی مجموعوں کی تعداد معلوم کیجئے۔

(i) W = {سرخ، نیلا، زرد} (ii) $X = \{x^2 : x \in \mathbb{N}, x^2 \leq 100\}$.

10۔ i) اگر $n(A) = 4$ ہوتو $n[P(A)]$ معلوم کرو۔ ii) اگر $n(A) = 0$ ہوتو $n[P(A)]$ معلوم کرو۔

iii) اگر $n[P(A)] = 256$ ہوتو $n(A)$ معلوم کرو۔

1.5 مجموعے کے اعمال (Set Operations)

ہم اعداد سے شروع کر کے پھر بہت جلد اعداد کے حسابی اعمال (Arithmatic Operations) کو سیکھنے لگے۔ اسی طرح الجبراء میں الجبرائی جملے سیکھیں اور اسکے بعد انہیں جمع اور ضرب کو سیکھے جیسا کہ $(x - 3)$ $(x^2 + 2)$ وغیرہ۔ اب ہمیں مجموعے کے بارے میں جانکاری حاصل ہوئی ہے۔ اب ہمارے ذہن لازمی سوال پیدا ہوتا ہے۔ کیا ہم مجموعوں پر بھی اس طرح کے اعمال کر سکتے ہیں۔

9th Math 1. Set
Tuesday, March 12, 2019 2:24:03 PM

جب دو یا دو سے زیادہ مجموعے متحد ہونے پر چند شرائط کو انجام دینے سے ایک اور مجموعہ بنتا ہے۔ اسے ہم مجموعہ اور مجموعے کے عمل کے درمیان تعلق کو ون نقشے کے ذریعے دیکھ سکتے ہیں۔

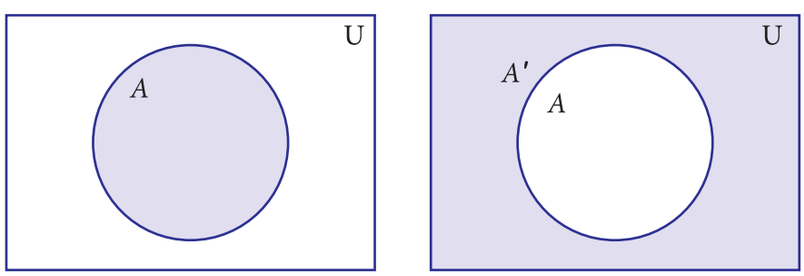
جان وِن ایک انگریز ریاضی دان تھے۔ انہوں نے مجموعوں (سٹوں) کے درمیان تعلق کے تصویری اظہار کو ایجاد کیا۔ مجموعوں کے نظریہ، شماریات، امکان، منطق اور کمپیوٹر سائنس میں وِن نقشوں کا استعمال ہوتا ہے۔

1.5.1 مجموعے کا متمم (Complement of a set)

$\cup$ (عظیم مجموعہ) $\supseteq A$ کے تمام عناصر، جو مجموعہ A کے عناصر نہ ہوں A کا متمم مجموعہ کہلاتا ہے۔ A کے متمم کا اظہار A' یا A^c کیا جاتا ہے۔

$A' = \{x : x \in \cup$ اور $x \notin A\}$ علامت سے اظہار کیا جاتا ہے۔

وِن نقشے سے مجموعے کا متمم



A (سیاہ کردہ حصہ) — خاکہ 1.4

A' (سیاہ کردہ حصہ) — خاکہ 1.5

مثال کے طور پر

اگر {جماعت کے تمام لڑکے} = U اور {کرکٹ کھیلنے والے لڑکے} = A ہو تو A کا متمم مجموعہ {کرکٹ نہ کھیلنے والے لڑکے} = A'

مثال 1.10

اگر $U = \{c, d, e, f, g, h, i, j\}$ اور $A = \{c, d, g, j\}$ ہو تو A' معلوم کرو۔

حل

$U = \{c, d, e, f, g, h, i, j\}$, $A = \{c, d, g, j\}$

$A' = \{e, f, h, i\}$

غور کیجیے

- $(A')' = A$
- $U' = \varnothing$
- $\varnothing' = U$

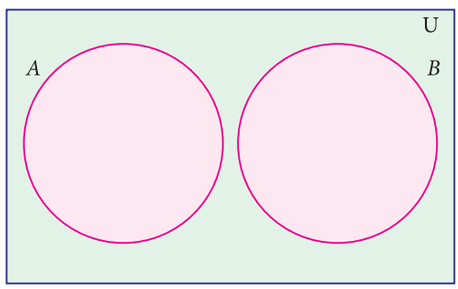
1.5.2 دو مجموعوں کا اتحاد (Union of two sets)

مجموعہ A کے عناصر یا مجموعہ B کے عناصر یا دونوں A اور B کے عناصر کا مجموعہ A اور B کا اتحاد کہلاتا ہے۔ مجموعے A اور B کے اتحاد کو $A \cup B$ سے اظہار کیا جاتا ہے۔ اور اسکو A اتحاد B یا A یونین B سے پڑھیں گے۔

علامتی طور پر $A \cup B = \{x : x \in A$ or $x \in B\}$

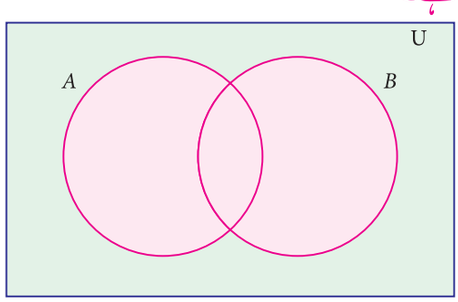
9th Math 1. Set
Tuesday, March 12, 2019 2:24:03 PM

وِن نقشے کے ذریعے دو مجموعوں کے اتحاد کا اظہار ذیل میں دیا گیا ہے۔



مجموعہ Aاور B جُدا مجموعے ہیں

خاکہ 1.7



مجموعہ Aاور B میں مشترک عناصر ہیں

خاکہ 1.6

مثال کے طور پر

اگر {ایشیاء، آفریقہ، انٹارٹیکا، آسٹریلیا} = P اور {یورپ، شمالی امریکہ، جنوبی امریکہ} = Q ہوتو P اور Q کا اتحاد

P∪Q = {ایشیاء، آفریقہ، انٹارٹیکا، آسٹریلیا، یورپ، شمالی امریکہ، جنوبی امریکہ }

غور کیجئے

- $A \cup A = A$
- $A \cup \varnothing = A$
- $A \cup U = U$

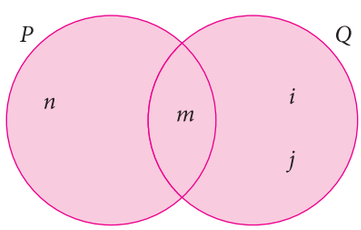
یہاں مجموعہ A تحتی مجموعہ ہے ہمہ گیر مجموعہ U کا۔

- $A \subseteq A \cup B$ and $B \subseteq A \cup B$
- $A \cup B = B \cup A$ (دو مجموعوں کا اتحاد متبا دل پذیر ہے)
(union of two sets is commutative)

مثال 1.11

اگر P = {m,n} اور Q = {m,i,j} ہوتو

P اور Q کو وِن نقشے سے ظاہر کریں اور P∪Q معلوم کیجئے۔



خاکہ 1.8

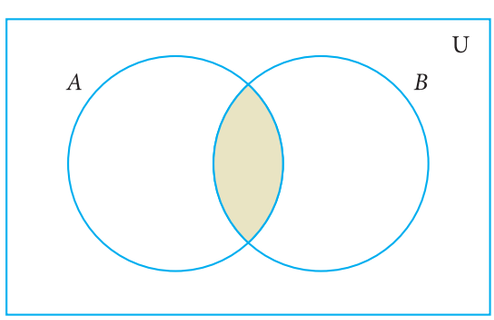
حل دیا گیا ہے $P = \{m,n\}, Q = \{m,i,j\}$

وِن نقشے کے ذریعہ $P \cup Q = \{n,m,i,j\}$

1.5.3 دو مجموعوں کا تقاطع (Intersection of two set)

مجموعے Aاور B دونوں کے تمام مشترک عناصر کا جوڑ کا تقاطع کہلاتا ہے۔ اور اس کا اظہار $A \cap B$ سے کیا جاتا ہے۔ اسکو A تقاطع B (انٹرسکشن) پڑھا جاتا ہے۔ $A \cap B = \{x : x \in A$ اور $x \in B\}$ علامتی طور پر ہم اس طرح اظہار کرتے ہیں۔

وِن نقشے کے ذریعے دو مجموعوں کے تقاطع کا اظہار ذیل میں دیا گیا ہے۔



خاکہ 1.9

مثال کے طور پر

اگر A = {1,2,6} اور B = {2,3,4} ہوتو $A \cap B = \{2\}$

کیونکہ مجموعہ Aاور B میں مشترک عنصر 2 ہے۔

9th Math 1. Set
Tuesday, March 12, 2019 2:24:03 PM

مثال 1.12

فرض کروکہ $\{x : x$ ایک جفت طبعی عدد ہے $x \leq 12\}$ اور
$\{x : x, 3$ کا ضعف ہے، $x \in N$ اور $x \leq 12\}$ = B دو مجموعیں ہیں $A \cap B$ معلوم کیجئے۔

حل

یہاں $A = \{2,4,6,8,10,12\}$ اور $B = \{3,6,9,12\}$ ہیں اور
$A \cap B = \{6,12\}$

مثال 1.13

اگر $A = \{2,3\}$ اور $C = \{\ \}$
ہوتو $A \cap C$ معلوم کیجئے۔

حل

یہاں دونوں مجموعوں میں کوئی بھی مشترک عنصر نہیں ہے۔

لہٰذا $A \cap C = \{\ \}$

غور کیجئے

$A \cap \varnothing = \varnothing$ (ii) $A \cap A = A$

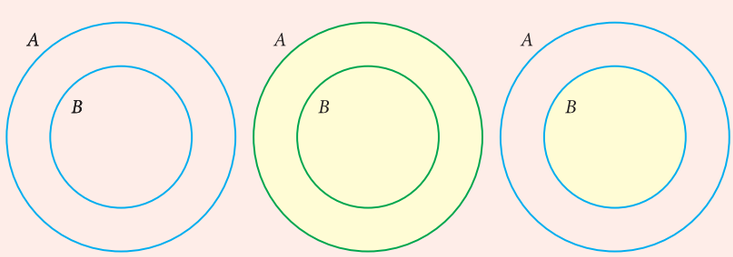
$A \cap U = A$ یہاں مجموعہ A تحتی مجموعہ ہے۔
ہمہ گیر مجموعہ U کا۔

$A \cap B \subseteq A$ اور $A \cap B \subseteq B$

$A \cap B = B \cap A$ (دوسٹوں کا تقاطع متبادل پذیر ہے
((commutative)

غور کیجئے

i) جب $B \subset A$ ہو، مندرجہ ذیل میں ون نقشوں کے ذریعے سے A اور B کا اتحاد اور تقاطع سے ظاہر کیا گیا ہے۔



سیادہ کردہ حصہ
$A \cap B = B$
خاکہ 1.12

سیادہ کردہ حصہ
$A \cup B = A$
خاکہ 1.11

$B \subseteq A$
خاکہ 1.10

ii) دیئے گئے دوسٹ A اور B کے لئے $A \cup B = A \cap B$. $\therefore A = B$

iii) فرض کروکہ $n(A) = p$ اور $n(B) = q$ ہوتو

(a) $n(A \cup B) = \max\{p, q\}$ میں کم از کم

(b) $n(A \cup B) = p + q$ میں زیادہ سے زیادہ

(c) $n(A \cap B) = 0$ میں کم از کم

(d) $n(A \cap B) = \min\{p, q\}$ میں زیادہ سے زیادہ

9th Math 1. Set
Tuesday, March 12, 2019 2:24:04 PM

1.5.4 دو مجموعوں کا فرق (Difference of two sets)

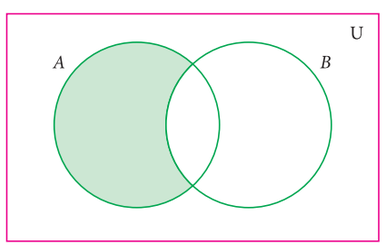
فرض کیجئے کہ A اور B دو مجموعے ہیں۔ جو عناصر مجموعہ A سے تعلق رکھتے ہیں وہ مجموعے B سے نہیں رکھتے یہی A اور B کا فرق کہلاتا ہے اور اس کو A – B یا A/B سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ اسکو A فرق B پڑھا جاتا ہے۔



علامت میں $A-B = \{ x : x \in A \text{ and } x \notin B\}$

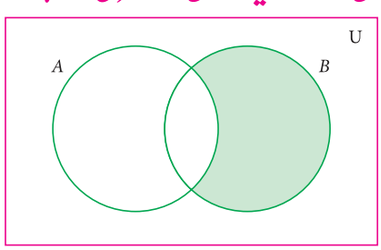
$B-A = \{ y : y \in B \text{ and } y \notin A\}.$

ون نقشوں کے ذریعے سٹوں کے فرق کا اظہار



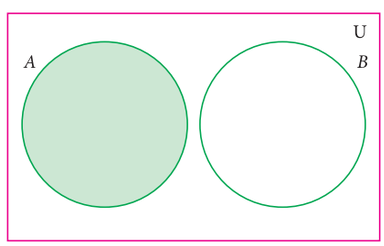
$A-B$

خاکہ 1.13



$B-A$

خاکہ 1.14



$A-B$

خاکہ 1.15

مثال 1.14

اگر $A = \{-3,-2,1,4\}$ اور $B = \{0,1,2,4\}$ ہو تو $A-B$ اور $B-A$ معلوم کیجئے۔

حل

$A-B = \{-3, -2, 1, 4\} - \{0, 1, 2, 4\} = \{ -3, -2\}$

$B-A = \{0, 1, 2, 4\} - \{-3, -2, 1, 4\} = \{ 0, 2\}$

غور کیجئے

- $A' = U \quad A$
- $A \quad B = A \cap B'$
- $A \quad A = \varnothing$
- $A \quad \varnothing = A$
- $A \quad B = B \quad A \Leftrightarrow A = B$
- $A\text{-}B = A$ if $A \cap B = \varnothing$

1.5.5 مجموعوں کا متشاکل فرق (Symmetric difference of sets)

دو مجموعے A اور B کے فرقوں کے اتحاد کو متشاکل فرق $(A-B) \cup (B-A)$ کہتے ہیں اور $A \Delta B$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$A \Delta B = \{x : x \in A - B \text{ یا } x \in B - A\}$

مثال 1.15

اگر $A = \{6,7,8,9\}$ اور $B = \{8,10,12\}$ ہو تو $A \Delta B$ معلوم کیجئے۔

ذرا سوچئے

$(A-B) \cap (B-A)$ کیا ہے؟

حل

$A-B = \{6, 7, 9\}$

$B-A = \{10, 12\}$

$A \Delta B = (A-B) \cup (B-A) = \{6, 7, 9\} \cup \{10,12\}$

$A \Delta B = \{6, 7, 9, 10, 12\}.$

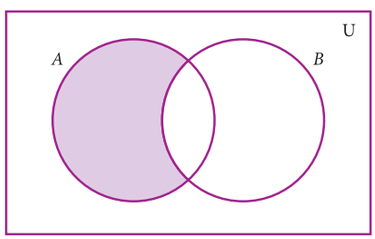
9th Math 1. Set
Tuesday, March 12, 2019 2:24:04 PM

مثال 1.16

$A\Delta B$ کو وِن نقشے سے ظاہر کیجئے۔

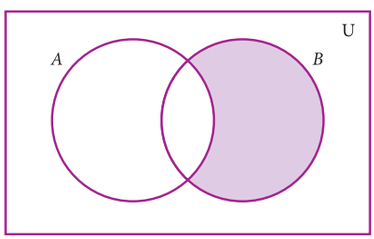
حل

$$A\Delta B = (A-B) \cup (B-A)$$



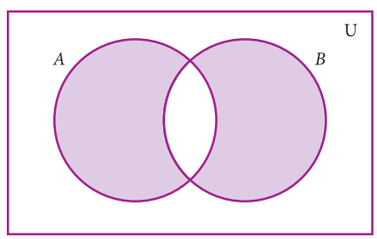
$A-B$

خاکہ 1.16



$B-A$

خاکہ 1.17



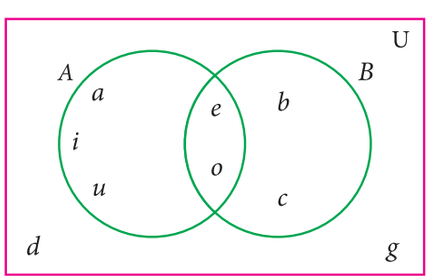
$(A-B) \cup (B-A)$

خاکہ 1.18

غور کیجئے

- $A\Delta A = \varnothing$
- $A\Delta B = B\Delta A$
- $A\Delta B = \{x : x \in A \cup B \text{ and } x \notin A \cap B\}$
- $A\Delta B = (A \cup B) \ (\ A \cap B)$

مثال 1.17



خاکہ 1.19

دیئے گئے وِن نقشہ سے مندرجہ ذیل کے عناصر معلوم کیجئے۔

(i) A (ii) B (iii) $A \ \ B$ (iv) $B \ \ A$

(v) A' (vi) B' (vii) U

حل

(i) $A = \{a, e, i, o, u\}$

(ii) $B = \{b, c, e, o\}$

(iii) $A \ \ B = \{a, i, u\}$

(iv) $B \ \ A = \{b, c\}$

(v) $A' = \{b, c, d, g\}$

(vi) $B' = \{a, d, g, i, u\}$

(vii) $U = \{a, b, c, d, e, g, i, o, u\}$

مثال 1.18

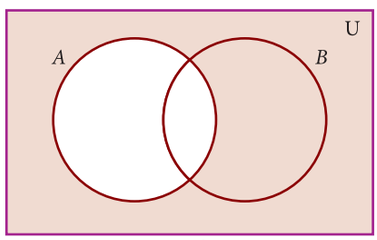
درج ذیل مجموعوں (سٹوں) کے لئے وِن نقشے بنایئے اور سیاہ کر کے ان کا اظہار کیجئے۔

(i) A' (ii) $(A-B)'$ (iii) $(A \cup B)'$

9th Math 1. Set
Tuesday, March 12, 2019 2:24:04 PM

حل

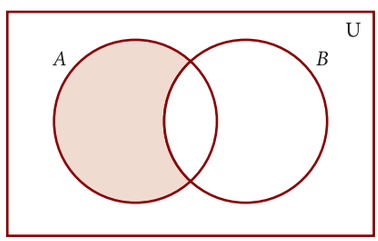
A' (i)



A'

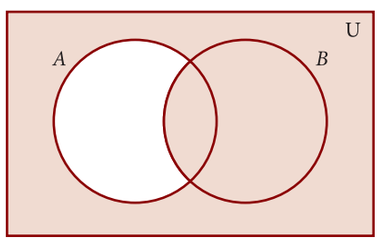
خاکہ 1.20

$(A-B)'$ (ii)



$A-B$

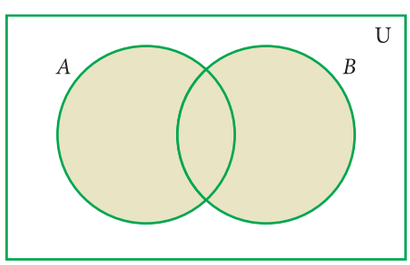
خاکہ 1.21



$(A-B)'$

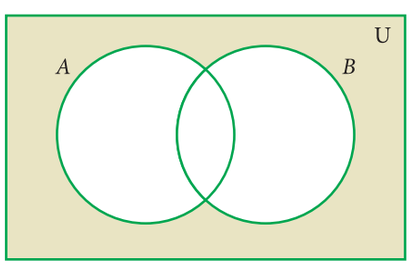
خاکہ 1.22

$(A \cup B)'$ (iii)



$A \cup B$

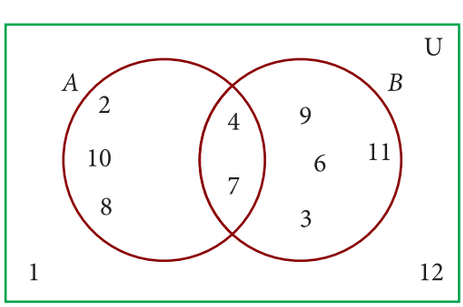
خاکہ 1.23



$(A \cup B)'$

خاکہ 1.24

مشق 1.3



خاکہ 1.25

1۔ دیئے گئے ون نقشہ سے مندرجہ ذیل کے عناصر معلوم کیجئے۔

(i) A (ii) B (iii) $A \cup B$ (iv) $A \cap B$

(v) $A-B$ (vi) $B-A$ (vii) A' (viii) B'

(ix) U

2۔ مندرجہ ذیل کے مجموعوں کے لئے $A \cup B$، $A \cap B$، A-B اور B-A معلوم کیجئے۔

(i) $A = \{2, 6, 10, 14\}$ and $B=\{2, 5, 14, 16\}$

(ii) $A = \{a, b, c, e, u\}$ and $B=\{a, e, i, o, u\}$

(iii) $A = \{x : x \in N, x \leq 10\}$ and $B=\{x : x \in W, x < 6\}$

(iv) لفظ "Mathematics" کے تمام حروف کا مجموعہ = A اور
لفظ "Geometry" کے تمام حروف کا مجموعہ = B

9th Math 1. Set
Tuesday, March 12, 2019 2:24:05 PM

3۔ اگر U={ a, b, c, d, e, f, g, h}, A={b, d, f, h} and B={a, d, e, h}, ہوتو مندرجہ ذیل مجموعے معلوم کیجئے۔

(i) A' (ii) B' (iii) $A' \cup B'$ (iv) $A' \cap B'$ (v) $(A \cup B)'$

(vi) $(A \cap B)'$ (vii) $(A')'$ (viii) $(B')'$

4۔ اگر A ={1, 3, 5, 7}, اور U={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, B={0, 2, 3, 5, 7} ہوتو مندرجہ ذیل مجموعے معلوم کیجئے۔

(i) A' (ii) B' (iii) $A' \cup B'$ (iv) $A' \cap B'$ (v) $(A \cup B)'$

(vi) $(A \cap B)'$ (vii) $(A')'$ (viii) $(B')'$

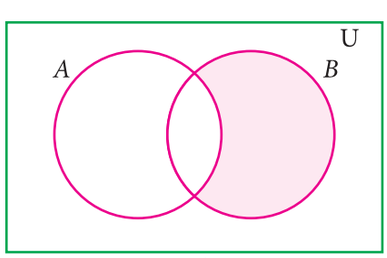
5 ۔ ذیل کے مجموعوں کے درمیانی متشاکل فرق معلوم کیجئے۔

(i) P = {2, 3, 5, 7, 11} and Q={1, 3, 5, 11}

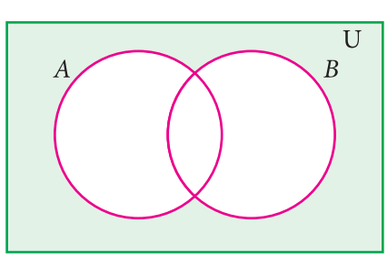
(ii) R = {l, m, n, o, p} and S = {j, l, n, q}

(iii) X = {5, 6, 7} and Y={5, 7, 9, 10}

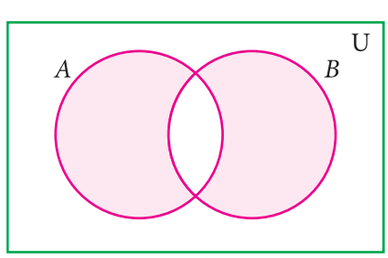
6۔ مجموعہ کے علامتیں استعمال کرکے ذیل کے سیاہ کردہ حصوں کے لئے جملے لکھئے۔



خاکہ 1.26



خاکہ 1.27



خاکہ 1.28

7۔ فرض کروکہ A اور B دو ڈھکنے والے مجموعے ہیں اور U ایک ہمہ گیر مجموعہ ہے۔ ذیل میں ہر ایک کے لئے مناسب وِن نقشے بنایئے۔

(i) $A \cup B$ (ii) $A \cap B$ (iii) $(A \cap B)'$ (iv) $(B - A)'$ (v) $A' \cup B'$ (vi) $A' \cap B'$

(vii) وِن نقشے (iii) اور (v) میں آپ کیا غور کرتے ہو ؟

1.6 سٹوں (مجموعوں) پر اعمال کی خصوصیات (Properties of Set Operations)

مجموعوں (سٹوں) کے اعمال (جیسے اتحاد، تقاطع، وغیرہ) معلوم کرنا ایک دلچسپ موضوع ہے، جس سے ہم متبادلی، مربوطی خصوصیات وغیرہ کی جانچ کرسکتے ہیں۔ ہم نے کئی ایسے اعداد دیکھے ہیں جن میں یہ خصوصیات پائی جاتی ہیں۔ کیا مجموعوں میں بھی یہ خصوصیات پائی جاتی ہیں، آیئے تحقیق کریں۔

سب سے پہلے ہم اتحاد اور تقاطع جیسی مجموعوں کی خصوصیات کو لیں گے۔

9th Math 1. Set
Tuesday, March 12, 2019 2:24:05 PM

1.6.1 متبادلی خصوصیت (Commutative Property)

سٹ کی زبان متبادلت حالتوں میں اعمال کو انجام دیتے وقت دیکھتے ہیں۔ مثال کے طور پر ہم یہ دیکھتے ہیں کہ سٹوں کے اعمال میں اتحاد (اور تقاطع) پر متبادلت رکھتے ہیں۔

فرض کرو : $A = \{2, 3, 8, 10\}$ اور $B = \{1, 3, 10, 13\}$ دوست ہیں۔

اس طرح $A \cup B = \{1, 2, 3, 8, 10, 13\}$ اور

$B \cup A = \{1, 2, 3, 8, 10, 13\}$

مندرجہ بالا میں ہم نے دیکھا کہ $A \cup B = B \cup A$.

اس کو سٹوں کے اتحاد کی متبادلی خاصیت کہتے ہیں۔ *(Commutative property of Union of sets)*

یہاں $A \cap B = \{3, 10\}$ اور $B \cap A = \{3, 10\}$ اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ $A \cap B = B \cap A$ ہے۔

اس کو سٹوں کے تقاطع کی متبادلی خاصیت کہتے ہیں۔ *(Commutative property of Intersection of sets)*

غور کیجئے

کسی بھی سٹ A کے لئے

- $A \cup A = A$ اور $A \cap A = A$ (Idempotent Laws)
- $A \cup \varnothing = A$ اور $A \cap U = A$ تماثل کا کلیے (Identity Laws)

متبادلی خاصیت : A اور B کوئی دو سٹ کے لئے

(i) $(A \cup B) = (B \cup A)$ (ii) $(A \cap B) = (B \cap A)$

مثال 1.19

اگر $A = \{b, e, f, g\}$ اور $B = \{c, e, g, h\}$ ہو تو متبادلی خصوصیات کی تصدیق کیجئے۔

i) سٹ کے اتحاد ii) سٹ کے تقاطع

حل : دیا گیا ہے

$B = \{c, e, g, h\}$ اور $A = \{b, e, f, g\}$

(i) $A \cup B = \{b, c, e, f, g, h\}$ ... (1)

$B \cup A = \{b, c, e, f, g, h\}$ ... (2)

(1) اور (2) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $A \cup B = B \cup A$

یہ ثابت ہوا کہ سٹ کا اتحاد متبادلت پذیر ہے۔

(ii) $A \cap B = \{e, g\}$ ... (3)

$B \cap A = \{e, g\}$ ... (4)

(3) اور (4) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $A \cap B = B \cap A$

یہ ثابت ہوا کہ سٹ کا تقاطع متبادلت پذیر ہے۔

ذرا سوچئے

دیا گیا ہے۔ $P = \{l, n, p\}$ اور

$P \cup Q = \{j, l, m, n, o, p\}$ ۔

اگر P اور Q جدا سٹ ہیں تو

Q اور $P \cap Q$ کیا ہوگا؟

9th Math 1. Set
Tuesday, March 12, 2019 2:24:05 PM

غور کیجئے

اعادہ کریں کہ اعداد کے درمیان کا فرق میں متبادلت پذیر نہیں ہے۔کیا سٹوں کا فرق متبادلت ہے؟ ہم توقع کرتے ہیں کہ سٹوں کا فرق بھی متبادلت پذیر نہیں ہے۔مثال کے طور پر، فرض کریں۔$A = \{a,b,c\}, B = \{b,c,d\}$
$A - B = \{a\}$ ، $B - A = \{d\}$ ہم نے دیکھا کہ $A - B \neq B - A$ ہے۔

1.6.2 مربوطی خاصیت (Associative Property)

اب ہم تین سٹوں کے درمیان اتحاد اور تقاطع کے اعمال کو انجام دیں گے۔

فرض کریں : $A = \{-1, 0,1,2\}$، $B = \{-3, 0,2, 3\}$ اور $C = \{0,1, 3, 4\}$ تین سٹ ہیں۔

اب $B \cup C = \{-3, 0,1,2, 3, 4\}$

$A \cup (B \cup C) = \{-1, 0,1,2\} \cup \{-3, 0,1,2, 3, 4\}$

$= \{-3,-1, 0,1,2, 3, 4\}$ ... (1)

$A \cup B = \{-3,-1, 0,1,2, 3\}$

$(A \cup B) \cup C = \{-3,-1, 0,1,2, 3\} \cup \{0,1, 3, 4\}$

$= \{-3,-1, 0,1,2, 3, 4\}$ ... (2)

(1) اور (2) سے $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ حاصل ہوا۔

یہ A ، B اور C کے سٹوں کے درمیان اتحاد کی مربوطی خاصیت ہے۔

اب $B \cap C = \{0, 3\}$

$A \cap (B \cap C) = \{-1, 0,1,2\} \cap \{0, 3\}$

$= \{0\}$ ... (3)

$A \cap B = \{0\ 2\}$,

$(A \cap B) \cap C = \{0,2\} \cap \{0,1, 3, 4\}$

$= \{0\}$ ... (4)

(3) اور (4) سے $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ حاصل ہوا۔

یہ A ، B اور C کے درمیان سٹوں تقاطع مربوطی خاصیت ہے۔

مربوطی خاصیت : A، B اور C تین سٹوں کے لئے

(i) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (ii) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

مثال 1.20 اگر $A = \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 2\right\}$ ، اور $B = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 2, \frac{5}{2}\right\}$ ہو تو $C = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 1, 2, \frac{5}{2}\right\}$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ کو تصدیق کیجئے۔

9th Math 1. Set
Tuesday, March 12, 2019 2:24:06 PM

حل : اب

$$(B \cap C) = \left\{ \frac{1}{4}, 2, \frac{5}{2} \right\}$$

$$A \cap (B \cap C) = \left\{ \frac{1}{4}, 2 \right\} \quad \ldots (1)$$

$$A \cap B = \left\{ 0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 2 \right\}$$

$$(A \cap B) \cap C = \left\{ \frac{1}{4}, 2 \right\} \quad \ldots (2)$$

(1) اور (2) سے ہم نے تصدیق کیا کہ

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

غور کیجئے

سٹوں کا فرق عام طور پر مربوطی نہیں ہے۔
یعنی $(A - B) - C \neq A - (B - C)$
لیکن، اگر سٹ A ، B اور C باہمی طور پر جُدا سٹ ہیں تو سٹوں کا فرق مربوطی ہے۔
یعنی $(A - B) - C = A - (B - C)$

مشق 1.4

1۔ اگر $P = \{1,2,5,7,9\}$، $Q = \{2,3,5,9,11\}$، $R = \{3,4,5,7,9\}$ اور $S = \{2,3,4,5,8\}$ ہو تو معلوم کیجئے۔

(i) $(P \cup Q) \cup R$ (ii) $(P \cap Q) \cap S$ (iii) $(Q \cap S) \cap R$

2۔ سٹوں کے اتحاد اور تقاطع کے لئے متبادلتی خاصیت کی جانچ کیجئے۔

$P = \{ x : x$ ایک حقیقی عدد ہے 2 اور 7 کے درمیان ہے $\}$ اور

$Q = \{ x : x$ ایک غیر ناطق عدد ہے 2 اور 7 کے درمیان ہے $\}$

3۔ اگر $A = \{p,q,r,s\}$ ، $B = \{m,n,q,s,t\}$ اور $C = \{m,n,p,q,s\}$ ہو تو سٹوں کے اتحاد کیلئے مربوطی خاصیت کی تصدیق کیجئے

4۔ سٹوں کے تقاطع کے لئے مربوطی خاصیت کی تصدیق کیجئے۔

$$A = \{-11, \sqrt{2}, \sqrt{5}, 7\}, \quad B = \{\sqrt{3}, \sqrt{5}, 6, 13\} \quad \text{اور} \quad C = \{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, 9\}$$

5۔ اگر $A = \{x : x = 2^n, n \in W \text{ and } n<4\}$, $B = \{x : x = 2n, n \in \mathbb{N} \text{ and } n \leq 4\}$ اور $C = \{0,1,2,5,6\}$ سٹوں کے تقاطع کے لئے متبادلتی خاصیت کی تصدیق کیجئے۔

1.6.3 تقسیمی خاصیت (Distributive Property)

اعداد کی جمع کی تقسیمی خاصیت کو ہم نے چھوٹی جماعتوں میں سیکھا ہے۔ یعنی $a \times (b+c) = (a \times b) + (a \times c)$
اب ہم اتحاد پر سٹوں کے تقاطع کی تقسیمی خاصیت کو تصدیق کرنے کی کوشش کریں گے۔

9th Math 1. Set
Tuesday, March 12, 2019 2:24:06 PM

تقسیمی خاصیت : A، B اور C تین سٹوں کے لئے

i) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ [Intersection over union] [اتحاد پر تقاطع ہے]

ii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ [union over Intersection] [تقاطع پر اتحاد ہے]

مثال 1.21

اگر $A = \{0,2,4,6,8\}$ ؛ $B = \{x : x$ ایک عدد اولی ہے اور $x<11\}$ ہے

$C = \{x : x \in N$ اور $5 \leq x<9\}$ ہو تو $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ کی تصدیق کیجئے۔

حل :

دیا گیا ہے $A = \{0,2,4,6,8\}$، $B = \{2,3,5,7\}$ اور $C = \{5,6,7,8\}$

پہلے ہم اس کو معلوم کریں گے۔ $B \cap C = \{5,7\}$

$$A \cup (B \cap C) = \{0,2,4,5,6,7,8\} \quad \ldots (1)$$

اُس کے بعد $A \cup B = \{0,2,3,4,5,6,7,8\}$, $A \cup C = \{0,2,4,5,6,7,8\}$

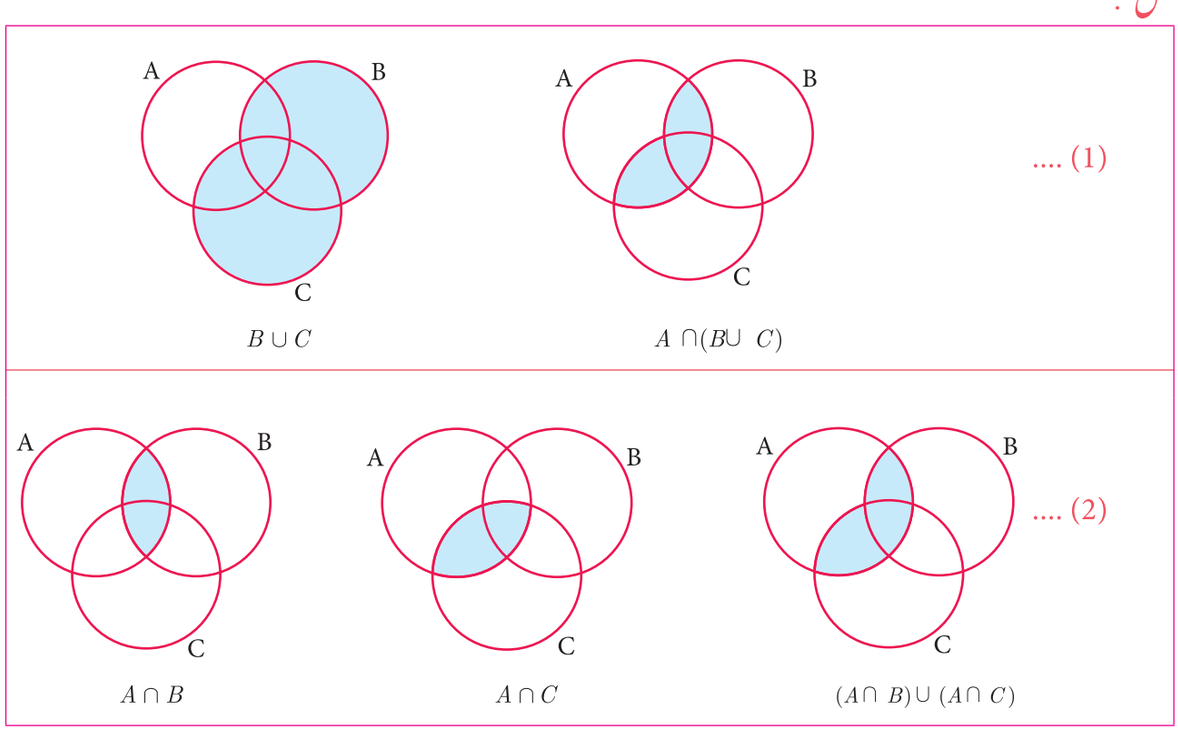
$$(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{0,2,4,5,6,7,8\} \quad \ldots (2)$$

(1) اور (2) سے ہم نے تصدیق کیا ہے کہ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

مثال 1.22

ون نقشوں کے استعمال سے تصدیق کیجئے۔ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

حل :



خاکہ 1.29

(1) اور (2) سے تصدیق کیا گیا $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ہے

9th Math 1. Set
Tuesday, March 12, 2019 2:24:07 PM

1.7 ڈی مارگن کے کلیے (De Morgan's Laws)

آگسٹس ڈی مارگن (1806-1871) ایک برطانوی ریاضی دان تھا۔ وہ 27 جون 1806 کو تمل ناڈو میں واقع مدورائی میں پیدا ہوئے۔ ڈی مارگن کے والد ایسٹ انڈیا کمپنی، ہندوستان میں ملازمت کرتے تھے۔ جب وہ سات ماہ کے تھے تو ان کا خاندان برطانیہ کو منتقل ہو گیا۔ انہوں نے انگلستان کے ٹرینیٹی کالج، کیمبرڈج، لندن میں تعلیم پائی۔ انہوں نے سٹ کے فرق اور اتمام کے کلیوں کو ایجاد کیا۔ یہ ڈی مارگن کے کلیے کہلاتے ہیں۔

1.7.1 سٹ کے فرق کے لئے ڈی مارگن کے کلیے (De Morgan's Laws for Set Difference)

یہ کلیے سٹ کے اعمال جیسے اتحاد، تقاطع اور سٹوں کے فرق کو جوڑتے ہیں۔

فرض کیجئے کہ تین سٹ A، B اور C اس طرح ہیں $A = \{-5,-2,1,3\}$، $B = \{-3,-2,0,3,5\}$ اور

$C = \{-2,-1,0,4,5\}$

یہاں پر

$$B \cup C = \{-3,-2,-1,0,3,4,5\}$$

$$A - (B \cup C) = \{-5,1\} \quad \ldots (1)$$

تو $A - B = \{-5,1\}$ اور $A - C = \{-5,1,3\}$

$$(A - B) \cup (A - C) = \{-5,1,3\} \quad \ldots (2)$$

$$(A - B) \cap (A - C) = \{-5,1\} \quad \ldots (3)$$

(1) اور (2) سے ہم یہ دیکھتے ہیں کہ

$$A - (B \cup C) \neq (A - B) \cup (A - C)$$

ذرا سوچئے

$(A - B) \cup (A - C) \cup (A \cap B) =$ ____

لیکن (1) اور (3) پر غور کرنے سے ہم یہ دیکھتے ہیں کہ

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$

اسی طرح

$$B \cap C = \{-2,0,5\}$$

$$A - (B \cap C) = \{-5,1,3\} \quad \ldots (4)$$

(3) اور (4) سے ہم یہ دیکھتے ہیں کہ

$$A - (B \cap C) \neq (A - B) \cap (A - C)$$

لیکن (2) اور (4) کو غور کرنے پر ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے۔

$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

سٹ کا فرق (Set difference) کے لئے ڈی مارگن کے کلیے A، B اور C کوئی تین سٹوں کے لئے

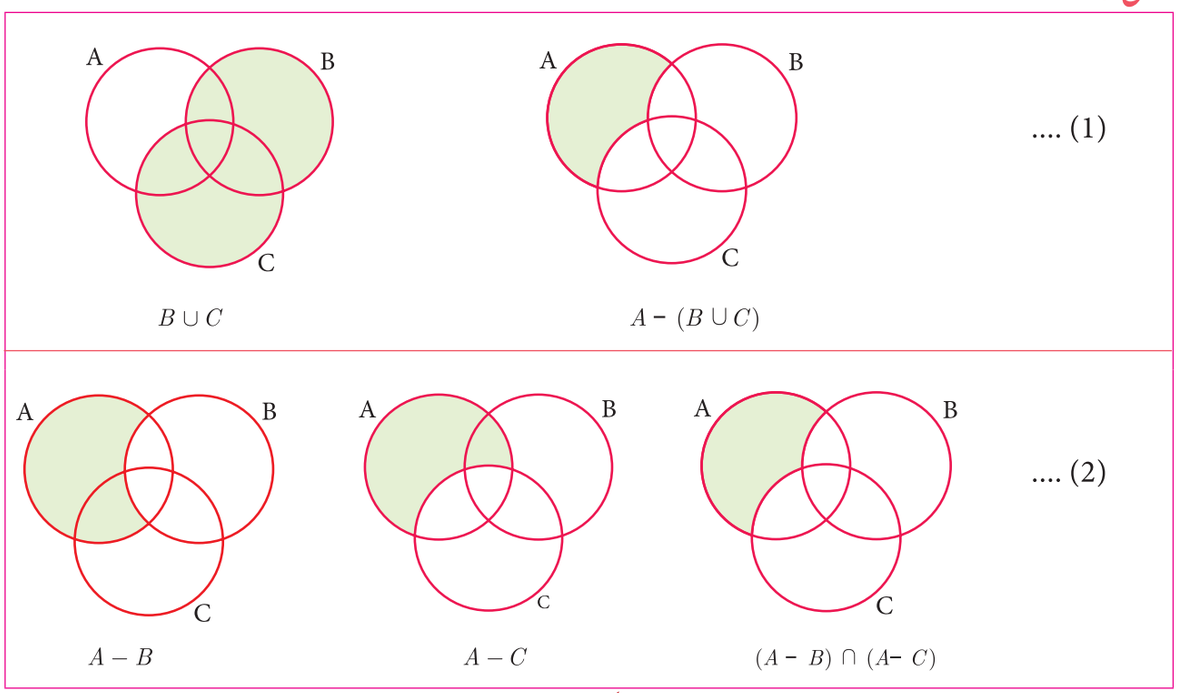
(i) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$ (ii) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

9th Math 1. Set
Tuesday, March 12, 2019 2:24:07 PM

مثال 1.23

ون نقشوں کے استعمال سے تصدیق کیجئے۔ $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

حل :



خاکہ 1.30

(1) اور (2) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$ لہٰذا یہ تصدیق ہوا۔

مثال 1.24

اگر $P = \{x : x \in \mathbb{W} \text{ اور } 0 < x < 10\}$

اور $Q = \{x : x = 2n+1, n \in \mathbb{W} \text{ اور } n<5\}$ ، $R = \{2,3,5,7,11,13\}$ ہو تو

$P - (Q \cap R) = (P - Q) \cup (P - R)$ کی تصدیق کیجئے۔

حل : P، Q اور R روسٹر طریقہ کے سٹ ہیں۔

$P = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $Q = \{1,3,5,7,9\}$

اور $R = \{2,3,5,7,11,13\}$

پہلے ہم اس کو حل کرتے ہیں

$(Q \cap R) = \{3,5,7\}$

اس کے بعد، $P - (Q \cap R) = \{1,2,4,6,8,9\}$ ... (1)

اور $P - Q = \{2,4,6,8\}$

$P - R = \{1,4,6,8,9\}$

لہٰذا $(P - Q) \cup (P - R) = \{1,2,4,6,8,9\}$ ... (2)

(1) اور (2) سے یہ تصدیق ہوتا ہے کہ $P - (Q \cap R) = (P - Q) \cup (P - R)$. ہے

سٹ Q کے عناصر معلوم کرنے کے لئے دیا گیا ہے، $x = 2n + 1$

$n = 0 \rightarrow x = 2(0) + 1 = 0 + 1 = 1$

$n = 1 \rightarrow x = 2(1) + 1 = 2 + 1 = 3$

$n = 2 \rightarrow x = 2(2) + 1 = 4 + 1 = 5$

$n = 3 \rightarrow x = 2(3) + 1 = 6 + 1 = 7$

$n = 4 \rightarrow x = 2(4) + 1 = 8 + 1 = 9$

چنانچہ x کی قیمتیں اس طرح ہیں

1, 3, 5, 7 اور 9.

9th Math 1. Set
Tuesday, March 12, 2019 2:24:07 PM

1.7.2 سٹ کے اتمام کے لئے ڈی مارگن کلیے (De Morgan's Law for Complementation)

یہ کلیے سٹ کے اعمال جیسے اتحاد، تقاطع اور اتمام کو جوڑتے ہیں۔

فرض کیجئے ہمہ گیر سٹ $U = \{0,1,2,3,4,5,6\}$، $A = \{1,3,5\}$ اور $B = \{0,3,4,5\}$ ہیں۔

اب $A \cup B = \{0,1,3,4,5\}$

اس صورت میں $(A \cup B)' = \{2,6\}$ .....(1)

اس کے بعد $A' = \{0,2,4,6\}$ اور $B' = \{1,2,6\}$

اس صورت میں $A' \cap B' = \{2,6\}$ .....(2)

(1) اور (2) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $(A \cup B)' = A' \cap B'$

ذرا سوچئے

جانچئے

$A - B = A \cap B'$

مزید $A \cap B = \{3,5\}$,

$(A \cap B)' = \{0,1,2,4,6\}$ .....(3)

$A' = \{0,2,4,6\}$ and $B' = \{1,2,6\}$

$A' \cup B' = \{0,1,2,4,6\}$ .....(4)

(3) اور (4) سے ہمیں یہ حاصل ہوا۔ $(A \cap B)' = A' \cup B'$

ذرا سوچئے

$(A - B) \cup (B - A') =$ _____

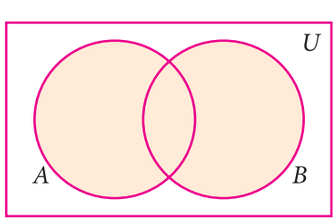
سٹ اتمام کے لئے ڈی مارگن کے کلیے : فرض کرو کہ U ہمہ گیر سٹ ہے۔ جس میں A اور B محدود سٹ ہیں۔

(i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

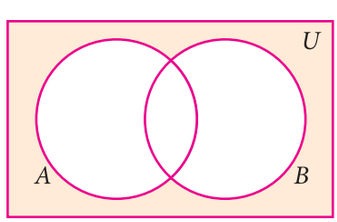
مثال 1.26

$(A \cup B)' = A' \cap B'$ ون نقشوں سے تصدیق کیجئے۔

حل :



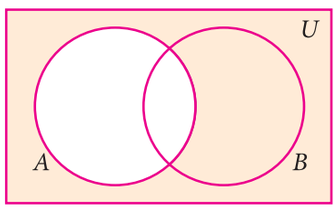
$A \cup B$



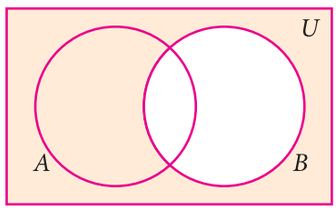
$(A \cup B)'$

.... (1)

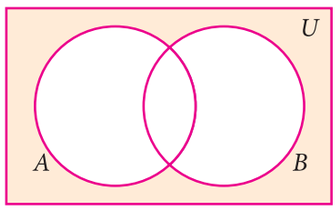
9th Math 1. Set
Tuesday, March 12, 2019 2:24:08 PM



A'



B'



$A' \cap B'$

.... (2)

خاکہ 1.31

(1) اور (2) سے تصدیق ہوتا ہے۔ $(A \cup B)' = A' \cap B'$

مثال 1.26

اگر $U = \{x : x \in \mathbb{Z}, -2 \leq x \leq 10\}$,

اور $A = \{x : x = 2p+1,\ p \in \mathbb{Z}, -1 \leq p \leq 4\}$, $B = \{x : x = 3q+1,\ q \in \mathbb{Z}, -1 \leq q < 4\}$,

ہوتو سٹ کے اتمام کے لئے ڈی مارگن کے کلیے کی تصدیق کیجئے۔

ذرا سوچئے

$A \cap (A \cup B)' =$ ____

حل : دیا گیا ہے

$U = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$,

$A = \{-1, 1, 3, 5, 7, 9\}$ and $B = \{-2, 1, 4, 7, 10\}$ اور

کلیہ (i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

$A \cup B = \{-2, -1, 1, 3, 4, 5, 7, 9, 10\}$

اب $(A \cup B)' = \{0, 2, 6, 8\}$ ..... (1)

$A' = \{-2, 0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ and $B' = \{-1, 0, 2, 3, 5, 6, 8, 9\}$

تو $A' \cap B' = \{0, 2, 6, 8\}$ ..... (2)

(1) اور (2) سے یہ تصدیق ہوتا ہے کہ $(A \cup B)' = A' \cap B'$

کلیہ (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

ذرا سوچئے

$(A \cup B)' \cup (A' \cap B) =$ ____

$A \cap B = \{1, 7\}$

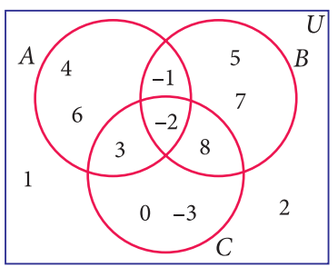
اب $(A \cap B)' = \{-2, -1, 0, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}$ ..... (3)

تو $A' \cup B' = \{-2, -1, 0, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}$ ..... (4)

(3) اور (4) سے یہ تصدیق ہوتا ہے کہ $(A \cap B)' = A' \cup B'$

9th Math 1. Set
Tuesday, March 12, 2019 2:24:08 PM

مشق 1.5



1۔ متصل میں دیئے گئے وِن نقشے سے مندرجہ ذیل سٹوں کو دریافت کیجئے۔

(i) $A - B$ (ii) $B - C$ (iii) $A' \cup B'$

(iv) $A' \cap B'$ (v) $(B \cup C)'$

(vi) $A - (B \cup C)$ (vii) $A - (B \cap C)$

2۔ اگر $K = \{a,b,d,e,f\}$، $L = \{b,c,d,g\}$ اور $M = \{a,b,c,d,h\}$ ہوتو درج ذیل معلوم کیجئے۔

(i) $K \cup (L \cap M)$ (ii) $K \cap (L \cup M)$

(iii) $(K \cup L) \cap (K \cup M)$ (iv) $(K \cap L) \cup (K \cap M)$

تقسیمی کلیے کی تصدیق کیجئے۔

3۔ اگر $A = \{ x : x \in \mathbb{Z} \ , -2 < x \leq 4 \}$، $B = \{ x : x \in \mathbb{W} , x \leq 5 \}$ اور $C = \{-4,-1,0,2,3,4\}$ ہوتو $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ کی تصدیق کیجئے۔

4۔ وِن نقشوں کے استعمال سے $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ کی تصدیق کیجئے۔

5۔ اگر $A = \{b,c,e,g,h\}$, $B = \{a,c,d,g,i\}$ اور $C = \{a,d,e,g,h\}$ ہوتو
$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$ ثابت کیجئے

6۔ اگر $A = \{x : x = 6n, n \in \mathbb{W} \text{ and } n < 6\}$, $B = \{x : x = 2n, n \in \mathbb{N} \text{ and } 2 < n \leq 9\}$,
اور $C = \{x : x = 3n, n \in \mathbb{N} \text{ and } 4 \leq n < 10\}$, ہوتو ثابت کیجئے $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

7۔ اگر $A = \{-2,0,1,3,5\}$, $B = \{-1,0,2,5,6\}$, اور $C = \{-1,2,5,6,7\}$, ہوتو
$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$ ثابت کیجئے

8۔ اگر $A = \{y : y = \frac{a+1}{2}, a \in \mathbb{W} \text{ and } a \leq 5\}$, $B = \{y : y = \frac{2n-1}{2}, n \in \mathbb{W} \text{ and } n < 5\}$,
اور $C = \left\{-1, -\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right\}$ ہوتو ثابت کیجئے $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

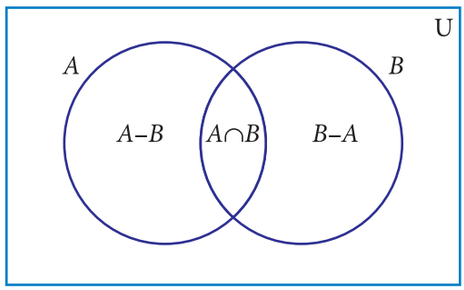
9۔ وِن نقشوں سے تصدیق کیجئے۔ $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

10۔ اگر $U = \{4,7,8,10,11,12,15,16\}$، $A = \{7,8,11,12,\}$ اور $B = \{4,8,12,15\}$
ہوتو سٹ کے اتمام کے لئے ڈی مارگن کلیے کی تصدیق کیجئے۔

11۔ وِن نقشے سے تصدیق کیجئے۔ $(A \cap B)' = A' \cup B'$

9th Math 1. Set
Tuesday, March 12, 2019 2:24:09 PM

1.6 مجموعہ کی بنیادیت کے استعمالات (Application on Cardinality of Sets)



خاکہ 1.32

مجموعوں کا اتحاد، تقاطع، متمم اور مجموعوں کا فرق کے بارے میں ہم سیکھ چکے ہیں۔
اب ہم روزمرہ کے تعلق سے مجموعوں پر چند عملی مسائل سیکھیں گے۔

نتائج : اگر A اور B دو محدود مجموعے ہیں تو

(i) $n(A \cup B) = n(A)+n(B)- n(A \cap B)$

(ii) $n(A-B) = n(A) - n(A \cap B)$

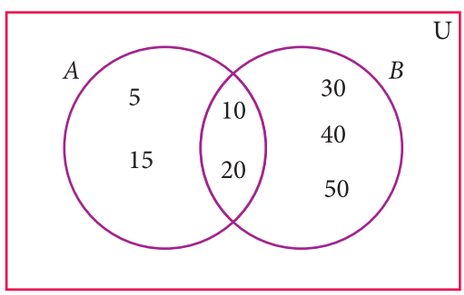
(iii) $n(B-A) = n(B)- n(A \cap B)$

(iv) $n(A') = n(U) - n(A)$

غور کیجئے

مذکورہ بالا نتائج سے، ہمیں حاصل ہوتا ہے

- $n(A \cap B) = n(A)+n(B) - n(A \cup B)$
- $n(U) = n(A)+n(A')$
- اگر A اور B دو جُدا مجموعے ہوں تو $n(A \cup B) = n(A)+n(B)$



مثال 1.27

ون نقشے سے تصدیق کیجئے۔

$n(A \cup B) = n(A)+n(B) - n(A \cap B)$

حل ون نقشے سے

$A = \{5, 10, 15, 20\}$

$B = \{10, 20, 30, 40, 50,\}$

$A \cup B = \{5, 10, 15, 20, 30, 40, 50\}$

$A \cap B = \{10, 20\}$

$n(A) = 4, \quad n(B) = 5, \; n(A \cup B) = 7, \; n(A \cap B) = 2$

$n(A \cup B) = 7 \quad \cdots (1)$

$n(A)+n(B)-n(A \cap B) = 4+5-2$

$=7 \quad \cdots (2)$

$n(A \cup B) = n(A)+n(B)-n(A \cap B).$

(1) اور (2) سے ہمیں حاصل ہوا

مثال 1.28

اگر $n(A) = 36, \; n(B) = 10, \; n(A \cup B)=40$ اور $n(A')=27$ ہو تو $n(U)$ اور $n(A \cap B)$ معلوم کیجئے۔

حل

$n(A) = 36, \; n(B) =10, \; n(A \cup B)=40, \; n(A')=27$

(i) $n(U) = n(A)+n(A') = 36+27 = 63$

(ii) $n(A \cap B) = n(A)+n(B)-n(A \cup B) = 36+10-40 = 46-40 = 6$

9th Math 1. Set
Tuesday, March 12, 2019 2:24:09 PM

کارروائی – 4

مناسب بنیادی اعداد سے خالی جگہ بھرتی کیجئے۔

S.No.	$n(A)$	$n(B)$	$n(A \cup B)$	$n(A \cap B)$	$n(A \setminus B)$	$n(B \setminus A)$
1	30	45	65			
2	20		55	10		
3	50	65		25		
4	30	43	70			

مثال 1.29

فرض کرو کہ $A=\{b, d, e, g, h\}$ اور $B = \{a, e, c, h\}$. تصدیق کیجئے کہ $n(A-B) = n(A)-n(A \cap B)$.

حل

$$A = \{b, d, e, g, h\}, B = \{a, e, c, h\}$$

$$A - B = \{ b, d, g\}$$

$$n(A-B) = 3 \quad \ldots (1)$$

$$A \cap B = \{e, h\}$$

$$n(A \cap B) = 2, \quad n(A) = 5$$

$$n(A) - n(A \cap B) = 5-2$$

$$= 3 \quad \ldots (2)$$

(1) اور (2) سے ہمیں حاصل ہوا $n(A-B) = n(A)-n(A \cap B)$.

مثال 1.30

ایک اسکول میں، تمام طلباء، ہاکی یا کرکٹ یا دونوں کھیل کھیلتے ہیں۔ 300 ہاکی کھیلتے ہیں، 250 کرکٹ کھیلتے ہیں اور 110 دونوں کھیل کھلتے ہیں۔ معلوم کیجئے۔

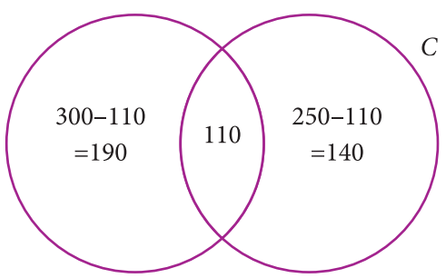
i) صرف ہاکی کھیلنے والے طلباء کی تعداد

ii) صرف کرکٹ کھیلنے والے طلباء کی تعداد

iii) اسکول میں کل طلباء کی تعداد

حل

فرض کیجئے کہ تمام ہاکی کھیلنے والے طلباء مجموعہ H ہے اور تمام کرکٹ کھلنے والے طلباء کا مجموعہ C ہو تو



خاکہ 1.34

$n(H) = 300$, $n(C) = 250$ اور $n(H \cap C)=110$

وِن نقشوں کے استعمال سے حاصل ہوتا ہے۔

(i) صرف ہاکی کھیلنے والے طلباء کی تعداد $= 190$

9th Math 1. Set
Tuesday, March 12, 2019 2:24:09 PM

(ii) صرف کرکٹ کھیلنے والے طلباء کی تعداد $= 140$

(iii) اسکول میں کل طلباء کی تعداد $= 190+110+140 = 440$

دوسرا طریقہ :

(i) صرف ہاکی کھیلنے والے طلباء کی تعداد

$$n(H-C) = n(H) - n(H \cap C)$$
$$= 300 - 110 = 190$$

(ii) صرف کرکٹ کھیلنے والے طلباء کی تعداد

$$n(C-H) = n(C) - n(H \cap C)$$
$$= 250 - 110 = 140$$

(iii) اسکول میں کل طلباء کی تعداد

$$n(H \cup C) = n(H) + n(C) - n(H \cap C)$$
$$= 300+250 - 110 = 440$$

مثال 1.31 60 افراد کی ایک دعوت میں، 35 افراد نے وینیلا آئس کریم ، 30 افراد نے چاکلیٹ آئس کریم کھایا ۔

تمام افراد نے کم از کم ایک آئس کریم کھایا ۔ کتنے افراد نے

i) وینیلا اور چاکلیٹ دونوں آئس کریم کھایا

ii) صرف وینیلا آئس کریم کھایا

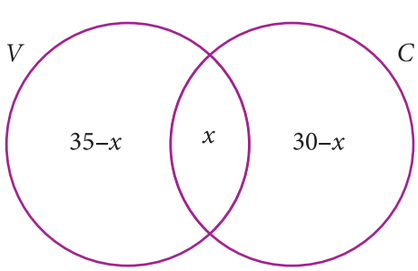
iii) صرف چاکلیٹ آئس کریم کھایا

حل فرض کیجئے کہ وینیلا آئس کریم کھانے والے افراد کا مجموعہ V اور چاکلیٹ آئس کریم کھانے والے افراد کا مجموعہ C ہو تو

$$n(V) = 35,\ n(C) = 30,\ n(V \cup C) = 60,$$

فرض کیجئے کہ دونوں آئس کریم کھانے والے افراد کی تعداد x ہے۔

ون نقشے سے



خاکہ 1.35

$$35 - x + x + 30 - x = 60$$
$$65 - x = 60$$
$$x = 5$$

لہٰذا 5 افراد نے دونوں آئس کریم کھائے

(i) صرف وینیلا آئس کریم کھانے والے افراد کی تعداد $= 35 - x$

$$= 35 - 5 = 30$$

(ii) صرف چاکلیٹ آئس کریم کھانے والے افراد کی تعداد $= 30 - x$

$$= 30 - 5 = 25$$

9th Math 1. Set
Tuesday, March 12, 2019 2:24:09 PM

اس سے پہلے ہم دوسٹوں سے تعلق رکھنے والے حسابات $n(A\cup B) = n(A) + n(B) - n(A\cap B)$ کو ضابطے کے ذریعے حل کرنے کو سیکھا تھا۔ فرض کیجئے کہ ہم تین سٹس رکھتے ہیں۔ اس کو استعمال کر کے 3 سٹوں کے لئے اسی طرح کا ضابطہ دریافت کر سکتے ہیں۔

کوئی تین محدود سٹ A، B اور C کے لئے

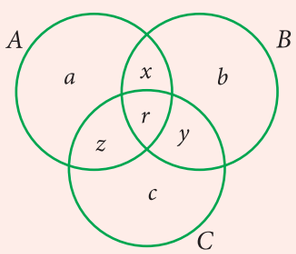
$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

غور کیجئے

چلئے ہم ون نقشوں کے استعمال سے حسابی مسائلوں کو حل کرتے ہیں۔ اس کے لئے ذیل کے نتائج بہت کارآمد ہوں گے۔

فرض کیجئے کہ تین سٹ A، B اور C طلباء کی نمائندگی کرتے ہیں۔ ون نقشے کے ذریعے۔

a = صرف سٹ A میں طلباء کی تعداد ; b = صرف سٹ B میں ; c = صرف سٹ C میں



خاکہ 1.36

- $(a + b + c)$ = کل طلباء کی تعداد صرف ایک سٹ میں
- $(x + y + z)$ = کل طلباء کی تعداد صرف دو سٹ میں
- r = طلباء کی تعداد ٹھیک تین سٹ میں
- تمام طلباء کی تعداد کم از کم دو سٹ (دو یا دو سے زیادہ)
- $(a + b + c + y + z + r)$ = کل طلباء کی تعداد 3 سٹ میں

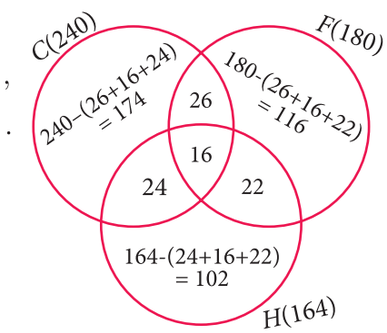
مثال 1.32

ایک کالج میں 240 طلباء کرکٹ کھیلتے ہیں 180 فٹ بال کھیلتے ہیں، 164 طلباء ہاکی کھیلتے ہیں۔ 42 کرکٹ اور فٹ بال کھیلتے ہیں۔ 38 فٹ بال اور ہاکی کھیلتے ہیں، 40 ہاکی اور کرکٹ کھیلتے ہیں اور 16 تینوں کھیل کھیلتے ہیں۔ اگر ہر ایک طالب علم کم از کم ایک کھیل میں حصّہ لیتا ہے تو معلوم کیجئے کہ (i) کالج طلباء کی تعداد (ii) صرف ایک کھیل کھیلنے والے طلباء کی تعداد۔

حل :

فرض کرو کہ F، H اور C ان طلباء کے سٹوں کی نمائندگی کرتے ہیں۔ جو بالترتیب فٹ بال ہاکی اور کرکٹ کھیلتے ہیں تو

$$n(C) = 240,\ n(F) = 180,\ n(H) = 164,\ n(C \cap F) = 42$$
$$n(F \cap H) = 38,\ n(C \cap H) = 40,\ n(C \cap F \cap H) = 16$$



خاکہ 1.37

آیئے ہم دئے گئے معلومات کو ون نقشہ سے ظاہر کرتے ہیں۔

i) کالج میں طلباء کی تعداد

= 174+26+116+22+102+24+16 = 480

ii) صرف ایک کھیل کھیلنے والے طلباء کی تعداد

= 174+116+102 = 392

9th Math 1. Set
Tuesday, March 12, 2019 2:24:10 PM

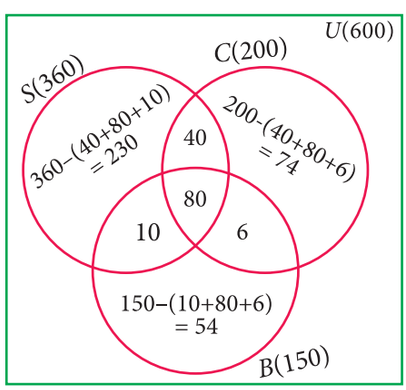
مثال 1.33 ایک رہائشی علاقے میں 600 خاندان رہتے ہیں جس میں $\frac{3}{5}$ ذاتی موٹر گاڑی (اسکوٹر) رکھتے ہیں۔ $\frac{1}{3}$ ذاتی کار رکھتے ہیں۔ $\frac{1}{4}$ ذاتی سائیکل رکھتے ہیں۔ 120 خاندان ذاتی اسکوٹر اور کار رکھتے ہیں۔ 86 ذاتی کار اور سائیکل رکھتے ہیں جبکہ 90 خاندان ذاتی اسکوٹر اور سائیکل رکھتے ہیں۔ اگر $\frac{2}{15}$ خاندان تینوں سواریوں کو رکھتے ہیں تو معلوم کیجئے۔

i) کم از کم دو قسم کی ذاتی سواریاں رکھنے والے خاندانوں کی تعداد۔

ii) بغیر ذاتی سواری رکھنے والے خاندانوں کی تعداد۔

حل :

فرض کیجئے کہ S، C اور B ذاتی سواری رکھنے والے خاندان کے سٹوں کی نمائندگی کرتے ہیں۔ جو بالترتیب اسکوٹر، کار اور سائیکل ہیں۔



خاکہ 1.38

دیا گیا ہے $n(\mathrm{U}) = 600 \quad n(S) = \frac{3}{5} \times 600 = 360$

$n(C) = \frac{1}{3} \times 600 = 200 \qquad n(B) = \frac{1}{4} \times 600 = 150$

$n(S \cap C \cap B) = \frac{2}{15} \times 600 = 80$

ون نقشے سے

(i) کم از کم دو قسم کی ذاتی سواریاں رکھنے والے خاندانوں کی تعداد۔

$= 40+6+10+80 = 136$

(ii) بغیر ذاتی سواری رکھنے والے خاندانوں کی تعداد

= 600– (کم از کم ایک ذاتی سواری رکھنے والے)

$= 600 - (230 + 40 + 74 + 6 + 54 + 10 + 80)$

$= 600 - 494 = 106$

مثال 1.34 ایک جماعت میں 100 طلباء ہیں۔ 85 طلباء ٹمل بولتے ہیں۔ 40 طلباء انگریزی بولتے ہیں۔ 20 طلباء فرانسیسی زبان بولتے ہیں، 32 طلباء ٹمل اور انگریزی بولتے ہیں۔ 13 طلباء انگریزی اور فرانسیسی زبان بولتے ہیں اور 10 طلبا ٹمل اور فرانسیسی بولتے ہیں اگر ہر طالب علم کم از کم ایک زبان جانتا ہے تو دریافت کرو کہ کتنے طلباء تینوں زبانیں بولتے ہیں۔

حل : فرض کرو کہ A، B اور C طلباء کے سٹوں کی نمائندگی کرتے ہیں جو بالترتیب ٹمل، انگریزی اور فرانسیسی بولتے ہیں۔

دیا گیا ہے۔

$n(A \cup B \cup C) = 100,\ n(A) = 85,\ n(\mathrm{B}) = 40,\ n(\mathrm{C}) = 20,$

$n(\mathrm{A} \cap B) = 32,\ n(\mathrm{B} \cap C) = 13,\ n(\mathrm{A} \cap C) = 10.$

ہمیں معلوم ہے کہ

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(\mathrm{C}) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

$100 = 85 + 40 + 20 - 32 - 13 - 10 + n(A \cap B \cap C)$

$n(A \cap B \cap C) = 100 - 90 = 10$

لہذا 10 طلباء تینوں زبانیں بولتے ہیں۔

9th Math 1. Set
Tuesday, March 12, 2019 2:24:10 PM

مثال 1.34

200 میگزین خریداروں کا جائزہ لیا گیا جو A، B اور C تین مختلف میگزین خریدتے ہیں یہ معلوم ہوا کہ 75 ممبر میگزین A نہیں خریدتے، 100 ممبر میگزین B نہیں خریدتے، 50 ممبر میگزین C نہیں خریدتے اور 125 کم از کم تین میں سے دو میگزین خریدتے ہیں۔ معلوم کیجئے کہ

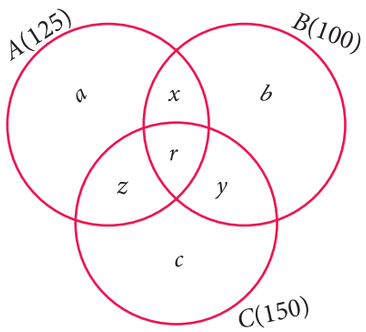
i) ٹھیک دو میگزین خریدنے والے ممبروں کی تعداد۔

ii) صرف ایک میگزین خریدنے والے ممبروں کی تعداد

حل

کل خریداروں کی تعداد $= 200$

میگزین	نہیں خریدنے والے	خریدار
A	75	125
B	100	100
C	50	150



خاکہ 1.39

ون نقشے سے صرف ایک میگزین خریدنے والے ممبروں کی تعداد $= a + b + c$

ٹھیک دو میگزین خریدنے والے ممبروں کی تعداد $= x + y + z$

اور 125 ممبر کم از کم دو میگزین خریدتے ہیں۔

یعنی $x + y + z + r = 125 \quad \ldots (1)$

$n(A \cup B \cup C) = 200,\ n(A) = 125,\quad n(B) = 100,\quad n(C) = 150,\quad n(A \cap B) = x + r$

$n(B \cap C) = y + r,\qquad n(A \cap C) = z + r,\qquad n(A \cap B \cap C) = r$

ہم جانتے ہیں

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$200 = 125 + 100 + 150 - x - r - y - r - z - r + r$$

$$= 375 - (x + y + z + r) - r$$

$$= 375 - 125 - r \quad \left[\because x + y + z + r = 125\right]$$

$$200 = 250 - r \qquad \Rightarrow r = 50$$

$x + y + z + 50 = 125$ سے (1)

ہمیں حاصل ہوا $x + y + z = 75$

چنانچہ ٹھیک دو میگزین خریدنے والے ممبروں کی تعداد $= 75$

ون نقشے سے $(a + b + c) + (x + y + z + r) = 200 \quad \ldots (2)$

(1) کو (2) میں درج کریں $a + b + c + 125 = 200$

$a + b + c = 75$

چنانچہ صرف ایک میگزین خریدنے والے ممبروں کی تعداد $= 75$

9th Math 1. Set
Tuesday, March 12, 2019 2:24:11 PM

مشق 1.6

1۔ i) اگر $n(A) = 25$، $n(B) = 40$، $n(A \cup B) = 50$ اور $n(B') = 25$ ہوتو $n(A \cap B)$ اور $n(U)$ معلوم کیجئے۔

ii) اگر $n(A) = 300$، $n(A \cup B) = 500$، $n(A \cap B) = 50$ اور $n(B') = 350$ ہوتو $n(B)$ اور $n(U)$ معلوم کیجئے۔

2۔ اگر $U = \{x : x \in \mathbb{N}, x \leq 10\}$، $A = \{2,3,4,8,10\}$ اور $B = \{1,2,5,8,10\}$ ہوتو جانچئے کہ $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

3۔ ذیل میں دئے گئے سٹوں کے لئے تصدیق کیجئے۔

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

(i) $A = \{a, c, e, f, h\}$, $B = \{c, d, e, f\}$ and $C = \{a, b, c, f\}$

(ii) $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 3, 5, 6\}$ and $C = \{1, 5, 6, 7\}$

4۔ ایک جماعت میں تمام طلباء موسیقی یا ناٹک (Drama) ان میں سے ایک یا دونوں میں حصّہ لیتے ہیں۔ 25 طلباء موسیقی میں 30 طلباء ناٹک میں اور 8 طلباء دونوں میں حصّہ لیتے ہیں۔ مندرجہ ذیل معلوم کیجئے۔

i) صرف موسیقی میں حصہ لینے والے طلباء کی تعداد ii) صرف ناٹک میں حصہ لینے والے طلباء کی تعداد

iii) جماعت میں کل طلباء کی تعداد

5۔ 45 افراد کی ایک دعوت میں، ہر ایک چائے یا کافی یا دونوں پسند کرتے ہیں۔ 35 افراد چائے پسند کئے اور 20 افراد کافی پسند کئے۔ افراد کی تعداد معلوم کیجئے جو۔

i) چائے اور کافی دونوں پسند کرتے ہیں ii) چائے پسند نہیں کرتے iii) کافی پسند نہیں کرتے

6۔ ایک امتحان میں 50% طلباء علم ریاضی میں کامیاب ہوئے اور 70% طلباء سائنس میں کامیاب ہوئے جب کہ 10% طلباء دونوں میں ناکام ہوئے 300 طلباء کم از کم ایک سبق میں کامیاب ہوئے۔ امتحان میں حصہ لینے والے طلباء کی کل تعداد معلوم کیجئے، اگر وہ صرف دو اسباق کے امتحان لکھے ہوں۔

7۔ A اور B دو مجموعے اس طرح ہیں کہ $n(A - B) = 32 + x$، $n(B - A) = 5x$ اور $n(A \cap B) = x$ ان اطلاعات کو وِن نقشے کی مدد سے وضاحت کیجئے۔ جبکہ $n(A) = n(B)$ دیا گیا ہو تو x کی قیمت معلوم کیجئے۔

8۔ 500 کار کے مالکوں سے جائزہ لینے پر، 400 کار A کے مالک ہیں اور 200 کار B کے مالک ہیں، 50 دونوں کاروں کے مالک ہیں۔ کیا یہ معطیات صحیح ہیں؟

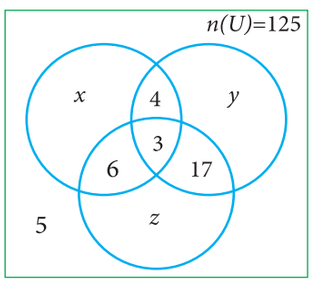
9۔ ایک کالونی (Colony) میں 275 خاندان ٹمل اخبار خریدتے ہیں، 150 خاندان انگریزی اخبار خریدتے ہیں۔ 45 خاندان اُردو اخبار خریدتے ہیں۔ 125 خاندان ٹمل اور انگریزی اخبار خریدتے ہیں۔ 17 خاندان انگریزی اور اُردو اخبار خریدتے ہیں۔ 5 خاندان ٹمل اور اُردو خریدتے ہیں اور 3 خاندان تینوں اخبار خریدتے ہیں۔ اگر ہر خاندان کم از کم ایک اخبار خریدتا ہے تو معلوم کیجئے کہ

9th Math 1. Set
Tuesday, March 12, 2019 2:24:11 PM

i) صرف ایک اخبار خریدنے والے خاندانوں کی تعداد ii) کم از کم دو اخبار خریدنے والے خاندانوں کی تعداد

iii) کالونی میں کل خاندانوں کی تعداد

10۔ 1000 کسانوں کا جائزہ لیا گیا جس یہ معلوم ہوا کہ 600 کسان دھان کی کاشت کرتے ہیں۔ 350 کسان راگی کی کاشت کرتے ہیں۔ 280 مکئی کی کاشت کرتے ہیں۔ 120 دھان اور راگی کی کاشت کرتے ہیں۔ 100 راگی اور مکئی کی کاشت کرتے ہیں۔ 80 دھان اور مکئی کی کاشت کرتے ہیں۔ اگر ہر کسان کم از کم اوپر کے تینوں میں سے ایک کی کاشت کرتا ہے تو تینوں فصل کی کاشت کاری کرنے والے کسانوں کی تعداد معلوم کیجئے۔



11۔ متصل نقشے میں اگر $n(\cup) = 125$، y دُگنا ہے x سے اور z کی قیمت x سے 10 زیادہ ہے تو x، y اور z کی قیمتیں معلوم کیجئے۔

12۔ 35 طلباء کی ایک جماعت میں ہر ایک طالب علم شطرنج، کیرم اور ٹیبل ٹینس (Chess, Carrom, Table Tennis) ان کھیلوں میں سے کم از کم ایک کھیل کھیلتا ہے۔ 22 شطرنج کھیلتے ہیں۔ 21 کیرم کھیلتے ہیں، 15 ٹیبل ٹینس کھیلتے ہیں۔ 10 شطرنج اور ٹیبل ٹینس کھیلتے ہیں۔ 8 کیرم اور ٹیبل ٹینس کھیلتے ہیں۔ 6 تینوں کھیل کھیلتے ہیں۔ کھیلنے والے طلباء کی تعداد معلوم کیجئے۔

i) شطرنج اور کیرم کھیلتے ہیں لیکن ٹیبل ٹینس نہیں کھیلتے۔ ii) صرف شطرنج iii) صرف کیرم

[اشارہ : وِن نقشے کو استعمال کیجئے۔]

13۔ 50 طلباء کی ایک جماعت میں ہر ایک طالب علم اسکول کو بس سے یا سائیکل سے یا پیدل آتا ہے۔ 25 طلباء بس سے آتے ہیں۔ 20 طلباء سائیکل سے آتے ہیں۔ 30 طلباء پیدل آتے ہیں اور 10 طلباء تینوں کے ذریعے آتے ہیں۔ ٹھیک دو قسم کے سواریوں سے آنے والے طلباء کی تعداد معلوم کیجئے۔

TQPG8

مشق 1.6

کثیر انتخابی سوالات :

1. ذیل میں کونسا صحیح ہے؟

(a) $\{7\} \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ (b) $7 \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

(c) $7 \notin \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ (d) $\{7\}$ M $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

2. اگر $P = \{x \mid x \in Z, -1 < x < 1\}$ ہے۔

a) ایک عنصری مجموعہ b) قوتی مجموعہ c) خالی مجموعہ d) تحتی مجموعہ

3. اگر $U = \{x \mid x \in N, x < 10\}$ اور $A = \{x \mid x \in N, 2 \leq x < 6\}$ ہو تو $(A')'$ ہے۔

(a) {1, 6, 7, 8, 9} (b) {1, 2, 3, 4} (c) {2, 3, 4, 5} (d) { }

4. اگر $B \subseteq A$ ہو تو $n(A \cap B)$ ہے۔

(a) $n(A-B)$ (b) $n(B)$ (c) $n(B-A)$ (d) $n(A)$

5. اگر $A = \{x,y,z\}$ ہو تو مجموعہ A کا غیر صفر تحتی مجموعوں کی تعداد

(a) 8 (b) 5 (c) 6 (d) 7

9th Math 1. Set
Tuesday, March 12, 2019 2:24:12 PM

6. ذیل میں کونسا صحیح ہے۔

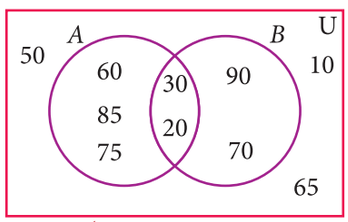
(a) $\varnothing \subseteq \{a, b\}$ (b) $\varnothing \in \{a, b\}$ (c) $\{a\} \in \{a, b\}$ (d) $a \subseteq \{a, b\}$

7. اگر $A \cup B = A \cap B$ ہوتو

(a) $A \neq B$ (b) $A = B$ (c) $A \subset B$ (d) $B \subset A$

8. اگر $B - A$، B ہے تو $A \cap B$ کیا ہوگا۔

(a) A (b) B (c) U (d) $\varnothing$



خاکہ 1.40

9۔ متصل نقشے میں $n[P(A \Delta B)]$ ہے۔

(a) 8 (b) 16

(c) 32 (d) 64

10. اگر $n(A)=10$ اور $n(B) = 15$ ہوتو $A \cap B$ کے کم از کم اور زیادہ سے زیادہ عناصر کی تعداد کیا ہوگی۔

(a) (10,15) (b) (15,10) (c) (10,0) (d) (0,10)

11. فرض کیجئے کہ $A = \{\varnothing\}$ اور $B = P(A)$ ہوتو $A \cap B$ ہے۔

(a) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ (b) $\{\varnothing\}$ (c) $\varnothing$ (d) $\{0\}$

12۔ ایک جماعت میں 50 لڑکے کھیلتے ہیں اور 20 لڑکے (Chess) کھیلتے ہیں تو دونوں کھیل کھیلنے والے طلباء کی تعداد ہے۔

(a) 5 (b) 30 (c) 15 (d) 10.

13۔ اگر $U = \{x : x \in \mathbb{N} \text{ and } x<10\}$, $A = \{1,2,3,5,8\}$ اور $B = \{2,5,6,7,9\}$ ہوتو $n\left[(A \cup B)'\right]$

(1) 1 (2) 2 (3) 4 (4) 8

14۔ کوئی تین سٹ P، Q اور R کے لئے $P - (Q \cap R)$ ہے۔

(1) $P - (Q \cup R)$ (2) $(P \cap Q) - R$

(3) $(P - Q) \cup (P - R)$ (4) $(P - Q) \cap (P - R)$

15۔ ذیل میں کونسا صحیح ہے؟

(1) $A - B = A \cap B$ (2) $A - B = B - A$

(3) $(A \cup B)' = A' \cup B'$ (4) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

16۔ اگر $n(A \cap B) = 12,\ n(C) = 20,\ n(B) = 25,\ n(A) = 30,\ n(A \cup B \cup C) = 40$

$n(B \cap C) = 18$ اور $n(A \cap C) = 15$ ہوتو $n(A \cap B \cap C)$

(1) 5 (2) 10 (3) 15 (4) 20

17۔ اگر $n(A \cap B) = 20,\ n(C) = 5x,\ n(B) = 6x,\ n(A) = 4x,\ n(A \cup B \cup C) = 100$

$n(A \cap C) = 25$, $n(B \cap C) = 15$ اور $n(A \cap B \cap C) = 10$ ہوتو x کی قیمت ..... ہے۔

(1) 10 (2) 15 (3) 25 (4) 30

کوئی تین سٹ A، B اور C کے لئے $(A - B) \cap (B - C)$ مساوی ہے۔

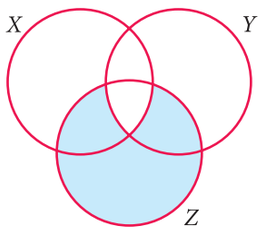
1) A صرف 2) B صرف 3) C صرف 4) ϕ

9th Math 1. Set
Tuesday, March 12, 2019 2:24:12 PM

18. اگر ، تین ضلعی شکلوں کا سٹ = J ، دومساوی ضلعے والے شکلوں کا سٹ = K اور زاویہ قائمہ رکھنے والے شکلوں کا سٹ = L ہوتو $J \cap K \cap L$ ..... ہے۔

1) مثلث مساوی الساقین کا سٹ
2) مثلث مساوی الاضلاع کا سٹ
3) زاویہ قائمہ والے مثلث مساوی الساقین کا سٹ
4) مثلث قائمہ الزاویہ کا سٹ

19. ون نقشہ میں سیاہ کردہ حصہ ..... ہے۔



(1) $Z - (X \cup Y)$ (2) $(X \cup Y) \cap Z$

(3) $Z - (X \cap Y)$ (4) $Z \cup (X \cap Y)$

20. ایک شہر میں 40% لوگ صرف ایک پھل پسند کرتے ہیں۔ 35% لوگ صرف دو پھلوں کو پسند کرتے ہیں۔ 20% لوگ تینوں پھلوں کو پسند کرتے ہیں۔ کتنے فی صد کے لوگ اوپر کے ان تینوں پھلوں میں سے کوئی بھی پھل پسند نہیں کرتے؟

(1) 5 (2) 8 (3) 10 (4) 15

یاد رکھنے کی نکات

- خوب واضح اشیاء کا مجموعہ ایک سٹ کہلاتا ہے۔
- مجموعوں کو تین طریقوں سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ i) توضیحی طریقہ ii) سلٹ بلڈر طریقہ iii) روسٹر طریقہ
- اگر A کے تمام عناصر B میں بھی موجود ہو تو A کو B کا تحتی مجموعہ کہتے ہیں۔
- اگر $A \subseteq B$ اور $A \neq B$ ہوتو A مجموعہ B کا موزوں تحتی مجموعہ ہوگا۔
- A کے تمام تحتی مجموعے A کا قوتی مجموعہ ہے اور اسے P(A) سے اظہار کرتے ہیں۔
- ایک مجموعہ / سٹ کے m عناصر ہیں تو کے تحتی مجموعوں کی تعداد 2^m ہے۔
- مجموعہ m عناصر کے موزوں تحتی مجموعے $2^m - 1$
- اگر $A \cap B = \varnothing$ ہوتو A اور B جُدا مجموعے ہیں۔ اگر $A \cap B \neq \varnothing$ ہوتو A اور B ڈھکنے والے یا چھا جانے والے مجموعے ہیں۔
- وہ عناصر جو مجموعہ A سے تعلق رکھتے ہیں اور B میں نہیں ۔ مجموعہ A اور B کا فرق کہلاتا ہے۔
- دو مجموعے A اور B کا متشاکل فرق مجموعے $A - B$ اور $B - A$ کا اتحاد ہے۔

9th Math 1. Set
Tuesday, March 12, 2019 2:24:13 PM

❖ متبادلتی خاصیت :

A اور B کوئی دوست کے لئے

$$A \cup B = B \cup A \quad ; \quad A \cap B = B \cap A$$

❖ مربوطی خاصیت :

A، B اور C کوئی تین سٹ کے لئے

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \quad ; \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

❖ تقسیمی خاصیت :

A، B اور C کوئی تین سٹ کے لئے

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{[اتحاد پر تقاطع]}$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad \text{[تقاطع پر اتحاد]}$$

❖ سٹ کے فرق کے لئے ڈی مارگن کے کلیے

A، B اور C کوئی تین سٹ کے لئے

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$

$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

❖ سٹ کے اتمام کے لئے ڈی مارگن کے کلیے

فرض کیجئے ایک ہمہ گیر سٹ اور A اور B دو تحتی سٹ ہو تو

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \quad ; \quad (A \cap B)' = A' \cup B'$$

❖ سٹ کی بنیادیت

اگر A اور B کوئی دوست ہیں تو

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

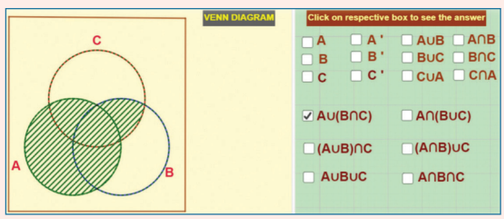
اگر A، B اور C تین سٹ ہو تو

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

9th Math 1. Set
Tuesday, March 12, 2019 2:24:13 PM

ICT Corner

مطلوبہ جواب اس طرح دکھائی دے گا۔



مرحلہ 1 : براؤزر کھولئے اور دئے گئے لنک کو کاپی کیجئے یا دئے گئے URL کو ٹائپ کیجئے یا دئے گئے QR کوڈ کو اسکین کیجئے۔

Set Language نامی Geo gebra ورک شیٹ کھولے۔اس ورک شیٹ میں دو کارروائیاں ہیں۔i) دوسٹوں کے لئے ون نقشے اور ii) تین سٹوں کے لئے ون نقشے پہلے کارروائی کے لئے دائیں جانب موجود ڈبہ میں کلک کرنے سے مطلوبہ سیاہ کردہ حصہ نظر آئے گا۔

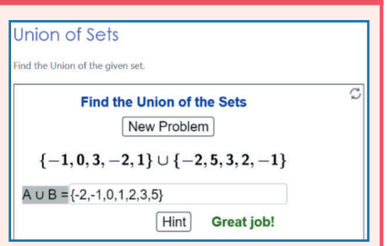
مرحلہ 2 : تین سٹوں کی دوسری کارروائی کے لئے اسی طرح دہرائے۔

Browse in the link

Set Language: https://ggbm.at/BrG952dw or Scan the QR Code.

ICT Corner

مطلوبہ جواب اس طرح دکھائی دے گا۔



مرحلہ 1 : براؤزر کھولئے اور دئے گئے لنک کو کاپی اور پیسٹ کیجئے یا دئے گئے URL کو ٹائپ کیجئے یا دئے گئے QR کوڈ کو اسکین کیجئے۔

مرحلہ 2 :

Union of Sets نامی GeoGebra ورک شیٹ کھلے گا۔ اس میں NEW PROBLEM کلک کر کے نئے سوالات بنا سکتے ہیں۔

مرحلہ 3 : سوال کے ڈبہ میں اپنا جواب ٹائپ کر کے Enter دبایئے۔ اگر تمہیں کوئی مسئلہ پیش آئے تو HINT کا بٹن دبایئے۔

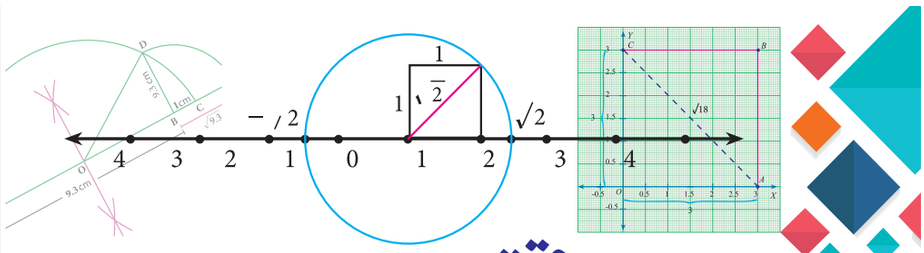
مرحلہ 4 : اگر اپنا جواب صحیح ہے تو GREAT JOB نامی مینو ظاہر ہوگا۔ اگر تمہارا جواب غلط ہو تو Try Again مینو دکھائی دے گا۔ نئے نئے سوالات بناتے جایئے ں تک کہ مسلسل تمہارے پانچ سوالوں کے درست جوابات نکل آئیں۔

Browse in the link

Union of Sets: https://www.geogebra.org/m/ufxdh47G

9th Math 1. Set
Tuesday, March 12, 2019 2:24:14 PM

2



حقیقی اعداد

(REAL NUMBERS)

When I consider what people generally want in calculating, I found that it always is a number

- Al-Khwarizmi



الخوارزمی Al-Khwarizmi
(A D (CE) 780 - 850)

الخوارزمی ایک فارسی عالم تھے۔
انہوں نے سرڈ کو ریاضیات کی دنیا میں ایک خصوصی مقام دیا ہے۔انہوں نے غیر ناطق اعداد کو "نہیں سنائی دینے والے" ، اعداد کہا۔ جو بعد میں لاطینی زبان میں سرڈ (Surdus) (معنی 'بہرے' یا 'گونگا (mute)' کے ہیں)۔ ریاضیات میں سرڈ ایک (جذری عدد) ہے۔ اس کو ناطق عدد کے طور ظاہر نہیں کر سکتے۔

سیکھنے کے مقاصد

- دیئے گئے دو ناطق اعداد کے درمیان موجود کئی غیر اختتام پذیر ناطق اعداد کو معلوم کرنا۔
- ناطق اعداد کو اختتام پذیر عشری اعداد میں پیش کرنا۔
- ناطق اعداد کو عددی خط میں ظاہر کرنا۔
- سرڈ کو پہچاننا۔
- سرڈ کو استعمال کر کے جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم جیسے بنیادی اعمال کرنا۔
- سرڈ کے نسب نما کو ناطق بنانا
- سائنسی ترقیم کو سمجھنا۔

2.1 تعارف :

اعداد، اعداد، ہر جگہ

- کیا آپ کے گھر میں فون ہے؟ اس کی ساعت (Dial) میں کتنے ہندسے ہیں؟
- آپ کے علاقہ کا پن کوڈ (Pincode) کیا ہے؟ یہ کیوں استعمال ہوتا ہے ؟
- جب گاڑی گھڑی کرنے جائے تو کیا آپ ٹوکن لیتے ہیں ؟ اس کی کیا ضرورت ہے؟
- آپ 24 کیرٹ (24 Carat) کیسے پہچانیں گے؟ اس کے خالص پن (Purity) کا پتہ کیسے لگائیں گے؟
- آپ کے چشمے کے عدسے کی قوت (Power) کتنی ہے ؟

9 maths 2 real numbers
Tuesday, March 12, 2019 3:38:33 PM



- آپ کی چھت کے پانی کے حوض (ٹینک) میں کتنا پانی سما سکتا ہے۔
- کیا آپ کے دوست کو بخار ہے؟ اس کے بدن کی تپش کیا ہے؟

اب تک آپ کئی طرح کے اعداد کے بارے میں سیکھ چکے ہیں۔
اب وقت ہے ان تصورات کو آگے بڑھانے کا۔

2.2 ناطق اعداد (Rational Numbers)

جب آپ الماری میں رکھے ہوئے کتابوں کی گنتی کرنا چاہے، تو آپ 1,2,3,..... وغیرہ سے شروع کرتے ہو۔ اور یہ گنتی کے اعداد 1,2,3,.... کو طبعی اعداد کہتے ہیں۔ تم ان اعداد کو خط پر ظاہر کرنا جانتے ہو۔ [Fig 2.1]



خاکہ 2.1

ہم تمام طبعی اعداد کے مجموعے کو $\mathbb{N}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ $\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, \ldots \}$

اس حالت میں ہم علامت '0' کا استعمال کرتے ہیں۔ اس کا مطلب کوئی چیز حاظر نہیں ہے۔ اس طرح کہہ سکتے ہیں کہ ''وہاں کوئی کتاب نہیں ہے'' بلکہ تم اس طرح لکھ سکتے ہو کہ ''کتابوں کی تعداد صفر (Zero) ہے''۔ صفر کو ایک ہندسہ کے طور پر شامل کرنے سے، اب آپ اعداد 0,1,2,3,... کو تصور کریں گے اور انہیں ''صحیح اعداد'' (Whole number) کہیں گے۔ ایک عدد بڑھنے سے عددی خط درجہ ذیل کی طرح نظر آئیگا۔ [Fig 2.2]



خاکہ 2.2

صحیح اعداد کے تمام مجموعہ کو $\mathbb{W}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ $\mathbb{W} = \{ 0, 1, 2, 3, \ldots \}$

بعض روایات سے مختلف قسم کے اعداد بنتے ہیں۔ فرض کریں کہ چند روایات سے ''مثبت'' (Positive) کو '+' سے ظاہر کرتے ہیں۔ جیسے اشیاء میں ''اوپر'' (Up) یا ''آگے'' (Forward) یا ''زیادہ'' (More) یا ''بڑھنا'' (Increasing) مثبت ہے۔ اور اشیاء جیسے ''نیچے'' (Down) یا پیچھے (Backward) یا ''کم'' (Less) یا ''گھٹنا'' (Decreasing) ''منفی'' ہیں اسے '−' سے ظاہر کرتے ہیں۔

اس تفہیم کے ساتھ، تم طبعی اعداد کو مثبت اعداد کے طور پر پیش کر سکتے ہو پھر اسے دوسرا نام ''مثبت سالم اعداد'' دو۔ (Positive integers) اسی طرح منفی سالم اعداد ....−3,−2,−1 نام دو۔

غور کرنے سے −2 زیادہ منفی ہے۔ −1 سے لہٰذا −1 اور −2 میں. −2 چھوٹا ہے اور −1 سے بڑا ہے۔ کیا −1 اور −2 چھوٹا یا بڑا ہے −3 سے؟ اس پر غور کریں۔ عددی خط اس مرحلہ میں ذیل کی طرح ہو سکتا ہے



خاکہ 2.3

9 maths 2 real numbers
Tuesday, March 12, 2019 3:38:33 PM

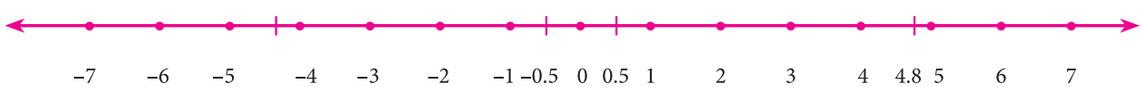
سالم اعداد کے مجموعے کو ہم $\mathbb{Z}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

$$\mathbb{Z} = \{ \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \}.$$

جب آپ مذکورہ بالا خاکوں (خاکہ 2.3 اور 2.4) پر غور کرگے تو یقیناً آپ حیران ہوں گے کہ دو متواتر سالم اعداد کے درمیان میں خلاء پایا جاتا ہے۔ کیا ان کے درمیان چند اعداد ہو سکتے ہیں۔؟

آپ پہلے سے کسر کو جانتے ہیں۔ آپ کس طرح $\frac{1}{2}$ کو $\mathbb{Z}$ پر نشان کریں گے؟ یہ 0 اور 1 کے درمیان میں ہوگا۔ اسی طرح سے ہم دوسرے نقاط جیسے $2\frac{3}{4}$ ... $\frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}$ وغیرہ کی نشاندہی کر سکتے ہو۔

اسی طرح سے ہم یہ دیکھ سکتے ہیں کہ 0 'صفر' کے بائیں جانب بھی۔ یہ تمام $\frac{a}{b}$ کی شکل کے کسور ہیں یہاں a اور b سالم اعداد ہیں۔ بشرطیکہ $b \neq 0$ (کیوں؟) اگر ایک کسر عشری شکل میں ہو تو یہی طریقہ ہوگا۔ کسور (Fractions) اور لمبائیوں کے نسبتوں کے درمیانی تعلق کی وجہ سے انہیں ''ناطق اعداد'' (Rational Numbers) کا نام رکھتے ہیں۔ یہاں ایسی صورت کے لئے ایک کچا خاکہ ہے۔



خاکہ 2.4

ایک ناطق عدد ایک کسر ہے جو کسی دو سالم اعداد کے خارج قسمت کی نشاندہی کرتا ہے، صفر سے تقسیم کو چھوڑ کر۔

چونکہ ایک کسر کے کئی معادل کسریں ہوتے ہیں اسی ناطق عدد کے کئی ممکن نام ہو سکتے ہیں۔ غرض $\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{8}{24}$ یہ سب ایک ہی ناطق عدد کو ظاہر کرتے ہیں۔

2.2.1 ناطق اعداد کثافتی خصوصیت (Denseness Property of Rational Numbers)

فرض کیجئے کہ a اور b دو سالم اعداد ہیں۔ یہاں $a>b$ اور ان کا حسابی اوسط (Arithmatic mean) $\frac{a+b}{2}$ سے دیا گیا ہے۔ کیا یہ حسابی اوسط ایک ناطق عدد ہے۔ آیئے دیکھیں۔

اگر $a = \frac{p}{q}$ (p,q سالم اعداد ہیں اور $q \neq 0$) - $b = \frac{r}{s}$ (r, s سالم اعداد ہیں اور $s \neq 0$) ہو تو

$$\frac{a+b}{2} = \frac{\frac{p}{q} + \frac{r}{s}}{2} = \frac{ps + qr}{2qs}$$ جو ایک ناطق عدد ہے

ہمیں یہ ثابت کرنا ہے کہ یہ ناطق عدد a اور b کے درمیان میں واقع ہے؟

$$a - \left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{2a - a - b}{2} = \frac{a-b}{2}$$ جو >0 (صفر سے بڑا)، چونکہ $a>b$

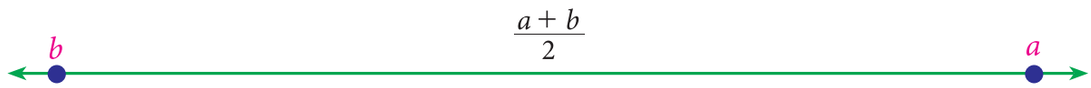
لہٰذا $$a > \left(\frac{a+b}{2}\right) \quad \ldots (1)$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right) - b = \frac{a+b-2b}{2} = \frac{a-b}{2}$$ جو >0 (صفر سے بڑا)، چونکہ $a>b$

لہٰذا $$\left(\frac{a+b}{2}\right) > b \quad \ldots (2)$$

(1) اور (2) سے ہم یہ دیکھ سکتے ہیں $a > \left(\frac{a+b}{2}\right) > b$ مندرجہ ذیل خاکہ کے ذریعے ہم یہ دیکھ سکتے ہیں۔

9 maths 2 real numbers
Tuesday, March 12, 2019 3:38:34 PM



خاکہ 2.5

لہذا کوئی دو ناطق اعداد کے لئے، ان کا اوسط یا درمیانی نقطہ، ایک ناطق عدد ہے۔ اسی طریقے سے ہم اس عمل کو لامحدود مرتبہ دہرانے پر لامحدود ناطق اعداد حاصل ہوں گے۔

مثال 2.1 $\frac{1}{2}$ اور $\frac{2}{3}$ کے درمیان کوئی دو ناطق اعداد معلوم کیجئے۔

حل 1

$\frac{1}{2}$ اور $\frac{2}{3}$ کے درمیان ایک ناطق عدد $= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3+4}{6}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{7}{6}\right)=\frac{7}{12}$

$\frac{1}{2}$ اور $\frac{7}{12}$ کے درمیان ایک ناطق عدد $= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{7}{12}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{6+7}{12}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{13}{12}\right)=\frac{13}{24}$

لہٰذا $\frac{1}{2}$ اور $\frac{2}{3}$ کے درمیان دو ناطق اعداد $\frac{7}{12}$ اور $\frac{13}{24}$ ہیں (یقیناً اور بھی کئی ناطق اعداد ہیں)

یہاں ایک دلچسپ نتیجہ ہے جس کے ذریعے سے تم دیئے گئے دو ناطق اعداد کے درمیانی ناطق اعداد اسی وقت لکھ سکتے ہیں۔

نتیجہ :

اگر $\frac{p}{q}$ اور $\frac{r}{s}$ کوئی دو ناطق اعداد ہیں اس طرح کہ $\frac{p}{q}<\frac{r}{s}$ ہو تو $\frac{p+q}{r+s}$ ایک ناطق عدد ہے اس طرح کہ $\frac{p}{q}<\frac{p+q}{r+s}<\frac{r}{s}$

اسی مثال کو لیجئے : $\frac{1}{2}$ اور $\frac{2}{3}$ کے درمیان کوئی دو ناطق اعداد معلوم کیجئے۔

حل 2

$\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$ سے $\frac{1}{2}<\frac{1+2}{2+3}<\frac{2}{3}$ یا $\frac{1}{2}<\frac{3}{5}<\frac{2}{3}$ سے $\frac{1}{2}<\frac{1+3}{2+5}<\frac{3}{5}<\frac{3+2}{5+3}<\frac{2}{3}$ یا $\frac{1}{2}<\frac{4}{7}<\frac{3}{5}<\frac{5}{8}<\frac{2}{3}$

حل 3

حل کرنے کے لئے کوئی اور نیا طریقہ ہے؟ جی ہاں، اگر عشری اعداد آپ کو پسند ہو تو ذیل کے متبادل طریقہ سے بھی حل کر سکتے ہیں۔

$\frac{1}{2}=0.5$ اور $\frac{2}{3}=0.66...$

لہٰذا $\frac{1}{2}$ اور $\frac{2}{3}$ کے درمیانی ناطق اعداد کی فہرست اس طرح سے بنائی جاسکتی ہے۔ 0.51, 0.57,0.58,...

حل 4

اسی مسئلے کو حل کرنے کے لئے ایک طریقہ بھی ہے۔ مثال کے طور پر $\frac{4}{9}$ اور $\frac{3}{5}$ کے درمیان چار ناطق اعداد معلوم کرنا ہو، غور کریں کہ

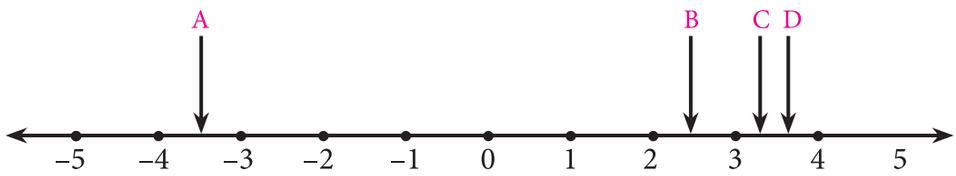
9 اور 5 کا ذ۔ا۔ا (L.C.M) 45 ہے۔ اس لئے ہم $\frac{4}{9}=\frac{20}{45}$ اور $\frac{3}{5}=\frac{27}{45}$. لکھ سکتے ہیں۔

لہٰذا $\frac{4}{9}$ اور $\frac{3}{5}$ کے درمیانی ناطق اعداد $\frac{21}{45}, \frac{22}{45}, \frac{23}{45}, \frac{24}{45}, \ldots$

9 maths 2 real numbers
Tuesday, March 12, 2019 3:38:34 PM

مشق 2.1

1۔ عددی خط پر $\frac{11}{3}$ کو کونسی تیر کی نشان ٹھیک مقام کو ظاہر کرتی ہے؟



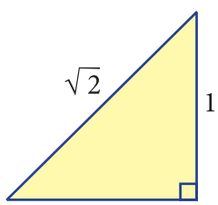
2۔ $\frac{-7}{11}$ اور $\frac{2}{11}$ کے درمیان کوئی تین ناطق اعداد معلوم کیجئے۔

3۔ مندرجہ ذیل میں کوئی پانچ درمیانی ناطق اعداد معلوم کیجئے۔

(i $\frac{1}{4}$ اور $\frac{1}{5}$ (ii 0.1 اور 0.11 (iii −1 اور −2

2.3 غیر ناطق اعداد (Irrational Numbers)

ہم نے دیکھا کہ ہر ایک ناطق عدد کو ایک نقطہ عددی خط پر مخصوص ہے اور ناطق اعداد کے کثافتی خصوصیت کو بھی سیکھ چکے ہیں۔ کیا اس کا مطلب عددی خط میں صرف ناطق اعداد ہیں اور کوئی اعداد نہیں ہیں؟ چلئے تلاش کریں۔



خاکہ 2.6

مساوی الساقین والا ایک مثلث قائمہ الزاویہ لیجئے جس کے دو ضلعے ہر ایک کی لمبائی 1 اکائی ہے۔

مسئلہ فیثاغورث کو استعمال کرکے، وتر کی لمبائی $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ (خاکہ 2.6 دیکھیں) حاصل ہوتی ہے۔ یونانیوں نے یہ دیکھا کہ $\sqrt{2}$ نہ صحیح عدد ہے۔ نہ ہی ایک کسر ہے۔

اس یقین کے درمیان تعلقات میں عددی خط پر نقاط اور تمام اعداد بکھر گئے $\sqrt{2}$ کو غیر ناطق کہا گیا۔

غیر ناطق عدد ایک عدد ہے۔ جس کو سادہ دو سالم اعداد کے طور پر ظاہر نہیں کیا جا سکتا۔

مثالیں :

1۔ $\sqrt{2}$ کے علاوہ اور بھی مثالوں کے ذریعہ اس طرح کے غیر ناطق اعداد کو حاصل کر سکتے ہیں۔ یہاں پر چند مثالیں ہیں ..... $\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, \sqrt{7}, \sqrt{5}$ وغیرہ

2۔ π دائرے کے احاطے سے اسی دائرے کی قطر کی نسبت، غیر ناطق عدد کی ایک اور مثال ہے

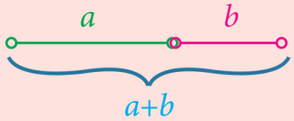
3۔ e بھی عائلر (Euler) کے عدد کے طور پر جانا جاتا ہے۔ یہ ایک اور عام غیر ناطق عدد ہے۔

4۔ Φ ایک سنہری نسبت ہے اس کو سنہری اوسط یا سنہری حصہ بھی کہا جاتا ہے۔ علمی ہندسوں میں فاصلے کے تناسب کو لے جانے کے لئے اکثر عدد پر ٹھوس لگایا ہوتا ہے۔ جیسا کہ مخمس (pentagon)، پانچ ضلعی (pentagram)، دس ضلعی (decagon)، بارہ ضلعی (dodecahedron)، وغیرہ۔ یہ ایک غیر ناطق عدد ہے۔

سنہری نسبت (GOLDEN RATIO)

Φ سنہری نسبت مشہور رہی ہے۔ جو فن اور فنِ تعمیر میں بہت خوبصورت نسبت طور پر دیکھی جاتی ہے۔

ایک قطاعِ خط لیجئے اور اسکو دو حصوں میں تقسیم کیجئے اس طرح کہ مکمل قطاع خط (a+b) سے حصہ a کی نسبت حصہ a سے حصہ b کی نسبت مساوی ہے۔



$a+b : a = a : b$

یہ $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$ تناسب حاصل ہوتا ہے۔

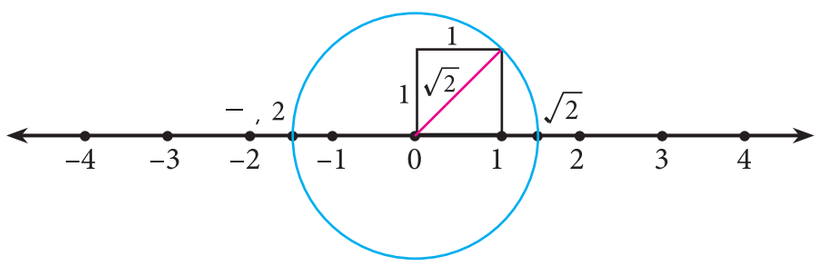
غور کیجئے کہ $a+b$ اور b کا ہندسی اوسط a ہے۔

9 maths 2 real numbers
Tuesday, March 12, 2019 3:38:35 PM

2.3.1 عددی خط پر غیر اعداد کی نمائندگی (Irrational Numbers on Number Line)

جہاں کہیں بھی عددی خط پر نقاط ہیں، کیا وہ یکساں ہوتے ہیں غیر ناطق اعداد سے؟ مثال کے طور پر عددی خط پر $\sqrt{2}$ کو نشاندہی کریں گے۔ یہ آسان ہے۔

ہمیں یاد ہے کہ $\sqrt{2}$ ایک مربع وتر کی لمبائی ہے جس کا ضلع 1 اکائی ہے۔ (کیسے؟) ایک مربع بنائے اس کے وتر کو عددی خط میں منتقل کیجئے۔ (خاکہ 2.7 غور کیجئے)



خاکہ 2.7

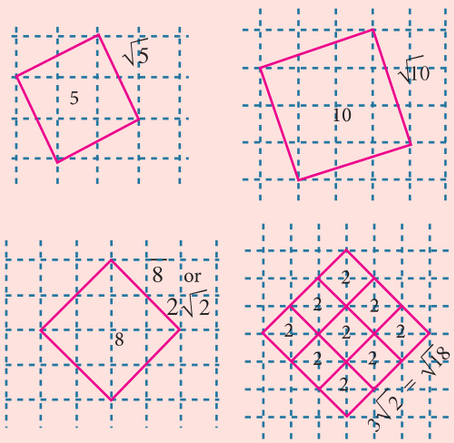
ہم عددی خط پر '0' کو مرکز بنا کر ایک دائرہ بنائے اس طرح کہ اسکا نصف قطر مربع کے وتر کے برابر ہو۔ عددی خط میں دائرہ بنانے سے دو جگہوں پر قطع کرتے ہیں۔ اس طرح سے $\sqrt{2}$، 0 کے دائیں جانب اور $-\sqrt{2}$ بائیں حاصل ہوگا۔ (ہم صرف $\sqrt{2}$ کو نشان کرنا چاہتے تھے اس کے ساتھ $-\sqrt{2}$ بھی ہمیں حاصل ہوگیا۔)

اب ہم طبعی اعداد سے شروع کرتے ہوئے ناطق اعداد اور غیر ناطق اعداد کی توسیع کر سکتے ہیں۔ آپ کو یہ دیکھ کر حیرت ہوسکتی ہے کہ اگر ہم عددی خط پر مذید توسیع کرنے کے لئے ہم انتظار کر رہے ہیں خوش قسمتی سے ہم یہاں پر روک لیے گئے آپ ان اعداد کے بارے میں مزید معلومات بڑی جماعتوں پڑھیں گے۔

ناطق اعداد کی نمائندگی اختتام پذیر اور غیر اختتام پذیر عشری اعداد کے ذریعہ ہم غیر ناطق اعداد کو سمجھ سکتے ہیں۔ عشری توسیع کے ذریعہ ناطق اعداد کو دیکھتے ہیں۔

جالی دار کاغذ پر (Grid paper) مربعوں کے استعمال سے غیر ناطق اعداد کو بنا سکتے ہیں۔

یہاں پر چند مثالیں دی گئی ہیں



2.3.2 ناطق اعداد کی عشری نمائندگی (Decimal Representation Ration Numbers)

اگر آپ ناطق عدد کو کسری شکل میں لکھتے ہیں تو آپ کو طویل تقسیم کے ذریعے عشری نمائندگی حاصل ہوگی۔ مندرجہ ذیل مثالوں کے ذریعہ ہم یہ سمجھ سکتے ہیں۔ جہاں باقی ہمیشہ صفر ہی حاصل ہوگا۔

9 maths 2 real numbers
Tuesday, March 12, 2019 3:38:35 PM

ان مثالوں پر غور کریں۔

$$\begin{array}{r|l} & 0.875 \\ 8 & 7.000 \\ & 64 \\ \hline & 60 \\ & 56 \\ \hline & 40 \\ & 40 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$\frac{7}{8} = 0.875$$

$$\begin{array}{r|l} & 0.84 \\ 25 & 21.00 \\ & 200 \\ \hline & 100 \\ & 100 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$\frac{21}{25} = 0.84$$

$$\begin{array}{r|l} & 2.71875 \\ 32 & 87.00000 \\ & 64 \\ \hline & 230 \\ & 224 \\ \hline & 60 \\ & 32 \\ \hline & 280 \\ & 256 \\ \hline & 240 \\ & 224 \\ \hline & 160 \\ & 160 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$\frac{-87}{32} = -2.71875$$

غور کیجئے

اس سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ اس عمل میں عشری اعداد محدود تعداد ہیں۔ اسے اختتام پذیر عشری توسیع کہتے ہیں۔

کیا ہم ناطق عدد کی عشری نمائندگی کر سکتے ہیں۔ جو غیر اختتام پذیر ہو؟

مندرجہ ذیل مثالوں (بچت صفر نہ ہو) کے ذریعہ ہم یہ دیکھ سکتے ہیں۔

مثال 2.2

ذیل کے ناطق اعداد کو عشری اعداد میں تبدیل کیجئے۔ (i) $\frac{-4}{11}$ (ii) $\frac{11}{75}$

حل:

$$\begin{array}{r|l} & 0.1466\ldots \\ 75 & 11.0000 \\ & 7\,5 \\ \hline & 350 \\ & 300 \\ \hline & 500 \\ & 450 \\ \hline & 500 \\ & 450 \\ \hline & 50 \\ & \vdots \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & 0.3636\ldots. \\ 11 & 4.0000 \\ & 33 \\ \hline & 70 \\ & 66 \\ \hline & 40 \\ & 33 \\ \hline & 70 \\ & 66 \\ \hline & 4 \\ & \vdots \end{array}$$

اس طرح ہم یہ دیکھتے ہیں

$$\frac{11}{75} = 0.146\overline{6} \quad , \quad \frac{-4}{11} = -0.\overline{36}$$

طبعی اعداد کے مقلوبیں (Reciprocals) ناطق اعداد ہیں۔ ان کی عشری توسیع دلچسپ ہے۔ پہلے کے دس مقلوب۔

عدد	مقلوب (Reciprocal)	عشری نمائندگی
1	$\frac{1}{1} = 1.0$	اختتام پذیر
2	$\frac{1}{2} = 0.5$	اختتام پذیر
3	$\frac{1}{3} = 0.\overline{3}$	غیر اختتام پذیر اور متوالی
4	$\frac{1}{4} = 0.25$	اختتام پذیر
5	$\frac{1}{5} = 0.2$	اختتام پذیر
6	$\frac{1}{6} = 0.1\overline{6}$	غیر اختتام پذیر اور متوالی

9 maths 2 real numbers
Tuesday, March 12, 2019 3:38:36 PM

7	$\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$	غیر اختتام پذیر اور متوالی
8	$\frac{1}{8} = 0.125$	اختتام پذیر
9	$\frac{1}{9} = 0.\overline{1}$	غیر اختتام پذیر اور متوالی
10	$\frac{1}{10} = 0.1$	اختتام پذیر

ایک ناطق عدد اس طرح سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

i) اختتام پذیر

ii) یا غیر اختتام پذیر اور متوالی عشری ہندسہ۔

متضاد بیان بھی صحیح ہے۔

یعنی، کسی عدد کا عشری توسیع اختتام پذیر یا غیر اختتام پذیر اور متوالی ہو تو اس عدد کو ناطق عدد کہتے ہیں۔

غور کیجئے

اس معاملے میں عشری توسیع غیر اختتام پذیر ہے۔ بچت دہرائے جاتے ہیں۔ اس طرح ہمیں خارج قسمت میں غیر اختتام پذیر اور متوالی عشری ہندسے حاصل ہوتے ہیں۔

2.3.3 اعشاریہ کا وقفہ (Period of decimals)

ناطق اعداد کی عشری توسیع میں، متوالی ہندسوں کی تعداد کو اعشاریہ کے وقفہ کی لمبائی کہتے ہیں۔

مثال کے طور پر

i) $\frac{25}{7}$ میں عشری عدد کی مدت کی تعداد $= 3.\overline{571428} = 6$

ii) $\frac{27}{110}$ میں عشری عدد کی مدت کی تعداد $= 0.2\overline{45} = 2$

مثال 2.3

$\frac{1}{3}$ کی متوالی عشری توسیع کے استعمال سے ناطق عدد $\frac{1}{27}$ کو متوالی عشری شکل میں ظاہر کیجئے۔ لہٰذا $\frac{59}{27}$ کو متوالی عشری شکل میں لکھئے۔

حل :

ہمیں معلوم ہے کہ $\frac{1}{3} = 0.\overline{3}$

لہٰذا $\frac{1}{27} = \frac{1}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \times 0.333... = 0.037037... = 0.\overline{037}$

اور $\frac{59}{27} = 2\frac{5}{27} = 2 + \frac{5}{27}$

$= 2 + \left(5 \times \frac{1}{27}\right)$

$= 2 + (5 \times 0.\overline{037}) = 2 + (5 \times 0.037037037...) = 2 + 0.185185... = 2.185185... = 2.\overline{185}$

2.3.4 ناطق اعداد کو اختتام پذیر عشری اعداد میں تبدیل کرنا

(Conversion of Terminating Decimals into Rational Numbers)

اب ہم اختتام پذیر عشری عدد، 2.945 لیں کو ناطق عدد کسری شکل میں تبدیل کرنے کی کوشش کریں گے۔

$2.945 = 2 + 0.945$

9 maths 2 real numbers
Tuesday, March 12, 2019 3:38:36 PM

$$= 2 + \frac{9}{10} + \frac{4}{100} + \frac{5}{1000}$$

$$= 2 + \frac{900}{1000} + \frac{40}{1000} + \frac{5}{1000} \quad \text{(نسب نما کو مشترک کرتے ہوئے)}$$

$$= 2 + \frac{945}{1000} \quad \text{جو درکار ہے۔}$$

$$= \frac{2945}{1000} \text{ or } \frac{589}{200}$$

(مذکورہ بالا میں $2.945 = \frac{2945}{1000}$ کو براہِ راست لکھ سکتے ہیں)

مثال 2.4 ذیل کی عشری توسیع کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں ظاہر کیجئے۔ جہاں p اور q سالم اعداد ہیں اور $q \neq 0$ ہے۔

: (i) 0.35 (ii) 2.176 (iii) – 0.0028

حل :

(i) $0.35 = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$

(ii) $2.176 = \frac{2176}{1000} = \frac{272}{125}$

(iii) $-0.0028 = \frac{-28}{10000} = \frac{-7}{2500}$

2.3.5 غیر اختتام پذیر اور متوالی عشری اعداد کو ناطق اعداد میں تبدیل کرنا

(ConversionofNon-terminating and recurring decimals into Rational Numbers)

اختتام پذیر عشری اعداد کو آسانی کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ جب عشری عدد جیسا کہ 2.4 پر پہنچتے ہیں تو، 10 سے تقسیم کر کے عشری نقطہ کو چھوڑ دیتے ہیں۔

لہٰذا $2.4 = \frac{24}{10}$، جس کی مختصر شکل $\frac{12}{5}$ ہے۔ مگر جب عشری عدد 2.4 ہو تو 4 لامحدود مرتبہ ہونے کی وجہ سے (4's) نسب نما میں 0 بھی لامحدود مرتبہ آئیں گے۔ مثال کے طور پر

$$2.4 = 2 + \frac{4}{10}$$

$$2.44 = 2 + \frac{4}{10} + \frac{4}{100}$$

$$2.444 = 2 + \frac{4}{10} + \frac{4}{100} + \frac{4}{1000}$$

4 کو لامحدود مرتبہ لینے سے کس طرح کی مشکل پیش آئے گی۔ کسی نہ کسی طرح سے لامحدود تواتر کو بھی چھوڑنا ہوگا۔ اس لامحدود تواتر میں دلچسپ بات یہ ہے کہ ایک یا دو یا زیادہ 4's چھوڑنے پر بھی لامحدود تواتر ہی رہے گا۔

فرض کرو کہ $x = 2.\overline{4}$ ...(1)

ہو تو $10\,x = 24.\overline{4}$ ...(2)

[10 سے ضرب دینے پر عشری نقطہ ایک ہندسہ دائیں جانب ہٹ جاتا ہے مگر '4' لامحدود رہتا ہے۔]

مساوات (2) سے (1) کو تفریق کرنے پر

$9x = 24.\overline{4} = 2.\overline{4} = 22$ (لامحدود 4 سے لامحدود 4 کو تفریق کرنے پر بچت 22=2–24 حاصل ہوتا ہے)

9 maths 2 real numbers
Tuesday, March 12, 2019 3:38:36 PM

$x = \frac{22}{9}$ درکار قیمت ہے۔

کسی بھی غیر اختتام پذیر متوالی عشری عدد کو کسر میں تبدیل کرنے کے لئے ہم اس منطق (Logic) کو استعمال کرتے ہیں۔

مثال 2.5 مندرجہ ذیل کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں ظاہر کریں $(q \neq 0$ اور $p, q \in Z)$

(i) $0.\overline{3}$ (ii) $2.\overline{124}$ (iii) $0.4\overline{5}$ (iv) $0.5\overline{68}$

حل :

(i) $x = 0.\overline{3} = 0.3333\ldots$ (1) فرض کیجئے کہ

(یہاں عشری عدد کی مدّت 1 ہے، مساوات (1) کو 10 سے ضرب دیں۔)

$10\,x = 3.3333\ldots$ (2)

(2) – (1): $9\,x = 3$ or $x = \frac{1}{3}$

(ii) فرض کیجئے کہ $x = 2.\overline{124} = 2.124124124\ldots$ (1)

(یہاں عشری عدد کی مدت 3 ہے، مساوات (1) کو 1000 سے ضرب دیں)

$1000\,x = 2124.124124124\ldots$ (2)

(2)–(1): $999\,x = 2122$ $x = \frac{2122}{999}$

(iii) فرض کیجئے کہ $x = 0.4\overline{5} = 0.45555\ldots$ (1)

(یہاں متوالی عشری ہندسہ 5 ہے، جو عشری نقطہ کے بعد دوسرا ہندسہ ہے، مساوات (1) کو 10 سے ضرب دیں)

$10\,x = 4.5555\ldots$ (2)

(اب عشری عدد کی مدت 1 ہے، مساوات (2) کو 10 سے ضرب دیں)

$100\,x = 45.5555\ldots$ (3)

(3) – (2): $90\,x = 41$ or $x = \frac{41}{90}$

(iv) فرض کیجئے کہ $x = 0.5\overline{68} = 0.5686868\ldots$ (1)

(یہاں متوالی عشری ہندسہ 68، جو عشری نقطہ کے بعد دوسرا ہندسہ ہے، مساوات (1) کو 10 سے ضرب کریں)

$10\,x = 5.686868\ldots$ (2)

(اب عشری عدد کی مدت 2 ہے، مساوات (2) کو 100 سے ضرب دیں)

$1000\,x = 568.686868\ldots$ (3)

(3) – (2): $990\,x = 563$ or $x = \frac{563}{990}$.

9 maths 2 real numbers
Tuesday, March 12, 2019 3:38:37 PM

غور کیجئے

کیا ایک ناطق عدد کی عشری شکل اختتام پذیر ہے یا غیر اختتام پذیر ہے، اس کو جانچنے کے لئے، ہم درج ذیل کے اصول کو استعمال کر سکتے ہیں۔

اگر ایک ناطق عدد $\frac{p}{q}$ ، $q \neq 0$ کو $\frac{p}{2^m \times 5^n}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ جہاں $p \in \mathbb{Z}$ اور $m, n \in \mathbb{W}$ ہے تو ناطق عدد کی عشری توسیع اختتام پذیر ہے ورنہ ناطق عدد کی عشری توسیع غیر اختتام پذیر اور متوالی ہے۔

مثال 2.6

حقیقی تقسیم کے بغیر، مندرجہ ذیل اعداد کی عشری توسیع کو اختتام پذیر یا غیر اختتام پذیر اور متوالی میں ترتیب دیجئے۔

(i) $\frac{13}{64}$ (ii) $\frac{-71}{125}$ (iii) $\frac{43}{375}$ (iv) $\frac{31}{400}$

حل :

(a) $\frac{13}{2^6} = \frac{13}{64}$, اسلئے $\frac{13}{64}$ کی عشری توسیع اختتام پذیر ہے

(b) $\frac{-71}{5^3} = \frac{-71}{125}$ اسلئے $\frac{-71}{125}$ کی عشری توسیع اختتام پذیر ہے

(c) $\frac{43}{3^1 \times 5^3} = \frac{43}{375}$ اسلئے $\frac{43}{375}$ کی عشری توسیع غیر اختتام پذیر اور متوالی ہے۔

(d) $\frac{31}{2^4 \times 5^2} = \frac{31}{400}$ اسلئے $\frac{31}{400}$ کی عشری توسیع اختتام پذیر ہے۔

مثال 2.7

تصدیق کیجئے کہ $1 = 0.\overline{9}$

حل :

فرض کیجئے کہ $x = 0.\overline{9} = 0.99999\ldots$ (1)

(مساوات (1) کو 10 سے ضرب دیں)

$10\,x = 9.99999\ldots$ (2)

مساوات (2) کو (1) سے تفریق کریں۔

$9x = 9$ or $x = 1$ لہٰذا

$0.\overline{9} = 1$

$1 = 0.9999\ldots$

$7 = 6.9999\ldots$

$3.7 = 3.6999\ldots$

ان نمونوں سے یہ پتا چلتا ہے کہ کوئی بھی اختتام پذیر عشری عدد کو غیر اختتام پذیر اور متوالی عشری توسیع یعنی مسلسل 9's سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

مشق 2.2

1۔ ذیل کے ناطق اعداد کو عشری اعداد میں تبدیل کیجئے اور ہر ایک عشری توسیع کی قسم بیان کیجئے۔

(i) $\frac{2}{7}$ (ii) $\frac{35}{100}$ (iii) $-5\frac{3}{11}$ (iv) $\frac{22}{3}$ (v) $\frac{-9}{32}$ (vi) $\frac{327}{200}$

2۔ $\frac{1}{13}$ کو عشری طور پر ظاہر کیجئے۔ عشری عدد کی مدت کی لمبائی معلوم کیجئے۔

9 maths 2 real numbers
Tuesday, March 12, 2019 3:38:37 PM

3۔ $\frac{1}{11}$ کی متوالی عشری توسیع کے استعمال سے ناطق عدد $\frac{1}{33}$ کو متوالی عشری شکل میں ظاہر کیجئے۔ لہٰذا $\frac{71}{33}$ کو متوالی عشری شکل میں لکھئے۔

4۔ ذیل کے عشری توسیعات کو ناطق اعداد کے طور پر ظاہر کیجئے۔

(i) $0.\overline{24}$ (ii) $2.\overline{327}$ (iii) 0.86 (iv) -5.132

(v) $3.1\overline{7}$ (vi) $17.2\overline{15}$ (vii) $0.\overline{0001}$ (viii) $-21.213\overline{7}$

5۔ حقیقی تقسیم کئے بغیر معلوم کیجئے کہ ذیل میں کونسے ناطق اعداد کی عشری توسیع اختتام پذیر ہے؟

(i) $\frac{7}{128}$ (ii) $\frac{21}{15}$ (iii) $\frac{19}{125}$ (iv) $4\frac{9}{35}$

(v) $\frac{387}{800}$ (vi) $\frac{219}{2200}$

2.3.6 عشری توسیع کے ذریعے غیر ناطق اعداد کو پہچاننا

(Decimal Representation to Identify Irrational Numbers)

ہم یہ دیکھ سکتے ہیں کہ غیر ناطق اعداد کی عشری توسیع غیر اختتام پذیر اور غیر متوالی ہوتے ہیں۔ مثال کے طور پر π کی عشری توسیع 3.14159265358979، مگر کوئی بھی محدود عشری ہندسہ π کو ٹھیک طور سے ظاہر نہیں کرسکتا ہے اور نہ ہی وہ دہراتے ہیں۔

مندرجہ ذیل عشری ہندسوں پر غور کیجئے۔

(i) 0.1011001110001111... (ii) 3.012012120121212...

(iii) 12.230223300222333000... (in) $\sqrt{2}$ = 1.4142135624...

کیا یہ اعداد اختتام پذیر یا متوالی اور غیر اختتام پذیر ہیں؟ نہیں۔۔۔ یہ سب نہ ہی اختتام پذیر ہیں اور نہ ہی غیر اختتام پذیر اور متوالی ہیں۔ لہٰذا یہ ناطق اعداد نہیں ہیں۔ اور نہ ہی ان اعداد کو $\frac{p}{q}$ سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ جہاں $p, q \in \mathbb{Z}$ اور $q \neq 0$ یہ غیر ناطق اعداد ہیں۔

> ایک عدد کی عشری توسیع غیر اختتام پذیر اور غیر متوالی ہو تو اس عدد کو غیر ناطق اعداد کہتے ہیں۔

مثال 2.8

$\sqrt{3}$ کی عشری توسیع معلوم کیجئے؟

حل :

```
                1.7320508...
1       | 3.00,00,00,00,00,...
        | 1
27      | 200
        | 189
343     | 1100
        | 1029
3462    | 7100
        | 6924
346405  | 1760000
        | 1732025
34641008| 279750000
        | 277128064
        | 2621936
```

ہم اکثر $\sqrt{2}$=1.414...، $\sqrt{3}$=1.732... وغیرہ سے لکھتے۔ اور یہ تقریبی قیمتیں (Approximate Values) اور ٹھیک قیمتیں نہیں ہیں۔ غیر ناطق عدد π کی صورت میں، ہم اکثر $\frac{22}{7}$ کی قیمت لیتے ہیں (جس کی عشری تقریبی توسیع $3.\overline{142857}$...) یہ ٹھیک قیمت ہے مگر حقیقت میں ایک تقریبی قیمت ہے۔ اس وجہ سے کہ غیر ناطق عدد کی عشری توسیع غیر اختتام پذیر اور غیر متوالی ہے۔ ان میں سے کوئی بھی ٹھیک قیمت نہیں دیتے!

9 maths 2 real numbers
Tuesday, March 12, 2019 3:38:38 PM

لہذا، تقسیمی طریقے سے $\sqrt{3} = 1.7320508$

ہم یہ دیکھ سکتے ہیں کہ ہر مثبت غیر کامل جذر المربع عدد غیر ناطق عدد ہے۔ ... $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}$ یہ تمام غیر ناطق اعداد ہیں۔

مثال 2.9

ذیل کے اعداد کو ناطق اور غیر ناطق اعداد میں درجہ بندی کیجئے۔

(i) $\sqrt{10}$ (ii) $\sqrt{49}$ (iii) 0.025 (iv) $0.7\overline{6}$ (v) 2.505500555... (vi) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

حل :

i) $\sqrt{10}$ ایک غیر ناطق عدد ہے (چونکہ 10 ایک کامل مربع عدد نہیں ہے)

ii) $\sqrt{49} = 7 = \frac{7}{1}$ ایک ناطق عدد ہے۔ (چونکہ 49 ایک کامل مربع عدد ہے)

iii) 0.025 ایک ناطق عدد ہے۔ (چونکہ یہ اختتام پذیر عشری عدد ہے)

iv) $0.7\overline{6} = 0.7666.....$ ایک ناطق عدد ہے ۔ (چونکہ یہ، عشری توسیع غیر اختتام پذیر اور متوالی ہے)

v) 2.505500555.... ایک غیر ناطق عدد ہے۔ (چونکہ عشری توسیع غیر اختتام پذیر اور غیر متوالی ہے)

vi) $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 \times \sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ایک غیر ناطق عدد ہے (چونکہ 2 ایک کامل مربع عدد نہیں ہے)

غور کیجئے

دیئے گئے مثال (vi) میں یہ غلط فہمی نہ ہو کہ یہ $\frac{p}{q}$ کی شکل میں ہے، اس لئے p اور q سالم عدد ہی ہونا چاہئے اور نہ کہ غیر ناطق عدد۔

مثال 2.10

0.12 اور 0.13 کے درمیان کو 3 غیر ناطق اعداد معلوم کیجئے۔



حل :

0.12 اور 0.13 کے درمیان تین غیر ناطق اعداد یہ ہیں۔

0.12010010001..., 0.12040040004..., 0.12070070007...

غور کیجئے

یہ ایک اہم نتیجہ (ثبوت کے بغیر) ہے اسے ذہن نشین کرلیں۔ اگر 'a' ایک ناطق عدد اور '$\sqrt{b}$' ایک غیر ناطق عدد، ہو تو ذیل میں سے ہر ایک غیر ناطق عدد ہوں گے

(i) $a + \sqrt{b}$; (ii) $a - \sqrt{b}$; (iii) $a\sqrt{b}$; (iv) $\frac{a}{\sqrt{b}}$; (v) $\frac{\sqrt{b}}{a}$.

مثال کے طور پر، فرض کیجئے کہ 4 ایک ناطق عدد اور $\sqrt{5}$ ایک غیر ناطق عدد ہو تو۔

$4 + \sqrt{5}$, $4 - \sqrt{5}$, $4\sqrt{5}$, $\frac{4}{\sqrt{5}}$, $\frac{\sqrt{5}}{4}$ ------- یہ سب غیر ناطق اعداد ہیں۔

9 maths 2 real numbers
Tuesday, March 12, 2019 3:38:38 PM

مثال 2.11 0.5151151115... اور 0.5353353335.. کے درمیان کو دو ناطق اعداد معلوم کیجئے۔

حل : دیئے گئے دو غیر ناطق اعداد کے درمیان 0.5152 اور 0.5352 دو ناطق اعداد ہیں۔

غور کیجئے

ان مثالوں سے یہ واضح ہے کہ کسی بھی دو غیر ناطق اعداد کا حاصل جمع، فرق، حاصل ضرب یا تقسیم ناطق یا غیر ناطق ہو سکتا ہے۔

مثال 2.12 مندرجہ ذیل میں معلوم کیجئے کہ x اور y ناطق اعداد یا غیر ناطق ہیں؟

(i) $a = 2 + \sqrt{3}$, $b = 2 - \sqrt{3}$; $x = a + b$, $y = a - b$

(ii) $a = \sqrt{2} + 7$, $b = \sqrt{2} - 7$; $x = a + b$, $y = a - b$

(iii) $a = \sqrt{75}$, $b = \sqrt{3}$; $x = ab$, $y = \frac{a}{b}$

(iv) $a = \sqrt{18}$, $b = \sqrt{3}$; $x = ab$, $y = \frac{a}{b}$

حل :

(i) $a = 2 + \sqrt{3}$, $b = 2 - \sqrt{3}$ دیا گیا ہے

$x = a + b = (2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 4$,

$y = a - b = (2 + \sqrt{3}) - (2 - \sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$ غیر ناطق عدد ہے

(ii) $a = \sqrt{2} + 7$, $b = \sqrt{2} - 7$ دیا گیا ہے

$x = a + b = (\sqrt{2} + 7) + (\sqrt{2} - 7) = 2\sqrt{2}$ غیر ناطق عدد ہے

$y = a - b = (\sqrt{2} + 7) - (\sqrt{2} - 7) = 14$, ناطق عدد ہے

(iii) $a = \sqrt{75}$, $b = \sqrt{3}$ دیا گیا ہے

$x = ab = \sqrt{75} \times \sqrt{3} = \sqrt{75 \times 3} = \sqrt{5 \times 5 \times 3 \times 3} = 5 \times 3 = 15$ ناطق عدد ہے

$y = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{75}{3}} = \sqrt{25} = 5$ ناطق عدد ہے

(iv) $a = \sqrt{18}$, $b = \sqrt{3}$ دیا گیا ہے

$x = ab = \sqrt{18} \times \sqrt{3} = \sqrt{18 \times 3} = \sqrt{6 \times 3 \times 3} = 3\sqrt{6}$ غیر ناطق عدد ہے

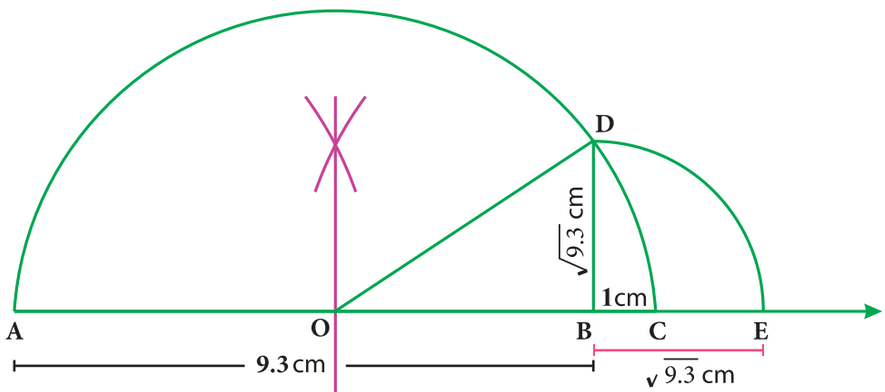
$y = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{18}{3}} = \sqrt{6}$ غیر ناطق عدد ہے

مثال 2.13 $\sqrt{9.3}$ کو عددی خط پر نمائندگی کیجئے۔

- ایک خط کھینچئے اور اس پر نقطہ A نشان کیجئے۔
- نقطہ B اس طرح نشان کیجئے کہ سم AB=9.3 ہو
- اور نقطہ C اس طرح نشان کیجئے کہ 1 اکائی BC= ہو
- AC پر عمودی ناصف بنایئے پھر AC کا وسطی نقطہ نشان کیجئے اور اسے 'O' نام دیجئے۔
- O کو مرکز مان کر اور OC=OA نصف قطر لے کر، ایک نصف دائرہ کھینچئے۔

Untitled-1
Wednesday, January 25, 2023 5:29:05 PM

⊂ B پر AD کے عمود میں خط BD کھینچئے۔ ⊂ اب $BD = \sqrt{9.3}$ جو عددی خط پر $BE = BD = \sqrt{9.3}$ کی قیمت نشان کر سکتے ہیں۔



خاکہ 2.8

مشق 2.3

1۔ ذیل کے غیر ناطق اعداد کو عددی خط پر نمائندگی کیجئے۔

(i) $\sqrt{3}$ (ii) $\sqrt{4.7}$ (iii) $\sqrt{6.5}$

2۔ ذیل میں دیئے گئے اعداد کے درمیان کئی دو غیر ناطق اعداد معلوم کیجئے۔

(i) 0.3020020002.... اور 0.30100110001111....

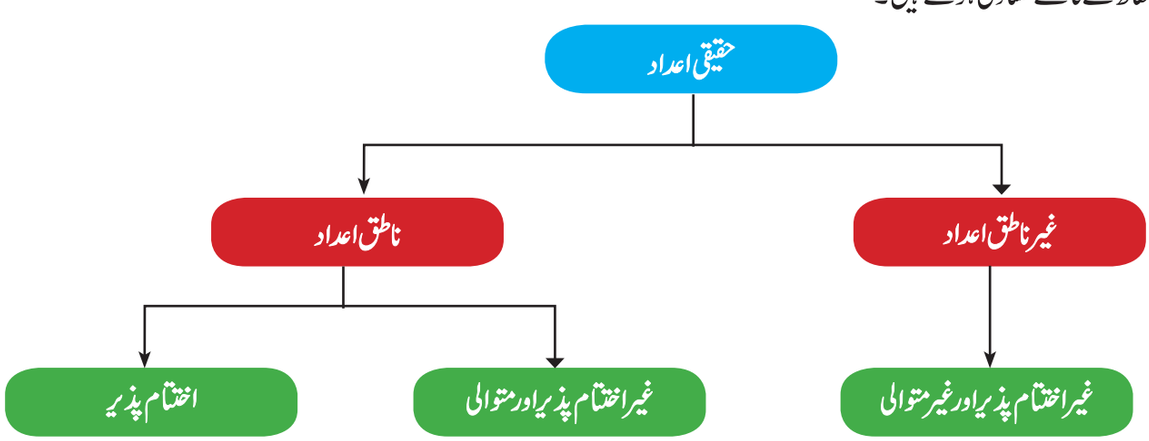
(ii) $\frac{6}{7}$ اور $\frac{12}{13}$ (iii) $\sqrt{2}$ اور $\sqrt{3}$ (iv) 0.12 اور 0.13

3۔ 2.2360679... اور 2.236505500... کے درمیان کوئی دو ناطق اعداد معلوم کیجئے۔

2.4 حقیقی اعداد : (Real Numbers)

حقیقی اعداد میں تمام ناطق اعداد اور تمام غیر ناطق اعداد پائے جاتے ہیں۔

حقیقی اعداد کو ایک طویل لامحدود عددی خط کے نقاط سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جسے ہم حقیقی خط (Real Line) کہتے ہیں۔ جہاں سالم اعداد کے بالترتیب نقاط کے فاصلے مساوی ہوتے ہیں۔



9 maths 2 real numbers
Tuesday, March 12, 2019 3:38:39 PM

کسی بھی حقیقی عدد کو معلوم کرنے کے لئے، لامحدود عشری توسیع سے ظاہر کر سکتے ہیں (ہم ناطق اعداد اور غیر ناطق اعداد کے عشری توسیع کو پہلے ہی دیکھ چکے ہیں)

2.4.1 حقیقی عددی خط (The Real Number Line)

مسلسل بڑا کر کے دیکھنا۔

ایک عددی خط میں اعداد کو اس طرح ظاہر کرنا گویا کہ ہم انہیں ایک مکبر شیشے (Magnifying glass) کے ذریعے دیکھ رہے ہوں۔

مثال 2.14 4.863 کو عددی خط پر ظاہر کیجئے۔

حل : 4.863 ، 4 اور 5 کے درمیان واقع ہے۔ (خاکہ 2.9 دیکھیں)

i) 4 اور 5 درمیانی فاصلے کو 10 مساوی حصوں میں تقسیم کریں۔

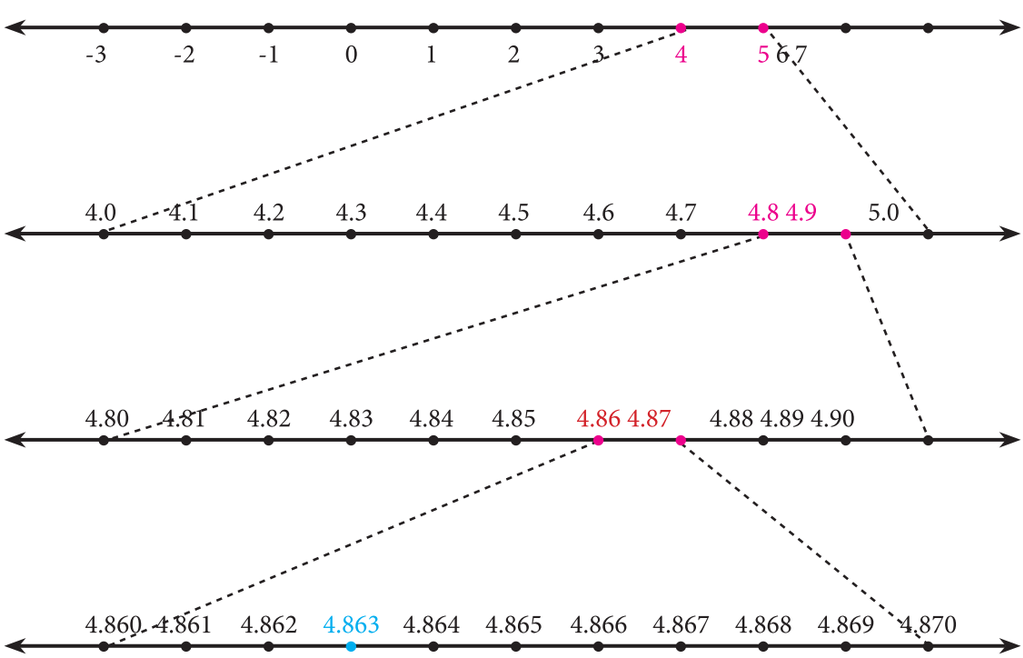
ii) 4.8 کو نشان کریں جو 5 کے بائیں جانب سے دوسرا مقام پر ہے اور 4 کے دائیں جانب سے 8 ویں مقام پر ہے۔

iii) 4.86، 4.8 اور 4.9 کے درمیان واقع ہے۔ اس کے درمیانی فاصلے کو 10 مساوی حصوں میں تقسیم کریں۔

iv) 4.86 کو نشان کریں جو 4.9 کے بائیں جانب سے 4 ویں مقام پر ہے اور 4.8 کے دائیں جانب سے 6 ویں مقام پر ہے۔

v) 4.863 ، 4.86 اور 4.87 کے درمیان واقع ہے۔ اس کے درمیانی فاصلے کو 10 مساوی حصّوں میں تقسیم کریں۔

vi) 4.863 کو نشان کریں جو 4.87 کے بائیں جانب سے 7 ویں مقام پر ہے اور 4.86 کے دائیں جانب سے 3 ویں مقام پر ہے۔



خاکہ 2.9

مثال 2.15 $3.\overline{45}$ کو عددی خط پر اعشاریہ کے چار مقامات تک ظاہر کیجئے۔

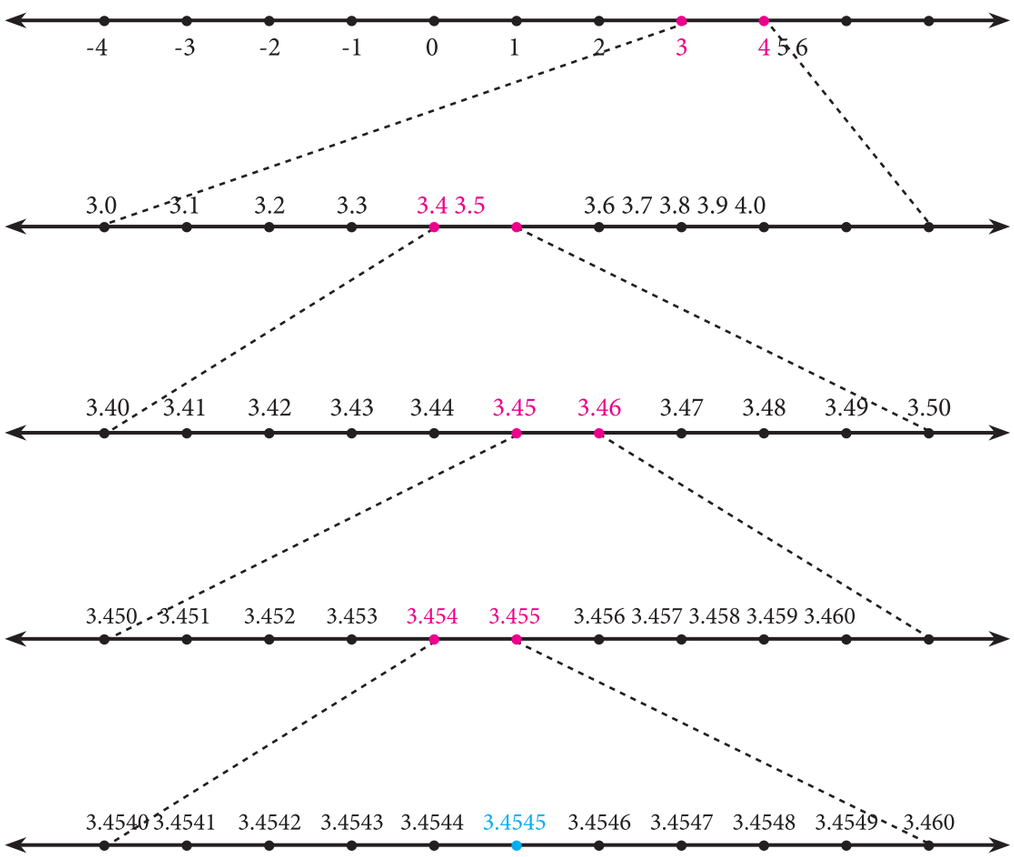
حل :

$$3.\overline{45} = 3.45454545.....$$

9 maths 2 real numbers
Tuesday, March 12, 2019 3:38:39 PM

(اعشاریہ کے 4 مقامات تک درست کریں) = 3.4545

یہ عدد 3 اور 4 کے درمیان واقع ہے۔



خاکہ 2.10

مشق 2.4

1۔ مندرجہ ذیل اعداد کو عددی خط پر ظاہر کیجئے۔

(i 5.348 (ii $6.\overline{4}$ کو اعشاریہ کے 3 مقامات تک (iii $4.\overline{73}$ کو اعشاریہ کے چار مقامات تک۔

2.5 جذری عدد کی ترقیم (Radical Notation)

فرض کیجئے n ایک مثبت سالم عدد اور r ایک حقیقی عدد ہے۔ اگر $r^n = x$ ہو تو r ، x کا n واں جذر کہلائے گا اور ہم اس کو اس طرح لکھتے ہیں۔

$$\sqrt[n]{x} = r$$

$\sqrt[n]{}$ نشان (n واں جذر پڑھتے ہیں) کو جذری عدد کہتے ہیں۔ جذری عدد کا قوت n ہے۔ (اب تک ہم قوت کے طور پر نام دیتے ہیں) اور x کو جذری قاعدہ (Radicand) کہتے ہیں۔

غور کیجئے

سرڈ کو بہتر انداز سے سمجھنے کے لئے ہمیں جذر المربع اور جذر المکعب کے بارے میں جاننا ضروری ہے۔

9 maths 2 real numbers
Tuesday, March 12, 2019 3:38:39 PM

جب $n = 2$ ہوتو کیا ہوگا ؟ اس طرح $r^2 = x$ حاصل ہوا ہے۔ r تاکہ $\sqrt[2]{x}$ ہو۔ ہمارے پرانے بہترین دوست x کا جذرالمربع ہے۔ اس لئے $\sqrt[2]{16}$ کو $\sqrt{16}$ لکھتے ہیں۔ اور $n = 3$ ہوتو ہمیں x کا جذرالمکعب حاصل ہوتا ہے۔ یعنی $\sqrt[3]{x}$ مثال کے طور پر 8 کا جذرالمکعب $\sqrt[3]{8}$ کہتے ہیں جس کا حل 2 ہے (کیا $2^3 = 8$ نہیں ہے ؟)

4 کے کتنے جذرالمربع ہوتے ہیں ؟ جبکہ $(+2)\times(+2) = 4$ اور $(-2)\times(-2) = 4$ ہم کہہ سکتے ہیں کہ $+2$ اور -2 دونوں 4 کے جذرالمربع ہیں۔ لیکن $\sqrt{4} = \pm 2$ کی طرح لکھنا صحیح نہیں ہے۔ کیونکہ جب n ایک جفت ہوتو $\sqrt[n]{x}$ نشان میں تبدیل کرکے لکھنا بھی قابل قبول ہوگا۔اورمنفی n ویں جذر کو $-\sqrt[n]{x}$ کے طور پر ظاہر کیاجاتاہے چنانچہ ہمیں $\sqrt{4} = 2$ اور $-\sqrt{4} = -2$ کی طرح لکھنا ہوگا۔

جب n طاق ہوتو x کی کسی بھی قیمت کے لئے ٹھیک ایک حقیقی n واں جذر ہے۔

مثال کے طور پر $\sqrt[3]{8} = 2$ اور $\sqrt[5]{-32} = -2$ ہے

ذرا سوچئے

ذیل میں کونسا غلط ہے ؟

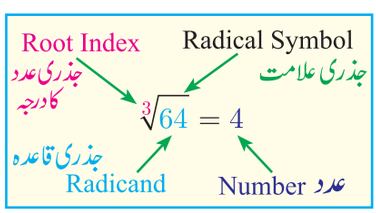
(a) 9 کا جذرالمربع 3 ہے یا -3 ؟

(b) $\sqrt{9} = 3$

(c) $-\sqrt{9} = -3$

(d) $\sqrt{9} = \pm 3$

2.5.1 کسری قوت (Fractional Index)



دو بارہ،نتائج کے اس شکل $r = \sqrt[n]{x}$ پرغورکریں۔ متصل ترقیم میں جذری عدد کا درجہ (یعنی n یہاں 3 ہے) آپ بتایئے کتنی بار جواب (یعنی 4 ہے) خود کو اسی سے ضرب دینے پر جذری قاعدہ حاصل ہوتا ہے۔

جذروں اور قوتوں کی نمائندگی کا ایک اور طریقہ ہے۔ کسری قوت نماؤں کے استعمال میں یہ شامل ہے۔

$\sqrt[n]{x}$ کو ہم $x^{\frac{1}{n}}$ لکھتے ہیں

اس ترقیم کو اس مثال میں دیکھیں گے۔

$\sqrt[3]{64}$ کو $64^{\frac{1}{3}}$ اور $\sqrt{25}$ کو $25^{\frac{1}{2}}$ کے طور پر لکھا جاتا ہے۔

مندرجہ ذیل جدول پر غور کرنے سے ہمیں چند نئے نمونوں کی واقفیت ہوتی ہے۔

Power قوت	Radical Notation جذری علامت	Index Notation قوت کی ترقیم	Read as اس طرح پڑھتے ہیں
$2^6 = 64$	$2 = \sqrt[6]{64}$	$2 = 64^{\frac{1}{6}}$	64 کا 6 واں جذر 2 ہے
$2^5 = 32$	$2 = \sqrt[5]{32}$	$2 = 32^{\frac{1}{5}}$	32 کا 5 واں جذر 2 ہے
$2^4 = 16$	$2 = \sqrt[4]{16}$	$2 = 16^{\frac{1}{4}}$	16 کا 4 واں جذر 2 ہے
$2^3 = 8$	$2 = \sqrt[3]{8}$	$2 = 8^{\frac{1}{3}}$	8 کا جذرالمکعب 2 ہے جس کے معنی 8 کا 3 واں جذر 2 ہے
$2^2 = 4$	$2 = \sqrt[2]{4}$ or simply $2 = \sqrt{4}$	$2 = 4^{\frac{1}{2}}$	4 کا جذرالمربع 2 ہے جس کے معنی 4 کا 2 واں جذر 2 ہے

9 maths 2 real numbers
Tuesday, March 12, 2019 3:38:40 PM

مثال 2.16

ذیل کو 2^n کی شکل میں ظاہر کیجئے۔

(i) 8 (ii) 32 (iii) $\frac{1}{4}$ (iv) $\sqrt{2}$ (v) $\sqrt{8}$.

حل :

(i) $8 = 2\times2\times2;$ $\therefore\ 8 = 2^3$

(ii) $32 = 2\times2\times2\times2\times2 = 2^5$

(iii) $\frac{1}{4} = \frac{1}{2\times2} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2}$

(iv) $\sqrt{2} = 2^{1/2}$

(v) $\sqrt{8} = \sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^3$ $2^{\frac{3}{2}}$ کی طرح بھی لکھ سکتے ہیں

$x^{\frac{m}{n}}$ کے معنی (جس میں m اور n مثبت سالم عدد ہیں)

ہم $x^{\frac{m}{n}}$ کی تشریح x کی m ویں قوت کا n واں جذر یا x کے n ویں جذر کی m ویں قوت سے کرتے ہیں۔

علامتوں میں $x^{\frac{m}{n}} = (x^m)^{\frac{1}{n}}$ or $(x^{\frac{1}{n}})^m = \sqrt[n]{x^m}$ or $(\sqrt[n]{x})^m$

مثال 2.17

قیمت معلوم کیجئے (i) $81^{\frac{5}{4}}$ (ii) $64^{\frac{-2}{3}}$

حل :

(i) $81^{\frac{5}{4}} = \left(\sqrt[4]{81}\right)^5 = \left(\sqrt[4]{3^4}\right)^5 = 3^5 = 3\times3\times3\times3\times3 = 243$

(ii) $64^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{64^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{64}\right)^2} = \frac{1}{4^2}$ (کیسے؟) $= \frac{1}{16}$

مشق 2.5

1۔ ذیل کو 5^n کی شکل میں لکھئے۔

(i) 625 (ii) $\frac{1}{5}$ (iii) $\sqrt{5}$ (iv) $\sqrt{125}$

2۔ ذیل کو 4^n کی شکل میں لکھئے۔

(i) 16 (ii) 8 (iii) 32

3۔ قیمت معلوم کیجئے۔

(i) $(49)^{\frac{1}{2}}$ (ii) $(243)^{\frac{2}{5}}$ (iii) $9^{\frac{-3}{2}}$ (iv) $\left(\frac{64}{125}\right)^{\frac{-2}{3}}$

4۔ کسری قوت کے استعمال سے لکھئے۔

(i) $\sqrt{5}$ (ii) $\sqrt[2]{7}$ (iii) $\left(\sqrt[3]{49}\right)^5$ (iv) $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{100}}\right)^7$

9 maths 2 real numbers
Tuesday, March 12, 2019 3:38:40 PM

5۔ 5 واں جذر معلوم کیجئے۔

(i) 32 (ii) 243 (iii) 100000 (iv) $\frac{1024}{3125}$

2.6 سرڈ : (Surds)

حقیقی عدد کے تصور سے واقف ہیں اس کی نمائندگی کو عددی خط میں ظاہر کرتے ہیں۔اب ہم سرڈ کے بارے میں سیکھیں گے۔بعض تقریبی قیمت کی نمائندگی کرنے کا ایک مخصوص طریقہ ہے۔

کیا تم $\sqrt{4}$ کو مختصر کرکے اور $\sqrt{}$ کی نشان کو ہٹا سکتے ہو ؟ ہاں ؛ ہم $\sqrt{4}$ کو تبدیل کرکے عدد 2 لکھتے ہیں۔ $\sqrt{\frac{1}{9}}$ کو کس طرح لکھوگے ؟ یہ آسان ہے۔ بغیر $\sqrt{}$ نشان کے، اس کا جواب $\frac{1}{3}$ ہے۔ $\sqrt{0.01}$ کا حل کیا ہے ؟ یہ بھی آسان ہے اور اس کا حل 0.1 ہے۔

$\sqrt{4}$ ، $\sqrt{\frac{1}{9}}$ اور $\sqrt{0.01}$ کے ان کو حل کرنے سے ہمیں ایک جواب حاصل ہوا۔اور اس بات کو یقینی بنائے کہ تمہارے اس جواب میں $\sqrt{}$ کا نشان نظر نہ آئے۔ کیا یہ ہر وقت ممکن ہے ؟

$\sqrt{18}$ لیجئے۔ کیا آپ اس کو محسوب کرکے جذری نشان بھی خارج کر سکتے ہو ؟ حل نہ ہونے والے جذری عددوں کو سرڈ کہتے ہیں۔ اس طرح سے 2 کا جذرالمربع، 5 کا جذرالمکعب وغیرہ ہیں۔ وہ مساوات کے غیر ناطق جذور ہیں جس کے ناطق ضریب ہیں۔

سرڈ ایک ناطق عدد کا ایک غیر ناطق جذر ہے۔ $\sqrt[n]{a}$ ایک سرڈ ہے۔ $n \in \mathbb{N}$ ، $n > 1$ ہے۔ ' a ' ایک ناطق عدد ہے۔

مثالیں : $\sqrt{2}$ ایک سرڈ ہے۔ مساوات $x^2 = 2$ کے غیر ناطق جذر ہے۔ (نوٹ کریں مساوات $x^2 - 2 = 0$ میں ناطق ضریب ہیں۔ $\sqrt{2}$ ایک غیر ناطق عدد ہے اور 1.4142135... کو غیر متوالی، غیر اختتام پذیر عشری طور پر دکھایا جا سکتا ہے۔)

$\sqrt[3]{3}$ (مساوی/ یکساں ہے $3^{\frac{1}{3}}$ کے) ایک سرڈ ہے۔ چونکہ مساوات $x^3 - 3 = 0$ کے غیر ناطق جذر ہیں۔ ($\sqrt{3}$ ایک غیر ناطق ہے اور 1.7320508... کو غیر متوالی، غیر اختتام پذیر عشری طور پر دکھایا جا سکتا ہے۔)

ہم (دو درجی) مساوات $x^2 - 6x + 7 = 0$ کو حل کرنا اگلی کلاس میں سیکھیں گے۔ اس مساوات کے ناطق ضریبیں ہیں اور اس کا ایک جذر $3 + \sqrt{2}$ ہے جو ایک سرڈ ہے۔ کیا $\sqrt{\frac{1}{25}}$ سرڈ ہے ؟ نہیں، اس کو ہم مختصر کرکے ناطق عدد $\frac{1}{5}$ کے طور پر لکھ سکتے ہیں۔ $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$ کیا یہ سرڈ ہے ؟ یہ سرڈ نہیں ہے۔ کیونکہ اس کو ہم مختصر کرکے $\frac{2}{3}$ کے طور پر لکھ سکتے ہیں۔

ایک مشہور غیر ناطق عدد π سرڈ نہیں ہے۔ جبکہ π ایک غیر ناطق عدد ہے۔ اس کو $\sqrt{}$ نشان میں ناطق عدد کے طور پر ظاہر نہیں کر سکتے (دوسرے الفاظ میں ناطق ضریب میں کسی بھی مساوات کا جذر نہیں ہے)

9 maths 2 real numbers
Tuesday, March 12, 2019 3:38:41 PM

سرڈ کیوں اہم ہیں ؟ حسابات کو حل کرنے کے مقاصد کے لئے ہم تقریبی قیمت $\sqrt{2} = 1.414, \sqrt{3} = 1.732$ وغیرہ وغیرہ استعمال کرتے ہیں۔

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(1.414\right)^2 = 199936 \neq 2 \; ; \quad \left(\sqrt{3}\right)^2 = \left(1.732\right)^2 = 3999824 \neq 3$$

لہٰذا ، ہم نے غور کیا کہ $\sqrt{2}$ اور $\sqrt{3}$ سے حاصل ہونے والی قیمتیں مفروضی قیمتوں سے زیادہ درست اور مختصر ہوتی ہیں۔

فنِ تعمیر اور پل کے تعمیر کے دوران انجینئر اور سائنسدانوں کو زیادہ درست قیمت کی ضرورت پڑتی ہے۔ چنانچہ سرڈ کے بارے میں سیکھنا بہت ضروری ہے۔

Progress Check معلومات کی جانچ

1۔ ان میں سے کونسا مختلف (غیر موزوں) ہے ؟ اپنے جواب کی تصدیق کیجئے

(i) $\sqrt{36}, \sqrt{\frac{50}{98}}, \sqrt{1}, \sqrt{1.44}, \sqrt[5]{32}, \sqrt{120}$

(ii) $\sqrt{7}, \sqrt{48}, \sqrt[3]{36}, \sqrt{5}+\sqrt{3}, \sqrt{1.21}, \sqrt{\frac{1}{10}}$

2۔ کیا تمام سرڈ غیر ناطق اعداد ہیں ؟ اپنے جواب کے ساتھ بحث کیجئے ۔

3۔ کیا تمام غیر ناطق اعداد سرڈ ہیں ؟ چند مثالوں سے تصدیق کیجئے ۔

2.6.1 سرڈ کا درجہ (Order of a Surd) :

ایک سرڈ کا درجہ وہ ہے جو جذر کے قوت کو نکالتے ہیں۔ سرڈ $\sqrt[n]{a}$ کا درجہ n ہے۔ $\sqrt[5]{99}$ کا درجہ کیا ہے ؟ 5 ہے۔

i) یکساں درجہ کے سرڈ : (Surds of same order)

یکساں درجہ کے سرڈ وہ ہیں۔ جس میں جذر کے قوت یکساں ہوتے ہیں۔ (یہ یکساں جذور کے سرڈ کہلاتے ہیں)

مثال کے طور پر

$\sqrt{x}, \; a^{\frac{3}{2}}, \; \sqrt[2]{m}$ یہ تمام 2 ویں درجے کے (دو درجی) سرڈ کہلاتے ہیں۔

$\sqrt[3]{5}, \; \sqrt[3]{(x-2)}, \; (ab)^{\frac{1}{3}}$ یہ تمام 3 ویں درجے کے (مکعبی) سرڈ کہلاتے ہیں۔

$\sqrt{3}, \; \sqrt[3]{10}, \; \sqrt[4]{6}$ اور $8^{\frac{2}{5}}$ مختلف درجے کے سرڈ ہیں۔

ii) سرڈ کی مختصر ترین شکل : (Simplest form of surds)

سرڈ کی مختصر ترین شکل اس وقت کہتے ہیں جب ناطق جزوضربی اور غیر ناطق جزوضربی کے حاصل ضرب کے طور پر ظاہر کرتے ہو۔

اس صورت میں سرڈ

a) سب سے چھوٹا ممکن جذری نشان ہو۔

b) جذری نشان پر کوئی کسر نہیں ہوتا ۔

c) a^n کی صورت میں کوئی جزوضربی نہیں ہے۔ جس میں ' a ' ایک مثبت سالم اعداد جس کی قوت n ہے۔

9 maths 2 real numbers
Tuesday, March 12, 2019 3:38:41 PM

مثال 2.18

ذیل کے اعداد کو یکساں ترتیب کے سرڈ میں تبدیل کیجئے۔

(i) $\sqrt{3}$ (ii) $\sqrt[4]{3}$ (iii) $\sqrt[3]{3}$

حل :

(i) $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$

$= 3^{\frac{6}{12}}$

$= \sqrt[12]{3^6}$

$= \sqrt[12]{729}$

(ii) $\sqrt[4]{3} = 3^{\frac{1}{4}}$

$= 3^{\frac{3}{12}}$

$= \sqrt[12]{3^3}$

$= \sqrt[12]{27}$

(iii) $\sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}}$

$= 3^{\frac{4}{12}}$

$= \sqrt[12]{3^4}$

$= \sqrt[12]{81}$

آخری صف یکساں درجہ کے سرڈ رکھتے ہیں۔

مثال 2.19

1۔ سرڈ کو مختصر ترین شکل میں ظاہر کیجئے۔ i) $\sqrt{8}$ ii) $\sqrt[3]{192}$

2۔ ثابت کیجئے۔ $\sqrt[3]{7} > \sqrt[4]{5}$

حل :

1. (i) $\sqrt{8} = \sqrt{4\times 2} = 2\sqrt{2}$

(ii) $\sqrt[3]{192} = \sqrt[3]{4\times 4\times 4\times 3} = 4\sqrt[3]{3}$

2. $\sqrt[3]{7} = \sqrt[12]{7^4} = \sqrt[12]{2401}$

$\sqrt[4]{5} = 5^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{3}{12}} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125}$

$\sqrt[12]{2401} > \sqrt[12]{125}$

لہذا $\sqrt[3]{7} > \sqrt[4]{5}$.

iii) خالص اور مخلوط سرڈ : (Pure and Mixed Surds)

سرڈ جن کے ضریب مختصر ترین شکل میں 1 ہوں وہ خالص سرڈ (Pure surd) کہلاتے ہیں۔

مثال کے طور پر $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[4]{7}$, $\sqrt[5]{49}$ خالص سرڈ ہیں۔

سرڈ جن کے ضریب مختصر ترین شکل میں 1 کے علاوہ ہوں وہ مخلوط سرڈ (Mixed Surd) کہلاتے ہیں۔

مثال کے طور پر $5\sqrt{3}$, $2\sqrt[4]{5}$, $3\sqrt[4]{6}$ مخلوط سرڈ ہیں۔

iv) سادہ اور مرکب سرڈ : (Simple and Compound Surds)

سرڈ جو واحد رقم رکھتا ہے۔ سادہ سرڈ کہلاتا ہے۔ مثال کے طور پر $\sqrt{3}$, $2\sqrt{5}$ سادہ سرڈ ہیں۔

دو یا (دو سے زیادہ) الجبریائی سرڈوں کا حاصل جمع ، مرکب سرڈ کہلاتا ہے۔ مثال کے طور پر

$\sqrt{5}+3\sqrt{2}, \sqrt{3}-2\sqrt{7}, \sqrt{5}-7\sqrt{2}+6\sqrt{3}$ مرکب سرڈ کہلاتے ہیں۔

9 maths 2 real numbers
Tuesday, March 12, 2019 3:38:42 PM

v) دورقمی سرڈ : (Binomial Surds)

دورقمی سرڈ وہ ہے۔ جو دو الجبریائی ارقام کا حاصل جمع (یا فرق) ہے جس میں دونوں سرڈ ہوسکتے ہیں یا ان میں ایک ناطق عدد اور دوسرا سرڈ ہوسکتا ہے۔ مثال کے طور پر $\frac{1}{2} - \sqrt{19}, 5 + 3\sqrt{2}, \sqrt{3} - 2\sqrt{7}$ دورقمی سرڈ ہیں۔

مثال 2.20 صعودی ترتیب میں لکھئے۔ $\sqrt[3]{2},\ \sqrt[2]{4},\ \sqrt[4]{3}$

$\sqrt[3]{2}, \sqrt[2]{4}$ اور $\sqrt[4]{3}$ سرڈوں کی ترتیب 3 ، 2 ، 4 ہے۔

L.C.M کا $3, 2, 4 = 12$.

$$\sqrt[3]{2} = \left(2^{\frac{1}{3}}\right) = \left(2^{\frac{4}{12}}\right) = \sqrt[12]{2^4} = \sqrt[12]{16} \quad ; \quad \sqrt[2]{4} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right) = \left(4^{\frac{6}{12}}\right) = \sqrt[12]{4^6} = \sqrt[12]{4096}$$

$$\sqrt[4]{3} = \left(3^{\frac{1}{4}}\right) = \left(3^{\frac{3}{12}}\right) = \sqrt[12]{3^3} = \sqrt[12]{27}$$

$\sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{3}, \sqrt[2]{4}$ سرڈوں کی صعودی ترتیب $\sqrt[12]{16} < \sqrt[12]{27} < \sqrt[12]{4096}$ ہے۔

یعنی $\sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{3}, \sqrt[2]{4}$ ہے۔

2.6.2 جذری عددوں کا اصول : (Laws of Radicals)

n ، m مثبت سالم اعداد ہیں اور a اور b مثبت ناطق اعداد کے لئے جذری عددوں کے مندرجہ ذیل خصوصیات کو یاد رکھیں۔

S.No.	Radical Notation جذری ترقیم	Index Notation قوت کی ترقیم
1.	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a = \sqrt[n]{a^n}$	$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a = \left(a^n\right)^{\frac{1}{n}}$
2.	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	$a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}$
3.	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$	$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{mn}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}$
4.	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	$\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$

ZJCXB

اب ہم جذری عددوں کے اصول کو مختصر کرنے کے لئے تبادلہ خیال کریں گے۔

مثال 2.21 ذیل کے ہر ایک سرڈ کو مختصر ترین شکل میں ظاہر کیجئے۔ (i) $\sqrt[3]{108}$ (ii) $\sqrt[3]{(1024)^{-2}}$

اور اس کا درجہ ، جذری قاعدہ اور ضریب بھی معلوم کیجئے۔

9 maths 2 real numbers
Tuesday, March 12, 2019 3:38:42 PM

حل :

2	108
2	54
3	27
3	9
3	3
	1

(i) $\sqrt[3]{108} = \sqrt[3]{27\times 4}$

$= \sqrt[3]{3^3\times 4}$

$= \sqrt[3]{3^3}\times\sqrt[3]{4}$ [جذری عددوں کا اصول (ii)]

$= 3\times\sqrt[3]{4}$ [جذری عددوں کا اصول (i)]

ضریب = 3 ؛ جذری قاعدہ = 4 ؛ درجہ = 3

2	1024
2	512
2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

(ii) $\sqrt[3]{(1024)^{-2}} = \left[\sqrt[3]{\left(2^3\times 2^3\times 2^3\times 2\right)^{-2}}\right]$

$= \left[\sqrt[3]{\left(2^3\times 2^3\times 2^3\times 2\right)}\right]^{-2}$ [جذری عددوں کا اصول (i)]

$= \left[\sqrt[3]{2^3}\times\sqrt[3]{2^3}\times\sqrt[3]{2^3}\times\sqrt[3]{2}\right]^{-2}$ [جذری عددوں کا اصول (ii)]

$= \left[2\times 2\times 2\times\sqrt[3]{2}\right]^{-2}$ [جذری عددوں کا اصول (i)]

$= \left[8\times\sqrt[3]{2}\right]^{-2} = \left[\frac{1}{8}\right]^2\times\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^2$

$= \frac{1}{64}\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

ضریب = $\frac{1}{64}$ ؛ جذری قاعدہ = $\frac{1}{4}$ ؛ درجہ = 3

(یہ نتائج بھی قوت نما کی ترقیم کا استعمال کرتے ہوئے حاصل کئے جاسکتے ہیں)

غور کیجئے

اعداد 5 اور 6 لیجئے ۔ جس کو $5 = \sqrt{25}$ اور $6 = \sqrt{36}$ کی طرح لکھئے۔

لہذا 5 اور 6 کے درمیانی سرڈ $\sqrt{26}, \sqrt{27}, \sqrt{28}, \sqrt{29}, \sqrt{30}, \sqrt{31}, \sqrt{32}, \sqrt{33}, \sqrt{34}$ اور $\sqrt{35}$

فرض کریں $3\sqrt{2} = \sqrt{3^2\times 2} = \sqrt{18}$, $2\sqrt{3} = \sqrt{2^2\times 3} = \sqrt{12}$

لہذا $2\sqrt{3}$ اور $3\sqrt{2}$ کے درمیانی سرڈ $\sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}, \sqrt{17}$ ہیں۔

2.6.3 سرڈوں پر چار بنیادی اعمال : (Four Basic Operations on Surds)

i) سرڈوں کی جمع اور تفریق : (Addition and Subtraction of Surds)

ذیل کے اصولوں کو استعمال کرکے یکساں سرڈ کی جمع اور تفریق کرسکتے ہیں۔

$a\sqrt[n]{b} \pm c\sqrt[n]{b} = (a \pm c)\sqrt[n]{b}$ جس میں $b > 0$ ہے۔

9 maths 2 real numbers
Tuesday, March 12, 2019 3:38:42 PM

مثال 2.22

i) $3\sqrt{7}$ اور $5\sqrt{7}$ کو جمع کیجئے حاصل جمع، ناطق یا غیرناطق ہے جانچئے۔

ii) $4\sqrt{5}$ کو $7\sqrt{5}$ سے تفریق کیجئے۔ کیا جواب ناطق یا غیرناطق ہے؟

حل :

(i) $3\sqrt{7}+5\sqrt{7} = (3+5)\sqrt{7} = 8\sqrt{7}$ جواب غیرناطق ہے۔

(ii) $7\sqrt{5}-4\sqrt{5} = (7-4)\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$. جواب غیرناطق ہے۔

مثال 2.23

مندرجہ ذیل کو مختصر کریں :

(i) $\sqrt{63}-\sqrt{175}+\sqrt{28}$ (ii) $2\sqrt[3]{40}+3\sqrt[3]{625}-4\sqrt[3]{320}$

حل :

(i) $\sqrt{63}-\sqrt{175}+\sqrt{28} = \sqrt{9\times7}-\sqrt{25\times7}+\sqrt{4\times7}$

$= 3\sqrt{7}-5\sqrt{7}+2\sqrt{7}$

$= \left(3\sqrt{7}+2\sqrt{7}\right)-5\sqrt{7}$

$= 5\sqrt{7}-5\sqrt{7}$

$= 0$

(ii) $2\sqrt[3]{40}+3\sqrt[3]{625}-4\sqrt[3]{320}$

$= 2\sqrt[3]{8\times5}+3\sqrt[3]{125\times5}-4\sqrt[3]{64\times5}$

$= 2\sqrt[3]{2^3\times5}+3\sqrt[3]{5^3\times5}-4\sqrt[3]{4^3\times5}$

$= 2\times2\sqrt[3]{5}+3\times5\sqrt[3]{5}-4\times4\sqrt[3]{5}$

$= 4\sqrt[3]{5}+15\sqrt[3]{5}-16\sqrt[3]{5}$

$= (4+15-16)\sqrt[3]{5} = 3\sqrt[3]{5}$

iii) سرڈوں کی ضرب اور تقسیم : (Multiplication and Division of Surds)

ذیل کے اصولوں کے استعمال سے یکساں سرڈ کو ضرب یا تقسیم کرسکتے ہیں۔

Multiplication property of surds سرڈوں کے ضرب کی خاصیت	Division property of surds سرڈوں کے تقسیم کی خاصیت
(i) $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	(iii) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
(ii) $a\sqrt[n]{b}\cdot c\sqrt[n]{d} = ac\sqrt[n]{bd}$ where $b,d>0$	(iv) $\frac{a\sqrt[n]{b}}{c\sqrt[n]{d}} = \frac{a}{c}\sqrt[n]{\frac{b}{d}}$ where $b,d>0$

9 maths 2 real numbers
Tuesday, March 12, 2019 3:38:43 PM

مثال 2.24

$\sqrt[3]{16}$ اور $\sqrt[3]{40}$ کو ضرب دیجئے۔

حل :

$$\sqrt[3]{40} \times \sqrt[3]{16} = \left(\sqrt[3]{2\times 2\times 2\times 5}\right) \times \left(\sqrt[3]{2\times 2\times 2\times 2}\right)$$

$$= \left(2\times\sqrt[3]{5}\right)\times\left(2\times\sqrt[3]{2}\right) = 4\times\left(\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{5}\right) = 4\times\sqrt[3]{2\times 5}$$

$$= 4\sqrt[3]{10}$$

مثال 2.25

$2\sqrt{72}\times 5\sqrt{32}\times 3\sqrt{50}$ کو حل کرکے جواب مختصر ترین شکل میں دیں ۔

حل :

آیئے مختصر کریں۔

$\sqrt{72} = \sqrt{36\times 2} = 6\sqrt{2}$

$\sqrt{32} = \sqrt{16\times 2} = 4\sqrt{2}$

$\sqrt{50} = \sqrt{25\times 2} = 5\sqrt{2}$

$$2\sqrt{72}\times 5\sqrt{32}\times 3\sqrt{50} = \left(2\times 6\sqrt{2}\right)\times\left(5\times 4\sqrt{2}\right)\times\left(3\times 5\sqrt{2}\right)$$

$$= 2\times 5\times 3\times 6\times 4\times 5\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}$$

$$= 3600\times 2\sqrt{2}$$

$$= 7200\sqrt{2}$$

مثال 2.26

$\sqrt[9]{8}$ کو $\sqrt[6]{6}$ سے تقسیم کیجئے۔

حل :

$$\frac{\sqrt[9]{8}}{\sqrt[6]{6}} = \frac{8^{\frac{1}{9}}}{6^{\frac{1}{6}}} \quad \text{(غورکریں 6 اور 9 کا LCM 18 ہے)}$$

$$= \frac{8^{\frac{2}{18}}}{6^{\frac{3}{18}}} \quad \text{(کیسے ؟)}$$

$$= \left(\frac{8^2}{6^3}\right)^{\frac{1}{18}} \text{(کیسے؟)} = \left(\frac{8\times 8}{6\times 6\times 6}\right)^{\frac{1}{18}}$$

$$= \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{18}} = \left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^{\frac{1}{18}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{\frac{2}{3}}$$

کارروائی 1

کیا یہ نمونہ دیکھنے کے لئے دلچسپ ہے؟

$$\sqrt{4\frac{4}{15}} = 4\sqrt{\frac{4}{15}} \quad \text{اور} \quad \sqrt{5\frac{5}{24}} = 5\sqrt{\frac{5}{24}}$$

تصدیق کیجئے۔ کیا تم 4 نئے سڑ اس طرح بنا سکتے ہو ؟

9 maths 2 real numbers
Tuesday, March 12, 2019 3:38:43 PM

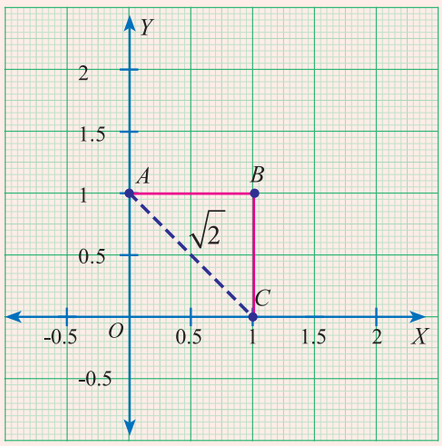
کارروائی 2

ایک ترسیمی کاغذ لیجئے اور O , A , B , C کو مندرجہ ذیل کے طور پر نشان کیجئے۔

ایک مربع OABC میں ،

OA = AB = BC = OC = 1 اکائی ہے۔

ΔOAC مثلث قائمۃ الزاویہ پر غور کریں



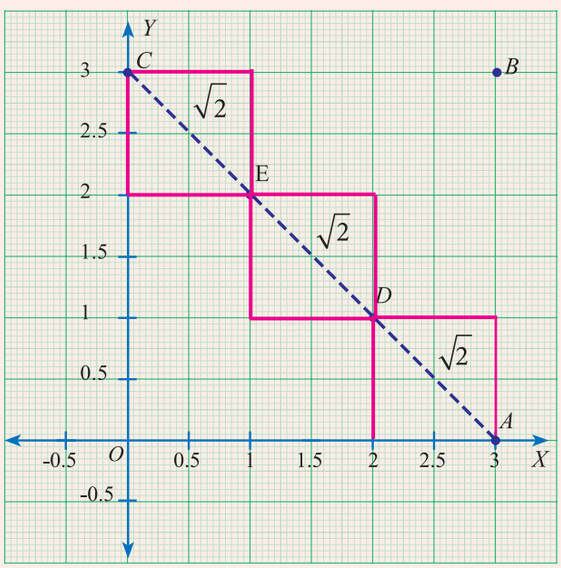
$AC = \sqrt{1^2 + 1^2}$ (مسئلہ فیثاغورث سے)

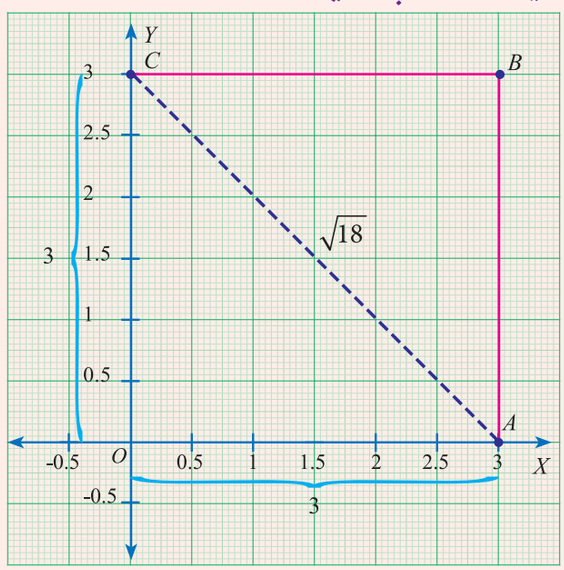
$= \sqrt{2}$ unit

وتر کا طول (Hypotenuse)

$AC = \sqrt{2}$ یہ سرڈ ہے

ذیل کی ترسیمات پر غور کریں :





آیئے دو مختلف طریقوں سے AC کا طول معلوم کرنے کی کوشش کریں گے۔

$AC = AD + DE + EC$

(مربع کے وتر کی اکائیاں)

$= \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2}$

$AC = 3\sqrt{2}$ اکائیاں

$AC = \sqrt{OA^2 + OC^2} = \sqrt{3^2 + 3^2}$

$= \sqrt{9 + 9}$

$AC = \sqrt{18}$

کیا یہ مساوی ہیں ؟ کیا تم مختلف طول کے مربعوں کو لے کر ایسے ہی تصدیق کر سکتے ہو ؟

9 maths 2 real numbers
Tuesday, March 12, 2019 3:38:43 PM

مشق 2.6

1۔ سرڈ کے جمع اور تفریق کی خصوصیات کو استعمال کر کے ذیل کو مختصر کیجئے۔

(i) $5\sqrt{3}+18\sqrt{3}-2\sqrt{3}$ (ii) $4\sqrt[3]{5}+2\sqrt[3]{5}-3\sqrt[3]{5}$

(iii) $3\sqrt{75}+5\sqrt{48}-\sqrt{243}$ (iv) $5\sqrt[3]{40}+2\sqrt[3]{625}-3\sqrt[3]{320}$

2۔ سرڈ کے ضرب اور تقسیم کی خصوصیات کو استعمال کر کے ذیل کو مختصر کیجئے۔

(i) $\sqrt{3}\times\sqrt{5}\times\sqrt{2}$ (ii) $\sqrt{35}\div\sqrt{7}$ (iii) $\sqrt[3]{27}\times\sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{125}$

(iv) $\left(7\sqrt{a}-5\sqrt{b}\right)\left(7\sqrt{a}+5\sqrt{b}\right)$ (v) $\left[\sqrt{\frac{225}{729}}-\sqrt{\frac{25}{144}}\div\sqrt{\frac{16}{81}}\right]$

3۔ اگر $\sqrt{2}=1.414,\ \sqrt{3}=1.732,\sqrt{5}=2.236,\sqrt{10}=3.162$ ہو تو مندرجہ ذیل میں اعشاریہ کے 3 مقامات تک درست کر کے قیمتیں معلوم کیجئے۔

(i) $\sqrt{40}-\sqrt{20}$ (ii) $\sqrt{300}+\sqrt{90}-\sqrt{8}$

4۔ سرڈ کو نزولی ترتیب میں لکھئے۔

(i) $\sqrt[3]{5},\sqrt[9]{4},\sqrt[6]{3}$ (ii) $\sqrt[2]{\sqrt[3]{5}},\sqrt[3]{\sqrt[4]{7}},\sqrt{\sqrt{3}}$

5۔ کیا تم انہیں حل کر کے ایک خالص سرڈ حاصل کر سکتے ہو ؟

i) دو سرڈوں کا حاصل جمع ii) دو سرڈوں کا فرق iii) دو سرڈوں کا حاصل ضرب iv) دو سرڈوں کے خارجِ قسمت

مثال کے ساتھ ہر جواب کا جواز پیش کیجئے۔

6۔ کیا تم انہیں حل کر کے ایک ناطق عدد حاصل کر سکتے ہو ؟

i) دو سرڈوں کا حاصل جمع ii) دو سرڈوں کا فرق iii) دو سرڈوں کا حاصل ضرب iv) دو سرڈوں کے خارجِ قسمت

مثال کے ساتھ ہر جواب کا جواز پیش کیجئے۔

2.7 سرڈوں کو ناطق بنانا : (Rationalisation of Surds)

ناطق بنانا (ناطقانا) وہ اصطلاح ہے جو ایک رقم کو ضرب یا تقسیم کر کے مکمل رقم کو ناطق بناتے ہیں۔

مثالیں : i) $\sqrt{3}$ کو ناطقانے کا جزوِضربی $\sqrt{3}$ ہے۔ (جبکہ $\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3$ ناطق عدد ہے)

ii) $\sqrt[7]{5^4}$ کو ناطقانے کا جزوِضربی $\sqrt[7]{5^3}$ ہے۔ (جبکہ ان کا حاصل ضرب $=5=\sqrt[7]{5^7}$ ، ناطق عدد ہے۔)

ذرا سوچئے

1۔ اوپر کی مثال (i) میں ، کیا $\sqrt{12}$ کو ناطقانے کا جزوِضربی بھی ہے ؟ کیا تم $\sqrt{3}$ کا ناطقانے کے جزوِضربی کی طرح کوئی دوسرا عدد سوچ سکتے ہو ؟

2۔ کیا تم $\sqrt[7]{5^3}$ کا ناطقانے کے جزوِضربی کی طرح کوئی دوسرا عدد سوچ سکتے ہو مثال (ii) میں ؟

3۔ اگر ایک جملے میں ایک سرڈ کے لئے ناطقانے کے جزوِضربی ہو سکتے ہیں۔ ان کے درمیان سب سے چھوٹے کو انتخاب کرنے میں کیا کوئی فائدہ ہوگا۔

9 maths 2 real numbers
Tuesday, March 12, 2019 3:38:44 PM

Progress Check معلومات کی جانچ

مندرجہ ذیل سرڈوں میں ہرایک کے ناطقانے کے جزوِضربی کو پہچانئے اور ہرایک کے لئے تصدیق کیجئے۔

(i) $\sqrt{18}$ (ii) $5\sqrt{12}$ (iii) $\sqrt[3]{49}$ (iv) $\frac{1}{\sqrt{8}}$

2.7.1 سرڈ کا زوجی معکوس : (Conjugate Surds)

کیا تم $3+\sqrt{2}$ کے لئے کوئی ناطقانے کا جزوِضربی قیاس کرسکتے ہو ؟ یہ سرڈ جو ایک ناطق حصہ اور ایک جذری حصہ رکھتا ہے۔ اس صورت میں، ناطقانے کا جزوِضربی ایک دلچسپ شکل رکھتا ہے۔

$3+\sqrt{2}$ کو ناطقانے کا جزوِضربی $3-\sqrt{2}$ ہے۔ تم بہت آسانی سے اس کی جانچ کرسکتے ہو۔

$$\left(3+\sqrt{2}\right)\left(3-\sqrt{2}\right) = 3^2-\left(\sqrt{2}\right)^2$$
$$= 9-2$$
$$= 7, \quad \text{یہ ناطق عدد ہے}$$

$a+\sqrt{b}$ کو ناطقانے کا جزوضربی کیا ہے۔ جس میں a اور b ناطق اعداد ہیں ؟ کیا یہ $a-\sqrt{b}$ ہے ؟ جانچئے۔ $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ کو ناطقانے کا جزوِضربی کیا ہے۔ جس میں a اور b ناطق اعداد ہیں ؟ کیا یہ $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ ہے ؟ یا $-\sqrt{a}+\sqrt{b}$ ہے ؟ تحقیق کیجئے۔

سرڈیں $a+\sqrt{b}$ اور $a-\sqrt{b}$ زوجی معکوس سرڈ کہلاتے ہیں۔ $a+\sqrt{b}$ کا زوجی معکوس کیا ہے ؟ کیا $-\sqrt{b}+a$ ہے۔ تم نے غور کیا ہوگا کہ ایک زوجی معکوس میں سرڈ کے سامنے کی علامت کو تبدیل کرتے ہوئے عموماً حاصل کریں گے۔

مثال 2.27 نسب نما کو ناطق بنایئے (i) $\frac{7}{\sqrt{14}}$ (ii) $\frac{5+\sqrt{3}}{5-\sqrt{3}}$

حل : i) نسب نما اور شمارکنندہ دونوں کو ناطقانے کے جزوِضربی $\sqrt{14}$ سے ضرب دیں۔

$$\frac{7}{\sqrt{14}} = \frac{7}{\sqrt{14}}\times\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{14}} = \frac{7\sqrt{14}}{14} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

(ii) $$\frac{5+\sqrt{3}}{5-\sqrt{3}} = \frac{\left(5+\sqrt{3}\right)}{\left(5-\sqrt{3}\right)}\times\frac{\left(5+\sqrt{3}\right)}{\left(5+\sqrt{3}\right)} = \frac{\left(5+\sqrt{3}\right)^2}{5^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}$$
$$= \frac{5^2+\left(\sqrt{3}\right)^2+2\times5\times\sqrt{3}}{25-3}$$
$$= \frac{25+3+10\sqrt{3}}{22} = \frac{28+10\sqrt{3}}{22} = \frac{2\times[14+5\sqrt{3}]}{22}$$
$$= \frac{14+5\sqrt{3}}{11}$$

9 maths 2 real numbers
Tuesday, March 12, 2019 3:38:44 PM

مشق 2.7

1۔ نسب نما کو ناطق بنائیے۔

(i) $\frac{1}{\sqrt{50}}$ (ii) $\frac{5}{3\sqrt{5}}$ (iii) $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{18}}$ (iv) $\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$

2۔ نسب نما کو ناطق بنائیے اور مختصر کیجئے۔

(i) $\frac{\sqrt{48}+\sqrt{32}}{\sqrt{27}-\sqrt{18}}$ (ii) $\frac{5\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

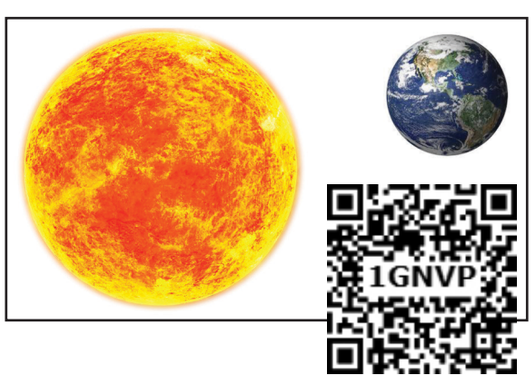
(iii) $\frac{2\sqrt{6}-\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-2\sqrt{6}}$ (iv) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}+2}-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}-2}$

3۔ اگر $\frac{\sqrt{7}-2}{\sqrt{7}+2}=a\sqrt{7}+b$ ہوتو a اور b کی قیمت معلوم کیجئے۔

4۔ اگر $x=\sqrt{5}+2$ ہوتو $x^2+\frac{1}{x^2}$ کی قیمت معلوم کیجئے۔

5۔ دیا گیا ہے، $\sqrt{2}=1.414$ ہے۔ $\frac{8-5\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$ کی (اعشاریہ کے 3 مقامات تک درست) قیمت معلوم کیجئے۔

2.8.1 سائنسی ترقیم : (Scientific Notation)



فرض کریں کہ سورج کا قطر 13,92,000 کلومیٹر اور زمین کا قطر 12,740 کلومیٹر تم کو بتایا جاتا ہے۔ ان دونوں قطروں کو آپس میں موازنہ کرنا ایک مشکل کام ہوگا۔ اس کے برعکس میں اگر 13,92,000 کو 1.392×10^6 اور 12,740 کو 1.274×10^4 کے طور پر لکھنے سے ہمیں آسانی ہوگی۔ اس طرح کی نمائندگی کو **سائنسی ترقیم** کہا جاتا ہے۔

$$\frac{1.392\times10^6}{1.274\times10^4}\approx\frac{14}{13}\times10^2\approx108\ .$$

اس طرح تم تصور کرسکتے ہو کہ 108 زمینیں ایک سورج میں سما سکتے ہیں۔

سائنسی ترقیم میں بہت ہی بڑے یا بہت ہی چھوٹے عدد کی نمائندگی کرنے کا طریقہ کو عشری نظام میں مناسب طور پر لکھتے ہیں۔ اس سے اعداد کو آسانی سے لکھا اور استعمال کیا جاتا ہے۔

2.5.1 ایک عدد کو سائنسی ترقیم میں لکھنا : (Writing a Number in Scientific Notation)

ایک عدد کو سائنسی ترقیم میں تبدیل کرنے کے مرحلے حسب ذیل ہیں۔

i) ایک غیر صفری ہندسہ کے بائیں جانب عشری نقطہ کو ہٹائیں۔

ii) پرانے اور نئے عشری نقطہ کے درمیان عدد کے ہندسوں کا شمار کریں اور اس کو 10 کی قوت n میں ظاہر کریں۔

9 maths 2 real numbers
Tuesday, March 12, 2019 3:38:45 PM

iii) اگرعشری نقطہ کو بائیں جانب ہٹاتے ہیں۔ تو قوت n مثبت ہے۔ اگرعشری نقطہ کو دائیں جانب ہٹاتے ہیں تو قوت n منفی ہے۔

> عدد N کو $N = a \times 10^n$ کی صورت میں ظاہر کرنے کو سائنسی ترقیم کہتے ہیں۔
> جس میں $1 \le a < 10$ اور n ایک سالم عدد ہے۔

مندرجہ ذیل جدول میں قاعدہ 10 کے مثالوں کو واضح طور پر بتایا گیا ہے۔

Decimal notation عشری ترقیم	Scientific notation سائنسی ترقیم
100	1×10^2
1,000	1×10^3
10,000	1×10^4
1,00,000	1×10^5
10,00,000	1×10^6
1,00,00,000	1×10^7

Decimal notation عشری ترقیم	Scientific notation سائنسی ترقیم
0.01	1×10^{-2}
0.001	1×10^{-3}
0.0001	1×10^{-4}
0.00001	1×10^{-5}
0.000001	1×10^{-6}
0.0000001	1×10^{-7}

آیئے چند اور مثالوں کو دیکھیں گے۔

مثال 2.28 سائنسی ترقیم میں ظاہر کیجئے۔

9768854 (i 0.04567891 (ii 72006865.48 (iii

حل :

(i) $9\ 7\ 6\ 8\ 8\ 5\ 4\ .\ 0 = 9.768854 \times 10^6$

6 5 4 3 2 1

عشری نقطہ 6 مقام بائیں طرف ہٹایا جاتا ہے۔ چنانچہ $n = 6$ ہے۔

(ii) $0\ .\ 0\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 1 = 4.567891 \times 10^{-2}$

1 2

عشری نقطہ 2 مقام دائیں طرف ہٹایا جاتا ہے۔ چنانچہ $n = -2$ ہے۔

(iii) $7\ 2\ 0\ 0\ 6\ 8\ 6\ 5.\ 4\ 8 = 7.200686548 \times 10^7$

7 6 5 4 3 2 1

عشری نقطہ 7 مقام بائیں طرف ہٹایا جاتا ہے۔ چنانچہ $n = 7$ ہے۔

2.8.2 سائنسی ترقیم کو عشری نظام میں تبدیل کرنا : (Converting Scientific Notation to Decimal form)

سائنسی ترقیم کو عشری نظام میں تبدیل کرنے کے طریقے کو آسانی سے مندرجۂ ذیل مرحلے میں کرسکتے ہیں۔

i) عشری عدد کو لکھئے۔

9 maths 2 real numbers
Tuesday, March 12, 2019 3:38:45 PM

ii) عدد میں عشری نقطوں کے واضح مقام کو 10 کی قوت میں ہٹائیں، اگر مثبت دائیں طرف اور اگر منفی بائیں طرف۔
اگر ضروری ہو تو صفروں کو جمع کریں۔

iii) عدد کو دوبارہ سالم عدد کی شکل میں لکھئے۔

مثال 2.29 درجِ ذیل اعداد کو عشری نظام میں لکھئے۔

(i) 6.34×10^{4} (ii) 2.00367×10^{-5}

حل :

(i) 6.34×10^{4}

$\Rightarrow$ 6 . 3 4 0 0 $=63400$

1 2 3 4

(ii) 2.00367×10^{-5}

0 0 0 0 0 2 . 0 0 3 6 7

5 4 3 2 1

$=0.0000200367$

2.8.3 حسابی اعداد میں سائنسی ترقیم : (Arithmetic of Numbers in Scientific Notation)

i) سائنسی ترقیم میں اگر دو اعداد کے قوت نما یکساں ہو تو جمع (یا تفریق) کو آسانی سے کر سکتے ہیں۔

مثال 2.30 زمین کی کمیت 5.97×10^{24} کلوگرام اور چاند کی کمیت 0.073×10^{24} کلوگرام ہے۔ ان کی کل کمیت کیا ہے ؟

حل :

$$\text{کل کمیت} = 5.97\times10^{24}\text{ kg} + 0.073\times10^{24}\text{ kg}$$
$$= (5.97 + 0.073)\times10^{24}\text{ kg}$$
$$= 6.043\times10^{24}\text{ kg}$$

ii) اعداد کے حاصل ضرب یا خارج قسمت کو ہم آسانی سے سائنسی ترقیم میں ظاہر کر سکتے ہیں۔ اگر ہم مناسب طریقے سے جذری عدد کے اصول کو استعمال کرتے ہیں۔

مثال 2.31 مندرجہ ذیل کو سائنسی ترقیم میں لکھئے۔

(i) $(50000000)^{4}$ (ii) $(0.00000005)^{3}$

(iii) $(300000)^{3}\times(2000)^{4}$ (iv) $(4000000)^{3}\div(0.00002)^{4}$

9 maths 2 real numbers
Tuesday, March 12, 2019 3:38:46 PM

حل :

(i) $\left(50000000\right)^4 = \left(5.0\times10^7\right)^4$

$= \left(5.0\right)^4\times\left(10^7\right)^4$

$= 625.0\times10^{28}$

$= 6.25\times10^2\times10^{28}$

$= 6.25\times10^{30}$

(ii) $\left(0.00000005\right)^3 = \left(5.0\times10^{-8}\right)^3$

$= \left(5.0\right)^3\times\left(10^{-8}\right)^3$

$= \left(125.0\right)\times\left(10\right)^{-24}$

$= 1.25\times10^2\times10^{-24}$

$= 1.25\times10^{-22}$

(iii) $\left(300000\right)^3\times\left(2000\right)^4$

$= \left(3.0\times10^5\right)^3\times\left(2.0\times10^3\right)^4$

$= \left(3.0\right)^3\times\left(10^5\right)^3\times\left(2.0\right)^4\times\left(10^3\right)^4$

$= \left(27.0\right)\times\left(10^{15}\right)\times\left(16.0\right)\times\left(10^{12}\right)$

$= \left(2.7\times10^1\right)\times\left(10^{15}\right)\times\left(1.6\times10^1\right)\times\left(10^{12}\right)$

$= 2.7\times1.6\times10^1\times10^{15}\times10^1\times10^{12}$

$= 4.32\times10^{1+15+1+12} = 4.32\times10^{29}$

(iv) $\left(4000000\right)^3 + \left(0.00002\right)^4$

$= \left(4.0\times10^6\right)^3 \div \left(2.0\times10^{-5}\right)^4$

$= \left(4.0\right)^3\times\left(10^6\right)^3 \div \left(2.0\right)^4\times\left(10^{-5}\right)^4$

$= \dfrac{64.0\times10^{18}}{16.0\times10^{-20}}$

$= 4\times10^{18}\times10^{+20}$

$= 4.0\times10^{38}$

ذرا سوچئے

1۔ دو اعداد کو سائنسی ترقیم میں لکھئے جس کا حاصل ضرب 2.83104 ہے۔

2۔ دو اعداد کو سائنسی ترقیم میں لکھئے جس کا خارج قسمت 2.83104 ہے۔

مشق 2.8

1۔ ذیل کے اعداد کو سائنسی ترقیم میں ظاہر کیجئے۔

(i) 569430000000 (ii) 2000. 57 (iii) 0.0000006000 (iv) 0.0009000002

2۔ ذیل کے اعداد کو عشری نظام میں ظاہر کیجئے۔

(i) 3.459×10^6 (ii) 5.678×10^4

(iii) 1.00005×10^{-5} (iv) 2.530009×10^{-7}

3۔ ذیل کے اعداد کو سائنسی ترقیم میں ظاہر کیجئے۔

(i) $\left(300000\right)^2\times\left(20000\right)^4$ (ii) $\left(0.000001\right)^{11} \div \left(0.005\right)^3$

(iii) $\left\{\left(0.00003\right)^6\right\}\times\left(0.00005\right)^4 \div \left\{\left(0.009\right)^3\right\}\times\left(0.05\right)^2$

9 maths 2 real numbers
Tuesday, March 12, 2019 3:38:46 PM

4۔ ذیل کے معلومات کو سائنسی ترقیم میں ظاہر کیجئے۔

i) دنیا کی آبادی تقریباً 7000,000,000 ہے۔

ii) ایک نوری سال کا فاصلہ کلومیٹر 9460528400000000 ہے۔

iii) الکٹران کی کمیت 0.000 000 000 000 000 000 000 000 000 91093822 ہے۔

5۔ مختصر کیجئے۔

(i) $(2.75 \times 10^{7}) + (1.23 \times 10^{8})$ (ii) $(1.598 \times 10^{17}) - (4.58 \times 10^{15})$

(iii) $(1.02 \times 10^{10}) \times (1.20 \times 10^{-3})$ (iv) $(8.41 \times 10^{4}) \div (4.3 \times 10^{5})$

کارروائی 4

سورج سے نظام شمسی کے سیاروں کا اوسط فاصلہ ذیل میں دکھایا گیا ہے۔ ذیل کی جدول کو مکمل کیجئے۔ سورج سے قریب ترین سیارے کے فاصلے کو قدر (Magnitude) کے لحاظ سے ترتیب دیجئے۔

Planet سیارے	Decimal form (in Km) عشری نظام	Scientific Notation (in Km) سائنسی ترقیم
Jupiter مشتری		7.78×10^{8}
Mercury عطارد	58000000	
Mars مریخ		2.28×10^{8}
Uranus یورینس	2870000000	
Venus زہرہ	108000000	
Neptune نپچون	4500000000	
Earth زمین		1.5×10^{8}
Saturn زحل		1.43×10^{8}

مشق 2.9

Multiple Choice Questions کثیر انتخابی سوالات

1۔ اگر n ایک طبعی عدد ہو تو $\sqrt{n}$ ہے۔

a) ہمیشہ ایک طبعی عدد b) ہمیشہ ایک غیر ناطق عدد c) ہمیشہ ایک ناطق عدد d) ناطق یا غیر ناطق ہوسکتا ہے

2۔ ذیل میں سے کونسا صحیح نہیں ہے۔

a) تمام ناطق اعداد ایک حقیقی عدد ہے b) تمام سالم اعداد ایک ناطق عدد ہے

c) تمام حقیقی اعداد ایک غیر ناطق عدد ہے d) تمام طبعی اعداد ایک صحیح عدد ہے۔

3۔ ذیل میں سے ایک صحیح ہے، دو غیر ناطق اعداد کا حاصل جمع۔

a) ہمیشہ ایک غیر ناطق عدد ہے b) ناطق یا غیر ناطق ہوسکتا ہے

c) ہمیشہ ایک ناطق عدد ہے d) ہمیشہ ایک سالم عدد ہے

4۔ ذیل میں اختتام پذیر عشری توسیع کونسی ہے؟

(a) $\frac{5}{64}$ (b) $\frac{8}{9}$ (c) $\frac{14}{15}$ (d) $\frac{1}{12}$

9 maths 2 real numbers
Tuesday, March 12, 2019 3:38:47 PM

5۔ ذیل میں سے کونسا غیر ناطق عدد ہے۔

(a) $\sqrt{25}$ (b) $\sqrt{\frac{9}{4}}$ (c) $\frac{7}{11}$ (d) π

6۔ 2 اور 2.5 کے درمیان ایک غیر ناطق عدد..... ہے۔

(a) $\sqrt{11}$ (b) $\sqrt{5}$ (c) $\sqrt{2.5}$ (d) $\sqrt{8}$

7۔ ایک سب سے چھوٹا ناطق عدد جس کو $\frac{1}{3}$ سے ضرب دینے پر یہ اعشاریہ کے ایک مقام کے بعد عشری توسیع اختتام پذیر ہے۔

(a) $\frac{1}{10}$ (b) $\frac{3}{10}$ (c) 3 (d) 30

8۔ اگر $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ ہو تو $\frac{5}{7}$ کی قیمت

(a) $0.\overline{142857}$ (b) $0.\overline{714285}$ (c) $0.\overline{571428}$ (d) 0.714285

9۔ مندرجہ ذیل میں سے غیر موزوں کو الگ کیجئے۔

(a) $\sqrt{32} \times \sqrt{2}$ (b) $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$ (c) $\sqrt{72} \times \sqrt{8}$ (d) $\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{18}}$

10۔ $0.\overline{34} + 0.3\overline{4} =$

(a) $0.6\overline{87}$ (b) $0.\overline{68}$ (c) $0.6\overline{8}$ (d) $0.68\overline{7}$

11۔ ذیل میں کونسا بیان غلط ہے ؟

(1) 25 کا جذرالمربع 5 ہے یا -5 (3) $\sqrt{25} = 5$

(2) $-\sqrt{25} = -5$ (4) $\sqrt{25} = \pm 5$

12۔ ذیل میں کونسا ناطق عدد نہیں ہے ؟

(1) $\sqrt{\frac{8}{18}}$ (2) $\frac{7}{3}$ (3) $\sqrt{0.01}$ (4) $\sqrt{13}$

13۔ $\sqrt{27} + \sqrt{12} =$

(1) $\sqrt{39}$ (2) $5\sqrt{6}$ (3) $5\sqrt{3}$ (4) $3\sqrt{5}$

14۔ اگر $\sqrt{80} = k\sqrt{5}$ ہو تو..... $k =$ ہے۔

(1) 2 (2) 4 (3) 8 (4) 16

15۔ $4\sqrt{7} \times 2\sqrt{3} =$

(1) $6\sqrt{10}$ (2) $8\sqrt{21}$ (3) $8\sqrt{10}$ (4) $6\sqrt{21}$

16۔ جب نسب نما کو ناطق میں لکھتے ہیں تو جملہ $\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$ کو ایسے مختصر کیا جاسکتا ہے۔۔

(1) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (4) $\frac{2}{3}$

9 maths 2 real numbers
Tuesday, March 12, 2019 3:38:47 PM

17 - جب $\left(2\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2$ کو مختصر کرتے ہیں تو ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

(1) $4\sqrt{5}+2\sqrt{2}$ (2) $22-4\sqrt{10}$ (3) $8-4\sqrt{10}$ (4) $2\sqrt{10}-2$

18 - $\left(0000729\right)^{\frac{-3}{4}} \times \left(0.09\right)^{\frac{-3}{4}} =$ _____

(1) $\frac{10^3}{3^3}$ (2) $\frac{10^5}{3^5}$ (3) $\frac{10^2}{3^2}$ (4) $\frac{10^6}{3^6}$

19 - اگر $\sqrt{9^x} = \sqrt[3]{9^2}$ ہو تو $x =$ ..... ہوگا

(1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{4}{3}$ (3) $\frac{1}{3}$ (4) $\frac{5}{3}$

20 - ایک مستطیلی پلاٹ کی لمبائی اور چوڑائی بالترتیب 5×10^5 اور 4×10^4 میٹر ہو تو اس کا رقبہ ..... ہے۔

(1) $9\times10^1\ m^2$ (2) $9\times10^9\ m^2$ (3) $2\times10^{10}\ m^2$ (4) $20\times10^{20}\ m^2$

یاد رکھنے کے نکات

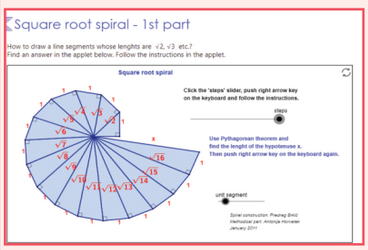
- جب $\frac{p}{q}$ ، $q\neq0$، کی عشری توسیع ختم ہو تو (یعنی ختم ہونے پر) اس عشری توسیع کو اختتام پذیر کہتے ہیں۔
- $\frac{p}{q}$ ، $q\neq0$ ، کی عشری توسیع میں جب بچت کبھی صفر نہ ہو تو خارجِ قسمت میں متوالی کسر کے گروہی ہندسے حاصل ہوتے ہیں۔ صورت میں عشری توسیع کو غیر اختتام پذیر اور متوالی کہتے ہیں۔
- اگر ایک ناطق عدد $\frac{p}{q}$ کو $\frac{p}{2^m\times5^n}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ جہاں $p\in Z$ اور $m, n\in W$ ہے۔ تب ناطق عدد کی عشری توسیع اختتام پذیر ہے۔ ورنہ ناطق عدد کی عشری توسیع غیر اختتام پذیر اور متوالی ہے۔
- ایک ناطق عدد کی عشری توسیع کو اختتام پذیر یا غیر اختتام پذیر اور متوالی میں ظاہر کر سکتے ہیں۔
- ایک عدد کی عشری توسیع غیر اختتام پذیر اور غیر متوالی ہو تو اس عدد کو غیر ناطق عدد کہتے ہیں۔ اس لئے $\frac{p}{q}$ کی صورت میں نہیں لکھ سکتے جہاں p اور q سالم اعداد ہیں اور $q\neq0$۔
- ناطق اعداد اور غیر ناطق اعداد کے مجموعے کے اتحاد کو حقیقی اعداد کہتے ہیں۔
- ہر حقیقی عدد یا تو ناطق عدد ہے یا غیر ناطق عدد ہے۔
- اگر ایک حقیقی عدد ناطق عدد نہیں ہے تو وہ غیر ناطق عدد ہوگا۔
- اگر 'a' ایک مثبت ناطق عدد ہے۔ 'n' ایک مثبت سالم عدد اور اگر $\sqrt[n]{a}$ ایک غیر ناطق عدد ہے۔ ہو تو $\sqrt[n]{a}$ سرڈ کہلاتا ہے
- اگر m ، n مثبت سالم اعداد ہیں اور a اور b مثبت ناطق اعداد ہو تو

(i) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a = \sqrt[n]{a^n}$ (ii) $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ (iii) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$ (iv) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

- سرڈ کو ایک سرڈ سے ضرب کرتے ہیں تو ہمیں ناطق عدد حاصل ہوتا ہے۔ اس طریقے کو ناطق بنانا کہتے ہیں۔
- عدد N کو $N = a\times10^n$ کی صورت میں ظاہر کرنے کو سائنسی ترقیم کہتے ہیں۔ جس میں $1\leq a<10$ اور n ایک سالم عدد ہے۔

9 maths 2 real numbers
Tuesday, March 12, 2019 3:38:48 PM

ICT Corner-1



مطلوبہ جواب اس تصویر میں دکھایا گیا ہے۔

مرحلہ 1:

دیئے گئے لنک کو کاپی اور پیسٹ کیجئے یا دیئے گئے URL کو کاپی کیجئے یا QR کوڈ کو اسکین کیجئے۔

مرحلہ 2:

''حقیقی اعداد'' نامی Geogebra work کھلے گا۔اس میں کئی ورک شیٹس ہیں۔اس میں ''مرغولہ جذرالمربع۔پہلا حصّہ''۔نام والا ورک شیٹ کھولئے ۔

مرحلہ 3:

مرحلے میں دیئے گئے سلائڈر کو کھینچے۔اعداد 2,3,4,5,... کے جذرالمربع کی تصنیف پہ در پہ ظاہر ہوگا۔

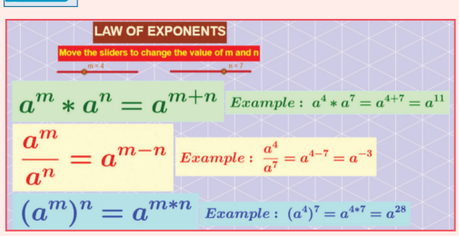
مرحلہ 4:

''یونٹ سیگمینٹ'' نامی سلائڈر کو کھینچنے پر خاکہ بڑا ہوگا۔اب آپ اس خاکے کو اپنے نوٹ پر بنائیں اور انکے لمبائیوں کی قیمت معلوم کیجئے۔

Browse in the link

Union of Sets: https://www.ggbm.at/m6GQc6mQ

ICT Corner-2



مطلوبہ نتیجہ اس تصویر میں بتایا گیا ہے۔

مرحلہ 1

براؤزر کھولئے یا دیئے گئے URL لنک کو ٹائپ کیجئے یا دیئے گئے QR کوڈ کو اسکین کیجئے۔

"Real Numbers" کے نام

سے ایک GeoGebra ورک شیٹ کھلے گی۔ اس میں دو کارروائیاں ہیں۔

1۔ سرڈ کے نسب نما کو ناطق بنانا 2۔ قوتوں کا اصول

پہلی کارروائی میں ناطق بنانے کا طریقہ دیا گیا ہے۔ ساتھ میں مثالیں بھی پیش کی گئی ہیں۔ a اور b کی قیمتوں کو تبدیل کرنے کے لئے ایک Input box دیا گیا ہے۔

مرحلہ 2

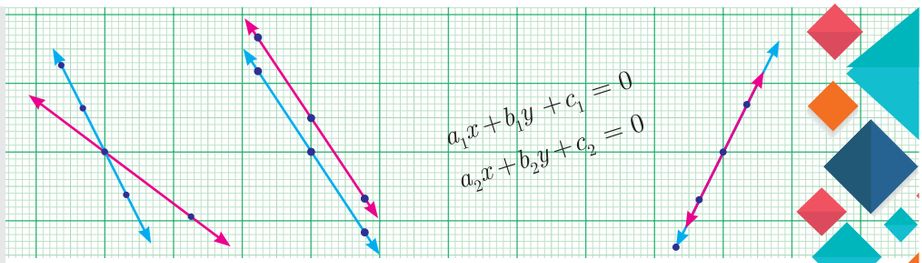
دوسری کارروائی میں قوت نمائی کے اصول دیئے گئے ہیں۔دائیں جانب مثال بھی دی گئی ہے۔ m اور n کی قیمتوں کو تبدیل کرنے کے لئے سلائڈر کو حرکت دیجئے اور جوابات کی تصدیق کر لیجئے۔

Browse in the link

Real Numbers: https://ggbm.at/BYEWDpHU or Scan the QR Code.

9 maths 2 real numbers
Tuesday, March 12, 2019 3:38:49 PM

3



(ALGEBRA) الجبرا



Diophantus

In real life, I assure you, there is no such things as Algebra.
- Fran Lebowitz

اسکندریہ کے ڈوفینٹس ، ایک یونانی اسکندریہ ریاضی دان جنہوں نے تقریباً 84 سال عمر پائی، جن کی پیدائش 201ء A.D(C.E) اور 215ء A.D(C.E) کے درمیان ہوئی۔ڈیوفینٹس ''Arithmetica'' نامی کتابوں کے سلسلے کے مصنف تھے۔انکی تحریریں الجبریائی مساوات سے تعلق رکھتی ہیں۔انہیں ''بابائے الجبرا'' بھی کہا جاتا ہے۔

سیکھنے کے مقاصد

- کثیر رقمیات کی درجہ بندی کو سمجھنا اور ان پر بنیادی اعمال انجام دینا۔
- کثیر رقمی کی قیمت کو محسوب کرنا اور کثیر رقمی کے صفروں کے تصور کو سمجھنا۔
- مسئلہ باقی اور مسئلہ جزوِ ضربی کو سمجھنا۔
- کسی دو درجی مساوات اور کسی مکعبی کثیر رقمی کے اجزائے ضربی معلوم کرنا۔
- ترکیبی تقسیم کے استعمال سے کسی کثیر رقمی کے اجزائے ضربی معلوم کرنا۔
- کثیر رقمیات کی GCD مقسوم علیہ اعظم معلوم کرنا۔
- دی گئی خطی مساوات کے لئے ترسیم بنانا۔
- دو متغیرات والی ہم زاد خطی مساوات کو ترسیمی طریقے اور الجبریائی طریقے سے حل کرنا۔
- دو متغیرات والی خطی مساوات کی مستقل پذیری اور غیر مستقل پذیری کو سمجھنا۔

3.1 تعارف

کثیر رقمیات کا مطالعہ کیوں کریں؟

یہ باب الجبراء کے کثیر رقمی جملوں کے بارے میں ہے۔یہ تمہارے دوست ہیں۔جن سے تم پہلے ہی مل چکے ہو مگر صحیح تعارف کے بغیر! ہم تمہیں اُن کا ٹھیک تعارف کراتے ہیں اور وہ تمہارے دوست ہو گئے۔تم جو بھی حسابی سفر کرو گے وہاں وہ تمہارے ساتھ ہوں گے۔

9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:20:43 PM

$$(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$$

اب یہ ایک کثیر رقمی ہے۔ کیا یہ ایک خاص کثیر رقمی نظر آتا ہے؟ اس سے پہلے ہم بہت سارے الجبرائی جملے دیکھ چکے ہیں۔ اس لئے اس میں مشکل کی کیا بات ہے؟ انہیں وجوہات کی بنا پر یہ کثیر رقمیات ریاضی میں بہت دلچسپ اور ضروری ہیں۔

اب ہم ایک مثال لے کر اُس کی وضاحت کریں گے۔ ہم نے بہت سارے حسابات سیکھے اور اس کے بعد الجبراء میں نا معلوم اعداد کو متغیر کی طرح استعمال کر کے آگے بڑھتے ہیں۔ حقیقت میں ہمیں اعداد کی طرف جانا چاہئے اور کوشش کر کے انہیں الجبراء کی زبان میں لکھنا چاہئے۔

مثال کے طور پر 5418 ایک عدد لیں۔ درحقیقت یہ 5 ہزار 4 سو اٹھارہ ہے۔

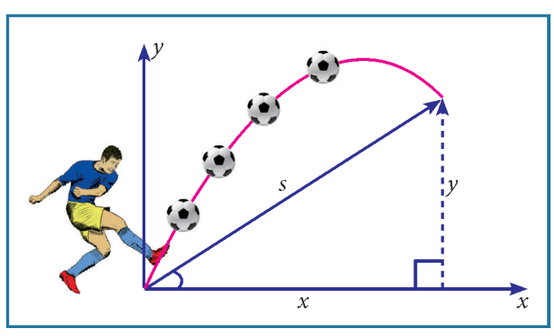
اس طرح لکھتے ہیں

$$5 \times 1000 + 4 \times 100 + 1 \times 10 + 8 = 5418$$

اس کو دوبارہ اس طرح لکھیں۔

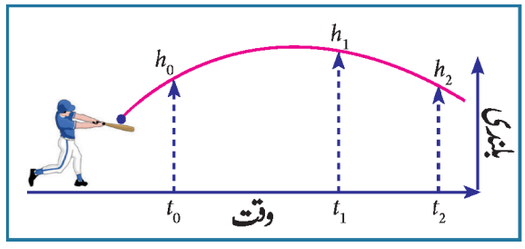
$$5 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 1^1 \times 10 + 8$$

اب تمہیں اس کے بارے میں واضح ہو چکا ہوگا۔ $5x^3 + 4x^2 + x + 8$ اسی صورت کو ہم کثیر رقمی کہتے ہیں۔ اس طرح لکھنے سے ہمیں کس طرح مدد ملتی ہے؟ ہم اعداد کو عشری نظام میں لکھتے ہیں۔ اور جبکہ $x = 10$ ہے۔ پھر اس میں کیا نئی بات ہے؟ کیا تمہیں تقسیم پذیری کے اصول یاد ہیں؟ آیئے اعادہ کریں، اگر کسی عدد کے ہندسوں کا حاصل جمع 3 سے تقسیم پذیر ہوں تو وہ عدد 3 سے تقسیم پذیر ہے۔ اب غور کریں اگر x سے 3 کو تقسیم کرتے ہیں۔ تو بچت '1' حاصل ہوتا ہے۔ اس صورت میں x^3 , x^2 وغیرہ کے لئے یہی اُصول ہوگا۔ ان تمام کو 3 سے تقسیم کرنے پر 1 بچت حاصل ہوتا ہے۔ لہٰذا آپ ہر ہندسہ کو 1 سے ضرب دیں، پھر انہیں ایک دوسرے کے ساتھ جمع کرنے پر ہندسوں کا حاصل جمع ملے گا۔ اگر وہ 3 سے تقسیم پذیر ہے تو پھر وہ ایک صحیح عدد ہوگا۔ 9 کی تقسیم پذیری کے لئے اسی اُصول کے ذریعے جانچ سکتے ہیں یا پھر 2 یا 5 کی تقسیم پذیری سے بھی جانچ سکتے ہیں۔



خاکہ 3.1

اسی طرح آسانی کے ساتھ ثابت (خاکہ 3.1) کر سکتے ہو۔ ہماری مقصد تقسیم پذیری کے اصول ثابت کرنا نہیں ہے۔ بلکہ اعداد کو کثیر رقمیات میں کئی عددی نمونوں میں پیش کرنا ہے۔ (خاکہ 3.2) حقیقت میں بہت سارے اشیاء کا مطالعہ صرف اعداد نہیں ہوتے جب کہ کثیر رقمیات کے طور پر پیش کر سکتے ہیں۔ اب ہم اس کے بارے میں بہت ساری چیزیں سیکھ سکتے ہیں۔



خاکہ 3.2

الجبراء میں ہم x^2، $5x^2 - 3$، $2x + 7$ وغیرہ کو 'x' کے تفاعل کے طور پر سوچتے ہیں۔ ہم تصاویر بنا کر یہ دیکھتے ہیں کہ کس طرح x کے تفاعل بدلنے سے 'x' بدلتا ہے۔ اور یہ ہمارے لئے تفاعل (Funtions) کو سمجھنے میں بہت کارآمد ہوگا۔ اب ہمیں یہ پتہ چلتا ہے کہ بڑی تعداد میں تفاعل سائنس، انجینئرنگ، تجارتی تعلیم، اقتصادیات اور ریاضی سے تعلق رکھتے ہیں۔ ان تمام کثیر رقمیات کو تقریبی قیمت سے ظاہر کر سکتے ہیں۔ جب کہ تقریبی تفاعل کو کثیر رقمیات میں استعمال کرنا تمام بڑی جماعتوں کے حسابوں (Higher Mathematics) کا بنیادی موضوع ہوگا اور بہت سارے لوگ اس خیال (Idea) کو استعمال کر کے اپنی روزمرہ کی زندگی کے کاموں کو آسان تر بناتے ہیں۔

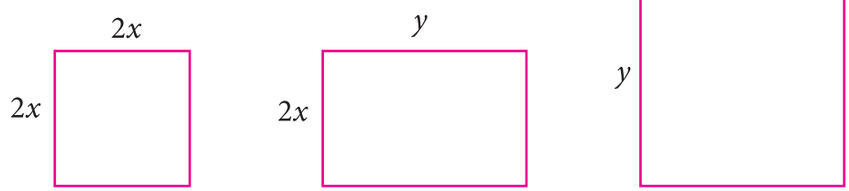
9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:20:44 PM



خاکہ 3.3

کثیر رقمیات بکثرت، حیاتیات، کمپیوٹر سائنس، موصلاتی نظام وغیرہ میں استعمال ہوتا ہے ۔ دیئے گئے ان تصاویر کو (خاکہ 3 . 1، 3 . 2اور 3.3)دردرجی مساوات کے طور پر ظاہر کیا جاسکتا ہے ۔ہم نے نہ صرف کثیر رقمیات کو سیکھا بلکہ ان کو اعداد کس طرح استعمال کر کے جمع، ضرب اور تقسیم کو ایک بعد ایک سیکھا۔

دئے گئے خاکوں پر غور کریں



خاکہ 3.4 خاکہ 3.5 خاکہ 3.6

اوپر دیئے گئے خاکوں کا کل رقبہ $4x^2 + 2xy + y^2$ ہے۔اس جملہ کو ہم الجبرائی جملہ کہتے ہیں۔ان میں موجود x اور y کی قیمتیں تبدیل کرنے پر ہمیں مختلف رقبوں کی قیمت حاصل ہوگی۔چونکہ ضلعے x اور y مختلف قیمتیں رکھتے ہیں اس لئے انہیں **متغیرات** (Variables) کہتے ہیں۔ پس، متغیر ایک علامت ہے۔جو مختلف عددی قیمتیں رکھتی ہیں۔

متغیرات عموماً حروف تہجی جیسے x,y,z وغیرہ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔اوپر دیئے گئے الجبرائی جملہ میں 4,2 کو **مستقلات** (Constants) کہتے ہیں۔ چنانچہ مستقل ایک علامت ہے جو متعین عددی قیمت رکھتی ہے۔

مستقل (Constants)

ہر حقیقی عدد ایک مستقل ہے۔ہم عددی جملوں کو مستقلات اور 4 حسابی اعمال استعمال کر کے بنا سکتے ہیں۔

مستقل کی چند مثالیں $1, 5, -32, \frac{3}{7}, -\sqrt{2}, 8.432, 10000$

متغیرات (Variables)

جملوں میں متغیرات اور مستقلات کو جوڑنے سے اعداد کو مختلف صورتوں میں پیش کیا جاسکتا ہے۔مثلاً ہم $2\mu r$ جملے کو جانتے ہیں۔یہ دائرے کا محیط ہے اور 'r' نصف قطر ہے۔جس طرح ہم مختلف 'r' 4 cm,1cm، 9cm وغیرہ استعمال کرنے پر ہمیں بڑے سے بڑے دائرے کا محیط حاصل ہوگا۔ جیسے $2\mu, 8\mu, 18\mu$ وغیرہ۔

$2\mu r$ واحد جملہ ہے جو ایک مختصر اور واضح بیان ہے تمام دائروں کے محیط کے لئے الجبرائی جملوں میں حسابی اعمال کو جوڑ کر تفاعل اور اعداد کو اور بھی بہتر بنا سکتے ہیں۔نامعلوم حقیقی اعداد کو ظاہر کرنے کے لئے حروف تہجی استعمال کرتے ہیں۔جسے ہم متغیرات کہتے ہیں جیسے a, b, x, y وغیرہ۔

9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:20:45 PM

الجبرائی جملہ (Algebraic Expression)

ایک الجبرائی جملہ مستقلات اور متغیرات کو 4 حسابی اعمال کے نشانیوں کی مدد سے ملا کر بناتے ہیں۔

الجبرائی جملوں کی چند مثالیں یہ ہیں۔

$$x^3 - 4x^2 + 8x - 1,\ 4xy^2 + 3x^2y - \frac{5}{4}xy + 9,\ 5x^2 - 7x + 6$$

ضریب (Coefficient)

ایک رقم کے کسی حصے کو اس کے رقم کے باقی حصے کے ساتھ ضرب دینے پر باقی حصے کا ضریب کہتے ہیں ۔

مثال کے طور پر

$x^2 + 5x - 24$ ایک الجبرائی جملہ ہے۔جس میں تین ارقام ہیں۔اس جملہ میں x ایک متغیر ہے۔x^2 کا ضریب '1' ہے اور x کا ضریب 5 ہے اور -24 ایک مستقل ہے۔ (24 نہیں)

کارروائی 1

دیئے گئے الجبرائی جملوں کے، متغیر، ضریب اور مستقل لکھئے۔

جملے	$x + 7$	$3y - 2$	$5x^2$	$2xy + 11$	$-\frac{1}{2}p + 7$	$-8 + 3a$
متغیر	x			x, y		
ضریب	1				$-\frac{1}{2}$	
مستقل	7					-8

3.2 کثیر رقمیات (Polynomials)

ایک حسابی جملہ جس میں متغیرات اور مستقلات موجود ہوں اور جن پر چار بنیادی اعمال کئے جاسکتے ہوں **کثیر رقمی** کہلاتا ہے۔

ان میں غیر منفی سالم اعداد بطور قوت نما پائے جاتے ہیں۔

ایک متغیر والی کثیر رقمیات (Polynomial in one Variable)

الجبرائی جملے کی صورت $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_o$ کو ایک متغیر والی **کثیر رقمی** کہتے ہیں۔جس میں x ایک متغیر اور 'n' اس کا درجہ ہے جہاں $a_o, a_1, a_2, \ldots a_n$ مستقلات ہیں $a_n \neq 0$ اور 'n' ایک صحیح عدد ہے۔

عام طور پر کثیر رقمیات کو $f(x)$, $g(x)$, $p(t)$, $q(z)$ اور $r(x)$ وغیرہ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

غور کیجئے

الجبرائی جملے میں متغیرات کے ضریب کوئی بھی حقیقی اعداد رکھتے ہیں۔جبکہ کثیر رقمی میں متغیرات کی قوتیں صرف غیر منفی سالم قوتیں یعنی صحیح اعداد ہیں اعادہ $a^\circ = 1$ تمام a کے لئے۔

9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:20:45 PM

مثال کے طور پر

شمار عدد	دیئے گئے جملے	کثیر رقمی ہے / کثیر رقمی نہیں ہے	سبب
1	$4y^3 + 2y^2 + 3y + 6$	کثیر رقمی	غیر منفی سالمی قوت
2	$4x^{-4} + 5x^4$	کثیر رقمی نہیں ہے	ایک قوت منفی ہے (-4)
3	$m^2 + \frac{4}{5}m + 8$	کثیر رقمی	غیر منفی سالمی قوت
4	$\sqrt{5}\,y^2$	کثیر رقمی	غیر منفی سالمی قوت
5	$2r^2 + 3r - 1 + \frac{1}{r}$	کثیر رقمی نہیں ہے	ایک قوت منفی ہے $\left(\frac{1}{r} = r^{-1}\right)$
6	$8 + \sqrt{q}$	کثیر رقمی نہیں ہے	q کی قوت کسر میں ہے۔ $\left(\sqrt{q} = q^{\frac{1}{2}}\right)$
7	$\sqrt{8}\,p^2 + 5p - 7$	کثیر رقمی	غیر منفی سالمی قوت
8	$5n^{\frac{4}{5}} + 6n - 1$	کثیر رقمی نہیں ہے	n کی ایک قوت کسر میں ہے۔ $\frac{4}{5}$

کثیر رقمی کی معیاری شکل
(Standard Form of a Polynomial)

ہم کسی کثیر رقمی $p(x)$ کو 'x' کی قوتوں کی نزولی یا صعودی ترتیب میں لکھ سکتے ہیں۔ تو اس طرح لکھی ہوئی کثیر رقمی کو کثیر رقمی کی معیاری شکل کہتے ہیں۔

مثال کے طور پر

(i) $8x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 9x + 6$

(ii) $5 - 3y + 6y^2 + 4y^3 - y^4$

کارروائی 2

ذیل کی کثیر رقمیات کو معیاری شکل میں لکھئے۔

شمار عدد	کثیر رقمی	معیاری شکل
1	$5m^4 - 3m + 7m^2 + 8$	
2	$\frac{2}{3}y + 8y^3 - 12 + \sqrt{5}\,y^2$	
3	$12p^2 - 8p^5 - 10p^4 - 7$	

کثیر رقمی کا درجہ (Degree of the polynomial)

ایک متغیر والی کثیر رقمی میں متغیر کی سب سے بڑی قوت کو کثیر رقمی کا درجہ کہتے ہیں۔

اس صورت حال میں ایک کثیر رقمی میں ایک سے زیادہ متغیرات ہو تو، کثیر رقمی کی ہر رقم کے متغیرات کے قوتوں کا حاصل جمع جو سب سے بڑی قوت ہوگی اُسی کو ہم کثیر رقمی کا درجہ کہتے ہیں۔

اس سے ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ کثیر رقمی میں سب سے بڑی قوت بہت اہم ہے۔ یقیناً جب ہم $x^2 + 5x$ لکھتے ہیں تو x^2 کی قیمت بڑی ہوگی $5x$ سے۔ جب کہ ہم سوچ سکتے ہیں $x^2 + 5x$ میں تقریباً x^2 کی قیمت بڑی ہوگی x کے لئے، چنانچہ جیسے جیسے قوت بڑھے گی، یہ اتنا ہی زیادہ غلبہ پائے گی۔ اسی لئے ایک کثیر رقمی میں سب سے بڑی قوت اتنی اہمیت کی حامل ہوتی ہے۔

9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:20:45 PM

مثال 3.1 مندرجہ ذیل کثیر رقمی میں ہر ایک رقم (Term) کا درجہ کے اور کثیر رقمی کا درجہ بھی معلوم کیجئے۔

$6ab^8 + 5a^2b^3c^2 - 7ab + 4b^2c + 2$

حل :

دی گئی کثیر رقمی $6ab^8 + 5a^2b^3c^2 - 7ab + 4b^2c + 2$

درج ذیل میں ہر ایک رقم کا درجہ دیا گیا ہے

$6ab^8$ کا درجہ $= (1+8) = 9$

$5a^2b^3c^2$ کا درجہ $= = 7$

$7ab$ کا درجہ $= (1+1) = 2$

$4b^2c$ کا درجہ $= (2+1) = 3$

مستقل رقم کا بھی ہمیشہ لحاظ کیا جاتا ہے۔لہٰذا '2' کا درجہ 0 ہے۔

کثیر رقمی $6ab^8 + 5a^2b^3c^2 - 7ab + 4b^2c + 2$ کا درجہ

اس کثیر رقمی کی سب سے بڑی قوت $= 9$

U6NO2

ایک خاص کثیر رقمی (A very special polynomial)

ہم نے پہلے ہی بتایا تھا کہ ضریب کوئی بھی ایک حقیقی عدد ہوگا۔اگر ضریب صفر ہو تو کیا ہوگا؟ پس تو وہ رقم صفر ہوگا۔

لیکن ہم اس طرح نہیں لکھ سکتے۔کیا ہوگا اگر تمام ضریب صفر ہوں تو؟ ہم مانتے ہیں کہ یہ بھی واقع ہے اور اس کو نام دیں۔

یہ ایک کثیر رقمی ہے جس کے تمام ضریب صفر ہیں۔

$$g(t) = 0t^4 + 0t^2 - 0t \ , \quad h(p) = 0p^2 - 0p + 0$$

اوپر کی مثالوں کو جب ہم دیکھتے ہیں تو ہم صفر کثیر رقمی کے درجہ کے بارے میں کچھ نہیں کہہ سکتے۔جبکہ دونوں مثالیں مختلف درجے رکھتے ہیں لیکن دونوں صفر کثیر رقمی ہیں۔چنانچہ ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ صفر کثیر رقمی کا درجہ غیر واضح ہے۔

صفر کثیر رقمی کا درجہ غیر واضح (not defined) ہے۔

کثیر رقمیات کی اقسام

i) عدد کے ارقام کی بنیاد پر کثیر رقمیات کی اقسام	
کثیر رقمی جو صرف ایک رقم رکھتے ہیں یک رقمی کہلاتے ہیں۔مثلاً 5, 6m, 12ab	یک رقمی
کثیر رقمی جو صرف دو ارقام رکھتے ہیں۔دو رقمی کہلاتے ہیں۔ مثلاً $5x + 3,\ 4a - 2,\ 10p + 1$	دو رقمی
کثیر رقمی جو صرف تین ارقام رکھتے ہیں۔سہ رقمی کہلاتے ہیں۔ مثلاً $4x^2 + 8x - 12,\ \ 3a^2 + 4a + 10$	سہ رقمی

9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:20:46 PM

ii) درجے کی بنیاد پر کثیر رقمیات کی اقسام	
مستقل	ایک کثیر رقمی کا درجہ صفر ہو تو مستقل کثیر رقمی (Constant polynomial) کہلاتی ہے۔ مثلاً $5, -7, \frac{2}{3}, \sqrt{5}$
خطّی	ایک کثیر رقمی کا درجہ ایک ہو تو خطی کثیر رقمی (Linear Polynomial) کہلاتی ہے۔ مثلاً $410x - 7$
دو درجی	ایک کثیر رقمی کا درجہ دو ہو تو دو درجی کثیر (Quadratic Polynomial) کہلاتی ہے۔ مثلاً $2\sqrt{5}\,x^2 + 8x - 4$
مکعبی	ایک کثیر رقمی کا درجہ تین ہو تو مکعبی کثیر رقمی (Cubic Polynomial) کہلاتی ہے۔ مثلاً $12y^3, \quad 6m^3 - 7m + 4$

مثال 3.2

مندرجہ ذیل کثیر رقمیات کو رقموں کے تعداد کی بنیاد پر تقسیم بندی کیجئے۔

شمار عدد	کثیر رقمی	رقموں کی تعداد	درجے کی بنیاد پر کثیر رقمیات کی اقسام
(i)	$5t^3 + 6t + 8t^2$	3 ارقام	سہ رقمی Trinomial
(ii)	$y - 7$	2 ارقام	دو رقمی Binomial
(iii)	$\frac{2}{3}r^4$	1 رقم	ایک رقمی Monomial
(iv)	$6y^5 + 3y - 7$	3 ارقام	سہ رقمی Trinomial
(v)	$8m^2 + 7m^2$	یکساں ارقام ہونے کی وجہ سے یہ $15m^2$ ہوگا۔ جو صرف ایک رقم ہے	ایک رقمی Monomial

مثال 3.3

درجہ کی بنیاد پر مندرجہ ذیل کثیر رقمیات کی تقسیم بندی کیجئے۔

شمار عدد	کثیر رقمی	درجہ	قسم
(i)	$\sqrt[3]{4}\,z + 7$	درجہ ایک	خطی کثیر رقمی
(ii)	$z^3 - z^2 + 3$	درجہ تین	مکعبی کثیر رقمی
(iii)	$\sqrt{7}$	درجہ صفر	مستقل کثیر رقمی
(iv)	$y^2 - \sqrt{8}$	درجہ دو	دو درجی کثیر رقمی

9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:20:46 PM

3.2.1 کثیر رقمیات کے حسابات (Arithmetic of Polynomials)

اب ہم کثیر رقمیات کی ایک دلچسپ زبان رکھتے ہیں اور ہم نے دیکھا کہ ان کثیر رقمیات کو متعدد طریقے سے تقسیم بندی کی جاسکتی ہے۔ اب ہم کثیر رقمیات سے کیا کر سکتے ہیں؟ غور کریں x ایک کثیر رقمی ہے۔

ہم اس کثیر رقمی کو ایک مخصوص قیمت 'x' سے جانچیں گے۔ ہم پوچھ سکتے ہیں کہ کثیر رقمی سے دیئے گئے تفاعل کس طرح تبدیل ہوتے ہیں 'x' کے بدلنے سے کثیر رقمی مساوات $P(x)=0$ لکھئے اور x کے لئے حل کیجئے ۔ یہ تمام بہت دلچسپ ہیں۔ اس طرح بہت سارے حسابات حل کر سکتے ہیں۔ لیکن ہم یہاں کثیر رقمیات کو مختلف طریقے سے اعداد کے طور پر استعمال کر سکتے ہیں۔ اس سبق کے شروع میں ہی اعداد سے ہمیں ایک اشارہ مل چکا ہے۔ جب ہم نے دیکھا کہ ہر مثبت سالم اعداد کو کثیر رقمی کے طور پر ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

ہم ذیل کے حسابات میں کثیر رقمیات کو جمع کرنے، ایک دوسرے سے تفریق کرنے، کثیر رقمیات کو ضرب کرنے، ایک دوسرے سے تقسیم کرنے۔ ان تمام حسابات کرنے کی کوشش کر سکتے ہیں۔ اس سے یہ پتہ چلتا ہے کہ اعداد اور کثیر رقمیات کے درمیان ایک گہری مشابہت ہوتی ہے اور بہت سارے دلچسپ خصوصیات انہیں جوڑتی ہیں۔ اس لئے اب ان کثیر رقمیات پر حسابی اعمال کو واضح کریں اور انہیں حل کریں۔

کثیر رقمیات کی جمع (Addition of Polynomials)

کوئی دو کثیر رقمیات کا حاصل جمع بھی کثیر رقمی ہی ہوگا۔

غور کیجئے

صرف یکساں ارقام کو جمع کر سکتے ہیں جیسے $3x^2 + 5x^2$ کا حل $8x^2$ ہے لیکن غیر یکساں ارقام جیسے $3x^2$ اور $5x^3$ جب جمع کرتے ہیں تو ہمیں $3x^2 + 5x^3$ حاصل ہوگا یہ ایک نئی کثیر رقمی ہے۔

مثال 3.4

اگر $p(x) = 4x^2 - 3x + 2x^3 + 5$ اور $q(x) = x^2 + 2x + 4$ ہو تو $p(x) + q(x)$ معلوم کیجئے۔

حل :

معیاری شکل	دی گئی کثیر رقمی
$2x^3 + 4x^2 - 3x + 5$	$p(x) = 4x^2 - 3x + 2x^3 + 5$
$x^2 + 2x + 4$	$q(x) = x^2 + 2x + 4$
$p(x) + q(x) = 2x^3 + 5x^2 - x + 9$	

ہم یہ دیکھ سکتے ہیں کہ $p(x) + q(x)$ بھی ایک کثیر رقمی ہے۔ چنانچہ کوئی دو کثیر رقمیات کا حاصل جمع بھی ایک کثیر رقمی ہے۔

کثیر رقمیات کی تفریق (Subtraction of polynomials)

کوئی دو کثیر رقمیات کا فرق (تفریق) بھی کثیر رقمی ہے۔

غور کیجئے

صرف یکساں ارقام کو تفریق کر سکتے ہیں۔ جیسے $8x^2 - 5x^2$ کا حل $3x^2$ ہے۔ لیکن جب $3x^2$ سے $5x^3$ کو تفریق کرنے پر $3x^2 - 5x^3$ حاصل ہوگا جو ایک نئی کثیر رقمی ہے۔

9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:20:47 PM

مثال 3.5

اگر $p(x) = 4x^2 - 3x + 2x^3 + 5$ اور $q(x) = x^2 + 2x + 4$ ہوتو $p(x) - q(x)$ معلوم کیجئے۔

حل :

معیاری شکل	دی گئی کثیر رقمی
$2x^3 + 4x^2 - 3x + 5$	$p(x) = 4x^2 - 3x + 2x^3 + 5$
$x^2 + 2x + 4$	$q(x) = x^2 + 2x + 4$
$p(x) - q(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x + 1$	

ہم یہ دیکھتے ہیں کہ $p(x) - q(x)$ بھی ایک کثیر رقمی ہے۔ چنانچہ کوئی دو کثیر رقمیات کا فرق بھی کثیر رقمی ہے۔

دو کثیر رقمیات کی ضرب (Multiplication of polynomials)

ایک مستطیل کی لمبائی '8' اکائیاں اور چوڑائی 7 اکائیاں ہوں تو اس مستطیل کو 4 مستطیلوں میں تقسیم کریں جس طرح نقشہ میں بتایا گیا ہے اور غور کریں کے اُن کا رقبہ مساوی ہو۔

	8
7	رقبہ = 56

	5	3
1	5	3
6	30	18

یہ ہمیں کثیر رقمیات کی ضرب کو سیکھنے کی ترغیب دیتا ہے۔

مثال کے طور پر فرض کیجئے کہ مستطیل کی لمبائی $(x + 1)$ اور چوڑائی $(3x + 2)$ ہو تو مستطیل کا رقبہ مندرجہ ذیل کے ذریعہ معلوم کر سکتے ہیں۔

	x	+	1
$3x$	$3x^2$		$3x$
+			
2	$2x$		2

لہذا مستطیل کا رقبہ $= 3x^2 + 3x + 2x + 2$

$= 3x^2 + 5x + 2$

> اگر x ایک متغیر اور m, n مثبت سالم اعداد ہو تو
> $x^m \times x^n = x^{m+n}$
> جب دو کثیر رقمیات کو ضرب دیتے ہیں تو
> حاصل ضرب بھی کثیر رقمی ہے۔

مثال 3.6

$(2x^2 + 3x - 6)$ اور $(4x - 5)$ کا حاصل ضرب معلوم کیجئے

حل : $(4x - 5)$ اور $(2x^2 + 3x - 6)$ کو ضرب کرنے کے لئے پہلی کثیر رقمی کی ہر رقم کو پھیلا کر دوسری کثیر رقمی کی رقم سے ضرب دیں اس صورت میں پہلی کثیر رقمی کو اس طرح پھیلائیں کہ $4x$ اور -5 اس کے بعد یکساں ارقام کو جمع کریں گے۔

$$(4x - 5)(2x^2 + 3x - 6) = 4x(2x^2 + 3x - 6) - 5(2x^2 + 3x - 6)$$

$$= 8x^3 + 12x^2 - 24x - 10x^2 - 15x + 30$$

$$= 8x^3 + 2x^2 - 39x + 30$$

9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:20:47 PM

دوسرا طریقہ : ضریب کو علیحدہ کرنے کا طریقہ استعمال کر کے بھی حل کر سکتے ہیں۔

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & +3 & -6 & \\ & & +4 & -5 & \\ \hline & -10 & -15 & +30 & \\ 8 & +12 & -24 & & \\ \hline 8 & +2 & -39 & +30 & \end{array}$$

$\therefore \quad (4x-5)(2x^2+3x-6) = 8x^3+2x^2-39x+30$

مشق 3.1

1) مندرجہ ذیل جملوں میں کونسے کثیر رقمیات ہیں۔ اگر نہیں ہو تو اس کا سبب بیان کریں۔

(i) $\frac{1}{x^2}+3x-4$ (ii) $x^2(x-1)$

(iii) $\frac{1}{x}(x+5)$ (iv) $\frac{1}{x^{-2}}+\frac{1}{x^{-1}}+7$

(v) $\sqrt{5}x^2+\sqrt{3}x+2$ (vi) $m^2-\sqrt[3]{m}+7m-10$

2) ذیل کے ہر ایک کثیر رقمی میں x^2 اور x کے ضریب لکھئے۔

(i) $4+\frac{2}{5}x^2-3x$ (ii) $6-2x^2+3x^3-\sqrt{7}x$

(iii) rx^2-x+2 (iv) $\sqrt{3}x^2+\sqrt{2}x+0.5$

(v) $x^2-\frac{7}{2}x+8$

3) مندرجہ ذیل کثیر رقمیات کا درجہ معلوم کیجئے۔

(i) $1-\sqrt{2}y^2+y^7$ (ii) $\frac{x^3-x^4+6x^6}{x^2}$

(iii) $x^3(x^2+x)$ (iv) $3x^4+9x^2+27x^6$

(v) $2\sqrt{5}p^4-\frac{8p^3}{3}+\frac{2p^2}{7}$

4) مندرجہ ذیل کثیر رقمیات کو معیاری شکل میں ترتیب دیں۔

(i) $x-9+\sqrt{7}x^3+6x^2$ (ii) $\sqrt{2}x^2-\frac{7}{2}x^4+x-5x^3$

(iii) $7x^3-\frac{6}{5}x^2+4x-1$ (iv) $y^2+\sqrt{5}y^3-11-\frac{7}{3}y+9y^4$

5) مندرجہ ذیل کثیر رقمیات کو جمع کریں اور حاصل شدہ کثیر رقمی کا درجہ معلوم کیجئے۔

(i) $p(x)=6x^2-7x+2$ $q(x)=6x^3-7x+15$

(ii) $h(x)=7x^3-6x+1$ $f(x)=7x^2+17x-9$

(iii) $f(x)=16x^4-5x^2+9$ $g(x)=-6x^3+7x-15$

6) پہلی کثیر رقمی میں سے دوسری کثیر رقمی کو تفریق کریں حاصل شدہ کثیر رقمی کا درجہ معلوم کیجئے۔

(i) $p(x)=7x^2+6x-1$ $q(x)=6x-9$

9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:20:47 PM

(ii) $f(y) = 6y^2 - 7y + 2$ $\quad$ $g(y) = 7y + y^3$

(iii) $h(z) = z^5 - 6z^4 + z$ $\quad$ $f(z) = 6z^2 + 10z - 7$

(7) $2x^3 + 6x^2 - 5x + 8$ کے ساتھ کیا جمع کرنے پر $3x^3 - 2x^2 + 6x + 15$ حاصل ہوگا؟

(8) $2x^4 + 4x^2 - 3x + 7$ سے کیا تفریق کرنے پر $3x^3 - x^2 + 2x + 1$ حاصل ہوگا؟

9) مندرجہ ذیل کثیر رقمیات ضرب کریں اور حاصل شدہ کثیر رقمی کا درجہ معلوم کیجئے۔

(i) $p(x) = x^2 - 9$ $\quad$ $q(x) = 6x^2 + 7x - 2$

(ii) $f(x) = 7x + 2$ $\quad$ $g(x) = 15x - 9$

(iii) $h(x) = 6x^2 - 7x + 1$ $\quad$ $f(x) = 5x - 7$

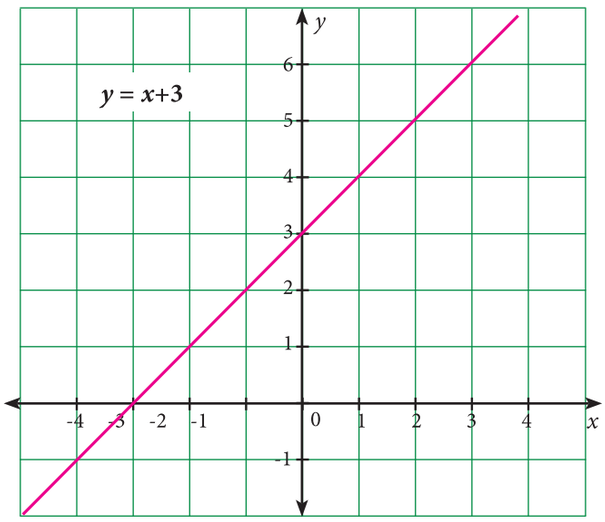
10) ایک چاکلیٹ کی قیمت Rs $(x + y)$ ہے اور سجاد نے $(x + y)$ چاکلیٹ خریدے۔ معلوم کیجئے کہ اس نے x اور y کی شکل میں کل کتنی رقم ادا کیا، اگر $x = 10$ اور $y = 5$، ہو تو اس سے ادا کی گئی کل رقم معلوم کیجئے۔

11) ایک مستطیل کی لمبائی $(3x + 2)$ اکائیاں اور اس کی چوڑائی $(3x - 2)$ اکائیاں ہیں۔ x کی شکل میں اس کا رقبہ معلوم کیجئے۔ اگر اکائیاں $x = 20$ ہوں تو اس کا رقبہ کیا ہوگا؟

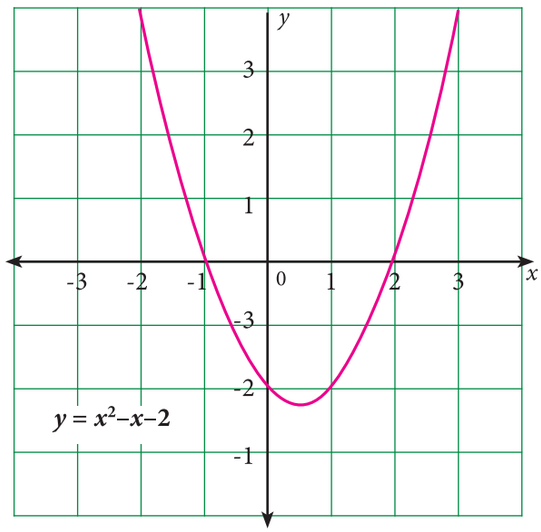
12) ایک کثیر رقمی $p(x)$ جس کا درجہ '1' ہے اور دوسری کثیر رقمی $q(x)$ جس کا درجہ 2 ہو تو۔ $p(x) \times q(x)$ یہ کس قسم کی کثیر رقمی ہوگی؟

3.2.2 کثیر رقمی کے صفر اور ان کی قیمت (Value and Zeros of Polynomial)

درج ذیل دیئے گئے ترسیمات پر غور کریں۔ پہلا خطی ہے دوسرا دو درجی ہے۔ پہلی کثیر رقمی x محور کو نقطہ $(x = -3)$ پر قطع کرتا ہے اور دوسرے دو نقاط $(x = -1$ اور $x = 2)$ پر قطع کرتے ہیں۔ یہ دونوں y محور پر صرف ایک ہی نقطہ پر قطع کرتے ہیں۔ عام طور پر، ہر کثیر رقمی ایک ترسیم رکھتا ہے اور ترسیم کو ایک تصویر/خاکہ کی طرح پیش کرنا (جبکہ ہم ضابطے سے زیادہ تصویر/خاکے کو پسند کرتے ہیں؟) لیکن ترسیم بہت سارے کارآمد معلومات بھی فراہم کرتا ہے جیسے کیا یہ خط مستقیم ہے، منحنی خط کی شکل کیا ہے؟ x محور پر کتنے مقام پر قطع کرتے ہیں وغیرہ۔



خاکہ 3.7



خاکہ 3.8

9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:20:48 PM

عام طور پر $x = a$ ایک کثیر رقمی $p(x)$ کی قیمت کو $P(a)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے جو x کو a سے تبدیل کرنے پر حاصل ہوتا ہے۔
جہاں a کوئی بھی حقیقی عدد ہوگا۔

غور کرنے پر پتا چلتا ہے کہ $p(x)$ کی قیمت بہت سارے 'x' کی قیمت کے لئے صفر ہوگی۔ (جیسا کہ ذیل کی دوسری ترسیم 3.8 میں ہے) لہٰذا یہ پوچھنے کے لئے دلچسپ ہے کہ x کی کتنی قیمتوں پر $p(x)$ صفر ہوتا ہے اور کونسی قیمتوں کے لئے؟ اور ہم x کی ان قیمتوں کو صفروں کی کثیر رقمی $p(x)$ کہتے ہیں۔

جیسے ہی ہم کثیر رقمی کی قیمت پر غور کرتے ہیں۔ جس کو ہم نے کثیر رقمی ترسیم پر درج کئے ہیں۔ اس میں کثیر رقمی کی صفر کو آسانی سے دیکھ سکتے ہیں۔ جو x محور پر قطع کرتے ہیں۔

صفروں کی تعداد x محور پر قطع کرنے والے خط یا منحنی خط پر منحصر ہوتے ہیں۔

جیسا کہ خاکہ 3.7 میں ہے، صفروں کی تعداد برابر ہے 1 کے

جیسا کہ خاکہ 3.8 میں ہے، صفروں کی تعداد برابر ہے 2 کا

غور کیجئے

ایک کثیر رقمی کے صفروں کی تعداد کم ہے یا مساوی ہے
ایک کثیر رقمی کے درجے سے

Number of zeros of a polynomial ≤ the degree of the polynomial

ایک کثیر رقمی کی قیمت (Value of a Polynomial)

ایک کثیر رقمی $p(x)$ کی قیمت میں $x = a$ ہو تو x سے 'a' تبدیل کرنے سے ہمیں $p(a)$ حاصل ہوگا۔ $(a \in R)$

مثال کے طور پر

غور کریں $f(x) = x^2 + 3x - 1.$

$f(x)$ کی قیمت $x = 2$ پر

$f(2) = 2^2+3(2)-1 = 4+6-1 = 9.$

کثیر رقمیات کے صفر (Zeros of Polynomial)

(i) کثیر رقمی پر غور کریں $p(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 14$

کثیر رقمی $p(x)$ کی قیمت میں $x = 1$

$$\begin{aligned} p(1) &= 4(1)^3 - 6(1)^2 + 3(1) - 14 \\ &= 4 - 6 + 3 - 14 \\ &= -13 \end{aligned}$$

اس صورت میں، ہم کہہ سکتے ہیں $x = 1$ پر $p(x)$ کی قیمت 13 ہے۔

اگر ہم x کے بدلہ میں '0' تبدیل کریں تو ہمیں حاصل ہوگا۔

$$\begin{aligned} p(0) &= 4(0)^3 - 6(0)^2 + 3(0) - 14 \\ &= 0 - 0 + 0 - 14 \\ &= -14 \end{aligned}$$

جہاں پر $p(x)$ at $x = 0$ is -14.

$x=2$ میں $p(x)$ کی قیمت

$$\begin{aligned} p(2) &= 4(2)^3 - 6(2)^2 + 3(2) - 14 \\ &= 32 - 24 + 6 - 14 \\ &= 0 \end{aligned}$$

چونکہ $x=0$ پر $p(x)$ کی قیمت صفر ہو جاتی ہے، ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ عدد 2 بھی $p(x)$ کا ایک صفر ہے جس میں

$p(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 14.$

9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:20:48 PM

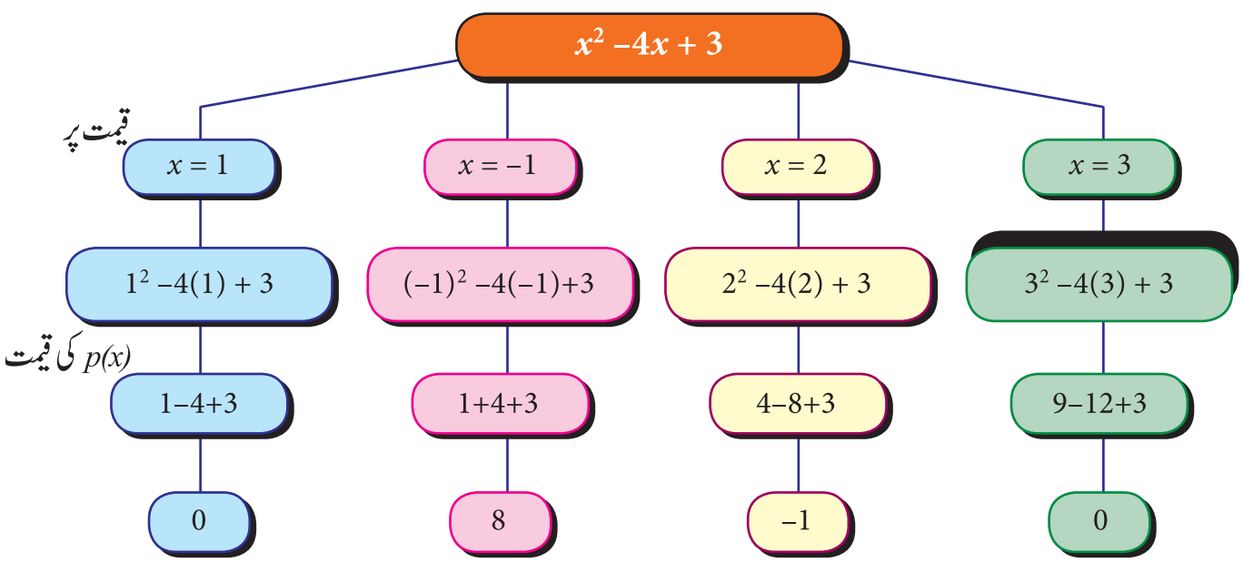
ایک کثیر رقمی مساوات کے جذور (Roots of a polynomial Equation)

عام طور پر، اگر $p(a) = 0$ ہو تو ہم کہتے ہیں کہ $p(x)$ کثیر رقمی کا صفر a ہے یا کثیر رقمی مساوات $p(x) = 0$ کا جذر a ہے۔

مثال 3.7

اگر $f(x) = x^2 - 4x + 3$ ہو تو $f(-1), f(2), f(3)$ کی قیمتیں معلوم کیجئے اور کثیر رقمی $f(x)$ کے صفر بھی معلوم کیجئے۔

حل : $f(x) = x^2 - 4x + 3$



خاکہ 3.9

چونکہ $x = 1$ اور $x = 3$ پر کثیر رقمی $f(x)$ کی قیمت صفر ہے۔اس طرح کثیر رقمی $f(x)$ کے صفر 1، اور 3 ہیں۔

مثال 3.8

درجہ ذیل کثیر رقمیات کے صفر معلوم کیجئے۔

(i) $f(x) = 2x + 1$ (ii) $f(x) = 3x - 5$

حل : i) دیا گیا ہے

$$f(x) = 2x + 1 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$= 2\left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\left[-\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right] = 2(0) = 0$$

$f(x)$ کا صفر $x = -\frac{1}{2}$ ہے , جبکہ $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ ہے

ii) دیا گیا ہے

$$f(x) = 3x - 5 = 3\left(x - \frac{5}{3}\right)$$

$$f\left(\frac{5}{3}\right) = 3\left(\frac{5}{3} - \frac{5}{3}\right) = 3(0) = 0$$

لہذا $f(x)$ کا صفر $x = \frac{5}{3}$ ہے

9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:20:48 PM

مثال 3.9 درجہ ذیل کثیر رقمی مساوات کے جذر معلوم کیجئے۔

(i) $5x - 3 = 0$ (ii) $-7 - 4x = 0$

حل :

(i) $5x - 3 = 0$

یا $5x = 3$

$x = \frac{3}{5}$

(ii) $-7 - 4x = 0$

یا $4x = -7$

$x = \frac{7}{-4} = -\frac{7}{4}$

غور کیجئے

i) ایک کثیر رقمی کے صفر کوئی بھی حقیقی عدد ہو سکتے ہیں ضروری نہیں کہ صفر ہی ہوں۔

ii) ایک غیر صفر مستقل کثیر رقمی میں صفر نہیں ہوتا۔

iii) رسمیہ طور پر، کثیر رقمی صفر کا ہر حقیقی عدد کا صفر ہوگا۔

مثال 3.10 تصدیق کیجئے۔ کیا -3 اور 3 کثیر رقمی $x^2 - 9$ کے صفر ہیں؟

حل :

فرض کریں $f(x) = x^2 - 9$

تو $f(x) = x^2 - 9$

یا $f(-3) = (-3)^2 - 9 = 9 - 9 = 0$

$f(+3) = 3^2 - 9 = 9 - 9 = 0$

چنانچہ -3 اور 3 کثیر رقمی $x^2 - 9$ کے صفر ہیں۔

مشق 3.2

1۔ ذیل کے نقاط پر کثیر رقمی $f(y) = 6y - 3y^2 + 3$ کی قیمت معلوم کیجئے۔

(i) $y = 1$ (ii) $y = -1$ (iii) $y = 0$

2۔ اگر $p(x) = x^2 - 2\sqrt{2}x + 1$ ہو تو $p(2\sqrt{2})$ معلوم کیجئے۔

3۔ ذیل میں دی گئی ہر کثیر رقمی کے صفر دریافت کیجئے۔

(i) $p(x) = x - 3$ (ii) $p(x) = 2x + 5$ (iii) $q(y) = 2y - 3$

(iv) $f(z) = 8z$ (v) $p(x) = ax$ when $a \neq 0$ (vi) $h(x) = ax + b,\ a \neq 0,\ a, b \in R$

4۔ مندرجہ ذیل کثیر رقمی مساوات کے جذور معلوم کیجئے۔

(i) $5x - 6 = 0$ (ii) $x + 3 = 0$

(iii) $10x + 9 = 0$ (iv) $9x - 4 = 0$

5۔ تصدیق کیجئے کہ کیا ذیل کثیر رقمی کے صفر، ان کے مقابلہ میں ثابت کرتے ہیں یا نہیں؟

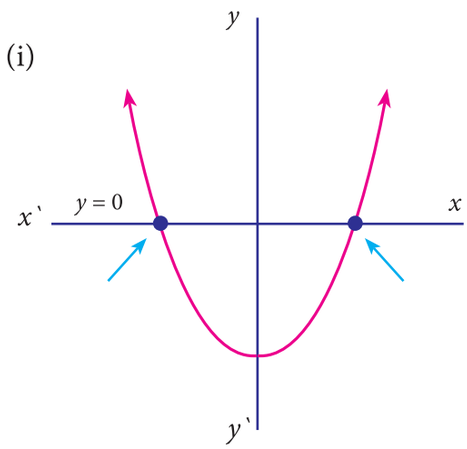
(i) $p(x) = 2x - 1,\ x = \frac{1}{2}$ (ii) $p(x) = x^3 - 1,\ x = 1$

(iii) $p(x) = ax + b, x = \frac{-b}{a}$ (iv) $p(x) = (x + 3)(x - 4),\ x = 4, x = -3$

9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:20:49 PM

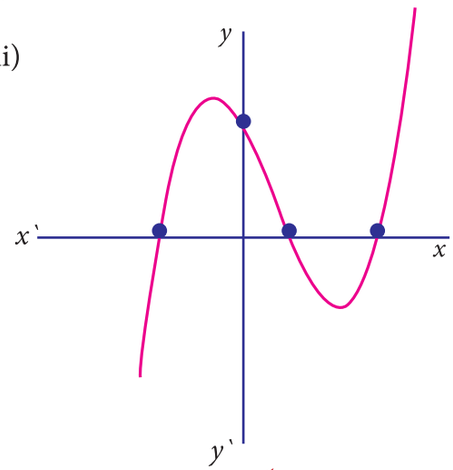
6۔ درجہ ذیل ترسیموں میں کثیر رقمیات کے صفر کی تعداد معلوم کیجئے۔

(i)



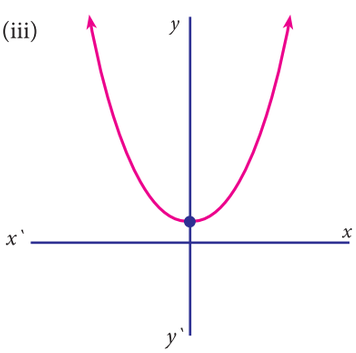
خاکہ 3.10

(ii)



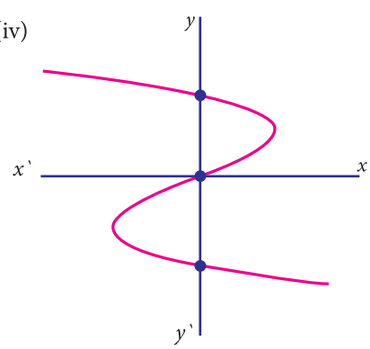
خاکہ 3.11

(iii)



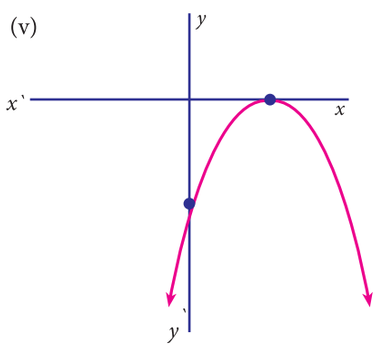
خاکہ 3.12

(iv)



خاکہ 3.13

(v)



خاکہ 3.14

3.3 مسئلہ باقی (Remainder Theorem)

اس باب میں ہم بچت معلوم کرنے کا ایک آسان اور شائستہ طریقہ پڑھیں گے۔

ایک کثیر رقمی کو ایک خطی کثیر رقمی سے تقسیم پذیری کے معاملے کو حل کرنے کے لئے ایک مشہور مسئلہ استعمال کرتے ہیں جسے **مسئلہ باقی** کہتے ہیں۔

اگر ایک کثیر رقمی $p(x)$ کا درجہ بڑا ہے یا برابر ہے جس کو ایک خطی کثیر رقمی $(x-a)$ سے تقسیم کرتے ہیں تو اس کا بچت $p(a)$ ہے۔ جس میں a کوئی حقیقی عدد ہوگا۔

مسئلہ باقی کی اہمیت (Significance of Remainder Theorem)

یہ ہمیں اس قابل بناتا ہے کہ ہم بغیر ایک حقیقی اور طول تقسیمی طریقہ کو اختیار کئے بغیر باقی معلوم کر سکتے ہیں۔

یہ ہمیں ایک اور مشہور مسئلہ کی طرف لئے جاتا ہے۔ جسے مسئلہ جزو ضربی Factor Theorem کہتے ہیں۔

غور کیجئے

i) اگر $p(x)$ کو $(x+a)$ سے تقسیم کرتے ہیں تو باقی $p(-a)$ ہے۔

ii) اگر $p(x)$ کو $(ax-b)$ سے تقسیم کرتے ہیں تو باقی $p(\frac{b}{a})$ ہے۔

iii) اگر $p(x)$ کو $(ax+b)$ سے تقسیم کرتے ہیں تو باقی $p(-\frac{b}{a})$ ہے۔

QFG8M

9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:20:49 PM

مثال 3.11

شمار عدد	سوال	حل	اشارہ
1	جب $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ کو $x+1$ سے تقسیم کیا جاتا ہے تو باقی معلوم کیجئے	$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ $f(-1) = (-1)^3+3(-1)^2+3(-1)+1$ $= -1+3-3+1 = 0$ چنانچہ باقی 0 ہے	$g(x) = x+1$ $g(x) = 0$ $x+1 = 0$ $x = -1$
2	جانچ کر بتایئے کہ کیا $f(x) = x^3 - x + 1$ کا ضعفی ہے $g(x) = 2 - 3x$؟	$\therefore f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \frac{2}{3} + 1$ $= \frac{8}{27} - \frac{2}{3} + 1$ $= \frac{8 - 18 + 27}{27} = \frac{17}{27} \neq 0$ $f(x)$ ضعف نہیں ہے $g(x)$ کا	$g(x) = 2-3x$ $= 0$ دیتا ہے $x = \frac{2}{3}$
3	جب $f(x) = x^3 - ax^2 + 6x - a$ کو $(x-a)$ سے تقسیم کیا جاتا ہے تو باقی معلوم کیجئے	ہم رکھتے ہیں $f(x) = x^3 - ax^2 + 6x - a$ $f(a) = a^3 - a(a)^2 + 6a - a$ $= a^3 - a^3 + 5a$ $= 5a$ چنانچہ باقی $5a$ ہے	فرض کرو $g(x) = x-a$ $g(x) = 0$ $x - a = 0$ $x = a$
4	فرض کرو کہ کثیر رقمی $2x^4 + 3x^3 + 2kx^2 + 3x + 6$ میں k کی قیمت کیا ہوگی جب $(x+2)$ سے ٹھیک تقسیم کیا جائے۔	فرض کرو $f(x) = 2x^4 + 3x^3 + 2kx^2 + 3x + 6$ اگر $f(x)$ ٹھیک تقسیم پذیر ہے $(x+2)$ سے اس طرح باقی صفر ہی ہوگا۔ i.e., $f(-2) = 0$ i.e., $2(-2)^4 + 3(-2)^3 + 2k(-2)^2 + 3(-2)+6=0$ $2(16) + 3(-8) + 2k(4) - 6 + 6=0$ $32-24 + 8k = 0$ $8k = -8, \quad k = -1$ چنانچہ $f(x)$ ٹھیک تقسیم پذیر ہے $(x-2)$ سے جب $k=-1$ ہوں	فرض کرو $g(x)=x+2$ $g(x)=0$ $x+2 = 0$ $x = -2$

9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:20:49 PM

مثال 3.12 حقیقی تقسیم کئے بغیر، ثابت کرو کہ $f(x) = 2x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 3x - 2$ سے $x^2 - 3x + 2$ ٹھیک تقسیم ہوتا ہے۔

حل: فرض کرو

$$f(x) = 2x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 3x - 2$$

$$g(x) = x^2 - 3x + 2$$

$$= x^2 - 2x - x + 2$$

$$= x(x-2) - 1(x-2)$$

$$= (x-2)(x-1)$$

مسئلہ باقی کو استعمال کرکے ہم نے ثابت کیا کہ $f(x)$ ٹھیک تقسیم ہوتا ہے $(x-1)$ اور $(x-2)$ سے۔

$$f(1) = 2(1)^4 - 6(1)^3 + 3(1)^2 + 3(1) - 2$$

$$= 2 - 6 + 3 + 3 - 2$$

$$= 0$$

$$f(2) = 2(2)^4 - 6(2)^3 + 3(2)^2 + 3(2) - 2$$

$$= 32 - 48 + 12 + 6 - 2$$

$$f(2) = 0$$

$\therefore$ f(x) ٹھیک تقسیم پذیر $(x-1)$ $(x-2)$ سے

یعنی $f(x)$ ٹھیک تقسیم پذیر ہے $x^2 - 3x + 2$ سے

اس طرح، اگر $p(x)$ کو $(x - a)$ سے تقسیم کرنے پر باقی $p(a) = 0$ ہوتا ہے تو $p(x)$ کا ایک جزو ضربی $(x - a)$ ہے۔ مسئلہ باقی، مسئلہ جزو ضربی کی طرف رہنمائی کرتا ہے۔

3.3.1 مسئلہ جزو ضربی (Factor Theorem)

اگر $p(x)$ ایک کثیر رقمی جس کا درجہ $n \geq 1$ ہے اور 'a' کوئی حقیقی عدد ہوگا تو

i) $p(a) = 0$ دلالت کرتا ہے کہ $p(x)$ کا ایک جزو ضربی $(x - a)$ ہے۔

ii) $p(x)$ کا ایک جزو ضربی $(x - a)$ ہے۔ جس کے معنی $p(x) = 0$ ہے۔

ذرا سوچئے

کوئی دو سالم اعداد $a\ (a \neq 0)$ اور b ہیں۔ اگر $b = ax$، ہو تو کسی سالم عدد x کے لئے ہم b کو a سے تقسیم کرتے ہیں۔

ثبوت (Proof)

اگر $p(x)$ مقسوم ہے اور $(x - a)$ مقسوم علیہ ہے۔ تو تقسیمی الگورتم کے ذریعہ ہم اس طرح لکھتے ہیں۔ $p(x) = (x - a)\, q(x) + p(a)$ جس میں $q(x)$ خارج قسمت ہے اور $p(a)$ بچت ہے۔

i) اگر $p(a) = 0$ ہو تو ہمیں $p(x) = (x - a)q(x)$ حاصل ہوگا، جس سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ $p(x)$ کا ایک جزو ضربی $(x - a)$ ہے

ii) جب کہ $(x - a)$ ایک جزو ضربی ہے $p(x)$ کا۔ $p(x) = (x - a)g(x)$ بعض کثیر رقمی کے لئے $g(x)$ ہے۔

ایسی صورت میں $p(a) = (a - a)\, g(a)$

$$= 0 \times g(a) = 0$$

لہذا $p(a) = 0$، جب $(x - a)$ ایک جزو ضربی ہے $p(x)$ کا۔

9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:20:50 PM

غور کیجئے

- $p(x)$ کا ایک جزو ضربی $(x-a)$ ہے۔ اگر $p(a)=0$ ہے۔ $(\because x-a=0,\ x=a)$
- $p(x)$ کا ایک جزو ضربی $(x+a)$ ہے۔ اگر $p(-a)=0$ ہے۔ $(\because x+a=0,\ x=-a)$
- $p(x)$ کا ایک جزو ضربی $(ax+b)$ ہے۔ اگر $p\left(-\frac{b}{a}\right)=0$ ہے۔ $\left(\because ax+b=0,\ ax=-b,\ x=-\frac{b}{a}\right)$
- $p(x)$ کا ایک جزو ضربی $(ax-b)$ ہے۔ اگر $p\left(\frac{b}{a}\right)=0$ ہے۔ $\left(\because ax-b=0,\ ax=b,\ x=\frac{b}{a}\right)$
- $p(x)$ کا ایک جزو ضربی $(x-a)(x-b)$ ہے۔ اگر $p(a)=0$ اور $p(b)=0$ ہے۔ $\left(\because \begin{matrix} x-a=0 & \text{or} & x-b=0 \\ x=a & \text{or} & x=b \end{matrix}\right)$

مثال 3.13

ثابت کرو کہ $x^3-4x^2-2x+20$ کا ایک جزو ضربی $(x+2)$ ہے۔

حل :

فرض کیجئے $p(x)=x^3-4x^2-2x+20$

مسئلہ جزو ضربی سے، $p(x)$ کا ایک جزو ضربی $(x+2)$ ہے۔ اگر $p(-2)=0$ ہو ۔

$$p(-2)=(-2)^3-4(-2)^2-2(-2)+20$$
$$=-8-4(4)+4+20$$
$$p(-2)=0$$

چنانچہ $x^3-4x^2-2x+20$ کا ایک جزو ضربی $(x+2)$ ہے۔

$(x+2)$ کے صفر معلوم کرنے کے لئے۔
لیجئے $x+2=0$
حاصل ہوگا۔ $x=-2$

مثال 3.14

کیا $3x^3+x^2-20x+12$ کا ایک جزو ضربی $(3x-2)$ ہے؟

حل :

فرض کیجئے $p(x)=3x^3+x^2-20x+12$

مسئلہ جزو ضربی سے $(3x-2)$ ایک جزو ضربی ہے۔ اگر $p\left(\frac{2}{3}\right)=0$ ہے۔

$$p\left(\frac{2}{3}\right)=3\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^2-20\left(\frac{2}{3}\right)+12$$
$$=3\left(\frac{8}{27}\right)+\left(\frac{4}{9}\right)-20\left(\frac{2}{3}\right)+12$$
$$=\frac{8}{9}+\frac{4}{9}-\frac{120}{9}+\frac{108}{9}$$
$$=\frac{(120-120)}{9}$$

$(3x-2)$ کے صفر معلوم کرنے کے لئے
لیجئے $3x-2=0$
$3x=2$
حاصل ہوگا۔ $x=\frac{2}{3}$

Progress Check معلومات کی جانچ

1۔ $p(x)$ کا ایک جزو ضربی $(x+3)$ ہے۔ اگر $p(\quad)=0$ ہے۔
2۔ $p(x)$ کا ایک جزو ضربی $(3-x)$ ہے۔ اگر $p(\quad)=0$ ہے۔
3۔ $p(y)$ کا ایک جزو ضربی $(y-3)$ ہے۔ اگر $p(\quad)=0$ ہے۔
4۔ $p(x)$ کا ایک جزو ضربی $(-x-b)$ ہے۔ اگر $p(\quad)=0$ ہے۔
5۔ $p(x)$ کا ایک جزو ضربی $(-x+b)$ ہے۔ اگر $p(\quad)=0$ ہے۔

9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:20:50 PM

$$p\left(\frac{2}{3}\right)=0$$

چنانچہ $3x^3+x^2-20x+12$

کا ایک جزوضربی $(3x-2)$ ہے۔

مثال 3.15 اگر کثیر رقمی $2x^3-6x^2+mx+4$ کا ایک جزوضربی $(x-2)$ ہے تو m کی قیمت معلوم کیجئے۔

حل : فرض کرو کہ $p(x)=2x^3-6x^2+mx+4$

مسئلہ جزوضربی سے، $p(x)$ کا ایک جزوضربی $(x-2)$ ہے۔ اگر $p(2)=0$ ہے۔

$x-2$ کے صفر معلوم کرنے کے لئے $x-2=0$ لیجئے۔ $x=2$ حاصل ہوگا۔

$$\begin{aligned} p(2) &= 0 \\ 2(2)^3-6(2)^2+m(2)+4 &= 0 \\ 2(8)-6(4)+2m+4 &= 0 \\ -4+2m &= 0 \\ m &= 2 \end{aligned}$$

مشق 3.3

1۔ جانچ کر بتائیے کہ کیا $p(x)$ ایک ضعف ہے $g(x)$ کا ؟

(i) $p(x)=x^3-5x^2+4x-3\ ;\ g(x)=x-2$

2۔ مسئلہ باقی کے ذریعے معلوم کیجئے جب $p(x)$ کو $g(x)$ سے تقسیم کیا جاتا ہے۔ جہاں

(i) $p(x)=x^3-2x^2-4x-1\ ;\ g(x)=x+1$

(ii) $p(x)=4x^3-12x^2+14x-3\ ;\ g(x)=2x-1$

(iii) $p(x=)\ x^3-3x^2+4x+50\ ;\ g(x)=x-3$

3۔ جب $3x^3-4x^2+7x-5$ کو $(x+3)$ سے تقسیم کیا جاتا ہے تو باقی معلوم کیجئے۔

4۔ باقی کیا ہوگا جب $x^{2018}+2018$ کو $x-1$ سے تقسیم کیا جائے۔

5۔ کثیر رقمی $p(x)=2x^3-kx^2+3x+10$ میں k کی کیا قیمت ہوگی جب $(x-2)$ سے تقسیم کیا جائے۔

6۔ اگر دو کثیر رقمیات $2x^3+ax^2+4x-12$ اور x^3+x^2-2x+a کو جب $(x-3)$ سے تقسیم کرتے ہیں تو باقی یکساں ہے۔ a کی قیمت معلوم کیجئے اور باقی بھی معلوم کیجئے۔

7۔ جانچئے کہ کیا $(x-1)$ مندرجہ ذیل کثیر رقمیات کا جزوضربی ہے۔

i) $x^3+5x^2-10x+4$ ii) x^4+5x^2-5x+1

9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:20:50 PM

8- مسئلہ جزوضربی کے ذریعے بتایئے کہ $2x^3 - 5x^2 - 28x + 15$ کا ایک جزوضربی $(x - 5)$ ہے۔

9- اگر $x^3 - 3x^2 - mx + 24$ کا ایک جزوضربی $(x + 3)$ ہوتو m کی قیمت معلوم کیجئے۔

10- اگر $(x - 2)$ اور $\left(x - \frac{1}{2}\right)$ دونوں $ax^2 + 5x + b$ کے اجزائے ضربی ہیں تو بتایئے کہ a = b ہے ۔

11- اگر $(x - 1)$ کثیررقمی $kx^3 - 2x^2 + 25x - 26$ کو بغیر باقی چھوڑے تقسیم کرتے ہیں تو k کی قیمت معلوم کیجئے۔

12- اگر $(x + 2)$ اور $(x - 4)$ ایک مستطیل کے اضلاع ہیں۔جس کا رقبہ $x^2 - 2x - 8$ ہے تو مسئلہ جزوضربی کے ذریعے جانچئے۔

3.4 الجبرائی تماثلات (Algebric Identities)

ایک تماثلات ایک مساویت ہے جو کسی بھی متغیرات کی قیمتوں کے لئے جو اس کے اندر ظاہر ہوتی ہیں، درست ہیں۔

ہم پہلے ہی ذیل کے تماثلات کے بارے میں سیکھ چکے ہیں۔

(1) $(a+b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$ (2) $(a-b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$

(3) $(a+b)(a-b) \equiv a^2 - b^2$ (4) $(x+a)(x+b) \equiv x^2 + (a+b)x + ab$

غور کیجئے

(i) $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ (ii) $a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$

(iii) $a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2$ (iv) $a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + 2$

مثال 3.16

تماثلات کے استعمال سے مندرجہ ذیل کو پھیلایئے۔

(i) $(3x + 4y)^2$

(ii) $(2a - 3b)^2$ (iii) $(5x + 4y)(5x - 4y)$ (iv) $(m + 5)(m - 8)$

حل :

(i) $(3x + 4y)^2$ $\left[\text{ہمیں معلوم ہے } (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2\right]$

لیجئے $[a = 3x,\ b = 4y]$

$(3x + 4y)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(4y) + (4y)^2$

$= 9x^2 + 24xy + 16y^2$

(ii) $(2a - 3b)^2$ $\left[\text{ہمیں معلوم ہے } (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2\right]$

لیجئے $[a = 2a,\ b = 3b]$

$(2a - 3b)^2 = (2a)^2 - 2(2a)(3b) + (3b)^2$

$= 4a^2 - 12ab + 9b^2$

9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:20:51 PM

(iii) $(5x+4y)(5x-4y)$ $\left[\text{ہمیں معلوم ہے } (a+b)(a-b) = a^2-b^2\right]$

$(5x+4y)(5x-4y) = (5x)^2-(4y)^2$ لیجئے $[a=5x \quad b=4y]$

$= 25x^2-16y^2$

(iv) $(m+5)(m-8)$ $\left[\text{ہمیں معلوم ہے } (x+a)(x-b) = x^2+(a-b)x-ab\right]$

$(m+5)(m-8) = m^2+(5-8)m-(5)(8)$ لیجئے $[x=m,\ a=5,\ b=8]$

$= m^2-3m-40$

3.4.1 سہ رقمی $(a+b+c)^2$ کا پھیلاؤ۔ Expansion of Trinomial $(a+b+c)^2$

ہم جانتے ہیں کہ $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$

لیجئے $x=a+b,\ y=c$

تو $(a+b+c)^2 = (a+b)^2+2(a+b)(c)+c^2$

$= a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$

$= a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

لہذا $(a+b+c)^2 \equiv a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$(a+b+c)^2$

	a	b	c
a	a^2	ab	ca
b	ab	b^2	bc
c	ca	bc	c^2



مثال 3.17 $(a-b+c)^2$ پھیلایئے

حل : ' b ' کی جگہ ' b − ' درج کرنے پر تماثل کا پھیلاؤ۔

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$(a+(-b)+c)^2 = a^2+(-b)^2+c^2+2a(-b)+2(-b)c+2ca$

$= a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca$

معلومات کی جانچ Progress Check

مندرجہ ذیل کے تماثلات پھیلاؤ اور تصدیق کیجئے۔

$(a+b+c)^2 = (-a-b-c)^2$

$(-a+b+c)^2 = (a-b-c)^2$

$(a-b+c)^2 = (-a+b-c)^2$

$(a+b-c)^2 = (-a-b+c)^2$

مثال 3.18 $(2x+3y+4z)^2$ کو پھیلایئے۔

حل : ہم جانتے ہیں کہ

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$a=2x, b=3y$ and $c=4z$ کو مساوات میں درج کریں۔

$(2x+3y+4z)^2 = (2x)^2+(3y)^2+(4z)^2+2(2x)(3y)+2(3y)(4z)+2(4z)(2x)$

$= 4x^2+9y^2+16z^2+12xy+24yz+16xz$

9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:20:51 PM

مثال 3.19 مربع کا رقبہ معلوم کیجئے جس کے ضلع کی لمبائی $3m+2n-4l$ ہے۔

بھرتی کرنے پر
$a=3m,$
$b=2n$
$c=-4l$

حل :

ضلع × ضلع = مربع کا رقبہ

$$=(3m+2n-4l)\times(3m+2n-4l)$$
$$=(3m+2n-4l)^2$$

ہم جانتے ہیں کہ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$$[3m+2n+(-4l)]^2=(3m)^2+(2n)^2+(-4l)^2+2(3m)(2n)+2(2n)(-4l)+2(-4l)(3m)$$
$$=9m^2+4n^2+16l^2+12mn-16ln-24lm$$

چنانچہ مربع کا رقبہ = [مربع اکائیاں $9m^2+4n^2+16l^2+12mn-16ln-24lm$]

3.4.2 تماثلات میں دو رقمیات کا حاصل ضرب Identities involving Product of Three Binomials

$$(x+a)(x+b)(x+c)=[(x+a)\ (x+b)]\ (x+c)$$
$$=[x^2+(a+b)x+ab](x+c)$$
$$=x^2(x)+(a+b)(x)(x)+abx+x^2c+(a+b)(x)c+abc$$
$$=x^3+ax^2+bx^2+abx+cx^2+acx+bcx+abc$$
$$=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$$

لہذا $(x+a)(x+b)(x+c)\equiv x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$

مثال 3.20 مندرجہ ذیل کو پھیلایئے۔

(i) $(x+5)(x+6)(x+4)$ (ii) $(3x-1)(3x+2)(3x-4)$

حل : ہم جانتے ہیں کہ

$$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc \quad \text{--(1)}$$

(i) $(x+5)(x+6)(x+4)$
$=x^3+(5+6+4)x^2+(30+24+20)x+(5)(6)(4)$
$=x^3+15x^2+74x+120$

بھرتی کریں
a by 5
b by 6
c by 4 in (1)

(ii) $(3x-1)(3x+2)(3x-4)$
$=(3x)^3+(-1+2-4)(3x)^2+(-2-8+4)(3x)+(-1)(2)(-4)$
$=27x^3+(-3)9x^2+(-6)(3x)+8$
$=27x^3-27x^2-18x+8$

بھرتی کریں
x by $3x$, a by 1,
b by 2, c by 4
in (1)

9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:20:52 PM

3.4.3 Expansion of $(x+y)^3$ and $(x-y)^3$ $(x+y)^3$ اور $(x-y)^3$ کے پھیلاؤ

$$(x+a)(x+b)(x+c) \equiv x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$$

مندرجہ بالا تماثل میں $a = b = c = y$ درج کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$(x+y)(x+y)(x+y) = x^3+(y+y+y)x^2+(yy+yy+yy)x+yyy$$
$$= x^3+(3y)x^2+(3y^2)x+y^3$$

لہذا $(x+y)^3 \equiv x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ (یا) $(x+y)^3 \equiv x^3+y^3+3xy(x+y)$

y کی جگہ $-y$ کو تبدیل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$(x-y)^3 \equiv x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$ (یا) $(x-y)^3 \equiv x^3-y^3-3xy(x-y)$

مثال 3.21

$(5a-3b)^3$ کو پھیلایئے۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ

$$(x-y)^3 = x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$$
$$(5a-3b)^3 = (5a)^3-3(5a)^2(3b)+3(5a)(3b)^2-(3b)^3$$
$$= 125a^3-3(25a^2)(3b)+3(5a)(9b^2)-(3b)^3$$
$$= 125a^3-225a^2b+135ab^2-27b^3$$

ذیل کے تماثل کا بھی استعمال ہوتا ہے۔

$$x^3+y^3+z^3-3xyz \equiv (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

ہم اس کو دائیں ہاتھ کے جانب (RHS) ضرب دے کر جانچ سکتے ہیں۔

غور کیجئے

i) اگر $(x+y+z)=0$ ہوتو $x^3+y^3+z^3=3xyz$ ہے۔

بعض تماثلات کے حاصل جمع، فرق اور حاصل ضرب شامل ہیں جو بغیر ثبوت کے دئے گئے ہیں۔

(i) $x^3+y^3 \equiv (x+y)^3-3xy(x+y)$ (ii) $x^3-y^3 \equiv (x-y)^3+3xy(x-y)$

مثال 3.22

$(2x+3y+4z)(4x^2+9y^2+16z^2-6xy-12yz-8zx)$ کا حاصل ضرب معلوم کیجئے۔

حل : ہم جانتے ہیں کہ

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = a^3+b^3+c^3-3abc$$

9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:20:52 PM

$$(2x+3y+4z)(4x^2+9y^2+16z^2-6xy-12yz-8zx)$$
$$=(2x)^3+(3y)^3+(4z)^3-3(2x)(3y)(4z)$$
$$=8x^3+27y^3+64z^3-72xyz$$

مثال 3.23 $10^3-15^3+5^3$ محسوب کیجئے۔

بھرتی کریں
a by 10, b by –15,
c by 5

حل : ہم جانتے ہیں کہ ، اگر $a+b+c=0$ ہوتو $a^3+b^3+c^3=3abc$

یہاں $a+b+c=10-15+5=0$

چنانچہ $10^3+(-15)^3+5^3=3(10)(-15)(5)$

$10^3-15^3+5^3=-2250$

مشق 3.4

1۔ مندرجہ ذیل کو پھیلایئے۔

(i) $(2x+3y+4z)^2$ (ii) $(-p+2q+3r)^2$

(iii) $(2p+3)(2p-4)(2p-5)$ (iv) $(3a+1)(3a-2)(3a+4)$

2۔ الجبرائی تماثلات کے استعمال سے x^2, x کے سر اعداد (ضریب) اور مستقل رقم کو بغیر حقیقی پھیلاؤ کے طریقے سے معلوم کیجئے۔

(i) $(x+5)(x+6)(x+7)$ (ii) $(2x+3)(2x-5)(2x-6)$

3۔ اگر $(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+14x^2+59x+70$ ہوتو ذیل کی قیمتیں معلوم کیجئے۔

(i) $a+b+c$ (ii) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ (iii) $a^2+b^2+c^2$ (iv) $\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}+\frac{c}{ab}$

4۔ ذیل کو پھیلایئے۔ (i) $(3a-4b)^3$ (ii) $\left(x+\frac{1}{y}\right)^3$

5۔ تماثلات کے استعمال سے مندرجہ ذیل کو محسوب کیجئے۔ (i) 98^3 (ii) 1001^3

6۔ اگر $(x+y+z)=9$ اور $(xy+yz+zx)=26$ ہوتو $x^2+y^2+z^2$ کی قیمت معلوم کیجئے۔

7۔ اگر $3a+4b=10$ اور $ab=2$ ہوتو $27a^3+64b^3$ کی قیمت معلوم کیجئے۔

8۔ اگر $x-y=5$ اور $xy=14$ ہوتو x^3-y^3 کی قیمت معلوم کیجئے۔

9۔ اگر $a+\frac{1}{a}=6$ ہوتو $a^3+\frac{1}{a^3}$ کی قیمت معلوم کیجئے۔

10۔ اگر $x^2+\frac{1}{x^2}=23$ ہوتو $x+\frac{1}{x}$ اور $x^3+\frac{1}{x^3}$ کی قیمت معلوم کیجئے۔

11۔ اگر $\left(y-\frac{1}{y}\right)^3=27$ ہوتو $y^3-\frac{1}{y^3}$ کی قیمت معلوم کیجئے۔

9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:20:53 PM

12۔ مختصر کیجئے۔

(i) $(2a+3b+4c)(4a^2+9b^2+16c^2-6ab-12bc-8ca)$

(ii) $(x-2y+3z)(x^2+4y^2+9z^2+2xy+6yz-3xz)$

13۔ تماثل کے استعمال سے مندرجہ ذیل کو محسوب کیجئے۔

(i) $7^3-10^3+3^3$ (ii) $1+\frac{1}{8}-\frac{27}{8}$

14۔ اگر $2x-3y-4z=0$ ہو تو $8x^3-27y^3-64z^3$ کو معلوم کیجئے۔

3.5 اجزائے ضربی نکالنا (Factorization)

اجزائے ضربی، ضرب کا برعکس ہے۔

مثال کے طور پر : 3 اور 5 کو ضرب کریں تو ہمیں حاصل ضرب 15 ملے گا۔

15 کے اجزائے ضربی معلوم کرنے پر ہمیں 3 اور 5 اجزائے ضربی حاصل ہوتے ہیں۔

مثال کے طور پر : $(x+2)$ اور $(x+3)$ کو ضرب کریں، تو ہمیں حاصل ضرب x^2+5x+6 ملے گا۔

x^2+5x+6 کا اجزائے ضربی معلوم کرنے پر ہمیں $(x+2)$ اور $(x+3)$ اجزائے ضربی حاصل ہوتے ہیں۔

ضرب کریں Multiply ↓	اجزائے ضربی معلوم کریں Factorise ↑
$(x+3)(x+2)$	$(x+3)(x+2)$
$x(x+2)+3(x+2)$	$x(x+2)+3(x+2)$
$x^2+2x+3x+6$	$x^2+2x+3x+6$
x^2+5x+6	x^2+5x+6

اس طرح دیے گئے کثیر رقمی کے اعلیٰ درجہ کو اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کو ادنیٰ درجہ کے طور پر تبدیل کرنے کا عمل ہے۔ جس کے مزید اجزائے ضربی معلوم نہیں کر سکتے۔ اسی کو اجزائے ضربی کہتے ہیں۔

Two important ways of factorisation are : اجزائے ضربی معلوم کرنے کے دو اہم طریقے یہ ہیں۔

i) مشترک جز وضربی کو نکالنا

$ab+ac$

$a\cdot b+a\cdot c$

اجزائے ضربی کی شکل $a(b+c)$

ii) جماعت بندی کرتے ہوئے اجزائے ضربی معلوم کرنا۔

$a+b-pa-pb$

جماعت (گروپ) کی جوڑیاں $(a+b)-p(a+b)$

اجزائے ضربی کی شکل $(a+b)(1-p)$

جب ایک کثیر رقمی کے اجزائے ضربی معلوم کرتے ہیں تو ہم مشترک اجزائے ضربی کو نکال دیتے ہیں۔

مثال 3.24

ذیل کے اجزائے ضربی معلوم کیجئے۔

(i) $am+bm+cm$ (ii) a^3-a^2b (iii) $5a-10b-4bc+2ac$ (iv) $x+y-1-xy$

حل :

(i) $am+bm+cm$

$am+bm+cm$

اجزائے ضربی کی شکل $m(a+b+c)$

(ii) a^3-a^2b

جماعت (گروپ) کی جوڑیاں $a^2\cdot a-a^2\cdot b$

اجزائے ضربی کی شکل $a^2\times(a-b)$

9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:20:53 PM

(iii) $5a-10b-4bc+2ac$
$5a-10b+2ac-4bc$
$5(a-2b)+2c(a-2b)$
$(a-2b)(5+2c)$

(iv) $x+y-1-xy$
$x-1+y-xy$
$(x-1)+y(1-x)$
$(x-1)-y(x-1)$ $\quad (a-b)=-(b-a)$
$(x-1)(1-y)$

3.5.1 تماثل کو استعمال کر کے اجزائے ضربی معلوم کرنا (Factorisation using Identity)

(i) $a^2+2ab+b^2 \equiv (a+b)^2$ (ii) $a^2-2ab+b^2 \equiv (a-b)^2$

(iii) $a^2-b^2 \equiv (a+b)(a-b)$ (iv) $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca \equiv (a+b+c)^2$

(v) $a^3+b^3 \equiv (a+b)(a^2-ab+b^2)$ (vi) $a^3-b^3 \equiv (a-b)(a^2+ab+b^2)$

(vii) $a^3+b^3+c^3-3abc \equiv (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

غور کیجئے

$(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$; $\quad a^4-b^4=(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$

$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$; $\quad a^6-b^6=(a+b)(a-b)(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$

Progress Check معلومات کی جانچ

ثابت کرو

(i) $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(a-\frac{1}{a}\right)^2=2\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)$ (ii) $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-\left(a-\frac{1}{a}\right)^2=4$

مثال 3.25

ذیل کے اجزائے ضربی معلوم کیجئے۔

(i) $9x^2+12xy+4y^2$ (ii) $25a^2-10a+1$ (iii) $36m^2-49m^2$

(iv) x^3-x (v) x^4-16 (vi) $x^2+4y^2+9z^2-4xy+12yz-6xz$

حل :

(i) $9x^2+12xy+4y^2 = (3x)^2+2(3x)(2y)+(2y)^2 \quad [\because a^2+2ab+b^2=(a+b)^2]$
$= (3x+2y)^2$

(ii) $25a^2-10a+1 = (5a)^2-2(5a)(1)+1^2$
$= (5a-1)^2 \quad [\because a^2-2ab+b^2=(a-b)^2]$

(iii) $36m^2-49n^2 = (6m)^2-(7n)^2$
$= (6m+7n)(6m-7n) \quad [\because a^2-b^2=(a+b)(a-b)]$

9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:20:54 PM

(iv) $x^3 - x = x(x^2 - 1)$

$= x(x^2 - 1^2)$

$= x(x+1)(x-1)$

(v) $x^4 - 16 = x^4 - 2^4$ $\left[\because a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a+b)(a-b)\right]$

$= (x^2 + 2^2)(x^2 - 2^2)$

$= (x^2 + 4)(x+2)(x-2)$

(vi) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 4xy + 12yz - 6xz$

$= (-x)^2 + (2y)^2 + (3z)^2 + 2(-x)(2y) + 2(2y)(3z) + 2(3z)(-x)$

$= (-x + 2y + 3z)^2$ ؛ $(x - 2y - 3z)^2$

مثال 3.26 ذیل کے اجزائے ضربی معلوم کیجئے۔

(i) $27x^3 + 125y^3$ (ii) $216m^3 - 343m^3$

(iii) $2x^4 - 16xy^3$ (iv) $8x^3 + 27y^3 + 642^3 - 72xy^2$

حل :

(i) $27x^3 + 125y^3 = (3x)^3 + (5y)^3$ $\left[\because (a^3 + b^3) = (a+b)(a^2 - ab + b^2)\right]$

$= (3x + 5y)\left((3x)^2 - (3x)(5y) + (5y)^2\right)$

$= (3x + 5y)(9x^2 - 15xy + 25y^2)$

(ii) $216m^3 - 343m^3 = (6m)^3 - (7n)^3$ $\left[\because (a^3 - b^3) = (a-b)(a^2 + ab + b^2)\right]$

$= (6m - 7n)\left((6m)^2 + (6m)(7n) + (7n)^2\right)$

$= (6m - 7n)(36m^2 + 42mn + 49n^2)$

(iii) $2x^4 - 16xy^3 = 2x(x^3 - 8y^3)$

$= 2x\left(x^3 - (2y)^3\right)$ $\left[\because (a^3 - b^3) = (a-b)(a^2 + ab + b^2)\right]$

$= 2x\left((x - 2y)(x^2 + (x)(2y) + (2y)^2)\right)$

$= 2x(x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$

ذرا سوچئے

جانچئے کہ کیا 15 درج ذیل میں تقسیم پذیر ہے۔

(i) $2017^3 + 2018^3$

(ii) $2018^3 - 1973^3$

(iv) $8x^3 + 27y^3 + 64z^3 - 72xyz$

$= (2x)^3 + (3y)^3 + (4z)^3 - 3(2x)(3y)(4z)$

$= (2x + 3y + 4z)(4x^2 + 9y^2 + 16z^2 - 6xy - 12yz - 8xz)$

9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:20:54 PM

مشق 3.5

1) مندرجہ ذیل جملوں کے اجزائے ضربی معلوم کیجئے۔

(i) $2a^2 + 4a^2b + 8a^2c$ (ii) $ab - ac - mb + mc$

2) ذیل کے اجزائے ضربی معلوم کیجئے۔

(i) $x^2 + 4x + 4$ (ii) $3a^2 - 24ab + 48b^2$ (iii) $x^5 - 16x$

(iv) $m^2 + \frac{1}{m^2} - 23$ (v) $6 - 216x^2$ (vi) $a^2 + \frac{1}{a^2} - 18$

3) ذیل کے اجزائے ضربی معلوم کیجئے۔

(i) $4x^2 + 9y^2 + 25z^2 + 12xy + 30yz + 20xz$ (ii) $25x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 20xy + 12yz - 30xz$

4) ذیل کے اجزائے ضربی معلوم کیجئے۔

(i) $8x^3 + 125y^3$ (ii) $27x^3 - 8y^3$ (iii) $a^6 - 64$

5) ذیل کے اجزائے ضربی معلوم کیجئے۔

(i) $x^3 + 8y^3 + 6xy - 1$ (ii) $l^3 - 8m^3 - 27n^3 - 18lmn$

3.5.2 دو درجی کثیر رقمی (سہ رقمی) $ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ کی قسم کے اجزائے ضربی معلوم کرنا :

(Factorising the Quadratic Polynomial (Trinomial) of the type $ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$)

$ax^2 + bx + c$ کے خطی جزو ضربی کی شکل $(kx + m)$ اور $(lx + n)$ ہوگی۔اس طرح

$ax^2 + bx + c = (kx + m)(lx + n) = klx^2 + (lm + kn)x + mn$ مساوات کے دونوں جانب ارقام x^2, x کے سراعداد اور مستقل رقم C کا موازنہ کرنا۔اُن کا موازنہ کرنے پر ہمیں $a = kl$ ، $b = (lm + kn)$ اور $c = mn$ جس میں kl اور mn کا حاصل ضرب ac ہوگا ۔ یعنی lm اور kn کا حاصل ضرب، x کے سرعدد کے مساوی ہوگا۔

لہذا $(kl \times mn) = (lm \times kn)$

$ax^2 + bx + c$ کے اجزائے ضربی معلوم کرنے کے حسب ذیل مرحلے ہیں۔

مرحلہ 1 : x کے سرعدد اور مستقل رقم کو ضرب دیں یعنی ac ہے۔

مرحلہ 2 : ac کو دو جذور میں اس طرح جُدا کریں کہ ان کا حاصل جمع اور حاصل ضرب بالترتیب b اور ac کے مساوی ہو۔

مرحلہ 3 : رقموں کو دو جوڑیوں میں جماعت بندی کرکے ، اجزائے ضربی معلوم کیجئے ۔

مثال 3.27

$2x^2 + 15x + 27$ کا اجزائے ضربی معلوم کیجئے۔

حل : $ax^2 + bx + c$ سے موازنہ کریں۔

ہمیں حاصل ہوگا $a = 2,\ b = 15,\ c = 27$

حاصل ضرب $ac = 2 \times 27 = 54$ حاصل جمع اور $b=15$

ہم نے 6 ، 9 کی جوڑی دریافت کی جو

"b=15" اور "ac = 54" کو مطمئن کرتا ہے۔

اجزائے ضربی کا حاصل جمع $b = 15$	اجزائے ضربی کا حاصل ضرب $ac = 54$	اجزائے ضربی کا حاصل جمع $b = 15$	اجزائے ضربی کا حاصل ضرب $ac = 54$
−55	-1×-54	55	1×54
−29	-2×-27	29	2×27
−21	-3×-18	21	3×18
−15	-6×-9	15	6×9

مطلوبہ اجزائے ضربی 6 اور 9 ہیں۔

9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:20:55 PM

چنانچہ ہم درمیانی رقم کو $6x$ اور $9x$ کی طرح جدا کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 2x^2+15x+27 &= 2x^2+6x+9x+27 \\ &= 2x(x+3)+9(x+3) \\ &= (x+3)(2x+9) \end{aligned}$$

لہذا $2x^2+15x+27$ کے اجزائے ضربی $(x+3)$ اور $(2x+9)$ ہیں۔

مثال 3.28

$2x^2-15x+27$ کا اجزائے ضربی معلوم کیجئے۔

حل : ax^2+bx+c سے موازنہ کریں۔

ہمیں حاصل ہوگا $a=2,\ b=-15,\ c=27$

حاصل ضرب $ac = 2\times27 = 54$, حاصل جمع $b=-15$

∴ ہم درمیانی رقم کو $-6x$ اور $-9x$ کی طرح جدا کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 2x^2-15x+27 &= 2x^2-6x-9x+27 \\ &= 2x(x-3)-9(x-3) \\ &= (x-3)(2x-9) \end{aligned}$$

اجزائے ضربی کا حاصل جمع $b=-15$	اجزائے ضربی کا حاصل ضرب $ac=54$	اجزائے ضربی کا حاصل جمع $b=-15$	اجزائے ضربی کا حاصل ضرب $ac=54$
-55	-1×-54	55	1×54
-29	-2×-27	29	2×27
-21	-3×-18	21	3×18
-15	**-6×-9**	15	6×9

مطلوبہ اجزائے ضربی **-6** اور **-9** ہیں۔

لہذا $2x^2-15x+27$ کے اجزائے ضربی $(x-3)$ اور $(2x-9)$ ہیں۔

مثال 3.29

$2x^2+15x-27$ کا اجزائے ضربی معلوم کیجئے۔

حل : ax^2+bx+c سے موازنہ کریں۔

ہمیں حاصل ہوگا $a=2,\ b=15,\ c=-27$

حاصل ضرب $ac = 2\times-27 = -54$, حاصل جمع $b=15$

∴ ہم درمیانی رقم کو $18x$ اور $-3x$ کی طرح جُدا کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 2x^2+15x-27 &= 2x^2+18x-3x-27 \\ &= 2x(x+9)-3(x+9) \\ &= (x+9)(2x-3) \end{aligned}$$

اجزائے ضربی کا حاصل جمع $b=15$	اجزائے ضربی کا حاصل ضرب $ac=-54$	اجزائے ضربی کا حاصل جمع $b=15$	اجزائے ضربی کا حاصل ضرب $ac=-54$
-53	1×-54	53	-1×54
-25	2×-27	25	-2×27
-15	3×-18	**15**	**-3×18**
-3	6×-9	3	-6×9

مطلوبہ اجزائے ضربی **-3** اور **18** ہیں۔

لہذا $2x^2+15x-27$ کے اجزائے ضربی $(x+9)$ اور $(2x-3)$ ہیں۔

مثال 3.30

$2x^2-15x-27$ کا اجزائے ضربی معلوم کیجئے۔

حل : ax^2+bx+c سے موازنہ کریں۔

ہمیں حاصل ہوگا $a=2,\ b=-15,\ c=-27$

حاصل ضرب $ac = 2\times-27=-54$, حاصل جمع $b=-15$

∴ ہم درمیانی رقم کو $18x$ اور $3x$ کی طرح جُدا کرتے ہیں۔

اجزائے ضربی کا حاصل جمع $b=-15$	اجزائے ضربی کا حاصل ضرب $ac=-54$	اجزائے ضربی کا حاصل جمع $b=-15$	اجزائے ضربی کا حاصل ضرب $ac=-54$
-53	1×-54	53	-1×54
-25	2×-27	25	-2×27
-15	**3×-18**	15	-3×18
-3	6×-9	3	-6×9

مطلوبہ اجزائے ضربی **3** اور **-18** ہیں۔

9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:20:55 PM

$$2x^2 - 15x - 27 = 2x^2 - 18x + 3x - 27$$
$$= 2x(x-9) + 3(x-9)$$
$$= (x-9)(2x+3)$$

لہذا $2x^2 - 15x - 27$ کے اجزائے ضربی $(x-9)$ اور $(2x+3)$ ہیں۔

مثال 3.31

$(x+y)^2 + 9(x+y) + 20$ کا اجزائے ضربی معلوم کیجئے۔

حل:

فرض کیجئے کہ $x + y = p$ ہمیں حاصل ہوگا $p^2 + 9p + 20$

$ax^2 + bx + c$, سے موازنہ کریں۔

ہمیں حاصل ہوگا $a = 1,\ b = 9,\ c = 20$

حاصل جمع $b=9$ حاصل ضرب $ac = 1\times20 = 20,$

∴ ہم درمیانی رقم کو $4p$ اور $5p$ کی طرح جُدا کرتے ہیں۔

اجزائے ضربی کا حاصل جمع $b = 9$	اجزائے ضربی کا حاصل ضرب $ac = 20$	اجزائے ضربی کا حاصل جمع $b = 9$	اجزائے ضربی کا حاصل ضرب $ac = 20$
−21	−1 × −20	21	1 × 20
−12	−2 × −10	12	2 × 10
−9	−4 × −5	**9**	**4 × 5**

مطلوبہ اجزائے ضربی **4** اور **5** ہیں۔

$$p^2 + 9p + 20 = p^2 + 4p + 5p + 20$$
$$= p(p+4) + 5(p+4)$$
$$= (p+4)(p+5)$$

$p = x + y$ درج کرنے پر ہمیں حاصل ہوگا۔ $(x+y)^2 + 9(x+y) + 20 = (x+y+4)(x+y+5)$

مشق 3.6

1۔ ذیل میں ہر ایک کے اجزائے ضربی معلوم کیجئے۔

(i) $x^2 + 10x + 24$ (ii) $z^2 + 4z - 12$ (iii) $p^2 - 6p - 16$

(iv) $t^2 + 72 - 17t$ (v) $y^2 - 16y - 80$ (vi) $a^2 + 10a - 600$

2۔ ذیل میں ہر ایک کے اجزائے ضربی معلوم کیجئے۔

(i) $2a^2 + 9a + 10$ (ii) $5x^2 - 29xy - 42y^2$ (iii) $9 - 18x + 8x^2$

(iv) $6x^2 + 16xy + 8y^2$ (v) $12x^2 + 36x^2y + 27y^2x^2$

(vi) $(a+b)^2 + 9(a+b) + 18$

3۔ ذیل کے اجزائے ضربی معلوم کیجئے۔

(i) $(p-q)^2 - 6(p-q) - 16$ (ii) $m^2 + 2mn - 24n^2$ (iii) $\sqrt{5}a^2 + 2a - 3\sqrt{5}$

(iv) $a^4 - 3a^2 + 2$ (v) $8m^3 - 2m^2n - 15mn^2$ (vi) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{2}{xy}$

9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:20:55 PM

3.6 کثیر رقمیات کی تقسیم (Division of Polynomials)

آیئے ان اعداد 13 اور 5 پر غور کریں۔ جب 13 کو 5 سے تقسیم کیا جائے تو خارج قسمت اور بچت کیا ہوگا؟ ہاں، یقیناً، خارج قسمت 2 ہے اور بچت 3 ہوگا۔ جس کو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں $13 = (5\times2) + 3$ آیئے کوشش کریں

تقسیم کیجئے	اس طرح ظاہر کیا جاتا ہے	بچت	مقسوم علیہ
11 سے 4 کو	$(4\times2)+3$	3	4
22 سے 11 کو	$(11\times2)+0$	0	11

مقسوم = (خارج قسمت × مقسوم علیہ) + بچت

اوپر کی مثالوں سے ہم نے مشاہدہ کیا کہ بچت ہمیشہ خارج قسمت سے کم ہوتا ہے۔

3.6.1 کثیر رقمیات کے لئے تقسیمی الگورتم (Division Algorithm for Polynomials)

فرض کریں کہ $p(x)$ اور $g(x)$ دو کثیر رقمیات اس طرح ہیں کہ $p(x)$ کا درجہ $\geq$ $g(x)$ کا درجہ اور $g(x) \neq 0$، تو اس طرح کے نئے کثیر رقمیات $q(x)$ اور $r(x)$ وجود میں آئیں گے۔ اس طرح سے

$$p(x) = g(x)\times q(x) + r(x) \qquad \ldots (1)$$

جس میں $r(x) = 0$ یا $r(x)$ کا درجہ $<$ $g(x)$ کا درجہ

کثیر رقمی $p(x)$ مقسوم ہے، $g(x)$ مقسوم علیہ، $q(x)$ خارج قسمت اور $r(x)$ بچت ہے۔

مقسوم = (خارج قسمت × مقسوم علیہ) + بچت

اگر $r(x)$ صفر ہے، تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ $p(x)$ ایک $g(x)$ کا ضریب ہے۔ دوسرے الفاظ میں $g(x)$ تقسیم کرتا ہے $p(x)$ کو

اگر یہ مشکل نظر آتا ہے تو پریشان نہ ہوں؟ یہ جاننا ضروری کہ کس طرح کثیر رقمیات کی تقسیم کی جاتی ہے۔ اور مشق کرنے پر آسانی کے ساتھ حل کر سکتے ہیں۔ ذیل کی مثالیں تمہیں سمجھنے میں مدد دیں گے۔

مثال 3.32 $x^3 - 4x^2 + 6x$ کو x سے تقسیم کیجئے جس میں $x\neq0$

حل : ہم رکھتے ہیں

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 6x}{x} = \frac{x^3}{x} - \frac{4x^2}{x} + \frac{6x}{x}, \quad x \neq 0$$

$$= x^2 - 4x + 6$$

مثال 3.33 جب $(5x^2 - 7x + 2) \div (x - 1)$ تقسیم کیا جائے تو خارج قسمت اور بچت معلوم کیجئے

حل : $(5x^2 - 7x + 2) \div (x - 1)$

9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:20:56 PM

$$
\begin{array}{r|l}
 & 5x-2 \\
\hline
x-1 & 5x^2-7x+2 \\
 & 5x^2-5x \\
 & (-)\ \ (+) \\
\hline
 & -2x+2 \\
 & -2x+2 \\
 & (+)\ \ (-) \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

(i) $\frac{5x^2}{x} = 5x$

(ii) $5x(x-1) = 5x^2-5x$

(iii) $-\frac{2x}{x} = -2$

(iv) $-2(x-1) = (-2x+2)$

$\therefore$ بچت $= 0$ خارج قسمت $= 5x-2$

مثال 3.34 خارج قسمت اور بچت معلوم کیجئے جب $f(x)$ کو $g(x)$ سے تقسیم کیا جائے۔

(i) $f(x) = (8x^3-6x^2+15x-7),\ g(x) = 2x+1.$ (ii) $f(x) = x^3+1,\ g(x) = x+1$

حل :

(i) $f(x) = (8x^3-6x^2+15x-7),\ g(x) = 2x+1$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4x^2-5x+10 \\
\hline
2x+1 & 8x^3-6x^2+15x-7 \\
 & 8x^3+4x^2 \\
 & (-)\ \ (-) \\
\hline
 & -10x^2+15x \\
 & -10x^2-5x \\
 & (+)\ \ (+) \\
\hline
 & 20x-7 \\
 & 20x+10 \\
 & (-)\ \ (-) \\
\hline
 & -17
\end{array}
$$

$\therefore$ خارج قسمت اور $= 4x^2-5x+10$

بچت $= -17$

(ii) $x^4-3x^3+5x^2-7,\ g(x) = x^2+x+1$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2-4x+8 \\
\hline
x^2+x+1 & x^4-3x^3+5x^2+0x-7 \\
 & x^4+x^3+x^2 \\
 & (-)\ \ (-)\ \ (-) \\
\hline
 & -4x^3+4x^2+0x \\
 & -4x^3-4x^2-4x \\
 & (+)\ \ (+)\ \ (+) \\
\hline
 & 8x^2+4x-7 \\
 & 8x^2+8x+8 \\
 & (-)\ \ (-)\ \ (-) \\
\hline
 & -4x-15
\end{array}
$$

$\therefore$ خارج قسمت $= x^2-4x+8$ اور

بچت $= -4x-15$

3.6.2 ترکیبی تقسیم (Synthetic Division)

کثیر رقمی تقسیم کا ایک آسان ترین طریقہ ترکیبی تقسیم ہے۔ اس کا فائدہ یہ ہے کہ اس میں طویل تقسیم کی بجائے متغیرات کو لکھے بغیر تقسیم کی جاتی ہے۔

مثال 3.35 ترکیبی تقسیم کے استعمال سے $P(x) = (3x^3-2x^2-5+7x)$ کو $d(x) = x+3$ سے تقسیم کر کے خارج قسمت اور بچت معلوم کیجئے۔

9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:20:56 PM

حل : مرحلہ 1 : مقسوم اور مقسوم علیہ کو معیاری شکل میں لکھئے۔

$3x^3 - 2x^2 + 7x - 5$ (مقسوم کی معیاری شکل)

$x+3$ (مقسوم علیہ کی معیاری شکل)

پہلی صف میں مقسوم کے سر اعداد (ضریب) لکھیں۔ ناموجود رقم کے لئے '0' (صفر) لکھیں۔

3 −2 7 −5 (پہلی صف)

مرحلہ 2 : مقسوم علیہ کے صفر معلوم کیجئے۔

$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

مرحلہ 3 : مقسوم علیہ کے صفر کو مقسوم کے سامنے پہلے صف میں ڈالیں۔ پہلی قطار کی دوسری صف '0' ڈالیں۔

−3	3	−2	7	−5	(پہلی صف)
	0				(دوسری صف)

مرحلہ 4 : دوسری صف اور تیسری صف کو نیچے دئے گئے طریقے سے مکمل کیجئے۔

−3	3	−2	7	−5	(پہلی صف)
	0	-3×3	−9	-3×-11	33	-3×40	−120	(دوسری صف)
	3		−11		40		−125	(تیسری صف)

تیسری صف کے تمام اعداد میں صرف آخری عدد چھوڑ کر باقی خارج قسمت کے سر اعداد ہیں۔

تو خارج قسمت $3x^2 - 11x + 40$ اور بچت -125 ہے۔

مثال 3.36 ترکیبی تقسیم کے استعمال سے $(3x^3 - 4x^2 - 5)$ کو $(3x + 1)$ سے تقسیم کرکے خارج قسمت اور بچت معلوم کیجئے۔

حل:

$p(x) = 3x^3 - 4x^2 - 5,\ d(x) = (3x+1)$

$p(x) = 3x^3 - 4x^2 - 5,\ d(x) = (3x+1)$ معیاری شکل

$\frac{-1}{3}$	3	−4	0	−5
	0	−1	$\frac{5}{3}$	$\frac{-5}{9}$
	3	−5	$\frac{5}{3}$	$\frac{-50}{9}$ (بچت)

$3x+1$ کے صفر معلوم کرنے کے لئے

$3x + 1 = 0$ ڈالئے

$3x = -1$ ہمیں حاصل ہوا۔

$x = -\frac{1}{3}$

$3x^3 - 4x^2 - 5 = \left(x + \frac{1}{3}\right)\left(3x^2 - 5x + \frac{5}{3}\right) - \frac{50}{9}$

$= \frac{(3x+1)}{3} \times 3\left(x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{5}{9}\right) - \frac{50}{9}$

9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:20:56 PM

$$3x^3 - 4x^2 - 5 = (3x+1)\left(x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{5}{9}\right) - \left(\frac{50}{9}\right) \quad (\text{جب کہ } p(x) = d(x)q(x)+r)$$

لہذا خارج قسمت $\left(x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{5}{9}\right)$ اور بچت $\frac{50}{9}$ ہے۔

مثال 3.37 اگر $x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 29$ کو $(x+4)$ سے تقسیم کرنے پر خارج قسمت $x^3 - ax^2 + bx + 6$ ہوتو a ، b کی قیمتیں اور بچت بھی معلوم کیجئے۔

حل :

فرض کیجئے : $p(x) = x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 29$

معیاری شکل $= x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 29$

$x+4$ کے صفر معلوم کرنے کے لئے ڈالئے $x + 4 = 0$ ہمیں حاصل ہوا۔ $x = -4$

سر اعداد	1	10	35	50	29
-4	1	10	35	50	29
	0	-4	-24	-44	-24
	1	6	11	6	5 (بچت)

خارج قسمت $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ کو دئے گئے خارج قسمتیں $x^3 - ax^2 + bx + 6$ کے ساتھ موازنہ کرنے پر ہمیں x^2 کا سرعدد $-a = 6$ اور x کا سرعدد $b = 11$ ہے۔ چنانچہ $a = -6$ ، $b = 11$ اور بچت $= 5$

مشق 3.7

1۔ درج ذیل میں خارج قسمت اور بچت معلوم کیجئے۔

(i) $(4x^3 + 6x^2 - 23x + 18) \div (x+3)$ (ii) $(8y^3 - 16y^2 + 16y - 15) \div (2y-1)$

(iii) $(8x^3 - 1) \div (2x-1)$ (iv) $(-18z + 14z^2 + 24z^3 + 18) \div (3z+4)$

2۔ ایک مستطیل کا رقبہ $x^2 + 7x + 12$ ہے۔ اگر اُس کی چوڑائی $(x + 3)$ ہے تو اس کی لمبائی معلوم کیجئے۔

3۔ ایک متوازی الاضلاع کا قاعدہ $(5x + 4)$ ہے۔ اونچائی معلوم کیجئے۔ اگر اس کا رقبہ $25x^2 - 16$ ہے۔

4۔ $(x + 5)$ مشاہدوں کا حاصل جمع $(x^3 + 125)$ ہے۔ مشاہدوں کا اوسط معلوم کیجئے۔

5۔ مندرجہ ذیل کو ترکیبی تقسیم کے استعمال سے خارج قسمت اور بچت معلوم کیجئے۔

(i) $(x^3 + x^2 - 7x - 3) \div (x - 3)$ (ii) $(x^3 + 2x^2 - x - 4) \div (x + 2)$

(iii) $(3x^3 - 2x^2 + 7x - 5) \div (x + 3)$ (iv) $(8x^4 - 2x^2 + 6x + 5) \div (4x + 1)$

6۔ اگر $(8x^4 - 2x^2 + 6x - 7)$ کو $(2x + 1)$ سے تقسیم کرنے پر خارج قسمت $(4x^3 + px^2 - qx + 3)$ ہوتو p، q اور بچت بھی معلوم کیجئے

9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:20:57 PM

7 ۔ اگر $(3x^3 + 11x^2 + 34x + 106)$ کو $(x-3)$ سے تقسیم کرنے پر خارج قسمت $3x^2 + ax + b$ ہوتو a، b اور بچت بھی معلوم کیجئے۔

3.6.3 ترکیبی تقسیم کے استعمال سے اجزائے ضربی دریافت کرنا (Factorisation using Synthetic Division)

اس حصے میں آیئے ہم سیکھیں کہ کس طرح ترکیبی تقسیم طریقے کے استعمال سے مکعبی کثیر رقمی کے اجزائے ضربی کو خطی کثیر رقمی میں تبدیل کریں گے۔ اگر ہم مکعبی کثیر رقمی $p(x)$ کی ایک خطی جزوضربی کو پہچانتے ہیں تو ترکیبی تقسیم کے استعمال سے $p(x)$ کے ایک دودرجی جزوضربی کو دریافت کرسکتے ہیں۔ مزید اور ممکن ہوتو دو درجی جزوضربی کے اجزائے ضربی سے خطی اجزائے ضربی میں تبدیل کرسکتے ہیں۔

غور کیجئے

- کسی بھی غیر مستقل کثیر رقمی $p(x)$ کے لئے $x = a$ صفر ہے اگر اور صرف اگر $p(a) = 0$ ہو۔
- $p(x)$ کا ایک جزوضربی $(x - a)$ ہے۔ اگر اور صرف اگر $p(a) = 0$ ہو۔ (مسئلہ جزوضربی)

ایک کثیر رقمی کے اجزائے ضربی $(x-1)$ اور $(x+1)$ کو جاننے کے لئے۔

- $p(x)$ کا ایک جزوضربی $(x-1)$ ہے۔ اگر اور صرف اگر $p(x)$ کے سر اعداد کا حاصل جمع صفر ہے۔
- $p(x)$ کا ایک جزوضربی $(x+1)$ ہے۔ اگر اور صرف اگر x کی جفت قوتوں کے ضریبوں یا سر اعداد کا حاصل جمع مستقل کے ساتھ x کی طاق قوتوں کے ضریبوں کے مساوی ہے۔

مثال 3.38

i) ثابت کروکہ $x^3 - 7x^2 + 13x - 7$ کا جزوضربی $(x-1)$ ہے۔

ii) ثابت کروکہ $x^3 + 7x^2 + 13x + 7$ کا جزوضربی $(x+1)$ ہے۔

حل :

i) فرض کیجئے کہ $p(x) = x^3 - 7x^2 + 13x - 7$

سر اعداد کا حاصل جمع $= 1 - 7 + 13 - 7 = 0$

چنانچہ $p(x)$ کا ایک جزوضربی $(x-1)$ ہے

ii) فرض کیجئے کہ $q(x) = x^3 + 7x^2 + 13x + 7$

$x = 7 + 7 = 14$ کی جفت قوتوں کے سر اعداد کا حاصل جمع کے ساتھ مستقل

$x = 1 + 13 = 14$ طاق قوتوں کے سر اعداد کا حاصل جمع

چنانچہ $q(x)$ کا ایک جزوضربی $(x+1)$ ہے۔

مثال 3.39

$x^3 + 13x^2 + 32x + 20$ کے خطی اجزائے ضربی معلوم کیجئے۔

حل :

فرض کیجئے کہ $p(x) = x^3 + 13x^2 + 32x + 20$

تمام سر اعداد کا حاصل جمع $= 1 + 13 + 32 + 20 = 66 \neq 0$

چنانچہ $(x-1)$ جزوضربی نہیں ہے

جفت قوتوں کے سر اعداد کا حاصل جمع کے ساتھ مستقل $= 13 + 20 = 33$

طاق قوتوں کے سر اعداد کا حاصل جمع $= 1 + 32 = 33$

چنانچہ $p(x)$ کا ایک جزوضربی $(x+1)$ ہے۔

اب ہم ترکیبی تقسیم کے استعمال سے دوسرے اجزائے ضربی دریافت کریں گے

9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:20:57 PM

Method II طریقہ II

-1	1	13	32	20
	0	-1	-12	-20
	1	12	20	0 (بچت)

لہذا $p(x) = (x+1)(x^2+12x+20)$

یہاں پر $x^2+12x+20 = x^2+10x+2x+20$

$= x(x+10)+2(x+10)$

$= (x+2)(x+10)$

لہذا $x^3+13x^2+32x+20$

$= (x+1)(x+2)(x+10)$

Method I طریقہ I

-1	1	13	32	20
	0	-1	-12	-20
-2	1	12	20	0 (بچت)
	0	-2	-20	
	1	10	0 (بچت)	

$p(x) = (x+1)(x+2)(x+10)$

لہذا $x^3+13x^2+32x+20$

$= (x+1)(x+2)(x+10)$

مثال 3.40 $x^3-5x^2-2x+24$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجئے۔

حل :

فرض کیجئے $p(x) = x^3-5x^2-2x+24$

جب $x = 1, p(1) = 1-5-2+24 = 18 \neq 0$ $(x-1)$ ایک جزو ضربی نہیں ہے

جب $x = -1, p(-1) = -1-5+2+24 = 20 \neq 0$ $(x+1)$ ایک جزو ضربی نہیں ہے

چنانچہ (Trial and error) طریقے سے x کی مختلف قیمتیں ڈھونڈ سکتے ہیں۔

غور کیجئے

جانچئے کہ $x^2-7x+12$ کے لئے 3 ایک صفر ہے۔ اگر نہ ہو تو -3 یا 4 یا -4 اسی طرح جانچ کرتے جایئے۔

جب $x=2$

$p(2) = 2^3-5(2)^2-2(2)+24$

$= 8-20-4+24$

$= 8 \neq 0$

اس طرح $(x-2)$ ایک جزو ضربی نہیں ہے

جب $x = -2$

$p(-2) = (-2)^3-5(-2)^2-2(-2)+24$

$= -8-20+4+24$

$p(-2) = 0$ اس طرح $(x+2)$ ایک جزو ضربی ہے

-2	1	-5	-2	24
	0	-2	$+14$	-24
3	1	-7	12	0 (بچت)
	0	3	-12	
	1	-4	0 (بچت)	

لہذا $(x+2)(x-3)(x-4)$ اجزائے ضربی ہیں۔

چنانچہ $x^3-5x^2-2x^2+24 = (x+2)(x-3)(x-4)$

9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:20:58 PM

مشق 3.8

1۔ ذیل کے ہر ایک کثیر رقمی کے اجزائے ضربی کو ترکیبی تقسیم استعمال کر کے دریافت کیجئے۔

(i) $x^3 - 3x^2 - 10x + 24$ (ii) $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$

(iii) $-7x + 3 + 4x^3$ (iv) $x^3 + x^2 - 14x - 24$

(v) $x^3 - 7x + 6$ (vi) $x^3 - 10x^2 - x + 10$

3.7 مشترک مقسوم علیہ اعظم (م۔ع۔ا) Greatest Common Divisor (GCD)

مشترک مقسوم علیہ اعظم کو مختصر طور پر (GCD) کہتے ہیں۔ دو یا دو سے زیادہ کثیر رقمیات کا م۔ع۔ا ایک کثیر رقمی کی سب سے بڑی مشترک ممکنہ قوت ہے۔ جو دئے گئے دو یا دو سے زیادہ کثیر رقمیات کا جزو ضربی ہے۔

اس کو مشترک عاد اعظم Highest Common Factor (HCF) بھی کہا جاتا ہے۔

یہ طریقہ دو سالم اعداد کے مشترک مقسوم علیہ اعظم معلوم کرنے کے مانند ہے۔

مثال کے طور پر : فرض کیجئے کہ دو جملے $14xy^2$ اور $42xy$ ہیں۔ 14 اور 42 کا مشترک مقسوم علیہ 2، 7 اور 14 ہیں۔ چنانچہ ان کا م۔ع۔ا 14 ہے۔ xy^2 اور xy کا مشترک مقسوم علیہ x , y اور xy ہیں۔ چنانچہ ان کا م۔ع۔ا xy ہے۔

$$14xy^2 = 1 \times 2 \times 7 \times x \times y \times y$$
$$42xy = 1 \times 2 \times 3 \times 7 \times x \times y$$

لہذا $14\,xy^2$ اور $42\,xy$ کا درکار م۔ع۔ا $14\,xy$ ہے۔

اجزائے ضربی کے ذریعے م۔ع۔ا معلوم کرنا۔ To find the GCD by Factorisation

i) ہر جملہ کو سب پہلے اجزائے ضربی معلوم کرنا۔

ii) اجزائے ضربی کی حاصل ضرب میں سب سے بڑی مشترک قوت ہی ان کا GCD ہوگا۔

iii) اگر جملہ عددی ضریب رکھتا ہے تو ان اعداد کا GCD الگ سے معلوم کریں۔ اور دیئے گئے جملوں کے GCD کے سامنے عددی ضریب کو چھوڑ دیں۔

مثال 3.41

ذیل کے م۔ع۔ا (GCD) معلوم کیجئے۔

(i) $16x^3y^2,\ 24xy^3z$ (ii) $(y^3 + 1)$ اور $(y^2 - 1)$

(iii) $2x^2 - 18$ اور $x^2 - 2x - 3$ (iv) $(a-b)^2, (b-c)^3, (c-a)^4$

حل :

(i) $16x^3y^2 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times x^3y^2 = 2^4 \times x^3 \times y^2 = 2^3 \times 2 \times x^2 \times x \times y^2$

9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:20:58 PM

$$24xy^3z = 2\times2\times2\times3\times x\times y^3\times z = 2^3\times3\times x\times y^3\times z = 2^3\times3\times x\times y\times y^2\times z$$

چنانچہ $GCD = 2^3xy^2$

(ii) $y^3+1 = y^3+1^3 = (y+1)(y^2-y+1)$

$y^2-1 = y^2-1^2 = (y+1)(y-1)$

چنانچہ $GCD = (y+1)$

(iii) $2x^2-18 = 2(x^2-9) = 2(x^2-3^2) = 2(x+3)(x-3)$

$x^2-2x-3 = x^2-3x+x-3$

$= x(x-3)+1(x-3)$

$= (x-3)(x+1)$

چنانچہ $GCD = (x-3)$

(iv) $(a-b)^2, (b-c)^3, (c-a)^4$

ایک کے سوا کوئی بھی مشترک جزوضربی نہیں ہے۔

چنانچہ 1 = م۔ع۔ا

مشق 3.9

1۔ مندرجہ ذیل کے لئے GCD معلوم کیجئے۔

(i) p^5, p^{11}, p^9

(ii) $4x^3, y^3, z^3$

(iii) $9a^2b^2c^3, 15a^3b^2c^4$

(iv) $64x^8, 240x^6$

(v) $ab^2c^3, a^2b^3c, a^3bc^2$

(vi) $35x^5y^3z^4, 49x^2yz^3, 14xy^2z^2$

(vii) $25ab^3c, 100a^2bc, 125ab$

(viii) $3abc, 5xyz, 7pqr$

2۔ ذیل میں ہر ایک کے م۔ع۔ا GCD معلوم کیجئے۔

(i) $(2x+5), (5x+2)$

(ii) $a^{m+1}, a^{m+2}, a^{m+3}$

(iii) $2a^2+a, 4a^2-1$

(iv) $3a^2, 5b^3, 7c^4$

(v) x^4-1, x^2-1

(vi) $a^3-9ax^2, (a-3x)^2$

9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:20:58 PM

3.8 دومتغیرات والے خطی مساوات (Linear Equation in Two Variables)

دومتغیرات والے خطی مساوات کی عام شکل $ax + by + c = 0$ ہے۔جہاں a، b اور c حقیقی اعداد ہیں، دونوں a اور b غیرصفری اعداد ہیں (دومتغیرات کو یہاں x اور y سے نمائندگی کرتے ہیں اور c ایک مستقل ہے)۔

مثالیں :

دومتغیرات والے خطی مساوات نہیں	دومتغیرات والے خطی مساوات
$xy + 2x = 5$ (کیوں؟)	$2x + y = 4$
$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 25$ (کیوں؟)	$-5x + \frac{1}{2} = y$
$x(x+1) = y$ (کیوں؟)	$5x = 35y$

اگرایک مساوات کے دومتغیرات ہیں، ہرایک پہلے درجے کے ہیں اس طرح کہ وہ متغیرات آپس میں ضرب میں نہیں ہیں، تو اس کو دومتغیرات والی خطی مساوات کہتے ہیں۔(اگر دومتغیرات والی مساوات کا درجہ 1 ہوتو اس کو دومتغیرات والی خطی مساوات کہتے ہیں)۔

دومتغیرات والی خطی مساوات کو آسانی سے سمجھا جاسکتا ہے۔جب اسے علم ہندسہ کی بصیرت سے دیکھا جائے (ترسیم کے ذریعے) ہم اس تدبیر کا استعمال کریں گے۔

ہم کیوں اس طرح تقسیم بندی کرتے ہیں۔مثال کے طور پر، مساوات $2x + y = 4$ خطی مساوات ہے؟ تم صحیح کہہ رہے ہو۔کیونکہ اسکی ترسیم ایک خط ہے۔کیا ہم اس کی جانچ کریں؟

ہم اس کی ترسیم کھینچنے کی کوشش کرتے ہیں۔ $2x + y = 4$ کی ترسیم کھینچنے کے لئے، اس خط پر ہمیں چند نقاط کی ضرورت ہے۔اس لئے کہ ہم انکو ملاسکیں (یہ مساوات کی شرط پورا کرنے والے ترتیب وار جوڑیاں ہیں)

$2x + y = 4$ کے لئے ترتیب وار جوڑیوں کی جدول بنانے کے لئے یہ بہتر ہوگا کہ اس مساوات کو اس طرح لیں۔

$y = 4 - 2x$ (کیوں، کیسے؟)

جب $x = -4$, $y = 4 - 2(-4) = 4 + 8 = 12$

جب $x = -2$, $y = 4 - 2(-2) = 4 + 4 = 8$

جب $x = 0$, $y = 4 - 2(0) = 4 + 0 = 4$

جب $x = +1$, $y = 4 - 2(+1) = 4 - 2 = 2$

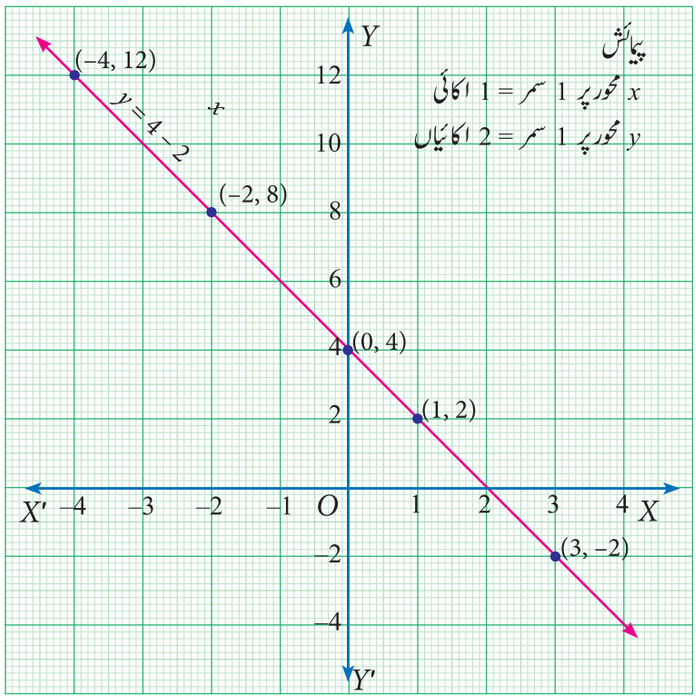
جب $x = +3$, $y = 4 - 2(+3) = 4 - 6 = -2$

چنانچہ ذیل میں قیمتوں کی جدول بنائی گئی ہے۔

x کی قیمت	-4	-2	0	1	3
y کی قیمت	12	8	4	2	-2

(ایک خط کو مقررہ کرنے کے لئے، کیا ہمیں بہت سارے نقاط کی ضرورت ہے؟ اگر ہمارے پاس دو نقاط ہوں تو یہ کافی ہے اور غالبًا ایک اور ہو تو تصدیق کرسکتے ہیں۔)

9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:20:59 PM



خاکہ 3.15

جب نقاط (−4, 12)، (−2,8)، (0,4)، (1,2) اور (3,−2) کو مرتسم کرینگے تو تم معلوم کروگے کہ تمام نقاط ایک خط پر واقع ہیں۔

یہ واضح طور سے ثابت ہوتا کہ مساوات $2x + y = 4$ ایک **خط** کو ظاہر کرتی ہے۔ (اور لہذا اسے **خطی** مساوات کہتے ہیں)

اس خط پر تمام نقاط اس مساوات کی شرط پورا کرتے ہیں اور لہذا اس خط پر تمام نقاط کے ترتیب وار جوڑیاں اس مساوات کے حل ہیں۔

مثال 3.42

ذیل کے لئے ترسیم کھینچئے :

(i) $y = 3x - 1$ (ii) $y = \left(\frac{2}{3}\right)x + 3$

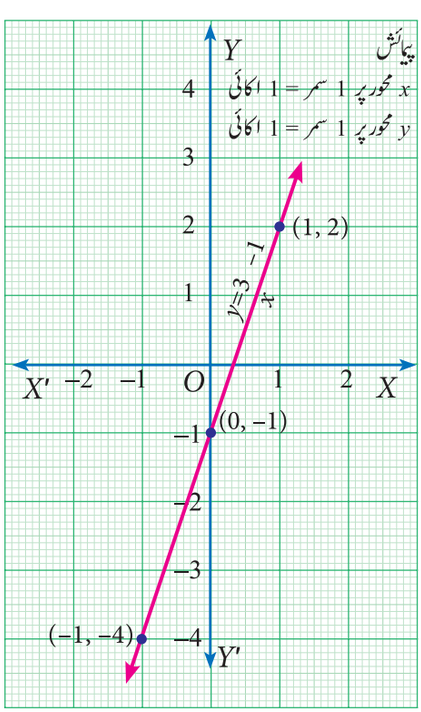
حل : (i) خط $y = 3x - 1$ کے لئے نقاط کی ترتیب وار جوڑیاں معلوم کرنے کے لئے جدول تیار کریں۔

ہم یہ فرض کریں کہ کوئی بھی x کی قیمت کے لئے ہماری سہولت کے لئے -1، 0 اور 1 لیں۔

جب $x = -1$, $y = 3(-1) - 1 = -4$

جب $x = 0$, $y = 3(0) - 1 = -1$

جب $x = 1$, $y = 3(1) - 1 = 2$



خاکہ 3.16

9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:20:59 PM

x	−1	0	1
y	−4	−1	2

نقاط (x,y) کو مرتسم کریں ۔

$(-1,-4)$، $(0,-1)$ اور $(1,2)$

ii) خط $y=\left(\frac{2}{3}\right)x+3$ کے لئے نقاط کے ترتیب وار جوڑیاں معلوم کرنے کے لئے جدول تیار کریں۔

x کی قیمتوں کے لئے -3، 0 ، 3 فرض کریں (کیوں؟)

جب $x=-3$, $y=\frac{2}{3}(-3)+3=1$

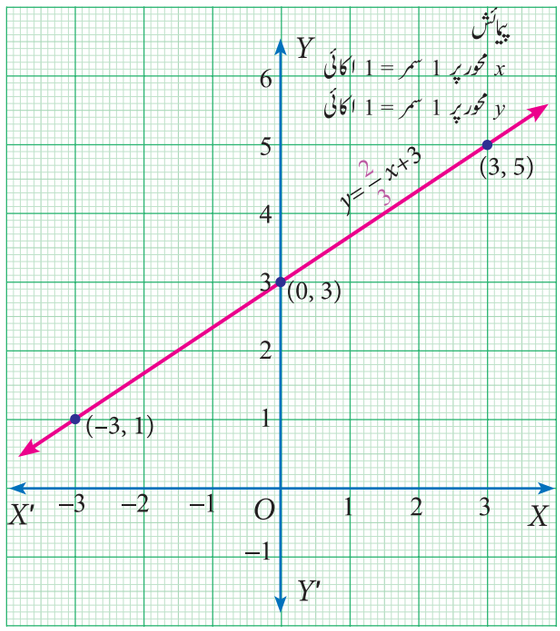
جب $x=0$, $y=\frac{2}{3}(0)+3=3$

جب $x=3$, $y=\frac{2}{3}(3)+3=5$

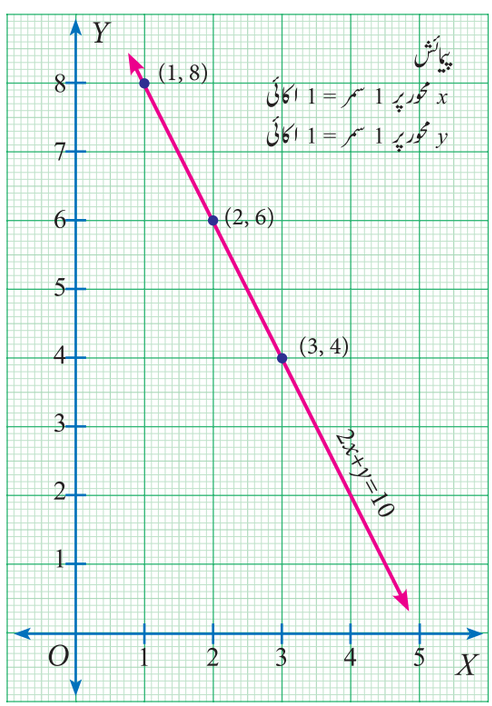
x	−3	0	3
y	1	3	5

نقاط (x,y) کو مرتسم کریں ۔

$(-3,1)$، $(0,3)$ اور $(3,5)$



خاکہ 3.17



خاکہ 3.18

1.6 ہمزاد خطی مساوات Simultaneous Linear Equations

ایک مساوات کی ترسیم کی بخوبی پیش منظر سے، اب ہم مساوات کے نظام کے بارے میں مطالعہ کررہے ہیں، خصوصاً ہمزاد مساوات کی جوڑیاں۔

ہمزاد خطی مساوات کیا ہیں؟

یہ یکساں متغیرات والے دو یا دو سے زیادہ خطی مساوات پر مشتمل ہیں۔ان مساوات کی ضرورت کیا ہے؟ واحد مساوات جیسے $2x+y=10$ کے حل لامحدود ہیں۔نقاط $(1,8)$، $(2,6)$، $(3,4)$ اور بہت سارے نقاط مساوات کی ترسیم پر واقع ہیں۔مطلب یہ کہ یہ حل کے غیر اختتام پذیر فہرست میں سے چند نقاط ہیں۔اس طرح کی مساوات کو حل کرنے کے لئے ایک اور مساوات ساتھ میں استعمال کرنے کی ضرورت ہے پھر ایک واحد ترتیب وار جوڑی معلوم کرنا ممکن ہے۔جو بیک وقت دونوں مساوات کو حل کرے۔

مساوات جو ہم ایک ساتھ لیتے ہیں اس طرح ترتیب میں ہوں کہ ایک بامعنی صورت بنے۔

9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:20:59 PM

حقیقی زندگی کے حالات کو ہمزاد خطی مساوات سے سمجھنا

Real life Situation to understand the simultaneous linear equations

صورت حال پر غور کریں، انیسہ نے دو ربڑ (Eraser) اور ایک پنسل 10 ₹ سے خریدے۔ وہ ہر ایک کی علحدہ قیمت نہیں جانتی۔ ربڑ کی قیمت کو ' x ' اور پنسل کی قیمت کو ' y ' لیکر ہم ایک مساوات بنائیں گے۔

$x + y = 10$ یعنی ... (1)

اب، انیسہ ایک ربڑ اور ایک پنسل کی علحدہ قیمت معلوم کرنا چاہتی ہے۔

x اور y کی مختلف قیمتوں کو لیکر وہ پہلے مساوات کو حل کرنے کی کوشش کرتی ہے

$2(1)+8 = 10$

$2(1.5)+7 = 10$

$2(2)+6 = 10$

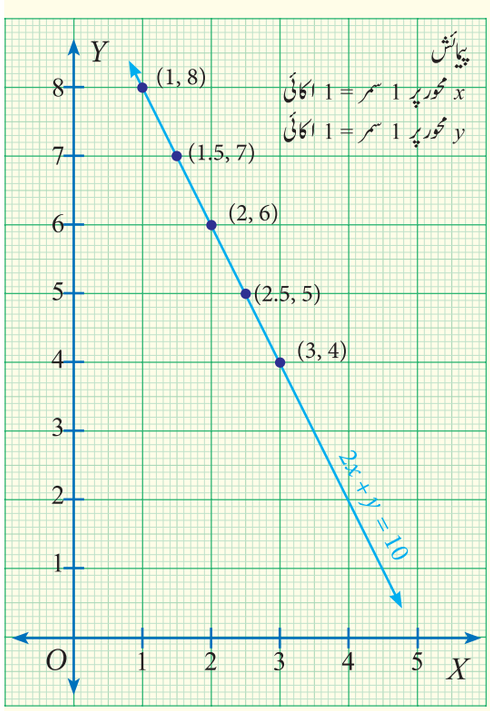
$2(2.5)+5 = 10$

$2(3)+4 = 10$

⋮ ⋮

مرتسم کرنے کے نقاط

x	1	1.5	2	2.5	3	...
y	8	7	6	5	4	...



خاکہ 3.19

وہ لامحدود تعداد میں حل حاصل کرتی ہے۔ اس لئے وہ دوسرے مساوات کے ذریعے قیمت معلوم کرنا چاہتی ہے۔ دوبارہ، انیسہ کو اور پنسل اور ربڑ کی ضرورت پیش آتی ہے اس وقت اس نے 3 ربڑ اور 4 پنسل خریدی اور دوکاندار اس سے کل قیمت ₹30 حاصل کرتا ہے۔ ہم پہلے کی طرح ایک مساوات بنائیں گے۔

مساوات $3x + 4y = 30$ ہے ..... (2)

تب بھی وہ لامحدود تعداد میں حل حاصل کرتی ہے۔

3 × ربڑ کی قیمت + 4 × پنسل کی قیمت = 30

$3(2)+4\,(6) = 30$

$3(4)+4\,(4.5) = 30$

$3(6)+4\,(3) = 30$

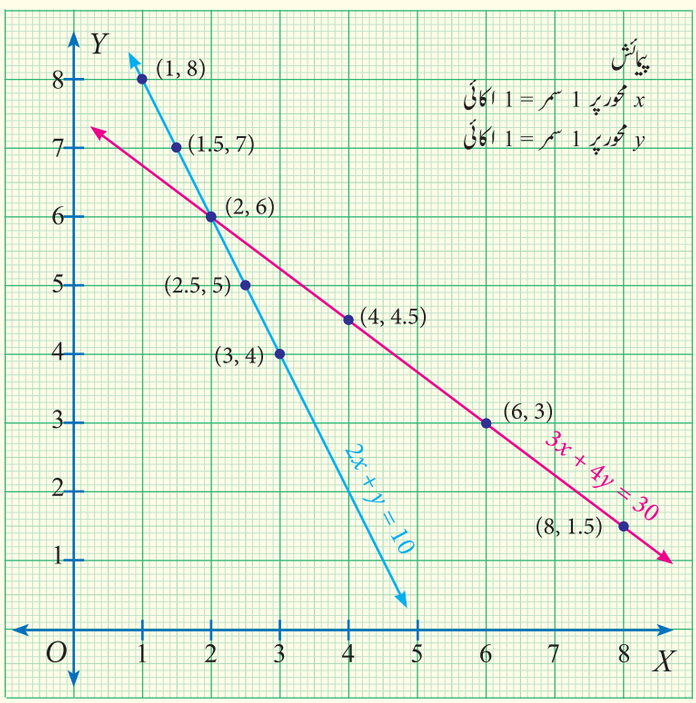
$3(8)+4\,(1.5) = 30$

⋮ ⋮

9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:21:00 PM

مرتسم کرنے کے نقاط :

x	2	4	6	8	...
y	6	4.5	3	1.5	...



خاکہ 3.20

استاد سے اس بارے میں بحث کرنے کے دوران، استاد اپنی رائے پیش کرتے ہیں کہ اگر وہ دونوں مساوات کو ایک ساتھ حل کرتی ہے تو واحد حل حاصل کر سکتی ہے۔

مساوات (1) اور (2) کو حل کرنے پر ایک ربڑ کی قیمت ₹ 2 اور ایک پنسل کی قیمت ₹ 6 حاصل ہوتا ہے۔ اسے ترسیم میں دیکھا جا سکتا ہے۔

مساوات جنہیں ہم ایک ساتھ لیتے ہیں اس طرح ہوں کہ ایک بامعنی صورتِ حال بنے، ہمزاد خطی مساوات کہلاتے ہیں۔

چنانچہ ایک خطی مساوات کے نظام میں یکساں متغیرات والے دو یا دو سے زیادہ خطی مساوات ہوتے ہیں۔ اس طرح کے مساوات " ہمزاد خطی مساوات" یا "خطی مساوات کا نظام" یا "خطی مساوات کے جوڑی" کہلاتے ہیں۔

مثال 3.43

جانچ کیجئے کہ $(5,-1)$ ہمزاد خطی مساوات $x - 2y = 7$ اور $2x + 3y = 7$ کا ایک حل ہے۔

حل :

دیا گیا ہے $x - 2y = 7$ ...(1)

$2x + 3y = 7$ ...(2)

جب $x = 5$ ، $y = -1$ ہو تو ہمیں حاصل ہوتا ہے

(1) سے : $x - 2y = 5 - 2(-1) = 5 + 2 = 7$ جو (1) کا RHS ہے

(2) سے : $2x + 3y = 2(5) + 3(-1) = 10 - 3 = 7$ جو (2) کا RHS ہے

اس طرح قیمتیں $x = 5$، $y = -1$ دونوں (1) اور (2) کی بیک وقت شرط پورا کرتے ہیں۔

چنانچہ دئے گئے مساوات کا حل $(5,-1)$ ہے۔

9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:21:00 PM

ترقی کی جانچ

ترسیم کے ذریعے جانچ کیجئے کہ (3,3) ہمزاد خطی مساوات $2x - 5y - 2 = 0$ اور $x + y = 6 = 0$ کا ایک حل ہے۔

3.8.2 ہمزاد خطی مساوات حل کرنے کے طریقے Methods of Solving Simultaneous Linear Equations

ہمزاد خطی مساوات کے ایک جوڑی کا حل معلوم کرنے کے مختلف طریقے ہیں۔ وسیع نظر سے اس کو ہندسی طریقے اور الجبریائی طریقے سے تقسیم بندی کر سکتے ہیں۔

الجبرائی طریقہ	ہندسی طریقہ
1۔ تبدیلی طریقہ 2۔ اخراج کا طریقہ 3۔ ترچھی ضرب کا طریقہ	ترسیمی طریقہ

ترسیمی طریقے سے مساوات کا حل Solving by Graphical Method

ہم پہلے ہی دو متغیرات والے خطی مساوات کو ترسیمی طریقے سے ظاہر کرنا سیکھ چکے ہیں۔ یہاں ہم دو متغیرات والے خطی مساوات کے ایک جوڑی کو ترسیمی طریقے سے ظاہر کرنے اور مرکب خطی مساوات کا حل معلوم کرنے سیکھیں گے۔

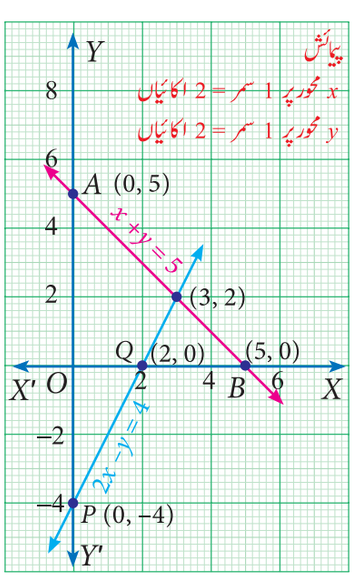
مثال 3.44 ترسیمی طریقے کے استعمال سے مساوات کے نظام $x + y = 5; 2x - y = 4.$ کو حل کیجئے۔

حل : دیا گیا ہے

$x + y = 5$ ..... (1)

$2x - y = 4$ ..... (2)

ترسیم (1) کھینچنا بہت آسان ہے۔ ہم x اور y مقطوعات معلوم کر سکتے ہیں اور



خاکہ 3.21

چنانچہ خط (1) پر دو نقاط معلوم کر سکتے ہیں۔

جب $x = 0$ ، (1) سے $y = 5$ حاصل ہوتا ہے۔

چنانچہ A (0,5) خط پر ایک نقطہ ہے

جب $y = 0$ ، (1) سے $x = 5$ حاصل ہوتا ہے

چنانچہ B (5,0) خط پر ایک اور نقطہ ہے

A اور B کو مرتسم کر کے انہیں ملانے پر خط (1) حاصل ہوتا ہے۔

ترسیم (2) کھینچنے کے لئے ہم اسی طریقے کو استعمال کر سکتے ہیں۔

جب $x = 0$ ہو تو (2) سے $y = -4$ حاصل ہوتا ہے۔

چنانچہ P (0, – 4) اس خط پر ایک نقطہ ہے۔

جب $y = 0$ ، ہو تو (2) سے $x = 2$ حاصل ہوتا ہے

چنانچہ Q (2,0) خط پر ایک اور نقطہ ہے

9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:21:00 PM

P اور Q کو مرتسم کیجئے۔ خط (2) حاصل کرنے کے لئے انہیں ملایئے۔

خطوط (1) اور (2) کا نقطۂ تقاطع (3,2) اس کا ایک حل ہے۔

دونوں خطوط کا یکساں نقطہ اس کا حل ہے۔ یہاں ہمیں (3,2) حاصل ہوتا ہے۔

$x = 3$ اور $y = 2$ سے حل دیا جاسکتا ہے۔

Note غور کیجئے

یہ ہمیشہ اچھی بات ہے کہ حاصل شدہ جواب کی تصدیق کرنا کہ وہ صحیح ہے اور دئے گئے دونوں مساوات کی شرط پوری کرتا ہے۔

مثال 3.45

ترسیمی طریقے سے ذیل کے مساوات کے نظام $6x + 4y = 8$، $3x + 2y = 6$ کا حل معلوم کیجئے۔

حل : ہر ایک خط کے لئے قیمتوں کی جدول تیار کیجئے اور پھر مرتسم کرنے کے ترتیب وار جوڑیوں کو مقرر کیجئے۔

$6x + 4y = 8$ کی ترسیم

x	−2	0	2
y	5	2	−1

مرتسم کرنے کا نقاط

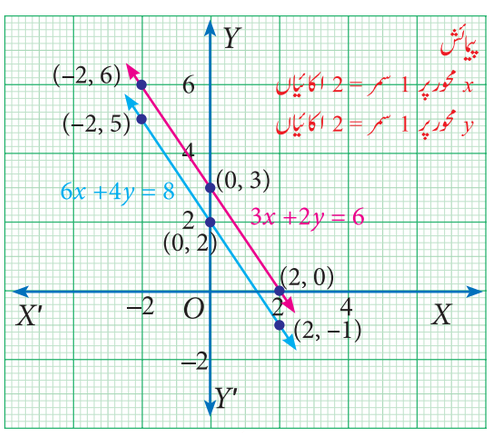
(−2,5), (0,2), (2,−1)

$3x + 2y = 6$ کی ترسیم

x	−2	0	2
y	6	3	0

مرتسم کرنے کا نقاط

(−2,6), (0,3), (2,0)



خاکہ 3.22

جب ہم ان دونوں مساوات کی ترسیم کھینچنے پر ہم یہ معلوم کرتے ہیں کہ یہ متوازی ہیں اور نقطۂ تقاطع کے دینے کے لئے ایک دوسرے کو قطع کرنے سے ناکام رہ جاتے ہیں۔ اس کے نتیجے میں کوئی بھی ترتیب وار جوڑی نہیں ہے جو دونوں مساوات کے لئے یکساں ہو۔ اس صورتِ حال میں اس نظام کے لئے کوئی بھی حل نہیں ہے۔ ترسیم کھینچے بغیر بھی اسے آسانی سے اندازہ لگا سکتے ہیں۔ دونوں مساوات کو $y = mx + c$ کی شکل میں لکھیں

غور کیجئے کہ میلان مساوی ہیں۔

لہذا دونوں خطوط متوازی ہیں اور کسی بھی نقطے پر قطع نہیں کرتے اور لہذا حل وجود میں نہیں آتے۔

مثال 3.46

ترسیمی طریقے سے ذیل کے مساواتوں کے نظام $y = 2x + 1$ اور $-4x + 2y = 2$ کو حل کیجئے۔

حل : ہر ایک خط کے لئے قیمتوں کی جدول بنائے اور پھر مرتسم کرنے کے ترتیب وار جوڑیوں کو مقرر کیجئے۔

$-4x + 2y = 2$ کی ترسیم

$2y = 4x + 2$

$y = 2x + 1$

x	−2	−1	0	1	2
$2x$	−4	−2	0	2	4
1	1	1	1	1	1
$y = 2x+1$	−3	−1	1	3	5

$y = 2x + 1$ کی ترسیم

x	−2	−1	0	1	2
$2x$	−4	−2	0	2	4
1	1	1	1	1	1
$y = 2x+1$	−3	−1	1	3	5

9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:21:01 PM

مرتسم کرنے کے نقاط

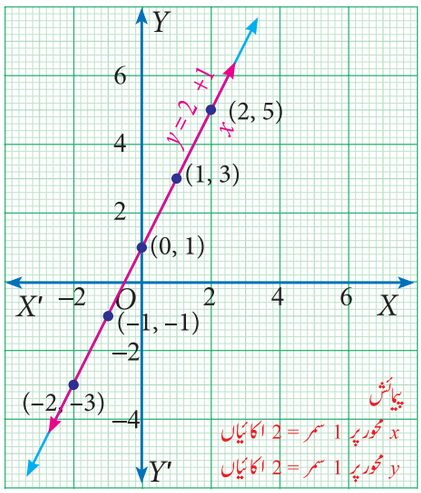
$(-2, -3), (-1, -1), (0, 1), (1, 3), (2, 5)$

یہاں دونوں مساوات متماثل ہیں، انہیں صرف مختلف شکلوں میں ظاہر کیا گیا۔ چنانچہ یہ متماثل ہیں، انکے حل یکساں ہیں۔ تمام نقاط ایک ہی خط پر واقع ہیں اور دوسرے خط پر بھی واقع ہیں۔

اس کا مطلب ہمیں لامحدود حل ہیں جو خط کے تمام نقاط کے ترتیب وار جوڑیاں ہیں۔

مرتسم کرنے کے نقاط

$(-2, -3), (-1, -1), (0,1), (1,3), (2, 5)$



خاکہ 3.23

مثال 3.47 ایک مستطیل کا احاطہ 36 میٹر ہے اور اسکی لمبائی اسکی چوڑائی کے تین گنا سے 2 میٹر زیادہ ہے۔ ترسیمی طریقے سے مستطیل کا طول معلوم کیجئے۔

حل : دیئے گئے بیان کے لئے مساوات بنایئے

فرض کیجئے کہ مستطیل کی لمبائی اور چوڑائی بالترتیب l اور b ہیں۔

اب پہلے بیان کے لئے مساوات بنائینگے۔

$$\text{مستطیل کا احاطہ} = 36$$

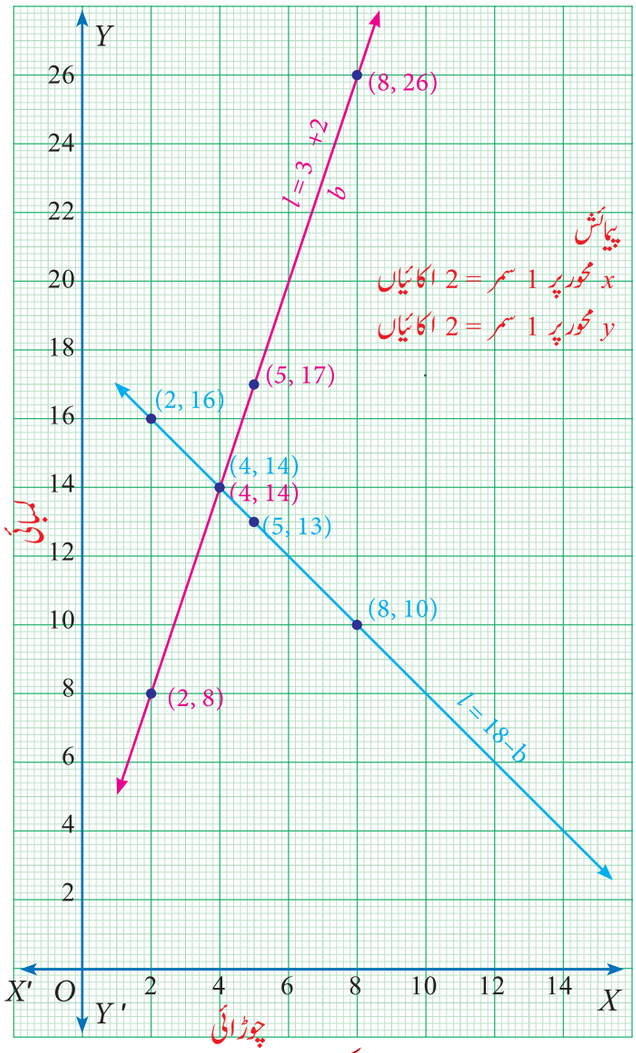
$$2(l + b) = 36$$

$$l + b = \frac{36}{2}$$

$$l = 18 - b \quad \ldots (1)$$

b	2	4	5	8
18	18	18	18	18
−b	−2	−4	−5	−8
$l = 18 - b$	16	14	13	10

نقاط : (2,16), (4,14), (5,13), (8,10)



خاکہ 3.24

9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:21:01 PM

دوسرے بیان سے معلوم ہوتا ہے کہ اس کی لمبائی اسکی چوڑائی کے تین گنا سے 2 میٹر زیادہ ہے جسے ایک خط مستقیم $l = 3b + 2$ .....(2) کی طرح لکھ سکتے ہیں۔

اب اوپر کے مساوات (2) کے لئے جدول بنائیں گے۔

b	2	4	5	8
$3b$	6	12	15	24
2	2	2	2	2
$l = 3b+2$	8	14	17	26

نقاط : (2,8), (4,14), (5,17), (8,26)

اس کا حل دونوں خطوط کا یکساں نقطہ ہے۔ یہاں ہمیں (4,14) حاصل ہوتا ہے۔

ہم حل اس طرح دے سکتے ہیں۔ $b = 4, l = 14$

تصدیق کرنا :

$2(l+b)$	$=$	36 ...(1)	l	$=$	$3b + 2$ ...(2)
$2(14+4)$	$=$	36	14	$=$	$3(4) +2$
2×18	$=$	36	14	$=$	$12 + 2$
36	$=$	36 صحیح	14	$=$	14 صحیح

مشق 3.10

1۔ ذیل کے لئے ترسیم کھینچئے۔

(i) $y = 2x$ (ii) $y = 4x - 1$ (iii) $y = \left(\frac{3}{2}\right)x + 3$ (iv) $3x + 2y = 14$

2۔ ترسیم سے حل کیجئے۔

(i) $x + y = 7;\ x - y = 3$ (ii) $3x + 2y = 4;\ 9x + 6y - 12 = 0$

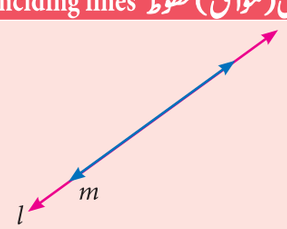
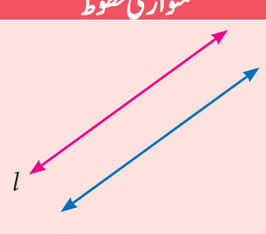
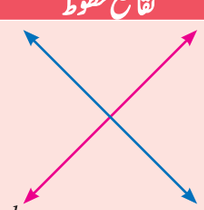
(iii) $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1;\ \frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 2$ (iv) $x - y = 0;\ y + 3 = 0$

(v) $y = 2x + 1;\ y + 3x - 6 = 0$ (vi) $x = -3;\ y = 3$

3۔ دو کار ایک دوسرے سے 100 میل دُور (Apart) ہیں۔ اگر وہ دونوں ایک دوسرے کی طرف چلیں تو وہ 1 گھنٹے میں ایک دوسرے سے آ کر ملیں گے۔ اگر وہ دونوں ایک ہی سمت پر چلیں تو وہ 2 گھنٹوں میں ایک دوسرے سے ملیں گے۔ ترسیمی طریقے سے انکی رفتار معلوم کیجئے۔

چند خصوصی اصطلاحات Some Special Terminology

ہم یہ معلوم کرتے ہیں کہ ایک نظام میں مساوات کی ترسیم اس نظام کے لئے حل کی تعداد کو بتاتے ہیں۔ یہاں ایک بصری خلاصہ ہے۔

منطبق (موافق) خطوط Coinciding lines	متوازی خطوط	تقاطع خطوط
		
لامحدود حل	حل نہیں	صرف ایک حل

9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:21:01 PM

- جب ایک خطی مساوات کے نظام کا صرف ایک حل ہو (مساوات کے ترسیم ایک دفعہ قطع کرتے ہیں) اس نظام کو **موافق** (Consistent) کہتے ہیں اور مساوات **آزاد** ہوتے ہیں۔
- جب ایک خطی مساوات کے نظام کے کوئی حل نہ ہوں (مساوات کے ترسیم قطع نہیں کرتے)، اس نظام کو **غیر موافق** (Inconsistent) کہتے ہیں اور مساوات **آزاد** ہیں۔
- جب خطی مساوات کے نظام کے لامحدود حل ہوں، تو خطوط یکساں ہیں (ہر نقاط پر خطوط کے ترسیم متماثل ہیں) یہ نظام یقیناً **موافق** نظام ہے اور مساوات **غیر آزاد** ہیں (یعنی ایک مساوات کا کوئی بھی حل دوسرے مساوات کا حل ہوتا ہے۔ اس لئے یہ مساوات ایک دوسرے کے تابع ہیں۔)

اندراج کے طریقے سے مساوات کا حل Solving by Substitution Method

اس طریقے میں ہم ایک متغیر کی قیمت کو دوسرے متغیر کی قیمت کے لحاظ سے درج کرتے ہوئے دو متغیرات والی دی گئی مساوات کو ایک متغیر والی مساوات میں گھٹا کر ظاہر کرتے ہیں۔ اس طرح ہم ایک متغیر کی قیمت کو دوسرے متغیر کی قیمت کے لحاظ سے درج کرتے ہیں، اس طریقے کو اندراج کا طریقہ کہتے ہیں۔

اس کو حل کرنے کا طریقہ کار مختصراً ذیل میں دیا گیا ہے۔

مرحلہ 1 : کوئی دئے گئے دو مساوات میں سے، کسی ایک متغیر کی قیمت دوسری رقموں سے معلوم کرتے ہیں۔

مرحلہ 2 : مرحلہ 1 میں حاصل شدہ اس متغیر کی قیمت کو دوسری مساوات میں درج کر کے اسے حل کیجئے۔

مرحلہ 3 : مرحلہ 1 کے نتیجہ میں مرحلہ 2 سے حاصل شدہ متغیر کی قیمت کو درج کر کے باقی نامعلوم متغیر کی قیمت حاصل کیجئے۔

مثال 3.48

اندراج کے طریقے سے خطی مساوات کے نظام $x + 3y = 16$ ، $2x - y = 4$ کا حل معلوم کیجئے۔

حل : دیا گیا ہے

$$x + 3y = 16 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$2x - y = 4 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

مرحلہ 1	مرحلہ 2	مرحلہ 3	حل
مساوات (2) سے $2x - y = 4$ $-y = 4 - 2x$ $y = 2x - 4$ ...(3)	(1) میں (3) درج کرنے پر $x + 3y = 16$ $x + 3(2x - 4) = 16$ $x + 6x - 12 = 16$ $7x = 28$ $x = 4$	(3) میں $x = 4$ درج کرنے پر $y = 2x - 4$ $y = 2(4) - 4$ $y = 4$	$x = 4$ اور $y = 4$

مثال 3.49

دئے گئے دو ہندسی عدد کے ہندسوں کا حاصلِ جمع 5 ہے۔ اگر ہندسوں کو الٹ (Reversed) دینے پر نیا عدد دئے گئے عدد سے 27 گھٹ جاتا ہے تو دیا گیا عدد معلوم کیجئے۔

حل : فرض کیجئے کہ x دہائی کے مقام کا ہندسہ ہے اور y اکائی مقام کا ہندسہ ہے۔

دیا گیا ہے

$$x + y = 5 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:21:02 PM

	دہائی	اکائی	قیمت
دیا گیا عدد	x	y	$10x + y$
نیا عدد (الٹنے کے بعد)	y	x	$10y+x$

دیا گیا ہے،

حقیقی عدد − الٹنے کے بعد کا عدد $= 27$

$$(10x + y) - (10y + x) = 27$$

$$10x - x + y - 10y = 27$$

$$9x - 9y = 27$$

$$x - y = 3 \quad \ldots (2)$$

$\Rightarrow$

(1) سے $y = 5 - x \quad \ldots (3)$

(3) کو (2) میں درج کرنے پر $x - (5 - x) = 3$

$$x - 5 + x = 3$$

$$2x = 8$$

$$x = 4$$

$x = 4$ کو (3) میں درج کرنے پر $y = 5 - x = 5 - 4$

$$y = 1$$

چنانچہ $10x + y = 10 \times 4 + 1 = 40 + 1 = 41$

لہذا دیا گیا دو ہندسی عدد 41 ہے

تصدیق کیجئے۔

ہندسوں کا حاصلِ جمع $= 5$

$x + y = 5$

$4 + 1 = 5$

$5 = 5$ صحیح

حقیقی عدد − الٹنے کے بعد کا عدد $= 27$

$41 - 14 = 27$

$27 = 27$ صحیح

مشق 3.11

1۔ اندراج کے طریقے سے حل کیجئے۔

(i) $2x - 3y = 7;\ 5x + y = 9$

(ii) $1.5x + 0.1y = 6.2;\ 3x - 0.4y = 11.2$

(iii) $3x - y = 20$ ، 10% کا $(x + 20\%)$ کا $y = 24$

(iv) $\sqrt{2}x - \sqrt{3}y = 1;\ \sqrt{3}x - \sqrt{8}y = 0$

2۔ رشید کی عمر ان کے دو بیٹوں کے عمروں کے حاصلِ جمع کا تین گنا ہے۔ 5 سال بعد اس کی عمر اس کے بیٹوں کے عمروں کے حاصلِ جمع کا دُگنا ہو جاتی ہے۔ رشید کی عمر معلوم کیجئے۔

3۔ 100 اور 1000 کے درمیان ایک عدد کا درمیانی ہندسہ صفر ہے اور دوسرے ہندسوں کا حاصل جمع 13 ہے۔ اگر ہندسوں کو الٹ دئے جائیں، تو حاصل ہونے والا عدد حقیقی عدد سے 495 بڑھ جاتا ہے۔ عدد معلوم کیجئے۔

9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:21:02 PM

اخراج کے طریقے سے مساوات کا حل Solving by Elimination Method

خطی مساوات کی جوڑی کو حل کرنے کے لئے یہ ایک اور طریقہ ہے۔ یہ طریقہ اندراج کے طریقے سے بہت آسان ہے۔ یہاں خطی مساوات کے جوڑی میں دو متغیرات میں سے ایک کو خارج (باہر) کر دیتے ہیں اس طرح ہمیں ایک متغیر والے خطی مساوات حاصل ہوتا ہے۔ جسے ہم آسانی سے حل کر سکتے ہیں۔

اس ترکیب میں پیش آنے والے مختلف مرحلے ذیل میں دئے گئے ہیں۔

مرحلہ 1 : ایک یا دونوں مساواتوں کو ایک مناسب عدد (اعداد) سے اس طرح ضرب دیں کہ پہلے متغیر کے سر اعداد یا دوسرے متغیر کے سر اعداد دونوں مساواتوں میں عددی طور پر مساوی ہو۔

مرحلہ 2 : مرحلہ 1 میں حاصل شدہ دونوں مساواتوں کو جمع کریں یا ایک مساوات کو دوسرے مساوات سے تفریق کریں اس طرح کہ عددی طور پر مساوی ضریب والے ارقام باہم منسوخ (Cancel) ہو جاتے ہیں۔

مرحلہ 3 : حاصل ہونے والی مساوات کو حل کر کے کوئی ایک نامعلوم کی قیمت معلوم کریں۔

مرحلہ 4 : دئے گئے دو مساواتوں میں کسی ایک میں اس قیمت کو درج کر کے دوسرا نامعلوم کی قیمت معلوم کریں۔

مثال 3.50

دیا گیا ہے $4a + 3b = 65$ اور $a + 2b = 35$ ، اخراج کے طریقے سے حل کیجئے۔

حل :

دیا گیا ہے

$4a + 3b = 65$ .....(1)

$a + 2b = 35$ .....(2)

(2) × (4) سے $4a + 8b = 140$

$(-) \quad (-) \quad (-)$

پہلے سے (1) $\underline{4a + 3b = 65}$

$5b = 75$ سے $b = 15$ حاصل ہوتا ہے

(2) میں $b = 15$ درج کیجئے : $a + 2(15) = 35$ جسے مختصر کرنے پر $a = 5$

چنانچہ $a = 5$ ، $b = 15$ حل ہے۔

تصدیق کیجئے۔

$4a+3b = 65$ ...(1)

$4(5)+3(15) = 65$

$20 + 45 = 65$

$65 = 65$ صحیح

$a + 2b = 35$ ...(2)

$5 + 2(15) = 35$

$5+30 = 35$

$35 = 35$ صحیح

مثال 3.51

$8x - 3y = 5xy$; $6x - 5y = -2xy$ اخراج کے طریقے کے استعمال سے x اور y کے لئے حل کیجئے۔

حل :

دئے گئے مساوات کا نظام

$8x - 3y = 5xy$ ...(1)

$6x - 5y = -2xy$ ...(2)

غور کیجئے کہ دیا گیا نظام خطی نہیں ہے کیونکہ xy کی رقم موجود ہے۔ اس کے علاوہ غور کیجئے کہ اگر $x = 0$ ہو تو $y = 0$ اور اسکا معکوس بھی۔

اس لئے (0,0) اس نظام کے لئے ایک حل ہے اور کوئی اور حل بھی ہو سکتے ہیں جس میں $x \neq 0$ اور $y \neq 0$ ہوں۔

9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:21:03 PM

ہم ایک صورت حال فرض کریں جس میں $y \neq 0$ ، $x \neq 0$

ہر مساوات کے دونوں جانب xy سے تقسیم کریں،

$$\frac{8}{y}-\frac{3}{x}=5 \quad ...(3)$$

$$\frac{6}{y}-\frac{5}{x}=-2 \quad ...(4)$$

ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{8x}{xy}-\frac{3y}{xy}=\frac{5xy}{xy}$$

$$\frac{6x}{xy}-\frac{5y}{xy}=\frac{-2xy}{xy}$$

فرض کریں کہ $a=\frac{1}{x}, b=\frac{1}{y}$.

(3) اور (4) سے بالترتیب، $8b-3a=5 \quad ...(5)$

$$6b-5a=-2 \quad ...(6)$$

جو a اور b والے خطی مساوات ہیں

a کو خارج کرنے کے لئے

$$(5)\times 5 \Rightarrow 40b-15a=25 \quad .....(7)$$

$$(6)\times 3 \Rightarrow 18b-15a=-6 \quad .....(8)$$

پچھلے مثال کی طرح سے مکمل کرنے پر حل $\left(\frac{11}{23},\frac{22}{31}\right)$ حاصل ہوتا ہے۔

چنانچہ، اس نظام کے دو حل $\left(\frac{11}{23},\frac{22}{31}\right)$ اور $(0,0)$ ہیں۔

مشق 3.12

1۔ اخراج کے طریقے سے حل کیجئے۔

(i) $2x-y=3; \quad 3x+y=7$

(ii) $x-y=5; \quad 3x+2y=25$

(iii) $\frac{x}{10}+\frac{y}{5}=14; \quad \frac{x}{8}+\frac{y}{6}=15$

(iv) $3(2x+y)=7xy; \quad 3(x+3y)=11xy$

(v) $\frac{4}{x}+5y=7; \frac{3}{x}+4y=5$

(vi) $13x+11y=70; \ 11x+13y=74$

2۔ A اور B کے ماہانہ آمدنی کی نسبت 4 : 3 ہیں اور انکے ماہانہ اخراجات کی نسبت 7 : 5 ہیں۔ اگر ہر ایک ₹ 5000 ہر مہینہ بچت کرتے ہیں تو ہر ایک کی ماہانہ آمدنی دریافت کیجئے۔

3۔ پانچ سال پہلے، ایک آدمی کی عمر اسکے بیٹے کی عمر کا سات گنا تھی۔ پانچ سال کے دوران، اس آدمی کی عمر اسکے بیٹے کی عمر کا چار گنا ہوگئی۔ ان کی موجودہ عمریں معلوم کیجئے۔

ترچھی ضرب کے طریقے سے مساوات کا حل Solving by Cross Multiplication Method

اندراج اور اخراج کے طریقوں میں بہت سے حسابی اعمال پیش آتے ہیں۔ جب کہ ترچھی ضرب کے طریقے میں سر اعداد کو موثر طریقے سے استعمال کئے جاتے ہیں۔ جو طریقے کو آسان کرتا ہے۔ یہ طریقے ترچھی ضرب کا طریقہ کہلاتا ہے کیونکہ نسب نماں کے اعداد اور تیر کے نشان پر سر اعداد کے درمیان ترچھی طریقے سے ضرب دیتے ہیں۔ اب ہم اس طریقے کو ذیل میں بحث کریں گے۔

فرض کریں کہ ہمزاد خطی مساوات کی ایک جوڑی دئے گئے ہیں اس طرح کہ

9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:21:03 PM

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \qquad ...(1)$$

$$a_2x+b_2y+c_2=0 \qquad ...(2)$$

اس طرح کہ $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ انہیں ذیل کی طرح حل کر سکتے ہیں

$(1) \times b_2 - (2) \times b_1$ سے $b_2(a_1x+b_1y+c_1) - b_1(a_2x+b_2y+c_2) = 0$ حاصل ہوتا ہے۔

$$\Rightarrow \quad x(a_1b_2 - a_2b_1) = (b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{(b_1c_2 - b_2c_1)}{(a_1b_2 - a_2b_1)}$$

$(1) \times a_2 - (2) \times a_1$ اسی طرح سے فرض کر سکتے ہیں اور یہ مختصر ہونے پر

$$y = \frac{(c_1a_2 - c_2a_1)}{(a_1b_2 - a_2b_1)}$$

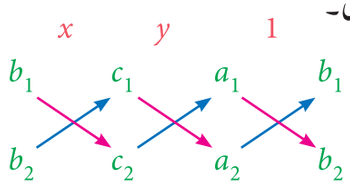
لہذا اس نظام کے لئے حل یہ ہے

$$x = \frac{(b_1c_2 - b_2c_1)}{(a_1b_2 - a_2b_1)}, \quad y = \frac{(c_1a_2 - c_2a_1)}{(a_1b_2 - a_2b_1)}$$

اسے اس طرح سے بھی لکھ سکتے ہیں

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

جسے ہم اس طرح سے یاد رکھ سکتے ہیں۔



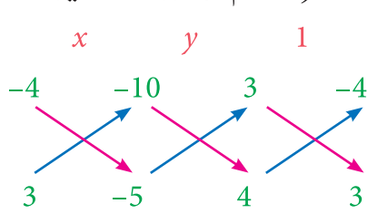
مثال 3.52 ترچھی ضرب کے طریقے سے حل کیجئے۔ $3x - 4y = 10$ اور $4x + 3y = 5$

حل : دئے گئے مساواتوں کا نظام

$$3x - 4y = 10 \quad \Rightarrow \quad 3x - 4y - 10 = 0 \quad .....(1)$$

$$4x + 3y = 5 \quad \Rightarrow \quad 4x + 3y - 5 = 0 \quad .....(2)$$

ترچھی ضرب کے طریقے کے لئے، سر اعداد کو ہم اس طرح سے لکھتے ہیں۔



9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:21:03 PM

$$\frac{x}{(-4)(-5)-(3)(-10)} = \frac{y}{(-10)(4)-(-5)(3)} = \frac{1}{(3)(3)-(4)(-4)}$$

$$\frac{x}{(20)-(-30)} = \frac{y}{(-40)-(-15)} = \frac{1}{(9)-(-16)}$$

$$\frac{x}{20+30} = \frac{y}{-40+15} = \frac{1}{9+16}$$

$$\frac{x}{50} = \frac{y}{-25} = \frac{1}{25}$$

لہذا ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $x = \frac{50}{25}$; $y = \frac{-25}{25}$

$x = 2$; $y = -1$

چنانچہ حل ہے۔ $x = 2,\ y = -1.$

تصدیق کیجئے۔

$3x-4y = 10$ ...(1)

$3(2)-4(-1) = 10$

$6+4 = 10$

$10 = 10$ صحیح

$4x+3y = 5$ ...(2)

$4(2)+3(-1) = 5$

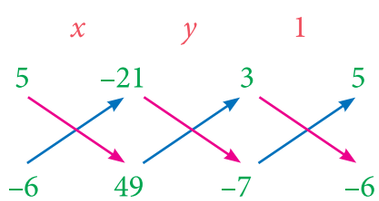
$8-3 = 5$

$5 = 5$ صحیح

مثال 3.53

ترچھی ضرب کے طریقے سے حل کیجئے۔ $3x+5y=21;\ -7x-6y=-49$

حل : دئے گئے مساواتوں کے نظام $3x+5y-21=0$; $-7x-6y+49=0$ ہیں۔اب ترچھی ضرب کے لئے سر اعداد کو استعمال کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔



$$\Rightarrow \frac{x}{(5)(49)-(-6)(-21)} = \frac{y}{(-21)(-7)-(49)(3)} = \frac{1}{(3)(-6)-(-7)(5)}$$

$$\frac{x}{119} = \frac{y}{0} = \frac{1}{17}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{119} = \frac{1}{17}, \quad \frac{y}{0} = \frac{1}{17}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{119}{17}, \quad y = \frac{0}{17}$$

$$\Rightarrow \quad x = 7, \quad y = 0$$

تصدیق کیجئے۔

$3x+5y = 21$ ...(1)

$3(7)+5(0) = 21$

$21+0 = 21$

$21 = 21$ صحیح

$-7x-6y = -49$ ...(2)

$-7(7)-6(6) = -49$

$-49 = -49$

$5 = -49$ صحیح

غور کیجئے

یہاں $\frac{y}{0} = \frac{1}{17}$ سے مراد $y = \frac{0}{17}$ ہے۔چنانچہ $\frac{y}{0}$ صرف ایک ترقیم ہے اور اس کو صفر سے تقسیم نہیں ہے۔

یہ ہمیشہ صحیح ہے کہ صفر سے تقسیم غیر واضح ہے۔

9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:21:03 PM

مشق 3.13

1۔ ترچھی ضرب کے طریقے سے حل کیجئے۔

(i) $8x-3y=12\,;\ 5x=2y+7$ (ii) $6x+7y-11=0\,;\ 5x+2y=13$ (iii) $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=5\,;\ \frac{3}{x}-\frac{1}{y}+9=0$

2۔ عالیہ کے پاس اسکی پرس میں 2 ₹ کے سکّے اور 5 ₹ کے سکّے ہیں۔اگر اسکے پاس پورے 80 سکّے ہیں جن کا کل 25 ₹ ہوتا ہے، تو اس کے پاس ہر قسم کے سکّوں کی تعداد معلوم کیجئے۔

3۔ اگر ایک سوئمنگ پول (Swimming Pool) کو بھرنے کے لئے دو پائپوں کو استعمال کرتے ہیں تو 24 گھنٹے لگتے ہیں۔اگر بڑے قطر والے پائپ کو 8 گھنٹوں کے لئے استعمال کرتے ہیں اور چھوٹے قطر والے پائپ کو 18 گھنٹوں کے لئے استعمال کرتے ہیں تو صرف آدھا پول بھرتا ہے۔ اس سوئمنگ پول کو بھرنے کے لئے ہر ایک پائپ کو کتنے گھنٹوں کے لئے استعمال کرنی پڑے گی؟

1.7 دو متغیرات والے خطی مساواتوں کی مستقل پذیری اور غیر مستقل پذیری

(Consistency and Inconsistency of Linear Equations in Two Variables)

دو متغیرات والے خطی مساواتوں پر غور کیجئے مثال کے طور پر

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \quad ...(1)$$

تب یہ نظام : $a_2x+b_2y+c_2=0$ ...(2) جہاں a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 اور c_2 حقیقی اعداد ہیں۔

i) اگر $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ (مستقل پذیر اور آزاد) ہو تو ایک ہی حل ہوگا۔

ii) اگر $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ (مستقل پذیر اور غیر آزاد) ہو تو لامحدود حل ہوگا۔

iii) اگر $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ (غیر مستقل پذیر اور غیر آزاد) ہو تو حل نہیں ہوگا۔

مثال 3.54

جانچ کیجئے کہ ذیل کے مساوات کا نظام مستقل پذیر ہے یا غیر مستقل پذیر اور بتائیے کہ اگر وہ مستقل پذیر ہو تو حل کی تعداد معلوم کیجئے۔

(i) $2x-4y=7$, $x-3y=-2$ (ii) $4x+y=3$, $8x+2y=6$ (iii) $4x+7=2y$, $2x+9=y$

حل :

شمار عدد	خطوط کی جوڑی	$\frac{a_1}{a_2}$	$\frac{b_1}{b_2}$	$\frac{c_1}{c_2}$	نسبتوں کا موازنہ	ترسیمی اظہار	الجبرائی تشریح
(i)	$2x-4y=7$ $x-3y=-2$	$\frac{2}{1}=2$	$\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}$	$\frac{7}{-2}=\frac{-7}{2}$	$\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$	تقاطع خطوط	ایک ہی حل
(ii)	$4x+y=3$ $8x+2y=6$	$\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$	$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$	منطبق خطوط	لامحدود حل
(iii)	$4x+7=2y$ $2x+9=y$	$\frac{4}{2}=2$	$\frac{2}{1}=2$	$\frac{7}{9}$	$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$	متوازی خطوط	حل نہیں

9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:21:04 PM

مثال 3.55

اگر دیئے گئے مساواتوں کا نظام $2x - 3y = 1$; $kx + 2y = 3$ ایک ہی حل رکھتا ہے تو k کی قیمت معلوم کیجئے۔

حل :

دیئے گئے خطی مساوات $\begin{bmatrix} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{bmatrix}$

$$kx + 2y = 3 \quad .....(1)$$
$$2x - 3y = 1 \quad .....(2)$$

یہاں $a_1 = k, b_1 = 2, a_2 = 2, b_2 = -3$;

ایک ہی حل کے لئے ہم $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ لیتے ہیں؛ لہذا $\frac{k}{2} \neq \frac{2}{-3}$ ؛ $k \neq \frac{4}{-3}$ یعنی $k \neq \frac{4}{3}$

مثال 3.56

اگر دیئے گئے مساوات کا نظام لامحدود کئی حل رکھتے ہیں تو k کی قیمت معلوم کیجئے۔

$$2x - 3y = 7; \quad (k+2)x - (2k+1)y = 3(2k-1)$$

حل : دیئے گئے دو خطی مساوات یہ ہیں ۔ $\begin{bmatrix} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{bmatrix}$

$$2x - 3y = 7$$
$$(k+2)x - (2k+1)y = 3(2k-1)$$

یہاں $a_1 = 2, \ b_1 = -3, \ a_2 = (k+2), \ b_2 = -(2k+1), \ c_1 = 7, \ c_2 = 3(2k-1)$

لامحدود حل کے لئے ہم $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ لیتے ہیں۔

$$\frac{2}{k+2} = \frac{-3}{-(2k+1)} = \frac{7}{3(2k-1)}$$

$$\frac{2}{k+2} = \frac{-3}{-(2k+1)}$$
$$2(2k+1) = 3(k+2)$$
$$4k + 2 = 3k + 6$$
$$k = 4$$

$$\frac{-3}{-(2k+1)} = \frac{7}{3(2k-1)}$$
$$9(2k-1) = 7(2k+1)$$
$$18k - 9 = 14k + 7$$
$$4k = 16$$
$$k = 4$$

مثال 3.57

اگر خطی مساواتوں کا نظام $8x + 5y = 9$ ؛ $kx + 10y = 15$ کوئی حل نہیں رکھتا تو k کی قیمت معلوم کیجئے۔

حل :

دیئے گئے خطی مساوات $\begin{bmatrix} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{bmatrix}$

$$8x + 5y = 9$$
$$kx + 10y = 15$$

یہاں $a_1 = 8, b_1 = 5, c_1 = 9, a_2 = k, b_2 = 10, c_2 = 15$

اگر کوئی حل نہیں ہے تو ہمیں معلوم ہے کہ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ اور اس لئے $\frac{8}{k} = \frac{5}{10} \neq \frac{9}{15}$

$$80 = 5k$$
$$k = 16$$

9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:21:04 PM

کارروائی 3

1۔ دئے گئے خطی مساواتوں کے نظام کے لئے k کی قیمت معلوم کیجئے جو نیچے دئے گئے شرط پوری کرتے ہوں۔

(i) $2x + k\,y = 1,\ 3x - 5y = 7$ ایک ہی حل رکھتا ہے۔

(ii) $k\,x + 3y = 3\ ;\ 12x + k\,y = 6$ کوئی حل نہیں رکھتا۔

(iii) $(k-3)\,x + 3y = k\ ;\ k\,x + k\,y = 12$ لامحدود حل رکھتے ہیں۔

2۔ اگر دئے گئے خطی مساوات کا نظام $5x + (1-2a)\,y = 3b$, $3x - (a+1)y = 2b - 1$ کے لامحدود حل ہیں۔ تو a اور b کی قیمت معلوم کیجئے۔

کارروائی 4

دئے گئے خطی مساواتوں کے لئے ایک اور خطی مساوات معلوم کیجئے۔ جو دئے گئے ہر شرط کو پوری کرے۔

دی گئی خطی مساوات	ایک اور خطی مساوات		
	ایک ہی حل	لامحدود کئی حل	کوئی حل نہیں
$2x+3y = 7$	$3x+4y = 8$	$4x+6y = 14$	$6x+9y = 15$
$3x-4y = 5$			
$y-4x = 2$			
$5y-2x = 8$			

مشق 3.14

1۔ ایک دو ہندسی عدد اور اسکے ہندسوں کو الٹنے پر حاصل ہونے والے نئے عدد کا حاصل جمع 110 ہے۔ اگر پہلے عدد سے 10 تفریق کر دیا جائے تو نیا عدد پہلے عدد کے ہندسوں کے حاصل جمع کے 5 گنا سے 4 زیادہ ہوگا۔ پہلا عدد معلوم کیجئے۔

2۔ ایک کسر کے شمار کنندہ اور نسب نما کا حاصل جمع 12 ہے۔ اگر نسب نما کو 3 بڑھا دیا جائے کو کسر $\frac{1}{2}$ بنتا ہے۔ کسر معلوم کیجئے۔

3۔ ABCD ایک مدوّر چار ضلعی ہے۔ اس طرح کہ $\angle A = (4y + 20)^\circ$، $\angle B = (3y - 5)^\circ$، $\angle C = (4x)^\circ$ اور $\angle D = (7x + 5)^\circ$ چار زاویے معلوم کیجئے۔

4۔ 5% نفع پر ایک T.V اور 10% نفع پر ایک فرڈج (Fridge) فروخت کرنے پر، دوکاندار کو 2000 ₹ نفع حاصل ہوتا ہے۔ لیکن اگر وہ 10% نفع پر T.V اور 5% نقصان پر فرڈج کو فروخت کرتا ہے تو اس کاروبار میں 1500 ₹ نفع حاصل کرتا ہے۔ T.V اور فرڈج کی اصل قیمت معلوم کیجئے۔

5۔ دو اعداد 6 : 5 کی نسبت میں ہیں۔ اگر ہر عدد سے 8 تفریق کر دیا جائے تو نسبت 5 : 4 ہو جاتی ہے۔ اعداد معلوم کیجئے۔

6۔ 4 آدمی اور 4 لڑکے ایک کام کو 3 دنوں میں ختم کرتے ہیں۔ جبکہ 2 آدمی اور 5 لڑکے اس کام 4 دنوں میں ختم کرتے ہیں۔ 1 لڑکا اس کام کو کتنے دنوں میں ختم کرے گا؟ 1 آدمی اس کام کو کتنے دنوں میں ختم کرے گا؟

9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:21:04 PM

مشق 3.15

معروضی سوالات / کثیر انتخابی سوالات

1۔ اگر $x^3 + 6x^2 + kx + 6$ ٹھیک تقسیم پذیر ہے۔ $(x+2)$ سے، تو $k = ?$ کی قیمت کیا ہے؟

(a) -6 (b) -7 (c) -8 d) 11

2۔ $2x + 3 = 0$ کثیر رقمی مساوات کا جذر کیا ہے؟

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $-\frac{1}{3}$ (c) $-\frac{3}{2}$ (d) $-\frac{2}{3}$

3۔ $4 - 3x^3$ کس قسم کا کثیر رقمی ہے۔

a) مستقل کثیر رقمی b) خطی کثیر رقمی c) دو درجی کثیر رقمی d) مکعبی کثیر رقمی

4۔ اگر $x^{51}+51$ کو $x+1$ سے تقسیم کرتے ہیں تو باقی ہوگا۔

(a) 0 (b) 1 (c) 49 (d) 50

5۔ $2x + 5$ کثیر رقمی کے صفر ہیں۔

(a) $\frac{5}{2}$ (b) $-\frac{5}{2}$ (c) $\frac{2}{5}$ (d) $-\frac{2}{5}$

6۔ $p(x) = x^3 - x^2 - 2$ ؛ $q(x) = x^2-3x+ 1$ کثیر رقمیات کا حاصل جمع۔

(a) $x^3 - 3x - 1$ (b) $x^3 + 2x^2 - 1$ (c) $x^3 - 2x^2 - 3x$ (d) $x^3 - 2x^2 + 3x - 1$

7۔ کثیر رقمی $(y^3-2)(y^3 + 1)$ کا درجہ ہے

(a) 9 (b) 2 (c) 3 (d) 6

8۔ فرض کیجئے ان کثیر رقمیات میں

(A) $-13q^5 + 4q^2 + 12q$ (B) $(x^2 +4)(x^2 + 9)$

(C) $4q^8 - q^6 + q^2$ (D) $-\frac{5}{7}y^{12} + y^3 + y^5$

توان کے درجوں کی بڑھتی ہوئی ترتیب ہے۔

(a) A,B,D,C (b) A,B,C,D (c) B,C,D,A (d) B,A,C,D

9۔ اگر $p(a) = 0$ ہو تو $p(x)$ کا ایک ..... $(x- a)$ ہے۔

a) مقسوم علیہ b) خارج قسمت c) بچت d) جزو ضربی

10۔ $(2-3x)$ کے صفر ..... ہے۔

(1) 3 (2) 2 (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{3}{2}$

11۔ درجہ ذیل میں کونسا $(x-1)$ کا جزو ضربی رکھتا ہے؟

(1) $2x- 1$ (2) $3x- 3$ (3) $4x- 3$ (4) $3x- 4$

12۔ اگر $p(x)$ کا ایک جزو ضربی $(x-3)$ ہے تو اس کا بچت ..... ہے۔

(1) 3 (2) 3 (3) $p(3)$ (4) $p(3)$

13۔ $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$ مساوی ہے۔

(1) $(x + y)^3$ (2) $(x - y)^3$ (3) $x^3 + y^3$ (4) $x^3 - y^3$

9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:21:05 PM

14۔ $(a+b-c)^2$ مساوی ہے۔

(1) $(a-b+c)^2$ (2) $(-a-b+c)^2$ (3) $(a+b+c)^2$ (4) $(a-b-c)^2$

15۔ ax^2+bx+c جملہ کے اجزائے ضربی کا حاصل جمع اور حاصل ضرب بالترتیب ہے۔

(1) $a,\ bc$ (2) $b,\ ac$ (3) $ac,\ b$ (4) $bc,\ a$

16۔ اگر ax^2+bx+c کے اجزائے ضربی $(x+5)$ اور $(x-3)$ ہوتو a ، b اور c کی قیمتیں ..... ہیں۔

(1) 1,2,3 (2) 1,2,15 (3) 1,2, −15 (4) 1, −2,15

17۔ مکعبی کثیر رقمی میں زیادہ سے زیادہ ..... خطی اجزائے ضربی ہیں۔

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

18۔ مستقل کثیر رقمی کی قوت ..... ہے۔

(1) 3 (2) 2 (3) 1 (4) 0

19۔ مساوات $2x+3y=m$ سے m کی قیمت معلوم کیجئے۔اگراس کا ایک حل $x=2$ اور $y=-2$ ہے۔

(1) 2 (2) −2 (3) 10 (4) 0

20۔ ذیل میں کونسا خطی مساوات ہے؟

(1) $x+\frac{1}{x}=2$ (2) $x(x-1)=2$ (3) $3x+5=\frac{2}{3}$ (4) $x^3-x=5$

21۔ ذیل میں کونسا مساوات $2x-y=6$ کا ایک حل ہے۔

(1) (2,4) (2) (4,2) (3) (3, −1) (4) (0,6)

22۔ اگرخطی مساوات $2x+3y=k$ کا ایک حل $(2,3)$ ہےتو k کی قیمت

(1) 12 (2) 6 (3) 0 (4) 13

23۔ دیئے گئے خطی مساوات $ax+by+c=0$ کے لئے کونسی شرط پوری نہیں ہوتی ہے۔

(1) $a\neq 0, b=0$ (2) $a=0, b\neq 0$ (3) $a=0,\ b=0, c\neq 0$ (4) $a\neq 0, b\neq 0$

24۔ ذیل میں کونسی دو متغیرات والی خطی مساوات نہیں ہیں۔

(1) $ax+by+c=0$ (2) $0x+0y+c=0$

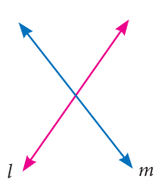
(3) $0x+by+c=0$ (4) $ax+0y+c=0$

25۔ k کی کونسی قیمت کے لئے خطی مساواتوں کی جوڑی $4x+6y-1=0$ اور $2x+ky-7=0$ متوازی خطوط کو ظاہر کرتے ہیں۔

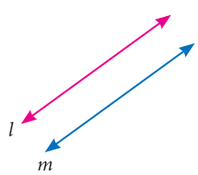
(1) $k=3$ (2) $k=2$ (3) $k=4$ (4) $k=-3$

26۔ اگرخطی مساواتوں کی ایک جوڑی کوئی حل نہیں رکھتی ہے تو ترسیمی اظہار اس طرح ہوگا۔

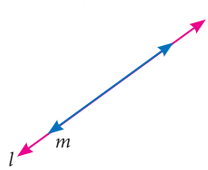
(1)



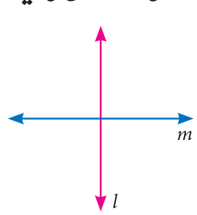
(2)



(3)



(4)



9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:21:05 PM

27 ۔ اگر $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ جہاں $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ اور $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ہوتو خطی مساوات کی دی گئی جوڑی ..... حل رکھتے ہیں

a) کوئی حل نہیں b) دوحل c) ایک ہی حل d) لامحدود

28 ۔ اگر $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ جہاں $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ اور $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ہوتو خطی مساوات کی دی گئی جوڑی ..... حل رکھتے ہیں

a) کوئی حل نہیں b) دوحل c) لامحدود d) ایک ہی حل

29 ۔ کوئی دو اعداد اول کا GCD ..... ہے۔

(1) -1 (2) 0 (3) 1 (4) 2

30 ۔ $x^4 - y^4$ اور $x^2 - y^2$ کا GCD ..... ہے۔

(1) $x^4 - y^4$ (2) $x^2 - y^2$ (3) $(x+y)^2$ (4) $(x+y)^4$

نکات برائے یادداشت

- ایک الجبرائی جملے کی شکل $x = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$ میں ایک متغیر x، n درجہ والا **کثیر رقمی** ہے۔ جہاں $a_0, a_1, a_2, ...a_n$ مستقلات ہیں $(a_n \neq 0)$ اور n ایک صحیح عدد ہے۔
- فرض کیجئے کہ $p(x)$ ایک کثیر رقمی ہے۔ اگر $p(a)=0$ ہوتو ہم کہہ سکتے ہیں 'a' ایک صفر کثیر رقمی ہے $p(x)$ کا۔
- اگر $x = a$ کثیر رقمی $p(x) = 0$ شرط پوری کرے تو $x = a$ کو کثیر رقمی مساوات کا جذر $p(x) = 0$ کہتے ہیں۔
- **مسئلہ باقی** : اگر ایک کثیر رقمی $p(x)$ کا درجہ بڑا ہے یا برابر ہے ایک خطی کثیر رقمی $(x - a)$ سے جس کو تقسیم کرتے ہیں تو اس کا بچت $p(a)$ ہے۔ جس میں a کوئی حقیقی عدد ہوگا۔

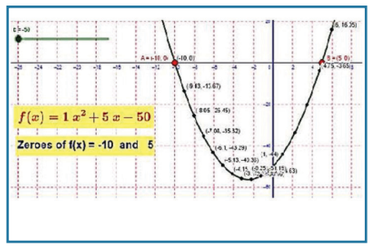
مسئلہ جزو ضربی

- اگر $p(x)$ کو $(x - a)$ سے تقسیم کرنے پر بچت $p(a) = 0$ ہوتو ، $p(x)$ کا ایک جزو ضربی $(x - a)$ ہے۔
- مساوات کا حل تمام قیمتوں کا مجموعہ ہے جب انہیں نامعلوم کے لئے بھرتی کیا جائے تو مساوات کو صحیح بناتا ہے۔
- دو متغیرات والی مساوات جس میں ہر ایک کا درجہ (قوت) 1 ہو اور ایک دوسرے سے ضرب میں نہ ہوں تو اسے دو متغیرات والی خطی مساوات کہتے ہیں۔
- دو متغیرات والے خط مساوات لامحدود حل رکھتے ہیں ۔
- دو متغیرات والے خطی مساوات کی ترسیم ایک خط مستقیم ہے۔
- ہمزاد خطی مساوات یکساں متغیرات والے دو یا دو سے زیادہ خطی مساوات پر مشتمل ہے۔

9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:21:06 PM

ICT Corner -1

مطلوبہ حاصل اس خاکہ میں بتایا گیا ہے۔



مرحلہ 1 براؤزر کھولئے اور دئے گئے لنک کو کاپی اور پیسٹ کیجئے یا دئے گئے URL کو کاپی کیجئے یا QR کوڈ کو اسکین کیجئے۔

مرحلہ 2 Geo Gebra کا ورک بک ''کثیر رقمیات اور دودرجی مساوات'' نظر آئے گا اس ورک بک میں بہت سارے ورک شیٹ ہونگے۔ دودرجی کثیر رقمی کے صفر نام نام والے ورک شیٹ کو کھولیں۔

مرحلہ 3 دودرجی ضریب کو تبدیل کرنے کے لئے a,b Slider's اور c کو کھینچئے، نقاط A اور B ، x محور پر کہاں قطع کرتے ہیں۔ اس کو دیکھیں یہی نقاط کثیر رقمی کے صفر کہلاتے ہیں۔

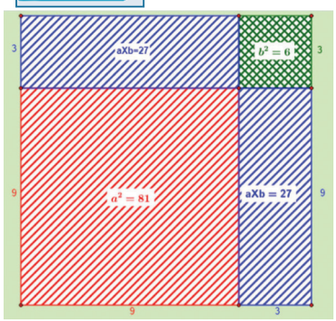
C7EW6

Browse in the link

Zeroes of Polynomials : https://ggbm.at/tgu3PpWm

ICT Corner -2

مطلوبہ حاصل اس خاکہ میں بتایا گیا ہے۔



مرحلہ 1 : براؤزر کھولئے، دئے گئے URL کے لنک کو ٹائپ کیجئے یا دئے گئے QR کوڈ کو اسکین کیجئے۔ GeoGebra نامی Identities Algebraic ورک شیٹ کھلے گا، جس میں الجبرائی تماثلات سے متعلق کئی کارروائیاں ہوں گی۔

پہلی کارروائی میں $(a+b)^2$ کے لئے خاکہ نما تصور دیا گیا ہے۔ a اور b سلائڈر کو حرکت دیجئے اور دی گئی تماثل کے رقبوں کا موازنہ کیجئے۔

مرحلہ 2 : اسی طرح a اور b سلائڈروں کو مزید حرکت دے کر دیگر تماثلات کے لئے ان کے رقبوں کا موازنہ کیجئے۔

2RYFC

Browse in the link

Algebraic Identities: https://ggbm.at/PyUj657Y or Scan the QR Code.

ICT Corner -3

متوقع نتیجہ کو تصویر میں دکھایا گیا ہے۔



مرحلہ 1 : بروزر کھولئے اور نیچے دئے گئے URL لنک ٹیپ کیجئے (یا) QR کوڈ اسکین کیجئے۔

"Algebra" نامی GeoGebra ورک شیٹ کھلے گا۔ ترچھی ضرب کے اصول ترسیمی طریقہ اور چوزہ، بکری کے کھیل سے مساوات کا حل کے عنوان پر تین ورک شیٹیں ہوں گی۔

مرحلہ 2 : سلائڈر کو گھمائے یا مساواتوں کو تبدیل کرنے کے لئے باترتیب نئے مسئلے کے لئے تیسرے عنوان پر کلک کیجئے اور حل کیجئے۔

YCJHX

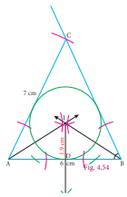
Browse in the link

Algebra: https://ggbm.at/qampr4ta or Scan the QR Code.

9 maths 3. algebra compiled complete
Wednesday, March 13, 2019 4:21:06 PM

4

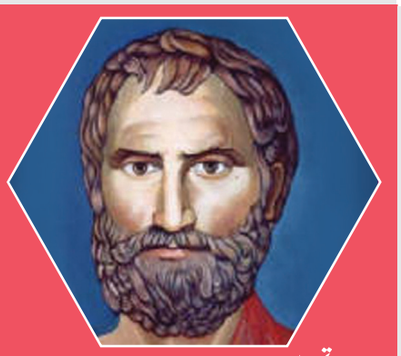






علم ہندسہ (GEOMETRY)

Inspiration is needed in geometry just as much as in poetry.
- Alexander Pushkin



تھیلیس
Thales
(BC (BCE) 624 – 546)

تھیلیس (Thales) یونان کے شہر ملی ٹس میں پیدا ہوئے. وہ عملی علم ہندسہ اور نظریاتی علم ہندسہ کے لئے بہت مشہور تھے۔ خاص کر مثلثوں کے لئے انہوں نے علم ہندسہ کو مسئلوں کے حل کے لئے استعمال کیا جیسا کہ اہراموں کی اونچائی اور ساحل سے جہازوں کا فاصلہ وغیرہ انہیں یونان کے سات راہبوں یا سات ذہین شخصوں میں شمار کیا جاتا ہے انہیں مغربی دنیا کا پہلا فلسفی بھی مانا جاتا ہے۔

سیکھنے کے مقاصد

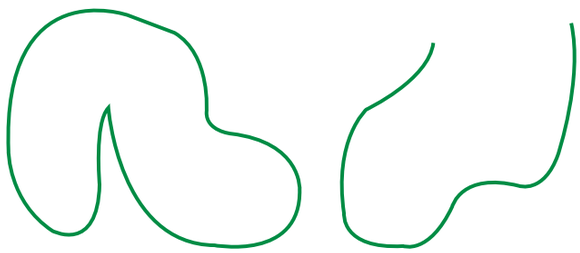
- مسئلے (Theorems) میں خطی جوڑیاں اور افقی مقابل ضلعے کو سمجھنا
- مثلث کے ضلعوں کا حاصل جمع کی خاصیت کو سمجھنا
- چار ضلعی کی خصوصیات سمجھ کر اس کے ذریعہ حسابات کو حل کرنا
- دائرے کے وتروں کے مسئلوں کا استعمال اور تشریح کو سمجھنا۔
- مدور چار ضلعی کے مسئلوں کا استعمال اور تشریح کو سمجھنا۔
- ایک مثلث کا ہندسی مرکز، عمودی مرکز، حائط مرکز اور درون مرکز کو متعین کرنا اور تصنیف کرنا۔

4.1 تعارف :

علم ہندسہ میں ہم شکلوں کے بارے میں پڑھتے ہیں۔ لیکن شکلوں میں پڑھنے کے لئے کیا ہے؟ تم پوچھ سکتے ہیں؟ پہلے غور کیجئے!
ہم شکلوں کے ذریعہ کیا کرتے ہیں؟ ہم شکلیں بناتے ہیں۔ شکلوں کا موازنہ کرتے اور ناپتے ہیں۔ شکلوں میں ہم کیا ناپتے ہیں؟

9 maths 4 geometry 138
Wednesday, March 13, 2019 4:03:55 PM

اس طرح کی چند شکلیں لیں:



خاکہ 4.1

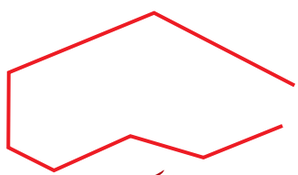
ان دونوں میں، منحنی خط کے ذریعہ شکل بنتی ہیں۔ایک بند منحنی خط ہے اور دوسری کھلی منحنی خط ہے۔ہم دھاگے کی مدد سے کھلی منحنی خط کی لمبائی اور بند خطّ کے احاطہ کی پیائش کر سکتے ہیں۔

کیا منحنی خطوط شکل ہیں یا نہیں؟ اسکیل کی مدد سے خط مستقیم کو آسانی سے ناپ سکتے ہیں یا نہیں؟ ذیل کے دونوں شکلوں پر غور کیجئے۔

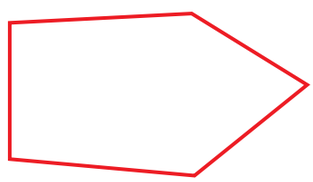
اب ہماری توجہ صرف اُن شکلوں پر ہوگی جو خط مستقیم اور مربوط ہوں جیسا کہ آپ دیکھ سکتے ہیں۔

اس کے ذریعہ بہت ساری دلچسپ شکلیں بنا سکتے ہیں۔

خاکہ 4.2 ایک کھلی شکل ہے۔



خاکہ 4.2



خاکہ 4.3

ہم ان شکلوں کو نہ صرف بناتے ہیں بلکہ ہم ان کا موازنہ کرتے ہیں اور ناپتے ہیں۔

اس طرح کر کے ان کی وضاحت کرتے ہیں۔ آپ کس طرح ان شکلوں کی وضاحت کرو گے؟

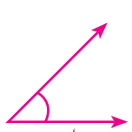
یہ تمام خطوط مستقیم سے بنے ہوئے ہیں اور مربوط ہیں۔

4.2 زاویہ کے اقسام اعادہ (Types of Angles)



خاکہ 4.4

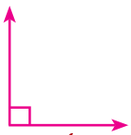
پلمبر (سبّاک) (plumber) زاویوں کی پیائش کے ذریعہ سے پائپ (pipe) کو ایک دوسرے سے بہتر انداز میں جوڑتا ہے۔ بڑھئی (wood worker) آری کو استعمال کر کے ٹھیک زاویہ پر تختہ کاٹتا ہے۔ ہوائی جہاز کا ناظم (ATC) (Air Traffic Controller) زاویہ استعمال کر کے ہوائی جہازوں کا رخ بتاتا ہے۔ کیرم (Carrom) اور بلیرڈس (Billiards) کے کھلاڑیوں کو ضروری ہے کہ ٹھیک زاویہ کا منصوبہ بنا کر نشانہ (Shots) لگائیں۔ جب دو شعاعیں ایک مشترک نقطہ سے نکلتی ہیں تو بننے والی شکل زاویہ کہلاتی ہے۔



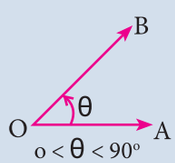
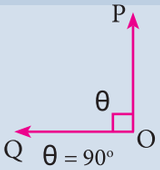
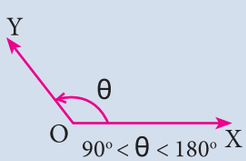
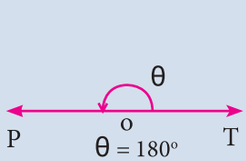
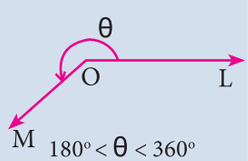
حادہ
وہ زاویہ جو 90° سے کم ہو



مثال 4.5

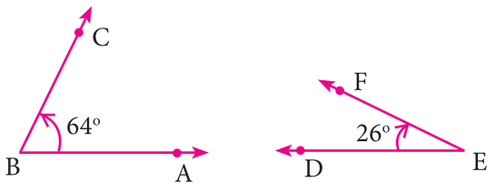


قائمہ
وہ زاویہ جو
ٹھیک 90° ہو

زاویہ حادہ	زاویہ قائمہ	زاویہ منفرجہ	زاویہ مستقیم	زاویہ معکوس
				
$0 < \theta < 90^o$	$\theta = 90^o$	$90^o < \theta < 180^o$	$\theta = 180^o$	$180^o < \theta < 360^o$

9 maths 4 geometry 138
Wednesday, March 13, 2019 4:03:55 PM

متمم زاویے (Complementary Angles)



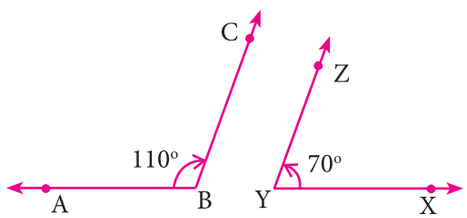
خاکہ 4.6

دوزاویے متمم کہلائیں گے اگران کا حاصل جمع 90° ہو۔

مثال کے طور پر اگر $\angle ABC=64^o$ اور $\angle DEF = 26^o$ ہوتو $\angle ABC$ اور $\angle DEF$ ایک دوسرے کے متمم ہیں۔

کیوں کہ $\angle ABC + \angle DEF = 90^o$

مکملہ زاویے (Supplementary Angles)



خاکہ 4.7

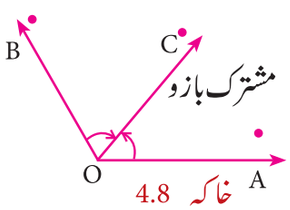
دوزاویے مکملہ کہلاتے ہیں اگران کا حاصل جمع 180° ہو۔

مثال کے طور پر اگر $\angle ABC = 110^o$ اور $\angle XYZ = 70^o$

$$\angle ABC + \angle XYZ = 180^o$$

چنانچہ $\angle ABC$ اور $\angle XYZ$ ایک دوسرے مکملہ زاویے ہیں۔

متصلہ زاویے (Adjacent Angles)



خاکہ 4.8

دوزاویے متصلہ زاویے کہلائیں گے اگر

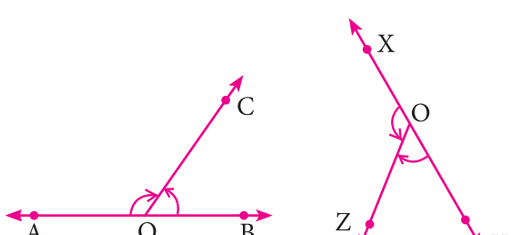
i) وہ ایک مشترک راس رکھتا ہے۔

ii) وہ ایک مشترک بازو رکھتا ہے۔

iii) ایک مشترک بازو دو غیر مشترک بازوؤں کے درمیان واقع ہے۔

زاویوں کی خطی جوڑی (Linear Pair of Angles)

ایک شعاع خط مستقیم پر واقع ہوتی ہے تو دو متصلہ زاویوں کا حاصل 180° ہے۔اس طرح بننے والے زاویوں کو خطی جوڑی کہتے ہیں۔



خاکہ 4.9

$$\angle AOC + \angle BOC = 180^o$$

ایک خطی جوڑی بنتی ہے $\angle AOC$ اور $\angle BOC$

$$\angle XOZ + \angle YOZ = 180^o$$

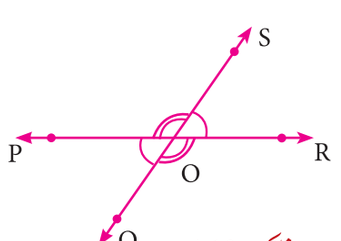
ایک خطی جوڑی بنتی ہے $\angle XOZ$ اور $\angle XOZ$

مقابل کے عمودی زاویے (Vertically Opposite Angles)

اگر دو خطوط ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔تو مقابل کے عمودی زاویے مساوی ہوتے ہیں۔

اس شکل میں $\angle POQ = \angle SOR$

$\angle POS = \angle QOR$



خاکہ 4.10

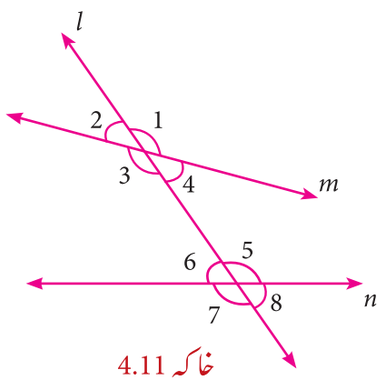
9 maths 4 geometry 138
Wednesday, March 13, 2019 4:03:56 PM

4.2.1 قاطع (Transversal)

ایک خط جو دو یا اس سے زیادہ خطوط کو ایک مخصوص نقاط پر کاٹیں تو وہ قاطع کہلاتا ہے۔

صورت حال (i) جب ایک قاطع دو خطوط کو قطع کرتا ہے تو ہمیں آٹھ زاویے حاصل ہوتے ہیں۔

اس خاکہ میں خط 'l' ایک قاطع ہے، خطوط m اور n کے لئے۔



خاکہ 4.11

i) نظیری زاویے (Corresponding Angles)

زاویے $\angle 1$ اور $\angle 5$، $\angle 2$ اور $\angle 6$، $\angle 3$ اور $\angle 7$، $\angle 4$ اور $\angle 8$

ii) متبادل اندرونی زاویے (Alternate Interior Angles)

$\angle 4$ اور $\angle 6$ ، $\angle 3$ اور $\angle 5$

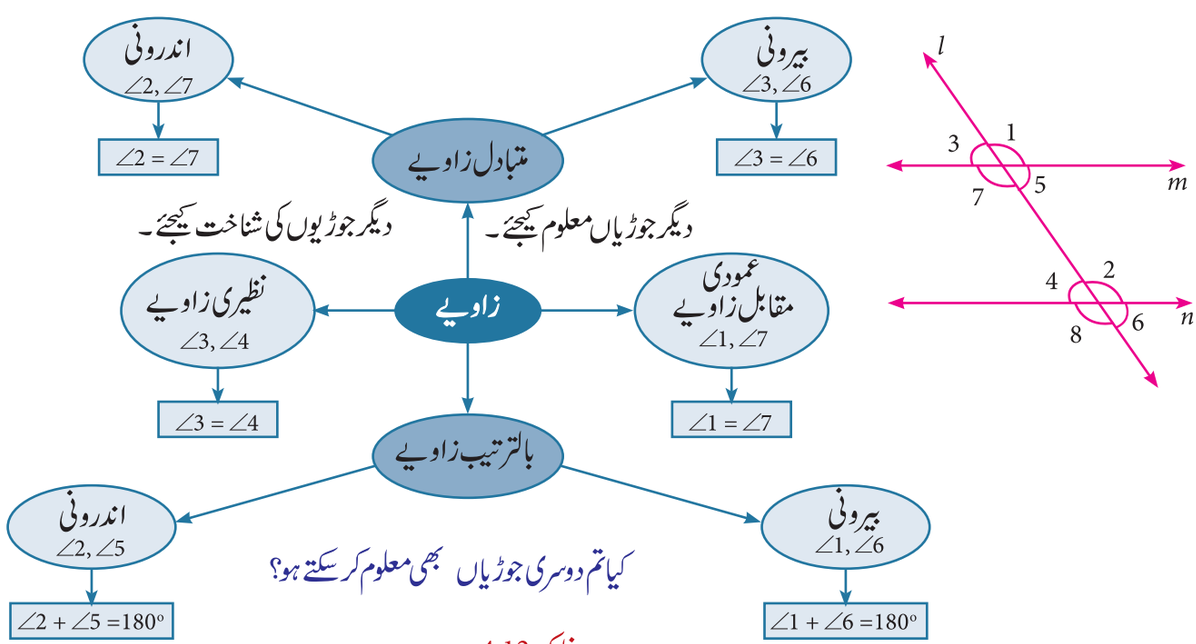
iii) متبادل بیرونی زاویے (Alternate Exterior Angles)

$\angle 1$ اور $\angle 7$، $\angle 2$ اور $\angle 8$

iv) $\angle 4$ اور $\angle 5$، $\angle 3$ اور $\angle 6$ اندرونی زاویے قاطع کے اسی جانب ہوتے ہیں۔

v) $\angle 1$ اور $\angle 8$، $\angle 2$ اور $\angle 7$، بیرونی زاویے قاطع کے اسی جانب ہوتے ہیں۔

صورت حال (ii) : اگر ایک قاطع دو متوازی خطوط کو قطع کرتا ہے۔ قاطع مختلف جوڑیاں بناتا ہے۔



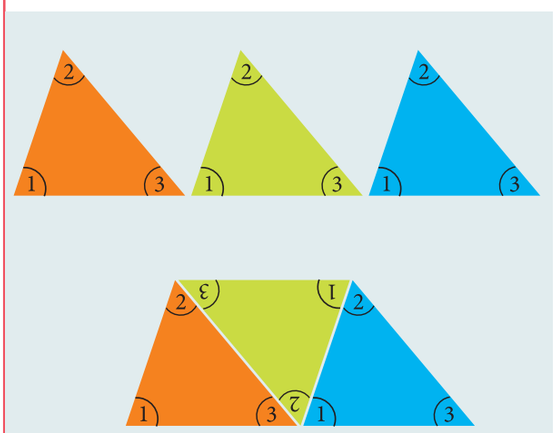
خاکہ 4.12

9 maths 4 geometry 138
Wednesday, March 13, 2019 4:03:56 PM

4.2.2 مثلثیں (Triangles)

کارروائی 1

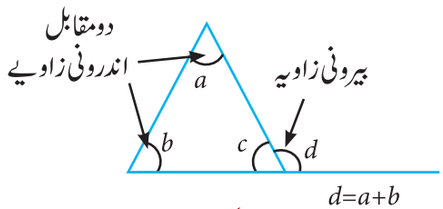
تین رنگین کاغذ لیجئے۔ ان کاغذات کو ایک دوسرے کے اوپر رکھئے۔ اوپر کے کاغذ پر شکل مثلث بنائیے۔ مختلف رنگوں کے مثلث حاصل کرنے کے لئے شیٹ کو کاٹ لیں۔ جو ایک ہی جیسے مثلثیں حاصل ہوتے ہیں۔ اندرونی زاویے $\angle 1$، $\angle 2$ اور $\angle 3$ انھیں ایک خط مستقیم پر رکھئے جو ایک دوسرے کے متصل ہو، بغیر کوئی خالی جگہ کے۔ تینوں زاویوں کے حاصل جمع سے متعلق تم کیا کہتے ہو؟ $\angle 1$، $\angle 2$ اور $\angle 3$



خاکہ 4.13

کیا تم اسی شکل کو استعمال کر کے ایک مثلث کے بیرونی زاویے کی خصوصیات سمجھا سکتے ہو؟

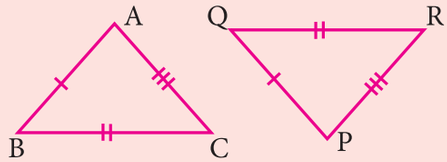
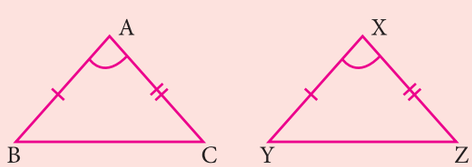
اگر مثلث کے ایک ضلع کو طویل کرنے پر خارجی زاویے بنتا ہے۔
وہ مقابل کے داخلی زاویوں کے حاصل جمع کے مساوی ہوگا۔
یعنی $d = a + b$ (خاکہ 4.14 ملاحظہ کیجئے)



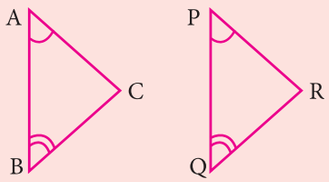
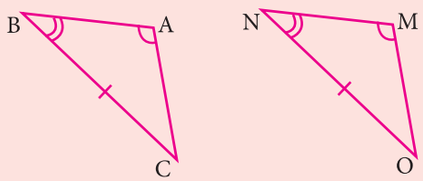
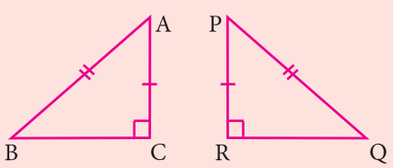
خاکہ 4.14

4.2.3 متماثل مثلثیں (Congruent Triangles)

دو مثلثیں اس وقت متماثل ہوں گے جب وہ ایک دوسرے پر رکھے جائیں تو ضلع اور زاویے آپس میں ٹھیک طور پر منطبق ہوں۔

سبب	خاکہ	اصول
SSS		$AB = PQ$ $BC = QR$ $AC = PR$ $\Delta ABC \cong \Delta PQR$
SAS		$AB = XY$ $\angle BAC = \angle YXZ$ $AC = XZ$ $\Delta ABC \cong \Delta XYZ$

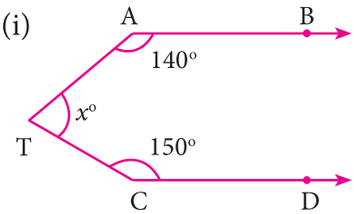
9 maths 4 geometry 138
Wednesday, March 13, 2019 4:03:56 PM

ASA		$\angle A = \angle P$ $AB = PQ$ $\angle B = \angle Q$ $\Delta ABC \cong \Delta PQR$
AAS		$\angle A = \angle M$ $\angle B = \angle N$ $BC = NO$ $\Delta ABC \cong \Delta MNO$
RHS		$\angle ACB = \angle PRQ = 90°(R)$ $AB =$ PQ hypotenuse (H) وتر $AC = PR$ (S) $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

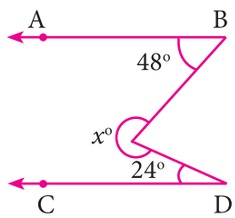
مشق 4.1

1۔ اس شکل میں AB متوازی ہے CD ہے۔ x کی قیمت معلوم کیجئے۔

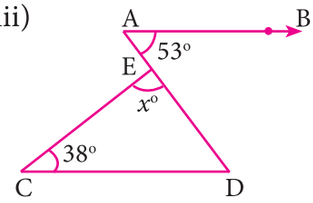
(i)



(ii)



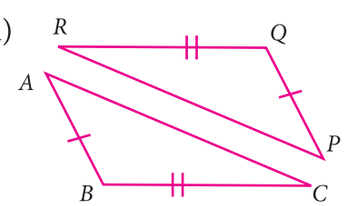
(iii)



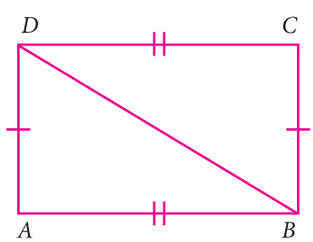
2 ۔ ایک مثلث کے زاویوں کی نسبت 1:2:3 ہو تو مثلث کے ہر ایک زاویوں کے ناپ معلوم کیجئے۔

3۔ دیئے گئے مثلثوں کی جوڑیوں پر غور کیجئے بتایئے کیا ہر ایک جوڑی متماثل مثلثیں ہیں اگر یہ متماثل مثلثیں ہیں تو بتایئے کیسے؟
اگر نہیں تو سبب بتایئے؟ اور کہیں اگر کوئی چھوٹی سی تبدیلی کر کے متماثل بنا سکتے ہیں؟

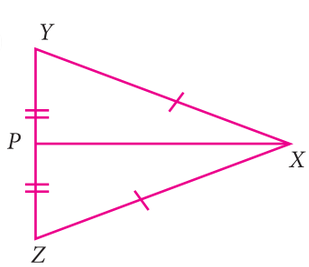
(i)



(ii)

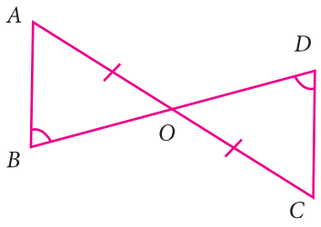


(iii)

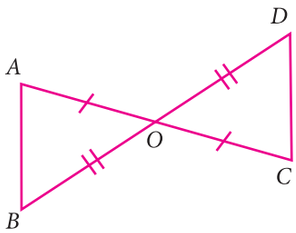


9 maths 4 geometry 138
Wednesday, March 13, 2019 4:03:57 PM

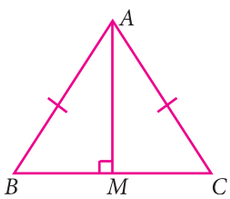
(iv)



(v)

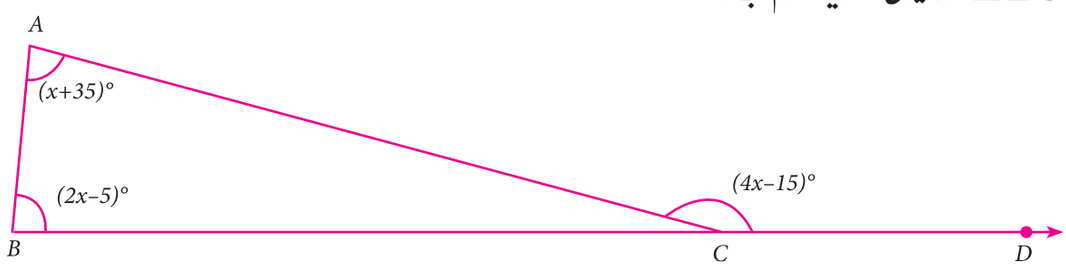


(vi)



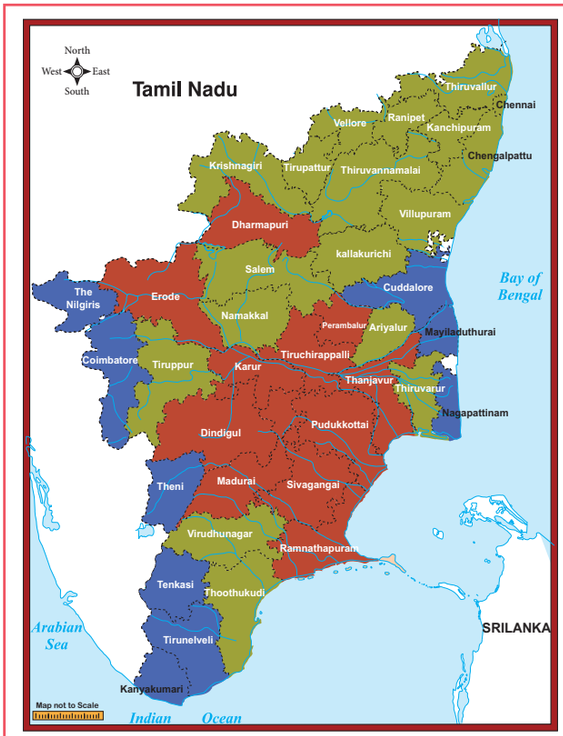
4۔ ΔABC اور ΔDEF دو مثلثیں ہیں جس میں $AB = DF$، $\angle ACB = 70^o$، $\angle ABC = 60^o$، $\angle DEF = 70^o$ اور $\angle EDF = 60^o$۔ ثابت کیجئے کہ مثلث متماثل ہیں۔

5۔ ΔABC کے تینوں زاویے معلوم کیجئے۔



4.3 چار ضلعی (Quadrilaterals)

کارروائی 2



4.15 خاکہ

صوبہ ٹمل ناڈو کے محکمۂ نقل و حمل کی بسیں مندرجہ ذیل راستوں سے گذرتی ہیں۔ اس میں پہلا ایک رخی سفر ہے اور باقی گھومنے والے راستے ہیں۔ نقشہ کے ذریعے ان مقامات کو معلوم کرو؟ ان پر نشان لگاؤ اور ان کو لکیروں سے جوڑ کر راستوں کی نشاندہی کرو۔ وہ مقامات جو چار مختلف راستوں کو جوڑتے ہیں۔ درج ذیل ہیں۔

i) ناگرکوئل، ترنل ویلی ، وردونگر، مدورائی

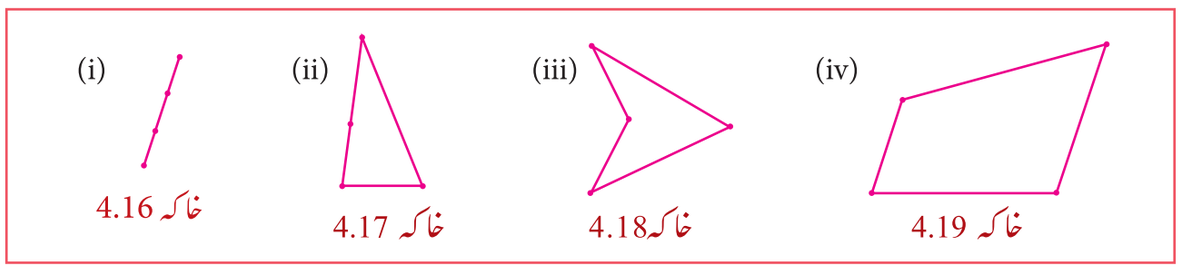
ii) سوالنگئی، پدوکوٹئی، تنجاور، ڈنڈی گل

iii) ایروڈ، کوئمبتور، دھرمپوری، کرور

iv) چنئی، کڈلور، کرشناگری، ویلور

9 maths 4 geometry 138
Wednesday, March 13, 2019 4:03:57 PM

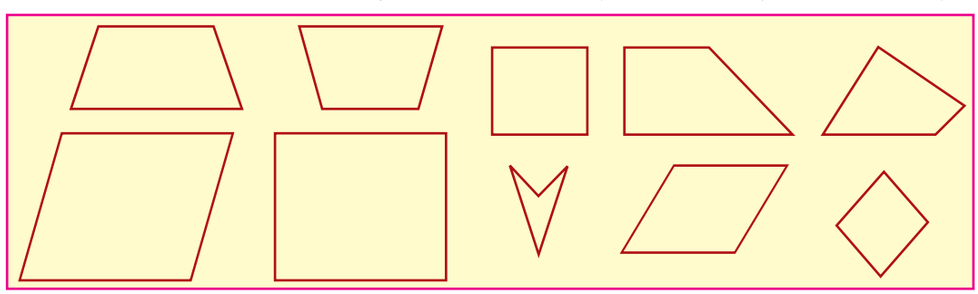
آپ کو مندرجہ ذیل شکلیں حاصل ہوں گے۔



خاکہ 4.16 خاکہ 4.17 خاکہ 4.18 خاکہ 4.19

راسوں پر شہروں کے نام کو نشاندہی کریں اور ٹھیک اس طرح شکلیں بنائے۔ جس طرح کہ نقشے میں دیکھایا گیا ہے۔

ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ پہلا منفرد خط ہے۔ یہ چار نقاط ہم خطی ہیں۔ اس کے علاوہ تین اور بند شکلیں ہیں جو خط مستقیم سے بنے ہوئے ہیں۔ جسے ہم نے پہلے دیکھا ہے۔ اس قسم کے بند شکلوں کو نام دینے کی ضرورت ہے۔ ہم ان شکلوں کو کثیر الاضلاع (Polygons) کا نام دیتے ہیں۔



خاکہ 4.20

کثیر الاضلاع کیسے نظر آتے ہیں؟ ان کے الاضلاع کے دونوں کناروں پر نقاط ہوتے ہیں۔ ہم ان نقاط کو کثیر الاضلاع کے راس کہتے ہیں۔ راسوں کو ملانے سے جو قطاع خط حاصل ہوتے ہیں وہی ضلعے ہیں۔ لفظ (poly) کے معنی کثیر ہے اور کثیر الاضلاع (polygon) کئی ضلعوں والی شکل کو کہتے ہیں۔

کثیر الاضلاع میں کتنے ضلعے پائے جاتے ہیں۔ ایک؟ لیکن یہ صرف ایک قطاع خط ہے۔ دو؟ لیکن تم کس طرح ایک مربوط (بند) شکل دو خطوط کے ذریعہ بنا پاؤ گے۔ تین؟ جی ہاں، اس کو مثلث کہتے ہیں۔ چار ضلعوں کو ؟ مربع اور مستطیل، ہی کثیر الاضلاع کے مثالیں نہیں بلکہ یہاں پر چار ضلعی والے چند اور مثالیں بھی ہیں۔ جس کو ہم چار ضلعی (Quadrilaterals) کہتے ہیں۔

غور کیجئے

مقعر کثیر الاضلاع (Concave Polygon)
کثیر الاضلاع جس کا کوئی ایک اندرونی زاویہ 180^0 سے زیادہ ہو۔

محدب کثیر الاضلاع (Convex Polygon)
کثیر الاضلاع جس کا کوئی ایک اندرونی زاویہ 180^0 سے کم ہو۔
وتر کو کثیر الاضلاع کے اندر ہونا چاہیئے۔

4.3.1 چند مخصوص چار ضلعی شکلوں کے نام (Special Names for Some Quadrilaterals)

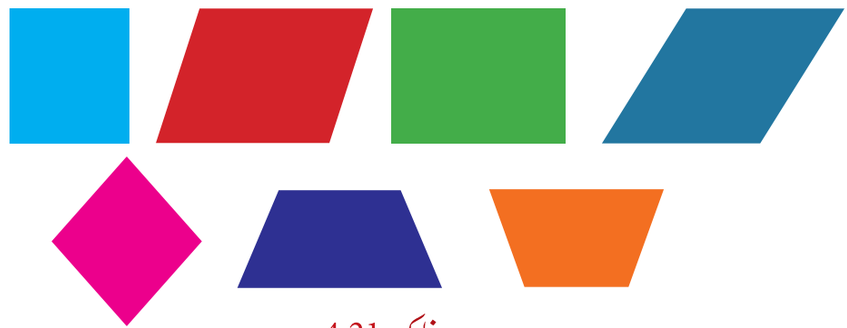
1۔ **متوازی الاضلاع** : ایک چار ضلعی ہے جس کے مقابل کے اضلاع متوازی اور مساوی ہوتے ہیں۔

2۔ **معین** : ایک چار ضلعی ہے جس کے تمام اضلاع مساوی اور مقابل کے اضلاع متوازی ہوتے ہیں۔

3۔ **منحرف** : ایک چار ضلعی ہے۔ جس کے مقابل اضلاع کی ایک جوڑی متوازی ہوتی ہے۔

چند متوازی الاضلاع چند معین اور چند منحرف شکلیں بنائیں۔

9 maths 4 geometry 138
Wednesday, March 13, 2019 4:03:58 PM



خاکہ 4.21

ان خصوصیات کی درجہ بندی کا بہت بڑا فائدہ یہ ہے کہ ان کے درمیانی تعلقات کو فوری طور پر دیکھ سکتے ہیں۔

- ہر متوازی الاضلاع ایک منحرف ہوتا ہے۔ مگر دوسری صورت میں ایسا نہیں ہوسکتا۔
- ہر معین ایک متوازی الاضلاع ہوتا ہے مگر دوسری صورت میں ایسا نہیں ہوسکتا۔
- ہر مستطیل ایک متوازی الاضلاع ہوتا ہے مگر دوسری صورت میں ایسا نہیں ہوسکتا۔
- ہر مربع ایک معین ہوتا ہے، لہٰذا ہر مربع ایک متوازی الاضلاع بھی ہے۔

مگر دوسری صورت میں ایسا نہیں ہوسکتا کہ ریاضی دان عام طور پر اس طرح کہتے ہیں (The converse is not true) اس کا برعکس صحیح نہیں ہے۔ ایک اچھا سوال پیدا ہوتا ہے کہ کونسی دوسری صورت میں ایسا ہوسکتا ہے۔

مثلاً کب ایک متوازی الاضلاع بھی ایک مستطیل ہوتا ہے۔

غور کیجئے

کیا تم دو پہیوں والی سائیکل (Bi-cycle) اور تین پہیوں والی سائیکل (Tri-cycle) جانتے ہو ؟ جب ہم کسی لفظ کے سامنے Bi یا Tri استعمال کرتے ہیں۔ تو اس کے معنی 2 (Bi) یا 3 (Tri) ہوتے ہیں۔ اسی طرح Quadri کے معنی چار ہیں۔ کیا ہم چار پہیے (Quadri Cycle) کے بارے بات کر رہے ہیں؟ نہیں۔ جس میں Quadri کے معنی چار اور Lateral کے معنی پہلو ، ہم اسے چار ضلعی Quarilateral کہتے ہیں۔ چنانچہ چار ضلعی کے معنی چار قطاع خطوط سے بنی ہوئی ایک بند شکل ہے۔ اسی طرح تین پہلو Trilateral کو مثلثیں Triangles کہتے ہیں۔

4 کے بعد؟ 5 پانچ (Penta)، 6 چھ (Hexa)، 7 سات (Hepta)، 8 آٹھ (Octa)، 9 نو (Nano)، 10 دس (Deca)۔

اکثر رائے اتفاق پر تاریخ میں تین ضلعی (Trigons) کو مثلث اور چار ضلعی (Quadrigons) کہتے ہیں۔ اس طرح پانچ ضلعی (Pentagons) چھ ضلعی (Hexagons)، سات ضلعی (Heptagons)، آٹھ ضلعی (Octagons) نو ضلعی (Nanogons) اور دس ضلعی (Decagons) اسی سے آگے ہمارے پاس 11 ضلعی (11-gons)، 12 ضلعی (12-gons) وغیرہ ہیں۔ شاید تم 23 ضلعی (23-gons) بنا سکتے ہو۔

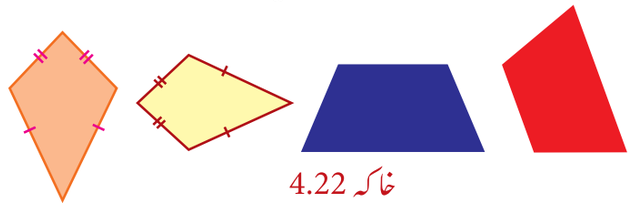
4.3.2 مزید مخصوص نام (More Special Names)

جب ایک چار ضلع کے تمام اضلاع مساوی ہوتے ہیں تو ان کو ہم مساوی الاضلاع (Equilateral) کہتے ہیں۔ جب چار ضلعی کے تمام زاویے مساوی ہوتے ہیں۔ اس کو مساوی الزاویے (Equiangular) کہتے ہیں۔ اگر کسی مثلث کے تینوں اضلاع مساوی ہوں تو اس مثلث کو مثلث مساوی الاضلاع کہتے ہیں۔ اور زاویے مساوی ہو تو مثلث مساوی الزاویے (Equiangular Triangles) کہا جاسکتا ہے۔

چنانچہ ہمیں معلوم ہوا کہ
ایک معین ایک مساوی الاضلاع والا متوازی الاضلاع ہے۔
ایک مستطیل ایک مساوی الزاویہ والا متوازی الاضلاع ہے۔
ایک مربع ایک مساوی الزاویہ اور مساوی الاضلاع والا متوازی الاضلاع ہے۔

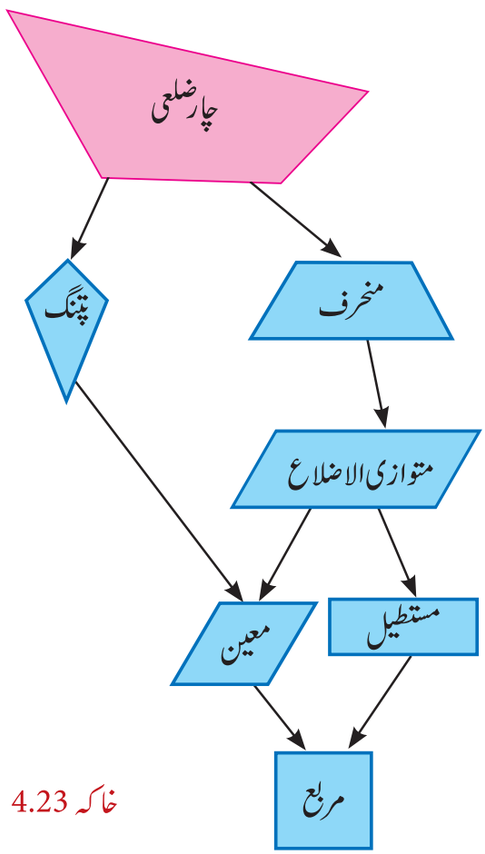
9 maths 4 geometry 138
Wednesday, March 13, 2019 4:03:58 PM

یہاں پر دو مزید خاص چارضلعی ہیں۔ پتنگ اور منحرف مساوی الساقین ہیں۔



خاکہ 4.22

4.3.3 چارضلعی کے اقسام (Types of Quadrilaterals)



خاکہ 4.23

ترقی کی جانچ Progress Check

ذیل کے سوالات حل کیجئے

i) کیا معین کے مقابل کے اضلاع مساوی ہوتے ہیں؟

ii) ایک چارضلعی ..... ہوگا، اگر ایک جوڑی مقابل کے اضلاع مساوی اور متوازی ہوں۔

iii) کیا پتنگ کے مقابل کے اضلاع مساوی ہوتے ہیں؟

iv) کونسا ایک مساوی الزاویہ متوازی الاضلاع ہے، جو مساوی الاضلاع نہیں ہے؟

v) کونسا ایک مساوی الاضلاع متوازی الاضلاع ہے، جو مساوی الزاویہ نہیں ہے؟

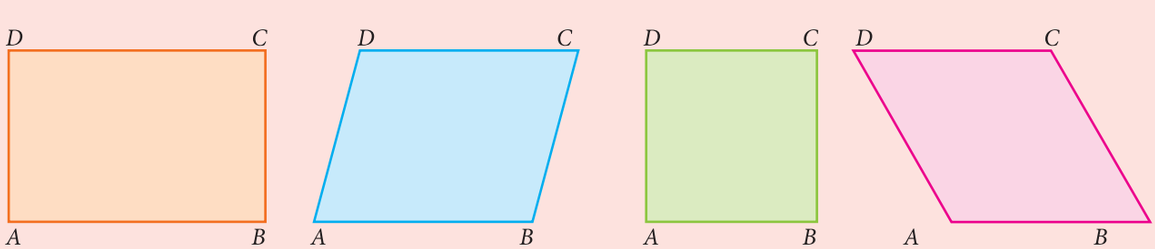
vi) کونسا ایک مساوی الاضلاع اور مساوی زاویہ والا متوازی الاضلاع ہے۔

vii) ..... ایک مستطیل، ایک معین اور ایک متوازی الاضلاع ہے۔

کارروائی 3

مرحلہ 1

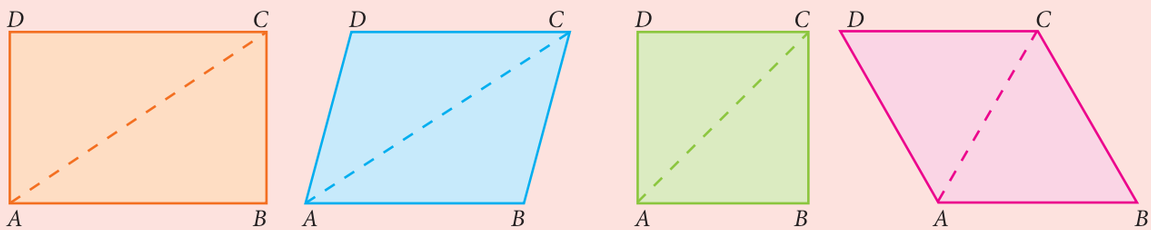
مختلف چارضلعی شکلوں کو رنگین چمکدار کاغذ پر کاٹیں۔



خاکہ 4.24

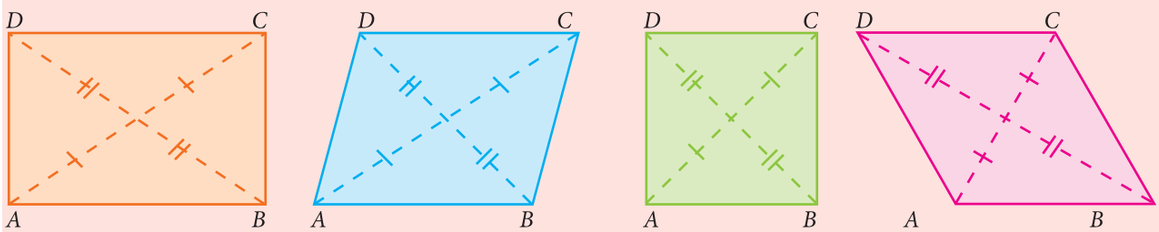
9 maths 4 geometry 138
Wednesday, March 13, 2019 4:03:59 PM

مرحلہ 2 کاٹے ہوئے چار ضلعی شکلوں کو اُن کے وتروں سے تہہ کریں (موڑیں)۔ پھر اچھی طرح دبائیں تاکہ شکن پڑے (موڑ اچھی طرح دکھائی دے)۔ اس پر نقطہ دار لکیر بنائیں۔



خاکہ 4.25

مرحلہ 3 ان چار ضلعی شکلوں کو اُن کے دوسرے وتروں پر تہہ کریں پھر اچھی طرح دبائیں تاکہ نشان پڑیں۔



خاکہ 4.26

ہم اس سے ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ دو منطق مثلثیں ایک دوسرے سے متماثل ہیں۔ وتری حصوں کی لمبائی اور وتروں کے درمیانی زاویوں کی پیمائش کریں۔

اسی عمل کو دوسرے چار ضلعی جیسے منحرف، منحرف مساوی الساقین اور پتنگ پر دہرائیں۔

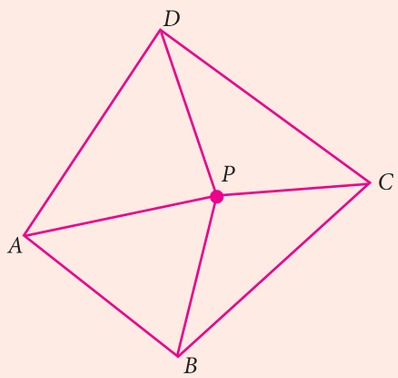
اوپر کی کارروائی سے وتروں کی لمبائی اور قطروں کے درمیانی زاویے کی پیمائش کر کے ذیل کی جدول کو پُر کریں۔

S. No.	چار ضلعی کے نام	وتروں کی لمبائی						زاویوں کی پیمائش			
		AC	BD	OA	OB	OC	OD	$\angle AOB$	$\angle BOC$	$\angle COD$	$\angle DOA$
1	منحرف										
2	منحرف مساوی الساقین										
3	متوازی الاضلاع										
4	مستطیل										
5	معین										
6	مربع										
7	پتنگ										

9 maths 4 geometry 138
Wednesday, March 13, 2019 4:03:59 PM

کارروائی 5

ایک کثیرالاضلاع کے زاویوں کا حاصل جمع (Angle sum for a polygon)



خاکہ 4.27

ایک چارضلعی ABCD نقشہ بنایئے۔

اس کے اندرونی حصّے میں نقطہ P نشان کیجئے۔

ان نقاط PA، PB، PC اور PD کو ملایئے۔

اب تمہیں چار مثلثیں حاصل ہوتے ہیں۔

ان چاروں مثلثوں کے کل زاویوں کا حاصل جمع کیا ہوگا؟

ان کے راس P (Vertex) سے زاویوں کا حاصل جمع کیا ہوگا؟

کیا تم چارضلعی ABCD کے زاویوں کا حاصل جمع (Angle sum) معلوم کر سکتے ہو؟

کیا تم اسی خیال (نظریہ) کو کسی بھی کثیرالاضلاع پر استعمال کر سکتے ہو؟

ذرا سوچئے

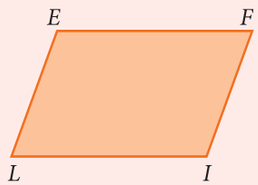
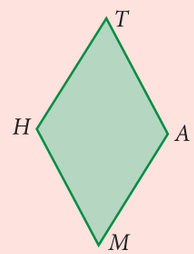
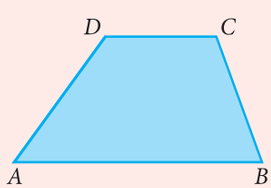
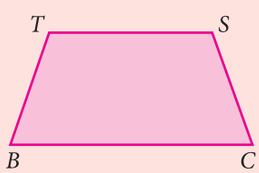
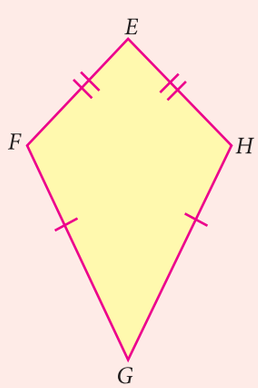
1۔ اگر کسی بھی کثیرالاضلاع میں 'n' اضلاع ($n \geq 3$) ہیں۔ تو ان کے کل اندرونی زاویے (Interior Angles) $(n-2) \times 180°$ ہوتے ہیں۔

2۔ کسی بھی منظّم کثیرالاضلاع کے لئے (ایک کثیرالاضلاع کے تمام اضلاع مساوی ہوتے ہیں)۔

- ہر ایک اندرونی زاویہ $\frac{(n-2)}{n} \times 180°$ ہے
- ہر ایک بیرونی زاویہ $\frac{360°}{n}$ ہے
- تمام بیرونی زاویوں کا حاصل جمع بنتے ہیں۔ اضلاع کو طول کرنے پر محدب کثیرالاضلاع کی ترتیب $360°$ بنتی ہے۔
- اگر ایک کثیرالاضلاع میں 'n' اضلاع ہیں۔ تو اُس کثیرالاضلاع کے وتروں کی تعداد $\frac{n(n-3)}{2}$ ہوگی۔

9 maths 4 geometry 138
Wednesday, March 13, 2019 4:03:59 PM

4.3.4 چارضلعی کی خصوصیات (Properties of Quadrilaterals)

نام	نقشہ	اضلاع	زاویے	وتریں
Parallelogram متوازی الاضلاع		مقابل کے اضلاع متوازی اور مساوی ہوتے ہیں	مقابل کے زاویے مساوی ہوتے ہیں کوئی دو متصلہ زاویوں کا حاصل جمع 180° ہوتا ہے	وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں
Rhombus معین		تمام اضلاع مساوی ہوتے ہیں اور مقابل کے اضلاع متوازی ہوتے ہیں	مقابل کے زاویے مساوی ہوتے ہیں اور کوئی دو متصلہ زاویوں کا حاصل جمع 180° ہوتا ہے	وتر زاویہ قائمہ پر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں
Trapezium منحرف		مقابل ضلعوں کی ایک جوڑی متوازی ہوتی ہے۔	زاویے ہر غیر متوازی ضلعوں کے کناروں پر مکملہ ہوتے ہیں۔	وتروں کا مساوی ہونا ضروری نہیں ہے
Isosceles Trapezium منحرف مساوی الساقین		مقابل ضلعوں کی ایک جوڑی متوازی ہوتی ہے دوسرے ضلعوں کی ایک جوڑی طول میں مساوی ہوتی ہے	زاوے ہر متوازی ضلعوں کے کناروں پر مساوی ہوتے ہیں	وتر مساوی طول کے ہوتے ہیں
Kite پتنگ		متصلہ ضلعوں کی دو جوڑی مساوی ہوتی ہے	مقابل اضلاع کی ایک جوڑی مساوی ہوتی ہے	i) وتر زاویہ قائمہ پر قطع کرتے ہیں ii) بڑی وتر چھوٹی وتر پر تنصیف کرتی ہے iii) بڑی وتر پتنگ کو دو متماثل مثلثوں میں تقسیم کرتی ہے

9 maths 4 geometry 138
Wednesday, March 13, 2019 4:03:59 PM

غور کیجئے

i) ایک مستطیل مساوی زاویہ والا متوازی الاضلاع ہے۔
ii) ایک شکل معین مساوی ضلع والا متوازی الاضلاع ہے۔
iii) ایک مربع مساوی ضلع اور مساوی زاویے والا متوازی الاضلاع ہے۔
iv) ایک مربع ایک مستطیل ،ایک معین اور ایک متوازی الاضلاع ہیں۔

ترقی کی جانچ

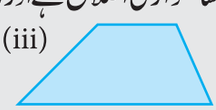
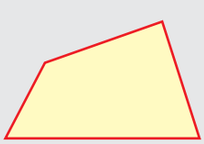
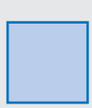
1۔ ذیل کے اسباب بیان کیجئے۔

i) مربع ایک خاص قسم کا مستطیل ہے۔
ii) معین ایک خاص قسم کا مستطیل ہے۔
iii) معین اور پتنگ ایک مشترک خصوصیت رکھتے ہیں۔
iv) مربع اور معین ایک مشترک خصوصیت رکھتے ہیں۔

2۔ کس قسم کے چار ضلعی تشکیل پائیں گئے۔ جب ذیل کے مثلثوں کی جوڑوں کو ایک دوسرے کے ساتھ ملائیں گئے؟

i) مثلث مساوی الاضلاع ii) مثلث قائمہ الزاویہ iii) مثلث مساوی الساقین

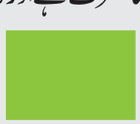
3۔ شناخت کریں ان میں سے کونسا متوازی اضلاع ہے اور کونسا نہیں؟

(i) 
(ii) 
(iii) 
(iv) 
(v) 
(vi) 

4۔ ان میں سے کونسا چار ضلعی نہیں ہے؟

(i) 
(ii) 
(iii) 
(iv) 
(v) 
(vi) 
(vii) 
(viii) 

5۔ شناخت کریں ان میں سے کونسا منحرف ہے اور کونسا نہیں؟

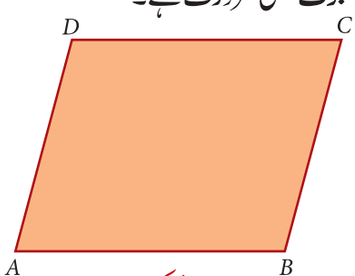
(i) 
(ii) 
(iii) 
(iv) 
(v) 
(vi) 

9 maths 4 geometry 138
Wednesday, March 13, 2019 4:04:00 PM

4.3.5 متوازی الاضلاع کی خصوصیات

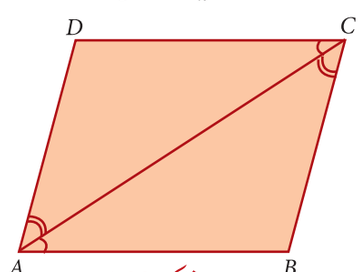
اب ہم ایک دلچسپ سفر کا آغاز کرتے ہیں۔اس سے ہم بہت سارے چار ضلعی کے درمیان دورہ کرتے ہوئے، دلچسپ خصوصیات کو نوٹ کریں گئے۔ہم کونسی خصوصیات کو دیکھنا چاہتے؟ کیا وہ خصوصیات صحیح ہیں؟

مثلاً ایک متوازی الاضلاع کے مقابل ضلعے متوازی ہوتے ہیں، لیکن کیا مقابل ضلعے بھی مساوی ہیں؟ ہم کسی بھی تعداد میں متوازی الاضلاع کی شکلوں کو کھینچ کر اُس کی جانچ سکتے ہیں کہ وہ صحیح ہیں یا غلط۔حقیقت میں ہم دیکھتے ہیں کہ ان شکلوں میں مقابل کے تمام اضلاع مساوی ہوتے ہیں۔کیا ہم یہ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ متوازی الاضلاع کے تمام اضلاع مساوی ہوتے ہیں؟ نہیں، کیونکہ ہمیں بعد میں ایک ایسا متوازی الاضلاع حاصل ہوسکتا ہے جس کے تمام اضلاع مساوی نہ ہوں۔چنانچہ ہمیں ایک **ثبوت** کی ضرورت ہے۔



خاکہ 4.28

فرض کیجئے ایک متوزی الاضلاع ABCD [خاکہ 4.28 میں دکھایا گیا ہے]ہے۔ہم یقین رکھتے ہیں AB=CD اور AD=BC لیکن ہم کس طرح یقین کریں؟ ہم مثلث اور اُس کی خصوصیات کو جانتے ہیں تو انہیں خصوصیات کو استعمال کر کے کوشش کر سکتے ہیں، لیکن متوازی الاضلاع ABCD میں کوئی مثلث نہیں ہے۔



خاکہ 4.29

ہم بہت آسانی سے AC ملا کر دو مثلثیں ΔABC، ΔADC حاصل کرتے ہیں جس کا ایک مشترک ضلع AC ہے۔اگر ہم کسی حد تک ثابت کر سکتے ہیں کہ یہ دو مثلثیں متماثل ہیں۔ہم حاصل کریں گے AB=CD اور AD=BC یہی ہم چاہتے ہیں۔

کیا کوئی امید ہے ΔABC اور ΔADC کو متماثل ثابت کرنے کے لئے؟ متماثل ثابت کرنے کے لئے بہت سارے اصول ہوتے ہیں۔ ہمیں یہ واضح نہیں ہے کہ یہاں ان میں سے کونسا تعلق رکھتا ہے۔اب تک ہم یہ ثابت نہیں کر سکے کہ ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے لہٰذا ہمیں اس اصول کا استعمال کرنے کی ضرورت ہے کہ DC || AB اور AD || BC جس سے ہم ثابت کر سکتے ہیں۔ ΔABC اور ΔADC متماثل ہیں۔

ان کے ضلعے متوازی رہنے کی وجہ سے چند زاویے بھی مساوی ہوتے ہیں۔کیا ہم اس طرح کی کوئی خصوصیت جانتے ہیں؟ ہاں! ہم جانتے ہیں۔یہ سب قاطع (Transversal) کے بارے میں ہے۔

اب ہم واضح طور پر دیکھ سکتے ہیں۔AD || BC اور AC ایک قاطع ہے۔چنانچہ ∠DAC=∠BAC اسی طرح DC || AB AC ایک قاطع ہے۔چنانچہ ∠BAC=∠DCA جس میں مشترک ضلع AC ہے۔ASA کے تحت ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ ΔABC اور ΔADC متماثل ہیں۔جس سے ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ AB=CD اور AD=BC ہے۔

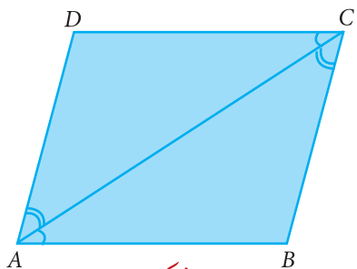
چنانچہ ایک متوازی الاضلاع کے مقابل اضلاع یقیناً مساوی ہیں۔

اس دلیل کو درج ذیل طریقے سے رسمی ثبوت (Formal Proof) کے طور پر لکھا جاتا ہے۔

9 maths 4 geometry 138
Wednesday, March 13, 2019 4:04:00 PM

مسئلہ 1

ایک متوازی الاضلاع میں مقابل کے ضلع مساوی ہوتے ہیں۔



خاکہ 4.30

دیا گیا ہے : ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے۔

ثابت کرو کہ : AB = CD اور AD = BC

تصنیف : AC کو ملایئے۔

ثبوت : چونکہ ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے۔

AD || BC اور AC ایک قاطع ہے۔

$\angle DAC = \angle BCA$ [1] (متبادلہ زاویے مساوی ہیں)

ABDC اور AC ایک قاطع ہے

$\angle BAC = \angle DCA$ [2] (متبادلہ زاویے مساوی ہیں)

ΔADC اور ΔCBA میں

$\angle DAC = \angle BCA$ سے (1)

AC مشترک ہے

$\angle DAC = \angle BAC$ سے (2)

$\Delta ADC \cong \Delta CBA$ (ASA کے تحت)

چنانچہ $AD = CB$ اور $DC = BA$ (نظیری اضلاع مساوی ہوتے ہیں)

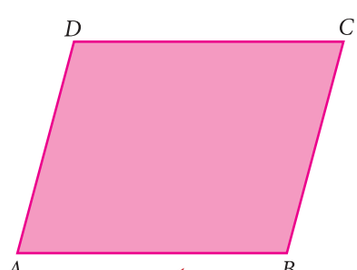
مندرجہ بالا ثبوت کے ساتھ ہم نے ایک دوسری خصوصیت ثابت کی ہے جو بہت اہم ایک مسئلہ کی طرح۔

مسئلہ 2 (Theorem 2)

متوازی الاضلاع کا ایک وتر اسے دو متماثل مثلثوں میں تقسیم کرتا ہے۔

اس بات کو یاد رکھیں کہ یہ ثبوت اس سے پہلے والے مسئلہ 1 میں $\angle DAC = \angle BCA$ اور $\angle BAC = \angle DCA$ سے ثابت کیا گیا ہے۔

لہٰذا ہم نے بھی مذکورہ بالا نقشہ میں دیکھا۔



خاکہ 4.31

$\angle BCA + \angle BAC = \angle DCA + \angle DAC$

لیکن ہم جانتے ہیں کہ $\angle B + \angle BCA + \angle BAC = 180^\circ$

اور $\angle D + \angle DCA + \angle DAC = 180^\circ$

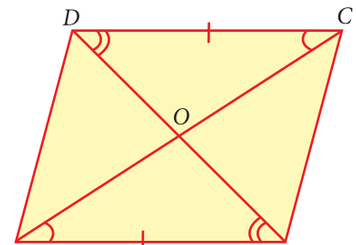
لہٰذا ہمیں یہ ضروری ہے کہ $\angle B = \angle D$

اسی طرح ہم دوہرانے سے $\angle A = \angle C$ حاصل ہوگا اس طرح ہم اِس کو ثابت کرنے میں کامیاب ہوئے۔

9 maths 4 geometry 138
Wednesday, March 13, 2019 4:04:01 PM

مسئلہ 3 (Theorem 3)

ایک متوازی الاضلاع میں مقابل کے زاویے مساوی ہوتے ہیں۔اب ہم دیکھ سکتے ہیں کہ مثلثوں متماثلت ایک اچھی ''حکمت عملی'' ہے۔جس سے ہم اور بھی مثلثیں دیکھ سکتے ہیں۔غور کریں AC اور DB دو وتریں ہیں۔ہم جانتے ہیں کہ ΔADC اور ΔCBA متماثل ہیں۔اسی طرح سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ ΔDAB اور ΔBCD بھی متماثل ہیں۔کیا اور بھی متماثل مثلثیں اس نقشہ میں موجود ہیں؟ ہاں! دونوں وتریں نقطہ 'O' پر قطع کرتے ہیں۔اب ہم چار نئے مثلثیں ΔAOB، ΔBOC، ΔCOD، اور ΔDOA کو دیکھ سکتے ہیں۔کیا تم ان میں سے کوئی متماثل جوڑی دیکھ سکتے ہیں۔



خاکہ 4.32

چونکہ AB اور CD متوازی اور مساوی ہیں۔ایک اندازہ لگا سکتے ہیں کہ ΔAOB اور ΔCOD متماثل ہیں۔ہم ASA کے تحت دوبارہ کوشش کر سکتے ہیں کہ معاملہ میں ہمیں $\angle OAB = \angle OCD$ اور $\angle ABO = \angle CDO$ اس طرح چاہئے۔لیکن ان میں سب سے پہلے حقیقت یہ ہے کہ

$\angle CAB = \angle ACD$ (جس کو ہم پہلے ہی ثابت کر چکے ہیں) اور ہمیں مشاہدہ کرنے پر یہ معلوم ہوا کہ $\angle CAB$ اور $\angle OAB$ مساوی ہیں (اور اسی طرح $\angle OCD$ اور $\angle ACD$ بھی مساوی ہیں) اب ہم اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے BD ایک قاطع ہے اس سے ہمیں $\angle ABD = \angle CDB$ حاصل ہوتا ہے۔لیکن پھر $\angle ABD$ اور $\angle ABO$ مساوی ہیں۔$\angle CDB$ اور $\angle CDO$ مساوی ہیں۔

دوبارہ ہمیں باقاعدہ رسمی ثبوت نیچے تحریر کرنے کی ضرورت ہے اور ہمارے پاس ایک اور مسئلہ بھی ہے۔

متوازی الاضلاع کی

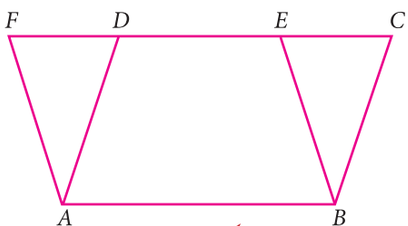
- ہر جوڑی کے مقابل کے اضلاع متوازی ہوتے ہیں۔
- ہر مقابل ضلعے مساوی ہوتے ہیں۔
- اس کے تمام زاویے قائمہ زاویے ہیں۔
- وتریں ایک دوسرے کو تنصیف کرتے ہیں۔
- وتریں مساوی ہوتے ہیں۔
- وتریں عمودی اور مساوی ہیں۔
- وتریں ایک دوسرے کی عمودی خط پر تنصیف کرتے ہیں۔
- ہر جوڑی اس کی متواتر زاویے کا مکملہ ہوتے ہیں۔

مسئلہ 4 (Theorem 4)

متوازی الاضلاع کی وتریں ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔

اب وقت ہے متوازی الاضلاع پر ہمارے تصورات (Concepts) کو مضبوط بنانے کا۔متصل باکس میں دیئے گئے بیانات (Statements) کو ایک کے بعد ایک کو غور کریں تو جس کے ہر بیان سے ہم یہ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ یہ ایک چار ضلعی ہے۔اگر یہ چار ضلعی، متوازی الاضلاع ہو تو یہ کس قسم کا متوازی الاضلاع ہوگا؟

اب ہم متوازی الاضلاع کی بہت ساری دلچسپ خصوصیات کے ساتھ شروع کریں گے۔کیا ہم متوازی الاضلاع سے تعلق رکھنے والے بعض خصوصیات کو لا کر دو یا دو سے زیادہ متوازی الاضلاع ثابت کر سکتے ہیں۔ایک آسان معاملہ ہے۔جب دو متوازی الاضلاع میں ایک ہی قاعدہ مشترک ہو۔جس طرح خاکہ 4.33 میں ہے۔



خاکہ 4.33

ہم دیکھتے ہیں کہ متوازی الاضلاع ABCD اور ABEF میں ایک مشترک قاعدہ AB ہے۔ایک ہی نظر میں ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ ایک جوڑی مثلثیں ΔADF اور ΔBCE متماثل ہیں۔ہمارے پاس پہلے سے $AD=BC$ اور $AF=BE$ مساوی ہیں۔جبکہ $AD \| BC$ اور

9 maths 4 geometry 138
Wednesday, March 13, 2019 4:04:01 PM

$AF \| BE$ ہیں۔ AD اور AF سے بننے والے زاویے اور BC اور BE سے بننے والے زاویے ضرور مساوی ہونے چاہئے۔
چنانچہ $\angle DAF = \angle CBE$۔ چنانچہ ΔADF اور ΔBCE متماثل ہیں۔
یہ ایک دلچسپ مشاہدہ ہے۔ کیا ہم اس سے زیادہ قیاس کر سکتے ہیں۔ ہاں! ہم جانتے ہیں متماثل مثلثیں کے رقبہ مساوی ہوتے ہیں۔ اس طرح ہم متوازی الاضلاع ABCD اور ABEF کے رقبے کے بارے میں سوچتے ہیں۔

چارضلعی ABED کا رقبہ + ΔBCE کا رقبہ = ABCD کا رقبہ
چارضلعی ABED کا رقبہ + ΔADF کا رقبہ =
= ΔBEF کا رقبہ

چنانچہ ہم نے ایک دوسرا دلچسپ مسئلہ حل کیا۔

مسئلہ 5 (Theorem)

ایک ہی قاعدے اور ان کے درمیان ایک ہی جیسے متوازی خطوط رکھنے والے متوازی الاضلاع رقبے میں مساوی ہوتے ہیں۔

اس عمل میں، ہم نے دیگر دلچسپ بیانات بھی ثابت کر دیئے ہیں۔ ان کو ہم ضمنی نتائج کہتے ہیں۔ جس کے لئے کوئی الگ تفصیلی ثبوت کی ضرورت نہیں ہے۔

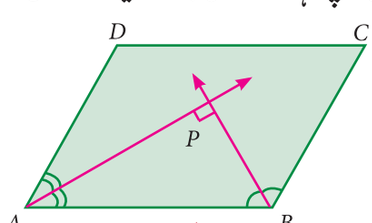
ضمنی نتیجہ 1 (Corollary 1)

ایک ہی قاعدے اور ان کے درمیان ایک ہی جیسے متوازی خطوط رکھنے والے مثلثیں رقبے میں مساوی ہوتے ہیں۔

ضمنی نتیجہ 2 (Corollary 2)

ایک ہی قاعدے اور ان کے درمیان ایک ہی متوازی خطوط رکھنے والے جیسے مستطیل اور متوازی الاضلاع رقبے میں مساوی ہوتے ہیں۔

ان بیانات کو ہم مسئلے اور ضمنی نتائج کہتے ہیں۔ اس میں تمام متوازی الاضلاع سما جاتے ہیں۔ چاہے وہ کتنے ہی چھوٹے یا بڑے ہوں اور جس قدر بھی ان اضلاع کی لمبائی جس قدر بھی زاویے ان کے راس سے ہوں۔



خاکہ 4.34

مثال 4.1

ایک متوازی الاضلاع ABCD ہے۔ جس کے زاویے بالترتیب $\angle A$ اور $\angle B$ عمودِ ناصف نقطے P پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ $\angle APB = 90°$

حل : ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے۔ جس میں AP اور خط تنصیف ان کے زاویے A اور B بالترتیب ہیں۔
جبکہ متوازی الاضلاع کے بالترتیب زاویے مکملہ ہیں۔

$$\angle A + \angle B = 180°$$
$$\frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B = 180°$$
$$\Rightarrow \angle PAB + \angle PBA = 90°$$

ΔAPB میں

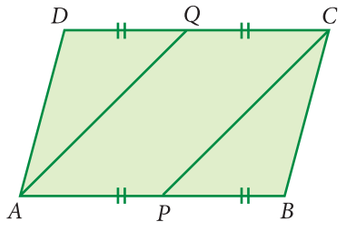
$\angle PAB + \angle APB + \angle PBA = 180°$ (مثلث زاویوں کا حاصل جمع خصوصیت)
$\angle APB = 180° - [\angle PAB + \angle PBA]$
$= 180° - 90 = 90°$

لہٰذا ثابت ہوا۔

9 maths 4 geometry 138
Wednesday, March 13, 2019 4:04:02 PM

مثال 4.2

ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے۔ P اور Q درمیانی نقاط ہیں
اضلاع AB اور DC پر ثابت کی جائے کہ APCQ ایک متوازی الاضلاع ہے۔



خاکہ 4.35

حل : جبکہ P اور Q درمیانی نقاط ہیں AB اور DC حسب ترتیب ہیں۔

چنانچہ $AP = \frac{1}{2} AB$ اور

لیکن $QC = \frac{1}{2} DC$ (1)

$AB = DC$ (متوازی الاضلاع کے مقابل کے اضلاع مساوی ہیں)

$\Rightarrow \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} DC$

$\Rightarrow AP = QC$ (2)

اسی طرح $AB \parallel DC$

$\Rightarrow AP \parallel QC$ (3)

[$\therefore$ ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے]

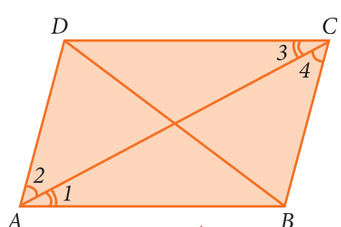
جبکہ، چارضلعی APCQ میں $AP = QC$ اور $AP \parallel QC$ [(2) اور (3) سے]

لہٰذا، چارضلعی APCQ، ایک متوازی الاضلاع ہے۔

مثال 4.3

ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے [خاکہ 4.36] جیسا کہ $\angle BAD = 120^\circ$ اور AC تنصیف کرتا $\angle BAD$ پر ثابت کیجئے کہ
ABCD ایک معین ہے۔

حل : دیا گیا ہے $\angle BAD = 120^\circ$ اور AC تنصیف کرتا ہے $\angle BAD$ پر



خاکہ 4.36

$\angle BAC = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ$

$\angle 1 = \angle 2 = 60^\circ$

$BC \parallel AD$ اور AC ایک تقاطع ہے

$\angle 2 = \angle 4 = 60^\circ$

ΔABC [$\therefore \angle 1 = \angle 4 = 60^\circ$] ایک مثلث مساوی الساقین ہے۔

$\Rightarrow AB = BC$

متوازی الاضلاع ABCD ایک معین ہے۔

9 maths 4 geometry 138
Wednesday, March 13, 2019 4:04:02 PM

مثال 4.4

ایک متوازی الاضلاع ABCD میں، خط DB پر P اور Q نقاط ہیں اس طرح سے کہ PD = BQ، ثابت کیجئے APCQ ایک متوازی الاضلاع ہے

حل : ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے

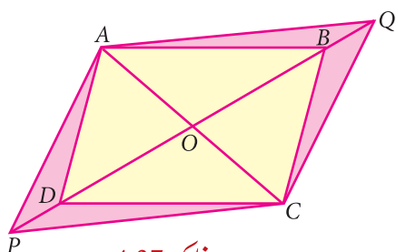
OA = OC اور

OB = OD (وتریں ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں)

یہاں پر OB + BQ = OD + OP

OA = OC اور OQ = OP

APCQ ایک متوازی الاضلاع ہے۔



خاکہ 4.37

مشق 4.2

1۔ ایک چارضلعی کے زاویے کی نسبتیں 7 : 5 : 4 : 2 ہیں۔تو اس کے تمام زاویے معلوم کیجئے۔

2۔ ایک چارضلعی ABCD میں ∠A = 72° اور ∠C کا زاویہ مکملہ ∠A ہے۔جبکہ دوسرے دو زاویے 2x–10 اور x+4 ہیں۔ جس میں x کی قیمت اور تمام زاویوں کے ناپ معلوم کیجئے۔

3۔ ABCD ایک مستطیل ہے جس پر AC اور BD، وتریں O پر قطع کرتے ہیں۔اگر ∠OAB = 46°، ہو تو ∠OBC معلوم کیجئے۔

4۔ معین کے وتروں کی پیمائش 12 سم اور 16 سم ہے۔ معین کے ضلع کا طول معلوم کیجئے۔

5۔ ثابت کرو ایک متوازی الاضلاع میں تنصیف کرنے والے زاویے مستطیل بناتے ہیں۔

6۔ اگر ایک مثلث اور ایک متوازی الاضلاع ایک ہی قاعدے اور ایک ہی درمیانی متوازی خطوط پر واقع ہیں تو ثابت کرو کہ مثلث کا رقبہ، نصف متوازی الاضلاع کے رقبہ کے برابر ہوگا۔

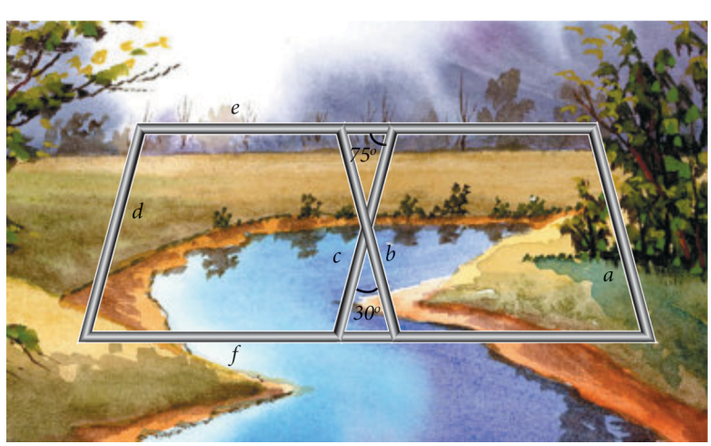
7۔ لوہے کی سلاخیں a,b,c,d,e اور f پل پر ایک خاکہ (ڈیزائن) بناتی ہیں۔جس طرح نقشہ میں دیا گیا ہے۔ نشان کردہ درمیانی زاویے معلوم کیجئے۔

(i) b اور c

(ii) d اور e

(iii) d اور f

(iv) c اور f



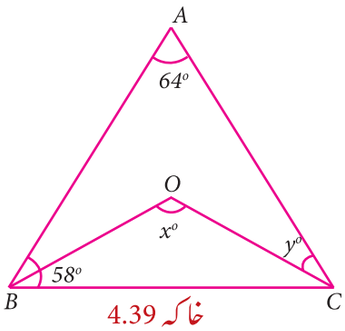
خاکہ 4.38

9 maths 4 geometry 138
Wednesday, March 13, 2019 4:04:03 PM

8۔ جس طرح خاکہ 4.39 میں دیا گیا ہے۔ $\angle A = 64°$، $\angle ABC = 58°$

اگر ΔABC میں BO اور CO تنصیف کرتے ہیں۔

زاوے $\angle ABC$ اور $\angle ACB$ پر تو $x°$ اور $y°$ معلوم کیجئے۔

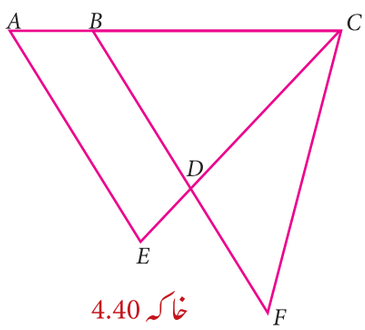


خاکہ 4.39

9۔ دیئے ہوئے خاکہ 4.40 میں، اگر $AB = 2$، $BC = 6$،

$AE = 6$، $BF = 8$، $CE = 7$ اور $CF = 7$ ہیں۔

ABDE چار ضلعی کے رقبہ سے ΔCDE کے رقبہ کی نسبت دریافت کیجئے۔



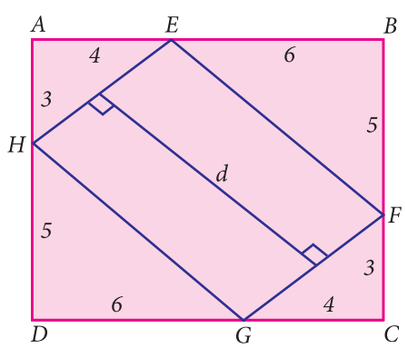
خاکہ 4.40

10۔ جیسا کہ خاکہ 4.41 میں دیا گیا۔ ABCD ایک مستطیل ہے

اور EFGH ایک متوازی الاضلاع ہے۔

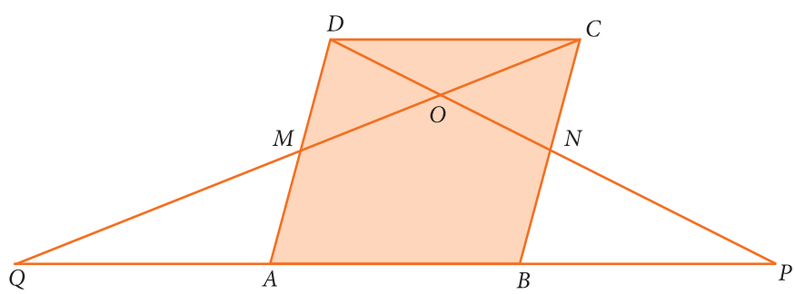
خاکہ میں دی گئی پیمائش کو استعمال کر کے قطاع خط 'd' کی لمبائی

معلوم کریں جب کہ عمود ہے $\overline{HE}$ اور $\overline{FG}$ پر؟



خاکہ 4.41

11۔ متوازی اضلاع ABCD کے ہمراہ خاکہ ہے۔ خط DP کھینچئے۔ جو ضلع BC کو تنصیف کرتا ہے۔ N پر اور AB سے P کو توسیع کریں راس C سے، خط CQ کھینچئے۔ جو ضلع AD کو تنصیف کرتا ہے M پر اور AB سے Q کو توسیع کریں۔ خطوط DP اور CQ قطع کرتے ہیں 'O' پر ثابت کرو کہ مثلث QPO کا رقبہ 9/8 حصہ ہے متوازی الاضلاع ABCD کے رقبے سے۔



خاکہ 4.42

9 maths 4 geometry 138
Wednesday, March 13, 2019 4:04:03 PM

4.4 دائرے کے حصّے Parts of Circle

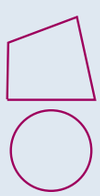
دائرے علم ہندسہ کے نمونے ہیں۔آپ انہیں اپنے اطراف واکناف میں دیکھ سکتے ہیں۔دائرے کے تصور کو سمجھنے کے لئے پہیہ پر غور کیجئے جو انسانیت کی ایجاد کی تاریخ کا بہت بڑا کارنامہ ہے۔



خاکہ 4.43

غور کیجئے

ایک دائرے اور ایک کثیر ضلعی میں فرق ہے۔ ایک کثیر ضلعی (مثال کے طور پر ایک چار ضلعی) میں کونے اور کنارے پائے جاتے ہیں، جب کہ ایک دائرہ ایک نفیس خط منحنی رکھتا ہے۔



ایک مقررّہ نقطہ سے مستقل فاصلے پر حرکت کرنے والا نقاط کا مجموعہ **دائرہ** کہلاتا ہے۔

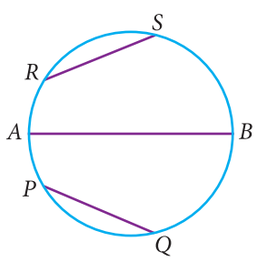
مقررّہ نقطہ دائرے کا **مرکز** کہلاتا ہے۔اور مرکز سے مستقل فاصلہ **نصف قطر** کہلاتا ہے۔

ایک خط جو دائرے کو دو نقاط پر قطع کرتا ہے۔دائرے کا **قطع** کہلاتا ہے۔

ایک قطاع خط جس کے اختتامی نقطے دائرے پر واقع ہو تو وہ قطاع خط **وتر** کہلاتا ہے۔

وتر جو مرکز سے گذرتا ہے دائرے کا قطر کہلاتا ہے۔اس کی حد بندی (گھیراؤ) اس دائرے کا **محیط** کہلاتا ہے۔ (ہم احاطہ کو کثیر ضلعوں میں استعمال کریں گے)

اگر ہم ایک مدّور کاغذ کوئی ممکن طریقہ سے اس میں مرکز پر گذرتا ہوا تہہ کریں گے (شکل 4.44 سے) ہم دیکھتے ہیں کہ تمام لکیریں دائرے کے نشان دو نقطوں پر ملتے ہیں۔ان خطوط کو نشان کو دائرے کا وتر کہتے ہیں، دائرے پر دو نقاط کو ملانے والا قطاع خط دائرے کا وتر کہلاتا ہے۔اس شکل میں AB,PQ اور RS دائرے کے وتر کیا ہیں۔

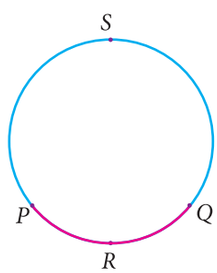


خاکہ 4.44

RS

اب اسی دائرے میں چار نقاط P,Q,R اور S نشان کیجئے۔(شکل 4.45)

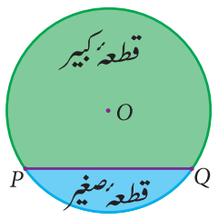
دائرے کے مسلسل حصّے $\overset{\frown}{PRQ}$ اور $\overset{\frown}{QSP}$ ہیں۔اس حصّے کو $\overset{\frown}{PRQ}$ اور $\overset{\frown}{QSP}$ یا آسانی سے $\overset{\frown}{PQ}$ اور $\overset{\frown}{QP}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔دائرے کا یہ مسلسل حصّہ دائرے کا قوس کہلاتا ہے۔عموماً قوس کو ساعت کے اُلٹے رخ سے بھی ظاہر کرتے ہیں۔



خاکہ 4.45

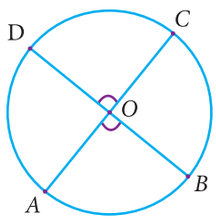
اب ایک دائرے میں نقاط P اور Q لیجئے۔(شکل 4.45 سے) ایک مکمل دائرہ کو دو حصّوں میں تقسیم کیا جاتا ہے۔ایک بڑا اور دوسرا چھوٹا بڑا حصّہ قوس کبیر $\overset{\frown}{QP}$ اور چھوٹا حصّہ قوسِ صغیر $\overset{\frown}{PQ}$ کہلاتا ہے۔

9 maths 4 geometry 138
Wednesday, March 13, 2019 4:04:04 PM



خاکہ 4.46

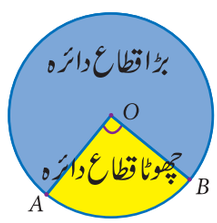
اب شکل (4.46) میں وتر PQ سے گھیرا ہوا حصّہ لیجئے اور قوس کبیر $\overset{\frown}{QP}$ ہے یہ قطعۂ کبیر کہلاتا ہے اسی طرح سے وتر $\overset{\frown}{PQ}$ ہی لیجئے۔ وہ قطعۂ جو قوس صغیر رکھتا ہے۔ قطعۂ صغیر کہلاتا ہے۔



خاکہ 4.47

شکل 4.47 میں اگر ایک دائرے کے دو قوس $\overset{\frown}{AB}$ اور $\overset{\frown}{CD}$ دائرے کے مرکز پر ان کے مقابل کے زاویے مساوی ہوں تو انہیں مماثل قوسیں کہتے ہیں اور ہم لکھتے ہیں۔

$$\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{CD} \quad \Leftrightarrow \quad m\overset{\frown}{AB} = m\overset{\frown}{CD}$$
$$\Leftrightarrow \quad \angle AOB = \angle COD$$



خاکہ 4.48

اب مشاہدہ کریں گے (خاکہ 4.48) دو نصف قطروں قوس کے درمیان گھیرے ہوئے حصّے کو خاص نام دے سکتے ہیں؟ ہاں اسکا نام قطاع دائرہ ہے۔ قطاع کی طرح ہمیں معلوم ہے۔ قوس صغیر کو چھوٹا قطاع دائرہ اور قوس کبیر کو بڑا قطاع دائرہ کہتے ہیں۔)

غور کیجئے

ایک دائرے کا قطر

- قطاع خط جو دائرے کا عمودی ناصف ہے۔
- دائرے کا سب سے بڑا وتر ہے۔
- دائرے کے لئے خط تشاکل ہے۔
- دائرے کے نصف قطر کا دگنا اُس کا قطر ہے۔

ہم مرکز دائرے (Concentric circles)

ایک ہی مرکز سے مختلف نصف قطر رکھنے والے دائرے ہم مرکز دائرے کہلاتے ہیں۔

یہاں حقیقی زندگی کی چند مثالیں۔



پانی کی لہریں



کیرم بورڈ کا کائن



تیر بازی کا ہدف

خاکہ 4.49

مماثل دائرے (Congruent Circles)

دو دائرے مماثل ہوں گے۔ اگر شکل ایک جیسے ہوں یعنی مساوی شکل رکھتے ہیں۔ چند حقیقی زندگی کے مثالیں ہیں۔

9 maths 4 geometry 138
Wednesday, March 13, 2019 4:04:04 PM

ذرا سوچئے

چار متماثل دائرے کھینچئے۔
تم کیا نتیجہ اخذ کروگے؟



بیل گاڑی کے دو پہیے



اولمپک کے حلقے

خاکہ 4.50

دائرے میں ایک نقطے کا مقام

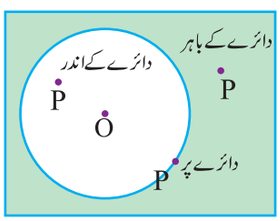
کسی سطح پر ایک دائرے فرض کیجئے۔(خاکہ 4.51) دائرے میں کوئی ایک نقطہ P لیجئے۔مرکز O سے P کا فاصلہ PO ہے۔

i) (نقطہ دائرے پر واقع ہو) نصف قطر = OP

ii) (نقطہ دائرے کے اندر واقع ہو تو) نصف قطر > OP

(نقطہ دائرے کے باہر واقع ہو تو) نصف قطر < OP

لہٰذا سطح پر واقع دائرہ سطح کو تین حصّوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔



خاکہ 4.51

معلومات کی جانچ

صحیح ہے یا غلط بتائیے۔

1۔ دائرے کے ہر وتر میں دائرے کے ٹھیک دو نقاط ہوتے ہیں۔

2۔ دائرے کے تمام نصف قطر مساوی لمبائی رکھتے ہیں۔

3۔ دائرے کا ہر نصف قطر وتر ہے۔

4۔ دائرے کا ہر وتر ایک قطر ہے۔

5۔ دائرے کا ہر قطر ایک وتر ہے۔

6۔ ایک دائرے میں کئی قطر ہوتے ہیں۔

7۔ دو قطروں کا اختتامی نقطہ مساوی نہیں ہو سکتے۔

8۔ دائرہ مستوی سطح کو خط کو تین جدا حصّوں میں تقسیم کرتا ہے۔

9۔ دائرے کے حصّے قوس کبیر اور قوس صغیر ہیں۔

10۔ دائرے کا مرکز اور محیط تک کا فاصلہ قطر کہلاتا ہے۔

ذرا سوچئے

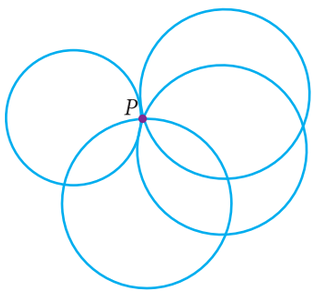
1) دائرے میں کتنے ضلعے ہیں؟

2) کیا دائرہ ایک کثیر ضلعی ہے۔

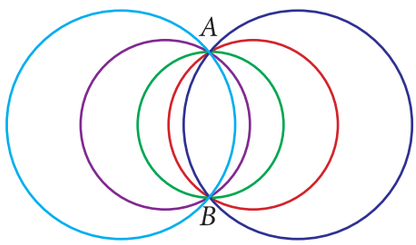
9 maths 4 geometry 138
Wednesday, March 13, 2019 4:04:04 PM

4.4.1 تین نقاط سے گذرنے والے دائرے (Circle through three points)

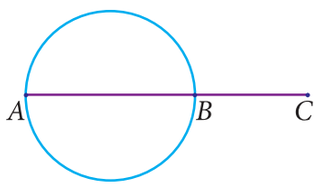
ہم پہلے ہی پڑھ چکے ہیں کہ دو نقطوں سے ایک اور صرف ایک خط گذرتی ہے اسی طرح ہم دیکھیں گے کہ دئے گئے ایک نقطہ سے گزرتے ہوئے اور دئے گئے دو نقاط سے گزرتے ہوئے کتنے دائرے تصنیف کئے جاسکتے ہیں۔ ہم نے دیکھا کہ ان دونوں صورتوں میں دیا گیا نقطہ P سے (خاکہ 4.52) اور نقاط A اور B (خاکہ 4.53) سے لامحدود تعداد میں دائرے گزرتے ہیں۔



خاکہ 4.52



خاکہ 4.53



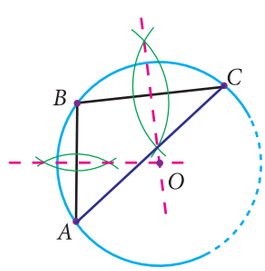
خاکہ 4.54

اب A,B اور C تین ہم خط نقطے لیجئے۔ خاکہ 4.54 کیا ہم ان تین نقاط سے گذرنے والا دائرہ کھینچ سکتے ہیں؟ ذرا سوچئے۔ اگر نقاط ہم خط ہیں۔

اگر تین نقاط غیر ہم خط ہوں تو وہ مثلث بناتے ہیں۔(خاکہ 4.55) حائط مرکز دائرے کی تصنیف کو یاد کیجئے۔ ضلعے کے عمودی ناصف کے ملنے کا نقطہ تقاطع کو حائط مرکز اور دائرہ کو حائط دائرہ کہتے ہیں۔

غرض اسے ہم مانتے ہیں A,B اور C ایک ہی دائرے سے گذرتے ہیں۔

اب اوپر کے مسئلہ سے ہم بیان کرتے ہیں۔



خاکہ 4.55

مسئلہ 1 : تین غیر ہم خطی نقاط سے ایک اور صرف ایک دائرہ گذرتا ہے۔

4.5 دائرے کے وتروں کی خصوصیات (Properties of Chords of a Circle)

اس سبق میں ہم پہلے خط، زاویئے، مثلث اور چار ضلعی کو سیکھیں گے۔ ابھی ہم نے ایک نئے قسم کا دائرہ دیکھا ہے۔ ان تمام کے خصوصیات کے استعمال سے ہمیں ایک ایک کر کے چند معیاری نتائج حاصل ہوں گے۔

اب ہم ایک دائرے کے وتر کے چند خصوصیات پر بحث کریں گے۔

فرض کیجئے مرکز سے وتر پر عمودی خط اور وتر کے خصوصیات کو دیکھیں گے۔

4.5.1 مرکز سے وتر پر عمود (Perpendicular from the Centre to a Chord)

فرض کیجئے کہ ایک دائرے کے مرکز O اور وتر AB لیجئے۔ $OC \perp AB$ کھینچئے اور OA,OB نقاط کو ملایئے۔ یہاں آسانی سے ہمیں دو مثلثیں ΔAOC اور ΔBOC حاصل ہوتے ہیں۔ (خاکہ 4.56)

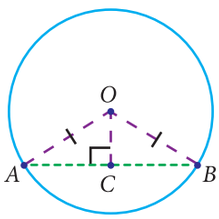
9 maths 4 geometry 138
Wednesday, March 13, 2019 4:04:05 PM

ہم یہ مثالیں مشابہ ہیں جانچ کریں گے؟ اب مشابہ مثلثوں کے اصول کو استعمال کر کے جانچ کی کوشش کریں گے جو ہم پہلے ہی پڑھ چکے ہیں۔

$\angle OCA = \angle OCB = 90^o (OC \perp AB)$ اور $OA = OB$ دائرے کا نصف قطر ہے۔ OC مشترک ضلع ہے۔ RHS،

ΔAOC اور ΔBOC مشابہ ہیں اس سے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں $AC = BC$

اس بحث سے ہمیں ذیل کا نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔



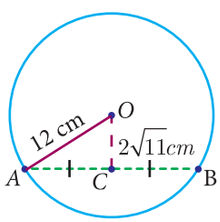
خاکہ 4.56

مسئلہ 2 : ایک دائرے کے مرکز سے دائرے کے ایک وتر پر بنایا گیا عمود وتر کی تصنیف کرتا ہے۔

مسئلہ 2 کا برعکس : ایک دائرے کے مرکز اور وتر کے میانی نقاط کو ملانے والا خط وتر کا عمود ہے۔

مثال 4.5

وتر کا طول معلوم کیجئے جو دائرے کے مرکز سے $2\sqrt{11}$ cm کے فاصلہ پر واقع ہے اور دائرے کا نصف قطر 12 سم ہے۔



خاکہ 4.57

حل : فرض کیجئے AB وتر ہے اور AB کا درمیانی نقطہ C ہے۔

$\therefore OC \perp AB$

OA اور OC کو ملائیے۔

نصف قطر OA ہے۔

دیا گیا ہے سم $OC = 2\sqrt{11}$ اور سم $OA = 12$،

مثلث قائمہ OAC میں مسئلہ فیثاغورث کے استعمال سے ہمیں

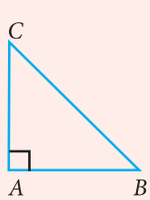
$$\begin{aligned} AC^2 &= OA^2 - OC^2 \\ &= 12^2 - (2\sqrt{11})^2 \\ &= 144 - 44 \\ &= 100\text{cm} \\ AC^2 &= 100\text{cm} \\ AC &= 10\text{cm} \end{aligned}$$

لہٰذا AB وتر کی لمبائی $= 2AC$

$= 2 \times 10\text{cm} = 20\text{cm}$

غور کیجئے

مسئلہ فیثاغورث: علم ہندسہ میں مسئلہ فیثاغورث ایک اہم اور مشہور نظریہ ہے۔



''ایک مثلث قائمۃ الزاویہ میں وتر کا مربع باقی دوسرے دو ضلعوں کے مربعوں کے حاصل جمع کے مساوی ہے۔

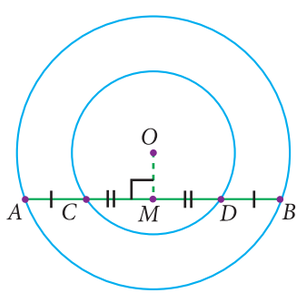
$\Delta ABC, BC^2 = AB^2 + AC^2$. میں

اس یونٹ میں مسئلہ فیثاغورث بہت اہمیت رکھتا ہے۔

مثال 4.6

دو ہم مرکز دائروں میں بیرونی دائرے کا وتر AB اندرونی دائرے کو C اور D پر کاٹتا ہے۔

شکل میں بتایا گیا ہے۔ ثابت کیجئے۔ $AB - CD = 2AC$ ہے۔



خاکہ 4.58

9 maths 4 geometry 138
Wednesday, March 13, 2019 4:04:05 PM

حل : دیا گیا ہے : بیرونی دائرے کا وتر AB اندرونی دائرے کے C اور D پر کاٹتا ہے۔

ثابت کرنا ہے : $AB - AC = 2AC$

تصنیف : $OM \perp AB$ کیجئے

ثبوت : $OM \perp AB$ جب کہ (تصنیف سے)

$OM \perp AB$

چنانچہ $AM = BM$ ..... (1) (دائرے کے مرکز سے عمود ناصف وتر کی تقسیم)

$CM = MD$ ... (2)

اب $AB - CD = 2AM - 2CM$

$= 2(AM - CM)$ (1) سے (2) سے

$AB - CD = 2AC$

Progress Check معلومات کی جانچ

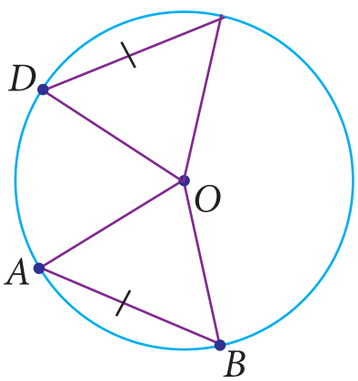
1۔ ایک دائرے کا نصف قطر 25 سم اور اس کے ایک وتر کی لمبائی 40 سم ہے۔ مرکز سے وتر کا فاصلہ معلوم کیجئے۔

2۔ P اور Q سے گذرنے والے تین دائرے کھینچئے جہاں سم $PQ = 4$ ہے۔

4.5.2 مرکز پر وتر سے بننے والا زاویہ (Angle Subtended by Chord at the Centre)

آیئے ایک وتر کے بجائے دو مساوی وتر فرض کیجئے۔ اب اس کو ہم دوسرے خصوصیات پر بحث کریں گے۔

(خاکہ 4.59) فرض کیجئے۔ مرکز O والے دائرے میں دو مساوی وتر لیجئے۔



خاکہ 4.59

مرکز سے وتروں کے اختتامی نقطوں کو ملانے سے ہمیں مثلث ΔAOB اور ΔOCD حاصل ہوا ہے۔

وتر CD = وتر AB (چونکہ وتریں مساوی ہیں) باقی ضلعے نصف قطر ہیں۔

غرض $OA = OC$ اور $OB = OD$ ہے۔ یعنی SSS اصول سے مثلثیں متماثل ہیں۔

اس سے $m\angle AOB = m\angle COD$

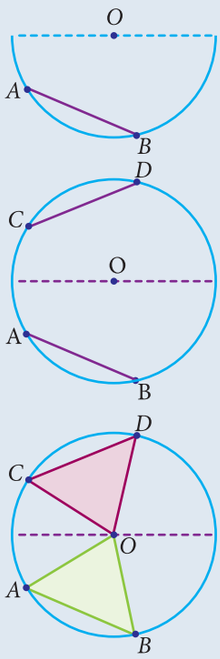
اب اس بحث سے ذیل کا نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔ $\Delta OAB \equiv \Delta OCD$

مسئلہ 8 : دائرے کے مساوی وتریں مرکز پر مساوی زاویئے بناتے ہیں۔

9 maths 4 geometry 138
Wednesday, March 13, 2019 4:04:06 PM

کارروائی 4

طریقہ



خاکہ 4.60

1۔ مناسب نصف قطر لے کر مرکز O سے ایک دائرہ کھینچئے۔

2۔ تہہ کر کے نصف دائرہ بنائیے اس پر نقطہ A,B لیجئے۔

3۔ نصف دائرے میں AB لکیر بنائیے اور اسے کھولئے۔

4۔ نصف دائرے کے دوسرے حصّے میں ایک لکیر CD حاصل ہوتا ہے۔

5۔ نصف قطر کو ملانے سے ہمیں ΔOAB اور ΔOCD ہے۔

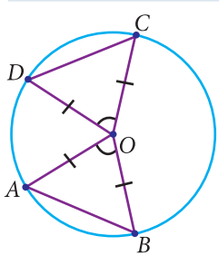
6۔ نقل کاغذ (Trace paper) کے استعمال سے ΔOAB اور ΔOCD مثلث کی نقل اتارئے۔

7۔ ΔOAB اور ΔOCD مثلثیں ایک جیسے ہیں۔

مشاہدہ :

1۔ تم نے کیا مشاہدہ کیا؟ $\Delta OAB \equiv \Delta OCD$ ہے؟

2۔ مرکز 0 سے گذرنے والے وتر AB اور CD کا عمودی خط تصنیف کیجئے۔ 0 سے وتر تک کا فاصلہ ناپئے۔



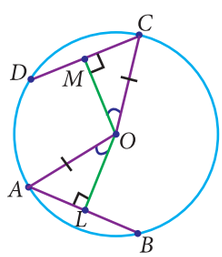
خاکہ 4.61

اب ہم وتر AB اور CD کی لمبائی معلوم کریں گے۔ دیا گیا ہے کہ دائرے کے مرکز پر وتروں سے بننے والے زاویئے مساوی ہیں مسئلہ 3 سے ہمیں $\angle AOB = \angle COD$ حاصل ہوتا ہے۔

اور باقی دو ضلعے کے تمام زاویئے ΔAOB اور ΔCOD کے نصف قطریں مساوی ہیں۔

SAS اصول سے $\Delta AOB \equiv \Delta COD$ یہ دیتا ہے۔ وتر AB = وتر CD

اب نتیجے کا برعکس نصف قطریں مساوی ہیں۔



خاکہ 4.62

مسئلہ 8 کا برعکس اگر دائرے کے مرکز پر وتروں سے بننے والے زاویے مساوی ہو تو وتر مساوی ہوں گے۔

اسی طرح سے ہمیں دئے گئے مساوی وتر سے مرکز تک کا فاصلہ کو بحث کریں گے۔

$OL \perp AB$ اور $OM \perp CD$ عمود کھینچئے۔ مسئلہ 7 سے عمود وتر کو مساوی تقسیم کرتا ہے۔

$AL = CM$ ہے ΔOAL اور ΔOCM کو موازنہ کرنے پر زاویئے $\angle OLA = \angle OMC = 90^\circ$

اور $OA = OC$ نصف قطریں ہیں۔ RHS اصول سے

$\Delta OAL \equiv \Delta OAM$ اور مرکز سے فاصلہ $OL = OM$ ہے۔ اور ہم ذیل میں اس کا اختتام کرتے ہیں۔

مسئلہ 9 : ایک دائرے کے مساوی وتر مرکز سے مساوی فاصلے پر ہوتے ہیں۔

آیئے مسئلہ 9 کا برعکس کو سوالات کے حل کرنے میں استعمال کریں گے۔

مسئلہ 9 کا برعکس : ایک دائرے کے وتر جو مرکز سے مساوی فاصلے پر بنتے ہیں وہ مساوی ہوتے ہیں۔

9 maths 4 geometry 138
Wednesday, March 13, 2019 4:04:06 PM

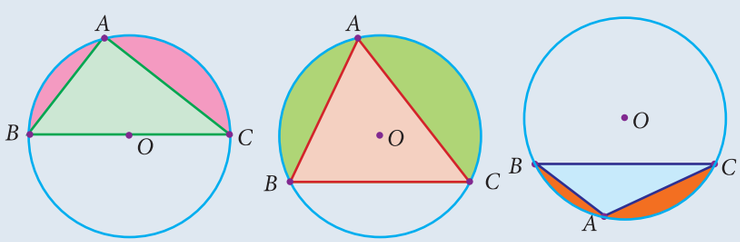
4.5.3 دائرے کے قوس کے ذریعے بننے والے زاویے (Angle Subtended by an arc of a Circle)

کارروائی 6

طریقہ 1۔ ایک چارٹ پیپر میں کسی بھی نصف قطرے کے مرکز O سے تین دائرے کھینچئے۔

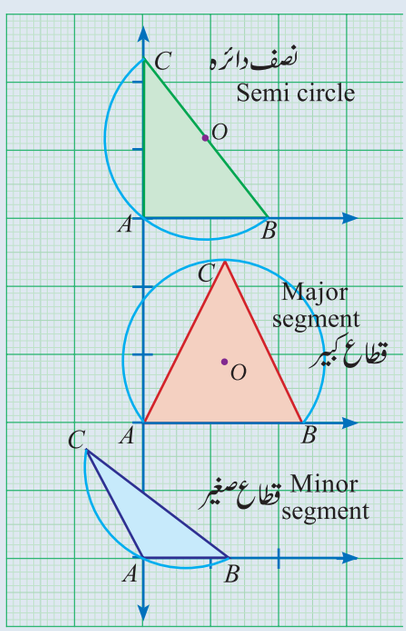
2۔ ان دائرے سے نصف دائرہ، قطاع کبیر اور قطاع صغیر کاٹئے۔

ان قطاع پر کوئی تین نقاط لیجئے اور انہیں A، B اور C نام دیجئے۔



خاکہ 4.63

4۔ مثلثیں کاٹئے اور ترسیمی کاغذ پر اس طرح چسپاں کیجئے کہ نقطہ A مبدا پر مل جائے۔ جیسا کہ شکل میں ظاہر ہے۔



خاکہ 4.64

مشاہدہ :

i) نصف دائرے میں زاویہ ..... زاویہ ہے۔

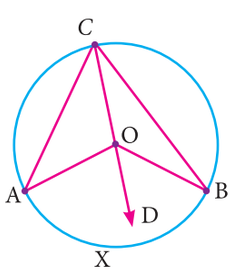
ii) قطاع کبیر میں زاویہ ..... زاویہ ہے۔

iii) قطاع صغیر میں زاویہ ..... زاویہ ہے۔

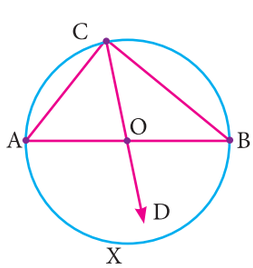
اب ہم دائرے کے قوس کے ذریعہ مرکز پر بننے والے زاویے اور محیط پر بننے والے زاویے کے درمیان کے تعلق کی تصدیق کریں گے

4.5.4 محیط اور مرکز پر زاویئے: (Angle at the Centre and the Circumference)

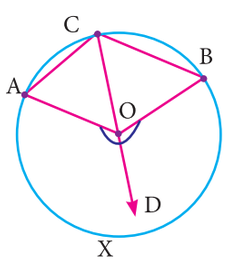
آیئے ہم مرکز 'O' والا دائرہ لیجئے اب محیط پر A,B اور C نقطہ نشان کیجئے۔



خاکہ 4.65



خاکہ 4.66



خاکہ 4.67

9 maths 4 geometry 138
Wednesday, March 13, 2019 4:04:06 PM

یہاں خاکہ 4.65 میں $\overset{\frown}{AB}$ قوس صغیر ہے۔ خاکہ 4.66 میں نصف دائرہ اور خاکہ 4.67 میں قوس کبیر ہے۔نقطہ C سے مختلف قسم کے زاویئے مختلف مقام پر بنتے ہیں۔(خاکہ 4.65 تا 4.67)ان تمام دائروں سے قوس $\overset{\frown}{AXB}$ ، $\angle AOB$ مرکز پر اور دائرے کے محیط کے ایک نقطہ پر $\angle ACB$ ہے۔ہم ثابت کریں گے $\angle AOB = 2\angle ACB$۔اسی مقصد سے CO کو D تک توسیع کیجئے اور CD کو ملایئے۔

(نصف قطر $OA = OC$ چونکہ) $\angle OCA = \angle OAC$

بیرونی زاویہ = دو داخلی مقابل زاویوں کا حاصل جمع

$\angle AOD = \angle OAC + \angle OCA$

$= 2\angle OCA \rightarrow (1)$

اسی طرح $\angle BOD = \angle OBC + \angle OCB$

$= 2\angle OCB \rightarrow (2)$

(1) سے (2) سے

$\angle AOD + \angle BOD = 2(\angle OCA + \angle OCB)$

آخر میں ہم یہ نتیجہ پر پہنچیں

$\angle AOB = 2\angle ACB$

اس سے یہ نتیجہ ظاہر ہوتا ہے

مسئلہ 10

ایک قوس کے ذریعہ مرکز پر بننے والا زاویہ دائرے کے قوس کے باقی حصّے پر کسی بھی جگہ ایک نقطہ پر بنائے جانے والے زاویہ سے دُگنا ہوگا۔

Progress Check معلومات کی جانچ

1۔ مختلف سائز کی چوڑیوں کا نقشہ کھینچئے اور گنئے کے استعمال سے ہر ایک کا مرکز معلوم کیجئے۔

2۔ اسکیل اور پرکار کو استعمال کرتے ہوئے دئے گئے ہلال کی نقل اتارئے اور ایک مکمل چاند بنایئے۔



خاکہ 4.68

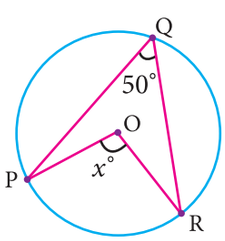
غور کیجئے

☆ نصف دائرے میں اندرونی زاویہ زاویہ قائمہ ہوتا ہے۔

☆ ایک دائرے کے مساوی قوس مرکز پر مساوی زاویے بناتے ہیں۔

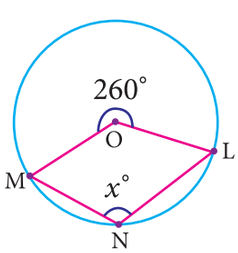
مثال 4.7 ذیل کے خاکوں میں x° کی قیمت معلوم کیجئے۔

(i)



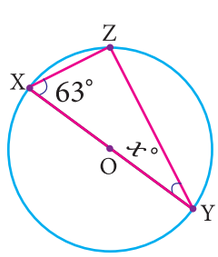
خاکہ 4.69

(ii)



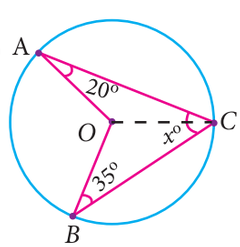
خاکہ 4.70

(iii)



خاکہ 4.71

(iv)



خاکہ 4.72

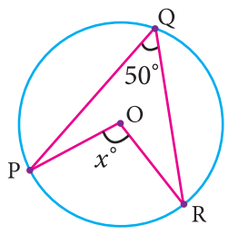
9 maths 4 geometry 138
Wednesday, March 13, 2019 4:04:07 PM

حل : ایک قوس کے ذریعے مرکز پر بننے والا زاویہ دائرے کے قوس کے باقی حصّے پر کسی بھی جگہ ایک نقطہ پر بنائے جانے والے زاویہ سے دوگنا ہوگا اس مسئلے کے تحت۔

(i $\angle POR = 2\angle PQR$

$x^o = 2 \times 50^o$

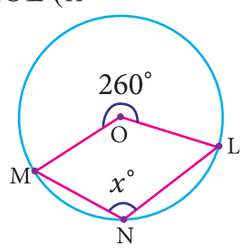
$x^o = 100^o$



(ii $\angle MNL =$ معکوس $\angle MOL$ ½

$= ½ \times 260^o$

$x^o = 130^o$



(iii XY دائرے کا قطر ہے

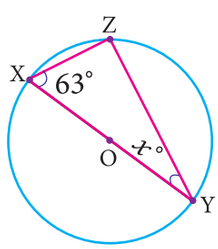
$\angle XZY = 90^o$ غرض

(نصف دائرے میں زاویہ)

ΔXYZ میں

$x° + 63° + 90° = 180°$

$x° = 27°$



(iv $OA = OB = OC$ (نصف قطر) ΔOAC میں

ΔOBC میں $\angle OAC = \angle OCA = 20^o$

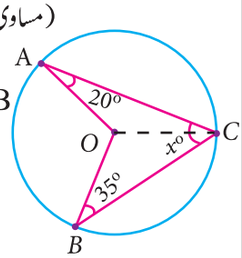
$\angle OBC = \angle OCB = 35^o$

(مساوی ضلعوں کے مقابل زاویے مساوی ہوتے ہیں)

$\angle ACB = \angle OCA + \angle OCB$

$x° = 20° + 35°$

$x° = 55°$



مثال 4.8

اگر O ایک دائرے کا مرکز ہے اور $\angle ABC = 30^o$ تب $\angle AOC$ معلوم کیجئے۔ (خاکہ 4.73 سے)

حل : دیا گیا ہے :

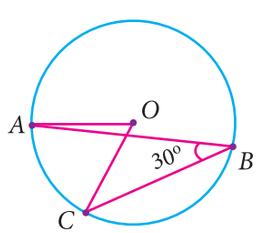
$\angle ABC = 30^o$

$\angle AOC = 2\angle ABC$

(مرکز پر بننے والا زاویہ دائرے کے کسی بھی ایک نقطہ پر بننے والے زاویئے سے دوگنا ہوتا ہے۔)

$= 2 \times 30^o$

$= 60^o$



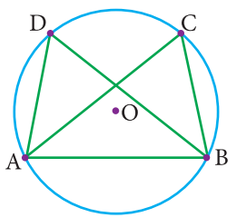
خاکہ 4.73

اب ہم دوسرا دلچسپ مسئلہ کو دیکھیں گے۔ ہم پڑھ سکتے ہیں محیط پر قوس صغیر سے بننے والا زاویہ زاویہ منفرجہ قوس کبیر سے بننے والا زاویہ زاویہ حادّہ اور نصف دائرے سے بننے والا زاویہ قائمہ ہے۔ اگر وتر AB دیا گیا ہے۔ اور C اور D دائرے کے محیط پر دو مختلف نقاط ہو تو $\angle ACB$ اور $\angle ADB$ معلوم کیجئے۔ کیا یہ زاویئے میں کوئی فرق ہے ؟

9 maths 4 geometry 138
Wednesday, March 13, 2019 4:04:07 PM

4.5.5 ایک ہی قطاع پر کے زاویے (Angles at the circumference to the same segment)

مرکز O والا دائرہ لیجئے اور وتر AB ہے۔ایک ہی قطاع میں دائرے کے محیط پر C اور D نقاط ہیں۔OA اور OB نصف قطر کو ملایئے۔



خاکہ 4.74

$\frac{1}{2}\angle AOB = \angle ACB$ (مسئلہ 10 سے)

اور $\frac{1}{2}\angle AOB = \angle ADB$ (مسئلہ 10 سے)

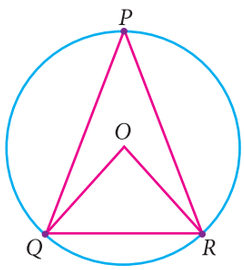
$\angle ACB = \angle ADB$

اس سے ایک نیا نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 11 : دائرے کے ایک ہی قطاع میں بننے والے زاویئے مساوی ہیں۔

مثال 4.9

دیئے گئے شکل میں O دائرے کا مرکز ہے۔
اگر زاویے کی پیمائش $\angle OQR = 48^o$ ہو تو $\angle P$ کا ناپ معلوم کیجئے۔



خاکہ 4.75

حل :

دیا گیا ہے $\angle OQR = 48^o$

غرض $\angle ORQ$ بھی 48° ہے (کیوں؟ .....)

$\angle QOR = 180^o - (2\times 48^o) = 84^o$

وتر QR سے بننے والا مرکزی زاویہ اسکے اندرونی زاویہ P کا دگنا ہے۔

$\angle QPR = \frac{1}{2}\times 84^o = 42^o$ کی پیمائش

مشق 4.3

1۔ ایک دائرے کا قطر 52 سمر ہے اور ایک وتر کی لمبائی 20 سمر ہے۔ مرکز سے وتر کا فاصلہ معلوم کیجئے۔

2۔ ایک دائرے میں مرکز سے 8 سمر دوری پر ایک وتر 30 سمر طول والا کھینچا گیا۔دائرے کا نصف قطر معلوم کیجئے۔

3۔ $4\sqrt{2}$ سمر نصف قطر والے دائرے میں AB اور CD دو قطر ایک دوسرے کے عمودی ہیں۔وتر AC کی لمبائی معلوم کیجئے اور $\angle OAC$ اور $\angle OCA$ بھی معلوم کیجئے۔

4۔ دائرے کے مرکز سے 12 سمر دور ایک وتر کھینچا گیا۔جس کا نصف قطر 15 سمر ہے۔وتر کا طول معلوم کیجئے۔

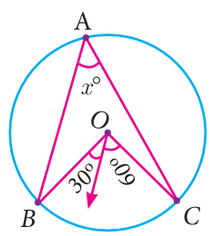
9 maths 4 geometry 138
Wednesday, March 13, 2019 4:04:07 PM

5۔ ایک دائرے میں AB اور CD دو متوازی وتر ہیں۔ جن کا مرکز O ہے اور نصف قطر 10 سمر ہے۔ اس طرح کہ سمر AB = 16 اور سمر CD = 12 ہے۔ دو وتر کے درمیان کا فاصلہ معلوم کیجئے۔

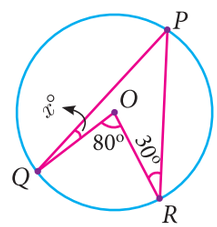
6۔ دو دائروں کے نصف قطریں 5 سمر اور 3 سمر دو نقطوں پر قطع کرتے ہیں۔ مشترک وتر کا طول معلوم کیجئے۔

7۔ ذیل کے شکلوں میں x^o کی قیمت معلوم کیجئے۔

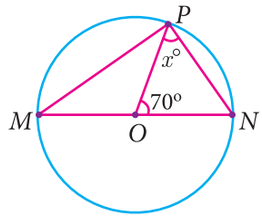
(i)



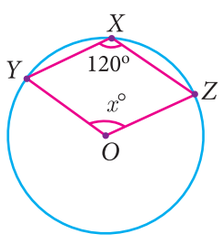
(ii)



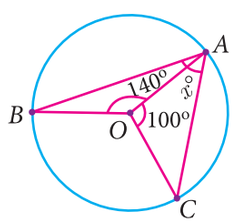
(iii)

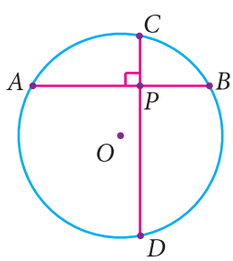


(iv)



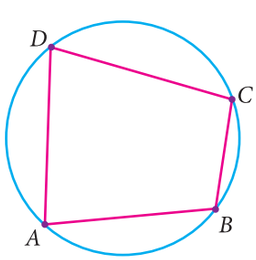
(v)





8۔ دی گئی شکل میں $\angle CAB = 25^o$ ہو تو $\angle BDC$، $\angle DBA$ اور $\angle COB$ معلوم کیجئے۔

4.6 مدوّر چار ضلعی (Cyclic Quadrilateral)

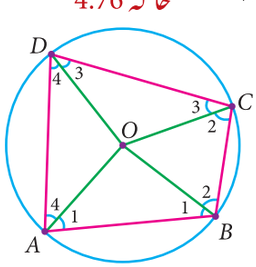


خاکہ 4.76

اب ہم ایک خاص چار ضلعی اور اسکے خصوصیات ''مدور چار ضلعی'' کو دیکھیں گے۔ اگر کسی چار ضلعی کے چاروں راس ایک دائرے کے محیط پر واقع ہوں تو اس چار ضلعی کو مدور چار ضلعی کہتے ہیں۔

اب ہم مدور چار ضلعی کے خواص سیکھیں گے۔

چار ضلعی ABCD لیجئے۔ جس کے راسیں دائرے پر ہوں۔ ہم ثابت کرتے ہیں۔ اسکے مقابل کے زاویئے مکملہ (Supplementary) ہیں۔ مرکز O والے دائرے کے ہر راس کو ملائے اب تم چار نصف قطریں OA, OB, OC اور OD بڑھانے سے چار مثلث مساوی الساقین OAB، OBC، OCD اور ODA دیکھتے ہیں۔ دائرے کے مرکز میں اطراف کے زاویوں کا حاصل جمع 360° ہے۔



خاکہ 4.77

ہر ایک مثلث مساوی الساقین کے زاویوں کا حاصلِ جمع 180° ہے۔

شکل سے ہمیں حاصل ہوتا ہے مرکز O پر زاویہ $= 4\times180^o$ + $2\times(\angle1+\angle2+\angle3+\angle4)$

$$2\times(\angle1+\angle2+\angle3+\angle4) + 360^o = 720^o$$

اسے مختصر کرنے پر $$\angle1+\angle2+\angle3+\angle4 = 180^o$$

اب تم اس طرح ظاہر کروگے

9 maths 4 geometry 138
Wednesday, March 13, 2019 4:04:08 PM

(i) B اور D کے مقابل زاویوں کا حاصل جمع) $(\angle1+\angle2) + (\angle3+\angle4) = 180^o$

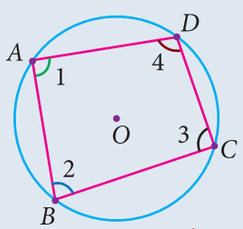
(ii) A اور C کے مقابل زاویوں کا حاصل جمع) $(\angle1+\angle4) + (\angle2+\angle3) = 180^o$

اب اس نتیجہ سے یہ ظاہر ہوتا ہے۔

مسئلہ 12 : مدور چار ضلعی کے مقابل کے زاویئے مکملہ ہوتے ہیں آیئے ہم مسئلہ 7 کے برعکس کو سوالات کے حل کرنے میں استعمال کریں گے

مسئلہ 12 کا برعکس : اگر ایک چار ضلعی کے مقابل کے زاویئے مکملہ ہو تو وہ چار ضلعی مدور ہوگی۔

کارروائی - 7



خاکہ 4.78

طریقہ :

1۔ کسی بھی نصف قطر لے کر مرکز O سے ایک دائرہ کھینچئے۔

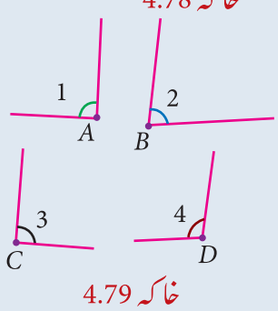
2۔ بعد میں کوئی چار نقاط A,B,C اور D نشان کیجئے۔ مدور چار ضلعی ABCD بنایئے اور زاویئے نام دیجئے۔ شکل 4.42 سے

3۔ نقل کاغذ سے مدور چار ضلعی ABCD کی نقل اتاریئے۔

4۔ شکل 4.43 میں A,B,C اور D زاویئے بنا کر کاٹئے۔

5۔ متصل زاویئے $\angle3$,$\angle2$, $\angle1$ اور $\angle4$ کاٹے ہوئے ٹکڑے لگایئے جسکے مقابل A,B,C اور D زاویئے ہوں۔

6۔ زاویئے کا ناپ $\angle3 + \angle1$ اور $\angle4 + \angle2$



خاکہ 4.79

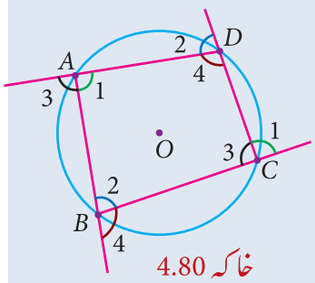
درج ذیل کو مکمل کیجئے :

1۔ (i $\angle A+\angle C$ = ... (ii $\angle B+\angle D$ =.....

(iii $\angle C+\angle A$ = ... (iv $\angle D+\angle B$ = ...

2۔ مدور چار ضلعی کے مقابل زاویوں کا حاصل جمع ..... ہے۔

3۔ مدور چار ضلعی کے مقابل زاویئے کے جوڑی ..... ہے۔

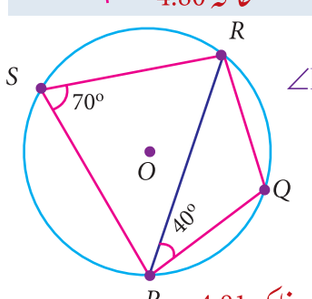


خاکہ 4.80

مثال 4.10

اگر PQRS ایک مدورّ چار ضلعی ہے۔ جس میں $\angle PSR = 70^o$

اور $\angle QPR = 40^o$، تب $\angle PRQ$ معلوم کیجئے۔ (خاکہ 4.81 سے)



خاکہ 4.81

حل : PQRS ایک مدورّ چار ضلعی ہے۔

دیا گیا ہے $\angle PSR = 70^o$

9 maths 4 geometry 138
Wednesday, March 13, 2019 4:04:08 PM

$\angle PSR + \angle PQR = 180^o$ (وجہ لکھئے .....)

$70 + \angle PQR = 180^o$

$\angle PQR = 180^o - 70^o$

$\angle PQR = 110^o$

ΔPQR سے ہمیں

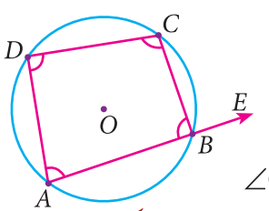
$\angle PQR + \angle PRQ + \angle QPR = 180^o$ (وجہ لکھئے .....)

$110^o + \angle PRQ + 40^o = 180^o$

$\angle PRQ = 180^o - 150^o$

$\angle PRQ = 30^o$

مدوّر چار ضلعی کا بیرونی زاویہ (Exterior angle of a Cyclic Quadrilateral)



خاکہ 4.82

ایک چار ضلعی کا بیرونی زاویہ وہ ہے جو ایک ضلع اور متصلہ ضلع کی توسیع کے درمیان بننے والا بیرونی زاویہ ہے۔

فرض کیجئے ایک مدوّر چار ضلعی ABCD میں ضلع AB کی E تک توسیع کی گئی ہے۔ یہاں $\angle ABC$ اور $\angle CBE$ ایک خطی جوڑ ہیں۔ اس کا حاصل جمع 180° ہے۔ اور زاویئے $\angle ABC$ اور $\angle ADC$ مدوّر چار ضلعی کے مقابل کے زاویئے ہیں۔ اور انکا حاصل جمع بھی 180° ہے اس سے $\angle ABC + \angle CBE = \angle ABC + \angle ADC$ اور آخر میں ہمیں حاصل ہوتے ہیں کہ $\angle CBE = \angle ADC$ اسی طرح سے باقی زاویئے بھی ثابت کر سکتے ہیں۔

مسئلہ 13 : مدوّر چار ضلعی میں کسی ایک ضلع کے دراز پر بننے والا خارجی زاویہ داخلی مقابل زاویئے کے مساوی ہوتا ہے۔

Progress Check معلومات کی جانچ

1۔ اگر ایک چار ضلعی کے مقابل کے زاویئے مکملہ ہو تو وہ چار ضلعی ..... ہوگی۔

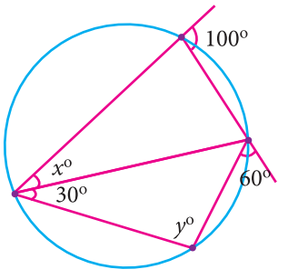
2۔ ایک وتر کا طول گھٹتا ہے تو مرکز تک کا فاصلہ ..... ہے۔

3۔ مدوّر چار ضلعی میں کسی ایک ضلع کے دراز پر بننے والا خارجی زاویہ داخلی مقابل زاویئے کے ..... ہوتا ہے۔

4۔ مدوّر چار ضلعی کے مقابل زاویئے ..... ہوتے ہیں۔

مثال 4.11

دی گئی شکل میں x^o اور y^o معلوم کیجئے۔



خاکہ 4.83

حل : مدوّر چار ضلعی کے بیرونی زاویئے سے

ہمیں $y^o = 100^o$ اور

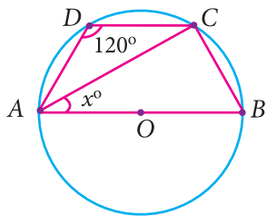
$x^o + 30^o = 60^o$ اور

$x^o = 30^o$ حاصل ہوتا ہے۔

9 maths 4 geometry 138
Wednesday, March 13, 2019 4:04:08 PM

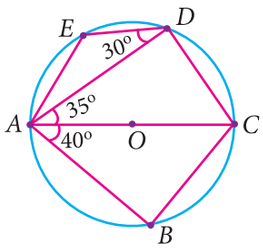
مشق 4.4

1۔ دیئے گئے خاکے میں x کی قیمت معلوم کیجئے۔

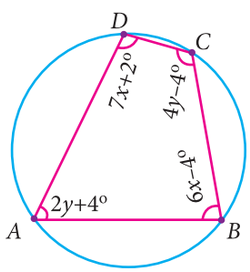


2۔ دئے گئے خاکے میں مرکز O والے دائرے میں AC ایک قطر ہے۔ اگر $\angle ADE = 30^\circ$،
$\angle DAC = 35^\circ$ اور $\angle CAB = 40^\circ$ ہے۔ معلوم کیجئے۔

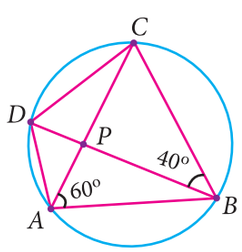
(i) $\angle ACD$ (ii) $\angle ACB$ (iii) $\angle DAE$



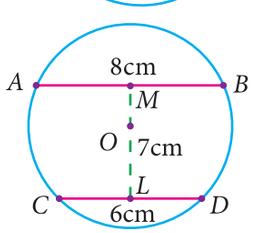
3۔ دئے گئے خاکے میں ABCD ایک مدوّر چار ضلعی کے تمام زاویئے معلوم کیجئے۔



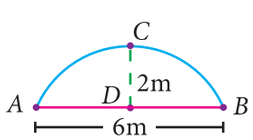
4۔ دئے گئے خاکے میں ABCD ایک مدوّر چار ضلعی ہے۔ جہاں وتریں P پر قطع کرتی ہیں۔ اس طرح کہ
$\angle DBC = 40^\circ$ اور $\angle BAC = 60^\circ$
معلوم کیجئے (i $\angle CAD$ (ii $\angle BCD$



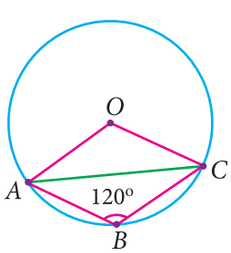
5۔ دئے گئے خاکے میں AB اور CD دو متوازی وتر ہیں جن کا مرکز O ہے اس طرح کہ سمر $AB = 8$
اور سمر $CD = 6$ ہیں۔ اگر $OM \perp AB$ اور $OL \perp CD$ اور LM کا درمیان فاصلہ 7 سمر ہے
دائرے کا نصف قطر معلوم کیجئے۔



6۔ ایک پُل کے محراب کے اَبعاد دئے گئے ہیں جب کہ محراب کے بلندی کی پیمائش 2m ہے اور چوڑائی
6m ہے۔ محراب کے دائرے کا نصف قطر کیا ہے۔



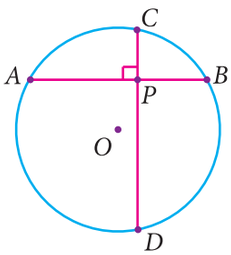
7۔ خاکے میں $\angle ABC = 120^\circ$ جب A,B اور C دائرے کے نقاط ہیں جس کا مرکز O ہے۔
$\angle OAC$ معلوم کیجئے؟

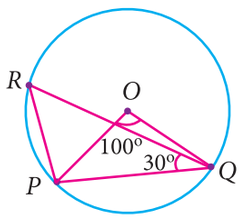


8۔ ایک اسکول میں درخت لگانے کا پروگرام بنایا گیا ہے۔ اس لئے ٹیچر نے 6m نصف قطر کا دائرہ بنا کر
میدان میں نویں جماعت کے طلباء کو پودے لگانے کے لئے کہا گیا ہے۔ چار طلباء نقاط A,B,C اور D پر

9 maths 4 geometry 138
Wednesday, March 13, 2019 4:04:09 PM

درخت لگاتے ہیں جیسا کہ خاکے میں بتایا گیا ہے۔ یہاں پر AB=8m، CD=10m اور AB⊥ CD ہے۔
اگر نقطہ P پر ایک دوسرا اطباء پودا لگاتا ہے جو AB اور CD پر قطع کرتے ہیں۔
تب مرکز سے P تک کا فاصلہ معلوم کیجئے۔





9۔ دئے گئے خاکے میں $\angle POQ = 100^\circ$ اور $\angle PQR = 30^\circ$ ہو تو $\angle RPO$ معلوم کیجئے۔

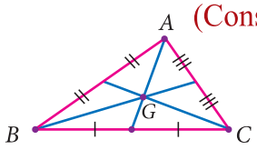
4.7 عملی علم ہندسہ (Practical Geometry)

علم ہندسہ کا بنیادی اصول نقاط، خطوط اور دیگر شکلوں کے خواص کے بارے میں بحث کرتا ہے۔ ہندسوی شکلوں کی تصنیف میں علم ہندسہ کے اصولوں کو اپنانے کا طریقہ **عملی علم ہندسہ** کہلاتا ہے۔ علم ہندسہ میں ''تصنیف'' سے مراد شکلوں، زاویوں یا خطوط کو درست تشکیل دینا ہے۔ اقلیدس کی کتاب ''عناصر'' (Elements) میں ہندسوی تصنیفوں کے بارے میں وضاحت کے ساتھ بحث کی گئی ہے۔ لہٰذا اس طرح کی تصنیفوں کو اقلیدس کی تصنیفات بھی کہا جاتا ہے۔ ان تصانیف میں صرف ایک پرکار اور ایک سیدھا کنارا (یعنی اسکیل) استعمال کیا جاتا ہے۔ پرکار مساوی فاصلہ برقرار رکھتا ہے جب کہ سیدھا کنارا ہم خطی کو برقرار رکھتا ہے۔ تمام ہندسوی تصانیف ان دو اصولوں پر مبنی ہیں۔

سیدھا کنارا (اسکیل) اور پرکار کی تصانیف کے استعمال سے ناطق اعداد اور غیر ناطق اعداد کی تصنیف ممکن ہے۔ جیسا کہ ہم نے سبق نمبر 2 میں سیکھا تھا۔ 1913 میں ہندوستانی ریاضی دان راما نجم نے $\pi = 355/113$ کے لئے ہندسوی تصنیف پیش کی تھی۔ آج ہمارے پاس درست پیمائش آلات ہیں۔ مگر یہ بات قابل غور ہے کہ جب خطوط ایک پہاڑ کی طرح اٹھ کر ایک غار کی شکل دیتی ہیں۔ پچھلی جماعتوں میں ہم نے دی گئی پیمائشوں سے زاویے اور مثلثوں کی تصنیف کے بارے میں سیکھا تھا۔

اس باب میں ہم متراکز خطوط استعمال کر کے مثلث کے ہندسی مرکز، عمودی مرکز، حائط مرکز اور درون مرکز کی تصنیف کے بارے میں سیکھیں گے۔

4.7.1 کسی مثلث کے ہندسی مرکز کی تصنیف (Construtction of the Centroid of a Triangle)



خاکہ 4.84

ہندسی مرکز (Centroid)

کسی مثلث کے وسطی خطوط متراکز ہیں۔ ان کا نقطۂ ارتکاز مثلث کا ہندسی مرکز کہلاتا ہے۔
عموماً اس کو صرف G سے تعبیر کرتے ہیں۔

کارروائی 8

مقصد : کاغذ کو تہہ کر کے ایک قطاعِ خط کا مرکزی نقطہ بنانا۔

طریقہ : کاغذ کو تہہ کر کے ایک قطاعِ خط بنائیے اور اسے PQ نام دیجئے۔ قطاعِ خط PQ کو اس طرح تہہ کریں کہ P، Q پر منطبق ہو اور نقطہ تقاطع اور کاغذ پر بنے ہوئے موڑ پر M نشان کیجئے۔ PQ کا مرکزی نقطہ M ہے۔

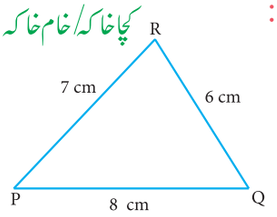
9 maths 4 geometry 138
Wednesday, March 13, 2019 4:04:09 PM

مثال 4.12

ایک مثلث PQR کے ہندسی مرکز کی تصنیف کیجئے جس کے ضلعے سم 7 = RP، سم 6 = QR، سم 8 = PQ ہیں۔

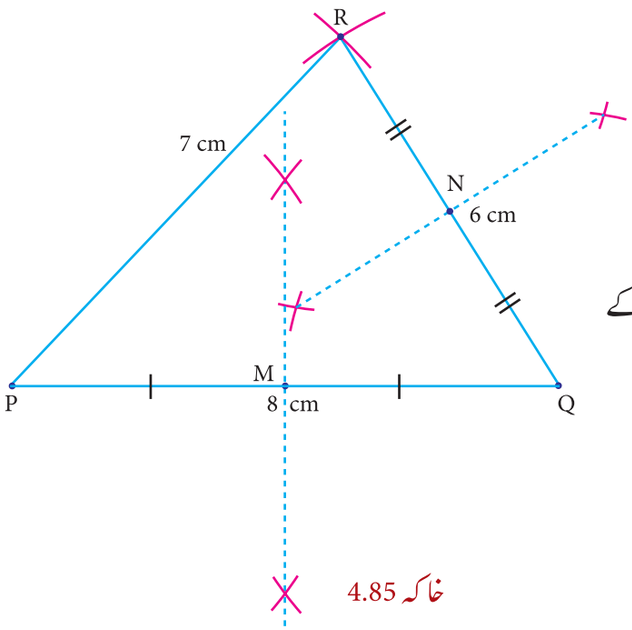
حل :

کچا خاکہ/خام خاکہ



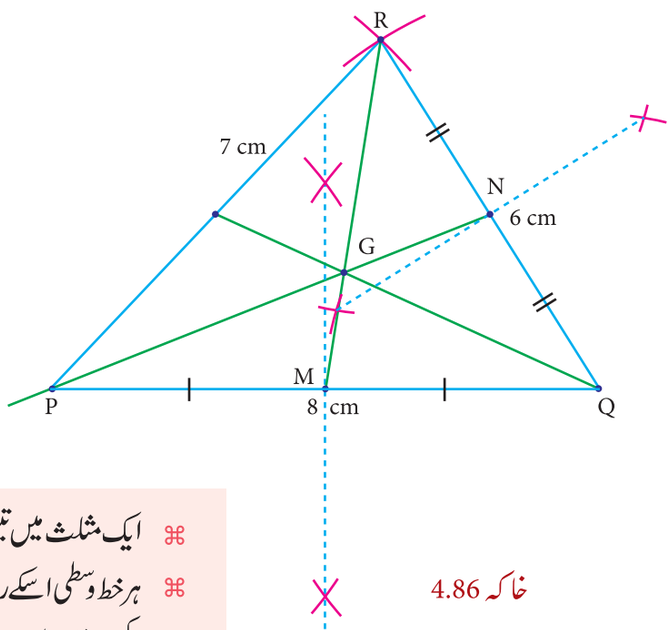
مرحلہ 1 : دی گئی پیمائشوں کی مدد سے ΔPQR تصنیف کیجئے۔

سم 8 = PQ، سم 6 = QR اور سم 7 = RP ہے اور مثلث کے کسی دو ضلعوں پر عمودی ناصف تصنیف کیجئے (PQ اور QR) اور PQ اور QR کا وسطی نقاط بالترتیب N اور M معلوم کیجئے۔



خاکہ 4.85

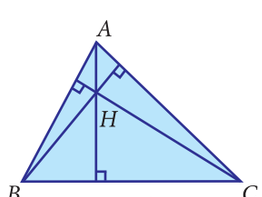
مرحلہ 2 : وسطی خطوط PN اور RM کھینچئے اور یہ G پر قطع کرے گا۔ نقطہ G دئے گئے ΔPQR کا ہندسی مرکز ہے۔



خاکہ 4.86

غور کیجئے

- ایک مثلث میں تین وسطی خطوط کھینچے جا سکتے ہیں۔
- ہر خط وسطی اسکے راس سے ہندسی مرکز کو 2:1 کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔
- کسی مثلث کا ہندسی مرکز ہمیشہ مثلثوں کے اندر ہی واقع ہوگا۔
- ہندسی مرکز ہمیشہ مثلث کے مرکزِ جاذبہ پر واقع ہوتا ہے اور مثلث کو یکساں طور پر توازن میں رکھتا ہے۔



خاکہ 4.87

4.7.2 کسی مثلث کے عمودی مرکز کی تصنیف

عمودی مرکز (Orthocentre)

کسی مثلث کے ارتفاع عمودی (Altitudes) کا نقطہ ارتکاز ہی عمودی مرکز کہلاتا ہے۔ اسے H سے ظاہر کیا جاتا ہے

9 maths 4 geometry 138
Wednesday, March 13, 2019 4:04:10 PM

کارروائی 9

مقصد : کاغذ کو تہہ کر کے ایک قطاع خط پر کسی بیرونی نقطہ میں عمود بنانا۔

طریقہ : ایک قطاع خط AB بنایئے اور ایک بیرونی نقطہ P نشان کیجئے۔ خط BA کے B کو آہستہ سے اس طرح تہہ کیجئے کہ تہہ P تک پہنچ جائے۔ تہہ شدہ حصہ قطاع خط پر کسی بیرونی نقطے میں بنا عمود ہے۔

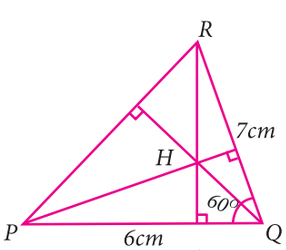
کارروائی 10

مقصد : کاغذ کو تہہ کر کے کسی مثلث کا عمودی مرکز معلوم کرنا۔

طریقہ : کارروائی 12 کو استعمال کرتے ہوئے مثلث کے کسی دو راسوں کو بیرونی نقاط فرض کر کے مقابل ضلعوں پر عمود بنائیں۔ ان دونوں عمودوں کا نقطہ تقاطع ہی دیئے گئے مثلث کا عمودی مرکز ہے۔

مثال 4.13

ایک مثلث PQR تصنیف کیجئے جس کے اضلاع سمPQ = 6، $\angle Q = 60°$، اور سمQR = 7 ہوں اس کا عمودی مرکز نشان کیجئے۔

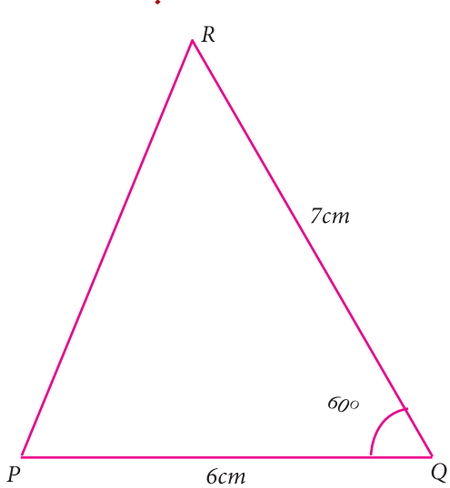


کچا خاکہ

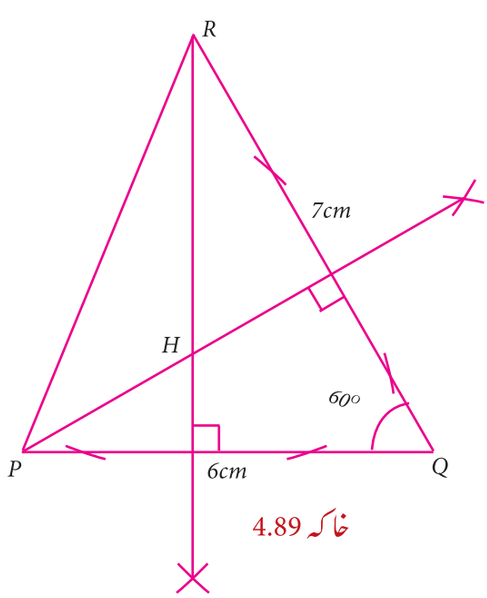
حل

مرحلہ 1:

دی گئی پیمائشوں کی مدد سے ΔPQR تصنیف کیجئے۔



خاکہ 4.88



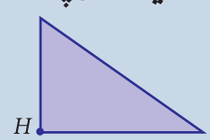
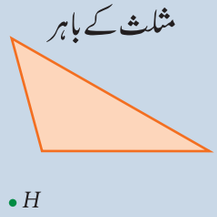
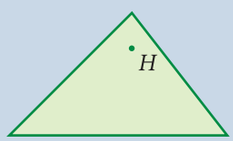
خاکہ 4.89

مرحلہ 2 : کسی دو راسوں (Vertices) R اور P سے ان کے مقابل ضلعوں کو PQ اور QR عمودیں بنائیں۔ ان دونوں عمودوں کو قطع کرنے والا نقطہ H ہے۔ یہی ΔPQR کا عمودی مرکز ہوگا۔

9 maths 4 geometry 138
Wednesday, March 13, 2019 4:04:10 PM

غور کیجئے

دیئے گئے مثلثوں میں عمودی مرکز کہاں واقع ہیں ؟

مثلث حادہ	مثلث منفرجہ	مثلث قائمہ	
قائمہ الزاویہ کے راس پر	مثلث کے باہر	مثلث کے اندر	عمودی مرکز
			

مشق 4.5

1۔ ΔLMN تصنیف کیجئے اس طرح سے سمر $MN = 5$، سمر $LM = 7.5$ اور سمر $LN = 8$ ہے۔ ہندسی مرکز نشان کیجئے۔

2۔ ΔABC کے ہندسی مرکز کی تصنیف اور نشان کیجئے یہاں A پر زاویہ قائمہ ہے۔ سمر $AB = 4$ اور سمر $AC = 3$ ہے۔

3۔ ایک ΔABC تصنیف کیجئے جس میں سمر $AB = 6$، $\angle B = 110^\circ$ اور سمر $AC = 9$ ہوں اور ہندسی مرکز نشان کیجئے۔

4۔ ΔPQR تصنیف کیجئے اس طرح سے سمر $PQ = 5$، سمر $PR = 6$ اور $\angle QPR = 60^\circ$ ہے اور ہندسی مرکز نشان کیجئے۔

5 ۔ ایک مثلث PQR تصنیف کیجئے جس کے اضلاع سمر $PQ = 7$، سمر $QR = 8$، اور سمر $PR = 5$ ہوں۔
اس کا عمودی مرکز نشان کیجئے۔

6 ۔ ایک مثلث مساوی الاضلاع تصنیف کیجئے جس کے اضلاع سمر 6.5 ہوں۔ اس کا عمودی مرکز نشان کیجئے۔

7 ۔ ایک مثلث ABC تصنیف کیجئے جس میں سمر $AB = 6$، $\angle B = 110^\circ$ اور سمر $BC = 5$ ہوں۔ عمودی مرکز نشان کیجئے۔

8 ۔ ایک مثلث قائمۃ الزاویہ PQR تصنیف کیجئے جس میں سمر $PQ = 4.5$، سمر $QR = 6$، اور سمر $PR = 7.5$ ہوں۔
عمودی مرکز نشان کریں۔

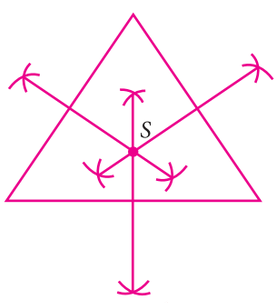
4.7.3 کسی مثلث کے حائط دائرے کی تصنیف

حائط مرکز (Circumcentre)

کسی مثلث کے ضلعوں کے عمودی ناصفوں کا نقطۂ ارتکاز (Point of concurrency) ہی حائط مرکز کہلاتا ہے۔ اس کو S سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

حائط دائرہ (Cirumcircle)

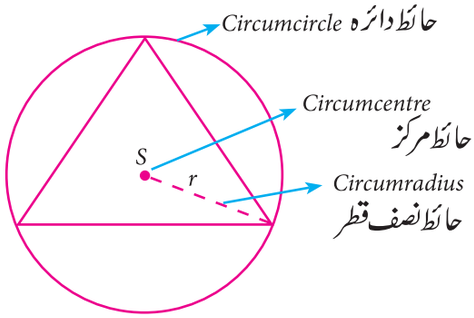
(حائط مرکز) کو مرکز مان کر بنایا جانے والا دائرہ جو مثلث کے تینوں راسوں سے گزرتا ہے، حائط دائرہ کہلاتا ہے۔



9 maths 4 geometry 138
Wednesday, March 13, 2019 4:04:10 PM

حائط نصف قطر (Circumradius)

حائط مرکز S اور حائط دائرہ کے محیط پر کسی بھی نقطہ کا فاصلہ ہی حائط نصف قطر کہلاتا ہے۔



خاکہ 4.91

کارروائی 11

مقصد : کاغذ کو تہہ کر کے ایک قطاع خط کا عمودی ناصف بنانا۔

طریقہ : کاغذ کو تہہ کر کے ایک قطاع خط کی لکیر نشان بنائیے اور اُس کو PQ نام دیں۔ قطاع خط کو اس طرح تہہ کیجئے کہ P اور Q ایک دوسرے پر منطبق ہوں اور اس طرح ایک لکیر RS بنے۔ یہ خط RS عمود ناصف PQ پر۔

کارروائی 12

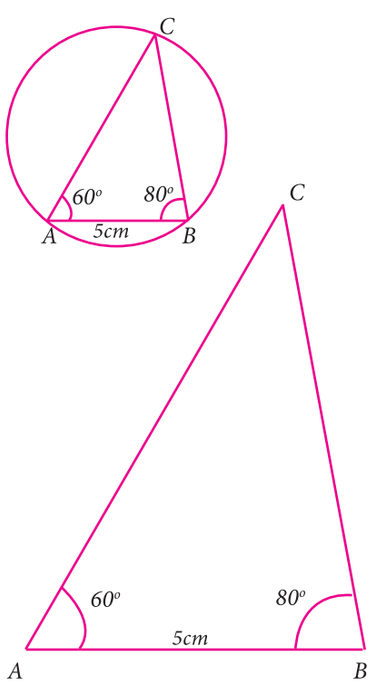
مقصد : کاغذ کو تہہ کر کے کسی مثلث کا حائط مرکز معلوم کرنا۔

طریقہ : کارروائی 2 کو استعمال کرتے ہوئے دیئے گئے مثلث کے کسی دو ضلعوں کو عمودی ناصف معلوم کیجئے ان تہہ کردہ نشانوں کے ملنے کی جگہ ہی اس مثلث کا حائط مرکز ہے۔

مثال 4.14

ایک مثلث ABC کے حائط مرکز کی تصنیف کیجئے جس میں سم AB = 5، $\angle A=60^\circ$ اور $\angle B = 80^\circ$ حائط دائرہ بھی تصنیف کیجئے اور ΔABC کا حائط نصف قطر معلوم کیجئے۔

حل



کچّا خاکہ

مرحلہ 1

دی گئی پیمائشوں کی مدد سے ABC تصنیف کیجئے۔

مرحلہ 2

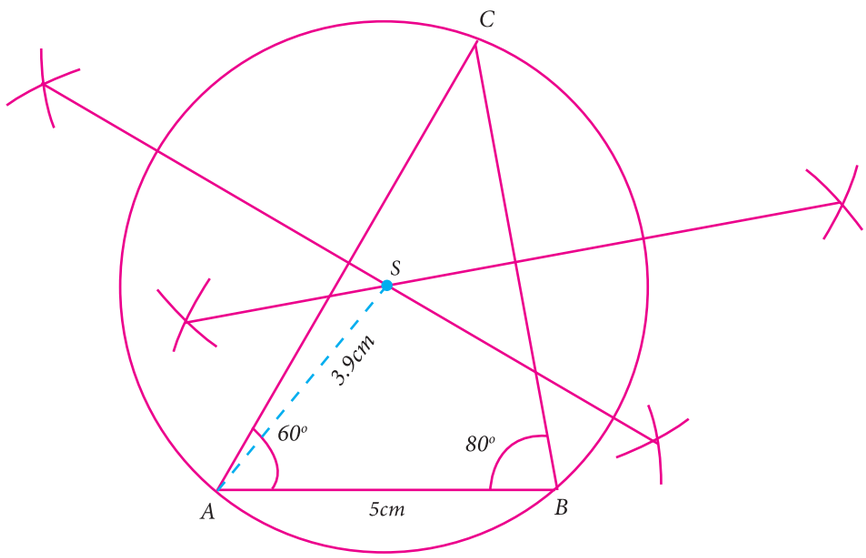
مثلث کے کسی دو ضلعوں پر عمودی ناصف تصنیف کیجئے (AC اور BC) اور یہ S پر قطع کریں گے۔ یہی اس مثلث کا حائط مرکز ہوگا۔

مرحلہ 3

S کو مرکز مان کر SA = SB = SC کو نصف قطر مان کر حائط دائرہ اس طرح بنائیے کہ وہ A,B اور C سے گزرے

حائط نصف قطر = 3.9 سم

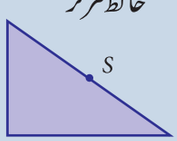
9 maths 4 geometry 138
Wednesday, March 13, 2019 4:04:11 PM



خاکہ 4.93

غور کیجئے

دیئے گئے مثلثوں میں حائط مرکز کہاں واقع ہیں ؟

	مثلث حادہ	مثلث منفرجہ	مثلث قائمہ
حائط مرکز	حائط مرکز 	مثلث کے باہر 	مثلث کے اندر 

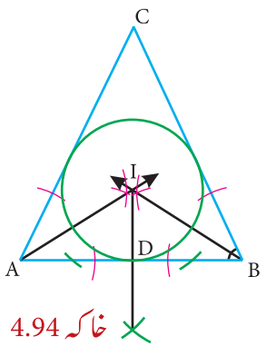
4.7.4 کسی مثلث کے درون دائرے کی تصنیف

(Construction of the Incircle of a Triangle)

درون مرکز (Incircle)

(ایک مثلث کا نقطۂ ارتکاز) مثلث کے تین زاویائی ناصفوں کے تقاطع کو درون مرکز کہتے ہیں۔

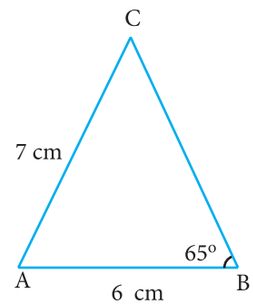
ایک مثلث کے زاویوں کے زاویائی ناصف ایک نقطہ پر مرتکز ہیں تو اس نقطہ کو مثلث کا درون مرکز کہا جاتا ہے اور اس کو حرف I سے تعبیر کرتے ہیں۔



خاکہ 4.94

مثال 4.15

ایک مثلث ABC کے درون مرکز کی تصنیف کیجئے جس میں $AB = 6cm$، $\angle B = 65^\circ$ اور $AC = 7cm$ درون دائرہ بھی تصنیف کیجئے اور اس کا نصف قطر ناپئے۔

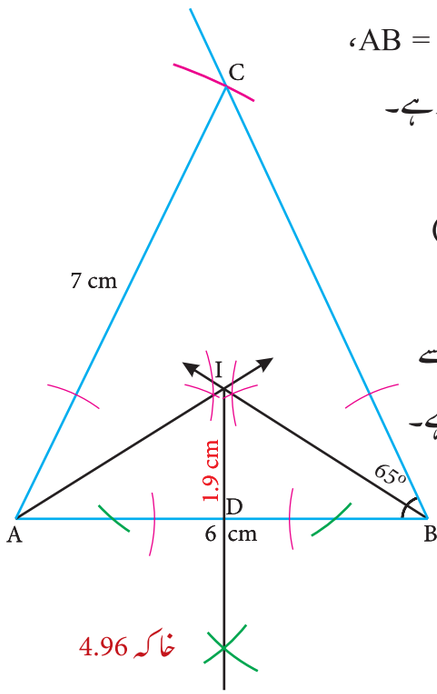


حل : کچا خاکہ/خام خاکہ

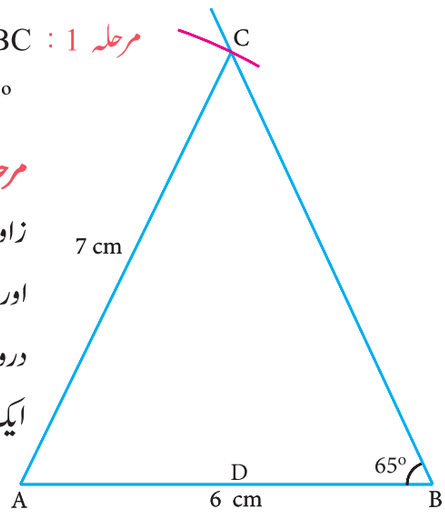
9 maths 4 geometry 138
Wednesday, March 13, 2019 4:04:11 PM

مرحلہ 1 : ΔABC تصنیف کیجئے جس میں $AB = 6cm$،
$\angle B = 65^\circ$ اور $AC = 7cm$ ہے۔

مرحلہ 2 : مثلث کے کسی دوضلعوں پر
زاویائی ناصف تصنیف کیجئے (A اور B)
اور یہ I پر قطع کریں گے۔ ΔABC کا
درون مرکز I ہے۔ ضلع (AB) کو I سے
ایک عمود کھینچئے جو AB کو D پر ملتا ہے۔



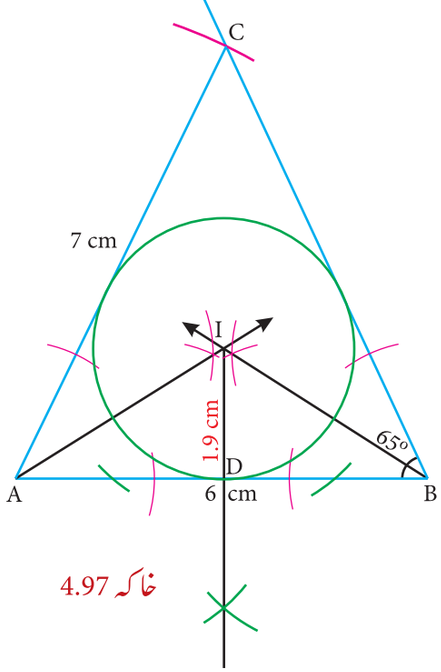
خاکہ 4.96



خاکہ 4.95

مرحلہ 3 : I کو مرکز بنا کر ID نصف قطر لے کر ایک دائرہ کھینچئے
یہ اندرونی دائرہ مثلث کے تمام ضلعوں کو اندرنی جانب چھوتے ہیں۔

مرحلہ 4 : دروں نصف قطر ناپئے۔
درون نصف قطر = 1.9 سمر



خاکہ 4.97

مشق 4.6

1۔ ایک مثلث ABC کی تصنیف کیجئے جس میں سمر $AB=8$۔ سمر $BC=6$ اور $\angle B = 70^\circ$ ہو۔ اس کے حائط مرکز کی نشاندہی کیجئے اور حائط دائرہ تصنیف کیجئے۔

2۔ ایک مثلث PQR تصنیف کیجئے جس کے عمودی ضلعے سمر 4.5 اور سمر 6 ہیں۔ اس کے حائط مرکز کی نشاندہی کیجئے۔ اور حائط دائرہ تصنیف کیجئے۔

3۔ ایک مثلث ABC تصنیف کیجئے جس میں سمر $AB=5$، $\angle B=100^\circ$ اور سمر $BC=6$ ہو۔ اس حائط مرکز کی نشاندہی کیجئے۔ اور حائط دائرہ تصنیف کیجئے۔

4۔ ایک مثلث مساوی الساقین PQR تصنیف کیجئے۔ جس میں $PQ=PR$ اور $\angle Q=50^\circ$، سمر $QR=7$ ہوں حائط دائرہ بھی تصنیف کیجئے۔

5۔ ایک مثلث مساوی الاضلاع تصنیف کیجئے جس کے اضلاع سمر 6.5 ہوں۔ اس کا درون مرکز نشان کیجئے اور درون دائرہ بھی کھینچئے۔

9 maths 4 geometry 138
Wednesday, March 13, 2019 4:04:11 PM

6 ۔ ایک مثلث قائمۃ الزاویہ تصنیف کیجئے جس کا وتر 10 سم اور ایک لمبائی 8 سم ہے۔ اسکا درون مرکز نشان کیجئے اور درون دائرہ بھی کھینچئے۔

7 ۔ ΔABC تصنیف کیجئے دیا گیا ہے۔ سم $AB = 9$، $\angle CAB = 115^{\circ}$ اور $\Delta ABC = 40^{\circ}$، اس کا درون مرکز نشان کیجئے اور دروں دائرہ کھینچئے۔

(نوٹ : تم اوپر کی مثالوں سے یہ جانچ کروگے ایک مثلث کا دروں مرکز ہمیشہ اندرونی ہے۔)

8 ۔ ΔABC تصنیف کیجئے جس میں سم $AB = BC = 6$ اور $\angle B = 80^{\circ}$ ہے۔ درون مرکز نشان کیجئے اور درون دائرہ بھی کھینچئے۔

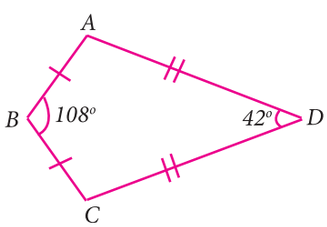
مشق 4.7

معروضی سوالات Multiple Choose Questions

1 ۔ مثلث کا خارجی زاویہ مساوی ہوگا، ان دونوں کے حاصل جمع سے

a) خارجی زاویہ b) مقابل کے اندرونی زاویے c) متبادل زاویے d) اندرونی زاویے

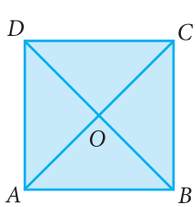
2 ۔ ایک چار ضلعی ABCD میں، $AB=CD$ اور $AD=DC$، $\angle BCD$ کی لمبائی پیمائش کیا ہے۔



(a) 150° (b) 30°

(c) 105° (d) 72°

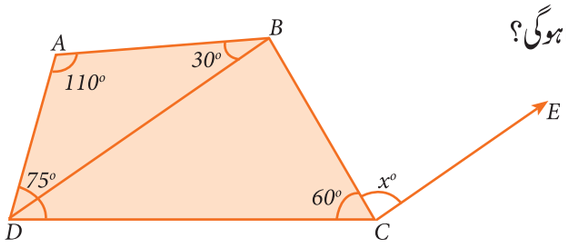
3 ۔ ABCD ایک مربع ہے AC اور BO اس کی وتریں ہیں جو 'O' پر قطع کرتے ہیں۔ متماثل جوڑیوں کی تعداد کیا ہے؟



(a) 6 (b) 8

(c) 4 (d) 12

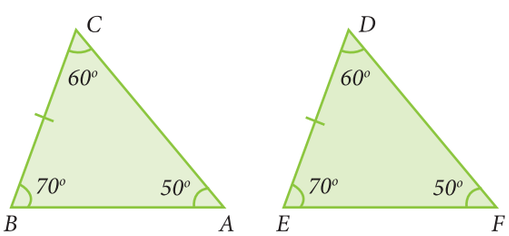
4 ۔ دیئے گئے نقشہ میں $CE \| DB$ ہے تو x° قیمت کیا ہوگی؟



(a) 45° (b) 30°

(c) 75° (d) 85°

5 ۔ درج ذیل میں کونسا بیان صحیح ہے۔



(a) $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (b) $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

(c) $\Delta ABC \cong \Delta FDE$ (d) $\Delta ABC \cong \Delta FED$

6۔ اگر معین کے وتریں مساوی ہو تو، معین اس طرح ہوگا

a) متوازی الاضلاع ہوگا لیکن ایک مستطیل نہیں c) مربع

b) مستطیل ہوگا لیکن مربع نہیں d) متوازی الاضلاع ہوگا لیکن مربع نہیں

9 maths 4 geometry 138
Wednesday, March 13, 2019 4:04:12 PM

7۔ اگرایک چارضلعی ABCD میں ∠A اور ∠B تصنیف کرکے 'O' پر قطع کرتے ہیں۔تب ∠AOB ہے۔

(a) $\angle C + \angle D$ (b) $\frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$

(c) $\frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{3}\angle D$ (d) $\frac{1}{3}\angle C + \frac{1}{2}\angle D$

8۔ متوازی الاضلاع کا اندرونی زاویہ 90° کا ہوگا تو متوازی الاضلاع ایک .....

a) معین b) مستطیل c) منحرف d) پتنگ

9۔ درج ذیل میں کونسا بیان صحیح ہے؟

a) ایک متوازی الاضلاع کے مقابل زاویے مساوی نہیں ہیں۔

b) ایک متوازی الاضلاع کے متصل زاویے، مکملہ ہیں۔

c) ایک متوازی الاضلاع کی وتریں ہمیشہ مساوی ہوتی ہیں۔

d) ایک متوازی الاضلاع کے مقابل اضلاع کی جوڑیاں مساوی ہوتی ہیں۔

10۔ مثلث کے زاویے $3x-40$، $x+20$ اور $2x-10$ ہیں۔ x کی قیمت کیا ہوگی؟

a) 40° b) 35° c) 50° d) 45°

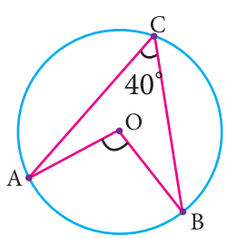
11۔ PQ اور RS دو مساوی وتر ہیں۔جن کا مرکز O ہے اس طرح کے ∠POQ = 70° تب ∠ORS =

(1) 60° (2) 70° (3) 55° (4) 80°

12۔ ایک وتر دائرے کے مرکز سے 15 سم دور واقع ہے اور دائرے کا نصف قطر 25 سم ہے وتر کا طول

(1) 25cm (2) 20cm (3) 40cm (4) 18cm

13۔ خاکے میں O دائرے کا مرکز ہے اور ∠ACB = 40° تب ..... ∠AOB =



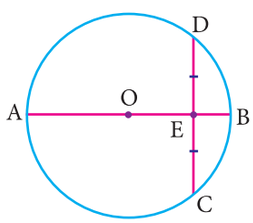
(1) 80° (2) 85° (3) 70° (4) 65°

14۔ ایک مدور چارضلعی ABCD میں ∠A = 4x، ∠C = 2x ہو تو x کی قیمت

(1) 30° (2) 20° (3) 15° (4) 25°

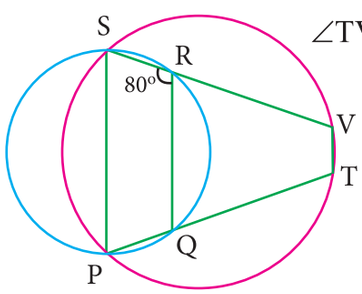
15۔ خاکے میں O ایک دائرے کا مرکز ہے۔قطر AB وتر CD کو نقطہ E پر ناصف ہے

اس طرح کہ سم CE = ED = 8 اور سم EB = 4 ہے۔دائرے کا نصف قطر ہے۔



(1) 8cm (2) 4cm (3) 6cm (4)10cm

16۔ خاکے میں PQRS اور PTVS دو مدوّر چارضلعی ہیں۔اگر ∠QRS = 80° تب ∠TVS =



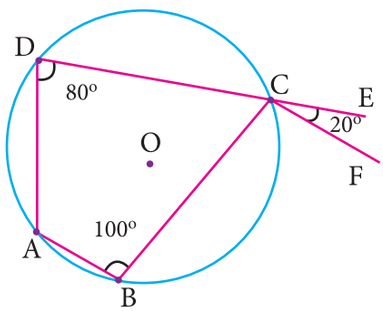
(1) 80° (2) 100° (3) 70° (4) 90°

17۔ اگر مدوّر چارضلعی میں ایک زاویہ 75° ہے ہے۔اس کا مقابل زاویہ

(1) 100° (2) 105° (3) 85° (4) 90°

9 maths 4 geometry 138
Wednesday, March 13, 2019 4:04:12 PM

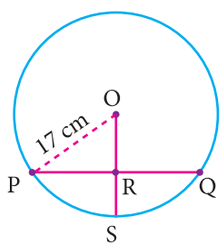
18۔ خاکے میں ABCD ایک مدور چار ضلعی ہے۔ DC کو E تک دراز کیا گیا ہے اور AB کے متوازی CF کھینچا گیا ہے۔ اس طرح کہ $\angle ADC = 80^o$ اور $\angle ECF = 20^o$ ہے تب؟ $\angle BAD = ?$



(1) 100° (2) 20°

(3) 120° (4) 110°

19۔ ایک دائرے کا قطر AD اور وتر AB ہے۔ اگر سم AD = 30 اور سم AB = 24 تب دائرے کے مرکز سے AB تک کا فاصلہ



(1) 10cm (2) 9cm (3) 8cm (4) 6cm.

20۔ دیے گئے خاکے میں اگر سم OP = 17، سم PQ = 30 اور OS عمود ہے PQ پر تو RS ..... ہے۔

(1) 10cm (2) 6cm (3) 7cm (4) 9cm.

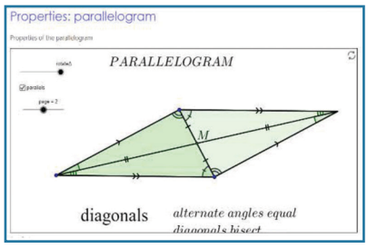
یاد رکھنے کے نکات

- ایک متوازی الاضلاع میں مقابل کے اضلاع مساوی ہوتے ہیں۔
- ایک متوازی الاضلاع میں مقابل کے زاویے مساوی ہوتے ہیں۔
- ایک متوازی الاضلاع کے وتریں ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔
- متوازی الاضلاع کا ہر وتر اس کو دو متماثل مثلثوں میں تقسیم کرتا ہے۔
- ایک چار ضلعی کے مقابل کے اضلاع مساوی ہو تو یہ متوازی الاضلاع ہے۔
- ایک ہی قاعدہ رکھنے والے متوازی الاضلاع رقبوں میں مساوی ہوتے ہیں۔
- ایک متوازی الاضلاع کا وتر عمود ناصف ہو تو وہ شکل معین ہے۔
- تین غیر ہم خطی نقاط سے ایک اور صرف ایک دائرہ گذرتا ہے۔
- دائرے کے مساوی وتریں مرکز پر مساوی زاویے بناتے ہیں۔
- دائرے کے مرکز سے بننے والا عمودِ ناصف وتر کی تصنیف کرتا ہے۔
- دائرے کے مساوی وتر، مرکز سے مساوی فاصلہ رکھتے ہیں۔
- ایک قوس کے ذریعے مرکز پر بننے والا زاویہ، دائرے کے قوس کے باقی حصّے پر کسی بھی جگہ ایک نقطہ پر بنائے جانے والے زاویہ سے دوگنا ہوگا۔
- نصف دائرے میں زاویہ، زاویہ قائمہ ہوتا ہے۔
- دائرے کے ایک ہی قوس پر بننے والے زاویے مساوی ہوتے ہیں۔
- ایک مدور چار ضلعی میں کوئی بھی مقابل زاویوں کا جوڑ کا مجموعہ 180° ہوتا ہے۔
- مدور چار ضلعی میں کسی ایک ضلع کے دراز پر بننے والا خارجی زاویہ داخلی مقابل زاویے کے مساوی ہوتا ہے۔

9 maths 4 geometry 138
Wednesday, March 13, 2019 4:04:12 PM

ICT Corner -1

متوقع نتیجہ اس تصویر میں دکھائی گئی ہے۔



مرحلہ 1 : براؤزر کھولئے اور دئے گئے لنک کو کاپی اور پیسٹ کیجئے یا دئے گئے URL کو ٹائپ کیجئے یا دئے گئے QR کوڈ کو اسکین کیجئے۔

مرحلہ 2 : GeoGebra Worksheet نامی "Properties Parallelogram" کھلے گا۔ اس میں Rotate اور Page نامی دو سلائڈر موجود ہیں۔

مرحلہ 3 : Rotate نامی سلائڈر کو کھینچئے اور دیکھئے کہ مثلث دوہرا ہو کر متوازی الاضلاع بن جاتا ہے۔

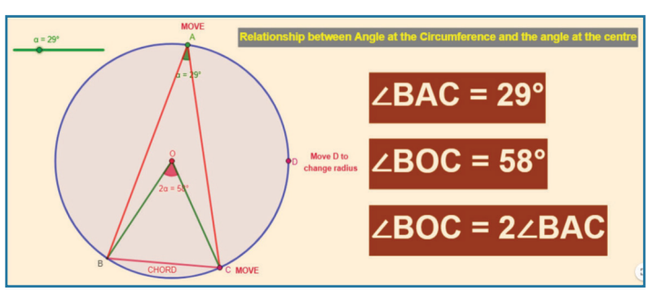
مرحلہ 4 : Page نامی کھینچئے کو کھینچئے اور اس میں تین صفحات کھلیں گے جس میں اس کی خصوصیات کی وضاحت کی گئی ہے۔

Browse in the link

Properties: Parallelogram: https://www.geogebra.org/m/m9Q2QpWD

ICT Corner -2

متوقع نتیجہ اس تصویر میں دکھایا گیا ہے۔



مرحلہ 1 : براؤزر کھولئے اور دئے گئے لنک URL کو ٹائپ کیجئے یا دئے گئے QR کوڈ کو اسکین کیجئے

"Angles in a Circle" نامی Geo Gebra ورک شیٹ کو کھولیں۔ اس ورک شیٹ میں دائروں کے درکار کارروائیاں موجود ہیں۔ پہلی کارروائی مرکز کا زاویہ اور محیط کے زاویے درمیان تعلق ہے۔ زاویہ کو تبدیل کرنے کے لئے Slider کو کھینچئے۔ نصف قطر اور نقطہ A,C اور D کو تبدیل کرنے کے لئے Slider کو کھینچئے زاویئے O اور A کا موازنہ کریں۔

مرحلہ 2 : دوسرا کارروائی "Angles in the segment of a circle" ہے۔ B اور Slider D کھینچئے اور زاویئے کو جانچئے۔ اور Slider کو تبدیل کر کے ایک دائرے کا وتر کا طول اور نصف قطر کو کھینچئے۔

Browse in the link

Angle in a circle: https://ggbm.at/yaNUhv9S or Scan the QR Code.

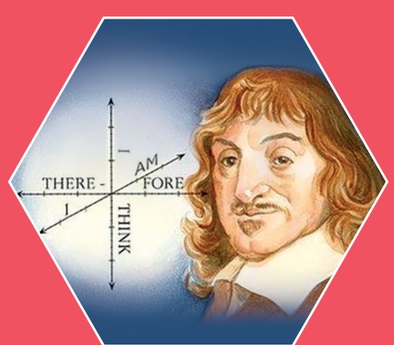
9 maths 4 geometry 138
Wednesday, March 13, 2019 4:04:13 PM

5

محددی علمِ ہندسہ

(COORDINATE GEOMETRY)

Divide each difficulty into as many parts as is feasible and necessary to resolve it. - Rene Descartes



Rene Descartes
(AD(CE)1596-1650)

فرانسیسی ریاضی دان رینی دیکارٹ (Rene Descartes) ("Day-CART" پڑھیں) نے علم ریاضی کی ایک نئی شاخ سے محددوں کا علمِ ہندسہ یا تحلیلی علمِ ہندسہ کی تشکیل دی۔ جس میں قدیم زمانے کے حساب، الجبراء، علمِ ہندسہ کو ترسیم پر نقاط اور مساوات کے ذریعے علم ہندسہ کے نمونوں کو ایک واحد طریقے سے پیش کیا۔ مسطح مستوی میں دو اعداد اور محددوں سے ایک نقطہ کا مقام متعین کرنا، اسی طرح دو عمودی خطوط کے درمیان نقاط کا فاصلہ معلوم کرنا، سب انہیں کی مرہون منت ہے۔

- کارتیسی محددی نظام کو سمجھنا
- x محور (abscissa)، y محور (Ordinate) اور کسی دئے گئے نقاط کے محددوں کو پہچاننا۔
- ضابطہ کو استعمال کر کے کارتیسی محددی نظام میں دئے گئے دو نقاط کا درمیانی فاصلہ معلوم کرنا۔
- وسطی نقطہ کے ضابطہ کو سمجھنا اور حسابات حل کرنے کے لئے اُس کو استعمال کرنا۔
- حصہ کا ضابطہ کو اخذ کرنا اور اِس کے استعمال سے حسابات حل کرنا۔
- ہندسی مرکز کے ضابطہ کو سمجھنا اور اس کے استعمالات کو جاننا۔

5.1 مسطح کی خاکہ نگاری (پتہ لگانا) (Mapping the plane)

آپ کس طرح اپنے گھر کا پتہ لکھیں گے؟ مثال کے طور پر

Sarakkalvilai Primary School
135, Sarakkalvilai,
Sarakkalvilai Housing Board Road,
Keezha Sarakkalvilai,
Nagercoil 629002, Kanyakumari Dist.
Tamil Nadu, India.

9 maths 5 co-ord geo 17
Wednesday, March 13, 2019 4:57:36 PM

دنیا کے کسی بھی حصّے سے اسکول کا پتہ معلوم کرنے کے لئے یہ جانکاری کافی ہے۔ دنیا میں کروڑوں عمارتیں ہیں۔ مگر پھر بھی ہم کسی کا پتہ جاننے کے لئے پتہ کا نظام (Address System) کا استعمال کر کے ہم ان کا پتہ حاصل کر سکتے ہیں چاہے وہ کسی بھی کونے میں ہو۔



خاکہ 5.1

یہ کیسے ممکن ہے؟ آیئے ایک خاص پتہ کو جاننے کا طریقہ سیکھتے ہیں۔ ہم جانتے ہیں کہ دنیا کئی ملکوں میں تقسیم ہے، اس میں سے ایک ہندوستان ہے۔ اور پھر ہندوستان کو کئی ریاستوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ ان میں سے ایک ریاست تملناڈو ہے اور بھی گہرائی سے دیکھیں تو ہماری ریاست کئی ضلعوں میں تقسیم ہے۔ آگے ضلع تعلق میں اور تعلق قریوں میں اسی طرح سے آگے بڑھتے ہوئے آسانی کے ساتھ "Sarakkalvilai" کا پتہ تعلق کے قریہ میں تلاش کر سکتے ہیں۔ پھر اس قریہ کے سڑکوں میں "Housing Board Road" مخصوص سڑک کا پتہ چلتا ہے۔ آخر کار اس پتہ کی تلاش ہمیں معلوم ہوتا ہے۔ مکان نمبر 135 "Government Primary School" کی عمارت اس سڑک کے عمارتوں میں سے ملتی ہے۔

USA کے نیویارک شہر میں "Manhattan" نامی علاقہ موجود ہے۔ شمالی، جنوبی، مغربی سمت میں راہیں (Avenues) اور مشرقی، مغربی سمت میں سڑکوں کا پتہ چلتا ہے۔ اس لئے، اگر آپ جانتے ہیں کہ آپ جو جگہ تلاش کر رہے ہیں۔ وہ 9 ویں اور 10 ویں گلیوں درمیان 57 ویں گلی میں موجود ہے۔ اسے آپ آسانی کے ساتھ میپ میں معلوم کر سکتے ہیں۔ اسی طرح سے 34 ویں اور 35 ویں گلیوں کے درمیان 2 ویں راہ کے کسی جگہ کو بھی آپ آسانی کے ساتھ معلوم کر سکتے ہیں۔ درحقیقت، نیویارک والے اسے اور بھی آسان کر چکے ہیں۔ گلی کے گھر کے دروازے کے نمبر سے یہ کونسی راہ پر ہے، یہ پتہ کر سکتے ہیں اور پھر راہ کے گھر کے دروازے کے نمبر کے ذریعے، آپ یہ پتہ کر سکتے ہیں کہ یہ کن گلیوں کے درمیان میں ہے۔



خاکہ 5.2

تمام میپ (نقشے) اسی کام کے لئے استعمال ہوتے ہیں۔ یہ ہمیں راستے معلوم کرنے اور کسی نشان (Landmark) جو ہمارے مقام کے قریب ہو اس کے اطلاع کے ذریعے سے ہمارے مقام کا پتہ تلاش کرنے اور یہ سمجھنے کہ وہ قریب ہے یا دور ہے یا درمیان میں کیا ہیں؟ وغیرہ۔ زمین کے کسی حصہ کو تلاش کرنے کے لئے ہم طول البلد (مشرق، مغرب جیسے Manhattan میں گلیاں) اور ارض البلد (شمال، جنوب،

9 maths 5 co-ord geo 17
Wednesday, March 13, 2019 4:57:38 PM

جیسے Manhattan میں راہیں) استعمال کرتے ہیں۔ یہ دلچسپ بات ہے کہ میپ میں اعداد کو استعمال کرتے ہوئے ہمیں مدد کیسے ملتی ہے۔

اعداد کے استعمال سے میپ کے مقامات معلوم کرنے کی ترکیب علمِ ہندسہ سے ہی لی گئی ہے۔ ریاضی دان تمام قسم کے سطح، ٹھوس اور نمونوں کے لئے میپ بنانا چاہتے تھے۔ وہ کیوں اس طرح میپ چاہتے تھے؟ جب ہم کسی علم ہندسہ کے نمونہ کے بارے میں پڑھیں تو ہم یہ غور کرتے ہیں کہ ایک نقطہ اس کے اندرونی حصّے میں یا بیرونی یا اس کے احاطے پر ہے۔ اگر دو نقاط احاطے پر اور ایک نقطہ بیرونی حصّے میں دئے گئے ہوں تو ہم یہ معلوم کرتے ہیں کہ احاطے کے دو نقاط میں سے کونسا نقطہ بیرونی نقطہ کے قریب ہے وغیرہ۔ ٹھوس شکل جیسے معکب کو لے کر ان جیسے سوالات کتنے دلچسپ اور مشکل ہو سکتے ہیں۔ ریاضی دان کرّے، کثیر ضلعی، دائرے کے بارے میں صرف خود کو سمجھانے کے لئے ان جیسے سوالات کو لے کر انہیں حل کرتے تھے۔ مگر ریاضی آلات اور ٹکنیک (Techniques) کو روزمرہ کے استعمالات کو معلوم کرنے کے استعمال کئے گئے۔ اگر 17 ویں صدی میں علم ریاضی کے محددی نظام کی ترقی نہیں ہوئی ہوتی تو 18 ویں صدی میں دنیا کے نقشے (میپ) میں طول البلد اور ارض البلد کا استعمال نہیں ہوا ہوتا۔

ہمیں پہلے ہی سے پتہ ہے کہ حقیقی عددی نظام کا نقشہ ایک عددی خط ہے۔ جس کے دونوں کنارے لامحدود ہوتے ہیں۔ ایک خط کے کوئی دو نقاط کے درمیان لامحدود نقاط موجود ہیں۔ اب ہم مستوی سطح پر میپ بنانے جا رہے ہیں۔ جس سے ہم مستوی سطح پر نقاط کے بارے میں بحث کر سکتے ہیں، انکے درمیانی فاصلے کے بارے میں بات کر سکتے ہیں وغیرہ۔ پھر ہم مختصراً بحث کئے گئے تمام علم ہندسہ کے نمونوں کو سطح پر نقشہ کھینچ سکتے ہیں۔ ان اعداد کے ذریعے سے ہم دنیا کے اعداد اور ان پر اعمال کا تعارف ملتا ہے۔ الجبراء کے ذریعے ہم نا معلوم قیمتوں کو مساوات کے ذریعے معلوم کرنا سیکھتے ہیں۔ علم ہندسہ کے ذریعے ہم نمونے اور ان کی خصوصیات کو سیکھتے ہیں۔ محددی علم ہندسہ کے ذریعے علم ہندسہ کے مطالعہ کے لئے اعداد اور الجبریائی مساوات کے استعمال اور مختلف ترکیبوں کے مجموعوں کو ایک جگہ جمع کرنے کو سیکھتے ہیں۔ ایک طریقے سے یہ بھی ایک کارروائی کی طرح کا ایک دلچسپ کھیل ہے۔ کیا آپ انتظار نہیں کر سکتے؟ چلیں ایک غوطہ لگائیں۔

5.2 محددی نظام کو متعین کرنا
(Devising a co-ordinate System)

آپ اپنے دوست سے کاغذ کے ایک خالی پرچہ پر ایک مستطیل 5 سمر سے 3 سمر کھینچنے کے لئے کہیں۔ وہ کہے گا۔ ''ہاں ضرور، مگر اس پرچے پر کہاں نقشہ کھینچوں؟ اس کا جواب آپ کیسے دو گے؟''

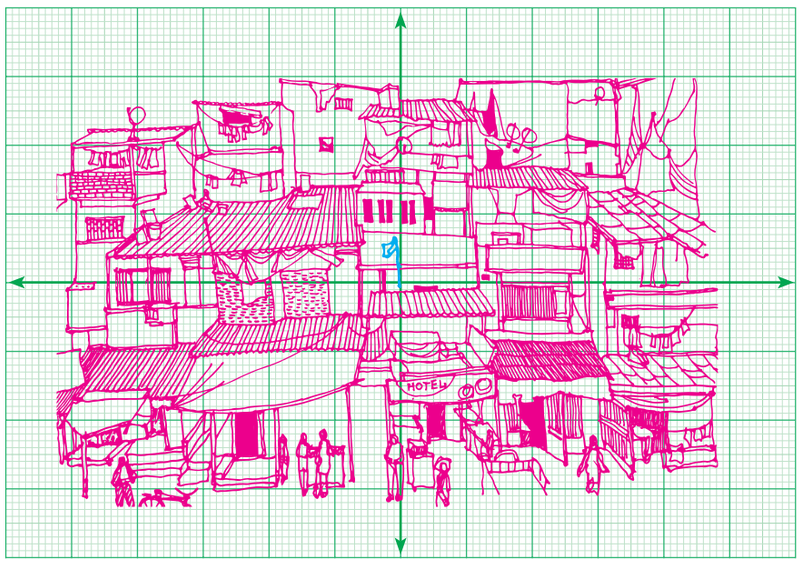


خاکہ 5.3

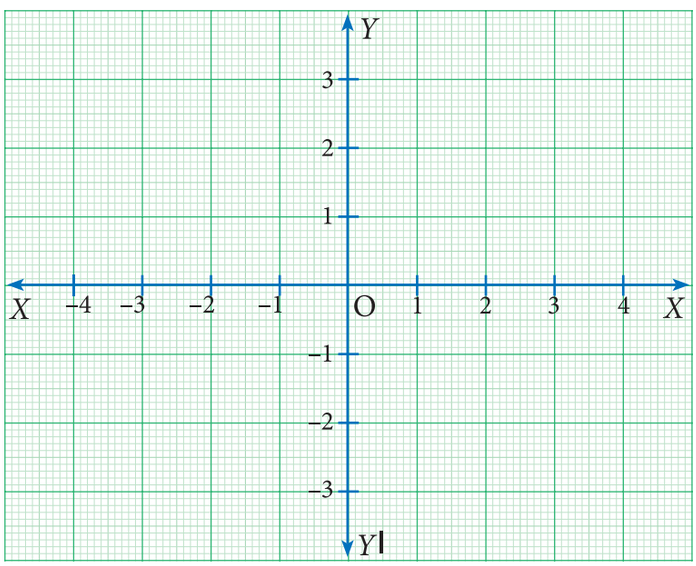
9 maths 5 co-ord geo 17
Wednesday, March 13, 2019 4:57:39 PM

اب اس تصویر کو دیکھئے۔ آپ اس کی وضاحت دوسرے شخص سے کیسے کروگے؟ دیئے گئے (خاکہ 5.3) تصویر کا تجزیہ کریں۔ اسی طرح سے اگر کسی مخصوص گھر کی نشاندہی کرنا ہو تو بہت مشکل ہوگا۔ اس کے بجائے، اگر کسی جگہ یا شئے کو شناخت کے لئے مقرر کر دیا جائے تو اس کے تعلق سے دوسرے جگہ یا شئے کی شناخت کرنا آسان ہوگا۔ مثال کے طور پر ایک جھنڈے کو مقرر کر کے کہیں۔ اس کے بائیں جانب گھر ہے۔ اس کے نیچے ہوٹل ہے۔ گھر کے اوپر کا اینٹینا (Antenna) جھنڈے کے دائیں جانب ہے۔ وغیرہ

خاکہ 5.4 میں دکھایا گیا ہے۔ دو عددی خطوط اس طرح کھینچئے کہ ان کے قاطع (Intersection) کے قریب جھنڈا ہو۔ اب آپ اپنے دوست کو اس تصویر کی لمبائی اور چوڑائی جھنڈے کو مقرر مقام (Landmark) مان کر بتا سکتے ہیں۔ آپ یہ بتا سکتے ہیں کہ 2 سمر دائیں جانب، 3 سمر اوپر وغیرہ۔ چنانچہ آپ سمتوں کو جانتے ہیں، آپ اس طرح بھی بتا سکتے ہیں۔ 2 سمر مشرق میں، 3 سمر شمال میں۔ یہ وہی ہے جو ہم کرنے جا رہے ہیں۔ عام طور پر عددی خط افقی خط کو ظاہر کرتا ہے جس میں ہمیشہ مثبت اعداد صفر کے دائیں جانب ہوتے ہیں۔ منفی اعداد صفر کے بائیں جانب ہوتے ہیں۔ اب اور ایک عدد خط کا نقل (Copy) لیں جو عمودی ہو۔ مثبت سالم اعداد صفر کے اوپر اور منفی سالم اعداد صفر کے نیچے ظاہر کریں (خاکہ 5.5)



خاکہ 5.4



خاکہ 5.5

یہ دو عددی خطوط کہاں ملتے ہیں؟ واضح طور پر دونوں خطوط صفر پر ملتے ہیں۔ یعنی مقررہ جگہ ''جھنڈے'' پر دونوں خطوط ملتے ہیں، اس کے تعلق سے دوسرے اعداد کے بارے میں بھی تبادلہ خیال کر سکتے ہیں۔

مگر دونوں عددی خطوط پر صرف اعداد کے بارے میں ہی نہیں بلکہ بہت کچھ سیکھ سکتے ہیں۔

فرض کریں کہ ہم دائیں جانب 2 اور اوپر کی جانب 3 پر آگے بڑھیں۔ اس مقام کو ہم $(\rightarrow 2, \uparrow 3)$ کہتے ہیں۔

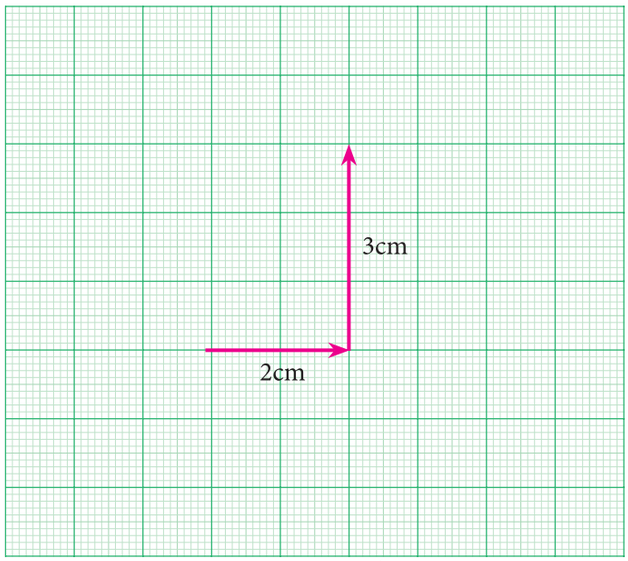
عمودی، افقی، اوپر، نیچے وغیرہ اظہار کرنے میں مشکل پیش آتی ہے۔ آسانی کے لئے ہم (2,3) کہیں گے اور اس سے مراد دائیں جانب 2 اور پھر اوپر کی جانب 3 ہے۔ غور کریں کہ اسی مقام پر پہنچنے کے لئے اگر پہلے اوپر کی جانب 3 اور پھر دائیں

9 maths 5 co-ord geo 17
Wednesday, March 13, 2019 4:57:40 PM

جانب 2 پر آگے بڑھیں تو (2,3) طریقے سے لکھنا (3,2) کے برابر نہیں ہوگا۔(–2,3) کے بات میں آپ کیا کہہ سکتے ہیں؟

اس سے مراد بائیں جانب 2 اور اوپر 3 مگر کہاں سے؟ ہمیشہ (0,0) سے (2,–3) کے بارے میں آپ کیا کہہ سکتے ہیں؟ اس سے مراد دائیں جانب 2 اور نیچے 3 ۔ہمیں افقی اور عمودی عددی خطوط کے لئے ناموں کی ضرورت ہے۔افقی عددی خط کو x محور اور عمودی عددی خط کو y محور کہتے ہیں۔دائیں جانب X سے اور بائیں جانب 'X سے نشاندہی کرتے ہیں۔اوراوپر Y سے اور نیچے 'Y سے نشاندہی کرتے ہیں۔

x محدود کو **حذف** (Abscissa) اور y محدّ د کو **معین** (coordinate) کہتے ہیں۔دونوں خطوط آپس میں (0,0) پر ملتے ہیں۔یہ مبداء کہلاتا ہے



خاکہ 5.6

اب ہم کسی نقطہ کو کاغذ کے ورق پر (x,y) جوڑی سے وضاحت کر سکتے ہیں ۔حالانکہ کاغذ پر (1,2) کا مطلب کیا ہے؟ ان اعداد کو ظاہر کرنے کے لئے کوئی آسان اکائی کا انتخاب کرنا چاہئے۔ مثال کے طور پر ہم 1 اکائی کے لئے 1 سمر لے سکتے ہیں ۔لہٰذا (2,3) سے مراد (0,0) کے دائیں جانب 2 سمر اور پھر اوپر کی جانب 3 سمر۔مہربانی فرما کر یاد رکھیں کہ اکائیوں کے انتخاب کے لئے کوئی قاعدہ نہیں۔اگر ہم 1 اکائی کے لئے 2 سمر لیں، تو نقشے بڑے ہوں گے،مگر فاصلے کے تعلق سے مساوی ہوں گے۔

غور کیجئے

یہ ضروری نہیں کہ (0,0) کو کاغذ کے مرکز پر نشان کریں یا کہیں اور نشان کریں،مگر (0,0) ہی ہمارے لئے ابتداء ہے اور تمام ''ہدایات'' "Instructions" اس نقطے سے ہی تعلق رکھتے ہیں۔عام طور سے ابتداء کو '0' حرف سے ظاہر کرتے ہیں۔

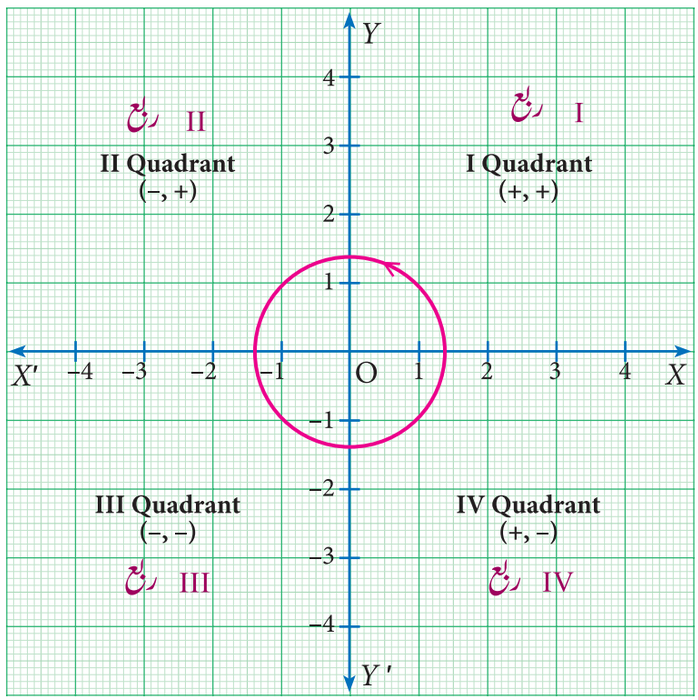
درحقیقت،صرف کاغذ پر ہی نہیں بلکہ مسطح (Plane) پر تمام لامحدود نقاط کو ظاہر کرنے کے لئے ہمارے یہاں ایک بہترین نظام ہے چونکہ x محور اور y محور مسطح کو چار حصّوں میں تقسیم کرتے ہیں۔اس لئے انہیں 'ربع' (Quadrants) کہتے ہیں۔(یاد رکھیں کہ چار ضلعی کے چار ضلع ،ربع سے مطلب 4 حصّے)۔ عام طور پر انہیں اعداد I، II، III اور IV سے ظاہر کرتے ہیں۔اوپر کے مشرقی ضلع کے لئے I، اوپر کے مغربی ضلع کے لئے II، نیچے کے مغربی ضلع کے لئے III اور نیچے کے مشرقی ضلع کے لئے IV،غرض ان تمام ربعوں کا سفر گھڑی کی مخالف سمت (غیر ساعت وار) (Anticlock wise) میں ہوتی ہے۔

غور کیجئے

یہ کیوں اس طرح (گھڑی کی مخالف سمت میں) اور گھڑی کی سمت کیوں نہیں؟ یا کسی اور ربع سے شروع کیوں نہیں کرتے؟ اس سے کوئی فرق نہیں پڑتا مگر آسانی کے لئے یہ اچھا طریقہ ہے۔اور یہی طریقہ کئی صدیوں سے اختیار کرتے آرہے ہیں۔

9 maths 5 co-ord geo 17
Wednesday, March 13, 2019 4:57:41 PM

حصّہ	ربع	x,y کی نوعیت	محددوں کے نشانات
XOY	I	$x>0, y>0$	(+,+)
$X'OY$	II	$x<0, y>0$	(–,+)
$X'OY'$	III	$x<0, y<0$	(–,–)
XOY'	IV	$x>0, y<0$	(+,–)



خاکہ 5.7

غور کیجئے

- x محور پر کسی نقطہ P کے لئے y محدد (معین) کی قیمت صفر ہے یعنی P $(x,0)$
- y محور پر کسی نقطہ Q کے لئے x محور (حدف) صفر ہے یعنی Q $(0,y)$
- $(x,y) \neq (y,n)$ جب تک $x = y$
- مستطیلی محددی نظام کے مستوی سطح کو کارتیسی مسطح کہتے ہیں۔(Cartesian Plane)

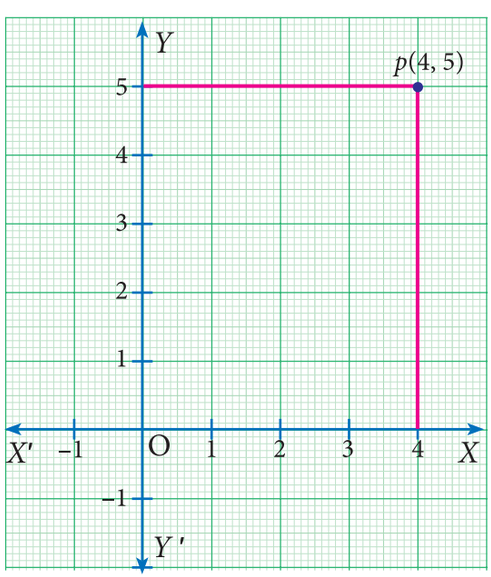
5.2.1 کارتیسی محددی نظام میں نقاط کو مرتسم (درج) کرنا
(Plotting Points in Cartesian Coordinate Plane)

کارتیسی محددی نظام میں نقطہ (4,5) کو درج کرنے کے لئے ہم x محور پر عدد 4 پر نشان کرنے کے لئے بعد ایک عمودی خط $x = 4$ کھینچیں۔

اسی طرح y محور پر عدد 5 پر نشان کرنے کے بعد ایک افقی خط $y=5$ کھینچیں۔ ان دونوں خطوط کا تقاطع نقطہ ہی (4,5) کارتیسی سطح میں اس کا مقام ہوگا۔

یہ نقطہ y محور سے 4 اکائیاں اور x محور سے 5 اکائیاں کے فاصلے پر ہے۔

لہٰذا کارتیسی سطح میں (4,5) نقطہ کا مقام متعین (مرتسم) کیا گیا۔



خاکہ 5.8

9 maths 5 co-ord geo 17
Wednesday, March 13, 2019 4:57:41 PM

مثال 5.1

مندرجہ ذیل نقاط کونسے ربع میں موجود ہیں؟

(a) (3,–8) (b) (–1,–3) (c) (2, 5) (d) (–7, 3)

حل :

(a) x محدد مثبت ہے اور y محدد منفی ہے۔اس لئے (3,–8) IV ربع میں موجود ہے۔

(b) x محدد منفی ہے اور y محدد مثبت ہے۔اس لئے (–1, –3) III ربع میں موجود ہے

(c) x محدد مثبت ہے اور y محدد مثبت ہے۔اس لئے (2,5) I اربع میں موجود ہے۔

(d) x محدد منفی ہے اور y محدد مثبت ہے۔اس لئے (–7,3) II ربع میں موجود ہے۔

مثال 5.2

نقاط $A(2,4),\ B(-3,5),\ C(-4,-5),\ D(4,-2)$ کارتیسی سطح پر نشان کیجئے۔

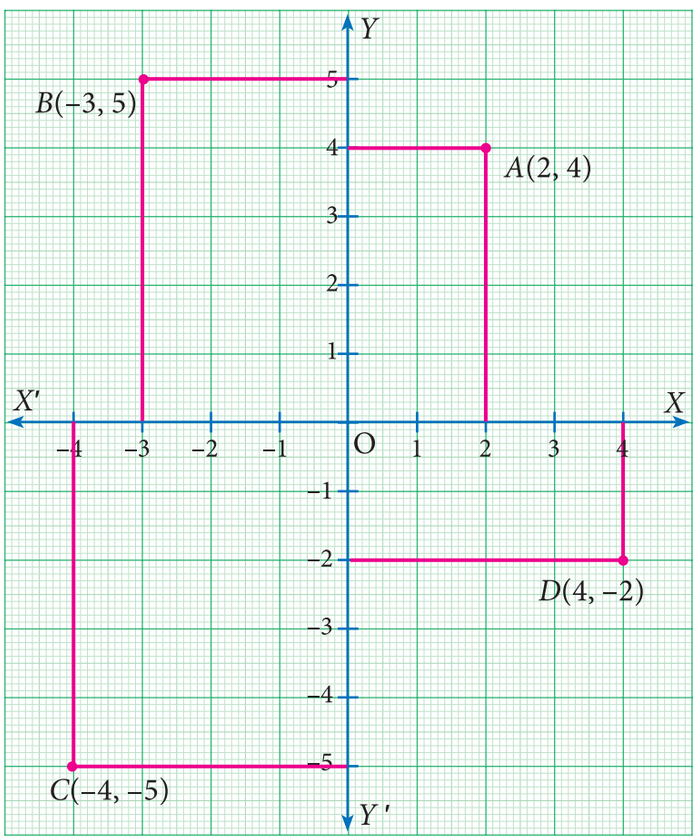


Fig. 5.9

حل :

(i) (2,4) کو درج کرنے کے لئے $x = 2$ پر ایک عمودی خط کھینچئے اور $y = 4$ پر ایک افقی خط کھینچئے۔ان دو خطوط کا نقطہ تقاطع ہی کارتیسی سطح میں (2,4) کا مقام ہے۔ غرض نقطہ A(2,4) کارتیسی نظام کے I ربع میں مقام متعین کیا گیا۔

(ii) (–3,5) کو درج کرنے کے لئے $x = -3$ پر ایک عمودی خط کھینچئے اور $y = 5$ پر ایک افقی خط کھینچئے۔ ان دو خطوط کا نقطہ تقاطع ہی کارتیسی مسطح میں نقطہ (–3,5) کا مقام ہے۔غرض نقطہ B(–3,5) کارتیسی نظام کے II ربع میں مقام متعین کیا گیا۔

(iii) (–4,–5) کو درج کرنے کے لئے، $x = -4$ پر ایک عمودی خط کھینچئے اور $y = -5$ پر ایک افقی خط کھینچئے۔ان دو خطوط کا نقطہ تقاطع ہی کارتیسی نظام میں (–4,5) کا مقام ہے۔لہٰذا نقطہ C(–4,–5) کارتیسی نظام III ربع میں مقام متعین کیا گیا۔

9 maths 5 co-ord geo 17
Wednesday, March 13, 2019 4:57:41 PM

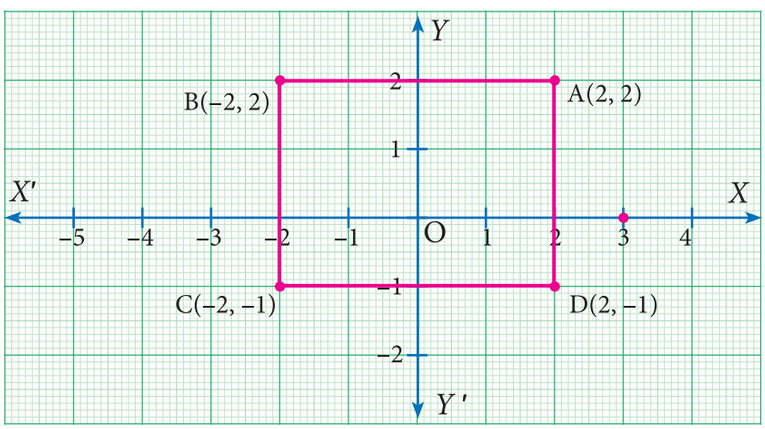
(iv) $(4,-2)$ کودرج کرنے کے لئے $x = 4$ پرایک عمودی خط کھینچئے اور $y = -2$ ایک افقی خط کھینچئے۔ان دوخطوط کا نقطہ ہی کارتیسی نظام میں $(4,-2)$ کا مقام ہے۔لہٰذا نقطہ $(4,-2)$ کارتیسی نظام کے IV ربع میں مقام متعین کیا گیا۔

مثال 5.3

نقاط $A(2,2)$، $B(-2,2)$، $C(-2,-1)$، $D(2,1)$ کوکارتیسی سطح پردرج کیجئے۔
ان نقاط کوترتیب وارملانے سے حاصل ہونے والی شکل کیسی ہوگی، معلوم کیجئے۔

حل :

نقاط	A	B	C	D
ربع	I	II	III	IV



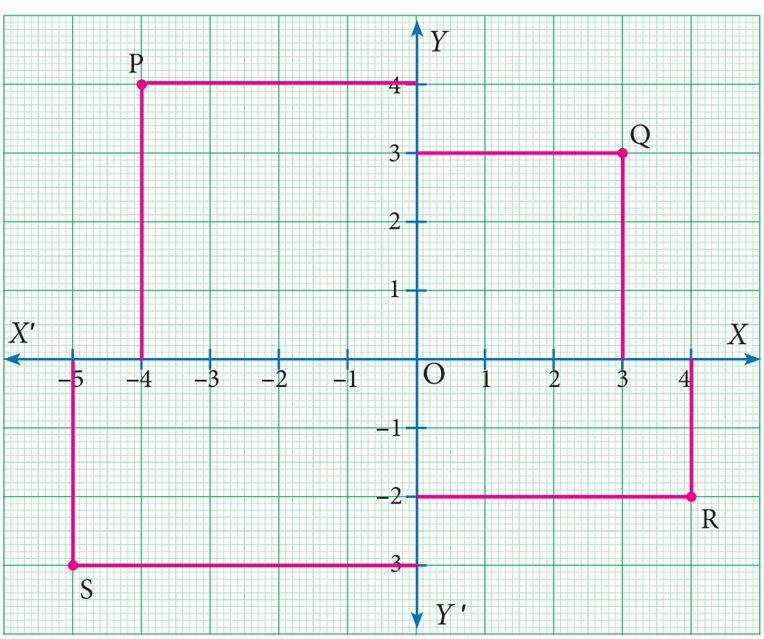
خاکہ 5.10

ABCD ایک مستطیل ہے
کیا آپ مستطیل کی لمبائی، چوڑائی اور رقبہ معلوم کرسکتے ہو؟

مشق 5.1

1۔ ذیل کے نقاط کومحددی نظام میں درج کیجئے اور ربعوں کی شناخت کیجئے۔

$P(-7,6)$، $Q(7,-2)$، $R(-6,-7)$
$S(3,5)$، $T(3,9)$،



خاکہ 5.11

2۔ ذیل کے نقاط کے حذف اور معین لکھئے۔

(i) P (ii) Q
(iii) R (iv) S

9 maths 5 co-ord geo 17
Wednesday, March 13, 2019 4:57:42 PM

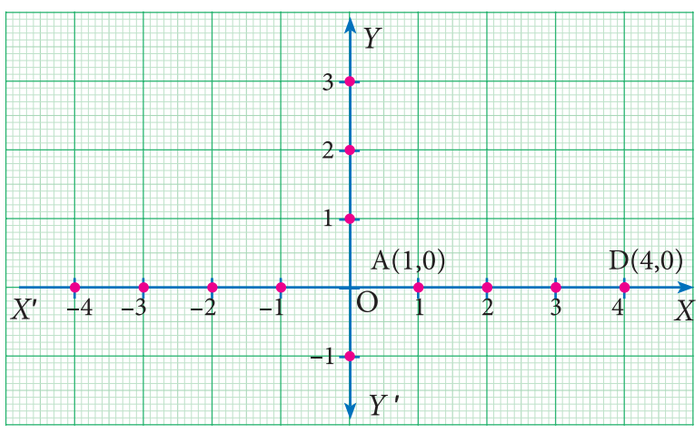
3۔ ذیل نقاط کو محددی سطح پر درج کیجئے اور انہیں ملایئے۔ حاصل ہونے والی شکل میں اپنا نتیجہ بتایئے۔

(i) (−5,3) (−1,3) (0,3) (5,3) (ii) (0,−4) (0,−2) (0,4) (0,5)

4۔ ذیل کے نقاط کو محددی سطح پر درج کیجئے۔ انہیں ترتیب وار ملایئے۔ بننے والی علم ہندسہ کے نمونہ کی قسم بتایئے۔

(i) (0,0) (−4,0) (−4,−4) (0,−4) (ii) (−3,3) (2,3) (−6,−1) (5,−1)

کارروائی - 1



خاکہ 5.12

ذیل کے نقاط کو 1 سم = 1 اکائی لے کر ترسیم کے کاغذ پر درج کریں۔ معلوم کرو کہ نقاط ایک دوسرے سے کتنے فاصلے پر ہے؟

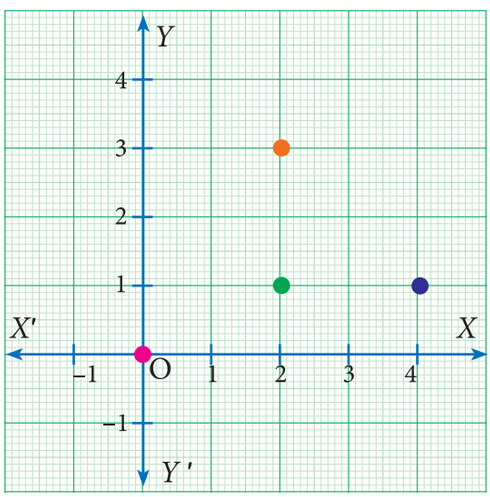
A(1,0)، اور AD,D(4,0) اور DA معلوم کریں۔ کیا AD = DA صحیح ہے؟

آپ نقاط کا دوسرا مجموعہ لیں اور اپنے نتیجے کی تصدیق کیجئے

5.3 کسی دو نقاط کا درمیانی فاصلہ (Distance between any two points)

طہورہ اور عامر وانم باڑی کی ایک ہی گلی میں رہتے ہیں۔ عامر کا مکان ایک گلی اور دوسری گلی جس میں کتب خانہ کہ تقاطع پر ہے۔ یہ دونوں ایک ہی اسکول میں تعلیم حاصل کرتے ہیں، اور وہ عامر کے مکان سے دور بھی نہیں ہے۔ ذیل کے میپ کو دیکھے بغیر آپ خود ہی سے ان کے مکانات، کتب خانہ اور اسکول کا نقشہ کھینچیں۔ فرض کیجئے کہ اسکول مبداء پر ہے (یہ ہم کر سکتے ہیں! یہی محددی نظام کا مکمل معاملہ ہے۔)

اب 1 اکائی = 50 میٹر پیمائش کو مقرر کیجئے۔ دیئے گئے نقشے میں آپ کے جوابی کارروائی کے لئے چند سوالات ہیں۔



خاکہ 5.13

1۔ عامر کے مکان سے طہورہ کا مکان کتنے فاصلے پر ہے؟

2۔ عامر کے مکان سے کتب خانہ کتنے فاصلے پر ہے؟

3۔ عامر اور طہورہ کے مکانات سے اسکول کتنے فاصلے پر ہے؟

4۔ طہورہ کے مکان سے کتب خانہ کتنے فاصلے پر ہے؟

5۔ طہورہ کے مکان سے عامر کا مکان کتنے فاصلے پر ہے؟

9 maths 5 co-ord geo 17
Wednesday, March 13, 2019 4:57:42 PM

سوال 1 کے جواب کے بعد سوال 5 کی ضرورت نہیں ہے۔ واضح طور پر نقطہ A سے B کا فاصلہ اور نقطہ B سے A کا فاصلہ مساوی ہیں، اور عام طور پر اسے نقاط A اور B کا درمیانی فاصلہ کہتے ہیں۔ مگر ریاضی دان کی حیثیت سے ان خصوصیات پر غور کرتے ہوئے انہیں نوٹ کرنا بہتر ہوگا۔ (B,A) فاصلہ = (A,B) فاصلہ یہ مستوی سطح کے تمام نقاط A اور B کے لئے صحیح ہے۔ اس لئے سوال 5 اور سوال 1 ضرور مساوی ہیں۔

دوسرے سوالات کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟ وہ مساوی نہیں ہیں۔ چونکہ ہمیں معلوم ہے دونوں مکانات ایک ہی گلی میں واقع ہیں جو شمال جنوب سمت پر ہیں، فاصلہ y سے ہمیں 1 کا حل حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح ہمیں معلوم ہے کہ کتب خانہ اور عامر کے مکان دونوں ایک ہی گلی میں واقع ہیں جو مشرق، مغرب سمت پر ہیں۔ ہم فاصلہ x سے سوال 2 کا حل حاصل کر سکتے ہیں۔

سوال 3 اور 4 دستیاب ہونے والے راستوں کی قسم پر منحصر ہے۔ اگر ہم یہ قیاس کریں کہ 1,2,3 وغیرہ سے نشان کردہ نقاط پر صرف x اور y محوروں کے متوازی ہی گلیاں موجود ہیں تو ہم x اور y کے فاصلوں کے حاصل جمع کے ذریعے سے ان سوالات کے حل معلوم کرتے ہیں۔ مگر طہورہ کے مکان کے مشرق میں ایک بڑے کھیت کا قیاس کریں۔

اگر وہ کھیت کے پار چلتی ہے، ضرور وہ پسند کرلے گی۔ اب ایک مقام سے دوسرے مقام جانے کے لئے کئی راستے موجود ہیں۔ اس لئے جب ہم ان کے درمیانی فاصلے پر بحث کریں، تو یہ مختصر نہیں ہوگا۔ یہ مقرر کرنے کے لئے کوئی نہ کوئی مطلوبہ طریقے کی ضرورت ہے۔ جب A اور B کے درمیان کئی راستے ہیں۔ A اور B کے درمیان قریب ترین راستے کے فاصلے کو ''فاصلہ (A,B)'' سے ظاہر کرتے ہیں۔ جب ہم یہ خیال کریں کہ A اور B کے درمیان ''خطِ مستقیم فاصلہ'' کی طرح فاصلہ (A,B) ہے تو سطح پر کسی نقاط A اور B کے فاصلہ کو سمجھنے کے لئے کئی طریقے ہیں۔ محددی نظام کا استعمال ہی اس کی ضروری وجہ ہے۔ اس سے پہلے ہمارے مثال سے 2 اور سوالات۔

1۔ اسکول کو مبداء کو مان کر، دونوں مکانات، اسکول اور کتب خانے کے محددوں کی وضاحت کیجئے۔

2۔ محددوں کے استعمال سے ان میں سے کوئی ایک کا درمیانی فاصلہ دریافت کیجئے۔

عام طور پر ''خطِ مستقیم کے فاصلہ'' کو ''کوّے کے اڑان کی طرح'' کہا جاتا ہے۔ اس سے مراد، زمین پر راستے اور رکاوٹوں کی ہمیں پرواہ نہیں، مگر اگر ہم اڑیں تو A سے B کو پہنچ سکتے ہیں۔ جب کہ کوئی بھی پرندہ خطِ مستقیم پر نہیں اڑتا ہے۔

ہم اس کو ایک ترتیبی جواب دے سکتے ہیں۔ دیئے گئے سطح پر دو نقاط $A = (x,y)$ اور $B = (x',y')$ فاصلہ (A,B) معلوم کرنا ہے۔ چار اعداد x, y, x', y' کے تعلق سے ایک ضابطہ بنانا آسان ہے۔ اب ہم یہی معلوم کرنے والے ہیں۔

غور کیجئے

مساوات فاصلہ (A,B) = فاصلہ (B,A) ہمیشہ صحیح نہیں ہے۔ فرض کریں کہ A سے B کا راستہ ایک طرفہ ہے جس سے تم واپس نہیں آسکتے۔ ایسی صورت میں B سے A کا فاصلہ زیادہ ہوسکتا ہے۔ مگر ہمیں اس طرح کی باتوں کو نظر انداز کر دینا چاہئے اور یہ سوچنا چاہئے کہ ہم دونوں طرف چل سکتے ہیں۔

9 maths 5 co-ord geo 17
Wednesday, March 13, 2019 4:57:43 PM

5.3.1 محددی محوروں میں دونقاط کا درمیانی فاصلہ

(Distance between two points on the Coordinate axes)

x- محور پرنقاط : اگردونقاط x- محور پرواقع ہوں، توان کا درمیانی فاصلہ x- محددوں کے فرق کے مساوی ہوگا۔

فرض کیجئے کہ x- محور پردونقاط $A(x_1 0)$ اور $B(x_2,0)$ ہیں۔

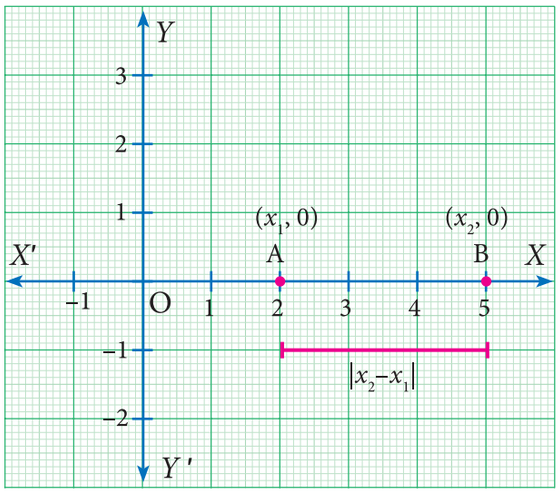
B سے A کا فاصلہ

$$AB = OB - OA = x_2 - x_1 \text{ if } x_2 > x_1 \text{ or}$$

$$= x_1 - x_2 \text{ if } x_1 > x_2$$

$$AB = |x_2 - x_1|$$

(موڈولَس (Modulus) پڑھیں یا $x_2 - x_1$ کی حقیقی قیمت ہے)



خاکہ 5.14

y- محور پرنقاط : اگردونقاط y- محور پرواقع ہوں توان کا درمیانی فاصلہ y-، محددوں کے فرق کے مساوی ہوگا۔

فرض کیجئے کہ y محور پردونقاط

$P(0,y_1)$ اور $Q(0,y_2)$ ہیں۔

Q سے P کا فاصلہ

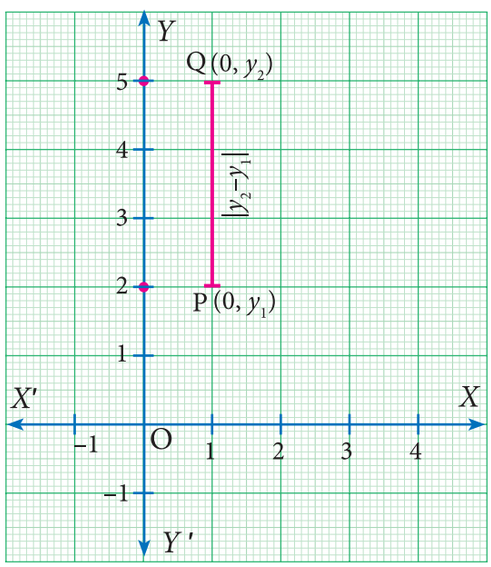
$$PQ = OQ - OP.$$

$$= y_2 - y_1 \text{ if } y_2 > y_1 \text{ or}$$

$$= y_1 - y_2 \text{ if } y_1 > y_2$$

$$PQ = |y_2 - y_1|$$

(ماڈولس Modulus پڑھیں یا $y_2 - y_1$ کا حقیقی قیمت ہے)



خاکہ 5.15

5.3.2 محددی محوروں کے متوازی خط پرواقع دونقاط کا درمیانی فاصلہ

(Distance between two points lying on a line parallel to Coordinate axes)

فرض کیجئے کہ دونقاط $A(x_1,y_1)$، اور $B(x_2,y_2)$ ہیں۔

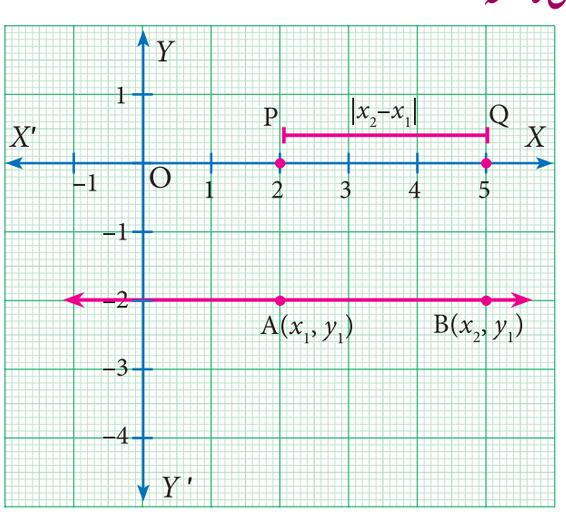
چونکہ y- محددیں مساوی ہیں، نقاط x- محدد کے متوازی خط پرواقع ہیں۔

A اور B سے x- محود کے عمودی بالترتیب AP اور BQ کھینچیں۔

دیئے گئے خاکہ 5.22 پرغورکریں، واضح طور پرفاصلہ AB، فاصلہ PQ کے مساوی ہے۔

فاصلہ AB = درمیانی فاصلہ $PQ = |x_2 - x_1|$

(x محددوں کے درمیانی فرق)



خاکہ 5.16

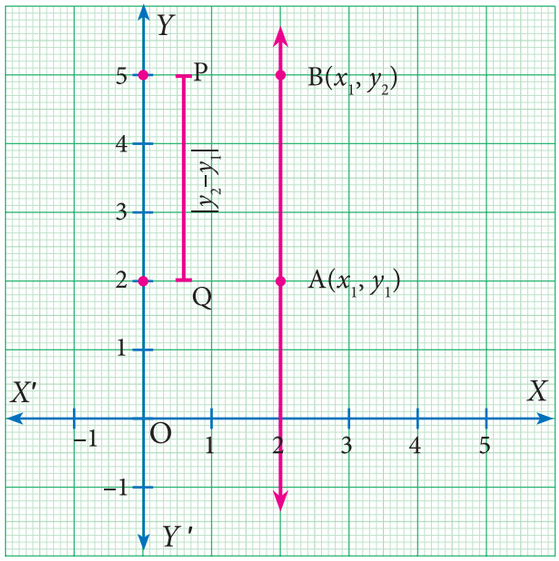
9 maths 5 co-ord geo 17
Wednesday, March 13, 2019 4:57:43 PM

اسی طرح سے دونقاط $A(x_1,y_1)$ اور $B(x_1,y_1)$ کوملانے والے خط کا قیاس کریں۔ جو y- محور کے متوازی ہے۔

تو دونقاط کا درمیانی فاصلہ

$$|y_2 - y_1|$$

[y محددوں کے درمیان فرق]

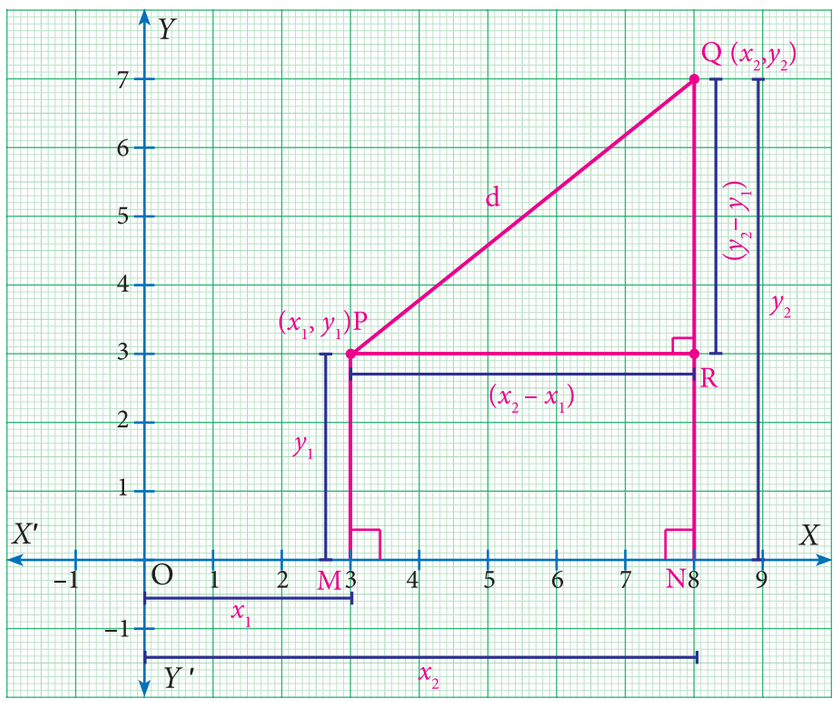


خاکہ 5.17

5.3.3 سطح پر دونقاط کا درمیانی فاصلہ

(Distance between the two points on a plane)

فرض کیجئے کہ $P(x_1,y_1)$ اور $Q(x_2,y_2)$ کارتیسی سطح (یا xy- سطح) میں دونقاط ہیں، جو فاصلہ 'd' اس طرح کہ $d = PQ$



خاکہ 5.18

مرحلہ 1 :

محددوں کے اصول کے مطابق

$OM = x_1$ $\quad MP = y_1$

$ON = x_2$ $\quad NQ = y_2$

$PR = MN$ $\quad$ اب

(مستطیل MNRP کے مقابل کے ضلعے)

ذرا سوچئے

ایک شخص شمال کی طرف 3 کلومیٹر چلتا ہے اور اس کے بعد 4 کلومیٹر مشرق کی طرف چلتا ہے۔ وہ اپنے ابتدائی مقام سے کتنی دور ہوگا؟

9 maths 5 co-ord geo 17
Wednesday, March 13, 2019 4:57:43 PM

$= ON - OM$ (0 سے فاصلہ کو ناپتے ہوئے)

$= x_2 - x_1$ .....(1)

$RQ = NQ - NR$

$= NQ - MP$ (مستطیل MNRP کے مقابل کے ضلعے)

$= y_2 - y_1$ .....(2)

مرحلہ 2 :

مثلث PQR، R پر ایک زاویہ قائمہ ہے۔ $(PR \perp NQ)$

$PQ^2 = PR^2 + RQ^2$ (مسئلہ فیثاغورث کے تحت)

$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$ (مثبت جذر المربع لیتے ہوئے)

غور کیجئے

دو نقاط کا درمیانی فاصلہ

1۔ دیئے گئے دو نقاط $P(x_1,y_1)$ اور $Q(x_2,y_2)$ کے درمیانی کے فاصلہ کا ضابطہ $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$

2۔ PQ کا درمیانی فاصلہ = QP کا درمیانی فاصلہ یعنی $\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$

3۔ مبداء (0,0) 0 سے نقطہ $P(x_1,y_1)$ کا فاصلہ $OP = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ ہے۔

5.3.4 فاصلوں کے خصوصیات (Properties of Distances)

ہم پہلے ہی دیکھ چکے ہیں کہ کسی سطح پر کوئی دو نقاط A اور B کے لئے (A,B) فاصلہ = (B,A) فاصلہ۔ اس کے علاوہ کونسی دوسری خصوصیات ہیں اگر آپ بھول گئے ہوں تو یہاں چند خصوصیات بتائیے گئے ہیں۔

(A,B) = 0 فاصلہ، اگر A اور B ٹھیک طور سے معادل نقاط A=B کو ظاہر کرتے ہوں

(A,B>0 فاصلہ، کوئی دو مختلف نقاط A اور B کے لئے۔

فرض کیجئے کہ B,A اور C تین نقاط ہیں۔ اگر تین محدیں دیئے گئے ہوں اور ان کے x- محدیں برابر ہوں تو ہمیں معلوم ہے کہ وہ ہم خط نقاط ہیں اور وہ y- محور کے متوازی خط پر واقع ہیں۔ اسی طرح سے اگر ان کے y- محدیں برابر ہوں تو ہمیں معلوم ہے کہ وہ ہم خط نقاط ہیں اور وہ x- محور کے متوازی خط پر واقع ہیں۔ مگر صرف یہی شرط نہیں۔ نقاط (0,0)، (1,1) اور (2,2) بھی ہم خط ہیں۔ کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ ان کے درمیان کس تعلق کی بنا پر یہ ہم خط ہیں؟

یہاں فاصلے کے ضابطے سے ہمیں مدد ملتی ہے۔ ہمیں معلوم ہے کہ جب B,A اور C ایک مثلث کے راسیں ہیں تو

(A,C) فاصلہ < (B,C) فاصلہ + (A,B) فاصلہ (ٹھیک طور سے راسوں کو دوبارہ نام دینے کے بعد)

کس سطح پر تین نقاط کب ایک مثلث نہیں بنا سکتے؟ کب وہ ہم خط نقاط ہو سکتے ہیں؟ حقیقت میں ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ جب

9 maths 5 co-ord geo 17
Wednesday, March 13, 2019 4:57:44 PM

(A,C) فاصلہ = (B,C) فاصلہ + (A,B) فاصلہ نقاط B,A اور C ضرور ہم خط ہوں گے۔

اسی طرح سے جب B,A اور C ایک مثلث قائمۃ الزاویہ کے راسیں ہیں۔ $\angle ABC = 90°$ ہمیں معلوم ہے کہ

$(AC)^2$ فاصلہ $= (BC)^2$ فاصلہ $+ (AB)^2$ فاصلہ

ٹھیک طور سے راسوں نام دیتے ہوئے۔ ہم اس کا برعکس بھی ثابت کر سکتے ہیں۔ جب کبھی B,A اور C کے لئے مساوات صحیح ہوں تو یہ نقاط ضرور ایک مثلث قائمۃ الزاویہ کے راسیں ہوں گے۔

ذیل کے مثالوں کے ذریعے مخصوص علمِ ہندسوی نمونوں کے بارے میں سوالات کا حل معلوم کرنے کے لئے یہ فاصلوں کے خصوصیات کس طرح استعمال ہوتے ہیں۔

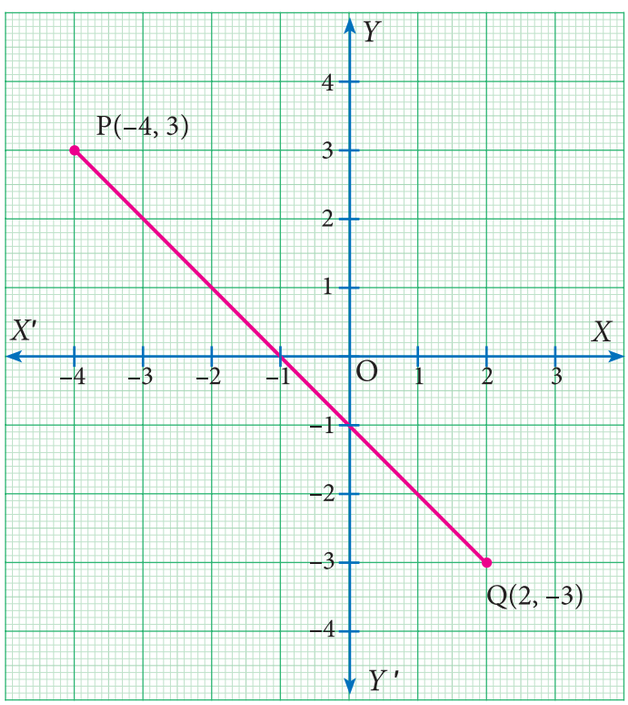
مثال 5.4

نقاط (–4,3) اور (2,–3) کے درمیان کا فاصلہ معلوم کیجئے۔

حل

(–4,3) اور (2,–3) کے درمیان کا فاصلہ

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(2+4)^2 + (-3-3)^2}$$
$$= \sqrt{(6^2 + (-6)^2)} = \sqrt{(36+36)}$$
$$= \sqrt{36 \times 2}$$
$$= 6\sqrt{2}$$



خاکہ 5.19

مثال 5.5

بتائیے کہ تین نقاط A(3,1)، B(6,4)، C(8,6) ایک خطِ مستقیم پر واقع ہیں۔

حل : فاصلہ کے ضابطہ کے تحت

$$AB = \sqrt{(6-3)^2+(4-1)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$
$$BC = \sqrt{(8-6)^2+(6-4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$
$$AC = \sqrt{(8-3)^2+(6-1)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$
$$AB + BC = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} = AC$$

لہٰذا یہ نقاط ایک ہی خطِ مستقیم پر ہیں۔

ہم خط نقاط

تین نقطوں کو ہم خط بتانے کے لئے ہمیں یہ ثابت کرنا ہوگا کہ نقاط کی دو جوڑیوں کا فاصلہ نقاط کی تیسری جوڑی کے فاصلہ کے مساوی ہونا چاہئے۔ بہ الفاظ دیگر نقاط A، B ، C ہم خط ہوں گے اگر

AB + BC = AC

9 maths 5 co-ord geo 17
Wednesday, March 13, 2019 4:57:44 PM

مثال 5.6 ثابت کرو کہ نقاط A(7,10)، B(–2,5) اور C(3,–4) مثلث قائمۃ الزاویہ کے راسیں ہیں۔

حل :

یہاں $A = (7, 10), B = (-2, 5), C = (3,-4)$

$$AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(-2-7)^2 + (5-10)^2}$$

$$= \sqrt{(-9)^2 + (-5)^2}$$

$$= \sqrt{(81 + 25)}$$

$$= \sqrt{106}$$

$$AB^2 = 106 \quad \ldots (1)$$

$$BC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(3-(-2))^2 + (-4-5)^2} = \sqrt{(5)^2 + (-9)^2}$$

$$= \sqrt{25 + 81} = \sqrt{106}$$

$$BC^2 = 106 \quad \ldots (2)$$

$$AC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(3-7)^2 + (-4-10)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-14)^2}$$

$$= \sqrt{16 + 196} = \sqrt{212}$$

$$AC^2 = 212 \quad \ldots (3)$$

(1)، (2) اور (3) سے

$$AB^2 + BC^2 = 106 + 106 = 212 = AC^2$$

چونکہ $AB^2 + BC^2 = AC^2$

$\therefore$ ΔABC ایک مثلث قائمۃ الزاویہ ہے، B پر زاویہ قائمہ ہے۔

مثلث قائمۃ الزاویہ

ہمیں معلوم ہے کہ ایک مثلث قائمۃ الزاویہ کے ایک ضلع (وتر) کی پیمائش کا مربع بقیہ دو ضلعوں کی پیمائشوں کے مربعوں کے مساوی ہے۔

9 maths 5 co-ord geo 17
Wednesday, March 13, 2019 4:57:44 PM

مثال 5.7

ثابت کروکہ نقاط A(–4,–3)، B(3,1)، C(3,6) اور D(–4,2) بالترتیب متوازی الاضلاع کے راسیں ہیں۔

حل :

فرض کروکہ نقاط A(–4,–3)، B(3,1)، C(3,6) اورD(–4,2)ایک چارضلعی کے راس ہیں۔

فاصلہ کے ضابطے کے استعمال

متوازی الاضلاع

ہمیں معلوم ہے کہ مقابل کے ضلعے مساوی ہوتے ہیں۔

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$AB = \sqrt{(3+4)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{49+16} = \sqrt{65}$$

$$BC = \sqrt{(3-3)^2 + (6-1)^2}$$

$$= \sqrt{0+25} = \sqrt{25} = 5$$

$$CD = \sqrt{(-4-3)^2 + (2-6)^2}$$

$$= \sqrt{(-7)^2 + (-4)^2} = \sqrt{49+16} = \sqrt{65}$$

$$AD = \sqrt{(-4+4)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{(0)^2 + (5)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$AB = CD = \sqrt{65} \text{ and } BC = AD = 5$$

یہاں، مقابل ضلعے مساوی ہیں۔لہٰذا ABCD متوازی الاضلاع ہے۔

مثال 5.8

نقاط A(7,3) اور 11 حدف رکھنے والا x محور پر ایک اور نقطہ B کے درمیان کا فاصلہ دریافت کیجئے۔

حل :

چونکہ B ، x- محور پر ہے، B کا y- محور 0 ہے۔

اس لئے نقطہ B کا محدد (11,0) ہے۔

فاصلہ کے ضابطے سے، A(7,3) اور B(11,0) کے درمیان کا فاصلہ

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$AB = \sqrt{(11-7)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{(4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25}$$

$$= 5$$

9 maths 5 co-ord geo 17
Wednesday, March 13, 2019 4:57:45 PM

مثال 5.9 نقطہ 'a' کی قیمت معلوم کیجئے اس طرح کہ PQ = QR ہے۔ جہاں Q,P اور R کے محدد یں بالترتیب (6,–1)، (1,3) اور (a,8) ہیں۔

حل : دیا گیا ہے $P(6,-1),\ Q(1,3)$ and $R(a,8)$

$$PQ = \sqrt{(1-6)^2+(3+1)^2} = \sqrt{(5)^2+(4)^2} = \sqrt{41}$$

$$QR = \sqrt{(a-1)^2+(8-3)^2} = \sqrt{(a-1)^2+(5)^2}$$

دیا گیا ہے $PQ = QR$

لہٰذا $\sqrt{41} = \sqrt{(a-1)^2+(5)^2}$

$$\sqrt{41} = \sqrt{(a-1)^2+25}$$

(دونوں جانب مربع کرنے پر) $(a-1)^2+25 = 41$

$$(a-1)^2 = 41 - 25$$

$$(a-1)^2 = 16$$

$$(a-1) = \pm 4$$

(دونوں جانب جذر المربع کرنے پر) $a = 1 \pm 4$

$$a = 1+4 \text{ or } a = 1-4$$

$$a = 5 \ , \quad a = -3$$

مثال 5.10 فرض کرو کہ A(2,2)، B(8,–4) ایک سطح میں کوئی دو نقاط ہیں۔ اگر ایک نقطہ P x-محور پر ہے (مثبت کے جانب) اور AB کو 1:2 کی نسبت میں قطع کرتا ہے تو P کے محدد یں معلوم کیجئے۔

حل : دئے گئے نقاط A(2,2) اور B(8,–4) ہیں اور فرض کریں کہ P(x,0)، [x محور پر P واقع ہے]

فاصلہ کے ضابطہ سے $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$$AP = \sqrt{(x-2)^2+(0-2)^2} = \sqrt{x^2-4x+4+4} = \sqrt{x^2-4x+8}$$

$$BP = \sqrt{(x-8)^2+(0+4)^2} = \sqrt{x^2-16x+64+16} = \sqrt{x^2-16x+80}$$

دیا گیا ہے $AP : PB = 1 : 2$

یعنی $\frac{AP}{BP} = \frac{1}{2} \quad (\because BP = PB)$

$$2AP = BP$$

(دونوں جانب مربع کرنے پر) $4AP^2 = BP^2$

9 maths 5 co-ord geo 17
Wednesday, March 13, 2019 4:57:45 PM

$$4x^2 - 16x + 32 = x^2 - 16x + 80$$

$$3x^2 - 48 = 0$$

$$3x^2 = 48$$

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm 4$$

چونکہ P، x- محور پر ہے (مثبت کے جانب) x محدد 4– نہیں ہوسکتا

لہٰذا P کے محددیں (4,0) ہے۔

مثال 5.11 ثابت کروکہ (4,3) دائرے کا مرکز ہے جو نقاط (9,3)، (7,–1) اور (–1,3) سے گزرتا ہے۔ نصف قطر معلوم کیجئے۔

حل : فرض کروکہ P(4,3)، A(9,3)، B(7,–1) اور C(–1,3) ہیں۔

اگر P دائرے کا مرکز ہے جو نقاط A، B اور C سے گزرتا ہے تو نقطہ P، A، B اور C سے مساوی فاصلے پر ہے۔

یعنی PA = PB = PC

فاصلے کے ضابطے سے $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$$AP = PA = \sqrt{(4-9)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{-(5)^2 + 0} = \sqrt{25} = 5$$

$$BP = PB = \sqrt{(4-7)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$CP = PC = \sqrt{(4+1)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{(5)^2 + 0} = \sqrt{25} = 5$$

$$PA = PB = PC$$

لہٰذا P دائرے کا مرکز ہے اور A,B اور C سے گذرتا ہے۔

نصف قطر = PA = 5

مشق 5.2

1۔ ذیل کے نقاط کی جوڑیوں کے درمیان کا فاصلہ معلوم کیجئے۔

(i) (1,2) اور (4,3)　　(ii) (–7,2) اور (3,4)

(iii) (a,b) اور (c,b)　　(iv) (3,–9) اور (–2,3)

2۔ معلوم کروکہ ذیل کے ہر ایک نقاط کا مجموعہ ہم خط ہیں یا نہیں؟

(i) (7,–2) (5,1) (3,4)　　(ii) (a,–2) (a,3) (a,0)

9 maths 5 co-ord geo 17
Wednesday, March 13, 2019 4:57:45 PM

3۔ ثابت کرو کہ ذیل کے نقاط بالترتیب مثلثِ مساوی الساقین بناتے ہیں۔

(i) $A\,(5,4), B(2,0), C\,(-2,3)$ (ii) $A\,(6,-4), B\,(-2,-4), C\,(2,10)$

4۔ ثابت کرو کہ ذیل کے نقاط بالترتیب مثلثِ مساوی الاضلاع بناتے ہیں۔

(i) $A(2,2), B(-2,-2), C(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ (ii) $A(\sqrt{3},2), B\,(0,1), C(0,3)$

5۔ ثابت کرو کہ ذیل کے نقاط بالترتیب متوازی الاضلاع کے راس ہیں۔

(i) $A(-3,1), B(-6,-7), C\,(3,-9)$ and $D(6,-1)$ (ii) $A\,(-7,-3), B(5,10), C(15,8)$ and $D(3,-5)$

6۔ تصدیق کیجئے کہ ذیل کے نقاط بالترتیب معین کے راس ہیں۔

(i) $A(3,-2), B\,(7,6), C\,(-1,2)$ and $D\,(-5,-6)$ (ii) $A\,(1,1), B(2,1), C\,(2,2)$ and $D(1,2)$

7۔ اگر A، B اور C بالترتیب نقاط $(-1,1)$، $(1,3)$ اور $(3,a)$ ہیں۔اور اگر $AB = BC$ ہو تو 'a' کی قیمت معلوم کیجئے۔

8۔ نقطہ A کا حدف اس کے معین کے مساوی ہے اور نقطہ $B(1,3)$ سے اس نقطہ کا فاصلہ 10 اکائیاں ہیں۔A کے محددیں کیا ہیں؟

9۔ اگر دو نقاط $(3,4)$ اور $(-5,6)$ سے نقطہ (x,y) مساوی فاصلے پر ہو تو x اور y کے درمیان تعلق معلوم کیجئے۔

10۔ فرض کیجئے کہ $A(2,3)$ اور $B(2,-4)$ دو نقاط ہیں۔اگر P، x محور پر اس طرح ہے کہ $AP = \frac{3}{7}\,AB$، P کے محددیں معلوم کیجئے۔

11۔ ثابت کرو کہ ایک دائرے کا مرکز $(11,2)$ ذیل کے نقاط $(1,2)$، $(3,-4)$ اور $(5,-6)$ سے گذرتا ہے۔

12۔ ایک دائرہ کا نصف قطر 30 اکائیاں ہیں اور مرکز مبداء پر ہے۔جہاں دائرہ محوروں کو قطع کرتا ہے۔اس نقطے کے محدد لکھئے۔اس طرح کسی دو نقاط کے درمیان کا فاصلہ معلوم کیجئے۔

5.4 ایک قطاع خط کا وسطی نقطہ (درمیانی نقطہ) (The Mid Point of a Line Segment)



خاکہ 5.20

فرض کیجئے کہ ایک شخص اپنی موٹر سائیکل کو ایک سیدھی سڑک پر کالج سے مشرق کی جانب چلا رہا ہے۔جس کو قریہ A اور اس کے بعد قریہ B کو پہنچنا ہے۔مقام A اور B کے درمیان کے کسی موڑ پر اس کو اچانک احساس ہوتا ہے کہ اس پاس معقول پٹرول نہیں ہے۔جس سے کہ وہ اپنا سفر مکمل کر سکے۔ان دونوں مقامات کے درمیانی راستے پر کوئی بھی پٹرول بنک نہیں ہے۔کیا اسے واپس A کی جانب سفر کرنا چاہئے یا اپنی قسمت کو آزماتے ہوئے B کی جانب سفر کرنا چاہئے ؟ کونسا فاصلہ مختصر ترین ہوگا؟ وہاں ایک دشواری ہے اس کو معلوم ہونا چاہئے کہ کیا اس نے درمیانی راستے کو پار کیا ہے یا نہیں؟



خاکہ 5.21

9 maths 5 co-ord geo 17
Wednesday, March 13, 2019 4:57:46 PM

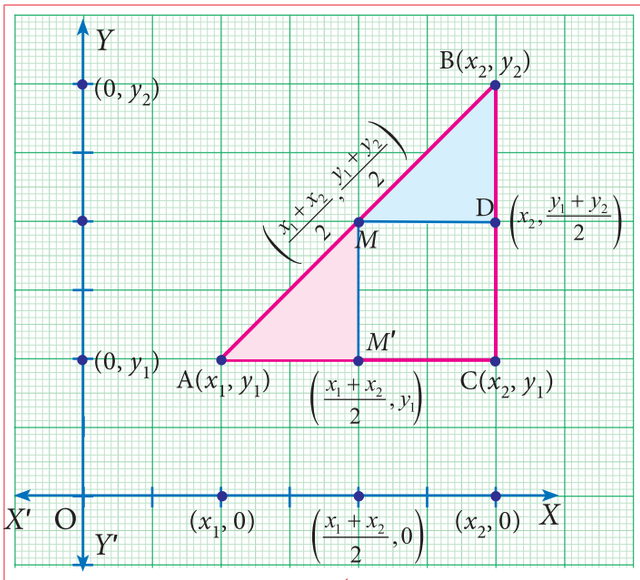
اوپر کا خاکہ 5.21 اس صورت حال کی وضاحت کرتا ہے۔ کالج کو مبدا 'O' کے طور پر قیاس کریں جہاں سے قریہ A اور قریہ B کے فاصلے بالترتیب x_1 اور x_2 ہیں $(x_1<x_2)$ فرض کیجئے کہ AB کا درمیانی نقطہ M ہو تو x ذیل کی طرح حاصل ہوگا۔

$$AM = MB \quad \text{اور اس طرح} \quad x - x_1 = x_2 - x$$

$$\text{اور اس کو مختصر بنایا جاتا ہے} \quad x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

اب عام نتیجہ پر بحث کرنا آسان ہوگیا ہے۔ اگر $A(x_1,y_1)$، $B(x_2,y_2)$ کوئی دو نقاط اور $M(x,y)$ وسطی نقطہ ہے۔ قطاع خط AB کا ، AC کا وسطی نقطہ M ہے (خاکہ 5.22 میں) مثلث قائمۃ الزاویہ کے ضلع کا عمودی ناصف وتر کے وسطی نقطہ پر قطع کرتا ہے۔ (اسی طرح، اس خاصیت کی وجہ سے دونوں رنگین مثلثیں یکساں نظر آتے ہیں، اس طرح کے مثلثوں میں، نظیری اضلاع تناسب میں ہوں گے)

خاکہ 5.22



خاکہ 5.22

حل کرنے کا دوسرا طریقہ
(یکسانیت کی خصوصیت استعمال سے)

چلئے ہم نقطہ M کو $M(x,y)$ کی طرح لیتے ہیں

اب $\Delta AMM'$ اور ΔMBD یکساں ہیں۔ چنانچہ

$$\frac{AM'}{MD} = \frac{MM'}{BD} = \frac{AM}{MB}$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{1}{1} \quad (AM = MB)$$

فرض کرو $\quad \frac{x - x_1}{x_2 - x} = 1$

$$2x = x_2 + x_1 \Rightarrow x = \frac{x_2 + x_1}{2}$$

اسی طرح $\quad y = \frac{y_2 + y_1}{2}$

M کا x محدد $= C$ اور A کے x محددوں کا اوسط $= \frac{x_1 + x_2}{2}$

M کا y محدد $=$ اور اسی طرح C اور B کے y محددوں کا اوسط $= \frac{y_1 + y_2}{2}$

دونقاط $A(x_1,y_1)$ اور $B(x_2,y_2)$ کو ملانے والے قطاع خط کا وسطی نقطہ M ہے۔

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Thinking Corner ذرا سوچئے

اگر AC کا وسطی نقطہ D ہے اور AB کا وسطی نقطہ C ہو تو AB کی لمبائی معلوم کیجئے۔ جب کہ AD = 4cm ہے۔

9 maths 5 co-ord geo 17
Wednesday, March 13, 2019 4:57:46 PM

مثال کے طور پر : نقاط $(-10, -8)$ اور $(-2, 4)$ کو ملانے والے قطاع خط کا وسطی نقطہ دیا گیا $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ ہے۔

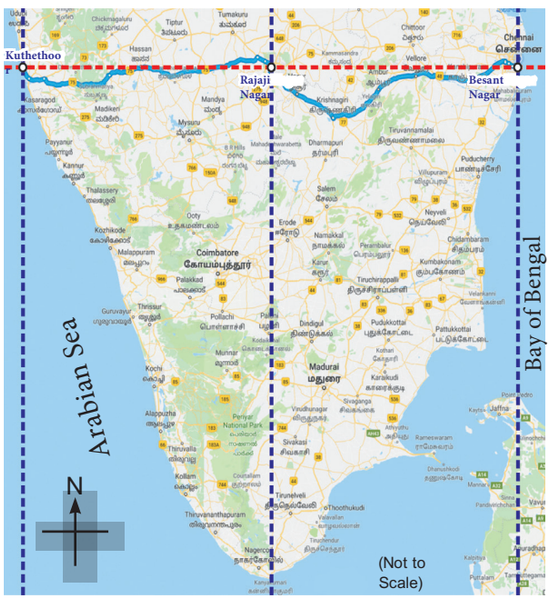
جس میں $x_1 = -8$، $x_2 = 4$، $y_1 = -10$ اور $y_2 = -2$ ہیں۔

مطلوبہ وسطی نقطہ $\left(\frac{-8+4}{2}, \frac{-10-2}{2}\right)$ یا $(-2, -6)$

چلئے اب ہم وسطی نقطہ (درمیانی نقطہ) کا ضابطہ کا استعمال ہماری حقیقی زندگی کے حالات میں دیکھتے ہیں۔

درجہ ذیل شہروں کے طول البلد اور عرض البلد پر غور کریں۔

شہر کا نام	طول البلد	عرض البلد
چنّئی (بیسنت نگر)	80.27° E	13.00° N
منگلورو	74.86° E	12.91° N
بنگلورو (راجاجی نگر)	77.5° E	12.9° N



خاکہ 5.23

چلئے ہم چینئی اور منگلورو کے طول البلد اور عرض البلد (80.27°E, 13.00°N) اور (74.86°E, 12.91N) کو بالترتیب لیتے ہیں جو جوڑیوں کی طرح ہیں جبکہ، چینئی اور منگلور کے درمیان بنگلورو واقع ہے ہمیں محددوں کا اوسط معلوم کرنا ہوگا۔

یعنی $\left(\frac{80{\cdot}27 + 74{\cdot}86}{2}, \frac{13{\cdot}00 + 12{\cdot}91}{2}\right)$ ہے۔اس سے ہمیں (77.5°E, 12.9°N) بنگلور کا طول البلد اور عرض البلد حاصل ہوتا ہے اوپر کی تمام مثالوں میں نقطہ ٹھیک درمیان میں ہے۔یہی وسطی نقطہ ہے۔اور یہ نقطہ دوسرے دو نقاط کو یکساں نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

مثال 5.12 ایک دائرے کا مرکزی نقطہ $(3, -4)$ ہے۔ اگر AB دائرے کا ایک قطر ہے اور $B(5, -6)$ ہے تو A کے محدّدیں معلوم کیجئے۔

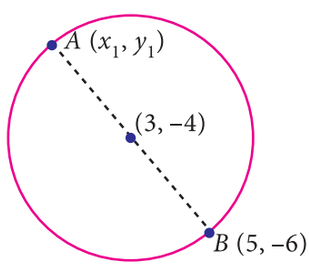
حل :

فرض کرو کہ A کے محدّدیں (x_1, y_1) ہیں اور دیا گیا نقطہ $B(5, -6)$ ہے۔ جبکہ قطر AB کا مرکز ہی وسطی نقطہ ہے۔

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = 3$$
$$x_1 + 5 = 6$$
$$x_1 = 6 - 5$$
$$x_1 = 1$$

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = -4$$
$$y_1 - 6 = -8$$
$$y_1 = -8 + 6$$
$$y_1 = -2$$

چنانچہ، A کے محدّدیں $(1, -2)$ ہیں۔



خاکہ 5.24

9 maths 5 co-ord geo 17
Wednesday, March 13, 2019 4:57:47 PM

ترقی کی جانچ

i) فرض کرو کہ نقاط A(3,0)، اور B(-5, 4) کو ملانے والے قطاع خط کا وسطی نقطہ X ہے اور P(−11, −8) اور Q(8, −2) کو ملانے والے قطاع خط کا وسطی نقطہ Y ہے۔ قطاع خط XY کا وسطی نقطہ معلوم کیجئے۔

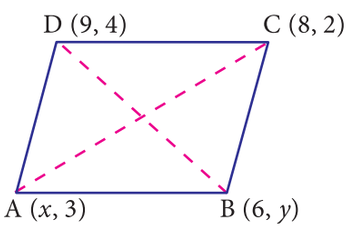
ii) اگر نقاط A(8, −5) اور B(−2, 11) کو ملانے والے قطاع خط کا وسطی نقطہ $(3, x)$ ہے۔ تو 'x' کی قیمت معلوم کیجئے۔

مثال 5.13

اگر $(x,3)$، $(6,y)$، (8,2) اور (9,4) متوازی الاضلاع کے راسیں کو ترتیب سے لیا گیا ہے تو x اور y کی قیمتیں معلوم کیجئے۔

حل : فرض کرو متوازی الاضلاع ABCD کے راسیں $A(x,5)$، $B(6,y)$، C(8,2) اور D(9,4) ہیں۔

تعریف (Definition) کے تحت، AC اور BD وتریں ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔



خاکہ 5.26

BD کا وسطی نقطہ = AC کا وسطی نقطہ

$$\left(\frac{x+8}{2}, \frac{3+2}{2}\right) = \left(\frac{6+9}{2}, \frac{y+4}{2}\right)$$

دونوں طرف کے محدّدوں کی مساوات کو حل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{x+8}{2} = \frac{15}{2} \quad \text{اور} \quad \frac{5}{2} = \frac{y+4}{2}$$

$$x+8 = 15 \qquad 5 = y+4$$

$$x = 7 \qquad y = 1$$

لہذا $x = 7$ اور $y = 1$ ہے

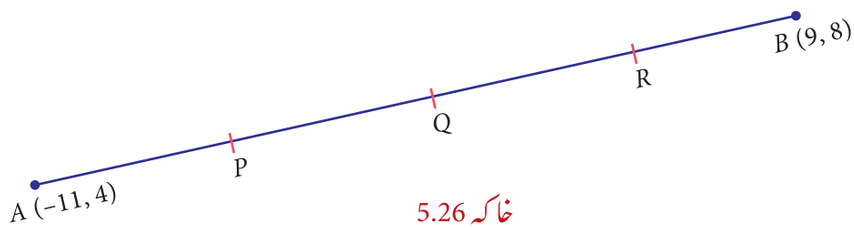
Thinking Corner ذرا سوچئے

ایک متوازی الاضلاع ABCD کے تین راسیں A(6, 1)، B(8,2) اور C(9,4) کو بالترتیب لیا گیا ہے۔ چوتھا راس D معلوم کیجئے؟

اگر (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) اور (x_4, y_4) اُس متوازی الاضلاع کے چار راسیں ہیں۔ تو دئے گئے نقاط کو استعمال کر کے $(x_1 + x_3 - x_2, y_1 + y_3 - y_2)$ کی قیمت معلوم کیجئے۔ اور تمہارے جواب کا سبب بیان کیجئے۔

مثال 5.14

A(−11, 4) اور B(9, 8) نقاط کو ملانے والے قطاع خط کو چار مساوی حصّوں میں تقسیم کرنے والے نقاط معلوم کیجئے۔



خاکہ 5.26

9 maths 5 co-ord geo 17
Wednesday, March 13, 2019 4:57:47 PM

حل :

فرض کیجئے A(-11, 4) اور B(9, 8) نقاط کو ملانے والے قطاع خط میں R, Q, P نقاط اس طرح ہیں۔ AP = PQ = QR = RB

یہاں AB کا وسطی نقطہ Q ہے۔ AQ کا وسطی نقطہ P ہے اور QB کا وسطی نقطہ R ہے۔

$$\text{AB کا وسطی نقطہ Q ہے} = \left(\frac{-11+9}{2}, \frac{4+8}{2}\right) = \left(\frac{-2}{2}, \frac{12}{2}\right) = (-1, 6)$$

$$\text{AQ کا وسطی نقطہ P ہے} = \left(\frac{-11-1}{2}, \frac{4+6}{2}\right) = \left(\frac{-12}{2}, \frac{10}{2}\right) = (-6, 5)$$

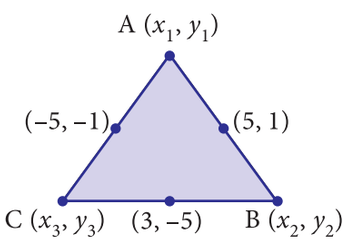
$$\text{QB کا وسطی نقطہ R ہے} = \left(\frac{-1+9}{2}, \frac{6+8}{2}\right) = \left(\frac{8}{2}, \frac{14}{2}\right) = (4, 7)$$

لہذا AB کو چار مساوی حصّوں میں تقسیم کرنے والے نقاط P(–6, 5)، Q(–1, 6) اور R(4, 7) ہیں۔

مثال 5.15

ایک مثلث کے اضلاع کے وسطی نقاط (5, 1)، (3, –5) اور (–1, –5) ہیں۔
مثلث کے راسوں کے محددوں کو دریافت کیجئے۔

حل : فرض کیجئے ΔABC کی راسیں $A(x_1, y_1)$، $B(x_2, y_2)$ اور $C(x_3, y_3)$ ہیں
اور دئے گئے ضلعے کے AB، BC اور CA کے وسطی نقاط
(5, 1)، (3, –5) اور (–1, –5) بالترتیب ہیں۔



خاکہ 5.27

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = 5 \Rightarrow x_1 + x_2 = 10 \quad \ldots(1)$$

$$\frac{x_2 + x_3}{2} = 3 \Rightarrow x_2 + x_3 = 6 \quad \ldots(2)$$

$$\frac{x_3 + x_1}{2} = -5 \Rightarrow x_3 + x_1 = -10 \quad \ldots(3)$$

(1)، (2) اور (3) کو جمع کریں

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3 \quad \ldots(4)$$

$(4) - (2) \Rightarrow x_1 = 3 - 6 = -3$

$(4) - (3) \Rightarrow x_2 = 3 + 10 = 13$

$(4) - (1) \Rightarrow x_3 = 3 - 10 = -7$

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = 1 \Rightarrow y_1 + y_2 = 2 \quad \ldots(5)$$

$$\frac{y_2 + y_3}{2} = -5 \Rightarrow y_2 + y_3 = -10 \quad \ldots(6)$$

$$\frac{y_3 + y_1}{2} = -1 \Rightarrow y_3 + y_1 = -2 \quad \ldots(7)$$

(5)، (6) اور (7) کو جمع کریں

$$2y_1 + 2y_2 + 2y_3 = -10$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = -5 \quad \ldots(8)$$

$(8) - (6) \Rightarrow y_1 = -5 + 10 = 5$

$(8) - (7) \Rightarrow y_2 = -5 + 2 = -3$

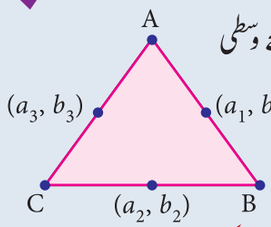
$(8) - (5) \Rightarrow y_3 = -5 - 2 = -7$

لہذا، مثلث کے راسیں A (–3, 5)، B (13, –3) اور C(–7, –7) ہیں۔

9 maths 5 co-ord geo 17
Wednesday, March 13, 2019 4:57:47 PM

Thinking Corner

ذرا سوچیے



خاکہ 5.28

اگر ایک مثلث کے ضلعوں کے وسطی نقاط (a_1, b_1)، (a_2, b_2) اور (a_3, b_3) ہیں۔ مثال 2.5 میں دیے گئے وسطی نقاط کو استعمال کر کے $(a_1 + a_3 - a_2, b_1 + b_3 - b_2)$, $(a_1 + a_2 - a_3, b_1 + b_2 - b_3)$ اور $(a_2 + a_3 - a_1, b_2 + b_3 - b_1)$ کی قیمت محسوب کیجئے۔ نتائج کا موازنہ کریں۔ تم نے کیا غور کیا؟ تمہارے نتیجہ کا سبب بیان کیجئے؟

مشق 5.3

1۔ ذیل کے نقطوں کو ملانے والے قطعِ خط کا وسطی نقطہ معلوم کیجئے۔

(i) $(-2,3)$ اور $(-6,-5)$ (ii) $(8,-2)$ اور $(-8,0)$

(iii) (a,b) اور $(a+2b,2a-b)$ (iv) $\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{7}\right)$ اور $\left(\frac{3}{2},\frac{-11}{7}\right)$

2۔ ایک دائرے کا مرکز $(2, -4)$ ہے اگر دائرہ کے قطر کی ایک حد $(7, -3)$ پر ہو تو دوسری حد معلوم کیجئے۔

3۔ اگر نقاط $(3, 4)$ اور $(p, 7)$ کو ملانے والے قطعِ خط کا وسطی نقطہ (x, y) جو $2x + 2y + 1 = 0$ پر واقع ہو تو p کی قیمت کیا ہوگی؟

4۔ ایک مثلث کے اضلاع کے وسطی نقاط $(2, 4)$، $(-2, 3)$ اور $(5, 2)$ ہیں۔ مثلث کے راسیں کے محدّ دوں کو دریافت کیجئے۔

5۔ ایک دائرہ جس کا مرکز $O(0, 0)$ ہے۔ جس کا ایک وتر AB(Chord) ہے جس کے نقاط A اور B، $(8, 6)$ اور $(10,0)$ بالترتیب ہیں۔ وتر AB کے مرکز سے OD عمود ہے۔ وسطی نقطہ OD کی محدّ دیں معلوم کیجئے۔

6۔ ایک مساوی الساقین والا مثلث قائمۃ الزاویہ کے راسیں کے نقاط $A(-5, 4)$، $B(-1, -2)$ اور $C(5, 2)$ ہیں، جس میں B قائمۃ الزاویہ ہے D کی محدد معلوم کیجئے۔ جبکہ ABCD ایک مربع ہوں۔

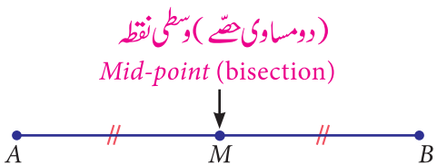
7۔ ایک مثلث DEF کے اضلاع DE، EF اور FD ہیں جن کے وسطی نقاط $A(-3,6)$، $B(0, 7)$ اور $C(1, 9)$ ہیں۔ ثابت کیجئے کہ ABCD چار ضلعی ایک متوازی الاضلاع ہے۔

8۔ ایک مثلث قائمۃ الزاویہ کے راسیں $A(-3, 2)$، $B(3,2)$ اور $C(-3, -2)$ ہیں جس میں A قائمۃ الزاویہ ہے۔ ثابت کیجئے کہ وتر کا وسطی نقطہ تمام راسوں سے ہم فاصلہ (Equidistant) پر ہے۔

5.5 : ایک قطعِ خط کے تین مساوی حصّوں کے نقاط : Points of Tri Section of a Line Segment

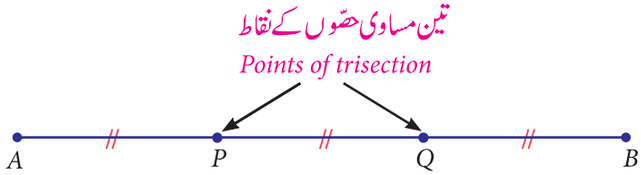
ایک قطعِ خط کا وسطی نقطہ ہی نقطہ تنصیف ہے۔ جس کے معنی لمبائی کو دو مساوی حصّوں میں تقسیم کرنا ہے۔ فرض کیجئے کہ ہم ایک قطعِ خط کی لمبائی کو تین مساوی حصّوں میں تقسیم کرنا چاہتے ہیں۔ نقاط کو مناسب مقام پر نشان کرنے پر ہمیں قطعِ خط کے تین مساوی حصّے حاصل ہوں گے۔

9 maths 5 co-ord geo 17
Wednesday, March 13, 2019 4:57:48 PM



خاکہ 5.29

$AM = MB$



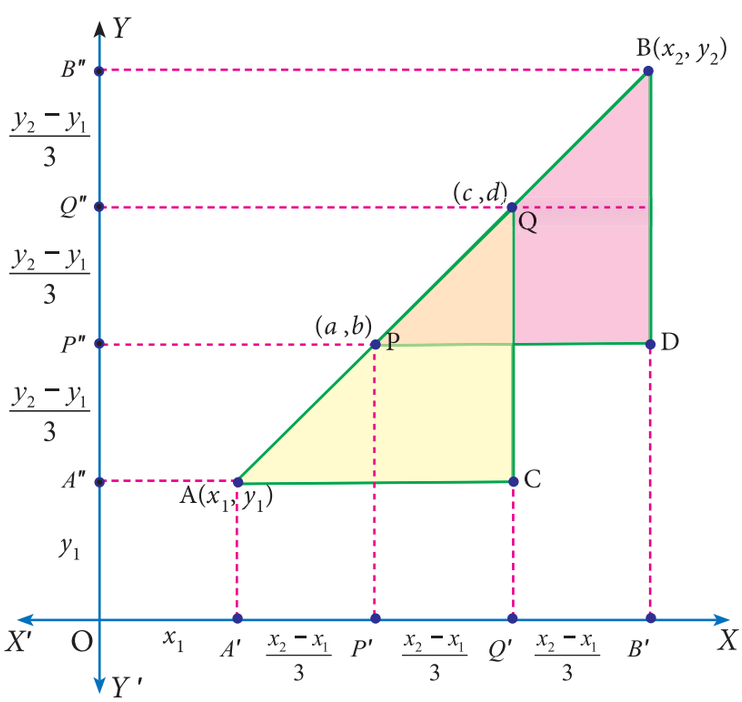
خاکہ 5.30

$AP = PQ = QB$

دیے گئے ایک قطاع خط میں تین مساوی حصّوں میں دو نقاط ہوتے ہیں۔اس کو معلوم کرنے کا طریقہ بھی ویسے ہی ہے جیسے ہم نے نقطہ تنصیف کو نشان کیا۔(یعنی وسطی نقطہ) دیے گئے خاکہ 5.31 پر غور کریں۔ یہاں AB قطاع خط کے تین مساوی حصّوں کے نقاط P اور Q ہیں۔جس میں, $A(x_1, y_1)$ اور $B(x_2, y_2)$ ہے۔اس سے ہمیں واضح ہوتا ہے کہ AQ کا وسطی نقطہ P ہے اور PB کا وسطی نقطہ Q ہے۔

فرض کیجئے ΔACQ اور ΔPDB ہیں۔(مثلثوں کے یکسانیت کی خصوصیت استعمال کر کے بھی اس کو تصدیق کیا جا سکتا ہے۔جس کو ہم تفصیل سے اعلیٰ جماعتوں میں سیکھیں گے)

$$A'P' = P'Q' = Q'B'$$



خاکہ 5.31

غور کیجئے کہ جب ہم قطاع خط کو تین مساوی حصّوں میں تقسیم کرتے ہیں تو ہم عمودی اور افقی طور بھی تین مساوی حصّوں میں تقسیم کر سکتے ہیں۔

اگر P , (a,b) ہو تو،

$$a = OP' = OA' + A'P'$$

$$= x_1 + \frac{x_2 - x_1}{3} = \frac{x_2 + 2x_1}{3};$$

$$b = PP' = OA'' + A''P''$$

$$= y_1 + \frac{y_2 - y_1}{3} = \frac{y_2 + 2y_1}{3}$$

اس طرح نقطہ P حاصل ہوگا $\left(\frac{x_2 + 2x_1}{3}, \frac{y_2 + 2y_1}{3}\right)$

9 maths 5 co-ord geo 17
Wednesday, March 13, 2019 4:57:48 PM

اگر Q ، $(c\ d)$ ، ہوتو ،

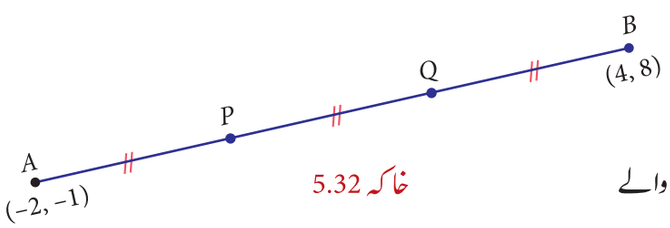
$$c = OQ' = OB' - Q'B' \qquad d = OQ'' = OB'' - Q''B''$$

$$= x_2 - \left(\frac{x_2 - x_1}{3}\right) = \frac{2x_{21} + x}{3}; \qquad = y_2 - \left(\frac{y_2 - y_1}{3}\right) = \frac{2y_{21} + y}{3}$$

اس طرح مطلوبہ نقطہ Q ہے $\left(\frac{2x_2 + x_1}{3}, \frac{2y_2 + y_1}{3}\right)$

مثال 5.16 $(-2, -1)$ اور $(4, 8)$ کے نقطوں کو ملانے والے قطاعِ خط کو تین مساوی حصّوں میں تقسیم کرنے والے نقاط معلوم کیجئے۔

حل :



خاکہ 5.32

فرض کیجئے $A(-2, -1)$ اور $B(4, 8)$ دیے گئے نقاط ہیں۔

فرض کیجئے کہ AB قطاعِ خط کو تین مساوی حصّوں میں تقسیم کرنے والے نقاط $P(a, b)$ اور $Q(c, d)$ ہیں۔ اس طرح $AP = PQ = QB$ ہے۔

اوپر کے ثابت کئے ہوئے ضابطہ کے تحت،

نقطہ P ہے

$$\left(\frac{x_2 + 2x_1}{3}, \frac{y_2 + 2y_1}{3}\right) = \left(\frac{4 + 2(-2)}{3}, \frac{8 + 2(-1)}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{4 - 4}{3}, \frac{8 - 2}{3}\right) = (0, 2)$$

نقطہ Q ہے

$$\left(\frac{2x_2 + x_1}{3}, \frac{2y_2 + y_1}{3}\right) = \left(\frac{2(4) - 2}{3}, \frac{2(8) - 1}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{8 - 2}{3}, \frac{16 - 1}{3}\right) = (2, 5)$$

ترقی کی جانچ

i) $(4, -1)$ اور $(-2, -3)$ نقاط کو ملانے والے قطاعِ خط کو تین مساوی حصّوں میں تقسیم کرنے والے نقاط کے محددوں کو معلوم کیجئے۔

ii) $(6, -9)$ اور مبداء نقاط کو ملانے والے قطاعِ خط کو تین مساوی حصّوں میں تقسیم کرنے والے نقاط کے محددوں کو معلوم کیجئے۔

5.6 حصّہ کا ضابطہ (نسبت کا ضابطہ) (Section Formula)

دیے گئے قطاعِ خط کو دو مساوی حصّوں اور تین مساوی حصّوں میں تقسیم کرنے کے بارے میں پڑھ چکے ہیں۔ یہ صرف مخصوص صورتوں میں عام مسئلہ میں دو نقاط (x_1, y_1) اور (x_2, y_2) کو ملانے والے ایک قطاع خط کو $m : n$ کی نسبت میں تقسیم کرتے ہیں۔

ایک قطاع خط AB اور ایک مثبت حقیقی عدد ' r ' دیا گیا ہے۔ ہم نقطہ P کے محدد معلوم کرنا چاہتے ہیں۔ جو AB کو $r : 1$ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔



خاکہ 5.33

اس کا مطلب $\frac{AP}{PB} = \frac{r}{1}$ یا $AP = r(PB)$ ہے۔

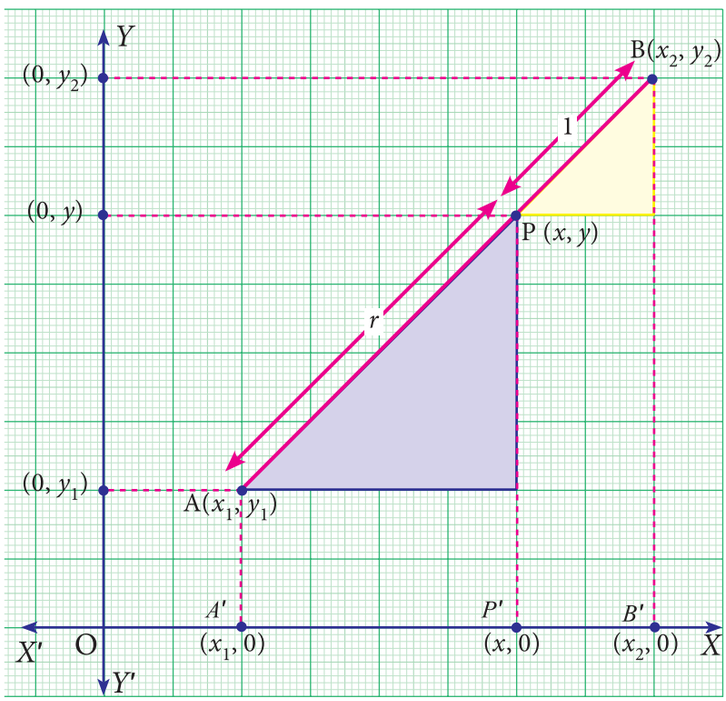
9 maths 5 co-ord geo 17
Wednesday, March 13, 2019 4:57:48 PM

$x - x_1 = r(x_2 - x)$ اس کے معنی ہیں۔

اس کو حل کرنے سے

$$x = \frac{rx_2 + x_1}{r+1} \quad \ldots\ldots (1)$$

ہم اس نتیجہ کو استعمال کر کے خط کے نقاط کے لئے عام صورت درجہ ذیل سے حل کر سکتے ہیں۔



خاکہ 5.34

لینے پر $AP : PB = r : 1$ ہمیں حاصل ہوا۔ $A'P' : P'B' = r : 1$

چنانچہ $A'P' = r(P'B')$

اس طرح، $(x - x_1) = r(x_2 - x)$

[1 ملاحظہ کریں] ... جس سے حاصل ہوتا ہے $x = \frac{rx_2 + x_1}{r+1}$

ٹھیک اسی طریقے سے ہم $y = \frac{ry_2 + y_1}{r+1}$ حاصل کر سکتے ہیں۔

اگر P، A اور B کے درمیان ہے اور $\frac{AP}{PB} = r$ ہو تو ہمیں ضابطہ حاصل ہوتا ہے۔

P ہے $\left(\frac{rx_2 + x_1}{r+1}, \frac{ry_2 + y_1}{r+1}\right)$ ہے۔

اگر r کو $\frac{m}{n}$ کی طرح لیتے ہیں تو حصّہ کا ضابطہ

یہ ہے، $\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$ جو ایک معیاری شکل ہے۔

Thinking Corner ذرا سوچئے

(i جب $m = n = 1$ کیا ہوگا؟
کیا تم پہلے ہی ثابت کئے ہوئے نتیجہ سے اس کو پہچان سکتے ہو؟

(ii $AP : PB = 1 : 2$ اور $AQ = QB = 2 : 1$ ہے تو
$AP : AB$ کیا ہوگا؟
$AQ : AB$ کیا ہوگا؟

9 maths 5 co-ord geo 17
Wednesday, March 13, 2019 4:57:49 PM

Note

غور کیجئے

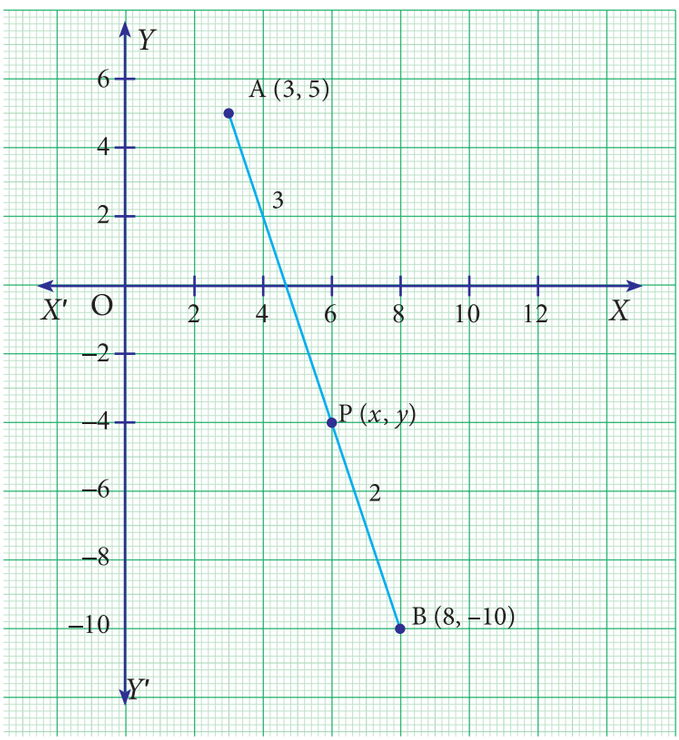
- نقاط (x_1,y_1)اور (x_2,y_2) کوملانے والے قطاع خط کو x محور سے $\frac{-y_1}{y_2}$ کی نسبت میں اور y محور سے $\frac{-x_1}{x_2}$ کی نسبت میں تقسیم کرتے ہیں۔
- اگر تین نقاط ہم خط ہو تو کوئی ایک نقطہ دوسرے دو نقاط کو ملانے والے قطاع خط کو $r : 1$ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔
- یاد رکھیں حصّے کا ضابطہ صرف اُس وقت استعمال کر سکتے ہیں۔ جب تینوں نقاط ہم خط ہوں۔
- یہ ضابطہ کارآمد ہوگا ایک مثلث کے ہندسی مرکز، درون مرکز اور بیرون مرکز کو معلوم کرنے کے لئے۔ اس کا استعمال طبیعیات میں بھی ہوتا ہے، جیسے یہ کمیت کے نظام کا مرکز دریافت کرنے، توازنِ نقاط وغیرہ معلوم کرنے میں مددگار رہوتا ہے۔

مثال 5.17

نقاط (3, 5) اور (8, –10) کوملانے والے قطاع خط کو اندرونی جانب 2 : 3 کی نسبت میں تقسیم کرنے والے نقطہ کا محدد معلوم کیجئے۔

حل :

فرض کیجئے۔ A(3,5) اور B(8,–10) دئے گئے نقاط ہیں اور فرض کیجئے نقطہ P(x,y) قطاع خط AB کو اندرونی جانب 2 : 3 کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔



خاکہ 5.35

حصّہ کے ضابطہ کے تحت

$$P(x, y) = P\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$$

یہاں، $x_1 = 3, \quad y_1 = 5, \quad x_2 = 8$

$m = 3, \quad n = 2$ اور $y_2 = -10$

لہذا $$P(x, y) = P\left(\frac{3(8)+2(3)}{3+2}, \frac{3(-10)+2(5)}{3+2}\right) = P\left(\frac{24+6}{5}, \frac{-30+10}{5}\right) = P(6, -4)$$

9 maths 5 co-ord geo 17
Wednesday, March 13, 2019 4:57:49 PM

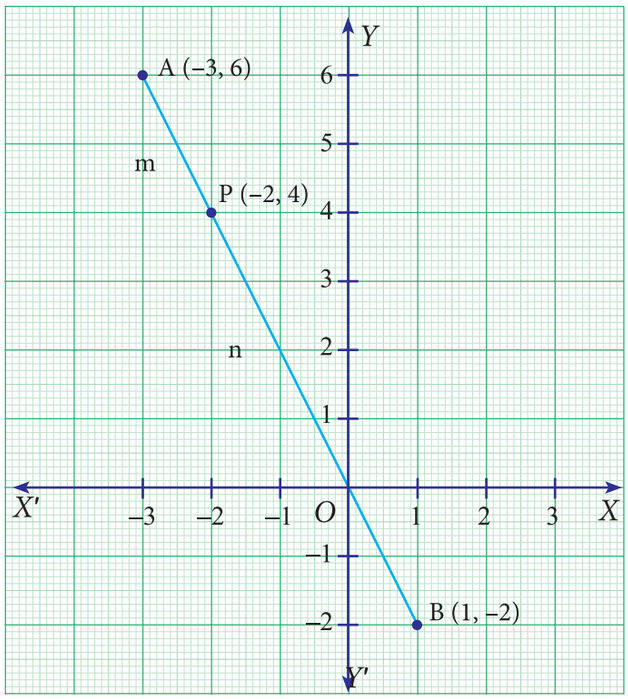
مثال 5.18

نقاط A(–3,6) اور B(1, –2) کو ملانے والے قطعِ خط کو نقطہ P(–2, 4) اندرونی جانب کس نسبت میں تقسیم کرتا ہے؟

حل :

A(–3,6) اور B(1, –2) دیے گئے نقاط ہیں۔

فرض کیجئے نقطہ P(–2, 4)، خط AB کو اندرونی جانب $m : n$ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔



خاکہ 5.36

حصّہ کا ضابطہ کے تحت

$$P(x, y) = P\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$$

$$= P(-2, 4) \quad .....(1)$$

یہاں، $x_1 = -3,\ y_1 = 6,\ x_2 = 1,\ y_2 = -2$

$$(1) \Rightarrow \left(\frac{m(1)+n(-3)}{m+n}, \frac{m(-2)+n(6)}{m+n}\right) = P(-2,4)$$

x محددوں کو مساوی کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{m-3n}{m+n} = -2 \quad \text{یا} \quad m - 3n = -2m - 2n$$

$$3m = n$$

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{3}$$

$$m : n = 1 : 3$$

لہذا AB کو نقطہ P اندرونی جانب 1 : 3 کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

Note غور کیجئے

y محددوں کو مساوی کرنے پر بھی ہمیں وہی نتیجہ حاصل ہوگا۔ کوشش کیجئے۔

مثال 5.19

نقطہ B کے محدد یں کیا ہوں گے، اگر A(–3,5) اور B کو ملانے والے قطعِ خط کو نقطہ P(–2,3) اندرونی جانب 1 : 6 کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے؟

حل :

فرض کیجئے A (–3,5) اور B (x_2, y_2) دیے گئے دو نقاط ہیں۔

دیا گیا نقطہ P(–2,3)، خط AB کو اندرونی جانب 1 : 6 کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

9 maths 5 co-ord geo 17
Wednesday, March 13, 2019 4:57:49 PM

حصّہ کا ضابطہ کے تحت :

$$P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\frac{my_2+ny_1}{m+n}\right) = P(-2,3)$$

$$P\left(\frac{1(x_2)+6(-3)}{1+6},\frac{1(y_2)+6(5)}{1+6}\right) = P(-2,3)$$

محدودوں کو مساوی کرنے پر،

$$\frac{x_2-18}{7} = -2 \qquad \frac{y_2+30}{7} = 3$$
$$x_2-18 = -14 \qquad y_2+30 = 21$$
$$x_2 = 4 \qquad y_2 = -9$$

لہذا B کا محدد $(4,-9)$ ہے

مشق 5.4

1۔ نقاط A(4, –3) اور B(9,7) کو ملانے والے قطعِ خط کو 2 : 3 کی نسبت میں تقسیم کرنے والا نقطہ کا محدد معلوم کیجئے۔

2۔ نقاط A(–3,5) اور B(4,–9) کو ملانے والے قطعِ خط کو نقطہ P(2,–5) کس نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

3۔ نقاط A(1,2) اور B(6,7) کو ملانے والے قطعِ خط کو نقطہ P اس طرح $AP = \frac{2}{5}$ AB تقسیم کرتا ہے۔ تو نقطہ P کی محدد دریافت کیجئے۔

4۔ نقاط A(–5,6) اور B(4,–3) کو ملانے والے قطعِ خط کو تین مساوی حصّوں میں تقسیم کرنے والے نقاط کے محدودں کو دریافت کیجئے۔

5۔ نقاط A(6,3) اور B(–1,–4) کو ملانے والے قطعِ خط کی لمبائی دگنی ہوگی اگر AB کا نصف حصّہ ہر حد (Each end) میں ملاتے ہیں تو نئے نقاط کے محدودں کو دریافت کریں۔

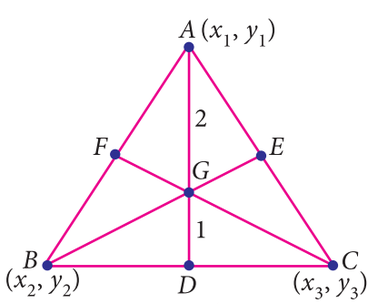
6۔ حصّہ کا ضابطہ کے استعمال سے، ثابت کیجئے کہ نقاط A(7, –5)، B(9, –3) اور C(13,1) ہم خط ہیں۔

7۔ ایک قطعِ خط AB کو اس کی لمبائی کے ہم راہ 25% کے اضافہ کر کے نقطہ B سے نقطہ C حاصل ہوتا ہے۔ اگر A اور B کے محدد یں (2,–3) اور (2,1) بالترتیب ہو تو نقطہ C کے محدد معلوم کیجئے۔

5.7 ہندسی مرکز کے محدد یں (The co-ordinates of centroid)

فرض کیجئے ΔABC جس کے راسیں $A(x_1,y_1)$، $B(x_2,y_2)$ اور $C(x_3,y_3)$ ہیں۔

فرض کیجئے کہ AD، BE اور CF، ΔABC کے خطوط وسطی ہیں۔



خاکہ 5.37

$\left(\frac{x_2+x_3}{2},\frac{y_2+y_3}{2}\right)$ ہے BC کا وسطی نقطہ D

9 maths 5 co-ord geo 17
Wednesday, March 13, 2019 4:57:50 PM

مثلث کا ہندسی مرکز G، خطِ وسطی AD کو اندرونی جانب 1 : 2 کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے

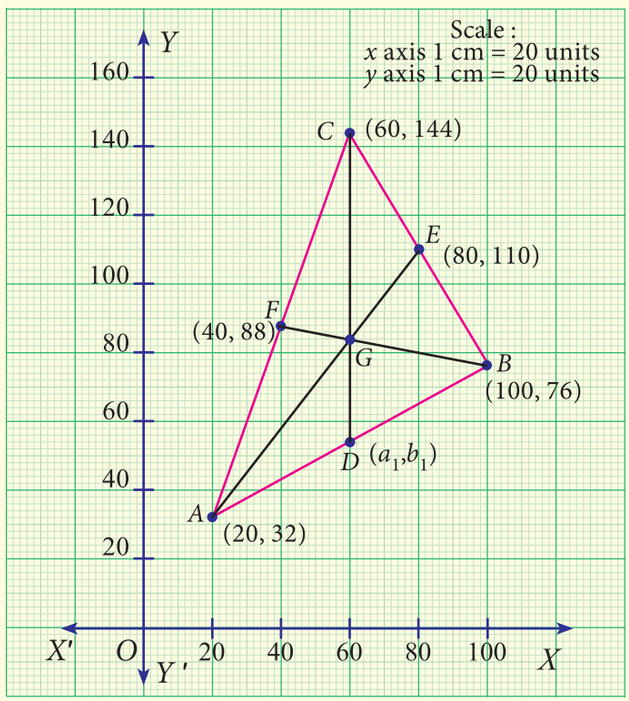
اور چنانچہ حصّہ کا ضابطہ کے تحت، ہندسی مرکز

$$G(x,y) = \left(\frac{2(x_2+x_3)}{2}+1(x_1)}{2+1}, \frac{\frac{2(y_2+y_3)}{2}+1(y_1)}{2+1}\right) = \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

$A(x_1,y_1)$، $B(x_2,y_2)$ اور $C(x_3,y_3)$ راسیں رکھنے والے مثلث کا ہندسی مرکز

$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ ہے۔

کارروائی 2



خاکہ 5.38

1۔ ایک مثلث ABC جس کے راسیں $A(x_1,y_1)$، $B(x_2,y_2)$ اور $C(x_3,y_3)$ کو ترسیمی کاغذ پر بنائیے۔

2۔ خطوط وسطی کھینچئے اور ΔABC کا ہندسی مرکز نشان کیجئے۔

مشاہدہ :

i) مثلث ABC کے راسیں کے محدد یہ ہیں۔

$A(x_1,y_1)$ = ...

$B(x_2,y_2)$ = ...

$C(x_3,y_3)$ = ...

ii) ہندسی مرکز G کے محدد ..... ہے۔

iii) ضابطہ استعمال کر کے ہندسی مرکز کو نشان کیجئے جس کے محدد یں ..... ہیں۔

iv) AB کا وسطی نقطہ ..... ہے۔

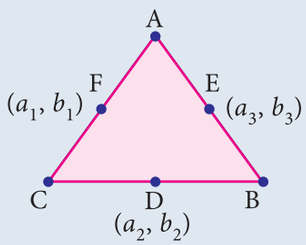
v) نقاط (x_3,y_3) اور AB کا وسطی نقطہ کو ملانے والے قطاعِ خط کو 1 : 2 کی نسبت میں تقسیم کرنے والا نقطہ ..... ہے۔

9 maths 5 co-ord geo 17
Wednesday, March 13, 2019 4:57:50 PM

Note

غور کیجئے:

- ایک مثلث کے خطوطِ وسطی ہندسی مرکز پر متراکز (Concurrent) ہوتے ہیں اور نقطہ تراکز ہندسی مرکز G ہے۔ جو مقابل کے ضلع وسطی راس سے ایک تہائی فاصلہ پر ہے۔
- ایک مثلث کے اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے سے مثلث کا ہندسی مرکز حاصل ہوتا ہے جو اصلی مثلث کے ہندسی مرکز سے یکساں ہوتا ہے۔
- اگر ایک مثلث ABC کے وسطی نقاط (a_1, b_1)، (a_2,b_2) اور (a_3,b_3) ہو تو اس کا ہندسی مرکز G اس طرح ہوگا۔ $G\left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3}, \frac{b_1+b_2+b_3}{3}\right)$



خاکہ 5.39

مثال 5.20

ایک مثلث کا ہندسی مرکز معلوم کیجئے جس کے راسیں A(6,–1)، B(8,3) اور C(10,–5) ہیں۔

حل : راسیں رکھنے والے مثلث کا ہندسی مرکز (x_1,y_1)، (x_2,y_2) اور (x_3,y_3) کا ضابطہ $G(x,y)$

$$G(x, y) = G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

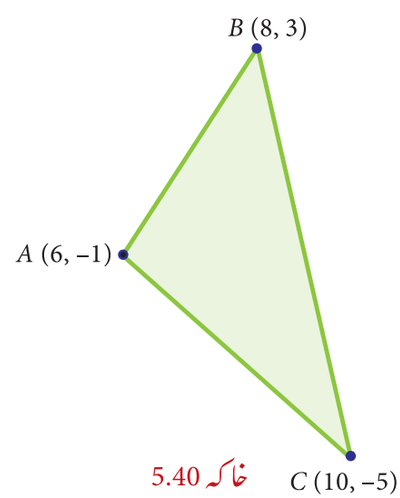
یہاں $(x_1, y_1) = (6, -1)$; $(x_2, y_2) = (8, 3)$;

$(x_3, y_3) = (10, -5)$

مثلث کا ہندسی مرکز

$$G(x, y) = G\left(\frac{6+8+10}{3}, \frac{-1+3-5}{3}\right)$$

$$= G\left(\frac{24}{3}, \frac{-3}{3}\right) = G(8, -1)$$

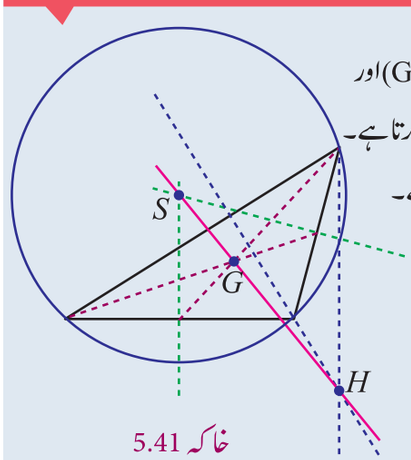


خاکہ 5.40

Note

غور کیجئے:

- ایک مثلث کی ائیلر (Euler) کی خط اُس خط کو کہتے ہیں۔ جو عمودی مرکز (H)، ہندسی مرکز (G) اور حائط مرکز (S) سے گزرتی ہے۔ عمودی مرکز سے G، H اور S کو 1 : 2 کی نسبت سے تقسیم کرتا ہے۔ یعنی عمودی مرکز اور حائط مرکز کو ہندسی مرکز 1 : 2 کی نسبت میں اندرونی جانب تقسیم کرتا ہے۔
- ایک مثلث مساوی الاضلاع میں عمودی مرکز، دروں مرکز، ہندسی مرکز اور حائط دائرہ ایک ہی ہوتے ہیں۔



خاکہ 5.41

9 maths 5 co-ord geo 17
Wednesday, March 13, 2019 4:57:50 PM

مثال 5.21

اگر ایک مثلث کا ہندسی مرکز $(-2, 1)$ پر ہو اور اس کے دو راسیں $(-6, 1)$ اور $(-5, 2)$ ہوں تو مثلث کا تیسرا راس معلوم کرو۔

حل :

فرض کرو $A(1, -6)$، $B(-5, 2)$ اور $C(x_3, y_3)$ ایک مثلث کی راسیں ہیں۔ ایک مثلث کا دیا گیا ہندسی مرکز $(-2,1)$ ہو تو ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = 1 \qquad \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = -2$$

$$\frac{-6 + 2 + y_3}{3} = 1 \qquad \frac{1 - 5 + x_3}{3} = -2$$

$$-4 + y_3 = 3 \qquad -4 + x_3 = -6$$

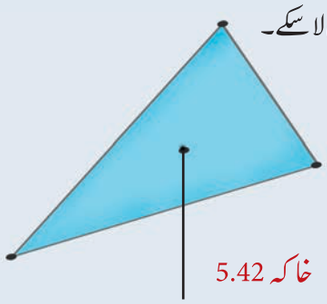
$$y_3 = 7 \qquad x_3 = -2$$

چنانچہ، تیسرا راس $(-2,7)$ ہے

(ii) اس مثلث کے لئے قوت جاذبہ کا مرکز کونسا ہے؟ کیوں؟

Thinking Corner ذرا سوچئے

استاد نے ایک طالب علم کو ایک مثلث نما تختی دی، جس کے راسیں $A(5,8)$، $B(2,4)$ اور $C(8,3)$ ہیں۔ اور ایک چھڑی بھی دی وہ اس پلاٹ کو چھڑی کی مدد سے توازن (balance) میں رکھنا چاہتا ہے۔ کیا تم اُس لڑکے کو اُس نقطہ کو نشان کرنے میں مدد کرو گے جس سے وہ تختی کو توازن میں لا سکے۔



خاکہ 5.42

مشق 5.5

1۔ مثلث کا ہندسی مرکز معلوم کرو جس کے راس درج ذیل ہیں۔

(i) $(2,-4), (-3,-7)$ اور $(7,2)$ (ii) $(-5,-5), (1,-4)$ اور $(-4,-2)$

2۔ اگر ایک مثلث کا ہندسی مرکز $(4, -2)$ پر ہو اور اسکے دو راسیں $(3,-2)$ اور $(5,2)$ ہو تو مثلث کا تیسرا راس معلوم کرو۔

3۔ کسی مثلث کے راسیں $A(-1, 3)$، $B(1,-1)$ اور $C(5,1)$ ہیں۔ A سے خط وسطی کا طول معلوم کرو۔

4۔ ایک مثلث کے راسیں $(1,2)$، $(h,-3)$ اور $(-4,k)$ ہیں۔ اگر اس مثلث کا ہندسی مرکز کا نقطہ $(5,-1)$ پر ہو تو $\sqrt{(h+k)^2 + (h+3k)^2}$ کی قیمت معلوم کیجئے۔

5۔ ایک مثلث کے عمودی مرکز اور ہندسی مرکز $A(-3, 5)$ اور $B(3,3)$ بالترتیب ہیں۔ اگر C حائط مرکز ہے۔ اور AC دائرہ کا قطر ہو تو دائرے کا نصف قطر معلوم کیجئے۔

9 maths 5 co-ord geo 17
Wednesday, March 13, 2019 4:57:51 PM

6۔ ایک مثلث ABC جس کے راسیں A(3,4)، B(–2,–1) اور C(5,3) ہیں۔
اگر G ہندسی مرکز ہے اور BDCG ایک متوازی الاضلاع ہو تو راس D کے محدد معلوم کیجئے۔

7۔ اگر ایک مثلث کے اضلاع کے وسطی نقاط $\left(\frac{3}{2},5\right)$، $\left(7,\frac{-9}{2}\right)$ اور $\left(\frac{13}{2},\frac{-13}{2}\right)$ ہیں تو اس مثلث کا ہندسی مرکز معلوم کیجئے۔

A4VT9

مشق 5.6

کثیر انتخابی سوالات / معروضی سوالات

1۔ ایک نقطہ کا y محدد صفر ہو تو وہ نقطہ ہمیشہ ..... پر ہے۔

a) I ربع میں b) II ربع میں c) x محور پر d) y محور پر

2۔ نقاط (–5,2) اور (2,–5) ..... میں ہیں۔

a) برابر وہی ربع میں b) بالترتیب II اور III ربع میں

c) بالترتیب II اور IV ربع میں d) بالترتیب IV اور II ربع میں

3۔ نقاط O(0,0)، A(3,–4)، B(3,4) اور C(0,4) کو درج کرکے OA، AB، BC اور CO کو ملانے پر ذیل میں سے کونسی شکل حاصل ہوگی۔

a) مربع b) مستطیل c) منحرف d) معین

4۔ اگر P(–1,1)، Q(3,–4)، R(1,–1)، S(–2,–3) اور T(–4,4) کو ترسیمی کاغذ پر درج کریں تو چوتھے ربع میں ..... نقاط ہیں۔

a) P اور T b) Q اور R c) صرف S d) P اور Q

5۔ نقطہ جس کا معین 4 ہے اور y- محور پر ہے۔ وہ ..... ہے۔

(a) (4, 0) (b) (0, 4) (c) (1, 4) (d) (4, 2)

6۔ دو نقاط (2,3)، (1,4) کے درمیان کا فاصلہ ..... ہے۔

(a) 2 (b) $\sqrt{56}$ (c) $\sqrt{10}$ (d) $\sqrt{2}$

7۔ اگر نقاط A(2,0)، B(–6,0)، C(3,a–3)، x محور پر ہوں تو 'a' کی قیمت ..... ہے۔

(a) 0 (b) 2 (c) 3 (d) –6

8۔ اگر (x+2,4) = (5,y–2) ہو تو محدد (x,y) ..... ہے۔

(a) (7, 12) (b) (6, 3) (c) (3, 6) (d) (2, 1)

9۔ اگر ایک کارتیسی سطح میں Q_1، Q_2، Q_3 اور Q_4 چار ربع ہیں تو $Q_2 \cap Q_3$ ..... ہے۔

(a) $Q_1 \cup Q_2$ (b) $Q_2 \cup Q_3$ (c) خالی سیٹ (d) منفی x-محور

10۔ نقطہ (5,–1) اور مبداء کے درمیان کا فاصلہ ..... ہے۔

(a) $\sqrt{24}$ (b) $\sqrt{37}$ (c) $\sqrt{26}$ (d) $\sqrt{17}$

9 maths 5 co-ord geo 17
Wednesday, March 13, 2019 4:57:51 PM

11۔ نقاط P(2,4) اور Q(5,7) نقاط کوملانے والے قطاع خط کواندرونی جانب 1 : 2 کی نسبت میں تقسیم کرنے والے نقطہ C کا محدّ دمعلوم کرو۔

(1) $\left(\frac{7}{2},\frac{11}{2}\right)$ (2) (3,5) (3) (4,4) (4) (4,6)

12۔ اگر A(–4,3) اور B(–2,4) کوملانے والے قطاع خط کا وسطی نقطہ $P\left(\frac{a}{3},\frac{b}{2}\right)$ ہوتو (a,b) ..... ہے۔

(1) (–9,7) (2) $\left(-3,\frac{7}{2}\right)$ (3) (9, –7) (4) $\left(3,-\frac{7}{2}\right)$

13۔ نقاط P(2,7) اور R(–2,3) کوملانے والے قطاع خط کونقطہ Q(1,6) کس نسبت میں تقسیم کرتا ہے؟

(1) 1:2 (2) 2:1 (3) 1:3 (4) 3:1

14۔ اگر دائرہ کے قطر کی ایک حد کی محدد (3,4) ہے۔اور دائرہ کا مرکز کی محدّ د (–3,2) ہوتو دائرہ کے قطر کی دوسری حد کی محدّ د ..... ہے۔

(1) (0,–3) (2) (0,9) (3) (3,0) (4) (–9,0)

15۔ نقاط $A(a_1,b_1)$ اور $B(a_2,b_2)$ کوملانے والے قطاع خط کو x محور کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

(1) $b_1 : b_2$ (2) $-b_1 : b_2$ (3) $a_1 : a_2$ (4) $-a_1 : a_2$

16۔ نقاط (6,4) اور (1,–7) کوملانے والے قطاع خط کو x محور ..... کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

(1) 2:3 (2) 3:4 (3) 4:7 (4) 4:3

17۔ اگر ایک مثلث کے اضلاع AB، BC اور CA کے وسطی نقاط کے محدّ دے (3,4)، (1,1) اور (2,–3) بالترتیب ہوتو اس مثلث کے راسیں A، B ..... ہیں۔

(1) (3,2), (2,4) (2) (4,0), (2,8)
(3) (3,4), (2,0) (4) (4,3), (2,4)

18۔ نقاط $(-a,2b)$ اور $(-3a,-4b)$ ملانے والے خط کا وسطی نقطہ ..... ہے۔

(1) $(2a,3b)$ (2) $(-2a,-b)$ (3) $(2a,b)$ (4) $(-2a,-3b)$

19۔ نقاط (–5,1) اور (2,3) کوملانے والے قطاع خط کواندرونی جانب y محور ..... کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

(1) 1:3 (2) 2:5 (3) 3:1 (4) 5:2

20۔ اگر متوازی الاضلاع کے راسیں (–2,1)، (3,6)، (x,10) اور (3,2) کوترتیب سے لیا گیا ہوتو x کی قیمت ہے۔

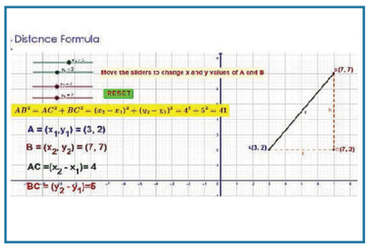
(1) 6 (2) 5 (3) 4 (4) 3

9 maths 5 co-ord geo 17
Wednesday, March 13, 2019 4:57:51 PM

یادرکھنے کے نکات

- اگر x_1، x_2، x محور پر دو نقاط کے x- محدد ہوں تو ان کے درمیان کا فاصلہ $x_2 - x_1$ ہے۔ اگر $x_2 > x_1$
- اگر y_1، y_2، y محور پر دو نقاط کے y- محدد ہوں تو ان کے درمیان کا فاصلہ $|y_1 - y_2|$ ہے۔
- دو نقاط (x_1, y_1) اور (x_2, y_2) کے درمیان کا فاصلہ $d = \sqrt{(x_2 - x)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- (x_1, y_1) اور مبداء $(0,0)$ کے درمیان کا فاصلہ $\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$
- نقاط $A(x_1, y_1)$ اور $B(x_2, y_2)$ کو ملانے والے قطاع خط کا وسطی نقطہ M ہے۔ تو $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$
- نقطہ P جو نقاط $A(x_1, y_1)$ اور $B(x_2, y_2)$ کو ملانے والے قطاع خط کو $m : n$ کی نسبت میں اندرونی جانب تقسیم کرتا ہے۔
$$P\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$$
- $A(x_1, y_1)$، $B(x_2, y_2)$ اور $C(x_3, y_3)$ راسیں رکھنے والے مثلث کا ہندسی مرکز $G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ ہے۔
- ایک مثلث کے اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے سے مثلث کا ہندسی مرکز حاصل ہوتا ہے۔ جو اصلی مثلث کے ہندسی مرکز سے یکساں ہوتا ہے۔

ICT Corner — ICT کارنر



مطلوبہ جواب اس طرح دکھائی دے گا۔

مرحلہ 1 :

براؤزر کھولئے اور دئے گئے لنک کو کاپی اور پیسٹ کیجئے یا

دئے گئے URL کو ٹائپ کیجئے یا دئے گئے QR کوڈ کو اسکین کیجئے۔

مرحلہ 2 :

Geo Gebra کا ورک بک ''IX محددوں کا علمِ ہندسہ'' نظر آئے گا۔ اس ورک بک میں بہت سارے ورک شیٹ ہوں گے۔ اس میں ''فاصلے کا ضابطہ'' نامی ورک شیٹ کو کھولیں

مرحلہ 3 : A اور B کے محددوں کو تبدیل کرنے کے لئے Sliders، x_1, x_2, y_1, y_2 کو کھینچئے۔ اب فاصلہ کے ضابطے استعمال کر کے ایک کاغذ کے ٹکڑے میں فاصلہ AB دریافت کر کے حل کو جانچئے۔

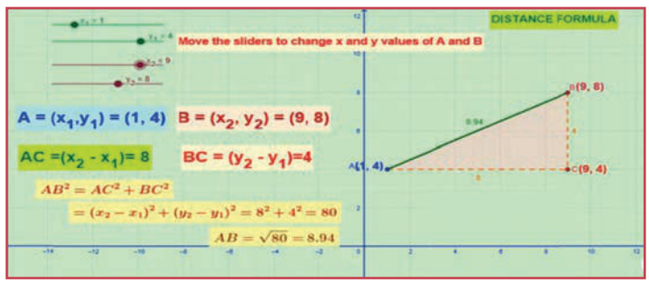
Browse in the link

Co-Ordinate Geometry: https://ggbm.at/V9HfY4v8

9 maths 5 co-ord geo 17
Wednesday, March 13, 2019 4:57:52 PM

ICT Corner — ICT کارنر

مطلوبہ نتیجہ کو اس تصویر میں دکھایا گیا ہے۔



مرحلہ 1 : براؤزر کھولئے اور دئے گئے URL لنک کو ٹائپ کیجئے یا دئے گئے QR کوڈ کو اسکین کیجئے Co-Ordinate Geometry نامی GeoGebra ورک شیٹ کھلے گا۔ اس میں دو ورک شیٹ ہوں گے۔ جن کے عنوان Distance Formula اور Section Formula ہوں گے

مرحلہ 2 : سلائڈرس کو حرکت دے کر مخصوص نقاط اور نسبت کی قیمتوں کو تبدیل کریں انہیں حل کریں اور تمہارے جوابات کو بالترتیب خانوں میں کلک کر کے جانچیں۔

Browse in the link

Co-Ordinate Geometry: https://ggbm.at/sfszfe24 or Scan the QR Code.

کارروائی 8

نقاط A(1,0)، B(−7,2)، C(−3,7) کو ترسیمی کاغذ پر درج کیجئے اور انہیں ملا کر ایک مثلث بنائیے۔

نقطہ G(−3,3) کو درج کیجئے۔

AG کو ملائیے اور اسے دراز کیجئے اس طرح سے کہ وہ BC کو D پر قطع کرے۔ BG کو ملائیے اور اسے دراز کیجئے اس طرح کہ وہ AC کو E پر قطع کرے۔ BD اور DC کے درمیان کے فاصلے اور CE اور EA کے درمیان کے فاصلے کو ناپنے کے بعد آپ کس نتیجہ پر پہنچو گے؟

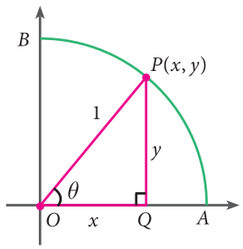
CG اور GF کے لمبائیوں کو فاصلہ کے ضابطہ کے استعمال سے ناپئے۔ جہاں F، AB پر ہے۔

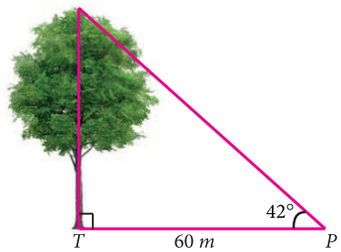
AG:GD، BG:GE اور CG:GF کے بارے میں اپنا نتیجہ لکھئے۔

نوٹ : G مثلث کا ہندسی مرکز (Centroid) ہے اور AD، BE اور CF مثلث کے تین ارتفاع ہیں۔

9 maths 5 co-ord geo 17
Wednesday, March 13, 2019 4:57:52 PM

6





علمِ مثلث
(TRIGONOMETRY)



لیون ہارڈ ایلیر **Leonhard Euler**
A.D (C.E) 1707 - 1783

There is perhaps nothing which so occupies the middle position of mathematics as Trigonometry.- J. F. Herbart

ایلیر ، نیوٹن کی طرح اپنے دور کے سب سے بڑے ریاضی دان تھے۔انہوں نے ریاضی کے تمام شعبوں کا مطالعہ کیا۔اپنی بینائی چلے جانے کے بعد بھی اپنے کام کو جاری رکھا۔ایلیر نے ریاضی کے بہت سارے شعبوں میں تحقیقات کئے جس میں خاص کر حسابان(Calculus)اور علم مثلث ہیں ۔علم ہندسہ میں بہت مسئلوں کو ثابت کرنے والوں میں پہلے شخص تھے۔

سیکھنے کے مقاصد

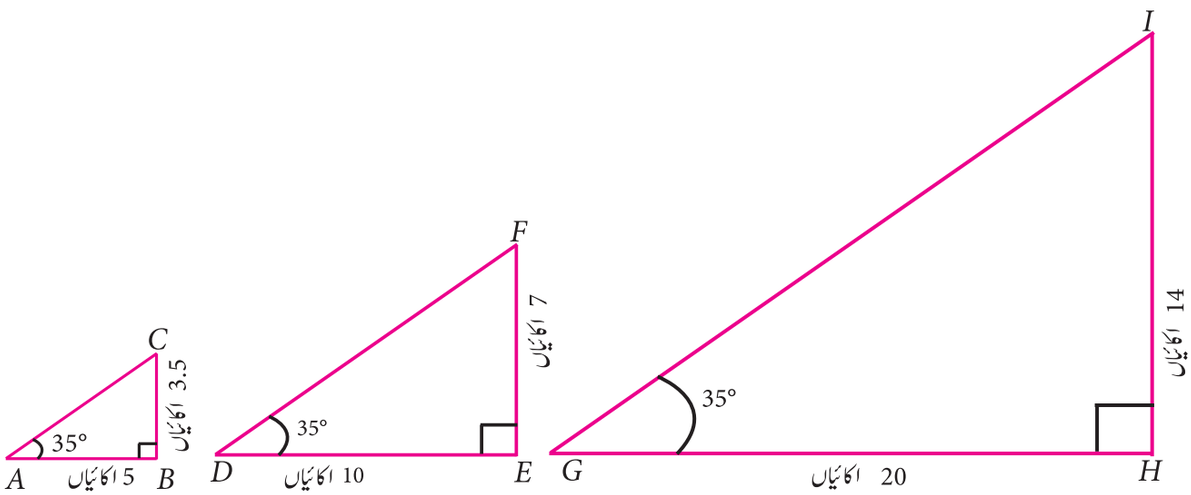
- علم مثلث کے مختلف نسبتوں کے درمیانی تعلقات کو سمجھنا۔
- علم مثلث کی نسبتوں کی قیمتوں اور ان کے مقلوب کو پہچاننا۔
- متمم زاویے کے اُصول(Concept) کو استعمال کرنا۔
- علم مثلث کے جدول کے استعمالات کو سمجھنا۔

6.1 تعارف

علم مثلث(Trigonometry)(یونانی زبان سے ماخوذ ہے لفظ Trigonon کے معنی مثلث اور Metron کے معنی پیائش ہے)ریاضی کی ایک شاخ ہے جس میں مثلث کے اضلاع کی لمبائیوں اور زاویوں کی پیائش کے درمیانی تعلقات کے بارے میں سیکھا جاتا ہے۔یہ ایک کارآمد آلہ ہے انجینئر، سائنس دان اور اراضی کا معائنہ کرنے والے (Surveyors) اور علمِ زلزلہ (Seismology)اور جہاز رانی (Navigation) میں بھی استعمال ہوتا ہے۔

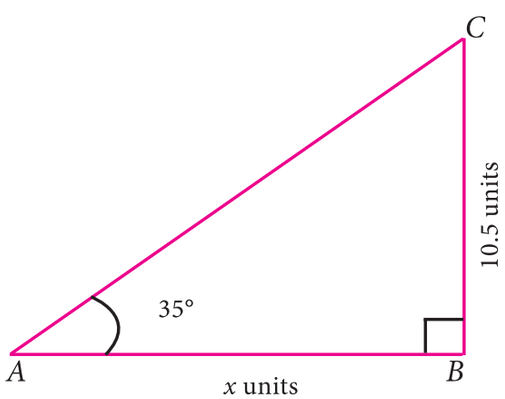
دئے گئے تین مثلثِ قائمۃ الزاویہ پر غور کیجئے خاص طور پر اُس کی پیائشوں کو جانچئے۔ان تینوں مثلثوں میں دکھائے گئے نظیری زاویوں کی پیائشیں یکساں ہیں۔تمہاری توجہ کو مثلث کے ''مقابل'' کے اضلاع (جس کے معنی دئے گئے زاویہ کا مقابل ضلع ہے)اور ''متصلہ'' اضلاع (دئے گئے زاویہ کا متصل ضلع ہے)کے طول پر مرکوز کیجئے ۔

9 maths 6 trigonometry
Wednesday, March 13, 2019 5:04:32 PM



خاکہ 6.1

$\frac{\text{مقابل ضلع}}{\text{متصلہ ضلع}}$ کی نسبت کے ہر ایک صورت کے بارے میں تم کیا کہہ سکتے ہو؟ یہاں دئے گئے ہر ایک مثلث قائمۃ الزاویہ کی نسبت 0.7 ہے۔اس تحقیق کی بنیاد پر، متصلہ خاکہ میں 'x' نشان کردہ ضلع کی لمبائی کیا ہوگی؟ کیا یہ 15 ہے؟

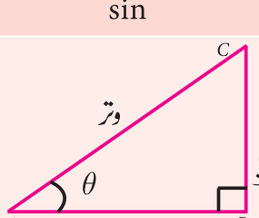
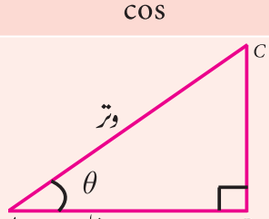
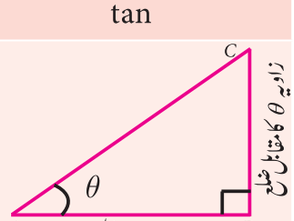


خاکہ 6.2

اس طرح کی غیر معمولی نسبت نے ابتدائی ریاضی دانوں کو دنگ کر دیا اور اس طرح علم مثلث کے موضوع کے لئے راستہ ہموار ہوا۔

علم مثلث میں تین بنیادی نسبتیں ہیں۔جس میں مثلث قائمۃ الزاویہ کے ہر ایک ضلع کو دوسرے ضلع سے تقسیم کرتے ہیں۔

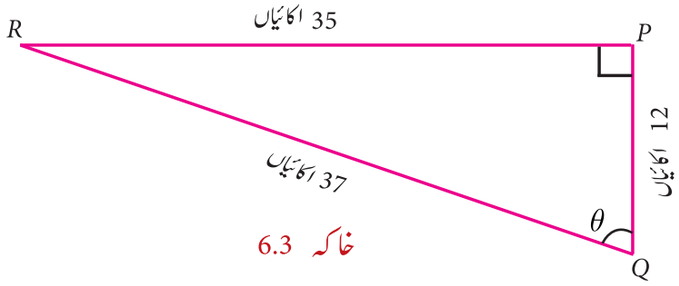
تین نسبتیں یہ ہیں۔

زاویے کا نام	sine	cosine	tangent
مختصر شکل	sin	cos	tan
تعلق رکھنے والی پیمائش			
تعلق	$\sin\theta = \frac{\text{مقابل ضلع}}{\text{وتر}}$	$\cos\theta = \frac{\text{متصلہ ضلع}}{\text{وتر}}$	$\tan\theta = \frac{\text{مقابل ضلع}}{\text{متصلہ ضلع}}$

9 maths 6 trigonometry
Wednesday, March 13, 2019 5:04:32 PM

مثال 6.1

خاکہ کی پیمائش میں، زاویہ θ کے sine ، cosine اور tangent کی نسبتیں معلوم کیجئے۔



خاکہ 6.3

حل :

دئے گئے مثلث قائمۃ الزاویہ میں، غور کریں کہ دئے گئے زاویہ θ کے لئے، PR 'مقابل' ضلع اور PQ 'متصل' ضلع ہیں۔

$$\sin\theta = \frac{\text{opposite side}}{\text{hypotenuse}} = \frac{\text{مقابل ضلع}}{\text{وتر}} = \frac{PR}{QR} = \frac{35}{37}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{adjacent side}}{\text{hypotenuse}} = \frac{\text{متصل ضلع}}{\text{وتر}} = \frac{PQ}{QR} = \frac{12}{37}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{opposite side}}{\text{adjacent side}} = \frac{\text{مقابل ضلع}}{\text{متصل ضلع}} = \frac{PR}{PQ} = \frac{35}{12}$$

ان نسبتوں کو کسور میں ہی چھوڑنا کافی ہے۔ اس صورت میں، اگر تم ہر نسبت کو ٹھیک طور پر اختتام پذیر عشری توسیع میں مختصر کرنا چاہتے ہو تو کر سکتے ہو، لیکن اس کو مختصر کرنا ضروری نہیں ہے۔

Note — غور کیجئے

چونکہ علم مثلث کی نسبتوں کو ضلعوں کے رقموں کی نسبتوں میں واضح کیا گیا ہے۔ یہ بے اکائی اعداد ہیں۔

نسبتیں جیسے $\sin\theta$، $\cos\theta$، $\tan\theta$ کو $(\sin)\times(\theta)$، $(\cos)\times(\theta)$، $(\tan)\times(\theta)$ کے طور پر ظاہر نہیں کر سکتے۔

Thinking Corner — ذرا سوچئے

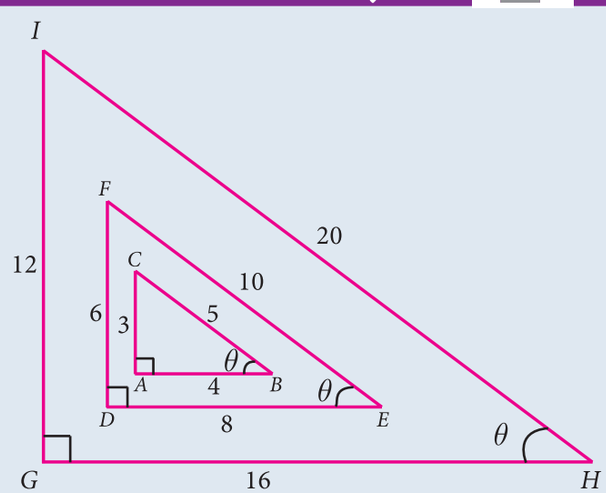
دئے گئے مثلثیں ABC، DEF اور GHI ذیل کی پیمائشیں رکھتے ہیں۔ 3-4-5، 6-8-10 اور 12-16-20

کیا وہ تمام مثلث قائمۃ الزاویہ ہیں؟

تم کس طرح جانتے ہو؟

B، E اور H راسوں پر زاویوں کی پیمائش مساوی ہیں (ہر ایک زاویہ θ کے مساوی ہے)

ان دستیاب تفصیلات کے ساتھ، ذیل کے جدول کو پُر کیجئے اور تمہیں حاصل ہونے والے نسبتوں پر اپنی رائے پیش کیجئے۔



خاکہ 6.4

9 maths 6 trigonometry
Wednesday, March 13, 2019 5:04:33 PM

ΔABC میں	ΔDEF میں	ΔGHI میں
$\sin\theta = \frac{3}{5}$	$\sin\theta = \frac{6}{10} = ?$	$\sin\theta = \frac{12}{20} = ?$
$\cos\theta = ?$	$\cos\theta = ?$	$\cos\theta = ?$
$\tan\theta = \frac{3}{4}$	$\tan\theta = ?$	$\tan\theta = ?$

مقلوب نسبتیں (Reciprocal Ratios)

ہم نے تین مثلثوں کی نسبتوں کو واضح کیا ہے۔ جن کے نام یہ ہیں۔

sine، cosine اور tangent۔ ان نسبتوں کے مقلوب بھی حسابات کو حل کرتے وقت بہت کارآمد ہوتے ہیں۔ ان کو اس طرح واضح کیا جاتا ہے۔

مختصر شکل	ان کا مقلوب	بنیادی علم مثلث کی نسبتیں
$\text{cosec}\,\theta = \frac{\text{وتر}}{\text{مقابل ضلع}}$	$\text{cosecant}\,\theta = \frac{\text{وتر}}{\text{مقابل ضلع}}$	$\sin\theta = \frac{\text{مقابل ضلع}}{\text{وتر}}$
$\sec\theta = \frac{\text{وتر}}{\text{متصلہ ضلع}}$	$\text{secant}\,\theta = \frac{\text{وتر}}{\text{متصلہ ضلع}}$	$\cos\theta = \frac{\text{متصلہ ضلع}}{\text{وتر}}$
$\cot\theta = \frac{\text{متصلہ ضلع}}{\text{مقابل ضلع}}$	$\text{cotangent}\,\theta = \frac{\text{متصلہ ضلع}}{\text{مقابل ضلع}}$	$\tan\theta = \frac{\text{مقابل ضلع}}{\text{متصلہ ضلع}}$

مندرجہ بالا نسبتوں میں ہم آسانی کے ساتھ ذیل کے تعلقات کو غور کر سکتے ہیں۔

$$\text{cosec}\,\theta = \frac{1}{\sin\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{\text{cosec}\,\theta} \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} \qquad \tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$$

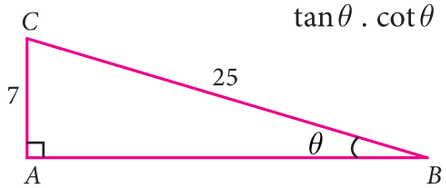
$\sin\theta\ \text{cosec}\,\theta = 1$ عام طور پر ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں۔ $(\sin\theta)\times(\text{cosec}\,\theta) = 1$

$\cos\theta.\sec\theta = 1$ عام طور پر ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں۔ $(\cos\theta)\times(\sec\theta) = 1$

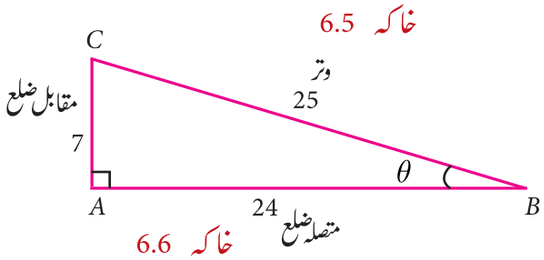
$\tan\theta\ .\ \cot\theta = 1$ عام طور پر ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں۔ $(\tan\theta)\times(\cot\theta) = 1$

مثال 6.2

دیئے گئے شکل کو استعمال کر کے زاویہ θ کے لئے علم مثلث کی چھ نسبتیں معلوم کیجئے۔



خاکہ 6.5



خاکہ 6.6

حل : مسئلہ فیثاغورث کے تحت

$$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2}$$

$$= \sqrt{(25)^2 - 7^2} \quad = \sqrt{625 - 49}$$

$$= \sqrt{576} = 24$$

9 maths 6 trigonometry
Wednesday, March 13, 2019 5:04:33 PM

علم مثلث کی چھ نسبتیں

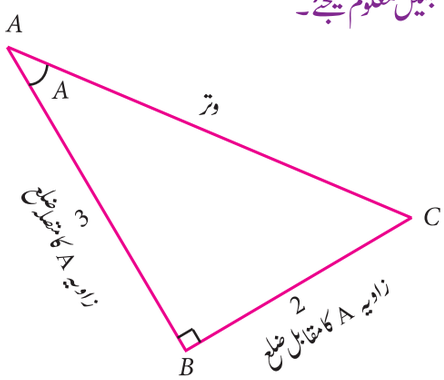
$$\sin\theta = \frac{\text{مقابل ضلع}}{\text{وتر}} = \frac{7}{25} \qquad \sec\theta = \frac{\text{وتر}}{\text{متصل ضلع}} = \frac{25}{24}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{متصل ضلع}}{\text{وتر}} = \frac{24}{25} \qquad \operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{وتر}}{\text{مقابل ضلع}} = \frac{25}{7}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{مقابل ضلع}}{\text{متصل ضلع}} = \frac{7}{24} \qquad \cot\theta = \frac{\text{متصل ضلع}}{\text{مقابل ضلع}} = \frac{24}{7}$$

مثال 6.3

اگر $\tan A = \frac{2}{3}$ ہوتو، علم مثلث کی باقی نسبتیں معلوم کیجئے۔



خاکہ 6.7

حل :

$$\tan A = \frac{\text{مقابل ضلع}}{\text{متصل ضلع}} = \frac{2}{3}$$

مسئلہ فیثاغورث کے تحت

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$$

$$= \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

$$AC = \sqrt{13}$$

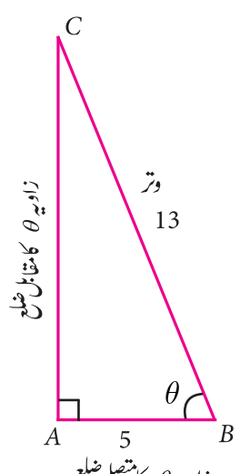
$$\sin A = \frac{\text{مقابل ضلع}}{\text{وتر}} = \frac{2}{\sqrt{13}} \qquad \cos A = \frac{\text{متصل ضلع}}{\text{وتر}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{\text{وتر}}{\text{مقابل ضلع}} = \frac{\sqrt{13}}{2} \qquad \sec A = \frac{\text{وتر}}{\text{متصل ضلع}} = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

$$\cot A = \frac{\text{متصل ضلع}}{\text{مقابل ضلع}} = \frac{3}{2}$$

مثال 6.4

اگر $\sec\theta = \frac{13}{5}$ ہوتو ثابت کیجئے کہ $\frac{2\sin\theta - 3\cos\theta}{4\sin\theta - 9\cos\theta} = 3$



خاکہ 6.8

حل : فرض کیجئے $BC = 13$ اور $AB = 5$

$$\sec\theta = \frac{\text{وتر}}{\text{متصل ضلع}} = \frac{BC}{AB} = \frac{13}{5}$$

مسئلہ فیثاغورث کے تحت

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2}$$

9 maths 6 trigonometry
Wednesday, March 13, 2019 5:04:33 PM

$$= \sqrt{13^2 - 5^2}$$

$$= \sqrt{169 - 25} \quad = \sqrt{144} = 12$$

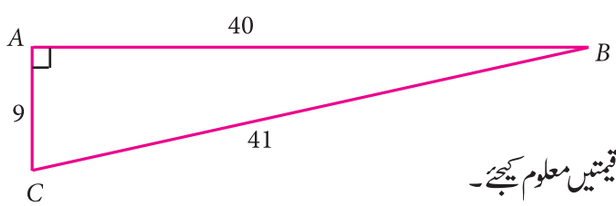
چنانچہ، $\sin\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{12}{13}$; $\cos\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{13}$

$$LHS \quad \frac{2\sin\theta - 3\cos\theta}{4\sin\theta - 9\cos\theta} = \frac{2\times\frac{12}{13} - 3\times\frac{5}{13}}{4\times\frac{12}{13} - 9\times\frac{5}{13}} = \frac{\frac{24-15}{13}}{\frac{48-45}{13}} = \frac{9}{3} = 3 = RHS$$

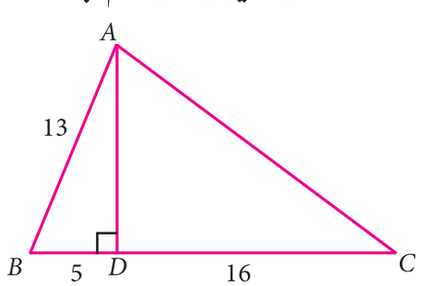
غورکریں ہم زاویہ θ کو اس C پر بھی لے سکتے ہیں اور اسی طریقہ سے حل کریں۔

مشق 6.1

1۔ دئے گئے خاکہ میں زاویہ B کے لئے علم مثلث کی تمام نسبتیں معلوم کیجئے۔



2۔ دئے گئے خاکہ میں، ذیل کی قیمتیں معلوم کیجئے۔



(i) $\sin B$ (ii) $\sec B$ (iii) $\cot B$

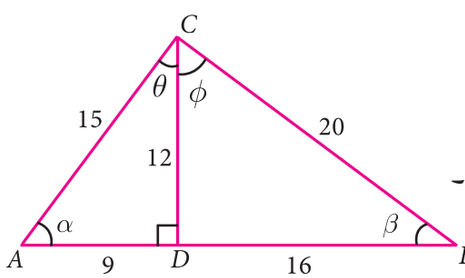
(iv) $\cos C$ (v) $\tan C$ (vi) $\operatorname{cosec} C$

3۔ اگر $2\cos\theta = \sqrt{3}$ ہو تو زاویہ θ کے لئے علم مثلث کی تمام نسبتیں معلوم کیجئے۔

4۔ اگر $\cos A = \frac{3}{5}$ ہو تو $\frac{\sin A - \cos A}{2\tan A}$ کی قیمت معلوم کیجئے۔

5۔ اگر $\cos A = \frac{2x}{1+x^2}$ ہو تو $\sin A$ اور $\tan A$ کی قیمتیں x کی صورتوں میں معلوم کیجئے۔

6۔ اگر $\sin\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ہو تو ثابت کیجئے کہ $b\sin\theta = a\cos\theta$



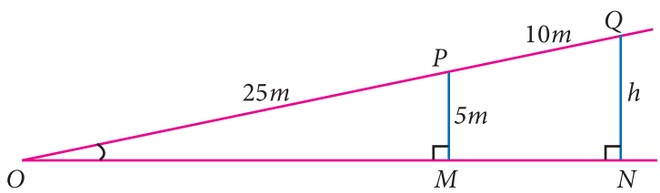
7۔ اگر $3\cot A = 2$ ہو تو $\frac{4\sin A - 3\cos A}{2\sin A + 3\cos A}$ کی قیمت معلوم کیجئے۔

8۔ اگر $\cos\theta : \sin\theta = 1 : 2$ ہو تو $\frac{8\cos\theta - 2\sin\theta}{4\cos\theta + 2\sin\theta}$ کی قیمت معلوم کیجئے۔

9۔ دئے گئے خاکہ سے ثابت کیجئے کہ $\theta + \phi = 90$ ہے۔ اور یہ بھی ثابت کیجئے کہ $\sin\alpha$ ، $\cos\beta$ اور $\tan\phi$ کی قیمتیں معلوم کیجئے۔ دو اور مثلث قائمۃ الزاویہ ہیں۔

9 maths 6 trigonometry
Wednesday, March 13, 2019 5:04:33 PM

10- ایک لڑکا نقطہ ' O ' پر کھڑا ہوا ہے اس کی پتنگ نقطہ ' P ' پر اُڑ رہی ہے۔ جس کا فاصلہ $OP = 25m$ ہے۔ یہ زمین کی سطح سے 5m کی بلندی پر ہے۔ جب دھاگے کو نقطہ P سے 10m بڑھایا جاتا ہے تو وہ نقطہ ' Q ' پر پہنچتا ہے۔ زمین کی سطح سے پتنگ کی بلندی QN کیا ہوگی؟
(علم مثلث کی نسبتیں استعمال کر کے)

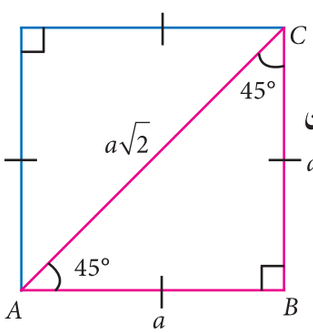


6.2 چند مخصوص زاویوں کے لئے علم مثلث کی نسبتیں (Trigonometric Ratios of Some Special Angles):

بعض علم مثلث کی نسبتوں کی قیمتوں کو علم ہندسے کے تحت حاصل کر سکتے ہیں۔ دو مخصوص مثلثیں ہماری مدد کے لئے یہاں آئے ہیں۔

6.2.1 45° کے لئے علم مثلث کی نسبتیں (Trigonometric Ratios of 45°)

فرض کیجئے کہ مثلث ABC جس کے زاویے 45°، 45° اور 90° ہیں۔ جیسے کہ خاکہ 6.9 میں دکھایا گیا ہے۔ یہ ایک نصف مربع کی شکل میں ہے جس کو مربع کی وتر سے کاٹتے ہیں۔ غور کریں کہ یہ بھی ایک مثلث مساوی الساقین ہے۔ (جس کی دونوں ساقیں (Legs) یکساں لمبائی a اکائیاں رکھتے ہیں۔)



خاکہ 6.9

مسئلہ فیثاغورث کے استعمال سے جانچئے کہ وتر کی لمبائی $a\sqrt{2}$ ہے۔

اب ABC مثلث قائمۃ الزاویہ سے

$$\sin 45^o = \frac{\text{مقابل ضلع}}{\text{وتر}} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45^o = \frac{\text{متصل ضلع}}{\text{وتر}} = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45^o = \frac{\text{مقابل ضلع}}{\text{متصل ضلع}} = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a} = 1$$

اس کی مدد سے تم آسانی کے ساتھ لکھ سکتے ہو۔

$\operatorname{cosec} 45^o = \sqrt{2}$;

اور $\sec 45^o = \sqrt{2}$

$\cot 45^o = 1$

6.2.2 30° اور 60° کے لئے علم مثلث کی نسبتیں : (Trigonometric Ratios of 30° and 60°)

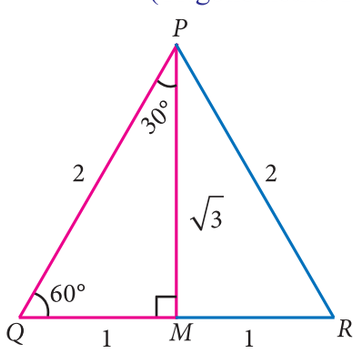
فرض کرو ایک مثلث مساوی الاضلاع PQR میں ضلع کی لمبائی 2 اکائیاں ہیں۔ $\angle P$ کا ناصف کھینچئے۔

فرض کرو یہ QR، M پر ملے گا۔

اکائیاں $PQ = QR = RP = 2$

(کیوں؟) اکائی $QM = MR = 1$

PQ اور QM جانتے ہیں تو ہم مسئلہ فیثاغورث کو استعمال کر کے PM معلوم کر سکتے ہیں۔



خاکہ 6.10

9 maths 6 trigonometry
Wednesday, March 13, 2019 5:04:34 PM

ہم نے معلوم کیا کہ اکائیاں $PM = \sqrt{3}$

اب، مثلث قائمۃ الزاویہ PQM سے،

$$\sin 30^o = \frac{\text{مقابل ضلع}}{\text{وتر}} = \frac{QM}{PQ} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^o = \frac{\text{متصل ضلع}}{\text{وتر}} = \frac{PM}{PQ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^o = \frac{\text{مقابل ضلع}}{\text{متصل ضلع}} = \frac{QM}{PM} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ہم وہی مثلث کو استعمال کریں گے لیکن اب دوسرے زاویہ کی پیمائش 60° ہوگی۔

$$\sin 60^o = \frac{\text{مقابل ضلع}}{\text{وتر}} = \frac{PM}{PQ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^o = \frac{\text{متصل ضلع}}{\text{وتر}} = \frac{QM}{PQ} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^o = \frac{\text{مقابل ضلع}}{\text{متصل ضلع}} = \frac{PM}{QM} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

اس کی مدد سے تم آسانی کے ساتھ لکھ سکتے ہو۔

$$\text{cosec}\, 30° = 2, \sec 30° = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\cot 30° = \sqrt{3} \quad \text{اور}$$

ان کی مدد سے تم آسانی سے لکھ سکتے ہو۔

$$\text{cosec}\, 60^o = \frac{2}{\sqrt{3}}; \sec 60^o = 2$$

$$\cot 60^o = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{اور}$$

6.2.3 ۔ 0° اور 90° کے لئے علم مثلث کی نسبتیں

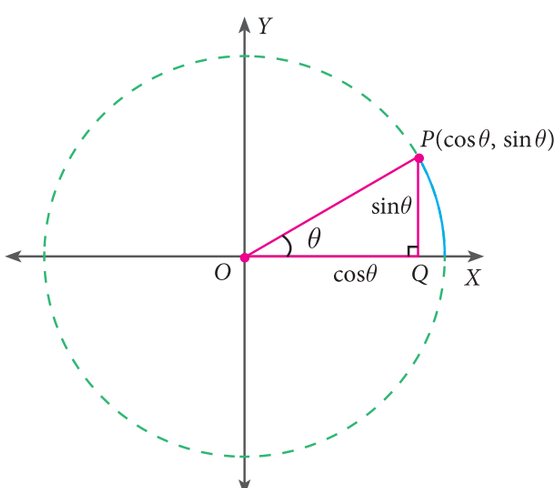
(Trigonometric ratios of 0° and 90°)

0° اور 90° کی علم مثلث کی نسبتوں کو معلوم کرنے کے لئے ہمیں اس سے مدد لینی ہوگی جس کو اکائی دائرہ (Unit Circle) کہتے ہیں۔

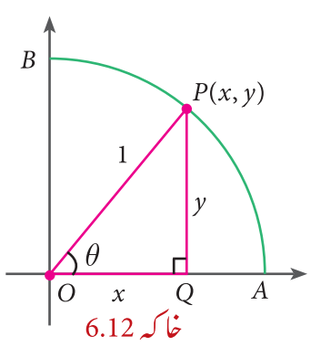
ایک اکائی دائرہ، اُس دائرہ کو کہتے ہیں جس کا نصف قطر اکائی ہوں (یعنی اس کا نصف قطر 1 اکائی ہے) مرکز اس کے مبدا پر ہوتا ہے۔ کیوں ایک دائرہ بنایا جائے جس کا نصف قطر 1 اکائی ہو؟

اس کا مطلب یہ ہے کہ حوالہ دیا جانے والے ہر مثلث جس کو ہم بناتے ہیں۔ اس کا ایک وتر 1 اکائی ہوتا ہے۔ جس سے ہمیں زاویے اور نسبتوں کو موازنہ کرنا آسان ہوتا ہے۔

ہم صرف مثبت قیمتوں پر دلچسپی رکھتے ہیں جب کہ ہم ''لمبائیوں'' پر غور کرتے ہیں۔ اس کے لئے ہمیں پہلے ربع پر ہی توجہ دینا ہوگا۔



خاکہ 6.11



خاکہ 6.12

9 maths 6 trigonometry
Wednesday, March 13, 2019 5:04:34 PM

ہم دیکھ سکتے ہیں کہ اگر $P(x,y)$ کوئی بھی ایک نقطہ ہے اکائی دائرہ کے پہلے ربع پر اور $\angle POQ = \theta$ ہے۔

$$\sin\theta = \frac{PQ}{OP} = \frac{y}{1} = y \;;\quad \cos\theta = \frac{OQ}{OP} = \frac{x}{1} = x \;;\quad \tan\theta = \frac{PQ}{OQ} = \frac{y}{x}$$

جب $\theta = 0^\circ$ ہوتو OA پر OP منطبق ہوتا ہے۔جس میں A $(1,0)$ ہے تو $x = 1, y = 0$ ہوگا۔
ہم اس طرح حاصل کرتے ہیں۔

$$\sin 0^\circ = 0 \;;\quad \operatorname{cosec} 0^\circ = \text{غیر واضح (کیوں؟)}$$

$$\cos 0^\circ = 1 \;;\quad \sec 0^\circ = 1$$

$$\tan 0^\circ = \frac{0}{1} = 0 \;;\quad \cot 0^\circ = \text{غیر واضح (کیوں؟)}$$

جب $\theta = 90^\circ$ ہوتو OB پر OP منطبق ہوتا ہے۔جس میں B $(0,1)$ ہے تو $x = 0$ ؛ $y = 1$ ہوگا۔

$$\sin 90^\circ \quad 1 \;;\quad \operatorname{cosec} 90^\circ = 1$$

$$\cos 90^\circ \quad 0 \;;\quad \sec 90^\circ = \text{غیر واضح}$$

$$\tan 90^\circ = \frac{1}{0} = \text{غیر واضح} \;;\quad \cot 90^\circ = 0$$

ہمیں تمام نتائج کو ذیل میں دیے گئے جدول میں اختصار کرنا ہوگا۔

علم مثلث کی نسبتیں / θ	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	غیر واضح
$\operatorname{cosec}\theta$	غیر واضح	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
$\sec\theta$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	غیر واضح
$\cot\theta$	غیر واضح	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

9 maths 6 trigonometry
Wednesday, March 13, 2019 5:04:34 PM

مثال 6.5

محسوب کیجئے

(i) $\sin 30° + \cos 30°$ (ii) $\tan 60° . \cot 60°$

(iii) $\dfrac{\tan 45°}{\tan 30° + \tan 60°}$

(iv) $\sin^2 45° + \cos^2 45°$

Note غور کیجئے

(i) $(\sin\theta)^2$ کو $\sin^2\theta = (\sin\theta) \times \sin\theta)$ کی طرح لکھتے ہیں

(ii) $(\sin\theta)^2$ کو $\sin\theta^2$ کی طرح لکھا نہیں جاسکتا کیونکہ اس کے معنی $\sin(\theta \times \theta)$ ہوسکتا ہے۔

حل

(i) $\sin 30° + \cos 30° = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

(ii) $\tan 60° . \cot 60° = \sqrt{3} \times \dfrac{1}{\sqrt{3}} \quad 1$

(iii) $\dfrac{\tan 45°}{\tan 30° + \tan 60°} = \dfrac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{1}} = \dfrac{1}{\frac{1+(\sqrt{3})^2}{\sqrt{3}}} = \dfrac{1}{\frac{1+3}{\sqrt{3}}} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

(iv) $\sin^2 45° + \cos^2 45° = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \dfrac{1^2}{(\sqrt{2})^2} + \dfrac{1^2}{(\sqrt{2})^2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$

Thinking Corner ذرا سوچئے

درجہ ذیل کے تین اعداد کے مجموعوں کو فیثا غورثی تہرے (Pythagorean triplets) کہتے ہیں۔ جو ایک مثلث قائمۃ الزاویہ کے ضلعوں سے بنے ہوتے ہیں۔

(i) 3, 4, 5 (ii) 5, 12, 13 (iii) 7, 24, 25

مندرجہ بالا فیثا غورثی تہروں کوئی ایک مجموعہ کے ہر عدد کو کسی بھی غیر صفری مستقل (Constant) سے ضرب دے کر تصدیق کیجئے کہ نتائج کا ہر مجموعہ فیثا غورثی تہری ہے یا نہیں۔

مثال 6.6

مندرجہ ذیل کی قیمتیں معلوم کیجئے۔

(i) $(\cos 0° + \sin 45° + \sin 30°)(\sin 90° - \cos 45° + \cos 60°)$

(ii) $\tan^2 60° - 2\tan^2 45° - \cot^2 30° + 2\sin^2 30° + \dfrac{3}{4}\operatorname{cosec}^2 45°$

حل :

(i) $(\cos 0° + \sin 45° + \sin 30°)(\sin 90° - \cos 45° + \cos 60°)$

$= \left[1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2}\right]\left[1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2}\right]$

9 maths 6 trigonometry
Wednesday, March 13, 2019 5:04:34 PM

$$= \left[\frac{2\sqrt{2}+2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right]\left[\frac{2\sqrt{2}-2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right] = \left[\frac{3\sqrt{2}+2}{2\sqrt{2}}\right]\left[\frac{3\sqrt{2}-2}{2\sqrt{2}}\right]$$

$$= \frac{18-4}{4\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{14}{4\times 2} = \frac{7}{4}$$

(ii) $\tan^2 60^\circ - 2\tan^2 45^\circ - \cot^2 30^\circ + 2\sin^2 30^\circ + \frac{3}{4}\operatorname{cosec}^2 45^\circ$

$$= \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2(1)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\sqrt{2}\right)^2$$

$$= 3-2-3+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}$$

$$= -2+\frac{4}{2} = -2+2 = 0$$

Note غور کیجئے

i) ایک مثلث قائمۃ الزاویہ میں، اگر زاویوں کی نسبت $45^\circ : 45^\circ : 90^\circ$ ہو تو اضلاع کی نسبت $1:1:\sqrt{2}$ ہوگی۔

ii) اسی طرح، اگر زاویوں کی نسبت $30^\circ : 60^\circ : 90^\circ$ ہو تو اضلاع کی نسبت $1:\sqrt{3}:2$ ہوگی۔

(تمہارے جامیٹری باکس میں پائے جانے والے گنئے کی جوڑی اوپر کے دو مثلث کے قسموں کی بہترین مثال ہے۔)

مشق 6.2

1۔ ذیل کے مساوات کی تصدیق کیجئے۔

(i) $\sin^2 60^\circ + \cos^2 60^\circ = 1$

(ii) $1 + \tan^2 30^\circ = \sec^2 30^\circ$

(iii) $\cos 90^\circ = 1 - 2\sin^2 45^\circ = 2\cos^2 45^\circ - 1$

(iv) $\sin 30^\circ \cos 60^\circ + \cos 30^\circ \sin 60^\circ = \sin 90^\circ$

2۔ درج ذیل کی قیمتیں معلوم کیجئے۔

(i) $\frac{\tan 45^\circ}{\operatorname{cosec} 30^\circ} + \frac{\sec 60^\circ}{\cot 45^\circ} - \frac{5\sin 90^\circ}{2\cos 0^\circ}$

(ii) $(\sin 90^\circ + \cos 60^\circ + \cos 45^\circ) \times (\sin 30^\circ - \cos 0^\circ + \cos 45^\circ)$

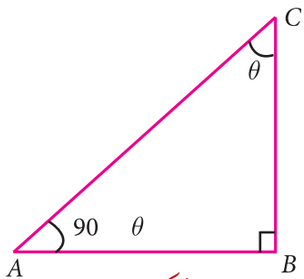
(iii) $\sin^2 30^\circ - 2\cos^3 60^\circ + 3\tan^4 45^\circ$

3۔ تصدیق کرو $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$، جب $A = 30^\circ$ ہو۔

4۔ $8 \sin 2x \cdot \cos 4x \cdot \sin 6x$، جب $x = 15^\circ$ ہو تو قیمت معلوم کیجئے۔

9 maths 6 trigonometry
Wednesday, March 13, 2019 5:04:35 PM

6.3 متمم زاویوں کے لئے علم مثلث کی نسبتیں: (Trigonometric Ratios for Complementary Angles)



خاکہ 6.13

اعادہ کریں کہ دو حادّہ زاویوں کو متمم کہتے ہیں۔ اگر اُن دو زاویوں کا حاصل 90° کے مساوی ہوں۔

تم کیا کہہ سکتے ہو ایک مثلث قائمۃ الزاویہ کے حادّہ زاویوں کے بارے میں؟

ایک مثلث قائمۃ الزاویہ کے دو حادّہ زاویوں کا حاصل جمع 90° ہے۔

اس طرح ایک مثلث قائمۃ الزاویہ کے دو حادّہ زاویے ہمیشہ ایک دوسرے کے متمم زاویے ہوں گے۔

خاکہ 6.13 میں، مثلث کا قائمۃ الزاویہ B پر ہے۔ چنانچہ اگر $\theta = \angle C$ ہو تو $A = 90^\circ - \theta$ ہوگا۔

اسی طرح زاویہ $(90^\circ - \theta)$ کے لئے، ہم نے معلوم کیا کہ ہمیں حاصل ہوتے ہیں۔

ہم نے معلوم کیا ہے کہ

$$\sin\theta = \frac{AB}{AC} \quad \operatorname{cosec}\theta = \frac{AC}{AB}$$
$$\cos\theta = \frac{BC}{AC} \quad \sec\theta = \frac{AC}{BC} \quad \ldots(1)$$
$$\tan\theta = \frac{AB}{BC} \quad \cot\theta = \frac{BC}{AB}$$

$$\sin(90^\circ - \theta) = \frac{BC}{AC} \quad \operatorname{cosec}(90^\circ - \theta) = \frac{AC}{BC}$$
$$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{AB}{AC} \quad \sec(90^\circ - \theta) = \frac{AC}{AB} \quad \ldots(2)$$
$$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{BC}{AB} \quad \cot(90^\circ - \theta) = \frac{AB}{BC}$$

(1) اور (2) کو موازنہ کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتے ہیں۔

$\sin\theta = \cos(90^\circ - \theta)$	$\operatorname{cosec}\theta = \sec(90^\circ - \theta)$
$\cos\theta = \sin(90^\circ - \theta)$	$\sec\theta = \operatorname{cosec}(90^\circ - \theta)$
$\tan\theta = \cot(90^\circ - \theta)$	$\cot\theta = \tan(90^\circ - \theta)$

مثال 6.7 ظاہر کیجئے (i) $\sin 74^\circ$ کو cosine کی شکل میں (ii) $\tan 12^\circ$ کو cotangent کی شکل میں

$\operatorname{cosec} 39^\circ$ (iii) کو secant کی شکل میں

حل :

i) $\sin 74^\circ = \sin(90^\circ - 16^\circ)$ (کیونکہ $90^\circ - 16^\circ = 74^\circ$)

RHS, $\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$ میں ہے۔

$\sin 74^\circ = \cos 16^\circ$

ii) $\tan 12^\circ = \tan(90^\circ - 78^\circ)$ (کیونکہ $90^\circ - 78^\circ = 12^\circ$)

RHS, $\tan(90^\circ - \theta) = \cot\theta$ کی شکل میں ہے۔

$\tan 12^\circ = \cot 78^\circ$

9 maths 6 trigonometry
Wednesday, March 13, 2019 5:04:35 PM

iii) $\operatorname{cosec} 39^\circ = \operatorname{cosec}(90^\circ - 51^\circ)$

RHS, $\operatorname{cosec}(90^\circ - \theta) = \sec\theta$ (کیونکہ $90^\circ - 51^\circ = 39^\circ$)

چنانچہ $\operatorname{cosec} 39^\circ = \sec 51^\circ$

مثال 6.8

(i) $\dfrac{\sin 49^\circ}{\cos 41^\circ}$ (ii) $\dfrac{\sec 63^\circ}{\operatorname{cosec} 27^\circ}$ محسوب کیجئے۔

حل :

(i) $\dfrac{\sin 49^\circ}{\cos 41^\circ}$

$\sin 49^\circ = \sin(90^\circ - 41^\circ) = \cos 41^\circ$ چونکہ $49^\circ + 41^\circ = 90^\circ$ (متمم)

لہذا، $\sin 49^\circ = \cos 41^\circ$ کو درج کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے $\dfrac{\cos 41^\circ}{\cos 41^\circ} = 1$

(ii) $\dfrac{\sec 63^\circ}{\operatorname{cosec} 27^\circ}$

$\sec 63^\circ = \sec(90^\circ - 27^\circ) = \operatorname{cosec} 27^\circ$ یہاں 63° اور 27° متمم زاویے ہیں۔

ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $\dfrac{\sec 63^\circ}{\operatorname{cosec} 27^\circ} = \dfrac{\operatorname{cosec} 27^\circ}{\operatorname{cosec} 27^\circ} = 1$

مثال 6.9

(i) $\tan 7^\circ \tan 23^\circ \tan 60^\circ \tan 67^\circ \tan 83^\circ$ ذیل کی قیمتیں معلوم کیجئے۔

(ii) $\dfrac{\cos 35^\circ}{\sin 55^\circ} + \dfrac{\sin 12^\circ}{\cos 78^\circ} - \dfrac{\cos 18^\circ}{\sin 72^\circ}$

حل :

(i) $\tan 7^\circ \tan 23^\circ \tan 60^\circ \tan 67^\circ \tan 83^\circ$

$= \tan 7^\circ \tan 83^\circ \tan 23^\circ \tan 67^\circ \tan 60^\circ$ (متمم زاویوں کو گروپ کرنے پر)

$= \tan 7^\circ \tan(90^\circ - 7^\circ) \tan 23^\circ \tan(90^\circ - 23^\circ) \tan 60^\circ$

$= (\tan 7^\circ . \cot 7^\circ)(\tan 23^\circ . \cot 23^\circ) \tan 60^\circ$

$= (1) \times (1) \times \tan 60^\circ$

$= \tan 60^\circ = \sqrt{3}$

(ii) $\dfrac{\cos 35^\circ}{\sin 55^\circ} + \dfrac{\sin 12^\circ}{\cos 78^\circ} - \dfrac{\cos 18^\circ}{\sin 72^\circ}$

$\dfrac{\cos(90^\circ - 55^\circ)}{\sin 55^\circ} + \dfrac{\sin(90^\circ - 78^\circ)}{\cos 78^\circ} - \dfrac{\cos(90^\circ - 72^\circ)}{\sin 72^\circ}$

since
$\cos 35^\circ = \cos(90^\circ - 55^\circ)$
$\sin 12^\circ = \sin(90^\circ - 78^\circ)$
$\cos 18^\circ = \cos(90^\circ - 72^\circ)$

9 maths 6 trigonometry
Wednesday, March 13, 2019 5:04:35 PM

$$\frac{\sin 55^\circ}{\sin 55^\circ}+\frac{\cos 78^\circ}{\cos 78^\circ}-\frac{\sin 72^\circ}{\sin 72^\circ}$$

$$1+1-1=1$$

مثال 6.10

i) اگر $\text{cosec } A = \sec 34^\circ$ ہوتو A دریافت کیجئے۔

ii) اگر $\tan B = \cot 47^\circ$ ہوتو B دریافت کیجئے۔

حل :

(i) ہم جانتے ہیں کہ $\text{cosec } A = \sec(90^\circ - A)$

$\sec(90^\circ - A) = \sec(34^\circ)$

$90^\circ - A = 34^\circ$

ہمیں حاصل ہوتا ہے $A = 90^\circ - 34^\circ$

$A = 56^\circ$

(ii) ہم جانتے ہیں کہ $\tan B = \cot(90^\circ - B)$

$\cot(90^\circ - B) = \cot 47^\circ$

$90^\circ - B = 47^\circ$

ہمیں حاصل ہوتا ہے $B = 90^\circ - 47^\circ$

$B = 43^\circ$

مشق 6.3

1۔ درجہ ذیل کی قیمتیں معلوم کیجئے۔

(i) $\left(\frac{\cos 47^\circ}{\sin 43^\circ}\right)^2 + \left(\frac{\sin 72^\circ}{\cos 18^\circ}\right)^2 - 2\cos^2 45^\circ$

(ii) $\frac{\cos 70^\circ}{\sin 20^\circ}+\frac{\cos 59^\circ}{\sin 31^\circ}+\frac{\cos\theta}{\sin(90^\circ-\theta)}-8\cos^2 60^\circ$

(iii) $\tan 15^\circ \tan 30^\circ \tan 45^\circ \tan 60^\circ \tan 75^\circ$

(iv) $\frac{\cot\theta}{\tan(90^\circ-\theta)}+\frac{\cos(90^\circ-\theta)\tan\theta\sec(90^\circ-\theta)}{\sin(90^\circ-\theta)\cot(90^\circ-\theta)\text{cosec}(90^\circ-\theta)}$

Thinking Corner ذرا سوچئے

i) $\sin\theta$ کی کم ترین اور زیادہ ترین قیمتیں کیا ہیں؟

ii) $\cos\theta$ کی کم ترین اور زیادہ ترین قیمتیں کیا ہیں؟

6.4 علم مثلث کی جدول کو استعمال کرنے کا طریقہ (Method of using Trigonometric Table)

ہم نے 0°، 30°، 45°، 60° اور 90° کے زاویوں کے لئے علم مثلث کی نسبتیں کو محسوب کرنا سیکھا ہے۔ لیکن بعض صورتوں میں ہمیں زاویہ حادہ کے دوسرے تمام علم مثلث کی نسبتوں کو محسوب کرنا ضروری ہوجاتا ہے۔ لہذا ہمیں علم مثلث کی جدول کو استعمال کرنے کے طریقے کے بارے میں جانا ضروری ہے۔

ایک ڈگری (Degree) (1°) کو 60 منٹوں $(60')$ میں تقسیم کرتے ہیں اور ایک منٹ $(1')$ کو 60 سکنڈوں میں $(60'')$ میں تقسیم کرتے ہیں۔

اس طرح، $1^\circ = 60'$ اور $1' = 60''$

9 maths 6 trigonometry
Wednesday, March 13, 2019 5:04:35 PM

0° اور 90° کے زاویوں میں $'60$ درمیانی وقفوں کے لئے علم مثلث کی تین نسبتوں میں 4 مقام اعشاریہ تک درست قیمتیں علم مثلث کی جدولوں میں دی گئی ہیں۔ علم مثلث کی جدول تین حصّوں پر مشتمل ہے۔

ایک انتہائی بائیں قطار (کالم) جس میں 0° تا 90° تک درجے ہیں۔ اس کے بعد کے دس قطاریں بالترتیب $'0$، $'6$ ، $'12$، $'18$ ، $'24$ ، $'30$، $'36$ ، $'42$ ، $'48$ اور $'54$ ہیں۔

پانچ قطاروں میں اوسط فرق کی قیمتیں 1، 2، 3، 4 اور 5 ہیں ۔

وہ زاویہ جو منٹ کے دوسرے پیمائشوں میں ہیں۔ (یعنی $'0$ ، $'6$ ، $'12$ ، $'18$ ، $'24$ ، $'30$ ، $'36$ ، $'42$ ، $'48$ اور $'54$ کے علاوہ) اس کو اوسط فرق کے قطار سے موزوں ترتیب سے حاصل کر سکتے ہیں۔

سائن (sine) اور ٹینجنٹ (tangent) میں اوسط فرق کو جمع کرنا چاہئے جبکہ کوسائن (cosine) کی صورت میں اوسط فرق کو تفریق کرنا چاہئے۔

اب چلئے ہم علم مثلث کی زاویے کی قیمتوں کو محسوب کرنے کو ذیل کی مثالوں سے سیکھیں گے۔

مثال 6.11

$\sin 64^\circ 34'$ کی قیمت معلوم کیجئے۔

حل :

	$0'$	$6'$	$12'$	$18'$	$24'$	$30'$	$36'$	$42'$	$48'$	$54'$	Mean Difference				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
64°						0.9026								5	

اوسط فرق

لکھئے $64^\circ 34' = 64^\circ 30' + 4'$

جدول سے ہم نے حاصل کیا $\sin 64^\circ 30' = 0.9026$

(sine کے لئے اوسط فرق کو جمع کرنا چاہئے) $5 = 4'$ کے لئے اوسط فرق

$$\sin 64^\circ 34' = 0.9031$$

مثال 6.12

$\cos 19^\circ 59'$ کی قیمت معلوم کیجئے۔

حل :

	$0'$	$6'$	$12'$	$18'$	$24'$	$30'$	$36'$	$42'$	$48'$	$54'$	Mean Difference				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
19°										0.9403					5

اوسط فرق

لکھئے $19^\circ 59' = 19^\circ 54' + 5'$

جدول سے ہم نے حاصل کیا

$$\cos 19^\circ 54' = 0.9403$$

(cosine کے لئے اوسط فرق کو تفریق کرنا چاہئے) $5 = 5'$ کے لئے اوسط فرق

$$\cos 19^\circ 59' = 0.9398$$

9 maths 6 trigonometry
Wednesday, March 13, 2019 5:04:36 PM

مثال 6.13

$\tan 70^\circ 13'$ کی قیمت معلوم کیجئے۔

حل :

	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	Mean Difference				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
70°			2.7776								26				

اوسط فرق

لکھئے $70^\circ 13' = 70^\circ 12' + 1'$

جدول سے ہم نے حاصل کیا $\tan 70^\circ 12' = 2.7776$

($\tan$ کے لئے اوسط فرق کو جمع کرنا چاہئے) $1' = 26$ کے لئے اوسط فرق

$\tan 70^\circ 13' = 2.7802$

مثال 6.14

قیمت معلوم کیجئے

(i) $\sin 38^\circ 36' + \tan 12^\circ 12'$ (ii) $\tan 60^\circ 25' - \cos 49^\circ 20'$

حل :

(i) $\sin 38^\circ 36' + \tan 12^\circ 12'$

$\sin 38^\circ 36' = 0.6239$

$\tan 12^\circ 12' = 0.2162$

$\sin 38^\circ 36' + \tan 12^\circ 12' = 0.8401$

(ii) $\tan 60^\circ 25' - \cos 49^\circ 20'$

$\tan 60^\circ 25' = 1.7603 + 0.0012 = 1.7615$

$\cos 49^\circ 20' = 0.6521 - 0.0004 = 0.6517$

$\tan 60^\circ 25' - \cos 49^\circ 20' = 1.1098$

مثال 6.15

θ کی قیمت معلوم کیجئے اگر

(i) $\sin\theta = 0.9858$ (ii) $\cos\theta = 0.7656$

حل :

(i) $\sin\theta = 0.9858 = 0.9857 + 0.0001$

طبعی سائن کی جدول سے $0.9857 = 80^\circ 18'$

اوسط فرق $1 = 2'$

(جمع کیجئے) $0.9858 = 80^\circ 20'$

$\sin\theta = 0.9858 = \sin 80^\circ 20'$

$\theta = 80^\circ 20'$

(ii) $\cos\theta = 0.7656 = 0.7660 - 0.0004$

$0.7660 = 40^\circ 0'$

(تفریق کیجئے) $4 = 2'$

$0.7656 = 40^\circ 2'$

$\cos\theta = 0.7656 = \cos 40^\circ 2'$

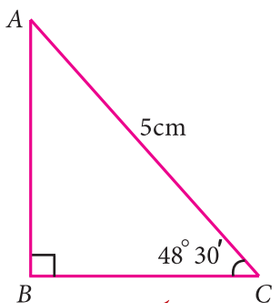
$\theta = 40^\circ 2'$

9 maths 6 trigonometry
Wednesday, March 13, 2019 5:04:36 PM

مثال 6.16

مثلث قائمۃ الزاویہ کا رقبہ معلوم کیجئے جس کا وتر 5cm اور اس کا ایک زاویہ حادہ $48^\circ 30'$ ہے۔

حل :



خاکہ 6.14

خاکے کے تحت

$$\sin\theta = \frac{AB}{AC} \qquad \cos\theta = \frac{BC}{AC}$$

$$\sin 48^\circ 30' = \frac{AB}{5} \qquad \cos 48^\circ 30' = \frac{BC}{5}$$

$$0.7490 = \frac{AB}{5} \qquad 0.6626 = \frac{BC}{5}$$

$$5 \times 0.7490 = AB \qquad 0.6626 \times 5 = BC$$

$$AB = 3.7450\ cm \qquad BC = 3.313\ cm$$

مثلث قائمۃ الزاویہ کا رقبہ $= \frac{1}{2}bh$

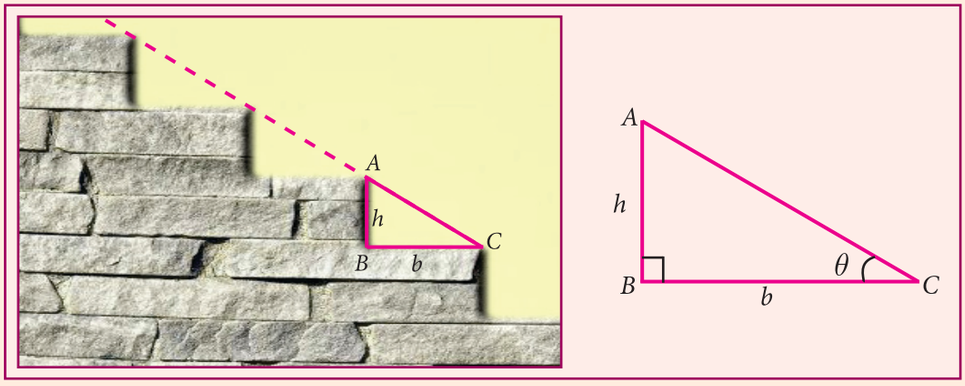
$$= \frac{1}{2} \times BC \times AB$$

$$= \frac{1}{2} \times 3.3130 \times 3.7450$$

$$= 1.6565 \times 3.7450 = 6.2035925\ cm^2$$

کارروائی

تمہارے گھر کی سیڑھیوں پر غور کیجئے۔ ایک سیڑھی کی چوڑائی اور اونچائی کی پیائش کیجئے۔ اُس پیائش کو ذیل کے تصویر میں درج کریں اور اس سیڑھی کا زاویۂ فراز کی پیائش کیجئے۔



i) مختلف سیڑھیوں کا زاویۂ فراز کا موازنہ کیجئے جن کی چوڑائی اور اونچائی اوپر کی پیائش کی طرح یکساں ہوں اور تمہارے مشاہدے پر بحث کریں۔

ii) بعض اوقات چند سیڑھیوں کی اونچائی یکساں نہیں ہوتی۔ مختلف سیڑھیوں کا فراز کا موازنہ کیجئے جو مختلف اونچائیاں اور یکساں چوڑائی رکھتے ہوں اور تمہارے مشاہدہ پر بحث کریں۔

9 maths 6 trigonometry
Wednesday, March 13, 2019 5:04:36 PM

مشق 6.4

1۔ ذیل کی قیمت معلوم کیجئے۔

(i) $\sin 49°$ (ii) $\cos 74°39'$ (iii) $\tan 54°26'$ (iv) $\sin 21°21'$ (v) $\cos 33°53'$ (vi) $\tan 70°17'$

2۔ θ کی قیمت معلوم کیجئے، اگر

(i) $\sin\theta = 0.9975$ (ii) $\cos\theta = 0.6763$ (iii) $\tan\theta = 0.0720$

(iv) $\cos\theta = 0.0410$ (v) $\tan\theta = 7.5958$

3۔ ذیل کی قیمت معلوم کیجئے۔

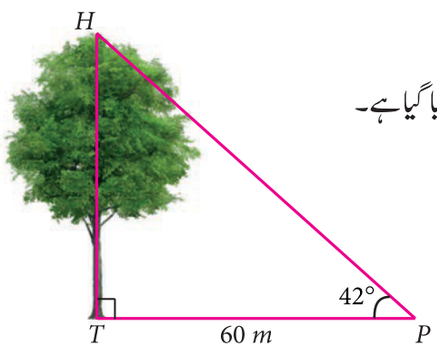
(i) $\sin 65°39' + \cos 24°57' + \tan 10°10'$

(ii) $\tan 70°58' + \cos 15°26' + \sin 84°59'$

4۔ ایک مثلث قائمۃ الزاویہ کا رقبہ معلوم کیجئے جس کی وتر کی لمبائی 10cm اور ایک زاویہ حادّہ $24°24'$ ہے۔

5۔ ایک سیڑھی کی لمبائی 5m ہے۔ اگر اس کی ایک حد دیوار سے 4m دوری پر ہے اور دوسری حد دیوار پر ہے۔ زمین کی سطح سے سیڑھی پر بننے والا زاویہ معلوم کیجئے۔

6۔ دئے گئے خاکے میں، ایک درخت عمودی طور پر کھڑا ہوا ہے جس کی اونچائی HT سے ظاہر کیا گیا ہے۔
نقطہ P سے درخت کا اوپری حصّہ کا زاویہ فراز کی پیمائش $42°$ ہے۔
(یعنی $\angle P$ پر) اس سے درخت کا فاصلہ 60m ہے۔ درخت کی اونچائی معلوم کیجئے۔



C61M3

مشق 6.5

Multiple choice questions کثیر انتخابی سوالات

1۔ اگر $\sin 30° = x$ اور $\cos 60° = y$ ہو تو $x^2 + y^2$ ..... ہے۔

(1) $\frac{1}{2}$ (2) 0 (3) $\sin 90°$ (4) $\cos 90°$

2۔ اگر $\tan\theta = \cot 37°$، ہو تو θ کی قیمت ..... ہے۔

(1) $37°$ (2) $53°$ (3) $90°$ (4) $1°$

3۔ $\tan 72°.\ \tan 18°$ کی قیمت ..... ہے۔

(1) 0 (2) 1 (3) $18°$ (4) $72°$

4۔ $\frac{2\tan 30°}{1-\tan^2 30°}$ کی قیمت مساوی ہے۔

(1) $\cos 60°$ (2) $\sin 60°$ (3) $\tan 60°$ (4) $\sin 30°$

9 maths 6 trigonometry
Wednesday, March 13, 2019 5:04:37 PM

5۔ اگر $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ اور α زاویہ حادہ ہوتو $(3\cos\alpha - 4\cos^3\alpha)$

(1) 0 (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{6}$ (4) -1

6۔ $3\sin 70^\circ \sec 20^\circ + 2\sin 49^\circ \sec 51^\circ$ کی قیمت ہے۔

(1) 2 (2) 3 (3) 5 (4) 6

7۔ $\frac{1-\tan^2 45^\circ}{1+\tan^2 45^\circ}$ کی قیمت ہے۔

(1) 2 (2) 1 (3) 0 (4) $\frac{1}{2}$

8۔ $\operatorname{cosec}(70^\circ + \theta) - \sec(20^\circ - \theta) + \tan(65^\circ + \theta) - \cot(25^\circ - \theta)$ کی قیمت ہے۔

(1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 3

9۔ $\tan 1^\circ . \tan 2^\circ . \tan 3^\circ \ldots \tan 89^\circ$ کی قیمت ہے۔

(1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

10۔ $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ اور $\cos\beta = \frac{1}{2}$ دیا گیا ہوتو $\alpha + \beta$ کی قیمت ہے۔

(1) 0° (2) 90° (3) 30° (4) 60°

Points to Remember — یاد رکھنے کے نکات

❖ علم مثلث کی نسبتیں یہ ہیں۔

$\sin\theta = \frac{\text{مقابل ضلع}}{\text{وتر}}$	$\operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{وتر}}{\text{مقابل ضلع}}$
$\cos\theta = \frac{\text{متصل ضلع}}{\text{وتر}}$	$\sec\theta = \frac{\text{وتر}}{\text{متصل ضلع}}$
$\tan\theta = \frac{\text{مقابل ضلع}}{\text{متصل ضلع}}$	$\cot\theta = \frac{\text{متصل ضلع}}{\text{مقابل ضلع}}$

❖ علم مثلث کی نسبتوں کا مقلوب

$$\sin\theta = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta} \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} \qquad \tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

❖ متمم زاویئے

$$\sin\theta = \cos(90-\theta) \qquad \operatorname{cosec}\theta = \sec(90-\theta)$$

$$\cos\theta = \sin(90-\theta) \qquad \sec\theta = \operatorname{cosec}(90-\theta)$$

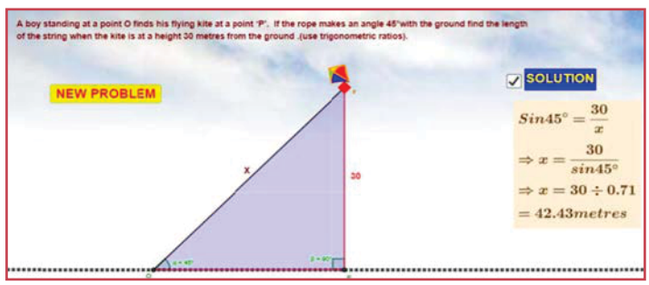
$$\tan\theta = \cot(90-\theta) \qquad \cot\theta = \tan(90-\theta)$$

9 maths 6 trigonometry
Wednesday, March 13, 2019 5:04:37 PM

ICT Corner

ICT کارنر

مطلوبہ نتیجہ اس شکل میں دیکھایا گیا ہے



مرحلہ 1 : براؤزر کھولئے اور دئے گئے URL یا لنک کو ٹائپ کیجئے یا دئے گئے QR کوڈ کو اسکین کیجئے۔ Trigonometry نامی Geo Gebra ورک شیٹ کھلے گا۔ اس میں تین ورک شیٹ ہیں جن کے عنوان یہ ہیں۔

Trigonometric ratios، Complimentary angles اور Kite problem

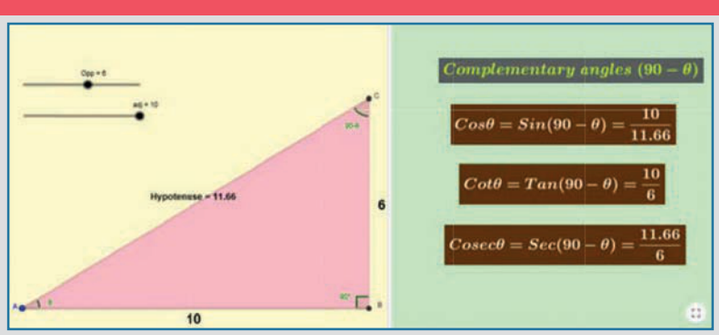
مرحلہ 2 : سلائڈر کو متعلقہ قیمتوں پر حرکت دے کر نقاط اور نسبتوں کو تبدیل کیجئے۔ حسابات کو حل کر کے جانچئے۔

پتنگ کے حسابات کے لئے "NEW PROBLEM" پر کلک کر کے سوالات کو تبدیل کر کے حل کریں۔ تمہارے جوابات کو جانچنے کے لئے Check Box پر کلک کریں۔

Step 1



Step 2



Browse in the link

Trigonometry: https://ggbm.at/hkwnccr6 or Scan the QR Code.

P1NQA

9 maths 6 trigonometry
Wednesday, March 13, 2019 5:04:37 PM

NATURAL SINES طبعی سائن

Degree	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	Mean Difference				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
45	0.7071	0.7083	0.7096	0.7108	0.7120	0.7133	0.7145	0.7157	0.7169	0.7181	2	4	6	8	10
46	0.7193	0.7206	0.7218	0.7230	0.7242	0.7254	0.7266	0.7278	0.7290	0.7302	2	4	6	8	10
47	0.7314	0.7325	0.7337	0.7349	0.7361	0.7373	0.7385	0.7396	0.7408	0.7420	2	4	6	8	10
48	0.7431	0.7443	0.7455	0.7466	0.7478	0.7490	0.7501	0.7513	0.7524	0.7536	2	4	6	8	10
49	0.7547	0.7559	0.7570	0.7581	0.7593	0.7604	0.7615	0.7627	0.7638	0.7649	2	4	6	8	9
50	0.7660	0.7672	0.7683	0.7694	0.7705	0.7716	0.7727	0.7738	0.7749	0.7760	2	4	6	7	9
51	0.7771	0.7782	0.7793	0.7804	0.7815	0.7826	0.7837	0.7848	0.7859	0.7869	2	4	5	7	9
52	0.7880	0.7891	0.7902	0.7912	0.7923	0.7934	0.7944	0.7955	0.7965	0.7976	2	4	5	7	9
53	0.7986	0.7997	0.8007	0.8018	0.8028	0.8039	0.8049	0.8059	0.8070	0.8080	2	3	5	7	9
54	0.8090	0.8100	0.8111	0.8121	0.8131	0.8141	0.8151	0.8161	0.8171	0.8181	2	3	5	7	8
55	0.8192	0.8202	0.8211	0.8221	0.8231	0.8241	0.8251	0.8261	0.8271	0.8281	2	3	5	7	8
56	0.8290	0.8300	0.8310	0.8320	0.8329	0.8339	0.8348	0.8358	0.8368	0.8377	2	3	5	6	8
57	0.8387	0.8396	0.8406	0.8415	0.8425	0.8434	0.8443	0.8453	0.8462	0.8471	2	3	5	6	8
58	0.8480	0.8490	0.8499	0.8508	0.8517	0.8526	0.8536	0.8545	0.8554	0.8563	2	3	5	6	8
59	0.8572	0.8581	0.8590	0.8599	0.8607	0.8616	0.8625	0.8634	0.8643	0.8652	1	3	4	6	7
60	0.8660	0.8669	0.8678	0.8686	0.8695	0.8704	0.8712	0.8721	0.8729	0.8738	1	3	4	6	7
61	0.8746	0.8755	0.8763	0.8771	0.8780	0.8788	0.8796	0.8805	0.8813	0.8821	1	3	4	6	7
62	0.8829	0.8838	0.8846	0.8854	0.8862	0.8870	0.8878	0.8886	0.8894	0.8902	1	3	4	5	7
63	0.8910	0.8918	0.8926	0.8934	0.8942	0.8949	0.8957	0.8965	0.8973	0.8980	1	3	4	5	6
64	0.8988	0.8996	0.9003	0.9011	0.9018	0.9026	0.9033	0.9041	0.9048	0.9056	1	3	4	5	6
65	0.9063	0.9070	0.9078	0.9085	0.9092	0.9100	0.9107	0.9114	0.9121	0.9128	1	2	4	5	6
66	0.9135	0.9143	0.9150	0.9157	0.9164	0.9171	0.9178	0.9184	0.9191	0.9198	1	2	3	5	6
67	0.9205	0.9212	0.9219	0.9225	0.9232	0.9239	0.9245	0.9252	0.9259	0.9265	1	2	3	4	6
68	0.9272	0.9278	0.9285	0.9291	0.9298	0.9304	0.9311	0.9317	0.9323	0.9330	1	2	3	4	5
69	0.9336	0.9342	0.9348	0.9354	0.9361	0.9367	0.9373	0.9379	0.9385	0.9391	1	2	3	4	5
70	0.9397	0.9403	0.9409	0.9415	0.9421	0.9426	0.9432	0.9438	0.9444	0.9449	1	2	3	4	5
71	0.9455	0.9461	0.9466	0.9472	0.9478	0.9483	0.9489	0.9494	0.9500	0.9505	1	2	3	4	5
72	0.9511	0.9516	0.9521	0.9527	0.9532	0.9537	0.9542	0.9548	0.9553	0.9558	1	2	3	3	4
73	0.9563	0.9568	0.9573	0.9578	0.9583	0.9588	0.9593	0.9598	0.9603	0.9608	1	2	2	3	4
74	0.9613	0.9617	0.9622	0.9627	0.9632	0.9636	0.9641	0.9646	0.9650	0.9655	1	2	2	3	4
75	0.9659	0.9664	0.9668	0.9673	0.9677	0.9681	0.9686	0.9690	0.9694	0.9699	1	1	2	3	4
76	0.9703	0.9707	0.9711	0.9715	0.9720	0.9724	0.9728	0.9732	0.9736	0.9740	1	1	2	3	3
77	0.9744	0.9748	0.9751	0.9755	0.9759	0.9763	0.9767	0.9770	0.9774	0.9778	1	1	2	3	3
78	0.9781	0.9785	0.9789	0.9792	0.9796	0.9799	0.9803	0.9806	0.9810	0.9813	1	1	2	2	3
79	0.9816	0.9820	0.9823	0.9826	0.9829	0.9833	0.9836	0.9839	0.9842	0.9845	1	1	2	2	3
80	0.9848	0.9851	0.9854	0.9857	0.9860	0.9863	0.9866	0.9869	0.9871	0.9874	0	1	1	2	2
81	0.9877	0.9880	0.9882	0.9885	0.9888	0.9890	0.9893	0.9895	0.9898	0.9900	0	1	1	2	2
82	0.9903	0.9905	0.9907	0.9910	0.9912	0.9914	0.9917	0.9919	0.9921	0.9923	0	1	1	2	2
83	0.9925	0.9928	0.9930	0.9932	0.9934	0.9936	0.9938	0.9940	0.9942	0.9943	0	1	1	1	2
84	0.9945	0.9947	0.9949	0.9951	0.9952	0.9954	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0	1	1	1	2
85	0.9962	0.9963	0.9965	0.9966	0.9968	0.9969	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974	0	0	1	1	1
86	0.9976	0.9977	0.9978	0.9979	0.9980	0.9981	0.9982	0.9983	0.9984	0.9985	0	0	1	1	1
87	0.9986	0.9987	0.9988	0.9989	0.9990	0.9990	0.9991	0.9992	0.9993	0.9993	0	0	0	1	1
88	0.9994	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998	0.9998	0	0	0	0	0
89	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0	0	0	0	0

9 maths 6 trigonometry
Wednesday, March 13, 2019 5:04:38 PM

NATURAL SINES طبعی سائن

Degree	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	Mean Difference				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
0	0.0000	0.0017	0.0035	0.0052	0.0070	0.0087	0.0105	0.0122	0.0140	0.0157	3	6	9	12	15
1	0.0175	0.0192	0.0209	0.0227	0.0244	0.0262	0.0279	0.0297	0.0314	0.0332	3	6	9	12	15
2	0.0349	0.0366	0.0384	0.0401	0.0419	0.0436	0.0454	0.0471	0.0488	0.0506	3	6	9	12	15
3	0.0523	0.0541	0.0558	0.0576	0.0593	0.0610	0.0628	0.0645	0.0663	0.0680	3	6	9	12	15
4	0.0698	0.0715	0.0732	0.0750	0.0767	0.0785	0.0802	0.0819	0.0837	0.0854	3	6	9	12	15
5	0.0872	0.0889	0.0906	0.0924	0.0941	0.0958	0.0976	0.0993	0.1011	0.1028	3	6	9	12	14
6	0.1045	0.1063	0.1080	0.1097	0.1115	0.1132	0.1149	0.1167	0.1184	0.1201	3	6	9	12	14
7	0.1219	0.1236	0.1253	0.1271	0.1288	0.1305	0.1323	0.1340	0.1357	0.1374	3	6	9	12	14
8	0.1392	0.1409	0.1426	0.1444	0.1461	0.1478	0.1495	0.1513	0.1530	0.1547	3	6	9	12	14
9	0.1564	0.1582	0.1599	0.1616	0.1633	0.1650	0.1668	0.1685	0.1702	0.1719	3	6	9	12	14
10	0.1736	0.1754	0.1771	0.1788	0.1805	0.1822	0.1840	0.1857	0.1874	0.1891	3	6	9	12	14
11	0.1908	0.1925	0.1942	0.1959	0.1977	0.1994	0.2011	0.2028	0.2045	0.2062	3	6	9	11	14
12	0.2079	0.2096	0.2113	0.2130	0.2147	0.2164	0.2181	0.2198	0.2215	0.2233	3	6	9	11	14
13	0.2250	0.2267	0.2284	0.2300	0.2317	0.2334	0.2351	0.2368	0.2385	0.2402	3	6	8	11	14
14	0.2419	0.2436	0.2453	0.2470	0.2487	0.2504	0.2521	0.2538	0.2554	0.2571	3	6	8	11	14
15	0.2588	0.2605	0.2622	0.2639	0.2656	0.2672	0.2689	0.2706	0.2723	0.2740	3	6	8	11	14
16	0.2756	0.2773	0.2790	0.2807	0.2823	0.2840	0.2857	0.2874	0.2890	0.2907	3	6	8	11	14
17	0.2924	0.2940	0.2957	0.2974	0.2990	0.3007	0.3024	0.3040	0.3057	0.3074	3	6	8	11	14
18	0.3090	0.3107	0.3123	0.3140	0.3156	0.3173	0.3190	0.3206	0.3223	0.3239	3	6	8	11	14
19	0.3256	0.3272	0.3289	0.3305	0.3322	0.3338	0.3355	0.3371	0.3387	0.3404	3	5	8	11	14
20	0.3420	0.3437	0.3453	0.3469	0.3486	0.3502	0.3518	0.3535	0.3551	0.3567	3	5	8	11	14
21	0.3584	0.3600	0.3616	0.3633	0.3649	0.3665	0.3681	0.3697	0.3714	0.3730	3	5	8	11	14
22	0.3746	0.3762	0.3778	0.3795	0.3811	0.3827	0.3843	0.3859	0.3875	0.3891	3	5	8	11	14
23	0.3907	0.3923	0.3939	0.3955	0.3971	0.3987	0.4003	0.4019	0.4035	0.4051	3	5	8	11	14
24	0.4067	0.4083	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4163	0.4179	0.4195	0.4210	3	5	8	11	13
25	0.4226	0.4242	0.4258	0.4274	0.4289	0.4305	0.4321	0.4337	0.4352	0.4368	3	5	8	11	13
26	0.4384	0.4399	0.4415	0.4431	0.4446	0.4462	0.4478	0.4493	0.4509	0.4524	3	5	8	10	13
27	0.4540	0.4555	0.4571	0.4586	0.4602	0.4617	0.4633	0.4648	0.4664	0.4679	3	5	8	10	13
28	0.4695	0.4710	0.4726	0.4741	0.4756	0.4772	0.4787	0.4802	0.4818	0.4833	3	5	8	10	13
29	0.4848	0.4863	0.4879	0.4894	0.4909	0.4924	0.4939	0.4955	0.4970	0.4985	3	5	8	10	13
30	0.5000	0.5015	0.5030	0.5045	0.5060	0.5075	0.5090	0.5105	0.5120	0.5135	3	5	8	10	13
31	0.5150	0.5165	0.5180	0.5195	0.5210	0.5225	0.5240	0.5255	0.5270	0.5284	2	5	7	10	12
32	0.5299	0.5314	0.5329	0.5344	0.5358	0.5373	0.5388	0.5402	0.5417	0.5432	2	5	7	10	12
33	0.5446	0.5461	0.5476	0.5490	0.5505	0.5519	0.5534	0.5548	0.5563	0.5577	2	5	7	10	12
34	0.5592	0.5606	0.5621	0.5635	0.5650	0.5664	0.5678	0.5693	0.5707	0.5721	2	5	7	10	12
35	0.5736	0.5750	0.5764	0.5779	0.5793	0.5807	0.5821	0.5835	0.5850	0.5864	2	5	7	10	12
36	0.5878	0.5892	0.5906	0.5920	0.5934	0.5948	0.5962	0.5976	0.5990	0.6004	2	5	7	9	12
37	0.6018	0.6032	0.6046	0.6060	0.6074	0.6088	0.6101	0.6115	0.6129	0.6143	2	5	7	9	12
38	0.6157	0.6170	0.6184	0.6198	0.6211	0.6225	0.6239	0.6252	0.6266	0.6280	2	5	7	9	11
39	0.6293	0.6307	0.6320	0.6334	0.6347	0.6361	0.6374	0.6388	0.6401	0.6414	2	4	7	9	11
40	0.6428	0.6441	0.6455	0.6468	0.6481	0.6494	0.6508	0.6521	0.6534	0.6547	2	4	7	9	11
41	0.6561	0.6574	0.6587	0.6600	0.6613	0.6626	0.6639	0.6652	0.6665	0.6678	2	4	7	9	11
42	0.6691	0.6704	0.6717	0.6730	0.6743	0.6756	0.6769	0.6782	0.6794	0.6807	2	4	6	9	11
43	0.6820	0.6833	0.6845	0.6858	0.6871	0.6884	0.6896	0.6909	0.6921	0.6934	2	4	6	8	11
44	0.6947	0.6959	0.6972	0.6984	0.6997	0.7009	0.7022	0.7034	0.7046	0.7059	2	4	6	8	10

9 maths 6 trigonometry
Wednesday, March 13, 2019 5:04:39 PM

طبعی کوسائن NATURAL COSINES (اوسط فرق کے اعداد کو تفریق کریں، نہ کہ جمع)

(Numbers in mean difference columns to be subtracted, not added)

Degree	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	Mean Difference				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
45	0.7071	0.7059	0.7046	0.7034	0.7022	0.7009	0.6997	0.6984	0.6972	0.6959	2	4	6	8	10
46	0.6947	0.6934	0.6921	0.6909	0.6896	0.6884	0.6871	0.6858	0.6845	0.6833	2	4	6	8	11
47	0.6820	0.6807	0.6794	0.6782	0.6769	0.6756	0.6743	0.6730	0.6717	0.6704	2	4	6	9	11
48	0.6691	0.6678	0.6665	0.6652	0.6639	0.6626	0.6613	0.6600	0.6587	0.6574	2	4	7	9	11
49	0.6561	0.6547	0.6534	0.6521	0.6508	0.6494	0.6481	0.6468	0.6455	0.6441	2	4	7	9	11
50	0.6428	0.6414	0.6401	0.6388	0.6374	0.6361	0.6347	0.6334	0.6320	0.6307	2	4	7	9	11
51	0.6293	0.6280	0.6266	0.6252	0.6239	0.6225	0.6211	0.6198	0.6184	0.6170	2	5	7	9	11
52	0.6157	0.6143	0.6129	0.6115	0.6101	0.6088	0.6074	0.6060	0.6046	0.6032	2	5	7	9	12
53	0.6018	0.6004	0.5990	0.5976	0.5962	0.5948	0.5934	0.5920	0.5906	0.5892	2	5	7	9	12
54	0.5878	0.5864	0.5850	0.5835	0.5821	0.5807	0.5793	0.5779	0.5764	0.5750	2	5	7	9	12
55	0.5736	0.5721	0.5707	0.5693	0.5678	0.5664	0.5650	0.5635	0.5621	0.5606	2	5	7	10	12
56	0.5592	0.5577	0.5563	0.5548	0.5534	0.5519	0.5505	0.5490	0.5476	0.5461	2	5	7	10	12
57	0.5446	0.5432	0.5417	0.5402	0.5388	0.5373	0.5358	0.5344	0.5329	0.5314	2	5	7	10	12
58	0.5299	0.5284	0.5270	0.5255	0.5240	0.5225	0.5210	0.5195	0.5180	0.5165	2	5	7	10	12
59	0.5150	0.5135	0.5120	0.5105	0.5090	0.5075	0.5060	0.5045	0.5030	0.5015	3	5	8	10	13
60	0.5000	0.4985	0.4970	0.4955	0.4939	0.4924	0.4909	0.4894	0.4879	0.4863	3	5	8	10	13
61	0.4848	0.4833	0.4818	0.4802	0.4787	0.4772	0.4756	0.4741	0.4726	0.4710	3	5	8	10	13
62	0.4695	0.4679	0.4664	0.4648	0.4633	0.4617	0.4602	0.4586	0.4571	0.4555	3	5	8	10	13
63	0.4540	0.4524	0.4509	0.4493	0.4478	0.4462	0.4446	0.4431	0.4415	0.4399	3	5	8	10	13
64	0.4384	0.4368	0.4352	0.4337	0.4321	0.4305	0.4289	0.4274	0.4258	0.4242	3	5	8	11	13
65	0.4226	0.4210	0.4195	0.4179	0.4163	0.4147	0.4131	0.4115	0.4099	0.4083	3	5	8	11	13
66	0.4067	0.4051	0.4035	0.4019	0.4003	0.3987	0.3971	0.3955	0.3939	0.3923	3	5	8	11	14
67	0.3907	0.3891	0.3875	0.3859	0.3843	0.3827	0.3811	0.3795	0.3778	0.3762	3	5	8	11	14
68	0.3746	0.3730	0.3714	0.3697	0.3681	0.3665	0.3649	0.3633	0.3616	0.3600	3	5	8	11	14
69	0.3584	0.3567	0.3551	0.3535	0.3518	0.3502	0.3486	0.3469	0.3453	0.3437	3	5	8	11	14
70	0.3420	0.3404	0.3387	0.3371	0.3355	0.3338	0.3322	0.3305	0.3289	0.3272	3	5	8	11	14
71	0.3256	0.3239	0.3223	0.3206	0.3190	0.3173	0.3156	0.3140	0.3123	0.3107	3	6	8	11	14
72	0.3090	0.3074	0.3057	0.3040	0.3024	0.3007	0.2990	0.2974	0.2957	0.2940	3	6	8	11	14
73	0.2924	0.2907	0.2890	0.2874	0.2857	0.2840	0.2823	0.2807	0.2790	0.2773	3	6	8	11	14
74	0.2756	0.2740	0.2723	0.2706	0.2689	0.2672	0.2656	0.2639	0.2622	0.2605	3	6	8	11	14
75	0.2588	0.2571	0.2554	0.2538	0.2521	0.2504	0.2487	0.2470	0.2453	0.2436	3	6	8	11	14
76	0.2419	0.2402	0.2385	0.2368	0.2351	0.2334	0.2317	0.2300	0.2284	0.2267	3	6	8	11	14
77	0.2250	0.2233	0.2215	0.2198	0.2181	0.2164	0.2147	0.2130	0.2113	0.2096	3	6	9	11	14
78	0.2079	0.2062	0.2045	0.2028	0.2011	0.1994	0.1977	0.1959	0.1942	0.1925	3	6	9	11	14
79	0.1908	0.1891	0.1874	0.1857	0.1840	0.1822	0.1805	0.1788	0.1771	0.1754	3	6	9	11	14
80	0.1736	0.1719	0.1702	0.1685	0.1668	0.1650	0.1633	0.1616	0.1599	0.1582	3	6	9	12	14
81	0.1564	0.1547	0.1530	0.1513	0.1495	0.1478	0.1461	0.1444	0.1426	0.1409	3	6	9	12	14
82	0.1392	0.1374	0.1357	0.1340	0.1323	0.1305	0.1288	0.1271	0.1253	0.1236	3	6	9	12	14
83	0.1219	0.1201	0.1184	0.1167	0.1149	0.1132	0.1115	0.1097	0.1080	0.1063	3	6	9	12	14
84	0.1045	0.1028	0.1011	0.0993	0.0976	0.0958	0.0941	0.0924	0.0906	0.0889	3	6	9	12	14
85	0.0872	0.0854	0.0837	0.0819	0.0802	0.0785	0.0767	0.0750	0.0732	0.0715	3	6	9	12	15
86	0.0698	0.0680	0.0663	0.0645	0.0628	0.0610	0.0593	0.0576	0.0558	0.0541	3	6	9	12	15
87	0.0523	0.0506	0.0488	0.0471	0.0454	0.0436	0.0419	0.0401	0.0384	0.0366	3	6	9	12	15
88	0.0349	0.0332	0.0314	0.0297	0.0279	0.0262	0.0244	0.0227	0.0209	0.0192	3	6	9	12	15
89	0.0175	0.0157	0.0140	0.0122	0.0105	0.0087	0.0070	0.0052	0.0035	0.0017	3	6	9	12	15

9 maths 6 trigonometry
Wednesday, March 13, 2019 5:04:40 PM

طبعی کوسائن NATURAL COSINES (اوسط فرق کے اعداد کو تفریق کریں، نہ کہ جمع)

(Numbers in mean difference columns to be subtracted, not added)

Degree	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	Mean Difference				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0	0	0	0	0
1	0.9998	0.9998	0.9998	0.9997	0.9997	0.9997	0.9996	0.9996	0.9995	0.9995	0	0	0	0	0
2	0.9994	0.9993	0.9993	0.9992	0.9991	0.9990	0.9990	0.9989	0.9988	0.9987	0	0	0	1	1
3	0.9986	0.9985	0.9984	0.9983	0.9982	0.9981	0.9980	0.9979	0.9978	0.9977	0	0	1	1	1
4	0.9976	0.9974	0.9973	0.9972	0.9971	0.9969	0.9968	0.9966	0.9965	0.9963	0	0	1	1	1
5	0.9962	0.9960	0.9959	0.9957	0.9956	0.9954	0.9952	0.9951	0.9949	0.9947	0	1	1	1	2
6	0.9945	0.9943	0.9942	0.9940	0.9938	0.9936	0.9934	0.9932	0.9930	0.9928	0	1	1	1	2
7	0.9925	0.9923	0.9921	0.9919	0.9917	0.9914	0.9912	0.9910	0.9907	0.9905	0	1	1	2	2
8	0.9903	0.9900	0.9898	0.9895	0.9893	0.9890	0.9888	0.9885	0.9882	0.9880	0	1	1	2	2
9	0.9877	0.9874	0.9871	0.9869	0.9866	0.9863	0.9860	0.9857	0.9854	0.9851	0	1	1	2	2
10	0.9848	0.9845	0.9842	0.9839	0.9836	0.9833	0.9829	0.9826	0.9823	0.9820	1	1	2	2	3
11	0.9816	0.9813	0.9810	0.9806	0.9803	0.9799	0.9796	0.9792	0.9789	0.9785	1	1	2	2	3
12	0.9781	0.9778	0.9774	0.9770	0.9767	0.9763	0.9759	0.9755	0.9751	0.9748	1	1	2	3	3
13	0.9744	0.9740	0.9736	0.9732	0.9728	0.9724	0.9720	0.9715	0.9711	0.9707	1	1	2	3	3
14	0.9703	0.9699	0.9694	0.9690	0.9686	0.9681	0.9677	0.9673	0.9668	0.9664	1	1	2	3	4
15	0.9659	0.9655	0.9650	0.9646	0.9641	0.9636	0.9632	0.9627	0.9622	0.9617	1	2	2	3	4
16	0.9613	0.9608	0.9603	0.9598	0.9593	0.9588	0.9583	0.9578	0.9573	0.9568	1	2	2	3	4
17	0.9563	0.9558	0.9553	0.9548	0.9542	0.9537	0.9532	0.9527	0.9521	0.9516	1	2	3	3	4
18	0.9511	0.9505	0.9500	0.9494	0.9489	0.9483	0.9478	0.9472	0.9466	0.9461	1	2	3	4	5
19	0.9455	0.9449	0.9444	0.9438	0.9432	0.9426	0.9421	0.9415	0.9409	0.9403	1	2	3	4	5
20	0.9397	0.9391	0.9385	0.9379	0.9373	0.9367	0.9361	0.9354	0.9348	0.9342	1	2	3	4	5
21	0.9336	0.9330	0.9323	0.9317	0.9311	0.9304	0.9298	0.9291	0.9285	0.9278	1	2	3	4	5
22	0.9272	0.9265	0.9259	0.9252	0.9245	0.9239	0.9232	0.9225	0.9219	0.9212	1	2	3	4	6
23	0.9205	0.9198	0.9191	0.9184	0.9178	0.9171	0.9164	0.9157	0.9150	0.9143	1	2	3	5	6
24	0.9135	0.9128	0.9121	0.9114	0.9107	0.9100	0.9092	0.9085	0.9078	0.9070	1	2	4	5	6
25	0.9063	0.9056	0.9048	0.9041	0.9033	0.9026	0.9018	0.9011	0.9003	0.8996	1	3	4	5	6
26	0.8988	0.8980	0.8973	0.8965	0.8957	0.8949	0.8942	0.8934	0.8926	0.8918	1	3	4	5	6
27	0.8910	0.8902	0.8894	0.8886	0.8878	0.8870	0.8862	0.8854	0.8846	0.8838	1	3	4	5	7
28	0.8829	0.8821	0.8813	0.8805	0.8796	0.8788	0.8780	0.8771	0.8763	0.8755	1	3	4	6	7
29	0.8746	0.8738	0.8729	0.8721	0.8712	0.8704	0.8695	0.8686	0.8678	0.8669	1	3	4	6	7
30	0.8660	0.8652	0.8643	0.8634	0.8625	0.8616	0.8607	0.8599	0.8590	0.8581	1	3	4	6	7
31	0.8572	0.8563	0.8554	0.8545	0.8536	0.8526	0.8517	0.8508	0.8499	0.8490	2	3	5	6	8
32	0.8480	0.8471	0.8462	0.8453	0.8443	0.8434	0.8425	0.8415	0.8406	0.8396	2	3	5	6	8
33	0.8387	0.8377	0.8368	0.8358	0.8348	0.8339	0.8329	0.8320	0.8310	0.8300	2	3	5	6	8
34	0.8290	0.8281	0.8271	0.8261	0.8251	0.8241	0.8231	0.8221	0.8211	0.8202	2	3	5	7	8
35	0.8192	0.8181	0.8171	0.8161	0.8151	0.8141	0.8131	0.8121	0.8111	0.8100	2	3	5	7	8
36	0.8090	0.8080	0.8070	0.8059	0.8049	0.8039	0.8028	0.8018	0.8007	0.7997	2	3	5	7	9
37	0.7986	0.7976	0.7965	0.7955	0.7944	0.7934	0.7923	0.7912	0.7902	0.7891	2	4	5	7	9
38	0.7880	0.7869	0.7859	0.7848	0.7837	0.7826	0.7815	0.7804	0.7793	0.7782	2	4	5	7	9
39	0.7771	0.7760	0.7749	0.7738	0.7727	0.7716	0.7705	0.7694	0.7683	0.7672	2	4	6	7	9
40	0.7660	0.7649	0.7638	0.7627	0.7615	0.7604	0.7593	0.7581	0.7570	0.7559	2	4	6	8	9
41	0.7547	0.7536	0.7524	0.7513	0.7501	0.7490	0.7478	0.7466	0.7455	0.7443	2	4	6	8	10
42	0.7431	0.7420	0.7408	0.7396	0.7385	0.7373	0.7361	0.7349	0.7337	0.7325	2	4	6	8	10
43	0.7314	0.7302	0.7290	0.7278	0.7266	0.7254	0.7242	0.7230	0.7218	0.7206	2	4	6	8	10
44	0.7193	0.7181	0.7169	0.7157	0.7145	0.7133	0.7120	0.7108	0.7096	0.7083	2	4	6	8	10

9 maths 6 trigonometry
Wednesday, March 13, 2019 5:04:41 PM

NATURAL TANGENTS طبعی ٹینجنٹ

Degree	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	Mean Difference				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
45	1.0000	1.0035	1.0070	1.0105	1.0141	1.0176	1.0212	1.0247	1.0283	1.0319	6	12	18	24	30
46	1.0355	1.0392	1.0428	1.0464	1.0501	1.0538	1.0575	1.0612	1.0649	1.0686	6	12	18	25	31
47	1.0724	1.0761	1.0799	1.0837	1.0875	1.0913	1.0951	1.0990	1.1028	1.1067	6	13	19	25	32
48	1.1106	1.1145	1.1184	1.1224	1.1263	1.1303	1.1343	1.1383	1.1423	1.1463	7	13	20	27	33
49	1.1504	1.1544	1.1585	1.1626	1.1667	1.1708	1.1750	1.1792	1.1833	1.1875	7	14	21	28	34
50	1.1918	1.1960	1.2002	1.2045	1.2088	1.2131	1.2174	1.2218	1.2261	1.2305	7	14	22	29	36
51	1.2349	1.2393	1.2437	1.2482	1.2527	1.2572	1.2617	1.2662	1.2708	1.2753	8	15	23	30	38
52	1.2799	1.2846	1.2892	1.2938	1.2985	1.3032	1.3079	1.3127	1.3175	1.3222	8	16	24	31	39
53	1.3270	1.3319	1.3367	1.3416	1.3465	1.3514	1.3564	1.3613	1.3663	1.3713	8	16	25	33	41
54	1.3764	1.3814	1.3865	1.3916	1.3968	1.4019	1.4071	1.4124	1.4176	1.4229	9	17	26	34	43
55	1.4281	1.4335	1.4388	1.4442	1.4496	1.4550	1.4605	1.4659	1.4715	1.4770	9	18	27	36	45
56	1.4826	1.4882	1.4938	1.4994	1.5051	1.5108	1.5166	1.5224	1.5282	1.5340	10	19	29	38	48
57	1.5399	1.5458	1.5517	1.5577	1.5637	1.5697	1.5757	1.5818	1.5880	1.5941	10	20	30	40	50
58	1.6003	1.6066	1.6128	1.6191	1.6255	1.6319	1.6383	1.6447	1.6512	1.6577	11	21	32	43	53
59	1.6643	1.6709	1.6775	1.6842	1.6909	1.6977	1.7045	1.7113	1.7182	1.7251	11	23	34	45	56
60	1.7321	1.7391	1.7461	1.7532	1.7603	1.7675	1.7747	1.7820	1.7893	1.7966	12	24	36	48	60
61	1.8040	1.8115	1.8190	1.8265	1.8341	1.8418	1.8495	1.8572	1.8650	1.8728	13	26	38	51	64
62	1.8807	1.8887	1.8967	1.9047	1.9128	1.9210	1.9292	1.9375	1.9458	1.9542	14	27	41	55	68
63	1.9626	1.9711	1.9797	1.9883	1.9970	2.0057	2.0145	2.0233	2.0323	2.0413	15	29	44	58	73
64	2.0503	2.0594	2.0686	2.0778	2.0872	2.0965	2.1060	2.1155	2.1251	2.1348	16	31	47	63	78
65	2.1445	2.1543	2.1642	2.1742	2.1842	2.1943	2.2045	2.2148	2.2251	2.2355	17	34	51	68	85
66	2.2460	2.2566	2.2673	2.2781	2.2889	2.2998	2.3109	2.3220	2.3332	2.3445	18	37	55	73	92
67	2.3559	2.3673	2.3789	2.3906	2.4023	2.4142	2.4262	2.4383	2.4504	2.4627	20	40	60	79	99
68	2.4751	2.4876	2.5002	2.5129	2.5257	2.5386	2.5517	2.5649	2.5782	2.5916	22	43	65	87	108
69	2.6051	2.6187	2.6325	2.6464	2.6605	2.6746	2.6889	2.7034	2.7179	2.7326	24	47	71	95	119
70	2.7475	2.7625	2.7776	2.7929	2.8083	2.8239	2.8397	2.8556	2.8716	2.8878	26	52	78	104	131
71	2.9042	2.9208	2.9375	2.9544	2.9714	2.9887	3.0061	3.0237	3.0415	3.0595	29	58	87	116	145
72	3.0777	3.0961	3.1146	3.1334	3.1524	3.1716	3.1910	3.2106	3.2305	3.2506	32	64	96	129	161
73	3.2709	3.2914	3.3122	3.3332	3.3544	3.3759	3.3977	3.4197	3.4420	3.4646	36	72	108	144	180
74	3.4874	3.5105	3.5339	3.5576	3.5816	3.6059	3.6305	3.6554	3.6806	3.7062	41	81	122	163	204
75	3.7321	3.7583	3.7848	3.8118	3.8391	3.8667	3.8947	3.9232	3.9520	3.9812	46	93	139	186	232
76	4.0108	4.0408	4.0713	4.1022	4.1335	4.1653	4.1976	4.2303	4.2635	4.2972	53	107	160	213	267
77	4.3315	4.3662	4.4015	4.4373	4.4737	4.5107	4.5483	4.5864	4.6252	4.6646					
78	4.7046	4.7453	4.7867	4.8288	4.8716	4.9152	4.9594	5.0045	5.0504	5.0970					
79	5.1446	5.1929	5.2422	5.2924	5.3435	5.3955	5.4486	5.5026	5.5578	5.6140					
80	5.6713	5.7297	5.7894	5.8502	5.9124	5.9758	6.0405	6.1066	6.1742	6.2432					
81	6.3138	6.3859	6.4596	6.5350	6.6122	6.6912	6.7720	6.8548	6.9395	7.0264					
82	7.1154	7.2066	7.3002	7.3962	7.4947	7.5958	7.6996	7.8062	7.9158	8.0285					
83	8.1443	8.2636	8.3863	8.5126	8.6427	8.7769	8.9152	9.0579	9.2052	9.3572					
84	9.5144	9.6768	9.8448	10.0187	10.1988	10.3854	10.5789	10.7797	10.9882	11.2048					
85	11.4301	11.6645	11.9087	12.1632	12.4288	12.7062	12.9962	13.2996	13.6174	13.9507					
86	14.3007	14.6685	15.0557	15.4638	15.8945	16.3499	16.8319	17.3432	17.8863	18.4645					
87	19.0811	19.7403	20.4465	21.2049	22.0217	22.9038	23.8593	24.8978	26.0307	27.2715					
88	28.6363	30.1446	31.8205	33.6935	35.8006	38.1885	40.9174	44.0661	47.7395	52.0807					
89	57.2900	63.6567	71.6151	81.8470	95.4895	114.5887	143.2371	190.9842	286.4777	572.9572					

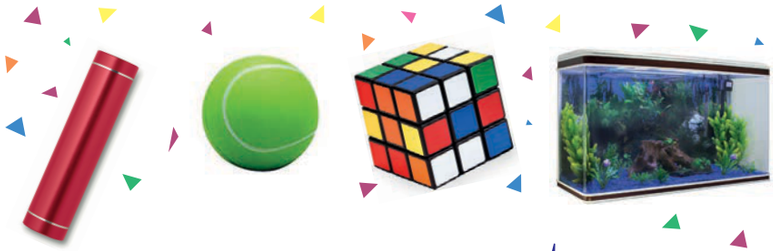
9 maths 6 trigonometry
Wednesday, March 13, 2019 5:04:42 PM

NATURAL TANGENTS طبعی ٹینجنٹ

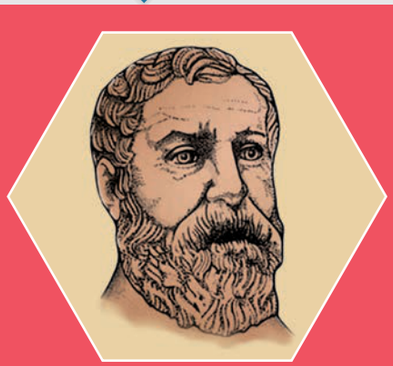
Degree	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	Mean Difference				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
0	0.0000	0.0017	0.0035	0.0052	0.0070	0.0087	0.0105	0.0122	0.0140	0.0157	3	6	9	12	15
1	0.0175	0.0192	0.0209	0.0227	0.0244	0.0262	0.0279	0.0297	0.0314	0.0332	3	6	9	12	15
2	0.0349	0.0367	0.0384	0.0402	0.0419	0.0437	0.0454	0.0472	0.0489	0.0507	3	6	9	12	15
3	0.0524	0.0542	0.0559	0.0577	0.0594	0.0612	0.0629	0.0647	0.0664	0.0682	3	6	9	12	15
4	0.0699	0.0717	0.0734	0.0752	0.0769	0.0787	0.0805	0.0822	0.0840	0.0857	3	6	9	12	15
5	0.0875	0.0892	0.0910	0.0928	0.0945	0.0963	0.0981	0.0998	0.1016	0.1033	3	6	9	12	15
6	0.1051	0.1069	0.1086	0.1104	0.1122	0.1139	0.1157	0.1175	0.1192	0.1210	3	6	9	12	15
7	0.1228	0.1246	0.1263	0.1281	0.1299	0.1317	0.1334	0.1352	0.1370	0.1388	3	6	9	12	15
8	0.1405	0.1423	0.1441	0.1459	0.1477	0.1495	0.1512	0.1530	0.1548	0.1566	3	6	9	12	15
9	0.1584	0.1602	0.1620	0.1638	0.1655	0.1673	0.1691	0.1709	0.1727	0.1745	3	6	9	12	15
10	0.1763	0.1781	0.1799	0.1817	0.1835	0.1853	0.1871	0.1890	0.1908	0.1926	3	6	9	12	15
11	0.1944	0.1962	0.1980	0.1998	0.2016	0.2035	0.2053	0.2071	0.2089	0.2107	3	6	9	12	15
12	0.2126	0.2144	0.2162	0.2180	0.2199	0.2217	0.2235	0.2254	0.2272	0.2290	3	6	9	12	15
13	0.2309	0.2327	0.2345	0.2364	0.2382	0.2401	0.2419	0.2438	0.2456	0.2475	3	6	9	12	15
14	0.2493	0.2512	0.2530	0.2549	0.2568	0.2586	0.2605	0.2623	0.2642	0.2661	3	6	9	12	16
15	0.2679	0.2698	0.2717	0.2736	0.2754	0.2773	0.2792	0.2811	0.2830	0.2849	3	6	9	13	16
16	0.2867	0.2886	0.2905	0.2924	0.2943	0.2962	0.2981	0.3000	0.3019	0.3038	3	6	9	13	16
17	0.3057	0.3076	0.3096	0.3115	0.3134	0.3153	0.3172	0.3191	0.3211	0.3230	3	6	10	13	16
18	0.3249	0.3269	0.3288	0.3307	0.3327	0.3346	0.3365	0.3385	0.3404	0.3424	3	6	10	13	16
19	0.3443	0.3463	0.3482	0.3502	0.3522	0.3541	0.3561	0.3581	0.3600	0.3620	3	7	10	13	16
20	0.3640	0.3659	0.3679	0.3699	0.3719	0.3739	0.3759	0.3779	0.3799	0.3819	3	7	10	13	17
21	0.3839	0.3859	0.3879	0.3899	0.3919	0.3939	0.3959	0.3979	0.4000	0.4020	3	7	10	13	17
22	0.4040	0.4061	0.4081	0.4101	0.4122	0.4142	0.4163	0.4183	0.4204	0.4224	3	7	10	14	17
23	0.4245	0.4265	0.4286	0.4307	0.4327	0.4348	0.4369	0.4390	0.4411	0.4431	3	7	10	14	17
24	0.4452	0.4473	0.4494	0.4515	0.4536	0.4557	0.4578	0.4599	0.4621	0.4642	4	7	11	14	18
25	0.4663	0.4684	0.4706	0.4727	0.4748	0.4770	0.4791	0.4813	0.4834	0.4856	4	7	11	14	18
26	0.4877	0.4899	0.4921	0.4942	0.4964	0.4986	0.5008	0.5029	0.5051	0.5073	4	7	11	15	18
27	0.5095	0.5117	0.5139	0.5161	0.5184	0.5206	0.5228	0.5250	0.5272	0.5295	4	7	11	15	18
28	0.5317	0.5340	0.5362	0.5384	0.5407	0.5430	0.5452	0.5475	0.5498	0.5520	4	8	11	15	19
29	0.5543	0.5566	0.5589	0.5612	0.5635	0.5658	0.5681	0.5704	0.5727	0.5750	4	8	12	15	19
30	0.5774	0.5797	0.5820	0.5844	0.5867	0.5890	0.5914	0.5938	0.5961	0.5985	4	8	12	16	20
31	0.6009	0.6032	0.6056	0.6080	0.6104	0.6128	0.6152	0.6176	0.6200	0.6224	4	8	12	16	20
32	0.6249	0.6273	0.6297	0.6322	0.6346	0.6371	0.6395	0.6420	0.6445	0.6469	4	8	12	16	20
33	0.6494	0.6519	0.6544	0.6569	0.6594	0.6619	0.6644	0.6669	0.6694	0.6720	4	8	13	17	21
34	0.6745	0.6771	0.6796	0.6822	0.6847	0.6873	0.6899	0.6924	0.6950	0.6976	4	9	13	17	21
35	0.7002	0.7028	0.7054	0.7080	0.7107	0.7133	0.7159	0.7186	0.7212	0.7239	4	9	13	18	22
36	0.7265	0.7292	0.7319	0.7346	0.7373	0.7400	0.7427	0.7454	0.7481	0.7508	5	9	14	18	23
37	0.7536	0.7563	0.7590	0.7618	0.7646	0.7673	0.7701	0.7729	0.7757	0.7785	5	9	14	18	23
38	0.7813	0.7841	0.7869	0.7898	0.7926	0.7954	0.7983	0.8012	0.8040	0.8069	5	9	14	19	24
39	0.8098	0.8127	0.8156	0.8185	0.8214	0.8243	0.8273	0.8302	0.8332	0.8361	5	10	15	20	24
40	0.8391	0.8421	0.8451	0.8481	0.8511	0.8541	0.8571	0.8601	0.8632	0.8662	5	10	15	20	25
41	0.8693	0.8724	0.8754	0.8785	0.8816	0.8847	0.8878	0.8910	0.8941	0.8972	5	10	16	21	26
42	0.9004	0.9036	0.9067	0.9099	0.9131	0.9163	0.9195	0.9228	0.9260	0.9293	5	11	16	21	27
43	0.9325	0.9358	0.9391	0.9424	0.9457	0.9490	0.9523	0.9556	0.9590	0.9623	6	11	17	22	28
44	0.9657	0.9691	0.9725	0.9759	0.9793	0.9827	0.9861	0.9896	0.9930	0.9965	6	11	17	23	29

9 maths 6 trigonometry
Wednesday, March 13, 2019 5:04:42 PM

7



مساحت (MENSURATION)



Heron
A.D (C.E) 10-75

The most beautiful plane figure is the circle and the most beautiful solid figure the sphere. - *Pythagoras.*

اسکندریہ کا ہرون (Heron of Alexandria) ایک یونانی ریاضی دان تھے۔انہوں نے بہت ساری کتابیں ریاضیات، میکانیات (علمِ سکون وحرکت) اور طبعیات پر لکھیں۔اُن کی مشہور کتاب ''میٹریکا'' Metrica تین جلدوں پر مشتمل ہے۔ یہ کتاب مسطح (Plane) اور ٹھوس شکلوں کا رقبہ اور حجم کو دریافت کرنے میں رہنمائی کرتی ہے ہرون نے تینوں اضلاع دئے ہوئے مثلث کے رقبہ کا ضابطہ کو اخذ کیا۔

سیکھنے کے مقاصد

- ہرون کے ضابطے کو استعمال کر کے مثلثوں اور چار ضلعی کے رقبوں کو دریافت کرنا۔
- مکعب نما اور مکعب کا کل سطحی رقبہ (TSA)، طرفی سطحی رقبہ (LSA) اور حجم معلوم کرنا۔

7.1 تعارف Introduction

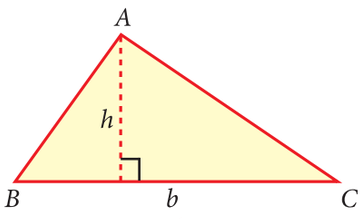
مساحت علمِ ریاضی کی ایک شاخ ہے جس میں مختلف قسم کے ہندسی (جیومیٹری) شکلوں کے رقبوں اور حجموں کے مطالعہ کے بارے میں بحث کرتا ہے۔ وسیع پیمانے میں یہ پیائش کے عمل کے بارے میں معلومات فراہم کرتا ہے۔

مساحت کا استعمال بہت سارے شعبوں میں ہوتا ہے۔جیسے فنِ تعمیر، علم ادویہ (طِب)، تعمیر وغیرہ۔روزمرہ کی زندگی میں ہر ایک کے لئے یہ ضروری ہے کہ وہ دوابعادی شکلوں کے احاطہ اور رقبہ اور مزید ٹھوس تین ابعادی شکلوں کے سطحی رقبوں اور حجم کے ضابطوں کو سیکھیں۔اس بات میں ہم مثلثوں کا رقبہ (ہرن کے ضابطہ کو استعمال کر کے) اور مکعب نما اور مکعب کے سطحی رقبوں اور حجم کے بارے میں سیکھیں گے۔

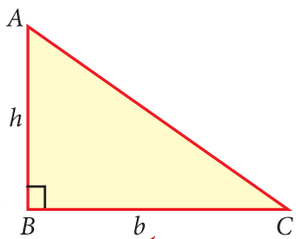
ایک بند سطح شکل (ایک چار ضلعی یا ایک مثلث) میں، ہم اس شکل کے اطراف کی سرحد کے فاصلہ کو کیا کہتے ہیں؟
اس سرحد کے اندر گھری ہوئی پیائش کیا ہے؟

عام طور پر ایک مثلث کا رقبہ ضابطہ سے محسوب کیا جاتا ہے۔

9 maths 7 mensuration
Wednesday, March 13, 2019 5:38:19 PM



خاکہ 7.1



خاکہ 7.2

مربع اکائیاں اونچائی × قاعدہ × $\frac{1}{2}$ = رقبہ

یعنی مربع اکائیاں $A = \frac{1}{2} \times b \times h$

اس مثلث کے ضابطے میں b قاعدہ اور h اونچائی ہے۔

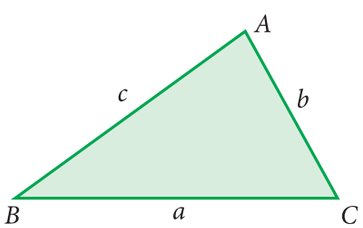
مذکورہ بالا ضابطہ سے، ہم نے جانا کہ کس طرح ایک مثلث کا رقبہ معلوم کیا جاتا ہے۔

جب اس کا قاعدہ اور اونچائی (یعنی ارتفاع) دئے گئے ہوں۔

7.2 ہرون کا ضابطہ (Heron's Formula)

تم کس طرح ایک مثلث کا رقبہ دریافت کروگے، جب اونچائی نہ معلوم ہو، لیکن تینوں اضلاع کی لمبائیاں معلوم ہوں؟

اس طرح کے مثلث کے رقبہ کے لئے ہرون نے ایک ضابطہ دیا ہے۔



خاکہ 7.3

اگر a ، b اور c ایک مثلث کے اضلاع ہو تو

مربع اکائیاں $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ = ایک مثلث کا رقبہ

جس میں $s = \frac{a+b+c}{2}$، s مثلث کا نصف احاطہ (یعنی آدھا احاطہ) ہے۔

Note غور کیجئے

اگر فرض کریں کہ اضلاع کی لمبائیاں مساوی ہیں یعنی $a = b = c$ ہو تو ہرون کا ضابطہ $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ مربع اکائیاں ہوگا، جو ایک مثلث مساوی الاضلاع کا رقبہ ہے۔

مثال 7.1 ایک مثلث نما کھیت کے اضلاع کی لمبائیاں 28m، 15m اور 41m ہیں۔ کھیت کا رقبہ محسوب کیجئے۔ کھیت کو ہموار کرنے کے لئے فی مربع میٹر ₹ 20 کے حساب سے کل خرچ معلوم کیجئے۔

حل : فرض کرو $a = 28\text{m}$، $b = 15\text{m}$ اور $c = 41\text{m}$ ہو تو

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{28+15+41}{2} = \frac{84}{2} = 42 \ m$$

مثلث نما کھیت کا رقبہ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{42(42-28)(42-15)(42-41)}$

$= \sqrt{42 \times 14 \times 27 \times 1}$

9 maths 7 mensuration
Wednesday, March 13, 2019 5:38:20 PM

$$= \sqrt{2\times 3\times 7\times 7\times 2\times 3\times 3\times 3\times 1}$$

$$= 2\times 3\times 7\times 3$$

$$= 126\ m^2$$

ہموار کرنے کے لئے فی مربع میٹر 20 ₹ دیا گیا ہے۔

کھیت کو ہموار کرنے کا کل خرچ $= 20 \times 126 = ₹\ 2520.$

مثال 7.2

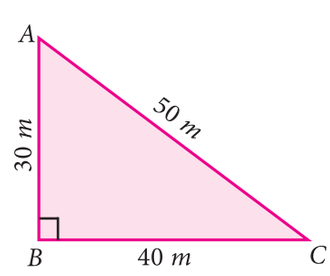
کسی مقام پر تین مختلف پلاٹس (Plots) فروخت کے لئے دستیاب ہیں۔ ہر ایک پلاٹ 120m کا احاطہ رکھتا ہے۔ ضلع کی لمبائیاں بھی دی گئی ہیں۔

ضلع کی لمبائیاں	احاطہ	پلاٹ کی شکل
$30\ m, 40\ m, 50\ m$	$120\ m$	مثلث قائمۃ الزاویہ
$35\ m, 40\ m, 45\ m$	$120\ m$	مثلث حادۃ الزاویہ
$40\ m, 40\ m, 40\ m$	$120\ m$	مثلث مساوی الاضلاع

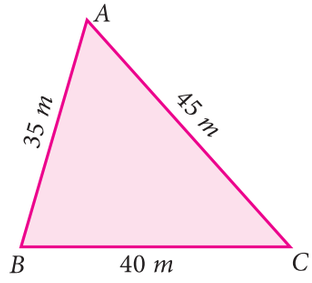
ان میں کونسا پلاٹ زیادہ کشادہ ہوگا خریدار کو فیصلہ لینے میں مدد کیجئے۔

حل :

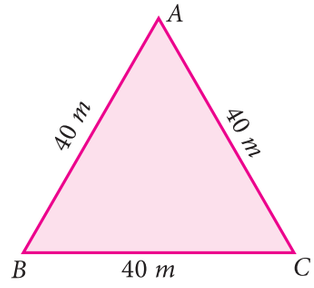
وضاحت کے لئے، چلئے ہم ایک خام خاکے بناتے ہیں جو ان پیمائشوں کی نشان دہی کرے۔



خاکہ 7.4



خاکہ 7.5



خاکہ 7.6

i) مثلث کا کا نصف احاطہ

خاکہ 4.5 میں $s = \dfrac{30+40+50}{2} = 60\ m$

خاکہ 4.6 میں $s = \dfrac{35+40+45}{2} = 60\ m$

خاکہ 4.7 میں $s = \dfrac{40+40+40}{2} = 60\ m$

غور کیجئے کہ تمام نصف احاطے مساوی ہیں

ii) ہرون کا ضابطہ استعمال کرکے

خاکہ 4.5 میں، مثلث کا رقبہ $= \sqrt{60(60-30)(60-40)(60-50)}$

$= \sqrt{60\times 30\times 20\times 10}$

9 maths 7 mensuration
Wednesday, March 13, 2019 5:38:20 PM

$$= \sqrt{30 \times 2 \times 30 \times 2 \times 10 \times 10}$$

$$= 600 \ m^2$$

4.6 خاکہ میں، مثلث کا رقبہ

$$= \sqrt{60(60-35)(60-40)(60-45)}$$

$$= \sqrt{60 \times 25 \times 20 \times 15}$$

$$= \sqrt{20 \times 3 \times 5 \times 5 \times 20 \times 3 \times 5}$$

$$= 300\sqrt{5} \qquad (\text{چونکہ } \sqrt{5} = 2.236)$$

$$= 670.8 \ m^2$$

4.7 خاکہ میں، مثلث کا رقبہ

$$= \sqrt{60(60-40)(60-40)(60-40)}$$

$$= \sqrt{60 \times 20 \times 20 \times 20}$$

$$= \sqrt{3 \times 20 \times 20 \times 20 \times 20}$$

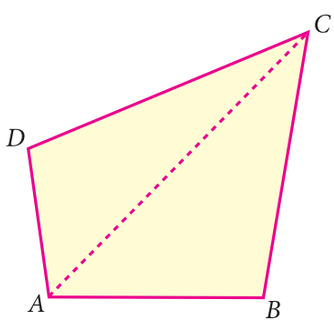
$$= 400\sqrt{3} \qquad (\text{چونکہ } \sqrt{3} = 1.732)$$

$$= 692.8 \ m^2$$

ہم نے معلوم کیا کہ احاطے یکساں رہنے کے باوجود تین مثلث نما پلاٹوں کے رقبے مختلف ہیں۔ان میں خاکہ 4.7 مثلث کا رقبہ سب سے بڑا ہے۔خریدار کو اس کو انتخاب کرنے کا مشورہ دیا جائے کیونکہ یہ زیادہ کشادہ ہے۔

Note غور کیجئے

اگر مختلف اقسام کے مثلثیں یکساں احاطہ رکھتے ہیں۔تمام اقسام کے مثلثوں میں مثلث مساوی الاضلاع سب سے بڑا رقبہ رکھتا ہے۔
بڑے سے بڑے رقبوں کے بارے میں بڑی جماعتوں میں پڑھیں گے۔



خاکہ 7.7

7.3 ہرون کے ضابطے کے استعمالات Application of Heron's Formula

ایک مسطح شکل جو چار قطاع خطوط سے گھیری ہوئی ہے۔
اس کو **چار ضلعی** کہتے ہیں۔فرض کیجئے کہ ABCD ایک چار ضلعی ہے۔چار ضلعی کا رقبہ معلوم کرنے کے لئے ہمیں اُس چار ضلعی کو دو مثلث نما حصّوں میں تقسیم کرنا چاہئے۔
اور مثلث نما حصّوں کو ہرون کے ضابطہ کو استعمال کر کے رقبہ معلوم کرنا چاہئے۔
خاکہ 7.7 میں،

مثلث ACD کا رقبہ + مثلث ABC کا رقبہ = چار ضلعی ABCD کا رقبہ

9 maths 7 mensuration
Wednesday, March 13, 2019 5:38:20 PM

مثال 7.3

ایک کسان کے پاس معین کی شکل کا ایک کھیت ہے۔اس کھیت کا احاطہ 400 میٹر ہے اور اس کا ایک وتر 120 میٹر ہے۔ وہ مختلف قسم کے ترکاریوں کو اُگانے کے لئے کھیت کو دو مساوی حصّوں میں تقسیم کرنا چاہتا ہے۔کھیت کا رقبہ معلوم کیجئے۔

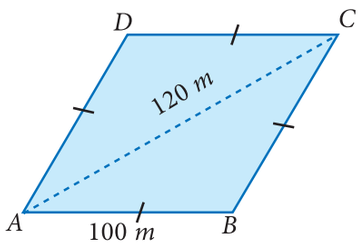
حل :

فرض کرو کہ ABCD ایک معین ہے۔

اس کا احاطہ = 14 × ضلع = 400m

چنانچہ، معین کا ہر ایک ضلع = 100m

دئے گئے وتر AC کی لمبائی = 120m



خاکہ 7.8

ΔABC میں، فرض کرو $a = 100\text{m}$، $b = 100\text{m}$، $c = 120\text{m}$ ہیں

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{100+100+120}{2} = 160\ m$$

$$\text{ΔABC کا رقبہ} = \sqrt{160(160-100)(160-100)(160-120)}$$

$$= \sqrt{160\times 60\times 60\times 40}$$

$$= \sqrt{40\times 2\times 2\times 60\times 60\times 40}$$

$$= 40\times 2\times 60 = 4800\,m^2$$

چنانچہ، کھیت ABCD کا رقبہ $= 2 \times$ ΔABC کا رقبہ $= 2\times 4800 = 9600\ m^2$

مشق 7.1

1۔ ہرون کا ضابطہ استعمال کرکے، مثلث کا رقبہ معلوم کیجئے۔جن کے اضلاع یہ ہیں۔

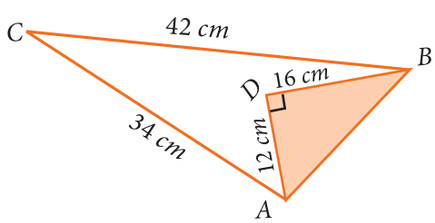
(i) 10 *cm*, 24 *cm*, 26 *cm* (ii) 1.8 *m*, 8 *m*, 8.2 *m*

2۔ مثلث نما میدان کے اضلاع 22m، 120m اور 122m ہیں۔رقبہ معلوم کیجئے۔اور میدان کو ہموار کرنے کے لئے فی مربع میٹر ₹ 20 کے حساب سے کل خرچ معلوم کیجئے۔

3۔ ایک مثلث نما پلاٹ کا احاطہ 600m ہے۔اگر اضلاع کی نسبت 5:12:13 ہے۔تو پلاٹ کا رقبہ معلوم کیجئے۔

4۔ ایک مثلث مساوی الاضلاع کا رقبہ معلوم کیجئے جس کا احاطہ 180 سم ہے۔

5۔ ایک اشتہاری بورڈ مثلث مساوی الساقین کی شکل میں ہے۔جس کا احاطہ 36 میٹر اور ہر ایک مساوی ضلع 13 میٹر ہیں۔اس کو ₹ 20 فی مربع میٹر کے حساب سے رنگ کرنے کا کل خرچ معلوم کیجئے۔



6۔ غیر سیاہ کردہ حصّے کا رقبہ دریافت کیجئے۔

9 maths 7 mensuration
Wednesday, March 13, 2019 5:38:20 PM

7 ۔ ایک چارضلعی ABCD کا رقبہ معلوم کیجئے۔جس کے اضلاع AB = 13cm، BC = 12cm، CD = 9cm، AD = 14cm اور وتر BD = 15cm ہیں۔

8 ۔ ایک پارک چارضلعی مشکل کا ہے۔پارک کے اضلاع 15m، 20m، 26m اور 17m ہیں اور پہلے دو ضلعوں کا درمیانی زاویہ، زاویہ قائمہ ہے۔ پارک کا رقبہ معلوم کیجئے۔

9 ۔ ایک زمینی پلاٹ معین کی شکل کا ہے۔اس پلاٹ کا احاطہ 160m ہے اور اس کا ایک وتر 48m ہے پلاٹ کا رقبہ معلوم کیجئے۔

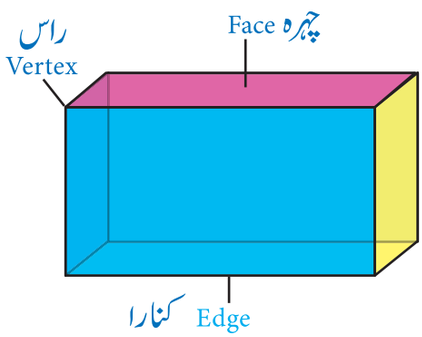
10۔ متوازی الاضلاع کے متصل ضلعوں کی پیمائش 34m اور 20m ہیں اور وتر کی پیمائش 42m ہے متوازی الاضلاع کا رقبہ معلوم کیجئے۔

7.4 مکعب نما اور مکعب کا سطحی رقبہ Surface area of cubiod and cube

ہم نے پچھلی جماعتوں میں 3D ساختوں (تین ابعادی) کے بارے میں سیکھا ہے۔3D شکلیں وہ شکلیں ہیں۔جو ایک مسطح پر مکمل طور پر واقع نہیں ہوتے۔کسی بھی 3D شکل میں لمبائی، چوڑائی اور اونچائی نامی تین ابعاد ہوتے ہیں۔

7.4.1 مکعب نما اور اُس کا سطحی رقبہ Cuboid and its surface area

مکعب نما : ایک مکعب نما ٹھوس بند شکل ہے جو چھ مستطیلی سطحوں سے گھیری ہوئی ہے۔یہاں پر اس کی چند مثالیں یہ ہیں۔



خاکہ 7.9

ایک مکعب نما میں 6 چہرے، 12 کنارے اور 8 راسیں رکھتا ہے۔

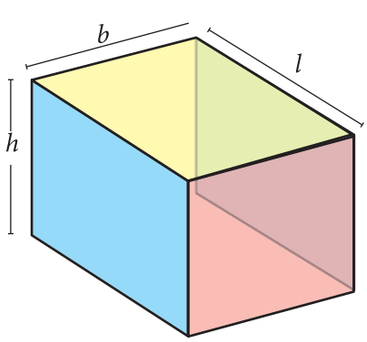
بنیادی طور پر، ایک مکعب نما مستطیلی ڈبہ کی شکل کا ہوتا ہے۔

کل سطحی رقبہ (TSA) (Total Surface Area)

ایک مکعب نما کے تمام گھیرے ہوئے چہروں کے رقبوں کا حاصل جمع ہے۔

اگر ہم مکعب نما کے اوپری اور نچلی سطحوں کے رقبوں کو چھوڑ دیتے ہیں تو ہمیں طرفی سطحی کا رقبہ (L.S.A) حاصل ہوگا۔

خاکہ 7.10 میں لمبائی، چوڑائی اور اونچائی بالترتیب l، b اور h سے ظاہر کرتے ہیں۔



خاکہ 7.10

(i) مکعب نما کا کل سطحی رقبہ (TSA)

اوپر اور نیچے	$2 \times lb$
آگے اور پیچھے	$2 \times bh$
دائیں اور بائیں جانب	$2 \times lh$

مربع اکائیاں $= 2\,(lb + bh + lh)$

(ii) ایک مکعب نما کا طرفی سطحی رقبہ

آگے اور پیچھے	$2 \times bh$
دائیں اور بائیں جانب	$2 \times lh$

مربع اکائیاں $= 2\,(l+b)h$

9 maths 7 mensuration
Wednesday, March 13, 2019 5:38:21 PM

ہم حقیقی زندگی میں کل سطحی رقبہ (TSA) اور طرفی سطحی رقبہ (LSA) کا اصول استعمال کرتے ہیں۔ مثال کے طور پر ایک کمرہ مکعبی شکل کا ہے۔ اگر ہمیں ایک کمرے کی چھت اور فرش کو چھوڑ کر صرف دیواروں کے رقبے معلوم کرنا ہو تو ہم LSA کا استعمال کر سکتے ہیں۔ جب کہ اگر ہمیں کل کمرے کے سطحوں کا رقبہ معلوم کرنا ہو تو ہمیں TSA کو محسوب کرنا چاہئے۔

اگر ایک مکعب نما کی لمبائی، چوڑائی اور اونچائی بالترتیب l، b اور h ہو تو

i) کل سطحی رقبہ $= 2\,(lb + bh + lh)$ مربع اکائیاں

ii) طرفی سطحی رقبہ $= 2(l+b)\,h$ مربع اکائیاں

Note غور کیجئے

i) ایک مکعب کے اوپری اور نچلے چہروں کے رقبے اونچائی سے آزاد ہوتے ہیں۔ اوپری اور نچلی چہرے کا کل رقبہ $2(lb)$ ہے۔
لہذا $2(lb+bh+lh)$ سے $2\,lb$ کو تفریق کرنے سے LSA حاصل ہوگا۔

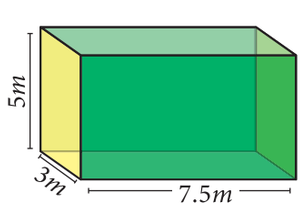
ii) سطحی رقبہ معلوم کرتے وقت لمبائی، چوڑائی اور اونچائی اکائیاں یکساں ہونی چاہئے۔

مثال 7.4

ایک مکعب نما کا TSA اور LSA معلوم کیجئے جس کی لمبائی چوڑائی اور اونچائی بالترتیب 7.5m، 3m اور 5m ہیں۔

حل : دئے گئے مکعب نما کے ابعاد

یعنی لمبائی $(l) = 7.5\text{m}$، چوڑائی $(b) = 3\text{m}$ اور اونچائی $(h) = 5\text{m}$



خاکہ 7.11

$$\begin{aligned}
\text{TSA} &= 2(lb + bh + lh)\\
&= 2\left[(7.5\times\ 3) + (3\times 5) + (7.5\times 5)\right]\\
&= 2(22.5 + 15 + 37.5)\\
&= 2\times 75\\
&= 150\ m^2\\
\text{LSA} &= 2(l + b)\times h\\
&= 2(7.5 + 3)\times 5\\
&= 2\times 10.5\times 5\\
&= 105\ m^2
\end{aligned}$$

9 maths 7 mensuration
Wednesday, March 13, 2019 5:38:21 PM

مثال 7.5

ایک ہال (Hall) جس کی لمبائی، چوڑائی اور اونچائی بالترتیب 25m، 15m اور 5m ہیں۔
ہال کی فرش اور چاردیواروں کو تجدید کرنے کا خرچ فی مربع میٹر ₹ 80 کے حساب سے کل خرچ معلوم کرو۔

حل : یہاں لمبائی $(l) = 25\text{m}$، چوڑائی $(b) = 15\text{m}$ اور اونچائی $(h) = 5\text{m}$



خاکہ 7.12

مکعب نما کا L.S.A = چاردیواروں کا رقبہ

$= 2(l + b) \times h$

$= 2(25 + 15) \times 5$

$= 80 \times 5 = 400\ m^2$

فرش کا رقبہ $= l \times b$

$= 25 \times 15$

$= 375\ m^2$

تجدید شدہ ہال کا کل رقبہ = (فرش کا رقبہ + چاردیواروں کا رقبہ)

$= (400 + 375)\ m^2 \quad = 775\ m^2$

تجدید کا خرچ فی مربع میٹر ₹ 80 کے حساب سے کل خرچ = ₹ 80×775، چنانچہ

= ₹ 62,000

7.4.2 مکعب اور اُس کا سطحی رقبہ (Cube and its surface area)

مکعب : ایک مکعب نما جس کی لمبائی، چوڑائی اور اونچائی تمام مساوی ہو تو مکعب کہلاتا ہے۔ یعنی مکعب چھ مربع سطحوں سے بنی ہوئی ٹھوس شکل ہے۔
حقیقی زندگی میں استعمال ہونے والے چند مثالیں ہیں۔


پانسہ


برف کے مکعب

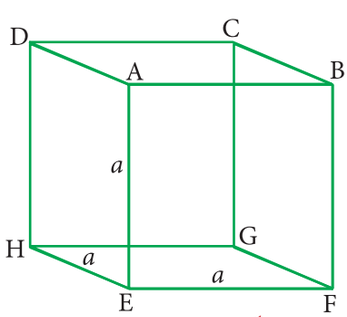

شکر کے مکعب

خاکہ 7.13

ایک مکعب ایک مکعب نما ہونے کی وجہ سے 6 چہرے، 12 کنارے اور 8 راسیں رکھتا ہے۔

فرض کرو کہ ایک مکعب جس کے اضلاع 'a' اکائیاں ہیں۔

جیسا کہ خاکہ 7.14 میں دکھایا گیا ہے۔ اب



خاکہ 7.14

9 maths 7 mensuration
Wednesday, March 13, 2019 5:38:22 PM

i) مکعب کا کل سطحی رقبہ

= چہروں کے رقبوں کا حاصل جمع (ABCD + EFGH + AEHD + BFGC + ABFE + CDHG)

$= (a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + a^2)$

$= 6a^2$ مربع اکائیاں

ii) مکعب کا طرفی سطحی رقبہ

= چہروں کے رقبوں کا حاصل جمع (AEHD + BFGC + ABFE + CDHG)

$= (a^2 + a^2 + a^2 + a^2)$

$= 4\ a^2$ مربع اکائیاں

Thinking Corner ذرا سوچیے

کیا تم ان ضابطوں کو مکعب نما کے نظیری ضابطے سے حاصل کر سکتے ہو؟

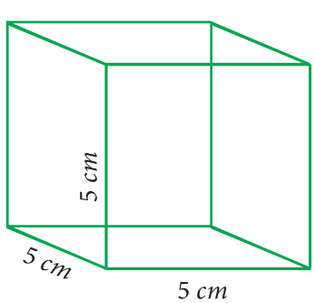
اگر ایک مکعب کا ضلع ' a ' اکائیاں ہو تو

i) کل سطحی رقبہ $= 6a^2$ مربع اکائیاں

ii) طرفی سطحی رقبہ $= 4a^2$ مربع اکائیاں

مثال 7.6 ضلع 5cm والے ایک مکعب کا کل سطحی رقبہ اور طرفی سطحی رقبہ معلوم کیجیے۔

حل :



خاکہ 7.15

مکعب کا ضلع $(a) = 5\text{cm}$

کل سطحی رقبہ $= 6a^2 = 6(5^2) = 150\ sq.\ cm$

طرفی سطحی رقبہ $= 4a^2 = 4(5^2) = 100\ sq.\ cm$

مثال 7.7 ایک مکعب کا کل سطحی رقبہ 486cm^2 ہے اس کا طرفی سطحی رقبہ معلوم کیجیے۔

حل :

یہاں مکعب کا کل سطحی رقبہ $= 486\text{cm}^2$

$6a^2 = 486 \Rightarrow a^2 = \frac{486}{6}$ اس طرح $a^2 = 81$ حاصل ہوا $a = 9$.

مکعب کا ایک ضلع $= 9\ cm$

طرفی سطحی رقبہ $= 4\ a^2 = 4 \times 9^2 = 4 \times 81 = 324\ cm^2$

9 maths 7 mensuration
Wednesday, March 13, 2019 5:38:22 PM

مثال 7.7

دو مماثل مکعبوں کا ضلع 7cm ہے ان کو ایک دوسرے کی سطح سے جوڑا گیا ہے تو نئے حاصل شدہ مکعب نما کا کل سطحی رقبہ اور طرفی سطح کا رقبہ معلوم کیجئے۔

حل :

ایک مکعب کا ضلع $= 7cm$

حاصل شدہ مکعب نما کی لمبائی $(l) = 7+7 = 14cm$

چوڑائی $(b) = 7cm$، اونچائی $(h) = 7cm$

کل سطحی رقبہ $= 2(lb + bh + lh)$

$= 2\left[(14\times 7) + (7\times 7) + (14\times 7)\right]$

$= 2(98 + 49 + 98)$

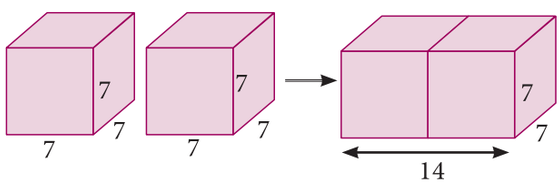
$= 2 \times 245$

$= 490 \ cm^2$

طرفی سطحی رقبہ $= 2(l + b) \times h$

$= 2(14 + 7) \times 7 \ = 2 \times 21 \times 7$

$= 294 \ cm^2$



خاکہ 7.16

مشق 7.2

1۔ ایک مکعب نما کا کل سطحی رقبہ اور طرفی سطحی رقبہ معلوم کیجئے جس کے ابعاد یہ ہیں۔
لمبائی = 20 سم؛ چوڑائی = 15 سم، اونچائی = 8 سم

2۔ ایک مکعب نما باکس کے ابعاد (6m×400cm×1.5m) ہیں۔اس کے کل بیرونی سطح کو رنگوانے کے لئے ₹ 22 فی مربع سم کے حساب سے کل خرچ معلوم کیجئے۔

3۔ ایک ہال کے ابعاد 10m×9m×8m ہیں۔اس ہال کی دیواروں اور چھت کو سفید چونا رنگوانے کے لئے فی مربع میٹر ₹ 8.50 کے حساب سے کل خرچ معلوم کیجئے۔

4۔ ایک مکعب کا TSA اور LSA معلوم کیجئے۔جس کا ضلع ہے۔i) 8m ii) 21cm iii) 7.5cm

5۔ اگر ایک مکعب کا کل سطحی رقبہ $2400cm^2$ ہو تو اس کا طرفی سطحی رقبہ معلوم کیجئے۔

6۔ معکبی شکل کا کنٹینر (Container) کا ضلع 6.5m ہے کل بیرونی سطح کو رنگوانا ہے۔رنگوانے کے لئے فی مربع میٹر ₹ 24 کے حساب سے کل خرچ اور رنگوانے کا رقبہ معلوم کیجئے۔

7۔ تین مماثل مکعبوں کا ضلع 4cm ہے ان کو ایک دوسرے کی سطح سے جوڑا گیا ہے۔نئے حاصل شدہ مکعب نما کا کل سطحی رقبہ اور طرفی سطح کا رقبہ معلوم کیجئے۔

9 maths 7 mensuration
Wednesday, March 13, 2019 5:38:22 PM

7.5 مکعب نما اور مکعب کا حجم Volume of cuboid and cube

Q168P

ہم سب نے $50ml$ اور $100ml$ کے آئس کریم کا ذائقہ چکھا ہے۔اس طرح کا ایک $100ml$ کا آئس کریم کپ لیں۔اس کپ میں $100ml$ پانی سما سکتا ہے۔جس کے معنی یہ ہیں کہ اس کپ کی گنجائش یا حجم $100ml$ ہے۔$100ml$ کا ایک کپ لیجئے اور ایک صراحی کو پانی سے بھرنے کے لئے اس طرح کے کتنے پانی کے کپ چاہئے معلوم کیجئے۔اگر $100ml$ کے 10 کپ سے ایک صراحی بھر سکتی ہے تو اس صراحی کی گنجائش یا حجم 1 لیٹر $(1 = 1000ml = 100ml \times 10)$ ہوگی۔مزید جانچئے کہ اس طرح کے کتنے پانی کے صراحیوں سے ایک بالٹی (Bucket) کو پانی بھرا جا سکتا ہے۔وہی اس بالٹی کی گنجائش یا حجم ہوگی۔

اسی طرح ہم کسی بھی شئے کا حجم یا گنجائش محسوب کر سکتے ہیں۔

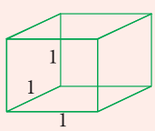
کسی تین ابعادی ٹھوس شئے سے گھیری جانے والی جگہ کی پیمائش حجم کہلاتی ہے۔

مکعب سم (cm^3)، مکعب میٹر (m^3) حجم کو پیمائش کرنے والی چند مکعب اکائیاں ہیں

Note غور کیجئے

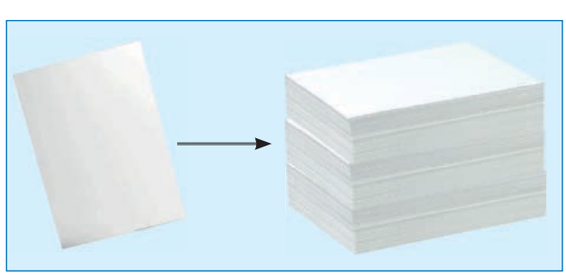
Unit Cube : مکعب اکائی

ایک مکعب جس کا ضلع ایک اکائی ہے۔



خاکہ 7.17

ہم نے معلوم کیا کہ یہ اکائی مکعبوں کی یہ گنتی ٹھوس شئے کے قاعدہ کے رقبہ سے تعلق رکھتی ہے۔اوپر بحث کی گئی ٹھوس مکعب نما میں قاعدہ کا رقبہ $(8\times2)cm^2$ ہے۔اس کے ساتھ اونچائی $3cm$ کو ضرب دینے سے ہمیں حجم حاصل ہوگا۔لہذا ایک ٹھوس شئے کا حجم قاعدہ کا رقبہ اور اونچائی کا حاصل ضرب ہے۔



خاکہ 7.18

ایک عملی صورتِ حال سے اس کو آسانی کے ساتھ سمجھا جا سکتا ہے۔تم نے A4 سائز (Size) کاغذ کے بنڈل کو دیکھا ہوگا۔ہر کاغذ مستطیلی شکل میں ہے اور اس کا رقبہ $(= lb)$ ہے۔جب تم ان کو اکٹھا کرتے ہو تو، مکعب نما شکل کا ایک بنڈل بن جاتا ہے۔lb کو h مرتبہ ضرب دینے سے مکعب نما بنتا ہے۔

7.5.1 ایک مکعب نما کا حجم (Volume of a cuboid)

فرض کیجئے کہ ایک مکعب نما کی لمبائی، چوڑائی اور اونچائی بالترتیب l، b اور h ہے تو مکعب نما کا حجم

$V =$ (مکعب نما کا قاعدہ کا رقبہ) $\times$ اونچائی

$= (l\times b) \times h = lbh$ مکعب اکائیاں

Note غور کیجئے

کسی مکعب نما کا حجم معلوم کرنے کے لئے لمبائی، چوڑائی اور اونچائی کی اکائیاں یکساں ہونی چاہئے۔

9 maths 7 mensuration
Wednesday, March 13, 2019 5:38:23 PM

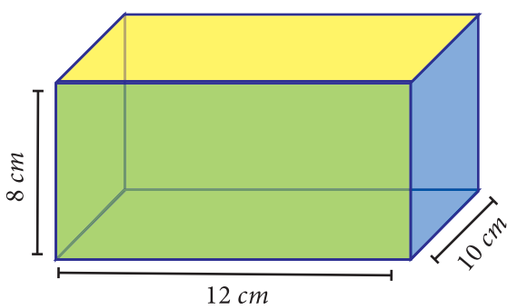
مثال 7.9

ایک مکعب نما کی لمبائی، چوڑائی اور اونچائی بالترتیب 120mm، 10cm اور 8cm ہیں۔
اس طرح کے 10 مکعب نما کے حجم معلوم کیجئے

حل : چونکہ چوڑائی اور اونچائی دونوں سمر میں دی گئی ہے۔اس لئے لمبائی کو بھی سمر میں تبدیل کرنا ضروری ہے۔

$l = 120\text{mm} = \frac{120}{10} = 12\ cm$ اور $b = 10\text{cm}$؛ $h = 8\text{cm}$ لیں تو اس طرح

تو ہمیں حاصل ہوا



خاکہ 7.20

$$\text{مکعب نما کا حجم} = l \times b \times h$$
$$= 12 \times 10 \times 8$$
$$= 960\ cm^3$$
$$\text{اسی طرح کے 10 مکعب نما کا حجم} = 10 \times 960$$
$$= 9600\ cm^3$$

مثال 7.10

ایک مکعب نما کی لمبائی، چوڑائی اور اونچائی 7:5:2 کی نسبت میں ہے۔
اس کا حجم 35840cm^3 ہے۔اس کے ابعاد معلوم کیجئے۔

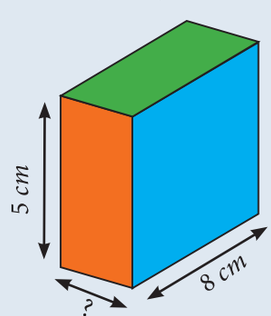
حل : فرض کیجئے کہ مکعب نما کے ابعاد اس طرح ہیں۔

$$l = 7x, \quad b = 5x \quad \text{اور} \quad h = 2x$$
$$\text{مکعب نما کا حجم دیا گیا ہے۔} = 35840\ cm^3$$
$$l \times b \times h = 35840$$
$$(7x)(5x)(2x) = 35840$$
$$70x^3 = 35840$$
$$x^3 = \frac{35840}{70}$$
$$x^3 = 512$$
$$x = \sqrt[3]{8 \times 8 \times 8}$$
$$x = 8\ cm$$
$$\text{مکعب نما کی لمبائی} = 7x = 7 \times 8 = 56\ cm$$
$$\text{مکعب نما کی چوڑائی} = 5x = 5 \times 8 = 40\ cm$$
$$\text{مکعب نما کی اونچائی} = 2x = 2 \times 8 = 16\ cm$$

THINKING CORNER ذرا سوچئے

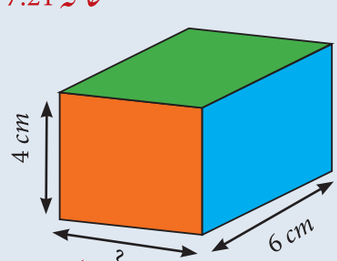
ذیل میں دئے گئے ہر مکعب نما 120cm^3 یکساں حجم رکھتے ہیں۔کیا تم نامعلوم ابعاد دریافت کر سکتے ہو؟

(i)



خاکہ 7.21

(ii)



خاکہ 7.22

9 maths 7 mensuration
Wednesday, March 13, 2019 5:38:23 PM

مثال 7.11

ایک مچھلی کے ٹینک کے ابعاد اس طرح ہیں۔
3.8m×2.5m×1.6m تو اُس ٹینک میں کتنے لیٹر پانی سما سکتا ہے۔



خاکہ 7.23

حل :

مچھلی کے ٹینک کی لمبائی $(l) = 3.8\ m$

مچھلی کے ٹینک کی چوڑائی $(b) = 2.5\ m$

مچھلی کے ٹینک کی اونچائی $(h) = 1.6\ m$

مچھلی کے ٹینک کا حجم $= l \times b \times h$

$= 3.8 \times 2.5 \times 1.6$

$= 15.2\ m^3$

$= 15.2 \times 1000\ litres$

$= 15200\ litres$

Note غور کیجئے

چند اہم تبدیلیاں یہ ہیں

$1\ cm^3 = 1\ ml$, $1000\ cm^3 = 1\ litre$,

$1m^3 = 1000\ litres$

مثال 7.12

ایک مٹھائی کے ڈبے کے ابعاد 22cm×18cm×10cm اس طرح ہیں۔ اس طرح کے کتنے ڈبے، ایک کارٹن (Carton) (بڑے باکس) میں سما سکتے ہیں، جس کے ابعاد 1m×88cm×63cm یہ ہیں؟

حل : یہاں مٹھائی کے ڈبے کے ابعاد لمبائی $(l) = 22cm$، چوڑائی $(b) = 18cm$، اور اونچائی $(h) = 10cm$ ہیں۔

مٹھائی کے ڈبہ کا حجم $= l \times b \times h$

$= 22 \times 18 \times 10\ cm^3$



خاکہ 7.24

کارٹن کے ابعاد ہیں

لمبائی $(l) = 1m = 100$ cm

چوڑائی $(b) = 88cm$

اونچائی $(h) = 63cm$

$= l \times b \times h$

مٹھائی کے ڈبہ کا حجم $= 100 \times 88 \times 63\ cm^3$

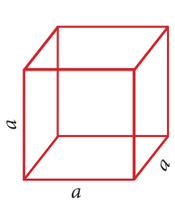
سمانے والے مٹھائی کے ڈبوں کی تعداد $= \dfrac{\text{کارٹن کا حجم}}{\text{ایک مٹھائی کے ڈبہ کا حجم}}$

$= \dfrac{100 \times 88 \times 63}{22 \times 18 \times 10}$

$= 140$ ڈبے

7.5.2 ایک مکعب کا حجم (Volume of a cube)

ایک مکعب جس کی ضلع a اکائیاں ہو تو حجم معلوم کرنا آسان ہوگا۔ جب ایک مکعب نما کا حجم کے ضابطے میں صرف $l = b = h = a$ ڈالیں۔ تو ہمیں مکعب کا حجم a^3 مکعب اکائیاں حاصل ہوگا۔



خاکہ 7.25

9 maths 7 mensuration
Wednesday, March 13, 2019 5:38:23 PM

اگر مکعب کا ایک ضلع ' a ' اکائیاں ہو تو

مکعب کا حجم $V = a^3$ مکعب اکائیاں

Note غور کیجئے

کسی بھی دو مکعبوں کے لئے، ذیل کے نتائج صحیح ہیں۔

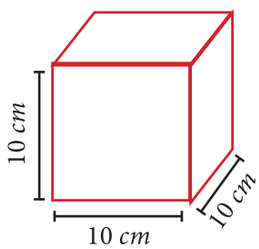
i) سطحی رقبوں کی نسبت = (ضلعے کی نسبت)^2

ii) حجموں کی نسبت = (ضلعے کی نسبت)^3

iii) (سطحی رقبوں کی نسبت)^3 = (حجموں کی نسبت)^2

مثال 7.13

10cm ضلع والے ایک مکعب کا حجم معلوم کیجئے۔



خاکہ 7.26

حل :

ضلع دیا گیا ہے $(a) = 10\text{cm}$

مکعب کا حجم $= a^3$

$= 10 \times 10 \times 10$

$= 1000\text{cm}^3$

مثال 7.14

ایک مکعبی شکل کا ٹینک 64,000 لیٹر پانی سما سکتا ہے تو اس ٹینک کے ضلع کی لمبائی کو میٹر میں معلوم کیجئے۔

حل :

فرض کیجئے کہ مکعبی شکل ٹینک کا ضلع ' a ' ہے۔

ٹینک کا حجم = 64000 لیٹر

i.e., $a^3 = 64,000 = \dfrac{64000}{1000}$ (کیونکہ $1000\text{ لیٹر} = 1\text{m}^3$)

$a^3 = 64 \ m^3$

$a = \sqrt[3]{64} \quad a = 4 \ m$

لہذا، ٹینک کے ضلع کی لمبائی 4 میٹر ہے۔

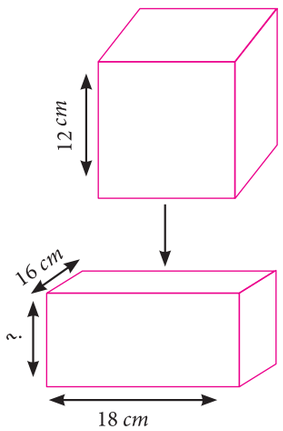
مثال 7.15

ایک دھاتی مکعب کا ضلع 12cm ہے اور اس کو پگھلا کر مکعب نما بنایا گیا جس کی لمبائی اور چوڑائی بالترتیب 18cm اور 16cm ہے۔ مکعب نما کی اونچائی معلوم کیجئے۔

9 maths 7 mensuration
Wednesday, March 13, 2019 5:38:23 PM

حل :

مکعب نما	مکعب
لمبائی $(l) = 18\text{cm}$	$(a) = 12\text{cm}$
چوڑائی $(b) = 16\text{cm}$	
اونچائی $(h) = ?$	



خاکہ 7.27

یہاں مکعب کا حجم = مکعب نما کا حجم

$$l \times b \times h = a^3$$

$$18 \times 16 \times h = 12 \times 12 \times 12$$

$$h = \frac{12 \times 12 \times 12}{18 \times 16}$$

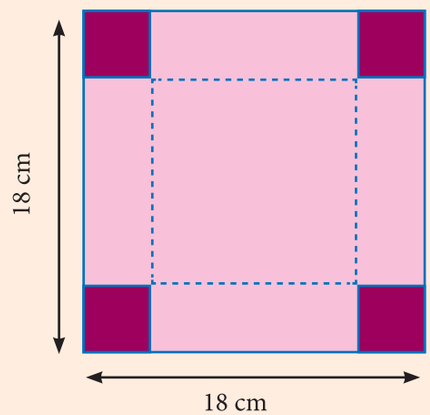
$$h = 6 \text{ cm}$$

چنانچہ، مکعب نما کی اونچائی 6cm ہے۔

کارروائی

چند مربع نما کاغذ/چارٹ لیں ۔ دئے گئے ابعاد 18cm×18cm کے چند مربع نما کاغذ/چارٹ لیجئے ۔ دئے گئے مربع نما کاغذ کے ہر کنارے سے مساوی جسامت والے مربعوں کو نکالیں اور ان بازوں (Flaps) کو تہہ کر کے ایک مکعب نما ڈبہ بنایئے ۔ بنائے گئے مکعب نما ڈبوں کے ابعادوں کی جدول بندی کیجئے اور ہر مرتبہ ان کا حجم معلوم کر کے جدول بھی مکمل کیجئے ۔ مربعوں کے کناروں سے نکالے جانے والے ضلع کی پیمائش ذیل کے جدول میں دی گئی ہیں۔

شمار عدد	مربع کے کنارہ کا ضلع	ڈبوں کے ابعاد			حجم
		l	b	h	V
1.	1 cm				
2.	2 cm				
3.	3 cm				
4.	4 cm				
5.	5 cm				



خاکہ 7.28

مندرجہ بالا جدول پر غور کریں اور ذیل کے جوابات دیں۔

i) سب سے بڑا ممکن حجم کیا ہے؟

ii) کونسے مربع کے ضلع کو نکالنے سے سب سے بڑا حجم حاصل ہوگا؟

9 maths 7 mensuration
Wednesday, March 13, 2019 5:38:24 PM

مشق 7.3

1۔ ایک مکعب نما کا حجم معلوم کیجئے جس کے ابعاد یہ ہیں۔

i) لمبائی = 12cm، چوڑائی = 8cm، اونچائی = 6cm

ii) لمبائی = 60 m، چوڑائی = 25m، اونچائی = 1.5m

2۔ ایک ماچس کا ڈبہ (Match Box) کے ابعاد 6cm×3.5cm×2.5cm اس طرح ہیں۔ اسی طرح کے 12 ماچس کے ڈبے سمانے والے پیکٹ (Packet) کا حجم معلوم کیجئے۔

3۔ ایک چاکلیٹ کے ڈبہ کی لمبائی، چوڑائی اور اونچائی 5:4:3 کی نسبت میں ہے۔ اگر اس کا حجم $7500cm^3$ ہے تو اس کے ابعاد معلوم کیجئے۔

4۔ ایک حوض کی لمبائی، چوڑائی اور گہرائی بالترتیب 20.5m، 16m اور 8m ہے۔ حوض کی گنجائش / حجم لیٹر میں معلوم کیجئے۔

5۔ ایک اینٹ کے ابعاد 8cm×12cm×24cm ہیں۔ 20m لمبائی، 48cm چوڑائی اور 6m اونچائی والی ایک دیوار تعمیر کرنے کے لئے اس طرح کے کتنے اینٹ درکار ہوں گے۔

6۔ ایک کنٹینر (Container) کا حجم $1440m^3$ ہے۔ اس کنٹینر کی لمبائی اور چوڑائی بالترتیب 15m اور 8m ہے۔ اس کی اونچائی معلوم کیجئے۔

7۔ ہر ضلعے کے لئے مکعب کا حجم معلوم کیجئے۔ (i 5cm (ii 3.5m (iii 21cm

8۔ ایک مکعبی شکل کا دودھ کے ٹینک میں لیٹر 1,25,000 دودھ سما سکتا ہے تو اس کے ضلع کی لمبائی میٹر میں معلوم کیجئے۔

9۔ ایک دھاتی مکعب کا ضلع 15cm ہے اور اس کو پگھلا کر ایک مکعب نما بنایا گیا ہے۔ اگر مکعب نما کی لمبائی اور اونچائی بالترتیب 25cm اور 9cm ہو تو مکعب نما کی چوڑائی معلوم کیجئے۔

مشق 7.4

Multiple choice questions کثیر انتخابی سوالات

1۔ ایک مثلث کے اضلاع 15cm، 20cm اور 25cm ہیں تو ان کا نصف احاطہ ..... ہے۔

(1) 60 *cm* (2) 45 *cm* (3) 30 *cm* (4) 15 *cm*

2۔ اگر ایک مثلث کے اضلاع 3cm، 4cm اور 5cm ہو تو اس کا رقبہ ..... ہے۔

(1) 3 cm^2 (2) 6 cm^2 (3) 9 cm^2 (4) 12 cm^2

3۔ ایک مثلث مساوی الاضلاع کا احاطہ 30cm ہے اس کا رقبہ ..... ہے۔

(1) $10\sqrt{3}\ cm^2$ (2) $12\sqrt{3}\ cm^2$ (3) $15\sqrt{3}\ cm^2$ (4) $25\sqrt{3}\ cm^2$

4۔ 12cm ضلع والے ایک مکعب کا طرفی سطحی رقبہ ہے۔

(1) 144 cm^2 (2) 196 cm^2 (3) 576 cm^2 (4) 664 cm^2

9 maths 7 mensuration
Wednesday, March 13, 2019 5:38:24 PM

5 ۔ اگر ایک مکعب کا طرفی سطحی رقبہ $600cm^2$ ہے تو اس کا کل سطحی رقبہ ہے۔

(1) 150 cm^2 (2) 400 cm^2 (3) 900 cm^2 (4) 1350 cm^2

6۔ ایک مکعب نما کے ابعاد 6cm×5cm ×10cm ہیں تو کل سطحی رقبہ ہے۔

(1) 280 cm^2 (2) 300 cm^2 (3) 360 cm^2 (4) 600 cm^2

7۔ اگر مکعبوں کے ضلعوں کی 3 : 2 نسبت میں ہو تو ان کے سطحی رقبوں کی نسبت ..... ہوگی۔

(1) 4:6 (2) 4:9 (3) 6:9 (4) 16:36

8۔ ایک مکعب نما کا حجم $660cm^3$ ہے اور اس کے قاعدہ کا رقبہ $33cm^2$ ہے۔ اس کی اونچائی ہے۔

(1) 10 cm (2) 12 cm (3) 20 cm (4) 22 cm

9۔ پانی کا ٹینک کی گنجائش کیا ہے جس کے ابعاد 10m×5m×1.5m ہیں۔

(1) 75 litres (2) 750 li tres (3) 7500 li tres (4) 75000 li tres

10۔ 5m×3m×2m کی ایک ابعاد کی ایک دیوار تعمیر کرنے کے لئے 50cm×30×20cm پیمائش والے کتنے اینٹوں کی ضرورت ہوگی۔

(1) 1000 (2) 2000 (3) 3000 (4) 5000

Points to Remember — یاد رکھنے کے نکات

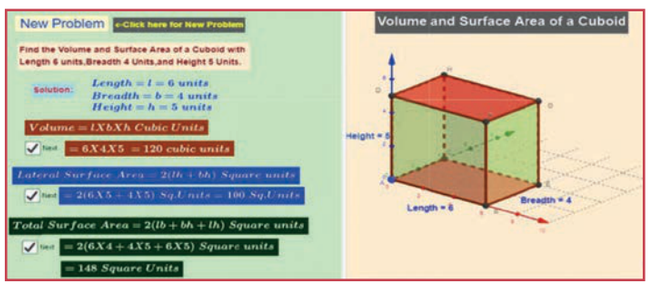
- اگر a، b اور c مثلث کے اضلاع ہو تو مثلث کا رقبہ مربع اکائیاں $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ جس میں $s = \frac{a+b+c}{2}$
- اگر ایک مکعب نما کی لمبائی، چوڑائی اور اونچائی بالترتیب l، b اور h ہوں تو
  - i) کل سطحی رقبہ (TSA) $= 2(lb+bh+lh)$ مربع اکائیاں
  - ii) طرفی سطحی رقبہ (TSA) $= 2(l+b)\,h$ مربع اکائیاں
- اگر ایک مکعب کا ضلع ' a ' اکائی ہو تو
  - i) کل سطحی رقبہ (TSA) $= 6\,a^2$ مربع اکائیاں
  - ii) طرفی سطحی رقبہ (LSA) $= 4\,a^2$ مربع اکائیاں
- اگر ایک مکعب نما کی لمبائی، چوڑائی اور اونچائی بالترتیب l، b اور h ہو تو
  مکعب نما کا حجم $(V) = lbh$ مکعب اکائیاں
- اگر ایک مکعب کا ضلع کی لمبائی ' a ' اکائی ہو تو مکعب کا حجم $(V) = a^3$ مکعب اکائیاں

9 maths 7 mensuration
Wednesday, March 13, 2019 5:38:24 PM

ICT Corner

ICT کارنر

مطلوبہ نتیجہ کو اس تصویر میں دکھایا گیا ہے۔



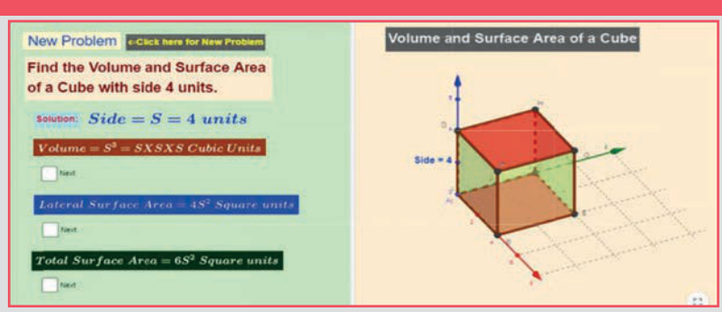
مرحلہ 1 :

براؤزر کھولئے اور دئے گئے URL لنک کو ٹائپ کیجئے یا دئے گئے QR کوڈ کو اسکین کیجئے۔ "Mensuration" نامی Geogebra شیٹ کھلے گا۔ اس میں Cube اور Cuboid نامی دو ورک شیٹ ہوں گے۔

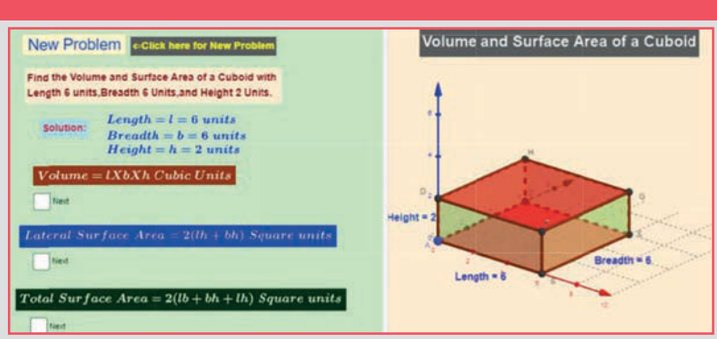
مرحلہ 2 :

"New Problems" پر کلک کریں، اس میں حجم، طرفی سطحی رقبہ اور کل سطحی رقبہ پوچھا گیا ہے۔ ان کو حل کریں متعلق Check box پر کلک کر کے تمہارے جوابات کو جانچئے۔

Step 1



Step 2



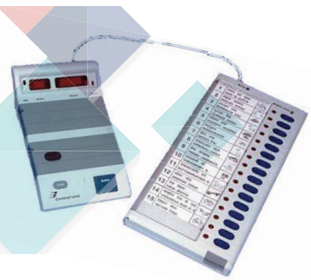
Browse in the link

Mensuration: https://ggbm.at/czsby7ym or Scan the QR Code.

9 maths 7 mensuration
Wednesday, March 13, 2019 5:38:25 PM

8

$$l + \frac{\left(\frac{N}{2} - m\right)}{f} \times c \qquad \bar{X} = \frac{\sum fx}{\sum f}$$



شماریات (STATISTICS)



Sir Ronald Aylmer Fisher
(AD (CE) 1890 - 1962)

"Lack of statistics is to hide inconvenient facts."
- Albert Bertilsson

سر رونالڈ امئیلمر فِشر ایک برطانوی ماہر شماریات اور ماہر حیاتیات تھے۔انہیں جدید شماریات اور تجرباتی ڈیزائن کا باپ کہا جاتا ہے۔فشر نے تجرباتی زراعتی تحقیق کی جس سے لاکھوں لوگوں کو بھوک سے بچایا۔1958ء میں انہیں لندن کے لینن سوسائٹی سے بہت ہی معزز ڈارون۔ویلس تمغہ سے نوازا گیا۔

سیکھنے کے مقاصد

- اوسط کے معنی کا اعادہ کرنا۔
- غیر گروہی معطیات کا اوسط، وسطانیہ اور طرز کے حساب کرنے کے طریقوں کا اعادہ کرنا۔
- گروہی معطیات کا اوسط، وسطانیہ اور طرز کے حسابات کرنا۔

8.1 تعارف (Introduction)

شماریات کا علم معطیات کو جمع کرنے، ترتیب دینے، پیش کرنے، تجزیہ اور فیصلہ لینے میں مددگار ثابت ہوا ہے۔ہماری روزمرہ زندگی میں ہمیں مقدار اور نوعیت کے معلومات وسیع پیمانے پر پیش آتے ہیں۔یہ ہماری زندگی پر گہرا اثر ڈالتی ہیں۔

معطیات کے معنی حقائق ہیں جو اکثر عددی شکل میں جمع کئے جاتے ہیں۔ شماریات سے مراد معطیات کا جمع کرنا ہے۔ہم فیصلے لینے کے لئے معطیات کا تجزیہ کرتے ہیں۔شماریات کے طریقے، فیصلے لینے میں ہمیں بہت کارآمد ہوتے ہیں۔

9 maths 8. statistics
Wednesday, March 13, 2019 7:51:49 PM

Cricket News

Team U19	Matches	Won	Lost	NR/Tied
India	71	52	18	0/1
Australia	67	50	15	0/2
Pakistan	69	50	19	0/0
Bangladesh	64	45	17	1/1
West Indies	71	44	27	0/0
South Africa	61	43	17	0/1
England	69	40	28	0/1
Sri Lanka	68	36	31	0/1
New Zealand	66	30	35	0/1
Zimbabwe	62	28	34	0/0
Ireland	49	16	32	1/0
Afghanistan	24	11	13	0/0
Namibia	47	9	37	1/0
Kenya	17	5	12	0/0
Canada	29	4	23	1/1
PNG	41	3	38	0/0

Customer Satisfaction Survey

Hotel Tamilnadu

Tell us how were you satisfied with our service

- Very Satisfied
- Satisfied
- Neutral
- Unsatisfied
- Annoyed

India's 2018 GDP Forecast

UN	7.2%
IMF	7.4%
World Bank	7.3%
Morgan Stanley	7.5%
Moody's	7.6%
HSBC	7%
Bank of America	7.2%
Merill Lynch	7.5%
Goldman Sachs	8%

8.2 معطیات کا حصول (Collection of Data)

ہم جو معطیات براہ راست جمع کرتے ہیں **ابتدائی معطیات** (Primary data) کہتے ہیں ۔ابتدائی معطیات کو مختلف طریقوں سے جمع کیا جاسکتا ہے ۔ جیسے ذاتی انٹرویو لینا (فون کے ذریعے، خط یا رُوبرُو)، تجربے کے ذریعے وغیرہ۔

ثانوی معطیات (Secondary data) وہ معطیات ہیں جو نقشوں سے حاصل کئے جاتے ہیں۔جس کو کسی دوسرے نے جمع کیا تھا۔مثلاً : حکومت کی جانب سے شائع کردہ شماریات، موجود ریسرچ کی رپورٹ وغیرہ۔

ترقی کی جانچ (Progress Check)

ابتدائی معطیات کو پہچانئے

i) گاہکوں کے سروے
ii) طبی تحقیق
iii) اقتصادیاتی پیشن گوہی
iv) اسکول کے نتائج
v) سیاسی انتخابات
vi) خرید وفروخت کی تفصیلات
vii) فروخت کی پیشین گوئی
viii) قیمت اشاریہ کی تفصیلات

8.2.1 حقائق کو ترتیب دینا (Getting the Facts Sorted out)

ابتداء میں جب معطیات جمع کئے جاتے ہیں وہ معطیات استعمال سے پہلے بے ترتیب ہوتے ہیں اس کو **خام معطیات** (Raw data) کہتے ہیں ۔ یہ زیادہ استعمال کے قابل نہیں ہوتے۔ کیونکہ انسانی آنکھ کے لئے اس کا تجزیہ کرنا بہت مشکل ہوگا۔

مثال کے طور پر : ایک حساب کے امتحان میں 50 طلباء سے حاصل کردہ مارکس کا مطالعہ کیجئے۔جو ذیل میں دیا گیا ہے۔

61	60	44	49	31	60	79	62	39	51	67	65	43	54	51	42
52	43	46	40	60	63	72	46	34	55	76	55	30	67	44	57
62	50	65	58	25	35	54	59	43	46	58	58	56	59	59	45
42	44														

ان معطیات میں، اگر تم 5 اعلیٰ مارکس کو نشان کرنا چاہتے ہو تو کیا یہ آسان ہوگا؟ تم کو ڈھونڈنا ہوگا۔اُن معطیات میں تم کو تیسرا مقام چاہئے۔ یہ اور بھی پیچیدہ ہوگا۔

کارروائی - 1

تصاویر کی البم (album) تیار کرنا، جدول، عددی تفصیلات وغیرہ کو تیار کرنا جو معطیات ظاہر کرتے ہوں۔کس طرح یہ ہماری روزمرہ زندگی کے حالات سے تعلق رکھتے ہیں۔بحث کریں۔

9 maths 8. statistics
Wednesday, March 13, 2019 7:51:50 PM

اگرتم کو 56 مارکس سے کم مارکس حاصل کرنے والوں کی تعداد چاہئے تو اس کام کو انجام دینے کے لئے کافی وقت درکار ہے۔لہذا مارکس کی ترتیب سے صف بندی کرنے سے کام آسان ہوجائے گا۔تھوڑی سے محنت سے تم اس فہرست میں اعلیٰ مارکس 79 اور ادنیٰ مارکس 25 نوٹ کرسکتے ہو۔اسی کو استعمال کرکے ان معطیات کو مناسب گروہوں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے اور مارکس کو مناسب گروہ کے مقام پر نشان کریں۔یہ کس طرح کرسکتے ہیں مشاہدہ کریں۔

Class Interval گروہی وقفہ	Marks مارکس
25-30	30, 25
31-35	31, 34, 35
36-40	39, 40
41-45	44, 43, 42, 43, 44, 43, 45, 42, 44
46-50	49, 46, 46, 50, 46
51-55	51, 54, 51, 52, 55, 55, 54
56-60	60, 60, 60, 57, 58, 59, 58, 58, 56, 59, 59
61-65	61, 62, 65, 63, 62, 65
66-70	67, 67
71-75	72
76-80	79, 76

اِس جدول کے ذریعے کیا تم اوپر کئے گئے سوالات کے جوابات دے سکتے ہو ؟ " 56 سے کم مارکس حاصل کرنے والوں کی تعداد "، اس سوال کے جواب کے لئے ،آپ کو اصل مارکس کی ضرورت نہیں ہے۔ صرف تم کو ''کتنے'' طلباء ہیں۔اس کو معلوم کرنا ہے۔ایسی صورت حال کا جواب دینے کے لئے ، جو اکثر ایک مطالعہ میں ہوتا ہے۔ہم تھوڑی ترمیم جدول میں کرسکتے ہیں اور ہر ایک گروہ میں اشیاء کی تعداد کتنی ہے۔اس کو درج کرنا چاہئے۔پھر ہم تھوڑا آسان اور زیادہ مفید ترتیب دے سکتے ہیں۔جس طرح کے جدول میں دیا گیا ہے۔

گروہی وقفہ Class Interval	اشیاء کی تعداد Number of items
25-30	2
31-35	3
36-40	2
41-45	9
46-50	5
51-55	7
56-60	11
61-65	6
66-70	2
71-75	1
76-80	2

اس جدول سے ہمیں ہر گروہ میں اشیاء کی تعداد معلوم ہوتی ہے۔

اس طرح ہر ایک عدد تمہیں بتاتا ہے کہ گروہ میں درکار شئے کتنے بار دہرائی جاتی ہے اور اس کو اس گروہ کا تعدد frequency کہتے ہیں۔اس جدول کو تعددی جدول frequency table کہتے ہیں۔

تعدد کو شمار کرنے کے لئے ہم موزونیت کے نشانات کا استعمال کرتے ہیں۔ جس کو ہم پہلے سے جانتے ہیں۔(''اشیاء کی تعداد'' کی قطار میں ہم اصلی مارکس نہیں لکھتے بلکہ صرف موزونیت کے نشان لگاتے ہیں) مثال کے طور پر گروہی وقفہ 31-35 میں اصلی مارکس 31، 34، 35 کے بجائے ہم صرف موزونیتی نشان 𝍸 ڈالتے ہیں۔ آپ کو تعجب ہوگا اگر گروہی وقفہ 56-60 کے لئے اس مثال میں 𝍸𝍸 ڈالنے پر اس کو گننے میں دشواری ہوگی۔ اس الجھن سے بچنے کے لئے ہر پانچویں نشان پر ترچھا وتری نشان لگا کر اس طرح 𝍸𝍸 ظاہر کیا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر 11 کو اس طرح 𝍸𝍸 | لکھا جاسکتا ہے۔

مندرجہ بالا تشریح کے لئے تعددی جدول کو درجہ ذیل میں دکھایا جاتا ہے۔

9 maths 8. statistics
Wednesday, March 13, 2019 7:51:51 PM

گروہی وقفہ Class Interval	موزونیت کا نشان Tally Marks	تعدد Frequency
25-30	||	2
31-35	|||	3
36-40	||	2
41-45	𝍸 ||||	9
46-50	𝍸	5
51-55	𝍸 ||	7
56-60	𝍸 𝍸 |	11
61-65	𝍸 |	6
66-70	||	2
71-75	|	1
76-80	||	2
	کل TOTAL	50



غور کیجئے

فرض کیجئے کہ کوئی ایک گروہی وقفہ 60-56 ہو تو گروہی وقفہ میں 56 کو ادنیٰ حد اور 60 کو اعلیٰ حد کہتے ہیں۔



ترقی کی جانچ Progress Check

مندرجہ ذیل معطیات کے لئے تعددی جدول بنائیے۔

23	44	12	11	45	55	79	20
52	37	77	97	82	56	28	71
62	58	69	24	12	99	55	78
21	39	80	65	54	44	59	65
17	28	65	35	55	68	84	97
80	46	30	49	50	61	59	33
11	57						

8.3 مرکزی رجحان کی پیمائش (Measures of central tendency)

بسا اوقات روزمرہ کی زندگی میں یہ ضروری ہوجاتا ہے کہ کسی مقدار کو ایک مخصوص معطیات سے اظہار کیا جائے ۔فرض کیجئے کہ ایک محقق کہتا ہے کہ لوگ روزانہ اوسطاً 3 گھنٹے ٹی۔وی سیریل دیکھتے ہیں۔اِس کا یہ مطلب نہیں کہ ہر ایک شخص اتنے ہی گھنٹے ٹی.وی. دیکھتا ہے۔ بلکہ بعض اس سے زیادہ یا کم دیکھتے ہیں۔

ٹی وی پر دیکھے گئے پروگراموں کا اوسط قابل قبول ہے۔

اوسط ایک کثیر رقم کی معطیات کو مختصراً واحد قیمت میں تبدیل کرنا ہے اور اس بات کی نشاندہی کرتے ہیں کہ اصل معطیات کے اندر اس واحد قیمت کے اردگرد کچھ متغیرات موجود ہیں۔

ریاضی دان اور عام آدمی کے نقطہ نظر سے اوسط تھوڑا سا مختلف ہوتے ہیں۔ اوسط کے تین مختلف تعریفیں ہیں۔جیسے، اوسط ، وسطانیہ اور طرز ہیں۔ ہر ایک کو مختلف طریقوں کے استعمال سے حل کیا جاتا ہے۔جب انہیں اصل معطیات کے سٹ پر لاگو کرتے ہیں تو اکثر ان کے نتائج کے اوسطی قیمتیں مختلف ہوتی ہیں۔

یہ معلوم کرنا بہت ضروری ہے کہ ہر ایک کی اوسط کی پیمائش تمہیں کیا کہتی ہیں۔اصل معطیات کے بارے میں اور غور کریں کہ ان میں کونسا، حل کرنے کے لئے سب سے زیادہ مناسب ہے۔

8.4 حسابی اوسط

8.4.1 حسابی اوسط۔خام معطیات Arithmetic Mean-Raw data

تمام معطیات کی اوسطوں میں سب سے زیادہ عام طور پر حسابی اوسط استعمال کیا جاتا ہے۔ اور اس کو حل کرنے کے لئے تمام قیمتوں کا حاصل جمع کو اشیاء کی تعداد سے تقسیم کرنا۔

مثال کے طور پر : ایک کرکٹ کا کھلاڑی آٹھ (T20) کھیل کھیلتا ہے۔اور درجہ ذیل کے رن (runs) بناتا ہے۔

25, 32, 36, 38, 45, 41, 35, 36.

9 maths 8. statistics
Wednesday, March 13, 2019 7:51:51 PM

تو اس کے رنوں کا اوسط (یعنی رنوں کا حسابی اوسط) اس طرح حاصل ہوگا۔

$$\bar{X} = \frac{\sum x}{n} = \frac{25 + 32 + 36 + 38 + 45 + 41 + 35 + 36}{8} = \frac{288}{8} = 36$$

عام طور پر، اگر ہمارے پاس n تعداد کے مشاہدے $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n$ ہو تو ان کا حسابی اوسط $\bar{X}$ (X بار) سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\bar{X} = \frac{\text{تمام مشاہدات کا حاصل جمع}}{\text{مشاہدات کی تعداد}} \qquad \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\bar{X} = \frac{\sum x}{n}$$ اس کو ضابطہ میں اس طرح ظاہر کرتے ہیں

غور کیجئے

اس سے کوئی فرق نہیں پڑتا کہ مفروضی اوسط کے لئے کوئی بھی عدد کا انتخاب کیا جائے۔ ہمیں ایسا عدد چاہئے جو ہمارے حسابات کو حل کرنے میں آسانی پیدا کریں۔ کوئی بھی ایک عدد انتخاب کیا جائے جو تمام ارقام (Entries) کے قریب ہو جس سے حل کرنے میں مدد ملے گی۔ یہ ضروری نہیں کہ وہ عدد دئے گئے فہرست میں ہوں۔

مفروضی اوسط کا طریقہ (Assumed Mean Method) :

بعض اوقات حسابات کو آسانی سے حل کرنے کے لئے ہم ایک رقم کو قیاس کرتے ہیں کہ یہ صحیح جواب ہوسکتا ہے۔ قیاس کیا گیا یہ عدد **مفروضی اوسط** کہلاتا ہے۔ مندرجہ بالا کرکٹ کے رن کی مثال میں۔ چلئے ہم فرض کرتے ہیں کہ 38 ایک مفروضی اوسط ہے۔
اب ہم مفروضی اوسط اور ہر ایک درج کیا ہوا رن کے درمیانی فرق کی فہرست بنائیں گے۔

$25-38 = -13,\quad 32-38 = -6,\quad 36-38 = -2,\quad 38-38 = 0,$

$45-38 = 7,\quad 41-38 = 3,\quad 35-38 = -3,\quad 36-38 = -2$

ان کے درمیانی فرق کا اوسط $= \frac{-13-6-2+0+7+3-3-2}{8} = \frac{-16}{8} = -2$

ہمیں صحیح اوسط معلوم کرنے کے لئے مفروضی اوسط کے ساتھ اس ''اوسط فرق'' کو جمع کرنا ہوگا۔

اس طرح

صحیح اوسط = مفروضی اوسط + اوسط فرق $= 38 - 2 = 36$

جب کثیر اعداد پائے جاتے ہوں تو یہ طریقہ بہت کارآمد ہوگا۔

8.4.2 حسابی اوسط : غیر گروہی تعددی تقسیم (Arithmatic Mean - Ungrouped Frequency Distribution)

فرض کیجئے کہ کسی جماعت کے 12 طلباء کی اونچائیاں (سم میں) دئے گئے ہیں۔ جو اسکول کے کھیلوں کے ایک تقریب میں حصّہ لینے والے ہیں۔

140, 142, 150, 150, 140, 148, 140, 147, 145, 140, 147, 145.

تم کس طرح ان کی اوسط اونچائی معلوم کروگے ؟

اس کو حل کرنے کے کئی راستے ہیں۔

i) تم تمام اشیاء کا حاصل جمع کو اشیاء کی تعداد سے تقسیم کرسکتے ہو۔

9 maths 8. statistics
Wednesday, March 13, 2019 7:51:51 PM

$$\frac{140+142+150+150+140+148+140+147+145+140+147+145}{12}=\frac{1734}{12}=144.5$$

ii) تم مفروضی اوسط طریقہ کا استعمال کر سکتے ہو۔فرض کیجئے کہ 141 ایک مفروضی اوسط ہے۔
ہوتو اوسط کو اس طرح دیا جائے گا۔

$$=141+\frac{(-1)+(1)+(9)+(9)+(-1)+(7)+(-1)+(6)+(4)+(-1)+(6)+(4)}{12}$$

$$=141+\frac{-4+46}{12}=141+\frac{42}{12}\ =141\ +3.5=144.5$$

iii) تیسرا طریقہ غیر گروہی تعددی تقسیم سے تعلق رکھتا ہے۔ تم دیکھو گے کہ 140 چار مرتبہ واقع ہے۔(اس سے مراد 140 کا تعدد 4 ہے)
142 صرف مرتبہ واقع ہوا ہے۔ (اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ 142 کا تعدد 1 ہے) اور وغیرہ وغیرہ
یہ ہمیں اس قابل بناتا ہے کہ ہم ذیل کی تعددی تقسیم کی جدول بنائیں ۔

اونچائی (سمر) Height(cm)	140	142	150	148	145	147
طلباء کی تعداد No. of students	4	1	2	1	2	2

آپ کو معلوم ہے کہ چار مرتبہ 140 ہے تو ان کی کل رقم $= 140 \times 4 = 560$

یہاں صرف ایک 142 ہے۔ ایسی صورت میں اس کی کل رقم $= 142 \times 1 = 142$

یہاں دو 150 ہیں تو ان کی کل رقم $= 150 \times 2 = 300$ وغیرہ

ان معلومات کو اچھی طرح سے ذیل میں جدول بندی کی گئی ہے۔

اونچائی (x)	تعدد (f)	fx
140	4	560
142	1	142
150	2	300
148	1	148
145	2	290
147	2	294
	12	1734

$$\text{اوسط} = \frac{\text{تمام } fx \text{ کا حاصل جمع}}{\text{اشیاء کی تعداد}}$$

$$= \frac{1734}{12} = 144.5 \text{ cm}$$

اس طریقے کار پر غور کرنے سے ہمیں عام ارقام حاصل ہوتے ہیں۔جس کی مدد سے ایک ضابطہ ملے گا جو استعمال کے لئے تیار ہے ۔اگر $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ ، n مشاہدات ہیں جن کے نظیری تعدد $f_1, f_2, f_3, \ldots f_n$ ہوتو ان کی اوسط اس طرح دی جائے گی۔

$$\bar{X} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \ldots + f_n x_n}{f_1 + f_2 + \ldots f_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{\sum fx}{\sum f}$$

غور کیجئے

ہر مرحلہ کا مطالعہ کیجئے اور اس میں استعمال ہونے والے ہر ایک علامت کے معنی کو سمجھئے۔

کیا تم بالا طریقے کے ساتھ مفروضی اوسط کے طریقے اپنا سکتے ہو؟ اس کو حل کرنے کی ایک کوشش ہوگی۔

9 maths 8. statistics
Wednesday, March 13, 2019 7:51:52 PM

iv) فرض کروکہ 145 مفروضی اوسط ہے۔ تو ہم ذیل کی جدول کو تیار کریں گے۔

اونچائی (x)	مفروضی اوسط سے انحراف $d =$	تعدد (f)	fd
140	140–145 = 5	4	20
142	142–145 = 3	1	3
150	150–145 = + 5	2	+10
148	148–145 = + 3	1	+ 3
145 (مفروضی)	145–145 = 0	2	0
147	147–145 = + 2	2	+ 4
	کل	$\sum f = 12$	$\sum fd = 23 + 17 = 6$

حسابی اوسط = مفروضی اوسط + انحراف کے حاصل جمع کا اوسط

$$= A + \frac{\sum fd}{\sum f} = 145 + \left(\frac{-6}{12}\right) = 145.0 - 0.5 = 144.5$$

جب کثیر اعداد ہوں تو یہ طریقہ بہت کارآمد ہوگا۔

8.4.3 حسابی اوسط۔گروہی تعددی تقسیم (Arithmetic Mean-Grouped Frequency Distribution)

جب معطیات کو گروہی وقفے میں گروہ کیا ہو اور اس کو تعددی جدول کی شکل میں پیش کیا گیا ہو تو ہمیں اس طرح کی ایک تعددی تقسیم حاصل ہوگی ۔

عمر (سالوں میں)	10-20	20-30	30 40	40 50	50 - 60
گاہکوں کی تعداد	80	120	50	22	8

مندرجہ بالا جدول میں مختلف عمر کے گروپ کے گاہکوں کی تعداد ظاہر ہوتی ہے۔ مثال کے طور پر 30 - 20 کے گروہی وقفہ میں 120 گاہک ہیں۔ لیکن کسی بھی انفرادی گاہک کی عمر نہیں بتائی گئی ہے۔ (جب ہم ایک گروہی تعددی جدول بناتے ہیں تو انفرادی مشاہدات کی پہچان کھو جاتی ہے) لہذا ہمیں ایک قیمت چاہئے جو ایک مخصوص گروہی وقفے کو ظاہر کرتی ہو۔ اس طرح کی قیمت کو درمیانی قیمت Mid Value کہتے ہیں۔ (درمیانی نقطہ یا گروہی نشان) کہتے ہیں درمیانی نقطہ یا گروہی نشان کو ضابطہ کے استعمال سے معلوم کرسکتے ہیں۔ جو ذیل میں دیا گیا ہے۔

LCL - ادنیٰ درجہ حد UCL - اعلیٰ درجہ حد

$$\text{درمیانی قیمت} = \frac{UCL + LCL}{2},$$

5.4 حسابی اوسط Arithmetic Mean

گروہی تعددی تقسیم کے استعمال سے حسابی اوسط ذیل کے کسی ایک طریقے سے محسوب کرسکتے ہیں۔

i) بالراست طریقہ (Direct Method) ii) مفروضی اوسط کا طریقہ (Assumed mean method)

iii) مرحلاتی انحراف کا طریقہ (Step deviation method)

9 maths 8. statistics
Wednesday, March 13, 2019 7:51:52 PM

بالراست طریقہ (Direct Method)

جب راست کا طریقہ استعمال کریں تو حسابی اوسط معلوم کرنے کا ضابطہ یہ ہے۔

$$\bar{X} = \frac{\sum fx}{\sum f}$$

جس میں x گروہی وقفہ کا درمیانی نقطہ اور f تعدد ہے۔

مرحلے :

i) ہر ایک گروہ کا درمیانی نقطہ معلوم کریں۔ اور اس کو x سے نشان کریں۔

ii) ان کی درمیانی نقاط کو بالترتیب ہر گروہ کے تعدد سے ضرب دیں اور fx کا حاصل جمع ملے گا۔

iii) $\sum fx$ کو $\sum f$ سے تقسیم کیجئے تا کہ اوسط حاصل ہو۔

مثال 8.1 مندرجہ ذیل دئے گئے معطیات میں ایک علاقہ کے رہنے والوں کی (Residents) تعداد اُن کی عمر کے مطابق دی گئی ہے۔ رہنے والوں کی عمر کی اوسط معلوم کیجئے۔

عمر	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
رہنے والوں کی تعداد	2	6	9	7	4	2

حل:

عمر	رہنے والوں کی تعداد (f)	درمیانی قیمت (x)	fx
0-10	2	5	10
10-20	6	15	90
20-30	9	25	225
30-40	7	35	245
40-50	4	45	180
50-60	2	55	110
	$\sum f = 30$		$\sum fx$ =860

اوسط $\bar{X} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{860}{30} = 28.67$

لہذا اوسط عمر $= 28.67.$

مفروضی اوسط کا طریقہ (Assumed mean method)

ہم یہ دیکھ چکے ہیں کہ کس طرح ایک گروہی معطیات کا حسابی اوسط کو راست طریقہ کے ضابطہ کو استعمال کر کے فوراً حل کیا جاتا ہے۔ بہر حال، اگر مشاہدات کثیر ہیں۔ مشاہدات اور اُن کے تعدد کا حاصل ضرب معلوم کریں تو ان کو جمع کرنا نہ صرف مشکل اور وقت ضائع ہوگا، بلکہ غلطیوں

9 maths 8. statistics
Wednesday, March 13, 2019 7:51:52 PM

کے امکانات بھی ہیں۔ اِس صورت حال میں ہم مفروضی اوسط کا طریقہ استعمال کر کے گروہی معطیات کا حسابی اوسط معلوم کر سکتے ہیں۔

مرحلے

1۔ مشاہدات میں کسی ایک قیمت کو اوسط کے طور پر (A) قیاس کریں۔ درمیان میں ہونے والی قیمت کو ترجیح دیں۔

2۔ ہر ایک گروہ کے لئے $d = x - A$ انحراف معلوم کریں۔

3۔ ہر گروہ کے نظیری تعدد f کو انحراف d سے ضرب دیں تو $\sum fd$ حاصل ہوگا۔

4۔ اس ضابطہ کا استعمال کریں $\bar{X} = A + \frac{\sum fd}{\sum f}$

مثال 8.2 درجہ ذیل تعددی جدول کے لئے اوسط معلوم کیجئے۔

درجاتی وقفہ	100-120	120-140	140-160	160-180	180-200	200-220	220-240
تعدد	10	8	4	4	3	1	2

حل : فرض کرو کہ $A = 170$ مفروضی اوسط ہے۔

$A = 170$

درجاتی وقفہ	تعدد f	درمیانی قیمت x	$d = x - A$ $d = x - 170$	fd
100-120	10	110	–60	–600
120-140	8	130	–40	–320
140-160	4	150	–20	–80
160-180	4	170	0	0
180-200	3	190	20	60
200-220	1	210	40	40
220-240	2	230	60	120
	$\sum f = 32$			$\sum fd = -780$

اوسط $\bar{X} = A + \frac{\sum fd}{\sum f}$

$= 170 + \left(\frac{-780}{32}\right)$

چنانچہ $\bar{X} = 170 - 24.375$

$= 145.625$

مرحلاتی انحراف کا طریقہ (Step Deviation Method)

حسابی طریقے کو آسان اور مختصر کرنے کے لئے انحراف کو درجاتی وسعت سے تقسیم کر کے (یعنی $\frac{x-A}{c}$ محسوب کیجئے) اور ضابطہ سے C کو ضرب دے کر معطیات کا اوسط معلوم کرو۔ حسابی اوسط محسوب کرنے کا ضابطہ یہ ہے۔

$\bar{X} = A + \left[\frac{\sum fd}{\sum f} \times c\right]$ جس میں $d = \frac{x-A}{c}$

9 maths 8. statistics
Wednesday, March 13, 2019 7:51:53 PM

مثال 8.3

درجہ ذیل تعددی تقسیم جدول کو مرحلاتی انحراف طریقہ کو استعمال کر کے اوسط معلوم کیجئے۔

درجاتی وقفہ	0-8	8-16	16-24	24-32	32-40	40-48
تعدد (f)	10	20	14	16	18	22

حل : فرض کرو کہ $A = 28$ مفروضی اوسط ہے $c = 8$ درجاتی وسعت

درجاتی وقفہ	درمیانی قیمت x	تعدد f	$d = \frac{x - A}{c}$	fd
0-8	4	10	3	30
8-16	12	20	2	40
16-24	20	14	1	14
24-32	28	16	0	0
32-40	36	18	1	18
40-48	44	22	2	44
		$\sum f = 100$		$\sum fd = -22$

اوسط $\bar{X} = A + \frac{\sum fd}{\sum f} \times c$

$= 28 + \left(\frac{-22}{100}\right) \times 8$

$= 28 - 1.76 = 26.24$

غور کیجئے

- جب x_i اور f_i چھوٹے ہیں تو راست طریقہ مناسب انتخاب ہوگا۔
- جب x_i اور f_i عددی طور پر بڑے ہیں تو مفروضی اوسط کا طریقہ یا مرحلاتی انحراف کا طریقہ استعمال کر سکتے ہیں۔
- جب درجاتی وقفہ غیر مساوی اور (d) عددی طور بڑا رہنے کے باوجود ہم مرحلاتی انحراف کا طریقہ استعمال کر سکتے ہیں۔

8.4.4 حسابی اوسط کی ایک خاص خاصیت A Special Property of the Arithmetic Mean

1۔ حسابی اوسط سے تمام انحراف کے ارقام کا حاصل جمع ہمیشہ صفر ہوتا ہے۔

اگر $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ ، n مشاہدات ہیں جو حسابی اوسط $\bar{X}$ سے لئے گئے ہو تو

$$(x_1 - \bar{X}) + (x_2 - \bar{X}) + (x_3 - \bar{X}) + \ldots + (x_n - \bar{X}) = 0$$

لہذا $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{X}) = 0$

2۔ اگر ہر ایک مشاہدہ میں k اضافہ یا کم ہو تو حسابی اوسط میں بھی k بالترتیب اضافہ یا کم ہوگا۔

3۔ اگر ہر ایک مشاہدہ کو $k \neq 0$ ، k سے ضرب یا تقسیم کیا جائے تو حسابی اوسط بھی k کی یکساں مقدار سے ضرب یا تقسیم ہوگا۔

9 maths 8. statistics
Wednesday, March 13, 2019 7:51:53 PM

مثال 8.4 ذیل کے مشاہدات کے لئے حسابی اوسط سے انحراف کا حاصل جمع معلوم کیجئے

21, 30, 22, 16, 24, 28, 18, 17

حل :

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{8} x_i = \frac{21+30+22+16+24+28+18+17}{8} = \frac{176}{8} = 22$$

حسابی اوسط $\bar{X}$ سے انحراف کی ایک رقم (Entry) ہے۔ $x_i - \bar{X}$ $\quad i = 1,2, \ldots . , 8$ انحراف کا حاصل جمع

$$= (21-22)+(30-22)+(22-22)+(16-22)+(24-22)+(28-22)+(18-22)+(17-22)$$

$$= 16-16 = 0. \quad \text{یا مساوی طور پر} \quad \sum_{i=1}^{8}(x_i - \bar{X}) = 0$$

لہذا ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ حسابی اوسط سے لئے گئے انحراف کا حاصل جمع صفر ہے۔

مثال 8.5 6 اعداد (قیمتوں) کا حسابی اوسط 45 ہے۔ اور اگر ہر عدد کے ساتھ 4 اضافہ کیا جائے تو نئے اعداد کے سٹ کا حسابی اوسط معلوم کیجئے۔

حل :

فرض کیجئے کہ $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ دئے گئے اعداد کا سٹ ہو تو $\frac{\sum_{i=1}^{6} x_i}{6} = 45.$ ہے۔

اگر ہر عدد کے ساتھ 4 اضافہ کیا جائے تو نئے اعداد کا سٹ

نیا حسابی اوسط $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{6}(x_i + 4)}{6}$

$$= \frac{(x_1+4)+(x_2+4)+(x_3+4)+(x_4+4)+(x_5+4)+(x_6+4)}{6}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i + 24}{6} = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i}{6} + 4$$

$$\bar{X} = 45 + 4 = 49.$$

Progress Check ترقی کی جانچ

10 مشاہدات کا اوسط 48 ہے۔ اور ہر مشاہدہ کے ساتھ 7 تفریق کیا جائے تو نئے مشاہدات کا اوسط ..... ہے۔

مثال 8.6 اگر 7 قیمتوں کا حسابی اوسط 30 ہے۔ اگر ہر قیمت کو 3 تقسیم کیا جائے تو نئے قیمتوں کے سٹ کا حسابی اوسط کیا ہوگا ؟

حل : فرض کیجئے کہ X ، 7 قیمتوں کے سٹ کو $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ ظاہر کرتا ہے۔

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{7} x_i}{7} = 30 \quad \text{یا} \quad \sum_{i=1}^{7} x_i = 210 \quad \text{تو}$$

اگر ہر قیمت کو 3 سے تقسیم کریں تو نئے قیمتوں کے سٹ کا اوسط یہ ہے۔

Progress Check ترقی کی جانچ

1۔ 12 اعداد کا اوسط 20 ہے۔ اگر ہر عدد کو 6 سے ضرب دیا جائے تو نیا اوسط ..... ہے۔

2۔ 30 اعداد کا اوسط 16 ہے۔ اگر ہر عدد کو 4 سے تقسیم کیا جائے تو نیا اوسط ..... ہے۔

9 maths 8. statistics
Wednesday, March 13, 2019 7:51:53 PM

$$\frac{\sum_{i=1}^{7}\frac{x_i}{3}}{7} = \frac{\left(\frac{x_1}{3}+\frac{x_2}{3}+\frac{x_3}{3}+\frac{x_4}{3}+\frac{x_5}{3}+\frac{x_6}{3}+\frac{x_7}{3}\right)}{7}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{7} x_i}{21} = \frac{210}{21} = 10$$

دوسرا طریقہ : اگر X کے ہر قیمت کو 3 سے تقسیم کرنے پر جو قیمتوں کا سٹ حاصل ہوگا Y ہے ۔

$$\text{تو} \quad \bar{Y} = \frac{\bar{X}}{3} = \frac{30}{3} = 10$$

مثال 8.7 25 طلباء کا اوسط 78.4 ہے بعد میں پتہ چلا کہ 96 کو غلطی سے 69 پڑھا گیا۔ صحیح عدد جوڑ کر صحیح اوسط معلوم کیجئے۔

حل : دیا گیا ہے۔

کل طلباء کی تعداد $n = 25, \bar{X} = 784$

غیر صحیح $\sum x = \bar{X} \times n = 78.4 \times 25 = 1960$

صحیح $\sum x =$ غیر صحیح $\sum x -$ غلط رقم + ٹھیک رقم

$= 1960 - 69 + 96 = 1987$

صحیح $\bar{X} = \frac{\text{صحیح } \sum x}{n} = \frac{1987}{25} = 79.48$

Progress Check ترقی کی جانچ

چار اعداد ہیں۔ اگر ہم ان میں کوئی ایک عدد چھوڑ دیتے ہیں تو باقی تین اعداد اوسط 45 ، 60 ، 65 یا 70 ان میں کونسا ہوتا ۔ تمام چار اعداد کا اوسط کیا ہوگا ؟

مشق 8.1

1۔ موسم سرما میں کسی مقام کے ایک ہفتہ کی تپش کی پیائش اس طرح ہیں۔

26^oC ، 24^oC ، 28^oC ، 31^oC ، 30^oC ، 26^oC ، 24^oC ۔ اس ہفتے کی اوسط تپش معلوم کیجئے۔

2۔ ایک خاندان کے 4 افراد کا وزن کا اوسط 60 کلوگرام ہے۔ تین افراد کا وزن بالترتیب 56 کلوگرام ، 68 کلوگرام اور 72 کلوگرام ہے۔ چوتھے فرد کا وزن معلوم کیجئے۔

3۔ کسی جماعت کے ایک حساب ٹسٹ میں 10 طلباء 75 مارکس حاصل کئے، 12 طلباء 60 مارکس حاصل کئے۔ 8 طلباء 40 مارکس حاصل کئے اور 3 طلباء 30 مارکس حاصل کئے۔ اِن کے مارکس کا اوسط معلوم کیجئے۔

4 ۔ ایک تحقیقی تجربہ گاہ (Research Laboratory) میں ایک سائنس دان نے 6 چوہوں کو پھیپھڑوں کے سرطان (Cancer) کے لئے قدرتی دوا دے کر علاج کیا۔ دس دن بعد، ہر چوہا کے ٹیومر (رسولی) کا حجم کی پیائش کے نتائج ذیل کے جدول میں دیا گیا ہے۔

9 maths 8. statistics
Wednesday, March 13, 2019 7:51:54 PM

چوہے کا نشان	1	2	3	4	5	6
ٹیومر کا حجم (mm^3)	145	148	142	141	139	140

اوسط معلوم کیجئے۔

5۔ اگر ذیل کے معطیات کا اوسط 20.2 ہوتو p کی قیمت معلوم کیجئے۔

مارکس	10	15	20	25	30
طلباء کی تعداد	6	8	p	10	6

6۔ ایک کلاس میں، کلاس ریکارڈ (Class records) کے لئے طلباء کے وزن کی پیائش کی گئی راست طریقہ کو استعمال کر کے کلاس کے طلباء کا اوسط وزن معلوم کیجئے۔

وزن کلوگرام میں	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65	65-75
طلباء کی تعداد	4	11	19	14	0	2

7۔ ذیل کے تعددی تقسیم کے لئے مفروضی طریقہ کا استعمال کر کے اوسط محسوب کیجئے۔

درجاتی وقفہ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
تعدد	5	7	15	28	8

8۔ ذیل کے معطیات کے لئے مرحلاتی انحراف کا طریقہ استعمال کرتے ہوئے۔ حسابی اوسط معلوم کیجئے۔

عمر	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44
افراد کی تعداد	4	20	38	24	10	9

8.5 وسطانیہ (Median)

حسابی اوسط معطیات کا ایک تمثیلی ہے کیونکہ یہ اعداد کو توازن کرتا ہے۔ یہ عدد بڑی قیمت اور چھوٹی قیمت کے درمیان واقع ہے۔

فرض کیجئے کہ ایک کمپنی کے 4 اشخاص کی آمدنی ₹ 5000، ₹ 6000، ₹ 7000 اور ₹ 8000 ہے۔ ان کی آمدنی کا اوسط اس طرح محسوب کر سکتے ہیں۔ $\frac{5000+6000+7000+8000}{4}$ جو 6500 ہے۔ اگر پانچواں شخص اس گروپ میں شامل ہوتا ہے جس کی آمدنی ₹ 29000 ہوتو ان پانچوں کا حسابی اوسط اس طرح ہوگا۔

$$\frac{5000+6000+7000+8000+29000}{5} = \frac{55000}{5} = ₹\ 11000$$

کیا کوئی یہ کہہ سکتے کہ ₹ 11000 آمدنی کا اوسط کمپنی کے ہر ایک انفرادی شخص کی آمدنی کو ظاہر کرتا ہے ؟ کیا یہ گمراہ کرنا نہیں ہے ؟ اس میں مسئلہ یہ ہے کہ جب انتہائی بڑی قیمت اوسط پر اثر انداز ہوتی ہے تو جس سے اوسط اپنے مقام سے باہر ہٹ جاتا ہے۔ جو عام طور پر درمیانی مقام میں ہوتا ہے۔

اس صورت حال میں، ہمیں دوسری قسم کی اوسط چاہئے جو مناسب جوابات فراہم کرتے ہوں۔

9 maths 8. statistics
Wednesday, March 13, 2019 7:51:54 PM

وسطانیہ ایک ایسی قیمت جو درمیانی مقام کو قبضہ کرتی ہے۔ جب تمام مشاہدات کو صعودی یا نزول ترتیب میں مرتب کرتے ہیں تو یہ ایک مقامی اوسط (Positional Average) ہے۔

مثال کے طور پر : ایک جماعت کے 9 طلباء کی اونچائیاں سم122، سم124، سم125، سم135، سم138، سم140، سم141، سم147 اور سم161 ہیں۔

i) معمول طریقہ سے حل کرنے سے حسابی اوسط سم137 ہوگا۔

ii) اگر اونچائیوں کو اچھی طرح سے صعودی ترتیب میں اس طرح مرتب کریں تو 122 cm, 124cm, 125cm, 135cm, 138cm 140cm, 141cm, 147cm, 161cm کوئی بھی یہ غور کرسکتا ہے کہ 138 cm، دونوں جانب مساوی تعداد کی اشیاء کے درمیان واقع ہے۔ اس طرح کی قیمت کو دیئے گئے اعداد کا وسطانیہ کہتے ہیں۔



iii) فرض کیجئے کہ 11 معطیات کا ایک سٹ کے اشیاء ترتیب میں ہو تو اس کا وسطانیہ 6 واں شئے ہوگا۔ کیونکہ یہ درمیان ترین ہے۔ اگر اس میں 101 اشیاء ہو تو 51 واں شئے اس کا وسطانیہ ہوگا۔ اگر اشیاء کی تعداد طاق ہو تو آسانی کے ساتھ درمیانی شئے معلوم کرسکتے ہیں۔

عام طور پر اگر ایک معطیات کا سٹ n اشیاء رکھتا ہے۔ اور n طاق عدد ہے تو $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ ویں رقم وسطانیہ ہوگی۔

iv) اگر ایک معطیات میں 6 مشاہدات ہیں تو تم کس طرح وسطانیہ معلوم کروگے ؟ یہ درمیانی رقموں کا اوسط ہوگا۔ (کیا تم اس کو 3.5 ویں رقم کی طرح ظاہر کرسکتے ہیں؟)

اگر ایک معطیات میں 100 ارقام ہیں تو اس کا وسطانیہ 50.5 ویں رقم ہوگا !

عام طور پر، اگر ایک معطیات کا سٹ n اشیاء رکھتے ہیں اور n جفت عدد ہے تو وسطانیہ = $\left(\frac{n}{2}\right)$ ویں رقموں اور $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ ویں رقموں کا اوسط ہے۔

مثال 8.8

کرکٹ کے ایک میچ میں 11 کھلاڑیوں سے حاصل شدہ رن 7, 21, 45, 12, 56, 35, 25, 0, 58, 66, 29 ہیں۔ رنوں کا وسطانیہ معلوم کیجئے۔

حل : آیئے ہم ان قیمتوں کو صعودی ترتیب میں مرتب کریں۔

0,7,12,21,25,29,35,45,56,58,66

قیمتوں کی تعداد = 11 (جو طاق عدد ہے)

وسطانیہ = $\left(\frac{11+1}{2}\right)$ ویں قیمت

= $\left(\frac{12}{2}\right)$ ویں قیمت = 6 ویں قیمت = 29

9 maths 8. statistics
Wednesday, March 13, 2019 7:51:55 PM

مثال 8.9 مندرجہ ذیل غیر گروہی معطیات کا وسطانیہ معلوم کیجئے۔

10, 17, 16, 21, 13, 18 , 12, 10, 19, 22

حل : معطیات کو صعودی ترتیب میں مرتب کریں۔

10, 10, 12, 13, 16, 17, 18, 19, 21, 22.

قیمتوں کی تعداد $= 10$

وسطانیہ = وسطانی قیمتوں کا اوسط اور $\left(\frac{10}{2}\right)$ ویں $\left(\frac{10}{2}+1\right)$ ویں

= 5 ویں اور 6 ویں قیمتوں کا اوسط

$= \frac{16+17}{2} = \frac{33}{2} = 16.5$

مثال 8.10 مندرجہ ذیل جدول میں ایک گروپ کے 12 طلباء کے ریاضی اور سائنس کے کلاس ٹسٹ کے مارکس درج کئے گئے ہیں۔

مارکس (ریاضی)	52	55	32	30	60	44	28	25	50	75	33	62
مارکس (سائنس)	54	42	48	49	27	25	24	19	28	58	42	69

معلوم کیجئے کہ کونسے سبق میں، کامیابی کی سطح زیادہ ہے؟

حل : آیئے ہم دونوں اسباق کے مارکس کو صعودی ترتیب میں مرتب کریں۔

مارکس (ریاضی)	25	28	30	32	33	44	50	52	55	60	62	75
مارکس (سائنس)	19	24	25	27	28	42	42	48	49	54	58	69

جب کہ طلباء کی تعداد 12 ہے۔ درمیان ترین طالب علم کے مارکس 6 ویں اور 7 ویں طلباء کا مارکس کا اوسط ہوگا۔

چنانچہ

ریاضی کے مارکس کا وسطانیہ $= \frac{44+50}{2} = 47$

سائنس کے مارکس کا وسطانیہ $= \frac{42+42}{2} = 42$

یہاں سائنس کے مارکس کے وسطانیہ سے ریاضی کے مارکس کے وسطانیہ زیادہ ہے۔ چنانچہ طلباء میں کامیابی کی سطح ریاضی میں زیادہ ہے ۔

9 maths 8. statistics
Wednesday, March 13, 2019 7:51:55 PM

8.5.1 وسطانیہ۔گروہی تعددی تقسیم (Median -Ungrouped Frequency Distribution)

i) معطیات کو صعودی یا نزولی ترتیب میں نشانات کے ساتھ لکھئے۔

ii) مجموعی تعددی تقسیم تیار کیجئے۔ فرض کیجئے کہ N کل تعدد ہوگا۔

iii) اگر N طاق ہو تو وسطانیہ $= \left(\frac{N+1}{2}\right)^{th}$ مشاہدہ ہے۔

iv) اگر N جفت ہو تو وسطانیہ $= \left(\frac{\left(\frac{N}{2}\right)^{th} \text{مشاہدہ} + \left(\frac{N}{2}+1\right)^{th} \text{مشاہدہ}}{2}\right)$ ہے۔

مثال 8.11 ذیل کے معطیات کے لئے وسطانیہ محسوب کیجئے۔

اونچائی (سمر)	160	150	152	161	156	154	155
طلباء کی تعداد	12	8	4	4	3	3	7

حل : آیئے ہم مارکس کو صعودی ترتیب میں مرتب کریں اور ذیل کی جدول کو تیار کریں۔

اونچائی (سمر)	طلباء کی تعداد (f)	مجموعی تعدد ($c.f$)
150	8	8
152	4	12
154	3	15
155	7	22
156	3	25
160	12	37
161	4	41

یہاں $N = 41$

وسطانیہ = $\left(\frac{N+1}{2}\right)$ ویں رقم کی مقدار = $\left(\frac{41+1}{2}\right)$ ویں رقم کی مقدار = 21 ویں رقم کی مقدار

اگر 41 طلباء کو اونچائی کے حساب سے کھڑا کیا جائے تو 21 ویں طالب علم درمیان ترین ہوگا۔ جب کہ اس کے ہر ایک جانب 20 طلباء ہونگے۔ لہذا ہمیں 21 ویں طالب علم کے بالمقابل اونچائی کو معلوم کرنا ہوگا۔ 15 طلباء (مجموعی تعدد دیکھئے) کی اونچائی سمر 154 سے کم یا مساوی رکھتے ہیں۔ 22 طلباء سمر 155 سے کم یا مساوی اونچائی رکھتے ہیں۔ اس کے معنی یہ ہیں کہ 21 واں طالب علم سمر 155 اونچائی والا ہے۔

لہذا وسطانیہ = سمر 155

8.5.2 وسطانیہ۔گروہی تعددی تقسیم (Median-Grouped Frequency Distribution)

گروہی تعددی تقسیم میں اوسط کو درج ذیل مرحلوں سے محسوب کیا جاتا ہے۔

مرحلے : i) مجموعی تعددی تقسیم تیار کیجئے۔

9 maths 8. statistics
Wednesday, March 13, 2019 7:51:55 PM

(ii) $\left(\frac{N}{2}\right)$ ویں رقم معلوم کیجئے۔

(iii) وہ درجہ جس میں $\frac{N}{2}$ کا مجموعی تعدد پایا جاتا ہو، وسطانیہ کا درجہ

(iv) وسطانیہ کو درج ذیل ضابطہ سے محسوب کیجئے۔

$$\text{وسطانیہ Median} = l + \frac{\left(\frac{N}{2} - m\right)}{f} \times c$$

جس میں

l = وسطانیہ کے درجاتی وقفہ کی ادنیٰ حد c = وسطانیہ کے درجہ کی وسعت

f = وسطانیہ کے درجہ کا تعدد N = کل تعدد $(\sum f)$

m = وسطانیہ کے درجے سے پہلے کا مجموعی تعدد

مثال 8.12

درج ذیل جدول میں ہفتہ وار 200 خاندانوں کے اخراجات دئے گئے ہیں۔
ہفتہ وار اخراجات کا وسطانیہ معلوم کیجئے۔

ہفتہ وار اخراجات (₹)	0-1000	1000-2000	2000-3000	3000-4000	4000-5000
خاندانوں کی تعداد	28	46	54	42	30

حل :

ہفتہ وار اخراجات	خاندانوں کی تعداد (f)	مجموعی تعدد ($c.f$)
0-1000	28	28
1000-2000	46	74
2000-3000	54	128
3000-4000	42	170
4000-5000	30	200
	N=200	

$\left(\frac{200}{2}\right)$ ویں قیمت $= \left(\frac{N}{2}\right)$ ویں قیمت = وسطانیہ کا درجہ

= قیمت 100 ویں

وسطانیہ کا درجہ = 2000 – 3000

$\frac{N}{2} = 100 \quad l = 2000$

$m = 74, \quad c = 1000, \quad f = 54$

$$\text{وسطانیہ} = l + \frac{\left(\frac{N}{2} - m\right)}{f} \times c$$

Progress Check ترقی کی جانچ

1۔ پہلے چار صحیح اعداد کا وسطانیہ ..... ہے۔

2۔ اگر 4 کو بھی اس سٹ میں شامل کیا جائے تو ان دونوں وسطانیہ کا فرق ..... ہے۔

3۔ دونوں وسطانیہ کا فرق ..... ہے۔

9 maths 8. statistics
Wednesday, March 13, 2019 7:51:56 PM

$$= 2000 + \left(\frac{100 - 74}{54}\right) \times 1000$$

$$= 2000 + \left(\frac{26}{54}\right) \times 1000 = 2000 + 481.5$$

$$= 2481.5$$

مثال 8.13 درجہ ذیل معطیات کا وسطانیہ 24 ہے x کی قیمت معلوم کیجئے۔

درجاتی وقفہ (CI)	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
تعدد (f)	6	24	x	16	9

حل :

درجاتی وقفہ (CI)	تعدد (f)	مجموعی تعدد (cf)
0-10	6	6
10-20	24	30
20-30	x	$30 + x$
30-40	16	$46 + x$
40-50	9	$55 + x$
	$N = 55 + x$	

جب کہ وسطانیہ 24 ہے اور وسطانیہ درجہ $30 - 20$ ہے۔

$l = 20 \quad N = 55 + x, \; m = 30, \; c = 10, \; f = x$

$$\text{وسطانیہ} = l + \frac{\left(\frac{N}{2} - m\right)}{f} \times c$$

$$24 = 20 + \frac{\left(\frac{55+x}{2} - 30\right)}{x} \times 10$$

$$4 = \frac{5x - 25}{x} \qquad \text{(مختصر کرنے کے بعد)}$$

$$4x = 5x - 25$$

$$5x - 4x = 25$$

$$x = 25$$

مشق 8.2

1۔ دئے گئے قیمتوں کا وسطانیہ معلوم کیجئے۔ 47, 53, 62, 71, 83, 21, 43, 47, 41.

2۔ دئے گئے معطیات کا وسطانیہ معلوم کیجئے۔ 36, 44, 86, 31, 37, 44, 86, 35, 60, 51

9 maths 8. statistics
Wednesday, March 13, 2019 7:51:56 PM

3۔ مشاہدات $11, 12, 14, 18, x+2, x+4, 30, 32, 35, 41$ جوصعودی ترتیب میں دئے گئے ہیں جس کا وسطانیہ 24 ہے۔ x کی قیمت معلوم کیجئے

4۔ ایک محقق نے چوہوں کے رویے کا مطالعہ کیا کہ ہر ایک چوہے کو اپنی غذا تلاش کرنے کے لئے لیا گیا وقت (سکنڈ میں) ریکارڈ کیا گیا ہے۔13 مختلف چوہوں کو اپنی غذا تلاش کرنے کا وقت 31، 33، 63، 33، 28، 29، 33، 27، 27، 34، 35، 28، 32 ہے۔ چوہوں کو اپنی غذا تلاش کرنے کے لئے لیا گیا وقت کا وسطانیہ معلوم کیجئے۔

5۔ ایک Summative Assessment Exam میں طلباء سے حاصل شدہ مارکس درج ذیل ہیں۔ وسطانیہ محسوب کیجئے

درجاتی وقفہ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
طلباء کی تعداد	2	7	15	10	11	5

6۔ پانچ مثبت سالم اعداد کا اوسط ان کے وسطانیہ سے دُگنا ہے۔اگر چار سالم اعداد 3، 4، 6، 9 ہیں اور ان کا وسطانیہ 6 ہو تو پانچواں سالم عدد معلوم کیجئے

8.4 طرز (Mode)

ایک الیکشن میں تین امیدواروں سے لئے گئے ووٹوں کی تعداد کچھ اس طرح سے ہے۔

امیدواروں کے نام	ڈالے گئے ووٹ
Mr. X	4, 12, 006
Mr. Y	9, 87, 991
Mr. Z	7, 11, 973
کل	21, 11, 970



کس کو فاتح کے طور پر اعلان کیا جائے گا ؟ Mr.Y فاتح ہوگا کیونکہ تینوں امیدواروں کی ووٹوں کی تعداد سے اس کے ووٹوں کی تعداد زیادہ ہے۔جب کہ Mr.Y کے ووٹوں کی تعداد اکثریت کی آبادی کو ظاہر نہیں کرتی۔(کیونکہ اس کے خلاف زیادہ ووٹ ہیں)۔ باوجود اس کے اس کو فاتح قرار دیا گیا ہے۔ کیونکہ یہاں انتخاب کا طرز امیدواروں میں سب سے زیادہ پر انحصار ہے۔

ii) ایک اسکول کے نویں جماعت کے طلباء کو ایک تنظیم کھیلوں کے جوتے (Sports Shoes) ایک ہی جسامت (Size) کے زیادہ سے زیادہ جوتے تحفہ دینا چاہتے ہیں۔مندرجہ ذیل میں طلباء کے مختلف جوتے کے جسامت کی تقسیم بندی کی گئی ہے۔

جوتے کی جسامت	5	6	7	8	9	10
طلباء کی تعداد	10	12	27	31	19	1

اگر تنظیم کسی کاریگر کے پاس صرف ایک سائز کے جوتے کی فرمائش کرنا چاہتی ہے تو کونسے سائز کے جوتے انتخاب کرے گی؟

مندرجہ بالا دونوں صورتوں میں، ہم نے غور کیا کہ اوسط یا وسطانیہ ان صورتوں میں مناسب نہیں ہیں۔ہمیں ایک دوسری قسم کا اوسط چاہئے، جس کو طرز کہتے ہیں۔

دئے ہوئے معطیات میں سب سے زیادہ دہرانے والے عدد کو طرز کہتے ہیں۔

9 maths 8. statistics
Wednesday, March 13, 2019 7:51:56 PM

جب تم یوٹیوب (You tube) پر اوسط کے بارے میں اچھی وِڈیوز (Videos) تلاش کرتے ہو تو جو ویڈیو زیادہ سے زیادہ لوگوں نے دیکھا ہے اس کو دیکھنا پسند کروگے یہاں تم طرز کو استعمال کروگے۔

8.6.1 طرز۔خام معطیات Mode-Raw data

کسی انفرادی معطیات میں سب سے زیادہ دہرانے والے متغیر قیمت کو طرز کہتے ہیں۔

مثال 8.14 ایک چاول کے کارخانہ (Mill) میں سات مزدوروں کی روزانہ کی اجرت ₹500، ₹600، ₹600، ₹800، ₹800، ₹800 اور ₹1000 ہے۔ تو اجرت کا طرز معلوم کیجئے۔

حل : دئے گئے اس معطیات میں ₹800 تین مرتبہ واقع ہوا ہے۔لہذا ان کا طرز ₹800 ہے۔

مثال 8.15 اس سٹ کے قیمتوں کا طرز معلوم کیجئے۔ 17, 18, 20, 20, 21, 21, 22, 22

حل : اس مثال میں، تین قیمتیں 20, 21, 22 ہر ایک دو مرتبہ واقع ہوتے ہیں۔اس معطیات کے لئے تین طرز ہیں۔

- ایک تقسیم جو صرف ایک طرز رکھتی ہو تو وہ یک طرزی (Unimodal) کہلاتی ہے۔
- ایک تقسیم میں دو طرز ہو تو دو طرزی (Bimodal) کہتے ہیں۔
- ایک تقسیم میں تین طرز ہو تو سہ طرزی (Trimodal) کہتے ہیں۔
- ایک تقسیم میں تین سے زیادہ طرز ہو تو کثیر طرزی (Multimodals) کہتے ہیں۔

8.6.2 طرز کے لئے غیر گروہی تعددی تقسیم (Mode for ungrouped frequency distribution)

غیر گروہی تعددی تقسیم میں زیادہ تعدد رکھنے والی شئے کو طرز کے طور پر لیتے ہیں۔

مثال 8.16 اعداد کے ایک سٹ میں 4 پانچ مرتبہ ہے ، 5 چار مرتبہ ہے ، 6 نو مرتبہ ہے اور 9 چھ مرتبہ ہے تو طرز معلوم کیجئے۔

حل :

اشیاء کی جسامت	4	5	6	9
تعدد	5	4	9	6

6 کا زیادہ سے زیادہ تعدد 9 ہے۔ لہذا 6 طرز ہے۔

9 maths 8. statistics
Wednesday, March 13, 2019 7:51:56 PM

8.6.3 طرز۔گروہی تعددی تقسیم (Mode Grouped Frequency Distribution)

گروہی تعددی تقسیم میں متغیرات کی ٹھیک قیمتیں معلوم نہیں ہوتی ہیں اور اس صورت میں طرز کو ٹھیک طور پر نشان کرنا بہت دشوار ہو جاتا ہے۔ ایسی صورت میں اگر درجاتی وقفہ مساوی وسعت رکھتے ہیں تو طرز کی مناسب قیمت کا تعین اس طرح کیا جاسکتا ہے۔

$$\text{طرز} \quad \text{Mode} = l + \left(\frac{f - f_1}{2f - f_1 - f_2}\right) \times c$$

گروہی وقفہ جس کی زیادہ تعداد کو طرزی وقفہ (Modal class) کہتے ہیں۔ جس میں

l = طرزی وقفہ کا ادنیٰ حد f = طرزی وقفہ کا تعداد

f_1 = طرزی وقفہ کا پہلے کے وقفہ کا تعداد f_2 = طرزی وقفہ کے بعد کے وقفہ کا تعداد

c = طرزی وقفہ کی وسعت

مثال 8.17 مندرجہ ذیل معطیات کے لئے طرز معلوم کیجئے

مارکس	1-5	6-10	11-15	16-20	21-25
طلباء کی تعداد	7	10	16	32	24

حل :

مارکس	f
0.5-5.5	7
5.5-10.5	10
10.5-15.5	16
15.5-20.5	32
20.5-25.5	24

غور کیجئے

غیر مسلسل (Discrete) گروہی وقفہ کو مسلسل گروہی وقفہ میں تبدیل کرنے کے لئے ہر ادنیٰ حد سے 0.5 کو تفریق کرتے ہیں اور ہر اعلیٰ حد سے 0.5 کو جمع کرتے ہیں۔

طرزی وقفہ 16-20 ہے چونکہ یہ سب سے زیادہ تعدد رکھتا ہے۔

$l = 15.5, f = 32, f_1 = 16, f_2 = 24, c = 20.5 - 15.5 = 5$

$$\text{طرز} \quad \text{Mode} = l + \left(\frac{f - f_1}{2f - f_1 - f_2}\right) \times c$$

$$= 15.5 + \left(\frac{32 - 16}{64 - 16 - 24}\right) \times 5$$

$$= 15.5 + \left(\frac{16}{24}\right) \times 5 = 15.5 + 3.33 = 18.83.$$

8.6.3 اوسط، وسطانیہ اور طرز کے درمیان تجرباتی (عملی) تعلقات :

(An Empirical Relationship Between Mean, Median and Mode)

ہم نے دیکھا کہ ان تینوں کے اوسطوں کے درمیان ایک تخمینہ تعلق ہے۔ جب تعدد تقریباً تناسب میں تقسیم ہوتے ہیں۔

$$\text{طرز} \approx 3 \text{ وسطانیہ} - 2 \text{ اوسط}$$

9 maths 8. statistics
Wednesday, March 13, 2019 7:51:57 PM

مثال 8.18 ایک جماعت بندی میں اوسط اور طرز 66 اور 60 بالترتیب ہیں۔وسطانیہ محسوب کیجئے۔

حل : دیا گیا ہے

$$60 = \text{طرز} \quad \text{اور} \quad 66 = \text{اوسط}$$

ضابطے کو استعمال کرتے ہوئے

$$\text{طرز} \approx 3 \text{ وسطانیہ} - 2 \text{ اوسط}$$

$$\approx 3 \text{وسطانیہ} - 2\ (66)$$

$$60 \approx 3 \text{ وسطانیہ} + 132$$

$$\text{چنانچہ} \quad \text{وسطانیہ} \approx \frac{192}{3} \approx 64$$

مشق 4.5

1۔ ایک فیکٹری کے 10 ملازموں کی ماہانہ تنخواہ ذیل میں دی گئی ہے۔

₹5000, ₹7000, ₹5000, ₹7000, ₹8000, ₹7000, ₹7000, ₹8000, ₹7000, ₹5000

اوسط، وسطانیہ اور طرز معلوم کیجئے۔

2۔ ذیل میں دئے گئے معطیات کا طرز معلوم کیجئے۔ 3.1, 3.2, 3.3, 2.1, 1.3, 3.3, 3.1

3۔ ان معطیات کا اوسط اگر 14 ہے تو x کی قیمت معلوم کیجئے اور اُن معطیات کا طرز بھی معلوم کیجئے۔ $11,\ 15, 17, x+1, 19,\ x-2$

4۔ مختلف جسامت (سائز) کے ٹریک سوٹ (Track Suit) کی مانگ کا سروے ذیل میں دیا گیا ہے۔

جسامت	38	39	40	41	42	43	44	45
آدمیوں کی تعداد	36	15	37	13	26	8	6	2

کونسی سائز کی مانگ زیادہ ہے؟

5۔ ذیل کے معطیات کے لئے طرز معلوم کیجئے۔

مارکس	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
طلباء کی تعداد	22	38	46	34	20

6۔ ذیل کی تقسیم کے لئے اوسط، وسطانیہ اور طرز معلوم کیجئے؟

وزن (کلوگرام میں)	25-34	35-44	45-54	55-64	65-74	75-84
طلباء کی تعداد	4	8	10	14	8	6

9 maths 8. statistics
Wednesday, March 13, 2019 7:51:57 PM

مشق 8.4

RYG4P

Multiple choice questions : کثیر انتخابی سوالات

1۔ فرض کیجئے کہ m درمیانی نقطہ اور ایک مسلسل تعددی تقسیم کا گروہ کا اعلیٰ حد b ہے۔ گروہ کی ادنیٰ حد ..... ہے۔

(1) $2m - b$ (2) $2m+b$ (3) $m-b$ (4) $m-2b$.

2۔ 7 اعداد کا اوسط 81 ہے۔ اگر ان میں ایک عدد کو نکال دیا جائے تو باقی اعداد کا اوسط 78 ہوگا۔ نکالے ہوئے عدد کی قیمت کیا ہوگی ؟

(1) 101 (2) 100 (3) 99 (4) 98.

3۔ ایک خاص مشاہدہ جو دئے گئے معطیات میں زیادہ مرتبہ واقع ہوتا ہے۔ اس کو ہم ..... کہتے ہیں۔

i) تعدد ii) وسعت iii) طرز iv) وسطانیہ

4۔ کونسے اعداد کے سٹ میں اوسط، وسطانیہ اور طرز کے قیمتیں مساوی ہونگے۔

(1) 2,2,2,4 (2) 1,3,3,3,5 (3) 1,1,2,5,6 (4) 1,1,2,1,5.

5۔ الجبرائی انحراف کے حاصل جمع کا ایک سٹ کے n قیمتوں سے اس کا اوسط ..... ہوگا۔

(1) 0 (2) n-1 (3) n (4) n+1.

6۔ a، b، c، d اور e کا اوسط 28 ہے اگر a ، c اور e کا اوسط 24 ہو تو b اور d کا اوسط ..... ہے۔

(1) 24 (2) 36 (3) 26 (4) 34

7۔ اگر پانچ مشاہدات x، $x + 2$، $x + 4$ ، $x + 6$ ، $x + 8$ کا اوسط 11 ہو تو پہلے تین مشاہدات کا اوسط ..... ہے۔

(1) 9 (2) 11 (3) 13 (4) 15.

8۔ 5 ، 9 ، x ، 17 اور 21 کا اوسط 13 ہے تو x کی قیمت معلوم کیجئے۔

(1) 9 (2) 13 (3) 17 (4) 21

9۔ پہلے 11 طبعی اعداد کے مربعوں کا اوسط ..... ہے۔

(1) 26 (2) 46 (3) 48 (4) 52.

10۔ ایک سٹ کے اعداد کا اوسط x ہے اگر ہر عدد کے ساتھ z ضرب کیا جائے تو اوسط ..... ہوگا۔

(1) $\bar{X} + z$ (2) $\bar{X} - z$ (3) $z\ \bar{X}$ (4) $\bar{X}$

9 maths 8. statistics
Wednesday, March 13, 2019 7:51:57 PM

Project منصوبہ

1۔ 20 تیز رفتار مختلف زمینی جانوروں کی تعددی جدول تیار کیجئے۔اوسط، وسطانیہ اور طرز معلوم کیجئے۔ تمہارے جواب کی تصدیق کیجئے۔

2۔ ایک جماعت کے طلباء کی تفصیلی ریکارڈ کے ذریعہ

i) جماعت کے اوسط عمر معلوم کیجئے (درجاتی وقفہ استعمال کرکے)

ii) جماعت کے اوسط اونچائی محسوب کیجئے۔(درجاتی وقفہ استعمال کرکے)

Points to Remember یادرکھنے کے نکات

- ایک خاص مقصد کے لئے جمع کردہ معلومات **معطیات** کہلاتے ہیں۔
- تفتیش کار (Investigator) سے جمع کردہ معطیات **ابتدائی معطیات** کہلاتا ہے۔جب اس معلومات کو بیرونی ذرائع (External Source) سے جمع کیا جاتا ہے تو ان معطیات کو **ثانوی معطیات** کہتے ہیں۔
- ابتدا میں معطیات جو غیر منظّم صورت میں حاصل ہوتے ہیں **خام معطیات** کہلاتے ہیں۔
- جب معطیات کو گروہ یا گروپ میں ترتیب دیا جاتا ہے ان معطیات کو **گروہی معطیات** کہتے ہیں۔
- مشاہدات کئی بار دہرائی جائے تو اسے **تعدد** کہتے ہیں۔
- درمیانی قیمت $= \frac{UCL + LCL}{2}$

  (ادنیٰ درجے کی حد۔ LCL ، اعلیٰ درجے کی حد ۔ UCL)
- درجاتی وقفہ کی وسعت = UCL − LCL
- گروہی معطیات کے لئے اوسط معلوم کرنے کے لئے

مرحلاتی انحراف کا طریقہ	مفروضی اوسط کا طریقہ	بالراست طریقہ
$\bar{X} = A + \left[\frac{\sum fd}{\sum f} \times c\right]$	$\bar{X} = A + \frac{\sum fd}{\sum f}$	$\bar{X} = \frac{\sum fx}{\sum f}$

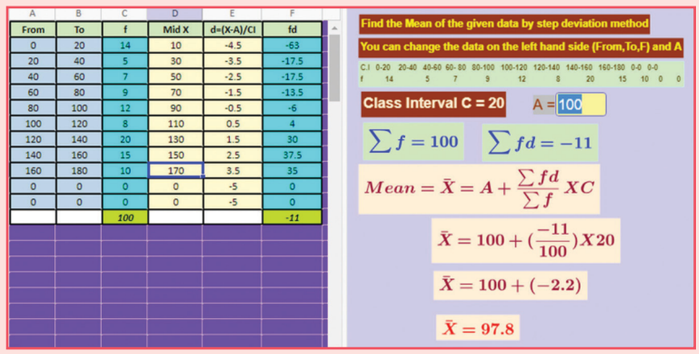
- کسی وقفہ کے مجموعی تعدد کو اس وقفہ سے پہلے کے تمام تعددوں کو جمع کیا جاتا ہے۔
- گروہی معطیات کا وسطانیہ محسوب کرنے کا ضابطہ۔ $\text{Median} = l + \frac{\left(\frac{N}{2} - m\right)}{f} \times c$.
- گروہی معطیات کا طرز محسوب کرنے کا ضابطہ۔ $\text{Mode} = l + \left(\frac{f - f_1}{2f - f_1 - f_2}\right) \times c$.

9 maths 8. statistics
Wednesday, March 13, 2019 7:51:58 PM

ICT Corner

ICT کارنر

مطلوبہ نتیجہ اس تصویر میں دکھایا گیا ہے۔



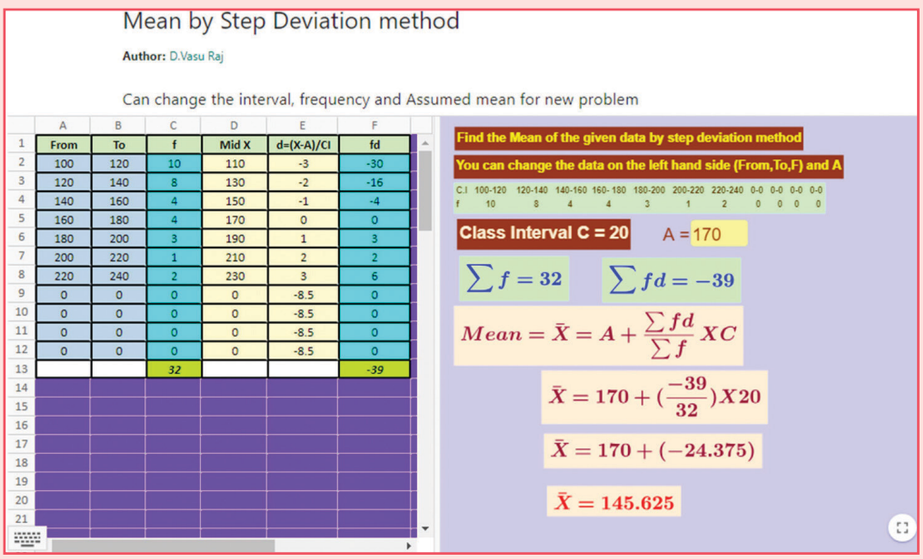
مرحلہ : براؤزر کھولئے ذیل میں دئے گئے URL کو ٹائپ کیجئے یا QR کوڈ کو اسکین کیجئے۔

"Mean by step deviation method" نامی Geo Gebra ورک شیٹ کھلے گا۔

ورک شیٹ میں مثال 5.5 دیا گیا ہے۔ مرحلوں پر غور کیجئے۔ سوالات کو تم تبدیل کر سکتے ہوئے معطیات کو "To"، "From" اور "Frequency" بائیں جانب شیٹ ٹائپ کریں۔ اس تبدیلی کے بعد دائیں جانب مفروضی اوسط کے حل کو جانچئے۔

Step 1

مرحلہ 1 :



Browse in the link

Mean by step deviation method:
https://ggbm.at/NWcKTRtA or Scan the QR Code

TBZGC

9 maths 8. statistics
Wednesday, March 13, 2019 7:51:58 PM

9







اِمکان
(PROBABILITY)

Probability theory is nothing more than common sense reduced to calculation. - *Pierre Simon Laplace.*



Richard Von Mises
A.D (C.E) 1883-1953

شماریاتی اور تجرباتی نقطہ سے امکان کو خصوصی طور پر آر۔ایف۔فشر اور آر۔وان مِسس نے فروغ دیا۔آر۔وان مِسس نے نظیری عرصہ (Sample Space) کا نظریہ پیش کیا۔اس نظریہ کے ذریعہ پیمائش نظریہ کی بنیاد پر منحصر امکان کے حسابی نظریہ کو بڑھاوا دیا گیا۔گذشتہ صدی میں کئی مصنفوں کے زیر اثر مندرجہ بالا نظریہ ابھر کر سامنے آیا۔

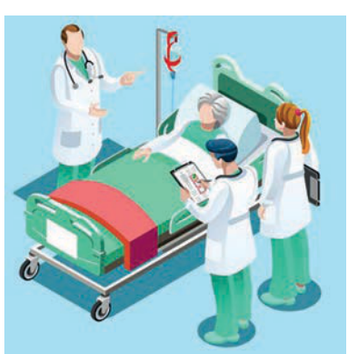
سیکھنے کے مقاصد

- امکان کے بنیادی تصوّرات کو سمجھنا۔
- امکان کے کلاسکی طرز عمل اور تجرباتی طرز عمل کو سمجھنا۔
- امکان میں مواقع کے اقسام سے واقفیت کرانا۔

OSPOU

9.1 تعارف Introduction

امکان کے نظریے کو سمجھنے کے لئے، ہم حقیقی زندگی کے چند حالات کو دیکھتے ہیں۔جن میں ہمیں بعض غیر یقینی صورتِ حال نظر آتے ہیں۔



ایک ہسپتال میں ایک مریض کو جان بچانے والی دوائی دی جاتی ہے۔مریض کے رشتے دار اس دوائی کے موثر ہونے کا امکان معلوم کرنا چاہتے ہیں؟ اگر ڈاکٹر کہے کہ یہ دوائی 100 مریضوں میں سے 80 سے زیادہ مریضوں پر بہت موثر ثابت ہوئی ہے، تو وہ رشتے دار خوش ہوں گے۔یہ کامیابی کا فیصد، امکان کے تصور کی وضاحت کرتا ہے۔یہ واقع ہونے کے تعدد کی بنیاد پر منحصر ہے۔یہ غیر یقینی حالات پر فیصلہ لینے میں مدد دیتی ہے۔چنانچہ امکان کسی غیر یقینی کیفیت کی مقدار یا غیر یقینی کی پیمائش کرتا ہے۔

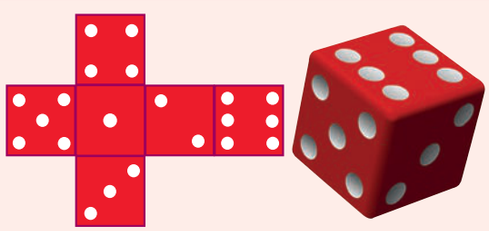
9 UM T3 Maths 9. probability
Monday, March 11, 2019 8:02:25 PM

آیئے 40 کارڈوں کی ایک گڈی کو فرض کرتے ہیں، جس میں 4 رنگ (نیلے، ہرے، لال اور پیلے) ہوں اور ہر ایک رنگ کے 10 دس کارڈ موجود ہوں جن کو 1 سے 10 نمبر دئے گئے ہوں۔ ان میں سے ایک کارڈ کا انتخاب کیجئے، فرض کیجئے کہ وہ کارڈ نیلا ہو۔ ان 10 کارڈوں کو نیچے کی طرف اُلٹ کر رکھیں اور اچھی طرح سے اوپر نیچے کر کے ایک کارڈ اٹھائیں۔ اس میں سے کیا موقع ہوگا کہ وہ کارڈ کا نمبر 6 ہو؟ اگر وہ کارڈ کا نمبر 6 کی بجائے 4 ہو تو کیا اس کے موقع میں تبدیلی آئے گی؟ آپ فوری طور پر دیکھ سکتے ہیں کہ ہر ایک صورت حال میں مواقع 1 سے 10 ہیں (ایسا کیوں ہے؟)۔ کوئی بھی کارڈ تم اٹھاؤ، اس کے لئے مواقع یکساں ہوں گے۔ اصطلاح امکان (probability) کا مطلب مواقع (chances) ہے اور اس کی قیمت بھی وہی ہے، مگر ہم 10 میں سے 1 کہنے کے بجائے اس کی 1/10 کسر کہیں گے۔ (جب ہم کسور کو استعمال کرتے ہیں تو اِمکانات کو ملانا آسان ہوگا) یہ ''سازگار مشاہدوں اور کل مشاہدوں کے تعداد کی نسبت ہے۔''

کیا تم نے پانسہ دیکھا ہے؟

(بعض لوگ ایک واحد پانسہ کے لئے لفظ 'die' کا استعمال کرتے ہیں۔ ہم یہاں واحد اور جمع دونوں کے لئے 'Dice' استعمال کریں گے)ایک معیاری پانسہ معکب کی شکل کا ہوتا ہے۔ جس کے ہر ضلعے پر نقطوں سے بنے مختلف اعداد ایک تا چھ تک ہوتے ہیں۔

Note غور کیجئے



ایک پانسہ کے مقابل کے ضلعوں کا حاصل جمع ہمیشہ 7 کے مساوی ہوگا۔

اسے لڑھکا کر سٹہ بازی اور اتفاق پر منحصر ہونے والے دیگر کھیلوں میں استعمال کیا جاتا ہے۔

اگر تم ایک پانسہ پھینکتے ہو تو پانچ/دو/سات حاصل ہونے کا امکان کیا ہے؟

اوپر کے پوچھے گئے تمام سوالات کے جوابات میں، امکان کے تصوّر کے بارے میں کیا تم نے کوئی خاص بات غور کی ہے؟ کیا امکان کے لئے بڑی سے بڑی قیمت یا چھوٹی سی چھوٹی قیمت ہوسکتی ہے؟ اگر کسی موقع کے واقع ہونا یقینی ہو تو اس کا امکان کیا ہوگا؟ بہتر وضاحت کے لئے، ذیل کے عبارت کے ٹکڑے میں اس نظریہ کو رسمی طور پر کوشش کریں گے۔

9.2 ۔ بنیادی تصوّرات (Basic Ideas)

جب ہم سائنس کے تجربوں کو مماثل حالتوں میں دہراتے ہیں تو ہمیں تقریباً یکساں نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح کے تجربات متعین تجربات کہلاتے ہیں۔ مثال کے طور پر اصولِ ارشمدس یا اوہم کا کلیہ (Ohm's Law) کو تصدیق کرنے کے تجربات، متعین تجربات ہیں۔ ان تجربات کے نتائج کی ہم پہلے ہی پیشن گوئی کر سکتے ہیں۔

مگر، بعض تجربات جن کو مماثل حالتوں میں دہرانے کے باوجود بھی انکے نتیجہ کی ہم پیشن گوئی نہیں کر سکتے۔ مثال کے طور پر، ایک پانسہ کا لڑھکانا، ایک سکّہ کا اچھالنے یا ایک کوزہ (Urn) سے گیند کا اٹھانا ان تجربات کے نتیجہ کی پہلے پیشن گوئی نہیں کر سکتے۔ یہ 'سریعی تجربات' ہیں۔ سریعی تجربہ کی ہر کارگردگی 'آزمائشی تجربہ' (Trail) کہلاتا ہے اور ہر آزمائش کے حاصل کو 'نتیجہ' (Outcome) کہتے ہیں۔

Untitled-1
Thursday, January 26, 2023 12:12:57 PM

(غور کیجئے: کئی شماریات دان 'تجربہ' اور 'آزمائش' دونوں الفاظ کے لئے ایک ہی معنی میں استعمال کرتے ہیں۔)

اب ہم اِمکان سے متعلق چند ضروری اصطلاحات سیکھیں گے۔

آزمائش (Trial) : پانسے کا لڑھکانا اور سکّہ کا اچھالنا تجربہ کہلاتا ہے۔ایک آزمائش تجربہ (Trail) ایک کارروائی ہے۔جس سے ایک یا کئی نتائج حاصل ہوتے ہیں۔

نتیجہ (Outcome) : ایک سکّہ کو اچھالنے پر ہمیں سر (Head) یا پشت (Tail) حاصل ہوتا ہے۔سر اور پشت نتائج کہلاتے ہیں۔ایک آزمائشی تجربہ کے حاصل کو نتیجہ کہتے ہیں۔

نظیری نقطہ (Sample point) : ایک سکّہ کے اچھالنے پر ہر ایک نتیجہ T یا H نظیری نقطے ہیں۔ایک آزمائشی تجربہ کے ہر ایک نتیجہ نظیری نقطہ کہلاتا ہے۔

نظیری عرصہ (Sample space): ایک سکّہ کو اچھالنے پر، تمام نظیری نقاط کا مجموعہ کو نظیری عرصہ (Sample Space) کہتے ہیں۔

$S=\{H,T\}$

اگر دو سکّے اچھالے جاتے ہیں تو تمام نظیری نقطوں کا مجموعہ $S=\{HH, HT, TH, TT\}$

ایک سریعی تجربہ کے تمام ممکن نتائج (یا نظیری نقاط) کے مجموعہ کو نظیری عرصہ کہتے ہیں اور اس کو S سے ظاہر کرتے ہیں۔ان کے عناصر کی تعداد کو $n(S)$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

موقع (Event) : اگر ایک پانسہ لڑھکایا جاتا ہے، عدد 4 حاصل ہوتا ہے جو اس کا نتیجہ کہلاتا ہے۔(چونکہ یہ ایک واحد آزمائشی تجربہ کا نتیجہ ہے)۔اسی تجربے میں ایک جفت عدد حاصل ہونے کا موقع (2,4,6) ہے۔اس لئے نظیری عرصہ کا ہر ایک تحتی مجموعہ موقع کہلاتے ہے۔لہذا کسی موقع میں ایک یا ایک سے زیادہ نتائج ہو سکتے ہیں۔

مثال کے طور پر



(i) سریعی تجربہ : ایک سکّہ اچھا اچھالنا

ممکن نتائج : سر (H) یا پشت (T)

نظیری عرصہ : $S = \{H,T\}$

کا تحتی مجموعہ S: $A = \{T\}$ یا $A = \{H\}$

چنانچہ اس مثال میں A ایک موقع ہے۔

(ii) اسی طرح جب ایک پانسہ پھینکا جاتا ہے۔تو تمام نظیری نقاط کا مجموعہ $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ ہے۔جب ہم ہفتہ میں ایک دن کا انتخاب کرتے ہیں تو نظیری نقاط کا مجموعہ { اتوار، پیر، منگل، چہارشنبہ، جمعرات، جمعہ، ہفتہ} = S ہوگا۔

9 UM T3 Maths 9. probability
Monday, March 11, 2019 8:02:27 PM

کارروائی 1

دو پانسوں کو بیک وقت پھینکنے کا تجربہ کیجئے۔ اس تجربہ سے ذیل کی فہرست بنائیے۔	دو سکّوں کو بیک وقت اچھالنے کا تجربہ کیجئے۔ اوپر کے تجربے سے ذیل کی فہرست بنائیے۔
سریعی تجربہ : ممکن نتائج : نظیری عرصہ : S کے کوئی تین تحتی : مجموعے (یا کوئی 3 مواقع)	سریعی تجربہ : ممکن نتائج : نظیری عرصہ : S کے کوئی تین تحتی : مجموعے (یا کوئی 3 مواقع)

کارروائی 2

ہر ایک طالب علم سے ایک سکّہ کو 10 مرتبہ اچھالنے کو کہا جاتا ہے، حاصل ہونے والے سروں (Heads) اور پشتوں (Tails) کی تعداد کو ذیل کی جدول میں درج کرنے کو کہا جاتا ہے۔

پشت کے حاصل ہونے کی تعداد	سر کے حاصل ہونے کی تعداد	اچھالنے کی تعداد
⋮	⋮	⋮

i) 1 کسر $=$ $\frac{\text{سَر کے حاصل ہونے کی تعداد}}{\text{سکّہ کے اچھالنے کی کل تعداد}}$

ii) 2 کسر $=$ $\frac{\text{پشت کے حاصل ہونے کی تعداد}}{\text{سکّہ کے اچھالنے کی کل تعداد}}$

سکّہ کو 20، 30، 40، 50 مرتبہ اچھال کر اس کو دہرائیے اور کسور معلوم کیجئے۔

کارروائی 3

کلاس (جماعت) کے طلباء کو جوڑیوں کے گروہوں میں تقسیم کیجئے۔ ہر ایک جوڑی میں پہلا طالب علم سکّہ کو 50 مرتبہ اچھلتا ہے اور اس جوڑی کا دوسرا طالب علم نتائج کو درج کرتا ہے۔ پھر ہم نیچے دئے گئے جدول تیار کریں۔

	سر کے حاصل ہونے کی تعداد	پشت کے حاصل ہونے کی تعداد	$\frac{\text{سَر کے حاصل ہونے کی تعداد}}{\text{سکّہ کے اچھالنے کی کل تعداد}}$	$\frac{\text{پشت کے حاصل ہونے کی تعداد}}{\text{سکّہ کے اچھالنے کی کل تعداد}}$
1				
2				
3				
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

جب کسی موقع کے واقع ہونے کے اتفاق (Chance) کو مقداری طور پر ظاہر کرنے کو امکان کہتے ہیں۔

9 UM T3 Maths 9. probability
Monday, March 11, 2019 8:02:27 PM

9.3 کلاسکی طرزِعمل Classical Approach



مثال کے طور پر، ایک کوزہ میں 4 سرخ گیندیں اور 6 نیلے گیندیں ہیں۔اس کوزہ سے سریعی طور پر ایک گیند کا انتخاب کیا جائے تو سرخ گیند حاصل ہونے کا امکان کیا ہوگا؟

اصطلاح 'سریعی طور پر' سے مراد 10 گیندوں میں سے ہر ایک کے انتخاب کا اندازہ (یعنی امکان) یکساں ہے۔ایک ''منصفانہ''(Fair) تجربہ کے لئے تم آنکھ بند کر کے ملے جلے گیندوں میں سے انتخاب کر سکتے ہو۔اس سے نتائج ''مساوی ہم شکل'' (Equally Likely) ہونگے۔

ایک سرخ گیند کے انتخاب کا امکان $\frac{4}{10}$ ہے (تم اسے $\frac{2}{5}$ یا 0.4 بھی بتا سکتے ہو) ایک نیلے گیند کے انتخاب کا امکان کیا ہوگا؟
یہ $\frac{6}{10}$ (یا $\frac{3}{5}$ یا 0.6) ہوگا۔

Thinking Corner ذرا سوچئے

اگر کسی تجربہ کے کامیابی کا امکان 0.4 ہے
تو اسکے ناکامی کا امکان ہے کیا ہوگا؟

غور کیجئے کہ دونوں اِمکانات کا حاصلِ جمع 1 ہے۔اس سے مراد کوئی اور نتیجہ ممکن نہیں ہے۔

اوپر کی مثال میں ہم نے طرزِعمل اختیار کئے ہیں وہ کلاسکی ہے۔یہ قبل امکان محسوب کرتے ہیں۔(لاطینی زبان میں لفظ ' Priori ' کے معنی بغیر تحقیق کئے یا حسی تجربہ کے ہیں) غور کیجئے کہ اوپر کی ترکیب تب ہی ممکن ہے جب نتائج مساوی ہم شکل ہوں۔

کلاسیکی امکان نام اس لئے دیا گیا ہے کیونکہ یہ امکان کی پہلی قسم تھی جسے ریاضی دانوں نے 17 ویں اور 18 ویں صدیوں کے دوران رسمی طور پر مطالعہ کیا۔

فرض کیجئے کہ S ایک سریعی تجربہ کے تمام مساوی ہم شکل نتائج کا مجموعہ ہے۔
(S اس تجربہ کا نظیری عرصہ کہلاتا ہے)

فرض کیجئے کہ E ایک سریعی تجربہ کے چند مخصوص نتیجہ یا نتائج کا مجموعہ ہے۔(E ایک موقع کہلاتا ہے)

موقع E کے امکان کو P(E) سے ظاہر کرتے ہیں۔

$$P(E) = \frac{\text{کل نتائج کی تعداد}}{\text{سازگار نتائج کی تعداد}} = \frac{n(E)}{n(S)}$$

امکان کا تجرباتی طرزِعمل (اضافی تعددی مسئلہ) اس وقت استعمال کرتے ہیں جب کہ ایک تجربہ کو کئی مرتبہ دہرایا جا سکے اور ایک مخصوص نتیجہ کسی فیصد کی تعداد میں حاصل ہو تو وہ فیصد اس نتیجہ کے امکان کے قریب ہوگا۔

9 UM T3 Maths 9. probability
Monday, March 11, 2019 8:02:27 PM

9.4 تجرباتی طرزِعمل Empirical Approach

مثال کے طور پر، ایک صنعت کار (Manufacturer) ہر ماہ 10,000 برقی بٹن (Electric Switch) تیار کرتا ہے اور ان میں سے 1000 میں نقص پایا جائے۔ اس صنعت کار کے ہر ماہ میں تیار ہونے والے ناقص بٹنوں کا امکان کیا ہوگا؟

درکار امکان، اضافی تعدد کے تصوّر کی بنیاد پر، 10000 سے 1000 جو 0.1 ہے۔

Note غور کیجئے

اس امکان کے فیصلہ لینے کے لئے بہت زیادہ مرتبہ تجربہ کو دہرانے کی ضرورت ہے۔ ہم جتنا تجربہ کی تعداد کو بڑھائیں گے اتنا ہی امکان کا اندازہ بہتر ہوگا۔

اسکی تعریف کو رسمی طور پر دیکھیں۔ ''اگر آزمائشی تجربوں کی تعداد'' ہے جس میں موقع E واقع ہوا ہے، موقع E کے سازگار نتائج کی تعداد ہے تو موقع E کا امکان P(E) سے ظاہر کیا جاتا ہے جو

$$P(E) = \frac{r}{n}$$

کیا اس بات کی ضمانت دے سکتے ہیں کہ جیسے جیسے تجربہ کی تعداد بڑھے گی تو یہ امکان کی قیمت مستقل قیمت پر ٹھہر جائے گی؟ کوئی کہہ نہیں سکتے یہ تصور تجرباتی ہے، ہر مرتبہ تجربہ کے دہرانے پر ایک مختلف اضافی تعداد حاصل ہوسکتی ہے۔

البتہ، ایک محافظی وسعت (Security range) اس طرح ہے کہ امکان کی قیمت کم از کم 0 ہو اور زیادہ سے زیادہ 1 ہو۔ اسے حسابی طور پر اس طرح بیان کرسکتے ہیں۔

$$0 \le P(E) \le 1$$

Thinking Corner ذرا سوچئے

امکان سے متعلق ایک سوال کے لئے طالب علم کا جواب $\frac{3}{2}$ تھا۔
استاد اس جواب کو غلط بتایئے۔ کیوں؟

آیئے اسے اور تھوڑی تفصیل سے دیکھیں

پہلے سے ہمیں معلوم ہے کہ r، n سے بڑا عدد نہیں ہوسکتا۔

اس کے معنی $\frac{r}{n} < 1$ یعنی $P(E) < 1$ ..... (1)

پھر، اگر $r = 0$، اس سے مراد یا تو وہ موقع نہیں ہوسکتا یا پھر کئی آزمائشی تجربوں میں وہ واقع نہیں ہوا ہو۔ (جب ایک پانسہ کو لڑھکایا جائے تو کیا تمہیں 7 حاصل ہوسکتا ہے؟)

چنانچہ، اس صورت میں $\frac{r}{n} = \frac{0}{n} = 0$ ..... (2)

آخر میں، اگر $r = n$ ہو تو موقع ضرور واقع ہوگا (ایک آزمائشی تجربے سے یا آزمائشی تجربوں سے)

ایسی صورت میں $\frac{r}{n} = \frac{n}{n} = 1$ ..... (3)

(جب ایک پانسہ کو لڑھکایا جائے تو 1 تا 6 تک میں کوئی ایک عدد حاصل ہوگا۔)

(1)، (2) اور (3) سے ہمیں معلوم ہوتا ہے۔ $0 \le P(E) \le 1$

9 UM T3 Maths 9. probability
Monday, March 11, 2019 8:02:28 PM

ترقی کی جانچ

ایک سریعی تجربہ کیا گیا۔ ذیل میں سے کونسے نتیجہ کو امکان تسلیم نہیں کیا جاسکتا۔

(i) 1/5 (ii) $-1/7$ (iii) 0.40 (iv) -0.52 (v) 0

(vi) 1.3 (vii) 1 (viii) 72% (ix) 107%

مثال 9.1 جب ایک پانسے کو لڑھکایا جاتا ہے۔ 4 سے بڑا عدد حاصل ہونے کا امکان معلوم کیجئے۔

حل :

نتائج $S = \{1,2,3,4,5,6\}$

فرض کیجئے کہ 4 سے بڑا ایک عدد حاصل ہونے کا موقع E ہے۔

$$E = \{5,6\}$$

$$P(E) = \frac{\text{سازگار نتائج کی تعداد}}{\text{کل نتائج کی تعداد}}$$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{2}{6} = 0.333...$$

مثال 9.2

ایک دفتر میں جہاں 42 افراد (staff members) کام کرتے ہیں، 7 افراد کار استعمال کرتے ہیں۔ 20 افراد دو پہیے والی گاڑی (ٹوویلر) استعمال کرتے ہیں اور باقی 15 افراد سائیکل استعمال کرتے ہیں۔ اضافی تعدد (Relative frequencies) معلوم کیجئے۔

حل :

کل اسٹاف کی تعداد $= 42$

اضافی تعدد

کار استعمال کرنے والے $= \frac{7}{42} = \frac{1}{6}$

ٹوویلر استعمال کرنے والے $= \frac{20}{42} = \frac{10}{21}$

سائیکل استعمال کرنے والے $= \frac{15}{42} = \frac{5}{14}$

اس مثال میں غور کریں کہ

کل امکان 1 سے زیادہ نہیں ہوسکتا، یعنی

$$\frac{1}{6} + \frac{10}{21} + \frac{5}{14} = \frac{7}{42} + \frac{20}{42} + \frac{15}{42} = 1$$

مثال 9.3 ٹیم I اور ٹیم II، 10 کرکٹ میچ ہر ایک 20 وور (over) کے لئے کھیلتے ہیں۔ ہر ایک میچ میں ان کے کل اسکور ذیل کی جدول میں درج کئے گئے ہیں۔

9 UM T3 Maths 9. probability
Monday, March 11, 2019 8:02:28 PM

میچ نمبر	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ٹیم I	200	122	111	88	156	184	99	199	121	156
ٹیم II	143	123	156	92	164	72	100	201	98	157

ٹیم I کے جیتنے کا اضافی تعدد کیا ہے؟

حل : اس تجربے میں، ہر ایک آزمائشی تجربہ ایک میچ ہے جس میں ٹیم I، ٹیم II سے مقابل کرتی ہے۔
ہم ٹیم I کے جیت کے بارے میں غور کر رہے ہیں۔

یہاں کل 10 آزمائشی تجربے ہیں، ان میں سے ٹیم I نے پہلے 1 واں، 6 ویں اور 9 ویں میچوں میں جیت حاصل کی ہے۔

ٹیم I کے میچوں میں جیتنے کا اضافی تعدد $= \frac{3}{10}$ یا 0.3

(**غور کیجئے** : (Note) : اضافی تعدد نتائج کے تواتر پر منحصر ہے جو ہم تجربہ کے دوران مشاہدہ کرتے ہیں۔)

مشق 9.1

1۔ تم ایک سڑک پر چل رہے ہو۔ تمہارے سامنے سے گزرنے والے کسی ایک اجنبی کا انتخاب کیجئے۔ اس کی اگلی یوم پیدائش کا دن اتوار ہونے کا امکان کیا ہوگا؟

2۔ ایک تاش کی گڈی میں سے راجہ یا ایک رانی یا ایک غلام (Jack) کے اٹھانے کا امکان کیا ہوگا؟

3۔ چھ چہروں والے ایک معیاری پانسہ کو لڑھکانے پر ایک جفت عدد حاصل ہونے کا امکان معلوم کیجئے۔

4۔ ایک برتن میں 24 گیندیں ہیں۔ اگر ان میں سے 3 سرخ، 5 نیلا اور باقی سبز رنگ کے گیندیں ہیں تو (i) ایک نیلے گیند، (ii) ایک سرخ گیند اور (iii) ایک سبز گیند کے اٹھانے کا امکان کیا ہوگا؟

5۔ دو سکّے اچھالے جاتے ہیں، دو سر حاصل ہونے کا امکان کیا ہوگا؟

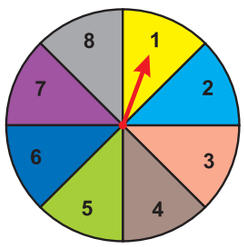


6۔ دو پانسوں کو لڑھکایا جاتا ہے۔ امکان کیا ہوگا جب ان کا حاصل جمع
(i) 1 کے مساوی ہوگا (ii) 4 کے مساوی ہوگا (iii) 13 سے کم ہوگا

7۔ ایک صنعت کار (Manufacture) سریعی طور پر 7000 LED بلب ٹسٹ کرتا ہے اور ان میں سے 25 بلبوں میں نقص پاتا ہے۔ اگر ایک LED بلب سریعی طور پر انتخاب کیا جائے تو نقص والا LED بلب حاصل ہونے کا امکان معلوم کیجئے۔۔

9 UM T3 Maths 9. probability
Monday, March 11, 2019 8:02:28 PM

8۔ ایک فٹ بال کے میچ میں، ایک ٹیم کے گول کیپر، گول ہونے سے بچا سکتا ہے، ایک ٹیم سے 40 کوششوں میں سے 32 مرتبہ بچا سکتا ہے۔ امکان کیا ہے کہ مخالف ٹیم اس کوشش کو گول میں بدل سکتی ہے۔



9۔ امکان کیا ہے کہ یہ چرخی (Spinner) 3 کے ضریب پر نہیں رکے گی؟

10۔ یہاں دئے گئے چرخی کی بنیاد پر امکان محسوب کرنے کے لئے کوئی دو مسئلے بنائیے۔

9.5 مواقع کے اقسام (Types of Events)

ہم پہلے ہی مواقع کے ضروری صورتوں کو سیکھ چکے ہیں۔ جب دو مواقع کے واقع ہونے کا اندازہ یکساں ہو تو یہ مساوی ہم شکل مواقع کہلاتے ہیں۔

- اگر ہم ایک سکّہ کو اچھالیں تو سر یا پشت مساوی ہم شکل مواقع ہیں۔
- اگر ایک پانسہ کو لڑھکایا جائے تو ایک طاق کا عدد حاصل ہونا اور ایک جفت عدد کا حاصل ہونا مساوی ہم شکل مواقع ہیں،

جبکہ ایک جفت عدد کا حاصل ہونا اور 1 حاصل ہونا مساوی ہم شکل مواقع نہیں ہیں۔

اگر امکان 1 ہو تو وہ موقع ضرور واقع ہوگا۔ اس طرح کے موقع کو **یقینی موقع** کہتے ہیں۔ دوسری صورت میں اگر امکان 0 ہو تو یہ موقع یقیناً واقع نہیں ہوگا، جسے **ناممکن موقع** کہتے ہیں۔

اگر $P(E) = 1$ ہو تو E کو **یقینی موقع** کہتے ہیں۔

اگر $P(E) = 0$ ہو تو E کو **ناممکن موقع** کہتے ہیں۔



غور کیجئے کہ جب ایک سکّے کو اچھالا جاتا ہے تو، تمہیں دونوں سر اور پشت بیک وقت حاصل نہیں ہوسکتا۔ (ضرور، وہ سکّہ واضح ہونا چاہئے، نہ کہ اس کے دونوں جانب سر یا پشت نہیں ہوتے ہوں) اگر دو مواقع بیک وقت واقع نہیں ہوسکتے (ایک ہی وقت پر) تو انہیں **باہم اخراج کرنے والے مواقع** ہیں۔ کیا برسات اور سورج کی شعاع باہم اخراج کرنے والے مواقع ہیں؟ 52 تاش کی گڈّی میں سے راجہ اور دل کے انتخاب کرنے کے بارے میں تم کیا کہو گے؟



ایک پانسہ کو لڑھکایا جاتا ہے، فرض کیجئے کہ E ''جفت چہرہ'' حاصل ہونے کا موقع ہے۔ یعنی 2، 4 یا 6 کے حاصل ہونا۔ پھر ''طاق چہرہ'' حاصل ہونے کا موقع E کے متمّم ہے اور اسے E' یا E سے نشاندہی کرتے ہیں۔ اسی خیال سے E اور E' **متمّم مواقع** ہیں۔

9 UM T3 Maths 9. probability
Monday, March 11, 2019 8:02:29 PM

Note

غور کیجئے

(i) مواقع E اور E' باہم اخراج کرنے والے ہیں۔(کیسے؟)

(ii) E' = 1 کا امکان + E کا امکان اور E اور E' باہم اخراج کرنے والے ہیں۔

(iii) چونکہ P(E) + P(E') = 1 اگر ان میں سے کسی ایک کو جانتے ہو تو تم دوسرا موقع معلوم کر سکتے ہو۔

ترقی کی جانچ

ذیل میں سے کونسے باہم اخراج کرنے والے ہیں؟

شمار عدد	Trial آزمائش	Event 1 موقع 1	Event 2 موقع 2
1	ایک پانسہ کو لڑھکایا جائے	5 کا حاصل ہونا	ایک طاق عدد کا حاصل ہونا
2	ایک پانسہ کو لڑھکایا جائے	5 کا حاصل ہونا	ایک جفت عدد کا حاصل ہونا
3	ایک معیاری گڈّی سے ایک پتّہ کو نکالا جائے۔	ایک پان کا پتّہ کا حاصل ہونا	ایک سیاہ پتّہ کا حاصل ہونا
4	ایک معیاری گڈّی سے ایک پتّہ کو نکالا جائے۔	ایک تصویر کے پتّہ کا اٹھانا	5 کا حاصل ہونا
5	ایک معیاری گڈّی سے ایک پتّہ کو نکالا جائے۔	ایک دل کا پتّہ حاصل ہونا	7 کا حاصل ہونا

مثال 9.4 کل کے دن برسات ہونے کا امکان $\frac{91}{100}$ ہے۔کل کے دن برسات نہ ہونے کا امکان معلوم کیجئے۔

حل :

فرض کیجئے کہ E کل کے دن برسات ہونے کا موقع ہے۔پھر E' کل کے دن برسات نہ ہونے کا موقع ہے۔

چنانچہ $P(E) = 0.91$ ہمیں $P(E') = 1 - 0.91$ حاصل ہوتا ہے۔(کیسے؟)

$= 0.09$

لہذا، کل کے دن برسات نہ ہونے کا امکان $= 0.09$

9 UM T3 Maths 9. probability
Monday, March 11, 2019 8:02:29 PM

مثال 9.5

پچھلے سال دسویں جماعت کے سرکاری امتحانات میں طلباء نے مختلف اسباق میں 1184 سونمبرات (Centum scores) حاصل کئے ان میں سے 233 علم ریاضی میں، 125 سماجی سائنس میں اور 106 سائنس میں حاصل کئے تھے۔
اگر سریعی طور پر ایک طالب علم کا انتخاب کیا جائے، تو امکان کیا ہوگا جب وہ منتخب شدہ طالب علم

i) علم ریاضی میں سونمبر حاصل کیا ہو۔ ii) سائنس میں سونمبر حاصل نہیں کیا ہو۔

حل :

کل سونمبرات کی تعداد $= 1184$

لہذا $n = 1184$

i) فرض کیجئے کہ E_1 علم ریاضی میں سونمبرات حاصل کرنے کا موقع ہے۔

لہذا $n(E_1) = 233,$ یعنی $r_1 = 233$

$$P(E_1) = \frac{r_1}{n} = \frac{233}{1184}$$

ii) فرض کیجئے کہ E_2 سائنس میں سونمبرات حاصل کرنے کا موقع ہے۔

لہذا $n(E_2) = 106,$ یعنی $r_2 = 106$

$$P(E_2) = \frac{r_2}{n} = \frac{106}{1184}$$

$$P(E_2') = 1 - P(E_2)$$

$$= 1 - \frac{106}{1184}$$

$$= \frac{1078}{1184}$$

مشق 9.2

1۔ ایک لیپ ٹاپ کی کمپنی 6 مہینوں میں 10000 لیپ ٹاپ تیار کرتی ہے۔ان میں سے 25 ناقص ہیں۔جب تیار شدہ لیپ ٹاپ میں سے ایک لیپ ٹاپ کا انتخاب کیا جاتا ہے تو منتخب شدہ لیپ ٹاپ ایک غیر ناقص لیپ ٹاپ ہونے کا امکان کیا ہوگا۔

2۔ 16 - 20 عمر والے 400 نوجوانوں کا جائزہ لینے پر پتہ چلا کہ 191 ووٹر شناختی کارڈ رکھتے ہیں۔اگر ایک نوجوان کا سریعی طور پر انتخاب کیا جاتا ہے تو اس بات کا امکان کیا ہے کہ وہ نوجوان ووٹر شناختی کارڈ نہیں رکھتا ہے۔

3۔ چند سوالات کے صحیح جواب کے اندازہ لگانے کا امکان $\frac{x}{3}$ ہے۔اگر صحیح جواب کے اندازہ نہیں لگانے کا امکان $\frac{x}{5}$ ہو تو x کی قیمت معلوم کیجئے

9 UM T3 Maths 9. probability
Monday, March 11, 2019 8:02:29 PM

4۔ ایک مخصوص ٹنس میچ میں ایک کھلاڑی کے جیت حاصل کرنے کا امکان 0.72 ہے۔ میچ میں اس کھلاڑی کے ہار جانے کا امکان کیا ہوگا؟

5۔ 1500 خاندانوں کا جائزہ لیا گیا اور ذیل میں گھروں میں انکے نوکرانیوں کے بارے میں رکارڈ دیا گیا ہے۔

دونوں	صرف فُل ٹائم	صرف پارٹ ٹائم	نوکرانیوں کی اقسام
250	370	860	نوکرانیوں کی تعداد

سریعی طور پر ایک خاندان کا انتخاب کیا جائے تو منتخب شدہ خاندان کا امکان کیا ہوگا۔

i) دونوں قسم کے نوکرانیاں رکھتے ہیں

ii) پارٹ ٹائم کے لئے نوکرانیاں رکھتے ہیں

iii) نوکرانیاں نہیں رکھتے

مشق 9.3

Multiple choice questions کثیر انتخابی سوالات

1۔ 0 اور 1 کے درمیان ایک عدد جو غیر یقینی کی پیمائش کے لئے استعمال کیا جاتا ہے ..... کہلاتا ہے۔

a) سریعی متغیر b) آزمائشی امکان c) سادہ موقع d) امکان

2۔ امکان ..... کے درمیان ہوتا ہے۔

a) -1 اور $+1$ b) 0 اور 1 c) 0 اور n d) 0 اور ∞

3۔ امکان جو اضافی تعدد مسئلہ کے تصور کی بنیاد پر ہوتا ہے۔ وہ ..... کہلاتا ہے۔

a) تجرباتی امکان b) کلاسیکی امکان c) (1) اور (2) دونوں d) نہ (1) اور نہ ہی (2)

4۔ ایک موقع کا امکان ..... نہیں ہوسکتا۔

a) صفر کے مساوی b) صفر سے بڑا c) ایک کے مساوی d) صفر سے کم

5۔ ایک سریعی تجربہ کے تمام ممکن نتائج کا امکان ہمیشہ ..... کے مساوی ہوتا ہے۔

a) ایک b) صفر c) لامحدود d) صفر سے کم

6۔ اگر A، S میں کا کوئی موقع ہے تو اسکا متمم P(A')..... کے مساوی ہے۔

(1) 1 (2) 0 (3) $1-A$ (4) $1-P(A)$

7۔ ذیل میں سے کونسا کسی موقع کے امکان نہیں ہوسکتا۔

(1) 0 (2) 0.5 (3) 1 (4) -1

9 UM T3 Maths 9. probability
Monday, March 11, 2019 8:02:30 PM

8۔ کسی تجربہ کا مخصوص نتیجہ ..... کہلاتا ہے۔

a) آزمائشی تجربہ b) سادہ موقع c) مرکب موقع d) نتیجہ

9۔ کسی تجربے کے ایک یا ایک سے زیادہ نتائج کا مجموعہ ..... کہلاتا ہے۔

a) موقع b) نتیجہ c) نظیری نقطہ d) ان میں سے کوئی نہیں

10۔ پانسہ کے چھ چہروں کو مساوی ہم شکل کہا جاتا ہے اگر وہ پانسہ ..... ہے۔

a) چھوٹا b) واضح c) چھ۔چہروں والا d) کروی

یاد رکھنے کے نکات

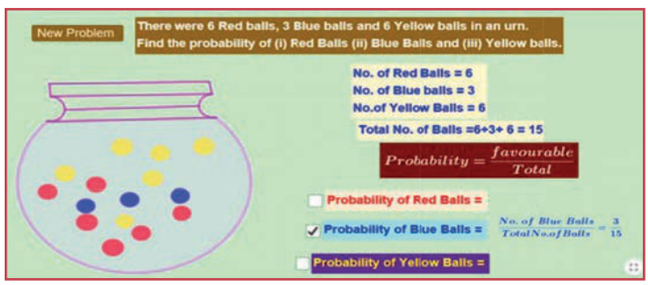
- اگر ہم کسی تجربے کے نتیجہ کی پہلے پیشن گوئی کر سکتے ہیں تو یہ متعین تجربہ کہلاتا ہے۔
- اگر ہم کسی تجربہ کے نتیجہ کی پہلی پیشن گوئی کر سکتے ہیں تو یہ متعین تجربہ کہلاتا ہے۔
- ایک تجربے کا نظیری عرصہ S اس سریعی تجربہ کے تمام ممکن نتائج کا مجموعہ ہے۔
- کسی تجربہ کے ایک مخصوص نتیجہ یا نتائج کا مجموعہ موقع کہلاتا ہے۔
- جب دو مواقع کے واقع ہونے کا اندازہ یکساں ہو تو یہ مساوی ہم شکل مواقع کہلاتے ہیں۔
- اگر دو مواقع ایک ہی آزمائش میں بیک وقت حاصل نہیں ہو سکتے تو انہیں باہم اخراج کرنے والے مواقع کہتے ہیں۔
- دو مواقع E اور E' متمم مواقع کہلاتے ہیں اگر $P(E) + P(E') = 1$
- وہ موقع جو ضرور واقع ہوتا ہے۔یقینی موقع کہلاتا ہے۔یقینی موقع کا امکان ایک ہے۔
- وہ موقع جو کبھی واقع نہیں ہوتا ناممکن موقع کہلاتا ہے۔ناممکن موقع کا امکان صفر ہے۔

9 UM T3 Maths 9. probability
Monday, March 11, 2019 8:02:30 PM

ICT Corner

ICT کارنر

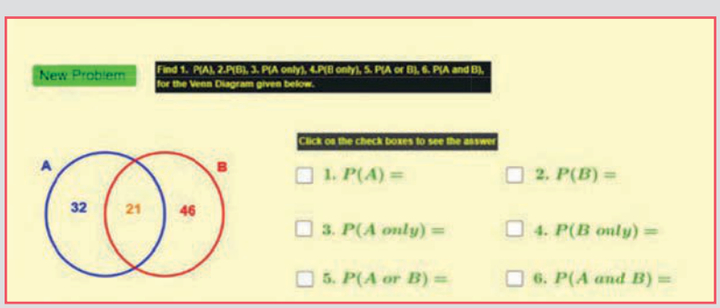
مطلوبہ نتیجہ کو اس تصویر میں دیکھا یا گیا ہے۔



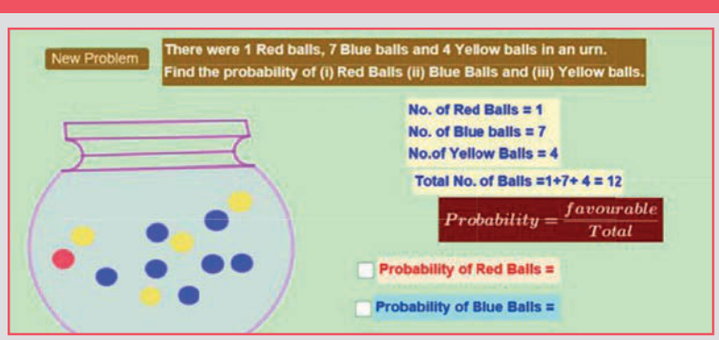
مرحلہ 1 : بروزر کھولئے اور نیچے دئے گئے URL لنک ٹیپ کیجئے (یا) QR کوڈ کو اسکین کیجئے۔ ''امکان'' نامی Geogebra ورک شیٹ کھلے گا۔ ون نقشے اور بنیادی امکان کے عنوان پر دو ورک شیٹیں ہونگے۔

مرحلہ 2 : ''نئے مسئلہ'' پر کلک کیجئے حل معلوم کیجئے اور بالترتیب خانوں پر کلک کیجئے اور پھر حل کی جانچ کیجئے۔

Step 1



Step 2



Browse in the link

Probability: https://ggbm.at/mj887yua or Scan the QR Code.

206SI

9 UM T3 Maths 9. probability
Monday, March 11, 2019 8:02:30 PM

جوابات (ANSWERS)

1 Set Language 1۔ مجموعے کی زبان

Exercise 1.1 مشق 1.1

1. (i) مجموعہ ہے (ii) مجموعہ نہیں ہے (iii) مجموعہ ہے (iv) مجموعہ نہیں ہے

2. (i) {I, N, D, A} (ii) {P, A, R, L, E, O, G, M} (iii) {M, I, S, P}

   (iv) {C, Z, E, H, O, S, L, V, A, K, I}

3. (a) (i) صحیح (ii) صحیح (iii) غلط (iv) صحیح (v) غلط (vi) غلط

   (b) (i) A (ii) C (iii) $\notin$ (iv) $\in$

4. (i) $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$ (ii) $B = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}\right\}$

   (iii) $C = \{64, 125\}$ (iv) $D = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$

5. (i) $B = \{$ ایک ہندوستان کرکٹ کی کھلاڑی جو200 رَن بنائے ایک روانہ بین الاقوامی کرکٹ میں $x : x\}$

   (ii) $C = \left\{x : x = \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$ (iii) $D = \{$ ایک سال کے ایک عربی مہینہ $x : x\}$

   (iv) $E = \{$ ہے 9 سے کم ایک طاق صحیح عدد $x : x\}$

6. (i) $P =$ ج سے شروع ہونے والے انگریزی مہینوں کا مجموعہ

   (ii) $Q =$ 5 اور 31 کے درمیان کے اعداد اولیٰ کا مجموعہ

   (iii) $R =$ 5 سے کم والے طبعی اعداد کا مجموعہ

   (iv) $S =$ انگریزی حروف کے حرفِ علّت کا مجموعہ

Exercise 1.2

1. (i) $n(M) = 6$ (ii) $n(P) = 5$ (iii) $n(Q) = 3$ (iv) $n(R) = 10$ (v) $n(S) = 5$

2. (i) محدود مجموعہ ہے (ii) لامحدود مجموعہ ہے (iii) لامحدود مجموعہ ہے (iv) محدود مجموعہ ہے

3. (i) معادل مجموعے (ii) غیر مساوی مجموعے (iii) مساوی مجموعے (iv) معادل مجموعے

9 maths 10 answers
Wednesday, March 13, 2019 7:05:10 PM

4. (i) خالی مجموعہ ہے (ii) خالی مجموعہ ہے (iii) یک عنصری مجموعہ (iv) خالی مجموعہ ہے

5. (i) ڈھکنے والے مجموعے (ii) جدا مجموعے (iii) ڈھکنے والے مجموعے

6. (i) {مربع، معین} (ii) {دائرہ} (iii) {مثلث} (iv) { }

7. $\{\ \}, \{a\}, \{a, b\}, \{a, \{a, b\}\}$

8. (i) $\{\{\ \}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

(ii) $\{\{\ \}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\ \}, \{1, 2, 3\}\}$

(iii) $\{\{\ \}, \{p\}, \{q\}\ \{r\}, \{s\}, \{p, q\}, \{p, r\}, \{p, s\}, \{q, r\}, \{q, s\}, \{r, s\}, \{p, q, r\}, \{p, q, s\}, \{p, r, s\}, \{q, r, s\}, \{p, q, r, s\}\}$ (iv) $P(E) = \{\{\ \}\}$

9. (i) 8, 7 (ii) 1024, 1023

10. (i) 16 (ii) 1 (iii) 8

Exercise 1.3

1. (i) $\{2, 4, 7, 8, 10\}$ (ii) $\{3, 4, 6, 7, 9, 11\}$ (iii) $\{2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

(iv) $\{4, 7\}$ (v) $\{2, 8, 10\}$ (vi) $\{3, 6, 9, 11\}$

(vii) $\{1, 3, 6, 9, 11, 12\}$ (viii) $\{1, 2, 8, 10, 12\}$

(ix) $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

2. (i) $\{2, 5, 6, 10, 14, 16\}, \{2, 14\}, \{6, 10\}, \{5, 16\}$

(ii) $\{a, b, c, e, i, o, u\}, \{a, e, u\}, \{b, c\}, \{i, o\}$

(iii) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}, \{6, 7, 8, 9, 10,\}, \{0\}$

(iv) $\{m, a, t, h, e, i, c, s, g, o, r, y\}, \{e, m, t,\}, \{a, h, i, c, s\}, \{g, o, r, y\}$

3. (i) $\{a, c, e, g\}$ (ii) $\{b, c, f, g\}$ (iii) $\{a, b, c, e, f, g\}$ (iv) $\{c, g\}$ (v) $\{c, g\}$

(vi) $\{a, b, c, e, f, g\}$ (vii) $\{b, d, f, h\}$ (viii) $\{a, d, e, h\}$

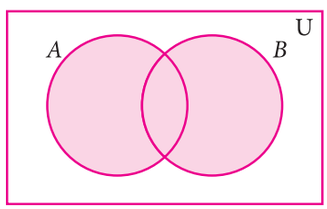
9 maths 10 answers
Wednesday, March 13, 2019 7:05:11 PM

4. (i) {0, 2, 4, 6} (ii) {1, 4, 6} (iii) {0, 1, 2, 4, 6} (iv) {4, 6} (v) {4, 6}

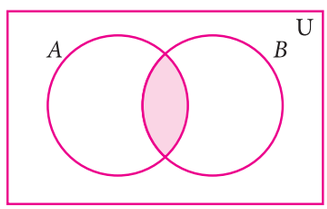
(vi) {0, 1, 2, 4, 6} (vii) {1, 3, 5, 7} (viii) {0, 2, 3, 5, 7}

5. (i) {1, 2, 7} (ii) {*m*, *o*, *p*, *q*, *j*} (iii) {6, 9, 10}

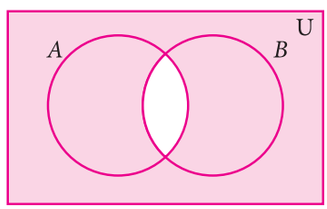
6. (i) $Y-X$ (ii) $(X \cup Y)'$ (iii) $(X - Y) \cup (Y - X)$

7. (i) 

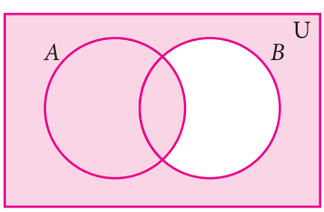
$A \cup B$

(ii) 

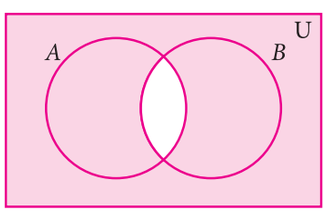
$A \cap B$

(iii) 

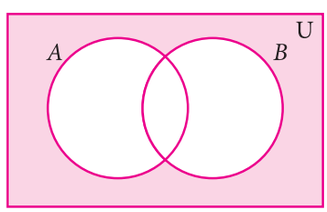
$(A \cap B)'$

(iv) 

$(B - A)'$

(v) 

$A' \cup B'$

(vi) 

$A' \cap B'$

(vii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Exercise 1.4

1. (i) {1,2,3,4,5,7,9,11} (ii) {2,5} (iii) {3,5 }

Exercise 1.5

1. (i) $\{3, 4, 6\}$ (ii) $\{-1, 5, 7\}$ (iii) $\{-3, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

(iv) $\{-3, 0, 1, 2\}$ (v) $\{1, 2, 4, 6\}$ (vi) $\{4, 6\}$ (vii) $\{-1, 3, 4, 6\}$

2. (i) { a, b, c, d, e, f} (ii) $\{a, b, d\}$ (iii) { a,b,c,d,e,f } (iv) {a, b, d }

Exercise 1.6

1. (i) 15, 65 (ii) 250, 600 4. (1) 17 (ii) 22 (iii) 47

5. (i) 10 (ii) 10 (iii) 25 6. 1000 7. 8 8. Not correct

9. (i) 185 (ii) 141 (iii) 326 10. 70

11. $x = 20$, $y = 40$, $z = 30$ 12. (i) 5 (ii) 7

(iii) 8 13. 5

9 maths 10 answers
Wednesday, March 13, 2019 7:05:11 PM

Exercise 1.7

1. (2) 2. (1) 3. (3) 4. (2) 5. (4) 6. (1) 7. (2) 8. (4) 9. (3) 10. (4)

11. (2) 12. (1) 13. (1) 14. (3) 15. (4) 16. (1) 17. (4) 18. (3) 19. (3) 20. (1)

2. Real Numbers 2۔ حقیقی اعداد

Exercise 2.1

1. D 2. $-\frac{6}{11}, -\frac{5}{11}, -\frac{4}{11}, \ldots \frac{1}{11}$

3. (i) $\frac{9}{40}, \frac{19}{80}, \frac{39}{160}, \frac{79}{320}, \frac{159}{640}$; کئی حلوں میں یہ ایک حل۔ کئی اور بھی حل ہو سکتے ہیں۔

(ii) 0.101, 0.102, ... 0.109 کئی حلوں میں یہ ایک حل۔ کئی اور بھی حل ہو سکتے ہیں۔

(iii) $-\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}, -\frac{9}{8}, -\frac{17}{16}, -\frac{33}{32}$ کئی حلوں میں یہ ایک حل۔ کئی اور بھی حل ہو سکتے ہیں۔

Exercise 2.2

1. (i) 0.2857142..., غیر اختتام پذیر اور متوالی (ii) $-5.\overline{27}$, غیر اختتام پذیر اور متوالی

(iii) $7.\overline{3}$, غیر اختتام پذیر اور متوالی (iv) 1.635, اختتام پذیر

2. $0.\overline{076293}, 6$ 3. $0.03\overline{03}, 2.\overline{15}$

4. (i) $\frac{24}{99}$ (ii) $\frac{2325}{999}$ (iii) $-\frac{1283}{250}$ (iv) $\frac{143}{45}$ (v) $\frac{5681}{330}$ (vi) $-\frac{190924}{9000}$

5. (i) اختتام پذیر (ii) اختتام پذیر (iii) غیر اختتام پذیر (iv) غیر اختتام پذیر

Exercise 2.3

2. (i) 0.301202200222..., 0.301303300333... (ii) 0.8616611666111 ..., 0.8717711777111 ...

(iii) 1.515511555..., 1.616611666...

3. 2.2362, 2.2363

Exercise 2.5

1.(i) 5^4 (ii) 5^{-1} (iii) $5^{\frac{1}{2}}$ (iv) $5^{\frac{3}{2}}$

2.(i) 4^2 (ii) $4^{\frac{3}{2}}$ (iii) $4^{\frac{5}{2}}$

9 maths 10 answers
Wednesday, March 13, 2019 7:05:11 PM

3.(i) 7 (ii) 9 (iii) $\frac{1}{27}$ (iv) $\frac{25}{16}$

4.(i) $5^{\frac{1}{2}}$ (ii) $7^{\frac{1}{2}}$ (iii) $7^{\frac{10}{3}}$ (iv) $10^{\frac{-14}{3}}$

5.(i)2 (ii) 3 (iii) 10 (iv) $\frac{4}{5}$

Exercise 2.6

1.(i) $21\sqrt{3}$ (ii) $3\sqrt[3]{5}$ (iii) $26\sqrt{3}$ (iv) $8\sqrt[3]{5}$

2. (i) $\sqrt{30}$ (ii) $\sqrt{5}$ (iii) 30 (iv) $49a - 25b$

(v) $\frac{5}{16}$ 3.(i) 1.852 (ii) 23.978

4. (i) $\sqrt[3]{5} > \sqrt[6]{3} > \sqrt[9]{4}$ (ii) $\sqrt{\sqrt{3}} > \sqrt[2]{\sqrt[3]{5}} > \sqrt[3]{\sqrt[4]{7}}$

5. (i) ہاں (ii) ہاں (iii) ہاں (iv) ہاں

6. (i) ہاں (ii) ہاں (iii) ہاں (iv) ہاں

Exercise 2.7

1.(i) $\frac{\sqrt{2}}{10}$ (ii) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (iii) $\frac{5\sqrt{6}}{6}$ (iv) $\frac{\sqrt{30}}{2}$

2. (i) $\frac{4}{3}(5 + 2\sqrt{6})$ (ii) $13 - 4\sqrt{6}$ (iii) $\frac{9 + 4\sqrt{30}}{21}$ (iv) $-2\sqrt{5}$

3. $a = \frac{-4}{3}, b = \frac{11}{3}$ 4. $x^2 + \frac{1}{x^2} = 18$ 5. 5.414

Exercise 2.8

1. (i) 5.6943×10^{11} (ii) 2.00057×10^{3} (iii) $6.0 \cdot 10^{-7}$ (iv) $9.000002 \cdot 10^{-4}$

2. (i) 3459000 (ii) 56780 (iii) 0.0000100005 (iv) 0.0000002530009

3. (i) 1.44×10^{28} (ii) 8.0×10^{-60} (iii) 2.5×10^{-36} 4.(i) 7.0×10^{9}

(ii) 9.4605284×10^{15} km (iii) $9.1093822 \times 10^{-31}$ kg

5. (i) 1.505×10^{8} (ii) 1.5522×10^{17} (iii) 1.224×10^{7} (iv) 1.9558×10^{-1}

Exercise 2.9

1. (4) 2. (3) 3. (2) 4. (1) 5. (4) 6. (2) 7. (2) 8. (2) 9. (4) 10. (1)

11. (4) 12. (4) 13. (4) 14. (2) 15. (2) 16. (3) 17. (2) 18. (4) 19. (2) 20. (3)

9 maths 10 answers
Wednesday, March 13, 2019 7:05:11 PM

3. Algebra 3۔ الجبرا

Exercise 3.1

1. (i) کثیر رقمی نہیں ہے (ii) کثیر رقمی (iii) کثیر رقمی نہیں ہے (iv) کثیر رقمی
(v) کثیر رقمی (vi) کثیر رقمی نہیں ہے

2.

	x^2 کا ضریب	x کا ضریب
(i)	$\frac{2}{5}$	-3
(ii)	-2	$-\sqrt{7}$
(iii)	π	-1
(iv)	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$
(v)	1	$-\frac{7}{2}$

3. (i) 7 (ii) 4 (iii) 5 (iv) 6 (v) 4

4.

	گھٹتی ہوئی ترتیب	بڑھتی ہوئی ترتیب
(i)	$\sqrt{7}\,x^3 + 6x^2 + x - 9$	$-9 + x + 6x^2 + \sqrt{7}\,x^3$
(ii)	$-\frac{7}{2}x^4 - 5x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x$	$x + \frac{1}{2}x^2 - 5x^3 - \frac{7}{2}x^4$
(iii)	$7x^3 - \frac{6}{5}x^2 + 4x - 1$	$-1 + 4x - \frac{6}{5}x^2 + 7x^3$
(iv)	$9y^4 + \sqrt{5}\,y^3 + y^2 - \frac{7}{3}y - 11$	$-11 - \frac{7}{3}y + y^2 + \sqrt{5}\,y^3 + 9y^4$

5. (i) $6x^3+6x^2-14x+17$, 3 (ii) $7x^3+7x^2+11x-8$, 3 (iii) $16x^4-6x^3-5x^2+7x-6$, 4

6. (i) $7x^2+8$, 2 (ii) $-y^3+6y^2-14y+2$, 3 (iii) $z^5-6z^4-6z^2-9z+7$, 5

7. $x^3-8x^2+11x+7$ 8. $2x^4-3x^3+5x^2-5x+6$

9. (i) $6x^4+7x^3-56x^2-63x+18$, 4 (ii) $105x^2-33x-18$, 2 (iii) $30x^3-77x^2+54x-7$, 3

10. x^2+y^2+2xy, ₹ 225 11. $9x^2-4$, 3596 sq. units

12. مکعبی کثیر رقمی یا 3 درجہ کی کثیر رقمی

Exercise 3.2

1. (i) 6 (ii) −6 (iii) 3 2. 1 3. (i) 3 (ii) $-\frac{5}{2}$ (iii) $\frac{3}{2}$ (iv) 0 (v) 0 (vi) $-\frac{b}{a}$

4. (i) $\frac{6}{5}$ (ii) −3 (iii) $-\frac{9}{10}$ (iv) $\frac{4}{9}$

6. (i) 2 (ii) 3 (iii) 0 (iv) 1 (v) 1

Exercise 3.3

1. $p(x)$ کا $g(x)$ حاصل ضرب نہیں

2. (i) باقی : 0 (ii) باقی $\frac{3}{2}$ (iii) باقی : 62

3. باقی : −143 4. باقی : 2019 5. $K = 8$

9 maths 10 answers
Wednesday, March 13, 2019 7:05:11 PM

6. $a = -3$, بچت : 27 7. (i) ایک جزوضربی ہے $(x-1)$ (ii) جزوضربی نہیں ہے۔ $(x-1)$
8. $p(x)$ کا ایک جزوضربی ہے $(x-5)$ 9. $m = 10$ 11. $k = 3$ 12. ہاں

Exercise 3.4

1. (i) $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy + 24yz + 16xz$ (ii) $p^2 + 4q^2 + 9r^2 - 4pq + 12qr - 6pr$
(iii) $8p^3 - 24p^2 - 14p + 60$ (iv) $27a^3 + 27a^2 - 18a - 8$

2.(i) 18,107,210 (ii) −32, −6, +90

3. (i) 14 (ii) $\frac{59}{70}$ (iii) 78 (iv) $\frac{78}{70}$

4. (i) $27a^3 - 64b^3 - 108a^2b + 144ab^2$ (ii) $x^3 + \frac{1}{y^3} + \frac{3x^2}{y} + \frac{3x}{y^2}$

5.(i) 941192 (ii) 1003003001

6. 29 7. 280 8. 335 9. 198 10. $\pm 5, \pm 110$

11. 36 12.(i) $8a^3 + 27b^3 + 64c^3 - 72abc$ (ii) $x^3 - 8y^3 + 27z^3 + 18xyz$

13.(i) −630 (ii) $\frac{-9}{4}$

14. 72xyz

Exercise 3.5

1.(i) $2a^2(1 + 2b + 4c)$ (ii) $(a - m)(b - c)$

2.(i) $(x + 2)^2$ (ii) $3(a - 4b)^2$

(iii) $x(x + 2)(x - 2)(x^2 + 4)$ (iv) $\left(m + \frac{1}{m} + 5\right)\left(m + \frac{1}{m} - 5\right)$

(v) $6(1 + 6x)(1 - 6x)$ (vi) $\left(a - \frac{1}{a} + 4\right)\left(a - \frac{1}{a} - 4\right)$

3. (i) $(2x + 3y + 5z)^2$

(ii) $(-5x + 2y + 3z)^2$ (or) $(5x - 2y - 3z)^2$

4. (i) $(2x + 5y)(4x^2 - 10xy + 25y^2)$

(ii) $(3x - 2y)(9x^2 + 6xy + 4y^2)$

(iii) $(a + 2)(a - 2)(a^2 + 4 - 2a)(a^2 + 4 + 2a)$

5. (i) $(x + 2y - 1)(x^2 + 4y^2 + 1 - 2xy + 2y + x)$

(ii) $(l - 2m - 3n)(l^2 + 4m^2 + 9n^2 + 2lm - 6mn + 3ln)$

9 maths 10 answers
Wednesday, March 13, 2019 7:05:12 PM

Exercise 3.6

1.(i) $(x+6)(x+4)$

(ii) $(z+6)(z-2)$

(iii) $(p-8)(p+2)$

(iv) $(t-9)(t-8)$

(v) $(y-20)(y+4)$

(vi) $(a+30)(a-20)$

2. (i) $(2a+5)(a+2)$

(ii) $(x-7y)(5x+6y)$ (iii) $(2x-3)(4x-3)$ (iv) $2(3x+2y)(xy+2\ )$

(v) $3x^2(3y+2)^2$ (vi) $(a+b+6)(a+b+3)$

3. (i) $(p-q-8)(p-q+2)$

(ii) $(m+6n)(m-4n)$ (iii) $\left(a+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}a-3\right)$ (iv) $(a+1)(a-1)(a^2-2)$

(v) $m(4m+5n)(2m-3n)$

(vi) $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2$

Exercise 3.7 خارجِ قسمت

1. (i) خارجِ قسمت : $4x^2-6x-5$, بچت : 33 (ii) خارجِ قسمت : $4y^2-6y+5$, بچت : -10

(iii) خارجِ قسمت : $4x^2+2x+1$, بچت : 0 (iv) خارجِ قسمت : $8z^2-6z+2$, بچت : 10

2. لمبائی : $x+4$ 3. اونچائی : $5x-4$ 4. اوسط : $x^2-5x+25$

5. (i) $x^2+4x+5,\ 12$ (ii) $(x^2-1),\ -2$

(iii) $3x^2-11x+40,\ -125$ (iv) $2x^3-\frac{x^2}{2}-\frac{3x}{8}+\frac{51}{32},\ \frac{109}{32}$

6. $4x^3-2x^2+3,\ p=-2,\ q=0,$ بچت $=-10$

7. $a=20,\ b=94$ & بچت $=388$

Exercise 3.8

1.(i) $(x-2)(x+3)(x-4)$ (ii) $(x+1)(x-2)(2x-1)$

(iii) $(x-1)(2x-1)(2x+3)$ (iv) $(x+2)(x+3)(x-4)$

(v) $(x-1)(x-2)(x+3)$ (vi) $(x-1)(x-10)(x+1)$

9 maths 10 answers
Wednesday, March 13, 2019 7:05:12 PM

Exercise 3.9

1. (i) p^5 (ii) 1 (iii) $3a^2b^2c^3$ (iv) $16x^6$

(v) abc (vi) $7xyz^2$ (vii) 25ab (viii) 1

2. (i) 1 (ii) a^{m+1} (iii) $(2a + 1)$ (iv) 1

(v) $(x+1)(x-1)$ (vi) $(a-3x)$

Exercise 3.10

2. (i) (5,2) (ii) لامحدود حل ہیں (iii) حل نہیں ہے۔

(iv) (−3, −3) (v) (1,3) (vi) (−3, 3)

3. $75km/hr, 25km/hr$

Exercise 3.11

1.(i)(2, −1) (ii) (4,2) (iii) (40,100) (iv) $\left(\sqrt{8},\sqrt{3}\right)$

(2) 45 (3) 409

Exercise 3.12

1.(i) (2,1) (ii) (7,2) (iii) (80,30) (iv) $\left(1,\frac{3}{2}\right)$

(v) $\left(\frac{1}{3},-1\right)$ (vi) (2,4) (2) ₹30000, ₹40000 (3) 75, 15

Exercise 3.13

1.(i) (3,4) (ii) (3, −1) (iii) $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$

(2) 2 روپئے کے سکے 60 عدد، 5 روپئے کے سکے 20 عدد

(3) بڑا پائپ 40 گھنٹے؛ چھوٹا پائپ 60 پائپ

Exercise 3.14

1. 64
2. $\frac{5}{7}$
3. $\angle A = 120°, \angle B = 70°, \angle C = 60°, \angle D = 110°$
4. ₹20000 = کی قیمت TV ، ₹10000 = فرڈج کی قیمت
5. 40, 48
6. 1 ہندوستانی-18دن ؛ 1 چینی- 36 دِن

9 maths 10 answers
Wednesday, March 13, 2019 7:05:12 PM

Exercise 3.15

1. (4) 2. (3) 3. (4) 4. (4) 5. (2) 6. (1) 7. (4) 8. (4) 9. (4) 10. (3)

11. (2) 12. (3) 13. (3) 14. (2) 15. (2) 16. (3) 17. (3) 18. (4) 19. (2) 20. (3)

21. (2) 22. (4) 23. (3) 24. (2) 25. (1) 26. (2) 27. (3) 28. (1) 29. (3) 30. (2)

4 Geometry علم ہندسہ ۔4

Exercise 4.1

1. (i) 70° (ii) 288° (iii) 89° 2. 30°, 60°, 90° 5. 80°, 85 °, 15 °

Exercise 4.2

1. (i) 40°, 80°, 100°, 140° 2. 62°, 114° , 66° 3. 44° 4. 10cm

7. (i) 30° (ii) 105° (iii) 75° (iv) 105° 8. 122° , 29°

9. نسبتیں مساوی ہیں 10. d = 7.6

Exercise 4.3

1. 24cm 2. 17cm 3. 8cm, 45°, 45°

4. 18cm 5. 14 cm 6. 6 cm

7. (i) 45° (ii) 10° (iii) 55° (iv) 120° (v) 60°

8. $\angle BDC = 25°, \angle DBA = 65°, \angle COB = 50°$

Exercise 4.4

1. 30° 2.(i) $\angle ACD = 55°$ (ii) $\angle ACB = 50°$ (iii) $\angle DAE = 25°$

3. $\angle A = 64°$; $\angle B = 80°$; $\angle C = 116°$; $\angle D = 100°$

4.(i) $\angle CAD = 40°$ (ii) $\angle BCD = 80°$ 5. 5cm = نصف قطر 6. 3.25m

7. $\angle OAC = 30°$ 8. 5.6m 9. $\angle RPO = 60°$

Exercise 4.7

1. (2) 2. (3) 3. (1) 4. (4) 5. (4) 6. (3) 7. (2) 8. (2) 9. (4) 10. (2)

11. (1) 12. (3) 13. (1) 14. (1) 15. (4) 16. (2) 17. (2) 18. (3) 19. (2) 20. (4)

9 maths 10 answers
Wednesday, March 13, 2019 7:05:12 PM

5 Coordinate Geometry 5۔ محدّدی علم ہندسہ

Exercise 5.1

1. $P(-7,6)$ = ربع II ; $Q(7,-2)$ = ربع IV ; $R(-6,-7)$ = ربع III ;
$S(3,5)$ = ربع I ; and $T(3,9)$ = ربع I

2. (i) $P = (-4,4)$ (ii) $Q = (3,3)$ (iii) $R=(4,-2)$ (iv) $S = (-5,-3)$

3. خطِ مستقیم x- محور کے متوازی ہے (ii) خطِ مستقیم y- محور پر واقع ہے۔

4. (i مربع (ii منحرف

Exercise 5.2

1. (i) $\sqrt{10}$ اکائیاں (ii) $2\sqrt{26}$ اکائیاں (iii) $c-a$ (iv)13 اکائیاں

2. (i) ہم خط (ii) ہم خط 7. 5 یا 1

8. A(9,9) یا (–5,5) کے محدد 9. $y = 4x+9$ 10. $P(2,0)$ کے محدد

12. $30\sqrt{2}$

Exercise 5.3

1.(i) $(-4,-1)$ (ii) $(0,-1)$ (iii) $(a+b,a)$ (iv) $(1,-1)$

2. $(-5,-3)$ 3. $P = -15$ 4. $(9,3)(-5,5)$ and $(1,1)$

5. $\left(\frac{9}{2},\frac{3}{2}\right)$ 6. $(1,8)$

Exercise 5.4

1. $(7,3)$ 2. 5:2 3. $(3,4)$

4. $(-2,3),(1,0)$ 5. $\left(\frac{19}{2},\frac{13}{2}\right),\left(\frac{-9}{2},\frac{-15}{2}\right)$ 7. $(3,2)$

Exercise 5.5

1.(i) $(2,-3)$ (ii) $\left(\frac{-8}{3},\frac{-11}{3}\right)$ 2. $(4,-6)$ 3. 5 اکائیاں

4. 20 5. $3\sqrt{\frac{5}{2}}$ اکائیاں 6. $(1,0)$ 7. $(5,-2)$

Exercise 5.6

1. (3) 2. (3) 3. (3) 4. (2) 5. (2) 6. (4) 7. (3) 8. (3) 9. (3) 10. (3)

11. (4) 12. (1) 13. (3) 14. (4) 15. (2) 16. (3) 17. (2) 18. (2) 19. (4) 20. (2)

9 maths 10 answers
Wednesday, March 13, 2019 7:05:12 PM

6 Trigonometry علم مثلث 6۔

Exercise 6.1

1. $\sin B = \frac{9}{41}; \cos B = \frac{40}{41}; \tan B = \frac{9}{40};\ \text{cosec}B = \frac{41}{9}; \sec B = \frac{41}{40}; \cot B = \frac{40}{9}$

2. (i) $\sin B = \frac{12}{13}$ (ii) $\sec B = \frac{13}{5}$ (iii) $\cot B = \frac{5}{12}$ (iv) $\cos C = \frac{4}{5}$
(v) $\tan C = \frac{3}{4}$ (vi) $\text{cosec}C = \frac{5}{3}$

3. $\sin\theta = \frac{1}{2}; \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}; \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}};\ \text{cosec}\theta = \frac{2}{1}; \sec\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}; \cot\theta = \sqrt{3}$

4. $\frac{3}{40}$ 5. $\sin A = \frac{1-x^2}{1+x^2}; \tan A = \frac{1-x^2}{2x}$ 7. $\frac{1}{2}$

8. $\frac{1}{2}$ 9. $\sin\alpha = \frac{4}{5}; \cos\beta = \frac{4}{5}; \tan\phi = \frac{4}{3}$ 10. 7m

Exercise 6.2

2.(i) 0 (ii) $\frac{7}{4}$ (iii) 3 4. 2

Exercise 6.3

1.(i) 1 (ii) 1 (iii) 1 (iv) 2

Exercise 6.4

1.(i) 0.7547 (ii) 0.2648 (iii) 1.3985 (iv) 0.3641
(v) 0.8302 (vi) 2.7907 2.(i) 85°57′ (or) 85°58′ (or) 85°59′
(ii) 47°27′ (iii) 4°7′ (iv) 87°39′ (v) 82°30′
3.(i) 1.9970 (ii) 2.8659 4. 18.81 cm^2 5. 36°52′
6. 54.02 m

Exercise 6.5

1. (1) 2. (2) 3. (2) 4. (3) 5. (2) 6. (3) 7. (3) 8. (1) 9. (2) 10. (2)

7 Mensuration مساحت 7۔

Exercise 7.1

1.(i) 120 cm^2 (ii) 7.2 m^2 2. 1320 m^2, ₹26400 3. 12000 m^2
4. 1558.8 cm^2 5. ₹ 1050 6. 240 cm^2 7. 138 cm^2
8. 354m^2 9. 1536 m^2 10. 672 m^2

9 maths 10 answers
Wednesday, March 13, 2019 7:05:12 PM

Exercise 7.2

1. 1160cm^2, 560cm^2 2. ₹1716 3. ₹3349

4.(i) 384 m^2, 256 m^2 (ii) 2646 cm^2, 1764 cm^2 (iii) 337.5 cm^2, 225 cm^2

5. 1600 cm^2 6. 253.50 m^2, ₹6084 7. 224cm^2, 128cm^2

Exercise 7.3

1.(i) 576 cm^3 (ii) 2250 m^3 2. 630 cm^3

3. 25 cm, 20 cm, 15 cm 4. 2624000 *litres* 5. 25000

6. 12 m 7.(i) 125 cm^3 (ii) 42.875 m^3 (iii) 9261 cm^3

8. 5 m 9. 15 cm

Exercise 7.4

1. (3) 2. (2) 3. (4) 4. (3) 5. (3) 6. (1) 7. (2) 8. (3) 9. (4) 10. (1)

8 Statistics 8۔ شماریات

Exercise 8.1

1. 27°C 2. 44kg 3. 56.96 (or) 57 (اندازاً)

4. 142.5 mm^3 5. $p = 20$ 6. 40.2 7. 29.29 8. 29.05

Exercise 8.2

1. 47 2. 44 3. 21 4. 32

5. 31 6. 38

Exercise 8.3

1. 6600, 7000, 7000 2. 3.1 and 3.3 (دوہرے طرز والا) 3. 15

4. 40 5. 24 6. 58.5

Exercise 8.4

1. (1) 2. (3) 3. (3) 4. (2) 5. (1) 6. (4) 7. (1) 8. (2) 9. (2) 10. (3)

9 maths 10 answers
Wednesday, March 13, 2019 7:05:13 PM

9 Probability ۹۔ امکان

Exercise 9.1

1. $\frac{1}{7}$ 2. $\frac{3}{13}$ 3. $\frac{1}{2}$ 4.(i) $\frac{5}{24}$

(ii) $\frac{1}{8}$ (iii) $\frac{2}{3}$ 5. $\frac{1}{4}$ 6.(i) 0

(ii) $\frac{1}{12}$ (iii) 1 7. $\frac{1}{280}$ 8. $\frac{1}{5}$

9. $\frac{3}{4}$

Exercise 9.2

1. 0.9975 2. $\frac{209}{400}$ 3. $\frac{15}{8}$ 4. 0.28

5.(i) $\frac{1}{6}$ (ii) $\frac{43}{75}$ (iii) $\frac{1}{75}$

Exercise 9.3

1. (4) 2. (2) 3. (1) 4. (4) 5. (1) 6. (4) 7. (4) 8. (4) 9. (1) 10. (2)

9 maths 10 answers
Wednesday, March 13, 2019 7:05:13 PM

MATHEMATICAL TERMS حسابی اصطلاحات

Abscissa	x محدّد کا فاصلہ (حدف)
Acute triangle	مثلثِ حادہ
Adjacent angles	متصل زاویے
Algebraic expression	الجبرائی جملہ
Alternate angles	متبادلہ زاویے
Altitudes of a triangle	ایک مثلث کا عمود (یا ارتفاع)
Angle	زاویہ
Angle of elevation	زاویہ فراز
Arithmetic mean	حسابی اوسط
Associative property	مربوطی خاصیت
Assumed mean	مفروضہ اوسط
Binomial expression	دورقمی جملہ
Binomial surds	دورقمی سرڈ
Cardinal number of a set	مجموعہ کا بنیادی عدد
Cartesian plane	کارتیسی مسطح
Cartesian coordinate system	کارتیسی محددی نظام
Centre	مرکز
Centriod	ہندسی مرکز
Chord	وتر
Circum radius	حائط نصف قطر
Circumcentre of a triangle	ایک دائرہ کا حائط مرکز
Circumcircle	حائط دائرہ
Circumference	محیط
Classical probability	کلاسیکی امکان
Ordinate	y محور کا فاصلہ (معین)
Co-efficient	ضریب
Coinciding lines	منطبق خطوط
Collections	ذخیرہ

Commutative property	متبادلی خاصیت
Compound surds	مرکب سرڈ
Complement of a set	ایک مجموعہ کا متمم
Complementary angles	متمم زاویہ
Complementary events	متمم مواقع
Concentric circle	ہم مرکز دائرہ
Concurrent lines	متراکز خطوط
Congruent circle	متماثل دائرہ
Congruent triangles	متماثل مثلثیں
Conjugate	زوجی معکوس
Consistent	مستقل پذیر
Constant	مستقل
Coordinate axes	محددی محوریں
Corresponding angles	نظیری زاویے
Cube	مکعب
Cubic polynomial	مکعبی کثیر رقمی
Cuboid	مکعب نما
Cyclic Quadrilateral	مدور چار ضلعی
Decimal expansion	عشری پھیلاؤ
Decimal representation	عشری اظہار
Degree of polynomial	کثیر رقمی کا درجہ
Denseness property	کثافتی خصوصیت
Descriptive form	توضیحی طریقہ
Deterministic Experiment	متعین تجربہ
Diagonal	وتر
Diameter	قطر
Dice	پانسہ
Difference of two sets	دو مجموعوں کا فرق
Disjoint sets	جدا سٹ
Division algorithm	تقسیم کا الگورتم
Division Algoritham of polynomial	کثیر رقمی کی تقسیم کا الگورتم
Edge	کنارہ

9 maths 10 answers
Wednesday, March 13, 2019 7:05:13 PM

Empirical probability	تجرباتی امکان
Empty set/Null set	خالی مجموعہ
Equal sets	مساوی مجموعے
Equally likely event	مساوی ہم شکل موقع
Equiangular triangle	مثلث مساوی الزاویہ
Equilateral triangle	مثلث مساوی الاضلاع
Equilibrium	توازن
Equivalent sets	معادل مجموعے
Event	موقع
Excentre	بیروں مرکز
Externally	بیرونی طور پر
Face of a solid	ایک ٹھوس کا چہرہ (سطح)
Factor theorem	مسئلہ جزوضربی
Factorisation	اجزاءضربی
Finite set	محدود سٹ
Frequency table	تعددی جدول
Greatest Common Divisor (G.C.D)	مشترک مقسوم علیہ اعظم
Grouped data	گروہی معطیات
Hypotenuse	وتر
Identities	تماثلات
Impossible event	ناممکن موقع
Incentre	درون مرکز
Incircle	درون دائرہ
Inconsistent	غیر مستقل پذیر
Indices	قوتیں
Infinite set	لامحدود مجموعہ
Inradius	درون نصف قطر
Interior angles	اندرونی زاویے
Internally	اندرونی طور پر
Intersecting lines	قاطع خطوط
Intersection of two sets	دو مجموعوں کا تقاطع

Irrational numbers	غیر ناطق اعداد
Isosceles Trapezium	منحرف مساوی الساقین
Isosceles triangles	مثلثِ مساوی الساقین
Lateral surface area	طرفی سطحی رقبہ
Linear equations	خطی مساوات
Linear pair of angles	خطی جوڑی زاویے
Linear polynomial expression	خطی کثیر رقمی جملے
Major sector	قطاع کبیر
Mean difference	اوسط کا فرق
Measures of central tendency	مرکزی رجحان کی پیمائش
Median	وسطانیہ
Median of a triangle	مثلث کا خطِ وسطی
Mid point	وسطی نقطہ
Minor sector	قطاع صغیر
Mixed surds	مخلوط سرڈ
Mode	طرز
Monomial expression	ایک رقمی جملہ
Mutually exclusive events	باہم اخراج کرنے والا موقع
Negative integers	منفی سالم اعداد
Non-terminating decimals	غیر اختتام پذیر عشری اعداد
Obtuse traingle	مثلثِ منفرجۃ الزاویہ
Opposite side	مقابل ضلع
Ortho centre of a triangle	مثلث کا عمودی مرکز
Outcome	نتیجہ
Overlapping sets	ایک دوسرے کو ڈھکنے والے سٹ
Parallel lines	متوازی خطوط
Period of decimals	عشری اعداد کا وقفہ
Polygon	کثیر ضلعی
Polynomial equation	کثیر رقمی مساوات

9 maths 10 answers
Wednesday, March 13, 2019 7:05:13 PM

Set operations	سٹ کے اعمال
Sets	مجموعے
Singular set/Singleton set	یک عنصری مجموعہ
Square root	جذرالمربع
Step-deviation method	مرحلاتی انحراف کا طریقہ
Substitution method	اندراج کا طریقہ
Subset	تحتی مجموعہ
Surd / Irrational roots	سرڈ/غیر ناطق اعداد کا جذرالمربع
Sure event	یقینی موقع
Symmetric difference of sets	مجموعوں کا تشاکل فرق
Synthetic division	ترکیبی تقسیم
Terminating Decimals	اختتام پذیر عشری اعداد
Total surface area	کل سطحی رقبہ
Transversal	قاطع
Trapezium	منحرف
Trial	آزمائشی تجربہ
Trigonometry	علم مثلث
Trinomial expression	سہ رقمی جملے
Uncertainty	غیر یقینی
Ungrouped data	غیر گروہی معطیات
Union of sets	مجموعوں کا اتحاد
Universal set	ہمہ گیر سٹ
Venn Diagram	ون نقشہ
Vertically opposite angles	عمودی مقابل زاویے
Vertex	راس
Volume	حجم
Well defined	خوب واضح
Zero / Factor	صفر / جزوضربی
Zeros of polynomial	کثیر رقمی (جذور) کے صفر

Positive integers	مثبت سالم اعداد
Power set	قوتی مجموعہ
Primary data	ابتدائی معطیات
Probability	امکان
Proper sub set	موزوں تحتی مجموعہ
Pure surds	خالص سرڈ
Quadrant	ربع
Quadratic polynomial	دودرجی کثیر رقمی
Quadrilateral	چار ضلعی
Radical	جذری عدد
Radicand	جذری قاعدہ
Random Experiment	سرسری تجربہ
Rational numbers	ناطق اعداد
Rationalisation	ناطق بنانا
Raw data	خام معطیات
Real number	حقیقی اعداد
Recurring decimals	متوالی عشری اعداد
Remainder theroem	مسئلہ باقی
Right triangle	مثلث قائمۃ الزاویہ
Roots of a polynomial	کثیر رقمی کے جذور
Sample point	نظیری نقطہ
Sample space	نظیری عرصہ
Scientific notation	سائنسی ترقیم
Secondary data	ثانوی معطیات
Section formula	حصے کا ضابطہ
Sector	قطاع دائرہ
Segment	قطاع
Semi-circle	نصف دائرہ
Set complementation	سٹ کے اتمام
Set difference	سٹ کا فرق

9 maths 10 answers
Wednesday, March 13, 2019 7:05:14 PM

Secondary Mathematics - Class 9

Reviewer

- **Mohamed Jaweed Akram,** B.T. Assistant,
  Islamiah Boys' Higher Secondary School,
  Vaniyambadi, Vellore District.

Translators

- **Hafeezur Rahman H.,** B.T. Assistant,
  Municipal Muslim Urdu Boys' High School,
  New Town, Vaniyambadi, Vellore District
- **Sajjad Ahmad Y.K.,** B.T. Assistant,
  Muslim Higher Secondary School,
  Chennai - 600005.
- **Mohamed Nasir .M,** B.T. Assistant,
  Mazharul Uloom Higher Secondary School,
  Ambur, Vellore District.
- **Tansira Begum,** B.T. Assistant,
  Islamiah Girls' Higher Secondary School,
  Vaniyambadi, Vellore District.

Coordination

- **A. Palanivelraj,**
  Asst. Professor, SCERT, Chennai.

Art and Design Team

Illustration

- **Shanmugam B** Art Teacher, PUMS, Thirumalai
  Kuppam, Madhanur Block, Vellore Dt.
  Art Teachers, Government of Tamil Nadu.
  Students,
  Government College of Fine Arts,
  Chennai & Kumbakonam.

Layout Artist

- **Joy Graphics,** Chintadripet, Chennai - 02

In-House QC

- **Jerald wilson C,** Villupuram, Anilady - 605651
- **Mathan Raj R,** Anilady - 605651
- **Arun Kamaraj P,** Kanakkan Kuppam - 604151

Co-ordination

- **Ramesh Munisamy**

Typesetting and Layout

- **Mohamed Nusrath Sayeed,**
  TAJ Printers, Vaniyambadi.

This book has been printed on 80 GSM
Elegant Maplitho paper

Printed by offset at :

9 maths 10 answers
Wednesday, March 13, 2019 7:05:14 PM