GOVERNMENT OF TAMIL NADU

STANDARD NINE
MATHEMATICS

ഒൻപതാം സ്റ്റാൻഡേർഡ്
ഗണിതം

MALAYALAM MEDIUM

Department of School Education

Untouchability is Inhuman and a Crime

PreliminaryT-Combine.indd 1 4/11/2023 6:50:46 PM

Government of Tamil Nadu

First Edition - 2018

Revised Edition - 2019, 2020, 2021
2022, 2023

Reprint - 2024

(Published under New Syllabus)

Content Creation

State Council of Educational Research and Training

© SCERT 2018

Printing & Publishing

Tamil NaduTextbook and Educational Services Corporation

www.textbooksonline.tn.nic.in

PreliminaryT-Combine.indd 2 4/11/2023 6:50:46 PM

ഉള്ളടക്കം

അദ്ധ്യായം നം.	അദ്ധ്യായം	പേജ് നം.	മാസം
1	**ഗണഭാഷ**	**1**	
1.1	മുഖവുര	1	ജൂൺ
1.2	ഗണം	2	
1.3	ഒരു ഗണത്തെ പ്രതിനിധികരിക്കൽ	3	
1.4	വിവിധ തരം ഗണങ്ങൾ	6	
1.5	ഗണ ക്രിയകൾ	12	
1.6	ഗണക്രിയകളുടെ സവിശേഷതകൾ	19	
1.7	ഡിമോർഗൻ നിയമങ്ങൾ	24	
1.8	ഗണക്രിയകളിലെ ഗണനസംഖ്യയും പ്രായോഗിക പ്രശ്നങ്ങളും	29	
2	**വാസ്തവിക സംഖ്യകൾ**	**40**	
2.1	മുഖവുര	40	ജൂലൈ
2.2	പരിമേയ സംഖ്യകൾ	41	
2.3	അപരിമേയ സംഖ്യകൾ	44	
2.4	വാസ്തവിക സംഖ്യകൾ	54	
2.5	മൂലസംഖ്യാ സമ്പ്രദായം	56	
2.6	കരണികൾ	59	
2.7	കരണികളെ ഘടകങ്ങളാക്കൽ	67	
2.8	ശാസ്ത്രീയാങ്കന രീതി	69	
3	**ബീജഗണിതം**	**77**	
3.1	മുഖവുര	77	ആഗസ്റ്റ്
3.2	ബഹുപദവ്യംജകങ്ങൾ	80	
3.3	ശിഷ്ടസിദ്ധാതം	91	
3.4	സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ	96	
3.5	ഘടകങ്ങളാക്കൽ	101	
3.6	ബഹുപദ വ്യംജകങ്ങളുടെ ഹരണം	107	സെപ്റ്റംബർ
3.7	ഉത്തമസാധാരണ ഭാജകം	113	
3.8	രണ്ട് ചരങ്ങളുള്ള രേഖീയ സമീകരണം	115	നവംബർ
4	**ജ്യാമിതി**	**137**	
4.1	മുഖവുര	137	ജൂലൈ
4.2	വിവിധതരം കോണുകൾ	138	ആഗസ്റ്റ്
4.3	ചതുർഭുജങ്ങൾ	143	ഒക്ടോബർ
4.4	വൃത്തത്തിന്റെ ഭാഗങ്ങൾ	158	
4.5	ഒരു വൃത്തത്തിലുള്ള ഞാണുകളുടെ പ്രത്യേകതകൾ	161	നവംബർ
4.6	ചക്രിയ ചതുർഭുജങ്ങൾ	169	
4.7	പ്രായോഗിക ജ്യാമിതി	173	ആഗസ്റ്റ്

PreliminaryT-Combine.indd 3 4/11/2023 6:50:46 PM

5	നിർദ്ദേശാങ്ക ജ്യാമിതി	184	മാസം
5.1	തലത്തിൽ രേഖപ്പെടുത്തൽ	184	
5.2	നിർദ്ദേശാങ്ക സമ്പ്രദായം വികസിപ്പിക്കൽ	186	ഒക്ടോബർ
5.3	ഏതെങ്കിലും രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം	192	
5.4	ഒരു രേഖാഖണ്ഡത്തിന്റെ മദ്ധ്യബിന്ദു	202	
5.5	ഒരു രേഖാഖണ്ഡത്തിനെ മൂന്ന് തുല്യഭാഗങ്ങളാക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ.	207	
5.6	വിഭജന സൂത്രം	209	നവംബർ
5.7	ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ കേന്ദ്രകം	213	
6	ത്രികോണമിതി	221	
6.1	മുഖവുര	221	
6.2	ചില പ്രത്യേകതരം കോണുകളുടെ ത്രികോണമിതി അംശബന്ധങ്ങൾ	227	ഡിസംബർ
6.3	പൂരകകോണുകളുടെ ത്രികോണമിതി അംശബന്ധങ്ങൾ	232	
6.4	ത്രികോണമിതി പട്ടിക ഉപയോഗിക്കുന്ന രീതി	234	
7	വിസ്തീർണം	247	
7.1	മുഖവുര	247	
7.2	ഹെറോൺ സൂത്രം	248	
7.3	ഹെറോൺ സൂത്രവാക്യം കൊണ്ടുള്ള ഉപയോഗങ്ങൾ	250	ജനുവരി
7.4	സമചതുര ഘനിക, ദീർഘചതുരഘനികയുടെ പാർശ്വതലവിസ്തീർണ്ണം	252	
7.5	ദീർഘചതുരഘനിക സമചതുരഘനികളുടെ വ്യാപ്തം	257	
8	സ്ഥിതി വിവരക്കണക്കുകൾ	265	
8.1	മുഖവുര	265	
8.2	വിവരങ്ങളെ ശേഖരിയ്ക്കൽ	266	
8.3	കേന്ദ്രപ്രവണതയുടെ അളവുകൾ	268	ഫെബ്രുവരി
8.4	സമാന്തര മാധ്യം	268	
8.5	മീഡിയൻ	277	
8.6	മോഡ്	283	
9	സംഭാവ്യത	290	
9.1	മുഖവുര	290	
9.2	അടിസ്ഥാന തത്വങ്ങൾ	291	
9.3	ശാസ്ത്രീയ സമീപനം	294	മാർച്ച്
9.4	പ്രായോഗിക സമീപനം	295	
9.5	സംഭവങ്ങളുടെ തരങ്ങൾ	298	
	ഉത്തരങ്ങൾ	304	

PreliminaryT-Combine.indd 4 4/11/2023 6:50:47 PM

Captions used in this Textbook

எண்ணென்ப ஏனை எழுத்தென்ப இவ்விரண்டும்
கண்ணென்ப வாழும் உயிர்க்கு – குறள் 392

Numbers and letters, they are known as
eyes to humans, they are. Kural 392

Learning Outcomes

To transform the classroom processes into learning centric with a set of bench marks

Note

To provide additional inputs for students in the content

Activity / Project

To encourage students to involve in activities to learn mathematics

ICT Corner

To encourage learner's understanding of content through application of technology

Thinking Corner

To kindle the inquisitiveness of students in learning mathematics. To make the students to have a diverse thinking

Points to Remember

To recall the points learnt in the topic

Multiple Choice Questions

To provide additional assessment items on the content

Progress Check

Self evaluation of the learner's progress

Exercise

To evaluate the learners' in understanding the content

"The essence of mathematics is not to make simple things complicated but to make complicated things simple" -S. Gudder

Let's use the QR code in the text books! How?

- Download the QR code scanner from the Google PlayStore/ Apple App Store into your smartphone
- Open the QR code scanner application
- Once the scanner button in the application is clicked, camera opens and then bring it closer to the QR code in the text book.
- Once the camera detects the QR code, a url appears in the screen.Click the url and go to the content page.

PreliminaryT-Combine.indd 5 4/11/2023 6:50:48 PM

SYMBOLS

$=$	equal to
$\neq$	not equal to
$<$	less than
$\leq$	less than or equal to
$>$	greater than
$\geq$	greater than or equal to
$\approx$	equivalent to
$\cup$	union
$\cap$	intersection
$\mathbb{U}$	universal Set
$\in$	belongs to
$\notin$	does not belong to
$\subset$	proper subset of
$\subseteq$	subset of or is contained in
$\not\subset$	not a proper subset of
$\not\subseteq$	not a subset of or is not contained in
A' (or) A^c	complement of A
$\varnothing$ (or) $\{\ \}$	empty set or null set or void set
$n(A)$	number of elements in the set A
$P(A)$	power set of A
$\sum$	summation
$\overset{\|\|\|}{}^{by}$	similarly
Δ	symmetric difference
$\mathbb{N}$	natural numbers
$\mathbb{W}$	whole numbers
$\mathbb{Z}$	integers
$\mathbb{R}$	real numbers
Δ	triangle
$\angle$	angle
$\perp$	perpendicular to
$\parallel$	parallel to
$\Longrightarrow$	implies
$\therefore$	therefore
$\because$	since (or) because
$\lvert\ \rvert$	absolute value
$\simeq$	approximately equal to
$\mid$ (or) :	such that
$\equiv$ (or) $\cong$	congruent
$\equiv$	identically equal to
π	pi
$\pm$	plus or minus
$P(E)$	probability of an event E

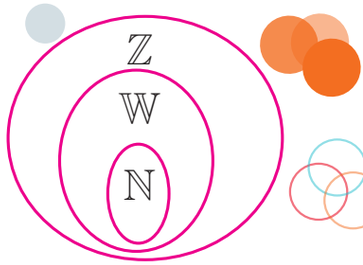
BYXRM

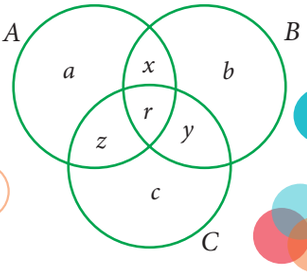
E-book

PFY9K

Evaluation

PreliminaryT-Combine.indd 6 4/11/2023 6:50:50 PM

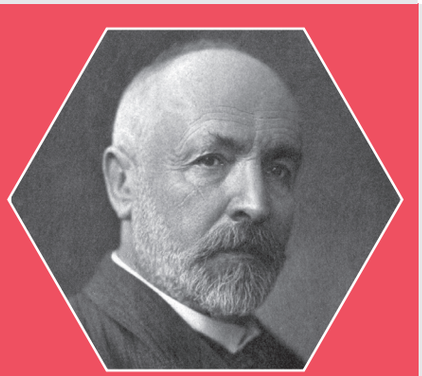




1

ഗണഭാഷ

A set is a many that allows itself to thought of as a one
-Georg Cantor



Georg Cantor
(AD (CE) 1845 - 1918)

ഗണസിദ്ധാന്തത്തിന്റെ അടിസ്ഥാന ആശയങ്ങൾ വികസിപ്പിച്ചത് ജർമ്മൻ ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞനായ ജോർജ്ജ് കാന്റർ ആണ്.ഇന്ന് ഗണം എന്ന ആശയം ഗണത്തിന്റെ മിക്കവാറുമുള്ള എല്ലാ ശാഖകളിലും ഉപയോഗിച്ചിട്ടുണ്ട്.ഗണിതശാസ്ത്രത്തിൽ ഗണങ്ങൾ ആണ് സൗകര്യപ്രദം എന്തെന്നാൽ എല്ലാ ഗണിത ഘടനകളെയും ഗണങ്ങളായി പരിഗണിക്കാൻ കഴിയും.

പഠന ലക്ഷ്യങ്ങൾ

- ഒരു ഗണത്തെ വിവരിക്കലും വിവിധ രീതികളിൽ പ്രതിനിധീകരിക്കലും.
- വിവിധതരം ഗണങ്ങളെ തിരിച്ചറിയൽ.
- ഗണക്രിയയകളുടെ തിരിച്ചറിയലും നിർവഹിക്കലും കൂടാതെ വെൻ ചിത്രം ഉപയോഗിച്ച് ചിത്രീകരിക്കലും
- ഗണക്രിയകളിലെ ക്രമവിനിമേയ നിയമം, സംയോജന നിയമം, വിതരണ നിയമം മനസ്സിലാക്കൽ.
- ഡിമോർഗൻ നിയമങ്ങൾ ശരിനോക്കൽ.
- ദൈനംദിന ജീവിതത്തിലെ ലളിതമായ പ്രശ്നങ്ങൾ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നതിന്.

1.1 മുഖവുര

നമ്മുടെ നിത്യജീവിതത്തിൽ ബുക്കുകൾ സ്റ്റാമ്പുകൾ,നാണയങ്ങൾ മുതലായവയുടെ ശേഖരണം പലപ്പോഴും കൈകാര്യം ചെയ്തിട്ടുള്ളവയാണ്.വസ്തുക്കളുടെ ഒരു കൂട്ടത്തെ അല്ലെങ്കിൽ ശേഖരത്തെ ഗണിത രൂപത്തിൽ പ്രതിനിധികരിക്കുന്നതാണ് ഗണഭാഷ.

താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ചിത്രങ്ങളെ നിരീക്ഷിക്കുക അവ എന്തിനെ കുറിക്കുന്നു

ഇവിടെ ചിത്രം 1.1പഴങ്ങളുടെ കൂട്ടത്തെയും ചിത്രം 1.2 വീട്ടുപയോഗ സധനങ്ങളുടെ കൂട്ടത്തെയും പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു.

ചിത്രത്തിൽ ഉള്ള വസ്തുക്കളുടെ പ്രത്യകതയെ കുറിച്ച് ഉറ്റുനോക്കിയാൽ നമ്മുടെ ശ്രദ്ധ ഒരു വസ്തുവിൽ നിന്നും അവയുടെ പൊതുവായ പ്രത്യേകതയിലേക്ക് പോകുന്നു. ഇത്തരത്തിലുള്ള ഏതൊരു ശേഖരണത്തെയും ഗണം എന്ന് പറയുന്നു.

Unit 1_SET LANGUAGE.indd 1 27-01-2023 12:37:49

1.2 ഗണം (set)

വ്യക്തമായി നിർവചിക്കപ്പെട്ട വസ്തുക്കളുടെ ഒരു കൂട്ടത്തെ ഗണംഎന്ന് പറയുന്നു.

വ്യക്തമായി നിർവചിക്കപ്പെട്ട വസ്തുക്കൾ എന്നതു കൊണ്ട് അർത്ഥമാക്കുന്നത് ഏതൊരു വസ്തു തന്നിരുന്നാലും അത് ഗണത്തിലെ അംഗമാണോ അല്ലയോ എന്നതു വ്യക്തമാക്കിയിരിക്കണം.



ചിത്രം 1.1



ചിത്രം 1.2

ഒരു ഗണത്തിലെ എല്ലാ വസ്തുക്കളെയും ആ ഗണത്തിലെ അംശം അല്ലെങ്കിൽ അംഗം എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണമായി,

1. ഒരു ജില്ലയിലെ കേന്ദ്രീയ വായനശാലയിലെ പുസ്തകങ്ങളുടെ ശേഖരണം
2. മഴവില്ലിലെ നിറങ്ങളുടെ ശേഖരണം
3. എല്ലാ അഭാജ്യ സംഖ്യകളുടെ ശേഖരണം

സമീപത്തുള്ള പട്ടികയിൽ പ്രസ്താവന(1),(2),(4) എന്നിവ വ്യക്തമായി നിർവചിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. അതുകൊണ്ട് അവ ഗണം. എന്നാൽ നല്ലത് കൂടാതെ മനോഹരം എന്നീ വാക്കുകളിൽ വ്യക്തമായ ഉത്തരം ലഭിക്കാൻ സാധിക്കില്ല. കാരണം മുല്ലപ്പൂവ് എനിക്ക് മനോഹരമാകാം എന്നാൽ നിങ്ങൾക്ക് മനോഹരമാകണമെന്നില്ല. അതുകൊണ്ട് സംശയത്തിന് സാധ്യതയില്ലാതെ ശേഖരണത്തെ ഗണമായി പരിഗണിക്കാം.

ഇനിപ്പറയുന്നവയിൽ ഏതാണ് ഗണങ്ങൾ?

1. നിസ്സർഗ സംഖ്യകളുടെ ശേഖരം
2. ഇംഗ്ലീഷ് അക്ഷരമാലയിലെ അക്ഷരങ്ങളുടെ ശേഖരം
3. ഒരു ക്ലാസിലെ നല്ല വിദ്യാർത്ഥികളുടെ ശേഖരം
4. നമ്മുടെ രാജ്യത്തെ സംസ്ഥാനങ്ങളുടെ ശേഖരം
5. ഒരു പൂന്തോട്ടത്തിലെ മനോഹരമായ പൂക്കളുടെ ശേഖരം

അതിനാൽ (3) കൂടാതെ (5) തുടങ്ങിയവ ഗണമല്ല.

പ്രവൃത്തി - 1

നിങ്ങളുടെ നിത്യജീവിതവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ഗണങ്ങൾക്കും ഗണങ്ങളല്ലാത്തവയ്ക്കുമുള്ള ശേഖരണത്തെ ചർച്ച ചെയ്ത് പല ഉദാഹരണങ്ങളോടു കൂടി തരുക.

കുറിപ്പ്

- ഒരു ഗണ ത്തിലെ അംഗങ്ങളെ ഒരേ ഒരു തവണ മാത്രമേ പട്ടികയിടാൻ പാടുള്ളൂ.
- ഒരു ഗണത്തിലെ അംഗങ്ങളെ ഏതു ക്രമത്തിൽ വേണമെങ്കിലും എഴുതാം

ഉദാഹരണമായി, 1,2,3,4,5,6,7,8.. എന്ന ശേഖരണത്തിലും 1,3,2,4,5,7,6,8 .. എന്ന ശേഖരണത്തിലും വ്യത്യസ്ത രീതിയിൽ പട്ടികയാക്കിയാലും രണ്ടും ഒന്നുതന്നെ. ഗണത്തിൽ ഒരു വസ്തു അംഗം ആണോ അല്ലയോ എന്നതു മാത്രം അറിഞ്ഞാൽ ആ അംഗം ഒരു ഗണത്തിൽ പല തവണ പട്ടികയാക്കേണ്ട.

Unit 1_SET LANGUAGE.indd 2 27-01-2023 12:37:50

സൂചകം

പൊതുവായി ഗണങ്ങളെ $A, B, P, Q, X, Y,$ മുതലായ വലിയ അക്ഷരങ്ങൾ കൊണ്ടു നാമകരണം ചെയ്യുന്നു.

ഒരു ഗണത്തിലെ അംഗങ്ങളെ "{ }" എന്ന ഗണ ചിഹ്നത്തിനുള്ളിൽ എഴുതണം.

x എന്നത് A എന്ന ഗണത്തിലെ അംഗമാണ് എന്നതിനെ നമുക്കിങ്ങനെ എഴുതാം $x \in A$.

x എന്നത് A എന്ന ഗണത്തിലെ അംഗമല്ല എന്നതിനെ എഴുതാം $x \notin A$.

ഉദാഹരണമായി,

A= {2,3,5,7} എന്ന ഗണം പരിഗണിക്കുക

2 എന്നത് A ഗണത്തിലെ അംഗമാണ് എന്നതിനെ $2 \in A$ എന്നെഴുതാം.

5 എന്നത് A ഗണത്തിലെ അംഗമാണ് എന്നതിനെ $5 \in A$ എന്നെഴുതാം

6 എന്നത് A ഗണത്തിലെ അംഗമല്ല എന്നതിനെ $6 \notin A$ എന്നെഴുതാം.

ഉദാഹരണം 1.1

A= { അശ്വിൻ, മുരളി വിജയ്, വിജയ് ശങ്കർ, ബദരിനാഥ്} വിട്ട ഭാഗം $\in$ അല്ലെങ്കിൽ $\notin$ എന്ന് അനുയോജ്യമായ ചിഹ്നമുപയോഗിച്ച് പൂരിപ്പിക്കുക.

(i) മുരളി വിജയ് _____ A. (ii) അശ്വിൻ _____ A. (iii) ബദരിനാഥ് _____A.

(iv) ഗാംഗുലി _____ A. (v) തെൻഡുൽക്കർ _____ A

നിർദ്ധാരണം

(i) മുരളി വിജയ് $\in A$. (ii) അശ്വിൻ $\in A$ (iii) ബദരിനാഥ് $\in A$

(iv) ഗാംഗുലി $\notin A$. (v) തെൻഡുൽക്കർ $\notin A$.

1.3 ഒരു ഗണത്തെ പ്രതിനിധികരിക്കൽ

ഒറ്റ സംഖ്യകളുടെ ശേഖരണത്തെ വിവിധ രീതിയിൽ നിർവചിക്കാം:

(1) 'എല്ലാ ഒറ്റസംഖ്യകളുടെയും ഗണം' എന്നത് ശരിയായ വിവരണമാണ് ഇത് നമുക്ക് നന്നായി മനസ്സിലാക്കാം.

(2) ഇതിനെ നമുക്ക് ഇങ്ങനെ എഴുതാം {1, 3, 5, ...}

(3) കൂടാതെ ഇതിനെ ഇങ്ങനെ പറയാം x എന്ന സംഖ്യയുടെ ശേഖരണം x എന്നത് ഒരു ഒറ്റ സംഖ്യ.

ഇവയെല്ലാം സമാനമായവയും ഉപയോഗപ്രദവുമാണ്. "$x-5 = 3$ എന്ന സമീകരണത്തിന്റെ എല്ലാ നിർദ്ധാരണങ്ങളും" കൂടാതെ {8} എന്നതും ഒരേ ഗണത്തിനെയാണ് കുറിക്കുന്നത്.

താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന രീതിയിൽ പ്രതിനിധീകരിക്കാൻ സാധിക്കും

1.3.1 വിവരണരീതി (Descriptive Form)

വിവരണരീതിയിൽ, ഗണത്തെ വാചൃമായ രീതിയിൽ വിവരിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണമായി,

(i) ഇംഗ്ലീഷ് അക്ഷരമാലയിലെ എല്ലാ സ്വരാക്ഷരങ്ങളുടെയും ഗണം.

(ii) എല്ലാ പൂർണ്ണസംഖ്യകളുടെ.യും ഗണം.

Unit 1_SET LANGUAGE.indd 3 27-01-2023 12:37:50

1.3.2 നിർബന്ധനാ രീതി (Set Builder Form or Rule Form)

നിർബന്ധനാ രീതിയിൽ, ഗണത്തിലെ അംഗങ്ങൾ തൃപ്തിപ്പെടുത്തേണ്ട ഗുണങ്ങളെ സൂചിപ്പിച്ച് വിവരിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണമായി,

(i) $A = \{x : x$ ഇംഗ്ലീഷ് അക്ഷരമാലയിലെ ഒരു സ്വരാക്ഷരം$\}$

(ii) $B = \{x | x$ ഒരു പൂർണ്ണ സംഖ്യ$\}$

കുറിപ്പ്

ചിഹ്നം ':' അല്ലെങ്കിൽ ''കുറിക്കുന്നത് എങ്ങനെയെന്നാൽ

1.3.3 പട്ടികാ രീതി (Roster Form or Tabular Form)

ഒരു ഗണത്തിലെ അംഗങ്ങളെ ഒരു ജോഡി ആവരണ ചിഹ്നങ്ങൾക്കുള്ളിൽ പട്ടികയിലാക്കുന്നതിനെ പട്ടികാ രീതി എന്നു വിളിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണമായി,

(i) $A = \{a, e, i, o, u\}$

(ii) $B = \{0,1,2,3,\ldots\}$

എപ്പോഴും ഈ രീതി അനുയോജ്യമാണോ?

കുറിപ്പ്

(ii) ൽ ഉള്ള മൂന്ന് കുത്തുകളെ (...) എല്ലിപ്സിസ് എന്നു വിളിക്കുന്നു. ഇത് സൂചിപ്പിക്കുന്നത് തന്നിരിക്കുന്ന അംഗങ്ങൾ അതെ ക്രമത്തിൽ തുടരുന്നു എന്നാണ്.

പ്രവൃത്തി -2

താഴെ പറയുന്ന ഗണങ്ങളെ അനുയോജ്യമായ രീതിയിൽ എഴുതുക..

ക്രമ നമ്പർ	വിവരണ രീതി	നിബന്ധന രീതി	പട്ടിക രീതി
1	10 നേക്കാൾ കുറഞ്ഞ നിസ്സർഗ സംഖ്യകളുടെ ഗണം.		
2		നിബന്ധനരീതി {x:x എന്നത് 3 ന്റെ ഒരു ഗുണിതം x ∈N}	
3			{2,4,6,8,10}
4	ഒരാഴ്ചയിലെ ദിവസങ്ങളുടെ ഗണം		
5			{...-3,-2,-1,0,1,2,3...}

ഉദാഹരണം 1.2

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള വാക്കുകളിലെ അക്ഷരങ്ങളുടെ ഗണത്തെ പട്ടികാരൂപത്തിൽ എഴുതുക.

(i) ASSESSMENT (ii) PRINCIPAL

നിർദ്ധാരണം

(i) ASSESSMENT

$X = \{A, S, E, M, N, T\}$

(ii) PRINCIPAL

$Y = \{P, R, I, N, C, A, L\}$

Unit 1_SET LANGUAGE.indd 4 27-01-2023 12:37:51

അഭ്യാസം 1.1

1. താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയിൽ ഗണങ്ങൾ ഏവ?

   (i) 100 നെക്കാൾ കുറഞ്ഞ അഭാജ്യ സംഖ്യകളുടെ ശേഖരണം.

   (ii) ഇന്ത്യയിലെ സമ്പന്നരായ ആളുകളുടെ ശേഖരണം.

   (iii) ഇന്ത്യയിലെ നദികളുടെ ശേഖരണം.

   (iv) നല്ല ഹോക്കി കളിക്കാരുടെ ശേഖരണം.

2. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള വാക്കുകളിലെ അക്ഷരങ്ങളുടെ ഗണത്തെ പട്ടികാരൂപത്തിൽ എഴുതുക.

   (i) INDIA

   (ii) PARALLELOGRAM

   (iii) MISSISSIPPI

   (iv) CZECHOSLOVAKIA

3. $A = \{0, 3, 5, 8\}, B = \{2, 4, 6, 10\}$ കൂടാതെ $C = \{12, 14, 18, 20\}$ എന്നീ ഗണങ്ങൾ പരിഗണിക്കുക.

   (a) ശരിയോ തെറ്റോ എന്നെഴുതുക:

   (i) $18 \in C$ (ii) $6 \notin A$ (iii) $14 \notin C$ (iv) $10 \in B$

   (v) $5 \in B$ (vi) $0 \in B$

   (b) പൂരിപ്പിക്കുക:

   (i) $3 \in$ _____ (ii) $14 \in$ _____ (iii) 18 _____ B (iv) 4 _____ B

4. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ഗണങ്ങളെ പട്ടികാരീതിയിൽ പ്രതിനിധീകരിക്കുക

   (i) A = 20 നേക്കാൾ കുറഞ്ഞ എല്ലാ ഇരട്ട നിസ്സർഗ്ഗ സംഖ്യകളുടെയും ഗണം.

   (ii) $B = \{y : y = \frac{1}{2n}, n \in \mathbb{N}, n \leq 5\}$

   (iii) C = $\{x : x$ ഒരു പൂർണ്ണഘനം, $27 < x < 216\}$

   (iv) $D = \{x : x \in \mathbb{Z}, -5 < x \leq 2\}$

5. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ഗണങ്ങളെ നിബന്ധാരീതിയിൽ പ്രതിനിധീകരിക്കുക.

   (i) B = ഏകദിന അന്താരാഷ്ട്ര കളിയിൽ ഇരട്ടസെഞ്ചുറി നേടിയ ഇന്ത്യൻ ക്രിക്കറ്റ് കളിക്കാരുടെ (താരങ്ങളുടെ) ഗണം.

   (ii) $C = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots\right\}$

   (iii) D = ഒരു വർഷത്തിലെ തമിഴ് മാസങ്ങളുടെ ഗണം

   (iv) E = 9 നേക്കാൾ കുറഞ്ഞ ഒറ്റ പൂർണ്ണ സംഖ്യകളുടെ ഗണം.

Unit 1_SET LANGUAGE.indd 5 27-01-2023 12:37:51

6. താഴെ പറയുന്ന ഗണങ്ങളെ വിവരണ രീതിയിൽ പ്രതിനിധീകരിക്കുക.

(i) P ={ ജനുവരി,ജൂൺ,ജൂലൈ}

(ii) Q = {7,11,13,17,19,23,29}

(iii) R = $\{x : x \in \mathbb{N}, x < 5\}$

(iv) S = $\{x : x$ ഇംഗ്ലീഷ് അക്ഷരമായിലെ വ്യജ്ഞനാക്ഷരം$\}$

1.4 വിവിധ തരം ഗണങ്ങൾ

താൽപര്യം ജനിപ്പിക്കുന്ന ഒരു ഗണം ഉണ്ട്. ഏതെന്നാൽ ശൂന്യഗണശേഖരണം.ശൂന്യശേഖരണത്തെക്കുറിച്ച് എന്തുകൊണ്ട് അറിയണം $x^2+1 = 0$.എന്ന സമീകരണത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണം എന്ന വാസ്തവിക സംഖ്യകളുടെ ഗണത്തിൽ അംഗങ്ങളേയില്ല.ഒരു കോൺ 90^0 ൽ കൂടുതലുള്ള ദീർഘ ചതുരങ്ങളെ പരിഗണിക്കാം. അങ്ങനെയുള്ള ദീർഘചതുരങ്ങൾ ഇല്ലാത്തതിനാൽ അതൊരു ശൂന്യഗണത്തെ വിശദീകരിക്കുന്നു.

അതുകൊണ്ട് ശൂന്യഗണം പ്രാധാന്യമുള്ളതും താൽപര്യം ജനിപ്പിക്കുന്നതും പ്രത്യേക ചിഹ്നത്തിന് അർഹതയുള്ളതുമാണ്.

1.4.1 ശൂന്യ ഗണം (Empty Set or Null Set)

ഒരു ഗണത്തിൽ അംഗങ്ങളൊന്നും ഇല്ലെങ്കിൽ അതിനെ **ശൂന്യ ഗണം** എന്നു പറയുന്നു.

ശൂന്യഗണത്തെ കുറിക്കുന്ന ചിഹ്നമാണ് $\varnothing$ അല്ലെങ്കിൽ { }.

ചിന്തിക്കുക

{0} കൂടാതെ {$\varnothing$} എന്നിവ ശൂന്യഗണമാണോ.?

ഉദാഹരണമായി,

(i) A=$\{x : x$ എന്നത് രണ്ടുകൊണ്ട് ഹരിക്കാവുന്ന ഒറ്റ പൂർണ്ണാങ്കമാണ്$\}$

$\therefore A$={ } അല്ലെങ്കിൽ $\varnothing$

(ii) 1 നും 2 നും ഇടയിലുള്ള പൂർണ്ണാങ്കങ്ങളുടെ ഗണം.

1.4.2. ഏകാംഗ ഗണം (Singleton Set)

ഒരേ ഒരു അംഗമുള്ള ഗണത്തെ **ഏകാംഗ ഗണം** എന്ന് പറയുന്നു.

ഉദാഹരണമായി,

(i) $A = \{x : 3 < x < 5, x \in \mathbb{N}\}$ (ii) ഇരട്ട അഭാജ്യ സംഖ്യകളുടെ ഗണം

കുറിപ്പ്

ശൂന്യ ഗണത്തിന് അംഗങ്ങൾ ഇല്ല അതുകൊണ്ട് ശൂന്യഗണം $\varnothing$ ഒരു പരിമിത ഗണം.

1.4.3 പരിമിത ഗണം (Finite Set)

ഒരു ഗണത്തിലെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം പരമമിതമായിരുന്നാൽ ആ ഗണത്തെ പരിമിതഗണം എന്നു വിളിക്കുന്നു.

Unit 1_SET LANGUAGE.indd 6 27-01-2023 12:37:52

ഉദാഹരണമായി,

1. കുടുംബത്തിലെ അംഗങ്ങളുടെ ഗണം
2. നിങ്ങൾ കളിക്കുന്ന കളികൾ
3. സ്കൂളിൽ പഠിക്കുന്ന പാഠ്യവിഷയങ്ങളുടെ ഗണം
4. $A = \{x : x$ എന്നത് 36 ന്റെ ഒരു ഘടകം$\}$

1.4.4 അനന്തഗണം (Infinite Set)

ഒരു ഗണത്തിലെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം പരിമിതമല്ലെങ്കിൽ ആ ഗണത്തെ അനന്തഗണം എന്ന് പറയുന്നു.

ചിന്തിക്കുക

നിസ്സർഗ സംഖ്യകളുടെ ഗണം പരിമിത ഗണമാണോ.?

ഉദാഹരണമായി,

(i) $\{5,10,15,...\}$ (ii) ഒരുരേഖയിലെ എല്ലാ ബിന്ദുക്കളുടെയും ഗണം.

ഗണങ്ങളുടെ മറ്റു തരങ്ങളെക്കുറിച്ച് പഠിക്കണമെങ്കിൽ ഗണനസംഖ്യയെക്കുറിച്ച് പഠിക്കേണ്ടതുണ്ട്

ഒരു ഗണത്തിന്റെ ഗണനസംഖ്യ: ഒരു ഗണം പരിമിതമാണെങ്കിൽ ആ ഗണത്തിൽ എത്ര അംഗങ്ങളുണ്ടെന്ന് മനസ്സിലാക്കാൻ സാദ്ധ്യമാണ്. ഒരു ഗണത്തിലെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണത്തെ ആ ഗണത്തിലെ ഗണനസംഖ്യ എന്നുപറയുന്നു.

ഗണം A യുടെ ഗണനസംഖ്യയെ $n(A)$ എന്ന് കുറിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം 1.3 $A = \{1,2,3,4,5,7,9,11\}$, എങ്കിൽ $n(A)$ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$A = \{1,2,3,4,5,7,9,11\}$

ഗണം A യിൽ 8 അംഗങ്ങളുണ്ട് അതുകൊണ്ട് $n(A) = 8$.

ചിന്തിക്കുക

$A = \{1, b, b, \{4, 2\}, \{x, y, z\}, d, \{d\}\}$, എങ്കിൽ $n(A)$ ____

1.4.5 സമാന ഗണങ്ങൾ (Equivalent Sets)

A, B എന്നീ രണ്ടു ഗണങ്ങൾ തുല്യ എണ്ണം അംഗങ്ങൾ ഉള്ളതാണെങ്കിൽ അവയെ സമാനഗണങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നു. A യും B യും തുല്യമാണെങ്കിൽ $A \approx B$ എന്നെഴുതാം.

മറ്റൊരു വിധത്തിൽ $n(A) = n(B)$ ആണെങ്കിൽ A യും B യും സമാനഗണങ്ങളാണ്.

ഉദാഹരണമായി,

A={പന്ത്, ബാറ്റ്} കൂടാതെ

B ={ചരിത്രം, ഭൂമിശാസ്ത്രം}.

ഇവിടെ A യും B യും സമാന ഗണങ്ങളാണ്. കാരണം n(A)=n(B)=2.

ചിന്തിക്കുക

A={$x : x$ എന്നത് ഇന്ത്യൻ ദേശീയ പതാകയിലെ ഒരു നിറം} കൂടാതെ B={ചുവപ്പ്, നീല, പച്ച} ഈ രണ്ടു ഗണങ്ങളും സമാന ഗണങ്ങളാണോ?

ഉദാഹരണം 1.4 $P = \{ x : -3 \leq x \leq 0, x \in \mathbb{Z}\}$

Q =210 ന്റെ എല്ലാ അഭാജ്യഘടകങ്ങളുടെയും ഗണം എങ്കിൽ ഇവ രണ്ടും സമാന ഗണങ്ങളാണോ?

നിർദ്ധാരണം

$P = \{-3, -2, -1, 0\}$, 210 ന്റെ അഭാജ്യഘടകങ്ങൾ 2,3,5,7 അതുകൊണ്ട് $Q = \{2, 3, 5, 7\}$

$n(P)$ =4, $n(Q) = 4$. അതുകൊണ്ട് P കൂടാതെ Q എന്നിവ സമാനഗണങ്ങൾ.

Unit 1_SET LANGUAGE.indd 7 27-01-2023 12:37:52

1.4.6 സമഗണങ്ങൾ (Equal Sets)

A, B എന്നീ രണ്ടു ഗണങ്ങളിലെ അംഗങ്ങളെല്ലാം ക്രമത്തെ പരിഗണിക്കാതെ കൃത്യമായി ഒരുപോലെ. ആണെങ്കിൽ അവയെ സമഗണങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നു.അങ്ങനെ അല്ലെങ്കിൽ ഗണങ്ങൾ സമമല്ല എന്നു പറയുന്നു.

ചിന്തിക്കുക

$\varnothing, \{0\}, \{\varnothing\}$ എന്നിവ സമഗണങ്ങളാണോ സമാനഗണങ്ങളാണോ

മറ്റൊരു വിധത്തിൽ A, B എന്നീ ഗണങ്ങൾ തുല്യമാണെങ്കിൽ.

(i) A യിലെ ഓരോ അംഗവും B യിലെയും അംഗമാണ്.

(ii) B യിലെ ഓരോ അംഗവും A യിലെയും അംഗമാണ്.

ഉദാഹരണമായി,

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ കൂടാതെ $B = \{4, 2, 3, 1\}$ ഈ ഗണങ്ങൾ പരിഗണിക്കുക.

ഗണം A യിലും ഗണം B യിലും ഒരേ പോലെയുള്ള അംഗങ്ങളുണ്ട് .അതുകൊണ്ട് അവ സമഗണങ്ങളാണ്.

കുറിപ്പ്

- A യും B യും തുല്യഗണമാണെങ്കിൽ $A = B$ എന്നെഴുതാം.
- A യും B യും അസമമാണെങ്കിൽ $A \neq B$ എന്നെഴുതാം.

ഒരു ഗണത്തിൽ ഒന്നോ അതിലധികമോ അംഗങ്ങൾ ആവർത്തിച്ചാലും ആ ഗണത്തിന് ഒരു മാറ്റവും സംഭവിക്കുന്നില്ല.

ഉദാഹരണമായി,

$A=\{a, b, c\}$ കൂടാതെ $B=\{a, a, b, b, b, c\}$ യെ $B = \{ a, b, c, \}$എന്നെഴുതാം. എങ്കിൽ ഗണം A അ യിലെ ഓരോ അംഗവും ഗണം B യിലെ ഒരു അംഗമാണ് അതുപോലെ B യിലെ ഓരോ അംഗവും ഗണം A യിലെ ഒരു അംഗമാണ് അതുകൊണ്ട് ഗണം A യും ഗണം B യും സമഗണമാണ്.

ഉദാഹരണം 1.5

$A = \{x : x \in \mathbb{N}, 4 \leq x \leq 8\}$

$B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ സമഗണങ്ങൾ ആണോ?

നിർദ്ധാരണം

$A = \{4, 5, 6, 7, 8\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$

A യും B യും സമഗണങ്ങൾആണ്.

കുറിപ്പ്

സമഗണങ്ങൾ എല്ലാം സമാന ഗണങ്ങളാണെങ്കിലും സമാന ഗണങ്ങളെല്ലാംസമഗണങ്ങൾ ആകണമെന്നില്ല ഉദാഹരണമായി, $A = \{p,q,r,s,t\}$ $B= \{4,5,6,7,8\}$. $n(A)=n(B)$,ആയതിനാൽ A,B സമാനഗണങ്ങൾ. എന്നാൽ സമഗണങ്ങൾ അല്ല

1.4.7 സമസ്തഗണം (Universal Set)

തന്നിട്ടുള്ള ചർച്ചയ്ക്ക് പരിഗണിക്കപ്പെടുന്ന എല്ലാ അംഗങ്ങളും ഉൾക്കൊള്ളുന്ന ഗണത്തെ സമസ്തഗണം എന്ന് പറയുന്നു. സമസ്തഗണത്തെ U എന്ന് കുറിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണമായി,

(i) ഇപ്പോൾ ചർച്ചയിലിരിക്കുന്ന അംഗങ്ങളെല്ലാം നിസർഗ്ഗസംഖ്യകളാണെങ്കിൽ സമസ്തഗണം എന്നത് നിസർഗ്ഗസംഖ്യകളുടെ ഗണമാണ് $U=\{x : x \in \mathbb{N}\}$.

(ii) $A=\{$ഭൂമി, ചൊവ്വ, ബുധൻ$\}$, എന്നിരിക്കട്ടെ എങ്കിൽ സമസ്തഗണം U എന്നത് സൗരയൂഥത്തിലെ എല്ലാം ഗ്രഹങ്ങളും.

Unit 1_SET LANGUAGE.indd 8 27-01-2023 12:37:52

1.4.8 ഉപഗണം (Subset)

A യും B യും രണ്ട് ഗണങ്ങൾ A എന്ന ഗണത്തിലെ ഓരോ അംഗവും B എന്ന ഗണത്തിലെ അംഗമാണെങ്കിൽ A എന്ന ഗണം B എന്ന ഗണത്തിന്റെ ഉപഗണമാണ് . നമുക്ക് ചിഹ്നം ഉപയോഗിച്ച് ഇങ്ങനെ എഴുതാം $A \subseteq B$.

$A \subseteq B$ വായിക്കേണ്ടത് "B യുടെ ഉപഗണമാണ് A"

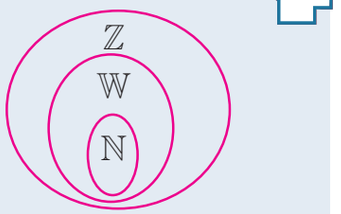
$a \in A$, $a \in B$, എങ്കിൽ $A \subseteq B$.

B യുടെ ഒരു ഉപഗണമല്ല A എങ്കിൽചിഹ്നം ഉപയോഗിച്ച് ഇങ്ങനെഎഴുതാം $A \nsubseteq B$

A യുടെ ഉപഗണമാണ് B എങ്കിൽ $n(A) \leq n(B)$ എന്ന് വ്യക്തമാക്കുന്നു.

A യിലെ എല്ലാ അംഗങ്ങളും B യിൽ ഉള്ളതുകൊണ്ട് A യെക്കാൾ B യിൽ അംഗങ്ങൾ ഉണ്ടാകും. $n(A) \leq n(B)$.

ചിന്തിക്കുക



N അല്ലെങ്കിൽ Z ന്റെ ഉപഗണമാണോ W?

മറ്റൊരു വിധത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ $n(A) > n(B)$ എങ്കിൽ ഗണം B യേക്കാൾ ഗണം A യിൽ ഒരംഗമെങ്കിലും കൂടുതലായിരിക്കും.ഗണം A യിലുള്ള അംഗങ്ങളിൽ നിന്നും കുറഞ്ഞത് ഒരംഗമെങ്കിലും ഗണം B യിൽ കുറവായിരിക്കും. അതുകൊണ്ട് ഗണം A ഗണം B യുടെ ഒരു ഉപഗണമല്ല.

ഉദാഹരണമായി,

(i) $\{1\} \subseteq \{1,2,3\}$ (ii) $\{2,4\} \nsubseteq \{1,2,3\}$

ഉദാഹരണം 1.6

വിട്ടുപോയ ഭാഗത്ത് $\subseteq$ അല്ലെങ്കിൽ $\nsubseteq$ ഉപയോഗിച്ചാൽ പ്രസ്താവന ശരിയാകുമോ എന്ന് തീരുമാനിക്കുക (i) $\{10, 20, 30\}$ _____ $\{10, 20, 30, 40\}$ (ii) $\{p, q, r\}$ _____ $\{w, x, y, z\}$

നിർദ്ധാരണം

(i) $\{10, 20, 30\}$ _____ $\{10, 20, 30, 40\}$

$\{10, 20, 30\}$ എന്നതിലെ അംഗങ്ങളെല്ലാം $\{10, 20, 30, 40\}$, ലെയും അംഗങ്ങളാണ്അതിനാൽ $\{10, 20, 30\} \subseteq \{10, 20, 30, 40\}$.

(ii) $\{p, q, r\}$ _____ $\{w, x, y, z\}$

p എന്ന അംഗം $\{p, q, r\}$ ലുണ്ട് പക്ഷേ $\{w, x, y, z\}$, ൽ ഇല്ല അതുകൊണ്ട് $\{p, q, r\} \nsubseteq \{w, x, y, z\}$.

പ്രവൃത്തി -3

നിങ്ങളുടെ സുഹൃത്തുക്കളുമായി ചർച്ച ചെയ്തു നിത്യജീവിതവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ഉപഗണങ്ങൾക്കുദാഹരണം എഴുതുക.

ഉദാഹരണം 1.7

$A = \{a, b\}$എന്ന ഗണത്തിന്റെ എല്ലാ ഉപഗണങ്ങളും എഴുതുക.

നിർദ്ധാരണം

$A= \{a,b\}$ യുടെ ഉപഗണങ്ങളാണ് $\varnothing$,$\{a\}$, $\{b\}$ കൂടാതെ $\{a, b\}$.

Unit 1_SET LANGUAGE.indd 9 27-01-2023 12:37:53

കുറിപ്പ്

- If $A \subseteq B$ കൂടാതെ $B \subseteq A$, ആണെങ്കിൽ $A = B$.
  ഇത്തരത്തിൽ സമഗണങ്ങളെനമുക്ക് നിർവ്വചിക്കാം
- എല്ലാ ഗണത്തിന്റെ യും ഉപഗണമാണ് ശൂന്യഗണം.
  ഇത് കാണാൻ എളുപ്പമല്ല! A ഏതെങ്കിലും ഗണം ആകട്ടെ. ശൂന്യഗണത്തിന് A യുടെ ഉപ ഗണമാകാതിരിക്കാനുള്ള ഏക മാർഗ്ഗം അതിൽ x എന്ന ഘടകം ഉണ്ടായിരിക്കണം, പക്ഷേ x Aയിൽ ഇല്ല. എന്നാൽ ശൂന്യമായ ഗണത്തിൽ x എങ്ങനെ ആകാം? അത് അസാധ്യമാണ്. അതി നാൽ ഈ ഒരേയൊരു വഴി അസാധ്യമാണ്, ശൂന്യമായ ഗണം A യുടെ ഒരു ഉപഗണം ആയി രിക്കണം. (നിങ്ങളുടെ തല കറങ്ങുന്നുണ്ടോ? ശാന്തമായി ചിന്തിക്കുക, ഒരു സുഹൃത്തിനോട് വിശദീകരിക്കുക, അത് ശരിയാണെന്ന് നിങ്ങൾ സമ്മതിക്കും!)
- ഓരോ ഗണവും അതിന്റെതന്നെ ഒരു ഉപഗണമാണ്. (എന്തുകൊണ്ട് ശ്രമിക്കുക?)

1.4.9. ഉചിതോപഗണം (Proper Subset)

A കൂടാതെ B എന്നീ ഗണങ്ങളെ പരിഗണിക്കുക. B യുടെ ഒരു ഉപഗണമാണ് A കൂടാതെ $A \neq B$ ആണെങ്കിൽ B എന്ന ഗണത്തിന്റെ ഉചിതോപഗണമാണ് A എന്നു പറയാം.ഇതിനെ $A \subset B$ എന്ന് എഴുതാം.

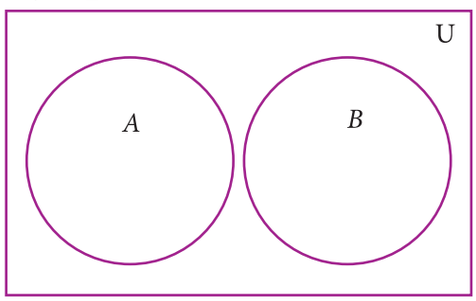
ഉദാഹരണമായി,

$A=\{1,2,5\}$ കൂടാതെ $B=\{1,2,3,4,5\}$ ആണെങ്കിൽ A എന്നത് B യുടെ ഉചിതോപഗണമാണ് ie. $A \subset B$.

1.4.10 വിയുക്തഗണങ്ങൾ (Disjoint Sets)

A കൂടാതെ B എന്നി രണ്ടു ഗണങ്ങൾക്ക് പൊതുവായി ഒരംഗം പോലും ഇല്ലെങ്കിൽ ആ രണ്ട് ഗണങ്ങൾ A യും B യും വിയുക്തഗണങ്ങൾ ആകുന്നു.

മറ്റൊരു വിധത്തിൽ A യും B യും വിയുക്തഗണങ്ങളാണെങ്കിൽ $A \cap B = \varnothing$ എന്നുപറയാം.



ചിത്രം 1.3

ഉദാഹരണം 1.8

$A=\{20, 22, 23, 24\}$ കൂടാതെ $B=\{25, 30, 40, 45\}$ എന്നീ ഗണങ്ങൾ വിയുക്തഗണങ്ങളാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$$A = \{20,22, 23, 24\}\ ,\ B=\{25, 30, 40, 45\}$$

$$A \cap B = \{20,22, 23, 24\} \cap \{25, 30, 40, 45\}$$

$$= \{\ \}$$

$A \cap B = \varnothing$, അതിനാൽ A യും B യും വിയുക്തഗണങ്ങൾ.

കുറിപ്പ്

$A \cap B \neq \varnothing$, ആണെങ്കിൽ A യും B യും സംയുക്തഗണങ്ങൾ ആകുന്നു. A,B എന്നീ രണ്ട്ഗണങ്ങൾക്ക് പൊതുവായി ഒരംഗമെങ്കിലും ഉണ്ടെങ്കിൽഅവയെ സംയുക്തഗണങ്ങൾ എന്നുപറയുന്നു

Unit 1_SET LANGUAGE.indd 10 27-01-2023 12:37:53

1.4.11 ഘാതഗണം (Power Set)

A യുടെ എല്ലാ ഉപഗണങ്ങളെയും ഉൾക്കൊണ്ട് ഗണത്തെ ആ ഗണത്തിന്റെ ഘാതഗണം എന്നു പറയുന്നു. ഇതിനെ $P(A)$ എന്ന് കുറിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണമായി,

(i) $A=\{2, 3\}$, എന്നിരിക്കട്ടെ എങ്കിൽ A യുടെ ഘാതഗണം എഴുതുക..

A യുടെ ഉപഗണങ്ങളാണ് $\varnothing$, $\{2\},\{3\},\{2,3\}$.

A യുടെ ഘാതഗണം,

$P(A) = \{\varnothing ,\{2\},\{3\},\{2,3\}\}$

(ii) $A = \{\varnothing , \{\varnothing\}\}$, എങ്കിൽ A യുടെ ഘാതഗണം $\{ \varnothing , \{\varnothing , \{\varnothing\}\}, \{\varnothing\} , \{\{\varnothing\}\} \}$.

പ്രധാനപ്പെട്ട ഗുണങ്ങൾ.

$n(A) < n[p(A)]$ എന്ന് മുമ്പേ മനസ്സിലാക്കിയിരുന്നു. അതിനാൽ $P(A)$ എത്ര വലുതാണ്? അതുകൊണ്ട് താഴെ പറയുന്ന നിഗമനങ്ങളിലേയ്ക്ക് എത്താൻ സാധിക്കുമോ?:

(i) $n(A) = m$, എന്നിരിക്കട്ടെ.എങ്കിൽ $n[p(A)] = 2^m$

(ii) m അംഗങ്ങളുള്ള ഒരു ഗണത്തിന്റെ ഉചിതോപഗണങ്ങളുടെ എണ്ണം $2^m - 1$ ആണ്.

ഉദാഹരണം 1.9 $X=\{a,b,c,x,y,z\}$ **എന്ന ഗണത്തിന്റെ ഉപഗണങ്ങളുടെയും ഉചിതോപ ഗണങ്ങളുടെയും എണ്ണം കാണുക.**

നിർദ്ധാരണം തന്നിട്ടുള്ളത് $X=\{a,b,c,x,y,z\}$ അതുകൊണ്ട്, $n(X) =6$

അതിനാൽ ഉപഗണങ്ങളുടെ എണ്ണം= $n[p(X)]= 2^6=64$

ഉചിതോപ ഗണങ്ങളുടെ എണ്ണം = $n[p(X)]-1 =2^6-1$

$= 64 - 1 \qquad = 63$

അഭ്യാസം 1.2

ചിന്തിക്കുക

എല്ലാ ഗണങ്ങൾക്കും ഒരു അനുചിതോപഗണം ഉണ്ട്. ഒരു ഗണം എഴുതി ഇത് പരിശോധിക്കുക

1. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ഗണങ്ങളുടെ ഗണനസംഖ്യ കാണുക.
   (i) $M = \{p, q, r, s, t, u\}$
   (ii) $P = \{x : x = 3n+2, n\in \mathbb{W}$ കൂടാതെ $x< 15\}$
   (iii) $Q = \{y : y = \frac{4}{3n}, n \in \mathbb{N}$ കൂടാതെ $2 < n \leq 5\}$
   (iv) $R = \{x : x$ ഒരു പൂർണ്ണാങ്കം, $x\in \mathbb{Z}$ കൂടാതെ $-5 \leq x <5\}$
   (v) S = 1882 നും 1906 നും ഇടയിലുള്ള അധിവർഷങ്ങളുടെ ഗണം.
2. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ഗണങ്ങൾ പരിമിതമാണോ അല്ലെങ്കിൽ അനന്തമാണോ എന്നു തിരിച്ചറിയുക.
   (i) X = തമിഴ് നാട്ടിലുള്ള എല്ലാ ജില്ലകളുടെയും ഗണം.
   (ii) Y = ഒരു ബിന്ദുവഴി കടന്നുപോകുന്ന എല്ലാ നേർരേഖകളുടെയും ഗണം.
   (iii) $A = \{ x : x \in \mathbb{Z}$ കൂടാതെ $x <5\}$
   (iv) $B = \{ x : x^2-5x+6 = 0, x \in \mathbb{N} \}$

Unit 1_SET LANGUAGE.indd 11 27-01-2023 12:37:54

3. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ഗണങ്ങളിൽ സമാനഗണങ്ങൾ അല്ലെങ്കിൽ സമഗണങ്ങൾ ഏതൊക്കെയാണ്?

(i) A = ഇംഗ്ലീഷ് അക്ഷരമാലയിലെ സ്വരാക്ഷരങ്ങളുടെ ഗണം.

B = "VOWEL" എന്ന വാക്കിലെ അക്ഷരങ്ങളുടെ ഗണം

(ii) $C = \{2,3,4,5\}$ $D = \{ x : x \in \mathbb{W}, 1< x<5\}$

(iii) X = { x : x "LIFE" എന്ന വാക്കിലെ ഒരു അക്ഷരം} $Y = \{ F, I, L, E\}$

(iv) G = { x : x ഒരു അഭാജ്യസംഖ്യ കൂടാതെ $3 < x < 23$} H = { x : x എന്നത് 18 ന്റെ ഒരു ഹാരകം}

4. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ഗണങ്ങൾ ശൂന്യഗണമാണോ ഏകാംഗഗണമാണോ എന്ന് തിരിച്ചറിയുക.

(i) $A = \{x : x \in \mathbb{N}, 1 < x < 2\}$

(ii) B = 2 കൊണ്ട് ഹരിക്കുവാൻ സാധിക്കാത്ത എല്ലാഇരട്ട നിസ്സർഗ്ഗസംഖ്യകളുടെയും ഗണം

(iii) $C = \{0\}$.

(iv) D = നാല് വശങ്ങളുള്ള ത്രികോണങ്ങളുടെ ഗണം.

5. താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയിൽ ഏതൊക്കെ വിയുക്തഗണങ്ങൾ സംയുക്ത ഗണങ്ങൾ എന്ന് പ്രസ്താവിക്കുക?

(i) $A = \{f, i, a, s\}$ കൂടാതെ $B=\{a, n, f, h, s\}$

(ii) $C = \{x : x$ ഒരു അഭാജ്യ സംഖ്യ, $x > 2\}$ കൂടാതെ $D = \{x : x$ ഒരു ഇരട്ട അഭാജ്യ സംഖ്യ$\}$

(iii) $E = \{x : x$, 24 ന്റെ ഒരു ഘടകം$\}$ കൂടാതെ $F=\{x : x$, 3 ന്റെ ഒരു ഗുണിതം, $x < 30\}$

6. S = {സമചതുരം, ദീർഘചതുരം,വൃത്തം,സമചതുർഭുജം, ത്രികോണം}, S എന്ന ഗണത്തിന്റെ ഉപ ഗണങ്ങളുടെ അംഗങ്ങളെ പട്ടികയിലാക്കുക?

(i) 4 തുല്യ വശങ്ങളുള്ള രൂപങ്ങളുടെ ഗണം.

(ii) വ്യാസാർദ്ധമുള്ള രൂപങ്ങളുടെ ഗണം.

(iii) ഉൾകോണുകളുടെ തുക 180° ഉള്ള രൂപങ്ങളുടെ ഗണം.

(iv) 5 വശങ്ങളുള്ള രൂപങ്ങളുടെ ഗണം.

7. $A = \{a, \{a, b\}\}$, യുടെ എല്ലാ ഉപഗണങ്ങളും എഴുതുക.

8. താഴെതന്നിരിക്കുന്ന ഗണങ്ങളുടെ ഘാതഗങ്ങൾ എഴുതുക:

(i) $A = \{a, b\}$ (ii) $B = \{1, 2, 3\}$ (iii) $D = \{p, q, r, s\}$ (iv) $E = \varnothing$

9. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ഗണങ്ങളുടെ ഉപഗണങ്ങളുടെയും ഉചിതോപഗണങ്ങളുടെയും എണ്ണംകാണുക.

(i) W = {ചുവപ്പ് , മഞ്ഞ , നീല} (ii) $X = \{ x^2 : x \in \mathbb{N}, x^2 \leq 100\}$.

10. (i) $n(A) = 4$, ആണെങ്കിൽ $n[P(A)]$ കാണുക. (ii) $n(A)=0$, ആണെങ്കിൽ $n[P(A)]$കാണുക.

(iii) $n[P(A)] = 256$, ആണെങ്കിൽ $n(A)$ കാണുക.

1.5 ഗണ ക്രിയകൾ (Set Operations)

സംഖ്യകളിൽ തുടങ്ങി വളരെ വേഗം സംഖ്യകളുടെ ക്രിയകളെയും നമ്മൾ പഠിച്ചുകഴിഞ്ഞു. ബീജഗണിതത്തിൽ ബീജഗണിത വ്യംജകങ്ങളെകുറിച്ച് പഠിച്ചുകഴിഞ്ഞ ശേഷം അവയെകൂട്ടാനും ഗുണിക്കാനും (x^2+2), $(x-3)$ എന്ന് എഴുതാനുംപഠിച്ചുകഴിഞ്ഞു. ഇപ്പോൾ ഗണത്തെപ്പറ്റി മനസിലാക്കിയ ഉടൻ സ്വാഭാവികമായും നമ്മുടെ മനസ്സിൽ പല ചോദ്യങ്ങൾഉടലെടുക്കും . ഗണങ്ങളെ ഉപയോഗിച്ച്എന്തു ചെയ്യാൻ സാധിക്കും. അവയെഏതു ക്രിയയിൽ ഉപയോഗിക്കാൻ സാധിക്കും. എന്നിങ്ങനെ പലചോദ്യങ്ങൾ ഉടലെടുക്കും.

Unit 1_SET LANGUAGE.indd 12 27-01-2023 12:37:54

തന്നിട്ടുള്ള വ്യവസ്ഥയിൽ രണ്ടോ അതിലധികമോസെറ്റുകൾ ഒന്നിച്ചുചേർക്കുമ്പോൾ ഗണനപ്രക്രിയകൾ ചെയ്യാൻ സാധിക്കും. വെൻചിത്രംഉപയോഗിച്ച് ഗണക്രിയകളും ഗണങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധവും നമുക്ക്ചിത്രീകരിക്കാൻ സാധിക്കും.

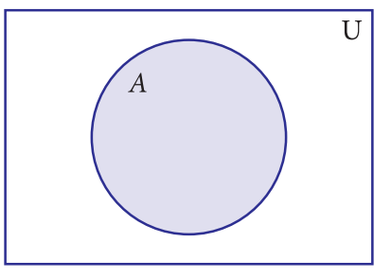
ജോൺവെൻ എന്ന ബ്രിട്ടീഷ് ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞൻ ഗണങ്ങൾക്കും ഗണക്രിയകൾക്കും തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തെ ചിത്രരൂപേണ ആവിഷ്കരിച്ചു. വെൻചിത്രങ്ങൾ ഗണസിദ്ധാന്തം, സംഭാവ്യത, സ്ഥിതി വിവരകണക്കുകൾ, തർക്കശാസ്ത്രം (Logic) കൂടാതെ കമ്പ്യൂട്ടർ സയൻസ് എന്നീ മേഖലകളിൽ ഉപ യോഗിച്ചു വരുന്നു.

1.5.1 ഒരു ഗണത്തിന്റെ പൂരകം (Complement of a Set)

A യിൽ ഇല്ലാത്തതും U (സമസ്തഗണം) എന്ന ഗണത്തിൽ ഉള്ളതുമായ എല്ലാ അംഗങ്ങളുടെയും ഗണത്തെ അതിന്റെ പൂരകം എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

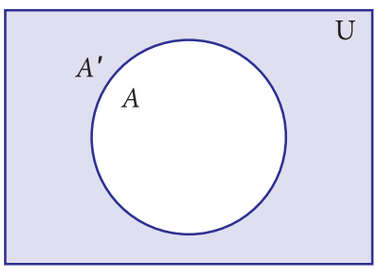
A യുടെ പൂരകത്തെ കുറിക്കുന്നത് A' അല്ലെങ്കിൽ A^c. ചിഹ്നമുപയോഗിച്ച് $A' = \{x : x \in U, x \notin A\}$

പൂരക ഗണങ്ങളുടെ വെൻചിത്രം



A (നിഴലിട്ട ഭാഗം)

ചിത്രം 1.4



A' (നിഴലിട്ട ഭാഗം)

ചിത്രം 1.5

ഉദാഹരണമായി,

U = {ഒരു ക്ലാസിലെ എല്ലാ ആൺകുട്ടികളും} കൂടാതെ A= {ക്രിക്കറ്റ് കളിക്കുന്ന ആൺകുട്ടികൾ}, എന്നിരിക്കട്ടെ. എങ്കിൽ A യുടെ പൂരക ഗണം A'= {ക്രിക്കറ്റ് കളിക്കാത്ത ആൺകുട്ടികൾ}.

ഉദാഹരണം 1.10

$U = \{c, d, e, f, g, h, i, j\}$ കൂടാതെ $A = \{c, d, g, j\}$, A' കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$U = \{c, d, e, f, g, h, i, j\}$, $A = \{c, d, g, j\}$

$A' = \{e, f, h, i\}$

കുറിപ്പ്

- $(A')' = A$
- $U' = \varnothing$
- $\varnothing' = U$

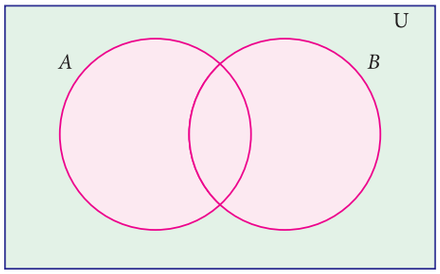
1.5.2 രണ്ടു ഗണങ്ങളുടെ യോഗം (Union of Two Sets)

A കൂടാതെ B എന്നീ ഗണങ്ങളുടെ യോഗം എന്നത് A യിലെയോ അല്ലെങ്കിൽ B യിലെയോ അല്ലെങ്കിൽ രണ്ടിലുമോ ഉള്ള അംഗങ്ങളുടെ ഗണം ആകുന്നു. A യുടെയും B യുടെയും യോഗത്തെ $A \cup B$ എന്നെഴുതാം ഇതിനെ A യോഗം B എന്ന് വായിക്കണം.

ചിഹ്നത്തിൽ , $A \cup B = \{x : x \in A$ അല്ലെങ്കിൽ $x \in B\}$

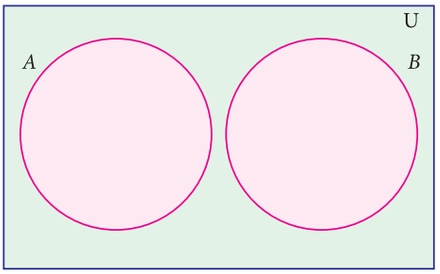
Unit 1_SET LANGUAGE.indd 13 27-01-2023 12:37:54

രണ്ടു ഗണങ്ങളുടെ യോഗം താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള പ്രകാരം വെൻ ചിത്രം ഉപയോഗിച്ച് പ്രതിനിധീകരിക്കാം



ഗണം A യ്ക്കും B യ്ക്കും പൊതുവായ അംഗങ്ങളുണ്ട്

ചിത്രം 1.6



A യും B യും വിയുക്തഗണങ്ങളാണ്

ചിത്രം 1.7

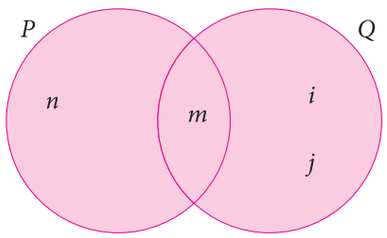
ഉദാഹരണമായി,

P ={ഏഷ്യ, ആഫ്രിക്ക, അന്റാർട്ടിക്ക,ആസ്ട്രേലിയ} കൂടാതെ Q = {യൂറോപ്പ്, വടക്കേ അമേരിക്ക, തെക്കേ അമേരിക്ക}, എങ്കിൽ P കൂടാതെ Q എന്നിവയുടെ യോഗം $P \cup Q$ = {ഏഷ്യ, ആഫ്രിക്ക, അന്റാർട്ടിക്ക, യൂറോപ്പ്, വടക്കേ അമേരിക്ക, തെക്കേ അമേരിക്ക}.

കുറിപ്പ്

- $A \cup A = A$
- $A \cup \varnothing = A$
- $A \cup U = U$ സമസ്ത ഗണം U ന്റെ ഉപഗണമാണ് A
- $A \subseteq A \cup B$ കൂടാതെ $B \subseteq A \cup B$
- $A \cup B = B \cup A$ (രണ്ട് ഗണങ്ങളുടെ യോഗം ക്രമവിനിമേയമാണ്)

ഉദാഹരണം 1.11 $P=\{m, n\}$ കൂടാതെ $Q=\{m, i, j\}$, എങ്കിൽ P കൂടാതെ Q എന്നിവ വെൻ ചിത്രത്തിൽ പ്രതിനിധീകരിക്കുക കൂടാതെ $P \cup Q$ കാണുക.



ചിത്രം 1.8

നിർദ്ധാരണം

$P=\{m, n\}$ കൂടാതെ $Q=\{m, i, j\}$ എന്ന് തന്നിട്ടുണ്ട്

ചിത്രത്തിൽ നിന്ന്, $P \cup Q=\{n, m, i, j\}$.

1.5.3 രണ്ടു ഗണങ്ങളുടെ സംഗമം (Intersection of Two Sets)

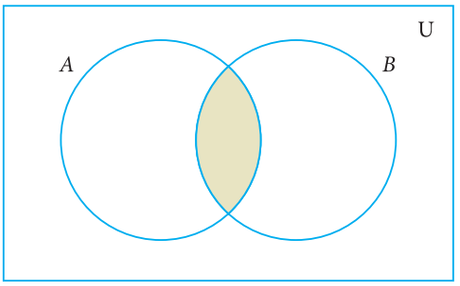
A, B എന്നീ രണ്ട് ഗണങ്ങളുടെ സംഗമമെന്നത് A യിലും B യിലും പൊതുവായ അംഗങ്ങളുടെ ഗണമാണ് ഇതിനെ $A \cap B$ എന്ന് കുറിക്കാം. കൂടാതെ A സംഗമം B എന്നു വായിക്കണം.

ചിഹ്നത്തിൽ , $A \cap B=\{x : x \in A$ കൂടാതെ $x \in B\}$

രണ്ടു ഗണങ്ങളുടെ സംഗമം വെൻ ചിത്രം ഉപയോഗിച്ച് താഴെ പറയുന്ന പ്രകാരം പ്രതിനിധീകരിക്കാം

ഉദാഹരണമായി,

$A = \{1, 2, 6\}; B = \{2, 3, 4\}$, എങ്കിൽ $A \cap B = \{2\}$ എന്തു കൊണ്ടെന്നാൽ A യിലും B യിലും പൊതുവായ അംഗമാണ് 2.



ചിത്രം 1.9

Unit 1_SET LANGUAGE.indd 14 27-01-2023 12:37:55

ഉദാഹരണം 1.12

$A = \{x : x$ ഒരു ഇരട്ട നിസ്സർഗ്ഗ സംഖ്യ കൂടാതെ $1 < x \leq 12\}$ കൂടാതെ $B = \{ x : x$ എന്നത് 3 ന്റെ ഗുണിതം, $x \in \mathbb{N}$ കൂടാതെ $x \leq 12\}$ എങ്കിൽ $A \cap B$ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

ഇവിടെ $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ കൂടാതെ $B = \{3, 6, 9, 12\}$

$A \cap B = \{6, 12\}$

ഉദാഹരണം 1.13

$A = \{2, 3\}$ കൂടാതെ $C = \{\ \}$, എങ്കിൽ $A \cap C$ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

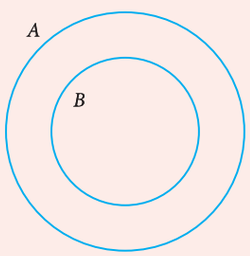
A യ്ക്കും C യ്ക്കും പൊതുവായ അംഗങ്ങൾ ഇല്ല അതുകൊണ്ട് $A \cap C = \{\ \}$

കുറിപ്പ്

- $A \cap A = A$ (ii) $A \cap \varnothing = \varnothing$
- $A \cap U = A$ ഇവിടെ U ന്റെ ഉപ ഗണമാണ് A
- $A \cap B \subseteq A$ കൂടാതെ $A \cap B \subseteq B$
- $A \cap B = B \cap A$ (രണ്ട് ഗണങ്ങളുടെ സംഗമം ക്രമവിനിമേയമാണ്)

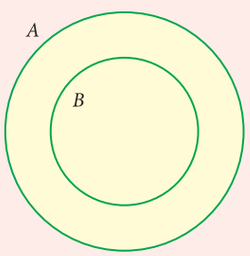
കുറിപ്പ്

- $B \subset A$ എങ്കിൽ A കൂടാതെ B എന്നീ ഗണങ്ങളുടെ യോഗവും സംഗമവും വെൻചിത്രം ഉപയോഗിച്ച് പ്രതിനിധികരിക്കാം.



$B \subset A$

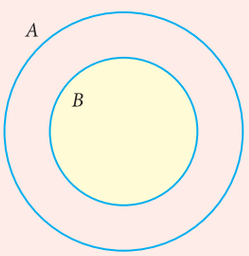
ചിത്രം 1.10



നിഴലിട്ട ഭാഗം

$A \cup B = A$

ചിത്രം 1.11



നിഴലിട്ട ഭാഗം

$A \cap B = B$

ചിത്രം 1.12

- A, B എന്നീ രണ്ടു ഗണങ്ങൾക്ക് $A \cup B = A \cap B$, എങ്കിൽ $A = B$
- $n(A) = p$ കൂടാതെ $n(B) = q$ എങ്കിൽ
  - (a) $n(A \cup B)$ യുടെ കുറഞ്ഞ മൂല്യം $= \max\{p, q\}$
  - (b) $n(A \cup B)$ യുടെ കൂടിയ മൂല്യം $= p + q$
  - (c) $n(A \cap B)$ യുടെ കുറഞ്ഞ മൂല്യം $= 0$
  - (d) $n(A \cap B)$ യുടെ കൂടിയ മൂല്യം $= \min\{p, q\}$

Unit 1_SET LANGUAGE.indd 15 27-01-2023 12:37:55

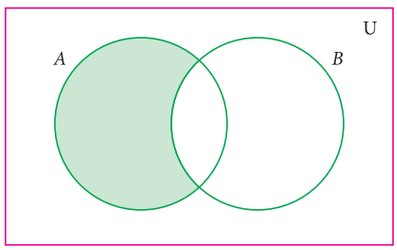
1.5.4 രണ്ടു ഗണങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം (Difference of Two Sets)

A, B എന്നീ രണ്ട് ഗണങ്ങളിൽ A യിലുള്ളതും B യില്ലാത്തതുമായ അംഗങ്ങളുടെ ഗണത്തെ A യുടെയും B യുടെയും വ്യത്യാസ ഗണം എന്ന് പറയുന്നു. രണ്ടു ഗണങ്ങളുടെ വ്യത്യാസത്തെ $A-B$ അല്ലെയങ്കിൽ A/B എന്ന് കുറിക്കുന്നു. വായിക്കേണ്ട വിധം A വ്യത്യാസം B

ചിഹ്നത്തിൽ , $A-B = \{ x : x \in A$ കൂടാതെ $x \notin B\}$

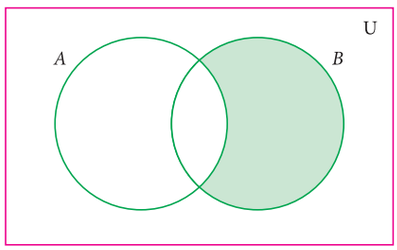
$B-A = \{ y : y \in B$ കൂടാതെ $y \notin A\}$.

ഗണവ്യത്യാസത്തിനുള്ള വെൻചിത്രം



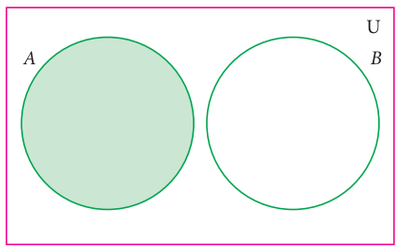
$A-B$

ചിത്രം 1.13



$B-A$

ചിത്രം 1.14



$A-B$

ചിത്രം 1.15

ഉദാഹരണം 1.14

$A=\{-3, -2, 1, 4\}$ കൂടാതെ $B= \{0, 1, 2, 4\}$, ആണെങ്കിൽ (i) $A-B$ (ii) $B-A$ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$A-B = \{-3, -2, 1, 4\} - \{0, 1, 2, 4\} = \{ -3, -2\}$

$B-A = \{0, 1, 2, 4\} - \{-3, -2, 1, 4\} = \{ 0, 2\}$

കുറിപ്പ്

- $A' = U - A$
- $A-B = A \cap B'$
- $A-A = \varnothing$
- $A-\varnothing = A$
- $A-B = B-A \Leftrightarrow A=B$
- $A \cap B = \varnothing$ എങ്കിൽ $A-B = A$, $B-A = B$

1.5.5 ഗണങ്ങളുടെ പ്രതിസാമ്യതാ വ്യത്യാസം (Symmetric Difference of Sets)

A, B എന്നീ രണ്ട് ഗണങ്ങളുടെ പ്രതിസാമ്യതാ വ്യത്യാസം എന്നത് $(A-B) \cup (B-A)$. ഇതിനെ $A \Delta B$ കുറിക്കുന്നു.

$A \Delta B = \{ x : x \in A-B$ അല്ലെങ്കിൽ $x \in B-A\}$

ഉദാഹരണം 1.15

$A = \{6, 7, 8, 9\}$ കൂടാതെ $B=\{8, 10, 12\}$, ആണെങ്കിൽ $A \Delta B$ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$A-B = \{6, 7, 9\}$

$B-A = \{10, 12\}$

$A \Delta B = (A-B) \cup (B-A) = \{6, 7, 9\} \cup \{10,12\}$

$A \Delta B = \{6, 7, 9, 10, 12\}$.

ചിന്തിക്കുക

$(A - B) \cap (B - A)$ എന്താണ്?

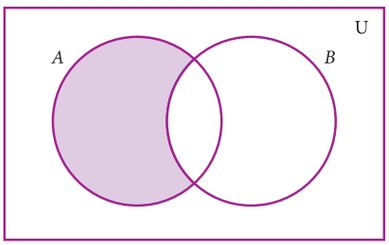
Unit 1_SET LANGUAGE.indd 16 27-01-2023 12:37:55

ഉദാഹരണം 1.16

$A\Delta B$ യെ വെൻ ചിത്രം ഉപയോഗിച്ച് പ്രതിനിധികരിക്കുക.

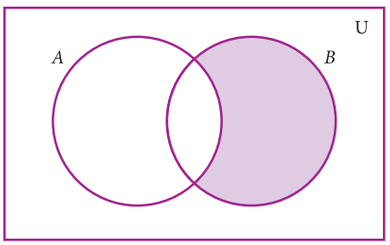
നിർദ്ധാരണം

$A\Delta B = (A-B) \cup (B-A)$



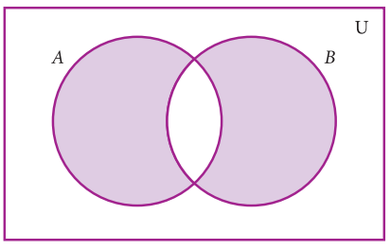
$A-B$

ചിത്രം 1.16



$B-A$

ചിത്രം 1.17



$(A-B) \cup (B-A)$

ചിത്രം 1.18

കുറിപ്പ്

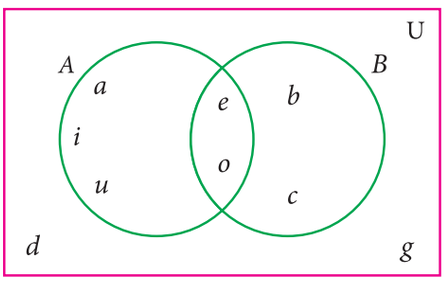
- $A\Delta A = \varnothing$
- $A\Delta B = B\Delta A$
- $A\Delta B = \{x : x \in A \cup B$ കൂടാതെ $x \notin A \cap B\}$
- $A\Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

ഉദാഹരണം 1.17

വെൻ ചിത്രത്തിൽ നിന്ന് താഴെ പറയുന്ന ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഉത്തരം എഴുതുക.

(i) A (ii) B (iii) $A-B$ (iv) $B-A$

(v) A' (vi) B' (vii) U



ചിത്രം 1.19

നിർദ്ധാരണം

(i) $A = \{a, e, i, o, u\}$ (ii) $B = \{b, c, e, o\}$

(iii) $A-B = \{a, i, u\}$ (iv) $B-A = \{b, c\}$

(v) $A' = \{b, c, d, g\}$ (vi) $B' = \{a, d, g, i, u\}$

(vii) $U = \{a, b, c, d, e, g, i, o, u\}$

ഉദാഹരണം 1.18

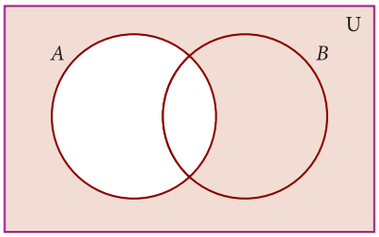
അരികിൽ തന്നിട്ടുള്ളതുപോലെ ഒരു വെൻ ചിത്രം വരച്ച് താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ഗണങ്ങളെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്ന ഭാഗങ്ങൾ നിഴലിടുക.

(i) A' (ii) $(A-B)'$ (iii) $(A \cup B)'$

Unit 1_SET LANGUAGE.indd 17 27-01-2023 12:37:56

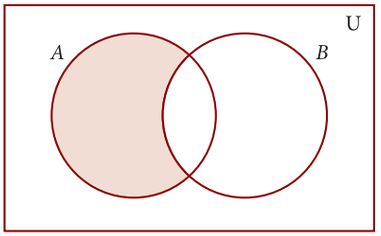
നിർദ്ധാരണം

(i) A' (ii) $(A-B)'$



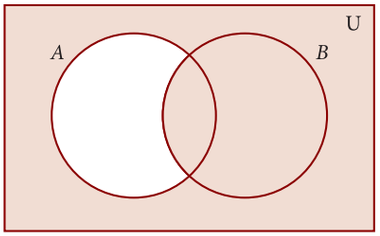
A'

ചിത്രം 1.20



$A-B$

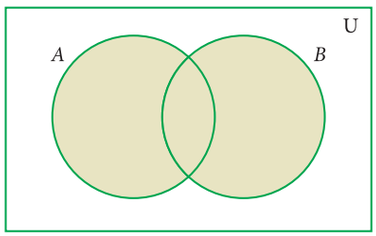
ചിത്രം 1.21



$(A-B)'$

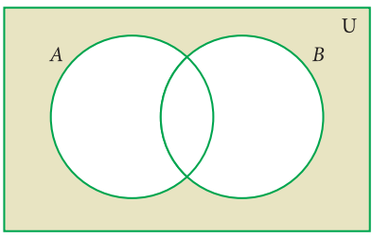
ചിത്രം 1.22

(iii) $(A \cup B)'$



$A \cup B$

ചിത്രം 1.23

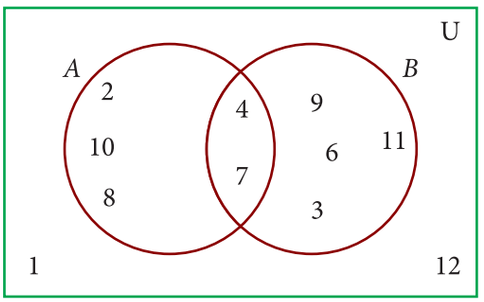


$(A \cup B)'$

ചിത്രം 1.24

അഭ്യാസം 1.3

1. തന്നിട്ടുള്ള വെൻ ചിത്രത്തിൽ നിന്ന് താഴെ പറയുന്നവ കാണുക.



ചിത്രം 1.25

(i) A (ii) B (iii) $A \cup B$ (iv) $A \cap B$

(v) $A-B$ (vi) $B-A$ (vii) A' (viii) B'

(ix) U

2. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ഗണങ്ങളുടെ $A \cup B$, $A \cap B$, $A-B$ കൂടാതെ $B-A$ എന്നിവ കാണുക.

(i) $A = \{2, 6, 10, 14\}$ കൂടാതെ $B=\{2, 5, 14, 16\}$

(ii) $A = \{a, b, c, e, u\}$ കൂടാതെ $B=\{a, e, i, o, u\}$

(iii) $A = \{x : x \in N, x \leq 10\}$ കൂടാതെ $B=\{x : x \in W, x < 6\}$

(iv) A = "mathematics" എന്ന വാക്കിലെ എല്ലാ അക്ഷരങ്ങളുടെയും ഗണം

B = "geometry" എന്ന വാക്കിലെ എല്ലാ അക്ഷരങ്ങളുടെയും ഗണം

Unit 1_SET LANGUAGE.indd 18 27-01-2023 12:37:56

3. U={a, b, c, d, e, f, g, h}, A={b, d, f, h} കൂടാതെ B={a, d, e, h}, ആണെങ്കിൽ

(i) A' (ii) B' (iii) $A' \cup B'$ (iv) $A' \cap B'$ (v) $(A \cup B)'$

(vi) $(A \cap B)'$ (vii) $(A')'$ (viii) $(B')'$ എന്നിവ കാണുക.

4. U={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, A={1, 3, 5, 7} കൂടാതെ B={0, 2, 3, 5, 7}, ആണെങ്കിൽ

(i) A' (ii) B' (iii) $A' \cup B'$ (iv)$A' \cap B'$ (v)$(A \cup B)'$

(vi) $(A \cap B)'$ (vii) $(A')'$ (viii) $(B')'$ എന്നിവ കാണുക.

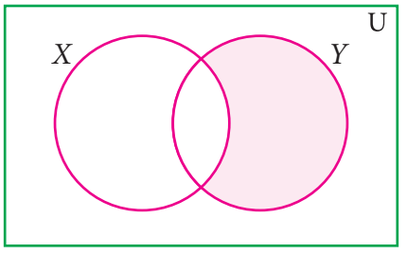
5. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ഗണങ്ങളുടെ പ്രതിസാമ്യതാ വ്യത്യാസം കാണുക.

(i) P = {2, 3, 5, 7, 11} കൂടാതെ Q={1, 3, 5, 11}

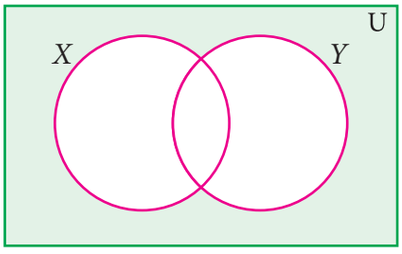
(ii) R = {l, m, n, o, p} കൂടാതെ S = {j, l, n, q}

(iii) X = {5, 6, 7} കൂടാതെ Y={5, 7, 9, 10}

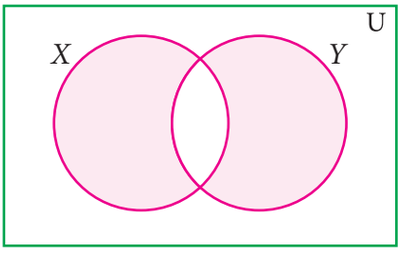
6. താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള വെൻചിത്രത്തിൽ നിഴലിട്ട ഭാഗത്തെ ഗണ ചിഹ്നങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ആവിഷ്കരിക്കുക.



ചിത്രം . 1.26



ചിത്രം 1.27



ചിത്രം . 1.28

7. A,B എന്നീ രണ്ട് സംയുക്ത ഗണങ്ങളെയും സമസ്തഗണം U ഉം പരിഗണിക്കുക. താഴെ പറയുന്ന ചോദ്യങ്ങൾക്ക് അനുയോജ്യമായ വെൻചിത്രങ്ങൾ വരയ്ക്കുക.

(i) $A \cup B$ (ii) $A \cap B$ (iii) $(A \cap B)'$ (iv) $(B-A)'$ (v) $A' \cup B'$ (vi) $A' \cap B'$

(vii) (iii) കൂടാതെ (v) എന്നിവയിൽ നിന്ന് നിങ്ങൾക്ക് എന്ത് നിരീക്ഷിക്കാൻ സാധിക്കുന്നു.?

1.6 ഗണക്രിയകളുടെ സവിശേഷതകൾ (Properties of Set Operations)

ഈ ഭാഗം ഗണക്രിയകളെ (യോഗം കൂടാതെ സംഗമം) തുടർന്ന് ക്രമവിനിമേയ നിയമം, സംയോജന നിയമം തുടങ്ങിയ ഗണിതത്തിന്റെ സവിശേഷതകളെ ആകാംഷയോടെ നിരീക്ഷിക്കുന്നു. ഈ സവിശേഷതകളിൽ പലതും നാം സംഖ്യകളിൽ കണ്ടതാണ്. ഗണങ്ങളും ഈ സവിശേഷതകളെ കരസ്ഥമാക്കിയിട്ടുണ്ടോ എന്ന് നമുക്ക് കണ്ടറിയാം.

ആദ്യം നമുക്ക് ഗണങ്ങളുടെ യോഗം കൂടാതെ സംഗമം എന്നീ ഗണക്രിയകളുടെ സവിശേഷതകളെ കുറിച്ച് പഠിക്കാം.

Unit 1_SET LANGUAGE.indd 19 27-01-2023 12:37:56

1.6.1 ക്രമവിനിമേയ നിയമം (Commutative Property)

ഗണഭാഷയിൽ ഗണക്രിയകൾ ഉപയോഗിച്ചുള്ള ക്രമവിനിമേയ നിയമത്തെ കുറിച്ച് നമുക്ക് നോക്കാം. ഉദാഹരണമായി ഗണങ്ങളുടെ യോഗം (കൂടാതെ സംഗമം) ക്രമവിനിമേയമാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കാം.

$A = \{2, 3, 8, 10\}$ കൂടാതെ $B = \{1, 3, 10, 13\}$ എന്നിവ

രണ്ടു ഗണങ്ങൾ എന്നിരിക്കട്ടെ

ഇവിടെ, $A \cup B = \{1, 2, 3, 8, 10, 13\}$ കൂടാതെ

$B \cup A = \{1, 2, 3, 8, 10, 13\}$

ഇതിൽ നിന്നും $A \cup B = B \cup A$ എന്ന് നമുക്ക് മനസ്സിലാക്കാൻ സാധിക്കും.

അതു കൊണ്ട് $A \cup B = B \cup A$ എന്നതിനെ ഗണങ്ങളുടെ യോഗത്തിനുള്ള ക്രമവിനിമേയ നിയമം എന്ന് വിളിക്കാം.

ഇപ്പോൾ, $A \cap B = \{3, 10\}$ കൂടാതെ $B \cap A = \{3, 10\}$.

ഇതിൽ നിന്നും $A \cap B = B \cap A$ എന്ന് കാണാൻ സാധിക്കും..

ഇതിനെ ഗണങ്ങളുടെ സംഗമത്തിനുള്ള ക്രമവിനിമേയ നിയമം എന്ന് വിളിക്കപ്പെടുന്നു.

ക്രമവിനിമേയ നിയമം : Aകൂടാതെ B എന്നിവ ഏതെങ്കിലും രണ്ടു ഗണങ്ങൾ എങ്കിൽ *(i)* $A \cup B = B \cup A$ *(ii)* $A \cap B = B \cap A$

കുറിപ്പ്

ഏതൊരു ഗണം A യ്ക്കും,

- $A \cup A = A$ കൂടാതെ $A \cap A = A$ [Idempotent Laws].
- $A \cup \phi = A$ കൂടാതെ $A \cap \mathrm{U} = A$ [Identity Laws].

ഉദാഹരണം 1.19 $A = \{b, e, f, g\}$ കൂടാതെ $B = \{c, e, g, h\}$, എങ്കിൽ

(i) ഗണങ്ങളുടെ യോഗം *(ii)*ഗണങ്ങളുടെ സംഗമം എന്നിവയ്ക്കുള്ള ക്രമവിനിമേയ നിയമം ശരി നോക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ളവ, $A = \{b, e, f, g\}$, $B = \{c, e, g, h\}$

(i) $A \cup B = \{b, c, e, f, g, h\}$ .... *(1)*

$B \cup A = \{b, c, e, f, g, h\}$ ... *(2)*

(1) ൽ നിന്നും *(2)* ൽ നിന്നും $A \cup B = B \cup A$ ഗണങ്ങളുടെ യോഗം ക്രമവിനിമേയമാണെന്ന് തെളിയിച്ചു.

(ii) $A \cap B = \{e, g\}$ ... *(3)*

$B \cap A = \{e, g\}$ ... *(4)*

(3) ൽ നിന്നും *(4)* ൽ നിന്നും $A \cap B = B \cap A$ ഗണങ്ങളുടെ സംഗമം ക്രമവിനിമേയമാണന്ന് തെളിയിച്ചു.

ചിന്തിക്കുക

$P = \{l, n, p\}$കൂടാതെ $P \cup Q = \{j, l, m, n, o, p\}$.എന്നിവ പരസ്പരം വിയുക്ത ഗണങ്ങൾ എങ്കിൽ Q കൂടാതെ $P \cap Q$ എന്തായിരിക്കും?

Unit 1_SET LANGUAGE.indd 20 27-01-2023 12:38:00

കുറിപ്പ്

സംഖ്യകളുടെ വ്യത്യാസം ക്രമവിനിമേയമല്ല എന്നതിനെ കുറിച്ച് നമുക്ക് ഓർമ്മിക്കാം. ഗണവ്യത്യാസം ക്രമവിനിമേയമാണോ? സംഖ്യകളെപ്പോലെ തന്നെ ഗണവ്യത്യാസവും ക്രമവിനിമേയമല്ല എന്ന് നമുക്ക് കാണാൻ സാധിക്കും. ഉദാഹരണമായി $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, d\}$. എങ്കിൽ $A - B = \{a\}$, $B - A = \{d\}$; ഇതിൽ നിന്നും $A - B \neq B - A$. എന്ന് നമുക്ക് കാണാൻ സാധിക്കുന്നു.

1.6.2 സംയോജന നിയമം (Associative Property)

ഇപ്പോൾ നമുക്ക് യോഗം കൂടാതെ സംഗമം എന്നീ ഗണക്രിയകളെ മൂന്ന് ഗണങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ചെയ്തു നോക്കാം.

$A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{-3, 0, 2, 3\}$ കൂടാതെ $C = \{0, 1, 3, 4\}$ എന്നീ മൂന്ന് ഗണങ്ങൾ എടുക്കുക.

ഇപ്പോൾ, $B \cup C = \{-3, 0, 1, 2, 3, 4\}$

$A \cup (B \cup C) = \{-1, 0, 1, 2\} \cup \{-3, 0, 1, 2, 3, 4\}$

$= \{-3, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ ... (1)

അടുത്ത്, $A \cup B = \{-3, -1, 0, 1, 2, 3\}$

$(A \cup B) \cup C = \{-3, -1, 0, 1, 2, 3\} \cup \{0, 1, 3, 4\}$

$= \{-3, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ ... (2)

(1) ൽ നിന്നും (2) ൽ നിന്നും, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

ഇത് ഗണങ്ങളുടെ യോഗത്തിനുള്ള സംയോജന നിയമം ആകുന്നു.

ഇപ്പോൾ, $B \cap C = \{0, 3\}$

$A \cap (B \cap C) = \{-1, 0, 1, 2\} \cap \{0, 3\}$

$= \{0\}$ ... (3)

അടുത്ത്, $A \cap B = \{0, 2\}$

$(A \cap B) \cap C = \{0, 2\} \cap \{0, 1, 3, 4\}$

$= \{0\}$ ... (4)

(3) ൽ നിന്നും (4) ൽ നിന്നും, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

ഇത് ഗണങ്ങളുടെ സംഗമത്തിനുള്ള സംയോജന നിയമം ആകുന്നു.

സംയോജന നിയമം: A, B, C എന്നിവ ഏതെങ്കിലും മൂന്നു ഗണങ്ങൾ എങ്കിൽ,

(i) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ **(ii)** $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

ഉദാഹരണം1.20 $A = \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 2\right\}$, $B = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 2, \frac{5}{2}\right\}$ കൂടാതെ $C = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 1, 2, \frac{5}{2}\right\}$

എങ്കിൽ, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ എന്നത് ശരി നോക്കുക.

Unit 1_SET LANGUAGE.indd 21 27-01-2023 12:38:03

നിർദ്ധാരണം

ഇപ്പോൾ, $(B \cap C) = \left\{\frac{1}{4}, 2, \frac{5}{2}\right\}$

$A \cap (B \cap C) = \left\{\frac{1}{4}, 2\right\}$ ... (1)

കൂടാതെ, $A \cap B = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 2\right\}$

$(A \cap B) \cap C = \left\{\frac{1}{4}, 2\right\}$ ... (2)

(1) ൽ നിന്നും (2) ൽ നിന്നും,

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ എന്നത് ശരിയാണെന്ന് തെളിയിച്ചു.

കുറിപ്പ്

പൊതുവായി ഗണവ്യത്യാസമെന്നത് സംയോജന നിയമത്തെ പൂർത്തീകരിക്കില്ല അതായത്, $(A-B)-C \neq A-(B-C)$. പക്ഷേ A, B കൂടാതെ C എന്നിവ പരസ്പരം വിയുക്ത ഗണങ്ങളാണെങ്കിൽ ഗണവ്യത്യാസമെന്നത് സംയോജന നിയമത്തെ പൂർത്തീകരിക്കും അതായത് $(A-B)-C=A-(B-C)$എന്നത് ശരിയാകും.

അഭ്യാസം 1.4

1. $P = \{1,2,5,7,9\}$, $Q = \{2,3,5,9,11\}$, $R = \{3,4,5,7,9\}$ കൂടാതെ $S = \{2,3,4,5,8\}$ എങ്കിൽ
   (i) $(P \cup Q) \cup R$ (ii) $(P \cap Q) \cap S$ (iii) $(Q \cap S) \cap R$ തുടങ്ങിയവ കാണുക.

2. താഴെക്കാണുന്ന ഗണങ്ങൾക്ക് യോഗത്തിനും സംഗമത്തിനുമുള്ള ക്രമവിനിമേയ നിയമം പരിശോധിക്കുക.

   $P = \{ x : x$ എന്നത് 2 നും 7 നും ഇടയിലുള്ള വാസ്തവിക സംഖ്യകൾ $\}$ കൂടാതെ
   $Q = \{ x : x$ എന്നത് 2 നും 7 നും ഇടയിലുള്ള പരിമേയ സംഖ്യകൾ$\}$.

3. $A = \{p,q,r,s\}$, $B = \{m,n,q,s,t\}$ കൂടാതെ $C = \{m,n,p,q,s\}$ എങ്കിൽ ഗണങ്ങളുടെ യോഗത്തിനുള്ള സംയോജന നിയമം ശരി നോക്കുക.

4. $A = \{-11, \sqrt{2}, \sqrt{5}, 7\}$, $B = \{\sqrt{3}, \sqrt{5}, 6, 13\}$ കൂടാതെ $C = \{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, 9\}$ എന്നീ ഗണങ്ങൾക്ക് ഗണങ്ങളുടെ സംഗമത്തിനുള്ള സംയോജന നിയമം ശരി നോക്കുക.

5. $A=\{x : x = 2^n, n \in W$ കൂടാതെ $n<4\}$, $B = \{x : x = 2n, n \in \mathbb{N}$ കൂടാതെ $n \leq 4\}$ കൂടാതെ

   $C = \{0,1,2,5,6\}$, എങ്കിൽ ഗണങ്ങളുടെ സംഗമത്തിനുള്ള സംയോജന നിയമം ശരിനോക്കുക.

1.6.3 വിതരണ നിയമം

സംഖ്യകളുടെ സങ്കലനത്തിൽ മേലുള്ള ഗുണനം വിതരണ നിയമത്തെ പൂർത്തീകരിക്കും. അതായത്, $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$. എന്നത് കഴിഞ്ഞ ക്ലാസ്സുകളിൽ നാം പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഇപ്പോൾ നമുക്ക് ഗണങ്ങളുടെ സംഗമമെന്നത് **യോഗത്തിൻമേലുള്ള വിതരണ നിയമത്തെ** പൂർത്തീകരിക്കും എന്നതിനെ ശരിനോക്കാൻ ശ്രമിക്കാം.

Unit 1_SET LANGUAGE.indd 22 27-01-2023 12:38:05

വിതരണ നിയമം : A, B, C എന്നിവ ഏതെങ്കിലു മൂന്ന് ഗണങ്ങൾ എന്നിരിക്കട്ടെ

(i) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ [യോഗത്തിനുമേൽ സംഗമ വിതരണ നിയമം]

(ii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ [സംഗമത്തിനുമേൽ യോഗവിതരണ നിയമം]

ഉദാഹരണം 1.21 $A = \{0,2,4,6,8\}, B = \{x : x$ ഒരു അഭാജ്യസംഖ്യ കൂടാതെ $x < 11\}$ കൂടാതെ $C = \{x : x \in N$ കൂടാതെ $5 \leq x < 9\}$എങ്കിൽ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ എന്നത് ശരിനോക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ളവ, $A = \{0,2,4,6,8\}$, $B = \{2,3,5,7\}$ കൂടാതെ $C = \{5,6,7,8\}$

ആദ്യം നാം കണ്ടുപിടിക്കുന്നത് $B \cap C = \{5,7\}$

$A \cup (B \cap C) = \{0,2,4,5,6,7,8\}$ ... (1)

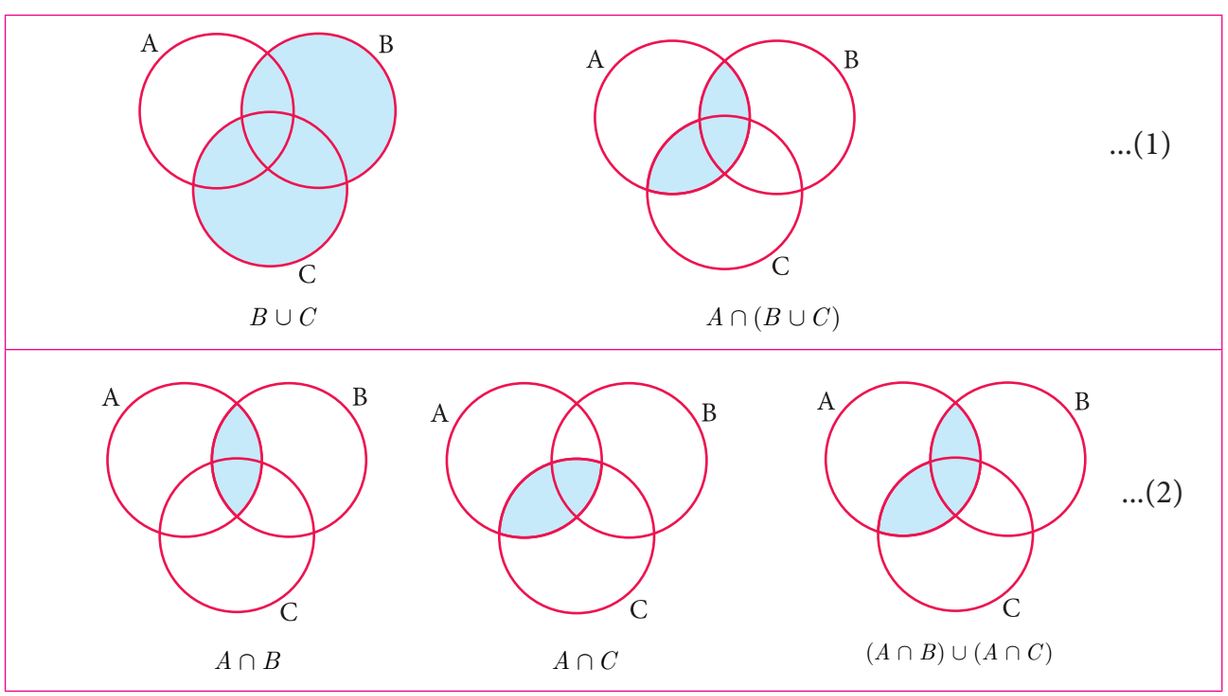
അടുത്ത്, $A \cup B = \{0,2,3,4,5,6,7,8\}$, $A \cup C = \{0,2,4,5,6,7,8\}$

ഇപ്പോൾ, $(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{0,2,4,5,6,7,8\}$ ... (2)

(1) ൽ നിന്നും (2) ൽ നിന്നും, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. എന്നത് ശരിയാണെന്ന് തെളിയിച്ച

ഉദാഹരണം 1.22 വെൻചിത്രം ഉപയോഗിച്ച് $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ എന്നത് ശരിനോക്കുക?

നിർദ്ധാരണം



ചിത്രം.1.29

(1) ൽ നിന്നും (2) ൽ നിന്നും, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ എന്നത് വെൻചിത്രം മൂലം ശരിയാണെന്ന് തെളിയിച്ചു.

Unit 1_SET LANGUAGE.indd 23 27-01-2023 12:38:08

1.7 ഡിമോർഗൻ നിയമങ്ങൾ



അഗസ്റ്റസ് ഡിമോർഗൻ (1806-1871) ഒരു ബ്രിട്ടീഷ് ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞനാണ്. അദ്ദേഹം 1806-ൽ ഇന്ത്യാമഹാരാജ്യത്തിൽ തമിഴ്നാട്ടിലുള്ള മധുരയിൽ ജൂൺ മാസം 27 ാം തീയതി ജനിച്ചു. അപ്പോൾ അദ്ദേഹത്തിന്റെ പിതാവ് ഈസ്റ്റിന്ത്യാ കമ്പനിയിൽ സേവനം അനുഷ്ഠിച്ചിരുന്നു. അദ്ദേഹത്തിന് ഏഴുമാസം പ്രായമുള്ളപ്പോൾ അദ്ദേഹത്തിന്റെ കുടുംബം ഇംഗ്ലണ്ടിലേയ്ക്ക് കുടിയേറി. അദ്ദേഹം ഇംഗ്ലണ്ടിലെ കേംബ്രിഡ്ജിലുള്ള ട്രിനിറ്റി കലാശാലയിലാണ് പഠിച്ചത്. അദ്ദേഹം ഗണത്തിന്റെ മൂന്ന് അടിസ്ഥാനക്രിയകളായ യോഗം, സംഗമം, പൂരകം എന്നിവയ്ക്കിടയിലുള്ള ബന്ധത്തെ കാണിയ്ക്കുന്നതിന് ചില നിയമങ്ങൾ രൂപപ്പെടുത്തി. ഈ നിയമങ്ങൾ ഡി മോർഗൻ നിയമങ്ങൾ എന്നു വിളിക്കപ്പെടുന്നു.

1.7.1 ഗണവ്യത്യാസത്തിനുള്ള ഡിമോർഗൻ നിയമങ്ങൾ (De Morgan's laws for set difference)

ഈ നിയമങ്ങൾ ഗണക്രിയകളായ യോഗം, സംഗമം കൂടാതെ ഗണവ്യത്യാസം എന്നിവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തെ കാണിക്കുന്നു.

$A=\{-5,-2,1,3\}$, $B=\{-3,-2,0,3,5\}$ കൂടാതെ $C=\{-2,-1,0,4,5\}$ എന്നീ മൂന്ന് ഗണങ്ങൾ എടുക്കുക.

ഇപ്പോൾ, $B\cup C = \{-3,-2,-1,0,3,4,5\}$

$A-(B\cup C) = \{-5,1\}$ ... (1)

അടുത്ത്, $A-B = \{-5,1\}$ കൂടാതെ $A-C=\{-5,1,3\}$

$(A-B)\cup(A-C) = \{-5,1,3\}$ ... (2)

$(A-B)\cap(A-C) = \{-5,1\}$ ... (3)

(1) ൽ നിന്നും (2), ൽ നിന്നും

$A-(B\cup C)\neq (A-B)\cup(A-C)$ എന്ന് നമുക്ക് കാണാം.

എന്നാൽ,

(1) ൽ നിന്നും (3), ൽ നിന്നും

$A-(B\cup C) = (A-B)\cap(A-C)$

എന്ന് നമുക്ക് കാണാൻ സാധിക്കും.

ചിന്തിക്കുക

$(A-B)\cup(A-C)\cup(A\cap B)=$_____

ഇപ്പോൾ, $B\cap C = \{-2,0,5\}$

$A-(B\cap C) = \{-5,1,3\}$ ... (4)

(3) ൽ നിന്നും (4) ൽ നിന്നും

$A-(B\cap C)\neq (A-B)\cap(A-C)$ എന്ന് നമുക്ക് കാണാം

പക്ഷേ (2) ൽ നിന്നും (4), ൽ നിന്നും $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$ എന്ന് കിട്ടുന്നു

ഗണവ്യത്യാസത്തിനുള്ള ഡിമോർഗൻ നിയമങ്ങൾ : A, B, C എന്നിവ ഏതെങ്കിലും മൂന്ന് ഗണങ്ങൾ എങ്കിൽ

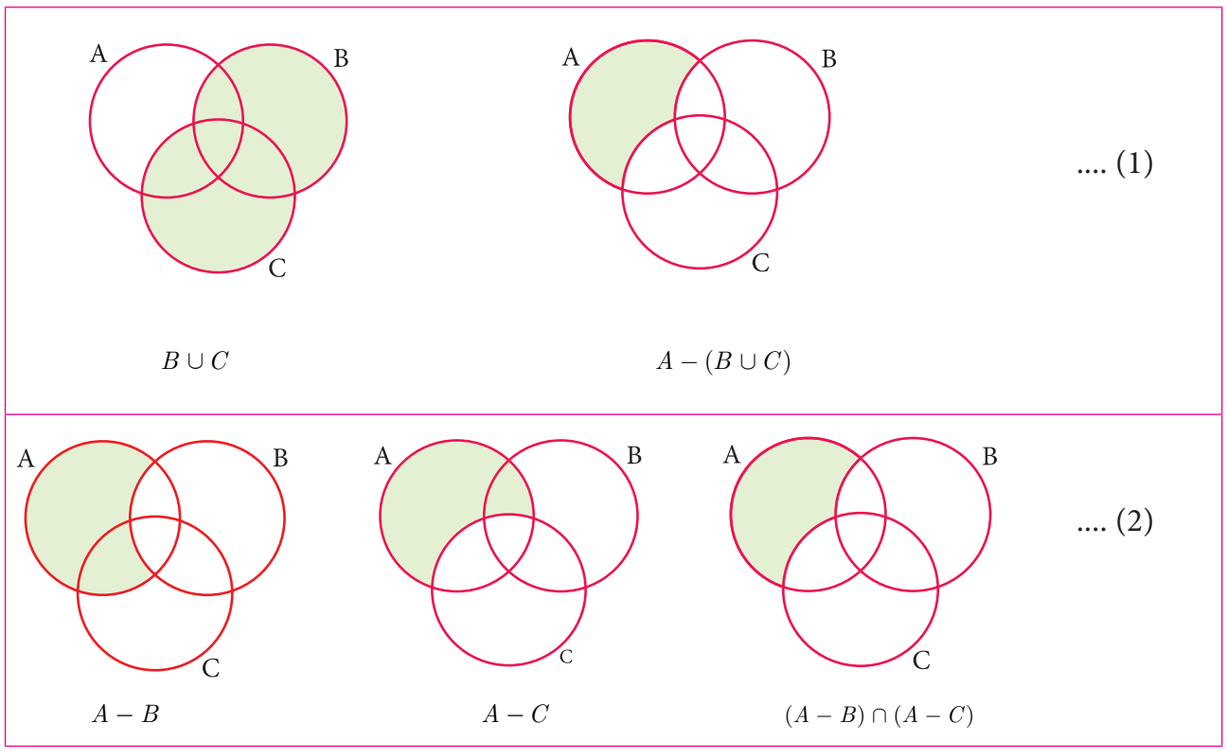
(i) $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$ (ii) $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$

Unit 1_SET LANGUAGE.indd 24 27-01-2023 12:38:11

ഉദാഹരണം 1.23

വെൻചിത്രം ഉപയോഗിച്ച് $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$ എന്നത് ശരിനോക്കുക.

നിർദ്ധാരണം



ചിത്രം.1.30

(1)ൽ നിന്നും (2) ൽ നിന്നും, $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$ എന്നത് ശരിയാണെന്ന് തെളിയിച്ചു.

ഉദാഹരണം 1.24

$P=\{x:x\in\mathbb{W}$ കൂടാതെ $0<x<10\}$, $Q=\{x:x=2n+1, n\in\mathbb{W}$ കൂടാതെ $n<5\}$ കൂടാതെ $R=\{2,3,5,7,11,13\}$, എങ്കിൽ $P-(Q\cap R)=(P-Q)\cup(P-R)$ എന്നത് ശരി നോക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

ഗണങ്ങൾ P, Q കൂടാതെ R എന്നിവയെ പട്ടികാരീതിയിൽ എഴുതാം.

$P=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $Q=\{1,3,5,7,9\}$

കൂടാതെ $R=\{2,3,5,7,11,13\}$

$(Q\cap R)=\{3,5,7\}$

അതിനാൽ $P-(Q\cap R)=\{1,2,4,6,8,9\}$ ... (1)

$P-Q=\{2,4,6,8\}$ കൂടാതെ

$P-R=\{1,4,6,8,9\}$

അതിനാൽ, $(P-Q)\cup(P-R)=\{1,2,4,6,8,9\}$ ... (2)

ഗണം Q-ന്റെ അംഗങ്ങളെ കണ്ടുപിടിക്കൽ

തന്നിട്ടുള്ളവ, $x=2n+1$

$n=0\rightarrow x=2(0)+1=0+1=1$

$n=1\rightarrow x=2(1)+1=2+1=3$

$n=2\rightarrow x=2(2)+1=4+1=5$

$n=3\rightarrow x=2(3)+1=6+1=7$

$n=4\rightarrow x=2(4)+1=8+1=9$

ഇതിൽ നിന്നും, x-ന്റെ മൂല്യം 1, 3, 5, 7 കൂടാതെ 9.

(1)ൽ നിന്നും (2) ൽ നിന്നും, $P-(Q\cap R)=(P-Q)\cup(P-R)$. എന്നത് ശരിയാണെന്ന് തെളിയിച്ചു

Unit 1_SET LANGUAGE.indd 25 27-01-2023 12:38:13

1.7.2 പൂരകത്തിനുള്ള ഡിമോർഗൻ നിയമങ്ങൾ (De Morgan's Laws for Complementation)

ഈ നിയമങ്ങൾ ഗണിക്രിയകളായ യോഗം കൂടാതെ സംഗമം എന്നിവയെ പൂരകഗണവുമായി ബന്ധപ്പെടുത്തുന്നു.

സമസ്തഗണം $U=\{0,1,2,3,4,5,6\}$, $A=\{1,3,5\}$ കൂടാതെ $B=\{0,3,4,5\}$ എന്ന് കരുതുക.

$$A \cup B = \{0,1,3,4,5\}$$

$$(A \cup B)' = \{2,6\} \quad \text{.....(1)}$$

പിന്നീട്, $A' = \{0,2,4,6\}$ കൂടാതെ $B' = \{1,2,6\}$

അതിനാൽ, $A' \cap B' = \{2,6\}$ .....(2)

(1)ൽ നിന്നും (2) ൽ നിന്നും, $(A \cup B)' = A' \cap B'$ എന്ന് നമുക്ക് ലഭിച്ചു.

ചിന്തിക്കുക

$A - B = A \cap B'$ എന്നത് ശരിയാണോ?

ഇപ്പോൾ, $A \cap B = \{3,5\}$,

$$(A \cap B)' = \{0,1,2,4,6\} \quad \text{.....(3)}$$

$A' = \{0,2,4,6\}$ കൂടാതെ $B' = \{1,2,6\}$

$$A' \cup B' = \{0,1,2,4,6\} \quad \text{.....(4)}$$

(3) ൽ നിന്നും (4) ൽ നിന്നും, $(A \cap B)' = A' \cup B'$ എന്ന് നമുക്ക് ലഭിച്ചു.

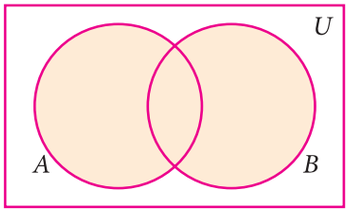
ചിന്തിക്കുക

$(A - B) \cup (B - A') =$ ____

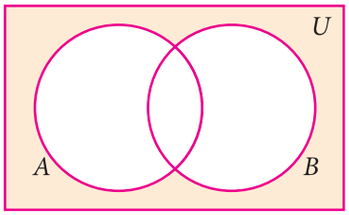
പൂരകത്തിനുള്ള ഡിമോർഗൻ നിയമങ്ങൾ : 'U' എന്നത് ഒരു സമസ്തഗണം, A, B എന്നിവ അതിന്റെ ഉപഗണങ്ങൾ. എങ്കിൽ (i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

ഉദാഹരണം 1.25 വെൻചിത്രം ഉപയോഗിച്ച് $(A \cup B)' = A' \cap B'$ എന്നത് ശരി നോക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

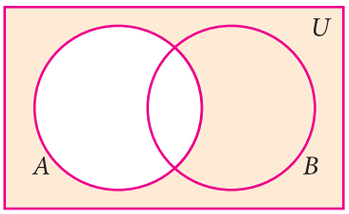


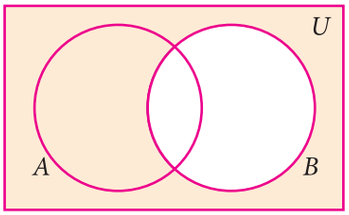
$A \cup B$

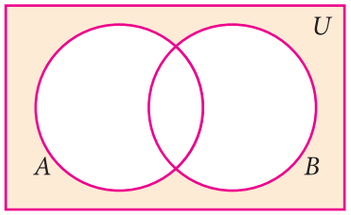


$(A \cup B)'$ .... (1)

Unit 1_SET LANGUAGE.indd 26 27-01-2023 12:38:16







.... (2)

A' B' $A' \cap B'$

ചിത്രം 1.31

(1) ൽ നിന്നും (2) ൽ നിന്നും, $(A \cup B)' = A' \cap B'$ എന്നത് ശരിയാണെന്ന് തെളിയിച്ചു.

ഉദാഹരണം 1.26 $U = \{x : x \in \mathbb{Z}, -2 \leq x \leq 10\}$,

$A = \{x : x = 2p+1,\ p \in \mathbb{Z}, -1 \leq p \leq 4\}$, $B = \{x : x = 3q+1,\ q \in \mathbb{Z}, -1 \leq q < 4\}$,

എന്നീ ഗണങ്ങൾക്ക് പൂരകത്തിനുള്ള ഡിമോർഗൻ നിയമങ്ങൾ ശരിനോക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ളവ $U = \{-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$,

$A = \{-1,1,3,5,7,9\}$ കൂടാതെ $B = \{-2,1,4,7,10\}$

ചിന്തിക്കുക

$A \cap (A \cup B)' =$____

നിയമം (i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

$$A \cup B = \{-2,-1,1,3,4,5,7,9,10\}$$
$$(A \cup B)' = \{0,2,6,8\} \quad \text{..... (1)}$$

$$A' = \{-2,0,2,4,6,8,10\} \text{ കൂടാതെ } B' = \{-1,0,2,3,5,6,8,9\}$$
$$A' \cap B' = \{0,2,6,8\} \quad \text{..... (2)}$$

(1) ൽ നിന്നും (2)ൽ നിന്നും, $(A \cup B)' = A' \cap B'$ എന്നത് ശരിയാണെന്ന് തെളിയിച്ചു.

നിയമം (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

ചിന്തിക്കുക

$(A \cup B)' \cup (A' \cap B) =$____

$$A \cap B = \{1,7\}$$

$$(A \cap B)' = \{-2,-1,0,2,3,4,5,6,8,9,10\} \quad \text{..... (3)}$$

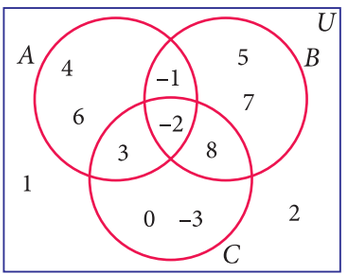
കൂടാതെ, $A' \cup B' = \{-2,-1,0,2,3,4,5,6,8,9,10\}$ ..... (4)

(3) ൽ നിന്നും (4) ൽ നിന്നും, $(A \cap B)' = A' \cup B'$ എന്നത് ശരിയാണെന്ന് തെളിയിച്ചു.

Unit 1_SET LANGUAGE.indd 27 27-01-2023 12:38:20

അഭ്യാസം 1.5

1. അടുത്ത് കാണുന്ന വെൻചിത്രത്തിൽ നിന്നും താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഗണങ്ങൾ കാണുക:



(i) $A-B$ (ii) $B-C$ (iii) $A' \cup B'$

(iv) $A' \cap B'$ (v) $(B \cup C)'$

(vi) $A-(B \cup C)$ (vii) $A-(B \cap C)$

2. $K=\{a,b,d,e,f\}$, $L=\{b,c,d,g\}$ കൂടാതെ $M=\{a,b,c,d,h\}$, എങ്കിൽ താഴെക്കൊടുത്തിട്ടുള്ളവ കാണുക:

(i) $K \cup (L \cap M)$ (ii) $K \cap (L \cup M)$

(iii) $(K \cup L) \cap (K \cup M)$ (iv) $(K \cap L) \cup (K \cap M)$

3. $A=\{x : x \in \mathbb{Z}, -2 < x \leq 4\}$, $B=\{x : x \in \mathbb{W}, x \leq 5\}$, കൂടാതെ $C=\{-4,-1,0,2,3,4\}$

എന്നീ ഗണങ്ങൾക്ക് $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ എന്നത് ശരി നോക്കുക.

4. വെൻചിത്രം ഉപയോഗിച്ച് $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ എന്നത് ശരി നോക്കുക.

5. $A=\{b,c,e,g,h\}$, $B=\{a,c,d,g,i\}$ കൂടാതെ $C=\{a,d,e,g,h\}$, എങ്കിൽ $A-(B \cap C) = (A-B) \cup (A-C)$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

6. $A=\{x : x=6n,\ n \in \mathbb{W}$ കൂടാതെ $n<6\}$, $B=\{x : x=2n,\ n \in \mathbb{N}$ കൂടാതെ $2<n \leq 9\}$ $C=\{x : x=3n,\ n \in \mathbb{N}$ കൂടാതെ $4 \leq n<10\}$, എങ്കിൽ $A-(B \cap C) = (A-B) \cup (A-C)$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

7. $A=\{-2,0,1,3,5\}$, $B=\{-1,0,2,5,6\}$ കൂടാതെ $C=\{-1,2,5,6,7\}$, എങ്കിൽ $A-(B \cup C) = (A-B) \cap (A-C)$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

8. $A=\{y : y=\frac{a+1}{2},\ a \in \mathbb{W}$ കൂടാതെ $a \leq 5\}$, $B=\{y : y=\frac{2n-1}{2},\ n \in \mathbb{W}$ കൂടാതെ $n<5\}$ കൂടാതെ $C=\left\{-1,-\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2\right\}$, എങ്കിൽ $A-(B \cup C) = (A-B) \cap (A-C)$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

9. വെൻചിത്രം ഉപയോഗിച്ച് $A-(B \cap C) = (A-B) \cup (A-C)$ എന്നത് ശരിയാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

10. $U=\{4,7,8,10,11,12,15,16\}$, $A=\{7,8,11,12,\}$ കൂടാതെ $B=\{4,8,12,15\}$, എങ്കിൽ പൂരകത്തിനുള്ള ഡിമോർഗൻ നിയമങ്ങൾ ശരി നോക്കുക.

11. വെൻചിത്രം മുഖേന $(A \cap B)' = A' \cup B'$ എന്നത് ശരി നോക്കുക.

Unit 1_SET LANGUAGE.indd 28 27-01-2023 12:38:24

1.8 ഗണക്രിയകളിലെ ഗണനസംഖ്യയും പ്രയോഗിക പ്രശ്നങ്ങളും:

ഗണങ്ങളുടെ യോഗം, സംഗമം,പൂരകം ഗണങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം എന്നിവയെ കുറിച്ച് പഠിച്ചു കഴിഞ്ഞു. ഇപ്പോൾ ദൈനംദിന ജീവിതവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ഗണത്തിലെ പ്രയോഗിക പ്രശ്നങ്ങളെ കുറിച്ച് പഠിക്കാം.

ഫലങ്ങൾ :

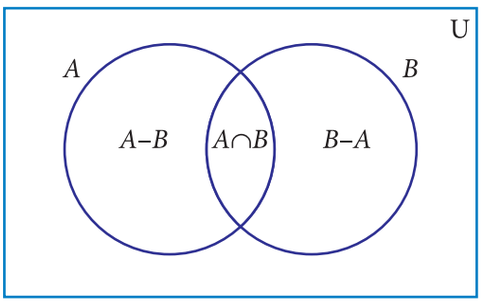
A, B എന്നീ ഗണങ്ങൾക്ക് താഴെ പറയുന്ന ഉപയോഗപ്രദമായ ഫലങ്ങളുണ്ട്.

(i) $n(A \cup B) = n(A)+n(B)- n(A \cap B)$

(ii) $n(A-B) = n(A) - n(A \cap B)$

(iii) $n(B-A) = n(B)- n(A \cap B)$

(iv) $n(A') = n(U) - n(A)$



ചിത്രം. 1.32

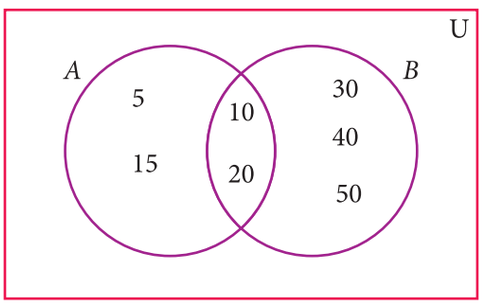
കുറിപ്പ്

- $n(A \cap B) = n(A)+n(B) - n(A \cup B)$
- $n(U) = n(A)+n(A')$
- A യും B യും രണ്ട് വിയുക്തഗണങ്ങൾ ആണെങ്കിൽ, $n(A \cup B) = n(A)+n(B)$.

ഉദാഹരണം 1.27

വെൻ ചിത്രത്തിൽ നിന്നും $n(A \cup B) = n(A)+n(B) - n(A \cap B)$ എന്ന് പരിശോധിക്കുക

നിർദ്ധാരണം വെൻ ചിത്രത്തിൽ നിന്നും,



ചിത്രം. 1.33

$A = \{5, 10, 15, 20\}$

$B = \{10, 20, 30, 40, 50,\}$

എങ്കിൽ $A \cup B = \{5, 10, 15, 20, 30, 40, 50\}$

$A \cap B = \{10, 20\}$

$n(A) = 4, \quad n(B) = 5, n(A \cup B) = 7, \quad n(A \cap B) = 2$

$n(A \cup B) = 7 \quad \rightarrow (1)$

$n(A)+n(B)-n(A \cap B) = 4+5-2$

$=7 \quad \rightarrow (2)$

(1), (2) ൽ നിന്നും, $n(A \cup B) = n(A)+n(B)-n(A \cap B)$.

ഉദാഹരണം 1.28

$n(A) = 36$, $n(B) = 10$, $n(A \cup B)=40$, കൂടാതെ $n(A')=27$ ആണെങ്കിൽ $n(U)$ കൂടാതെ $n(A \cap B)$ എന്നിവ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം $n(A) = 36, \quad n(B) =10, \quad n(A \cup B)=40, \quad n(A')=27$

(i) $n(U) = n(A)+n(A') = 36+27 = 63$

(ii) $n(A \cap B) = n(A)+n(B)-n(A \cup B) = 36+10-40 = 46-40 = 6$

Unit 1_SET LANGUAGE.indd 29 27-01-2023 12:38:24

പ്രവൃത്തി-4

യോജിച്ച ഗണന സംഖ്യ ഉപയോഗിച്ച് പൂരിപ്പിക്കുക.						
ക്രമനമ്പർ	$n(A)$	$n(B)$	$n(A \cup B)$	$n(A \cap B)$	$n(A-B)$	$n(B-A)$
1	30	45	65			
2	20		55	10		
3	50	65		25		
4	30	43	70			

ഉദാഹരണം 1.29

$A=\{b, d, e, g, h\}, B=\{a, e, c, h\}$ എന്നിരിക്കട്ടെ എങ്കിൽ $n(A-B) = n(A)-n(A \cap B)$ ശരി നോക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$$A = \{b, d, e, g, h\}, B = \{a, e, c, h\}$$

$$A - B = \{b, d, g\}$$

$$n(A-B) = 3 \quad \ldots (1)$$

$$A \cap B = \{e, h\}$$

$$n(A \cap B) = 2, \quad n(A) = 5$$

$$n(A) - n(A \cap B) = 5\text{-}2$$

$$= 3 \quad \ldots (2)$$

(1), (2) ൽ നിന്നും $n(A-B) = n(A)-n(A \cap B)$.

ഉദാഹരണം 1.30

ഒരു സ്ക്കൂളിലെ എല്ലാ കുട്ടികളും ഹോക്കി അല്ലെങ്കിൽ ക്രിക്കറ്റ് അല്ലെങ്കിൽ രണ്ടും കളിക്കുന്നവരാണ്. 300 പേർ ഹോക്കി കളിക്കുന്നവരും 250 പേർ ക്രിക്കറ്റ് കളിക്കുന്നവരും 110 പേർ രണ്ടു കളികളും കളിക്കുന്നവരാണെങ്കിൽ

(i) ഹോക്കി മാത്രം കളിക്കുന്നവരുടെ എണ്ണം കാണുക.

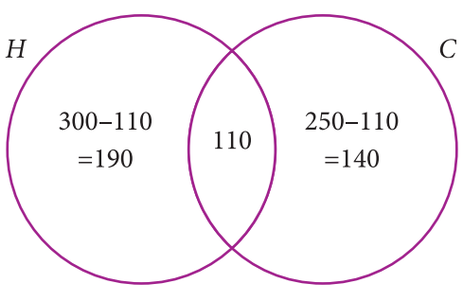
(ii) ക്രിക്കറ്റ് മാത്രം കളിക്കുന്നവരുടെ എണ്ണം കാണുക.

(iii) സ്ക്കൂളിലെ ആകെ കുട്ടികളുടെ എണ്ണം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം:

H,C എന്നിവ യഥാക്രമം ഹോക്കിയും ക്രിക്കറ്റും കളിക്കുന്നവരുടെ ഗണം എന്നിരിക്കട്ടെ

$n(H) = 300$, $n(C) = 250$ കൂടാതെ $n(H \cap C) = 110$



ചിത്രം. 1.34

വെൻ ചിത്രത്തിൽ നിന്ന,

(i) ഹോക്കി മാത്രം കളിക്കുന്നവരുടെ എണ്ണം=190

(ii) ക്രിക്കറ്റ് മാത്രം കളിക്കുന്നവരുടെ എണ്ണം=140

Unit 1_SET LANGUAGE.indd 30 27-01-2023 12:38:24

(iii) സ്ക്കൂളിലെ ആകെ കുട്ടികളുടെ എണ്ണം=190+110+140=440

മറ്റൊരു രീതി

(i) ഹോക്കി മാത്രം കളിക്കുന്നവരുടെ എണ്ണം

$$n(H-C) = n(H) - n(H \cap C)$$
$$= 300 - 110 = 190$$

(ii) ക്രിക്കറ്റ് മാത്രം കളിക്കുന്നവരുടെ എണ്ണം

$$n(C-H) = n(C) - n(H \cap C)$$
$$= 250 - 110 = 140$$

(iii) സ്ക്കൂളിലെ ആകെ കുട്ടികളുടെ എണ്ണം

$$n(H \cup C) = n(H) + n(C) - n(H \cap C)$$
$$= 300+250 - 110 = 440$$

WI49C

ഉദാഹരണം 1.31

60 ആളുകളുടെ ഒരു പാർട്ടിയിൽ 35 പേർക്ക് വാനില ഐസ്ക്രീം, പേർക്ക് ചോക്കലേറ്റ് ഐസ്ക്രീം ഉണ്ടായിരുന്നു. എല്ലാവർക്കും ഒരു തരം ഐസ്ക്രീമെങ്കിലും ഉണ്ട്. എങ്കിൽ.

(i) വാനില ഐസ്ക്രീമും ചോക്കലേറ്റ് ഐസ്ക്രീമും ഉണ്ടായിരുന്നവർ എത്ര?

(ii) വാനില ഐസ്ക്രീം മാത്രം ഉണ്ടായിരുന്നവർ എത്ര?

(iii) ചോക്കലേറ്റ് ഐസ്ക്രീം മാത്രം ഉണ്ടായിരുന്നവർ എത്ര?

നിർദ്ധാരണം :

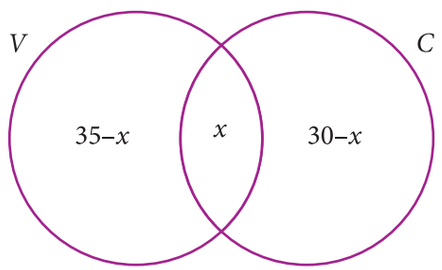
V,C എന്നിവ യഥാക്രമം വാനില ഐസ്ക്രീമും ചോക്കലേറ്റ് ഐസ്ക്രീമും ഉണ്ടായിരുന്നവരുടെ ഗണം എന്നിരിക്കട്ടെ.

$n(V) = 35$, $n(C) = 30$, $n(V \cup C) = 60$,

x എന്നത് രണ്ട് ഐസ്ക്രീമും ഉണ്ടായിരുന്നവരുടെ എണ്ണം എന്നിരിക്കട്ടെ.

വെൻചിത്രത്തിൽ നിന്നും.

$$35 - x + x + 30 - x = 60$$
$$65 - x = 60$$
$$x = 5$$



ചിത്രം. 1.35

അതുകൊണ്ട് 5 ആളുകൾക്ക് രണ്ട് ഐസ്ക്രീമും ഉണ്ടായിരുന്നു.

(i) വാനില ഐസ്ക്രീം മാത്രം ഉണ്ടായിരുന്നവരുടെ എണ്ണം = $35 - x$

$$= 35 - 5 = 30$$

(ii) ചോക്കലേറ്റ് ഐസ്ക്രീം മാത്രം ഉണ്ടായിരുന്നവരുടെ എണ്ണം = $30 - x$

$$= 30 - 5 = 25$$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ എന്ന സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച് രണ്ട് ഗണങ്ങൾ ഉൾകൊള്ളുന്ന പ്രശ്നങ്ങൾ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യാൻ നാം പഠിച്ചു കഴിഞ്ഞു.

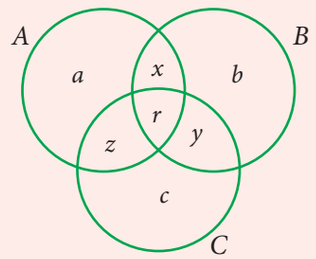
Unit 1_SET LANGUAGE.indd 31 27-01-2023 12:38:25

മൂന്നു ഗണങ്ങൾ തന്നിരുന്നാലും ഈ രീതി ഉപയോഗിച്ച് $A \cup B \cup C$ യുടെ ഗണനസംഖ്യ കണക്കാക്കുന്നതിനുള്ള സൂത്രവാക്യവും നമുക്ക് കണ്ടു പിടിക്കാൻ സാധിക്കും.

A, B, C എന്നിവ ഏതെങ്കിലും മൂന്ന് പരിമിത ഗണങ്ങൾ എങ്കിൽ
$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

കുറിപ്പ്

വെൻചിത്രം ഉപയോഗിച്ച് കണക്കുകളെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നതിൽ താഴെക്കാണുന്ന ഫലങ്ങൾ ഉപയോഗപ്രദമായിരിക്കും എന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക. A, B കൂടാതെ C എന്നിവ വിദ്യാർത്ഥികളെ കുറിയ്ക്കുന്ന മൂന്നു ഗണങ്ങൾ എന്നിരിക്കട്ടെ. വെൻചിത്രത്തിൽ നിന്നും,



ചിത്രം.1.36

ഗണം A- യിൽ മാത്രമുള്ള വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം = a

ഗണം B- യിൽ മാത്രമുള്ള വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം = b

ഗണം C- യിൽ മാത്രമുള്ള വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം = c

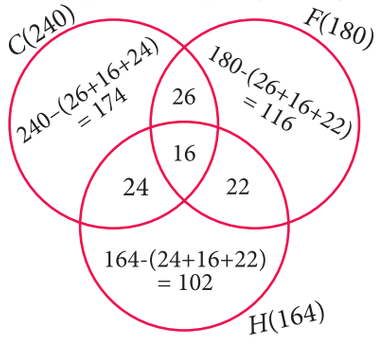
- ഒരേ ഒരു ഗണത്തിൽ മാത്രം ഉൾപ്പെടുന്ന ആകെ വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം $= (a + b + c)$
- രണ്ടു ഗണങ്ങളിൽ മാത്രം ഉൾപ്പെടുന്ന ആകെ വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം $= (x + y + z)$
- കൃത്യമായി മൂന്നു ഗണങ്ങളിൽ ഉൾപ്പെടുന്ന വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം $= r$
- കുറഞ്ഞത് രണ്ടു ഗണങ്ങളിലെങ്കിലും (രണ്ടോ അധിലധികമോ) ഉൾപ്പെടുന്ന ആകെ വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം = $x+y+z+r$
- മൂന്നു ഗണങ്ങളിലും ഉൾപ്പെടുന്ന ആകെ വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം = $(a + b + c + x + y + z + r)$

ഉദാഹരണം 1.32

ഒരു കലാശാലയിൽ ഉള്ള വിദ്യാർത്ഥികളിൽ, 240 വിദ്യാർത്ഥികൾ ക്രിക്കറ്റും 180 വിദ്യാർത്ഥികൾ ഫുട്ബോളും, 164 വിദ്യാർത്ഥികൾ ഹോക്കിയും, 42 പേർ ക്രിക്കറ്റും ഫുട്ബോളും, 38 പേർ ഫുട്ബോളും ഹോക്കിയും, 40 പേർ ക്രിക്കറ്റും ഹോക്കിയും, 16 പേർ ഈ മൂന്നു കളികളും കളിക്കുന്നവരാണ്. ഓരോ വിദ്യാർത്ഥിയും കുറഞ്ഞത് ഒരു കളിയിലെങ്കിലും പങ്കെടുക്കുന്നുവെങ്കിൽ, (i) കലാശാലയിലുള്ള ആകെ വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം (ii) ഒരേ ഒരു കളിയിൽ മാത്രം പങ്കെടുക്കുന്ന വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം തുടങ്ങിയവ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

C, F, H എന്നിവ യഥാക്രമം ക്രിക്കറ്റ്, ഫുട്ബോൾ, ഹോക്കി എന്നീ കളികൾ കളിക്കുന്നവരുടെ ഗണം എന്നിരിക്കട്ടെ.



ചിത്രം1.37

എങ്കിൽ , $n(C) = 240, n(F) = 180, \ n(H) = 164, n(C \cap F) = 42,$
$n(F \cap H) = 38, n(C \cap H) = 40, n(C \cap F \cap H) = 16.$

തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളെ വെൻചിത്രത്തിൽ രേഖപ്പെടുത്താം.

(i) കലാശാലയിൽ ഉള്ള ആകെ വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം
$= 174+26+116+22+102+24+16 = 480$

(ii) ഒരേയൊരു കളിയിൽ മാത്രം പങ്കെടുക്കുന്ന വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം = $174+116+102 = 392$

Unit 1_SET LANGUAGE.indd 32 27-01-2023 12:38:26

ഉദാഹരണം 1.33

600 കുടുംബങ്ങളുള്ള ഒരു ഗ്രാമത്തിൽ, $\frac{3}{5}$ ഭാഗം സ്കൂട്ടർ, $\frac{1}{3}$ ഭാഗം കാർ, $\frac{1}{4}$ ഭാഗം ബൈസൈക്കിൾ എന്നിവ കൈവശമുള്ളവരാണ്. 120 കുടുംബങ്ങൾ സ്കൂട്ടർ കൂടാതെ കാർ എന്നിവയും 86 കുടുംബങ്ങൾക്ക് കാർ കൂടാതെ ബൈസൈക്കിൾ എന്നിവയും 90 കുടുംബങ്ങൾ സ്കൂട്ടർ കൂടാതെ ബൈസൈക്കിൾ, $\frac{2}{15}$ ഭാഗം കുടുംബങ്ങൾ മൂന്നുവിധം വാഹനങ്ങളും കൈവശമുള്ളവരാണ്. എങ്കിൽ (i) കുറഞ്ഞത് രണ്ടു വിധം വാഹനങ്ങൾ എങ്കിലും കൈവശമുള്ള കുടുംബങ്ങളുടെ എണ്ണം (ii) ഒരു വിധത്തിലുള്ള വാഹനവും കൈവശമില്ലാത്ത കുടുംബങ്ങളുടെ എണ്ണം തുടങ്ങിയവ കാണുക.

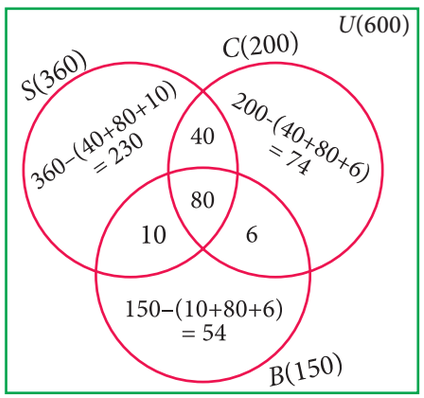
നിർദ്ധാരണം

S, C, B എന്നിവ യഥാക്രമം സ്കൂട്ടർ, കാർ, ബൈസൈക്കിൾ എന്നീ വാഹനങ്ങൾ കൈവശപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന കുടുംബങ്ങളുടെ ഗണം എന്നിരിക്കട്ടെ.

തന്നിട്ടുള്ളവ, $n(\mathrm{U}) = 600 \quad n(S) = \frac{3}{5} \times 600 = 360$

$$n(C) = \frac{1}{3} \times 600 = 200 \quad n(B) = \frac{1}{4} \times 600 = 150$$

$$n(S \cap C \cap B) = \frac{2}{15} \times 600 = 80$$



ചിത്രം1.38

വെൻചിത്രത്തിൽ നിന്നും,

(i) കുറഞ്ഞത് രണ്ടു വിധം വാഹനങ്ങൾ എങ്കിലും കൈവശമുള്ള കുടുംബങ്ങളുടെ എണ്ണം = 40+6+10+80 = 136

(ii) ഒരു വിധത്തിലുള്ള വാഹനവും കൈവശമില്ലാത്ത കുടുംബങ്ങളുടെ എണ്ണം

= 600 – (കുറഞ്ഞത് ഒരു വാഹനമെങ്കിലും കൈവശമുള്ളവരുടെ എണ്ണം)

$= 600 - (230 + 40 + 74 + 6 + 54 + 10 + 80)$

$= 600 - 494 = 106$

ഉദാഹരണം 1.34

100 വിദ്യാർത്ഥികൾ ഉള്ള ഒരു സംഘത്തിൽ, 85 വിദ്യാർത്ഥികൾ തമിഴ് സംസാരിക്കുന്നവരാണ് . 40 വിദ്യാർത്ഥികൾ ഇംഗ്ലീഷും, 20 വിദ്യാർത്ഥികൾ ഫ്രഞ്ചും സംസാരിക്കുന്നവരാണ്. 32 പേർ തമിഴും ഇംഗ്ലീഷും, 13 പേർ ഇംഗ്ലീഷും ഫ്രഞ്ചും, 10 തമിഴും ഫ്രഞ്ചും സംസാരിക്കുന്നവരാണ്. ഓരോ വിദ്യാർത്ഥിയും കുറഞ്ഞത് ഒരു ഭാഷയെങ്കിലും സംസാരിക്കുന്നുവെങ്കിൽ മൂന്നു ഭാഷകളും സംസാരിക്കുന്ന വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

A, B, C എന്നിവ യഥാക്രമം തമിഴ്, ഇംഗ്ലീഷ്, ഫ്രഞ്ച് എന്നീ ഭാഷകൾ സംസാരിക്കുന്ന വിദ്യാർത്ഥികളുടെ ഗണം എന്നിരിക്കട്ടെ.

തന്നിട്ടുള്ളവ, $n(A \cup B \cup C) = 100,\ n(A) = 85,\ n(\mathrm{B}) = 40,\ n(\mathrm{C}) = 20,$

$n(\mathrm{A} \cap B) = 32,\ n(\mathrm{B} \cap C) = 13,\ n(\mathrm{A} \cap C) = 10\,.$

സൂത്രം അനുസരിച്ച്,

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(\mathrm{C}) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$100 = 85 + 40 + 20 - 32 - 13 - 10 + n(A \cap B \cap C)$$

$$n(A \cap B \cap C) = 100 - 90 = 10$$

10 വിദ്യാർത്ഥികൾ മൂന്നു ഭാഷകളും സംസാരിക്കുന്നവരാണ്.

Unit 1_SET LANGUAGE.indd 33 27-01-2023 12:38:29

അഭ്യാസം 1.6

1. (i) $n(A) = 25$, $n(B) = 40$, $n(A \cup B) = 50$ കൂടാതെ $n(B') = 25$, ആണെങ്കിൽ $n(A \cap B)$ കൂടാതെ $n(\mathrm{U})$ എന്നിവ കാണുക.

   (ii) $n(A) = 300$, $n(A \cup B) = 500$, $n(A \cap B) = 50$ കൂടാതെ $n(B') = 350$, ആണെങ്കിൽ $n(B)$ കൂടാതെ $n(\mathrm{U})$ എന്നിവ കാണുക.

2. $\mathrm{U} = \{x : x \in \mathbb{N},\ x \leq 10\}$, $\mathrm{A} = \{2,3,4,8,10\}$ കൂടാതെ $\mathrm{B} = \{1,2,5,8,10\}$, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ ശരി നോക്കുക

3. $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$ എന്നത് താഴെക്കാണുന്ന ഗണങ്ങൾക്ക് ശരി നോക്കുക.

   (i) $A = \{a, c, e, f, h\}$, $B = \{c, d, e, f\}$ കൂടാതെ $C = \{a, b, c, f\}$

   (ii) $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 3, 5, 6\}$ കൂടാതെ $C = \{1, 5, 6, 7\}$

4. ഒരു ക്ലാസ്സിലെ എല്ലാ കുട്ടികളും സംഗീതത്തിലോ അല്ലെങ്കിൽ നാടകത്തിലോ അല്ലെങ്കിൽ രണ്ടിലുമോ പങ്കെടുത്തിരുന്നു. 25 കുട്ടികൾ സംഗീതത്തിലും, 30കുട്ടികൾ നാടകത്തിലും കൂടാതെ 8കുട്ടികൾ സംഗീതത്തിലും നാടകത്തിലും പങ്കെടുത്തുരുന്നു എങ്കിൽ

   (i) സംഗീതത്തിൽ മാത്രം പങ്കെടുത്ത കുട്ടികളുടെ എണ്ണം.

   (ii) നാടകത്തിൽ മാത്രം പങ്കെടുത്ത കുട്ടികളുടെ എണ്ണം.

   (iii) ക്ലാസ്സിലെ ആകെ കുട്ടികളുടെ എണ്ണം എന്നിവ കാണുക.

5. 45 ആളുകളുള്ള ഒരു പാർട്ടിയിൽ ഓരോരുത്തരും ചായയോ, കോഫിയോ അല്ലെങ്കിൽ രണ്ടുമോ ഇഷ്ടപ്പെടുന്നവരാണ് 35 പേർ ചായയും 20 പേർ കോഫിയും ഇഷ്ടപ്പെടുന്നവരാണ്

   (i) ചായയും കോഫിയും ഇഷ്ടപ്പെടുന്നവരുടെ എണ്ണം (ii) ചായ ഇഷ്ടപ്പെടാത്തവരുടെ എണ്ണം (iii) കോഫി ഇഷ്ടപ്പെടാത്തവരുടെ എണ്ണം എന്നിവ കാണുക

6. ഒരു പരീക്ഷയിൽ 50% വിദ്യാർത്ഥികൾ ശാസ്ത്രത്തിലും 70 % വിദ്യാർത്ഥികൾ ഗണിതത്തിലും വിജയിച്ചു. 10% വിദ്യാർത്ഥികൾ രണ്ടു വിഷയങ്ങളിലും പരാജിതരായി 300 വിദ്യാർത്ഥികൾ രണ്ടു വിഷയത്തിലും വിജയിച്ചിരുന്നു. എങ്കിൽ പരീക്ഷയിൽ പങ്കെടുത്ത ആകെ കുട്ടികളുടെ എണ്ണം കണ്ടെത്തുക.

7. A,B എന്നീ രണ്ടു ഗണങ്ങൾക്കു $n(A-B) = 32 + x$, $n(B-A) = 5x$ കൂടാതെ $n(A \cap B) = x$. ഈ വിവരങ്ങളെ വെൻ ചിത്രം മൂലം വിശദകരിക്കുക. $n(A) = n(B)$, എങ്കിൽ x ന്റെ മൂല്യം കണക്കാക്കുക.

8. 500 കാർ ഉടമകളെ പരിശോധിച്ചപ്പോൾ 400 ഉടമകൾ കാർ A യും 200 :ഉടമകൾ കാർ B യും 50 ഉടമകൾ കാർ A യും B യും സ്വന്തമാക്കിയിരുന്നു. ഈ വിവരം ശരിയാണോ?

9. ഒരു ഗ്രാമത്തിൽ 275 കുടുംബങ്ങൾ തമിഴ് വാർത്താപത്രവും, 150 കുടുംബങ്ങൾ ഇംഗ്ലീഷ് വാർത്താപത്രവും, 45 കുടുംബങ്ങൾ ഹിന്ദി വാർത്താപത്രവും വാങ്ങുന്നവരാണ്. 125 കുടുംബങ്ങൾ തമിഴ് കൂടാതെ ഇംഗ്ലീഷ് എന്നീ വാർത്താപത്രങ്ങളും, 17 കുടുംബങ്ങൾ ഇംഗ്ലീഷ് കൂടാതെ ഹിന്ദി എന്നീ വാർത്താപത്രങ്ങളും, 5 കുടുംബങ്ങൾ തമിഴ് കൂടാതെ ഹിന്ദി എന്നീ വാർത്താ പത്രങ്ങളും, 3 കുടുംബങ്ങൾ മൂന്നു വാർത്താപത്രങ്ങളും വാങ്ങുന്നവരാണ്. ഗ്രാമത്തിലുള്ള ഓരോ കുടുംബവും കുറഞ്ഞത് ഒരു വാർത്താപത്രമെങ്കിലും വാങ്ങുന്നവരാണ് എങ്കിൽ

Unit 1_SET LANGUAGE.indd 34 27-01-2023 12:38:30

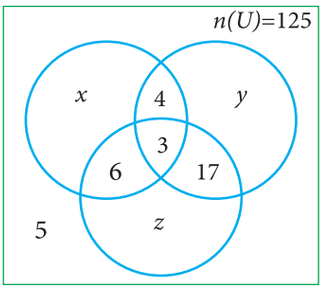
(i) ഒരു വാർത്താപത്രം മാത്രം വാങ്ങുന്ന കുടുംബങ്ങളുടെ എണ്ണം

(ii) കുറഞ്ഞത് രണ്ടു വാർത്താ പത്രങ്ങൾ എങ്കിലും വാങ്ങുന്ന കുടുംബങ്ങളുടെ എണ്ണം

(iii) ഗ്രാമത്തിലുള്ള ആകെ കുടുംബങ്ങളുടെ എണ്ണം എന്നിവ കാണുക.

10. 1000 കർഷകരിൽ നടത്തിയ നിരീക്ഷണത്തിൽ, 600 കർഷകർ നെൽകൃഷി ചെയ്യുന്നവരും, 350 കർഷകർ കൂവരക് കൃഷി ചെയ്യുന്നവരും, 280 കർഷകർ ചോളം കൃഷിചെയ്യുന്നവരുമാണെന്ന് മനസ്സിലാക്കാൻ സാധിച്ചു.120 കർഷകർ നെല്ലും കൂവരകും, 100 കർഷകർ കൂവരകും ചോളവും, 80 കർഷകർ നെല്ലും ചോളവും കൃഷി ചെയ്യുന്നവരാണ്. ഓരോ കർഷകനും മുകളിൽ പറഞ്ഞവയിൽ കുറഞ്ഞത് ഒരു ധാന്യ മെങ്കിലും കൃഷി ചെയ്യുന്നുവെങ്കിൽ മൂന്നു തരം ധാന്യങ്ങളും കൃഷി ചെയ്യുന്ന കർഷകരുടെ എണ്ണം കാണുക.

11. തന്നിട്ടുള്ള ചിത്രത്തിൽ, $n(\mathrm{U}) = 125$, y എന്നത് x -ന്റെ രണ്ടുമടങ്ങ് കൂടാതെ z എന്നത് x-നെക്കാൾ 10 കൂടുതൽ എങ്കിൽ x, y കൂടാതെ z. എന്നിവയുടെ മൂല്യം കാണുക



12. 35 വിദ്യർത്ഥികൾ ഉള്ള ഒരു ക്ലാസ്സിൽ ഓരോ വിദ്യാർത്ഥിയും ചെസ്സ്, കാരംബോർഡ്, ടേബിൾടെന്നിസ്സ് എന്നീ കളികളിൽ ഏതെങ്കിലും ഒന്നെങ്കിലും കളിക്കുന്നവരാണ്. 22 വിദ്യാർത്ഥികൾ ചെസ്സും, 21 വിദ്യാർത്ഥികൾ കാരംബോർഡും, 15 വിദ്യാർത്ഥികൾ ടേബിൾ ടെന്നിസ്സും, 10 വിദ്യാർത്ഥികൾ ചെസ്സും ടേബിൾ ടെന്നിസ്സും, 8 വിദ്യാർത്ഥികൾ കാരം ബോർഡും ടേബിൾ ടെന്നിസ്സും, 6 വിദ്യാർത്ഥികൾ മൂന്ന് കളികളും കളിക്കുന്നവരാണ്. എങ്കിൽ, (i) ചെസ്സ് കൂടാതെ കാരംബോർഡ് എന്നിവ കളിക്കുന്നവരും ടേബിൾ ടെന്നിസ്സ് കളിക്കാത്തവരും (ii) ചെസ്സ് മാത്രം കളിക്കുന്നവർ (iii) കാരം ബോർഡ് മാത്രം കളിക്കുന്നവർ എന്നിവരുടെ എണ്ണം കാണുക. (കുറിപ്പ് : വെൻചിത്രം ഉപയോഗിച്ച്)

13. ഒരു ക്ലാസ്സിലുള്ള 50 വിദ്യാർത്ഥികളിൽ ഓരോ വിദ്യാർത്ഥിയും ബസ്സ് മുഖേനയോ അല്ലെങ്കിൽ സൈക്കിൾ മുഖേനയോ അല്ലെങ്കിൽ നടന്നോ സ്കൂളിൽ വന്നുചേരുന്നു. 25 വിദ്യാർത്ഥികൾ ബസ്സിലും, 20 വിദ്യാർത്ഥികൾ സൈക്കിളിലും 30 വിദ്യാർത്ഥികൾ നടന്നും 10 വിദ്യാർത്ഥികൾ മൂന്നു രീതിയിലും യാത്ര ചെയ്ത് വരുന്നവരാണ്. എങ്കിൽ എത്ര വിദ്യാർത്ഥികൾ കൃത്യമായി രണ്ടു തരം രീതിയിൽ മാത്രം സ്കൂളിൽ വന്നുചേരുന്നു?

അഭ്യാസം 1.6

TQPG8

ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുത്തെഴുതുക

1. താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയിൽ ഏതാണ് ശരി?

(1) $\{7\} \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ (2) $7 \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

(3) $7 \notin \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ (4) $\{7\} \not\subseteq \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

2. $P = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -1 < x < 1\}$ ഒരു

(1) ഏകാംഗഗണം (2) ഘാതഗണം (3) ശൂന്യഗണം (4) ഉപഗണം

3. $\mathrm{U} = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 10\}$ കൂടാതെ $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 2 \le x < 6\}$ ആണെങ്കിൽ $(A')'$ is

(1) {1, 6, 7, 8, 9} (2) {1, 2, 3, 4} (3) {2, 3, 4, 5} (4) { }

4. $B \subseteq A$ ആണെങ്കിൽ $n(A \cap B)$ is

(1) $n(A-B)$ (2) $n(B)$ (3) $n(B-A)$ (4) $n(A)$

5. $A = \{x, y, z\}$ എന്ന ഗണത്തിന്റെ ഉപഗണങ്ങളുടെഎണ്ണം.

(1) 8 (2) 5 (3) 6 (4) 7

Unit 1_SET LANGUAGE.indd 35 27-01-2023 12:38:31

6. താഴെതന്നിട്ടുള്ളവയിൽശരിയായ പ്രസ്താവന ഏതാണ്?

(1) $\varnothing \subseteq \{a, b\}$ (2) $\varnothing \in \{a, b\}$ (3) $\{a\} \in \{a, b\}$ (4) $a \subseteq \{a, b\}$

7. $A \cup B = A \cap B$, ആണെങ്കിൽ

(1) $A \neq B$ (2) $A = B$ (3) $A \subset B$ (4) $B \subset A$

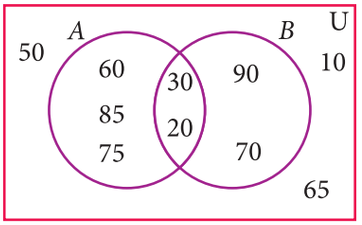
8. $B - A = B$, ആണെങ്കിൽ $A \cap B$

(1) A (2) B (3) U (4) $\varnothing$

9. അരികിലുള്ള വെൻ ചിത്രത്തിൽ $n[P(A \Delta B)]$

(1) 8 (2) 16

(3) 32 (4) 64



ചിത്രം. 1.40

10. $n(A) = 10$ കൂടാതെ $n(B) = 15$, ആണെങ്കിൽ $A \cap B$ യിലെഏറ്റവുംകൂടിയതുംകുറഞ്ഞതുമായഅംഗങ്ങളുടെഎണ്ണം

(1) 10,15 (2) 15,10 (3) 10,0 (4) 0,10

11. $A = \{\varnothing\}$ കൂടാതെ $B = P(A)$, എന്നിരിക്കട്ടെ എങ്കിൽ $A \cap B$

(1) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ (2) $\{\varnothing\}$ (3) $\varnothing$ (4) $\{0\}$

12. 50 ആൺകുട്ടികളുള്ളഒരു ക്ലാസ്മുറിയിൽ 35 ആൺകുട്ടികൾ കേരം (Carrom) കൂടാതെ 20 ആൺകുട്ടികൾ ചെസ്സും കളിക്കുന്നു. എങ്കിൽ രണ്ടും കളിക്കുന്ന ആൺകുട്ടികളുടെ എണ്ണം കണ്ടെത്തുക.

(1) 5 (2) 30 (3) 15 (4) 10.

13. $U = \{x : x \in \mathbb{N}$ കൂടാതെ $x < 10\}$, $A = \{1,2,3,5,8\}$ കൂടാതെ $B = \{2,5,6,7,9\}$, എങ്കിൽ $n\left[(A \cup B)'\right]$ എന്നത്

(1) 1 (2) 2 (3) 4 (4) 8

14. P, Q കൂടാതെ R, എന്നിവ ഏതെങ്കിലും മൂന്നു ഗണങ്ങൾ എങ്കിൽ $P - (Q \cap R)$ എന്നത്

(1) $P - (Q \cup R)$ (2) $(P \cap Q) - R$

(3) $(P - Q) \cup (P - R)$ (4) $(P - Q) \cap (P - R)$

15. താഴെക്കാണുന്നവയിൽ ഏതാണ് ശരി?

(1) $A - B = A \cap B$ (2) $A - B = B - A$

(3) $(A \cup B)' = A' \cup B'$ (4) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

16. $n(A \cup B \cup C) = 100$, $n(A) = 4x$, $n(B) = 6x$, $n(C) = 5x$, $n(A \cap B) = 20$, $n(B \cap C) = 15$, $n(A \cap C) = 25$ കൂടാതെ $n(A \cap B \cap C) = 10$,എങ്കിൽ x ന്റെ വില

(1) 10 (2) 15 (3) 25 (4) 30

17. A, B കൂടാതെ C എന്നിവ ഏതെങ്കിലും മൂന്ന് ഗണങ്ങൾ എങ്കിൽ, $(A - B) \cap (B - C)$ -യ്ക്കു സമമായത്

(1) A മാത്രം (2) B മാത്രം (3) C മാത്രം (4) ϕ

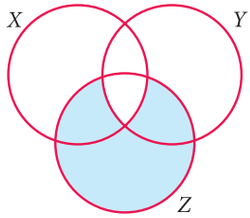
Unit 1_SET LANGUAGE.indd 36 27-01-2023 12:38:34

18. J എന്നത് മൂന്നു വശങ്ങളുള്ള രൂപങ്ങളുടെ ഗണം, K എന്നത് ഏതെങ്കിലും രണ്ട് വശങ്ങൾ സമമായിട്ടുള്ള രൂപങ്ങളുടെ ഗണം കൂടാതെ L എന്നത് ഒരു കോൺ സമകോണായിട്ടുള്ള രൂപങ്ങളുടെ ഗണം, എങ്കിൽ $J \cap K \cap L$ എന്നത്

(1) ദ്വിസമഭുജ ത്രികോണങ്ങളുടെ ഗണം (2) സമഭുജത്രികോണങ്ങളുടെ ഗണം

(3) ദ്വിസമഭുജ സമകോണത്രികോണങ്ങളുടെ ഗണം (4) സമകോണത്രികോണങ്ങളുടെ ഗണം

19. തന്നിട്ടുള്ള വെൻചിത്രത്തിൽ നിഴലിട്ട ഭാഗം പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നത്



(1) $Z-(X \cup Y)$ (2) $(X \cup Y) \cap Z$

(3) $Z-(X \cap Y)$ (4) $Z \cup (X \cap Y)$

20. ഒരു നഗരത്തിൽ, 40% ജനങ്ങൾ ഒരു തരം പഴവും, 35% ജനങ്ങൾ രണ്ടു തരം പഴങ്ങളും, 20% ജനങ്ങൾ മൂന്നു തരം പഴങ്ങളും ഇഷ്ടപ്പെടുന്നു. എങ്കിൽ മുകളിൽ പറഞ്ഞ മൂന്നു തരം പഴങ്ങളിൽ ഒരു തരം പഴവും ഇഷ്ടപ്പെടാത്തവരുടെ ശതമാനം എത്ര?

(1) 5 (2) 8 (3) 10 (4) 15

ഓർമ്മിക്കേണ്ട വസ്തുതകൾ

- ഒരുഗണമെന്നത് വ്യക്തമായി നിർവചിക്കപ്പെട്ട വ്യത്യസ്തവസ്തുക്കളുടെകൂട്ടമാണ്
- ഗണത്തെ 3 വിധത്തിൽ പ്രതിനിധീകരിക്കാം (i) വിവരണരീതി (ii) പട്ടികാരീതി (iii) നിബന്ധനാ രീതി.
- A എന്ന ഗണത്തിലെ അംഗങ്ങളെല്ലാം B, എന്ന ഗണത്തിലും ഉണ്ടെങ്കിൽ A എന്നത് B യുടെ ഉപഗണമാണ്.
- $A \subseteq B$ കൂടാതെ $A \neq B$, ആണെങ്കിൽ ഗണം B യുടെ ഉചിതോപഗണമാണ് ഗണം A.
- ഗണം A യുടെ ഘാതഗണം എന്നത് ഗണം A യുടെ എല്ലാ ഉപഗണങ്ങളുടെയും ഗണമാണ് ഇതിനെ $P(A)$ എന്ന്കുറിക്കുന്നു.
- m അംഗങ്ങളുള്ള ഒരു ഗണത്തിന്റെ ഉപഗണങ്ങളുടെ എണ്ണം 2^m ആകുന്നു.
- m അംഗങ്ങളുള്ള ഒരു ഗണത്തിന്റെ ഉചിതോപഗണങ്ങളുടെ $2^m - 1$ ആകുന്നു.
- A യും B യും വിയുക്തഗണങ്ങളാണെങ്കിൽ $A \cap B = \varnothing$. $A \cap B \neq \varnothing$ എങ്കിൽ A യും B യും സംയുക്തഗണങ്ങളാണ്.
- A കൂടാതെ B എന്നീഗണങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം എന്നത് ഗണം B യിലെ അംഗങ്ങൾ ഒഴികെ ഗണം A യിലെ എല്ലാ അംഗങ്ങളുടേയും ഗണമാണ്.
- A കൂടാതെ B എന്നീ ഗണങ്ങളുടെ പ്രതിസാമ്യതാവ്യത്യാസം നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത് $(A-B) \cup (B-A)$ എന്നാണ.

- **ക്രമവിനിമേയനിയമം**

  A, B എന്നിവ ഏതെങ്കിലും രണ്ടു ഗണങ്ങൾ എങ്കിൽ,

  $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$

Unit 1_SET LANGUAGE.indd 37 27-01-2023 12:38:35

- **സംയോജന നിയമം**

  A, B കൂടാതെ C എന്നിവ ഏതെങ്കിലും മൂന്ന് ഗണങ്ങൾ എങ്കിൽ

  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \quad ; \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

- **വിതരണ നിയമം**

  A, B കൂടാതെ C എന്നിവ ഏതെങ്കിലും മൂന്ന് ഗണങ്ങൾ എങ്കിൽ

  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ യോഗത്തിനുമേൽ സംഗമ വിതരണം

  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ സംഗമത്തിനുമേൽ യോഗ വിതരണം

- **ഗണവ്യത്യാസത്തിനുള്ള ഡിമോർഗൻ നിയമങ്ങൾ**

  A, B കൂടാതെ C എന്നിവ ഏതെങ്കിലും മൂന്നു ഗണങ്ങൾ എങ്കിൽ

  $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

  $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

- **പൂരകത്തിനുള്ള ഡിമോർഗൻ നിയമങ്ങൾ**

  Uഎന്നത് സമസ്തഗണം. A, B എന്നിവ അതിന്റെ ഉപഗണങ്ങൾ എങ്കിൽ

  $(A \cup B)' = A' \cap B' \quad ; \quad (A \cap B)' = A' \cup B'$

- **ഗണങ്ങളുടെ ഗണന സഖ്യ**

(i) A കൂടാതെ B എന്നിവ ഏതെങ്കിലും രണ്ട് ഗണങ്ങൾ എങ്കിൽ $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

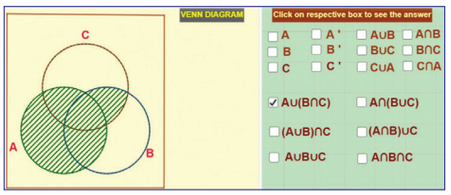
(ii) A, B, C എന്നിവ ഏതെങ്കിലും മൂന്നു ഗണങ്ങൾ എങ്കിൽ

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

Unit 1_SET LANGUAGE.indd 38 27-01-2023 12:38:36

ഐ സി ടി കോർണർ 1

പ്രവൃത്തിയുടെ അവസാനം കിട്ടുന്നത്



ഘട്ടം – 1 : Browser open ചെയ്ത് താഴെക്കാണുന്ന URL Link type ചെയ്യുക (അല്ലെങ്കിൽ)QR Code Scan ചെയ്യുക GeoGebra യുടെ "Set Language (ഗണഭാഷ)" എന്ന വർക്ക്ഷീറ്റ് ഭാഗം open ആകും. ഈ വർക്ക്ഷീറ്റിൽ. 1. Venn Diagram for two sets (രണ്ടു ഗണങ്ങൾക്കുള്ള വെൻചിത്രം) കൂടാതെ2. Venn Diagram for three sets(മൂന്നു ഗണങ്ങൾക്കുള്ള വെൻചിത്രം) എന്നീ രണ്ടു പ്രവർത്തനങ്ങൾ കൊടുത്തിരിക്കും. ആദ്യത്തെ പ്രവർത്തനത്തിൽ വലതുഭാഗത്തു കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ചതുരങ്ങളിൽ ആവശ്യമായതിനേയും കണ്ടു പ ിടിക്കേണ്ടതിനെയും select ചെയ്ത് അവ വെൻചിത്രത്തിൽ സ്ഥാനം പിടിക്കുന്നത് മനസ്സിലാക്കുക.

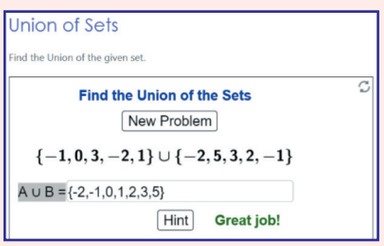
ഘട്ടം - 2 : ഇതു പോലെ രണ്ടാമത്തെ പ്രവർത്തനവും ചെയ്ത് നോക്കുക.

Browse in the link

Set Language: https://ggbm.at/BrG952dw or Scan the QR Code.

ഐ സി ടി കോർണർ 2

പ്രവൃത്തിയുടെ അവസാനം കിട്ടുന്നത്



ഘട്ടം – 1

ബ്രൗസർ തുറന്നിട്ട് താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ലിങ്ക് പകർത്തി പോസ്റ്റ് ചെയ്യുക (അല്ലെങ്കിൽ) തന്നിട്ടുള്ള യു.ആർ.എൽ ടൈപ്പു ചെയ്യുക (അല്ലെങ്കിൽ) ക്യു.ആർ. കോഡ് സ്കാൻ ചെയ്യുക.

ഘട്ടം – 2

"Union of sets" എന്ന് GeoGebra പേജിൽ കാണും പുതിയ പ്രശ്നങ്ങൾ ചെയ്തു നോക്കാൻ "NEW PROBLEM" എന്ന ഭാഗത്ത് ക്ലിക്ക് ചെയ്യുക.

ഘട്ടം – 3

നിങ്ങളുടെ ഉത്തരം നൽകുക (ഉത്തരം നൽകേ ബോക്സിൽ) എന്നിട്ട് ENTER button ക്ലിക്ക് ചെയ്യുക. സംശയം ഉങ്കിൽ "HINT" button ക്ലിക്ക് ചെയ്യുക.

ഘട്ടം – 4

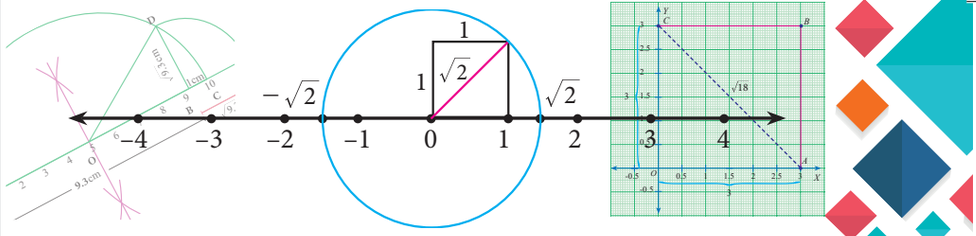
നിങ്ങളുടെ ഉത്തരം ശരിയാണെങ്കിൽ "GREAT JOB" എന്ന് പ്രത്യക്ഷപ്പെടും ഉത്തരം തെറ്റാണെങ്കിൽ "Try Again!" എന്ന് പ്രത്യക്ഷപ്പെടും

5 പ്രശ്നങ്ങൾ തുടർന്നു ശരിയായി ചെയ്യുന്നതുവരെ ആവർത്തിച്ച് ചെയ്തു പഠിക്കുക.

Browse in the link

Union of Sets: https://www.geogebra.org/m/ufxdh47G

Unit 1_SET LANGUAGE.indd 39 27-01-2023 12:38:37



2

വാസ്തവിക സംഖ്യകൾ

"പൊതുവായി കണക്കുകൂട്ടലിലുള്ള ജനങ്ങളുടെ ആവശ്യകതയെ പരിഗണിക്കുമ്പോൾ അത് ഒരു സംഖ്യ ആണെന്ന് എനിക്ക് മനസ്സിലാക്കാൻ സാധിച്ചു"

-അൽ-ഖാരിസ്മി



Al-Khwarizmi
(A D (CE) 780 - 850)

അൽ-ഖാരിസ്മി എന്ന അറബി ഗണിതശാസ്ജ്ഞൻ കരണികളെ ഗണിതത്തിലെ ഒരു പ്രത്യേക വിഭാഗമായിട്ടാണ് അവതരിപ്പിച്ചിട്ടുള്ളത്. അദ്ദേഹം പരിമേയ സംഖ്യകളെ ശ്രവണക്ഷമമായും,അപരിമേയ സംഖ്യകളെ ശ്രവണക്ഷമമല്ലെന്നും കണക്കാക്കി. ശ്രവണക്ഷമമല്ലാത്ത അപരിഖമേയ സംഖ്യകളെ ലത്തീൻ ഭാഷയിൽ സർഡസ് (surdus) എന്നാണ് പറയുന്നത്. പരിമേയ സംഖ്യയായി പ്രകടിപ്പിക്കാൻ സാധിക്കാത്ത, (അപരിമേയ) സംഖ്യകളെ കരണികൾ അഥവാ റാഡിക്കൽസ് എന്നു പറയുന്നു.

പഠന ലക്ഷ്യങ്ങൾ

- കൊടുത്തിട്ടുള്ള പരിമേയസംഖ്യകൾക്കിടയിൽ എണ്ണിത്തിട്ടപ്പെടുത്താനാകാത്ത വിധം പരിമേയ സംഖ്യകൾ ഉണ്ടെന്ന് അറിയൽ.
- പരിമേയ സംഖ്യകളെയും അപരിമേയ സംഖ്യകളെയും സംഖ്യാരേഖയിലും ദശാംശരൂപത്തിലും പ്രതിനിധീകരിക്കൽ
- വാസ്തവിക സംഖ്യകളെ സംഖ്യാരേഖയിൽ രേഖപ്പെടുത്തൽ.
- കരണികളെ മനസ്സിലാക്കൽ.
- സങ്കലനം, വ്യവകലനം, ഗുണനം, ഹരണം എന്നീ ഗണിതത്തിലെ അടിസ്ഥാനക്രിയകൾ കരണികളിൽ പ്രാവർത്തികമാക്കുന്നതിനെ കുറിച്ചുള്ള പഠനം.
- കരണികളുടെ ഛേദത്തെ പരിമേയമാക്കൽ.
- ശാസ്ത്രീയാങ്കന രീതിയെക്കുറിച്ച് മനസ്സിലാക്കൽ

2.1 മുഖവുര

സംഖ്യകൾ സംഖ്യകൾ എല്ലാ ഇടവും!

- നിങ്ങളുടെ വീട്ടിൽ ഫോൺ ഉണ്ടോ ? അതിൽ എത്ര അക്കങ്ങൾ ഉണ്ട് ?
- നിങ്ങളുടെ പ്രദേശത്തിന്റെ പിൻകോഡ് എന്താണ് ? അത് എങ്ങനെ നാം ഉപയോഗപ്രദമാകുന്നു
- വണ്ടികൾ നിർത്തുന്ന സ്ഥലത്ത് നിങ്ങൾക്ക് ടോക്കൺ ലഭിക്കുന്നുണ്ടോ? അതിന്റെ ഉപയോഗം എന്ത്?
- നിങ്ങൾ 24 കാരറ്റ് സ്വർണ്ണം കൈകാര്യം ചെയ്തിട്ടുണ്ടോ? അതിന്റെ പരിശുദ്ധി എങ്ങനെ ഉറപ്പാക്കാം.
- നിങ്ങളുടെ കണ്ണടയുടെ കാഴ്ച ശക്തിയുടെ അളവ് എന്ത് ?

Unit 2_REAL NUMBERS.indd 40 28-01-2023 13:05:02



➲ നിങ്ങളുടെ വീട്ടിലെ ജലസംഭരണിയുടെ കൊള്ളളവ് എത്ര ?

നിങ്ങളുടെ കൂട്ടുകാരന് പനിയുണ്ടോ? ശരീരത്തിന്റെ താപനില എത്ര?

നിങ്ങൾ മനസ്സിലാക്കിയ വിവിധതരം സംഖ്യകളെക്കുറിച്ച് വിശദമായി പഠിക്കാം.

2.2 പരിമേയ സംഖ്യകൾ (Rational Numbers)

നിങ്ങളുടെ വീട്ടിലുള്ള അലമാരയിലെ പുസ്തകങ്ങളെ എണ്ണുമ്പോൾ 1,2,3... എന്നിങ്ങനെ എണ്ണാൻ തുടങ്ങുന്നു. ഈ എണ്ണൽ സംഖ്യകളെ (1,2,3...) നിസ്സർഗ്ഗസംഖ്യകൾ എന്നു പറയുന്നു. ഈ സംഖ്യകളെ സംഖ്യാരേഖയിൽ അടയാളപ്പെടുത്താൻ നിങ്ങൾക്കറിയാം.



ചിത്രം. 2.1

നിസ്സർഗ്ഗ സംഖ്യകളുടെ ഗണത്തിനെ N എന്ന അക്ഷരം കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

$$\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, \dots \}$$

ഇവിടെ പുസ്തകങ്ങൾ ഒന്നുമില്ല എന്നതിന് പകരം പുസ്തകളുടെ എണ്ണം 0 എന്ന് പറയാം. അതുകൊണ്ട് 0 അംഗമായ സംഖ്യകളെ (0,1,2,3...) പൂർണ്ണസംഖ്യകൾ എന്ന് പറയുന്നു. പൂർണ്ണസംഖ്യകളെ താഴെ കാണുന്ന വിധം സംഖ്യാരേഖയിൽ സൂചിപ്പിക്കാം.



ചിത്രം. 2.2

പൂർണ്ണസംഖ്യകളെ സൂചിപ്പിക്കാൻ 'w' എന്ന അക്ഷരം ഉപയോഗിക്കുന്നു.

$$\mathbb{W} = \{ 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

ചില സന്ദർഭങ്ങൾ നമ്മളെ പുതിയ സംഖ്യകളിലോട്ട് നയിക്കുന്നു. ചില ക്രിയകളെ വർദ്ധിക്കുന്നു., മുന്നോട്ട്, മുകളിൽ, അധികം, കൂടുതൽ, ആരോഹണം കൂട്ടിയാൽ തുടങ്ങിയവയെ (+) എന്ന ചിഹ്നം ഉപയോഗിച്ച് കുറിക്കുന്നു. അതുപോലെ കുറയുന്നു, പിന്നോട്ട്, ന്യൂനം, കുറവ്, അവരോഹണം തുടങ്ങിയവയെ '-' എന്ന ചിഹ്നം ഉപയോഗിച്ച് കുറിക്കുന്നു.

ഇതിൽ നിന്നും നിസ്സർഗ്ഗ സംഖ്യകളെ ധനസംഖ്യകളെന്നും കരുതാം കൂടാതെ അവയ്ക്ക് ഇതിലൂടെ ഋണ സംഖ്യകൾ എന്ന ആശയത്തിനു വഴിയൊരുക്കുന്നു.

ഇവിടെ -2 എന്നത് -1 നെക്കാൾ കുറഞ്ഞ ഋണ സംഖ്യയാണ്. അതുകൊണ്ട് -1,-2 എന്നിവയിൽ -2 ചെറുതും, -1 വലുതുമാണ്, -3 നെക്കാൾ -2,-1 വലുതാണോ? ചെറുതാണോ? എന്ന് ചിന്തിക്കുക.

ഈ സാഹചര്യത്തിൽ സംഖ്യാ രേഖയെ താഴെ കാണുന്ന വിധം രേഖപ്പെടുത്താം.:



ചിത്രം. 2.3

പൂർണ്ണാങ്കളുടെ ഗണത്തെ Z എന്ന അക്ഷരം കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കുന്നു

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}.$$

Unit 2_REAL NUMBERS.indd 41 28-01-2023 13:05:03

മുകളിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ചിത്രങ്ങളെ (ചിത്രം 2.2, 2.3) നോക്കുമ്പോൾ അടുത്തടുത്തുള്ള രണ്ടു പൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾക്കിടയിൽ സംഖ്യകൾ ഉണ്ടാകാം എന്നത് നമ്മളെ അതിശയിപ്പിക്കുന്നു.

ഭിന്നസംഖ്യകളെ കുറിച്ച് നിങ്ങൾ മുൻപേ അറിഞ്ഞിട്ടുണ്ട്. 1/2 എന്ന ബിന്ദുവിനെ പൂർണ്ണാങ്കങ്ങളുടെ സഖ്യാരേഖയിൽ എങ്ങനെ അടയാളപ്പെടുത്താം. ഇത് 0 നും 1 നും ഇടയിലുള്ള മദ്ധ്യബിന്ദുവാണ്. ഇതുപോലെ $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, 2\frac{3}{4}$ തുടങ്ങിയവ സംഖ്യാരേഖയിൽ അടയാളപ്പെടുത്താം. ഇതുപോലെ ഇവയെല്ലാം $\frac{a}{b}$, a,b പൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾ $b \neq 0$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ള ഭിന്നങ്ങളാണ് (എന്തുകൊണ്ട്) ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയെ ദശാംശരൂപത്തിൽ എഴുതാം

ഭിന്നസംഖ്യകളും അംശബന്ധങ്ങളും തമ്മിലുള്ളബന്ധം കാരണം ഇവയെ പരിമേയ സംഖ്യകൾ എന്ന് പറയുന്നു.താഴെ കാണുന്ന ചിത്രത്തിലൂടെ ഇത് നമുക്ക് മനസ്സിലാക്കാം.



ചിത്രം 2.4

ഒരു പരിമേയ സംഖ്യ എന്നത് രണ്ട് പൂർണ്ണാങ്കങ്ങളുടെ ഭിന്നരൂപത്തിലുള്ള ഹരണഫലം ആണ്. 0 കൊണ്ടുള്ള ഹരണം ഒഴിവാക്കണം.

ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയ്ക്ക് അനേകം സമാന ഭിന്നങ്ങൾ ഉള്ളതു കൊണ്ട് ഒരു പരിമേയ സംഖ്യയ്ക്ക് പല രൂപങ്ങൾ ഉണ്ടാകാൻ സാധ്യതയുണ്ട്. ആയതിനാൽ $\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{8}{24}$ തുടങ്ങിയവ ഒരേ പരിമേയ സംഖ്യയെ കുറിക്കുന്നു.

2.2.1 പരിമേയസംഖ്യകളുടെ ഗുണങ്ങൾ

a,b എന്നീ രണ്ടു പരിമേയസംഖ്യകളിൽ a>b എന്നിരിക്കട്ടെ. $\frac{a+b}{2}$ എന്നത് ഇവയുടെ ശരാശരിയാണ്. ഈ ശരാശരി ഒരു പരമേയ സംഖ്യയാണോ എന്നു നോക്കാം.

$a = \frac{p}{q}$ (p, q പൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾ കൂടാതെ $q \neq 0$); $b = \frac{r}{s}$ (r, s പൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾ കൂടാതെ $s \neq 0$), ആണെങ്കിൽ

$$\frac{a+b}{2} = \frac{\frac{p}{q} + \frac{r}{s}}{2} = \frac{ps+qr}{2qs}$$ ഇത് ഒരു പരിമേയ സംഖ്യ.

ഇതു a,b എന്നിവയ്ക്കിടയിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു എന്നു തെളിയിക്കണം

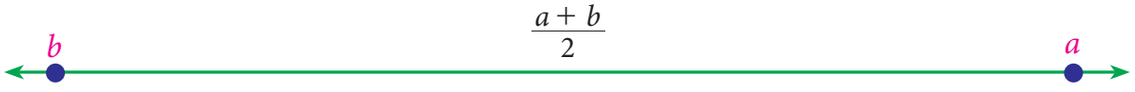
$a - \left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{2a-a-b}{2} = \frac{a-b}{2} > 0$ എന്തെന്നാൽ $a>b$.

ആയതിനാൽ, $a > \left(\frac{a+b}{2}\right)$ ... (1)

$\left(\frac{a+b}{2}\right) - b = \frac{a+b-2b}{2} = \frac{a-b}{2} > 0$ എന്തെന്നാൽ $a>b$.

ആയതിനാൽ, $\left(\frac{a+b}{2}\right) > b$ ... (2)

(1)ൽ നിന്നും (2) ൽ നിന്നും $a > \left(\frac{a+b}{2}\right) > b$, എന്നു കാണാം:



ചിത്രം 2.5

അതുകൊണ്ട് രണ്ടു പരിമേയ സംഖ്യകളുടെ ശരാശരി അല്ലെങ്കിൽ മദ്ധ്യബിന്ദു ഒരു പരിമേയസംഖ്യയാണ്.

Unit 2_REAL NUMBERS.indd 42 28-01-2023 13:05:17

ഈ പ്രക്രിയ അനിശ്ചിതമായി തുടർന്നാൽ അനന്തമായ പരിമേയസംഖ്യകൾ ലഭ്യമാകുന്നു.

ഉദാഹരണം 2.1 $\frac{1}{2}$ നും $\frac{2}{3}$ നും ഇടയിലുള്ള ഏതെങ്കിലും രണ്ടു പരിമേയ സംഖ്യകൾ കാണുക?

നിർദ്ധാരണം *1*

$\frac{1}{2}$ നും $\frac{2}{3}$ നും ഇടയിലുള്ള ഒരു പരിമേയ സംഖ്യ $= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3+4}{6}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{7}{6}\right)=\frac{7}{12}$

$\frac{1}{2}$ നും $\frac{7}{12}$ നും ഇടയിലുള്ള ഒരു പരിമേയ സംഖ്യ $= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{7}{12}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{6+7}{12}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{13}{12}\right)=\frac{13}{24}$

അതുകൊണ്ട് $\frac{1}{2}$ നും $\frac{2}{3}$ നും ഇടയിലുള്ള രണ്ട് പരിമേയ സംഖ്യകൾ ആണ് $\frac{7}{12}$ ഉം $\frac{13}{24}$ ഉം
(തീർച്ചയായും നിരവധി ഉണ്ട്)

രണ്ടു പരിമേയ സംഖ്യകൾക്കിടയിലുള്ള പരിമേയ സംഖ്യകളെ ഉടനെ കണ്ടെത്താൽ മാർഗ്ഗമുണ്ട്.

ഫലം

$\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$ എന്നിവ $\frac{p}{q}<\frac{r}{s}$ എന്നിങ്ങനെയുള്ള രണ്ടു പരിമേയ സംഖ്യകളാണെങ്കിൽ $\frac{p+q}{r+s}$ എന്നത് ഒരു പരിമേയസംഖ്യയാണ്. എങ്കിൽ $\frac{p}{q}<\frac{p+q}{r+s}<\frac{r}{s}$.

ഉദാഹരണമായി $\frac{1}{2}$ നും $\frac{2}{3}$ നും ഇടയിലുള്ള ഏതെങ്കിലും രണ്ടു പരിമേയസംഖ്യകൾ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം 2

$\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$ എന്നത് $\frac{1}{2}<\frac{1+2}{2+3}<\frac{2}{3}$ *or* $\frac{1}{2}<\frac{3}{5}<\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}<\frac{1+3}{2+5}<\frac{3}{5}<\frac{3+2}{5+3}<\frac{2}{3}$ *or* $\frac{1}{2}<\frac{4}{7}<\frac{3}{5}<\frac{5}{8}<\frac{2}{3}$

നിർദ്ധാരണം 3

ഇതിനെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യാൻ വേറെ ഏതെങ്കിലും പുതിയ വഴികളുണ്ടോ? അതെ, സംഖ്യകളുടെ ദശാംശ രൂപം നിങ്ങൾക്കിഷ്ടമുണ്ടെങ്കിൽ, മുകളിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഉദാഹരണത്തെ മറ്റൊരു വിധത്തിൽ താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ളതുപോലെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യാം.

$\frac{1}{2}$ = 0.5 കൂടാതെ $\frac{2}{3}$ = 0.66...

അതുകൊണ്ട് $\frac{1}{2}$ നും $\frac{2}{3}$ നും ഇടയിലുള്ള പരിമേയ സംഖ്യകളെ ഇങ്ങനെ പട്ടികയിലെഴുതാം 0.51, 0.57,0.58,…

നിർദ്ധാരണം 4

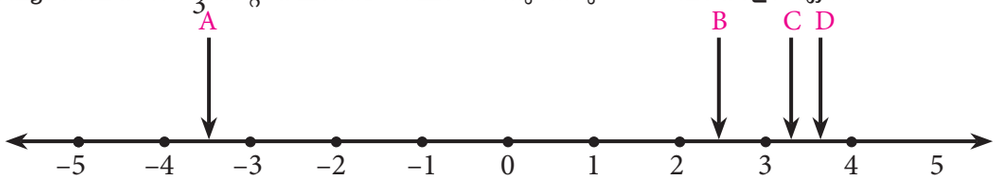
ഇതുപോലെയുള്ള കണക്കുകളെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യാൻ മറ്റൊരു രീതികൂടിയുണ്ട്. $\frac{4}{9}$ നും $\frac{3}{5}$ നും ഇടയിലുള്ള നാല് പരിമേയ സംഖ്യകളെ കാണുക. 9,5 എന്നിവയുടെ ല.സാ.ഗു 4,5 ആണ്. അതിനാൽ $\frac{4}{9}=\frac{20}{45}$, $\frac{3}{5}=\frac{27}{45}$. എന്നെഴുതാം

$\frac{4}{9}$ നും $\frac{3}{5}$ നും ഇടയിലുള്ള നാല് പരിമേയസംഖ്യകൾ $\frac{21}{45}$, $\frac{22}{45}$, $\frac{23}{45}$, $\frac{24}{45}$, ...

Unit 2_REAL NUMBERS.indd 43 28-01-2023 13:05:27

അഭ്യാസം 2.1

1. സംഖ്യാരേഖയിൽ $\frac{11}{3}$ന്റെ യഥാർത്ഥ സ്ഥാനം കുറിക്കുന്ന അമ്പടയാളം ഏത്.?

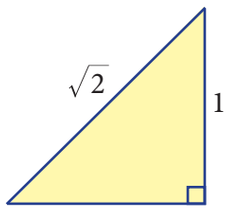


2. $\frac{-7}{11}$ നും $\frac{2}{11}$ നും ഇടയിലുള്ള ഏതെങ്കിലും മൂന്ന് പരിമേയസംഖ്യകൾ കാണുക ?.

3. താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഓരോ ജോഡി പരിമേയ സംഖ്യകൾക്കും ഇടയിലുള്ള ഒരു പരിമേയസംഖ്യ കാണുക.$\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ (ii) 0.1, 0.11 (iii) −1 , −2

2.3 അപരിമേയ സംഖ്യകൾ (Irrational Numbers)

ഓരോപരിമേയ സംഖ്യയേയും സംഖ്യാ രേഖയിൽ ഓരോ ബിന്ദുവായി പ്രതിഷ്ഠിക്കാൻ കഴിയും എന്നു നിങ്ങൾ കണ്ടു. മാത്രമല്ല പരിമേയ സംഖ്യകളുടെ സാന്ദ്രതാ ഗുണത്തെപ്പറ്റിയും നാം പഠിച്ചു കഴിഞ്ഞു. സംഖ്യാരേഖ പൂർണ്ണമായും പരിമേയസംഖ്യകളെ കൊണ്ടു മാത്രം നിറച്ചുവച്ചിരിക്കുകയാണോ? പരിമേയ സംഖ്യകളെ കവിഞ്ഞ് മറ്റൊരു സംഖ്യകളും സംഖ്യാരേഖയിലില്ലേ? നമുക്ക് വിശദമായി പരിശോധിക്കാം.



ചിത്രം. 2.6

പാദങ്ങൾ ഒരു മാത്ര നീളമുള്ള ഒരു ദ്വിസമഭുജ സമകോണ ത്രികോണത്തെ സങ്കൽപ്പിക്കുക. പൈതഗോറസ്സ് സിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച് ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ കർണ്ണം $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ എന്നു കാണാം ചിത്രം2.6 കാണുക $\sqrt{2}$ എന്നത് ഒരു പൂർണ്ണസംഖ്യയോ സാധാരണ ഭിന്നമോ അല്ലെന്ന് ഗ്രീക്കുകാർ കണ്ടെത്തിയിട്ടുണ്ട്. സംഖ്യാരേഖയിലെ ആകെ ബിന്ദുകൾക്കും ആകെ സംഖ്യകൾക്കും തമ്മിൽ ഒരു ബന്ധമുണ്ടെന്ന വിശ്വാസത്തിന് മങ്ങലേറ്റു. $\sqrt{2}$ നെ അപരിമേയ സംഖ്യ എന്ന് വിളിക്കപ്പെട്ടു.

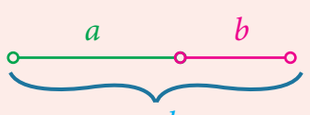
രണ്ട് പൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള സാധാരണ അംശമായി അപരിമേയ സംഖ്യയേ സൂചിപ്പിക്കാൻ കഴിയില്ല.

ഉദാഹരണങ്ങൾ

1. $\sqrt{2}$, നെ കൂടാതെ ഒരാൾക്ക് അപരിമേയ സംഖ്യകളുടെ പല ഉദാഹരണങ്ങളും നൽകാൻ കഴിയും അവയിൽ ചിലത് $\sqrt{5}, \sqrt{7}, 2\sqrt{3}, \ldots$
2. π, വൃത്തപരിധിക്കും വ്യാസത്തിനും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം അപരിമേയ സംഖ്യയ്ക്ക് മറ്റൊരുദാഹരണമാണ്.
3. *e*, Euler's (യുളർ)ന്റെ സംഖ്യയും അപരിമേയ സംഖ്യയ്ക്ക് മികച്ച ഉദാഹരണമാണ്.
4. സാധാരണ ജ്യാമിതിയ രൂപങ്ങളായ പഞ്ചഭുജം, ദശഭുജം, പെന്റഗ്രാം തുടങ്ങിയവയിലെ ദൂരങ്ങളുടെ അംശബന്ധമായി കണക്കാക്കാവുന്ന സുവർണ്ണാ അംശബന്ധമെന്നും സുവർണ്ണ ശരാശരിയെന്നും സുവർണ്ണഭാഗമെന്നും വിളിക്കപ്പെടുന്ന സംഖ്യയും അപരിമേയസംഖ്യയാണ്.

ഗോൾഡൻ അംശബന്ധം (1:1.6)

കലയിലും കെട്ടിട കലയിലും ഗോൾഡൻ അംശബന്ധം എന്നത് വളരെ മനോഹരമായ അംശബന്ധമായി കാണപ്പെടുന്നു. ഒരു രേഖാഖണ്ഡമെടുത്ത് അതിനെ a,b എന്നീ രണ്ട് ഖണ്ഡങ്ങളായി പിരിക്കുമ്പോൾ രേഖാഖണ്ഡത്തിന്റെ ആകെ നീളമായ a+b ഒരു ഖണ്ഡമായ a യുമായി ലഭിക്കുന്ന അംശബന്ധം ഖണ്ഡം ab യോട് കാണിക്കുന്ന അംശബന്ധത്തിന് തുല്യമായിരിക്കും.



$a+b : a = a : b$

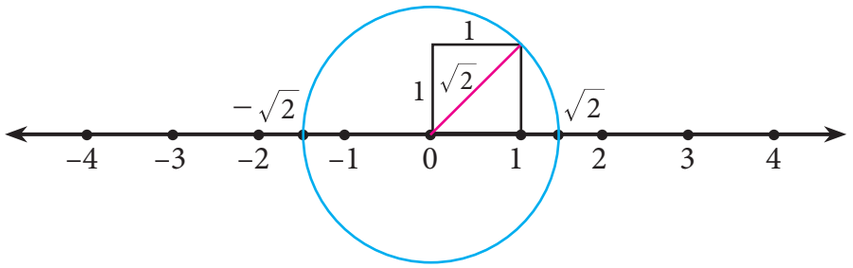
ഇതു തരുന്ന അനുപാതം $\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}$

a എന്നത് $a+b$ ന്റെയും b ന്റെയും ജ്യാമിതിയ ശരാശരിയാണ്.

Unit 2_REAL NUMBERS.indd 44 28-01-2023 13:05:29

2.3.1 സംഖ്യാരേഖയിൽ അപരിമേയ സംഖ്യകൾ

സംഖ്യാരേഖയിൽ ഏതു ബിന്ദുക്കളാണ് അപരിമേയ സംഖ്യകളെ പ്രതിനിധാനം ചെയ്യുന്നത്. ഒരു ഉദാഹരണത്തിന് സംഖ്യാരേഖയിലെ $\sqrt{2}$ ന്റെ സ്ഥാനം നമുക്ക് നിർണ്ണയിക്കാം. ഇത് വളരെ എളുപ്പമാണ്. $\sqrt{2}$ എന്നത് വശം ഒരു മാത്രയുള്ള ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ വികർണ്ണത്തിന്റെ നീളത്തിന് തുല്യമാണ് (എങ്ങനെ?) ഒരു സമചതുരം നിർമ്മിച്ച് അതിന്റെ ഒരു വികർണ്ണത്തിന്റെ നീളത്തെ സംഖ്യാരേഖയിൽ പ്രതിഷ്ഠിക്കുക (ചിത്രം 2.7 കാണുക).

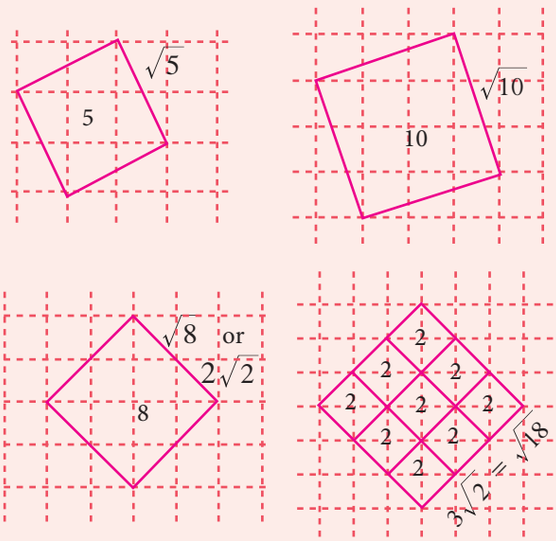


ചിത്രം2.7

കേന്ദ്രം 0 ഉള്ളതും ചതുരത്തിന്റെ വികർണ്ണം വ്യാസാർദ്ധവുമായ ഒരു വൃത്തത്തെ സംഖ്യ രേഖയിൽ വരയ്ക്കുക. ഈ വൃത്തം സംഖ്യാരേഖയിലെ രണ്ടുബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നു. പൂജ്യത്തിന്റെ വലുതു വശത്ത് $\sqrt{2}$ ഉം ഇടതുവശത്ത് $-\sqrt{2}$ ഉം ആണ് ആ ബിന്ദുക്കൾ (നിങ്ങളാവശ്യപ്പെട്ടത് സംഖ്യാരേഖയിലെ $\sqrt{2}$ നെയാണ് എന്നാൽ സമ്മാനമായി $-\sqrt{2}$ നെയും ലഭിച്ചു).

സംഖ്യാരേഖയിൽ നിങ്ങളാരംഭിച്ചത് നിസ്സർഗ്ഗ സംഖ്യകളെയാണ് അതിനെ വിപുലീകരിച്ച് പരിമേയ സംഖ്യകളിലും പിന്നീട് ഇപ്പോൾ അപരിമേയ സംഖ്യകളിലും എത്തിചേർന്നു. നിങ്ങളിപ്പോൾ അതിശയിക്കുന്നുണ്ടാവും സംഖ്യരേഖയിലെ മറ്റൊരു വിപുലീകരണം നമുക്കു വേണ്ടി കാത്തു നിൽക്കുന്നുണ്ടാകും എന്ന് ഭാഗ്യവശാൽ ഇതു ഇപ്പോൾ ഇവിടെ നിർത്താം. ഉയർന്ന ക്ലാസ്സുകളിൽ ഇതിനെക്കുറിച്ച് കൂടുതൽ പഠിക്കാം.

കോടിട്ട താളിലെ സമചതുരങ്ങളെ ഉപയോഗിച്ച് അപരിമേയ നീളങ്ങളെ നമുക്ക് സൃഷ്ടിക്കാം. ചില ഉദാഹരണങ്ങളിതാ :



ദശാംശ സംഖ്യകളിൽ അവസാനിക്കുന്നതും അവസാനിക്കാത്തതുമായ പരിമേയ സംഖ്യകളുടെ പ്രകാശനം അപരിമേയ സംഖ്യകളെക്കുറിച്ചുള്ള പഠനത്തിന് നമ്മളെ സഹായിക്കുന്നു. ഇപ്പോൾ പരിമേയ സംഖ്യകളുടെ ദശാംശസ്ഥാനത്തുള്ള വിപുലീകരണത്തെക്കുറിച്ച് നമുക്ക് പഠിക്കാം.

2.3.2 പരിമേയ സംഖ്യകളുടെ ദശാംശരൂപം

ഒരു പരിമേയ സംഖ്യ $\frac{p}{q}$ എന്ന രൂപത്തിലാണ് എഴുതപ്പെട്ടിട്ടുള്ളതെങ്കിൽ, ദീർഘഹരണരീതി ഉപയോഗിച്ച് അതിനെ ദശാംശരൂപത്തിൽ പ്രതിനിധീകരിക്കാം. താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഉദാഹരണങ്ങളിൽ നിന്ന് ചില ഘട്ടങ്ങൾ കഴിയുമ്പോൾ ശിഷ്ടം പൂജ്യം ലഭിക്കുന്നത് നമുക്ക് കാണാൻ സാധിക്കും:

Unit 2_REAL NUMBERS.indd 45 28-01-2023 13:05:30

ഉദാഹരണമായി,

$$\begin{array}{r|l} & 0.875 \\ 8 & 7.000 \\ & 64 \\ \hline & 60 \\ & 56 \\ \hline & 40 \\ & 40 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$\frac{7}{8} = 0.875$

$$\begin{array}{r|l} & 0.84 \\ 25 & 21.00 \\ & 200 \\ \hline & 100 \\ & 100 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$\frac{21}{25} = 0.84$

$$\begin{array}{r|l} & 2.71875 \\ 32 & 87.00000 \\ & 64 \\ \hline & 230 \\ & 224 \\ \hline & 60 \\ & 32 \\ \hline & 280 \\ & 256 \\ \hline & 240 \\ & 224 \\ \hline & 160 \\ & 160 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$\frac{-87}{32} = -2.71875$

കുറിപ്പ്

$\frac{p}{q}$ന്റെ ദശാംശഭിന്നം അവസാനിക്കുന്നുവെങ്കിൽ ആ ദശാംശ ഭിന്നത്തെ അവസാനിക്കുന്ന ദശാംശഭിന്നം എന്നു പറയുന്നു.

ഓരോ പരിമേയ സംഖ്യയ്ക്കും അവസാനിക്കുന്ന ദശാംശഭിന്നം ഉണ്ടായിരിക്കുമോ? താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഉദാഹരണത്തിൽ നിന്നും ഇതിന്റെ തെളിവ് നമുക്കു മനസ്സിലാക്കാം.

ഉദാഹരണം 2.2

താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള പരിമേയ സംഖ്യകളെ ദശാംശ സംഖ്യകളാക്കി മാറ്റുക (i) $\frac{-4}{11}$ (ii) $\frac{11}{75}$

നിർദ്ധാരണം

$$\begin{array}{r|l} & 0.3636\ldots. \\ 11 & 4.0000 \\ & 33 \\ \hline & 70 \\ & 66 \\ \hline & 40 \\ & 33 \\ \hline & 70 \\ & 66 \\ \hline & 4 \\ & \vdots \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & 0.1466\ldots \\ 75 & 11.0000 \\ & 7\,5 \\ \hline & 350 \\ & 300 \\ \hline & 500 \\ & 450 \\ \hline & 500 \\ & 450 \\ \hline & 50 \\ & \vdots \end{array}$$

അതുകൊണ്ട്, $\frac{-4}{11} = -0.\overline{36}$ $\frac{11}{75} = 0.14\overline{6}$

താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള പട്ടിക ആദ്യത്തെ പത്തു നിസ്സർഗ്ഗ സംഖ്യകളുടെ വ്യുൽക്രമങ്ങളുടെദശാംശ രൂപം കാണിക്കുന്നു. നിസ്സർഗ്ഗ സംഖ്യകളുടെ വ്യുൽക്രമങ്ങൾ പരിമേയ സംഖ്യകളാണെന്ന് സ്പഷ്ടമാണ്

സംഖ്യ	വ്യുൽക്രമം	ദശാംശഭിന്നത്തിന്റെ സവിശേഷത
1	$\frac{1}{1} = 1.0$	അവസാനിക്കുന്നത്
2	$\frac{1}{2} = 0.5$	അവസാനിക്കുന്നത്
3	$\frac{1}{3} = 0.\overline{3}$	അവസാനിക്കാത്തതും ആവർത്തിക്കുന്നതും
4	$\frac{1}{4} = 0.25$	അവസാനിക്കുന്നത്
5	$\frac{1}{5} = 0.2$	അവസാനിക്കുന്നത്
6	$\frac{1}{6} = 0.1\overline{6}$	അവസാനിക്കാത്തതും ആവർത്തിക്കുന്നതും

Unit 2_REAL NUMBERS.indd 46 28-01-2023 13:05:33

ഒരു പരിമേയ സംഖ്യയെ

(i) അവസാനിക്കുന്ന ദശാംശ ഭിന്നമായോ

(ii) അല്ലെങ്കിൽ അവസാനിക്കാതെ ആവർത്തിക്കുന്ന ദശാംശ ഭിന്നമായോ ആവിഷ്കരിക്കാം

ഈ പ്രസ്താവനയുടെ വിപരീതവും ശരിയായാകുന്നു

അതായത് ഒരു സംഖ്യയുടെ ദശാംശഭിന്നം അവസാനിക്കുന്നതോ അല്ലെങ്കിൽ അവസാനിക്കാതെ ആവർത്തിക്കുന്നതോ ആണെങ്കിൽ ആ സംഖ്യ ഒരു പരിമേയ സംഖ്യ ആയിരിക്കും.

7	$\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$	അവസാനിക്കാത്തതും ആവർത്തിക്കുന്നതും
8	$\frac{1}{8} = 0.125$	അവസാനിക്കുന്നത്
9	$\frac{1}{9} = 0.\overline{1}$	അവസാനിക്കാത്തതും ആവർത്തിക്കുന്നതും
10	$\frac{1}{10} = 0.1$	അവസാനിക്കുന്നത്

കുറിപ്പ്

ഇവിടെ ശിഷ്ടങ്ങൾ ഒരിക്കലും പൂജ്യമാകുന്നില്ല കൂടാതെ ചില ഘട്ടങ്ങൾ കഴിയുമ്പോൾ ശിഷ്ടങ്ങൾ ആവർത്തിക്കുന്നു എന്നു ശ്രദ്ധിക്കുക. അതിനാൽ ഹരണഫലത്തിൽ ഒരു കൂട്ടം സംഖ്യകൾ ആവർത്തിക്കുന്നു എന്നതും ശ്രദ്ധിക്കുക. അതിനാൽ ഹരണഫലത്തിൽ ഒരു കൂട്ടം ആവർത്തിക്കുന്ന അക്കങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കും.

2.3.3 ദശാംശങ്ങളുടെ ദൈർഘ്യം (Period of Decimal)

പരിമേയസംഖ്യയുടെ ദശാംശരൂപത്തിലെ ആവർത്തിക്കുന്ന ദശാംശസ്ഥാനങ്ങളുടെ എണ്ണത്തെ ആ പരിമേയസംഖ്യയുടെ ദശാംശങ്ങളുടെ ദൈർഘ്യത്തിന്റെ നീളം എന്നു വിളിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണമായി,

(i) $\frac{25}{7} = 3.\overline{571428}$, ദശാംശങ്ങളുടെ ദൈർഘ്യത്തിന്റെ നീളം = 6

(ii) $\frac{27}{110} = 0.2\overline{45}$, ദശാംശങ്ങളുടെ ദൈർഘ്യത്തിന്റെ നീളം = 2

ഉദാഹരണം 2.3

$\frac{1}{3}$ന്റെ ആവർത്തിക്കുന്ന ദശാംശഭിന്നത്തെ ഉപയോഗിച്ച് $\frac{1}{27}$ എന്ന പരിമേയ സംഖ്യയുടെ ആവർത്തിക്കുന്ന ദശാംശഭിന്നത്തെ കാണുക. ഇതുപയോഗിച്ച് $\frac{59}{27}$ന്റെ ആവർത്തിക്കുന്ന ദശാംശഭിന്നത്തെ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

നമുക്കറിയാം $\frac{1}{3} = 0.\overline{3}$

$$\frac{1}{27} = \frac{1}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \times 0.333... = 0.037037... = 0.\overline{037}$$

$$\frac{59}{27} = 2\frac{5}{27} = 2 + \frac{5}{27}$$

$$= 2 + \left(5 \times \frac{1}{27}\right)$$

$$= 2 + (5 \times 0.\overline{037}) = 2 + (5 \times 0.037037037...) = 2 + 0.185185... = 2.185185... = 2.\overline{185}$$

2.3.4 അവസാനിക്കുന്ന ദശാംശഭിന്നത്തെ $\frac{p}{q}$ എന്ന രൂപത്തിൽ പ്രതിനിധീകരിക്കൽ

അവസാനിക്കുന്ന ദശാംശഭിന്നമായ 2.945 നെ $\frac{p}{q}$ രൂപത്തിൽ മാറ്റാൻ ശ്രമിക്കാം

നമുക്കറിയാം $0.1 = \frac{1}{10}$; $0.01 = \frac{1}{100}$; $0.001 = \frac{1}{1000}$ ...

അതായത് ഏതൊരു ദശാംശസംഖ്യയിലും ദശാംശ ബിന്ദുവിനുശേഷം വരുന്ന ഓരോ അക്കങ്ങളും

Unit 2_REAL NUMBERS.indd 47 28-01-2023 13:05:36

10 ന്റെ മടങ്ങായി വർദ്ധിക്കുന്ന ഛേദമുള്ള ഒരു ഭിന്നരൂപമായി കാണുന്നു.അതുകൊണ്ട്

$$2.945 = 2 + 0.945$$
$$= 2 + \frac{9}{10} + \frac{4}{100} + \frac{5}{1000}$$
$$= 2 + \frac{900}{1000} + \frac{40}{1000} + \frac{5}{1000} \text{ (പൊതുവായ ഛേദമാക്കുക)}$$
$$= 2 + \frac{945}{1000}$$
$$= \frac{2945}{1000} \text{ or } \frac{589}{200}$$

$(2.945 = \frac{2945}{1000}$ എന്നു നേരിട്ട് എഴുതാമോ?)

ഉദാഹരണം 2.4

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ദശാംശഭിന്നങ്ങളെ $\frac{p}{q}$ എന്ന രൂപത്തിൽ മാറ്റുക ഇവിടെ p,q എന്നിവ പൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾ $q \neq 0$: **(i) 0.35 (ii) 2.176 (iii) – 0.0028**

നിർദ്ധാരണം

(i) $0.35 = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$

(ii) $2.176 = \frac{2176}{1000} = \frac{272}{125}$

(iii) $-0.0028 = \frac{-28}{10000} = \frac{-7}{2500}$

2.3.5 അവസാനിക്കാത്തതും ആവർത്തിക്കുന്നതുമായ ദശാംശഭിന്നത്തെ $\frac{p}{q}$ എന്ന രൂപത്തിൽ പ്രതിനിധീകരിക്കൽ

അവസാനിക്കുന്ന ദശാംശഭിന്നത്തെ കൈകാര്യം ചെയ്യുന്നത് വളരെ എളുപ്പമാണ്. 2.4 എന്ന തരത്തിലുള്ള സംഖ്യകളെ നാം കണ്ടുമുട്ടുമ്പോൾ അതിലെ ദശാംശസംഖ്യയെ ഒഴുവാക്കുക എന്നത് 10 കൊണ്ട് ഹരിക്കുക എന്ന ലളിതമായ കാര്യം ഉപയോഗിച്ചാൽ മതിയാകും.

അങ്ങനെ $2.4 = \frac{24}{10}$, അതിനെ ലഘൂകരിച്ചാൽ $\frac{12}{5}$ എന്നാകും. എന്നാൽ നമുക്ക് $2.\overline{4}$ എന്നതാണ് ഉള്ളതെങ്കിൽ ഇപ്പോൾ നമ്മുടെ പ്രശ്നം ദശാംസസ്ഥാനത്ത് 4 അനന്തമായി നീളുന്നു എന്നുള്ളതാണ്. അപ്പോൾ നമുക്ക് ഛേദത്തിലും പൂജ്യത്തെ അനന്തമായി ഉപയോഗിക്കേണ്ടിവരും

ഉദാഹരണത്തിന് $2.4 = 2 + \frac{4}{10}$

$$2.44 = 2 + \frac{4}{10} + \frac{4}{100}$$
$$2.444 = 2 + \frac{4}{10} + \frac{4}{100} + \frac{4}{1000}$$

ഇത്തരത്തിൽ അനന്തമായ 4 കൾ ഉണ്ടെങ്കിൽ അതിൽ പ്രവർത്തിക്കുക എന്നത് എത്ര കഠിനമായിരിക്കും. ഇത്തരത്തിലുള്ള അനന്തശ്രേണികളെ ഒഴുവാക്കാൻ ഏതെങ്കിലും മാർഗ്ഗം നമുക്ക് ആവശ്യമായി വരുന്നു. ഇതിലെ മറ്റൊരു നല്ല കാര്യം അനന്ത ശ്രേണിയിൽ നിന്ന് ഒന്നോ രണ്ടോ അതിലധികമോ 4 കളെ പുറന്തള്ളിയാലും ആ ശ്രേണി ഒരു മാറ്റവും കൂടാതെ അനന്തമായി തന്നെ നിലനിൽക്കുന്നതാണ്.

$x = 2.\overline{4}$ എന്നിരിക്കട്ടെ ...(1)

എങ്കിൽ, $10x = 24.\overline{4}$ ...(2) [10 കൊണ്ട് ഗുണിക്കുമ്പോൾ ഒരു സ്ഥാനം വലതു വശത്തേക്ക് മാറുന്നു.ഇപ്പോൾ നിങ്ങൾക്ക് അനന്തമായ 4-കൾ ഇടതുവശത്ത് നിൽക്കുന്നു).

Unit 2_REAL NUMBERS.indd 48 28-01-2023 13:05:38

സമവാക്യം (1)–സമവാക്യം(2)

$9x = 24.\overline{4} - 2.\overline{4} = 22$ (അനന്തമായ 4 -കൾ കുറവാകുന്നു.24-2=22 ലഭ്യമാകുന്നു.

$x = \frac{22}{9}$, ഇതേ രീതി ഉപയോഗിച്ച് അവസാനിക്കാത്ത ദശാംശഭിന്നങ്ങളെ ഭിന്നസംഖ്യയായി മാറ്റാം.

ഉദാഹരണം 2.5 താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയെ $\frac{p}{q}$ എന്ന രൂപത്തിൽ മാറ്റുക (ഇവിടെ **p,q** എന്നിവ പൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾ കൂടാതെ $q \neq 0$

(i) $0.\overline{3}$ (ii) $2.12\overline{4}$ (iii) $0.4\overline{5}$ (iv) $0.\overline{568}$

നിർദ്ധാരണം

(i) $x = 0.\overline{3} = 0.3333\ldots$ (1)

(ഇവിടെ ഒരക്കം ആവർത്തിക്കുന്നു അതിനാൽ ഇരുവശങ്ങളും 10 കൊണ്ടു ഗുണിക്കുക.)

$10x = 3.3333...$ (2)

(2) – (1): $9x = 3$ or $x = \frac{1}{3}$

(ii) $x = 2.\overline{124} = 2.124124124\ldots$ (1)

(ഇവിടെ മൂന്നക്കങ്ങൾ ആവർത്തിക്കുന്നു അതിനാൽ (1) ന്റെ ഇരുവശങ്ങളും 1000 കൊണ്ടു ഗുണിക്കുക.)

$1000x = 2124.124124124\ldots$ (2)

(2)–(1): $999x = 2122$ $x = \frac{2122}{999}$

(iii) $x = 0.4\overline{5} = 0.45555\ldots$ (1)

(ഇവിടെ ദശാംശബിന്ദുകഴിഞ്ഞു രണ്ടാം സ്ഥാനത്തു വരുന്ന 5 എന്ന അക്കം ആവർത്തിക്കുന്നു. അതുകൊണ്ട് സമവാക്യം 1 നെ 10 കൊണ്ട് ഗുണിക്കുക)

$10x = 4.5555\ldots$ (2)

(ഇവിടെ ഒരക്കം ആവർത്തിക്കുന്നതിനാൽ സമവാക്യം 2 നെ 10 കൊണ്ട് ഗുണിക്കുക)

$100x = 45.5555\ldots$ (3)

(3) – (2): $90x = 41$ or $x = \frac{41}{90}$

(iv) $x = 0.5\overline{68} = 0.5686868\ldots$ (1)

(ഇവിടെ ആവർത്തിക്കുന്ന അക്കങ്ങൾ 68 ആകുന്നു. ഇത് ദശാംശബിന്ദു കഴിഞ്ഞ് രണ്ടാം സ്ഥാനത്തു നിന്ന് തുടങ്ങുന്നു അതിനാൽ സമവാക്യം 1 നെ 10 കൊണ്ട് ഗുണിക്കുക

$10x = 5.686868\ldots$ (2)

(ഇപ്പോൾ രണ്ടക്കങ്ങൾ ആവർത്തിക്കുന്നതിനാൽ സമവാക്യം 2 നെ 100 കൊണ്ടു ഗുണിക്കുക)

$1000x = 568.686868\ldots$ (3)

(3) – (2): $990x = 563$ or $x = \frac{563}{990}$.

Unit 2_REAL NUMBERS.indd 49 28-01-2023 13:05:41

കുറിപ്പ്

ഒരു പരിമേയ സംഖ്യയുടെ ദശാംശഭിന്നം ആവർത്തിക്കുന്നതാണോ അല്ലയോ എന്നു കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് താഴെ തന്നിട്ടുള്ള നിയമം പ്രയോജനപ്പെടുത്താം

$\frac{p}{q}$, $q \neq 0$ എന്ന പരിമേയ സംഖ്യയെ $\frac{p}{2^m \times 5^n}$, $p \in \mathbb{Z}$, $m, n \in \mathbb{W}$ എന്ന രൂപത്തിൽ ആവിഷ്കരിക്കാൻ സാധിക്കുമെങ്കിൽ ആ സംഖ്യയ്ക്ക് അവസാനിക്കുന്ന ദശാംശഭിന്നമാണുള്ളത് അല്ലെങ്കിൽ ആ പരിമേയ സംഖ്യയ്ക്ക് അവസാനിക്കാത്തതും ആവർത്തിക്കുന്നതുമായ ദശാംശഭിന്നമുണ്ടായിരിക്കും.

ഉദാഹരണം 2.6

പൂർണ്ണമായി ഹരിക്കാതെ താഴെ തന്നിട്ടുള്ള സംഖ്യകളെ അവസാനിക്കുന്നത് അല്ലെങ്കിൽ അവസാനിക്കാതെ ആവർത്തിക്കുന്നത് എന്നിങ്ങനെ തരം തിരിക്കുക.

(i) $\frac{13}{64}$ (ii) $\frac{-71}{125}$ (iii) $\frac{43}{375}$ (iv) $\frac{31}{400}$

നിർദ്ധാരണം

(a) $\frac{13}{64} = \frac{13}{2^6}$, അതിനാൽ $\frac{13}{64}$ ന് അവസാനിക്കുന്ന ദശാംശഭിന്നമാണുള്ളത്.

(b) $\frac{-71}{125} = \frac{-71}{5^3}$, അതിനാൽ $\frac{-71}{125}$ ന് അവസാനിക്കുന്ന ദശാംശഭിന്നമാണുള്ളത്.

(c) $\frac{43}{375} = \frac{43}{3^1 \times 5^3}$, അതിനാൽ $\frac{43}{375}$ ന് അവസാനിക്കാത്തതും ആവർത്തിക്കുന്നതുമായ ദശാംശഭിന്നമാണുള്ളത്

(d) $\frac{31}{400} = \frac{31}{2^4 \times 5^2}$, അതിനാൽ $\frac{31}{400}$ ന് അവസാനിക്കുന്ന ദശാംശഭിന്നമാണുള്ളത്.

ഉദാഹരണം 2.7

$1 = 0.\overline{9}$ ശരിയാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക

നിർദ്ധാരണം

$x = 0.\overline{9} = 0.99999\ldots$ (1)

(സമവാക്യം 1 നെ 10 കൊണ്ട് ഗുണിക്കുക)

$10x = 9.99999\ldots$ (2)

(1) - (2)

$9x = 9 \quad x = 1$

$0.\overline{9} = 1$

$1 = 0.9999\ldots$

$7 = 6.9999\ldots$

$3.7 = 3.6999\ldots$

ഈ രൂപത്തിൽ നിന്ന് ഏതൊരു അവസാനിക്കുന്ന ദശാംശഭിന്നസംഖ്യയെയും അവസാനിക്കാത്തതും ആവർത്തിക്കുന്നതുമായ ദശാംശഭിന്നമായി മാറ്റുന്നതിന് അവസാനമില്ലാത്ത 9 എന്ന അക്കത്തിന്റെ കൂട്ടത്തെ ചേർത്താൽ മതിയാകും

അഭ്യാസം2.2

1. താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള പരിമേയ സംഖ്യകളെ ദശാംശസംഖ്യകളാക്കി മാറ്റുക. കൂടാതെ, അവ ഏതു തരംദശാംശഭിന്നമാണെന്നും പ്രസ്താവിക്കുക.

(i) $\frac{2}{7}$ (ii) $-5\frac{3}{11}$ (iii) $\frac{22}{3}$ (iv) $\frac{327}{200}$

Unit 2_REAL NUMBERS.indd 50 28-01-2023 13:05:47

2. $\frac{1}{13}$ നെ ദശാംശ രൂപത്തിലാക്കുക ദശാംശഭിന്നങ്ങളുടെ ദൈർഘ്യത്തിന്റെ നീളം കാണുക.

3. $\frac{1}{11}$ ന്റെ ആവർത്തിക്കുന്ന ദശാംശഭിന്നത്തെ ഉപയോഗിച്ച് $\frac{1}{33}$ എന്ന പരിമേയസംഖ്യയെ ആവർത്തിക്കുന്ന ദശാംശഭിന്നമായി മാറ്റുക. അതുപയോഗിച്ച് $\frac{71}{33}$ നെ ആവർത്തിക്കുന്ന ദശാംശഭിന്നമായി മാറ്റുക.

4. താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ദശാംശസംഖ്യകളെ പരിമേയ സംഖ്യകളാക്കി മാറ്റുക

(i) $0.\overline{24}$ (ii) $2.\overline{327}$ (iii) -5.132 (iv) $3.1\overline{7}$

(v) $17.2\overline{15}$ (vi) $-21.213\overline{7}$

5. പൂർണ്ണമായി ഹരിക്കാതെ താഴെ തന്നിട്ടുള്ള പരിമേയ സംഖ്യകൾക്ക് അവസാനിക്കുന്ന ദശാംശഭിന്നമാണോ ഉള്ളത് എന്നു കണ്ടുപിടിക്കുക?.

(i) $\frac{7}{128}$ (ii) $\frac{21}{15}$ (iii) $4\frac{9}{35}$ (iv) $\frac{219}{2200}$

2.3.6 ദശാംശസംഖ്യകളെ ഉപയോഗിച്ച് അപരിമേയ സംഖ്യകളെ തിരിച്ചറിയൽ

നമുക്ക് അപരിമേയ സംഖ്യകളെ ദശാംശ രൂപത്തിൽ പ്രകാശനം ചെയ്യുമ്പോൾ അവ അവസാനിക്കുന്നില്ലെന്നും, അതെ സമയം ആവർത്തിക്കുന്നില്ലെന്നും കാണിക്കാൻ കഴിയും. ഉദാഹരണത്തിന് π എന്ന സംഖ്യയേ ദശാംശവൽക്കരിക്കുമ്പോൾ അത് 3.14159265358976... എന്നു തുടങ്ങുന്നു. എന്നാൽ ഇതിൽ ഏതെങ്കിലും നിശ്ചിത അക്കങ്ങളുടെ ആവർത്തനം കാണുന്നില്ല.

താഴെ കാണുന്ന ദശാംശ വിപുലീകരണങ്ങളെ മനസ്സിലാക്കാൻ ശ്രമിക്കൂ:

(i) 0.1011001110001111… (ii) 3.012012120121212…

(iii) 12.230223300222333000… (iv) $\sqrt{2}$ = 1.4142135624…

മുകളിൽ പറഞ്ഞ സംഖ്യകൾ അവസാനിക്കുന്നതും ആവർത്തിക്കുന്നതും ആണോ? അതോ അവസാനിക്കാത്തതോ? ഇല്ല, അവ അവസാനിക്കുന്നതുമല്ല അവസാനിക്കാത്തതും ആവർത്തിക്കുന്നതുമല്ല. അതുകൊണ്ട് ഇവയൊന്നും പരിമേയസംഖ്യകളുമല്ല $\frac{p}{q}$ എന്ന രൂപത്തിൽ ഇവയെ എഴുതാൻ സാധിക്കില്ല ($p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$) അതുകൊണ്ട് ഈ സംഖ്യകൾ അപരിമേയ സംഖ്യകളാകുന്നു.

അവസാനിക്കാത്തതും ആവർത്തിക്കാത്തതുമായ ദശാംശഭാഗമുള്ള സംഖ്യയെ അപരിമേയ സംഖ്യകൾ എന്നു വിളിക്കാം.

ഉദാഹരണം 2.8

$\sqrt{3}$ ന്റെ ദശാംശരൂപം കാണുക

നിർദ്ധാരണം

```
                1.7320508…
          ┌──────────────────
        1 │ 3.00,00,00,00,00,…
          │ 1
          ├──────────────────
       27 │ 200
          │ 189
          ├──────────────────
      343 │  1100
          │  1029
          ├──────────────────
     3462 │   7100
          │   6924
          ├──────────────────
   346405 │    1760000
          │    1732025
          ├──────────────────
 34641008 │     279750000
          │     277128064
          ├──────────────────
          │       2621936
```

സാധരണയായി $\sqrt{2}$ = 1.414…., $\sqrt{3}$ = 1.732…, π = 3.141, മുതലായവ. യഥാർത്ഥമൂല്യങ്ങൾ അല്ല ഏകദേശ മൂല്യങ്ങളാണ് π എന്ന അപരിമേയ സംഖ്യയെ സംബന്ധിച്ചിടത്തോളം നാം സാധാരണയായി $\frac{22}{7}$ എന്ന് എഴുതാറുണ്ട്. (അതിന്റെ മൂല്യം 3.142857...) ഇതിനെ യഥാർത്ഥമൂല്യമായി നാം കണക്കാക്കാറുണ്ട്. വാസ്തവത്തിൽ അത് ഏകദേശ മൂല്യം മാത്രമാണ് എന്തുകൊണ്ടെന്നാൽ അപരിമേയ സംഖ്യയുടെ ദശാംശഭാഗം അവസാനിക്കാത്തതും ആവർത്തിക്കാത്തതുമാകുന്നു. ഒരു അപരിമേയ സംഖ്യയും യഥാർത്ഥമൂല്യം നൽകുന്നില്ല!

Unit 2_REAL NUMBERS.indd 51 28-01-2023 13:05:49

ദീർഘ ഹരണ രീതിയിൽ $\sqrt{3}$ = 1.7320508...

ഇതിൽ നിന്നും പൂർണ്ണവർഗ്ഗമല്ലാത്ത ഓരോ ധനപൂർണ്ണാങ്കത്തിന്റേയും വർഗ്ഗമൂലം ഒരു അപരിമേയ സംഖ്യയായിരിക്കും. $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \ldots$ തുടങ്ങിയവയെല്ലാം അപരിമേയ സംഖ്യകളാണ്.

ഉദാഹരണം 2.9

താഴെകൊടുത്തിട്ടുള്ള സംഖ്യകളെ പരിമേയം അല്ലെങ്കിൽ അപരിമേയം എന്നിങ്ങനെ തരം തിരിക്കുക.

(i) $\sqrt{10}$ (ii) $\sqrt{49}$ (iii) 0.025 (iv) $0.7\overline{6}$ (v) 2.505500555... (vi) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

നിർദ്ധാരണം

(i) $\sqrt{10}$ ഒരു അപരിമേയ സംഖ്യ (കാരണം 10 ഒരു പൂർണ്ണ വർഗ്ഗസംഖ്യയല്ല).

(ii) $\sqrt{49} = 7 = \frac{7}{1}$, ഒരു പരിമേയസംഖ്യ(49 ഒരു പൂർണ്ണവർഗ്ഗസംഖ്യ).

(iii) 0.025 ഒരു പരിമേയസംഖ്യ (ഇത് ഒരു അവസാനിക്കുന്ന ദശാംശസംഖ്യ).

(iv) $0.7\overline{6} = 0.7666\ldots$. ഒരു പരിമേയസംഖ്യ (ഇത് അവസാനിക്കാത്തതും ആവർത്തിക്കുന്നതുമായ ദശാംശ സംഖ്യ).

(v) 2.505500555.... ഒരു അപരിമേയസംഖ്യ (അവസാനിക്കാത്തതും ആവർത്തിക്കാത്തതുമായ ദശാംശ സംഖ്യ).

(vi) $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ഒരു അപരിമേയസംഖ്യ (2 ഒരു പൂർണ്ണവർഗ്ഗസംഖ്യ അല്ല).

കുറിപ്പ്

ഉദാഹരണം 2.9, *(vi)* നെ $\frac{p}{q}$ രൂപത്തിലാണെന്ന് തെറ്റായി ധരിക്കാൻ പാടില്ല കാരണം പരിമേയ സംഖ്യയിൽ p , q എന്നിവ പൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾ ആയിരിക്കണം. അല്ലാതെ അപരിമേയ സംഖ്യയാകാൻ പാടില്ല

ഉദാഹരണം 2.10

0.12നും **0.13**നും ഇടയിലുള്ള ഏതെങ്കിലു **3** അപരിമേയ സംഖ്യകൾ കണ്ടെത്തുക?

നിർദ്ധാരണം

0.12നും 0.13നും ഇടയിലുള്ള അപരിമേയ സംഖ്യകളാണ് 0.12010010001..., 0.12040040004..., 0.12070070007...

കുറിപ്പ്

എപ്പോഴും ഓർമ്മിക്കേണ്ടവിധം വിലയുള്ള ഒരു പ്രധാന ഫലത്തെ നാം പ്രസ്താവിച്ചിരുന്നു. (തെളിയിക്കാതെ) 'a' ഒരു പരിമേയ സംഖ്യയും $\sqrt{b}$ ഒരു അപരിമേയ സംഖ്യയും ആണെങ്കിൽ താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ളവ അപരിമേയ സംഖ്യകളാണ് :

(i) $a + \sqrt{b}$; (ii) $a - \sqrt{b}$; (iii) $a\sqrt{b}$; (iv) $\frac{a}{\sqrt{b}}$; (v) $\frac{\sqrt{b}}{a}$.

ഉദാഹരണമായി 4 എന്ന പരിമേയസംഖ്യയും $\sqrt{5}$ എന്ന് അപരിമേയ സംഖ്യയും പരിഗണിക്കുക $4 + \sqrt{5}$, $4 - \sqrt{5}$, $4\sqrt{5}$, $\frac{4}{\sqrt{5}}$, $\frac{\sqrt{5}}{4}$ --- എന്നിവ അപരിമേയസംഖ്യകളാണ്.

Unit 2_REAL NUMBERS.indd 52 28-01-2023 13:05:52

ഉദാഹരണം 2.11

0.5151151115...നും **0.5353353335...**നും ഇടയിലുള്ള ഏതെങ്കിലും രണ്ടു പരിമേയ സംഖ്യകൾ എഴുതുക.

നിർദ്ധാരണം

0.5151151115...നും 0.5353353335...നും ഇടയിലുള്ള രണ്ടു പരിമേയ സംഖ്യകളാണ് 0.5152 , 0.5352

ഉദാഹരണം 2.12

താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയിൽ **x,y** എന്നിവ പരിമേയമാണോ? അപരിമേയമാണോ എന്ന് കണ്ടെത്തുക?

(i) $a = 2 + \sqrt{3}$, $b = 2 - \sqrt{3}$; $x = a + b$, $y = a - b$

(ii) $a = \sqrt{2} + 7$, $b = \sqrt{2} - 7$; $x = a + b$, $y = a - b$

(iii) $a = \sqrt{75}$, $b = \sqrt{3}$; $x = ab$, $y = \frac{a}{b}$

(iv) $a = \sqrt{18}$, $b = \sqrt{3}$; $x = ab$, $y = \frac{a}{b}$

കുറിപ്പ്

(i) മുകളിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഉദാഹരണങ്ങളിൽ നിന്നും രണ്ട് അപരിമേയ സംഖ്യകളുടെ തുക, വ്യത്യാസം, ഗുണനഫലം, ഹരണഫലം എന്നിവ പരിമേയ സംഖ്യയോ അപരിമേയ സംഖ്യയോ ആകാവുന്നതാണ്.

നിർദ്ധാരണം

(i) തന്നിട്ടുള്ളത് $a = 2 + \sqrt{3}, b = 2 - \sqrt{3}$

$x = a + b = (2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 4$, ഒരു പരിമേയ സംഖ്യ.

$y = a - b = (2 + \sqrt{3}) - (2 - \sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$, ഒരു അപരിമേയ സംഖ്യ.

(ii) തന്നിട്ടുള്ളത് $a = \sqrt{2} + 7$, $b = \sqrt{2} - 7$

$x = a + b = (\sqrt{2} + 7) + (\sqrt{2} - 7) = 2\sqrt{2}$, ഒരു അപരിമേയ സംഖ്യ.

$y = a - b = (\sqrt{2} + 7) - (\sqrt{2} - 7) = 14$, ഒരു പരിമേയ സംഖ്യ.

(iii) തന്നിട്ടുള്ളത് $a = \sqrt{75}$, $b = \sqrt{3}$

$x = ab = \sqrt{75} \times \sqrt{3} = \sqrt{75 \times 3} = \sqrt{5 \times 5 \times 3 \times 3} = 5 \times 3 = 15$, ഒരു പരിമേയ സംഖ്യ.

$y = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{75}{3}} = \sqrt{25} = 5$, ഒരു പരിമേയ സംഖ്യ .

(iv) തന്നിട്ടുള്ളത് $a = \sqrt{18}$, $b = \sqrt{3}$

$x = ab = \sqrt{18} \times \sqrt{3} = \sqrt{18 \times 3} = \sqrt{6 \times 3 \times 3} = 3\sqrt{6}$, ഒരു അപരിമേയ സംഖ്യ.

$y = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{18}{3}} = \sqrt{6}$, ഒരു അപരിമേയ സംഖ്യ.

ഉദാഹരണം 2.12

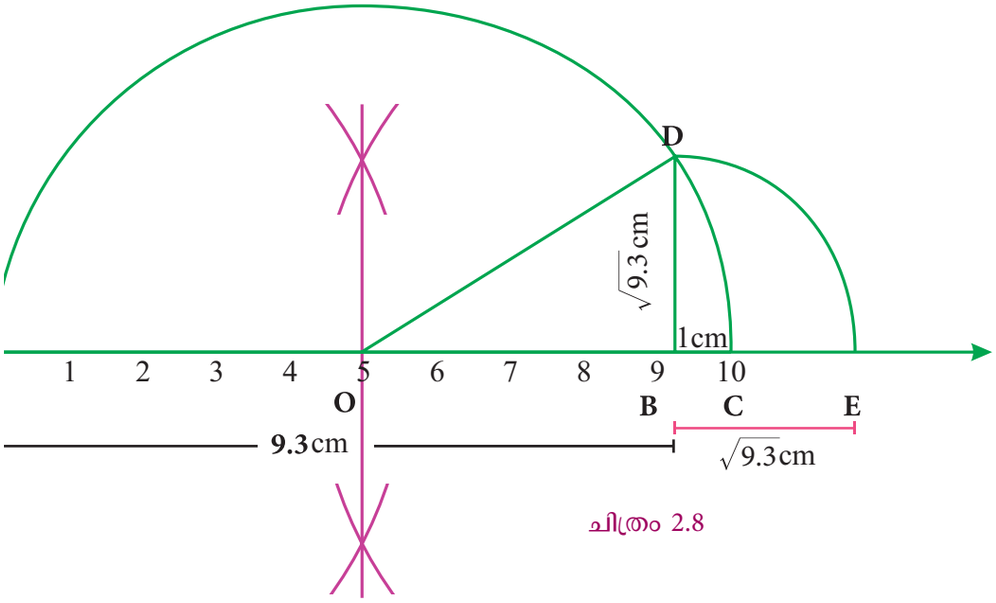
$\sqrt{9.3}$ നെ സംഖ്യാരേഖയിൽ പ്രതിഷ്ഠിക്കുക

നിർദ്ധാരണം

- ഒരു രേഖവരച്ച് ബിന്ദു A യെ രേഖപ്പെടുത്തുക.
- $AB = 9.3$. സെ.മീ എന്നു വരത്തക്കവിധം B എന്ന ബിന്ദു രേഖപ്പെടുത്തുക.
- $BC = 1$ മാത്ര എന്നു വരത്തക്കവിധം രേഖയിൽ C എന്ന ബിന്ദു രേഖപ്പെടുത്തുക.
- AC യിലൂടെ ഒരു ലംബദ്വിഭാജകം വരച്ച് AC യുടെ മദ്ധ്യബിന്ദു കണ്ടെത്തി അതിന് O എന്നു പേരു രേഖപ്പെടുത്തുക
- O കേന്ദ്രമായി $OC = OA$ എന്ന വ്യാസാർദ്ധമുള്ള ഒരു അർദ്ധവൃത്തം വരയ്ക്കുക.
- AB യ്ക്ക് ലംബമായി B യിലൂടെ BD എന്ന രേഖാഖണ്ഡം വരയ്ക്കുക.

Unit 2_REAL NUMBERS.indd 53 28-01-2023 13:05:58

➲ ഇപ്പോൾ $BD = \sqrt{9.3}$ എന്നതിനെ നമുക്ക് സംഖ്യാരേഖയിൽ രേഖപ്പെടുത്താം. $BE = BD = \sqrt{9.3}$ വ്യാസാർദ്ധമായി ചാപം വരയ്ക്കുക.



ചിത്രം 2.8

അഭ്യാസം2.3

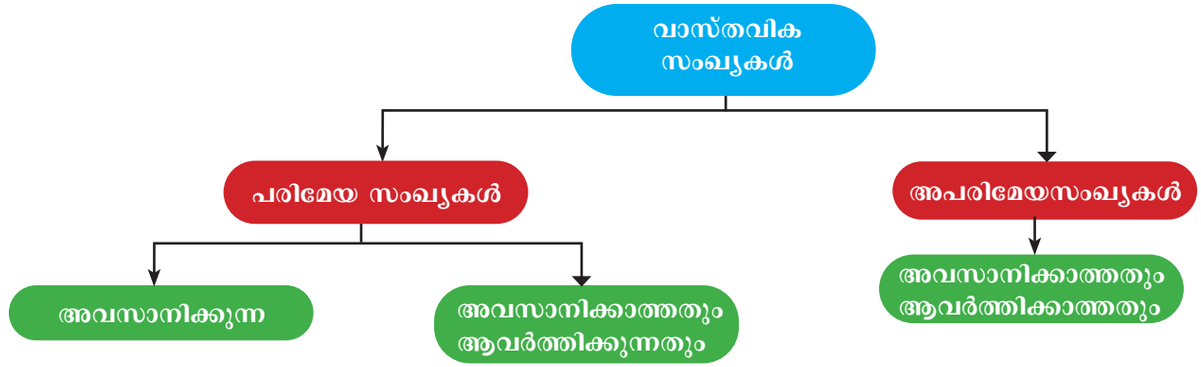
1. താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള അപരിമേയ സംഖ്യകളെ സംഖ്യാരേഖയിൽ പ്രതിനിധീകരിക്കുക.
   (i) $\sqrt{3}$ (ii) $\sqrt{4.7}$ (iii) $\sqrt{6.5}$

2. താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള സംഖ്യകൾക്കിടയിലുള്ള ഏതെങ്കിലും രണ്ട് അപരിമേയ സംഖ്യകളെ കണ്ടെത്തുക.
   (i) 0.3010011000111…. , 0.3020020002….
   (ii) $\frac{6}{7}$, $\frac{12}{13}$ (iii) $\sqrt{2}$,$\sqrt{3}$ (iv) 0.12 , 0.13

3. 2.2360679…..നും 2.236505500 നും ഇടയിലുള്ള ഏതെങ്കിലും രണ്ട് പരിമേയസംഖ്യകളെ കണ്ടെത്തുക.

2.4 വാസ്തവിക സംഖ്യകൾ (Real Numbers)

എല്ലാ പരിമേയ സംഖ്യകളുടെയും അപരിമേയ സംഖ്യകളുടെയും സംയുക്തമാണ് വാസ്തവിക സംഖ്യകൾ .അനന്തമായി നീളുന്ന വാസ്തവികരേഖ എന്ന സംഖ്യാരേഖയിലെ എല്ലാ ബിന്ദുക്കളും വാസ്തവിക സംഖ്യകളാണെന്ന് നമുക്ക് ചിന്തിക്കാം. പൂർണ്ണാങ്കങ്ങളെ പ്രതിനിധാനം ചെയ്യുന്ന ബിന്ദുക്കൾ ഈ സംഖ്യാരേഖയിൽ സമഇടവേളകളിലായി സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു.



Unit 2_REAL NUMBERS.indd 54 28-01-2023 13:05:59

സാധ്യമായ വിദൂരതയിലുള്ള ദശാംശസംഖ്യാ പ്രകാശനത്തിലൂടെ ഏതു വാസ്തവിക സംഖ്യയെയും കണ്ടുപിടിക്കാം (എങ്ങനെ പരിമേയ സംഖ്യകളെയും അപരിമേയ സംഖ്യകളെയും ദശാംശ സംഖ്യകളായി കാണിക്കാം എന്നു നാം മുമ്പു തന്നെ പഠിച്ചു കഴിഞ്ഞു).

2.4.2 വാസ്തവിക സംഖ്യാരേഖ

തുടർവിപുലീകരണത്തിലൂടെയുള്ള വീക്ഷണം.

ഒരു ഭൂതകണ്ണാടിയിലൂടെ ഇമവെട്ടി നോക്കുന്നതുപോലെ സംഖ്യരേഖയിൽ പ്രതിനിധാനം ചെയ്തിട്ടുള്ള സംഖ്യകളെ നമുക്ക് വീക്ഷിക്കാൻ കഴിയും.

ഉദാഹരണം 2.14

നിർദ്ധാരണം

4.863 നിൽക്കുന്നത് 4 നും 5 നും ഇടയ്ക്കാണ്. (ചിത്രം 2.10)

(i) 4 നും 5 നും ഇടയിലുള്ള ഭാഗത്തെ 10 തുല്യഭാഗങ്ങളായി പിരിക്കുക.

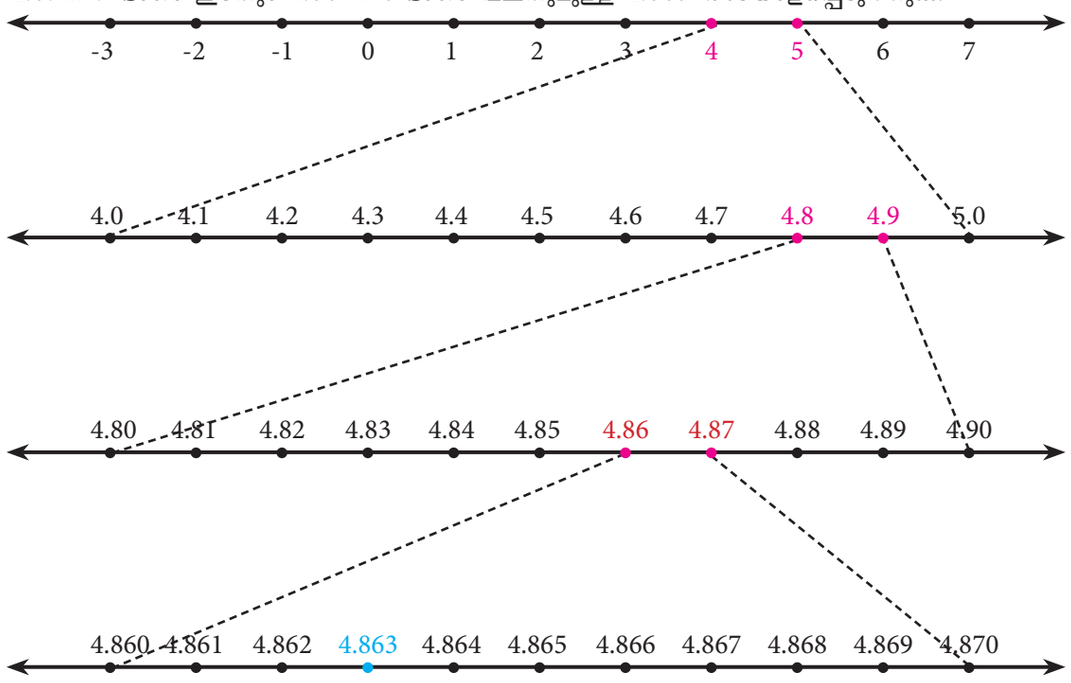
(ii) 4 ൽ നിന്നും 8 ഭാഗം വലതും 5 ൽ നിന്നും 2 ഭാഗം ഇടതുമുള്ള 4.8 എന്ന ബിന്ദുവിനെ അടയാളപ്പെടുത്തുക.

(iii) 4.86 എന്നത് 4.8 നും 4.9 നും ഇടയ്ക്കാണ് സ്ഥിതിചെയ്യുന്നത്. അവയ്ക്കിടയിലുള്ള നീളത്തെ 10 തുല്യഭാഗങ്ങളായി പിരിക്കുക.

(iv) 4.8 ന്, 6 ഭാഗം ഇടതും 4.9 ന് 4 ഭാഗം വലതുമുള്ള 4.86 എന്ന ബിന്ദുവിനെ അടയാളപ്പെടുത്തുക.

(v) 4.863 സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നത് 4.86 നും 4.87 നും ഇടയ്ക്കാണ് അവയ്ക്കിടയിലുള്ള നീളത്തെ 10 തുല്യഭാഗങ്ങളായി പിരിക്കുക.

(vi) 4.87ന് 7 ഭാഗം ഇടതും 4.86 ന് 3 ഭാഗം വലതുമുള്ള 4.863 അടയാളപ്പെടുത്തുക.



ചിത്രം 2.9

ഉദാഹരണം 2.15

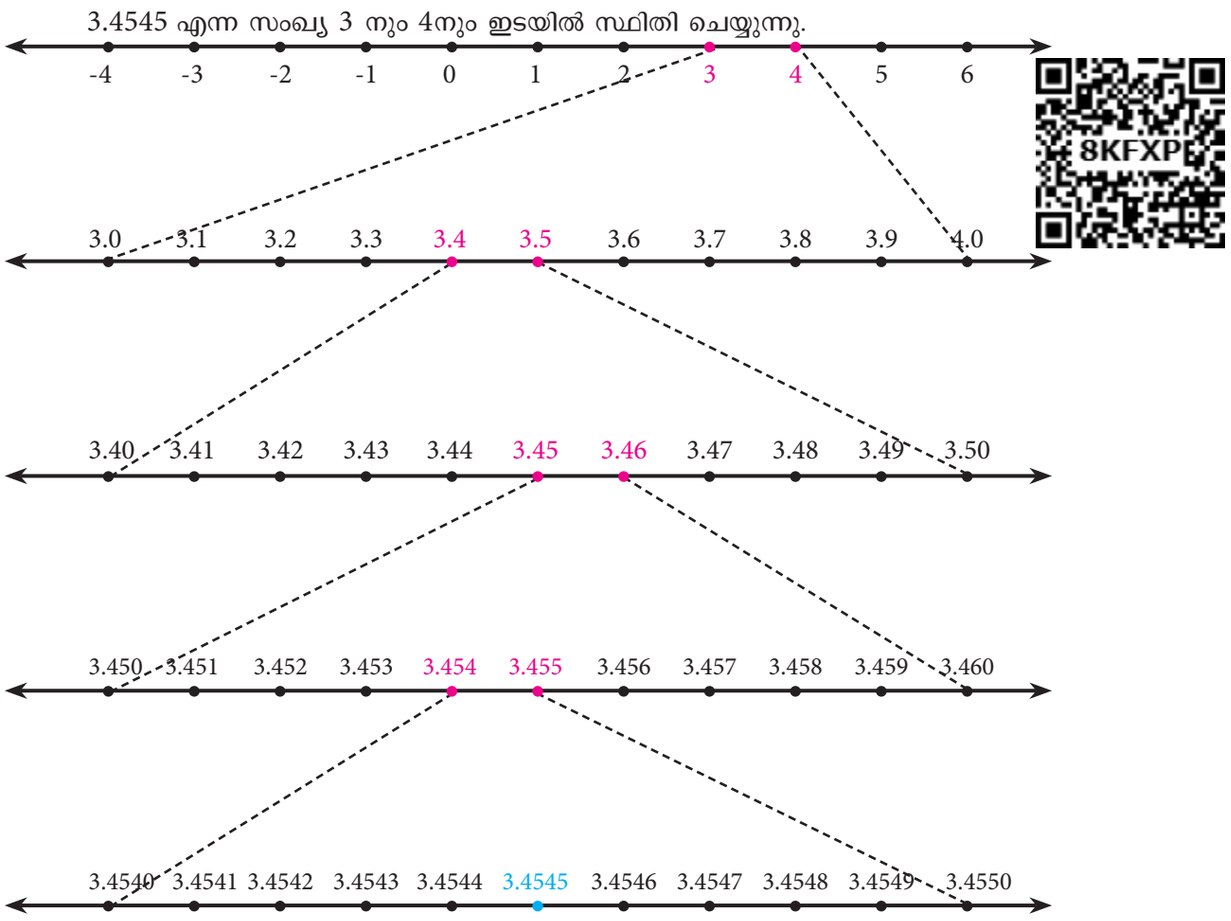
$3.\overline{45}$ നെ **4** ദശാംശ സ്ഥാനങ്ങൾക്ക് സംഖ്യാരേഖയിൽ ദൃഷ്ടമാക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$3.\overline{45}$ = 3.45454545…..

= 3.4545 (4 ദശാംശ സ്ഥാനങ്ങൾക്ക്).

Unit 2_REAL NUMBERS.indd 55 28-01-2023 13:05:59



ചിത്രം 2.10

അഭ്യാസം2.4

1. താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള സംഖ്യകളെ സംഖ്യാരേഖയിൽ ദൃഷ്ടമാക്കുക.

(i) 5.348 (ii) $6.\overline{4}$ നെ 3 ദശാംശ സ്ഥാനങ്ങൾക്കു കൃത്യമായി (iii) $4.\overline{73}$ നെ 4 ദശാംശ സ്ഥാനങ്ങൾക്കു കൃത്യമായി.

2.5 മൂലസംഖ്യാ സമ്പ്രദായം (Radical Notation)

n ഒരു ധന സംഖ്യ കൂടാതെ r ഒരു വാസ്തവിക സംഖ്യ എന്നിരിക്കട്ടെ. $r^n = x$, എങ്കിൽ r എന്നത് x ന്റെ n ാം മൂലം എന്ന് വിളിക്കപ്പെടുന്നു.

$$\sqrt[n]{x} = r$$

ഇതിനെ നമുക്ക് $\sqrt[n]{\ }$ (n^{th} root എന്ന് വായിക്കാം) എന്ന് എഴുതാം. ഇവിടെ $\sqrt[n]{\ }$ എന്നത് മൂലസംഖ്യ ചിഹ്നം എന്നും n എന്നത് മൂലത്തിന്റെ ക്രമമായും കണക്കാക്കാം. കൂടാതെ x നെ റാഡിക്കന്റ് എന്നും വിളിക്കപ്പെടാം.

കുറിപ്പ്

വർഗ്ഗമൂലം കൂടാതെ ഘനമൂലം എന്നിവയുടെ ആശയങ്ങളെ കുറിച്ച് മനസ്സിലാക്കുന്നതിന് കുറച്ച് നേരം മാറ്റി വച്ചാൽ കരണികളെ കുറിച്ച് എളുപ്പത്തിൽ മനസ്സിലാക്കാൻ സാധിക്കും.

$n = 2$ എങ്കിൽ എന്ത് സംഭവിക്കും? $r^2 = x$, ആകും. ആയതിനാൽ $r = \sqrt[2]{x}$, ഇപ്പോൾ നമുക്ക് x ന്റെ വർഗ്ഗമൂലത്തെക്കുറിച്ച് ഓർമ്മിക്കാം. അതായത് r എന്നത് x ന്റെ വർഗ്ഗമൂലം ആകും.

Unit 2_REAL NUMBERS.indd 56 28-01-2023 13:06:00

ഉദാഹരണമായി $\sqrt[2]{16}$ എന്നതിനെ $\sqrt{16}$, എന്ന് എഴുതാൻ സാധിക്കും $n=3$, എങ്കിൽ x-ന്റെ ഘനമൂലത്തെ $\sqrt[3]{x}$. എന്ന് എഴുതാം ഉദാഹരണമായി, $\sqrt[3]{8}$ ൽ 8, ന്റെ ഘനമൂലമായി 2 നെ കണക്കാക്കാം. ($8 = 2^3$ എന്നത് ശരിയാണോ?)

ചിന്തിക്കുക

താഴെ കാണുന്നവയിൽ തെറ്റ് ഏത്?

(a) 9 ന്റെ വർഗ്ഗമൂലം 3 അല്ലെങ്കിൽ -3.

(b) $\sqrt{9} = 3$

(c) $-\sqrt{9} = -3$

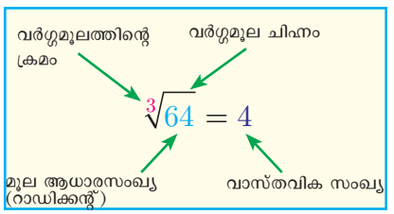
(d) $\sqrt{9} = \pm 3$

4 എന്ന സംഖ്യയ്ക്ക് എത്ര വർഗ്ഗമൂലങ്ങൾ ഉണ്ട്? $(+2)\times(+2) = 4$ കൂടാതെ $(-2)\times(-2) = 4$, അതുകൊണ്ട് $+2$, -2 ഇവ രണ്ടും 4-ന്റെ വർഗ്ഗമൂലങ്ങൾ എന്നു പറയാം. പക്ഷേ $\sqrt{4} = \pm 2$ എന്ന് എഴുതുന്നത് ശരിയല്ല. എന്തെന്നാൽ n എന്നത് ഒരു ഇരട്ട സംഖ്യയായിരിക്കുമ്പോൾ ധനവർഗ്ഗമൂലത്തെ കുറിയ്ക്കുന്നതിന് $\sqrt[n]{x}$ എന്ന അടയാളവും ഋണവർഗ്ഗ മൂലത്തെ കുറിയ്ക്കുന്നതിന് $-\sqrt[n]{x}$ എന്ന അടയാളവും അംഗീകരിക്കപ്പെട്ട രീതിയാകുന്നു. അതുകൊണ്ട് $\sqrt{4} = 2$ എന്നും $-\sqrt{4} = -2$. എന്ന രീതിയിലും നാം എഴുതണം.

n എന്നത് ഒരു ഒറ്റ സംഖ്യയായിരിക്കുമ്പോൾ x-ന്റെ എല്ലാ മൂല്യങ്ങൾക്കും കൃത്യമായി ഒരേ യൊരു വാസ്തവിക വർഗ്ഗമൂലം മാത്രമേ ഉണ്ടാകൂ. ഉദാഹരണമായി:

$\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[5]{-32} = -2$,

2.5.1 ഭിന്നഘാതം (Fractional Index)



വീണ്ടും $r = \sqrt[n]{x}$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ള ഫലങ്ങളെ എടുത്തു നോക്കാം. അടുത്തുള്ള ചിത്രത്തിൽ, വർഗ്ഗമൂലത്തിന്റെ ക്രമം (ഇവിടെ 3) എത്ര പ്രാവശ്യം ഉത്തരത്തെ (ഇവിടെ 4) ഗുണിച്ചാൽ മൂല ആധാര സംഖ്യ കിട്ടും എന്നതിനെ നിരൂപിക്കുന്നു.

ഘാതങ്ങളെയും വർഗ്ഗമൂലങ്ങളെയും കുറിക്കുന്നതിന് നമുക്ക് വേറെയും വഴി ഉണ്ട്. അത് ഇപ്രകാരമാണ് ഘാതത്തിൽ ഭിന്നത്തെ എഴുതുന്ന രീതിയാണ്.

അതായത് $\sqrt[n]{x}$ എന്നതിനെ $x^{\frac{1}{n}}$ (ഭിന്നഘാതം) എന്ന് എഴുതാം

ഉദാഹരണമായി

$$\sqrt[3]{64} \text{ എന്നത് } 64^{\frac{1}{3}} \text{ കൂടാതെ } \sqrt{25} \text{ എന്നത് } 25^{\frac{1}{2}}.$$

ചില അപരിമേയ സംഖ്യകളുടെ ഘാതാങ്കരൂപം, വായിക്കുന്ന രീതി, ഭിന്നഘാത രൂപം എന്നിവ താഴെ കാണുന്ന പട്ടികയിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു:

ഘാതാങ്ക രൂപം	വർഗ്ഗമൂലചിഹ്ന രൂപം	ഭിന്ന ഘാത രൂപം	വായിക്കുന്ന രീതി
$2^6 = 64$	$2 = \sqrt[6]{64}$	$2 = 64^{\frac{1}{6}}$	2 എന്നത് 64 ന്റെ 6 ാം മൂലം എന്ന് വിളിക്കാം
$2^5 = 32$	$2 = \sqrt[5]{32}$	$2 = 32^{\frac{1}{5}}$	2 എന്നത് 32 ന്റെ 5 ാം മൂലം എന്ന് വിളിക്കാം
$2^4 = 16$	$2 = \sqrt[4]{16}$	$2 = 16^{\frac{1}{4}}$	2 എന്നത് 16 ന്റെ 4 ാം മൂലം എന്ന് വിളിക്കാം
$2^3 = 8$	$2 = \sqrt[3]{8}$	$2 = 8^{\frac{1}{3}}$	2 എന്നത് 8 ന്റെ ഘനമൂലം അല്ലെങ്കിൽ 2 എന്നത് 8 ന്റെ 3 ാം മൂലം എന്ന് വിളിക്കാം

Unit 2_REAL NUMBERS.indd 57 28-01-2023 13:06:03

$2^2 = 4$	$2 = \sqrt[2]{4}$ അല്ലെങ്കിൽ ലഘുവായി $2 = \sqrt{4}$	$2 = 4^{\frac{1}{2}}$	2 എന്നത് 4 ന്റെ വർഗ്ഗമൂലം അല്ലെങ്കിൽ 2 എന്നത് 4 ന്റെ 2 ാം മൂലം എന്ന് വിളിക്കാം

ഉദാഹരണം 2.16 താഴെക്കാണുന്നവയെ 2^n രൂപത്തിൽ എഴുതുക:

(i) 8 (ii) 32 (iii) $\frac{1}{4}$ (iv) $\sqrt{2}$ (v) $\sqrt{8}$.

നിർദ്ധാരണം

(i) $8 = 2\times 2\times 2;\ \therefore 8 = 2^3$

(ii) $32 = 2\times2\times2\times2\times2 = 2^5$ (iii) $\frac{1}{4} = \frac{1}{2\times2} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2}$

(iv) $\sqrt{2} = 2^{1/2}$

(v) $\sqrt{8} = \sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^3$ ഇതിനെ $2^{\frac{3}{2}}$ എന്നും എഴുതാം.

$x^{\frac{m}{n}}$ എന്നതിന്റെ അർത്ഥം (m, n എന്നിവ പൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾ)

$x^{\frac{m}{n}}$ എന്നതിനെ നാം x ന്റെ m ാം ഘാതത്തിന്റെ n-ാം മൂലം അല്ലെങ്കിൽ x ന്റെ n-ാം മൂലത്തിന്റെ m ാം ഘാതം എന്ന് എഴുതാം.

ചിഹ്നരൂപത്തിൽ, $x^{\frac{m}{n}} = (x^m)^{\frac{1}{n}}$ അല്ലെങ്കിൽ $(x^{\frac{1}{n}})^m = \sqrt[n]{x^m}$ അല്ലെങ്കിൽ $(\sqrt[n]{x})^m$

ഉദാഹരണം 2.17 മൂല്യം കാണുക (i) $81^{\frac{5}{4}}$ (ii) $64^{\frac{-2}{3}}$

നിർദ്ധാരണം

(i) $81^{\frac{5}{4}} = \left(\sqrt[4]{81}\right)^5 = \left(\sqrt[4]{3^4}\right)^5 = 3^5 = 3\times3\times3\times3\times3 = 243$

(ii) $64^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{64^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{64}\right)^2} = \frac{1}{4^2}$ (എങ്ങനെ?) $= \frac{1}{16}$

അഭ്യാസം 2.5

1. താഴെ കാണുന്നവയെ 5^n രൂപത്തിൽ എഴുതുക:

(i) 625 (ii) $\frac{1}{5}$ (iii) $\sqrt{5}$ (iv) $\sqrt{125}$

2. താഴെ കാണുന്നവയെ 4^n രൂപത്തിൽ എഴുതുക:

(i) 16 (ii) 8 (iii) 32

3. മൂല്യം കാണുക

(i) $\left(49\right)^{\frac{1}{2}}$ (ii) $\left(243\right)^{\frac{2}{5}}$ (iii) $9^{\frac{-3}{2}}$ (iv) $\left(\frac{64}{125}\right)^{\frac{-2}{3}}$

Unit 2_REAL NUMBERS.indd 58 28-01-2023 13:06:05

4. താഴെ കാണുന്നവയെ സൂചികാരൂപത്തിൽ എഴുതുക:

(i) $\sqrt{5}$ (ii) $\sqrt[2]{7}$ (iii) $\left(\sqrt[3]{49}\right)^5$ (iv) $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{100}}\right)^7$

5. താഴെ തന്നിരിക്കുന്നവയുടെ 5 ാം മൂലം എഴുതുക

(i) 32 (ii) 243 (iii) 100000 (iv) $\frac{1024}{3125}$

2.6 കരണികൾ

വാസ്തവിക സംഖ്യകളെ പറ്റിയുള്ള ആശയങ്ങൾ, അവയെ സംഖ്യാരേഖയിൽ കുറിയ്ക്കൽ കൂടാതെ കൈകാര്യം ചെയ്യൽ തുടങ്ങിയവ നന്നായി മനസ്സിലാക്കിയ നാം ഇപ്പോൾ ചില ഏകദേശ മൂല്യങ്ങളെ എങ്ങനെ കരണികളായി വ്യത്യസ്ത രീതിയിൽ അവതരിപ്പിക്കാം എന്നതിനെപ്പറ്റി നി രീക്ഷിക്കാൻ പോവുകയാണ്.

$\sqrt{4}$ എന്ന സംഖ്യയെ $\sqrt{}$ ചിഹ്നം ഇല്ലാതെ നമുക്ക് ചുരുക്കത്തിൽ പറയാൻ കഴിയുമോ? അതെ സാധിക്കും $\sqrt{4}$ നു പകരം 2 എന്ന് എളുപ്പത്തിൽ എഴുതാൻ സാധിക്കും. അങ്ങനെയായാൽ $\sqrt{\frac{1}{9}}$ - നേയും അതേ രീതിയിൽ എഴുതാൻ സാധിക്കുമോ? $\sqrt{}$ ചിഹ്നം ഇല്ലാതെ വളരെ എളുപ്പത്തിൽ എഴുതാം. ഇതിന്റെ വില $\frac{1}{3}$. ആകുന്നു. $\sqrt{0.01}$ - ന്റെ വില എന്ത്? ഇതിനെയും എളുപ്പത്തിൽ എഴുതാം. ഇതിന്റെ വില 0.1 ആകുന്നു.

$\sqrt{4}$, $\sqrt{\frac{1}{9}}$ കൂടാതെ $\sqrt{0.01}$ എന്നിവയുടെ നിർദ്ധാരണം കാണുമ്പോൾ ഉത്തരത്തിൽ $\sqrt{}$ ചിഹ്നം ഇല്ലാതെ ഇരിക്കുന്നത് കാണാൻ സാധിക്കുന്നു. എല്ലാ സാഹചര്യങ്ങളിലും ഇങ്ങനെ ചെയ്യാൻ സാധിക്കുമോ? $\sqrt{18}$ - നെ പരിഗണിക്കുക റാഡിക്കൽ ചിഹ്നം ഇല്ലാതെ $\sqrt{18}$ - ന്റെ മൂല്യം നമുക്ക് കാണാൻ സാധിക്കുമോ?

റാഡിക്കൽ ചിഹ്നം ($\sqrt{}$)ഇല്ലാതെ നിർദ്ധാരണം കാണാൻ സാധിക്കാത്ത 2 ന്റെ വർഗ്ഗമൂലം ($\sqrt{2}$), 5 ന്റെ ഘനമൂലം തുടങ്ങിയവ പോലുള്ള സംഖ്യകളെ കരണികൾ എന്നു വിളിക്കുന്നു.

അത് ഗുണാങ്കം പരിമേയ സംഖ്യയായിട്ടുള്ള സമവാക്യത്തിന്റെ അപരിമേയ മൂലങ്ങൾ ആകുന്നു.

കരണി എന്നത് പരിമേയസംഖ്യയുടെ അപരിമേയ മൂലം ആകുന്നു. $\sqrt[n]{a}$ എന്നത് ഒരു കരണി, $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$, 'a' ഒരു പരിമേയസംഖ്യ.

ഉദാഹരണം : $\sqrt{2}$ ഒരു കരണി ഇത് $x^2 = 2$. എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ അപരിമേയ മൂലം ആകുന്നു. $x^2 - 2 = 0$ എന്നത് അപരിമേയസംഖ്യ ഗുണാങ്കമായി വരുന്ന സമവാക്യം ആണെന്ന് ശ്രദ്ധിക്കുക. $\sqrt{2}$ എന്നത് അപരിമേയസംഖ്യ ആണ്. ഇതിനെ $1.4142135\ldots$ എന്ന അവസാനിക്കാത്ത ആവർത്തിക്കാത്ത ദശാംശസംഖ്യയായി എഴുതാം.

$\sqrt[3]{3}$ (ഇത് $3^{\frac{1}{3}}$ യ്ക്കു സമം) ഒരു കരണി. എന്തെന്നാൽ ഇത് $x^3 - 3 = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ അപരിമേയ മൂലം ആകുന്നു. ($\sqrt{3}$ ഒരു അപരിമേയ സംഖ്യ, ഇതിനെ $1.7320508\ldots$ എന്ന അവസാനി ക്കാത്ത ആവർത്തിക്കാത്ത ദശാംശസംഖ്യയായി എഴുതാം).

$x^2 - 6x + 7 = 0$ എന്ന ദ്വിസമവാക്യത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിനെ കുറിച്ച് നിങ്ങൾ അടുത്ത ക്ലാസ്സിൽ പഠിക്കും. ഇത് പരിമേയസംഖ്യകൾ ഗുണാങ്കങ്ങളായി വരുന്ന സമവാക്യം ആകുന്നു. അതിന്റെ ഒരു മൂലം $3+\sqrt{2}$, ഒരു കരണി ആകുന്നു.

$\sqrt{\frac{1}{25}}$ ഒരു കരണിയാണോ? അല്ല $\frac{1}{5}$ ഇതിനെ $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$ എന്ന പരിമേയസംഖ്യയായി ചുരുക്കി എഴുതാൻ സാധിക്കും $\frac{2}{3}$.

Unit 2_REAL NUMBERS.indd 59 28-01-2023 13:06:07

നമുക്ക് അറിയാവുന്ന വളരെ പ്രധാനപ്പെട്ട അപരിമേയ സംഖ്യയായ പൈ (π)ഒരു കരണി അല്ല അത് ഒരു അപരിമേയ സംഖ്യയായി ഇരുന്നാലും അതിനെ $\sqrt{\ }$ ചിഹ്നത്തിനുള്ളിൽ ഒരു പരിമേയ സംഖ്യ എന്ന രീതിയിൽ എഴുതാൻ സാധിക്കില്ല. അതായത് പരിമേയ സംഖ്യകൾ ഗുണാങ്കങ്ങളായി വരുന്ന ഏതൊരു സമവാക്യത്തിനും ഇത് മൂലമായി വരാൻ സാധ്യത ഇല്ല.

കരണികൾ എന്തു കൊണ്ടാണ് മുഖ്യമെന്ന് പറയുന്നത്. കണക്കുകൾ ചെയ്യുമ്പോൾ നാം $\sqrt{2} = 1.414, \sqrt{3} = 1.732$ കൂടാതെ 3=1.732 എന്നീ ഏകദേശ മൂല്യങ്ങളെ എടുക്കുന്നു.

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(1.414\right)^2 = 1.99936 \neq 2 \ ; \quad \left(\sqrt{3}\right)^2 = \left(1.732\right)^2 = 3.999824 \neq 3$$

ഇതിൽ നിന്നും $\sqrt{2}$ കൂടാതെ $\sqrt{3}$ എന്നിവയുടെ ഏകദേശ മൂല്യങ്ങളെക്കാൾ വേറൊരു തുല്യമായ കൂടാതെ വളരെ കൃത്യമായ മൂല്യങ്ങളെ അവ കൈകൊണ്ടിരിക്കുന്നു എന്ന് നമുക്ക് കാണാൻ സാധിക്കും. എഞ്ചിനിയർമാരും, ശാസ്ത്രജ്ഞരും പാലം നിർമ്മിക്കൽ കെട്ടിട നിൽമ്മാണം എന്നീ ജോലികൾ ചെയ്യുമ്പോൾ തികച്ചും കൃത്യമായ അളവുകൾ ആവശ്യമായി വരുന്നു. അതിനാൽ കരണികളെ പറ്റിയുള്ള പഠനം വളരെ അത്യാവശ്യമായ ഒന്നാണ്.

പുരോഗതി പരിശോധന

1. താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവയിൽ വേറിട്ട് നിൽക്കുന്നത് ഏത്? ശരിയായ കാരണം എഴുതുക.

   (i) $\sqrt{36}, \sqrt{\frac{50}{98}}, \sqrt{1}, \sqrt{1.44}, \sqrt[5]{32}, \sqrt{120}$

   (ii) $\sqrt{7}, \sqrt{48}, \sqrt[3]{36}, \sqrt{5}+\sqrt{3}, \sqrt{1.21}, \sqrt{\frac{1}{10}}$

2. എല്ലാ കരണികളും അപരിമേയ സംഖ്യകളാണോ?-ചർച്ച ചെയ്യുക.
3. എല്ലാ അപരിമേയ സംഖ്യകളും കരണികളാണോ? ഉദാഹരണസഹിതം വ്യക്തമാക്കുക.

2.6.1 കരണികളുടെ ക്രമം

ഒരു കരണി എന്നത്, ഏത് റാഡിക്കന്റിൽ നിന്ന് രൂപപ്പെടുന്നോ, ആ റാഡിക്കന്റിന്റെ ക്രമമാണ് കരണിയുടെയും ക്രമം $\sqrt[n]{a}$ എന്ന കരണിയുടെ ക്രമം n ആകുന്നു $\sqrt[5]{99}$ ൻ ക്രമം എന്ത്? ക്രമം 5 ആകുന്നു.

കരണികളെ പല വിധത്തിൽ തരം തിരിക്കാം:

(i) ഒരേ ക്രമത്തിലുള്ള കരണികൾ : രണ്ടോ അല്ലെങ്കിൽ അതിൽ കൂടുതലോ കരണികളുടെ ക്രമം സമമായാൽ അത്തരത്തിലുള്ള കരണികളെ ഒരേ ക്രമത്തിലുള്ള കരണികൾ എന്നു പറയുന്നു. ഇതിനെ ഒരേ റാഡിക്കൽ ചിഹ്നം ഉള്ള കരണികൾ എന്നും വിളിക്കപ്പെടുന്നു.

ഉദാഹരണമായി, $\sqrt{x}, \ a^{\frac{3}{2}}, \ \sqrt[2]{m}$ എന്നിവ ക്രമം 2 ആയിട്ടുള്ള കരണികൾ അഥവാ (ദ്വിമാന കരണികൾ) ആകുന്നു .

$\sqrt[3]{5}, \ \sqrt[3]{(x-2)}, \ (ab)^{\frac{1}{3}}$ എന്നിവ ക്രമം 3 ആയിട്ടുള്ള കരണികൾ അല്ലെങ്കിൽ ഘന കരണികൾ ആകുന്നു.

$\sqrt{3}, \ \sqrt[3]{10}, \ \sqrt[4]{6}$ എന്നിവ $8^{\frac{2}{5}}$ എന്നിവ വ്യത്യസ്ത ക്രമം ഉള്ള കരണികൾ.

(ii) കരണിയുടെ ലഘു രൂപം : ഒരു കരണിയുടെ ലഘുരൂപം എന്നത് അതിനെ പരിമേയ കൂടാതെ അപരിമേയ ഘടകങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതുമ്പോൾ അത് താഴെക്കാണുന്ന മൂന്ന് നിബന്ധനകളെ പൂർത്തീകരിക്കണം.

(a) മൂലത്തിൽ ക്രമം ചെറുതായി ഇരിക്കുന്നു.

(b) റാഡിക്കൽ ചിഹ്നത്തിൽ ക്രമം ഭിന്നമായിരിക്കാൻ പാടില്ല.

Unit 2_REAL NUMBERS.indd 60 28-01-2023 13:06:08

(c) ക്രമം n ഉള്ള റാഡിക്കൽ ചിഹ്നത്തിനുള്ളിൽ a^n രൂപത്തിൽ ഒരു ഘടകവും ഇരിക്കാൻ പാടില്ല. ഇവിടെ a ഒരു ധനപൂർണ്ണാങ്കം.

ഉദാഹരണം 2.18

താഴെ കാണുന്നവയെ ഒരേ ക്രമം ഉള്ള കരണികളായി മാറ്റാൻ സാധിക്കുമോ?

(i) $\sqrt{3}$ (ii) $\sqrt[4]{3}$ (iii) $\sqrt[3]{3}$

നിർദ്ധാരണം

(i) $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{6}{12}} = \sqrt[12]{3^6} = \sqrt[12]{729}$

(ii) $\sqrt[4]{3} = 3^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{3}{12}} = \sqrt[12]{3^3} = \sqrt[12]{27}$

(iii) $\sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{4}{12}} = \sqrt[12]{3^4} = \sqrt[12]{81}$

അവസാനത്തെ വരിയിൽ നിന്നും മൂന്നും ഒരേ ക്രമം ഉള്ള കരണികളായി മാറ്റാൻ സാധിക്കും എന്ന് മനസ്സിലാക്കാം.

ഉദാഹരണം 2.19

1. തന്നിട്ടുള്ള കരണികളെ ലഘുരൂപത്തിൽ എഴുതുക: i) $\sqrt{8}$ ii) $\sqrt[3]{192}$

2. $\sqrt[3]{7} > \sqrt[4]{5}$ എന്നതിനെ നിരൂപിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

1. (i) $\sqrt{8} = \sqrt{4\times2} = 2\sqrt{2}$

   (ii) $\sqrt[3]{192} = \sqrt[3]{4\times4\times4\times3} = 4\sqrt[3]{3}$

2. $\sqrt[3]{7} = \sqrt[12]{7^4} = \sqrt[12]{2401}$

   $\sqrt[4]{5} = 5^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{3}{12}} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125}$

   $\sqrt[12]{2401} > \sqrt[12]{125}$

   അതിനാൽ, $\sqrt[3]{7} > \sqrt[4]{5}$.

(iii) ശുദ്ധ മറ്റും മിശ്ര കരണികൾ : ഒരു കരണിയുടെ പരിമേയ ഗുണാങ്കം 1 ആണെങ്കിൽ ആ കരണി ഒരു ശുദ്ധകരണി ആകുന്നു ഉദാഹരണമായി, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[4]{7}$, $\sqrt[5]{49}$ എന്നിവ ശുദ്ധ കരണികൾ ആകുന്നു.

ഒരു കരണിയുടെ പരിമേയ ഗുണാങ്കം ഒന്ന് അല്ലാതെയുള്ള ഒരു സംഖ്യയാണെങ്കിൽ ആ കരണി ഒരു മിശ്രകരണി ആകുന്നു ഉദാഹരണമായി, $5\sqrt{3}$, $2\sqrt[4]{5}$, $3\sqrt[4]{6}$ എന്നിവ മിശ്രകരണികൾ ആകുന്നു.

(iv) ലഘു മറ്റും കൂട്ടു കരണികൾ : ഒരേ ഒരു പദം മാത്രം വരുന്ന കരണികളെ ലഘുകരണികൾ എന്നു പറയുന്നു ഉദാഹരണമായി, $\sqrt{3}$, $2\sqrt{5}$ എന്നിവയെ ലഘു കരണികളായി എഴുതാവുന്നതാണ്. രണ്ടോ അതിൽ കൂടുതലോ കരണികൾ ഗണിതചിഹ്നങ്ങളാൽ(+ അല്ലെങ്കിൽ -) യോജിക്കപ്പെട്ടിരുന്നാൽ

Unit 2_REAL NUMBERS.indd 61 28-01-2023 13:06:11

അതിനെ കൂട്ടു കരണി എന്നു വിളിക്കാം. ഉദാഹരണമായി, $\sqrt{5}+3\sqrt{2}, \sqrt{3}-2\sqrt{7}, \sqrt{5}-7\sqrt{2}+6\sqrt{3}$ എന്നിവ കൂട്ടു കരണികളാണ്.

(v) ദ്വിപദ കരണി : രണ്ടു കരണികളുടെ സങ്കലനത്തെ (അല്ലെങ്കിൽ വ്യവകലനം) ദ്വിപദകരണി എന്നു പറയുന്നു. രണ്ടെണ്ണവും കരണികളായോ അല്ലെങ്കിൽ ഒന്ന് പരിമേയ സംഖ്യയും മറ്റൊന്ന് ഒരു കരണിയും ആയിരിക്കും.ദ്വിപദ കരണികൾക്കു ഉദാഹരണം, $\frac{1}{2}-\sqrt{19}, 5+3\sqrt{2}, \sqrt{3}-2\sqrt{7}$ ഇവയാകുന്നു.

ഉദാഹരണം 2.20 **ആരോഹണക്രമത്തിൽ എഴുതുക:** $\sqrt[3]{2},\ \sqrt[2]{4},\ \sqrt[4]{3}$

നിർദ്ധാരണം

$\sqrt[3]{2},\ \sqrt[2]{4}\ \ \sqrt[4]{3}$ എന്നിവയുടെ ക്രമങ്ങൾ 3,2,4.

3,2,4 എന്നിവയുടെ ല.സാ.ഗു = 12.

$$\sqrt[3]{2}=\left(2^{\frac{1}{3}}\right)=\left(2^{\frac{4}{12}}\right)=\sqrt[12]{2^4}=\sqrt[12]{16}\ ;\qquad \sqrt[2]{4}=\left(4^{\frac{1}{2}}\right)=\left(4^{\frac{6}{12}}\right)=\sqrt[12]{4^6}=\sqrt[12]{4096}$$

$$\sqrt[4]{3}=\left(3^{\frac{1}{4}}\right)=\left(3^{\frac{3}{12}}\right)=\sqrt[12]{3^3}=\sqrt[12]{27}$$

$\sqrt[3]{2},\ \sqrt[4]{3},\ \sqrt[2]{4}$ എന്നിവയുടെ ആരോഹണക്രമം: $\sqrt[12]{16}<\sqrt[12]{27}<\sqrt[12]{4096}$

അതായത്, $\sqrt[3]{2}\ ,\ \sqrt[4]{3}\ ,\ \sqrt[2]{4}\ .$

2.6.2 റാഡിക്കലുകളുടെ നിയമങ്ങൾ (Laws of Radicals)

m, n എന്നിവ ധനപൂർണ്ണാങ്കങ്ങളും a, b, എന്നിവ ധനപരിമേയ സംഖ്യകളും ആയാൽ താഴെ കാണുന്ന നിയമങ്ങൾ ഓർമ്മിക്കുന്നത് ഉപയോഗപ്രദമാണ്:

ക്രമ നമ്പർ	കരണി രൂപം	ഘാതാങ്ക രൂപം
1.	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a=\sqrt[n]{a^n}$	$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n=a=\left(a^n\right)^{\frac{1}{n}}$
2.	$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$	$a^{\frac{1}{n}}\times b^{\frac{1}{n}}=\left(ab\right)^{\frac{1}{n}}$
3.	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$	$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}}=a^{\frac{1}{mn}}=\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}$
4.	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	$\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$

റാഡിക്കൽ നിയമങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ഉത്തരം കാണുന്ന ചില കണക്കുകളെക്കുറിച്ച് പരിശോധിക്കാം.

ഉദാഹരണം 2.21 താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള കരണികളുടെ ലഘുരൂപം എഴുതുക. കൂടാതെ അവയുടെ ക്രമം, മൂല ആധാരം, ഗുണോത്തരം എന്നിവ കാണുക (i) $\sqrt[3]{108}$ (ii) $\sqrt[3]{\left(1024\right)^{-2}}$

Unit 2_REAL NUMBERS.indd 62 28-01-2023 13:06:13

നിർദ്ധാരണം

(i) $\sqrt[3]{108} = \sqrt[3]{27 \times 4}$

$= \sqrt[3]{3^3 \times 4}$

$= \sqrt[3]{3^3} \times \sqrt[3]{4}$ (റാഡിക്കൽ നിയമം - ii)

$= 3 \times \sqrt[3]{4}$ (റാഡിക്കൽ നിയമം- i)

2	108
2	54
3	27
3	9
3	3
	1

ക്രമം = 3; മൂല ആധാരം = 4; ഗുണോത്തരം = 3

(ii) $\sqrt[3]{(1024)^{-2}} = \left[\sqrt[3]{\left(2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2\right)^{-2}}\right]$

$= \left[\sqrt[3]{\left(2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2\right)}\right]^{-2}$ [റാഡിക്കൽ നിയമം - (i)]

$= \left[\sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{2}\right]^{-2}$ [റാഡിക്കൽ നിയമം – (ii)]

$= \left[2 \times 2 \times 2 \times \sqrt[3]{2}\right]^{-2}$ [റാഡിക്കൽ നിയമം – (i)]

$= \left[8 \times \sqrt[3]{2}\right]^{-2} = \left[\frac{1}{8}\right]^2 \times \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^2$

$= \frac{1}{64}\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

2	1024
2	512
2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

ക്രമം $= 3$; മൂല ആധാരം $= \frac{1}{4}$; ഗുണോത്തരം $= \frac{1}{64}$

(ഘാതാങ്ക രൂപം ഉപയോഗിച്ചും ഈ കണക്കുകൾക്ക് ഉത്തരം കണ്ടെത്താവുന്നതാണ്).

കുറിപ്പ്

5,6 എന്നീ സംഖ്യകൾ എടുക്കുക. $5 = \sqrt{25}$ കൂടാതെ $6 = \sqrt{36}$ ആകുന്നു.

എങ്കിൽ, $\sqrt{26}$, $\sqrt{27}$, $\sqrt{28}$, $\sqrt{29}$, $\sqrt{30}$, $\sqrt{31}$, $\sqrt{32}$, $\sqrt{33}$, $\sqrt{34}$, $\sqrt{35}$ എന്നിവ 5 നും 6 നും ഇടയിലുള്ള കരണികളാകുന്നു.

പരിഗണിക്കുക: $3\sqrt{2} = \sqrt{3^2 \times 2} = \sqrt{18}$, $2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \times 3} = \sqrt{12}$

ആയതിനാൽ, $\sqrt{17}$, $\sqrt{15}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{13}$ എന്നിവ $2\sqrt{3}$, $3\sqrt{2}$ ഇടയിലുള്ള കരണികളാകുന്നു.

2.6.3 കരണികളുടെ നാല് അടിസ്ഥാന ക്രിയകൾ (Four Basic Operations on Surds)

(i) കരണികളുടെ സങ്കലനവും വ്യവകലനവും : ഒരേ പോലുള്ള കരണികളെ താഴെ തന്നിട്ടുള്ള നിയമം ഉപയോഗിച്ച് കൂട്ടാനോ, കുറയ്ക്കാനോ സാധിക്കും:

$$a\sqrt[n]{b} \pm c\sqrt[n]{b} = (a \pm c)\sqrt[n]{b},\ b > 0.$$

Unit 2_REAL NUMBERS.indd 63 28-01-2023 13:06:16

ഉദാഹരണം 2.22 (i) $3\sqrt{7}$, $5\sqrt{7}$ ഇവ കൂട്ടുക. തുക ഒരു പരിമേയ സംഖ്യയാണോ അതോ അപരിമേയ സംഖ്യയാണോ എന്ന് ശരി നോക്കുക. (ii) $4\sqrt{5}$ - നെ $7\sqrt{5}$ - ൽ നിന്നും കുറയ്ക്കുക? ഇവയുടെ നിർദ്ധാരണം ഒരു പരിമേയസംഖ്യ അല്ലെങ്കിൽ അപരിമേയ സംഖ്യയാണോ എന്നത് ശരി നോക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

(i) $3\sqrt{7}+5\sqrt{7} = (3+5)\sqrt{7} = 8\sqrt{7}$ നിർദ്ധാരണം ഒരു അപരിമേയ സംഖ്യ.

(ii) $7\sqrt{5}-4\sqrt{5} = (7-4)\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$ നിർദ്ധാരണം ഒരു അപരിമേയ സംഖ്യ.

ഉദാഹരണം 2.23 താഴെ കാണുന്നവയെ ചുരുക്കുക:

(i) $\sqrt{63}-\sqrt{175}+\sqrt{28}$ (ii) $2\sqrt[3]{40}+3\sqrt[3]{625}-4\sqrt[3]{320}$

നിർദ്ധാരണം

(i) $\sqrt{63}-\sqrt{175}+\sqrt{28} = \sqrt{9\times7}-\sqrt{25\times7}+\sqrt{4\times7}$

$= 3\sqrt{7}-5\sqrt{7}+2\sqrt{7}$

$= \left(3\sqrt{7}+2\sqrt{7}\right)-5\sqrt{7}$

$= 5\sqrt{7}-5\sqrt{7}$

$= 0$

(ii) $2\sqrt[3]{40}+3\sqrt[3]{625}-4\sqrt[3]{320}$

$= 2\sqrt[3]{8\times5}+3\sqrt[3]{125\times5}-4\sqrt[3]{64\times5}$

$= 2\sqrt[3]{2^3\times5}+3\sqrt[3]{5^3\times5}-4\sqrt[3]{4^3\times5}$

$= 2\times2\sqrt[3]{5}+3\times5\sqrt[3]{5}-4\times4\sqrt[3]{5}$

$= 4\sqrt[3]{5}+15\sqrt[3]{5}-16\sqrt[3]{5}$

$= (4+15-16)\sqrt[3]{5} = 3\sqrt[3]{5}$

(ii) കരണികളുടെ ഗുണനവും ഹരണവും

ഒരേ പോലുള്ള കരണികളെ താഴെ തന്നിട്ടുള്ള നിയമം ഉപയോഗിച്ച് ഗുണിക്കാനോ ഹരിക്കാനോ സാധിക്കും:

കരണികളുടെ ഗുണന നിയമങ്ങൾ	കരണികളുടെ ഹരണ നിയമങ്ങൾ
(i) $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$	(iii) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
(ii) $a\sqrt[n]{b}\times c\sqrt[n]{d}=ac\sqrt[n]{bd}$ ഇവിടെ $b,d>0$	(iv) $\frac{a\sqrt[n]{b}}{c\sqrt[n]{d}}=\frac{a}{c}\sqrt[n]{\frac{b}{d}}$ ഇവിടെ $b,d>0$

Unit 2_REAL NUMBERS.indd 64 28-01-2023 13:06:19

ഉദാഹരണം 2.24

$\sqrt[3]{40}$, $\sqrt[3]{16}$ ഇവയുടെ ഗുണനഫലം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$$\sqrt[3]{40} \times \sqrt[3]{16} = \left(\sqrt[3]{2\times2\times2\times5}\right) \times \left(\sqrt[3]{2\times2\times2\times2}\right)$$
$$= \left(2\times\sqrt[3]{5}\right)\times\left(2\times\sqrt[3]{2}\right) = 4\times\left(\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{5}\right) = 4\times\sqrt[3]{2\times5}$$
$$= 4\sqrt[3]{10}$$

ഉദാഹരണം 2.25

$2\sqrt{72}\times5\sqrt{32}\times3\sqrt{50}$ - ന്റെ വിലയെ കണ്ടുപിടിച്ച് ലഘുരൂപത്തിലാക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$$2\sqrt{72}\times5\sqrt{32}\times3\sqrt{50} = \left(2\times6\sqrt{2}\right)\times\left(5\times4\sqrt{2}\right)\times\left(3\times5\sqrt{2}\right)$$
$$= 2\times5\times3\times6\times4\times5\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}$$
$$= 3600\times2\sqrt{2}$$
$$= 7200\sqrt{2}$$

ലഘൂകരിക്കുക:

$\sqrt{72} = \sqrt{36\times2} = 6\sqrt{2}$

$\sqrt{32} = \sqrt{16\times2} = 4\sqrt{2}$

$\sqrt{50} = \sqrt{25\times2} = 5\sqrt{2}$

ഉദാഹരണം 2.26

$\sqrt[9]{8}$ എന്ന കരണിയെ $\sqrt[6]{6}$ കൊണ്ട് ഹരിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$$\frac{\sqrt[9]{8}}{\sqrt[6]{6}} = \frac{8^{\frac{1}{9}}}{6^{\frac{1}{6}}}$$ (6,9 ന്റെ ല.സാ.ഗു 18 ആകുന്നു)

$$= \frac{8^{\frac{2}{18}}}{6^{\frac{3}{18}}}$$ (എങ്ങനെ?)

$$= \left(\frac{8^2}{6^3}\right)^{\frac{1}{18}}$$ (എങ്ങനെ?) $= \left(\frac{8\times8}{6\times6\times6}\right)^{\frac{1}{18}}$

$$= \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{18}} = \left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^{\frac{1}{18}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{\frac{2}{3}}$$

പ്രവൃത്തി - 1

താഴെ കാണുന്ന ഫലങ്ങൾ കൗതുകം ഉണർത്തുന്നുണ്ടോ ?

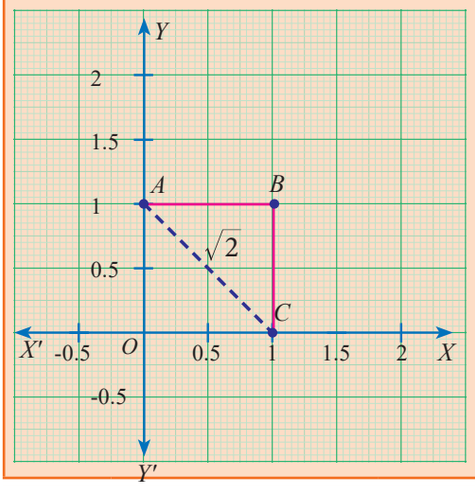
$\sqrt{4\frac{4}{15}} = 4\sqrt{\frac{4}{15}}$ കൂടാതെ $\sqrt{5\frac{5}{24}} = 5\sqrt{\frac{5}{24}}$

ശരിയാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക. ഇതേ രൂപത്തിൽ വീണ്ടും 4 പുതിയ കരണികളെ കാണുക?

Unit 2_REAL NUMBERS.indd 65 28-01-2023 13:06:20

പ്രവൃത്തി - 2

ഒരു ഗ്രാഫ് എടുത്ത് അതിൽ O, A, B, C എന്നിവയെ താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന രീതിയിൽ കുറിക്കുക.



സമചതുരം $OABC$, യിൽ

$$OA = AB = BC = OC = 1 \text{യൂണിറ്റ്}$$

സമകോണ ΔOAC

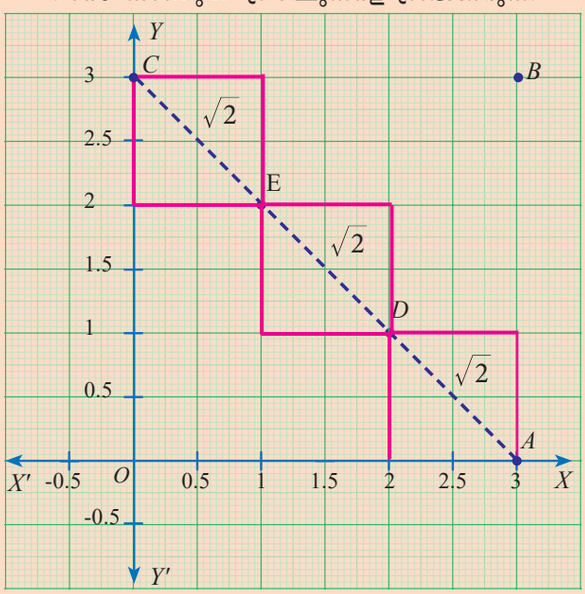
$$AC = \sqrt{1^2 + 1^2}$$

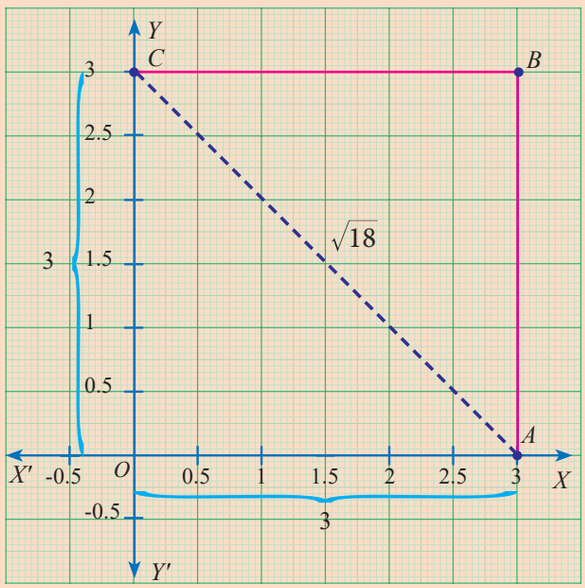
$$= \sqrt{2} \text{ യൂണിറ്റ് [പൈതഗോറസ് സിദ്ധാന്തം അനുസരിച്ച്]}$$

വികർണ്ണത്തിന്റെ നീളം

$AC = \sqrt{2}$, ഒരു കരണിയാണ്.

താഴെ കാണുന്ന ഗ്രാഫുകളെ ശ്രദ്ധിക്കുക:





വികർണ്ണം AC യുടെ നീളത്തെ വ്യത്യസ്ത വഴികളിൽ കാണാം :

$$AC = AD + DE + EC$$

(ഒരു മാത്ര അളവുള്ള സമചതുരങ്ങളുടെ വികർണ്ണങ്ങൾ)

$$= \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2}$$

$AC = 3\sqrt{2}$ മാത്രകൾ

$$AC = \sqrt{OA^2 + OC^2} = \sqrt{3^2 + 3^2}$$

$$= \sqrt{9 + 9}$$

$AC = \sqrt{18}$ മാത്രകൾ

ഇത് സമമാണോ? ചർച്ച ചെയ്യുക. ഈ പ്രവൃത്തിയെ വ്യത്യസ്ത അളവുകൾ ഉള്ള വ്യത്യസ്ത സമചതുരങ്ങളെ എടുത്ത് ശരി നോക്കാൻ സാധിക്കുമോ?

Unit 2_REAL NUMBERS.indd 66 28-01-2023 13:06:22

അഭ്യാസം 2.6

1. കരണികളുടെ സങ്കലന, വ്യവകലന നിയമങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ചുരുക്കുക:

(i) $5\sqrt{3}+18\sqrt{3}-2\sqrt{3}$ (ii) $4\sqrt[3]{5}+2\sqrt[3]{5}-3\sqrt[3]{5}$

(iii) $3\sqrt{75}+5\sqrt{48}-\sqrt{243}$ (iv) $5\sqrt[3]{40}+2\sqrt[3]{625}-3\sqrt[3]{320}$

2. കരണികളുടെ ഗുണന,ഹരണ നിയമങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ചുരുക്കുക:

(i) $\sqrt{3}\times\sqrt{5}\times\sqrt{2}$ (ii) $\sqrt{35}\div\sqrt{7}$ (iii) $\sqrt[3]{27}\times\sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{125}$

(iv) $\left(7\sqrt{a}-5\sqrt{b}\right)\left(7\sqrt{a}+5\sqrt{b}\right)$ (v) $\left[\sqrt{\frac{225}{729}}-\sqrt{\frac{25}{144}}\right]\div\sqrt{\frac{16}{81}}$

3. $\sqrt{2}=1.414,\ \sqrt{3}=1.732,\sqrt{5}=2.236,\sqrt{10}=3.162$, എങ്കിൽ താഴെ കാണുന്നവയുടെ മൂല്യങ്ങളെ മൂന്ന് ദശാംശ സ്ഥാനത്തിന് ശരിയായി എഴുതുക.

(i) $\sqrt{40}-\sqrt{20}$ (ii) $\sqrt{300}+\sqrt{90}-\sqrt{8}$

4. കരണികളെ അവരോഹണ ക്രമത്തിൽ എഴുതുക : (i) $\sqrt[3]{5},\sqrt[9]{4},\sqrt[6]{3}$ (ii) $\sqrt[2]{\sqrt[3]{5}},\sqrt[3]{\sqrt[4]{7}},\sqrt{\sqrt{3}}$

5. താഴെത്തന്നിട്ടുള്ള സാധ്യതകളിൽ നിങ്ങൾക്കൊരു ശുദ്ധ കരണിയെ രൂപപ്പെടുത്താൻ സാധിക്കുമോ? ഓരോ ഉത്തരവും ഉദാഹരണ സഹിതം വിവരിക്കുക.

(i) രണ്ടു കരണികളുടെ സങ്കലനം (ii) രണ്ടു കരണികളുടെ വ്യത്യാസം

(iii) രണ്ടു കരണികളുടെ ഗുണനം (iv) രണ്ടു കരണികളുടെ ഹരണം

6. താഴെത്തന്നിട്ടുള്ള സാധ്യതകളിൽ നിങ്ങൾക്കൊരു പരിമേയ സംഖ്യയെ രൂപപ്പെടുത്താൻ സാധിക്കുമോ ഓരോന്നും ഉദാഹരണ സഹിതം വ്യക്തമാക്കുക.

(i) രണ്ടു കരണികളുടെ തുക (ii) രണ്ടു കരണികളുടെ വ്യത്യാസം

(iii) രണ്ടു കരണികളുടെ ഗുണനം (iv) രണ്ടു കരണികളുടെ ഹരണം

2.7 കരണികളെ പരിമേയമാക്കൽ (Rationalisation of Surds)

തന്നിട്ടുള്ള ഒരു പദത്തെ പരിമേയ സംഖ്യയാക്കി മാറ്റുന്നതിന് അതിനെ ഏതുപദത്താൽ ഗുണിക്കുകയോ, ഹരിക്കുകയോ ചെയ്യുന്നോ ആ പദം തന്നിട്ടുള്ള പദത്തിന്റെ പരിമേയമാക്കുന്ന ഘടകം എന്നു പറയുന്നു.

ഉദാഹരണം :

(i) $\sqrt{3}$ ന്റെ പരിയേ ഘടകങ്ങം $\sqrt{3}$ (എന്തെന്നാൽ $\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3$ ഒരു പരിമേയ സംഖ്യ).

(ii) $\sqrt[7]{5^4}$ ന്റെ പരിമേയ ഘടകം $\sqrt[7]{5^3}$ (ഗുണനഫലം $=\sqrt[7]{5^7}=5$, ഒരു പരിമേയസംഖ്യ).

ചിന്തിക്കുക

1. മുകളിൽ കൊടുത്ത ഉദാഹരണം (i) ൽ $\sqrt{12}$ എന്നത് ഒരു പരിമേയമാക്കുന്ന ഘടകമാണോ? $\sqrt{3}$ ന്റെ പരിമേയഘടകമായി വേറെ ഏതെങ്കിലും സംഖ്യയെ ചിന്തിക്കാൻ സാധിക്കുമോ?
2. ഉദാഹരണം (ii) -ൽ $\sqrt[7]{5^3}$ ന്റെ പരിമേയഘടകമായി വേറെ ഏതെങ്കിലും സംഖ്യയെ ചിന്തിക്കാൻ സാധിക്കുമോ?
3. കരണികൾ ഉൾകൊണ്ട ഒരു വിശദീകരണത്തിൽ ഒന്നിനു മുകളിൽ പരിമേയമാക്കുന്ന ഘടകങ്ങൾ ഉള്ളപ്പോൾ അവയിൽ ഏറ്റവും ചെറിയതിനെ പരിമേയമാക്കുന്ന ഘടകമായി എടുത്താൽ നമുക്ക് എന്തെങ്കിലും ഉപയോഗമുണ്ടോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക?

Unit 2_REAL NUMBERS.indd 67 28-01-2023 13:06:24

പുരോഗതി പരിശോധന

ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഓരോന്നിനും പരിമേയ ഘടകങ്ങൾ കണ്ടെത്തി അവ ശരിയാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക:

(i) $\sqrt{18}$ (ii) $5\sqrt{12}$ (iii) $\sqrt[3]{49}$ (iv) $\frac{1}{\sqrt{8}}$

2.7.1 സമാന്തര കരണികൾ (Conjugate Surds)

$3+\sqrt{2}$ എന്നതിന്റെ പരിമേയമാക്കുന്ന ഘടകങ്ങളെ നിങ്ങളാൽ ഊഹിക്കാൻ സാധിക്കുമോ? ഈ കരണി ഒരു പരിമേയ സംഖ്യയും. ഒരു അപരിമേയ സംഖ്യയും ഉൾക്കൊണ്ടതാണ്. ഈ സാധ്യതകളിൽ പരിമേയമാക്കുന്ന ഘടകം എന്നത് തികച്ചും കൗതുകമുള്ളതാണ്.

$3+\sqrt{2}$ ന്റെ പരിമേയമാക്കുന്ന ഘടകം $3-\sqrt{2}$ ഇതിനെ എളുപ്പത്തിൽ ശരി നോക്കാവുന്നതാണ്.

$$\begin{aligned}\left(3+\sqrt{2}\right)\left(3-\sqrt{2}\right) &= 3^2-\left(\sqrt{2}\right)^2\\ &= 9-2\\ &= 7, \text{ഒരു പരിമേയ സംഖ്യ.}\end{aligned}$$

$a+\sqrt{b}$ -യുടെ പരിമേയമാക്കുന്ന ഘടകം ഏതാണ്, (ഇവിടെ a,b എന്നിവ പരിമേയസംഖ്യകൾ)? $a-\sqrt{b}$ ആണോ? ശരിനോക്കുക. $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ -യുടെ പരിമേയമാക്കുന്ന ഘടകം ഏതാണ്, (ഇവിടെ a,b എന്നിവ പരിമേയസംഖ്യകൾ)? $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ ആണോ? അല്ലെങ്കിൽ $-\sqrt{a}+\sqrt{b}$ ആണോ? കണ്ടുപിടിക്കുക.

$a+\sqrt{b}$ കൂടാതെ $a-\sqrt{b}$ എന്ന രൂപത്തിൽ ഉള്ള കരണികളെ സമാന്തര കരണികൾ എന്ന് വിളിക്കപ്പെടുന്നു. $\sqrt{b}+a$ യുടെ സമാന്തര കരണി ഏത് ? $-\sqrt{b}+a$ എന്നത് ശരിയാണോ? കരണിക്കു മുൻപിലുള്ള ചിഹ്നത്തെ മാറ്റുന്നതു മൂലം ആ സംഖ്യയുടെ സമാന്തര കരണിയെ അറിയാൻ സാധിക്കുന്നു!

ഉദാഹരണം 2.27 ഛേദത്തെ പരിമേയമാക്കുക (i) $\frac{7}{\sqrt{14}}$ (ii) $\frac{5+\sqrt{3}}{5-\sqrt{3}}$

നിർദ്ധാരണം

(i) പരിമേയമാക്കുന്ന ഘടകമായ $\sqrt{14}$ കൊണ്ട് ഛേദത്തെയും, അംശത്തെയും ഗുണിക്കുക.

$$\frac{7}{\sqrt{14}}=\frac{7}{\sqrt{14}}\times\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{14}}=\frac{7\sqrt{14}}{14}=\frac{\sqrt{14}}{2}$$

(ii) $$\begin{aligned}\frac{5+\sqrt{3}}{5-\sqrt{3}} &= \frac{\left(5+\sqrt{3}\right)}{\left(5-\sqrt{3}\right)}\times\frac{\left(5+\sqrt{3}\right)}{\left(5+\sqrt{3}\right)}=\frac{\left(5+\sqrt{3}\right)^2}{5^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}\\ &= \frac{5^2+\left(\sqrt{3}\right)^2+2\times5\times\sqrt{3}}{25-3}\\ &= \frac{25+3+10\sqrt{3}}{22}=\frac{28+10\sqrt{3}}{22}=\frac{2\times[14+5\sqrt{3}]}{22}\\ &= \frac{14+5\sqrt{3}}{11}\end{aligned}$$

Unit 2_REAL NUMBERS.indd 68 28-01-2023 13:06:27

അഭ്യാസം 2.7

1. ഛേദത്തെ പരിമേയമാക്കുക

(i) $\frac{1}{\sqrt{50}}$ (ii) $\frac{5}{3\sqrt{5}}$ (iii) $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{18}}$ (iv) $\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$

2. ഛേദത്തെ പരിമേയമാക്കി ലഘൂകരിക്കുക

(i) $\frac{\sqrt{48}+\sqrt{32}}{\sqrt{27}-\sqrt{18}}$ (ii) $\frac{5\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

(iii) $\frac{2\sqrt{6}-\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-2\sqrt{6}}$ (iv) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}+2}-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}-2}$

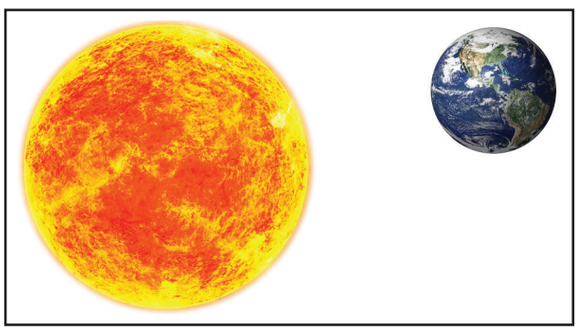
3. $\frac{\sqrt{7}-2}{\sqrt{7}+2}=a\sqrt{7}+b$ ആയാൽ, a,b എന്നിവയുടെ വില കാണുക?

4. $x=\sqrt{5}+2$, ആയാൽ $x^2+\frac{1}{x^2}$ ന്റെ വില കാണുക

5. $\sqrt{2}=1.414$, ആയാൽ $\frac{8-5\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$ ന്റെ വിലയെ മൂന്നു ദശാംശസ്ഥാനത്തിനു ശരിയായി എഴുതുക?

2.8 ശാസ്ത്രീയാങ്കന രീതി (Scientific Notation)

സൂര്യന്റെ വ്യാസം 13,92,000 കി.മീ കൂടാതെ ഭൂമിയുടെ വ്യാസം 12,740 കി.മീ എന്നിവയെ താരതമ്യപ്പെടുത്തുന്നത് വളരെ പ്രയാസമായി തോന്നും. എന്നാൽ 13,92,000 എന്നതിനെ 1.392×10^6 എന്നും 12,740 എന്നതിനെ 1.274×10^4, എന്നും വളരെ ലളിതമായി എഴുതാവുന്നതാണ്. ഈ രൂപത്തിൽ എഴുതുന്നതിനെയാണ് ശാസ്ത്രീയാങ്കന രീതി എന്നു പറയുന്നത്.



$$\frac{1.392\cdot10^6}{1.274\cdot10^4}\simeq\frac{14}{13}\cdot10^2\simeq108.$$

സൂര്യന് അഭിമുഖമായി 108 ഭൂമിയെ വരിയായി അടുക്കി വയ്ക്കാം എന്നത് ഇപ്പോൾ നിങ്ങൾക്ക് ചിന്തിക്കാം.

ശാസ്ത്രീയാങ്കനരീതി എന്നത് വളരെ വലുതോ, അല്ലെങ്കിൽ വളരെ ചെറുതോ ആയ സംഖ്യകളെ സൗകര്യപ്രദമായ രീതിയിൽ, ദശാംശ രൂപത്തിൽ എഴുതുന്നതാണ്.

2.8.1 ഒരു സംഖ്യയെ ശാസ്ത്രീയാങ്കന രീതിയിൽ രേഖപ്പെടുത്തൽ (Writing a Number in Scientific Notation)

ഒരു സംഖ്യയെ ശാസ്ത്രീയാങ്കന രീതിയിലേക്ക് മാറ്റുന്നതിന് താഴെ കാണുന്ന വഴികൾ വളരെ ഉപയോഗപ്രദമാണ്:

(i) ദശാംശ ബിന്ദുവിന് ഇടതു വശത്ത് ഒരേ ഒരു പൂജ്യമല്ലാത്ത സംഖ്യ വരത്തക്ക വിധം ദശാംശ ബിന്ദുവിനെ നീക്കുക.

Unit 2_REAL NUMBERS.indd 69 28-01-2023 13:06:28

(ii) പഴയ ദശാംശബിന്ദുവിനും, പുതിയ ദശാംശ ബിന്ദുവിനും ഇടയിലുള്ള അക്കങ്ങളെ എണ്ണുക ഇതിനെ 'n' എന്ന് എടുക്കുക. ഇതിനെ10 ന്റെ ഘാതമായി (10^n) എന്ന് എഴുതാം.

(iii) ദശാംശത്തെ ഇടത്തോട്ടു മാറ്റുകയാണെങ്കിൽ ഘാതാങ്കം n ധനമായിരിക്കും. ദശാംശത്തെ വലത്തോട്ടു മാറ്റുകയാണെങ്കിൽ ഘാതാങ്കം n ഋണമായിരിക്കും.

- N എന്ന സംഖ്യയെ $N = a \times 10^n$ എന്ന രൂപത്തിൽ എഴുതാം. ഇവിടെ, $1 \leq a < 10$, 'n' ഒരു പൂർണ്ണാങ്കം. ഈ രീതിയിൽ എഴുതുന്നതിനെ ശാസ്ത്രീയാങ്കന രീതി എന്ന് പറയുന്നു.

ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള പട്ടികയിൽ ഉള്ള ദശാധാര സംഖ്യകൾ അടങ്ങിയ ഉദാഹരണങ്ങൾ മുകളിൽ പറഞ്ഞ വിവരണങ്ങളെ പൂർത്തീകരിക്കുന്നതാകുന്നു:

ദശാംശ രൂപം	ശാസ്ത്രാങ്കന രൂപം	ദശാംശ രൂപം	ശാസ്ത്രാങ്കന രൂപം
100	1×10^2	0.01	1×10^{-2}
1,000	1×10^3	0.001	1×10^{-3}
10,000	1×10^4	0.0001	1×10^{-4}
1,00,000	1×10^5	0.00001	1×10^{-5}
10,00,000	1×10^6	0.000001	1×10^{-6}
1,00,00,000	1×10^7	0.0000001	1×10^{-7}

ഇനിയും കൂടുതൽ ഉദാഹരണങ്ങൾ നമുക്ക് പരിശോധിക്കാം.

ഉദാഹരണം 2.28 ശാസ്ത്രീയാങ്കന രൂപത്തിൽ എഴുതുക (i) 9768854 (ii) 0.04567891 (iii) 72006865.48

നിർദ്ധാരണം

(i) 9 7 6 8 8 5 4 . 0 $= 9.768854 \times 10^6$

6 5 4 3 2 1

ദശാംശ ബിന്ദു ഇടത്തോട്ട് 6 സ്ഥാനം മാറുന്നു. അതു കൊണ്ട് $n = 6$ ആകുന്നു.

(ii) 0 . 0 4 5 6 7 8 9 1 $= 4.567891 \times 10^{-2}$

1 2

ദശാംശ ബിന്ദു വലത്തോട്ട് 7 സ്ഥാനം മാറുന്നു. അതുകൊണ്ട് $n = -2$ ആകുന്നു.

(iii) 7 2 0 0 6 8 6 5 . 4 8 $= 7.200686548 \times 10^7$

7 6 5 4 3 2 1

ദശാംശബിന്ദു ഇടത്തോട്ട് 7 സ്ഥാനം മാറുന്നു. അതുകൊണ്ട് $n = 7$.

2.8.2 ശാസ്ത്രീയാങ്കനത്തെ ദശാംശ രൂപത്തിൽ രേഖപ്പെടുത്തൽ (Converting Scientific Notation to Decimal Form)

ശാസ്ത്രീയാങ്കന രൂപത്തിലുള്ള ഒരു സംഖ്യയെ ദശാംശരൂപത്തിൽ മാറ്റുന്നതിന് താഴെ പറയുന്ന ലഘുവായ രീതികൾ ഉപയോഗിക്കാവുന്നതാണ്.

(i) ദശാംശ സംഖ്യ എഴുതുക.

Unit 2_REAL NUMBERS.indd 70 28-01-2023 13:06:29

(ii) പത്തിന്റെ ഘാതത്തിൽ സൂചിപ്പിച്ചിട്ടുള്ള അളവിൽ ദശാംശ ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനം നീക്കുക. ധനമാണെങ്കിൽ വലത്തോട്ടും, ഋണമാണെങ്കിൽ ഇടത്തോട്ടും നീക്കുക. ആവശ്യമാണെങ്കിൽ പൂജ്യം ചേർക്കുക.

(iii) സംഖ്യയെ ദശാംശ രൂപത്തിൽ വീണ്ടും എഴുതുക.

ഉദാഹരണം 2.29 ത.ഴെ തന്നിട്ടുള്ള സംഖ്യകളെ ദശാംശരൂപത്തിലാക്കുക:

(i) 6.34×10^{4} (ii) 2.00367×10^{-5}

നിർദ്ധാരണം

(i) 6.34×10^{4}

$\Rightarrow \quad 6 \;.\; 3 \quad 4 \quad 0 \quad 0 \quad = 63400$

1 2 3 4

(ii) 2.00367×10^{-5}

0 0 0 0 0 2 . 0 0 3 6 7

5 4 3 2 1

$= 0.0000200367$

2.8.3 ശാസ്ത്രീയാങ്കന രൂപത്തിലുള്ള സംഖ്യകളുടെ ഗണിതക്രിയകൾ (Arithmetic of Numbers in Scientific Notation)

(i) ശാസ്ത്രീയാങ്കന രൂപത്തിലുള്ള സംഖ്യകളുടെ ഘാതങ്ങൾ തുല്യമായിരുന്നാൽ അവയെ കൂട്ടുന്നതി നും, കുറയ്ക്കുന്നതിനും വളരെ എളുപ്പത്തിൽ സാധിക്കും.

ഉദാഹരണം 2.30 ഭൂമിയുടെ ദ്രവ്യമാനം 5.97×10^{24} കി.ഗ്രാം ചന്ദ്രന്റെ ദ്രവ്യമാനം 0.073×10^{24} kg. ആണെങ്കിൽ അവയുടെ ആകെ ദ്രവ്യമാനം കാണുക?

നിർദ്ധാരണം

ആകെ ദ്രവ്യമാനം $= 5.97\times10^{24}\text{ kg} + 0.073\times10^{24}\text{ kg}$

$= (5.97 + 0.073)\times10^{24}\text{ kg}$

$= 6.043\times10^{24}\text{ kg}$

(ii) റാഡിക്കൽ നിയമങ്ങളെ ശരിയായ രീതിയിൽ ഉപയോഗിച്ച് ശാസ്ത്രീയാങ്കന രൂപത്തിലുള്ള സംഖ്യകളുടെ ഗുണന, ഹരണ ഫലങ്ങൾ എളുപ്പത്തിൽ കണ്ടെത്താൻ സാധിക്കും.

ഉദാഹരണം 2.31 താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയുടെ ശാസ്ത്രീയാങ്കന രൂപം എഴുതുക :

(i) $\left(50000000\right)^{4}$ (ii) $\left(0.00000005\right)^{3}$

(iii) $\left(300000\right)^{3}\times\left(2000\right)^{4}$ (iv) $\left(4000000\right)^{3}\div\left(0.00002\right)^{4}$

Unit 2_REAL NUMBERS.indd 71 28-01-2023 13:06:30

നിർദ്ധാരണം

(i) $\left(50000000\right)^4 = \left(5.0\times10^7\right)^4$

$= \left(5.0\right)^4 \times \left(10^7\right)^4$

$= 625.0\times10^{28}$

$= 6.25\times10^2\times10^{28}$

$= 6.25\times10^{30}$

(ii) $\left(0.00000005\right)^3 = \left(5.0\times10^{-8}\right)^3$

$= \left(5.0\right)^3 \times \left(10^{-8}\right)^3$

$= \left(125.0\right)\times\left(10\right)^{-24}$

$= 1.25\times10^2\times10^{-24}$

$= 1.25\times10^{-22}$

(iii) $\left(300000\right)^3\times\left(2000\right)^4$

$= \left(3.0\times10^5\right)^3\times\left(2.0\times10^3\right)^4$

$= \left(3.0\right)^3\times\left(10^5\right)^3\times\left(2.0\right)^4\times\left(10^3\right)^4$

$= \left(27.0\right)\times\left(10^{15}\right)\times\left(16.0\right)\times\left(10^{12}\right)$

$= \left(2.7\times10^1\right)\times\left(10^{15}\right)\times\left(1.6\times10^1\right)\times\left(10^{12}\right)$

$= 2.7\times1.6\times10^1\times10^{15}\times10^1\times10^{12}$

$= 4.32\times10^{1+15+1+12} \quad = 4.32\times10^{29}$

(iv) $\left(4000000\right)^3 \div \left(0.00002\right)^4$

$= \left(4.0\times10^6\right)^3 \div \left(2.0\times10^{-5}\right)^4$

$= \left(4.0\right)^3\times\left(10^6\right)^3 \div \left(2.0\right)^4\times\left(10^{-5}\right)^4$

$= \dfrac{64.0\times10^{18}}{16.0\times10^{-20}}$

$= 4\times10^{18}\times10^{+20}$

$= 4.0\times10^{38}$

ചിന്തിക്കുക

1. 2. 83104 എന്ന സംഖ്യയെ രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലമായി ശാസ്ത്രീയാങ്കന രൂപത്തിൽ എഴുതുക.
2. 2. 83104 എന്ന സംഖ്യ ഹരണഫലമായി വരത്തക്കവിധത്തിലുള്ള രണ്ടു സംഖ്യകളെ ശാസ്ത്രീയാങ്കന രൂപത്തിൽ എഴുതുക.

അഭ്യാസം 2.8

1. താഴെ കാണുന്ന സംഖ്യകളെ ശാസ്ത്രീയാങ്കന രൂപത്തിൽ എഴുതുക:
   (i) 5694300000000 (ii) 2000.57 (iii) 0.0000006000 (iv) 0.0009000002
2. താഴെ കാണുന്ന സംഖ്യകളെ ദശാംശ രൂപത്തിൽ എഴുതുക:
   (i) 3.459×10^6 (ii) 5.678×10^4 (iii) 1.00005×10^{-5} (iv) 2.530009×10^{-7}
3. ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ളവയെ ശാസ്ത്രീയാങ്കന രൂപത്തിൽ എഴുതുക:
   (i) $\left(300000\right)^2\times\left(20000\right)^4$ (ii) $\left(0.000001\right)^{11}\div\left(0.005\right)^3$
   (iii) $\left\{\left(0.00003\right)^6\times\left(0.00005\right)^4\right\}\div\left\{\left(0.009\right)^3\times\left(0.05\right)^2\right\}$
4. താഴെ കാണുന്ന വിവരങ്ങളെ ശാസ്ത്രീയാങ്കന രൂപത്തിൽ എഴുതുക:
   (i) ലോക ജനസംഖ്യ ഏകദേശം 7000,000,000.
   (ii) ഒരു പ്രകാശവർഷം എന്നത് 9460528400000000 km ദൂരത്തെ കുറിക്കുന്നു.

Unit 2_REAL NUMBERS.indd 72 28-01-2023 13:06:34

(iii) ഒരു ഇലക്ട്രോണിന്റെ ദ്രവ്യമാനം

0.000 000 000 000 000 000 000 000 000 00091093822 kg.

5. ചുരുക്കുക: (i) $(2.75 \times 10^7) + (1.23 \times 10^8)$ (ii) $(1.598 \times 10^{17}) - (4.58 \times 10^{15})$

(iii) $(1.02 \times 10^{10}) \times (1.20 \times 10^{-3})$ (iv) $(8.41 \times 10^4) \div (4.3 \times 10^5)$



പ്രവർത്തി - 3

സൂര്യനിൽ നിന്നും ഗ്രഹങ്ങളിലേയ്ക്കുള്ള ശരാശരി ദൂരം ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള പട്ടികയിൽ രേഖപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു.വിട്ടുപോയിട്ടുള്ളവ യോജിച്ച രീതിയിൽ എഴുതുക കൂടാതെ ഗ്രഹങ്ങൾക്കും, സൂര്യനും ഇടയിലുള്ള ദൂരങ്ങളെ സൂര്യന്റെ അരികിൽ നിന്നും ക്രമപ്പെടുത്തി എഴുതുക .

ഗ്രഹം	ദശാംശരൂപം (in Km)	ശാസ്ത്രീയാങ്കന രൂപം (in Km)
വ്യാഴം		7.78×10^8
ബുധൻ	58000000	
ചൊവ്വ		2.28×10^8
യുറാനസ്	2870000000	
ശുക്രൻ	108000000	
നെപ്ട്യൂൺ	4500000000	
ഭൂമി		1.5×10^8
ശനി		1.43×10^8



അഭ്യാസം 2.9



ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുത്തെഴുതുക

1. n ഒരു നിസ്സർഗ്ഗസംഖ്യയാണെങ്കിൽ $\sqrt{n}$ =

(a) എപ്പോഴും ഒരു നിസ്സർഗ്ഗസംഖ്യ (b) എപ്പോഴും ഒരു അപരിമേയ സംഖ്യ

(c) എപ്പോഴും ഒരു പരിമേയസംഖ്യ (d) പരിമേയമോ അപരിമേയമോ ആയിരിക്കും.

2. താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയിൽ ശരിയല്ലാത്തത് ഏത്?

(a) ഓരോ പരിമേയസംഖ്യയും ഒരു വാസ്തവിക സംഖ്യയാണ്

(b) ഓരോ പൂർണ്ണാങ്കവും ഒരു പരിമേയ സംഖ്യയാണ്

(c) ഓരോ വാസ്തവികസംഖ്യയും ഒരു അപരിമേയ സംഖ്യയാണ്

(d) ഓരോ നിസ്സർഗ്ഗസംഖ്യയും ഒരു പൂർണ്ണസംഖ്യയാണ്

3. താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവയിൽ രണ്ട് അപരിമേയ സംഖ്യകളുടെ തുകയെ സംബന്ധിച്ചിടത്തോളം ഏതാണ് ശരി?

(a) എപ്പോഴും അപരിമേയ സംഖ്യയായിരിക്കും

(b) പരിമേയ സംഖ്യയോ അപരിമേയ സംഖ്യയോ ആയിരിക്കും

(c) എപ്പോഴും പരിമേയ സംഖ്യയായിരിക്കും

(d) എപ്പോഴും പൂർണ്ണാങ്കമായിരിക്കും

Unit 2_REAL NUMBERS.indd 73 28-01-2023 13:06:34

4. താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയിൽ ഏതിനാണ് അവസാനിക്കുന്ന ദശാംശഭിന്നമുള്ളത്?

(a) $\frac{5}{64}$ (b) $\frac{8}{9}$ (c) $\frac{14}{15}$ (d) $\frac{1}{12}$

5. താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയിൽ അപരിമേയ സംഖ്യ ഏതാണ്?

(a) $\sqrt{25}$ (b) $\sqrt{\frac{9}{4}}$ (c) $\frac{7}{11}$ (d) π

6. 2 നും 2.5 നും ഇടയിലുള്ള ഒരു അപരിമേയ സംഖ്യ ഏതാണ്?

(a) $\sqrt{11}$ (b) $\sqrt{5}$ (c) $\sqrt{2.5}$ (d) $\sqrt{8}$

7. ദശാംശഭാഗം ദശാംശബിന്ദു കഴിഞ്ഞ് ഒരു സ്ഥാനത്തിൽ അവസാനിക്കത്തക്കവിധം $\frac{1}{3}$ നാൽ ഗുണിക്കപ്പെടേണ്ട ഏറ്റവും ചെറിയ പരിമേയ സംഖ്യ ഇവയിൽ ഏതാണ്?

(a) $\frac{1}{10}$ (b) $\frac{3}{10}$ (c) 3 (d) 30

8. $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ ആണെങ്കിൽ $\frac{5}{7}$ ന്റെ മൂല്യം

(a) $0.\overline{142857}$ (b) $0.\overline{714285}$ (c) $0.\overline{571428}$ (d) 0.714285

9. താഴെ കൊടുത്തിരിട്ടുള്ളവയിൽ ഗ്രൂപ്പിൽപ്പെടാത്തത് ഏത്

(a) $\sqrt{32} \times \sqrt{2}$ (b) $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$ (c) $\sqrt{72} \times \sqrt{8}$ (d) $\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{18}}$

10. $0.\overline{34} + 0.3\overline{4} =$

(a) $0.6\overline{87}$ (b) $0.\overline{68}$ (c) $0.6\overline{8}$ (d) $0.68\overline{7}$

11. താഴെ കാണുന്ന പ്രസ്താവനകളിൽ തെറ്റ് ഏത്?

(1) 25 ന്റെ വർഗ്ഗമൂലം 5 or -5 (3) $\sqrt{25} = 5$

(2) $-\sqrt{25} = -5$ (4) $\sqrt{25} = \pm 5$

12. താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയിൽ പരിമേയ സംഖ്യ അല്ലാത്തത്?

(1) $\sqrt{\frac{8}{18}}$ (2) $\frac{7}{3}$ (3) $\sqrt{0.01}$ (4) $\sqrt{13}$

13. $\sqrt{27} + \sqrt{12} =$

(1) $\sqrt{39}$ (2) $5\sqrt{6}$ (3) $5\sqrt{3}$ (4) $3\sqrt{5}$

14. $\sqrt{80} = k\sqrt{5}$, എങ്കിൽ $k =$

(1) 2 (2) 4 (3) 8 (4) 16

15. $4\sqrt{7} \times 2\sqrt{3} =$

(1) $6\sqrt{10}$ (2) $8\sqrt{21}$ (3) $8\sqrt{10}$ (4) $6\sqrt{21}$

16. $\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$ ഛേദത്തെ പരിമേയ സംഖ്യയായി മാറ്റിയ ശേഷം ലഘു രൂപത്തിൽ എഴുതുമ്പോൾ കിട്ടുന്നത

(1) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (4) $\frac{2}{3}$

Unit 2_REAL NUMBERS.indd 74 28-01-2023 13:06:40

17. $\left(2\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2$ ന്റെ ലഘു രൂപം

(1) $4\sqrt{5}+2\sqrt{2}$ (2) $22-4\sqrt{10}$ (3) $8-4\sqrt{10}$ (4) $2\sqrt{10}-2$

18. $\left(0.000729\right)^{\frac{-3}{4}} \times \left(0.09\right)^{\frac{-3}{4}}$ = _____

(1) $\frac{10^3}{3^3}$ (2) $\frac{10^5}{3^5}$ (3) $\frac{10^2}{3^2}$ (4) $\frac{10^6}{3^6}$

19. If $\sqrt{9^x} = \sqrt[3]{9^2}$, എങ്കിൽ x = _____

(1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{4}{3}$ (3) $\frac{1}{3}$ (4) $\frac{5}{3}$

20. ഒരു ദീർഘചതുരാകൃതിയിലുള്ള സ്ഥലത്തിന്റെ നീളം, വീതി എന്നിവ യഥാക്രമം 5×10^5 മീറ്റർ , 4×10^4 മീറ്റർ ആയാൽ അതിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം _____.

(1) 9×101 m2 (2) 9×109 m2 (3) 2×1010 m2 (4) 20×1020 m2

ഓർമ്മിക്കേണ്ട വസ്തുക്കൾ

- $\frac{p}{q}$, $q\neq0$ ന്റെ ദശാംശഭിന്നം അവസാനിക്കുന്നു എങ്കിൽ ആ ദശാംശ സംഖ്യയെ അവസാനിക്കുന്ന ദശാംശ സംഖ്യ എന്ന് പറയുന്നു.
- $\frac{p}{q}$, $q\neq0$ ന്റെ ദശാംശഭിന്നത്തിൽ ശിഷ്ടം പൂജ്യമല്ലെങ്കിൽ ആവർത്തിക്കുന്ന ഒരു കൂട്ടം അക്കങ്ങൾ ഹരണഫലത്തിൽ വരുന്നു. ഈ സാഹചര്യത്തിൽ ദശാംശഭിന്നം അവസാനിക്കാത്തതും ആവർത്തിക്കുന്നതും ആകുന്നു.
- $\frac{p}{q}$, $q\neq 0$ എന്ന പരിമേയ സംഖ്യയെ $\frac{p}{2^m\times5^n}$ ഇവിടെ $p\in\mathbb{Z}$ കൂടാതെ $m,n\in\mathbb{W}$, എന്ന രൂപത്തിൽ ആവിഷ്കരിക്കാമെങ്കിൽ ആ പരിമേയ സംഖ്യയ്ക്ക് അവസാനിക്കുന്ന ദശാംശഭിന്നമാണുള്ളത്.
- ഒരു പരിമേയ സംഖ്യയെ അവസാനിക്കുന്നതോ അല്ലെങ്കിൽ അവസാനിക്കാതെ ആവർത്തിക്കുന്നതോ ആയ ദശാംശസംഖ്യയായി ആവിഷ്കരിക്കാം.
- ഒരു അപരിമേയ സംഖ്യ എന്നത് അവസാനിക്കാത്തതും ആവർത്തിക്കാത്തതുമായ ദശാംശസംഖ്യയാണ് അതിനെ $\frac{p}{q}$ ഇവിടെ p കൂടാതെ q എന്നിവ പൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾ $q\neq 0$ എന്ന രൂപത്തിൽ എഴുതാൻ സാധിക്കുകയില്ല.
- എല്ലാ പരിമേയ സംഖ്യകളുടേയും അപരിമേയ സംഖ്യകളുടേയും യോഗത്തെ വാസ്തവിക സംഖ്യകളുടെ ഗണം എന്ന് പറയുന്നു.
- ഓരോ വാസ്തവിക സംഖ്യയും ഒന്നുകിൽ പരിമേയ സംഖ്യയാകാം അല്ലെങ്കിൽ അപരിമേയ സംഖ്യയാകാം.
- ഒരു സംഖ്യ വാസ്തവിക സംഖ്യ അല്ലെങ്കിൽ അതൊരു അപരിമേയ സംഖ്യ ആയിരിക്കും.
- 'a' എന്നത് ഒരു ധനപരിമേയസംഖ്യയും, 'n' എന്നത് ഒരു ധനപൂർണ്ണാങ്കവും $\sqrt[n]{a}$ എന്നത് ഒരു അപരിമേയ സംഖ്യയും ആയാൽ $\sqrt[n]{a}$ എന്നത് ഒരു കരണി ആയി കരുതാവുന്നതാണ്.
- 'm', 'n'എന്നത് ധനപൂർണ്ണാങ്കങ്ങളും a, b എന്നിവ ധനപരിമേയ സംഖ്യകളും ആയാൽ

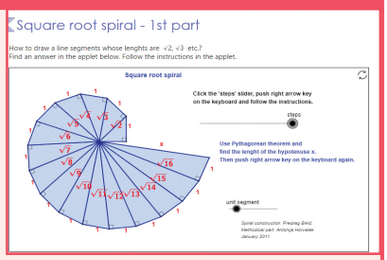
$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a = \sqrt[n]{a^n}$ (ii) $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ (iii) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$ (iv) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

- ഒരു പരിമേയ സംഖ്യ ലഭിക്കുന്നതിനായി ഒരു കരണിയെ മറ്റൊരു കരണിയാൽ ഗുണിക്കുന്ന പ്രവൃത്തിയെ ഘടകങ്ങളാക്കൽ എന്നു പറയാം.
- N എന്ന സംഖ്യയെ $N=a\times10^n$ എന്ന രൂപത്തിൽ എഴുതാം. ഇവിടെ, $1\leq a<10$, 'n' ഒരു പൂർണ്ണാങ്കം. ഈ രീതിയിൽ എഴുതുന്നതിനെ ശാസ്ത്രീയാങ്കന രീതി എന്ന് പറയുന്നു.

Unit 2_REAL NUMBERS.indd 75 28-01-2023 13:06:43

ഐ സി ടി കോർണർ-1

ലഭിക്കുന്ന ഫലം ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിട്ടു്



ഘട്ടം – 1

ബ്രൗസർ തുറന്നിട്ട് താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ലിങ്ക് പകർത്തി പേസ്റ്റ് ചെയ്യുക (അല്ലെങ്കിൽ) തന്നിട്ടുള്ള യു.ആർ.എൽ ടൈപ്പു ചെയ്യുക (അല്ലെങ്കിൽ) ക്യൂ. ആർ. കോഡ് സ്കാൻ ചെയ്യുക.

ഘട്ടം - 2

"Real Numbers" എന്ന ജിയോ ജീബ്രാ എന്ന വർക്ക് ബുക്ക് കാണാം. ഇതിൽ പല തരത്തിലുള്ള വർക്ക് ഷീറ്റുകൾ ഉണ്ടായിരിക്കും. ഇതിൽ "Squre root spiral Ist Part" എന്ന വർക്ക്ഷീറ്റ് തുറക്കുക.

ഘട്ടം-3

Steps എന്നു പേരുള്ള Slider നെ drag (വലിച്ചു വയ്ക്കുക) ചെയ്യുക 2,3,4,5,... എന്നിവയുടെ വർഗ്ഗമൂലങ്ങളുടെ നിർമ്മാണം വഴി വഴിയായി പ്രത്യക്ഷപ്പെടുന്നതു കാണാം.

ഘട്ടം-4

"Unit segment" എന്ന slider dragg നെ ചെയ്തതിനുശേഷം ചിത്രത്തെ വികസിപ്പിക്കുക. ഇപ്പോൾ അതേ ചിത്രത്തെ നിങ്ങൾക്ക് കടലാസിൽ വരച്ച് അളക്കാം.

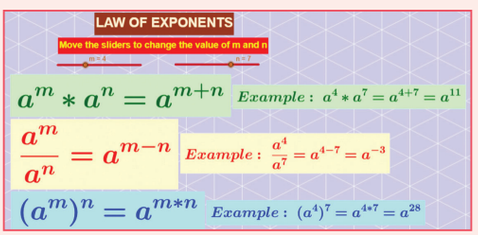
Browse in the link

Union of Sets: https://www.ggbm.at/m6GQc6mQ

W1SQ5

ഐ സി ടി കോർണർ-2

പ്രവൃത്തിയുടെ അവസാനം കിട്ടുന്നത്



ഘട്ടം –1 : Browser open ചെയ്ത് താഴെക്കാണുന്ന URL Link type ചെയ്യുക (അല്ലെങ്കിൽ) QR Code Scan ചെയ്യുക GeoGebra യുടെ "Real Numbers (വാസ്തവിക സംഖ്യകൾ)" എന്ന വർക്ക്ഷീറ്റ് ഭാഗം open ആകും. ഈ വർക്ക്ഷീറ്റിൽ, 1. Rationalising the denominator for Surds (ഛേദത്തെ പരിമേയമാക്കൽ) കൂടാതെ 2. Law of exponents (ഘാതാങ്ക നിയമങ്ങൾ) എന്നീ രണ്ട് പ്രവൃത്തികൾ ഉണ്ടായിരിക്കുന്നതാണ്. ഒന്നാമത്തെ പ്രവൃത്തിയിൽ പരിമേയമാക്കുന്നതിനുള്ള ഘടകങ്ങൾ നൽകിയിരിക്കും. കൂടാതെ ഉദാഹരണങ്ങളും വ്യക്തമാക്കിയിരിക്കും. a,b എന്നിവയുടെ മൂല്യങ്ങളെ മാറ്റുന്നതിന് കൊടുക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്ന ചതുരങ്ങളിൽ വ്യത്യസ്ത വിലകൾ കൊടുക്കുക.

ഘട്ടം - 2

രണ്ടാമത്തെ പ്രവൃത്തിയിൽ Law of exponents (ഘാതാങ്കനിയമം) നൽകപ്പെട്ടിരിക്കുന്നതാണ്. കൂടാതെ വലതു ഭാഗത്ത് ഉദാഹരണങ്ങൾ നൽകിയിരിക്കും. വിലകൾ മാറ്റുന്നതിനായി m,n എന്നിവയെ മാറ്റി ഉത്തരങ്ങൾ ശരി നോക്കാവുന്നതാണ്..

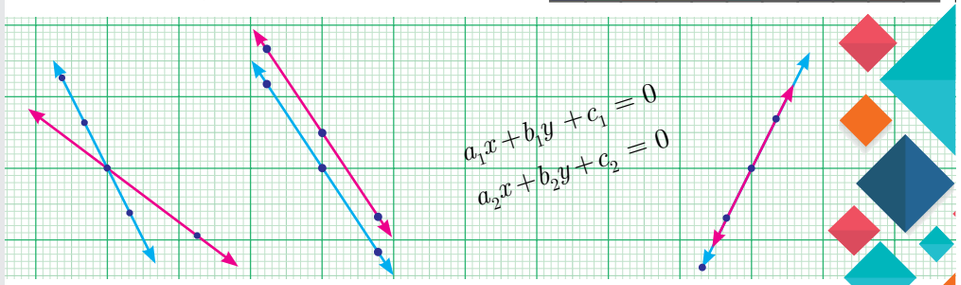
പ്രവർത്തനത്തിന്റെ വെബ്സൈറ്റ്

Real Numbers: https://ggbm.at/BYEWDpHU or Scan the QR Code.

MXT9S

Unit 2_REAL NUMBERS.indd 76 28-01-2023 13:06:43

3



ബീജഗണിതം

In real life, I assure you, there is no such things as Algebra.
- Fran Lebowitz



Diophantus

അലക്സാണ്ഡ്രിയയിലെ ഡയോഫാന്റസ് എന്ന അലക്സാണ്ഡ്രിയൻ ഹെലനിസ്റ്റിക്ക് ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞൻ 84 വർഷക്കാലം ജീവിച്ചിരുന്നു, A.D(C.E) 201 ഉം A.D(C.E) 215 നും ഇടയിൽ ഇനിച്ചു. ഇദ്ദേഹം അരിത്തമറ്റിക് എന്ന പുസ്തകത്തിന്റെ രചയിതാവാണ്.അദ്ദേഹത്തിന്റെ പുസ്തകം ബീജഗണിത സമവാക്യങ്ങൾ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നത് എങ്ങനെ എന്നതിനെ കുറിച്ചുള്ളതാണ്. ബീജഗണിതത്തിന്റെ പിതാവ് എന്നും അദ്ദേഹം അറിയപ്പെടുന്നു.

പഠന ലക്ഷ്യങ്ങൾ

- ബഹുപദ വ്യംജകങ്ങളെ കൃതിയുടെ അടിസ്ഥാനത്തിലും പദങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിലും തരംതിരിക്കുന്നതിനെ കുറിച്ചു മനസ്സിലാക്കാൽ.
- തന്നിട്ടുള്ള മൂല്യത്തിന് ബഹുപദ വ്യംജകത്തെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യലും വ്യംജകങ്ങളുടെ പൂജ്യങ്ങളെക്കുറിച്ച് മനസ്സിലാക്കാലും.
- ശിഷ്ട സിദ്ധാന്തവും ഘടകസിദ്ധാന്തവും മനസ്സിലാക്കാൽ.
- ബീജഗണിത സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ഘടകങ്ങളാക്കൽ.
- ദ്വിഘത ത്രിഘാത ബഹുപദവ്യംജകങ്ങൾ ഘടകങ്ങളാക്കൽ.
- സിന്തറ്റിക് ഹരണം ഉപയോഗിച്ച് ബഹുപദവ്യംജകത്തെ ഘടകങ്ങളാക്കൽ.
- ഉത്തമ സാധാരണ ഭാജകം കണ്ടുപിടിക്കൽ.
- ഒരു നേർരേഖയുടെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കാൻ സാധിക്കുന്നു.
- രണ്ട് ചരങ്ങളുള്ള രേഖീയ സമീകരണങ്ങളെ ഗ്രാഫ്, ബീജഗണിത രീതിയിൽ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യൽ
- രണ്ട് ചരങ്ങളുള്ള രേഖീയ സീകരണങ്ങളെ സ്ഥിരതയുള്ളതാണോ (consistency), സ്ഥിരതയില്ലാത്തതാണോ എന്ന് (inconsistency) മനസ്സിലാക്കൽ

NBZ9T

3.1 മുഖവുര

ബഹുപദ വ്യംജകങ്ങളെ കുറിച്ച് എന്തിന് പഠിക്കണം?

ബീജഗണിതത്തിലുള്ള ബഹുപദ വ്യംജകങ്ങളെ പറ്റിയുള്ള എല്ലാ വിഷയങ്ങളും ഈ പാഠത്തിൽ ഉൾപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു. ഇതിൽ ഉള്ള പലതും മുമ്പേ നിങ്ങൾ കണ്ടിട്ടുണ്ട്. ഇവർ നിങ്ങളുടെ കൂട്ടുകാരാണ്. എന്നാൽ അവയെ കുറിച്ച് വ്യക്തമായി മനസ്സിലാക്കിയിരുന്നില്ല. വരും കാലങ്ങളിൽ നിങ്ങളുടെ ഗണിതപഠനത്തിലെ എല്ലാ മേഖലയിലും ഇവർ നിങ്ങളുടെ കൂട്ടുകാരായി സഞ്ചരിക്കുന്നവിധം അവയെ ഞങ്ങൾ നിങ്ങൾക്കു പരിചയപ്പെടുത്തുന്നു.

Unit 3_ALGEBRA.indd 77 27-01-2023 13:17:07

$(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$

ഇത് ഒരു ബഹുപദ വ്യംജകമാണ്. ഇതിന് മറ്റെന്തെങ്കിലുംപ്രത്യേകതയുള്ളതായി കാണുന്നില്ല. ശരിയല്ലേ? നാം മുമ്പേ പല ബീജഗണിത വ്യംജകങ്ങളെക്കുറിച്ച് അറിഞ്ഞിട്ടുണ്ട്. പിന്നെന്തിന് അവയെക്കുറിച്ച് ആശങ്കപ്പെടണം? ഗണിതത്തിൽ ബഹുപദ വ്യംജകങ്ങൾക്ക് എന്തുകൊണ്ട് മുഖ്യത്വം കൊടുക്കുന്നു എന്നതിന് പല കാരണങ്ങൾ ഉണ്ട്.

ഇപ്പോൾ അവയുടെ ഉപയോഗത്തെക്കുറിച്ച് മനസ്സിലാക്കാൻ ഒരു ഉദാഹരണം നോക്കാം. നാം അങ്കഗണിതത്തെക്കുറിച്ച് ധാരാളം പഠിച്ചിരുന്നു. അതിനുശേഷം ബീജഗണിതത്തിൽ അറിയാത്ത സംഖ്യകളെ കുറിക്കുന്നതിന് ചരങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു എന്ന് മനസിലാക്കിയിരുന്നു. യഥാർത്ഥത്തിൽ നമുക്ക് ഇപ്പോൾ സംഖ്യകളിലേക്ക് തിരികെ പോയി അവയെ ബീജഗണിത ഭാഷയിൽ എഴുതാൻ ശ്രമിക്കാം.

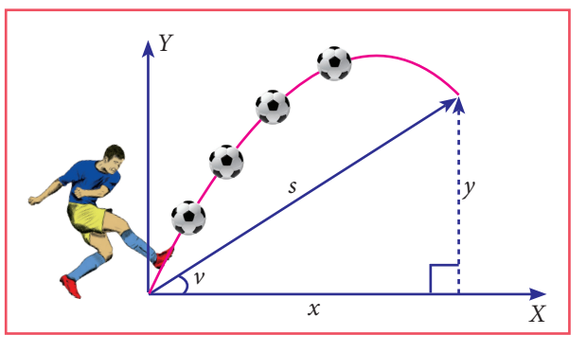
ആണ്5418 എന്ന സംഖ്യയെ ശ്രദ്ധിക്കുക. ഇത് യഥാർത്ഥത്തിൽ 5 ആയിരം 4 നൂറും കൂടാതെ പതിനെട്ട് ഇതു താഴെപറയുന്ന വിധം എഴുതാം.

$5 \times 1000 + 4 \times 100 + 1 \times 10 + 8$

ഇതിനെ വീണ്ടും താഴെ കാണുന്ന വിധം എഴുതാം.

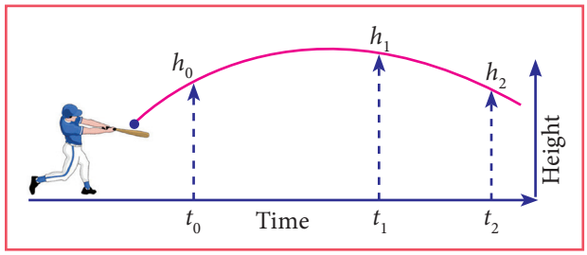
$5 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 8$

ഇപ്പോൾ ഇതെന്താണെന്ന് എന്ന് വ്യക്തമാക്കണം. $5x^3 + 4x^2 + x + 8$, എന്ന രൂപത്തിലുള്ള ഒരു ബഹുപദ വ്യംജകമാണ് ഇത്. ഈ രൂപത്തിൽ എഴുതുന്നത് എങ്ങനെ പ്രയോജനപ്പെടും. നാം സംഖ്യകളെ എപ്പോഴും ദശാംശ രൂപത്തിൽ എഴുതാറുണ്ട് അതിനാൽ $x = 10$. പിന്നെ എന്താണ് ഇതിലെ കൗതുകം. ഹരണവിധികളെ പറ്റി ഓർമ്മയുണ്ടോ?



ചിത്രം. 3.1

ഒരു സംഖ്യയുടെ അക്കങ്ങളുടെ ആകെ തുകയെ 3 കൊണ്ട് ഹരിക്കുവാൻ സാധിക്കുമെങ്കിൽ ആ സംഖ്യയെയും 3 കൊണ്ട് ഹരിക്കാൻ സാധിക്കും. xഎന്ന സംഖ്യയെ 3 കൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ 1 ശിഷ്ടമായി വന്നാൽ x^2, x^3തുടങ്ങിയവയിലും ഇതു യോജിക്കും. ഇവയെല്ലാം 3 കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ 1 ശിഷ്ടമായി വരുന്നു. അതുകൊണ്ട് ഒരു സംഖ്യയിലെ അക്കങ്ങളെയെല്ലാം സങ്കലനം ചെയ്തു ലഭിക്കുന്ന ആകെ തുകയെ 3 കൊണ്ട് ഹരിക്കാൻ സാധിക്കുമെങ്കിൽ സംഖ്യയെയും 3 കൊണ്ട് ഹരിക്കാൻ സാധിക്കും. ഇതുപോലെ 9 കൊണ്ട് ഹരിക്കേണ്ടതിന്റെ ഹരണവിധി ഇതുപോലെ വളരെ എളുപ്പത്തിൽ മനസ്സിലാക്കാം. ഹരണനിയമങ്ങളെ തെളിയിക്കുക മാത്രമല്ല മറിച്ച് സംഖ്യകളെ ബഹുപദവ്യംജകങ്ങളായി പ്രതിനിധീകരിക്കുക വഴി പുതിയ സംഖ്യ മാതൃക അറിയുകയാണ് നമ്മുടെ ലക്ഷ്യം. സത്യത്തിൽ പല പഠന വസ്തുക്കളും സംഖ്യകളല്ലാ അവയെ ബഹുപദവ്യംജകമായി പ്രതിനിധീകരിക്കുക വഴി നമുക്ക് അവയെക്കുറിച്ച് പല കാര്യങ്ങളും പഠിക്കാം.



ചിത്രം. 3.2

ബീജഗണത്തിൽ നാം ശ്രദ്ധിക്കുന്നത് x^2, $5x^2-3$, $2x+7$ മുതലായവ x ന്റെ ഫലനങ്ങൾ എന്നാണ്. x മാറുന്നതിനനുസരിച്ച് ഫലനവും മാറുന്നത് ചിത്രം വരയ്ക്കുന്നതിലൂടെ മനസ്സിലാക്കാം. ഇതു ഫലന ത്തെക്കുറിച്ച് കൂടുതൽ മനസ്സിലാക്കാൻ വളരെ സഹായകമാണ് കൂടാതെ ഇപ്പോൾ ശാസ്ത്രത്തിലും, എൻജിനീയറിംഗിലും, വ്യാപാരപഠനങ്ങളിലും, സാമ്പത്തിക ശാസ്ത്രത്തിലും കൂടാതെ ഗണിതത്തിലും കാണപ്പെടുന്ന ഗണ്യമായ ഫലനങ്ങളെല്ലാം പൂർണ്ണമായും ബഹുപദങ്ങൾ അല്ലെങ്കിൽ തന്നെയും ബഹുപദങ്ങളാക്കി തന്നെ കണക്കാക്കേണ്ടിയിരിക്കുന്നു. ശരിക്കും ബഹപദങ്ങളുപയോഗിച്ചുള്ള ഏകദേശ

Unit 3_ALGEBRA.indd 78 27-01-2023 13:17:08

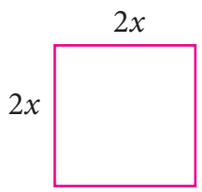
ഫലനങ്ങൾ ഉയർന്ന ഗണിത പഠനങ്ങളുടെ അടിസ്ഥാന തത്ത്വമാക്കി കണക്കാക്കാവുന്നതാണ്. ഈ മേഖലയിൽ പ്രവർത്തിച്ചുകൊണ്ട് ധാരാളം ആളുകൾ ജീവിതമാർഗ്ഗം കണ്ടെത്തുന്നുണ്ട്.



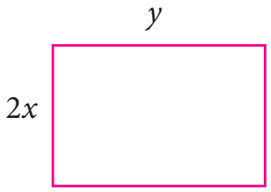
ചിത്രം. 3.3

ബഹുപദങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കപ്പെടുന്ന മേഖലകൾ ജീവശാസ്ത്രം, കമ്പ്യൂട്ടർപഠനം, ആശയവിനിമയ ഉപാദികൾ എന്നിങ്ങനെ നീളുന്നു ആ പട്ടിക. കൊടുക്കപ്പെട്ടിട്ടുള്ള ചിത്രങ്ങൾ 3.1, 3.2 & 3.3 എന്നിവ ദീഘാത ബഹുപദങ്ങളായി കണക്കാക്കാവുന്നതാണ്. ബഹുപദങ്ങൾ എന്തെന്ന് പഠിക്കുക മാത്രമല്ല മറിച്ച് അവയെ എങ്ങനെ സംഖ്യകളിൽ കൂട്ടുകയും, ഗുണിക്കുകയും ഒന്നിനോടൊന്ന് ഹരിക്കുകയും ചെയ്യുന്നതുപോലെ ഉപയോഗപ്പെടുത്താം എന്നതിനെക്കുറിച്ച് പഠിക്കാം.

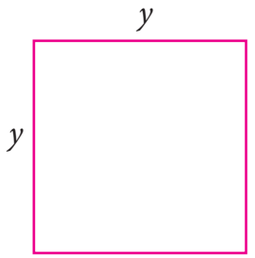
താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ചിത്രങ്ങളെ വീക്ഷിക്കുക.



ചിത്രം. 3.4



ചിത്രം. 3.5



ചിത്രം. 3.6

മുകളിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ചിത്രങ്ങളുടെ ആകെ വിസ്തീർണ്ണം $4x^2 + 2xy + y^2$ ആണ്. ഈ വ്യംജകത്തെ നമുക്ക് ബീജഗണിത വ്യംജകം എന്നു വിളിക്കാം. ഇവിടെ x ന്റെയും y ന്റെയും മൂല്യം വ്യത്യാസപ്പെടുന്നതിനനുസരിച്ച് വിസ്തീർണ്ണത്തിന്റെ മൂല്യവും വ്യത്യാസപ്പെടുന്നു. വശം x ന്റെയും y ന്റെയും മൂല്യങ്ങളെ വ്യത്യാസപ്പെടുത്താം എന്നതുകൊണ്ട് അവയെ ചരങ്ങൾ എന്നു വിളിക്കാം അതുകൊണ്ട് തന്നെ ചരത്തിനെ വിവിധ സംഖ്യാമൂല്യങ്ങൾ സ്വീകരിക്കാവുന്ന ചിഹ്നങ്ങൾ എന്നു പറയാം.

ചരങ്ങളെ സാധാരണയായി x, y, z ...എന്നിങ്ങനെയുള്ള ഇംഗ്ലീഷ് അക്ഷരങ്ങൾ കൊണ്ട് കുറിക്കാവുന്നതാണ്. മുകളിൽ പറഞ്ഞ വ്യംജകത്തിലെ 4, 2 എന്നീ സംഖ്യകൾ സ്ഥിരാങ്കളാണ്. അതു കൊണ്ട് സ്ഥിരാങ്കം എന്നത് സ്ഥിരസംഖ്യമൂല്യമുള്ള ചിഹ്നമെന്നു പറയാം.

സ്ഥിരാങ്കം (Constants)

ഏതൊരു വാസ്തവികസംഖ്യയും സ്ഥിരാങ്കമാണ്. നമുക്ക് സ്ഥിരാങ്കങ്ങളെയും നാല് ഗണിതക്രിയകളെയും ഉപയോഗിച്ച് അങ്കഗണിത വ്യംജകം (Nemerical expresions). രൂപപ്പെടുത്താവുന്നതാണ്,

സ്ഥിരാങ്കങ്ങളുടെ ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ 1, 5, –32, $\frac{3}{7}$, $-\sqrt{2}$, 8.432, 1000000 മുതലായവ.

ചരങ്ങൾ (Variables)

ഓരോ ചരത്തിനും പ്രത്യേകം മൂല്യം കൊടുക്കുക വഴി സ്ഥിരാങ്കങ്ങളെയും ചരങ്ങളെയും സംയോജിപ്പിച്ച് വ്യംജകങ്ങളെ രൂപപ്പെടുത്തി സംഖ്യകളുടെ ഒരു നിരതന്നെ രൂപപ്പെടുത്താം. വ്യാസാർദ്ധം r ഉള്ള ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ പരിധി $2\pi r$ എന്നത് നമുക്കറിയാവുന്നതാണ്. 1cm, 4cm, 9cm... എന്നിങ്ങനെ rന് വ്യത്യസ്ഥ മൂല്യം കൊടുക്കുമ്പോൾ വൃത്തത്തിന്റെ പരിധിയും 2π, 8π, 18π... എന്നിങ്ങനെ വലുതാകുന്നത് കാണാം.

$2\pi r$ എന്ന ഒറ്റ വ്യംജകം വൃത്തപരിധിയുടെ ചെറുതും സംക്ഷിപ്തവുമായ രൂപമാണ്. നമുക്ക് ഗണിതക്രിയകളുപയോഗിച്ച് ബീജഗണിത വ്യംജകങ്ങളെ സംയോജിക്കുക വഴി ഫലനങ്ങളുടെയും സംഖ്യകളുടെയും വിലപിടിപ്പുള്ള ഒരു ഭാഷയെ മെനഞ്ഞെടുക്കാം. ചരങ്ങളെ x, y, a, b... എന്നിങ്ങനെയുള്ള അക്ഷരങ്ങൾ കൊണ്ട് കുറിക്കാവുന്നതാണ്.

Unit 3_ALGEBRA.indd 79 27-01-2023 13:17:09

ബീജഗണിത വ്യംജകം (Algebraic Expression)

സ്ഥിരാങ്കങ്ങളെയും, ചരങ്ങളെയും നാല് അടിസ്ഥാന ക്രിയകളുപയോഗിച്ച് സംയോജിപ്പിച്ചു കിട്ടുന്ന വ്യംജകത്തെ **ബീജഗണിത വ്യംജകം** എന്നു പറയുന്നു.

ബീജഗണിത വ്യംജകങ്ങൾക്ക് ഉദാഹരണം

$$x^3 - 4x^2 + 8x - 1,\ 4xy^2 + 3x^2y - \frac{5}{4}xy + 9,\ 5x^2 - 7x + 6$$

ഗുണോത്തരങ്ങൾ (Coefficients)

ഒരു പദത്തിന്റെ ഏതൊരു ഭാഗവും അതിന്റെ ബാക്കി ഭാഗം കൊണ്ട് ഗുണിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുകയാണെങ്കിൽ ആ ബാക്കി ഭാഗത്തെ ആ പദത്തിന്റെ ഗുണോത്തരം എന്നു പറയുന്നു.

ഉദാഹരണമായി,

$x^2 + 5x - 24$ എന്ന ബീജഗണിത വ്യംജകത്തിൽ 3 പദങ്ങളുണ്ട്. ഈ വ്യംജകത്തിലെ ചരം xആകുന്നു. x^2ന്റെ ഗുണോത്തരം 1, x ന്റെ ഗുണോത്തരം 5 കൂടാതെ -24 (24 അല്ല) എന്നത് സ്ഥിരാങ്കം.

പ്രവൃത്തി-1

താഴെകൊടുത്തിട്ടുള്ള ബീജഗണിത വ്യംജകങ്ങളുടെ ചരം, ഗുണോത്തരം, കൂടാതെ സ്ഥിരാങ്കം എന്നിവ എഴുതുക.

വ്യംജകം	$x + 7$	$3y - 2$	$5x^2$	$2xy + 11$	$-\frac{1}{2}p + 7$	$-8 + 3a$
ചരം	x			x, y		
ഗുണോത്തരം	1				$-\frac{1}{2}$	
സ്ഥിരാങ്കം	7					-8

3.2 ബഹുപദവ്യംജകങ്ങൾ (Polynomial)

ഛേദങ്ങളിൽ ചരങ്ങൾ വരാതെയും അവ റാഡിക്കൽ ചിഹ്നങ്ങൾക്കുള്ളിൽ കാണപ്പെടാതെ വരികയും അതു കൂടാതെ ചരങ്ങൾ ധനപൂർണ്ണാങ്കഘാതങ്ങളെ കൊണ്ടുള്ളവയും ആയ ബീജഗണിത വ്യംജകത്തെ ഒരു ബഹുപദവ്യംജകമെന്നു പറയുന്നു.

ഒരു ചരമുള്ള ബഹുപദ വ്യംജകങ്ങൾ (Polynomial in One Variable)

ഒര ചരം x ഉള്ള ബഹുപദ വ്യംജകത്തിന്റെ ബീജഗണിത രൂപം

$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$,$(a_n \neq 0)$ ഇവിടെ $a_0, a_1, a_2, ...a_n$ എന്നിവ സ്ഥിരാങ്കളും n ഒരു പൂർണ്ണസംഖ്യയും ആകുന്നു.

പൊതുവായി ബഹുപദ വ്യംജകങ്ങളെ $f(x), g(x), p(t), q(z)$, $r(x)$ എന്നിങ്ങനെ കുറിക്കുന്നു.

കുറിപ്പ്

ബീജഗണിത വ്യംജകങ്ങളിലെ ചരങ്ങളുടെ ഗുണോത്തരം ഏതെങ്കിലും വാസ്തവിക സംഖ്യയാവുകയും ഒപ്പം (കൂടാതെ) ചരങ്ങൾ ധനപൂർണ്ണാങ്ക ഘാതങ്ങളെ കൊണ്ടുള്ളവയും ആകും. $a^0 = 1$, എല്ലാ a യ്ക്കും എന്ന് ഓർമ്മിക്കുക.

Unit 3_ALGEBRA.indd 80 27-01-2023 13:17:10

ഉദാഹരണമായി,

ക്രമ നമ്പർ	വ്യഞ്ജകം	ബഹുപദ വ്യഞ്ജകം / ബഹുപദ വ്യഞ്ജകം അല്ല	കാരണം
1	$4y^3 + 2y^2 + 3y + 6$	ബഹുപദ വ്യഞ്ജകം	ധനപൂർണ്ണാങ്ക ഘാതകങ്ങളെ കൊണ്ടുള്ളത്
2	$4x^{-4} + 5x^4$	ബഹുപദ വ്യഞ്ജകം അല്ല	ഒരു ഘാതം ഋണാങ്കം (–4)
3	$m^2 + \frac{4}{5}m + 8$	ബഹുപദ വ്യഞ്ജകം	ധനപൂർണ്ണാങ്ക ഘാതകങ്ങളെ കൊണ്ടുള്ളത്
4	$\sqrt{5}\,y^2$	ബഹുപദ വ്യഞ്ജകം	ധനപൂർണ്ണാങ്ക ഘാതകങ്ങളെ കൊണ്ടുള്ളത്
5	$2r^2 + 3r - 1 + \frac{1}{r}$	ബഹുപദ വ്യഞ്ജകം അല്ല	ഒരു ഘാതം ഋണാങ്കം $\left(\frac{1}{r} = r^{-1}\right)$
6	$8 + \sqrt{q}$	ബഹുപദ വ്യഞ്ജകം അല്ല	q ന്റെ ഘാതം ഭിന്നസംഖ്യ $(\sqrt{q} = q^{\frac{1}{2}})$
7	$\sqrt{8}\,p^2 + 5p - 7$	ബഹുപദ വ്യഞ്ജകം	ധനപൂർണ്ണാങ്ക ഘാതകങ്ങളെ കൊണ്ടുള്ളത്
8	$5n^{\frac{4}{5}} + 6n - 1$	ബഹുപദ വ്യഞ്ജകം അല്ല	ഒരു ഘാതം $\frac{4}{5}$ എന്ന ഭിന്നസംഖ്യയാണ്

ബഹുപദ വ്യഞ്ജകത്തിന്റെ അടിസ്ഥാന രൂപം

വ്യഞ്ജകം $p(x)$ നെ ഒരു ബഹുപദ ഘാതങ്ങളുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ ആരോഹണക്രമത്തിലോ അവരോഹണക്രമത്തിലോ എഴുതാം. ഇത്തരത്തിൽ ഒരു ബഹുപദ വ്യഞ്ജകത്തെ എഴുതുന്നതാണ് അതിന്റെ പൊതുവായ രൂപം

പ്രവൃത്തി-2

താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ബഹുപദവ്യഞ്ജകത്തെ അടിസ്ഥാന രൂപത്തിൽ എഴുതുക.

ക്രമനമ്പർ	ബഹുപദ വ്യഞ്ജകം	അടിസ്ഥാനരൂപം
1	$5m^4 - 3m + 7m^2 + 8$	
2	$\frac{2}{3}y + 8y^3 - 12 + \sqrt{5}\,y^2$	
3	$12p^2 - 8p^5 - 10p^4 - 7$	

ഉദാഹരണമായി: (i) $8x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 9x + 6$ (ii) $5 - 3y + 6y^2 + 4y^3 - y^4$

ഒരു ബീജഗണിത വ്യഞ്ജകത്തിന്റെ കൃതി (Degree of the Polynomial

ഒരു ചരം ഉള്ള ഒരു ബഹുപദ വ്യഞ്ജകത്തിന്റെ ചരത്തിന്റെ ഏറ്റവും കൂടിയ ഘാതത്തെ ആ ബഹുപദ വ്യഞ്ജകത്തിന്റെ കൃതി എന്ന് പറയുന്നു.

ഒന്നിലധികം ചരങ്ങളുള്ള ബഹുപദ വ്യഞ്ജകത്തിന്റെ കൃതി വ്യത്യസ്ത പദങ്ങളിലുള്ള ചരങ്ങളുടെ ഘാതങ്ങളുടെ ഏറ്റവും കൂടിയ തുകയാണ്.

ഒരു ബഹുപദ വ്യഞ്ജകത്തിലെ ഏറ്റവും സവിശേഷതയുള്ള ഘാതമാണ് അതിന്റെ കൃതി. x^2+5x എന്ന വ്യഞ്ജകത്തിൽ x^2 ന്റെ മൂല്യം x ന്റെ വില കൂടുന്നതിനനുസരിച്ച് $5x$ ന്റെ മൂല്യത്തെക്കാൾ എത്രയോ വലുതാകുന്നത് കാണാം. x ന്റെ വളരെ ഉയർന്ന മൂല്യങ്ങളിൽ x^2+5x എന്നത് x^2 ന് ഏകദേശം തുല്യമാകുന്നതായി കാണാം. അതുകൊണ്ട് ഉയർന്ന ഘാതത്തിന് മുൻതൂക്കം കൊടുക്കപ്പെടുന്നു. അതുകൊണ്ടുതന്നെ വളരെ ഉയർന്ന ഘാതം എന്നത് ബഹുപദ വ്യഞ്ജകത്തിന്റെ പ്രധാന ഇനമാകുന്നു. ഇതിന് കൃതി എന്ന പേരു നല്കുന്നു.

Unit 3_ALGEBRA.indd 81 27-01-2023 13:17:12

ഉദാഹരണം 3.1 താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ബഹുപദ വ്യംജകത്തിലെ ഓരോ പദത്തിന്റെ കൃതിയും കൂടാതെ ബഹുപദ വ്യംജകത്തിന്റെ കൃതിയും കാണുക. $6ab^8 + 5a^2b^3c^2 - 7ab + 4b^2c + 2$

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ള ബഹുപദ വ്യംജകം $6ab^8 + 5a^2b^3c^2 - 7ab + 4b^2c + 2$

ഓരോ പദത്തിന്റെയും കൃതി

$6ab^8$ ന്റെ കൃതി	(1+8)	=	9
$5a^2b^3c^2$ ന്റെ കൃതി	(2+3+2)	=	7
$7ab$ ന്റെ കൃതി	(1+1)	=	2
$4b^2c$ ന്റെ കൃതി	(2+1)	=	3

2 എന്നത് സ്ഥിരപദം, സ്ഥിരപദത്തിന്റെ കൃതി എല്ലായ്പ്പോഴും പൂജ്യമായി പരിഗണിക്കുന്നു.

$6ab^8 + 5a^2b^3c^2 - 7ab + 4b^2c + 2$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ കൃതി.

= ബഹുപദത്തിലെ ഏറ്റവും കൂടിയ ഘാതം

= 9

പ്രധാന പ്രത്യേകതയുള്ള ബഹുപദം



ഗുണോത്തരം ഏതെങ്കിലും ഒരു സംഖ്യയായിരിക്കും എന്ന് മുമ്പേ നമ്മൾ പറഞ്ഞിട്ടുണ്ട്. ഗുണോത്തരം പൂജ്യമായാൽ എന്താകും. ആ പദം പൂജ്യമാകും അതുകൊണ്ട് നമ്മൾ അത് എഴുതേണ്ട ആവശ്യമില്ല. ശരി, എല്ലാ ഗുണോത്തരങ്ങളും പൂജ്യമായാൽ എന്താകും. അങ്ങനെയുണ്ടാകാം എന്നു സമ്മതിക്കുന്നു. എങ്കിൽ അതിനൊരു പേര് നിർദ്ദേശിക്കാം.

എല്ലാ ഗുണോത്തരങ്ങളും പൂജ്യമായ ഒരു ബഹുപദമാണ്.

$g(t) = 0t^4 + 0t^2 - 0t$, $h(p) = 0p^2 - 0p + 0$

മുകളിൽ പറഞ്ഞിട്ടുള്ള ഉദാഹരണത്തിൽ നിന്നും പൂജ്യം ബഹുപദത്തിന്റെ കൃതിയെ (Zero Polinomial) കുറിച്ച് സൂചിപ്പിച്ചിട്ടില്ല എന്നു മനസ്സിലാക്കാം. അവ രണ്ടും വ്യത്യസ്തകൃതികളുള്ള പൂജ്യം ബഹുപദ വ്യംജകമാണ്. അതുകൊണ്ട് പൂജ്യം ബഹുപദ വ്യംജകത്തിന്റെ കൃതിയെ നിർവചിക്കാൻ കഴിയില്ല.

പൂജ്യം ബഹുപദത്തിന്റെ കൃതി നിർവചിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ല

വിവിധതരം ബഹുപദ വ്യംജകങ്ങൾ

(i) പദങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ ബഹുപദ വ്യംജകങ്ങളുടെ തരങ്ങൾ	
ഏകപദം	ഒരു പദം മാത്രമുള്ള ബഹുപദ വ്യംജകങ്ങളെ ഏകപദ വ്യംജകങ്ങൾ എന്ന് പറയുന്നു. ഉദാഹരണം : 5, 6m, 12ab
ദ്വിപദം	രണ്ടു പദങ്ങളുള്ള ബഹുപദ വ്യംജകങ്ങളെ ദ്വിപദ വ്യംജകങ്ങൾ എന്ന് പറയുന്നു. ഉദാഹരണം : $5x + 3$, $4a - 2$, $10p + 1$
ത്രിപദം	മൂന്നുപദങ്ങളുള്ള ബീജഗണിത വ്യംജകങ്ങളെ ത്രിപദ വ്യംജകങ്ങൾ എന്ന് പറയുന്നു. ഉദാഹരണം : $4x^2 + 8x - 12$, $3a^2 + 4a + 10$

Unit 3_ALGEBRA.indd 82 27-01-2023 13:17:13

(ii) ഘാതങ്ങളുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ ബഹുപദങ്ങളുടെ തരങ്ങൾ	
സ്ഥിരബഹുപദങ്ങൾ	ഘാതം പൂജ്യം ആയിട്ടുള്ള ബഹുപദത്തിനെ സ്ഥിര ബഹുപദം എന്ന് പറയുന്നു. ഉദാഹരണം : $5, -7, \frac{2}{3}, \sqrt{5}$
ഏകഘാത ബഹുപദം	ഏറ്റവും കൂടിയ ഘാതം ഒന്ന് ആയിട്ടുള്ള ബഹുപദത്തെ ഏക ഘാത ബഹുപദം എന്ന് പറയുന്നു. ഉദാഹരണം : $410x - 7$
ദ്വിഘാത ബഹുപദ വ്യംജകം	ഏറ്റവും കൂടിയ ഘാതം രണ്ട് ആയിട്ടുള്ള ബഹപദത്തിനെ ദ്വിഘാത ബഹുപദം എന്ന് പറയുന്നു. ഉദാഹരണം : $2\sqrt{5}x^2 + 8x - 4$
ത്രിഘാത ബഹുപദം	ഏറ്റവും കൂടിയ ഘാതം മൂന്ന് ആയിട്ടുള്ള ബഹുപദത്തെ ത്രിഘാത ബഹുപദം എന്ന് പറയുന്നു. ഉദാഹരണം : $12y^3$, $6m^3 - 7m + 4$

ഉദാഹരണം 3.2

പദങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ബഹുപദങ്ങളെ തരംതിരിക്കുക.

ക്രമനമ്പർ	ബഹുപദം വ്യംജകം	പദങ്ങളുടെ എണ്ണം	ബഹുപദ വ്യംജകങ്ങളുടെ തരങ്ങൾ
(i)	$5t^3 + 6t + 8t^2$	3 പദങ്ങൾ	ത്രിപദം
(ii)	$y-7$	2 പദങ്ങൾ	ദ്വിപദം
(iii)	$\frac{2}{3}r^4$	1 പദം	ഏകപദം
(iv)	$6y^5 + 3y - 7$	3 പദങ്ങൾ	ത്രിപദം
(v)	$8m^2 + 7m^2$	സദൃശ്യപദങ്ങൾ അതുകൊണ്ട് ഒരു പദം	ഏകപദം

ഉദാഹരണം 3.3

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ബഹുപദ വ്യംജകങ്ങളെ ഘാതകങ്ങളുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ തരംതിരിക്കുക.

ക്രമനമ്പർ	ബഹുപദ വ്യംജകങ്ങൾ	ഘാതം	തരം
(i)	$\sqrt[3]{4}\, z + 7$	കൂടിയ ഘാതം 1	ഏകഘാത ബഹുപദം
(ii)	$z^3 - z^2 + 3$	കൂടിയ ഘാതം 3	ത്രിഘാത ബഹുപദം
(iii)	$\sqrt{7}$	കൂടിയ ഘാതം 0	സ്ഥിര ബഹുപദം
(iv)	$y^2 - \sqrt{8}$	കൂടിയ ഘാതം 2	ദ്വിഘാത ബഹുപദം

Unit 3_ALGEBRA.indd 83 27-01-2023 13:17:14

3.2.1 ബഹുപദ വ്യംജകങ്ങളുടെ ഗണിതക്രിയ (Arithmetic of Polynomials)

ഇപ്പോൾ നമുക്ക് ബഹുപദ വ്യംജകത്തിന്റെ സമ്മർദ്ധമായ ഭാഷ കൈവന്നിട്ടുണ്ട് മാത്രമല്ല അവയെ പലതരത്തിലും വർഗ്ഗീകരിക്കാവുന്നതുമാണ്. ഇപ്പോൾ നമുക്ക് ബഹുപദ വ്യംജകത്തെ ഉപയോഗിച്ച് എന്തൊക്കെ ചെയ്യാൻ കഴിയും? x ന്റെ ഒരു വ്യംജകത്തെ കണക്കിലെടുക്കാം. നമുക്ക് x നെ ഒരു പ്രത്യേക മൂല്യം കൊടുത്ത് വ്യംജകത്തിന്റെ വില നിർണ്ണയിക്കാം.

x ന്റെ മൂല്യമാറ്റമനുസരിച്ച് വ്യംജകത്താൽ നിർമ്മിതമായ ഫലനത്തിന്റെ വില എങ്ങനെ മാറുന്നു എന്ന ചോദ്യം ഉന്നയിക്കാം. $p(x) = 0$ എന്ന വ്യംജകസമീകരണമെഴുതി x ഉപയോഗിച്ച് അതിനെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യാം. ഇതെല്ലാം രസകരവും ഇതിനു സമാനമായ ധാരാളം ഗണിതക്രിയകളും പാഠ പുരോഗതിയനുസരിച്ച് ചെയ്യാവുന്നതാണ്. വ്യംജകങ്ങളെ സംഖ്യകളെപോലെ ഉപയോഗിച്ചാൽ അതുപയോഗിച്ച് പലതും നമുക്ക് ചെയ്യാൻ കഴിയും. ഇതിന് ഒരു സൂചന പാഠത്തിന്റെ ആമുഖത്തിൽ സൂചിപ്പിച്ചതുപോലെ എല്ലാ ധനസംഖ്യകളെയും വ്യംജകമായി കണക്കാക്കാം എന്നു പറഞ്ഞപ്പോൾ നമുക്ക് ലഭിച്ചതാണ്.

ഗണിത ക്രിയകളിലെന്നപോലെ തന്നെ നമുക്ക് വ്യംജകങ്ങളിലും സങ്കലനം, വ്യവകലനം ,ഗുണനം, ഹരണം തുടങ്ങിയ ക്രിയകൾ ചെയ്യാൻ ശ്രമിക്കാം . മറ്റൊരു പ്രത്യേകത സംഖ്യകൾക്കും വ്യംജകങ്ങൾക്കും ഇടയിൽ ആഴത്തിലുള്ള ബന്ധം ഉണ്ടെന്നുള്ളതും ഇവയെ തമ്മിൽ ബന്ധിപ്പിക്കുന്ന രസകരമായ ഗുണങ്ങളും ഉണ്ടെന്നുള്ളതുമാണ്. ഇപ്പോൾ ഇത്തരം ക്രിയകളെ വ്യംജകങ്ങളിൽ പരീക്ഷിച്ച് രസകരമായ ക്രിയകളെ ചെയ്തു നോക്കാവുന്നതാണ്.

ബഹുപദ വ്യംജകങ്ങളുടെ സങ്കലനം (Addition of Polynomials)

രണ്ടു ബഹുപദ വ്യംജകങ്ങളുടെ തുകയും ഒരു ബഹുപദ വ്യംജകമാണ.

കുറിപ്പ്

സദൃശ്യ പദങ്ങളെ മാത്രമേ നമുക്ക് കൂട്ടാൻ സാധിക്കുകയുള്ളൂ. $3x^2 + 5x^2 = 8x^2$ എന്നാൽ അസ ദൃശ്യപദങ്ങളായ $3x^2$ കൂടാതെ $5x^3$ നെ കൂട്ടുമ്പോൾ $3x^2 + 5x^3$ എന്നപുതിയ ബഹുപദം ലഭിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം 3.4

$p(x) = 4x^2 - 3x + 2x^3 + 5$ കൂടാതെ $q(x) = x^2 + 2x + 4$ എങ്കിൽ $p(x) + q(x)$ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

കൊടുത്തിട്ടുള്ള ബഹുപദ വ്യംജകം	അടിസ്ഥാന രൂപം
$p(x) = 4x^2 - 3x + 2x^3 + 5$	$2x^3 + 4x^2 - 3x + 5$
$q(x) = x^2 + 2x + 4$	$x^2 + 2x + 4$
$p(x) + q(x) = 2x^3 + 5x^2 - x + 9$	

$p(x) + q(x)$ ഒരു ബഹുപദ വ്യംജകമാണ്. അതുകൊണ്ട് രണ്ടു ബഹുപദ വ്യംജകങ്ങളുടെ തുകയും ഒരു ബഹുപദ വ്യംജകമാണ്.

ബഹുപദ വ്യംജകങ്ങളുടെ വ്യവകലനം (Subtraction of Polynomials)

രണ്ടു ബഹുപദ വ്യംജകങ്ങളുടെ വ്യത്യാസവും ഒരു ബഹുപദ വ്യംജകമാണ്.

കുറിപ്പ്

സദൃശ്യപദങ്ങളുടെ വ്യവകലനംമാത്രമേ സാധിക്കുകയുള്ളൂ. $8x^2 - 5x^2 = 3x^2$ എന്നാൽ $5x^3$ നെ $3x^2$ ൽ നിന്നും കുറയ്ക്കുമ്പോൾ $3x^2 - 5x^3$ എന്ന പുതിയ ബഹുപദ വ്യംജകം ലഭ്യമാകുന്നു.

Unit 3_ALGEBRA.indd 84 27-01-2023 13:17:15

ഉദാഹരണം 3.5

$p(x) = 4x^2 - 3x + 2x^3 + 5$ കൂടാതെ $q(x) = x^2 + 2x + 4$ എങ്കിൽ $p(x) - q(x)$ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ള ബഹുപദ വ്യംജകം	അടിസ്ഥാന രൂപം
$p(x) = 4x^2 - 3x + 2x^3 + 5$	$2x^3 + 4x^2 - 3x + 5$
$q(x) = x^2 + 2x + 4$	$x^2 + 2x + 4$
$p(x) - q(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x + 1$	

$p(x) - q(x)$ എന്നത് ഒരു ബഹുപദ വ്യംജകമാണെന്ന് കാണാം. അതുകൊണ്ട് ബഹുപദ വ്യംജകങ്ങളുടെ വ്യവകലനവും ഒരു ബഹുപദ വ്യംജകം.

ബഹുപദ വ്യംജകത്തിന്റെ ഗുണനം (Multiplication of Two Polynomials)

നീളം 8 യൂണിറ്റും വീതി 7 യൂണിറ്റും ഉള്ള ഒരു ദീർഘചതുരത്തെ സമീപത്തിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ളതു പോലെ 4 ദീർഘചതുരങ്ങളായി തിരിക്കുമ്പോൾ വിസ്തീർണ്ണം മാറുന്നില്ലെന്ന് മനസ്സിലാക്കുന്നു. ഇത് ബഹുപദ വ്യംജകങ്ങളുടെ ഗുണനം പഠിക്കുന്നതിന് പ്രചോദനമാകുന്നു.

	8
7	വിസ്തീർണ്ണം = 56

	5	3
1	5	3
6	30	18

$(x+1)$ നീളവും $(3x+2)$ വീതിയുമുള്ള ഒരു ദീർഘചതുരത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ളതുപോലെ കണ്ടെത്താം.

	x	+	1
$3x$	$3x^2$		$3x$
+			
2	$2x$		2

അങ്ങനെയെങ്കിൽ ദീർഘചതുരത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണ

$= 3x^2 + 3x + 2x + 2$

$= 3x^2 + 5x + 2$

x ഒരു ചരവും കൂടാതെ m, n എന്നിവ രണ്ടു ധനപൂർണ്ണാങ്കങ്ങളും ആണെങ്കിൽ $x^m \times x^n = x^{m+n}$ രണ്ടു ബഹുപദ വ്യംജകങ്ങളുടെ ഗുണനഫലവും ഒരു ബഹുപദവ്യംജകമാണ്.

ഉദാഹരണം 3.6

$(4x - 5)$, $(2x^2 + 3x - 6)$ എന്നിവയുടെ ഗുണഫലം കാണുക..

നിർദ്ധാരണം

$(4x - 5)$ കൂടാതെ $(2x^2 + 3x - 6)$ എന്നിവയെ ഗുണിക്കുന്നതിന് ആദ്യത്തെ ബഹുപദവ്യംജകത്തിലെ ഓരോ അംഗത്തെയും രണ്ടാമത്തെ ബഹുപദവ്യംജകത്തിലെ ഒരോ അംഗത്തിനോടും വിതരണം ചെയ്തു ഗുണിക്കണം. ഈ ഉദാഹരണത്തിൽ $4x$ കൂടാതെ -5 നെ വിതരണം ചെയ്തു ഗുണിക്കണം തുടർന്ന് സദൃശ്യപദങ്ങളെ കൂട്ടി എഴുതണം .

$$(4x - 5)(2x^2 + 3x - 6) = 4x(2x^2 + 3x - 6) - 5(2x^2 + 3x - 6)$$

$$= 8x^3 + 12x^2 - 24x - 10x^2 - 15x + 30$$

$$= 8x^3 + 2x^2 - 39x + 30$$

Unit 3_ALGEBRA.indd 85 27-01-2023 13:17:16

അല്ലെങ്കിൽ ഗുണോത്തരങ്ങളെ പിരിച്ച് ഗുണിക്കുന്ന രീതിയെ ഉപയോഗപ്പെടുത്താം

	2	+3	-6
		+4	-5
	−10	−15	+30
8	+12	−24	
8	+2	−39	+30

$\therefore \quad (4x-5)(2x^2+3x-6) = 8x^3 + 2x^2 - 39x + 30$

അഭ്യാസം 3.1

1. താഴെകൊടുത്തിട്ടുള്ള വ്യംജകങ്ങളിൽ ബഹപദവ്യംജകങ്ങൾ ഏതൊക്കെ? ബഹുപദവ്യംജകം അല്ലെങ്കിൽ കാരണം പറയുക.

   (i) $\frac{1}{x^2} + 3x - 4$ (ii) $x^2(x-1)$

   (iii) $\frac{1}{x}(x+5)$ (iv) $\frac{1}{x^{-2}} + \frac{1}{x^{-1}} + 7$

   (v) $\sqrt{5}\,x^2 + \sqrt{3}\,x + \sqrt{2}$ (vi) $m^2 - \sqrt[3]{m} + 7m - 10$

2. താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ബഹുപദവ്യംജകങ്ങളുടെ x^2 കൂടാതെ x എന്നിവയുടെ ഗുണോത്തരം എഴുതുക.

   (i) $4 + \frac{2}{5}x^2 - 3x$ (ii) $6 - 2x^2 + 3x^3 - \sqrt{7}\,x$

   (iii) $\rho x^2 - x + 2$ (iv) $\sqrt{3}\,x^2 + \sqrt{2}\,x + 0.5$

   (v) $x^2 - \frac{7}{2}x + 8$

3. താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ബഹുപദവ്യംജകങ്ങളുടെ കൃതി എഴുതുക.

   (i) $1 - \sqrt{2}\,y^2 + y^7$ (ii) $\frac{x^3 - x^4 + 6x^6}{x^2}$

   (iii) $x^3(x^2 + x)$ (iv) $3x^4 + 9x^2 + 27x^6$

   (v) $2\sqrt{5}\,p^4 - \frac{8p^3}{\sqrt{3}} + \frac{2p^2}{7}$

4. താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ബഹുപദവ്യംജകങ്ങളെ അടിസ്ഥാനരൂപത്തിൽ എഴുതുക.

   (i) $x - 9 + \sqrt{7}\,x^3 + 6x^2$ (ii) $\sqrt{2}\,x^2 - \frac{7}{2}x^4 + x - 5x^3$

   (iii) $7x^3 - \frac{6}{5}x^2 + 4x - 1$ (iv) $y^2 + \sqrt{5}\,y^3 - 11 - \frac{7}{3}y + 9y^4$

5. താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ബഹുപദവ്യംജകങ്ങളെ കൂട്ടുക കൂടാതെ ഫലമായി ലഭിക്കുന്ന ബഹുപദവ്യംജകത്തിന്റെ കൃതിയും കണ്ടെത്തുക.

   (i) $p(x) = 6x^2 - 7x + 2$ $q(x) = 6x^3 - 7x + 15$

   (ii) $h(x) = 7x^3 - 6x + 1$ $f(x) = 7x^2 + 17x - 9$

   (iii) $f(x) = 16x^4 - 5x^2 + 9$ $g(x) = -6x^3 + 7x - 15$

6. ആദ്യത്തെ ബഹുപദവ്യംജകത്തിൽ നിന്നും രണ്ടാമത്തെ ബഹപദവ്യംജകത്തിനെ കുറച്ചതിനുശേഷം ഫലമായി ലഭിക്കുന്ന ബഹപദവ്യംജകത്തിന്റെ കൃതി എഴുതുക?

   (i) $p(x) = 7x^2 + 6x - 1$ $q(x) = 6x - 9$

   (ii) $f(y) = 6y^2 - 7y + 2$ $g(y) = 7y + y^3$

   (iii) $h(z) = z^5 - 6z^4 + z$ $f(z) = 6z^2 + 10z - 7$

Unit 3_ALGEBRA.indd 86 27-01-2023 13:17:20

7. $2x^3 + 6x^2 - 5x + 8$ നോട് എന്തു കൂട്ടണം $3x^3 - 2x^2 + 6x + 15$ ലഭിക്കാൻ ?

8. $2x^4 + 4x^2 - 3x + 7$ ൽ നിന്നും എന്ത് കുറയ്ക്കണം $3x^3 - x^2 + 2x + 1$ ലഭിക്കാൻ ?

9. താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ബഹുപദവ്യംജകങ്ങളെ ഗുണിക്കുക കൂടാതെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ കൃതിയും കണ്ടെത്തുക.

(i) $p(x) = x^2 - 9$ $q(x) = 6x^2 + 7x - 2$

(ii) $f(x) = 7x + 2$ $g(x) = 15x - 9$

(iii) $h(x) = 6x^2 - 7x + 1$ $f(x) = 5x - 7$

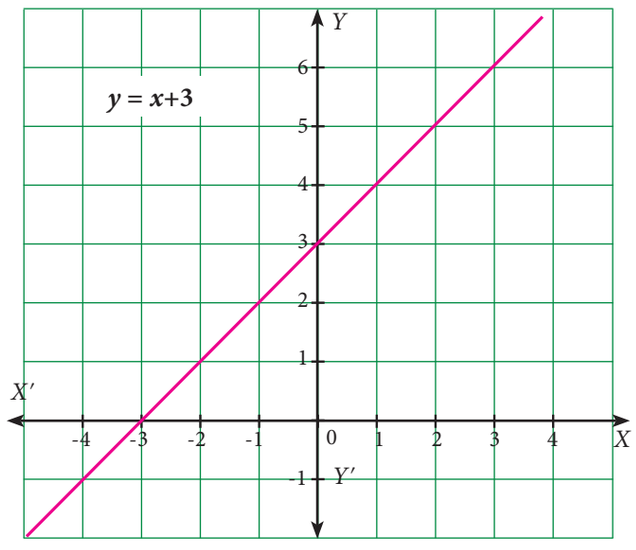
10. ഒരു ചോക്ലേറ്റിന്റെ വില $(x + y)$ രൂപ അമീർ $(x + y)$ ചോക്ലേറ്റ് വാങ്ങിയെങ്കിൽ അയാൾ നൽകിയ ആകെ തുക x കൂടാതെ y ആസ്പദമാക്കി കാണുക $x = 10$ കൂടാതെ $y = 5$ ആണെങ്കിൽ അമീർ നൽകിയ ആകെ തുക കാണുക.

11. ഒരു ദീർഘചതുരത്തിന്റെ നീളം $(3x+2)$ യൂണിറ്റും വീതി $(3x-2)$ യൂണിറ്റും എങ്കിൽ ആ ദീർഘചതുരത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം x നെ ആസ്പദമാക്കി കാണുക. $x = 20$ ആകുമ്പോൾ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

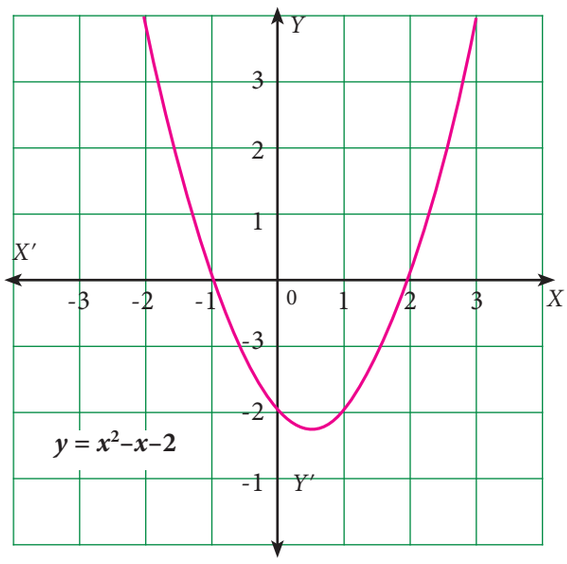
12. $p(x)$ എന്നത് കൃതി 1 ആയ ബഹുപദവ്യംജകവും കൂടാതെ $q(x)$ എന്നത് കൃതി 2 ആയ ബഹുപദവ്യംജകവുമാണ് എങ്കിൽ $p(x) \times q(x)$ ഏതു തരത്തിൽപ്പെട്ട ബഹുപദവ്യംജകം ?

3.2.2 വ്യംജകത്തിന്റെ മൂല്യങ്ങളും ശൂന്യങ്ങളും

താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന രണ്ട് ഗ്രാഫുകളെ നമുക്ക് പരിശോധിക്കാം. ആദ്യത്തേത് രേഖീയവും രണ്ടാമത്തേത് ദ്വിഘാതവും ആണ്. ആദ്യത്തേത് x അക്ഷത്തിൽ ഒരു ബിന്ദുവിനെ $(x = -3)$ ഛേദിക്കുന്നു. രണ്ടാമത്തേത് x അക്ഷത്തിൽ രണ്ട് ബിന്ദുക്കളെ ഛേദിക്കുന്നു $(x = -1$ കൂടാതെ $x = 2)$ ഇവ രണ്ടും y അക്ഷത്തിൽ ഒരു ബിന്ദുവിലൂടെ മാത്രമാണ് കടന്നു പോകുന്നത്. ചുരുക്കത്തിൽ വ്യംജകങ്ങളെ ഗ്രാഫിലൂടെയും ഗ്രാഫിനെ ചിത്രത്തിലൂടെയും ചിത്രീകരിക്കാം. (നമുക്ക് സൂത്രവാക്യത്തേക്കാൾ ചിത്രങ്ങളാണല്ലോ ഇഷ്ടമുള്ളത് അങ്ങനെയല്ലേ) ഇതുകൂടാതെ ഗ്രാഫ് ധാരാളം ഉപകാരപ്രദങ്ങളായ വിവരങ്ങളെ നമുക്ക് തരുന്നു. ഉദാഹരണത്തിന് അതൊരു നേർരേഖയാണോ, വക്രത്തിന്റെ ആകൃതിയെന്താണ്, ഏതൊക്കെ സ്ഥലങ്ങളിൽ x അക്ഷത്തെ ഛേദിക്കുന്നു മുതലായവ.



ചിത്രം. 3.7



ചിത്രം. 3.8

Unit 3_ALGEBRA.indd 87 27-01-2023 13:17:22

$x=a$ ആണെങ്കിൽ $p(x)$ നെ $p(a)$ എന്ന് നിർദ്ദേശിക്കാം. അപ്പോൾ x ന്റെ മൂല്യം a ആകുന്നു. (a ഏതെങ്കിലും ഒരു വാസ്തവികസംഖ്യ)

$p(x)$ ന്റെ മൂല്യം x ന്റെ പല സാധ്യങ്ങളിലും പൂജ്യമെന്നാകുന്നു. (താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള രണ്ടാമത്തെ ഗ്രാഫിൽ എന്നതുപോലെ) അതുകൊണ്ട് രസകരമായ ഒരു ചോദ്യം ഉയർന്നു വന്നേക്കാം x ന്റെ എത്ര മൂല്യങ്ങളിലാണ് $p(x)$ ന്റെ മൂല്യം പൂജ്യമാകുന്നത് മാത്രമല്ല ഏതൊക്കെ മൂല്യങ്ങളിലുമാണ് . x ന്റെ ഈ മൂല്യങ്ങളെയാണ് വ്യംജകം $p(x)$ ന്റെ ശൂന്യങ്ങൾ എന്ന് വിളിക്കപ്പെടുന്നത്.

വ്യംജകത്തിന്റെ മൂല്യങ്ങളെയാണ് ഗ്രാഫിൽ കാണിച്ചിട്ടുള്ളത് എന്ന് നാം ഒരിക്കൽ മനസ്സിലാക്കിയതാണ്. ഗ്രാഫിലെ രേഖ x അക്ഷത്തെ ഛേദിക്കുമ്പോഴെല്ലാം വ്യംജകം പൂജ്യമാകുന്നു എന്നും നമുക്ക് എളുപ്പത്തിൽ മനസ്സിലാക്കാം.

ഒരു വ്യംജകത്തിന്റെ ശൂന്യങ്ങളെന്നത് നേർരേഖയോ വക്രരേഖയോ x അക്ഷത്തിൽ ഛേദിക്കുന്നതിന് അനുബന്ധമായിരിക്കും.

ചിത്രം. 3.9 ൽ ശൂന്യങ്ങളുടെ എണ്ണം 1

ചിത്രം. 3.10 ൽ ശൂന്യങ്ങളുടെ എണ്ണം 2

കുറിപ്പ്

വ്യംജകത്തിന്റെ ശൂന്യങ്ങളുടെ എണ്ണം ≤വ്യംജകത്തിന്റെ കൃതി

ബഹുപദവ്യംജകത്തിന്റെ മൂല്യം (Value of a Polynomial)

$p(x)$ എന്ന ബഹുപദവ്യംജകത്തിൽ $x = a$ എന്ന് ആരോപിച്ചാൽ അതിന്റെ മൂല്യം p(a) എന്ന് ലഭിക്കും. ഇത് x നെ a $(a \in R)$ എന്നു മാറ്റുമ്പോൾ ലഭ്യമാകുന്നു

ഉദാഹരണമായി,

$f(x) = x^2 + 3x - 1$ എന്ന ബഹുപദവ്യംജകത്തിൽ

$x = 2$ എന്ന് ആരോപിക്കുമ്പോൾ $f(x)$ ന്റെ മൂല്യം

$f(2) = 2^2+3(2)-1 = 4+6-1 = 9.$

ബഹുപദവ്യംജകങ്ങളുടെ ശൂന്യങ്ങൾ (Zeros of Polynomial)

(i) $p(x) = 4x^3-6x^2+3x-14$ എന്ന ബഹുപദം പരിഗണിക്കുക.

$x = 1$ ആകുമ്പോൾ $p(1) = 4(1)^3 - 6(1)^2 + 3(1) - 14$

$= 4 - 6 + 3 - 14$

$= -13$

$x = 1$ ആകുമ്പോൾ $p(x)$ ന്റെ മൂല്യം -13 ആകുന്നു.

$x = 0,$ ആകുമ്പോൾ $p(0) = 4(0)^3 - 6(0)^2 + 3(0) - 14$

$= 0 - 0 + 0 - 14$

$= -14$

$x = 0,$ ആകുമ്പോൾ $p(0)$ ന്റെ മൂല്യം -14 ആകുന്നു.

$x = 2$ ആകുമ്പോൾ $p(2) = 4(2)^3 - 6(2)^2 + 3(2) - 14$

$= 32 - 24 + 6 - 14$

$= 0$

$p(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 14$ എന്ന ബഹുപദവ്യംജകത്തിൽ $p(2) = 0$ അതുകൊണ്ട് $x = 2$ നെ ആ ബഹുപദത്തിന്റെ ഒരു ശൂന്യം എന്ന് പറയുന്നു.

Unit 3_ALGEBRA.indd 88 27-01-2023 13:17:23

ബഹുപദ സമീകരണങ്ങളുടെ മൂലങ്ങൾ (Roots of a Polynomial Equation)

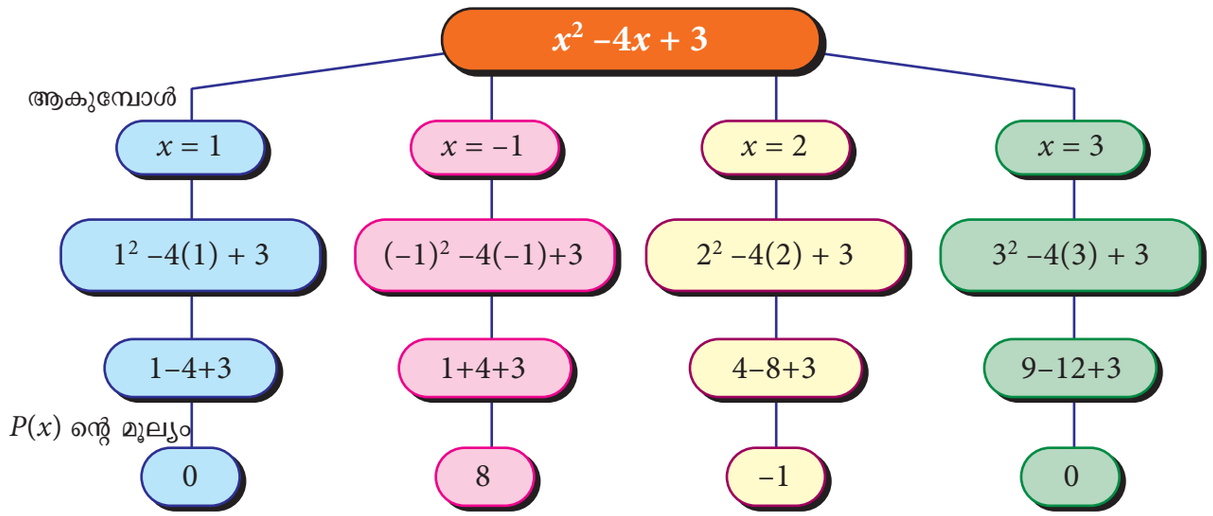
പൊതുവായി, $p(a) = 0$ ആണെങ്കിൽ $p(x)$ ന്റെ ശൂന്യമാണ് a അല്ലെങ്കിൽ $p(x) = 0$ എന്ന ബഹുപദസമവാക്യത്തിന്റെ മൂലമാണ് a.

ഉദാഹരണം 3.7

$f(x) = x^2 - 4x + 3$, ആണെങ്കിൽ $f(1), f(-1), f(2), f(3)$ എന്നിവ കണ്ടുപിടിക്കുക. കൂടാതെ $f(x)$ ന്റെ ശൂന്യങ്ങളും കണ്ടുപിടിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$



ചിത്രം. 3.9

$x = 1$ കൂടാതെ $x = 3$ ആകുമ്പോൾ $f(x)$ ന്റെ മൂല്യം പൂജ്യമാകുന്നു. അതുകൊണ്ട് $f(x)$ എന്ന ബഹുപദം വ്യംജകത്തിന്റെ ശൂന്യങ്ങൾ 1 കൂടാതെ 3 ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം 3.8

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ബഹുപദവ്യംജകങ്ങളുടെ ശൂന്യങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) $f(x) = 2x + 1$ (ii) $f(x) = 3x - 5$

നിർദ്ധാരണം

(i) തന്നിട്ടുള്ളത് $f(x) = 2x + 1 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)$

$$= 2\left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 28 - \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)B = 2(0) = 0$$

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$, ആയതുകൊണ്ട് $f(x)$ ന്റെ ഒരു ശൂന്യമാണ്.

$x = -\frac{1}{2}$

(ii) തന്നിട്ടുള്ളത് $f(x) = 3x - 5 = 3\left(x - \frac{5}{3}\right)$

$$f\left(\frac{5}{3}\right) = 3\left(\frac{5}{3} - \frac{5}{3}\right) = 3(0) = 0$$

ആയതുകൊണ്ട് $f(x)$ ന്റെ ഒരു ശൂന്യമാണ്. $x = \frac{5}{3}$

Unit 3_ALGEBRA.indd 89 27-01-2023 13:17:25

ഉദാഹരണം 3.9

താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ബഹുപദവ്യംജക സമവാക്യങ്ങളുടെ മൂലങ്ങൾ കാണുക?

(i) $5x - 3 = 0$ (ii) $-7 - 4x = 0$

നിർദ്ധാരണം

(i) $5x - 3 = 0$

(അല്ലെങ്കിൽ) $5x = 3$

, $x = \frac{3}{5}$

(ii) $-7 - 4x = 0$

(അല്ലെങ്കിൽ) $4x = -7$

$x = \frac{7}{-4} = -\frac{7}{4}$

കുറിപ്പ്

(i) ഒരു ബഹുപദവ്യംജകത്തിന്റെ ശൂന്യമെന്നത് ഏതൊരു വാസ്തവിക സംഖ്യയും ആകാം.

(ii) പൂജ്യമല്ലാത്ത ഒരു സ്ഥിരാങ്ക വ്യംജകത്തിന് ശൂന്യം ഉണ്ടായിരിക്കില്ല.

(iii) എല്ലാ വാസ്തവിക സംഖ്യയും പൂജ്യം വ്യംജകത്തിന്റെ ശൂന്യമായി സൗകര്യാർത്ഥം ഉപയോഗിച്ചുവരുന്നു.

ഉദാഹരണം 3.10

-3 ,3എന്നിവ $x^2 - 9$ എന്ന ബീജഗണിത വ്യംജകത്തിന്റെ ശൂന്യങ്ങളാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$f(x) = x^2 - 9$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

എങ്കിൽ , $f(-3) = (-3)^2 - 9 = 9 - 9 = 0$

$f(+3) = 3^2 - 9 = 9 - 9 = 0$

$\therefore x^2 - 9$ എന്ന ബഹുപദവ്യംജകത്തിന്റെ ശൂന്യങ്ങളാണ് -3 കൂടാതെ 3 എന്നിവ.

അഭ്യാസം 3.2

1. $f(y) = 6y - 3y^2 + 3$ എന്ന വ്യംജകത്തിന്റെ മൂല്യം കാണുക.

   (i) $y = 1$ (ii) $y = -1$ (iii) $y = 0$

2. $p(x) = x^2 - 2\sqrt{2}x + 1$,. എങ്കിൽ $p(2\sqrt{2})$കാണുക?

3. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ഓരോ വ്യംജകത്തിന്റെയും ശൂന്യങ്ങൾ കാണുക?

   (i) $p(x) = x - 3$ (ii) $p(x) = 2x + 5$ (iii) $q(y) = 2y - 3$

   (iv) $f(z) = 8z$ (v) $p(x) = ax$ ഇവിടെ $a \neq 0$ (vi) $h(x) = ax + b,\ \ a \neq 0,\ a, b \in R$

4. താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ബീജഗണിത സമീകരണങ്ങളുടെ മൂലങ്ങൾ കാണുക.

   (i) $5x - 6 = 0$ (ii) $x + 3 = 0$

   (iii) $10x + 9 = 0$ (iv) $9x - 4 = 0$

5. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ബഹുപദ സമവാക്യങ്ങൾക്ക് എതിരെ തന്നിട്ടുള്ളവ അവയുടെ മൂലങ്ങളാണോ എന്ന് ശരിനോക്കുക.

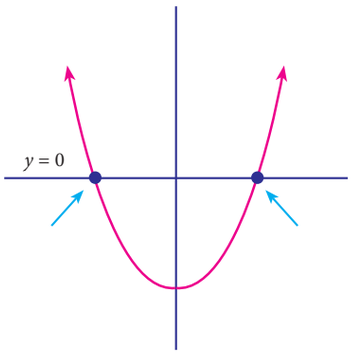
   (i) $p(x) = 2x - 1,\ x = \frac{1}{2}$ (ii) $p(x) = x^3 - 1,\ x = 1$

   (iii) $p(x) = ax + b, x = \frac{-b}{a}$ (iv) $p(x) = (x + 3)(x - 4),\ x = 4, x = -3$

Unit 3_ALGEBRA.indd 90 27-01-2023 13:17:26

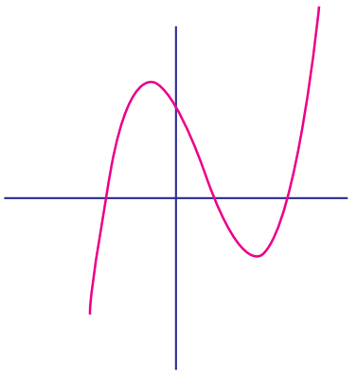
6. താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ഗ്രാഫിൽ സൂചിപ്പിച്ചിരിക്കുന്ന വ്യംജകങ്ങളുടെ ശൂന്യങ്ങളുടെ എണ്ണം കാണുക?

(i)



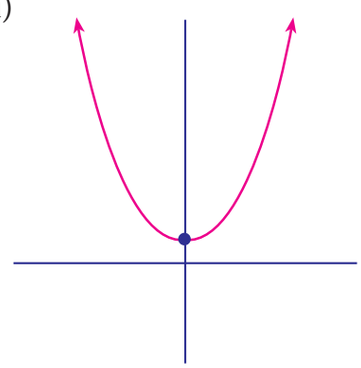
ചിത്രം. 3.10

(ii)



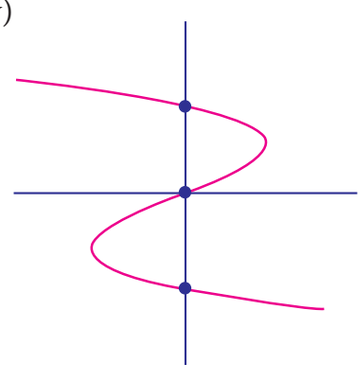
ചിത്രം. 3.11

(iii)



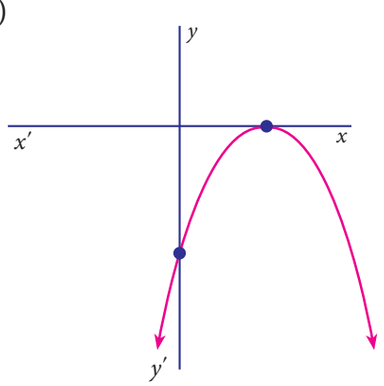
ചിത്രം. 3.12

(iv)



ചിത്രം. 3.13

(v)



ചിത്രം. 3.14

3.3 ശിഷ്ടസിദ്ധാന്തം (Remainder Theorem)

ഈ വിഭാഗത്തിൽ, ശിഷ്ടം കണക്കാക്കാൻ ലളിതവും സുന്ദരവുമായ ഒരു രീതിയെക്കുറിച്ച് നമുക്ക് പഠിക്കാം.

ഒരു വ്യംജകത്തെ രേഖീയ വ്യംജകം കൊണ്ടുള്ള ഹരണത്തിൽ ശിഷ്ടസിദ്ധാന്തം എന്ന ഒരു പ്രധാന സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിക്കുന്നു.

$p(x)$ എന്നത് കൃതി ഒന്നോ അതിൽ കൂടുതലോ ഉള്ള ഒരു ബഹുപദവ്യംജകവും a ഒരു വാസ്തവിക സംഖ്യയുമാണെന്നരിക്കട്ടെ. $p(x)$ നെ $(x-a)$ എന്ന ഏകഘാത ബഹുപദം കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ ശിഷ്ടം $p(a)$ ആകുന്നു.

ശിഷ്ടസിദ്ധാന്തത്തിന്റെ പ്രാധാന്യം: ഹരണരീതിയിലെ പ്രയാസകരമായ വഴികൾ ഉപയോഗിക്കാതെ തന്നെ ശിഷ്ടം കണക്കാക്കാൻ നമ്മെ പ്രാപ്തരാക്കുന്നു.

കുറിപ്പ്

(i) $p(x)$ നെ $(x+a)$ കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ ശിഷ്ടം $p(-a)$ ആകുന്നു.

(ii) $p(x)$ നെ $(ax-b)$ കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ ശിഷ്ടം $p(\frac{b}{a})$ ആകുന്നു.

(iii) $p(x)$ നെ $(ax+b)$ കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ ശിഷ്ടം $p(-\frac{b}{a})$ ആകുന്നു.

Unit 3_ALGEBRA.indd 91 27-01-2023 13:17:27

ഉദാഹരണം 3.11

ക്രമനമ്പർ	ചോദ്യം	നിർദ്ധാരണം	സൂചന
1	$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ നെ $x+1$. കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോഴുള്ള ശിഷ്ടം കാണുക	$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ $f(-1) = (-1)^3+3(-1)^2+3(-1)+1$ $= -1+3-3+1 = 0$ ശിഷ്ടം $=0$	$g(x) = x+1$ $g(x) = 0$ $x+1 = 0$ $x = -1$
2	$g(x) = 2 - 3x$ ന്റെ ഗുണിതമാണോ $f(x) = x^3 - x + 1$ എന്ന് പരിശോധിക്കുക	$\therefore f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \frac{2}{3} + 1$ $= \frac{8}{27} - \frac{2}{3} + 1$ $= \frac{8-18+27}{27} = \frac{17}{27} \neq 0$ $\Rightarrow g(x)$ ന്റെ ഗുണിതമല്ല $f(x)$	$g(x) = 2-3x$ $= 0$ $x = \frac{2}{3}$
3	$f(x) = x^3 - ax^2 + 6x - a$ യെ $(x - a)$കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോഴുള്ള ശിഷ്ടം കാണുക.	നമുക്ക് $f(x) = x^3 - ax^2 + 6x - a$ $f(a) = a^3 - a(a)^2 + 6a - a$ $= a^3 - a^3 + 5a$ $= 5a$ അതിനാൽ ശിഷ്ടം $5a$	$g(x) = x-a$ $g(x) = 0$ $x - a = 0$ $x = a$
4	k യുടെ ഏത് മൂല്യത്തിനാണ് $2x^4 + 3x^3 + 2kx^2 + 3x + 6$ നെ $(x + 2)$ കൊണ്ട് പൂർണ്ണമായും ഹരിക്കാൻ സാധിക്കുന്നത് ?	$f(x) =$ $2x^4 + 3x^3 + 2kx^2 + 3x + 6$ $f(x)$ നെ $(x+2)$ കൊണ്ട് പൂർണ്ണമായുംഹരിക്കാൻ സാധിച്ചാൽ ശിഷ്ടം പൂജ്യം ആയിരിക്കും. i.e ., $f(-2) = 0$ i.e ., $2(-2)^4 + 3(-2)^3 + 2k(-2)^2 + 3(-2)+6=0$ $2(16) + 3(-8) + 2k(4) - 6 + 6=0$ $32-24 + 8k = 0$ $8k = -8$, $k = -1$ അതുകൊണ്ട് $k = -1$ ആകുമ്പോൾ $f(x)$ നെ $(x-2)$ കൊണ്ട് പൂർണ്ണമായും ഹരിക്കാം.	$g(x) = x + 2$ എന്നിരിക്കട്ടെ $g(x)=0$ $x+2 = 0$ $x = -2$

Unit 3_ALGEBRA.indd 92 27-01-2023 13:17:29

ഉദാഹരണം 3.12 യഥാർത്ഥത്തിൽ ഹരിക്കാതെ $f(x) = 2x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 3x - 2$ നെ $x^2 - 3x + 2$ കൊണ്ട് നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാമെന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം :

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 3x - 2 \\ g(x) &= x^2 - 3x + 2 \\ &= x^2 - 2x - x + 2 \\ &= x(x-2) - 1(x-2) \\ &= (x-2)(x-1) \end{aligned}$$

$f(x)$ നെ $(x-1)$ കൊണ്ടും $(x-2)$ കൊണ്ടും നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാമെന്ന് തെളിയിക്കണം. ശിഷ്ടസിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച്

$$\begin{aligned} f(1) &= 2(1)^4 - 6(1)^3 + 3(1)^2 + 3(1) - 2 \\ &= 2 - 6 + 3 + 3 - 2 \\ &= 0 \\ f(2) &= 2(2)^4 - 6(2)^3 + 3(2)^2 + 3(2) - 2 \\ &= 32 - 48 + 12 + 6 - 2 \\ f(2) &= 0 \end{aligned}$$

$\therefore$ $f(x)$ നെ $(x-1)(x-2)$ കൊണ്ട് നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാം

$f(x)$ നെ $x^2 - 3x + 2$ കൊണ്ട് നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാം.

ഇതിൻ പ്രകാരം $p(x)$ എന്ന ബഹുപദവ്യംജകത്തെ $(x-a)$ - ാൽ ഹരിക്കുമ്പോൾ ശിഷ്ടം $p(a) = 0$ എങ്കിൽ $(x-a)$ എന്നത് $p(x)$-ന്റെ ഒരു ഘടകമാകുന്നു. ശിഷ്ട സിദ്ധാന്തം ഘടക സിദ്ധാന്തത്തിന് വഴി വകുക്കുന്നു.

1.1 ഘടകസിദ്ധാന്തം (Factor Theorem)

$p(x)$ എന്ന ബഹുപദവ്യംജകത്തിന്റെ കൃതി $n \geq 1$ കൂടാതെ 'a' ഒരു വാസ്തവിക സംഖ്യ. എങ്കിൽ

(i) $p(a) = 0$ ആണെങ്കിൽ $(x-a)$ എന്നത് $p(x)$ ന്റെ ഒരു ഘടകമാകുന്നു.

(ii) $(x-a)$ എന്നത് $p(x)$ ന്റെ ഒരു ഘടകമാണെങ്കിൽ $p(a) = 0$ ആകും.

തെളിവ്

$p(x)$ എന്നത് ഒരു ഹാര്യ വ്യംജകവും $(x-a)$ എന്നത് ഹാരക വ്യംജകവുമാണെങ്കിൽ
ഹരണസിദ്ധാന്തം(Division Algorithm) അനുസരിച്ച്,
$p(x) = (x-a)q(x) + p(a)$. ഇതിൽ $q(x)$ എന്നത് ഹരണഫലവും $p(a)$ എന്നത് ശിഷ്ടവും ആകുന്നു.

ചിന്തിക്കുക

a $(a \neq 0)$, b എന്നിവ ഏതെങ്കിലും രണ്ട് പൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾ എന്നിരിക്കട്ടെ. a എന്നത് b - യുടെ ഹാരകവുമാണെങ്കിൽ $b = ax$, ഇതിൽ x എന്നത് ഒരു പൂർണ്ണാങ്കം (Integer) ആകുന്നു.

(i) $p(a) = 0$, ആണെങ്കിൽ, $p(x) = (x-a)\,q(x)$ ആകുന്നു.
കൂടാതെ $(x-a)$ എന്നത് $p(x)$ ന്റെ ഒരു ഘടകമാകുന്നു.

(ii) $(x-a)$ എന്നത് $p(x)$ ന്റെ ഒരു ഘടകമാണെങ്കിൽ, $p(x) = (x-a)g(x)$ ആകുന്നു.

$$\begin{aligned} p(a) &= (a-a)\,g(a) \\ &= 0 \times g(a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

അതുകൊണ്ട്,$(x-a)$ എന്നത് $p(x)$ ന്റെ ഒരു ഘടകമാണെങ്കിൽ, $p(a) = 0$.

Unit 3_ALGEBRA.indd 93 27-01-2023 13:17:32

കുറിപ്പ്

- $p(a) = 0$, എങ്കിൽ $(x + a)$എന്നത് p(x) -ന്റെ ഒരു ഘടകമാണ്. $(\because x-a = 0,\ x = a$
- $p(-a) = 0$,എങ്കിൽ $(x + a)$ എന്നത് p(x) -ന്റെ ഒരു ഘടകമാണ്. $(\because x+a = 0,\ x = -a)$
- $p\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$,എങ്കിൽ $(ax+b)$എന്നത് p(x) -ന്റെ ഒരു ഘടകമാണ്. $\left(\because ax + b = 0,\ ax = -b,\ x = -\frac{b}{a}\right)$
- $p\left(\frac{b}{a}\right) = 0$,എങ്കിൽ$(ax-b)$എന്നത് p(x) -ന്റെ ഒരു ഘടകമാണ്. $\left(\because ax - b = 0,\ ax = b,\ x = \frac{b}{a}\right)$
- $p(-a) = 0\ \ p(b) = 0$,എങ്കിൽ $(x-a)\ (x-b)$എന്നത് p(x) -ന്റെ ഒരു ഘടകമാണ്. $\left(\because \begin{matrix} x-a=0 & \text{or} & x-b=0 \\ x=a & \text{or} & x=b \end{matrix}\right)$

ഉദാഹരണം 3.13

$(x+2)$ എന്നത് $x^3 - 4x^2 - 2x + 20$ ന്റെ ഒരു ഘടകമാണെന്ന് കാണുക

$x+2$ ന്റെ പൂജ്യം കാണാൻ;
$x + 2 = 0$ എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിക്കുക.
$x = -2$എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

നിർദ്ധാരണം

$p(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 20$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

ഘടകസിദ്ധാന്തം അനുസരിച്ച്, $p(-2) = 0$ എങ്കിൽ $(x + 2)$ എന്നത് $p(x)$-ന്റെ ഒരു ഘടകമാണ്.

$$p(-2) = (-2)^3 - 4(-2)^2 - 2(-2) + 20$$
$$= -8 - 4(4) + 4 + 20$$
$$p(-2) = 0$$

അതുകൊണ്ട്, $(x + 2)$ എന്നത് $x^3 - 4x^2 - 2x + 20$ -ന്റെ ഒരു ഘടകമാണ്.

ഉദാഹരണം 3.14

$(3x - 2)$ എന്നത് $3x^3 + x^2 - 20x + 12$ -ന്റെ ഒരു ഘടകമാണോ?

$3x-2$; ന്റെ പൂജ്യം കാണാൻ
$3x - 2 = 0$ എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിക്കുക.
$3x = 2$
$x = \frac{2}{3}$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

നിർദ്ധാരണം

$p(x) = 3x^3 + x^2 - 20x+12$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

ഘടകസിദ്ധാന്തം അനുസരിച്ച്, $p\left(\frac{2}{3}\right) = 0$ എങ്കിൽ $(3x - 2)$ എന്നത് $p(x)$-ന്റെ ഒരു ഘടകമാണ്.

$$p\left(\frac{2}{3}\right) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 20\left(\frac{2}{3}\right) + 12$$
$$= 3\left(\frac{8}{27}\right) + \left(\frac{4}{9}\right) - 20\left(\frac{2}{3}\right) + 12$$
$$= \frac{8}{9} + \frac{4}{9} - \frac{120}{9} + \frac{108}{9}$$

പുരോഗതി പരിശോധന

1. $(x+3)$എന്നത് $p(x)$-ന്റെ ഒരുഘടകമാണെങ്കിൽ, $p(__) = 0$.
2. $(3-x)$എന്നത് $p(x)$-ന്റെ ഒരുഘടകമാണെങ്കിൽ, $p(__) = 0$.
3. $(y-3)$എന്നത് $p(x)$-ന്റെ ഒരുഘടകമാണെങ്കിൽ, $p(__) = 0$.
4. $(-x-b)$എന്നത് $p(x)$-ന്റെ ഒരുഘടകമാണെങ്കിൽ, $p(__) = 0$.
5. $(-x+b)$ എന്നത് $p(x)$-ന്റെ ഒരുഘടകമാണെങ്കിൽ $p(__) = 0$.

Unit 3_ALGEBRA.indd 94 27-01-2023 13:17:35

$$= \frac{(120-120)}{9}$$

$$p\left(\frac{2}{3}\right) = 0$$

അതുകൊണ്ട്, $(3x-2)$ എന്നത്
$3x^3 + x^2 - 20x + 12$ -ന്റെ ഒരു ഘടകമാണ്.

ഉദാഹരണം 3.15 $(x-2)$ എന്നത് $2x^3 - 6x^2 + mx + 4$ -ന്റെ ഒരു ഘടകമാണെങ്കിൽ m-ന്റെ മൂല്യം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$p(x) = 2x^3 - 6x^2 + mx + 4$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

ഘടകസിദ്ധാന്തം അനുസരിച്ച്, $p(2) = 0$ എങ്കിൽ $(x-2)$ എന്നത് $p(x)$-ന്റെ ഒരു ഘടകമാണ്.

x–2 ന്റെ പൂജ്യം കാണാൻ;
$x - 2 = 0$ എന്ന്
പ്രതിസ്ഥാപിക്കുക.
$x = 2$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

$$\begin{aligned} p(2) &= 0 \\ 2(2)^3 - 6(2)^2 + m(2) + 4 &= 0 \\ 2(8) - 6(4) + 2m + 4 &= 0 \\ -4 + 2m &= 0 \\ m &= 2 \end{aligned}$$

അഭ്യാസം 3.3

1. $p(x)$ എന്നത് $g(x)$ ന്റെ ഗുണിതമാണോ അല്ലയോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.
   (i) $p(x) = x^3 - 5x^2 + 4x - 3$; $g(x) = x - 2$
2. $p(x)$ നെ $g(x)$ കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോഴുള്ള ശിഷ്ടം ശിഷ്ടസിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച് കാണുക.
   (i) $p(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 1$; $g(x) = x + 1$
   (ii) $p(x) = 4x^3 - 12x^2 + 14x - 3$; $g(x) = 2x - 1$
   (iii) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 50$; $g(x) = x - 3$
3. $3x^3 - 4x^2 + 7x - 5$ നെ $(x+3)$ കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോഴുള്ള ശിഷ്ടം കാണുക?
4. $x^{2018} + 2018$ നെ $x-1$ കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോഴുള്ള ശിഷ്ടം കാണുക?
5. k യുടെ ഏത് മൂല്യത്തിനാണ് $p(x) = 2x^3 - kx^2 + 3x + 10$ എന്നത് $(x-2)$ ന്റെ ഭാജകമാകുന്നത് ?
6. $2x^3 + ax^2 + 4x - 12$ കൂടാതെ $x^3 + x^2 - 2x + a$ l, എന്നീ ബഹുപദവ്യംജകങ്ങളെ $(x-3)$ കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോഴുള്ള ശിഷ്ടങ്ങൾ തുല്ല്യമാണ്. എങ്കിൽ a യുടെ മൂല്യം കാണുക? കൂടാതെ ശിഷ്ടവും കാണുക?
7. താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ബഹുപദവ്യംജകങ്ങൾക്ക് $(x-1)$ എന്നത് ഒരു ഘടകമാണോ എന്ന് കാണു:
   $i)\ x^3 + 5x^2 - 10x + 4$ $ii)\ x^4 + 5x^2 - 5x + 1$

Unit 3_ALGEBRA.indd 95 27-01-2023 13:17:38

8. ഘടകസിദ്ധാന്തമുപയോഗിച്ച് $2x^3 - 5x^2 - 28x + 15$ എന്ന ബഹുപദവ്യംജകത്തിന് $(x-5)$ എന്നത് ഒരു ഘടകമാണോ എന്ന് കാണുക

9. $x^3 - 3x^2 - mx + 24$. എന്ന. ബഹുപദവ്യംജകത്തിന് $(x+3)$ എന്നത് ഒരു ഘടകമാണെങ്കിൽ m ന്റെ മൂല്യം കാണുക

10. $ax^2 + 5x + b$ എന്ന ബഹുപദവ്യംജകത്തിന്റെ ഘടകങ്ങൾ $(x-2)$, $\left(x - \frac{1}{2}\right)$ ആണെങ്കിൽ $a = b$. എന്ന് നിരൂപിക്കുക.

11. $kx^3 - 2x^2 + 25x - 26$ എന്ന ബഹുപദവ്യംജകത്തെ $(x-1)$ എന്ന ഘടകം ശിഷ്ടമില്ലാതെ ഹരിക്കുകയാണെങ്കിൽ k- യുടെ മൂല്യം കാണുക.

12. $x^2 - 2x - 8$ എന്നത് ഒരു ദീർഘചതുരത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം എങ്കിൽ ,$(x+2)$ ഉം $(x-4)$ ഉം ആ ദീർഘചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളാണോ എന്ന് ഘടകസിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച് ശരിനോക്കുക.

3.4 സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ

ഒരു സമവാക്യത്തിലുള്ള ചരങ്ങളുടെ ഏതു മൂല്യങ്ങൾക്കും സമവാക്യം സത്യമാവുകയാണെങ്കിൽ ആ സമവാക്യത്തെ സർവ്വസമവാക്യം എന്ന് പറയുന്നു..

താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവ നമ്മൾ മുമ്പേ പഠിച്ചു കഴിഞ്ഞു.:

(1) $(a+b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$ (2) $(a-b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$

(3) $(a+b)(a-b) \equiv a^2 - b^2$ (4) $(x+a)(x+b) \equiv x^2 + (a+b)x + ab$

കുറിപ്പ്

(i) $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ (ii) $a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$

(iii) $a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2$ (iv) $a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + 2$

ഉദാഹരണം 3.16 താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയെ സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് വീപുലികരിക്കുക:

(i) $(3x+4y)^2$ (ii) $(2a-3b)^2$ (iii) $(5x+4y)(5x-4y)$ (iv) $(m+5)(m-8)$

നിർദ്ധാരണം

(i) $(3x+4y)^2$ $\left[\text{നമുക്ക്} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2\right]$

$(3x+4y)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(4y) + (4y)^2$ $[a = 3x,\ b = 4y]$ എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിക്കുക.

$= 9x^2 + 24xy + 16y^2$

(ii) $(2a-3b)^2$ $\left[\text{നമുക്ക്} (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2\right]$

$(2a-3b)^2 = (2a)^2 - 2(2a)(3b) + (3b)^2$ $[a = 2a,\ b = 3b]$ എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിക്കുക.

$= 4a^2 - 12ab + 9b^2$

Unit 3_ALGEBRA.indd 96 27-01-2023 13:17:42

(iii) $(5x+4y)(5x-4y)$ $\left[\text{നമുക്ക്} (a+b)(a-b) = a^2-b^2\right]$

$(5x+4y)(5x-4y) = (5x)^2-(4y)^2$ $[a=5x \quad b=4y]$ എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിക്കുക.

$= 25x^2-16y^2$

(iv) $(m+5)(m-8)$ $\left[\text{നമുക്ക്} (x+a)(x-b) = x^2+(a-b)x-ab\right]$

$(m+5)(m-8) = m^2+(5-8)m-(5)(8)$ $[x=m,\ a=5,\ b=8]$ എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിക്കുക.

$= m^2-3m-40$

3.4.1 $(a+b+c)^2$ എന്ന ത്രിപദവ്യംജകത്തിന്റെ വിപുലീകരണം

$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$ എന്നറിയാം

$x=a+b,\ y=c$ എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ

ഇപ്പോൾ, $(a+b+c)^2 = (a+b)^2+2(a+b)(c)+c^2$

$= a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$

$= a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

(a+b+c)²

	a	b	c
a	a^2	ab	ca
b	ab	b^2	bc
c	ca	bc	c^2

അതിനാൽ, $(a+b+c)^2 \equiv a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$



ഉദാഹരണം 3.17 $(a-b+c)^2$ - ന്റെ വിപുലീകരണം കാണുക

നിർദ്ധാരണം

b നെ -b എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$(a+(-b)+c)^2 = a^2+(-b)^2+c^2+2a(-b)+2(-b)c+2ca$

$= a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca$

പുരോഗതി പരിശോധന

തന്നിട്ടുള്ളവ വിപുലീകരിച്ച് ശരിനോക്കുക:

$(a+b+c)^2 = (-a-b-c)^2$

$(-a+b+c)^2 = (a-b-c)^2$

$(a-b+c)^2 = (-a+b-c)^2$

$(a+b-c)^2 = (-a-b+c)^2$

ഉദാഹരണം 3.18 $(2x+3y+4z)^2$ നെ വിപുലീകരിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

സർവ്വസമവാക്യം അനുസരിച്ച്,

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$a=2x, b=3y$ കൂടാതെ $c=4z$ എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ,

$(2x+3y+4z)^2 = (2x)^2+(3y)^2+(4z)^2+2(2x)(3y)+2(3y)(4z)+2(4z)(2x)$

$= 4x^2+9y^2+16z^2+12xy+24yz+16xz$

Unit 3_ALGEBRA.indd 97 27-01-2023 13:17:47

ഉദാഹരണം 3.19 $3m + 2n - 4l$ വശമുള്ള സമചതുരത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

സമചതുരത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം = വശം × വശം

$= (3m + 2n - 4l) \times (3m + 2n - 4l)$

$= (3m + 2n - 4l)^2$

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ എന്ന് നമുക്കറിയാം.

$a = 3m,$
$b = 2n$
$c = -4l$
പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ,

$[3m + 2n + (-4l)]^2 = (3m)^2 + (2n)^2 + (-4l)^2 + 2(3m)(2n) + 2(2n)(-4l) + 2(-4l)(3m)$

$= 9m^2 + 4n^2 + 16l^2 + 12mn - 16ln - 24lm$

സമചതുരത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം = $[9m^2 + 4n^2 + 16l^2 + 12mn - 16ln - 24lm]$ ചതുര മാത്രകൾ.

3.4.2 മൂന്ന് ദ്വിപദപദവ്യംജകത്തിന്റെ ഗുണനഫലങ്ങൾക്കുള്ള സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ (Identities involving Product of three binomials)

$(x + a)(x + b)(x + c) = [(x + a)\ (x + b)]\ (x + c)$

$= [x^2 + (a + b)x + ab](x + c)$

$= x^2(x) + (a + b)(x)(x) + abx + x^2c + (a + b)(x)c + abc$

$= x^3 + ax^2 + bx^2 + abx + cx^2 + acx + bcx + abc$

$= x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x + abc$

ആയതിനാൽ, $(x + a)(x + b)(x + c) \equiv x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x + abc$

ഉദാഹരണം 3.20 താഴെതന്നിട്ടുള്ളവ വിപുലീകരിക്കുക:

(i) $(x + 5)(x + 6)(x + 4)$ (ii) $(3x - 1)(3x + 2)(3x - 4)$

നിർദ്ധാരണം

സർവ്വസമവാക്യം അനുസരിച്ച്,

$(x + a)(x + b)(x + c) = x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x + abc$ --(1)

(i) $(x + 5)(x + 6)(x + 4)$

$= x^3 + (5 + 6 + 4)x^2 + (30 + 24 + 20)x + (5)(6)(4)$

$= x^3 + 15x^2 + 74x + 120$

$a = 5$
$b = 6$
$c = 4$ എന്ന് (1) -ൽ
പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ

(ii) $(3x - 1)(3x + 2)(3x - 4)$

$= (3x)^3 + (-1 + 2 - 4)(3x)^2 + (-2 - 8 + 4)(3x) + (-1)(2)(-4)$

$= 27x^3 + (-3)9x^2 + (-6)(3x) + 8$

$= 27x^3 - 27x^2 - 18x + 8$

$x = 3x$, $a = -1$,
$b = 2$, $c = -4$
എന്ന് (1) -ൽ
പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ,

Unit 3_ALGEBRA.indd 98 27-01-2023 13:17:51

3.4.3 $(x+y)^3$ ന്റെയും $(x-y)^3$ ന്റെയും വിപുലീകരണം

$(x+a)(x+b)(x+c) \equiv x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$

തന്നിട്ടുള്ള സർവ്വസമവാക്യത്തിൽ $a=b=c=y$ എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ,

$$(x+y)(x+y)(x+y) = x^3+(y+y+y)x^2+(yy+yy+yy)x+yyy$$

$$= x^3+(3y)x^2+(3y^2)x+y^3$$

അതിനാൽ, $(x+y)^3 \equiv x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ (or) $(x+y)^3 \equiv x^3+y^3+3xy(x+y)$

$y = {}^{-}y,$ എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ,

$(x-y)^3 \equiv x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$ (or) $(x-y)^3 \equiv x^3-y^3-3xy(x-y)$

ഉദാഹരണം 3.21 $(5a-3b)^3$ നെ വിപുലീകരിക്കുക

നിർദ്ധാരണം

സർവ്വസമവാക്യം അനുസരിച്ച്,

$$(x-y)^3 = x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$$

$$(5a-3b)^3 = (5a)^3-3(5a)^2(3b)+3(5a)(3b)^2-(3b)^3$$

$$= 125a^3-3(25a^2)(3b)+3(5a)(9b^2)-(3b)^3$$

$$= 125a^3-225a^2b+135ab^2-27b^3$$

താഴെതന്നിട്ടുള്ള സർവ്വസമവാക്യം വളരെ പ്രാധാന്യമുള്ളതാണ്:

$x^3+y^3+z^3-3xyz \equiv (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

ഇതിനെ നമ്മൾ വലതുഭാഗത്തുള്ള വ്യംജകങ്ങളെ ഗുണിച്ച് ശരിനോക്കാം.

കുറിപ്പ്

(i) $(x+y+z)=0$ എങ്കിൽ, $x^3+y^3+z^3=3xyz$ ആകുന്നു.

തുക, വ്യത്യാസം, ഗുണനം എന്നിവഅടങ്ങുന്ന ചില സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ (തെളിവില്ലാതെ)

(i) $x^3+y^3 \equiv (x+y)^3-3xy(x+y)$ (ii) $x^3-y^3 \equiv (x-y)^3+3xy(x-y)$

ഉദാഹരണം 3.22

$(2x+3y+4z)(4x^2+9y^2+16z^2-6xy-12yz-8zx)$ -ന്റെ ഗുണനഫലം കാണുക

നിർദ്ധാരണം

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = a^3+b^3+c^3-3abc$ എന്നറിയാം

$$(2x+3y+4z)(4x^2+9y^2+16z^2-6xy-12yz-8zx)$$

$$= (2x)^3+(3y)^3+(4z)^3-3(2x)(3y)(4z)$$

$$= 8x^3+27y^3+64z^3-72xyz$$

Unit 3_ALGEBRA.indd 99 27-01-2023 13:17:56

ഉദാഹരണം 3.23 സർവ്വസമവാക്യം ഉപയോഗിച്ച് $10^3 - 15^3 + 5^3$ -ന്റെ മൂല്യം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

സർവ്വസമവാക്യത്തിൽ $a + b + c = 0$,ആണെങ്കിൽ $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

ഇവിടെ, $a + b + c = 10 - 15 + 5 = 0$

അതുകൊ്, $10^3 + (-15)^3 + 5^3 = 3(10)(-15)(5)$

$10^3 - 15^3 + 5^3 = -2250$

$a = 10$, $b = -15$, $c = 5$ എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ,

അഭ്യാസം 3.4

1. താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവ വിപുലീകരിക്കുക:

   (i) $(x+2y+3z)^2$ (ii) $(-p + 2q + 3r)^2$

   (iii) $(2p + 3)(2p - 4)(2p - 5)$ (iv) $(3a + 1)(3a - 2)(3a + 4)$

2. പൂർണ്ണമായി വിപുലീകരിക്കാതെ x^2 -ന്റെ ഗുണാങ്കം, x -ന്റെ ഗുണാങ്കം, സ്ഥിരപദം എന്നിവ ബീജഗണിത സർവ്വസമവാക്യം ഉപയോഗിച്ച് കാണുക.

   (i) $(x + 5)(x + 6)(x + 7)$ (ii) $(2x + 3)(2x - 5)(2x - 6)$

3. $(x + a)(x + b)(x + c) = x^3 + 14x^2 + 59x + 70$, എങ്കിൽ താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയുടെ മൂല്യം കാണുക

   (i) $a + b + c$ (ii) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ (iii) $a^2 + b^2 + c^2$ (iv) $\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab}$

4. വിപുലീകരിക്കുക:

   (i) $(3a - 4b)^3$ (ii) $\left(x + \frac{1}{y}\right)^3$

5. ബീജഗണിത സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് താഴെതന്നിട്ടുള്ളവയുടെ മൂല്യം കാണുക:

   (i) 98^3 (ii) 1001^3

6. $(x + y + z) = 9$ കൂടാതെ $(xy + yz + zx) = 26$, ആണെങ്കിൽ $x^2 + y^2 + z^2$ -ന്റെ മൂല്യം കാണുക.

7. $27a^3 + 64b^3$, കൂടാതെ $3a + 4b = 10$ എങ്കിൽ $ab = 2$ -ന്റെ മൂല്യം കാണുക

8. $x^3 - y^3$ കൂടാതെ $x - y = 5$ എങ്കിൽ $xy = 14$ -ന്റെ മൂല്യം കാണുക.

9. $a + \frac{1}{a} = 6$ എങ്കിൽ $a^3 + \frac{1}{a^3}$ -ന്റെ മൂല്യം കാണുക

10. $x^2 + \frac{1}{x^2} = 23$ എങ്കിൽ $x + \frac{1}{x}$ and $x^3 + \frac{1}{x^3}$ കൂടാതെ എന്നിവയുടെ മൂല്യം കാണുക.

11. $\left(y - \frac{1}{y}\right)^3 = 27$ എങ്കിൽ $y^3 - \frac{1}{y^3}$ -ന്റെ മൂല്യം കാണുക.

12. ചുരുക്കുക: (i) $(2a + 3b + 4c)(4a^2 + 9b^2 + 16c^2 - 6ab - 12bc - 8ca)$

    (ii) $(x - 2y + 3z)(x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 2xy + 6yz - 3xz)$

Unit 3_ALGEBRA.indd 100 27-01-2023 13:18:00

13. സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് മൂല്യങ്ങൾ കാണുക:

(i) $7^3 - 10^3 + 3^3$ (ii) $1 + \frac{1}{8} - \frac{27}{8}$

14. $2x - 3y - 4z = 0$ എങ്കിൽ $8x^3 - 27y^3 - 64z^3$. കാണുക.

3.5 ഘടകങ്ങളാക്കൽ (Factorisation)

പൊതുവായി ഘടകങ്ങളാക്കുക എന്നത് ഗുണനത്തിന്റെ ഉപയദിശ പ്രക്രിയ (reverse) ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം 1 : 3 ഉം, 5 ഉം ഗുണിക്കുമ്പോൾ 15 കിട്ടും.

15 നെ ഘടകങ്ങളാക്കുമ്പോൾ 3,5 ഘടകങ്ങൾ കിട്ടും.

ഉദാഹരണം 2 : $(x + 2)$, $(x + 3)$ എന്നിവയെ ഗുണിക്കുമ്പോൾ $x^2 + 5x + 6$ കിട്ടുന്നു.

$x^2 + 5x + 6$ - നെ ഘടകങ്ങളാക്കുമ്പോൾ $(x + 2)$, $(x + 3)$ എന്നീ ഘടകങ്ങൾ കിട്ടുന്നു.

ഗുണനം ↓

$(x+3)(x+2)$

$x(x+2)+3(x+2)$

$x^2+2x+3x+6$

x^2+5x+6

ഘടകങ്ങളാക്കൽ ↑

$(x+3)(x+2)$

$x(x+2)+3(x+2)$

$x^2+2x+3x+6$

x^2+5x+6

ആകവേ, തന്നിട്ടുള്ള വലിയ കൃതിയുള്ള ബഹുപദവ്യംജകത്തെ അതിന്റെ, വീണ്ടും ഘടകങ്ങളാക്കാൻ പറ്റാത്ത വിധത്തിലുള്ള ചെറിയ കൃതിയുള്ള ഘടകങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി മാറ്റി എഴുതുന്ന പ്രക്രിയയെ ഘടകങ്ങളാക്കൽ എന്ന് പറയുന്നു.

ഘടകങ്ങളാക്കാൻ രണ്ടു രീതികൾ :

(i) സാധാരണ ഘടക രീതി (ii) തരം തിരിച്ച് എഴുതുന്ന രീതി (grouping)

$ab + ac$	$a + b - pa - pb$
$a \cdot b + a \cdot c$	$(a + b) - p(a + b)$
$a(b + c)$ ഘടക രൂപം	$(a + b)(1 - p)$ ഘടക രൂപം

ഒരു ബഹുപദവ്യംജകത്തിനെ ഘടകങ്ങളാക്കുമ്പോൾ പൊതുവായുള്ള ഘടകങ്ങളെ എടുത്ത് ഘടകങ്ങൾ ആക്കണം.

ഉദാഹരണം 3.24

ഘടകങ്ങളാക്കുക:

(i) $am + bm + cm$ (ii) $a^3 - a^2b$ (iii) $5a - 10b - 4bc + 2ac$ (iv) $x + y - 1 - xy$

നിർദ്ധാരണം

(i) $am + bm + cm$

$am + bm + cm$

$m(a + b + c)$ ഘടക രൂപം

(ii) $a^3 - a^2b$

$a^2 \cdot a - a^2 \cdot b$ തരം തിരിച്ചെഴുതുക

$a^2 \times (a - b)$ ഘടക രൂപം

Unit 3_ALGEBRA.indd 101 27-01-2023 13:18:03

(iii) $5a-10b-4bc+2ac$
$5a-10b+2ac-4bc$
$5(a-2b)+2c(a-2b)$
$(a-2b)(5+2c)$

(iv) $x+y-1-xy$
$x-1+y-xy$
$(x-1)+y(1-x)$
$(x-1)-y(x-1)$
$(x-1)(1-y)$

$(a-b)=-(b-a)$

3.5.1 സർവ്വസമവാക്യം ഉപയോഗിച്ച് ഘടകങ്ങളാക്കൽ (Factorisation using Identity)

(i) $a^2+2ab+b^2\equiv(a+b)^2$ (ii) $a^2-2ab+b^2\equiv(a-b)^2$

(iii) $a^2-b^2\equiv(a+b)(a-b)$ (iv) $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\equiv(a+b+c)^2$

(v) $a^3+b^3\equiv(a+b)(a^2-ab+b^2)$ (vi) $a^3-b^3\equiv(a-b)(a^2+ab+b^2)$

(vii) $a^3+b^3+c^3-3abc\equiv(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

കുറിപ്പ്

$(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$; $a^4-b^4=(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$

$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$; $a^6-b^6=(a+b)(a-b)(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$

പുരോഗതി പരിശോധന

തെളിയിക്കുക: (i) $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(a-\frac{1}{a}\right)^2=2\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)$ (ii) $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-\left(a-\frac{1}{a}\right)^2=4$

ഉദാഹരണം 3.25

ഘടകങ്ങളാക്കുക:

(i) $9x^2+12xy+4y^2$ (ii) $25a^2-10a+1$ (iii) $36m^2-49n^2$

(iv) x^3-x (v) x^4-16 (vi) $x^2+4y^2+9z^2-4xy+12yz-6xz$

നിർദ്ധാരണം

(i) $9x^2+12xy+4y^2=(3x)^2+2(3x)(2y)+(2y)^2\left[\because a^2+2ab+b^2=(a+b)^2\right]$
$=(3x+2y)^2$

(ii) $25a^2-10a+1=(5a)^2-2(5a)(1)+1^2$
$=(5a-1)^2$ $\left[\because a^2-2ab+b^2=(a-b)^2\right]$

(iii) $36m^2-49n^2.=(6m)^2-(7n)^2$
$=(6m+7n)(6m-7n)$ $\left[\because a^2-b^2=(a+b)(a-b)\right]$

Unit 3_ALGEBRA.indd 102 27-01-2023 13:18:08

(iv) $x^3 - x = x(x^2 - 1)$

$= x(x^2 - 1^2)$

$= x(x+1)(x-1)$

(v) $x^4 - 16 = x^4 - 2^4 \quad \left[\because a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a+b)(a-b)\right]$

$= (x^2 + 2^2)(x^2 - 2^2)$

$= (x^2 + 4)(x+2)(x-2)$

(vi) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 4xy + 12yz - 6xz$

$= (-x)^2 + (2y)^2 + (3z)^2 + 2(-x)(2y) + 2(2y)(3z) + 2(3z)(-x)$

$= (-x + 2y + 3z)^2$ (or) $(x - 2y - 3z)^2$

ഉദാഹരണം 3.26

താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവ ഘടകങ്ങളാക്കുക:

(i) $27x^3 + 125y^3$ (ii) $216m^3 - 343n^3$

(iii) $2x^4 - 16xy^3$ (iv) $8x^3 + 27y^3 + 64z^3 - 72xyz$

നിർദ്ധാരണം

(i) $27x^3 + 125y^3 = (3x)^3 + (5y)^3 \quad \left[\because (a^3 + b^3) = (a+b)(a^2 - ab + b^2)\right]$

$= (3x + 5y)\left((3x)^2 - (3x)(5y) + (5y)^2\right)$

$= (3x + 5y)(9x^2 - 15xy + 25y^2)$

(ii) $216m^3 - 343n^3 = (6m)^3 - (7n)^3 \left[\because (a^3 - b^3) = (a-b)(a^2 + ab + b^2)\right]$

$= (6m - 7n)\left((6m)^2 + (6m)(7n) + (7n)^2\right)$

$= (6m - 7n)(36m^2 + 42mn + 49n^2)$

(iii) $2x^4 - 16xy^3 = 2x(x^3 - 8y^3)$

$= 2x\left(x^3 - (2y)^3\right) \quad \left[\because (a^3 - b^3) = (a-b)(a^2 + ab + b^2)\right]$

$= 2x\left((x - 2y)(x^2 + (x)(2y) + (2y)^2)\right)$

$= 2x(x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$

(iv) $8x^3 + 27y^3 + 64z^3 - 72xyz$

$= (2x)^3 + (3y)^3 + (4z)^3 - 3(2x)(3y)(4z)$

$= (2x + 3y + 4z)(4x^2 + 9y^2 + 16z^2 - 6xy - 12yz - 8xz)$

ചിന്തിക്കുക

താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയെ 15-ൽ ഹരിക്കാൻ സാധിക്കുമോ?

(i) $2017^3 + 2018^3$

(ii) $2018^3 - 1973^3$

Unit 3_ALGEBRA.indd 103 27-01-2023 13:18:13

അഭ്യാസം 3.5

1. താഴെതന്നിട്ടുള്ളവയെ ഘടകങ്ങളാക്കുക:

   (i) $2a^2 + 4a^2b + 8a^2c$ (ii) $ab - ac - mb + mc$

2. താഴെതന്നിട്ടുള്ളവയെ ഘടകങ്ങളാക്കുക:

   (i) $x^2 + 4x + 4$ (ii) $3a^2 - 24ab + 48b^2$ (iii) $x^5 - 16x$

   (iv) $m^2 + \frac{1}{m^2} - 23$ (v) $6 - 216x^2$ (vi) $a^2 + \frac{1}{a^2} - 18$

3. താഴെതന്നിട്ടുള്ളവയെ ഘടകങ്ങളാക്കുക:

   (i) $4x^2 + 9y^2 + 25z^2 + 12xy + 30yz + 20xz$

   (ii) $25x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 20xy + 12yz - 30xz$

4. താഴെതന്നിട്ടുള്ളവയെ ഘടകങ്ങളാക്കുക:

   (i) $8x^3 + 125y^3$ (ii) $27x^3 - 8y^3$ (iii) $a^6 - 64$

5. താഴെതന്നിട്ടുള്ളവയെ ഘടകങ്ങളാക്കുക:

   (i) $x^3 + 8y^3 + 6xy - 1$ (ii) $l^3 - 8m^3 - 27n^3 - 18lmn$

3.5.2 $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ള ദ്വിഘാത ബഹുപദവ്യംജകത്തെ (ത്രിപദവ്യംജകം) ഘടകങ്ങളാകൽ

$ax^2 + bx + c$ -യുടെ രേഖീയ ഘടകങ്ങൾ $(kx + m)$ കൂടാതെ $(lx + n)$ എന്ന രൂപത്തിൽ ആകുന്നു.
അതിനാൽ, $ax^2 + bx + c = (kx + m)(lx + n) = klx^2 + (lm + kn)x + mn$

x^2, x -ന്റെ ഗുണാങ്കം കൂടാതെ സ്ഥിരപദത്തെ ഇരുവശവും താതമ്യം ചെയ്യുമ്പോൾ നമുക്ക് $a = kl$, $b = (lm + kn)$ കൂടാതെ $c = mn$ എന്ന് കിട്ടുന്നു. ഇതിൽ ac എന്നത് kl കൂടാതെ mn എന്നിവയുടെ ഗുണനഫലം ആകുന്നു. ഇത് x -ന്റെ ഗുണാങ്കമായ lm കൂടാതെ kn എന്നിവയുടെ ഗുണനഫലത്തിന് സമമാണ്.അതായത് $(kl \times mn) = (lm \times kn)$.

$ax^2 + bx + c$ യെ ഘടകങ്ങളാക്കാനുള്ള ഘട്ടങ്ങൾ:

ഘട്ടം 1 : x^2 -ന്റെ ഗുണാങ്കത്തെ സ്ഥിര പദത്തിന്റെ കൂടെ ഗുണിക്കണം. അതായത് ac.

ഘട്ടം 2 : ac -യെ രണ്ടു സംഖ്യകളായി പിരിച്ച് എഴുതണം. അങ്ങനെ പിരിക്കുമ്പോൾ ഘടകങ്ങളുടെ തുക കൂടാതെ അതിന്റെ ഗുണനഫലം യഥാക്രമം b കൂടാതെ ac ക്ക് തുല്യമാകണം.

ഘട്ടം 3 : പദങ്ങളെ രണ്ട് ജോഡികളായി പിരിച്ച് ഘടകങ്ങളാക്കണം.

ഉദാഹരണം 3.27

$2x^2 + 15x + 27$ നെ ഘടകങ്ങളാക്കുക

നിർദ്ധാരണം

$ax^2 + bx + c$ -നോട് താരതമ്യപ്പെടുത്തുമ്പോൾ,
$a = 2$, $b = 15$, $c = 27$
ഗുണനഫലം $ac = 2 \times 27 = 54$
കൂടാതെ തുക $b = 15$
6,9 എന്നീ ഘടകങ്ങൾ "$b = 15$" കൂടാതെ

സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം $ac = 54$	സംഖ്യകളുടെ തുക $b = 15$	സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം $ac = 54$	സംഖ്യകളുടെ തുക $b = 15$
1×54	55	-1×-54	-55
2×27	29	-2×-27	-29
3×18	21	-3×-18	-21
6×9	15	-6×-9	-15

ആവശ്യമായ ഘടകങ്ങൾ 6 കൂടാതെ 9

Unit 3_ALGEBRA.indd 104 27-01-2023 13:18:17

"$ac = 54$" എന്നിവയെ പൂർത്തീകരിക്കുന്നത് കാണാൻ സാധിക്കും.

∴ മധ്യപദത്തിനെ 6x കൂടാതെ 9x എന്ന് മാറ്റി എഴുതുക.

$$\begin{aligned} 2x^2 + 15x + 27 &= 2x^2 + 6x + 9x + 27 \\ &= 2x(x+3) + 9(x+3) \\ &= (x+3)(2x+9) \end{aligned}$$

അതിനാൽ, $(x+3)$, $(2x+9)$ എന്നിവ $2x^2 + 15x + 27$ -ന്റെ ഘടകങ്ങളാകുന്നു.

ഉദാഹരണം 3.28

$2x^2 - 15x + 27$ -നെ ഘടകങ്ങളാക്കുക

നിർദ്ധാരണം

$ax^2 + bx + c$ -നോട് താരതമ്യപ്പെടുത്തുമ്പോൾ,

$a = 2,\ b = -15,\ c = 27$

ഗുണനഫലം $ac = 2 \times 27 = 54$,

കൂടാതെ തുക $b = -15$

∴ മദ്ധ്യപദത്തിനെ $-6x$ കൂടാതെ $-9x$

എന്ന് മാറ്റി എഴുതുക.

$$\begin{aligned} 2x^2 - 15x + 27 &= 2x^2 - 6x - 9x + 27 \\ &= 2x(x-3) - 9(x-3) \\ &= (x-3)(2x-9) \end{aligned}$$

സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം $ac = 54$	സംഖ്യകളുടെ തുക $b = -15$	സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം $ac = 54$	സംഖ്യകളുടെ തുക $b = -15$
1×54	55	-1×-54	-55
2×27	29	-2×-27	-29
3×18	21	-3×-18	-21
6×9	15	**-6×-9**	**-15**
ആവശ്യമായ ഘടകങ്ങൾ **-6** കൂടാതെ **-9**			

അതിനാൽ, $2x^2 - 15x + 27$. -ന്റെ ഘടകങ്ങൾ $(x-3)$ കൂടാതെ $(2x-9)$ ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം 3.29

$2x^2 + 15x - 27$ -നെ ഘടകങ്ങളാക്കുക

നിർദ്ധാരണം :

$ax^2 + bx + c$ -നോട് താരതമ്യപ്പെടുത്തുമ്പോൾ,

$a = 2,\ b = 15,\ c = -27$ ˇ

ഗുണനഫലം $ac = 2 \times -27 = -54$,

കൂടാതെ തുക $b = 15$

മദ്ധ്യപദത്തിനെ $-3x$ കൂടാതെ $18x$ എന്ന് മാറ്റി എഴുതുക

$$\begin{aligned} 2x^2 + 15x - 27 &= 2x^2 + 18x - 3x - 27 \\ &= 2x(x+9) - 3(x+9) \\ &= (x+9)(2x-3) \end{aligned}$$

ആയതിനാൽ, $2x^2 + 15x - 27$-ന്റെ ഘടകങ്ങൾ$(x+9)$കൂടാതെ $(2x-3)$ ആകുന്നു.

സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം $ac = -54$	സംഖ്യകളുടെ തുക $b = 15$	സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം $ac = -54$	സംഖ്യകളുടെ തുക $b = 15$
-1×54	53	1×-54	-53
-2×27	25	2×-27	-25
-3×18	**15**	3×-18	-15
-6×9	3	6×-9	-3
-3 കൂടാതെ **18** ആവശ്യമായ ഘടകങ്ങൾ			

ഉദാഹരണം 3.30

$2x^2 - 15x - 27$ -നെ ഘടകങ്ങളാക്കുക

നിർദ്ധാരണം

$ax^2 + bx + c$ നോട് താരതമ്യപ്പെടുത്തുമ്പോൾ,

സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം $ac = -54$	സംഖ്യകളുടെ തുക $b = 15$	സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം $ac = -54$	സംഖ്യകളുടെ തുക $b = 15$
-1×54	53	1×-54	-53
-2×27	25	2×-27	-25
-3×18	15	**3×-18**	**-15**
-6×9	3	6×-9	-3
3 കൂടാതെ **-18** ആവശ്യമായ ഘടകങ്ങൾ			

Unit 3_ALGEBRA.indd 105 27-01-2023 13:18:20

$a = 2,\ b = -15,\ c = -27$

a=2, b=15, c=-27

ഗുണനഫലം $ac = 2 \times -27 = -54$, കൂടാതെ തുക b=–15

മദ്ധ്യപദത്തിനെ $-18x$ കൂടാതെ $3x$ എന്ന് മാറ്റി എഴുതുക.

$$2x^2 - 15x - 27 = 2x^2 - 18x + 3x - 27$$
$$= 2x(x-9) + 3(x-9)$$
$$= (x-9)(2x+3)$$

$2x^2 - 15x - 27$ -ന്റെ ഘടകങ്ങൾ $(x - 9)$ കൂടാതെ$(2x + 3)$ ആകുന്നു.



ഉദാഹരണം 3.31 $(x+y)^2 + 9(x+y) + 20$ -നെ ഘടകങ്ങളാക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$x + y = p$, എന്നിരിക്കട്ടെ $p^2 + 9p + 20$ -നെ

$ax^2 + bx + c$, യോട് താരതമ്യപ്പെടുത്തുമ്പോൾ

$a = 1,\ b = 9,\ c = 20$

ഗുണനഫലം $ac = 1 \times 20 = 20$, കൂടാതെ തുക b=9

മദ്ധ്യപദത്തിനെ $4p$ കൂടാതെ $5p$ എന്ന് മാറ്റി എഴുതുക

$$p^2 + 9p + 20 = p^2 + 4p + 5p + 20$$
$$= p(p+4) + 5(p+4)$$
$$= (p+4)(p+5)$$

സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം **$ac = 20$**	സംഖ്യകളുടെ തുക **$b = 9$**	സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം **$ac = 20$**	സംഖ്യകളുടെ തുക **$b = 9$**
1×20	21	-1×-20	-21
2×10	12	-2×-10	-12
4×5	**9**	-4×-5	-9

4 കൂടാതെ **5** ആവശ്യമായ ഘടകങ്ങൾ

$p = x + y$ എന്ന് പ്രസ്താപിച്ചാൽ നമുക്ക് കിട്ടുന്നത്,

$$(x+y)^2 + 9(x+y) + 20 = (x+y+4)(x+y+5)$$

അഭ്യാസം 3.6

1. ഘടകങ്ങളാക്കുക:

(i) $x^2 + 10x + 24$ (ii) $z^2 + 4z - 12$ (iii) $p^2 - 6p - 16$

(iv) $t^2 + 72 - 17t$ (v) $y^2 - 16y - 80$ (vi) $a^2 + 10a - 600$

2. ഘടകങ്ങളാക്കുക:

(i) $2a^2 + 9a + 10$ (ii) $5x^2 - 29xy - 42y^2$ (iii) $9 - 18x + 8x^2$

(iv) $6x^2 + 16xy + 8y^2$ (v) $12x^2 + 36x^2y + 27y^2x^2$

(vi) $(a+b)^2 + 9(a+b) + 18$

3. ഘടകങ്ങളാക്കുക:

(i) $(p-q)^2 - 6(p-q) - 16$ (ii) $m^2 + 2mn - 24n^2$ (iii) $\sqrt{5}a^2 + 2a - 3\sqrt{5}$

(iv) $a^4 - 3a^2 + 2$ (v) $8m^3 - 2m^2n - 15mn^2$ (vi) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{2}{xy}$

Unit 3_ALGEBRA.indd 106 27-01-2023 13:18:25

3.6 വ്യംജകങ്ങളുടെ ഹരണം (Division of Polynomials)

13,5 എന്നീ സംഖ്യകൾ പരിഗണിക്കുക. 13 നെ 5 കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന ഹരണഫലവും ശിഷ്ടവും എത്ര?

അതെ, തീർച്ചയായും ഹരണഫലം 2 ശിഷ്ടം 3 ഇതിനെ $13 = (5\times2)+3$ എന്നെഴുതാം.

നമുക്ക് ശ്രമിക്കാം

ഹരിക്കുക	സൂചിപ്പിക്കുന്നു	ശിഷ്ടം	ഹാരകം
11 നെ 4 കൊണ്ട്	$(4\times2)+3$	3	4
22 നെ 11 കൊണ്ട്	$(11\times2)+0$	0	11

ഹാര്യം = (ഹാരകം × ഹരണഫലം) + ശിഷ്ടം.

മുകളിൽ തന്നിരിക്കുന്ന ഉദാഹരണങ്ങളിൽ ഹാരകത്തിനെക്കാൾ കുറവാണ് ശിഷ്ടം എന്ന് നമുക്ക് കാണാം..

3.6.1 ബഹുപദ വ്യംജകങ്ങളുടെ ഡിവിഷൻ അൽഗോരിതം. (Division Algorithm for Polynomials)

$p(x)$, $g(x)$ എന്നിങ്ങനെ രണ്ട് വ്യംജകങ്ങൾ പരിഗണിക്കുക. ഇവിടെ $p(x)$ ന്റെ കൃതി $\geq g(x)$ ന്റെ കൃതി കൂടാതെ $g(x) \neq 0$. എന്നിങ്ങനെ രണ്ട് വ്യത്യസ്ത വ്യംജകങ്ങൾ ഉണ്ടെങ്കിൽ

$$p(x) = g(x)\times q(x) + r(x) \quad \ldots (1)$$

ഇവിടെ $r(x) = 0$ അഥവാ $r(x)$ ന്റെ കൃതി $< g(x)$ ന്റെ കൃതി.

$p(x)$ എന്ന വ്യംജകം ഹാര്യവും $g(x)$ എന്നത് ഹാരകവും $q(x)$ ഹരണഫലവും $r(x)$ ശിഷ്ടവും ആണ്. ഇപ്പോൾ (1) നെ താഴെപ്പറയുന്ന രീതിയിൽ എഴുതാം.

ഹാര്യം = (ഹാരകം × ഹരണഫലം) + ശിഷ്ടം.

$r(x)$പൂജ്യം ആയാൽ $g(x)$ ന്റെ ഗുണിതമാണ് $p(x)$ എന്നു പറയാം

മറ്റൊരുരീതിയിൽ $p(x)$ നെ $g(x)$ കൊണ്ട് ഹരിക്കാം.

ഇത് പ്രയാസകരമാണ്, എങ്കിലും വിഷമിക്കേണ്ട! വ്യംജകങ്ങൾ എങ്ങനെ ഹരിക്കാം എന്നത് അറിഞ്ഞിരിക്കേണ്ടത് അത്യാവശ്യമാണ്. കൂടാതെ പരിശീലനത്തിലൂടെ നമുക്കത് എളുപ്പമാക്കാം. താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ഉദാഹരണങ്ങൾ നിങ്ങളെ സഹായിക്കും.

ഉദാഹരണം 3.32

$x^3 - 4x^2 + 6x$ നെ x, കൊണ്ട്, ഹരിക്കുക; $x \neq 0$

നിർദ്ധാരണം

നമുക്ക്,

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 6x}{x} = \frac{x^3}{x} - \frac{4x^2}{x} + \frac{6x}{x}, x \neq 0$$
$$= x^2 - 4x + 6$$

ഉദാഹരണം 3.33

ഹരണഫലവും ശിഷ്ടവും കാണുക. $(5x^2 - 7x + 2) \div (x - 1)$

നിർദ്ധാരണം

$(5x^2 - 7x + 2) \div (x - 1)$

Unit 3_ALGEBRA.indd 107 27-01-2023 13:18:30

$$
\begin{array}{r|l}
 & 5x-2 \\
\hline
x-1 & 5x^2-7x+2 \\
 & 5x^2-5x \\
 & (-)\ \ (+) \\
\hline
 & -2x+2 \\
 & -2x+2 \\
 & (+)\ \ (-) \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

(i) $\frac{5x^2}{x} = 5x$

(ii) $5x(x-1) = 5x^2-5x$

(iii) $-\frac{2x}{x} = -2$

(iv) $-2(x-1) = (-2x+2)$

∴ഹരണഫലം $= 5x-2$ ശിഷ്ടം $= 0$

ഉദാഹരണം 3.34

$f(x)$ നെ $g(x)$ കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോഴുള്ള ഹരണഫലവും ശിഷ്ടവും കാണുക.

(i) $f(x) = (8x^3-6x^2+15x-7),\ g(x) = 2x+1.$ (ii) $f(x) = x^4-3x^3+5x^2-7,\ g(x) = x^2+x+1$

നിർദ്ധാരണം

(i) $f(x) = (8x^3-6x^2+15x-7),\ g(x) = 2x+1$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4x^2-5x+10 \\
\hline
2x+1 & 8x^3-6x^2+15x-7 \\
 & 8x^3+4x^2 \\
 & (-)\ \ (-) \\
\hline
 & -10x^2+15x \\
 & -10x^2-5x \\
 & (+)\ \ (+) \\
\hline
 & 20x-7 \\
 & 20x+10 \\
 & (-)\ \ (-) \\
\hline
 & -17
\end{array}
$$

∴ ഹരണഫലം $= 4x^2-5x+10$,

ശിഷ്ടം $= -17$

(ii) $f(x) = x^4-3x^3+5x^2-7,\ g(x) = x^2+x+1$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2-4x+8 \\
\hline
x^2+x+1 & x^4-3x^3+5x^2+0x-7 \\
 & x^4+x^3+x^2 \\
 & (-)\ \ (-)\ \ (-) \\
\hline
 & -4x^3+4x^2+0x \\
 & -4x^3-4x^2-4x \\
 & (+)\ \ (+)\ \ (+) \\
\hline
 & 8x^2+4x-7 \\
 & 8x^2+8x+8 \\
 & (-)\ \ (-)\ \ (-) \\
\hline
 & -4x-15
\end{array}
$$

ഹരണഫലം $= x^2-4x+8$,

ശിഷ്ടം $= -4x-15$

3.6.2 സിന്തറ്റിക് ഹരണം (synthetic Division)

ബഹുപദവ്യംജകങ്ങളെ രേഖീയ ഘടകങ്ങളാൽ ഹരിക്കുന്നതിന് സിന്തറ്റിക് ഹരണം ഒരു മഹത്തായ കൂടാതെ ലഘുവായ രീതിയാകുന്നു. ഇത് ഘടകങ്ങളാക്കാൻ സഹായിക്കുന്നു. ബഹുപദവ്യംജകങ്ങളുടെ മൂല്യങ്ങളെ കാണുന്നതിന് ഏറ്റവും ഉചിതമായ രീതിയായി ഈ രീതിയെ കാണാം.

ഉദാഹരണം 3.35

$p(x) = (3x^3-2x^2-5+7x)$-നെ $d(x) = x+3$ സിന്തറ്റിക് ഹരണമുപയോഗിച്ച് ഹരണഫലം കൂടാതെ ശിഷ്ടം r കാണാം.

Unit 3_ALGEBRA.indd 108 27-01-2023 13:18:31

നിർദ്ധാരണം

ഘട്ടം 1 ഹാര്യത്തിനെയും ഹാരകത്തിനെയും അരോഹണ ക്രമത്തിൽ എഴുതുക.

$3x^3 - 2x^2 + 7x - 5$ (സ്റ്റാൻഡേർഡ് രൂപം)

$x + 3$ (സ്റ്റാൻഡേർഡ് രൂപം))

ഹാര്യത്തിന്റെ ഗുണാങ്കങ്ങളെ ആദ്യ വരിയിൽ എഴുതുക. വിട്ടുപോയ (ഇല്ലാത്ത) പദത്തിന്റെ ഗുണാങ്കം '0' എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ,

3 −2 7 −5 (ആദ്യ വരി)

ഘട്ടം 2 ഹാരക വ്യംജകത്തിന്റെ പൂജ്യത്തിനെ കാണുക.

$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

ഘട്ടം 3 ഹാരക വ്യംജകത്തിന്റെ പൂജ്യത്തിനെ ആദ്യവരിയുടെ മുന്നിൽ എഴുതുക. രണ്ടാമത്തെ വരിയിൽ ആദ്യ പദത്തിനു താഴെ പൂജ്യം എഴുതുക.

−3	3	−2	7	−5	(ആദ്യ വരി)
	0				(രണ്ടാമത്തെ വരി)

ഘട്ടം 4 രണ്ടാമത്തെയും മൂന്നാമത്തെയും വരി താഴെതന്നിരിക്കുന്ന രീതിയിൽ പൂർത്തിയാക്കുക.

−3	3		−2		7	−5 (ആദ്യത്തെ വരി)
	0	−3×3	−9	−3×−11	33	−3×40 −120 (രണ്ടാമത്തെ വരി)
	3		−11		40	−125 (മൂന്നാമത്തെ വരി)

മൂന്നാമത്തെ വരിയിലുള്ള അവസാന പദം ഒഴികെയുള്ളതെല്ലാം ഹരണഫലത്തിന്റെ ഗുണാങ്കങ്ങളാകും.

ഹരണഫലം = $3x^2 - 11x + 40$ കൂടാതെ ശിഷ്ടം = -125.

ഉദാഹരണം 3.36

സിന്തറ്റിക് ഹരണമുപയോഗിച്ച് $(3x^3 - 4x^2 - 5)$-നെ $(3x+1)$കൊണ്ട് ഹരിച്ച് ഹരണഫലവും ശിഷ്ടവും കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$p(x) = 3x^3 - 4x^2 - 5$, $d(x) = (3x + 1)$

$p(x)$-നെ സ്റ്റാൻഡേർഡ് രൂപത്തിൽ എഴുതിയാൽ,

$p(x) = 3x^3 - 4x^2 + 0x - 5$ $\quad d(x) = 3x + 1$

$\frac{-1}{3}$	3	−4	0	−5	
	0	−1	$\frac{5}{3}$	$\frac{-5}{9}$	
	3	−5	$\frac{5}{3}$	$\frac{-50}{9}$	(ശിഷ്ടം)

$3x^3 - 4x^2 - 5 = \left(x + \frac{1}{3}\right)\left(3x^2 - 5x + \frac{5}{3}\right) - \frac{50}{9}$

$d(x)=3x+1$; ന്റെ പൂജ്യം കാണാൻ

$3x + 1 = 0$

$3x = -1$

$x = -\frac{1}{3}$

Unit 3_ALGEBRA.indd 109 27-01-2023 13:18:33

$$= \frac{(3x+1)}{3} \times 3\left(x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{5}{9}\right) - \frac{50}{9}$$

$$3x^3 - 4x^2 - 5 = (3x+1)\left(x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{5}{9}\right) - \left(\frac{50}{9}\right)$$ എന്തെന്നാൽ, $p(x) = d(x)q(x) + r$)

ഉദാഹരണം 3.37 $x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 29$ -നെ $(x+4)$ കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ ഹരണഫലം $x^3 - ax^2 + bx + 6$,എങ്കിൽ a, b-യുടെ മൂല്യം കൂടാതെ ശിഷ്ടം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

x+4; ന്റെ പൂജ്യം കാണാൻ

$x + 4 = 0$

$x = -4$

$p(x) = x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 29$ എങ്കിൽ

സ്റ്റാൻഡേർഡ് രൂപത്തിൽ എഴുതിയാൽ,

$p(x) = x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 29$

	ഗുണാങ്കങ്ങൾ	1	10	35	50	29	
−4		1	10	35	50	29	
		0	−4	−24	−44	−24	
		1	6	11	6	5	(ശിഷ്ടം)

ഹരണഫലം $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ -നെ $x^3 - ax^2 + bx + 6$ -നോട് താരതമ്യപ്പെടുത്തിയാൽ

x^2 ന്റെ ഗുണാങ്കം $6 = -a$, x- ന്റെ ഗുണാങ്കം $11 = b$

അതിനാൽ, $a = -6$, $b = 11$ കൂടാതെ ശിഷ്ടം $= 5$.

അഭ്യാസം 3.7

1. താഴെ തന്നിരിക്കുന്നവയുടെ ഹരണഫലവും ശിഷ്ടവും കാണുക.

   (i) $(4x^3 + 6x^2 - 23x + 18) \div (x+3)$ (ii) $(8y^3 - 16y^2 + 16y - 15) \div (2y-1)$

   (iii) $(8x^3 - 1) \div (2x-1)$ (iv) $(-18z + 14z^2 + 24z^3 + 18) \div (3z+4)$

2. ഒരു ദീർഘചതുരത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം $x^2 + 7x + 12$, അതിന്റെ വീതി $(x+3)$ ആയാൽ നീളം കാണുക?

3. ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ ആധാരം $(5x+4)$, വിസ്തീർണ്ണം $25x^2-16$ ആയാൽ ഉയരം കാണുക?

4. $(x+5)$ നിരീക്ഷണങ്ങളുടെ തുക (x^3+125) ആയാൽ അവയുടെ ശരാശരി കാണുക?

5. സിന്തറ്റിക് ഹരണമുപയോഗിച്ച് ഹരണഫലവും ശിഷ്ടവും കാണുക:

   (i) $(x^3 + x^2 - 7x - 3) \div (x - 3)$ (ii) $(x^3 + 2x^2 - x - 4) \div (x + 2)$

   (iii) $(8x^4 - 2x^2 + 6x + 5) \div (4x + 1)$

6. $(8x^4 - 2x^2 + 6x - 7)$ -നെ $(2x + 1)$ -ാൽ ഹരിച്ചാൽ ഹരണഫലം $(4x^3 + px^2 - qx + 3)$, എങ്കിൽ p,q കൂടാതെ ശിഷ്ടം കാണുക.

Unit 3_ALGEBRA.indd 110 27-01-2023 13:18:36

7. $3x^3 + 11x^2 + 34x + 106$ -നെ $x - 3$ - ാൽ ഹരിച്ചാൽ ഹരണഫലം $3x^2 + ax + b$, കിട്ടുന്നുവെങ്കിൽ a,b കൂടാതെ ശിഷ്ടം കാണുക.

3.6.3 സിന്തറ്റിക് ഹരണം ഉപയോഗിച്ച് ഘടകങ്ങളാക്കൽ (Factorisation using Synthetic Division)

ഒരു ത്രിഘാത ബഹുപദവ്യംജകത്തെ സിന്തറ്റിക് ഹരണം ഉപയോഗിച്ച് എങ്ങനെ രേഖീയ വ്യംജകഘടകങ്ങളായി എഴുതാം എന്നതിനെ ഈ ഭാഗത്തിൽ നമുക്ക് പഠിക്കാം. തന്നിട്ടുള്ള ത്രിഘാത ബഹുപദവ്യംജകം $p(x)$ -ന്റെ രേഖീയ ഘടകം ഒന്നിനെ കണ്ടുപിടിച്ചാൽ, സിന്തറ്റിക് ഹരണം ഉപയോഗിച്ച് $p(x)$. -ന്റെ ദ്വിഘാത ഘടകം ലഭിക്കും. കൂടാതെ ആ ദ്വിഘാത ഘടകത്തെ കഴിയുമെങ്കിൽ രേഖീയ ഘടകങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി ഘടകങ്ങളാക്കാം..

കുറിപ്പ്

- ഒരു സ്ഥകം $p(x)$-ന് $p(a) = 0$ എന്നിരുന്നാൽ മാത്രമേ $x = a$ എന്നത് അതിന്റെ പൂജ്യമാകും. തിരിച്ചും സാധ്യമാണ്.
- $x - a$ എന്നത് $p(x)$ ന്റെ ഒരു ഘടകമായിരുന്നാൽ മാത്രമേ $p(a) = 0$ ആകും (ഘടക സിദ്ധാന്തം). തിരിച്ചും സാധ്യമാണ്. **ഒരു ത്രിഘാത ബഹുപദവ്യംജകത്തിന് (x − 1) കൂടാതെ (x + 1) എന്നിവ ഘടകങ്ങളാണോ എന്ന് അറിയുന്നതിന് ലളിതമായ രീതി.**
- $p(x)$ ന്റെ എല്ലാ പദങ്ങളുടെയും ഗുണാങ്കങ്ങളുടെയും സ്ഥിരപദത്തിന്റെയും തുക പൂജ്യമായി ഇരുന്നാൽ മാത്രമേ $(x\text{-}1)$ അതിന്റെ ഒരു ഘടകമാകൂ.
- $p(x)$-ൽ ഇരട്ടകൃതിയുള്ള പദങ്ങളുടെ ഗുണാങ്കങ്ങളുടെയും സ്ഥിരപദത്തിന്റെയും തുകയായത് ഒറ്റ കൃതിയായുള്ള പദങ്ങളുടെ തുകയ്ക്ക് തുല്യമാണെങ്കിൽ $(x+1)$ എന്നത് $p(x)$-ന്റെ ഒരു ഘടകമാകും

ഉദാഹരണം 3.38

(i) $x^3 - 7x^2 + 13x - 7$ ന്റെ ഒരു ഘടകം $(x - 1)$ എന്ന് തെളിയിക്കുക

(ii) $x^3 + 7x^2 + 13x + 7$ ന്റെ ഒരു ഘടകം $(x + 1)$ എന്ന് തെളിയിക്കുക

നിർദ്ധാരണം

(i) $p(x) = x^3 - 7x^2 + 13x - 7$ എങ്കിൽ ഗുണാങ്കങ്ങളുടെ തുക $= 1 - 7 + 13 - 7 = 0$

$(x - 1)$ എന്നത് $p(x)$ -ന്റെ ഒരു ഘടകം ആകുന്നു

(ii) $q(x) = x^3 + 7x^2 + 13x + 7$ എങ്കിൽ

ഘാതം ഇരട്ടസംഖ്യയായിട്ടുള്ള പദങ്ങളുടെ ഗുണാങ്കത്തിന്റെയും

സ്ഥിരപദത്തിന്റെയുംതുക = 7 + 7 = 14

ഘാതം ഒറ്റ സംഖ്യയായിട്ടുള്ള പദങ്ങളുടെ ഗുണാങ്കങ്ങളുടെ തുക $x = 1 + 13 = 14$

$(x + 1)$ എന്നത് $q(x)$ -ന്റെ ഒരു ഘടകം ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം 3.39

$x^3 + 13x^2 + 32x + 20$ നെ രേഖീയ ഘടകങ്ങളായി ഘടകങ്ങളാക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$p(x) = x^3 + 13x^2 + 32x + 20$ എങ്കിൽ

എല്ലാ പദങ്ങളുടെയും ഗുണാങ്കങ്ങളുടെ തുക $= 1 + 13 + 32 + 20 = 66 \neq 0$

$(x - 1)$ എന്നത് ഒരു ഘടകമല്ല.

ഘാതം ഇരട്ടസംഖ്യയായിട്ടുള്ള പദങ്ങളുടെ ഗുണാങ്കത്തിന്റെയും സ്ഥിരപദത്തിന്റെയും തുക 13+20= 33

ഘാതം ഒറ്റ സംഖ്യയായിട്ടുള്ള പദങ്ങളുടെ ഗുണാങ്കങ്ങളുടെ തുക = 1 + 32 = 33

$(x + 1)$ എന്നത് $p(x)$ -ന്റെ ഒരു ഘടകമാണ്.

മറ്റുള്ള രേഖീയ ഘടകങ്ങളെ കാണുന്നതിന് സിന്തറ്റിക് ഹരണം ഉപയോഗിക്കാം

Unit 3_ALGEBRA.indd 111 27-01-2023 13:18:38

രീതി I

-1	1	13	32	20
	0	-1	-12	-20
-2	1	12	20	0 (ശിഷ്ടം)
	0	-2	-20	
	1	10	0	(ശിഷ്ടം)

$p(x) = (x+1)(x+2)(x+10)$

$\therefore\ x^3 + 13x^2 + 32x + 20$
$= (x+1)(x+2)(x+10)$

രീതി II

-1	1	13	32	20
	0	-1	-12	-20
	1	12	20	0 (ശിഷ്ടം)

ഇപ്പോൾ, $p(x) = (x+1)(x^2+12x+20)$

$x^2 + 12x + 20 = x^2 + 10x + 2x + 20$
$= x(x+10) + 2(x+10)$
$= (x+2)(x+10)$

$\therefore\ x^3 + 13x^2 + 32x + 20$
$= (x+1)(x+2)(x+10)$

ഉദാഹരണം 3.40 $x^3 - 5x^2 - 2x + 24$ -നെ ഘടകങ്ങളാക്കുക

നിർദ്ധാരണം

$p(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$ എങ്കിൽ

$x = 1$, എങ്കിൽ $p(1) = 1 - 5 - 2 + 24 = 18 \neq 0$ $(x-1)$ ഒരു ഘടകമല്ല.

$x = -1$, എങ്കിൽ $p(-1) = -1 - 5 + 2 + 24 = 20 \neq 0$ $(x+1)$ ഒരു ഘടകമല്ല.

$\therefore\ x$ -ന്റെ മറ്റുള്ള ഘടകങ്ങളെ കാണുന്നതിന്(trial and error method) ഉപയോഗിക്കാം.

$x = 2$ എങ്കിൽ

$p(2) = 2^3 - 5(2)^2 - 2(2) + 24$
$= 8 - 20 - 4 + 24$
$= 8 \neq 0$

$\therefore (x-2)$ ഒരു ഘടകമല്ല

$x = -2$ എങ്കിൽ

$p(-2) = (-2)^3 - 5(-2)^2 - 2(-2) + 24$
$= -8 - 20 + 4 + 24$

$p(-2) = 0$

$\therefore\ (x+2)$ ഒരു ഘടകമാകുന്നു.

-2	1	-5	-2	24
	0	-2	$+14$	-24
3	1	-7	12	0 (ശിഷ്ടം)
	0	3	-12	
	1	-4	0	(ശിഷ്ടം)

കുറിപ്പ്

$x^2 - 7x + 12$ -ന് 3 ഒരു പൂജ്യം ആണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക. അല്ലെങ്കിൽ -3 അല്ലെങ്കിൽ 4 അല്ലെങ്കിൽ -4 പൂജ്യമാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

Unit 3_ALGEBRA.indd 112 27-01-2023 13:18:41

$(x+2)(x-3)(x-4)$ എല്ലാം ഘടകങ്ങളാണ്.

$x^3 - 5x^2 - 2x^2 + 24 = (x+2)(x-3)(x-4)$



അഭ്യാസം 3.8

1. സിന്തറ്റിക് ഹരണം ഉപയോഗിച്ച് ഘടകങ്ങളാക്കുക:

(i) $x^3 - 3x^2 - 10x + 24$ (ii) $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$

(iii) $-7x + 3 + 4x^3$ (iv) $x^3 + x^2 - 14x - 24$

(v) $x^3 - 7x + 6$ (vi) $x^3 - 10x^2 - x + 10$

3.7 ഉത്തമസാധാരണ ഭാജകം (ഉ.സാ.ഭാ) Greatest Common Divisor (GCD)

രണ്ടോ അതി ലധികമോ വ്യംജകങ്ങൾ ഓരോന്നിനേയും നിശ്ശേഷം ഹരിക്കുന്ന ഏറ്റവും കൂടിയ ഘാതമുള്ള വ്യംജകങ്ങളാണ് ഉത്തമ സാധാരണ ഭാജകം (GCD). ഇതിനെ ഉത്തമ സാധാരണ ഘടകം (Highest Common Factor) എന്നും വിളിക്കുന്നു.

ഈ ആശയം രണ്ടു പൂർണ്ണാങ്കങ്ങളുടെ ഉ.സാ.ഭാ കാണുന്നതന് സദൃശ്യമാണ്.

ഉദാഹരണമായി : $14x^2y$ കൂടാതെ $42xy$ എന്നീ വ്യംജകങ്ങളെ കരുതുക. 14 കൂടാതെ 42-ന്റെ പൊതുഘടകങ്ങൾ 2,7 കൂടാതെ 14 ആകുന്നു. ഇവയുടെ ഉ.സാ.ഭാ 14 ആകുന്നു. xy^2 കൂടാതെ xy- ന്റെ പൊതുഘടകങ്ങൾ x,y കൂടാതെ xy ആകുന്നു.അതിനാൽ, ഉ.സാ.ഭാ xyആകുന്നു.

$$14xy^2 = 1 \times 2 \times 7 \times x \times y \times y$$

$$42xy = 1 \times 2 \times 3 \times x \times y$$

അതിനാൽ, $14xy^2$ കൂടാതെ $42xy$ -ന്റെ ഉ.സാ.ഭാ $14xy$ ആകുന്നു.

ഘടകരീതിയിൽ ഉ.സാ.ഭാ കാണുന്ന വിധം

(i) തന്നിട്ടുള്ള ഓരോ വ്യംജകത്തെയും, ഘടകങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതുക.

(ii) ഹാരകവ്യംജകത്തിന്റെ പൊതുവായ ഏറ്റവും ഉയർന്ന കൃതിയുള്ള വ്യംജകം ഉ.സാ.ഭാ. ആകുന്നു.

(iii) വ്യംജകങ്ങളുടെ ഗുണാങ്കങ്ങൾ സംഖ്യകളായിരുന്നാൽ, അവയുടെ ഉ.സാ.ഭാ കണ്ടുപിടിച്ച് അതിനെ വ്യംജകങ്ങളുടെ ഉ.സാ.ഭാ യുടെ മുൻപിൽ എഴുതണം.

ഉദാഹരണം 3.41

താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയുടെ ഉ.സാ.ഭാ കാണുക:

(i) $16x^3y^2,\ 24xy^3z$

(ii) (y^3+1) and (y^2-1)

(iii) $2x^2 - 18$ and $x^2 - 2x - 3$

(iv) $(a-b)^2,\ (b-c)^3,\ (c-a)^4$

Unit 3_ALGEBRA.indd 113 27-01-2023 13:18:43

നിർദ്ധാരണം

(i) $16x^3y^2 = 2\times2\times2\times2\times x^3y^2 = 2^4\times x^3\times y^2 = 2^3\times2\times x^2\times x\times y^2$

$24xy^3z = 2\times2\times2\times3\times x\times y^3\times z = 2^3\times3\times x\times y^3\times z = 2^3\times3\times x\times y\times y^2\times z$

അതിനാൽ, ഉ.സാ.ഭാ, $GCD = 2^3xy^2$

(ii) $y^3+1 = y^3+1^3 = (y+1)(y^2-y+1)$

$y^2-1 = y^2-1^2 = (y+1)(y-1)$

അതിനാൽ, ഉ.സാ.ഭാ, $GCD = (y+1)$

(iii) $2x^2-18 = 2(x^2-9) = 2(x^2-3^2) = 2(x+3)(x-3)$

$x^2-2x-3 = x^2-3x+x-3$

$= x(x-3)+1(x-3)$

$= (x-3)(x+1)$

അതിനാൽ, ഉ.സാ.ഭാ, $GCD = (x-3)$

(iv) $(a-b)^2, (b-c)^3, (c-a)^4$

ഇതിന് 1 അല്ലാതെ വേറെ പൊതു ഘടകം ഇല്ല.

അതിനാൽ, ഉ.സാ.ഭാ, $GCD = 1$

അഭ്യാസം 3.9

1. താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയുടെ ഉ.സാ.ഭാ കാണുക:

(i) p^5, p^{11}, p^9 (ii) $4x^3, y^3, z^3$

(iii) $9a^2b^2c^3, 15a^3b^2c^4$ (iv) $64x^8, 240x^6$

(v) $ab^2c^3, a^2b^3c, a^3bc^2$ (vi) $35x^5y^3z^4, 49x^2yz^3, 14xy^2z^2$

(vii) $25ab^3c, 100a^2bc, 125ab$ (viii) $3abc, 5xyz, 7pqr$

2. താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയുടെ ഉ.സാ.ഭാ കാണുക:

(i) $(2x+5), (5x+2)$ (ii) $a^{m+1}, a^{m+2}, a^{m+3}$

(iii) $2a^2+a, 4a^2-1$ (iv) $3a^2, 5b^3, 7c^4$

(v) x^4-1, x^2-1 (vi) $a^3-9ax^2, (a-3x)^2$

Unit 3_ALGEBRA.indd 114 27-01-2023 13:18:48

3.8 രണ്ട് ചരങ്ങളുള്ള രേഖീയ സമീകരണം

രണ്ട് ചരങ്ങളുള്ള രേഖീയ സമീകരണം $ax + by + c = 0$ എന്ന രൂപത്തിലായിരിക്കും ഇവിടെ a, b കൂടാതെ c എന്നിവ വാസ്തവിക സംഖ്യകളാണ് a,b ഇവ രണ്ടും പൂജ്യം ആയിരിക്കില്ല (x , y എന്നിവ ചരങ്ങളാണ് കൂടാതെ c സ്ഥിരാങ്കമാണ്)

ഉദാഹരണങ്ങൾ

രണ്ട് ചരങ്ങൾ ഉള്ള രേഖീയ സമീകരണം	രണ്ട് ചരങ്ങൾ ഇല്ലാത്ത രേഖീയ സമീകരണങ്ങൾ
$2x + y = 4$	$xy + 2x = 5$ (എന്ത് കൊണ്ട്)
$-5x + \frac{1}{2} = y$	$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 25$ (എന്ത് കൊണ്ട്)
$5x = 35y$	$x(x+1) = y$ (എന്ത് കൊണ്ട്)

ഒരു സമീകരണത്തിന്റെ രണ്ട് ചരങ്ങളും ഏക ഘാതമാണ്, ചരങ്ങൾ പരസ്പരം ഗുണിക്കപ്പെട്ടില്ല എങ്കിൽ ഇതിനെ രണ്ട് ചരങ്ങൾ ഉള്ള രേഖീയ സമീകരണം എന്ന് പറയുന്നു (രണ്ട് ചരങ്ങളുള്ള സമീകരണത്തിന്റെ ഘാതം 1 ആണെങ്കിൽ അതിനെ രണ്ട് ചരങ്ങളുള്ള രേഖീയ സമീകരണം എന്നു പറയുന്നു)

രണ്ട് ചരങ്ങളുള്ള രേഖീയ സമീകരണത്തിനെ ജ്യാമിതീയ ദൃശ്യവൽക്കരിച്ചാൽ(ഗ്രാഫ് മുഖേന)മനസ്സിലാക്കുന്നതിന് എളുപ്പമായിരിക്കും.

എന്തുകൊണ്ട് $2x + y = 4$ എന്ന രേഖീയ സമീകരണത്തിനെ തരം തിരിക്കുന്നു. നിങ്ങൾ ഉദ്ദേശിച്ചത് ശരിയാണ് എന്തുകൊണ്ടെന്നാൽ അതിന്റെ ഗ്രാഫ് ഒരു നേർരേഖയാണ് നമുക്ക് ഇതിനെ പരിശോധിക്കിമോ?

ഇതിന്റെ ഗ്രാഫ് $2x + y = 4$, വരക്കുന്നതിന് ശ്രമിക്കാം എന്നതിന്റെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുന്നതിന് ആ രേഖയിലുള്ള ചില ബിന്ദുക്കൾ ആവശ്യമാണ് അവയെ നമുക്ക് യോജിപ്പിക്കാം(ഇവ സമീകരണത്തിനെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്ന ക്രമജോഡികളാണ്).

$2x + y = 4$ എന്ന സമീകരണത്തിന് തന്നിട്ടുള്ള ക്രമജോഡികൾക്കുള്ള പട്ടിക തയ്യാറാക്കാം.

ഇതിനെ $y = 4 - 2x$ എന്ന് എഴുതാം

$x = -4$ ആയാൽ, $y = 4 - 2(-4) = 4 + 8 = 12$

$x = -2$ ആയാൽ, $y = 4 - 2(-2) = 4 + 4 = 8$

$x = 0$ ആയാൽ, $y = 4 - 2(0) = 4 + 0 = 4$

$x = +1$ ആയാൽ, $y = 4 - 2(+1) = 4 - 2 = 2$

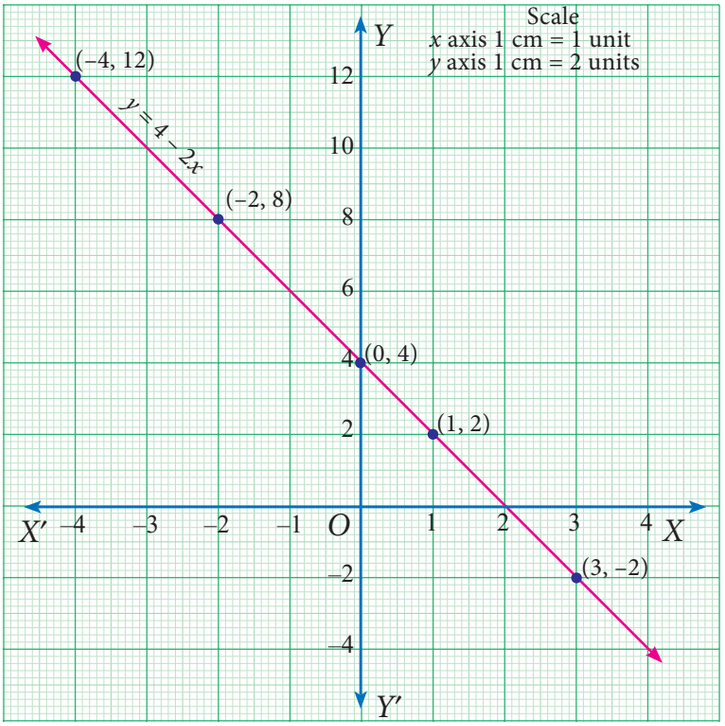
$x = +3$ ആയാൽ, $y = 4 - 2(+3) = 4 - 6 = -2$

ഈ മൂല്യങ്ങളെ പട്ടികയിലാക്കം.

x-മൂല്യം	-4	-2	0	1	3
y-മൂല്യം	12	8	4	2	-2

(ഒരു രേഖവരയ്ക്കുന്നതിന് അനേകം ബിന്ദുക്കൾ ആവശ്യമാണോ അല്ലെങ്കിൽ രണ്ട് ബിന്ദുക്കളും ഒരു ബിന്ദുവും ശരിനോക്കുന്നതിനു മതിയാകും)

Unit 3_ALGEBRA.indd 115 27-01-2023 13:18:48



ചിത്രം.3.15

(−4,12), (−2,8), (0,4), (1,2) കൂടാതെ (3,−2) എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ രേഖപ്പെടുത്തുമ്പോൾ ഒരു നേർരേഖയിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നുവെന്ന് കണ്ടെത്താം.

ഇത് $2x + y = 4$ എന്ന സമീകരണം ഒരു നേർരേഖയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നുവെന്ന് വ്യക്തമാക്കുന്നു. (അതുകൊണ്ട് രേഖീയമാണ്).

ആരേഖയിലുള്ള എല്ലാ ബിന്ദുക്കളും ഈ സമീകരണത്തെ തൃപ്തിപെടുത്തുന്നു.അതുകൊണ്ട് ആ ബിന്ദുക്കളുടെ എല്ലാ ക്രമജോഡികളും ആ സമീകരണത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണങ്ങളാണ്.

ഉദാഹരണം 3.42

തഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയുടെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക:

(i) $y = 3x - 1$ (ii) $y = \left(\frac{2}{3}\right)x + 3$

നിർദ്ധാരണം

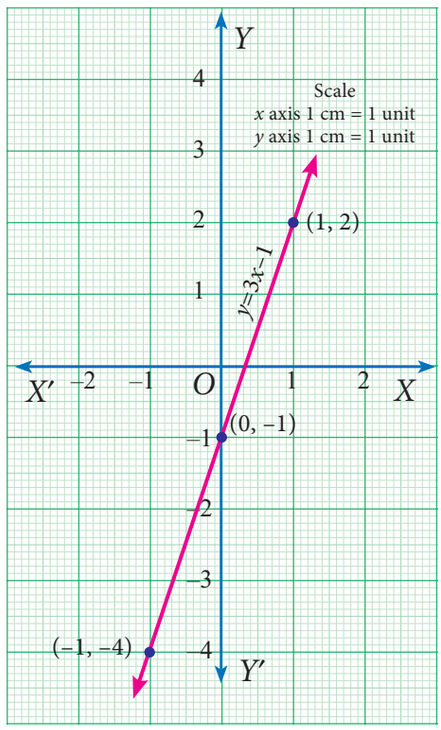
(i) $y = 3x - 1$ എന്ന രേഖയിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെ ക്രമജോഡികളെ കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിനുള്ള പട്ടികതയ്യാറാക്കാം.

x ന് ഏത് മൂല്യവും എടുക്കാം നമ്മുടെ ഇഷ്ടാനുസരണം -1, 0 കൂടാതെ 1 എന്ന് എടുക്കാം.

$x = -1$ ആയാൽ, $y = 3(-1) - 1 = -4$

$x = 0$ ആയാൽ, $y = 3(0) - 1 = -1$

$x = 1$ ആയാൽ, $y = 3(1) - 1 = 2$



ചിത്രം.3.16

Unit 3_ALGEBRA.indd 116 27-01-2023 13:18:50

x	-1	0	1
y	-4	-1	2

(x,y)ബിന്ദുക്കളെ അടയാളപ്പെടുത്താം:

$(-1, -4)$, $(0, -1)$ കൂടാതെ $(1, 2)$.

(ii) $y=\left(\frac{2}{3}\right)x+3$ എന്ന രേഖയിലുള്ള

കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് ബിന്ദുക്കളുടെ ക്രമജോഡികളെ

കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് പട്ടികതയ്യാറാക്കാം

x ന്റെ മൂല്യങ്ങളായി -3, 0, 3, x എന്നിവയെടുക്കാം (എന്തുകൊണ്ട്?)

$x=-3$ ആയാൽ, $y=\frac{2}{3}(-3)+3=1$

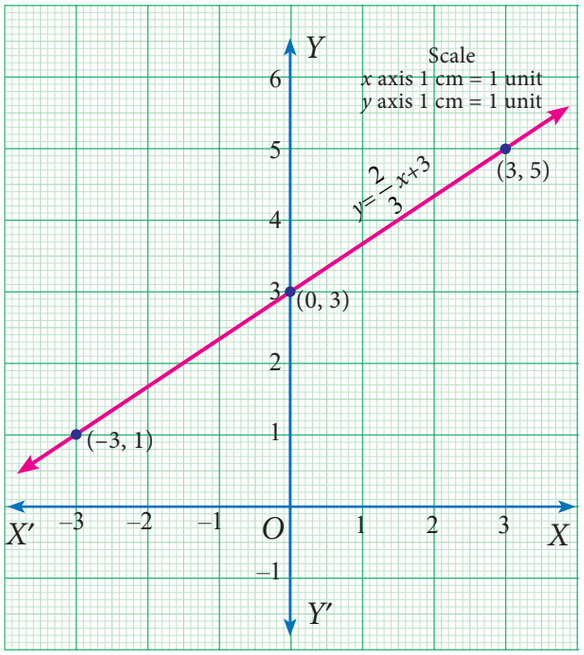
$x=0$ ആയാൽ, $y=\frac{2}{3}(0)+3 \ =3$

$x=3$ ആയാൽ, $y=\frac{2}{3}(3)+3 \ =5$

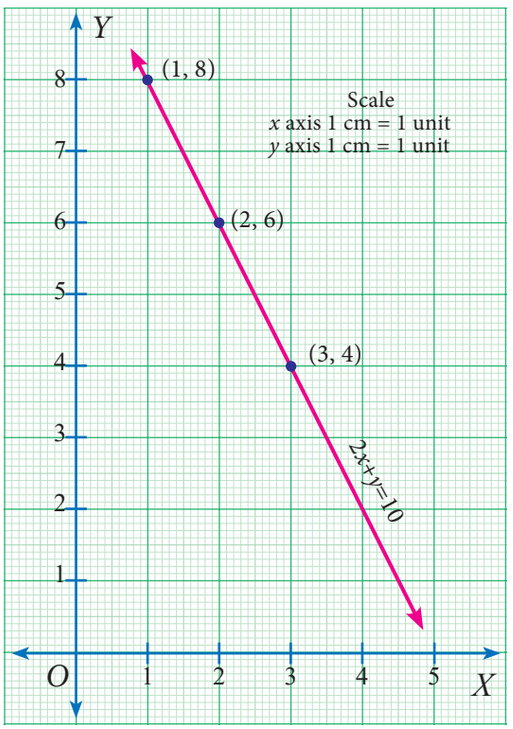
x	-3	0	3
y	1	3	5

(x,y)ബിന്ദുക്കളെ അടയാളപ്പെടുത്താം :

$(-3,1)$, $(0,3)$ കൂടാതെ $(3,5)$.



ചിത്രം. 3.17



ചിത്രം.3.18

3.8.1 ഏകകാല രേഖീയ സമീകരണങ്ങൾ

ഒരു സമീകരണത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുന്നത് എങ്ങനെ എന്ന് പഠിച്ച് നേടിയ അറിവ് കൊണ്ട് സമീകരണങ്ങളുടെ സമ്പ്രദായത്തെക്കുറിച്ചും പ്രത്യേകിച്ചും ഒരു ജോഡി ഏകകാല സമീകരണങ്ങളെക്കുറിച്ച് നമുക്ക് പഠിക്കാം.

ഏകകാല രേഖീയ സമീകരണങ്ങൾ എന്നാൽ എന്ത്? ഒരേ ചരങ്ങൾ ഉള്ള രണ്ടോ അതിൽ കൂടതലോ രേഖീയസമീകരണങ്ങൾ ഇവയിൽപ്പെടുന്നു.

ഇവയുടെ ആവശ്യം എന്താണ്? ഒരു ലളിതമായ സമീകരണം $2x+y=10$ എന്നതിന് അനന്തമായ നിർദ്ധാരണങ്ങൾ ഉണ്ട്. ബിന്ദുക്കൾ $(1,8)$, $(2,6)$, $(3,4)$ എന്നിവ തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണത്തിന്റെ ഗ്രാഫിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു. ഇതിൽ നിന്നും ഈ ബിന്ദുക്കൾ അനന്തമായ നിർദ്ധാരണങ്ങളിൽ ചിലത് ആണ് എന്ന് മനസ്സിലാക്കാം. ഈ സമീകരണത്തോടൊപ്പം മറ്റൊരു സമീകരണം കൂടി ഉപയോഗിച്ച് രണ്ട് സമീകരണങ്ങളെയും തൃപ്തമാക്കുന്ന ക്രമജോഡിയെ കണ്ടുപിടിക്കാൻ സാധിക്കും.

Unit 3_ALGEBRA.indd 117 27-01-2023 13:18:53

ഇത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിൽ നമ്മൾ ഉപയോഗിക്കുന്ന സമീകരണങ്ങളെ ഏകകാല രേഖീയ സമീകരണങ്ങൾ എന്ന് പറയുന്നു.

ദൈനം ദിന ജീവിതത്തിലെ ഏകകാല രേഖീയ സമീകരണങ്ങളെ മനസ്സിലാക്കുന്നതിനുള്ള സന്ദർഭങ്ങൾ

ഈ സന്ദർഭത്തെ പരിഗണിക്കാം. അനിതാ ₹10ന് രണ്ട് റബ്ബറും ഒരു പെൻസിലും വാങ്ങിച്ചു. ഒരോന്നിന്റെയും വില അവൾക്ക് അറിയില്ല റബ്ബറിന്റെ വില 'x' പെൻസിലിന്റെ വില 'y' എന്നിരിക്കട്ടെ എങ്കിൽ നമുക്ക് ഇതിനെ സമീകരണമായി രുപീകരിക്കാം.

അതായത് $2x + y = 10$ ... (1)

ഇപ്പോൾ ഒരു റബ്ബർ ഒരു പെൻസിൽ ഇവയുടെ വിലകൾ അറിയാൻ ആഗ്രഹിക്കുന്നു. x, y എന്നിവയ്ക്ക് വിലകൾ അനേകം മൂല്യങ്ങൾ നൽകി ആദ്യത്തെ നിർദ്ധാരണം കണ്ടുപിടിക്കാൻ ശ്രമിക്കുന്നു.

$2(1)+8 = 10$

$2(1.5)+7 = 10$

$2(2)+6 = 10$

$2(2.5)+5 = 10$

$2(3)+4 = 10$

⋮ ⋮

അടയാളപ്പെടുത്തേണ്ട ബിന്ദുക്കൾ:

x	1	1.5	2	2.5	3	...
y	8	7	6	5	4	...

അവൾക്ക് അനേകം ഉത്തരങ്ങൾ ലഭിക്കുന്നു. അതു കൊണ്ട് രണ്ടാമത്തെ സമീകരണത്തിൽ നിന്നും വില കണ്ടുപിടിക്കാൻ ശ്രമിക്കുന്നു. അനിതയ്ക്ക് കൂടുതൽ പെൻസിലുകളും റബ്ബറുകളും ആവശ്യമായി വരുന്നു. ഈ സമയത്ത് അവൾ 3 റബ്ബറും 4 പെൻസിലുകളും വാങ്ങിച്ചു. കടക്കാരൻ ഇവയുടെ വിലയായി വാങ്ങി. ഇതിനെ നമുക്ക് സമീകരണമായി രൂപീകരിക്കാം.

$3x + 4y = 30$ ...(2)

ഇപ്പോഴും അനേകം ഉത്തരങ്ങൾ ലഭിക്കുന്നു.

3 × റബ്ബറിന്റെ വില + 4 × പെൻസിലിന്റെ വില = 30

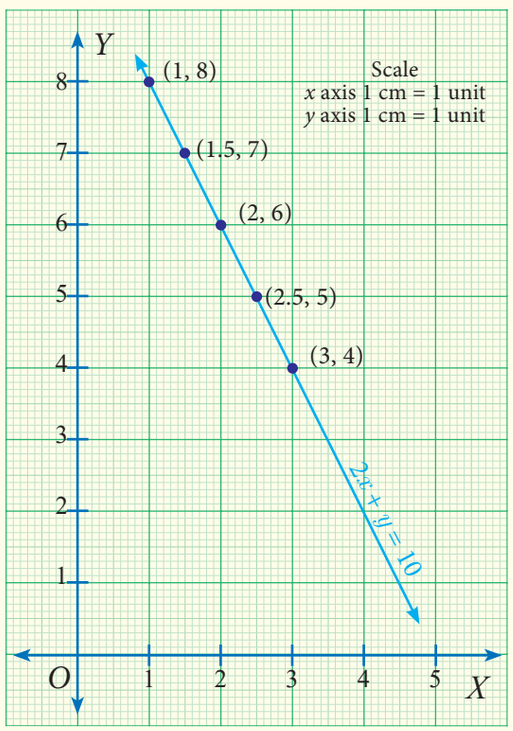
$3(2)+4(6) = 30$

$3(4)+4(4.5) = 30$

$3(6)+4(3) = 30$

$3(8)+4(1.5) = 30$

⋮ ⋮



ചിത്രം. 3.19

Unit 3_ALGEBRA.indd 118 27-01-2023 13:18:54

അടയാളപ്പെടുത്തേണ്ട ബിന്ദുക്കൾ :

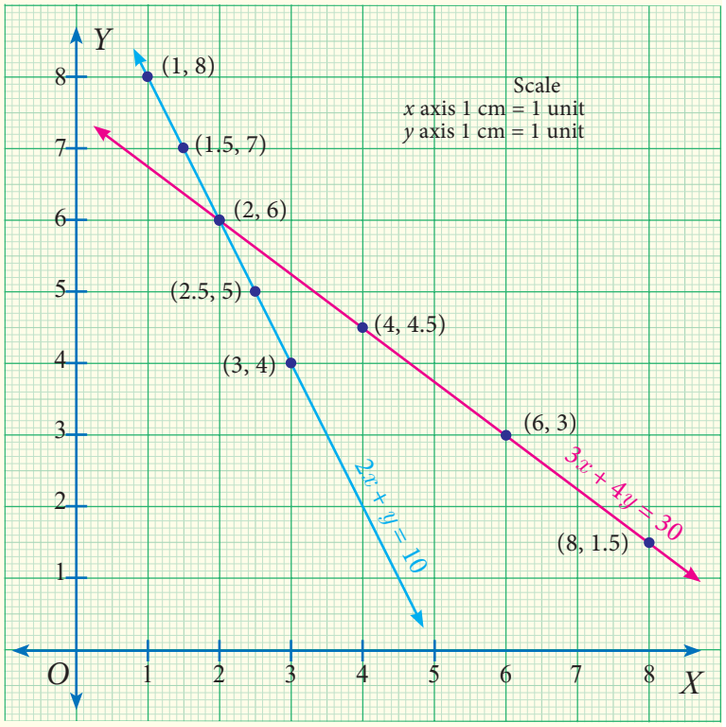
x	2	4	6	8	...
y	6	4.5	3	1.5	...

ഇതിനെക്കുറിച്ച് അധ്യാപകനുമായി ചർച്ചചെയ്തപ്പോൾ രണ്ട് സമീകരണങ്ങളെയും ഒരുമിച്ച് നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുമ്പോൾ ഒരു ഉത്തരം മാത്രം ലഭിക്കുന്നു.

സമീകരണം (1),(2) എന്നിവയെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുമ്പോൾ ഒരു റബ്ബറുടെ വില ₹2 ഒരു പെൻസിലിന്റെ വില ₹6 ലഭിക്കുന്നു. ഇതിനെ ഗ്രാഫിൽ ദൃശ്യവൽക്കരിച്ചിരിക്കുന്നു.

ഇതുപോലത്തെ സന്ദർഭങ്ങളിൽ അർദ്ധപൂർണ്ണമായി ഒരുമിച്ച് എടുത്ത സമീകരണങ്ങളെ ഏകകാല സമീകരണങ്ങൾ എന്ന് പറയുന്നു.

ഇതിൽ നിന്നും രേഖീയ സമീകരണങ്ങളുടെ സമ്പ്രദായത്തിൽ ഒരേ ചതുരങ്ങളുള്ള രണ്ടോ അതിൽ അധികമോ രേഖീയ സമീകരണങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കും.



ചിത്രം. 3.20

ഉദാഹരണം 3.43

$(5, -1)$ എന്നത് $x - 2y = 7$ കൂടാതെ $2x + 3y = 7$ എന്നീ ഏകകാല സമീകരണങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണമാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ളത് $x - 2y = 7$ ...(1)

$2x + 3y = 7$ ...(2)

$x = 5,\ y = -1$ ആയാൽ

സമീകരണം (1) ൽനിന്ന് $x - 2y = 5 - 2(-1) = 5 + 2 = 7$ സമീകരണം (1) ന്റെ RHS

സമീകരണം (2) ൽനിന്ന് $2x + 3y = 2(5) + 3(-1) = 10 - 3 = 7$ സമീകരണം (2) ന്റെ RHS

ഇതിൽ നിന്നും $x = 5,\ y = -1$ എന്നീ മൂല്യങ്ങൾ സമീകരണം (1) കൂടാതെ സമീകരണം (2) എന്നിവയെ തൃപ്തമാക്കുന്നു എന്ന് മനസ്സിലാക്കാം.

Unit 3_ALGEBRA.indd 119 27-01-2023 13:18:54

പുരോഗതി പരിശോധന

(3,3)ഏകകാല രേഖീയ സമീകരണങ്ങൾ $2x - 5y - 2 = 0$ കൂടാതെ $x + y - 6 = 0$ എന്നിവയുടെ നിർദ്ധാരണമാണോ എന്ന് ഗ്രാഫ് വരച്ച് പരിശോധിക്കുക.

3.8.2 ഏകകാല രേഖീയ സമീകരണങ്ങളെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്ന രീതികൾ

ഒരു ജോഡി ഏകകാല രേഖീയ സമീകരണങ്ങളെ വിവിധ രീതികളിൽ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യാം. ഇതിനെ ജ്യാമിതീയ രീതി കൂടാതെ ബീജഗണിത രീതി എന്ന് തരം തിരിക്കാം..

ജ്യാമിതീയ രീതി	ബീജഗണിത രീതി
1. ഗ്രാഫ് മുഖേന രീതി	1. പ്രതിസ്ഥാപിക്കൽ രീതി
	2. ഒഴിവാക്കൽ രീതി
	3. വജ്രഗുണന രീതി

ഗ്രാഫ് മുഖേന നിർദ്ധാരണം ചെയ്യൽ രീതി.

രണ്ട് ചരങ്ങൾ ഉള്ള രേഖീയ സമീകരണത്തെ ഗ്രാഫായി അവതരിപ്പിക്കുന്നത് നമുക്ക് അറിയാം. ഇവിടെ രണ്ട് ചരങ്ങൾ ഉള്ള ഒരു ജോഡി രേഖീയ സമീകരണങ്ങളെ ഗ്രാഫ് മുഖേന അവതരിപ്പിച്ച് അവയുടെ നിർദ്ധാരണം കണ്ടു പിടിക്കുന്നത് എങ്ങനെ എന്നു പഠിക്കാം.

ഉദാഹരണം 3.44 താഴെ തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണങ്ങളെ ഗ്രാഫ് മുഖേന രീതിയിൽ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക $x + y = 5$; $2x - y = 4$.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ളത് $x + y = 5$ ...(1)

$2x - y = 4$ ...(2)

എളുപ്പത്തിൽ സമീകരണം (1) ന്റെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കാം. ഇതിൽ നിന്നും x കൂടാതെ y അന്തഃഖണ്ഡങ്ങളെയും സമീകരണം (1) ന്റെ രേഖയിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന ബിന്ദുക്കളെ കണ്ട് പിടിക്കാം.

$x = 0$ ആയാൽ (1) ൽ നിന്ന് $y = 5$

ഇതിൽ നിന്ന് $A(0,5)$ രേഖയിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്ന ബിന്ദുവാണ്

ഇതുപോലെ $y = 0$ ആയാൽ, (1) ൽനിന്ന് $x = 5$.

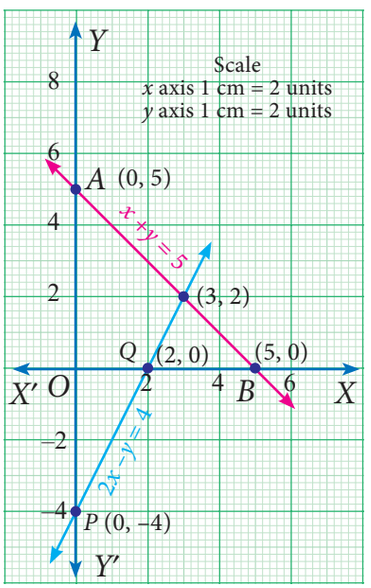
ഇതിൽ നിന്ന് $B(5,0)$ രേഖയിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്ന മറ്റൊരു ബിന്ദുവാണ്.

A യും B യും രേഖപ്പെടുത്തി അവയെ യോജിപ്പിച്ച് വര (1) നെ നീട്ടുക.

(2) ന്റെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുന്നതിനും, അതേ രീതി സ്വീകരിക്കാം.

ആയാൽ $x = 0$, സമീകരണം (2) ൽനിന്ന് $y = -4$.

ഇങ്ങനെ P(0,−4) രേഖയിലുള്ള മറ്റൊരു ബിന്ദുവാണ്



ചിത്രം. 3.21

Unit 3_ALGEBRA.indd 120 27-01-2023 13:18:55

$y = 0$ ആയാൽ , സമീകരണം 2) ൽനിന്ന് $x = 2$.

ഇങ്ങനെ $Q(2,0)$ രേഖയിലുള്ള മറ്റൊരു ബിന്ദുവാണ്

P, Q; നെ അടയാളപ്പെടുത്തുക; യോജിപ്പിച്ച് രേഖ (2), നെ നീട്ടുക.

രേഖകൾ (1), (2) ചേദിക്കുന്ന ബിന്ദു (3, 2)നിർദ്ധാരണം ആകുന്നു.

കുറിപ്പ്

കിട്ടിയ ഉത്തരം ശരിയാണോ കൂടാതെ രണ്ട് സമീകരണങ്ങളെയും തൃപ്തമാക്കുന്നോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

രണ്ട് രേഖകൾക്കും നിർദ്ധാരണ ബിന്ദു പൊതുവായിരിക്കും. ഇവിടെ (3, 2) എന്ന് കണ്ടു പിടിച്ചു അതുകൊണ്ട് നിർദ്ധാരണത്തിനെ $x = 3$ കൂടാതെ $y = 2$ എന്നെഴുതാം.

ഉദാഹരണം 3.45

ഗ്രാഫ് രീതി ഉപയോഗിച്ച് $3x + 2y = 6$; $6x + 4y = 8$ എന്നീ സമീകരണങ്ങളെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക.

നിർദ്ധാരണം

ഓരോ രേഖകൾക്കും മൂല്യങ്ങൾ നൽകി പട്ടിക തയ്യാറാക്കുക അടയാളപ്പെടുത്തേണ്ട ക്രമ ജോഡികൾ നിശ്ചയിക്കുക.

$3x + 2y = 6$ ന്റെ ഗ്രാഫ്

x	-2	0	2
y	6	3	0

രേഖപ്പെടുത്തേണ്ട ബിന്ദുക്കൾ:

$(-2,6), (0,3), (2,0)$

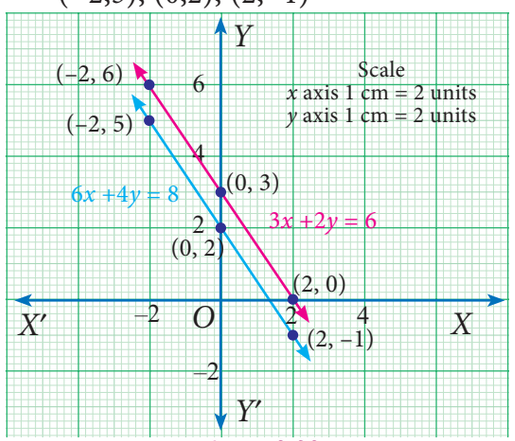
$6x + 4y = 8$ ന്റെ ഗ്രാഫ്

x	-2	0	2
y	5	2	-1

രേഖപ്പെടുത്തേണ്ട ബിന്ദുക്കൾ:

$(-2,5), (0,2), (2,-1)$

ഈ ഗ്രാഫുകൾ വരച്ചപ്പോൾ അവ പരസ്പരം സമാന്തരമാണന്നും ഛേദിക്കുന്നില്ലെന്നും കണ്ടെത്താം. രണ്ട് സമീകരണങ്ങൾക്കും പൊതുവായി ഒരു ക്രമജോഡികളും ഇല്ല. ഇത്തരം സമീകരണങ്ങൾക്ക് നിർദ്ധാരണം ഇല്ല. ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുന്നതിന് മുൻമ്പേ നമുക്ക് ഇത് മനസ്സിലാക്കാം രണ്ട് സമീകരണങ്ങളെയും $y = mx + c$ എന്ന രൂപത്തിൽ ആക്കുക.ചായ്വുകൾ രണ്ടും തുല്യം എന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക. ഇതിൽ നിന്നും രേഖകൾ സമാന്തരമാണ്. അവ ഛേദിക്കുന്നില്ല.കൂടാതെ നിർദ്ധാരണംവും ഇല്ല.



ചിത്രം. 3.22

ഉദാഹരണം 3.46

ഗാഫ് മുഖേന $y = 2x + 1$; $-4x + 2y = 2$ എന്നീ സമീകരണങ്ങളെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക

നിർദ്ധാരണം

ഓരോ രേഖകൾക്കും മൂല്യങ്ങൾ നൽകി പട്ടിക തയ്യാറാക്കുക. അടയാളപ്പെടുത്തേണ്ട ക്രമജോഡികൾ നിശ്ചയിക്കുക.

$y = 2x + 1$ ന്റെ ഗ്രാഫ്

$-4x + 2y = 2$ ന്റെ ഗ്രാഫ്

$2y = 4x + 2$

$y = 2x + 1$

Unit 3_ALGEBRA.indd 121 27-01-2023 13:18:56

x	-2	-1	0	1	2
$2x$	-4	-2	0	2	4
1	1	1	1	1	1
$y = 2x+1$	-3	-1	1	3	5

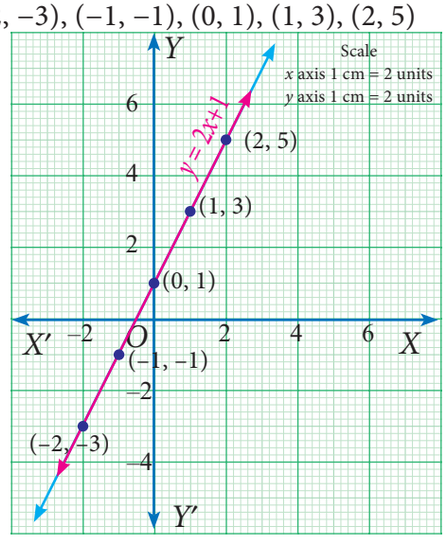
രേഖപ്പെടുത്തേണ്ട ബിന്ദുക്കൾ ;

$(-2, -3), (-1, -1), (0,1), (1,3), (2, 5)$

x	-2	-1	0	1	2
$2x$	-4	-2	0	2	4
1	1	1	1	1	1
$y = 2x+1$	-3	-1	1	3	5

രേഖപ്പെടുത്തേണ്ട ബിന്ദുക്കൾ;

$(-2, -3), (-1, -1), (0, 1), (1, 3), (2, 5)$



ചിത്രം. 3.23

ഇവിടെ രണ്ട് സമീകരണങ്ങളും ഒരു പോലെയാണ് അവ വ്യത്യസ്ത രീതിയിൽ അവതരിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു. അവ ഒരുപോലെ ആയതിനാൽ നിർദ്ധാരണങ്ങളും തുല്യമാണ്.

ഇതിൽ നിന്നും അനന്തമായ നിർദ്ധാരണങ്ങൾ ഉണ്ട് എന്ന് മനസ്സിലാക്കാം. അവ രേഖയിലുള്ള എല്ലാ ബിന്ദുക്കളുടെയും ക്രമ ജോഡികളാണ്.

ഉദാഹരണം 3.47

ഒരു ദീർഘ ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് 36മീറ്റർ അതിന്റെ നീളം വീതിയുടെ 3 മടങ്ങിനേക്കാൾ 2മീറ്റർ കൂടുതലാണ് എങ്കിൽ ത്രികോണത്തിന്റെ നീളം, അകലം ഗ്രാഫ് മുഖേന കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ള പ്രസ്താവനയെ സമീകരണമായി മാറ്റാം.

തന്നിട്ടുള്ള ദീർഘചതുരത്തിന്റെ നീളം, അകലം ക്രമേണ l , b എന്നിരിക്കട്ടെ.

ആദ്യത്തെ പ്രസ്താവനെയെ സമീകരണമായി രൂപികരിക്കാം.

ദീർഘ ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് = 36മീറ്റർ

$$2(l+b) = 36$$

$$l+b = \frac{36}{2}$$

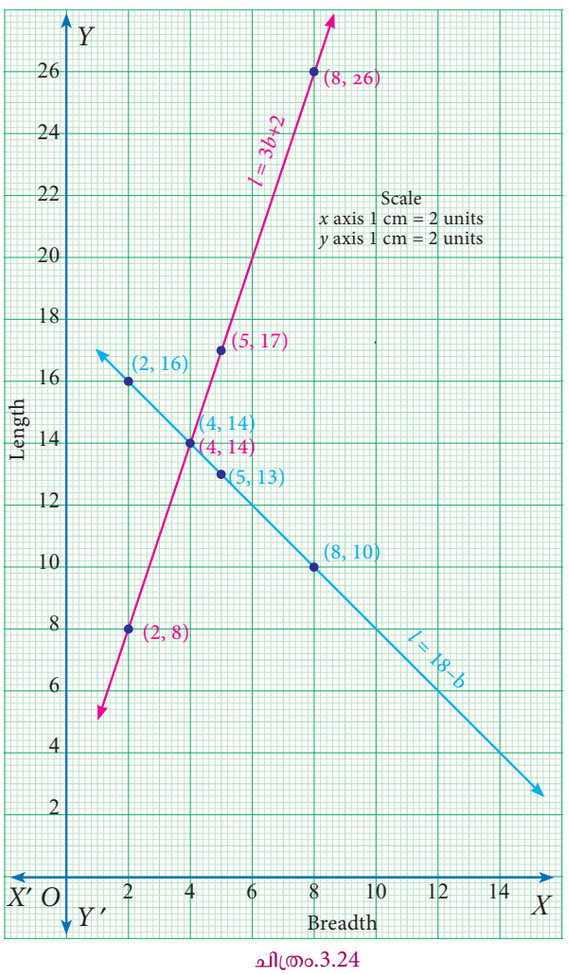
$$l = 18-b \quad \ldots (1)$$

b	2	4	5	8
18	18	18	18	18
$-b$	-2	-4	-5	-8
$l = 18-b$	16	14	13	10

ബിന്ദുക്കൾ : $(2,16), (4,14), (5,13), (8,10)$

നീളം വീതിയുടെ മൂന്ന് മടങ്ങിനേക്കാൾ 2 മീറ്റർ കൂടുതൽ ആണ് എന്ന് രണ്ടാമത്തെ പ്രസ്താവനയെ ഒരു നേർ രേഖയായി $l = 3b+2$ ... (2)

എന്ന് എഴുതാം.



ചിത്രം.3.24

Unit 3_ALGEBRA.indd 122 27-01-2023 13:18:58

സമീകരണം (2) ന് പട്ടിക തയ്യാറാക്കാം.

b	2	4	5	8
$3b$	6	12	15	24
2	2	2	2	2
$l = 3b + 2$	8	14	17	26

ബിന്ദുക്കൾ: (2,8), (4,14), (5,17), (8,26)

രണ്ടു രേഖകൾക്കും പൊതുവായ ബിന്ദുവാണ് അവയുടെ നിർദ്ധാരണം ഇവിടെ (4,14). ആകുന്നു. നിർദ്ധാരണത്തെ $b = 4$, $l = 14$ എന്ന് എഴുതാം.

ശരിനോക്കൽ:

$2(l+b) = 36$ ...(1)	$l = 3b + 2$ ...(2)
$2(14+4) = 36$	$14 = 3(4) + 2$
$2 \times 18 = 36$	$14 = 12 + 2$
$36 = 36$ ശരി	$14 = 14$ ശരി

അഭ്യാസം 3.10

1. താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയുടെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക

(i) $y = 2x$ (ii) $y = 4x - 1$ (iii) $y = \left(\frac{3}{2}\right)x + 3$ (iv) $3x + 2y = 14$

2. ഗ്രാഫ് മുഖേന നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക.

(i) $x + y = 7;\ x - y = 3$ (ii) $3x + 2y = 4;\ 9x + 6y - 12 = 0$

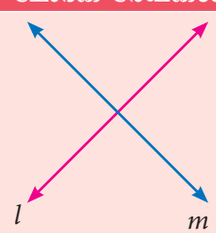
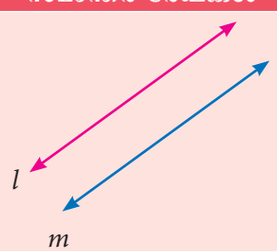
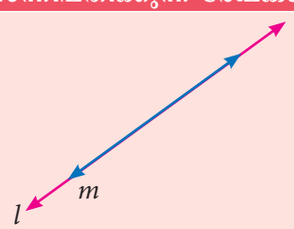
(iii) $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1;\ \frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 2$ (iv) $x - y = 0;\ y + 3 = 0$

(v) $y = 2x + 1;\ y + 3x - 6 = 0$ (vi) $x = -3;\ y = 3$

3. രണ്ട് കാറുകൾ 100 മീറ്റർ അകലെയാണ് അവ പരസ്പരം അഭിമുഖമായി ഓടിച്ചാൽ ഒരു മണിക്കൂറിൽ കൂട്ടിമുട്ടും.അതേ ദിശയിൽ ഓടിച്ചാൽ 2 മണിക്കൂറിൽ കൂട്ടിമുട്ടും. ഗ്രാഫ് മുഖേന അവയുടെ വേഗത കാണുക.

ചില പ്രത്യേക പദപ്രയോഗങ്ങൾ

സമീകരണങ്ങൾ ഗ്രാഫിൽ വരയ്ച്ചതിൽ നിന്ന് അവയ്ക്ക് എത്ര നിർദ്ധാരണങ്ങൾ ഉണ്ടെന്ന് കണ്ടല്ലോ. താഴെ അവയുടെ ദൃശ്യ രൂപം താഴെ കാണാം.

ഛേദക രേഖകൾ	സമാന്തര രേഖകൾ	സന്നിപതിക്കുന്ന രേഖകൾ
		
ഒരു നിർദ്ധാരണം	നിർദ്ധാരണംഇല്ല	അനന്തമായ നിർദ്ധാരണങ്ങൾ ഉണ്ട്.

Unit 3_ALGEBRA.indd 123 27-01-2023 13:19:03

- രേഖീയ സമീകരണ സമ്പ്രദായത്തിന് ഒരു നിർദ്ധാരണം മാത്രമാണ് ഉള്ളതെങ്കിൽ (സമീകരണങ്ങളുടെ ഗ്രാഫ് ഒരു ബിന്ദുവിൽ മാത്രം ഛേദിക്കും) ആ സമ്പ്രദായത്തെ സ്ഥിരതയുള്ള സമ്പ്രദായവും കൂടാതെ സമീകരണങ്ങൾ സ്വതന്ത്രവുമാണ്.
- രേഖീയ സമ്പ്രദായത്തിന് നിർദ്ധാരണം ഇല്ല(സമീകരണങ്ങളുടെ ഗ്രാഫ് ഇവിടെയും ഛേദിക്കുന്നില്ല) എങ്കിൽ ആ സമ്പ്രദായത്തെ സ്ഥിരതയില്ലാത്ത സമ്പ്രദായവും കൂടാതെ സമീകരണങ്ങൾ സ്വതന്ത്രവുമാണ്.
- ഒരു രേഖീയ സമ്പ്രദായത്തിന് അനന്തമായ നിർദ്ധാരണങ്ങൾ ഉണ്ടെങ്കിൽ രേഖകൾ ഒരുപോലെയാണ്. (രേഖകളുടെ ഗ്രാഫിലെ ബിന്ദുക്കൾ ഒരു പോലെയാണ്) എങ്കിൽ ആ സമ്പ്രദായത്തെ സ്ഥിരതയുള്ള സമ്പ്രദായവും സമീകരണങ്ങൾ സ്വതന്ത്രവുമാണ്. അതായത് ഒരു സമീകരണത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണം തന്നെയാണ് മറ്റ് സമീകരണത്തിന്റെയും നിർദ്ധാരണം.

പ്രതിസ്ഥാപിക്കൽ രീതി.

ഈ രീതിയിൽ ഒരു ചരത്തിന്റെ മൂല്യം പ്രതിസ്ഥാപിച്ച് മറ്റൊരു ചരത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ ഒരു ചരത്തിന്റെ മൂല്യത്തിന് മാറ്റുന്നതിനാൽ 2 ചരങ്ങളുള്ള സമീകരണം ഒരു ചതുരം ഉള്ളതാകുന്നു (ഒരു ജോഡി രേഖീയ സമീകരണങ്ങളെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നതിന് വേണ്ടി).

ഒരു ചരത്തിന്റെ മൂല്യം പ്രതിസ്ഥാപിച്ച് മറ്റൊരു ചരത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ ഒരു ചരത്തിന്റെ മൂല്യത്തിന് മാറ്റുന്നതിനാൽ ഈ രീതിയെ പ്രതിസ്ഥാപിക്കൽ രീതി എന്ന് പറയുന്നു.

നടപടിക്രമങ്ങളെ താഴെ പറയുന്ന വിധം എഴുതാം.

വഴി 1: രണ്ട് സമീകരണങ്ങളിൽ ഏതെങ്കിലും ഒന്നിനെ മറ്റൊരു ചരത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ എഴുതുക.

വഴി 2: വഴി 1 ൽ എഴുതിയ ചിത്രത്തിന്റെ മൂല്യത്തിനെ മറ്റേ സമീകരണത്തിൽ പ്രതിസ്ഥാപിച്ച് നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക.

വഴി 3: വഴി 2 ൽ കണ്ടു പിടിച്ച മൂല്യത്തിനെ വഴി 1 ൽ ഉള്ള ഫലത്തിൽ പ്രതിസ്ഥാപിച്ച് മറ്റേ ചരത്തിന്റെ മൂല്യത്തെ കാണുക.

ഉദാഹരണം 3.48

$x+3y=16$ കൂടാതെ $2x-y=4$ എന്നീ രേഖീയ സമീകരണങ്ങളെ പ്രതിസ്ഥാപിക്കൽ രീതിയിൽ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ളത് $x+3y=16$ ... (1)

$2x-y=4$ ... (2)

വഴി 1	വഴി 2	വഴി 3	നിർദ്ധാരണം
സമീകരണം (2) ൽനിന്നും $2x-y=4$ $-y=4-2x$ $y=2x-4$ ...(3)	സമീകരണം (3) നെ (1) ൽ പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ $x+3y=16$ $x+3(2x-4)=16$ $x+6x-12=16$ $7x=28$ $x=4$	$x=4$ നെ സമീകരണം (3) പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ $y=2x-4$ $y=2(4)-4$ $y=4$	$x=4$ കൂടാതെ $y=4$

ഉദാഹരണം 3.49

ഒരു രണ്ടക്ക സംഖ്യയുടെ അക്കങ്ങളുടെ തുക 5 അക്കങ്ങളെ തിരിച്ചിട്ടാൽ പുതിയ സംഖ്യ 27 കുറയുന്നു എങ്കിൽ ആസംഖ്യയെ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

പത്തിന്റെ സ്ഥാനത്തിന്റെ അക്കം x എന്നിരിക്കട്ടെ കൂടാതെ ഒറ്റ സംഖ്യ y എന്നിരിക്കട്ടെ

തന്നിട്ടുള്ളത് $x+y=5$ ..... (1)

Unit 3_ALGEBRA.indd 124 27-01-2023 13:19:06

	പത്ത്	ഒറ്റ	മൂല്യം
തന്നിട്ടുള്ള സംഖ്യ	x	y	$10x + y$
പുതിയ സംഖ്യ തിരിച്ചിട്ട ശേഷം	y	x	$10y+x$

തന്നിട്ടുള്ളത്, യഥാർത്ഥ സംഖ്യ – തിരിച്ചിട്ടസംഖ്യ $= 27$

$$(10x + y) - (10y + x) = 27$$

$$10x - x + y - 10y = 27$$

$$9x - 9y = 27$$

$\Rightarrow$ $$x - y = 3 \ldots (2)$$

(1) ൽ നിന്ന്, $y = 5 - x$ ... (3)

സമീകരണം (3) നെ (2) ൽ
പ്രതിസ്ഥാപിക്കുമ്പോൾ $x - (5 - x) = 3$

$$x - 5 + x = 3$$

$$2x = 8$$

$$x = 4$$

$x = 4$ നെ സമീകരണം (3) ൽ പ്രതിസ്ഥാപിക്കുമ്പോൾ
$y = 5 - x = 5 - 4$

$$y = 1$$

$10x + y = 10 \times 4 + 1 = 40 + 1 = 41.$

ഇവയിൽ നിന്നും തന്നിട്ടുള്ള രണ്ടക്ക സംഖ്യ 41 ആകുന്നു.

ശരി നോക്കൽ:
സംഖ്യകളുടെ തുക = 5
$x + y = 5$
$4 + 1 = 5$
$5 = 5$

യഥാർത്ഥ സംഖ്യ – തിരിച്ചിട്ട സംഖ്യ = 27
41 - 14 = 27
27 = 27 ശരി

അഭ്യാസം 3.11

1. പ്രതിസ്ഥാപിക്കൽ രീതിയിൽ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക.

(i) $2x - 3y = 7;\ 5x + y = 9$ (ii) $1.5x + 0.1y = 6.2;\ 3x - 0.4y = 11.2$

(iii) $10\%\ of\ x + 20\%\ of\ y = 24;\ 3x - y = 20$ (iv) $\sqrt{2}\,x - \sqrt{3}\,y = 1;\ \sqrt{3}\,x - \sqrt{8}\,y = 0$

(v) $\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{y}} = 2;\ \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{9}{\sqrt{y}} = -1$ (സൂചന: $\frac{1}{\sqrt{x}} = a; \frac{1}{\sqrt{y}} = b$ എന്നിരിക്കട്ടെ)

2. രാമന്റെ വയസ്സ് അദ്ദേഹത്തിന്റെ രണ്ട് ആൺകുട്ടികളുടെ വയസ്സിന്റെ തുകയുടെ മൂന്ന് മടങ്ങ് ആണ് അഞ്ച് വർഷങ്ങൾക്ക് ശേഷം അദ്ദേഹത്തിന്റെ വയസ്സ് അദ്ദേഹത്തിന്റെ ആൺകുട്ടികളുടെ തുകയുടെ രണ്ട് മടങ്ങാകുന്നു.

3. 100 നും 1000 നും ഇടയിലുള്ള ഒരു സംഖ്യയുടെ മധ്യ അക്കം പൂജ്യം ആണ് കൂടാതെ ബാക്കി രണ്ട് അക്കങ്ങളുടെ തുക 13. ആ അക്കങ്ങളെ തിരിച്ചിട്ടാൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യ യഥാരത്ഥ സംഖ്യയെക്കാൾ 495 വർദ്ധിക്കുന്നു എങ്കിൽ ആ സംഖ്യ കാണുക?

Unit 3_ALGEBRA.indd 125 27-01-2023 13:19:12

ഒഴിവാക്കൽ രീതിയിൽ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യൽ

ഒരു ജോഡി രേഖീയ സമീകരണങ്ങളെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്ന മറ്റൊരു ബീജഗണിത രീതിയാണ്. ഒഴിവാക്കൽ രീതി പ്രതിസ്ഥാപിക്കൽ രീതിയേക്കാൾ എളുപ്പമാണ്. ഇവിടെ രണ്ട് ചരങ്ങളുള്ള ഒരു ജോഡി രേഖീയ സമീകരണങ്ങളിൽ നിന്നും ഒരു ചരത്തിനെ ഒഴിവാക്കി എളുപ്പത്തിൽ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നു.

ഈ രീതിയിൽ ഉൾപ്പെടുന്ന വിവിധ വഴികൾ താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു.

വഴി 1 : രണ്ട് സമീകരണങ്ങളുടെയും ആദ്യത്തെ ചരത്തിന്റെ ഗുണോത്തരമായ അല്ലെങ്കിൽ രണ്ടാമത്തെ ചരത്തിന്റെ ഗുണോത്തരമോ തുല്യമായി വരത്തക്ക രീതിയിൽ സമീകരണത്തേയോ അല്ലെങ്കിൽ രണ്ട് സമീകരണങ്ങളുടെയോ അനുയോജ്യമായ സംഖ്യ കൊണ്ട് ഗുണിക്കുക.

വഴി 2: വഴി 1ൽ നിന്നും ലഭിച്ച സമീകരണങ്ങളെ ഗുണോത്തരങ്ങൾ തുല്യമായുള്ള ചരം ഒഴിവാക്കുന്ന രീതിയിൽ കൂട്ടുകയോ കുറയ്ക്കുകയോ ചെയ്യുക.

വഴി 3: ഫലമായി കിട്ടിയ സമീകരണത്തിൽ നിന്ന് ഒരു ചരത്തിന്റെ മൂല്യം കാണുക.

വഴി 4 : കണ്ടെത്തിയ ചരത്തിന്റെ മൂല്യത്തെ ഏതെങ്കിലും ഒരു സമീകരണത്തിൽ പ്രതിസ്ഥാപിച്ച് മറ്റേ ചരത്തിന്റെ മൂല്യം കാണുക.

ഉദാഹരണം 3.50

$4a+3b=65$ കൂടാതെ $a+2b=35$ എന്നിവയെ ഒഴിവാക്കൽ രീതിയിൽ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ളത്, $4a+3b=65$ .....(1)

$a+2b=35$ .....(2)

(2) × 4 ഗുണിക്കുമ്പോൾ $4a + 8b = 140$

$(-)\ (-)\ \ (-)$

(1) ൽ നിന്ന് $\underline{4a + 3b = 65}$

$5b = 75$ ഇതിൽ നിന്ന് $b = 15$

$b = 15$ നെ സമീകരണം (2) ൽ പ്രതിസ്ഥാപിക്കുക

$a+2(15) = 35$ ൽ നിന്ന് $a = 5$

നിർദ്ധാരണം $a = 5$, $b = 15$.

ശരി നോക്കൽ:

$4a+3b = 65$ ...(1)

$4(5)+3(15) = 65$

$20 + 45 = 65$

$65 = 65$ ശരി

$a + 2b = 35$ ...(2)

$5 + 2(15) = 35$

$5+30 = 35$

$35 = 35$ ശരി

ഉദാഹരണം 3.51

$8x-3y=5xy,\ 6x-5y=-2xy$ എന്നീ സമീകരണങ്ങളെ ഒഴിവാക്കൽ രീതിയിൽ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണങ്ങൾ $8x-3y=5xy$ ...(1)

$6x-5y=-2xy$ ...(2)

ഇവിടെ സമീകരണങ്ങളിൽ xy പദം ഉള്ളത് കൊണ്ട് ഇവ രേഖീയ സമീകരണങ്ങൾ അല്ല കൂടാതെ $x = 0$, ആകുമ്പോൾ $y = 0$ ആകുന്നു അതുകൊണ്ട് (0,0) ഒരു നിർദ്ധാരണം ആകുന്നു കൂടാതെ മറ്റ് നിർദ്ധാരണം $x \neq 0$ കൂടാതെ $y \neq 0$.

$x \neq 0,\ y \neq 0$ എന്നതിനെ പരിഗണിക്കാം

സമീകരണങ്ങളിലെ രണ്ട് വശങ്ങളെയും xy കൊണ്ട് പരിഹരിക്കുമ്പോൾ

Unit 3_ALGEBRA.indd 126 27-01-2023 13:19:16

$$\frac{8x}{xy}-\frac{3y}{xy}=\frac{5xy}{xy} \qquad \frac{8}{y}-\frac{3}{x}=5 \quad ...(3)$$

$$\frac{6x}{xy}-\frac{5y}{xy}=\frac{-2xy}{xy} \qquad \frac{6}{y}-\frac{5}{x}=-2 \quad ...(4)$$

$a=\frac{1}{x},\ b=\frac{1}{y}$ എന്നിരിക്കട്ടെ

(3)&(4) യഥാക്രമം, $8b-3a=5$ ...(5)

$6b-5a=-2$ ...(6)

എന്നിവ a,b ചരങ്ങളായുള്ള സമീകരണങ്ങളാണ്.

a നെ ഒഴിവാക്കുന്നതിന് $(5)\times 5 \Rightarrow \quad 40b-15a=25$ .....(7)

$(6)\times 3 \Rightarrow \quad 18b-15a=-6$ .....(8)

മുൻപത്തേ ഉദാഹരണ കണക്കിനെ പിന്തുടരുമ്പോൾ നിർദ്ധാരണം $\left(\frac{11}{23},\frac{22}{31}\right)$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

ഈ സമീകരണങ്ങൾക്ക് രണ്ട് നിർദ്ധാരണങ്ങൾ $\left(\frac{11}{23},\frac{22}{31}\right)$ കൂടാതെ $(0,0)$ ആകുന്നു.

അഭ്യാസം 3.12

1. ഒഴിവാക്കൽ രീതിയിൽ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക.

   (i) $2x-y=3;\quad 3x+y=7$ (ii) $x-y=5;\quad 3x+2y=25$

   (iii) $\frac{x}{10}+\frac{y}{5}=14;\quad \frac{x}{8}+\frac{y}{6}=15$ (iv) $3(2x+y)=7xy;\quad 3(x+3y)=11xy$

   (v) $\frac{4}{x}+5y=7;\ \frac{3}{x}+4y=5$ (vi) $13x+11y=70;\ 11x+13y=74$

2. A,B എന്നീ വ്യക്തികളുടെ മാസവരുമാനത്തിന്റെ അംസബന്ധം 3:4 ഉം മാസചെലവിന്റെ അംശബന്ധം 5:7 ആണ് ഓരോരുത്തരും ₹ 5,000 ഓരോ മാസവും സാമ്പാധിക്കുന്നുവെങ്കിൽ അവരുടെ മാസവരുമാനം ഏത്?

3. അഞ്ച് വർഷങ്ങൾക്ക് മുമ്പ് ഒരു വ്യക്തിയുടെ വയസ് മകന്റെ വയസ്സിൽ 7 മടങ്ങ് ആണ് അഞ്ച് വർഷങ്ങൾക്ക് ശേഷം അദ്ദേഹത്തിന്റെ വയസ്സ് മകന്റെ വയസ്സിന്റെ 4 മടങ്ങാണ് എങ്കിൽ അദ്ദേഹത്തിന്റെ ഇപ്പോഴത്തെ വയസ്സ് കാണുക?

വജ്രഗുണന രീതിയിൽ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യൽ

ഒഴിവാക്കൽ, പ്രതിസ്ഥാപിക്കൽ രീതികളിൽ നിർദ്ധാരണം ലഭിക്കുന്നതിന് അനേകം ഗണിതക്രിയകളുടെ ആവശ്യം വരുന്നു.എന്നാൽ വജ്രഗുണന രീതിയിൽ ഗുണോത്തരങ്ങളെ ഫലപ്രദമായി ഉപയോഗിച്ച് നിർദ്ധാരണം ചെയ്യാം.ഈ രീതിക്ക് വജ്രഗുണനം എന്ന പേര് വന്നത് ഛേദത്തിലുള്ള സംഖ്യകൾക്കിടയിൽ അമ്പടയാളം രേഖപ്പെടുത്തുകയും, അമ്പടയാളം ചെയ്ത് ഗുണാങ്കങ്ങളെ വജ്രഗുണനം ചെയ്യുകയും ചെയ്യുന്നു.

താഴെ തന്നിട്ടുള്ളത് പോലെ ഒരു ജോഡി ഏക കാല സമീകരണങ്ങൾ തന്നിരിക്കുന്നു.

$a_1x+b_1y+c_1=0$ ...(1) $a_2x+b_2y+c_2=0$ ...(2)

Unit 3_ALGEBRA.indd 127 27-01-2023 13:19:23

ഇവിടെ $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ ഇതിനെ താഴെതന്നിട്ടുള്ളതു പോലെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യാം.

$(1) \times b_2 - (2) \times b_1$ ചെയ്യുമ്പോൾ $b_2(a_1x+b_1y+c_1) - b_1(a_2x+b_2y+c_2) = 0$

$$\Rightarrow \quad x(a_1b_2 - a_2b_1) = (b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{(b_1c_2 - b_2c_1)}{(a_1b_2 - a_2b_1)}$$

$(1) \times a_2 - (2) \times a_1$ ചെയ്യുമ്പോൾ

$$y = \frac{(c_1a_2 - c_2a_1)}{(a_1b_2 - a_2b_1)}$$

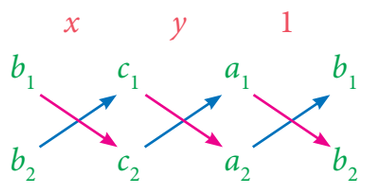
അങ്ങനെ തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണം

$$x = \frac{(b_1c_2 - b_2c_1)}{(a_1b_2 - a_2b_1)}, \quad y = \frac{(c_1a_2 - c_2a_1)}{(a_1b_2 - a_2b_1)}$$

ഇതിനെ ഇങ്ങനെ എഴുതാം

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

മുകളിൽപ്പറഞ്ഞ ബന്ധത്തെ ഓർമ്മിക്കാൻ താഴെ ഉള്ള ചിത്രം ഉപയോഗപ്രദമാണ്.



ഉദാഹരണം 3.52 വജ്രഗുണന രീതിയിൽ $3x - 4y = 10$ കൂടാതെ $4x + 3y = 5$ എന്നിവയെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക.

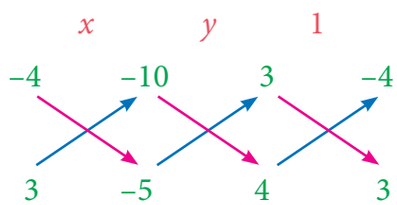
നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണങ്ങൾ

$$3x - 4y = 10 \quad \Rightarrow 3x - 4y - 10 = 0 \quad .....(1)$$

$$4x + 3y = 5 \quad \Rightarrow 4x + 3y - 5 = 0 \quad .....(2)$$

വജ്രഗുണന രീതിയിൽ ഗുണോത്തരങ്ങളെ എഴുതിയാൽ



Unit 3_ALGEBRA.indd 128 27-01-2023 13:19:28

$$\frac{x}{(-4)(-5)-(3)(-10)} = \frac{y}{(-10)(4)-(-5)(3)} = \frac{1}{(3)(3)-(4)(-4)}$$

$$\frac{x}{(20)-(-30)} = \frac{y}{(-40)-(-15)} = \frac{1}{(9)-(-16)}$$

$$\frac{x}{20+30} = \frac{y}{-40+15} = \frac{1}{9+16}$$

$$\frac{x}{50} = \frac{y}{-25} = \frac{1}{25}$$

$$\therefore \quad x = \frac{50}{25}; \qquad y = \frac{-25}{25}$$

$$x = 2; \qquad y = -1$$

നിർദ്ധാരണം $x = 2$, $y = -1$.

ശരി നോക്കൽ:

$3x-4y$	=	10	...(1)
$3(2)-4(-1)$	=	10	
$6+4$	=	10	
10	=	10	ശരി
$4x+3y$	=	5	...(2)
$4(2)+3(-1)$	=	5	
$8-3$	=	5	
5	=	5	ശരി

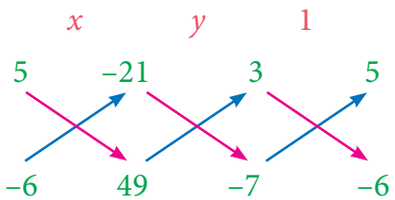
ഉദാഹരണം 3.53

വജ്രഗുണനരീതിയിൽ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക

$$3x+5y=21; \quad -7x-6y=-49$$

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണങ്ങൾ $3x+5y-21=0$; $-7x-6y+49=0$



$$\Rightarrow \frac{x}{(5)(49)-(-6)(-21)} = \frac{y}{(-21)(-7)-(49)(3)} = \frac{1}{(3)(-6)-(-7)(5)}$$

$$\frac{x}{119} = \frac{y}{0} = \frac{1}{17}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{119} = \frac{1}{17}, \qquad \frac{y}{0} = \frac{1}{17}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{119}{17}, \qquad y = \frac{0}{17}$$

$$\Rightarrow \quad x = 7, \qquad y = 0$$

ശരി നോക്കൽ:

$3x+5y$	=	21	...(1)
$3(7)+5(0)$	=	21	
$21+0$	=	21	
21	=	21	ശരി
$-7x-6y$	=	−49	...(2)
$-7(7)-6(0)$	=	−49	
-49	=	−49	
-49	=	−49	ശരി

കുറിപ്പ്

ഇവിടെ $\frac{y}{0} = \frac{1}{17}$ എന്നത് $y = \frac{0}{17}$ ഇതിൽ നിന്ന് $\frac{y}{0}$ ഒരു ചിഹ്നം മാത്രം ആണ് പൂജ്യം കൊണ്ട് ഉള്ള ഹരണം അല്ല പൂജ്യം കൊണ്ട് ഉള്ള ഹരണം നിർവചിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ല.

Unit 3_ALGEBRA.indd 129 27-01-2023 13:19:34

അഭ്യാസം 3.13

1. വജ്രഗുണന രീതിയിൽ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക.

   (i) $8x-3y=12\,;\ 5x=2y+7$ (ii) $6x+7y-11=0\,;\ 5x+2y=13$

   (iii) $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=5\,;\frac{3}{x}-\frac{1}{y}+9=0$

2. അക്ഷയാ ₹ 2 നാണയങ്ങളും ₹ 5 നാണയങ്ങളും പേഴ്സിൽ വച്ചിരിക്കുന്നു നാണയങ്ങളുടെ ആകെ എണ്ണം 80. അവയുടെ മൂല്യം ₹ 25 ആയാൽ രണ്ട് തരം നാണയങ്ങൾ എത്ര വീതം ഉണ്ട്?

3. രണ്ട് പൈപ്പുകൾ ഒരു നീന്തൽ കുളത്തിനെ 24 മണിക്കൂർ കൊണ്ട് നിറയ്ക്കുന്നു. വലിയ വ്യാസമുള്ള പൈപ്പ് 8 മണിക്കൂറിലും ചെറിയ വ്യാസമുള്ള പൈപ്പ് 18 മണിക്കൂറും പ്രവർത്തിപ്പിച്ചു. അപ്പോൾ പകുതി മാത്രം നിറഞ്ഞു എങ്കിൽ ഓരോ പൈപ്പും നീന്തൽ കുളത്തിനെ നിറയ്ക്കാൻ എത്ര സമയം എടുക്കും?

3.8.3 രണ്ട് ചരങ്ങളുള്ള രേഖീയ സമീകരണങ്ങളുടെ സ്ഥിരതയും അസ്ഥിരതയും

രണ്ട് ചരങ്ങളുള്ള രേഖീയ സമീകരണങ്ങളെ പരിഗണിക്കുക.

$a_1x+b_1y+c_1=0$ ...(1)

$a_2x+b_2y+c_2=0$ ...(2) ഇവിടെ a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 കൂടാതെ c_2 എന്നിവ വാസ്തവിക സംഖ്യകളാണ്.

ഈ സമ്പ്രദായം:

(i) $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ എങ്കിൽ ഒരേ ഒരു നിർദ്ധാരണം ഉണ്ടായിരിക്കും(സ്ഥിരതയുള്ളത്)

(ii) $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ എങ്കിൽ അനന്തമായ നിർദ്ധാരണങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കും (സ്ഥിരതയുള്ളത്)

(iii) $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ നിർദ്ധാരണം ഇല്ല(അസ്ഥിരം)

ഉദാഹരണം 3.54 താഴെ തന്നിട്ടുള്ള രേഖീയ സമീകരണങ്ങൾ സ്ഥിരതയുള്ളതാണോ അസ്ഥിരതയുള്ളതാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക, സ്ഥിരതയുള്ളതാണെങ്കിൽ എത്ര നിർദ്ധാരണങ്ങൾ ഉണ്ടെന്ന് കാണുക.

(i) $2x-4y=7$, $x-3y=-2$ (ii) $4x+y=3$, $8x+2y=6$ (iii) $4x+7=2y$, $2x+9=y$

നിർദ്ധാരണം

ക്ര. സംഖ്യ	ഒരു ജോഡി രേഖകൾ	$\frac{a_1}{a_2}$	$\frac{b_1}{b_2}$	$\frac{c_1}{c_2}$	അംശബന്ധങ്ങളെ താരതമ്യം ചെയ്യൽ	ഗ്രാഫിൽ പ്രതിനിധീകരിക്കൽ	ബീജഗണിത വിശദീകരണം
(i)	$2x-4y=7$ $x-3y=-2$	$\frac{2}{1}=2$	$\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}$	$\frac{7}{-2}=\frac{-7}{2}$	$\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$	ഛേദക രേഖകൾ	ഒരേ ഒരു നിർവ്വചനം
(ii)	$4x+y=3$ $8x+2y=6$	$\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$	$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$	സന്നിപതിക്കുന്ന രേഖകൾ	അന്തമായ നിർദ്ധാരണം
(iii)	$4x+7=2y$ $2x+9=y$	$\frac{4}{2}=2$	$\frac{2}{1}=2$	$\frac{7}{9}$	$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$	സമാന്തര രേകകൾ	നിർദ്ധാരണം ഇല്ല

Unit 3_ALGEBRA.indd 130 27-01-2023 13:19:41

ഉദാഹരണം 3.55

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണങ്ങൾക്ക് ഒരേ ഒരു നിർദ്ധാരണം ആണ് ഉള്ളതെങ്കിൽ k യുടെ മൂല്യം കാണുക $kx+2y=3;\ 2x-3y=1$.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ള രേഖീയ സമീകരണങ്ങൾ

$$kx+2y=3 \quad .....(1) \qquad \left[a_1x+b_1y+c_1=0\right]$$
$$2x-3y=1 \quad .....(2) \qquad \left[a_2x+b_2y+c_2=0\right]$$

$a_1=k,\ b_1=2,\ a_2=2,\ b_2=-3;$

ഒരേ ഒരു നിർദ്ധാരണമാണ് ഉള്ളതെങ്കിൽ $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ അതുകൊണ്ട $\frac{k}{2}\neq\frac{2}{-3};\ k\neq\frac{4}{-3}$, അതായത് $k\neq-\frac{4}{3}$.

ഉദാഹരണം 3.56

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണങ്ങൾക്ക് അനന്തമായ നിർദ്ധാരണമാണ് ഉള്ളതെങ്കിൽ kയുടെ മൂല്യം കാണുക.

$$2x-3y=7;\ \ (k+2)x-(2k+1)y=3(2k-1)$$

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ള രേഖീയ സമീകരണങ്ങൾ

$$2x-3y=7 \qquad \left[a_1x+b_1y+c_1=0\right]$$
$$(k+2)x-(2k+1)y=3(2k-1) \qquad \left[a_2x+b_2y+c_2=0\right]$$

$a_1=2,\ b_1=-3,\ a_2=(k+2),\ b_2=-(2k+1),\ c_1=7,\ c_2=3(2k-1)$

അനന്തമായ നിർദ്ധാരണങ്ങൾ ഉണ്ടെങ്കിൽ $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$

$$\frac{2}{k+2}=\frac{-3}{-(2k+1)}=\frac{7}{3(2k-1)}$$

$$\frac{2}{k+2}=\frac{-3}{-(2k+1)}$$
$$2(2k+1)=3(k+2)$$
$$4k+2=3k+6$$
$$k=4$$

$$\frac{-3}{-(2k+1)}=\frac{7}{3(2k-1)}$$
$$9(2k-1)=7(2k+1)$$
$$18k-9=14k+7$$
$$4k=16$$
$$k=4$$

ഉദാഹരണം 3.57

$8x+5y=9;\ kx+10y=15$ എന്നീ സമീകരണങ്ങൾക്ക് നിർദ്ധാരണം ഇല്ല എങ്കിൽ k യുടെ മൂല്യം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ള രേഖീയസമീകരണങ്ങൾ

$$8x+5y=9 \qquad \left[a_1x+b_1y+c_1=0\right]$$
$$kx+10y=15 \qquad \left[a_2x+b_2y+c_2=0\right]$$

$a_1=8,\ b_1=5,\ c_1=9,\ a_2=k, b_2=10, c_2=15$

നിർദ്ധാരണം ഇല്ലെങ്കിൽ $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ കൂടാതെ $\frac{8}{k}=\frac{5}{10}\neq\frac{9}{15}$

$$80=5k$$
$$k=16$$

Unit 3_ALGEBRA.indd 131 27-01-2023 13:19:49

പ്രവർത്തി- 3

1. **താഴെ** തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണങ്ങളിൽ നിബന്ധന അനുസരിച്ച് k യുടെ മൂല്യം കാണുക.
   (i) $2x + ky = 1;\ 3x - 5y = 7$ എന്നിവയ്ക്ക് ഒരേ ഒരു നിർദ്ധാരണം
   (ii) $kx + 3y = 3;\ 12x + ky = 6$ എന്നിവയ്ക്ക് നിർദ്ധാരണം ഇല്ല
   (iii) $(k-3)x + 3y = k;\ kx + ky = 12$ അനന്തമായ നിർദ്ധാരണങ്ങൾ ഉണ്ട്
2. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള സമീകരണങ്ങൾക്ക് അനന്തമായ നിർദ്ധാരണങ്ങൾ ഉണ്ടെങ്കിൽ a, b എന്നിവയുടെ മൂല്യം കാണുക $3x - (a+1)y = 2b - 1,\quad 5x + (1-2a)y = 3b$.

പ്രവർത്തി - 4

തന്നിട്ടുള്ള രേഖീയ സമീകരണങ്ങൾക്ക് നിബന്ധനകൾക്ക് അനുസരിച്ച് മറ്റൊരു രേഖീയ സമീകരണം കാണുക.

തന്നിട്ടുള്ള രേഖീയസമീകരണം	മറ്റൊരു രേഖീയസമീകരണം		
	ഒരേ ഒരു നിർദ്ധാരണം	അനന്തമായ നിർദ്ധാരണങ്ങൾ	നിർദ്ധാരണം ഇല്ല
$2x+3y = 7$	$3x+4y = 8$	$4x+6y = 14$	$6x+9y = 15$
$3x-4y = 5$			
$y-4x = 2$			
$5y-2x = 8$			

അഭ്യാസം 3.14

ഏതെങ്കിലും ഒരു രീതിയിൽ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക

1. ഒരു രണ്ടക്കസംഖ്യയിൽ അക്കങ്ങളുടെ തുകയും അതിനെ തിരിച്ചിട്ടാൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യയും 110. ആദ്യത്തെ സംഖ്യയിൽ നിന്ന് 10 കുറച്ചാൽ കിട്ടുന്ന പുതിയസംഖ്യ ആദ്യത്തെ സംഖ്യയുടെ അക്കങ്ങളുടെ തുകയുടെ അഞ്ച് മടങ്ങിനേക്കാൾ 4 കൂടുതൽ ആണ് എങ്കിൽ ആദ്യത്തെ സംഖ്യ കാണുക.
2. ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെ അംശത്തിന്റെയും ഛേദത്തിന്റെയും തുക 12 ആണ് ഛേദത്തിൽ 3 കൂട്ടിയാൽ ആ ഭിന്നസംഖ്യ $\frac{1}{2}$ ആകുന്നു. എങ്കിൽ ആ ഭിന്നസംഖ്യ കാണുക.
3. ഒരു ചക്രീയ ചതുർഭുജം ABCDയിൽ $\angle A = (4y + 20)^\circ$, $\angle B = (3y - 5)^\circ$, $\angle C = (4x)^\circ$ കൂടാതെ $\angle D = (7x + 5)^\circ$ എങ്കിൽ നാല് കോണുകളും കാണുക.
4. ഒരു കടക്കാരൻ ഒരു T.V വിറ്റപ്പോൾ 5% ലാഭവും, ഫ്രിഡ്ജ് വിറ്റപ്പോൾ 10% ലാഭവും കിട്ടിയപ്പോൾ ലാഭമായി ₹2000 ലഭിച്ചു. പക്ഷേ T.V 10% ലാഭത്തിലും ഫ്രിഡ്ജ് 5% നഷ്ടത്തിലും വിറ്റപ്പോൾ ₹1500 ലഭിച്ചു. എങ്കിൽ T.V യുടെയും, ഫ്രിഡ്ജിന്റെയും യഥാർത്ഥ വില കാണുക.
5. രണ്ട് സംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 5 : 6 ഇവ ഓരോന്നിൽ നിന്നും 8 കുറച്ചാൽ അംശബന്ധം 4 : 5 ആകുന്നു.ആ സംഖ്യകളെ കാണുക.
6. 4 ഇന്ത്യാക്കാരും, 4 ചൈനാക്കാരും ഒരു ജോലിയെ 3 ദിവസത്തിൽ ചെയ്ത് തീർക്കുന്നു. 2 ഇന്ത്യാക്കാരും 5 ചൈനാക്കാരും അതേ ജോലിയെ 4 ദിവസത്തിൽ ചെയ്ത് തീർക്കുന്നു.എങ്കിൽ ഒരു ചൈനാക്കാരൻ ആ ജോലിയെ എത്ര ദിവസത്തിൽ ചെയ്ത് തീർക്കും? ഒരു ഇന്ത്യാക്കാരൻ ആ ജോലിയെ എത്ര ദിവസത്തിൽ ചെയ്ത് തീർക്കും?

Unit 3_ALGEBRA.indd 132 27-01-2023 13:19:53

അഭ്യാസം 3.15

ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുത്തെഴുതുക

1. $x^3 + 6x^2 + kx + 6$ നെ $(x + 2)$, കൊണ്ട് പൂർണ്ണമായും ഹരിക്കാമെങ്കിൽ k= ? .

   (1) –6 (2) –7 (3) –8 (4) 11

2. $2x + 3 = 0$ എന്ന ബഹുപദസമവാക്യത്തിന്റെ മൂല്യം?

   (1) $\frac{1}{3}$ (2) $-\frac{1}{3}$ (3) $-\frac{3}{2}$ (4) $-\frac{2}{3}$

3. $4-3x^3$ എന്ന ബഹുപദവ്യംജകം

   (1) സ്ഥിരബഹുപദം (2) ഏകഘാത ബഹുപദം

   (3) ദ്വിഘാത ബഹുപദം (4) ത്രിഘാതബഹുപദം.

4. $x^{51} + 51$ നെ $x + 1$, കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന ശിഷ്ടം

   (1) 0 (2) 1 (3) 49 (4) 50

5. $2x+5$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ശൂന്യം

   (1) $\frac{5}{2}$ (2) $-\frac{5}{2}$ (3) $\frac{2}{5}$ (4) $-\frac{2}{5}$

6. $p(x) = x^3 - x^2 - 2$, $q(x) = x^2-3x+ 1$ എന്നീ ബഹുപദവ്യംജകങ്ങളുടെ തുക

   (1) $x^3 - 3x - 1$ (2) $x^3 + 2x^2 - 1$ (3) $x^3 - 2x^2 - 3x$ (4) $x^3 - 2x^2 + 3x - 1$

7. $(y^3-2)(y^3 + 1)$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ കൃതി

   (1) 9 (2) 2 (3) 3 (4) 6

8. തന്നിരിക്കുന്ന ബഹുപദങ്ങൾ പരിഗണിക്കുക.

   (A) $-13q^5 + 4q^2 + 12q$ (B) $(x^2 +4)(x^2 + 9)$

   (C) $4q^8 - q^6 + q^2$ (D) $-\frac{5}{7}y^{12} + y^3 + y^5$

   എങ്കിൽ അവയുടെ കൃതികളുടെ ആരോഹണക്രമം

   (1) A,B,D,C (2) A,B,C,D (3) B,C,D,A (4) B,A,C,D

9. $p(a) = 0$ എങ്കിൽ $(x - a)$ എന്നത് $p(x)$-ന്റെ ഒരു _____

   (1) ഹാരകം (2) ഹരണഫലം (3) ശിഷ്ടം (4) ഘടകം

10. $(2 - 3x)$ -ന്റെ പൂജ്യം _____

    (1) 3 (2) 2 (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{3}{2}$

11. $x - 1$ എന്നത് _____ -ന്റെ ഒരു ഘടകമാണ്?

    (1) $2x - 1$ (2) $3x - 3$ (3) $4x - 3$ (4) $3x - 4$

12. $x - 3$ എന്നത് $p(x)$-ന്റെ ഒരു ഘടകമാണെങ്കിൽ ശിഷ്ടം _____

    (1) 3 (2) –3 (3) $p(3)$ (4) $p(-3)$

13. $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$ = _____

    (1) $(x + y)^3$ (2) $(x - y)^3$ (3) $x^3 + y^3$ (4) $x^3 - y^3$

Unit 3_ALGEBRA.indd 133 27-01-2023 13:19:55

14. $(a+b-c)^2$ =_____

(1) $(a-b+c)^2$ (2) $(-a-b+c)^2$ (3) $(a+b+c)^2$ (4) $(a-b-c)^2$

15. ax^2+bx+c എന്ന ദ്വിപദവ്യംജകത്തിന്റെ ഘടകങ്ങൾ $(x+5)$ കൂടാതെ $(x-3)$ ആണെങ്കിൽ a, b കൂടാതെ c യുടെ മൂല്യങ്ങൾ കാണുക

(1) 1,2,3 (2) 1,2,15 (3) 1,2, −15 (4) 1, −2,15

16. ത്രിപദ വ്യംജകത്തിന് അധികപക്ഷം _____രേഖീയ ഘടകങ്ങൾ ഉണ്ടാകും.

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

17. സ്ഥിരപദ വ്യംജകത്തിന്റെ കൃതി _____

(1) 3 (2) 2 (3) 1 (4) 0

18. $2x+3y=m$ എന്ന സമീകരണത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണം $x=2$ കൂടാതെ $y=-2$ ആണെങ്കിൽ m ന്റെ മൂല്യം

(1) 2 (2) −2 (3) 10 (4) 0

19. താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയിൽ രേഖീയ സമവാക്യം ഏതാണ്?

(1) $x+\frac{1}{x}=2$ (2) $x(x-1)=2$ (3) $3x+5=\frac{2}{3}$ (4) $x^3-x=5$

20. $2x-y=6$ ന്റെ നിർദ്ധാരണം

(1) (2,4) (2) (4,2) (3) (3, −1) (4) (0,6)

21. $2x+3y=k$ എന്ന സമീകരണത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണം (2,3) ആണെങ്കിൽ k യുടെ മൂല്യം

(1) 12 (2) 6 (3) 0 (4) 13

22. $ax+by+c=0$ എന്ന സമീകരണത്തിന്റെ തൃപ്തിപ്പെടുത്താത്ത ആ നിബന്ധന ഏതാണ്.

(1) $a\neq 0,\ b=0$ (2) $a=0,\ b\neq 0$ (3) $a=0,\ b=0, c\neq 0$ (4) $a\neq 0,\ b\neq 0$

23. രണ്ട് ചരങ്ങൾ ഇല്ലാത്ത രേഖീയ സമീകരണം ഏതാണ്

(1) $ax+by+c=0$ (2) $0x+0y+c=0$

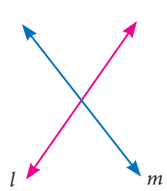
(3) $0x+by+c=0$ (4) $ax+0y+c=0$

24. kയുടെ ഏത് മൂല്യത്തിനാണ് $4x+6y-1=0$ കൂടാതെ $2x+ky-7=0$ എന്നിവ സമാന്തരരേഖകളാകുന്നു.

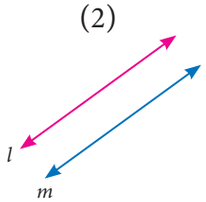
(1) $k=3$ (2) $k=2$ (3) $k=4$ (4) $k=-3$

25. ഒരു ജോഡി രേഖീയസമീകരണങ്ങൾക്ക് നിർദ്ധാരണം ഇല്ല എന്നതിന് ഗ്രാഫ് മുഖേന വിശദീകരണം

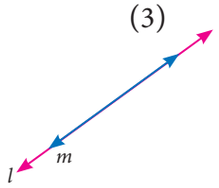
(1)



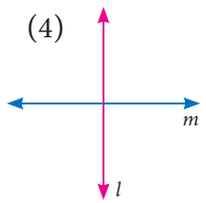
(2)



(3)



(4)



26. $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$, $a_1x+b_1y+c_1=0$ കൂടാതെ $a_2x+b_2y+c_2=0$ ആണെങ്കിൽ തന്നിട്ടുള്ള ഒരു ജോഡി

Unit 3_ALGEBRA.indd 134 27-01-2023 13:20:03

രേഖീയസമീകരണങ്ങൾക്ക് _____ നിർദ്ധാരണം

(1) നിർദ്ധാരണം ഇല്ല (2) നിർദ്ധാരണങ്ങൾ

(3) ഒരേഒരുനിർദ്ധാരണം (4) അനന്തമായ നിർദ്ധാരണങ്ങൾ

27. $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ കൂടാതെ $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ എങ്കിൽ തന്നിട്ടുള്ള ഒരു ജോഡി രേഖീയ സമീകരണത്തിന് _____ നിർദ്ധാരണങ്ങൾ

(1) നിർദ്ധാരണം ഇല്ല (2) നിർദ്ധാരണങ്ങൾ

(3) അനന്തമായ നിർദ്ധാരണങ്ങൾ (4) ഒരേഒരു നിർദ്ധാരണം

28. രണ്ട് അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ ഉ.സാ.ഭാ _____

(1) -1 (2) 0 (3) 1 (4) 2

29. $x^4 - y^4$ കൂടാതെ $x^2 - y^2$ -ന്റെ ഉ.സാ.ഭാ

(1) $x^4 - y^4$ (2) $x^2 - y^2$ (3) $(x + y)^2$ (4) $(x + y)^4$

ഓർമ്മിക്കേണ്ട വസ്തുതകൾ

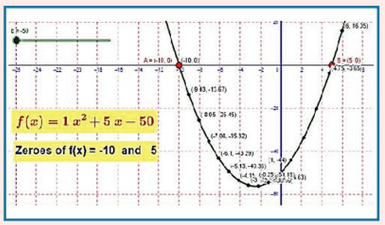
- x എന്ന ഒരു ചരമുള്ളതും കൃതി 'n' ആയിട്ടുള്ളതുമായ ബഹുപദവ്യംജകത്തിന്റെ ബീജഗണിത രൂപം $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$ ആകുന്നു ഇവിടെ $a_0, a_1, a_2, ...a_n$ $(a_n \neq 0)$ എന്നിവ സ്ഥിരങ്ങളും nപൂർണ്ണസംഖ്യയും ആകുന്നു.
- $p(x)$ ഒരു ബഹുപദവ്യംജകം ആണ്. $p(a) = 0$ ആയാൽ 'a' എന്നത് $p(x)$ ന്റെ ശൂന്യമാണ് എന്ന് പറയാം.
- $p(x) = 0$ എന്ന ബഹുപദസമീകരത്തെ $x = a$ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്നു എങ്കിൽ $x = a$ എന്നത് $p(x) = 0$ ന്റെ മൂലം ആകുന്നു.
- ശിഷ്ടസിദ്ധാന്തം : കൃതി ഒന്നോ അതിൽ കൂടുതലോ ആയിട്ടുള്ള ഒരു ബഹുപദവ്യംജകമാണ് $p(x)$ എങ്കിൽ $p(x)$ നെ $(x-a)$ എന്ന ഏകഘാത ബഹുപദം കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോഴുള്ള ശിഷ്ടമാണ് $p(a)$. ഇവിടെ a എന്നത് ഏതെങ്കിലും ഒരു വാസ്തവിക സംഖ്യയാണ്
- ഘടകസിദ്ധാന്തം

  $p(x)$ -നെ $(x - a)$ കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ ലഭിക്കുന്ന ശിഷ്ടം $p(a) = 0$, എങ്കിൽ $(x - a)$ എന്നത് $p(x)$-ന്റെ ഒരു ഘടകമാകുന്നു
- ഒരു സമീകരണത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണം എന്നത് പ്രതിസ്ഥാപിക്കുമ്പോൾ സമീകരണത്തെ തൃപ്തമാക്കുന്ന എല്ലാ മൂല്യങ്ങളുമാണ്.
- രണ്ട് ചരങ്ങളും ഘാതം 1 കൂടാതെ പരസ്പരം ഗുണനഫലം അല്ലാത്ത സമീകരണത്തെ രണ്ട് ചരങ്ങൾ ഉള്ള രേഖീയ സമീകരണങ്ങൾ എന്ന് പറയുന്നു.
- രണ്ട് ചരങ്ങൾ ഉള്ള രേഖീയ സമീകരണത്തിന് അനന്തമായ നിർദ്ധാരണങ്ങൾ ഉണ്ട്
- രണ്ട് ചരങ്ങൾ ഉള്ള ഒരു രേഖീയ സമീകരണത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് ഒരു നേർരേഖയായിരിക്കും
- ഏകകാല സമീകരണങ്ങൾ ഒരേ ചരമുള്ള രണ്ടോ അതിൽ കൂടുതലോ ഉള്ള രേഖീയ സമീകരണങ്ങൾ ആണ്.

Unit 3_ALGEBRA.indd 135 27-01-2023 13:20:05

ഐ സി ടി കോർണർ 1

പ്രതീക്ഷിക്കുന്ന ഫലം ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.



ഘട്ടം – 1 ബ്രൗസർ തുറന്നിട്ട് താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ലിങ്ക് പകർത്തി പേസ്റ്റ് ചെയ്യുക. (അല്ലെങ്കിൽ) തന്നിട്ടുള്ള യു.ആ.എൽ. ടൈപ്പു ചെയ്യുക. (അല്ലെങ്കിൽ) ക്യു.ആർ.കോഡ് സ്കാൻ ചെയ്യുക.

ഘട്ടം – 2 "Polynomials and Quadratic Equations" എന്നറിയപ്പെടുന്ന ജിയോജീബ്രാ എന്ന വർക്ക്ബുക്ക് കാണാം. ഇതിൽ പലതരത്തിലുള്ള വർക്ക് ഷീറ്റുകൾ ഉണ്ടായിരിക്കും. ഇതിൽ "Zeroes: Quadratic Polynomial". എന്ന വർക്ക്ഷീറ്റ് തുറക്കുക.

ഘട്ടം – 3 a, b,c എന്നിവയുടെ ദ്വിഘാതഗുണാങ്കങ്ങൾ മാറ്റുക. x അക്ഷം വക്രരേഖയെ തൊടുന്ന ബിന്ദുക്കളായ A , B എന്നിവ തിരിച്ചറിയുക. ഈ ബിന്ദുക്കളാണ് ദ്വിഘാതവ്യംജകത്തിന്റെ ശൂന്യങ്ങൾ.

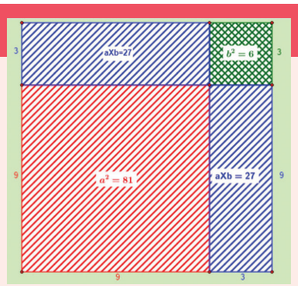
C7EW6

Browse in the link

Zeroes of Polynomials : https://ggbm.at/tgu3PpWm

ഐ സി ടി കോർണർ 2

പ്രവർത്തിയുടെ അവസാനം കിട്ടുന്നത്



ഘട്ടം – 1 : Browser open ചെയ്ത് താഴെക്കാണുന്ന URL Link type ചെയ്യുക (അല്ലെങ്കിൽ) QR Code Scan ചെയ്യുക GeoGebra യുടെ "Algebraic Identities" എന്ന വർക്ക്ഷീറ്റ് ഭാഗം open ആകും. ഈ വർക്ക്ഷീറ്റിൽ, ബീജഗണിത സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾക്ക് പല പ്രവർത്തനങ്ങൾ കൊടുത്തിരിക്കും. ആദ്യ പ്രവർത്തനത്തിൽ $(a+b)^2$ -ന്റെ ചിത്രം മുഖേനയുള്ള പ്രതീനിധീകരണം കൊടുത്തിരിക്കും. തന്നിരിക്കുന്ന a കൂടാതെ b slider - നെ ചലിപ്പിച്ച് വിസ്തീർണ്ണത്തെ തന്നിരിക്കുന്ന സർവ്വസമവാക്യത്തോട് താരതമ്യം ചെയ്യുക.

ഘട്ടം - 2

അതേപോലെ a കൂടാതെ b slider - നെ ചലിപ്പിച്ച് വിസ്തീർണ്ണത്തെ ശേഷമുള്ള സർവ്വസമവാക്യത്തോട് താരതമ്യപ്പെടുത്തുക.

2RYFC

Browse in the link

Algebraic Identities: https://ggbm.at/PyUj657Y or Scan the QR Code.

ഐ സി ടി കോർണർ 3

പ്രവർത്തിയുടെ അവസാനം കിട്ടുന്നത്



ഘട്ടം1.

ബ്രൗസർ തുറന്ന് താഴെതന്നിട്ടുള്ള URL ടൈപ്പ് ചെയ്യുക.അല്ലെങ്കിൽ QR Code. സ്കാൻ ചെയ്യുക."Algebra" എന്ന GeoGebra ദൃശ്യമാകും. ഈ തലക്കെട്ടിൽ മൂന്ന് വിധത്തിൽ ഉള്ള worksheets കൾ ഉണ്ടായിരക്കും.അവ വജ്ര ഗുണന രീതി കൂടാതെ Chick-Goat puzzle.

ഘട്ടം 2.

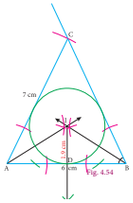
slider നീക്കിയോ അല്ലെങ്കിൽ അനുയോജ്യമായ box കളിൽ മൂല്യങ്ങൾ ടൈപ്പ് ചെയ്തോ സമീകരണങ്ങൾ വരച്ച് നോക്കുക.നിർദ്ധാരണം ചെയ്ത് ഉത്തരം ശരിനോക്കുക.മൂന്നാമത്തെ തലക്കെട്ടിൽ new problem click ചെയ്ത് നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക slider നെ നീക്കി വിവിധ ഘട്ടങ്ങളെ കാണുക.

YCJHX

Browse in the link

Algebra: https://ggbm.at/qampr4ta or Scan the QR Code.

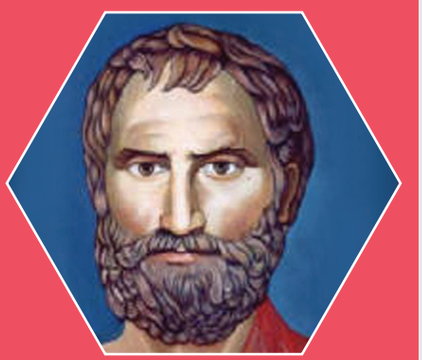
Unit 3_ALGEBRA.indd 136 27-01-2023 13:20:06


4

ജ്യാമിതി

Inspiration is needed in geometry just as much as in poetry.
- Alexander Pushkin



Thales
(BC (BCE) 624 – 546)

തെയിൽസ്(തേലീസ്) മിലിറ്റസ് എന്ന ഗ്രീക്ക് പട്ടണത്തിൽ ജനിച്ചു. സൈദ്ധാതികമായും പ്രയോഗികമായും ജ്യാമിതിയിൽ പ്രത്യേകിച്ച് ത്രികോണങ്ങളിൽ അദ്ദേഹത്തിനുള്ള അറിവ് പ്രസിദ്ധമാണ്. അദ്ദേഹം പിരമിഡുകളുടെ ഉയരം കൂടാതെ കപ്പലുകൾക്കും തീരത്തിനും ഇടയ്ക്കുള്ള ദൂരം എന്നിങ്ങനെയുള്ള പ്രശ്നങ്ങൾ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നതിന് ജ്യാമിതി ഉപയോഗിച്ചു. ഗ്രീസിലെ ഏഴ് ജ്ഞാനികൾ അഥവാ ഏഴ്പണ്ഡിതന്മാർ എന്നറിയപ്പെടുന്നവരിൽ ഒരാളാണ് അദ്ദേഹം. കൂടാതെ പാശ്ചാത്യ സമ്പ്രാദയത്തിലെ ആദ്യത്തെ തത്ത്വജ്ഞാനി എന്ന് അനേകം പേർ അദ്ദേഹത്തെ കരുതുന്നു.

പഠന ഫലങ്ങൾ

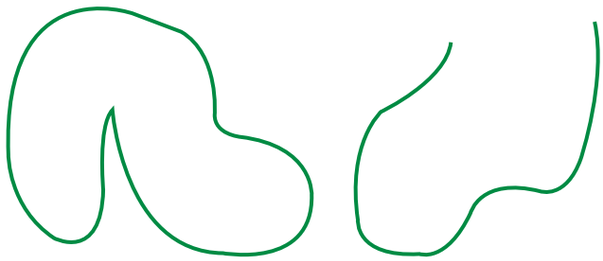
- ശീർഷാഭിമുഖകോണുകളെയും രേഖീയജോഡികളെയും സംബന്ധിക്കുന്ന സിദ്ധാന്തങ്ങൾ മനസ്സിലാക്കൽ
- ത്രികോണത്തിലെ കോൺ തുക സവിശേഷത മനസ്സിലാക്കൽ
- ചതുർഭുജങ്ങളുടെ ഗുണങ്ങളും പ്രശ്ന നിർദ്ധാരണത്തിൽ അവ ഉപയോഗിക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്നും മനസ്സിലാക്കൽ.
- വൃത്തത്തിലെ ഞാണുകളെ കുറിച്ചുള്ള സിദ്ധാന്തങ്ങളെ മനസ്സിലാക്കൽ, വിവരിക്കൽ, പ്രയോജനപ്പെടുത്തൽ.
- ചക്രീയ ചതുർഭുജത്തിൻ മേലുള്ള സിദ്ധാന്തങ്ങളെ മനസ്സിലാക്കൽ, വിവരിക്കൽ, പ്രയോജനപ്പെടുത്തൽ.
- ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്തം, ലംബകേന്ദ്രം, അന്തഃകേന്ദ്രം, കേന്ദ്രകം നിർമ്മിക്കൽ

4.1 ആമുഖം

ജ്യാമിതിയിൽ നമ്മൾ രൂപങ്ങൾ പഠിക്കുന്നു. എന്നാൽ ഭൂപടങ്ങളിൽ പഠിക്കാൻ എന്താണ് ഉള്ളതെന്ന് നിങ്ങൾ ആദ്യം ചിന്തിച്ചിരിക്കാം. രൂപങ്ങളായി നമ്മൾ എന്തെല്ലാം കാര്യങ്ങൾ ആണ് ചെയ്യുന്നത്? നമ്മൾ ഭൂപടങ്ങൾ വരയ്ക്കുകയും താരതമ്യം ചെയ്യുകയും അളക്കുകയും ചെയ്യും. രൂപങ്ങളിൽ നമ്മൾ എന്ത് അളക്കുന്നു?

Unit 4_GEOMETRY.indd 137 27-01-2023 13:32:19

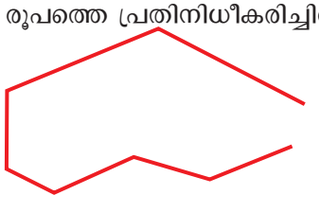
തന്നിരിക്കുന്നതുപോലെയുള്ള ചിലരൂപങ്ങൾ എടുക്കുക



ചിത്രം. 4.1

രണ്ടിലും വക്രരേഖ ആകൃതികൾ രൂപീകരിക്കുന്നു. ഒന്ന് കുറച്ച് ഭാഗങ്ങളെ ഉൾക്കൊണ്ട അടഞ്ഞ വക്രവും മറ്റൊന്നു തുറന്ന വക്രവുമാണ്.ഒരു കയറുപയോഗിച്ച് വക്രത്തിന്റെ നീളം അളക്കാം. അതുപോലെ അടഞ്ഞ വക്രത്തിന്റെ ചുറ്റിലും ഉള്ള നീളവും അളക്കാം. നേർരേഖകളെ സ്കെയിൽ ഉപ യോഗിച്ച് അളക്കുന്നത് വളരെ എളുപ്പമാണ്, അല്ലേ? തന്നിരിക്കുന്ന രണ്ട് രൂപങ്ങൾ പരിഗണിക്കുക.

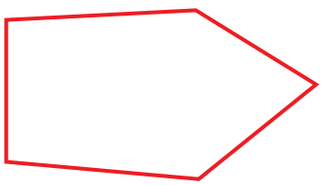
നേർരേഖകൾക്കൊണ്ട് നിർമ്മിച്ചിട്ടുള്ള അടഞ്ഞ രൂപങ്ങളിലേയ്ക്ക് ശ്രദ്ധതിരിക്കാം. ചിത്രം 4.2 ഒരു തുറന്ന രൂപത്തെ പ്രതിനിധീകരിച്ചിരിക്കുന്നു.



ചിത്രം. 4.2

ഇത്തരം രൂപങ്ങൾ അവയെ താരതമ്യം ചെയ്യൽ അളക്കൽ തുടങ്ങിയ പല പ്രവർത്തനങ്ങളും നമുക്ക് ചെയ്യേണ്ടതുണ്ട്.

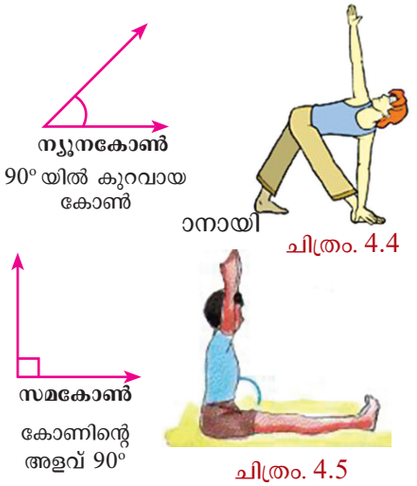
അതിനാൽ ഇവയെ വിവരിക്കേണ്ടത് ആവശ്യമാണ്. ഇത്തരം അടഞ്ഞ വക്രങ്ങളെ എങ്ങനെ വിവരിക്കണം? (ചിത്രം.4.3 കാണുക.) ഇവയെല്ലാം നേർരേഖകൾ കൊണ്ടുണ്ടായ അടഞ്ഞ രൂപങ്ങളാണ്.



ചിത്രം. 4.3

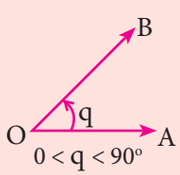
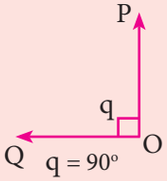
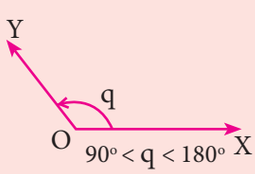
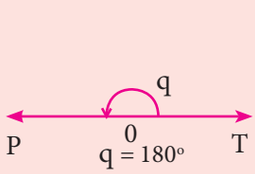
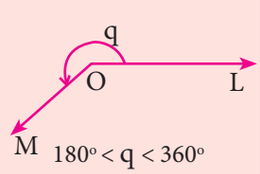
4.2 വിവിധതരം കോണുകൾ

ഒരു ജലക്കുഴൽപ്പണിക്കാരൻ പൈപ്പുകളെ നല്ലരീതിയിൽ ഉറപ്പിക്കാൻ വേണ്ടി അവയ്ക്കിടയിലുള്ള കോണുകൾ അളക്കാറുണ്ട്. ഒരു മരപ്പണിക്കാരൻ കൃത്യമായ കോണിൽ തടി മുറിക്കാനായി അറക്കവാളിന്റെ വായ്ത്തല ക്രമീകരിക്കാറുണ്ട്. എയർ ട്രാഫിക് കൺട്രോളർമാർ വിമാനം നിയന്ത്രിക്കാനായി കോണുകൾ ഉപയോഗിക്കാറുണ്ട്. കാരം, ബില്ലിയാഡ് എന്നിവ കളിക്കുന്ന കളിക്കാർ അവരുടെ ലക്ഷ്യത്തിലെത്താൻ വേണ്ടി കോണുക ളെക്കുറിച്ച് അറിഞ്ഞിരിക്കേണ്ടത് അത്യാവശ്യമാണ്. ഒരേ ബിന്ദു വിൽ നിന്നും ആരംഭിക്കുന്നതും ഒരേ നേർരേഖയിലല്ലാത്തതു മായ രണ്ടു രശ്മികളാൽ രൂപികരിക്കപ്പെടുന്നതാണ് ഒരു കോൺ.



ചിത്രം. 4.4

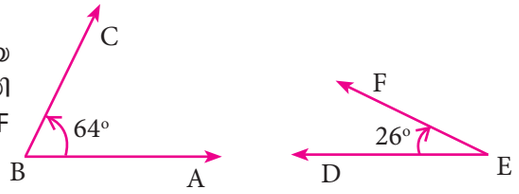
ചിത്രം. 4.5

ന്യൂനകോൺ	സമകോൺ	അധികകോൺ	രേഖകോൺ	പ്രതിഫലന കോൺ
				

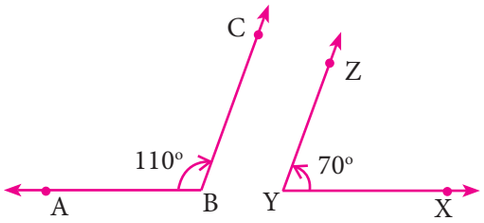
Unit 4_GEOMETRY.indd 138 27-01-2023 13:32:20

പൂരക കോണുകൾ (Complementary Angles)

രണ്ടു കോണുകളുടെ തുക 90° ആണെങ്കിൽ അവയെ പൂരകകോണുകൾ എന്നു പറയുന്നു. ഉദാഹരണമായി $\angle ABC = 64^0$ കൂടാതെ $\angle DEF = 26^0$ എങ്കിൽ എന്നിവ $\angle ABC, \angle DEF$ പരസ്പരം പൂരകങ്ങളാണ്. കാരണം $\angle ABC + \angle DEF = 90^0$



ചിത്രം. 4.6

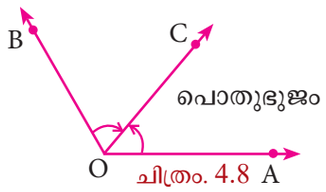


ചിത്രം. 4.7

സംപൂരക കോണുകൾ (Supplementary Angles)

രണ്ടു കോണുകളുടെ തുക 180^0 ആണെങ്കിൽ അവയെ സംപൂരക കോണുകൾ എന്നു പറയുന്നു. ഉദാഹരണമായി $\angle ABC = 110^0$, $\angle XYZ = 70^0$ എങ്കിൽ $\angle ABC, \angle XYZ$ എന്നിവ സംപൂരകങ്ങളാണ് ഇവിടെ $\angle ABC + \angle XYZ = 180^0$

സമീപ കോണുകൾ (Adjacent Angles)



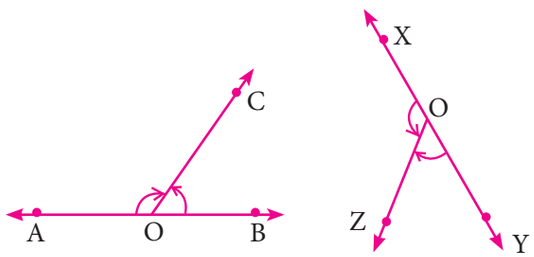
ചിത്രം. 4.8

രണ്ടു കോണുകൾ സമീപ കോണുകൾ ആകണമെങ്കിൽ

(i) അവയ്ക്ക് പൊതുവായ ശീർഷം ഉണ്ടായിരിക്കണം

(ii) അവയ്ക്ക് പൊതുവായ ഭുജം ഉണ്ടായിരിക്കണം

(iii) പൊതുഭുജം, പൊതുവല്ലാത്ത രണ്ടു ഭുജങ്ങളുടെ ഇടയിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യണം



ചിത്രം. 4.9

രേഖീയ ജോഡി കോണുകൾ (Linear Pair Angles)

ഒരു നേർരേഖയിന്മേൽ ഒരു രശ്മി നിൽക്കുമ്പോൾ ഉണ്ടാകുന്ന രണ്ട് സമീപകോണുകളുടെ തുക 180^0 ആകുന്നു. ഈ രീതിയിൽ രൂപീകൃതമാകുന്ന കോണുകളെ രേഖീയ ജോഡി എന്നു പറയുന്നു..

$\angle AOC + \angle BOC = 180^\circ$

$\therefore \angle AOC, \angle BOC$ ഇവ ഒരു രേഖീയജോഡി രൂപീകരിക്കുന്നു.

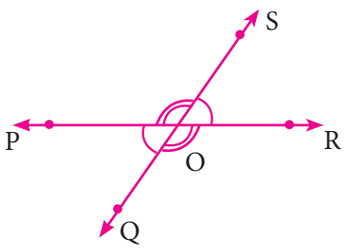
$\angle XOZ + \angle YOZ = 180^\circ$

$\angle XOZ, \angle YOZ$ ഇവ ഒരു രേഖീയജോഡി രൂപീകരിക്കുന്നു.

ശീർഷാഭിമുഖ കോണുകൾ (Vertically Opposite Angles)

രണ്ട് നേർരേഖകൾ പരസ്പരം ഒരു ബിന്ദുവിൽ ഛേദിക്കുമ്പോൾ ശീർഷാഭിമുഖ കോണുകൾ തുല്യമാണ് ചിത്രത്തിൽ $\angle POQ = \angle SOR$

$\angle POS = \angle QOR$



ചിത്രം. 4.10

Unit 4_GEOMETRY.indd 139 27-01-2023 13:32:21

4.2.1 ഛേദകം (Transversal)

രണ്ടോ അതിലധികമോ രേഖകളെ വ്യത്യസ്തങ്ങളായ ബിന്ദുക്കളിൽ ഛേദിക്കുന്ന രേഖയെ അവയുടെ ഛേദകം എന്ന് പറയുന്നു.



സംഭവം (i) രണ്ട് രേഖകളെ ഛേദകം ഛേദിക്കുമ്പോൾ നമുക്ക് 8 കോണുകൾ ലഭിക്കുന്നു.

ചിത്രത്തിൽ l എന്ന രേഖ m,n എന്നീ രേഖകളുടെ ഛേദമാകുന്നു

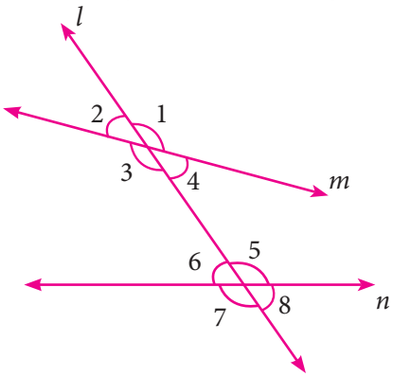
(i) സമസ്ഥാനീയകോണുകൾ: $\angle 1$ കൂടാതെ $\angle 5$, $\angle 2$ കൂടാതെ $\angle 6$, $\angle 3$ കൂടാതെ $\angle 7$, $\angle 4$ കൂടാതെ $\angle 8$

(ii) ഏകാന്തര ഉൾകോണുകൾ: $\angle 4$ കൂടാതെ $\angle 6$, $\angle 3$ കൂടാതെ $\angle 5$

(iii) ഏകാന്തര ബാഹ്യ കോണുകൾ: $\angle 1$ കൂടാതെ $\angle 7$, $\angle 2$ കൂടാതെ $\angle 8$

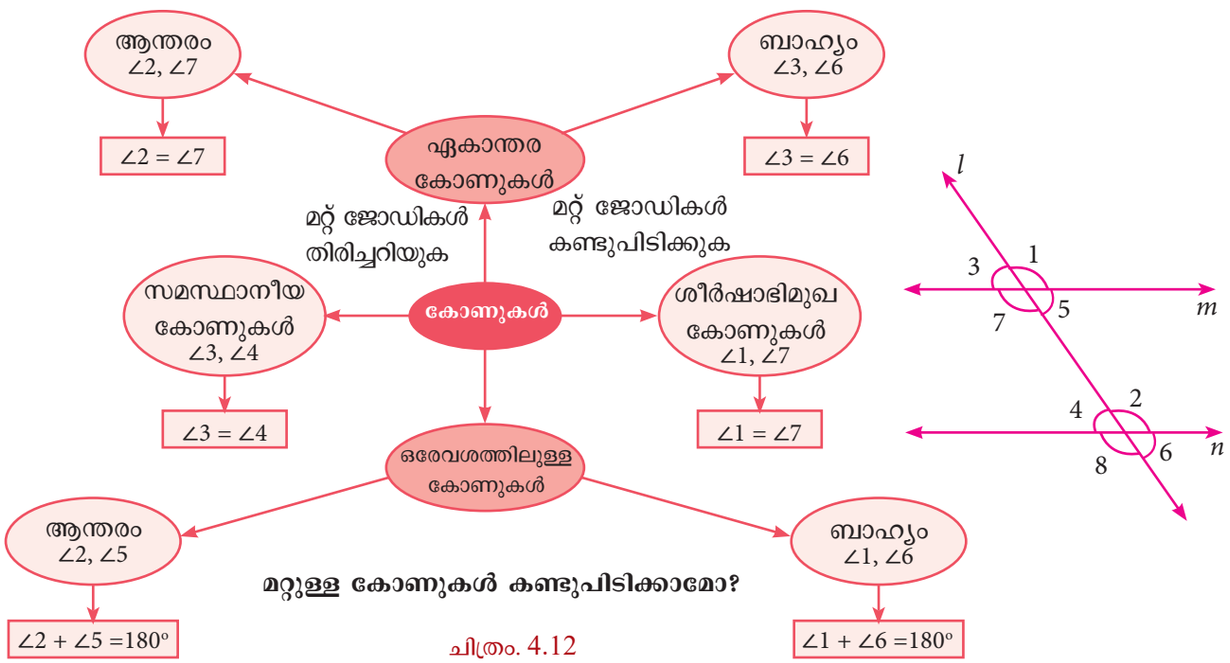
(iv) $\angle 4$ കൂടാതെ $\angle 5$, $\angle 3$ കൂടാതെ $\angle 6$ എന്നിവ ഛേദകത്തിന്റെ ഒരേ വശത്തുള്ള ആന്തര കോണുകളാണ്

(v) $\angle 1$ കൂടാതെ $\angle 8$, $\angle 2$ കൂടാതെ $\angle 7$ എന്നിവ ഛേദകത്തിന്റെ ഒരേ വശത്തുള്ള ബാഹ്യ കോണുകളാണ്



ചിത്രം. 4.11

സംഭവം (ii) ഒരു ഛേദകം രണ്ട് സമാന്തരരേഖകളെ ഛേദിക്കുമ്പോൾ വ്യത്യസ്ത ജോഡി കോണുകൾ ഉണ്ടാകുന്നു.



ചിത്രം. 4.12

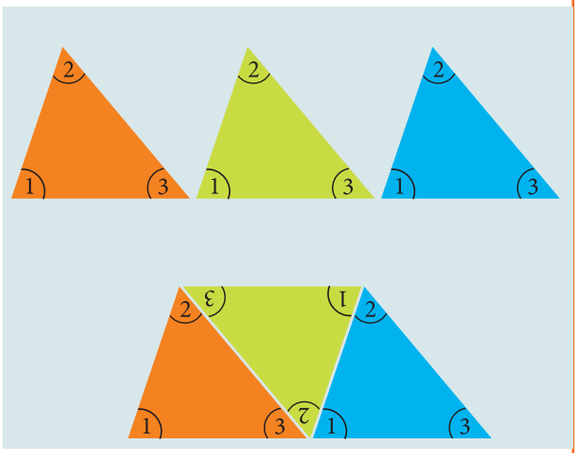
Unit 4_GEOMETRY.indd 140 27-01-2023 13:32:22

4.2.2 ത്രികോണങ്ങൾ (Triangles)

പ്രവൃത്തി 1

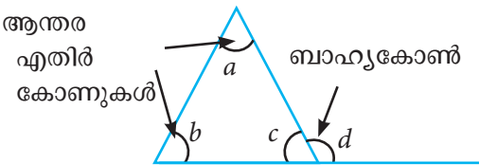
1. മൂന്ന് വ്യത്യസ്ത നിറത്തിലുള്ള പേപ്പറുകൾ എടുക്കുക. അവ ഒന്നിനു മുകളിൽ ഒന്നായി വെച്ച ശേഷം മുകളിലത്തെ പേപ്പറിൽ ഒരു ത്രികോണം വരയ്ക്കുക. നിങ്ങൾ വരച്ച ത്രികോണാകൃതി വെട്ടി എടുക്കുക.ഇപ്പോൾ മൂന്ന് നിറങ്ങളിൽ ഒരേ പോലുള്ള മൂന്ന് ത്രികോണങ്ങൾ ലഭിക്കുന്നു.

അതിന്റെ ശീർഷങ്ങളും കോണുകളും ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിട്ടുള്ളതുപോലെ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഒരു നേർരേഖയിൽ വിടവ് ഇല്ലാത്ത <1, <2,<3 എന്നിവ ചേർത്ത് വയ്ക്കുക <1, <2,<3 എന്നിവയുടെ ആകെ അളവിനെക്കുറിച്ച് നിങ്ങൾക്ക് എന്ത് പറയാനാകും



ചിത്രം. 4.13

2. ഇതേ ചിത്രങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ത്രികോണത്തിന്റെ ബാഹ്യകോൺ സവിശേഷത വിശദീകരിക്കാൻ സാധിക്കുമോ?



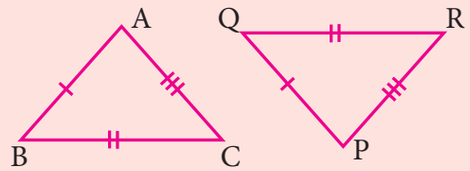
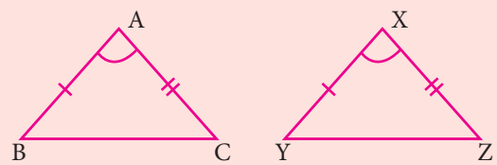
ചിത്രം. 4.14

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശം നീട്ടുമ്പോഴുണ്ടാകുന്ന ബാഹ്യകോൺ രണ്ട് ആന്തരഎതിർകോണുകളുടെ അളവുകളുടെ തുകയ്ക്ക് തുല്യമാണ് $\therefore d=a+b$

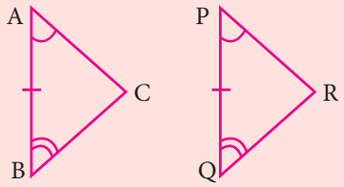
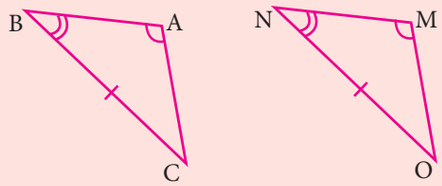
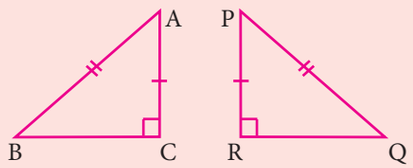
(ചിത്രം. 4.14 കാണുക)

4.2.3 സർവ്വസമ ത്രികോണങ്ങൾ (Congruent Triangles)

രണ്ട്ത്രികോണങ്ങൾ സർവ്വസമമാകണമെങ്കിൽ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളും കോണകളും മറ്റൊരു ത്രികോണത്തിന്റെ സമാന വശങ്ങളോടും കോണകളോടും തുല്യമായിരിക്കണം

നിയമം	ചിത്രങ്ങൾ	കാരണം
SSS		$AB = PQ$ $BC = QR$ $AC = PR$ $\Delta ABC \cong \Delta PQR$
SAS		$AB = XY$ $\angle BAC = \angle YXZ$ $AC = XZ$ $\Delta ABC \cong \Delta XYZ$

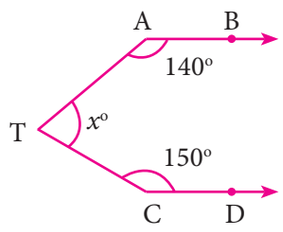
Unit 4_GEOMETRY.indd 141 27-01-2023 13:32:23

ASA		$\angle A = \angle P$ $AB = PQ$ $\angle B = \angle Q$ $\Delta ABC \cong \Delta PQR$
AAS		$\angle A = \angle M$ $\angle B = \angle N$ $BC = NO$ $\Delta ABC \cong \Delta MNO$
RHS		$\angle ACB = \angle PRQ = 90°(R)$ AB = PQ കർണ്ണം (H) $AC = PR$ (S) $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

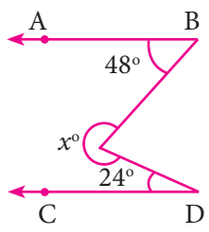
അഭ്യാസം 4.1

1. ചിത്രത്തിൽ AB, സമാന്തരം CD എങ്കിൽ X കാണുക?

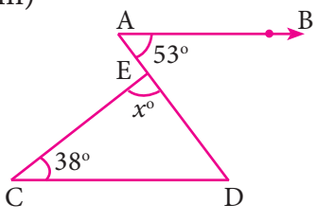
(i)



(ii)



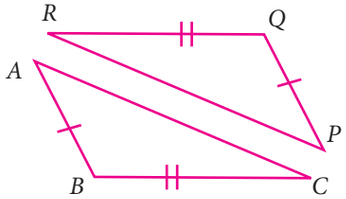
(iii)



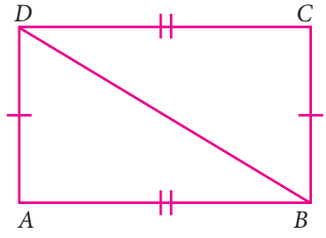
2. ഒരു ത്രികോണത്തിലെ കോണുകളുടെ അംശബന്ധം1:2:3 എങ്കിൽ ഓരോ കോണിന്റേയും അളവുകൾ കാണുക?

3. താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ഓരോജോഡി ത്രികോണങ്ങളും സർവ്വസമമാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക. സർവ്വസമമാണെങ്കിൽ എങ്ങനെയെന്നും സർവ്വസമമല്ല എങ്കിൽ എന്തുകൊണ്ട് എന്നും പറയുക. ചെറിയ മാറ്റങ്ങൾ അവയെ സർവ്വസമമാക്കുമോ എന്ന് പറയുക?

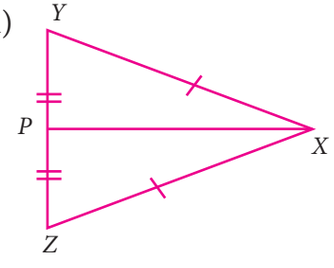
(i)



(ii)

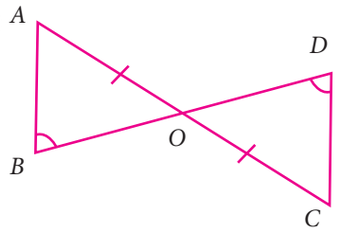


(iii)

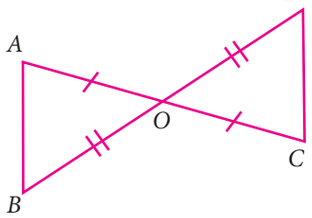


Unit 4_GEOMETRY.indd 142 27-01-2023 13:32:25

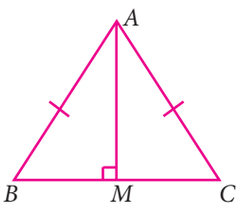
(iv)



(v)



(vi)

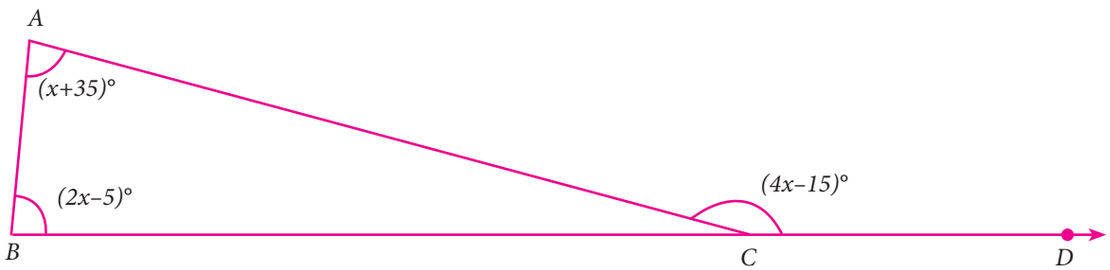


4. ΔABC, ΔDEF എന്നിവ രണ്ട് ത്രികോണങ്ങളാണ് കൂടാതെ

$AB=DF$, $\angle ACB=70°$, $\angle ABC=60°$; $\angle DEF=70°$, $\angle EDF=60°$.

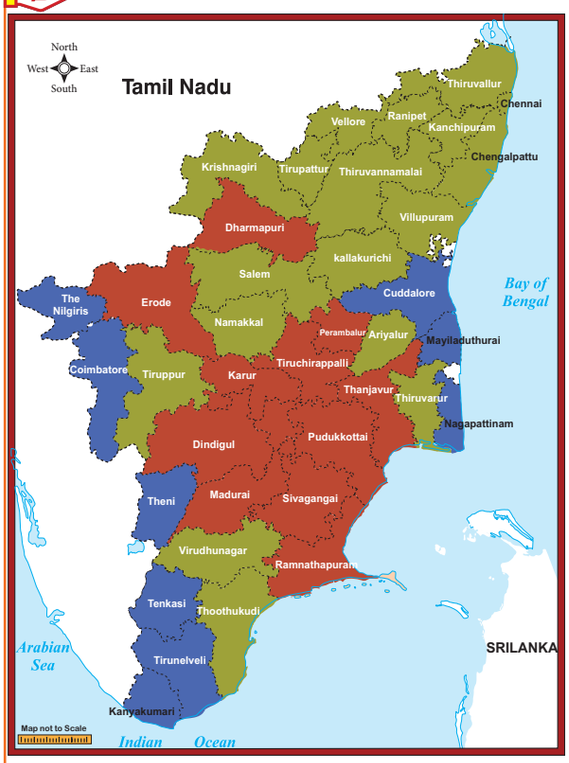
ത്രികോണങ്ങൾ സർവ്വസമമാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക?

5. ΔABC യുടെ എല്ലാ മൂന്ന് കോണുകളും കാണുക



4.3 ചതുർഭുജങ്ങൾ (Quadrailaterals)

പ്രവൃത്തി 2



തമിഴ്നാട് സംസ്ഥാന ബസ്സുകൾ താഴെ പറയുന്ന യാത്രാമാർഗ്ഗം പരിഗണിക്കുന്നു. ആദ്യബസ്സ് ഒരു വഴി പാതയും മറ്റുള്ളവ തിരികെ വരുകയും ചെയ്യുന്നു. ഭൂപടത്തിൽ അവ സഞ്ചരിക്കുന്ന സ്ഥലങ്ങൾ അടയാളപ്പെടുത്തി ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ച് രേഖവരയ്ക്കുക. വഴികളെ തമ്മിൽ ബന്ധിപ്പിക്കുന്ന സ്ഥലങ്ങൾ താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു.

(i) നാഗർ കോവിൽ, തിരുനൽവേലി, വിരുദുനഗർ, മധുര

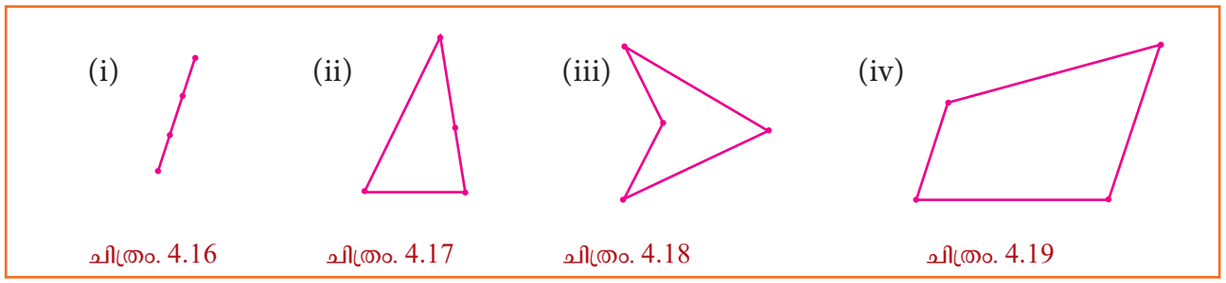
(ii) ശിവഗംഗ, പുതുക്കോട്ട, തഞ്ചാവൂർ, ദിണ്ടുഗൽ

(iii) ഈറോഡ്, കോയമ്പത്തൂർ, ധർമ്മപുരി, കരൂർ

(iv) ചെന്നൈ, കടലൂർ, കൃഷ്ണഗിരി, വെല്ലൂർ

Unit 4_GEOMETRY.indd 143 27-01-2023 13:32:26

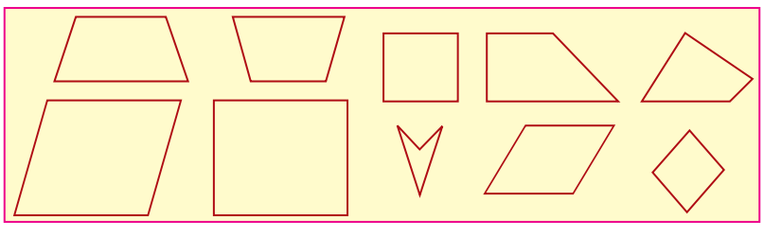
താഴെ പറയുന്ന രൂപങ്ങൾ ലഭിക്കുന്നു



ചിത്രം. 4.16 ചിത്രം. 4.17 ചിത്രം. 4.18 ചിത്രം. 4.19

നഗരത്തിന്റെ നേർരേഖയാണെന്ന് ശീർഷങ്ങളായി കുറിക്കുക.ഭൂപടത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന അതേ രീതിയിൽ ക്യത്യമായ രൂപങ്ങൾ വരയ്ക്കുക.

ആദ്യചിത്രം നേർരേഖയാണെന്ന് കാണാം. നാല് ബിന്ദുക്കളും സമരേഖീയമാണ്. മറ്റുള്ളവ മൂന്നും നേർരേഖകൾ കൊണ്ടുണ്ടാക്കിയ അടഞ്ഞ രൂപങ്ങൾ ആണ്. ഇതുപോലെയുള്ളവ നമ്മൾ മുൻപും കണ്ടിട്ടുണ്ട്. ഇത്തരം അടഞ്ഞ രൂപങ്ങൾക്ക് പേര് വിളിക്കേണ്ടത് ആവശ്യമാണ്. നമുക്ക് അവയെ ബഹുഭുജങ്ങൾ **(polygon)** എന്ന് വിളിക്കാം



ചിത്രം. 4.20

കുറിപ്പ്

അവതല ബഹുഭുജം: ഏതെങ്കിലും ഒരു ആന്തരകോൺ 180^0 കുടുതലുള്ള ബഹുഭുജം

ഉത്തല ബഹുഭുജം: ഓരോ ആന്തരകോണും 180^0 കുറവായ ബഹുഭുജം
(വികർണ്ണങ്ങൾ ബഹുഭുജത്തിന്റെ ഉള്ളിൽ ആയിരിക്കണം)

ബഹുഭുജങ്ങൾ എങ്ങനെ കാണപ്പെടുന്നു? രണ്ട് അഗ്രങ്ങളിലും ഉള്ള വശങ്ങൾ ഉണ്ട്. ഈ ബിന്ദുക്കളെ ബഹുഭുജത്തിന്റെ **ശീർഷങ്ങൾ** എന്ന് വിളിക്കാം. ഈ ശീർഷങ്ങളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡങ്ങളാണ് വശങ്ങൾ. പോളി എന്ന വാക്കിന് കൂടുതൽ എന്നും പോളിഗൺ (**polygon**) എന്ന വാക്കിന് കൂടുതൽ വശമുള്ള ചിത്രം എന്നുമാണ് അർത്ഥം

ഒരു ബഹുഭുജത്തിന് എത്ര വശങ്ങൾ ഉണ്ട്? ഒന്ന്? എന്നാൽ അത് ഒരു രേഖാഖണ്ഡമാണ് രണ്ട്? എന്നാൽ രണ്ട്വശങ്ങൾ കൊണ്ട് നിങ്ങൾക്ക് എങ്ങനെയാണ് ഒരു അടഞ്ഞ രൂപം ലഭിക്കുന്നത്? മൂന്ന് അതേ, ഇതിനെ നമ്മൾ ത്രികോണം എന്ന് അറിയപ്പെടുന്നു. നാല് വശങ്ങൾ?

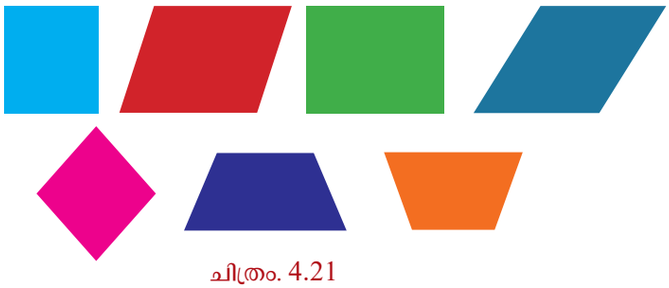
സമചതുരങ്ങളും ദീർഘചതുരങ്ങളും നാല് വശങ്ങളുള്ള ബഹുഭുജങ്ങൾക്ക് ഉദാഹരണങ്ങളാണ്, എന്നാൽ ഇവ മാത്രമല്ല 4 വശങ്ങളുള്ള ബഹുഭുജങ്ങൾക്ക് വേറെയും കുറച്ച് ഉദാഹരണങ്ങൾ ഉണ്ട്. അവയെ നമുക്ക് ചതുർഭുങ്ങൾ എന്ന് വിളിക്കാം.

4.3.1 ചിലചതുർഭുജങ്ങളുടെ പ്രത്യേകപേരുകൾ (Special Names for Some Quadrilaterals)

1. എതിർവശങ്ങൾ തുല്യവും സമാന്തരവുമായിട്ടുള്ള ചതുർഭുജമാണ് **സാമാന്തരികം**
2. എതിർവശങ്ങൾ സമാന്തരവും എല്ലാവശങ്ങൾ സമാന്തരമായിട്ടുള്ള ചതുർഭുജമാണ് **സമചതുർഭുജം**
3. ഒരു ജോഡി എതിർവശങ്ങൾ സമാന്തരമായിട്ടുള്ള ചതുർഭുജമാണ് **ലംബകം**

കുറച്ച് സാമാന്തരികങ്ങളും, കുറച്ച് സമചതുർഭുജങ്ങളും കുറച്ച് ലംബകങ്ങളും വരയ്ക്കുക.

Unit 4_GEOMETRY.indd 144 27-01-2023 13:32:26



ചിത്രം. 4.21

ഗുണങ്ങൾ പട്ടികയിലാക്കുന്നതിന്റെഏറ്റവുംവലിയ പ്രയോജനമെന്നത് അവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധംവളരെപ്പെട്ടെന്ന് മനസ്സിലാക്കാൻ സാധിക്കുമെന്നതാണ്

- ഓരോസാമാന്തരികവും ഒരു ലംബമാണ്, പക്ഷേ അത് മറ്റൊരുരീതിയിലല്ല.
- ഓരോ സമചതുർഭുജവും ഒരു സാമാന്തികമാണ്, പക്ഷേ അത് മറ്റൊരുരീതിയിലല്ല
- ഓരോദീർഘ ചതുരവും ഒരു സാമാന്തികമാണ്, പക്ഷേ അത് മറ്റൊരുരീതിയിലല്ല
- ഓരോസമചതുരവും ഒരു ചതുർഭുജമാണ് അതുകൊണ്ട് ഒരോ സമചതുരവും ഒരു സാമാന്തരികവുമാണ്

'മറ്റൊരുരീതിയിലല്ല' എന്നത്ഗണിതത്തിൽ'ഇതിന്റെറ വിപരീതംശരിയല്ല' എന്നാകുന്നു.

ഒരു പ്രധാനചോദ്യം ഇതാണ്. എങ്ങനെയാണ് മറ്റൊരുവഴി സാധ്യമാകുന്നത്. ഉദാഹരണമായി എപ്പോഴാണ് ഒരു സാമാന്തരികം ഒരു ദീർഘചതുരമാകുന്നത്? എല്ലാകോണുകളും തുല്യമായസാമാന്തരികം ഏതാണോ അതാണ് ദീർഘചതുരം (എങ്ങനെയാണെന്ന് നോക്കാമോ) ഇപ്പോൾ നമുക്ക്താത്പര്യമുണ്ടാക്കുന്ന ചിലഗുണങ്ങൾ നിരീക്ഷിക്കാം. ഉദാഹരണമായി, എല്ലാവശങ്ങളും തുല്യമായ സമചതുർഭുജം ഒരു സാമാന്തികവുമാണെന്ന് കാണാം.

കുറിപ്പ്

ബൈ- സൈക്കിളിനേയും ട്രൈ സൈക്കിളിനേയും നിങ്ങൾക്കറിയാമല്ലോ, അല്ലേ?2 (ബൈ), 3 (ട്രൈ) എന്നീ പദങ്ങൾ നമ്മൾ മറ്റേതെങ്കിലും പദത്തിനും മുൻപിൽ ഉപയോഗിച്ചാൽ അത് രണ്ട് എന്നും മൂന്ന് എന്നും കണക്കാക്കപ്പെടുന്നു. അതുപോലെ ക്വാട്രി (quadri) എന്ന പദത്തിന് 4 എന്ന് അർത്ഥം വരും. പക്ഷേ നമ്മൾ ക്വാട്രി സൈക്കിൾ എന്ന് ഉപയോഗിക്കാറില്ല. ലാറ്ററൽ എന്നാൽ വശങ്ങൾ അതിനാൽ ക്വാഡ്രിലാറ്ററൽ എന്നാൽ 4 വശങ്ങളുള്ള രൂപം എന്നാണ് അർത്ഥം. ട്രൈാലാറ്ററൽസ് എന്ന് കേട്ടിട്ടുണ്ടോ അവയെ നമ്മൾ ത്രികോണങ്ങൾ (ട്രൈ ആങ്കിൾസ്) എന്ന് വിളിക്കും.

4-നു ശേഷം ?; 5 - penta, 6 hexa, 7-hepta, 8-octa, 9- nano, 10 - deca. എന്ന സാമ്പ്രാദയം കാണാം. (ട്രൈഗൺസിനെ ത്രികോണം എന്നും ക്വാട്രിഗൺസിനെ ചതുർഭൂജം എന്നും അങ്ങനെ പെന്റഗൺ, ഹെക്സഗൺ, ഹെപറ്റ്റാഗൺ, ഒക്റ്റാഗൺ, നനോഗൺ, ഡെക്കാഗൺ, എന്നിങ്ങനെ അറിയപ്പെടുന്നു. ഇതിനുമപ്പുറം 11 - gons, 12 -gons തുടങ്ങി 23-gon ഉം നമുക്ക് വരയ്ക്കാൻ സാധിക്കും. !

4.3.2 കൂടുതൽ പ്രത്യേക പേരുകൾ (More Special Names)

ഒരുചതുർഭുജത്തിന്റെറ എല്ലാവശങ്ങളും തുല്യമായാൽതിനെ **സമഭുജം** എന്ന് പറയുന്നു. ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെറ എല്ലാകോണുകളും തുല്യമായാൽതിനെ **സമമായകോൺ** എന്ന് പറയുന്നു.
ത്രികോണത്തിൽഎല്ലാവശങ്ങളുംതുല്യമായാൽ നമ്മൾ അതിനെ സമഭുജത്രികോണം എന്ന്വിളിക്കുന്നു. ഇതുപോലെ ഇവയെ സമമായകോൺ ഉള്ള ത്രികോണംഎന്ന് പറയാം

ഇതുപോലെ:

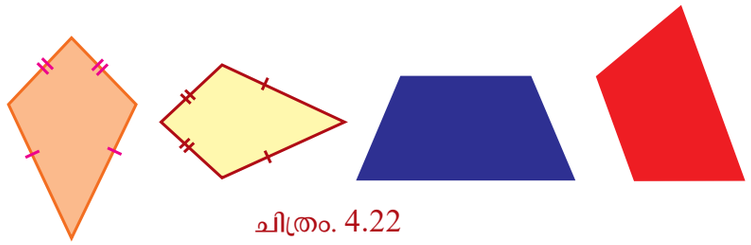
ഒരു സമചതുർഭുജവും ഒരു സാമാന്തികമാണ്.

ഒരു ദീർഘചതുരം ഒരു സമമായകോൺ ഉള്ള സാമാന്തികമാണ്.

ഒരു സമചതുരം ഒരു സമഭുജവും സമമായകോണുകളുള്ളതുമായ സാമാന്തികവുമാണ്.

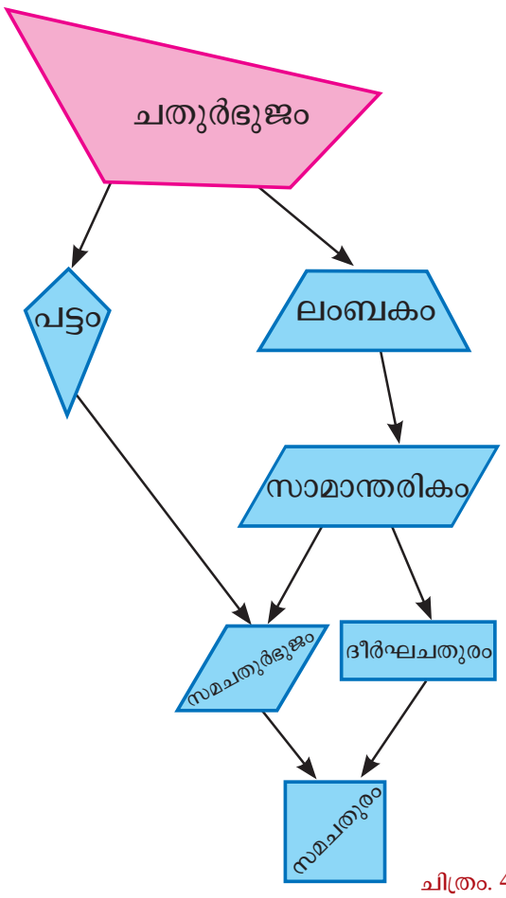
Unit 4_GEOMETRY.indd 145 27-01-2023 13:32:26

സമപാർശ്വലംബകം, പട്ടം എന്നിങ്ങനെ രണ്ട് പ്രത്യേകചതുർഭുജങ്ങൾ കൂടി ഉണ്ട്



ചിത്രം. 4.22

4.3.3 ചതുർഭുജത്തിന്റെ തരങ്ങൾ (Types of Quadrilaterals)



ചിത്രം. 4.23

പുരോഗതി പരിശോധന

താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഉത്തരം നൽകുക.

(i) ഒരു സമചതുർഭുജത്തിന്റെ എതിർകോണുകൾ തുല്യമാണോ ?

(ii) ഒരു ജോഡി എതിർവശങ്ങൾ തുല്യവും സമാന്തരവുമായ ചതുർഭുജമാണ്?

(iii) ഒരു പട്ടത്തിന്റെ എതിർവശങ്ങൾ തുല്യമാണോ?

(iv) സമമായ കോൺ ഉള്ളതും എന്നാൽ സമചതുർഭുജവുമല്ലാത്ത സാമാന്തരികം ഏതാണ്?

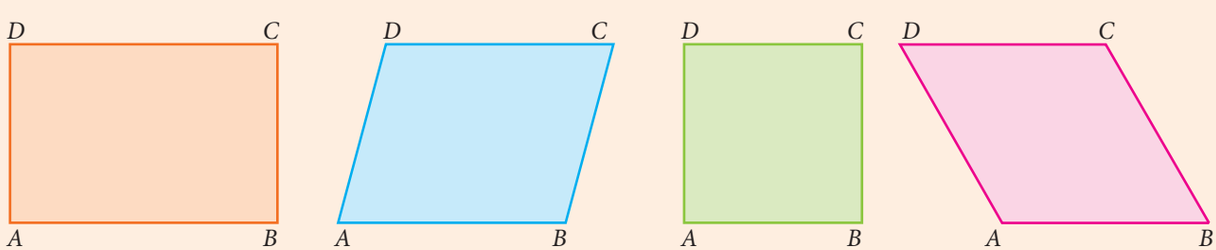
(v) ഏതാണ് സമമായ കോൺ ഇല്ലാത്തതും എന്നാൽ സമഭുജവുമായ സാമാന്തരികം?

(vi) ഏതാണ് സമഭുജമായതും എന്നാൽ സമമായ കോൺ ഉള്ളതുമായ സാമാന്തികം?

(vii) _____ ഒരു ദീർഘചതുരവും, ഒരു സമചതുരഭുജവും ഒരു സാമാന്തരികവുമാണ്.

പ്രവൃത്തി 3

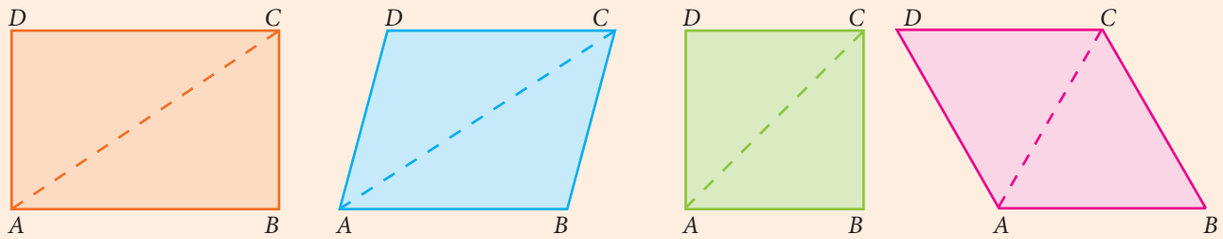
ഘട്ടം – 1: നിറമുള്ള മിനുസമുള്ള പേപ്പറുകളിൽ നിന്നും നാല് വ്യത്യസ്ത ചതുർഭുജങ്ങൾ വെട്ടുക.



ചിത്രം. 4.24

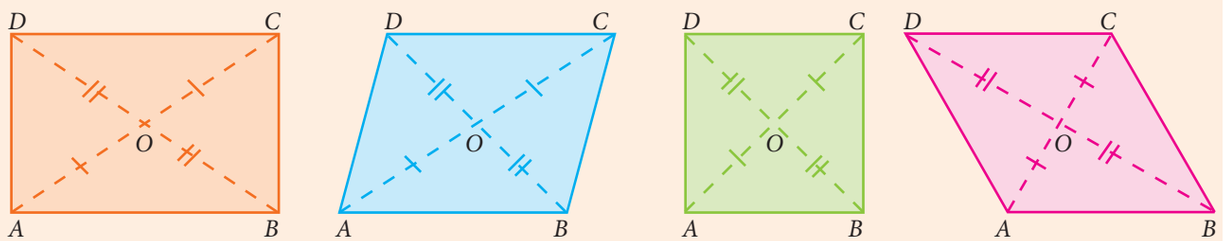
Unit 4_GEOMETRY.indd 146 27-01-2023 13:32:28

ഘട്ടം – 2: അവയുടെ വികർണ്ണങ്ങളിലൂടെ ചതുർഭുജങ്ങളെ മടക്കുക. നല്ലതുപോലെ അമർത്തി കുത്തുകൾ ഇടുക. ഈ കുത്തുകൾ മടക്കുകളെ പ്രതിനിധികരിക്കുന്നു.



ചിത്രം. 4.25

ഘട്ടം – 3: ചതുർഭുജങ്ങളുടെ രണ്ട് വികർണ്ണങ്ങളും മടക്കുക. മടക്കുകൾ നന്നായി അമർത്തുക.



ചിത്രം. 4.26

ഇപ്പോൾ എതിർഭാഗത്തുണ്ടാകുന്ന ത്രികോണങ്ങൾ രണ്ടും പരസ്പരം സർവ്വസമമാണെന്ന് കാണാം. വികർണ്ണങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള കോണും വികർണ്ണങ്ങൾ ഉൾപ്പെടുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ നീളവും അളക്കുക..

ലംബകം, സമപാർശ്വലംബകം, പട്ടം എന്നീ ചതുർഭുജങ്ങളിലും ഇതേപോലെ ചെയ്യുക.
മുകളിൽ തന്നിരിക്കുന്ന പ്രവൃത്തിയിൽ നിന്നും വികർണ്ണങ്ങളുടെ നീളവും വികർണ്ണങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള കോണുകളും അളന്ന് താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന പട്ടികയിൽ ആക്കുക.

ക്രമ നമ്പർ	ചതുർഭുജത്തിന്റെ പേര്	വികർണ്ണത്തിലൂടെ ഉള്ള നീളം						കോണുകളുടെ അളവുകൾ			
		AC	*BD*	*OA*	*OB*	*OC*	*OD*	$\angle AOB$	$\angle BOC$	$\angle COD$	$\angle DOA$
1	ലംബകം										
2	സമപാർശ്വ ലംബകം										
3	സാമാന്തരികം										
4	ദീർഘചതുരം										
5	സമചതുർഭുജം										
6	സമചതുരം										
7	പട്ടം										

Unit 4_GEOMETRY.indd 147 27-01-2023 13:32:28

പ്രവൃത്തി 4

ഒരു ബഹുഭുജത്തിന്റെ കോണുകളുടെ തുക

ചതുർഭുജം $ABCD$ വരയ്ക്കുക

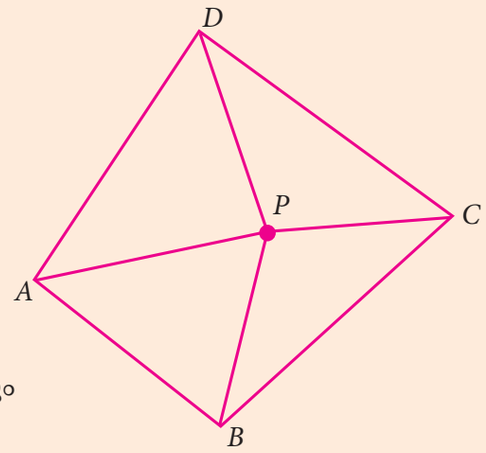
ആന്തരഭാഗത്തായി P എന്ന് കുറിക്കുക..

PA, PB, PC, PD എന്നീഭാഗങ്ങൾ യോജിപ്പിക്കുക

ഇപ്പോൾ നിങ്ങൾക്ക് 4 ത്രികോണങ്ങൾ ലഭിക്കുന്നു

4 ത്രികോണങ്ങളുടെയും എല്ലാ കോണുകളുടേയും അളവുകളുടെ തുക എത്രയാണ്?

P എന്ന ശീർഷത്തിലുള്ള കോണുകളുടെ അളവുകളുടെ തുക എത്ര?



ചിത്രം. 4.27

ഇപ്പോൾ നിങ്ങൾക്ക് $ABCD$ എന്ന ചതുർഭുജത്തിന്റെ കോണുകളുടെ തുക കാണാൻ സാധിക്കുമോ?

ഈ ആശയം മറ്റ് ഏതെങ്കിലും ബഹുഭുജുങ്ങളിൽ വിപുലീകരിക്കാൻ സാധിക്കുമോ.

ചിന്തിക്കുക

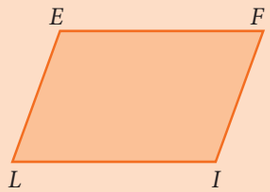
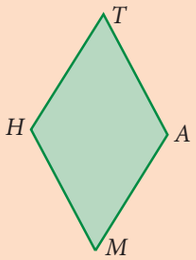
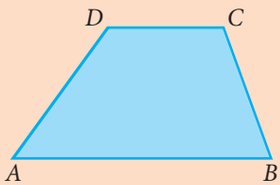
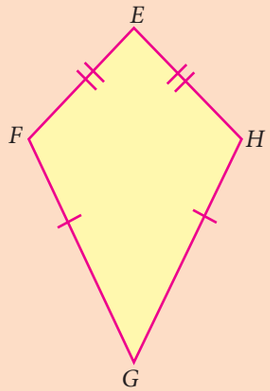
1. n വശങ്ങൾ $(n \geq 3)$,ഉള്ള ഒരു ബഹുഭുജത്തിന്റെ ആന്തരകോണുകളുടെ അളവുകളുടെ തുക $(n-2) \times 180°$ ആകുന്നു.

2. ക്രമ ബഹുഭുജങ്ങൾക്ക്

   - ഓരോ ആന്തരകോണും $\frac{(n-2)}{n} \times 180°$ ആകുന്നു.
   - ഓരോ ബാഹ്യകോണും $\frac{360°}{n}$ ആകുന്നു.
   - ഒരു ഉത്തല ബഹുഭുജത്തിൽ വശങ്ങൾ നീട്ടുമ്പോൾ ഉണ്ടാകുന്ന ബാഹ്യ കോണുകളുടെ തുക 360 ആകുന്നു.
   - n വശങ്ങളുള്ള ഒരു ബഹുഭുജത്തിന്റെ വികർണ്ണങ്ങളുടെ എണ്ണം $\frac{n(n-3)}{2}$ ആകുന്നു.

Unit 4_GEOMETRY.indd 148 27-01-2023 13:32:29

4.3.4 ചതുർഭുജത്തിന്റെ ഗുണങ്ങൾ

പേര്	ചിത്രം	വശങ്ങൾ	കോണുകൾ	വികർണ്ണങ്ങൾ
സാമാന്തരികം		എതിർവശങ്ങൾതുല്യം സമാന്തരം	എതിർകോണുകൾ തുല്യമാണ്കൂടാതെ ഏത് രണ്ട് സമീപകോണുകളുടേയും തുക 180^0	വികർണ്ണങ്ങൾ പരസ്പരം സമഭാഗം ചെയ്യുന്നു
സമചതുർഭുജം		എല്ലാ വശങ്ങളും തുല്യം, എതിർവശങ്ങൾ സമാന്തരം	എതിർകോണുകൾ തുല്യം, ഏത് രണ്ട് സമീപകോണുകളുടേയും തുക 180^0	വികർണ്ണങ്ങൾ പരസ്പരം സമകോണിൽ സമഭാഗം ചെയ്യുന്നു
ലംബകം		ഒരുജോഡി എതിർവശങ്ങൾ സമാന്തരം	സമാന്തരമല്ലാത്ത വശങ്ങളുടെ അഗ്രങ്ങളിലെ കോണുകൾ സംപൂരകമാണ്	വികർണ്ണങ്ങൾ തുല്യമാകണമെന്നില്ല
സമപാർശ്വ ലംബകം		ഒരുജോഡി എതിർവശങ്ങൾ സാമാന്തരം, സമന്തരമല്ലാത്ത വശങ്ങൾ തുല്യ നീളം	ഓരോ സമാന്തര വശങ്ങളുടെയും അഗ്രങ്ങളിലെ കോണുകൾ തുല്യം	വികർണ്ണങ്ങൾ തുല്യ നീളമുള്ളവയാണ്
പട്ടം		രണ്ട് ജോഡിസമീപവശങ്ങൾ തുല്യം	ഒരു ജോഡി എതിർ കോണുകൾ തുല്യ	1.വികർണ്ണങ്ങൾ സമകോണിൽഛേദിക്കുന്നു 2.വലിയ വികർണ്ണം ചെറിയവികർണ്ണത്തെ സമഭാഗം ചെയ്യുന്നു. 3.വലിയ വികർണ്ണം പട്ടത്തെ രണ്ട് സർവ്വ സമ ത്രി കോണങ്ങളാക്കി മാറ്റുന്നു.

Unit 4_GEOMETRY.indd 149 27-01-2023 13:32:30

കുറിപ്പ്

(i) ദീർഘചതുരം ഒരു സമമായ കോണുള്ള സാമാന്തരികം ആണ്.

(ii) സമചതുർഭുജം ഒരു സമഭുജസാമാന്തരികം ആണ്.

(iii) സമചതുരം ഒരു സമമായ കോണുള്ളതും സമഭുജവുമായ സാമാന്തരികമാണ്

(iv) സമചതുരം ഒരു ദീർഘചതുരവും ഒരു സമചതുർഭുജവും ഒരു സാമാന്തരികവും ആണ്.

പുരോഗതി പരിശോധന

1. താഴെ തന്നിരിക്കുന്നവയുടെ കാരണം ചൂണ്ടിക്കാണിക്കുക

i. സമചതുരം ഒരു പ്രത്യേകതരം ദീർഘ ചതുരമാണ്

ii. സമചതുർഭുജം ഒരു പ്രത്യേകതരം സാമാന്തരികമാണ്.

iii. സമചതുർഭുജത്തിനും പട്ടത്തിനും ഒരു പൊതുവായ ഗുണം ഉണ്ട്.

iv. ഒരു സമചതുരത്തിനും ഒരു സമചതുർഭുജത്തിനും ഒരു പൊതുവായ ഗുണം ഉണ്ട്

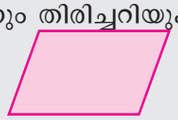
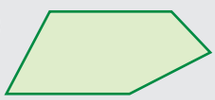
2 താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ത്രികോണങ്ങൾ ജോഡിയായി ചേർത്താൽ രൂപപ്പെടുന്നത് ഏത് തരം ചതുർഭുജമാണ്

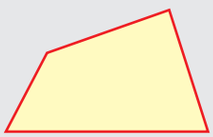
i. സമഭുജത്രികോണം

ii. സമകോണത്രികോണം

iii. ദ്വി സമഭുജത്രികോണം

3. തന്നിരിക്കുന്നവയിൽ ഏതെല്ലാമാണ് സാമാന്തരികം എന്നും ഏതെല്ലാം സാമാന്തരികം അല്ല എന്നും തിരിച്ചറിയുക

(i)  (ii)  (iii) 

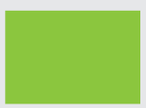
(iv)  (v)  (vi) 

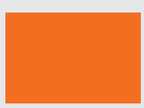
4. തന്നിരിക്കുന്നവയിൽ ചതുർഭുജങ്ങൾ അല്ലാത്തവ ഏതെല്ലാം?

(i)  (ii)  (iii)  (iv) 

(v)  (vi)  (vii)  (viii) 

5. തന്നിരിക്കുന്നവയിൽ ഏതെല്ലാം ലംബകങ്ങൾ ആണ് എന്നും ഏതെല്ലാം അല്ല എന്നും തിരിച്ച റിയുക

(i)  (ii)  (iii) 

(iv)  (v)  (vi) 

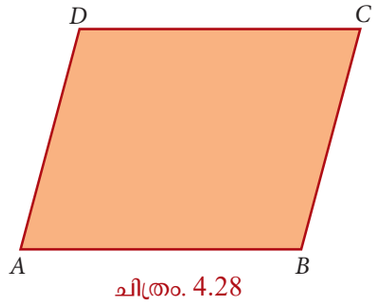
Unit 4_GEOMETRY.indd 150 27-01-2023 13:32:31

4.3.5 സാമാന്തരികത്തിന്റെ ഗുണങ്ങൾ (properties of parallelogram)

നമുക്ക് ഇപ്പോൾ രസകരമായ ഒരു യാത്രപോകാം പല തരത്തിലുള്ള ചതുർഭുജങ്ങളിലൂടെയുള്ള യാത്രയിൽ അവയുടെ പ്രത്യേക ഗുണങ്ങളെ ശ്രദ്ധിക്കാം. അവയുടെ ഗുണങ്ങൾ എന്തെല്ലാം ആണെന്നും അവ ശരിയാണോ എന്നും നമുക്ക് എങ്ങനെ അറിയാൻ സാധിക്കും.

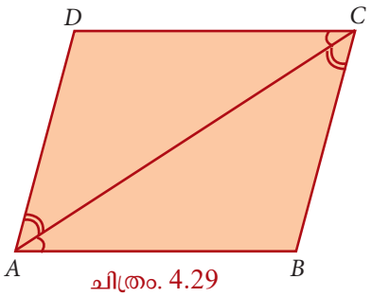
ഉദാഹരണമായി, ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ എതിർ വശങ്ങൾ പരസ്പരം സമാന്തരമാണ്, എന്നാൽ അവ തുല്യമാണോ? പല സാമാന്തരികങ്ങൾ വരച്ച് ഇത് ശരിയാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കാൻ സാധിക്കും. വാസ്തവത്തിൽ ഇവയിൽ എല്ലാം എതിർവശങ്ങൾ തുല്യമാണെന്ന് നമുക്ക് കാണാൻ കഴിയും. എല്ലാ സമാന്തരികങ്ങളുടെയും എതിർവശങ്ങൾ തുല്യമാണെന്ന് നിഗമനത്തിലെത്താൻ നമുക്ക് കഴിയുമോ? ഇല്ല, ഒരുപക്ഷേ എതിർവശങ്ങൾ തുല്യമല്ലാത്ത ഒരു സാമാന്തരികം കണ്ടെത്താൻ സാദ്ധ്യതയുണ്ടാകാം. അതിനാൽ നമുക്ക് ഒരു തെളിവ് ആവശ്യമാണ്.

തന്നിരിക്കുന്ന സാമാന്തരികം *ABCD* പരിഗണിക്കുക Fig. 4.28.



ചിത്രം. 4.28

AB=CDഉം AD=BC ആണെന്ന് വിശ്വസിക്കുന്നു ഇത് ശരിയാണെന്ന് ഉറപ്പു വരുത്താൻ സാധിക്കുമോ? നമുക്ക് ത്രികോണങ്ങളും അവയുടെ ഗുണങ്ങളും അറിയാം. ഈ അറിവുപയോഗിച്ച് ഇത് തെളിയിക്കാൻ ശ്രമിക്കാം. എന്നാൽ സാമാന്തരികം ABCD ൽ ത്രികോണങ്ങൾ ഒന്നും ഇല്ല.



ചിത്രം. 4.29

AC യെ യോജിപ്പിക്കുന്നതിലൂടെ ഇത് സാധ്യമാകും. (ഇതുപോലെ BD യെയും യോജിപ്പിക്കാം) ഇപ്പോൾ ADC കൂടാതെ ABC എന്നിങ്ങനെ രണ്ട് ത്രികോണങ്ങൾ കിട്ടുന്നു. കൂടാതെ അവയുടെ പൊതുവായ വശം AC ആകുന്നു. ഈ രണ്ട് ത്രികോണങ്ങളും ഏതെങ്കിലും രീതിയിൽ

സർവ്വസമമാണെന്ന് തെളിയിക്കാൻ സാധിച്ചാൽ AB=CD കൂടാതെ AD= BC, എന്ന് കിട്ടും. ഇതാണ് നമുക്കാവശ്യം

Δ ADC കൂടാതെ ΔABC എന്നിവ സർവ്വസമമാണെന്ന് എങ്ങനെ തെളിയിക്കും. സർവ്വസമത തെളിയിക്കാൻ ധാരാളം മാനദണ്ഡങ്ങൾ ഉണ്ട്. അവയിൽ ഏതാണ് അനുയോജ്യം എന്നത് വ്യക്തമല്ല

ABCD എന്നത് ഒരു സാമാന്തരികമാണ് എന്ന വസ്തുത ഇതുവരെയും നമ്മൾ ഉപയോഗിച്ചിട്ടില്ല. അതിനാൽ $AB \| DC$ കൂടാതെ $AD \| BC$ എന്നീ രണ്ട് വസ്തുതകൾ ഉപയോഗിച്ച് Δ ADC കൂടാതെ ΔABC എന്നിവ സർവ്വസമത്രികോണങ്ങളാണെന്ന് തെളിയിക്കണം. വശങ്ങൾ സമാന്തരം ആണ് എന്നതിൽ നിന്നും ചില കോണുകൾ തുല്യമാകും എന്നനുമാനിക്കാം. ഇപ്രകാരമുള്ള മറ്റ് ഏതെിലും ഗുണങ്ങൾ നമുക്ക് അറിയാമോ? അറിയാം, **ഛേദകങ്ങളുടെ** ഗുണങ്ങൾ

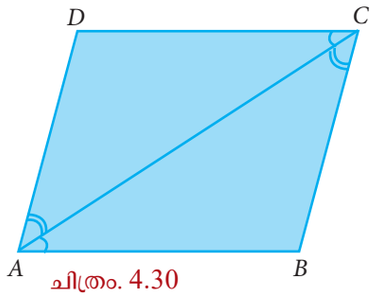
ഇത് വ്യക്തിമായി നോക്കാം $AD \| BC$ കൂടാതെ AC ഒരു ഛേദകം അതിനാൽ $\angle DAC = \angle BCA$ ഇതുപോലെ $AB \| DC$, കൂടാതെ AC ഒരു ഛേദകം അതിനാൽ $\angle BAC = \angle DCA$.എന്നത് പൊതുവായ ഭുജമാണ്. അതിനാൽ ASA പ്രമാണപ്രകാരം DADC യും DABC യും സർവ്വസമമാകുന്നു. ഇതിൽ നിന്നും $AB = CD$ യും $AD = BC$ യും ആണെന്ന് അനുമാനിക്കാം. അതിനാൽ സാമാന്തരികത്തിന്റെ എതിർവശങ്ങൾ നിശ്ചയമായും തുല്യമാണ്.

ഇതുവരെ നമ്മൾ കണ്ടെത്തിയ വാദപ്രതിവാദങ്ങൾ ക്രമമായി തെളിവുകളായി താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു

Unit 4_GEOMETRY.indd 151 27-01-2023 13:32:31

സിദ്ധാന്തം 1

ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ എതിർവശങ്ങൾ തുല്യമാണ്



ചിത്രം. 4.30

സങ്കൽപം $ABCD$ ഒരു സാമാന്തരികം

അനുമാനം $AB=CD$ കൂടാതെ $DA=BC$

നിർമ്മിതി AC യോജിപ്പിക്കുക

തെളിവ്

$ABCD$ സാമാന്തരികം ആയതിനാൽ

$AD \parallel BC$ കൂടാതെ AC ഒരു ഛേദകം

$\angle DAC = \angle BCA$ →(1) (ഏകാന്തര കോണുകൾ തുല്യം)

$AB \parallel DC$ കൂടാതെ AC ഒരു ഛേദകം

$\angle BAC = \angle DCA$ →(2) (ഏകാന്തര കോണുകൾ തുല്യം)

ΔADC കൂടാതെΔCBA എന്നിവയിൽ

$\angle DAC = \angle BCA$ (1) ൽ നിന്നും

AC പൊതുവായ വശം

$\angle DCA = \angle BAC$ (2) ൽ നിന്നും

$\Delta ADC \cong \Delta CBA$ (By ASA)

അതിനാൽ $AD = CB$ കൂടാതെ $DC = BA$ (സമാന വശങ്ങൾ തുല്യം)

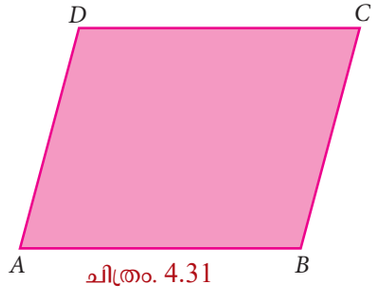
മുകളിൽ തന്നിരിക്കുന്ന തെളിവിലൂടെ നമ്മൾ സിദ്ധാന്തത്തിനു തുല്യമായ മറ്റൊരു ഗുണവും തെളിയിച്ചു

സിദ്ധാന്തം 2

ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ ഒരു വികർണ്ണം അതിനെ രണ്ട് സർവ്വസമ ത്രികോണങ്ങളായി വിഭജിക്കുന്നു.

മുകളിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സൂചനകളിൽ നിന്നും $\angle DAC = \angle BCA$ കൂടാതെ $\angle BAC = \angle DCA$. എന്നിവയ്ക്ക് തെളിവ് ലഭിച്ചു എന്നത് ,ശ്രദ്ധിക്കുക, അതുകൊണ്ട് ചിത്രത്തിൽ നിന്നും,

$$\angle BCA + \angle BAC = \angle DCA + \angle DAC$$



ചിത്രം. 4.31

എന്നാൽ:

$$\angle B + \angle BCA + \angle BAC = 180^0$$

കൂടാതെ $\angle D + \angle DCA + \angle DAC = 180^0$ എന്ന് നമ്മുക്കറിയാം.

അതുകൊണ്ട് $\angle B = \angle D$.ആയിരിക്കണം.

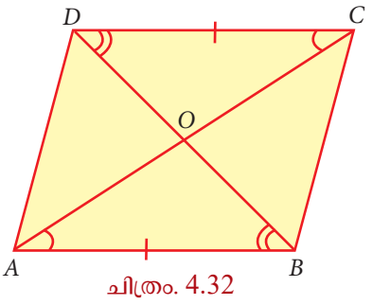
ഇതേപോലെ $\angle A = \angle C$എന്ന് നമുക്ക് തെളിയിക്കാം. അതിനാൽ താഴെ കാണുന്ന സിദ്ധാന്തവും നമുക്ക് തെളിയിക്കാൻ സാധിക്കും.

Unit 4_GEOMETRY.indd 152 27-01-2023 13:32:32

സിദ്ധാന്തം 3

ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ എതിർകോണുകൾ തുല്യമാണ്.

ഇപ്പോൾ ത്രികോണങ്ങളുടെ സർവ്വസമത എന്ന ഗുണങ്ങളിലൂടെ കൂടുതൽ ത്രികോണങ്ങൾ പരിചയപ്പെടാം. AC കൂടാതെ DBഎന്നീ രണ്ട് വികിരണങ്ങൾ പരിഗണിക്കുക. DADC കൂടാതെ DCBAഎന്നിവ സർവ്വസമമാണെന്ന് നമ്മുക്കറിയാം. ഇതുപോലെ DDAB കൂടാതെ DBCD എന്നിവയും സർവ്വസമമാണന്ന് തെളിയിക്കാം. ഈ ചിത്രത്തിൽ കൂടുൽ സർവ്വസമത്രികോണങ്ങളെ കണ്ടെത്താൻ സാധിക്കുമോ?



ചിത്രം. 4.32

അതേ, രണ്ട് വികർണ്ണങ്ങൾ O സംഗമിക്കുന്നു. ഇപ്പോൾ DAOB, BOC, DCOD കൂടാതെ DDOA എന്നിങ്ങനെ 4 പുതിയ ത്രികോണങ്ങൾ കിട്ടുന്നു ഇവയിൽ നിന്നും ഏതെങ്കിലും സർവ്വസമജോഡികളെ നിങ്ങൾക്ക് തിരിച്ചറിയാൻ സാധിക്കുമോ?

AB യും CD യും സമാന്തരമായതിനാൽ DAOB യും DCOD യും സർവ്വസമമാണെന്ന് ഊഹിക്കാം. വീണ്ടും ASA പ്രമാണം ഉപയോഗിക്കാൻ സാധിക്കുമോ എന്ന് ശ്രമിക്കാം. ഇതിനായി $\angle$ OAB= $\angle$ OCD കൂടാതെ $\angle$ ABO= $\angle$CDO എന്നത് ആവശ്യമാണ്. ഇവയിൽ ആദ്യത്തേത് $\angle$ CAB=$\angle$ ACD എന്ന പ്രസ്താവനയിൽ നിന്നും വന്നതാണ് മാത്രമല്ല $\angle$ CAB യും $\angle$ OAB യും കൂടാതെ $\angle$OCC യും $\angle$ACD യും ഒന്നുതന്നെയാണെന്ന് നിരീക്ഷിക്കാം. BD ഒരു ഛേദകമായതിനാൽ $\angle$ ABD =$\angle$ CDB, എന്ന വസ്തുത ഉപയോഗിക്കാം. എന്നാൽ $\angle$ ABD യും $\angle$ ABO യും ഒന്നുതന്നെയാണ്, $\angle$ CDB യും $\angle$ CDO യും ഒന്നുതന്നെയാണ്.

ഈ തെളിവുകൾ എഴുതുന്നതിൽ നിന്നും നമുക്ക് മറ്റൊരു സിദ്ധാന്തം ലഭിക്കുന്നു.

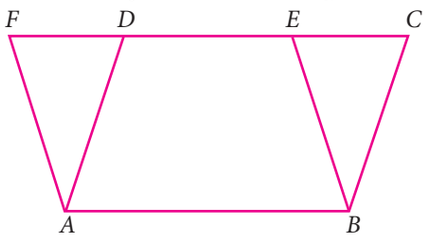
സിദ്ധാന്തം 4

ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ വികർണ്ണങ്ങൾ പരസ്പരം സമഭാഗം ചെയ്യുന്നു.

സാമാന്തരികത്തിന്റെ ആശയങ്ങൾ കൂടുതൽ ദൃഢപ്പെടുത്തേണ്ട സമയമാണിത് സമീപത്തിൽ തന്നിരിക്കുന്ന പട്ടികയിൽ ഉള്ള ഓരോ പ്രസ്താവനയും പരിഗണിക്കുക. ഓരോ പ്രസ്താവനയിൽ നിന്നും അതൊരു ചതുർഭുജമാണെന്ന് നമുക്ക് അനുമാനിക്കാം. ചതുർഭുജം സാമാന്തരികമാകുകയാണെങ്കിൽ അത് ഏത് തരം സാമാന്ത രികമായിരിക്കും?

- ഓരോ ജോഡി എതിർവശങ്ങളും സമാന്തരമാണ്
- ഓരോ ജോഡി എതിർ വശങ്ങളും തുല്യമാണ്
- എല്ലാ കോണുകളും സമകോണുകളാണ്
- അതിന്റെ വികർണ്ണങ്ങൾ പരസ്പരം സമഭാഗം ചെയ്യുന്നു
- വികർണ്ണങ്ങൾ തുല്യമാണ്
- വികർണ്ണങ്ങൾ ലംബവും തുല്യവുമാണ്
- വികർണ്ണങ്ങൾ പരസ്പരം ലംബദ്വിഭാജകങ്ങളാണ്
- അടുത്തടുത്ത ഓരോ ജോഡി കോണുകളും സംപൂരകമാണ്.

സാമാന്തരികത്തിന്റെ ചില ഗുണങ്ങളിൽ നിന്നും ആരംഭിക്കാം രണ്ടോ അതിലധികമോ സാമാന്തരികങ്ങളെ സംബന്ധിക്കുന്ന ചില ഗുണങ്ങൾ നമുക്ക് തെളിയിക്കാൻ ശ്രമിക്കാമോ? ചിത്രം 4.39 ൽ ഒരേ ആധാരത്തിലുള്ള രണ്ട് സാമാന്തരികങ്ങൾ തന്നിരിക്കുന്നു.



ചിത്രം. 4.33

$ABCD$ കൂടാതെ $ABEF$ എന്നിവ പൊതുവായ ആധാരം AB. ആയിട്ടുള്ള രണ്ട് സാമാന്തരികങ്ങളാണ് DADF കൂടാതെ DBCE. എന്നിങ്ങനെ സർവ്വസമമാകുന്ന ഒരു ജോഡി ത്രികോണങ്ങളെ നമുക്ക് കാണാം $AD = BC$ കൂടാതെ $AF = BE$. എന്ന് നമുക്ക് അറിയാം. എന്നാൽ $AD \parallel BC$ കൂടാതെ $AF \parallel BE$, ആയതിനാൽ AD കൂടാതെ AF ഇവയാൽ രൂപപ്പെടുന്ന കോണും BC കൂടാതെ BE ഇവയാൽ രൂപപ്പെടുന്ന കോണും തുല്യമായിരി

Unit 4_GEOMETRY.indd 153 27-01-2023 13:32:32

ക്കും. അതുകൊണ്ട് $\angle DAF = \angle CBE$. അതിനാൽ $DADF$ യും $DBCE$ യും സർവ്വസമമാണ്.

ഈ നിരീക്ഷണങ്ങളിൽ നിന്നും കൂടുതൽ നിഗമനങ്ങളിലെത്താൻ സാധിക്കുമോ? സർവ്വസമ ത്രികോണങ്ങൾക്ക് തുല്യ വിസ്തീർണ്ണമാണെന്ന് നമുക്കറിയാം. ഇതിൽ നിന്നും സാമാന്തരികങ്ങ ളായ $ABCD$ കൂടാതെ $ABEF$ എന്നിവയുടെ വിസ്തീർണ്ണങ്ങളെക്കുറിച്ച് ചിന്തിക്കാം.

$ABCD$ യുടെ വിസ്തീർണ്ണം = ചതുർഭുജം $ABED$ യുടെ വിസ്തീർണ്ണം + $DBCE$ യുടെ വിസ്തീർണ്ണം

= ചതുർഭുജം$ABED$ യുടെ വിസ്തീർണ്ണം + $DADF$ യുടെ വിസ്തീർണ്ണം

= $ABEF$ ന്റെ വിസ്തീർണ്ണം ഇങ്ങനെ നമ്മൾ മറ്റൊരു സിദ്ധാന്തം തെളിയിച്ചു.

സിദ്ധാന്തം 5:
ഒരേ സമാന്തര രേഖകൾക്കിടയിലുള്ളതും ഒരേ ആധാരമുള്ളതുമായ സാമാന്തരികങ്ങളുടെ വീസ്തിർണ്ണങ്ങൾ തുല്യമാണ്.

ഈ പ്രക്രിയയിൽ നമ്മൾ മറ്റു ചില പ്രസ്താവനകൾ തെളിയിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഇവയെ ഉപസിദ്ധാന്തങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നു. ഇവയ്ക്ക് വിശദമായ തെളിവുകൾ ആവശ്യമില്ല.

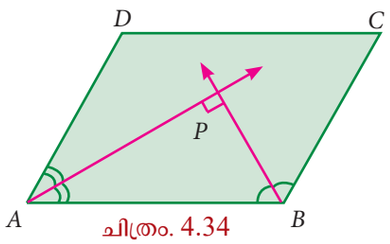
ഉപസിദ്ധാന്തം 1: ഒരേ ആധാരമുള്ളതും ഒരേ സമാന്തര രേഖകൾക്കിടയിലുള്ളതുമായ ത്രികേണങ്ങളുടെ വീസ്തിർണ്ണങ്ങൾ തുല്യമായിരിക്കും.

ഉപസിദ്ധാന്തം 2: ഒരേ ആധാരമുള്ളതും ഒരേ സമാന്തര രേഖകൾക്കിടയിലുള്ളതുമായ ദീർഘചതുരത്തിനും സമാന്തരികത്തിനും തുല്യ വീസ്തീർണ്ണമായിരിക്കും.

സമാന്തരികങ്ങൾ വലുതായാലും ചെറുതായാലും അവയുടെ ശീർഷകോണുകൾ, വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ, എന്നിവ വ്യത്യസ്തമായിരുന്നാലും ഇത്തരം സിദ്ധാന്തങ്ങളും ഉപസിദ്ധാന്തങ്ങളും എല്ലാം സമാന്തരികങ്ങൾക്കും അനുയോജ്യമാണ്.

ഉദാഹരണം 4.1

സമാന്തരികം $ABCD$, $\angle A$ കൂടാതെ $\angle B$ എന്നീ സമീപകോണുകളുടെ ഭാജകങ്ങൾ P ൽ സംഗമിക്കുന്നു. $\angle APB = 90°$ എന്ന് തെളിയിക്കുന്നു.



ചിത്രം. 4.34

നിർദ്ധാരണം

$ABCD$ ഒരു സമാന്തരികം $\angle A$ കൂടാതെ $\angle B$ എന്നിവയുടെ ദ്വീ ഭാജകങ്ങളാണ് AP യും BP യും.

ഒരുസാമാന്തരികത്തിന്റെഅടുത്തടുത്ത കോണുകൾ സംപൂരകമായതിനാൽ

$$\angle A + \angle B = 180°$$

$$\frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B = \frac{180^{o}}{2}$$

$$\Longrightarrow \angle PAB + \angle PBA = 90°$$

$\angle PAB + \angle APB + \angle PBA = 180°$ (ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകളുടെതുക)

$$\angle APB = 180° - [\angle PAB + \angle PBA]$$

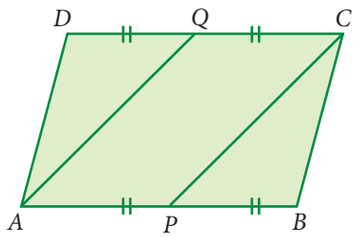
$$= 180° - 90° = 90°$$

തെളിയിച്ചു.

Unit 4_GEOMETRY.indd 154 27-01-2023 13:32:33

ഉദാഹരണം 4.2

ചിത്രം.4.35 ൽ $ABCD$ എന്ന സാമാന്തരികത്തിന്റെ AB, DC എന്നീ വശങ്ങളുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുക്കളാണ് യഥാക്രമം P യും Q യുംഎങ്കിൽ $APCQ$ എന്നത് ഒരു സാമാന്തരികം ആണെന്ന് തെളിയിക്കുക.



ചിത്രം. 4.35

നിർദ്ധാരണം

P, Q എന്നിവ യഥാക്രമം AB, DC എന്നിവയുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുക്കളായതിനാൽ

$AP = \frac{1}{2} AB$ കൂടാതെ

$QC = \frac{1}{2} DC$ (1)

എന്നാൽ $AB = DC$ (സാമാന്തരികത്തിന്റെഎതിർവശങ്ങൾതുല്ല്യമാണ്.)

$\Longrightarrow \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} DC$

$\Longrightarrow AP = QC$ (2)

കൂടാതെ , $AB \parallel DC$

$\Longrightarrow AP \parallel QC$ (3) [$\because$ $ABCD$ ഒരുസാമാന്തരികംആണ്]

അതിനാൽ $APCQ$ എന്ന ചതുർഭുജത്തിൽ $AP = QC$ കൂടാതെ$AP \parallel QC$ [(2),(3)ഇവയിൽ നിന്നും] അതുകൊണ്ട് ചതുർഭുജം $APCQ$ ഒരു സാമാന്തരികം ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം 4.3

ചിത്രം 4.42ൽ $ABCD$ ഒരു സാമാന്തരികം ആണ് $\angle BAD = 120^\circ$കൂടാതെAC യുടെ ദ്വിഭാജകമാണ് $\angle BAD$ എങ്കിൽ $ABCD$ ഒരു സമചതുർഭുജം ആണെന്ന് തെളിയിക്കുക?.

നിർദ്ധാരണം

നമുക്ക് $\angle BAD = 120^0$ കൂടാതെ $\angle BAD$ യുടെ ദ്വിഭാജകമാണ് AC.

$\angle BAC = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ$

$\angle 1 = \angle 2 = 60^\circ$

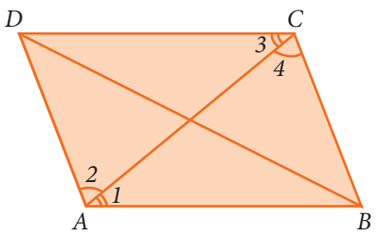
$AD \parallel BC$ കൂടാതെ AC ഒരു ഛേദകം

$\angle 2 = \angle 4 = 60^\circ$

ΔABC ഒരു ദ്വിസമഭുജത്രികോണമാണ് [$\because \angle 1 = \angle 4 = 60^\circ$]

$\Longrightarrow AB = BC$

സാമാന്തരികം $ABCD$ ഒരു സമഭുജമാണ്.



ചിത്രം. 4.36

Unit 4_GEOMETRY.indd 155 27-01-2023 13:32:34

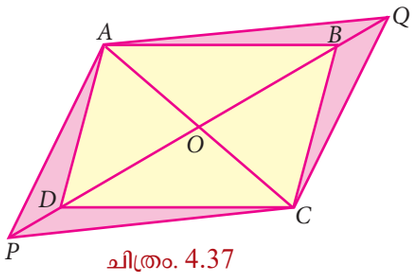
ഉദാഹരണം 4.4 സാമാന്തരികം $ABCD$ ൽ, $PD = BQ$ ആകത്തക്ക രീതിയിൽ DB യിലെ രണ്ട് ബിന്ദുക്കളാണ്.P യും Q വും എങ്കിൽ $APCQ$ എന്നത് ഒരു സാമാന്തരികമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക

നിർദ്ധാരണം

$ABCD$ ഒരു സാമാന്തരികമാണ്..

$OA = OC$ കൂടാതെ

$OB = OD$ (∵വികർണ്ണങ്ങൾ പരസ്പരം സമാഭാഗം ചെയ്യുന്നു)



ചിത്രം. 4.37

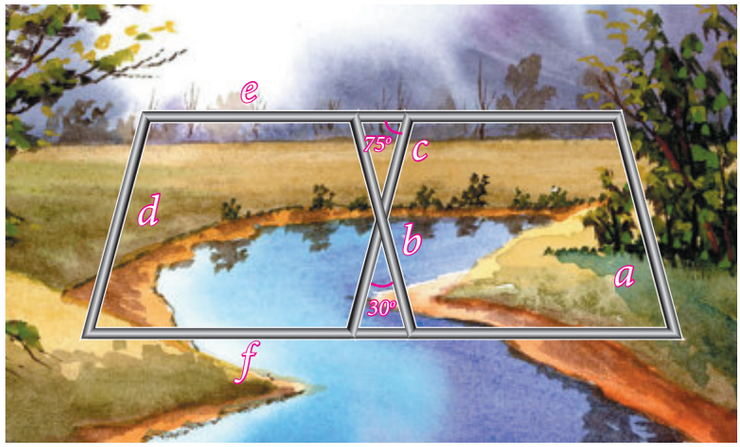
ഇപ്പോൾ $OB + BQ = OD + DP$

$OQ = OP$ കൂടാതെ $OA = OC$

$APCQ$ ഒരു സമാന്തരികമാണ്

അഭ്യാസം 4.2

1. ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ കോണുകൾ $2 : 4 : 5 : 7$. ആയാൽ കോണുകൾ കാണുക?.
2. $ABCD$, എന്ന ചതുർഭുജത്തിൽ $\angle A = 72°$, $\angle A$ യുടെ സംപൂരക കോണാണ് $\angle C$ ബാക്കിയുള്ള രണ്ട് കോണുകൾ $2x–10$, $x + 4$ ആണ്. x ന്റെ മൂല്യവും എല്ലാം കോണുകളുടെയും അളവുകളും കാണുക?
3. $ABCD$ എന്ന ദീർഘമചതുരത്തിൽ AC, BD എന്നീ വികർണ്ണങ്ങൾ O യിൽ സംഗമിക്കുന്നു. $\angle OAB = 46°$ എങ്കിൽ $\angle OBC$ കാണുക.
4. ഒരു സമചതുർഭുജത്തിന്റെ വികർണ്ണങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ 12 cm കൂടാതെ 16 cm എന്നിങ്ങനെയാൽ അവയുടെ വശത്തിന്റെ നീളം കാണുക ?
5. സമാന്തരികത്തിന്റെ കോണുകളുടെ ദ്വിഭാജകങ്ങൾ ദീർഘചതുരം രൂപീകരിക്കുന്നു എന്ന് തെളിയിക്കുക?
6. ഒരു ത്രികോണവും ഒരു സാമാന്തരികവും ഒരേ സമാന്തര രേഖകൾക്കിടയിലും ഒരേ ആധാരമുള്ളതും ആണ്. എങ്കിൽ സാമാന്തരികത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണത്തിന്റെ പകുതിയാണ് ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണമെന്ന് തെളിയിക്കുക?
7. a,b,c,d,e,f എന്നീ ഇരുമ്പു ദണ്ഡുകൾ ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിട്ടുള്ള ആകൃതിയിൽ ഒരു പാലം രൂപീകരിക്കുന്നു. $a \parallel b$, c || d , $e \parallel f$ എങ്കിൽ



ചിത്രം. 4.38

(i) b കൂടാതെ c

(ii) d കൂടാതെ e

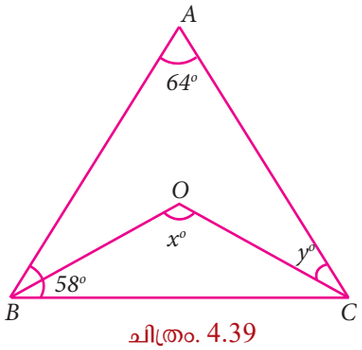
(iii d കൂടാതെ f

(iv) c കൂടാതെ f

Unit 4_GEOMETRY.indd 156 27-01-2023 13:32:35

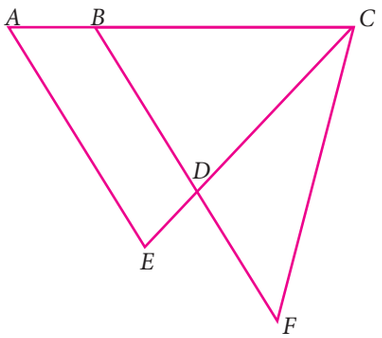
എന്നിവയ്ക്കിടയിലുള്ള കോണുകൾ കാണുക?

8. ചിത്രം 4.39,$\angle A = 64°$, $\angle ABC = 58°$. BO, CO എന്നിവ യഥാക്രമം ΔABCയിലെ $\angle ABC$ കൂടാതെ $\angle ACB$ എന്നിവയുടെ ദ്വീജകങ്ങളാണ് എങ്കിൽ $x°$കൂടാതെ $y°$ എന്നിവ കാണുക?



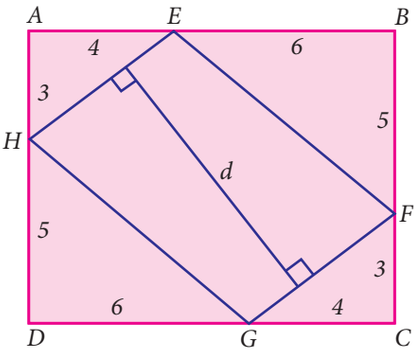
ചിത്രം. 4.39

9. ചിത്രം 4.40, ൽ $AB = 2$, $BC = 6$, $AE = 6$, $BF = 8$, $CE = 7$, കൂടാതെ $CF = 7$, എങ്കിൽ $ABDE$ എന്ന ചതുർഭുജത്തിന്റെയും ΔCDF ന്റെയും വീസ്തീർണ്ണങ്ങളുടെ അംശബന്ധം കാണുക. (സൂചന:ത്രികോണങ്ങളുടെ സർവ്വസമത ഉപയോഗിക്കുക)



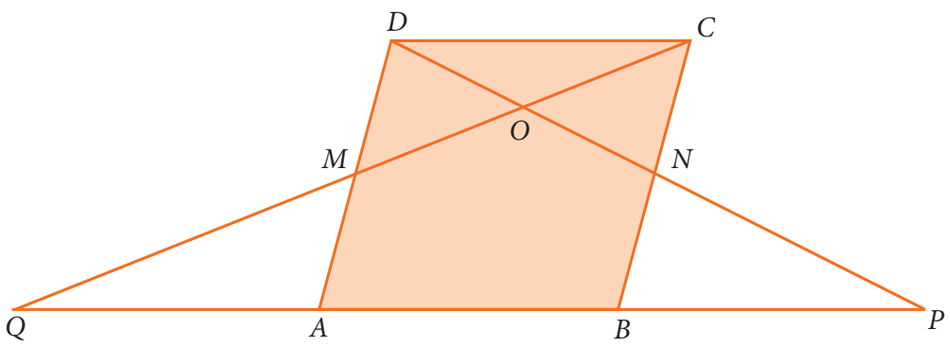
ചിത്രം. 4.40

10. ചിത്രം 4.41, ൽ $ABCD$ ഒരു ദീർഘചതുരവും $EFGH$ ഒരു സമാന്തരികവുമാകുന്നു. ചിത്രത്തിൽ തന്നിരിക്കുന്ന അളവുകൾ ഉപയോഗിച്ച $\overline{HE}$, $\overline{FG}$ എന്നിവയ്ക്കിടയിലുള്ള ലംബനീളം d കാണുക?



ചിത്രം. 4.41

11. സമീപത്തിൽ തന്നിരിക്കുന്ന ചിത്രം സമാന്തരികം $ABCD$ ആകുന്നു, DP എന്ന രേഖ BC യെ N ൽ ഛേദിക്കുന്നു. കൂടാതെ AB യെ നീട്ടുമ്പോൾ P. യിൽ സന്ധിക്കുന്നു. C, ൽ കൂടിയുള്ള CQ എന്ന രേഖ AD യെ M ലൂടെ ദ്വിഭാജകം ചെയ്യുന്നു. കൂടാതെ AB യെ നീട്ടുമ്പോൾ Q. ൽ സന്ധിക്കുന്നു DP , CQ എന്നീ രേഖകൾ O. ൽ സംഗമിക്കുന്നു. എങ്കിൽ QPO എന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ വീസ്തീർണം സമാന്തരികം $ABCD$ യുടെ വീസ്തീർണത്തിന്റെ $\frac{9}{8}$ ഭാഗമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക



ചിത്രം. 4.42

Unit 4_GEOMETRY.indd 157 27-01-2023 13:32:36

4.4 വൃത്തത്തിന്റെ ഭാഗങ്ങൾ

വൃത്തം എന്ന ജ്യാമിതീയ രൂപത്തെ നിങ്ങളെ ചുറ്റിയുള്ള വസ്തുക്കളിൽ നിരീക്ഷിക്കുക. വൃത്തത്തെ കുറിച്ചുള്ള ആശയങ്ങളെ പൂർണമായി മനസ്സിലാക്കിയതിന്റെ ഭാഗമായാണ് ചക്രം കണ്ടുപിടിക്കപ്പെട്ടത്. ഇത് മനുഷ്യ ചരിത്രത്തിൽ കൂടുതൽ പരിണാമം ഉണ്ടാക്കിയ ഒന്നാണ്.



ചിത്രം. 4.43

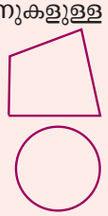
ഒരു സ്ഥിരമായ ബിന്ദുവിൽ നിന്നും ഒരേ അകലത്തിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെ കൂട്ടത്തെ വൃത്തം എന്നു പറയാം.

സ്ഥിരമായ ബിന്ദു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തേയും സ്ഥിരമായ അകലം വൃത്തത്തിന്റെ ആരത്തേയും സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

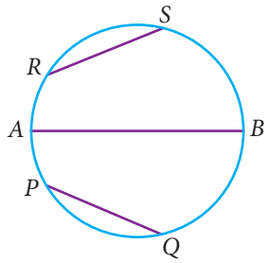
ഒരു രേഖ വൃത്തത്തിന്റെ രണ്ട് ബിന്ദുക്കളെ ഛേദിച്ചാൽ ആ രേഖ വൃത്തത്തിന്റെ ഛേദകരേഖ എന്ന് പറയാം.

കുറിപ്പ്

ഒരു വൃത്തം വിവിധ കോണുകളുള്ള രൂപങ്ങളിൽ നിന്നും വ്യത്യസ്തമാണ്. ഉദാഹരണമായി ചതുർഭുജം എന്നത് വശങ്ങളും ശീർഷങ്ങളും ഉള്ളതാണ് അതേസമയം വൃത്തം ക്രമമായ വളയമാണ്.

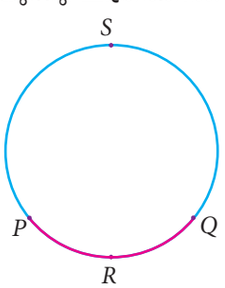


ഒരു രേഖാഖണ്ഡത്തിന്റെ അഗ്രബിന്ദുക്കൾ വൃത്തത്തിൽ ആയാൽ അത് ആ വൃത്തത്തിന്റെ ഞാൺ എന്ന് പറയുന്നു.വൃത്ത കേന്ദ്രത്തിലൂടെ കടന്ന് പോകുന്ന ഞാൺ വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസം എന്ന് വിളിക്കുന്നു. വൃത്തത്തിന്റെ പരിധി എന്നത് അതിന്റെ ചുറ്റളവ് ആകും. (വിവിധതരം ജ്യാമിതീയ രൂപങ്ങളിൽ നാം ഇതിന് ചുറ്റളവ് എന്ന പദത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.).



ചിത്രം. 4.44

വൃത്താകൃതിയിലുള്ള പേപ്പറിനെ കേന്ദ്രം വഴിയായി മാത്രമല്ല സാധ്യമായ വഴികളിലെല്ലാം മടക്കുമ്പോൾ (ചിത്രം 4.44) ആ മടക്ക് വൃത്തത്തിൻ മേലുള്ള രണ്ട് ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്നതായി കാണാം. ഈ മടക്കുകളെ വൃത്തത്തിന്റെ ഞാണുകൾ എന്ന് പറയാം. വൃത്തത്തിൻമേൽ ഉള്ള രണ്ട് ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡം വൃത്തത്തിന്റെ ഞാൺ എന്ന് പറയുന്നു. ചിത്രത്തിൽ. AB, PQ, RS എന്നിവ വൃത്തത്തിന്റെ ഞാണുകൾ ആകുന്നു.



ചിത്രം. 4.45

ഇപ്പോൾ വൃത്തത്തിൽ മേൽ. P, R, Q , S(ചിത്രം 4.45) എന്നീ നാല് ബിന്ദുക്കൾ കുറിക്കുക ഇവിടെ PRQ കൂടാതെ QSP എന്നിവ വൃത്തത്തിന്റെ തുടർച്ചയായ ഭാഗങ്ങൾ ആണ്. ഈ ഭാഗങ്ങളെ $\overset{\frown}{PRQ}$ കൂടാതെ $\overset{\frown}{QSP}$ അല്ലെങ്കിൽ ചുരുക്കത്തിൽ $\overset{\frown}{PQ}$ കൂടാതെ $\overset{\frown}{QP}$ എന്ന് എഴുതാം. വൃത്തത്തിന്റെ തുടർച്ചയായ ഈ ഭാഗത്തെ ചാപം എന്ന് വിളിക്കാം. സാധാരണയായി ചാപങ്ങളെ ഘടികാര എതിർ ദിശയിൽ കുറിക്കുന്നു.

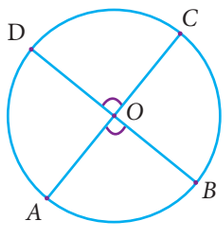
ബിന്ദുക്കൾ P ,Q (ചിത്രം 4.45) എന്നിവ വൃത്തത്തെ രണ്ട് ഭാഗങ്ങളായി വിഭജിക്കുന്നു. ഒന്ന് ദീർഘ ചാപം മറ്റൊന്ന് ലഘു ചാപം. ദീർഘ ചാപം $\overset{\frown}{QP}$ ലഘുചാപം $\overset{\frown}{PQ}$ ആകുന്നു.

Unit 4_GEOMETRY.indd 158 27-01-2023 13:32:38



ചിത്രം. 4.46

ഇപ്പോൾ ചിത്രം 4.46 ൽ ഞാൺ PQ കൂടാതെ ദീർഘചാപം $\overset{\frown}{QP}$ എന്നിവ ഉൾകൊള്ളുന്ന ഭാഗം ദീർഘ വൃത്തഭാഗം എന്നും അതേ ഞാൺ കൂടാതെ ലഘു ചാപം ഉൾകൊള്ളുന്ന ഭാഗം ലഘു വൃത്തഭാഗം എന്നും പറയാം.



ചിത്രം. 4.47

വൃത്തത്തിന്റെ രണ്ട് വില്ലുകൾ $\overset{\frown}{AB}$ കൂടാതെ $\overset{\frown}{CD}$ (ചിത്രം 4.47) വൃത്ത കേന്ദ്രത്തിൽ തുല്യകോണുകളെ ഉണ്ടാക്കുന്നു എങ്കിൽ അവയെ ഒരേ പോലുള്ള ചാപങ്ങൾ അല്ലെങ്കിൽ സർവ്വസമ ചാപങ്ങൾ എന്ന് പറയാം. കൂടാതെ,

$\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{CD}$ എന്ന്എഴുതാം, ഇതിൽ നിന്നും $m\overset{\frown}{AB} = m\overset{\frown}{CD}$ ആകുന്നു

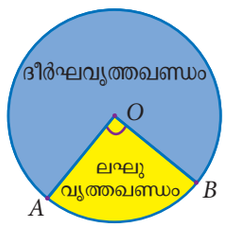
അതിനാൽ $\angle AOB = \angle COD$

കുറിപ്പ്

ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസം എന്നത്:

- വൃത്തത്തെ രണ്ട് തുല്യഭാഗങ്ങളായി ഭാഗിക്കുന്ന ഒരു രേഖാഖണ്ഡം.
- വൃത്തത്തിലെ ഏറ്റവും നീളംകൂടിയ ഞാൺ.
- വൃത്തത്തിന്റെ ഒരു പ്രതിസാമ്യതാ രേഖ.
- ആരത്തിന്റെ രണ്ട് മടങ്ങ് നീളമുള്ളത്.

ഇവിടെ ചിത്രം 4.48-നെ ശ്രദ്ധിക്കുക. രണ്ട് ആരങ്ങളും കൂടാതെ ചാപവും ഉൾകൊള്ളുന്ന ഭാഗത്തിന് എന്തെങ്കിലും പേരുണ്ടോ? അതെ, ആ ഭാഗത്തിന്റെ പേരാണ് വൃത്തഖണ്ഡം. വൃത്തഭാഗത്തെപ്പോലെ തന്നെ, ലഘുചാപം ലഘു വൃത്ത ഖണ്ഡത്തെയും ദീർഘചാപം ദീർഘ വൃത്തഖണ്ഡത്തെയും സൂചിപ്പിക്കുന്നു.



ചിത്രം 4.48

ഏകകേന്ദ്ര വൃത്തങ്ങൾ

ഒരേ കേന്ദ്രവും വ്യത്യസ്ത ആരങ്ങളും ഉള്ള വൃത്തങ്ങളാണ് ഏകകേന്ദ്ര വൃത്തങ്ങൾ.

ദൈനം ദിന ജീവിതത്തിൽ നാം കാണുന്ന ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ:


ലക്ഷ്യം നോക്കി അമ്പ് എറിയുന്നത്


കേരംബോർഡ് കോയിൻ


വെള്ളത്തിലെ അലകൾ

ചിത്രം. 4.49

സർവ്വസമവൃത്തങ്ങൾ

രണ്ട് വൃത്തങ്ങൾ സർവ്വസമം എങ്കിൽ ഒന്ന് മറ്റൊന്നിന്റെ പ്രതീഛായയായിരിക്കും അല്ലെങ്കിൽ ഒരു പോലെയായിരിക്കും. അതായത് അവ ഒരേ അളവുള്ളത്. ദൈനംദിന ജീവിതത്തിൽ നാം കാണുന്ന ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ:

Unit 4_GEOMETRY.indd 159 27-01-2023 13:32:39



ഒരു കാളവണ്ടിയുടെ രണ്ട് ചക്രങ്ങൾ



ഒളിമ്പിക് വളയങ്ങൾ

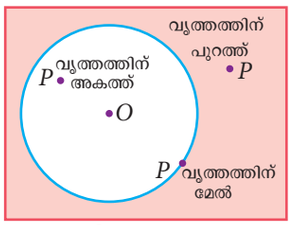
ചിത്രം. 4.50

ചിന്തിക്കുക

ചിത്രത്തിൽ ഉള്ളതുപോലെ നാല് സർവ്വസമ വൃത്തങ്ങൾ വരയുക. നിങ്ങൾ മനസ്സിലാക്കിയത് എന്താണ്?

വൃത്തത്തിനനുസരിച്ച് ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനം (Position of a point with *respect to a circle)*

ഒരു തലത്തിൽ വൃത്തത്തെ എടുത്ത് (ചിത്രം.4.51), വൃത്തത്തിനു മേൽ P എന്ന ബിന്ദുവിനെ കുറിക്കുക. വൃത്തകേന്ദ്രം O-ൽ നിന്നും P എന്ന ബിന്ദുവിലേയ്ക്കുള്ള അകലം OP, എങ്കിൽ.



ചിത്രം. 4.51

(i) OP = ആരം (ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനം വൃത്തത്തിനു മേൽ)

(ii) OP < ആരം (ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനം വൃത്തത്തിനകത്ത്)

(iii) OP > ആരം(ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനം വൃത്തത്തിന്റെ പുറത്ത്)

അതിനാൽ, ഒരു വൃത്തം അത് ഇരിക്കും തലത്തെ മൂന്ന് ഭാഗങ്ങളായി വിഭജിക്കുന്നു.

പുരോഗതി പരിശോധിക്കൽ

ശരിയോ തെറ്റോ എന്ന് എഴുതുക

1. ഓരോ ഞാണും വൃത്തത്തിന്റെ രണ്ട് ബിന്ദുക്കളെ ഉൾകൊണ്ടതാണ്..
2. വൃത്തത്തിന്റെ എല്ലാ ആരങ്ങളും ഒരേ നീളമുള്ളത് .
3. വൃത്തത്തിന്റെ ഓരോ ആരവും ഒരു ഞാൺ ആണ്.
4. വൃത്തത്തിന്റെ ഓരോ ഞാണും വ്യാസമാണ്.
5. വൃത്തത്തിന്റെ ഓരോ വ്യാസവും ഒരു ഞാൺ ആണ്.
6. ഒരു വൃത്തത്തിന് ധാരാളം വ്യാസങ്ങളുണ്ട്.
7. രണ്ട് വ്യാസങ്ങൾക്ക് ഒരേ അഗ്രബിന്ദു ഉണ്ടാകാൻ സാധ്യതയില്ല.
8. ഒരു വൃത്തം തലത്തെ മൂന്ന് വിവിധ ഭാഗങ്ങളായി വിഭജിക്കുന്നു.
9. ഒരു വൃത്തത്തെ ഒരു ദീർഘചാപം, ഒരു ലഘുചാപം എന്ന് വേർതിരിക്കാം.
10. വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന് പരിധിയിലേക്കുള്ള അകലം വ്യാസം ആണ്.

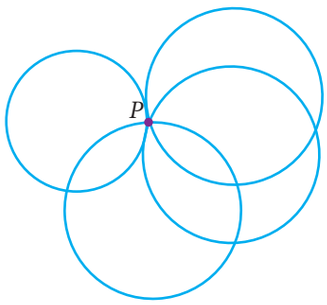
ചിന്തിക്കുക

1. ഒരു വൃത്തത്തിന് എത്ര വശങ്ങൾ ഉണ്ട് ?
2. വൃത്തം ബഹുഭുജമുള്ള ഒരു രൂപമാണോ(polygon)?

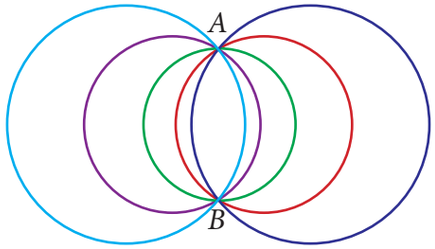
Unit 4_GEOMETRY.indd 160 27-01-2023 13:32:40

4.4.1 മൂന്ന് ബിന്ദുക്കളിലൂടെയുള്ള വൃത്തം

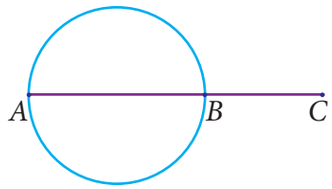
രണ്ട് ബിന്ദുക്കളിലൂടെ ഒരേ ഒരു രേഖ മാത്രമേ വരയ്ക്കാൻ സാധിക്കൂ എന്ന് നാം മുൻപേ പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്. അതുപോലെ ഒരു ബിന്ദുവിലൂടെ അല്ലെങ്കിൽ രണ്ട് ബിന്ദുക്കളിലൂടെ എത്രവൃത്തങ്ങൾ വരയ്ക്കാൻ സാധിക്കും എന്നത് നാം പഠിക്കാനിരിക്കുന്നു.തന്നിട്ടുള്ള ഒരു ബിന്ദു P (ചിത്രം.4.52) കൂടാതെ രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ A , B എന്നിവയിൽ കൂടി (ചിത്രം.4.53)ധാരാളം വൃത്തങ്ങൾ വരയ്ക്കാൻ സാധിക്കും എന്ന് നമുക്ക് കാണാം



ചിത്രം. 4.52

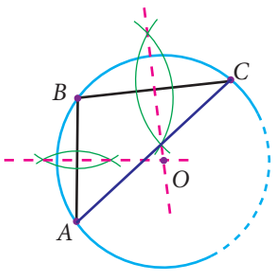


ചിത്രം. 4.53



ചിത്രം. 4.54

ഇപ്പോൾ ഒരേ രേഖയിലുള്ള മൂന്ന് ബിന്ദുക്കൾ A, B , C (ചിത്രം.4.54).എന്നിവയെ എടുക്കുക. ഈ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കാൻ നമുക്ക് സാധിക്കുമോ? ഇതിനെ കുറിച്ച് ചിന്തിക്കുക. ബിന്ദുക്കൾ ഒരു നേർരേഖയിൽ ആയിരുന്നാൽ വൃത്തം വരയ്ക്കാൻ സാധ്യമല്ല എന്ത് കൊണ്ട്?



ചിത്രം. 4.55

മൂന്ന് ബിന്ദുക്കളും നേർരേഖയിൽ അല്ലാത്ത ബിന്ദുക്കൾ ആയിരുന്നാൽ അവ ഒരു ത്രികോണത്തെ രൂപീകരിക്കും.(ചിത്രം.4.55) പരിവൃത്ത കേന്ദ്രത്തിന്റെ നിർമ്മിതിയെ കുറിച്ച് ഓർമ്മിക്കുക. ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ ലംബ ദ്വിഭാജകത്തിന്റെ സംഗമബിന്ദുവിനെ പരിവൃത്തകേന്ദ്രം എന്നും ആ വൃത്തത്തെ പരിവൃത്തം എന്നും പറയാം.

ഇതിൽ നിന്നും A, B , C എന്നിവയിൽ കൂടി ഒരേയൊരു വൃത്തം മാത്രമേ വരയ്ക്കാൻ സാധിക്കൂ എന്ന് മനസ്സിലാക്കാം. ഈ തത്വം താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ഫലത്തിൽ എത്തിക്കുന്നു.

സിദ്ധാന്തം 6 നേർരേഖയിലല്ലാത്ത മൂന്ന് ബിന്ദുക്കളിലൂടെ ഒരേയൊരു വൃത്തം മാത്രമേ വരയ്ക്കാൻ സാധിക്കുകയുള്ളു.

4.5 ഒരു വൃത്തത്തിലുള്ള ഞാണുകളുടെ പ്രത്യേകതകൾ

രേഖകൾ, ഞാണുകൾ, ത്രികോണങ്ങൾ, ചതുർഭുജങ്ങൾ എന്നിവയെക്കുറിച്ച് നാം മുമ്പേ പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്. അതിനോട് വൃത്തം എന്ന പുതിയ ആശയത്തെ ചേർത്തിട്ടുണ്ട്. ഇതെല്ലാം ഉപയോഗിച്ച് ചില സ്ഥിരമായ തീരുമാനങ്ങൾ ഒന്നിനു പുറകേ ഒന്നായി വരുന്നുണ്ട്. ഇപ്പോൾ നാം വൃത്തത്തിന്റെ ഞാണുകളെ അടിസ്ഥാനമാക്കി ചില പ്രത്യേകതകൾ അറിയാൻ പോകുന്നു.

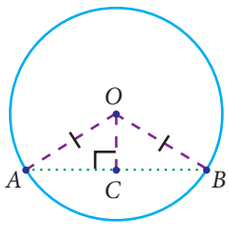
ആദ്യമായി കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നും ഞാണിലേയ്ക്കുള്ള ലംബരേഖയുടെ പ്രത്യേകത നമുക്ക് കാണാം.

4.5.1 കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നും ഞാണിലേക്കുള്ള ലംബം (Perpendicular from the Centre to a Chord)

O കേന്ദ്രമായ വൃത്തത്തിൽ ഞാൺ AB -യെ എടുക്കുക. $OC \perp AB$ വരയ്ക്കുക OA, OB യോജിപ്പിക്കുക ഇവിടെ ത്രികോണങ്ങൾ ΔAOC കൂടാതെ ΔBOC എന്നിവ ലഭിക്കുന്നു (ചിത്രം.4.17).

Unit 4_GEOMETRY.indd 161 27-01-2023 13:32:41

ഈ രണ്ട് ത്രികോണങ്ങളും സർവ്വസമം എന്ന് നമുക്ക് സങ്കൽപിക്കാൻ സാധിക്കുമോ? ഇപ്പോൾ നമുക്ക് മുമ്പേ പഠിച്ചിട്ടുള്ള സർവ്വസമ ത്രികോണങ്ങളുടെ പ്രത്യേകതകൾ ഉപയോഗിച്ച് ഇതിനെ തെളിയിക്കാം. $\angle OCA = \angle OCB = 90^\circ (OC \perp AB)$ കൂടാതെ $OA = OB$ എന്നത് വൃത്തത്തിന്റെ ആരങ്ങൾ കൂടാതെ വശം OC പൊതുവായത്. RHS നിയമപ്രകാരം ΔAOC കൂടാതെ ΔBOC എന്നിവ സർവ്വസമമാണ്.ഇതിൽ നിന്നും നാം മനസ്സിലാക്കുന്നത് $AC = BC$ ഈ വസ്തുതയുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ നാം ഇനി വരുന്ന തീരുമാനത്തിൽ എത്തുന്നു.



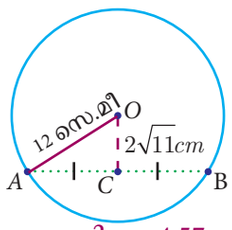
ചിത്രം. 4.56

സിദ്ധാന്തം 7 ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നും ഒരു ഞാണിലേക്കുള്ള ലംബം ആ ഞാണിനെ സമഭാഗം ചെയ്യുന്നു.

സിദ്ധാന്തം 7 ന്റെ വിപരീതം ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തെയും അതിന്റെ ഞാണിന്റെ മധ്യ ബിന്ദുവിനെയും യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖ ആ ഞാണിന് ലംബമായിരിക്കും.

ഉദാഹരണം 4.5

12 സെ.മി ആരമുള്ള വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നും $2\sqrt{11}$ cm സെ.മീ അകലത്തിലുള്ള ഞാണിന്റെ നീളം കാണുക.



ചിത്രം 4.57

നിർദ്ധാരണം

ഞാൺ AB കൂടാതെ AB-യുടെ മധ്യ ബിന്ദു C എന്നിരിക്കട്ടെ.

അതിനാൽ, $OC \perp AB$

OA കൂടാതെ OC യോജിപ്പിക്കുക.

ആരം OA ആകുന്നു

$OC = 2\sqrt{11}$cm സെ.മീ കൂടാതെ $OA = 12$ സെ.മീ

എന്ന് തന്നിട്ടുണ്ട്.സമകോണ ΔOAC -യിൽ,

പൈഥഗോറസ് സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച്

$$AC^2 = OA^2 - OC^2$$
$$= 12^2 - (2\sqrt{11})^2$$
$$= 144 - 44$$
$$= 100\text{സെ.മീ}$$

$$AC^2 = 100\text{സെ.മീ}$$
$$AC = 10\text{സെ.മീ}$$

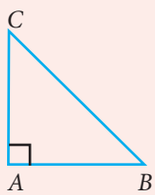
അതുകൊണ്ട്, ഞാൺ AB യുടെ നീളം $= 2AC$

$$= 2 \times 10\text{സെ.മീ} = 20\text{സെ.മീ}$$

കുറിപ്പ്

പൈതഗോറസ് സിദ്ധാന്തം

ജ്യാമിതിയിൽ പൈതഗോറസ് സിദ്ധാന്തം വളരെ പ്രധാനമായ ഒന്നാണ്. "ഒരു സമകോണ ത്രികോണത്തിൽ കർണ്ണത്തിന്റെ വർഗ്ഗം മറ്റ് രണ്ട് വശങ്ങളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുകയ്ക്ക് തുല്യം".



സമകോണ ΔOAC -യിൽ,

$BC^2 = AB^2 + AC^2$.ഈ സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ ഉപയോഗം ഈ അദ്ധ്യായത്തിൽ വളരെ പ്രയോജനമുള്ളതായിരിക്കും.

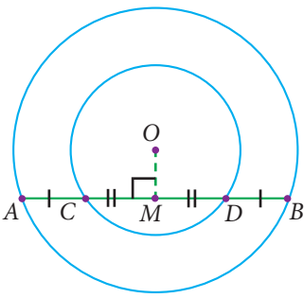
ഉദാഹരണം 4.6

ഏകകേന്ദ്രീയ വൃത്തങ്ങളിൽ ബാഹ്യവൃത്തത്തിന്റെ ഞാൺ AB എന്നത് ആന്തര വൃത്തത്തെ ചിത്രത്തിൽ ഉള്ളതുപോലെ C,D -ൽ ഛേദിക്കുന്നു എങ്കിൽ, $AB - CD = 2AC$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

Unit 4_GEOMETRY.indd 162 27-01-2023 13:32:43

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ളത് : ബാഹ്യവൃത്തത്തിന്റെ ഞാൺ AB എന്നത് ആന്തരവൃത്തത്തെ C,D ൽ ഛേദിക്കുന്നു.



ചിത്രം. 4.58

തെളിയിക്കേണ്ടത് : $AB - CD = 2AC$

നിർമ്മിതി : $OM \perp AB$ വരയ്ക്കുക.

തെളിവ് : ഇവിടെ $OM \perp AB$ കൂടാതെ $OM \perp CD$

അതുകൊണ്ട്, $AM = MB$ ... (1) (എന്തെന്നാൽ കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നും വരയ്ക്കുന്ന ലംബം ഞാണിനെ സമഭാഗം ചെയ്യും)

$$CM = MD \quad \ldots (2)$$

ഇപ്പോൾ, $AB - CD = 2AM - 2CM$

$= 2(AM - CM)$ (1)-ൽ നിന്നും (2)-ൽ നിന്നും,

$AB - CD = 2AC$

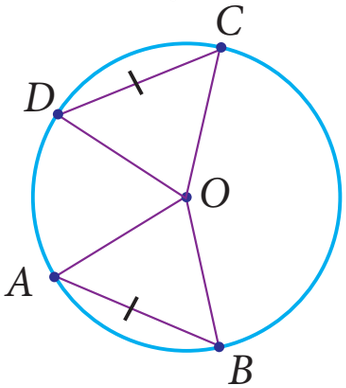
പുരോഗതി പരിശോധിക്കൽ

1. വൃത്തത്തിന്റെ ആരം 25 സെ.മി, ഞാണിന്റെ നീളം 40 സെ.മി എങ്കിൽ വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നും ഞാണിലേക്കുള്ള അകലം കാണുക.
2. $PQ = 4$ സെ.മി ആകത്തക്കവിധം ബിന്ദുക്കൾ P, Q ലൂടെ മൂന്ന് വൃത്തങ്ങൾ വരയ്ക്കുക.

4.5.2 ഞാൺ കേന്ദ്രത്തിൽ ഉണ്ടാക്കുന്ന കോൺ

ഒരു ഞാണിന് പകരം രണ്ട് തുല്യ ഞാണുകളെ എടുക്കുക. ഇപ്പോൾ നാം വേറൊരു ആശയത്തെ വിവാദിക്കാനിരിക്കുന്നു.

O കേന്ദ്രമായുള്ള വൃത്തത്തിൽ രണ്ട് തുല്യ ഞാണുകൾ എടുക്കുക.അഗ്രങ്ങളെ കേന്ദ്രത്തോട് യോജിപ്പിച്ചാൽ ത്രികോണങ്ങൾ ΔAOB , ΔOCD ലഭിക്കുന്നു. ഇതിൽ ഞാൺ AB= ഞാൺ CD (തന്നിട്ടുള്ള ഞാണുകൾ തുല്യം) മറ്റ് വശങ്ങൾ ആരങ്ങളാണ്. അതുകൊണ്ട് $OA = OC$ കൂടാതെ $OB = OD$. SSS നിയമപ്രകാരം ത്രികോണങ്ങൾ സർവ്വസമമാണ്. അതായത് $\Delta OAB \equiv \Delta OCD$. ഇതിൽ നിന്നും $m\angle AOB = m\angle COD$. ഇത് താഴെ വരുന്ന തീരുമാനത്തിലെത്തിക്കുന്നു.



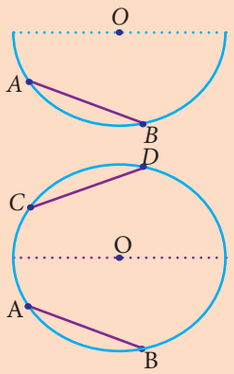
ചിത്രം. 4.59

സിദ്ധാന്തം 8 വൃത്തത്തിലെ തുല്യ ഞാണുകൾ വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽ തുല്യകോണുകളെ ഉണ്ടാക്കുന്നു

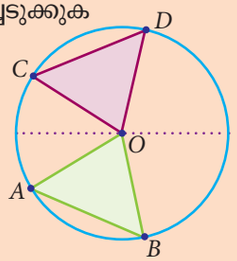
Unit 4_GEOMETRY.indd 163 27-01-2023 13:32:45

പ്രവൃത്തി - 5

ചെയ്യേണ്ട രീതി



1. O കേന്ദ്രമായി യോജിച്ച ആരത്തിൽ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക.
2. അതിനെ മടക്കി അർദ്ധവൃത്തം ഉണ്ടാക്കുക. അതിൽ ബിന്ദുക്കൾ A, B അടയാളപ്പെടുത്തുക.
3. അർദ്ധവൃത്തത്തിൽ AB-യെ മടക്കിയതിന് ശേഷം നിവർത്തുക. .
4. മറ്റൊരു അർദ്ധവൃത്തത്തിൽ ഒരു മടക്കു രേഖാഖണ്ഡം ലഭിക്കുന്നു.അതിനെ CD എന്ന് കുറിക്കുക ($AB = CD$ എന്ന് കാണാം)
5. ആരങ്ങൾ യോജിപ്പിച്ചാൽ, ΔOAB , ΔOCD ലഭിക്കുന്നു .
6. കാർബൺ പേപ്പർ ഉപയോഗിച്ച് ΔOAB കൂടാതെ ΔOCD. എന്നിവയുടെ അച്ചെടുക്കുക
7. ഈ ത്രികോണങ്ങൾ ΔOAB , ΔOCD എന്നിവയെ ഒന്നിന് മേൽ ഒന്നായി വയ്ക്കുക.

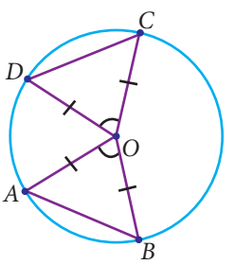


ചിത്രം. 4.60

ശ്രദ്ധിച്ചുനോക്കാം

1. നിങ്ങൾ എന്താണ് മനസ്സിലാക്കിയത്? $\Delta OAB \equiv \Delta OCD$ എന്നത് ശരിയാണോ?
2. വൃത്തകേന്ദ്രം O-ൽ നിന്നും, ഞാണുകൾ AB, CD-യ്ക്കു ലംബം വരയ്ക്കുക. വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നും ഞാണിലേക്കുള്ള അകലം അളക്കുക.

ഇപ്പോൾ വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽ തുല്യ കോണുകളെ ഉണ്ടാക്കുന്ന രണ്ട് ഞാണുകൾ AB ,CD, എന്നിവയുടെ നീളങ്ങളെ നോക്കാം. അതായത് സിദ്ധാന്തം (3) -ൽ നിന്നും, $\angle AOB = \angle COD$ എന്ന് ലഭിച്ചു. മാത്രമല്ല ΔAOB and ΔCOD കോണുകൾ അടങ്ങിയ വശങ്ങൾ ആരങ്ങളാണ്

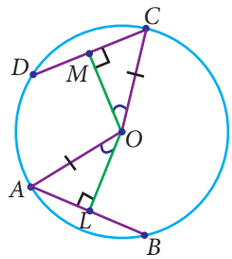


ചിത്രം.4..61

സിദ്ധാന്തം 8 ന്റെ വിപരീതം

വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽ രണ്ട് ഞാണുകൾ ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണുകൾ തുല്യമാണെങ്കിൽ ആ ഞാണുകളും തുല്യ നീളമുള്ളവയായിരിക്കും.

അതുപോലെ തുല്യ ഞാണുകൾ തന്നിരുന്നാൽ അവയുടെ മദ്ധ്യത്തിൽ നിന്നുള്ള അകലത്തെ കുറിച്ച് വിവാദിക്കാം. $OL \perp AB$ കൂടാതെ $OM \perp CD$ വരയുക. സിദ്ധാന്തം 7-ൽ നിന്നും, ഈ ലംബരേഖകൾ ഞാണുകളെ തുല്യമായി ഭാഗിക്കുന്നു എന്ന് മനസ്സിലാക്കാം. അതുകൊണ്ട് $AL = CM$. ΔOAL കൂടാതെ ΔOCM എന്നിവയെ താരതമ്യം ചെയ്യുമ്പോൾ കോണുകൾ $\angle OLA = \angle OMC = 90°$ കൂടാതെ, $OA = OC$ എന്നിവ ആരങ്ങളാണ്.RHS നിയമപ്രകാരം $\Delta OAL \equiv \Delta OCM$. ഇത് കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നുള്ള അകലത്തെ തരുന്നു.ഇവിടെ $OL = OM$ ആകുന്നു. കൂടാതെ താഴെ കാണുന്ന ഫലം ലഭിക്കുന്നു.



ചിത്രം. 4.62

സിദ്ധാന്തം 9 വൃത്തത്തിലെ തുല്യ ഞാണുകൾ വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നും തുല്യ അകലത്തിലായിരിക്കും.

സിദ്ധാന്തം 9-ന്റെ വിപരീതവും നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നതിന് പ്രയോജനമുള്ളതിനാൽ അതെക്കുറിച്ചും മനസ്സിലാക്കാം

സിദ്ധാന്തം 9 ന്റെ വിപരീതം

വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നും തുല്യ ദൂരത്തിൽ ഉള്ള ഞാണുകൾ തുല്യ നീളമുള്ളവയാണ്.

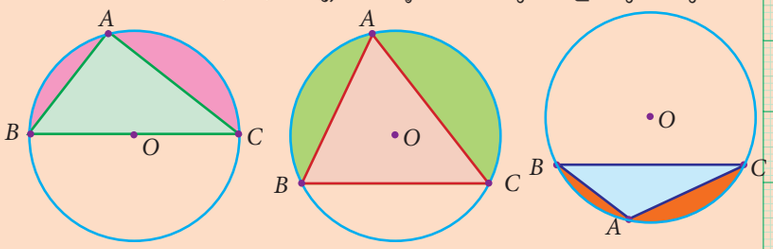
Unit 4_GEOMETRY.indd 164 27-01-2023 13:32:48

4.5.3 വൃത്തചാപത്തിൽ ഉണ്ടാകുന്ന കോൺ

പ്രവൃത്തി - 6

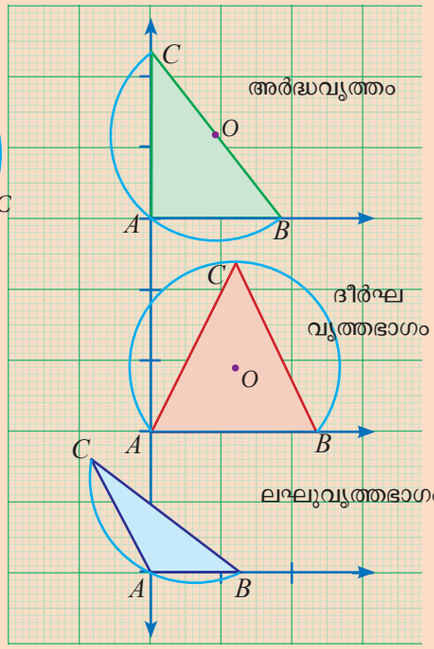
ചെയ്യേണ്ടരീതി :

1. ചാർട്ട് പേപ്പറിൽ O കേന്ദ്രമായി വിവിധ ആരങ്ങളുള്ള മൂന്ന് വൃത്തങ്ങൾ വരയ്ക്കുക.
2. ഈ വൃത്തങ്ങളിൽ നിന്നും അർദ്ധവൃത്തം, ഒരു ദീർഘ വൃത്തഭാഗം, ഒരു ലഘു വൃത്തഭാഗം തുടങ്ങിയവ വെട്ടിയെടുക്കുക.
3. അവയിൽ A, B, C എന്നീ മൂന്ന് ബിന്ദുക്കളെ കുറിക്കുക.



ചിത്രം 4.63

4. ത്രികോണങ്ങളെ വെട്ടിയെടുത്ത് ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നതുപോലെ ബിന്ദു A എന്നത് മൂലബിന്ദുവിൽ ആകത്തക്ക രീതിയിൽ ചാർട്ടിൽ ഒട്ടിക്കുക.



ചിത്രം 4.64

ശ്രദ്ധിക്കുക :

(i) അർദ്ധ വൃത്തത്തിൽ ഉണ്ടാകുന്ന കോൺ _____.

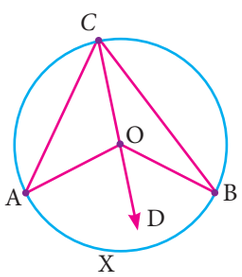
(ii) ദീർഘ വൃത്തഭാഗത്തിൽ ഉണ്ടാകുന്ന കോൺ _____.

(iii) ലഘു വൃത്തഭാഗത്തിൽ ഉണ്ടാകുന്ന കോൺ _____

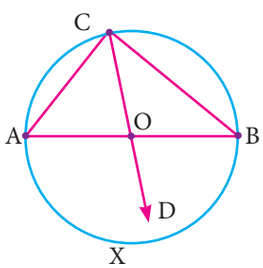
ഇപ്പോൾ ഒരു ചാപമെന്നത് വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽ ഉണ്ടാക്കുന്ന .കോണിനും വൃത്തപരിധിയിൽ ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണിനും തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തെ കുറിക്കുന്നു എന്ന് അറിയാൻ പോകുന്നു.

4.5.4 കേന്ദ്രത്തിലും പരിധിയിലും ഉണ്ടാകുന്ന കോണുകൾ

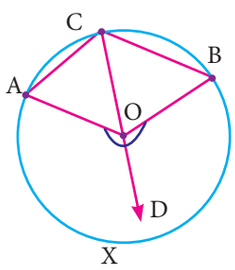
O കേന്ദ്രമായുള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരു വൃത്തം എടുക്കുക. ഇപ്പോൾ ബിന്ദുക്കൾ A, B, C യെ വൃത്ത പരിധിയിൽ കുറിക്കുക.



ചിത്രം 4.65



ചിത്രം 4.66



ചിത്രം 4.67

Unit 4_GEOMETRY.indd 165 27-01-2023 13:32:49

ഇവിടെ ചാപം $\overset{\frown}{AB}$ എന്നത് ലഘുചാപം (ചിത്രം.4.65,) അർദ്ധവൃത്തം (ചിത്രം.4.66) കൂടാതെ ദീർഘചാപം (ചിത്രം 4.67) ആകുന്നു. ബിന്ദു C എന്നത് ചാപങ്ങൾക്ക് അനുസരിച്ച് (ചിത്രം. 4.65 മുതൽ 4.67 വരെ) വിവിധരീതിയിലുള്ള കോണുകൾ ഉണ്ടാക്കുന്നു. മുകളിലുള്ള എല്ലാ വൃത്തങ്ങളിലും ചാപം, $\overset{\frown}{AXB}$ കേന്ദ്രത്തിൽ ഉണ്ടാക്കുന്ന കോൺ $\angle AOB$ ആയിരിക്കും .മാത്രമല്ല $\angle ACB$ എന്നത് പരിധിയിൽ ഉണ്ടാക്കുന്ന കോൺ ആണ്.

തെളിയിക്കേണ്ടത്: $\angle AOB = 2\angle ACB$. ഇതിനുവേണ്ടി CO യെ D വരെ നീട്ടുക CD യെ യോജിപ്പിക്കുക

$\angle OCA = \angle OAC$ കാരണം $OA = OC$ (ആരങ്ങൾ)

ബാഹ്യകോൺ = ആന്തര എതിർകോണുകളുടെ തുക.

$$\begin{aligned}\angle AOD &= \angle OAC + \angle OCA \\ &= 2\angle OCA \quad \ldots. (1)\end{aligned}$$

ഇതുപോലെ,

$$\begin{aligned}\angle BOD &= \angle OBC + \angle OCB \\ &= 2\angle OCB \quad \ldots. (2)\end{aligned}$$

(1) കൂടാതെ (2) കൂടാതെ,

$$\angle AOD + \angle BOD = 2(\angle OCA + \angle OCB)$$

$\angle AOB = 2\angle ACB$. എന്ന് ലഭിച്ചു.

ഇതിൽ നിന്നും നാം താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള തീരുമാനത്തിലെത്തുന്നു :

സിദ്ധാന്തം10

ഒരു ചാപം വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽ ഉണ്ടാക്കുന്ന കോൺ വൃത്തത്തിന്റെ ബാക്കി പരിധിയിൽ ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവിൽ ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണിന്റെ രണ്ട് മടങ്ങായിരിക്കും.

പുരോഗതി പരിശോധിക്കൽ

1. വ്യത്യസ്ത അളവുകളുള്ള വളകളുടെ രൂപ രേഖ വരച്ച് സെറ്റ്സ്ക്വെയറിന്റെ സഹായത്തോടെ അവയുടെ കേന്ദ്രം.
2. സ്കെയിലും കോമ്പസും ഉപയോഗിച്ച് തന്നിരിക്കുന്ന ചന്ദ്രകലയെ ഒരു പൂർണ്ണ ചന്ദ്രനായി മാറ്റുക.



ചിത്രം. 4.68

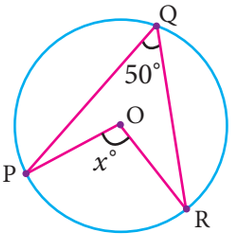
കുറിപ്പ്

- അർദ്ധവൃത്തത്തിൽ ഉണ്ടാകുന്ന കോൺ സമകോൺ.
- വൃത്തത്തിലെ തുല്യ ചാപങ്ങൾ തുല്യകോണുകളെ ഉണ്ടാക്കും

ഉദാഹരണം 4.7

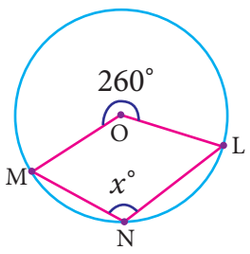
താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ചിത്രങ്ങളിൽ x° യുടെ മൂല്യം കാണുക:

(i)



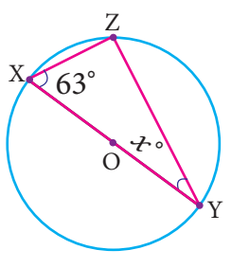
ചിത്രം. 4.69

(ii)



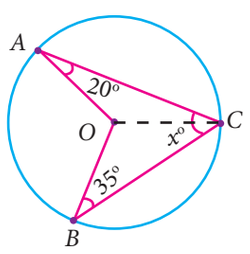
ചിത്രം. 4.70

(iii)



ചിത്രം. 4.71

(iv)



ചിത്രം. 4.72

Unit 4_GEOMETRY.indd 166 27-01-2023 13:32:53

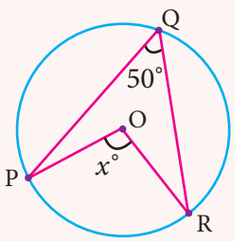
നിർദ്ധാരണം

ഒരു ചാപം വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽ ഉണ്ടാക്കുന്ന കോൺ വൃത്തത്തിന്റെ ബാക്കി പരിധിയിൽ ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവിൽ ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണിന്റെ രണ്ട് മടങ്ങായിരിക്കും എന്ന സിദ്ധാന്തത്തെ ഉപയോഗിക്കാം..

(i) $\angle POR = 2\angle PQR$

$x^\circ = 2 \times 50^\circ$

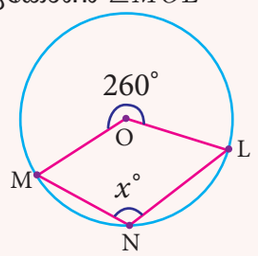
$x^\circ = 100^\circ$



(ii) $\angle MNL = \frac{1}{2}$ ബാഹ്യകോൺ $\angle MOL$

$= \frac{1}{2} \times 260^\circ$

$x^\circ = 130^\circ$



(iii) XY എന്നത് വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസം.

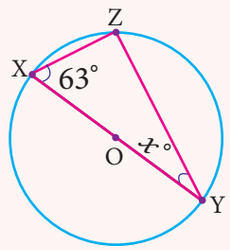
അതുകൊണ്ട $\angle XZY = 90^\circ$

(അർദ്ധവൃത്തത്തിലെ കോൺ)

In ΔXYZ

$x^\circ + 63^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

$x^\circ = 27^\circ$



(iv) $OA = OB = OC$ (ആരങ്ങൾ)

ΔOAC, -ൽ,

$\angle OAC = \angle OCA = 20^\circ$

ΔOBC, -ൽ,

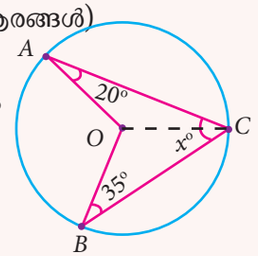
$\angle OBC = \angle OCB = 35^\circ$

(തുല്യ വശങ്ങൾക്ക് എതിരേയുള്ള കോണുകൾ തുല്യം)

$\angle ACB = \angle OCA + \angle OCB$

$x^\circ = 20^\circ + 35^\circ$

$x^\circ = 55^\circ$

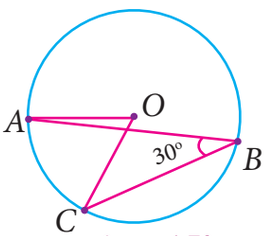


ഉദാഹരണം 4.8 ചിത്രത്തിൽ വൃത്തകേന്ദ്രം O കൂടാതെ $\angle ABC = 30^\circ$ എങ്കിൽ $\angle AOC$ - യുടെ മൂല്യം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$\angle ABC = 30^\circ$ തന്നിട്ടുള്ളത്

$\angle AOC = 2\angle ABC$ (എന്തെന്നാൽ, വൃത്തത്തിന്റെ ഒരു ചാപം കേന്ദ്രത്തിൽ ഉണ്ടാകുന്ന കോൺ ബാക്കി പരിധിയിൽ ഉണ്ടാകുന്ന കോണിന്റെ രണ്ട് മടങ്ങാണ്).



ചിത്രം. 4.73

$= 2 \times 30^\circ$

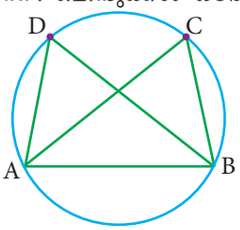
$= 60^\circ$

ഇപ്പോൾ നാം മറ്റൊരു പ്രധാന സിദ്ധാന്തത്തെ നോക്കാം.ലഘുചാപം ബൃഹത് കോണും, ദീർഘചാപം ന്യൂനകോണും, അർദ്ധവൃത്തം സമകോണും പരിധിയിൽ ഉണ്ടാക്കും എന്ന് പഠിച്ചിരിക്കുന്നു. തന്നിരിക്കുന്ന ഞാൺ AB കൂടാതെ ബിന്ദുക്കൾ C , D എന്നിവ വൃത്ത പരിധിയിൽ വ്യത്യസ്ത സ്ഥാനങ്ങളിൽ ഉള്ള ബിന്ദുക്കൾ എന്നിരിക്കട്ടെ. നാം $\angle ACB$ കൂടാതെ $\angle ADB$. യെ പരിഗണിച്ചാൽ ഈ കോണുകൾക്കിടയിൽ എന്തെങ്കിലും വ്യത്യാസം ഉണ്ടോ?

Unit 4_GEOMETRY.indd 167 27-01-2023 13:32:56

4.5.5 ഒരേ വൃത്തഭാഗ പരിധിയിൽ ഉള്ള കോണുകൾ

O കേന്ദ്രമായുള്ള വൃത്തത്തിൽ AB എന്നത് ഒരു ഞാൺ ആകുന്നു. C, D എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഒരേ വൃത്തഭാഗ പരിധിയിൽ ഉള്ളവയാണ്. ആരങ്ങൾ. OA, OB എന്നിവ യോജിപ്പിക്കുക.



ചിത്രം. 4.74

$$\frac{1}{2}\angle AOB = \angle ACB \quad \text{(സിദ്ധന്തം 5-ൽ നിന്ന്)}$$

കൂടാതെ $\frac{1}{2}\angle AOB = \angle ADB$ (സിദ്ധാന്തം 5-ൽ നിന്ന്)

$$\angle ACB = \angle ADB$$

ഈ തെളിവ് പുതിയ സിദ്ധാന്തത്തെ തരുന്നു.

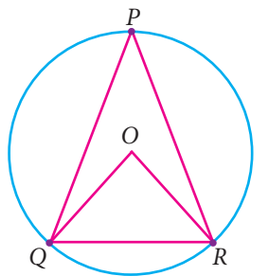
സിദ്ധാന്തം 11 ഒരേ വൃത്തഖണ്ഡത്തിൽ ഉണ്ടാകുന്ന കോണുകൾ തുല്യം.

ഉദാഹരണം 4.9 തന്നിട്ടുള്ള ചിത്രത്തിൽ, O എന്നത് വൃത്തകേന്ദ്രം $\angle OQR = 48^\circ$ എങ്കിൽ $\angle P$ -യുടെ അളവ് എന്താണ്?

നിഗ്മനം

തന്നിട്ടുള്ളവ: $\angle OQR = 48^\circ$.

അതുകൊണ്ട്, $\angle ORQ$ യുടെ അളവ് 48°. (എന്തുകൊണ്ട്?_____)



ചിത്രം. 4.75

$$\angle QOR = 180^\circ - (2 \times 48^\circ) = 84^\circ.$$

QR എന്ന ഞാൺ കേന്ദ്രത്തിൽ ഉണ്ടാക്കുന്ന കോൺ P-ൽ ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണിന്റെ രണ്ട് മടങ്ങാണ്.

അതുകൊണ്ട $\angle QPR = \frac{1}{2} \times 84^\circ = 42^\circ$.

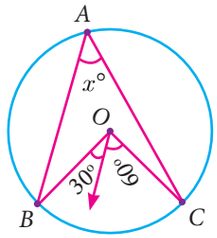
അഭ്യാസം 4.3

1. വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസം 52 സെ.മീ, ഒരു ഞാണിന്റെ നീളം 20 സെ.മീ എങ്കിൽ കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നും ഞാണിലേക്കുള്ള അകലം കാണുക.
2. വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നും 8 സെ.മീ അകലത്തിൽ 30 സെ.മീ നീളമുള്ള ഒരു ഞാൺ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നുവെങ്കിൽ വൃത്തത്തിന്റെ ആരം കാണുക.
3. ആരം $4\sqrt{2}$ സെ.മീ ഉള്ള വൃത്തത്തിൽ AB, CD എന്നിവ പരസ്പരം ലംബമായ വ്യാസങ്ങൾ ആണ്. എങ്കിൽ ഞാൺ AC യുടെ നീളം കാണുക. മാത്രമല്ല $\angle OAC$, $\angle OCA$ എന്നിവ കാണുക.
4. ആരം 15 സെ.മീ ഉള്ള വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നും12 സെ.മീ അകലത്തിലുള്ള ഞാണിന്റെ നീളം കാണുക.
5. O കേന്ദ്രമായുള്ള 10 സെ.മീ ആരമുള്ള വൃത്തത്തിൽ AB = 16 സെ.മീ, CD = 12 സെ.മീ എന്നിവ രണ്ട് സമാന്തര ഞാണുകൾ ആണ്. എങ്കിൽ രണ്ട് ഞാണുകൾക്കിടയിലുള്ള അകലം കാണുക.
6. 5സെ.മീ, 3സെ.മീ ആരമുള്ള രണ്ട് വൃത്തങ്ങൾ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിൽ ഛേദിക്കുന്നു. അവയുടെ കേന്ദ്രങ്ങൾക്ക് ഇടയിലുള്ള അകലം 4 സെ.മീ എങ്കിൽ പൊതുഞാണിന്റെ നീളം കാണുക.

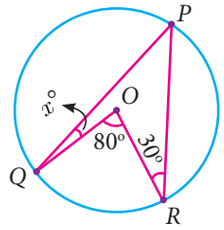
Unit 4_GEOMETRY.indd 168 27-01-2023 13:32:59

7. താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ചിത്രങ്ങളിൽ x° യുടെ മൂല്യം കാണുക:

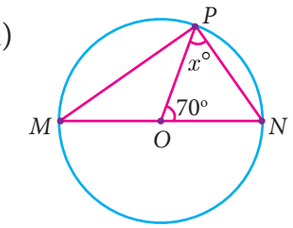
(i)



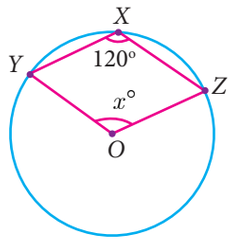
(ii)



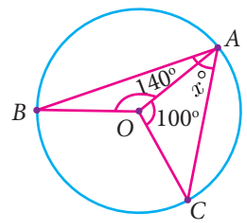
(iii)



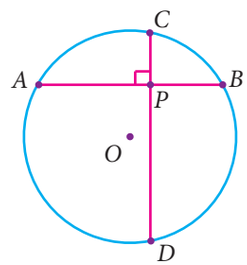
(iv)



(v)



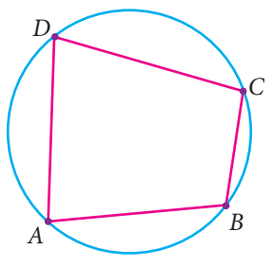
8. കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ചിത്രത്തിൽ, $\angle CAB = 25^\circ$ എങ്കിൽ,



$\angle BDC$, $\angle DBA$ കൂടാതെ $\angle COB$ എന്നിവ കാണുക.

4.6 ചക്രീയ ചതുർഭുജങ്ങൾ (Cyclic Quadrilaterals)

ഇവിടെ ചക്രീയ ചതുർഭുജം എന്ന പ്രത്യേക ചതുർഭുജത്തേയും അതിന്റെ പ്രത്യേകതകളെയും കുറിച്ച് വിശദീകരിക്കുന്നു. ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ നാല് ശീർഷങ്ങളും വൃത്തത്തിന്റെ പരിധിയിലായാൽ അത് ചക്രീയ ചതുർഭുജം ആകും. ഇപ്പോൾ ചക്രീയ ചതുർഭുജത്തിന്റെ പ്രത്യേക ഗുണങ്ങളെ ശ്രദ്ധിക്കാം.



ചിത്രം. 4.76

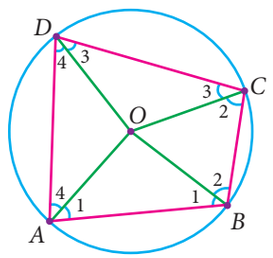
എല്ലാ ശീർഷങ്ങളും വൃത്തത്തിൻ മേൽ ആയ ചതുർഭുജം $ABCD$ യെ എടുക്കുക. നാം ഇപ്പോൾഎതിർ കോണുകൾ സംപൂരകകോണുകൾ എന്ന് തെളിയിക്കണം ഓരോ ശീർഷത്തേയും വൃത്തകേന്ദ്രം O-യിനോട് യോജിപ്പിക്കുക . OA, OB, OC കൂടാതെ OD എന്നീ ആരങ്ങൾ നാല് ദ്വിസമഭുജ ത്രികോണങ്ങൾ OAB, OBC, OCD കൂടാതെODA. എന്നിവ രൂപീകരിക്കുന്നു. വൃത്തകേന്ദ്രം O-യെ ചുറ്റിയുള്ള കോണുകളുടെ തുക 360°. ഓരോ ദ്വിസമഭുജ ത്രികോണത്തിന്റെയും കോണുകളുടെ തുക 180° ആകുന്നു.

ചിത്രത്തിൽ നിന്നും, (ചിത്രം 4.41) നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നത്,

$2\times(\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4)$ +കേന്ദ്രം O യിൽ ഉണ്ടാകുന്നകോൺ= $4\times 180^\circ$

$$2\times(\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4) + 360^\circ = 720^\circ$$

$(\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4) = 180^\circ$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.



ചിത്രം. 4.77

ഇതിൽ നിന്നും,

(i) $(\angle 1+\angle 2) + (\angle 3+\angle 4) = 180^\circ$ (എതിർ കോണുകൾ B കൂടാതെ D-യുടെ തുക)

(ii) $(\angle 1+\angle 4) + (\angle 2+\angle 3) = 180^\circ$ (എതിർകോണുകൾ A കൂടാതെ Cയുടെ തുക) എന്ന്

ഇപ്പോൾഫലം താഴെ തന്നിരിക്കുന്നതു പോലെ ലഭിക്കുന്നു.

Unit 4_GEOMETRY.indd 169 27-01-2023 13:33:02

സിദ്ധാന്തം 12 ചക്രീയചതുർഭുജത്തിന്റെ എതിർ കോണുകൾ സംപൂരകകോണുകൾ ആണ്.

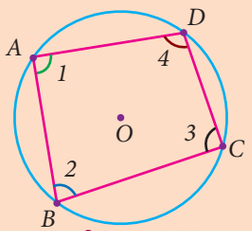
സിദ്ധാന്തം 12-ന്റെ വിപരീതവും നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നതിന് വളരെ പ്രയോജന മുള്ളതിനാൽ അതിനെ ശ്രദ്ധിക്കാം **സിദ്ധാന്തം 12**-ന്റെ വിപരീതം ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ ഒരു ജോടി എതിർ കോണുകൾ സംപൂരകകോണുകൾ ആയാൽ ആ ചതുർഭുജം ചക്രീയ ചതുർഭുജം ആയിരക്കും.

ATY15

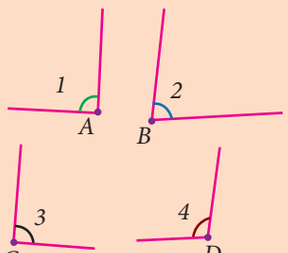
പ്രവൃത്തി - 7

ചെയ്യേണ്ട രീതി

1. O കേന്ദ്രമായി ഏതെങ്കിലും ഒരു ആരത്തിൽ വൃത്തം വരയ്ക്കുക.
2. ബിന്ദുക്കൾ A, B, Cകൂടാതെ D എന്നിവയെ വൃത്ത പരിധിയിൽ രേഖപ്പെടുത്തി ചക്രീയ ചതുർഭുജം $ABCD$ വരയ്ക്കുക അതിന്റെ കോണുകൾ ചിത്രം 4.78 ൽ കാണുന്നതു പോലെ രേഖപ്പെടുത്തുക.
3. കാർബൺ പേപ്പർ ഉപയോഗിച്ച് ചക്രീയ ചതുർഭുജം $ABCD$ -യുടെ പ്രതിരൂപം രൂപീകരിക്കുക
4. ചിത്രം 4.79 ൽ കാണുന്നതു പോലെ കോണുകൾ A, B, C കൂടാതെ D യെ വെട്ടി എടുക്കുക.
5. കോണുകൾ $\angle 1, \angle 2, \angle 3$ കൂടാതെ $\angle 4$ എന്നിവയെ കോണുകൾ A, B, C കൂടാതെ D-യുടെ അടുത്തുള്ള കോണുകളായി മാറുന്നതു പോലെ ചിത്രം 4.80-ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന രീതിയിൽ ഒട്ടുക.
6. കോണുകൾ $\angle 1 + \angle 3$, കൂടാതെ $\angle 2 + \angle 4$ എന്നിവയുടെ മൂല്യം കാണുക.



ചിത്രം. 4.78



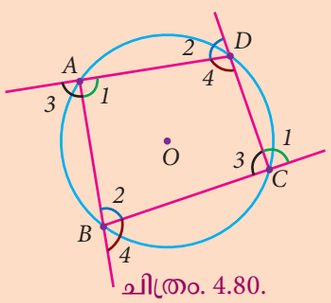
ചിത്രം. 4.79

ശ്രദ്ധിച്ചു നോക്കി താഴെ കാണുന്നവയെ പൂരിപ്പിക്കുക:

1. (i) $\angle A + \angle C =$ _____ (ii) $\angle B + \angle D =$ _____

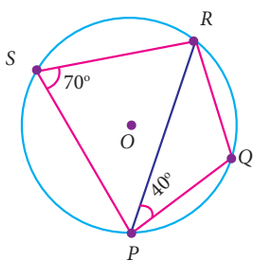
   (iii) $\angle C + \angle A =$ _____ (iv) $\angle D + \angle B =$ _____

2. ചക്രീയ ചതുർഭുജത്തിന്റെ എതിർ കോണുകളുടെ തുക _____.
3. ചക്രീയ ചതുർഭുജത്തിന്റെ ഒരു ജോഡി എതിർ കോണുകൾ_____.



ചിത്രം. 4.80.

ഉദാഹരണം 4.10 ചക്രീയ ചതുർഭുജം $PQRS$ ൽ $\angle PSR = 70°$ കൂടാതെ $\angle QPR = 40°$, എങ്കിൽ $\angle PRQ$ കാണുക(ചിത്രം. 4.81).



ചിത്രം. 4.81

നിർദ്ധാരണം

ചക്രീയ ചതുർഭുജം $PQRS$ ൽ

$\angle PSR = 70°$ (തന്നിട്ടുണ്ട്)

$\angle PSR + \angle PQR = 180°$ (കാരണം പ്രസ്താവിക്കുക_____)

$70° + \angle PQR = 180°$

$\angle PQR = 180° - 70°$

Unit 4_GEOMETRY.indd 170 27-01-2023 13:33:05

$$\angle PQR = 110^\circ$$

ΔPQR ൽ നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നത്,

$$\angle PQR + \angle PRQ + \angle QPR = 180^\circ \quad \text{(കാരണം പ്രസ്താവിക്കുക_____)}$$

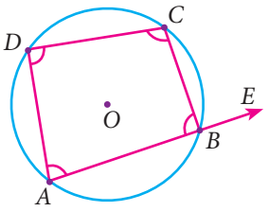
$$110^\circ + \angle PRQ + 40^\circ = 180^\circ$$

$$\angle PRQ = 180^\circ - 150^\circ$$

$$\angle PRQ = 30^\circ$$

ഒരു ചക്രീയ ചതുർഭുജത്തിന്റെ ബാഹ്യകോൺ (Exterior Angle of a Cyclic Quadrilateral)

ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ ബാഹ്യകോൺ എന്നത് അതിന്റെ ഏതെങ്കിലും ഒരു വശത്തിനും അതനടുത്ത വശത്തെ പുറത്തേയ്ക്ക് നീട്ടിയാൽ ലഭിക്കുന്ന നേർരേഖക്കും ഇടയിലുള്ളആ കോൺ ആണ്.



ചിത്രം. 4.82

ചക്രീയ ചതുർഭുജം $ABCD$-ൽ വശം AB-യെ E വരെ നീട്ടുക ഇവിടെ $\angle ABC$ കൂടാതെ $\angle CBE$ എന്നിവ ഒരു രേഖയിലെ കോണുകളാണ്. ഇവയുടെ തുക 180° ആണ്. മാത്രമല്ല $\angle ABC$ കൂടാതെ $\angle ADC$ എന്നിവ ചക്രീയ ചതുർഭുജത്തിന്റെ എതിർകോണുകൾ ആണ്. ഇവയുടെ തുക 180° ആണ് ഇതിൽ നിന്നും നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നത്, $\angle ABC + \angle CBE = \angle ABC + \angle ADC$. അവസാനം നമുക്ക് $\angle CBE = \angle ADC$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു. ഇതുപോലെ മറ്റ് കോണുകൾക്കും ഇത് തെളിയിക്കാം

സിദ്ധാന്തം 13 ചക്രീയ ചതുർജത്തിന്റെ ഒരു വശത്തെ നീട്ടിയാൽ ഉണ്ടാകുന്ന ബാഹ്യകോൺ ആന്തര എതിർ കോണിന് തുല്യം.

പുരോഗതി പരിശോധിക്കൽ

1. ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ ഒരു ജോഡി എതിർ കോണുകൾ സംപൂരകകോണുകൾ എങ്കിൽ ആ ചതുർഭുജം _____ ആകും.
2. ഞാണിന്റെ നീളം കുറയുമ്പോൾ, കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നുള്ള ഉള്ള അകലം _____.
3. ചക്രീയ ചതുർഭുജത്തിന്റെ ഒരു വശം നീട്ടിയാൽ ഉണ്ടാകുന്ന ബാഹ്യകോൺ ആന്തര എതിർ കോണിന് _____
4. ചക്രീയ ചതുർഭുജത്തിന്റെ എതിർ കോണുകൾ_____

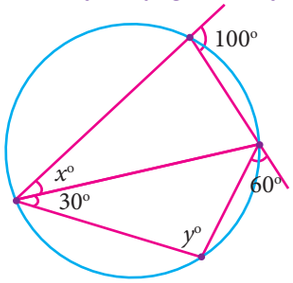
ഉദാഹരണം 4.11 കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ചിത്രത്തിൽ കോണുകൾ x° കൂടാതെ y° യുടെ മൂല്യം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

ചക്രീയ ചതുർഭുജത്തിന്റെ ബാഹ്യകോണുകളുടെ നിയമമനുസരിച്ച്,

നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നത്, $y^\circ = 100^\circ$

$x^\circ + 30^\circ = 60^\circ$ കൂടാതെ $x^\circ = 30^\circ$

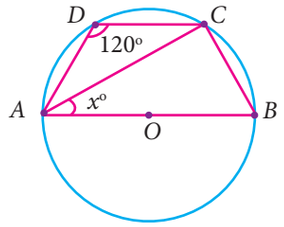


ചിത്രം. 4.83

Unit 4_GEOMETRY.indd 171 27-01-2023 13:33:08

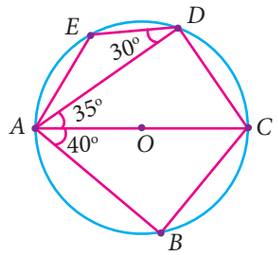
അഭ്യാസം 4.4

1. കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ചിത്രത്തിൽ x മൂല്യം കാണുക.

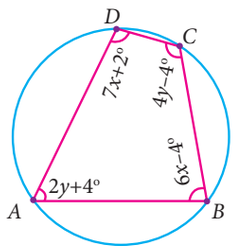


2. കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ചിത്രത്തിൽ, O കേന്ദ്രമായുള്ള വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസം AC. ഇവിടെ $\angle ADE = 30°$, $\angle DAC = 35°$ കൂടാതെ $\angle CAB = 40°$ എങ്കിൽ താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവ കാണുക.

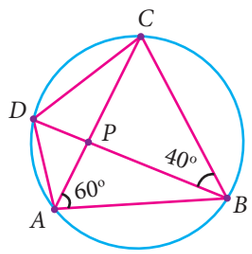
(i) $\angle ACD$ (ii) $\angle ACB$ (iii) $\angle DAE$



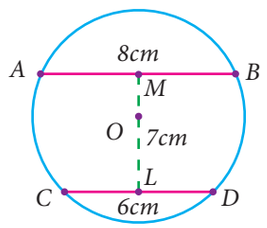
3. ചിത്രത്തിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ചക്രീയചതുർഭുജം $ABCD$ യിൽ എല്ലാ കോണുകളുടെയും വില കാണുക.



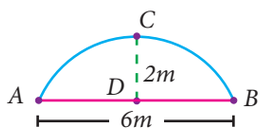
4 കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ചിത്രത്തിൽ ചക്രീയ ചതുർഭുജം, $ABCD$ യുടെ വികർണ്ണങ്ങൾ സന്ധിക്കുന്ന ബിന്ദു P കൂടാതെ $\angle DBC = 40°$, $\angle BAC = 60°$ എങ്കിൽ (i) $\angle CAD$ (ii) $\angle BCD$ എന്നിവ കാണുക



5. ചിത്രത്തിൽ , AB കൂടാതെ CD എന്നത് O കേന്ദ്രമായുള്ള വൃത്തത്തിന്റെ സമാന്തര ഞാണുകൾ ആണ്. മാത്രമല്ല AB = 8സെ.മീ CD = 6സെ. മീ, $OM \perp AB, OL \perp CD$ LM-ന് ഇടയിലുള്ള അകലം എങ്കിൽ 7സെ.മീ. എങ്കിൽ വൃത്തത്തിന്റെ ആരം കാണുക?

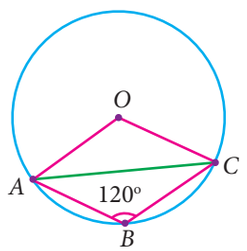


6. പാലത്തിലെ വളവിന്റെ (ചാപം)അളവുകൾ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. ഇവിടെ വളവിന്റെ അകലം 6 മീ കൂടാതെ വളവിന്റെ കൂടിയ ഉയരം 2 മീ എങ്കിൽ വളവ് അടങ്ങിയ വൃത്തത്തിന്റെ ആരം കാണുക?

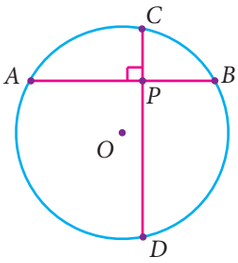


7. ചിത്രത്തിൽ $\angle ABC = 120^0$, O കേന്ദ്രമായുള്ള വൃത്തത്തിൻ മേലുള്ള ബിന്ദുക്കൾ A, B കൂടാതെ C എങ്കിൽ $\angle OAC$ കാണുക?

8. ഒരു പള്ളിക്കൂടത്തിൽ വനമഹോത്സവത്തിന്റെ ഭാഗമായുള്ള പരിപാടി നടക്കുന്നു. ഇതിൽ അദ്ധ്യാപകൻ, ഒൻപതാംതരം വിദ്യാർത്ഥികൾക്ക് വൃക്ഷത്തൈ നടാൻ

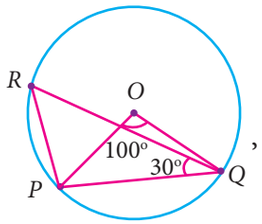


Unit 4_GEOMETRY.indd 172 27-01-2023 13:33:11



വേണ്ടി 6 മീറ്റർ ആരമുള്ള മൈതാനം തെരഞ്ഞെടുത്തു. നാല് വിദ്യാർത്ഥികൾ ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതു പോലെ A, B, C കൂടാതെ D എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ വൃക്ഷത്തൈ നടുന്നു. ഇവിടെ $AB = 8$ മീ, $CD = 10$മീ കൂടാതെ $AB \perp CD$. മറ്റൊരു വിദ്യാർത്ഥി AB കൂടാതെ CD എന്നിവ സന്ധിക്കുന്ന ബിന്ദു P-ൽ ചെടിത്തൈയെ വയ്ക്കുന്നു എങ്കിൽ കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നും P- യിലേയ്ക്കുള്ള അകലം കാണുക.

9. കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ചിത്രത്തിൽ, $\angle POQ = 100^0$ കൂടാതെ $\angle PQR = 30^0$ എങ്കിൽ $\angle RPO$ കാണുക.



4.7 പ്രയോഗിക ജ്യാമിതി

ബിന്ദുക്കൾ, രേഖകൾ മറ്റു രൂപങ്ങൾ എന്നിവയെ പ്രതിപാദിച്ച് ജ്യാമിതീയ രൂപങ്ങൾ നിർമ്മിക്കുന്ന രീതിയാണ് പ്രയോഗിക ജ്യാമിതി, രൂപങ്ങൾ, കോണുകൾ, അഥവാ രേഖകൾ എന്നിവ കൃത്യമായി വരയ്ക്കുന്നതിനെക്കുറിച്ച് ജ്യാമിതിയിൽ നിർമ്മതി എന്നത് കൊണ്ട് അർത്ഥമാക്കുന്നത് ജ്യാമിതിയ നിർമ്മിതികളെക്കുറിച്ച് യുക്ലിഡിന്റെ എലിമെന്റ്സ് എന്ന പുസ്തകത്തിൽ വിശദമായി ചർച്ച ചെയ്യുന്നുണ്ട്. അതിനാൽ ഈ നിർമ്മികളെ യുക്ലിഡിന്റെ നിർമ്മിതികൾ എന്നു കൂടി അറിയപ്പെടുന്നു. ഇങ്ങനെയുള്ള നിർമ്മിതികൾക്ക് ഒരു കോമ്പസും ഒരു സ്ക്കെയിലും സമരേഖീയതയേയും സമർത്ഥിക്കുന്നു. എല്ലാ ജ്യാമീതിയ നിർമ്മിതികളും ഈ രണ്ട് ആശയങ്ങളെ അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ളവയാണ്.

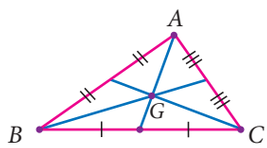
പരിമേയ സംഖ്യകളേയും അപരിമേയസംഖ്യകളേയും ഒരു സ്ക്കെയിലും കോമ്പസും ഉപയോഗിച്ച് നിർമ്മിക്കാൻ കഴിയുമെന്ന് 11ാം പാഠത്തിൽ പഠിച്ചു. 1913 ൽ ഇന്ത്യൻ ഗണിത ശാസ്ത്ര പ്രതിഭയായ രാമാനുജൻ$355/113 = \pi$ എന്നതിന് ജാമിതീയ രചന നൽകി. സൂക്ഷമമായ അളവുകൾ ഉപയോഗിക്കാൻ ഇന്ന് നമുക്ക് വർദ്ധിച്ച വൈദഗ്ദ്ധ്യമുണ്ട് പർവ്വത്തിനുള്ളിലൂടെയുള്ള രേഖകളെ യോജിപ്പിച്ച് ഒരു ഭൂഗർഭ പാതയാക്കി മാറ്റാൻ നമുക്ക് കഴിയുന്നു എന്നുള്ളത് ശ്രദ്ധാർഹമായ ഒരു സവിശേഷതയാണ്. തന്നിട്ടുള്ള അളവുകളിൽ കോണുകളും ത്രികോണവും നിർമ്മിക്കാൻ മുൻ ക്ലാസ്സുകളിൽ നമ്മൾ പഠിച്ചു.

ഈ പാഠത്തിൽ സംഗാമിരേഖകൾ ഉപയോഗിച്ച് ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്ത കേന്ദ്രവും ലംബകേന്ദ്രവും നിർമ്മിക്കുന്നതിനെക്കുറിച്ച് പഠിക്കാം

4.7.1 ത്രികോണത്തിന്റെ കേന്ദ്രകം നിർമ്മിക്കൽ (Construction of the Centroid of a Triangle)

കേന്ദ്രകം

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മധ്യമങ്ങളുടെ സംഗമ ബിന്ദുവിനെ ആ ത്രികോണത്തിന്റെ കേന്ദ്രകം എന്ന് പറയുന്നു. സാധാരണയായി ഇതിനെ G എന്ന് കുറിക്കുന്നു.



ചിത്രം. 4.84

പ്രവൃത്തി 8

ലക്ഷ്യം പേപ്പർ മടക്കി രേഖാഖണ്ഡത്തിന്റെ മദ്ധ്യ ബിന്ദു കണ്ടുപിടിക്കുന്ന വിധം

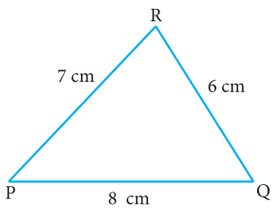
ചെയ്യേണ്ടരീതി ഒരു പേപ്പറിനെ മടക്കി ഒരു രേഖാഖണ്ഡം നിർമ്മിക്കുക അതിനെ PQ എന്ന് പേരിടുക P,Q വിൽ ചേരത്തക്കവിധം PQ നെ മടക്കുക. ഈ മടക്കും നേർരേഖയും സംഗമിക്കുന്ന ബിന്ദുവിനെ M എന്ന് കുറിക്കുക. M ആണ് PQ ന്റെ മദ്ധ്യബിന്ദു.

Unit 4_GEOMETRY.indd 173 27-01-2023 13:33:12

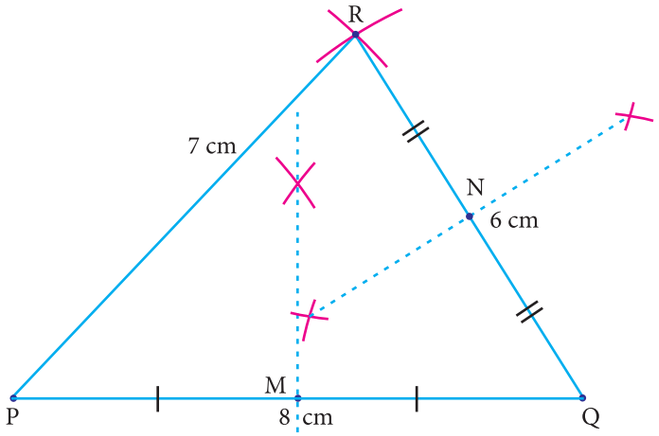
ഉദാഹരണം 4.12

PQ = 8സെ.മീ; QR = 6സെ.മീ; RP = 7സെ.മീ എന്നീ അളവുകളുള്ള ΔPQR ന്റെ കേന്ദ്രകം നിർമ്മിക്കുക.

സഹായ ചിത്രം



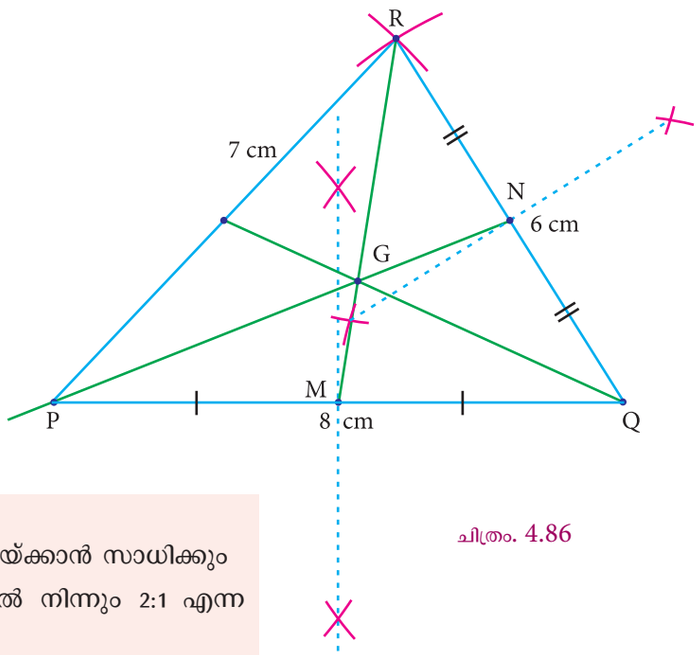
നിർദ്ധാരണം



ചിത്രം. 4.85

വഴി **1** : തന്നിട്ടുള്ള അളവുകൾ PQ = 8സെ.മീ QR = 6സെ.മീ, RP = 7സെ.മീ എന്നീ അളവുകളുള്ള ΔPQR - ന്റെ ഏതെങ്കിലും രണ്ട് വശങ്ങൾക്ക് (PQ, QR) ലംബദ്വിഭാജകം വരയ്ക്കുക PQ-ന്റെ മധ്യബിന്ദു M കൂടാതെ QR-ന്റെ മധ്യബിന്ദു N ആകുന്നു.

വഴി **2**: മധ്യമങ്ങൾ PN കൂടാതെ RM വരയ്ക്കുക. ഇവയുടെ സംഗമ ബിന്ദു G ആകുന്നു. G എന്നത് ΔPQR ന്റെ കേന്ദ്രകം ആണ്.



ചിത്രം. 4.86

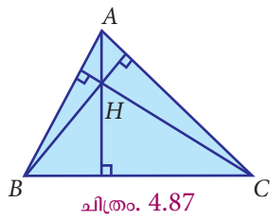
കുറിപ്പ്

- ഒരു ത്രികോണത്തിൽ മൂന്ന് മധ്യമങ്ങൾ വരയ്ക്കാൻ സാധിക്കും
- കേന്ദ്രം ഓരോ മധ്യമത്തേയും ശീർഷത്തിൽ നിന്നും 2:1 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ വിഭജിക്കുന്നു.
- ഏതൊരു ത്രികോണത്തിന്റെ കേന്ദ്രകവും ത്രികോണത്തിനുള്ളിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു.
- കേന്ദ്രത്തെ ആ ത്രികോണത്തിന്റെ ഗുരുത്വാകർഷണ കേന്ദ്രം (ത്രികോണത്തെ ആ ബിന്ദുവിൽ സ്ഥിരമായി താങ്ങി നിറുത്താൻ സാധിക്കും) അല്ലെങ്കിൽ താങ്ങു കേന്ദ്രം എന്നു പറയാം.

4.7.2 ത്രികോണത്തിന്റെ ലംബകേന്ദ്രം നിർമ്മിക്കൽ

ലംബകേന്ദ്രം (Orthocenter)

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഉന്നതികളുടെ സംഗമബിന്ദുവിനെ ത്രികോണത്തിന്റെ ലംബകേന്ദ്രം എന്ന് പറയുന്നു. ഇത്തിനെ പൊതുവായി H കൊണ്ട് കുറിക്കുന്നു.



ചിത്രം. 4.87

Unit 4_GEOMETRY.indd 174 27-01-2023 13:33:13

പ്രവൃത്തി 9

ലക്ഷ്യം പേപ്പർ മടക്കി രേഖാഖണ്ഡത്തിന്റെ വെളിയിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് രേഖാഖണ്ഡത്തിന് ലംബം വരയ്ക്കുന്ന വിധം.

ചെയ്യേണ്ടരീതി ഒരു രേഖാഖണ്ഡം AB വരച്ച് വെളിയിൽ Pഎന്ന ബിന്ദു കുറിക്കുക.B യിലൂടെ നീക്കി പേപ്പർ മടക്കി P വഴിയായി ഒരു മടക്കടയാളം ഉണ്ടാവുക. ഈ മടക്കടയാളം P എന്ന ബിന്ദുവഴി AB യിലേയ്ക്കുള്ള ലംബമാണ്.

പ്രവൃത്തി 10

ലക്ഷ്യം പേപ്പർ മടക്കി ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ലംബകേന്ദ്രം നിർമ്മിക്കുന്ന വിധം.

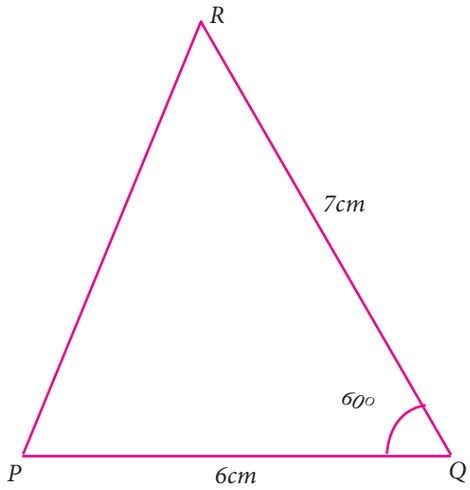
ചെയ്യേണ്ടരീതി പ്രവർത്തി 9 ഉപയോഗിച്ച് തന്നിട്ടുള്ള ത്രികോണത്തിന്റെ ഏതെങ്കിലും രണ്ട് ശീർഷകങ്ങളെ വെളിയിലുള്ള ബിന്ദുക്കളാക്കി അവയിൽ നിന്ന് എത്തിർവശങ്ങളിലേക്ക് ലംബകങ്ങൾ നിർമ്മിക്കുക. ഈ ലംബകങ്ങളുടെ സംഗമബിന്ദുവാണ് തന്നിട്ടുള്ള ത്രികോണത്തിന്റെ ലംബകേന്ദ്രം.

ഉദാഹരണം 4.13

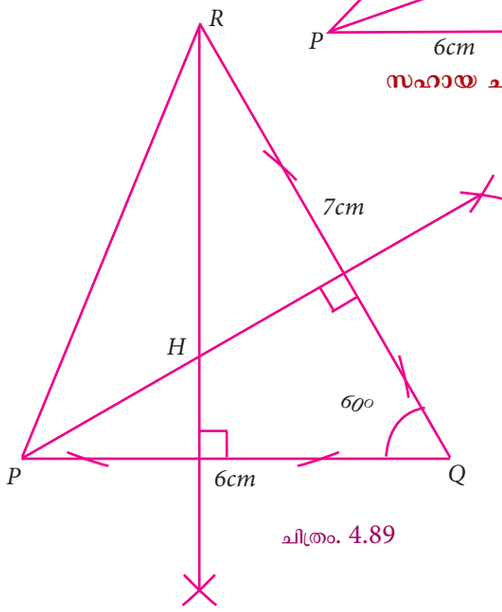
PQ = 6 cm $<Q$ =60^0 and QR = 7 cm എന്നീ അളവുകളുള്ള ΔPQR നിർമ്മിച്ച് ലംബകേന്ദ്രം നിർണയിക്കുക

നിർദ്ധാരണം

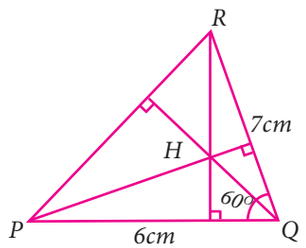
വഴി **1** തന്നിരിക്കുന്ന അളവിൽ ΔPQR നിർമ്മിക്കുക.



ചിത്രം. 4.88



ചിത്രം. 4.89



സഹായ ചിത്രം

വഴി **2:**

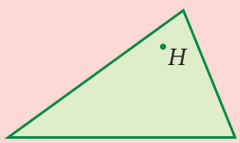
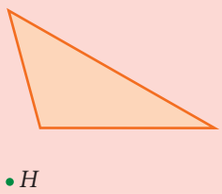
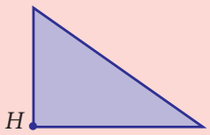
P,R എന്നി ശീർഷകങ്ങളിൽ നിന്ന് PQ,QR എന്നി എതിർ വശങ്ങളിലേക്ക് ഉന്നതികൾ വരയ്ക്കുക.

ഉന്നതികൾ ഛേദിക്കുന്ന ബിന്ദു H എന്നത്ത് ΔPQR ന്റെ ലംബക്രേന്ദം ആകുന്നു

Unit 4_GEOMETRY.indd 175 27-01-2023 13:33:14

കുറിപ്പ്

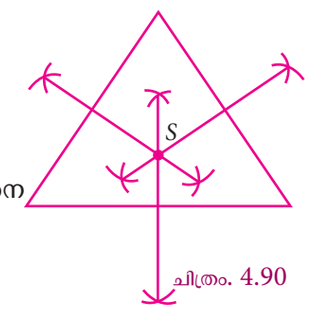
താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ത്രികോണങ്ങളിൽ ലംബകേന്ദ്രം എവിടെ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു.

	ന്യൂനകോണത്രികോണം	അധികകോണത്രികോണം	സമകോണത്രികോണം
ലംബകേന്ദ്രം	ത്രികോണത്തിനുള്ളിൽ 	ത്രികോണത്തിനു വെളിയിൽ 	സമകോണിന്റെ മദ്ധ്യബിന്ദു 

അഭ്യാസം 4.5

1. LM=7.5സെ.മീ, MN=5സെ.മീ കൂടാതെ LN=8 സെ.മീ എന്നീ അളവുകളുള്ള ΔLMN വരച്ച് കേന്ദ്രകം നിർണ്ണയിക്കുക
2. A- യിൽ സമകോൺ, AB = 4സെ.മീ കൂടാതെ AC = 3സെ.മീ എന്നീ അളവുകളുള്ള ΔABC വരച്ച് കേന്ദ്രകം നിർണ്ണയിക്കുക.
3. AB = 6സെ.മീ, കൂടാതെ AC = 9സെ.മീ അളവുകളുള്ള ΔABC വരച്ച് കേന്ദ്രകം നിർണ്ണയിക്കുക.
4. PQ = 5സെ.മീ, PR= 6സെ.മീ, $\angle QPR = 60°$ എന്നീ അളവുകളോടു കൂടിയ ΔPQR ന്റെ കേന്ദ്രകം നിർണ്ണയിക്കുക.
5. PQ = 7 cm, QR = 8 CM , PR = 5 cm എന്നീ അളവുകളുള്ള ΔPQR നിർമ്മിച്ച് ലംബക്രേന്ദം നിർമ്മിക്കുക
6. 6.5 സെ.മീ വശമുള്ള സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ലംബക്രേന്ദം നിർണയിക്കുക
7. AB = 6 സെ.മീ ,$\angle B = 110^0$; BC = 5 സെ.മീ എന്നീ അളവുകളുള്ള ΔABC നിർമ്മിച്ച് ലംബ കേന്ദ്രം നിർണ്ണയിക്കുക
8. PQ = 4.5 സെ.മീ, QR = 6 സെ.മീ, PR = 7.5 സെ.മീ എന്നീ അളവുകളുള്ള ΔPQR നിർമ്മിച്ച് ലംബക്രേന്ദം കാണുക.

4.7.3 ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്തകേന്ദ്രം നിർമ്മിക്കൽ



ചിത്രം. 4.90

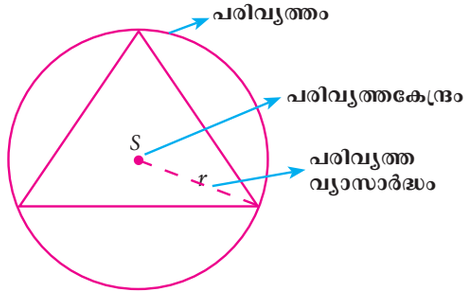
പരിവൃത്തകേന്ദ്രം (Circumcentre)

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ ലംബദ്വിഭാജകങ്ങളുടെ സംഗമബിന്ദുവിനെ ആ ത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്തകേന്ദ്രം എന്ന് പറയുന്നു.

ഇതിനെ സാധാരണയായി S എന്ന് പറയുന്നു

പരിവൃത്തം (Circumcircle)

ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്ന് ശീർഷങ്ങൾ വഴി കടന്നു ചെല്ലുന്നതും പരിവൃത്ത കേന്ദ്രം (S) കേന്ദ്രമായിട്ടുള്ളതുമായ വൃത്തമാണ് പരിവൃത്തം



ചിത്രം. 4.91

പരിവൃത്തവ്യാസാർദ്ധം(Circumradius)

ത്രികോണത്തിന്റെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ശീർഷത്തിൽ നിന്നും പരിവൃത്തകേന്ദ്രത്തിലേക്ക് വരയ്ക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡമാണ് പരിവൃത്ത വ്യാസാർദ്ധം

Unit 4_GEOMETRY.indd 176 27-01-2023 13:33:16

പ്രവൃത്തി 11

ലക്ഷ്യം പേപ്പർ മടക്കി രേഖാഖണ്ഡത്തിന്റെ ലംബദ്വിഭാജകം കണ്ടുപിടിക്കുന്ന വിധം.

ചെയ്യേണ്ടരീതി ഒരു പേപ്പറിനെ മടക്കി ഒരു രേഖാഖണ്ഡം ഉണ്ടാക്കി അതിനെ PQ എന്ന് പേരിടുക P,Q വിൽ ചേരത്തക്കവിധം PQ നെ മടക്കി RS എന്ന മടക്കടയാളം ഉണ്ടാക്കുക. ഈ മടക്കടയാളം RS എന്നത് PQ എന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തിന്റെ ലംബദ്വിഭാജകം ആണ്.

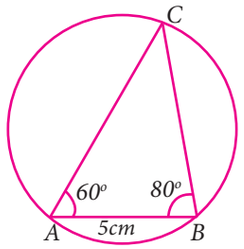
പ്രവൃത്തി 12

ലക്ഷ്യം പേപ്പർ മടക്കി ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്തകേന്ദ്രം നിർണ്ണയിക്കുന്ന വിധം.
പേപ്പർ മടക്കി ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്തകേന്ദ്രം നിർണ്ണയിക്കുന്ന വിധം.

ചെയ്യേണ്ടരീതി പ്രവൃത്തി 11 ഉപയോഗിച്ച് തന്നിട്ടുള്ള ത്രികോണത്തിന്റെ ഏതെങ്കിലും രണ്ട് വശങ്ങളുടെ ലംബദ്വിഭാജകങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുക. ഈ ലംബദ്വിഭാജകങ്ങളുടെ സംഗമബിന്ദുവാണ് തന്നിട്ടുള്ള ത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്ത കേന്ദ്രം.

ഉദാഹരണം 4.14

$AB = 5$ cm, $\angle A = 60^0$, $\angle B = 80^0$ എന്നീ അളവുകളോടു കൂടിയ ΔABC യുടെ പരിവൃത്ത കേന്ദ്രം നിർണ്ണയിച്ച് പരിവൃത്ത വ്യാസാർദ്ധം അളന്നെഴുതുക.



സഹായ ചിത്രം

നിർദ്ധാരണം

വഴി 1 തന്നിരിക്കുന്ന അളവുപയോഗിച്ച് ΔABC വരയ്ക്കുക.

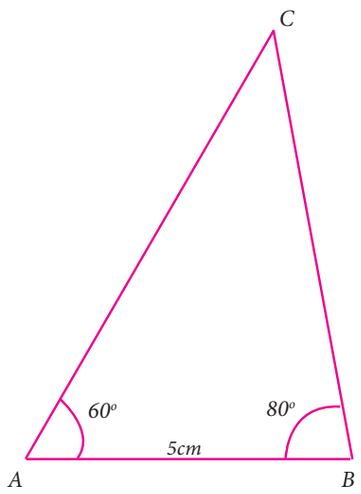
വഴി 2 ഏതെങ്കിലും രണ്ട് വശങ്ങളുടെ ലംബദ്വിഭാജകങ്ങൾ (AC, BC) നിർമ്മിക്കുക.

അവ പരിവൃത്തകേന്ദ്രം S ൽ ഛേദിക്കുന്നു.

വഴി 3 S കേന്ദ്രമായും $SA = SB = SC$ വ്യാസാർദ്ധമായും ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

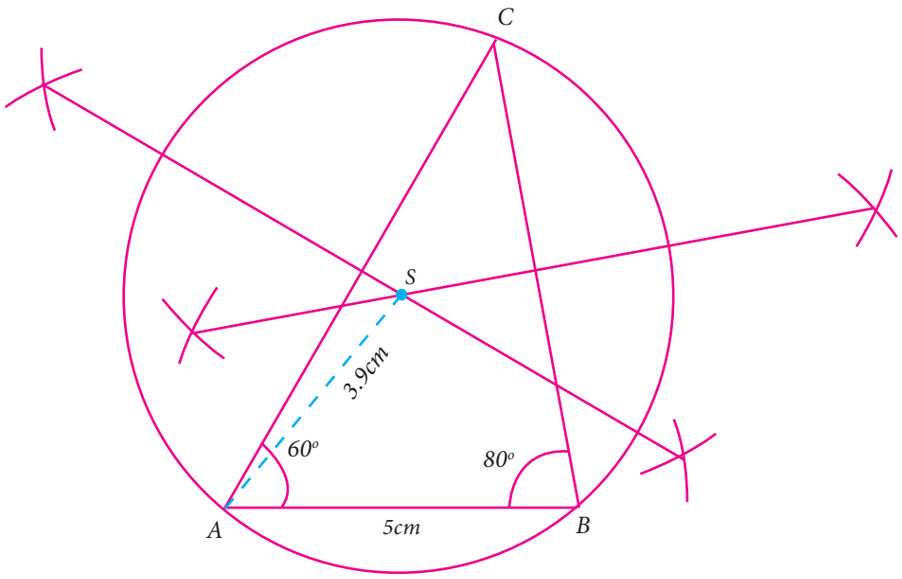
A,B, C എന്നീ ശിർഷങ്ങൾ വഴി പരിവൃത്തം കടന്നു ചെല്ലുന്നു.

പരിവൃത്ത വ്യാസാർദ്ധം =3.9 cm..



ചിത്രം. 4.92

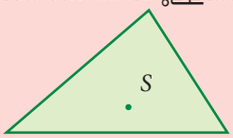
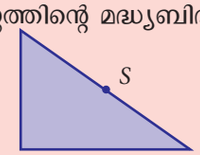
Unit 4_GEOMETRY.indd 177 27-01-2023 13:33:17



ചിത്രം. 4.93

കുറിപ്പ്

താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ത്രികോണങ്ങളിൽ പരിവൃത്ത കേന്ദ്രം എവിടെ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു..

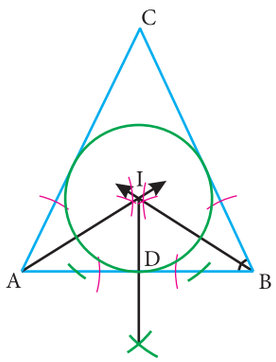
	ന്യൂനകോണത്രികോണം	അധികകോണത്രികോണം	സമകോണത്രികോണം
പരിവൃത്ത കേന്ദ്രം	ത്രികോണത്തിനുള്ളിൽ 	ത്രികോണത്തിനു വെളിയിൽ 	കർണ്ണത്തിന്റെ മദ്ധ്യബിന്ദു 

4.7.4 ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ അന്തർവൃത്തം നിർമ്മിക്കുന്ന വിധം

അന്തഃ കേന്ദ്രം (Incentre)

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്ന് കോണദ്വിഭാജങ്ങളുടെ സംഗമബിന്ദു വിനെ അന്തഃകേന്ദ്രം എന്ന് പറയുന്നു. അന്തഃകേന്ദ്രം എന്നത് അന്തർവൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം ആണ്.

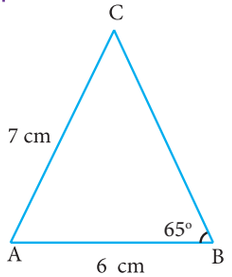
ഇതിനെ I എന്ന അക്ഷരത്തിനാൽ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഇത് ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളിൽ നിന്നും ഒരേ അകലത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു.



ചിത്രം. 4.94

ഉദാഹരണം 4.15 AB = സെ.മീ, $\angle B = 65°$ കൂടാതെ AC = 7 സെ.മീ അളവുകളുള്ള ΔABC -യുടെ അന്തർവൃത്തം വരച്ച് അന്തർ വൃത്ത ആരം കാണുക.

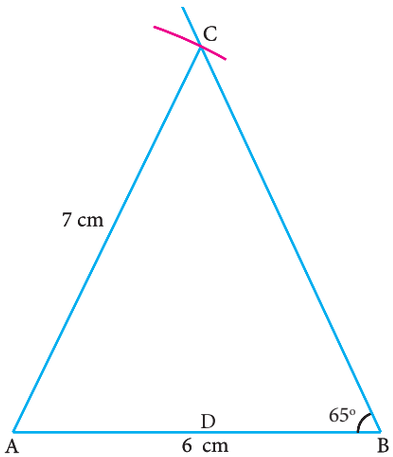
സഹായ ചിത്രം



നിർദ്ധാരണം

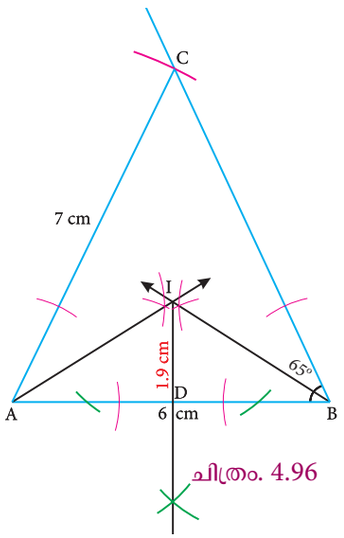
Step 1 : AB = 6സെ.മീ, $\angle B = 65°$ AC = 7സെ.മീ അളവുകളുള്ള ΔABC വരയ്ക്കുക

Unit 4_GEOMETRY.indd 178 27-01-2023 13:33:18



ചിത്രം. 4.95

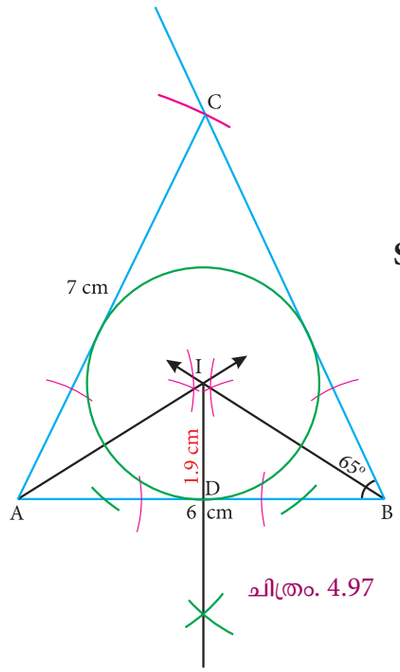
Step 2 : ഏതെങ്കിലും രണ്ട് കോണുകൾക്ക് (A, B) കോണ ദ്വിഭാജകം വരയ്ക്കുക. അവ ഛേദിക്കുന്ന ബിന്ദു I. I എന്നത് ΔABC യുടെ അന്തഃകേന്ദ്രം ആകുന്നു I-ൽ നിന്ന് ഏതെങ്കിലും ഒരു വശത്തിന് (AB)ലംബം വരയ്ക്കുക. ലംബരേഖ AB-യെ D-ൽ ഛേദിക്കുന്നു.



ചിത്രം. 4.96

Step 3: I കേന്ദ്രമായി ID ആരത്തിൽ വൃത്തം വരയ്ക്കുക
ഈ വൃത്തം ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്ന് വശങ്ങളെയും ആന്തരികമായി സ്പർശിക്കുന്നു.

Step 4: അന്തർവൃത്ത വ്യാസാർദ്ധം = 1.9സെ.മീ



ചിത്രം. 4.97

അഭ്യാസം 4.6

1 $AB = 8$ സെ.മീ, $BC = 6$ സെ.മീ , $\angle B = 70^0$ എന്നി അളവുകളോടുകൂടിയ ΔABC നിർമ്മിക്കുക. പരിവൃത്ത കേന്ദ്രം നിർണയിക്കുക. പരിവൃത്തം വരയ്ക്കുക

2 ലംബമായ വശങ്ങൾ 4.5 സെ.മീ കൂടാതെ 6 സെ.മീ എന്നീ അളവുകളോടുകൂടിയ സമകോണ ത്രികോണം PQR നിർമ്മിക്കുക. അതിന്റെ പരിവൃത്തകേന്ദ്രം നിർണയിച്ച് പരിവൃത്തം വരയ്ക്കുക

3. $AB = 5$ സെ.മീ $\angle B = 100^0$, $BC = 6$ സെ.മീ എന്നീ അളവുകളോടുകൂടിയ ΔABC നിർമ്മിച്ച് പരിവൃത്ത കേന്ദ്രം നിർണയിക്കുക. പരിവൃത്തം വരയ്ക്കുക

4. ദ്വിസമഭുജ ത്രികോണം PQR ൽ $PQ = PR$ $\angle Q = 50^0$, $QR = 7$സെ.മീ.ΔPQR നിർമ്മിച്ച് പരിവൃത്തം വരയ്ക്കുക

5 6.5 സെ.മീ അളവുള്ള സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ അന്തഃകേന്ദ്രം നിർണ്ണയിച്ച് അന്തർവൃത്തം വരയ്ക്കുക.

6 കർണ്ണം 10 സെമീ, ഒരു വശം 8 സെമീ എന്നീ അളവുകളുള്ള സമകോണത്രികോണത്തിന്റെ അന്തഃകേന്ദ്രം നിർണ്ണയിച്ച് അന്തർവൃത്തം വരയ്ക്കുക.

Unit 4_GEOMETRY.indd 179 27-01-2023 13:33:19

7 $AB = 9$ സെ.മീ, $\angle CAB = 115^\circ$ കൂടാതെ $\Delta ABC = 40^\circ$ എന്നീ അളവുകളോടുകൂടിയ ΔABC -യുടെ അന്തഃകേന്ദ്രം നിർണ്ണയിച്ച് അന്തർ വൃത്തം വരയ്ക്കുക. (കുറിപ്പ് : മേലേ സൂചിപ്പിച്ച കണക്കുകളിൽ നിന്നും ഏതൊരു ത്രികോണത്തിന്റെയും അന്തർവൃത്തം ത്രികോണത്തിനുള്ളിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു എന്ന് പരിശോധിക്കുക.)

8 $AB = BC = 6$ സെ.മീ $\angle B = 80^\circ$ എന്നീ അളവുകളുള്ള ΔABC -യുടെ അന്തഃകേന്ദ്രം നിർണ്ണയിച്ച് അന്തർ വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

അഭ്യാസം 4.7

ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുത്തെഴുതുക.

1. ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ബാഹ്യകോണിന്റെ അളവ് രണ്ട് കോണുകളുടെ തുകയ്ക്ക് തുല്യമാണ്.

(1) ബാഹ്യകോണുകളുടെ (2) ആന്തരഎതിർകോണുകളുടെ

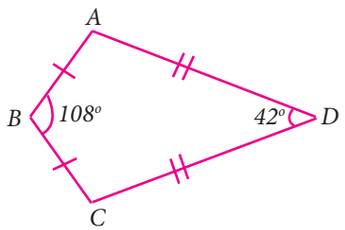
(3) ഏകാന്തരകോണുകളുടെ (4) ആന്തരകോണുകളുടെ

2. $ABCD$ എന്ന ചതുർഭുജത്തിൽ, $AB = BC$ കൂടാതെ $AD = DC$ എങ്കിൽ $\angle BCD =$

(1) 150° (2) 30°

(3) 105° (4) 72°

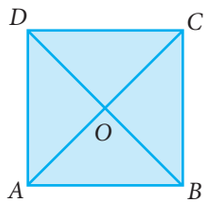
3. $ABCD$ എന്ന സമചതുരത്തിന്റെവികർണങ്ങൾ AC കൂടാതെ BD എന്നിവ O ൽ സംഗമിക്കുന്നു എത്ര ജോഡിസർവ്വസമ ത്രികോണങ്ങൾ ലഭിക്കും



(1) 6 (2) 8

(3) 4 (4) 12

4. തന്നിരിക്കുന്ന ചിത്രങ്ങൾ $CE \parallel DB$ എങ്കിൽ x° യുടെമൂല്യം



(1) 45° (2) 30°

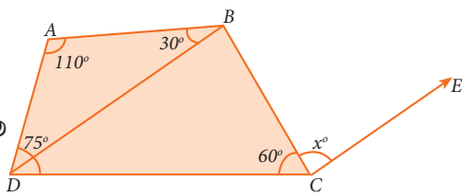
(3) 75° (4) 85°

5. താഴെതന്നിരിക്കുവയിൽശരിയായ പ്രസ്താവന ഏത് ?

(1) $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (2) $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

(3) $\Delta ABC \cong \Delta FDE$ (4) $\Delta ABC \cong \Delta FED$

6. ഒരുസമചതുരത്തിന്റെവികർണ്ണങ്ങൾ തുല്യമായാൽ ആ സമചതുർഭുജംഒരു

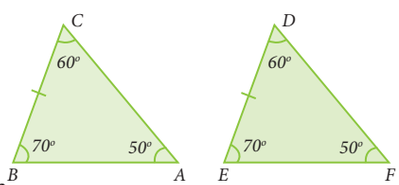


(1) സാമാന്തരികം ആണ് എന്നാൽ ദീർഘചതുരം ആല്ല

(2) ദീർഘചതുരമാണ് എന്നാൽ സമചതുരമല്ല

(3) സമചതുരം

(4) സാമാന്തരികമാണ് എന്നാൽ സമചതുരമല്ല



7. $ABCD$ എന്ന ചതുർഭുജത്തിൽ $\angle A$, $\angle B$ ഇവയുടെദ്വിഭാജകങ്ങൾ O ൽ സംഗമിക്കുന്നു.എങ്കിൽ $\angle AOB$ എന്നത്

(1) $\angle C + \angle D$ (2) $\frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$

Unit 4_GEOMETRY.indd 180 27-01-2023 13:33:21

(3) $\frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{3}\angle D$ (4) $\frac{1}{3}\angle C + \frac{1}{2}\angle D$

8. ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ ആന്തരകോണുകൾ $90°$ വീതം എങ്കിൽ ആ സാമാന്തരികം ഒരു _____
(1) സമചതുർഭുജം (2) ദീർഘചതുരം (3) ലംബകം (4) പട്ടം

9. താഴെതന്നിരിക്കുന്നവയിൽശരിയായ പ്രസ്താവന ഏത്
(1) ഒരുസാമാന്തരികത്തിന്റെ എതിർവശങ്ങൾ തുല്യമല്ല.
(2) ഒരുസാമാന്തരികത്തിന്റെ സമീപകോണുകൾ സംപൂരകമാണ്.
(3) ഒരുസാമാന്തരികത്തിന്റെ വികർണങ്ങൾ തുല്യമാണ്.
(4) ഒരുസാമാന്തരികത്തിന്റെ രണ്ട് ജോഡിഎതിർവശങ്ങളും തുല്യമാണ്.

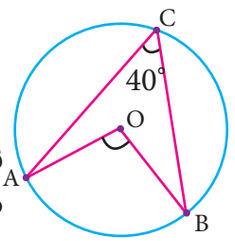
10. ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെകോണുകൾ3x-40 , x+20 , 2x-10 എങ്കിൽx.
(1) $40°$ (2) $35°$ (3) $50°$ (4) $45°$

11. O കേന്ദ്രമായ വൃത്തത്തിൽ തുല്യ ഞാണുകൾ PQ, RS മാത്രമല്ല $\angle POQ = 70°$, എങ്കിൽ $\angle ORS =$
(1) $60°$ (2) $70°$ (3) $55°$ (4) $80°$

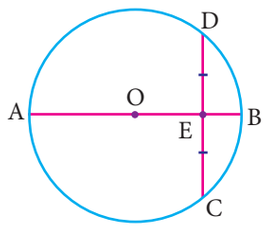
12. ആരം 25 സെമീ ഉള്ള വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നും 15 സെമീ അകലത്തിലുള്ള ഞാണിന്റെ നീളം
(1) 25സെ.മി (2) 20സെ.മീ (3) 40സെ.മീ (4) 18സെ.മീ

13. ചിത്രത്തിൽ വൃത്തകേന്ദ്രം O കൂടാതെ $\angle ACB = 40°$ എങ്കിൽ $\angle AOB =$
(1) $80°$ (2) $85°$ (3) $70°$ (4) $65°$

14. ചക്രീയ ചതുർഭുജം $ABCD$ ൽ, $\angle A = 4x$, $\angle C = 2x$ എങ്കിൽ x - ന്റെ മൂല്യം
(1) $30°$ (2) $20°$ (3) $15°$ (4) $25°$

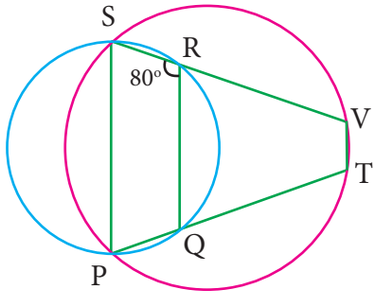


15. ചിത്രത്തിൽ വൃത്തകേന്ദ്രം, O കൂടാതെ വ്യാസം AB എന്നിവ ഞാൺ CD- യെ E- ൽ സമഭാഗം ചെയ്യുന്നു മാത്രമല്ല CE=ED=8 സെ.മീ കൂടാതെ EB=4സെ.മീ. എങ്കിൽ വൃത്തത്തിന്റെ ആരം
(1) 8സെ.മീ (2) 4സെ.മീ (3) 6 സെ . മീ
(4)10സെ.മീ



16. ചിത്രത്തിൽ, $PQRS$ കൂടാതെ $PTVS$ എന്നീ രണ്ട് ചക്രീയ ചതുർഭുജങ്ങളിൽ $\angle QRS = 80°$, എങ്കിൽ $\angle TVS =$
(1) $80°$ (2) $100°$ (3) $70°$ (4) $90°$

17. ചക്രീയ ചതുർഭുജത്തിന്റെ ഒരു കോൺ $75°$,എങ്കിൽ എതിർകോണിന്റെ അളവ്
(1) $100°$ (2) $105°$ (3) $85°$
(4) $90°$

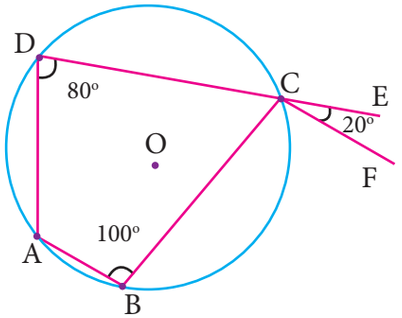


18. ചിത്രത്തിൽ ചക്രീയ ചതുർഭുജം, $ABCD$-ൽ വശം DC എന്നത് E വരെ നീട്ടിയിരിക്കുന്നു കൂടാതെ AB യ്ക്ക് സമാന്തരമായി CF വരയ്ക്കുക. ഇവിടെ $\angle ADC = 80°$ മാത്രമല്ല $\angle ECF = 20°$, എങ്കിൽ $\angle BAD = ?$

Unit 4_GEOMETRY.indd 181 27-01-2023 13:33:25

(1) $100°$ (2) $20°$

(3) $120°$ (4) $110°$



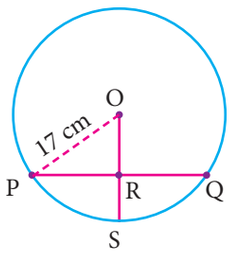
19. AD വ്യാസമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ഒരു ഞാൺ AB ഇവിടെ $AD = 30$ സെ.മീ കൂടാതെ $AB = 24$ സെ.മീ എങ്കിൽ വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നും AB യുടെ അകലം

(1) 10സെ.മീ (2) 9സെ.മീ (3) 8സെ.മീ (4) 6സെ.മീ

20. ചിത്രത്തിൽ $OP = 17$സെ.മീ, $PQ = 30$ സെ.മീ കൂടാതെ OS എന്നത് PQ -വിന് ലംബം എങ്കിൽ RS

(1) 10സെ.മീ (2) 6സെ.മീ

(3) 7സെ.മീ (4) 9സെ.മീ.



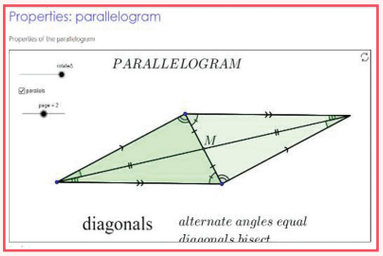
ഓർമ്മിക്കേണ്ട വസ്തുതകൾ

- ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ എതിർവശങ്ങൾ, എതിർകോണുകൾ തുല്യമാകുന്നു.
- ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ വികർണ്ണങ്ങൾ സമഭാഗം ചെയ്യുന്നു.
- ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ വികർണ്ണങ്ങൾ അതിനെ രണ്ട് സർവ്വസമത്രികോണങ്ങളായി വിഭജിക്കുന്നു.
- ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ എതിർ വശങ്ങൾ തുല്യമായാൽ അതൊരു സാമാന്തരികമാകുന്നു.
- ഒരേ ആധാരമുള്ളതും ഒരേ സമാന്തരരേഖകൾക്കിടയിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നതുമായ സാമാന്തരികങ്ങൾക്ക് തുല്യ വിസ്തീർണ്ണമാകുന്നു.
- ഒരേ ആധാരമുള്ളതും ഒരേ സമാന്തരരേഖകൾക്കിടയിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നതുമായ സാമാന്തരികങ്ങൾക്ക് തുല്യ വിസ്തീർണ്ണമാകുന്നു.
- ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണങ്ങൾ പരസ്പരം ലംബമായാൽ അതൊരു സമചതുർഭുജമാകുന്നു.
- നേർരേഖയിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യാത്ത മൂന്ന് ബിന്ദുക്കളിലൂടെ ഒരേ ഒരു വൃത്തം മാത്രമേ വരയ്ക്കാൻ സാധിക്കൂ.
- ഒരു വൃത്തത്തിലെ തുല്യ നീളമുള്ള ഞാണുകൾ വൃത്ത കേന്ദ്രത്തിൽ തുല്യ കോണുകളെ ഉണ്ടാക്കും.
- വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നും ഞാണിലേയ്ക്കുള്ള ലംബം ആ ഞാണിനെ സമഭാഗം ചെയ്യും.
- ഒരു വൃത്തത്തിലുള്ള തുല്യ ഞാണുകൾ വൃത്ത കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നും തുല്യ അകലത്തിലായിരിക്കും.
- ഒരു ചാപം കേന്ദ്രത്തിൽ ഉണ്ടാക്കുന്ന കോൺ ആ ചാപമല്ലാത്ത വൃത്തത്തിന്റെ ബാക്കി പരിധിയിൽ ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവിൽ ഉണ്ടാകുന്ന കോണിന്റെ രണ്ട് മടങ്ങായിരിക്കും.
- അർദ്ധവൃത്തത്തിലെ കോൺ സമകോൺ ആണ്.
- ഒരേ വൃത്തഭാഗത്തിൽ ഉണ്ടാകുന്ന കോണുകൾ തുല്യമായിരിക്കും.
- ചക്രീയ ചതുർഭുജത്തിന്റെ എതിർകോണുകളുടെ തുക $180°$ ആണ്.
- ചക്രീയ ചതുർഭുജത്തിന്റെ ഒരു വശത്തെ നീട്ടിയാൽ ഉണ്ടാകുന്ന ബാഹ്യകോൺ ആന്തര എതിർകോണിന് തുല്യമാണ്.

Unit 4_GEOMETRY.indd 182 27-01-2023 13:33:26

ഐ സി ടി കോർണർ-1

പ്രതീക്ഷിക്കുന്ന ഫലം ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.



ഘട്ടം – 1

(ബൗസർ തുറന്ന് താഴെ കൊടുത്തിട്ടുളഅള ലിങ്ക് പകർത്തി പേസ്റ്റ് ചെയ്യുക (അഥവാ)URL ടൈപ്പ് ചെയ്യുക (അഥവാ) QR കോഡ് സ്ക്കാൻ ചെയ്യുക..

ഘട്ടം - 2

"properties :parallelogram" എന്ന ജിയോജീബ്രാ വർക്ക് ഷീറ്റ് പ്രത്യക്ഷ്യപ്പെടും ഇതിൽ റൊട്ടേറ്റ് ,പേജ് എന്നിങ്ങനെ രണ്ട് സ്ലൈഡർ ഉണ്ട്.

ഘട്ടം-3

റൊട്ടേറ്റ് പ്രവർത്തിച്ചാൽ ത്രികോണം രണ്ട് മടങ്ങായി സാമാന്തരികം പോലെ കാണാൻ സാധിക്കും

ഘട്ടം-4

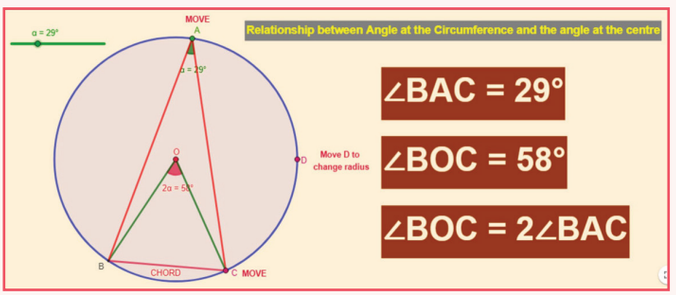
പേജ് എന്ന സ്ലൈഡർ പ്രവർത്തിച്ചാൽ മൂന്ന് പേജുകളിലായി ഗുണങ്ങൾ വിശദീകരിച്ചിരിക്കുന്നത് കാണാം.

Browse in the link

Properties: Parallelogram: https://www.geogebra.org/m/m9Q2QpWD

ഐ സി ടി കോർണർ-2

പ്രവർത്തനത്തിന്റെ അവസാനം ലഭിക്കുന്നത്



ഘട്ടം – 1

Browser open ചെയ്ത് താഴെക്കാണുന്ന URL Link type ചെയ്യുക (അല്ലെങ്കിൽ) QR Code Scan ചെയ്യുക GeoGebra യുടെ "Angles in a circle (വൃത്തത്തിലെ കോണുകൾ)" എന്ന വർക്ക്ഷീറ്റ് ഭാഗം open ആകും. ഈ വർക്ക്ഷീറ്റിൽ, രണ്ട് പ്രവർത്തനങ്ങൾ കൊടുത്തിരിക്കും. ആദ്യത്തെ പ്രവർത്തനം കേന്ദ്രത്തിലും പരിധിയിലും ഉണ്ടാകുന്ന കോണുകളുടെ ബന്ധത്തെ കാണിക്കുന്നു. സ്ലൈഡറിനെ ചലിപ്പിച്ചാൽ കോണിനെ വ്യത്യസ്തപ്പെടുത്താൻ സാധിക്കും കൂടാതെ A,C,D എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ ചലിപ്പിച്ചാൽ വ്യാസാർദ്ധത്തിന്റെ സ്ഥാനം മാറ്റാൻ സാധിക്കും. A-യിലും, O-യിലും ഉള്ള കോണുകളെ താരതമ്യപ്പെടുത്തുക

ഘട്ടം - 2

രണ്ടാമത്തെ പ്രവർത്തനം "Angles in the segment of a circle (വൃത്ത ഭാഗത്തിലെ കോണുകൾ)". B,D എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ നീക്കി കോണുകളെ പരിശോധിക്കുക "Move" എന്ന വാക്കിനെ നീക്കിയാൽ വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം കൂടാതെ ചാപനീളം എന്നിവയെ വ്യത്യസ്തപ്പെടുത്താൻ സാധിക്കും.

പവർത്തനത്തിന്റെ വെബ്സൈറ്റ്

Angle in a circle: https://ggbm.at/yaNUhv9S or Scan the QR Code.

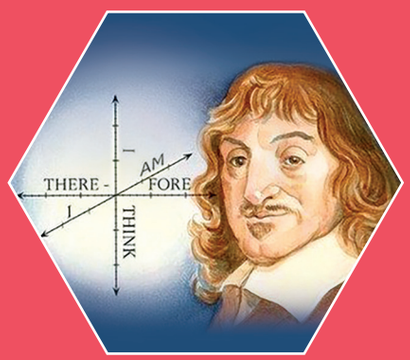
Unit 4_GEOMETRY.indd 183 27-01-2023 13:33:27

5

നിർദ്ദേശാങ്ക ജ്യാമിതി

Divide each difficulty into as many parts as is feasible and necessary to resolve it.

- Rene Descartes



Rene Descartes
(AD(CE)1596-1650)

ഫ്രഞ്ച് ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനായ റെനെ ഡെക്കാർട്ട് (ഡെയ്കാർട്ട് എന്ന് ഉച്ചരിക്കണം) വിശ്ലഷക ജ്യാമിതി അല്ലെങ്കിൽ നിർദ്ദേശാങ്ക ജ്യാമിതി എന്നറിയപ്പെടുന്ന ഒരു പുതിയ ഗണിത ശാസ്ത്രശാഖ വികസിപ്പിച്ചെടുത്തു. ഇത് കഴിഞ്ഞ കാലങ്ങളിലുള്ള അങ്കഗണിതം ബീജഗണിതം ജ്യാമിതി തുടങ്ങിയവയെ യോജിപ്പിച്ചുകൊണ്ട് ചിത്രത്തിൽ ബിന്ദുക്കളായും സമവാക്യങ്ങളായും ജ്യാമിതീയ രൂപങ്ങളായും ചിത്രീകരിക്കുന്നതിന് ഉപകാരപ്പെടുന്നു. ഒരു തലത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിനെ സ്ഥിരീകരിച്ചതും പരസ്പരം ലംബമായ രണ്ടു രേഖകളിൽ നിന്ന് ആ ബിന്ദുവിന്റെ ദൂരം കണ്ടുപിടിച്ചതും തികച്ചും ഡെക്കാർട്ടയുടെ കണ്ടുപിടുത്തങ്ങളാണ്

പഠനഫലങ്ങൾ

- കാർട്ടീഷ്യൻ നിർദ്ദേശാങ്ക സമ്പ്രദായം മനസ്സിലാക്കൽ.
- ആബ്സിസ്സ, ഓർഡിനേറ്റ് ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ എന്നിവ തിരിച്ചറിയൽ.
- സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിച്ച് കാർട്ടീഷ്യൻ തലത്തിലുള്ള രണ്ട് ബിന്ദുക്കളുടെ അകലം കണ്ടുപിടിക്കൽ
- മദ്ധ്യബിന്ദു സൂത്രവാക്യം മനസ്സിലാക്കുന്നു. അതുപയോഗിച്ച് കണക്കുകൾ ചെയ്യുന്നു.
- വിഭജന സൂത്രം ഡിറൈവ് ചെയ്ത് പ്രശ്ന പരിഹാരത്തിന് ഉപയോഗപ്പെടുത്തുന്നു.
- ത്രികോണത്തിന്റെ കേന്ദ്രകത്തിനുള്ള സൂത്രവാക്യം മനസ്സിലാക്കുന്നു.അതിന്റെ പ്രയോഗങ്ങൾ മനസ്സിലാക്കുന്നു

5.1 തലത്തിൽ രേഖപ്പെടുത്തൽ (Mapping the Plane)

നിങ്ങളുടെ വിലാസം എങ്ങനെ എഴുതും? ഉദാഹരണമായി .

ചരക്കൽവിള പ്രൈമറി സ്കൂൾ
135,ചരക്കൽവിള,
ചരക്കൽവിള ഹൗസിംഗ് ബോർഡ് റോഡ്,
താഴെ ചരക്കൽവിള,
നാഗർകോവിൽ 629002, കന്യാകുമാരി ജില്ല.
തമിഴ്നാട്, ഇന്ത്യ.



Unit 5_COORDINAT.indd 184 28-01-2023 11:18:31



ചിത്രം. 5.1

ലോകത്തിൽ എവിടെയായാലും നമ്മൾ ആരായാലും നാം പഠിച്ച വിദ്യാലയം കണ്ടെത്താൻ ഈ വിവരങ്ങൾ മതിയാകും. ഈ ഭൂമിയിൽ കോടാനുകോടി കെട്ടിടങ്ങൾ ഉണ്ടെന്ന് കരുതാം. എന്നാലും ഒരാൾക്ക് താൻ പഠിച്ച വിദ്യാലയം എത്ര ഉൾപ്രദേശത്തായാലും അതിന്റെ സ്ഥാനം കണ്ടെത്താൻ ഈ മേൽവിലാസം മതിയാകും.

ഇത് എങ്ങനെ സാധ്യമാകും. ഒരു പ്രത്യേക മേൽവിലാസം കണ്ടെത്തുന്നത് എങ്ങനെ എന്ന് നോക്കാം. ലോകത്തെ പലരാജ്യങ്ങളായി വിഭജിച്ചിട്ടുണ്ടെന്ന് നമുക്കറിയാം അതിൽ ഒന്നാണ് ഇന്ത്യ. ഇന്ത്യയെ പല സംസ്ഥാനങ്ങളായി വിഭജിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. ഇവയിൽ നിന്നും തമിഴ്നാട് എന്ന സംസ്ഥാനത്തെ കണ്ടെത്താൻ സാധിക്കും.

ഇതുപോലെ പോയാൽ നമ്മുടെ സംസ്ഥാനത്തെ ജില്ലകളായും, ജില്ലകളെ താലൂക്കുകളായും താലൂക്കുകളെ ഗ്രാമങ്ങളായും വിഭജിച്ചിരിക്കുന്നതു കാണാം. ഈ രീതിയിൽ തുടർന്നാൽ ആ താലൂക്കിലുള്ള ധാരാളം ഗ്രാമങ്ങളിൽ നിന്നും ചരക്കൽവിള എന്ന ഗ്രാമത്തെ ഒരാൾക്ക് പെട്ടെന്ന് തിരിച്ചറിയാൻ സാധിക്കും. ഇതുപോലെ ആ ഗ്രാമത്തിലുള്ള ധാരാളം റോഡുകളിൽ നിന്നും ഹൗസിംഗ് ബോർഡ് റോഡ് നമുക്ക് കണ്ടെത്താം. ഈ റോഡിലുള്ള കെട്ടിടങ്ങളിൽ നിന്നും 135 എന്ന വീട്ടുനമ്പർ ഉള്ള സർക്കാർ പ്രാഥമികവിദ്യാലയം കണ്ടെത്താം.

യു.എസ്.എ. യിലുള്ള ന്യൂയോർക്ക് നഗരത്തിന്റെ ഒരു സ്ഥലമാണ് മൻഹട്ടൻ. ഭൂപടം കാണിക്കുന്നത് പ്രവേശനപാത വടക്ക് തെക്ക് ദിശയിലും തെരുവുകൾ കിഴക്ക് പടിഞ്ഞാറ് ദിശയിലുമാണ് എന്നാണ്. നമ്മൾ അന്വേഷിക്കുന്ന സ്ഥലം 9 ാമത്തെയും 10 ാമത്തെയും പ്രവേശനപാതയ്ക്കിടയിലുള്ള 57 ാമത്തെ തെരുവ് ആണെങ്കിൽ ആ സ്ഥലത്തിനെ ഭൂപടത്തിൽ നിന്ന് വളരെ പെട്ടെന്ന് കണ്ടുപിടിക്കാം. ഇതുപോലെ 34 ഉം 35 ഉം റോഡുകൾക്കിടയിലുള്ള രണ്ടാം പ്രവേശനപാതയെ വേഗത്തിൽ കണ്ടെത്താം. കൂടാതെ ന്യൂയോർക്കിലുള്ള ജനങ്ങൾക്ക് ഇത് കൂടുതൽ ലളിതമാണ്. ഒരു തെരുവിലുള്ള വീട്ടുനമ്പറിൽ നിന്നു അത് ഏത് പ്രവേശനപാതകൾക്കിടയിലാണെന്നും ഒരു പ്രവേശനപാതയിലുള്ള വീട്ടുമ്പറിൽ നിന്നും അത് ഏത് തെരുവാണെന്നും കണക്കാക്കാം.



ചിത്രം. 5.2

എല്ലാ ഭൂപടങ്ങളും ഒരു സ്ഥലത്തെ കണ്ടെത്തുന്നതിനാവശ്യമായ വിവരങ്ങൾ നൽകുന്നു. അതായത് ഒരു സ്ഥലം എത്രദൂരെയാണ് അത് അടുത്താണോ അകലെയാണോ ആണെങ്കിൽ എത്രദൂരം? അവയ്ക്കിടയിൽ എന്തൊക്കെയുണ്ട് എന്നിങ്ങനെയുള്ള വിവരങ്ങൾ ഭൂപടത്തിൽ നിന്ന് ഒരു സ്ഥലത്തിന്റെ സ്ഥാനം കണ്ടെത്താൻ നമ്മെ സഹായിക്കുന്നു.നമ്മൾ അക്ഷാംശരേഖകൾ (കിഴക്ക്,പടിഞ്ഞാറ്, മൻഹട്ടനിലെ തെരുവുകൾ പേലെ) രേഖാംശരേഖകൾ (വടക്ക്, തെക്ക് മൻഹട്ടനിലെ പ്രവേശനപാത പേലെ) എന്നിവ ഭൂമിയിലെ സ്ഥലങ്ങൾ കാണിക്കാൻ ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഭൂപടത്തിൽ സംഖ്യകൾ എങ്ങനെ ഉപയോഗിക്കണമെന്നത് വളരെ രസാവഹമാണ്.

Unit 5_COORDINAT.indd 185 28-01-2023 11:18:31

ഭൂപടങ്ങളിൽ സംഖ്യകൾ ഉപയോഗിക്കുന്ന ആശയം ജ്യാമിതിയിൽനിന്നാണ് വന്നത്. ഗണിതശസ്ത്രജ്ഞന് എല്ലാതരത്തിലമുള്ള തലങ്ങളും, ഘനരൂപങ്ങളും, ആകൃതികളും നിർമ്മിക്കേണ്ടത് ആവശ്യമാണ്. എന്തിനാണ് അവർക്ക് ഇത്തരം ഭൂപടങ്ങൾ ആവശ്യമുള്ളത്! ജ്യാമിതീയരൂപത്തിൽ പ്രവർത്തിക്കുമ്പോൾ ഒരു ബിന്ദു ഒരു പ്രദേശത്തിന് ഉള്ളിലാണോ അതോ അതിർത്തിക്ക് പുറത്താണോ എന്ന് നിരീക്ഷിക്കേണ്ടിയിരിക്കുന്നു.അതിർത്തിയിലുള്ള രണ്ട് ബിന്ദുക്കളും വെളിയിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവും തന്നിരുന്നാൽ അതിർത്തിയിലുള്ള ഏത് ബിന്ദുവാണ് വെളിയിലുള്ള ബിന്ദുവുമായി അടുത്ത് ഉള്ളതെന്നും എത്ര അടുത്താണ് എന്നും പരിശോധിക്കേണ്ടത് ആവശ്യമാണ്. സമചതുര ഘനിക പോലുള്ള ഘനരൂപങ്ങളിൽ ഇത്തരം ചോദ്യങ്ങൾ എത്ര മാത്രം രസകരവും സങ്കീർണ്ണവും ആണെന്ന് നിങ്ങൾക്ക് ഊഹിക്കാം.

വൃത്തങ്ങൾ, ബഹുഭുജങ്ങൾ, ഗോളങ്ങൾ തുടങ്ങിയ രൂപങ്ങളെകുറിച്ചുള്ള അറിവുകളിൽ നിന്നും ഇതുപോലെയുള്ള ചോദ്യങ്ങളും അവയ്ക്കുള്ള ഉത്തരങ്ങളും കണ്ടുപിടിച്ചു നമ്മുടെ ദൈനംദിന ജീവിതത്തിലും ഗണിത ഉപകരണങ്ങളും കൂടാതെ സാങ്കേതിക രീതികളും പ്രയോജനപ്പെടുന്നു. 17 ാം നൂറ്റാണ്ടിൽ നിർദ്ദേശാങ്ക ജ്യാമിതി കണ്ടുപിടിച്ചിട്ടില്ലായിരുന്നെങ്കിൽ അക്ഷാംശ രേഖകളും രേഖാംശ രേഖകളുമുള്ള ഭൂപടം 18 ാം നൂറ്റാിൽ വികസിപ്പിക്കാൻ സാധിക്കുമായിരുന്നില്ല

വാസ്തവിക സംഖ്യാസമ്പ്രദായത്തെ സംഖ്യാരേഖയിൽ പ്രതിനിധീകരിക്കാൻ നിങ്ങൾക്ക് അറിയാം. ഇത് ഇരുവശത്തും അനന്തമായി പോകുന്നു. സംഖ്യാരേഖയിൽ രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾക്കിടയിൽ അനേകം ബിന്ദുക്കൾ ഉണ്ട്. നാം ഇപ്പോൾ ഒരു തലത്തിന്റെ ചിത്രം വരച്ച് അതിനുള്ളിലെ ബിന്ദുക്കൾ, ബിന്ദുക്കളുടെ ദൂരം ഇവയെക്കുറിച്ച് ചർച്ച ചെയ്യാൻ പോകുന്നു. കൂടാതെ നാം ഇതുവരെ ചുരുക്കമായി ചർച്ചചെയ്ത എല്ലാ ജ്യാമിതീയ രൂപങ്ങളും വരയ്ക്കാൻ പോകുന്നു.

അങ്കഗണിതം സംഖ്യകളുടെ ലോകത്തേയും അവയുടെ ക്രിയകളേയും കുറിച്ച് നമ്മെ പരിചയപ്പെടുത്തിയിരുന്നു.ബീജഗണിതം നമ്മെ അറിയാത്ത ഒന്നിന്റെ മൂല്യത്തേയും അവയെ സമവാക്യം ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിനെക്കുറിച്ചും പഠിപ്പിച്ചു. ജ്യാമിതി വിവിധ രൂപങ്ങളേയും അവയുടെ ഗുണങ്ങളെയും കുറിച്ച് പഠിപ്പിക്കുന്നു. വിശ്ലേഷക ജ്യാമിതി സംഖ്യകളെയും ബീജഗണിത സമവാക്യങ്ങളെയും ഉപയോഗിച്ചു കൊണ്ട് ജ്യാമിതിയെയും വിവിധ സാങ്കേതിക വിദ്യകളെയും ഒരു സ്ഥലത്ത് ഒന്നിച്ച് ഉപയോഗിക്കുന്നതിനെ കുറിച്ച് പഠിക്കാൻ നമ്മെ സഹായിക്കുന്നു. ഇത് വളരെയധികം പ്രചോദനം നൽകുന്ന പ്രവർത്തിയാണ്.

5.2 നിർദ്ദേശാങ്ക സമ്പ്രദായം വികസിപ്പിക്കൽ (Devising a Coordinate System)

നിങ്ങളുടെ ചങ്ങാതിയോട് 5സെ.മീ, 3 സെ.മീ എന്നീ അളവുകളുള്ള ഒരു ദീർഘചതുരം ഒരു പേപ്പറിൽ വരയ്ക്കാൻ ആവശ്യപ്പെടുക. വരയ്ക്കാം, എന്നും എവിടെ വരയ്ക്കണം എന്നും ചോദിച്ചാൽ നിങ്ങൾ എന്ത് മറുപടി പറയും.?

തന്നിരിക്കുന്ന ചിത്രം നോക്കുക. ഇത് മറ്റൊരാൾക്ക് നിങ്ങൾ എങ്ങനെ വിശദീകരിക്കും.?

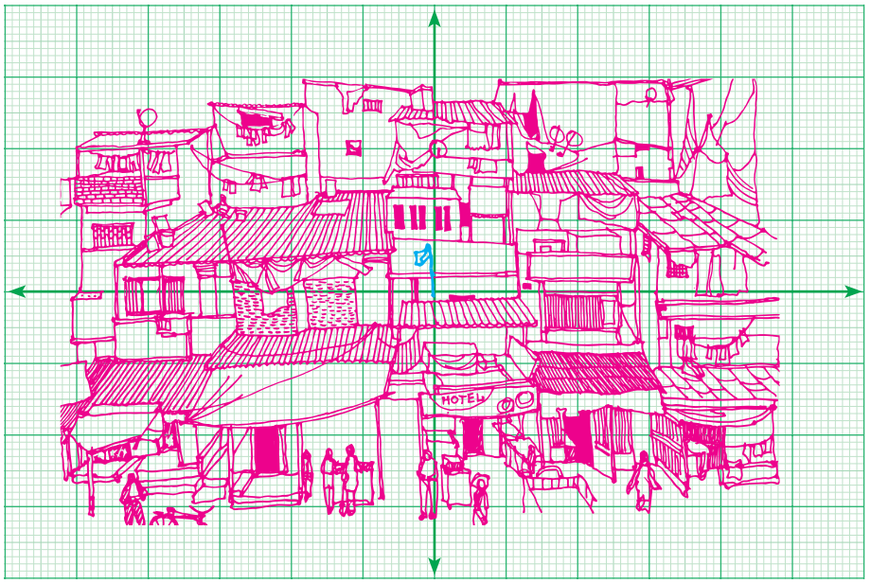


ചിത്രം. 5.3

നമുക്ക് തന്നിരിക്കുന്ന ചിത്രം വിശകലനം ചെയ്യാം (ചിത്രം 5.3) ഒരു പ്രത്യേക വീട് അടയാളപ്പെടുത്തുന്നത് വളരെ ബുദ്ധിമുട്ടുള്ള ഒന്നാണ്. ഏതെങ്കിലും ഒരു സ്ഥലമോ അല്ലെങ്കിൽ ഒരു വസ്തുവോ അടയാളമായി കണക്കാക്കിയാൽ, അതുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ഒരു സ്ഥലമോ വസ്തുവോ വളരെ എളുപ്പത്തിൽ നമുക്ക് അടയാളപ്പെടുത്താൻ സാധിക്കും. ഉദാഹരണമായി ഒരു പതാക ഉറപ്പിച്ച് അതിന്റെ ഇടതുവശത്തുള്ള വീടിനെകുറിച്ചോ താഴെയുള്ള ഹോട്ടലിനെക്കുറിച്ചോ അല്ലെങ്കിൽ വലതുഭാഗത്തുള്ള വീട്ടിലെ ആന്റിന (Antena) യെ കുറിച്ചോ സംസാരിക്കാം.

Unit 5_COORDINAT.indd 186 28-01-2023 11:18:32

ചിത്രം 5.4 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ കൊടിയുടെ അടുത്തായി പരസ്പരം ഛേദിക്കുമാറ് രണ്ട് ലംബ രേഖകൾ വരയ്ക്കുക.ഇപ്പോൾ നിന്റെ സുഹൃത്തിനോട് കൊടിക്കമ്പ് അതിരടയാളമായി ഉപയോഗിച്ച് ചിത്രത്തിന്റെ ആകെ നീളം വീതി ഇവ പറയുക. 2 സെ.മീ വലതുവശത്തേക്ക് 3 സെ.മീ മുകളിലേക്ക് എന്നും നിങ്ങൾക്ക് ദിശകൾ അറിയാമെങ്കിൽ 2 സെ.മീ കിഴക്ക്, 3 സെ.മീ വടക്ക് എന്നും പറയാം..

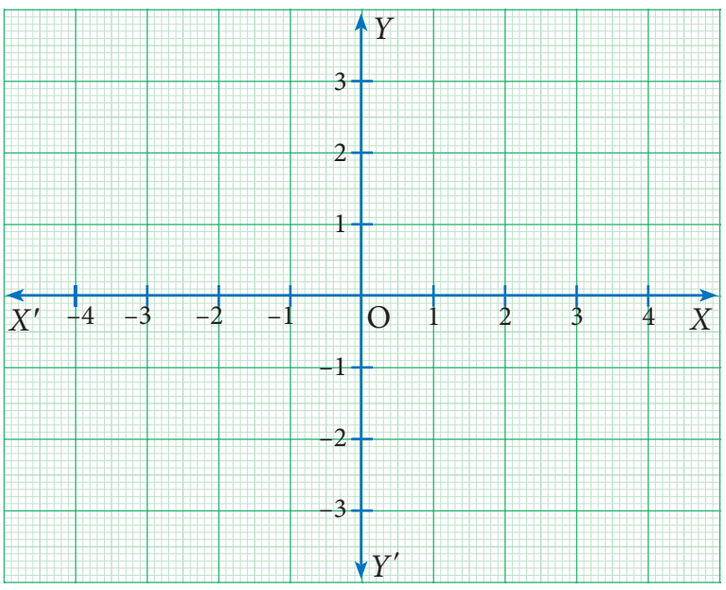


ചിത്രം. 5.4

ഇതുതന്നെയാണ് നമ്മൾ ചെയ്യാൻ പോകുന്നത് പൂജ്യത്തിന് വലതുവശത്ത് എപ്പോഴും ധനസംഖ്യകളും പൂജ്യത്തിന് ഇടതുവശത്ത് ഋണസംഖ്യകളും വരുന്ന ഒരു തിരശ്ചീന രേഖയായിട്ടാണ് സംഖ്യാരേഖയെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നത്. ഇപ്പോൾ ലംബമായ മറ്റൊരു സംഖ്യാരേഖ നമ്മൾ പരിഗണിക്കുന്നു. ഇതിൽ പൂജ്യത്തിന് മുകളിലായി ധനസംഖ്യയേയും പൂജ്യത്തിന് താഴെയായി ഋണസംഖ്യയേയും പ്രതിനിധികരിക്കുന്നു. (ചിത്രം 5.5) രണ്ട് സംഖ്യാ രേഖകളും എവിടെയാണ് സംഗമിക്കുന്നത്? രണ്ട് രേഖകളിലുമുള്ള പൂജ്യത്തിൽ സംഗമിക്കുന്നു. ഇത് നമ്മുടെ പതാകയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. അതിനോട് അനുബന്ധിച്ച് നമുക്ക് മറ്റ് സംഖ്യകളെകുറിച്ച് സംസാരിക്കാം. എന്നാൽ ഇപ്പോൾ രണ്ടു രേഖകളിലുള്ള സംഖ്യകളെകുറിച്ച് മാത്രമല്ല കൂടുതൽ വിവരങ്ങളെകുറിച്ചും നമുക്ക് ചർച്ച ചെയ്യാം !

നമ്മൾ 2 മാത്രകൾ വലതുവശത്തേക്കും 3 മാത്രകൾ മുകളിലേക്കും പോകുന്നതായി സങ്കൽപ്പിച്ചാൽ നാം ഇതിനെ $(\rightarrow 2, \uparrow 3)$ എന്ന് വിളിക്കാം.

ലംബം, തിരശ്ചീനം, മുകളിൽ, താഴെ എന്നിവയെല്ലാം ഉപയോഗിക്കുന്നത് കഠിനമാണ്. അതിനാൽ ഇതിനെ നമ്മൾ ചുരുക്കി (2,3) എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം. ഇതിൽ നിന്ന് 2 വലതുവശത്തേയ്ക്ക് എന്നും 3 മുകളിലേയ്ക്ക് എന്നും മനസ്സിലാക്കാം. നാം ആദ്യം 3 മാത്രകൾ മുകളിലേക്കും 2 മാത്രകൾ വലതുവശത്തേക്കും പോയാൽ അതേ സ്ഥലത്തുതന്നെ എത്തിച്ചേരുമോ? (2,3) ൽ എത്തിച്ചേരുന്നതിനുള്ള നിർദ്ദേശവും (3,2) ൽ എത്തിച്ചേരുന്നതിനുള്ള നിർദ്ദേശവും വ്യത്യസ്തമാണ് എന്ന് ശ്രദ്ധിക്കുക. $(-2,3)$ എങ്ങനെ ലഭിക്കും? ഇത് $(0,0)$ ത്തിൽ നിന്നും 2 മാത്രകൾ ഇടതുവശത്തും 3



ചിത്രം. 5.5

Unit 5_COORDINAT.indd 187 28-01-2023 11:18:32

മാത്രകൾ മുകളിലേക്കും ആയിരിക്കും $(2,-3)$ നെ കുറിച്ച് നിങ്ങൾക്ക് എന്ത് നിർദ്ദേശം നൽകാൻ സാധിക്കും? 2 മാത്രകൾ വലതുവശത്തേയ്ക്കും 3 മാത്രകൾ താഴേയ്ക്കും എന്നതാണ് ഇതിന്റെ അർത്ഥം. അടുത്തതായി തിരശ്ചീന ലംബരേഖകൾക്ക് പേര് നൽകേണ്ടത് ആവശ്യമാണ്. തിരശ്ചീന സംഖ്യാരേഖയെ x അക്ഷമെന്നും ലംബസംഖ്യാരേഖയെ y അക്ഷമെന്നും വിളിക്കാം. വലതുവശത്ത് x എന്നും ഇടതുവശത്ത് x' എന്നും മുകളിൽ y എന്നും താഴെ y' എന്നും അടയാളപ്പെടുത്തുക.

x നിർദ്ദേശാങ്കത്തെ അബ്സ്സിസ്സ (abscissa) എന്നും y നിർദ്ദേശാങ്കത്തെ ഓർഡിനേറ്റ് (ordinate) എന്നും അറിയപ്പെടുന്നു. അക്ഷങ്ങളുടെ സംഗമബിന്ദു (0,0) നെ മൂലബിന്ദു എന്നു വിളിക്കുന്നു

ഇപ്പോൾ പേപ്പറിലുള്ള ഏതൊരു ബിന്ദുവിനെയും (x,y) എന്ന് വിവരിക്കാം. പേപ്പറിലെ 1,2 ..... എന്നത് അർത്ഥമാക്കുന്നത് എന്താണ്? ഈ സംഖ്യകളെ പ്രതിനിധീകരിക്കാൻ നമുക്ക് അനുയോജ്യമായ ചിലമാത്രകൾ ആവശ്യമാണ്. ഉദാഹരണമായി 1 മാത്രയെ 1 സെ.മീ എന്നെടുക്കാം. അതിനാൽ (2,3) നെ (0,0) ത്തിൽ നിന്നും 2 സെ.മീ വലതുഭാഗത്തും 3 സെ.മീ മുകളിലും ആണെന്ന് നിർദ്ദേശിക്കാം. മാത്രകൾ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നത് ഏകപക്ഷീയമാണ്. 1 മാത്രയെ 2 സെ.മീ എന്ന് എടുത്താൽ നമ്മുടെ ചിത്രം വളരെ വലുതായിരിക്കും. എന്നാൽ ബന്ധപ്പെട്ട ദൂരം എപ്പോഴും ഒരു പോലെയായിരിക്കും.

ഇപ്പോൾ നമ്മുടെ കയ്യിലുള്ളത് വെറും പേപ്പർ അല്ല ഒരു തലത്തിലുള്ള അനന്തമായ ബിന്ദുക്കളെ വിശദമാക്കുന്ന ഒരു ഭാഷയാണ് !

x അക്ഷവും y അക്ഷവും ഒരു തലത്തെ നാല് ഭാഗങ്ങളിൽ വിഭജിക്കുന്നു. അവയെ ചതുർത്ഥാംശങ്ങൾ എന്ന് വിളിക്കാം. (ചതുർഭുജത്തിന് 4 വശങ്ങളും ചതുർത്ഥാംശങ്ങൾക്ക് 4 ഭാഗങ്ങളും ഉണ്ട് എന്ന് ഓർക്കുക). പൊതുവായി ഇവയെ I,II,III,IV എന്നിങ്ങനെ പേര് കൊടുക്കുന്നു. I എന്നത് കിഴക്കുള്ള മുകൾഭാഗവും II എന്നത് പടിഞ്ഞാറുള്ള മുകൾഭാഗവും III എന്നത് താഴെയുള്ള പടിഞ്ഞാറ് ഭാഗവും IV എന്നത് താഴെയുള്ള കിഴക്കുഭാഗവും ആകുന്നു. നമുക്ക് എതിർ ഘടികാരദിശയിലൂടെ ഒരു യാത്ര പോകാം.

കുറിപ്പ്

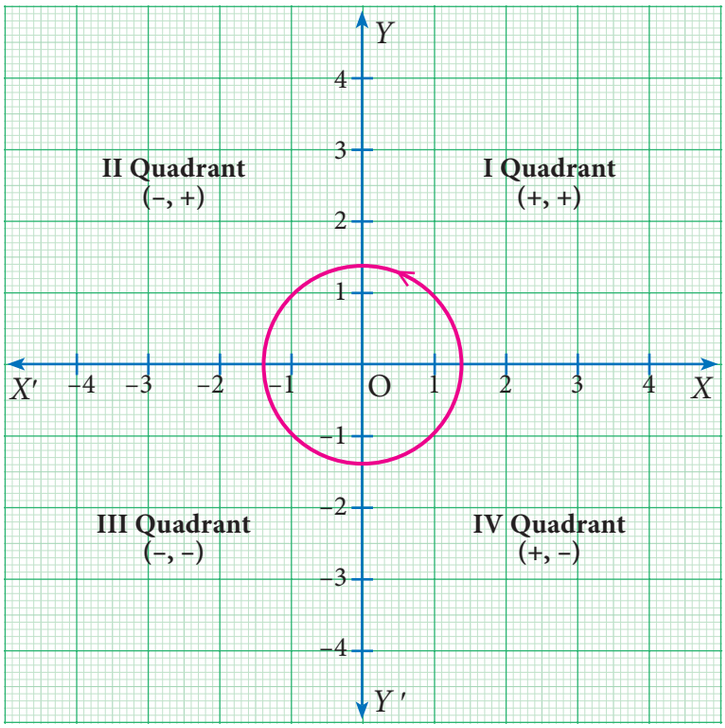
(0,0) എന്നത് പേപ്പറിന്റെ മദ്ധ്യഭാഗത്തോ അല്ലെങ്കിൽ മറ്റെവിടെയോ ആയാലും പ്രശ്നമില്ല. (0,0) എന്നത് എപ്പോഴും മൂലബിന്ദു തന്നെയാണ്. മാത്രമല്ല എല്ലാ ബിന്ദുക്കളും ഈ ബിന്ദുവിൽ നിന്നുമാണ് അളക്കുന്നത്. മൂലബിന്ദുവിനെ സാധാരണയായി O എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

കുറിപ്പ്

എന്തുകൊ**ണ്ട**ാണ് ചതുർത്ഥാംശങ്ങൾ എതിർഘടികാരദിശയിൽ എടുക്കുന്നത്? ഘടികാരദിശയിലോ അല്ലെങ്കിൽ മറ്റേതെങ്കിലും ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ നിന്നോ തുടങ്ങാത്തതെന്തുകൊ**ണ്ട്**? ഇതൊരുവിഷയമല്ല. നൂറ്റാ**ണ്ട**ുകളായി പിന്തുടരുന്ന ഒരു നല്ല സാങ്കേതിക ചിഹ്നങ്ങളാണിവ.

Unit 5_COORDINAT.indd 188 28-01-2023 11:18:33

ഭാഗം	ചതുർത്ഥാംശം	x,y യുടെ സ്വഭാവം	നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങളുടെ ചിഹ്നങ്ങൾ
XOY	I	$x>0, y>0$	(+,+)
$X'OY$	II	$x<0, y>0$	(–,+)
$X'O\,Y'$	III	$x<0, y<0$	(–,–)
$XO\,Y'$	IV	$x>0, y<0$	(+,–)



ചിത്രം. 5.7

ഇതിനായി 4 ൽ എത്തുന്നതുവരെ നാം x അക്ഷത്തെ പിൻതുടർന്ന് പോകുന്നു. കൂടാതെ x=4 ൽ ഒരു ലംബരേഖ വരയ്ക്കുക.

അതുപോലെ 5 ൽ എത്തുന്നതുവരെ നാം y അക്ഷത്തെ പിൻതുടർന്ന് പോകുന്നു. കൂടാതെ y=5 ൽ ഒരു തിരശ്ചീന രേഖ വരയ്ക്കുക.

ഈ രണ്ടു രേഖകളുടെയും പ്രതിഛേദം ആണ് കാർട്ടീഷ്യൻ തലത്തിൽ (4,5) ന്റെ സ്ഥാനം.

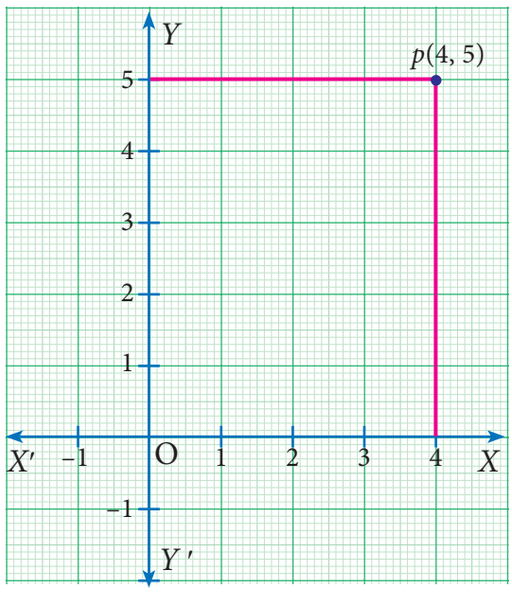
ഈ ബിന്ദു y അക്ഷത്തിൽ നിന്ന് 4 മാത്രകൾ അകലെയും x അക്ഷത്തിൽനിന്ന് 5മാത്രകൾ അകലെയുമാണ്. (4,5) ന്റെ സ്ഥാനം കാർട്ടീഷ്യൻ തലത്തിൽ നിർണ്ണയിച്ചിട്ടുണ്ട്.

കുറിപ്പ്

- x അക്ഷത്തിലെ ഏതൊരു p എന്ന ബിന്ദുവിന്റെയും y നിർദ്ദേശാങ്കത്തിന്റെ (ഓർഡിനേറ്റ്) മൂല്യം പൂജ്യമാണ്. അതായത് p(x,0)
- y അക്ഷത്തിലെ ഏതൊരു Q എന്ന ബിന്ദുവിന്റെയും x നിർദ്ദേശാങ്കത്തിന്റെ (ആബ്സിസ്സ)മൂല്യം പൂജ്യമാണ്. അതായത്
  $Q\,(0, y)$
- $x = y$ അല്ലെങ്കിൽ $(x, y) \neq (y, x)$
- ഒരു തലത്തിലുള്ള ദീർഘചതുര നിർദ്ദേശാങ്ക സമ്പ്രാദയത്തെ നിർദ്ദേശാങ്കതലം (കാർട്ടീഷ്യൻ തലം) എന്നു പറയുന്നു

5.2.1 കാർട്ടീഷ്യൻ നിർദ്ദേശാങ്ക തലത്തിൽ ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തൽ (Plotting Points in Cartesian Coordinate Plane)

(4,5) എന്ന ബിന്ദുവിനെ കാർട്ടീഷ്യൻ നിർദ്ദേശാങ്ക തലത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തുക.



ചിത്രം.. 5.8

Unit 5_COORDINAT.indd 189 28-01-2023 11:18:33

ഉദാഹരണം 5.1

താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ ഏത് ചതുർത്ഥാംശങ്ങളിലാണ് സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നത്?

(a) (3,–8) (b) (–1,–3) (c) (2, 5) (d) (–7, 3)

നിർദ്ധാരണം

(a) x നിർദ്ദേശാങ്കം ധനവും y നിർദ്ദേശാങ്കം ഋണവുമാണ്. അതുകൊണ്ട് (3,–8) എന്ന ബിന്ദു നാലാം ചതുർത്ഥാംശത്തിലാണ് സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നത്.

(b) x നിർദ്ദേശാങ്കം ഋണവും y നിർദ്ദേശാങ്കം ഋണവുമാണ്. അതുകൊണ്ട് (–1,–3) എന്ന ബിന്ദു മൂന്നാം ചതുർത്ഥാംശത്തിലാണ് സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നത്.

(c) x നിർദ്ദേശാങ്കം ധനവും y നിർദ്ദേശാങ്കം ധനവുമാണ്. അതുകൊണ്ട് (2, 5) എന്ന ബിന്ദു ഒന്നാം ചതുർത്ഥാംശത്തിലാണ് സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നത്.

(d) x നിർദ്ദേശാങ്കം ഋണവും y നിർദ്ദേശാങ്കം ധനവുമാണ്. അതുകൊണ്ട് (–7, 3) എന്ന ബിന്ദു രണ്ടാം ചതുർത്ഥാംശത്തിലാണ് സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നത്.

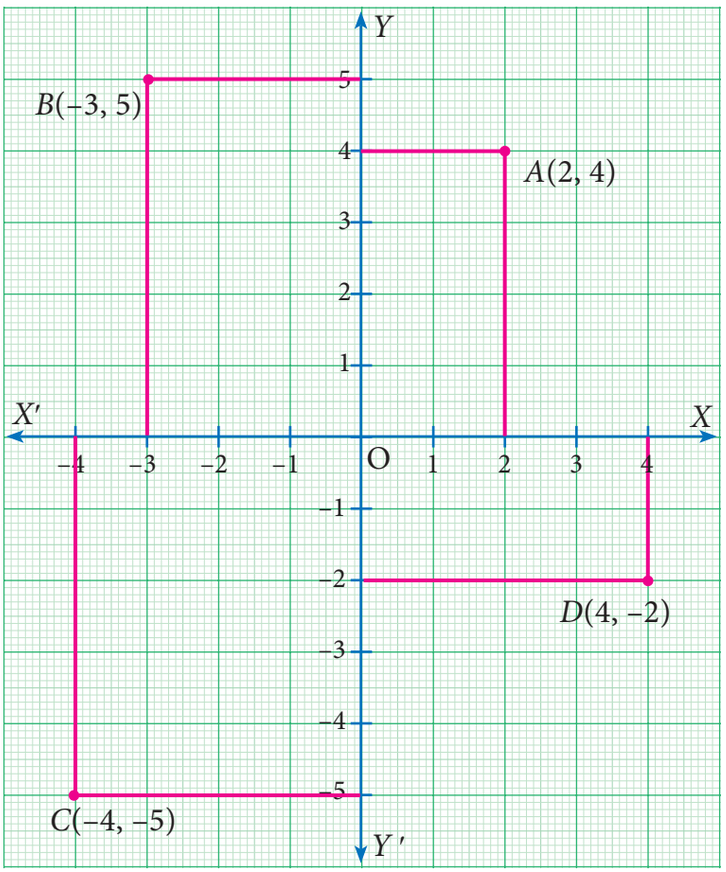
ഉദാഹരണം 5.2

$A(2,4)$, $B(-3,5)$, $C(-4,-5)$, $D(4,-2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ കാർട്ടീഷ്യൻ തലത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തുക.

നിർദ്ധാരണം

(i) (2,4) അടയാളപ്പെടുത്തുന്നതിന് x=2 ൽ ഒരു ലംബരേഖയും y=4 ൽ ഒരു തിരശ്ചീനരേഖയും വരയ്ക്കുക. ഈ രണ്ടു രേഖകളുടെയും പ്രതിഛേദമാണ് കാർട്ടീഷ്യൻ തലത്തിൽ (2,4) ന്റെ സ്ഥാനം. അതുകൊണ്ട് A(2,4) എന്ന ബിന്ദു കാർട്ടീഷ്യൻ തലത്തിൽ ഒന്നാം ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു.

(ii) . (-3,5) അടയാളപ്പെടുത്തുന്നതിന് x=-3 ൽ ഒരു ലംബരേഖയും y=5 ൽ ഒരു തിരശ്ചീനരേഖയും വരയ്ക്കുക. ഈ രണ്ടു രേഖകളുടെയും പ്രതിഛേദമാണ്. (-3,5) ന്റെ കാർട്ടീഷ്യൻ തലത്തിലെ സ്ഥാനം. അതുകൊണ്ട് B (-3,5) എന്ന ബിന്ദു കാർട്ടീഷ്യൻ തലത്തിൽ രണ്ടാം ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട്.



ചിത്രം. 5.9

(iii) (-4,-5) അടയാളപ്പെടുത്തുന്നതിന് x=-4 ൽ ഒരു ലംബരേഖയും y=-5 ൽ ഒരു തിരശ്ചീനരേഖയും വരയ്ക്കുക. ഈ രണ്ടു രേഖകളുടെയും പ്രതിഛേദമാണ് (-4,-5) ന്റെ കാർട്ടീഷ്യൻ തലത്തിലെ സ്ഥാനം. അതുകൊണ്ട് (-4,-5) എന്ന ബിന്ദു കാർട്ടീഷ്യൻ തലത്തിൽ മൂന്നാം ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട്.

Unit 5_COORDINAT.indd 190 28-01-2023 11:18:34

(iv) . (4,-2) അടയാളപ്പെടുത്തുന്നതിന് x=4 ൽ ഒരു ലംബരേഖയും y=-2 ൽ ഒരു തിരശ്ചീനരേഖയും വരയ്ക്കുക. ഈ രണ്ടു രേഖകളുടെയും പ്രതിഛേദമാണ് (4,-2) ന്റെ കാർട്ടീഷ്യൻ തലത്തിലെ സ്ഥാനം. അതുകൊണ്ട് (4,-2) എന്ന ബിന്ദു കാർട്ടീഷ്യൻ തലത്തിൽ നാലാം ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട്.

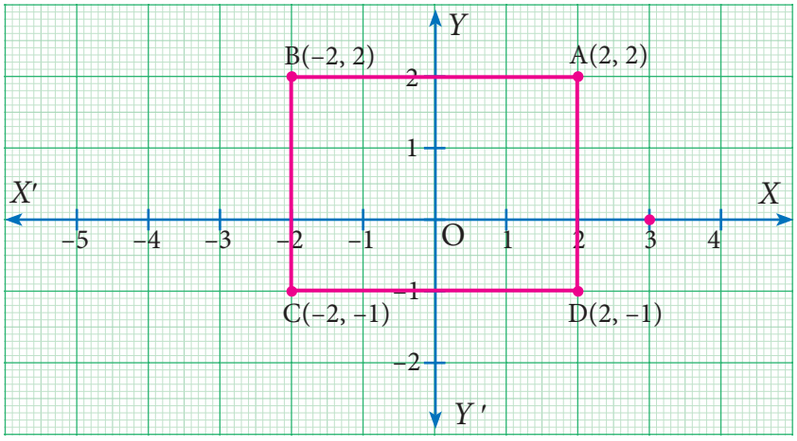
ഉദാഹരണം 5.3

$A(2,2)$, $B(-2,2)$, $C(-2,-1)$, $D(2,-1)$എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ കാർട്ടീഷ്യൻ തലത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തുക. എല്ലാ ബിന്ദുക്കളെയും യോജിപ്പിച്ചു കിട്ടുന്ന ചിത്രം ഏതു തരമാണെന്നു ചർച്ച ചെയ്യുക

നിർദ്ധാരണം

ബിന്ദു	A	B	C	D
ചതുർത്ഥാംശം	I	II	III	IV

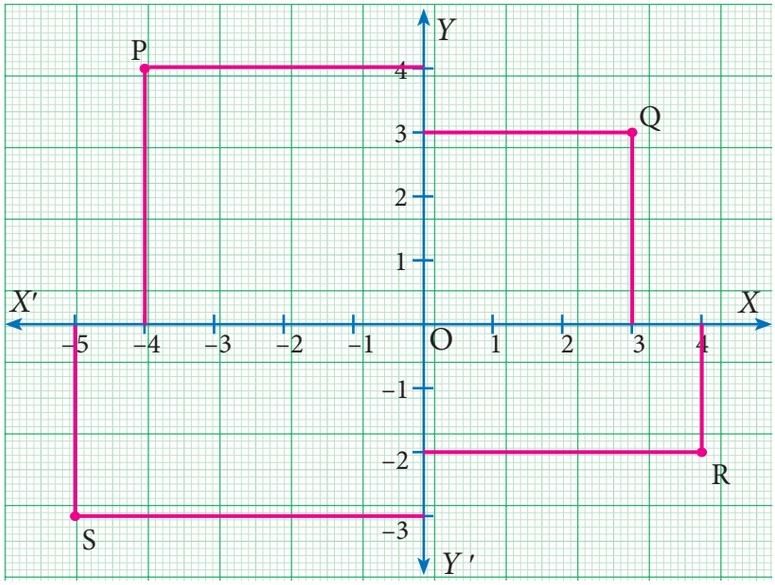
$ABCD$ ഒരു ദീർഘചതുരമാണ്.
ദീർഘചതുരത്തിന്റെ നീളവും, വീതിയും വിസ്തീർണ്ണവും കാണാൻ കഴിയുമോ?



ചിത്രം.5.10

അഭ്യാസം 5.1

1. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ബിന്ദുക്കൾ നിർദ്ദേശാങ്ക സമ്പ്രദായത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തി അതിന്റെ ചതുർത്ഥാംശം വ്യക്തമാക്കുക.
   $P(-7,6)$, $Q(7,-2)$, $R(-6,-7)$, $S(3,5)$,$T(3,9)$
2. താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയുടെ അബ്സിസ്സ, ഓർഡിനേറ്റ് ഇവ എഴുതുക.
   (i) P (ii) Q
   (iii) R (iv) S



ചിത്രം 5.11

Unit 5_COORDINAT.indd 191 28-01-2023 11:18:35

3. താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ നിർദ്ദേശാങ്കതലത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തി അവയെ യോജിപ്പിക്കുക. തൽഫലമായി ഉണ്ടാകുന്ന ചിത്രത്തെ കുറിച്ച് നിങ്ങളുടെ നിഗമനം എന്താണ്?

(i) (–5,3) (–1,3) (0,3) (5,3) (ii) (0,–4) (0,–2) (0,4) (0,5)

4. താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ നിർദ്ദേശാങ്ക തലത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തുക? അവയെ ക്രമമായി യോജിപ്പിക്കുക. ഏത് തരം ജ്യാമതീയ രൂപമാണ് രൂപപ്പെടുന്നത്.

(i) (0,0) (–4,0) (–4,–4) (0,–4) (ii) (–3,3) (2,3) (–6,–1) (5,–1)

പ്രവൃത്തി - 1

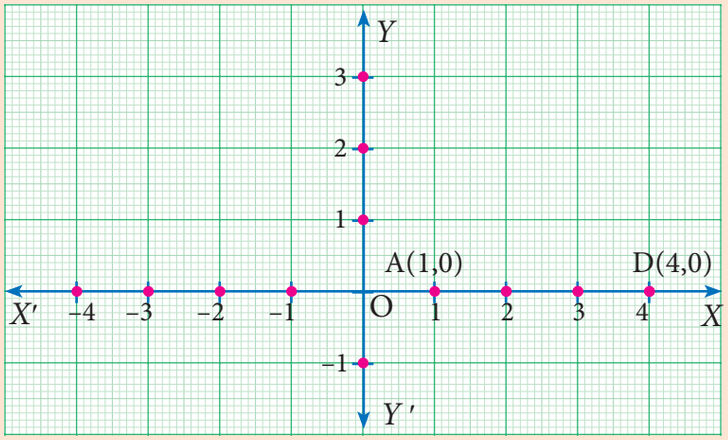
താഴെകൊടുത്തിരിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ ഒരു ഗ്രാഫ് പേപ്പറിൽ അടയാളപ്പെടുത്തുക. 1cm = 1 യൂണിറ്റ് എന്ന തോതിൽ അളവെടുക്കുക.

ഓരോ ബിന്ദുക്കളും എത്ര ദൂരത്തിലാണെന്ന് കണ്ടുപിടിക്കുക?

$A\,(1, 0)$ കൂടാതെ $D\,(4, 0)$. AD കൂടാതെ DA ഇവ കണ്ടുപിടിക്കുക.

AD, DA യ്ക്കു തുല്യമാണോ?

ഇതുപോലെയുള്ള ഒരു കൂട്ടം ബിന്ദുക്കളെ അടയാളപ്പെടുത്തി നിങ്ങളുടെ ഉത്തരം പരിശോധിക്കുക



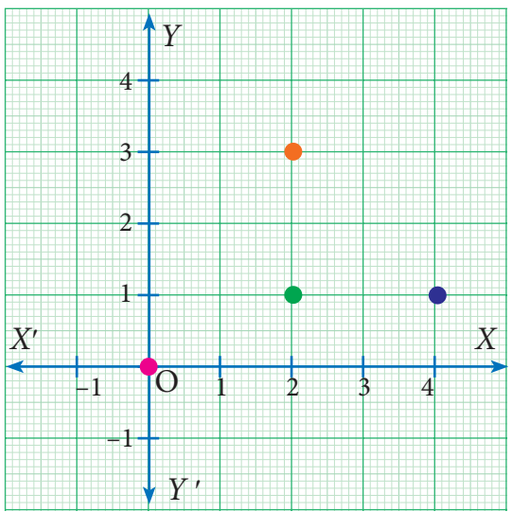
ചിത്രം 5.12

5.3 ഏതെങ്കിലും രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം (Distance between any Two Points)

സത്യമംഗലത്തെ ഒരേ തെരുവിൽ താമസിക്കുന്ന രണ്ട് കൂട്ടുകാരാണ് അഖിലയും ഷൺമുഖവും. ഷൺമുഖത്തിന്റെ വീട്, ആദ്യത്തെ തെരുവിന്റെയും ഗ്രന്ഥശാലയുള്ള രണ്ടാമത്തെ തെരുവിന്റെയും മദ്ധ്യത്തിലാണ്. രണ്ട് പേരും ഒരേസ്കൂളിലാണ് പഠിക്കുന്നത്. സ്കൂൾ ഷൺമുഖത്തിന്റെ വീട്ടിൽ നിന്നും അകലെയല്ല. താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഭൂപടം നോക്കുന്നതിന് മുമ്പ് അവരുടെ വീടുകൾ ലൈബ്രറി സ്കൂൾ ഇവയുടെ ചിത്രം സ്വന്തമായി വരയ്ക്കുക.

സ്കൂൾ കേന്ദ്രമായി പരിഗണിക്കുക. (നമുക്ക് ഇത് ചെയ്യാൻ കഴിയും! നിർദ്ദേശാങ്ക ഭാഷയിൽ നമ്മൾ ഉപയോഗിക്കുന്ന എല്ലാ ബിന്ദുക്കളും ഇതാണ്.)

സ്കെയിലിൽ 1 മാത്ര = 50 മീറ്റർ എന്നെടുക്കുക. താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ചിത്രം 5.19 ത്തിന്റെ സഹായത്തിൽ തന്നിട്ടുള്ള ചോദ്യത്തിന്റെ ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കുക..



ചിത്രം 5.13

1. ഷൺമുഖത്തിന്റെ വീട്ടിൽ നിന്നും അഖിലയുടെ വീട്ടിലേയ്ക്കുള്ള ദൂരം എത്ര?
2. ഷൺമുഖത്തിന്റെ വീട്ടിൽ നിന്നും ഗ്രന്ഥശാലയിലേയ്ക്കുള്ള ദൂരം എത്ര?
3. ഷൺമുഖം, അഖില ഇവരുടെ വീട്ടിൽ നിന്നും സ്കൂളിലേയ്ക്കുള്ള ദൂരം എത്ര?
4. അഖിലയുടെ വീട്ടിൽ നിന്നും ഗ്രന്ഥശാലയിലേയ്ക്കുള്ള ദൂരം എത്ര?
5. അഖിലയുടെ വീട്ടിൽ നിന്നും ഷൺമുഖത്തിന്റെ വീട്ടിലേയ്ക്കുള്ള ദൂരം എത്ര?

Unit 5_COORDINAT.indd 192 28-01-2023 11:18:35

ചോദ്യം 1 ന്റെ ഉത്തരം ലഭിച്ചുകഴിഞ്ഞാൽ ചോദ്യം 5 ന്റെ ആവശ്യമില്ല. വ്യക്തമായി പറഞ്ഞാൽ A യിൽ നിന്നും B യിലേക്കുള്ള ദൂരവും, B യിൽ നിന്നും A യിലേയ്ക്കുള്ള ദൂരവും തുല്യമാണ്. പൊതുവേ ഇവയെ A യിൽ നിന്നും B യിലേയ്ക്കുള്ള ദൂരമെന്നു പറയാം. പക്ഷേ ഗണിതജ്ഞരെന്ന നിലയിൽ നമ്മൾ ഇതിന്റെ സവിശേഷതകൾ ശ്രദ്ധിക്കേതാണ്. അതുകൊണ്ട് താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നതുകൂടി ശ്രദ്ധിക്കുക. അകലം (A,B) = അകലം (B,A) തലത്തിലുള്ള A,B എന്ന എല്ലാ ബിന്ദുക്കൾക്കും ഇത് ശരിയാണ്. അതുകൊണ്ട്ചോദ്യം (1) ഉം ചോദ്യം (5) ഉം ഒരേ പോലെയാണ്.

കുറിപ്പ്

അകലം (A,B) = അകലം (B,A) എന്ന സമവാക്യം ചിലസമയങ്ങളിൽ വ്യക്തമല്ല. A യിൽ നിന്നും B യിലേയ്ക്കുള്ള റോഡ് ഒരു വഴിപാതയാണെങ്കിൽ നിങ്ങൾക്ക് വേറെ വഴിയിലൂടെ പോകാൻ സാധിക്കുമോ? ഇപ്പോൾ B യിൽ നിന്നും A യിലേയ്ക്കുള്ള അകലം കൂടുന്നു. അതിനാൽ നാം ഇത്തരത്തിലുള്ള പ്രയാസമേറിയ വഴികളെ ഒഴിവാക്കി രണ്ടു വഴിയിലും സഞ്ചരിക്കാം എന്നു കരുതാം.

ബാക്കിയുള്ള ചോദ്യത്തിന്റെ ഉത്തരം എന്ത്? അവയൊന്നും ഒരുപോലെയല്ല. രണ്ടു വീടുകളും ഒരേ തെരുവിൽ വടക്ക് തെക്ക് ദിശയിലാണെന്ന് നമുക്കറിയാം ഇതുകൊണ്ട് y അക്ഷത്തിൽ നിന്നുള്ള ദൂരമാണ് ചോദ്യം 1 ന്റെ ഉത്തരം. അതുപോലെ ഗ്രന്ഥശാലയും ഷൺമുഖത്തിന്റെ വീടും ഒരേ തെരുവിൽ കിഴക്ക് പടിഞ്ഞാറ് ദിശയിലായതിനാൽ x അക്ഷത്തിന്റെ ദൂരമാണ് രണ്ടാമത്തെ ചോദ്യത്തിന്റെ ഉത്തരം.

ചോദ്യങ്ങൾ 3 ഉം 4 ഉം ഏത് തരത്തിലുള്ള വഴികളാണ് ലഭ്യമാകുന്നത് എന്നതിനെ ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്നു. 1,2,3... എന്ന്അടയാളപ്പെടുത്തിയ x ,y അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമായി തെരുവുകൾ ഉണ്ടെന്ന് സങ്കൽപ്പിച്ചാൽ ബിന്ദുക്കൾക്കിടയിലെ അകലം കൂട്ടിയാൽ ഈ ചോദ്യത്തിന് ഉത്തരം നൽകാൻ സാധിക്കും. അഖിലയുടെ വീടിന്റെ കിഴക്കു ഭാഗം പരിഗണിക്കണം.

ഒരുപക്ഷേ അഖില സ്കൂളിൽ നടന്നുപോകാൻ ആഗ്രഹിച്ചാൽ, ഒരു സ്ഥലത്തുനിന്നും മറ്റൊരു സ്ഥലത്തേയ്ക്ക് സഞ്ചരിക്കാൻ പലവഴികളുണ്ട്. ആയതിനാൽ സ്ഥലങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള അകലം വ്യത്യാസപ്പെടുന്നു. അതുകൊണ്ട് അകലം കണക്കാക്കാൻ ഒരു രീതി ആവശ്യമാണ്. A യ്ക്കും B യ്ക്കും ഇടയിൽ പലവഴികൾ ഉള്ളതിനാൽ അവയിലേറ്റവും കുറഞ്ഞ അകലമായ, അകലം (A,B) എന്നതിനെ ഉപയോഗപ്പെടുത്താം.

ഒരു പ്രതലത്തിലെ A കൂടാതെ B എന്നീ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾക്കിടയിലുള്ള ദൂരം മനസ്സിലാക്കാൻ A,B എന്നിവയ്ക്കിടയിലുള്ള നേർ രേഖാ അകലം ആണ് അകലം (A,B) എന്ന് തോന്നാനുള്ള യുക്തി നമ്മൾ ഉപയോഗിക്കണം. നിർദ്ദേശാങ്ക സമ്പ്രദായം ഉപയോഗിക്കാനുള്ള പ്രധാനകാരണം ഇതാണ്. അതിനുമുമ്പ് ഉദാഹരണത്തിലെരണ്ട് ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഉത്തരം നൽകേണ്ടത് ആവശ്യമാണ്.

1. വിദ്യാലയം കേന്ദ്രമായി പരിഗണിച്ച്, രണ്ടു വീടുകൾ, വിദ്യാലയം, ഗ്രന്ഥശാല ഇവയുടെ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ നിർവ്വചിക്കുക.
2. ഈ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചുകൊണ്ട് മുകളിലുള്ള ഏതെങ്കിലും രണ്ട് സ്ഥലങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള അകലം കണ്ടെത്തുക.

'നേർരേഖാദൂരത്തെ' 'കാക്കയുടെ പറക്കൽ' എന്നു വിശേഷിപ്പിക്കാം. അതായത് വഴിയിൽ ഏതുവിധത്തിലുള്ള തടസ്സം അനുഭവപ്പെട്ടാലും പ്രശ്നമില്ല. A യിൽ നിന്ന് B യിലേയ്ക്ക് വേണമെങ്കിൽ പറക്കുക തന്നെ വേണം എന്നതാണ് ഇതിന്റെ അർത്ഥം. ഒരു പക്ഷിയും നേർ രേഖയിൽ പറക്കുന്നില്ല എന്ന് ഉറപ്പാണ്.

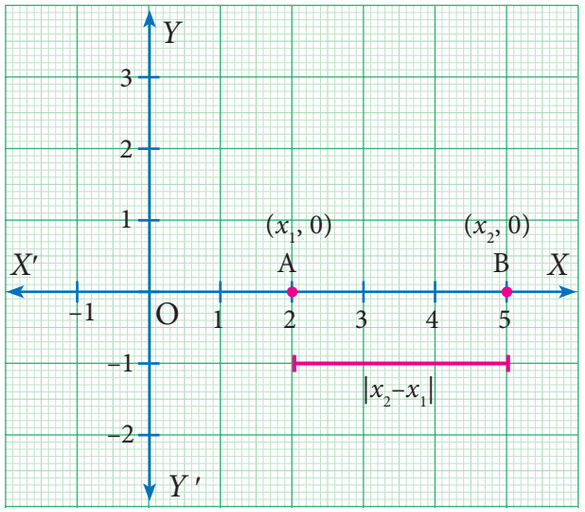
ഇതിന് ശരിയായ ഉത്തരം നൽകാൻ ഒരു തലത്തിലുള്ള $A = (x,y)$ കൂടാതെ $B = (x', y')$ എന്നീ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾക്കിടയിലുള്ള അകലം (A,B) കണ്ടുപിടിക്കണം. കൂടാതെ x, y, x' , y' തുടങ്ങിയവ ഉപയോഗിച്ചുകൊണ്ടുള്ള ഒരു സൂത്രവാക്യം ഉണ്ടാക്കാമോ? ഇതു ചെയ്യാൻ നമുക്ക് ശ്രമിക്കാം.

Unit 5_COORDINAT.indd 193 28-01-2023 11:18:36

5.3.1 നിർദ്ദേശാങ്ക അക്ഷങ്ങളിലെ രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾക്കിടയിലുള്ള അകലം

x അക്ഷത്തിലെ ബിന്ദുക്കൾ: രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ x അക്ഷത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുകയാണെങ്കിൽ, അവയ്ക്കിടയിലുള്ള അകലം *x* നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങളുടെ വ്യത്യാസത്തിന് തുല്യമാണ്.

x അക്ഷത്തിലെ $A(x_1,0)$ കൂടാതെ $B(x_2,0)$ എന്നീ രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ പരിഗണിക്കുക.



ചിത്രം 5.14

A യിൽ നിന്ന് B യിലേക്കുള്ള ദൂരം

$AB = OB - OA = x_2 - x_1 \; ; \; x_2 > x_1$

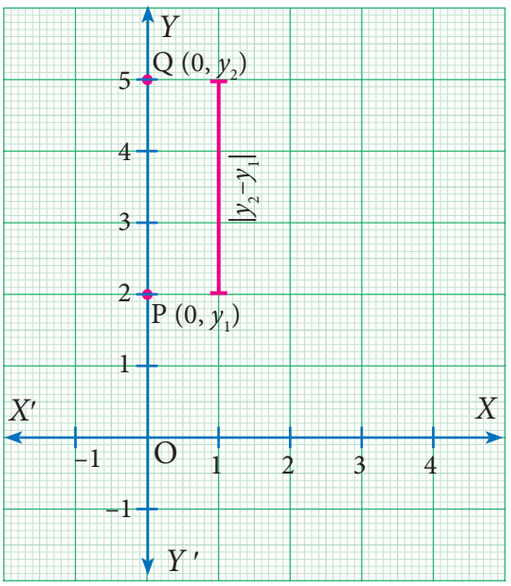
$= x_1 - x_2 \; ; \; x_1 > x_2$

$AB = |x_2 - x_1|$

(ഇതിനെ കേവലവില (modulus) $x_2 - x_1$ എന്നു വായിക്കാം.)

y അക്ഷത്തിലെ ബിന്ദുക്കൾ: രണ്ട ു ബിന്ദുക്കൾ *y* അക്ഷത്തിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു. എങ്കിൽ അവയ്ക്കിടയിലുള്ള അകലം *y* നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങളുടെ വ്യത്യാസത്തിനു തുല്യമാണ്.

$P(0,y_1)$ കൂടാതെ $Q(0,y_2)$ എന്നീ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ പരിഗണിക്കുക.



ചിത്രം 5.15

P യിൽ നിന്ന് Q വിലേയ്ക്കുള്ള ദൂരം

$PQ = OQ - OP.$

$= y_2 - y_1 \; ; \; y_2 > y_1$

$= y_1 - y_2 \; ; \; y_1 > y_2$

$PQ = |y_2 - y_1|$

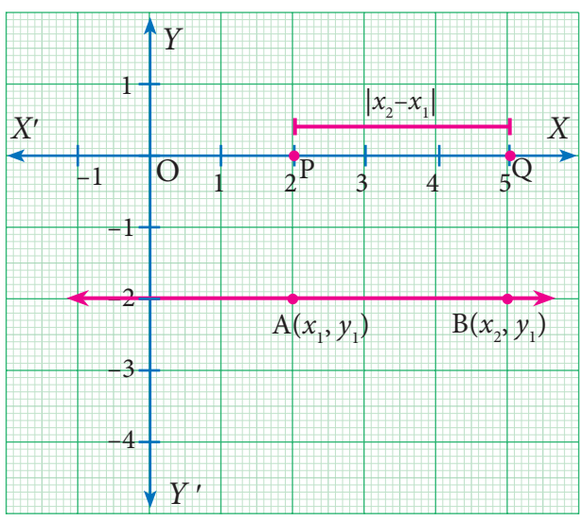
(ഇതിനെ കേവലവില (modules)$y_2 - y_1$ എന്നു വായിക്കണം.)

5.3.2 നിർദ്ദേശാങ്ക അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമായ ഒരു രേഖയിലെ രണ്ട്ബിന്ദുക്കൾക്കിടയിലെ അകലം.

$A(x_1, y_1)$ കൂടാതെ $B(x_2, y_1)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ പ രിഗണിക്കുക. y നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ തുല്യമായതിനാൽ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളും *x* അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായ ഒരു രേഖയിലാണ് സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നത്. *A* യിൽ നിന്നും *B* യിൽ നിന്നും *x* അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായി AP, BQ എന്നിവ വരയ്ക്കുക. A യ്ക്കും B യ്ക്കും ഇടയിലുള്ള ദൂരം P യ്ക്കും Q വിനും ഇടയിലുള്ള ദൂരത്തിനു തുല്യ മാണെന്ന് ചിത്രത്തിൽ നിന്നും മനസ്സിലാക്കാം.

AB യുടെ ദൂരം = PQ വിന്റെ ദൂരം = $|x_2 - x_1|$

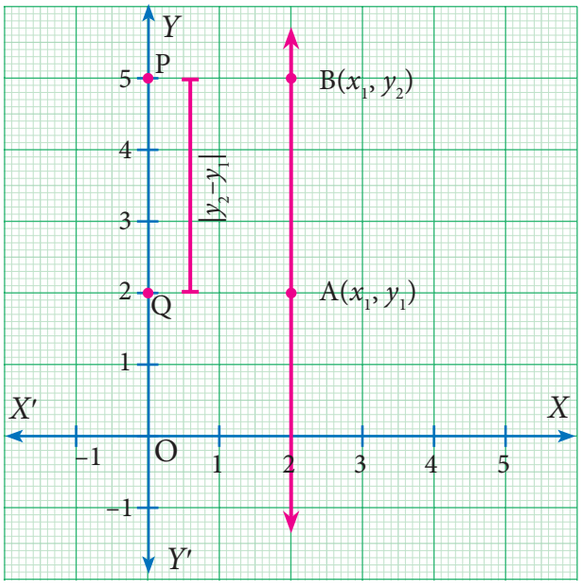
[x നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം.]



ചിത്രം. 5.16

അതുപോലെ $A(x_1, y_1)$ കൂടാതെ $B(x_2, y_1)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ പരിഗണിച്ചാൽ,

Unit 5_COORDINAT.indd 194 28-01-2023 11:18:37



ചിത്രം. 5.17

ഈ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളും y അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായ രേഖയിലാണ് സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നത്.

ഈ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളും തമ്മിലുള്ള അകലം

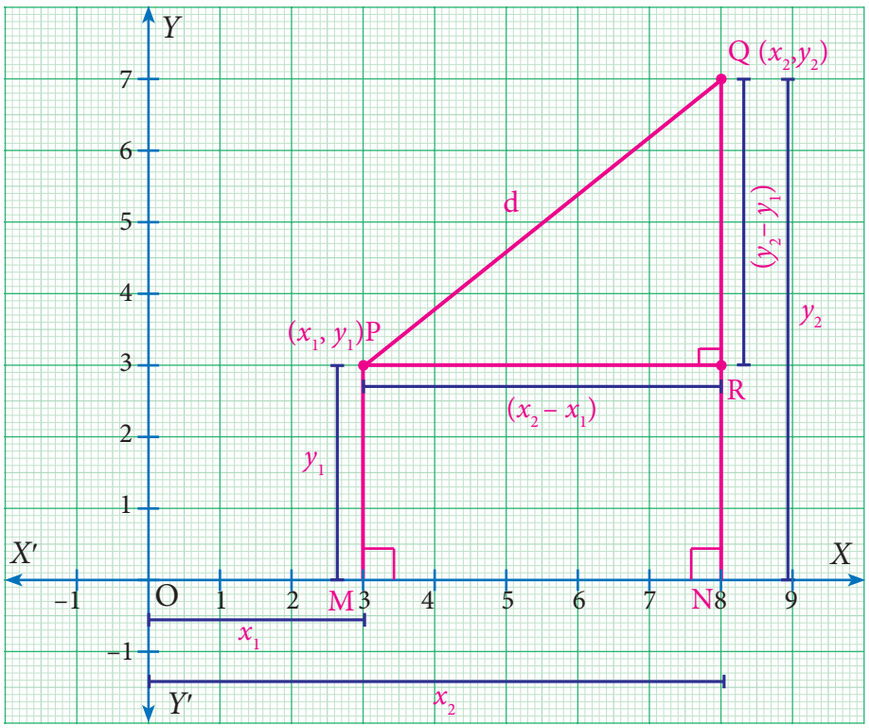
$= |y_2-y_1|$

[y നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം.]

5.3.3 ഒരു തലത്തിലുള്ള രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾക്കിടയിലെ അകലം

$P(x_1, y_1)$ കൂടാതെ $Q(x_2, y_2)$ എന്നിവ ഒരു കാർട്ടീഷ്യൻ തല (അല്ലെങ്കിൽ xy തലം) ത്തിലെ ബിന്ദുക്കളാണെന്നിരിക്കട്ടെ. ഇവയ്ക്കിടയിലുള്ള ദൂരം

d ആണെങ്കിൽ d=PQ ആയിരിക്കും



ചിത്രം.5.18

ചിന്തിക്കൂ!

ഒരാൾ 3 കി.മീ ദൂരം വടക്കുനോക്കി സഞ്ചരിക്കുന്നു. അവിടെ നിന്ന് 4 കി.മീ കിഴക്കോട്ട് സഞ്ചരിക്കുന്നു. എങ്കിൽ അയാൾ ആരംഭിച്ച സ്ഥലത്ത് നിന്ന് എത്രദൂരം അകലെയാണ്.

വഴി 1

നിർദ്ദേശാങ്ക നിർവചനമനുസരിച്ച്,

$OM = x_1$ $\quad MP = y_1$

$ON = x_2$ $\quad NQ = y_2$

ഇപ്പോൾ $PR = MN$

(ദീർഘചതുരം MNRP യുടെ എതിർവശങ്ങൾ)

Unit 5_COORDINAT.indd 195 28-01-2023 11:18:38

$= ON - OM$ ((O യിൽ നിന്നുള്ള ദൂരം അളക്കുക)

$= x_2 - x_1$ ……..(1)

കൂടാതെ $RQ = NQ - NR$

$= NQ - MP$ (ദീർഘചതുരം MNRP യുടെ എതിർവശങ്ങൾ)

$= y_2 - y_1$ ……..(2)

വഴി 2

R സമകോണായിട്ടുള്ള ത്രികോണമാണ് PQR. $(PR \perp NQ)$

$PQ^2 = PR^2 + RQ^2$ (പൈതഗോറസ് സിദ്ധാന്തം)

$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$ (ഇരുവശവും വർഗ്ഗം എടുത്താൽ)

H19B8

കുറിപ്പ്

രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾക്കിടയിലെ അകലം

- തന്നിട്ടുള്ള $P(x_1, y_1)$ കൂടാതെ $Q(x_2, y_2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾക്കിടയിലുള്ള അകലത്തിനു തന്നിട്ടുള്ള സൂത്രവാക്യം $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$.
- PQ യ്ക്കിടയിലുള്ള അകലം = QP യ്ക്കിടയിലുള്ള അകലം
  i.e. $\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$
- മൂലബിന്ദു $O(0, 0)$ ത്തിൽ നിന്നും $P(x_1y_1)$ എന്ന ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലം $OP = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

5.3.4 അകലങ്ങളുടെ സവിശേഷതകൾ (Properties of Distances)

ഒരു തലത്തിലുള്ള A,B എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ A യ്ക്കും B യ്ക്കും ഇടയിലുള്ള അകലം = B യ്ക്കും A യ്ക്കും ഇടയിലുള്ള അകലം എന്നു നാം മുമ്പേ മനസ്സിലാക്കിയിരുന്നു. നിങ്ങൾ ശ്രദ്ധിച്ച മറ്റു സവിശേഷതകൾ എന്തെല്ലാം? എന്നാൽ നിങ്ങൾ ശ്രദ്ധിക്കാതെ വിട്ടുപോയ ചില സവിശേഷതകൾ താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

ഒരു തലത്തിലുള്ള A കൂടാതെ B എന്നീ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ, ഒരേ ബിന്ദുക്കൾ (A=B) ആയിരുന്നാൽ അകലം (A,B) = 0 ആയിരിക്കും.

A,B ഇവ രണ്ടു വ്യത്യസ്ത ബിന്ദുക്കളാണെങ്കിൽ അകലം (A,B)>0

A,B കൂടാതെ C തുടങ്ങിയ ബിന്ദുക്കളെ പരിഗണിക്കാം. ഈ മൂന്നു ബിന്ദുക്കളുടെ x നിർദ്ദേശാങ്കം തുല്യമായിരുന്നാൽ അവ മൂന്നും y അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായ ഒരു നേർരേഖയിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന ബിന്ദുക്കൾ എന്നു നമുക്കു മനസ്സിലാക്കാം. അതുപോലെ ഈ ബിന്ദുക്കളുടെ y നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ തുല്യമായിരുന്നാൽ ഇവ മൂന്നും x അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായ ഒരു നേർരേഖയിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന ബിന്ദുക്കൾ എന്നു മനസ്സിലാക്കാം. പക്ഷേ ഇവ മാത്രമല്ല നിബന്ധനകൾ (0,0), (1,1) കൂടാതെ (2,2) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ സമരേഖീയമാണ്. ഇവ സമരേഖീയ ബിന്ദുക്കളാകുന്നതിന് ഈ ബിന്ദുക്കളുടെ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങളിൽ കാണുന്ന ബന്ധം എന്താണെന്ന് ചിന്തിക്കാമോ?

ഇവിടെയാണ് അകലസൂത്രവാക്യം നമുക്ക് ഉപയോഗപ്രദമാകുന്നത്. A,B കൂടാതെ C എന്നിവ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങളാണെങ്കിൽ

(എതിർഘടികാര ദിശയിൽ ബിന്ദുക്കളെ രേഖപ്പെടുത്തിയതിനുശേഷം)അകലം (A,B) + അകലം (B,C) > അകലം (A,C) എന്ന് നമുക്ക് മനസ്സിലാക്കഭാം.

എപ്പോഴാണ് ഒരു തലത്തിലുള്ള മൂന്ന് ബിന്ദുക്കൾ ഒരു ത്രികോണത്തെ രൂപീകരിക്കാത്തത്? ആ ബിന്ദുക്കൾ സമരേഖീയമായിരിക്കുമ്പോഴായിരിക്കും.

അകലം (A,B) + അകലം (B,C) = അകലം (A,C) ആയിരിക്കും. A,B കൂടാതെ C എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ സമരേഖീയമാണ്.

Unit 5_COORDINAT.indd 196 28-01-2023 11:18:39

അതുപോലെ AB കൂടാതെ C എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഒരു സമകോണത്രികോണത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങളും $\angle ABC = 90^\circ$ ആണെങ്കിൽ

അകലം $(A,B)^2$ + അകലം $(BC)^2$ = അകലം $(AC)^2$ (എതിർഘടികാരദിശയിൽ ബിന്ദുക്കളെ രേഖപ്പെടുത്തിയതിനുശേഷം).

കൂടാതെ അകലം $(AB)^2$ + അകലം $(BC)^2$ = അകലം $(AC)^2$ എന്ന നിബന്ധന പൂർത്തീകരിച്ചാൽ A,B,C എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങളാണ് എന്ന വിപരീത പ്രസ്ഥാവന നമുക്ക് തെളിയിക്കാം. ഈ സവിശേഷതകൾ ഉപയോഗിച്ച് തുടർന്നുവരുന്ന ഉദാഹരണങ്ങളെ നോക്കാം.

ഉദാഹരണം 5.4

(–4, 3), (2,–3) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ക്കിടയിലുള്ള അകലംകാണുക .

നിർദ്ധാരണം

(–4, 3), (2,–3) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ക്കിടയിലുള്ള അകലം

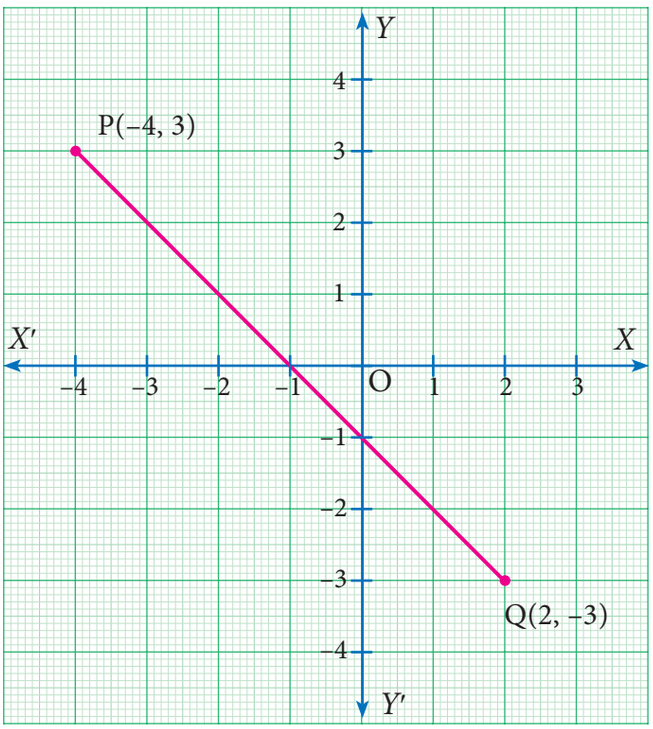
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(2+4)^2 + (-3-3)^2}$$

$$= \sqrt{(6^2 + (-6)^2)} = \sqrt{(36+36)}$$

$$= \sqrt{(36 \times 2)}$$

$$= 6\sqrt{2}$$



ചിത്രം. 5.19

ഉദാഹരണം 5.5

A (3,1) , B (6,4) കൂടാതെ C (8,6) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ നേർരേഖയിലാണ് സ്ഥിതിചെയ്യുന്നത് എന്ന് കാണിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

അകലസൂത്രം ഉപയോഗിച്ച്

$$AB = \sqrt{(6-3)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(8-6)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{(4+4)} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(8-3)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$AB + BC = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} = AC$$

അതുകൊണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ നേർരേഖയിലാണ് സ്ഥിതിചെയ്യുന്നത്.

സമരേഖീയ ബിന്ദുക്കൾ

മൂന്ന് ബിന്ദുക്കൾ സമരേഖീയമാണെന്ന് തെളിയിക്കാൻ. രണ്ട് ജോഡി ബിന്ദുക്കൾക്കിടയിലുള്ള ദൂരത്തിന്റെ ആകെതുക മൂന്നാമത്തെ ജോഡി ബിന്ദുക്കളുടെ അകലത്തിന് തുല്യമായിരിക്കും എന്ന് തെളിയിക്കുക.

$AB + BC = AC$ ആണെങ്കിൽ $A,B,C,$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ സമരേഖീയമാണ്.

ഉദാഹരണം 5.6

A(7,10) B(-2,5) C(3,-4) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഒരു സമകോണത്രികോണത്തിന്റെ ശീർഷകങ്ങളാണോ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

Unit 5_COORDINAT.indd 197 28-01-2023 11:18:40

നിർദ്ധാരണം

ഇവിടെ $A = (7, 10), B = (-2, 5), C = (3,-4)$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(-2 - 7)^2 + (5 - 10)^2}$$

$$= \sqrt{(-9)^2 + (-5)^2}$$

$$= \sqrt{(81 + 25)}$$

$$= \sqrt{106}$$

$$AB^2 = 106 \quad \ldots (1)$$

$$BC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(3 - (-2))^2 + (-4 - 5)^2} = \sqrt{(5)^2 + (-9)^2}$$

$$= \sqrt{25 + 81} = \sqrt{106}$$

$$BC^2 = 106 \quad \ldots (2)$$

$$AC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(3 - 7)^2 + (-4 - 10)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-14)^2}$$

$$= \sqrt{16 + 196} = \sqrt{212}$$

$$AC^2 = 212 \quad \ldots (3)$$

(1), (2) & (3)ൽ നിന്നും,

$$AB^2 + BC^2 = 106 + 106 = 212 = AC^2$$

$AB^2 + BC^2 = AC^2$

$\therefore$ ΔABC ഒരു സമകോണത്രികോണമാണ്.

സമകോണത്രികോണം

ഒരു സമകോണത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുക അതിന്റെ കർണ്ണമായ മൂന്നാമത്തെ വശത്തിന്റെ വർഗ്ഗത്തിന് തുല്യമായിരിക്കും.

ഉദാഹരണം 5.7

$A(-4,-3)$, $B(3,1)$, $C(3,6)$, $D(-4,2)$ എന്നീ ക്രമത്തിൽ എടുത്തിട്ടുള്ള ബിന്ദുക്കൾ ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങളാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

Unit 5_COORDINAT.indd 198 28-01-2023 11:18:42

നിർദ്ധാരണം

$A(-4, -3)$, $B(3, 1)$, $C(3, 6)$, $D(-4, 2)$എന്നിവ ചതുർഭുജം ABCD യുടെ നാല് ശീർഷങ്ങളാണ്. അകല സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച്

> **സാമാന്തരികം**
>
> സാമാന്തരികത്തിന്റെ എതിർവശങ്ങൾ തുല്യമാണെന്ന് നമുക്കറിയാം.

Let $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$AB = \sqrt{(3+4)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{49+16} = \sqrt{65}$

$BC = \sqrt{(3-3)^2 + (6-1)^2}$

$= \sqrt{0+25} = \sqrt{25} = 5$

$CD = \sqrt{(-4-3)^2 + (2-6)^2}$

$= \sqrt{(-7)^2 + (-4)^2} = \sqrt{49+16} = \sqrt{65}$

$AD = \sqrt{(-4+4)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{(0)^2 + (5)^2} = \sqrt{25} = 5$

$AB = CD = \sqrt{65}$ കൂടാതെ $BC = AD = 5$

ഇവിടെ, എതിർ വശങ്ങൾ തുല്യമാണ്. അതുകൊണ്ട് ABCD ഒരു സാമാന്തരികമാണ്.

ഉദാഹരണം 5.8

x അക്ഷത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നതും അബ്സ്സിസ്സ 11 ഉള്ളതുമായ B എന്ന ബിന്ദുവിനും A (7, 3) എന്ന ബിന്ദുവിനും ഇടയിലുള്ള അകലം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

B, x അക്ഷത്തിലാണ് അതുകൊണ്ട് B യുടെ y നിർദ്ദേശാങ്കം 0 ആണ് .

. അതുകൊണ്ട് B യുടെ നിർദ്ദേശാങ്കം (11, 0) ആണ് .

അകലസൂത്രമുപയോഗിച്ച്, A(7,3) B (11,0) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$AB = \sqrt{(11-7)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{(4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25}$

$= 5$

ഉദാഹരണം 5.9

P,Q,R എന്നിവയുടെ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ യഥാക്രമം **(6,-1), (1,3), (a,8)** എന്നിവയാണ് കൂടാതെ **PQ=QR** ആകുന്നു. എങ്കിൽ **'a'** യുടെ വില കാണുക.

Unit 5_COORDINAT.indd 199 28-01-2023 11:18:43

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ളവ $P\,(6, -1)$, $Q\,(1, 3)$ കൂടാതെ $R\,(a, 8)$

$$PQ = \sqrt{(1-6)^2+(3+1)^2} = \sqrt{(-5)^2+(4)^2} = \sqrt{41}$$

$$QR = \sqrt{(a-1)^2+(8-3)^2} = \sqrt{(a-1)^2+(5)^2}$$

$PQ = QR$ എന്ന് തന്നിരിക്കുന്നു

അതുകൊണ്ട് $\sqrt{41} = \sqrt{(a-1)^2+(5)^2}$

$41 = (a-1)^2 + 25$ [ഇരുവശത്തിന്റെയും വർഗ്ഗം എടുക്കുക.]

$(a-1)^2 + 25 = 41$

$(a-1)^2 = 41 - 25$

$(a-1)^2 = 16$

$(a-1) = \pm 4$ [ഇരുവശത്തിന്റെയും വർഗ്ഗമൂലം എടുക്കുക]

$a = 1 \pm 4$

$a = 1 + 4$ or $a = 1 - 4$

$a = 5$ or $a = -3$

ഉദാഹരണം 5.10

A(2,2), B (8,-4) ഇവ ഒരു തലത്തിലുള്ള രണ്ട് ബിന്ദുക്കളാണ്. **x** അക്ഷത്തിൽ സ്ഥിചെയ്യുന്ന (ധന അക്ഷം) **P** എന്ന ബിന്ദു **AB** യെ **1 : 2** എന്ന അനുപാതത്തിൽ വിഭജിക്കുന്നു എങ്കിൽ **P** യുടെ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ള ബിന്ദുക്കൾ $A(2, 2)$, $B(8, -4)$ കൂടാതെ $P = (x, 0)$ [p,x അക്ഷത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു]

അകലസൂത്രമുപയോഗിച്ച്

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$AP = \sqrt{(x-2)^2+(0-2)^2} = \sqrt{x^2-4x+4+4} = \sqrt{x^2-4x+8}$$

$$BP = \sqrt{(x-8)^2+(0+4)^2} = \sqrt{x^2-16x+64+16} = \sqrt{x^2-16x+80}$$

$AP : PB = 1 : 2$ എന്ന് തന്നിരിക്കുന്നു

i.e. $\frac{AP}{BP} = \frac{1}{2}$ $(\because BP = PB)$

$2AP = BP$

ഇരുവശങ്ങളിലും വർഗ്ഗം എടുത്താൽ,

$4AP^2 = BP^2$

$4(x^2 - 4x + 8) = (x^2 - 16x + 80)$

$4x^2 - 16x + 32 = x^2 - 16x + 80$

$3x^2 - 48 = 0$

Unit 5_COORDINAT.indd 200 28-01-2023 11:18:45

$$3x^2 = 48$$
$$x^2 = 16$$
$$x = \pm 4$$

p,x അക്ഷത്തിൽ (ധനഭാഗം) സ്ഥിതിചെയ്യുന്നതുകൊണ്ട് അതിന്റെ x നിർദ്ദേശാങ്കം –4 ആകുന്നില്ല.

അതുകൊണ്ട് p യുടെ നിർദ്ദേശാങ്കം (4, 0)

ഉദാഹരണം 5.11 **9,3), (7, –1), (–1,3)** എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ വഴി കടന്നുപോകുന്ന വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രമാണ് **(4,3)** എന്നു തെളിയിക്കുക. ഇതിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം കാണുക

നിർദ്ധാരണം

p(4,3), A(9,3), B(7,–1) കൂടാതെ C(–1,3) എന്ന് തന്നിട്ടുണ്ട്.

A,B,C എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രമായ P ഇവയിൽ നിന്നും തുല്യ അകലത്തിലാണ്. (i.e.) $PA = PB = PC$

അകലസൂത്രമുപയോഗിച്ച്,

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$AP = PA = \sqrt{(4-9)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{(-5)^2 + 0} = \sqrt{25} = 5$$
$$BP = PB = \sqrt{(4-7)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$
$$CP = PC = \sqrt{(4+1)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{(5)^2 + 0} = \sqrt{25} = 5$$
$$PA = PB = PC = 5$$

അതുകൊണ്ട് A,B കൂടാതെ C എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രമാണ് P.

വ്യാസാർദ്ധം = 5.

അഭ്യാസം 5.2

1. . താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ഓരോ ജോഡി ബിന്ദുക്കൾക്കും ഇടയിലുള്ള അകലം കാണുക.

   (i) (1, 2) കൂടാതെ (4, 3) (ii) (3,4) കൂടാതെ (– 7, 2)

   (ii) (a, b) കൂടാതെ (c, b) (iv) (3,– 9) കൂടാതെ (–2, 3)

2. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ബിന്ദുക്കൾ സമരേഖീയമാണോ അല്ലയോ എന്ന് കണ്ടുപിടിക്കുക.

   (i) (7,–2),(5,1),(3,4) (ii) $(a,–2)$, $(a,3)$, $(a,0)$

3. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ബിന്ദുക്കൾ ഒരു ദ്വിസമഭുജ ത്രികോണത്തെ രൂപീകരിക്കുന്നു എന്ന് തെളിയിക്കുക.

   (i) A (5,4), B(2,0), C (–2,3) (ii) A (6,–4), B (–2, –4), C (2,10)

Unit 5_COORDINAT.indd 201 28-01-2023 11:18:46

4. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ബിന്ദുക്കൾ ഒരു സമഭുജ ത്രികോണത്തെ രൂപീകരിക്കുന്നു എന്ന് തെളിയിക്കുക.

(i) $A(2, 2), B(-2, -2), C(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ (ii) $A(\sqrt{3}, 2), B(0,1), C(0,3)$

5. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ബിന്ദുക്കൾ അതേ ക്രമത്തിൽ ഒരു സമാന്തരികത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങളാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

(i) $A(-3, 1), B(-6, -7), C(3, -9)$ കൂടാതെ $D(6, -1)$

(ii) $A(-7, -3), B(5,10), C(15,8)$ കൂടാതെ $D(3, -5)$

6. താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ബിന്ദുക്കൾ അതേ ക്രമത്തിൽ ഒരു സമചതുർഭുജത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങൾ രൂപീകരിക്കുന്നു എന്ന് കാണുക.

(i) $A(3,-2), B(7,6), C(-1,2)$ കൂടാതെ $D(-5, -6)$

(ii) $A(1,1), B(2,1), C(2,2)$ കൂടാതെ $D(1,2)$

7. (-1,1) (1,3) (3,a) എന്നിവ യഥാക്രം ABC യുടെ ബിന്ദുക്കളാണ്. കൂടാതെ AB=BC ആണെങ്കിൽ 'a' യുടെ വിലകാണുക.

8. A എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ അബ്സ്സിസ്സയും ഓർഡിനേറ്റും തുല്യമാണ് കൂടാതെ B(1,3) ൽ നിന്ന് A യിലേക്കുള്ള അകലം 10 മാത്രമാണ്. എങ്കിൽ A യുടെ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ കാണുക.

9. (3,4) (–5,6) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ നിന്നു തുല്യ അകലത്തിലുള്ള ബിന്ദുവാണ്. (x,y) എങ്കിൽ x ഉം y ഉം തമ്മിലുള്ള ബന്ധം കണ്ടുപിടിക്കുക.

10. A (2,3) കൂടാതെ B (2, – 4) എന്നിവ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളാണ്. $AP = \frac{3}{7} AB$, എന്ന് ആകത്തക്കവിധം x അക്ഷത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവാണ് p എങ്കിൽ p യുടെ നിർദ്ദേശാങ്കം കാണുക?.

11. (1,2) (3,– 4) കൂടാതെ (5,– 6) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ വഴി കടന്നുപോകുന്ന വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രമാണ് (11,2) എന്ന് തെളിയിക്കുക.

12. മൂലബിന്ദു കേന്ദ്രമായുള്ള വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം 30 മാത്രയാണ്. വൃത്തം അക്ഷങ്ങളിൽ ഛേദിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ എഴുതുക. അങ്ങനെയുള്ള ഏതെങ്കിലും രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾക്കിടയിലെ ദൂരം കാണുക

5.4 ഒരു രേഖാഖണ്ഡത്തിന്റെ മദ്ധ്യബിന്ദു



ചിത്രം. 5.20

ഒരാൾ തന്റെ ഇരുചക്രവാഹനത്തിൽ കലാലയത്തിൽ നിന്നും ആദ്യം A എന്ന ഗ്രാമത്തിലേയ്ക്കും പിന്നീട് B എന്ന ഗ്രാമത്തിലേയ്ക്കും ഒരു നേർപാതയിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്നു എന്നു സങ്കൽപിക്കുക. Aയ്ക്കും Bയ്ക്കും ഇടയിലുള്ള ഒരു സ്ഥലത്ത് വെച്ച് യാത്രക്കാവശ്യമുള്ള ഇന്ധനമില്ലെന്നും നിറയ്ക്കുന്നതിനുള്ള സൗകര്യമില്ലെന്നും അദ്ദേഹം മനസ്സിലാക്കുന്നു. അദ്ദേഹം Aയിലേക്കാണോ അതോ ഒരു ഭാഗ്യപരീക്ഷണമെന്ന രീതിയിൽ Bയിലേക്കാണോ പോകേണ്ടത്? ഏതാണ് കുറഞ്ഞ ദൂരം? ഇത് ഒരു അനിശ്ചിതത്വമാണ്. ഇവിടെ അദ്ദേഹം പാതി ദൂരം സഞ്ചരിച്ചോ എന്ന് മനസ്സിലാക്കേണ്ടതുണ്ട്.



ചിത്രം. 5.21

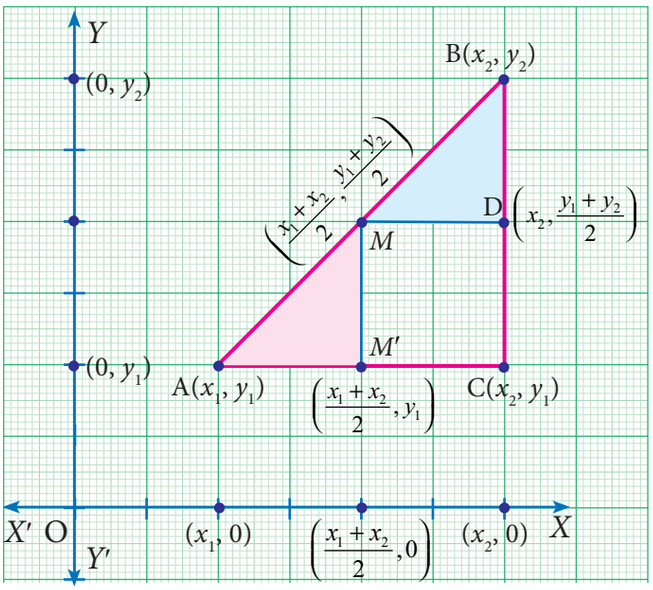
ചിത്രം 5.21 വിശദീകരിക്കുന്നു.കലാലയത്തെ മൂലബിന്ദു O എന്നും A, B എന്നീ ഗ്രാമങ്ങളിലേക്കുള്ള ദൂരത്തെ x_1, x_2 എന്നും സങ്കൽപിക്കുക.(x_1,<x_2) AB യുടെ മദ്ധ്യബിന്ദു M എന്നിരിക്കട്ടെ. x താഴെ കാണുന്നവിധം കണ്ടുപിടിക്കാം.

Unit 5_COORDINAT.indd 202 28-01-2023 11:18:47

$AM = MB$ അതുകൊണ്ടാണ്, $x - x_1 = x_2 - x$

ഇതിനെ ലഘൂകരിച്ചാൽ $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

ഇത് പൊതുരൂപത്തിലേക്ക് നമ്മെ നയിക്കുന്നു. $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ഏതെങ്കിലും രണ്ട് ബിന്ദുക്കളും $M(x, y)$ രേഖാഖണ്ഡം AB യുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുവുമാണെങ്കിൽ M' എന്നത് AC യുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുവാണ്. (ചിത്രം 2.7 ൽ). ഒരു സമകോണത്രികോണത്തിൽ വശങ്ങളുടെ ലംബദ്വിഭാജികൾ കർണ്ണത്തിന്റെ മദ്ധ്യബിന്ദുവിൽ പ്രതിഛേദിക്കുന്നു. (ഈ സവിശേഷത ചിത്രം 2.7 ൽ വർണ്ണമിട്ട ത്രികോണങ്ങളുടെ സാദൃശ്യത മൂലവും കിട്ടുന്നു) ഇത്തരം ത്രികോണങ്ങളിൽ സമാനവശങ്ങൾ ആനുപാതികമായിരിക്കും.



ചിത്രം. 5.22

മറ്റൊരു രീതി

(സദൃശ്യ ത്രികോണങ്ങളുടെ സവിശേഷത ഉപയോഗിച്ച്)

M എന്ന ബിന്ദുവിനെ $M(x,y)$ എന്നെടുക്കുക.

ഇപ്പോൾ, $\Delta AMM'$, ΔMBD എന്നിവ സദൃശ്യ ത്രികോണങ്ങളാണ്.

അതുകൊണ്ട്

$$\frac{AM'}{MD} = \frac{MM'}{BD} = \frac{AM}{MB}$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{1}{1} \quad (AM = MB)$$

$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = 1$ എന്നെടുത്താൽ

$2x = x_2 + x_1 \Rightarrow x = \frac{x_2 + x_1}{2}$

ഇതുപോലെ, $y = \frac{y_2 + y_1}{2}$

M ന്റെ x-നിർദ്ദേശാങ്കം = A, C യുടെ x-നിർദ്ദേശാങ്കളുടെ ശരാശരി = $\frac{x_1 + x_2}{2}$ അതുപോലെ,

M ന്റെ y-നിർദ്ദേശാങ്കം = B, C യുടെ y-നിർദ്ദേശാങ്കളുടെ ശരാശരി = $\frac{y_1 + y_2}{2}$

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തിന്റെ മദ്ധ്യബിന്ദു Mഎന്നത് $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

ഉദാഹരണമായി, $(-8, -10)$, $(4, -2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തിന്റെ മദ്ധ്യബിന്ദു=

ചിന്തിക്കൂ

D, C എന്നിവ യഥാക്രമം AC, AB യുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുവും AD = 4cm ഉം ആണെങ്കിൽ ABയുടെ നീളം?

Unit 5_COORDINAT.indd 203 28-01-2023 11:18:57

$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$, ഇവിടെ $x_1=-8$, $x_2=4$, $y_1=-10$, $y_2=-2$.

$= \left(\frac{-8+4}{2}, \frac{-10-2}{2}\right) = (-2,-6)$.

ദൈനംദിന ജീവിതത്തിൽ മദ്ധ്യബിന്ദു സൂത്രവാക്യത്തിന്റെ പ്രയോഗത്തെക്കുറിച്ച് ഇനി നമുക്ക് നോക്കാം. താഴെ പറയുന്ന നഗരങ്ങളുടെ രേഖാംശവും, അക്ഷാംശവും എടുത്താൽ.

നഗരത്തിന്റെ പേര്	രേഖാംശം	അക്ഷാംശം
ചെന്നൈ (ബസന്ത് നഗർ)	80.27° E	13.00° N
മംഗളൂരു (കുച്ചത്തൂർ)	74.85° E	13.00° N
ബംഗളൂരു (രാജാജി നഗർ)	77.56° E	13.00° N



ചിത്രം. 5.23

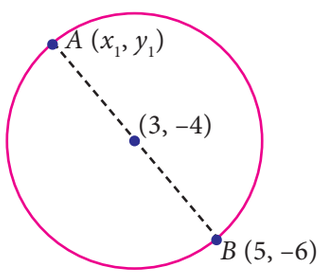
ചെന്നൈയുടെയും മംഗളൂരുവിന്റെയും രേഖാംശവും അക്ഷാംശവും (80.27° E, 13.00° N) ജോടികളായി എടുത്താൽ, ബംഗളൂരു ചെന്നൈയുടെയും, മംഗളൂരുവിന്റെയും (74.85° E , 13.00° N) മദ്ധ്യത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നതു കൊണ്ട് നിർദ്ദേശാങ്കളുടെ ശരാശരി കാണേണ്ട താണ്. അതായത് $\left(\frac{80.27+74.85}{2}, \frac{13.00+13.00}{2}\right)$. ഇത് യഥാക്രമം ബംഗളൂരുവിന്റെ രേഖാംശവും അക്ഷാംശവുമാണ്. (77.56°E, 13.00°N)മുകളിൽ പറഞ്ഞ എല്ലാ ഉദാഹരണങ്ങളിലും മദ്ധ്യത്തിലുള്ള ബിന്ദു, മദ്ധ്യ ബിന്ദുവും മറ്റ് രണ്ട് ബിന്ദുക്കളെയും ഒരേ അംശത്തിൽ വിഭജിക്കുന്ന ബിന്ദുവുമാണ്.

ഉദാഹരണം 5.12 ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ മദ്ധ്യബിന്ദുവാണ് $(3,-4)$, AB അതിന്റെ വ്യാസവും B യുടെ നിർദ്ദേശാങ്കം $(5,-6)$ എങ്കിൽ Aയുടെ നിർദ്ദേശാങ്കം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം Aയുടെ നിർദ്ദേശാങ്കം (x_1, y_1) എന്നിരിക്കട്ടെ. തന്നിട്ടുള്ള ബിന്ദു $B(5,-6)$ വൃത്ത കേന്ദ്രം വ്യാസം AB യുടെ മദ്ധ്യബിന്ദു ആയതിനാൽ.

$$\frac{x_1+x_2}{2}=3 \qquad \frac{y_1+y_2}{2}=-4$$
$$x_1+5=6 \qquad y_1-6=-8$$
$$x_1=6-5 \qquad y_1=-8+6$$
$$x_1=1 \qquad y_1=-2$$

അതുകൊണ്ട്, Aയുടെ നിർദ്ദേശാങ്കം $(1,-2)$



ചിത്രം. 5.24

Unit 5_COORDINAT.indd 204 28-01-2023 11:19:01

പുരോഗതി പരിശോധന

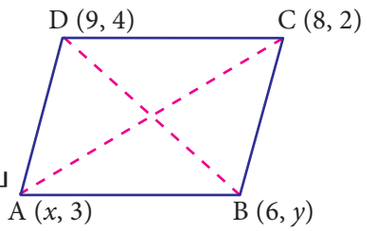
(i) X എന്നത് $A(3,0)$, $B(-5,4)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തിന്റെ മദ്ധ്യബിന്ദുവും Y എന്നത് $P(-11,-8)$, $Q(8,-2)$. എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തിന്റെ മദ്ധ്യബിന്ദുവുമാണെങ്കിൽ XY യുടെ മദ്ധ്യ ബിന്ദു കാണുക.

(ii) $(3,x)$ എന്നത് $A(8,-5)$, $B(-2,11)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ .യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തിന്റെ മദ്ധ്യബിന്ദുവാണെങ്കിൽ 'x' കാണുക.

ഉദാഹരണം 5.13

ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങൾ യഥാക്രമം $(x, 3)$, $(6, y)$, $(8, 2)$, $(9, 4)$ ആണെങ്കിൽ x, y എന്നിവ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം A(x, 3), B(6, y), C(8, 2), D(9, 4) ABCD എന്ന സാമാന്തരികത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങളാണ്. സാമാന്തരികത്തിന്റെ വികർണ്ണങ്ങൾ ACയും BDയും പരസ്പരം സമഭാഗം ചെയ്യുന്നു.



ചിത്രം 5.25

AC യുടെ മദ്ധ്യബിന്ദു = BD യുടെ മദ്ധ്യബിന്ദു

$$\left(\frac{x+8}{2},\frac{3+2}{2}\right)=\left(\frac{6+9}{2},\frac{y+4}{2}\right)$$

രണ്ട് വശത്തുമുള്ള നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങളെ പരസ്പരം താരതമ്യം ചെയ്താൽ

$$\frac{x+8}{2}=\frac{15}{2} \quad \text{കൂടാതെ} \quad \frac{5}{2}=\frac{y+4}{2}$$

$$x+8=15 \qquad 5=y+4$$

$$x=7 \qquad y=1$$

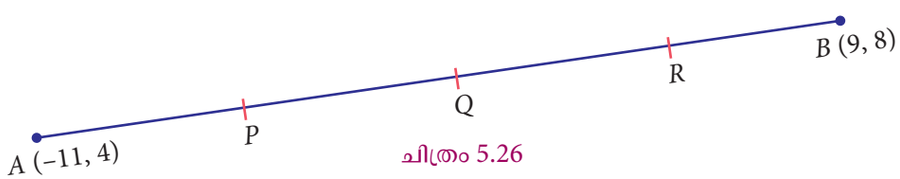
അതുകൊണ്ട്, $x = 7$ and $y = 1$.

ചിന്തിക്കൂ

സാമാന്തരികം ABCD യുടെ മൂന്ന് ശീർഷകങ്ങളാണ് $A(6,1)$, $B(8,2)$ കൂടാതെ $C(9,4)$ എങ്കിൽ നാലാമത്തെ ശീർഷം D കാണുക.ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ ശീർഷകങ്ങളാണ് (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) കൂടാതെ (x_4, y_4) എങ്കിൽ $(x_1 + x_3 - x_2, y_1 + y_3 - y_2)$ എന്നിവയുടെ മൂല്യം കാണുക. കാരണം വിശതമാക്കുക.

ഉദാഹരണം 5.14

$A(-11, 4)$, $B(9,8)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തെ നാലു തുല്യ ഭാഗങ്ങളായി വിഭജിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ കാണുക?



ചിത്രം 5.26

Unit 5_COORDINAT.indd 205 28-01-2023 11:19:06

നിർദ്ധാരണം

$AP = PQ = QR = RB$ എന്നവണ്ണം $A(-11,4)$, $B(9,8)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തിലുള്ള ബിന്ദുക്കളാണ് P, Q, R എന്നിരിക്കട്ടെ.

ഇവിടെ Qഎന്നത് AB യുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുവും, P എന്നത് AQ വിന്റെ മദ്ധ്യബിന്ദുവും, R എന്നത് QB യുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുവുമാണ്.

AB യുടെ മദ്ധ്യബിന്ദു $Q = \left(\frac{-11+9}{2}, \frac{4+8}{2}\right) = \left(\frac{-2}{2}, \frac{12}{2}\right) = (-1,6)$

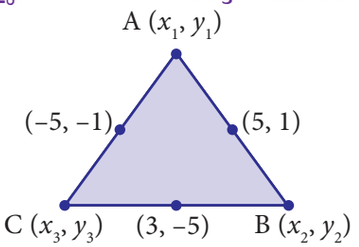
AQ വിന്റെ മദ്ധ്യബിന്ദു $P = \left(\frac{-11-1}{2}, \frac{4+6}{2}\right) = \left(\frac{-12}{2}, \frac{10}{2}\right) = (-6,5)$

QB യുടെ മദ്ധ്യബിന്ദു $R = \left(\frac{-1+9}{2}, \frac{6+8}{2}\right) = \left(\frac{8}{2}, \frac{14}{2}\right) = (4,7)$

AB യെ 4 തുല്യഭാഗങ്ങളായി വിഭജിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ $P(-6, 5)$, $Q(-1, 6)$, $R(4, 7)$..

ഉദാഹരണം 5.15

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുക്കൾ $(5,1)$, $(3,-5)$, $(-5,-1)$ ആകുന്നു. ത്രികോണത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങളുടെ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ കാണുക.



ചിത്രം 5.27

നിർദ്ധാരണം ΔABC യുടെ ശീർഷങ്ങളാണ് $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ എന്നും AB, BC, CA എന്നീ വശങ്ങളുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുക്കളാണ് $(5,1)$, $(3,-5)$, $(-5,-1)$ എന്നും എടുക്കുക.

$\frac{x_1 + x_2}{2} = 5 \Rightarrow x_1 + x_2 = 10$ ...(1)

$\frac{x_2 + x_3}{2} = 3 \Rightarrow x_2 + x_3 = 6$ ...(2)

$\frac{x_3 + x_1}{2} = -5 \Rightarrow x_3 + x_1 = -10$ ...(3)

(1), (2), (3) എന്നിവ കൂട്ടുക.

$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6$

$x_1 + x_2 + x_3 = 3$ ...(4)

(4) – (2) $\Rightarrow x_1 = 3 - 6 = -3$

(4) – (3) $\Rightarrow x_2 = 3 + 10 = 13$

(4) – (1) $\Rightarrow x_3 = 3 - 10 = -7$

$\frac{y_1 + y_2}{2} = 1 \Rightarrow y_1 + y_2 = 2$ ...(5)

$\frac{y_2 + y_3}{2} = -5 \Rightarrow y_2 + y_3 = -10$ ...(6)

$\frac{y_3 + y_1}{2} = -1 \Rightarrow y_3 + y_1 = -2$ ...(7)

(5), (6), (7)എന്നിവ കൂട്ടുക..

$2y_1 + 2y_2 + 2y_3 = -10$

$y_1 + y_2 + y_3 = -5$ ...(8)

(8) – (6) $\Rightarrow y_1 = -5 + 10 = 5$

(8) – (7) $\Rightarrow y_2 = -5 + 2 = -3$

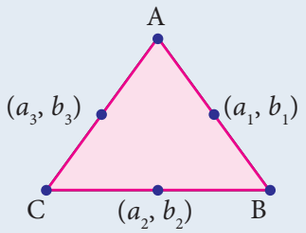
(8) – (5) $\Rightarrow y_3 = -5 - 2 = -7$

അതുകൊണ്ട് ത്രികോണത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങൾ $A(-3,5)$, $B(13,-3)$, $C(-7,-7)$ ആയിരിക്കും.

Unit 5_COORDINAT.indd 206 28-01-2023 11:19:15

ചിന്തിക്കൂ

$(a_1,b_1), (a_2,b_2), (a_3,b_3)$ എന്നിവ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുക്കളാണ്. ഉദാഹരണം 2.5 ൽ തന്നിട്ടുള്ള മദ്ധ്യബിന്ദുക്കൾ ഉപയോഗിച്ച് $(a_1 + a_3 - a_2, b_1 + b_3 - b_2)$, $(a_1 + a_2 - a_3, b_1 + b_2 - b_3)$, $(a_2 + a_3 - a_1, b_2 + b_3 - b_1)$ എന്നിവ കാണുക. ഉത്തരങ്ങൾ താരതമ്യം ചെയ്യുക.എന്താണ് മനസ്സിലാക്കുന്നത്.കാരണം എഴുതുക.



ചിത്രം. 5.28

അഭ്യാസം 5.3

1. താഴെ പറയുന്ന ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തിന്റെ മദ്ധ്യബിന്ദുക്കൾ കാണുക.

   (i) (−2,3) കൂടാതെ (−6,−5) (ii) (8,−2) കൂടാതെ (−8,0)

   (iii) (a,b) കൂടാതെ (a+2b,2a−b) (iv) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{7}\right)$ കൂടാതെ $\left(\frac{3}{2}, \frac{-11}{7}\right)$

2. ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം (−4, 2). വ്യാസത്തിന്റെ ഒരഗ്രബിന്ദു (−3, 7) ആണെങ്കിൽ മറ്റേ അഗ്രബിന്ദു കാണുക.

3. (3, 4), $(p, 7)$എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തിന്റെ മദ്ധ്യബിന്ദു (x, y), $2x + 2y + 1 = 0$ എന്ന രേഖയിലാണുള്ളതെങ്കിൽ P കാണുക.

4. ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുക്കൾ (2, 4), (−2, 3), (5, 2) ആണെങ്കിൽ ത്രികോണത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങൾ കാണുക.

5. ഒരു ഞാൺ AB യായിട്ടുള്ള വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം O(0, 0) ആകുന്നു. AB യുടെ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ യഥാക്രമം (8, 6), (10, 0) ആണ്. OD കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നും ഞാണിലേക്കുള്ള ലംബമാണെങ്കിൽ OD യുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുവിന്റെ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ കാണുക.

6. Bയിൽ സമകോണുള്ള ഒരു ദ്വിസമഭുജ ത്രികോണത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങൾ $A(-5,4)$, $B(-1,-2)$, $C(5,2)$ ആവുന്നു. ABCD ഒരു സമചതുരമാണെങ്കിൽ D യുടെ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ കാണുക.

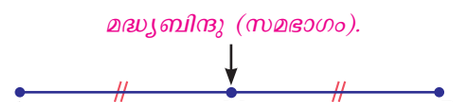
7. ത്രികോണം DEFന്റെ DE, EF, FD എന്നീ വശങ്ങളുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുക്കളാണ് $A(-3,6)$, $B(0,7)$, $C(1,9)$ ചതുർഭുജം $ABCD$ ഒരു സാമാന്തരികമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

8. Aയിൽ സമകോണുള്ള ഒരു സമകോണത്രികോണത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങൾ $A(-3,2)$, $B(3,2)$ കൂടാതെ $C(-3,-2)$ ആണെങ്കിൽ കർണ്ണത്തിന്റെ മദ്ധ്യബിന്ദു ശീർഷങ്ങളിൽ നിന്ന് സമദൂരത്തിലാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

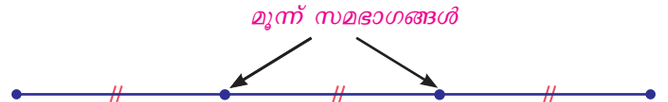
5.5 ഒരു രേഖാഖണ്ഡത്തിനെ മൂന്ന് തുല്യഭാഗങ്ങളാക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ.

ഒരു രേഖാഖണ്ഡത്തിന്റെ മദ്ധ്യബിന്ദു അതിനെ രണ്ട് തുല്യഭാഗങ്ങളാക്കുന്നു. മൂന്ന് തുല്യഭാഗങ്ങളാക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളാണ് വേണ്ടതെങ്കിൽ ബിന്ദുക്കളെ ആ വിധത്തിൽ കുറിക്കേണ്ടതുണ്ട്.

Unit 5_COORDINAT.indd 207 28-01-2023 11:19:20



ചിത്രം 5.29



ചിത്രം 5.30

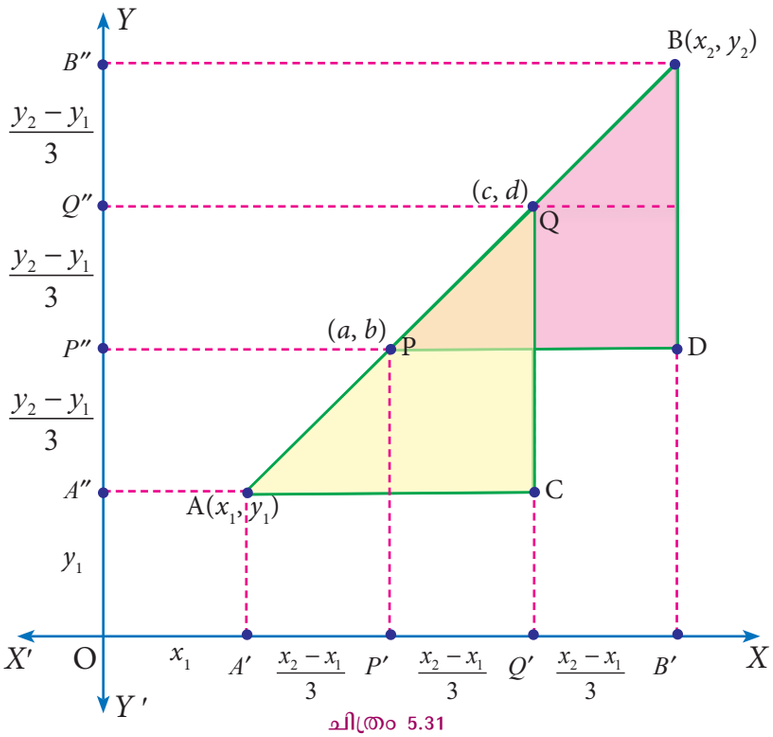
$AM = MB$

$AP = PQ = QB$

ഒരു രേഖാഖണ്ഡത്തെ മൂന്ന് സമഭാഗങ്ങളാക്കുന്നതിന് രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ ആവശ്യമാണ്. ഇത് സമഭാഗങ്ങളാക്കുന്ന അതേ രീതിയിൽ കണ്ടുപിടിക്കാവുന്നതാണ്.(അതായത് മദ്ധ്യബിന്ദു കാണുന്ന രീതി) ചിത്രം 2.17 നിരീക്ഷിക്കുക.ഇവിടെ P,Q എന്നിവ $A\ (x_1, y_1)$, $B\ (x_2, y_2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തെ മൂന്ന് സമഭാഗങ്ങളാക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളാണ്. ഇവിടെ P, AQ വിന്റെ മദ്ധ്യബിന്ദു എന്നതും Q,PB യുടെ മദ്ധ്യബിന്ദു എന്നതും വ്യക്തമാണ്.

ΔACQ , ΔPDB പരിഗണിക്കുക.ഇത് സദൃശ്യത്രികോണങ്ങളുടെ ആനുപാതികത ഉപയോഗിച്ചും തെളിയിക്കാമെന്ന് ഉയർന്ന ക്ലാസ്സിൽ പഠിക്കാവുന്നതാണ്.

$$A'P' = P'Q' = Q'B'$$



ചിത്രം 5.31

ഇവിടെ ഒരു രേഖാ ഖണ്ഡത്തെ മൂന്ന് സമ ഭാഗങ്ങളായി വിഭജിക്കു മ്പോൾ സമാന്തരലംബ പാദങ്ങളെയും മൂന്ന് സമഭാഗങ്ങളായി വിഭജി ക്കുന്നത് കാണാം.

Pഎന്നത് (a, b) ആണെങ്കിൽ

$a = OP' = OA' + A'P'$

$= x_1 + \frac{x_2 - x_1}{3} = \frac{x_2 + 2x_1}{3}$;

$b = PP' = OA'' + A''P''$

$= y_1 + \frac{y_2 - y_1}{3} = \frac{y_2 + 2y_1}{3}$

Pഎന്നത് $\left(\frac{x_2 + 2x_1}{3}, \frac{y_2 + 2y_1}{3}\right)$ എന്ന് കിട്ടുന്നു. Q എന്നത് (c, d) ആണെങ്കിൽ

Unit 5_COORDINAT.indd 208 28-01-2023 11:19:26

$c = OQ' = OB' - Q'B'$

$= x_2 - \left(\frac{x_2 - x_1}{3}\right) = \frac{2x_2 + x_1}{3}$;

$d = OQ'' = OB'' - Q''B''$

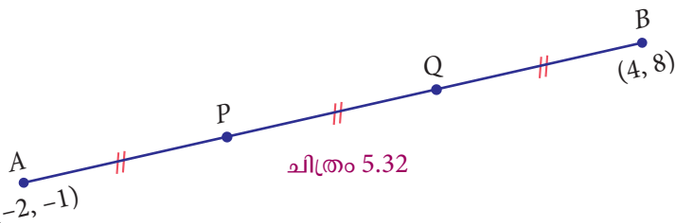
$= y_2 - \left(\frac{y_2 - y_1}{3}\right) = \frac{2y_2 + y_1}{3}$

Q എന്നത് $\left(\frac{2x_2 + x_1}{3}, \frac{2y_2 + y_1}{3}\right)$ എന്ന് കിട്ടുന്നു

ഉദാഹരണം 5.16 $(-2,-1)$, $(4,8)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തെ മൂന്ന് തുല്യഭാഗങ്ങളായി വിഭജിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം തന്നിരിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ $A(-2,-1)$, $B(4,8)$ എന്നെടുക്കുക

$AP = PQ = QB$ ആകത്തക്കവിധം AB യെ P(a,b) Q(c,d) മൂന്ന് സമഭാഗങ്ങളാക്കുന്നു.മുകളിൽ കണ്ടുപിടിച്ച സൂത്രവാക്യപ്രകാരം P എന്ന ബിന്ദു



ചിത്രം 5.32

P എന്ന ബിന്ദു

$\left(\frac{x_2 + 2x_1}{3}, \frac{y_2 + 2y_1}{3}\right) = \left(\frac{4 + 2(-2)}{3}, \frac{8 + 2(-1)}{3}\right)$

$= \left(\frac{4-4}{3}, \frac{8-2}{3}\right) = (0, 2)$

Q എന്ന ബിന്ദു

$\left(\frac{2x_2 + x_1}{3}, \frac{2y_2 + y_1}{3}\right) = \left(\frac{2(4)-2}{3}, \frac{2(8)-1}{3}\right)$

$= \left(\frac{8-2}{3}, \frac{16-1}{3}\right) = (2, 5)$

പുരോഗതി പരിശോധന

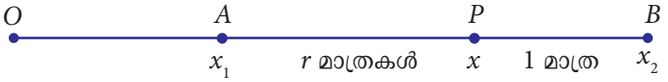
(i) $(4,-1)$, $(-2,-3)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തെ മൂന്ന് സമഭാഗങ്ങളാക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ കാണുക

(ii) $(6,-9)$ നെയും മൂലബിന്ദുവിനെയും യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തെ മൂന്ന് തുല്യഭാഗങ്ങളാക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ കാണുക.

5.6 വിഭജന സൂത്രം

ഒരു രേഖാഖണ്ഡത്തെ രണ്ട് തുല്യഭാഗങ്ങലാക്കുന്നതിനും മൂന്ന് തുല്യഭാഗങ്ങലാക്കുന്നതിനും നാം പഠിച്ചു കഴിഞ്ഞു. ഇവ (x_1, y_1), (x_2, y_2) എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തെ $m : n$. എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ വിഭജിക്കുന്നതിന്റെ ഏതാനും ഉദാഹരണങ്ങളാണ്.

ഒരു രേഖാഖണ്ഡം AB യും ധന വാസ്തവിക സംഖ്യ r ഉം തന്നിരിക്കുന്നു.



ചിത്രം 5.33

Unit 5_COORDINAT.indd 209 28-01-2023 11:19:31

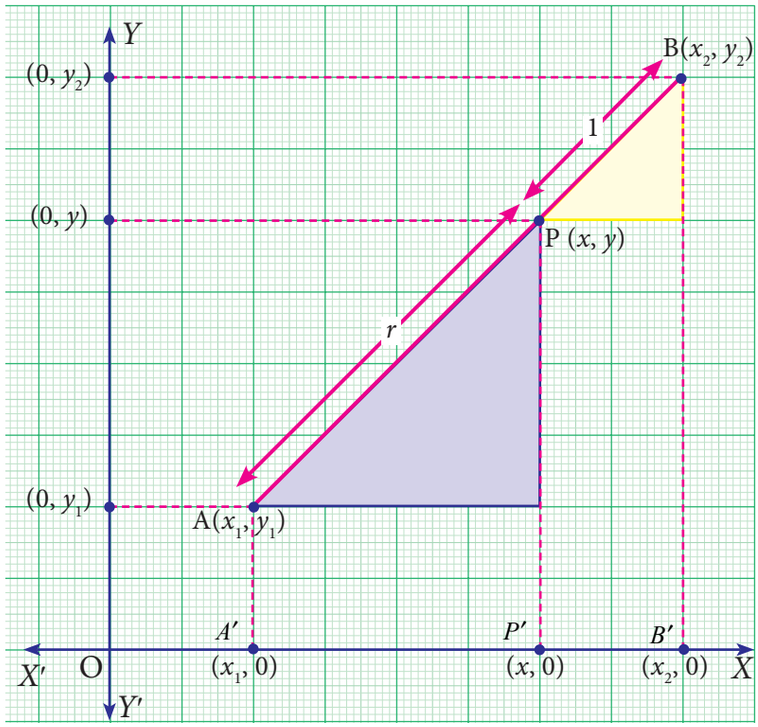
AB യെ $r:1$ എന്ന അംശത്തിൽ വിഭജിക്കുന്ന P എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ കാണേണ്ടതുണ്ട്.

ഇതിനർത്ഥം $\frac{AP}{PB}=\frac{r}{1}$ അല്ലെങ്കിൽ $AP=r(PB)$.

അതായത് $x - x_1 = r(x_2 - x)$

നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുമ്പോൾ, $$x = \frac{rx_2 + x_1}{r+1} \qquad \ldots\ldots (1)$$

നേർരേഖയിലുള്ള ബിന്ദുക്കൾക്ക് ഇത് ഒരു പൊതുവായ സൂത്രവാക്യമായി പ്രയോജനപ്പെടുത്താം.



ചിത്രം 5.34

$AP:PB = r:1$ എന്നെടുത്താൽ $A'P':P'B' = r:1$.

അതുകൊണ്ട് $A'P' = r(P'B')$

അതായത് $(x-x_1) = r(x_2-x)$

$x = \frac{rx_2 + x_1}{r+1}$ ... [ശ്രദ്ധിക്കൂ (1)]

ഇതുപോലെ $y = \frac{ry_2 + y_1}{r+1}$

P എന്ന ബിന്ദു Aയ്ക്കും Bയ്ക്കും ഇടയിലായിരിക്കുകയും $\frac{AP}{PB} = r$, ആയിരിക്കുകയും ചെയ്താൽ താഴെ പറയുന്ന സൂത്രവാക്യം ലഭിക്കുന്നു.

P എന്നാൽ $\left(\frac{rx_2 + x_1}{r+1}, \frac{ry_2 + y_1}{r+1}\right)$.

ചിന്തിക്കൂ

(i) $m = n = 1$ ആയാൽ എന്ത് സംഭവിക്കുന്നു. ഇതിന് നേരത്തെ കണ്ടുപിടിച്ച സൂത്രവാക്യവുമായി ബന്ധമുണ്ടോ?

(ii) $AP : PB = 1 : 2$ കൂടാതെ $AQ : QB = 2:1$.
എന്താണ് $AP : AB$?
എന്താണ് $AQ : AB$?

Unit 5_COORDINAT.indd 210 28-01-2023 11:19:35

r നെ $\frac{m}{n}$, എന്നെടുത്താൽ വിഭജന സൂത്രവാക്യത്തിന്റെ

പൊതുരൂപം $\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$, എന്ന് കിട്ടുന്നു

കുറിപ്പ്

- (x_1, y_1), (x_2, y_2) എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തെ x-അക്ഷം $\frac{-y_1}{y_2}$ എന്ന അംശബന്ധത്തിലും y-അക്ഷം $\frac{-x_1}{x_2}$ എന്ന അംശബന്ധത്തിലും വിഭജിക്കുന്നു.
- മൂന്ന് ബിന്ദുക്കളും സമരേഖീയമാണെങ്കിൽ ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദു മറ്റ് രണ്ട് ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തെ $r : 1$ എന്ന് അംശബന്ധത്തിൽ വിഭജിക്കുന്നു.
- ബിന്ദുക്കൾ സമരേഖീയമാണെങ്കിൽ മാത്രമേ വിഭജന സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിക്കാൻ സാധിക്കൂ എന്നത് ഓർക്കുക.
- ഈ സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിച്ച ത്രികോണത്തിന്റെ കേന്ദ്രകം അന്ത:കേന്ദ്രം,ബാഹ്യകേന്ദ്രം എന്നിവ കണ്ടുപിടിക്കാം. ഭൗതിക ശാസ്ത്രത്തിൽ വിവിധ വ്യവസ്ഥകളുടെ ദ്രവ്യമാനങ്ങളുടെ മദ്ധ്യബിന്ദു,സന്തുലന ബിന്ദു പോലുള്ളവ കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിനും ഉപയോഗിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം 5.17

$(3,5)$, $(8,-10)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തെ ആന്തരികമായി 3:2 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ വിഭജിക്കുന്ന ബിന്ദു കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിരിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ $A(3, 5)$, $B(8, -10)$ $P(x, y)$ AB യെ 3:2 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ആന്തരികമായി വിഭജിക്കുന്നു.എന്നിരിക്കട്ടെ..

വിഭജന സൂത്രപ്രകാരം,

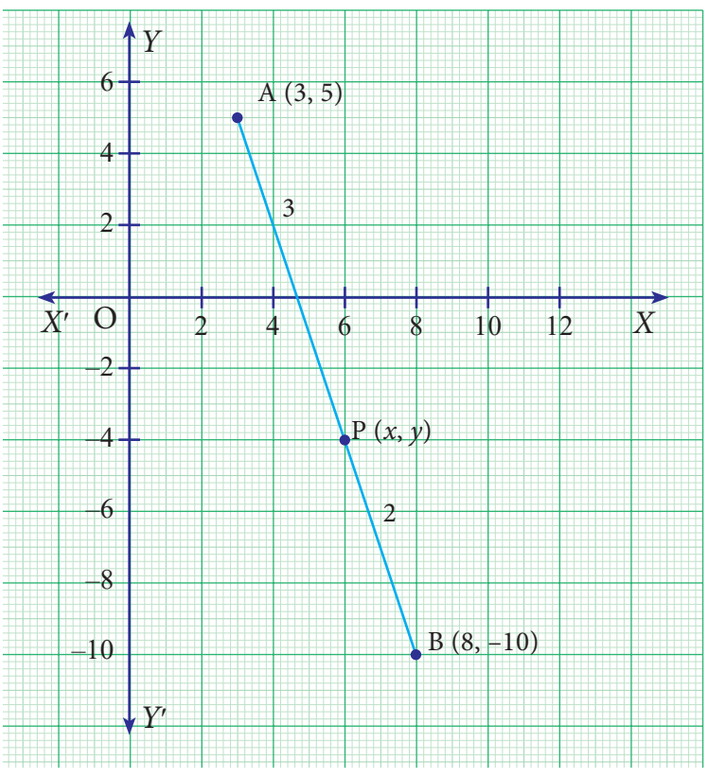
$$P(x, y) = P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$$

ഇവിടെ $x_1 = 3$, $y_1 = 5$, $x_2 = 8$, $y_2 = -10$ and $m = 3$, $n = 2$

അതുകൊണ്ട്

$$P(x, y) = P\left(\frac{3(8)+2(3)}{3+2}, \frac{3(-10)+2(5)}{3+2}\right)$$

$$= P\left(\frac{24+6}{5}, \frac{-30+10}{5}\right) = P(6, -4)$$

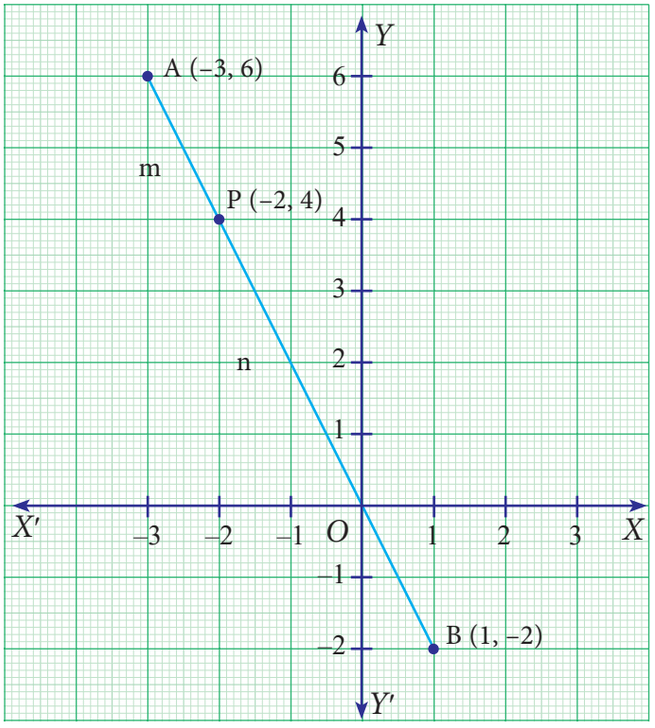


ചിത്രം 5.35

Unit 5_COORDINAT.indd 211 28-01-2023 11:19:39

ഉദാഹരണം 5.18

$P(-2, 4)$ എന്ന ബിന്ദു $A(-3, 6)$, $B(1, -2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തെ ആന്തരികമായി ഏത് അംശബന്ധത്തിൽ വിഭജിക്കുന്നു?



ചിത്രം 5.36

നിർദ്ധാരണം

തന്നിരിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ $A(-3, 6)$, $B(1, -2)$ ആകുന്നു. $P(-2, 4)$, ABയെ ആന്തരികമായി $m : n$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ വിഭജിക്കുന്നു എന്നെടുക്കുക.

വിഭജന സൂത്രപ്രകാരം,

$$P(x, y) = P\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$$

$$= P(-2, 4) \quad .....(1)$$

ഇവിടെ $x_1 = -3,\ y_1 = 6,\ x_2 = 1,\ y_2 = -2$

$$(1) \Rightarrow \left(\frac{m(1)+n(-3)}{m+n}, \frac{m(-2)+n(6)}{m+n}\right) = P(-2, 4)$$

x-നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങളെ താരതമ്യം ചെയ്യുമ്പോൾ

$$\frac{m-3n}{m+n} = -2 \text{ or } m - 3n = -2m - 2n$$

$$3m = n$$

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{3}$$

$$m : n = 1 : 3$$

P, ABയെ 1:3 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ വിഭജിക്കുന്നു.

കുറിപ്പ്

y-നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങളെ താരതമ്യം ചെയ്യുമ്പോഴും ഇതേ ഉത്തരം കിട്ടുന്നു.
ശ്രമിക്കുക.

ഉദാഹരണം 5.19

$P(-2, 3)$ എന്ന ബിന്ദു AB യെ ആന്തരികമായി 1:6 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ വിഭജിച്ചാൽ B യുടെ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ കാണുക. $A(-3, 5)$ എന്ന് തന്നിരിക്കുന്നു.

നിർദ്ധാരണം

$A(-3, 5)$, $B(x_2, y_2)$ തന്നിരിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ എന്നിരിക്കട്ടെ.

$P(-2, 3)$, ABയെ ആന്തരികമായി 1:6 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ വിഭജിക്കുന്നു.

Unit 5_COORDINAT.indd 212 28-01-2023 11:19:43

വിഭജന സൂത്ര പ്രകാരം, $P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right) = P(-2,3)$

$$P\left(\frac{1(x_2)+6(-3)}{1+6}, \frac{1(y_2)+6(5)}{1+6}\right) = P(-2,3)$$

നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങളെ താരതമ്യം ചെയ്താൽ

$$\frac{x_2-18}{7} = -2 \qquad \frac{y_2+30}{7} = 3$$
$$x_2 - 18 = -14 \qquad y_2 + 30 = 21$$
$$x_2 = 4 \qquad y_2 = -9$$

Bയുടെ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ $(4,-9)$

അഭ്യാസം 5.4

1. $A(4,-3)$, $B(9,7)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തെ 3:2 എന്ന അംശസ ബന്ധത്തിൽ വിഭജിക്കുന്ന ബിന്ദു കാണുക?
2. $A(-3,5)$, $B(4,-9)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തെ $P(2,-5)$ എന്ന ബിന്ദു ഏത് അംശബന്ധത്തിൽ വിഭജിക്കുന്നു
3. $A(1,2)$, $B(6,7)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തെ $AP = \frac{2}{5}AB$. എന്ന് വരത്തക്കവണ്ണം വിഭജിക്കുന്ന P എന്ന ബിന്ദു കാണുക.
4. $A(-5,6)$, $B(4,-3)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തെ മൂന്ന് തുല്യ ഭാഗങ്ങളാക്കി വിഭജിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ കാണുക..
4. $A(6,3), B(-1,-4)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തിന്റെ രണ്ടഗ്രഭാഗത്തും AB യുടെ നീളത്തിന്റെ പകുതി ചേർത്താൽ ആ രേഖാഖണ്ഡം AB യുടെ രണ്ട് മടങ്ങാകുന്നു. എങ്കിൽ പുതിയ രേഖാഖണ്ഡത്തിന്റെ അഗ്രബിന്ദുക്കൾ കാണുക.
5. $A(7,-5)$, $B(9,-3)$, $C(13,1)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ സമരേഖീയമാണെന്ന് വിഭജനസൂത്രം ഉപയോഗിച്ച് തെളിയിക്കുക.
6. AB എന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തിനെ Bയിൽ നിന്ന് അതിന്റെ നീളത്തിന്റെ 25% കൂടികൂട്ടിച്ചേർത്ത് C വരെ നീട്ടിയിരിക്കുന്നു. A, B എന്നിവ യഥാക്രമം $(-2,-3)$, $(2,1)$ ആണെങ്കിൽ C കാണുക.

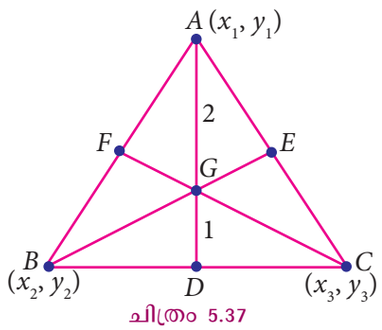
5.7 ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ കേന്ദ്രകം

$A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$. എന്നീ ശീർഷങ്ങളുള്ള ΔABC പരിഗണിക്കുക.

AD, BE, CF എന്നിവ ΔABC. യുടെ മധ്യമങ്ങളാണ്.

BCയുടെ മദ്ധ്യബിന്ദു $D = D\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$

കേന്ദ്രകം G, ADയെ 2:1 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ



ചിത്രം 5.37

Unit 5_COORDINAT.indd 213 28-01-2023 11:19:49

ആന്തരീകമായി വിഭജിക്കുന്നു.അതുകൊണ്ട് വിഭജനസൂത്രം ഉപയോഗിച്ച

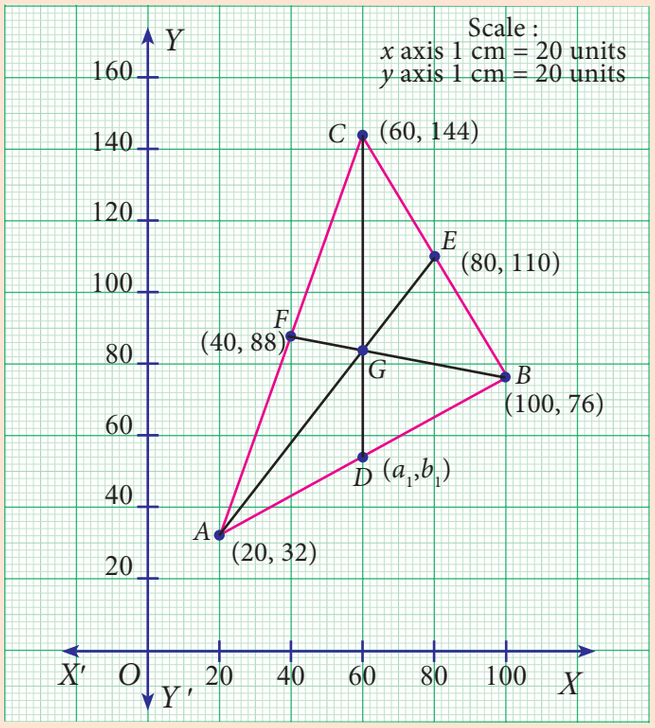
$$G(x,y) \text{ is } \left(\frac{\frac{2(x_2+x_3)}{2}+1(x_1)}{2+1}, \frac{\frac{2(y_2+y_3)}{2}+1(y_1)}{2+1} \right) = \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3} \right)$$

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ എന്നീ ശീർഷങ്ങളുള്ള ത്രികോണത്തിന്റെ കേന്ദ്രകം $G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3} \right)$ ആകുന്നു.

പ്രവർത്തി - 2

1. $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ എന്നീ ശീർഷങ്ങളുള്ള ΔABC ഗ്രാഫ് പേപ്പറിൽ വരയ്ക്കുക.

2. മധ്യമങ്ങൾ വരച്ച് ΔABC യുടെ കേന്ദ്രം അടയാളപ്പെടുത്തുക



ചിത്രം 5.38

നിരീക്ഷണം

(i) ΔABC യുടെ ശീർഷങ്ങൾ $A(x_1, y_1) =$ _____, $B(x_2, y_2) =$ _____, $C(x_3, y_3) =$ _____.

(ii) കേന്ദ്രകം G യുടെ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ = _____.

(iii) സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിച്ച് കേന്ദ്രകത്തിന്റെ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ = _____.

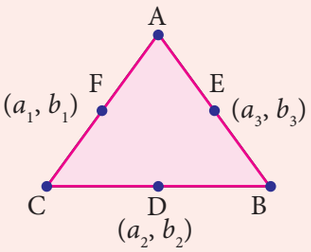
(iv) AB യുടെ മദ്ധ്യബിന്ദു _____.

(v) (x_3, y_3) എന്ന ബിന്ദുവിനെയും AB യുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുവിനെയും 2:1 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ആന്തരികമായി വിഭജിക്കുന്ന ബിന്ദു _____.

Unit 5_COORDINAT.indd 214 28-01-2023 11:19:54

കുറിപ്പ്

1. ത്രികോണത്തിന്റെ മധ്യമങ്ങളുടെ സംഗമബിന്ദുവായ കേന്ദ്രകം എതിർശീർഷത്തിൽ നിന്നും മൂന്നിൽ ഒന്ന് ദൂരത്തിലായിരിക്കും.
2. ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ കേന്ദ്രകവും അതിന്റെ വശങ്ങളുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുക്കൾ കൊണ്ട് രൂപീകരിക്കുന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ കേന്ദ്രകവും ഒന്ന് തന്നെയായിരിക്കും.
3. $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3)$ എന്നിവ ത്രികോണം ABC യുടെ വശങ്ങളുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുക്കളാണെങ്കിൽ അതിന്റെ കേന്ദ്രകം G എന്നത് $G\left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3}, \frac{b_1+b_2+b_3}{3}\right)$ ആയിരിക്കും.



ചിത്രം 5.39

ഉദാഹരണം 5.20

$A(6,-1)$, $B(8,3)$, $C(10,-5)$. എന്നീ ശീർഷങ്ങളുള്ള ത്രികോണത്തിന്റെ കേന്ദ്രകം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) എന്നീ ശീർഷങ്ങളുള്ള ത്രികോണത്തിന്റെ കേന്ദ്രകം $G(x, y)$

$$G(x,y) = G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

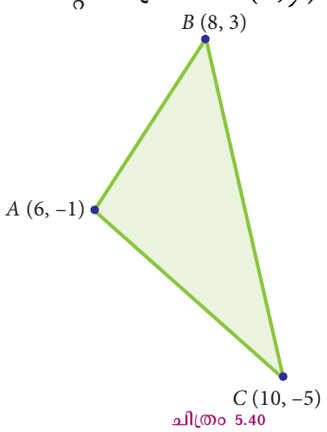
ഇവിടെ $(x_1, y_1) = (6,-1)$; $(x_2, y_2) = (8,3)$;

$(x_3, y_3) = (10,-5)$

ത്രികോണത്തിന്റെ കേന്ദ്രകം

$$G(x,y) = G\left(\frac{6+8+10}{3}, \frac{-1+3-5}{3}\right)$$

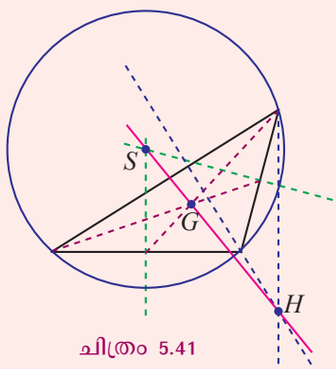
$$= G\left(\frac{24}{3}, \frac{-3}{3}\right) = G(8,-1)$$



ചിത്രം 5.40

കുറിപ്പ്

1. ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ലംബകേന്ദ്രം (H) കേന്ദ്രകം (G), പരിവൃത്ത കേന്ദ്രം (S) എന്നിവ വഴി കടന്നു പോകുന്ന രേഖയാണ് യൂളർ രേഖ $(EULER)$. G, H നേയും Sനേയും ലംബകേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന് 2:1 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ വിഭജിക്കുന്നു. അതായത് കേന്ദ്രകം, ലംബകേന്ദ്രത്തേയും, പരിവൃത്ത കേന്ദ്രത്തേയും ആന്തരികമായി 2:1 ഏന്ന അംശബന്ധത്തിൽ വിഭജിക്കുന്നു.
2. ഒരു സമകോണത്രികോണത്തിന്റെ ലംബകേന്ദ്രവും, അന്ത:കേന്ദ്രവും, കേന്ദ്രകവും പരിവൃത്തകേന്ദ്രകവും ഒന്നു തന്നെയായിരിക്കും



ചിത്രം 5.41

Unit 5_COORDINAT.indd 215 28-01-2023 11:19:59

ഉദാഹരണം 5.21

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ കേന്ദ്രകം $(-2,1)$, രണ്ട് ശീർഷങ്ങൾ $(1,-6)$, $(-5,2)$, എങ്കിൽ മൂന്നാമത്തെ ശീർഷം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

ത്രികോണത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങൾ
$A(1,-6)$, $B(-5,2)$, $C(x_3, y_3)$ എന്നെടുക്കുക.

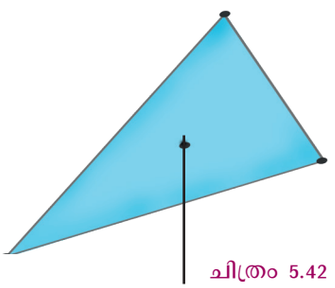
$$\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=-2 \qquad \frac{y_1+y_2+y_3}{3}=1$$
$$\frac{1-5+x_3}{3}=-2 \qquad \frac{-6+2+y_3}{3}=1$$
$$-4+x_3=-6 \qquad -4+y_3=3$$
$$x_3=-2 \qquad y_3=7$$

മൂന്നാമത്തെ ശീർഷം $(-2, 7)$ ആകുന്നു.

ചിന്തിക്കൂ

(i) A(5, 8), B(2, 4), C(8, 3) എന്നിവ ശീർഷങ്ങളായിട്ടുള്ള ത്രികോണാകൃതിയിലുള്ള ഒരു പാത്രവും ഒരു വടിയും അദ്ധ്യാപകൻ കുട്ടിക്ക് നൽകുന്നു. വടിയിൽ പാത്രത്തെ ശരിയായി താങ്ങിനിർത്താൻ കുട്ടിയെ സഹായിക്കാമോ?

(ii) ഈ ത്രികോണാത്തിന്റെ ഗുരുത്വകേന്ദ്രം ഏതാണ്? എന്തുകൊണ്ട്?



ചിത്രം 5.42

അഭ്യാസം 5.5

1. താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന സീർഷങ്ങളുള്ള ത്രികോണത്തിന്റെ കേന്ദ്രകം കാണുക.

   (i) (2,−4), (−3,−7), (7, 2) (ii) (−5,−5), (1,−4), (−4,−2)

2. ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ കേന്ദ്രകം (4, −2) രണ്ട് ശീർഷങ്ങൾ (3, −2), (5, 2) ആണെങ്കിൽ ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നാമത്തെ ശീർഷം കാണുക.

3. $A(-1,3), B(1,-1), C(5,1)$ ശീർഷങ്ങളായുള്ള ത്രികോണത്തിന്റെ A യിലൂടെയുള്ള മധ്യമത്തിന്റെ നീളം കാണുക.

4. ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങൾ (1, 2), (h, −3), (−4, k). ത്രികോണത്തിന്റെ കേന്ദ്രകം (5, −1) ആണെങ്കിൽ $\sqrt{(h+k)^2+(h+3k)^2}$ കാണുക.

5. ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ലംബകേന്ദ്രവും കേന്ദ്രകവും യഥാക്രമം $A(-3, 5), B(3, 3)$. C എന്നത് പരിവൃത്തകേന്ദ്രവും AC വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസവുമാണെങ്കിൽ വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം കാണുക.

6. ത്രികോണം ABC യുടെ ശീർഷങ്ങൾ $A(3,4)$, $B(-2,-1)$, $C(5,3)$ ആണ്. G എന്നത് കേന്ദ്രകവും

Unit 5_COORDINAT.indd 216 28-01-2023 11:20:03

$BDCG$ എന്നത് സാമാന്തരികവുമാണെങ്കിൽ ശീർഷം D കാണുക.

7. $\left(\frac{3}{2},5\right), \left(7,\frac{-9}{2}\right), \left(\frac{13}{2},\frac{-13}{2}\right)$ എന്നിവ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുക്കളാണെങ്കിൽ ത്രികോണത്തിന്റെ കേന്ദ്രകം കാണുക

A4VT9

അഭ്യാസം 5.2

ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുത്തെഴുതുക.

1. ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ y നിർദ്ദേശാങ്കം 0 ആകുമ്പോൾ ആ ബിന്ദു സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നത് _____

(1) I ാം ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ (2) II ാം ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ (3) x അക്ഷത്തിൽ (4) y അക്ഷത്തിൽ

2. (-5,2), (2,-5) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ _____ൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു.

(1) ഒരേ ചതുർത്ഥാംശം (2) II, III ചതുർത്ഥാംശങ്ങളിൽ

(3) II, IV ചതുർത്ഥാംശങ്ങളിൽ (4) IV, II ചതുർത്ഥാംശങ്ങളിൽ

3. O(0,0), A (3,-4) B(3,4), C(0,4) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തി OA, AB, BC, CO എന്നിവ യോജിപ്പിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന രൂപം _____ ആണ്?

(1) സമചതുരം (2) ദീർഘചതുരം (3) ലംബകം (4) സമചതുർഭുജം

4. P(-1,1) Q(3,-4), R(1,-1) S(-2, -3) കൂടാതെ T (-4,4) എന്നിവ ഒരു ഗ്രാഫ് പേപ്പറിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയാൽ IV ാം ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ കാണുന്ന ബിന്ദുക്കൾ _____ ആണ്.

(1) P കൂടാതെ T (2) Q കൂടാതെ R (3) S മാത്രം (4) P കൂടാതെ Q

5. y അക്ഷത്തിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നതും ഓർഡിനേറ്റ് 4 ഉള്ളതുമായ ബിന്ദു _____ആണ്.

(1)(4, 0) (2) (0, 4) (3) (1, 4) (4) (4, 2)

6. (2,3) (1,4) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം _____

(1) 2 (2) $\sqrt{56}$ (3) $\sqrt{10}$ (4) $\sqrt{2}$

7. A(2,0), B(-6,0), C(3, a-3) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ x അക്ഷത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുകയാണെങ്കിൽ a യുടെ വില _____

(1) 0 (2) 2 (3) 3 (4) –6

8. $(x+2, 4) = (5, y-2)$ ആണെങ്കിൽ (x,y) യുടെ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ _____

(1) (7, 12) (2) (6, 3) (3) (3, 6) (4) (2, 1)

9. Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 ഇവ ഒരു കാർട്ടീഷ്യൻ തലത്തിലെ ചതുർത്ഥാംശങ്ങളായാൽ $Q_2 \cap Q_3$ _____ ആകുന്നു.

(1) $Q_1 \cup Q_2$ (2) $Q_2 \cup Q_3$ (3) ശൂന്യഗണം (4)ഋണ x അക്ഷം.

10. മൂല ബിന്ദുവിനും (5,-1) എന്ന ബിന്ദുവിനും ഇടയിലുള്ള അകലം _____

(1) $\sqrt{24}$ (2) $\sqrt{37}$ (3) $\sqrt{26}$ (4) $\sqrt{17}$

Unit 5_COORDINAT.indd 217 28-01-2023 11:20:05

11. $P(2, 4)$, $Q(5, 7)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തെ 2:1എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ വിഭജിക്കുന്ന C എന്ന ബിന്ദു

(1) $\left(\frac{7}{2}, \frac{11}{2}\right)$ (2) (3,5) (3) (4,4) (4) (4,6)

12. $A(-4, 3)$, $B(-2, 4)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തിന്റെ മദ്ധ്യബിന്ദുവാണ് $P\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{2}\right)$ എങ്കിൽ (a, b)

(1) (−9,7) (2) $\left(-3, \frac{7}{2}\right)$ (3) (9, −7) (4) $\left(3, -\frac{7}{2}\right)$

13. $P(2, 7)$, $R(-2, 3)$എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തെ $Q(1, 6)$ എന്ന ബിന്ദു ഏത് അംശബന്ധത്തിലാണ് വിഭജിക്കുന്നത്.

(1) 1:2 (2) 2:1 (3) 1:3 (4) 3:1

14. ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം (−3, 2), വ്യാസത്തിന്റെ ഒരഗ്ര ബിന്ദു (3, 4) എങ്കിൽ മറ്റേ അഗ്ര ബിന്ദു

(1) (0,−3) (2) (0,9) (3) (3,0) (4) (−9,0)

15. $A(a_1, b_1)$, $B(a_2, b_2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തെ x-അക്ഷം ഏത് അംശബന്ധത്തിൽ വിഭജിക്കുന്നു.

(1) $b_1 : b_2$ (2) $-b_1 : b_2$ (3) $a_1 : a_2$ (4) $-a_1 : a_2$

16. (6, 4), (1, −7) എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തെ X അക്ഷം വിഭജിക്കുന്ന അംശബന്ധം.

(1) 2:3 (2) 3:4 (3) 4:7 (4) 4:3

17. ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ AB, BC, CA എന്നീ വശങ്ങളുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുക്കൾ യഥാക്രമം (3, 4), (1, 1), (2, −3) ആകുന്നു.ത്രികോണത്തിന്റെ A,B എന്നീ ശീർഷങ്ങൾ

(1) (3,2), (2,4) (2) (4,0), (2,8)

(3) (3,4), (2,0) (4) (4,3), (2,4)

18. $(-a, 2b)$, $(-3a, -4b)$എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തിന്റെ മദ്ധ്യബിന്ദു.

(1) $(2a,3b)$ (2) $(-2a, -b)$ (3) $(2a,b)$ (4) $(-2a, -3b)$

19. (−5, 1), (2, 3) എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തെ y-അക്ഷം ഏത് അംശബന്ധത്തിലാണ് വിഭജിക്കുന്നത്.

(1) 1:3 (2) 2:5 (3) 3:1 (4) 5:2

20. (1, −2), (3, 6), $(x, 10)$ കൂടാതെ (3, 2) എന്നിവ യഥാക്രമം ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങളാണെങ്കിൽ x ന്റെ മൂല്യം കാണുക.

(1) 6 (2) 5 (3) 4 (4) 3

Unit 5_COORDINAT.indd 218 28-01-2023 11:20:07

ഓർമ്മിക്കേണ്ട വസ്തുതകൾ

- x അക്ഷത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളുടെ x നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ x_1, x_2 ആണെങ്കിൽ അവയ്ക്കിടയിലെ ദൂരം x_2-x_1 ആകുന്നു, $x_2>x_1$
- y അക്ഷത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളുടെ y നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ y_1, y_2 ആണെങ്കിൽ അവയ്ക്കിടയിലെ ദൂരം , $|y_2-y_1|$ ആകുന്നു
- (x_1, y_1) , (x_2, y_2) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾക്കിടയിലെ ദൂരം $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ ആകുന്നു
- മൂലബിന്ദു (0,0) ത്തിനും (x_1, y_1) എന്ന ബിന്ദുവിനും ഇടയിലുള്ള ദൂരം $\sqrt{x_1^2+y_1^2}$ ആകുന്നു
- എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തിന്റെ മദ്ധ്യബിന്ദു $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ ആകുന്നു
- $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തെ $m:n$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ വിഭജിക്കുന്ന P എന്ന ബിന്ദു $P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$ ആകുന്നു
- $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ എന്നീ ശീർഷങ്ങളുള്ള ത്രികോണത്തിന്റെ കേന്ദ്രകം G $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ ആകുന്നു
- ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ കേന്ദ്രകവും അതിന്റെ വശങ്ങളുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുക്കൾ കൊണ്ട് രൂപീകരിക്കുന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ കേന്ദ്രകവും ഒന്നുതന്നെയായിരിക്കും.

പ്രവൃത്തി 3

A(1,0), B(-7,2) C(-3,7)എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ ഒരു ഗ്രാഫ് പേപ്പറിൽ അടയാളപ്പെടുത്തി അവയെ യോജിപ്പിച്ച് ഒരു ത്രികോണം രൂപീകരിക്കുക.

G(-3,3) എന്ന ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക.

AG യോജിപ്പിക്കുക. BC നീട്ടിയതിനെ D യിൽ ഛേദിക്കുന്നു. .

BG യോജിപ്പിക്കുക. ACനീട്ടിയതിനെ E യിൽ ഛേദിക്കുന്നു.

BD യ്ക്കും DC യ്ക്കും ഇടയിലുള്ള ദൂരവും CE യ്ക്കും EA യ്ക്കും ഇടയിലുള്ള ദൂരവും അളക്കുമ്പോൾ നിങ്ങൾ എന്ത് അനുമാനിക്കുന്നു.

അകലസൂത്രമുപയോഗിച്ച് CG, GF ഇവയുടെ നീളം കാണുക. F,AB യിലാണ്

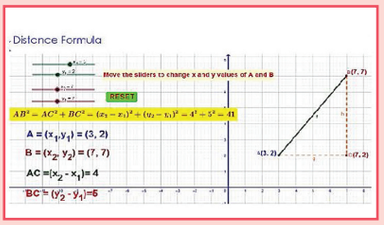
AG : GD, BG : GE കൂടാതെ CG : GF കുറിച്ച് നിങ്ങളുടെ അനുമാനം എഴുതുക.

കുറിപ്പ്: G ത്രികോണത്തിന്റെ കേന്ദ്രകവും AD, BE, CF എന്നിവ ത്രികോണത്തിന്റെ മധ്യമങ്ങളും ആകുന്നു

Unit 5_COORDINAT.indd 219 28-01-2023 11:20:10

ഐ സി ടി കോർണർ-1

പ്രതീക്ഷിക്കുന്ന ഫലം ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.



ഘട്ടം – 1

ബ്രൗസർ തുറന്നിട്ട് താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ലിങ്ക് പകർത്തി പേസ്റ്റ് ചെയ്യുക. (അല്ലെങ്കിൽ) തന്നിട്ടുള്ള യു.ആർ.എൽ. ടൈപ്പു ചെയ്യുക. (അല്ലെങ്കിൽ) ക്യു.ആർ. കോഡ് സ്കാൻ ചെയ്യുക.

ഘട്ടം - 2

IX-Analytical Geometry എന്നറിയപ്പെടുന്ന ജിയോ ജീബ്രാ എന്ന വർക്ക്ബുക്ക് തുറക്കുക. ഇതിൽ പലതരത്തിലുള്ള വർക്ക് ഷീറ്റുകൾ ഉണ്ടായിരിക്കും. നിങ്ങൾക്ക് ആവശ്യമുള്ളത് തെരഞ്ഞെടുക്കുക. Eg: Open : "Distance formula"

ഘട്ടം-3

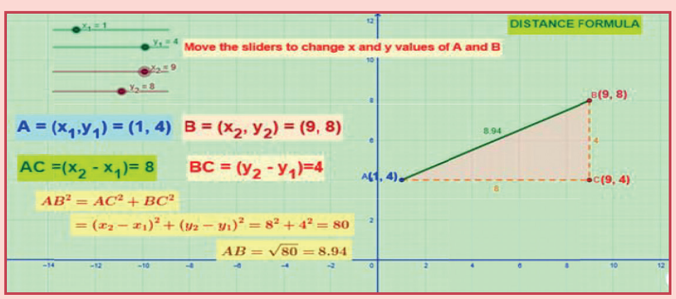
A യുടെയും B യുടെയും നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങളെ മാറ്റുന്നതിന് x_1, x_2, y_1, y_2 എന്നീ സ്ലൈഡുകളെ ചലിപ്പിക്കുക. തുടർന്ന് A യ്ക്കും B യ്ക്കും ഇടയിലുള്ള അകലം. അകലസൂത്രമുപയോഗിച്ച്
കണ്ടെത്തിയശേഷം നിങ്ങളുടെ ഉത്തരം ശരിയാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

Browse in the link

Co-Ordinate Geometry: https://ggbm.at/V9HfY4v8

ഐ സി ടി കോർണർ-2

പ്രതീക്ഷിക്കുന്ന ഉത്തരം ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.



ഘട്ടം – 1

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള URL ടൈപ്പ് ചെയ്യുക.അല്ലെങ്കിൽ QR code സ്കാൻ ചെയ്യുക. "Co-ordinate Geometry" എന്ന ജിയോ ജീബ്രാ വർക്ക്ഷീറ്റ് ദൃശ്യമാകും.ദൂരസൂത്രം,വിഭജനസൂത്രം എന്നീ തലക്കെട്ടുകളിൽ രണ്ട് വർക്ക്ഷീറ്റുകൾ കാണാം.

ഘട്ടം - 2

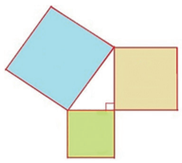
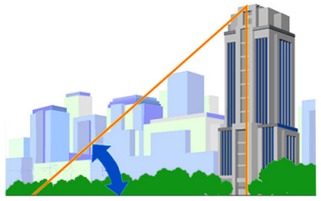
സ്ലൈടർ നീക്കി വ്യത്യസ്ത മൂല്യങ്ങൾക്കുള്ള ബിന്ദുക്കളും, അംശബന്ധവും കാണാം.നിർദ്ധാരണം കണ്ടെത്തി, check box നെ click ചെയ്ത് ഉത്തരം ശരിനോക്കുക.

Browse in the link

Co-Ordinate Geometry: https://ggbm.at/sfszfe24 or Scan the QR Code.

Unit 5_COORDINAT.indd 220 28-01-2023 11:20:11

6

ത്രികോണമിതി

There is perhaps nothing which so occupies the middle position of mathematics as Trigonometry.- J. F. Herbart



Leonhard Euler
A.D (C.E) 1707 - 1783

ന്യൂട്ടനെ പോലെ ഓയ്‌ലർ അദ്ദേഹത്തിന്റെ തലമുറയിലെ ഏറ്റവും വലിയ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനായിരന്നു. അദ്ദേഹം ഗണിതത്തിന്റെ എല്ലാ മേഖലകളും പഠിച്ചു.അന്ധതനായശേഷവും അദ്ദേഹം കഠിനാധ്വാനം ചെയ്തു. ഓയ്‌ലർ ഗണിതത്തിന്റെ പല മേഖലകളിലും പ്രത്യേകിച്ച് കാൽകുലസ്, ത്രികോണമിതി എന്നിവയിൽ അനേകം ഭാഗങ്ങൾ കണ്ടുപിടിച്ചു. ജ്യാമിതിയിൽ പല സിദ്ധാന്തങ്ങൾ തെളിയിച്ച ആദ്യ വ്യക്തി ഇദ്ദേഹമായിരുന്നു.

NLDGE

പഠന ലക്ഷ്യങ്ങൾ

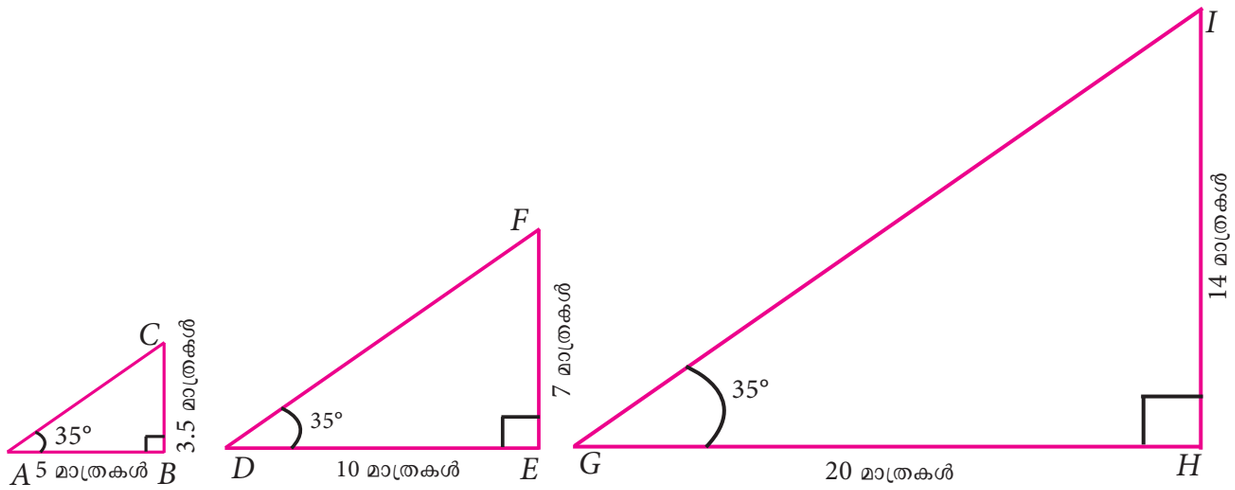
- വിവിധതരം ത്രികോണമിതി അംശബന്ധങ്ങൾക്കുള്ള ബന്ധത്തെക്കുറിച്ചുള്ള അറിവ്.
- വിവിധതരം ത്രികോണമിതി അംശബന്ധങ്ങളുടെയും അവയുടെ വ്യുൽക്രമങ്ങൾ മൂല്യങ്ങൾ എന്നിവയെ പറ്റിയുള്ള ഓർമ്മപ്പുതുക്കൽ.
- പൂരക കോണുകളുടെ തത്വ പ്രയോഗം.
- ത്രികോണമിതി പട്ടികയുടെ ആവശ്യകതയുടെ പരിജ്ഞാനം.

6.1 മുഖവുര

ത്രികോണമിതി (എന്ന പദത്തിന്റെ ഉത്ഭവം ഗ്രീക്കുപദങ്ങളായ trigonon എന്നാൽ ത്രികോണം എന്നും metron എന്നാൽ അളവ്) എന്ന ഗണിത ശാസ്ത്രശാഖ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ കോണുകൾ എന്നിവയുടെ അളവുമായി ബന്ധപ്പെടുത്തിക്കൊണ്ടുള്ള പഠനമാണ്. എൻജിനീയർ, ശാത്രജ്ഞർ, സർവ്വേയർ എന്നിവർക്ക് ഗ്രഹ ചലനം, നാവികവിദ്യ മുതലായവ മനസ്സിലാക്കുന്നതിനു ഒരു ഉത്തമോപാധിയാണ്.

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള മൂന്ന് സമകോണത്രികോണങ്ങൾ ശ്രദ്ധിച്ചാൽ ഓരോന്നിന്റെയും അളവുകൾ തമ്മിൽ പരസ്പ്പരം ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നതായി കാണാം. ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ത്രികോണങ്ങളിൽ നിന്നും അവയ്ക്ക് അനുബന്ധപ്പെട്ടുവരുന്ന കോണുകൾ സമ അളവുള്ളവയാണ്. അവയുടെ നിരീക്ഷണ ഫലമായി ലഭിക്കുന്ന ഒരു ത്രികോണത്തിൽ എതിർവശം (തന്നിട്ടുള്ള കോണിന്റെ എതിർവശത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു) കൂടാതെ സമീപ വശങ്ങൾ (തന്നിട്ടുള്ള കോണിന്റെ സമീപ വശത്തു വരുന്ന ഒരു വശം) എന്നിവയാകുന്നു.

Unit 6_TRIGONOMETRY.indd 221 28-01-2023 11:14:09

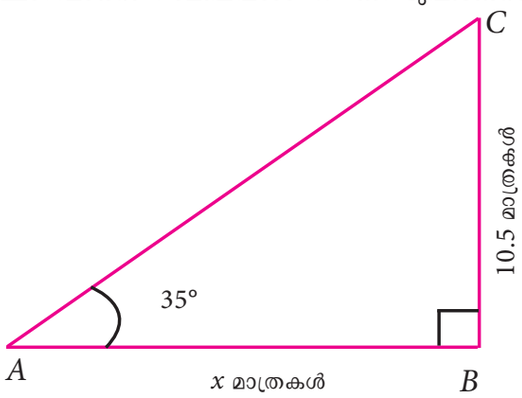


ചിത്രം. 6.1

$\frac{\text{എതിർ വശം}}{\text{സമീപവശം}}$ എന്ന അംശബന്ധത ബന്ധം അർത്ഥമാക്കുന്നത് എന്താണ്? ഇവിടെ തന്നിട്ടുള്ള സമകോണുകളുടെ അംശബന്ധം 0.7 ഇതിനെ അടിസ്ഥാനമാക്കി സമിപവശം 'x' കണ്ടുപിടിക്കാം അത് 15 ആണോ?

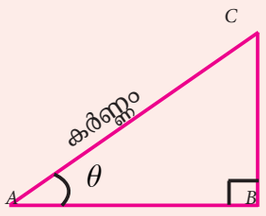
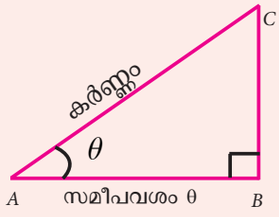
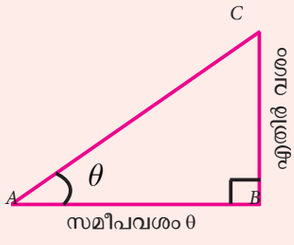
ഇതുപോലുള്ള അംശബന്ധങ്ങളെ ഒത്തൊരു മിപ്പിച്ച് കൊണ്ട് ആദിമ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞന്മാർ ത്രികോണമിതി എന്ന വിഷയത്തിന് രൂപം നൽകി.

ഇവിടെ ത്രികോണമിതിയിൽ പറയുന്ന മൂന്നു അംശബന്ധങ്ങൾ, ഓരോന്നും ഒരു വശത്തെ മറ്റൊരു വശം കൊണ്ട് ഭാഗിക്കുന്ന രൂപത്തിലാണ്.



ചിത്രം. 6.2

ഈ മൂന്നു അംശബന്ധങ്ങൾ:

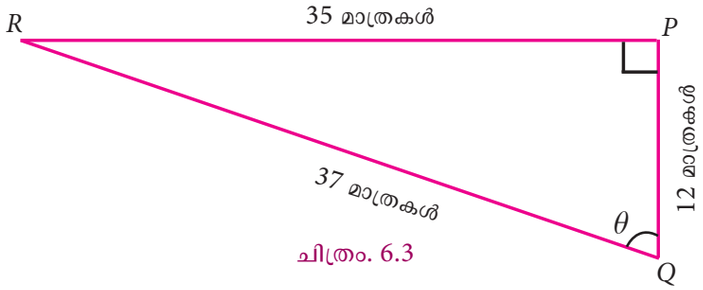
കോണുകളുടെ പേരുകൾ	sine	cosine	tangent
ചുരുങ്ങിയ രൂപം	sin	cos	tan
അനുബന്ധമായ അളവുകൾ			
അവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം	$\sin\theta = \frac{\text{എതിർ വശം}}{\text{കർണ്ണം}}$	$\cos\theta = \frac{\text{സമീപവശം}}{\text{കർണ്ണം}}$	$\tan\theta = \frac{\text{എതിർ വശം}}{\text{സമീപവശം}}$

Unit 6_TRIGONOMETRY.indd 222 28-01-2023 11:14:09

ഉദാഹരണം 6.1 തന്നിട്ടുള്ള ചിത്രത്തിലെ അളവുകൾ ഉപയോഗിച്ച് കോൺ 'θ' യുടെ sine, cosine, tangent എന്നീ അംശബന്ധങ്ങൾ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ള സമകോണത്രികോണത്തിൽനിന്നും കോൺ 'θ' യുടെ എതിരിലുള്ള വശമായ PR എതിർ വശവും PQ സമീപ വശവുമാണ്.



ചിത്രം. 6.3

$$\sin\theta = \frac{\text{എതിർ വശം}}{\text{കർണ്ണം}} = \frac{PR}{QR} = \frac{35}{37}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{സമീപവശം}}{\text{കർണ്ണം}} = \frac{PQ}{QR} = \frac{12}{37}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{എതിർ വശം}}{\text{സമീപവശം}} = \frac{PR}{PQ} = \frac{35}{12}$$

ഇതാണ് അംശ ബന്ധങ്ങളുടെ ഭിന്നങ്ങൾ, ഈ രീതിയിൽ നിങ്ങൾക്കാവശ്യമായ ഏതൊരു അംശബന്ധത്തേയും ശരിയായ രീതിയിലുള്ള ആവർത്തിക്കുന്ന ദശാംശരൂത്തിലോ മറ്റ് ദശാംശരൂപങ്ങളിലോ എഴുതാം.

കുറിപ്പ്

ത്രികോണമിതി അംശബന്ധം നിർവ്വഹിച്ചിരിക്കുന്നത് വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധത്തിൽ യൂണിറ്റുകളെ നംബറുകളായിട്ടാണ്.

അംശബന്ധങ്ങളായ ഇവയെ $(\sin)\times(\theta)$, $(\cos)\times(\theta)$, $(\tan)\times(\theta)$ എന്നിങ്ങനെ ഉപയോഗിക്കാൻ പാടില്ല.

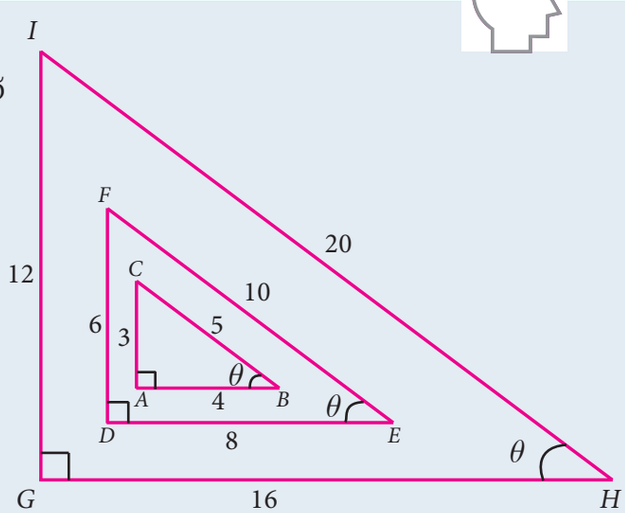
ചിന്തിക്കൂ

തന്നിട്ടുള്ള ത്രികോണങ്ങളായ ABC, DEF കൂടാതെ GHI എന്നിവയുടെ അളവുകളാണ് 3-4-5, 6-8-10, 12-16-20 എന്നിവ.

ഇവ സമകോണത്രികോണങ്ങളാണോ? എങ്ങനെ നിങ്ങൾ അറിയും?

കോണുകളിലെ ശീർഷങ്ങളായ B, E, H എന്നിവ ഒരേ അളവിലാണ് (ഓരോ കോണുകളും θ യ്ക്ക് സമമാണ്).

ഈ വിവരങ്ങളുപയോഗിച്ച് താഴെ തന്നിട്ടുള്ള കോളം പൂരിപ്പിച്ച് അംശബന്ധങ്ങളെക്കുറിച്ച് ചർച്ചചെയ്ത് അതിനെ രേഖപ്പെടുത്തുക.



ചിത്രം. 6.4

Unit 6_TRIGONOMETRY.indd 223 28-01-2023 11:14:11

ΔABC -ൽ നിന്നും	ΔDEF -ൽ നിന്നും	ΔGHI ൽ നിന്നും
$\sin\theta = \frac{3}{5}$	$\sin\theta = \frac{6}{10} = ?$	$\sin\theta = \frac{12}{20} = ?$
$\cos\theta = ?$	$\cos\theta =$	$\cos\theta = ?$
$\tan\theta = \frac{3}{4}$	$\tan\theta = ?$	$\tan\theta = ?$

അംശബന്ധങ്ങളുടെ വ്യുൽക്രമം

ഇവിടെ നാം നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുള്ള മൂന്ന് ത്രികോണമിതി അംശബന്ധങ്ങളുടെ വ്യുൽക്രമത്തിന്റെ ഉപയോഗം ആവശ്യമായി വരുന്നത്. നാം അവയെ താഴെ പറയും വിധം അനുകരിക്കുന്നു.

ത്രികോണമിതി അംശബന്ധങ്ങളുടെ അടിസ്ഥാനം	അവയുടെ വ്യുൽക്രമം	ചുരുങ്ങിയ രൂപം
$\sin\theta = \frac{\text{എതിർവശം}}{\text{കർണ്ണം}}$	$\text{cosecant}\ \theta = \frac{\text{കർണ്ണം}}{\text{എതിർവശം}}$	$\text{cosec}\ \theta = \frac{\text{കർണ്ണം}}{\text{എതിർവശം}}$
$\cos\theta = \frac{\text{സമീപവശം}}{\text{കർണ്ണം}}$	$\text{secant}\ \theta = \frac{\text{കർണ്ണം}}{\text{സമീപവശം}}$	$\sec\theta = \frac{\text{കർണ്ണം}}{\text{സമീപവശം}}$
$\tan\theta = \frac{\text{എതിർവശം}}{\text{സമീപവശം}}$	$\text{cotangent}\ \theta = \frac{\text{സമീപവശം}}{\text{എതിർവശം}}$	$\cot\theta = \frac{\text{സമീപവശം}}{\text{എതിർവശം}}$

മുകളിൽ പറഞ്ഞ അംശബന്ധങ്ങളുടെ ബന്ധത്തെ താഴെ പറയുന്ന തരത്തിൽ എളുപ്പരീതിയിൽ പിൻതുടരാം.

$$\text{cosec}\ \theta = \frac{1}{\sin\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

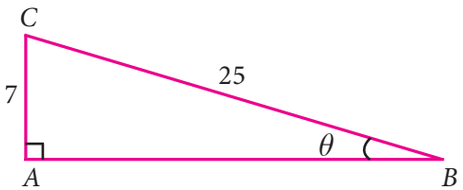
$$\sin\theta = \frac{1}{\text{cosec}\,\theta} \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} \qquad \tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$$

$(\sin\theta)\times(\text{cosec}\,\theta) = 1$ ഇതിനെ $\sin\theta\cdot\text{cosec}\,\theta = 1$ എന്ന് എഴുതാറുണ്ട്.

$(\cos\theta)\times(\sec\theta) = 1$ ഇതിനെ $\cos\theta.\sec\theta = 1$ എന്ന് എഴുതാറുണ്ട്.

$(\tan\theta)\times(\cot\theta) = 1$ ഇതിനെ $\tan\theta\ .\ \cot\theta = 1$ എന്ന് എഴുതാറുണ്ട്.

ഉദാഹരണം 6.2 താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ചിത്രമുപയോഗിച്ച് കോൺ 'θ' യുടെ ആറ് ത്രികോണമിതി അംശബന്ധങ്ങളും കാണുക?

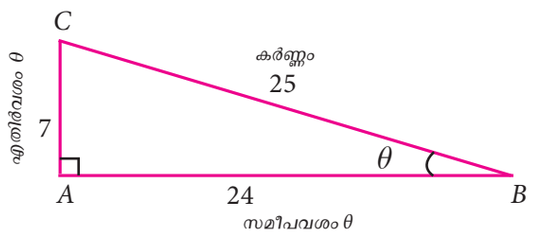


ചിത്രം. 6.5

നിർദ്ധാരണം

പൈതഗോറസ് സിദ്ധാന്ത പ്രകാരം

$$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2}$$
$$= \sqrt{(25)^2 - 7^2}$$
$$= \sqrt{625 - 49} = \sqrt{576} = 24$$



ചിത്രം. 6.6

Unit 6_TRIGONOMETRY.indd 224 28-01-2023 11:14:16

ആറ് ത്രികോണമിതി അംശബന്ധങ്ങൾ

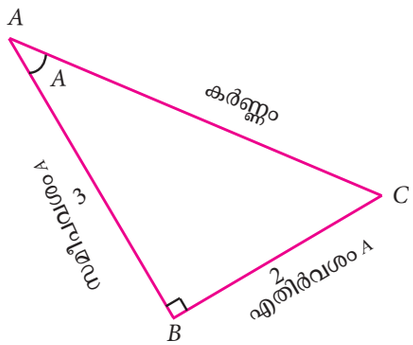
$$\sin\theta = \frac{\text{എതിർവശം}}{\text{കർണ്ണം}} = \frac{7}{25} \qquad \cos\theta = \frac{\text{സമീപവശം}}{\text{കർണ്ണം}} = \frac{24}{25}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{എതിർവശം}}{\text{സമീപവശം}} = \frac{7}{24} \qquad \operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{കർണ്ണം}}{\text{എതിർവശം}} = \frac{25}{7}$$

$$\sec\theta = \frac{\text{കർണ്ണം}}{\text{സമീപവശം}} = \frac{25}{24} \qquad \cot\theta = \frac{\text{സമീപവശം}}{\text{എതിർവശം}} = \frac{24}{7}$$

ഉദാഹരണം 6.3 $\tan A = \frac{2}{3}$, ആയാൽ മറ്റു ത്രികോണമിതി അംശബന്ധങ്ങൾ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം



ചിത്രം. 6.7

$$\tan A = \frac{\text{എതിർവശം}}{\text{സമീപവശം}} = \frac{2}{3}$$

പൈതഗോറസ് സിദ്ധാന്ത പ്രകാരം,

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$$

$$= \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

$$AC = \sqrt{13}$$

$$\sin A = \frac{\text{എതിർവശം}}{\text{കർണ്ണം}} = \frac{2}{\sqrt{13}} \qquad \cos A = \frac{\text{സമീപവശം}}{\text{കർണ്ണം}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{\text{കർണ്ണം}}{\text{എതിർവശം}} = \frac{\sqrt{13}}{2} \qquad \sec A = \frac{\text{കർണ്ണം}}{\text{സമീപവശം}} = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

$$\cot A = \frac{\text{സമീപവശം}}{\text{എതിർവശം}} = \frac{3}{2}$$

ഉദാഹരണം 6.4 $\sec\theta = \frac{13}{5}$, എങ്കിൽ $\frac{2\sin\theta - 3\cos\theta}{4\sin\theta - 9\cos\theta} = 3$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം:

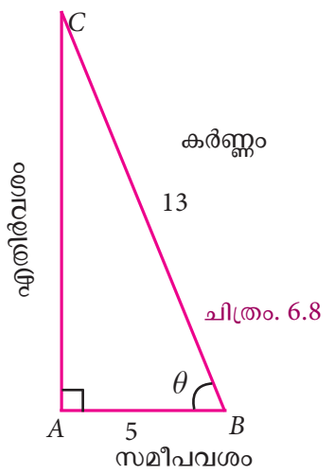
$BC = 13$, $AB = 5$ എന്നെടുക്കുക

$$\sec\theta = \frac{\text{കർണ്ണം}}{\text{സമീപവശം}} = \frac{BC}{AB} = \frac{13}{5}$$

പൈതഗോറസ് സിദ്ധാന്തത്തിലൂടെ

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2}$$

$$= \sqrt{13^2 - 5^2}$$



ചിത്രം. 6.8

Unit 6_TRIGONOMETRY.indd 225 28-01-2023 11:14:23

$= \sqrt{169-25} \;=\; \sqrt{144} = 12$

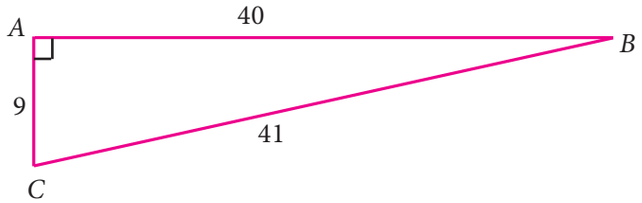
അതുകൊണ്ട്, $\sin\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{12}{13}$; $\cos\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{13}$

$$LHS = \frac{2\sin\theta - 3\cos\theta}{4\sin\theta - 9\cos\theta} = \frac{2\times\frac{12}{13} - 3\times\frac{5}{13}}{4\times\frac{12}{13} - 9\times\frac{5}{13}} = \frac{\frac{24-15}{13}}{\frac{48-45}{13}} = \frac{9}{3} = 3 = RHS$$

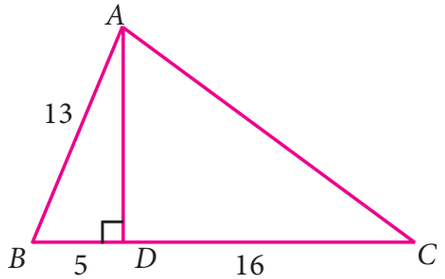
കുറിപ്പ്: നാം ശീർഷം 'C' യിൽ 'θ' എടുത്താലും ഇതേ രീതിയിൽ പിൻതുടരണം.

അഭ്യാസം 6.1

1. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ചിത്രത്തിൽ നിന്നും കോൺ B യ്ക്കുള്ള എല്ലാ ത്രികോണമിതി അംശ ബന്ധങ്ങളും കാണുക?



2. തന്നിട്ടുള്ള ചിത്രത്തിൽ നിന്നും താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയുടെ മൂല്യം കാണുക.



(i) $\sin B$ (ii) $\sec B$ (iii) $\cot B$

(iv) $\cos C$ (v) $\tan C$ (vi) $\operatorname{cosec} C$

3. $2\cos\theta = \sqrt{3}$, ആയാൽ θ യുടെ വില കാണുക?

4. $\cos A = \frac{3}{5}$, ആയാൽ $\frac{\sin A - \cos A}{2\tan A}$ യുടെ വില കാണുക?

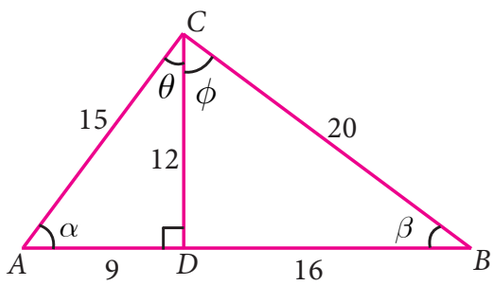
5. $\cos A = \frac{2x}{1+x^2}$, ആയാൽ $\sin A$, $\tan A$ എന്നിവയുടെ മൂല്യം x ൽ കാണുക?.

6. $\sin\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, എങ്കിൽ $b\sin\theta = a\cos\theta$ എന്ന് തെളിയിക്കുക?

7. $3\cot A = 2$, ആയാൽ $\frac{4\sin A - 3\cos A}{2\sin A + 3\cos A}$ യുടെ മൂല്യം കാണുക?

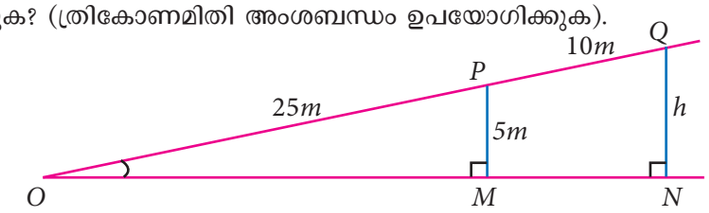
8. $\cos\theta : \sin\theta = 1:2$, ആയാൽ $\frac{8\cos\theta - 2\sin\theta}{4\cos\theta + 2\sin\theta}$ യുടെ മൂല്യം കാണുക?

9. തന്നിട്ടുള്ള ചിത്രത്തിൽ നിന്നും $\theta + \phi = 90°$ കൂടാതെ മറ്റ് രണ്ട് സമകോണ ത്രികോണങ്ങൾ ഉണ്ട് എന്ന് തെളിയിക്കുക. $\sin\alpha$, $\cos\beta$, $\tan\phi$ എന്നിവ കണ്ടുപിടിക്കുക?



Unit 6_TRIGONOMETRY.indd 226 28-01-2023 11:14:30

10. ഒരു കുട്ടി O എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്നും പറത്തുന്ന പട്ടത്തിന്റെ സ്ഥാനം P യും OP യുടെ അകലം $25m$ ആകുന്നു. അത് തറ നിരപ്പിൽ നിന്നും $5m$ ദൂരത്തിലാണ്. പട്ടത്തിന്റെ നൂൽ P യിൽ നിന്നും $10m$ നീട്ടുന്നത് Q എന്ന ബിന്ദുവിൽ അവസാനിക്കുന്നു. തറനിരപ്പിൽ നിന്നും പട്ടം വരെയുള്ള (QN) ഉയരം കാണുക? (ത്രികോണമിതി അംശബന്ധം ഉപയോഗിക്കുക).

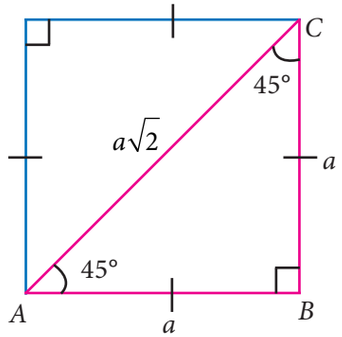


6.2 ചില പ്രത്യേകതരം കോണുകളുടെ ത്രികോണമിതി അംശബന്ധങ്ങൾ

ചില പ്രത്യേകതരം കോണുകളുടെ ത്രികോണമിതി അംശബന്ധങ്ങളുടെ മൂല്യങ്ങൾ കാണുന്നത് ജ്യാമിതീയ രൂപത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിലാണ്. രണ്ട് പ്രത്യേക ത്രികോണങ്ങൾ ഇവിടെ കിട്ടുന്നു.

6.2.1. 45° യുടെ ത്രികോണമിതി അംശബന്ധങ്ങൾ

ABC എന്ന ത്രികോണം പരിഗണിക്കുകയാണങ്കിൽ ചിത്രം 3.10 ൽ കാണുന്നത് പോലെ കോണളവുകൾ $45°, 45°, 90°$ ആകുന്നു.



ചിത്രം. 6.9

സമചതുരത്തിന്റെ പകുതിയായ ഈ രൂപം വികർണ്ണത്തിലൂടെ വെട്ടിയെടുത്തതാണ്.ഇതിൽ നിന്നും മനസ്സിലാക്കാൻ സാധിക്കുന്നത് ഓരോന്നും ദ്വിസമഭുജ ത്രികോണമാണ് എന്നതാണ് (എല്ലാ ഭുജത്തിനും ഒരേ നീളം a മാത്രയാകുന്നു).

പൈതഗോറസ് സിദ്ധാന്തം വഴി പരിശോധിച്ചാൽ വികർണത്തിന്റെ നീളം $a\sqrt{2}$ ആകുന്നു.

ഇപ്പോൾ ABC എന്ന സമകോണ ത്രികോണത്തിൽ

$$\sin 45^o = \frac{\text{എതിർവശം}}{\text{കർണ്ണം}} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45^o = \frac{\text{സമീപവശം}}{\text{കർണ്ണം}} = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45^o = \frac{\text{എതിർവശം}}{\text{സമീപവശം}} = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a} = 1$$

ഇതിൽ നിന്നും എളുപ്പമായി നമുക്ക് എഴുതാൻ കഴിയും

$\operatorname{cosec} 45° = \sqrt{2}$;

$\sec 45° = \sqrt{2}$ കൂടാതെ

$\cot 45° = 1$

6.2.2 30°, 60° ഇവയ്ക്കുള്ള ത്രികോണമിതി അംശബന്ധങ്ങൾ

2cm ഭുജ അളവുള്ള ഒരു സമഭുജത്രികോണം A,B,C പരിഗണിച്ച്,

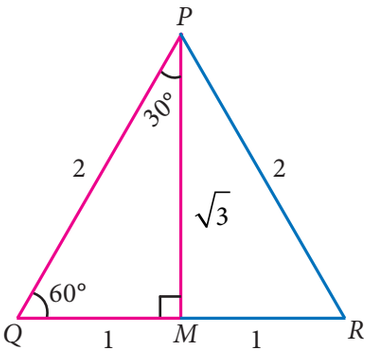
P യിലൂടെ ഒരു കോണ ദ്വിഭാജകം വരയ്കുക.

അത് QR എന്ന വശത്ത് M -ൽ തൊടുന്നു.

$PQ = QR = RP = 2$ മാത്രകൾ.

$QM = MR = 1$ മാത്രകൾ (എങ്ങനെ)

PQ, QM, അറിയുന്നതെങ്കിൽ പൈതഗോറസ് സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗപ്പെടുത്തി PM



ചിത്രം.6.10

Unit 6_TRIGONOMETRY.indd 227 28-01-2023 11:14:33

നമുക്ക് കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് സാധിക്കും.

$PM = \sqrt{3}$ മാത്രകൾ എന്ന് കണ്ടുപിടിക്കാം.

ഇപ്പോൾ സമകോണത്രികോണം PQM, ൽ നിന്നും

$$\sin 30^o = \frac{\text{എതിർവശം}}{\text{കർണ്ണം}} = \frac{QM}{PQ} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^o = \frac{\text{സമീപവശം}}{\text{കർണ്ണം}} = \frac{PM}{PQ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^o = \frac{\text{എതിർവശം}}{\text{സമീപവശം}} = \frac{QM}{PM} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ഇവയിൽ നിന്നും എളുപ്പമായി നമുക്ക് എഴുതാൻ കഴിയും

$\text{cosec}\, 30° = 2, \sec 30° = \frac{2}{\sqrt{3}}$

കൂടാതെ $\cot 30° = \sqrt{3}$

അതേ ത്രികോണത്തിൽ നിന്നും മറ്റേ കോൺ $60°$ യുടെ കോണളവ് നമുക്ക് ഇപ്പോൾ കണ്ടുപിടിക്കാം

$$\sin 60^o = \frac{opposite\ side}{hypotenuse} = \frac{PM}{PQ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^o = \frac{adjacent\ side}{hypotenuse} = \frac{QM}{PQ} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^o = \frac{opposite\ side}{adjacent\ side} = \frac{PM}{QM} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

ഇവയിൽ നമുക്ക് എളുപ്പത്തിൽ എഴുതാൻ കഴിയും

$\text{cosec}\, 60° = \frac{2}{\sqrt{3}}$; $\sec 60° = 2$

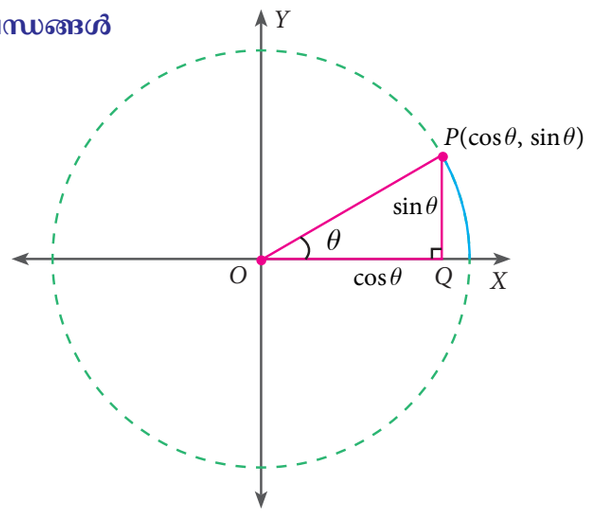
കൂടാതെ $\cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

6.2.3 0°, 90° ഇവയ്ക്കുള്ള ത്രികോണ അംശബന്ധങ്ങൾ

0°, 90°, ഇവയ്ക്കുള്ള ത്രികോണമിതി അംശബന്ധങ്ങൾ കാണുന്നതിന്

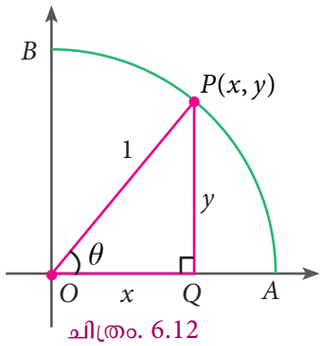
യൂണിറ്റ് വൃത്തം എന്നത് മൂലബിന്ദു കേന്ദ്രമായുള്ളതും ഒരു മാത്ര വ്യാസാർദ്ധമുണള്ള തുമായ ഒരു വൃത്തം ആണ്.

1 മാത്ര വ്യാസാർദ്ധത്തോടു കൂടിയ ഒരു വൃത്തം നിർമ്മിച്ചത് എന്തിനാണ്? ഇതിനർത്ഥം 1 cm നീളമുള്ള കർണ്ണവശമുള്ള നേരത്തേ തന്നിട്ടുള്ള ഒരു സമകോണത്രികോണം അവയുടെ കോണുകളേയും അംശബന്ധങ്ങളേയും താരതമ്യം ചെയ്യുന്നതിനുള്ള എളുപ്പവഴിയാണ്.



ചിത്രം. 6.11

നമുക്ക് കാണാൻ സാധിക്കും $\angle POQ = \theta$ യും 1-ാം ചതുർത്ഥാംശത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവാണ് $P(x,y)$.



ചിത്രം. 6.12

Unit 6_TRIGONOMETRY.indd 228 28-01-2023 11:14:37

$$\sin\theta = \frac{PQ}{OP} = \frac{y}{1} = y \;\; ; \;\; \cos\theta = \frac{OQ}{OP} = \frac{x}{1} = x \;\; ; \;\; \tan\theta = \frac{PQ}{OQ} = \frac{y}{x}$$

എപ്പോഴാണോ $\theta = 0°$, യും OP, OA യുമായി ചേർന്നിരിക്കുകയും, അവിടെ $A(1,0)$ ആകുമ്പോൾ $x = 1$, $y = 0$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

നമുക്ക് കിട്ടുന്ന വിവരം താഴെ പറയുന്നു.

$$\frac{\text{എതിർവശം}}{\text{കർണ്ണം}} = 0 \;\; ; \;\; \text{cosec}\, 0° = \text{നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ല (എന്ത്?)}$$

$$\frac{\text{സമീപവശം}}{\text{കർണ്ണം}} = 1 \;\; ; \;\; \sec 0° = 1$$

$$\frac{\text{എതിർവശം}}{\text{സമീപവശം}} = 0 \;\; ; \;\; \cot 0° = \text{നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ല(എന്ത്?)}$$

എപ്പോഴാണോ $\theta = 90°$, യും OP, OB യുമായി കൂടിച്ചേരുകയും അവിടെ $B(0,1)$ ആകുമ്പോൾ $x = 0$, $y = 1$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

അങ്ങനെ

$$\sin 90° = 1 \;\; ; \;\; \text{cosec}\, 90° = 1$$

$$\cos 90° = 0 \;\; ; \;\; \sec 90° = \text{നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ല}$$

$$\tan 90° = \frac{1}{0} = \text{നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ല;} \;\; \cot 90° = 0$$

ഇവയെല്ലാം ഒത്തിണക്കി യോജിപ്പിച്ച് താഴെ തന്നിട്ടുള്ള പട്ടിക സജ്ജീകരിച്ചിട്ടുണ്ട്:

θ / ത്രികോണമിതി അംശബന്ധങ്ങ	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ല
$\text{cosec}\,\theta$	നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ല	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
$\sec\theta$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ല
$\cot\theta$	നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ല	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Unit 6_TRIGONOMETRY.indd 229 28-01-2023 11:14:42

ഉദാഹരണം 6.5

മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കുക: (i) $\sin 30° + \cos 30°$ (ii) $\tan 60°.\cot 60°$

(iii) $\dfrac{\tan 45°}{\tan 30° + \tan 60°}$

(iv) $\sin^2 45° + \cos^2 45°$

കുറിപ്പ്

(i) $(\sin\theta)^2$ നെ $\sin^2\theta = (\sin\theta)\times(\sin\theta)$ എന്നെഴുതാം.

(ii) $(\sin\theta)^2$ നെ $\sin\theta^2$, എന്ന് എഴുതാൻ സാധ്യമല്ല കാരണം ഇതിനർഥം $\sin(\theta\times\theta)$ എന്നാകുന്നു.

നിർദ്ധാരണം

(i) $\sin 30° + \cos 30° = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

(ii) $\tan 60°.\cot 60° = \sqrt{3}\times\dfrac{1}{\sqrt{3}} = 1$

(iii) $\dfrac{\tan 45°}{\tan 30° + \tan 60°} = \dfrac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{1}} = \dfrac{1}{\frac{1+\left(\sqrt{3}\right)^2}{\sqrt{3}}} = \dfrac{1}{\frac{1+3}{\sqrt{3}}} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

(iv) $\sin^2 45° + \cos^2 45° = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \dfrac{1^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} + \dfrac{1^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$

ചിന്തിക്കൂ

തഴെ തന്നിട്ടുള്ള മൂന്ന് സെറ്റ് സംഖ്യകളെയും പൈതഗോറിയൻ ട്രിപ്പ്ലെറ്റ് എന്നും അവ ഒരു സമകോണത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ ആയി രൂപം കൊള്ളുന്നതരത്തിലുള്ളതുമാണ്:

(i) 3, 4, 5 (ii) 5, 12, 13 (iii) 7, 24, 25

ഉദാഹരണം 6.6

താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയുടെ മൂല്യം കാണുക.

(i) $(\cos 0° + \sin 45° + \sin 30°)(\sin 90° - \cos 45° + \cos 60°)$

(ii) $\tan^2 60° - 2\tan^2 45° - \cot^2 30° + 2\sin^2 30° + \dfrac{3}{4}\operatorname{cosec}^2 45°$

നിർദ്ധാരണം

(i) $(\cos 0° + \sin 45° + \sin 30°)(\sin 90° - \cos 45° + \cos 60°)$

$= \left[1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2}\right]\left[1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2}\right]$

Unit 6_TRIGONOMETRY.indd 230 28-01-2023 11:14:47

$$= \left[\frac{2\sqrt{2}+2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right]\left[\frac{2\sqrt{2}-2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right] = \left[\frac{3\sqrt{2}+2}{2\sqrt{2}}\right]\left[\frac{3\sqrt{2}-2}{2\sqrt{2}}\right]$$

$$= \frac{18-4}{4\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{14}{4\times 2} = \frac{7}{4}$$

(ii) $\tan^2 60° - 2\tan^2 45° - \cot^2 30° + 2\sin^2 30° + \frac{3}{4}\operatorname{cosec}^2 45°$

$$= \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2(1)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\sqrt{2}\right)^2$$

$$= 3 - 2 - 3 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}$$

$$= -2 + \frac{4}{2} = -2 + 2 = 0$$

കുറിപ്പ്

(i) ഒരു സമകോണത്രികോണത്തിലെ കോണളവുകളുടെ അംശബന്ധം $45° : 45° : 90°$ എന്ന തരത്തിലാണ്. കൂടാതെ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം $1 : 1 : \sqrt{2}$ എന്ന തരത്തിലാണ്.

(ii) ഇതുപോലെ കോണളവുകൾ $30° : 60° : 90°$ അടുത്തതായി വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം $1 : \sqrt{3} : 2$ എന്നതാണ്.

(നിങ്ങളുടെ ജ്യാമിതി ബോക്സിലെ രണ്ട് സെറ്റ് ത്രികോണങ്ങളും മുകളിൽ പറഞ്ഞ സമകോണ ത്രികോണങ്ങൾക്കു ഉത്തമ ഉദാഹരണമാണ്.)

അഭ്യാസം 6.2

1. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള അളവുകൾ ശരിയാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക?

   (i) $\sin^2 60° + \cos^2 60° = 1$

   (ii) $1 + \tan^2 30° = \sec^2 30°$

   (iii) $\cos 90° = 1 - 2\sin^2 45° = 2\cos^2 45° - 1$

   (iv) $\sin 30° \cos 60° + \cos 30° \sin 60° = \sin 90°$

2. താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയുടെ മൂല്യം കാണുക?

   (i) $\frac{\tan 45°}{\operatorname{cosec} 30°} + \frac{\sec 60°}{\cot 45°} - \frac{5\sin 90°}{2\cos 0°}$

   (ii) $(\sin 90° + \cos 60° + \cos 45°) \times (\sin 30° - \cos 0° + \cos 45°)$

   (iii) $\sin^2 30° - 2\cos^3 60° + 3\tan^4 45°$

3. $A = 30°$ ആയിവരുമ്പോൾ $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$, യുടെ മൂല്യം ശരിയാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.?

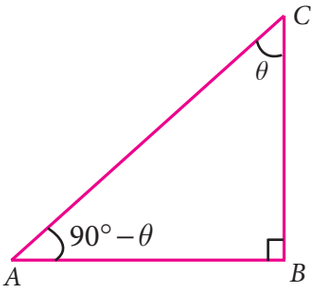
4. $x = 15°$ ആകുമ്പോൾ $8\sin 2x.\cos 4x.\sin 6x$ ന്റെ മൂല്യം കാണുക?

Unit 6_TRIGONOMETRY.indd 231 28-01-2023 11:14:51

6.3 പൂരകകോണുകളുടെ ത്രികോണമിതി അംശബന്ധങ്ങൾ

നേരത്തേ പഠിച്ചതുപോലെ രണ്ട് ന്യൂനകോണുകളുടെ തുക പൂരകം എന്നു പറയണമെങ്കിൽ ആകോണളവുകളുടെ തുക $90°$ ആയിരിക്കണം.

ഒരു സമകോണത്രികോണത്തിലെ ന്യൂനകോണുകളെക്കുറിച്ച് നിങ്ങൾക്ക് എന്താണ് പറയാനുള്ളത്?



ചിത്രം. 3.16

ഒരു സമകോണത്രികോണത്തിലെ ന്യൂനകോണുകളുടെ തുക $90°$ ആകുന്നു. അതുകൊണ്ട് രണ്ട് ന്യൂനകോണുകളുടെ സമകോണത്രികോണങ്ങൾ എല്ലായ്പ്പോഴും ഒന്നിനൊന്ന് പൂരകങ്ങളായിരിക്കും.

മുകളിൽ കാണുന്ന ചിത്രം 3.16 ലെ ത്രികോണത്തിൽ B യിലാണ് സമകോൺ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നത്. അതിനാൽ $\angle C$ യുടെ അളവ് θ യാകുമ്പോൾ $\angle A = 90° - \theta$ ആയിരിക്കുന്നു.

നാം കണ്ടുപിടിച്ചത്

$$\left.\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{AB}{AC} & \operatorname{cosec}\theta &= \frac{AC}{AB} \\ \cos\theta &= \frac{BC}{AC} & \sec\theta &= \frac{AC}{BC} \\ \tan\theta &= \frac{AB}{BC} & \cot\theta &= \frac{BC}{AB} \end{aligned}\right\} \ldots.(1)$$

അതുപോലെ $(90° - \theta)$ കോണളവുള്ള ത്രികോണത്തിൽ നിന്നും നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നത്

$$\left.\begin{aligned} \sin(90°-\theta) &= \frac{BC}{AC} & \operatorname{cosec}(90°-\theta) &= \frac{AC}{BC} \\ \cos(90°-\theta) &= \frac{AB}{AC} & \sec(90°-\theta) &= \frac{AC}{AB} \\ \tan(90°-\theta) &= \frac{BC}{AB} & \cot(90°-\theta) &= \frac{AB}{BC} \end{aligned}\right\} \ldots..(2)$$

(1) ഉം (2) ഉം താരതമ്യം ചെയ്താൽ നമുക്ക് ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്നു.

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \cos(90°-\theta) \\ \cos\theta &= \sin(90°-\theta) \\ \tan\theta &= \cot(90°-\theta) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \operatorname{cosec}\theta &= \sec(90°-\theta) \\ \sec\theta &= \operatorname{cosec}(90°-\theta) \\ \cot\theta &= \tan(90°-\theta) \end{aligned}$$

ഉദാഹരണം 6.7

(i) $\sin 74°$ യുടെ cosine രൂപം (ii) $\tan 12°$ യുടെ cotangent രൂപം (iii) $\operatorname{cosec} 39°$ യുടെ secant രൂപം

നിർദ്ധാരണം

(i) $\sin 74° = \sin(90° - 16°)$ (കാരണം, $90° - 16° = 74°$)

$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$ എന്ന രൂപത്തിലാണ് RHS

അതുകൊണ്ട് $\sin 74° = \cos 16°$

(ii) $\tan 12° = \tan(90° - 78°)$ (കാരണം, $12° = 90° - 78°$)

$\tan(90° - \theta) = \cot\theta$ എന്ന രൂപത്തിലാണ് RHS

അതുകൊണ്ട് $\tan 12° = \cot 78°$

Unit 6_TRIGONOMETRY.indd 232 28-01-2023 11:14:58

(iii) $\text{cosec}\,39° = \text{cosec}(90° - 51°)$ (കാരണം, $39° = 90° - 51°$)

RHS $\text{cosec}(90° - \theta) = \sec\theta$ എന്ന രൂപത്തിലാണ് RHS

അതുകൊണ്ട് $\text{cosec}\,39° = \sec 51°$

ഉദാഹരണം 6.8

മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കുക: (i) $\dfrac{\sin 49°}{\cos 41°}$ (ii) $\dfrac{\sec 63°}{\text{cosec}\,27°}$

നിർദ്ധാരണം

(i) $\dfrac{\sin 49°}{\cos 41°}$

$\sin 49° = \sin(90° - 41°) = \cos 41°$, കാരണം $49° + 41° = 90°$ (പൂരകം)

അതുകൊണ്ട് $\sin 49° = \cos 41°$ എന്ന് ആരോപിച്ചാൽ, $\dfrac{\cos 41°}{\cos 41°} = 1$ എന്നു ലഭിക്കുന്നു.

(ii) $\dfrac{\sec 63°}{\text{cosec}\,27°}$

$\sec 63° = \sec(90° - 27°) = \text{cosec}\,27°$, ഇവിടെ, $63°$ യും $27°$ യും പൂരകകോണുകളാണ്

അതിനാൽ $\dfrac{\sec 63°}{\text{cosec}\,27°} = \dfrac{\text{cosec}\,27°}{\text{cosec}\,27°} = 1$

ഉദാഹരണം 6.9

മൂല്യം കാണുക (i) $\tan 7° \tan 23° \tan 60° \tan 67° \tan 83°$

(ii) $\dfrac{\cos 35°}{\sin 55°} + \dfrac{\sin 12°}{\cos 78°} - \dfrac{\cos 18°}{\sin 72°}$

നിർദ്ധാരണം

(i) $\tan 7° \tan 23° \tan 60° \tan 67° \tan 83°$

$= \tan 7° \tan 83° \tan 23° \tan 67° \tan 60°$ (പൂരകകോണുകളെ ചേർക്കുക)

$= \tan 7° \tan(90° - 7°) \tan 23° \tan(90° - 23°) \tan 60°$

$= (\tan 7°.\cot 7°)(\tan 23°.\cot 23°) \tan 60°$

$= (1) \times (1) \times \tan 60°$

$= \tan 60° \quad = \sqrt{3}$

(ii) $\dfrac{\cos 35°}{\sin 55°} + \dfrac{\sin 12°}{\cos 78°} - \dfrac{\cos 18°}{\sin 72°}$

$= \dfrac{\cos(90° - 55°)}{\sin 55°} + \dfrac{\sin(90° - 78°)}{\cos 78°} - \dfrac{\cos(90° - 72°)}{\sin 72°}$ $\left[\begin{array}{l}\text{since} \\ \cos 35° = \cos(90° - 55°) \\ \sin 12° = \sin(90° - 78°) \\ \cos 18° = \cos(90° - 72°)\end{array}\right]$

Unit 6_TRIGONOMETRY.indd 233 28-01-2023 11:15:03

$$= \frac{\sin 55°}{\sin 55°} + \frac{\cos 78°}{\cos 78°} - \frac{\sin 72°}{\sin 72°}$$

$$= 1 + 1 - 1 = 1$$

ഉദാഹരണം 6.10

(i) $\text{cosec}\, A = \sec 34°$, ആയാൽ A യുടെ മൂല്യം കാണുക.

(ii) $\tan B = \cot 47°$, ആയാൽ B യുടെ മൂല്യം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

(i) നമുക്ക് അറിയാം $\text{cosec}\, A = \sec(90° - A)$

$\sec(90° - A) = \sec(34°)$

$90° - A = 34°$

$A = 90° - 34°$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു

$A = 56°$

(ii) നമുക്ക് അറിയാം $\tan B = \cot(90° - B)$

$\cot(90° - B) = \cot 47°$

$90° - B = 47°$

$B = 90° - 47°$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു

$B = 43°$

അഭ്യാസം 6.3

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള മൂല്യം കാണുക?

(i) $\left(\frac{\cos 47°}{\sin 43°}\right)^2 + \left(\frac{\sin 72°}{\cos 18°}\right)^2 - 2\cos^2 45°$

(ii) $\frac{\cos 70°}{\sin 20°} + \frac{\cos 59°}{\sin 31°} + \frac{\cos\theta}{\sin(90° - \theta)} - 8\cos^2 60°$

(iii) $\tan 15° \tan 30° \tan 45° \tan 60° \tan 75°$

(iv) $\frac{\cot\theta}{\tan(90° - \theta)} + \frac{\cos(90° - \theta)\tan\theta\sec(90° - \theta)}{\sin(90° - \theta)\cot(90° - \theta)\text{cosec}(90° - \theta)}$

ചിന്തിക്കൂ

(i) $\sin\theta$ യുടെ ഉച്ചതമ മൂല്യവും നീചതമ മൂല്യവും എഴുതുക?

(ii) $\cos\theta$ യുടെ ഉച്ചതമ മൂല്യവും നീചതമ മൂല്യവും എന്താണ്?

6.4 ത്രികോണമിതി പട്ടിക ഉപയോഗിക്കുന്ന രീതി

$0°, 30°, 45°, 60°, 90°$ എന്നീ കോണളവുകളോടുകൂടിയ ത്രികോണമിതി അംശബന്ധങ്ങൾ കണ്ടു പിടിക്കുന്നതിന് അറിയണം. എന്നാൽ ചില സന്ദർഭങ്ങളിൽ ന്യൂനകോണുകൾക്കായുള്ള ത്രികോണമിതി അംശബന്ധങ്ങളുടെ മൂല്യങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടതായി വരുന്നു.

ഒരു ഡിഗ്രിയെ $(1°)$ 60 മിനിറ്റുകളായും $(60')$ ഒരു മിനിറ്റ് $(1')$ നെ 60 സെക്കന്റ് $(60'')$ കളായും വിഭജിച്ചിട്ടുണ്ട്. അങ്ങനെ $1° = 60'$ കൂടാതെ $1' = 60''$.

Unit 6_TRIGONOMETRY.indd 234 28-01-2023 11:15:08

$0°$ യിൽ തുടങ്ങി $90°$ സ്ഥാനവും 60 മിനിറ്റ് വർഗ്ഗാന്തരാളത്തിൽ മൂല്യങ്ങൾ തരുന്ന ത്രികോണമിതി പട്ടിക കൃത്യമായി നാലു ദശാംശ സ്ഥാനങ്ങൾക്ക് വിലനൽകുന്നു.

ഇടത്തേയറ്റത്തെ കോളത്തിൽ 0 മുതൽ 90 വരെയുള്ള ഡിഗ്രികൾ ഉൾപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട് തുടർന്ന് $0'$, $6'$, $12'$, $18'$, $24'$, $30'$, $36'$, $42'$, $48'$ കൂടാതെ $54'$ എന്നീ തലക്കെട്ടുകളോടുകൂടിയ പത്തു കോളങ്ങളുണ്ട്.

മീൻഡിഫറൻസ് എന്ന തലക്കെട്ടിനു കീഴിൽ അഞ്ചുകോളങ്ങളുണ്ട് കൂടാതെ ഈ അഞ്ചു കോളങ്ങളുടെ തലക്കെട്ട് 1,2,3,4 കൂടാതെ 5 എന്നാകുന്നു.

ബാക്കിയുള്ള മിനിറ്റുകളുടെ സംഖ്യകളെ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന കോണുകൾക്ക് ($0'$, $6'$, $12'$, $18'$, $24'$, $30'$, $36'$, $42'$, $48'$ കൂടാതെ $54'$) ഇവ ഒഴിച്ചുവരുന്നവ മുറപ്രകാരമുള്ള ക്രമീകരണം മിൻഡിഫറൻസ് കോളത്തിൽ നിന്ന് ലഭിക്കുന്നതാണ്.

sine കൂടാതെ tangent എന്നിവയ്ക്ക് മീൻഡിഫറൻസ് കൂട്ടുകയും cosine ന്റെ കാര്യത്തിൽ കുറയ്ക്കുകയും ചെയ്യണം.

ഇപ്പോൾ ത്രികോണമിതി കോണുകളുടെ മൂല്യങ്ങൾ ക്രിയയിലൂടെ കണ്ടുപിടിക്കുന്നത് എങ്ങനെ എന്ന് ഉദാഹരണത്തിലൂടെ മനസ്സിലാക്കാം.

ഉദാഹരണം 6.11

$\sin 64°34'$ ന്റെ വില കാണുക?

നിർദ്ധാരണം

	$0'$	$6'$	$12'$	$18'$	$24'$	$30'$	$36'$	$42'$	$48'$	$54'$	Mean Difference				
	$0.0°$	$0.1°$	$0.2°$	$0.3°$	$0.4°$	$0.5°$	$0.6°$	$0.7°$	$0.8°$	$0.9°$	1	2	3	4	5
$64°$						0.9026								5	

$64°34' = 64°30' + 4'$ എന്ന് എഴുതുക

മുകളിലുള്ള പട്ടികയിൽ നിന്നും, $\sin 64°30' = 0.9026$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

$4'$ നുള്ള മീൻഡിഫറൻസ് = 5 (sine നോടൊപ്പം മീൻഡിഫറൻസ് കൂട്ടുക)

$\sin 64°34' = 0.9031$

ഉദാഹരണം 6.12

$\cos 19°59'$ ന്റെ വില കാണുക?

നിർദ്ധാരണം

	$0'$	$6'$	$12'$	$18'$	$24'$	$30'$	$36'$	$42'$	$48'$	$54'$	Mean Difference				
	$0.0°$	$0.1°$	$0.2°$	$0.3°$	$0.4°$	$0.5°$	$0.6°$	$0.7°$	$0.8°$	$0.9°$	1	2	3	4	5
$19°$										0.9403					5

$19°59' = 19°54' + 5'$ എന്ന് എഴുതുക

മുകളിലത്തെ പട്ടികയിൽ നിന്നും നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നത്

$\cos 19°54' = 0.9403$

$5'$ നുള്ള മീൻഡിഫറൻസ് = 5 (മീൻഡിഫറൻസിനെ cosine ൽ നിന്നും കുറയ്ക്കണം)

$\cos 19°59' = 0.9398$

Unit 6_TRIGONOMETRY.indd 235 28-01-2023 11:15:13

ഉദാഹരണം 6.13

$\tan 70°13'$ ന്റെ വില കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	Mean Difference				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
70°			2.7776								26				

$70°13' = 70°12' + 1'$ എന്നെഴുതാം

മുകളിൽ പറഞ്ഞിട്ടുള്ള പട്ടികയിൽ നിന്നും നമുക്ക് $\tan 70°12' = 2.7776$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു

$1'$ നുള്ള മീൻഡിഫറൻസ് = 26 (tan നിനോടൊപ്പം മീൻഡിഫറൻസ് കൂട്ടുക)

അതായത് $\tan 70°13' = 2.7802$

ഉദാഹരണം 6.14

താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയുടെ മൂല്യം കാണുക?

(i) $\sin 38°36' + \tan 12°12'$ (ii) $\tan 60°25' - \cos 49°20'$

നിർദ്ധാരണം

(i) $\sin 38°36' + \tan 12°12'$

$\sin 38°36' = 0.6239$

$\tan 12°12' = 0.2162$

$\sin 38°36' + \tan 12°12' = 0.8401$

(ii) $\tan 60°25' - \cos 49°20'$

$\tan 60°25' = 1.7603 + 0.0012 = 1.7615$

$\cos 49°20' = 0.6521 - 0.0004 = 0.6517$

$\tan 60°25' - \cos 49°20' = 1.1098$

ഉദാഹരണം 6.15

θ യുടെ മൂല്യം കാണുക

(i) $\sin\theta = 0.9858$ (ii) $\cos\theta = 0.7656$ \

നിർദ്ധാരണം

(i) $\sin\theta = 0.9858 = 0.9857 + 0.0001$

sines പട്ടികയിൽ നിന്ന് $0.9857 = 80°18'$

1 നുള്ള മീൻഡിഫറൻസ് = $2'$

$0.9858 = 80°20'$

$\sin\theta = 0.9858 = \sin 80°20'$

$\theta = 80°20'$

(iii) $\cos\theta = 0.7656$

$= 0.7660 - 0.0004$

natural cosine പട്ടികയിൽ നിന്നും

$0.7660 = 40°0'$

4 നുള്ള മീൻഡിഫറൻസ് = $2'$

$0.7656 = 40°2'$

$\cos\theta = 0.7656 = \cos 40°2'$

$\theta = 40°2'$

Unit 6_TRIGONOMETRY.indd 236 28-01-2023 11:15:21

ഉദാഹരണം 6.16 ഒരു സമകോണ ത്രികോണത്തിന്റെ കർണ്ണ വശം $5cm$ ഉം ഒരു ന്യൂന കോണിന്റെ അളവ് $48°30'$ ഉം ആണ്. വിസ്തീർണ്ണം കാണുക?

നിർദ്ധാരണം

ചിത്രത്തിൽ നിന്നും

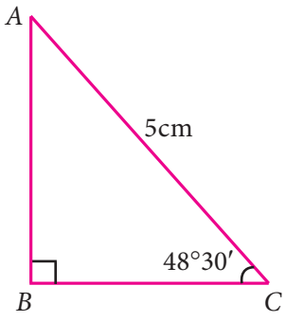
$$\sin\theta = \frac{AB}{AC} \qquad \cos\theta = \frac{BC}{AC}$$

$$\sin 48°30' = \frac{AB}{5} \qquad \cos 48°30' = \frac{BC}{5}$$

$$0.7490 = \frac{AB}{5} \qquad 0.6626 = \frac{BC}{5}$$

$$5 \times 0.7490 = AB \qquad 0.6626 \times 5 = BC$$

$$AB = 3.7450\ cm \qquad BC = 3.313\ cm$$



ചിത്രം. 3.17

സമകോണ ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം. $= \frac{1}{2}bh$

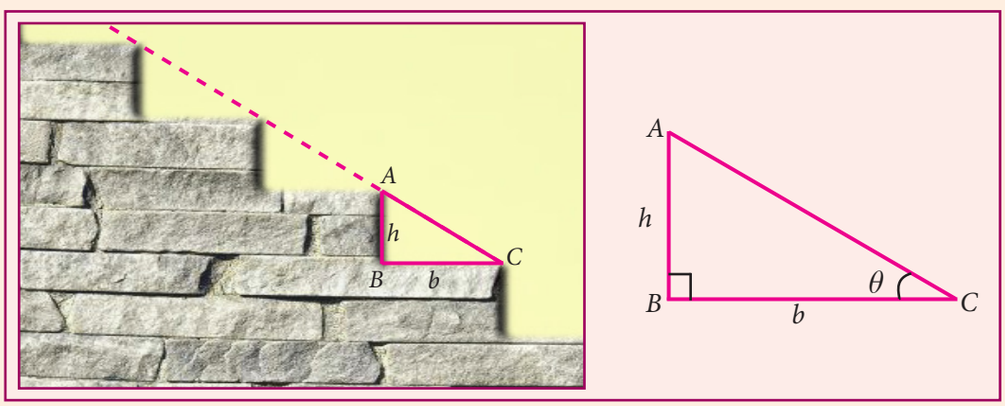
$$= \frac{1}{2} \times BC \times AB$$

$$= \frac{1}{2} \times 3.3130 \times 3.7450$$

$$= 1.6565 \times 3.7450 \quad = 6.2035925\ cm^2$$

പ്രവർത്തി - 4

നിങ്ങളുടെ വീട്ടിലെ പടികളെ നിരീക്ഷിക്കുക. അവയിൽ ഒരു പടിയുടെ നീളവും വീതിയും അളക്കുക. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ചിത്രലേതുപോലെ ആ പടികളുടെ കോണളവുകൾ പരിശോധിക്കുക.



(i) പടികളുടെ കോണളവുകളുടെ വ്യതിയാനങ്ങളെയും കൂടാതെ ഉയരം, വീതി എന്നിവയെയും പരിശോധിച്ച് നിരീക്ഷണങ്ങളെ ചർച്ചചെയ്യുക.

(ii) ചില സമയത്ത് ചില പടികൾ ഒരേ ഉയരത്തിൽ അല്ലാതിരിക്കും. അത്തരം പടികളുടെ കോണളവുകളുടെ വ്യതിയാനവും കൂടാതെ ഉയരം, വീതി എന്നിവ പരിശോധിച്ച് ചർച്ച ചെയ്യുക.

Unit 6_TRIGONOMETRY.indd 237 28-01-2023 11:15:25

അഭ്യാസം 6.4

1. താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയുടെ മൂല്യം കാണുക?

   (i) $\sin 49°$ (ii) $\cos 74°39'$ (iii) $\tan 54°26'$ (iv) $\sin 21°21'$ (v) $\cos 33°53'$ (vi) $\tan 70°17'$

2. θ യുടെ വില കാണുക?

   (i) $\sin\theta = 0.9975$ (ii) $\cos\theta = 0.6763$ (iii) $\tan\theta = 0.0720$

   (iv) $\cos\theta = 0.0410$ (v) $\tan\theta = 7.5958$

3. താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയുടെ മൂല്യം കാണുക?

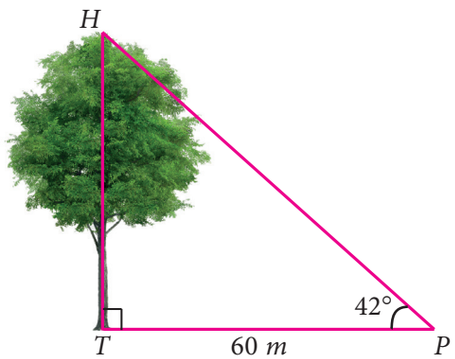
   (i) $\sin 65°39' + \cos 24°57' + \tan 10°10'$

   (ii) $\tan 70°58' + \cos 15°26' - \sin 84°59'$

4. കർണ്ണവശം $10cm$ ഉം ഒരു ന്യൂന്യകോൺ $24°24'$ അളവുകൾ ഉള്ള ഒരു സമകോണത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം എന്ത്?

5. $5m$ നീളമുള്ള ഒരു ഏണി തറയുമായി ചേർന്ന് കോൺ രൂപീകൃതമാകുന്നു. ഏണിയുടെ ഒരഗ്രം ചുവരിൽ നിന്നും $4m$ അകലെയും മറ്റേ അഗ്രം ചുമരിന്റെ മുകൾ ഭാഗത്തുമാണ് കോണളവ് കാണുക?

6. തന്നിട്ടുള്ള ചിത്രത്തിൽ ലംബമായ ഒരു വൃക്ഷത്തിന്റെ ഉയരം HT ആകുന്നു. P എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്നും വൃക്ഷത്തിന്റെ മുകൾഭാഗം വരെ കോണിന് വ്യതിയാനം സംഭവിക്കുന്നത് മൂലം $42°$ കോൺ രൂപികൃതമാവുകയും ചുവടറ്റം വരെയുള്ള ദൂരം $60\,m$ ഉം ആകുന്നു. വൃക്ഷത്തിന്റെ ഉയരം കാണുക.



അഭ്യാസം 6.5

ശരിയുത്തരം തെരഞ്ഞെടുത്ത് എഴുതുക

1. $\sin 30° = x$ ഉം $\cos 60° = y$ ഉം ആണെങ്കിൽ $x^2 + y^2$ എന്നത് എന്താകുന്നു.

   (1) $\frac{1}{2}$ (2) 0 (3) $\sin 90°$ (4) $\cos 90°$

2. $\tan\theta = \cot 37°$, ആയാൽ θ യുടെ വില എന്ത്?

   (1) 37° (2) 53° (3) 90° (4) 1°

3. $\tan 72°.\tan 18°$ യുടെ വില?

   (1) 0 (2) 1 (3) 18° (4) 72°

4. $\frac{2\tan 30°}{1-\tan^2 30°}$ യുടെ വില?

   (1) $\cos 60°$ (2) $\sin 60°$ (3) $\tan 60°$ (4) $\sin 30°$

C61M3

Unit 6_TRIGONOMETRY.indd 238 28-01-2023 11:15:31

5. $2\sin 2\theta = \sqrt{3}$, ആയാൽ θ യുടെ മൂല്യം എന്ത്?

(1) 90° (2) 30° (3) 45° (4) 60°

6. $3\sin 70°\sec 20° + 2\sin 49°\sec 51°$ യുടെ വില?

(1) 2 (2) 3 (3) 5 (4) 6

7. $\dfrac{1-\tan^2 45°}{1+\tan^2 45°}$ യുടെ വില

(1) 2 (2) 1 (3) 0 (4) $\dfrac{1}{2}$

8. $\text{cosec}(70°+\theta) - \sec(20°-\theta) + \tan(65°+\theta) - \cot(25°-\theta)$ യുടെ വില

(1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 3

9. $\tan 1°.\tan 2°.\tan 3°...\tan 89°$ യുടെ വില

(1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

10. $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\cos\beta = \dfrac{1}{2}$, ആണെങ്കിൽ $\alpha+\beta$ യുടെ മൂല്യം?

(1) 0° (2) 90° (3) 30° (4) 60°

ഓർമ്മിക്കാനുള്ള വസ്തുതകൾ

- ത്രികോണമിതി അംശബന്ധങ്ങൾ

$\sin\theta = \dfrac{\text{എതിർവശം}}{\text{കർണ്ണം}}$	$\text{cosec}\,\theta = \dfrac{\text{കർണ്ണം}}{\text{എതിർവശം}}$
$\cos\theta = \dfrac{\text{സമീപവശം}}{\text{കർണ്ണം}}$	$\sec\theta = \dfrac{\text{കർണ്ണം}}{\text{സമീപവശം}}$
$\tan\theta = \dfrac{\text{എതിർവശം}}{\text{സമീപവശം}}$	$\cot\theta = \dfrac{\text{സമീപവശം}}{\text{എതിർവശം}}$

- വ്യൂൽക്രമ ത്രികോണമിതി അംശബന്ധങ്ങൾ

$\sin\theta = \dfrac{1}{\text{cosec}\,\theta}$ $\quad \cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta}$ $\quad \tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta}$

$\text{cosec}\,\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$ $\quad \sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$ $\quad \cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$

- പൂരകകോണുകൾ

$\sin\theta = \cos(90°-\theta)$ $\quad \text{cosec}\,\theta = \sec(90°-\theta)$

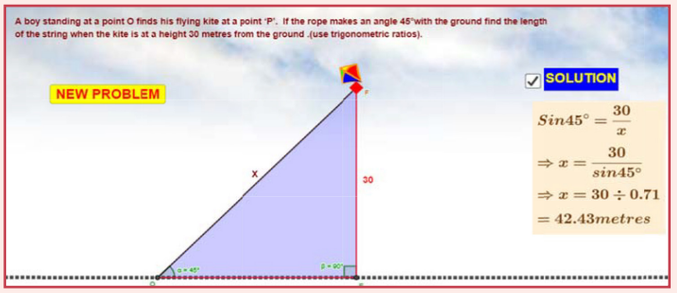
$\cos\theta = \sin(90°-\theta)$ $\quad \sec\theta = \text{cosec}(90°-\theta)$

$\tan\theta = \cot(90°-\theta)$ $\quad \cot\theta = \tan(90°-\theta)$

Unit 6_TRIGONOMETRY.indd 239 28-01-2023 11:15:34

ICT കോർണർ

അവസാനം ലഭ്യമാകുന്ന ചിത്രം



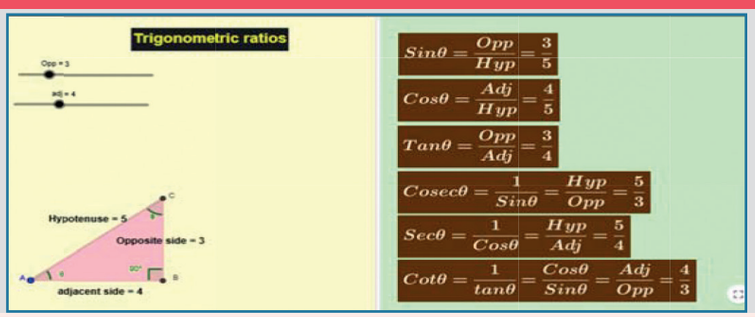
ഘട്ടം – 1

തുറന്ന് URL ടൈപ്പ് ചെയ്യുകയോ QR code scan ചെയ്യുക. GeoGebra എന്ന പുറത്തിലെ ത്രികോണമിതി (Trigonometry) തുറക്കും. അവിടെ ത്രികോണമിതി അംശബന്ധം, പൂരകകോണുകൾ അല്ലെങ്കിൽ പട്ടം ചോദ്യങ്ങൾ ഇങ്ങനെ മൂന്ന് ഹെഡ്ഡിങ്സ് കാണാൻ സാധിക്കും.

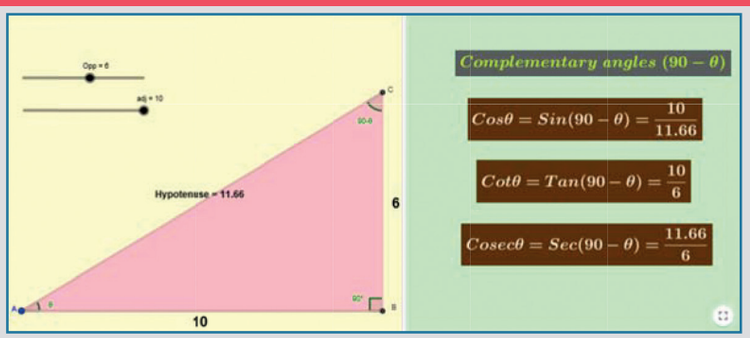
ഘട്ടം - 2

തുടർന്ന് ചലിപ്പിക്കുമ്പോൾ അംശബന്ധങ്ങളും മൂല്യങ്ങളും മാറ്റുന്നതിന് സാധിക്കും. അഭ്യാസം (ചോദ്യങ്ങൾ) കൊടുക്കുന്നതിനും അതിനെ പരിശോധന ചെയ്യുന്നതിനും ഇതിലൂടെ സാധിക്കും. kite ചോദ്യങ്ങൾക്കായി "NEW PROBLEM" Click ചെയ്യുക തുടർന്ന് ചോദ്യങ്ങൾ മാറ്റുന്നതിനും ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിനും സാധ്യമാണ്. Check box - ൽ Click ചെയ്ത് നിങ്ങളുടെ ഉത്തരം പരിശോധിക്കാം.

ഘട്ടം 1



ഘട്ടം 2



Browse in the link

Trigonometry: https://ggbm.at/hkwnccr6 or Scan the QR Code.

Unit 6_TRIGONOMETRY.indd 240 28-01-2023 11:15:34

NATURAL SINES

Degree	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	Mean Difference				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
0	0.0000	0.0017	0.0035	0.0052	0.0070	0.0087	0.0105	0.0122	0.0140	0.0157	3	6	9	12	15
1	0.0175	0.0192	0.0209	0.0227	0.0244	0.0262	0.0279	0.0297	0.0314	0.0332	3	6	9	12	15
2	0.0349	0.0366	0.0384	0.0401	0.0419	0.0436	0.0454	0.0471	0.0488	0.0506	3	6	9	12	15
3	0.0523	0.0541	0.0558	0.0576	0.0593	0.0610	0.0628	0.0645	0.0663	0.0680	3	6	9	12	15
4	0.0698	0.0715	0.0732	0.0750	0.0767	0.0785	0.0802	0.0819	0.0837	0.0854	3	6	9	12	15
5	0.0872	0.0889	0.0906	0.0924	0.0941	0.0958	0.0976	0.0993	0.1011	0.1028	3	6	9	12	14
6	0.1045	0.1063	0.1080	0.1097	0.1115	0.1132	0.1149	0.1167	0.1184	0.1201	3	6	9	12	14
7	0.1219	0.1236	0.1253	0.1271	0.1288	0.1305	0.1323	0.1340	0.1357	0.1374	3	6	9	12	14
8	0.1392	0.1409	0.1426	0.1444	0.1461	0.1478	0.1495	0.1513	0.1530	0.1547	3	6	9	12	14
9	0.1564	0.1582	0.1599	0.1616	0.1633	0.1650	0.1668	0.1685	0.1702	0.1719	3	6	9	12	14
10	0.1736	0.1754	0.1771	0.1788	0.1805	0.1822	0.1840	0.1857	0.1874	0.1891	3	6	9	12	14
11	0.1908	0.1925	0.1942	0.1959	0.1977	0.1994	0.2011	0.2028	0.2045	0.2062	3	6	9	11	14
12	0.2079	0.2096	0.2113	0.2130	0.2147	0.2164	0.2181	0.2198	0.2215	0.2233	3	6	9	11	14
13	0.2250	0.2267	0.2284	0.2300	0.2317	0.2334	0.2351	0.2368	0.2385	0.2402	3	6	8	11	14
14	0.2419	0.2436	0.2453	0.2470	0.2487	0.2504	0.2521	0.2538	0.2554	0.2571	3	6	8	11	14
15	0.2588	0.2605	0.2622	0.2639	0.2656	0.2672	0.2689	0.2706	0.2723	0.2740	3	6	8	11	14
16	0.2756	0.2773	0.2790	0.2807	0.2823	0.2840	0.2857	0.2874	0.2890	0.2907	3	6	8	11	14
17	0.2924	0.2940	0.2957	0.2974	0.2990	0.3007	0.3024	0.3040	0.3057	0.3074	3	6	8	11	14
18	0.3090	0.3107	0.3123	0.3140	0.3156	0.3173	0.3190	0.3206	0.3223	0.3239	3	6	8	11	14
19	0.3256	0.3272	0.3289	0.3305	0.3322	0.3338	0.3355	0.3371	0.3387	0.3404	3	5	8	11	14
20	0.3420	0.3437	0.3453	0.3469	0.3486	0.3502	0.3518	0.3535	0.3551	0.3567	3	5	8	11	14
21	0.3584	0.3600	0.3616	0.3633	0.3649	0.3665	0.3681	0.3697	0.3714	0.3730	3	5	8	11	14
22	0.3746	0.3762	0.3778	0.3795	0.3811	0.3827	0.3843	0.3859	0.3875	0.3891	3	5	8	11	14
23	0.3907	0.3923	0.3939	0.3955	0.3971	0.3987	0.4003	0.4019	0.4035	0.4051	3	5	8	11	14
24	0.4067	0.4083	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4163	0.4179	0.4195	0.4210	3	5	8	11	13
25	0.4226	0.4242	0.4258	0.4274	0.4289	0.4305	0.4321	0.4337	0.4352	0.4368	3	5	8	11	13
26	0.4384	0.4399	0.4415	0.4431	0.4446	0.4462	0.4478	0.4493	0.4509	0.4524	3	5	8	10	13
27	0.4540	0.4555	0.4571	0.4586	0.4602	0.4617	0.4633	0.4648	0.4664	0.4679	3	5	8	10	13
28	0.4695	0.4710	0.4726	0.4741	0.4756	0.4772	0.4787	0.4802	0.4818	0.4833	3	5	8	10	13
29	0.4848	0.4863	0.4879	0.4894	0.4909	0.4924	0.4939	0.4955	0.4970	0.4985	3	5	8	10	13
30	0.5000	0.5015	0.5030	0.5045	0.5060	0.5075	0.5090	0.5105	0.5120	0.5135	3	5	8	10	13
31	0.5150	0.5165	0.5180	0.5195	0.5210	0.5225	0.5240	0.5255	0.5270	0.5284	2	5	7	10	12
32	0.5299	0.5314	0.5329	0.5344	0.5358	0.5373	0.5388	0.5402	0.5417	0.5432	2	5	7	10	12
33	0.5446	0.5461	0.5476	0.5490	0.5505	0.5519	0.5534	0.5548	0.5563	0.5577	2	5	7	10	12
34	0.5592	0.5606	0.5621	0.5635	0.5650	0.5664	0.5678	0.5693	0.5707	0.5721	2	5	7	10	12
35	0.5736	0.5750	0.5764	0.5779	0.5793	0.5807	0.5821	0.5835	0.5850	0.5864	2	5	7	10	12
36	0.5878	0.5892	0.5906	0.5920	0.5934	0.5948	0.5962	0.5976	0.5990	0.6004	2	5	7	9	12
37	0.6018	0.6032	0.6046	0.6060	0.6074	0.6088	0.6101	0.6115	0.6129	0.6143	2	5	7	9	12
38	0.6157	0.6170	0.6184	0.6198	0.6211	0.6225	0.6239	0.6252	0.6266	0.6280	2	5	7	9	11
39	0.6293	0.6307	0.6320	0.6334	0.6347	0.6361	0.6374	0.6388	0.6401	0.6414	2	4	7	9	11
40	0.6428	0.6441	0.6455	0.6468	0.6481	0.6494	0.6508	0.6521	0.6534	0.6547	2	4	7	9	11
41	0.6561	0.6574	0.6587	0.6600	0.6613	0.6626	0.6639	0.6652	0.6665	0.6678	2	4	7	9	11
42	0.6691	0.6704	0.6717	0.6730	0.6743	0.6756	0.6769	0.6782	0.6794	0.6807	2	4	6	9	11
43	0.6820	0.6833	0.6845	0.6858	0.6871	0.6884	0.6896	0.6909	0.6921	0.6934	2	4	6	8	11
44	0.6947	0.6959	0.6972	0.6984	0.6997	0.7009	0.7022	0.7034	0.7046	0.7059	2	4	6	8	10

Unit 6_TRIGONOMETRY.indd 241 28-01-2023 11:15:35

NATURAL SINES

Degree	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	Mean Difference				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
45	0.7071	0.7083	0.7096	0.7108	0.7120	0.7133	0.7145	0.7157	0.7169	0.7181	2	4	6	8	10
46	0.7193	0.7206	0.7218	0.7230	0.7242	0.7254	0.7266	0.7278	0.7290	0.7302	2	4	6	8	10
47	0.7314	0.7325	0.7337	0.7349	0.7361	0.7373	0.7385	0.7396	0.7408	0.7420	2	4	6	8	10
48	0.7431	0.7443	0.7455	0.7466	0.7478	0.7490	0.7501	0.7513	0.7524	0.7536	2	4	6	8	10
49	0.7547	0.7559	0.7570	0.7581	0.7593	0.7604	0.7615	0.7627	0.7638	0.7649	2	4	6	8	9
50	0.7660	0.7672	0.7683	0.7694	0.7705	0.7716	0.7727	0.7738	0.7749	0.7760	2	4	6	7	9
51	0.7771	0.7782	0.7793	0.7804	0.7815	0.7826	0.7837	0.7848	0.7859	0.7869	2	4	5	7	9
52	0.7880	0.7891	0.7902	0.7912	0.7923	0.7934	0.7944	0.7955	0.7965	0.7976	2	4	5	7	9
53	0.7986	0.7997	0.8007	0.8018	0.8028	0.8039	0.8049	0.8059	0.8070	0.8080	2	3	5	7	9
54	0.8090	0.8100	0.8111	0.8121	0.8131	0.8141	0.8151	0.8161	0.8171	0.8181	2	3	5	7	8
55	0.8192	0.8202	0.8211	0.8221	0.8231	0.8241	0.8251	0.8261	0.8271	0.8281	2	3	5	7	8
56	0.8290	0.8300	0.8310	0.8320	0.8329	0.8339	0.8348	0.8358	0.8368	0.8377	2	3	5	6	8
57	0.8387	0.8396	0.8406	0.8415	0.8425	0.8434	0.8443	0.8453	0.8462	0.8471	2	3	5	6	8
58	0.8480	0.8490	0.8499	0.8508	0.8517	0.8526	0.8536	0.8545	0.8554	0.8563	2	3	5	6	8
59	0.8572	0.8581	0.8590	0.8599	0.8607	0.8616	0.8625	0.8634	0.8643	0.8652	1	3	4	6	7
60	0.8660	0.8669	0.8678	0.8686	0.8695	0.8704	0.8712	0.8721	0.8729	0.8738	1	3	4	6	7
61	0.8746	0.8755	0.8763	0.8771	0.8780	0.8788	0.8796	0.8805	0.8813	0.8821	1	3	4	6	7
62	0.8829	0.8838	0.8846	0.8854	0.8862	0.8870	0.8878	0.8886	0.8894	0.8902	1	3	4	5	7
63	0.8910	0.8918	0.8926	0.8934	0.8942	0.8949	0.8957	0.8965	0.8973	0.8980	1	3	4	5	6
64	0.8988	0.8996	0.9003	0.9011	0.9018	0.9026	0.9033	0.9041	0.9048	0.9056	1	3	4	5	6
65	0.9063	0.9070	0.9078	0.9085	0.9092	0.9100	0.9107	0.9114	0.9121	0.9128	1	2	4	5	6
66	0.9135	0.9143	0.9150	0.9157	0.9164	0.9171	0.9178	0.9184	0.9191	0.9198	1	2	3	5	6
67	0.9205	0.9212	0.9219	0.9225	0.9232	0.9239	0.9245	0.9252	0.9259	0.9265	1	2	3	4	6
68	0.9272	0.9278	0.9285	0.9291	0.9298	0.9304	0.9311	0.9317	0.9323	0.9330	1	2	3	4	5
69	0.9336	0.9342	0.9348	0.9354	0.9361	0.9367	0.9373	0.9379	0.9385	0.9391	1	2	3	4	5
70	0.9397	0.9403	0.9409	0.9415	0.9421	0.9426	0.9432	0.9438	0.9444	0.9449	1	2	3	4	5
71	0.9455	0.9461	0.9466	0.9472	0.9478	0.9483	0.9489	0.9494	0.9500	0.9505	1	2	3	4	5
72	0.9511	0.9516	0.9521	0.9527	0.9532	0.9537	0.9542	0.9548	0.9553	0.9558	1	2	3	3	4
73	0.9563	0.9568	0.9573	0.9578	0.9583	0.9588	0.9593	0.9598	0.9603	0.9608	1	2	2	3	4
74	0.9613	0.9617	0.9622	0.9627	0.9632	0.9636	0.9641	0.9646	0.9650	0.9655	1	2	2	3	4
75	0.9659	0.9664	0.9668	0.9673	0.9677	0.9681	0.9686	0.9690	0.9694	0.9699	1	1	2	3	4
76	0.9703	0.9707	0.9711	0.9715	0.9720	0.9724	0.9728	0.9732	0.9736	0.9740	1	1	2	3	3
77	0.9744	0.9748	0.9751	0.9755	0.9759	0.9763	0.9767	0.9770	0.9774	0.9778	1	1	2	3	3
78	0.9781	0.9785	0.9789	0.9792	0.9796	0.9799	0.9803	0.9806	0.9810	0.9813	1	1	2	2	3
79	0.9816	0.9820	0.9823	0.9826	0.9829	0.9833	0.9836	0.9839	0.9842	0.9845	1	1	2	2	3
80	0.9848	0.9851	0.9854	0.9857	0.9860	0.9863	0.9866	0.9869	0.9871	0.9874	0	1	1	2	2
81	0.9877	0.9880	0.9882	0.9885	0.9888	0.9890	0.9893	0.9895	0.9898	0.9900	0	1	1	2	2
82	0.9903	0.9905	0.9907	0.9910	0.9912	0.9914	0.9917	0.9919	0.9921	0.9923	0	1	1	2	2
83	0.9925	0.9928	0.9930	0.9932	0.9934	0.9936	0.9938	0.9940	0.9942	0.9943	0	1	1	1	2
84	0.9945	0.9947	0.9949	0.9951	0.9952	0.9954	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0	1	1	1	2
85	0.9962	0.9963	0.9965	0.9966	0.9968	0.9969	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974	0	0	1	1	1
86	0.9976	0.9977	0.9978	0.9979	0.9980	0.9981	0.9982	0.9983	0.9984	0.9985	0	0	1	1	1
87	0.9986	0.9987	0.9988	0.9989	0.9990	0.9990	0.9991	0.9992	0.9993	0.9993	0	0	0	1	1
88	0.9994	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998	0.9998	0	0	0	0	0
89	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0	0	0	0	0

Unit 6_TRIGONOMETRY.indd 242 28-01-2023 11:15:36

NATURAL COSINES

(Numbers in mean difference columns to be subtracted, not added)

Degree	0´	6´	12´	18´	24´	30´	36´	42´	48´	54´	Mean Difference				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0	0	0	0	0
1	0.9998	0.9998	0.9998	0.9997	0.9997	0.9997	0.9996	0.9996	0.9995	0.9995	0	0	0	0	0
2	0.9994	0.9993	0.9993	0.9992	0.9991	0.9990	0.9990	0.9989	0.9988	0.9987	0	0	0	1	1
3	0.9986	0.9985	0.9984	0.9983	0.9982	0.9981	0.9980	0.9979	0.9978	0.9977	0	0	1	1	1
4	0.9976	0.9974	0.9973	0.9972	0.9971	0.9969	0.9968	0.9966	0.9965	0.9963	0	0	1	1	1
5	0.9962	0.9960	0.9959	0.9957	0.9956	0.9954	0.9952	0.9951	0.9949	0.9947	0	1	1	1	2
6	0.9945	0.9943	0.9942	0.9940	0.9938	0.9936	0.9934	0.9932	0.9930	0.9928	0	1	1	1	2
7	0.9925	0.9923	0.9921	0.9919	0.9917	0.9914	0.9912	0.9910	0.9907	0.9905	0	1	1	2	2
8	0.9903	0.9900	0.9898	0.9895	0.9893	0.9890	0.9888	0.9885	0.9882	0.9880	0	1	1	2	2
9	0.9877	0.9874	0.9871	0.9869	0.9866	0.9863	0.9860	0.9857	0.9854	0.9851	0	1	1	2	2
10	0.9848	0.9845	0.9842	0.9839	0.9836	0.9833	0.9829	0.9826	0.9823	0.9820	1	1	2	2	3
11	0.9816	0.9813	0.9810	0.9806	0.9803	0.9799	0.9796	0.9792	0.9789	0.9785	1	1	2	2	3
12	0.9781	0.9778	0.9774	0.9770	0.9767	0.9763	0.9759	0.9755	0.9751	0.9748	1	1	2	3	3
13	0.9744	0.9740	0.9736	0.9732	0.9728	0.9724	0.9720	0.9715	0.9711	0.9707	1	1	2	3	3
14	0.9703	0.9699	0.9694	0.9690	0.9686	0.9681	0.9677	0.9673	0.9668	0.9664	1	1	2	3	4
15	0.9659	0.9655	0.9650	0.9646	0.9641	0.9636	0.9632	0.9627	0.9622	0.9617	1	2	2	3	4
16	0.9613	0.9608	0.9603	0.9598	0.9593	0.9588	0.9583	0.9578	0.9573	0.9568	1	2	2	3	4
17	0.9563	0.9558	0.9553	0.9548	0.9542	0.9537	0.9532	0.9527	0.9521	0.9516	1	2	3	3	4
18	0.9511	0.9505	0.9500	0.9494	0.9489	0.9483	0.9478	0.9472	0.9466	0.9461	1	2	3	4	5
19	0.9455	0.9449	0.9444	0.9438	0.9432	0.9426	0.9421	0.9415	0.9409	0.9403	1	2	3	4	5
20	0.9397	0.9391	0.9385	0.9379	0.9373	0.9367	0.9361	0.9354	0.9348	0.9342	1	2	3	4	5
21	0.9336	0.9330	0.9323	0.9317	0.9311	0.9304	0.9298	0.9291	0.9285	0.9278	1	2	3	4	5
22	0.9272	0.9265	0.9259	0.9252	0.9245	0.9239	0.9232	0.9225	0.9219	0.9212	1	2	3	4	6
23	0.9205	0.9198	0.9191	0.9184	0.9178	0.9171	0.9164	0.9157	0.9150	0.9143	1	2	3	5	6
24	0.9135	0.9128	0.9121	0.9114	0.9107	0.9100	0.9092	0.9085	0.9078	0.9070	1	2	4	5	6
25	0.9063	0.9056	0.9048	0.9041	0.9033	0.9026	0.9018	0.9011	0.9003	0.8996	1	3	4	5	6
26	0.8988	0.8980	0.8973	0.8965	0.8957	0.8949	0.8942	0.8934	0.8926	0.8918	1	3	4	5	6
27	0.8910	0.8902	0.8894	0.8886	0.8878	0.8870	0.8862	0.8854	0.8846	0.8838	1	3	4	5	7
28	0.8829	0.8821	0.8813	0.8805	0.8796	0.8788	0.8780	0.8771	0.8763	0.8755	1	3	4	6	7
29	0.8746	0.8738	0.8729	0.8721	0.8712	0.8704	0.8695	0.8686	0.8678	0.8669	1	3	4	6	7
30	0.8660	0.8652	0.8643	0.8634	0.8625	0.8616	0.8607	0.8599	0.8590	0.8581	1	3	4	6	7
31	0.8572	0.8563	0.8554	0.8545	0.8536	0.8526	0.8517	0.8508	0.8499	0.8490	2	3	5	6	8
32	0.8480	0.8471	0.8462	0.8453	0.8443	0.8434	0.8425	0.8415	0.8406	0.8396	2	3	5	6	8
33	0.8387	0.8377	0.8368	0.8358	0.8348	0.8339	0.8329	0.8320	0.8310	0.8300	2	3	5	6	8
34	0.8290	0.8281	0.8271	0.8261	0.8251	0.8241	0.8231	0.8221	0.8211	0.8202	2	3	5	7	8
35	0.8192	0.8181	0.8171	0.8161	0.8151	0.8141	0.8131	0.8121	0.8111	0.8100	2	3	5	7	8
36	0.8090	0.8080	0.8070	0.8059	0.8049	0.8039	0.8028	0.8018	0.8007	0.7997	2	3	5	7	9
37	0.7986	0.7976	0.7965	0.7955	0.7944	0.7934	0.7923	0.7912	0.7902	0.7891	2	4	5	7	9
38	0.7880	0.7869	0.7859	0.7848	0.7837	0.7826	0.7815	0.7804	0.7793	0.7782	2	4	5	7	9
39	0.7771	0.7760	0.7749	0.7738	0.7727	0.7716	0.7705	0.7694	0.7683	0.7672	2	4	6	7	9
40	0.7660	0.7649	0.7638	0.7627	0.7615	0.7604	0.7593	0.7581	0.7570	0.7559	2	4	6	8	9
41	0.7547	0.7536	0.7524	0.7513	0.7501	0.7490	0.7478	0.7466	0.7455	0.7443	2	4	6	8	10
42	0.7431	0.7420	0.7408	0.7396	0.7385	0.7373	0.7361	0.7349	0.7337	0.7325	2	4	6	8	10
43	0.7314	0.7302	0.7290	0.7278	0.7266	0.7254	0.7242	0.7230	0.7218	0.7206	2	4	6	8	10
44	0.7193	0.7181	0.7169	0.7157	0.7145	0.7133	0.7120	0.7108	0.7096	0.7083	2	4	6	8	10

Unit 6_TRIGONOMETRY.indd 243 28-01-2023 11:15:37

NATURAL COSINES

(Numbers in mean difference columns to be subtracted, not added)

Degree	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	Mean Difference				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
45	0.7071	0.7059	0.7046	0.7034	0.7022	0.7009	0.6997	0.6984	0.6972	0.6959	2	4	6	8	10
46	0.6947	0.6934	0.6921	0.6909	0.6896	0.6884	0.6871	0.6858	0.6845	0.6833	2	4	6	8	11
47	0.6820	0.6807	0.6794	0.6782	0.6769	0.6756	0.6743	0.6730	0.6717	0.6704	2	4	6	9	11
48	0.6691	0.6678	0.6665	0.6652	0.6639	0.6626	0.6613	0.6600	0.6587	0.6574	2	4	7	9	11
49	0.6561	0.6547	0.6534	0.6521	0.6508	0.6494	0.6481	0.6468	0.6455	0.6441	2	4	7	9	11
50	0.6428	0.6414	0.6401	0.6388	0.6374	0.6361	0.6347	0.6334	0.6320	0.6307	2	4	7	9	11
51	0.6293	0.6280	0.6266	0.6252	0.6239	0.6225	0.6211	0.6198	0.6184	0.6170	2	5	7	9	11
52	0.6157	0.6143	0.6129	0.6115	0.6101	0.6088	0.6074	0.6060	0.6046	0.6032	2	5	7	9	12
53	0.6018	0.6004	0.5990	0.5976	0.5962	0.5948	0.5934	0.5920	0.5906	0.5892	2	5	7	9	12
54	0.5878	0.5864	0.5850	0.5835	0.5821	0.5807	0.5793	0.5779	0.5764	0.5750	2	5	7	9	12
55	0.5736	0.5721	0.5707	0.5693	0.5678	0.5664	0.5650	0.5635	0.5621	0.5606	2	5	7	10	12
56	0.5592	0.5577	0.5563	0.5548	0.5534	0.5519	0.5505	0.5490	0.5476	0.5461	2	5	7	10	12
57	0.5446	0.5432	0.5417	0.5402	0.5388	0.5373	0.5358	0.5344	0.5329	0.5314	2	5	7	10	12
58	0.5299	0.5284	0.5270	0.5255	0.5240	0.5225	0.5210	0.5195	0.5180	0.5165	2	5	7	10	12
59	0.5150	0.5135	0.5120	0.5105	0.5090	0.5075	0.5060	0.5045	0.5030	0.5015	3	5	8	10	13
60	0.5000	0.4985	0.4970	0.4955	0.4939	0.4924	0.4909	0.4894	0.4879	0.4863	3	5	8	10	13
61	0.4848	0.4833	0.4818	0.4802	0.4787	0.4772	0.4756	0.4741	0.4726	0.4710	3	5	8	10	13
62	0.4695	0.4679	0.4664	0.4648	0.4633	0.4617	0.4602	0.4586	0.4571	0.4555	3	5	8	10	13
63	0.4540	0.4524	0.4509	0.4493	0.4478	0.4462	0.4446	0.4431	0.4415	0.4399	3	5	8	10	13
64	0.4384	0.4368	0.4352	0.4337	0.4321	0.4305	0.4289	0.4274	0.4258	0.4242	3	5	8	11	13
65	0.4226	0.4210	0.4195	0.4179	0.4163	0.4147	0.4131	0.4115	0.4099	0.4083	3	5	8	11	13
66	0.4067	0.4051	0.4035	0.4019	0.4003	0.3987	0.3971	0.3955	0.3939	0.3923	3	5	8	11	14
67	0.3907	0.3891	0.3875	0.3859	0.3843	0.3827	0.3811	0.3795	0.3778	0.3762	3	5	8	11	14
68	0.3746	0.3730	0.3714	0.3697	0.3681	0.3665	0.3649	0.3633	0.3616	0.3600	3	5	8	11	14
69	0.3584	0.3567	0.3551	0.3535	0.3518	0.3502	0.3486	0.3469	0.3453	0.3437	3	5	8	11	14
70	0.3420	0.3404	0.3387	0.3371	0.3355	0.3338	0.3322	0.3305	0.3289	0.3272	3	5	8	11	14
71	0.3256	0.3239	0.3223	0.3206	0.3190	0.3173	0.3156	0.3140	0.3123	0.3107	3	6	8	11	14
72	0.3090	0.3074	0.3057	0.3040	0.3024	0.3007	0.2990	0.2974	0.2957	0.2940	3	6	8	11	14
73	0.2924	0.2907	0.2890	0.2874	0.2857	0.2840	0.2823	0.2807	0.2790	0.2773	3	6	8	11	14
74	0.2756	0.2740	0.2723	0.2706	0.2689	0.2672	0.2656	0.2639	0.2622	0.2605	3	6	8	11	14
75	0.2588	0.2571	0.2554	0.2538	0.2521	0.2504	0.2487	0.2470	0.2453	0.2436	3	6	8	11	14
76	0.2419	0.2402	0.2385	0.2368	0.2351	0.2334	0.2317	0.2300	0.2284	0.2267	3	6	8	11	14
77	0.2250	0.2233	0.2215	0.2198	0.2181	0.2164	0.2147	0.2130	0.2113	0.2096	3	6	9	11	14
78	0.2079	0.2062	0.2045	0.2028	0.2011	0.1994	0.1977	0.1959	0.1942	0.1925	3	6	9	11	14
79	0.1908	0.1891	0.1874	0.1857	0.1840	0.1822	0.1805	0.1788	0.1771	0.1754	3	6	9	11	14
80	0.1736	0.1719	0.1702	0.1685	0.1668	0.1650	0.1633	0.1616	0.1599	0.1582	3	6	9	12	14
81	0.1564	0.1547	0.1530	0.1513	0.1495	0.1478	0.1461	0.1444	0.1426	0.1409	3	6	9	12	14
82	0.1392	0.1374	0.1357	0.1340	0.1323	0.1305	0.1288	0.1271	0.1253	0.1236	3	6	9	12	14
83	0.1219	0.1201	0.1184	0.1167	0.1149	0.1132	0.1115	0.1097	0.1080	0.1063	3	6	9	12	14
84	0.1045	0.1028	0.1011	0.0993	0.0976	0.0958	0.0941	0.0924	0.0906	0.0889	3	6	9	12	14
85	0.0872	0.0854	0.0837	0.0819	0.0802	0.0785	0.0767	0.0750	0.0732	0.0715	3	6	9	12	15
86	0.0698	0.0680	0.0663	0.0645	0.0628	0.0610	0.0593	0.0576	0.0558	0.0541	3	6	9	12	15
87	0.0523	0.0506	0.0488	0.0471	0.0454	0.0436	0.0419	0.0401	0.0384	0.0366	3	6	9	12	15
88	0.0349	0.0332	0.0314	0.0297	0.0279	0.0262	0.0244	0.0227	0.0209	0.0192	3	6	9	12	15
89	0.0175	0.0157	0.0140	0.0122	0.0105	0.0087	0.0070	0.0052	0.0035	0.0017	3	6	9	12	15

Unit 6_TRIGONOMETRY.indd 244 28-01-2023 11:15:38

NATURAL TANGENTS

Degree	0´	6´	12´	18´	24´	30´	36´	42´	48´	54´	Mean Difference				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
0	0.0000	0.0017	0.0035	0.0052	0.0070	0.0087	0.0105	0.0122	0.0140	0.0157	3	6	9	12	15
1	0.0175	0.0192	0.0209	0.0227	0.0244	0.0262	0.0279	0.0297	0.0314	0.0332	3	6	9	12	15
2	0.0349	0.0367	0.0384	0.0402	0.0419	0.0437	0.0454	0.0472	0.0489	0.0507	3	6	9	12	15
3	0.0524	0.0542	0.0559	0.0577	0.0594	0.0612	0.0629	0.0647	0.0664	0.0682	3	6	9	12	15
4	0.0699	0.0717	0.0734	0.0752	0.0769	0.0787	0.0805	0.0822	0.0840	0.0857	3	6	9	12	15
5	0.0875	0.0892	0.0910	0.0928	0.0945	0.0963	0.0981	0.0998	0.1016	0.1033	3	6	9	12	15
6	0.1051	0.1069	0.1086	0.1104	0.1122	0.1139	0.1157	0.1175	0.1192	0.1210	3	6	9	12	15
7	0.1228	0.1246	0.1263	0.1281	0.1299	0.1317	0.1334	0.1352	0.1370	0.1388	3	6	9	12	15
8	0.1405	0.1423	0.1441	0.1459	0.1477	0.1495	0.1512	0.1530	0.1548	0.1566	3	6	9	12	15
9	0.1584	0.1602	0.1620	0.1638	0.1655	0.1673	0.1691	0.1709	0.1727	0.1745	3	6	9	12	15
10	0.1763	0.1781	0.1799	0.1817	0.1835	0.1853	0.1871	0.1890	0.1908	0.1926	3	6	9	12	15
11	0.1944	0.1962	0.1980	0.1998	0.2016	0.2035	0.2053	0.2071	0.2089	0.2107	3	6	9	12	15
12	0.2126	0.2144	0.2162	0.2180	0.2199	0.2217	0.2235	0.2254	0.2272	0.2290	3	6	9	12	15
13	0.2309	0.2327	0.2345	0.2364	0.2382	0.2401	0.2419	0.2438	0.2456	0.2475	3	6	9	12	15
14	0.2493	0.2512	0.2530	0.2549	0.2568	0.2586	0.2605	0.2623	0.2642	0.2661	3	6	9	12	16
15	0.2679	0.2698	0.2717	0.2736	0.2754	0.2773	0.2792	0.2811	0.2830	0.2849	3	6	9	13	16
16	0.2867	0.2886	0.2905	0.2924	0.2943	0.2962	0.2981	0.3000	0.3019	0.3038	3	6	9	13	16
17	0.3057	0.3076	0.3096	0.3115	0.3134	0.3153	0.3172	0.3191	0.3211	0.3230	3	6	10	13	16
18	0.3249	0.3269	0.3288	0.3307	0.3327	0.3346	0.3365	0.3385	0.3404	0.3424	3	6	10	13	16
19	0.3443	0.3463	0.3482	0.3502	0.3522	0.3541	0.3561	0.3581	0.3600	0.3620	3	7	10	13	16
20	0.3640	0.3659	0.3679	0.3699	0.3719	0.3739	0.3759	0.3779	0.3799	0.3819	3	7	10	13	17
21	0.3839	0.3859	0.3879	0.3899	0.3919	0.3939	0.3959	0.3979	0.4000	0.4020	3	7	10	13	17
22	0.4040	0.4061	0.4081	0.4101	0.4122	0.4142	0.4163	0.4183	0.4204	0.4224	3	7	10	14	17
23	0.4245	0.4265	0.4286	0.4307	0.4327	0.4348	0.4369	0.4390	0.4411	0.4431	3	7	10	14	17
24	0.4452	0.4473	0.4494	0.4515	0.4536	0.4557	0.4578	0.4599	0.4621	0.4642	4	7	11	14	18
25	0.4663	0.4684	0.4706	0.4727	0.4748	0.4770	0.4791	0.4813	0.4834	0.4856	4	7	11	14	18
26	0.4877	0.4899	0.4921	0.4942	0.4964	0.4986	0.5008	0.5029	0.5051	0.5073	4	7	11	15	18
27	0.5095	0.5117	0.5139	0.5161	0.5184	0.5206	0.5228	0.5250	0.5272	0.5295	4	7	11	15	18
28	0.5317	0.5340	0.5362	0.5384	0.5407	0.5430	0.5452	0.5475	0.5498	0.5520	4	8	11	15	19
29	0.5543	0.5566	0.5589	0.5612	0.5635	0.5658	0.5681	0.5704	0.5727	0.5750	4	8	12	15	19
30	0.5774	0.5797	0.5820	0.5844	0.5867	0.5890	0.5914	0.5938	0.5961	0.5985	4	8	12	16	20
31	0.6009	0.6032	0.6056	0.6080	0.6104	0.6128	0.6152	0.6176	0.6200	0.6224	4	8	12	16	20
32	0.6249	0.6273	0.6297	0.6322	0.6346	0.6371	0.6395	0.6420	0.6445	0.6469	4	8	12	16	20
33	0.6494	0.6519	0.6544	0.6569	0.6594	0.6619	0.6644	0.6669	0.6694	0.6720	4	8	13	17	21
34	0.6745	0.6771	0.6796	0.6822	0.6847	0.6873	0.6899	0.6924	0.6950	0.6976	4	9	13	17	21
35	0.7002	0.7028	0.7054	0.7080	0.7107	0.7133	0.7159	0.7186	0.7212	0.7239	4	9	13	18	22
36	0.7265	0.7292	0.7319	0.7346	0.7373	0.7400	0.7427	0.7454	0.7481	0.7508	5	9	14	18	23
37	0.7536	0.7563	0.7590	0.7618	0.7646	0.7673	0.7701	0.7729	0.7757	0.7785	5	9	14	18	23
38	0.7813	0.7841	0.7869	0.7898	0.7926	0.7954	0.7983	0.8012	0.8040	0.8069	5	9	14	19	24
39	0.8098	0.8127	0.8156	0.8185	0.8214	0.8243	0.8273	0.8302	0.8332	0.8361	5	10	15	20	24
40	0.8391	0.8421	0.8451	0.8481	0.8511	0.8541	0.8571	0.8601	0.8632	0.8662	5	10	15	20	25
41	0.8693	0.8724	0.8754	0.8785	0.8816	0.8847	0.8878	0.8910	0.8941	0.8972	5	10	16	21	26
42	0.9004	0.9036	0.9067	0.9099	0.9131	0.9163	0.9195	0.9228	0.9260	0.9293	5	11	16	21	27
43	0.9325	0.9358	0.9391	0.9424	0.9457	0.9490	0.9523	0.9556	0.9590	0.9623	6	11	17	22	28
44	0.9657	0.9691	0.9725	0.9759	0.9793	0.9827	0.9861	0.9896	0.9930	0.9965	6	11	17	23	29

Unit 6_TRIGONOMETRY.indd 245 28-01-2023 11:15:39

NATURAL TANGENTS

Degree	0´	6´	12´	18´	24´	30´	36´	42´	48´	54´	Mean Difference				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
45	1.0000	1.0035	1.0070	1.0105	1.0141	1.0176	1.0212	1.0247	1.0283	1.0319	6	12	18	24	30
46	1.0355	1.0392	1.0428	1.0464	1.0501	1.0538	1.0575	1.0612	1.0649	1.0686	6	12	18	25	31
47	1.0724	1.0761	1.0799	1.0837	1.0875	1.0913	1.0951	1.0990	1.1028	1.1067	6	13	19	25	32
48	1.1106	1.1145	1.1184	1.1224	1.1263	1.1303	1.1343	1.1383	1.1423	1.1463	7	13	20	27	33
49	1.1504	1.1544	1.1585	1.1626	1.1667	1.1708	1.1750	1.1792	1.1833	1.1875	7	14	21	28	34
50	1.1918	1.1960	1.2002	1.2045	1.2088	1.2131	1.2174	1.2218	1.2261	1.2305	7	14	22	29	36
51	1.2349	1.2393	1.2437	1.2482	1.2527	1.2572	1.2617	1.2662	1.2708	1.2753	8	15	23	30	38
52	1.2799	1.2846	1.2892	1.2938	1.2985	1.3032	1.3079	1.3127	1.3175	1.3222	8	16	24	31	39
53	1.3270	1.3319	1.3367	1.3416	1.3465	1.3514	1.3564	1.3613	1.3663	1.3713	8	16	25	33	41
54	1.3764	1.3814	1.3865	1.3916	1.3968	1.4019	1.4071	1.4124	1.4176	1.4229	9	17	26	34	43
55	1.4281	1.4335	1.4388	1.4442	1.4496	1.4550	1.4605	1.4659	1.4715	1.4770	9	18	27	36	45
56	1.4826	1.4882	1.4938	1.4994	1.5051	1.5108	1.5166	1.5224	1.5282	1.5340	10	19	29	38	48
57	1.5399	1.5458	1.5517	1.5577	1.5637	1.5697	1.5757	1.5818	1.5880	1.5941	10	20	30	40	50
58	1.6003	1.6066	1.6128	1.6191	1.6255	1.6319	1.6383	1.6447	1.6512	1.6577	11	21	32	43	53
59	1.6643	1.6709	1.6775	1.6842	1.6909	1.6977	1.7045	1.7113	1.7182	1.7251	11	23	34	45	56
60	1.7321	1.7391	1.7461	1.7532	1.7603	1.7675	1.7747	1.7820	1.7893	1.7966	12	24	36	48	60
61	1.8040	1.8115	1.8190	1.8265	1.8341	1.8418	1.8495	1.8572	1.8650	1.8728	13	26	38	51	64
62	1.8807	1.8887	1.8967	1.9047	1.9128	1.9210	1.9292	1.9375	1.9458	1.9542	14	27	41	55	68
63	1.9626	1.9711	1.9797	1.9883	1.9970	2.0057	2.0145	2.0233	2.0323	2.0413	15	29	44	58	73
64	2.0503	2.0594	2.0686	2.0778	2.0872	2.0965	2.1060	2.1155	2.1251	2.1348	16	31	47	63	78
65	2.1445	2.1543	2.1642	2.1742	2.1842	2.1943	2.2045	2.2148	2.2251	2.2355	17	34	51	68	85
66	2.2460	2.2566	2.2673	2.2781	2.2889	2.2998	2.3109	2.3220	2.3332	2.3445	18	37	55	73	92
67	2.3559	2.3673	2.3789	2.3906	2.4023	2.4142	2.4262	2.4383	2.4504	2.4627	20	40	60	79	99
68	2.4751	2.4876	2.5002	2.5129	2.5257	2.5386	2.5517	2.5649	2.5782	2.5916	22	43	65	87	108
69	2.6051	2.6187	2.6325	2.6464	2.6605	2.6746	2.6889	2.7034	2.7179	2.7326	24	47	71	95	119
70	2.7475	2.7625	2.7776	2.7929	2.8083	2.8239	2.8397	2.8556	2.8716	2.8878	26	52	78	104	131
71	2.9042	2.9208	2.9375	2.9544	2.9714	2.9887	3.0061	3.0237	3.0415	3.0595	29	58	87	116	145
72	3.0777	3.0961	3.1146	3.1334	3.1524	3.1716	3.1910	3.2106	3.2305	3.2506	32	64	96	129	161
73	3.2709	3.2914	3.3122	3.3332	3.3544	3.3759	3.3977	3.4197	3.4420	3.4646	36	72	108	144	180
74	3.4874	3.5105	3.5339	3.5576	3.5816	3.6059	3.6305	3.6554	3.6806	3.7062	41	81	122	163	204
75	3.7321	3.7583	3.7848	3.8118	3.8391	3.8667	3.8947	3.9232	3.9520	3.9812	46	93	139	186	232
76	4.0108	4.0408	4.0713	4.1022	4.1335	4.1653	4.1976	4.2303	4.2635	4.2972	53	107	160	213	267
77	4.3315	4.3662	4.4015	4.4373	4.4737	4.5107	4.5483	4.5864	4.6252	4.6646					
78	4.7046	4.7453	4.7867	4.8288	4.8716	4.9152	4.9594	5.0045	5.0504	5.0970					
79	5.1446	5.1929	5.2422	5.2924	5.3435	5.3955	5.4486	5.5026	5.5578	5.6140					
80	5.6713	5.7297	5.7894	5.8502	5.9124	5.9758	6.0405	6.1066	6.1742	6.2432					
81	6.3138	6.3859	6.4596	6.5350	6.6122	6.6912	6.7720	6.8548	6.9395	7.0264					
82	7.1154	7.2066	7.3002	7.3962	7.4947	7.5958	7.6996	7.8062	7.9158	8.0285					
83	8.1443	8.2636	8.3863	8.5126	8.6427	8.7769	8.9152	9.0579	9.2052	9.3572					
84	9.5144	9.6768	9.8448	10.0187	10.1988	10.3854	10.5789	10.7797	10.9882	11.2048					
85	11.4301	11.6645	11.9087	12.1632	12.4288	12.7062	12.9962	13.2996	13.6174	13.9507					
86	14.3007	14.6685	15.0557	15.4638	15.8945	16.3499	16.8319	17.3432	17.8863	18.4645					
87	19.0811	19.7403	20.4465	21.2049	22.0217	22.9038	23.8593	24.8978	26.0307	27.2715					
88	28.6363	30.1446	31.8205	33.6935	35.8006	38.1885	40.9174	44.0661	47.7395	52.0807					
89	57.2900	63.6567	71.6151	81.8470	95.4895	114.5887	143.2371	190.9842	286.4777	572.9572					

Unit 6_TRIGONOMETRY.indd 246 28-01-2023 11:15:40

7



വിസ്താരകലനം

The most beautiful plane figure is the circle and the most beautiful solid figure is the sphere. - *Pythagoras.*



Heron
A.D (C.E) 10-75

അലക്സാണ്ഡ്രിയയിലെ ഹെറോൺ ഒരു ഗ്രീക്ക് ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞൻ ആണ് അദ്ദേഹം ഗണിതശാസ്ത്രം, ഊർജ്ജതന്ത്രം, യന്ത്രശാസ്ത്രം എന്നിവയെ കുറിച്ച് പുസ്തകം എഴുതിയിട്ടുണ്ട്. സമതലരൂപങ്ങളുടെയും ഘനരൂപങ്ങളുടെയും വിസ്തീർണ്ണം, വ്യാപ്തം എങ്ങനെ കണക്കാക്കുന്നത് എന്ന് ആ പുസ്തകത്തിൽ വിശദീകരിച്ചിരിക്കുന്നു. ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്ന് വശങ്ങൾ അറിയാമെങ്കിൽ അതിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കണ്ടു പിടിക്കുന്നതിനുള്ള സൂത്രം ഹെറോൺ രൂപകൽപ്പന ചെയ്തിട്ടുണ്ട്.

2AMOL

പഠനഫലങ്ങൾ

- ത്രികോണം, ചതുർഭുജം, എന്നിവയുടെ വിസ്തീർണ്ണം ഹെറോൺ സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കുന്നത് എങ്ങനെ എന്ന് പഠിക്കുന്നു.
- സമചതുരഘനിക, ദീർഘചതുരഘനിക എന്നിവയുടെ പാർശ്വതലവിസ്തീർണ്ണം(LSA), ആകെ ഉപരിതലവിസ്തീർണ്ണം(TSA)കണ്ടുപിടിക്കുന്നത് എങ്ങനെ എന്ന് പഠിക്കുന്നു.

7.1 മുഖവുര

വിവിധതരം ജ്യാമിതീയ രൂപങ്ങളുടെ വിസ്തീർണ്ണം, വ്യാപ്തം എന്നിവയെ കുറിച്ച് കൈകാര്യം ചെയ്യുന്ന ഗണിതശാസ്ത്രത്തിന്റെ ഒരു ശാഖയാണ് വിസ്താരകലനം. വാസ്തുവിദ്യ, വൈദ്യശാസ്ത്രം എന്നീ മേഖലകളിൽ വിസ്താരകലനം വളരെ അധികം ഉപയോഗപ്പെടുന്നു. ദൈനംദിന ജീവിതത്തിലെ ദ്വിമാന, ത്രിമാന രൂപങ്ങളുടെ ചുറ്റളവ് വിസ്തീർണ്ണം എന്നിവ കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് ഈ സൂത്രങ്ങൾ ഓരോരുത്തരും അറിഞ്ഞിരിക്കേണ്ടതാണ്. ഈ അദ്ധ്യായത്തിൽ ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം (ഹെറോൺ സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച്) കൂടാതെ സമചതുരഘനിക, ദീർഘചതുരഘനികകളുടെ പാർശ്വതലവിസ്തീർണ്ണം, വ്യാപ്തം എന്നിവയെക്കുറിച്ച് പ്രതിപാദിക്കുന്നു.

മുൻ ക്ലാസുകളിൽ വിവിധതരം രൂപങ്ങളെയും സമതലരൂപങ്ങളുടെ ആകൃതിയെ കുറിച്ച് പഠിച്ചിട്ടുള്ളത് ഓർക്കുന്നുണ്ടോ? താഴെ ഉള്ള പട്ടികകൾ അവയെക്കുറിച്ച് ഓർമ്മ പുതുക്കുന്നതിന് നമ്മെ സഹായിക്കുന്നു.

Unit 7_MENSURATION.indd 247 28-01-2023 11:49:20

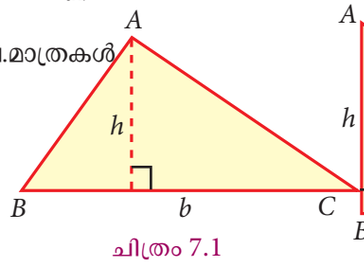
ഒരു അടഞ്ഞ രൂപത്തിന് (ചതുർഭുജം അഥവാ ത്രികോണം) ചുറ്റുമുള്ള അതിർത്തിയുടെ നീളത്തിനെ എന്തു പറയുന്നു? അതിർത്തിക്കുള്ളിലെ പ്രദേശത്തിന്റെ അളവിനെ എന്തു പറയുന്നു?

പൊതുവായി ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണത്തെ സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച് കണക്കാക്കുന്നു.

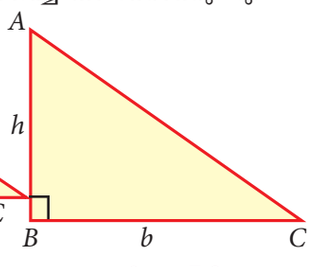
വിസ്തീർണ്ണം = $\frac{1}{2}$ × ആധാരം × ഉയരം ച.മാത്രകൾ

അതായത്, $A = \frac{1}{2} \times b \times h$ ച.മാത്രകൾ

ഇവിടെ b എന്നത് ആധാരം h എന്നത് ഉയരം



ചിത്രം 7.1



ചിത്രം 7.2

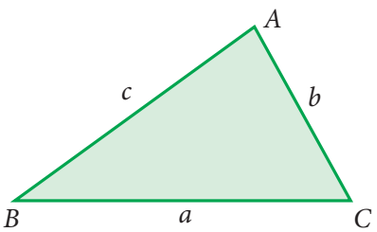
മുകളിൽ നിന്ന് ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ആധാരം ഉയരം (ഉന്നതി) എന്നിവ തന്നിരുന്നാൽ ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കാം എന്ന് മനസ്സിലാക്കി.

7.2 ഹെറോൺ സൂത്രം

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഉയരം തന്നിട്ടില്ല പക്ഷേ മൂന്ന് വശങ്ങളുടെയും നീളം അറിയാമെങ്കിൽ അതിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും ഇതിനായി ഹെറോൺ ഒരു സൂത്രം തന്നിട്ടുണ്ട്.

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്ന് വശങ്ങൾ a, b കൂടാതെ c എന്നിവയാണെങ്കിൽ അതിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം= $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ച.മാത്രകൾ

ഇവിടെ $s = \frac{a+b+c}{2}$, 's' എന്നത് ത്രികോണത്തിന്റെ അർദ്ധ ചുറ്റളവ് (ചുറ്റളവിന്റെ പകുതി)



ചിത്രം 7.3

കുറിപ്പ്

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ എല്ലാ വശങ്ങളും തുല്യമാണ് എന്ന് ഇരിക്കട്ടെ അതായത് $a = b = c$, എങ്കിൽ ഹെറോൺ സൂത്രം $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ ആകുന്നു ഇതാണ് സമഭുജ ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുന്നതിനുള്ള സൂത്രം.

ഉദാഹരണം 7.1

ഒരു ത്രികോണ ആകൃതിയിലുള്ള പാടത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ യഥാക്രമം 28മീറ്റർ, 15മീറ്റർ, കൂടാതെ 41മീറ്റർ പാടം നിരപ്പാക്കുന്നതിന് ച.മീറ്ററിന് ₹ 20 നിരക്കിൽ ആവശ്യമായ ചെലവ് കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$a = 28$ മീറ്റർ, $b = 15$ മീറ്റർ, കൂടാതെ $c = 41$ മീറ്റർ, എന്നിരിക്കട്ടെ

അതായത്, $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{28+15+41}{2} = \frac{84}{2} = 42$മീറ്റർ

ത്രികോണ ആകൃതിയിലുള്ള പാടത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{42(42-28)(42-15)(42-41)}$

Unit 7_MENSURATION.indd 248 28-01-2023 11:49:23

$$= \sqrt{42 \times 14 \times 27 \times 1}$$

$$= \sqrt{2 \times 3 \times 7 \times 7 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 1}$$

$$= 2 \times 3 \times 7 \times 3$$

$$= 126 \text{ ച.മീറ്റർ}$$

1ച.മീറ്റർ നിരപ്പാക്കുന്നതിനുള്ള ചെലവ്= ₹ 20

ആകെ പാടം നിരപ്പാക്കുന്നതിനായ ചെലവ്= $= 20 \times 126 = ₹2520.$

ഉദാഹരണം 7.2

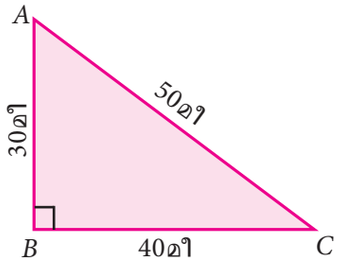
ഒരു പ്രദേശത്ത് മൂന്ന് വ്യത്യസ്ത ത്രികോണ ആകൃതിയിലുള്ള സ്ഥലങ്ങൾ വിൽപ്പനയ്ക്ക് ലഭ്യമാണ് ഒരോ സ്ഥലത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് 120മീറ്റർ അവയുടെ വശങ്ങളും താഴെ തന്നിട്ടുണ്ട്

സ്ഥലത്തിന്റെ ആകൃതി	ചുറ്റളവ്	വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ
സമകോണത്രികോണം	120മീ	30മീ, 40മീ, 50മീ
ന്യൂനകോണത്രികോണം	120മീ	35മീ, 40മീ, 45മീ
സമഭുജത്രികോണം	120മീ	40മീ, 40മീ, 40മീ

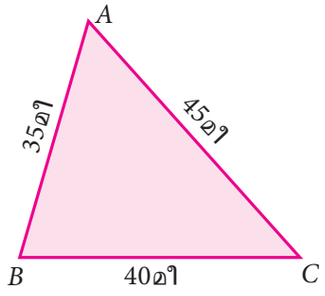
ഇവയിൽ എവിടെയാണ് കൂടുതൽ വിസ്തീർണ്ണം ഉള്ളത് എന്ന് സ്ഥലം വാങ്ങുന്ന ആളിനെ സഹായിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

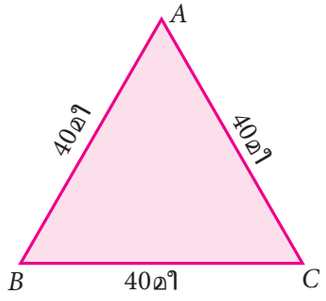
വ്യക്തതക്കായി തന്നിട്ടുള്ള അളവുകൾ രേഖപ്പെടുത്തിയിട്ടുള്ള ഏകദേശചിത്രം വരയ്ക്കാം.



ചിത്രം 7.4



ചിത്രം 7.5



ചിത്രം 7.6

(i) ചിത്രം 4.5, ന്റെ അർദ്ധചുറ്റളവ് $s = \frac{30+40+50}{2} = 60$മീ

ചിത്രം 4.6, ന്റെ അർദ്ധചുറ്റളവ് $s = \frac{35+40+45}{2} = 60$മീ

ചിത്രം 4.7, ന്റെ അർദ്ധചുറ്റളവ് $s = \frac{40+40+40}{2} = 60$മീ

എല്ലാ ചുറ്റളവുകളും തുല്യമാണ് എന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക.

G4N6D

ഹെറോൺ സൂത്രം ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം

ചിത്രം 4.5, ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം $= \sqrt{60(60-30)(60-40)(60-50)}$

$$= \sqrt{60 \times 30 \times 20 \times 10}$$

$$= \sqrt{30 \times 2 \times 30 \times 2 \times 10 \times 10}$$

Unit 7_MENSURATION.indd 249 28-01-2023 11:49:25

$= 600$ മീ^{2}

ചിത്രം 4.6, ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം $= \sqrt{60(60-35)(60-40)(60-45)}$

$= \sqrt{60 \times 25 \times 20 \times 15}$

$= \sqrt{20 \times 3 \times 5 \times 5 \times 20 \times 3 \times 5}$

$= 300\sqrt{5} \quad (\text{Since } \sqrt{5} = 2.236)$

$= 670.8$ മീ^{2}

ചിത്രം 4.7, ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം $= \sqrt{60(60-40)(60-40)(60-40)}$

$= \sqrt{60 \times 20 \times 20 \times 20}$

$= \sqrt{3 \times 20 \times 20 \times 20 \times 20}$

$= 400\sqrt{3} \quad (\text{Since } \sqrt{3} = 1.732)$

$= 692.8$ മീ^{2}

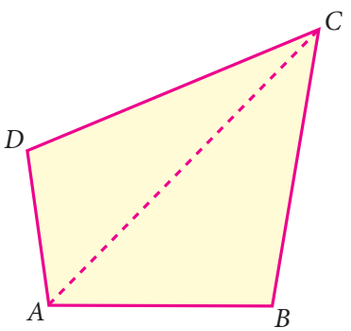
ചുറ്റളവുകൾ തുല്യമാണെങ്കിലും മൂന്ന് ത്രികോണ സ്ഥലങ്ങളുടെയും വിസ്തീർണ്ണങ്ങൾ വ്യത്യാസ്തമാണ് എന്ന് കണ്ടെത്താം. ചിത്രം 4.7 ൽ ഉള്ള ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കൂടുതലായിട്ടുള്ളത് അതുകൊണ്ട് ആ സ്ഥലത്തിനെ വാങ്ങാൻ നിർദേശിക്കാം.

കുറിപ്പ്

വിവിധതരം ത്രികോണങ്ങളുടെ ചുറ്റളവ് തുല്യമാണെങ്കിലും അവയിൽ സമഭുജ ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണമായിരിക്കും ഏറ്റവും കൂടുതൽ ഇതിനെ കുറിച്ച് ഉയർന്ന ക്ലാസുകതളിൽ നമുക്ക് പഠിക്കാം

7.3 ഹെറോൺ സൂത്രവാക്യം കൊണ്ടുള്ള ഉപയോഗങ്ങൾ

നാല് വശങ്ങളുള്ള അടഞ്ഞ സമതല രൂപത്തെ ചതുർഭുജം എന്നു പറയുന്നു.



ചിത്രം 7.7

$ABCD$ ഒരു ചതുർഭുജം എന്നിരിക്കട്ടെ ചതുർഭുജത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുന്നതിന് ചതുർഭുജത്തെ രണ്ട് ത്രികോണങ്ങളായി വിഭജിച്ച് ഹെറോൺ സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച് ത്രികോണ ഭാഗങ്ങളുടെ വ്സ്തീർണ്ണം കണക്കാക്കുന്നു.

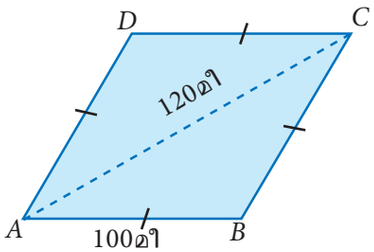
ചിത്രം 4.8 ൽ,

ചതുർഭുജം $ABCD$ യുടെ വിസ്തീർണ്ണം = ത്രികോണം ABC യുടെ വിസ്തീർണ്ണം + ത്രികോണം ACD യുടെ വിസ്തീർണ്ണം.

ഉദാഹരണം 7.3 ഒരു കർഷകന്റെ പാടം സമഭുജസമാന്തരിക ആകൃതിയിലാണ് ആ പാടത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് 400മീ, കൂടാതെ ഒരു വികർണ്ണത്തിന്റെ നീളം 120മീ. രണ്ട് തരം കൃഷി ചെയ്യുന്നതിന് വേണ്ടി പാടത്തിനെ 2 തുല്യഭാഗങ്ങളായി വിഭജിക്കാൻ ആഗ്രഹിക്കുന്നു എങ്കിൽ പാടത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

Unit 7_MENSURATION.indd 250 28-01-2023 11:49:27

നിർദ്ധാരണം



ചിത്രം 7.8

$ABCD$ ഒരു സമഭുജ സമാന്തരികം എന്നിരിക്കട്ടെ

ചുറ്റളവ് = 4 ×വശം = 400മീ

സമഭുജസമാന്തരികത്തിന്റെ ഓരോ വശത്തിന്റെയും നീളം= 100മീ.

വികർണ്ണം ACയുടെ നീളം =120മീ

ΔABC യിൽ, a =100മീ, b =100മീ, c =120മീ എന്നിരിക്കട്ടെ

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{100+100+120}{2} = 160\text{മീ}$$

ΔABC യുടെ വിസ്തീർണ്ണം $= \sqrt{160(160-100)(160-100)(160-120)}$

$= \sqrt{160\times 60\times 60\times 40}$

$= \sqrt{40\times 2\times 2\times 60\times 60\times 40}$

$= 40\times 2\times 60 = 4800\text{മീ}^2$

പാടം $ABCD$ യുടെ വിസ്തീർണ്ണം =2× ΔABCയുടെ വിസ്തീർണ്ണം=2×4800=9600മീ^{2}

അഭ്യാസം 7.1

1. ഹെറോൺ സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച് താഴെ തന്നിട്ടുള്ള വശങ്ങൾ ഉള്ള ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക

   (i) 10സെ.മീ, 24സെ.മീ, 26സെ.മീ, (ii) 1.8മീ, 8മീ, 8.2മീ

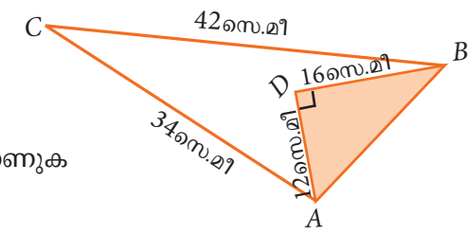
2. ത്രികോണാകൃതിയിലുള്ള കളിസ്ഥലത്തിന്റെ വശങ്ങൾ യഥാക്രമം 22മീ, 120മീ കൂടാതെ 122മീ ആണ്. വിസ്തീർണ്ണം കണ്ടുപിടിച്ചത് 1 ച.മീ നിരപ്പാക്കുന്നതിന് ₹20 നിരക്കിൽ കളിസ്ഥലം നിരപ്പാക്കാൻ ആവശ്യമായ തുക കാണുക.

3. ഒരു ത്രികോണാകൃതിയിലുള്ള കളിസ്ഥലത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് 600മീ. അതിന്റെ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം 5:12:13 എങ്കിൽ ആസ്ഥലത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

4. ഒരു സമഭുജ ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് 180സെ.മീ ആണെങ്കിൽ അതിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

5. ഒരു ദ്വിസമഭുജ ത്രികോണാകൃതിയിലുള്ള പരസ്യബോർഡിന്റെ ചുറ്റളവ് 36മീ കൂടാതെ തുല്യമായിട്ടുള്ള വശങ്ങളുടെ നീളം 13മീ. എങ്കിൽ അതിനെ വർണ്ണം പൂശുന്നതിന് 1ച.മീ ₹17.50 വീതം എന്ത് ചെലവാകും.

6. ചിത്രത്തിൽ നിഴലിടാത്ത ഭാഗത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക



Unit 7_MENSURATION.indd 251 28-01-2023 11:49:28

7. AB =13സെ.മീ BC =12സെ.മീ CD =9സെ.മീ AD =14സെ.മീ കൂടാതെ വികർണ്ണം BD = 15സെ.മീ എന്നീ അളവുകൾ ഉള്ള ചതുർഭുജം $ABCD$ യുടെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക

8. ഒരു ഉദ്യാനം ചതുർഭുജ ആകൃതിയിലാണ്. ആ ഉദ്യാനത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ 15മീ, 20മീ, 26മീ കൂടാതെ 17മീ ആദ്യത്തെ രണ്ട് വശങ്ങൾക്കിടയിൽ ഉള്ള കോൺ സമകോൺ ആണ്. ഉദ്യാനത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

9. ഒരു സ്ഥലം സമഭുജസമാന്തരിക ആകൃതിയിലാണ് അതിന്റെ ചുറ്റളവ് 160മീ കൂടാതെ ഒരു വികർണ്ണത്തിന്റെ നീളം 48മീ ആ സ്ഥലത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

10. ഒരു സമാന്തരികത്തിന്റെ സമീപവശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ 34മീ, 20മീ കൂടാതെ വികർണ്ണത്തിന്റെ നീളം 42മീ സമാന്തരീകത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

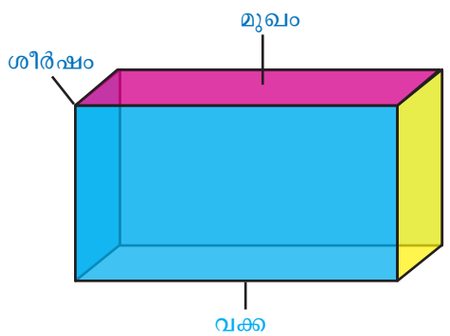
7.4 സമചതുര ഘനിക,ദീർഘചതുരഘനികയുടെ പാർശ്വതലവിസ്തീർണ്ണം

3D രൂപങ്ങളെ കുറിച്ച് മുൻ ക്ലാസ്സുകളിൽ പഠിച്ചിട്ടുണ്ടല്ലോ? 3D രൂപങ്ങൾ പൂർണ്ണമായി ഒരു സമതലത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യില്ല. എല്ലാ 3D രൂപങ്ങൾക്കും നീളം, വീതി കൂടാതെ ഉയരം എന്നിവ ഉള്ളതായിരിക്കും.

7.4.1 ദീർഘചതുരഘനികയുടെ പാർശ്വതല വിസ്തീർണ്ണം

ദീർഘചതുരഘനിക: ആറു ദീർഘചതുര മുഖങ്ങളുള്ള ഒരു ത്രിമാന ഘനരൂപമാണ് ദീർഘചതുരഘനിക ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ ബുക്ക്, തീപ്പെട്ടി, ചുടുകല്ല് സോപ്പ്.

ഒരു ദീർഘചതുരഘനികക്ക് 6 മുഖങ്ങൾ, 12 വക്കുകൾ കൂടാതെ 8 ശീർഷങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കുന്നതാണ്. ഒരു ദീർഘചതുരപ്പെട്ടിയെപ്പോലെയാണ്.

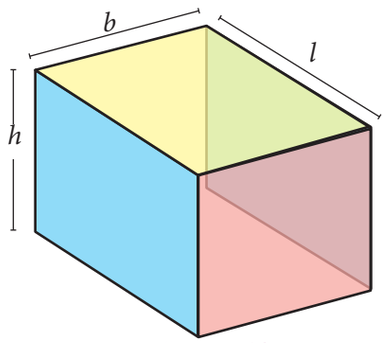


ചിത്രം 7.9

ആകെ ഉപരിതലവിസ്തീർണ്ണം (TSA) ഒരു ദീർഘചതുരഘനികയുടെ ആറു മുഖങ്ങളുടെയും തുകയാണ് ആകെ ഉപരിതലവിസ്തീർണ്ണം. ഒരു ദീർഘചതുരഘനികയുടെ മുകൾ കൂടാതെ ആധാര മുഖങ്ങളെ ഒഴിവാക്കുമ്പോൾ പാർശ്വതലവിസ്തീർണ്ണം (LSA) ലഭിക്കുന്നു.

ചിത്രം 7.10 l, b കൂടാതെ h എന്നിവ യഥാക്രമം നീളം, അകലം, ഉയരം എന്നിവയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

(i) ദീർഘചതുര ഘനികയുടെ ആകെ ഉപരി തല വിസ്തീർണ്ണം(TSA)



ചിത്രം 7.10

മുകൾ കൂടാതെ ആധാരം വശങ്ങൾ	$2 \times lb$
മുൻ കൂടാതെ പുറകിലുള്ള വശങ്ങൾ	$2 \times bh$
ഇടതും കൂടാതെ വലതും വശങ്ങൾ	$2 \times lh$

$= 2\ (lb + bh\ +\ lh\ )$ ച.മാത്രകൾ.

(iii) ദീർഘചതുരഘനികയുടെ പാർശ്വതലവിസ്തീർണ്ണം(LSA)

മുൻ കൂടാതെ പുരകിലുള്ള വശങ്ങൾ	$2 \times bh$
ഇടതും കൂടാതെ വലതും വശങ്ങൾ	$2 \times lh$

$= 2\ (l+b)h$ ച.മാത്രകൾ.



Unit 7_MENSURATION.indd 252 28-01-2023 11:49:28

ദൈനം ദിന ജീവിതത്തിൽ പാർശ്വതലവിസ്തീർണ്ണം(LSA) കൂടാതെ ആകെ ഉപരിതലവിസ്തീർണ്ണം (TSA) എന്നീ ആശയങ്ങൾ നമ്മൾ ഉപയോഗിക്കുന്നുണ്ട്. പൊതുവായി ഒരു മുറി ദീർഘചതുരഘനിക ആകൃതിയിൽ വ്യത്യസ്ത നീളം, അകലം കൂടാതെ ഉയരം ഉള്ളതായിരിക്കും. ഒരു മുറിയുടെ തറയും തട്ടും ഒഴികെ ചുവരിൽ വിസ്തീർണ്ണം കാണുന്നതിന് പാർശ്വതലവിസ്തീർണ്ണം(LSA) ഉപയോഗപ്രദമാകുന്നു. ഒരു മുറിയുടെ പ്രതലവിസ്തീർണ്ണം കാണുന്നതിന് അതിന്റെ ആകെ ഉപരിതലവിസ്തീർണ്ണം കണക്കാക്കുക.

ഒരു ദീർഘചതുരഘനികയുടെ നീളം, അകലം കൂടാതെ ഉയരം യഥാക്രമം l, b കൂടാതെ h എന്നിരിക്കട്ടെ എങ്കിൽ

(i) ആകെ ഉപരിതലവിസ്തീർണ്ണം $= 2\,(lb + bh + lh)$ ച.മാത്രകൾ.

(ii) പാർശ്വതലവിസ്തീർണ്ണം $= 2\,(l+b)h$ ച.മാത്രകൾ.

കുറിപ്പ്

(i) ഒരു ദീർഘചതുരഘനികയുടെ മുകൾ വശം കൂടാതെ ആധാരം എന്നിവയുടെ വിസ്തീർണ്ണത്തിൽ ഉയരം ഉണ്ടായിരിക്കുന്നതല്ല മുകൾ വശം കൂടാതെ ആധാരം എന്നിവയുടെ ആകെവിസ്തീർണ്ണം $2lb$ ആണ്. അതുകൊണ്ട് പാർശ്വതവിസ്തീർണ്ണം(LSA) ലഭിക്കുന്നതിന $2(lb+bh+lh)$-ൽ നിന്നും $2lb$-നെ കുറയ്ക്കുക.

(ii) ഒരു സമചതുരഘനികയുടെ പ്രതലവിസ്തീർണ്ണം കണക്കാക്കുമ്പോൾ നീളം, അകലം കൂടാതെ ഉയരം എന്നിവയുടെ യൂണിറ്റുകൾ ഒരുപോലെ ആയിരിക്കണം.

ഉദാഹരണം 7.4

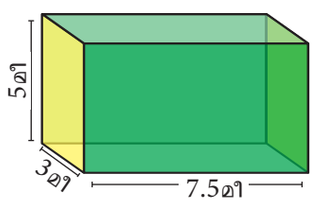
ഒരു ദീർഘചതുരഘനികയുടെ നീളം, അകലം കൂടാതെ യഥാക്രമം 7.5മീ, 3മീ കൂടാതെ 5മീ ആണെങ്കിൽ അതിന്റെ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം(TSA) കൂടാതെ പാർശ്വതല വിസ്തീർണ്ണം(LSA) എന്നിവ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

ദീർഘചതുകഘനികയുടെ അളവുകൾ തന്നിട്ടുണ്ട്;

അതായത് നീളം $(l) = 7.5$മീ അകലം $(b) = 3$മീ കൂടാതെ ഉയരം $(h) = 5$മീ.

$$\begin{aligned}
\text{TSA} &= 2(lb + bh + lh) \\
&= 2\left[(7.5\times 3) + (3\times 5) + (7.5\times 5)\right] \\
&= 2(22.5 + 15 + 37.5) \\
&= 2\times 75 \\
&= 150\text{മീ}^2
\end{aligned}$$



ചിത്രം 7.11

$$\begin{aligned}
\text{LSA} &= 2(l + b)\times h \\
&= 2(7.5 + 3)\times 5 \\
&= 2\times 10.5\times 5 \\
&= 105\text{മീ}^2
\end{aligned}$$

ഉദാഹരണം 7.5

ഒരു ഹാളിന്റെ നീളം,അകലം കൂടാതെ ഉയരം യഥാക്രമം 25മീ, 15മീ, കൂടാതെ 5മീ എന്നിവയാണ് തറ കൂടാതെ നാല് ചുവരുകൾ എന്നിവ നവീകരിക്കുന്നതിന് ച.മീ ₹80 നിരക്കിൽ ആവശ്യമായ ചെലവ് കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

നീളം $(l) = 25$മീ, വീതി $(b) = 15$മീ, ഉയരം $(h) = 5$മീ.

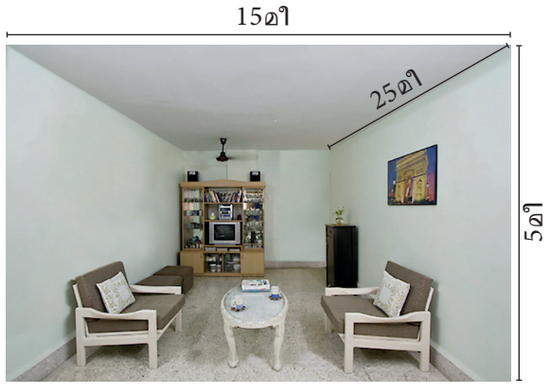
Unit 7_MENSURATION.indd 253 28-01-2023 11:49:30

നാല് ചുവരുകളുടെ വിസ്തീർണ്ണം = ദീർഘചതുരഘനികയുടെ LSA

$$= 2(l+b)\times h$$

$$= 2(25+15)\times 5$$

$$= 80\times 5 = 400 \text{ മീ}^2$$



ചിത്രം 7.12

തറയുടെ വിസ്തീർണ്ണം $= l\times b$

$$= 25\times 15$$

$$= 375 \text{ മീ}^2$$

നവീകരിക്കുന്ന ഹാളിന്റെ ആകെ വിസ്തീർണ്ണം

= (നാല് ചുവരുകളുടെ വിസ്തീർണ്ണം+തറയുടെ വിസ്തീർണ്ണം)

$$= (400+375) \text{ മീ}^2 \quad = 775 \text{ മീ}^2$$

₹80 നിരക്കിൽ നവീകരിക്കാൻ ആവശ്യമായ ചെലവ് $= 80\times 775$

= ₹62,000

7.4.2 സമചതുരഘനികയുടെ ഉപരിതലവിസ്തീർണ്ണം

സമചതുരഘനിക: ഒരു ദീർഘചതുരഘനികയുടെ നീളം, വീതി കൂടാതെ ഉയരം എന്നിവ തുല്യമാണെങ്കിൽ അതിനെ സമചതുരഘനിക എന്നു പറയുന്നു. ഒരു സമചതുരഘനികക്ക് ആറു സമചതുരുമുഖങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കും ദൈനംദിന ജീവിതത്തിലെ ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു.



പകിട



ഐസുകട്ട

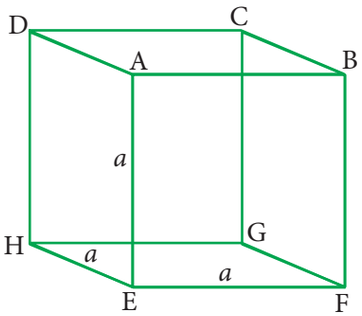


പഞ്ചസാര

ചിത്രം 7.13

ഒരു സമചതുരഘനികക്ക് 6 മുഖങ്ങൽ 12 വക്കുകൾ കൂടാതെ 8 ശീർഷകങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കും

ചിത്രം 4.23 ൽ ഉള്ള സമചതുരഘനികയുടെ വശങ്ങൾ 'a' മാത്ര എന്നിരിക്കട്ടെ



ചിത്രം 7.14

Unit 7_MENSURATION.indd 254 28-01-2023 11:49:32

(i) സമചതുരഘനികയുടെ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം

= മുഖങ്ങളുടെ വിസ്തീർണ്ണങ്ങളുടെ തുക $(ABCD+EFGH+AEHD+BFGC+ABFE+CDHG)$

$=(a^2+a^2+a^2+a^2+a^2+a^2)$

$=6a^2$ ച മാത്രകൾ

(ii) ഒരു സമചതുരഘനികയുടെ പാർശ്വതലവിസ്തീർണ്ണം

= മുഖങ്ങളുടെ വിസ്തീർണ്ണങ്ങളുടെ തുക (AEHD+BFGC+ABFE+CDHG)

$=(a^2+a^2+a^2+a^2)$

$=4a^2$ ച മാത്രകൾ

ഒരു സമചതുരഘനികയുടെ വശം 'a' മാത്രകൾ ആണെങ്കിൽ,

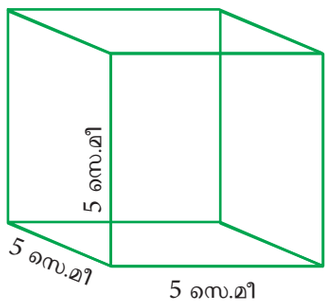
(i) ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം = 6ച.മാത്രകൾ

(ii) പാർശ്വതലവിസ്തീർണ്ണം = 4ച.മാത്രകൾ

ചിന്തിക്കുക

ദീർഘചതുരഘനികയുടെ സൂത്രങ്ങളിൽ നിന്നും സമചതുരഘനികയുടെ സൂത്രം കണ്ടുപിടിക്കാമോ?

ഉദാഹരണം 7.6 വശം 5.സെ.മീ ആയിട്ടുള്ള സമചതുരഘനികയുടെ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം, പാർശ്വതല വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.



ചിത്രം 7.15

നിർദ്ധാരണം

സമചതുരഘനികയുടെ വശം(a) =5സെ.മീ

ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം $=6a^2=6(5^2)=150$ ച.സെ.മീ

പാർശ്വതല വിസ്തീർണ്ണം $=4a^2=4(5^2)=100$ ച.സെ.മീ

ഉദാഹരണം 7.7 ഒരു സമചതുരഘനികയുടെ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം 486സെ.മീ. അതിന്റെ പാർശ്വതലവിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

സമചതുരഘനികയുടെ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം = 486സെ.മീ

$6a^2=486 \Rightarrow a^2=\frac{486}{6}$ കൂടാതെ $a^2=81$ ഇതിൽ നിന്ന് a=9

സമചതുരഘനികയുടെ വശം = 9സെ.മീ

പാർശ്വതല വിസ്തീർണ്ണം $=4a^2=4\times9^2=4\times81=324$ സെ.മീ^{2}

ഉദാഹരണം 7.8 രണ്ട് സമാനമായ സമചതുരഘനികകളുടെ വശം 7സെ.മീ ഇവ തമ്മിൽ യോജിപ്പിക്കുന്നു എങ്കിൽ ലഭിക്കുന്ന ദീർഘചതുരഘനികയുടെ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം പാർശ്വതലവിസ്തീർണ്ണം എന്നിവ കാണുക.

Unit 7_MENSURATION.indd 255 28-01-2023 11:49:35

നിർദ്ധാരണം

സമചതുരഘനികയുടെ വശം = 7സെ.മീ

ദീർഘചതുരഘനികയുടെ നീളം (l) = 7+7 =14സെ.മീ

വീതി (b) = 7സെ.മീ, ഉയരം (h) = 7സെ.മീ

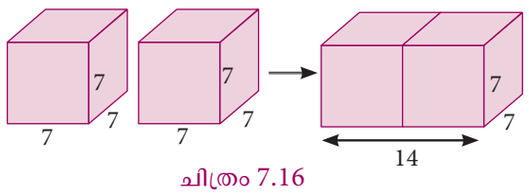
ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം $= 2(lb + bh + lh)$

$= 2\left[(14\times7)+(7\times7)+(14\times7)\right]$

$= 2(98 + 49 + 98)$

$= 2\times245$

$= 490$ സെ.മീ^{2}



ചിത്രം 7.16

പാർശ്വതല വിസ്തീർണ്ണം $= 2(l + b)\times h$

$= 2(14 + 7)\times7 = 2\times21\times7$

$= 294$ സെ.മീ^{2}

അഭ്യാസം 7.2

1. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള അളവുകൾ ദീർഘചതുരഘനികയുടെ ആകെ ഉപരിതലവിസ്തീർണ്ണം, പാർശ്വതല വിസ്തീർണ്ണം എന്നിവ കാണുക
   (i) നീളം = 20സെ.മീ, വീതി = 15സെ.മീ, ഉയരം = 8സെ.മീ
   (ii) നീളം = 16മീ, വീതി = 12മീ, ഉയരം = 8.5മീ
2. ഒരു ദീർഘചതുരഘനികപ്പെട്ടിയുടെ അളവുകൾ 6മീ×400സെ.മീ×1.5മീ ആണ് എങ്കിൽ പുറക് വശം വർണ്ണം പൂശുന്നതിന് ച.മീ ₹22 നിരക്കിൽ ആവശ്യമായ ചെലവ് കാണുക.
3. ഒരു ഹാളിന്റെ അളവുകൾ 10മീ × 9മീ × 8മീ. ച.മീ ന് ₹8.50 നിരക്കിൽ ചുവരും തട്ടും വെള്ള പൂശുന്നതിന് എത്ര രൂപചെവാകും?
4. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള വശങ്ങളുടെ സമചതുരഘനികയുടെ TSA കൂടാതെ LSA എന്നിവ കാണുക.
   (i) 8മീ (ii) 21സെ.മീ (iii) 7.5 സെ.മീ
5. (i) ഒരു സമചതുരഘനികയുടെ TSA 2400സെ.മീ^{2} ആണെങ്കിൽ അതിന്റെ LSA കാണുക.
   (ii) ഒരു സമചതുരഘനികയുടെ ഒരു മുഖത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് 36സെ.മീ അതിന്റെ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.
6. വശം 6.5മീറ്റർ ആയിട്ടുള്ള സമചതുരഘനികാകൃതിയിലുള്ള കണ്ടെയ്നറിന്റെ പുറം വശം മുഴുവനും ചായം പൂശുന്നു. ചായം പൂശേണ്ട ഭാഗത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണവും ച.മീന് ₹24 എന്ന നിരക്കിൽ ചായം പൂശുന്നതിന് ആവശ്യമായ ചെലവും കണക്കാക്കുക.
7. മൂന്ന് സമാനമായ സമചതുരഘനികളുടെ വശം 4സെ.മീ അവയെ തമ്മിൽ യോജിപ്പിക്കുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ദീർഘചതുരഘനികയുടെ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം, പാർശ്വതലവിസ്തീർണ്ണം എന്നിവ കാണുക.

Unit 7_MENSURATION.indd 256 28-01-2023 11:49:37

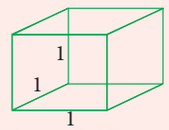
7.5 ദീർഘചതുരഘനിക സമചതുരഘനികളുടെ വ്യാപ്തം

നമ്മൾ എല്ലാവരും 50 മില്ലി 100 മില്ലി അളവുകളുള്ള ഐസ്ക്രീം കഴിച്ചിട്ടുണ്ട്. അതുപോലെത്തെ 100 മില്ലി അളവുള്ള ഐസ്ക്രീം കപ്പ് ഒന്ന് എടുക്കുക ഇതിൽ 100 മില്ലി വെള്ളം കൊള്ളും. ഇതിന്റെ അർത്ഥം ആ കപ്പിൽ കൊള്ളളവ് അല്ലെങ്കിൽ വ്യാപ്തം 100 മില്ലി ആകുന്നു. ഒരു 100 മില്ലി കപ്പെടുത്ത് വെള്ളം നിറയ്ക്കുക.ഇതുപോലത്തെ എത്ര കപ്പുകളിൽ വെള്ളം ഒഴിച്ച് ജഗ്ഗിൽ ഒഴിക്കുമ്പോൾ ജഗ്ഗ് നിറയുന്നു എന്ന് കണക്കാക്കുക. ഇതുപോലെ 100 മില്ലി കൊള്ളളവുള്ള 10 കപ്പുകൾ ജഗ്ഗ് നിറയ്ക്കുന്നു എങ്കിൽ ജഗ്ഗിന്റെ വ്യാപ്തം 1 ലിറ്റർ $\left(10 \times 100\,ml = 1000\,ml = 1l\right)$ കൂടാതെ ഇങ്ങനെയുള്ള എത്ര ജഗ്ഗിലെ വെള്ളം വേണം ഒരു ബക്കറ്റ് നിറയാൻ എന്ന് നോക്കുക അതായിരിക്കും ആ ബക്കറ്റിന്റെ വ്യാപ്തം. ഇതുപോലെ നമുക്ക് ഏതൊരു പാത്രത്തിന്റെയും വ്യാപ്തം കണക്കാക്കാവുന്നതാണ്.

കുറിപ്പ്

ഒരു മാത്രയുള്ള സമചതുരഘനികകൾ:

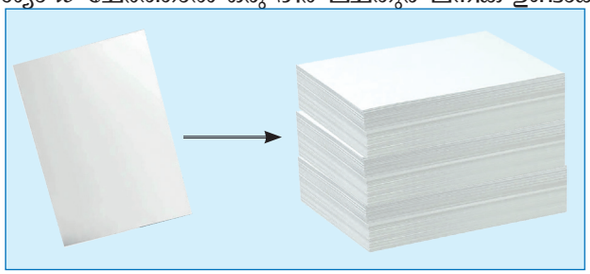
ഒരു വശം മാത്രയുള്ള സമചതുരക്കട്ടയാണ് .



ചിത്രം 7.17

ഒരു ത്രിമാന ഘനരൂപം ഉൾക്കൊള്ളുന്ന സ്ഥലത്തിന്റെ അളവാണ് അതിന്റെ വ്യാപ്തം ഘനസെ.മീ. (cm^3), ഘനമീ (m^3) ഇവ വ്യാപ്തത്തിന്റെ അളവുകളാണ്

നിങ്ങൾ ഒരു കെട്ട് A4 പേപ്പർ കണ്ടിട്ടുണ്ടാവുമല്ലോ. ഓരോ പേപ്പറും ദീർഘചതുരാകൃതിയിലാണ് അതിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം($=lb$). ഒരേ ആകൃതിയും വലിപ്പമുള്ള A4 അളവുള്ള പേപ്പറുകൾ ഒന്നിനു മുകളിൽ ഒന്നായി കൃത്യമായി ചേരുംവിധം അടുക്കിവച്ചാൽ കിട്ടുന്നത് ഘനരൂപത്തെ ദീർഘചതുരഘനിക എന്നു പറയുന്നു. അതായത് അതിന്റെ h പ്രാവശ്യം lb ചേർത്താൽ ഒരു ദീർഘചതുരഘനിക ഉണ്ടാകുന്നു


ചിത്രം 7.18

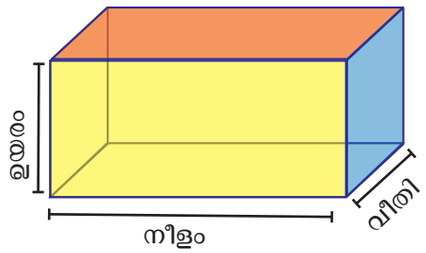
7.5.1 ഒരു ദീർഘചതുരഘനികയുടെ വ്യാപ്തം

ഒരു ദീർഘചതുരഘനികയുടെ നീളം, വീതി, ഉയരം എന്നിവ യഥാക്രമം l, b കൂടാതെ h എന്നിരിക്കട്ടെ.

ഇപ്പോൾ ദീർഘചതുരഘനികയുടെ വ്യാപ്തം

V =(ദീർഘചതുരഘനികയുടെ ആധാര വിസ്തീർണ്ണം) × ഉയരം

$= (l \times b) \times h = lbh$ ഘന മാത്രകൾ



ചിത്രം 7.19

കുറിപ്പ്

ദീർഘചതുരഘനികയുടെ വ്യാപ്തം കണക്കാക്കുമ്പോൾ ഒരേ മാത്രയിലായിരിക്കണം.

Unit 7_MENSURATION.indd 257 28-01-2023 11:49:38

ഉദാഹരണം 7.9

ഒരു ദീർഘചതുരഘനിയുടെ നീളം, വീതി, ഉയരം എന്നിവ യഥാക്രമം 120മി.മീ, 10സെ.മീ, 3സെ.മീ ആണെങ്കിൽ ഇതുപോലെയുള്ള 10 ദീർഘചതുരഘനികളുടെ വ്യാപ്തം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

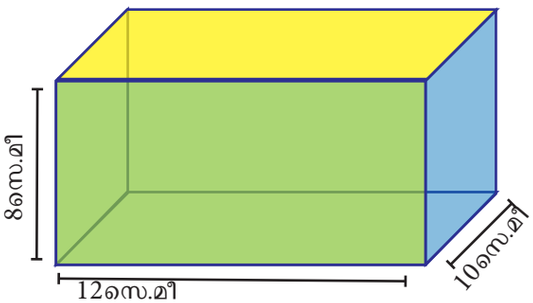
വീതിയും, ഉയരവും,സെ.മീ തന്നിട്ടുള്ളത് കൊണ്ട് നീളത്തെയുംസെ.മീ മാറ്റേണ്ടത് അത്യാവശ്യമാണ്.

$l = 120$ മി.മീ $= \frac{120}{10} = 12$ സെ.മീ കൂടാതെ $b = 10$സെ.മീ, $h = 8$സെ.മീ എന്നെടുക്കുക

ദീർഘചതുരഘനികയുടെ വ്യാപ്തം $= l \times b \times h$

$= 12 \times 10 \times 8$

$= 960$സെ.മീ^{3}



ചിത്രം 7.20

ഇതുപോലത്തെ 10 ദീർഘചതുരഘനികളുടെ

വ്യാപ്തം $= 10 \times 960$

$= 9600$സെ.മീ^{3}

ഉദാഹരണം 7.10

ഒരു ദീർഘചതുരഘനികയുടെ നീളം, വീതി, ഉയരം എന്നിവയുടെ അംശബന്ധം7:5:2 അതിന്റെ വ്യാപ്തം 35840സെ.മീ^{3} എങ്കിൽ അതിന്റെ അളവുകൾ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

ദീർഘചതുരഘനികയുടെ അളവുകൾ

$l = 7x,\ b = 5x$ കൂടാതെ $h = 2x.$ എന്നിരിക്കട്ടെ

ദീർഘചതുരഘനികയുടെ വ്യാപ്തം = 35840സെ.മീ^{3}

$$l \times b \times h = 35840$$

$$(7x)(5x)(2x) = 35840$$

$$70x^3 = 35840$$

$$x^3 = \frac{35840}{70}$$

$$x^3 = 512$$

$$x = \sqrt[3]{8 \times 8 \times 8}$$

$$x = 8\text{സെ.മീ}$$

ദീർഘ ചതുര ഘനികയുടെ നീളം $= 7x = 7 \times 8 = 56$ സെ.മീ

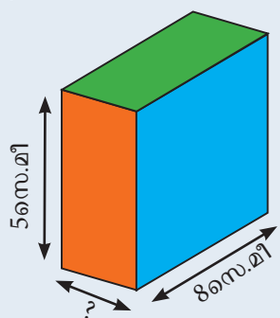
ദീർഘചതുരഘനികയുടെ വീതി $= 5x = 5 \times 8 = 40$ സെ.മീ

ദീർഘചതുരഘനികയുടെ ഉയരം $= 2x = 2 \times 8 = 16$ സെ.മീ

ചിന്തിക്കൂ

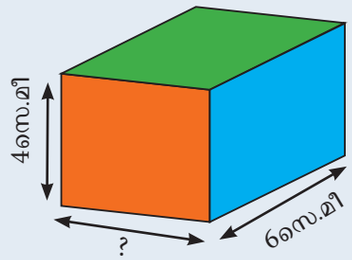
താഴെതന്നിട്ടുള്ള ഓരോ ദീർഘചതുരഘനികളുടെയും വ്യാപ്തം 120സെ.മീ^{3} ആണ്. വിട്ട്പോയ അളവ് കണ്ടുപിടിക്കുവാൻ സാധിക്കുമോ?

(i)



ചിത്രം 7.21

(ii)



ചിത്രം 7.22

Unit 7_MENSURATION.indd 258 28-01-2023 11:49:41

ഉദാഹരണം 7.11

ഒരുമീൻ തൊട്ടിയുടെ അളവുകൾ 3.8മീ × 2.5മീ × 1.6മീ ആമീൻ തൊട്ടിയിൽ എത്ര ലിറ്റർ വെള്ളം കൊള്ളും?



ചിത്രം 7.23

നിർദ്ധാരണം

മീൻതൊട്ടിയുടെ നീളം l = 3.8മീ

മീൻ തൊട്ടിയുടെ വീതി b = 2.5മീ മീൻതൊട്ടിയുടെ ഉയരം h =1.6മീ

മീൻ തൊട്ടിയുടെ വ്യാപ്തം $= l \times b \times h$

$= 3.8 \times 2.5 \times 1.6$

$= 15.2$ മീ^{3}

$= 15.2 \times 1000$ ലിറ്റർ

$= 15200$ ലിറ്റർ

കുറിപ്പ്

ചിലപ്രധാനപ്പെട്ട പ്രവർത്തനങ്ങൾ

1സെ.മീ^{3} =1 മി.ലി, 1000സെ.മീ^{3} =1 ലി, 1മീ^{3} =1000 ലി

ഉദാഹരണം 7.12

1മീ × 88സെ.മീ × 63സെ.മീ എന്ന അളവുള്ള കാർഡ്ബോർഡ് കൊണ്ടുള്ള ഒരു പെട്ടിയിൽ 22സെ.മീ × 18സെ.മീ × 10സെ.മീ എന്ന അളവുള്ള എത്ര മിഠായിപ്പെട്ടികൾ അടുക്കാൻ സാധിക്കും?

നിർദ്ധാരണം

മിഠായിപ്പെട്ടിയുടെ അളവുകൾ നീളം (l) = 22സെ.മീ വീതി (b) =18സെ.മീ

ഉയരം (h) =10സെ.മീ

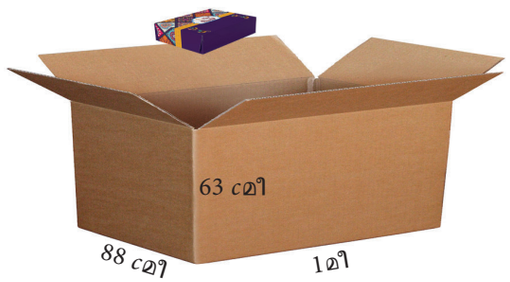
ഒരു മിഠായിപ്പെട്ടിയുടെ വ്യാപ്തം= $l \times b \times h$

$= 22 \times 18 \times 10$ സെ.മീ^{3}

കാർഡ്ബോർഡ് കൊണ്ടുള്ള പെട്ടിയുടെ അളവുകൾ

നീളം (l) = 1മീ= 100സെ.മീ, വീതി (b) = 88സെ.മീ,

ഉയരം (h) = 63സെ.മീ.



ചിത്രം 7.24

ദീർഘചതുരഘനികപ്പെട്ടിയുടെ വ്യാപ്തം = $l \times b \times h$

$= 100 \times 88 \times 63\ cm^3$

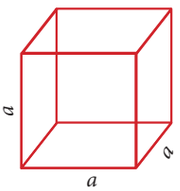
അടുക്കാവുന്ന മിഠായിപ്പെട്ടികളുടെ എണ്ണം= $\frac{\text{പെട്ടിയുടെ വ്യാപ്തം}}{\text{ഒരു മിഠായിപ്പെട്ടിയുടെ വ്യാപ്തം}}$

$= \frac{100 \times 88 \times 63}{22 \times 18 \times 10}$

=140പെട്ടികൾ

4.5.3 സമചതുരഘനികയുടെ വ്യാപ്തം

സമചതുരഘനികയുടെ വ്യാപ്തം വശത്തിന്റെ അളവ് 'a' മാത്രകൾ ഉള്ള ഒരു സമചതുരഘനികയുടെ വ്യാപ്തം കണക്കാക്കാൻ എളുപ്പമാണ്. ദീർഘചതുരഘനികയുടെ വ്യാപതം കാണാനുള്ള സൂത്രവാക്യത്തിൽ $l = b = h = a$എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ സമചതുരഘനികയുടെ വ്യാപ്തം കിട്ടും. സമചതുരഘനികയുടെ വ്യാപതം a^3 ഘനമാത്രകൾ



ചിത്രം 7.25

സമചതുരഘനികയുടെ വശം 'a' ഘനമാത്രയാണെങ്കിൽ വ്യാപ്തം $(V) = a^3$ ഘന.മാത്രകൾ

Unit 7_MENSURATION.indd 259 28-01-2023 11:49:43

കുറിപ്പ്

ഏത് രണ്ട് സമചതുരഘനികകൾക്കും താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഫലങ്ങൾ ശരിയായിരിക്കും.

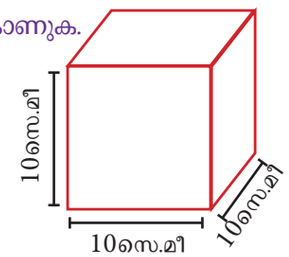
(i) പ്രതലവിസ്തീർങ്ങളുടെ അംശബന്ധം = (വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം)^2

(ii) വ്യാപ്തങ്ങളുടെ അംശബന്ധം = (വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം)^3

(iii) പ്രതലവിസ്തീർണ്ണങ്ങളുടെ അംശബന്ധം = (വ്യാപ്തങ്ങളുടെ അംശബന്ധം)^2

ഉദാഹരണം 7.13

വശം 10സെ.മീ ഉള്ള സമചതുരഘനികയുടെ വ്യാപ്തം കാണുക.



ചിത്രം 7.26

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ളത്, വശം (a) = 10സെ.മീ

സമചതുര ഘനികയുടെ വ്യാപ്തം $= a^3$

$= 10 \times 10 \times 10$

$= 1000$ സെ.മീ^{3}

കുറിപ്പ്

സമചതുരഘനികയുടെ വശം,വ്യാപ്തം ഇവ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം

സമചതുരഘനികയുടെ വശം (മാത്രകളിൽ)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	സംഖ്യാ
സമചതുരഘനികയുടെ വ്യാപ്തം(ഘനമാത്രകൾ)	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000	അതിന്റെ ഘനസംഖ്യ

ഉദാഹരണം 7.14

സമചതുരഘനികാകൃതിയിലുള്ള ഒരു ടാങ്കിൽ 64000ലിറ്റർ വെള്ളം കൊള്ളും ടാങ്കിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളം മീറ്ററിൽ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

ടാങ്കിന്റെ വശത്തിന്റെ അളവ് 'a' എന്നിരിക്കട്ടെ

ടാങ്കിന്റെ വ്യാപ്തം = 64,000 ലിറ്റർ

$$\text{i.e., } a^3 = 64{,}000 = \frac{64000}{1000} \quad [1000 \text{ ലിറ്റർ} = 1 \text{മീ}^3]$$

$a^3 = 64$ മീ^{3}

$a = \sqrt[3]{64} \quad a = 4$ മീ

∴ ടാങ്കിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളം =4മീ

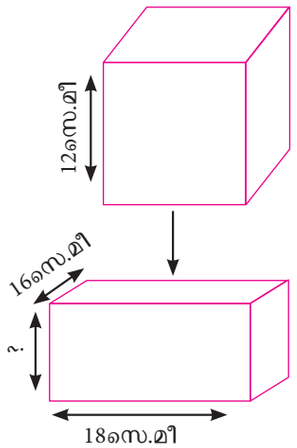
ഉദാഹരണം 7.15

ലോഹനിർമ്മിതമായ ഒരു സമചതുരഘനികയുടെ വശത്തിന്റെ അളവ് 12സെ.മീ അത് ഉരുക്കി 18സെ.മീ നീളവും, 16സെ.മീ വീതിയും ഉള്ള ദീർഘചതുരഘനിക ഉണ്ടാക്കുന്നുവെങ്കിൽ ദീർഘചതുരഘനികയുടെ ഉയരം കാണുക.

Unit 7_MENSURATION.indd 260 28-01-2023 11:49:44

നിർദ്ധാരണം

സമചതുരഘനികയുടെ	ദീർഘചതുരഘനികയുടെ
വശം $(a) = 12$ സെ.മീ	നീളം $(l) = 18$സെ.മീ
	വീതി $(b) = 16$സെ.മീ
	ഉയരം $(h) = ?$



ചിത്രം 7.27

ദീർഘചതുരഘനികയുടെ വ്യാപ്തം = സമചതുരഘനികയുടെ വ്യാപ്തം

$$l \times b \times h = a^3$$

$$18 \times 16 \times h = 12 \times 12 \times 12$$

$$h = \frac{12 \times 12 \times 12}{18 \times 16}$$

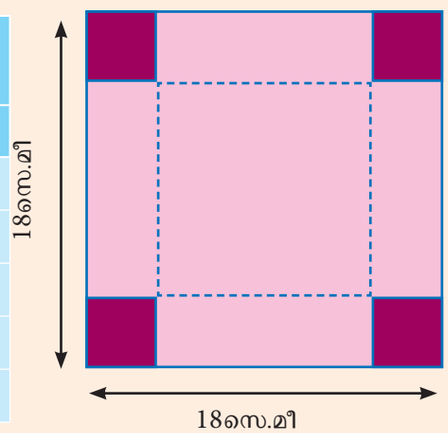
$$h = 6 \text{ സെ.മീ}$$

∴ ദീർഘചതുരഘനികയുടെ ഉയരം = 6സെ.മീ

പ്രവർത്തി- 3

തന്നിട്ടുള്ള 8സെ.മീ × 18സെ.മീ അളവുള്ള ചതുരപ്പേപ്പർ ചാർട്ട് എടുക്കുക ഒരേ ആകൃതിയിലുള്ള ചതുരങ്ങളെ നീക്കം ചെയ്യുക.പുറം പാളികളെ മടക്കി ദീർഘചതുരഘനികപ്പെട്ടി നിർമിക്കുക. ഈ ദീർഘചതുരഘനികപ്പെട്ടിയുടെ അളവുകളെ പട്ടികയിൽ എഴുതുക. ഓരോ അളവുകൾക്കും വ്യാപ്തം കണ്ടുപിടിച്ച് പട്ടിക പൂരിപ്പിക്കുക. ഓരോ പ്രാവശ്യവും മൂലകളിൽ നിന്നും നീക്കം ചെയ്യേണ്ട ചതുരങ്ങളുടെ അളവുകൾ താഴെ പട്ടികയിൽ തന്നിട്ടുണ്ട്.

ക്രമ സംഖ്യ	മൂലയിലുള്ള ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങൾ	ദീർഘചതുരഘനിക പ്പെട്ടിയുടെ അളവുകൾ			വ്യാപ്തം
		l	b	h	V
1.	1 സെ.മീ				
2.	2 സെ.മീ				
3.	3 സെ.മീ				
4.	4 സെ.മീ				
5.	5 സെ.മീ				



ചിത്രം 7.28

മുകളിലുള്ള പട്ടിക നിരീക്ഷിച്ച് ഉത്തരം എഴുതുക:

(i) ഏറ്റവും വലിയ വ്യാപ്തം എത്ര?

(ii) ഏറ്റവും വലിയ വ്യാപ്തം ലഭിച്ചപ്പോൾ നീക്കം ചെയ്ത ചതുരത്തിന്റെ വശം എത്ര?

അഭ്യാസം 7.3

1. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള അളവുകളുള്ള ദീർഘചതുരഘനികയുടെ വ്യാപ്തം കാണുക

(i) നീളം = 12സെ.മീ, വീതി = 8സെ.മീ, ഉയരം = 6സെ.മീ

(ii) നീളം = 60മീ, വീതി = 25മീ, ഉയരം = 1.5മീ

Unit 7_MENSURATION.indd 261 28-01-2023 11:49:45

(iii) നീളം = 2മീ , വീതി = 60സെ.മീ, ഉയരം = 72സെ.മീ

2. ഒരു തീപെട്ടിയുടെ അളവുകൾ 6സെ.മീ × 3.5സെ.മീ×2.5സെ.മീ എന്നിവയാണ് എങ്കിൽ ഇതേ അളവുകളോടുകൂടിയ ഒരു കെട്ടിൽ ഉള്ള 12 തീപെട്ടികളുടെയും വ്യാപ്തം കാണുക.

3. ഒരു ചോക്ലേറ്റ് പെട്ടിയുടെ നീളം, വീതി, ഉയരം എന്നിവ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 5:4:3 ആണ് അതിന്റെ വ്യാപ്തം 7500സെ.മീ^{3} എങ്കിൽ അതിന്റെ അളവുകൾ കാണുക.

4. ഒരു കുളത്തിന്റെ നീളം, വീതി, ആഴം എന്നിവ യഥാക്രമം 20.5മീ, 16മീ, 8മീ എങ്കിൽ ആകുളത്തിന്റെ കൊള്ളളവ് ലിറ്ററിൽ കാണുക.

5. ഒരു ഇഷ്ടികയുടെ അളവുകൾ 24സെ.മീ × 12സെ.മീ × 18സെ.മീ എങ്കിൽ 20മീ നീളവും 18മീ വീതിയും, 6മീ ഉയരവും ഉള്ള ബിത്തി നിർമ്മിക്കുന്നതിന് ഇത്തരം എത്ര ഇഷ്ടികകൾ ആവശ്യമാണ്?

6. ദീർഘചതുരഘനികാകൃതിയിൽ ഉള്ള ഒരു പാത്രത്തിന്റെ വ്യാപ്തം 1440മീ^{3} അതിന്റെ നീളം, വീതി യഥാക്രമം 15മീ, 8മീ എങ്കിൽ ഉയരം കാണുക.

7. സമചതുരഘനികയുടെ വ്യാപ്തം കാണുക വശത്തിന്റെ അളവ്
(i) 5സെ.മീ (ii) 3.5മീ (iii) 21സെ.മീ

8. സമചതുരഘനികാകൃതിയിലുള്ള ഒരു ടാങ്കിൽ 125000 ലിറ്റർ പാൽ കൊള്ളും. അതിന്റെ വശത്തിന്റെ അളവ് മീറ്ററിൽ കാണുക.

9. വശത്തിന്റെ അളവ് 15സെ.മീ ഉള്ള ലോകനിർമ്മിതമായ സമചതുരഘനികയെ ഉരുക്കി 25സെ.മീ നീളവും 9സെ.മീ ഉയരവും ഉള്ള ദീർഘചതുര ഘനിക ആകുന്നുവെങ്കിൽ അതിന്റെ വീതി കാണുക.

അഭ്യാസം 7.4

ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുത്തെഴുതുക

FH14J

1. വശങ്ങളുടെ അളവുകൾ 15സെ.മീ, 20സെ.മീ, 25സെ.മീ ഉള്ള ത്രികോണത്തിന്റെ അർദ്ധചുറ്റളവ്
(1) 60സെ.മീ (2) 45സെ.മീ (3) 30സെ.മീ (4) 15സെ.മീ

2. ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ 3 സെ.മീ, 4സെ.മീ, 5സെ.മീ എന്നിവയാണ് അതിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം
(1) 3സെ.മീ^{2} (2) 6സെ.മീ^{2} (3) 9സെ.മീ^{2} (4) 12സെ.മീ^{2}

3. ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് 30സെ.മീ എങ്കിൽ വിസ്തീർണ്ണം
(1) $10\sqrt{3}$ സെ.മീ^{2} (2) $12\sqrt{3}$ സെ.മീ^{2} (3) $15\sqrt{3}$ സെ.മീ^{2} (4) $25\sqrt{3}$ സെ.മീ^{2}

4. വശം 12സെ.മീ ഉള്ള ഒരു സമചതുരഘനികയുടെ പാർശ്വതലവിസ്തീർണ്ണം കാണുക
(1) 144സെ.മീ^{2} (2) 196സെ.മീ^{2} (3) 576സെ.മീ^{2} (4) 664സെ.മീ^{2}

5. ഒരു സമചതുരഘനികയുടെ പാർശ്വതലവിസ്തീർണ്ണം 600സെ.മീ^{2} എങ്കിൽ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം
(1) 150സെ.മീ^{2} (2) 400സെ.മീ^{2} (3) 900സെ.മീ^{2} (4) 1350സെ.മീ^{2}

6. 10 സെ.മീ×6സെ.മീ × 5സെ.മീ എന്നീ അളവുകളുള്ള ദീർഘചതുരഘനികയുടെ ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം
(1) 280സെ.മീ^{2} (2) 300സെ.മീ^{2} (3) 360സെ.മീ^{2} (4) 600സെ.മീ^{2}

Unit 7_MENSURATION.indd 262 28-01-2023 11:49:46

7. രണ്ട് സമചതുരഘനികളുടെ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം 2:3 എങ്കിൽ അവയുടെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണങ്ങളുടെ അംശബന്ധം

(1) 4:6 (2) 4:9 (3) 6:9 (4) 16:36

8. ഒരു ദീർഘചതുര ഘതികയുടെ വ്യാപ്തം 660സെ.മീ ആധാരത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം 33സെ.മീ^{2} എങ്കിൽ ഉയരം.

(1) 10സെ.മീ (2) 12സെ.മീ (3) 20സെ.മീ (4) 22സെ.മീ

9. ഒരു കുടിവെള്ള തൊട്ടിയുടെ അളവുകൾ 10മീ × 5മീ × 1.5മീ ആണെങ്കിൽ അതിന്റെ കൊള്ളളവ്

(1) 75ലി (2) 750 ലി (3) 7500 ലി (4) 75000 ലി

10. ഒരു ഇഷ്ടികയുടെ അളവുകൾ 50സെ.മീ × 30സെ.മീ × 20സെ.മീ എങ്കിൽ 5മീ × 3മീ × 2മീ അളവുകൾ ഉള്ള ഭിത്തി നിർമ്മിക്കുന്നതിന് ആവശ്യമായ ഇഷ്ടികകൾ

(1) 1000 (2) 2000 (3) 3000 (4) 5000

ഓർമ്മിക്കേണ്ടവ

- വശങ്ങൾ a, b, c ആയി ഉള്ള ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ച.മാത്രകൾ, $s = \frac{a+b+c}{2}$
- ഒരു ദീർഘചതുരഘനികയുടെ നീളം, അകലം കൂടാതെ ഉയരം എന്നിവ യഥാക്രമം l, b, h എങ്കിൽ

  (i) ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം(TSA) $= 2(lb + bh + lh)$ ച.മാത്രകൾ

  (ii) പാർശ്വതല വിസ്തീർണ്ണം(LSA) $= 2(l + b)h$ ച.മാത്രകൾ
- ഒരു സമചതുരഘനികയുടെ വശം 'a' മാത്രകൾ ആണെങ്കിൽ

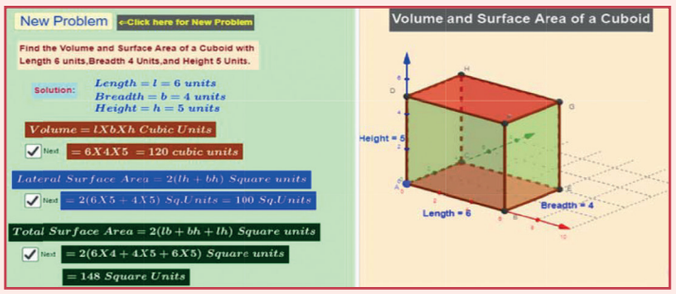
  (i) ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം(TSA) $= 6a^2$ ച.മാത്രകൾ

  (ii) പാർശ്വതലവിസ്തീർണ്ണം(LSA) $= 4a^2$ ച.മാത്രകൾ
- ഒരു ദീർഘചതുരഘനികയുടെ നീളം, അകലം കൂടാതെ ഉയരം യഥാക്രമം l, b, h എന്നിവയാണ് എങ്കിൽ ദീർഘചതുരഘനികയുടെ വ്യാപ്തം $(V) = lbh$ ഘന.മാത്രകൾ
- ഒരു സമചതുരഘനികയുടെ വശം 'a' ആണെങ്കിൽ സമചതുരഘനികയുടെ വ്യാപ്തം $(V) = a^3$ ഘന.മാത്രകൾ.

Unit 7_MENSURATION.indd 263 28-01-2023 11:49:48

ICT കോർണർ

അവസാനം ലഭ്യമാകുന്ന ചിത്രം



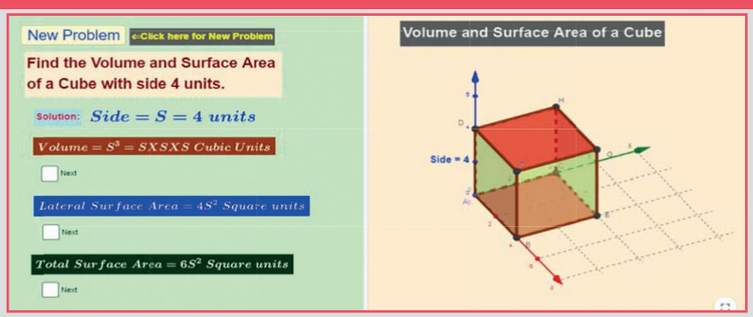
ഘട്ടം – 1

ബ്രൗസർ തുറന്ന് താഴെതന്നിട്ടുള്ള URL ടൈപ്പ് ചെയ്യുക അല്ലെങ്കിൽ QR Code Scan ചെയ്യുക. "Mensuration" എന്ന GeoGebra ദൃശ്യമാകും CUBE, CUBOID എന്നീ രണ്ട് worksheetകൾ ഉണ്ടായിരിക്കും.

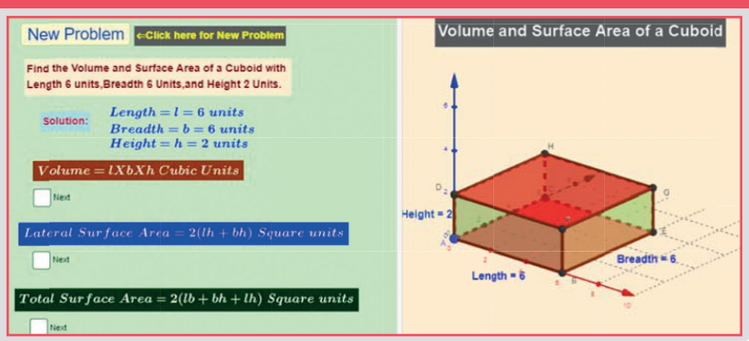
ഘട്ടം - 2

"New Problem".ക്ലിക്ക് ചെയ്യുക പാർശ്വതലവിസ്തീർണ്ണം, ആകെ ഉപരിതലവിസ്തീർണ്ണം, വ്യാപ്തം എന്നിവയുടെ കണക്കുകൾ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക. അതിന് ശേഷം check box click ചെയ്ത് ഉത്തരം ശരി നോക്കുക.

step1



step 2



Browse in the link

Mensuration: https://ggbm.at/czsby7ym or Scan the QR Code.

Unit 7_MENSURATION.indd 264 28-01-2023 11:49:48

8

$$l+\frac{\left(\frac{N}{2}-m\right)}{f}\times c \qquad \bar{X}=\frac{\sum fx}{\sum f}$$



സ്ഥിതി വിവരകണക്കുകൾ

"സ്ഥിതിവിവര കണക്കുകളെ കുറിച്ച് മനസ്സിലാക്കിയില്ലെങ്കിൽ യാഥ്യാർത്ഥങ്ങൾ മറയ്ക്കപ്പെടും."

- ആൽബർട്ട് ബെർട്ടിൽസൺ-



Sir Ronald Aylmer Fisher
(1890 - 1962 A.D. (CE)

സർ റൊണാൾഡ് ഐൽമർ ഫിഷർ ഒരു ഇംഗ്ലീഷ് സ്ഥിതി വിവരജ്ഞനും പരിണാമ ജീവ ശാസ്ത്രജ്ഞനു മാണ്. കൂടാതെ അദ്ദേഹം ആധുനിക സ്ഥിതി വിവരകണക്കിന്റെ പിതാവെന്ന് അറിയപ്പെടുന്നു.ഇദ്ദേഹത്തിന്റെ വ്യവസായ സംബന്ധമായ ഗവേഷണങ്ങൾ ആയിരക്കണക്കിനു ആളുകളുടെ ദാരിദ്ര്യം മാറ്റി. അദ്ദേഹത്തിന് ലണ്ടൻ ലിനിയൻ സൊറാനിയുടെ പ്രശസ്തിയാർജ്ജിച്ച ഡാർവിൻ വാലസ് അവാർഡ് 1958 ൽ ലഭിച്ചു.

EPOUK

പ്രധാന ഫലങ്ങൾ

- മുൻപ് അറിയുന്ന സമാന്തരമാധ്യത്തിന്റെ വിവിധ രൂപങ്ങളെ ഓർമ്മപ്പെടുത്തൽ.
- തരംതിരിക്കപ്പെടാത്ത വിവരങ്ങളുടെ മാധ്യം, മീഡിയൻ, മോഡ് കാണുന്നതിനുള്ള വിവിധ രീതികളെ ഓർമ്മപ്പെടുത്തൽ.
- തരം തിരിച്ച വിവരങ്ങളുടെ മാധ്യം, മീഡിയൻ, മോഡിനെ കാണൽ.

8.1 മുഖവുര

സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് എന്ന വിഷയത്തിൽ ദത്തങ്ങളുടെ ശേഖരണം,രൂപീകരണം, അവതരണം, വിശകലനം, വ്യാഖ്യാനം എന്നിവ ഉൾപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. പാരിമാണികവും, ഗുണാത്മകവുമായ പല വിവരങ്ങൾ നമ്മുടെ നിത്യജീവിതത്തിൽ കൂടി കടന്നു പോകുന്നു. ഈ പ്രസ്താവനകൾ നമ്മുടെ ജീവിതത്തിൽ നല്ല ഫലങ്ങൾ സൃഷ്ടിക്കുന്നു.

വിവരങ്ങളെ ശേഖരിക്കുന്നതാണ് സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിന്റെ അടിസ്ഥാനം ഇവിടെ വിവരങ്ങൾ ധാരാളം ഉണ്ടായിരിക്കും. നമ്മൾ ആ വിവരങ്ങളെ പരിശോധന ചെയ്ത് തീരുമാനങ്ങൾ എടുക്കുന്നു. അങ്ങനെ തീരുമാനിക്കുന്നതിന് സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് പോലുള്ള വിവിധ രീതികൾ നമ്മെ സഹായിക്കുന്നു.

Unit 8_STATISTICS.indd 265 28-01-2023 12:02:12

ക്രിക്കറ്റ് വാർത്തകൾ

ഗ്രൂപ്പ് U19	മത്സരങ്ങൾ	വിജയം	തോൽവി	ഡ്രോ
ഇന്ത്യ	71	52	18	0/1
ആസ്ട്രേലിയ	67	50	15	0/2
പാകിസ്ഥാൻ	69	50	19	0/0
ബംഗ്ലാദേശ്	64	45	17	1/1
സൗത്ത് ആഫ്രിക്ക	71	44	27	0/0
ഇംഗ്ലണ്ട്	61	43	17	0/1
ശ്രീലങ്ക	69	40	28	0/1
ന്യൂസിലാന്റ്	68	36	31	0/1
സിംബാവോ	66	30	35	0/1
അയർലാന്റ്	62	28	34	0/0
അഫ്ഗാനിസ്ഥാൻ	49	16	32	1/0
നിപിമിയ	24	11	13	0/0
കെനിയ	47	9	37	1/0
കാനഡ	17	5	12	0/0
പപ്പുവ ന്യൂക്ലിനി	29	4	23	1/1

ഉപഭോക്താക്കളുടെ സംതൃപ്തി

തമിഴ്നാട് ഹോട്ടൽ

നിങ്ങളുടെ അഭിപ്രായത്തെ രേഖപ്പെടുത്തുക

- വളരെ തൃപ്തി
- തൃപ്തി
- അഭിപ്രായമില്ല
- തൃപ്തിയില്ല
- മോശം

National Fodd India's Production Statics 2018

UN	7.2%
IMF	7.4%
വേൾഡ് ബാങ്ക്	7.3%
മോർഗൻ ബാങ്ക്	7.5%
മൂടീസ്	7.6%
HSBC	7%
അമേരിക്കൻ ബാങ്ക്	7.2%
മെറിൽ ലിൻ	7.5%
ഗോൾഡ്മൻ ഷേക്ക്	8%

8.2 വിവരങ്ങൾ ശേഖരിക്കൽ

നമ്മൾ നേരിട്ട് ശേഖരിക്കുന്ന വിവരങ്ങളെ പ്രാഥമിക വിവരങ്ങൾ എന്ന് പറയുന്നു. ഒരാളോട് നേരിട്ട് ചോദിച്ച് (phone, mail or face-to-face), കൂടാതെ പരീക്ഷണങ്ങൾ നടത്തി പല രീതിയിൽ പ്രാഥമിക വിവരങ്ങൾ ശേഖരിക്കുന്നു.

മറ്റുള്ളവർ ശേഖരിച്ച വിവരങ്ങളിൽ നിന്ന് എടുക്കുന്ന വിവരത്തെ ദ്വിതീയ വിവരങ്ങൾ എന്ന് പറയുന്നു. ഉദാഹരണമായി, സർക്കാർ പ്രസിദ്ധീകരിച്ച സ്ഥിതിവിവരക്കണക്കുകൾ, ഗവേഷണം ചെയ്ത് ലഭിച്ച റിപ്പോർട്ടുകൾ എന്നിവ ദ്വിതീയ വിവരങ്ങൾ ആകുന്നു.

പുരോഗതി പരിശോധിക്കൽ

പ്രാഥമിക സ്രോതസ്സുകളെ കാണുക
(i) ഉപഭോക്താവിന്റെ നിർദ്ദേശം ചോദിക്കൽ
(ii) ആരോഗ്യഗവേഷണ വകുപ്പിന്റെ അറിയിപ്പുകൾ
(iii) സാമ്പത്തികത്തെ കുറിച്ചുള്ള മുന്നറിയിപ്പ്
(iv) പരീക്ഷണ ഫലങ്ങൾ
(v) വാണിജ്യ വിവരങ്ങൾ
(vi) വിൽപ്പനയെകുറിച്ച് ഗണിക്കൽ
(vii) വിലവിവരപട്ടിക

8.2.1 വിവരങ്ങളെ ക്രമീകരിക്കൽ

ആദ്യ അവസ്ഥയിൽ നാം ശേഖരിക്കുന്ന ദത്തങ്ങൾ ക്രമീകരിച്ചതായി കാണപ്പെടുന്നില്ല. ആയതിനാൽ അവയെ അസംസ്കൃതദത്തം എന്നു പറയുന്നു.

പ്രായോഗികം - 1

ദത്തങ്ങളെ കൊണ്ട ചിത്രങ്ങൾ പട്ടികകൾ സംഖ്യകൾ എന്നിവ ഉൾകൊണ്ട ഒരു ആൽബം തയ്യാറാക്കുക. ഇവയ്ക്ക് ദൈനംദിന ജീവിതത്തോടുള്ള ബന്ധം വിശദീകരിക്കുക.

അസംസ്കൃത ദത്തം എന്നത് ക്രമപ്പെടുത്താത്തതും, തരംതിരിക്കാത്തതുമായ വിവരങ്ങളാകുന്നു.

നാം ആവശ്യപ്പെട്ട വിവരങ്ങൾ മനസ്സിലാക്കാൻ പ്രയാസം ഉള്ളതുകൊണ്ട് ആദ്യഘട്ട വിവരങ്ങൾ പ്രയോജനപ്പെടുന്നില്ല

ഉദാഹരണമായി: ഒരു പരീക്ഷയിൽ 50 വിദ്യാർത്ഥികൾക്ക് ലഭിച്ച ഗണിത പരീക്ഷയുടെ മാർക്കുകൾ താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു:

61	60	44	49	31	60	79	62	39	51	67	65	43	54	51	42
52	43	46	40	60	63	72	46	34	55	76	55	30	67	44	57
62	50	65	58	25	35	54	59	43	46	58	58	56	59	59	45
42	44														

ഈ വിവരങ്ങളിൽ നിന്നും ആദ്യ 5 മാർക്കുകളെ നിങ്ങൾ കണ്ടെത്തുന്നത് ലഘുവായ ജോലിയാണോ? അതിനെ ഈ വിവരങ്ങളിൽ നിന്നും കണ്ടെത്തണം. കൂടാതെ മൂന്നാമത് ഉയർന്ന മാർക്കിനെ കണ്ടെത്തണം എന്ന കാര്യം കുറച്ചുകൂടെ പ്രയാസമുള്ള കാര്യമാണ്. ഒരു പക്ഷേ 50 ൽ കുറഞ്ഞ മാർക്ക് ലഭിച്ചവർ എത്ര പേർ എന്ന് നിങ്ങൾ അറിയാൻ ആഗ്രഹിച്ചാൽ അതിനേക്കാൾ അധിക സമയം വേണ്ടി വരും.

Unit 8_STATISTICS.indd 266 28-01-2023 12:02:13

കൊടുത്തിരിക്കുന്ന മാർക്കുകളെ ക്രമീകരിച്ച് എഴുതിയാൽ നമ്മുടെ ജോലി ലഘുവായിരിക്കും.

ചെറിയ രീതിയിൽ കഷ്ടമാണെങ്കിലും ഏറ്റവും കൂടിയ മാർക്ക് 79 എന്നും ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ മാർക്ക് 25 എന്നും നമുക്ക് അറിയാൻ സാധിക്കുന്നു. ഈ മാർക്കുകളെ നമുക്ക് യോജിച്ച തരത്തിൽ ഭാഗങ്ങളായി പിരിച്ച് ഓരോ മാർക്കിനേയും അതിന്റെ ഭാഗങ്ങളിൽ എഴുതാം. മാർക്കുകളെ എങ്ങനെ എഴുതാം എന്നതിന്റെ ഉദാഹരണം ശ്രദ്ധിക്കുക.

വർഗ്ഗാന്തരം	മാർക്ക്
25-30	30, 25
31-35	31, 34, 35
36-40	39, 40
41-45	44, 43, 42, 43, 44, 43, 45, 42, 44
46-50	49, 46, 46, 50, 46
51-55	51, 54, 51, 52, 55, 55, 54
56-60	60, 60, 60, 57, 58, 59, 58, 58, 56, 59, 59
61-65	61, 62, 65, 63, 62, 65
66-70	67, 67
71-75	72
76-80	79, 76

മുകളിൽ പറഞ്ഞ ചോദ്യങ്ങൾക്ക് പട്ടികയിൽ നിന്ന് ലഘുവായി ഉത്തരം പറയാൻ സാധിക്കുമോ?

"56-നെക്കാൾ കുറവ് മാർക്ക് ലഭിച്ചത് എത്ര പേർക്ക്?" എന്ന ചോദ്യത്തിന് ഉത്തരം കാണാൻ എല്ലാ മാർക്കുകളേയും പരിശോധിക്കേണ്ട ആവശ്യമില്ല. നിങ്ങൾക്ക് ആവശ്യം അവ ആകെ എത്ര ഉണ്ട് എന്നതാണ്. ഇങ്ങനെയുള്ള ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഉത്തരം നൽകാൻ ഈ പട്ടികയിൽ ഓരോ വർഗ്ഗാന്തരത്തിലും ഉള്ളവർ എത്ര പേർ എന്ന് ഒറ്റ വാക്കിൽ പറഞ്ഞാൽ മതിയാകും.

മുകളിൽ പറഞ്ഞ പട്ടികയെകൂടുതൽ പ്രയോജനപ്രദമാക്കാൻ താഴെ പറയുന്ന രീതിയിൽ ലഘുവായി ക്രമീകരിക്കാം.

ഈ പട്ടിക ഓരോ വർഗ്ഗാന്തരത്തിലും എത്ര ആവൃത്തികളാണ് ഉള്ളത് എന്നതിനെ നമുക്ക് നൽകുന്നു. കൂടാതെ ഓരോ വർഗ്ഗാന്തരത്തിനും എതിരേയുള്ള സംഖ്യ ആ വർഗ്ഗാന്തരത്തിന് ഉൾപ്പെട്ട ആവൃത്തനങ്ങൾ എത്ര എന്നതിനെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. ഈ സംഖ്യ ഈ വർഗ്ഗാന്തരത്തിന്റെ ആവൃത്തി എന്ന് അറിയപ്പെടുന്നു.

വർഗ്ഗാന്തരം	വസ്തുക്കളുടെ എണ്ണം
25-30	2
31-35	3
36-40	2
41-45	9
46-50	5
51-55	7
56-60	11
61-65	6
66-70	2
71-75	1
76-80	2

ആവൃത്തി പട്ടിക കണക്കിടാൻ നാം റ്റാലി അടയാളം ഉപയോഗിക്കുന്നു.
(വസ്തുക്കളുടെ എണ്ണം എന്ന നിരയ്ക്കു താഴെ മാർക്കിനെ എഴുതാതെ അതിനു പകരം ഒരു റ്റാലി അടയാളം കുറിക്കുന്നു.)

ഉദാഹരണമായി 31-35 എന്ന വർഗ്ഗാന്തരത്തിനെതിരെ 31, 34, 35 എന്ന് എഴുതാതെ 𝍸 എന്ന റ്റാലി അടയാളം ഇടുന്നു. അങ്ങനെയാണെങ്കിൽ 56-60 എന്ന വർഗ്ഗാന്തരത്തിന് 𝍸𝍸 എന്ന് എഴുതണം. ഈ പ്രശ്നം ഒഴിവാക്കാൻ ഓരോ 5-ാമത്തെ റ്റാലിയും അതിന്റെ മുമ്പ് കുറിച്ച നാല് റ്റാലി അടയാളങ്ങളും ഛേദിക്കുന്നതുപോലെ 𝍷 എന്ന രീതിയിൽ കുറിക്കുന്നു. ഉദാഹരണമായി 11 എന്നതിനെ 𝍷 𝍷 । എന്ന് എഴുതുന്നു. ഇങ്ങനെ എഴുതിയാൽ മുകളിൽ കാണുന്ന ഉദാഹരണത്തിന് നിന്നും ആവൃത്തി പട്ടിക താഴെ കാണുന്നതുപോലെ എഴുതാവുന്നതാണ് :

Unit 8_STATISTICS.indd 267 28-01-2023 12:02:13

വർഗ്ഗാന്തരം	റ്റാലി മാർക്ക്	ആവൃത്തി
25-30	||	2
31-35	|||	3
36-40	||	2
41-45	𝍸 ||||	9
46-50	𝍸	5
51-55	𝍸 ||	7
56-60	𝍸 𝍸 |	11
61-65	𝍸 |	6
66-70	||	2
71-75	|	1
76-80	||	2
	മൊത്തം	**50**

പുരോഗതി പരിശോധിക്കൽ

താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന വിവരങ്ങൾക്ക് ആവൃത്തി പട്ടിക തയ്യാറാക്കുക

23	44	12	11	45	55	79	20
52	37	77	97	82	56	28	71
62	58	69	24	12	99	55	78
21	39	80	65	54	44	59	65
17	28	65	35	55	68	84	97
80	46	30	49	50	61	59	33
11	57						

കുറിപ്പ്

ഏതെങ്കിലും ഒരു വർഗ്ഗാന്തരം എടുക്കുക. 50-60 എന്നതാണെങ്കിൽ, 56 എന്നത് വർഗ്ഗാന്തരത്തിന്റെ നീചപരിധി എന്നും 60 എന്നത് വർഗ്ഗാന്തരത്തിന്റെ ഉച്ചപരിധി എന്നും പറയപ്പെടുന്നു.

8.3 കേന്ദ്രപ്രവണതയുടെ അളവുകൾ

ദൈനം ദിന ജീവിതത്തിൽ നമുക്ക് തന്നിരിക്കുന്ന വിവരത്തിന്റെ അളവിനെ കുറിക്കുന്നത് ആവശ്യമാണ്. ഒരു ശാസ്ത്രജ്ഞൻ തന്റെ പരീക്ഷണത്തിൽ ജനങ്ങൾ ശരാശരിയായി ഒരു ദിവസം 3 മണിക്കൂർ ടി.വി, സീരിയൽ വീക്ഷിക്കുന്നു എന്ന് കുറിച്ചിരുന്നാൽ അതിന് അർത്ഥം ഓരോരുത്തരും 3 മണിക്കൂർ വീക്ഷിക്കുന്നു എന്നല്ല. ചിലർ കൂടുതൽ സമയം വീക്ഷിക്കുന്നു. ചിലർ കുറച്ച് സമയം വീക്ഷിക്കുന്നു

ശരാശരി എന്നത് തന്നിരിക്കുന്ന വലിയ വിവരങ്ങളെ ഒരു ചെറിയ അളവാൽ കുറിക്കുന്നതാണ്. ആ ചെറിയ അളവിന് യഥാർത്ഥ മൂല്യവുമായി ചെറിയ തോതിൽ വ്യത്യാസമുണ്ടാകാം .

ശരാശരി എന്നു പറയുമ്പോൾ സാധാരണ ജനങ്ങളുടെ വീക്ഷണവും വ്യത്യാസപ്പെട്ടതാണ്. ശരാശരി മൂന്ന് വിധത്തിൽ നിർവ്വചിക്കാം. അത് സമാന്തര മാധ്യം, മീഡിയൻ, മോഡ്, എന്നിവ ആകുന്നു. ഇവ ഓരോന്നും വെവ്വേറെ രീതിയിൽ കാണാം. ഈ മൂന്നിനെയും ഒരേ വിലകളിൽ ഉപയോഗിച്ചാൽ മൂന്ന് വേറെ വേറെ ശരാശരി വിലകൾ തരുന്നു. ഈ മൂന്ന് ശരാശരി അളവുകളിലും തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങൾക്ക് ഏറ്റവും യോജിച്ചത് ഏതെന്ന് കണ്ടുപിടിക്കാൻ നമുക്ക് സാധിക്കും.

8.4 സമാന്തരമാധ്യം

8.4.1 സമാന്തരമാധ്യം - അസംസ്കൃതദത്തം

തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളുടെ ശരാശരി കാണുന്നതിന് പൊതുവായി ഉപയോഗിക്കുന്നത് സമാന്തരമാധ്യം എന്ന രീതിയാണ്. സമാന്തരമാധ്യം എന്നത് തന്നിരിക്കുന്ന നിരീക്ഷണങ്ങളുടെ തുകയെ അവയുടെ എണ്ണത്താൽ ഹരിക്കുന്നതാണ്.

ഉദാഹരണം, ഒരു (T20) ക്രിക്കറ്റ് കളിക്കാരൻ 8 മത്സരങ്ങളിൽ നേടിയ റൺകൾ 25,32,36,38,45,41,35,36 എന്ന് എടുത്താൽ അവരുടെ ശരാശരിയെ.

$$\bar{X} = \frac{\sum x}{n} = \frac{25 + 32 + 36 + 38 + 45 + 41 + 35 + 36}{8} = \frac{288}{8} = 36$$ എന്ന് കണക്കാക്കാം

Unit 8_STATISTICS.indd 268 28-01-2023 12:02:14

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ എന്ന n നിരീക്ഷണങ്ങളുടെ സമാന്തരമാധ്യം $\bar{X}$ (X bar എന്ന് വായിക്കണം). താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന വിധം എഴുതാം.

$$\bar{X} = \frac{\text{നിരീക്ഷണങ്ങളുടെ തുക}}{\text{നിരീക്ഷണങ്ങളുടെ എണ്ണം}} \qquad \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

സൂത്രത്തിൽ ഇതിനെ ഇങ്ങനെ എഴുതാം: $\bar{X} = \frac{\sum x}{n}$

അഭ്യൂഹമാധ്യ രീതി: ചില നേരങ്ങളിൽ കണക്കുകളെ ലളിതമായി ചെയ്യുന്നതിന് ഒരു ഉദ്ദേശ മൂല്യത്തെ കണക്കാക്കി, കണക്കുകളെ ചെയ്തിരുന്നു. ആ ഉദ്ദേശ മൂല്യത്തെ അഭ്യൂഹ മാധ്യം എന്ന് പറയുന്നു.

ഉദാഹരണമായി മുകളിലുള്ള ഉദാഹരണത്തിൽ ക്രിക്കറ്റ് കളിക്കാരൻ എടുത്ത റൺകളിൽ 38 എന്ന മൂല്യത്തെ അഭ്യൂഹശരാശരിയായി എടുക്കാം. പിന്നീട് അഭ്യൂഹശരാശരിയിൽ നിന്നും ഓരോ മൂല്യവും എത്ര വ്യത്യാസപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു എന്ന് പട്ടികയിടാം:

$25-38 = -13$, $32-38 = -6$, $36-38 = -2$, $38-38 = 0$,

$45-38 = 7$, $41-38 = 3$, $35-38 = -3$, $36-38 = -2$

വ്യതിയാനങ്ങളുടെ ശരാശരി

$$\frac{-13-6-2+0+7+3-3-2}{8} = \frac{-16}{8} = -2$$

ഇതിൽ അഭ്യൂഹശരാശരിയോട് വ്യതിയാനങ്ങളുടെ ശരാശരിയും കൂട്ടിയാൽ നമുക്ക് ശരിയായ മാധ്യം കിട്ടും.

കുറിപ്പ്

ഏത് മൂല്യത്തെ നമ്മൾ അഭ്യൂഹ മാധ്യമായി തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു എന്നത് ഒരു വിഷയമല്ല. ആ അഭ്യൂഹ മാധ്യം നമ്മുടെ കണക്കുകൂട്ടലിനെ ലളിതമാക്കുന്നതായിരിക്കണം. അഭ്യൂഹമാധ്യമായി തെരഞ്ഞെടുക്കുന്ന സംഖ്യ എല്ലാം മൂല്യങ്ങൾക്കും സമീപമായി ഇരുന്നാൽ നല്ലത്. കൂടാതെ പട്ടികയിൽ ഇരിക്കണമെന്ന് അത്യാവശ്യമില്ല.

ശരിയായ ശരാശരി = അഭ്യൂഹശരാശരി + വ്യതിയാനങ്ങളുടെ ശരാശരി = $38 - 2 = 36$.

8.4.2 സമാന്തരമാധ്യം - തരംതിരിക്കപ്പെടാത്ത ആവൃത്തി വിതരണം

സ്കൂൾ കായിക മത്സരങ്ങളിൽ പങ്കെടുത്ത 12 വിദ്യാർത്ഥികളുടെ ഉയരങ്ങളെ (സെ.മി ൽ) എടുക്കാം.

140, 142, 150, 150, 140, 148, 140, 147, 145, 140, 147, 145.

ഈ വിവരങ്ങളുടെ ശരാശരി ഉയരത്തെ എങ്ങനെ കാണാം?

ഇതിന് പല രീതികൾ ഉണ്ട്.

(i) എല്ലാ വിവരങ്ങളെയും കൂട്ടി അതിനെ നിരീക്ഷണങ്ങളുടെ എണ്ണം കൊണ്ട് ഹരിക്കാം.

$$\frac{140+142+150+150+140+148+140+147+145+140+147+145}{12} = \frac{1734}{12} = 144.5$$

(ii) അഭ്യൂഹമാധ്യ രീതി ഉപയോഗിച്ച് ശരാശരി കാണാം. ഇതിൽ 141 എന്ന മൂലത്തെ അഭ്യൂഹമാധ്യം എന്ന് എടുത്ത് താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന വിധം ശരാശരി കാണാം.

Unit 8_STATISTICS.indd 269 28-01-2023 12:02:14

$$= 141 + \frac{(-1)+(1)+(9)+(9)+(-1)+(7)+(-1)+(6)+(4)+(-1)+(6)+(4)}{12}$$

$$= 141 + \frac{-4+46}{12} = 141 + \frac{42}{12} = 141 + 3.5 = 144.5$$

(iii) ഈ മൂന്നാമത്തെ രീതിയായത് തരം തിരിക്കപ്പെടാത്ത ആവൃത്തി വിതരണം ആണ്. ശരാശരി കാണുന്ന വിധത്തിനെ പറ്റി ഇവിടെ വിവരിക്കുന്നു 140 എന്നത് 4 പ്രാവശ്യം ആവർത്തിക്കുന്നു, (ആയതിനാൽ 140-ന്റെ ആവൃത്തി 4). 142-ന്റെ മൂല്യം 1 പ്രാവശ്യം ആവർത്തിക്കുന്നു, (ആയതിനാൽ 142-ന്റെ ആവൃത്തി 1). ഇതേപോലെ മറ്റു മൂല്യങ്ങളെ കാണുമ്പോൾ നമുക്ക് താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ആവൃത്തി പട്ടിക കിട്ടുന്നു.

ഉയരം(സെ.മീ)	140	142	150	148	145	147
വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം	4	1	2	1	2	2

ഇവിടെ 4 പ്രാവശ്യം 140 നെ കാണാം. അതിന്റെ ആകെ മൂല്യം $140 \times 4 = 560$

ഇവിടെ 1 പ്രാവശ്യം 142 നെ കാണാം. അതിന്റെ ആകെ മൂല്യം $142 \times 1 = 142$

ഇവിടെ 2 പ്രാവശ്യം മറ്റു മൂല്യങ്ങളെയും കാണാം $150 \times 2 = 300$

ഇതുപോലെ മറ്റു മൂല്യങ്ങളെയും കാണാം:

ഈ ദത്തങ്ങളെ തന്നിരിക്കുന്ന പട്ടികയിലാക്കാം.

ഉയരം(x)	ആവൃത്തി(f)	fx
140	4	560
142	1	142
150	2	300
148	1	148
145	2	290
147	2	294
	12	1734

$$\text{സമാന്തരമാധ്യം} = \frac{\text{പദങ്ങളുടെ തുക}}{\text{പദങ്ങളുടെ എണ്ണം}}$$

$$= \frac{1734}{12} = 144.5 \text{ cm}$$

ഇൗ രീതി എല്ലാ വിവരങ്ങൾക്കും പൊതുവായി ഉപയോഗിക്കാം. ഇതൊരു സൂത്രമായും രൂപപ്പെടുന്നു. $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ എന്ന n നിരീക്ഷണങ്ങളുടെ ആവൃത്തി യഥാക്രമം $f_1, f_2, f_3, \ldots f_n$ എങ്കിൽ, ശരാശരി എന്നതു താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന വിധം കിട്ടുന്നു

$$\bar{X} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \ldots + f_n x_n}{f_1 + f_2 + \ldots f_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{\sum fx}{\sum f}$$

കുറിപ്പ്

ഓരോ ഘട്ടവും നന്നായി പഠിച്ച് ഓരോ ചിഹ്നവും നന്നായി മനസ്സിലാക്കുക

മുകളിലുള്ള രീതിയെ അഭ്യൂഹ രീതിയോട് യോജിപ്പിച്ച് ഉപയോഗിക്കാൻ സാധിക്കുമോ? അതിന് വേണ്ടിയുള്ള ഒരു ശ്രമം കാണാം:

(iv) അഭ്യൂഹ മാധ്യം 145 എങ്കിൽ ഇപ്പോൾ താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന പട്ടിക തയ്യാറാക്കാം:

Unit 8_STATISTICS.indd 270 28-01-2023 12:02:15

ഉയരം(x)	d = അഭ്യൂഹമാധ്യത്തിൽ നിന്നുള്ള വ്യതിയാനം	ആവൃത്തി (f)	fd
140	140 – 145 = – 5	4	–20
142	142– 145 = – 3	1	– 3
150	150 – 145 = + 5	2	+10
148	148 – 145 = + 3	1	+ 3
145 (അഭ്യൂഹ മാധ്യം)	145 – 145 = 0	2	0
147	147 – 145 = + 2	2	+ 4
ആകെ		$\sum f = 12$	$\sum fd = -23 + 17 = -6$

സമാന്തരമാധ്യം = അഭ്യൂഹ മാധ്യം + വ്യതിയാനങ്ങളുടെ ശരാശരി

$$= A + \frac{\sum fd}{\sum f} = 145 + \left(\frac{-6}{12}\right) = 145.0 - 0.5 = 144.5$$

വലിയ സംഖ്യകൾക്ക് ശരാശരി കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് അഭ്യൂഹ മാധ്യ രീതി ഉചിതമാണ്.

8.4.3 സമാന്തര മാധ്യം - തരംതിരിക്കപ്പെട്ട ആവൃത്തി വിവരണം

ഒരു വിവരം തരംതിരിക്കപ്പെട്ട വർഗ്ഗാന്തരങ്ങളായി, ആവൃത്തി പട്ടികയിൽ ഇരുന്നാൽ നമുക്ക് താഴെ പട്ടികയിൽ കാണുന്നതു പോലെ ഒരു ആവൃത്തി വിതരണം (Frequency Distribution)ലഭിക്കും.

വയസ്സ് (വർഷങ്ങളിൽ)	10-20	20-30	30 – 40	40 – 50	50 - 60
ഉപഭോക്താക്കളുടെ എണ്ണം	80	120	50	22	8

മുകളിലുള്ള പട്ടിക വ്യത്യസ്ത വയസ്സുള്ള ഉപഭോക്താക്കളുടെ എണ്ണത്തിനെ കുറിക്കുന്നു. ഉദാഹരണമായി 120 ഉപഭോക്താക്കൾ 20 മുതൽ 30 വയസ്സുവരെ ഉള്ളവരാണ്(തരംതിരിക്കപ്പെട്ട ആവൃത്തിപ്പട്ടിക തയ്യാറാക്കുമ്പോൾ ഒറ്റപ്പെട്ട വിവരണങ്ങൾ കണക്കാക്കപ്പെടുന്നില്ല.ഇപ്പോൾ ഓരോ വർഗ്ഗാന്തരങ്ങളുടെ പ്രതിനിധിയായി ഒരു മൂല്യം ആവശ്യമാണ്. ഇത് ആ പിരിവിന്റെ മധ്യബിന്ദുവാണ്. മധ്യബിന്ദു (or) ക്ലാസ്സ് മാർക്ക് മധ്യബിന്ദുവിനെ താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച് കണക്കാക്കാം.

വർഗ്ഗാന്തരത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദു= $\frac{UCL + LCL}{2}$, (ഇവിടെ UCL എന്നത് വർഗ്ഗാന്തരത്തിന്റെ ഉച്ചപരിധി LCL – എന്നത് വർഗ്ഗാന്തരത്തിന്റെ നീചപരിധി ആകുന്നു)

തന്നിരിക്കുന്ന ആവൃത്തി വിതരണത്തിൽ സമാന്തര മാധ്യത്തിനെ താഴെയുള്ള രീതികളിൽ ഏതെങ്കിലും ഒരു രീതി ഉപയോഗിച്ച് കണക്കാക്കാം

(i) പ്രത്യക്ഷരീതി (ii) അഭ്യൂഹ മാധ്യ രീതി (iii) സ്റ്റെപ് ഡീവിയേഷൻ രീതി

പ്രത്യക്ഷരീതി

പ്രത്യക്ഷ രീതി ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ ശരാശരി കാണുന്നതിനുള്ള സൂത്രം

$$\bar{X} = \frac{\sum fx}{\sum f}$$

ഇവിടെ x എന്നത് വർഗ്ഗാന്തരത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവും f എന്നത് ആ വർഗ്ഗാന്തരത്തിന്റെ ആവൃത്തിയും ആകുന്നു. പ്രത്യക്ഷ രീതിയിൽ സമാന്തര മാധ്യം കാണുന്നതിനുള്ള ഘട്ടങ്ങൾ .

Unit 8_STATISTICS.indd 271 28-01-2023 12:02:18

ഘട്ടങ്ങൾ

(i) ഓരോ വർഗ്ഗാന്തരത്തിന്റെയും മധ്യ ബിന്ദുവിനെ കണ്ടുപിടിച്ച് അതിനെ x എന്ന് കുറിക്കുക.

(ii) ഈ മധ്യബിന്ദുവിനെ ആ വർഗ്ഗാന്തരത്തിന്റെ ആവൃത്തിയോട് ഗുണിച്ച് ആ ഗുണനഫലത്തിന്റെ തുക $\sum fx$ - നെ കാണുക

(iii) $\sum fx$ നെ ആവൃത്തിയുടെ തുക $(\sum f)$കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ ശരാശരി അല്ലെങ്കിൽ സമാന്തരമാധ്യം കിട്ടും.

ഉദാഹരണം 8.1 ഒരു കെട്ടിടസമുച്ചയത്തിൽ വസിക്കുന്ന ആളുകളുടെ എണ്ണം പട്ടികയിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. വയസ്സുകളുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ അവിടെ വസിക്കുന്ന ആളുകളുടെ ശരാശരി വയസ്സ് കാണുക.

വയസ്സ്	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
ജനങ്ങളുടെ എണ്ണം	2	6	9	7	4	2

നിർദ്ധാരണം

വയസ്സ്	ആളുകളുടെ എണ്ണം (f)	മധ്യബിന്ദു(x)	fx
0-10	2	5	10
10-20	6	15	90
20-30	9	25	225
30-40	7	35	245
40-50	4	45	180
50-60	2	55	110
	$\sum f = 30$		$\sum fx = 860$

$$\text{മാധ്യം} = \bar{X} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{860}{30} = 28.67$$

അതുകൊണ്ട് ആളുകളുടെ ശരാശരി വയസ്സ് = 28.67.

അഭ്യൂഹ മാധ്യ രീതി

തരംതിരിക്കപ്പെട്ട വിവരങ്ങളുടെ സമാന്തരമാധ്യത്തെ പ്രത്യക്ഷ രീതിയിൽ വേഗത്തിൽ കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിനെ പറ്റി നാം മനസ്സിലാക്കി. തന്നിരിക്കുന്ന ദത്തങ്ങൾ അധികമായിരുന്നാൽ ദത്തങ്ങളെയും അതിന്റെ ആവൃത്തികളെയും ഗുണിച്ച് തുക കണ്ടുപിടിക്കുന്നത് കഠിനമാണ്. മാത്രമല്ല തെറ്റുകൾ ഉണ്ടാകാനും അധിക സമയം ചെലവഴിക്കാനും സാധ്യതയുണ്ട്. അതുകൊണ്ട് അഭ്യൂഹ മാധ്യ രീതി ഉപയോഗിച്ച് സമാന്തരമാധ്യം കാണാം.

അഭ്യൂഹ മാധ്യ രീതിയിൽ സമാന്തരമാധ്യം കാണുന്നതിനുള്ള ഘട്ടങ്ങൾ

1. ദത്തങ്ങളിൽ ഏതെങ്കിലും ഒരു മൂല്യത്തെ അഭ്യൂഹ മാധ്യം (A) എന്ന് എടുക്കണം. ആ മൂല്യം മധ്യ ബിന്ദുവായിരുന്നാൽ വളരെ നന്നായിരിക്കും.

2. ഓരോ വർഗ്ഗത്തിനും വ്യതിയാനം $d = x - A$ എന്ന് കാണാം

Unit 8_STATISTICS.indd 272 28-01-2023 12:02:19

3. വ്യതിയാനത്തെ അതതു വർഗ്ഗാന്തരത്തിന്റെ ആവൃത്തി f കൊണ്ട് ഗുണിച്ച് Σfd കാണുക

4. $\bar{X} = A + \frac{\sum fd}{\sum f}$ എന്ന സൂത്രത്തെ ഉപയോഗിക്കുക

ഉദാഹരണം 8.2 താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ദത്തങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമാധ്യം കാണുക:

വർഗ്ഗാന്തരം	100-120	120-140	140-160	160-180	180-200	200-220	220-240
ആവൃത്തി	10	8	4	4	3	1	2

നിർദ്ധാരണം

അഭ്യൂഹമാധ്യം $A = 170$

വർഗ്ഗാന്തരം	ആവൃത്തി f	മധ്യബിന്ദു x	$d = x - A$ $d = x - \mathbf{170}$	fd
100-120	10	110	–60	–600
120-140	8	130	–40	–320
140-160	4	150	–20	–80
160-180	4	170	0	0
180-200	3	190	20	60
200-220	1	210	40	40
220-240	2	230	60	120
	$\sum f = 32$			$\sum fd = -780$

സമാന്തരമാധ്യം $\bar{X} = A + \frac{\sum fd}{\sum f}$

$= 170 + \left(\frac{-780}{32}\right)$

അതുകൊണ്ട് , $\bar{X} = 170 - 24.375$

$= 145.625$

സ്റ്റെപ് ഡീവിയേഷൻ രീതി

ഈ രീതിയിൽ സമാന്തര മാധ്യം കണക്കാക്കുന്നത് ലളിതമാക്കുന്നതിനായി വ്യതിയാനം $\frac{x-A}{c}$-നെ ക്ലാസ്സ് പരിധി c കൊണ്ട് ഹരിച്ച് (അതായത് $\frac{x-A}{c}$) പിന്നെ c കൊണ്ട് ഗുണിച്ച് മാധ്യം കാണും.ഇപ്പോൾ സൂത്രം താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന വിധം ലഭിക്കുന്നു.

$$\bar{X} = A + \left[\frac{\sum fd}{\sum f} \times c\right], \text{ ഇവിടെ } d = \frac{x - A}{c}$$

ഉദാഹരണം 8.3 താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന വിവരങ്ങൾക്ക് സ്റ്റെപ് ഡീവിയേഷൻ രീതിയിൽ സമാന്തര മാധ്യം കാണുക.

വർഗ്ഗാന്തരം	0-8	8-16	16-24	24-32	32-40	40-48
ആവൃത്തി (f)	10	20	14	16	18	22

Unit 8_STATISTICS.indd 273 28-01-2023 12:02:20

നിർദ്ധാരണം

അഭ്യൂഹമാധ്യം A=28, ക്ലാസ്സ് പരിധി c=8

വർഗ്ഗാന്തരം	മധ്യബിന്ദു x	ആവൃത്തി f	$d = \frac{x - A}{c}$	fd
0-8	4	10	–3	–30
8-16	12	20	–2	–40
16-24	20	14	–1	–14
24-32	28	16	0	0
32-40	36	18	1	18
40-48	44	22	2	44
		$\sum f = 100$		$\sum fd = -22$

സമാന്തരമാധ്യം

$$\bar{X} = A + \frac{\sum fd}{\sum f} \times c$$

$$= 28 + \left(\frac{-22}{100}\right) \times 8$$

$$= 28 - 1.76 = 26.24$$

കുറിപ്പ്

- x_i ഉം f_i ഉം ചെറിയ മൂല്യമാണെങ്കിൽ പ്രത്യക്ഷ രീതിയാണ് മികച്ചത്.
- x_i ഉം f_i ഉം വലിയ മൂല്യമായിരുന്നാൽ അഭ്യൂഹമാധ്യ രീതി അല്ലെങ്കിൽ സ്റ്റെപ് ഡിവിയേഷൻ രീതി ഉപയോഗിക്കാം.
- വർഗ്ഗാന്തരങ്ങൾ തുല്യമല്ലെങ്കിലും d വലുതായിരുന്നാലും സ്റ്റെപ്പ് ഡീവിയേഷൻ രീതി ഉപയോഗിക്കാം.

8.4.4 സമാന്തരമാധ്യത്തിന്റെ സവിശേഷതകൾ

a, b കൂടാതെ c എന്നിവ മൂന്ന് സംഖ്യകളാണെങ്കിൽ അവയുടെ മാധ്യം $\frac{a+b+c}{3}$ ആകുന്നു.

ഓരോ മൂല്യവും അതിന്റെ ശരാശരിയിൽ നിന്ന്എങ്ങനെ വ്യത്യാസപ്പെടുന്നു? (അതിനെ നമ്മൾ ശരാശരി സംഖ്യയുടെ വ്യതിയാനം എന്ന്പറയുന്നു). കൂടാതെ അതിന്റെ വ്യതിയാനങ്ങളുടെ തുക എത്രയാണ്?

ഇതിനെ താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന വിധം പൊതുവൽകരിക്കാം.

1. മാധ്യത്തിൽ നിന്നുള്ള, എല്ലാ ദത്തങ്ങളുടെയും വ്യതിയാനങ്ങളുടെ ആകെ തുക പൂജ്യം ആകുന്നു.

   $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ എന്നീ n ദത്തങ്ങളുടെ സമാന്തരമാധ്യം $\bar{X}$ എങ്കിൽ

   $\left(x_1 - \bar{X}\right) + \left(x_2 - \bar{X}\right) + \left(x_3 - \bar{X}\right) + \ldots + \left(x_n - \bar{X}\right) = 0$ എന്തുകൊണ്ടന്നാൽ $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{X}) = 0$

2. തന്നിരിക്കുന്ന ഓരോ ദത്തത്തോടും ഒരു സ്ഥിരപദം k-നെ കൂട്ടിയാൽ അല്ലെങ്കിൽ കുറച്ചാൽ അതിന്റെ സമാന്തരമാധ്യം സ്ഥിരപദം k അളവു കൂടും അല്ലെങ്കിൽ കുറയും.

3. തന്നിരിക്കുന്ന ഓരോ ദത്തത്തെയും ഒരു സ്ഥിരപദം k, $k \neq 0$, കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ അല്ലെങ്കിൽ ഹരിച്ചാൽ അതിന്റെ സമാന്തരമാധ്യവും സ്ഥിരപദം k-ൽ ഗുണിക്കപ്പെടും അല്ലെങ്കിൽ ഹരിക്കപ്പെടും.

Unit 8_STATISTICS.indd 274 28-01-2023 12:02:21

ഉദാഹരണം 8.4

താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ദത്തങ്ങൾക്ക് സമാന്തര മാധ്യത്തിൽ നിന്നുള്ള വ്യതിയാനങ്ങളുടെ ആകെ തുക കാണുക:

21, 30, 22, 16, 24, 28, 18, 17

നിർദ്ധാരണം

$$\bar{X} = \frac{\sum x}{n} = \frac{21+30+22+16+24+28+18+17}{8} = \frac{176}{8} = 22$$

സമാന്തരമാധ്യം $\bar{X}$ -ൽ നിന്നുള്ള വ്യതിയാനം $x - \bar{X}$ ആകുന്നു

വ്യതിയാനങ്ങളുടെ ആകെ തുക

$= (21\text{-}22)+(30\text{-}22)+(22\text{-}22)+(16\text{-}22)+(24\text{-}22)+(28\text{-}22)+(18\text{-}22)+(17\text{-}22)$

$= 16-16 = 0.$ (or), $\sum(x-\bar{X}) = 0$

ഇതിൽ നിന്നും ശരാശരിയിൽ നിന്നുള്ള നിരീക്ഷണങ്ങളുടെ വ്യതിയാനങ്ങളുടെ തുക പൂജ്യം ആയിരിക്കും എന്ന് മനസ്സിലാക്കാം.

ഉദാഹരണം 8.5

6 ദത്തങ്ങളുടെ മാധ്യം 45, ഓരോ ദത്തത്തിനോടും 4 കൂട്ടിയാൽ കിട്ടുന്ന പുതിയ ശരാശരി കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ എന്നദത്തങ്ങളുടെ ശരാശരി $\dfrac{\sum_{i=1}^{6} x_i}{6} = 45$

ഓരോ ദത്തത്തിനോടും 4 കൂട്ടിയാൽ കിട്ടുന്ന പുതിയ മൂല്യം,

പുതിയ ശരാശരി. $\bar{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{6}(x_i+4)}{6}$

$$= \frac{(x_1+4)+(x_2+4)+(x_3+4)+(x_4+4)+(x_5+4)+(x_6+4)}{6}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i + 24}{6} = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i}{6} + 4$$

$\bar{X} = 45 + 4 = 49.$

പുരോഗതി പരിശോധിക്കൽ

10 ദത്തങ്ങളുടെ ശരാശരി 48. ഓരോ ദത്തത്തിൽ നിന്നും 7-നെ കുറച്ചാൽ കിട്ടുന്ന പുതിയ ദത്തങ്ങളുടെ ശരാശരി _____

ഉദാഹരണം 8.6

7 ദത്തങ്ങളുടെയും ശരാശരി 30 എങ്കിൽ ഓരോ ദത്തത്തെയും 3 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന പുതിയ ശരാശരി കാണുക

നിർദ്ധാരണം

X എന്നത് $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ എന്നത് 7 ദത്തങ്ങളുടെയും ഗണമെങ്കിൽ.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{7} x_i}{7} = 30 \text{ അല്ലെങ്കിൽ } \sum_{i=1}^{7} x_i = 210$$

ഓരോ ദത്തത്തെയും 3 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന പുതിയ ശരാശരി

പുരോഗതിയെ പരിശോധിക്കൽ

1. 12 ദത്തങ്ങളുടെ ശരാശരി 20. ഓരോ ദത്തത്തെയും 6 കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന പുതിയ ദത്തങ്ങളുടെ ശരാശരി _____
2. 30 ദത്തങ്ങളുടെ ശരാശരി 16 . ഓരോ ദത്തത്തെയും 4 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന പുതിയ ദത്തങ്ങളുടെ ശരാശരി _____

Unit 8_STATISTICS.indd 275 28-01-2023 12:02:23

$$\frac{\sum_{i=1}^{7}\frac{x_i}{3}}{7} = \frac{\left(\frac{x_1}{3}+\frac{x_2}{3}+\frac{x_3}{3}+\frac{x_4}{3}+\frac{x_5}{3}+\frac{x_6}{3}+\frac{x_7}{3}\right)}{7}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{7} x_i}{21} = \frac{210}{21} = 10$$

വേറൊരു രീതി

Y എന്നത് X ന്റെ ഓരോ സംഖ്യയെയും 3 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന വിലകളുടെ ഗണം .

എങ്കിൽ, $\bar{Y} = \frac{\bar{X}}{3} = \frac{30}{3} = 10.$

പുതിയ ദത്തങ്ങളുടെ ശരാശരി പഴയ വിവരങ്ങളുടെ ശരാശരിയെ 3 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്നത് തന്നെയാണ്

ഉദാഹരണം 8.7

25 വിദ്യാർത്ഥികളുടെ ശരാശരി മാർക്ക് 78.4 ഇതിൽ 96 എന്നത് 69 എന്ന് തെറ്റായി കണ്ടെത്തി. എങ്കില ശരിയായ ശരാശരി കണ്ടുപിടിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം കൂടാതെ ശരാശരി യഥാക്രമം $n = 25, \bar{X} = 78$

തെറ്റായ $\sum x = \bar{X} \times n = 78.4 \times 25 = 1960$

ശരിയായ Σx =തെറ്റായ Σx - തെറ്റായ മൂല്യം+ ശരിയായ മൂല്യം

$= 1960 - 69 + 96 = 1987$

ശരിയായ $\bar{X} = \frac{\text{ശരിയായ}\sum x}{n} = \frac{1987}{25} = 79.48$

പുരോഗതി പരിശോധിക്കൽ

4 സംഖ്യകൾ പരിഗണിക്കുക. ഇതിൽ നിന്നും ഒരു സംഖ്യയെ ഒഴിവാക്കിയാൽ ബാക്കി 3 സംഖ്യകളുടെ ശരാശരി 45, 60, 65 or 70 ആകുന്നു. എങ്കിൽ 4 സംഖ്യകളുടെ ശരാശരി എന്ത്?

അഭ്യാസം 8.1

1. ഒരു പ്രദേശത്തിൽ തണുപ്പ് കാലത്തുള്ള ഒരാഴ്ചയിലെ ഊഷ്മാവ് 26°C, 24°C, 28°C, 31°C, 30°C, 26°C, 24°C എന്ന് കണ്ടെത്തി. ഈ പ്രദേശത്തിന്റെ ഈ ആഴ്ചയിലെ ശരാശരി ഊഷ്മാവ് കാണുക.

2. ഒരു കുടുംബത്തിലെ 4 ആളുകളുടെ ശരാശരി ഭാരം 26 കിലോ ഗ്രാം. അവരിൽ മൂന്നു പേരുടെ ഭാരങ്ങൾ 56 കിലോ ഗ്രാം, 68 കിലോ ഗ്രാം കൂടാതെ 72 കിലോ ഗ്രാം. എങ്കിൽ നാലാമത്തെ ആളുടെ ഭാരം കാണുക.

3. ഒരു ക്ലാസിൽ കണക്ക് പരീക്ഷയിൽ 10 വിദ്യാർത്ഥികൾക്ക് 75 മാർക്കും 12 വിദ്യാർത്ഥികൾക്ക് 60 മാർക്കും 8 വിദ്യാർത്ഥികൾക്ക് 40 മാർക്കും കൂടാതെ 3 വിദ്യാർത്ഥികൾക്ക് 30 മാർക്കും ലഭിച്ചു. എങ്കിൽ അവരുടെ ശരാശരി മാർക്ക് കാണുക.

4. ഒരു ഗവേഷണ കേന്ദ്രത്തിൽ ക്യാൻസർ ബാധിച്ച 6 എലികൾക്കു പച്ച മരുന്നുകൾ 10 ദിവസം വീതം കൊടുത്ത് നടത്തിയ ഗവേഷണത്തിനു ശേഷം അവയുടെ ക്യാൻസർ മുഴകളുടെ അളവുകൾ പട്ടികയാക്കിയിരിക്കുന്നു.

എലികളുടെ അടയാളപ്പെടുത്തൽ	1	2	3	4	5	6

Unit 8_STATISTICS.indd 276 28-01-2023 12:02:27

ക്യാൻസർ മുഴകളുടെ അളവ് (mm^3)	145	148	142	141	139	140

5. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളുടെ ശരാശരി 20.2 എങ്കിൽ p- യുടെ മൂല്യം കാണുക

മാർക്കുകൾ	10	15	20	25	30
വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം	6	8	p	10	6

6. ഒരു ക്ലാസ്സിൽ വിദ്യാർത്ഥികളുടെ ഭാരം ക്ലാസ്സ് രജിസ്റ്ററിൽ ചേർക്കാൻ ശേഖരിച്ചു. ആ ക്ലാസ്സിന്റെ ശരാശരി ഭാരം പ്രത്യക്ഷ രീതി ഉപയോഗിച്ച് കാണുക.

ഭാരം (കി.ഗ്രാം)	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65	65-75
വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം	4	11	19	14	0	2

7. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളുടെ ശരാശരി അഭ്യൂഹമാധ്യ രീതി ഉപയോഗിച്ച് കാണുക:

വർഗ്ഗാന്തരം	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
ആവൃത്തി	5	7	15	28	8

8. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളുടെ ശരാശരി സ്റ്റെപ് ഡീവിയേഷൻ രീതി ഉപയോഗിച്ച് കാണുക:

= 78.4

വയസ്സ്	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44
ആളുകളുടെ എണ്ണം	4	20	38	24	10	9

8.5 മീഡിയൻ

ദത്തങ്ങളിൽ അധിക മൂല്യമുള്ള ദത്തത്തിന്റെ മൂല്യത്തിനെ കുറച്ചു മൂല്യം കുറവായിട്ടുള്ള ദത്തത്തിന്റെ മൂല്യത്തെ ഉയർത്തി സമപ്പെടുത്തുന്ന മധ്യമൂല്യമാണ് കൂട്ടു ശരാശരി. ഒരു ഓഫീസിൽ ജോലി ചെയ്യുന്ന നാല് പേരുടെ വരുമാനങ്ങൾ യഥാക്രമം . ₹5000, ₹6000, ₹7000 കൂടാതെ ₹8000. എന്നിവ ആണെങ്കിൽ അവരുടെ ശരാശരി വരുമാനം= $\frac{5000+6000+7000+8000}{4}$ =₹6500 ആകുന്നു.

ഇതിൽ അഞ്ചാമതായി ഒരാൾ ₹29000 മാസവരുമാനത്തിൽ ഈ ഗ്രൂപ്പിൽ ചേർന്നാൽ, ആ അഞ്ച് പേരുടെ ശരാശരി വരുമാനം $\frac{5000+6000+7000+8000+29000}{5} = \frac{55000}{5}$ = ₹11000 ആകുന്നു. ഈ ദത്തത്തിൽ നിന്ന് സംഘത്തിലുള്ള ഓരോരുത്തരുടെയും ശരാശരി വരുമാനം ₹11000 എന്ന് പറയാൻ സാധിക്കുമോ ? ഇത് തെറ്റാകുമോ? ഇതിലുള്ള പ്രശ്നം എന്തെന്നാൽ ഏറ്റവും കൂടിയ മൂല്യം ശരാശരിയെ ബാധിക്കുന്നു. അതു കൂടാതെ ശരാശരിയെ പൊതുവായ മദ്ധ്യമൂല്യത്തിൽ നിന്നും വ്യത്യാസപ്പെടുത്തുന്നു. ഈ സാഹചര്യത്തിൽ നാം വേറെ ശരാശരിയെ കാണുന്നത് അത്യാവശ്യമാണ്.

തന്നിരിക്കുന്ന ദത്തത്തെ ആരോഹണ ക്രമത്തിലോ, അവരോഹണ ക്രമത്തിലോ ക്രമീകരിക്കുമ്പോൾ ഏറ്റവും മധ്യത്തിൽ വരുന്ന മൂല്യമാണ് മീഡിയൻ.

ഉദാഹരണമായി, ഒരു ക്ലാസ്സിൽ ഉള്ള 9 വിദ്യാർത്ഥികളുടെ ഉയരങ്ങൾ യഥാക്രമം 122 സെ.മീ, 138

Unit 8_STATISTICS.indd 277 28-01-2023 12:02:29

സെ.മീ, 124 സെ.മീ, 125 സെ.മീ, 135 സെ.മീ, 141 സെ.മീ, 138 സെ.മീ, 140 സെ.മീ, 147 സെ.മീ, കൂടാതെ 161 സെ.മീ എന്ന് എടുക്കാം

(i) സാധാരണ കണക്കുകൂട്ടലിൽ ശരാശരി 137 സെ.മീ ആകുന്നു.

(ii) ഈ ഉയരങ്ങളെ ആരോഹണ ക്രമത്തിൽ എഴുതുമ്പോൾ 122 സെ.മി, 125 സെ.മീ, 125 സെ.മീ, 135 സെ.മീ, 138 സെ.മീ, 140 സെ.മീ, 141 സെ.മീ, 147 സെ.മീ, 160 സെ.മീ കിട്ടുന്നു. ഇതിൽ 138 സെ.മീ എന്ന മൂല്യത്തിന്റെ ഇരുവശങ്ങളിലും സമ അളവിലുള്ള മൂല്യങ്ങളാണ് ഉള്ളതെന്ന് കാണാം അതുകൊണ്ട് ആ മൂല്യം തന്നിരിക്കുന്ന ഉയരങ്ങളുടെ മീഡിയൻ ആകുന്നു.



(iii) ഒരു വിവരശ്രേണിയിൽ 11 പദങ്ങൾ ഒരു ക്രമത്തിൽ എഴുതിയാൽ അതിന്റെ 6 ാം പദം മീഡിയൻ ആകുന്നു. എന്തുകൊണ്ടെന്നാൽ ആ പദമാണ് മധ്യത്തിൽ ഉള്ളത്. വിവരശ്രേണിയിൽ 101 പദങ്ങൾ ഇരുന്നാൽ 51 ാം പദം മീഡിയൻ ആകുന്നു.

ഒരു വിവര ശ്രേണിയിൽ പദങ്ങളുടെ എണ്ണം ഒറ്റയായിരുന്നാൽ മധ്യമൂല്യം എളുപ്പത്തിൽ കാണാം. പൊതുവായി ഒരു ദത്തശ്രേണിയിൽ പദങ്ങളുടെ എണ്ണം n, ഒരു ഒറ്റ സംഖ്യയാണെങ്കിൽ അതിന്റെ മീഡിയൻ $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ ാം പദം ആകുന്നു.

(iv) ഒരു വിവര നിർവഹണത്തിൽ 6 പദങ്ങൾ ഉണ്ടെങ്കിൽ മീഡിയൻ എങ്ങനെ കാണാം? മീഡിയൻ എന്നത് ആ വിവര നിർവഹണത്തിന്റെ മധ്യത്തിൽ ഉള്ള രണ്ട് പദങ്ങളുടെ ശരാശരി മീഡിയൻ ആകുന്നു. (35-ാം പദം എന്ന് ഇതിനെ എഴുതാമോ?) ദത്തങ്ങളുടെ ഒരു വിവരണത്തിൽ 100 ഇനം ഇരുന്നാൽ 50.5 ാം ഇനം മീഡിയൻ ആകുന്നു!

പൊതുവായി ദത്തങ്ങളുടെ ഒരു വിവരണത്തിന്റെ പദങ്ങളുടെ എണ്ണമായ n ഒരു ഇരട്ടസംഖ്യയായിരുന്നാൽ അതിന്റെ മീഡിയൻ $\left(\frac{n}{2}\right)^{th}$-ാം പദം കൂടാതെ $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{\text{th}}$-ാം പദം എന്നിവയുടെ ശരാശരി ആകുന്നു

ഉദാഹരണം 8.8 ഒരു ക്രിക്കറ്റ് കളിയിൽ 11 കളിക്കാർ നേടിയ റണ്ണുകൾ 7, 21, 45, 12, 56, 35, 25, 0, 58, 66, 29 ആണെങ്കിൽ അതിന്റെ മീഡിയൻ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിരിക്കുന്ന സംഖ്യകളെ ആരോഹണക്രമത്തിൽ എഴുതിയാൽ

0,7,12,21,25,29,35,45,56,58,66

പദങ്ങളുടെ എണ്ണം = 11 (ഒരു ഒറ്റ സംഖ്യ)

അതുകൊണ്ട് മീഡിയൻ = $=\left(\frac{11+1}{2}\right)$-ാം പദം = 6 ാം പദം=29

Unit 8_STATISTICS.indd 278 28-01-2023 12:02:30

ഉദാഹരണം 8.9 താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന തരം തിരിക്കാത്ത വിവരങ്ങൾ 10, 17, 16, 21, 13, 18, 12, 10, 19, 22 എന്നിവയുടെ മീഡിയൻ കാണുക

നിർദ്ധാരണം

തന്നിരിക്കുന്ന സംഖ്യകളെ ആരോഹണക്രമത്തിൽ എഴുതാം.

10, 17, 16, 21, 13, 18, 12, 10, 19, 22.

പദങ്ങളുടെ എണ്ണം = 10 (ഒരു ഇരട്ട സംഖ്യ)

മീഡിയൻ = $\left(\frac{10}{2}\right)^{\text{th}}$-ാം ഇനത്തിന്റെയും $\left(\frac{10}{2}+1\right)$-ാം ഇനത്തിന്റെയും ശരാശരി

= 5 ാം ഇനത്തിന്റെയും 6 ാം ഇനത്തിന്റെയും ശരാശരി

$= \frac{16+17}{2} = \frac{33}{2} = 16.5$

ഉദാഹരണം 8.10 താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന പട്ടികയിൽ ഗണിതത്തിലും ശാസ്ത്രത്തിലും 12 വിദ്യാർത്ഥികൾ നേടിയ മാർക്കുകൾ തന്നിരിക്കുന്നു.

ഗണിതത്തിലുള്ള മാർക്ക്	52	55	32	30	60	44	28	25	50	75	33	62
ശാസ്ത്രത്തിലുള്ള മാർക്ക്	54	42	48	49	27	25	24	19	28	58	42	69

ഏത് വിഷയത്തിലാണ് വിദ്യാർത്ഥികൾ അധികമാർക്ക് നേടിയത് എന്ന് കാണുക?

നിർദ്ധാരണം

രണ്ട് മാർക്കുകളെയും ആരോഹണക്രമത്തിൽ എഴുതുക.

ഗണിതത്തിലുള്ള മാർക്ക്	25	28	30	32	33	44	50	52	55	60	62	75
ശാസ്ത്രത്തിലുള്ള മാർക്ക്	19	24	25	27	28	42	42	48	49	54	58	69

വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം 12 ആയതിനാൽ 6-ാമത്തെയും 7-ാമത്തെയും മാർക്കുകൾ വിദ്യാർത്ഥികളുടെ ശരാശരി മീഡിയൻ ആകുന്നു.

അതുകൊണ്ട് ഗണിതത്തിലുള്ള മീഡിയൻ മാർക്ക് $= \frac{44+50}{2} = 47$

ശാസ്ത്രത്തിലുള്ള മീഡിയൻ മാർക്ക് $= \frac{42+42}{2} = 42$

ആയതിനാൽ ഗണിതത്തിൽ നേടിയ മാർക്ക് ശാസ്ത്രത്തിൽ നേടിയ മാർക്കിനേക്കാളും കൂടുതലാണ്. അതുകൊണ്ട് ശാസ്ത്രത്തെക്കാളും ഗണിതത്തിലാണ് വിദ്യാർത്ഥികൾ അധിക മാർക്ക് വാങ്ങിയത് എന്ന് മനസ്സിലാക്കാം..

Unit 8_STATISTICS.indd 279 28-01-2023 12:02:30

8.5.1 മീഡിയൻ തരംതിരിക്കുന്ന ആവൃത്തി വിതരണം

(i) തന്നിരിക്കുന്ന സംഖ്യകളെ ആരോഹണക്രമത്തിൽ അല്ലെങ്കിൽ അവരോഹണക്രമത്തിൽ എഴുതുക.

(ii) സഞ്ചിതാവൃത്തി (*Cumulative Frequency*)കാണുക ആകെ ആവൃത്തിയുടെ തുക N ആകുന്നു.

(iii) N ഒരു ഒറ്റ സംഖ്യയാണെങ്കിൽ മീഡിയൻ $=\left(\frac{N+1}{2}\right)^{\text{i}}$- ാം ഇനം

(iv) N ഒരു ഇരട്ടസംഖ്യയാണെങ്കിൽ, മീഡിയൻ $=$

$$\left\{\frac{\left(\frac{N}{2}\right)\text{- ാം ഇനം} \quad + \left(\frac{N}{2}+1\right)\text{- ാം ഇനം}}{2}\right\}$$

ഉദാഹരണം 8.11 മീഡിയൻ കാണുക:

ഉയരം(സെ.മീ)	160	150	152	161	156	154	155
വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം	12	8	4	4	3	3	7

നിർദ്ധാരണം

തന്നിരിക്കുന്ന ദത്തങ്ങളെ ആരോഹണ ക്രമത്തിൽ എഴുതുക:

ഉയരം(സെ.മീ)	വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം (f)	സഞ്ചിതാവൃത്തി (cf)
150	8	8
152	4	12
154	3	15
155	7	22
156	3	25
160	12	37
161	4	41

ഇവിടെ $\mathbf{N = 41}$

മീഡിയൻ $= \left(\frac{N+1}{2}\right)^{\text{i}}$-ാം മൂല്യമാണ്= $\left(\frac{41+1}{2}\right)^{\text{i}}$-ാം മൂല്യം = 21 ാം മൂല്യം.

41 വിദ്യാർത്ഥികളുടെ ഉയരങ്ങളെ ആരോഹണക്രമത്തിൽ എഴുതുമ്പോൾ 21 ാം വിദ്യാർത്ഥിയുടെ ഉയരം മധ്യമൂല്യം ആകുന്നു. കാരണം വിദ്യാർത്ഥിയുടെ ഇരുവശവും 20 പേർ ഉണ്ട്. അതുകൊണ്ട് 21-ാം ഇടത്തിലുള്ള വിദ്യാർത്ഥിയുടെഉയരം കാണേണ്ടത് അത്യാവശ്യമാണ്. 15 വിദ്യാർത്ഥികൾ(സഞ്ചിതാവൃത്തി നോക്കുക) 154 സെ.മീ ഉയരമോ, അല്ലെങ്കിൽ കുറഞ്ഞവയോ ആണ്. 22 വിദ്യാർത്ഥികൾ(സഞ്ചിതാവൃത്തി നോക്കുക) 155 സെ.മീ ഉയരമോ അല്ലെങ്കിൽ കൂടുതലോ ഉള്ളവരാണ്. ഇതിൽ 21 ാം വിദ്യാർത്ഥിയുടെ ഉയരം 155 സെ.മീ എന്ന് കാണാം.

8.5.2 മീഡിയൻ തരംതിരിച്ച ആവൃത്തി വിതരണം

തരംതിരിച്ച ആവൃത്തി വിതരണത്തിന്റെ മീഡിയൻ കണക്കാക്കുന്നതിന് താഴെ തന്നുള്ള വഴികൾ ഉൾപ്പെടുന്നു

Unit 8_STATISTICS.indd 280 28-01-2023 12:02:31

ഘട്ടങ്ങൾ

(i) സഞ്ചിതാവൃത്തി വിതരണം തയ്യാറാക്കുക.

(ii) $\left(\frac{N}{2}\right)^{th}$-ാം പദം കാണുക.

(iii) സഞ്ചിതാവൃത്തി $\frac{N}{2}$ ഉൾപ്പെടുന്ന വർഗ്ഗത്തെ മീഡിയൻ വർഗ്ഗം എന്നു പറയുന്നു

(iv) സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച് മീഡിയൻ കാണുക:

$$\text{മീഡിയൻ} = l + \frac{\left(\frac{N}{2} - m\right)}{f} \times c$$

l =മീഡിയൻ വർഗ്ഗത്തിന്റെ നീചപരിധി, f = മീഡിയൻ വർഗ്ഗത്തിന്റെ ആവൃത്തി

c = മീഡിയൻ വർഗ്ഗത്തിന്റെ വർഗ്ഗാന്തരം N = ആവൃത്തിയുടെ ആകെ തുക $\left(\sum f\right)$

m = മീഡിയൻ വർഗ്ഗത്തിനു തൊട്ടു മുൻപുള്ള വർഗ്ഗത്തിന്റെ സഞ്ചിതാവൃത്തി

ഉദാഹരണം 8.12 തന്നിട്ടുള്ള 200 കുടുംബങ്ങളുടെ ഒരാഴ്ചത്തേക്കുള്ള ചെലവിന്റെ മീഡിയൻ കാണുക.

ഒരാഴ്ചത്തെ ചെലവ് (₹)	0-1000	1000-2000	2000-3000	3000-4000	4000-5000
കുടുംബങ്ങളുടെ എണ്ണം	28	46	54	42	30

നിർദ്ധാരണം

ഒരാഴ്ച ചെലവ്	കുടുംബങ്ങളുടെ എണ്ണം	സഞ്ചിതാവൃത്തി
0-1000	28	28
1000-2000	46	74
2000-3000	54	128
3000-4000	42	170
4000-5000	30	200
	N=200	

മീഡിയൻ ക്ലാസ്സ് $= \left(\frac{N}{2}\right)$-ാം മൂല്യം $= \left(\frac{200}{2}\right)^{th}$-ാം മൂല്യം = 100-ാം മൂല്യം

മീഡിയൻ വർഗ്ഗം = 2000 – 3000

$\frac{N}{2} = 100 \quad l = 2000$

$m = 74, \quad c = 1000, \quad f = 54$

$$\text{മീഡിയൻ} = l + \frac{\left(\frac{N}{2} - m\right)}{f} \times c$$

പുരോഗതി പരിശോധന

1. ആദ്യ നാല് പൂർണ്ണ സംഖ്യകളുടെ മീഡിയൻ _____.
2. ആദ്യത്തെ നാല് പൂർണ്ണ സംഖ്യകളോട് 4-നെ കൂടി ചേർത്താൽ പുതിയ മീഡിയൻ കാണുക രണ്ട് മീഡിയനും ഇടയിലുള്ള വ്യത്യാസം കാണുക.

Unit 8_STATISTICS.indd 281 28-01-2023 12:02:34

$$= 2000 + \left(\frac{100 - 74}{54}\right) \times 1000$$

$$= 2000 + \left(\frac{26}{54}\right) \times 1000 = 2000 + 481.5$$

$$= 2481.5$$

ഉദാഹരണം 8.13 താഴെ തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളുടെ മീഡിയൻ 24 എങ്കിൽ x ന്റെ മൂല്യം കാണുക.

വർഗ്ഗാന്തരം	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
ആവൃത്തി	6	24	x	16	9

നിർദ്ധാരണം

വർഗ്ഗാന്തരം	ആവൃത്തി	സഞ്ചിതാവൃത്തി
0-10	6	6
10-20	24	30
20-30	x	$30 + x$
30-40	16	$46 + x$
40-50	9	$55 + x$
	$N = 55 + x$	

മീഡിയൻ 24 എങ്കിൽ മീഡിയൻ വർഗ്ഗം 20 – 30

$l = 20$ $N = 55 + x$, $m = 30$, $c = 10$, $f = x$

$$\text{മീഡിയൻ} = l + \frac{\left(\frac{N}{2} - m\right)}{f} \times c$$

$$24 = 20 + \frac{\left(\frac{55+x}{2} - 30\right)}{x} \times 10$$

$$4 = \frac{5x - 25}{x} \text{ (ലളിതമാക്കിയ ശേഷം)}$$

$$4x = 5x - 25$$

$$5x - 4x = 25$$

$$x = 25$$

കുറിപ്പ്

"ജനങ്ങാൽ എന്താണ് ഏറ്റവും വേഗം ഇഷ്ടപ്പെടുന്നത്?" എന്ന ചോദ്യത്തിന് ഉത്തരം പരിഷ്കാരമാണ്.
ഉദാഹരണം: "ഏത് ശൈലിയിലുള്ള ഷർട്ട് ആണ് കൂടുതൽ ജനങ്ങൾ ധരിക്കാൻ ഇഷ്ടപ്പെടുന്നത്?"

അഭ്യാസം 8.2

1. തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങൾക്ക് മീഡിയൻ കാണുക : 47, 53, 62, 71, 83, 21, 43, 47, 41.
2. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങൾക്ക് മീഡിയൻ കാണുക: 36, 44, 86, 31, 37, 44, 86, 35, 60, 51
3. ആരോഹണ ക്രമത്തിലുള്ള 11, 12, 14, 18, x+2, x+4, 30, 32, 35, 41 എന്ന വിവരണത്തിന്റെ മീഡിയൻ 24 എങ്കിൽ x ന്റെ മൂല്യം കാണുക.

Unit 8_STATISTICS.indd 282 28-01-2023 12:02:36

4. ഒരു ഗവേഷകൻ 13 എലികളുടെ ആഹാരം തേടുന്ന സ്വഭാവത്തെ മൈദാ മാവ് ഉപയോഗിച്ച് ഗവേഷണം ചെയ്തപ്പോൾ അത് ആഹാരം തേടുന്നതിന് എടുക്കുന്ന സമയത്തിന്റെ പട്ടിക 31,33, 63,33,28,29,33,27,27,34,35,28,32 എന്ന രീതിയിൽ ലഭിച്ചു. എങ്കിൽ എലികൾ ആഹാരം തേടാൻ എടുക്കുന്ന നേരത്തിന്റെ മീഡിയൻ കാണുക.

5. ഒരു ക്ലാസ്സിൽ ഏകീകരണ മൂല്യനിർണ്ണയത്തിൽ വിദ്യാർത്ഥികൾ നേടിയ മാർക്കിന്റെ മീഡിയൻ കാണുക

വർഗ്ഗാന്തരം	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
വിദ്യാരത്ഥികളുടെ എണ്ണം	2	7	15	10	11	5

6. അഞ്ച് ധനപൂർണ്ണാങ്കങ്ങളുടെ ശരാശരി അവയുടെ മീഡിയന്റെ ഇരുമടങ്ങാണ് അവയിൽ നാ ല് പൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾ 3,4,6,9 കൂടാതെ അവയുടെ മീഡിയൻ 6 ഉം ആണെങ്കിൽ അഞ്ചാമത്തെ പ ൂർണ്ണാങ്കം സംഖ്യ കാണുക.

8.6 മോഡ്

(i) ഒരു തെരഞ്ഞെടുപ്പിൽ മൂന്ന് സ്ഥാനാർത്ഥികൾ നേടിയ വോട്ടുകൾ പറ്റിയ വിവരം താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു:

സ്ഥാനാർത്ഥി (ശ്രീ)	നേടിയ വോട്ടുകൾ
ശ്രീ. X	4, 12, 006
ശ്രീ. Y	9, 87, 991
ശ്രീ. Z	7, 11, 973
ആകെ	21, 11, 970



ഏത് സ്ഥാനാർത്ഥിയാണ് വിജയിച്ചതായി അറിയിക്കുക? തീർച്ചയായും ശ്രീ. Y ആണ് വിജയി. കാരണം മൂന്ന് സ്ഥാനാർത്ഥികളിലും കൂടുതൽ വോട്ട് ലഭിച്ച വ്യക്തി ശ്രീ. Y ആണ്. പക്ഷേ ശ്രീ. Y യുടെ വോട്ടുകൾ ഭൂരിപക്ഷം ജനങ്ങളെയും പ്രതിനിധാനം ചെയ്യുന്നില്ല. (എന്തു കൊണ്ടെന്നാൽ അധിക വോട്ടുകളും അദ്ദേഹത്തിന് എതിരാണ്) എന്നിരുന്നാലും ശ്രീ Y-യെയാണ് വിജയിയായി പ്രഖ്യാപിച്ചത്. എന്തുകൊണ്ടെന്നാൽ ഇവിടുത്തെ തെരഞ്ഞെടുപ്പിൽ വിജയിയുടെ സ്ഥാനം ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്നത് കൂടുതൽ വോട്ടുകൾ നേടുന്ന സ്ഥാന ാർത്ഥിയെയാണ്.

(ii) ഒരു സ്ഥാപനം ഒരു വിദ്യാലയത്തിലുള്ള 9- ാം ക്ലാസ്സിൽ പഠിക്കുന്ന 100 വിദ്യാർത്ഥികൾക്ക് ഒരേ അളവിലുള്ള കായിക ചെരുപ്പുകൾ (സ്പോർട്സ് ഷൂ) കൊടുക്കാൻ ആലോചിക്കുന്നു. ആ ക്ലാസ്സിലുള്ള വിദ്യാർത്ഥികളുടെ ചെരുപ്പുകളുടെ അളവുകൾ താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു .

ചെരുപ്പുകളുടെ അളവ്	5	6	7	8	9	10
വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം	10	12	27	31	19	1

നിർമ്മാതാവിന് ഒരേ ഒരു അളവിലുള്ള ചെരിപ്പ് മാത്രമേ നിർമ്മിക്കാൻ അനുമതി കൊടുക്കുകയുള്ളൂ എങ്കിൽ ആ സ്ഥാപനം ഏത് അളവിലുള്ള ചെരുപ്പുകളാണ് തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നത്?

മുകളിലുള്ള രണ്ട് ഉദാഹരണത്തിലും ശരാശരിയും മീഡിയനും കാണുന്നത് ഈ സാഹചര്യത്തിന് അനുയോജ്യമല്ല എന്ന് കാണാം.അതുകൊണ്ട് ശരാശരിയുടെ വേറൊരു രൂപമായ മോഡിനെ കുറിച്ച് പഠിക്കേണ്ടത് അത്യാവശ്യമാണ്.

തന്നിരിക്കുന്ന നിരീക്ഷണങ്ങളിൽ ഏറ്റവും കൂടുതൽ തവണ ആവർത്തിക്കുന്ന മൂല്യത്തെ **മോഡ്** എന്ന് നിർവ്വചിക്കുന്നു.

ശരാശരികളെ കുറിച്ചുള്ള വീഡിയോകളെ യൂട്യൂബിൽ അന്വേഷിക്കുമ്പോൾ കൂടുതൽ ആളുകളും കണ്ട ഒരു വീഡിയോയെ കാണാൻ കഴിയും. ഈ സാഹചര്യത്തിൽ മോഡ് എന്ന ആശയത്തെ ഉപയോഗപ്പെടുത്താം.

Unit 8_STATISTICS.indd 283 28-01-2023 12:02:36

തരംതിരിക്കപ്പെട്ട ആവൃത്തിപ്പട്ടികയിൽ അധിക ആവൃത്തി വരുന്ന വിതരണത്തിന്റെ കൂട്ടത്തെ മോഡൽ ഗ്രൂപ്പ് എന്ന് പറയുന്നു.

8.6.1 മോഡ് - അസംസ്കൃത ദത്തം

ഒരു കൂട്ടം നിരീക്ഷണങ്ങളിൽ ഏറ്റവും കൂടുതൽ പ്രാവശ്യം ആവർത്തിക്കുന്ന മൂല്യത്തെ മോഡ് എന്ന് നിർവ്വചിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം 8.14 ഒരു അരിമില്ലിൽ ജോലി ചെയ്യുന്ന ഏഴ് തൊഴിലാളികളുടെ ദിവസകൂലിയുടെ വിവരങ്ങൾ ₹500, ₹600, ₹600, ₹800, ₹800, ₹800 കൂടാതെ ₹1000,തന്നിടുള്ള വിവരങ്ങളുടെ മോഡ് കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളിൽ ₹800 മൂന്ന് പ്രാവശ്യം ആവർത്തിച്ചിരിക്കുന്നു മറ്റുള്ളവ രണ്ട് അല്ലെങ്കിൽ ഒരു പ്രാവശ്യം ആവർത്തിച്ചിരിക്കുന്നു. അതിനാൽ മോഡ് ₹ 800 ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം 8.15 താഴെ തന്നിട്ടുള്ള സംഖ്യകളുടെ മോഡ് കാണുക 17, 18, 20, 20, 21, 21, 22, 22.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളിൽ 20, 21, 22 എന്നീ സംഖ്യകൾ രണ്ട് പ്രാവശ്യവും ആവർത്തിക്കുന്ന ഈ വിവരങ്ങൾക്ക് 20,21,22 എന്നീ മൂന്ന് മോഡുകൾ ഉണ്ട്

കുറിപ്പ്

- തന്നിട്ടുള്ള ശ്രേണിയിൽ ഒരു മോഡ് ആണെങ്കിൽ അതിനെ യൂണിമോഡൽ എന്ന് പറയുന്നു.
- തന്നിട്ട ശ്രേണിയിൽ രണ്ടു മോഡുകൾ ഉങ്കിൽ അതിനെ ബൈമോഡൽ എന്ന് പറയുന്നു.
- തന്നിട്ടുള്ള ശ്രേണിയിൽ മൂന്ന് മോഡുകൾ ഉണ്ടെങ്കിൽ അതിനെ ബൈമോഡൽ എന്ന് പറയുന്നു.
- തന്നിട്ടുള്ള ശ്രേണിയിൽ മൂന്നിൽ കൂടുതൽ മോഡുകൾ ഉണ്ടെങ്കിൽ അതിനെ മൾട്ടി മോഡൽ എന്ന് പറയുന്നു.

8.6.2 മോഡ് - തരം തിരിക്കാത്ത ആവൃത്തി വിതരണം

ഏറ്റവും കൂടുതൽ ആവൃത്തിയിലുള്ള ചരത്തിന്റെ ആവൃത്തിയാണ് തരം തിരിക്കാത്ത ആവൃത്തി വിതരണത്തിന്റെ മോഡ്.

ഉദാഹരണം 8.16 ഒരു സംഖ്യ വിതരണത്തിൽ 5 നാലുകളും 4 അഞ്ചുകളും 9 ആറുകളും 6 ഒൻപതുകളും ഉണ്ട്. എങ്കിൽ മോഡ് കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

ഇനത്തിന്റെ അളവ്	4	5	6	9
ആവൃത്തി	5	4	9	6

തന്നിട്ടുള്ള വിവരണത്തിൽ 6-ന് ആണ് ഏറ്റവും കൂടുതൽ ആവൃത്തിയുള്ളത് (9). അതുകൊണ്ട് മോഡ്= 6 ആകുന്നു.

Unit 8_STATISTICS.indd 284 28-01-2023 12:02:37

8.6.3 മോഡ് - തരംതിരിച്ച ആവൃത്തി വിതരണം:

തരംതിരിച്ച ആവൃത്തി വിതരണത്തിന്റെ കാര്യത്തിൽ ചരങ്ങളുടെ ശരിയായ മൂല്യങ്ങൾ അറിയാത്തതിനാൽ മോഡ് കൃത്യമായി കേന്ദ്രീകരിക്കുക പ്രയാസമാണ്. അത്തരം സാഹചര്യങ്ങളിൽ വർഗ്ഗാന്തരങ്ങളുടെ വലിപ്പം തുല്യമായാൽ തന്നിട്ടുള്ള സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച് ഉചിതമായ മോഡ് കണക്കാക്കാം

$$\text{മോഡ്} = l + \left(\frac{f - f_1}{2f - f_1 - f_2}\right) \times c$$

ഇവിടെ ഏറ്റവും ഉയർന്ന ആവൃത്തിയിലുള്ള വർഗ്ഗത്തിനെ മോഡൽ വർഗ്ഗം എന്ന്പറയുന്നു

ഇവിടെ

l - മോഡ് ഉൾപ്പെടുന്ന വർഗ്ഗത്തിന്റെ നീചപരിധി; f - മോഡ് ഉൾപ്പെടുന്ന വർഗ്ഗത്തിന്റെ ആവൃത്തി

f_1 - മോഡ് ഉൾപ്പെടുന്ന വർഗ്ഗത്തിന്റെ തൊട്ടു മുമ്പുള്ള വർഗ്ഗത്തിന്റെ ആവൃത്തി

f_2 - മോഡ് ഉൾപ്പെടുന്ന വർഗ്ഗത്തിന്റെ തൊട്ടു പിൻപുള്ള വർഗ്ഗത്തിന്റെ ആവൃത്തി

c - മോഡ് ഉൾപ്പെടുന്ന വർഗ്ഗത്തിന്റെ അകലം

ഉദാഹരണം 8.17 താഴെ തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളുടെ മോഡ് കാണുക.

മാർക്കുകൾ	1-5	6-10	11-15	16-20	21-25
വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം	7	10	16	32	24

നിർദ്ധാരണം

മാർക്കുകൾ	വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം (f)
0.5-5.5	7
5.5-10.5	10
10.5-15.5	16
15.5-20.5	32
20.5-25.5	24

കുറിപ്പ്

വിഭിന്നമായ വർഗ്ഗാന്തരത്തെ(ക്ലാസ്സ് ഇന്റർവെൽ) തുടർച്ചയായ വർഗ്ഗാന്തരമാക്കി മാറ്റുന്നതിന് നീച പരിധിയിൽ നിന്നും 0.5 കുറച്ച് ഉച്ച പരിധിയോട് 0.5 കൂട്ടി എഴുതുക

മോഡിന്റെ വർഗ്ഗം (16 -20) ആകുന്നു. കാരണം ഇതിനാണ് ഏറ്റവും കൂടിയ ആവൃത്തി ഉള്ളത്

$l = 15.5, f = 32, f_1 = 16, f_2 = 24, c = 20.5 - 15.5 = 5$

$$\text{മോഡ്} = l + \left(\frac{f - f_1}{2f - f_1 - f_2}\right) \times c$$

$$= 15.5 + \left(\frac{32 - 16}{64 - 16 - 24}\right) \times 5$$

$$= 15.5 + \left(\frac{16}{24}\right) \times 5 = 15.5 + 3.33 = 18.83.$$

Unit 8_STATISTICS.indd 285 28-01-2023 12:02:38

8.6.4 ശരാശരി, മീഡിയൻ, മോഡ് തമ്മിലുള്ള ബന്ധം

ആവൃത്തി വിതരണം ഇരിക്കുമ്പോൾ മൂന്ന് കേന്ദ്ര പ്രവണതയ്ക്കും ഇടയിൽ ഒരു ബന്ധം ഉണ്ട്.

മോഡ് ≈ 3 മീഡിയൻ – 2 ശരാശരി

ഉദാഹരണം 8.18 ഒരു വിതരണത്തിന്റെ ശരാശരി കൂടാതെ മോഡ് എന്നിവ യഥാക്രമം 66 കൂടാതെ 60 ആകുന്നു. മീഡിയൻ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

ശരാശരി = 66 മോഡ് = 60.

$$\text{മോഡ്} \approx 3 \text{ മീഡിയൻ} - 2\text{ശരാശരി}$$

$$60 \approx 3\text{മീഡിയൻ} - 2(66)$$

$$3 \text{ മീഡിയൻ} \approx 60 + 132$$

$$\text{അതുകൊണ്ട് മീഡിയൻ} \approx \frac{192}{3} \approx 64$$

അഭ്യാസം 8.3

1. ഒരു സ്ഥാപനത്തിലുള്ള 10 തൊഴിലാളികളുടെ മാസവരുമാനം യഥാക്രമം ₹5000, ₹7000, ₹5000, ₹7000, ₹8000, ₹7000, ₹7000, ₹8000, ₹7000, ₹5000 ആകുന്നു.ശരാശി, മീഡിയൻ, മോഡ് കാണുക.

2. തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളുടെ മോഡ് കാണുക : 3.1, 3.2, 3.3, 2.1, 1.3, 3.3, 3.1

3. 11, 15, 17, x+1, 19, x–2, 3 എന്നീ വിവരങ്ങളുടെ ശരാശരി 14 എങ്കിൽ x-ന്റെ മൂല്യം കാണുക. കൂടാതെ x- ന്റെ മൂല്യം ഉപയോഗിച്ച് മോഡ് കാണുക.

4. ഒരു ഗവേഷണത്തിന്റെ ഫലമായി ലഭിച്ച കായികതാരങ്ങളുടെ യൂണിഫോമിന്റെ വ്യത്യസ്ത അളവുകളുടെ പട്ടിക താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു.

അളവ്	38	39	40	41	42	43	44	45
എണ്ണം	36	15	37	13	26	8	6	2

ഏത് അളവാണ് കൂടുതൽ ആവശ്യമുള്ളത്?

5. തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളുടെ മോഡ് കാണുക

മാർക്ക്	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം	22	38	46	34	20

6. തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളുടെ ശരാശരി, മീഡിയൻ, മോഡ് കാണുക:

ഭാരം	25-34	35-44	45-54	55-64	65-74	75-84
വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം	4	8	10	14	8	6

Unit 8_STATISTICS.indd 286 28-01-2023 12:02:39

അഭ്യാസം 8.4

RYG4P

ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുത്തെഴുതുക

1. മധ്യബിന്ദു m ഉം തുടർച്ചയായിട്ടുള്ള ഒരു ആവൃത്തിവിവരണത്തിലുള്ള ഒരു വർഗ്ഗത്തിന്റെ ഉച്ച പരിധി b എങ്കിൽ അതിന്റെ നീചപരിധി

(1) $2m - b$ (2) $2m+b$ (3) $m-b$ (4) $m-2b$.

2. ഏഴു മൂല്യങ്ങളുടെ ശരാശരി 81. അവയിൽ ഒരു മൂല്യത്തെ ഒഴിവാക്കിയാൽ ബാക്കിയുള്ള മൂല്യങ്ങളുടെ ശരാശരി 78 ആകുന്നു എങ്കിൽ ഒഴിവാക്കിയ മൂല്യം

(1) 101 (2) 100 (3) 99 (4) 98.

3. ഒരു വിവരത്തിൽ അധിക പ്രാവശ്യം ആവർത്തിക്കുന്ന പദത്തിന്റെ മൂല്യം

(1) ആവൃത്തി (2) പരിസരം (3) മോഡ് (4) മീഡിയൻ.

4. താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന സംഖ്യാ ശ്രേണിയിൽ ശരാശരി, മീഡിയൻ കൂടാതെ മോഡ് എന്നിവ സമമായിരിക്കുന്ന ശ്രേണി ഏത്?

(1) 2,2,2,4 (2) 1,3,3,3,5 (3) 1,1,2,5,6 (4) 1,1,2,1,5.

5. n പദങ്ങളുടെ ശരാശരിയിൽ നിന്നുള്ള വ്യതിയാനങ്ങളുടെ ആകെ തുക

(1) 0 (2) n-1 (3) n (4) n+1.

6. a, b, c, d കൂടാതെ e എന്നിവയുടെ ശരാശരി 28. a, c കൂടാതെ e എന്നിവയുടെ ശരാശരി 24, എങ്കിൽ b-യുടെയും d-യുടെയും ശരാശരി

(1) 24 (2) 36 (3) 26 (4) 34

7. x, x+2 , x+4 , x+6 , x+8 , എന്നീ 5 ദത്തങ്ങളുടെ ശരാശരി 11 എങ്കിൽ ആദ്യ മൂന്ന് ദത്തങ്ങളുടെ സമാന്തരമാധ്യം

(1) 9 (2) 11 (3) 13 (4) 15.

8. 5, 9, x, 17കൂടാതെ 21 എന്നിവയുടെ ശരാശരി 13 എങ്കിൽ x-ന്റെ മൂല്യം കാണുക.

(1) 9 (2) 13 (3) 17 (4) 21

9. ആദ്യത്തെ 11 നിസ്സർഗ്ഗസംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ ശരാശരി കാണുക

(1) 26 (2) 46 (3) 48 (4) 52.

10. ഒരു സംഖ്യ ശ്രേണിയുടെ ശരാശരി $\bar{X}$. സംഖ്യാ ശ്രേണിയിൽ ഓരോ വിലയും z കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ അതിന്റെ ശരാശരി

(1) $\bar{X} + z$ (2) $\bar{X} - z$ (3) $z\ \bar{X}$ (4) $\bar{X}$

Unit 8_STATISTICS.indd 287 28-01-2023 12:02:39

പ്രായോഗികം

1. കരയിൽ ജീവിക്കുന്ന 20 വിവധതരം ജീവികളുടെ അധിക വേഗതയുടെ ആവൃത്തി പട്ടിക തയ്യാറാക്കുക. ശരാശരി, മീഡിയൻ കൂടാതെ മോഡ് കാണുക. വിശദീകരിക്കുക.
2. ഒരു ക്ലാസ്സിലുള്ള വിദ്യാർത്ഥികളുടെ വിവരങ്ങളടങ്ങിയ പുസ്തകത്തിൽ നിന്ന്
   (i) ശരാശരി വയസ്സിനെ കാണുക (വർഗ്ഗാന്തരം ഉപയോഗിച്ച്)
   (ii) ശരാശരി ഉയരം കാണുക (വർഗ്ഗാന്തരം ഉപയോഗിച്ച്)

ഓർമ്മിക്കേണ്ട വസ്തുതകൾ

- ഒരു നിശ്ചിത ലക്ഷ്യത്തിനായി ശേഖരിച്ച വിവരങ്ങളെ ദത്തങ്ങൾ എന്ന്പറയുന്നു.
- നേരിട്ട് ശേഖരിക്കുന്ന വിവരങ്ങളെ പ്രാഥമിക വിവരങ്ങൾ എന്ന് പറയുന്നു. മറ്റുള്ളവയിൽ നിന്ന് ശേഖരിക്കുന്ന വിവരങ്ങളെ ദ്വിതീയ വിവരങ്ങൾ എന്ന് പറയുന്നു.
- ആദ്യഘട്ടത്തിൽ ലഭിക്കുന്ന ക്രമരഹിത രൂപത്തിലുള്ള ദത്തങ്ങളെ അസംസ്കൃത ദത്തം എന്ന് പറയുന്നു.
- മധ്യബിന്ദു= $\frac{UCL+LCL}{2}$ (UCL–വർഗ്ഗത്തിന്റെ ഉച്ചപരിധി, LCL–വർഗ്ഗത്തിന്റെ നീചപരിധി).
- വർഗ്ഗാന്തരത്തിന്റെ വ്യാപ്തി = $UCL - LCL$.
- തരംതിരിക്കപ്പെട്ട വിതരണത്തിന്റെ ശരാശരി

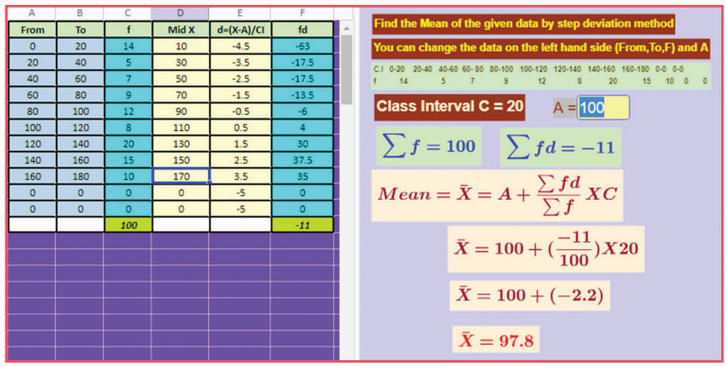
പ്രത്യക്ഷരീതി	അഭ്യൂഹമാധ്യ രീതി	സ്റ്റെപ് ഡീവിയേഷൻ രീതി
$\bar{X}=\frac{\sum fx}{\sum f}$	$\bar{X}=A+\frac{\sum fd}{\sum f}$	$\bar{X}=A+\left[\frac{\sum fd}{\sum f}\times c\right]$

- ഒരു ശ്രേണിയുടെ സഞ്ചിതാവൃത്തി എന്നത് ഓരോ വർഗ്ഗാന്തരങ്ങൾക്കും മുമ്പുള്ള ആവൃത്തികളെ കൂട്ടി എഴുതുന്ന ആവൃത്തിയാണ്.
- തരംതിരിച്ച വിവരങ്ങളുടെ മീഡിയൻ $= l+\frac{\left(\frac{N}{2}-m\right)}{f}\times c$.
- തരംതിരിച്ച വിവരങ്ങളുടെ മോഡ് $= l+\left(\frac{f-f_1}{2f-f_1-f_2}\right)\times c$.

Unit 8_STATISTICS.indd 288 28-01-2023 12:02:42

ICT കോർണർ

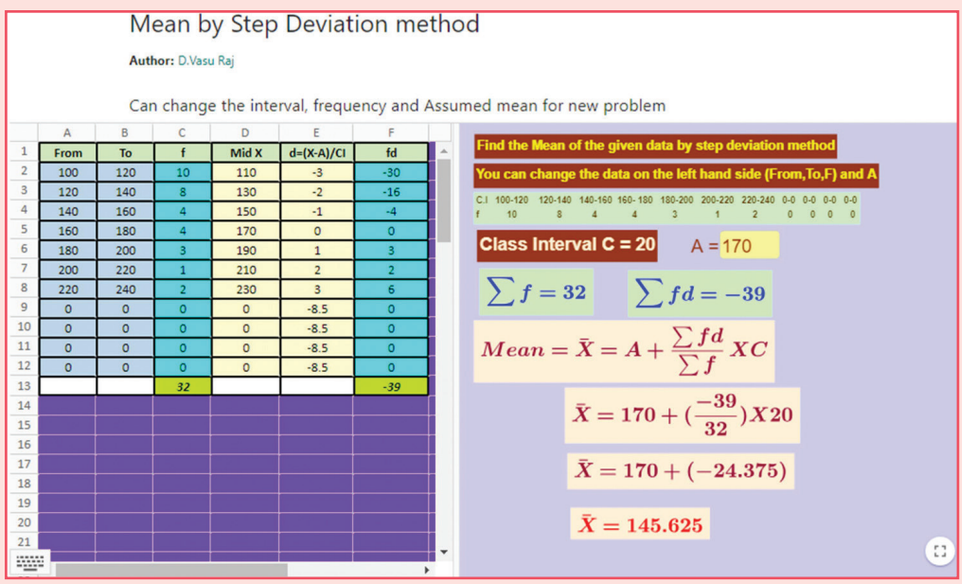
അവസാനം ലഭിക്കുന്ന ചിത്രം



ഘട്ടം : Browser open ചെയ്ത് താഴെക്കാണുന്ന URL Link type ചെയ്യുക (അല്ലെങ്കിൽ) QR Code Scan ചെയ്യുക GeoGebra യുടെ"Mean by step deviation method(സ്റ്റെപ്പ് ഡീവിയേഷൻ രീതിയിൽ സമാന്തരമാധ്യം)" എന്ന വർക്ക്ഷീറ്റ് ഭാഗം open ആകും. ഈ വർക്ക്ഷീറ്റിൽ, ഒരു ഉദാഹരണം കൊടുത്തിരിക്കും.

ഘട്ടങ്ങളെ നന്നായി വിശകലനം ചെയ്യുക ഇടതു വശത്തെ സ്പ്രെഡ് ഷീറ്റിൽ "From (മുതൽ)" , "To (വരെ)" കൂടാതെ "Frequency (ആവൃത്തി)" എന്നീ നിരകളിൽ വ്യത്യസ്ത മൂല്യങ്ങളെ കൊടുത്ത് ചോദ്യത്തെ മാറ്റാൻ സാധിക്കും. തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളുടെ സമാന്തരമാധ്യം വലതുവശത്ത് കാണാൻ സാധിക്കും. കണക്കു കൂട്ടിയാൽ (Calculation) പരിശോധിക്കുക.

ഘട്ടം 1



പ്രവർത്തനത്തിന്റെ വെബ്സൈറ്റ്

Mean by step deviation method:
https://ggbm.at/NWcKTRtA or Scan the QR Code

Unit 8_STATISTICS.indd 289 28-01-2023 12:02:43

9







സംഭാവ്യത

Probability theory is nothing more than common sense reduced to calculation. *- Pierre Simon Laplace.*



Richard Von Mises
A.D (C.E) 1883-1953

സംഭാവ്യതയോട് സംഖ്യകമായ അല്ലെങ്കിൽ പരീക്ഷണാത്മകമായ ഒരു മനോഭാവം വികസിപ്പിച്ചത് പ്രധാനമായും ഫിഷറും, വോൺമൈനിമാണ്. സാമ്പിൾസ്പേസ് എന്ന ആശയം ആവിർഭവിച്ചത് വോൺമൈസിസിൽ നിന്നാണ്. ഈ ആശയം അളവു സിദ്ധാന്തത്തെ ആശ്രയിച്ചുള്ള തികച്ചും ഗണിതപരമായ സംഭാവ്യതയെ സംബന്ധിച്ച സിദ്ധാന്തത്തിന് സാധ്യതയുണ്ടാക്കി. ഇങ്ങനെയൊരു സമീപനം കഴിഞ്ഞനൂറ്റാണ്ടിൽ ധാരാളം ഗ്രന്ഥകർത്താക്കളുടെ സ്വാധീനത്താൽ ക്രമേണ വെളിപ്പെടാൻ തുടങ്ങി.

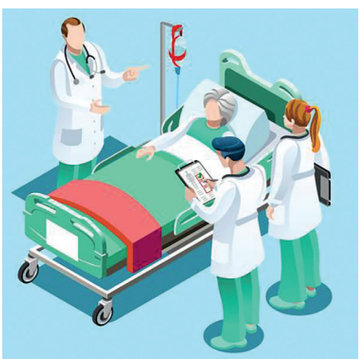
പഠന ലക്ഷ്യങ്ങൾ

- സംഭാവ്യതയുടെ അടിസ്ഥാന ആശയങ്ങൾ മനസ്സിലാക്കൽ.
- സംഭാവ്യതയുടെ ശാസ്ത്രീയവും അനുഭവപൂർണ്ണവുമായ സമീപനം മനസ്സിലാക്കൽ.
- സംഭാവ്യതയിലുള്ള വിവിധ സംഭവങ്ങൾ മനസ്സിലാക്കൽ.

OSPOU

9.1 മുഖവുര

സംഭാവ്യതയുടെ ഉദ്ദേശം മനസ്സിലാക്കുന്നതിന് ദൈനംദിനജീവിതത്തിലുള്ള അനിശ്ചിതത്വത്തിന്റെ സ്വഭാവ വിശേഷങ്ങൾ നോക്കേണ്ടതായിട്ടുണ്ട്.



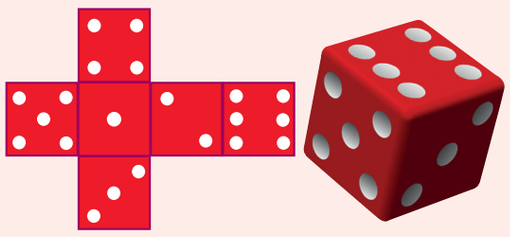
അത്യാഹിത വിഭാഗത്തിൽ പ്രവേശിപ്പിച്ചിരിക്കുന്ന ഒരു രോഗിക്ക് ജീവൻ രക്ഷാമരുന്ന് നൽകുമ്പോൾ രോഗിയുടെ ബന്ധുക്കൾക്ക് ആ മരുന്നിന്റെ സാധ്യതയെക്കുറിച്ച് അറിയേണ്ടതായിട്ടുണ്ട്. ഈ മരുന്ന് പരീക്ഷിച്ച നൂറ് രോഗികളിൽ 80 പേർക്കും ഇത് ഫലവത്തായിരുന്നു എന്ന് ഡോക്ടർ അറിയിച്ചാൽ ബന്ധുക്കൾക്ക് സമാധാനം ആകും. സംഭാവ്യത എന്ന ആശയത്തിന്റെ വിശദീകരണമാണ് വിജയ ശതമാനം സൂചിപ്പിക്കുന്നത്. ഇത് ആവർത്തിച്ച് സംഭവിക്കുന്നതിനെ ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്നു. ഇത് അനിശ്ചിതത്വമായ ചില സാഹചര്യങ്ങളിൽ തീരുമാനമെടുക്കാൻ സഹായിക്കുന്നു. സംഭാവ്യത എന്നത് അനിശ്ചിതത്വത്തെ അളക്കുന്നതിനോ അല്ലെങ്കിൽ നിർണ്ണയിക്കുന്നതിനോ ഉള്ള വഴിയാണ്.

Unit 9_PROBABILITY.indd 290 28-01-2023 12:13:19

വ്യത്യസ്തങ്ങളായ നാലു നിറങ്ങൾ (നീല, പച്ച, ചുവപ്പ് ,മഞ്ഞ)ഉള്ള 40 കാർഡുകളുടെ ഒരു കൂട്ടം എടുക്കുന്നു. ഓരോ നിറങ്ങളിലും 10 കാർഡുകൾ വീതം 1 മുതൽ 10 വരെയുള്ള അക്കങ്ങളിൽ ഉ. അവയിൽ നിന്നും ഒരു കാർഡ് ,നീല എന്ന് എടുക്കുക മേശയുടെ മുകളിൽ തലകീഴായി ഈ 10 കാർഡുകൾ വയ്ക്കുക. അവൻ നന്നായി കലർത്തിയശേഷം ഒരു കാർഡ് എടുക്കുക. ആ കാർഡ് 6 എന്ന അക്കം ആയിരിക്കുന്നതിനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്? 6 എന്ന അക്കത്തിന് പകരം 4 എന്നാണ് ലഭിക്കേണ്ടത് എങ്കിൽ അതിനുള്ള സാധ്യതയിൽ വ്യത്യാസം ഉണ്ടോ? രണ്ട് സാഹചര്യങ്ങളിലും സാധ്യത 10 ൽ 1 ആണെന്ന് കാണാം. (എന്തുകൊണ്ട്) നിങ്ങൾ ഏതൊരു കാർഡ് എടുത്താലും ഇങ്ങനെ തന്നെയായിരിക്കുന്നതാണ്. സംഭാവ്യത എന്നത് കൊണ്ട് അർത്ഥമാക്കുന്നത് 'സാദ്ധ്യതയെ' തന്നെയാണ്. 10 ൽ 1 എന്ന് പയുന്നതിനു പകരം ഭിന്ന രൂപത്തിൽ $\frac{1}{10}$ എന്നെഴുതുന്നു. (സംഭാവ്യതകൾ ചേർക്കുമ്പോൾ ഭിന്നങ്ങൾ കൊണ്ടുള്ള ക്രിയകൾ സഹായകമാകുന്നു.) സംഭാവ്യത അനുകൂലമായ നിരീക്ഷണങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിന്റെയും ആകെ നിരീക്ഷണങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിന്റെയും അനുപാതമാണ്.

കുറിപ്പ്

ഒരു യഥാർത്ഥ പകിടയിൽ എതിർ ദിശയിൽ തിരിഞ്ഞിരിക്കുന്ന വശങ്ങളുടെ സംഖ്യകളുടെ തുക എപ്പോഴും 7 ആയിരിക്കും.



നിങ്ങൾ പകിട കണ്ടിട്ടുണ്ടോ? ഒരു യഥാർത്ഥ പകിട എന്നത് ഒരോ വശത്തിലും ഒന്നു മുതൽ ആറു വരെ കുത്തുകളുള്ള സമചതുര ഘനികയാണ്, ഇത് ചൂതാട്ടത്തിനും അതു പോലെ സാദ്ധ്യത ഉപയോഗിച്ചുള്ള മറ്റ് വിനോദങ്ങൾക്കും ഉപയോഗിക്കുന്നു.

നിങ്ങൾ ഒരു പകിട ഉരുട്ടുമ്പോൾ 5 കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്? രണ്ടിന്? ഏഴിന്?

മുകളിൽ ചോദിച്ചതിനുള്ള എല്ലാ ഉത്തരങ്ങളിലും സംഭാവ്യത എന്ന ആശയത്തിന്റെ ഏതെങ്കിലും പ്രത്യേകത ശ്രദ്ധിച്ചുവോ? ഏതെങ്കിലും ഒരു സംഭാവ്യതക്ക് കുറഞ്ഞതോ കൂടിയതോ ആയ മൂല്യം ഉണ്ടോ? സംഭാവ്യതയെ കുറിച്ച് കൂടുതൽ വ്യക്തമാക്കുന്നതിന് താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ഖണ്ഡികകൾ മനസ്സിലാക്കുക.

9.2 അടിസ്ഥാന തത്വങ്ങൾ

ഒരേ പോലെയുള്ള സാഹചര്യത്തിൽ നാം പരീക്ഷണങ്ങൾ നടത്തുമ്പോൾ ഏകദേശം ഒരേ രീതിയിലുള്ള ഫലങ്ങളാണ് കിട്ടുന്നത്. അത്തരം പരീക്ഷണങ്ങളെ നിർണ്ണായക പരീക്ഷണങ്ങൾ എന്ന് പറയുന്നു. ഉദാഹരണമായി ആർക്കമിഡീസ് തത്വങ്ങളും ഓംസ് നിയണങ്ങളും തെളിയിക്കുന്നത് നിർണ്ണായക പരീക്ഷണങ്ങളാണ്. ഇതിന്റെ ഫലങ്ങൾ നേരത്തെ തന്നെ പ്രവചിക്കാവുന്നതാണ്.

എന്നാൽ ഒരേ സാഹചര്യത്തിലും വ്യത്യസ്ത ഫലങ്ങൾ നൽകുന്ന പരീക്ഷണങ്ങൾ ധാരാളം ഉണ്ട്. ഉദാഹരണമായി ഒരു പകിട ഉരുട്ടുമ്പോഴും, നാണയം ടോസ്സ് ചെയ്യുമ്പോഴും, ഒരു കൂടയിൽ നിന്ന് പന്തെടുക്കുമ്പോഴും ഫലം വ്യക്തമായി പ്രവചിക്കാൻ സാധ്യമല്ല.

ഇത്തരം പരീക്ഷണങ്ങളെ യാദൃശ്ചിക പരീക്ഷണങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നു. ഈ യാദൃശ്ചിക പരീക്ഷണത്തിന്റെ ഓരോ പ്രവർത്തിയെയും ശ്രമമെന്നും, ഓരോ ശ്രമത്തിൽ നിന്നു കിട്ടിയതിനെ ഫലം എന്നും പറയുന്നു.

Unit 9_PROBABILITY.indd 291 28-01-2023 12:13:19

സംഭാവ്യതയിൽ വരുന്ന ചില പ്രധാനപ്പെട്ട പദങ്ങളെ കുറിച്ച് നോക്കാം.

ശ്രമം: ഒരു പകിട ഉരുട്ടുന്നതും, നാണയം ടോസ്സിടുന്നതും ശ്രമങ്ങളാണ്. ഒരു ശ്രമം എന്നത് ഒന്നോ അതിലധികമോ ഫലങ്ങൾ നൽകുന്ന ഒരു പ്രവർത്തിയാണ്.

ഫലം: ഒരു നാണയം ടോസ്സിടുമ്പോൾ പൂവോ, തലയോ കിട്ടുന്നു. ഇവിടെ പൂവോ തലയോ കിട്ടുന്നത് ഫലങ്ങളാണ് ഓരോ ശ്രമത്തിന്റെയും അവസാനം ഫലം ലഭിക്കുന്നു.

സാമ്പിൾ പോയന്റ്: ഒരു നാണയം ടോസ്സിടുമ്പോൾ തല അല്ലെങ്കിൽ പൂവ് കിട്ടുന്നത് സാമ്പിൾ പോയന്റ് ആണ്. ഒരു പഴയ പരീക്ഷണത്തിലെ ഓരോ ഫലത്തെയും ഒരു സാമ്പിൾ പോയന്റ് എന്നു പറയുന്നു.

സാമ്പിൾ സ്പേസ്: ഒരു നാണയം ടോസ്സിടുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന എല്ലാ ഫലങ്ങളേയും $S = \{H,T\}$ എന്നെഴുതുന്നു.

രണ്ട് നാണയങ്ങൾ ടോസ്സിടുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന എല്ലാ ഫലങ്ങളെയും $S=\{HH,HT,TH,TT\}$ എന്നെഴുതുന്നു.

ഒരു യാദൃശ്ചിക പരീക്ഷണത്തിൽ സംഭവിക്കാൻ സാധ്യതയുള്ള എല്ലാ ഫലങ്ങളുടെയും ഗണത്തെ സാമ്പിൾ സ്പേസ് എന്ന് പറയുന്നു. S ഇതിനെ എന്ന അക്ഷരം കൊണ്ട് കുറിക്കുന്നു. അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണത്തെ $n(S)$ എന്ന് കുറിക്കുന്നു.

സംഭവം: ഒരു പകിട ഉരുട്ടമ്പോൾ 4 കിട്ടുന്നത് ഒരു ഫലമാണ്. ഇതേ പരീക്ഷണത്തിൽ ഇരട്ട സംഖ്യ കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭവം $\{2,4,6\}$ അതുകൊണ്ട് സാമ്പിൾ സ്പേസിന്റെ ഏതൊരു ഉപഗണവും ഒരു സംഭവമാകുന്നു. ഒരു സംഭവം ഒന്നോ അതിലധികമോ ഫലങ്ങൾ ഉള്ളതായിരിക്കും.

ഉദാഹരണം

യാദൃശ്ചിക പരീക്ഷണം : ഒരു നാണയം ടോസ്സിടുന്നത്

സാധ്യതയുള്ള ഫലങ്ങൾ : തല (H) അല്ലെങ്കിൽ പൂവ് (T)

സാമ്പിൾ സ്പേസ് : $S = \{H,T\}$

S ന്റെ ഉപഗങ്ങൾ : $A =\{H\}$ അല്ലെങ്കിൽ $A=\{T\}$

ഈ ഉദാഹരണത്തിൽ A ഒരു സംഭവമാണ്.



അതുപോലെ ഒരു പകിട ഉരുട്ടുമ്പോൾ സാമ്പിൾ സ്പേസ് $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. ഒരു ആഴ്ചയിലെ ദിവസങ്ങൾ എടുത്താൽ സാമ്പിൾ സ്പേസ് $S =$ {ഞായർ, തിങ്കൾ, ചൊവ്വ, ബുധൻ, വ്യാഴം, വെള്ളി, ശനി}. ആകുന്നു

Unit 9_PROBABILITY.indd 292 28-01-2023 12:13:20

പ്രവർത്തി - 1

രണ്ട് നാണയങ്ങൾ ഒരേ സമയം ടോസ്സിടുന്നു. ഈപരീക്ഷണത്തിൽ കിട്ടുന്ന ഫലങ്ങൾ പട്ടികയിലാക്കുക.	രണ്ട് പകിടകൾ ഒരേ സമയം ഉരുട്ടുന്നു. ഈ ഫലങ്ങൾ പട്ടികയിലാക്കുക
യാദൃശ്ചിക പരീക്ഷണം : സാധ്യമായ ഫലങ്ങൾ : സാമ്പിൾ സ്പേസ് : സാമ്പിൾ സ്പേസിന്റെ ഏതെങ്കിലും 3 ഉപഗണങ്ങൾ : (അല്ലെങ്കിൽ 3 സംഭവങ്ങൾ)	യാദൃശ്ചിക പരീക്ഷണം : സാധ്യമായ ഫലങ്ങൾ : സാമ്പിൾ സ്പേസ് : സാമ്പിൾ സ്പേസിന്റെ ഏതെങ്കിലും 3 ഉപഗങ്ങൾ : (അല്ലെങ്കിൽ 3 സംഭവങ്ങൾ)

പ്രവർത്തി - 2

ഓരോ കുട്ടിയോടും ഒരു നാണയം 10 പ്രാവശ്യം ടോസ്സിടാൻ പറഞ്ഞ് തല അല്ലെങ്കിൽ പൂവ് കിട്ടുന്ന ഫലങ്ങളെ പട്ടികയിലാക്കൻ ആവശ്യപ്പെടുക.

ടോസ്സുകളുടെ എണ്ണം	തല വരുന്ന എണ്ണം	പൂവ് വരുന്ന എണ്ണം
⋮	⋮	⋮

(i) ഭിന്നം 1 : $\frac{\text{തല പ്രത്യക്ഷമായ തവണകളുടെ എണ്ണം}}{\text{നാണയം ടോസ്സ് ചെയ്ത ആകെ തവണകളുടെ എണ്ണം}}$

(ii) ഭിന്നം 2 : $\frac{\text{പൂവ് പ്രത്യക്ഷമായ തവണകളുടെ എണ്ണം}}{\text{നാണയം ടോസ്സ് ചെയ്ത ആകെ തവണ}}$

ഇതേ പ്രവർത്തി 20, 30,40,50 പ്രാവശ്യം ചെയ്ത് ഭിന്നങ്ങൾ കാണുക.

പ്രവർത്തി - 3

ക്ലാസ്സിലെ കുട്ടികളെ ജോഡികളായി പിരിയ്ക്കുക. ഓരോ ജോഡിയിലെയും ഒരു കുട്ടി ഒരു നാണയം 50 പ്രാവശ്യം ടോസ്സിടുകയും മറ്റേകുട്ടി ഫലങ്ങൾ രേഖപ്പെടുത്തുകയും ചെയ്യണം. ഇനി നമുക്ക് താഴെ പറയുന്ന പട്ടിക തയ്യാറാക്കാം.

ജോടികൾ	തല വന്ന തവണ	പൂവ് വന്ന തവണ	$\frac{\text{തല പ്രത്യക്ഷമായ തവണകളുടെ എണ്ണം}}{\text{നാണയം ടോസ്സ് ചെയ്ത ആകെ തവണകളുടെ എണ്ണം.}}$	$\frac{\text{പൂവ് പ്രത്യക്ഷമായ തവണകളുടെ എണ്ണം}}{\text{നാണയം പ്രത്യക്ഷമായ തവണകളുടെ എണ്ണം}}$
1				
2				
3				
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

പരിണിത ഫലം ലഭിക്കുന്ന സാധ്യതകളെയാണ് സംഭാവ്യത എന്ന് പറയുന്നത്.

Unit 9_PROBABILITY.indd 293 28-01-2023 12:13:20

9.3 ശാസ്ത്രീയ സമീപനം



ഉദാഹരണമായി, ഒരു കുടത്തിൽ നാല് ചുവന്ന പന്തുകളും 6 നീല പന്തുകളും ഉണ്ട്. നിങ്ങൾ കുടത്തിൽ നിന്നും യാദൃശ്ചികമായി പന്തെടുത്താൽ അത് ചുവന്ന പന്തായിരിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

"യാദൃശ്ചികം" എന്നത് കൊണ്ട് അർത്ഥമാക്കുന്നത് 10 പന്ത്കൾക്കും ഒരേ സാധ്യത എന്നതാണ്. നിങ്ങൾക്ക് അടച്ച് പന്തുകളെ ഇളക്കി വീണ്ടും പരീക്ഷണം തുടരാം. ഇത് ഓരോ ഫലത്തിനും സമ സന്ദർഭ സാധ്യത പ്രദാനം ചെയ്യുന്നു.

ചുവന്ന പന്ത് കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത $\frac{4}{10}$ (ഇതിനെ $\frac{2}{5}$ അല്ലെങ്കിൽ 0.4 എന്നെഴുതാം)

നീല പന്ത് എടുക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത എന്താണ്? ഇത് $\frac{6}{10}$ ($\frac{3}{5}$ അല്ലെങ്കിൽ 0.6) ആകുന്നു.

ഈ രണ്ട് സംഭാവ്യതകളുടെയും തുക ആകുന്നു. ഇത് ഇതല്ലാതെ മറ്റൊരു സാധ്യതയുമില്ല എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

ചിന്തിക്കൂ

ഒരു പരീക്ഷണത്തിന്റെ വിജയത്തിനുള്ള സംഭാവ്യത 0.4 എങ്കിൽ തോൽവിയുടെ സംഭാവ്യത എന്ത്?

മുകളിൽ നടത്തിയ പരീക്ഷണം ശാസ്ത്രീയമായതാണ്. ഇത് ഒരു *priori* സംഭാവ്യത കണ്ടുപിടിക്കുന്നു. (*priori* ഇതിന്റെ അർത്ഥം *'without investigation or sensory experience'* എന്നാണ്.) തുല്യ സാധ്യതയുള്ള ഫലങ്ങൾ തരുന്ന പരീക്ഷണങ്ങൾ മാത്രമേ മുകളിൽ പറയുന്ന രീതിയിൽ നടത്താനാകു.

'ശാസ്തീയ സംഭാവ്യത' എന്ന് പേര് വരാൻ കാരണം എന്തെന്നാൽ 17, 18ാം നൂറ്റാണ്ടുകളിലാണ് ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞർ ആദ്യമായി ഇതിനെ കുറിച്ച് പഠനം നടത്തിയത്.

S എന്നത് ഒരു യാദൃശ്ചിക പരീക്ഷണത്തിന്റെ സമസന്ദർഭ സാധ്യതയുള്ള എല്ലാ ഫലങ്ങളുടെയും ഗണമാണെന്നിരിക്കട്ടെ (S എന്നത് ഈ പരീക്ഷണത്തിന്റെ സാമ്പിൾ സ്പേസ് ആകുന്നു.)

E എന്നത് ഒരു പരീക്ഷണത്തിന്റെ പ്രത്യേക ഫലമോ ഒന്നിലധികം ഫലങ്ങൾ ഒരുമിച്ചുള്ളതോ ആയിരിക്കും. (E എന്നത് ഒരു സംഭവമാണ്)

ഒരു സംഭവം E യുടെ യംഭാവ്യതയെ $P(E)$ എന്നെഴുതാം.

$$P(E) = \frac{\text{അനുകൂലമായ ഫലങ്ങളുടെ എണ്ണം}}{\text{ആകെ ഫലങ്ങളുടെ എണ്ണം}} = \frac{n(E)}{n(S)}$$

NXK3E

പരീക്ഷണപരമായ സമീപനം (ആപേക്ഷിക ആവൃത്തി സിദ്ധാന്തം) ഒരു പരീക്ഷണം വളരെ തവണ ആവർത്തിക്കുകയും ,പ്രത്യേക ഫലം ഒരു നിശ്ചിത സമയത്ത് നടക്കുകയും ചെയ്യുന്നുവെങ്കിൽ ആ നിശ്ചിത ശതമാനം ആ ഫലത്തിന്റെ സാധ്യതയ്ക്ക് അടുത്തായിരിക്കും.

Unit 9_PROBABILITY.indd 294 28-01-2023 12:13:21

9.4 പ്രായോഗിക സമീപനം

ഉദാഹരണത്തിന്, ഒരു നിർമ്മാതാവ് ഓരോ മാസവും 10,000 വൈദ്യുത സ്വിച്ചുകൾ ഉൽപ്പാദിപ്പിക്കുന്നു. അതിൽ 1000 എണ്ണം കേടുള്ളതായി കണ്ടെത്തി. ഓരോ മാസവും കേടുള്ള സ്വിച്ച് നിർമ്മിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

ആപേക്ഷിക ആവൃത്തി സിദ്ധാന്തപ്രകാരം ആവശ്യമുള്ള സംഭാവ്യത 10,000 ൽ 1000 ആകുന്നു. അതായത് 0.1 ആണ്.

നമുക്ക് ഇതിനെ ഒരു സൂത്രവാക്യമാക്കി മാറ്റാം. ഒരുപാട് ശ്രമങ്ങളുള്ള ഒരു പരീക്ഷണത്തിൽ ശ്രമങ്ങളുടെ എണ്ണം 'n' എന്നും ഫലങ്ങളുടെ എണ്ണം 'r' എന്നുമെടുത്താൽ 'E' എന്ന സംഭവത്തിന്റെ സംഭാവ്യത '$P(E)$' ആകുന്നു.

$$P(E) = \frac{r}{n}.$$

കുറിപ്പ്

സംഭാവ്യതയുടെ ശരിയായ തീരുമാനം എടുക്കുന്നതിന് ധാരാളം ശ്രമങ്ങൾ എടുക്കണം. ശ്രമങ്ങളുടെ എണ്ണം കൂടുന്നതിനനുസരിച്ച് സംഭാവ്യതയുടെ വ്യക്തത കൂടുന്നു.

പരീക്ഷണങ്ങളുടെ എണ്ണം കൂടുന്നതിനനുസരിച്ച് മുകളിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സൂത്രവാക്യത്തിന് ഒരു സ്ഥിര മൂല്യം ഉണ്ടാകുമെന്ന് പറയാനാകുമോ? പറയാനാവില്ല കാരണം ഓരോ പ്രാവശ്യവും പരീക്ഷണം ആവർത്തിക്കുമ്പോൾ ആപേക്ഷിക ആവൃത്തി വ്യത്യസ്തമായിരിക്കും.

എന്നിരുന്നാലും ഇതിന് ഒരു സുരക്ഷാ പരിസരം ഉണ്ട്. സംഭാവ്യതയുടെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ മൂല്യം 0 വും ഏറ്റവും കൂടിയ മൂല്യം 1 ഉം ആയിരിക്കും. ഇതിനെ താഴെ കാണുന്ന വിധം എഴുതാം.

$$0 \le P(E) \le 1.$$

ചിന്തിക്കൂ

സംഭാവ്യതയെ കുറിച്ചുള്ള ഒരു ചോദ്യത്തിന് കുട്ടിയുടെ ഉത്തരം $\frac{3}{2}$ എന്നായിരുന്നു.
ഉത്തരം തെറ്റാണെന്ന് അധ്യാപകൻ പറഞ്ഞു. എന്തുകൊണ്ട്?

ഇതിനെ കുറച്ചുകൂടി വിശദമാക്കി പഠിക്കാം.

'n' നേ ക്കാൾ 'r' കൂടുതലായിരിക്കില്ല എന്ന് നമുക്കറിയാം.

അതായത് $\frac{r}{n} < 1$. അതായത് $P(E) < 1$. ... (1)

$r = 0$, ആയാൽ സംഭവം സംഭവിക്കാതിരിക്കുകയോ, അല്ലെങ്കിൽ ഒരുപാടു പ്രാവ്യശ്യം ആവർത്തിക്കാതിരിക്കുകയോ ചെയ്തിരിക്കാം. (ഒരു പകിട ഉരുട്ടുമ്പോൾ 7 കിട്ടുമോ?)

ഇവിടെ $\frac{r}{n} = \frac{0}{n} = 0.$ ... (2)

അവസാനമായി $r = n$ എങ്കിൽ സംഭവം തീർച്ചയായിട്ടും നടന്നിരിക്കും. (ഓരോ ശ്രമത്തിലും അല്ലെങ്കിൽ ഏതെങ്കിലും ഒരു ശ്രമത്തിൽ)

ഈ അവസരത്തിൽ നിന്ന്, $\frac{r}{n} = \frac{n}{n} = 1.$ ... (3)

(1), (2), (3) ൽ നിന്ന് $0 \le P(E) \le 1.$ എന്ന് തെളിയുന്നു.

Unit 9_PROBABILITY.indd 295 28-01-2023 12:13:23

പുരോഗതി പരിശോധന

ഒരുയാദൃശ്ചിക പരീക്ഷണത്തിന്റെ ഫലങ്ങൾ താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു. ഇതിൽ സംഭാവ്യത അല്ലാത്തത് ഏവ?

(i) 1/5 (ii) – 1/7 (iii) 0.40 (iv) – 0.52 (v) 0

(vi) 1.3 (vii) 1 (viii) 72% (ix) 107%

ഉദാഹരണം 9.1

ഒരു പകിട ഉരുട്ടുമ്പോൾ 4 നേക്കാൾ വലിയ സംഖ്യ കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക?

നിർദ്ധാരണം

സാമ്പിൾ സ്പേസ് $S = \{1,2,3,4,5,6\}$

4 നേക്കാൾ വലിയ സംഖ്യ കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭവം E എന്നിരിക്കട്ടെ.

$E = \{5,6\}$

$$P(E) = \frac{E \text{ യ്ക്ക് അനുകൂലമായ ഫലങ്ങളുടെ എണ്ണം}}{\text{ആകെ ഫലങ്ങളുടെ എണ്ണം}}$$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{2}{6} = 0.333...$$

ഉദാഹരണം 9.2

ഒരു ഓഫിസിലുള്ള 42 ജോലിക്കാരിൽ 7 പേർ കാറുപയോഗിക്കുന്നവരും 20 പേർ ഇരുചക്ര വാഹനങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുന്നവരും ബാക്കി 15 പേർ സൈക്കിൾ ഉപയോഗിക്കുന്നവരുമാണ്. ആപേക്ഷിക ആവൃത്തി കാണുക?

നിർദ്ധാരണം

ആകെ ജോലിക്കാർ = 42.

ആപേക്ഷിക ആവൃത്തികൾ

കാർ ഉപയോഗിക്കുന്നവർ $= \frac{7}{42} = \frac{1}{6}$

ഇരു ചക്രമുപയോഗിക്കുന്നവർ $= \frac{20}{42} = \frac{10}{21}$

സൈക്കിൾ ഉപയോഗിക്കുന്നവർ $= \frac{15}{42} = \frac{5}{14}$

ഈ ഉദാഹരണത്തിൽ ആകെ സംഭാവ്യത 1 ൽ കൂടുന്നില്ല.

$$\frac{1}{6} + \frac{10}{21} + \frac{5}{14} = \frac{7}{42} + \frac{20}{42} + \frac{15}{42} = 1$$

ഉദാഹരണം 9.3

ടീം 1, ടീം 2 എന്നിവർ 20 ഓവറിന്റെ 10 ക്രിക്കറ്റ് കളികൾ കളിക്കുന്നു. അവരുടെ സ്കോറുകൾ താഴെ കാണുന്ന പട്ടികയിലുണ്ട്:

Unit 9_PROBABILITY.indd 296 28-01-2023 12:13:24

കളികൾ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ടീം I	200	122	111	88	156	184	99	199	121	156
ടീം II	143	123	156	92	164	72	100	201	98	157

ടീം 1 ഒന്ന് ജയിക്കുന്നതിനുള്ള ആപേക്ഷിക ആവൃത്തി കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

ഈ പരീക്ഷണത്തിൽ ഓരോ ശ്രമവും ടീം 1 ഉം ടീം 2 ഉം തമ്മിലുള്ള മത്സരമാണ്.

നമുക്ക് ടീം 1 ന്റെ വിജയ സാധ്യതയാണ് അറിയേണ്ടത്

ആകെ പത്ത് ശ്രമങ്ങളുള്ളതിൽ ടീം 1 ആദ്യത്തെ പ്രാവശ്യവും 6ാമത്തെ പ്രാവശ്യവും 9 ാമത്തെ പ്രാവശ്യവും വിജയിക്കുന്നു.

ടീം 1 വിജയിക്കുന്നതിന്റെ ആപേക്ഷിക ആവൃത്തി $= \frac{3}{10}$ അല്ലെങ്കിൽ 0.3.

(കുറിപ്പ് : ആപേക്ഷിക പ്രവൃത്തി, പരീക്ഷണത്തിൽ നമുക്ക് കിട്ടുന്ന ഫലങ്ങളെ ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്നു.)

അഭ്യാസം 9.1

1. നിങ്ങൾ തെരുവിലൂടെ നടക്കുന്നു എന്നിരിക്കട്ടെ. നിങ്ങളെ കടന്നു പോകുന്ന ഒരു അപരിചിതന്റെ ജന്മദിനം ഞായറാഴ്ച വരുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക?

2. 1 മുതൽ 13 വരെയുള്ള നിസർഗ സംഖ്യകളിൽ നിന്നും ഒരു വർഗ്ഗ സംഖ്യ കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

3. ആറുമുഖങ്ങൾ ഉള്ള ഒരു പകിട ഉരുട്ടുമ്പോൾ ഇരട്ട സംഖ്യ കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക?

4. ഒരു കുടത്തിൽ 24 പന്തുകൾ ഉണ്ട്. അതിൽ 3 എണ്ണം ചുവപ്പും, 5 എണ്ണം നീലയും ബാക്കി പച്ചയുമാണെങ്കിൽ താഴെ പറയുന്നവ കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക? (i) നീല പന്ത്, (ii) ചുവപ്പു പന്ത്, (iii) പച്ച പന്ത്?

5. രണ്ട് നാണയങ്ങൾ ടോസ്സിടുമ്പോൾ 2 തലകൾ കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക?

6. രണ്ട് പകിടകൾ ഉരുട്ടുമ്പോൾ താഴെ പറയുന്ന തുക കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക?



i) ഒന്നാകുന്നതിന് ii) നാലായിരിക്കുന്നതിന് iii) 13 ൽ കുറവായിരിക്കുന്നതിന്

7. ഒരു നിർമ്മാതാവ് 7000 LED ബൾബുകൾ യാദൃശ്ചികമായി പരിശോധിച്ചതിൽ 25 എണ്ണം കേടുള്ളതായി കണ്ടെത്തി. യാദൃശ്ചികമായി ഒരു ബൾബ് തിരഞ്ഞെടുത്താൽ അത് കേടുള്ളതായിരിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക?

Unit 9_PROBABILITY.indd 297 28-01-2023 12:13:25

8. ഒരു കാൽ പന്തു കളിയിൽ എതിർ ടീമിൽ നിന്നുണ്ടായ 40 ഗോളുകളിൽ 32 ഗോളുകളും പ്രതിരോധിച്ചു. എങ്കിൽ എതിർ ടീം ഗോളടിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക?.

9. ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ നിന്നും സ്പിന്നറിന്റെ സൂചിക 3 ന്റെ ഗുണിതത്തിൽ വരാതിരിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക?



10. മുകളിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സ്പിന്നറുപയോഗിച്ച് സംഭാവ്യതയ്ക്ക് രണ്ട് ചോദ്യങ്ങൾ സ്വയം തയ്യാറാക്കുക?

9.5 സംഭവങ്ങളുടെ തരങ്ങൾ

ചിലതരം പ്രധാന സംഭാവങ്ങളെക്കുറിച്ച് നാം പഠിച്ചു കഴിഞ്ഞു.

രണ്ട് സംഭവങ്ങൾ സംഭവിക്കുന്നതിനുള്ള സാധ്യത തുല്യമാണെങ്കിൽ അവയെ തുല്യ സാധ്യതയുള്ള സംഭവങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നു.

- ഒരു നാണയം ടോസ്സിടുമ്പോൾ തല അല്ലെങ്കിൽ പൂവ് കിട്ടുന്നതത് തുല്യ സാധ്യതയുള്ള സംഭവങ്ങളാണ്.
- ഒരു പകിട ഉരുട്ടുമ്പോൾ ഒറ്റ സംഖ്യ കിട്ടുന്നതും ഇരട്ട സംഖ്യ കിട്ടുന്നതും തുല്യ സാധ്യതയുള്ള സംഭവങ്ങളാണ്. ഇതുപോലെ ഇരട്ട സംഖ്യ കിട്ടുന്നതും ഒന്ന് കിട്ടുന്നതും തുല്യ സാധ്യതയുള്ള സംഭവങ്ങളല്ല.

സംഭാവ്യത 1ആണെങ്കിൽ, സംഭവം തീർച്ചയായും സംഭവിച്ചിരിക്കും. ഇത്തരം സംഭവങ്ങളെ സുനിശ്ചിത സംഭവം അഥവാ തീർച്ചയായും സംഭവിക്കുന്ന സംഭവം എന്ന് പറയുന്നു. സംഭാവ്യത 0 ആണെങ്കിൽ അത്തരം സംഭവങ്ങളെ അസാദ്ധ്യ സംഭവം എന്ന് പറയുന്നു.

അതായത് $P(E) = 1$ എങ്കിൽ E എന്നത് സുനിശ്ചിത സംഭവം

അതായത് $P(E) = 0$ എങ്കിൽ E എന്നത് അസാദ്ധ്യ സംഭവം.



ഒരു നാണയം ടോസ്സിടുന്നത് പരിഗണിക്കുക. ഒരു നാണയം ടോസ്സിടുമ്പോൾ രണ്ട് തലയും രണ്ട് പൂവും ഒരുമിച്ചു കിട്ടുന്നതിന് സാധ്യത ഇല്ല. യഥാർത്ഥ നാണയത്തിന്റെ ഇരുവശങ്ങളിലും തലകളോ പൂവുകളോ ഉകരുത്. രണ്ട് സംഭവങ്ങൾ ഒരേ സമയത്ത് സംഭവിക്കാൻ സാധ്യത ഇല്ലെങ്കിൽ അവയെ പരസ്പര വർജ്ജക സംഭവങ്ങളെന്ന് പറയുന്നു. മഴയും വെയിലും പരസ്പര വർജ്ജകങ്ങളാണോ?



ഒരു പകിട ഉരുട്ടുന്നു. മുഖങ്ങളിൽ ഇരട്ട സംഖ്യ കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭവം E എന്നിരിക്കട്ടെ. അതായത് 2,4,6 എന്നിവ കിട്ടുന്നതിന് മുഖങ്ങളിൽ ഒറ്റ സംഖ്യകിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭവം ഇതിന് പൂരകമാണ്. ഇതിനെ E' എന്ന് കുറിക്കാം. ഇവിടെ E യും E' ഉം പരസ്പര വർജ്ജക സംഭവങ്ങളാണ്.

Unit 9_PROBABILITY.indd 298 28-01-2023 12:13:25

കുറിപ്പ്

(i) E യും E' ഉം പരസ്പര വർജ്ജകങ്ങളാണ്. എങ്ങനെ?

(iI) E യുടെ സംഭാവ്യത + E' ന്റെ സംഭാവ്യത =1. കൂടാതെ E യും E' ഉം പരസ്പര വർജ്ജകങ്ങളാണ്.

(iii) $P(E)+P(E')=1$, ആയതിനാൽ ഇവയിൽ ഒന്ന് അറിയാമെങ്കിൽ മറ്റേത് കണ്ടുപിടിക്കാം.

പുരോഗതി പരിശോധന

താഴെ പറയുന്നവയിൽ പരസ്പര വർജ്ജക സംഭവൾ ഏവ്?

S. No	ശ്രമം	സംഭവം 1	സംഭവം 2
1	പകിട ഉരുട്ടൽ	5 കിട്ടുന്നതിന്	ഒരു ഒറ്റ സംഖ്യ കിട്ടുന്നതിന്
2	പകിട ഉരുട്ടൽ	5 കിട്ടുന്നതിന്	ഒരു ഇരട്ട സംഖ്യ കിട്ടുന്നതിന്
3	പകിട ഉരുട്ടൽ	ഒരു അഭാജ്യ സംഖ്യ കിട്ടുന്നത്	ഒരു ഒറ്റ സംഖ്യ .കിട്ടുന്നത്
4	നാണയം ടോസ് ഇടുന്നത്	തല കിട്ടുന്നത്	പൂവ് കിട്ടുന്നതിന്
5	ഒരാഴ്ചയിലെ ദിവസം തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നത്	ഞായറാഴ്ച ലഭിക്കുന്നത്	അവധി ദിവസം കിട്ടുന്നത്

ഉദാഹരണം 9.4 നാളെ മഴപെയ്യുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത $\frac{91}{100}$ എങ്കിൽ മഴപെയ്യാതിരിക്കാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

നിർദ്ധാരണം

മഴ പെയ്യുന്നതിനുള്ള സംഭവം E എന്നിരിക്കട്ടെ. മഴപെയ്യാതിരിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭവം E' ആകുന്നു.

$P(E) = 0.91,\ P(E') = 1-0.91$

$= 0.09$

മഴ പെയ്യാതിരിക്കാനുള്ള സംഭാവ്യത

$= 0.09$

Unit 9_PROBABILITY.indd 299 28-01-2023 12:13:26

ഉദാഹരണം 9.5

ഈ അടുത്ത കാലത്ത് പത്താം ക്ലാസ്സ് പൊതു പരീക്ഷയിൽ വിവിധ വിഷയങ്ങളിൽ 1184 കുട്ടികൾ 100 മാർക്ക് നേടി. ഇതിൽ 233 പേർ ഗണിതത്തിലും 125 പേർ സാമൂഹ്യ ശാസ്ത്രത്തിലും 106 പേർ ശാസ്ത്രത്തിനുമാണ് 100 മാർക്ക് നേടിയത്. ഇതിൽ നിന്നും ഒരു വിദ്യാർത്ഥിയെ യാദൃശ്ചികമായി തെരഞ്ഞെടുത്താൽ താഴെ പറയുന്നവയ്ക്കുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക?

(i) ഗണിതത്തിൽ 100 മാർക്കെടുത്ത വിദ്യാർത്ഥി. (ii) ശാസ്ത്രത്തിൽ 100 മാർക്കെടുക്കാതിരുന്ന വിദ്യാർത്ഥി.

നിർദ്ധാരണം

100 മാർക്ക് വാങ്ങിയ മൊത്തം കുട്ടികളുടെ എണ്ണം $=1184$

$\therefore\ n = 1184$

(i) ഗണിതത്തിൽ 100 മാർക്ക് വാങ്ങിയ വിദ്യാർത്ഥിയെ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നതിന്റെ സംഭവം E_1 എന്നെടുക്കുക.

$\therefore\ n(E_1) = 233,$ അതായത്, $r_1 = 233$

$$P(E_1) = \frac{r_1}{n} = \frac{233}{1184}$$

(ii) ശാസ്ത്രത്തിൽ 100 മാർക്ക് വാങ്ങിയ വിദ്യാർത്ഥിയെ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നതിന്റെ സംഭവം E_2 എന്നെടുക്കുക.

$\therefore\ n(E_2) = 106,$ അതായത്, $r_2 = 106$

$$P(E_2) = \frac{r_2}{n} = \frac{106}{1184}$$

$$P(E_2') = 1 - P(E_2)$$

$$= 1 - \frac{106}{1184}$$

$$= \frac{1078}{1184}$$

അഭ്യാസം 9.2

1. ഒരു സ്ഥാപനം 6 മാസം കൊണ്ട് 10,000 ലാപ്ടോപ്പുകൾ നിർമ്മിച്ചു. അതിൽ 25 എണ്ണം കേടുള്ളതായി കണ്ടെത്തി. യാദൃശ്ചികമായി ഒരു ലാപ്ടോപ്പ് തെരഞ്ഞെടുത്താൽ അത് നല്ലതായിരിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക?

2. 16 മുതൽ 20 വയസ്സ് വരെയുള്ള 400 യുവതീയുവാക്കളെ നിരീക്ഷിച്ചപ്പോൾ 191 പേർക്ക് സമ്മതിദായക തിരിച്ചറിയൽ കാർഡ് ഉള്ളതായി മനസ്സിലായി. യാദൃശ്ചികമായി ഒരാളെ തെരഞ്ഞെടുത്താൽ അയാൾക്ക് തിരിച്ചറിയൽ കാർഡ് ഇല്ലാതിരിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക?

3. ഈ ചോദ്യത്തിന് ശരിയായ ഉത്തരം ഊഹിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത $\frac{x}{3}$, ശരിയായ ഉത്തരം ഊഹിക്കാതിരിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത $\frac{x}{5}$, എങ്കിൽ x ന്റെ വില കാണുക?

Unit 9_PROBABILITY.indd 300 28-01-2023 12:13:28

4. ഒരു ടെന്നിസ് കളിക്കാരൻ ജയിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത 0.72. അദ്ദേഹം തോൽക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക?

5. ഒരു ഗ്രാമത്തിലെ 1500 കുടുംബങ്ങളെ നിരീക്ഷിച്ച് അവരുടെ വീട്ടിലെ ജോലിക്കാരെ കുറിച്ച് താഴെ പറയുന്ന പട്ടിക തയ്യാറാക്കി.

ജോലിക്കാരുടെ തരം	പകുതി നേരം	മുഴുവൻ നേരം	രണ്ടും
ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം	860	370	250

ഒരു കുടുംബത്തെ യാദൃശ്ചികമായി തെരഞ്ഞെടുത്താൽ ആ കുടുംബത്തിന്റെ താഴെ പറയുന്ന സംഭാവ്യത കാണുക?

(i) രണ്ട് തരത്തിൽപ്പെട്ട ജോലിക്കാർ (ii) പകുതി നേര ജോലിക്കാർ (iii) ജോലിക്കാരില്ല

അഭ്യാസം 9.3

ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുത്തെഴുതുക

1. 0 നും 1നും ഇടയിലുള്ള സംഖ്യകൾ കൊണ്ട് അനിശ്ചിതത്വം അളക്കുന്നതിനെ _____ എന്ന് പറയുന്നു.

(1) യാദൃശ്ചിക ചരം (2) ശ്രമം (3) സാധാരണ സംഭവം (4) സംഭാവ്യത

2. ഒരു സംഭാവ്യത സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നത്

(1) -1നും +1നും ഇടയിൽ (2) 0 നും 1 നും ഇടയിൽ

(3) 0നും n നും ഇടയിൽ (4) -1നും ∞ ക്കും ഇടയിൽ

3. ആപേക്ഷിക ആവൃത്തി സിദ്ധാന്തത്തെ ആസ്പദമാക്കിയുള്ള സംഭാവ്യതയെ _____ എന്ന് പറയുന്നു.

(1) അനുഭവ പൂർണ്ണമായ സംഭാവ്യത (2) ശാസ്ത്രീയ സംഭാവ്യത

(3) (1), (2) ചേർന്നത് (4) (1)-ഉം അല്ല (2)-ഉം അല്ല

4. ഒരു സംഭവത്തിന്റെ സംഭാവ്യത ആകാൻ പാടില്ലാത്തത് താഴെ പറയുന്നതിൽ ഏത്?

(1) പൂജ്യം (2) പൂജ്യത്തേക്കാൾ വലുത് (3) ഒന്ന് (4) പൂജ്യത്തേക്കാൾ ചെറുത്

5. ഒരു യാദൃശ്ചിക പരീക്ഷണത്തിന്റെ സാധ്യമായ എല്ലാ ഫലങ്ങളും ഏതിനോടാണ് സമം?

(1) ഒന്ന് (2) പൂജ്യം (3) അനന്തം (4) എല്ലാം

6. Sന്റെ ഒരു സംഭവം A ആണെങ്കിൽ $P(A') =$

(1) 1 (2) 0 (3) $1-A$ (4) $1-P(A)$

7. താഴെ തന്നിരിക്കുന്നതിൽ ഏതാണ് ഒരു സംഭവത്തിന്റെ സംഭാവ്യത അല്ലാത്തത്

(1) 0 (2) 0.5 (3) 1 (4) -1

Unit 9_PROBABILITY.indd 301 28-01-2023 12:13:29

8. ഒരു പരീക്ഷണത്തിന്റെ പ്രത്യേക ഫലം.

(1) ശ്രമം (2) സാധാരണ സംഭവം

(3) സംയുക്ത സംഭവം (4) ഫലം

9. ഒരു പരീക്ഷണത്തിന്റെ ഒന്നോ അതിലധികമോ ഫലങ്ങൾ.

(1) സംഭവം (2) ഫലം (3) സാമ്പിൾ പോയന്റ് (4) ഇവയിൽ ഒന്നുമല്ല

10. ഒരു പകിടയുടെ 6 മുഖങ്ങളും സമസന്ദർഭമുള്ളതാണെങ്കിൽ ആ പകിട.

(1) ചെരുത് (2) യഥാർത്ഥ പകിട (3) 6 മുഖങ്ങളുള്ളത് (4) വൃത്ത രൂപത്തിലുള്ളത്

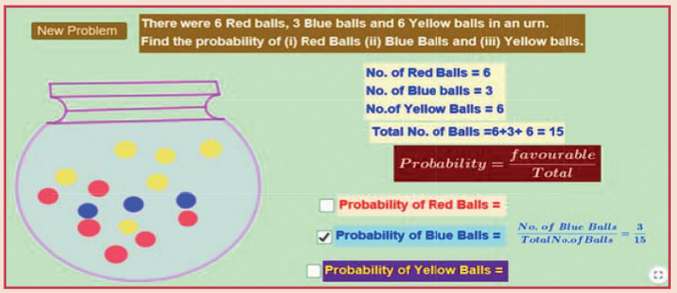
ഓർത്തിരിക്കേണ്ടവ

- ഒരു പരീക്ഷണത്തിന്റെ ഫലം പ്രവചിക്കാൻ സാധിക്കുമെങ്കിൽ അതിനെ നിർണ്ണായക പരീക്ഷണം എന്ന് വിളിക്കുന്നു.
- ഫലം പ്രവചിക്കാൻ സാധിക്കാത്ത പരീക്ഷണത്തെ യാദൃശ്ചിക പരീകഷണം എന്ന് പറയുന്നു.
- ഒരു യാദൃശ്ചിക പരീക്ഷണത്തിന്റെ സാധ്യമായ എല്ലാ ഫലങ്ങളുടെയും ഗണത്തെ സാമ്പിൾ സ്പേസ് എന്ന് പറയുന്നു.
- ഒരു പരീക്ഷണത്തിന്റെ ഒരു ഫലത്തെയോ അല്ലെങ്കിൽ ഒന്നിലധികം ഫലങ്ങളെയോ സംഭവം എന്ന് പറയുന്നു.
- ഒരു സംഭവത്തിന്റെ അനുഭവസിദ്ധമായ സംഭാവ്യത നടന്ന കാര്യത്തിന്റെ അടുത്ത ശതമാനമാകുന്നു.
- രണ്ട് സംഭവങ്ങൾക്ക് തുല്യ സാധ്യതയാണ് ഉള്ളതെങ്കിൽ അവയെ സമ സന്ദർഭ സംഭവങ്ങൾ എന്ന് പറയുന്നു.
- രണ്ട് സംഭവങ്ങളിൽ ഏതെങ്കിലും ഒരു സംഭവം സംഭവിക്കുന്നത് മറ്റേ സംഭവം സംഭവിക്കുന്നതിനെ ബഹിഷ്ക്കരികുകുന്നുവെങ്കിൽ അവയെ പരസ്പര വർജ്ജക സംഭവങ്ങൾ എന്ന് പറയുന്നു.
- രണ്ട് പരസ്പര വർജ്ജക സംഭവങ്ങൾ E യും E' ഉം പൂരക സംഭവങ്ങൾ എങ്കിൽ $P(E)+P(E')=1$.
- ഒരു സംഭവം തീർച്ചയായും സംഭവിക്കുമെങ്കിൽ അതിനെ സുനിശ്ചിത സംഭവം എന്ന് പറയുന്നു. സുനിശ്ചിത സംഭവത്തിന്റെ സംഭാവ്യത ഒന്നായിരിക്കും.
- ഒരിക്കലും നടക്കാൻ സാധ്യത ഇല്ലാത്ത സംഭവത്തെ അസാധ്യ സംഭവം എന്ന് പറയുന്നു. അസാധ്യ സംഭവത്തിന്റെ സംഭാവ്യത പൂജ്യം ആയിരിക്കും.

Unit 9_PROBABILITY.indd 302 28-01-2023 12:13:29

ICT കോർണർ

പ്രതീക്ഷിക്കുന്ന ഉത്തരം ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.



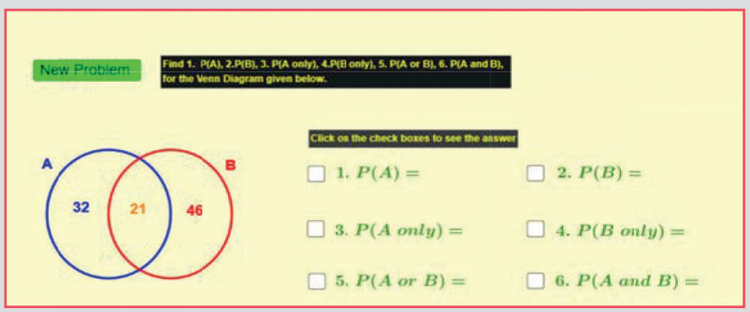
ഘട്ടം – 1

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള URL ടൈപ്പ് ചെയ്യുക. അല്ലെങ്കിൽ QR കോഡ് സ്കാൻ ചെയ്യുക. “Probability” എന്ന ജിയോജിബ്ര വർക്ക്ഷീറ്റ് ദൃശ്യമാകും. “Venn diagram” എന്നും “Basic probability” എന്നും തലക്കെട്ടുകളിൽ രണ്ട് വർക്ക് ഷീറ്റുകൾ കാണാം.

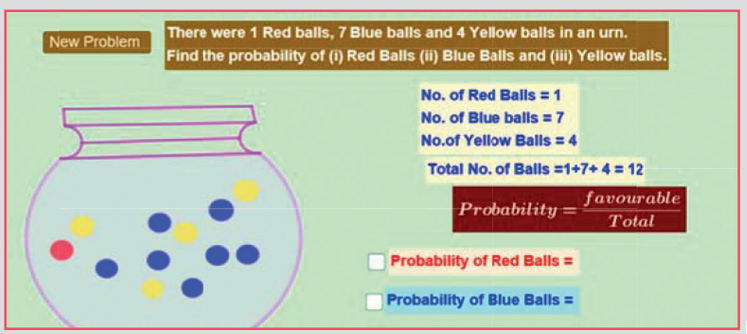
ഘട്ടം - 2

“New Problem” ക്ലിക്ക് ചെയ്യുക. നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക. “Check box” ക്ലിക്ക് ചെയ്ത് ഉത്തരം ശരിയാണോ എന്ന് നോക്കുക.

ഘട്ടം 1



ഘട്ടം 2



Browse in the link

Probability: https://ggbm.at/mj887yua or Scan the QR Code.

Unit 9_PROBABILITY.indd 303 28-01-2023 12:13:30

ഉത്തരങ്ങൾ

1. ഗണഭാഷ

അഭ്യാസം 1.1

1. (i) ഗണം (ii) ഗണമല്ല (iii) ഗണം (iv) ഗണമല്ല

2. (i) {I, N, D, A} (ii) {P, A, R, L, E, O, G, M} (iii) {M, I, S, P}

   (iv) {C, Z, E, H, O, S, L, V, A, K, I}

3. (a) (i) ശരി (ii) ശരി (iii) തെറ്റ് (iv) ശരി (v) തെറ്റ് (vi) തെറ്റ്

   (b) (i) A (ii) C (iii) $\notin$ (iv) $\in$

4. (i) $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$ (ii) $B = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}\right\}$

   (iii) $C = \{64, 125\}$ (iv) $D = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$

5. (i) $B = \{x : x$ എന്നത്ഏകദിന അന്താരാഷ്ട്ര ക്രിക്കറ്റ്കളിയിൽഇരട്ടസെഞ്ചറി നേടിയഒരു ഇന്ത്യൻ ക്രിക്കറ്റ് കളിക്കാരൻ$\}$

   (ii) $C = \left\{x : x = \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$ (iii) $D = \{x : x$ is a tamil month in a year$\}$

   (iv) $E = \{x : x$ എന്നത് 9 നേക്കാൾകുറഞ്ഞ ഒരുഒറ്റ പൂർണ്ണ സംഖ്യ$\}$

6. (i) $P =$ 'J' എന്ന അക്ഷരത്തിൽതുടങ്ങുന്ന എല്ലാംഇംഗ്ലിഷ്മാസങ്ങളുടെയുംഗണം.

   (ii) $Q = 5$ നും 31 നും ഇയെിലുള്ള അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ ഗണം.

   (iii) $R = 5$ നേക്കാൾ കുറഞ്ഞ നിസർഗ സംഖ്യകളുടെ ഗണം.

   (iv) $S =$ എല്ലാം ഇംഗ്ലിഷ് വ്യജ്ഞനാക്ഷരങ്ങളുടെയും ഗണം.

അഭ്യാസം 1.2

1. (i) $n(M) = 6$ (ii) $n(P) = 5$ (iii) $n(Q) = 3$ (iv) $n(R) = 10$ (v) $n(S) = 5$

2. (i) പരിമിതം (ii) അനന്തം (iii) അനന്തം (iv) പരിമിതം

Answers_Combine.indd 304 21-01-2023 15:10:11

3. (i) സമാനഗണങ്ങൾ (ii) അസമഗണങ്ങൾ (iii) സമഗണങ്ങൾ (iv) സമാനഗണങ്ങൾ

4. (i) ശൂന്യഗണം (ii) ശൂന്യഗണം (iii) ഏകാംഗഗണം (iv) ശൂന്യഗണം

5. (i) സംയുക്തഗണം (ii) വിയുക്തഗണം (iii) സംയുക്തഗണം

6. (i) {സമചതുരം, സമചതുർഭുജം} (ii) {വൃത്തം} (iii) {ത്രികോണം} (iv) { }

7. { }, {a}, {a, b}, {a, {a, b}}

8. (i) {{ }, {a}, {b}, {a, b}}

(ii) {{ }, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3 }, {1, 2, 3}}

(iii) {{ }, {p}, {q} {r}, {s}, {p, q}, {p, r}, {p, s}, {q, r}, {q, s}, {r, s}, {p, q, r}, {p, q, s}, {p, r, s}, {q, r, s}, {p, q, r, s}} (iv) $P(E)$= {{ }}

9. (i) 8, 7 (ii) 1024, 1023

10. (i) 16 (ii) 1 (iii) 8

അഭ്യാസം 1.3

1. (i) {2, 4, 7, 8, 10} (ii) {3, 4, 6, 7, 9, 11} (iii) {2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11}

(iv) {4, 7} (v) {2, 8, 10} (vi) {3, 6, 9, 11}

(vii) {1, 3, 6, 9, 11, 12} (viii) {1, 2, 8, 10, 12}

(ix) {1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

2. (i) {2, 5, 6, 10, 14, 16}, {2, 14}, {6, 10}, {5, 16}

(ii) {a, b, c, e, i, o, u}, {a, e, u}, {b, c}, {i, o}

(iii) {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, {1, 2, 3, 4, 5}, {6, 7, 8, 9, 10,}, {0}

(iv) {m, a, t, h, e, i, c, s, g, o, r, y}, {e, m, t,}, {a, h, i, c, s}, {g, o, r, y}

3. (i) {a, c, e, g} (ii) {b, c, f, g} (iii) {a, b, c, e, f, g} (iv) {c, g} (v) {c, g}

Answers_Combine.indd 305 21-01-2023 15:10:11

(vi) $\{a, b, c, e, f, g\}$ (vii) $\{b, d, f, h\}$ (viii) $\{a, d, e, h\}$

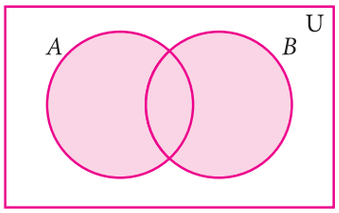
4. (i) $\{0, 2, 4, 6\}$ (ii) $\{1, 4, 6\}$ (iii) $\{0, 1, 2, 4, 6\}$ (iv) $\{4, 6\}$ (v) $\{4, 6\}$

(vi) $\{0, 1, 2, 4, 6\}$ (vii) $\{1, 3, 5, 7\}$ (viii) $\{0, 2, 3, 5, 7\}$

5. (i) $\{1, 2, 7\}$ (ii) $\{m, o, p, q, j\}$ (iii) $\{6, 9, 10\}$

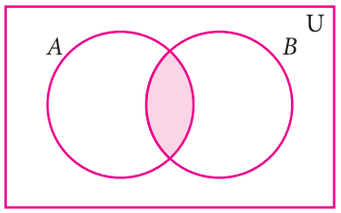
6. (i) $Y-X$ (ii) $(X \cup Y)'$ (iii) $(X - Y) \cup (Y - X)$

7. (i)



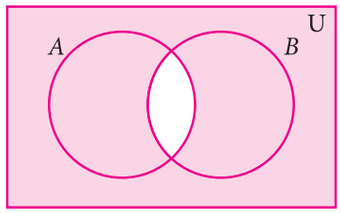
$A \cup B$

(ii)



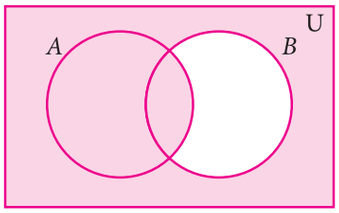
$A \cap B$

(iii)



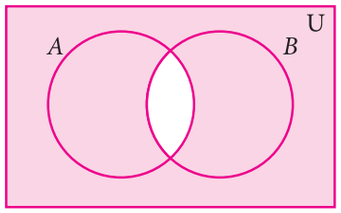
$(A \cap B)'$

(iv)



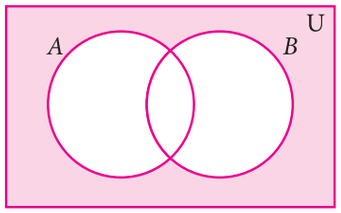
$(B-A)'$

(v)



$A' \cup B'$

(vi)



$A' \cap B'$

(vii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

അഭ്യാസം 1.4

1. (i) $\{1,2,3,4,5,7,9,11\}$ (ii) $\{2,5\}$ (iii) $\{3,5\}$

അഭ്യാസം 1.5

1. (i) $\{3,4,6\}$ (ii) $\{-1,5,7\}$ (iii) $\{-3,0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$

(iv) $\{-3,0,1,2\}$ (v) $\{1,2,4,6\}$ (vi) $\{4,6\}$ (vii) $\{-1,3,4,6\}$

2. (i) $\{a,b,c,d,e,f\}$ (ii) $\{a,b,d\}$ (iii) $\{a,b,c,d,e,f\}$ (iv) $\{a, b, d\}$

അഭ്യാസം 1.6

1. (i) 15, 65 (ii) 250, 600 4. (1) 17 (ii) 22 (iii) 47

5. (i) 10 (ii) 10 (iii) 25 6. 1000 7. 8 8. Not correct

9. (i) 185 (ii) 141 (iii) 326 10. 70

Answers_Combine.indd 306 21-01-2023 15:10:13

11. $x = 20$, $y = 40$, $z = 30$ 12. (i) 5 (ii) 7 (iii)8

13. 5

അഭ്യാസം1.7

1. (2) 2. (1) 3. (3) 4. (2) 5. (4) 6. (1) 7. (2) 8. (4) 9. (3) 10. (4)

11. (2) 12. (1) 13. (1) 14. (3) 15. (4) 16. (1) 17. (4) 18. (3) 19. (3) 20. (1)

2. വാസ്തവിക സംഖ്യകൾ

അഭ്യാസം 2.1

1. D 2. $-\frac{6}{11}, -\frac{5}{11}, -\frac{4}{11}, \ldots \frac{1}{11}$

3. (i) $\frac{9}{40}, \frac{19}{80}, \frac{39}{160}, \frac{79}{320}, \frac{159}{640}$;
തന്നിരിക്കുന്ന് അനേകം ഉത്തരങ്ങളിൽ ഒന്നാണ്

(ii) 0.101, 0.102, ... 0.109
തന്നിരിക്കുന്ന് അനേകം ഉത്തരങ്ങളിൽ ഒന്നാണ്

(iii) $-\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}, -\frac{9}{8}, -\frac{17}{16}, -\frac{33}{32}$
തന്നിരിക്കുന്ന് അനേകം ഉത്തരങ്ങളിൽ ഒന്നാണ്

അഭ്യാസം 2.2

1. (i) 0.2857142..., അവസാനിക്കാത്തതും ആവർത്തിക്കുന്നതും

(ii) $-5.\overline{27}$, അവസാനിക്കാത്തതും ആവർത്തിക്കുന്നതും

(iii) $7.\overline{3}$, അവസാനിക്കാത്തതും ആവർത്തിക്കുന്നതും

(iv) 1.635, അവസാനിക്കാത്തതും

2. $0.\overline{076293}$, 6 3. $0.03\overline{03}$, $2.\overline{15}$

4. (i) $\frac{24}{99}$ (ii) $\frac{2325}{999}$ (iii) $-\frac{1283}{250}$ (iv) $\frac{143}{45}$ (v) $\frac{5681}{330}$ (vi) $-\frac{190924}{9000}$

5. (i) അവസാനിക്കാത്തതും (ii) അവസാനിക്കാത്തതും (iii) അവസാനിക്കാത്തത്

(iv) അവസാനിക്കാത്തത്

അഭ്യാസം2.3

2. (i) 0.301202200222..., 0.301303300333... (ii) 0.8616611666111 ..., 0.8717711777111 ...
(iii) 1.515511555..., 1.616611666...

Answers_Combine.indd 307 21-01-2023 15:10:14

3. 2.2362, 2.2363

അഭ്യാസം 2.5

1.(i) 5^4 (ii) 5^{-1} (iii) $5^{\frac{1}{2}}$ (iv) $5^{\frac{3}{2}}$

2.(i) 4^2 (ii) $4^{\frac{3}{2}}$ (iii) $4^{\frac{5}{2}}$

3.(i) 7 (ii) 9 (iii) $\frac{1}{27}$ (iv) $\frac{25}{16}$

4.(i) $5^{\frac{1}{2}}$ (ii) $7^{\frac{1}{2}}$ (iii) $7^{\frac{10}{3}}$ (iv) $10^{\frac{-14}{3}}$

5.(i) 2 (ii) 3 (iii) 10 (iv) $\frac{4}{5}$

അഭ്യാസം 2.6

1.(i) $21\sqrt{3}$ (ii) $3\sqrt[3]{5}$ (iii) $26\sqrt{3}$ (iv) $8\sqrt[3]{5}$

2. (i) $\sqrt{30}$ (ii) $\sqrt{5}$ (iii) 30 (iv) $49a - 25b$

(v) $\frac{5}{16}$ 3.(i) 1.852 (ii) 23.978

4. (i) $\sqrt[3]{5} > \sqrt[6]{3} > \sqrt[9]{4}$ (ii) $\sqrt{\sqrt{3}} > \sqrt[2]{\sqrt[3]{5}} > \sqrt[3]{\sqrt[4]{7}}$

5. (i) അതെ (ii) അതെ (iii) അതെ (iv) അതെ

6. (i) അതെ (ii) അതെ (iii) അതെ (iv) അതെ

അഭ്യാസം 2.7

1.(i) $\frac{\sqrt{2}}{10}$ (ii) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (iii) $\frac{5\sqrt{6}}{6}$ (iv) $\frac{\sqrt{30}}{2}$

2. (i) $\frac{4}{3}(5 + 2\sqrt{6})$ (ii) $13 - 4\sqrt{6}$ (iii) $\frac{9 + 4\sqrt{30}}{21}$ (iv) $-2\sqrt{5}$

3. $a = \frac{-4}{3}, b = \frac{11}{3}$ 4. $x^2 + \frac{1}{x^2} = 18$ 5. 5.414

അഭ്യാസം 2.8

1. (i) 5.6943×10^{11} (ii) 2.00057×10^3 (iii) 6.0×10^{-7} (iv) 9.000002×10^{-4}

2. (i) 3459000 (ii) 56780 (iii) 0.0000100005 (iv) 0.0000002530009

3. (i) 1.44×10^{28} (ii) 8.0×10^{-60} (iii) 2.5×10^{-36}

4.(i) 7.0×10^9 (ii) 9.4605284×10^{15} km (iii) $9.1093822 \times 10^{-31}$ kg

Answers_Combine.indd 308 21-01-2023 15:10:17

5. (i) 1.505×10^{8} (ii) 1.5522×10^{17} (iii) 1.224×10^{7} (iv) 1.9558×10^{-1}

അഭ്യാസം 2.9

1. (4) 2. (3) 3. (2) 4. (1) 5. (4) 6. (2) 7. (2) 8. (2) 9. (4) 10. (1)
11. (4) 12. (4) 13. (4) 14. (2) 15. (2) 16. (3) 17. (2) 18. (4) 19. (2) 20. (3)

3. ബീജഗണിതം

അഭ്യാസം 3.1

1. (i) ബഹുപദവ്യംജകം അല്ല (ii) ബഹുപദവ്യംജകം (iii) ബഹുപദവ്യംജകം അല്ല
(iv) ബഹുപദവ്യംജകം (v) ബഹുപദവ്യംജകം (vi) ബഹുപദവ്യംജകം അല്ല

2.

	x^2 ന്റെ ഗുണാങ്കം	x ന്റെ ഗുണാങ്കം
(i)	$\frac{2}{5}$	-3
(ii)	-2	$-\sqrt{7}$
(iii)	π	-1
(iv)	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$
(v)	1	$-\frac{7}{2}$

3. (i) 7 (ii) 4 (iii) 5 (iv) 6 (v) 4

4.

	അവരോഹണക്രമം	ആരോഹണക്രമം
(i)	$\sqrt{7}\,x^3 + 6x^2 + x - 9$	$-9 + x + 6x^2 + \sqrt{7}\,x^3$
(ii)	$-\frac{7}{2}x^4 - 5x^3 + \sqrt{2}\,x^2 + x$	$x + \sqrt{2}\,x^2 - 5x^3 - \frac{7}{2}x^4$
(iii)	$7x^3 - \frac{6}{5}x^2 + 4x - 1$	$-1 + 4x - \frac{6}{5}x^2 + 7x^3$
(iv)	$9y^4 + \sqrt{5}\,y^3 + y^2 - \frac{7}{3}y - 11$	$-11 - \frac{7}{3}y + y^2 + \sqrt{5}\,y^3 + 9y^4$

5. (i) $6x^3+6x^2-14x+17$, 3 (ii) $7x^3+7x^2+11x-8$, 3 (iii) $16x^4-6x^3-5x^2+7x-6$, 4

6. (i) $7x^2+8$, 2 (ii) $-y^3+6y^2-14y+2$, 3 (iii) $z^5-6z^4-6z^2-9z+7$, 5

7. $x^3-8x^2+11x+7$ 8. $2x^4-3x^3+5x^2-5x+6$

9. (i) $6x^4+ 7x^3-56x^2-63x+18$, 4 (ii) $105x^2-33x-18$, 2 (iii) $30x^3-77x^2+54x-7$, 3

10. x^2+y^2+2xy, ₹ 225 11. $9x^2-4$, 3596 ച.മാത്രകൾ

12. ത്രിഘാത ബഹുപദം അഥവാ കൃതി 3 ആയ ബഹുപദം

അഭ്യാസം 3.2

1. (i) 6 (ii) −6 (iii) 3 2. 1 3. (i) 3 (ii) $-\frac{5}{2}$ (iii) $\frac{3}{2}$ (iv) 0 (v) 0 (vi) $-\frac{b}{a}$

Answers_Combine.indd 309 21-01-2023 15:10:35

4. (i) $\frac{6}{5}$ (ii) -3 (iii) $-\frac{9}{10}$ (iv) $\frac{4}{9}$

6. (i) 2 (ii) 3 (iii) 0 (iv) 1 (v) 1

അഭ്യാസം 3.3

1. $g(x)$ ന്റെ ഗുണിതമല്ല $P(x)$

2. (i) ശിഷ്ടം : 0 (ii) ശിഷ്ടം : $\frac{3}{2}$ (iii) ശിഷ്ടം : 62

3. ശിഷ്ടം : -143 4. ശിഷ്ടം : 2019 5. $K = 8$

6. $a = -3$, ശിഷ്ടം : 27 7. (i) $(x-1)$ ഒരു ഘടകമാണ് (ii) $(x-1)$ ഒരു ഘടകമല്ല

8. $(x-5)$ ഒരു ഘടകമാണ് $p(x)$ 9. $m = 10$ 11. $k = 3$ 12. Yes

അഭ്യാസം 3.4

1. (i) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4xy + 12yz + 6xz$ (ii) $p^2 + 4q^2 + 9r^2 - 4pq + 12qr - 6pr$

(iii) $8p^3 - 24p^2 - 14p + 60$ (iv) $27a^3 + 27a^2 - 18a - 8$

2.(i) 18,107,210 (ii) $-32, -6, +90$

3. (i) 14 (ii) $\frac{59}{70}$ (iii) 78 (iv) $\frac{78}{70}$

4. (i) $27a^3 - 64b^3 - 108a^2b + 144ab^2$ (ii) $x^3 + \frac{1}{y^3} + \frac{3x^2}{y} + \frac{3x}{y^2}$

5.(i) 941192 (ii) 1003003001

6. 29 7. 280 8. 335 9. 198 10. $\pm 5, \pm 110$

11. 36 12.(i) $8a^3 + 27b^3 + 64c^3 - 72abc$ (ii) $x^3 - 8y^3 + 27z^3 + 18xyz$

13.(i) -630 (ii) $\frac{-9}{4}$

14. 72xyz

അഭ്യാസം 3.5

1.(i) $2a^2(1 + 2b + 4c)$ (ii) $(a-m)(b-c)$

2.(i) $(x+2)^2$ (ii) $3(a-4b)^2$

(iii) $x(x+2)(x-2)(x^2+4)$ (iv) $\left(m + \frac{1}{m} + 5\right)\left(m + \frac{1}{m} - 5\right)$

(v) $6(1+6x)(1-6x)$ (vi) $\left(a - \frac{1}{a} + 4\right)\left(a - \frac{1}{a} - 4\right)$

3. (i) $(2x + 3y + 5z)^2$

(ii) $(-5x + 2y + 3z)^2$ (or) $(5x - 2y - 3z)^2$

Answers_Combine.indd 310 21-01-2023 15:10:38

4. (i) $(2x+5y)(4x^2-10xy+25y^2)$

(ii) $(3x-2y)(9x^2+6xy+4y^2)$

(iii) $(a+2)(a-2)(a^2+4-2a)(a^2+4+2a)$

5. (i) $(x+2y-1)(x^2+4y^2+1-2xy+2y+x)$

(ii) $(l-2m-3n)(l^2+4m^2+9n^2+2lm-6mn+3ln)$

അഭ്യാസം 3.6

1.(i) $(x+6)(x+4)$

(ii) $(z+6)(z-2)$

(iii) $(p-8)(p+2)$

(iv) $(t-9)(t-8)$

(v) $(y-20)(y+4)$

(vi) $(a+30)(a-20)$

2. (i) $(2a+5)(a+2)$

(ii) $(x-7y)(5x+6y)$ (iii) $(2x-3)(4x-3)$ (iv) $2(3x+2y)(x+2y)$

(v) $3x^2(3y+2)^2$ (vi) $(a+b+6)(a+b+3)$

3. (i) $(p-q-8)(p-q+2)$

(ii) $(m+6n)(m-4n)$ (iii) $\left(a+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}a-3\right)$ (iv) $(a+1)(a-1)(a^2-2)$

(v) $m(4m+5n)(2m-3n)$

(vi) $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2$

അഭ്യാസം 3.7

1. (i) ഹരണഫലം : $4x^2-6x-5$, ശിഷ്ടം : 33 (ii) ഹരണഫലം : $4y^2-6y+5$, ശിഷ്ടം : -10

(iii) ഹരണഫലം : $4x^2+2x+1$, ശിഷ്ടം : 0 (iv) ഹരണഫലം : $8z^2-6z+2$, ശിഷ്ടം : 10

2. നീളം : $x+4$ 3. ഉയരം : $5x-4$ 4. ശരാശരി : $x^2-5x+25$

5. (i) $x^2+4x+5, 12$ (ii) $(x^2-1), \ -2$

(iii) $3x^2-11x+40, -125$ (iv) $2x^3-\frac{x^2}{2}-\frac{3x}{8}+\frac{51}{32}, \frac{109}{32}$

Answers_Combine.indd 311 21-01-2023 15:10:41

6. $4x^3 - 2x^2 + 3$, $p = -2$, $q = 0$, ശിഷ്ടം=-10

7. $a = 20$, $b = 94$ & ശിഷ്ടം=388

അഭ്യാസം 3.8

1.(i) $(x-2)(x+3)(x-4)$ (ii) $(x+1)(x-2)(2x-1)$

(iii) $(x-1)(2x-1)(2x+3)$ (iv) $(x+2)(x+3)(x-4)$

(v) $(x-1)(x-2)(x+3)$ (vi) $(x-1)(x-10)(x+1)$

അഭ്യാസം 3.9

1. (i) p^5 (ii) 1 (iii) $3a^2b^2c^3$ (iv) $16x^6$

(v) abc (vi) $7xyz^2$ (vii) 25ab (viii) 1

2. (i) 1 (ii) a^{m+1} (iii) $(2a+1)$ (iv) 1

(v) $\left(x+1\right)\left(x-1\right)$ (vi) $\left(a-3x\right)$

അഭ്യാസം 3.10

2. (i) (5,2) (ii) അനേകം നിർദ്ധാരണങ്ങൾ (iii) നിർദ്ധാരണമില്ല

(iv) $(-3, -3)$ (v) (1,3) (vi) $(-3, 3)$

3. $75km/hr, 25km/hr$

അഭ്യാസം 3.11

1.(i)$(2, -1)$ (ii) (4,2) (iii) (40,100) (iv) $\left(\sqrt{8},\sqrt{3}\right)$

(2) 45 (3) 409

അഭ്യാസം 3.12

1.(i) (2,1) (ii) (7,2) (iii) (80,30) (iv) $\left(1,\frac{3}{2}\right)$

(v) $\left(\frac{1}{3},-1\right)$ (vi) (2,4) (2) ₹30000, ₹40000 (3) 75, 15

അഭ്യാസം 3.13

1.(i) (3,4) (ii) $(3, -1)$ (iii) $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$

(2) രണ്ട് രൂപാ നാണയങ്ങളുടെ എണ്ണം 60; 5 രൂപാ നാണയങ്ങളുടെ എണ്ണം 20

(3) വലിയ പൈപ്പ് 20 മണിക്കൂർ, ചെറിയ പൈപ്പ് 30 മണിക്കൂർ

Answers_Combine.indd 312 21-01-2023 15:10:43

അഭ്യാസം 3.14

1. 64 2. $\frac{5}{7}$

3. $\angle A = 120°$, $\angle B = 70°$, $\angle C = 60°$, $\angle D = 110°$

4. TV യുടെ വില = ₹20000; ഫ്രിഡ്ജിന്റെ വില = ₹10000

5. 40, 48

6. 1 ഇന്ത്യൻ – 18 ദിവസങ്ങൾ; 1 ചൈനീസ് – 36 ദിവസങ്ങൾ

അഭ്യാസം 3.15

1. (4) 2. (3) 3. (4) 4. (4) 5. (2) 6. (1) 7. (4) 8. (4) 9. (4) 10. (3)

11. (2) 12. (3) 13. (3) 14. (2) 15. (3) 16. (3) 17. (4) 18. (2) 19. (3)

20. (2) 21. (4) 22. (3) 23. (2) 24. (1) 25. (2) 26. (3) 27. (1) 28. (3) 29. (2)

4. ജ്യാമിതി

അഭ്യാസം 4.1

1. (i) 70° (ii) 288° (iii) 89° 2. 30°, 60°, 90° 5. 80°, 85 °, 15 °

അഭ്യാസം 4.2

1. (i) 40°, 80°, 100°, 140° 2. 62°, 114° , 66° 3. 44° 4. 10cm

7. (i) 30° (ii) 105° (iii) 75° (iv) 105° 8. 122° , 29°

9. അശബന്ധങ്ങൾ തുല്യമാണ് 10. d = 7.6

അഭ്യാസം 4.3

1. 24cm 2. 17cm 3. 8cm, 45°, 45°

4. 18cm 5. 14 cm 6. 6 cm

7. (i) 45° (ii) 10° (iii) 55° (iv) 120° (v) 60°

8. $\angle BDC = 25°, \angle DBA = 65°, \angle COB = 50°$

അഭ്യാസം 4.4

1. 30° 2.(i) $\angle ACD = 55°$ (ii) $\angle ACB = 50°$ (iii) $\angle DAE = 25°$

Answers_Combine.indd 313 21-01-2023 15:10:44

3. $\angle A = 64°$; $\angle B = 80°$; $\angle C = 116°$; $\angle D = 100°$

4.(i) $\angle CAD = 40°$ (ii) $\angle BCD = 80°$ 5. വ്യാസാർദ്ധം=5cm 6. 3.25m

7. $\angle OAC = 30°$ 8. 5.6m 9. $\angle RPO = 60°$

അഭ്യാസം 4.7

1. (2) 2. (3) 3. (1) 4. (4) 5. (4) 6. (3) 7. (2) 8. (2) 9. (4) 10. (2)

11. (3) 12. (3) 13. (1) 14. (1) 15. (4) 16. (2) 17. (2) 18. (3) 19. (2) 20. (4)

5. നിർദ്ദേശാങ്കജ്യാമിതി

അഭ്യാസം 5.1

1. $P(-7,6)$ = II ാം ചതുർത്ഥാംശം; $Q(7,-2)$ = IV ാം ചതുർത്ഥാംശം; $R(-6,-7)$ = III ാം ചതുർത്ഥാംശം; $S(3,5)$ = I ാം ചതുർത്ഥാംശം; and $T(3,9)$ = I ാം ചതുർത്ഥാംശം

2. (i) $P = (-4,4)$ (ii) $Q = (3,3)$ (iii) $R=(4,-2)$ (iv) $S = (-5,-3)$

3. (i) x അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായ നേർരേഖ (ii) y അക്ഷത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്ന നേർരേഖ

4. (i) സമചതുരം (ii) ലംബകം

അഭ്യാസം 5.2

1. (i) $\sqrt{10}$ മാത്രകൾ (ii) $2\sqrt{26}$ മാത്രകൾ (iii) $c-a$ (iv)13 മാത്രകൾ

2. (i) സമരേഖീയം (ii) സമരേഖീയം 7. 5 അല്ലെങ്കിൽ 1

8. A യുടെ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ (9, 9) അല്ലെങ്കിൽ (−5,−5) 9. $y = 4x+9$

10. P യുടെ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ (2,0)

12. $30\sqrt{2}$

അഭ്യാസം 5.3

1.(i) $(-4,-1)$ (ii) $(0,-1)$ (iii) $(a+b,a)$ (iv) $(1,-1)$

2. $(-5,-3)$ 3. $P=-15$ 4. $(9,3)(-5,5)$, $(1,1)$

5. $\left(\frac{9}{2},\frac{3}{2}\right)$ 6. $(1,8)$

Answers_Combine.indd 314 21-01-2023 15:10:47

അഭ്യാസം 5.4

1. $(7,3)$ 2. 5:2 3. $(3,4)$

4. $(-2,3),(1,0)$ 5. $\left(\frac{19}{2},\frac{13}{2}\right),\left(\frac{-9}{2},\frac{-15}{2}\right)$ 7. $(3,2)$

അഭ്യാസം 5.5

1.(i) $(2,-3)$ (ii) $\left(\frac{-8}{3},\frac{-11}{3}\right)$ 2. $(4,-6)$ 3. 5 മാത്രകൾ

4. 20 5. $3\sqrt{\frac{5}{2}}$ മാത്രകൾ 6. $(1,0)$ 7. $(5,-2)$

അഭ്യാസം 5.6

1. (3) 2. (3) 3. (3) 4. (2) 5. (2) 6. (4) 7. (3) 8. (3) 9. (3) 10. (3)

11. (4) 12. (1) 13. (3) 14. (4) 15. (2) 16. (3) 17. (2) 18. (2) 19. (4) 20. (2)

6. ത്രികോണമിതി

അഭ്യാസം 6.1

1. $\sin B=\frac{9}{41};\cos B=\frac{40}{41};\tan B=\frac{9}{40};\ \text{cosec}B=\frac{41}{9};\sec B=\frac{41}{40};\cot B=\frac{40}{9}$

2. (i) $\sin B=\frac{12}{13}$ (ii) $\sec B=\frac{13}{5}$ (iii) $\cot B=\frac{5}{12}$ (iv) $\cos C=\frac{4}{5}$

(v) $\tan C=\frac{3}{4}$ (vi) $\text{cosec}C=\frac{5}{3}$

3. $\sin\theta=\frac{1}{2};\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2};\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}};\ \text{cosec}\theta=\frac{2}{1};\sec\theta=\frac{2}{\sqrt{3}};\cot\theta=\sqrt{3}$

4. $\frac{3}{40}$ 5. $\sin A=\frac{1-x^2}{1+x^2};\tan A=\frac{1-x^2}{2x}$ 7. $\frac{1}{2}$

8. $\frac{1}{2}$ 9. $\sin\alpha=\frac{4}{5};\cos\beta=\frac{4}{5};\tan\phi=\frac{4}{3}$ 10. 7m

അഭ്യാസം 6.2

2.(i) 0 (ii) $\frac{7}{4}$ (iii) 3 4. 2

അഭ്യാസം 6.3

1.(i) 1 (ii) 1 (iii) 1 (iv) 2

Answers_Combine.indd 315 21-01-2023 15:10:52

അഭ്യാസം 6.4

1.(i) 0.7547 (ii) 0.2648 (iii) 1.3985 (iv) 0.3641

(v) 0.8302 (vi) 2.7907

2.(i) 85°57′ (or) 85°58′ (or) 85°59′ (ii) 47°27′ (iii) 4°7′

(iv) 87°39′ (v) 82°30′

3.(i) 1.9970 (ii) 2.8659 4. 18.81 cm^2 5. 36°52′

6. 54.02 m

അഭ്യാസം 6.5

1. (1) 2. (2) 3. (2) 4. (3) 5. (2) 6. (3) 7. (3) 8. (1) 9. (2) 10. (2)

7. വിസ്തീർണകലനം

അഭ്യാസം 7.1

1.(i) 120 cm^2 (ii) 7.2 m^2 2. 1320 m^2, ₹26400 3. 12000 m^2

4. 1558.8 cm^2 5. ₹ 1050 6. 240 cm^2 7. 138 cm^2

8. 354m^2 9. 1536 m^2 10. 672 m^2

അഭ്യാസം 7.2

1. 1160cm^2, 560cm^2 2. ₹1716 3. ₹3349

4.(i) 384 m^2, 256 m^2 (ii) 2646 cm^2, 1764 cm^2 (iii) 337.5 cm^2, 225 cm^2

5. 1600 cm^2 6. 253.50m^2, ₹6084 7. 224cm^2, 128cm^2

അഭ്യാസം 7.3

1.(i) 576 cm^3 (ii) 2250 m^3 2. 630 cm^3

3. 25 *cm*, 20 *cm*, 15 *cm* 4. 2624000 *litres* 5. 25000

6. 12 *m* 7.(i) 125 cm^3 (ii) 42.875 m^3 (iii) 9261 cm^3

8. 5 *m* 9. 15 *cm*

അഭ്യാസം 7.4

1. (3) 2. (2) 3. (4) 4. (3) 5. (3) 6. (1) 7. (2) 8. (3) 9. (4) 10. (1)

Answers_Combine.indd 316 21-01-2023 15:10:53

8. സ്ഥിതി വിവരക്കണക്കുകൾ

അഭ്യാസം 8.1

1. $27°C$ 2. 44kg 3. 56.96 (or) 57 (ഏകദേശം)
4. 142.5 mm^3 5. $p = 20$ 6. 40.2 7. 29.29 8. 29.05

അഭ്യാസം 8.2

1. 47 2. 44 3. 21 4. 32
5. 31 6. 38

അഭ്യാസം 8.3

1. 6600, 7000, 7000 2. 3.1 and 3.3 (ബൈമോഡൽ) 3. 15
4. 40 5. 24 6. 58.5

അഭ്യാസം 8.4

1. (1) 2. (3) 3. (3) 4. (2) 5. (1) 6. (4) 7. (1) 8. (2) 9. (2) 10. (3)

9. സംഭാവ്യത

അഭ്യാസം 9.1

1. $\frac{1}{7}$ 2. $\frac{3}{13}$ 3. $\frac{1}{2}$ 4.(i) $\frac{5}{24}$
(ii) $\frac{1}{8}$ (iii) $\frac{2}{3}$ 5. $\frac{1}{4}$ 6.(i) 0
(ii) $\frac{1}{12}$ (iii) 1 7. $\frac{1}{280}$ 8. $\frac{1}{5}$
9. $\frac{3}{4}$

അഭ്യാസം 9.2

1. 0.9975 2. $\frac{209}{400}$ 3. $\frac{15}{8}$ 4. 0.28
5.(i) $\frac{1}{6}$ (ii) $\frac{43}{75}$ (iii) $\frac{1}{75}$

അഭ്യാസം 9.3

1. (4) 2. (2) 3. (1) 4. (4) 5. (1) 6. (4) 7. (4) 8. (4) 9. (1) 10. (2)

Answers_Combine.indd 317 21-01-2023 15:10:56

ഗണിതപദങ്ങൾ

Abscissa	ഃ നിർദ്ദേശാങ്കം
Acute triangle	ന്യൂനകോണത്രികോണം
Adjacent angles	സമീപകോണുകൾ
Algebraic expression	ബീജഗണിതവ്യംജകം
Alternate angles	ഏകാന്തരകോണുകൾ
Altitudes of a triangle	ത്രികോണത്തിന്റെ ഉയരം
Angle	കോൺ
Angle of elevation	മേൽകോൺ
Arithmetic mean	സമാന്തരമാധ്യം
Associative property	സംയോജന നിയമം
Assumed mean	അഭ്യൂഹമാധ്യം
Binomial expression	ദ്വിപദവ്യംജകം
Binomial surds	ദ്വിപദകരണികൾ
Cardinal number of a set	ഗണങ്ങളുടെ ഗണന സംഖ്യ
Cartesian plane	നിർദ്ദേശാങ്കതലം
Cartesian coordinate system	കാർട്ടീഷ്യൻതലം
Centre	കേന്ദ്രം
Centriod	കേന്ദ്രകം
Chord	ഞാൺ
Circum radius	പരിവൃത്ത വ്യാസാർദ്ധം
Circumcentre of a triangle	ത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്തകേന്ദ്രം
Circumcircle	പരിവൃത്തം
Circumference	പരിധി
Classical probability	ശാസ്ത്രീയ സംഭാവ്യത
Co-efficient	ഗുണോത്തരം
Coinciding lines	സന്നി പതിക്കുന്ന രേഖകൾ
Collections	ശേഖരണം
Commutative property	ക്രമവിനിമേയ നിയമം
Complement of a set	ഗണങ്ങളുടെ പൂരകം
Complementary angles	പൂരക കോണുകൾ
Complementary events	പൂരക സംഭവങ്ങൾ
Compound surds	കൂട്ടുകരണികൾ
Concentric circle	ഏകകേന്ദ്ര വൃത്തങ്ങൾ
Concurrent lines	സംഗാമിരേഖകൾ
Congruent circle	സർവ്വസമവൃത്തങ്ങൾ
Congruent triangles	സർവ്വസമത്രികോണം
Conjugate	സമാന്തര
Consistent	സ്ഥിരത
Constant	സ്ഥിരാങ്കം
Coordinate axes	നിർദ്ദേശാങ്ക അക്ഷങ്ങൾ
Corresponding angles	സമസ്ഥാനീയകോണുകൾ
Cube	സമചതുര ഘനിക
Cubic polynomial	ത്രിഘാതവ്യംജകം
Cuboid	ദീർഘ ചതുര ഘനിക
Cyclic Quadrilateral	ചക്രീയ ചതുർഭുജം
Decimal expansion	ദശാംശ വിപുലനം
Decimal representation	ദശാംശ പ്രതിനിധീകരണം
Degree of polynomial	ബഹുപദവ്യംജകങ്ങളുടെ കൃതി
Denseness property	സാന്ദ്രത സവിശേഷത
Descriptive form	വിവരണരീതി
Deterministic Experiment	നിർണ്ണായക പരീക്ഷണം
Diagonal	വികർണം
Diameter	വ്യാസം
Dice	പകിട
Difference of two sets	ര≠ ഗണങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം
Disjoint sets	വിയുക്ത ഗണങ്ങൾ
Division Algoritham of polynomial	ബഹുപദവ്യംജകങ്ങളുടെ ഡിവിഷൻ അൽഗോരിതം
Division algorithm	ഡിവിഷൻ അൽഗോരിതം
Edge	വക്ക്
Empirical probability	അനുഭവ പൂർണ്ണമായ സംഭാവ്യത

Glossary-Combine.indd 318 21-01-2023 15:17:22

Empty set/Null set	ശൂന്യഗണം
Equal sets	സമഗണങ്ങൾ
Equally likely event	സമ സന്ദർഭ സംഭവം
Equiangular triangle	സമമായകോണ ത്രികോണം
Equilateral triangle	സമഭുജത്രികോണം
Equilibrium	സമതുലനം
Equivalent sets	സമാനഗണങ്ങൾ
Event	സംഭവം
Excentre	ബാഹ്യ കേന്ദ്രം
Externally	ബാഹ്യമായി
Face of a solid	ഒരു ഖനരൂപത്തിന്റെ മുഖം
Factor theorem	ഘടകസിദ്ധാന്തം
Factorisation	ഘടകങ്ങളാക്കൽ
Finite set	പരിമിതഗണം
Frequency table	ആവൃത്തിപട്ടിക
Greatest Common Divisor	ഉസാഘ
Grouped data	തരംതിരിച്ചദത്തങ്ങൾ
Hypotenuse	കർണ്ണം
Identities	സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ
Impossible event	അസാദ്ധ്യ സംഭവം
Incentre	അന്തഃകേന്ദ്രം
Incircle	അന്തർവൃത്തം
Inconsistent	അസ്ഥിരമായത്
Indices	ഘാതങ്ങൾ
Infinite set	അനന്തഗണം
Inradius	അന്തർവൃത്ത ആരം
Interior angles	ഉൾകോണുകൾ
Internally	ആന്തരീകമായി
Intersecting lines	ഛേദക രേഖകൾ
Intersection of two sets	ര≠ ഗണങ്ങളുടെ സംഗമം
Irrational number	അപരിമേയ സംഖ്യകൾ
Irrational numbers	അപരിമേയ സംഖ്യകൾ

Isosceles Trapezium	സമപാർശ്വലംബകം
Isosceles triangles	ദ്വിസമഭുജത്രികോണം
Lateral surface area	പാർശ്വ തല വിസ്തീർണ്ണം
Linear equations	രേഖീയ സമീകരണങ്ങൾ
Linear pair of angles	രേഖീയജോടി കോണുകൾ
Linear polynomial expression	രേഖീയ ബഹുപദവ്യംജകം
Major sector	ദീർഘ വൃത്തഖണ്ഡം
Mean difference	പൊതു വ്യത്യാസം
Measures of central tendency	കേന്ദ്ര പ്രവണതകൾ
Median	മധ്യമം
Median of a triangle	മീഡിയൻ
Mid point	മദ്ധ്യ ബിന്ദു
Minor sector	ലഘു വൃത്തഖണ്ഡം
Mixed surds	മിശ്രകരണികൾ
Mode	മോഡ്
Monomial expression	ഏകപദവ്യംജകം
Mutually exclusive event	പരസ്പ്പര വർജ്ജക സംഭവങ്ങൾ
Negative integers	ഋണപൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾ
Non-terminating decimals	അവസാനിക്കാത്ത ദശാംശ ഭിന്നം
Number of terms	പദങ്ങളുടെ എണ്ണം
Obtuse traingle	ബൃഹത്കോണത്രികോണം
Opposite side	എതിർ വശം
Ordinate	y നിർദ്ദേശാങ്കം
Ortho centre of a triangle	ത്രികോണത്തിന്റെ ലംബ കേന്ദ്രം
Outcome	ഫലം
Overlapping sets	സംയുക്ത ഗണങ്ങൾ
Parallel lines	സമാന്തര രേഖകൾ
Period of decimals	ദശാംശസംഖ്യകളുടെ ദൈർഘ്യം
Polygon	ബഹുഭുജം

Glossary-Combine.indd 319 21-01-2023 15:17:23

Polynomial equation	ബഹുപദവ്യംജക സമവാക്യം
Positive integers	ധനപൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾ
Power set	ഘാതഗണം
Primary data	പ്രാഥമിക വിപരങ്ങൾ
Probability	സംഭാവ്യത
Proper sub set	ഉചിതോപഗണം
Pure surds	ശുദ്ധകരണികൾ
Quadrant	ചതുർത്ഥാംശം
Quadratic polynomial	ദ്വിഘാത ബഹുപദ വ്യംജകം
Quadrilateral	ചതുർഭുജം
Radical	റാഡിക്കൽ ചിഹ്നം
Radicand	റാഡിക്കന്റ്
Random Experiment	യാദൃശ്ചിക പരീക്ഷണം
Rational numbers	പരിമേയസംഖ്യകൾ
Rationalisation	ഘടകങ്ങളാൽ
Raw data	അസംസ്കൃതദത്തം
Real number	വാസ്തവിക സംഖ്യ
Recurring decimals	ആവർത്തിക്കുന്ന ദശാംശസംഖ്യകൾ
Remainder theroem	ശിഷ്ടസിദ്ധാന്തം
Right triangle	സമകോണ ത്രികോണം
Roots of a polynomial	ബഹുപദവ്യംജകങ്ങളുടെ മൂലങ്ങൾ
Sample point	സാമ്പിൾ പോയിന്റെ
Sample space	സാമ്പിൾ സ്പേസ്
Scientific notation	ശാസ്ത്രീയാങ്കന രീതി
Secondary data	ദ്വിതീയ വിവരങ്ങൾ
Section formula	വിഭജന സൂത്രം
Sector	വൃത്തഖണ്ഡം
Segment	വൃത്തഭാഗം
Semi-circle	അർദ്ധവൃത്തം
Set complementation	പൂരകഗണം
Set difference	ഗണവ്യത്യാസം

Set operations	ഗണക്രിയകൾ
Sets	ഗണങ്ങൾ
Singular set/Singleton set	ഏകാംഗ ഗണം
Square root	വർഗ്ഗമൂലം
Step-deviation method	സ്റ്റെപ് ഡീവിയേഷൻ രീതി
Sub set	ഉപഗണം
Substitution method	പ്രതിസ്ഥാപന രീതി
Surds	കരണികൾ
Sure event	സുതിശ്ചിത സംഭവം
Symmetric difference of sets	ഗണങ്ങളുടെ പ്രതിസാമ്യതാ വ്യത്യാസം
Synthetic division	സിന്തറ്റിക് ഹരണം
Terminating Decimals	അവസാനിക്കുന്ന ദശാംശസംഖ്യകൾ
Total surface area	ആകെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം
Transversal	ഛേദകം
Trapezium	ലംബകം
Trial	ശ്രമം
Trigonometry	ത്രികോണമിതി
Trinomial expression	ത്രിപദവ്യംജകം
Uncertainty	അനിശ്ചിതത്വം
Ungrouped data	തരംതിരിക്കാത്ത ദത്തങ്ങൾ
Union of sets	ഗണങ്ങളുടെ യോഗം
Universal set	സമസ്തഗണം
Venn diagram	വെൻചിത്രം
Vertex	ശീർഷം
Vertically opposite angles	ശീർഷാഭിമുഖ കോണുകൾ
Volume	വ്യാപ്തം
Well defined	വ്യക്തമായി നിർവചിക്കപ്പെട്ട
Zero / Factor	പൂജ്യം / ഘടകം
Zeros of polynomial	ബഹുപദ വ്യംജകങ്ങളുടെ ശൂന്യങ്ങൾ

Glossary-Combine.indd 320 21-01-2023 15:17:23

Secondary Mathematics - Class 9

Malayalam Medium

List of Translators

Academic Advisor

Dr. P. Kumar
Joint Director, (Syllabus), SCERT, Chennai.

Translators

- **Jaya .P.S**
  B.T. Assistant, Malayala Vidyalayam HighSchool,Chennai
- **Kumari .S.S**
  B.T. Assistant, Kerala Vidyalayam Higher SecondarySchool, Chennai
- **Sangeetha .K**
  B.T. Assistant, Malayala Vidyalayam HighSchool,Chennai
- **R. Raja Kumar**
  B.T. Asst.,
  G.H.S.S Ezhudesapattu, Kanniyakumari.
- **T.S. Ajith Singh.**
  B.T. Asst.,
  G.H.S.S Palukal, Kanniyakumari.
- **P.S. Sheeja**
  B.T. Asst.,
  G.H.S. Erumad, The Nilgiris.
- **P. Sailaja Kumari**
  B.T. Asst.,
  G.H.S.S Vilavancode, Kanniyakumari.
- **S. Chinchu**
  B.T. Asst.,
  G.H.S.S, Kollemcode, K.K Dist
- **T.Clarence**
  B.T. Asst.,
  St. Aloysius HSS,
  Marthandan Thurai, K.K Dist
- **R. Vallisudha**
  B.T. Asst.,
  G.H.S.S, Ezhudesappattu, K.K Dist
- **S.T. Monibun Latha**
  B.T. Asst.,
  St. Ephrem's Msc H.S.S, Sooriacode, K.K Dist
- **Y.S. Sherly**
  B.T. Asst.,
  RTMLMSHSS, Venkanji, K.K Dist

- **ICT Coordinators**
  Sankar K
  B.T. Assistant., GHSS., Vellore

Content Readers

- **Dr. M.P. Jeyaraman,** Asst. Professor,
  L.N. Govt College, Ponneri – 601 204
- **Dr. K. Kavitha** Asst. Professor,
  Bharathi Women's College, Chennai - 601108
- **Dr. N. Geetha,** Assistant Professor in Mathematics,
  Quaid-e-Millath Govt College for Women, Chennai
- **C. Shobana sharma** Assistant Professor
  Bharathi womens college chennai

Content Reader's Coordinator

- **S. Vijayalakshmi,** B.T. Asst., GHSS,
  Koovathur, Kanchipuram.

ICT Coordinators

- **D. Vasu Raj,** B.T. Asst (Retd),
  Kosappur, Puzhal Block, Tiruvallur
- **Sankar K** B.T. Assistant., GHSS., Vellore

QR Management Team

- **R. Jaganathan , SGT,** PUMS - Ganesapuram,
  Polur , Thiruvannamalai.
- **M. Saravanan, B.T,**
  G.G.H.S.S, Puthupalayam, Vazhapadi, Salem.
- **A. Devi Jesintha, B.T,**
  G.H.S, N.M.kovil, Vellore.

Art and Design Team

EMIS Technology Team

- **R.M. Satheesh**
  State Coordinator Technical,
  TN EMIS, Samagra Shiksha.
- **K.P. Sathya Narayana**
  IT Consultant,
  TN EMIS, Samagra Shikaha
- **R. Arun Maruthi Selvan**
  Technical Project Consultant,
  TN EMIS, Samagra Shiksha

Layout Artist

- **Mainikaraj Prabahar. M.A**
- **Siddique . K**

In-House QC

- **Rajesh Thangappan**
- **Arun Kamaraj P**

Co-ordination

- **Ramesh Munisamy**

Co-ordinator

- **K.Chandrasekaran**
  Lecturer, DIET, Chennai

This book has been printed on 80 GSM
Elegant Maplitho paper
Printed by offset at :

Author-Page.indd 321 27-01-2023 12:29:56

Author-Page.indd 322 27-01-2023 12:29:56