GOVERNMENT OF TAMILNADU

తొమ్మిదవ తరగతి

STANDARD NINE

గణితము

MATHEMATICS

TELUGU MEDIUM

Department Of School Education

Untouchability is Inhuman and a Crime

PreliminaryT-Combine.indd 1 04-03-2023 18:48:03

Government of TamilNadu

First Edition - 2018

Revised Edition - 2019, 2022, 2023

Reprint - 2020, 2021, 2024

(Published under new syllabus)

Content Creation

State Council of Educational Research and Training

© SCERT 2018

Printing & Publishing

Tamil NaduTextbook and Educational Services Corporation

www.textbooksonline.tn.nic.in

PreliminaryT-Combine.indd 2 04-03-2023 18:48:03

విషయ సూచిక

ఆధ్యాయము	పాఠ్యాంశము	పుట సంఖ్య	నెల
1	**సమితి పరిభాష**	**1**	
1.1	పరిచయం	1	జూన్
1.2	సమితి	2	
1.3	సమితులను సూచించు విధానము	3	
1.4	సమితుల రకములు	6	
1.5	సమితి ప్రక్రియలు	13	
1.6	సమితి పరిక్రియల ధర్మములు	20	
1.7	డీ మార్గన్ న్యాయములు	25	
1.8	సమితుల ఆదిసంఖ్య మరియు ప్రయోగాత్మక సమస్యలు	30	
2	**వాస్తవ సంఖ్యలు**	**43**	
2.1	పరిచయం	43	జూలై
2.2	అకరణీయ సంఖ్యల సాంద్రతా ధర్మము	46	
2.3	కరణీయ సంఖ్యలు	48	
2.4	వాస్తవ సంఖ్యలు	58	
2.5	కరణి మూలము యొక్క సంకేతము	61	
2.6	కరణులు	63	
2.7	కరణులను అకరణీయపరచుట	72	
2.8	సంయుగ్మ కరణులు	74	
3	**బీజగణితము**	**83**	
3.1	పరిచయం	83	ఆగస్టు
3.2	ధనపూర్ణాంకము	86	
3.3	శేష సిద్ధాంతమ	98	
3.4	బీజీయ సర్వసమీకరణములు	104	
3.5	కారణాంకపరచుట	109	సెప్టెంబర్
3.6	బహుపద సమాసముల భాగహారము	115	
3.7	గరిష్ఠ సామాన్య భాజకం	122	
3.8	రెండు చలరాశులు గల రేఖీయ సమీకరణములు	124	నవంబర్
4	**రేఖాగణితము**	**148**	
4.1	పరిచయం	148	జూలై
4.2	కోణముల రకములు	149	ఆగస్టు
4.3	చతుర్భుజములు	154	అక్టోబర్
4.4	వృత్తము యొక్క భాగములు	169	నవంబర్
4.5	ఒక వృత్తము యొక్క జ్యా ల ధర్మములు	173	
4.6	చక్రీయ చతుర్భుజము	181	
4.7	నిర్మాణాత్మక రేఖా గణితము	185	ఆగస్టు

PreliminaryT-Combine.indd 3 04-03-2023 18:48:03

5	**నిరూపక రేఖాగణితము**	**197**	
5.1	తలమును రేఖా చిత్రముగా గుర్తించుట	197	**అక్టోబర్**
5.2	అక్షనిరూపముల వ్యవస్థను కనుగొనుట	199	
5.3	ఏదేని రెండు బిందువుల మధ్య గల దూరము	205	
5.4	ఒక రేఖ ఖండపు మధ్య బిందువు	216	
5.5	ఒక రేఖా ఖండమును త్రిధాకరణ చేయు బిందువులు	222	**నవంబర్**
5.6	విభజన సూత్రం	224	
5.7	గురుత్వ కేంద్ర నిరూపకములు	229	
6	**త్రికోణమితి**	**237**	
6.1	పరిచయం	237	**డిసెంబర్**
6.2	కొన్ని ప్రత్యేక కోణముల త్రికోణమితి నిష్పత్తులు	243	
6.3	పూరక కోణముల త్రికోణమితి నిష్పత్తులు	248	
6.4	త్రికోణమితి పట్టికను ఉపయోగించు పద్ధతి	252	
7	**క్షేత్ర గణితము**	**265**	
7.1	పరిచయం	265	**జనవరి**
7.2	హీరోన్ సూత్రము	266	
7.3	చతుర్భుజ వైశాల్యము కనుగొనుటలో హీరోన్ సూత్రం యొక్క ప్రాముఖ్యత:	268	
7.4	దీర్ఘఘనము మరియు సమఘనము యొక్క ఉపరితల వైశాల్యము.	270	
7.5	దీర్ఘ ఘనము మరియు సమఘనము యొక్క ఘనపరిమాణం	275	
8	**సాంఖ్యక శాస్త్రము**	**284**	
8.1	పరిచయం	284	**ఫిబ్రవరి**
8.2	దత్తాంశ సేకరణ	285	
8.3	కేంద్రీయ స్థాన విలివలు	287	
8.4	అంకమధ్యమము	288	
8.5	మధ్యగతము – అవర్గీకృత పౌన:పున్య విభాజనము	300	
8.6	బాహుళకము – ముడిదత్తాంశము	304	
9	**సంభావ్యత**	**311**	
9.1	పరిచయం	311	**మార్చి**
9.2	ప్రాథమిక అభిప్రాయాలు	312	
9.3	సాంప్రదాయక పద్ధతి	315	
9.4	అనుభావిత పద్ధతి	316	
9.5	ఘటనలలో రకాలు	319	
	జవాబులు	325	

PreliminaryT-Combine.indd 4 04-03-2023 18:48:03

పాఠ్యపుస్తకములో ఉపయోగించు శీర్షికలు

సంఖ్యలు మరియు అక్షరాలు అనేవి మనిషి యొక్క రెండు కళ్ళు వంటివి
– కురల్ 392

అభ్యసన ఫలితములు

తరగతి గదిలోని ప్రక్రియలను గణితములోని కొలతల ప్రక్రియగా మార్చడం



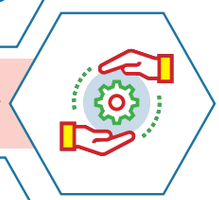
సూచన

పాఠ్యపుస్తకములో విద్యార్థుల కొరకు అదనపు విషయాలను అందించడం.



కృత్యము

గణితమును నేర్చుకొనుటకు విద్యార్థులను ప్రోత్సహించే విధంగా కృత్యములలో పాల్గొనేటట్లు చేయడం.



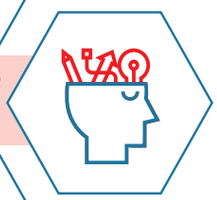
అంతర్జాల కృత్యము

పాఠ్యాంశములోని విషయములను విద్యార్థుల కొరకు సాంకేతిక పరిజ్ఞానం మూలంగా తెలియపరచడం.



మెదడుకు మేత

విద్యార్థులను గణితము మీద ఆసక్తి గలవారిగా తయారుచేయడం మరియు విద్యార్థులను తార్కికంగా ఆలోచించేటట్లు చేయడం.



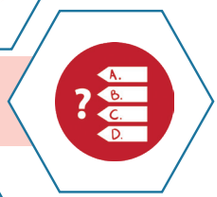
గుర్తించుకోవలసిన విషయములు

పాఠ్యాంశములో నేర్చుకొన్న విషయాలను గుర్తుచేసుకోవడం



బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు

పాఠ్యాంశములోని విషయాలను బహుళ ఎంపిక ప్రశ్నల ద్వారా ఇవ్వడం



పురోగమన తనిఖి

విద్యార్థులను తనను తానుగా (స్వయంగా) మూల్యాంకనం చేసుకొనుట



అభ్యాసము

పాఠ్యాంశములోని విషయాలను విద్యార్థులు ఏవిధంగా అర్థం చేసుకున్నారు అని మూల్యాంకనం చేయడం.



"The essence of mathematics is not to make simple things complicated but to make complicated things simple" -S. Gudder

PreliminaryT-Combine.indd 5 04-03-2023 18:48:04

చిహ్నములు

$=$	సమానము
$\neq$	సమానం కానిది
$<$	కంటే తక్కువ
$\leq$	కంటే తక్కువ లేక సమానం
$>$	కంటే ఎక్కువ
$\geq$	కంటే ఎక్కువ లేక సమానం
$\approx$	సమానత్వము
$\cup$	సమ్మేళనము
$\cap$	ఖండనము
$\mathbb{U}$	విశ్వసమితి
$\in$	చెందినది
$\notin$	చెందినది కాదు
$\subset$	శుద్ధ ఉపసమితి
$\subseteq$	ఉపసమితి లేక ఉన్నది
$\not\subset$	శుద్ధ ఉపసమితి కాదు
$\not\subseteq$	ఉపసమితి కాదు లేక లేనిది
A' (or) A^c	A యొక్క పూరక సమితి
$\varnothing$ (or) $\{\ \}$	శూన్య సమితి
$n(A)$	A యొక్క మూలకముల సంఖ్య
$P(A)$	A యొక్క ఘాత సమితి
$\sum$	కూడిక

$\|\|\|^{ly}$	అదే విధంగా
Δ	సౌష్టవ వ్యత్యాసం
$\mathbb{N}$	సహజ సంఖ్యలు
$\mathbb{W}$	పూర్ణాంకములు
$\mathbb{Z}$	పూర్ణ సంఖ్యలు
$\mathbb{R}$	వాస్తవ సంఖ్యలు
$\triangle$	త్రిభుజము
$\angle$	కోణము
$\perp$	లంబముగా
$\parallel$	సమాంతరముగా
$\Longrightarrow$	అదే అర్థమునిచ్చు
$\therefore$	కాబట్టి
$\because$	అందువలన
$\|\ \|$	నిర్ధారక విలువ
$\simeq$	ఉజ్జాయింపుగా
$\|$ (or) :	దానిప్రకారము
$\equiv$ (or) $\cong$	సర్వసమానము
π	పై
$\pm$	ఋణాత్మకము లేక ధనాత్మకము
$P(E)$	probability of an event E

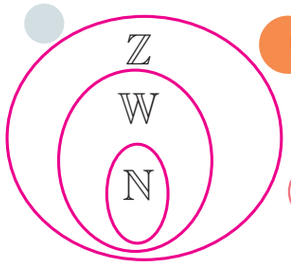
BYXRM

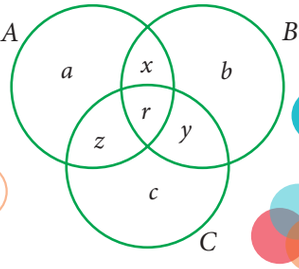
పాఠ్యపుస్తకము

PFY9K

మూల్యాంకనము

PreliminaryT-Combine.indd 6 04-03-2023 18:48:05



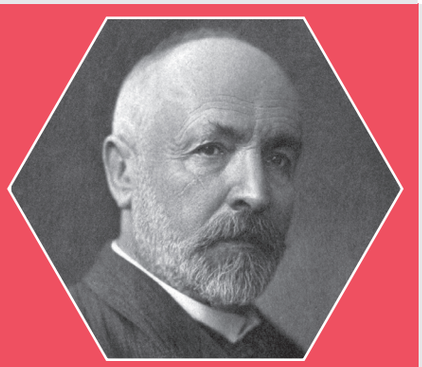


1

సమితి పరిభాష

బాహుళ్యమును ఏకముగా చూపునది సమితి

– జార్జ్ క్యాంటర్



జార్జ్ క్యాంటర్
(AD (CE) 1845 - 1918)

జర్మన్ గణితశాస్త్రవేత్త జార్జ్ క్యాంటర్ ద్వారా సమితి సిద్ధాంతము అభివృద్ధి పరచబడినది. గణితములోని ప్రతి విభాగములో సమితులను ఉపయోగిస్తున్నారు. గణిత నిర్మాణములో సమితులు ఒక పునాదిగా రూపొందెను.

POKJA

అభ్యసన ఫలితములు

- సమితి పరిక్రియలు మరియు రూపములను వివరించుట.
- సమితుల రకాలను గుర్తించుట.
- సమితి పరిక్రియల గురించి అవగాహన మరియు వెన్ చిత్రములను ఉపయోగించి సమితి పరిక్రియలను గుర్తించుట.
- సమితి పరిక్రియలలో సహచర ధర్మము, విభాగ ధర్మము మరియు వినిమయ ధర్మాలను తెలుసుకొనుట
- డీ–మోర్గాన్ సూత్రమును అర్థం చేసుకొనుట మరియు సరిచూచుట.
- సమితి పరిభాషను ఉపయోగించి నిత్యజీవిత సమస్యలను పరిష్కరించుట.

1.1 పరిచయం

మన నిత్యజీవితంలో పుస్తకములు, నాణెములు, తపాల బిళ్ళల సేకరణ అను పలు విధములైన వస్తు సముదాయమును గణిత పద్ధతిలో సూచించు ఒకే మార్గమే సమితి పరిభాష అగును.

క్రింది పటములను చూడుము. అవి ఏమి సూచించుచున్నవి. పటము 1.1 పండ్ల సేకరణను తెలుపుచున్నది మరియు పటము 1.2 గృహోపకరణ వస్తువుల సేకరణను తెలుపుచున్నది.

1-SET LANGUAGE.indd 1 04-03-2023 17:53:59

పై రెండు సందర్భములను గమనించినపుడు, వస్తువుల లక్షణాలను బట్టి ఒక వస్తువు నుండి సేకరించిన వస్తువుల వైపు దృష్టి మరలుచున్నది.



పటం. 1.1



పటం. 1.2

1.2 సమితి

బాగుగా నిర్వచింపబడిన వస్తువుల సమూహమును సమితి అందురు.

ఇచ్చట "బాగుగా నిర్వచింపబడిన వస్తువుల సమూహము" అనునది ఇవ్వబడిన వస్తువు, ఇవ్వబడిన సమూహంలో భాగముగా యున్నదా? అనుదానిని అనుసరించి అమరును. సమితిలోని ప్రతి వస్తువును ఆ సమితి యొక్క "సభ్యుడు" లేక "మూలకము" అందురు.

ఉదాహరణకు

1. జిల్లా కేంద్ర గ్రంథాలయములోగల అన్ని పుస్తకముల సమూహం
2. ఒక ఇంద్రధనుస్సులోగల అన్ని రంగుల సమూహము.
3. ప్రధాన సంఖ్యల సమూహము

క్రిందివానిలో ఏవి సమితులు?

1. సహజ సంఖ్యల సమూహము.
2. ఆంగ్ల అక్షరముల సమూహము.
3. తరగతిలో గల మంచి విద్యార్థుల సమూహము.
4. మనదేశంలో గల రాష్ట్రముల సమూహము.
5. ఒక తోటలో గల అందమైన పువ్వుల సమూహము.

ప్రక్కన గల పట్టికలో 1,2 మరియు 4 అనునవి బాగుగా నిర్వచింపబడినందు వలన అవి సమితులగును. కాని"మంచి" మరియు "అందమైన" వంటి వానిని బాగుగా నిర్వచింపబడినవిగా ఒప్పుకొనుట కష్టమగుట వలన 3 మరియు 5 లు సమితులు కావు. ఎందుకనగా మల్లె పువ్వును కొందరు అందమైన పువుగా ఒప్పుకొనిను మరికొందరు ఒప్పుకొనరు. ఒక విద్యార్థిని కొందరు మంచివాడుగా గుర్తించనను, అందరు మంచివాడని చెప్పలేరు. ఈవిధంగా నిర్వచించుటకు కష్టమైన వాటి సమూహమును మనం సమితి అని చెప్పలేము.

కృత్యము - 1

నీ నిజ జీవితములో సమితులు మరియు సమితులు కాని సమూహములను చర్చించి ఉదాహరణములిమ్ము.

సూచన

- ఒక సమితిలో గల మూలకములు ఒకే ఒకసారి మాత్రమే లెక్కించబడవలెను.
- ఒక సమితిలో గల మూలకములు వేరువేరు పద్ధతిలో వరుసచేయబడి లెక్కించినను సమితి మారదు

ఉదాహరణకు, ఈ రెండు నిబంధనలు సహజమైనవే 1,2,3,4, 5,6,7,8 ... అను సమూహమును మరియు 1,3,2,4,5,7,6,8... అనుసమూహము వేర్వేరు పద్ధతులలోను, వరుసలోను వ్రాయబడినను, రెండు సమూహములు ఒకటే. సమితిలో ఒక వస్తువు మూలకము (సభ్యుడి)గా యున్నదా? లేదా? అనునది మాత్రమే మనము లెక్కకు తీసుకొనవలెను కాని ఆ మూలకమును పట్టికలోని పెక్కు స్థలములలో పట్టికపరచ అవసరంలేదు.

1-SET LANGUAGE.indd 2 04-03-2023 17:54:02

చిహ్నములు

సాధారణముగా సమితులు A, B, P, Q, X, Y, వంటి ఆంగ్ల పెద్ద అక్షరములలో గుర్తించబడును. ఒక సమితిలోని మూలకములు $a, b, p, q, x,$ y వంటి ఆంగ్ల చిన్న ఆంగ్ల అక్షరములతో సూచింతురు.

ఒక సమితి యొక్క మూలకములను "{ }" అను పుష్ప బ్రాకెట్టు లోపల వ్రాయవలెను.

x అను మూలకము A సమితి యొక్క మూలకమైతే, x అను మూలకము A కు చెందినది అనుదానిని $x \in A$ అని సూచింతురు.

x అనునది A యొక్క మూలకము కానిచో, దానిని $x \notin A$. అని సూచించెదరు

ఉదాహరణకు,

$A = \{2,3,5,7\}$ ఒక సమితి అనుకొనుము

A సమితి యొక్క ఒక మూలకమైన 2 ను $2 \in A$ అని వ్రాయవచ్చును.

A సమితి యొక్క మూలకమైన 5 ను $5 \in A$. అని వ్రాయవచ్చును.

A సమితి యొక్క మూలకము కాని 6 ను $6 \notin A$. అని వ్రాయవచ్చును.

ఉదాహరణ 1.1

సమితి A = { అశ్విన్, మురళి విజయ్, విజయ్ శంకర్, బద్రినాథ్} అనుకొనుము

ఖాళీలను $\in$ లేక $\notin$ అను గుర్తులతో పూరించుము.

(i) మురళి విజయ్ _____ A. (ii) అశ్విన్ _____ A. (iii) బద్రినాథ్ _____ A.

(iv) గంగూలి _____ A. (v) టెండుల్కర్ _____ A

సాధన

(i) మురళి విజయ్ $\in A$. (ii) అశ్విన్ $\in A$ (iii) బద్రినాథ్ $\in A$

(iv) గంగూలి $\notin A$. (v) టెండుల్కర్ $\notin A$.

1.3 సమితులను సూచించు విధానము

బేసిసంఖ్యల సమూహము ను వేర్వేరు రకములుగా వివరించవచ్చును.

1. బేసిసంఖ్యల సమితి.
2. దీనిని {1, 3, 5, ...} అని కూడా వ్రాయవచ్చును.
3. x అనునది ఒక బేసి సంఖ్య అని తీసుకొని x యొక్క యొక్క సమూహములోని సంఖ్యలు అని కూడా చెప్పవచ్చును.

ఇవి అన్నియు ఒకదానికొకటి సమానమైనవి మరియు ఉపయోగకరమైనవి. $x-5 = 3$ అను సమీకరణపు అన్ని సాధన సమితుల సమూహము, మరియు {8} అనునదియు ఒకే సమితినే సూచించును.

1-SET LANGUAGE.indd 3 04-03-2023 17:54:03

ఒక సమితిని క్రింది మూడు పద్ధతులలో ఏదేని ఒక పద్ధతి ద్వారా సూచించవచ్చును.

1.3.1 వర్ణన పద్ధతి

ఒక సమితిలోని మూలకాలను పదజాలముతో స్పష్టంగా వివరించుటను వర్ణన పద్ధతి అందురు.

ఉదాహరణకు

(i) ఆంగ్ల అక్షరములలోని అచ్చుల సమితి

(ii) పూర్ణాంకముల సమితి

1.3.2 సమితి నిర్మాణపద్ధతి లేక నియమపద్ధతి

సమితి నిర్మాణ పద్ధతి అనునది దానిలో గల సభ్యుల గుణములను తృప్తిపరచు విధంగా సూచించు పద్ధతిని సమితి నిర్మాణ పద్ధతి అందురు.

ఉదాహరణకు,

(i) $A = \{x : x$ అనునది ఆంగ్ల అక్షరములలోని అచ్చుల సమితి.$\}$

(ii) $B = \{x | x$ అనునది ఒక పూర్ణాంకము$\}$

సూచన

':' లేక '|' అను గుర్తు such that ను సూచించును.

1.3.3 పట్టిక పద్ధతి లేక రోస్టర్ పద్ధతి

ఒక సమితిలోని మూలకములను కుండలీకరణములో పొందుపరచుటను రోస్టర్ పద్ధతి అందురు.

ఉదాహరణకు,

(i) $A = \{a, e, i, o, u\}$

(ii) $B = \{0,1,2,3,\ldots\}$

ఎల్లప్పుడు ఈ పద్ధతిలో సూచించుట సాధ్యమా?

సూచన

ఉదాహరణ (ii) లో మూడుచుక్క (...) ను ellipsis అందురు. ఆ వరుసలోని మూలకములు అదే పద్ధతిలో కొనసాగునని అర్థము.

కృత్యము-2

క్రింది సమితులను దానికి తగిన పద్ధతిలో వ్రాయుము

వ.సంఖ్య	వర్ణనపద్ధతి	సమితి నిర్మాణపద్ధతి	పట్టిక పద్ధతి
1	పది కంటే తక్కువగా గల సహజ సంఖ్యల సమితి		
2		$\{x : x$ అనునది 3 యొక్క గుణిజము $x \in \mathbb{N}\}$	
3			$\{2,4,6,8,10\}$
4	ఒక వారములోని అన్ని దినముల సమితి		
5			$\{\ldots -3,-2,-1,0,1,2,3\ldots\}$

1-SET LANGUAGE.indd 4 04-03-2023 17:54:03

ఉదాహరణ 1.2

క్రిందగల పదములలోని అక్షరముల సమితిని పట్టిక పద్ధతిలో వ్రాయుము

(i) ASSESSMENT (ii) PRINCIPAL

సాధన

(i) ASSESSMENT (ii) PRINCIPAL

$X = \{A, S, E, M, N, T\}$ $Y = \{P, R, I, N, C, A, L\}$



ఆభ్యాసము 1.1

1. క్రిందివానిలో ఏవి సమితులగును?

(i) 1 నుండి 100 వరకు గల ప్రధానాంకముల సమూహము.

(ii) భారతదేశంలో గల ధనవంతుల సమూహము.

(iii) ఇండియాలో గల నదుల సమూహము.

(iv) మంచి హాకీ ఆటగాళ్ళ సమూహము.

2. క్రింది పదములలోని అక్షరముల సమితిని రోస్టర్ పద్ధతిలో వ్రాయుము

(i) INDIA (ii) PARALLELOGRAM

(iii) MISSISSIPPI (iv) CZECHOSLOVAKIA

3. $A = \{0, 3, 5, 8\}$, $B = \{2, 4, 6, 10\}$ మరియు $C = \{12, 14, 18, 20\}$ అయిన

(a) సత్యము లేదా అసత్యమా అని గుర్తించుము:

(i) $18 \in C$ (ii) $6 \notin A$ (iii) $14 \notin C$ (iv) $10 \in B$

(v) $5 \in B$ (vi) $0 \in B$

(b) ఖాళీలను పూరింపుము:

(i) $3 \in$ ____ (ii) $14 \in$ _____ (iii) 18 ____ B (iv) 4 _____ B

4. క్రింది సమితులను రోస్టర్ పద్ధతిలో వ్రాయుము

(i) A = 20 కంటే తక్కువగా గల అన్ని సరి సహజసంఖ్యల సమితి.

(ii) $B = \{y : y = \frac{1}{2n}, n \in \mathbb{N}, n \leq 5\}$

(iii) C = $\{x : x$ అనునది ఖచ్చిత ఘనసంఖ్య, $27 < x < 216\}$

(iv) $D = \{x : x \in \mathbb{Z}, -5 < x \leq 2\}$

1-SET LANGUAGE.indd 5 04-03-2023 17:54:04

5. క్రింది సమితులను సమితి నిర్మాణ పద్ధతిలో వ్రాయుము

(i) B = అంతర్జాతీయ ఏకదిన క్రికెట్టులో ద్విశతకం సాధించిన ఆటగాళ్ళ సమితి.

(ii) $C = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots\right\}$

(iii) D = ఒక సంవత్సరములోగల తమిళ మాసముల సమితి.

(iv) E = 9 కన్నా తక్కువైన బేసి పూర్ణాంకముల సమితి.

6. క్రింది సమితులను వర్ణన పద్ధతిలో వ్రాయుము.

(i) P ={ జనవరి, జూన్, జూలై}

(ii) Q = {7,11,13,17,19,23,29}

(iii) R = $\{x : x \in \mathbb{N}, x < 5\}$

(iv) S = $\{x : x$ అనునది ఆంగ్ల అక్షరములలోని అచ్చుల ఒక ఆంగ్ల హల్లు$\}$

1.4 సమితుల రకములు

మన ఆసక్తిని రేకెత్తించు విధంగా ఒక సమితి గలదు. అదియే శూన్య సమితి. శూన్య సమితిని గూర్చి మనము ఎందుకు తెలుసుకొనవలెను? $x^2+1 = 0$. అను సమీకరణమునకు వాస్తవ సంఖ్యలలో జవాబును చూడండి. ఆ సమితిలో మూలకములు లేవు. ఇంకను 90° కన్నా ఎక్కువ ఒక కొణము డిగ్రీ గల దీర్ఘచతురస్రమును తీసుకొండి. 90° కంటే ఎక్కువ కోణం గల దీర్ఘచతురస్రం ఉండదు. కాబట్టి ఇది శూన్యసమితికి ఉదాహరణం.

కాబట్టి శూన్యసమితి యొక్క ఆవశ్యకత వలన అది ప్రత్యేక చిహ్నము కూడా పొందినది.

1.4.1 శూన్యసమితి లేక మూలకములు లేని సమితి

ఏ ఒక్క మూలకము లేని సమితిని శూన్యసమితి లేక ఖాళీ సమితి లేక మూలకములు లేని సమితి అని అందురు.

దీనిని $\varnothing$ లేక { } అను చిహ్నములలో సూచించెదరు.

మెదడుకు మేత

{0} మరియు {$\varnothing$} అనునవి శూన్యసమితులా?

ఉదాహరణకు,

(i) A=$\{x : x$ అనునవి ఒక బేసి పూర్ణసంఖ్య మరియు 2చే నిశ్శేషముగా భాగింపడు సంఖ్య$\}$

$\therefore A$={ } లేక $\varnothing$

(ii) సంఖ్యలు 1 మరియు 2 కు మధ్యగల పూర్ణసంఖ్యల సమితి.

1.4.2. ఏకమూలక సమితి (Singleton Set)

ఒకే ఒక మూలకమును కలిగిన సమితిని ఏకమూలక సమితి అందురు.

ఉదాహరణ,

(i) $A = \{x : 3 < x < 5, x \in \mathbb{N}\}$ (ii) సరి ప్రధానాంకముల సమితి.

1-SET LANGUAGE.indd 6 04-03-2023 17:54:04

1.4.3 అంతమొందు సమితి (Finite Set)

ఒక సమితిలోని మూలకముల సంఖ్య పరిమితముగా యుండి, లెక్కించుటకు వీలైనచో దానిని అంతమొందు సమితి లేక పరిమిత సమితి అందురు.

సూచన

శూన్యసమితిలో మూలకములు లేవు. కాబట్టి ఒక అంతమొందు సమితి $\varnothing$ అగును.

ఉదాహరణ,

1. ఒక కుటుంబములోని సభ్యులసమితి.
2. భవనపు లోపల/ వెలుపల మైదానములో ఆడగల క్రీడల సమితి
3. పాఠశాలలో నీవు చదువు పాఠ్యాంశముల (curricular subjects) సమితి.
4. $A = \{x : x$ అనునది 36 యొక్క కారణాంకము$\}\}$

మెదడుకు మేత

సహజసంఖ్యల సమితి అంతమొందు సమితి అగునా?

1.4.4 అంతమొందని సమితి (Infinite Set)

ఒక సమితిలోని మూలకముల సంఖ్య అపరిమితముగా యుండి, లెక్కించుటకు వీలుకానిచో దానిని అంతమొందని సమితి లేక అపరిమిత సమితి అందురు.

ఉదాహరణ,

(i) $\{5,10,15,...\}$ (ii) ఒక సరళరేఖపై గల అన్ని బిందువుల సమితి.

సమితుల రకాలను తెలుసుకొనే ముందు సమితి యొక్క ఆది సంఖ్య గురించి చర్చించెదము

ఒక సమితి యొక్క ఆది సంఖ్య : ఒక సమితి అంతమొందు సమితి అయినచో, దానిలోగల మూలకముల సంఖ్యను కనుగొనుట ఉపయోగకరముగాయుండును.

A సమితి యొక్క ఆది సంఖ్యను $n(A)$ అని సూచింతురు.

ఉదాహరణ 1.3 $A = \{1,2,3,4,5,7,9,11\}$, అయిన $n(A)$ ను కనుగొనుము.

సాధన $A = \{1,2,3,4,5,7,9,11\}$

సమితిలో 8 మూలకములు గలవు. కాబట్టి $n(A) = 8$.

మెదడుకు మేత

$A = \{1, b, b, \{4, 2\}, \{x, y, z\}, d, \{d\}\}$, అయిన $n(A) =$ _____

1.4.5 సమాన సమితులు (Equivalent Sets)

రెండు పరిమిత సమితులు A మరియు B లు సమాన సంఖ్యగల మూలకములను కలిగియున్నచో వాటిని సమాన సమితులు అందురు. దీనిని $A \approx B$ అని సూచింతురు.

$n(A) = n(B)$ అయిన A మరియు B లు సమాన సమితులు.

మెదడుకు మేత

$A=\{x:x$ అనునది మన జాతీయ పతాకములోని ఒక రంగు అనుకొనుము$\}$ మరియు $B=\{$ఎరుపు, నీలము, పచ్చ$\}$. ఇచ్చట A మరియు Bలు సమాన సమితులా?

ఉదాహరణకు,

$A = \{$ బాంతి, బ్యాట్ $\}$ మరియు $B = \{$చరిత్ర, భూగోళశాస్త్రం$\}$.

ఇచ్చట A మరియు B సమితి సమాన సమితులు ఏలనగా $n(A) = n(B) = 2$

1-SET LANGUAGE.indd 7 04-03-2023 17:54:04

ఉదాహరణ 1.4 $P = \{x : -3 \leq x \leq 0, x \in \mathbb{Z}\}$ మరియు $Q = \{210$ యొక్క ప్రధానాంక కారణాంకముల సమితి$\}$ అయిన P మరియు Q లు సమాన సమితులా?

సాధన

$P = \{-3, -2, -1, 0\}$ 210 యొక్క ప్రధానాంక కారణాంకములు అనునవి $2, 3, 5, 7$ మరియు $Q = \{2, 3, 5, 7\}$.

$n(P) = 4$ మరియు $n(Q) = 4$. కాబట్టి P మరియు Q సమితులు సమాన సమితులు.

మెదడుకు మేత

$\varnothing$, $\{0\}$, $\{\varnothing\}$ అనునవి సమానసమితులా? సమ సమితులా?

1.4.6 సమ సమితులు (Equal Sets)

A మరియు B అను రెండు సమితులందు ఒకే విధమైన మూలకములుండిన వాటిని సమ సమితులందురు. మూలకము వరుసక్రమము మారియున్నను అవి సమసమితులగును. లేనిచో అవి అసమ సమితులగును.

A మరియు B సమితులు సమసమితులైనచో

(i) A సమితిలోని ప్రతి మూలకము B సమితిలోని మూలకమగును.

(ii) B సమితిలోని ప్రతి మూలకము A సమితిలోని మూలకమగును.

ఉదాహరణకు,

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ మరియు $B = \{4, 2, 3, 1\}$

ఇచ్చట A సమితి మరియు B సమితులు ఒకే విధమైన మూలకములను కలిగియుండుట వలన A మరియు B సమితులు సమ సమితులు అగును.

సూచన

- A మరియు B లు సమ సమితులయిన $A = B$ అని వ్రాయవచ్చును
- A మరియు B సమ సమితులు కానిచో $A \neq B$ అని వ్రాయవచ్చును.

ఒక సమితిలో ఒక మూలకమో లేక రెండు మూలకములో అనేకసార్లు మరల మరల వచ్చినచో ఆ సమితిలో ఎటువంటి మార్పు జరగదు.

ఉదాహరణకు,

$A = \{a, b, c\}$ మరియు $B = \{a, a, b, b, b, c\}$ అయిన $B = \{a, b, c,\}$. అని వ్రాయవచ్చును. ఇచ్చట A లోని ప్రతి మూలకము B లోని మూలకమగును అదేవిధంగా B లోని ప్రతి మూలకము A యొక్క మూలకమగును. కాబట్టి A మరియు B లు సమసమితులగును.

1-SET LANGUAGE.indd 8 04-03-2023 17:54:04

ఉదాహరణ 1.5

$A = \{x : x \in \mathbb{N}, 4 \le x \le 8\}$ మరియు

$B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ అనునవి సమ సమితులా?

సాధన

$A = \{4, 5, 6, 7, 8\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$

A మరియు B సమ సమితులగును.

సూచన

సమసమితులు సమాన సమితులగును. కాని సమాన సమితులు సమసమితులుగా ఉండనవసరంలేదు.

ఉదా॥ $A = \{p,q,r,s,t\}$ మరియు $B= \{4,5,6,7,8\}$. ఇచ్చట $n(A)=n(B)$, A, B సమాన సమితులు, కాని సమ సమితులు కావు.

1.4.7 విశ్వ సమితి లేక సార్వత్రిక సమితి

సార్వత్రిక సమితి U అనునది ఒక గణిత చర్చలో ఉపయోగింపబడు అన్ని సమితుల సమితి అగును. దీనిని U అను అక్షరముతో సూచిస్తారు.

ఉదాహరణకు

(i) మనం సహజ సంఖ్యల గూర్చి చర్చించినట్లైతే, విశ్వసమితి U అనునది అని సహజ సంఖ్యల సమితి అగును. $U=\{x : x \in \mathbb{N}\}$.

(ii) A={భూమి, అంగారకుడు, బృహస్పతి} అయిన విశ్వసమితి U సౌర కుటుంబములోని గ్రహముల సమితి.

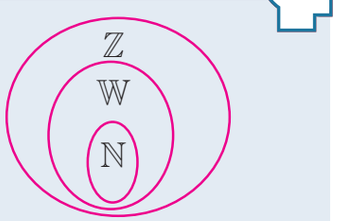
1.4.8 ఉపసమితి (Subset)

A మరియు B లు రెండు సమితులు అనుకొనుము. A లోని ప్రతి మూలకము B లోని మూలకముగా యున్న యెడల A ను B యొక్క ఉపసమితిగా చెప్పవచ్చును. దానిని $A \subseteq B$ అని వ్రాయవచ్చును.

$A \subseteq B$ ను "A అనునది B యొక్క ఉపసమితి" అని చదువ వచ్చును.

ఆ విధంగా, $a \in A \Rightarrow a \in B$ అయిన యెడల $A \subseteq B$.

మెదడుకు మేత



𝕎 అనునది ℕ లేక ℤ నకు ఉప సమితియగునా?

పైగా A అనునది B యొక్క ఉపసమితి కానిచో $A \not\subseteq B$ అని వ్రాయవచ్చును.

A అనునది B యొక్క ఉపసమితి అయిన యెడల $n(A) \le n(B)$ అగును.

కాబట్టి A యొక్క ప్రతి మూలకము B యొక్క మూలకమగుట వలన B సమితిలో కనీసము A లోని మూలకముల సంఖ్యను కలిగియుండవలెను. $\therefore n(A) \le n(B)$ దీనిని మరొక విధంగాకూడా పరిశోధించవచ్చును.

$n(A) > n(B)$ అయినచో A అనునది B కంటె ఎక్కువ మూలకములను కలిగియుండును. పైగా A లో గల కనీసం ఒక మూలకమైనను B లో లేకుండ యుండవలెను. కాబట్టి A అనునది B యొక్క ఉపసమితి కాదు.

ఉదాహరణకు,

(i) $\{1\} \subseteq \{1,2,3\}$ (ii) $\{2,4\} \not\subseteq \{1,2,3\}$

1-SET LANGUAGE.indd 9 04-03-2023 17:54:05

ఉదాహరణ 1.6

ఖాళీలను $\subseteq$ లేక $\not\subseteq$ గుర్తులతో పూర్తి చేయుము.

(i) $\{10, 20, 30\}$ _____ $\{10, 20, 30, 40\}$ (ii) $\{p, q, r\}$ _____ $\{w, x, y, z\}$

సాధన

(i) $\{10, 20, 30\}$ _____ $\{10, 20, 30, 40\}$

$\{10, 20, 30\}$ లో గల ఒక్కొక్క మూలకము $\{10, 20, 30, 40\}$, లో యున్నందువల్ల $\{10, 20, 30\} \subseteq \{10, 20, 30, 40\}$.

(ii) $\{p, q, r\}$ _____ $\{w, x, y, z\}$

$\{p, q, r\}$ లో గల p అను మూలకము $\{w, x, y, z\}$ లో లేనందువలన $\{p, q, r\} \not\subseteq \{w, x, y, z\}$.

కృత్యము-3

నీ స్నేహితులలో చర్చించి నీ యొక్క దైనందిన జీవిత పరిస్థితులలోని సమితుల ఉపసమితులకు ఉదాహరణలిమ్ము.

ఉదాహరణ 1.7

$A = \{a, b\}$ యొక్క అన్ని ఉపసమితులను వ్రాయుము.

సాధన:

$A= \{a,b\}$

A యొక్క ఉపసమితులు : $\varnothing$,$\{a\}$, $\{b\}$ మరియు $\{a, b\}$.

సూచన

- $A \subseteq B$ మరియు $B \subseteq A$ అయిన $A=B$ అగును.
  సమసమితులను ఈవిధంగా నిర్వచించవలెను.
- శూన్యసమితి అనునది ప్రతి సమితికి ఉపసమితి అగును..

  A అనునది ఒక సమితి అనుకొనుము. శూన్యసమితి A యొక్క ఉపసమితిగా లేదు అనుకొనుము. ఒకే మార్గము A అను ఒక మూలకము శూన్యసమితిలో యుండవలెను. అదే సమయములో A లో మూలకముగాయుండరాదు. కాని x ఎట్లు శూన్యసమితిలో యుండుటకు వీలగును? అందుకు అవకాశము లేదు. దీనికి గల ఒకే ఒక సాధ్యము శూన్యసమితి అనునది A యొక్క ఉపసమితిగాయుండవలెను. (గందరగోళముగా ఉందా? నెమ్మదిగా ఆలోచించండి, మీ స్నేహితులతో వివరించండి. అది సరియని ఒప్పుకొనెదరు.)
- ప్రతి సమితికి, ఆ సమితియే ఒక ఉపసమితి అగును. (ఎందుకు అని ప్రయత్నించి చూడుము.)

1-SET LANGUAGE.indd 10 04-03-2023 17:54:05

1.4.9. శుద్ధ ఉపసమితి (Proper Subset)

A మరియు B లు రెండు సమితులు A అనునది B యొక్క ఉపసమితి మరియు $A \neq B$ అయిన A అనునది B యొక్క శుద్ధ ఉపసమితి (proper subset) అనబడును దానిని $A \subset B$ అని వ్రాయవచ్చును.

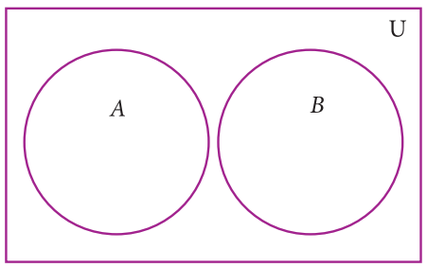
ఉదాహరణకు,

$A = \{1,2,5\}$ మరియు $B=\{1,2,3,4,5\}$ అయిన A అనునది B యొక్క శుద్ధ ఉపసమితి అగును. అనగా $A \subset B$.

1.4.10 వియుక్త సమితులు లేక విఖండన సమితులు (Disjoint Sets)

A మరియు B అను రెండు సమితులకు ఉమ్మడి (సామాన్య) మూలకములు లేని యెడల వాటిని వియుక్త సమితులు లేక విఖండన (disjont) సమితులందురు.

అనగా $A \cap B = \varnothing$, అయిన A మరియు B సమితులను వియుక్త (disjont) సమితులందురు.



పటం. 1.3

ఉదాహరణ 1.8

$A = \{20,22, 23, 24\}$ $B=\{25, 30, 40, 45\}$ అనునవి వియుక్త సమితులా? పరిశీలించుము.

సాధన

$A = \{20,22, 23, 24\}$, $B = \{25, 30, 40, 45\}$

$A \cap B = \{20,22, 23, 24\} \cap \{25, 30, 40, 45\}$

$= \{\ \}$

కావున $A \cap B = \varnothing$, A మరియు B సమితులు వియుక్త సమితులు.

సూచన

If $A \cap B \neq \varnothing$, అయిన A మరియు B అనునవి సంయుక్త (*Over Lapping*) సమితులు లేక ఖండించు సమితులందురు. అనగా రెండు సమితులకు ఉమ్మడిగా ఒకే ఒక మూలకమున్నను వాటిని ఖండించు సమితులందురు.

1.4.11. ఘాత సమితి (Power Set)

A సమితిలో గల అన్ని ఉపసమితులను A యొక్క ఘాత సమితి అందురు. దీనిని $P(A)$. తో సూచిస్తారు.

ఉదాహరణకు,

(i) $A=\{2, 3\}$, అయిన A యొక్క ఘాత సమితిని కనుగొనుము.

A యొక్క ఉపసమితులు $\varnothing$, $\{2\},\{3\},\{2,3\}$.

A యొక్క ఘాత సమితి.

$P(A) = \{\varnothing ,\{2\},\{3\},\{2,3\}\}$

(ii) $A = \{\varnothing , \{\varnothing\}\}$, అయిన A యొక్క ఘాత సమితి $\{ \varnothing , \{\varnothing , \{\varnothing\}\}, \{\varnothing\} , \{\{\varnothing\}\} \}$ అగును.

ముఖ్య లక్షణము.

$n(A) \leq n[P(A)]$ అనుటను మనము ముందే తెలుసుకొంటిమి. కాని $P(A)$ అనునది ఎంత

1-SET LANGUAGE.indd 11 04-03-2023 17:54:06

పెద్దది? కాబట్టి క్రింది పలితములకు రాగలమా? అని పరిశోధించగలము:

(i) $n(A) = m$, అయిన $n[P(A)] = 2^m$

(ii) సమితి A యొక్క శుద్ధ ఉపసమితుల సంఖ్య $n[P(A)]-1 = 2^m-1$.

ఉదాహరణ 1.9 $X=\{a, b, c, x, y, z\}$ అను సమితి యొక్క ఉపసమితుల సంఖ్యను, శుద్ధ ఉపసమితుల సంఖ్యను కనుగొనుము.

సాధన ఇవ్వబడినది $X=\{a, b, c, x, y, z\}$. అయిన, $n(X) =6$

X యొక్క ఉపసమితుల సంఖ్య $= n[P(X)] = 2^6 = 64$

X యొక్క శుద్ధ ఉపసమితుల సంఖ్య $= n[P(X)]-1 = 2^6-1$

$= 64 - 1 \quad = 63$

మెదడుకు మేత

ప్రతి సమితి ఒక శుద్ధ ఉపసమితికాని ఉండును. ఏదైనా ఒక సమితిని తీసుకొనిసరిచూడుము.

అభ్యాసము 1.2

1. క్రింది సమితుల ఆది సంఖ్య (cardinal number) ను కనుగొనుము.

(i) $M = \{p, q, r, s, t, u\}$

(ii) $P = \{x : x = 3n+2, n\in \mathbb{W}$ మరియు $x< 15\}$

(iii) $Q = \{y : y = \frac{4}{3n}, n \in \mathbb{N}$ మరియు $2 < n \leq 5\}$

(iv) $R = \{x : x$ అనునవి పూర్ణసంఖ్యలు, $x\in \mathbb{Z}$ మరియు $-5 \leq x <5\}$

(v) $S =$ 1882 నుండి 1906 వరకు గల అన్ని లీపు సంవత్సరముల సమితి.

2. క్రింది సమితులలో ఏవి అంతమొందు సమితులు ఏవి అంతమొందని సమితులు అని తెలుపుము.

(i) $X =$ తమిళనాడులో గల జిల్లాల సంఖ్య.

(ii) $Y =$ ఒక బిందువు ద్వారా పోవు సరళరేఖల సమితి.

(iii) $A = \{ x : x \in \mathbb{Z}$ మరియు $x <5\}$

(iv) $B = \{x : x^2-5x+6 = 0, x \in \mathbb{N}\}$

3. క్రింది వానిలో ఏవి సమాన సమితులు లేక సమసమితులు లేక సమము కాని సమితులు అని కనుగొనుము?

(i) $A =$ ఆంగ్ల అక్షరములలోని అచ్చుల సమితి.

$B =$ "VOWEL" అను పదములో గల అని అక్షరముల సమితి

(ii) $C = \{2,3,4,5\}$ $\qquad D = \{ x : x \in \mathbb{W}, 1< x<5\}$

(iii) X $= \{ x : x$ అనునది "LIFE" అను పదములో గల అక్షరము$\}$ $Y = \{ F, I, L, E\}$

(iv) $G = \{x : x$ ఒక ప్రదానాంకము$3 < x < 23\}$ $\qquad H = \{x : x$ అనునది 18 యొక్క బాజకములు$\}$

1-SET LANGUAGE.indd 12 04-03-2023 17:54:07

4. క్రింది వానిలో ఏవి శూన్య సమితులు ఏవి ఏక మూలక సమితులు అని కనుగొనుము.

(i) $A = \{x : x \in \mathbb{N}, 1 < x < 2\}$

(ii) $B = 2$ చే భాగింపబడని అన్ని సహజసంఖ్యల సమితి

(iii) $C = \{0\}$.

(iv) $D =$ నాలుగు భుజములు కలిగిన త్రిభుజముల సమితి

5. ఈ క్రింద ఇవ్వబడిన జతలలో వియుక్త సమితులు లేదా పరస్పర ఖండించు సమితులు ఏవి?

(i) $A = \{f, i, a, s\}$ మరియు $B=\{a, n, f, h, s\}$

(ii) $C = \{x : x$.అనునది ప్రధాన సంఖ్య $x > 2\}$ మరియు $D = \{x: x$ అనునది సరి ప్రధానాంకము.$\}$

(iii) $E = \{x : x$ అనునది 24 యొక్క కారణాంకము.$\}$ మరియు $F=\{x : x$ యొక్క గుణిజాలు, $x < 30\}$

6. $S =$ {చతురస్రము, దీర్ఘచతురస్రము, సమచతుర్భుజము, త్రిభుజము, వృత్తము

క్రింద ఇవ్వబడిన S యొక్క ఉపసమితులలోని మూలకములను పట్టీకరించుము.

(i) నాలుగు సమభుజములు కలిగన ఆకారముల సమితి.

(ii) ఒక భుజము కూడా లేని ఆకారముల సమితి.

(iii) అన్ని అంతరకోణముల మొత్తము 180^0 గా గల ఆకారముల సమితి

(iv) 5 భుజములు గల ఆకారముల *(Shaper)* సమితి

7. $A = \{a, \{a, b\}\}$, అయిన A యొక్క అన్ని ఉపసమితులను వ్రాయుము.

8. క్రింది వాని ఘాత సమితులను వ్రాయుము.

(i) $A = \{a, b\}$ (ii) $B = \{1, 2, 3\}$ (iii) $D = \{p, q, r, s\}$ (iv) $E = \varnothing$

9. క్రింది సమితుల ఉపసమితులు మరియు శుద్ధ ఉపసమితుల సంఖ్యను కనుగొనుము.

(i) $W =$ {ఎరుపు, నీలము, పసుపు} (ii) $X = \{ x^2 : x \in \mathbb{N}, x^2 \leq 100\}$.

10. (i) $n(A) = 4$, $n[P(A)]$ ను కనుగొనుము.

(ii) $n(A)=0$, అయిన $n[P(A)]$ ను కనుగొనుము.

(iii) $n[P(A)] = 256$ అయిన $n(A)$ ను కనుగొనుము.

1.5 సమితి ప్రక్రియలు (Set Operations)

సంఖ్యలతో ప్రారంభించి, చాలా వేగంగానే అంక గణిత పరిక్రియలను నేర్చుకొన్నాము. బీజగణితములో సమాసములను నేర్చిన పిదప వాటి కూడిక, గుణకారము $(x^2+2)(x-3)$ అని వ్రాయుటను తెలిసికొనియున్నాము. ఇప్పుడు సమితుల గూర్చి తెలుసుకొన్న తరువాత సహజంగానే మన మనసులో కొన్ని ప్రశ్నలు ఉద్భవించును. సమితులతో మనం ఏం చేయగలం? వాటిని ఏ పరిక్రియలలో ఉపయోగించగలం? అన్న ఎన్నో యోచనలు రావచ్చును.

రెండు లేక అంతకు పై గల సమితులను నిర్ణయింపబడిన నిబంధనల నాధారంగా ఒకే సమితిగా మార్చవచ్చును. పిమ్మట సమితి పరిక్రియలను అనుసరించి. వెన్ చిత్రమును ఉపయోగించి సమితులకు, వాటిమీద చేయబడు పరిక్రియలకు గల సంబంధమును గమనించవచ్చును.

1-SET LANGUAGE.indd 13 04-03-2023 17:54:07

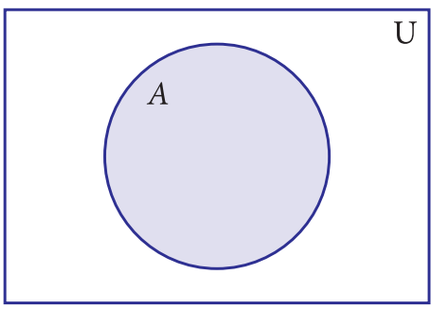
జాన్ వెన్ ఒక ఆంగ్ల గణిత శాస్త్రవేత్త అతను వెన్‌చిత్రముల సహాయముతో సమితుల మధ్య సంబంధములను బొమ్మల రూపములో సూచించెను. వెన్ చిత్రములను సమితి సిద్ధాంతములోను, సంభావ్యతలోను, సాంఖ్యాక శాస్త్రములోను, తర్క శాస్త్రములోను మరియు సంగణక శాస్త్రములోను ఉపయోగిస్తున్నారు.

1.5.1 ఒక సమితి యొక్క పూరక సమితి (Complement of a Set)

A అను సమితి యొక్క పూరక సమితి అనునది సమితి A లోని మూలకముల తప్ప సార్వత్రిక సమితిలోని మిగతా అన్ని మూలకములు కలిగిన సమితి యగును.

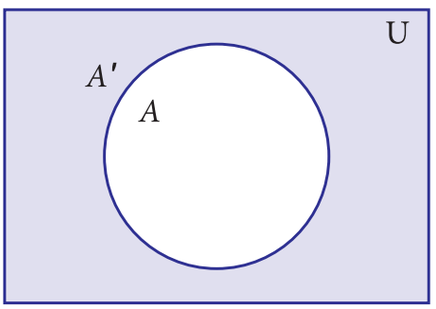
పూరక సమితిని A' లేక A^c అని సూచించ వచ్చును. $A' = \{x : x \in U, x \notin A\}$

పూరక సమితి యొక్క వెన్‌చిత్రము



A (ఛాయ చేయబడిన భాగము)

పటం. 1.4



A' (ఛాయ చేయబడిన భాగము)

పటం. 1.5

ఉదాహరణకు,

U = {తరగతిలో గల అందరు బాలురు} మరియు A= {తరగతిలో గల క్రికెట్టు ఆడు బాలురు} అయిన A'= {తరగతిలో గల క్రికెట్టు ఆడని బాలురు}

ఉదాహరణ 1.10

$U = \{c, d, e, f, g, h, i, j\}$ $A = \{c, d, g, j\}$, అయిన A'ను కనుగొనుము..

సాధన

$U = \{c, d, e, f, g, h, i, j\}$, $A = \{c, d, g, j\}$

$A' = \{e, f, h, i\}$

సూచన

- $(A')' = A$
- $U' = \varnothing$
- $\varnothing' = U$

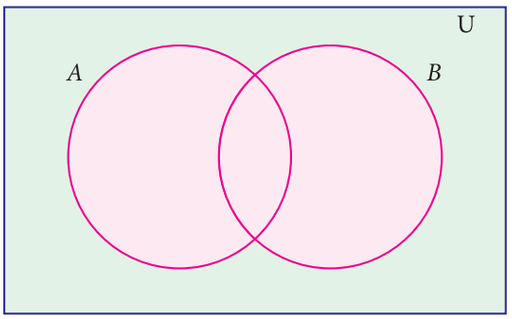
1.5.2 సమితుల సమ్మేళనము (Union of Two Sets)

A మరియు B అను రెండు సమితుల సమ్మేళనమనునది A లేక B లేక రెండింటికి చెందిన మూలకముల సమితి అగును. దీనిని $A \cup B$ అని వ్రాయవచ్చును. దీనిని A సమ్మేళనము B అని చదువవలెను.

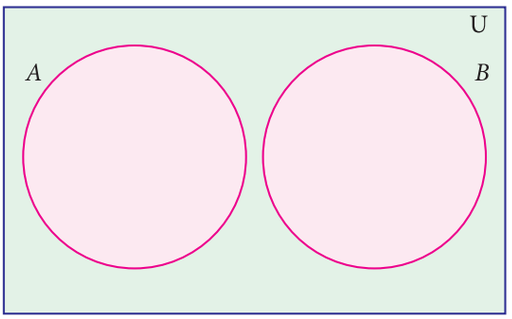
$A \cup B = \{x : x \in A$ లేక $x \in B\}$

1-SET LANGUAGE.indd 14 04-03-2023 17:54:07

రెండు సమితుల సమ్మేళనము – వెన్ చిత్రములో గుర్తించుట



సమితులు A మరియు B కు
ఉమ్మడి మూలకములుండును.
పటం 1.6



సమితులు A మరియు B ల
వియుక్త సమితులు
పటం 1.7

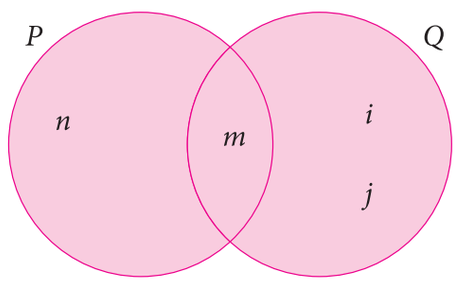
ఉదాహరణకు,

P ={ఆసియా, ఆఫ్రికా, అంటార్కిటికా, ఆస్ట్రేలియా} మరియు Q = {ఐరోపా, ఉత్తర అమెరికా, దక్షిణ అమెరికా} అయిన సమితి A మరియు B ల సమ్మేళనము. $P \cup Q$ = {ఆసియా, ఆఫ్రికా, అంటార్కిటికా, ఆస్ట్రేలియా, ఐరోపా, ఉత్తర అమెరికా, దక్షిణ అమెరికా} అగును..

సూచన

- $A \cup A = A$
- $A \cup \varnothing = A$
- $A \cup U$ = U ఇచ్చట A అనునది సార్వత్రిక సమితిల U యొక్క ఉపసమితి.
- $A \subseteq A \cup B$ మరియు $B \subseteq A \cup B$
- $A \cup B = B \cup A$రెండు సమితుల సమ్మేళనము స్థిత్యంతర ధర్మము (వినిమయ న్యాయము) పాటించును.

ఉదాహరణ 1.11 $P=\{m, n\}$ మరియు $Q=\{m, i, j\}$, అయిన వెన్‌చిత్రము నుండి $P \cup Q$. ను కనుగొనుము.



పటం. 1.8

సాధన

$P=\{m, n\}$ మరియు $Q=\{m, i, j\}$

వెన్‌చిత్రము నుండి $P \cup Q=\{n, m, i, j\}$.

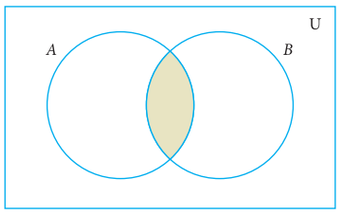
1.5.3 సమితుల ఛేదనము (Intersection of TwoSets)

రెండు సమితులు A మరియు B యొక్క ఛేదన సమితి అనునది ఆ రెండు సమితులలో గల ఉమ్మడి మూలకముల సమితి అగును. దీనిని $A \cap B$ అని వ్రాసెదము. దీనిని A ఛేదనము B అని చదివెదము.

సంకేతములో , $A \cap B=\{x : x \in A$ మరియు $x \in B\}$

1-SET LANGUAGE.indd 15 04-03-2023 17:54:07

రెండు సమితుల ఛేదనము – వెన్ చిత్రము ద్వారా గుర్తించుట.



పటం. 1.9

ఉదాహరణకు, $A = \{1,2, 6\}$, $B = \{2, 3,4\}$ అయిన $A \cap B = \{2\}$

ఎందుకనగా 2 అను మూలకము A సమితిలోను మరియు B సమితిలోను గల సామాన్య (ఉమ్మడి) మూలకమగును

ఉదాహరణ 1.12

$A = \{x : x$ అనునది ఒక సరి సహజసంఖ్య మరియు $1 < x \leq 12\}$ మరియు $B = \{x : x$ అనునది 3 యొక్క గుణిజము, $3, x \in \mathbb{N}$ మరియు $x \leq 12\}$ అయిన $A \cap B$ ను కనుగొనుము.

సాధన $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ మరియు $B = \{3, 6, 9, 12\}$

$A \cap B = \{6, 12\}$

ఉదాహరణ 1.13

If $A = \{2, 3\}$ మరియు $C = \{\ \}$, $A \cap C$ కనుగొనుము.

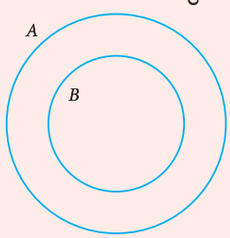
సాధన ఇచ్చట A మరియు C అను రెండు సమితుల మధ్య ఉమ్మడి మూలకములు లేనందువల్ల $A \cap C = \{\ \}$

సూచన

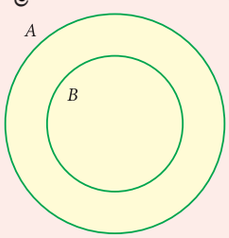
- $A \cap A = A$ (ii) $A \cap \varnothing = \varnothing$
- $A \cap U = A$ ఇచ్చట A అనునది సార్వత్రిక సమితి U యొక్క ఉపసమితి.
- $A \cap B \subseteq A$ మరియు $A \cap B \subseteq B$
- $A \cap B = B \cap A$ (రెండు సమితుల ఛేదన సమితి వ్యత్యయ గుణమున ననుసరించియుండును.)

సూచన

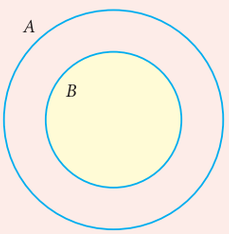
- $B \subset A$ అయిన A, B యొక్క సమ్మేళనము మరియు ఛేదనము వీటిని వెన్ చిత్రములలో చూపించుము.



$B \subset A$
పటం. 1.10



ఛాయ చేయబడిన భాగము
$A \cup B = A$
పటం. 1.11



ఛాయ చేయబడిన భాగము
$A \cap B = B$
పటం. 1.12

- A, B, అను రెండు శూన్యేతర సమితులకు $A \cup B = A \cap B$. $\therefore A = B$
- $n(A) = p$ మరియు $n(B) = q$ అనుకొనుము.
  - (a) కనీస పక్షము $n(A \cup B) =$ అధిక పక్షము $\{p, q\}$
  - (b) అధిక పక్షము $n(A \cup B) = p + q$
  - (c) కనీస పక్షము $n(A \cap B) = 0$
  - (d) అధిక పక్షము $n(A \cap B) =$ కనీస పక్షము $\{p, q\}$

1-SET LANGUAGE.indd 16 04-03-2023 17:54:08

1.5.4 సమితుల భేదము (Difference of Two Sets)

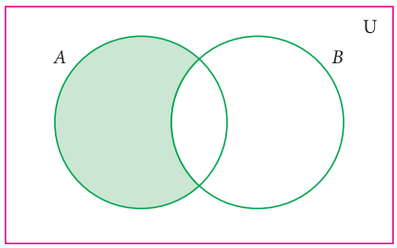
A,B లు అనునవి రెండు సమితులు అనుకొనుము. సమితి A మరియు సమితి B ల భేదము అనునది సమితి A లో యుండి, కాని సమితి B లో లేని మూలకములు కలిగిన సమితి అగును. దీనిని "$A-B$ భేదము A\B" అని వ్రాయవచ్చును. దీనిని A భేదము B అని చదువవలెను.

సాంకేతికంగా, $A-B = \{ x : x \in A$ మరియు $x \notin B\}$

$B-A = \{ y : y \in B$ మరియు $y \notin A\}$.

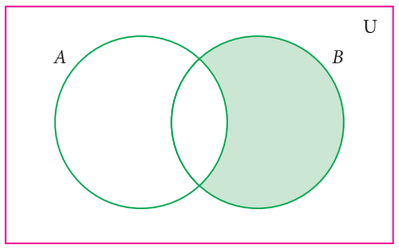
9ESP4

సమితి భేదములను చూపు వెన్ చిత్రములు



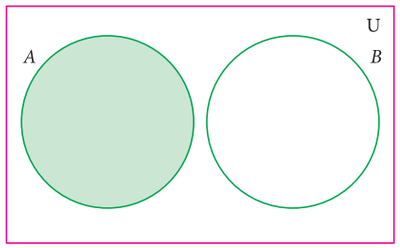
$A-B$

పటం - 1.13



$B-A$

పటం - 1.14



$A-B$

పటం - 1.15

ఉదాహరణ 1.14

$A=\{-3, -2, 1, 4\}$ మరియు $B= \{0, 1, 2, 4\}$, అయిన (i) $A-B$ (ii) $B-A$ కనుగొనుము.

సాధన

$A-B = \{-3, -2, 1, 4\} - \{0, 1, 2, 4\} = \{ -3, -2\}$

$B-A = \{0, 1, 2, 4\} - \{-3, -2, 1, 4\} = \{ 0, 2\}$

సూచన

- $A' = U - A$
- $A-B = A \cap B'$
- $A-A = \varnothing$
- $A-\varnothing = A$
- $A-B = B-A \Leftrightarrow A=B$
- $A-B = A$ if $A \cap B = \varnothing$

1.5.5 సమితుల సౌష్ఠవభేదం

A మరియు B అను సమితుల సౌష్ఠవభేదం అనునది $(A-B)\cup(B-A)$. దీనిని $A\Delta B$ అని సూచించవచ్చును.

$A\Delta B = \{ x : x \in A-B$ లేక $x \in B-A\}$

ఉదాహరణ 1.15

$A = \{6, 7, 8, 9\}$ మరియు $B=\{8, 10, 12\}$, అయిన $A\Delta B$ ను కనుగొనుము.

సాధన

$A-B = \{6, 7, 9\}$

$B-A = \{10, 12\}$

$A\Delta B = (A-B)\cup(B-A) = \{6, 7, 9\}\cup\{10,12\}$

$A\Delta B = \{6, 7, 9, 10, 12\}$.

మెదడుకు మేత

$(A - B) \cap (B - A)$ విలువ?

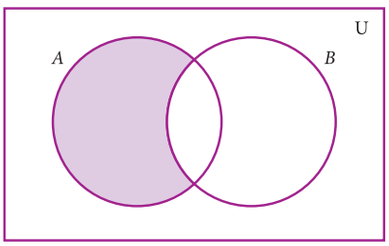
1-SET LANGUAGE.indd 17 04-03-2023 17:54:08

ఉదాహరణ 1.16

$A\Delta B$ ను వెన్‌చిత్రములో చూపుము.

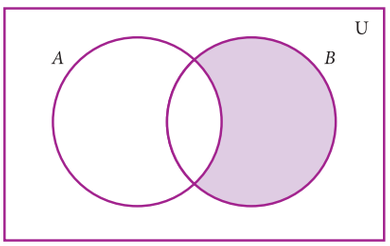
సాధన

$A\Delta B = (A-B) \cup (B-A)$



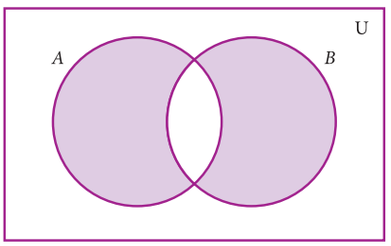
$A-B$

పటం. 1.16



$B-A$

పటం. 1.17



$(A-B) \cup (B-A)$

పటం. 1.18

సూచన

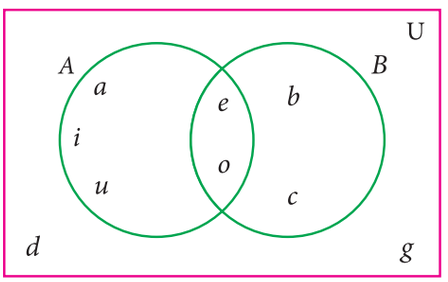
- $A\Delta A = \varnothing$
- $A\Delta B = B\Delta A$
- $A\Delta B = \{x : x \in A \cup B$ మరియు $x \notin A \cap B\}$
- $A\Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

ఉదాహరణ 1.17

ప్రక్న పటము నుండి క్రింది వానిని కనుగొనుము

(i) A (ii) B (iii) $A-B$ (iv) $B-A$

(v) A' (vi) B' (vii) U



పటం. 1.19

సాధన

(i) $A = \{a, e, i, o, u\}$ (ii) $B = \{b, c, e, o\}$

(iii) $A-B = \{a, i, u\}$ (iv) $B-A = \{b, c\}$

(v) $A' = \{b, c, d, g\}$ (vi) $B' = \{a, d, g, i, u\}$

(vii) $U = \{a, b, c, d, e, g, i, o, u\}$

ఉదాహరణ 1.18

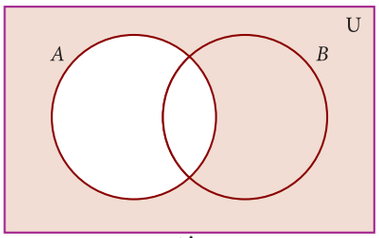
ప్రక్క పటములో చూపినట్లు వెన్‌చిత్రము గీచి క్రింది సమితి పరిక్రియలను వెన్‌చిత్రములో గుర్తించుము.

(i) A' (ii) $(A-B)'$ (iii) $(A \cup B)'$

1-SET LANGUAGE.indd 18 04-03-2023 17:54:08

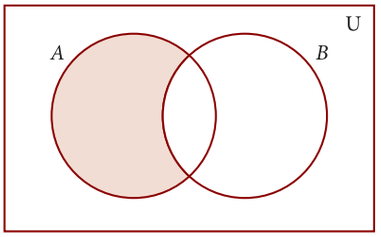
సాధన

(i) A' (ii) $(A-B)'$



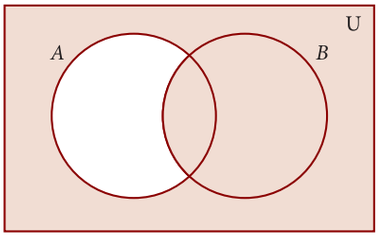
A'

పటం. 1.20



$A-B$

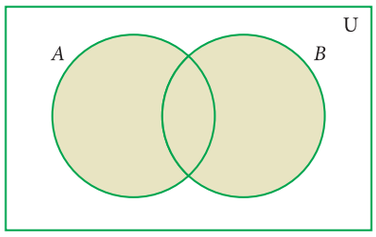
పటం. 1.21



$(A-B)'$

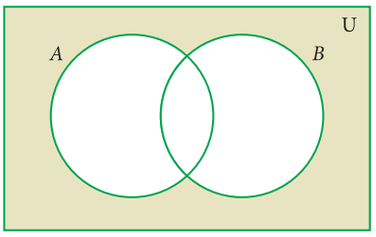
పటం. 1.22

(iii) $(A \cup B)'$



$A \cup B$

పటం. 1.23

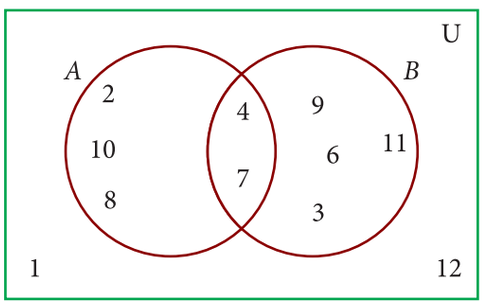


$(A \cup B)'$

పటం. 1.24

అభ్యాసము 1.3

1. ఇవ్వబడిన వెన్‌చిత్రముల నుండి క్రింద గల సమితుల మూలకములను వ్రాయుము.



పటం. 1.25

(i) A (ii) B (iii) $A \cup B$ (iv) $A \cap B$

(v) $A-B$ (vi) $B-A$ (vii) A' (viii) B'

(ix) U

2. క్రింది సమితులకు $A \cup B$, $A \cap B$, $A-B$ మరియు $B-A$ లను కనుగొనుము.

(i) $A = \{2, 6, 10, 14\}$ మరియు $B=\{2, 5, 14, 16\}$

(ii) $A = \{a, b, c, e, u\}$ మరియు $B=\{a, e, i, o, u\}$

(iii) $A = \{x : x \in N, x \leq 10\}$ మరియు $B=\{x : x \in W, x < 6\}$

(iv) A = “mathematics” అను పదములో గల అక్షరముల సమితి మరియు

B = “geometry” అను పదములోని అక్షరముల సమితి.

1-SET LANGUAGE.indd 19 04-03-2023 17:54:09

3. U={a, b, c, d, e, f, g, h}, A={b, d, f, h} మరియు B={a, d, e, h}, అయిన క్రింది సమితులను కనుగొనుము.

(i) A' (ii) B' (iii) $A' \cup B'$ (iv) $A' \cap B'$ (v) $(A \cup B)'$

(vi) $(A \cap B)'$ (vii) $(A')'$ (viii) $(B')'$

4. U={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, A={1, 3, 5, 7}మరియు B={0, 2, 3, 5, 7}, అయిన క్రింది వానిని కనుగొనుము.

(i) A' (ii) B' (iii) $A' \cup B'$ (iv)$A' \cap B'$ (v)$(A \cup B)'$

(vi) $(A \cap B)'$ (vii) $(A')'$ (viii) $(B')'$

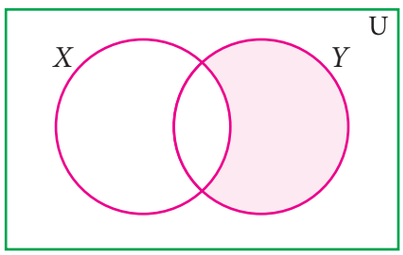
5. ఇవ్వబడిన సమితుల సౌష్టవ భేదమును కనుగొనుము.

(i) P = {2, 3, 5, 7, 11} మరియు Q={1, 3, 5, 11}

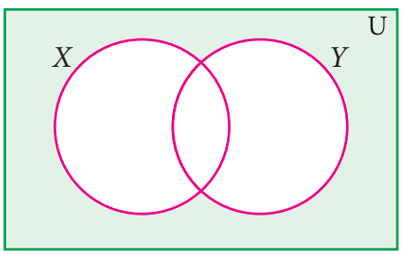
(ii) R = {l, m, n, o, p} మరియు S = {j, l, n, q}

(iii) X = {5, 6, 7} మరియు Y={5, 7, 9, 10}

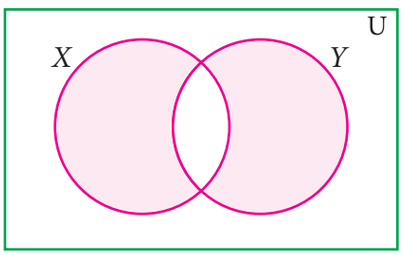
6. సమితి సంకేతములనుపయోగించి ఛాయచేయబడిన భాగములను గుర్తించుము.



పటం. 1.26



పటం. 1.27



పటం. 1.28

7. A, B అనునవి ఖండించు సమితులు మరియు U అనునవి విశ్వసమితి అయిన క్రింది వాటిని వెన్‌చిత్రములో గుర్తించుము.

(i) $A \cup B$ (ii) $A \cap B$ (iii) $(A \cap B)'$ (iv) $(B-A)'$ (v) $A' \cup B'$ (vi) $A' \cap B'$

(vii) వెన్‌చిత్రము (iii) మరియు(v) లను పరిశీలించి నీ అభిప్రాయమును తెలుపుము?

1.6 సమితి పరిక్రియల ధర్మములు

ఈ భాగములో, సమితి పరిక్రియలు (సమ్మేళనము, ఛేదనము మొదలగు) వినిమయ ధర్మము, సహచర్య ధర్మములను కలిగియుండునా అని ఆసక్తికరంగా పరిశోధించును. సంఖ్యలు ఈ ధర్మములను కలిగి యుండునని మనకు తెలియును. సమితులు కూడా ఈ ధర్మములును కలిగియుండునా అని పరిశీలించెదము.

మొదట మనం సమితుల సమ్మేళనము మరియు ఛేదనము వంటి సమితి పరిక్రియల ధర్మములను తీసుకొనెదము.

1-SET LANGUAGE.indd 20 04-03-2023 17:54:09

1.6.1 వినిమయ ధర్మము (లేక) స్థిత్యంతర ధర్మము

సమితి పరిభాషలో సమితి పరిక్రియలు ఉపయోగించి వినిమయ ధర్మమును చూచెదము. ఉదాహరణకు సమితుల సమ్మేళనము మరియు ఖండనము అను పరిక్రియలు వినిమయ లేక స్థిత్యంతర ధర్మమును కలిగియున్నవా? కనుగొనెదము.

$A=\{2,3,8,10\}$, $B=\{1,3,10,13\}$ అనునవి రెండు సమితులనుకొనుము.

ఇచ్చట, $A\cup B=\{1,2,3,8,10,13\}$ మరియు

$B\cup A=\{1,2,3,8,10,13\}$

దీనినుండి $A\cup B=B\cup A$. అని మనకు తెలియును

దీనినే రెండు సమితుల సమ్మేళనముల వినిమయ ధర్మము అని పిలువబడును.

ఇప్పుడు, $A\cap B=\{3,10\}$ మరియు $B\cap A=\{3,10\}$. $A\cap B=B\cap A$ అని మనకు తెలియును.

ఇదియే రెండు సమితుల ఖండనముల వినిమయ ధర్మము కలిగియున్నదని మనకు తెలియును.

సూచన

ఏదేని సమితి A కు,

- $A\cup A=A$ మరియు $A\cap A=A$ మార్పురహిత నియమము [Idempotent Laws].
- $A\cup\phi=A$ మరియు $A\cap U=A$ తత్సమ నియమము [Identity Laws].

వినిమయ ధర్మము లేక స్థిత్యంతర ధర్మము: A మరియు B అనునవి ఏవేని రెండు సమితులైన

(i) $A\cup B=B\cup A$ (ii) $A\cap B=B\cap A$

ఉదాహరణ 1.19 $A=\{b,e,f,g\}$ మరియు $B=\{c,e,g,h\}$ అయిన (i) సమితుల సమ్మేళనము (ii) చేధనముల వినిమయ ధర్మమును సరిచూడుము.

సాధన

ఇవ్వబడినవి, $A=\{b,e,f,g\}$ మరియు $B=\{c,e,g,h\}$

(i) $A\cup B=\{b,c,e,f,g,h\}$ ... (1)

$B\cup A=\{b,c,e,f,g,h\}$ (2)

(1) మరియు (2) ల నుండి $A\cup B=B\cup A$ సమితు సమ్మేళనము వినిమయ ధర్మము కలిగియున్నదని సరిచూడబడినది.

(ii) $A\cap B=\{e,g\}$ ... (3)

$B\cap A=\{e,g\}$ ... (4)

మెదడుకు మేత

$P=\{l,n,p\}$ $P\cup Q=\{j,l,m,n,o,p\}$

P మరియు Qలు వియుక్త సమితులయిన Q మరియు $P\cap Q$ లు ఎట్లుండవచ్చును?

1-SET LANGUAGE.indd 21 04-03-2023 17:54:12

(3) మరియు (4) ల నుండి $A \cap B = B \cap A$

సమితుల ఛేదనములు వినిమయ ధర్మమును కలిగియున్నది అని సరిచూడబడినది.

సూచన

సంఖ్యలలో తీసివేత (వ్యవకలనము) వినిమయ ధర్మమును కలిగియుండదు అనుటను జ్ఞప్తికి తెచ్చుకొనుము. సమితి వ్యత్యాసము వినిమయ ధర్మమును కలిగియున్నదా? సంఖ్యల వలె సమితి వ్యత్యాసము కూడా వినిమయ ధర్మమును కలిగియుండదని చూచెదము. ఉదాహరణకు $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, d\}$. అయిన

$A - B = \{a\}$, $B - A = \{d\}$ వీటి నుండి $A - B \neq B - A$. అనుదానిని మనము గమనించు చున్నాము.

1.6.2 సహచర ధర్మము

ఇప్పుడు మనం సమ్మేళన మరియు ఛేదన ప్రక్రియ మూడు సమితులనుపయోగించి చేసిచూచెదము.

$A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{-3, 0, 2, 3\}$ మరియు $C = \{0, 1, 3, 4\}$ అనునవి మూడు సమితులు అనుకొనుము

ఇప్పుడు, $B \cup C = \{-3, 0, 1, 2, 3, 4\}$

$A \cup (B \cup C) = \{-1, 0, 1, 2\} \cup \{-3, 0, 1, 2, 3, 4\}$

$= \{-3, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ ... (1)

తర్వాత, $A \cup B = \{-3, -1, 0, 1, 2, 3\}$

$(A \cup B) \cup C = \{-3, -1, 0, 1, 2, 3\} \cup \{0, 1, 3, 4\}$

$= \{-3, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ ... (2)

(1) మరియు (2) ల నుండి $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ ఇది సమితుల సమ్మేళనము యొక్క సహచర ధర్మమగును.

ఇప్పుడు, $B \cap C = \{0, 3\}$

$A \cap (B \cap C) = \{-1, 0, 1, 2\} \cap \{0, 3\}$

$= \{0\}$ ... (3)

తర్వాత, $A \cap B = \{0, 2\}$

$(A \cap B) \cap C = \{0, 2\} \cap \{0, 1, 3, 4\}$

$= \{0\}$ ... (4)

(3) మరియు (4) ల నుండి $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

ఇది సమితుల ఛేదనము యొక్క సహచర ధర్మము అగును.

సహచర ధర్మము: A, B మరియు C అనునవి ఏవైనా మూడు సమితులయిన

(i) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (ii) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

1-SET LANGUAGE.indd 22 04-03-2023 17:54:14

ఉదాహరణ 1.20 $A=\left\{-\frac{1}{2},0,\frac{1}{4},\frac{3}{4},2\right\}$, $B=\left\{0,\frac{1}{4},\frac{3}{4},2,\frac{5}{2}\right\}$ మరియు $C=\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{4},1,2,\frac{5}{2}\right\}$,

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ అని సరిచూడుము.

సాధన

ఇప్పుడు, $(B\cap C)=\left\{\frac{1}{4},2,\frac{5}{2}\right\}$

$A\cap(B\cap C)=\left\{\frac{1}{4},2\right\}$ ... (1)

$A\cap B=\left\{0,\frac{1}{4},\frac{3}{4},2\right\}$

$(A\cap B)\cap C=\left\{\frac{1}{4},2\right\}$ ... (2)

(1) మరియు (2) ల నుండి,

$(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$ అని సరిచూడబడినది.

సూచన

సమితి వ్యత్యాసము అనునది సహచర ధర్మము కలిగియుండదు

$(A-B)-C \neq A-(B-C)$ అయిన, A, B మరియు C సమితులు పరస్పర వియుక్త సమితులైన యెడల సమితి వ్యత్యాసము సహచర ధర్మమును కలిగియుండును.

$i.e\ (A-B)-C=A-(B-C)$.

అభ్యాసము 1.4

1. $P=\{1,2,5,7,9\}$, $Q=\{2,3,5,9,11\}$, $R=\{3,4,5,7,9\}$ మరియు $S=\{2,3,4,5,8\}$ అయిన, ఈ క్రింది వాటిని కనుగొనుము.
   (i) $(P\cup Q)\cup R$ (ii) $(P\cap Q)\cap S$ (iii) $(Q\cap S)\cap R$
2. సమితుల సమ్మేళనము మరియు ఛేదనములకు వినిమయ ధర్మమును సరిచూడుము.
   $P=\{x: x$ అనునది 2 మరియు 7 లకు మధ్యగల వాస్తవ సంఖ్య$\}$ మరియు
   $Q=\{x: x$ అనునది 2 మరియు 7 లకు మధ్యగల అకరణీయ సంఖ్య$\}$
3. $A=\{p,q,r,s\}$, $B=\{m,n,q,s,t\}$ మరియు $C=\{m,n,p,q,s\}$ అయిన, సమితి సమ్మేళనమునకు సహచర్య ధర్మమును సరిచూడుము.
4. $A=\{-11,\sqrt{2},\sqrt{5},7\}$, $B=\{\sqrt{3},\sqrt{5},6,13\}$ మరియు $C=\{\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5},9\}$ అయిన, సమితి ఛేదనమునకు సహచర్య ధర్మమును సరిచూడుము.
5. $A=\{x: x=2^n, n\in W$ మరియు $n<4\}$, $B=\{x: x=2n, n\in\mathbb{N}$ మరియు $n\leq 4\}$ మరియు $C=\{0,1,2,5,6\}$ అయిన, సమితి ఛేదనముల సహచర్య ధర్మమును సరిచూడుము.

1-SET LANGUAGE.indd 23 04-03-2023 17:54:17

1.6.3 విభాగ ధర్మము

మనము సంఖ్యల కూడికపై గల గుణకార విభాగ ధర్మమును ముందు తరగతులలో చదివియున్నాము. $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$. ఈ పై ధర్మమును సమితి సమ్మేళనముపై చేధనమునకు గల విభాగ ధర్మము అని అందురు.

విభాగ ధర్మము: A, B మరియు C అనునవి ఏవేని మూడు సమితులైన

(i) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ [సమ్మేళనముపై చేధనము]

(ii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ [చేధనముపై సమ్మేళనము]

ఉదాహరణ 1.21 $A = \{0,2,4,6,8\}, B = \{x : x$ అనునది ఒక ప్రధానాంకము $x < 11\}$ మరియు $C = \{x : x \in N$ మరియు $5 \leq x < 9\}$ అయిన $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ను సరిచూడుము.

సాధన

ఇవ్వబడినది $A = \{0,2,4,6,8\}$, $B = \{2,3,5,7\}$ మరియు $C = \{5,6,7,8\}$

మొదట మనము కనుగొనవలసినది, $B \cap C = \{5,7\}$

$$A \cup (B \cap C) = \{0,2,4,5,6,7,8\} \quad \ldots (1)$$

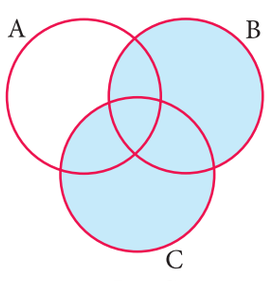
తరువాత, $A \cup B = \{0,2,3,4,5,6,7,8\}$, $A \cup C = \{0,2,4,5,6,7,8\}$

అయిన, $(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{0,2,4,5,6,7,8\} \ldots (2)$

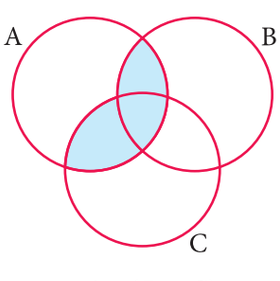
(1) మరియు (2) ల నుండి , $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. అని సరిచూడబడినది

ఉదాహరణ 1.22 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ అని వెన్ చిత్రముల ద్వారా సరిచూడుము.

సాధన



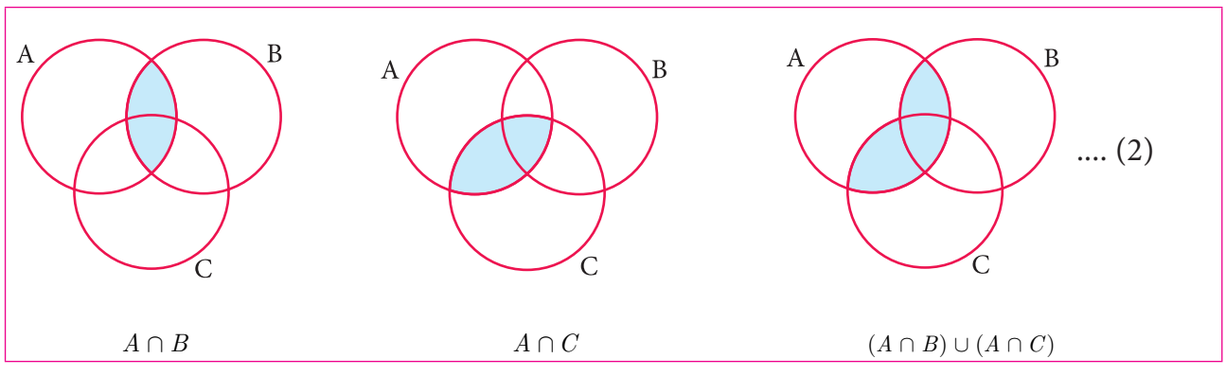
$B \cup C$



$A \cap (B \cup C)$

.... (1)

1-SET LANGUAGE.indd 24 04-03-2023 17:54:19



పటం.1.29

(1) మరియు (2) ల నుండి, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ అని వెన్ చిత్రము ద్వారా సరిచూడబడినది.

1.7 డీ మార్గన్ న్యాయములు

అగష్టస్ డీ మార్గన్ (1806 – 1871), ఒక ఆంగ్లేయ గణితశాస్త్రవేత్త. ఈయన జూన్ 27వ తారీఖు, 1806 వ సంవత్సరము మన భారతదేశము నందలి తమిళనాడు రాష్ట్రంలో గల మధురై నగరంలో జన్మించెను. అప్పుడు అతని తండ్రి మన దేశము నందు తూర్పు ఇండియా వర్తక సంఘము (East India Company) లో ఉద్యోగిగా పనిచేయుచుండిరి. డీ మార్గన్ 7 నెలలల శిశువుగానున్నప్పుడు, అతని కుటుంబము ఇంగ్లాండ్ దేశమునకు తిరిగి వెళ్ళెను. డీ మార్గన్ లండన్ నగరములో గల ట్రినిటి కళాశాల, కేంబ్రిడ్జి నందు విద్యనభ్యసించిరి. ఇతను సమితుల వ్యత్యాసము మరియు పూరకములకు సంబంధించి కొన్ని సూత్రములను ప్రతిపాదించెను. ఆ సూత్రములనే డీ మార్గన్ న్యాయములు అని అందురు.

1.7.1 సమితి వ్యత్యాసములకు డీ మార్గన్ న్యాయములు

ఈ న్యాయములు సమితి ప్రక్రియల యందలి సమ్మేళనము, ఛేధనము మరియు వ్యత్యాసములకు సంబంధించినది.

$A = \{-5, -2, 1, 3\}$, $B = \{-3, -2, 0, 3, 5\}$ మరియు $C = \{-2, -1, 0, 4, 5\}$ అనునవి మూడు సమితులు అయిన

ఇప్పుడు, $B \cup C = \{-3, -2, -1, 0, 3, 4, 5\}$

$A - (B \cup C) = \{-5, 1\}$ ... (1)

అయితే $A - B = \{-5, 1\}$ మరియు $A - C = \{-5, 1, 3\}$

$(A - B) \cup (A - C) = \{-5, 1, 3\}$ ... (2)

$(A - B) \cap (A - C) = \{-5, 1\}$ ... (3)

1-SET LANGUAGE.indd 25 04-03-2023 17:54:21

(1) మరియు (2) ల నుండి

$$A-(B\cup C) \neq (A-B)\cup(A-C)$$

కాని (1) మరియు (3) లను గమనించిన,

$$A-(B\cup C) = (A-B)\cap(A-C)$$

ఇప్పుడు, $B\cap C = \{-2,0,5\}$

$$A-(B\cap C) = \{-5,1,3\} \quad \ldots (4)$$

(3) మరియు (4) ల నుండి మనము గమనించినది

$$A-(B\cap C) \neq (A-B)\cap(A-C)$$

అయితే (2) మరియు (4) లను గమనించిన $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$ ను పొందగదలము

మెదడుకు మేత

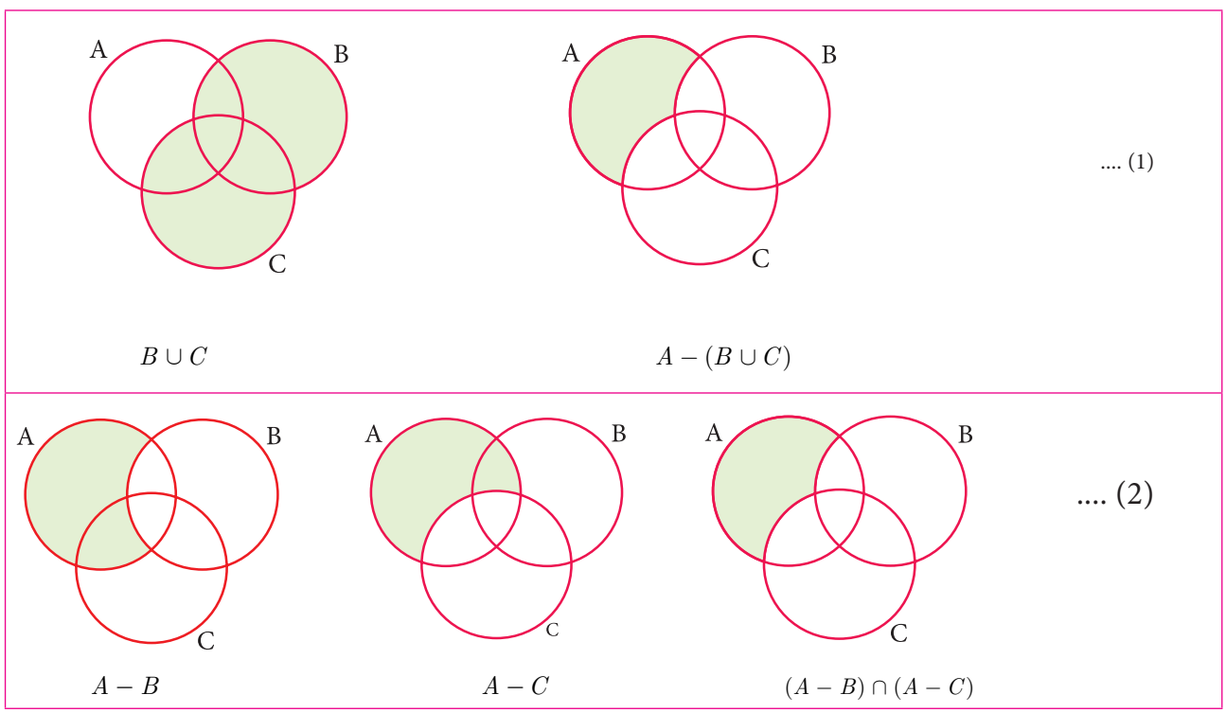
$(A-B)\cup(A-C)\cup(A\cap B)=$____

సమితి వ్యత్యాసములకు డీ మార్గన్ న్యాయములు: A, B మరియు C అనునవి మూడు సమితులైన

(i) $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$ (ii) $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$

ఉదాహరణ 1.23 $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$ ను వెన్ చిత్రముల ద్వారా సరిచూడుము.

సాధన



పటం.1.30

(1) మరియు (2) ల నుండి $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$ అని నిరూపించబడినది

1-SET LANGUAGE.indd 26 04-03-2023 17:54:26

ఉదాహరణ 1.24 $P=\{x : x\in \mathbb{W}$ మరియు $0<x<10\}$, $Q=\{x : x=2n+1, n\in \mathbb{W}$ మరియు $n<5\}$ మరియు $R=\{2,3,5,7,11,13\}$, అయితే $P-(Q\cap R)=(P-Q)\cup(P-R)$ ను సరిచూడుము

సాధన

పట్టిక పద్ధతిలో P, Q మరియు R సమితులు వ్రాయగా

$P=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $Q=\{1,3,5,7,9\}$

మరియు

$R=\{2,3,5,7,11,13\}$

మొదటగా $(Q\cap R)=\{3,5,7\}$

తరువాత, $P-(Q\cap R)=\{1,2,4,6,8,9\}$ ... (1)

తరువాత, $P-Q=\{2,4,6,8\}$ మరియు

$P-R=\{1,4,6,8,9\}$

కావున, $(P-Q)\cup(P-R)=\{1,2,4,6,8,9\}$ ... (2)

(1) మరియు (2) ల నుండి $P-(Q\cap R)=(P-Q)\cup(P-R)$. అని నిరూపించబడినది.

Q సమితి మూలకములను కనుగొనుట

ఇవ్వబడినది $x = 2n + 11$

$n=0 \rightarrow x=2(0)+1=0+1=1$

$n=1 \rightarrow x=2(1)+1=2+1=3$

$n=2 \rightarrow x=2(2)+1=4+1=5$

$n=3 \rightarrow x=2(3)+1=6+1=7$

$n=4 \rightarrow x=2(4)+1=8+1=9$

కాబట్టి x యొక్క విలువలు $1,3,5,7$ మరియు 9

1.7.2 సమితి పూరకములకు డీ మార్గన్ న్యాయములు

ఈ న్యాయములు సమితి ప్రక్రియలలో సమ్మేళనము, ఛేదనము మరియు పూరకములకు సంబంధించినది.

విశ్వసమితి U={0,1,2,3,4,5,6}, A={1,3,5} మరియు B={0,3,4,5} అనుకొనిన

ఇప్పుడు, $A\cup B=\{0,1,3,4,5\}$

పైగా, $(A\cup B)'=\{2,6\}$ .....(1)

తరువాత, $A'=\{0,2,4,6\}$ మరియు $B'=\{1,2,6\}$

పైగా, $A'\cap B'=\{2,6\}$ .....(2)

(1) మరియు (2) ల నుండి $(A\cup B)'=A'\cap B'$ ను పొందగలము.

మరియు, $A\cap B=\{3,5\}$,

$(A\cap B)'=\{0,1,2,4,6\}$ .....(3)

$A'=\{0,2,4,6\}$ మరియు $B'=\{1,2,6\}$

$A'\cup B'=\{0,1,2,4,6\}$ .....(4)

(3) మరియు (4) ల నుండి $(A\cap B)'=A'\cup B'$ ను పొందగలము.

మెదడుకు మేత

అనునది సరియా?
$A-B=A\cap B'$

మెదడుకు మేత

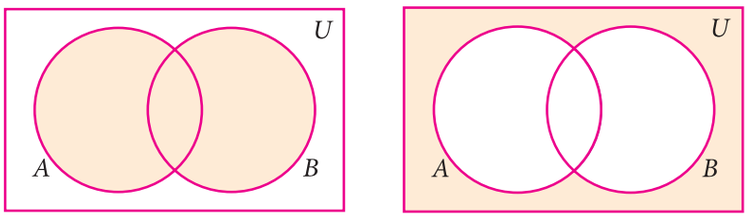
$(A-B)\cup(B-A')=$____

1-SET LANGUAGE.indd 27 04-03-2023 17:54:30

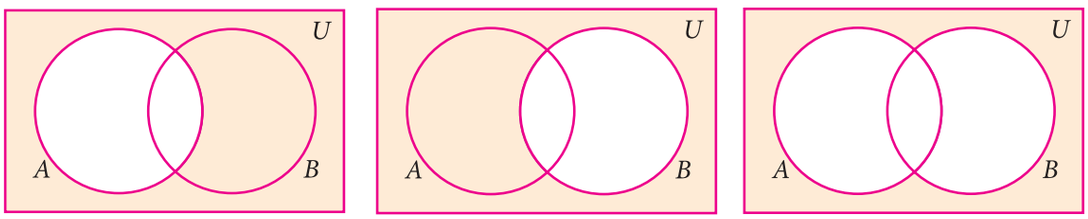
సమితి పూరకములకు డీ మార్గన్ న్యాయములు : 'U' అను విశ్వసమితి నందు A మరియు B. అను పరిమిత సమితులు కలిగియుండిన యెడల (i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

ఉదాహరణ 1.25 $(A \cup B)' = A' \cap B'$ ను వెన్ చిత్రముల ద్వారా సరిచూడుము.

సాధన



$A \cup B$ $(A \cup B)'$ .... (1)



A' B' $A' \cap B'$ .... (2)

పటం.1.31

(1) మరియు (2) ల నుండి $(A \cup B)' = A' \cap B'$ అని నిరూపించబడినది.

ఉదాహరణ 1.26 $U = \{x : x \in \mathbb{Z}, -2 \leq x \leq 10\}$,

$A = \{x : x = 2p + 1,\ p \in \mathbb{Z}, -1 \leq p \leq 4\}$ మరియు $B = \{x : x = 3q + 1,\ q \in \mathbb{Z}, -1 \leq q < 4\}$

అయిన సమితి పూరకములకు డీమార్గన్ న్యాయములు సరిచూడుము.

సాధన

ఇవ్వబడినది $U = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$,

$A = \{-1, 1, 3, 5, 7, 9\}$ మరియు $B = \{-2, 1, 4, 7, 10\}$

మెదడుకు మేత

$A \cap (A \cup B)'$ =_____

న్యాయము (i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

ఇప్పుడు, $A \cup B = \{-2, -1, 1, 3, 4, 5, 7, 9, 10\}$

$(A \cup B)' = \{0, 2, 6, 8\}$ ..... (1)

1-SET LANGUAGE.indd 28 04-03-2023 17:54:32

తర్వాత, $A' = \{-2,0,2,4,6,8,10\}$ మరియు $B' = \{-1,0,2,3,5,6,8,9\}$

$A' \cap B' = \{0,2,6,8\}$ ..... (2)

(1) మరియు (2) ల నుండి $(A \cup B)' = A' \cap B'$ అని నిరూపించబడినది.

న్యాయము (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

ఇప్పుడు, $A \cap B = \{1,7\}$

$(A \cap B)' = \{-2,-1,0,2,3,4,5,6,8,9,10\}$ ..... (3)

ఇప్పుడు, $A' \cup B' = \{-2,-1,0,2,3,4,5,6,8,9,10\}$ ..... (4)

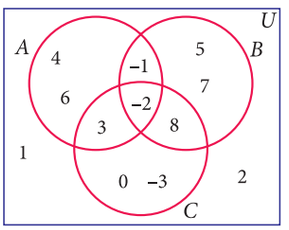
మరియు (3) నుండి (4), అని సరిచూడబడినది $(A \cap B)' = A' \cup B'$

మెదడుకు మేత

$(A \cup B)' \cup (A' \cap B) =$ ___

అభ్యాసము 1.5

1. పక్క నున్న వెన్ చిత్రమునుపయోగించి, ఈ క్రింది సమితులను కనుగొనుము:



(i) $A - B$ (ii) $B - C$ (iii) $A' \cup B'$

(iv) $A' \cap B'$ (v) $(B \cup C)'$ (vi) $A - (B \cup C)$

(vii) $A - (B \cap C)$

2. $K = \{a,b,d,e,f\}$, $L = \{b,c,d,g\}$ మరియు $M = \{a,b,c,d,h\}$ అయిన ఈ క్రింది వాటిని కనుగొని, విభాగ ధర్మములను సరిచూడుము.

(i) $K \cup (L \cap M)$ (ii) $K \cap (L \cup M)$

(iii) $(K \cup L) \cap (K \cup M)$ (iv) $(K \cap L) \cup (K \cap M)$

3. $A = \{x : x \in \mathbb{Z}, -2 < x \leq 4\}$, $B = \{x : x \in \mathbb{W}, x \leq 5\}$, మరియు $C = \{-4,-1,0,2,3,4\}$ అయిన $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ అని సరిచూడుము.

4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ను వెన్ చిత్రముల ద్వారా సరిచూడుము.

5. $A = \{b,c,e,g,h\}$, $B = \{a,c,d,g,i\}$ మరియు $C = \{a,d,e,g,h\}$ అయిన $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$ అని నిరూపించుము.

6. $A = \{x : x = 6n, n \in \mathbb{W}$ మరియు $n < 6\}$, $B = \{x : x = 2n, n \in \mathbb{N}$ మరియు $2 < n \leq 9\}$ మరియు $C = \{x : x = 3n, n \in \mathbb{N}$ మరియు $4 \leq n < 10\}$, అయిన $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$ నుసరిచూడుము

1-SET LANGUAGE.indd 29 04-03-2023 17:54:36

7. $A = \{-2,0,1,3,5\}$, $B = \{-1,0,2,5,6\}$ మరియు $C = \{-1,2,5,6,7\}$,అయిన $A-(B\cup C) = (A-B)\cap(A-C)$ నుసరిచూడుము.

8. $A = \{y : y = \frac{a+1}{2}, a\in\mathbb{W}$ మరియు $a \le 5\}$, $B = \{y : y = \frac{2n-1}{2}, n\in\mathbb{W}$ మరియు $n < 5\}$

మరియు $C = \left\{-1,-\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2\right\}$ అయిన, $A-(B\cup C) = (A-B)\cap(A-C)$ ను సరిచూడుము.

9. $A-(B\cap C) = (A-B)\cup(A-C)$ ను వెన్ చిత్రముల ద్వారా సరిచూడుము.

10. $U = \{4,7,8,10,11,12,15,16\}$, $A=\{7,8,11,12,\}$ మరియు $B = \{4,8,12,15\}$, అయిన సమితి పూరకమునకు డీమార్గన్ న్యాయములను సరిచూడుము.

11. $(A\cap B)' = A'\cup B'$ ను వెన్ చిత్రముల ద్వారా సరిచూడుము

1.8 సమితుల ఆదిసంఖ్య మరియు ప్రయోగాత్మక సమస్యలు:

మనము సమ్మేళన, ఛేదన, పూరక మరియు సమితి వ్యత్యాసము సమితులను నేర్చుకొనియున్నాము. ఇపుడు మనము నిత్యజీవితములోని కొన్ని ప్రయోగాత్మక సమస్యలను సమితుల మూలంగా కనుగొనుటకు ప్రయత్నించెదము.

ఫలితములు:

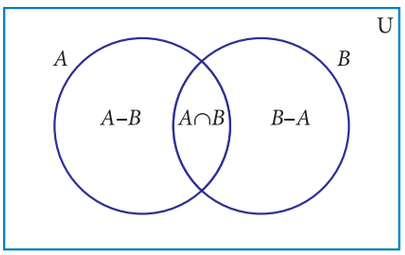
A మరియు B అంతమొందు సమితులయిన

(i) $n(A\cup B) = n(A)+n(B)- n(A\cap B)$

(ii) $n(A-B) = n(A) - n(A\cap B)$

(iii) $n(B-A) = n(B)- n(A\cap B)$

(iv) $n(A') = n(U) - n(A)$



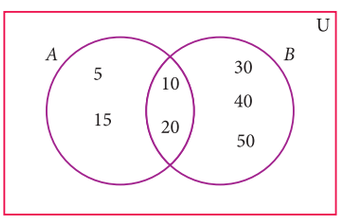
పటం. 1.32

సూచన

పైనున్న ఫలితముల నుండి మనము పొందునవి

- $n(A\cap B) = n(A)+n(B) - n(A\cup B)$
- $n(U) = n(A)+n(A')$
- A మరియు B వియుక్త సమితులు అయిన $n(A\cup B) = n(A)+n(B)$.

ఉదాహరణ 1.27 ఇవ్వబడిన వెన్‌చిత్రముల నుండి $n(A\cup B) = n(A)+n(B) - n(A\cap B)$ ను సరిచూడుము.



పటం. 1.33

సాధన:

$A = \{5, 10, 15, 20\}$

$B = \{10, 20, 30, 40, 50,\}$

ఇచ్చట $A\cup B = \{5, 10, 15, 20, 30, 40, 50\}$

1-SET LANGUAGE.indd 30 04-03-2023 17:54:37

$A \cap B = \{10, 20\}$

$n(A) = 4,\ n(B) = 5, n(A \cup B) = 7,\ n(A \cap B) = 2$

$n(A \cup B) = 7$ → (1)

$n(A)+n(B)-n(A \cap B) = 4+5-2$

$=7$ → (2)

(1) మరియు (2) నుండి, $n(A \cup B) = n(A)+n(B)-n(A \cap B)$.

ఉదాహరణ 1.28 $n(A) = 36,\ n(B) = 10,\ n(A \cup B)=40$, మరియు $n(A')=27$ అయిన $n(U)$ మరియు $n(A \cap B)$ కనుగొనుము.

సాధన $n(A) = 36,\ n(B) =10,\ n(A \cup B)=40,\ n(A')=27$

(i) $n(U) = n(A)+n(A') = 36+27 = 63$

(ii) $n(A \cap B) = n(A)+n(B)-n(A \cup B) = 36+10-40 = 46-40 = 6$

కృత్యము-4

సరియైన ఆదిసంఖ్యలతో పట్టికలోని ఖాళీలను పూర్తిచేయుము.

వ.సంఖ్య	$n(A)$	$n(B)$	$n(A \cup B)$	$n(A \cap B)$	$n(A-B)$	$n(B-A)$
1	30	45	65			
2	20		55	10		
3	50	65		25		
4	30	43	70			

ఉదాహరణ 1.29 $A=\{b, d, e, g, h\}$ మరియు $B = \{a, e, c, h\}$. అయిన $n(A-B) = n(A)-n(A \cap B)$. ను సరిచూడుము.

సాధన

$A = \{b, d, e, g, h\}, B = \{a, e, c, h\}$

$A - B = \{b, d, g\}$

$n(A-B) = 3$ ... (1)

$A \cap B = \{e, h\}$

$n(A \cap B) = 2,\quad n(A) = 5$

$n(A) - n(A \cap B) = 5\text{-}2$

$= 3$ ... (2)

(1) మరియు (2) నుండి, $n(A-B) = n(A)-n(A \cap B)$.

1-SET LANGUAGE.indd 31 04-03-2023 17:54:38

ఉదాహరణ 1.30

ఒక పాఠశాలలోని విద్యార్థులందరూ హాకీ లేక క్రికెట్టు లేక రెండింటిని ఆటలాడుదురు. 300 మంది హాకీ క్రీడను, 250 మంది క్రికెట్టు క్రీడను మరియు 110 మంది రెండు క్రీడలను ఆడుదురు అనిన

(i) హాకీ క్రీడను మాత్రము ఆడువారి సంఖ్య

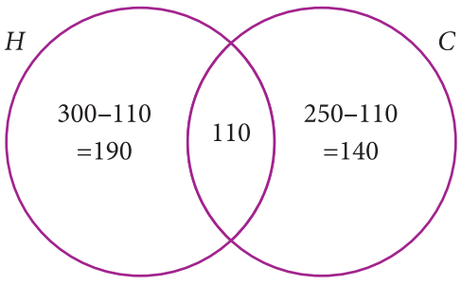
(ii) క్రికెట్టు క్రీడను మాత్రము ఆడువారి సంఖ్య

(iii) పాఠశాలలోని మొత్తము విద్యార్థుల సంఖ్యను కనుగొనుము..

సాధన:

హాకీ క్రీడను ఆడు విద్యార్థుల సమితి H అనుకొనుము. క్రికెట్టు క్రీడను ఆడు విద్యార్థుల సమితిని C అనుకొనుము.

ఇచ్చట $n(H) = 300$, $n(C) = 250$ మరియు $n(H \cap C) = 110$



పటం. 1.34

వెన్‌చిత్రము ఉపయోగించి సాధించుట

(i) హాకీ క్రీడను మాత్రము ఆడువారి సంఖ్య = 190

(ii) క్రికెట్టు క్రీడను మాత్రము ఆడువారి సంఖ్య = 140

(iii) పాఠశాలలోని మొత్తము విద్యార్థుల సంఖ్య = 190+110+140 =440

మరొక పద్ధతి

(i) హాకీ క్రీడను మాత్రము ఆడు విద్యార్థుల సంఖ్య

$$n(H-C) = n(H) - n(H \cap C)$$
$$= 300 - 110 = 190$$



(ii) క్రికెట్టు క్రీడను మాత్రము ఆడువారి సంఖ్య

$$n(C-H) = n(C) - n(H \cap C)$$
$$= 250 - 110 = 140$$

(iii) పాఠశాలలో ఉన్న మొత్తము విద్యార్థుల సంఖ్య

$$n(H \cup C) = n(H) + n(C) - n(H \cap C)$$
$$= 300+250 - 110 = 440$$

ఉదాహరణ 1.31

ఒక విందుభోజనములో 60 మంది కలుసుకొన్నారు. వారిలో 35 మంది వెన్నిలా ఐస్‌క్రీం మరియు 30 మంది చాక్లెట్ ఐస్‌క్రీం తీసుకొన్నారు. విందులో పాల్గొన్న వారందరు కనీసం ఒక ఐస్‌క్రీం తీసుకొన్నయెడల

(i) వెన్నిలా మరియు చాక్లెట్ ఐస్‌క్రీం రెండింటిని తీసుకొన్న వారి సంఖ్య.

(ii) వెన్నిలా ఐస్‌క్రీం మాత్రమే తీసుకొన్నవారి సంఖ్య.

(iii) చాక్లెట్ ఐస్‌క్రీం మాత్రమే తీసుకొన్నవారి సంఖ్యను కనుగొనుము.

1-SET LANGUAGE.indd 32 04-03-2023 17:54:38

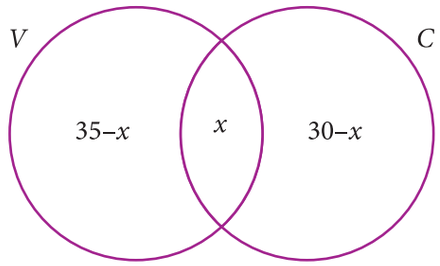
సాధన :

వెన్నిలా ఐస్‌క్రీం తీసుకొన్న వారి సమితిని V అనుకొనుము మరియు చాక్లెట్ ఐస్‌క్రీం తీసుకొన్న వారి సంఖ్య సమితిని C అనుకొనుము.

కావున ఇచ్చిన $n(V) = 35$, $n(C) = 30$, $n(V \cup C) = 60$,

పైగా రెండింటిని తీసుకొన్నవారి సంఖ్య x అనుకొనుము.

వెన్‌చిత్రము నుండి



పటం. 1.35

$$35 - x + x + 30 - x = 60$$

$$65 - x = 60$$

$$x = 5$$

కావున రెండు రకములైన ఐస్‌క్రీములను తీసుకొన్నవారి సంఖ్య 5

(i) వెన్నిలా ఐస్‌క్రీమును మాత్రము తీసుకొన్నవారి సంఖ్య $= 35 - x$

$= 35 - 5 = 30$

(ii) చాక్లెట్ ఐస్‌క్రీమును మాత్రము తీసుకొన్న వారి సంఖ్య $= 30 - x$

$= 30 - 5 = 25$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$. అను సూత్రమునుపయోగించి రెండు సమితులను కలిగిన సమస్యలను సాధించుటను తెలుసుకొంటిమి. మూడు సమితులు గల సమస్యలను ఇచ్చిననూ, పై పద్ధతినుపయోగించి మనము సూత్రమును కనుగొనవచ్చును.

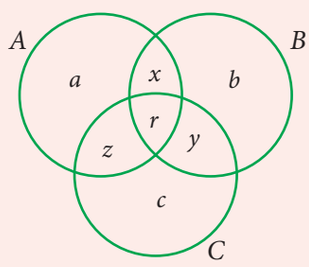
A, B మరియు C అనునవి ఏవేని మూడు సమితులైన,

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

సూచన

వెన్ చిత్రముల ద్వారా సమస్యలను సాధించుట ఈ క్రింది ఫలితములు ప్రయోజనకరముగా నుండును A, B మరియు C అను మూడు సమితులు విద్యార్థులను సూచించును. వెన్ చిత్రము నుండి A సమితి నందలి విద్యార్థులు మాత్రము $A = a$, B నందలి మాత్రము $B = b$, C నందలి మాత్రము $C = c$.

- ఒకే ఒక సమితి నందలి మాత్రము గల విద్యార్థుల మొత్తము $= (a + b + c)$
- రెండు సమితుల యందలి మాత్రము గల విద్యార్థుల మొత్తము $= (x + y + z)$
- మూడు సమితుల యందలి మాత్రము గల విద్యార్థుల మొత్తము $= r$
- కనీసము రెండు సమితుల యందలి గల విద్యార్థుల మొత్తము (రెండు లేదా అంతకన్నా ఎక్కువ సమితులు) $= (x + y + z + r)$
- మూడు సమితుల యందలి గల విద్యార్థుల మొత్తము $= (a + b + c + x + y + z + r)$



పటం.1.36

1-SET LANGUAGE.indd 33 04-03-2023 17:54:39

ఉదాహరణ 1.32 ఒక కళాశాల యందలి విద్యార్థులలో క్రికెట్ 240 మంది, ఫుట్‌బాల్ 180 మంది, హాకి 164 మంది, క్రికెట్ మరియు ఫుట్‌బాల్ 42 మంది, ఫుట్‌బాల్ మరియు హాకి 38 మంది, క్రికెట్ మరియు హాకి 40 మంది, మూడింటిని 16 మంది ఆడెదరు. ప్రతి ఒక్క విద్యార్థి కనీసం ఏదేని ఒక ఆటలో పాల్గొనిన, (i) కళాశాల యందలి మొత్తము విద్యార్థుల సంఖ్య (ii) ఒకే ఒక ఆటను మాత్రమే ఆడు విద్యార్థుల సంఖ్యను కనుగొనుము.

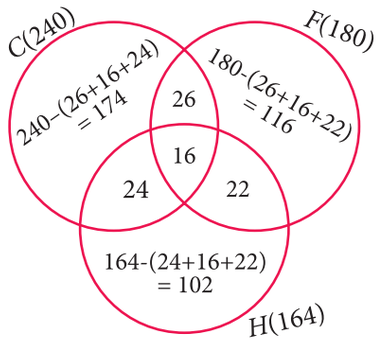
సాధన

C అనునది క్రికెట్, F అనునది ఫుట్‌బాల్ మరియు H అనునది హాకీగా తీసుకొనగా

$$n(C) = 240,\ n(F) = 180,\ \ n(H) = 164,\ n(C \cap F) = 42,$$

$$n(F \cap H) = 38,\ n(C \cap H) = 40,\ n(C \cap F \cap H) = 16.$$

ఇవ్వబడిన వివరములను వెన్ చిత్రములో గుర్తించెదము..



పటం.1.37

(i) కళాశాలలో గల మొత్తము విద్యార్థుల సంఖ్య

$= 174+26+116+22+102+24+16 = 480$

(ii) ఒకే ఒక ఆటను మాత్రమే ఆడు విద్యార్థుల సంఖ్య

$= 174+116+102 = 392$

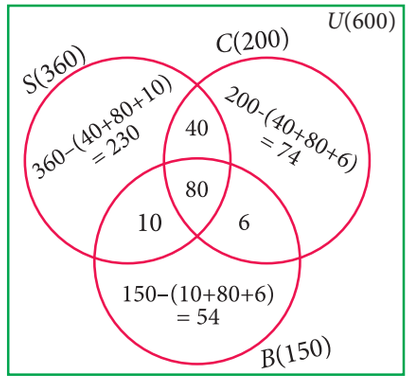
ఉదాహరణ 1.33 ఒక గ్రామము నందలి నివసించు 600 కుటుంబములలో స్కూటర్ కలిగినవారు $\frac{3}{5}$ వ భాగము, కారు కలిగిన వారు $\frac{1}{3}$ వభాగము మరియు సైకిల్ కలిగిన వారు $\frac{1}{4}$ వ భాగము, స్కూటర్ మరియు కారు కలిగిన వారు 120 కుటుంబములు, కారు మరియు సైకిలు కలిగినవారు 86 కుటుంబములు, స్కూటర్ మరియు సైకిలు కలిగిన వారు 90 కుటుంబములు మూడింటిని కలిగినవారు $\frac{2}{15}$ భాగము యున్నయెడల (అ) కనీసము రెండు రకముల వాహనములను కలిగిన కుటుంబముల సంఖ్య, (ఆ) ఏ రకపు వాహనము లేని కుటుంబముల సంఖ్యను కనుగొనుము?

సాధన S అనునది స్కూటర్, C అనునది కారు మరియు B అనునది సైకిల్‌గా తీసుకొనిన

ఇవ్వబడినది, $n(\mathrm{U}) = 600 \quad n(S) = \frac{3}{5} \times 600 = 360$

$$n(C) = \frac{1}{3} \times 600 = 200 \quad n(B) = \frac{1}{4} \times 600 = 150$$

$$n(S \cap C \cap B) = \frac{2}{15} \times 600 = 80$$



పటం.1.38

1-SET LANGUAGE.indd 34 04-03-2023 17:54:41

వెన్ చిత్రము నుండి,

(i) కనీసము రెండు రకముల వాహనములను కలిగిన వారి సంఖ్య = 40+6+10+80 = 136 మంది

(ii) ఏ రకపు వాహనము లేనివారి సంఖ్య = 600 – (కనీసము ఒక వాహనము గలవారు)

$$= 600 - (230 + 40 + 74 + 6 + 54 + 10 + 80)$$
$$= 600 - 494 = 106$$

ఉదాహరణ 1.34 100 మంది విద్యార్థులు గల గ్రూపు నందు, తమిళము 85 మంది, ఆంగ్లము 40 మంది, ఫ్రెంచి 20 మంది, తమిళము మరియు ఆంగ్లము 32 మంది, ఆంగ్లము మరియు ఫ్రెంచి 13 మంది, తమిళము మరియు ఫ్రెంచి 10 మంది మాట్లాడగలరు. గ్రూపు నందలి ప్రతి విద్యార్థి కనీసము ఏదేని ఒక భాష మాట్లాడెదరు. అయిన మూడు భాషలను మాట్లాడు విద్యార్థుల సంఖ్యను కనుగొనుము?

సాధన A- తమిళము, B- ఆంగ్లము మరియు C- ఫ్రెంచి భాషలను తెలియజేయును..

ఇవ్వబడినది, $n(A \cup B \cup C) = 100,\ n(A) = 85,\ n(\mathrm{B}) = 40,\ n(\mathrm{C}) = 20,$
$n(\mathrm{A} \cap B) = 32,\ n(\mathrm{B} \cap C) = 13,\ n(\mathrm{A} \cap C) = 10.$

సూత్రం ప్రకారము,

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(\mathrm{C}) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$
$$100 = 85 + 40 + 20 - 32 - 13 - 10 + n(A \cap B \cap C)$$

అయిన, $n(A \cap B \cap C) = 100 - 90 = 10$

కనుక, 10 విద్యార్థులు మూడు భాషలు మాట్లాలగలరు.

ఉదాహరణ 1.35 A,B మరియు C అను మూడు రకముల మాస పత్రికల (magazines) చందాదారులలో 200 మందిని సర్వేచేయగా, వారిలో 75 మంది A పత్రికను కొనుట లేదు, 100 మంది B పత్రికను కొనుట లేదు, 50 మంది C పత్రికను కొనుట లేదు మరియు 125 మంది కనీసము రెండు పత్రికలను కొనుచున్నారని తెలిసినది, అందులో

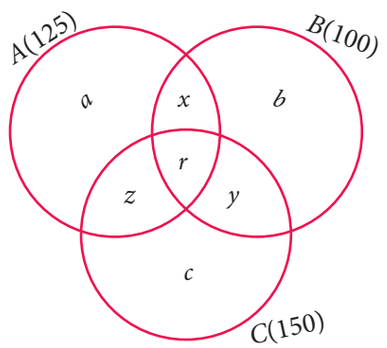
(i) రెండు పత్రికలను మాత్రమే కొనువారు సంఖ్య ఎంత?.

(ii) ఏదేని ఒకే ఒక పత్రికను మాత్రము కొనువారు సంఖ్య ఎంత?

సాధన

మొత్తము చందాదారుల సంఖ్య 200

పత్రిక	కొననివారు	కొనువారు
A	75	125
B	100	100
C	50	150



పటం.1.39

వెన్ చిత్రము నుండి,

ఒకే ఒక పత్రికను మాత్రము కొనువారు $= a + b + c$

1-SET LANGUAGE.indd 35 04-03-2023 17:54:43

రెండు పత్రికలను మాత్రమే కొనువారు సంఖ్య $= x + y + z$

మరియు కనీసము రెండు పత్రికలను కొనువారు 125 మంది.

అనగా, $x + y + z + r = 125$ ... (1)

ఇప్పుడు, $n(A \cup B \cup C) = 200$, $n(A) = 125$, $n(B) = 100$, $n(C) = 150$, $n(A \cap B) = x + r$

$n(B \cap C) = y + r$, $n(A \cap C) = z + r$, $n(A \cap B \cap C) = r$

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$200 = 125+100+150-x-r-y-r-z-r+r$$

$$= 375-(x+y+z+r)-r$$

$$= 375-125-r \quad \left[\because\ x + y + z + r = 125\right]$$

$$200 = 250-r \qquad \Rightarrow\ r = 50$$

సమీకరణము (1) నుండి $x + y + z + 50 \ \ 125$

$$x + y + z \ \ 75$$

కనుక, రెండు పత్రికలను మాత్రమే కొనువారు సంఖ్య 75 మంది

వెన్ చిత్రము నుండి,

$$(a + b + c) + (x + y + z + r) = 200 \quad \text{... (2)}$$

(1) ని (2) లో ప్రతిక్షేపించగా,

$$a + b + c + 125 = 200$$

$$a + b + c = 75$$

ఒకే ఒక పత్రికను మాత్రమే కొనువారు సంఖ్య 75 మంది.

అభ్యాసము 1.6

1. (i) $n(A) = 25$, $n(B) = 40$, $n(A \cup B) = 50$ మరియు $n(B') = 25$, అయిన $n(A \cap B)$ మరియు $n(U)$ విలువను కనుగొనుము.

   (ii) $n(A) = 300$, $n(A \cup B) = 500$, $n(A \cap B) = 50$ అయిన $n(B') = 350$, అయిన $n(B)$ మరియు $n(U)$ ను కనుగొనుము.

2. $U = \{x : x \in \mathbb{N}, x \leq 10\}$, $A = \{2,3,4,8,10\}$ మరియు $B = \{1,2,5,8,10\}$, అయిన $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ సరిచూడుము.

1-SET LANGUAGE.indd 36 04-03-2023 17:54:44

3. ఈ క్రింది సమితులకు $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$ ను సరిచూడుము.

(i) $A = \{a, c, e, f, h\}$, $B = \{c, d, e, f\}$ మరియు $C = \{a, b, c, f\}$

(ii) $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 3, 5, 6\}$ మరియు $C = \{1, 5, 6, 7\}$

4. ఒక తరగతిలో గల విద్యార్థులు సంగీతము లేక నాటకము లేక రెండింటిలోను పాల్గొందురు. 25 మంది విద్యార్థులు సంగీతములోను, 30 మంది విద్యార్థులు నాటకములోను మరియు 8 మంది విద్యార్థులు సంగీతము మరియు నాటకము రెండింటిలోను పాల్గొనుదురు అనిన

(i) సంగీతంలో మాత్రము పాల్గొన్న విద్యార్థుల సంఖ్య.

(ii) నాటకములో మాత్రము పాల్గొన్న విద్యార్థుల సంఖ్య.

(iii) తరగతిలోని మొత్తము విద్యార్థుల సంఖ్యను కనుగొనుము.

5. ఒక గుంపులో 45 మందిలో ప్రతి ఒక్కరూ టీ లేక కాఫీ లేక రెండింటిని ఇష్టపడుదురు. 35 మంది టీ మరియు 20 మంది కాఫీని ఇష్టపడుదురు. క్రింద తెలిపిన సమూహము యొక్క సంఖ్యను కనుగొనుము.

(i) టీ మరియు కాఫీ రెండింటిని ఇష్టపడువారు (ii) టీ ఇష్టపడనివారు

(iii) కాఫీ ఇష్టపడనివారు.

6. ఒక పరీక్షలో గణితశాస్త్రములో 50% విద్యార్థులు ఉత్తీర్ణులైనారు మరియు 70% విద్యార్థులు సామాన్య శాస్త్రములో ఉత్తీర్ణులైనారు. ఇంకను 10% విద్యార్థులు రెండింటిలోను ఉత్తీర్ణులు కాలేదు. 300 మంది విద్యార్థులు రెండు పాఠ్యాంశములలో ఏదో ఒక పాఠ్యాంశములో ఉత్తీర్ణులైనారు. ఈ రెండు పాఠ్యాంశములను మాత్రమే పరీక్షలు వ్రాసిన యెడల పరీక్షలు వ్రాసిన వారి సంఖ్యను కనుగొనుము.

7. A మరియు B అనునవి రెండు సమితులు, $n(A-B) = 32 + x$, $n(B-A) = 5x$ మరియు $n(A \cap B) = x$. ఉండునట్లు అమరును. వీటిని వెన్‌చిత్రముల మూలంగా గుర్తించుము. $n(A) = n(B)$, అయిన x యొక్క విలువను కనుగొనుము.

8. 500 మంది కార్ల యజమానుల విచారణలో 400 మంది A రకపు కార్లను, 200 మంది B, రకపు కార్లను, 50 మంది , A మరియు B రకపు కార్లు రెండింటిని కలిగియున్నారు. ఈ దత్తాంశము సరియైనదా?

9. ఒక కాలనీలో నివసించు కుటుంబములలో తమిళ వార్తాపత్రిక కొనువారు 275 కుటుంబములు, ఆంగ్ల వార్తాపత్రిక 150 కుటుంబములు, హిందీ వార్తాపత్రిక 45 మంది, తమిళము మరియు ఆంగ్లము 125 కుటుంబములు, ఆంగ్లము మరియు హిందీ 17 కుటుంబములు, తమిళము మరియు హిందీ 5 కుటుంబములు, మూడింటిని కొనువారు 3 కుటుంబములు అయిన, వారిలో ప్రతి ఒక్క కుటుంబము ఏదేని ఒక వార్తాపత్రికను ఖచ్చితముగా కొనెదురు. అయిన

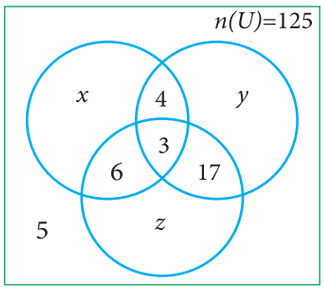
(i) ఒకే ఒక వార్తాపత్రికను మాత్రము కొనుకుటుంబములు సంఖ్య ఎంత?

(ii) కనీసము రెండు వార్తా పత్రికలను కొనుకుటుంబములు సంఖ్య ఎంత?

(iii) కాలనీలోని మొత్తము కుటుంబముల సంఖ్య కనుగొనుము.

1-SET LANGUAGE.indd 37 04-03-2023 17:54:45

10. 1000 మంది వ్యవసాయదారులను సర్వే చేయగా వరిని పండించువారు 600 మంది, రాగి పండించువారు 350 మంది, మొక్కజొన్నలు పండించువారు 280 మంది, వరి మరియు రాగిని 120 మంది, రాగి మరియు మొక్కజొన్నలు 100 మంది, వరి మరియు మొక్కజొన్నలు 80 మంది పండించిరి . ప్రతి వ్యవసాయదారుడు కనీసము ఏదేని ఒక పంట పండించుచున్న యెడల మూడు రకముల పంటలను పండించువారు ఎంత మంది?



11. ప్రక్క పటము నుండి, $n(\mathrm{U}) = 125$, y అనునది x యొక్క రెండు రెట్లు మరియు z అనునది x కంటే 10 ఎక్కువ అయిన, x, y మరియు z. విలువలను కనుగొనుము?

12. ఒక తరగతిలో 35 విద్యార్థులు గలరు. వారు చెస్, క్యారం మరియు టేబుల్ టెన్నిస్ ఆటలలో కనీసము ఏదేని ఒక ఆట ఆడగలరు. వారిలో చెస్‌ను 22 మంది, క్యారమ్‌ను 21 మంది, టేబుల్ టెన్నిస్ 15 మంది, చెస్ మరియు క్యారమ్ 10 మంది, టేబుల్ టెన్నిస్ మరియు క్యారమ్ 8 మంది, మూడింటిని 6 మంది ఆడగలరు. అయిన,
    (i) చెస్ మరియు క్యారమ్ ఆడి, టేబుల్ టెన్నిస్ ఆడనివారి సంఖ్య?
    (ii) చెస్ మాత్రమే ఆడేవారి సంఖ్య?
    (iii) క్యారమ్ మాత్రమే ఆడేవారి సంఖ్య? (వెన్ చిత్రమును ఉపయోగించి)

13. ఒక తరగతి యందలి గల 50 విద్యార్థులు పాఠశాలకు బస్సులో లేక సైకిల్‌పై లేక నడిచి వచ్చెదరు. అందులో బస్సులో 25 మంది, సైకిల్‌పై 20 మంది, నడిచి వచ్చేవారు 30 మంది, మూడింటి ద్వారా వచ్చువారు 10 మంది, అయిన ఏవేని రెండింటి ద్వారా మాత్రమే పాఠశాలకు వచ్చు విద్యార్థులు ఎందరు?

అభ్యాసము 1.7

TQPG8

బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు

1. క్రింది వానిలో సరియైనది ఏది?
    (1) $\{7\} \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ (2) $7 \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$
    (3) $7 \notin \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ (4) $\{7\} \nsubseteq \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

2. సమితి $P = \{x \mid x \in \mathbb{Z}\ , -1 < x < 1\}$అనునది
    (1) ఏక మూలక సమితి (21) ఘాత సమితి (3) శూన్యసమితి (4) ఉపసమితి

3. $\mathrm{U} = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 10\}$ మరియు $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 2 \le x < 6\}$ అయిన యెడల $(A')'$ అనునది
    (1) {1, 6, 7, 8, 9} (2) {1, 2, 3, 4} (3) {2, 3, 4, 5} (4) { }

4. $B \subseteq A$ అయిన $n(A \cap B)$ అనునది
    (1) $n(A-B)$ (2) $n(B)$ (3) $n(B - A)$ (4) $n(A)$

1-SET LANGUAGE.indd 38 04-03-2023 17:54:46

5. $A = \{x, y, z\}$ అయిన A యొక్క శూన్యసమితి కాని ఉపసమితుల సంఖ్య

(1) 8 (2) 5 (3) 6 (4) 7

6. క్రిందివానిలో సరియైనది ఏది?

(1) $\varnothing \subseteq \{a, b\}$ (2) $\varnothing \in \{a, b\}$ (3) $\{a\} \in \{a, b\}$ (4) $a \subseteq \{a, b\}$

7. $A \cup B = A \cap B$, అయిన

(1) $A \neq B$ (2) $A = B$ (3) $A \subset B$ (4) $B \subset A$

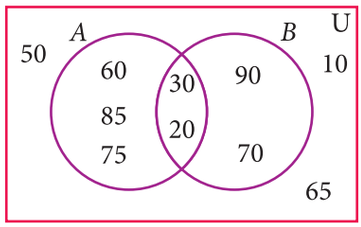
8. $B - A$ అనునది B, అయిన $A \cap B$ అనునది

(1) A (2) B (3) U (4) $\varnothing$

9. ప్రక్కనున్న చిత్రము నుండి $n[P(A \Delta B)]$ ను కనుగొనుము.

(1) 8 (2) 16

(3) 32 (4) 64



పటం. 1.40

10. $n(A) = 10$ మరియు $n(B) = 15$, అయిన సమితి $A \cap B$ లో ఉండు అత్యల్ప మరియు అధిక మూలకముల సంఖ్య

(1) 10,15 (2) 15,10 (3) 10,0 (4) 0,10

11. $A = \{\varnothing\}$ మరియు $B = P(A)$, అయిన $A \cap B$ అనునది

(1) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ (2) $\{\varnothing\}$ (3) $\varnothing$ (4) $\{0\}$

12. ఒక తరగతిలో ఉన్న 50 మంది విద్యార్థులలో క్యారమ్ Carrom board 35 మంది, చదరంగం 20 మంది ఆడుదురు అనిన రెండు ఆటలను ఆడువారి సంఖ్య

(1) 5 (2) 30 (3) 15 (4) 10.

13. $U = \{x : x \in \mathbb{N}$ మరియు $x < 10\}$, $A = \{1,2,3,5,8\}$ మరియు $B = \{2,5,6,7,9\}$, అయిన $n[(A \cup B)']$ విలువ?

(1) 1 (2) 2 (3) 4 (4) 8

14. P, Q మరియు R, అనునది ఏవేని మూడు సమితులైన, $P - (Q \cap R)$ కు సమానమైనది.

(1) $P - (Q \cup R)$ (2) $(P \cap Q) - R$

(3) $(P - Q) \cup (P - R)$ (4) $(P - Q) \cap (P - R)$

15. క్రింది వాటిలో ఏది సత్యము?

(1) $A - B = A \cap B$ (2) $A - B = B - A$

(3) $(A \cup B)' = A' \cup B'$ (4) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

1-SET LANGUAGE.indd 39 04-03-2023 17:54:48

16. If $n(A \cup B \cup C) = 100,\ n(A) = 4x,\ n(B) = 6x,\ n(C) = 5x,\ n(A \cap B) = 20,$ $n(B \cap C) = 15,\ n(A \cap C) = 25$ మరియు $n(A \cap B \cap C) = 10$, అయిన x విలువ

(1) 10 (2) 15 (3) 25 (4) 30

17. A, B మరియు C. అనునవి ఏవైనా మూడు సమితులైన $(A - B) \cap (B - C)$ లకు సమానమైనది.

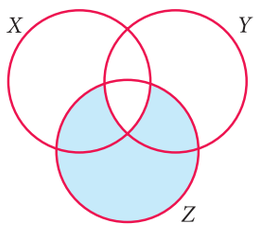
(1) A మాత్రమే (2) B మాత్రమే (3) C మాత్రమే (4) ϕ

18. J అనునది మూడు భుజములు కలిగిన ఆకారముల సమితి, K అనునది ఏవేని రెండు సమాన భుజములు కలిగిన ఆకారముల సమితి మరియు L అనునది లంబకోణము కలిగిన ఆకారముల సమితి అయిన $J \cap K \cap L$ అనునవి

(1) సమద్విబాహు త్రిభుజముల సమితి (2) సమబాహు త్రిభుజముల సమితి

(3) లంబ సమద్విబాహు త్రిభుజముల సమితి (4) లంబకోణ త్రిభుజముల సమితి

19. వెన్ చిత్రమునందలి ఛాయ వేయబడిన భాగము



(1) $Z - (X \cup Y)$ (2) $(X \cup Y) \cap Z$

(3) $Z - (X \cap Y)$ (4) $Z \cup (X \cap Y)$

20. ఒక నగరము నందలి ప్రజలలో ఒకే రకమైన పండును మాత్రమే ఇష్టపడే వారు 40%, రెండు రకముల పండ్లను మాత్రము ఇష్టపడేవారు 35%, మూడు రకముల పండ్లను ఇష్టపడేవారు 20% గలరు. అయిన మూడురకపు పండ్లను ఇష్టపడనివారి శాతము ఎంత?

(1) 5 (2) 8 (3) 10 (4) 15

గుర్తించుకోవలసిన విషయములు

- సమితి అనునది బాగుగా నిర్వచింపబడిన వస్తువుల సమూహము అగును.
- సమితులు మూడు పద్ధతులలో సూచించబడుచున్నవి. (i) వర్ణన పద్ధతి (ii) సమితి నిర్మాణ పద్ధతి (iii) రోస్టర్ పద్ధతి (జాబితాపద్ధతి).
- A సమితిలోని ప్రతి మూలకము B సమితిలోని మూలకములుగా నున్న యెడల A సమితిని B, సమితి యొక్క ఉపసమితి అందురు. దీనిని సాంకేతికంగా
- $A \subseteq B$ మరియు $A \neq B$, అయిన A సమితి, B సమితికి శుద్ధ ఉపసమితి అగును.
- A అను సమితి యొక్క ఉపసమితులన్నింటిని ఒక సమితిగా వ్రాయుటను ఘాత సమితి అందురు. దీనిని $P(A)$ అని సూచింతురు.
- m మూలకములు గల సమితి యొక్క ఉపసమితుల సంఖ్య 2^m అగును
- m మూలకములు గల సమితి యొక్క శుద్ధ ఉపసమితుల సంఖ్య $\mathbf{2^m - 1}$ అగును.

1-SET LANGUAGE.indd 40 04-03-2023 17:54:50

- A మరియు B అనునది వియుక్త సమితులయిన $A \cap B = \varnothing$ అగును. $A \cap B \neq \varnothing$ అయిన, A మరియు B అను రెండు సమితులను సంయుక్త సమితులందురు.
- A మరియు B రెండు సమితుల వ్యత్యాసము అనునది A లో గల, B లో లేని మూలకాలను కలిగిన సమితి అగును. రెండు సమితుల వ్యత్యాసమును $A-B$ అని సూచింతురు.
- A మరియు B ల సౌష్టవ భేదమును $A-B$ మరియు $B-A$ ల సమ్మేళనముగా నిర్వచింపవచ్చును. దీనిని $A \Delta B$ అని సూచింతుము.

- **స్థిత్యంతర న్యాయము**

  A మరియు B, అనునవి ఏవేని మూడు సమితులైన

  $A \cup B = B \cup A \quad ; \quad A \cap B = B \cap A$

- **సహచర్య న్యాయము**

  A, B మరియు C అనునవి ఏవేని మూడు సమితులైన

  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \quad ; \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

- **విభాగ న్యాయము**

  A, B మరియు C అనునవి ఏవేని మూడు సమితులైన

  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ [సమ్మేళనముపై ఖండనము]

  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ [ఛేధనముపై సమ్మేళనము]

- **సమితి భేదములకు డీమార్గన్ న్యాయములు**

  A, B మరియు C అనునవి ఏవేని మూడు సమితులైన

  $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

  $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

- **సమితి పూరకములకు డీమార్గన్ న్యాయములు**

  A, B అనునవి U అను విశ్వసమితి యొక్క ఉపసమితులైన యొడల

  $(A \cup B)' = A' \cap B' \quad ; \quad (A \cap B)' = A' \cup B'$

- **సమితుల యొక్క ఆది సంఖ్య**

  A మరియు B అనునవి ఏవేని రెండు సమితులు అయినప్పుడు $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

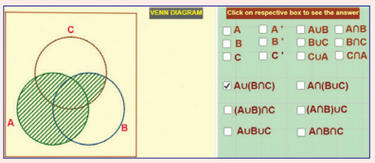
  A, B మరియు C అనునవి ఏవేని మూడు సమితులు అయిన

  $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

1-SET LANGUAGE.indd 41 04-03-2023 17:54:52

అంతర్జాల కృత్యము 1

ఈ చిత్రపటములో ఎదురుచూచు (ఆశించు) ఫలితము చూపబడినది.



Sసోపానము – 1 : బ్రౌసరునుOpen చేసి క్రింద ఇవ్వబడిన URL Link ను type చేసి (లేదా) QR Code ను Scan చేయండి. GeoGebra అను పేజీ నందు సమితి పరిభాష (Set Language) అని కనబడును.ఆ పేజీ నందు రెండు కృత్యములు ఉండును. 1. రెండు సమితులకు సంబంధించిన వెన్ చిత్రములు మరియు 2. మూడు సమితులకు సంబంధించి వెన్ చిత్రములు మొదటి కృత్యము నందు కావలసిన రంగువేయబడిన మరియు విశ్లేషించిన వాటిని చూచుటకు పెట్టెల (boxes) కుడి భాగమున Click చేయవలయును.

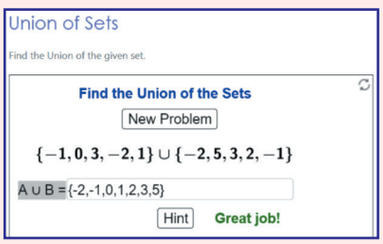
సోపానము - 2 : మూడు సమితుల పరిక్రియలకు అదేవిధముగా రెండవ కృత్యము చేయుము.

Browse in the link

Set Language: https://ggbm.at/BrG952dw or Scan the QR Code.

అంతర్జాల కృత్యము 2

ఈ చిత్రపటములో ఎదురుచూచు (ఆశించు) ఫలితము కనబడును.



మెట్టు –1

బ్రౌసరును Open చేసి క్రింద ఇవ్వబడిన Link ను copy చేసి paste చేయండి లేదా ఇవ్వబడిన URL ను typing చేయండి లేదా QR కోడ్‌ను Scan చేయండి.

మెట్టు–2

“Union of Sets” అని GeoGebra పేజీలో కనబడును. క్రొత్త సమస్యలను చేసి చూచుటకు “NEW PROBLEM ను క్లిక్ (Click) చేయండి.

మెట్టు –3

ప్రశ్నకు తగిన జవాబును ఇవ్వబడిన బాక్స్‌లో Enter చేయండి. ఏదైన సందేహమున్నచో “HINT” ను క్లిక్ చేయండి.

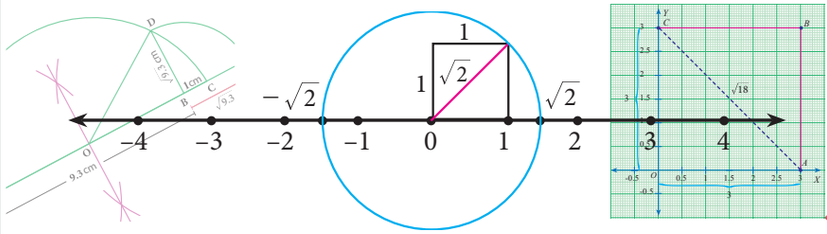
మెట్టు–4

జవాబు సరియైనచో “GREAT JOB” అని తెరపై కనబడును. జవాబు తప్పు అయినచో “Try Again!” అని తెరలో కనబడును. 5 లెక్కలను వరుసగా చక్కగా చేయు వరకు మరల మరల క్రొత్త లెక్కలను చేసి నేర్చుకోండి.

Browse in the link

Union of Sets: https://www.geogebra.org/m/ufxdh47G

1-SET LANGUAGE.indd 42 04-03-2023 17:54:52



2

వాస్తవ సంఖ్యలు

"గణనము చేయునపుడు సామాన్యముగా ప్రజలకు ఏమి కావలయును అని నేను పరిగణించినపుడు, అది ఒక సంఖ్య అని నేను కనుగొంటిని".

- Al-Khwarizmi



Al-Khwarizmi
(A D (CE) 780 - 850)

గణితము నుండు ప్రత్యేక సంఖ్యలైన "కరణులు" (surds) అను అంశమును, ఆల్-క్యారిజ్‌మి (Al-Khwarizmi) అను పారశీక గణిత మేధావి గుర్తించి, ఘనత పొందినారు. అతడు కరణీయ సంఖ్యలను "చెవి వినబడని" (inaudible) అను అర్థముతో గుర్తించెను. తరువాత అది లాటిన్ భాషలో "సర్‌డస్" (surdus) అను పదముతో అనువదించబడినది. గణితములో ఒక మూలమును అకరణీయ సంఖ్యగా వ్రాయుటకు వీలుకానిచో, దానిని కరణి (surd) అని అందురు. (surdus అనగా చెవిటి లేక వినబడని deaf or mute అని లాటిన్ భాష యందు అర్థము.

అభ్యసన ఫలితములు

- ఇవ్వబడిన ఏవేని రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్యలో అపరిమితమైన అకరణీయ సంఖ్యలుంటాయని తెలుసుకొనుట.
- సంఖ్యారేఖపై అకరణీయ మరియు కరణీయ సంఖ్యలను గుర్తించుట మరియు వాటిని దశాంశ రూపంలోకి మార్చుట.
- కరణులను గుర్తించుట
- సంఖ్యారేఖపై వాస్తవ సంఖ్యలను గుర్తించుట.
- కరణులను ఉపయోగించి ప్రాథమిక పరిక్రియలైన కూడిక, తీసివేత, గుణకారము మరియు భాగహారములను చేసిచూచుట.
- హారములోని కరణులను అకరణీయం చేయుట.
- సాంకేతిక సూచనలను అర్థం చేసుకొనుట.

2.1 పరిచయం

సంఖ్యలు! సంఖ్యలు! ఎక్కడ చూసినా! సంఖ్యలు!

- మీ ఇంట్లో 'ఫోన్' వుందా! ఉంటే అందులోని డయల్‌లో ఎన్ని అంకెలున్నవీ?
- నీవు నివసించు స్థలము యొక్క పిన్‌కోడ్ సంఖ్య ఎంత? అది ఏ విధముగా ఉపయోగపడుచున్నది
- నీవు వాహనమును స్టాండులో నిలుపునప్పుడు చీటి తీసుకొనగలవా? దాని ఉపయోగమేమి?
- 24 కారెట్ల బంగారంను నీవు చేతితో పట్టకున్నావా? దాని శుద్ధతను ఏ విధముగా తీర్మానించెదవు?

2-Real Numbers.indd 43 04-03-2023 18:15:32



- నీ కళ్ళజోడు యొక్క సామర్థ్యం ఎంత?
- మీ ఇంటిలో వున్న తొట్టిలో ఎంత నీరు పట్టును?
- నీ స్నేహితునికి జ్వరము వచ్చినప్పుడు అతని శరీరపు ఉష్ణోగ్రత ఎంత

ఇంత వరకు ఎన్నో రకములైన సంఖ్యలను గూర్చి నేర్చుకొన్నదానిని ఇప్పుడు విస్తరించి నేర్చుకొనవలసిన సమయమిది.

2.2 అకరణీయ సంఖ్యలు (Rational Numbers)

నీ యొక్క భీరువాలోని పుస్తకములను లెక్కించుటకు నీవు 1,2,3,.....మొదలగునవి అని లెక్కించెదవు ఈ లెక్కించు సంఖ్యలను సహజ సంఖ్యలు (1, 2, 3, ... ,) అని అందురు. నీకు ఈ సంఖ్యలను సంఖ్యారేఖపై చూపించుటకు తెలుసు



పటం. 2.1

అన్ని సహజ సంఖ్యల సమితిని $\mathbb{N}$ అని సూచిందురు.

$$\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, \dots \}$$

నీ భీరువాలో 5 పుస్తకములున్నవి అనుకొనెదము. వాటిలో ఒకటి తర్వాత ఒకటి తీసిన అందులోని సంఖ్య తగ్గుతూ వచ్చును. ఒకటి తీసిన 4 మిగులును. ఇంకొకటి తీసిన 3 మిగులును. తర్వాత ఇంకొకటి తీసిన 2 మిగులును. ఆ రెండు తీసి వేసిన ఆ భీరువాలో పుస్తకాలే వుండవు. ఈ స్థితిని '0' అని చూచింతుము. అది ఏమి లేదు అని సూచించును. పుస్తకములు లేవు అని చెప్పవలెనన్న పుస్తకముల సంఖ్య '0' (సున్న) అని వ్రాయుదుము. 0 ను ఒక అంకెగా తీసికొని 0,1,2,3,..... అని వ్రాసినా అవి పూర్ణాంకములు **(Whole numbers.)** అగును. ఈ అదనపు అంకెను చేర్చి సంఖ్యా రేఖపై క్రింది విదముగా సూచిస్తాము.



పటం. 2.2

ఈ పూర్ణాంకముల సమితిని $\mathbb{W}$ అని సూచిస్తాము.

$$\mathbb{W} = \{ 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

కొన్ని గుర్తుల వలన అనేక రకములైన సంఖ్యలు ఉద్భవించును. కొన్ని గుర్తులను ఒప్పుకొన్నట్లైతే "+" అను గుర్తును ధనాత్మకముగను "–" అను గుర్తును ఋణాత్మకముగను తీసికొనిన సంఖ్యారేఖపై '0' నుండి ఎగువకు, కుడివైపుకు ముందుకు సాగిపోతున్న సంఖ్యలను ధనాత్మకములనియు, 0 నుండి క్రిందికి ఎడవైపునకు వెనక్కి సాగి పోతున్న సంఖ్యలను ఋణాత్మకములనియు సూచింపబడినవి. "ధనాత్మక సంఖ్యలను" **"positive"** అనియు, "ఋణాత్మక సంఖ్యలను" **"negative"** అనియు అందురు. సహజ సంఖ్యలను ధనాత్మక పూర్ణాంకములు అనియు సూచింతురు.

2-Real Numbers.indd 44 04-03-2023 18:15:33

పైన చెప్పిన ఉదాహరణములను అవగాహన చేసుకొన్నట్లైతే ధనాత్మక సంఖ్యలను సహజ సంఖ్యలుగా పరిగణించవచ్చును. అదే విధముగా −1, −2, −3, ...మొదలగునవి లను ఋణ సంఖ్యలుగా పరిగణించవచ్చును.

ఇక్కడ −2 అనునది −1 కంటే చిన్నది. కావున −1 మరియు −2 లలో మనము −2 ను చిన్న సంఖ్య అనియు −1 పెద్ద సంఖ్య అనియు చెప్పవచ్చును. అదేవిధముగా −2 మరియు −1 పెద్దవా? లేక −3 కంటే చిన్నవా? ఆలోచించు! ఈ సంధర్భములో సంఖ్యారేఖను క్రింది విధముగా సూచించవచ్చును:



పటం. 2.3

ఈ పూర్ణసంఖ్యల సమితిని $\mathbb{Z}$ అని సూచిస్తాము.

$$\mathbb{Z} = \{ \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \}.$$

పైన గీచిన రెండు బొమ్మలను (పటం. 2.2 మరియు 2.3) చూసినట్లైతే, ప్రక్కన గల ఒక జత పూర్ణాముల మధ్యలో స్థలమును చూసి ఆశ్చర్యపోవుట నిజమే అగును. ఈ మధ్యలో గల స్థలము నందు కొన్ని సంఖ్యలు వున్నవని గుర్తించితివా!

మీరు భిన్నములను గూర్చి చదివియున్నారు. $\mathbb{Z}$ అను రేఖపై $\frac{1}{2}$ ను ఎట్లు గుర్తించెదవు? అది 0 మరియు 1 యొక్క మధ్య బిందువు అగును. అదే విధముగా మనము $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $2\frac{3}{4}$ గుర్తించవచ్చును. ఒకే బిందువు చేత అనేకమైన వేర్వేరు భిన్నములను చూడవచ్చును. ఎందుకు? చెప్పగలవా! $\frac{5}{4}$ మరియు $\frac{10}{8}$ అనునవి ఒకే బిందువు చేత పరిగణింపబడినవి. $\frac{7}{9}$ మరియు $\frac{35}{55}$ ఒకే బిందువు చేత సూచించబడినవా? ఇదే విధముగా 0 నుండి ఎడమ వైపు కూడా భిన్నములను గుర్తించవచ్చును. ఇవన్నియు $\frac{a}{b}$ అను రూపములో వుండును. a మరియు b అనునవి పూర్ణాంకములు. కాని $b \neq 0$ చే నిర్బంధించ బడినవి. ఎందుకు? అయిన ఆ భిన్నము దశాంశ రూపములోనే వున్నప్పుడు సరిపరచుట ఒకే విధముగా వుండును. పొడవుల నిష్పత్తి మరియు భిన్నముల మధ్య సంబందము వుండుట వలన ఆ సంఖ్యలను అకరణీయ సంఖ్యలు అని పేరు పెట్టవచ్చును. ఈ సందర్భమును క్రింది యివ్వబడిన పటములో చూపించబడినది.



పటం. 2.4

ఒక అకరణీయ సంఖ్య అనునది రెండు పూర్ణాంకముల భిన్నరూపంలో గల భాగఫలము అగును. ఇది '0' చే భాగింపబడని భిన్నముగా ఉండవలెను.

ఒక భిన్నము, అనేక భిన్నములకు సమానముగా వున్నందు వలన, అదే అకరణీయ సంఖ్యకు అనేక సాధ్యమైన పేర్లు వుండును. అందువలన $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{8}{24}$ ఇవన్నియును అదే అకరణీయ సంఖ్యను సూచించును.

2-Real Numbers.indd 45 04-03-2023 18:15:34

2.2.1 అకరణీయ సంఖ్యల సాంద్రతా ధర్మము

$a > b$ అగునట్లుగా a, b అనునవి తీసికొనిన, వాటి అంక మధ్యమమును $\frac{a+b}{2}$ అని ఇచ్చినట్లైతే, ఈ అంకమధ్యమము అనునది ఒక అకరణీయ సంఖ్య అగునా? మనము చూచెదము.

$a = \frac{p}{q}$ (p, q అనునవి పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు $q \neq 0$)

$b = \frac{r}{s}$ (r, s అనునవి పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు $s \neq 0$

అటు పిమ్మట $\frac{a+b}{2} = \frac{\frac{p}{q} + \frac{r}{s}}{2} = \frac{ps+qr}{2qs}$ అనునది ఒక అకరణీయ సంఖ్య.

ఇప్పుడు మనము ఈ అకరణీయ సంఖ్య a మరియు b మధ్యలో వుంటుందని చూపించవలయును.

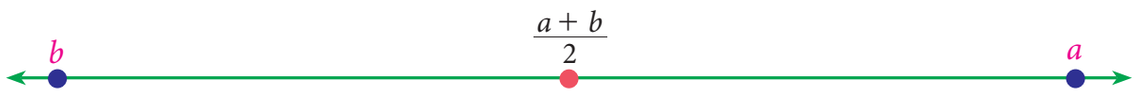
$a - \left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{2a-a-b}{2} = \frac{a-b}{2} > 0$ ఎందుకంటే $a > b$.

కాబట్టి $a > \left(\frac{a+b}{2}\right)$ ... (1)

$\left(\frac{a+b}{2}\right) - b = \frac{a+b-2b}{2} = \frac{a-b}{2} > 0$ ఎందుకంటే $a > b$.

కాబట్టి $\left(\frac{a+b}{2}\right) > b$ ... (2)

(1) మరియు (2) నుండి, $a > \left(\frac{a+b}{2}\right) > b$, అని చూడగలము. దీనిని క్రింది విధముగా పటములో చూడవచ్చును.



పటం. 2.5

అందువలన, ఏవైనా రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్యబిందువు (లేక) సరాసరి (అ.మ) కూడా ఒక అకరణీయ సంఖ్య. దీనిని మరల మరల అనిర్దిష్టమైన మెరలేకుండా చేసిన మనకు అనేకములైన అనిర్ధిష్టితమైన విధముగా అనంతమైన అకరణీయ సంఖ్యలు వచ్చును.

ఉదాహరణ 2.1 $\frac{1}{2}$ మరియు $\frac{2}{3}$ మధ్యగల ఏవైన రెండు అకరణీయ సంఖ్యలను కనుగొనుము.

సాధన 1

$\frac{1}{2}$ మరియు $\frac{2}{3}$ మధ్యగల ఒక అకరణీయ సంఖ్య

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3+4}{6}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{6}\right) = \frac{7}{12}$

$\frac{1}{2}$ మరియు $\frac{7}{12}$ మధ్యగల ఒక అకరణీయ సంఖ్య

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{7}{12}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{6+7}{12}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{13}{12}\right) = \frac{13}{24}$

కావున $\frac{1}{2}$ మరియు $\frac{2}{3}$ ల మధ్యగల రెండు అకరణీయ సంఖ్యలు $\frac{7}{12}$ మరియు $\frac{13}{24}$ (ఇంక ఎక్కువుగా గలవు). ఏవైన రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్యగల అకరణీయ సంఖ్యలను తక్షణమే కనుగొనుటకు క్రింద ఇచ్చిన ఒక ఆశక్తికరమైన ఫలితము సహాయపడును.

2-Real Numbers.indd 46 04-03-2023 18:15:54

ఫలితము

$\frac{p}{q}$ మరియు $\frac{r}{s}$ అనునవి రెండు అకరణీయ సంఖ్యలైన $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ ప్రకారము $\frac{p+r}{q+s}$ అనునది ఒక అకరణీయ సంఖ్య అగును. దీని ప్రకారము $\frac{p}{q} < \frac{p+r}{q+s} < \frac{r}{s}$.

$\frac{1}{2}$ మరియు $\frac{2}{3}$ ను ఉదాహరణముగా తీసుకొని వాటి మధ్యగల రెండు అకరణీయ సంఖ్యలను వ్రాయుము.

సాధన 2

$\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$ అనున $\frac{1}{2} < \frac{1+2}{2+3} < \frac{2}{3}$ మరియు $\frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3}$

$\frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3}$ అనున $\frac{1}{2} < \frac{1+3}{2+5} < \frac{3}{5} < \frac{3+2}{5+3} < \frac{2}{3}$ మరియు $\frac{1}{2} < \frac{4}{7} < \frac{3}{5} < \frac{5}{8} < \frac{2}{3}$

సాధన 3

దీనిని సాధించుటకు ఇంకా ఏవైనా కొత్త పద్ధతులు? ఉన్నవా? దశాంశ సంఖ్యలు నీకు చాల ఇష్టమైతే, పై ఉదాహరణమునకు మరియొక సాధన చూచెదము.

$\frac{1}{2} = 0.5$ మరియు $\frac{2}{3} = 0.66...$

$\frac{1}{2}$ మరియు $\frac{2}{3}$ కావున వీటి మధ్యలో గల అకరణీయ సంఖ్యలు. 0.51, 0.57, 0.58, … అగును.

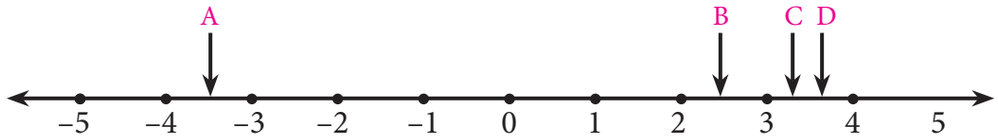
సాధన 4

ఇంకా కొన్ని లెక్కలను చేయుటకు మరియొక పద్ధతి కూడా కలదు. ఉదాహరణమునకు, $\frac{4}{9}$ మరియు $\frac{3}{5}$ యొక్క మధ్యగల అకరణీయ సంఖ్యలను కనుగొనుటకు, 9 మరియు 5ల యొక్క క.సా.గు 45 అగును. అందువలన $\frac{4}{9} = \frac{20}{45}$ మరియు $\frac{3}{5} = \frac{27}{45}$ అగును.

అందువలన $\frac{4}{9}$ మరియు $\frac{3}{5}$ మధ్యగల 4 అకరణీయ సంఖ్యలు $\frac{21}{45}, \frac{22}{45}, \frac{23}{45}, \frac{24}{45}$, ...అగును..

అభ్యాసము 2.1

1. క్రిందివ్వబడిన సంఖ్యారేఖ పై $\frac{11}{3}$ యొక్క స్థానమును ఏ బాణపు గుర్తు సూచించును?



2. $\frac{-7}{11}$ మరియు $\frac{2}{11}$ ల మధ్య గల 3 అకరణీయ సంఖ్యలను కనుగొనుము.

3. ఏవైనా 5 అకరణీయ సంఖ్యలను కనుగొనుము

(i) $\frac{1}{4}$ మరియు $\frac{1}{5}$

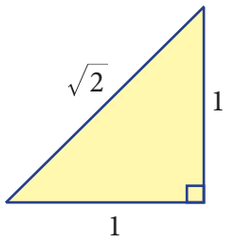
(ii) 0.1 మరియు 0.11

(iii) −1 మరియు −2

2-Real Numbers.indd 47 04-03-2023 18:15:58

2.3 కరణీయ సంఖ్యలు

ప్రతి అకరణీయ సంఖ్యకు సంఖ్యారేఖపై ఒక బిందువు ఇవ్వబడినదని చూచితిమి, మరియు అకరణీయ సంఖ్యల సాంద్రతా ధర్మమును నేర్చుకొన్నాము. ఆ సంఖ్యా రేఖ అకరణీయ సంఖ్యలతో పూర్తిగా నిండిపోయినదని మరియు వెరొక సంఖ్యలు లేదని అనుగొనెదమా? మనము పరిశోదించెదము.



పటం.2.6

1 యూనిట్ పొడవు గల లంబభుజములు కలిగిన లంబ సమద్విబాహు త్రిభుజమును తీసికొని పైథాగరస్ సిద్ధాంతమునుపయోగించి, కర్ణము పొడవు $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ (పటం 2.6) అని గుర్తించుము. $\sqrt{2}$ అనే సంఖ్య పూర్ణాంకము కాదు మరియు సామాన్యభిన్నము కాదు అని గ్రీకులు కనుగొనిరి. సంఖ్యారేఖపై గల బిందువులకు మరియు అన్ని సంఖ్యలకు గల సంబంధము అనే నమ్మకము తిరస్కరించబడినది. $\sqrt{2}$ అనునది ఒక కరణీయ సంఖ్య అగును.

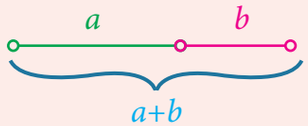
రెండు పూర్ణసంఖ్యలను సామాన్య నిష్పత్తిగా వ్రాయుటకు వీలుకాని సంఖ్యలను కరణీయ సంఖ్యలు అని అందురు.

ఉదాహరణకు:

1. $\sqrt{2}$ తప్ప, మరికొన్ని అలాంటి కరణీయ సంఖ్యలను పొందవచ్చును.
   ఉదాహరణము: $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $2\sqrt{3}$, ... అనునవి
2. వృత్తము చుట్టుకొలతకు, వ్యాసమునకు గల నిష్పత్తి πను ఇంకొక ఉదాహరణముగా పరిగణించవచ్చును.
3. ఆయిలర్ యొక్క సంఖ్య e అనునది కూడ మరొక ఉదాహరణమగును.
4. φ అనేది సువర్ణ నిష్పత్తి లేక సువర్ణ సరాసరి లేక సువర్ణ విభాగము అనుదానిని సూచించు ఒక సంఖ్య అగును. పంచకోణాకారం, పంచభుజి, దశ భుజి, ద్వాదశ భుజి వంటి జ్యామితీయ ఆకారముల దూరముల నిష్పత్తిని కనుగొనుటకు కష్టమైనప్పుడు ఈ సంఖ్య ఉపయోగపడును. ఇది కూడా ఒక కరణీయ సంఖ్యయే.

సువర్ణ నిష్పత్తి (1:1.6)

φ కళ మరియు నిర్మాణరంగము నందు సువర్ణ నిష్పత్తిని చాలా అందమైన నిష్పత్తి అని చాటి చెప్పిరి. $(a+b)$ ఒక రేఖా ఖండము తీసికొని దానిని a మరియు b అను రెండు బాగములుగా విభజించిన $(a+b)$ మరియు a కు గల నిష్పత్తి, a మరియు b కు గల నిష్పత్తికి సమముగా వుండునట్లు విభజించుము.



$a+b : a = a : b$

ఇది క్రింది అనుపాతము నిచ్చును. $\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}$

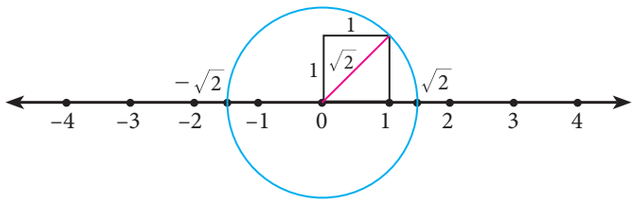
ఇక్కడ a అనునది $a+b$ మరియు b ల యొక్క రేఖాగణిత సగటు అగును.

2.3.1 సంఖ్యారేఖపై కరణీయ సంఖ్యలు

సంఖ్యా రేఖపై కరణీయ సంఖ్యను ఏవిధంగా చూపించవచ్చును?

సులువుగా $\sqrt{2}$ను ఒక ఉదాహరణగా తీసుకొని సంఖ్యారేఖపై చూపవచ్చును. పటం 2.7 లో $\sqrt{2}$ అనేది చతురస్రము యొక్క కర్ణము మరియు భుజము 1 ప్రమాణము అని అనుకొనుము(ఎట్లు?) సంఖ్యారేఖపై ఒక చతురస్రాన్ని నిర్మించి దానికి ఒక కర్ణము గీయుము.

2-Real Numbers.indd 48 04-03-2023 18:15:59



పటం.2.7

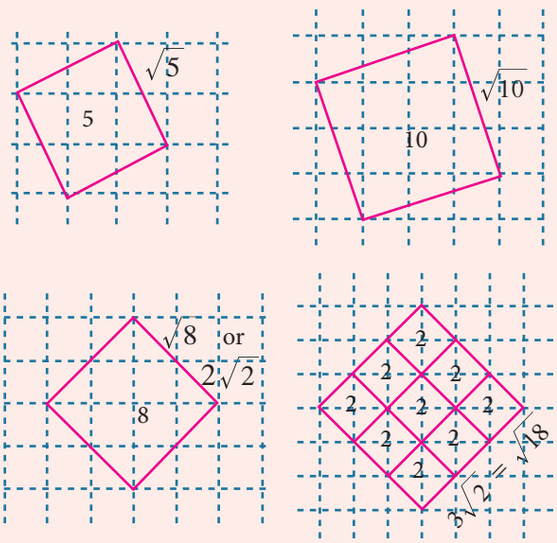
చతురస్రములోని కర్ణము వృత్త వ్యాసార్ధముగా ఉండేటట్లు సంఖ్యా రేఖపై ఒక వృత్తమును గీయుము. ఈ వృత్తము సంఖ్యా రేఖను '0'కు కుడివైపున $\sqrt{2}$ వద్ద, '0' కు ఎడమవైపున $-\sqrt{2}$ వద్ద విభజించును. మనము $\sqrt{2}$ ను మాత్రం లెక్కలోకి తీసుకోవాలి.

సహజసంఖ్యల వద్ద ప్రారంభించి అకరణీయ సంఖ్యలు మరియు కరణీయ సంఖ్యల వరకు సంఖ్యా రేఖపై కొనసాగుతూ పోవును. ఇది ఇంకా కొనసాగుతూ పోవును.మనము ఇక్కడికి నిలిపి వాటిని పై తరగతులలో తెలుసుకొందాము.

అకరణీయ సంఖ్యలను అతమొందు, అంతమొందని దశాంశ స్థానములుగా గుర్తించడాన్ని బట్టి కరణీయ సంఖ్యలను సులువుగా అర్థం చేసుకోవచ్చు. ఇప్పుడు మనము అకరణీయ సంఖ్యలను దశాంశ విస్తరణ గురించి చూచెదము.

గ్రాఫ్ కాగితముపై చతురస్రమును నిర్మించి దాని నుండి కరణీయ పొడవులను కనుగొనుట.

ఉదాహరణము :



2.3.2 దశాంశ రూపములో అకరణీయ సంఖ్యలు సూచించుట

ఒక అకరణీయ సంఖ్యను భిన్నముగా వ్రాసినపుడు మనకు పొడవు బాగాహార పద్ధతి ద్వారా దశాంశ రూపము వచ్చును. శేషము 0 వచ్చు కొన్ని క్రిందివ్వబడిన ఉదాహరణములను చూచెదము.

ఉదాహరణము

$$\begin{array}{r|l} & 0.875 \\ 8 & 7.000 \\ & 64 \\ \hline & 60 \\ & 56 \\ \hline & 40 \\ & 40 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$\frac{7}{8} = 0.875$

$$\begin{array}{r|l} & 0.84 \\ 25 & 21.00 \\ & 200 \\ \hline & 100 \\ & 100 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$\frac{21}{25} = 0.84$

$$\begin{array}{r|l} & 2.71875 \\ 32 & 87.00000 \\ & 64 \\ \hline & 230 \\ & 224 \\ \hline & 60 \\ & 32 \\ \hline & 280 \\ & 256 \\ \hline & 240 \\ & 224 \\ \hline & 160 \\ & 160 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$\frac{-87}{32} = -2.71875$

2-Real Numbers.indd 49 04-03-2023 18:16:00

సూచన

ఈ పద్ధతి పరిమితమైన దశాంశస్థానాలు కలిగిన దశాంశములు కనపరచును. వీటిని అంతమొందు దశాంశములు అందురు.

ఒక అకరణీయ సంఖ్య యొక్క దశాంశ సూచన అంతమొందని దశాంశ రూపములకు దోహదుపడును అని చూతుమా? క్రిందివ్వబడిన ఉదాహరణములు (శేషము సున్నకానివి) ఈ విషయముపై కొంత వెలుగు నిచ్చును.

ఉదాహరణ 2.2 క్రింద ఇవ్వబడిన అకరణీయ సంఖ్యలను దశాంశములుగా మార్చుము

(i) $\frac{-4}{11}$ (ii) $\frac{11}{75}$

సాధన

$$\begin{array}{r|l} & 0.3636\ldots \\ 11 & 4.0000 \\ & 33 \\ \hline & 70 \\ & 66 \\ \hline & 40 \\ & 33 \\ \hline & 70 \\ & 66 \\ \hline & 4 \\ & \vdots \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & 0.1466\ldots \\ 75 & 11.0000 \\ & 7\,5 \\ \hline & 350 \\ & 300 \\ \hline & 500 \\ & 450 \\ \hline & 500 \\ & 450 \\ \hline & 50 \\ & \vdots \end{array}$$

అందువలన, $\frac{-4}{11} = -0.\overline{36}$ $\frac{11}{75} = 0.14\overline{6}$ అగును.

అందువలన, ఒక అకరణీయ సంఖ్యను క్రిందివిధముగా సూచించవచ్చును.

(i) ఇది ఒక అంతమొందు దశాంశము గాను

(ii) లేక అంతమొందని దశాంశము మరియు మరల, మరల వచ్చు దశాంశ విస్తరణ (ఆవర్తన దశాంశ విస్తరణ)

ఈ వాక్యము యొక్క విపర్యము కూడా వాస్తవ్యమే. ఒక సంఖ్య యొక్క దశాంశ విస్తరణ అంతమొందు (లేక) అంతమొందని మరియు ఆవర్తన సంఖ్యను అకరణీయ సంఖ్య అందురు.

సహజ సంఖ్యల విలోమమును అకరణీయ సంఖ్యలందురు. వాటి దశాంశ రూపమును సూచించుట ఒక ఆసక్తికరమైన విషయము. మొదట 10 సంఖ్యలను చూచెదము..

వ. సంఖ్య	విలోమము	దశాంశసూచన
1	$\frac{1}{1} = 1.0$	అంతమొందునది
2	$\frac{1}{2} = 0.5$	అంతమొందునది
3	$\frac{1}{3} = 0.\overline{3}$	అంతమొందనిది, ఆవర్తన చెందునది
4	$\frac{1}{4} = 0.25$	అంతమొందునది
5	$\frac{1}{5} = 0.2$	అంతమొందునది
6	$\frac{1}{6} = 0.1\overline{6}$	అంతమొందనిది మరియు ఆవర్తనము చెందునది
7	$\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$	అంతమొందనిది మరియు ఆవర్తనము చెందునది
8	$\frac{1}{8} = 0.125$	ఆవర్తన సంఖ్య
9	$\frac{1}{9} = 0.\overline{1}$	అంతమొందనిది, ఆవర్తన చెందునది
10	$\frac{1}{10} = 0.1$	ఆవర్తన చెందనది

2-Real Numbers.indd 50 04-03-2023 18:16:02

సూచన

ప్రక్కన ఇవ్వబడిన ఉదాహరణములలో దశాంశ విస్తరణ అంతమొందనది కాదు.

శేషములు మరల, మరల వచ్చును! అంతమొందని ఆవర్తన స్థానములు (మరల, మరల వచ్చును.)

2.3.3 దశాంశము యొక్క అంతరము

అకరణీయ సంఖ్య యొక్క దశాంశ విస్తరణలో గల ఆవర్తన దశాంశము (మరల, మరల వచ్చు సంఖ్యలు) యొక్క సంఖ్యను దశాంశ యొక్క అంతరము పొడవు అని అందురు.

ఉదాహరణకు,

(i) $\frac{25}{7} = 3.\overline{571428}$ యొక్క దశాంశము యొక్క ఆవర్తన అంతరము = 6

(ii) $\frac{27}{110} = 0.2\overline{45}$ యొక్క దశాంశము యొక్క ఆవర్తన అంతరము = 2

ఉదాహరణ 2.3 $\frac{1}{27}$ అను అకరణీయ సంఖ్యను ఆవర్తన దశాంశరూపములోనికి $\frac{1}{3}$ ఆవర్తన దశాంశ విస్తరణ నుపయోగించి మార్చుము. దాని మూలంగా $\frac{59}{27}$ ను ఆవర్తన దశాంశ రూపములో వ్రాయుము.

సాధన

$\frac{1}{3} = 0.\overline{3}$ అని మనకు తెలియును

కావున $\frac{1}{27} = \frac{1}{9}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{9}\times 0.333... = 0.037037... = 0.\overline{037}$

ఇంకను, $\frac{59}{27} = 2\frac{5}{27} = 2+\frac{5}{27} = 2+\left(5\times\frac{1}{27}\right)$

$= 2+(5\times 0.\overline{037}) = 2+(5\times 0.037037037...)$

$= 2+(5\times 0.\overline{037}) = 2+(5\times 0.037037037...) = 2+0.185185... = 2.185185... = 2.\overline{185}$

2.3.4 అంతమొందు దశాంశములను అకరణీయ సంఖ్యలుగా మార్చుట.

ఇపుడు మనము 2.945 అను అంతమొందు దశాంశమును భిన్నరూపములో వుండు అకరణీయ సంఖ్యగా మార్చుటకు ప్రయత్నిద్దంచెదము.

కనుక, $2.945 = 2+0.945$

$= 2+\frac{9}{10}+\frac{4}{100}+\frac{5}{1000}$

$= 2+\frac{900}{1000}+\frac{40}{1000}+\frac{5}{1000}$ (హారములు ఒకే విధముగా చేయుట)

$= 2+\frac{945}{1000}$

$= \frac{2945}{1000}$(లేక) $\frac{589}{200}$ ఇది మనకు కావలసిన రూపము.

(పై చెప్పిన దానిలో 2.945 $\frac{2945}{1000}$ అని వ్రాయుటకు వీలగునా?)

2-Real Numbers.indd 51 04-03-2023 18:16:04

ఉదాహరణ 2.4 క్రిందివ్వబడిన దశాంశ సంఖ్యలను $\frac{p}{q}$ రూపములోనికి మార్చుము (p మరియు q అనునవి పూర్ణసంఖ్యలు, మరియు $q \neq 0$) (i) 0.35 (ii) 2.176 (iii) – 0.0028

సాధన

(i) $0.35 = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$

(ii) $2.176 = \frac{2176}{1000} = \frac{272}{125}$

(iii) $-0.0028 = \frac{-28}{10000} = \frac{-7}{2500}$

2.3.5 అంతమొందని మరియు ఆవర్తన దశాంశములును అకరణీయ సంఖ్యలుగా మార్చుట.

అంతమొందు దశాంశములను అతి సులభముగా మార్చవచ్చును. 2.4 ను ఉదాహరణముగా తీసికొనినపుడు 10చే బాగించుటనుపయోగించి దశాంశ బిందువు నుండి దూరముగా రాగలము.

కనుక $2.4 = \frac{24}{10}$, దీనిని సూక్ష్మీకరించి $\frac{12}{5}$ గా వ్రాయవచ్చును. అయితే $2.\overline{4}$, లాంటి దశాంశము వచ్చినపుడు, అంతమొందని 4 అనే సంఖ్యలు వుండును. కనుక, మనకు అంతమొందని సున్నలు హారమునందు కావలయును. ఉదాహరణకు,

$$2.4 = 2 + \frac{4}{10}$$

$$2.44 = 2 + \frac{4}{10} + \frac{4}{100}$$

$$2.444 = 2 + \frac{4}{10} + \frac{4}{100} + \frac{4}{1000}$$

అంతమొందని 4 లు పొందుటకు, సాధించుటకు ఎంత కఠినముగా వుండును. ఒకవిధముగా అంతమొందని అనుక్రమమును తొలగించుట అవసరము. అంతమొందని అనుక్రమములోని ఒకటి, రెండు లేక ఎక్కువ 4 లను తొలగించిన కూడా అది ఒక అంతమొందని అనుక్రమముగానే వుండుననని చెప్పుట ఒక మంచి విషయమే.

$x = 2.\overline{4}$ అనుకొనుము ...(1)

తర్వాత $10x = 24.\overline{4}$ ...(2)

(10చే గుణించినపుడు దశాంశము 1 స్థానము కుడివైపునకు జరుగును, అయితే నీకు అంతమొందని 4లు మిగిలియుండును).

1వ సమీకరణమును 2వ సమీకరణము నుండి తీసివేసిన

$9x = 24.\overline{4} - 2.\overline{4} = 22$ (అంతమొందని 4 లు అంతమొందని 4లలో తీసివేయబడిన)

$9x = 22$ ($24 - 2 = 22$)

$x = \frac{22}{9}$ అనునది కావలసిన విలువ.

అంతమొందని ఆవర్తన భాగము గలిగిన ఏ సంఖ్యనైనా భిన్నముగా మార్చుటకు అదే ఖచ్చిత తర్కమును ఉపయోగించుము.

2-Real Numbers.indd 52 04-03-2023 18:16:06

ఉదాహరణ 2.5

క్రిందివ్వబడిన దశాంశ సంఖ్యలను $\frac{p}{q}$ $(p, q \in Z$ మరియు $q \neq 0)$ రూపముకు మార్చుము. (i) $0.\overline{3}$ (ii) $2.12\overline{4}$ (iii) $0.4\overline{5}$ (iv) $0.\overline{568}$

సాధన

(i) $x = 0.\overline{3} = 0.3333\ldots$ అనుకొనుము. (1)

(ఇక్కడ ఆవర్తన దశాంశ అంతరము = 1 కనుక, 1 ను 10చే గుణించిన)

$10x = 3.3333\ldots$ (2)

(2) – (1): $9x = 3$ లేక $x = \frac{1}{3}$

(ii) $x = 2.\overline{124} = 2.124124124\ldots$ (1) అని అనుకొనుము

(ఇక్కడ ఆవర్తన దశాంశ అంతరము 3 (1) ను 1000 చే గుణించిన.)

$1000x = 2124.124124124\ldots$ (2)

(2)–(1): $999x = 2122$ $x = \frac{2122}{999}$

(iii) $x = 0.4\overline{5} = 0.45555\ldots$ (1)

ఆవర్తన దశాంశము యొక్క స్థానము 5 ఇది దశాంశ బిందువు అయిన తర్వాత 2వ స్థానము

((1) ను 10చే గుణించిన)

$10x = 4.5555\ldots$ (2)

(ఇక్కడ ఆవర్తన దశాంశము యొక్క అంతరము 1, కావున (2) ను 10 చే గుణించిన)

$100x = 45.5555\ldots$ (3)

(3) – (2): $90x = 41$ లేక $x = \frac{41}{90}$

(iv) $x = 0.5\overline{68} = 0.5686868\ldots$ (1)

(ఇక్కడ ఆవర్తన దశాంశ స్థానము 68, ఇది దశాంశ బిందువు అయిన తర్వాత 2వ స్థానము)

(కావున (1) ను 10 చే గుణించిన)

$10x = 5.686868\ldots$ (2)

(ఇక్కడ ఇప్పుడు ఆవర్తన అంతరము 2, కావున (2) ను 100 చేత గుణించిన)

$1000x = 568.686868\ldots$ (3)

(3) – (2): $990x = 563$ లేక $x = \frac{563}{990}$.

సూచన

ఒక అకరణీయ సంఖ్యయొక్క దశాంశ రూపము అంతమొందునదా! లేక అంతమొందనిదా! అని నిర్ధారించుటకు ఈ క్రింది నియమము ఉపయోగించవలెను.

2-Real Numbers.indd 53 04-03-2023 18:16:08

$\frac{p}{q}$, $q \neq 0$ అను ఒక అకరణీయ సంఖ్యను $\frac{p}{2^m \times 5^n}$ ఇక్కడ $p \in \mathbb{Z}$ మరియు $m, n \in \mathbb{W}$ అను రూపములో చూపించుటకు వీలు అయిన, ఆ అకరణీయ సంఖ్య ఒక అంతమొందు దశాంశ విస్తరణ అగును. లేకున్నచో ఆ అకరణీయ సంఖ్య అంతమొందని ఆవర్తన దశాంశ విస్తరణ అగును.

ఉదాహరణ 2.6

ఇవ్వబడిన సంఖ్యల దశాంశ విస్తరణను అంతమొందునవా? లేక అంతమొందనివా? మరియు ఆవర్తన సంఖ్యయా? అని బాగించకుండా వర్గీకరించుము.

(i) $\frac{13}{64}$ (ii) $\frac{-71}{125}$ (iii) $\frac{43}{375}$ (iv) $\frac{31}{400}$

సాధన

(a) $\frac{13}{64} = \frac{13}{2^6}$, కావున $\frac{13}{64}$ అంతమొందు దశాంశ విస్తరణను కలిగియున్నది.

(b) $\frac{-71}{125} = \frac{-71}{5^3}$, కావున $\frac{-71}{125}$ అంతమొందు దశాంశ విస్తరణను కలిగియున్నది.

(c) $\frac{43}{375} = \frac{43}{3^1 \times 5^3}$, కావున $\frac{43}{375}$ ఇది అంతమొందని ఆవర్తన దశాంశ విస్తరణ అగును.

(d) $\frac{31}{400} = \frac{31}{2^4 \times 5^2}$, కావున $\frac{31}{400}$ అను భిన్నము అనగా అకరణీయ సంఖ్య అంతమొందు దశాంశ విస్తరణను కలిగియున్నది.

ఉదాహరణ 2.7

$1 = 0.\overline{9}$ అని రుజువుపరచుము

సాధన

$x = 0.\overline{9} = 0.99999\ldots$ (1)

((1) ను 10చే గుణించుము)

$10x = 9.99999\ldots$ (2)

(1) ను (2) నుండి తీసివేసిన

$9x = 9$ లేక $x = 1$

కనుక $0.\overline{9} = 1$

$1 = 0.9999\ldots$

$7 = 6.9999\ldots$

$3.7 = 3.6999\ldots$

ఏదైన అంతమొందు దశాంశమును 9 ల అనంత సమూహము గల అంతమొందని మరియు ఆవర్తన దశాంశ విస్తరణగా సూచించుటకు ఈ పద్ధతి (మాదిరి) ఉపయోగపడును.

అభ్యాసము 2.2

1. క్రిందిచ్చిన అకరణీయ సంఖ్యలను దశాంశ సంఖ్యలుగా సూచించి, అది ఏ రకమునకు చెందిన దశాంశ విస్తరణను తెల్పుము.

(i) $\frac{2}{7}$ (ii) $-5\frac{3}{11}$ (iii) $\frac{22}{3}$ (iv) $\frac{327}{200}$

2. $\frac{1}{13}$ ను దశాంశ రూపములో చూపుము. దశాంశముల ఆవర్తన అంతరము యొక్క పొడవును కనుగొనుము.

2-Real Numbers.indd 54 04-03-2023 18:16:18

3. $\frac{1}{33}$ ను $\frac{1}{11}$ యొక్క ఆవర్తన దశాంశ విస్తరణనుపయోగించి ఆవర్తన దశాంశ రూపములోకి మార్చుము. దాని ద్వారా $\frac{71}{33}$ ను ఆవర్తన దశాంశ రూపములో వ్రాయము.

4. క్రిందివ్వబడిన దశాంశములను అకరణీయ సంఖ్యలుగా మార్చుము.

(i) $0.\overline{24}$ (ii) $2.\overline{327}$ (iii) -5.132

(iv) $3.1\overline{7}$ (v) $17.2\overline{15}$ (vi) $-21.213\overline{7}$

5 క్రింది వాటిలో ఏ అకరణీయ సంఖ్యలు అంతమొందు దశాంశ విస్తరణను కలిగియున్నవో భాగించకనే కనుగొనుము.

(i) $\frac{7}{128}$ (ii) $\frac{21}{15}$ (iii) $4\frac{9}{35}$ (iv) $\frac{219}{2200}$

2.3.6 కరణీయ సంఖ్యలను తెలిసికొనుటకు దశాంశ సూచన

కరణీయ సంఖ్యలను దశాంశ సంఖ్యలుగా మార్చుటకు అంతమొందని మరియు ఆవర్తన చెందునని కాదని తెలుపును. ఉదాహరణకు, π యొక్క దశాంశ విలువ 3.14159265358979, ఇందులో అపరిమితమైన స్థానములు π (పరిమితము కాదు) మరియు ఆవర్తన స్థానములు లేవు.

క్రింద ఇవ్వబడిన దశాంశ విస్తరణను తీసికొనుము.

(i) 0.1011001110001111… (ii) 3.012012120121212…

(iii) 12.2302233002223330000… (in) $\sqrt{2}$ = 1.4142135624…

పైన ఇవ్వబడిన సంఖ్యలు అంతమొందు లేక ఆవర్తన మరియు అంతమొందనివా? కాదు.....అవి అంతమొందు దశాంశ సంఖ్యలు కాదు అంతమొందనివి మరియు ఆవర్తన సంఖ్యలు కాదు. కనుక అవి అకరణీయ సంఖ్యలు కావు, వాటిని $\frac{p}{q}$ రూపములో వ్రాయుటకూ వీలుకాదు. ఇక్కడ $p, q, \in \mathbb{Z}$ మరియు $q \neq 0$ అవికరణీయ సంఖ్యలు.

అంతమొందని మరియు ఆవర్తన చెందని దశాంశ విస్తరణను కలిగిన సంఖ్యను కరణీయ సంఖ్య (Irrational Numbers) అంటారు.

ఉదాహరణ 2.8 $\sqrt{3}$ యొక్క దశాంశ విస్తరణను కనుగొనుము.

సాధన

```
                1.7320508…
      1 | 3.00,00,00,00,00,…
        | 1
   27   | 200
        | 189
  343   | 1100
        | 1029
 3462   | 7100
        | 6924
346405  | 1760000
        | 1732025
34641008| 279750000
        | 277128064
        | 2621936
```

$\sqrt{2}$ = 1.414…., $\sqrt{3}$ = 1.732…, π = 3.141, అని మనము అప్పుడప్పుడు వ్రాయుదుము.. ఇవన్నియు ఉజ్జాయింపు విలువలు కాని ఖచ్చితములు కావు π విలువ తీసుకొన్నపుడు మనము అప్పుడప్పుడు $\frac{22}{7}$ $(3.\overline{142857})$ విలువనిచ్చును ఇది దాని నిజమైన విలువ, కాని వాస్తవముగా అది ఉజ్జాయింపులు. ఇది ఎందుకనగా, కరణీయ సంఖ్య యొక్క దశాంశ విస్తరణ అనునది అంతమొందని మరియు ఆవర్తనము చెందునదికాదు. వీటిలో ఏదియును ఖచ్చిత విలువనివ్వదు.

2-Real Numbers.indd 55 04-03-2023 18:16:20

కనుక, భాగాహార పద్ధతి ద్వారా $\sqrt{3} = 1.7320508\ldots$ అని గణన చేయవచ్చును.

ఖచ్చిత వర్గము కాని ప్రతి ధనాత్మక సంఖ్యయొక్క వర్గమూలము ఒక కరణీయ సంఖ్య అని కొనుగొన బడినది. $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \ldots$ అన్నియు కరణీయ సంఖ్యలు అనబడును.

ఉదాహరణ 2.9 క్రింది సంఖ్యలను అకరణీయ (లేక) కరణీయ సంఖ్యలుగా వర్గీకరించుము.

(i) $\sqrt{10}$ (ii) $\sqrt{49}$ (iii) 0.025 (iv) $0.7\overline{6}$ (v) 2.505500555... (vi) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

సాధన

(i) $\sqrt{10}$ అనునది ఒక కరణీయ సంఖ్య (ఎందువలననగా 10 అనునది ఒక ఖచ్చిత వర్గ సంఖ్యకాదు)

(ii) $\sqrt{49} = 7 = \frac{7}{1}$, అనునది ఒక అకరణీయ సంఖ్య (ఎందువల్ల అనగా 49 ఒక ఖచ్చిత వర్గ సంఖ్య)

(iii) 0.025 అనునది ఒక ఆకరణీయ సంఖ్య (ఎందువలననగా ఇది ఒక అంతమొందు దశాంశము)

(iv) $0.7\overline{6} = 0.7666\ldots$. అనునది కూడా ఒక అకరణీయ సంఖ్య (ఎందుకనగా ఇది ఒక అంతమొందని మరియు ఆవర్తన దశాంశ విస్తరణ)

(v) 2.505500555.... అనునది ఒక కరణీయ సంఖ్య (ఎందుకనగా ఇది ఒక అంతమొందని మరియు ఆవర్తన చెందని దశాంశము)

(vi) $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ అనునది ఒక కరణీయ సంఖ్య (ఎందుకనగా 2 అనునది ఒక ఖచ్చిత వర్గ సంఖ్యకాదు)

సూచన

ఉదాహరణము 2.9, (vi) $\frac{p}{q}$ రూపములో వున్నందున అకరణీయ సంఖ్య అని తప్పుగ అర్థము చేసుకోకు సుమా! ఎందువలననగా p, q లు పూర్ణసంఖ్యలగా వుండాలి మరియు కరణీయ సంఖ్యగా వుండకూడదు.

ఉదాహరణ 2.10 0.12 మరియు 0.13 ల మధ్యగల 3 కరణీయ సంఖ్యలను కనుగొనుము.

సాధన

0.12 మరియు 0.13 మధ్యగల 3 కరణీయ సంఖ్యలు 0.12010010001....., 0.12040040004....., 0.12070070007.....,

ఉదాహరణ 2.11 0.5151151115..... మరియు 0.5353353335....., మధ్యగల 2 అకరణీయ సంఖ్యలను వ్రాయుము.

సాధన 0.5152 మరియు 0.5352 అనునవి ఇచ్చిన కరణీయ సంఖ్యల మధ్యగలవు.

2-Real Numbers.indd 56 04-03-2023 18:16:22

సూచన

ఒక ముఖ్యమైన ఫలితమును నిరూపణ లేని ప్రవచనముగా ఇచ్చిన, గుర్తించుకొనుటకు చాలును. a అనునది ఒక అకరణీయ సంఖ్య మరియు $\sqrt{b}$ అనునది ఒక కరణీయ సంఖ్య అయిన తర్వాత క్రిందివ్వబడిన ప్రతి సంఖ్య కరణీయ సంఖ్య అగును.

(i) $a+\sqrt{b}$; (ii) $a-\sqrt{b}$; (iii) $a\sqrt{b}$; (iv) $\frac{a}{\sqrt{b}}$; (v) $\frac{\sqrt{b}}{a}$.

ఉదాహరణకు, అకరణీయ సంఖ్య 4, కరణీయ సంఖ్య $\sqrt{5}$ను తీసికొనిన, $4+\sqrt{5}$, $4-\sqrt{5}$, $4\sqrt{5}$, $\frac{4}{\sqrt{5}}$, $\frac{\sqrt{5}}{4}$ --- అన్నియు కరణీయ సంఖ్యలగును.

ఉదాహరణ 2.12 క్రిందివ్వబడిన వాటిలో x మరియు y అనునవి అకరణీయములా (లేక) కరణీయములా? కనుగొనుము

(i) $a=2+\sqrt{3}$, $b=2-\sqrt{3}$; $x=a+b$, $y=a-b$

(ii) $a=\sqrt{2}+7$, $b=\sqrt{2}-7$; $x=a+b$, $y=a-b$

(iii) $a=\sqrt{75}$, $b=\sqrt{3}$; $x=ab$, $y=\frac{a}{b}$

(iv) $a=\sqrt{18}$, $b=\sqrt{3}$; $x=ab$, $y=\frac{a}{b}$

సూచన

ఇవ్వబడిన ఉదాహరణముల నుండి రెండు కరణీయ సంఖ్యలను కూడినా, తీసివేసినా, గుణించినా, భాగించినా వచ్చునది కరణీయ లేక అకరణీయ సంఖ్యగా ఉండును.

సాధన

(i) $a=2+\sqrt{3}, b=2-\sqrt{3}$ అని ఇవ్వబడినది

$x=a+b=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$, ఒక అకరణీయ సంఖ్య.

$y=a-b=(2+\sqrt{3})-(2-\sqrt{3})=2\sqrt{3}$ ఒక కరణీయ సంఖ్య.

(ii) $a=\sqrt{2}+7$, $b=\sqrt{2}-7$ అని ఇవ్వబడినది.

$x=a+b=(\sqrt{2}+7)+(\sqrt{2}-7)=2\sqrt{2}$ ఒక కరణీయ సంఖ్య

$y=a-b=(\sqrt{2}+7)-(\sqrt{2}-7)=14$ ఒక అకరణీయ సంఖ్య

(iii) $a=\sqrt{75}$, $b=\sqrt{3}$ అని ఇవ్వబడినది

$x=ab=\sqrt{75}\times\sqrt{3}=\sqrt{75\times3}=\sqrt{5\times5\times3\times3}=5\times3=15$ ఒక అకరణీయము.

$y=\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{75}{3}}=\sqrt{25}=5$ ఒక అకరణీయము.

(iv) $a=\sqrt{18}$, $b=\sqrt{3}$ అని ఇవ్వబడినది.

$x=ab=\sqrt{18}\times\sqrt{3}=\sqrt{18\times3}=\sqrt{6\times3\times3}=3\sqrt{6}$ ఇది ఒక కరణీయ సంఖ్య

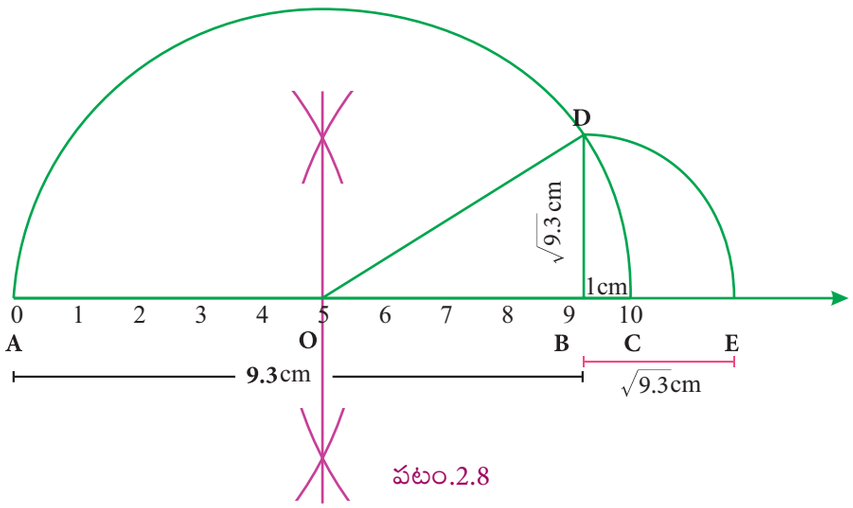
$y=\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{18}{3}}=\sqrt{6}$ ఇది ఒక కరణీయ సంఖ్య

2-Real Numbers.indd 57 04-03-2023 18:16:29

ఉదాహరణ 2.13 $\sqrt{9.3}$ ను సంఖ్యారేఖపై గుర్తించుము.

సాధన

- ఒక సరళరేఖను గీచి, దానిపై A ను గుర్తించుము
- $AB = 9.3$ వుండునట్లు B ను గుర్తించుము.
- $BC = 1$ యూనిట్ వుండునట్లు 'C' ను గుర్తించుము
- AC కి లంబ సమద్విఖండన రేఖలు గీచి, O యొక్క మధ్య బిందువును కనుగొని, దానికి O అని గుర్తించుము.
- O ను కేంద్రముగా తీసుకొని, $OC = OA$ ను వ్యాసార్ధముగా తీసికొని, ఒక అర్ధవృత్తమును గీయుము.
- B వద్ద, AB కి లంబముగా వుండునట్లు BD అను రేఖను గీయుము.
- ఇపుడు $BD = \sqrt{9.3}$, $BE = BD = \sqrt{9.3}$ యొక్క విలువగా సంఖ్యారేఖపై గుర్తించగలము.



పటం.2.8

అభ్యాసము 2.3

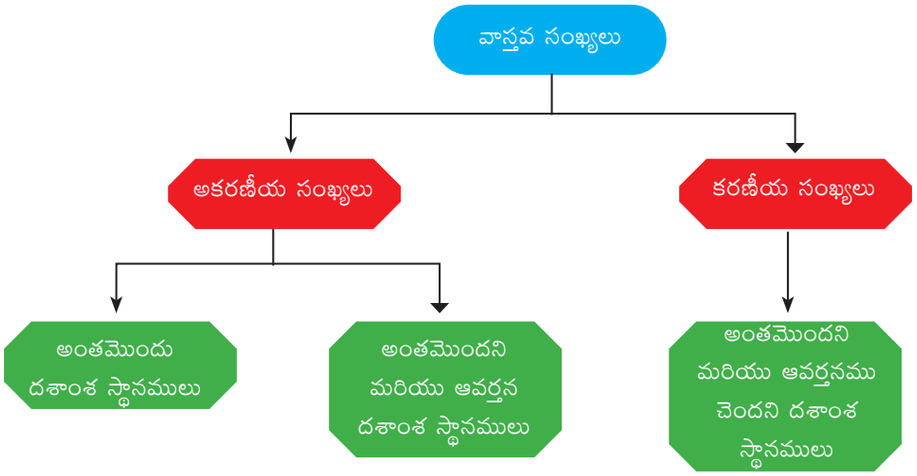
1. క్రిందివ్వబడిన కరణీయ సంఖ్యలను సంఖ్యా రేఖపై గుర్తించుము.
   (i) $\sqrt{3}$ (ii) $\sqrt{4.7}$ (iii) $\sqrt{6.5}$
2. ఏవైనా రెండు కరణీయ సంఖ్యలను క్రిందివ్వబడిన సంఖ్యల మధ్యలో వుండునట్లు కనుగొనుము.
   (i) 0.3010011000111….మరియు 0.3020020002…. (ii) $\frac{6}{7}$ మరియు $\frac{12}{13}$
   (iii) $\sqrt{2}$ మరియు $\sqrt{3}$
3. 2.2360679….. మరియు 2.236505500….మధ్యగల ఏవైనా రెండు అకరణీయ సంఖ్యలను కనుగొనుము.

2.4 వాస్తవ సంఖ్యలు

వాస్తవ సంఖ్యలలో అన్ని అకరణీయ మరియు అన్ని కరణీయ సంఖ్యలు వుండును..

వాస్తవ సంఖ్యలు బిందువులుగా పరిగణింపబడి అమర్చబడిన ఒక అనంతమైన పొడుగాటి సంఖ్యా రేఖ వాస్తవ రేఖ (real line) అనబడును. ఇక్కడ పూర్ణసంఖ్యలకు (Intergers) అనురూపముగా సమానదూరములో బిందువులు అమర్చబడినవి.

2-Real Numbers.indd 58 04-03-2023 18:16:30



సాధ్యమైన అనంత దశాంశ సూచనలు చేత ఏదైనా వాస్తవ సంఖ్యను నిర్ధారించవచ్చును. (అకరణీయ మరియు కరణీయ సంఖ్యల యొక్క దశాంశ సూచనలను ముందే తెలిసికొనియున్నాము).

2.4.1 వాస్తవ సంఖ్యా రేఖ

క్రమానుసారమైన వృద్ధీకరణ మూలముగా దృష్టీకరించుట

మనము దర్పణము ద్వారా వృద్ధీకరింపచేయు విధముగా, సంఖ్యా రేఖపై సంఖ్యల యొక్క దృష్టీకరణను సూచింపవచ్చును.

ఉదాహరణ 2.14 4.863 ను సంఖ్యా రేఖపై చూపుము.

సాధన

4.863 అనునది 4 మరియు 5 లమధ్యలో వుండును (పటం 2.9 ను చూడుము)

(i) 4 మరియు 5 ల మధ్య గల దూరమును 10 సమ అంతరములుగా విభజించుము.

(ii) 4.8 బిందువును 5 నుండి ఎడమ వైపునకు రెండవదిగాను మరియు 4 నుండి కుడివైపుకు 8వదిగాను వుండునట్లు గుర్తించుము.

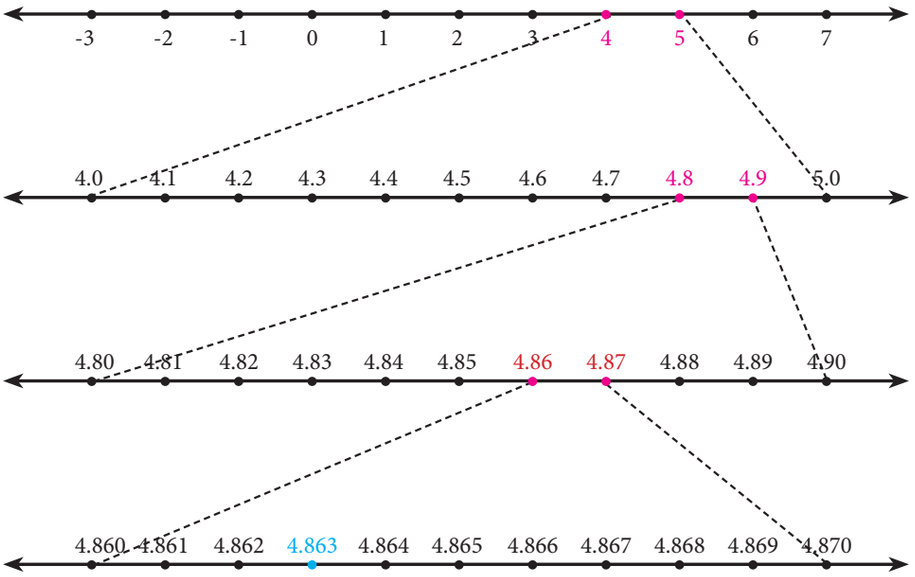
(iii) 4.8 కు మరియు 4.9నకు మధ్య 4.86 వుండును. ఈ దూరమును పది సమ అంతరములుగా విభజించుము.

(iv) 4.86 అను బిందువును 4.9నకు ఎడమవైపు 4వదిగను, 4.8నకు కుడివైపు 6వదిగాను వుండునట్లు గుర్తించుము.

(v) 4.863 అను బిందువు 4.86నకు మరియు 4.87 నకు మధ్య వుండును. ఈ దూరమును మరల 10 సమాన బాగములు (అంతరములుగా) విభజించుము.

(vi) 4.863 ను 4.87 నుండి ఎడమ వైపున 7వదిగను, మరియు 4.86 నకు కుడివైపున 3వదిగను వుండునట్లు గుర్తించుము.

2-Real Numbers.indd 59 04-03-2023 18:16:30



పటం. 2.9

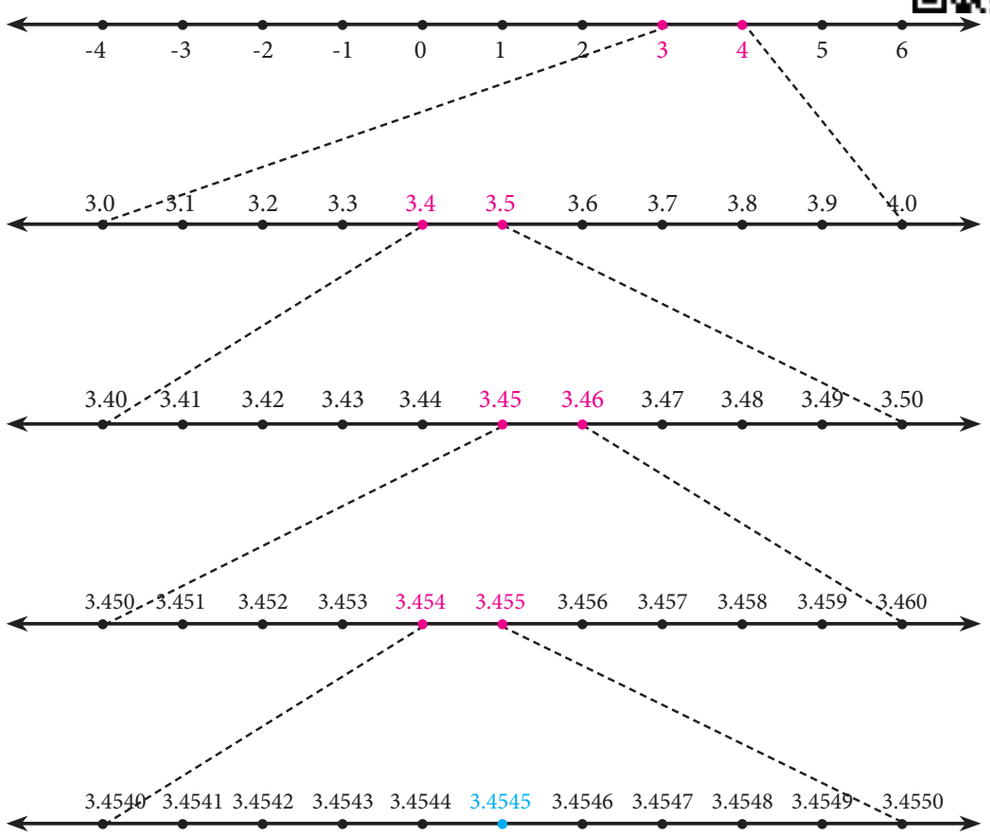
ఉదాహరణ 2.15

$3.\overline{45}$ 4 దశాంశ స్థానముల వరకు 3.45 ను సంఖ్యారేఖపై సూచించుము.

సాధన $3.\overline{45}$ = 3.45454545.....

= 3.4545 (4 దశాంశ స్థానములకు సవరించును)

ఆ సంఖ్య 3 మరియు 4 ల మధ్య వుండును.



పటం. 2.10

2-Real Numbers.indd 60 04-03-2023 18:16:30

అభ్యాసము 2.4

1. సంఖ్యారేఖపై క్రిందివ్వబడిన సంఖ్యలను గుర్తించుము.
   (i) 5.348 (ii) $6.\overline{4}$ ను 3 దశాంశ స్థానముల వరకు (iii) $4.\overline{73}$ ను 4 దశాంశ స్థానముల వరకు

2.5 కరణి మూలము యొక్క సంకేతము

n అనునది ఒక ధనాత్మక పూర్ణసంఖ్య మరియు r అనునది ఒక వాస్తవ సంఖ్య అని అనుకొనుము. $r^n = x$ అయిన r అనుది x యొక్క n వ మూలము అగును. దీనిని $\sqrt[n]{x} = r$ (x యొక్క n^{th} వ మూలం = r అని వ్రాయవచ్చును).

$\sqrt[n]{\ }$ అను గుర్తు (n^{th} root) అనునది ఒక కరణి మూల సంకేతము (radical) అని అందురు. n అనునది కరణి మూలము యొక్క వరుస (index) అని (ఇంతకు మునుపు ఘాతము అని మనము పిలిచెదము) మరియు x అనునది కరణి మూల ఆధారము (radicand) అని పిలిచెదరు.

సూచన

"వర్గమూలము" మరియు "ఘనమూలము" లను బాగుగా అర్థంచేసుకొనుటకు కొంత సమయమును కేటాయించిన "కరణులను" బాగా అర్థం చేసుకొనవచ్చును.

$n = 2$ అయినపుడు అది ఏమగును? $r^2 = x$ వచ్చును. కావున $r = \sqrt[2]{x}$ అగును. ఇప్పుడు x యొక్క వర్గమూలమును గుర్తు చేసుకొనెదము. r అనునది x యొక్క వర్గమూలము అగును. ఉదాహరణకు $\sqrt[2]{16}$ ను $\sqrt{16}$ గా వ్రాయవచ్చును. ఇంకా $n = 3$ అయిన మనము x యొక్క ఘనమూలమును $\sqrt[3]{x}$ గా వ్రాయవచ్చును. ఉదాహరణకు $\sqrt[3]{8}$ అనునది 8 యొక్క ఘనమూలము 2 అని సూచించును. ($8 = 2^3$ అనునది సరియగునా?)

మెదడుకు మేత

ఈ క్రింది వానిలో ఏది అసత్యము?

(1) 9 యొక్క వర్గమూలము 3 లేక -3.

(2) $\sqrt{9} = 3$

(3) $-\sqrt{9} = -3$

(4) $\sqrt{9} = \pm 3$

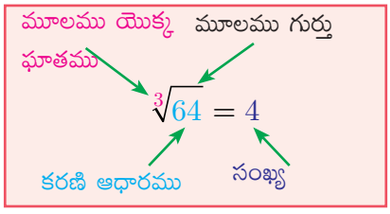
4 కు ఎన్ని వర్గమూలములు కలవు? $(+2)\times(+2) = 4$ మరియు $(-2)\times(-2) = 4$ అయినందున మనము $+2$ మరియు -2. అను రెండింటిని 4 యొక్క వర్గమూలములని చెప్పుదుము. అయితే $\sqrt{4} = \pm 2$. అని వ్రాయుట సరికాదు అని చెప్పవచ్చును. ఎందుకనగా, n అనునది సరిసంఖ్య అయినపుడు, ఒక ధనాత్మక n వ మూలమునకు $\sqrt[n]{x}$ అననునది ఒక అంగీకరించదగ్గ గుర్తు అగును. అదేవిధంగా ఋణాత్మక n వ మూలమైనపుడు $-\sqrt[n]{x}$ అని సూచించవచ్చును. అందువలన $\sqrt{4} = 2$ మరియు $-\sqrt{4} = -2$. అని వ్రాయవచ్చును.

n అనునది బేసి సంఖ్య అయినపుడు, x యొక్క ఏ విలువకైనా ఒకే ఒక వాస్తవ n వ మూలముండును. ఉదాహరణకు, $\sqrt[3]{8} = 2$ మరియు $\sqrt[5]{-32} = -2$ అగును.

2.5.1 భిన్న ఘాతము

$r = \sqrt[n]{x}$ అను రూప ఫలితమును మరల గమనించిన,

ప్రక్కనున్న చిత్ర సంకేతములో మూలము యొక్క వరుస అగునది (ఇక్కడ $n = 3$) ఎన్నిసార్లు జవాబును (ఇక్కడ 4) గుణించిన మూల ఆధారము 64 వచ్చును అనుదానిని తెలియజేయుచున్నది.



ఘాతములు మరియు మూలములను సూచించుటకు మరొక పద్ధతి గలదు. దానిలో భిన్న ఘాతములను (fractional indices) ఉపయోగించవచ్చును.

2-Real Numbers.indd 61 04-03-2023 18:16:32

$\sqrt[n]{x}$ ను $x^{\frac{1}{n}}$ అని సూచించవచ్చును.

ఉదాహరణకు, $\sqrt[3]{64} = 64^{\frac{1}{3}}$ మరియు $\sqrt{25} = 25^{\frac{1}{2}}$ అని వ్రాయవచ్చును.

ఈ క్రొత్త పద్ధతి నుండి, క్రిందివ్వబడిన పట్టికలో కొన్ని అమరిక సూచనలు ఉద్భవించినవి.

ఘాత సంకేతరూపము	మూల సంకేతరూపము	భిన్న ఘాత రూపము	వాడుకలో చదువు పద్ధతి
$2^6 = 64$	$2 = \sqrt[6]{64}$	$2 = 64^{\frac{1}{6}}$	64 యొక్క 6వ మూలము 2 అగును.
$2^5 = 32$	$2 = \sqrt[5]{32}$	$2 = 32^{\frac{1}{5}}$	32 యొక్క 5వ మూలము 2 అగును.
$2^4 = 16$	$2 = \sqrt[4]{16}$	$2 = 16^{\frac{1}{4}}$	16 యొక్క 4వ మూలము 2 అగును.
$2^3 = 8$	$2 = \sqrt[3]{8}$	$2 = 8^{\frac{1}{3}}$	8 యొక్క 3వ మూలము 2 అగును.
$2^2 = 4$	$2 = \sqrt[2]{4}$ లేక సూక్ష్మంగా $2 = \sqrt{4}$	$2 = 4^{\frac{1}{2}}$	4 యొక్క 2వ మూలము 2 లేక 4 యొక్క వర్గమూలము 2 అగును.

ఉదాహరణ 2.16 క్రింది వానిని 2^n రూపము లోనికి మార్చుము.

(i) 8 (ii) 32 (iii) $\frac{1}{4}$ (iv) $\sqrt{2}$ (v) $\sqrt{8}$.

సాధన

(i) $8 = 2\times 2\times 2$ అందువలన $8 = 2^3$

(ii) $32 = 2\times 2\times 2\times 2\times 2 = 2^5$

(iii) $\frac{1}{4} = \frac{1}{2\times 2} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2}$

(iv) $\sqrt{2} = 2^{1/2}$

(v) $\sqrt{8} = \sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^3$ ను $2^{\frac{3}{2}}$ గా కూడా వ్రాయవచ్చును.

$x^{\frac{m}{n}}$ యొక్క అర్థము (ఇక్కడ m మరియు n అనునవి ధనాత్మక పూర్ణసంఖ్యలు)

$x^{\frac{m}{n}}$ ను x యొక్క m వ ఘాతము యొక్క n వ మూలమగును లేక x యొక్క n వ మూలము యొక్క m వ ఘాతమని కూడా పరిగణించవచ్చును.

సంకేతకముగా, $x^{\frac{m}{n}} = (x^m)^{\frac{1}{n}}$ లేక $(x^{\frac{1}{n}})^m = \sqrt[n]{x^m}$ లేక $(\sqrt[n]{x})^m$

2-Real Numbers.indd 62 04-03-2023 18:16:34

ఉదాహరణ 2.17 (i) $81^{\frac{5}{4}}$ (ii) $64^{\frac{-2}{3}}$ యొక్క విలువలను కనుగొనుము.

సాధన

(i) $81^{\frac{5}{4}} = \left(\sqrt[4]{81}\right)^5 = \left(\sqrt[4]{3^4}\right)^5 = 3^5 = 3\times3\times3\times3\times3 = 243$

(ii) $64^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{64^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{64}\right)^2} = \frac{1}{4^2}$ (ఎట్లు?) $= \frac{1}{16}$

అభ్యాసము 2.5

1. కింది వానిని 5^n రూపములోనికి మార్చుము.

   (i) 625 (ii) $\frac{1}{5}$ (iii) $\sqrt{5}$ (iv) $\sqrt{125}$

2. కింది వానిని 4^n రూపములో వ్రాయుము.

   (i) 16 (ii) 8 (iii) 32

3. కింది వాటి విలువలను కనుగొనుము.

   (i) $\left(49\right)^{\frac{1}{2}}$ (ii) $\left(243\right)^{\frac{2}{5}}$ (iii) $9^{\frac{-3}{2}}$ (vi) $\left(\frac{64}{125}\right)^{\frac{-2}{3}}$

4. భిన్న ఘాతమునుపయోగించి వ్రాయుము.

   (i) $\sqrt{5}$ (ii) $\sqrt[2]{7}$ (iii) $\left(\sqrt[3]{49}\right)^5$ (iv) $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{100}}\right)^7$

5. కింద ఇవ్వబడిన వాటికి 5 వ మూలమును కనుగొనుము.

   (i) 32 (ii) 243 (iii) 100000 (iv) $\frac{1024}{3125}$

2.6 కరణులు

వాస్తవ సంఖ్యలను సంఖ్యారేఖపై సూచించుటను మరియు సమకూర్చుటను (manipulating) విశదముగా నేర్చుకొనియున్నాము. కొన్ని ఉజ్జాయింపు విలువలను ఏవిధంగా కరణులుగా సూచించవచ్చునని మనము ఇప్పుడు నేర్చుకొందాము.

$\sqrt{4}$ అను సంఖ్యను $\sqrt{}$ గుర్తు లేకుండా మనవల్ల సూక్ష్మంగా చదువుటకు వీలగునా? వీలగును. $\sqrt{4}$ కు బదులుగా 2 అని సులభముగా వ్రాయవచ్చును. అలాగే $\sqrt{\frac{1}{9}}$ ను పైవిధంగా వ్రాయవచ్చునా? $\sqrt{}$ గుర్తు లేకుండా దీని విలువ $\frac{1}{3}$ అవుతుంది. $\sqrt{0.01}$ యొక్క విలువ ఎంత? దీనిని కూడా సులభంగా వ్రాయవచ్చును. దీని విలువ 0.1 అవుతుంది.

2-Real Numbers.indd 63 04-03-2023 18:16:35

$\sqrt{4}$, $\sqrt{\frac{1}{9}}$ మరియు $\sqrt{0.01}$ మొదలగు వాటి సాధనకు కనుగొనునపుడు $\sqrt{}$ చిహ్నము లేకుండ సాధనను చూడవచ్చును. ఇది అన్ని సందర్భములలోను సాధ్యమగునా?

$\sqrt{18}$. ని తీసుకొనుము. మూల సంకేతము $\sqrt{}$ లేకుండా దీని విలువను మనవల్ల కనుగొనుటకు వీలగునా? 2 యొక్క వర్గమూలము ($\sqrt{2}$), 5 యొక్క వర్గమూలము ($\sqrt{5}$) మొదలగు మూలగుర్తు లేకుండా విలువ కనుగొనుటకు వీలుకాని సంఖ్యలను కరణులు అందురు.

అవి అకరణీయ సంఖ్యలను గుణకములుగా గల సమీకరణముల యొక్క కరణీయ మూలములు అవుతుంది.

ఒక అకరణీయ సంఖ్య యొక్క కరణీయ మూలమును కరణి (surd) అందురు. $\sqrt[n]{a}$ అనునది ఒక కరణీయము, ఇక్కడ, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, 'a' అనునది అకరణీయ సంఖ్య.

ఉదాహరణములు: $\sqrt{2}$ ఒక కరణి. అది $x^2 = 2$ అను సమీకరణము యొక్క కరణీయ మూలము అగును. $x^2 - 2 = 0$ అను దానిని గమనించిన, అది అకరణీయ గుణకములు కలిగిన ఒక సమీకరణము. $\sqrt{2}$ అనునది కరణీయ సంఖ్య దానిని $1.4142135\ldots$ అని చూపించవచ్చును. అది ఒక ఆవర్తన చెందని, అంతమొందని దశాంశ సంఖ్య.

$\sqrt[3]{3}$ ($3^{\frac{1}{3}}$ కు సమానము) అనునది ఒక కరణి, ఎందుకనగా $x^3 - 3 = 0$ అను సమీకరణము యొక్క కరణీయ మూలము అగును. ($\sqrt{3}$ అనునది కరణీయ సంఖ్య మరియు దానిని $1.7320508\ldots$ సూచించిన అది ఒక ఆవర్తనం చెందని, అంతమొందని దశాంశము అగును).

మీరు $x^2 - 6x + 7 = 0$ అను ద్విఘాత సమీకరణములను సాధించుటను తర్వాతి తరగతిలో నేర్చుకొనెదరు. అది అకరణీయ గుణకములు కలిగిన ఒక సమీకరణము మరియు దీని యొక్క ఒక మూలము $3 + \sqrt{2}$ అనునది ఒక కరణి అగును.

$\sqrt{\frac{1}{25}}$ అనునది ఒక కరణి యగునా? కాదు. దానిని $\frac{1}{5}$గా సూక్ష్మీకరింపబడిన ఒక అకరణీయ సంఖ్య అగును. ఎట్లు? $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$ యొక్క విలువ ఏ విధంగా ఉంటుంది? ఇది కూడా ఒక కరణి కాదు. ఎందుకనగా దీనిని $\frac{2}{3}$ గా సూక్ష్మీకరింపవచ్చును.

ప్రఖ్యాతిగాంచిన కరణీయ సంఖ్య π అనునది ఒక కరణి (surd) కాదు. అది ఒక కరణీయ సంఖ్య అయినప్పటికి దానిని $\sqrt{}$ గుర్తులో అకరణీయ సంఖ్యగా సూచించుటకు వీలుకాదు. (వేరే విధంగా కూడా అది అకరణీయ గుణకములు కలిగిన ఏ సమీకరణము యొక్క మూలము కాదు.)

కరణులు ఎందుకు ముఖ్యము? గణనము చేయుటకు మనము క్రింది ఉజ్జాయింపు విలువలను తీసుకొందుము $\sqrt{2} = 1.414, \sqrt{3} = 1.732$ మొదలగునవి

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(1.414\right)^2 = 1.99936 \neq 2\ ; \quad \left(\sqrt{3}\right)^2 = \left(1.732\right)^2 = 3.999824 \neq 3$$

2-Real Numbers.indd 64 04-03-2023 18:16:36

కావున $\sqrt{2}$ మరియు $\sqrt{3}$ యొక్క విలువలను ఉజ్జాయింపు విలువల కంటే వాటి ఖచ్చిత విలువలను కలిగియున్నదని గమనించుము. వంతెనలు మరియు రూపకల్పన పనులను నిర్మించునపుడు ఇంజినీర్లు మరియు విజ్ఞానులకు చాలా ఖచ్చిత విలువలు కావలసివస్తుంది. కావున కరణులను నేర్చుకొనుట అవసరము.



పురోగమన తనిఖీ

1. భిన్నమైనదేది? నీ జవాబుకు సరియైన కారణమును తెల్పుము.

   (i) $\sqrt{36}$, $\sqrt{\frac{50}{98}}$, $\sqrt{1}$, $\sqrt{1.44}$, $\sqrt[5]{32}$, $\sqrt{120}$

   (ii) $\sqrt{7}$, $\sqrt{48}$, $\sqrt[3]{36}$, $\sqrt{5}+\sqrt{3}$, $\sqrt{1.21}$, $\sqrt{\frac{1}{10}}$

2. అన్ని కరణులు కరణీయ సంఖ్యలా? నీ జవాబును కలిసి ఆలోచింపుము.
3. అన్ని కరణీయ సంఖ్యలు కరణులా? కొన్ని ఉదాహరణములతో రుజువు పరచుము.

2.6.1 కరణి పరిమాణము

ఒక కరణి అనేది ఏ మూలము నుండి పొందుచున్నమో, ఆ మూలము యొక్క కరణి పరిమాణము అంటారు. $\sqrt[n]{a}$ కరణి పరిమాణము n. కరణి పరిమాణము $\sqrt[5]{99}$? అది 5. కరణులను అనేక విధముగా వర్గీకరించవచ్చును. :

ఒకే పరిమాణము కలిగిన కరణులు (Surds of same order) **:** రెండు లేక అంతకన్నా ఎక్కువ కరణుల యొక్క పరిమాణములు సమానమైన దానిని ఒకే విధమైన పరిమాణము గల కరణులు అందురు. వీటిని సమాన మూల గుర్తు గల కరణులు అని కూడా అంటారు.

ఉదాహరణకు, $\sqrt{x}$, $a^{\frac{3}{2}}$, $\sqrt[2]{m}$ అనునవి ద్విఘాత కరణులు అగును.

$\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{(x-2)}$, $(ab)^{\frac{1}{3}}$ అనునవి త్రిఘాత కరణులు

$\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{10}$, $\sqrt[4]{6}$ మరియు $8^{\frac{2}{5}}$ అననవి వేర్వేరు పరిమాణము గల కరణులు.

(iii) కరణి యొక్క సరళ రూపము (Simplest form of a surd) : కరణి యొక్క సరళరూపము అనునది కరణీయ మరియు అకరణీయ కారణాంకముల లబ్ధము. దీనియందు గల కరణీయ కారణాంకము క్రింద ఇవ్వబడిన మూడు నియమములను సంతృప్తిపరచవలెను.

(a) మూలము యొక్క పరిమాణము సాధ్యమైనంత వరకు చాలా చిన్నదిగా ఉండవలయును.

(b) మూల సంకేతము యొక్క పరిమాణము భిన్నముగా వుండరాదు.

(c) పరిమాణము n. గా కలిగిన మూల గుర్తు లోపల (Radical sign) a^n రూపంలో ఏ ఒక్క కారణాంకము వుండకూడదు. ఇచ్చట a అనునది ఒక ధన పూర్ణసంఖ్య అగును.

2-Real Numbers.indd 65 04-03-2023 18:16:37

ఉదాహరణ 2.18

క్రింది వాటిని ఒకే విధమైన పరిమాణము గల కరణులుగా మార్చగలరా?

(i) $\sqrt{3}$ (ii) $\sqrt[4]{3}$ (iii) $\sqrt[3]{3}$

సాధన

(i) $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$
$= 3^{\frac{6}{12}}$
$= \sqrt[12]{3^6}$
$= \sqrt[12]{729}$

(ii) $\sqrt[4]{3} = 3^{\frac{1}{4}}$
$= 3^{\frac{3}{12}}$
$= \sqrt[12]{3^3}$
$= \sqrt[12]{27}$

(iii) $\sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}}$
$= 3^{\frac{4}{12}}$
$= \sqrt[12]{3^4}$
$= \sqrt[12]{81}$

చివరి అడ్డు వరుసలో నున్న మూడును ఒకే విధమైన పరిమాణముగా గల కరణులుగా మార్చబడినవి.

ఉదాహరణ 2.19

1. ఇవ్వబడిన కరణులను సూక్ష్మరూపంలో వ్రాయుము: i) $\sqrt{8}$ ii) $\sqrt[3]{192}$
2. $\sqrt[3]{7} > \sqrt[4]{5}$ అని చూపుము.

సాధన

1. (i) $\sqrt{8} = \sqrt{4\times2} = 2\sqrt{2}$

   (ii) $\sqrt[3]{192} = \sqrt[3]{4\times4\times4\times3} = 4\sqrt[3]{3}$

2. $\sqrt[3]{7} = \sqrt[12]{7^4} = \sqrt[12]{2401}$

   $\sqrt[4]{5} = 5^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{3}{12}} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125}$

   $\sqrt[12]{2401} > \sqrt[12]{125}$

   కావున, $\sqrt[3]{7} > \sqrt[4]{5}$.

(iii) శుద్ధ మరియు మిశ్రమ కరణులు (Pure and Mixed Surds) : సూక్ష్మరూపంలో ఒక కరణి యొక్క గుణకము ఒకటిగా నుండిన దానిని శుద్ధ కరణి అందురు. ఉదాహరణకు, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[4]{7}$, $\sqrt[5]{49}$ అనునవి శుద్ధ కరణులు. ఒక కరణి యొక్క గుణకము ఒకటి తప్ప ఉండిన దానిని మిశ్రమ కరణి అందురు.
1. ఉదాహరణకు, $5\sqrt{3}$, $2\sqrt[4]{5}$, $3\sqrt[4]{6}$ అనునవి మిశ్రమ కరణులు..

(iv) సరళ మరియు సంయుక్త కరణులు (Simple and Compound Surds): ఒకే ఒక పదము గల కరణిని సరళ కరణి అందురు. ఉదాహరణకు, $\sqrt{3}$, $2\sqrt{5}$ అనునవి సరళ కరణులు. రెండు లేక అంతకంటే ఎక్కువ కరణుల బీజీయ మొత్తం (లేక భేదము) సంయుక్త కరణి అగును. 1. ఉదాహరణకు, $\sqrt{5}+3\sqrt{2}, \sqrt{3}-2\sqrt{7}, \sqrt{5}-7\sqrt{2}+6\sqrt{3}$ అనునవి సంయుక్త కరణులు.

2-Real Numbers.indd 66 04-03-2023 18:16:39

(v) ద్విపద కరణి (Binomial Surd) : రెండు కరణులు లేదా ఒకటి అకరణీయ సంఖ్య మరొకటి కరణిగా గల రెండు పదముల బీజీయ మొత్తము (లేక భేదము)ను ద్విపద కరణి అందురు.

ఉదాహరణకు $\frac{1}{2}-\sqrt{19}, 5+3\sqrt{2}, \sqrt{3}-2\sqrt{7}$ అనునవి ద్విపద కరణులు.

ఉదాహరణ 2.20 ఆరోహణ క్రమములో వ్రాయుము.: $\sqrt[3]{2},\ \sqrt[2]{4},\ \sqrt[4]{3}$

సాధన $\sqrt[3]{2},\ \sqrt[2]{4}$ మరియు $\sqrt[4]{3}$. యొక్క పరిమాణములు 3,2,4

3,2,4 ల క.సా.గు. 12.

$$\sqrt[3]{2}=\left(2^{\frac{1}{3}}\right)=\left(2^{\frac{4}{12}}\right)=\sqrt[12]{2^4}=\sqrt[12]{16}\ ;\qquad \sqrt[2]{4}=\left(4^{\frac{1}{2}}\right)=\left(4^{\frac{6}{12}}\right)=\sqrt[12]{4^6}=\sqrt[12]{4096}$$

$$\sqrt[4]{3}=\left(3^{\frac{1}{4}}\right)=\left(3^{\frac{3}{12}}\right)=\sqrt[12]{3^3}=\sqrt[12]{27}$$

$\sqrt[3]{2},\ \sqrt[4]{3},\ \sqrt[2]{4}$ అనునది $\sqrt[12]{16}<\sqrt[12]{27}<\sqrt[12]{4096}$

ఆరోహణ క్రమము $\sqrt[3]{2}\,,\ \sqrt[4]{3}\,,\ \sqrt[2]{4}\,.$

2.6.2 మూల సంకేతముల విధులు

m, n అనునవి ధనాత్మక పూర్ణసంఖ్యలు మరియు $a\,,\ b.$ అనునవి ధనాత్మక అకరణీయ సంఖ్యలయిన, క్రింది మూల ధర్మములను జ్ఞప్తికి తెచ్చుకొనుట మంచిది:

వ.సంఖ్య	మూల సంకేత రూపము	ఘాత రూపము
1.	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a=\sqrt[n]{a^n}$	$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n=a=\left(a^n\right)^{\frac{1}{n}}$
2.	$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$	$a^{\frac{1}{n}}\times b^{\frac{1}{n}}=\left(ab\right)^{\frac{1}{n}}$
3.	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$	$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}}=a^{\frac{1}{mn}}=\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}$
4.	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	$\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$

మూలసంకేతముల న్యాయాలనుపయోగించి సాధించగల కొన్ని లెక్కలను ఇప్పుడు చర్చించెదము.

2-Real Numbers.indd 67 04-03-2023 18:16:40

ఉదాహరణ 2.21 క్రింద ఇవ్వబడిన కరణులను సూక్ష్మరూపంలో మార్చుము. మరియు వాటి పరిమాణము, కరణి ఆధారము మరియు గుణకములను కనుగొనుము. (i) $\sqrt[3]{108}$ (ii) $\sqrt[3]{(1024)^{-2}}$.

సాధన

(i) $\sqrt[3]{108} = \sqrt[3]{27 \times 4}$

$= \sqrt[3]{3^3 \times 4}$

$= \sqrt[3]{3^3} \times \sqrt[3]{4}$ (మూల విధి - ii)

$= 3 \times \sqrt[3]{4}$ (మూల విధి- i)

2	108
2	54
3	27
3	9
3	3
	1

పరిమాణము = 3; కరణి ఆధారము = 4; గుణకము = 3

(ii) $\sqrt[3]{(1024)^{-2}} = \left[\sqrt[3]{\left(2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2\right)^{-2}}\right]$

$= \left[\sqrt[3]{\left(2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2\right)}\right]^{-2}$ [మూల విధి - (i)]

$= \left[\sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{2}\right]^{-2}$ [మూల విధి – (iI)]

$= \left[2 \times 2 \times 2 \times \sqrt[3]{2}\right]^{-2}$ [మూల విధి – (i)]

$= \left[8 \times \sqrt[3]{2}\right]^{-2} = \left[\frac{1}{8}\right]^2 \times \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^2$

$= \frac{1}{64}\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

2	1024
2	512
2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

పరిమాణము $= 3$; కరణి ఆధారము $= \frac{1}{4}$; గుణకము $= \frac{1}{64}$

(ఘాత పద్ధతినుపయోగించి పై తెల్పిన ఫలితములు పొందవచ్చును).

సూచన

5 మరియు 6 సంఖ్యలను తీసుకొనుము. మరియు $5 = \sqrt{25}, 6 = \sqrt{36}$ కావున, $\sqrt{26}$, $\sqrt{27}$, $\sqrt{28}$, $\sqrt{29}$, $\sqrt{30}$, $\sqrt{31}$, $\sqrt{32}$, $\sqrt{33}$, $\sqrt{34}$, మరియు $\sqrt{35}$ అనునవి 5 మరియు 6 కు మధ్య గల కరణులగును.

$3\sqrt{2} = \sqrt{3^2 \times 2} = \sqrt{18}$, $2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \times 3} = \sqrt{12}$ కావున $\sqrt{17}$, $\sqrt{15}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{13}$ అనునవి $2\sqrt{3}$ మరియు $3\sqrt{2}$ కు మధ్య గల కరణులగును.

2-Real Numbers.indd 68 04-03-2023 18:16:42

2.6.3 కరణులపై నాలుగు ప్రాథమిక పరిక్రియలు

(i) **కరణుల కూడిక మరియు తీసివేత :** ఒకే విధమైన కరణులను క్రింది విధులనుపయోగించి కూడవచ్చును లేక తీసివేయవచ్చును.

$$a\sqrt[n]{b} \pm c\sqrt[n]{b} = (a \pm c)\sqrt[n]{b}, \text{ ఇచ్చట } b>0$$

ఉదాహరణ 2.22 (i) $3\sqrt{7}$ మరియు $5\sqrt{7}$ ను కూడుము. వాటి మొత్తము ఒక కరణీయ సంఖ్యా? లేక అకరణీయ సంఖ్యా? అని సరిచూడుము. (ii) $4\sqrt{5}$ ను $7\sqrt{5}$ నుండి తీసివేయుము. అది ఒక కరణీయ సంఖ్యా? లేక అకరణీయ సంఖ్యా? అని సరిచూడుము.

సాధన

(i) $3\sqrt{7} + 5\sqrt{7} = (3+5)\sqrt{7} = 8\sqrt{7}$. సాధన ఒక కరణీయ సంఖ్య.

(ii) $7\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = (7-4)\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$. సాధన ఒక కరణీయ సంఖ్య.

ఉదాహరణ 2.23 క్రింది వాటిని సూక్ష్మీకరించుము:

(i) $\sqrt{63} - \sqrt{175} + \sqrt{28}$ (ii) $2\sqrt[3]{40} + 3\sqrt[3]{625} - 4\sqrt[3]{320}$

సాధన

(i) $\sqrt{63} - \sqrt{175} + \sqrt{28} = \sqrt{9\times7} - \sqrt{25\times7} + \sqrt{4\times7}$

$= 3\sqrt{7} - 5\sqrt{7} + 2\sqrt{7}$

$= \left(3\sqrt{7} + 2\sqrt{7}\right) - 5\sqrt{7}$

$= 5\sqrt{7} - 5\sqrt{7}$

$= 0$

(ii) $2\sqrt[3]{40} + 3\sqrt[3]{625} - 4\sqrt[3]{320}$

$= 2\sqrt[3]{8\times5} + 3\sqrt[3]{125\times5} - 4\sqrt[3]{64\times5}$

$= 2\sqrt[3]{2^3\times5} + 3\sqrt[3]{5^3\times5} - 4\sqrt[3]{4^3\times5}$

$= 2\times2\sqrt[3]{5} + 3\times5\sqrt[3]{5} - 4\times4\sqrt[3]{5}$

$= 4\sqrt[3]{5} + 15\sqrt[3]{5} - 16\sqrt[3]{5}$

$= (4+15-16)\sqrt[3]{5} = 3\sqrt[3]{5}$

(ii) కరణుల గుణకారము మరియు భాగహారము

ఒకే విధమైన కరణులను క్రింది విధులనుపయోగించి గుణించవచ్చును లేక భాగించవచ్చును.

2-Real Numbers.indd 69 04-03-2023 18:16:44

కరణుల యొక్క గుణకార ధర్మములు	కరణుల యొక్క భాగహార ధర్మములు
(i) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	(iii) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
(ii) $a\sqrt[n]{b} \times c\sqrt[n]{d} = ac\sqrt[n]{bd}$ ఇక్కడ $b, d > 0$	(iv) $\frac{a\sqrt[n]{b}}{c\sqrt[n]{d}} = \frac{a}{c}\sqrt[n]{\frac{b}{d}}$ ఇక్కడ $b, d > 0$

ఉదాహరణ 2.24 $\sqrt[3]{40}$ ను $\sqrt[3]{16}$ తో గుణించుము.

సాధన

$$\sqrt[3]{40} \times \sqrt[3]{16} = \left(\sqrt[3]{2\times2\times2\times5}\right) \times \left(\sqrt[3]{2\times2\times2\times2}\right)$$
$$= \left(2\times\sqrt[3]{5}\right) \times \left(2\times\sqrt[3]{2}\right) = 4\times\left(\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{5}\right) = 4\times\sqrt[3]{2\times5}$$
$$= 4\sqrt[3]{10}$$

ఉదాహరణ 2.25 $2\sqrt{72}\times5\sqrt{32}\times3\sqrt{50}$ గుణించి, సూక్ష్మరూపంలో వ్రాయుము.

సాధన

$$2\sqrt{72}\times5\sqrt{32}\times3\sqrt{50} = \left(2\times6\sqrt{2}\right)\times\left(5\times4\sqrt{2}\right)\times\left(3\times5\sqrt{2}\right)$$
$$= 2\times5\times3\times6\times4\times5\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}$$
$$= 3600\times2\sqrt{2}$$
$$= 7200\sqrt{2}$$

సూక్ష్మీకరించుము:
$\sqrt{72} = \sqrt{36\times2} = 6\sqrt{2}$
$\sqrt{32} = \sqrt{16\times2} = 4\sqrt{2}$
$\sqrt{50} = \sqrt{25\times2} = 5\sqrt{2}$

ఉదాహరణ 2.26 $\sqrt[9]{8}$ ను $\sqrt[6]{6}$ తో భాగించుము

సాధన

$$\frac{\sqrt[9]{8}}{\sqrt[6]{6}} = \frac{8^{\frac{1}{9}}}{6^{\frac{1}{6}}} \quad (6, 9 \text{ ల క.సా.గు. } 18 \text{ అగును.})$$
$$= \frac{8^{\frac{2}{18}}}{6^{\frac{3}{18}}} \quad (\text{ఎట్లు?})$$
$$= \left(\frac{8^2}{6^3}\right)^{\frac{1}{18}} \quad (\text{ఎట్లు?}) = \left(\frac{8\times8}{6\times6\times6}\right)^{\frac{1}{18}}$$
$$= \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{18}} = \left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^{\frac{1}{18}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{\frac{2}{3}}$$

కృత్యము - 1

క్రింది సాధనలు ఆసక్తికరముగా ఉన్నవా?

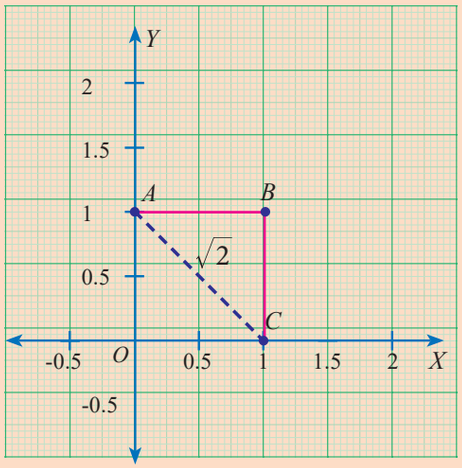
$\sqrt{4\frac{4}{15}} = 4\sqrt{\frac{4}{15}}$ మరియు $\sqrt{5\frac{5}{24}} = 5\sqrt{\frac{5}{24}}$

అనునవి సరియా? అని చూడుము. ఇదేవిధముగా వేరొక 4 క్రొత్త కరణులను వ్రాయుము.

2-Real Numbers.indd 70 04-03-2023 18:16:46

కృత్యము - 2

ఒక గ్రాపు కాగితంలో O, A, B, C లను క్రింది విధముగా గుర్తించుము.



$OABC$ చతురస్రము నుండి

$OA = AB = BC = OC = 1$ప్రమాణము

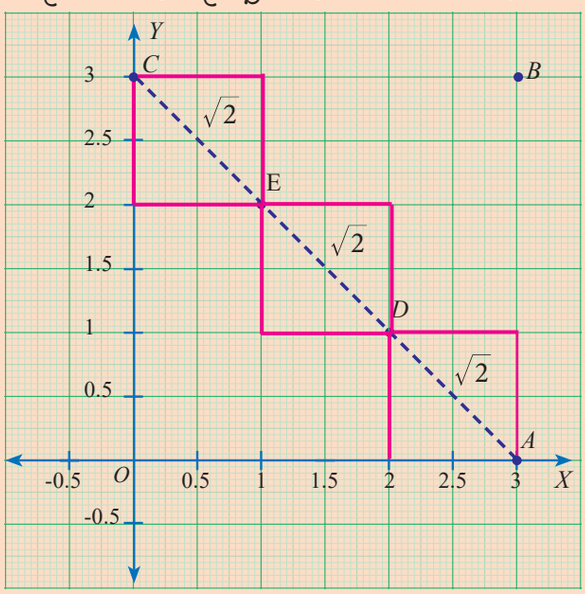
లంబకోణ ΔOAC లో

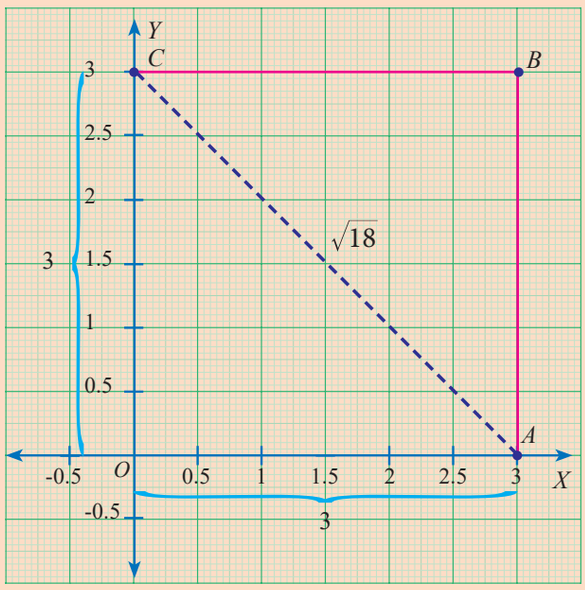
$AC = \sqrt{1^2 + 1^2}$

$= \sqrt{2}$ ప్రమాణములు (పైథాగరస్ సిద్ధాంతము ప్రకారము)

కర్ణము యొక్క పొడవు $AC = \sqrt{2}$, ఒక కరణి అగును.

క్రింది వాటిని గ్రాఫుగా ఊహించుకొనుము.





కర్ణము AC యొక్క పొడవును రెండు వేర్వేరు మార్గములలో కనుగొనవచ్చును.

$AC = AD + DE + EC$

(1 ప్రమాణం గల చతురస్ర కర్ణము)

$= \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2}$

$AC = 3\sqrt{2}$ ప్రమాణములు.

$AC = \sqrt{OA^2 + OC^2} = \sqrt{3^2 + 3^2}$

$= \sqrt{9 + 9}$

$AC = \sqrt{18}$ ప్రమాణములు.

ఇది సమానమా? వివాదించుము. ఈ కృత్యమును వేర్వేరు కొలతలు గల వేర్వేరు చతురస్రములను ఎంచుకొని సరిచూడుము (రుజువుపరచుము)

2-Real Numbers.indd 71 04-03-2023 18:16:47

అభ్యాసము 2.6

1. క్రింది కరణులను కూడిక మరియు తీసివేత ధర్మములనుపయోగించి సూక్ష్మీకరించుము.

(i) $5\sqrt{3}+18\sqrt{3}-2\sqrt{3}$ (ii) $4\sqrt[3]{5}+2\sqrt[3]{5}-3\sqrt[3]{5}$

(iii) $3\sqrt{75}+5\sqrt{48}-\sqrt{243}$ (iv) $5\sqrt[3]{40}+2\sqrt[3]{625}-3\sqrt[3]{320}$

2. క్రింది కరణులను గుణకార మరియు భాగహార ధర్మములనుపయోగించి సూక్ష్మీకరించుము.

(i) $\sqrt{3}\times\sqrt{5}\times\sqrt{2}$ (ii) $\sqrt{35}\div\sqrt{7}$ (iii) $\sqrt[3]{27}\times\sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{125}$

(iv) $\left(7\sqrt{a}-5\sqrt{b}\right)\left(7\sqrt{a}+5\sqrt{b}\right)$ (v) $\left[\sqrt{\frac{225}{729}}-\sqrt{\frac{25}{144}}\right]\div\sqrt{\frac{16}{81}}$

3. $\sqrt{2}=1.414,\ \sqrt{3}=1.732,\sqrt{5}=2.236,\sqrt{10}=3.162$, అయిన క్రింది వాటి విలువలను మూడు దశాంశ స్థానములకు సవరించి చూడుము.

(i) $\sqrt{40}-\sqrt{20}$ (ii) $\sqrt{300}+\sqrt{90}-\sqrt{8}$

4. క్రింది కరణులను అవరోహణ క్రమములో వ్రాయుము: (i) $\sqrt[3]{5},\sqrt[9]{4},\sqrt[6]{3}$ (ii) $\sqrt[2]{\sqrt[3]{5}},\sqrt[3]{\sqrt[4]{7}},\sqrt{3}$

5. క్రింది వాటి మూలముగా శుద్ధ కరణిని పొందవచ్చునా?

(i) రెండు కరణుల మొత్తము (ii) రెండు కరణుల తీసివేత

(iii) రెండు కరణుల లబ్ధము (iv) రెండు కరణుల భాగఫలము

ఒక్కొక్క జవాబును ఒక ఉదాహరణతో వివరింపుము.

6. క్రింది వానిని గణనము చేయునపుడు అకరణీయ సంఖ్య వచ్చునా?

(i) రెండు కరణుల మొత్తము (ii) రెండు కరణుల తీసివేత

(iii) రెండు కరణుల లబ్ధము (iv) రెండు కరణుల భాగఫలము

ఒక్కొక్క జవాబును ఒక ఉదాహరణతో వివరింపుము.

2.7 కరణులను అకరణీయపరచుట

ఇవ్వబడిన ఒక పదమును అకరణీయ సంఖ్యగా మార్చుటకు దానిని ఏ పదముతో గుణింప లేక భాగింపవలెనో ఆ పదము ఇవ్వబడిన పదము యొక్క "అకరణీయ కారణాంకము" (Rationalising factor) అగును.

ఉదాహరణలు

(i) $\sqrt{3}$ యొక్క అకరణీయ కారణాంకము $\sqrt{3}$ ($\because\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3$ ఒక అకరణీయ సంఖ్య)

(ii) $\sqrt[7]{5^4}$ యొక్క అకరణీయ కారణాంకము $\sqrt[7]{5^3}$ (వాటి లబ్ధము $=\sqrt[7]{5^7}=5$, ఒక అకరణీయ సంఖ్య).

2-Real Numbers.indd 72 04-03-2023 18:16:48

మెదడుకు మేత

1. పైన ఇవ్వబడిన ఉదాహరణ (i) లో $\sqrt{12}$. అనునది కూడ ఒక అకరణీయపరచు కారణాంకమా? $\sqrt{3}$ కు వేరు ఏదేని సంఖ్యలు అకరణీయపరచు కారణాంకములుగా ఉండునా?
2. ఉదాహరణ (ii) లో $\sqrt[7]{5^3}$ కు వేరు ఏదేని సంఖ్యలు అకరణీయపరచు కారణాంకములుగా ఉండుటకు వీలగునా?
3. కరణి గల ఒక సమాసమునకు ఒకటి కన్నా ఎక్కువగా అకరణీయపరచు కారణాంకములున్నప్పుడు వాటిలో చాలా చిన్నదానిని అకరణీయపరచు కారణాంకముగా లెక్కించుటకు మనము తీసుకొనిన మనకు ఏదైనా అనుకూలము ఉంటుందా?

పురోగమన తనిఖీ

క్రింద ఇవ్వబడిన ఒక్కొక్కటికి అకరణీయపరచు కారణాంకమును కనుగొని వాటిని సరిచూడుము:

(i) $\sqrt{18}$ (ii) $5\sqrt{12}$ (iii) $\sqrt[3]{49}$ (iv) $\frac{1}{\sqrt{8}}$

2.7.1 సంయుగ్మ కరణులు

$3+\sqrt{2}$ అనుదానికి అకరణీయపరచు కారణాంకమును నీవు ఊహించుటకు వీలగునా? ఈ కరణి ఒక అకరణీయ భాగమును మరియు మూల సంకేత భాగమును కల్గియున్నది. ఈ విధమైన అమరిక గల సంఖ్యల అకరణీయ కారణాంకము ఒక ఆసక్తికరమైన ప్రత్యేక రూపములో ఉండును

$3+\sqrt{2}$ యొక్క అకరణీయ కారణాంకము $3-\sqrt{2}$. దీనిని మిక్కిలి సులభముగా సరిచూడవచ్చును

$$\left(3+\sqrt{2}\right)\left(3-\sqrt{2}\right) = 3^2-\left(\sqrt{2}\right)^2$$
$$= 9-2$$
$$= 7 \text{ ఇది ఒక అకరణీయ సంఖ్య}$$

a , b అనునవి అకరణీయ సంఖ్యలు అనిన $a+\sqrt{b}$ యొక్క అకరణీయకారణాంకమేమి? $a-\sqrt{b}$ సరియా? సరిచూడుము. a , b అనునవి అకరణీయ సంఖ్యలు అయిన $\sqrt{a}+\sqrt{b}$. అను దాని అకరరణీయ కారణాంకము ఏది? $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ అనునది సరియా? లేక $-\sqrt{a}+\sqrt{b}$ అనునది సరియా? అని ఆలోచించుము.

$a+\sqrt{b}$ మరియు $a-\sqrt{b}$ అను రూపములో గల కరణులు సంయుగ్మ కరణులు అని పిలువబడును. $\sqrt{b}+a$ యొక్క సంయుగ్మము ఏది? $-\sqrt{b}+a$ అనునది సరియగునా? కరణి ముందు గల గుర్తును మార్చుట మూలముగా ఆ సంఖ్య యొక్క సంయుగ్మ కరణిని పొందవచ్చునని గ్రహించగలము.

ఉదాహరణ 2.27 హారమును అకరణీయపరచుము (i) $\frac{7}{\sqrt{14}}$ (ii) $\frac{5+\sqrt{3}}{5-\sqrt{3}}$

సాధన

(i) అకరణీయ కారణాంకమయిన $\sqrt{14}$ తో లవము మరియు హారమును గుణించగా.

2-Real Numbers.indd 73 04-03-2023 18:16:49

$$\frac{7}{\sqrt{14}} = \frac{7}{\sqrt{14}} \times \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{14}} = \frac{7\sqrt{14}}{14} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

(ii) $$\frac{5+\sqrt{3}}{5-\sqrt{3}} = \frac{\left(5+\sqrt{3}\right)}{\left(5-\sqrt{3}\right)} \times \frac{\left(5+\sqrt{3}\right)}{\left(5+\sqrt{3}\right)} = \frac{\left(5+\sqrt{3}\right)^2}{5^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}$$

$$= \frac{5^2+\left(\sqrt{3}\right)^2+2\times5\times\sqrt{3}}{25-3}$$

$$= \frac{25+3+10\sqrt{3}}{22} = \frac{28+10\sqrt{3}}{22} = \frac{2\times[14+5\sqrt{3}]}{22}$$

$$= \frac{14+5\sqrt{3}}{11}$$

అభ్యాసము 2.7

1. హారమును అకరణీయపరచుము

(i) $\frac{1}{\sqrt{50}}$ (ii) $\frac{5}{3\sqrt{5}}$ (iii) $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{18}}$ (iv) $\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$

2. హారమును అకరణీయపరచి, సూక్ష్మీకరించుము.

(i) $\frac{\sqrt{48}+\sqrt{32}}{\sqrt{27}-\sqrt{18}}$ (ii) $\frac{5\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

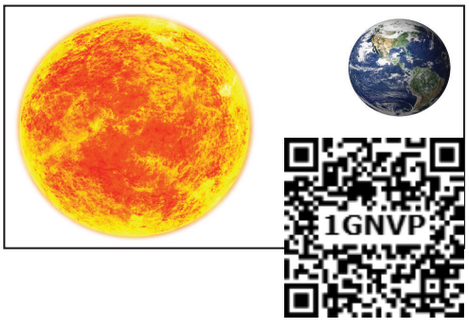
(iii) $\frac{2\sqrt{6}-\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-2\sqrt{6}}$ (iv) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}+2} - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}-2}$

3. $\frac{\sqrt{7}-2}{\sqrt{7}+2} = a\sqrt{7}+b$ అయిన a మరియు b విలువలను కనుగొనుము.

4. $x = \sqrt{5}+2$ అయిన $x^2 + \frac{1}{x^2}$ విలువ ఎంత?

5. $\sqrt{2} = 1.414$ అయిన $\frac{8-5\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$ యొక్క విలువను 3 దశాంశములకు సవరించి వ్రాయుము.

2.8 వైజ్ఞానిక సంకేతము



సూర్యుని యొక్క వ్యాసము 13,92,000 కి.మీ. మరియు భూమి వ్యాసము 12,740 కి.మీ. వీటిని పోల్చిన అది కఠినముగా అనిపించును. దీనికి బదులుగా 13,92000 అను దానిని 1.392×10^6 గాను, 12,740 ని 1.274×10^4 గా ఇచ్చిన అది సులభముగా అనిపించును. ఈ విధమైన అమరికను వైజ్ఞానిక సంకేతము అని అందురు.

2-Real Numbers.indd 74 04-03-2023 18:16:51

కావున $\frac{1.392 \times 10^6}{1.274 \times 10^4} \approx \frac{14}{13} \times 10^2 \approx 108$.

దీని నుండి సూర్యునిలోపల ఉజ్జాయింపుగా 108 భూములను వరుసగా సరళ రేఖలో అమర్చుటకు వీలగును అనుదానిని ఇప్పుడు నీవు ఊహించుటకు వీలగుచున్నదా!

వైజ్ఞానిక సాంకేతిక రూపము అనునది గరిష్ఠ మరియు కనిష్ఠ సంఖ్యల దశాంశ రూపములో వ్రాయు ఒక అమరిక అగును. ఇది సంఖ్యలను సులభముగా వ్రాయుటకు, ఉపయోగించుటకు వీలగుచున్నది.

2.8.1 దశాంశసంఖ్యను వైజ్ఞానిక సాంకేత రూపంలో వ్రాయుట

ఒక సంఖ్యను వైజ్ఞానిక సాంకేత రూపంలో వ్రాయుటకు ఈ క్రింది నిబంధనలు ఉపయోగకరముగా ఉండును.

(i) దశాంశ బిందువుకు ఎడమ వైపు ఒకే ఒక శూన్యేతర సంఖ్య ఉండునట్లు దశమ బిందువును జరుపుము.

(ii) పాత దశాంశ బిందువుకు క్రొత్త దశాంశ బిందువుకు మధ్య గల అంకెల సంఖ్యలను లెక్కించుము. దీనినని n అనుకొనుము. ఇది 10 యొక్క ఘాతములో 10^n అని వ్రాయవలయును.

(iii) దశాంశ బిందువు అనునది ఎడమ వైపునకు ఆవర్తించినచో (జరిపినచో) ఘాతము n అనునది ధనాత్మకమగును. కుడివైపునకు ఆవర్తించినచో ఘాతము n అనునది ఋణాత్మకమగును.

N అను సంఖ్యను $N = a \times 10^n$ అని వ్రాయవచ్చును. ఇచ్చట $1 \leq a < 10$, n ఒక పూర్ణసంఖ్య అను విధముగా గుర్తించినచో వైజ్ఞానిక సాంకేతిక రూపమనబడును.

క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడిన 10 ఆధారముగా గల ఉదాహరణములు స్పష్టమగుచున్నవి.

దశాంశ సూచన	వైజ్ఞానిక సాంకేత రూపము
100	1×10^2
1,000	1×10^3
10,000	1×10^4
1,00,000	1×10^5
10,00,000	1×10^6
1,00,00,000	1×10^7

దశాంశ సూచన	వైజ్ఞానిక సాంకేత రూపము
0.01	1×10^{-2}
0.001	1×10^{-3}
0.0001	1×10^{-4}
0.00001	1×10^{-5}
0.000001	1×10^{-6}
0.0000001	1×10^{-7}

ఇంకనూ కొన్ని ఉదాహరణములను చూచెదము.

ఉదాహరణ 2.28 వైజ్ఞానిక సాంకేతిక రూపంలో వ్రాయుము. (i) 9768854 (ii) 0.04567891 (iii) 72006865.48

సాధన (i) 9 7 6 8 8 5 4 . 0 $= 9.768854 \times 10^6$

6 5 4 3 2 1

2-Real Numbers.indd 75 04-03-2023 18:16:52

దశాంశ బిందువు అనునది 6 స్థానములు ఎడమవైపుకు జరుపబడినది. కావున $n = 6$.

(ii) $0.0456789 = 4.567891 \times 10^{-2}$



దశాంశ బిందువు అనునది 2 స్థానములు కుడివైపుకు జరుపబడినది. కావున $n = -2$.

(iii) $72006865.48 = 7.200686548 \times 10^{7}$



దశాంశ బిందువు అనునది 7 స్థానములు ఎడమవైపుకు జరుపబడినది. కావున $n = 7$.

2.8.2 వైజ్ఞానిక సాంకేతిక విధానమును దశాంశ రూపంలోనికి మార్చుట.

వైజ్ఞానిక సాంకేతిక రూపములో ఉన్న ఒక సంఖ్యను క్రింది వచ్చు పద్ధతులను అనుసరించి సులభముగా దశాంశ రూపంలోనికి మార్చవచ్చును.

(i) దశాంశ సంఖ్యను వ్రాయుము.

(ii) 10 యొక్క ఘాతములో గల సంఖ్య ధనాత్మకముగా నుండిన కుడివైపునకు, ఋణాత్మకముగా నుండిన ఎడమవైపునకు, ఘాతములో గల సంఖ్యకు సమానముగా దశాంశ బిందువును జరుపుము. కావలసిన స్థానములో "0" ను కలుపుకొనుము.

(iii) ఆ సంఖ్యను దశాంశ రూపములో మరల వ్రాయుము.

ఉదాహరణ 2.29 క్రింద ఇవ్వబడిన సంఖ్యలను దశాంశ రూపములో వ్రాయుము.

(i) 6.34×10^{4} (ii) 2.00367×10^{-5}

సాధన

(i) 6.34×10^{4}

$\Rightarrow 6.3400 = 63400$



(ii) 2.00367×10^{-5}

$0.00002.00367$



$= 0.0000200367$

2.8.3 వైజ్ఞానిక సాంకేతిక రూపంలో ఉన్న సంఖ్యల యొక్క గణనము

(i) వైజ్ఞానిక సాంకేతిక రూపంలో ఉన్న రెండు సంఖ్యల యొక్క ఘాతములు సమానముగా ఉండిన, దాని కూడిక (లేక) తీసివేతలను సులభముగా చేయవచ్చును.

2-Real Numbers.indd 76 04-03-2023 18:16:53

ఉదాహరణ 2.30 భూమి ద్రవ్యరాశి 5.97×10^{24} కి.గ్రా., చంద్రుని ద్రవ్యరాశి 0.073×10^{24} కి.గ్రా. అయిన వీటి మొత్తం ద్రవ్యరాశి ఎంత?

సాధన

మొత్తం ద్రవ్యరాశి = 5.97×10^{24} కి.గ్రా + 0.073×10^{24} కి.గ్రా

$= (5.97 + 0.073)\times10^{24}$ కి.గ్రా

$= 6.043\times10^{24}$ కి.గ్రా

(ii) ఘాతాంక సూత్రములను సరియైన రీతిలో ఉపయోగించి, వైజ్ఞానిక సాంకేతిక రూపంలో నున్న సంఖ్యల లబ్ధము మరియు భాగఫలమును సులభముగా కనుగొనవచ్చును.

ఉదాహరణ 2.31 క్రిందివాటిని వైజ్ఞానిక సాంకేతిక విధానంలో వ్రాయుము.

(i) $\left(50000000\right)^4$ (ii) $\left(0.00000005\right)^3$

(iii) $\left(300000\right)^3\times\left(2000\right)^4$ (iv) $\left(4000000\right)^3\div\left(0.00002\right)^4$

సాధన

(i) $\left(50000000\right)^4 = \left(5.0\times10^7\right)^4$

$= \left(5.0\right)^4\times\left(10^7\right)^4$

$= 625.0\times10^{28}$

$= 6.25\times10^2\times10^{28}$

$= 6.25\times10^{30}$

(ii) $\left(0.00000005\right)^3 = \left(5.0\times10^{-8}\right)^3$

$= \left(5.0\right)^3\times\left(10^{-8}\right)^3$

$= \left(125.0\right)\times\left(10\right)^{-24}$

$= 1.25\times10^2\times10^{-24}$

$= 1.25\times10^{-22}$

(iii) $\left(300000\right)^3\times\left(2000\right)^4$

$= \left(3.0\times10^5\right)^3\times\left(2.0\times10^3\right)^4$

$= \left(3.0\right)^3\times\left(10^5\right)^3\times\left(2.0\right)^4\times\left(10^3\right)^4$

$= \left(27.0\right)\times\left(10^{15}\right)\times\left(16.0\right)\times\left(10^{12}\right)$

$= \left(2.7\times10^1\right)\times\left(10^{15}\right)\times\left(1.6\times10^1\right)\times\left(10^{12}\right)$

$= 2.7\times1.6\times10^1\times10^{15}\times10^1\times10^{12}$

$= 4.32\times10^{1+15+1+12} = 4.32\times10^{29}$

(iv) $\left(4000000\right)^3\div\left(0.00002\right)^4$

$= \left(4.0\times10^6\right)^3\div\left(2.0\times10^{-5}\right)^4$

$= \left(4.0\right)^3\times\left(10^6\right)^3\div\left(2.0\right)^4\times\left(10^{-5}\right)^4$

$= \dfrac{64.0\times10^{18}}{16.0\times10^{-20}}$

$= 4\times10^{18}\times10^{+20}$

$= 4.0\times10^{38}$

మెదడుకు మేత

1. 2. 83104 ను లబ్ధముగా కలిగిన రెండు సంఖ్యలను వైజ్ఞానిక సంకేతములో వ్రాయుము.
2. 2. 83104 ను భాగఫలముగా కలిగిన రెండు సంఖ్యలను వైజ్ఞానిక సంకేతములో వ్రాయుము.

2-Real Numbers.indd 77 04-03-2023 18:16:55

అభ్యాసము 2.8

1. కింద ఇవ్వబడిన సంఖ్యలను వైజ్ఞానిక సాంకేతిక రూపంలో వ్రాయుము

(i) 569430000000 (ii) 2000.57

(iii) 0.0000006000 (iv) 0.0009000002

2. కింద గల సంఖ్యలను దశాంశ రూపంలో వ్రాయుము.

(i) 3.459×10^{6} (ii) 5.678×10^{4}

(iii) 1.00005×10^{-5} (iv) 2.530009×10^{-7}

3. కింది వాటిని సూక్ష్మీకరించి వైజ్ఞానిక సాంకేతిక రూపంలో సూచించుము.

(i) $\left(300000\right)^{2} \times \left(20000\right)^{4}$ (ii) $\left(0.000001\right)^{11} \div \left(0.005\right)^{3}$

(iii) $\left\{\left(0.00003\right)^{6} \times \left(0.00005\right)^{4}\right\} \div \left\{\left(0.009\right)^{3} \times \left(0.05\right)^{2}\right\}$

4. కింది సమాచారమును వైజ్ఞానిక సాంకేతిక రూపంలో సూచించుము.

(i) ప్రపంచ జనాభా సుమారు 7000,000,000.

(ii) ఒక కాంతి సంవత్సరము అనునది 9460528400000000 కి.మీ. దూరమును సూచించును.

(iii) ఒక ఎలక్ట్రాను ద్రవ్యరాశి 0.000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 00091093822 కి.గ్రా.

5. సూక్ష్మీకరించుము

(i) $(2.75 \times 10^{7}) + (1.23 \times 10^{8})$ (ii) $(1.598 \times 10^{17}) - (4.58 \times 10^{15})$

(iii) $(1.02 \times 10^{10}) \times (1.20 \times 10^{-3})$ (iv) $(8.41 \times 10^{4}) \div (4.3 \times 10^{5})$

కృత్యము- 3

సూర్యునికి, గ్రహములకు మధ్యగల సరాసరి దూరము క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడినది. వదలిన విలువలను పట్టికలో పూరించుము. సూర్యునికి చాలా దగ్గరగావున్న గ్రహము నుండి ప్రారంభించి, దూరము (ప్రమాణము) ఆధారంగా తీసుకొని గ్రహముల పేర్లను అమర్చుము.

గ్రహములు	దశాంశ రూపము (కి.మీ.)	వైజ్ఞానిక సాంకేతిక రూపము (కి.మీ.)
గురువు		7.78×10^{8}
కుజుడు	58000000	
బుధుడు		2.28×10^{8}
యురేనస్	2870000000	
శుక్రుడు	108000000	
నెప్ట్యూన్	4500000000	
భూమి		1.5×10^{8}
శని		1.43×10^{8}

2-Real Numbers.indd 78 04-03-2023 18:16:56

అభ్యాసము 2.9

BVNS8

బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు

1. n అనునది ఒక సహజ సంఖ్య అయిన $\sqrt{n}$ అనునది

(1) ఎప్పుడూ ఒక సహజ సంఖ్యయే. (2) ఎప్పుడూ ఒక కరణీయ సంఖ్యయే

(3) ఎప్పుడూ ఒక అకరణీయ సంఖ్యయే (4)అకరణీయ లేక కరణీయ సంఖ్య

2. క్రిందివానిలో ఏది వాస్తవము కాదు?

(1) ప్రతి అకరణీయ సంఖ్య ఒక వాస్తవ సంఖ్య (2) ప్రతి పూర్ణ సంఖ్య ఒక అకరణీయ సంఖ్య

(3) ప్రతి వాస్తవ సంఖ్య ఒక కరణీయ సంఖ్య. (4) ప్రతి సహజ సంఖ్య ఒక పూర్ణసంఖ్య.

3. రెండు కరణీయ సంఖ్యల మొత్తము ననుసరించి, క్రిందివ్వబడిన వాటిలో ఏది వాస్తవము?

(1) ఎప్పుడూ ఒక కరణీయ సంఖ్యయే (2) అకరణీయ సంఖ్య కావచ్చు లేక కరణీయ సంఖ్యకావచ్చు.

(3) ఎప్పుడూ ఒక అకరణీయ సంఖ్యయే (4) ఎప్పుడూ ఒక పూర్ణసంఖ్యయే

4. క్రింది వానిలో అంతమొందు దశాంశ విస్తరణ ఏది?

(1) $\frac{5}{64}$ (2) $\frac{8}{9}$ (3) $\frac{14}{15}$ (4) $\frac{1}{12}$

5. క్రింది వానిలో కరణీయ సంఖ్య

(1) $\sqrt{25}$ (2) $\sqrt{\frac{9}{4}}$ (3) $\frac{7}{11}$ (4) π

6. 2 మరియు 2.5 కి మధ్యగల కరణీయ సంఖ్య

(1) $\sqrt{11}$ (2) $\sqrt{5}$ (3) $\sqrt{2.5}$ (4) $\sqrt{8}$

7. $\frac{1}{3}$ చే గుణించబడినపుడు వచ్చు దశాంశ విస్తరణలో దశాంశ బిందువు నుండి ఒక దశాంశ స్థానము తర్వాత అంతమొందిన (terminating) అతి చిన్న అకరణీయ సంఖ్య

(1) $\frac{1}{10}$ (2) $\frac{3}{10}$ (3) 3 (4) 30

8. $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ అయిన $\frac{5}{7}$ యొక్క విలువ

(1) $0.\overline{142857}$ (2) $0.\overline{714285}$ (3) $0.\overline{571428}$ (4) 0.714285

9. జత తప్పిన దానిని (odd one out) ఎన్నుకొనుము.

(1) $\sqrt{32} \times \sqrt{2}$ (2) $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$ (3) $\sqrt{72} \times \sqrt{8}$ (4) $\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{18}}$

10. $0.\overline{34} + 0.3\overline{4} =$

(1) $0.6\overline{87}$ (2) $0.\overline{68}$ (3) $0.6\overline{8}$ (4) $0.68\overline{7}$

2-Real Numbers.indd 79 04-03-2023 18:16:59

11. కింది వాక్యములలో ఏది తప్పు?

(1) 25 యొక్క వర్గమూలము 5 లేక −5 (3) $\sqrt{25} = 5$

(2) $-\sqrt{25} = -5$ (4) $\sqrt{25} = \pm 5$

12. కింది ఇవ్వబడిన వాటిలో ఏది అకరణీయ సంఖ్య కాదు?

(1) $\sqrt{\frac{8}{18}}$ (2) $\frac{7}{3}$ (3) $\sqrt{0.01}$ (4) $\sqrt{13}$

13. $\sqrt{27} + \sqrt{12} =$

(1) $\sqrt{39}$ (2) $5\sqrt{6}$ (3) $5\sqrt{3}$ (4) $3\sqrt{5}$

14. $\sqrt{80} = k\sqrt{5}$, అయిన $k =$

(1) 2 (2) 4 (3) 8 (4) 16

15. $4\sqrt{7} \times 2\sqrt{3} =$

(1) $6\sqrt{10}$ (2) $8\sqrt{21}$ (3) $8\sqrt{10}$ (4) $6\sqrt{21}$

16. $\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$ యొక్క హారమును అకరణీయపరచిన పిదప వచ్చు సూక్ష్మరూపము

(1) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (4) $\frac{2}{3}$

17. $\left(2\sqrt{5} - \sqrt{2}\right)^2$ యొక్క సూక్ష్మరూపము

(1) $4\sqrt{5} + 2\sqrt{2}$ (2) $22 - 4\sqrt{10}$ (3) $8 - 4\sqrt{10}$ (4) $2\sqrt{10} - 2$

18. $\left(0.000729\right)^{\frac{-3}{4}} \times \left(0.09\right)^{\frac{-3}{4}} =$ _____

(1) $\frac{10^3}{3^3}$ (2) $\frac{10^5}{3^5}$ (3) $\frac{10^2}{3^2}$ (4) $\frac{10^6}{3^6}$

19. $\sqrt{9^x} = \sqrt[3]{9^2}$, అయిన $x =$ _____

(1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{4}{3}$ (3) $\frac{1}{3}$ (4) $\frac{5}{3}$

20. ఒక దీర్ఘచతురస్రాకార గృహస్థలము పొడవు మరియు వెడల్పులు క్రమముగా 5×10^5 మరియు 4×10^4 మీటరు అయిన దాని వైశాల్యమెంత?

(1) 9×10^1 మీ^{2} (2) 9×10^9 మీ^{2} (3) 2×10^{10} మీ^{2} (4) 20×10^{20} మీ^{2}

2-Real Numbers.indd 80 04-03-2023 18:17:02

గుర్తించుకోవలసిన విషయములు

- $q \neq 0$ అయిన $\frac{p}{q}$ యొక్క దశాంశ విస్తరణ అంతమొందునట్లైతే (చివరికి వచ్చినట్లైతే) ఆ దశాంశమును అంతమొందు దశాంశము అందురు.
- $q \neq 0$ అయిన $\frac{p}{q}$ యొక్క దశాంశ విస్తరణలో శేషము సున్న (0) కానప్పుడు మనకు మరల, మరల (recurring) (ఆవర్తన) భాగఫలము నందు స్థానముల సమూహము వచ్చును. ఈ స్థితిలో వున్న దశాంశ విస్తరణను అతమొందని మరియు ఆవర్తన చెందు దశాంశ విస్తరణ అందురు.
- $q \neq 0$ అయినపుడు $\frac{p}{q}$ అను అకరణీయ సంఖ్యను $\frac{p}{2^m \times 5^n}$ రూపములో చూపించబడిన (ఇక్కడ $p \in \mathbb{Z}$ మరియు $m, n \in \mathbb{W}$,) అది అంతమొందు అకరణీయ దశాంశ సంఖ్యఅగును. కానట్లైతే ఆ అకరణీయ సంఖ్య అంతమొందని ఆవర్తన చెందు (recurring) దశాంశమగును.
- ఒక అకరణీయ సంఖ్యను అంతమొందు లేక అంతమొందని మరియు ఆవర్తన చెందు దశాంశముగా సూచింపవచ్చును.
- ఒక కరణీయ సంఖ్య అంతమొందనిది మరియు ఆవర్తనము చెందని దశాంశము (non-terminating and non-recuring decimal) దీనిని $\frac{p}{q}$ రూపము నందు వ్రాయుటకు వీలుకాదు. ఇక్కడ $q \neq 0$ లు రెండును పూర్ణసంఖ్యలు
- అన్ని అకరణీయ సంఖ్యలు మరియు అన్ని కరణీయ సంఖ్యల సమ్మేళనమును (union) వాస్తవ సంఖ్యల సమితి అనబడును.
- ప్రతి వాస్తవ సంఖ్యను ఒక అకరణీయ సంఖ్యగాను (లేక) కరణీయ సంఖ్యగాను చెప్పవచ్చును.
- ఒక వాస్తవ సంఖ్య అకరణీయ సంఖ్యకానప్పుడు అది ఖచ్చితముగా కరణీయ మగును.
- 'a' అనునది ఒక ధనాత్మక అకరణీయ సంఖ్య, 'n' అనునది ఒక ధనాత్మక పూర్ణ సంఖ్య మరియు $\sqrt[n]{a}$ అనునది ఒక కరణీయ సంఖ్య అయిన $\sqrt[n]{a}$ అనునది ఒక కరణి (surd) అగును.
- 'm', 'n' అనునవి ధనాత్మక పూర్ణసంఖ్యలు మరియు a, b లు ధనాత్మక అకరణీయ సంఖ్యలయిన, తర్వాత

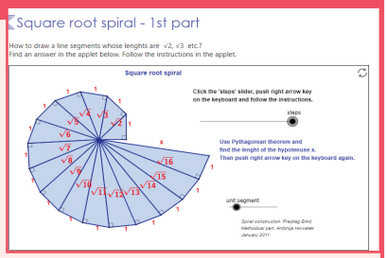
(i) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a = \sqrt[n]{a^n}$ (ii) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ (iii) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$ (iv) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

- ఒక కరణిని మరొక కరణితో గుణించి అకరణీయ సంఖ్యను పొందు పద్ధతిని "అకరణీయ పరచుట" అందురు.
- N అను సంఖ్యను $N = a \times 10^n$ అని వ్రాయవచ్చును. ఇచ్చట $1 \leq a < 10$, n ఒక పూర్ణసంఖ్య అను విధముగా గుర్తించినచో వైజ్ఞానిక సాంకేతిక రూపమనబడును.

2-Real Numbers.indd 81 04-03-2023 18:17:02

అంతర్జాల కృత్యము-1

ఈ చిత్రపటములో ఎదురుచూచు
(ఆశించు) ఫలితము కనబడును



సోపానము – 1

క్రిందివ్వబడిన Browser open ను చేసి మరియు copy చేసి మరియు past చేయండి.

సోపానము – 2

GeoGebra work book నందు "Real Numbers" ను తెరువగా అందులో అనేక work sheet లు కనపుడును ఇపుడు మనకు కావలసిన "Square root spiral – 1st part" ను click చేయుము.

సోపానము – 3

Steps అను slider జరిపి 2,3,4,5,..... యొక్క వర్గములను ఒక్కొక్కటిగా పొందుపరచి విలువలను గమనించుము. .

సోపానము – 4

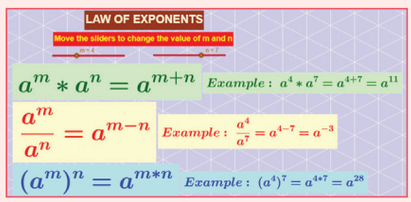
slider నందు "Unit segment" ను click చేసి వచ్చిన పటమును గమనించిన మనకు కావలసిన ఫలితము వచ్చును

Browse in the link
Union of Sets: https://www.ggbm.at/m6GQc6mQ

W1SQ5

అంతర్జాల కృత్యము-2

కృత్యము చివరలో
లభించు ఫలితము



సోపానము – 1

బ్రౌజర్‌ను ఓపెన్‌చేసి క్రింద ఇవ్వబడిన URL లింక్‌ను టైప్ చేయుము లేదా QR Code కోడ్‌ను స్కాన్ చేయుము. GeoGebra వర్క్‌షీట్ నందు "Real Numbers" ఓపెన్ అవుతుంది. ఈ వర్క్‌షీట్ నందు రెండు కృత్యములు కలవు. 1. Rationalising the denominator for surds, 2. Law of exponents. మొదటి కృత్యము నందు హారమును అకరణీయపరచు పద్ధతి ఇవ్వబడినది. దీనికి ఉదాహరణలు కూడా ఇవ్వబడియుండును. a మరియు b విలువలను మార్చి input box నందు పొందుపరచవలెను.

సోపానము - 2

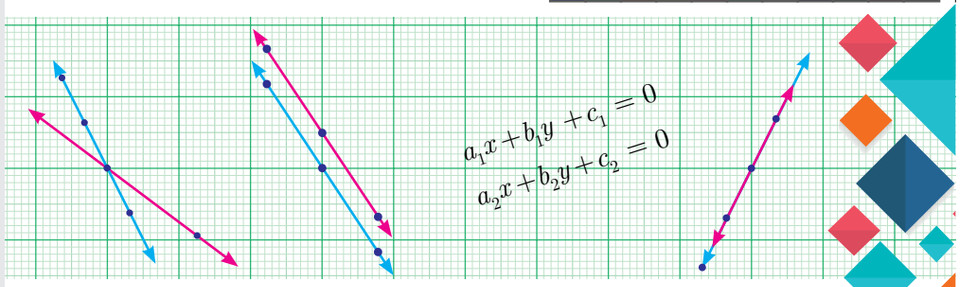
రెండవ కృత్యము నందు law of exponents ఇవ్వబడినది. దీనికి ఉదాహరణలు కుడివైపున ఇవ్వబడియుండును. m మరియు n విలువలు మార్చి slider . లను జరిపి జవాబులను సరిచూసుకొనుము.

Browse in the link
Real Numbers: https://ggbm.at/BYEWDpHU or Scan the QR Code.

MXT9S

2-Real Numbers.indd 82 04-03-2023 18:17:03

3



బీజగణితము

నిజజీవితంతో బీజగణితంలా దగ్గరి సంబంధం కలిగినది వేరేది లేదని ఖచ్చితంగా చెప్పవచ్చును.

- ఫ్రాన్ లెబోవిచ్



డైయోఫాంటస్

అలెగ్జాండ్రియాకు చెందిన డైయోఫాంటస్ అను అలెగ్జాండ్రియన్ హెలెనిస్టిక్ గణిత శాస్త్రవేత్త 84 సంవత్సరములు జీవించెను.అతను క్రీ.శ. (సా.శ.) 201 మరియు క్రీ.శ. 215 లకు మధ్య కాలంలో జన్మించెను. ఇతను అర్థమెటికా అని పిలువబడే పుస్తకాల శ్రేణి రచయిత. ఇతని పుస్తకములు బీజీయ సమీకరణములుసాధించుటను ఉపయోగపడును. ఇతనిని "బీజగణిత పిత" అని పిలిచెదరు.

అభ్యసన ఫలితములు

- బహుపద సమాసములను వర్గీకరించుటను అర్థంచేసుకొనుట మరియు ప్రాథమిక పరిక్రియలు చేయుటను తెలుసుకొనుట.
- బహుపద సమాసము యొక్క విలువలను కనుగొనుట మరియు బహుపద సమాసము యొక్క శూన్యవిలువను అర్థం చేసుకొనుట.
- శేష సిద్ధాంతం మరియు కారణాంక సిద్ధాంతములను అర్థం చేసుకొనుట.
- బీజీయ సర్వసమీకరణములను ఉపయోగించి కారణాంకపరచుట.
- ద్విఘాత మరియు త్రిఘాత బహుపద సమాసములను కారణాంకపరచుట.
- సంయోజిత భాగహారపద్ధతిని ఉపయోగించి బహుపద సమాసమును కారణాం
- బహుపద సమాసముల గరిష్ట సామాన్య భాజకమును కనుగొనుట.
- ఇవ్వబడిన రేఖీయ సమీకరణమునకు రేఖా చిత్రమును గీయుట.
- రెండు చలరాశులు గల సమకాలిక రేఖీయ సమీకరణములను రేఖాచిత్ర పద్ధతి మరియు బీజీయ పద్ధతి ద్వారా సాధించుట.
- రెండు చలరాశులు రేఖీయ సమీకరణముల నిశ్చిత మరియు అనిశ్చిత ధర్మాలను గురించి అర్థంచేసుకొనుట

NBZ9T

3.1 పరిచయము

బహుపద సమాసమును ఎందుకు నేర్చుకొనవలయును?

బీజగణితములో ఉన్న బహుపద సమాసము గూర్చి ఈ పాఠ్యాంశములో అమరియున్నది. ఇందులో ఉన్నవాటిని మీరు ఎదుర్కొన్నవే. అయితే పూర్తిగా పరిచయము లేని స్నేహితులు వీటికి తరువాత వచ్చు అన్ని గణిత ప్రయాణములో వీరు, మీరు మాతో ప్రయాణించదగ్గ రీతిలో వీటిని మేము మీకు స్పష్టముగా పరిచయము చేయబోవుచున్నాము.

3 Algebra.indd 83 11-03-2023 15:14:01

$(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$

అనునది ఒక బహుపద సమాసము. అయితే చూచుటకు ఒక ప్రత్యేకత లేదు కదా! మనము యింతకు ముందే బీజ గణిత సమాసములను చూచియున్నాము. కావున వీటిని గూర్చి చింతించనవసరం లేదు!

గణితములో బహుపద సమాసములు ఎందుకు ముఖ్యత్వము పొందినది అనుటకు అనేక కారణములు కలవు ఇప్పుడు ఒక ఉదాహరణను గమనించెదము. మనము సంఖ్యా వ్యవస్థలో ఎన్నో నేర్చుకొని, అటు తర్వాత బీజగణితములో తెలియని సంఖ్యలను కలిగిన చలరాశులను గూర్చి ఆలోచించినాము అని జ్ఞాపకము తెచ్చుకొనుము. నిజంగా, మనము ఇప్పుడు వాస్తవ సంఖ్యను జ్ఞాపకము తెచ్చుకొని, వాటి నుండి బీజగణిత భాషలో వాటిని వ్రాయుటకు ప్రయత్నము చేయుదము.

5418 అను ఒక సంఖ్యను గమనించుము ఇది వాస్తవముగా ఐదు వేల నాలుగు వందల పదునెనిమిది.

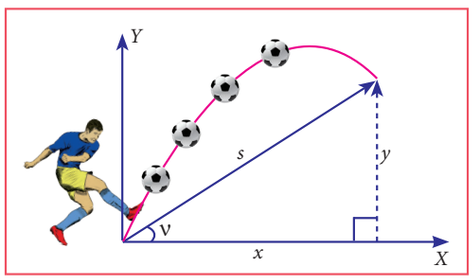
దీనిని క్రింది విధముగా వ్రాయవచ్చును.

$5 \times 1000 + 4 \times 100 + 1 \times 10 + 8$

దీనినే మరలా ఈ క్రింది విధముగాను వ్రాయవచ్చును.

$5 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 8$

ఇప్పుడు ఇది దేని గూర్చి అని స్పష్టముగా అర్థము అగుచున్నది. $5x^3 + 4x^2 + x + 8$ అను రూపములో ఉన్నది. ఇది ఒక బహుపద సమాసము అగును. ఇలా వ్రాయడం వల్ల ప్రయోజము ఏమిటి? మనము ఎల్లప్పుడు సంఖ్యలను దశాంశ సంఖ్యలుగా వ్రాయగలము. అందువల్ల ఎల్లప్పుడు $x = 10$. ఇందులో ఉన్న తమాషా ఏమిటి? భాగహార విధులు జ్ఞాపకమునకు వచ్చు చున్నదా! ఒక సంఖ్య యొక్క అంకెల మొత్తం 3 చే భాగించబడిన మాత్రమే ఆ సంఖ్య 3 చే భాగించబడును అను దానిని గుర్తుకు తెచ్చుకొనుము. అను దానిని 3 చే భాగించిన తర్వాత శేషము 1 వచ్చిన యెడల x^2, x^3, మొదలగు వాటికి ఇది అన్వయించునని గమనించవలయును. ఇది అన్నియు 3 చే భాగించబడిన తర్వాత ని శేషముగా వచ్చును. కావున ఒక్కొక్క అంకెను 1 చే గుణించి వాటి అన్నింటిని కూడిన యెడల మొత్తం అంకెల కూడికను మీరు పొందుదురు. అది 3 చే భాగించబడినచో మొత్తం సంఖ్య అదే అగును.



పటం. 3.1

9చే భాగించబడు నియమము, 2 లేక 5 చే భాగించపడు నియమము ఇదే విధముగా నిరూపించవచ్చును మన ఉద్దేశము బాగాహార విధులను నిరూపించుట కాదు. కాని సంఖ్యలను బహుపద సమాస రూపములో వ్రాయునపుడు అవి ఎన్నో క్రొత్త సంఖ్యల అమరికను మనకు ఇచ్చునని తెలుపుటయే అగును. మనము గమనించన యెడల సంఖ్యలే కాకుండా కొన్ని రకములైన వస్తువులను బహు పద సమాసముగా సూచించినపుడు వాటి నుండి అనేకముగా క్రొత్త విషయములను మనము నేర్చుకొనవచ్చును.

బీజ గణితములో x^2, $5x^2-3$, $2x+7$ వంటి వాటిని x యొక్క ప్రమేయముగా అనుకొనవచ్చును. మారునపుడు ప్రమేయములు ఎట్లు మారునని గమనించుటను ఒక రేఖా చిత్రము గీచినచో, వాటిలో ఏర్పడు

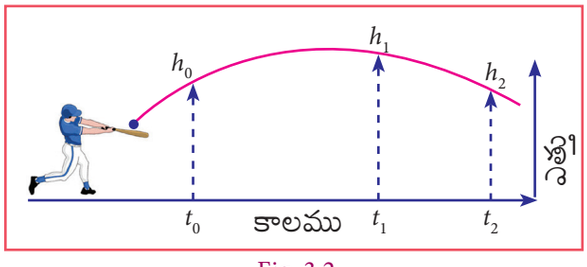


Fig. 3.2

3 Algebra.indd 84 11-03-2023 15:14:01

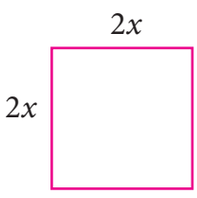
ప్రమేయమును సులభముగా అర్థము చేసుకొనవచ్చును. ప్రస్తుతము విజ్ఞానము, సాంకేతిక, వాణిజ్య పరిశోధనలు, అర్థశాస్త్రములో మాత్రమే కాకుండా గణితశాస్త్రములో కూడా మనము ఎదుర్కొను ఎన్నో ఎన్నో ప్రమేయాలను ఉజ్జాయింపు బహుపద సమాసాలుగా మార్చవచ్చును.



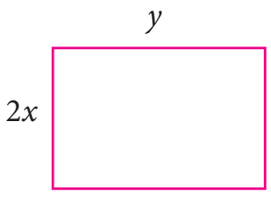
పటం. 3.3

జీవశాస్త్రము, సంగణక శాస్త్రము, విజ్ఞానము, సమాచార ప్రసార వ్యవస్థ మొదలగు వాటిలో బహుపద సమాసం ఎక్కువగా ఉపయోగపడుచున్నది. ఈ క్రింద యివ్వబడిన పటము 3.1, 3.2, 3.3 ఒక ద్విపద సమాసమును సూచించును. బహుహద సమాసము గూర్చి మాత్రమే నేర్చుట కాకుండా అంత కంటే ఎక్కువ సంఖ్యలను ఉపయోగించి, కూడిక, గుణకారము, బాగాహారము నేర్చుకొన్న విధముగానే ఇందులోని వాటిని నేర్చుకొనవచ్చును.

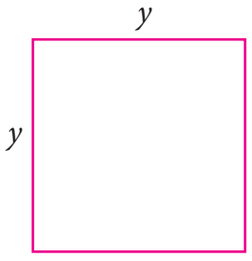
ఇవ్వబడిన పటములను గమనించుము



పటం. 3.4



పటం. 3.5



పటం. 3.6

పై పటముల యొక్క మొత్తము వైశాల్యము $4x^2 + 2xy + y^2$, దీనిని మనము బీజీయ సమాసము అని పిలుస్తున్నాము. ఇచ్చట x మరియు y వేర్వేరు విలువలను ఇచ్చినపుడు వేర్వేరైన వైశాల్యమును పొందవచ్చును. x మరియు y భుజము యొక్క విలువలు మారడం వలన దానిని చలరాశులగును. కావున చలరాశి అనునది వేరువేరు అయిన సంఖ్యా విలువలను కలిగిన గుర్తు (చిహ్నము) చలరాశులంటారు.

సాధారణముగా చలరాశులు x, y, z,మొదలగు అక్షరములతో సూచిస్తారు. పై కనబడు సమాసము నందు 4,2 అనునది స్థిరాంకము అని పిలువబడును. కావున స్థిరాంకం అనునది, నిచ్చలమైన విలువ (స్థిరమైన సంఖ్యా విలువ) కలిగిన చిహ్నము అగును.

స్థిరరాశులు

ఏ వాస్తవసంఖ్య అయిన ఒక స్థిరాంకము. స్థిరాంకములను మరియు నాలుగు ప్రాథమిక పరిక్రియలను ఉపయోగించి మనము సంఖ్యాసమాసమును ఏర్పరచవచ్చును.

స్థిరరాశులకు ఉదాహరణ : $1,5,\ -32,\ \frac{3}{7},\ -\sqrt{2},\ 8.432,\ 1000000$ మొదలగునవి.

చరరాశులు

ఒక సమాసములో చలరాశులు మరియు స్థిర రాశులు కలిపి ఉపయోగించినపుడు ఒక సంఖ్యలను గుర్తించు మార్గములో వేర్వేరైన విలువలను పొందవచ్చును. మనకు బాగుగా తెలిసిన $2\pi r$ లో వ్యాసార్థము r కలిగిన వృత్తము యొక్క చుట్టుకొలత సూచించుచున్నది. మనము r యొక్క విలువ 1సెం.మీ, 4సెం.మీ, 9సెం.మీ. అని మార్చిన యెడల 2π, 8π, 18π చుట్టుకొలత కలిగిన పెద్ద వృత్తములు వచ్చును.

3 Algebra.indd 85 11-03-2023 15:14:02

ఈ $2\pi r$ సమాసమనునది అన్ని వృత్తముల యొక్క చుట్టుకొలతకు ఖచ్చితమైన వివరణ అగును. మనము అంకగణిత పరిక్రియలను ఉపయోగించి బీజీయ సమాసములను కలిపిన ప్రమేయములు లభించును. చలరాశి అని పిలవబడు తెలియని వాస్తవ సంఖ్యలను గుర్తించుటకు x, y, a, b మరియు బహు ఉపయోగిస్తాము.

బీజీయ సమాసము

నాలుగు అంకగణిత ప్రక్రియలను ఉపయోగించి స్థిరరాశులను, చరరాశులను కలిపి వ్రాయు సమాసమునే బీజీయ సమాసం అంటారు.

బీజీయ సమాసమునకు ఉదాహరణలు

$$x^3 - 4x^2 + 8x - 1,\ 4xy^2 + 3x^2y - \frac{5}{4}xy + 9,\ 5x^2 - 7x + 6$$

గుణకములు

ఒక పదం యొక్క ఏదైనా భాగం చలరాశి యొక్క పదం ద్వారా గుణించబడిన పదాన్ని మిగిలిన పదము యొక్క గుణకము అంటారు.

ఉదాహరణకు,

$x^2 + 5x - 24$ అనునది మూడు పదాలు కలిగిన బహుపద సమాసము. ఇచ్చట x అనునది ఒక చలరాశి x^2 యొక్క గుణకము 1 యొక్క గుణకము 5 అగును. మరియు -24 స్థిరరాశి అగును (24 కాదు).

కృత్యము-1

క్రింది బహుపద సమాసము నందు చలరాశి, గుణకము, స్థిరరాశులను వర్గీకరించి వ్రాయుము

సమాసము	$x + 7$	$3y - 2$	$5x^2$	$2xy + 11$	$-\frac{1}{2}p + 7$	$-8 + 3a$
చలరాశి	x			x, y		
గుణకం	1				$-\frac{1}{2}$	
స్థిరరాశి	7					-8

3.2 బహుపద సమాసములు

చరరాసులు మరియు స్థిరరాశులతో నిర్మితమైన అంకగణిత సమాసమునే బహుపదసమాసం అంటారు. ఇది నాలుగు ప్రాథమిక అంకగణిత పరిక్రియలు మరియు చరరాశుల యొక్క ఋణాత్మకం కాని పూర్ణసంఖ్యల ఘాతములు కలిగియుంటుంది.

ఒకే చలరాశి గల బహుపద సమాసములు

బహుపద సమాసములోని x అను చలరాశిని క్రింది విధముగా బీజీయ సమాస రూపములో వ్రాయవచ్చును.

$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$ ను ఒకే చలరాశి గల బహుపద సమాసము అనబడును. ఇచ్చిన x యొక్క అంతస్తు 'n' మరియు $a_0, a_1, a_2, ...a_n$ అనునది స్థిర సంఖ్యలు $(a_n \neq 0)$ మరియు n ధనపూర్ణ సంఖ్య.

3 Algebra.indd 86 11-03-2023 15:14:02

సాధారణముగా, బహుపద సమాసమును $f(x), g(x), p(t), q(z)$ మరియు $r(x)$ అని సూచిస్తారు.

సూచన

బీజీయ సమాసములో చలరాశి యొక్క గుణకము ఏదైనా ఒక వాస్తవ సంఖ్య అయ్యి ఉండును. బహుపదులలోని చలరాశుల ఘాతము ఋణాత్మకం కాని పూర్ణసంఖ్యలుగా ఉండవలెను. అనగా ఎప్పుడూ పూర్ణాంకములు మాత్రం కల్గి ఉండును. అన్ని a యొక్క విలువకు $a^0 = 1$ అను దానిని గుర్తించుకొనవలెను.

ఉదాహరణకు,

అవ. సంఖ్య	ఇవ్వబడిన సమాసము	బహుపద సమాసము/ బహుపద సమాసము కాదు	కారణములు
1	$4y^3 + 2y^2 + 3y + 6$	బహుపద సమాసము	ఘాతములు అన్నియు ధన పూర్ణాంకములు
2	$4x^{-4} + 5x^4$	బహుపద సమాసము కాదు	x యొక్క ఒక ఘాతము (-4)
3	$m^2 + \frac{4}{5}m + 8$	బహుపద సమాసము	ఘాతములు అన్నియు ధనపూర్ణాంకములు
4	$\sqrt{5}\,y^2$	బహుపద సమాసము	ఘాతములు అన్నియు ధనపూర్ణాంకములు
5	$2r^2 + 3r - 1 + \frac{1}{r}$	బహుపద సమాసము కాదు	r యొక్క ఒక ఘాతము ఋణాత్మకము $\left(\frac{1}{r} = r^{-1}\right)$
6	$8 + \sqrt{q}$	బహుపద సమాసము కాదు	q యొక్క ఘాతము బిన్న సంఖ్య $(\sqrt{q} = q^{\frac{1}{2}})$
7	$\sqrt{8}\,p^2 + 5p - 7$	బహుపద సమాసము	ఘాతములు అన్నియు ధనపూర్ణాంకములు
8	$5n^{\frac{4}{5}} + 6n - 1$	బహుపద సమాసము కాదు	n యొక్క ఘాతము బిన్న సంఖ్య $\frac{4}{5}$

బహుపది యొక్క ప్రామాణిక రూపము

$p(x)$ అను బహుపద సమాసము x యొక్క అంతస్తును బట్టి అవరోహణ లేక ఆరోహణ క్రమములో వ్రాయుటకు వీలుగును. దీనినే "బహుపది యొక్క ప్రామాణిక రూపము" అందురు.

ఉదాహరణ

(i) $8x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 9x + 6$

(ii) $5 - 3y + 6y^2 + 4y^3 - y^4$

కృత్యము-2

ఈ క్రింది యివ్వబడిన సమాసములను బహుపద సమాసము యొక్క ప్రామాణిక రూపములో వ్రాయుము

వ.సంఖ్య	బహుపద సమాసము	ప్రామాణిక రూపము
1	$5m^4 - 3m + 7m^2 + 8$	
2	$\frac{2}{3}y + 8y^3 - 12 + \sqrt{5}\,y^2$	
3	$12p^2 - 8p^5 - 10p^4 - 7$	

3 Algebra.indd 87 11-03-2023 15:14:03

బహుపద సమాసము యొక్క అంతస్తు

ఒక చలరాశిని కలిగిన సమాసములో సున్న కాని గుణకము గల పదము యొక్క అధిక ఘాతాన్ని బహుపద సమాసము యొక్క అంతస్తు అందురు.

ఒకటి కంటె ఎక్కువ చలరాశులను కలిగిన బహుపద సమాసములో ఒక పదములోని అన్ని చలరాశుల మిక్కిలి **అధిక ఘాతాల** కూడిక మొత్తాన్ని ఆ పదము యొక్క అంతస్తు అందురు.

బహుపద సమాసము యొక్క అంతస్తు అనునది ఒక **ప్రత్యేక** అంతస్తుగా గుర్తించబడును. x^2+5x లో x యొక్క x^2 యొక్క విలువ $5x$ కంటే ఎక్కువగా యున్నది. కావున x యొక్క పెద్దదైన విలువను x^2+5x విలువ x^2 యొక్క విలువ ఉన్నట్లు ఆలోచిస్తే, దాని యొక్క అధిక్యత అధికముగా యుండును. కాబట్టి మనము చాలా పెద్దదైన అంతస్తును బహుపద సమాసము యొక్క అంతస్తుగా ఉపయోగించుటయే కాక దానికి ఒక పేరును కూడా పెట్టబోవుచున్నాము.

ఉదాహరణ 3.1

క్రిందనివ్వబడిన బహుపద సమాసములోని ఒక్కొక్క పదము యొక్క అంతస్తును మరియు బహుపద సామసము యొక్క అంతస్తును వ్రాయుము. $6ab^8 + 5a^2b^3c^2 - 7ab + 4b^2c + 2$

సాధన

$6ab^8 + 5a^2b^3c^2 - 7ab + 4b^2c + 2$ ఇవ్వబడిన బహుపద సమాసము

ఒక్కొక్క పదము యొక్క అంతస్తు క్రమముగా

$6ab^8$ యొక్క అంతస్తు $(1+8) = 9$

$5a^2b^3c^2$ యొక్క అంతస్తు $(2+3+2) = 7$

$7ab$ యొక్క అంతస్తు $(1+1) = 2$

$4b^2c$ యొక్క అంతస్తు $(2+1) = 3$

2 యొక్క అంతస్తు సున్న (స్థిర రాశి యొక్క అంతస్తు ఎల్లప్పుడూ శూన్యము అగును).

బహుపద సమాసము $6ab^8 + 5a^2b^3c^2 - 7ab + 4b^2c + 2$ యొక్క అంతస్తు.

= అత్యధిక అంతస్తును కలిగిన పదము యొక్క అంతస్తు

= 9

ఒక ప్రత్యేకమైన బహుపద సమాసము



ఒక బహుపద సమాసము యొక్క గుణకము ఏ వాస్తవ సంఖ్య (real numbers) గాను యుండవచ్చునని యింతకు ముందే చెప్పియున్నాము. ఒక వేళ గుణకము శూన్యముగా ఉంటే ఏమి జరుగును?. ఆ పదము శూన్యము అగును. కావున మనము దానిని వ్రాయవలసిన అవసరములేదు. సరి, మిగిలిన అన్ని గుణకములు శూన్యము అయితే ఏమి జరుగును? అలా యున్నట్లు తీసుకొన్నట్లయితే దానికి వేరొక పేరు పెట్టవచ్చును.

అది అన్ని గుణకములను శూన్యముగా యున్న ఒక బహుపద సమాసము అగును.

$$g(t) = 0t^4 + 0t^2 - 0t\ , \quad h(p) = 0p^2 - 0p + 0$$

3 Algebra.indd 88 11-03-2023 15:14:04

పైన పెర్కొన్న ఉదాహరణముల నుండి శూన్య బహుపద సమాస అంతస్తు గురించి మనం మాట్లాడలేదని తెలుసుకొనవచ్చు. పైన పేర్కొన్న రెండు వేర్వేరు అంతస్తులు కలిగి యున్నప్పటికిని రెండును శూన్యబహుపద సమాసములు అగును.

కావున శూన్య బహుపద సమాసము యొక్క అంతస్తు నిర్వచించబడలేదు.

బహుపద సమాసములోని రకాలు

(i) పదముల సంఖ్య ఆధారంగా బహుపద సమాసము :	
ఏకపద సమాసము	ఒకే ఒక పదము మాత్రము గల బహుపద సమాసమును ఏకపద సమాసమందురు. ఉదాహరణ : 5, 6m, 12ab
ద్విపద సమాసము	రెండు పదములు మాత్రము గల బహుపద సమాసమును ద్విపద సమాసమందురు. ఉదాహరణ : $5x + 3,\ 4a - 2,\ 10p + 1$
త్రిపద సమాసము	మూడు పదములు మాత్రము గల బహుపద సమాసమును త్రిపద సమాసము అందురు. ఉదాహరణ : $4x^2 + 8x - 12,\ \ 3a^2 + 4a + 10$
(ii) అంతస్తు ఆధారముగా బహుపద సమాసముల వర్గీకరణ :	
స్థిరబహుపద సమాసము	సున్నను అంతస్తుగా కలిగిన బహుపద సమాసమును "స్థిర బహుపద సమాసము" అందురు. ఉదాహరణ : $5, -7, \frac{2}{3}, \sqrt{5}$
ఏకఘాత బహుపద సమాసము	ఒకటిని అంతస్తుగా కలిగిన బహుపద సమాసమును "ఏకఘాత బహుపద సమాసము" అందురు. ఉదాహరణ : $410x - 7$
ద్విఘాత బహుపద సమాసము	రెండును అంతస్తుగా కలిగిన బహుపద సమాసమును" ద్విఘాత బహుపద సమాసము" అందురు. ఉదాహరణ : $2\sqrt{5}\,x^2 + 8x - 4$
త్రిఘాత బహుపద సమాసము	మూడును అంతస్తుగా కలిగిన బహుపద సమాసమును "త్రిఘాత బహుపద సమాసము అందురు. ఉదాహరణ : $12y^3,\qquad 6m^3 - 7m + 4$

ఉదాహరణ 3.2

క్రింది నివ్వబడిన బహుపద సమాసములను పదముల ఆధారముగా వర్గీకరించుము..

3 Algebra.indd 89 11-03-2023 15:14:04

వ.సంఖ్య	బహుపద సమాసము	పదముల సంఖ్య	పదముల ఆధారంగా బహుపద సమాసము రకము
(i)	$5t^3 + 6t + 8t^2$	3 పదములు	త్రిపద సమాసము
(ii)	$y-7$	2 పదములు	ద్విపద సమాసము
(iii)	$\frac{2}{3}r^4$	1 పదము	ఏకపద సమాసము
(iv)	$6y^5 + 3y - 7$	3 పదములు	త్రిపద సమాసము
(v)	$8m^2 + 7m^2$	సజాతీయ పదములు కావున $15m^2$ ఏకపదము	ఏకపద సమాసము

ఉదాహరణ 3.3

క్రింది బహుపద సమాసములను వాటి అంతస్తునాధారంగా వర్గీకరించుము..

వ.సంఖ్య	బహుపద సమాసము	అంతస్తు	రకము
(i)	$\sqrt[3]{4}\ z + 7$	ఒకటి	ఏకఘాత సమాసము
(ii)	$z^3 - z^2 + 3$	మూడు	త్రిఘాత సమాసము
(iii)	$\sqrt{7}$	శూన్యము	స్థిరఘాత సమాసము
(iv)	$y^2 - \sqrt{8}$	రెండు	ద్విఘాత సమాసము

3.2.1 బహుపద సమాసమునందు అంకగణితము

బహుపద సమాసమును గూర్చి అధిక విషయాలను నేర్చుకొవడమే కాకుండా అవి అనేక విధముగా ఉపయోగపడుతుందని మనము తెలుసుకొన్నాము. ప్రస్తుతము మనము బహుపద సమాసమునుపయోగించి ఏమి చేయబోతున్నాము? x అనునది ఒక బీజీయ సమాసమనుకొనుము.

మనము x యొక్క ప్రత్యేక విలువతో సాధించగలము. అయితే x యొక్క విలువమారునపుడు బహుపద సమాసము యొక్క విలువ ఏ విధముగా మారునని అడుగవచ్చును బహుపద సమాసము యొక్క సమీకరణము $p(x) = 0$ అని వ్రాసి x యొక్క విలువను కనుగొనవచ్చును. అదేవిధముగా సంఖ్యలను ఈ భాగము నందు ఉపయోగించి యున్నాము. ఈ పాఠము ప్రారంభంలో, ఒక్కొక్క ధనపూర్ణ సంఖ్యను బహుపద సమాసమే అని చెప్పునప్పుడు ఒక ఉదాహరణ ఇచ్చి యున్నాము.

అంక గణితములో బహుపద సమాసము యొక్క సంకలనము, ఒకదాని నుండి మరొకటి తీసివేత (వ్యవకలనం), బహుపద సమాసము యొక్క గుణకారము, బహుపద సమాసము యొక్క భాగహారము మొదలగు వాటిని ఏ విధముగా సాధించగలమో చూద్దాము. బహుపద సమాసమునకు సంబంధించిన విషయాలు, ధర్మమును నేర్చుకొనునపుడు, సంఖ్యలకును, బీజీయ సమాసమునకు మధ్య గల సంబంధము ఏకత్వముగా యుండునని తెలుసుకొనవచ్చును. ప్రస్తుతము బహుపద సమాసము యొక్క కృత్యములు సులభముగా అధ్యయనము చేసి నిర్వచించు విధము తమాషాగానే యుండును.

3 Algebra.indd 90 11-03-2023 15:14:05

బహుపద సమాసము యొక్క కూడిక

రెండు బహుపద సమాసము కూడిక ఒక బహుపద సమాసమే అగును..

సూచన

సజాతి పదములను మాత్రమే కూడుటకు వీలగును. $3x^2 + 5x^2$ అనునది $8x^2$ అగును. అయితే విజాతీయ పదములైన $3x^2$ మరియు $5x^3$ కూడితే $3x^2 + 5x^3$ అను కొత్త బీజీయ సమాసము వచ్చును.

ఉదాహరణ 3.4

$p(x) = 4x^2 - 3x + 2x^3 + 5$ మరియు $q(x) = x^2 + 2x + 4$ అయిన $p(x) + q(x)$ విలువను కనుగొనుము.

సాధన

ఇవ్వబడిన బహుపద సమాసము	ప్రామాణిక రూపము
$p(x) = 4x^2 - 3x + 2x^3 + 5$	$2x^3 + 4x^2 - 3x + 5$
$q(x) = x^2 + 2x + 4$	$x^2 + 2x + 4$
$p(x) + q(x) = 2x^3 + 5x^2 - x + 9$	

$p(x) + q(x)$ అనునది కూడా బహుపద సమాసమే అగును. కావున రెండు బహుపద సమాసము యొక్క కూడిక ఒక బహుపద సమాసమే అగును.

బహుపద సమాసముల తీసివేత

రెండు బహుపద సమాసముల తీసివేత కూడా ఒక బహుపద సమాసమే అగును.

సూచన

సజాతీయ పదములు మాత్రమే తీసివేయుటకు వీలగును. $8x^2 - 5x^2$ అయితే అనునది $3x^2$ అగును. విదృశ్యపదములు (విజాతీయ) పదములైన $5x^3$ ను $3x^2$ నుండి తీసివేసిన $5x^3 - 3x^2$ అను కొత్త బీజీయ సమాసము వచ్చును.

ఉదాహరణ 3.5

$p(x) = 4x^2 - 3x + 2x^3 + 5$ మరియు $q(x) = x^2 + 2x + 4$ అయిన $p(x) - q(x)$ విలువను కనుకొనుము

సాధన

ఇవ్వబడిన బహుపద సమాసము	ప్రామాణిక రూపము
$p(x) = 4x^2 - 3x + 2x^3 + 5$	$2x^3 + 4x^2 - 3x + 5$
$q(x) = x^2 + 2x + 4$	$x^2 + 2x + 4$
$p(x) - q(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x + 1$	

$p(x) - q(x)$ అనునది ఒక బహుపద సమాసము అగును. కావున రెండు బహుపద సమాసము యొక్క తీసివేత కూడా ఒక బహుపద సమాసమే అగును

3 Algebra.indd 91 11-03-2023 15:14:06

రెండు బహుపద సమాసముల గుణకారము

8 యూనిట్లు పొడవు 7 యూనిట్లు వెడల్పు కలిగిన ఒక దీర్ఘచతురస్రమును క్రిందచూపబడిన నాలుగు (4) దీర్ఘచతురస్రముగా విడగొట్టినపుడు వాటి వైశాల్యము మారకుండా యుండుటను గమనించగలము. ఇది బహుపద సమాసముల గుణకారమును గూర్చి చదువుటకు వీలుగా యుండును.

	8
7	వైశాల్యము = 56

	5	3
1	5	3
6	30	18

ఉదాహరణకు, పొడవు $(x+1)$మరియు వెడల్పు$(3x+2)$గా తీసుకొనిన దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం మనకు క్రింది విధముగా వచ్చును.

	x	+	1
$3x$	$3x^2$		$3x$
+			
2	$2x$		2

కావున, దీర్ఘచతురస్రము యొక్క వైశాల్యము

$= 3x^2 + 3x + 2x + 2$

$= 3x^2 + 5x + 2$

x అనేది చరరాశి మరియు m, n లు ధన పూర్ణసంఖ్యలు అయిన $x^m \times x^n = x^{m+n}$.

రెండు బహుపద సమాసములను లబ్ధం చేసిన ఆ లబ్ధం కూడా బహుపద సమాసము అగును.

ఉదాహరణ 3.6

$(4x - 5)$ మరియు $(2x^2 + 3x - 6)$ యొక్క లబ్ధం కనుగొనుము.

సాధన

$(4x - 5)\ (2x^2 + 3x - 6)$ ను గుణించుట, మొదటి సమాసములోని ఒక్కొక్క పదమును రెండవ సమాసములోని ప్రతి పదముతో గుణించవలయును ఈ ఉదాహరణలో మనము $4x$ మరియు -5 లచే గుణించుట జరుగును. తర్వాత అన్నింటిని చేర్చవలెయును.

$$(4x-5)(2x^2+3x-6) = 4x(2x^2+3x-6) - 5(2x^2+3x-6)$$

$$= 8x^3 + 12x^2 - 24x - 10x^2 - 15x + 30$$

$$= 8x^3 + 2x^2 - 39x + 30$$

(లేదా) గుణకములను విభజించి గుణకారపద్ధతి ద్వారా సాధించుట.

$$\begin{array}{rrrr} & 2 & +3 & -6 \\ & & +4 & -5 \\ \hline & -10 & -15 & +30 \\ 8 & +12 & -24 & \\ \hline 8 & +2 & -39 & +30 \end{array}$$

$\therefore \quad (4x-5)\ (2x^2+3x-6) = 8x^3 + 2x^2 - 39x + 30$

3 Algebra.indd 92 11-03-2023 15:14:06

అభ్యాసము 3.1

1. క్రింద ఇవ్వబడిన సమాసములలో ఏది బహుపద సమాసము అగును? బహుపద సమాసము కానియెడల కారణము తెల్పుము.

(i) $\frac{1}{x^2} + 3x - 4$ (ii) $x^2(x-1)$

(iii) $\frac{1}{x}(x+5)$ (iv) $\frac{1}{x^{-2}} + \frac{1}{x^{-1}} + 7$

(v) $\sqrt{5}\,x^2 + \sqrt{3}\,x + \sqrt{2}$ (vi) $m^2 - \sqrt[3]{m} + 7m - 10$

2. క్రింది సమాసములలోని x^2 మరియు x యొక్క గుణకములను కనుగొనుము.

(i) $4 + \frac{2}{5}x^2 - 3x$ (ii) $6 - 2x^2 + 3x^3 - \sqrt{7}\,x$

(iii) $\pi x^2 - x + 2$ (iv) $\sqrt{3}\,x^2 + \sqrt{2}\,x + 0.5$

(v) $x^2 - \frac{7}{2}x + 8$

3.. క్రింది బహుపద సమాసములలో అంతస్తును కనుగొనుము.

(i) $1 - \sqrt{2}\,y^2 + y^7$ (ii) $\frac{x^3 - x^4 + 6x^6}{x^2}$

(iii) $x^3(x^2 + x)$ (iv) $3x^4 + 9x^2 + 27x^6$

(v) $2\sqrt{5}\,p^4 - \frac{8p^3}{\sqrt{3}} + \frac{2p^2}{7}$

4. క్రింద యివ్వబడిన బహుపద సమాసములను ప్రామాణిక రూపములలో వ్రాయుము.

(i) $x - 9 + \sqrt{7}\,x^3 + 6x^2$ (ii) $\sqrt{2}\,x^2 - \frac{7}{2}x^4 + x - 5x^3$

(iii) $7x^3 - \frac{6}{5}x^2 + 4x - 1$ (iv) $y^2 + \sqrt{5}\,y^3 - 11 - \frac{7}{3}y + 9y^4$

5. ఈ క్రింది బహుపదసమాసమును కూడుము మరియు వచ్చిన ఫలితమునకు అంతస్తును కనుగొనుము.

(i) $p(x) = 6x^2 - 7x + 2$ $q(x) = 6x^3 - 7x + 15$

(ii) $h(x) = 7x^3 - 6x + 1$ $f(x) = 7x^2 + 17x - 9$

(iii) $f(x) = 16x^4 - 5x^2 + 9$ $g(x) = -6x^3 + 7x - 15$

6.. ఈ క్రింది వాటిలో రెండవ బహుపదసమాసములను, మొదటి బహుపద సమాసము నుండి తీసివేసి అంతస్తును కనుగొనుము.

(i) $p(x) = 7x^2 + 6x - 1$ $q(x) = 6x - 9$

(ii) $f(y) = 6y^2 - 7y + 2$ $g(y) = 7y + y^3$

(iii) $h(z) = z^5 - 6z^4 + z$ $f(z) = 6z^2 + 10z - 7$

7. $2x^3 + 6x^2 - 5x + 8$ తో ఏ బహుపద సమాసమును కూడిన $3x^3 - 2x^2 + 6x + 15$ లభించును?

8. $2x^4 + 4x^2 - 3x + 7$ నుండి ఏ బహుపద సమాసమును తీసివేయగా $3x^3 - x^2 + 2x + 1$ లభించును?

3 Algebra.indd 93 11-03-2023 15:14:09

9. ఈ క్రింది యివ్వబడిన బహుపద సమాసములను గుణించుము వచ్చిన ఫలితము నుండి వాటి అంతస్తును కనుగొనుము.

(i) $p(x) = x^2 - 9$ $q(x) = 6x^2 + 7x - 2$

(ii) $f(x) = 7x + 2$ $g(x) = 15x - 9$

(iii) $h(x) = 6x^2 - 7x + 1$ $f(x) = 5x - 7$

10. ఒక తీపి పదార్థము యొక్క వెల రూ $(x + y)$ అగును. అమీర్ $(x + y)$ తీపి పదార్థమును కొనెను. అయిన అతను ఇచ్చిన మొత్తం రూపాయులను x మరియు y లలో కనుగొనుము. మరియు $x = 10, y = 5$ అయిన అమీర్ ఇచ్చిన మొత్తము ధర ఎంత?

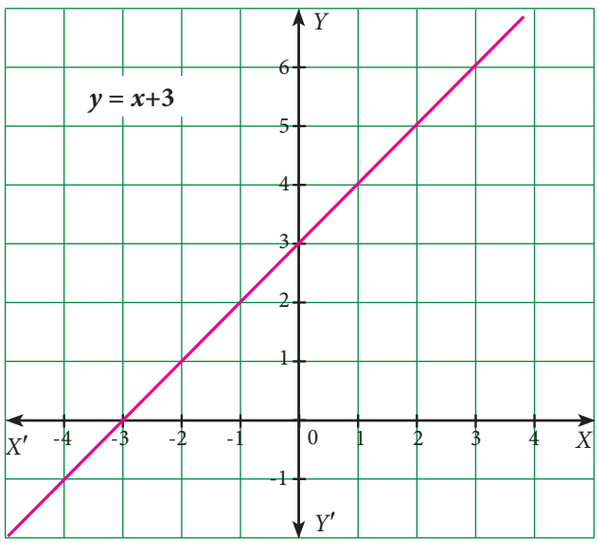
11. ఒక దీర్ఘ చతురస్రము యొక్క పొడవు $(3x+2)$ ప్రమాణములు దాని వెడల్పు $(3x–2)$ ప్రమాణములు అయిన x ని అనుసరించి దాని వైశాల్యమును కనుగొనుము. $x = 20$ అయిన దాని వైశాల్యం ఎంత?

12. $p(x)$అనునది 1ని అంతస్తుగా కల్గిన బహుపద సమాసము మరియు $q(x)$ అనునది 2ని అంతస్తు కల్గిన ఒక బహుపద సమాసము అయిన $p(x) \times q(x)$ అనునది ఏ రకమైన బహుపద సమాసము అగును?

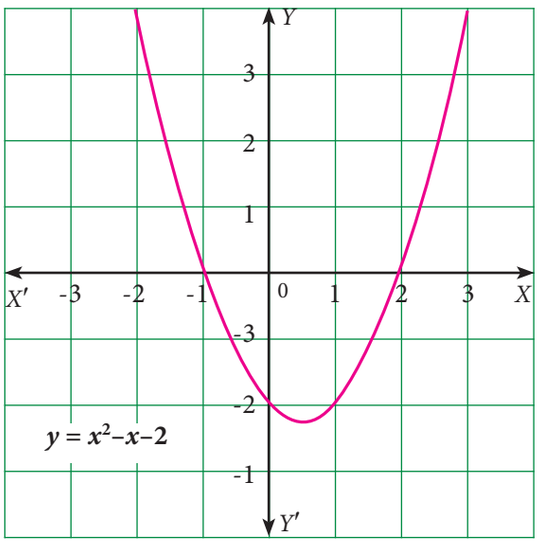
3.2.2 బహుపద సమాసము యొక్క విలువ మరియు శూన్యవిలువలు

కింద ఇవ్వబడిన రెండు రేఖా చిత్రములను గమనించుము.

మొదటిది ఏక ఘాత (రేఖీయ), రెండవది వర్గ (ద్విఘాత) అగును. మొదటి రేఖా చిత్రములో X అక్షము $(x = –3)$ ఒక బిందువు వద్ద ఖండించును. మరియు రెండవ రేఖా చిత్రములో$(x = -1$ మరియు $x = -2)$ రెండు బిందువుల వద్ద ఖండించును. ఈ రెండు రేఖాచిత్రములు y అక్షములో ఒక బిందువు వద్ద మాత్రమే ఖండించును. సాధారణముగా ఒక్కొక్క బహుపద సమాసమునకు ఒక రేఖా చిత్రము కలదు. ఆ రేఖా చిత్రములను పటము రూపములో చూపించవచ్చును. (మనకు సూత్రము కంటే పటము అంటే ఇష్టము కదా?) రేఖా చిత్రములు ప్రయోజనకరమైన విషయాలను అందజేయును. అవి ఒక సరళరేఖ, వలయము యొక్క, ఆకారము, ఎన్ని చోట్ల x అక్షములో ఖండించుచున్నది.)



పటం. 3.7



పటం. 3.8

3 Algebra.indd 94 11-03-2023 15:14:09

మీరు బహుపద సమాసమును రేఖా చిత్రములో ఎట్లు గుర్తించగలరు? దీనికి జవాబు మీకు తెలియును. x నకు వేర్వేరు విలువను ప్రతిక్షేపించినపుడు బహుపద సమాసమునకు వేర్వేరైన విలువలు దొరుకును. మనము x=5 అని ప్రతిక్షేపించగా x=5 విలువకు తగినట్లు బహుపద సమాసము విలువ దొరకును. సాధారణముగా x=a అయిన. $p(x)$ బహుపద సమాసము యొక్క విలువ $p(a)$ అగును. ఇచ్చట $p(x)$ లో x యొక్క విలువకు బదులుగా x ను ప్రతిక్షేపించగా $p(a)$ దొరుకును. ఇచ్చట a అనునది. ఒక వాస్తవ సంఖ్య.

x యొక్క వేరు వేరు విలువలకు $p(x)$ యొక్క విలువ శూన్యము అనుటను అని గమనించుము (పటము 3.10 లో ఉన్నట్లుగా) x యొక్క ఎన్ని విలువలకు మరియు ఏ విలువకు $p(x)$ శూన్యము అగును? అని ఉత్సాహంగా అడుగుటకు తోచును. a యొక్క ఆ విలువలే ఆ బహుపద సమాసము $p(x)$ యొక్క శూన్యములనబడును.

బహుపద సమాసం యొక్క శూన్యములు x అక్షమును ఖండించు, సరళ రేఖలు, వక్ర రేఖలు మీద ఆధారపడియుండును.

పటము 3.9లో శూన్యముల సంఖ్య 1

పటము 3.10 లో శూన్యముల సంఖ్య 2

సూచన

ఒక బహుపద సమాసము యొక్క శూన్యముల సంఖ్య ≤ బహుపద సమాసము యొక్క అంతస్తు.

బహుపద సమాసము యొక్క విలువ

$p(x)$అను బహుపద సమాసములో $x = a$ అని ప్రతిక్షేపించగా దాని విలువ p (a) దొరుకును. ఇచ్చట x ను a గా మార్చుట వలన లభించును a $(a \in R)$

ఉదాహరణ

$f(x) = x^2 + 3x - 1$ అను బహుపద సమాసములో $x = 2$ అయిన $f(x)$ యొక్క విలువ

$f(2) = 2^2+3(2)-1 = 4+6-1 = 9.$

బహుపద సమాసము యొక్క శూన్యవిలువలు

(i) $p(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 14$ ను బహుపద సమాసముగా తీసుకొనుము ఇందులో x వద్ద 1 ని ప్రతిక్షేపించగా

$$p(1) = 4(1)^3 - 6(1)^2 + 3(1) - 14$$
$$= 4 - 6 + 3 - 14$$
$$= -13$$

కావున $x = 1$ అయిన $p(x)$ యొక్క విలువ -13 అగును.

$x = 0$ అయినప్పుడు $p(0) = 4(0)^3 - 6(0)^2 + 3(0) - 14$

$$= 0 - 0 + 0 - 14$$
$$= -14$$

కావున $x = 1$ అయిన $p(x)$ యొక్క విలువ -14 అగును.

$x = 2$ ను $p(x)$ లో ప్రతిక్షేపించగా $p(2) = 4(2)^3 - 6(2)^2 + 3(2) - 14$

$$= 32 - 24 + 6 - 14$$

$x = 2$ అయినప్పుడు $p(x)$ యొక్క విలువ '0' అగును. కావున మనము 2 ను $p(x)$ యొక్క శూన్యములలో ఒకటి అని చెప్పవచ్చును. ఇచ్చట $p(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 14$.

3 Algebra.indd 95 11-03-2023 15:14:10

బహుపది సమీకరణముల మూలములు

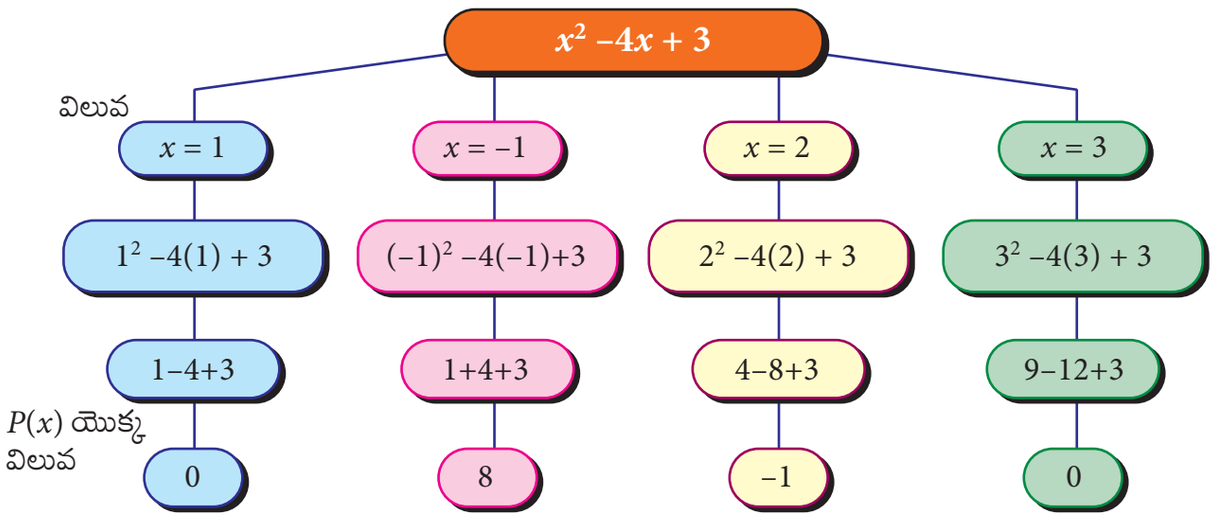
సాధారణముగా, $p(a) = 0$ అయిన a అనునది $p(x)$ అను బహుపద సమాసము యొక్క ఒక శూన్యమగును (లేదా) a అనునది $p(x)=0$ అను బహుపది సమీకరణము యొక్క ఒక మూలము అగును.

ఉదాహరణ 3.7

$f(x) = x^2 - 4x + 3$ అయిన $f(1), f(-1), f(2), f(3)$. $f(x)$ మొదలగు వాటి విలువను కనుగొనుము. మరియు (పైగా) యొక్క శూన్యములను కనుగొనుము.

సాధన

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$



పటం. 3.9

$x = 1$ మరియు $x = 3$ అయిన బహుపద సామసము $f(x)$ యొక్క విలువ శూన్యమగును. బహుపద సమాసము $f(x)$ యొక్క శూన్యములు 1 మరియు 3 అగును

ఉదాహరణ 3.8

క్రింద యివ్వబడిన బహుపద సమాసములకు శూన్య విలువలను కనుగొనుము.

(i) $f(x) = 2x + 1$ (ii) $f(x) = 3x - 5$

సాధన

(i) ఇవ్వబడినది $f(x) = 2x + 1 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)$

$= 2\left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)$

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\left[-\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right] = 2(0) = 0$

కావున $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$, $x = -\frac{1}{2}$ అనునది $f(x)$ యొక్క శూన్యమగును.

(ii) ఇవ్వబడినది $f(x) = 3x - 5 = 3\left(x - \frac{5}{3}\right)$

$f\left(\frac{5}{3}\right) = 3\left(\frac{5}{3} - \frac{5}{3}\right) = 3(0) = 0$

కావున, $x = \frac{5}{3}$ అనునది $f(x)$ యొక్క శూన్యమగును.

3 Algebra.indd 96 11-03-2023 15:14:11

ఉదాహరణ 3.9

క్రింద యివ్వబడిన బహుపద సమీకరణముల మూలములను కనుగొనుము.

(i) $5x - 3 = 0$ (ii) $-7 - 4x = 0$

సాధన

(i) $5x - 3 = 0$

(లేదా) $5x = 3$

అప్పుడు $x = \frac{3}{5}$

(ii) $-7 - 4x = 0$

(లేదా) $4x = -7$

అప్పుడు, $x = \frac{7}{-4} = -\frac{7}{4}$

సూచన

(i) ఒక బహుపద సమాసం యొక్క శూన్యము అనునది సున్న మాత్రమే యుండవలసిన అవసరము లేదు ఏ వాస్తవ సంఖ్యనైనా వుండవచ్చు

(ii) ఒక శూన్యము కాని స్థిరాంకము బహుపద సమాసమునకు సున్నలు లేవు.

(iii) శూన్యబహు పద సమాసములో అన్ని వాస్తవ సంఖ్యలు శూన్యములగును.

ఉదాహరణ 3.10

$x^2 - 9$ అను సమాసమునకు -3 మరియు 3 అనునవి శూన్యములు అగునా? అని సరిచూడుము.

సాధన

$f(x) = x^2 - 9$ అనుకొనుము

అప్పుడు, $f(-3) = (-3)^2 - 9 = 9 - 9 = 0$

$f(+3) = 3^2 - 9 = 9 - 9 = 0$

$\therefore$ -3 మరియు 3 అనునవి $x^2 - 9$ శూన్య విలువలు

అభ్యాసము 3.2

1. $f(y) = 6y - 3y^2 + 3$ అను బహుపద సమాసము యొక్క విలువలను కనుగొనుము.
   (i) $y = 1$ (ii) $y = -1$ (iii) $y = 0$

2. $p(x) = x^2 - 2\sqrt{2}x + 1$ అయిన $p(2\sqrt{2})$ ను కనుగొనుము.

3. క్రింది బహుపది యొక్క శూన్య విలువలను కనుగొనుము.
   (i) $p(x) = x - 3$ (ii) $p(x) = 2x + 5$ (iii) $q(y) = 2y - 3$
   (iv) $f(z) = 8z$ (v) $p(x) = ax$ ఇచ్చట $a \neq 0$ (vi) $h(x) = ax + b,\ a \neq 0,\ a, b \in R$

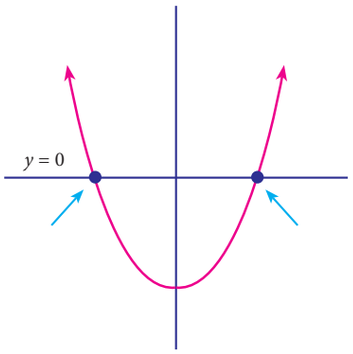
4. క్రింది బహుపది యొక్క మూలములను కనుగొనుము.
   (i) $5x - 6 = 0$ (ii) $x + 3 = 0$
   (iii) $10x + 9 = 0$ (iv) $9x - 4 = 0$

5. క్రింది బహుపది ప్రక్కన సూచించినవి శూన్య విలువలు అగునా అని సరిచూడుము
   (i) $p(x) = 2x - 1,\ x = \frac{1}{2}$ (ii) $p(x) = x^3 - 1,\ x = 1$
   (iii) $p(x) = ax + b, x = \frac{-b}{a}$ (iv) $p(x) = (x + 3)(x - 4),\ x = 4, x = -3$

3 Algebra.indd 97 11-03-2023 15:14:12

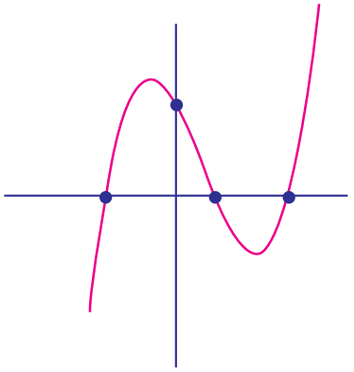
6. క్రిందివ్వబడిన వక్ర రేఖలలో చూచించబడిన బహుపద సమాసముల శూన్య విలువలను కనుగొనుము.

(i)



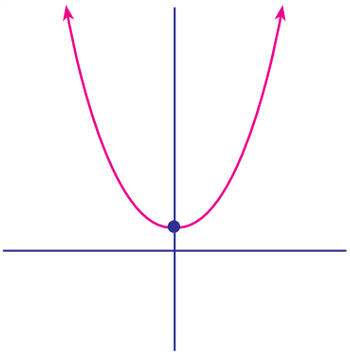
పటం. 3.10

(ii)



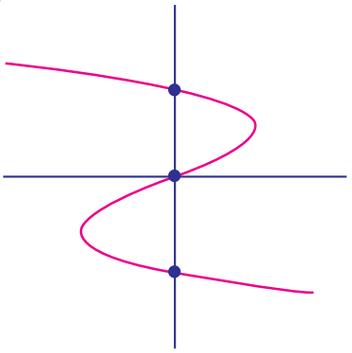
పటం. 3.11

(iii)



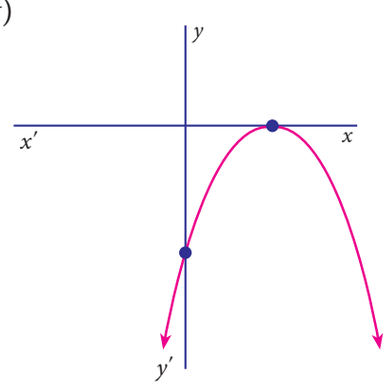
పటం. 3.12

(iv)



పటం. 3.13

(v)



పటం. 3.14

3.3 శేష సిద్ధాంతము

ఈ భాగములో శేషమును కనుగొనుటకు అందమైన మరియు సులభమైన ఒక పద్ధతి గూర్చి తెలుసుకొందాము.

ఒక బహుపద సమాసమును ఏకఘాత సమాసముచే భాగించటను శేష సిద్ధాంతం అనబడును. మిక్కిలి ప్రఖ్యాతి గావించిన బీజ గణిత సిద్ధాంతమును ఉపయోగించవచ్చును.

$p(x)$ అనునది ఏదేని ఒక బహుపద సమాసము యొక్క అంతస్తు 1 కంటే పెద్దదిగానో లేదా సమానముగానో ఉండి, దానిని $(x-a)$ అను ఏకఘాత సమాసముచే భాగించిన వచ్చు శేషము $p(a)$ అగును.

శేష సిద్ధాంతము యొక్క ప్రాముఖ్యత : ఈ సిద్ధాంతము ద్వారా ఒక బహుపద సమాసమును కఠినమైన దీర్ఘభాగాహార పద్ధతి ద్వారా భాగించకనే దాని శేషమును కనుగొనవచ్చును.

సూచన

(i) $p(x)$ ను, $(x+a)$ చే భాగించగా వచ్చు శేషం $p(-a)$ అగును.

(ii) $p(x)$ ను, $(ax-b)$ చే భాగించగా వచ్చు శేషం $p(\frac{b}{a})$ అగును.

(iii) $p(x)$ ను, $(ax+b)$ చే భాగించగా వచ్చు శేషం $p(-\frac{b}{a})$ అగును.

3 Algebra.indd 98 11-03-2023 15:14:12

ఉదాహరణ 3.11

వ.సంఖ్య	ప్రశ్న	సాధన	గమనిక
1	$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ అను బహుపద సమాసమును $x+1$. చే భాగించగా వచ్చు శేషం	$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ $f(-1) = (-1)^3+3(-1)^2+3(-1)+1$ $= -1+3-3+1 = 0$ కావున కావలసిన శేషం 0	$g(x) = x+1$ $g(x) = 0$ $x+1 = 0$ $x = -1$
2	$f(x) = x^3 - x + 1$ అనునది $g(x) = 2 - 3x$ యొక్క రెట్టింపని పరిశీలించుము	$\therefore f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \frac{2}{3} + 1$ $= \frac{8}{27} - \frac{2}{3} + 1$ $= \frac{8 - 18 + 27}{27} = \frac{17}{27} \neq 0$ $\Rightarrow f(x)$ అనునది $g(x)$ యొక్క రెట్టింపు కాదు	$g(x) = 2-3x$ $= 0$ $x = \frac{2}{3}$
3	$f(x) = x^3-ax^2 + 6x - a$ అను బహుపద సమాసమును $(x - a)$ చే భాగించగా వచ్చు శేషం.	$f(x) = x^3-ax^2 + 6x - a$ $f(a) = a^3 - a(a)^2 + 6a - a$ $= a^3 - a^3 + 5a$ $= 5a$ కావున కావలసిన శేషం $5a$	$g(x) = x-a$ $g(x) = 0$ $x - a = 0$ $x = a$ అనుకొనుము.
4	$2x^4 + 3x^3 + 2kx^2 + 3x + 6$ అను బహుపద సమాసమునకు k యొక్క ఏ విలువకు బహుపద సమాసము $(x+ 2)$ చే నిశ్శేషముగా భాగింపబడును	$f(x) = 2x^4 + 3x^3 + 2kx^2 + 3x + 6$ అనుకొనుము. $(x+2)$ చే శేషము లేకుండా భాగించుటకు $f(-2) = 0$ గా యుండవలెయును కావున $2(-2)^4 + 3(-2)^3 + 2k(-2)^2 + 3(-2)+6=0$ $2(16) + 3(-8) + 2k(4) -6 + 6=0$ $32-24 + 8k = 0$ $8k=-8$, అను బహుపద సమాసము $(x-2)$ చే శేషము లేకుండా భాగించాలంటే $k = -1$ గా యుండవలెయును.	$g(x)=x+2$ $g(x)=0$ $x+2 = 0$ $x = -2$ అనుకొనుము.

3 Algebra.indd 99 11-03-2023 15:14:13

ఉదాహరణ 3.12 $f(x) = 2x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 3x - 2$ అను బహుపద సమాసమును $x^2 - 3x + 2$ అను బహుపద సమాసముచే శేషము లేకుండా భాగించబడునని దీర్ఘ భాగహార పద్ధతిని ఉపయోగించకనే నిరూపించుము

సాధన :

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 3x - 2 \text{ అనుకొనుము.} \\ g(x) &= x^2 - 3x + 2 \\ &= x^2 - 2x - x + 2 \\ &= x(x-2) - 1(x-2) \\ &= (x-2)(x-1) \end{aligned}$$

శేష సిద్ధాంతమును ఉపయోగించ $f(x)$ అను బహుపద సమాసమును $(x-1), (x-2)$ అను సమాసములచే శేషము లేకుండా భాగించబడునని నిరూపించవలెయును

$$\begin{aligned} f(1) &= 2(1)^4 - 6(1)^3 + 3(1)^2 + 3(1) - 2 \\ &= 2 - 6 + 3 + 3 - 2 \\ &= 0 \\ f(2) &= 2(2)^4 - 6(2)^3 + 3(2)^2 + 3(2) - 2 \\ &= 32 - 48 + 12 + 6 - 2 \\ f(2) &= 0 \end{aligned}$$

కావున $f(x)$ అను బహుపద సమాసము $(x-1)(x-2)$ చే శేషము లేకుండా భాగించబడును.

అనగా $f(x)$ అను బహుపద సమాసము $x^2 - 3x + 2$ చే శేషము లేకుండా భాగించబడును

3.3.1 కారణాంక సిద్ధాంతము

$p(x)$ అను బహుపద సమాసము యొక్క అంతస్తు $n \geq 1$ మరియు a అనునది ఒక వాస్తవ సంఖ్య అయిన

(i) $p(a) = 0$ గా అయిన $(x-a)$ అనునది $p(x)$ కు ఒక కారణాంకమగును.

(ii) $(x-a)$ అనునది $p(x)$ యొక్క కారణాంకమైన $p(a) = 0$ అగును.

నిరూపణ;

$p(x)$ అనునది ఒక భాజనీయత (భాజ్యము) మరియు $(x-a)$ ఒక భాజకము అయిన తర్వాత బహుపద సమాసము యొక్క భాగాహార నియమము ప్రకారము. $p(x) = (x-a)q(x) + p(a)$ అని వ్రాయుదుము ఇక్కడ $q(x)$ అనునది ఒక భాగఫలము మరియు $p(a)$ అనునది శేషము.

(i) $p(a) = 0$, అయిన $p(x) = (x-a)\,q(x)$ అగును. పైగా $(x-a)$ అనునది $p(x)$ యొక్క ఒక కారణాంకము అగును.

3 Algebra.indd 100 11-03-2023 15:14:15

(ii) అయిన $(x-a)$ అనునది $p(x)$ యొక్క ఒక కారణాంకము అయినందున,

$$\begin{aligned} p(a) &= (a-a)\,g(a) \\ &= 0 \times g(a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$(x-a)$ అనునది $p(x)$ నకు ఒక కారణాంకము కాబట్టి $p(a) = 0$, అగును.

మెదడుకు మేత

$a\ (a \neq 0)$ మరియు b, అనునది ఏదైన రెండు పూర్ణ సంఖ్యలకు $b = ax$ అయిన a అనునది b యొక్క భాజకము అగును. ఇచ్చట x అనునది ఒక పూర్ణ సంఖ్య అగును.

సూచన

- $p(a) = 0$ అయిన $(x-a)$ అనునది $p(x)$ యొక్క ఒక కారణాంకము (ఎందుకనగా) $(\because x-a = 0,\ x = a)$
- $p(-a) = 0$ అయిన $(x+a)$ అనునది $p(x)$ యొక్క ఒక కారణాంకము $(\because x+a = 0,\ x = -a)$
- $p\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$ అయిన $(ax+b)$ అనునది $p(x)$ యొక్క ఒక కారణాంకము $\left(\because ax+b = 0,\ ax = -b,\ x = -\frac{b}{a}\right)$
- $p\left(\frac{b}{a}\right) = 0$ అయిన $(ax-b)$ అనునది $p(x)$ యొక్క ఒక కారణాంకము $\left(\because ax-b = 0,\ ax = b,\ x = \frac{b}{a}\right)$
- $p(a) = 0$ మరియు $p(b) = 0$ అయిన $(x-a)\,(x-b)$ అనునది $p(x)$ యొక్క ఒక కారణాంకము (ఎందుకనగా) $\left(\because \begin{matrix} x-a=0 & \text{or} & x-b=0 \\ x=a & \text{or} & x=b \end{matrix}\right)$

ఉదాహరణ 3.13 $x^3 - 4x^2 - 2x + 20$ నకు $(x+2)$ ఒక కారణాంకమని చూపుము.

$x+2$; యొక్క శూన్య విలువలను కనుగొనుటకు $x + 2 = 0$ అనుకొనిన $x = -2$ వచ్చును.

సాధన

$p(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 20$ అనుకొనుము

కారణాంక సిద్ధాంతము ప్రకారము, $(x+2)$ అనునది $p(x)$ యొక్క ఒక కారణాంకము అయిన, $p(-2) = 0$

$$\begin{aligned} p(-2) &= (-2)^3 - 4(-2)^2 - 2(-2) + 20 \\ &= -8 - 4(4) + 4 + 20 \\ p(-2) &= 0 \end{aligned}$$

కావున, $(x+2)$ అనునది $x^3 - 4x^2 - 2x + 20$ నకు ఒక కారణాంకము

3 Algebra.indd 101 11-03-2023 15:14:17

ఉదాహరణ 3.14 $3x^3 + x^2 - 20x + 12$?నకు $(3x - 2)$ ఒక కారణాంకమగునా?

సాధన

$p(x) = 3x^3 + x^2 - 20x + 12$ అనుకొనుము

కారణాంక సిద్ధాంతము ప్రకారము, $p\left(\frac{2}{3}\right) = 0$ అయిన $(3x - 2)$ అనునది

$p(x)$ కు ఒక కారణాంకము

$3x-2$;
అనుకొనిన $3x - 2 = 0$
$3x = 2$
వచ్చును. $x = \frac{2}{3}$

$$p\left(\frac{2}{3}\right) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 20\left(\frac{2}{3}\right) + 12$$

$$= 3\left(\frac{8}{27}\right) + \left(\frac{4}{9}\right) - 20\left(\frac{2}{3}\right) + 12$$

$$= \frac{8}{9} + \frac{4}{9} - \frac{120}{9} + \frac{108}{9}$$

$$p\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{(120 - 120)}{9}$$

$$= 0$$

పురోగమన తనిఖీ

1. $(x+3)$ అనునది $p(x)$ యొక్క కారణాంకం అయిన $p(__) = 0$
2. $(3-x)$ అనునది $p(x)$ యొక్క కారణాంకం అయిన $p(__) = 0$
3. $(y-3)$ అనునది $p(x)$ యొక్క కారణాంకం అయిన $p(__) = 0$
4. $(-x-b)$ అనునది $p(x)$ యొక్క కారణాంకం అయిన $p(__) = 0$
5. $(-x+b)$అనునది $p(x)$ యొక్క కారణాంకం అయిన $p(__) = 0$

కావున $(3x - 2)$ అనునది $3x^3 + x^2 - 20x + 12$ నకు ఒక కారణాంకమగును

ఉదాహరణ 3.15 $2x^3 - 6x^2 + mx + 4$ కు $(x - 2)$ ఒక కారణాంకము అయిన m, విలువను కనుగొనుము

సాధన

$p(x) = 2x^3 - 6x^2 + mx + 4$ అనుకొనుము

కారణాంక సిద్ధాంతము ప్రకారము,శేషము $p(2) = 0$ అయిన $(x - 2)$ ఒక కారణాంకము

$x-2$ యొక్క శూన్యమును కనుగొనుటకు
$x - 2 = 0$
అనుకొనిన
$x = 2$ వచ్చును

$$p(2) = 0$$
$$2(2)^3 - 6(2)^2 + m(2) + 4 = 0$$
$$2(8) - 6(4) + 2m + 4 = 0$$
$$-4 + 2m = 0$$
$$m = 2$$

3 Algebra.indd 102 11-03-2023 15:14:20

అభ్యాసము 3.3

1. $p(x)$ అను బహుపద సమాసము $g(x)$ యొక్క గుణిజము అగునా అని సరిచూడుము.
$p(x) = x^3 - 5x^2 + 4x - 3$; $g(x) = x - 2$

2. శేష సిద్ధాంతమును ఉపయోగించి $p(x)$ ను, $g(x)$ చే భాగించగా వచ్చు శేషమును కనుగొనుము.
   (i) $p(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 1$; $g(x) = x + 1$
   (ii) $p(x) = 4x^3 - 12x^2 + 14x - 3$; $g(x) = 2x - 1$
   (iii) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 50$; $g(x) = x - 3$

3. $3x^3 - 4x^2 + 7x - 5$ అను బహుపద సమాసమును $(x+3)$ చే భాగించగా వచ్చు శేషము ఎంత?

4. $x^{2018} + 2018$ అను బహుపద సమాసమును $x-1$ చే భాగించగా వచ్చు శేషమును కనుగొనుము.

5. $p(x) = 2x^3 - kx^2 + 3x + 10$ అను బహుపద సమాసమును $(x-2)$చే నిశ్శేషముగా భాగించబడిన k విలువను కనుగొనుము.

6. $2x^3 + ax^2 + 4x - 12$ మరియు $x^3 + x^2 - 2x + a$ అను రెండు బహుపద సమాసములను $(x - 3)$ చే భాగించగా వచ్చు శేషములు సమానమైన a యొక్క విలువను కనుగొనుము. మరియు దాని శేషమును కనుగొనుము

7. కింద ఇవ్వబడిన బహుపద సమాసాలు $x - 1$ కు కారణాంకమగునా అని కనుగొనుము.
   $i)\ x^3 + 5x^2 - 10x + 4$ $\quad$ $ii)\ x^4 + 5x^2 - 5x + 1$

8. కారణాంక సిద్ధాంతమునుపయోగించి $x - 5$ అనునది కింద ఇవ్వబడిన బహుపద సమాసమునకు కారణాంకము అని చూపుము. $2x^3 - 5x^2 - 28x + 15$

9. $x^3 - 3x^2 - mx + 24$ అను బహుపద సమాసమునకు $(x + 3)$ అను నదిఒక కారణాంకము అయిన, m, విలువను కనుగొనుము.

10. $ax^2 + 5x + b$ అను బహుపద సమాసమునకు $(x - 2)$ మరియు $\left(x - \frac{1}{2}\right)$ అనునవి కారణాంకములు అయిన $a = b$. అని చూపుము.

11. $(x - 1)$ అనునది $kx^3 - 2x^2 + 25x - 26$ ను నిశ్శేషముగా భాగించబడిన k విలువను కనుగొనుము.

12. $x^2 - 2x - 8$ అనునది ఒక దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యము, $(x + 2)$ మరియు $(x - 4)$ అనునవి దాని యొక్క భుజములా అని కారణాంక సిద్ధాంతము నుపయోగించి సరిచూడుము.

3 Algebra.indd 103 11-03-2023 15:14:22

3.4 బీజీయ సర్వసమీకరణములు

ఒక బీజగణిత సమీకరణములో గల చలరాశులకు ఏ విలువలు ప్రతిక్షేపించినను ఎల్లప్పుడు సత్యమయ్యేదానిని సర్వసమీకరణం అంటారు.

క్రింద ఇవ్వబడిన సర్వసమీకరణములను గూర్చి ముందుగానే నేర్చుకొని ఉన్నాము.

(1) $(a+b)^2 \equiv a^2+2ab+b^2$ (2) $(a-b)^2 \equiv a^2-2ab+b^2$

(3) $(a+b)(a-b) \equiv a^2-b^2$ (4) $(x+a)(x+b) \equiv x^2+(a+b)x+ab$

సూచన

(i) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ (ii) $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

(iii) $a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2$ (iv) $a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+2$

ఉదాహరణ 3.16 క్రింది ఇవ్వబడిన వాటిని సర్వసమీకరణమును ఉపయోగించి విస్తరించి వ్రాయుము:

(i) $(3x+4y)^2$ (ii) $(2a-3b)^2$ (iii) $(5x+4y)(5x-4y)$

(iv) $(m+5)(m-8)$

సాధన

(i) $(3x+4y)^2$ $(a+b)^2=a^2+2ab+b$

$(3x+4y)^2=(3x)^2+2(3x)(4y)+(4y)^2$ $[a=3x,\ b=4y]$ లను ప్రతిక్షేపించగా

$=9x^2+24xy+16y^2$

(ii) $(2a-3b)^2$ $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$(2a-3b)^2=(2a)^2-2(2a)(3b)+(3b)^2$ $[a=2a,\ b=3b]$ లను ప్రతిక్షేపించగా

$=4a^2-12ab+9b^2$

(iii) $(5x+4y)(5x-4y)$ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$(5x+4y)(5x-4y)=(5x)^2-(4y)^2$ $[a=5x\ \ b=4y]$ లను ప్రతిక్షేపించగా

$=25x^2-16y^2$

(iv) $(m+5)(m-8)$ $(x+a)(x-b)=x^2+(a-b)x-ab$

$(m+5)(m-8)=m^2+(5-8)m-(5)(8)$ $[x=m,\ a=5,\ b=8]$ లను ప్రతిక్షేపించగా

$=m^2-3m-40$

3 Algebra.indd 104 11-03-2023 15:14:26

త్రిపద సమాసముల విస్తరణ $(a+b+c)^2$

$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$ అని మనకు తెలుసు

$x = a+b,\ y = c$ ప్రతిక్షేపించగా

అయిన, $(a+b+c)^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)(c) + c^2$

$= a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$

$= a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

కావున, $(a+b+c)^2 \equiv a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$(a+b+c)^2$

	a	b	c
a	a^2	ab	ca
b	ab	b^2	bc
c	ca	bc	c^2



ఉదాహరణ 3.17 $(a-b+c)^2$ ను విస్తరించుము

సాధన

$(a+b+c)^2$ విస్తరణలో 'b'ను '$-b$'గా ప్రతిక్షేపించిన సర్వసమీకరణము

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ నుండి

$(a+(-b)+c)^2 = a^2+(-b)^2+c^2+2a(-b)+2(-b)c+2ca$

$= a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca$

పురోగమన తనిఖీ

క్రింది వాటిని విస్తరించుము మరియు రుజువు పరచుము :

$(a+b+c)^2 = (-a-b-c)^2$

$(-a+b+c)^2 = (a-b-c)^2$

$(a-b+c)^2 = (-a+b-c)^2$

$(a+b-c)^2 = (-a-b+c)^2$

ఉదాహరణ 3.18 $(2x+3y+4z)^2$ ను విస్తరించుము

సాధన

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$a = 2x, b = 3y$ మరియు $c = 4z$ గా ప్రతిక్షేపించగా

$(2x+3y+4z)^2 = (2x)^2+(3y)^2+(4z)^2+2(2x)(3y)+2(3y)(4z)+2(4z)(2x)$

$= 4x^2+9y^2+16z^2+12xy+24yz+16xz$

ఉదాహరణ 3.19 $3m+2n-4l$ అనునది చతురస్రము భుజము పొడవు అయిన దాని యొక్క వైశాల్యము కనుగొనుము

సాధన

చతురస్రము వైశాల్యము = భుజము × భుజము

$= (3m+2n-4l)\times(3m+2n-4l)$

$= (3m+2n-4l)^2$

$a = 3m,$
$b = 2n$
$c = -4l$
అని ప్రతిక్షేపించగా

3 Algebra.indd 105 11-03-2023 15:14:33

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ ఇది వరుకే తెలుసుకొనబడినది

$[3m+2n+(-4l)]^2 = (3m)^2+(2n)^2+(-4l)^2+2(3m)(2n)+2(2n)(-4l)+2(-4l)(3m)$

$= 9m^2+4n^2+16l^2+12mn-16ln-24lm$

కాబట్టి చతురస్ర వైశాల్యము $= [9m^2+4n^2+16l^2+12mn-16ln-24lm]$ చ.ప్ర

3.4.2 మూడు ద్విపద సమాసముల లబ్ధమును కల్గిన సర్వ సమీకరణములు

$$(x+a)(x+b)(x+c) = [(x+a)(x+b)](x+c)$$
$$= [x^2+(a+b)x+ab](x+c)$$
$$= x^2(x)+(a+b)(x)(x)+abx+x^2c+(a+b)(x)c+abc$$
$$= x^3+ax^2+bx^2+abx+cx^2+acx+bcx+abc$$
$$= x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$$

కాబట్టి, $(x+a)(x+b)(x+c) \equiv x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$

ఉదాహరణ 3.20 కింది వాటిని విస్తరించుము

(i) $(x+5)(x+6)(x+4)$ (ii) $(3x-1)(3x+2)(3x-4)$

సాధన

$(x+a)(x+b)(x+c) = x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$ ఇది వరకే తెలుసు (1)

(i) $(x+5)(x+6)(x+4)$

$= x^3+(5+6+4)x^2+(30+24+20)x+(5)(6)(4)$

$= x^3+15x^2+74x+120$

$a=5$, $b=6$, $c=4$ ను (1) లో ప్రతిక్షేపించిన

(ii) $(2a+3)(2a+4)(2a+5)$

$= (2a)^3+(3+4+5)(2a)^2+(12+20+15)(2a)+(3)(4)(5)$

$= 8a^3+(12)(4a^2)+(47)(2a)+60$

$= 8a^3+48a^2+94a+60$

(iii) $(3x-1)(3x+2)(3x-4)$

$= (3x)^3+(-1+2-4)(3x)^2+(-2-8+4)(3x)+(-1)(2)(-4)$

$= 27x^3+(-3)9x^2+(-6)(3x)+8$

$= 27x^3-27x^2-18x+8$

$x=2a$, $a=3$, $b=4$, $c=5$ ను (1) లో ప్రతిక్షేపించిన

$= 27x^3+(-3)9x^2+(-6)(3x)+8$

$= 27x^3-27x^2-18x+8$

3 Algebra.indd 106 11-03-2023 15:14:41

3.4.3 $(x+y)^3$ మరియు $(x-y)^3$ యొక్క విస్తరణ

$$(x+a)(x+b)(x+c) \equiv x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$$

$a=b=c=y$ ప్రతిక్షేపించిన

కనుక, $(x+y)(x+y)(x+y) = x^3+(y+y+y)x^2+(yy+yy+yy)x+yyy$

$$= x^3+(3y)x^2+(3y^2)x+y^3$$

కనుక., $(x+y)^3 \equiv x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ (లేక) $(x+y)^3 \equiv x^3+y^3+3xy(x+y)$

y ను $-y$, గా తీసుకొనబడిన

$(x-y)^3 \equiv x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$ (లేక) $(x-y)^3 \equiv x^3-y^3-3xy(x-y)$

ఉదాహరణ 3.21 $(5a-3b)^3$ ను విస్తరించుము

సాధన

$(x-y)^3 = x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$ (ఇది వరుకే మనకు తెలియును)

$(5a-3b)^3 = (5a)^3-3(5a)^2(3b)+3(5a)(3b)^2-(3b)^3$

$= 125a^3-3(25a^2)(3b)+3(5a)(9b^2)-(3b)^3$

$= 125a^3-225a^2b+135ab^2-27b^3$

క్రింద ఇవ్వబడిన సర్వసమీకరణమును కూడా ఉపయోగించవచ్చు.

$$x^3+y^3+z^3-3xyz \equiv (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

పై తెలిపిన సర్వసమీకరణము నుపయోగించి కుడి వైపుగా నున్న సమాసములను గుణించి సరిచూడవచ్చు.

సూచన

(i) $(x+y+z)=0$ అయిన $x^3+y^3+z^3=3xyz$ అగును

కూడిక తీసివేత గుణకారము మొదలగు వాటికి కొన్ని సర్వసమీకరణములందు ఉపయోగించుట (నిరూపణ కాదు)

(i) $x^3+y^3 \equiv (x+y)^3-3xy(x+y)$ (ii) $x^3-y^3 \equiv (x-y)^3+3xy(x-y)$

ఉదాహరణ 3.22 $(2x+3y+4z)(4x^2+9y^2+16z^2-6xy-12yz-8zx)$ ను గుణించుము

సాధన

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = a^3+b^3+c^3-3abc$ (ఇది వరకే తెలుసుకొనబడినది)

$$(2x+3y+4z)(4x^2+9y^2+16z^2-6xy-12yz-8zx)$$

3 Algebra.indd 107 11-03-2023 15:14:52

$$= (2x)^3 + (3y)^3 + (4z)^3 - 3(2x)(3y)(4z)$$
$$= 8x^3 + 27y^3 + 64z^3 - 72xyz$$

ఉదాహరణ 3.23 $10^3 - 15^3 + 5^3$ విలువలను కనుగొనుము

a బదులు 10, b బదులు −15, c బదులు 5 ను ఉంచుము.

సాధన

$a + b + c = 0$, కనుక $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ ఇది వరకే తెలుసుకొనబడినది

ఇక్కడ $a + b + c = 10 - 15 + 5 = 0$

కాబట్టి, $10^3 + (-15)^3 + 5^3 = 3(10)(-15)(5)$

$$10^3 - 15^3 + 5^3 = -2250$$

అభ్యాసము 3.4

1. కింది వాటిని విస్తరింపుము:
   (i) $(x + 2y + 3z)^2$ (ii) $(-p + 2q + 3r)^2$
   (iii) $(2p + 3)(2p - 4)(2p - 5)$ (iv) $(3a + 1)(3a - 2)(3a + 4)$
2. బీజగణిత సర్వసమీకరణముల నుపయోగించి x^2, x ల గుణకము మరియు స్థిర పదములను విస్తరించకనే కనుగొనుము.
   (i) $(x + 5)(x + 6)(x + 7)$ (ii) $(2x + 3)(2x - 5)(2x - 6)$
3. $(x + a)(x + b)(x + c) = x^3 + 14x^2 + 59x + 70$, అయిన కింది విలువను కనుగొనుము
   (i) $a + b + c$ (ii) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ (iii) $a^2 + b^2 + c^2$ (iv) $\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab}$
4. విస్తరించుము:
   (i) $(3a - 4b)^3$ (ii) $\left(x + \frac{1}{y}\right)^3$
5. బీజగణిత సర్వసమీకరణాలను ఉపయోగించి కింది వాటి విలువలు కనుగొనుము.
   (i) 98^3 (ii) 1001^3
6. $(x + y + z) = 9$ మరియు $(xy + yz + zx) = 26$, అయిన $x^2 + y^2 + z^2$ యొక్క విలువను కనుగొనుము.
7. $3a + 4b = 10$ మరియు $ab = 2$ అయిన $27a^3 + 64b^3$ యొక్క విలువను కనుగొనుము.
8. $x - y = 5$ మరియు $xy = 14$ అయిన, $x^3 - y^3$ యొక్క విలువను కనుగొనుము.
9. $a + \frac{1}{a} = 6$, అయిన, $a^3 + \frac{1}{a^3}$ యొక్క విలువను కనుగొనుము.

3 Algebra.indd 108 11-03-2023 15:15:10

10. $x^2 + \frac{1}{x^2} = 23$ అయిన, $x + \frac{1}{x}$ మరియు $x^3 + \frac{1}{x^3}$ యొక్క విలువను కనుగొనుము.

11. $\left(y - \frac{1}{y}\right)^3 = 27$ అయిన, $y^3 - \frac{1}{y^3}$ యొక్క విలువను కనుగొనుము.

12. సూక్ష్మీకరించుము: (i) $(2a + 3b + 4c)(4a^2 + 9b^2 + 16c^2 - 6ab - 12bc - 8ca)$

(ii) $(x - 2y + 3z)(x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 2xy + 6yz - 3xz)$

13. బీజీయ సర్వసమీకరణాలను ఉపయోగించి విలువలను కనుగొనుము:

(i) $7^3 - 10^3 + 3^3$ (ii) $1 + \frac{1}{8} - \frac{27}{8}$

14. $2x - 3y - 4z = 0$, అయిన $8x^3 - 27y^3 - 64z^3$. విలువను కనుగొనుము

3.5 కారణాంకపరచుట

కారణాంకము అనునది గుణకార విపర్యమగును

ఉదాహరణ : 3 మరియు 5 గుణించిన లభించు లబ్ధము 15.

15 ను కారణాంకపరచిన 3 మరియు 5 కారణాంకములు అగును.

ఉదాహరణ : $(x + 2)$ మరియు $(x + 3)$ గుణించిన లభించు లబ్ధము, $x^2 + 5x + 6$ ను కారణాంకపరచిన లభించు కారణాంకములు $(x + 2)$ మరియు $(x + 3)$ అగును.

గుణించు ↓		కారణాంకపరుచు ↑
$(x+3)(x+2)$		$(x+3)(x+2)$
$x(x+2)+3(x+2)$		$x(x+2)+3(x+2)$
$x^2+2x+3x+6$		$x^2+2x+3x+6$
x^2+5x+6		x^2+5x+6

కావున ఇవ్వబడిన గరిష్ఠ అంతస్తు కలిగిన బహుపద సమాసమును కనిష్ఠ అంతస్తు కలిగిన సమాసముల లబ్ధముగా మార్చి వ్రాయు పద్ధతి కారణాంక పద్ధతి అగును. ఇచ్చట కనిష్ఠ అంతస్తు గల సమాసమును కారణాంక పరచుటకు వీలు కానట్లుగా అమరి ఉండవలెను.

కారణాంక పరచుట యొక్క ముఖ్యమైన పద్ధతులు

(i) ఉమ్మడి కారణాంకము తీసికొను పద్ధతి.

$ab + ac$

$a \times b + a \times c$

$a(b + c)$

(ii) వర్గీకరణ పద్ధతి

$a + b - pa - pb$

$(a + b) - p(a + b)$

$(a + b)(1 - p)$

ఒక బహుపద సమాసమును కారణాంక పరచునపుడు ఉమ్మడి కారణాంకమును తీసుకొని కారణాంకపరచవలెను.

ఉదాహరణ 3.24

కారణాంకపరచుము:

(i) $am + bm + cm$ (ii) $a^3 - a^2b$ (iii) $5a - 10b - 4bc + 2ac$ (iv) $x + y - 1 - xy$

3 Algebra.indd 109 11-03-2023 15:15:20

సాధన

(i) $am + bm + cm$

$am + bm + cm$

$m(a + b + c)$ కారణాంకరూపము

(ii) $a^3 - a^2b$

$a^2 \cdot a - a^2 \cdot b$ జతలుగా చేయుము

$a^2 \times (a - b)$ కారణాంకరూపము

(iii) $5a - 10b - 4bc + 2ac$

$5a - 10b + 2ac - 4bc$

$5(a - 2b) + 2c(a - 2b)$

$(a - 2b)(5 + 2c)$

(iv) $x + y - 1 - xy$

$x - 1 + y - xy$

$(x - 1) + y(1 - x)$

$(x - 1) - y(x - 1)$

$(x - 1)(1 - y)$

$(a-b)=-(b-a)$

3.5.1 సర్వసమీకరణాలను ఉపయోగించి కారణాంకపరచుము

(i) $a^2 + 2ab + b^2 \equiv (a + b)^2$ (ii) $a^2 - 2ab + b^2 \equiv (a - b)^2$

(iii) $a^2 - b^2 \equiv (a + b)(a - b)$ (iv) $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \equiv (a + b + c)^2$

(v) $a^3 + b^3 \equiv (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ (vi) $a^3 - b^3 \equiv (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

(vii) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \equiv (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

సూచన

$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$; $a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$

$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$; $a^6 - b^6 = (a + b)(a - b)(a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2)$

పురోగమన తనిఖీ

నిరూపించుము: (i) $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 = 2\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^2$ (ii) $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 = 4$

ఉదాహరణ 3.25 కింది వాటిని కారణాంకపరచుము

(i) $9x^2 + 12xy + 4y^2$ (ii) $25a^2 - 10a + 1$ (iii) $36m^2 - 49n^2$

(iv) $x^3 - x$ (v) $x^4 - 16$ (vi) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 4xy + 12yz - 6xz$

సాధన

(i) $9x^2 + 12xy + 4y^2 = (3x)^2 + 2(3x)(2y) + (2y)^2 [\because a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2]$

$= (3x + 2y)^2$

(ii) $25a^2 - 10a + 1 = (5a)^2 - 2(5a)(1) + 1^2$

3 Algebra.indd 110 11-03-2023 15:15:34

$= (5a-1)^2$ $\left[\because a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2\right]$

(iii) $36m^2-49n^2. = (6m)^2-(7n)^2$

$= (6m+7n)(6m-7n)$ $\left[\because a^2-b^2 = (a+b)(a-b)\right]$

(iv) $x^3-x = x(x^2-1)$

$= x(x^2-1^2)$

$= x(x+1)(x-1)$

(v) $x^4-16 = x^4-2^4$ $\left[\because a^4-b^4=(a^2+b^2)(a+b)(a-b)\right]$

$= (x^2+2^2)(x^2-2^2)$

$= (x^2+4)(x+2)(x-2)$

(vi) $x^2+4y^2+9z^2-4xy+12yz-6xz$

$= (-x)^2+(2y)^2+(3z)^2+2(-x)(2y)+2(2y)(3z)+2(3z)(-x)$

$= (-x+2y+3z)^2$ (or) $(x-2y-3z)^2$

ఉదాహరణ 3.26 కింది వాటిని కారణాంకపరచుము

(i) $27x^3+125y^3$ (ii) $216m^3-343n^3$

(iii) $2x^4-16xy^3$ (iv) $8x^3+27y^3+64z^3-72xyz$

సాధన

(i) $27x^3+125y^3 = (3x)^3+(5y)^3$ $\left[\because (a^3+b^3) = (a+b)(a^2-ab+b^2)\right]$

$= (3x+5y)\left((3x)^2-(3x)(5y)+(5y)^2\right)$

$= (3x+5y)(9x^2-15xy+25y^2)$

(ii) $216m^3-343n^3 = (6m)^3-(7n)^3$ $\left[\because (a^3-b^3) = (a-b)(a^2+ab+b^2)\right]$

$= (6m-7n)\left((6m)^2+(6m)(7n)+(7n)^2\right)$

$= (6m-7n)(36m^2+42mn+49n^2)$

(iii) $2x^4-16xy^3 = 2x(x^3-8y^3)$

$= 2x\left(x^3-(2y)^3\right)$ $\left[\because (a^3-b^3) = (a-b)(a^2+ab+b^2)\right]$

$= 2x\left((x-2y)(x^2+(x)(2y)+(2y)^2)\right)$

$= 2x(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$

3 Algebra.indd 111 11-03-2023 15:15:48

(iv) $8x^3 + 27y^3 + 64z^3 - 72xyz$

$= (2x)^3 + (3y)^3 + (4z)^3 - 3(2x)(3y)(4z)$

$= (2x + 3y + 4z)(4x^2 + 9y^2 + 16z^2 - 6xy - 12yz - 8xz)$

మెదడుకు మేత

Check 15 divides the following

(i) $2017^3 + 2018^3$

(ii) $2018^3 - 1973^3$

అభ్యాసము 3.5

1. కింది వాటిని కారణాంకపరచుము:

   (i) $2a^2 + 4a^2b + 8a^2c$ (ii) $ab - ac - mb + mc$

2. కింది వాటిని కారణాంకపరచుము:

   (i) $x^2 + 4x + 4$ (ii) $3a^2 - 24ab + 48b^2$ (iii) $x^5 - 16x$

   (iv) $m^2 + \frac{1}{m^2} - 23$ (v) $6 - 216x^2$ (vi) $a^2 + \frac{1}{a^2} - 18$

3. కింది వాటిని కారణాంకపరచుము:

   (i) $4x^2 + 9y^2 + 25z^2 + 12xy + 30yz + 20xz$

   (ii) $25x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 20xy + 12yz - 30xz$

4. కింది వాటిని కారణాంకపరచుము:

   (i) $8x^3 + 125y^3$ (ii) $27x^3 - 8y^3$ (iii) $a^6 - 64$

5. కింది వాటిని కారణాంకపరచుము:

   (i) $x^3 + 8y^3 + 6xy - 1$ (ii) $l^3 - 8m^3 - 27n^3 - 18lmn$

3.5.2 $ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ అను రూపములో గల వర్గబహుపదిని(త్రిపద సమాసములు) కారణాంకపరచుట)

$ax^2 + bx + c$ యొక్క ఏకఘాత కారణాంకములు $(kx + m)$ మరియు $(lx + n)$ అను రూపములో నుండును.

కావున $ax^2 + bx + c = (kx + m)(lx + n) = klx^2 + (lm + kn)x + mn$

ఇరువైపుల x^2, x గుణకములను మరియు స్థిర పదములను పోల్చిన $a = kl$, $b = (lm + kn)$ మరియు $c = mn$, లభించును ఇక్కడ ac అనునది kl మరియు mn లబ్ధము అగును. ఇది lm మరియు kn ల లబ్ధమునకు సమానము, ఇది x యొక్క గుణకమగును కావున $(kl \times mn) = (lm \times kn)$.

$ax^2 + bx + c$ ను కారణాంక పరచుట క్రింది సోపానములను అనుసరించవలెను:

సోపానము; 1: x^2 యొక్క గుణకమును మరియు స్థిర సంఖ్యను గుణించవలెను అనగా ac.

సోపానము; 2 : ac లబ్ధమునకు రెండు కారణాంకములుగా విభజించవలయును వాటి మొత్తము మరియు లబ్ధము క్రమముగా b మరియు ac కు సమానంగా ఉండవలెను

సోపానము; 3: ఈ పదములను రెండు జతలుగా వర్గీకరించి కారణాంకపరచవలెను

3 Algebra.indd 112 11-03-2023 15:15:59

ఉదాహరణ 3.27

$2x^2 + 15x + 27$ ను కారణాంకపరచుము

సాధన

$ax^2 + bx + c$ తో పోల్చిన

ఇక్కడ, $a = 2,\ b = 15,\ c = 27$

లబ్ధము $ac = 2 \times 27 = 54$ మరియు

మొత్తము $b = 15$

కారణాంకముల లబ్ధం $ac = 54$	కారణాంకముల మొత్తము $b = 15$	కారణాంకముల లబ్ధం $ac = 54$	కారణాంకముల మొత్తము $b = 15$
1×54	55	-1×-54	-55
2×27	29	-2×-27	-29
3×18	21	-3×-18	-21
6×9	**15**	-6×-9	-15

కావలసిన కారణాంకములు **6** మరియు **9**

మొత్తము లబ్ధము "$ac = 54$" మరియు

మొత్తము $b = 15$ 6, 9 అను జత ను "$b = 15$ తృప్తిపరచునని కనుగొందుము

$\therefore$ మరియు "$ac = 54$" దానిని కూడా సంపూర్ణము చేయుటను చూడ గలుగుచున్నాము. మధ్య పదమును $6x$ మరియు $9x$ వీడ దీసి అమర్చిన

$$\begin{aligned} 2x^2 + 15x + 27 &= 2x^2 + 6x + 9x + 27 \\ &= 2x(x + 3) + 9(x + 3) \\ &= (x + 3)(2x + 9) \end{aligned}$$

కావున, $2x^2 + 15x + 27 = (x + 3)$ మరియు $(2x + 9)$ కారణాంకము అగును.

ఉదాహరణ 3.28

$2x^2 - 15x + 27$ ను కారణాంకపరచుము

సాధన

$ax^2 + bx + c$ తో పోల్చిన

$a = 2,\ b = -15,\ c = 27$

గుణించగా $ac = 2 \times 27 = 54$, కూడిన $b = -15$ మధ్య పదము $-6x$ మరియు $-9x$ మార్చి అమర్చిన

$$\begin{aligned} 2x^2 - 15x + 27 &= 2x^2 - 6x - 9x + 27 \\ &= 2x(x - 3) - 9(x - 3) \\ &= (x - 3)(2x - 9) \end{aligned}$$

కావున, $2x^2 - 15x + 27$. నకు కావలసిన కారణాంకములు $(x - 3)$ and $(2x - 9)$ అగును

కారణాంకముల లబ్ధం $ac = 54$	కారణాంకముల మొత్తము $b = -15$	కారణాంకముల లబ్ధం $ac = 54$	కారణాంకముల మొత్తము $b = -15$
1×54	55	-1×-54	-55
2×27	29	-2×-27	-29
3×18	21	-3×-18	-21
6×9	15	**-6×-9**	**-15**

కావలసిన కారణాంకములు **-6** మరియు **-9**

ఉదాహరణ 3.29

$2x^2 + 15x - 27$ ను కారణాంకపరచుము

కారణాంకముల లబ్ధం $ac = -54$	కారణాంకముల మొత్తము $b = 15$	కారణాంకముల లబ్ధం $ac = -54$	కారణాంకముల మొత్తము $b = 15$
-1×54	53	1×-54	-53
-2×27	25	2×-27	-25
-3×18	**15**	3×-18	-15
-6×9	3	6×-9	-3

కావలసిన కారణాంకములు **-3** మరియు **18**

3 Algebra.indd 113 11-03-2023 15:16:06

సాధన

$ax^2 + bx + c$ తో పోల్చిన

ఇక్కడ, $a = 2,\ b = 15,\ c = -27$

లబ్ధము $ac = 2 \times -27 = -54$, మొత్తము $b=15$ మధ్య పదమును $-3x$ మరియు $18x$ గా విభజించి అమర్చిన

$$\begin{aligned} 2x^2 + 15x - 27 &= 2x^2 + 18x - 3x - 27 \\ &= 2x(x+9) - 3(x+9) \\ &= (x+9)(2x-3) \end{aligned}$$

కావున $2x^2 + 15x - 27.$, నకు కావలసిన కారణాంకములు $(x+9)$ మరియు $(2x-3)$

ఉదాహరణ 3.30 $2x^2 - 15x - 27$ ను కారణాంకపరచుము

సాధన

$ax^2 + bx + c$ తో పోల్చిన

ఇక్కడ, $a = 2,\ b = -15,\ c = -27$

లబ్ధము $ac = 2 \times -27 = -54$, మరియు మొత్తము $b=-15$ మధ్య పదము $-18x$ మరియు $3x$ గా విభజించి అమర్చిన

$$\begin{aligned} 2x^2 - 15x - 27 &= 2x^2 - 18x + 3x - 27 \\ &= 2x(x-9) + 3(x-9) \\ &= (x-9)(2x+3) \end{aligned}$$

కావున, $2x^2 - 15x - 27$ నకు కావలసిన కారణాంకములు $(x-9)$ మరియు $(2x+3)$

ఉదాహరణ 3.31 $(x+y)^2 + 9(x+y) + 20$ ను కారణాంకపరుచుము

సాధన

$x + y = p$, అనుకొనుము $p^2 + 9p + 20$ తర్వాత వచ్చును

$ax^2 + bx + c$, తో పోల్చిన

$a = 1,\ b = 9,\ c = 20$ వచ్చును

లబ్ధము $ac = 1 \times 20 = 20$, మరియు మొత్తము $b=9$ మధ్యపదమును $4p$ మరియు $5p$ విభజించి అమర్చిన

కారణాంకముల లబ్ధం $ac = 20$	కారణాంకముల మొత్తము $b = 9$	కారణాంకముల లబ్ధం $ac = 20$	కారణాంకముల మొత్తము $b = 9$
1×20	21	-1×-20	-21
2×10	12	-2×-10	-12
4×5	9	-4×-5	-9

కావలసిన కారణాంకములు 4 మరియు 5

$$\begin{aligned} p^2 + 9p + 20 &= p^2 + 4p + 5p + 20 \\ &= p(p+4) + 5(p+4) \\ &= (p+4)(p+5) \end{aligned}$$

$p = x + y$ తీసికొనిన $(x+y)^2 + 9(x+y) + 20 = (x+y+4)(x+y+5)$ వచ్చును,

3 Algebra.indd 114 11-03-2023 15:16:39

అభ్యాసము 3.6

1. కింది వాటిని కారణాంకపరచుము

(i) $x^2+10x+24$ (ii) $z^2+4z-12$ (iii) $p^2-6p-16$

(iv) $t^2+72-17t$ (v) $y^2-16y-80$ (vi) $a^2+10a-600$

2. కింది వాటిని కారణాంకపరచుము

(i) $2a^2+9a+10$ (ii) $5x^2-29xy-42y^2$ (iii) $9-18x+8x^2$

(iv) $6x^2+16xy+8y^2$ (v) $12x^2+36x^2y+27y^2x^2$

(vi) $\left(a+b\right)^2+9\left(a+b\right)+18$

3. కింది వాటిని కారణాంకపరచుము

(i) $(p-q)^2-6(p-q)-16$ (ii) $m^2+2mn-24n^2$ (iii) $\sqrt{5}a^2+2a-3\sqrt{5}$

(iv) a^4-3a^2+2 (v) $8m^3-2m^2n-15mn^2$ (vi) $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{2}{xy}$

3.6 బహుపద సమాసముల భాగహారము

13 మరియు 5 అను రెండు సంఖ్యలను తీసుకొనుము, 13ను 5 చే భాగించునపుడు భాగఫలము మరియు శేషము ఎంత?

భాగఫలము 2 శేషము 3 దినినే 13 అనునది $3 = (5\times2)+3$ అని వ్రాయవచ్చును.

ప్రస్తుతము పరిశీలించి చూచెదము..

భాగించు	లభించు రూపము	శేషం	భాజకము
11 by 4	$(4\times2)+3$	3	4
22 by 11	$(11\times2)+0$	0	11

భాజ్యము = (భాజకము × భాగఫలము) + శేషము.

పై ఉదాహరణము నుండి, శేషము అనునది భాజకము కంటే తక్కువ అని మనకు స్పష్టముగా తెలియును. శేషము సున్న అయిన భాజ్యము, భాజకము యొక్క గుణిజము అని చెప్పవచ్చును.

3.6.1 బహుపద సమాసముల భాగహార విధి రూపము

సాధారణముగా, $p(x)$ మరియు $g(x)$ లు రెండు బహుపద సమాసములు అనుకొనుము $p(x)\geq g(x)$ అంతస్తు మరియు $g(x)\neq 0$. అయిన $q(x)$ మరియు $r(x)$ ప్రత్యేక బహుపద సమాసములు అగును.

$$p(x) = g(x)\times q(x)+r(x) \qquad \ldots (1)$$

3 Algebra.indd 115 11-03-2023 15:16:47

అను రూపములో దొరుకును.

ఇచ్చట $r(x) = 0$ లేదా $r(x)$ <యొక్క అంతస్తు $g(x)$ యొక్క అంతస్తు.

బహుపద సమాసము $p(x)$ భాజ్యము, $g(x)$ భాజకము, $q(x)$ భాగఫలము మరియు $r(x)$ శేషము అగును. కావున సమీకరణము (1) ఈ క్రింది విధముగా వ్రాయవచ్చును

భాగింపబడు సమాసము = (భాగించు సమాసం × భాగఫలము) + శేషం.

> $r(x)$ శూన్యము అయిన, $p(x)$ అనునది $g(x)$ యొక్క గుణిజం అనగా $g(x)$ అనునది $p(x)$ ని భాగించును.

ఇది కొంచం కష్టమైనను భయపడ అవసరం లేదు. బహుపద సమాసములను భాగించుట ఎట్లు అని తెలుసుకొని అభ్యసించినచో సులభమగును. అందుకు ఈ క్రింది ఉదాహరణములు ఉపయోగపడును.

ఉదాహరణ 3.32 భాగించుము. $x^3 - 4x^2 + 6x$ ను x, ఇచ్చట , $x \neq 0$ చే భాగించుము.

సాధన

ఇవ్వబడినది $\frac{x^3 - 4x^2 + 6x}{x} = \frac{x^3}{x} - \frac{4x^2}{x} + \frac{6x}{x}, x \neq 0$

$= x^2 - 4x + 6$

ఉదాహరణ 3.33 $(5x^2 - 7x + 2) \div (x - 1)$ ను భాగించగా వచ్చు భాగఫలము మరియు శేషమును కనుగొనుము.

సాధన

$(5x^2 - 7x + 2) \div (x - 1)$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 5x-2 \\
\hline
x-1 & 5x^2-7x+2 \\
 & 5x^2-5x \\
 & (-)\ \ (+) \\
\hline
 & -2x+2 \\
 & -2x+2 \\
 & (+)\ \ (-) \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

(i) $\frac{5x^2}{x} = 5x$

(ii) $5x(x-1) = 5x^2-5x$

(iii) $-\frac{2x}{x} = -2$

(iv) $-2(x-1) = (-2x+2)$

∴ భాగఫలము = $5x-2$ శేషం = 0

ఉదాహరణ 3.34 f(x) అను బహుపద సమాసమును g(x) చే భాగించగా వచ్చు భాగఫలము మరియు శేషములను కనుగొనుము.

3 Algebra.indd 116 11-03-2023 15:16:57

(i) $f(x) = (8x^3-6x^2+15x-7), g(x) = 2x+1.$ (ii) $f(x) = x^4-3x^3 + 5x^2-7, g(x) = x^2 + x + 1$

సాధన

(i) $f(x) = (8x^3-6x^2+15x-7), g(x) = 2x+1$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4x^2 - 5x + 10 \\
\hline
2x + 1 & 8x^3-6x^2+15x-7 \\
 & 8x^3 +4x^2 \\
 & (-)\ \ (-) \\
\hline
 & -10x^2 + 15x \\
 & -10x^2 - 5x \\
 & (+)\ \ \ (+) \\
\hline
 & 20x - 7 \\
 & 20x + 10 \\
 & (-)\ \ \ (-) \\
\hline
 & -17
\end{array}
$$

∴ భాగఫలము $= 4x^2 - 5x + 10$ మరియు

శేషం $= -17$

(ii) $f(x) = x^4-3x^3 + 5x^2-7, g(x) = x^2 + x + 1$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 4x + 8 \\
\hline
x^2 + x + 1 & x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 0x - 7 \\
 & x^4 + x^3 + x^2 \\
 & (-)\ \ (-)\ \ (-) \\
\hline
 & -4x^3 + 4x^2 + 0x \\
 & -4x^3 - 4x^2 - 4x \\
 & (+)\ \ \ (+)\ \ \ (+) \\
\hline
 & 8x^2 + 4x - 7 \\
 & 8x^2 + 8x + 8 \\
 & (-)\ \ (-)\ \ (-) \\
\hline
 & -4x - 15
\end{array}
$$

∴ భాగఫలము $= x^2 - x + 1$ మరియు

శేషం $= 0$

3.6.2 సంయోజిత భాగహారము

బహుపద సమాసములను ఏకఘాత కారణాంకముతో భాగించుటను సంయోజిత భాగహారము అందురు సంయోజిత భాగాహారము అనునది ఒక ప్రత్యేక సూక్ష్మమైన పద్ధతి అగును. ఇది కారణాంక పరచుటకు ఉపయోగబడును. బహుపద సమాసములను కనుగొనుటకు దీని యొక్క ముఖ్య ఉపయోగము అగును

ఉదాహరణ 3.35 సంయోజిత భాగహారము ఉపయోగించి $p(x) = (3x^3 - 2x^2 - 5 + 7x)$ అనుదానిని $d(x) = x+3$ తో భాగించగా శేషము మరియు భాజకమును కనుగొనుము.

సాధన

సోపానము 1 భాజకము మరియు భాజ్యమును ప్రామాణిక రూపములో వ్రాయుము.

$3x^3 - 2x^2 + 7x - 5$ ((ప్రామాణిక రూపములోని భాజ్యము)

$x + 3$ ((ప్రామాణిక రూపములోని భాజకము))

భాగింపబడు సమాసములు (భాజ్యము) యొక్క గుణకములు మొదటి అడ్డు వరుసలో వ్రాయుము. విడిచి పెట్టిన పదముల గుణకము '0' (శూన్యము) అని వ్రాయుము.

3 −2 7 −5 (మొదట అడ్డు వరుస)

3 Algebra.indd 117 11-03-2023 15:16:58

సోపానము 2; భాజకము యొక్క శూన్యమును కనుగొనుము $x+3=0$ నుండి $x=-3$

సోపానము 3; 0 యొక్క భాజకమును మొదటి అడ్డు వరుసలో భాజ్యము యందు వ్రాయుము సున్నని మొదటి నిలువ వరుసలోని రెండవ అడ్డు వరుసలో వ్రాయుము

-3	3	-2	7	-5	మొదటి అడ్డు వరుస
	0				రెండవ అడ్డు వరుస

సోపానము 4; రెండవ, మూడవ అడ్డు వరుసలను క్రింది విధముగా పూర్తిచేయుము.

-3	3	-2	7	-5	మొదటి అడ్డు వరుస
	0 $\xrightarrow{-3\times3}$	-9 $\xrightarrow{-3\times-11}$	33 $\xrightarrow{-3\times40}$	-120	రెండవ అడ్డు వరుస
	3	-11	40	-125	మూడవ అడ్డు వరుస

మూడవ అడ్డు వరుసలో నున్న చివరి పదము తప్ప మిగిలిన అన్ని పదములు భాగఫలము యొక్క గుణకములు అగును.

భాగఫలము $3x^2-11x+40$ మరియు శేషము -125.

ఉదాహరణ 3.36 సంయోజిత భాగహార పద్ధతినుపయోగించి $(3x^3-4x^2-5)$ను $(3x+1)$ తో భాగించి, భాగఫలము శేషము కనుగొనుము.

సాధన

$p(x)=3x^3-4x^2-5,\ d(x)=(3x+1)$

ప్రామాణిక రూపము $p(x)=3x^3-4x^2+0x-5$ మరియు $d(x)=3x+1$

$\frac{-1}{3}$	3	-4	0	-5
	0	-1	$\frac{5}{3}$	$\frac{-5}{9}$
	3	-5	$\frac{5}{3}$	$\frac{-50}{9}$ (శేషము)

$3x+1$ యొక్క శూన్యము కనుగొనుటకు
$3x+1=0$
తీసుకొనుము $3x=-1$
$x=-\frac{1}{3}$

$$3x^3-4x^2-5=\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(3x^2-5x+\frac{5}{3}\right)-\frac{50}{9}$$
$$=\frac{(3x+1)}{3}\times3\left(x^2-\frac{5}{3}x+\frac{5}{9}\right)-\frac{50}{9}$$

$$3x^3-4x^2-5=(3x+1)\left(x^2-\frac{5}{3}x+\frac{5}{9}\right)-\left(\frac{50}{9}\right)$$ (ఎందుకనగా, $p(x)=d(x)q(x)+r$)

కావున భాగఫలము $\left(x^2-\frac{5}{3}x+\frac{5}{9}\right)$ మరియు శేషము $\frac{-50}{9}$

3 Algebra.indd 118 11-03-2023 15:17:05

ఉదాహరణ 3.37 $x^4+10x^3+35x^2+50x+29$ ను $(x+4)$ తో భాగించగా వచ్చు భాగఫలము x^3-ax^2+bx+6, అయిన a, b యొక్క విలువలను మరియు శేషమును కనుగొనుము.

సాధన

$p(x)=x^4+10x^3+35x^2+50x+29$ అనుకొనుము

ప్రామాణిక రూపము $=x^4+10x^3+35x^2+50x+29$

$x+4$ యొక్క శూన్యమును కనుగొనుటకు $x+4=0$ అయిన $x=-4$

గుణకములు	1	10	35	50	29
-4	1	10	35	50	29
	0	-4	-24	-44	-24
	1	6	11	6	5 (శేషము)

భాగపలము $x^3+6x^2+11x+6$ ఇచ్చిన భాగఫలము x^3-ax^2+bx+6 తో పోల్చిన

x^2 యొక్క గుణకము $6=-a$ మరియు x యొక్క గుణకము $11=b$

కావున, $a=-6$, $b=11$ మరియు శేషము $=5$.

అభ్యాసము 3.7

1. క్రింద యివ్వబడిన బహుపద సమాసములను భాగించి భాగఫలము మరియు శేషములను కనుగొనుము.
   (i) $(4x^3+6x^2-23x+18)\div(x+3)$ (ii) $(8y^3-16y^2+16y-15)\div(2y-1)$
   (iii) $(8x^3-1)\div(2x-1)$ (iv) $(-18z+14z^2+24z^3+18)\div(3z+4)$
2. దీర్ఘచతురస్రము యొక్క వైశాల్యం $x^2+7x+12$, దాని వెడల్పు $(x+3)$అయిన దాని పొడవును కనుగొనుము.
3. సమాంతర చతుర్భుజము యొక్క వైశాల్యము $25x^2-16$ దాని ఆధారము $(5x+4)$ అయిన దాని ఎత్తును కనుగొనుము.
4. $(x+5)$ రాశుల మొత్తం (x^3+125) అయిన ఆ దత్తాంశము సరాసరిని కనుగొనుము?
5. సంయోజిత భాగహార పద్ధతిని నుపయోగించి కింది వాటికి భాగఫలము మరియు శేషమును కనుగొనుము;
   (i) $(x^3+x^2-7x-3)\div(x-3)$ (ii) $(x^3+2x^2-x-4)\div(x+2)$
   (iii) $(8x^4-2x^2+6x+5)\div(4x+1)$
6. $(8x^4-2x^2+6x-7)$ ను $(2x+1)$ తో భాగించగా లభించు భాగఫలము $(4x^3+px^2-qx+3)$, అయిన p,q మరియు శేషమును కనుగొనుము
7. $3x^3+11x^2+34x+106$ ను $x-3$ తో భాగించగా లభించు భాగఫలము $3x^2+ax+b$, అయిన a ,b మరియు శేషములను కనుగొనుము

3 Algebra.indd 119 11-03-2023 15:17:12

3.6.3 సంయోజిత భాగహార పద్ధతిని ఉపయోగించి కారణాంక పరచుట;

ఒక త్రిపద సమాసమును సంయోజిత భాగహార పద్ధతి ఉపయోగించి ఏ విధముగా ఏకఘాత సమాసముగా కారణాంకపరచు వచ్చునని ఈ భాగములో మనం నేర్చుకొందాం. ఇవ్వబడినటు వంటి త్రిపద బహుపద సమాసము $p(x)$, నకు ఏకఘాత కారణాంకము ఒకటిని తెలుసుకొన తర్వాత సంయోజిత భాగహార పద్ధతిని ఉపయోగించి $p(x)$. యొక్క మిగిలిన రెండు కారణాంకములు కనుగొనవచ్చును. పైగ ఆ వర్గ సమీకరణమును మరలా ఏకఘాత సమీకరణముగా మార్చుటకు వీలగును.

సూచన

- $p(x)$ అనే స్థిరపదము కాని బహుపదిలో $x = a$ అనునది సున్న అయితే మాత్రమే $p(a) = 0$ అగును.
- $x–a$ అనునది $p(x)$ నకు ఒక కారణాంకమునగా ఉన్నట్లు అయితే మాత్రమే $p(a) = 0$ అగును. (కారణాంక సిద్ధాంతము)

ఒక బహుపద సమాసమునకు $(x - 1)$ మరియు $(x + 1)$ అనునవి కారణాంకములు అగునా అని తెలుసుకొను సులభ పద్ధతి.

- $p(x)$ యొక్క అన్ని పదముల గుణకములు మరియు స్థిర రాశుల మొత్తము శూన్యము అయితే మాత్రమే $p(x)$ నకు $(x–1)$ ఒక కారణాంకమగును.
- (x) యొక్క సరి సంఖ్యలు ఘాతములుగా నున్న పదముల గుణకములు మరియు స్థిర పదముల మొత్తము అనునది x యొక్క బేసి సంఖ్యలు ఘాతముగా నున్న పదముల యొక్క గుణకములు మొత్తమునకు సమానముగా ఉన్నట్లు అయితే మాత్రమే $(x+1)$ అనునది $p(x)$ నకు ఒక కారణాంకము అగును.

ఉదాహరణ 3.38 (i) $x^3 - 7x^2 + 13x - 7$ నకు $(x - 1)$ ఒక కారణాంకము అని నిరూపించుము.

(ii) $x^3 + 7x^2 + 13x + 7$ నకు $(x + 1)$ ఒక కారణాంకము అని నిరూపించుము.

సాధన

(i) $p(x) = x^3 - 7x^2 + 13x - 7$ అనుకొనుము

గుణకముల మొత్తము $= 1 - 7 + 13 - 7 = 0$

కావున $(x - 1)$ అనునది $p(x)$ నకు ఒక కారణాంకము

(ii) $q(x) = x^3 + 7x^2 + 13x + 7$ అనుకొనుము

సరి సంఖ్యల ఘాతవములుగా కలిగిన x పదముల గుణకముల మొత్తము = 7 + 7 = 14

బేసి సంఖ్యల ఘాతములుగా కలిగిన x పదముల గుణకముల మొత్తము = 1 + 13 = 14

కావున, $(x + 1)$ అనునది $q(x)$ కు ఒక కారణాంకము

ఉదాహరణ 3.39 $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$ ఏకఘాత కారణాంకములుగా విడదీయుము

సాధన

$p(x) = x^3 + 13x^2 + 32x + 20$ అనుకొనుము

3 Algebra.indd 120 11-03-2023 15:17:18

బహుపద సమాసముల యొక్క అని గుణకముల మొత్తము $= 1+13+32+20 = 66 \neq 0$

కావున, $(x-1)$ ఒక కారణాంకము కాదు.

సరి సంఖ్యలు ఘాతములుగా కలిగిన పదముల గుణకముల మొత్తము $= 13 + 20 = 33$

బేసి సంఖ్యలు ఘాతములుగా కలిగిన పదముల గుణకముల మొత్తము $= 1 + 32 = 33$

కావున, $(x+1)$ అనునది $p(x)$కు ఒక కారణాంకము.

ఇపుడు సంయోజిత భాగహారము పద్ధతి నుపయోగించి ఇతర కారణాంకములు కనుగొనుము.

పద్ధతి I

-1	1	13	32	20
	0	-1	-12	-20
-2	1	12	20	0 (శేషము)
	0	-2	-20	
	1	10	0	(శేషము)

$p(x) = (x+1)(x+2)(x+10)$

కావున,

$x^3 + 13x^2 + 32x + 20$

$= (x+1)(x+2)(x+10)$

పద్ధతి II

-1	1	13	32	20
	0	-1	-12	-20
	1	12	20	0 (శేషము)

తర్వాత $p(x) = (x+1)(x^2+12x+20)$

ఇపుడు $x^2 + 12x + 20 = x^2 + 10x + 2x + 20$

$= x(x+10) + 2(x+10)$

$= (x+2)(x+10)$

కావున, $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$

$= (x+1)(x+2)(x+10)$

ఉదాహరణ 3.40 $x^3 - 5x^2 - 2x + 24$ను కారణాంకపరచుము

సాధన

Let $p(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$ అనుకొనుము

$x = 1$, అయినపుడు $p(1) = 1 - 5 - 2 + 24 = 18 \neq 0$ $(x-1)$ఒక కారణాంకము కాదు.

$x = -1$, అయినపుడు $p(-1) = -1 - 5 + 2 + 24 = 20 \neq 0$ $(x+1)$ ఒక కారణాంకము కాదు.

కావున, x యొక్క వేర్వేరు విలువలను యత్నదోష పద్ధతి ద్వారా ప్రయత్నించి శోదించెదము

$x = 2$ అయినపుడు

$p(2) = 2^3 - 5(2)^2 - 2(2) + 24$

$= 8 - 20 - 4 + 24$

$= 8 \neq 0$

కాబట్టి $(x-2)$ ఒక కారణాంకము కాదు.

$x = -2$ అయినపుడు

సూచన

$x^2 - 7x + 12$ యొక్క శూన్యము 3 అగునా అని తనిఖీ చేయుము.
కానట్లైతే -3 లేక 4 లేక -4 మొదలగునవి అగునా అని తనిఖీ చేయుము.

3 Algebra.indd 121 11-03-2023 15:17:24

$$p(-2) = \left(-2\right)^3 - 5(-2)^2 - 2(-2) + 24$$
$$= -8 - 20 + 4 + 24$$
$$p(-2) = 0$$

కాబట్టి $(x+2)$ ఒక కారణాంకము కాదు.

-2	1	-5	-2	24	
	0	-2	$+14$	-24	
3	1	-7	12	0	(శేషము)
	0	3	-12		
	1	-4	0	(శేషము)	

కాబట్టి, $(x+2)(x-3)(x-4)$ ఇది కారణాంకములు.

కావున $x^3 - 5x^2 - 2x^2 + 24 = (x+2)(x-3)(x-4)$



అభ్యాసము 3.8

1. సంయోజిత భాగహార పద్ధతిని ఉపయోగించి కారణాంకపరచుము

(i) $x^3 - 3x^2 - 10x + 24$ (ii) $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$

(iii) $-7x + 3 + 4x^3$ (iv) $x^3 + x^2 - 14x - 24$

(v) $x^3 - 7x + 6$ (vi) $x^3 - 10x^2 - x + 10$

3.7 గరిష్ఠ సామాన్య భాజకం (GCD) (గ.సా.భా.)

రెండు లేక అంతకంటే ఎక్కువ బహుపద సమాసముల గరిష్ఠ సామాన్య భాజకము (గ.సా.భా) అనునది దాని యొక్క సామాన్య కారణాంకములలో గరిష్ఠ అంతస్తు కల్గిన ఒక బహుపద సమాసము అగును. ఇదియే గరిష్ఠ సామాన్య భాజకము (గ.సా.భా) అనబడును.

రెండు పూర్ణ సంఖ్యల గరిష్ఠ సామాన్య భాజకము కనుగొనుటకు కూడా ఇదే భావనను ఉపయోగించవచ్చును.

ఉదాహరణకు; $14xy^2$ మరియు $42xy$ ను పరిశీలించుము 14 మరియు 42 నకు సామాన్య భాజకములు 2, 7 మరియు 14 అగును వాటి గరిష్ఠ సామాన్య భాజకము 14 అగును. xy^2 మరియు xy ల యొక్క సామాన్య భాజకములు x, y మరియు xy కనుక వాటి గరిష్ఠ సామాన్య భాజకము (గ.సా.భా.) xy అగును

$$14xy^2 = 1 \times 2 \times 7 \times x \times y \times y$$
$$42xy = 1 \times 2 \times 3 \times 7 \times x \times y$$

అందువలన $14xy^2$ మరియు $42xy$ నందు గరిష్ఠ సామాన్య భాజకము $14xy$ అగును.

కారణాంక పద్ధతి ద్వారా గరిష్ఠ సామాన్య భాజకమును ను కనుగొనుట

(i) మొదట ప్రతి సమాసమును కారణాంకములుగా విభజించవలెను.

(ii) కారణాంకములలో గరిష్ఠ సామాన్య ఘాతములు గల కారణాంకముల లబ్ధం (గ.సా.భా.) అగును

(iii) సంఖ్యా గుణకములు కలిగిన సమాసములయిన వాటి గ.సా.భా. ని వేరుగా కనుగొని, ఇచ్చిన సమాసముల యొక్క గ.సా.భా. నకు గుణకములుగా మందు పెట్టుము.

3 Algebra.indd 122 11-03-2023 15:17:27

ఉదాహరణ 3.41 కింది వాటిని కనుగొనుము

(i) $16x^3y^2,\ 24xy^3z$ (ii) (y^3+1) మరియు (y^2-1)

(iii) $2x^2-18$ మరియు x^2-2x-3 (iv) $(a-b)^2,\ (b-c)^3,\ (c-a)^4$

సాధనలు;

(i) $16x^3y^2 = 2\times2\times2\times2\times x^3y^2 = 2^4\times x^3\times y^2 = 2^3\times2\times x^2\times x\times y^2$

$24xy^3z = 2\times2\times2\times3\times x\times y^3\times z = 2^3\times3\times x\times y^3\times z = 2^3\times3\times x\times y\times y^2\times z$

కావున, గ.సా.భా. $= 2^3xy^2$

(ii) $y^3+1 = y^3+1^3 = (y+1)(y^2-y+1)$

$y^2-1 = y^2-1^2 = (y+1)(y-1)$

కావున, గ.సా.భా. $= (y+1)$

(iii) $2x^2-18 = 2(x^2-9) = 2(x^2-3^2) = 2(x+3)(x-3)$

$x^2-2x-3 = x^2-3x+x-3$

$= x(x-3)+1(x-3)$

$= (x-3)(x+1)$

కావున, గ.సా.భా. $= (x-3)$

(iv) $(a-b)^2,\ (b-c)^3,\ (c-a)^4$

1 తప్ప మిగిలిన సామాన్య కారణాంకములు లేవు.

కావున, గ.సా.భా. $= 1$

అభ్యాసము 3.9

1. కింది వాటికి గ.సా.భా. ను కనుగొనుము:

(i) $p^5,\ p^{11},\ p^9$ (ii) $4x^3,\ y^3,\ z^3$

(iii) $9a^2b^2c^3,\ 15a^3b^2c^4$ (iv) $64x^8,\ 240x^6$

(v) $ab^2c^3,\ a^2b^3c,\ a^3bc^2$ (vi) $35x^5y^3z^4,\ 49x^2yz^3,\ 14xy^2z^2$

(vii) $25ab^3c,\ 100a^2bc,\ 125ab$ (viii) $3abc, 5xyz, 7pqr$

2. కింది వాటికి గ.సా.భా. ను కనుగొనుము:

(i) $(2x+5),\ (5x+2)$ (ii) $a^{m+1},\ a^{m+2},\ a^{m+3}$

(iii) $2a^2+a,\ 4a^2-1$ (iv) $3a^2,\ 5b^3,\ 7c^4$

(v) $x^4-1,\ x^2-1$ (vi) $a^3-9ax^2,\ (a-3x)^2$

3 Algebra.indd 123 11-03-2023 15:17:33

3.8 రెండు చలరాశులు గల రేఖీయ సమీకరణములు

రెండు చలరాశులు కలిగిన రేఖీయసమీకరణము $ax + by + c = 0$ ఇక్కడ a, b, c లు వాస్తవ సంఖ్యలు, a మరియు b లు రెండూ శూన్యేతరమగును. (x , y లు రెండూ చలరాశులు, c అనునది స్థిరరాశి.)

ఉదాహరణలు

రెండు చలరాశులు గల రేఖీయ సమీకరణము	రెండు చలరాశులు గల రేఖీయ సమీకరణము కానివి
$2x + y = 4$	$xy + 2x = 5$ (ఎందుకు?)
$-5x + \frac{1}{2} = y$	$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 25$ (ఎందుకు?)
$5x = 35y$	$x(x+1) = y$ (ఎందుకు?)

ఏక ఘాతము గల రెండు చలరాశులను కలిగిన మరియు రెండు చలరాశుల లబ్ధము లేని సమీకరణమును రెండు చలరాశులు గల రేఖీయ సమీకరణం అందురు.(రెండు చలరాశులు గల సమీకరణము ఘాతము 1 అయిన ఆ సమీకరణమును రెండు చలరాశులు గల రేఖీయ సమీకరణం అందురు)

రెండు చలరాశులు గల రేఖీయ సమీకరణమును రేఖాచిత్రము ద్వారా సులభముగా అర్థము చేసుకొనవచ్చును.

ఉదాహరణకు సమీకరణము $2x + y = 4$ అనునది రేఖీయ సమీకరణమగునా? నీవు ఊహించినది సరియే. ఎందుకనగా ఈ సమీకరణపు రేఖాచిత్రం సరళరేఖయగును. దీనిని సరిచూచెదమా?

$2x + y = 4$, రేఖా చిత్రమును గీయుటకు కొన్ని బిందువులను తీసుకొని వాటిని కలుపవలెను. (ఆ బిందువులే సమీకరణము తృప్తిపరచు క్రమయుగ్మములగును).

ఇవ్వబడిన క్రమ యుగ్మములను తీసుకొని $2x + y = 4$, సమీకరణమునకు పట్టికను రూపొందించుము.

$y = 4 - 2x$ గా తీసుకొనుము (ఎందుకు? ఎట్లా?)

$x = -4$ అయిన, $y = 4 - 2(-4) = 4 + 8 = 12$

$x = -2$ అయిన, $y = 4 - 2(-2) = 4 + 4 = 8$

$x = 0$ అయిన, $y = 4 - 2(0) = 4 + 0 = 4$

$x = +1$ అయిన, $y = 4 - 2(+1) = 4 - 2 = 2$

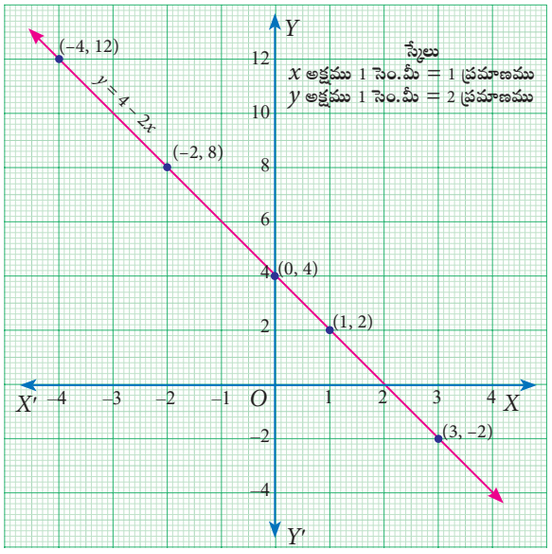
$x = +3$ అయిన, $y = 4 - 2(+3) = 4 - 6 = -2$

3 Algebra.indd 124 11-03-2023 15:17:34

ఈ విలువలను క్రింది విధంగా పట్టికీకరించవచ్చును.

x-విలువ	-4	-2	0	1	3
y-విలువ	12	8	4	2	-2

ఒక రేఖను నిర్మించుటకు, మనకు అనేక బిందువులు అవసరమగునా? ఒక రేఖను నిర్మించుటకు రెండు బిందువులు చాలు. దీనిని సరిచూచుటకు అదనంగా ఒక బిందువు అవసరమగును.



పటం. 3.15

$((-4,12), (-2,8), (0,4), (1,2)$ మరియు $(3,-2)$, బిందువులను రేఖాచిత్రంలో గుర్తించినప్పుడు అవన్నీ ఒకే సరళరేఖపై అమరుటను గమనించవచ్చును.

దీని నుండి $2x + y = 4$ సమీకరణం సరళరేఖను సూచించునని తెలియుచున్నది. (కావున ఇది ఒక రేఖీయ సమీకరణం).

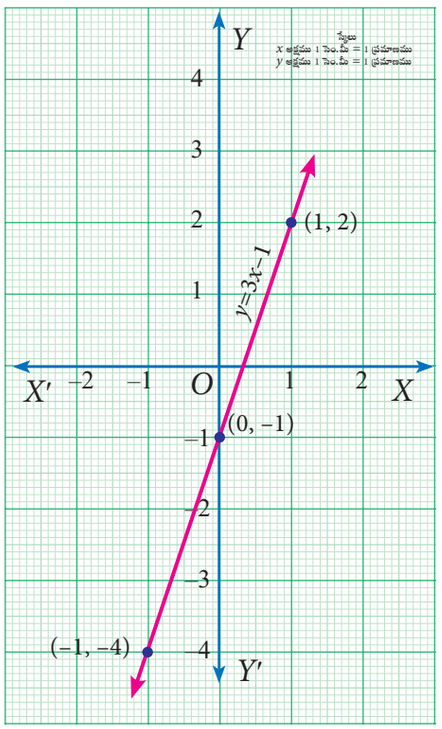
రేఖపై గల అన్ని బిందువులూ ఈ సమీకరణమును తృప్తిపరచుట వలన రేఖపై గల అన్ని బిందువుల క్రమయుగ్మాలు సమీకరణం యొక్క సాధనలగును.

ఉదాహరణ 3.42 క్రింది వాటికి రేఖాచిత్రము గీయుము

(i) $y = 3x - 1$ (ii) $y = \left(\frac{2}{3}\right)x + 3$

సాధన

(i) $y = 3x - 1$ అను రేఖ యొక్క బిందువుల క్రమ యుగ్మాలను కనుగొనుటకు పట్టికను తయారుచేయుము x విలువగా ఏ విలువనైనను తీసుకొనవచ్చును. ఇక్కడ



పటం. 3.16

3 Algebra.indd 125 11-03-2023 15:17:36

మనము x విలువను -1 0 మరియు 1 ను తీసుకొంటాము.

$x=-1$ అయిన, $y=3(-1)-1=-4$

$x=0$ అయిన, $y=3(0)-1=-1$

$x=1$ అయిన, $y=3(1)-1=2$

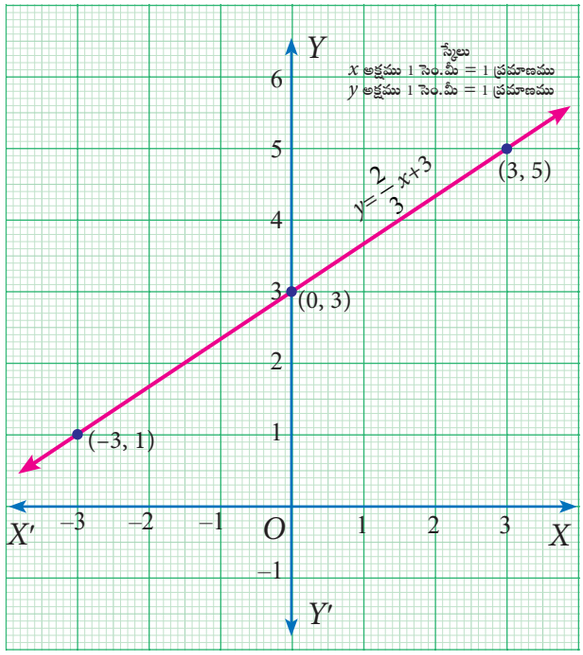
x	-1	0	1
y	-4	-1	2

గుర్తించవలసిన బిందువులు (x,y):

$(-1,-4)$, $(0,-1)$ మరియు $(1,2)$

(ii) $y=\left(\frac{2}{3}\right)x+3$ అను రేఖ యొక్క

బిందువుల క్రమ యుగ్మాలను కనుగొనుటకు పట్టిక తయారు చేయుము.



పటం. 3.17

x విలువలను -3, 0, 3 అని తీసుకొనుము. (ఎందుకు?)

$x=-3$ అయిన, $y=\frac{2}{3}(-3)+3=1$

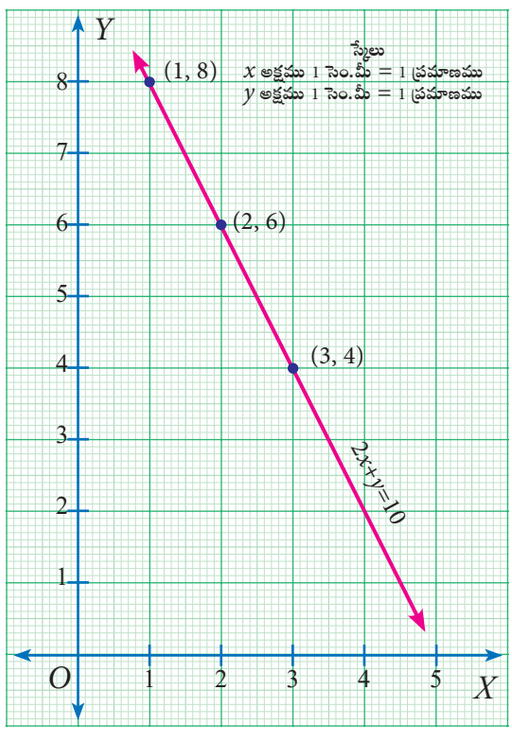
$x=0$ అయిన, $y=\frac{2}{3}(0)+3=3$

$x=3$ అయిన, $y=\frac{2}{3}(3)+3=5$

x	-3	0	3
y	1	3	5

గుర్తించవలసిన బిందువులు(x,y) :

$(-3,1)$, $(0,3)$ మరియు $(3,5)$.



పటం. 3.18

3.8.1 సమకాలిక (ఉమ్మడి) రేఖీయ సమీకరణములు

సమీకరణములను రేఖాచిత్రములలో గుర్తించుటను ముందే తెలుసుకొన్నాము.ఇప్పుడు సమీకరణముల వ్యవస్థ గురించి ప్రత్యేకంగా రెండు సమకాలిక రేఖీయ సమీకరణాలను గూర్చి తెలుసుకొనెదము.సమకాలిక రేఖీయ సమీకరణములు అనగానేమి?

రెండు లేక అంతకన్నా ఎక్కువ రేఖీయ సమీకరణాలు ఒకే విధమైన చలరాశులను కలిగి ఉన్న యెడల వాటిని సమ కాలిక రేఖీయ సమీకరణములని అంటారు.

ఇది ఎందుకు మనకు అవసరమగును? $2x+y=10$ వంటి సమీకరణములకు అనంత సాధనలు కలవు. $(1,8)$, $(2,6)$, $(3,4)$ మరియు ఇంకొన్ని బిందువులు రేఖాచిత్రములో గల రేఖపై అమరు అపరిమితమైన

3 Algebra.indd 126 11-03-2023 15:17:39

సాధనలగును. ఇటువంటి ఒక రేఖాచిత్రమును సాధించుటకు దీనితో పాటు మరొక సమీకరణమును ఉపయోగించినప్పుడు మాత్రమే, ఒకే సమయంలో రెండు సమీకరణాలను సాధించు ఒక క్రమయుగ్మమును సాధనగా పొందవచ్చును. ఈ విధంగా రెండు సమీకరణములను ఒకటిగా కలిపి సాధించునప్పుడు లభించు అర్థవంతమైన పరిస్థితులను ఏర్పరచు సమీకరణములను సమకాలిక రేఖీయ సమీకరణములు అంటారు

సమకాలిక రేఖీయ సమీకరణములను నిజ జీవిత పరిస్థితుల మూలంగా అర్థం చేసుకొనుట.

అనిత రెండు రబ్బరులు మరియు ఒక పెన్సిల్‌ను ₹10 లకు కొనెను అని అనుకొనుము. ఆమెకు ఆయా వస్తువుల ధరలు తెలియదు. ఒక రబ్బరు ధర 'x'అని ఒక పెన్సిల్ ధర 'y' అని అనుకొని, దీనికి సమీకరణమును రూపొందిస్తాము.

అనగా $2x + y = 10$ (1)

ఇప్పుడు అనిత ఒక రబ్బరు మరియు ఒక పెన్సిల్ ధరలను వేర్వేరుగా తెలుసుకొనదలచెను. అందుకొరకు ఆమె x మరియు y.లకు అనేక విలువలను ప్రతిక్షేపించి సమీకరణము (1) కి సాధన కనుగొనుటకు ప్రయత్నించెను. 2 (ఒక రబ్బరు ధర) + ఒక పెన్సిల్ ధర = ₹10

$2(1)+8 = 10$
$2(1.5)+7 = 10$
$2(2)+6 = 10$
$2(2.5)+5 = 10$
$2(3)+4 = 10$
⋮ ⋮

గుర్తించవలసిన బిందువులు :

x	1	1.5	2	2.5	3	...
y	8	7	6	5	4	...

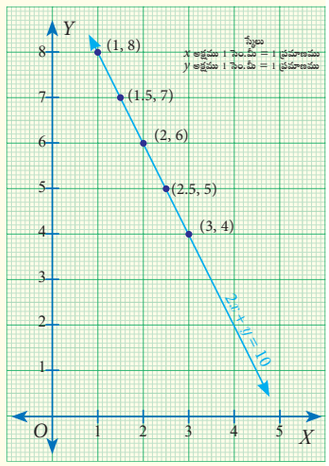
ఆమె అనంతమైన సాధనలను పొందెను. కావున ఆమె రెండవ సమీకరణంను తీసుకొని ధరను కనుగొనుటకు ప్రయత్నించెను.

అనితకు ఇంకా కొన్ని పెన్సిల్‌లు మరియు రబ్బర్‌లు అవసరమగుచున్నది. ఇప్పుడు ఆమె కొనిన 3 రబ్బరులు మరియు నాలుగు పెన్సిల్‌ల కొరకు దుకాణదారుడు మొత్తంగా ₹30 లను తీసుకొనెను. ఇంతకుమునుపు రూపొందించిన విధంగానే మనము మరొక సమీకరణమును రూపొందిస్తాము.

$3x + 4y = 30$ ...(2)

ఇప్పుడు కూడా ఆమె క్రింది విధముగా అనంతమైన సాధనలను పొందును.

3 × ఒక రబ్బరు ధర + 4 × ఒక పెన్సిల్ ధర = 30
$3(2)+4(6) = 30$
$3(4)+4(4.5) = 30$
$3(6)+4(3) = 30$
$3(8)+4(1.5) = 30$



పటం. 3.19

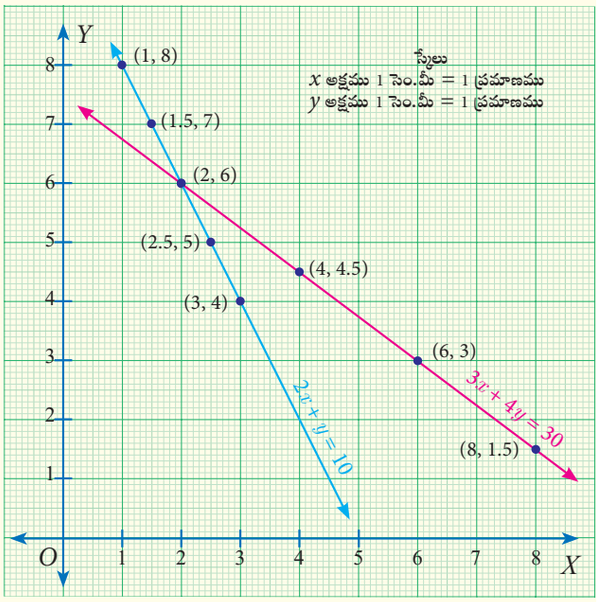
3 Algebra.indd 127 11-03-2023 15:17:39

గుర్తించవలసిన బిందువులు:

x	2	4	6	8	...
y	6	4.5	3	1.5	...

ఆమె దీనిని ఉపాధ్యాయునితో చర్చించునప్పుడు, దీనికి అతడు రెండు సమీకరణములను ఒకటిగా కలిపి సాధించినప్పుడు ఒకే ఒక సాధన లభించునని చెప్పెను.

సమీకరణం (1) మరియు (2) లను సాధించగా ఒక రబ్బరు ధర ₹2 మరియు ఒక పెన్సిల్ ధర ₹6 గా తెలియుచున్నది. దీనిని రేఖాచిత్రంలో



పటము. 3.20

ఈ విధమైన స్థితిలో ఒక అర్థవంతమైన సందర్భమును ఏర్పరచుటకు మన వల్ల రూపొందించు సమీకరణములనే సమకాలిక రేఖీయ సమీకరణములు అంటారు.

కావున ఒకే రకమైన చలరాశులు గల రెండు లేక అంతకన్నా ఎక్కువ రేఖీయ సమీకరణములను ఒకటిగా కలిపిన ఏకకాలిక రేఖీయ సమీకరణములు లేదా రేఖీయ సమీకరణముల వ్యవస్థ లేదా రేఖీయ సమీకరణముల జత అని అంటారు.

ఉదాహరణ 3.43 $x - 2y = 7$ మరియు $2x + 3y = 7$ సమకాలిక రేఖీయ సమీకరణములకు $(5, -1)$ అనునది సాధనయగునా అని సరిచూడుము

సాధన

ఇవ్వబడినది $x - 2y = 7$ ...(1)

$2x + 3y = 7$ ...(2)

$x = 5,\ y = -1$ అయిన మనకు లభించునది.

(1) నుండి $x - 2y = 5 - 2(-1) = 5 + 2 = 7$ (RHS)

(2) నుండి $2x + 3y = 2(5) + 3(-1) = 10 - 3 = 7$ (RHS)

కావున $x = 5,\ y = -1$ సమీకరణం (1) మరియు (2) లను ఒకే సమయములో తృప్తి పరచును. కావున $(5,-1)$ ఇవ్వబడిన సమీకరణమునకు సాధనలగును.

3 Algebra.indd 128 11-03-2023 15:17:40

పురోగమన తనిఖి

$2x - 5y - 2 = 0$ మరియు $x + y - 6 = 0$ సమకాలిక రేఖీయ సమీకరణములకు $(3,3)$ అనునది ఒక సాధన అగునా? అని రేఖాచిత్రము మూలముగా సరిచూడుము.

3.8.2 సమకాలిక రేఖీయ సమీకరణములను సాధించు పద్ధతులు

సమకాలిక రేఖీయ సమీకరణములను సాధించుటకు అనేక పద్ధతులు కలవు. వాటిని జ్యామితీయ పద్ధతి మరియు బీజీయ పద్ధతిగా వర్గీకరించవచ్చును.

జ్యామితీయ పద్ధతులు	బీజీయ పద్ధతులు
1. రేఖా చిత్ర పద్ధతి	1. ప్రతిక్షేపించు పద్ధతి 2. తొలగించు పద్ధతి 3. అడ్డగుణకార పద్ధతి

రేఖాచిత్రము ద్వారా సాధించుట

రెండు చలరాశులు గల ఏకఘాత రేఖీయ సమీకరణమును ఏ విధంగా రేఖా చిత్రమును గీచి వివరించవచ్చునని ముందే తెలుసుకొన్నాము. ఇక్కడ మనము రెండు చలరాశులు గల రెండు రేఖీయ సమీకరణముల రేఖా చిత్రమును గీచి వాటి ద్వారా సమకాలిక రేఖీయ సమీకరణాల సాధనలను కనుగొనవచ్చని తెలుసుకొనబోవుచున్నాము.

ఉదాహరణ 3.44 క్రింది రేఖీయ సమీకరణముల వ్యవస్థకు రేఖాచిత్రము ద్వారా సాధన కనుగొనుము: $x + y = 5; 2x - y = 4$.

సాధన

ఇవ్వబడినది $x + y = 5$ ...(1)

$2x - y = 4$ ...(2)

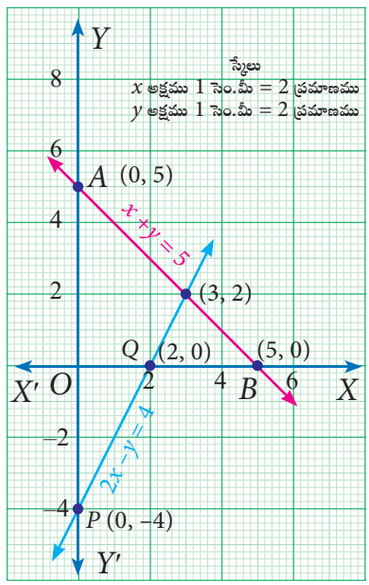
సమీకరణము (1)కి రేఖా చిత్రామును గీయుట సులభము. మొదటి రేఖ యొక్క x మరియు y అంతర ఖండములను కనుగొనుట ద్వారా ఆ రేఖపై ఉన్న రెండు బిందువులను కనుగొనవచ్చును.

$x = 0$ అయిన, (1) నుండి $y = 5$ లభించును.

కావున $(0,5)$ అనునది రేఖ పై గల ఒక బిందువగును.

$y = 0$ అయిన, (1) నుండి $x = 5$ లభించును.

కావున $B(5,0)$ అనునది రేఖపై గల ఇంకొక బిందువగును



పటం. 3.21

3 Algebra.indd 129 11-03-2023 15:17:40

రేఖాచిత్రములో A మరియు B అను రెండు బిందువులను గుర్తించి, వాటిని కలిపి రేఖ (1) ని గీయుము.

ఈ పద్ధతిని ఉపయోగించి (2) కు రేఖా చిత్రమును గీయుము

$x = 0$, (2) నుండి $y = -4$ లభించును.

కావున P(0,–4) అనునది రేఖపై గల ఒక బిందువు.

y= 0 అయిన, (2) నుండి $x = 2$ లభించును.

కావున $Q(2,0)$ అనునది ఆ రేఖపై గల మరొక్క బిందువగును.

రేఖా చిత్రములో P మరియు Q అను రెండు బిందువులను గుర్తించి వాటిని కలిపి రేఖ (2)ను గీయుము.

సూచన

లభించిన సాధన రెండు సమీకరణములను తృప్తి పరచునా అని సరిచూచుట మంచిది

ఇక్కడ రెండు రేఖలు ఒకదానికొకటి ఖండించుకొను బిందువు (3,2) అనునది సమీకరణములు (1) మరియు (2) ల సాధనలగును. రెండురేఖలకు ఒకే ఒక బిందువు సాధానగా ఉన్నది. కావున సాధన $x = 3$ మరియు $y = 2$

ఉదాహరణ 3.45 క్రింది సమకాలిక రేఖీయసమీకరణములకు రేఖాచిత్రము ద్వారా సాధనను కనుగొనుము: $3x + 2y = 6$; $6x + 4y = 8$

సాధన

ఒక్కొక్క రేఖకు పట్టికను తయారు చేసి క్రమయుగ్మాలను గుర్తించుము.

$3x + 2y = 6$ రేఖా చిత్రము

x	–2	0	2
y	6	3	0

గుర్తించవలసిన బిందువులు :

(–2,6), (0,3) మరియు (2,0)

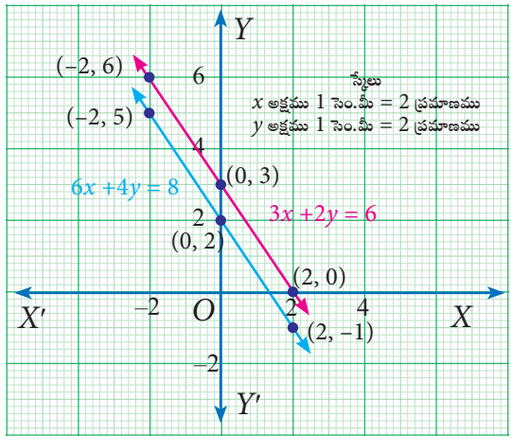
$6x + 4y = 8$ రేఖా చిత్రము

x	–2	0	2
y	5	2	–1

గుర్తించవలసిన బిందువులు:

(–2,5), (0,2) మరియు (2,–1)

రెండు సమీకరణములకు గీచిన రేఖాచిత్రములు ఒకదానికొకటి సమాంతరంగా నుండి ఖండించుకోకుండా ఉండుటను చూడవచ్చును. దీని ద్వారా రెండు సమీకరణములకు సామాన్య ఖండన బిందువు లేదు అని తెలియుచున్నది. కావున ఈ సమీకరణములకు సాధన లేదు.



పటం. 3.22

3 Algebra.indd 130 11-03-2023 15:17:41

ఉదాహరణ 3.46 క్రింది సమకాలిక రేఖీయ సమీకరణమునకు రేఖాచిత్రము ద్వారా సమాధానమును కనుగొనుము: $y = 2x + 1; -4x + 2y = 2$.

సాధన

ఒక్కొక్క రేఖకు పట్టికను తయారు చేసి, క్రమయుగ్మాలను గుర్తించుము.

$y = 2x + 1$ రేఖా చిత్రము

x	-2	-1	0	1	2
$2x$	-4	-2	0	2	4
1	1	1	1	1	1
$y = 2x+1$	-3	-1	1	3	5

గుర్తించవలసిన బిందువులు :
$(-2, -3), (-1, -1), (0,1), (1,3), (2, 5)$

$-4x + 2y = 2$ రేఖా చిత్రము

$2y = 4x + 2$

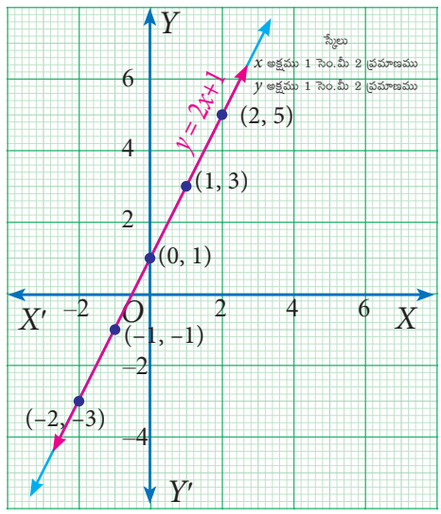
$y = 2x + 1$

x	-2	-1	0	1	2
$2x$	-4	-2	0	2	4
1	1	1	1	1	1
$y = 2x+1$	-3	-1	1	3	5

గుర్తించవలసిన బిందువులు:
$(-2, -3), (-1, -1), (0, 1), (1, 3), (2, 5)$

ఇక్కడ రెండు సమీకరణములు ఒకే విధమైనవి. కాని రెండూ వేర్వేరు రూపంలో అమరియున్నది. సమీకరణములు ఒకే విధమైనవి, కావున సాధనలు ఒకే విధమైనవి.

ఒక రేఖపై అమరిన బిందువులన్నీ ఇంకొక రేఖపైనా అమరియున్నది. కావున ఇక్కడ రేఖపై అమరియున్న అన్ని సంయుగ్మపు బిందువులు అనంతమైన సాధనలగును.



పటం. 3.23

ఉదాహరణ 3.47 ఒక దీర్ఘ చతురస్రపు చుట్టుకొలత 36 మీ మరియు దాని పొడవు వెడల్పు యొక్క మూడు రెట్లు కన్నా 2 మీ ఎక్కువ. రేఖా చిత్ర పద్ధతిని ఉపయోగించి, దీర్ఘచతురస్రపు భుజముల కొలతలను కనుగొనుము.

సాధన

ఇవ్వబడిన సమాచారమునకు సమీకరణములను రూపొందించుము.

దీర్ఘచతురస్రపు పొడవు మరియు వెడల్పులను క్రమముగా l మరియు b అనుకొనుము.

మొదటి నియమమునకు సమీకరణము రూపొందించుట

దీర్ఘ చతురస్రము చుట్టుకొలత $= 36$

$$2(l + b) = 36$$

$$l + b = \frac{36}{2}$$

3 Algebra.indd 131 11-03-2023 15:17:42

$$l = 18 - b \qquad \ldots (1)$$

b	2	4	5	8
18	18	18	18	18
$-b$	-2	-4	-5	-8
$l = 18-b$	16	14	13	10

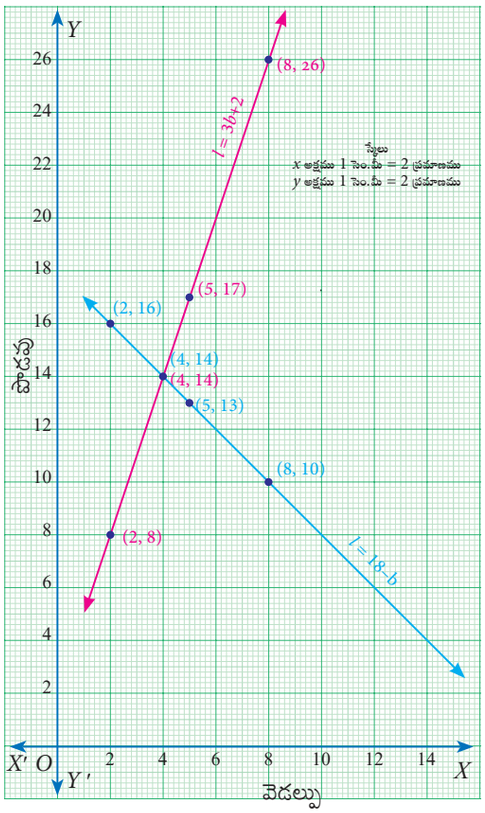
బిందువులు: (2,16), (4,14), (5,13), (8,10)

రెండవ నియమమునకు సమీకరణమును రూపొందించుట. రెండవ నియమం ప్రకారం పొడవు, వెడల్పు యొక్క మూడు రెట్లు కన్నా 2మీ ఎక్కువ. కావున $l = 3b + 2$ ... (2)

సమీకరణము (2)కు పట్టికను రూపొందించుము.

b	2	4	5	8
$3b$	6	12	15	24
2	2	2	2	2
$l = 3b + 2$	8	14	17	26

బిందువులు: (2,8), (4,14), (5,17), (8,26)



పటం. 3.24

రెండు రేఖలకు సామాన్యముగా ఒక బిందువే సాధనయగును. ఇక్కడ (4, 14) అనునది సాధన అవుతుంది. కావున సాధన $b = 4$, $l = 14$.

సరిచూచుట :

$2(l+b) = 36$ ...(1)	$l = 3b + 2$ ...(2)
$2(14+4) = 36$	$14 = 3(4) + 2$
$2 \times 18 = 36$	$14 = 12 + 2$
$36 = 36$ సత్యము	$14 = 14$ సత్యము

అభ్యాసము 3.10

1. కింద ఇవ్వబడిన రేఖా చిత్రములను గీయుము.

(i) $y = 2x$ (ii) $y = 4x - 1$ (iii) $y = \left(\frac{3}{2}\right)x + 3$ (iv) $3x + 2y = 14$

2. రేఖా చిత్ర పద్ధతిలో సాధించుము.

(i) $x + y = 7;\ x - y = 3$ (ii) $3x + 2y = 4;\ 9x + 6y - 12 = 0$

(iii) $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1;\ \frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 2$ (iv) $x - y = 0;\ y + 3 = 0$

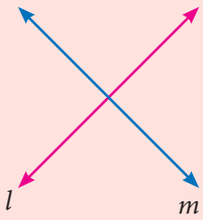
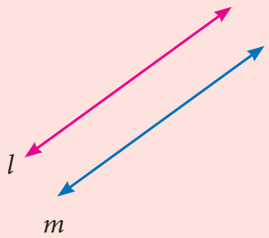
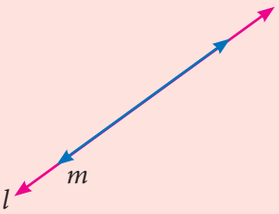
(v) $y = 2x + 1;\ y + 3x - 6 = 0$ (vi) $x = -3;\ y = 3$

3 Algebra.indd 132 11-03-2023 15:17:47

3. రెండు కారులకు మధ్య గల దూరం 100 మైళ్ళు. రెండు కార్లు ఒకదానికొకటి ఎదురు దిశలో ప్రయాణించిన ఒక గంటలో కలుసుకొనును. రెండూ ఒకే దిశలో ప్రయాణించిన 2 గంటలలో కలుసుకొనును. అయినా రెండు కార్ల వేగములను రేఖా చిత్ర పద్ధతిలో కనుగొనుము.

కొన్ని ప్రత్యేక ధర్మములు

రేఖాచిత్రముల ద్వారా సమకాలిక రేఖీయ సమీకరణములకు ఎన్ని సాధనలు ఉండునని ఇవ్వబడిన పటముల ద్వారా మనం తెలుసుకొనవచ్చును.

ఖండించుకొను రేఖలు	సమాంతర రేఖలు	ఏకీభవ రేఖలు (ఒకదానిపై ఒకటి)
		
ఏకైక సాధన	సాధన లేదు	అనంతమైన సాధనలు

- రేఖీయ సమీకరణముల వ్యవస్థ ఏకైక సాధనను కలిగియున్న యెడల (రేఖాచిత్రంలో రేఖలు ఒక చోట మాత్రమే ఖండించుకొనును) ఆ వ్యవస్థను నిశ్చిత వ్యవస్థ (consistent system) అందురు.
- రేఖీయ సమీకరణముల వ్యవస్థకు సాధన లేని యెడల (రేఖాచిత్రంలో రేఖలు ఎక్కడా ఖండించుకొనవు) ఆ వ్యవస్థను అనిశ్చిత వ్యవస్థ (inconsistent system) అందురు.
- రేఖీయ సమీకరణముల వ్యవస్థకు అనంతమైన సాధనలు ఉన్నట్లయితే అవి రెండూ ఒకే రేఖలు అగును. (రేఖాచిత్రంలో రేఖలు, అన్ని బిందువుల వద్ద సమానంగా ఉంటుంది.) . ఈ వ్యవస్థ కూడా నిశ్చిత వ్యవస్థ (consistent) అగును అసమీకరణాలను పరస్పరాధారిత సమీకరణాలు అంటారు.

ప్రతిక్షేపించు పద్ధతి ద్వారా సాధన కనుగొనుట

ఈ పద్ధతి యందు ఒక చలరాశి విలువను మరొక చలరాశిలో ప్రతి క్షేపించి, రెండు చలరాశులు కలిగిన సమీకరణమును ఒక చలరాశి గల సమీకరణముగా మార్చి సాధనను (ఒక జత రేఖీయ సమీకరణములను సాధించుటకు బదులు) కనుగొనవచ్చును. ఒక చలరాశి విలువను మరొక చలరాశిలో ప్రతిక్షేపించుటవలన దీనిని మనము ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి అంటారు.

దీని విధానములు క్రింద ఇవ్వబడినవి.

మెట్టు 1: ఇవ్వబడిన రెండు సమీకరణములలో ఏదైనా ఒకదాని నుండి ఒక చలరాశి విలువను మరొక చలరాశి విలువపరంగా కనుగొనుము.

మెట్టు 2: మెట్టు 1లో పొందిన చలరాశి విలువను మరొక సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించి సాధించిన ఒక చలరాశి విలువను పొందవచ్చును.

మెట్టు 3: మెట్టు 2 లో పొందిన చలరాశి విలువను మెట్టు 1 లో ప్రతిక్షేపించిన మరొక చలరాశి విలువను పొందవచ్చును.

3 Algebra.indd 133 11-03-2023 15:17:48

ఉదాహరణ 3.48 రేఖీయ సమీకరణములను ప్రతిక్షేపించు పద్ధతి ద్వారా సాధించుము. $x+3y=16$ మరియు $2x-y=4$

సాధన

ఇవ్వబడినది $x+3y=16$ ... (1)

$2x-y=4$ ... (2)

మెట్టు 1	మెట్టు 2	మెట్టు 3	సాధన
సమీకరణం 2 నుండి $2x-y=4$ $-y=4-2x$ $y=2x-4$ ...(3)	(3) ను (1) లో ప్రతిక్షేపించగా $x+3y=16$ $x+3(2x-4)=16$ $x+6x-12=16$ $7x=28$ $x=4$	$x=4$ ను (3) లో ప్రతిక్షేపించగా $y=2x-4$ $y=2(4)-4$ $y=4$	$x=4$ మరియు $y=4$

ఉదాహరణ 3.49 ఒక రెండంకెల సంఖ్యలో అంకెల మొత్తం 5. ఆ సంఖ్యలో అంకెల స్థానములను మార్చినప్పుడు లభించు క్రొత్త సంఖ్య, ఇవ్వబడిన సంఖ్య కన్నా 27 తక్కువ అయిన ఆ సంఖ్యను కనుగొనుము.

సాధన

పదుల స్థానంలో గల సంఖ్య x అని, ఒకట్ల స్థానంలో గల సంఖ్య y అని అనుకొనుము.

ఇవ్వబడినది $x+y=5$ ..... (1)

	పదుల స్థానము	ఒకట్ల స్థానము	విలువ
ఇవ్వబడిన సంఖ్య	x	y	$10x+y$
క్రొత్త సంఖ్య (స్థానములను మార్చిన తర్వాత)	y	x	$10y+x$

ఇవ్వబడిన సంఖ్య – క్రొత్త సంఖ్య $=27$

$$(10x+y)-(10y+x)=27$$

$$10x-x+y-10y=27$$

$$9x-9y=27$$

$\Rightarrow$ $x-y=3$ ... (2)

$x+y=5$ .... (1) నుండి $y=5-x$ ... (3)

(3) ను (2) లో ప్రతిక్షేపించగా $x-(5-x)=3$

$$x-5+x=3$$

$$2x=8$$

సరిచూచుట

స్థానముల మొత్తము = 5

$x+y=5$

$4+1=5$

$5=5$ సత్యం

ఇవ్వబడిన సంఖ్య – క్రొత్త సంఖ్య = 27

$41-14=27$

$27=27$ సత్యం

3 Algebra.indd 134 11-03-2023 15:17:53

$$x = 4$$

$x = 4$ ను (3) లో ప్రతిక్షేపించగా $y = 5 - x = 5 - 4$

$$y = 1$$

కావున $10x + y = 10 \times 4 + 1 = 40 + 1 = 41$.

కావున ఇవ్వబడిన రెండంకెల సంఖ్య = 41.



అభ్యాసము 3.11

1. ప్రతిక్షేపన పద్ధతిలో సాధించుము.

   (i) $2x - 3y = 7;\ 5x + y = 9$ (ii) $1.5x + 0.1y = 6.2;\ 3x - 0.4y = 11.2$

   (iii) $10\%\ of\ x + 20\%\ of\ y = 24;\ 3x - y = 20$ (iv) $\sqrt{2}\,x - \sqrt{3}\,y = 1;\ \sqrt{3}\,x - \sqrt{8}\,y = 0$

2. రాము వయస్సు అతని ఇద్దరు కుమారుల వయస్సుల మొత్తమునకు మూడు రెట్లు ఉంటుంది. 5 సంవత్సరముల తరువాత అతని వయస్సు అతని కుమారుల వయస్సుల మొత్తమునకు రెండు రెట్లు ఉంటుంది. అయిన రాము ప్రస్తుత వయస్సు ఎంత?

3. 100 మరియు 1000 కి మధ్య గల ఒక మూడంకెల సంఖ్యలో మధ్య స్థానము 0 మరియు మిగిలిన రెండు స్థానముల మొత్తం 13 అవుతుంది. స్థానములను మార్చినప్పుడు లభించు క్రొత్త సంఖ్య, ఆ సంఖ్య కన్నా 495 ఎక్కువ అయినా ఆ సంఖ్యను కనుగొనుము.

తొలగించు పద్ధతి ద్వారా సాధించుట (Solving by Elimination Method)

ఇది ఒక జత సమీకరణములను సాధించు మరొక బీజీయ పద్ధతి అగును. ఈ పద్ధతి ప్రతిక్షేపించు పద్ధతి కన్నా సౌకర్యవంతమైనది. ఇక్కడ ఇవ్వబడిన, ఒక జత రేఖీయ సమీకరణముల యందు గల రెండుచలరాశులలో ఏదైనా ఒకదానిని తొలగించడం వలన లభించు ఒక చలరాశి గల రేఖీయ సమీకరణమునకు సాధన కనుగొను పద్ధతి అగును.

ఈ పద్ధతి యందు ఉపయోగించు వివిధ సోపానములు క్రింద ఇవ్వబడినవి.

మెట్టు 1: రెండు సమీకరణములలో గల ఏదైనా ఒక చలరాశి గుణకములను సమానపరచుట కొరకు స్థిర సంఖ్యతో(సంఖ్యలతో) ఒక సమీకరణమును లేదా రెండు సమీకరణములను గుణించవలెను.

మెట్టు 2: మెట్టు 1లో పొందిన సమీకరణములను కూడుట లేదా తీసివేత ద్వారా గుణకములను సమానముగా గల చలరాశిని తొలగించవలెను.

మెట్టు 3: మెట్టు 2 ద్వారా పొందిన ఒక చలరాశి గల సమీకరణమును సాధించుట ద్వారా తెలియని చలరాశి విలువను కనుగొనవచ్చును.

మెట్టి 4: మెట్టు 3లో పొందిన ఒక చలరాశి విలువను ఇవ్వబడిన సమీకరణములలో ఏదైనా ఒకదానిలో ప్రతిక్షేపించుట ద్వారా మరొక చలరాశి విలువను కనుగొనవచ్చును.

3 Algebra.indd 135 11-03-2023 15:17:56

ఉదాహరణ 3.50

$4a+3b=65$ మరియు $a+2b=35$ లను తొలగించు పద్ధతి ద్వారా సాధించుము.

సాధన

ఇవ్వబడినది, $4a+3b=65$ .....(1)

$a+2b=35$ .....(2)

(2)ను 4తో గుణించగా $4a + 8b = 140$

సమీకరణం (1)ని తీసివేయగా $4a + 3b = 65$

$(-) \quad (-) \quad (-)$

$5b = 75$ దీని నుండి $b=15$

$b=15$ ను (2) లో ప్రతిక్షేపించగా

$a+2(15)=35$ దీని నుండి $a=5$

కావున సాధన $a=5,\ b=15$.

సరిచూచుట

$4a+3b = 65$ ...(1)

$4(5)+3(15) = 65$

$20 + 45 = 65$

$65 = 65$ సత్యము

$a + 2b = 35$ ...(2)

$5 + 2(15) = 35$

$5+30 = 35$

$35 = 35$ సత్యము

ఉదాహరణ 3.51

$8x-3y=5xy$, మరియు $6x-5y=-2xy$ లను తొలగించు పద్ధతిని ఉపయోగించి సాధనను కనుగొనుము.

సాధన

ఇవ్వబడిన సమీకరణములు $8x-3y=5xy$ ...(1)

$6x-5y=-2xy$ ...(2)

ఇవ్వబడిన వ్యవస్థలో xy అను పదము ఉన్నందువలన ఇది ఒక రేఖీయ సమీకరణ వ్యవస్థ కాదు. ఇంకా $x=0$ అయిన $y=0$ అదేవిధంగా $y=0$ అయిన $x=0$ అగునని గమనింపుము. కావున $(0,0)$ అనునది సమీకరణం. యొక్క ఒక సాధన. ఇంకా $x \uparrow 0$ మరియు $y \uparrow 0$. అయినప్పుడు మరొక సాధన ఉండవచ్చును.

$x \uparrow 0,\ \ y \uparrow 0$. అనుకొనుము.

ప్రతి సమీకరణమును రెండు వైపులా $x\ y$చే భాగించగా

(1)నుండి $\frac{8x}{xy}-\frac{3y}{xy}=\frac{5xy}{xy}$ మనం పొందినది $\frac{8}{y}-\frac{3}{x}=5$ ...(3)

(2) నుండి $\frac{6x}{xy}-\frac{5y}{xy}=\frac{-2xy}{xy}$ మనం పొందినది $\frac{6}{y}-\frac{5}{x}=-2$ ...(4)

$a=\frac{1}{x},\ b=\frac{1}{y}$. అనుకొనుము.

(3) మరియు (4) నుండి $8b-3a=5$ ...(5)

$6b-5a=-2$ ...(6)

ఇది a మరియు b లతో ఏర్పడిన రేఖీయ సమీకరణములు

a ను తొలగించుటకు $(5)\times 5 \Rightarrow$ $40b-15a=25$ .....(7)

3 Algebra.indd 136 11-03-2023 15:18:02

$$(6)\times 3 \Rightarrow \quad 18b-15a=-6 \quad .....(8)$$

మూడు ఉదాహరణముల మాదిరిగా దీనిని సాధించగా $\left(\frac{11}{23},\frac{22}{31}\right)$ అను సాధనను పొందవచ్చును.

కావున ఈ వ్యవస్థకు రెండు సాధనలు $\left(\frac{11}{23},\frac{22}{31}\right)$ మరియు $(0,0)$ గలవు..



అభ్యాసము 3.12

1. తొలగించు పద్ధతి ద్వారా సాధింపుము.

   (i) $2x-y=3;\quad 3x+y=7$ (ii) $x-y=5;\quad 3x+2y=25$

   (iii) $\frac{x}{10}+\frac{y}{5}=14;\quad \frac{x}{8}+\frac{y}{6}=15$ (iv) $3(2x+y)=7xy;\quad 3(x+3y)=11xy$

   (v) $\frac{4}{x}+5y=7;\ \frac{3}{x}+4y=5$ (vi) $13x+11y=70;\ 11x+13y=74$

2. A మరియు B ల నెల ఆదాయముల నిష్పత్తి 3:4 మరియు వారి ఖర్చుల నిష్పత్తి 5:7. ఒక్కొక్కరు నెలకు ₹ 5,000 పొదుపు చేసిన వారి నెల ఆదాయములను కనుగొనుము.

3. 5 సంవత్సరముల ముందు తండ్రి వయస్సు అతని కుమారుని వయస్సుకు 7 రెట్లగును. 5 సంవత్సరముల తరువాత తండ్రి వయస్సు కుమారుని వయస్సుకు 4 రెట్లుగా ఉండిన వారి ప్రస్తుత వయస్సు ఎంత?

అడ్డ గుణాకార పద్ధతి ద్వారా సాధించుట (Solving by Cross Multiplication Method)

ప్రతిక్షేపించుట మరియు తొలగించుట పద్ధతులు వివిధ గణిత పరిక్రియలను కలిగియున్నది. కానీ అడ్డగుణాకర పద్ధతి యందు గుణకములను ఉపయోగించుకొని సాధనను చాలా సులభముగా కనుగొనవచ్చును. ఈ పద్ధతిలో సంఖ్యలకు మధ్య అడ్డగీతలను గీచి గుణించుట వలన ఈ పద్ధతిని అడ్డగుణకార పద్ధతి అని పిలిచెదరు. ఈ పద్ధతి గూర్చి క్రింది విధంగా చర్చించెదము.

మనకు $\frac{a_1}{a_2}\uparrow\frac{b_1}{b_2}$ గా గల ఒక జత రేఖీయ సమకాలిక సమీకరణములు క్రింది విధముగా ఇవ్వబడినది.

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \qquad ...(1)$$

$$a_2x+b_2y+c_2=0 \qquad ...(2)$$

మనం, దీనిని క్రింది విధంగా సాధించవచ్చును.

$(1)\times b_2-(2)\times b_1$ నుండి $b_2(a_1x+b_1y+c_1)-b_1(a_2x+b_2y+c_2)=0$

$$\Rightarrow \quad x(a_1b_2-a_2b_1)=(b_1c_2-b_2c_1)$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{(b_1c_2-b_2c_1)}{(a_1b_2-a_2b_1)}$$

$(1)\times a_2-(2)\times a_1$ నుండి $y=\frac{(c_1a_2-c_2a_1)}{(a_1b_2-a_2b_1)}$ ను పొందవచ్చును.

3 Algebra.indd 137 11-03-2023 15:18:08

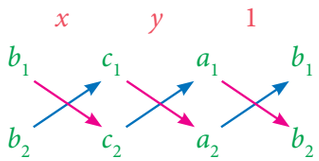
కావున వ్యవస్థ యొక్క సాధన

$$x = \frac{(b_1c_2 - b_2c_1)}{(a_1b_2 - a_2b_1)}, \quad y = \frac{(c_1a_2 - c_2a_1)}{(a_1b_2 - a_2b_1)}$$

దీనిని క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చును.

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

దీనిని క్రింది విధంగా గుర్తించుకొనవచ్చును.



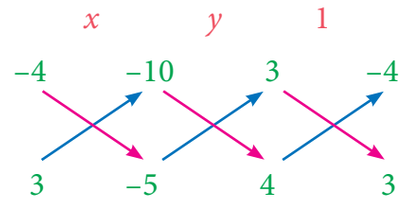
ఉదాహరణ 3.52 $3x - 4y = 10$ మరియు $4x + 3y = 5$ లను అడ్డగుణకార పద్ధతిని ఉపయోగించి సాధించుము.

సాధన ఇవ్వబడిన సమీకరణముల వ్యవస్థ

$3x - 4y = 10 \quad \Rightarrow 3x - 4y - 10 = 0$ .....(1)

$4x + 3y = 5 \quad \Rightarrow 4x + 3y - 5 = 0$ .....(2)

అడ్డ గుణకార పద్ధతి కొరకు గుణకములను క్రింది విధముగా వ్రాయుము.



$$\frac{x}{(-4)(-5) - (3)(-10)} = \frac{y}{(-10)(4) - (-5)(3)} = \frac{1}{(3)(3) - (4)(-4)}$$

$$\frac{x}{(20) - (-30)} = \frac{y}{(-40) - (-15)} = \frac{1}{(9) - (-16)}$$

$$\frac{x}{20 + 30} = \frac{y}{-40 + 15} = \frac{1}{9 + 16}$$

$$\frac{x}{50} = \frac{y}{-25} = \frac{1}{25}$$

కావున $x = \frac{50}{25}; \quad y = \frac{-25}{25} \qquad x = 2; \quad y = -1$

కావున సాధన $x = 2, y = -1$.

సరిచూచుట :

$3x - 4y = 10$ ...(1)

$3(2) - 4(-1) = 10$

$6 + 4 = 10$

$10 = 10$ సత్యము

$4x + 3y = 5$ ...(2)

$4(2) + 3(-1) = 5$

$8 - 3 = 5$

$5 = 5$ సత్యము

3 Algebra.indd 138 11-03-2023 15:18:14

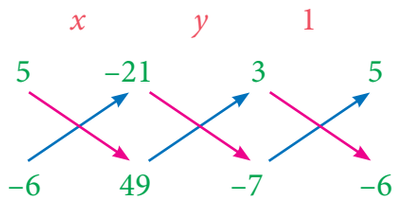
ఉదాహరణ 3.53

$3x+5y=21$; మరియు $-7x-6y=-49$ అడ్డగుణకార పద్ధతి ద్వారా సాధించుము.

సాధన

ఇవ్వబడిన సమీకరణముల వ్యవస్థ $3x+5y-21=0$; $-7x-6y+49=0$

గుణకములను అడ్డ గుణకార పద్ధతి కొరకు వ్రాసిన మనకు లభించునది.,



$$\Rightarrow \frac{x}{(5)(49)-(-6)(-21)} = \frac{y}{(-21)(-7)-(49)(3)} = \frac{1}{(3)(-6)-(-7)(5)}$$

$$\frac{x}{119} = \frac{y}{0} = \frac{1}{17}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{119} = \frac{1}{17}, \quad \frac{y}{0} = \frac{1}{17}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{119}{17}, \quad y = \frac{0}{17}$$

$$\Rightarrow \quad x = 7, \quad y = 0$$

సరిచూచుట :

$3x+5y = 21$ ...(1)

$3(7)+5(0) = 21$

$21+0 = 21$

$21 = 21$ సత్యము

$-7x-6y = -49$ ...(2)

$-7(7)-6(0) = -49$

$-49 = -49$

$-49 = -49$ సత్యము

సూచన

ఇక్కడ $\frac{y}{0} = \frac{1}{17}$ అనునది $y = \frac{0}{17}$ అగును. కావున ఇక్కడ $\frac{y}{0}$ అనునది ఒక సంకేతము మాత్రమే, దీనిని 0చే భాగింపబడును అని భావించకూడదు. సున్నతో ఒక సంఖ్యను భాగించుటను నిర్వచింపలేము అనునది ఎల్లప్పుడు సత్యమే.

అభ్యాసము 3.13

1. అడ్డ గుణకార పద్ధతి ద్వారా సాధించుము.
   (i) $8x-3y=12$; $5x=2y+7$ (ii) $6x+7y-11=0$; $5x+2y=13$
   (iii) $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=5$; $\frac{3}{x}-\frac{1}{y}+9=0$
2. అక్షయ తన పర్సునందు 2రూపాయల నాణెములను 5 రూపాయల నాణెములను కలిగి యుండెను. ఆమె మొత్తముగా ₹220 విలువ కలిగిన 80 నాణెములను కలిగియుండిన ఒక్కొక్క దానిలో ఎన్ని నాణెములు కలవు.
3. రెండు వేర్వేరు గొట్టముల ద్వారా ఒక ఈతకొలనును పూర్తిగా నీటితో నింపుటకు 24 గంటల సమయం పట్టును అధిక వ్యాసము గల గొట్టమును 8 గంటలు మరియు తక్కువ వ్యాసము గల గొట్టమును

3 Algebra.indd 139 11-03-2023 15:18:19

18 గంటలు ఉపయోగించి నీటితో నింపిన ఈతకొలనులో అర్ధభాగము నీరు మాత్రమే నింపబడెను. అయితే వేర్వేరుగా ఆ గొట్టములతో ఈత కొలనును పూర్తిగా నింపుటకు ఎంత కాలమగును?

3.8.3 రెండు చలరాశులు గల రేఖీయ సమీకరణముల నిశ్చిత మరియు అనిశ్చిత ధర్మము

రెండు చలరాశులు గల ఒక జత రేఖీయ సమీకరణములను తీసుకొనుము.

$a_1x+b_1y+c_1=0$ ...(1)

$a_2x+b_2y+c_2=0$ ...(2) ఇక్కడ a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 మరియు c_2 లు వాస్తవ సంఖ్యలు.

రేఖీయ సమీకరణముల వ్యవస్థ యొక్క సాధనలు:

1. $\frac{a_1}{a_2} \uparrow \frac{b_1}{b_2}$ అయిన ఏకైక సాధనను కలిగియుండును. (నిశ్చితమైనవి)
2. $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ అయిన అనంతమైన సాధనలు కలిగియుండును. (నిశ్చితమైనవి)
3. $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ అయిన సాధనలు లేవు. (అనిశ్చితమైనవి)

ఉదాహరణ 3.54 క్రింది సమీకరణములు నిశ్చితమైనవా లేక అనిశ్చితమైనవా అని పరిశీలింపుము. అవి నిశ్చితమైనచో ఎన్ని సాధనలు కలిగియుండును.

(i) $2x-4y=7$ $\quad x-3y=-2$ (ii) $4x+y=3$ $\quad 8x+2y=6$ (iii) $4x+7=2y$ $\quad 2x+9=y$

సాధన:

వరుస సంఖ్య	సమీకరణముల జత	$\frac{a_1}{a_2}$	$\frac{b_1}{b_2}$	$\frac{c_1}{c_2}$	నిష్పత్తులను పోల్చుట	రేఖా చిత్ర సంకేతము	రేఖలు ఖండించుకొనును
(i)	$2x-4y=7$ $x-3y=-2$	$\frac{2}{1}=2$	$\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}$	$\frac{7}{-2}=\frac{-7}{2}$	$\frac{a_1}{a_2} \uparrow \frac{b_1}{b_2}$	ఖండించుకొను రేఖలు	ఏకైక సాధన
(ii)	$4x+y=3$ $8x+2y=6$	$\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$	$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$	ఏకీభవించు రేఖలు	అనంతమైన సాధనలు
(iii)	$4x+7=2y$ $2x+9=y$	$\frac{4}{2}=2$	$\frac{2}{1}=2$	$\frac{7}{9}$	$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2} \uparrow \frac{c_1}{c_2}$	సమాంతర రేఖలు	సాధన లేదు

ఉదాహరణ 3.55 $kx+2y=3;\ 2x-3y=1$ సమీకరణముల వ్యవస్థకు ఏకైక సాధన మాత్రమే ఉన్నదనుకొనిన k విలువను కనుగొనుము.

3 Algebra.indd 140 11-03-2023 15:18:24

సాధన

ఇవ్వబడిన రేఖీయ సమీకరణములు

$$kx+2y=3 \ldots..(1) \quad \begin{bmatrix} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{bmatrix}$$
$$2x-3y=1 \ldots..(2)$$

ఇక్కడ $a_1=k, b_1=2, a_2=2, b_2=-3$;

ఏకైక సాధన ఉన్నట్లయితే $\frac{a_1}{a_2} \uparrow \frac{b_1}{b_2}$;అని తీసుకొనుము కావున $\frac{k}{2} \neq \frac{2}{-3}$; $k \neq \frac{4}{-3}$, $k \neq -\frac{4}{3}$.

ఉదాహరణ 3.56

$2x-3y=7$; $(k+2)x-(2k+1)y=3(2k-1)$ సమీకరణముల వ్యవస్థకు అనంతమైన సాధనలు ఉన్నట్లయితే k, విలువను కనుగొనుము.

సాధన

ఇవ్వబడిన రెండు రేఖీయ సమీకరణములు

$$2x-3y=7 \qquad \begin{bmatrix} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{bmatrix}$$
$$(k+2)x-(2k+1)y=3(2k-1)$$

ఇక్కడ $a_1=2,\ b_1=-3,\ a_2=(k+2),\ b_2=-(2k+1),\ c_1=7,\ c_2=3(2k-1)$

అనంతమైన సాధనలు ఉన్నట్లయితే $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ అని తీసుకొనిన

$$\frac{2}{k+2}=\frac{-3}{-(2k+1)}=\frac{7}{3(2k-1)}$$

$$\frac{2}{k+2}=\frac{-3}{-(2k+1)}$$
$$2(2k+1)=3(k+2)$$
$$4k+2=3k+6$$
$$k=4$$

$$\frac{-3}{-(2k+1)}=\frac{7}{3(2k-1)}$$
$$9(2k-1)=7(2k+1)$$
$$18k-9=14k+7$$
$$4k=16$$
$$k=4$$

ఉదాహరణ 3.57

$8x+5y=9$; $kx+10y=15$ సమీకరణముల వ్యవస్థకు సాధనలు లేనట్లయితే k విలువను కనుగొనుము.

సాధన

ఇవ్వబడిన రెండు రేఖీయ సమీకరణములు

$$8x+5y=9 \quad \begin{bmatrix} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{bmatrix}$$
$$kx+10y=15$$

ఇక్కడ $a_1=8, b_1=5, c_1=9, a_2=k, b_2=10, c_2=15$

3 Algebra.indd 141 11-03-2023 15:18:31

సాధనలు లేనట్లయితే $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ కావున $\frac{8}{k}=\frac{5}{10}\neq\frac{9}{15}$

$$80=5k$$

$$k=16$$

కృత్యము - 3

1. ఇవ్వబడిన రేఖీయ సమీకరణముల సాధనలు క్రింది విధముగా ఉన్నట్లయితే k విలువను కనుగొనుము.
   (i) $2x+ky=1;\ 3x-5y=7$ సమీకరణములకు ఏకైక సాధన కలదు.
   (ii) $kx+3y=3;\ 12x+ky=6$ సమీకరణములకు సాధన లేదు.
   (iii) $(k-3)x+3y=k;\ kx+ky=12$ సమీకరణములకు అనంతమైన సాధనలు కలవు.
2. ఇవ్వబడిన $3x-(a+1)y=2b-1,\quad 5x+(1-2a)y=3b$ రేఖీయ సమీకరణాల వ్యవస్థకు అనంతమైన సాధనలు ఉన్నట్లయితే a మరియు b విలువలను కనుగొనుము.

కృత్యము - 4

క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడిన రేఖీయ సమీకరణముల నిబంధనలను తృప్తిపరచు మరొక రేఖీయ సమీకరణమును కనుగొనుము.

ఇవ్వబడిన రేఖీయ సమీకరణం	మరొక రేఖీయ సమీకరణం		
	ఏకైక సాధన	అనంతమైన సాధనలు	సాధన లేదు
$2x+3y=7$	$3x+4y=8$	$4x+6y=14$	$6x+9y=15$
$3x-4y=5$			
$y-4x=2$			
$5y-2x=8$			

అభ్యాసము 3.14

ఏదైనా ఒక పద్ధతిని ఉపయోగించి సాధించుము.

1. ఒక రెండు అంకెల సంఖ్య, దాని స్థానములను మార్చినప్పుడు ఏర్పడు సంఖ్యల మొత్తం 110. ఇవ్వబడిన రెండంకెల సంఖ్య నుండి 10ని తీసివేసిన అది ఇవ్వబడిన సంఖ్యలోని అంకెల మొత్తము యొక్క 5 రెట్లుకన్నా 4 ఎక్కువ అయిన ఆ సంఖ్యను కనుగొనుము.
2. ఒక భిన్నములో లవము మరియు హారముల మొత్తము 12. హారమునకు 3 కూడిన, భిన్నము విలువ 1/2 అగును. అయిన ఆ భిన్నమును కనుగొనుము.
3. చక్రీయ చతుర్భుజము ABCD లో $\angle A=(4y+20)^\circ$, $\angle B=(3y-5)^\circ$, $\angle C=(4x)^\circ$ మరియు $\angle D=(7x+5)^\circ$ అయిన నాలుగు కోణములను కనుగొనుము.

3 Algebra.indd 142 11-03-2023 15:18:35

4. ఒక దూరదర్శినిని 5% లాభమునకు, శీతలీకరణ పెట్టెను 10% లాభమునకు అమ్మిన దుకాణదారుడికి ₹2000 లాభము వచ్చును. కానీ అతడు దూరదర్శినిని 10% లాభమునకు, శీతలీకరణ పెట్టెను 5% నష్టమునకు అమ్ముట వలన అతనికి ₹1500 లాభము వచ్చును. అయిన దూరదర్శిని మరియు శీతలీకరణ పెట్టెల ధరలను కనుగొనుము.

5. రెండు సంఖ్యలు 5:6 నిష్పత్తిలో కలవు. వాటిలో ప్రతి సంఖ్య నుండి 8ని తీసివేసిన తరువాత వాటి నిష్పత్తి 4:5 అయిన ఆ సంఖ్యలను కనుగొనుము.

6. నలుగురు భారతీయులు మరియు నలుగురు చైనీయులు కలిసి ఒక పనిని 3 రోజులలో చేయుదురు. ఇద్దరు భారతీయులు మరియు ఐదుగురు చైనీయులు కలిసి అదే పనిని 4 రోజులలో చేసిన, ఆ పనిని ఒక భారతీయుడు ఎన్ని రోజులలో చేయును? ఒక చైనీయుడు ఎన్ని రోజులలో చేయును?

అభ్యాసము 3.15

C5QRK

బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు

1. $x^3 + 6x^2 + kx + 6$ అనునది $(x + 2)$ చే ఖచ్చితముగా భాగించబడినచో k యొక్క విలువ ఎంత?

   (1) -6 (2) -7 (3) -8 (4) 11

2. $2x + 3 = 0$ అను బహుపద సమాసము యొక్క మూలము

   (1) $\frac{1}{3}$ (2) $-\frac{1}{3}$ (3) $-\frac{3}{2}$ (4) $-\frac{2}{3}$

3. $4-3x^3$ అనునది ఏ రకమైన బహుపద సమాసము.

   (1) స్థిర బహుపద సమాసము (2) ఏక ఘాత బహుపద సమాసము

   (3) ద్విఘాత బహుపద సమాసము (4) త్రిఘాత బహుపద సమాసము

4. $x^{51} + 51$ ను $x + 1$ చే భాగించిన యెడల లభించు శేషం

   (1) 0 (2) 1 (3) 49 (4) 50

5. $2x+5$ అను బహుపద సమాసము యొక్క శూన్యము

   (1) $\frac{5}{2}$ (2) $-\frac{5}{2}$ (3) $\frac{2}{5}$ (4) $-\frac{2}{5}$

6. $p(x) = x^3 - x^2 - 2$, $q(x) = x^2-3x+ 1$ అను బహుపద సమాసముల కూడిక ఫలితము

   (1) $x^3 - 3x - 1$ (2) $x^3 + 2x^2 - 1$ (3) $x^3 - 2x^2 - 3x$ (4) $x^3 - 2x^2 + 3x - 1$

7. $(y^3-2)(y^3 + 1)$ అను బహుపద సమాసము యొక్క అంతస్తు.

   (1) 9 (2) 2 (3) 3 (4) 6

8. ఈ క్రింద యివ్వబడిన బహుపద సమాసములను

   (A) $-13q^5 + 4q^2 + 12q$ (B) $(x^2 +4)(x^2 + 9)$

   (C) $4q^8 - q^6 + q^2$ (D) $-\frac{5}{7}y^{12} + y^3 + y^5$

3 Algebra.indd 143 11-03-2023 15:18:36

అంతస్తును బట్టి ఆరోహణ క్రమముగా వ్రాసిన

(1) A,B,D,C (2) A,B,C,D (3) B,C,D,A (4) B,A,C,D

9. $p(a)=0$ అయిన, $(x-a)$ అనునది $p(x)$ నకు ఒక _____

(1) భాజకము (2) భాగఫలము (3) శేషము (4) కారణాంకము

10. $(2-3x)$ యొక్క శూన్యము_____

(1) 3 (2) 2 (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{3}{2}$

11. $x-1$అనునది _____ నకు ఒక కారణాంకము

(1) $2x-1$ (2) $3x-3$ (3) $4x-3$ (4) $3x-4$

12. $x-3$ అనునది $p(x)$, కు ఒక కారణాంకము అయిన శేషము _____

(1) 3 (2) –3 (3) $p(3)$ (4) $p(-3)$

13. $(x+y)(x^2-xy+y^2)$ =

(1) $(x+y)^3$ (2) $(x-y)^3$ (3) x^3+y^3 (4) x^3-y^3

14. $(a+b-c)^2$ = _____

(1) $(a-b+c)^2$ (2) $(-a-b+c)^2$ (3) $(a+b+c)^2$ (4) $(a-b-c)^2$

15. ax^2+bx+c, అను ద్విఘాత సమీకరణము కారణాంకములు $(x+5)$ మరియు $(x-3)$ అయిన a, b మరియు c విలువలు కనుగొనుము.

(1) 1,2,3 (2) 1,2,15 (3) 1,2, –15 (4) 1, –2,15

16. త్రిఘాత బహుపద సమాసము నందు గరిష్ఠ ఏకఘాత కారణాంకములు _____

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

17. ఒక స్థిర బహుపద సమాసము యొక్క అంతస్థు _____

(1) 3 (2) 2 (3) 1 (4) 0

18. $2x+3y=m$ సమీకరణమునకు $x=2$ మరియు $y=-2$ ఒక సాధన అయిన m విలువ

(1) 2 (2) –2 (3) 10 (4) 0

19. క్రింది వానిలో రేఖీయ సమీకరణమేది?

(1) $x+\frac{1}{x}=2$ (2) $x(x-1)=2$ (3) $3x+5=\frac{2}{3}$ (4) $x^3-x=5$

3 Algebra.indd 144 11-03-2023 15:18:40

20. $2x+3y=15$ సమీకరణమునకు క్రింది వాటిలో ఏది సత్యమగును?

(1) (2,4) (2) (4,2) (3) (3, –1) (4) (0,6)

21. $2x+3y=k$ సాధన (2,3) అయిన k విలువ ----

(1) 12 (2) 6 (3) 0 (4) 13

22. $ax+by+c=0$ రేఖీయ సమీకరణమును క్రింది వానిలో ఏ నిబంధన తృప్తిపరచదు

(1) $a \uparrow 0$, $b=0$ (2) $a=0$, $b \uparrow 0$

(3) $a=0$, $b=0, c \uparrow 0$ (4) $a \uparrow 0$, $b \uparrow 0$

23. క్రింది వానిలో ఏది రెండు చలరాశులు గల రేఖీయ సమీకరణము కాదు.

(1) $ax+by+c=0$ (2) $0x+0y+c=0$

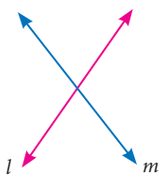
(3) $0x+by+c=0$ (4) $ax+0y+c=0$

24. సమీకరణములు $4x+6y-1=0$ మరియు $2x+ky-7=0$ సమాంతరరేఖలయిన k విలువ.

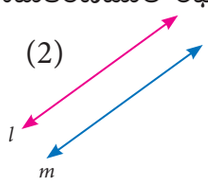
(1) $k=3$ (2) $k=2$ (3) $k=4$ (4) $k=-3$

25. క్రింది ఒక జత రేఖీయ సమీకరణముల రేఖా చిత్రములలో సాధన లేనిది ఏది?

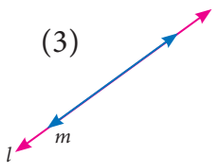
(1)



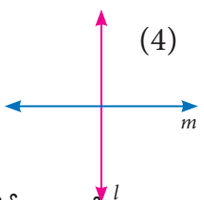
(2)



(3)



(4)



26. $\frac{a_1}{a_2} \uparrow \frac{b_1}{b_2}$ అయిన, ఇక్కడ $a_1x+b_1y+c_1=0$ మరియు $a_2x+b_2y+c_2=0$ రేఖీయ సమీకరణములకు

(1)సాధన లేదు (2) రెండు సాధనలు (3) ఏకైక సాధన (4) అనంతమైన సాధనలు

27. $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ అయిన $a_1x+b_1y+c_1=0$ మరియు $a_2x+b_2y+c_2=0$ రేఖీయ సమీకరణములకు

1) సాధన లేదు 2) రెండు సాధనలు 3) అనంతమైన సాధనలు 4) ఏకైక సాధనలు

28. ఏదైన రెండు ప్రధాన సంఖ్యల యొక్క గ.సా.భా _____

(1) –1 (2) 0 (3) 1 (4) 2

29. x^4-y^4 మరియు x^2-y^2 యొక్క గ.సా.భా

(1) x^4-y^4 (2) x^2-y^2 (3) $(x+y)^2$ (4) $(x+y)^4$

3 Algebra.indd 145 11-03-2023 15:18:46

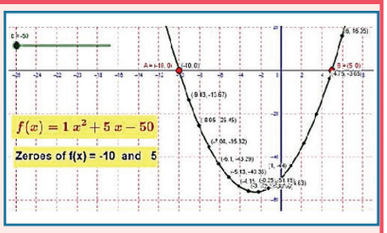
గుర్తించుకోవలసిన విషయములు

- x అను చలరాశిలో అమరిక ఒక బహుపద సమాసము యొక్క బీజీయ సమాసము $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ $(a_n \neq 0)$ మరియు $a_0, a_1, a_2, ...a_n$ అనునది స్థిరసంఖ్యలు మరియు n అనునది ధనపూర్ణ సంఖ్యలు.
- $p(x)$ అనునది ఒక బహుపద సమాసము $p(a) = 0$ అయిన a అఅనునది $p(x)$ యొక్క శూన్య విలువ అని చెప్పవచ్చును
- $p(x) = 0$ అను బహుపద సమాసము $x = a$ తృప్తిపరచిన లో $x = a$ అనునది ఆ బహుపద సమాస సమీకరణము యొక్క ఒక మూలమందురు.
- శేష సిద్ధాంతము : $p(x)$ అనునది ఏదేని ఒక బహుపద సమాసము మరియు a అనునది ఏదేని వాస్తవ సంఖ్యయగును $p(x)$ ను $(x-a)$ అను ఏకఘాత సమాసముచే భాగించిన వచ్చు శేషము $p(a)$ అగును. ఇచ్చట a ఒక వాస్తవ సంఖ్య
- కారణాంక సిద్ధాంతము $p(x)$ ను $(x-a)$ తో భాగించగా లభించు శేషము $p(a) = 0$, అయిన $(x-a)$ అనునది $p(x)$ నకు ఒక కారణాంకము
- ఒక సమీకరణములోని చలరాశికి ఇవ్వబడు అన్ని విలువలు సమీకరణమును తృప్తిపరచిన, ఆ విలువను సమీకరణ సాధన అంటారు.
- రెండు చరరాశులు కల్గిన ఒకే అంతస్థు ఉన్న సమీకరణమును రేఖీయ సమీకరణం అంటారు.
- రెండు చలరాశులు గల ఒక రేఖీయ సమీకరణమునకు అనంతమైన సాధనలు కలవు.
- రెండు చలరాశులు గల ఒక రేఖీయ సమీకరణపు రేఖాచిత్రం సరళరేఖ అవుతుంది.
- సమకాలిక రేఖీయ సమీకరణములు ఒకే విధమైన చలరాశులను కలిగిన రెండు లేక అంతకన్నా ఎక్కువ రేఖీయ సమీకరణములను కలిగిన వ్యవస్థ అవుతుంది.

3 Algebra.indd 146 11-03-2023 15:18:47

అంతర్జాల కృత్యము-1

ఈ చిత్రపటములో ఎదురుచూచు (ఆశించు) ఫలితము కనబడును.



సోపానము – 1 Web Browser లో ఈ క్రింది యివ్వబడిన వెబ్ అడ్రస్‌ను copy చేసి paste చేయండి. లేదా QR Code. ను Scan చేయండి.

సోపానము - 2 జియో జీబ్రా (GeoGebra) Work Book నందు "Polynomials and Quadratic Equations" అను అధిక భాగములు ప్రత్యక్షమగును. అందులో నుండి "Zeroes: Quadratic Polynomial". ను Open చేయుము.

సోపానము-3 ద్విఘాత సమీకరణము గుణకముల మార్చి అమర్చుటకు తెరలో కనబడు a, b మరియు c అను sliders లను Drag చేయుము. A మరియు B బిందువులు x అక్షములో ఖడించు ఈ బిందువులే ఆ బహుపద సమాసము యొక్క శూన్యము అగును

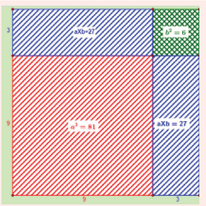
C7EW6

Browse in the link

Zeroes of Polynomials : https://ggbm.at/tgu3PpWm

అంతర్జాల కృత్యము-2

ఈ చిత్రపటములో ఎదురుచూచు (ఆశించు) ఫలితము కనబడును.



సోపానము – 1 క్రిందివ్వబడిన Browser, ను టైపు చేయుము URL Link లేదా QR Code Scan చేయుము. "Algebraic Identities"అని పేరు గల తెరవబడును. work sheet లో 2 కృత్యములు వుండును (హారమును అకరణీయ పరచుట), (ఘాతముల నియమములు) మొదటి కృత్యము నందు హారమును అకరణీమయ పరుచు పద్ధతి ఇవ్వబడినది. ఉదాహరణము కూడా క్రిందివ్వబడినది, a మరియు b విలువలను మార్చాలన్నప్పుడు విలువలను లో type చేయుము.

2RYFC

సోపానము - 2 రెండవ కృత్యములో ఘాతముల నియమములను ఇవ్వబడినవి. ఉదాహరణము కూడా కుడి వైపు ఇవ్వబడినది. a మరియు b విలువలను మార్చవలెనన్న sliders ను జరిపి మరియు జవాబును తనిఖీచేయుము.

Browse in the link Algebraic Identities: https://ggbm.at/PyUj657Y or Scan the QR Code.

అంతర్జాల కృత్యము-3

ఈ చిత్రపటములో ఎదురుచూచు (ఆశించు) ఫలితము కనబడును.



మెట్టు – 1 క్రింద ఇవ్వబడిన URL కోడ్‌ను ఉపయోగించుకొని GeoGebra నందు "Algebra" అను పేజీని ఓపెన్ చేయుము. Solving by rule of cross multiplication, Graphical method మరియు Chick-Goat puzzle అను మూడు వర్క్‌షీట్లు ఇవ్వబడియుంటుంది.

మెట్టు – 2 Sliders ను జరిపి లేదా తగిన విలువలను టైపు చేసి సమీకరణములను మార్చి సాధనలను కనుగొనుము. మూడవ శీర్షికలో గల new problem ను క్లిక్ చేసి సమస్యలను సాధింపుము. slider ను జరిపి అన్ని సోపానములను చూడుము.

YCJHX

Browse in the link

Algebra: https://ggbm.at/qampr4ta or Scan the QR Code.

3 Algebra.indd 147 11-03-2023 15:18:48

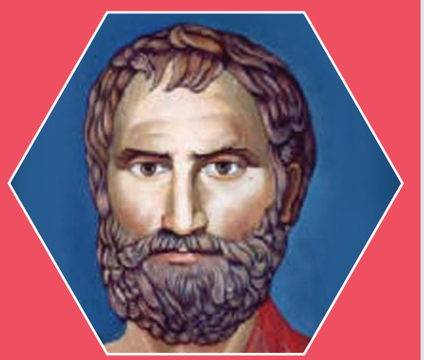
4



రేఖాగణితము

కవిత్వం లాగే జ్యామితిలో కూడ 'ప్రేరణ' అవశ్యమగుచున్నది.

– అలెగ్జాండర్ పుష్‌కిన్



తేలీస్
(BC (BCE) 624 – 546)

తేలీస్ అను గణిత మేదావి గ్రీకు నగరమైన మైలెటస్‌లో జన్మించారు. ఆయన రేఖా గణితములో ముఖ్యంగా త్రిభుజముల సైద్ధాంతిక మరియు ప్రయోగాత్మక అవగాహనకు పేరుపొందినవారు. ఇతడు పిరమిడ్ల ఎత్తును కనుగొనుటకు సముద్ర తీరము మరియు పడవల మధ్య దూరమును కనుగొనుటకు రేఖా గణితమును ఉపయోగించినారు. తేలీస్ గ్రీకుదేశపు సప్త యుగములలో ఒకరు లేక సప్త మహా మేధావులలో ఒకరిగా పేరొందినారు. పాశ్చాత్య సంస్కృతిలో ఈయనను మొదటి తత్వవేత్తగా గౌరవింపబడినాడు.

అభ్యసన ఫలితములు

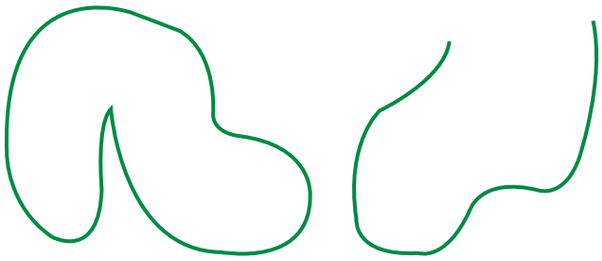
- రేఖీయ కోణములు మరియు శీర్షాభిముఖ కోణములను అవగాహన చేసుకొనుట.
- త్రిభుజము యొక్క కోణముల మొత్తం సిద్ధాంతమును అవగాహన చేసుకొనుట.
- చతుర్భుజం ధర్మములను అర్థంచేసుకొని వాటిని సమస్యల పరిష్కారానికి ఉపయోగించుట.
- వృత్తము, జ్యా మరియు కోణముల సిద్ధాంతాలను అర్థం చేసుకొనుట, వివరించుట మరియు ఉపయోగించుట.
- చక్రీయ చతుర్భుజముల సిద్ధాంతములను అర్థంచేసుకొనుట మరియు ఉపయోగించుట.
- త్రిభుజము యొక్క గురుత్వకేంద్రము, లంబకేంద్రము, పరివృత్త కేంద్రము, అంతరవృత్త కేంద్రమును నిర్మించి గుర్తించుట.

4.1 పరిచయం

జ్యామితిలో మనం ఆకారములు (**shapes**) గూర్చి నేర్చుకొందాం. కాని మీరు ఆకారములనుగూర్చి నేర్చుకొనుటకు ఏమి యున్నది? అని అడుగవచ్చును. ఆకారములతో ఏఏ విషయములను తెలుసుకొనవచ్చునని మనం మొదట ఆలోచిద్దమా? మనం ఆకారములను నిర్మిస్తాము, మనం ఆకారములను పోలుస్తాము, మనం ఆకారములను కొలుస్తాము. ఆకారములలో మనం దేనిని కొలుస్తాము?

4-Geometry_Term1.indd 148 17-03-2023 15:43:27

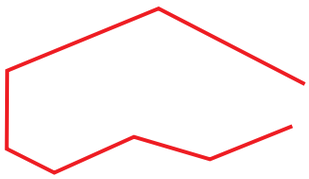
క్రిందివ్వబడిన వేర్వేరు కొన్ని ఆకారములను తీసుకొనుము.



పటము. 4.1

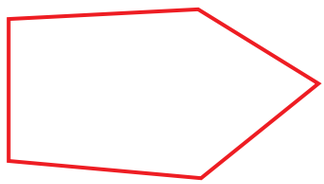
రెండింటిలోను, ఒక వక్ర రేఖ ఆకారము ఏర్పడియున్నది ఒకటి మూయబడిన వక్ర రేఖ (closed curve) రెండవది తెరువబడిన వక్ర రేఖ (open curve). మన ఒక త్రాడు లేక కమ్మీనుపయోగించి తెరువబడిన వక్ర రేఖ యొక్క **పొడవును**, మరియు మూయబడిన వక్రరేఖ యొక్క చుట్టు కొలతను కొలువ వచ్చును.

వక్రములు క్లిష్టముగా నుండును. కాని సరళరేఖల పొడవులను కొలబద్దలనుపయోగించి సులభముగా కొలువ వచ్చును.క్రింది రెండు ఆకారములను గమనించుము.



పటము 4.2

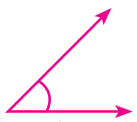
మనము ఇప్పుడు సరళ రేఖలతో ఏర్పడిన మూయబడిన ఆకారములపై మాత్రమే మన దృష్టిని కేంద్రీ కరిస్తాయి. వీటి నుండి మనం చాలా ఆసక్తికరమైన విషయములను తెలుసుకోబొవుచున్నాము. (పటము-4.2) తెరువబడిన ఆకారమును సూచించును.



పటము. 4.3

మనం అలాంటి ఆకారములను నిర్మించుట మాత్రమే గాక వాటిని పొల్చడం, కొలవడం మొదలుగునవి. ఈ మూయబడిన ఆకారములను ఎలా వర్ణించడం? (పటము-4.3ను చూడుము). అవన్నియు మూయబడిన సరళ రేఖలచే ఏర్పడినవి.

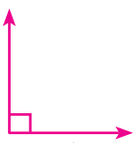
4.2 కోణముల రకములు - పునశ్చరణ



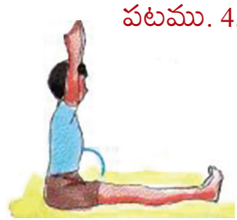
అల్పకోణము
90° లకు తక్కువ గల కోణము



పటము. 4.4

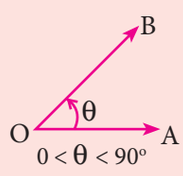
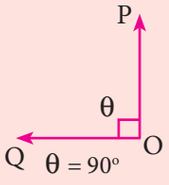
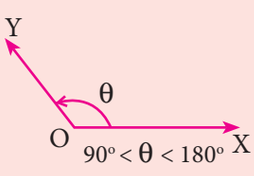
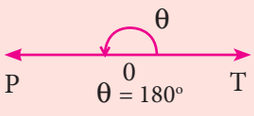
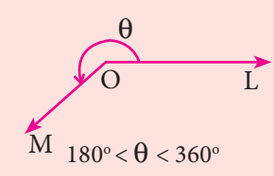


లంబకోణము
90° గల కోణము



పటము. 4.5

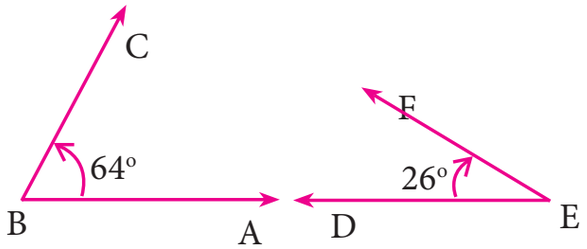
మన నిత్యజీవితములో కోణములను ఉపయోగిస్తాము. పైపులు మరమత్తు చేయువారు పైపులను సరిగ్గా అమర్చుటకు పైపుల మధ్య కోణమును కొలుచును. వడ్రంగి రంపపు బ్లేడులను సరియైన కోణములో పొందించి కొయ్యలను కోయుదురు. వాయుమార్గ రాకపోకల అధికార్లు (ATC)) విమానములను కట్టుబాటు చేయుటకు కోణములను ఉపయోగించెదరు. క్యారమ్ మరియు బిల్లియర్డ్స్ ఆటగాళ్ళు కోణముల అవగాహన యున్నచో వారి లక్ష్యములను గురిపెట్టుటకు తోడ్పడును.ఒక కోణమునుది ఒకే రేఖలో అమరని ఒకే ఉమ్మడి ప్రారంభ బిందువును కలిగిన రెండు రేఖా కిరణములచే ఏర్పడును

అల్పకోణము	లంబకోణము	అధిక కోణము	సరళ కోణము	పరావర్తన కోణము
				
$0 < \theta < 90^\circ$	$\theta = 90^\circ$	$90^\circ < \theta < 180^\circ$	$\theta = 180^\circ$	$180^\circ < \theta < 360^\circ$

4-Geometry_Term1.indd 149 17-03-2023 15:43:28

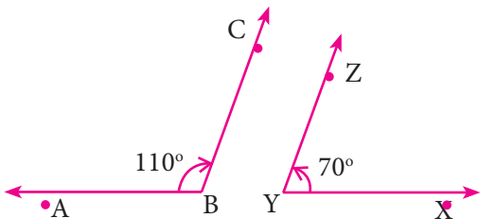
పూరక కోణము

రెండు కోణముల కొలతల మొత్తము $90°$ అయిన ఆ కోణముల ఒకదానికొకటి పూరక కోణములగును. ఉదాహరణకు, $\angle ABC=64°$ మరియు $\angle DEF=26°$, అయిన $\angle ABC$ మరియు $\angle DEF$ అనునవి ఒకదానికొకటి పూరక కోణములగును ఎందుకనగా $\angle ABC + \angle DEF = 90°$



పటము. 4.7

సంపూరక కోణములు



పటము. 4.7

రెండు కోణముల మొత్తము $180°$ అయినచో ఆ కోణములు ఒక దానికొకటి సంపూరక కోణములు అగును.

ఉదాహరణకు $\angle ABC=110°$ మరియు $\angle XYZ=70°$ అయిన $\angle ABC + \angle XYZ = 180°$

$\therefore \angle ABC$ మరియు $\angle XYZ$ అనునది ఒకదానికొకటి సంపూరక కోణములగును. ఆ రెండు కోణములను సంపూరక కోణములందురు.

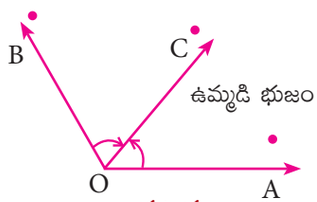
ఆసన్న కోణములు

రెండు కోణములు

(i) ఉమ్మడి శీర్ష బిందువు కలిగియుడును.

(ii) ఉమ్మడి రేఖా కిరణమును కలిగియుడును.

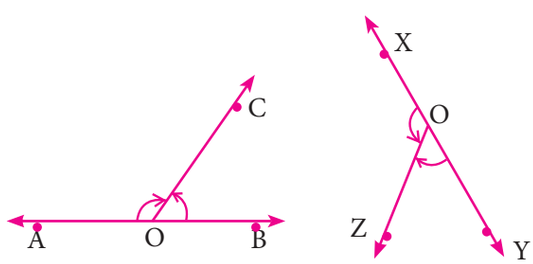
(iii) ఆ ఉమ్మడి రేఖా కిరణము రెండు ఉమ్మడికాని రేఖా కిరణముల మధ్య యున్నచో వాటిని ఆసన్న కోణములందురు.



పటము. 4.8

రేఖీయద్వయము

ఒక రేఖా కిరణము సరళ రేఖమీద నిలుచునపుడు ఏర్పడు ఆసన్న కోణముల మొత్తము $180°$ అయిన ఆ కోణములను రేఖీయ ద్వయము అందురు.



పటము. 4.9

$\angle AOC + \angle BOC=180°$

$\therefore \angle AOC$ మరియు $\angle BOC$ రేఖీయద్వయమును నేర్పరచును

$\angle XOZ + \angle YOZ = 180°$

$\angle XOZ$ మరియు $\angle YOZ$ రేఖీయ యుగ్మముల నేర్పరచును

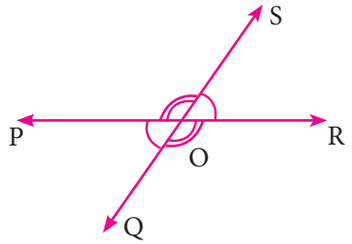
శీర్షాభిముఖ కోణములు

రెండు రేఖలు ఓకదానికొకటి ఖండించుకొన్నచో ఏర్పడు ఎదుటెదుటి కోణములు సమము వీటినే శీర్షాభిముఖ కోణములు అందురు.

4-Geometry_Term1.indd 150 17-03-2023 15:43:28

పటములో $\angle POQ = \angle SOR$

$\angle POS = \angle QOR$



పటము. 4.10

4.2.1 తిర్యగ్రేఖ

ఒక రేఖ ఒకటి లేక అంతకంటే పైబడిన రేఖలను వేర్వేరు బిందువులలో ఖండించినచో అది ఆ రేఖల తిర్యగ్రేఖ అందురు.

రకము (i) ఒక తిర్యగ్రేఖ రెండు రేఖలను ఖండించుట వలన ఎనిమిది కోణములు లభించును.

పటములో m మరియు n అను రేఖలను l అను తిర్యగ్రేఖ రేఖ ఖండించుట వలన

(i) అనురూప కోణములు (Corresponding Angles):

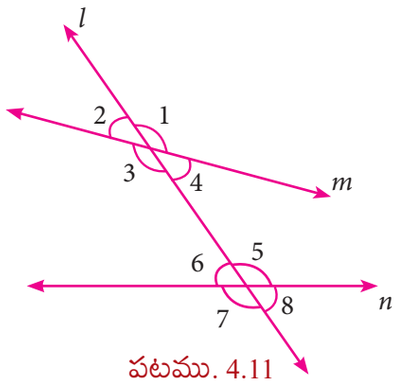
$\angle 1$మరియు$\angle 5$,$\angle 2$ మరియు$\angle 6$, $\angle 3$ మరియు $\angle 7$, $\angle 4$ మరియు$\angle 8$

(ii) ఏకాంతర కోణములు (Alternate Interior Angles): $\angle 4$ మరియు $\angle 6$, $\angle 3$ మరియు $\angle 5$

(iii) ఏక బాహ్యకోణములు (Alternate Exterior Angles): $\angle 1$ మరియు $\angle 7$, $\angle 2$ మరియు $\angle 8$

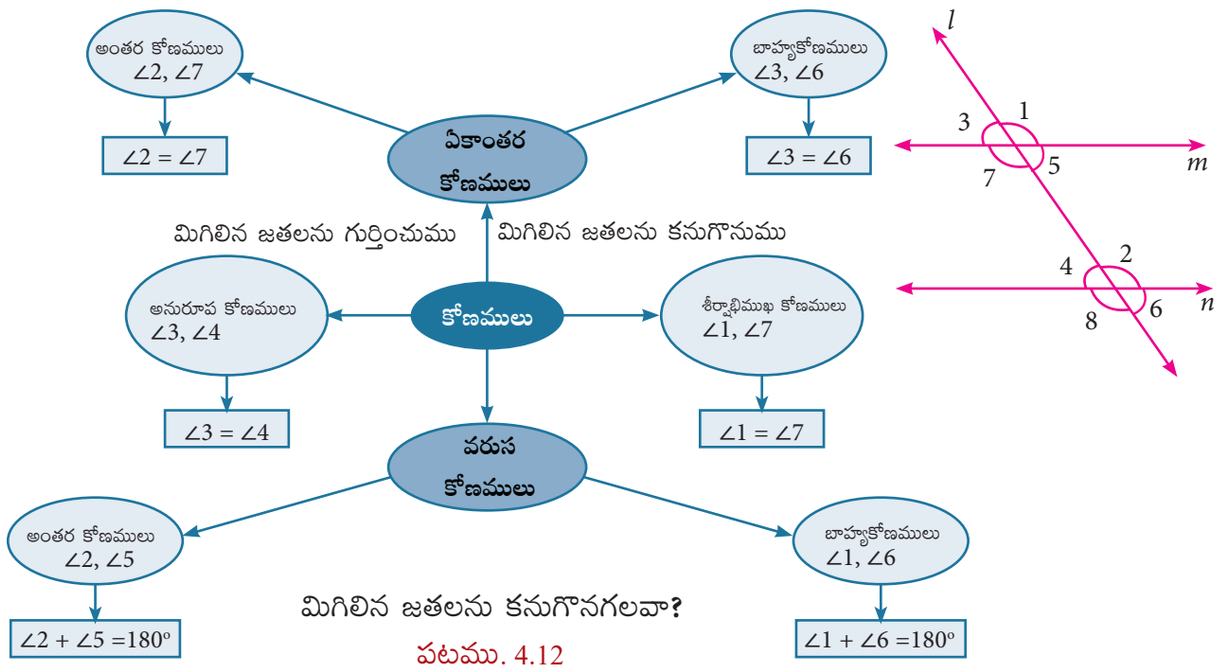
(iv) $\angle 4$ మరియు $\angle 5$,$\angle 3$ మరియు $\angle 6$ తిర్యగ్రేఖ రేఖ యొక్క ఒకే ప్రక్కన అమరు అంతర కోణములు.

(v) $\angle 1$ మరియు $\angle 8$, $\angle 2$ మరియు $\angle 7$ తిర్యగ్రేఖ రేఖ యొక్క ఒకే ప్రక్కన అమరిన బాహ్యకోణములు.



పటము. 4.11

రకము (ii) ఒక తిర్యగ్రేఖ రేఖ అనునది రెండు సమాంతర రేఖలను ఖండించుట వలన వేర్వేరు రకములైన కోణ యుగ్మములను తిర్యగ్రేఖ రేఖ ఏర్పరచును



మిగిలిన జతలను కనుగొనగలవా?

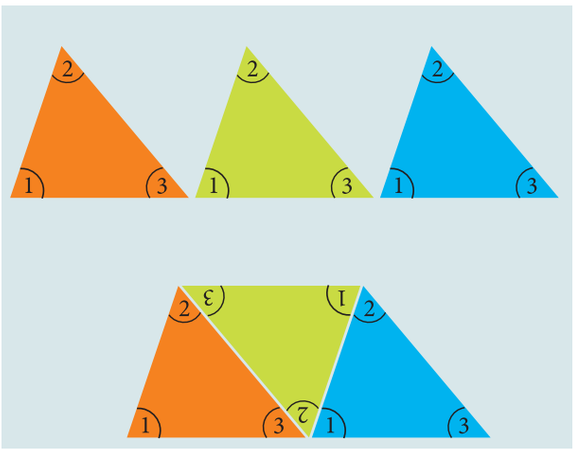
పటము. 4.12

4-Geometry_Term1.indd 151 17-03-2023 15:43:28

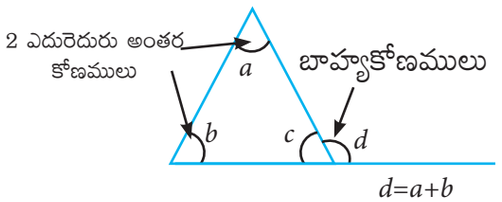
4.2.2 త్రిభుజములు

కృత్యము 1

మూడు వేర్వేరు రంగు కాగితములను తీసుకొని వాటిని ఒకటి మీద ఒకటి ఉంచుము. పై కాగితము పై ఒక త్రిభుజమును గీచి, ఒకే కొలతగల వేర్వేరు రంగులు గల మూడు త్రిభుజములు లబించునట్లు కత్తిరించి తీయుము. పటంలో చూపినట్లుగా శీర్షములను కోణములను గుర్తించుము. అంతర కోణములు $\angle 1$, $\angle 2$ మరియు $\angle 3$ ను ఒకే సరళరేఖలో ప్రక్క ప్రక్కన వచ్చునట్లు అంతరము లేక ఉంచిన, మూడు కోణములు $\angle 1$, $\angle 2$ మరియు $\angle 3$ లభించును. వీటి మొత్తము కొలతను గూర్చి ఏమి చెప్పెదవు?



పటము. 4.13



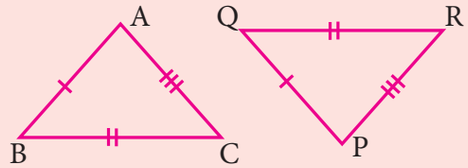
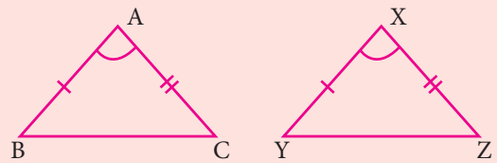
పటము 4.14

ఈపటమునుపయోగించి త్రిభుజము యొక్క "బాహ్యకోణ ధర్మము"ను విశదీకరించగలమా?

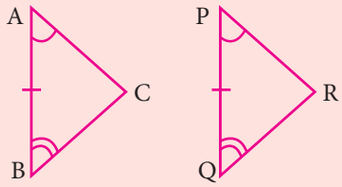
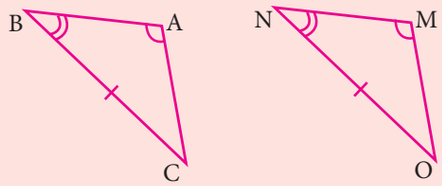
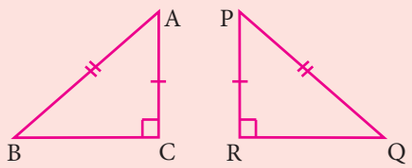
ఒక త్రిభుజము యొక్క ఒక భుజమును పొడిగించిన ఏర్పడు బాహ్య కోణము అనునది రెండు అంతరాభిముఖ కోణముల మొత్తమునకు సమానము. కావున $d=a+b$ (see Fig 4.14).

4.2.3 సర్వసమాన త్రిభుజములు

ఒక త్రిభుజము యొక్క అన్ని భుజములు, కోణములు మరొక త్రిభుజము యొక్క భుజములకు, కోణములకు సమానమైనచో అటువంటి త్రిభుజములను సర్వసమాన త్రిభుజములందురు. దీనిని $\cong$ లో సూచింతురు.

నియమము	పటము	కారణము
భు–భు–భు SSS		$AB = PQ$ $BC = QR$ $AC = PR$ $\Delta ABC \cong \Delta PQR$
SAS		$AB = XY$ $\angle BAC = \angle YXZ$ $AC = XZ$ $\Delta ABC \cong \Delta XYZ$

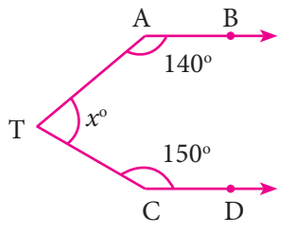
4-Geometry_Term1.indd 152 17-03-2023 15:43:29

ASA		$\angle A = \angle P$ $AB = PQ$ $\angle B = \angle Q$ $\Delta ABC \cong \Delta PQR$
AAS		$\angle A = \angle M$ $\angle B = \angle N$ $BC = NO$ $\Delta ABC \cong \Delta MNO$
RHS		$\angle ACB = \angle PRQ = 90°(R)$ AB = PQ కర్ణము (H) $AC = PR$ (S) $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

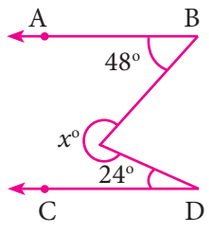
అభ్యాసము 4.1

1. పటములో AB అనునది CD లకు సమాంతరమయిన x విలువను కనుగొనుము.

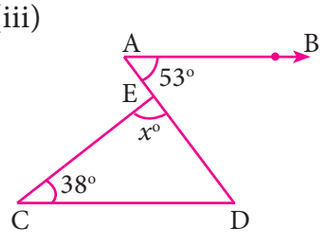
(i)



(ii)



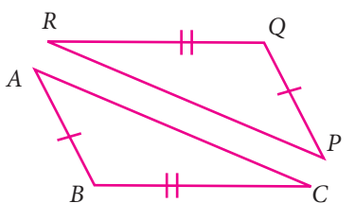
(iii)



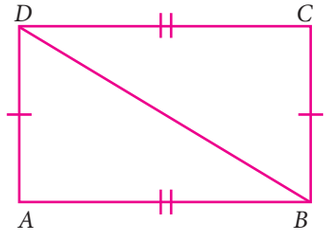
2. ఒక త్రిభుజము యొక్క మూడు కోణములు 1: 2 : 3, అని నిష్పత్తిలో యుండిన, త్రిభుజము యొక్క ఒక్కొక్క కోణము విలువను కనుగొనుము.

3. ఇవ్వబడిన త్రిభుజ జతలను గమనించుము. వాటిలో ఒక్కొక్క జతను సర్వసమ త్రిభుజములా! అని కనుగొనుము. అవి సర్వసమ త్రిభుజములైతే ఎట్లు? సర్వసమన త్రిభుజములు కానిచో ఎలా? వాటిని సర్వసమన త్రిభుజముగా మార్చుటకు ఏ చిన్న మార్పును చేయవలెను.

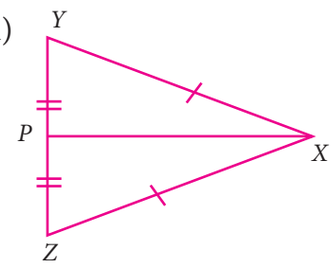
(i)



(ii)

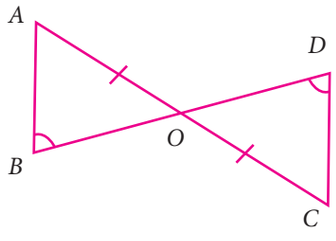


(iii)

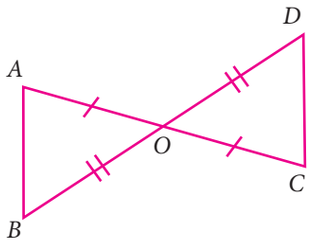


4-Geometry_Term1.indd 153 17-03-2023 15:43:29

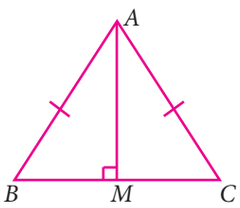
(iv)



(v)

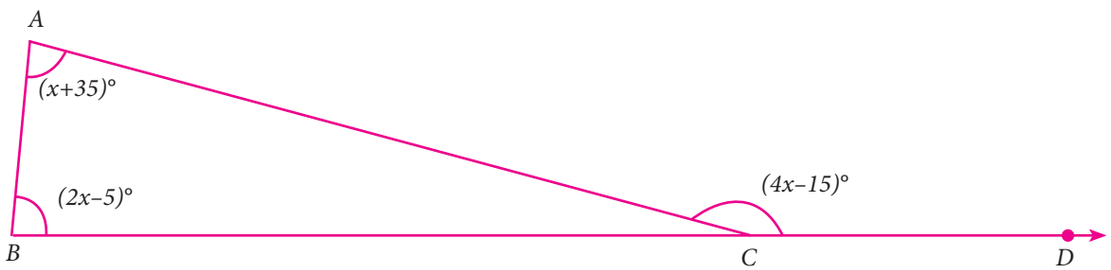


(vi)



4. ΔABC మరియు ΔDEF అనునవి 2 త్రిభుజములు మరియు $AB=DF$, $\angle ACB=70°$, $\angle ABC=60°$; $\angle DEF=70°$ మరియు $\angle EDF=60°$ అయిన త్రిభుజములు సర్వసమము అని నిరూపించుము.

5. ఇవ్వబడిన ΔABC లో అన్ని కోణపు కొలతలను కనుగొనుము.



4.3 చతుర్భుజములు

కృత్యము 2

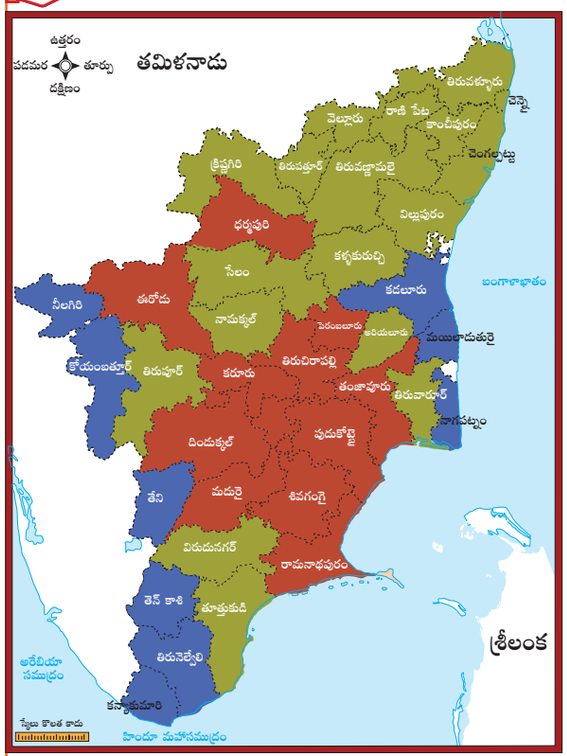


Fig. 4.15

నాలుగు తమిళనాడు రాష్ట్ర రాకపోకల సంస్థ బస్సులు క్రింది మార్గములలో పోవును. మొదటి ఏక మార్గ ప్రయాణము మిగిలినవి భ్రమణ ప్రయాణ మార్గములు. పటములో స్థలములను కనుగొని, వాటిని బిందువులచే గుర్తించి, రేఖలచే కలిపి రోడ్ల మార్గములను గీయుము.

(i) నాగర్‌కోయిల్, తిరునెల్వేలి, విరుదునగర్, మదురై

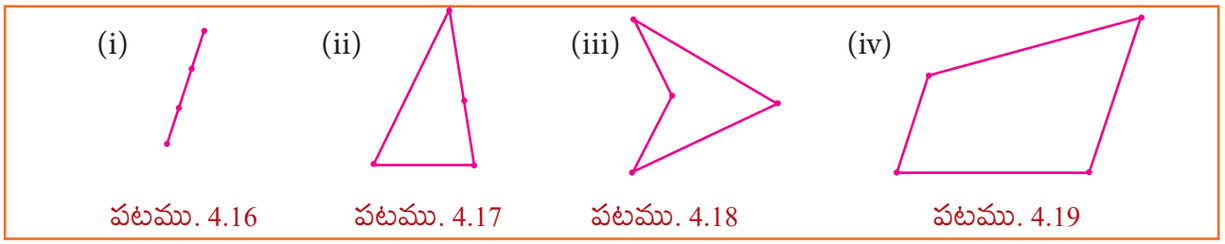
(ii) శివగంగై, పుదుకోట్టై, తంజావూరు, దిండుక్కల్

(iii) ఈరోడు, కడలూరు, ధర్మపురి, కరూరు,

(iv) చెన్నై, కడలూరు, క్రిష్ణగిరి, వెల్లూరుi

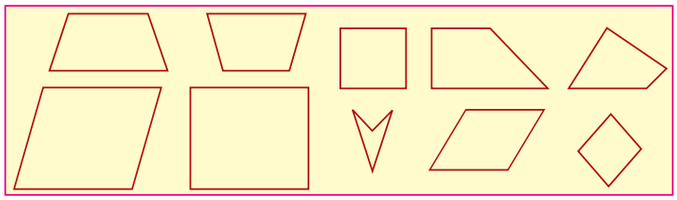
4-Geometry_Term1.indd 154 17-03-2023 15:43:29

మీకు క్రింది ఆకారములు దొరుకును



పటము. 4.16 పటము. 4.17 పటము. 4.18 పటము. 4.19

(నగరముల పేర్లును బిందువులతో గుర్తించి పటములో చూపినట్లు ఏ వుధమైన భ్రమణము లేక గీయుము.) మనము నిశితంగా పరిశీలించినచో, మొదటి పటములో ఒకే ఒక రేఖ ఉండును. నాలుగు బిందువు లు ఒకే రేఖపై అమరును. మిగిలిన మూడును మనం ముందే గమనించినట్లు సరళరేఖలచే కలుపబడిన మూయబడిన ఆకారములు ఏర్పడును. ఈ మూయబడిన ఆకారములకు పేర్లు పెట్టవలెను. ఇక మీదట వాటిని **బహుభుజములు** (polygons) అని పిలిచెదము.



పటము. 4.20

బహుభుజములు మనకు ఏ విధంగా కనబడును వాటి భుజములు రెండు చివరలలోను బిందువులుండును. వాటిని మనము బహుభుజి యొక్క శీర్షములంటాము. ఈ శీర్షములను కలుపు రేఖా ఖండములను భుజములంటాము *poly* అనగా బహు (చాలా) అని అర్థము. polygon అనగా ఎక్కువ భుజములను కలిగిన ఆకారము అని అర్థము.

సూచన

పుటాకార బహుభుజి: బహుభుజి యొక్క ఏదేని ఒక అంతర కోణం 180 కంటె ఎక్కువ అంతర కోణము కలిగిన బహుభుజిని పూటాకార బహుభుజి అందురు.

కుంబాకార బహుభుజి: బహుభుజి యొక్క ఒక్కొక్క అంతరకోణము 180 కంటె తక్కువ యుండిన దానిని కుంబాకార బహుభుజి అందురు.
(కర్ణములు బహుభుజి లోపలనె యుండవలెను)

ఒక బహుభుజికి ఎన్ని భుజములుండును. ఒకటా? కాని ఇది ఒక సాధారణ రేఖా ఖండము. రెండా? కాని రెండు భుజములతో ఒక మూయబడిన ఆకారమును ఎట్లు పొందగలము? మూడా? అవును. ఇది మనకు ఇంతకు ముందే తెలియును. అదియే త్రిభుజము. ఇపుడు నాలుగు భుజములు చతురస్రము మరియు దీర్ఘ చతురస్రము నాలుగు భుజములను కలిగిన బహుభుజికి ఉదాహరణలు. అవియే గాక పైనున్న నాలుగు భుజములు కలిగిన బహుభుజిలు వీటినే చతుర్భుజములు అందురు.

4.3.1 కొన్ని ప్రత్యేక చతుర్భుజముల పేర్లు

1. ఒక **సమాంతర చతుర్భుజము** అనునది (parallelogram) ఎదుటి భుజములు సమాంతరముగా మరియు సమముగా గల చతుర్భుజము.

2. ఒక **సమచతుర్భుజము** (rhombus) అనునది ఎదుటి భుజములు సమాంతరముగాను మరియు అన్ని భుజములు సమానముగాను గల చతుర్భుజమగును.

4-Geometry_Term1.indd 155 17-03-2023 15:43:30

3. ఒక **సమలంబ చతుర్భుజము** (trapezium) అనునది ఒక జత ఎదుటి భుజములు సమాంతరముగా నుండు చతుర్భుజము అగును.

కొన్ని సమాంతర చతుర్భుజములును, కొని రాంబస్ (సమ చతుర్భుజము)లను మరియు కొన్ని సమలంబ చతుర్భుజముల (ట్రెపిజయం) లను గీయుము.



పటము. 4.21

ధర్మములను (లక్షణములను) పట్టీకరించుట వలన గల గొప్ప ఉపయోగము ఏమనగా మనము వాటికి మధ్య గల సంబంధములను తక్షణమే తెలుసుకొనవచ్చును.

- ప్రతి సమాంతర చతుర్భుజము ఒక సమలంబ చతుర్భుజము అగును, కాని ప్రతి సమలంబ చతుర్భుజము సమాంతర చతుర్భుజముగా యుండనవసరం లేదు.
- ప్రతి రాంబస్ (సమచతుర్భుజము) ఒక సమాంతర చతుర్భుజమగును కాని ప్రతి సమాంతర చతుర్భుజము రాంబస్‌గా నుండనవసరము లేదు.
- ప్రతి దీర్ఘ చతురస్రము ఒక సమాంతర చతుర్భుజం గాని ప్రతి సమాంతర చతుర్భుజము ఒక దీర్ఘ చతురస్రంగా యుండనవసరము లేదు.
- ప్రతి చతురస్రం ఒక రాంబస్ అందువల్ల ప్రతి చతురస్రం ఒక సమాంతర చతుర్భుజమగును.

For "not necessarily the other way" గణిత వేత్తలు సాధారణముగా దానికి విపర్యము సత్యము కాదు ఒక అందమైన ప్రశ్న. ఎప్పుడు విపర్యము సత్యమగును? ఉదాహరణకు ఎప్పుడు ఒక సమాంతర చతుర్భుజము ఒక దీర్ఘ చతురస్రముగా ఉండుటకు వీలగును? అన్ని కోణములు సమానమైన ఏ సమాంతర చతుర్భుజమునైన దీర్ఘ చతురస్రమే (మనము ఏల దీనిని చూడవలెను?) మనం ఇప్పుడు చాలా ఆసక్తికరమైన గుణములను గమనించెదము. ఉదాహరణకు అన్ని భుజములు సమానముగా గల రాంబస్ ఒక సమాంతర చతుర్భుజముగా యుండును.

మెదడుకు మేత

మీకు ద్విచక్ర వాహనములు (*bi*-cycles) మరియు త్రిచక్ర వాహనములు (*tri*-cycles) తెలియునా? ఏ ఒక్క పదము ముందు మనం వీటిని ఎప్పుడు కలుపవచ్చును. (bi) లేక (tri) అని కలుపవచ్చును. అదే మాదిరి చతుర్ అనునది నాలుగును (*quadri*) నాలుగు చక్రము వాహనమును సూచించును. పైగా *Lateral* "భుజము"ను సూచించును. కాబట్టి చతుర్భుజము అనునది నాలుగు భుజములను కలిగిన ఆకారము అగును. మీకు త్రిభుజములు తెలియునుగదా! నాలుగుకు తర్వాత మనకు పంచభుజి, షడ్భుజి, సప్తభుజి, అష్టభుజి, నవభుజి, దశభుజి, అను సంప్రదాయం కనబడుచున్నది. దానికి పైగా 11 ఏకాదశభుజి, 12 ద్వాదశభుజి, 13 త్రయోదశభుజి, చతుర్థశభుజి అని వ్రాయవచ్చును.

4.3.2 మరికొన్ని ప్రత్యేక పేర్లు

ఒక చతుర్భుజము యొక్క అన్ని భుజములు సమానమైన దానిని సమభుజ చతుర్భుజము (**equilateral**) అందురు. ఒక చతుర్భుజము యొక్క అన్ని కోణములు సమానమైన దానిని సమకోణ చతుర్భుజము (**equiangular**) అందురు.

4-Geometry_Term1.indd 156 17-03-2023 15:43:30

మనము త్రిభుజములలో, అన్ని భుజములు సమానమైన త్రిభుజములను సమభుజ త్రిభుజమనియు, అన్ని కోణములు సమానమై త్రిభుజమును సమకోణ త్రిభుజము (**equiangular**) అనియు పిలిచెదము.

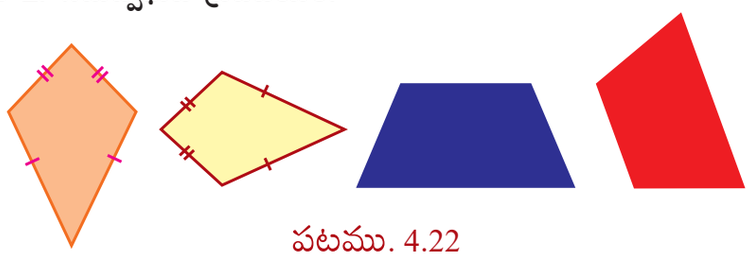
ఆవిధంగా మనకు

ఒక రాంబస్‌ను సమభుజ సమాంతర చతుర్భుజము అని చెప్పవచ్చును.

ఒక దీర్ఘ చతురస్రమును సమకోణ సమాంతర చతుర్భుజము అని చెప్పవచ్చును.

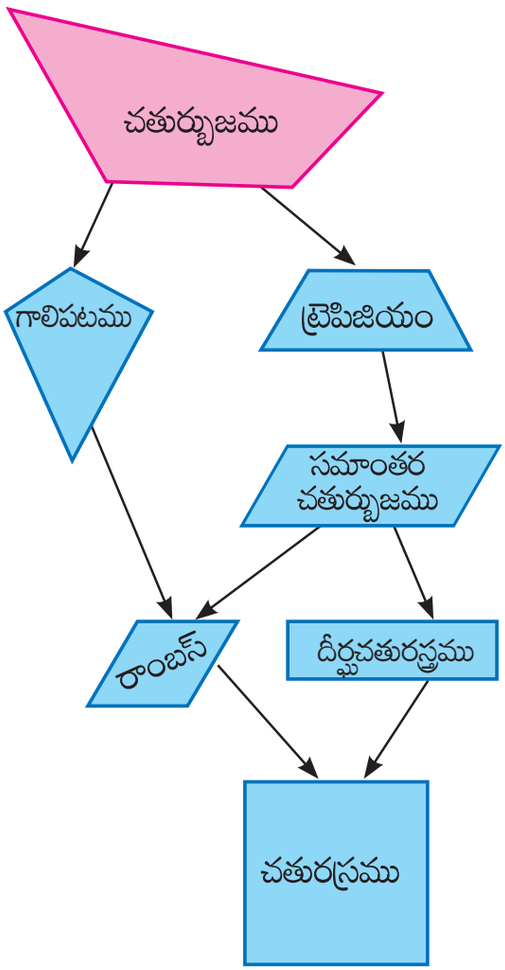
ఒక చతురస్రము సమకోణ సమభుజ సమాంతర చతుర్భుజము అని చెప్పవచ్చును.

ఇక్కడ మనం మరో రెండు విశేషమైన చతుర్భుజములు (**Special Quadrilaterals**) ను చూచెదము. అవి. **1. గాలిపటము 2. సమద్విభుజ ట్రెపిజియం.**



పటము. 4.22

4.3.3 చతుర్భుజముల రకములు



పటము. 4.23

పురోగమన తనిఖీ

క్రింది వానికి జవాబులిమ్ము.

(i) రాంబస్ యొక్క ఎదుటి కోణములు సమానములా?

(ii) ఒక చతుర్భుజములోని ఒక జత ఎదుటి భుజములు సమానములు మరియు సమాంతరములైన దానిని_____ అందురు.

(iii) గాలిపటములోని ఎదుటి భుజములు సమానములా?

(iv) ఏది సమకోణము మరియు సమభుజము కాని సమాంతర చతుర్భుజము అగును.

(v) ఏది సమభుజము మరియు సమకోణము కాని సమాంతర చతుర్భుజమగును.

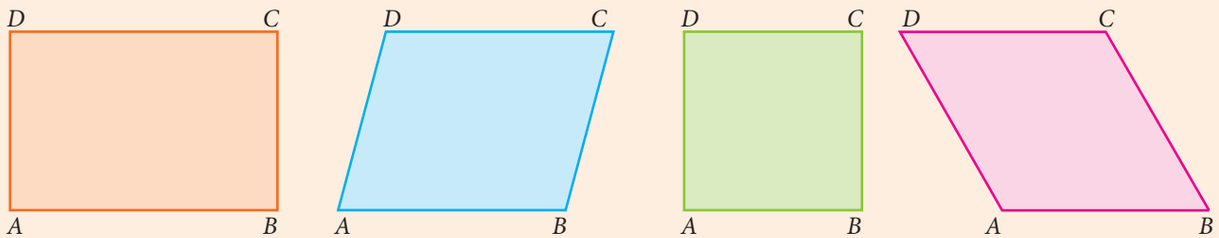
(vi) ఏది సమభుజ మరియు సమకోణ సమాంతర చతుర్భుజము అగును.

(vii) _____ అనునది ఒక దీర్ఘ చతురస్రము, రాంబస్ మరియు సమాంతర చతుర్భుజము.

4-Geometry_Term1.indd 157 17-03-2023 15:43:30

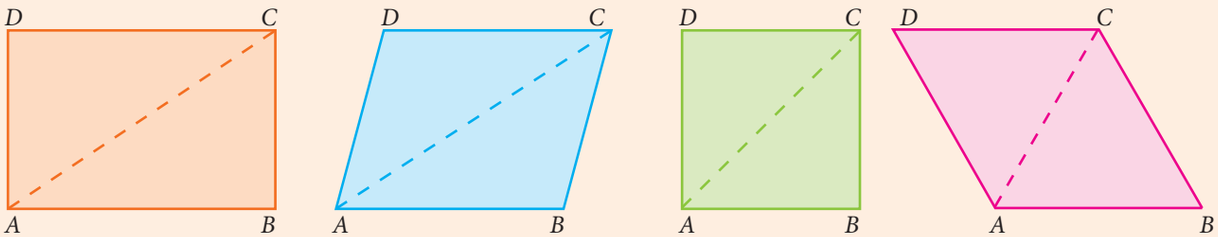
కృత్యము 3

మెట్టు – 1 రంగు కాగితంలో నాలుగు వేర్వేరు చతుర్భుజములను కత్తిరించి వేరు చేయండి?



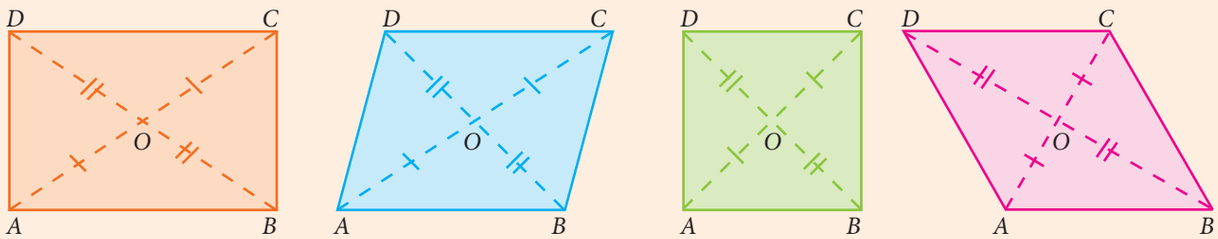
పటము. 4.24

మెట్టు – 2 చతుర్భుజములను కర్ణముల నాదారముగా మడచుము మడతలను అదిమి రేఖలు ఏర్పడునట్లు చేయుము. ఇక్కడ బిందు రేఖలు మడతలను సూచించును.



పటము. 4.25

మెట్టు – 3 చతుర్భుజములను రెండు కర్ణముల ఆధారముగా మడచి రేఖలను ఏర్పరచండి?



పటము. 4.26

వీటిలో రెండు ఎదుటెదుటి త్రిభుజములు ఒకదాని కొకటి సర్వ సమములుగా యుండుటను చూడవచ్చును

వికర్ణముల భాగములను కొలిచి, వికర్ణముల మధ్య కోణములను కొలవండి.

ఇదే మాదిరి, ట్రెపిజియం, సమద్విభుజ ట్రెపిజియం మరియు గాలి పటములకు చేయండి.

పై గల కృత్యము నుండి, వికర్ణముల బాగముల పొడవులను, వికర్ణముల మధ్య కోణములను కొలిచి క్రిందగల పట్టికలో నమోదు చేయుము.

4-Geometry_Term1.indd 158 17-03-2023 15:43:30

వ. సం	చతుర్భుజము పేరు	కర్ణముల పొడవులు						కోణములు			
		AC	*BD*	*OA*	*OB*	*OC*	*OD*	$\angle AOB$	$\angle BOC$	$\angle COD$	$\angle DOA$
1	ట్రెపిజియం										
2	సమద్విభుజ ట్రెపిజియం										
3	సమాంతర చతుర్భుజము										
4	దీర్ఘ చతురస్రము										
5	రాంబస్										
6	చతురస్రము										
7	గాలిపటము										

కృత్యము 4

ఒక బహుభుజి యొక్క కోణముల మొత్తము *(Angle sum for a polygon)*

ABCD అను ఒక చతుర్భుజమును నిర్మించుము

P అను బిందువును లోపల యుంచుము.

PA, *PB*, *PC* మరియు *PD* అను రేఖా ఖండములను కలుపుము.

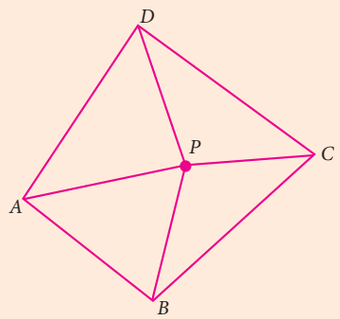
నీకు 4 త్రిభుజములు లభించును.

నాలుగు త్రిభుజముల కోణముల మొత్తము ఎంత?

శీర్షము *P* వద్ద కోణముల మొత్తమెంత?

నీవే ఇప్పుడు చతుర్భుజము *ABCD* యొక్క కోణముల మొత్తము కనుగొన వీలగునా?

ఇదే పద్ధతిని తక్కిన బహుభుజాలకు విస్తరింపనగును



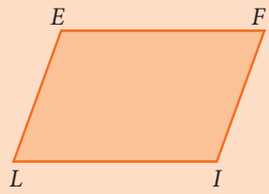
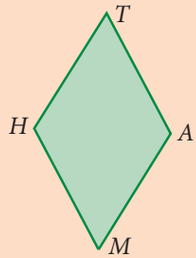
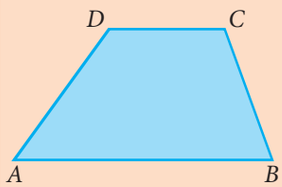
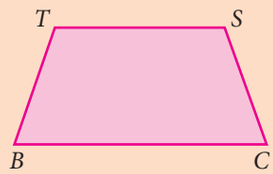
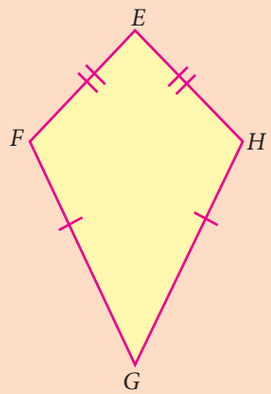
పటము. 4.27

మెదడకు మేత

1. ఒక బహుభుజి యొక్క n భుజములు $(n \geq 3)$ అయిన దాని అంతర కోణముల మొత్తము $(n-2) \times 180°$
2. ఒక క్రమ బహుభుజికు
   - ఒక్కొక్క అంతరకోణ విలువ $\frac{(n-2)}{n} \times 180°$
   - ఒక్కొక్క బహ్యా కోణపు విలువ $\frac{360°}{n}$
   - కుంబాకార బహుభుజి యొక్క భుజమును పొడిగించినచో ఏర్పడు బాహ్య కోణముల మొత్తము $360°$
   - ఒక బహుభుజి యొక్క భుజములు 'n' అయిన దాని కర్ణముల సంఖ్య $\frac{n(n-3)}{2}$

4-Geometry_Term1.indd 159 17-03-2023 15:43:31

4.3.4 చతుర్భుజముల ధర్మములు

పేరు	చిత్రము	భుజములు	కోణములు	వికర్ణములు
సమాంతర చతుర్భుజము		ఎదుటిభుజములు సమాంతరములు మరియు సమానము	ఎదుటి కోణములు సమము మరియు ఏవైన రెండు ఆసన్న కోణముల మొత్తం 180°	కర్ణములు ఒకదానికొకటి సమద్విఖండనము చేసుకొనును
రాంబస్		అన్నిభుజములు సమానము మరియు ఎదుటి భూజాజములు సమాంతరములు	ఎదుటి కోణములు సమము మరియు ఏవైన రెండు ఆసన్న కోణములు మొత్తం 180°	కర్ణములు ఒకదానికొకటి లంబసమద్విఖండన చేసుకొనును
ట్రెపిజియం / సమ లంబచతుర్భుజం		ఒక జత ఎదుటెదుటి భుజములు సమాంతరములు	ఎదుటి కోణములు సమము మరియు ఏవైన రెండు ఆసన్న కోణములు మొత్తం 180°	కర్ణాలు ఒకదానికొకటి సమానముగా నుండవలసిన అవసరము లేదు
సమద్విబాహు సమలంబ చతుర్భుజం		ఒక జత ఎదుటెదుటి భుజములు సమాంతరము, సమాంతరముకాని భుజముల పొడవు సమానము	సమాంతర భుజములు అంతరాభిముఖ కోణములు సమానము	కర్ణము పొడవులు సమానము
గాలిపటము		రెండు జతల ఆసన్న భుజములు సమానము	ఒక జత ఎదుటి కోణములు సమానము	1. కర్ణము ఒకదానికొకటి లంబముగా ఖండించును 2. అల్ప(చిన్న) కర్ణము అధిక (ఎక్కువ) కర్ణముచే సమద్విఖండన చేయును 3. పెద్ద కర్ణములు గాలిపటమును రెండు సర్వసమ త్రిభుజముగా విభజించుము.

4-Geometry_Term1.indd 160 17-03-2023 15:43:31

సూచన

(i) ఒక దీర్ఘ చతురస్రము అనునది సమకోణ సమాంతర చతుర్భుజమగును.

(ii) రాంబస్ అనునది ఒక సమభుజ సమాంతర చతుర్భుజము

(iii) ఒక చతురస్రము అనునది సమభుజ మరియు సమ కోణ సమాంతర చతుర్భుజమగును.

(iv) ఒక చతురస్రము అనునది ఒక దీర్ఘచతురస్రము, ఒక రాంబస్ మరియు ఒక సమాంతర చతుర్భుజము అగును.

పురోగమన తనిఖీ

1. క్రింది వాటికి కారణములను పేర్కొనుము.

   (i) ఒక చతురస్రము అనునది ఒక ప్రత్యేక రకమైన దీర్ఘ చతురస్రము.

   (ii) ఒక రాంబస్ అనునది ఒక ప్రత్యేక రకమైన సమాంతర చతుర్భుజము.

   (iii) రాంబస్ మరియు గాలిపటము అనునది రెండును ఒక ఉమ్మడి ధర్మమును కలిగియున్నవి.

   (iv) ఒక చతురస్రము మరియు రాంబస్ అనునవి ఒక ఉమ్మడి గుణమును కలిగియున్నవి.

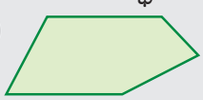
2. క్రింది జతల త్రిభుజములను ఒకటిగా కలిపినపుడు ఎటువంటి చతుర్భుజము లభించును?

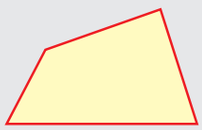
   (i) సమభుజ త్రిభుజము

   (ii) లంబకోణ త్రిభుజము

   (iii) సమద్విభుజ త్రిభుజము

3. ఈ క్రింది వాటిలో ఏవి సమాంతర చతుర్భుజము కావు.

   (i)  (ii)  (iii) 

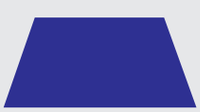
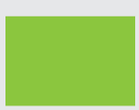
   (iv)  (v)  (vi) 

4. ఏవి చతుర్భుజములు కావు?

   (i)  (ii)  (iii)  (iv) 

   (v)  (vi)  (vii)  (viii) 

5. ఈ క్రింది వాటిలో ఏవి ట్రెపిజియములు కావు.

   (i)  (ii)  (iii) 

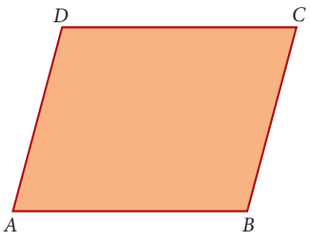
   (iv)  (v)  (vi) 

4-Geometry_Term1.indd 161 17-03-2023 15:43:31

4.3.5 సమాంతర చతుర్భుజము యొక్క ధర్మములు

మనము ఇప్పుడు ఒక ఆశక్తికరమైన ప్రయాణమును ప్రారంభించెదము. పలు విధములైన చతుర్భుజముల మధ్య పయనించినప్పుడుఎదుర్కొను ధర్మములను గుర్తుంచుకొనుము. ఏ ధర్మములను చూస్తామో అవి సత్యములని ఎట్లు తెలుసుకొనుట సాధ్యమగును.

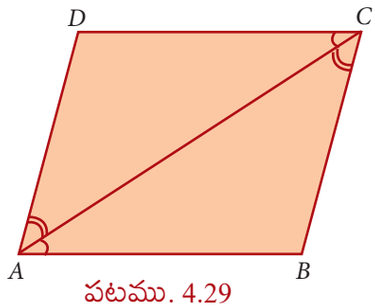
ఉదాహరణకు సమాంతర చతుర్భుజములో ఎదెటి భుజములు సమాంతరములు, కాని అవి సమానమా? అనేక సార్లు సమాంతర చతుర్భుజములను నిర్మించి సత్యమా! అని సోదించి తెలుసుకొనుటకు సాధ్యమగును. వాస్తవముగా (నిజంగా) వాటి అన్నింటిలోను ఎదుటి భుజములు సమముగానే ఉండును. కాబట్టి అన్ని సమాంతర చతుర్భుజములలోను ఎదుటి భుజములు సమముగానే యుండును అను ముగింపునకు వచ్చుటకు సాధ్యమగునా? సాధ్యముకాదు ఒక వేళ ఆ తర్వాత మనం కొంచం కూడా తలవని ఎదుటి భుజములు సమముగా తేని ఒక సమాంతర చతుర్భుజమును చూచుటకు అవకాశము ఉన్నది కాబట్టి మనకు ఒక ముఖ్య నిరూపణ అవసరము



పటము. 4.28

క్రింద యివ్వబడిన పటములో (4.34) $ABCD$ సమాంతర చతుర్భుజమును గమనించెదము. దీనిలో $AB = CD$ మరియు $AD = BC$, అయినను వాటిని నిశ్చయముగా చెప్పగలమా! త్రిభుజములను మరియు వాటి ధర్మములను మనకు తెలియును. వాటి మూలముగా ప్రయత్నించదమన్నను $ABCD$. సమాంతర చతుర్భుజముతో త్రిభుజములు ఏదియులేదు.

అయినను AC ను కలుపుట వలన త్రిభుజములను చాలా సులభముగా ఏర్పరచవచ్చును. (ఈ విధంగా BD ను కలుపవచ్చును దీని గూరించి తర్వాత తెలుసుకొనెదము) ఇప్పుడు మనకు AC ని. ఉమ్మడి భుజముగా గల త్రిభుజములుADC మరియు ABC లు లభించును. ఏదో ఒక విధంగా ఈ రెండు త్రిభుజములున్న సర్వసమమని నిరూపించినా $AB = CD$ మరియు $AD = BC$, అనునది నిశ్చయమగును!



పటము. 4.29

ΔADC మరియుΔABC అనునవి సర్వసమమైనవి అనుటను ఏ విధంగా నిరూపించ సాధ్యమగును. సర్వసమ గుణమును స్థాపించుటకు పలు విదులు ఉండుట వలన వాటిలో ఏది ఇక్కడ సరియైనది. అనుటను పరిశీలించవలయును.

ఇంత వరకు$ABCD$ అనునది ఒక సమాంతర చతుర్భుజము అను సత్యమును మనము ఉపయోగించనే లేదు. కాబట్టి $AB \| DC$ మరియు $AD \| BC$ అయిన ΔADC మరియు ΔABC అనునది సర్వసమమైనది అని చూపవచ్చును. భుజములు సమాంతరమైనందు వలన కొన్ని కోణములు సమముగానే ఉండవలెను. అటువంటి ధర్మములు మనకు తెలియునా? అవును మన చేత సాధ్యమగును. తిర్యగ్రేఖలు గూర్చిన విషయాలే కదా! ఇప్పుడు మనకు అర్థమగుచున్నది!

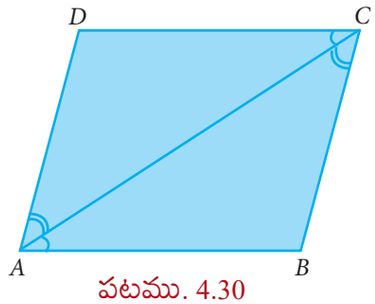
$AD \| BC$ మరియు AC ఒక తిర్యగ్రేఖ అనుట వలన $\angle DAC = \angle BCA$. అదేవిధంగా మరియు $AB \| DC$ఒక తిర్యశ్రేఖ అనుటవలన ACఉమ్మడి భుజము అనుటవలన కో-భు-కో (ASA) నియమము ప్రకారము ΔADC మరియు ΔABC సర్వసమము అని కావలసిన తీర్మాణమునకు రావడమే సాధ్యమగును. దీని మూలముగా $AB = CD$ మరియు $AD = BC$ అనునది నిశ్చయమగును. కాబట్టి ఒక సమాంతర చతుర్భుజము యొక్క ఎదుటి భుజములు ఎల్లప్పుడునూ సమముగానే ఉండును

యింతవరకు తెలుసుకొన్న అంశములను సాంప్రదాయక ఆధారములాగా ***(formal proof)*** వ్రాయవచ్చును.

4-Geometry_Term1.indd 162 17-03-2023 15:43:31

సిద్ధాంతము 1

ఒక సమాంతర చతుర్భుజమునందు ఎదుటిభుజములు సమానము



పటము. 4.30

దత్తాంశము $ABCD$ ఒక సమాంతర చతుర్భుజము

సారాంశము $AB=CD$ మరియు $DA=BC$

నిర్మాణము AC ను కలుపుము

ఉపపత్తి $ABCD$ అనునది ఒక సమాంతర చతుర్భుజము

$AD \parallel BC$ మరియు AC అనునది తిర్యగ్రేఖ

$$\angle DAC = \angle BCA \quad \rightarrow(1) \text{ (ఏకాంతర కోణములు సమానం)}$$

$AB \parallel DC$ మరియు AC అనునది తిర్యగ్రేఖ

$$\angle BAC = \angle DCA \quad \rightarrow(2) \text{ (ఏకాంతర కోణములు సమానం)}$$

ΔADC మరియు ΔCBA లలో

$$\angle DAC = \angle BCA \quad (1) \text{ నుండి}$$

AC అనునది ఉమ్మడి భుజము

$$\angle DCA = \angle BAC \quad (2) \text{ నుండి}$$

$$\Delta ADC \cong \Delta CBA \quad (\text{కో - భు - కో})$$

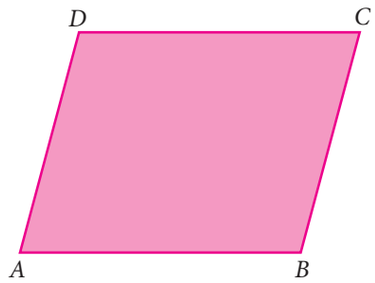
కావున $AD = CB$ మరియు $DC = BA$ (అనురూప భుజములు సమానము)).

సిద్ధాంతము 2

ఒక సమాంతర చతుర్భుజమునందు కర్ణములు రెండు సర్వసమ త్రిభుజములుగా విభజించును.

$\angle DAC = \angle BCA$ మరియు $\angle BAC = \angle DCA$. అనుదాని నుండి పై నిరూపణ లబించినదని గుర్తించవలెను,

$$\angle BCA + \angle BAC = \angle DCA + \angle DAC$$



పటము. 4.31

కాని మనకు తెలిసినంత వరకు :

$$\angle B + \angle BCA + \angle BAC = 180$$

మరియు $\angle D + \angle DCA + \angle DAC = 180$

$\therefore \angle B = \angle D$ అని ఉండవలెను.

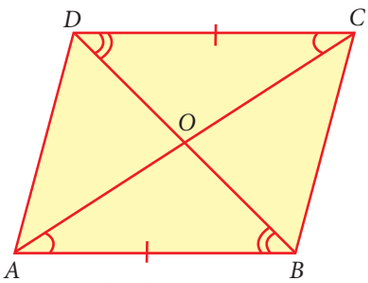
ఈ విధముగా కొంత పట్టుదలతో ప్రయత్నించిన $\angle A = \angle C$ అని చూపవచ్చును. ఈ విధముగా క్రింది సిద్ధాంతమును మనచేత నిరూపించ సాధ్యమగును

4-Geometry_Term1.indd 163 17-03-2023 15:43:31

సిద్ధాంతము 3

ఒక సమాంతర చతుర్భుజములో ఎదుటి కోణములు సమము

ఇప్పుడు త్రిభుజముల సర్వసమ గుణముల మార్గమున ఇంకను కొన్ని త్రిభుజములను చూడవచ్చును. పై పటములో గల రెండు కర్ణములైన AC మరియు DB. లను గమనించెదము. ΔADC మరియు ΔCBA అనునవి సర్వసమము అనుటకు మనము ముందుగానే తెలుసుకొని యున్నాము. అదే విదమైన వాదముతో ΔDAB మరియుΔBCD అనునవి సర్వసమము అని మనచే నిరూపించవచ్చును. ఇంకను కొన్ని సర్వసమ త్రిభుజములను ఈ పటములో కనుగొనగలవా?



పటము. 4.32

అవును. రెండు కర్ణములు O అను బిందువులో సందించును. ఇప్పుడు మనచే ΔAOB, ΔBOC, ΔCOD మరియు ΔDOA అను నాలుగు త్రిభుజములను చూడవచ్చును. వీటిలో సర్వసమ జతలను మీచే కనుగొనుటకు వీలగునా?

AB మరియుCD సమాంతరము మరియు సమానము అగుట వలన, ΔAOB మరియుΔCOD అనునవి సర్వసమానము అని సులభముగా ఊహించవచ్చును. మరల కో-భు-కో నియమములనుపయోగించి, ఈ సమయములో$\angle OAB = \angle OCD$ మరియు$\angle ABO = \angle CDO$. అని యుండుటకు ప్రయత్నించెదము. కాని దీనిలో మొదటిది క్రింది ప్రవచనమైన$\angle CAB = \angle ACD$ (ముందే నిరూపించి యున్నాము) పైగా $\angle CAB$ మరియు $\angle OAB$ అనునవి ఒకే కోణములే అనుటను గమనించెదము. (అదే మాదిరి ($\angle OCD$ మరియు $\angle ACD$) సమములు) ఇప్పుడు BD అనునవి ఒక తిర్యక్ రేఖ అను కారణమును ఉపయోగించుట వలన, $\angle ABD = \angle CDB$,అనునది లభించును. కాని తర్వాత $\angle ABD$ అనునదియు $\angle ABO$, అనునదియు ఒకటే. $\angle CDB$ అనునదియు$\angle CDO$, అనునదియు ఒకటే అను తీర్మానమునకు వచ్చెదము.

మరల దీనిని పద్ధతిగా నిరూపించుట ద్వారా, మరొక సిద్ధాంతము లభించును.

సిద్ధాంతము 4

సమాంతర చతుర్భుజము యొక్క కర్ణముల ఒకదానికొకటి సమద్విఖండనము చేసుకొనును.

సమాంతర చతుర్భుజము యొక్క సిద్ధాంతములను ఇప్పుడు బలపరచెదము. ప్రక్క గల పెట్టెలోని సమాచారములలో ఇవ్వబడిన ప్రవచనములను ఒక్కొక్కటిగా పరిశీలించెదము. ఒక్కొక్క ప్రవచనము ప్రత్యేక దర్మమును కలిగియుండుట వలన ఒక చతుర్భుజము అను తీర్మానమునకు వచ్చుటకు సహాయపడును. అటువంటి సమాంతర చతుర్భుజము ఏ రకమునకు చెందియుండవచ్చును?

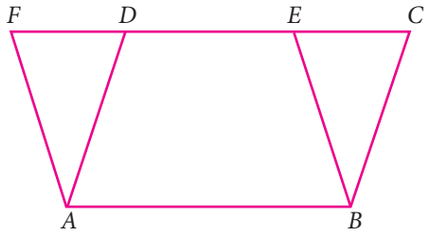
ఇప్పుడు సమాంతర చతుర్భుజములు గూర్చిన మరిన్ని ఆసక్తికరమైన గుణముల (ధర్మముల)ను తెలుసుకొనెదము. రెండు లేక అంతకు పైగల సమాంతర

- ఒక్కొక్క జత ఎదుటెదుటి భుజములు సమాంతరం.
- ఒక్కొక్క జత ఎదుటెదుటి భుజములు సమానము.
- అన్ని కోణములు లంబకోణములు.
- కర్ణములు ఒకదానికొకటి సమద్విఖండనము చేసుకొనును.
- కర్ణములు సమము.
- కర్ణములు లంబములు మరియు సమము.
- కర్ణములు ఒకదానికొకటి లంబముగా సమద్విఖండనము చేసుకొనును.
- ఒక్కొక్క జతఆసన్న కోణములు జత సంపూరకములు

4-Geometry_Term1.indd 164 17-03-2023 15:43:32

చతుర్భుజముల ఏదేని ఒక ధర్మమును మనచేత ప్రయత్నించి నిరూపించుటకు సాధ్యమగునా? క్రింది పటము (పటము 4.33)లో యున్నట్లు ఒకే భుజమును ఆధారముగా కొన్ని రెండు సమాంతర చతుర్భుజముల ధర్మమును గూర్చి పరిశోధించెదము.

$ABCD$ మరియు $ABEF$ వంటి రెండు సమాంతర చతుర్భుజముల ఉమ్మడి ఆధారభుజము AB అగును. ΔADF మరియు ΔBCE. అను ఒక జత త్రిభుజములు సర్వ సమముగా యున్నవి అనుటను మనం సులభంగా చూడ సాధ్యమగును. ఇంతకు ముందే $AD = BC$ మరియు $AF = BE$. అని యున్నవి. కాని $AD \| BC$ మరియు $AF \| BE$ గా యున్నందున AD మరియు AF లచే ఏర్పడు కోణము BC మరియు BE. సమముగా యుండవలెను. కాబట్టి $\angle DAF = \angle CBE$ ఆ విధంగా ΔADF మరియు ΔBCE త్రిభుజములు సర్వసమమైనవి.



పటము. 4.33

ఇటువంటి పరిశీలనలు ఇంకను కొన్ని విషయములు తెలుసుకొనుటకు పునాదిగా యుండును. సర్వసమ త్రిభుజములు ఒకటే వైశాల్యములను కలిగి యుండును. అందువలన $ABCD$ మరియు ABE సమాంతర చతుర్భుజముల వైశాల్యముల గూర్చిన ఆలోచన మనకు వచ్చును.

$ABCD$ సమాంతర చతుర్భుజము యొక్క వైశాల్యము= $ABED$ చతుర్భుజ వైశాల్యము + ΔBCE వైశాల్యము

$= ABED$ చతుర్భుజ వైశాల్యము + ΔADF వైశాల్యము

$= ABEF$ వైశాల్యము

ఈ విధంగా వేరొక సిద్ధాంతమును నిరూపించవచ్చును:

సిద్ధాంతము 5:

ఒకే ఆధారభుజమును, ఒక జత సమాంతర రేఖల మధ్యను అమరిన సమాంతర చతుర్భుజముల వైశాల్యములు సమానము.

ఈ పద్ధతులు ఇంకను ఎన్నో అంశములను నిరూపించును. వీటిని ఉప సిద్ధాంతములు (*Corollaries*) అని పిలువబడును. వీటికి ప్రత్యేక నిరూపణలు అవసరం లేదు.

ఉప సిద్ధాంతము 1: ఒకే భుజము, ఒక జత సమాంతర రేఖల మధ్య అమరిన రెండు త్రిభుజముల వైశాల్యములు సమానము.

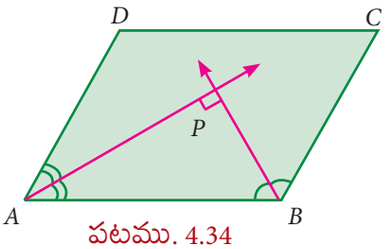
ఉప సిద్ధాంతము 2: ఒకే ఆధార భుజమును కలిగిన ఒక జత సమాంతరముల మధ్య అమరిన ఒక దీర్ఘ చతురస్రము మరియు సమాంతర చతుర్భుజముల వైశాల్యములు సమానము..

సిద్ధాంతములు, ఉప సిద్ధాంతములనబడు ఈ ప్రవచనములు, సమాంతర చతుర్భుజములు ఎంత పెద్దవైనను, శీర్షముల వద్ద గల ఎంత పెద్ద కోణములైనను, భుజముల కొలతలు చాలా ఎక్కువగా యున్నను, అన్ని సమాంతర చతుర్భుజములకు అన్వయించును (వర్తించును).

4-Geometry_Term1.indd 165 17-03-2023 15:43:32

ఉదాహరణ 4.1

$ABCD$ సమాంతర చతుర్భుజములో ఎదుటెదుటి కోణములు $\angle A$ మరియు $\angle B$ యొక్క రెండు కోణసమద్వి ఖండన రేఖలు P లో ఖండించును అయిన $\angle APB = 90^o$ అని నిరూపించుము



పటము. 4.34

సాధన

$ABCD$ సమాంతర చతుర్భుజములో $\angle A$ మరియు $\angle B$ అనునది ఎదుటెదుటి కోణములు, AP మరియు BP యొక్క రెండు కోణసమద్వి ఖండన రేఖలు.

సమాంతర చతుర్భుజములో ఎదుటెదుటి కోణముల మొత్తము సంపూరములు. కావున

$$\angle A + \angle B = 180^O$$

$$\frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B = \frac{180^O}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad \angle PAB + \angle PBA = 90^O$$

ΔAPB లో,

$$\angle PAB + \angle APB + \angle PBA = 180^O \text{ (త్రిభుజము యొక్క కోణముల మొత్తం సిద్ధాంతము)}$$

$$\angle APB = 180^O - [\angle PAB + \angle PBA]$$

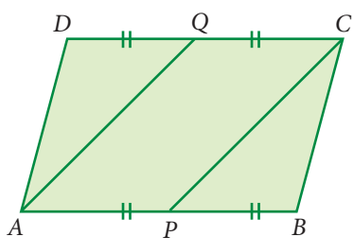
$$= 180^O - 90^O = 90^O \qquad \text{నిరూపించడమైనది.}$$

ఉదాహరణ 4.2

పటము 4.41లో $ABCD$ యివ్వబడిన సమాంతర చతర్భుజము. P మరియు Q వరుసగా AB మరియు DC భుజములు యొక్క మధ్య బిందువులు అయిన $APCQ$ ఒక సమాంతర చతుర్భుజమని నిరూపించుము.

సాధన

P మరియు Q వరుసగా AB మరియు DC యొక్క మధ్య బిందువులు అగును



పటము. 4.35

$$AP = \frac{1}{2}AB \text{ మరియు}$$

$$QC = \frac{1}{2}DC \qquad (1)$$

అయితే $\quad AB = DC$ (సమాంతర చతుర్భుజములలో ఎదుటెదుటి భుజములు సమానము)

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}DC$$

$$\Longrightarrow \quad AP = QC \qquad (2)$$

4-Geometry_Term1.indd 166 17-03-2023 15:43:33

పైగా , $AB \parallel DC$

$\Longrightarrow$ $AP \parallel QC$ (3) [$\because$ $ABCD$ ఒక సమాంతర చతుర్భుజమగును]

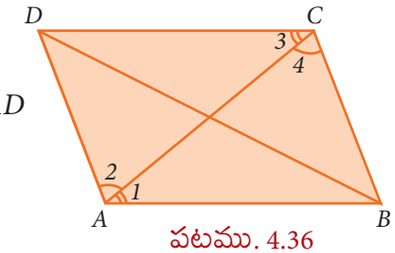
కావున, $APCQ$ చతుర్భుజములో $AP = QC$ మరియు $AP \parallel QC$, [(2)మరియు(3) ల నుండి]

$APCQ$ చతుర్భుజము , ఒక సమాంతర చతుర్భుజమగును.

ఉదాహరణ 4.3

$ABCD$ సమాంతర చతుర్భుజము. పటం 4.42 లో $\angle BAD = 120^\circ$ మరియు AC అనునది $\angle BAD$ యొక్క కోణ సమద్విఖండన రేఖ అయిన $ABCD$ ఒక రాంబస్ అగునని నిరూపించుము.

సాధన



పటము. 4.36

ఇవ్వబడినది $\angle BAD = 120^\circ$ మరియు AC అనునది $\angle BAD$ యొక్క కోణసమద్వి ఖండన రేఖ

$$\angle BAC = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ$$

$$\angle 1 = \angle 2 = 60^\circ$$

ఇచ్చట $AD \parallel BC$ మరియు AC అనునది తిర్యక్‌రేఖ

$$\angle 2 = \angle 4 = 60^\circ$$

ΔABC. అనునది సమభుజ త్రిభుజము [$\because \angle 1 = \angle 4 = 60^\circ$]

$\Longrightarrow$ $AB = BC$

$ABCD$ అనునది ఒక సమచతుర్భుజము (రాంబస్) అగును.

ఉదాహరణ 4.4

$ABCD$ సమాంతర చతుర్భుజములో P మరియు Q ,DB రేఖలపై బిందువులు $PD = BQ$ అయిన $APCQ$ ఒక సమాంతర చతుర్భుజము అని నిరూపించుము.

సాధన

$ABCD$ ఒక సమాంతర చతుర్భుజము.

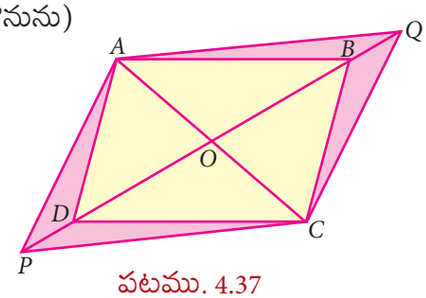
$OA = OC$ మరియు

$OB = OD$ ($\because$కర్ణముల సమద్విఖండన చేసుకొనును)

ఇపుడు $OB + BQ = OD + DP$

$OQ = OP$ మరియు $OA = OC$

$APCQ$ ఒక సమాంతర చతుర్భుజమగును.



పటము. 4.37

4-Geometry_Term1.indd 167 17-03-2023 15:43:33

అభ్యాసము 4.2

1. ఒక చతుర్భుజము యొక్క కొణముల నిష్పత్తులు 2 : 4 : 5 : 7. లో యుండిన వాటి కోణముల కొలతలను కనుగొనుము

2. $ABCD$ చతుర్భుజములో $\angle A = 72°$ మరియు $\angle C$ అనునది $\angle A$ యొక్క సంపూరకము, మిగిలిన రెండు కోణములు $2x-10$ మరియు $x+4$ అయిన x యొక్క విలువను అన్ని కోణ కొలతలను కనుగొనుము.

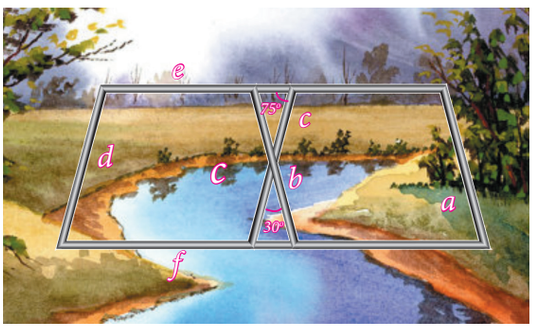
3. $ABCD$ ఒక దీర్ఘచతురస్రము. వాటి కర్ణములు AC మరియు BD లు O వద్ద ఖండించుకొనును. $\angle OAB = 46°$ అయిన, $\angle OBC$ ను కనుగొనుము

4. రాంబస్‌లో కర్ణముల పొడవులు 12 సెం.మీ మరియు 16 సెం.మీ అయిన దాని భుజము కొలతను కనుగొనుము.

5. సమాంతర చతుర్భుజము యొక్క కోణసమద్విఖండన రేఖలు ఒక దీర్ఘచతురస్రమును ఏర్పరచునని నిరూపించుము.

6. ఒక త్రిభుజము మరియు సమాంతర చతుర్భుజములు ఒకే ఆధారముపై మరియు ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్య అమరినచో, త్రిభుజ వైశాల్యము, సమాంతర చతుర్భుజవైశాల్యములో సగముండునని నిరూపించుము.

7. ఇనుపుకమ్మీలు a, b, c, d, e మరియు f అనునది పటములో ఉండునట్లు ఒక వంతెనను ఏర్పరచును. ఇందులో $a \parallel b$, c || d , $e \parallel f$, అయిన ఇవ్వబడిన కోణములను కనుగొనుము.



పటము. 4.38

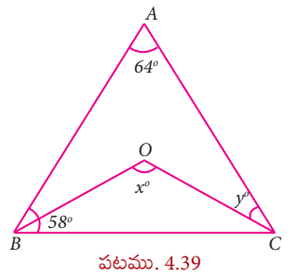
(i) b మరియు c

(ii) d మరియు e

(iii) d మరియు f

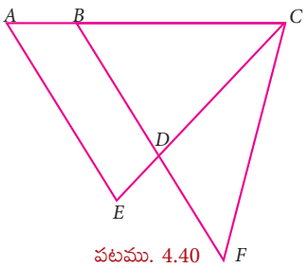
(iv) c మరియు f

8. పటము 4.39, $\angle A = 64°$, $\angle ABC = 58°$. BO మరియు CO అనునది $\angle ABC$ మరియు $\angle ACB$ యొక్క సమద్విఖండన రేఖలు అయిన ΔABC లో $x°$ మరియు $y°$ ని కనుగొనుము.



పటము. 4.39

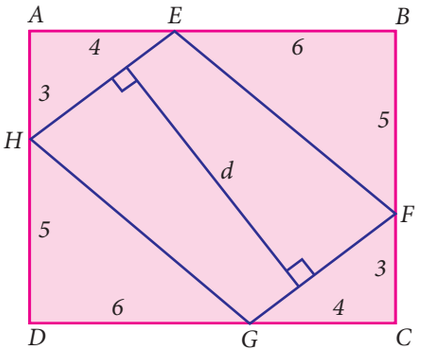
9. పటము 4.40లో, $AB = 2$, $BC = 6$, $AE = 6$, మరియు $BF = 8$, $CE = 7$ మరియు $CF = 7$, అయిన $ABDE$ చతుర్భుజము యొక్క వైశాల్యము మరియు ΔCDF యొక్క వైశాల్యమునకు ఉన్న నిష్పత్తిని కనుగొనుము.



పటము. 4.40

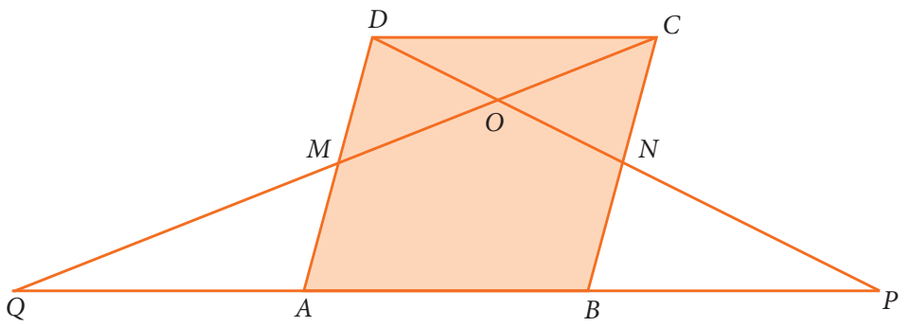
4-Geometry_Term1.indd 168 17-03-2023 15:43:33

10. $ABCD$ సమాంతర చతుర్భుజములో, AB కి సమాంతరము DC మరియు DA కి సమాంతరము CB భుజము AB యొక్క పొడవు 20 సెం.మీ. బిందువు E అనునది $AE = 3$ సెం.మీ కొలతను కలిగి AB మధ్యలో ఉన్నది. D మరియు C ల మధ్యబిందువు F. సమాంతర చతుర్భుజమును సమాన వైశాల్యము కలిగినట్లు EF అను ఖండనరేఖ విభజించినచో DF యొక్క పొడవును కనుగొనుము.



పటము. 4.41

11. పటములో సమాంతర చతుర్భుజము $ABCD$ లో శీర్షము D నుండి గీయబడిన రేఖ DP అనునది BC యొక్క మధ్య బిందువు N వద్దను, AB ని పొడిగించగా P వద్ద సందించును. C నుండి గీయబడిన రేఖ CQ అనునది AD యొక్క మధ్య బిందువు M వద్దను, AB ని పొడిగించగా, Q వద్ద సంధించును. DP మరియు CQ రేఖలు O వద్ద సంధించినచో ΔQPO యొక్క వైశాల్యము అనునది సమాంతర చతుర్భుజము $ABCD$ యొక్క వైశాల్యములో $\frac{9}{8}$ వ భాగము అని చూపుము.



పటము. 4.42

4.4 వృత్తము యొక్క భాగములు

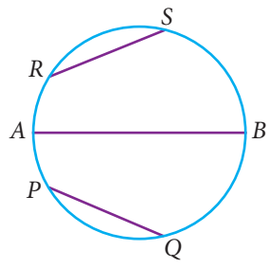
ఒక తలములో, ఒక స్థిర బిందువు నుండి ఒక స్థిర దూరములోనున్న బిందువుల సమితినే వృత్తమని వివరించవచ్చును. ఆ స్థిర బిందువు వృత్తము యొక్క కేంద్రము అగును. ఆ స్థిర దూరము వృత్తము యొక్క వ్యాసార్ధము అగును.


పటము. 4.43

4-Geometry_Term1.indd 169 17-03-2023 15:43:34

ఒక రేఖ వృత్తమును రెండు బిందువుల వద్ద ఖండించినచో ఆరేఖను ఆ వృత్తము యొక్క **చేధనరేఖ** అందురు.

ఒక రేఖా ఖండం యొక్క అంత్య బిందువులు వృత్తముపై అమరియున్న యెడల దీనిని ఆ వృత్తము యొక్క **జ్యా** అందురు.

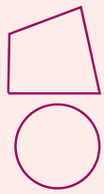


పటము. 4.44

ఒక వృత్తకేంద్రము గుండా పోవు 'జ్యా' ను వృత్త వ్యాసము అందురు. ఒక వృత్తపు సరిహద్దును దాని ఫరిది అందురు బహుభుజిలలో, దానికి చుట్టుకొలత అను పదమును ఉపయోగించెదము

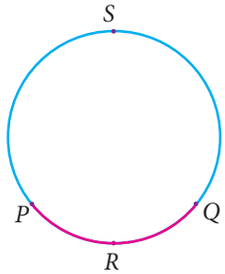
సూచన

ఒక వృత్తమనునది బహు భుజి నుండి విభిన్నముగా నుండును. ఒక బహుభుజి (ఉదాహరణము చతుర్భుజము) భుజములు మరియు శీర్షములు గలది. అదే సమయంలో వృత్తము క్రమమైన సరళ వక్రాకారమగును.



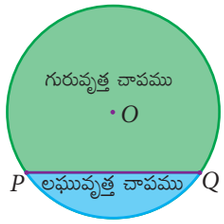
వృత్తాకార కాగితమును కేంద్రంగుండా కాకుండ వీలగు వేరు మార్గము గుండా మడుచునపుడు, (పటము 4.44) వృత్తము పై రెండు బిందువులు ఆమడతపై సందించుట గమనించవచ్చును. ఆ మడతలను వృత్తము యొక్క జ్యా అని పిలువబడును. ఇలాగే వృత్తముపై గల రెండు బిందువులను కలుపు రేఖా ఖండము, ఆ వృత్తము యొక్క జ్యా అని పిలువబడును. పటములో AB, PQ మరియు RS అనునవి వృత్తము యొక్క 'జ్యా' లు అగును.

ఇప్పుడు అదే వృత్తముపై P, R, Q మరియు S (పటము 4.45) అను నాల్గు బిందువులను గుర్తించుము. ఇచ్చట PRQ మరియు QSP అనునవి వృత్తము యొక్క ఎడతెగని భాగములగును. ఈ భాగములను $\overset{\frown}{PRQ}$ మరియు $\overset{\frown}{QSP}$ లేక సూక్ష్మంగా $\overset{\frown}{PQ}$ మరియు $\overset{\frown}{QP}$ అని గుర్తించవచ్చును. వృత్తము యొక్క ఎడతెగని ఈ భాగమును వృత్తము యొక్క చాపము అని గుర్తించబడును. సామాన్యముగా చాపములు గడియార అపసవ్య దిశలో గుర్తించబడును.



పటము. 4.45

బిందువులు P మరియు Q (పటము 4.46) అనునవి పూర్ణ వృత్తమును రెండు భాగములుగా విభజించును. ఒకటి ఎక్కువ పొడువైనది మరొక్కటి తక్కువ పొడువైనది. ఎక్కువ పొడవైనదానిని గురు వృత్త చాపము $\overset{\frown}{QP}$ మరియు తక్కువ పొడవైనదానిని లఘు వృత్త చాపము $\overset{\frown}{PQ}$ అని పిలువబడును.



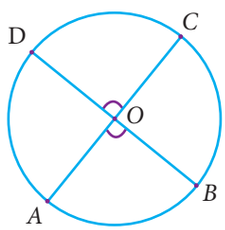
పటము. 4.46

ఇప్పుడు పటము 4.6 లో జ్యా PQ మరియు గురు వృత్త చాపము $\overset{\frown}{QP}$ లచే నుండి పూరించిన భాగము ను తీసుకొనిన దానిని గరిష్టవృత్త ఖండము అని పిలువబడును. అట్లే అదే జ్యా మరియు లఘు వృత్త చాపము నుండి పూరించబడిన భాగము ను కనిష్ట వృత్త ఖండము అని పిలువబడును.

సూచన

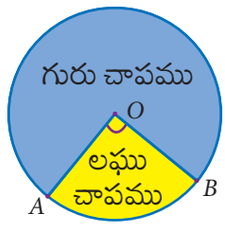
ఒక వృత్తము యొక్క వ్యాసము అనునది.

- వృత్తమును రెండు సమ భాగాములుగా విభజించు రేఖాఖండము
- వృత్తము యొక్క అతి పొడవైన జ్యా
- వృత్తము యొక్క సౌష్ఠవ రేఖ
- వృత్త వ్యాసార్ధమునకు రెండు రెట్లు పొడువైనదిగా యుండును.



పటము. 4.47

వృత్తములో రెండు చాపములు $\overset{\frown}{AB}$ మరియు $\overset{\frown}{CD}$ (పటము 4.47) అనునది వృత్త కేంద్రములో సమాన కోణములను ఏర్పరచిన వాటిని, సర్వ సమాన చాపములు అనబడును. కాబట్టి వాటిని $\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{CD}$ అని వ్రాయవచ్చును. దీని నుండి $m\overset{\frown}{AB} = m\overset{\frown}{CD}$ అగును. అందువల్ల $\angle AOB = \angle COD$



పటము. 4.8

4-Geometry_Term1.indd 170 17-03-2023 15:43:35

ఇచ్చట పటము 4.48 లో రెండు వ్యాసార్ధములు మరియు చాపముచే పూరించబడిన భాగమును వృత్తకోణ భాగము అనవచ్చును. వృత్త ఖండము లాగే లఘు చాపము లఘువృత్త కోణము భాగమును, పెద్ద చాపమైనది గురు వృత్త కోణ భాగమును సూచించుట గమనించవచ్చును.

ఏకకేంద్ర వృత్తములు

ఒకే కేంద్రములో వేర్వేరు వ్యాసార్ధములు కలిగిన వృత్తములు ఏక కేంద్ర వృత్తములు అనబడును. నిత్య జీవితములో మనం చూడు కొన్ని ఉదాహరణములు.



ఒక విలువిద్య లక్ష్యం



ఒక క్యారమ్ నాణెము



నీటి అలలు

పటము. 4.49

సర్వ సమాన వృత్తములు

రెండు వృత్తములు సర్వ సమానములు అనుకొనిన ఒకదానికొకటి ఒకేవిధంగా నుండును. అనగా అవి ఒకే కొలతలు కలిగినవి నిత్య జీవితములో మనం గమనించు కొన్ని ఉదాహరణములు.



ఒకే ఎద్దుల బండిలోని రెండు చక్రములు



ఒలంపిక్ చక్రములు

మెదడుకు మేత

పటములో ఉన్నట్లు నాలుగు సర్వసమాన వృత్తములు గీయుము. మీరు గమనించినది ఏమి?



పటము. 4.50

వృత్తమునుసరించి ఒక బిందువు అమరు స్థానం

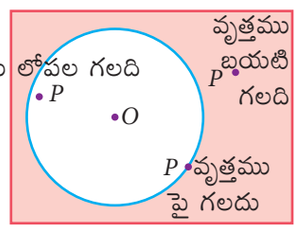
ఒక తలములో ఒక వృత్తమును తీసికొని (పటము 4.11) వృత్తము అమరిన తలములో బిందువు P గలదు అనుకొనుము. వృత్త కేంద్రము O నుండి బిందువు P కు గల దూరము OP అనుకొనిన P యొక్క అమరు స్థానము అనునది.

(i) OP = వ్యాసార్ధము (బిందువు, వృత్తము పై గలదు)

(ii) $OP <$ వ్యాసార్ధము (బిందువు, వృత్తము లోపల గలది)

(iii) $OP >$ వ్యాసార్ధము (బిందువు, వృత్తము బయటి గలది)

కావున ఒక వృత్తమనునది అది అమరిన తలమును మూడు భాగములుగా విభజించును.



పటము. 4.51

4-Geometry_Term1.indd 171 17-03-2023 15:43:35

పురోగమన తనిఖీ

సత్యమా. అసత్యమా అని తెలుపుము

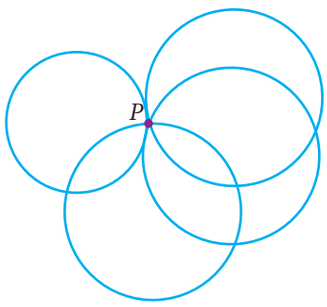
1. ప్రతి వృత్త జ్యా ఖచ్చితంగా వృత్తము లో రెండు బిందువులు కలిగియుండును.
2. వృత్తములోని అన్ని వ్యాసార్ధములు ఒకే పొడవు కలిగియుండును.
3. వృత్తపు ఒక్కొక్క వ్యాసార్ధము ఒక జ్యా అగును.
4. వృత్తములోని ఒక్కొక్క జ్యా ఒక వ్యాసమగును
5. వృత్తములోని ఒక్కొక్క వ్యాసము ఒక జ్యా అగును.
6. ఒక వృత్తమునకు ఎన్ని వ్యాసములైనా ఉండవచ్చును.
7. రెండు వ్యాసములు ఒకే చివరి బిందువులు కలిగి యుండడం అసాధ్యం.
8. ఒక వ్యాసమనునది తలమును మూడు వేర్వేరు భాగములుగా విభజించును. s.
9. ఒక వృత్తమును ఒక గురు వృత్త చాపము ఒక లఘు వృత్తచాపము అని విభజించవచ్చును.
10. వృత్త కేంద్రము నుండి వృత్త పరిధికి గల దూరము వ్యాసమగును.

మెదడుకు మేత

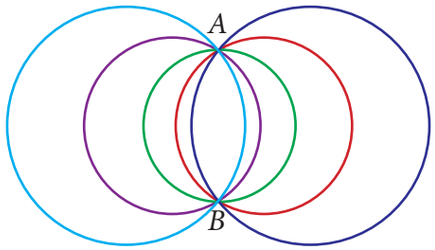
1. ఒక వృత్తమునకు ఎన్ని భుజములు ఉండును.
2. వృత్తము ఒక బహుభుజి అగునా?

4.4.1 మూడు బిందువులు గుండా పోవు వృత్తము

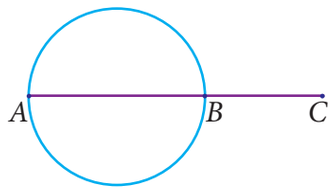
రెండు బిందువులు గుండా ఒకే రేఖ మాత్రం గీయ్యవచ్చును అనునది మనము ముందే నేర్చుకొన్నాము. ఇదే విధంగా ఒక బిందువు బిందువు ద్వారా మరియు రెండు బిందువుల ద్వారా ఎన్ని వృత్తములు గీయ వీలగును అనుటను మనం నేర్చుకోబోతున్నాము. ఇవ్వబడిన ఒక బిందువు P ద్వారా (పటం 4.52) రెండు బిందువులు A, B బిందువుల ద్వారా (పటం 4.53) అనంత వృత్తములు గీయుటకు వీలగును అనుదానిని మన వల్ల చూడవచ్చును.



పటము. 4.52



పటము. 4.53



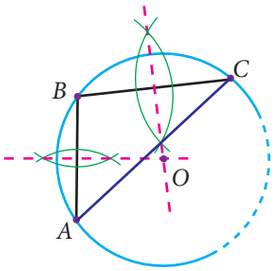
పటము. 4.54

ఇప్పుడు ఒకే రేఖపై అమరు మూడు బిందువులు A, B మరియు C (పటం 4.54)ను తీసికొనెదము.

4-Geometry_Term1.indd 172 17-03-2023 15:43:35

ఈ బిందువుల గుండా ఒక వృత్తము గీయడానికి మన చేత వీలగునా? దీనిని ఆలోచించినపుడు, బిందువులు ఒకే రేఖపై అమరినవి అయిన మన చేత వృత్తములు గీయ వీలుకాదు.

మూడు బిందువులు ఒక రేఖపై అమరని బిందువులయిన అవి ఒక త్రిభుజమును ఏర్పరచును. (పటము 4.55) పరివృత్త కేంద్రము నిర్మించడం జ్ఞాపికి తెచ్చుకొన్నట్లైతే, భుజముల సమద్విఖండన రేఖలు ఖండించు బిందువైనది పరివృత్త కేంద్రమునియు, దాని వృత్తము పరివృత్తమనియు పిలువబడును.



పటము. 4.55

దీని నుండి A,B మరియు C గుండా ఒకే ఒక వృత్తం మాత్రము పోవును అనునది స్పష్టమగును. ఈ పద ప్రవచనము క్రింది ఫలితమునకు కొని పోవును.

సిద్ధాంతము6 ఒకే రేఖలో అమరని మూడు బిందువుల గుండా ఒకే ఒక వృత్తమును మాత్రము గీయుటకు వీలగును.

4.5 ఒక వృత్తము యొక్క జ్యా ల ధర్మములు

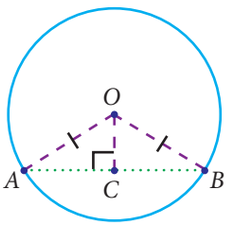
ంఖలు, కోణములు, త్రిభుజములు మరియు చతుర్భుజముల గుర్చి ముందే తెలిసికొనియున్నాము. వీటితో పాటు వృత్తము అను క్రొత్త పరికల్పనను తెలుసుకొనియున్నాము. వీటినన్నింటిని ఉపయోగించి కొన్ని నిరంతర ఫలితములను ఒక్కొక్కటిగా పొందబోవుచున్నాము. ఇప్పుడు మనం వృత్తముల జ్యా లను ఆదారముగాచేసుకొని కొన్ని ధర్మములు తెలిసికొనెదము.

మొదటిగా, ఒక జ్యా మరియు కేంద్రము నుండి జ్యా కు గీయబడు లంబ రేఖ ధర్మమును చూడబోచున్నాము. .

4.5.1 "జ్యా" కు కేంద్రము నుండి గీయబడు లంబము

O ను కేంద్రముగా గల వృత్తములో జ్యా AB ను తీసికొనెదము. $OC \perp AB$ గీయుము OA,OB బిందువులను కలుపుము. ఇచ్చట త్రిభుజము ΔAOC మరియు ΔBOC ను సులువుగా పొందెదము. (పటము 4.17)

మనచే ఈ రెండు త్రిభుజములు సర్వసమానమని నిరూపించగలమా? ఇప్పుడు, ముందే నేర్చుకున్న సర్వసమాన త్రిభుజముల ధర్మముల నుపయోగించి దీనిని నిరూపించగలము. $\angle OCA = \angle OCB = 90^\circ (OC \perp AB)$ మరియు $OA = OB$ అనునది వృత్త వ్యాసార్ధములు. భుజము OC ఉమ్మడి భుజము ల-క-భు (RHS) నియమము మనకు తెలియజేయునది ΔAOC మరియు ΔBOC సర్వసమానమైనవి. దీని నుండి మనం తెలుసుకొనునది $AC = BC$ ఈ వివరము నుండి మనం క్రింది ఫలితమును పొందుదుము.



పటము. 4.56

సిద్ధాంతము 7 ఒక వృత్త కేంద్రము నుండి ఒక జ్యా కు గీయబడు లంబము ఆ జ్యాను సమద్వి ఖండనము చేయును.

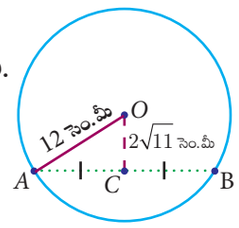
సిద్ధాంతము 7 యొక్క విపర్యము ఒక వృత్త కేంద్రమును ఒక జ్యా మధ్య బిందువును కలుపు రేఖ ఆ జ్యానకు లంబమగును.

ఉదాహరణ 4.5 వ్యాసార్ధము 12 సెం.మీ కలిగిన వృత్త కేంద్రము నుండి $2\sqrt{11}$ సెం.మీ దూరములో గల జ్యా యొక్క పొడవును కనుగొనుము.

4-Geometry_Term1.indd 173 17-03-2023 15:43:36

సాధన

AB ని జ్యా అని మరియు AB యొక్క మధ్య బిందువు C అని అనుకొనుము. అందువలన $OC \perp AB$,OA మరియు OC ని కలుపుము.



పటము. 4.57

వ్యాసార్ధము OA

$OC = 2\sqrt{11}$ సెం.మీ మరియు $OA = 12$ సెం.మీ అని ఇవ్వబడియున్నది.

లంభ కోణ త్రిభుజము ΔOAC లో పైథాగరస్ సిద్ధాంతము నుపయోగించిన మనకు

$$AC^2 = OA^2 - OC^2$$

$$AC^2 = 100 \text{సెం.మీ}$$

$$AC = 10 \text{సెం.మీ}$$

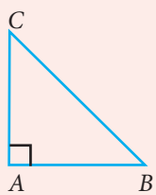
అందువలన, జ్యా AB యొక్క పొడవు $= 2AC$

$= 2 \times 10$ సెం.మీ

$= 20$సెం.మీ

సూచన

పైథాగరస్ సిద్ధాంతము రేఖాగణితము నందు పైథాగరస్ సిద్ధాంతము చాలా ముఖ్యమైనది మరియు బాగా తెలిసిన సిద్ధాంతములలో ఒకటి అవుతుంది. ఒక లంబకోణ త్రిభుజములో కర్ణము యొక్క వర్గము మిగిలిన రెండు భుజముల వర్గముల మొత్తమునకు సమానము.



లంబకోణ ΔABC లో $BC^2 = AB^2 + AC^2$

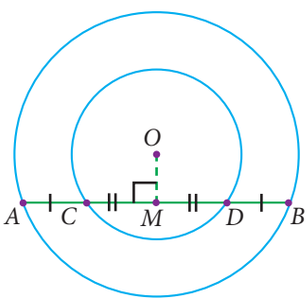
ఈ సిద్ధాంతము చాలా ఉపయోగకరమైనది

ఉదాహరణ 4.6 I ఏక కేంద్ర వృత్తములలో బాహ్య వృత్తము యొక్క జ్యా AB అనునది అంతర వృతమును ప్రక్క పటములో ఉన్నట్లు C మరియు D ల వద్ద ఖండించుచున్నవి. అయితే

$AB - CD = 2AC$ అని నిరూపించుము.

సాధన

ఇవ్వబడినది; బాహ్య వృత్తము యొక్క జ్యా AB అనునది అంతర వృత్తమును C మరియు D లో ఖండించుచున్నది.



పటము. 4.58

నిరూపించవలసినది : $AB - CD = 2AC$

నిర్మాణము : $OM \perp AB$ గీయుము

నిరూపణ : $OM \perp AB$ (నిర్మాణము ప్రకారము)

మరియు, $OM \perp CD$ అయినందున

కాబట్టి, $AM = MB$ ... (1) (ఎందుకనగా, కేంద్రము నుండి గీయబడిన లంభ రేఖ జ్యాను సమద్విఖండనము చేయుము)

$CM = MD$ ... (2)

ఇప్పుడు, $AB - CD = 2AM - 2CM$

$= 2(AM - CM)$ 1 మరియు 2 లో నుండి

$AB - CD = 2AC$

4-Geometry_Term1.indd 174 17-03-2023 15:43:37

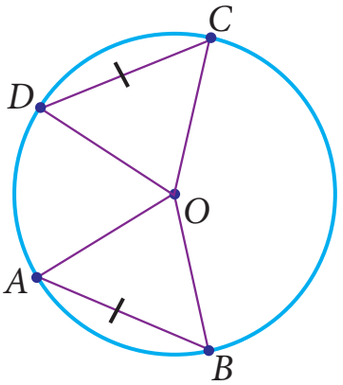
పురోగమన తనిఖీ

1. వృత్తము యొక్క వ్యాసార్ధము 25 సెం.మీ మరియు జ్యా పొడవు 40 సెం.మీ అయిన కేంద్రము నుండి జ్యా కు గల మధ్య దూరము కనుగొనుము
2. $PQ = 4$ సెం.మీ వుండునట్లు బిందువులు P మరియు Q ల ద్వారా పోవు మూడు వృత్తములు గీయుము.

4.5.2 జ్యా వృత్త కేంద్రములో ఏర్పరచు కోణము

ఒక జ్యాకు బదులుగా మనము రెండు సమాన జ్యాలు తీసుకొందుము. ఇప్పుడు మనం మరొక ధర్మమును గూర్చి చర్చిస్తాము.

O ను కేంద్రముగా గల వృత్తములో రెండు సమాన జ్యా లను తీసికొందుము. జ్యా యొక్క అంత్య బిందువులును కేంద్రముతో కలిపి, మనము త్రిభుజములు ΔAOB మరియు ΔOCD ని పొందుదుము. దీనిలో జ్యా AB = జ్యా CD (ఎందుకనగా ఇవ్వబడిన జ్యాలు సమానము) మిగిలిన భుజములు వ్యాసార్ధములు కాబట్టి $OA = OC$ మరియు $OB = OD$ అనునది మిగిలిన భుజముల వ్యాసార్ధములు (భు.భు.భు.)$(S.S.S)$ నియమము ప్రకారము త్రిభుజములు సర్వసమానము. అనగా $\Delta OAB \equiv \Delta OCD$ దీని నుండి $m\angle AOB = m\angle COD$. అగును. దీని నుండి రాబోవు ఫలితమునకు దారి చూపును.



పటము. 4.59

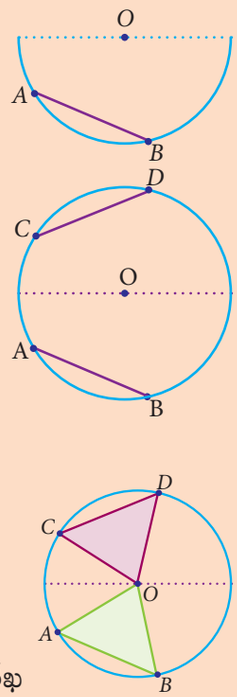
సిద్ధాంతము8 ఒక వృత్తములోని సమాన జ్యాలు వాటి కేంద్రము వద్ద సమాన కోణములను ఏర్పరచును.



కృత్యము - 5

పద్ధతి

1. O ని ఆధారము చేసుకొని ఏదేని వ్యాసార్ధముతో ఒక వృత్తమును గీచి దానిని కత్తిరించి తీయుము.
2. దానిని మడచి అర్ధ వృత్తము చేయుము. దాని మీదుగా A,B ని గుర్తించుము..
3. అర్ధ వృత్తములో AB మీదుగా మడచి తర్వాత దానిని విడదీయుము.
4. మనము మరొక అర్ధ వృత్తములో ఇంకొక మడత రేఖా ఖండము పొందగలము. దానిని CD అని పేరు పెట్టుము $(AB = CD)$.
5. వ్యాసార్ధములును కలిపి ΔOAB మరియు ΔOCD లు లభించును.
6. ట్రేస్ కాగితమును పయోగించి ΔOAB మరియు ΔOCD నమూన తీయుము
7. ΔOAB మరియు ΔOCD లను ఒక దానిపై ఒకటి వుంచవలెను.



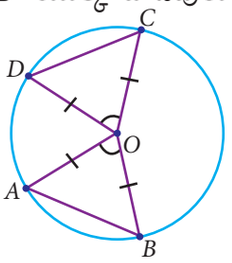
పటము. 4.60

పరిశీలన

1. W $\Delta OAB \equiv \Delta OCD$? మీరు తెలుసుకొన్నది ఏమి?
2. వృత్త కేంద్రము O నుండి AB మరియు CD జ్యాలకు లంబసమద్వి ఖండన రేఖ గీయుము. వృత్త కేంద్రము నుండి జ్యా కు గల దూరమును కొలువుము

4-Geometry_Term1.indd 175 17-03-2023 15:43:38

ఇప్పుడు వృత్త కేంద్రములో సమ కోణము ఏర్పరిచిన జ్యాలు AB మరియు CD యొక్క పొడవులు చూసెదము. అనగా సిద్ధాంతము(3) నుండి $\angle AOB = \angle COD$ పైగా ΔAOB మరియు ΔCOD యొక్క కోణములను కలిగియున్న భుజములు వ్యాసార్ధములగును మరియు అవి సమానము.



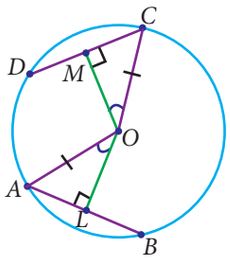
పటము. 4.61

భు.కో.భు (SAS) నియమము ప్రకారము $\Delta AOB \equiv \Delta COD$ దీని నుండి జ్యా AB = జ్యా CD

ఇప్పుడు మనం సిద్ధాంతము 8 విపర్యమును క్రింది విధముగా వ్రాయవచ్చును

విపర్య సిద్ధాంతము 8లో వృత్త కేంద్రములో సమాన కోణముల ఏర్పరచు రెండు జ్యాలు ఎప్పుడూ సమాన పొడవులు కల్గియుండును.

ఇదే విధముగా సమ జ్యాలు ఇవ్వబడినచో వాటి యొక్క కేంద్రములు నుండి దూరములను చర్చింపబోవుచున్నాము. $OL \perp AB$ మరియు $OM \perp CD$. ను గీయుము. సిద్ధాంతము 2 లో నుండి వీటి లంభ రేఖలు జ్యా లను సమానముగా విభజించును. అందువలన $AL = CM$, ΔOAL మరియు ΔOCM ను పోల్చినప్పుడు, కోణములు $\angle OLA = \angle OMC = 90°$ మరియు $OA = OC$ వ్యాసార్ధములు అగును. (లంభ.క.భు) సిద్ధాంతమును ప్రకారం $\Delta OAL \equiv \Delta OCM$. కేంద్రము నుండి ఉన్న దూరము $OL = OM$ అగును మరియు ఫలితము క్రింది విధముగా వ్రాయవచ్చును.



పటము. 4.62

సిద్ధాంతము 9 ఒక వృత్తములో వృత్త కేంద్రము నుండి సమాన దూరములో నుండు జ్యాలు సమాన పొడవు నుండును.

సిద్ధాంతము 9 యొక్క విపర్య సిద్ధాంతము సమస్యలను సాధించుటకు మిక్కిలి ఉపయోగకరముగా ఉండునని తెలుసుకొంటాము.

విపర్య సిద్ధాంతము 9

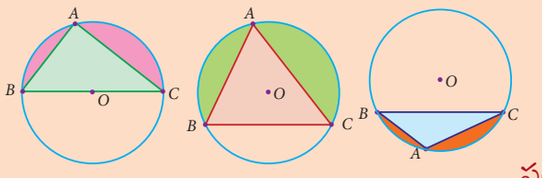
వృత్త కేంద్రము నుండి సమాన దూరములో వుండు జ్యాలు సమానముగా వుండును.

4.5.3 వృత్త కోణ చాపము కేంద్రము వద్ద ఏర్పరచు కోణము

కృత్యము -6

పద్ధతి :

1. O ను కేంద్రముగా కలిగిన వేర్వేరు వ్యాసార్ధములతో మూడు వృత్తములను చార్ట్ పేపర్ (chart paper) లో గీయుము.
2. ఈ వృత్తములలో నుండి అర్ధ వృత్తము, ఒక లఘు వృత్త ఖండము, మరియు ఒక గురు వృత్త ఖండమను కత్తిరించి తీయుము.
3. వాటిపై మూడు బిందువులను గుర్తించి వాటికి A, B మరియు C అని పేరుపెట్టుము.



పటము. 4.63

4-Geometry_Term1.indd 176 17-03-2023 15:43:39

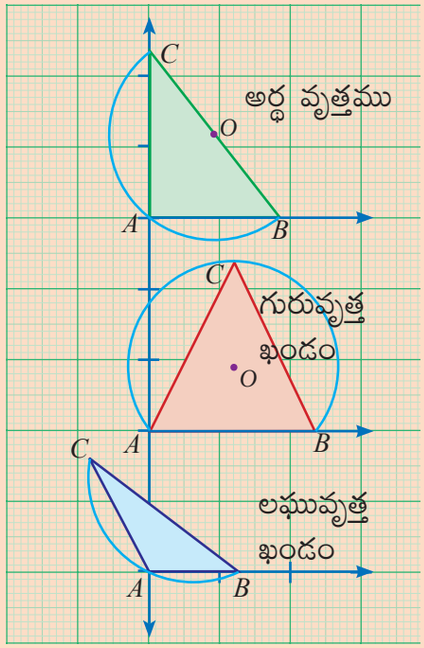
4. త్రిభుజములను కత్తిరించి తీసిన పటములో చూపిన విధముగా బిందువు A అనునది ఆది బిందువులో అమరునట్లు రేఖాచిత్రము(*graph*) లో అతికించుము.

పరిశీలన:

(i) అర్ధ వృత్తములో ఏర్పడు కోణము _____.

(ii) ఒక గురు వృత్తఖండములో ఏర్పడు కోణము _____.

(iii) ఒక లఘు వృత్తఖండములో ఏర్పడు కోణము _____.

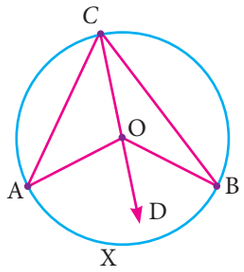


పటము. 4.64

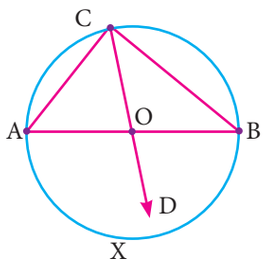
ఇపుడు ఒక చాపము అనునది వృత్త కేంద్రములో ఏర్పరచు కోణమునకు, వృత్త పరిధిలో ఏర్పరచు కోణమునకు మధ్య గల సంబంధమును కనుగొందుము.

4.5.4 కేంద్రము మరియు పరిధిలో అమరు కోణములు

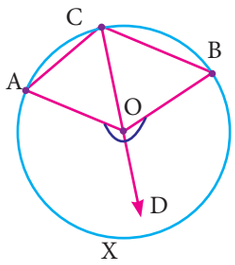
O ను కేంద్రముగా కలిగిన ఏదేని ఒక వృత్తమును తీసికొనుము. ఇప్పుడు బిందువులు A, B మరియు C ల ను వృత్త పరిధిలో గుర్తించుము.



పటము. 4.65



పటము. 4.66



పటము. 4.67

ఇచ్చట $\overset{\frown}{AB}$ చాపము అనునది , లఘు చాపము (పటము 4.65) అగును, అర్ధ వృత్తము (పటము 4.66) మరియు గురు చాపము (పటము 4.29) గా అమరును. ఇక బిందువు C అనునది చాపములను అనుసరించి (పటము 4.65 నుండి 4.67 వరకు) వివిధ కోణములును పొందును. పై నుండు అన్ని వృత్తములలో చాపము $\overset{\frown}{AXB}$ కేంద్రము వద్ద ఏర్పరచు కోణము $\angle AOB$ అగును.

మనము నిరూపించ వలసినది $\angle AOB = 2\angle ACB$ దీనికి గాను CO ను D కు పొడిగించుము మరియు CD ని కలుపుము.

4-Geometry_Term1.indd 177 17-03-2023 15:43:39

$\angle OCA = \angle OAC$ అయిన ($OA = OC$ వ్యాసార్ధములు)

భాహ్య కోణము = అభిముఖ కోణముల మొత్తము

$$\begin{aligned}\angle AOD &= \angle OAC + \angle OCA \\ &= 2\angle OCA \quad \ldots. (1)\end{aligned}$$

ఇదే విధముగా,

$$\begin{aligned}\angle BOD &= \angle OBC + \angle OCB \\ &= 2\angle OCB \quad \ldots. (2)\end{aligned}$$

1 మరియు 2 ల నుండి

$$\angle AOD + \angle BOD = 2(\angle OCA + \angle OCB)$$

చివరగా మనము పొందు ఫలితము $\angle AOB = 2\angle ACB$.

వీటి నుండి క్రిందవచ్చు ఫలితములు పొందగలము.

పురోగమన తనిఖీ

i. వేర్వేరు కొలతల గల గాజుల యొక్క పరిధులను గీచి వాటి యొక్క ఒక్కొక్క కేంద్రమును మూలమట్టము సహాయముతో కనుగొనుటకు ప్రయత్నించుము

ii. స్కేలు మరియు విభాగిని ఉపయోగించి ఇవ్వబడిన పాక్షిక చంద్రుని (నెలవంక) బింభమును పూర్ణ చంద్ర బింబముగా మార్చుము



పటము. 4.68

సిద్ధాంతము 10

ఒక వృత్త కోణ చాప కేంద్రము వద్ద ఏర్పరచు కోణము ఆ చాపమును వదలి మిగిలిన వృత్త పరిధి యందు ఏదేని ఒక బిందువు వద్ద ఏర్పరచు కోణమునకు రెండు రెట్లగును..

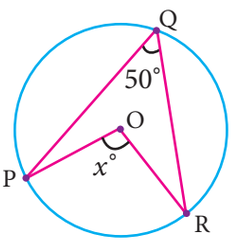
సూచన

- అర్ధ వృత్తములో అమరిన కోణమును లంబకోణమగును.
- ఒక వృత్తములో సమ వృత్త చాపములు కేంద్రము వద్ద సమాన కోణములను ఏర్పరచును.

ఉదాహరణ 4.7

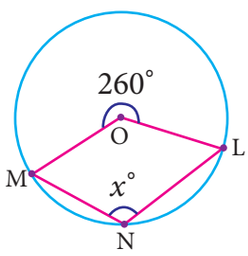
కింది ఇవ్వబడిన పటములలో x° యొక్క విలువను కనుగొనుము:

(i)



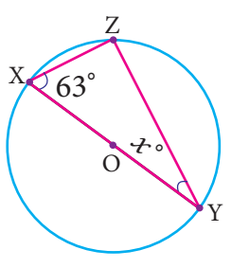
పటము. 4.69

(ii)



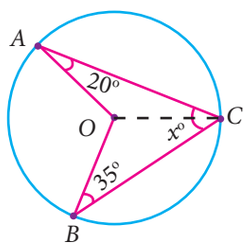
పటము. 4.70

(iii)



పటము. 4.71

(iv)



పటము. 4.72

సాధన

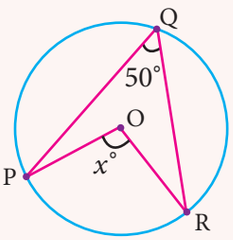
ఒక వృత్త కోణ చాపము కేంద్రము వద్ద ఏర్పరచు కోణము ఆ చాపమును వదలి మిగిలిన వృత్త పరిధి యందు ఏదేని ఒక బిందువు వద్ద ఏర్పరచు కోణమునకు రెండు రెట్లుగును అని సిద్ధాంతమును ఉపయోగించుచున్నాము.

4-Geometry_Term1.indd 178 17-03-2023 15:43:41

(i) $\angle POR = 2\angle PQR$

$x^\circ = 2 \times 50^\circ$

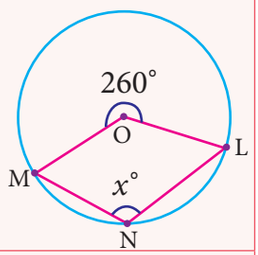
$x^\circ = 100^\circ$



(ii) $\angle MNL = \frac{1}{2}$ విరళీకరన $\angle MOL$

$= \frac{1}{2} \times 260^\circ$

$x^\circ = 130^\circ$



(iii) XY అనునది వృత్త వ్యాసము అయినందున .

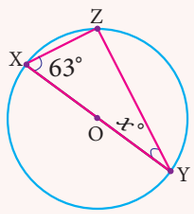
$\angle XZY = 90^\circ$

అర్ధ వృత్తములో అమరు కోణము

ΔXYZ లో

$x^\circ + 63^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

$x^\circ = 27^\circ$



(iv) $OA = OB = OC$ (వ్యాసార్ధములు)

ΔOAC లో

$\angle OAC = \angle OCA = 20^\circ$

ΔOBC లో

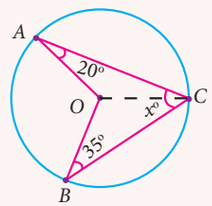
$\angle OBC = \angle OCB = 35^\circ$

(సమాన భుజములకు ఎదురుగా వున్న కోణములు సమానమగును

$\angle ACB = \angle OCA + \angle OCB$

$x^\circ = 20^\circ + 35^\circ$

$x^\circ = 55^\circ$



ఉదాహరణ 4.8 (పటము 4.73) వృత్త కేంద్రము O మరియు $\angle ABC = 30^\circ$ అయిన $\angle AOC$ ను కనుగొనుము

సాధన

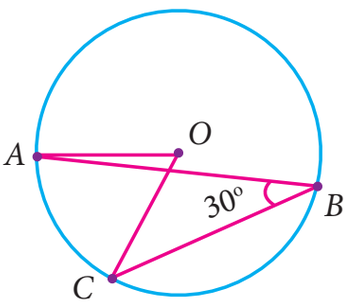
ఇవ్వబడినది $\angle ABC = 30^\circ$

$\angle AOC = 2\angle ABC$

$= 2 \times 30^\circ$

$= 60^\circ$

(ఎందుకనగా వృత్తములో చాపము అనేది కేంద్రము వద్ద ఏర్పరచు కోణము ఆ చాపము కాని మిగిలిన వృత్త పరిధి యందు ఏర్పరచు కోణమునకు రెండు రెట్లగును)



పటము. 4.73

ఇపుడు, మనము మరొక ముఖ్యమైన సిద్ధాంతము చూచెదము. లఘు చాపము అనునది గురు కోణమును, గురు చాపము అనునది లఘు కోణమును మరియు అర్ధ వృత్తము అనేది. లంబకోణమును వృత్త పరిధిలో ఏర్పరచునని నేర్చియున్నాము. ఇవ్వబడిన జ్యా AB బిందువులు C మరియు D మొదలగున్నవి. వృత్త పరిధిలో వేర్వేరు స్థానములలో గల బిందువులు అనుకొనుము మనము $\angle ACB$ మరియు $\angle ADB$ లను కనుగొనెదము. ఈ కోణము కొలతలలో ఏదేని వ్యత్యాసము ఉన్నదా?

4.5.5 ఒకే వృత్త పరిధి ఖండములో అమరిన కోణములు

O ను కేంద్రముగా కలిగిన వృత్తములో వృత్త ఖండము AB ని తీసికొనుము, బిందువులు C మరియు D అనునది వృత్త పరిధి పై నుండు బిందువులు అగును. వ్యాసార్ధములు OA మరియు OB ని కలుపుము

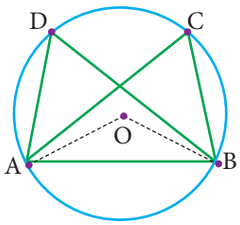
$\frac{1}{2}\angle AOB = \angle ACB$ (సిద్ధాంతము 5 నుండి)

4-Geometry_Term1.indd 179 17-03-2023 15:43:43

మరియు $\frac{1}{2}\angle AOB = \angle ADB$ (సిద్ధాంతము 5 నుండి)

$\angle ACB = \angle ADB$

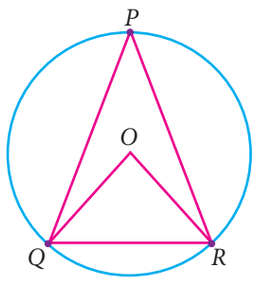
ఈ ఫలితము క్రొత్త సిద్ధాంతమునుకు నాందియగును



పటము. 4.74

సిద్ధాంతము 11 ఒకే వృత్తము ఖండములో అమరు కోణములు సమానము.

ఉదాహరణ 4.9 ఇవ్వబడిన పటములో O అనునది వృత్త కేంద్రము $\angle OQR = 48°$, అయిన $\angle P$ యొక్క విలువ ఏమి?



పటము. 4.75

సాధన

ఇవ్వబడినది $\angle OQR = 48°$.

అందువలన, $\angle ORQ$ యొక్క కోణము $48°$. (ఎందుకు? _____)

$\angle QOR = 180° - (2 \times 48°) = 84°$.

జ్యా QR కేంద్రము వద్ద ఏర్పరచు కోణము మిగిలిన పరిధిలో ఏర్పరచు P కోణమునకు రెండురెట్లగును

కాబట్టి $\angle QPR = \frac{1}{2} \times 84° = 42°$

అభ్యాసము 4.3

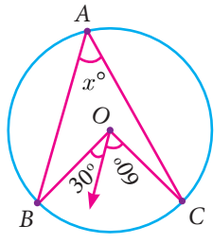
1. వృత్తము వ్యాసము 52 సెం.మీ మరియు ఒక జ్యా యొక్క పొడవు 20 సెం.మీ అయిన, కేంద్రము నుండి జ్యాకు వుండు దూరము కనుగొనుము.
2. వృత్త కేంద్రం నుండి 8 సెం.మీ దూరములో 30 సెం.మీ పొడవు గల జ్యా గీయబడినది అయిన వృత్తము యొక్క వ్యాసార్ధము కనుగొనుము
3. వ్యాసార్ధము $4\sqrt{2}$ సెం.మీ గల వృత్తములో AB మరియు CD వ్యాసములు ఒక దానికొకటి లంబముగా ఖండించుకొనిన జ్యా AC యొక్క పొడవు కనుగొనుము. మరియు $\angle OAC$ మరియు $\angle OCA$ లను కనుగొనుము
4. వ్యాసార్ధము 15 సెం.మీ కలిగిన వృత్త కేంద్రము నుండి 12సెం.మీ దూరములో అమరియున్న జ్యా యొక్క పొడవు కనుగొనుము
5. O ను కేంద్రముగా కలిగిన వృత్తములో AB మరియు CD అనునవి రెండు సమాంతరమైన జ్యాలు అగును. వ్యాసార్ధము10 సెం.మీ మరియు AB = 16 సెం.మీ మరియు CD = 12 సెం.మీ అయిన రెండు జ్యా లకు మధ్య గల దూరమును కనుగొనుము

4-Geometry_Term1.indd 180 17-03-2023 15:43:44

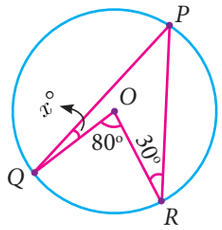
6. 5 సెం.మీ మరియు 3సెం.మీ వ్యాసార్ధము గల రెండు వృత్తములు, రెండు బిందువులు వద్ద ఖండించు కొనుచున్నది మరియు వాటి యొక్క కేంద్రములకు మధ్య గల దూరము 4 సెం.మీ అయిన ఉమ్మడి జ్యా యొక్క పొడవు కనుగొనుము

7. క్రింది ఇవ్వబడిన పటములో x° యొక్క విలువను కనుగొనుము

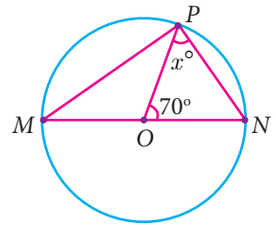
(i)



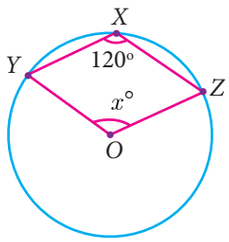
(ii)



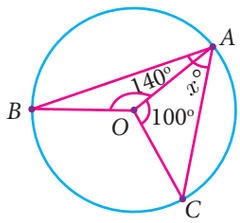
(iii)



(iv)

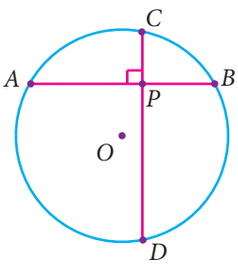


(v)



8. ఇవ్వబడిన పటములో $\angle CAB = 25^\circ$

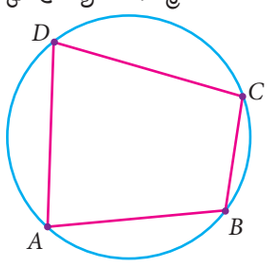
అయిన $\angle BDC$, $\angle DBA$ మరియు $\angle COB$ కనుగొనుము



4.6 చక్రీయ చతుర్భుజము

చక్రీయ చతుర్భుజము అను ప్రత్యేక చతుర్భుజమును మరియు వాటి యొక్క ధర్మములను గూర్చి తెలుసుకొనబోవుచున్నాము. చతుర్భుజము యొక్క నాలుగు శీర్షములు వృత్త పరిధిని తాకుతూయుండిన ఆ చతుర్భుజమును చక్రీయ చతుర్భుజమగును. ఇపుడు చక్రీయ చతుర్భుజము యొక్క ప్రత్యేక ధర్మములను తెలుసుకొందుము

అన్ని శీర్షములు వృత్తముపై అమరియున్నట్లు చతుర్భుజము $ABCD$ ని తీసికొనుము. మనము ఇప్పుడు ఎదురెదురుగా వున్న కోణములు సంపూరక కోణములగును అని నిరూపించవలెను.ఒక్కొక్క శీర్షమును వృత్త కేంద్రము O లో కలుపుము OA, OB, OC మరియు OD అనునది వ్యాసార్ధములగును. వీటి నుండి నాలుగు సమద్వి బాహు త్రిభుజములు OAB, OBC, OCD మరియు ODA మొదలగు వాటిని చూస్తున్నాము. వృత్త కేంద్రము O. చుట్టూ ఉన్న కోణములు మొత్తము 360° ఒక్కొక్క సమద్వి బాహు త్రిభుజముల యొక్క కోణములు మొత్తము 180°



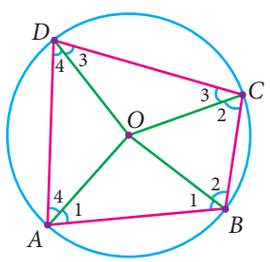
పటము. 4.76

పటములో నుండి మనము పొందినది.,

$2\times(\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4)$ + వృత్తకేంద్రం O వద్ద కోణము $= 4\times 180^\circ$

$2\times(\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4) + 360^\circ = 720^\circ$

సూక్ష్మీకరించిన, $(\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4) = 180^\circ$.



పటము. 4.77

4-Geometry_Term1.indd 181 17-03-2023 15:43:45

వీట నుండి మనము చూడబడినది

(i) $(\angle 1+\angle 2) + (\angle 3+\angle 4) = 180^\circ$ (ఎదుటి కోణములు B మరియు D ల మొత్తము)

(ii) $(\angle 1+\angle 4) + (\angle 2+\angle 3) = 180^\circ$ (ఎదుటి కోణములు A మరియు C ల మొత్తము)

ATY15

ఇప్పుడు సమాధానములు క్రింది విధముగా ఇవ్వబడియున్నవి..

సిద్ధాంతము 12 చక్రీయ చతుర్భుజములోని అభిముఖ కోణములు మొత్తము సంపూరకములు అగును.

సిద్ధాంతము 12 యొక్క విపర్యయము సమస్యలను సాధించుటలో మిక్కిలి ఉపయోగకరముగా ఉండుట వలన దానిని కనుగొనుము

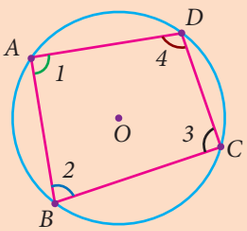
విపర్య సిద్ధాంతము 12 ఒక చక్రీయ చతుర్భుజము నందు ఒక జత అభిముఖ కోణముల మొత్తము సంపూరకమైన, ఆ చతుర్భుజము చక్రీయ చతుర్భుజమగును.

కృత్యము - 7

పద్ధతి

9. O ని కేంద్రముగా గల ఏదేని ఒక వ్యాసార్ధముతో వృత్తము గీయుము.

10. బిందువులు A, B, C మరియు D ని వాటి హద్దులలో గుర్తించి చక్రీయ చతుర్భుజము $ABCD$ ను గీయుము. దాని కోణములుకు పటము 4.42 లో చూపినట్లు పేరు పెట్టుము.

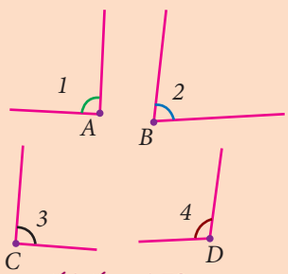


పటము. 4.78

11. ట్రేస్ పేపర్ నుపయోగించి చక్రీయ చతుర్భుజము యొక్క $ABCD$ నకలు తీయుము..

12. పటము 4.43 లోని చూపినట్లు కోణములు A, B, Cమరియు D లను కత్తిరించి తీయుము.

13. కోణములు $\angle 1, \angle 2$, $\angle 3$ మరియు $\angle 4$ లను కోణములు A, B, C మరియు D ల యొక్క ఆసన్న కోణములుగా అమరునట్లు పటము 4.44 లో చూపినవిధంగా అతికించుము



పటము. 4.79

14. కోణములు $\angle 1 + \angle 3$, మరియు $\angle 2 + \angle 4$ వాటి యొక్క విలువలను కనుగొనుము

క్రింది వాటిని గమనించి ఖాళీలను పూరించుము:

1. (i) $\angle A + \angle C =$ _____ (ii) $\angle B + \angle D =$ _____

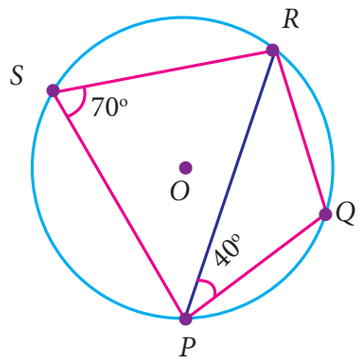
   (iii) $\angle C + \angle A =$ _____ (iv) $\angle D + \angle B =$ _____

2. చక్రీయ చతుర్భుజములో ఎదుటెదుటి కోణముల మొత్తము _____.

3. చక్రీయ చతుర్భుజము ఒక జత ఎదుటి కోణములు_____.

4-Geometry_Term1.indd 182 17-03-2023 15:43:46

ఉదాహరణ 4.10 చక్రీయ చతుర్భుజము $PQRS$ లో $\angle PSR = 70°$ మరియు $\angle QPR = 40°$, అయిన $\angle PRQ$ ను కనుగొనుము(పటము 4.81 ను చూడుము)



పటము. 4.81

సాధన

చక్రీయ చతుర్భుజము $PQRS$ లో

$\angle PSR = 70°$ ఇవ్వబడియున్నది

$\angle PSR + \angle PQR = 180°$ (కారణము తెలుపుము_____)

$$70° + \angle PQR = 180°$$
$$\angle PQR = 180° - 70°$$
$$\angle PQR = 110°$$

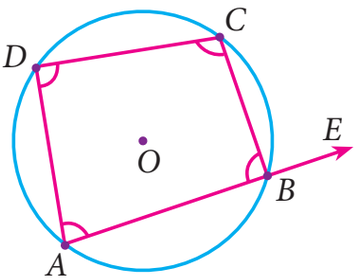
ΔPQR లో మనము పొందునది

$\angle PQR + \angle PRQ + \angle QPR = 180°$ (కారణము తెలుపుము_____)

$$110° + \angle PRQ + 40° = 180°$$
$$\angle PRQ = 180° - 150°$$
$$\angle PRQ = 30°$$

ఒక చక్రీయ చతుర్భుజములోని బాహ్య కోణములు

ఒక చక్రీయ చతుర్భుజములోని బాహ్య కోణము అనునది దీనిలో ఏదేని ఒక భుజమును దాని ప్రక్కన భుజమును పొడుగించిన బాహ్యముగా ఏర్పడు కోణము అగును.



పటము. 4.82

చక్రీయ చతుర్భుజము $ABCD$ యొక్క భుజము AB ను E వరకు పొడుగించుము, ఇచ్చట $\angle ABC$ మరియు $\angle CBE$ అనునది రేఖీయ కోణము యుగ్మములగును. వాటి కోణముల మొత్తము $180°$ అగును.

పైగా $\angle ABC$ మరియు $\angle ADC$ అనునది. చక్రీయ చతుర్భుజపు ఎదుటి కోణములు, వాటి కూడిక మొత్తము $180°$ అగును. వీటి నుండి మనము పొందునది. $\angle ABC + \angle CBE = \angle ABC + \angle ADC$ అందువలన $\angle CBE = \angle ADC$ ఇదే విధముగా మిగత కోణములను నిరూపించవచ్చును.

సిద్ధాంతము13 ఒక చక్రీయ చతుర్భుజము యొక్క ఒక భుజమును పొడిగించుట వలన ఏర్పడు బాహ్య కోణము దానికి అభి ముఖముగా నున్న అంతర కోణమునకు సమానము

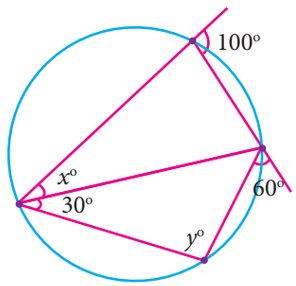
4-Geometry_Term1.indd 183 17-03-2023 15:43:47

పురోగమన తనిఖీ

1. ఒక చతుర్భుజములోని ఒక జత ఎదుటి కోణములు సంపూరకములు అయిన ఆ చతుర్భుజము ఒక _____అగును.
2. జ్యా యొక్క పొడవు తగ్గినప్పుడు, కేంద్రము నుండి ఉండు దూరము _____.
3. చక్రీయ చతుర్భుజము యొక్క ఒక భుజమును పొడిగించిన ఏర్పడు బాహ్య కోణము అనునది అంతర అభిముఖ కోణమునకు _____
4. చక్రీయ చతుర్భుజములోని ఎదుటి కోణములు _____.

ఉదాహరణ 4.11 ఇవ్వబడిన పటములో కోణములు x° మరియు y° యొక్క విలువ కనుగొనుము

సాధన



పటము. 4.83

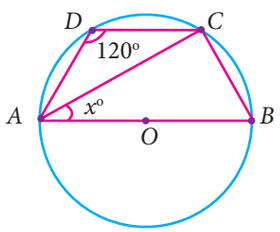
చక్రీయ చతుర్భుజము బాహ్య కోణములు ధర్మముల నాదారముగా మనము పొందునది,,

$y^\circ = 100^\circ$ మరియు

$x^\circ + 30^\circ = 60^\circ$ కావున $x^\circ = 30^\circ$

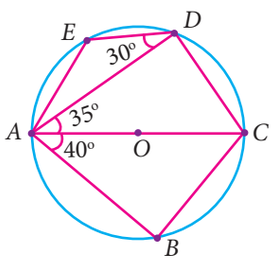
అభ్యాసము 4.4

1. ఇవ్వబడిన పటములో x^o యొక్క విలువను కనుగొనుము.

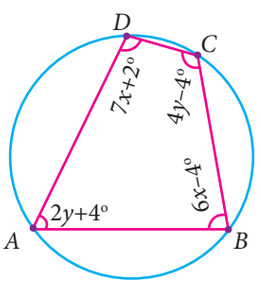


2. ప్రక్కపటంలో AC అనునది కేంద్రము O గా గల వృత్తము యొక్క వ్యాసము $\angle ADE = 30^\circ$; $\angle DAC = 35^\circ$ మరియు $\angle CAB = 40^\circ$.

అయిన (i) $\angle ACD$ (ii) $\angle ACB$ (iii) $\angle DAE$ కనుగొనుము.



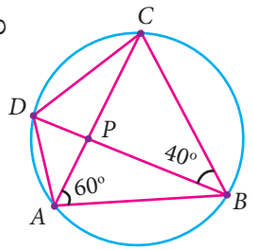
3. పటములో ఇవ్వబడిన చక్రీయ చతుర్భుజము $ABCD$ యొక్క అన్ని కోణములును కనుగొనుము



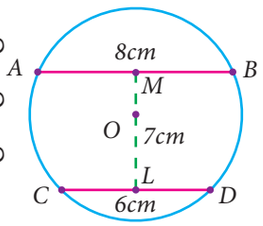
4-Geometry_Term1.indd 184 17-03-2023 15:43:49

4. ఇవ్వబడిన పటములో చక్రీయ చతుర్భుజము $ABCD$ లోని కర్ణములు ఖండించు బిందువు P మరియు $\angle DBC = 40^\circ$ మరియు $\angle BAC = 60^\circ$ అయిన

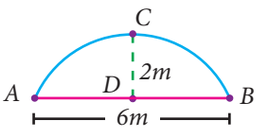
(i) $\angle CAD$ (ii) $\angle BCD$ కనుగొనుము.



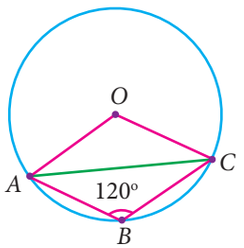
5. పటములో AB మరియు CD అనునది O ను కేంద్రముగా కలిగిన వృత్తము యొక్క రెండు సమాంతర జ్యాలు మైగా AB = 8సెం.మీ CD = 6 సెం.మీ $OM \perp AB$, $OL \perp CD$ ల మధ్య గల దూరము LM అనునది 7 సెం.మీ అయిన వృత్తము యొక్క వ్యాసార్ధము కనుగొనుము.



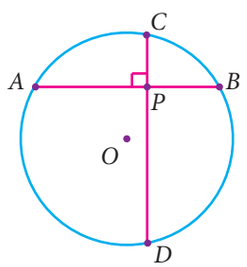
6. వంతెన వంపు యొక్క కొలతలు ఇవ్వబడినయున్నది. ఇచ్చట వంపు యొక్క వెడల్పు 6 మీ మరియు వంపు యొక్క గరిష్ఠ ఎత్తు 2 మీ అయిన వంతెన వంపు లో వున్న వృత్తము యొక్క వ్యాసార్ధము కనుగొనుము.



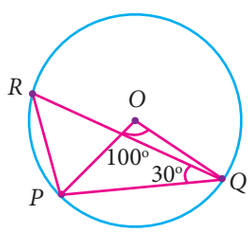
7. పటములో $\angle ABC = 120^0$, O ను కేంద్రముగా కలిగిన వృత్తము పై గల బిందువులు A, B మరియు C అయిన $\angle OAC$ కనుగొనుము



8. ఒక పాఠశాలలో చెట్లు నాటు కార్యక్రమము జరుగుచున్నది. అందుకుగాను ఉపాధ్యాయులు 9వ తరగతి విద్యార్థులను చెట్లు నాటుటకుగాను 6 మీటర్లు వ్యాసార్ధము గల స్థలమును కేటాయించిరి. నలుగురు విద్యార్థులు పటము చూపిన విధముగా A, B, C మరియు D అని బిందువులలో చెట్లును నాటిరి. ఇచ్చట AB = 8 మీ CD = 10 మీ మరియు $AB \perp CD$. ఇంకొక విద్యార్థి AB మరియు CD ఖండించు బిందువైన P లో పువ్వులతొట్టి పెట్టినట్లైతే కేంద్రము నుండి P నకు గల దూరము కనుగొనుము.



9. ఇవ్వబడియున్న $\angle POQ = 100^0$ మరియు $\angle PQR = 30^0$ అయిన $\angle RPO$ ను కనుగొనుము.



4.7 ప్రయోగాత్మక రేఖాగణితము

బ్రిందువులు, రేఖలు మరియు ఇతర రేఖాగణిత బొమ్మలు (Geometrical Figures) యొక్క ధర్మములకు సంబంధించిన రేఖాగణిత చట్టములను (నిభందనలు) ఉపయోగించి, గీయునది ప్రయోగాత్మక రేఖాగణిత (Practical Geometry) మగును. రేఖా గణితములో 'నిర్మాణము' అనునది రేఖలను, కోణములను మరియు వివిధ ఆకారములను గీయుట అని అర్థము. యూక్లిడ్ (Euclid) వ్రాసిన 'మూలకములు' (Elements) అను పుస్తకములో ఈ రేఖా గణిత నిర్మాణములను గూర్చి విశధముగా చర్చించబడినది. అందువలన ఈ

4-Geometry_Term1.indd 185 17-03-2023 15:43:50

నిర్మాణములను యూక్లీడియన్ నిర్మాణములు (Euclidean constructions) అని కూడ అందురు. వీటిని నిర్మించుటకు వృత్తలేఖని (compass) మరియు నిటారు అంచు (straightedge) లేక రూలర్ (i.e. ruler) ను ఉపయోగింతురు. వృత్తలేఖని సమదూరమును మరియు నిటారు అంచు సరళరేఖను ఏర్పరచును. అన్ని రేఖాగణిత నిర్మాణములు ఈ రెండు అంశముల మీద ఆధారపడియున్నవి.

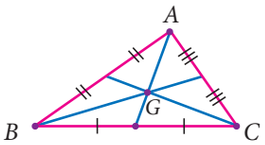
నిటారు అంచు మరియు వృత్త లేఖనిలను ఉపయోగించి, అకరణీయ మరియు కరణీయ సంఖ్యలను నిర్మించుటకు సాధ్యమగునని 2వ పాఠములో చూచితిమి. 1913లో భారత గణిత మేధావి రామానుజన్ అను నతను $355/113 = \pi$ అనుదానికి రేఖాగణిత నిర్మాణము నిచ్చెను. ఖచ్చితమైన కొలతల గలిగిన ప్రోగైన నైపుణ్యములతో ప్రస్తుతము నిర్మాణయుక్తులనుపయోగించి, రేఖలు పర్వతము ద్వారా పోవు స్వరంగ మార్గమును అమర్చుటకు కూడా గుర్తించబడిన విశేశాంశమగును. ఇంతకుముందు చదివిన పాఠములలో (తరగతులలో) కోణములను మరియు త్రిభుజములను నిర్మించుటను నేర్చియున్నాము.

ఈ పాఠములో మనము పరివృత్త కేంద్రము (Circumcentre) మరియు లంబకేంద్రము (Orthocentre) ను నిర్మించుటను, అనుషక్త రేఖలను (concurrent lines) ఉపయోగించి నేర్చుకొనెదము.

4.7.1 త్రిభుజము యొక్క గరిమనాభి (గరుత్వ కేంద్రము) నిర్మించుట

గరిమనాభి (గరుత్వ కేంద్రము)

ఒక త్రిభుజంలోని మధ్యగతరేఖల మిళిత బిందువును (ఖండన బిందును) ఆ త్రిభుజపు గురుత్వ కేంద్రం అంటారు. దీనిని సాధారణంగా G తో గుర్తిస్తారు.



పటము. 4.84



కృత్యము 8

ఉద్దేశము మడతలును ఉపయోగించి ఒక రేఖా ఖండము యొక్క మధ్యబిందువును కనుగొనుట.

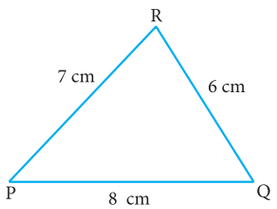
పద్ధతి ఒక కాగితమును తీసికొని, దానిని మడచి PQ అను ఒక రేఖా ఖండమును తయారుచేయుము P, Q మీద పడునట్లుగా రేఖా ఖండమును మడచి తర్వాత PQ రేఖాఖండము మరియు మడత రేఖా (2వ మడత) ఖండించు బిందువును M అని గుర్తించుము. M అనునది PQ ల మధ్యబిందువగును.

ఉదాహరణ 4.12

$PQ = 8$ సెం.మీ, $QR = 6$ సెం.మీ, $RP = 7$ సెం.మీ కొలతలతో ΔPQR గరిమనాభిని నిర్మించుము

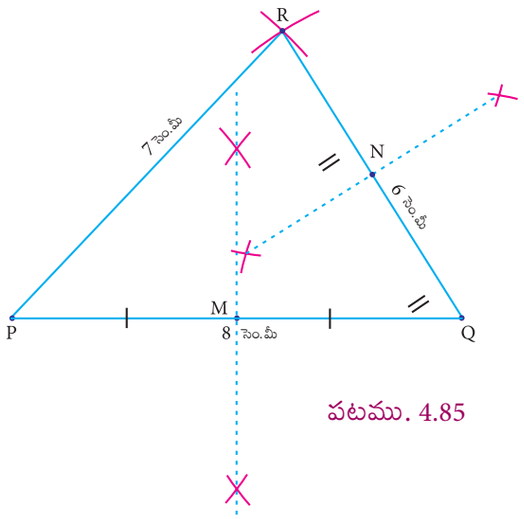
సాధన

మెట్టు 1 : ఇవ్వబడిన కొలతలు $PQ = 8$ సెం.మీ, $QR = 6$ సెం.మీ, మరియు $RP = 7$ సెం.మీ గల ΔPQR నిర్మించుము. ఏదేని రెండు భుజములకు (PQ మరియు QR) లంబ సమద్వి ఖండన రేఖలను గీచి PQ మధ్య బిందువ M మరియు QR మధ్య బిందువు N ను గుర్తించుము.

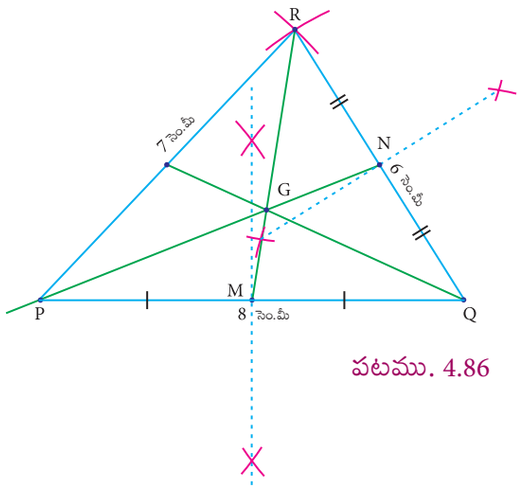


చిత్తుపటము

4-Geometry_Term1.indd 186 17-03-2023 15:43:50



పటము. 4.85



పటము. 4.86

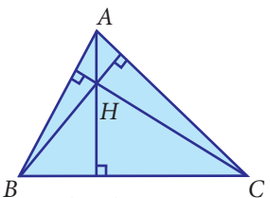
మెట్టు 2: మధ్య రేఖలు PN మరియు RM ను గీయుము. అవి ఖండించుకొను బిందువు G అగును. బిందువు G అనునది ΔPQR యొక్క గరిమనాభి అగును.

సూచన

- ఒక త్రిభుజమునకు మూడు మధ్య గత రేఖలు గీయవచ్చును.
- గరిమనాభి (కేందా బాసము) అనునది మధ్య గత రేఖలు ను శీర్షమ్ము నుండి 2:1 అను నిష్పత్తిలో విభజించును
- అన్ని రకాల త్రిభుజములకు గరిమనాభి అనునది త్రిభుజము లోపలనే అమరును.
- గరిమనాభి అనునది ఆ త్రిభుజము యొక్క గురుత్వ కేంద్రము అని పిలువబడును

4.7.2 లంబకేంద్రమును నిర్మించుట

లంబకేంద్రము



పటము. 4.87

ఒక త్రిభుజములోని ఉన్నతుల (భుజముల లంబరేఖలు) యొక్క అనుషక్త బిందువును (ఖండించుకొను బిందువు) లంబకేంద్రము అని అందురు. సాధారణముగా 'అనుషక్త బిందువును' (point of concurrency) H అను అక్షరముతో సూచిస్తారు.

కృత్యము 9

ఉద్దేశము కాగితపు మడతలను ఉపయోగించి, ఒక రేఖా ఖండమునకు బాహ్యబిందువు నుండి సమద్వి ఖండన రేఖను గీయుట.

పద్ధతి AB అను రేఖా ఖండమును కాగితము మీద గీచి, తర్వాత ఏదైనా ఒక వైపు P అను బాహ్యబిందువును గుర్తించి, BA మీదుగా B ను P వరకు చలింపచేసి P వద్ద మడతపడునట్లు చేయుము. ఈ మడత గుర్తునే AB కి, P .ద్వారా లంబరేఖ అగును.

కృత్యము 10

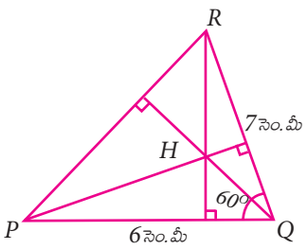
ఉద్దేశము కాగితము యొక్క మడతలును ఉపయోగించి, ఒక త్రిభుజము యొక్క లంబ కేంద్రమును కనుగొనుట.

4-Geometry_Term1.indd 187 17-03-2023 15:43:50

పద్ధతి పై కృత్యము నుపయోగించి, త్రిభుజములో ఏవైన రెండు శీర్షములను బాహ్యబిందువులుగా తీసికొని ఎదుటి భుజములకు లంబములను నిర్మించుము. ఆ లంబములు ఖండించు బిందువు లంబకేంద్రము అగును.

ఉదాహరణ 4.13

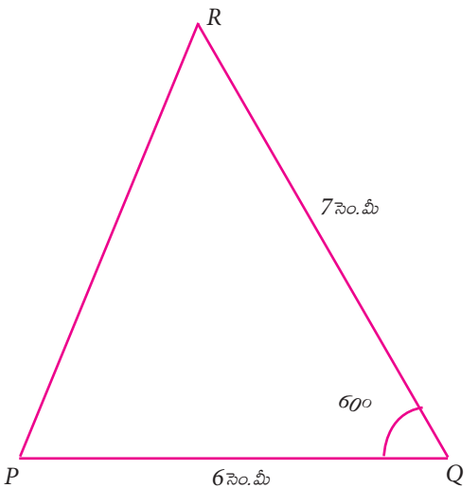
$PQ = 6$ సెం.మీ $\angle Q = 60^0$ మరియు $QR = 7$ సెం.మీ కొలతలతో ΔPQR ను నిర్మించి, దాని లంబ కేంద్రమును గుర్తించుము.



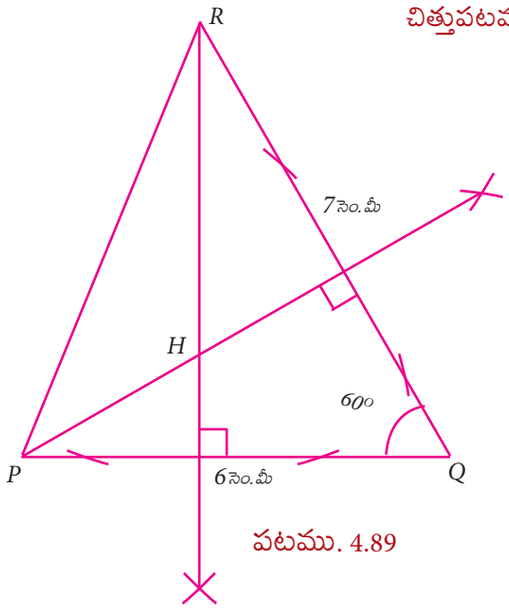
చిత్తుపటము

సాధన

సోపానము 1 ఇచ్చిన కొలతలతో ΔPQR త్రిభుజమును నిర్మించుము.



పటము. 4.88



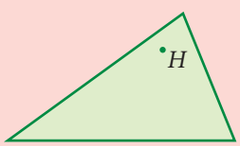
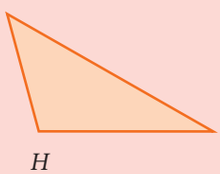
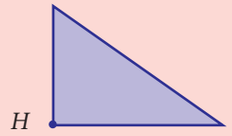
పటము. 4.89

సోపానము 2: ఏవైనా రెండు శీర్షముల R మరియు P నుండి PQ మరియు QR ఎదుటి భుజములకు క్రమముగా ఎత్తులను గీయుము.

ఆ రెండు లంబములు ఖండించు కొను బిందువు ΔPQRయొక్క లంబ కేంద్రమగును (H).

సూచన

ఇచ్చిన త్రిభుజములో పరివృత్త కేంద్రము మరియు లంబకేంద్రము ఎక్కడ వుండును.

	అల్పకోణ త్రిభుజము	అధిక కోణ త్రిభుజము	లంబకోణ త్రిభుజము
లంబకేంద్రము	త్రిభుజము లోపల 	త్రిభుజము వెలుపల 	లంబకోణము వద్దగల శీర్షము 

4-Geometry_Term1.indd 188 17-03-2023 15:43:51

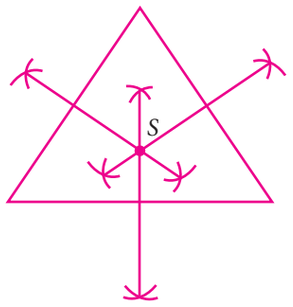
అభ్యాసము 4.5

1. LM=7.5సెం.మీ, MN=5సెం.మీ మరియు LN=8 సెం.మీ కొలతలకు ΔLMN నిర్మించి దాని గరిమనాభిని గుర్తించుము.
2. త్రిభుజము ABC ను నిర్మించి దాని గరిమనాభిని గుర్తించుము. ఇచ్చట A అనునది లంబకోణము $AB = 4$ సెం.మీ మరియు $AC = 3$ సెం.మీ
3. AB = 6 సెం.మీ $\angle B = 110°$ మరియు C = 9 సెం.మీ కొలతలకు ΔABC ను నిర్మించి దాని గరిమనాభిని గుర్తించుము
4. PQ = 5సెం.మీ, PR= 6సెం.మీ మరియు $\angle QPR = 60°$ కొలతలు గల ΔPQR ను నిర్మించుము మరియు గరినామనాభిని గుర్తించుము.
5. PQ = 7సెం.మీ, QR = 8సెం.మీ మరియు PR = 5సెం.మీ కొలతలు గల ΔPQR ను నిర్మించి, దాని లంబ కేంద్రమును గుర్తించుము.
6. 6.5 సెం.మీ భుజము గల ఒక సమబాహు త్రిభుజమును గీచి, దాని లంబ కేంద్రమును గుర్తించుము.
7. AB = 6 సెం.మీ, $\angle B = 110^0$ మరియు BC = 5 సెం.మీ కొలతలు వుండునట్లు ABC త్రిభుజమును నిర్మించి, దాని లంబ కేంద్రమును నిర్మించుము.
8. PQ = 4.5 సెం.మీ, QR = 6 సెం.మీ మరియు PR = 7.5 సెం.మీ వుండునట్లు ఒక లంబకోణ త్రిభుజమును నిర్మించి, దాని లంబకేంద్రమును కనుగొనుము.

4.7.3 త్రిభుజము యొక్క పరివృత్త కేంద్రమును నిర్మించుట

పరివృత్తకేంద్రము

ఒక త్రిభుజములోని భుజముల లంబ సమద్వి ఖండన రేఖల అనుషక్త బిందువును పరివృత్త కేంద్రము అందురు. దీనిని అను S అను అక్షరముతో సూచిస్తారు.



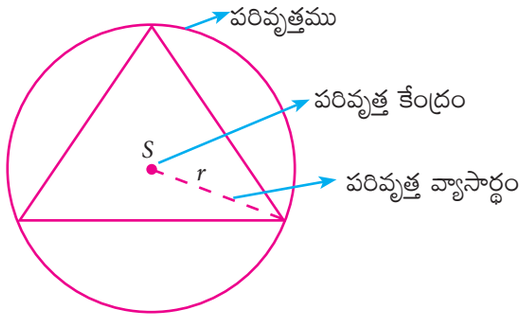
పటము. 4.90

పరివృత్తము

S ను కేంద్రముగా గలిగి, త్రిభుజము యొక్క మూడు శీర్షముల గుండా పోవు వృత్తమును పరివృత్తము అందురు.

పరివృత్త వ్యాసార్ధము

ఒక త్రిభుజము యొక్క ఏదైనా ఒక శీర్షము నుండి ఆ త్రిభుజము యొక్క పరివృత్త కేంద్రమునకు గల రేఖా ఖండమును పరివృత్తము యొక్క పరివృత్త వ్యాసార్ధము అందురు.



పటము. 4.91

4-Geometry_Term1.indd 189 17-03-2023 15:43:51

కృత్యము 11

ఉద్దేశము కాగితపు మడతల నుపయోగించి ఒక రేఖా ఖండము యొక్క సమద్విఖండన రేఖను నిర్మించుట

పద్ధతి PQ అను రేఖా ఖండమును కాగితము మీద మడచి తయారు చేయుము. P, Q మీద పడునట్లుగా PQ ను మడచి RS అను ఇంకొక మడత రేఖను సృష్టించుము. RS అను రేఖ PQ నకు లంబసమద్వి ఖండన రేఖ అగును.

కృత్యము 12

ఉద్దేశము కాగితపు మడతలునుపయోగించి ఒక త్రిభుజము యొక్క పరివృత్త కేంద్రమును గుర్తించుట

పద్ధతి ఉపయోగించి, ఇచ్చిన త్రిభుజము యొక్క ఏవైనా రెండు భుజములకు లంబ సమద్విఖండన రేఖలను కనుగొనుము. ఈ రేఖలు కలియుచోటును (బిందువును) పరివృత్తకేంద్రమగును.

ఉదాహరణ 4.14

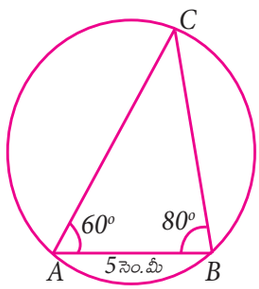
$AB = 5$ సెం.మీ, $\angle A = 60^0$ మరియు $\angle B = 80^0$ కొలతలనుపయోగించి ΔABC త్రిభుజము యొక్క పరివృత్త కేంద్రమును నిర్మించుము. పరివృత్తమును గీచి, ΔABC యొక్క పరివృత్త వ్యాసార్ధమును కనుగొనుము.

సాధన

సోపానము 1 ఇచ్చిన కొలతలనుపయోగించి ΔABC ను గీయుము.

సోపానము 2

ఏవేని రెండు భుజములకు సమద్వి ఖండనరేఖలను గీయుము (AC మరియు BC) అవి ఖండించు బిందువును పరివృత్త కేంద్రము (S) అగును.



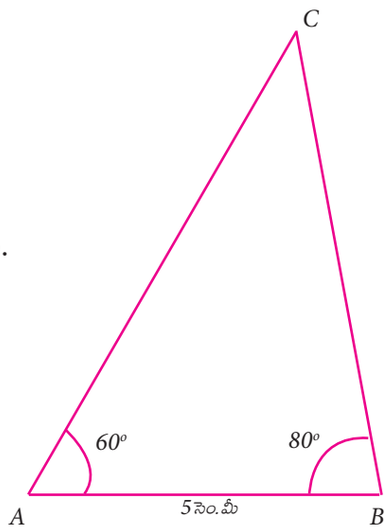
చిత్తుపటము

సోపానము 3

S ను కేంద్రము వుంచి $SA = SB = SC$ లను వ్యాసార్ధము,

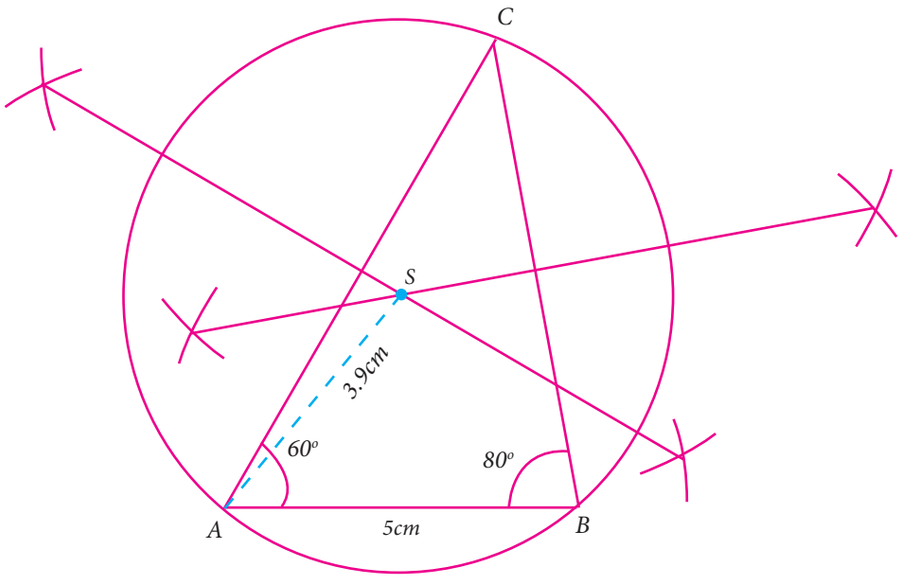
A, B మరియు C ల ద్వారా పోవు పరివృత్తమును గీయుము.

ఇందులో పరివృత్త వ్యాసార్ధము = 3.9 సెం.మీ ను గుర్తించుము.



పటము. 4.92

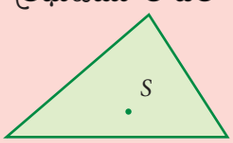
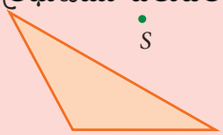
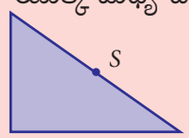
4-Geometry_Term1.indd 190 17-03-2023 15:43:51



పటము. 4.93

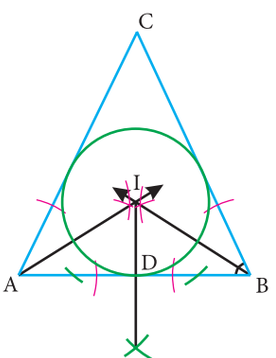
సూచన

ఇచ్చిన త్రిభుజములో పరివృత్త కేంద్రము ఎక్కడ వుండును.

	అల్పకోణ త్రిభుజము	అధిక కోణ త్రిభుజము	లంబకోణ త్రిభుజము
పరివృత్త కేంద్రము	త్రిభుజము లోపల 	త్రిభుజము వెలుపల 	కర్ణము యొక్క మధ్య బిందువు 

4.7.4 త్రిభుజము యొక్క అంతర వృత్తము నిర్మించుట

అంతర వృత్త కేంద్రము



పటము. 4.94

ఒక త్రిభుజము యొక్క మూడు కోణముల సమద్వి ఖండన రేఖలు కలుసుకొను బిందువును అంతర వృత్త కేంద్రము అందురు

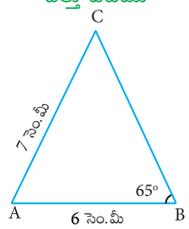
అంతర వృత్త కేంద్రము అనునదిఅంతర వత్తము యొక్క కేంద్రమగును. దీనిని I అని ఆంగ్ల అక్షరములో సూచించుదురు. ఇది త్రిభుజము యొక్క భుజముల నుండి సమాన దూరములో ఉండును

ఉదాహరణ 4.15 $AB = 6$ సెం.మీ $\angle B = 65°$ మరియు $AC = 7$ సెం.మీ కొలతలతో ΔABC ను నిర్మించి దాని అంతర వృత్తమును గీచి, అంతరవృత్త వ్యాసార్ధమును కనుగొనుము..

4-Geometry_Term1.indd 191 17-03-2023 15:43:52

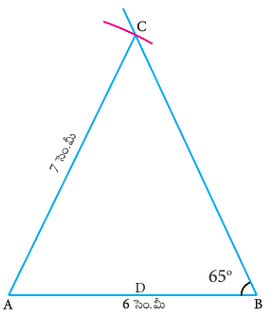
సాధన

చిత్తు పటము

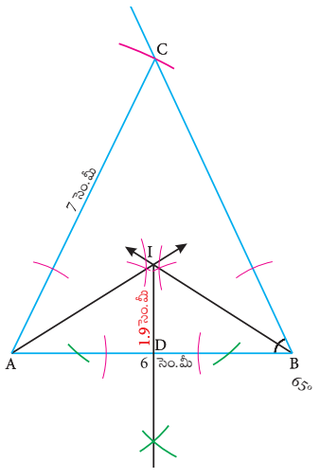


మెట్టు 1 : $AB = 6$ సెం.మీ $\angle B = 65°$ మరియు $AC = 7$ సెం.మీ కొలతలతో ΔABC ని నిర్మించుము.

మెట్టు 2 : ఏవైన రెండు కోణములకు (ఇచ్చట $\angle A$ మరియు $\angle B$) కోణ సమద్వి ఖండన రేఖలు గీయుము. అవి ఖండించు బిందువు I అనునది ΔABC. యొక్క అంతర వృత్త కేంద్రము అగును. I నుండి ఏదైనా ఒక భుజమునకు (ఇచ్చట AB) లంబరేఖను గీయుము. ఆ రేఖ (AB) ని ఖండించు బిందువు D అగును.



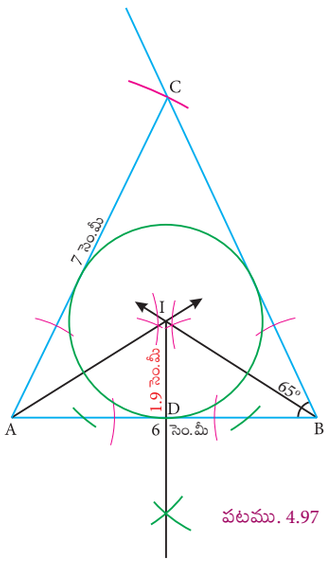
పటము. 4.95



పటము. 4.96

మెట్టు 3: I ను కేంద్రముగాను ID ను వ్యాసార్ధముగా తీసుకొని వృత్తమును గీయుము. ఈ వృత్తము త్రిభుజపు అన్ని భుజములను అంతరముగా స్మర్శించును .

మెట్టు 4: లోపలి వ్యాసార్ధమును కొలువుము. లోపలి వ్యాసార్ధము 1.9 సెం.మీ.



పటము. 4.97

అభ్యాసము 4.6

1 $AB = 8$ సెం.మీ, $BC = 6$ సెం.మీ మరియు $\angle B = 70^0$ వుండునట్లు ABC త్రిభుజమును నిర్మించుము. దాని పరివృత్త కేంద్రమును గుర్తించి, పరివృత్తమును గీయుము

2 లంబ భుజములు 4.5సెం.మీ మరియు 6 సెం.మీ కలిగిన PQR లంబకోణ త్రిభుజమును నిర్మించుము. దాని పరివృత్త కేంద్రమును గుర్తించి, పరివృత్తమును గీయుము

3. $AB = 5$ సెం.మీ $\angle B = 100^0$ మరియు $BC = 6$ సెం.మీ వుండునట్లు ΔABC ను నిర్మించుము. దాని పరివృత్త కేంద్రమును గుర్తించి, పరివృత్తమును గీయుము

4. $PQ = PR$ మరియు $\angle Q = 50^0$, $QR = 7$సెం.మీ కొలతలు గలిగిన సమద్వి బాహు త్రిభుజము గీచి, దాని పరివృత్తమును గీయుము.

5. 6.5 సెం.మీ భుజము కొలతలుగా గల సమ బాహు త్రిభుజమును నిర్మించి అంతర వృత్త కేంద్రమును గుర్తించి మరియు అంతర వృత్తమును నిర్మించుము.

4-Geometry_Term1.indd 192 17-03-2023 15:43:52

6. కర్ణము 10 సెం.మీ, ఒక భుజము 8 సెం.మీ గల లంబకోణ త్రిభుజమును నిర్మించి దాని అంతర వృత్త కేంద్రమును గుర్తించి అంతర వృత్తమును నిర్మించుము.

7. $AB = 9$ సెం.మీ $\angle CAB = 115°$ మరియు $\Delta ABC = 40°$ అను కొలతలతో ΔABC ను నిర్మించుము. పైగా దాని అంతర వృత్త కేంద్రమును గుర్తించి అంతర వృత్తమును నిర్మించుము. (సూచన;; పై సమస్యలలో నుండి ఏ ఒక్క త్రిభుజమునకైనా అంతర వృత్తమనునది త్రిభుజము లోపల అమరుననిమీరు గమనించవచ్చును).

8. $AB = BC = 6$సెం.మీ, $\angle B = 80°$. అను కొలతలకు ΔABC నిర్మించుము. దాని అంతర వృత్త కేంద్రమును గుర్తించి అంతర వృత్తమును నిర్మించుము.

అభ్యాసము 4.7

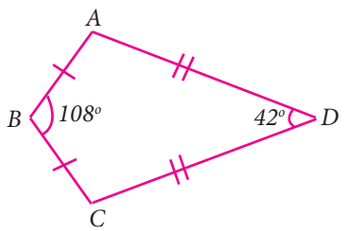
బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు

1. ఒక త్రిభుజములోని బాహ్యకోణము ఏ రెండింటి కోణములు యొక్క మొత్తము.

(1) బాహ్యకోణములు (2)అంతర ఎదుటి కోణములు

(3) ఏకాంతర కోణములు (4) అంతర కోణములు

2. $ABCD$ అను చతుర్భుజములో $AB = BC$ మరియు $AD = DC$ అయిన $\angle BCD =$



(1) 150° (2) 30°

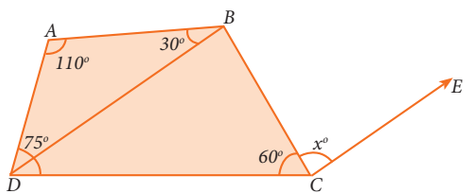
(3) 105° (4) 72°

3. $ABCD$ అను చతురస్రములో AC మరియు BD అను కర్ణములు O వద్ద సంధించును. ఇందులో ఎన్ని జతల సర్వసమాన త్రిభుజములు ఏర్పడును.

(1) 6 (2) 8

(3) 4 (4) 12

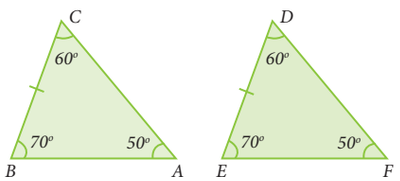
4. ఇచ్చిన పటములో $CE \parallel DB$ అయిన x^o యొక్క విలువ



(1) 45° (2) 30°

(3) 75° (4) 85°

5. ఇచ్చిన వాటిలో ఏది సరియైన ప్రవచనము?



(1) $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (2) $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

(3) $\Delta ABC \cong \Delta FDE$ (4) $\Delta ABC \cong \Delta FED$

6. ఒక రాంబసు యొక్క కర్ణములు సమానమైనచో, ఆ రాంబసు ఒక

(1) సమాంతర చతుర్భుజము అయితే దీర్ఘ చతురస్రము కాదు

(2) ధీర్ఘచతురస్రము అయితే చతురస్రము కాదు

(3) చతురస్రము

(4) సమాంతర చతుర్భుజము అయితే చతురస్రముకాదు

4-Geometry_Term1.indd 193 17-03-2023 15:43:53

7. $ABCD$ చతుర్భుజములోని $\angle A$ మరియు $\angle B$ యొక్క కోణ సమద్వి ఖండన రేఖలు O వద్ద ఖండించిన, $\angle AOB$ యొక్క విలువ

(1) $\angle C + \angle D$ (2) $\frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$

(3) $\frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{3}\angle D$ (4) $\frac{1}{3}\angle C + \frac{1}{2}\angle D$

8. ఒక సమాంతర చతుర్భుజములో భుజము చేత ఏర్పడు అంతరకోణము 90° అయిన ఆ సమాంతర చతుర్భుజము ఒక

(1) రాంబసు (2) ధీర్ఘచతురస్రము (3) ట్రెపిజయం (4) గాలిపటము

9. ఏది సరియైన వాక్యము (ప్రవచనము)?

(1) ఒక సమాంతర చతుర్భుజములోని ఎదుటెదుటి కోణములు సమానము కాదు.

(2) ఒక సమాంతర చతుర్భుజములోని ఆసన్న కోణములు పూరకములగును.

(3) ఒక సమాంతర చతుర్భుజములోని కర్ణములు ఎల్లపుడు సమానము.

(4) ఒక సమాంతర చతుర్భుజములో రెండు జతల ఎదుటెదుటి భుజములు ఎల్లపుడు సమానము.

10. ఒక త్రిభుజములోని కోణములు $3x-40, x+20$ మరియు $2x-10$ అయిన x యొక్క విలువ

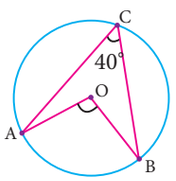
(1) 40° (2) 35° (3) 50° (4) 45°

11. O ను కేంద్రముగా గల వృత్తములో సమాన పొడవు గల జ్యాలు PQ మరియు RS మరియు $\angle POQ = 70°$ అయిన $\angle ORS =$=

(1) 60° (2) 70° (3) 55° (4) 80°

12. వ్యాసార్ధము 25 సెం.మీ గల వృత్త కేంద్రము నుండి 15 సెం.మీ దూరములో గల జ్యా పొడువు

(1) 25 సెం.మీ (2) 20 సెం.మీ (3) 40 సెం.మీ (4) 18 సెం.మీ



13. పక్క పటములో వృత్త కేంద్రము O మరియు $\angle ACB = 40°$ అయిన $\angle AOB =$

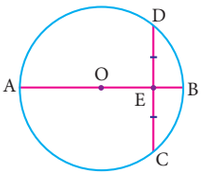
(1) 80° (2) 85° (3) 70° (4) 65°

14. చక్రీయ చతుర్భుజము $ABCD$ లో $\angle A = 4x, \angle C = 2x$ అయిన x యొక్క విలువ

(1) 30° (2) 20° (3) 15° (4) 25°

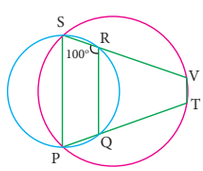
15. పక్క పటములో వృత్త కేంద్రము O మరియు వ్యాసము AB అనే జ్యా CD ను E బిందువు వద్ద సమద్వి ఖండనము చేయును. మరియు $CE=ED=8$ సెం.మీ మరియు $EB=4$ సెం.మీ అయిన వృత్త వ్యాసార్ధము

(1) 8సెం.మీ (2) 4సెం.మీ (3) 6సెం.మీ (4)10సెం.మీ



16. పక్క పటములో $PQRS$ మరియు $PTVS$ అను రెండు చక్రీయ చతుర్భుజములో $\angle QRS = 80°$, అయిన $\angle TVS =$

(1) 80° (2) 100° (3) 70° (4) 90°



17. చక్రీయ చతుర్భుజములో ఒక కోణము 75° అయిన ఎదుటి కోణము కొలత

(1) 100° (2) 105° (3) 85° (4) 90°

18. పక్క పటములో చక్రీయ చతుర్భుజము $ABCD$ లో భుజము DC అనునది E వరకు పొడిగించబడినది

4-Geometry_Term1.indd 194 17-03-2023 15:43:55

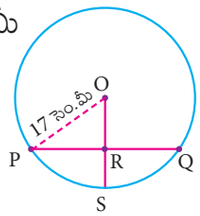
మరియు ఇచ్చట AB కు సమాంతరముగా CF ను గీయుము. ఇచ్చట $\angle ADC = 80°$ మరియు $\angle ECF = 20°$, అయిన $\angle BAD = ?$

(1) $100°$ (2) $20°$ (3) $120°$ (4) $110°$

19. AD ను వ్యాసముగా గల ఒక వృత్తపు ఒక జ్యా AB ఇచ్చట $AD = 30$ సెంమీ మరియు $AB = 24$ సెం.మీ అయిన వృత్త కేంద్రము నుండి AB అమరియున్న దూరము.

(1) 10సెం.మీ (2) 9సెం.మీ (3) 8సెం.మీ (4) 6సెం.మీ

20. పక్క పటములో $OP = 17$ మరియు $PQ = 30$ సెం.మీ మరియు OS అనేది PQ నకు లంబము అయిన RS విలువ



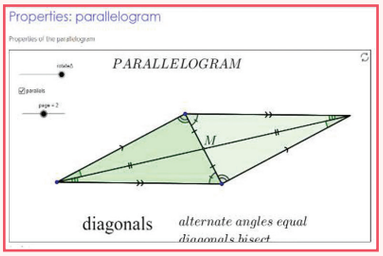
(1) 10సెం.మీ (2) 6సెం.మీ (3) 7సెం.మీ (4) 9 సెం.మీ.

గుర్తించుకోవలసిన విషయములు

- ఒక చతుర్భుజము యొక్క ఎదుటి భుజాలు సమానమైన అది సమాంతర చతుర్భుజమగును.
- సమాంతర చతుర్భుజములో ఎదుటి భుజములు, ఎదుటి కోణములు సమానము.
- సమాంతర చతుర్భుజము యొక్క కర్ణములు ఒకదానికొకటి సమద్విఖండనము చేయును.
- సమాంతర చతుర్భుజము యొక్క కర్ణములు సమాంతర చతుర్భుజమును రెండు సర్వసమాన త్రిభుజములుగా విభజించును.
- ఒకే ఆధార భుజము కలిగిన రెండు సమాంతర రేఖల మధ్య అమరు రెండు సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యములు సమానము.
- ఒకే ఆధార భుజము కలిగిన రెండు సమాంతర రేఖల మధ్య అమరు రెండు త్రిభుజ వైశాల్యములు సమానము.
- సమాంతర చతుర్భుజ కర్ణములు ఒకదానికొకటి లంబమైన అది రాంబస్ అగును.
- ఏకరేఖీయం కాని మూడు బిందువులగుండా ఒకేఒక వృత్తము మాత్రము గీయవచ్చును.
- వృత్తములో గల సమాన జ్యాలు వృత్త కేంద్రము నుండి సమాన దూరంలో ఉండును.
- వృత్తంలో సమాన పొడవు గల జ్యాలు వృత్త కేంద్రంలో సమాన కోణములను ఏర్పరుచును.
- అరవృత్తములో గల సమాన జ్యాలు వృత్త కేంద్రము నుండి సమాన దూరంలో ఉండును.
- ఒక వృత్త చాపము కేంద్రములో ఏర్పరచు కోణము ఆ చాపము తప్ప మిగిలిన వృత్త పరిధిపై ఏదైనా ఒక బిందువులో ఏర్పరచు కోణమునకు రెండు రెట్లుండును.
- అర్ధ వృత్తంలో ఏర్పడు కోణము లంబకోణము.
- ఒకే వృత్త ఖండంలో అమరు కోణములు సమానము.
- వృత్త చతుర్భుజములో ఒక్కొక్క జత ఎదుటి కోణముల మొత్తం $180°$
- వృత్త చతుర్భుజములో ఒక భుజమును పొడిగించడము వలన ఏర్పడు బాహ్యకోణము అంతరాభిముఖ కోణమునకు సమానము

4-Geometry_Term1.indd 195 17-03-2023 15:43:56

అంతర్జాల కృత్యము-1



పటం నుండి కావలసిన ఫలితాలను చూడవచ్చు

మెట్టు - 1

బ్రౌసరును Open ను చేసి క్రింద ఇవ్వబడిన Link ను copy మరియు paste చేయుము లేదా URL ను type. చేయుము లేదా QR కోడ్‌ను స్కాన్ చేయుము.

మెట్టు - 2

జియోజీబ్రా వర్క్‌సీటు లోకి వెళ్ళిన "సమాంతర చతుర్భుజ ధర్మాలు" అని కనబడును. దానిలో Page మరియు Rotate అను రెండు sliders ఉండును.

మెట్టు-3

Rotate అనే sliders ను లాగిన త్రిభుజము యొక్క రెట్టింపు సమాంతరచతుర్భుజం అని ఉండును.

మెట్టు-4

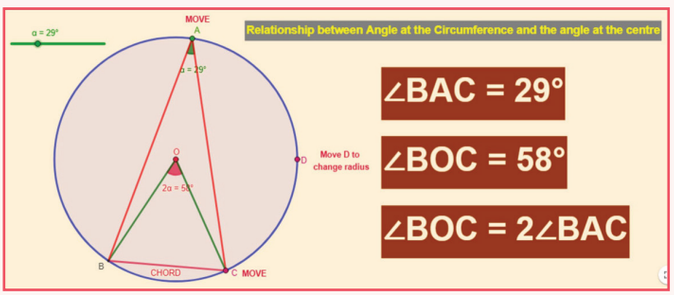
Page అనే slider ను లాగిన మనకు సమాంతర చతుర్భుజ ధర్మాలను వివరించు మూడు పేజీలు ఉండును.

Z1MKN

Browse in the link

Properties: Parallelogram: https://www.geogebra.org/m/m9Q2QpWD

అంతర్జాల కృత్యము-2



పటం నుండి కావలసిన ఫలితాలను చూడవచ్చు

మెట్టు 1:

మెట్టు 1: బ్రౌసర్‌ను Open చేసి క్రింద ఇవ్వబడిన Link ను copy చేసి Paste చేయండి (లేదా) ఇవ్వబడిన URL ను టైపు చేయండి (లేదా) QR కోడ్‌ను Scan చేసి GeoGebra యొక్క నకలు "Angles in a circle" లను work sheet కు వెళ్ళండి. ఈ పని కాగితము (work sheet) లో వృత్తమును గుర్తించి రెండు కృత్యములు ఇవ్వబడి యుండును

మెట్టు :2

రెండవ కృత్యము "Angles in the segment of a circle" *B* మరియు *D* బిందువులను లాగి కోణములను సరిచూడుము. తరువాత "Move" ను తీసికొని వృత్త వ్యాసార్ధము మరియు జ్యా పొడవును మార్చవచ్చును

6G0XA

Browse in the link

Angle in a circle: https://ggbm.at/yaNUhv9S or Scan the QR Code.

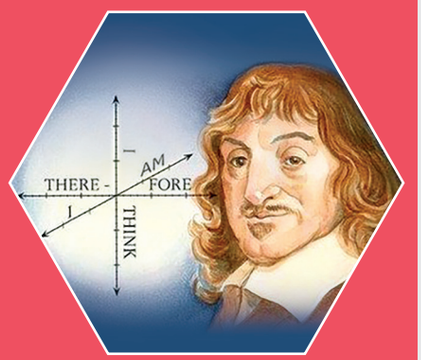
4-Geometry_Term1.indd 196 17-03-2023 15:43:56

5

నిరూపక రేఖాగణితము

కఠినమైన దానిని అనేక భాగాలుగా విభజించుట ద్వారా సులువపరచవచ్చును.

– రనెడెకార్ట్



రెనె డెకార్ట్

(AD(CE)1596-1650)

ఫ్రెంచి దేశపు గణిత మేధావి రెనెడెకార్ట్ (డెకార్ట్ అని ఉచ్చరింపవలెను), వైశ్లేషిక రేఖాగణితము (లేక) నిరూపక రేఖా గణితము అను ఒక క్రొత్త విభాగమును గణితములో పరిచయం చేసినారు. అది గత కాలములలో సంఖ్యాగణితం, బీజగణితము, మరియు రేఖాగణితము మొదలగు వాటిని ఒక్కటికిగా కలిపి (చేర్చి) రేఖా చిత్రములో బిందువులుగాను, సమీకరణముగాను, రేఖాగణిత ఆకారములుగాను చూపించు ఒక యుక్తి అగును.

తలములో ఒక బిందువు యొక్క అక్ష నిరూపములను, రెండు సంఖ్యలను ఉపయోగించి ఒక దానికొకటి లంబమై రెండు రేఖలను నుండి అది ఎంత దూరములో ఉన్నది అను దాని మూలముగా గుర్తించవచ్చును. యిది అంతయు రెనెడెకార్ట్(Rene Descartes) యొక్క సృష్టి అగును.

అభ్యసన ఫలితములు

- కార్టీజియన్ అక్ష నిరూపకముల పద్ధతిని గురించి అవగాహన చేసుకొనుట.
- ఒక బిందువు యొక్క క్షితిజ సమాంతర అక్ష దూరము, క్షితిజ లంబ అక్ష దూరము మరియు బిందువు యొక్క అక్ష దూరములు మొదలగువాటిని తెలుసుకొనుట.
- కార్టీజియన్ తలములో అమరియుండు రెండు బిందువుల మధ్యదూరమును సూత్రము ద్వారా కనుగొనుట.
- మధ్య బిందువు సూత్రమును అర్థంచేసుకొనుట మరియు సమస్యలను సాధించుటలో ఉపయోగించుట.
- విభజన సూత్రమును ప్రతిపాదించుట మరియు సమస్యలను సాధించుటలో ఉపయోగించుట.
- గురుత్వకేంద్ర సూత్రమును అర్థంచేసుకొనుట మరియు దాని ఉపయోగాలను తెలుసుకొనుట.

5.1 తలమును రేఖాచిత్రముగా గుర్తించుట (Mapping plane)

మీరు ఏదేని ఒక చిరునామాను ఎట్లు వ్రాసెదరు? ఉదాహరణకు

సరకల్ విలై ప్రాథమిక పాఠశాల

135 సరకల్ విలై హౌసింగ్ బోర్డు రోడ్డు

కిల్ సరకల్ విలై

SIPKT

5-Coordinat_1.indd 197 30/08/2023 15:06:47



నాగర్ కోయిల్ – 626002, కన్యాకుమారి జిల్లా తమిళనాడు, ఇండియా.

ఏ విధంగానైనను, ఈ ప్రపంచములో ఏవరైనను ఎక్కడ నుండి అయినను తాను చదవిన పాఠశాలను గుర్తించుటకు ఈ సమాచారము సరిపోవును. ఈ భూమిలో కోటానుకోట్ల కట్టడములు ఉన్నవనుకొనుము. ఉన్నను ఒక ప్రత్యేక వ్యక్తి చదివిన పాఠశాల ఎంత లోపలి ప్రదేశములో ఉన్నను దానిని గుర్తించుటకు "చిరునామా" పద్ధతి ఉపయోగించ వచ్చును. ఇది ఎట్లు సాధ్యమగును. ఒక నిర్ణయించిన చిరునామాను గుర్తించు పద్ధతిని తెలుసుకొందాము.

ఈ ప్రపంచము ఖండములుగా విభజించబడి తర్వాత దేశములుగాను, విభజించబడి యున్నదని మనకు తెలియును దానిలో భారతదేశము కూడా ఒక్కటి. పైగా భారతదేశము రాష్ట్రముగా విభజించబడి ఉన్నది. ఈ రాష్ట్రములలో మన తమిళనాడును గుర్తించుటకు సాధ్యమగును. పైగా లోతుగా వెళ్ళి పరిశీలించినపుడు మన రాష్ట్రము జిల్లాలుగాను, జిల్లాలు తాలూకాలుగాను, తాలూకాలు గ్రామాలుగాను కొనసాగినచో ఈదే మార్గములో ఆ తాలూకాలో గల పెక్కు గ్రామాలలో సరకల్ విలై గ్రామమును ఒకరు కనుగొనుటకు సాధ్యమగును. ఈ విధంగా ఆ గ్రామములో గల పెక్కు వీధులలో మనము ఆసక్తితో వెదుకు సరకల్ విలై హౌసింగ్ బోర్డు వీధి ఒకటి.

మనము ఆ వీధిలో గల భవనములలో 135 అను ఇంటి నంబరు గల ప్రభుత్వ ప్రాథమిక భవనమును కనుగొని మన పరిశోధనను ముగింపునకు తీసుకొని వచ్చెదము.అమెరికాలోని న్యూయార్క్ మహానగరములో

మన్‌హట్‌లన్ అనునది ఒక భాగము అగును. భూగోళ పటములో ఈ నగరము యొక్క పెద్దరోడ్లు avenue ఉత్తర దక్షిణముగా వీధులు, తూర్పు పడమరలు గాను అమరినవని చూపును.



పటము. 5.2

మీరు వెదుకుతున్న ప్రదేశము తొమ్మిదవ మరియు 10వ రోడ్ల మధ్య 57వ వీధిలో ఉన్నట్లు అయిన ఆ ప్రదేశమును పటములో నుండి తక్షణమే కనుగొనవచ్చును. ఈ విధంగా 34, మరియు 35వ రోడ్లుకు మధ్య రెండవ వీధిలో అమరిన ప్రదేశమును కనుగొనవచ్చును. పైగా న్యూయార్క్ ప్రజలు దీనిని సరళము చేసినారు

ఒక వీధిలో గల ఇంటి నంబరును తీసుకొని అవి ఏ రెండు పెద్దరోడ్లు మధ్య అమరునవియు, ఒక పెద్దరోడ్లు గల రెండు వీధులను మధ్య అమరుననియు ఖచ్చితముగా కనుగొనవచ్చును. అన్ని పటములను, దారులను దానిలో ఒక ప్రదేశమును గుర్తించుటకు దాని దగ్గరగా ఉన్నవి, దూరముగా ఉన్నవి, అది ఎంత

5-Coordinat_1.indd 198 30/08/2023 15:06:48

దూరములో అమరినది వాటికి మధ్యలో అమరి ఉన్నటువంటి అన్ని సమాచారములతో ఆ ప్రవేశము యొక్క ఉనికిని కనుగొనుటకు సహాయపడును. మనము అక్షాంశ రేఖ (Manhatlan) వీధుల వలె తూర్పు పడమరలుగా మరియు దీర్ఘాంశరేఖ రోడ్ల వలె ఉత్తర-దక్షణాలుగా అనుగొని భూమి పై గల ప్రదేశములను ఖచ్చితముగా గుర్తించుటకు సాధ్యమగును. పటములో సంఖ్యల ఉపయోగము ఏ విధంగా ఉపయోగపడుచున్నది అనునది ఆశక్తి కలిగించుచున్నది.

సంఖ్యలను ఉపయోగించి పటములో ప్రదేశములను గుర్తించుట అను విషయము రేఖాగణిత మూలముగా లభించును. తలములు, ఘన రూపములు, మరియు అన్ని రకములైన ఆకారములు మొదలగు వాటిని నుపయోగించి ఏర్పరచుటకు గణిత శాస్త్రజ్ఞలు ఆశించినారు. వారు అటువంటి పటము ఎందుకు ఆశించినారు? ఒక రేఖాగణిత ఆకారములో ఒక కార్యమును జరిపించునపుడు, ఒక బిందువు అనునది అంతరములో (లేక)బాహ్యములో (లేక) సరిహద్దు మీద అమరినదని పరిశీలించెదము. ఒక తల ఆకారము (మన్‌హట్‌లన్‌లో తూర్పు పడమర వీధులుగా) పై గల రెండు బిందువులను దానికి బయట గల బిందువును ఇచ్చినట్లు అయితే పైన గల రెండు బిందువులలో ఏది బయట అమరునో, బిందువుకు మిక్కిలి దగ్గరగా ఉన్నది, అది ఎంత సన్నిహితంగా ఉన్నది, అను విషయములను శోధించేదము. ఘనచతురస్రము వంటి ఘనకారములలో ఎటువంటి క్లిష్టమైన ప్రశ్నలను ఉహించగలము.

గణిత మేధావులు వృత్తములు, పలు కోణములు మరియు గోళముల గురించి తమ యొక్క అవగాహనకు ఇటువంటి ప్రశ్నలు, సందేహములను లేపి దాని మూలముగా పరిష్కారమును పొందిరి. దైనందిన జీవితములోను గణిత యుక్తులు మరియు సూక్ష్మమైన గణిత మార్గములు ఉపయోగపడినవి. 17వ శతాబ్దములో గణిత నియమములో అక్ష నిరూపకముల పద్ధతి ఉద్భవించకుండ యుండినచో, 18వ శతాబ్దములో అక్షాంశ రేఖలు మరియు దీర్ఘశాంశ రేఖలు వంటి వాటిని ఉపయోగించి ప్రపంచ పటములో గుర్తించుట అనునది అసాధ్యము.

మీరు ఇంతకు ముందే వాస్తవ సంఖ్యల వ్యవస్థ యొక్క చిత్రమును సంఖ్యారేఖలో తెలుసుకొని యున్నారు. ఇది రెండు దిశలలోను అపరిమితంగా ఎడిగించబడును. సంఖ్యా రేఖలో ఏవేని రెండు బిందువులకు మధ్య అంతము లేని బిందువులు అమరియుండును. మనము ఇప్పుడు ఒక తలము యొక్క రేఖా చిత్రమును గీచి ఆ తలములో గల బిందువులను, బిందువులకు మధ్య గల దూరము వాటిని గూర్చి తర్కించన్నాము.

పైగా మనం ఇంత వరకు సూక్ష్మంగా చర్చించిన అన్ని రేఖాగణిత ఆకారములను గీయబోవుచున్నాము. సంఖ్యాగణితము మనకు సంఖ్యల ప్రపంచమునకు మరియు వాటి పరిక్రియల ప్రపంచమునకు పరిచయము చేసినది. బీజ గణితము మనకు తెలియని ఒక దాని విలువను, మరియు వాటిని సమీకరణములనుపయోగించి కనుగొనుటకును నేర్చినది. రేఖాగణితం మనకు ఆకారమును, వాటి ధర్మములనాధారముగా వివరించుటను నేర్చించుయున్నది. నిరూపక జ్యామితి అనునది సంఖ్యల ఉపయోగము మరియు బీజ గణిత సమీకరణమునుపయోగించి రేఖాగణితమును నేర్చుటకు ఎన్నో యుక్తులను ఒక తలములో అందమైన పద్ధతితో ఒకటిగా కలిపి, విశ్లేషించి నేర్చబోవుచున్నాము. ఇది మిక్కిలి ఆశక్తి గల ప్రక్రియ అగును.



పటము. 5.3

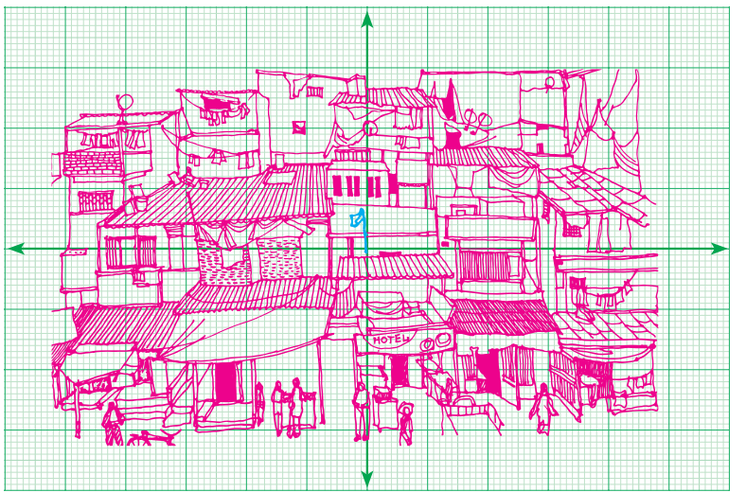
5.2 అక్షనిరూపముల వ్యవస్థను కనుగొనుట

నీవు, నీ స్నేహితుని వద్ద 5 సెం.మీ, 3 సెం.మీ

5-Coordinat_1.indd 199 30/08/2023 15:06:48

కొలత గల ఒక దీర్ఘచతురస్రమును ఒక తెల్ల కాగితములో గీయమని చెప్పుము. దానికి అతను అవును అయితే రేఖా కాగితములో ఎక్కడ గీయాలి అని అతను అడిగినచో అతనికి నీవు ఎట్లు జవాబు చెప్పగలవు?

ఇప్పుడు పటమును పరిశీలించుము. దీనిని యితరులకు ఎట్లు వివరించగలవు? పైన చూపబడిన (పటము 5.3) పరిశీలించెదము. ఇందులో సాధారణముగా ఒక ప్రత్యేక యింటికి గుర్తించుట అనునది అసాధ్యమైన పని అగును. ఏదేని ఒక ప్రదేశమునో (లేదా) ఒక వస్తువునో గుర్తించుటకుగాను నిర్ణయించినపుడు మరొక ప్రదేశమునో లేదా వస్తువునో గుర్తించుట సులభమగును. ఉదాహరణకు, ఒక జెండా నాటి దానికి ఎడమవైపు నున్న యింటిని గాని, ఆ యింటికి క్రిందభాగములో అమరియున్న భోజనశాలను గాని, ఆ యింటికి కుడివైపున గల సంకేత గ్రహకం గూర్చి మాట్లడవచ్చు.



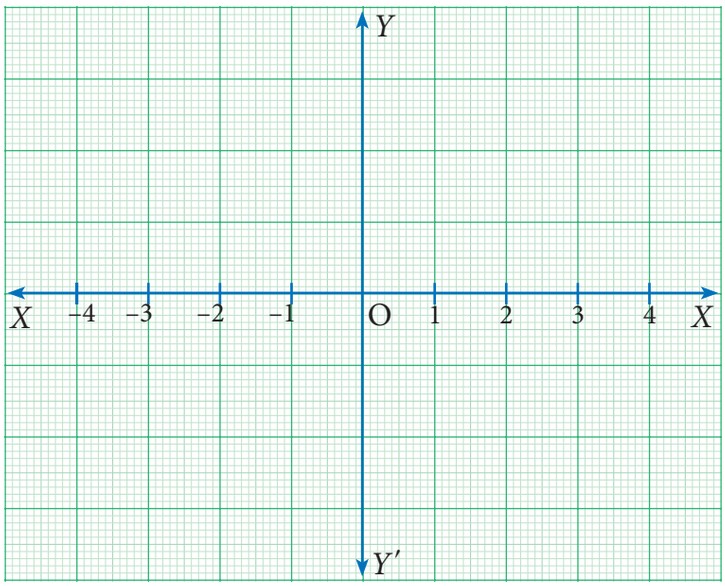
పటము. 5.4

పటము 5.4 లో ఉన్నట్లు విధముగా, రెండు లంబరేఖలు ఖండించుకొను బిందువు జెండా దగ్గరగా అమరున్నట్లు గీయుము. ఇప్పుడు నీవు నీ స్నేహితుని వద్ద పొడవు వెడల్పుల పతాకము బిందువు ఆకారముగా తీసుకొని 2 సెం.మీ, కుడి భుజమువైపు 3 సెం.మీ పైభాగము, మరియ (నీకు దిశ తెలిసినచో) 2 సెం.మీ తూర్పుగాను 3 సెం.మీ ఉత్తరముగా గీయమని చెప్పవచ్చు.

ఇదే విధముగా మనము చేయబోవుచున్నాము. సాధారణముగా, సంఖ్యారేఖ అనునది. సున్నకు కుడివైపున ధనసంఖ్యలను, సున్నకు ఎడమ వైపున ఋణ సంఖ్యలను గుర్తించడము అగును. మనము యిప్పుడు మరొక సంఖ్యారేఖ ప్రతిని లంబముగా తీసుకొనుము. అయితే సున్నకు పై భాగమున ధన సంఖ్యలు మరియు సున్నకు క్రింది భాగమున ఋణ సంఖ్యలను గుర్తించవలెయును

రెండు సంఖ్యారేఖలు ఎక్కడ సంధించుకొనును? రెండు రేఖలు ఆది బిందువు వద్ద సందించును. ఇదే మన యొక్క జెండా చూపించిన స్థలము అగును. రెండు రేఖలలో నుండు సంఖ్యలను గూర్చి చర్చించవచ్చును. అయితే ఇప్పుడు మీరు రెండు రేఖల్లోయున్న సంఖ్యలను మాత్రమే కాకుండా యింకా ఎక్కువగా చూడవచ్చును.

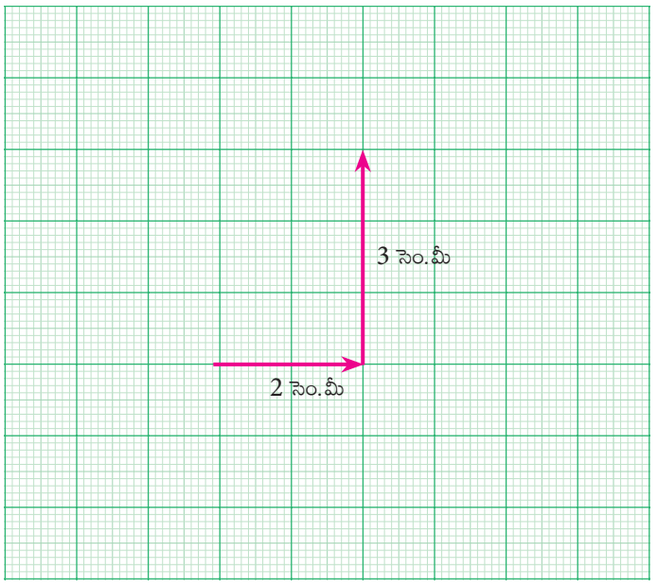
మనము కుడివైపున 2 యూనిట్లు, పై వైపున 3 యూనిట్లు వెళ్ళునట్లు ఊహించుకొన్నచో మనము ఆ స్థలము (→ 2, ↑ 3) అని చెప్పవచ్చును.



పటము. 5.5

5-Coordinat_1.indd 200 30/08/2023 15:06:48

లంబము, క్షితిజ, పైన, క్రింద మొదలగు వాటిని ఉపయోగించుట సాధ్యముకాదు. కావున దీనికి మనము సూక్ష్మముగా (2,3) అని చెప్పవచ్చును. పైగా కుడివైపు 2 యూనిట్లు మరియు పైవైపున 3యూనిట్లు అని అర్థము చేసుకొనేదము. మనము మొదటి 3 యూనిట్లుపై వైపున మరియు 2 యూనిట్లు కుడివైపున వెళ్ళిన పొందు స్థలము (2,3) కనుగొన్న పద్ధతి (3,2) కనుకొను పద్ధతి ఒకటే అగునా? అనుదానికి ఊహించుకొనుము. పైగా (−2,3) అనునది ఏ విధముగా అమరును? ఇది ఎల్లప్పుడూ (0,0) నుండి 2 యూనిట్లు ఎడమవైపున, మరియు 3 యూనిట్లు పై వైపున అమరును. (2,−3)ను కనుగొను పద్ధతి ఏది? ఇది 2 యూనిట్లు కుడివైపున, మరియు 3 యూనిట్లు క్రిందవైపున అమరియుండును. మనకు యిప్పుడు క్షితిజ మరియు లంబ సంఖ్యారేఖలను పేరు పెట్టవలసిన అవసరము ఉన్నది. క్షితిజ సమాంతర వాస్తవ సంఖ్య రేఖను x- అక్షమనియు క్షితిజ లంబ వాస్తవ రేఖను y- అక్షమనియు అందురు. కుడివైపున X అనియు ఎడమవైపున X'గాను, పైవైపున Y,అనియు క్రిందివైపున Y'గాను గుర్తించేదము.



పటము. 5.6

x- నిరూపకాన్ని ప్రథమ నిరూపకాక్షం *(abscissa)* గాను y- నిరూపకాన్ని లంబ నిరూపకాక్షం *(ordinate)* గాను పిలిచెదరు. ఈ రెండు అక్షములు ఖండించు బిందువును (0,0) ఆది బిందువు *(origin)* అందురు.

మనము యిప్పుడు కాగితములోని ఏ ఒక బిందువైనను (x,y) అని వివరించవచ్చును. మనకు కాగితములో (1, 2) బిందువు అనునవి ఏ దానిని గుర్తించును. ఈ సంఖ్యను గుర్తించుటకు మనము అనుకూలమైన యూనిట్లను తీసుకొనవలసిన అవసరము ఉన్నది. ఉదాహరణకు మనము 1 యూనిట్‌కి 1 సెం.మీ గా తీసుకొనవచ్చు. కాబట్టి (0,0) కుడిభాగమున 2 సెం.మీ. జరిగిన మరియు పై భాగమున 3 సెం.మీ జరిగిన ఏర్పడునది (2,3) అగును. (యూనిట్లను ఎన్నుకొను విధము సొంత నిర్ణయమగును) మనము 1 యూనిట్టునకు 2 సెం.మీగా తీసుకొంటే వచ్చే రేఖాపటము చాలా పెద్దది అగును. అయితే సంబంధించిన దూరము మారదు.

ఇప్పుడు మన దగ్గర ఉన్నది ఖాళీ కాగితము కాదు. తలములో యున్న అసంఖ్యామైన బిందువులను వివరించు భాష అగును. !

x- అక్షము మరియు y- అక్షములు తలమును నాలుగు భాగములుగా విభజించును. వాటిని మనము పాదములు (quadrants) అని అందురు. (జ్ఞాపకముంచుకొనుము చతుర్భుజము అనునది నాలుగు భుజములకు కలుగునది అగును) సాధరణముగా I, II, III మరియు IV పాదములని పిలువబడును. ఇందులో I అనునది తూర్పు పై భాగములను, II అనునది పడమర పైభాగమును III అనునది పడమర క్రింద భాగమును IV అనునది తూర్పు క్రింది భాగముగాను అపసవ్య దిశలో సంఖ్యాలచే సూచించబడును.

సూచన

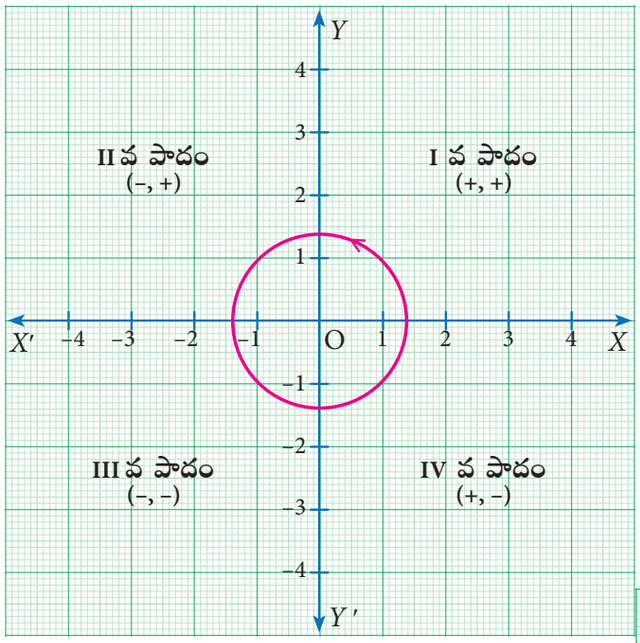
(0,0) అనే బిందువు గ్రాఫ్ కాగితం మధ్యలోనే ఉండనవసరంలేదు. ఎక్కడ ఉన్ననూ (0,0) అనేది ఎల్లప్పుడూ ఆది బిందువు అగును. అన్ని సూచనలు ఆది బిందువుకు సంబంధించియుండును. ఆది బిందువును సాధారణంగా *'O'* అనే అక్షరముతో గుర్తిస్తాము.

5-Coordinat_1.indd 201 30/08/2023 15:06:49

సూచన

ఈ పద్ధతి (అపసవ్య దిశ) సవ్యదిశలో కాకుండా (లేదా) వేరొక పాదము నుండి ప్రారంభించగలమా? ఇది పెద్ద సమస్య కాదు. కాని కొన్ని శతాబ్దములగా ఉపయోగించుచున్న పద్ధతే ఇదే.

ప్రదేశము	పాదము	అక్షదూరముల స్వభావం x,y	క్రమయుగ్మముల గుర్తులు
XOY	I	$x>0,\ y>0$	(+,+)
$X'OY$	II	$x<0,\ y>0$	(–,+)
$X'O\ Y'$	III	$x<0,\ y<0$	(–,–)
$XO\ Y'$	IV	$x>0,\ y<0$	(+,–)



పటము. 5.7

సూచన

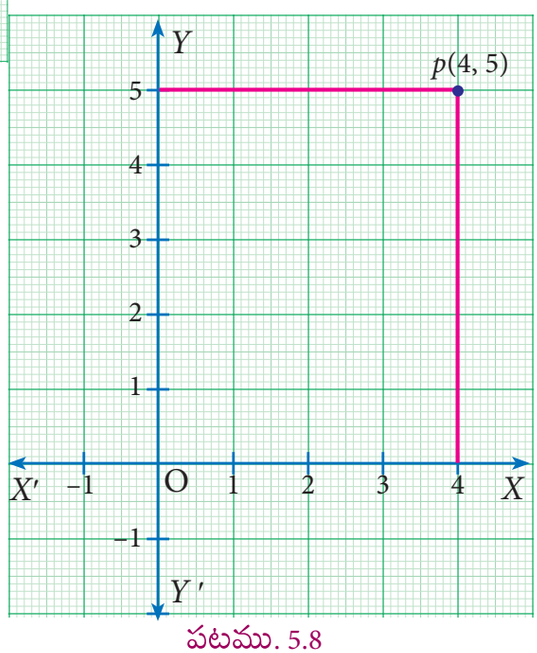
1. x అక్షములో అమరు ఒక బిందువునకు P , y అక్షరూపము సున్న అగును $P\ (x,0)$ ..
2. y అక్షములో అమరు ఒక బిందువునకు Q, x అక్షరూపము సున్న అగును $Q\ (0, y)$
3. $x = y$ అగువరకు $(x, y) \neq (y, x)$ సమానం కాదు
4. లంబ అక్షములు కలిగిన దీర్ఘచతురస్రాకారతలమును కార్టీషియన్ తలము (*Cartesian plane*) అందురు

5.2.1 కార్టీషియన్ తలములో బిందువులను గుర్తించుట

కార్టీషియన్ నిరూపక పద్ధతిలో (4,5) అను బిందువును గుర్తించుటకు, x –అక్షము పై 4 యూనిట్లు వచ్చు వరకు వెళ్ళి అచ్చట నుండి ఒక లంబరేఖను గీయుము.

అదేవిధంగా y– అక్షముపై 5 యూనిట్లు వచ్చు వరకు వెళ్ళి అచ్చట నుండి క్షితిజ సమాంతరముగాను లంబరేఖను గీయుము.

ఈ రెండు రేఖలు ఖండించు స్థలము కార్టీషియన్ తలములో బిందువు (4,5) యొక్క స్థలము అగును.



పటము. 5.8

5-Coordinat_1.indd 202 30/08/2023 15:06:49

ఈ బిందువు అనునది x అక్షము నుండి 5 యూనిట్లు దూరములో y అక్షము నుండి 4 యూనిట్ల దూరములో అమరును. ఈ విధముగా కార్టీషియన్ తలములో (4,5) అను బిందువు గుర్తించబడును.

ఉదాహరణ 5.1 ఈ క్రింది బిందువులు ఏ పాదములో అమరియుండును?

(a) (3,–8) (b) (–1,–3) (c) (2, 5) (d) (–7, 3)

సాధన

(అ) x అక్షనిరూపకము ధనాత్మకంగాను, మరియు y అక్ష నిరూపకము ఋణాత్మకంగాను ఉండుట వలన (3, –8) అను బిందువు IV వ పాదమునందు అమరును.

(ఆ) x అక్షనిరూపకము ఋణాత్మకంగాను మరియు y అక్షనిరూపకము ఋణాత్మకంగాను ఉండుట వలన (–1, –3) అను బిందువు III వ పాదము నందు అమరును.

(ఇ) x-.అక్షనిరూపకము ధనాత్మకంగాను, y అక్షనిరూపకము ధనాత్మకంగాను ఉండుట వలన్ల (2, 5) అను బిందువు I వ పాదము నందు అమరును.

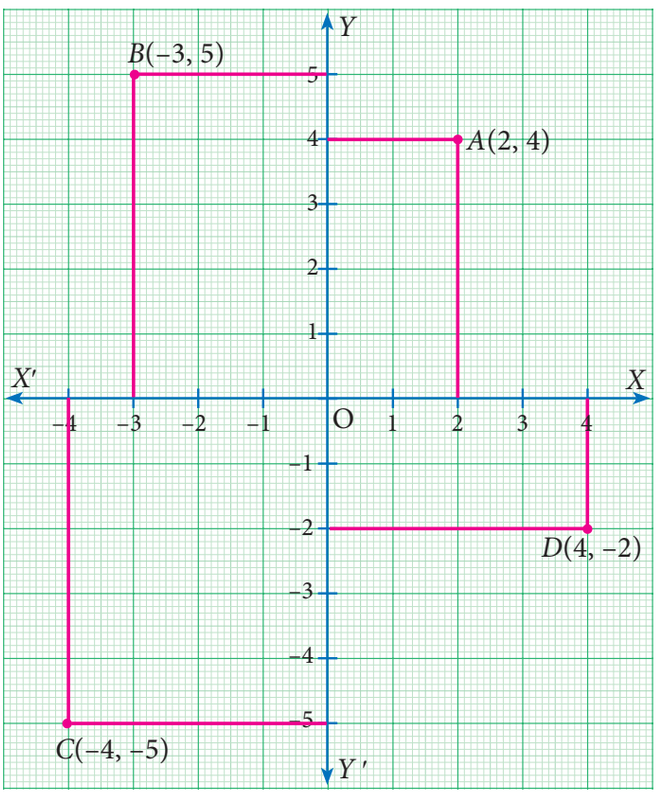
(ఈ) x-అక్షనిరూపము ఋణాత్మకంగాను, మరియు y అక్షనిరూపకము ధనాత్మకంగాను ఉండుట వలన (–7, 3) అను బిందువు IIవ పాదమునందు అమరును.

ఉదాహరణ 5.2 $A(2,4)$, $B(-3,5)$, $C(-4,-5)$, $D(4,-2)$ అను బిందువులను కార్టీషియన్ తలములో గుర్తించుము.

సాధన

(i) కార్టీషియన్ తలము నందు. (2, 4) గుర్తించుటకు, $x = 2$ వద్ద ఒక క్షితిజ లంబరేఖ, $y = 4$ వద్ద ఒక క్షితిజ సమాంతర రేఖను గీయుము. ఈ రెండు రేఖల ఖండన బిందువు (2, 4) బిందువు అగును. ఈ నిరూపక పద్ధతిలో A (2, 4) అను బిందువు కార్టీషియన్ తలములో మొదటి(I) పాదము నందు గుర్తించబడును.

(ii) కార్టీషియన్ తలము నందు (–3, 5) బిందువును గుర్తించుటకు, $x = -3$ వద్ద ఒక క్షితిజ లంబరేఖ, మరియు$y = 5$. వద్ద క్షితిజ సమాంతర రేఖను గీయుము. ఈ రెండు రేఖల ఖండిన బిందువు (–3, 5) బిందువు అగును. ఈ పద్ధతిలో B (–3, 5) అను బిందువు కార్టీషియన్ తలములో II వ పాదములో గుర్తించబడును.



పటము. 5.9

5-Coordinat_1.indd 203 30/08/2023 15:06:49

(iii) కార్టీషియన్ తలము నందు $(-4,-5)$ గుర్తించుటకు, $x=-4$ వద్ద ఒక క్షితిజ లంబరేఖ, మరియు $y=-5$ వద్ద ఒక క్షితిజ సమాంతర రేఖను గీయుము. ఈ రెండు రేఖల ఖండన బిందువు $(-4, 5)$ బిందువు అగును. ఈ పద్ధతిలో $C(-4, -5)$ అను బిందువు కార్టీషియన్ తలములో III వ పాదము నందు గుర్తించబడును.

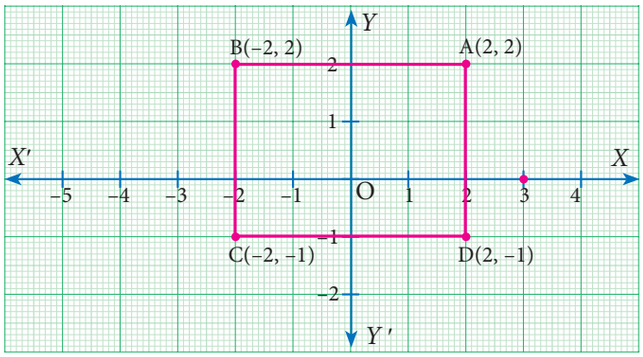
(iv) కార్టీషియన్ తలము నందు $(4, -2)$ గుర్తించుటకు, $x=4$ వద్ద ఒక క్షితిజ లంబరేఖ, మరియు $y=-2$. వద్ద ఒక క్షితిజ సమాంతర రేఖను గీయుము. ఈ రెండు రేఖల ఖండన బిందువు $(4,-2)$ బిందువు అగును. ఈ పద్ధతిలో $D(4,-2)$ అను బిందువు కార్టీషియన్ తలములో IV వ పాదము నందు గుర్తించబడును..

ఉదాహరణ 5.3 $A(2,2)$, $B(-2,2)$, $C(-2,-1)$, $D(2,-1)$ బిందువులను కార్టీషియన్ తలములో గుర్తించుము

సాధన

బిందువులు	A	B	C	D
పాదము	I	II	III	IV

$ABCD$ ఒక దీర్ఘచతురస్రము అగును. ఈ దీర్ఘచతురస్రము యొక్క పొడవు, వెడల్పు మరియు వైశాల్యము కనుగొనగలవా?



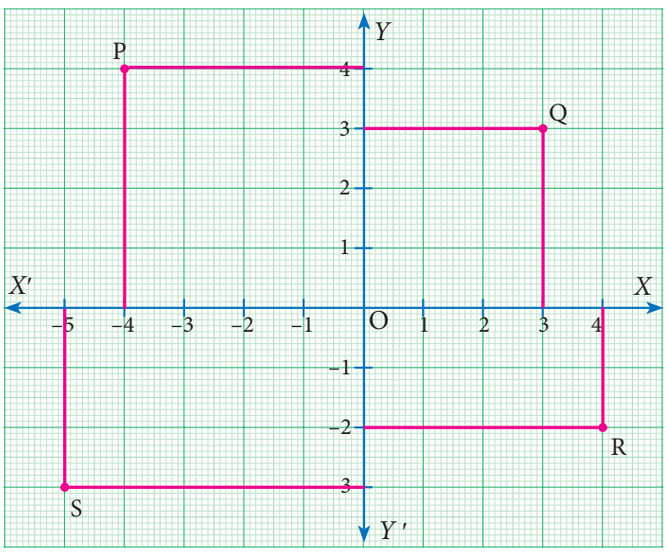
పటము.5.10

అభ్యాసము 5.1

1. క్రింది బిందువులను కార్టీషియన్ నిరూపక పద్ధతిలో గుర్తించి మరియు అది ఏ పాదములో అమరునో తెలుపుము. $P(-7,6)$, $Q(7,-2)$, $R(-6,-7)$, $S(3,5)$ మరియు $T(3,9)$

2. ప్రక్క పటములో 5.17 కార్టీషియన్ తలము నుండి క్రింది బిందువుల యొక్క క్షితిజ లంబనిరూపము, క్షితిజ సమాంతర రూపకములను వ్రాయుము.

(i) P (ii) Q (iii) R (iv) S



పటము. 5.11

5-Coordinat_1.indd 204 30/08/2023 15:06:50

3. ఈ క్రింది యివ్వబడిన బిందువులను గ్రాపు కాగితములో గుర్తించి వాటిని కలుపుము. లభించిన ఆకారమును గూర్చి నీఅభిప్రాయమును తెలుపుము?

(i) (−5,3) (−1,3) (0,3) (5,3) (ii) (0,−4) (0,−2) (0,4) (0,5)

4. క్రింది బిందువులను కార్టీషియన్ తలములో గుర్తించి, వాటిని వరుసగా కలుపుము. ఏర్పడు ఆకారపు రకమును తెలుపుము

(i) (0,0) (−4,0) (−4,−4) (0,−4) (ii) (−3,3) (2,3) (−6,−1) (5,−1)

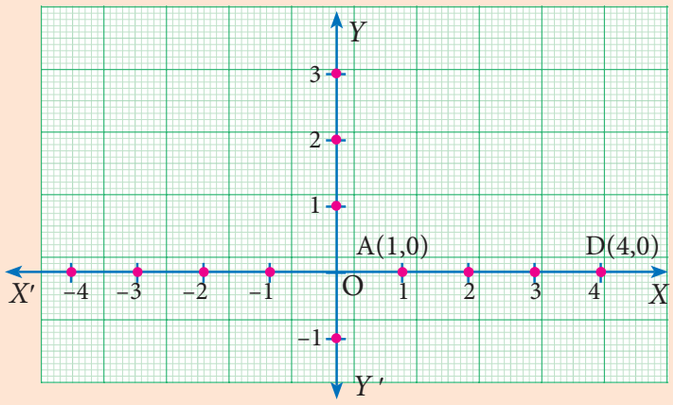
కృత్యము - 1

క్రింది బిందువులను గ్రాపు కాగితములో 1 సెం.మీ = 1యూనిట్ చొప్పున తీసుకొనుము. A (1, 0) మరియు D (4, 0). ఒక బిందువు నుండి ఒక బిందువుకు ఎంత దూరములో యుండును

A (1, 0) మరియు D (4, 0) AD మరియు DA లను కనుగొనుము?.

$AD = DA$ అనునది సరియైనదా

ఇదేవిధంగా, మరొక జత బిందువులను గుర్తించి వాటి మధ్య గల దూరములను సరిచూడుము.



పటము. 5.12

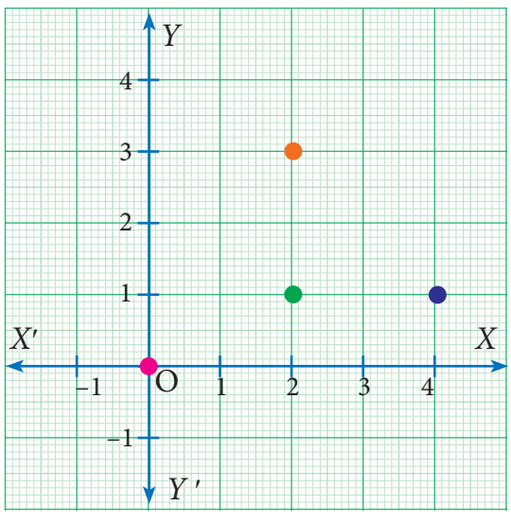
5.3 ఏదేని రెండు బిందువుల మధ్యదూరము

అఖిల మరియు షణ్ముగం సత్యమంగళములో ఒకే వీధిలో నివసించు ఇద్దరు స్నేహితులు ఈ వీధియును, గ్రంథాలయము అమరియున్న వేరొక వీధియును కలియు స్థలమునందు షణ్ముగం యొక్క ఇంటి ప్రక్కన ఉన్న పాఠశాలలో ఇద్దరు చదువుచున్నారు. ప్రక్క ఇవ్వబడిన పటమును చూడకుండా వారి యొక్క ఇళ్ళను, గ్రంథాలయమును మరియు పాఠశాల స్థలములను చిత్రించుటకు ప్రయత్నించుము.

పాఠశాల అనునది ఆది బిందువుగా ఉన్నదనుకొనుము. (అక్షనిరూప నిర్మాణ పద్ధతి రూపమును ఉపయోగించి దీనిని చేయవచ్చును)

ఇప్పుడు 1 యూనిట్ = 50 మీటరుగా నిర్ధారణ రూపములో తీసుకొనుము. ఇవ్వబడిన పటము (5.19) చదివి (చూచి) ఈ క్రిందివ్వబడిన ప్రశ్నలకు జవాబు వ్రాయవలెయును.

1. షణ్ముగం ఇంటి నుండి అఖిల ఇల్లు ఎంత దూరములో ఉండును?
2. షణ్ముగం ఇంటి నుండి గ్రంథాలయం ఎంతదూరములో ఉండును?
3. షణ్ముగం మరియు అఖిల ఇంట నుండి పాఠశాల ఎంత దూరములో ఉండును?



పటము. 5.13

5-Coordinat_1.indd 205 30/08/2023 15:06:50

4. అఖిల ఇంటి నుండి గ్రంథాలయం ఎంత దూరములో ఉండును?

5. అఖిల ఇంటి నుండి షణ్ముగం ఇల్లు ఎంత దూరములో ఉండును?

ప్రశ్న 1కి జవాబు చెప్పిన తర్వాత ప్రశ్న 5కి జవాబు చెప్పనవసరం లేదు. బిందువు A నుండి B కి ఉన్న దూరము, బిందువు B నుండి A కి ఉన్న దూరము సమానమని బాగుగా తెలియును. పైగా మనము సాధారణముగా బిందువు A కు B. కి మధ్యగల దూరము అని చెప్పెదము. అయితే గణిత మేధావులు సాధారణముగా ఏ విధంగా ఇది వర్తించునని వాటి ధర్మములను ఉపయోగించెదరో అదేవిధంగా మనము (A,B) దూరము = (B,A) దూరము. అని వ్రాయుట ఉత్తమమైనది.ఇది ఒక తలములో అమరు అన్ని బిందువులకు వర్తించును. కావున ప్రశ్న 1కి ప్రశ్న 5కి జవాబు ఒక్కటే

సూచన

(A,B) ల మధ్య దూరం= *(B,A)* ల మధ్య దూరం ఎల్లప్పుడు సమానము కాదు. ఒక వేళ A నుండి B కు వెళ్లే మార్గం ఒక వైపు మార్గం *(one-way)* అయితే B నుండి A కు వెళ్లే దూరం ఎక్కువగును. కాని ఇక్కడ మాత్రము మనం A నుండి B కు వెళ్లే మార్గం రెండు వైపులా దూరం (*both ways*) అని మాత్రం అనుకోవాలి.

మిగిలిన ప్రశ్నలకు జవాబులేమిటి? మిగిలిన ప్రశ్నలకు జవాబులు వేరు వేరుగా యుండును. రెండు ఇండ్లు ఉత్తర దక్షణాలుగా ఒకే వీధిలో అమరిఉన్నదని మనకు తెలియును. దీని నుండి y- అక్షదూరము అనునది ప్రశ్న 1 యొక్క జవాబు అగును. ఇదే విధంగా, గ్రంథాలయము, షణ్ముగం యొక్క ఇల్లు తూర్పు పడమరగా వెళ్ళు ఒకే వీధిలో ఉండుట వల్ల x- అక్షదూరము 2 ప్రశ్నకు జవాబు అగును..

x మరియు y అక్షములకు సమానముగా 1,2,3.....అని చూచించిన బిందులను కలిగిన ఒకే ఒక వీధి మాత్రమే ఉన్నట్లుగా తీసుకొని దూరములను కూడిక చేయగా 3, 4 ప్రశ్నలకు జవాబు చెప్పవచ్చును. అయితే అఖిల ఇంటికి తూర్పున విశాలమైన ప్రదేశము ఉన్నదనుకొనుము.

ఒక వేళ విశాలమైన ప్రదేశము ద్వారా వెళ్ళుటకు ఇష్టపడువచ్చును. ఈ సమయములో ఒక చోట నుండి మరోక చోటికి వెళ్ళుటకు పలు మార్గములు ఉన్నందున వాటి దూరములను ఖచ్చితముగా కనుగొనుటకు వీలుకాదు. కావున దానిని గణించుటకు ఒక పద్ధతి కావలెయును. A మరియు B కి పలు మార్గములు ఉన్నందు వల్ల వాటిలో కనిష్ట దూరము గుర్తించుటకు దూరము (A,B) ని ఉపయోగించేదము.

తలములో A మరియు B అను ఏవేని రెండు బిందువుల మధ్య దూరమే అని అర్థమగుటకు A మరియు B కి మధ్య (A,B) 'సరళరేఖ దూరము' అనునదే దూరము అని మన మనసునకు కలుగు యుక్తి సహకరించును. ఇదియే అక్షనిరూప నిర్మాణరూపమును ఉపయోగించుటకు ముఖ్య కారణమగును. అంతకు ముందు, మనము ఉదాహరణలో ఇంకను రెండు ప్రశ్నలకు జవాబు ఇవ్వవలసి యుండును.

1. పాఠశాలను ఆది బిందువుగా తీసుకొని రెండు ఇల్లు, పాఠశాల మరియు గ్రంథాలయము యొక్క నిరూపకములను నిర్వచించుము.
2. పైన తెలిపిన ఏదేని రెండు నిరూపకములను ఉపయోగించి రెండు బిందువుల మధ్యదూరము కనుగొనుము.

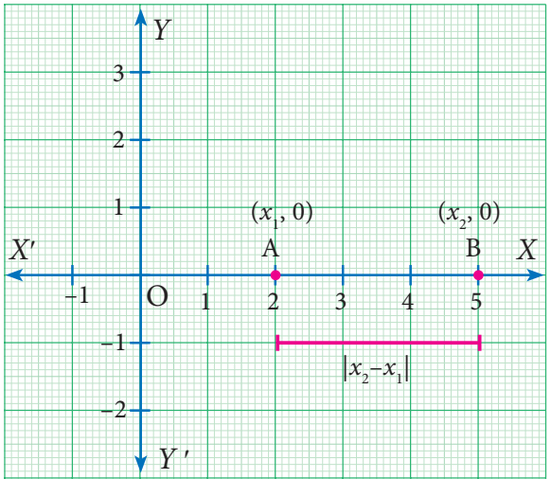
"సరళరేఖ దూరం" అనునది "కాకి యొక్క ఎగురు విధము" అని పిలువబడుచున్నది. అనగా మధ్యలో నేల మార్గమున ఎటువంటి అడ్డంకులు ఏర్పడినను లెక్కచేయక A నుండి B కు పోవలెననిన తప్పక ఎగురవలెను అనునదే దీని యొక్క అర్థము అయినను ఏ పక్షియు ఆ విధంగా సరళరేఖలో ఎగురదు అనునది నిస్సందేహం.

5-Coordinat_1.indd 206 30/08/2023 15:06:51

దీనికి సరియైన జవాబు ఇచ్చుటకు, $A = (x,y)$ మరియు $B = (x', y')$ అను తలములో అమరు రెండు బిందువుల దూరము (A,B) ను కనుగొనుట సాధ్యమగును. పైగా x, y, x' మరియు y' మొదలగు వాటి ద్వారా ఒక సూత్రము సులభముగా తెప్పించవచ్చును. దీనినే మనము చేయుటకు ప్రయత్నించెదము.

5.3.1 నిరూపక అక్షములలో అమరియున్న రెండు బిందువుల మధ్యదూరము

x- అక్షముపై యున్న బిందువులు: x- అక్షముపై నున్న రెండు బిందువుల మధ్య దూరము అనునది వాటి నిరూపకముల మధ్య వ్యత్యాసము (భేదము) అగును. $A\,(x_1,0)$ మరియు $B\,(x_2,0)$ అను బిందువులను x- అక్షముపై తీసుకొనినచో.



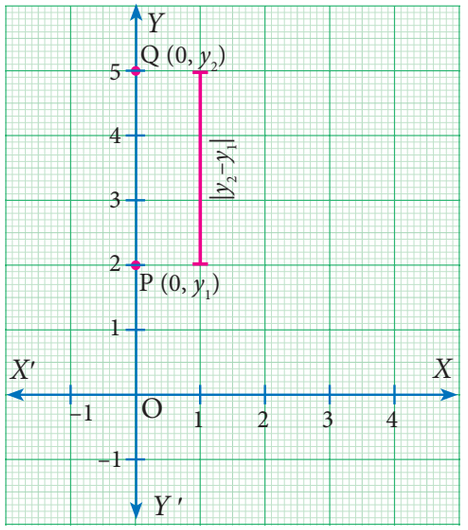
పటము. 5.14

A బిందువు నుండి B కు గల దూరము

$$AB = OB - OA = x_2 - x_1 \text{ if } x_2 > x_1 \text{ or}$$
$$= x_1 - x_2 \text{ if } x_1 > x_2$$
$$AB = |x_2 - x_1|$$

(దీనిని $x_2 - x_1$ యొక్క పరమ విలువ లేదా నిర్ధారక విలువ అని చదవాలి)

y – అక్షముపై యున్న బిందువులు: అదేవిధంగా y-అక్షముపై నున్న రెండు బిందువుల మధ్య దూరము అనునది y-అక్షనిరూపకముల మధ్య వ్యత్యాసము అగును.



పటము. 5.15

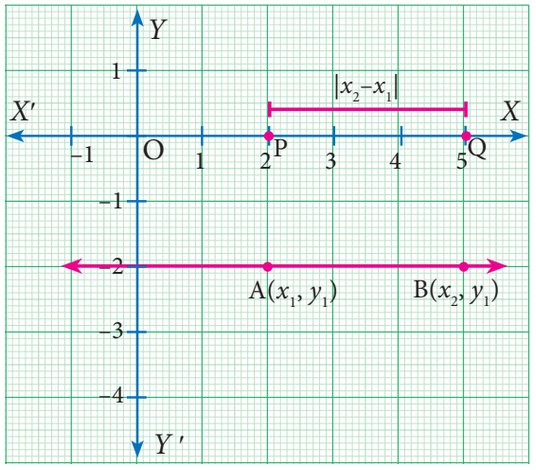
$P(0,y_1)$ మరియు $Q(0,y_2)$ రెండు బిందువులు ఉన్నవనుకొనుము P బిందువు నుండి Q కు గల మధ్యదూరము

$$PQ = OQ - OP.$$
$$= y_2 - y_1 \text{ if } y_2 > y_1 \text{ or}$$
$$= y_1 - y_2 \text{ if } y_1 > y_2$$
$$PQ = |y_2 - y_1|$$

(దీనిని $y_2 - y_1$ యొక్క పరమ విలువ లేదా నిర్ధారక విలువ అని చదవలెయును)

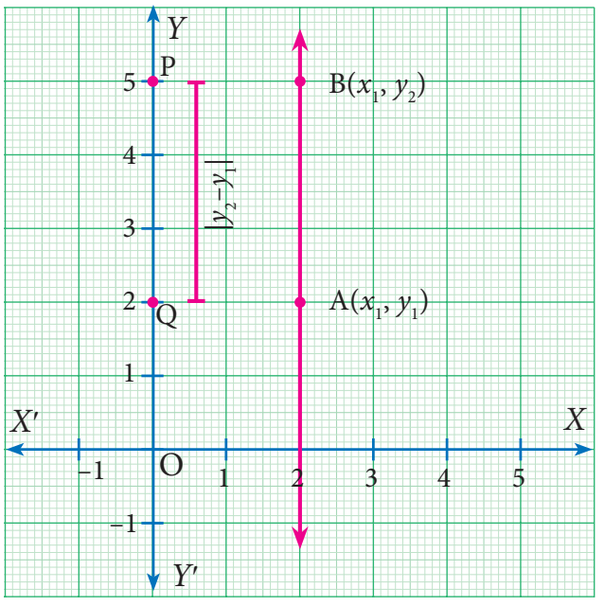
5.3.2 నిరూపక అక్షాలకు సమాంతరముగా గల రేఖపై రెండు బిందువుల మధ్య రూపము

$A(x_1, y_1)$ మరియు $B(x_2, y_1)$ రెండు బిందువులను కొనుము. వాటి యొక్క y- అక్షముల నిరూపకాలు సమానముగా యుండుట వల్ల అవి x- అక్షమునకు సమాంతరముగా ఉండే రేఖపై ఉంటాయి. A మరియు B అను బిందువుల



పటము. 5.16

5-Coordinat_1.indd 207 30/08/2023 15:06:51



పటము. 5.17

నుండి x- అక్షమునకు వరుసగా AP మరియు BQ అను లంబరేఖలను గీయుము. పటము 5.22 పరిశీలించండి. AB ల మధ్యదూరము అనేది PQ యొక్క దూరమునకు సమానము అవుతుంది.

కాబట్టి AB మధ్యదూరం $= PQ = |x_2 - x_1|$ ల మధ్యదూరం

(x అక్షనిరూపకముల మధ్య వ్యత్యాసము)

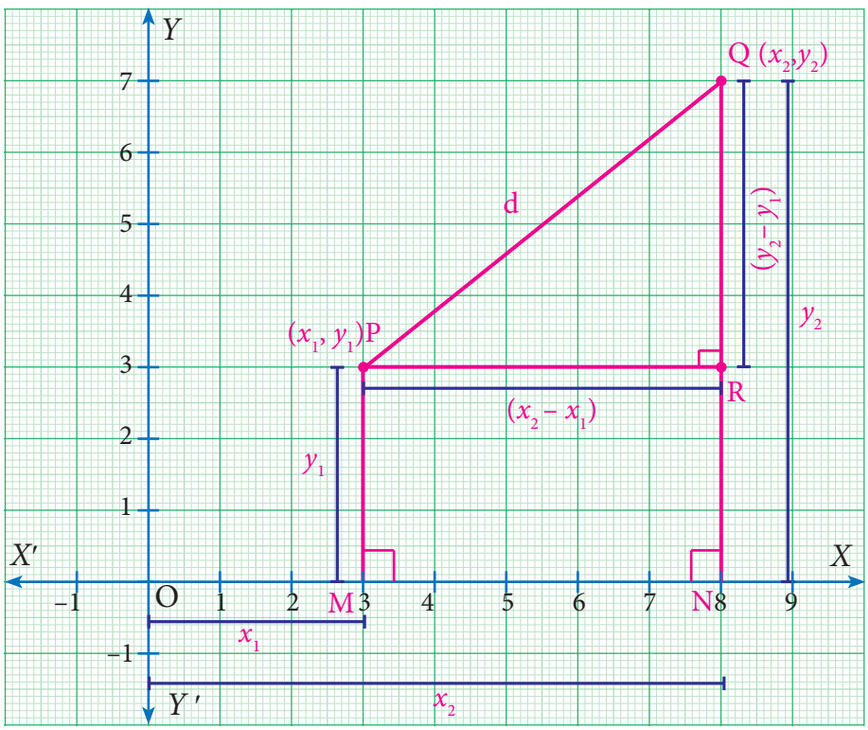
ఇదేవిధముగా రెండు బిందువులను కలుపు రేఖ అనుకొనుము

$A(x_1, y_1)$ మరియు $B(x_1, y_2)$, y – అక్షమునకు సమాంతరముగా యుండును.

కావున రెండు బిందువుల మధ్యదూరము $|y_2 - y_1|$ (y – అక్షనిరూపకముల మధ్య వ్యత్యాసం అగును.)

5.3.3 ఒక తలముపై యున్న రెండు బిందువుల మధ్యగల దూరము

$P(x_1, y_1)$ మరియు $Q(x_2, y_2)$ అనునది కార్టీషియన్ తలములో (లేదా xy – తలము) యున్న రెండు బిందువులనుకొనుము. $d = PQ$ ఉండునట్లు ఆ బిందువుల మధ్యగల దూరము 'd' అనుకొనుము.



పటము. 5.18

5-Coordinat_1.indd 208 30/08/2023 15:06:51

సోపానము 1

నిరూపకాక్షముల నియమము ప్రకారము,

$OM = x_1 \qquad MP = y_1$

$ON = x_2 \qquad NQ = y_2$

ఇచ్చట $PR = MN$

($MNRP$ దీర్ఘచతురస్రము యొక్క ఎదుటిభుజములు)

$= ON - OM$ (O నుండి దూరము)

$= x_2 - x_1$ .....(1)

మరియు $RQ = NQ - NR$

$= NQ - MP$ ($MNRP$ దీర్ఘచతురస్రము యొక్క ఎదుటిభుజములు)

$= y_2 - y_1$ .....(2)

మెదడుకు మేత

ఒకరు 3 కి.మీ దూరము ఉత్తరముగా ప్రయాణించును. తర్వాత అచ్చట నుండి 4 కి.మీ తూర్పుగా ప్రయాణించిన యెడల, ప్రస్తుతము ఆరంభ స్థలము నుండి ఎంతదూరముండును?

H19B8

సోపానము 2

ΔPQR లో R ఒక లంబకోణము ($PR \perp NQ$)

$PQ^2 = PR^2 + RQ^2$ (పైథాగరస్ సిద్ధాంతము ప్రకారము)

$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$ (వర్గమూలము)

సూచన

రెండు బిందువుల మధ్యగల దూరము

- $P(x_1, y_1)$ మరియు $Q(x_2, y_2)$ అను రెండు బిందువుల మధ్యగల దూరము కనుగొనుటకు సూత్రము $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$.
- PQ మధ్యదూరము = QP ల మధ్యదూరము i.e. $\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$
- $P(x_1, y_1)$ మరియు ఆది బిందువు $O(0,0)$ నకు మధ్యదూరము $OP = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

5.3.4 దూరముల ధర్మములు

ఒక తలములో అమరిన ఏవైనా A, B అను రెండు బిందువుల దూరము (A,B) = దూరము (B,A) అని మనము ముందుగానే చూచించినాము. మిగిలిన ధర్మముల గూర్చి ఆలోచించినామా? ఒకవేల గమనించడం మరచి యుండవచ్చు అందువల్ల ఇచ్చట కొన్ని మాత్రమే ఇవ్వబడియున్నది.

ఒక తలములో A మరియు B అను రెండు బిందువులు ఒకే బిందువుగా $A = B$ ఉన్నప్పుడు మాత్రమే దూరము $(A,B) = 0$ గా ఉండును.

A మరియు B అను ఏదైనా రెండు నిర్దిష్ట బిందువుల మధ్య గల దూరము $(A,B) > 0$

5-Coordinat_1.indd 209 30/08/2023 15:06:53

A, B మరియు C అను మూడు బిందువులు ఉన్నదనుకొనుము. వాటిలో x- అక్షనిరూపకాలు ఒక్కటిగా ఉండిన ఆ మూడు y- అక్షమునకు సమాంతరముగా ఒక రేఖపై అమరిన బిందువులుగా ఉండునని మనకు తెలియును. అదే విధంగా y- అక్షదూరములు ఒక్కటిగా యున్నట్లైయితే అవి మూడును x- అక్షమునకు సమాంతరముగా ఉండే ఒక రేఖపై అమరిన బిందువుగా ఉండునని మనకు తెలియును. అయినను ఏకరేఖీయ బిందువులుగా అమరుటకు ఇవి మాత్రమే నిర్వచనీయమని పైగా, బిందువులు $(0,0)$ $(1,1)$ మరియు $(2,2)$ ఏకరేఖీయ బిందువులు అగును. ఈ అక్షనిరూపక బిందువులు ఏక రేఖీయ బిందువులుగా ఉండుటకు ఎటువంటి సంబంధము కల్గి యుండవలెనని ఆలోచించిచున్నాము కదా?

ఇచ్చట మనకు దూర సూత్రము ఉపయోగపడుచున్నవి A, B మరియు C అను బిందువులు త్రిభుజము యొక్క శీర్షములుగా తీసికొన్న తర్వాత

(A,B) దూరము + (B,C) దూరము > (A,C) దూరముగా యుండునది మనకు తెలియును.

ఎప్పుడు ఒక తలములోని మూడు బిందువులు త్రిభుజములుగా ఏర్పరచదు? ఆ బిందువులు ఒకే రేఖపై యున్నచో అవి త్రిభుజమును ఏర్పరచదు.

(A,B) దూరము + (B,C) దూరము = (A,C) దూరము, A, B మరియు C ఏక రేఖీయ బిందువులు

అదేవిధంగా, A, B మరియు C అను బిందువులు ఒక లంబకోణ త్రిభుజముల శీర్షములుగా తీసుకొన్నచో $\angle ABC = 90^\circ$

A, B మరియు C అను బిందువులు $(AB)^2$ దూరము + $(BC)^2$ దూరము = $(AC)^2$ దూరము

అను దానిని సంపూర్ణము చేసిన యెడల ఆ బిందువులు వరుసగా ఒక లంబకోణ త్రిభుజము యొక్క శీర్షములుగా అమరునని మరలా మనము నిరూపించి చూపించ వచ్చును.

ఈ ధర్మమును ఉపయోగించి కింది ఉదాహరణములను చూద్దాం.

ఉదాహరణ 5.4

$(-4, 3), (2,-3)$ అను బిందువుల మధ్యగల దూరమును కనుగొనుము.

సాధన

$(-4, 3), (2,-3)$ అను బిందువుల మధ్యగల దూరము

రెండు బిందువుల మధ్యదూరము

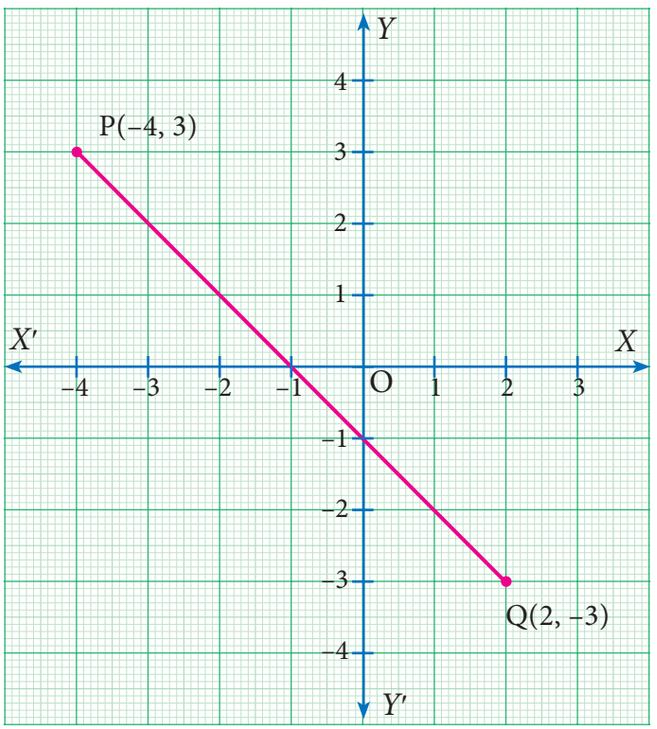
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(2+4)^2 + (-3-3)^2}$$

$$= \sqrt{(6^2 + (-6)^2)} = \sqrt{(36+36)}$$

$$= \sqrt{(36 \times 2)}$$

$$= 6\sqrt{2}$$



పటము. 5.19

5-Coordinat_1.indd 210 30/08/2023 15:06:53

ఉదాహరణ 5.5 $A(3,1)$, $B(6,4)$ మరియు $C(8,6)$ అనునవి ఒకే సరళ రేఖపై గల బిందువు అని చూపుము

సాధన

రెండు బిందువుల మధ్యదూరము సూత్రము ప్రకారము

$$AB = \sqrt{(6-3)^2+(4-1)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(8-6)^2+(6-4)^2} = \sqrt{(4+4)} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(8-3)^2+(6-1)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$AB + BC = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} = AC$$

ఇవ్వబడిన బిందువులు ఏకరేఖీయ బిందువులు అగును.

ఏకరేఖీయ బిందువులు

మూడు బిందువులను ఏకరేఖీయ బిందువులని నిరూపించవలనన రెండు జతల మధ్య దూరముల మొత్తము మూడో జత మధ్య దూరమునకు సమానమని నిరూపించవలెను..

A, B, C అను మూడు బిందువులు ఏకరేఖీయములు అయినచో $AB + BC = AC$ అని చెప్పవచ్చు.

ఉదాహరణ 5.6 $A(7,10)$, $B(-2,5)$, $C(3,-4)$ అను బిందువులు ఒక లంబకోణ త్రిభుజము యొక్క శీర్షములని నిరూపించుము.

సాధన

ఇచ్చట $A = (7, 10)$, $B = (-2, 5)$, $C = (3,-4)$

$$AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(-2-7)^2+(5-10)^2}$$

$$= \sqrt{(-9)^2+(-5)^2}$$

$$= \sqrt{(81+25)}$$

$$= \sqrt{106}$$

$$AB^2 = 106 \quad \ldots (1)$$

$$BC = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(3-(-2))^2+(-4-5)^2} = \sqrt{(5)^2+(-9)^2}$$

$$= \sqrt{25+81} = \sqrt{106}$$

$$BC^2 = 106 \quad \ldots (2)$$

లంబకోణ త్రిభుజము.

ఒక లంబకోణ త్రిభుజములో కర్ణము యొక్క వర్గము తక్కిన రెండు భుజముల వర్గముల మొత్తమునకు సమానము.

5-Coordinat_1.indd 211 30/08/2023 15:06:55

$$AC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(3-7)^2 + (-4-10)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-14)^2}$$

$$= \sqrt{16 + 196} = \sqrt{212}$$

$AC^2 = 212$ ... (3)

(1), (2) & (3) ల నుండి,

$AB^2 + BC^2 = 106 + 106 = 212 = AC^2$

కావున $AB^2 + BC^2 = AC^2$

∴ ఇవ్వబడిన బిందువులు శీర్షము B లో లంబకోణమును కలిగిన ABC లంబకోణత్రిభుజము ఏర్పరచును.

ఉదాహరణ 5.7 $A(-4,-3)$, $B(3,1)$, $C(3,6)$, $D(-4,2)$ అను బిందువులను వరుస క్రమములో తీసుకొనిన అవి సమాంతర చతుర్భుజ శీర్షములని నిరూపించుము.

సాధన

$A(-4, -3)$, $B(3, 1)$, $C(3, 6)$, $D(-4, 2)$ క్రమముగా $ABCD$ అనునది చతుర్భుజ శీర్షములు అనుకొనుము దూర సూత్రమును ఉపయోగించి.

రెండు బిందువుల మధ్యదూరము

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$AB = \sqrt{(3+4)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{49 + 16} = \sqrt{65}$$

$$BC = \sqrt{(3-3)^2 + (6-1)^2}$$

$$= \sqrt{0 + 25} = \sqrt{25} = 5$$

$$CD = \sqrt{(-4-3)^2 + (2-6)^2}$$

$$= \sqrt{(-7)^2 + (-4)^2} = \sqrt{49 + 16} = \sqrt{65}$$

$$AD = \sqrt{(-4+4)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{(0)^2 + (5)^2} = \sqrt{25} = 5$$

సమాంతర చతుర్భుజము

సమాంతర చతుర్భుజము యొక్క ఎదుటెదుటి భుజాలు సమానము.

$AB = CD = \sqrt{65}$ మరియు $BC = AD = 5$

ఎదుటెదుటి భుజములు సమానము అయినందున ఇవ్వబడిన బిందువులు $ABCD$ సమాంతర చతుర్భుజ శీర్షిములుగా అమరును.

ఉదాహరణ 5.8 A (7, 3) మరియు x-అక్షముపై యున్న బిందువు B యొక్క x-అక్షనిరూపకము 11 అయిన AB యొక్క దూరమును కనుగొనుము?

5-Coordinat_1.indd 212 30/08/2023 15:06:56

సాధన

B బిందువు అనునది x-అక్షముపై నున్నందువల్ల దాని y-అక్షనిరూపకము 0 అగును.

కావున B బిందువు యొక్క అక్షనిరూపకములు

రెండు బిందువుల మధ్యదూరము సూత్రము ప్రకారము $A(7, 3), B(11, 0)$ బిందువుల మధ్య దూరము

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$AB = \sqrt{(11-7)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{(4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25}$$

$$= 5$$

ఉదాహరణ 5.9 $(6, -1), (1, 3)$ మరియు $(a, 8)$ అను బిందువుల యొక్క అక్షనిరూపకములు వరుసగా P, Q మరియు R. $PQ = QR$ అయిన 'a' యొక్క విలువను కనుగొనుము.

సాధన

ఇవ్వబడిన బిందువు $P(6, -1)$, $Q(1, 3)$ మరియు $R(a, 8)$

$$PQ = \sqrt{(1-6)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{(-5)^2 + (4)^2} = \sqrt{41}$$

$$QR = \sqrt{(a-1)^2 + (8-3)^2} = \sqrt{(a-1)^2 + (5)^2}$$

$PQ = QR$ ఇవ్వబడిన

కావున $\sqrt{41} = \sqrt{(a-1)^2 + (5)^2}$

$41 = (a-1)^2 + 25$ [ఇరువైపుల వర్గము చేయగా]

$(a-1)^2 + 25 = 41$

$(a-1)^2 = 41 - 25$

$(a-1)^2 = 16$

$(a-1) = \pm 4$ [ఇరువైపుల వర్గమూలమును తీసుకొనగా]

$a = 1 \pm 4$

$a = 1 + 4$ or $a = 1 - 4$

$a = 5, -3$

ఉదాహరణ 5.10 $A(2, 2), B(8, -4)$ అనునవి తలములో ఉన్న రెండు బిందువులనుకొనుము. X- అక్షముపై ధనవిలువ P అను బిందువు అమరియున్నది. ఇది 1: 2 నిష్పత్తిలో AB ని విభజించిన యెడల P అక్షనిరూపకములను కనుగొనుము.

5-Coordinat_1.indd 213 30/08/2023 15:06:57

సాధన

$A(2, 2)$మరియు $B(8, -4)$ అనుకొనుము మరియు $P = (x, 0)$ [P అక్షముపైన ఉన్నది.

రెండు బిందువుల మధ్యదూరము సూత్రము ప్రకారము,

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$AP = \sqrt{(x-2)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{x^2 - 4x + 4 + 4} = \sqrt{x^2 - 4x + 8}$$

$$BP = \sqrt{(x-8)^2 + (0+4)^2} = \sqrt{x^2 - 16x + 64 + 16} = \sqrt{x^2 - 16x + 80}$$

ఇవ్వబడిన $AP : PB = 1 : 2$

i.e. $\frac{AP}{BP} = \frac{1}{2}$ $(\because BP = PB)$

$$\frac{\sqrt{x^2 - 4x + 8}}{\sqrt{x^2 - 16x + 80}} = \frac{1}{2}$$

[ఇరువైపుల వర్గము చేయగా

$$\frac{x^2 - 4x + 8}{x^2 - 16x + 80} = \frac{1}{4}$$

$$4x^2 - 16x + 32 = x^2 - 16x + 80$$

$$3x^2 - 48 = 0$$

$$3x^2 = 48$$

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm 4$$

P బిందువు అనునది x- అక్షముపై (ధనవిలువ) అమరిఉన్నందువల్ల బిందువు x- యొక్క అక్ష నిరూపకము -4.

$\therefore$ P యొక్క అక్ష నిరూపకములు $(4, 0)$

ఉదాహరణ 5.11 $(9, 3)$, $(7, -1)$ మరియు$(-1, 3)$అను బిందువుల ద్వారా వెళ్ళు ఒక వృత్తము యొక్క కేంద్రము $(4, 3)$ అని నిరూపించుము మరియు దాని వ్యాసార్ధమును కనుగొనుము.

సాధన

$P(4, 3)$, $A(9, 3)$, $B(7, -1)$ మరియు $C(-1, 3)$.బిందువులు అనుకొనుము

A, B, మరియు C అను బిందువులు గుండా పోవు వృత్తము యొక్క కేంద్రము P అగుట ద్వారా ఆ బిందువులు P నుండి సమాన దూరములో యుండును.అనగా $PA = PB = PC$ అగును.

5-Coordinat_1.indd 214 30/08/2023 15:06:59

రెండు బిందువుల మధ్యదూరము సూత్రము ప్రకారము,

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$AP = PA = \sqrt{(4-9)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{(-5)^2 + 0} = \sqrt{25} = 5$$

$$BP = PB = \sqrt{(4-7)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$CP = PC = \sqrt{(4+1)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{(5)^2 + 0} = \sqrt{25} = 5$$

$$PA = PB = PC$$

కావున P అను బిందువు A, B మరియు C అను బిందువుల గుండా పోవు వృత్త కేంద్రమగును

వ్యాసార్ధము = $PA = 5$.

అభ్యాసము 5.2

1. క్రింది బిందువుల మధ్యగల దూరములను కనుగొనుము

   (i) (1, 2) మరియు (4, 3) (ii) (3,4) మరియు (– 7, 2)

   (ii) (a, b) మరియు (c, b) (iv) (3,– 9) మరియు (–2, 3)

2. ఇవ్వబడిన బిందువులు సరేఖీయ బిందువులని చూపుము.

   (i) (7,–2),(5,1),(3,4) (ii) $(a,-2)$, $(a,3)$, $(a,0)$

3. క్రిందనివ్వబడిన బిందువులు వరుస క్రమములో తీసుకొన్నచో అవి ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజములను ఏర్పరచునని చూపుము

   (i) A (5,4), B(2,0), C (–2,3) (ii) A (6,–4), B (–2, –4), C (2,10)

4. క్రిందివ్వబడిన బిందువులను వరుస క్రమములో తీసుకొన్నచో అవి ఒక సమబాహు త్రిభుజమును ఏర్పరచునని చూపుము

   (i) $A(2, 2)$, $B(-2, -2)$, $C(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ (ii) $A(\sqrt{3}, 2)$, B (0,1), C(0,3)

5. ఈ క్రింది బిందువులను వరుస క్రమములో తీసికొనిన అవి ఒక సమాంతర చతుర్భుజమును ఏర్పరచునని చూపుము.

   (i) $A(-3, 1)$, $B(-6, -7)$, C (3, –9), $D(6, -1)$ (ii) A (–7, –3), B(5,10), $C(15,8)$, $D(3, -5)$

6. ఈ క్రింది ఇవ్వబడిన బిందువులు వరుసక్రమములో తీసుకొనిన అది ఒక రాంబస్ (సమ చతుర్భుజము)ను ఏర్పరచునని చూపుము.

   (i) $A(3,-2)$, B (7,6),C (–1,2), D (–5, –6) (ii) A (1,1), $B(2,1)$,C (2,2), $D(1,2)$

7. A, B, C బిందువులు (–1, 1), (1, 3)మరియు (3, a) $AB = BC$, అయిన 'a'. యొక్క విలువను కనుగొనుము.

8. A బిందువు యొక్క అక్షనిరూపకము దాని Y అక్షనిరూపకమునకు సమానము. మరియు $B(1, 3)$ అను బిందువు నుండి A అనునది 10 యూనిట్ల దూరములో యున్నది. అయితే A యొక్క అక్ష నిరూపకములను కనుగొనుము?

5-Coordinat_1.indd 215 30/08/2023 15:07:00

9. (3,4) మరియు (–5,6) అను బిందువుల (x,y) నుండి అను బిందువు సమానదూరములో యుండును. అయిన x మరియు y ల మధ్యగల సంబంధమును తెల్పుము.

10. బిందువులు $A(2, 3)$ మరియు $B(2,-4)$అనుకొనుము. x అక్షముపై నున్న బిందువు P అనునది $AP = \frac{3}{7} AB$, అను విధముగా అమరియున్నట్లు అయిన, P బిందువు యొక్క నిరూపకములను కనుగొనుము?

11. (1,2), (3,–4) మరియు (5,–6) బిందువుల గుండాపోవు వృత్తము యొక్క కేంద్రము (11,2) అని చూపుము.

12. ఆది బిందువును కేంద్రముగా కలిగిన వృత్త వ్యాసార్ధము 30 యూనిట్లు. ఆ వృత్తము అక్షములను ఖండించు బిందులను కనుగొనుము. ఈ విధమైన ఏ రెండు బిందువు మధ్య గల దూరమును కనుగొనుము.

5.4 రేఖాఖండపు మధ్యబిందువు



పటము. 5.20

ఒకతను తన ద్విచక్ర వాహనమును కళాశాల నుండి తూర్పు దిశలో నేరుగా ఉన్న మార్గంలో గ్రామము A కు తరువాత గ్రామము B కు వెళ్ళునట్లు ఊహించుకొనుము. రెండు గ్రామములకు మధ్య ఇంధన నిలయము లేదు A మరియు B, మధ్య గల ఒక బిందువు నందు తన ప్రయాణమునకు అవసరమైన ఇంధనం తన వద్ద లేదని అతను గ్రహించెను. ఈ స్థితిలో అతను తన ప్రయాణమును A వైపు మళ్ళించునా? B వైపు కొనసాగించునా? తక్కువ దూరం ఎటువైపు? దీనిని ఏ విధంగా తెలుసుకొనవచ్చును? దీనికి అతను మధ్య బిందువును దాటి వెళ్ళాడా అని కనుగొనవలెను.



పటము. 5.21

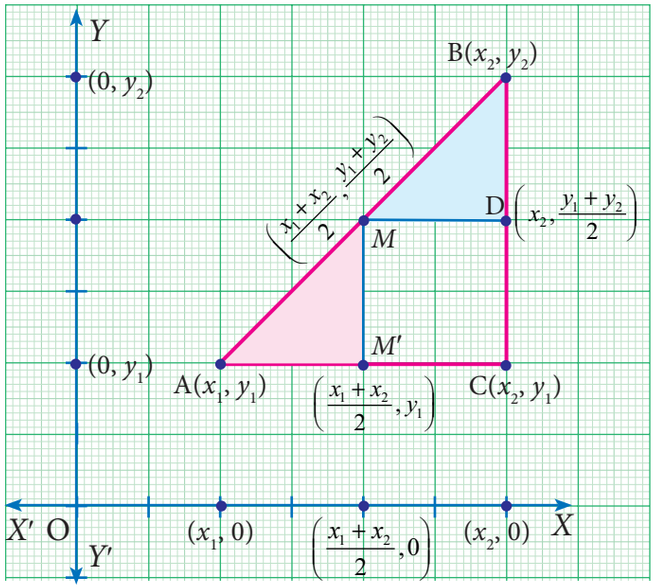
పైన చూపిన పటం. ఈ స్థితిని వివరించుచున్నది. కళాశాల అమరిన ఆది బిందువు O నుండి క్రమముగా గ్రామము A మరియు గ్రామము B లకు గల దూరములు x_1 మరియు x_2 $(x_1 < x_2)$ గా ఉన్నట్లు ఊహించుకొనుము. AB యొక్క మధ్య బిందువు M అనుకొనిన x ను క్రింద విధంగా గణించవచ్చును.

$AM = MB$ మరియు, $\quad x - x_1 = x_2 - x$

$$\text{దీనినుండి } x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$A\left(x_1, y_1\right)$, $B\left(x_2, y_2\right)$ అనునవి రెండు బిందువులు, పటము 5.22 నుండి రేఖా ఖండం AB, మధ్య బిందువు $M\left(x, y\right)$ అనుకొనిన M' అనునది AC మధ్య బిందువు అవుతుంది. ఒక లంబకోణ త్రిభుజములో భుజముల లంబ సమద్విఖండన రేఖలు కర్ణము మధ్య బిందువు వద్దఖండించుకొనును. (ఇది పటములో చూపిన రంగువేయబడిన రెండు సరూప త్రిభుజముల ధర్మముల నుండి తీసుకొనబడినది ఈ విధమైన త్రిభుజములలో అనురూప భుజముల నిష్పత్తులు సమానము).

5-Coordinat_1.indd 216 30/08/2023 15:07:02



పటము. 5.22

మరొక పద్ధతిలో సాధన కనుగొనుట
(సరూప ధర్మమును ఉపయోగించి)

మనం బిందువు M ను $M(x,y)$ గా తీసుకొనుము.

ఇప్పుడు $\Delta AMM'$ మరియు $\varnothing MBD$ లు సరూప త్రిభుజములు.

కావున

$$\frac{AM'}{MD} = \frac{MM'}{BD} = \frac{AM}{MB}$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{1}{1} \quad (AM = MB)$$

$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = 1$ గా తీసుకొనిన

$$2x = x_2 + x_1 \Rightarrow x = \frac{x_2 + x_1}{2}$$

అదేవిధంగా, $y = \frac{y_2 + y_1}{2}$

M యొక్క x-నిరూపకము = A మరియు C ల x- నిరూపకముల సరాసరి $= \frac{x_1 + x_2}{2}$ అదేవిధంగా

M యొక్క y- నిరూపకము = B మరియు C నిరూపకముల సరాసరి $= \frac{y_1 + y_2}{2}$

బిందువులు $A(x_1, y_1)$ మరియు $B(x_2, y_2)$ లను కలుపు రేఖా ఖండపు మధ్య బిందువు M $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ అవుతుంది.

మెదడుకు మేత

AC మధ్య బిందువు D మరియు AB మధ్య బిందువు $AD = 4cm$. సెం మీ అయిన AB పొడవును కనుగొనుము.

ఉదాహరణకు, బిందువులు $(-8, -10)$ మరియు $(4, -2)$ లను కలుపు రేఖా ఖండపు మధ్య బిందువు $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ అని ఇవ్వబడినది ఇక్కడ $x_1 = -8$, $x_2 = 4$, $y_1 = -10$ మరియు . $y_2 = -2$ కావలసిన మధ్య బిందువు $\left(\frac{-8 + 4}{2}, \frac{-10 - 2}{2}\right)$ లేక $(-2, -6)$.

మన నిజ జీవితమునందు మధ్య బిందువు ఉపయోగమును చూడవచ్చును క్రింద ఇవ్వబడిన నగరముల రేఖాంశ మరియు అక్షాంశ రేఖలను పరిశీలింపుము..

5-Coordinat_1.indd 217 30/08/2023 15:07:10

నగరం పేరు	రేఖాంశ రేఖ	అక్షాంశ రేఖ
చెన్నై (బెసంట్ నగర్)	80.27° తూ	13.00° ఉ
మంగళూరు (కుత్తెత్తూరు)	74.85° తూ	13.00° ఉ
బెంగళూరు (రాజాజి నగర్)	77.56° తూ	13.00° ఉ



పటము. 5.23

మనం చెన్నై (80.27° తూ, 13.00° ఉ) మరియు మంగళూరు (74.85° తూ , 13.00° ఉ) ల రేఖాంశ రేఖ మరియు అక్షాంశ రేఖ లను జతలుగా తీసుకొనుము బెంగళూరు నగరం చెన్నై మరియు మంగళూరు నగరములకు మధ్యలో ఉన్నది ఇప్పుడు మనము నిరూపకముల సరాసరిని లెక్కించిన $\left(\frac{80.27+74.85}{2}, \frac{13.00+13.00}{2}\right)$ అని వచ్చును. ఇది బెంగుళూరు యొక్క రేఖాంశ మరియు అక్షాంశ రేఖ లైన (77.56°తూ, 13.00°ఉ) లను సూచించును పై ఉదాహరణల నుండి మధ్యలో అమరియున్న బిందువైనది రెండు బిందువుల మధ్య బిందువు అవుతుంది ఈ బిందువు మిగిలిన రెండు బిందువులను సమాన నిష్పత్తిలో విభజించుచున్నది.

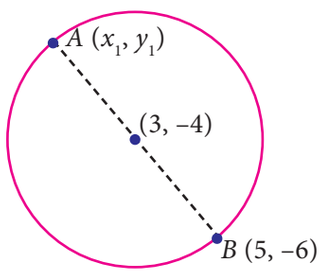
ఉదాహరణ 5.12 ఒక వృత్త కేంద్ర బిందువు $(3,-4)$. ఆ వృత్త వ్యాసము AB మరియు $B\ (5,-6)$ అయిన A యొక్క నిరూపకములు కనుగొనుము.

సాధన

A నిరూపకములు (x_1, y_1) అనుకొనుము, $B\ (5,-6)$ అని ఇవ్వబడినది. వ్యాసము AB, యొక్క మధ్య బిందువు వృత్త కేంద్రము కావున మనకు లభించునది.

$$\frac{x_1+x_2}{2}=3$$
$$x_1+5=6$$
$$x_1=6-5$$
$$x_1=1$$

$$\frac{y_1+y_2}{2}=-4$$
$$y_1-6=-8$$
$$y_1=-8+6$$
$$y_1=-2$$



కావున A నిరూపకములు $(1,-2)$ అవుతుంది.

పటము. 5.24

5-Coordinat_1.indd 218 30/08/2023 15:07:13

పురోగమన తనిఖి

(i) $A(3,0)$ మరియు $B(-5,4)$ లను కలుపు రేఖాఖండం మధ్య బిందువు X అనుకొనుము $P(-11,-8)$ మరియు $Q(8,-2)$ లను కలుపు రేఖాఖండపు మధ్య బిందువు Y అనుకొనుము.

అయితే రేఖా ఖండం XY మధ్యబిందువును కనుగొనుము.

(ii) $A(8,-5)$ మరియు $B(-2,11)$ బిందువులను కలుపు రేఖాఖండం మధ్య బిందువు $(3,x)$ అయిన 'x' విలువలను కనుగొనుము.

ఉదాహరణ 5.13 $(x,3), (6,y), (8,2)$ మరియు $(9,4)$ అనునది క్రమముగా తీసుకొనబడిన సమాంతర చతుర్భుజము శీర్షములు అయిన x మరియు y విలువలను కనుగొనుము.

సాధన

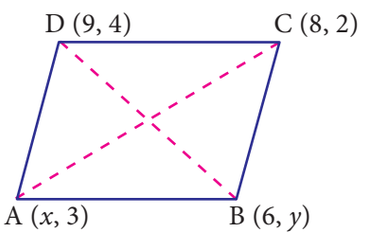
$A(x,3)$, $B(6,y)$, $C(8,2)$ మరియు $D(9,4)$ అనునవి సమాంతర చతుర్భుజము $ABCD$ శీర్షములు అనుకొనుము.

నిర్వచనం ప్రకారం కర్ణములు AC మరియు BD ఒకదానికొకటి సమద్విఖండన చేసుకొనును.

AC మధ్య బిందువు = BD మధ్య బిందువు

$$\left(\frac{x+8}{2},\frac{3+2}{2}\right) = \left(\frac{6+9}{2},\frac{y+4}{2}\right)$$

రెండువైపులా నిరూపకములను సమానపరచగా, మనకు లభించునది.



పటము. 5.25

$$\frac{x+8}{2}=\frac{15}{2} \quad \text{మరియు} \quad \frac{5}{2}=\frac{y+4}{2}$$
$$x+8=15 \qquad 5=y+4$$
$$x=7 \qquad y=1$$

దాని నుండి, $x = 7$ మరియు $y = 1$..

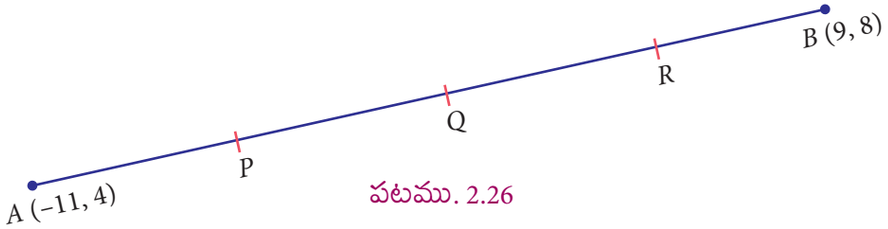
మెదడుకు మేత

$A(6,1)$, $B(8,2)$ మరియు $C(9,4)$ అనునవి సమాంతర చతుర్భుజం $ABCD$ నందు క్రమముగా తీసుకొనబడిన మూడు శీర్షములు.మధ్య బిందువు సూత్రమును ఉపయోగించి నాల్గవ శీర్షం D ను కనుగొనుము.

(x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) మరియు (x_4,y_4) అనునవి సమాంతర చతుర్భుజపు నాలుగు శీర్షములు అయిన.పైన ఇవ్వబడిన బిందువులను ఉపయోగించి $(x_1+x_3-x_2, y_1+y_3-y_2)$ విలువను కనుగొనుము. నీ సమాధానమునకు సరియైన కారణమును తెలుపుము.

5-Coordinat_1.indd 219 30/08/2023 15:07:18

ఉదాహరణ 5.14 $A(-11,4)$ మరియు $B(9,8)$ బిందువులను కలుపు రేఖా ఖండమును నాలుగు భాగములుగా విభజించు బిందువులను కనుగొనుము.



పటము. 2.26

సాధన

$A(-11,4)$ మరియు $B(9,8)$ లను కలుపు రేఖా ఖండమును నాలుగు భాగములుగా విభజించు బిందువులు P, Q, R అనుకొనుము.

ఇక్కడ, $AP = PQ = QR = RB$

ఇక్కడ AB మధ్య బిందువు Q, AQ మధ్య బిందువు P మరియు QB మధ్య బిందువు R అనుకొనుము.

AB మధ్య బిందువు $Q = \left(\frac{-11+9}{2}, \frac{4+8}{2}\right) = \left(\frac{-2}{2}, \frac{12}{2}\right) = (-1,6)$

AQ మధ్య బిందువు $P = \left(\frac{-11-1}{2}, \frac{4+6}{2}\right) = \left(\frac{-12}{2}, \frac{10}{2}\right) = (-6,5)$

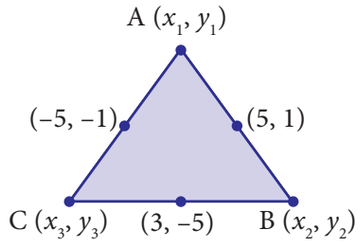
QB మధ్య బిందువు $R = \left(\frac{-1+9}{2}, \frac{6+8}{2}\right) = \left(\frac{8}{2}, \frac{14}{2}\right) = (4,7)$

కావున రేఖా ఖండము AB ను నాలుగు సమ భాగములుగా విభజించు బిందువులు $P(-6, 5)$, $Q(-1, 6)$ మరియు $R(4, 7)$..

ఉదాహరణ 5.15 ఒక త్రిభుజములోని భుజముల మధ్య బిందువులు $(5,1)$, $(3,-5)$ మరియు $(-5,-1)$. అయిన ఆ త్రిభుజ శీర్షముల నిరూపకములను కనుగొనుము.

సాధన:

$\varnothing ABC$ శీర్షములు $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ మరియు $C(x_3, y_3)$ అనుకొనుము. అదేవిధంగా భుజములు AB, BC మరియు CA ల మధ్య బిందువులు క్రమముగా $(5,1)$, $(3,-5)$ మరియు $(-5,-1)$ అనుకొనుము.



పటము. 5.27

5-Coordinat_1.indd 220 30/08/2023 15:07:23

$\frac{x_1+x_2}{2}=5 \Rightarrow x_1+x_2=10$ ...(1)

$\frac{x_2+x_3}{2}=3 \Rightarrow x_2+x_3=6$ ...(2)

$\frac{x_3+x_1}{2}=-5 \Rightarrow x_3+x_1=-10$ ...(3)

(1), (2) మరియు (3) లను కూడుము

$2x_1+2x_2+2x_3=6$

$x_1+x_2+x_3=3$ ...(4)

(4) – (2) $\Rightarrow x_1=3-6=-3$

(4) – (3) $\Rightarrow x_2=3+10=13$

(4) – (1) $\Rightarrow x_3=3-10=-7$

$\frac{y_1+y_2}{2}=1 \Rightarrow y_1+y_2=2$ ...(5)

$\frac{y_2+y_3}{2}=-5 \Rightarrow y_2+y_3=-10$ ...(6)

$\frac{y_3+y_1}{2}=-1 \Rightarrow y_3+y_1=-2$ ...(7)

(5), (6) మరియు (7) లను కూడుము,

$2y_1+2y_2+2y_3=-10$

$y_1+y_2+y_3=-5$ ...(8)

(8) – (6) $\Rightarrow y_1=-5+10=5$

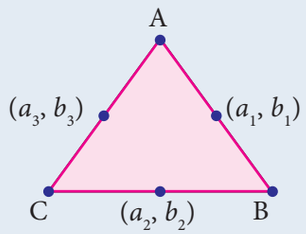
(8) – (7) $\Rightarrow y_2=-5+2=-3$

(8) – (5) $\Rightarrow y_3=-5-2=-7$

త్రిభుజపు మూడు శీర్షములు $A(-3,5)$, $B(13,-3)$ మరియు $C(-7,-7)$.

మెదడుకు మేత

$(a_1,b_1), (a_2,b_2)$ మరియు (a_3,b_3) అనునవి ఒక త్రిభుజ భుజముల మధ్య బిందువులు అనుకొనుము. ఉదాహరణ 5.15 లో ఇవ్వబడినట్లు మధ్యబిందువులను ఉపయోగించి $(a_1+a_3-a_2,\ b_1+b_3-b_2)$, $(a_1+a_2-a_3,\ b_1+b_2-b_3)$ మరియు $(a_2+a_3-a_1,\ b_2+b_3-b_1)$ ల విలువలను కనుగొనుము. సమాధానములను పోల్చినప్పుడు నీవేమి గమనించితివి? నీ సమాధానమునకు కారణమును తెలుపుము



పటము. 5.28

అభ్యాసము 5.3

1. క్రింద ఇవ్వబడిన బిందువులను కలుపగా ఏర్పడు రేఖాఖండపు మధ్య బిందువులను కనుగొనుము.

   (i) (−2,3) మరియు (−6,−5) (ii) (8,−2) మరియు (−8,0)

   (iii) (a,b) మరియు (a+2b,2a−b) (iv) $\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{7}\right)$ మరియు $\left(\frac{3}{2},\frac{-11}{7}\right)$

2. ఒక వృత్త కేంద్రం (−4,2). ఆ వృత్త వ్యాసము యొక్క ఒక చివరి బిందువు (−3,7) అయిన మరొక చివరి బిందువును కనుగొనుము.

3. (3,4) మరియు $(p,7)$ లను కలుపు రేఖాఖండపు మధ్య బిందువు (x,y) అనునది $2x+2y+1=0$ పై అమరియున్నది. అయితే p విలువను కనుగొనుము.

5-Coordinat_1.indd 221 30/08/2023 15:07:29

4. ఒక త్రిభుజ భుజముల మధ్య బిందువులు (2,4), (−2,3) మరియు (5,2) అయిన ఆ త్రిభుజ శీర్షముల నిరూపకములను కనుగొనుము.

5. AB ని ఒక జ్యాగా కలిగిన వృత్త కేంద్రం $O(0,0)$ ఇక్కడ బిందువులు A మరియు B క్రమముగా (8,6) మరియు (10,0) వృత్త కేంద్రం నుండి జ్యా AB నకు గీయబడిన లంబం OD అయిన, OD యొక్క మధ్య బిందువు నిరూపకములను కనుగొనుము.

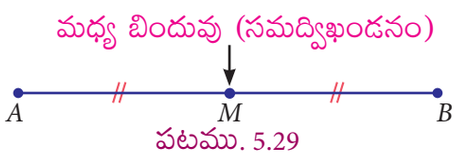
6. బిందువులు $A(-5,4)$, $B(-1,-2)$ మరియు $C(5,2)$ అనునవి ఒక సమద్విబాహు లంబకోణ త్రిభుజ శీర్షములు, దీనియందు B వద్ద లంబకోణము అమరియున్నది. $ABCD$ ఒక చతురస్రమైన D నిరూపములను కనుగొనుము.

7. త్రిభుజము DEF భుజములు DE, EF మరియు FD ల మధ్య బిందువులు క్రమముగా $A(-3,6)$, $B(0,7)$ మరియు $C(1,9)$ అయిన, చతుర్భుజం $ABCD$ ఒక సమాంతర చతుర్భుజం అని నిరూపించుము

8. $A(-3,2)$, $B(3,2)$ మరియు $C(-3,-2)$ అనునవి A వద్ద లంబకోణం కలిగిన లంబకోణ త్రిభుజ శీర్షములు అయిన కర్ణం మధ్య బిందువు శీర్షముల నుండి సమాన దూరంలో ఉంటుందని నిరూపించుము.

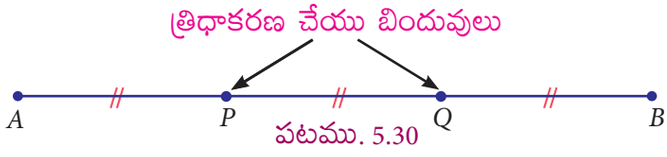
5.5 ఒక రేఖా ఖండమును త్రిధాకరణ చేయు బిందువులు

ఒక రేఖా ఖండపు మధ్య బిందువు అనునది ఆ రేఖా ఖండమును రెండు సమాన భాగములుగా విభజించును. మనం ఒక రేఖా ఖండమును మూడు సమానభాగములుగ విభజించవలెనన్నా, రేఖా ఖండమును మూడు సమాన భాగములు చేయుటకు తగిన విధంగా బిందువులను గుర్తించవలెను.



పటము. 5.29

$AM = MB$



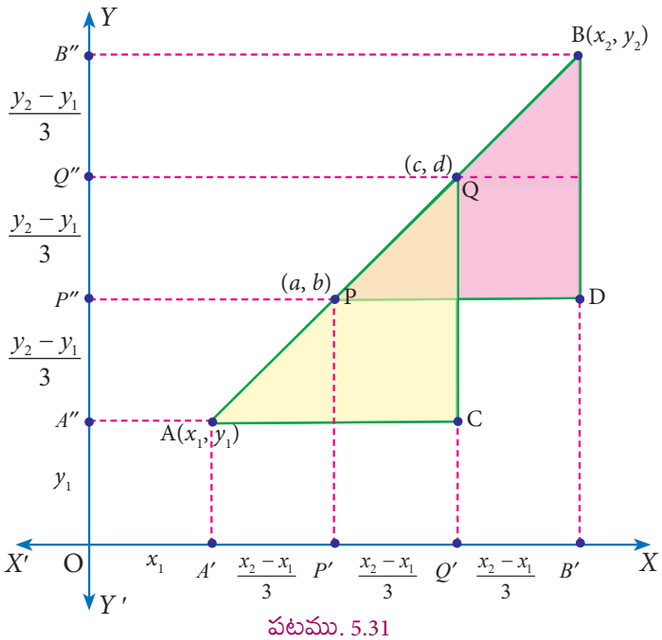
పటము. 5.30

$AP = PQ = QB$

ఇవ్వబడిన ఒక రేఖా ఖండమును, రెండు బిందువులు త్రిధాకరణ చేయును. ఈ బిందువులను గుర్తించు పద్ధతి, మనం సమద్విఖండన (మధ్య బిందువు) బిందువును గుర్తించు పద్ధతి లాంటిదే. ఇవ్వబడిన పటం 5.31ను గమనింపుము. ఇక్కడ రేఖా ఖండము AB ని త్రిధాకరణ చేయు బిందువులు P మరియు Q అగును. దీని యందు A (x_1, y_1) మరియు B (x_2, y_2). అవుతుంది. దీని నుండి మనం P అనునది AQ మధ్య బిందువు మరియు Q అనునది PB మధ్య బిందువు అవుతుందని మనం తెలుసుకొనవచ్చును. ఇప్పుడు ΔACQ మరియు ΔPDB లను తీసుకొనుము. (వాటిని సరూప త్రిభుజ ధర్మముల ఆధారంగా సరిచూడవచ్చును. పై తరగతులలో వీటి గురించి విపులముగా తెలుసుకొనవచ్చు)

5-Coordinat_1.indd 222 30/08/2023 15:07:30

$$A'P' = P'Q' = Q'B'$$



పటము. 5.31

సూచన: మనం ఒక రేఖా ఖండమును మూడు సమాన భాగాలుగా విభజించినపుడు క్షితిజసమాంతర మరియు క్షితిజలంబ కాళ్ళు మూడు సమాన భాగాలుగా విభజించబడును.

P అనునది (a, b), అయిన

$$a = OP' = OA' + A'P'$$
$$= x_1 + \frac{x_2 - x_1}{3} = \frac{x_2 + 2x_1}{3};$$

$$b = PP' = OA'' + A''P''$$
$$= y_1 + \frac{y_2 - y_1}{3} = \frac{y_2 + 2y_1}{3}$$

కావున బిందువు P అనునది $\left(\frac{x_2 + 2x_1}{3}, \frac{y_2 + 2y_1}{3}\right)$ అగును.

Q అనునది (c, d), అయిన

$$c = OQ' = OB' - Q'B'$$
$$= x_2 - \left(\frac{x_2 - x_1}{3}\right) = \frac{2x_2 + x_1}{3};$$

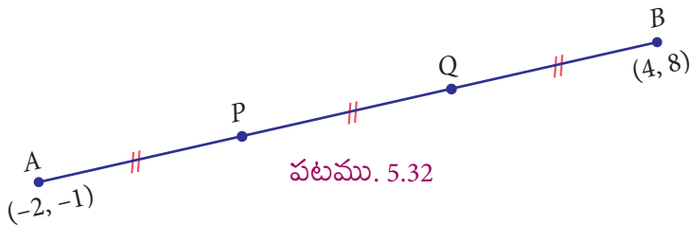
$$d = OQ'' = OB'' - Q''B''$$
$$= y_2 - \left(\frac{y_2 - y_1}{3}\right) = \frac{2y_2 + y_1}{3}$$

కావలసిన బిందువు Q అనునది $\left(\frac{2x_2 + x_1}{3}, \frac{2y_2 + y_1}{3}\right)$ అగును.

ఉదాహరణ 5.16 $(-2, -1)$ మరియు $(4, 8)$ బిందువులను కలుపు రేఖా ఖండమును త్రిధాకరణచేయు బిందువుల నిరూపకములను కనుగొనుము.

సాధన:

ఇవ్వబడిన బిందువులు $A(-2, -1)$ మరియు $B(4, 8)$ అనుకొనుము.



పటము. 5.32

5-Coordinat_1.indd 223 30/08/2023 15:07:33

AB ను త్రిధాకరణ చేయు బిందువులు $P(a,b)$ మరియు $Q(c,d)$ అనుకొనుము. కావున $AP = PQ = QB$.

పైన నిరూపించిన సూత్రం ప్రకారం,

బిందువు P అనునది

$$\left(\frac{x_2+2x_1}{3}, \frac{y_2+2y_1}{3}\right) = \left(\frac{4+2(-2)}{3}, \frac{8+2(-1)}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{4-4}{3}, \frac{8-2}{3}\right) = (0, 2)$$

బిందువు Q అనునది

$$\left(\frac{2x_2+x_1}{3}, \frac{2y_2+y_1}{3}\right) = \left(\frac{2(4)-2}{3}, \frac{2(8)-1}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{8-2}{3}, \frac{16-1}{3}\right) = (2, 5)$$

పురోగమన తనిఖి

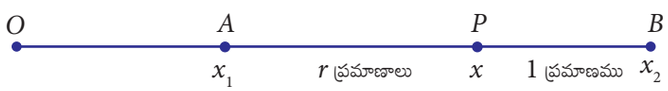
(i) బిందువులు $(4,-1)$ మరియు $(-2,-3)$ లను కలుపు రేఖా ఖండమును త్రిధాకరణ చేయు బిందువుల నిరూపకములను కనుగొనుము.

(ii) బిందువు $(6,-9)$ మరియు ఆది బిందువును కలుపు రేఖా ఖండమును త్రిధాకరణ చేయు బిందువుల నిరూపకములను కనుగొనుము.

5.6 విభజన సూత్రం

మనం రేఖా ఖండమును సమద్విఖండన మరియు త్రిధాకరణ చేయుట గురించి తెలుసుకొన్నాము. ఇప్పుడు బిందువులు (x_1, y_1) మరియు (x_2, y_2) లను కలుపు రేఖా ఖండమును $m : n$ నిష్పత్తిలో విభజించటను తెలుసుకొనెదము.

ఒక రేఖా ఖండము AB మరియు ఒక ధన వాస్తవ సంఖ్య r ఇవ్వబడినది.



పటము. 5.33

మనం AB ను $r:1$ నిష్పత్తిలో విభజించు బిందువు P యొక్క నిరూపకములను కనుగొనెదము..

అనగా $\frac{AP}{PB} = \frac{r}{1}$ or $AP = r(PB)$.

అనగా దీని నుండి $x - x_1 = r(x_2 - x)$

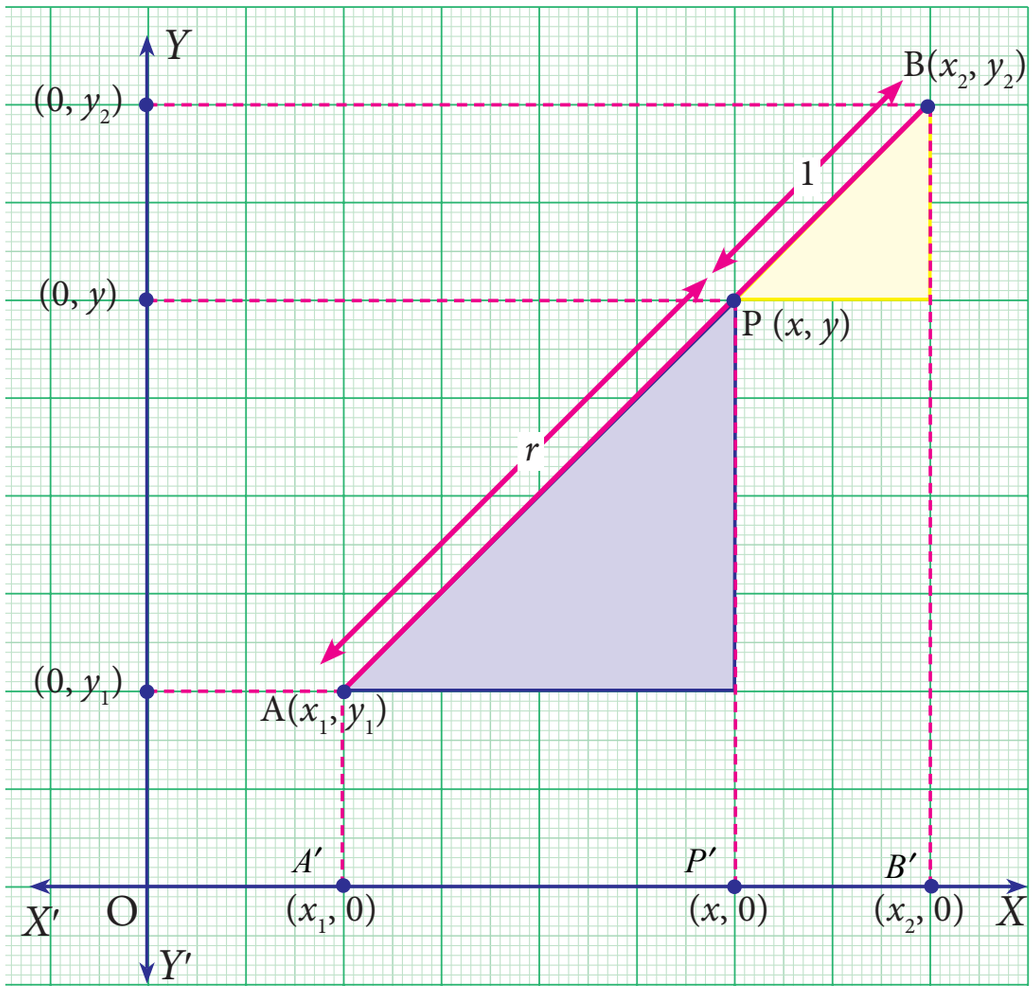
దీనిని సాధించిన, $$x = \frac{rx_2 + x_1}{r+1} \quad \ldots\ldots (1)$$

మనం ఈ ఫలితమును ఒక రేఖపై అమరియున్న ఏ బిందువుకైనను క్రింది విధంగా సామాన్యపరచవచ్చును.

$AP:PB = r:1$ తీసుకొనిన, $A'P':P'B' = r:1$ మనకు లభించును.

కావున $A'P' = r(P'B')$.

5-Coordinat_1.indd 224 30/08/2023 15:07:36



పటము. 5.34

అలాగే, $(x - x_1) = r(x_2 - x)$

దీని నుండి లభించునది $x = \frac{rx_2 + x_1}{r+1}$ [(1)ని చూడుము)]

ఇదేవిధంగా $y = \frac{ry_2 + y_1}{r+1}$

A మరియు B లకు మధ్యలో P ఉన్నది, మరియు $\frac{AP}{PB} = r$, అయిన మనకు లభించు సూత్రము,

P అనునది $\left(\frac{rx_2 + x_1}{r+1}, \frac{ry_2 + y_1}{r+1}\right)$.

r ను $\frac{m}{n}$, అని అనుకొనిన, విభజన సూత్రం $\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$, ఇదియే ప్రామాణిక విభజన సూత్రం అగును.

మెదడుకి మేత

(i) $m = n = 1$? అయిన ఏమగును? మనం ముందే నిరూపించిన ఒక ఫలితమును గుర్తించుటకు వీలుగునా?

(ii) $AP : PB = 1 : 2$ మరియు $AQ : QB = 2:1$అయిన $AP : AB$ ఎంత? $AQ : AB$ ఎంత?

5-Coordinat_1.indd 225 30/08/2023 15:07:39

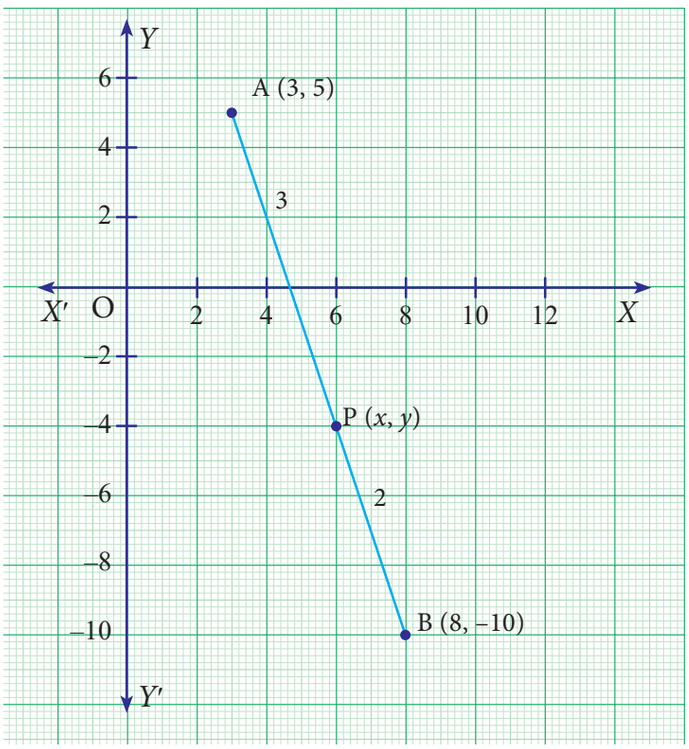
సూచన

- బిందువులు (x_1, y_1) మరియు (x_2, y_2) లను కలుపు రేఖాఖండమును x- అక్షము $\frac{-y_1}{y_2}$ నిష్పత్తిలోను మరియు y- అక్షము $\frac{-x_1}{x_2}$ నిష్పత్తిలోను విభజించును
- మూడు బిందువులు సరేఖీయ బిందులైన, వాటిలో ఒక బిందువు మిగిలిన రెండు బిందువులను కలుపు రేఖా ఖండమును $r : 1$ నిష్పత్తిలో విభజించును.
- ఇవ్వబడిన మూడు బిందువులు సరేఖీయ బిందువులైనప్పుడు మాత్రమే విభజన సూత్రం ఉపయోగపడునని గుర్తించుకొనవలెను.
- విభజన సూత్రం ఉపయోగించి ఒక త్రిభుజపు గురుత్వ కేంద్రం, అంతర వృత్త కేంద్రం, బాహ్య వృత్త కేంద్రంలను కనుగొనవచ్చును. భౌతికశాస్త్రం నందు ఈ సూత్రం వస్తువుల ద్రవ్యరాశి కేంద్రం, సమతాస్థితి బిందువులు మొదలగువాటిని కనుగొనుటకు ఉపయోగపడుచున్నది.

ఉదాహరణ 5.17 బిందువులు (3,5) మరియు (8,−10) లను కలుపు రేఖా ఖండమును 3:2 నిష్పత్తిలో అంతరముగా విభజించు బిందువు నిరూపకములను కనుగొనుము.

సాధన

ఇవ్వబడిన బిందువులు $A(3,5)$, మరియు $B(8,-10)$ అనుకొనుము. బిందువు $P(x,y)$ రేఖాఖండం AB ని 3:2 నిష్పత్తిలో అంతరంగా విభజించునని అనుకొనుము.



పటము. 5.35

5-Coordinat_1.indd 226 30/08/2023 15:07:40

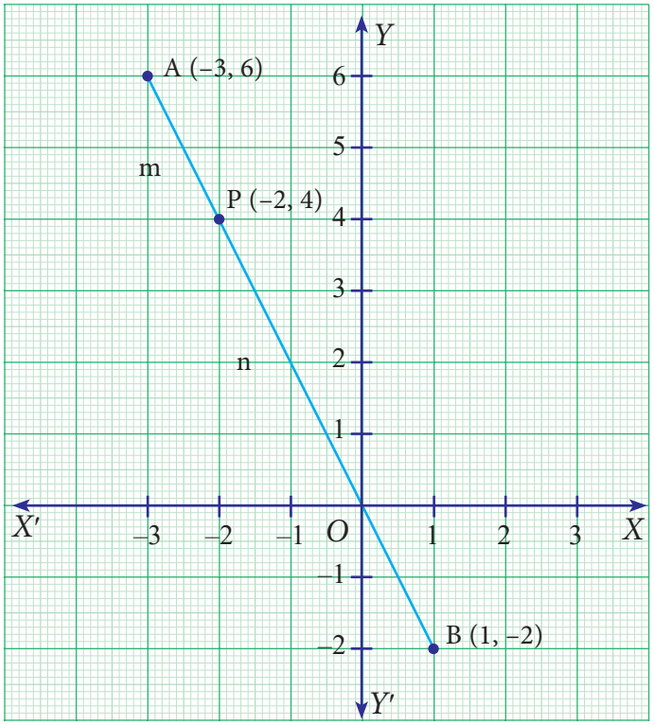
విభజన సూత్రం ప్రకారం $P(x, y) = P\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$

ఇక్కడ $x_1 = 3,\ y_1 = 5,\ x_2 = 8,\ y_2 = -10$ మరియు $m = 3,\ n = 2$

కావున $P(x, y) = P\left(\frac{3(8)+2(3)}{3+2}, \frac{3(-10)+2(5)}{3+2}\right) = P\left(\frac{24+6}{5}, \frac{-30+10}{5}\right) = P(6, -4)$

ఉదాహరణ 5.18

$A(-3, 6)$ మరియు $B(1, -2)$ బిందువులను కలుపు రేఖాఖండమును బిందువు $P(-2, 4)$ అంతరముగా ఏ నిష్పత్తిలో విభజించును.



పటము. 5.36

సాధన

ఇవ్వబడిన బిందువులు $A(-3, 6)$ మరియు $B(1, -2)$ AB ని $P(-2, 4)$ బిందువు అంతరముగా $m : n$ నిష్పత్తిలో విభజించును.

విభజన సూత్రం ప్రకారం,

$$P(x, y) = P\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right) = P(-2, 4) \quad \text{.....(1)}$$

ఇక్కడ $x_1 = -3,\ y_1 = 6,\ x_2 = 1,\ y_2 = -2$

$$(1) \Rightarrow \left(\frac{m(1)+n(-3)}{m+n}, \frac{m(-2)+n(6)}{m+n}\right) = P(-2, 4)$$

నిరూపకములను సమానపరచగా

$$\frac{m-3n}{m+n} = -2 \text{ లేదా } m - 3n = -2m - 2n$$

$$3m = n$$

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{3}$$

$$m : n = 1 : 3$$

AB ని బిందువు P అంతరముగా $1:3$ నిష్పత్తిలో విభజించును.

సూచన

పై ఉదాహరణలో y-నిరూపకములను సమానపరిచిన కూడా ఇదే ఫలితమును పొందవచ్చును. ప్రయత్నించండి.

5-Coordinat_1.indd 227 30/08/2023 15:07:46

ఉదాహరణ 5.19 బిందువులు $A(-3,5)$ మరియు B లను కలుపు రేఖా ఖండమును బిందువు $P(-2,3)$ అంతరంగా 1:6 నిష్పత్తిలో విభజించిన B నిరూపకములను కనుగొనుము.

సాధన

ఇవ్వబడిన బిందువులు $A(-3,5)$ మరియు $B(x_2, y_2)$ అనుకొనుము.

AB ని బిందువు $P(-2,3)$ అంతరముగా 1:6 నిష్పత్తిలో విభజించును అని ఇవ్వబడినది.

విభజన సూత్రం ప్రకారం, $P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right) = P(-2,3)$

$$P\left(\frac{1(x_2)+6(-3)}{1+6}, \frac{1(y_2)+6(5)}{1+6}\right) = P(-2,3)$$

నిరూపకములను సమానపరచగా

$$\frac{x_2-18}{7} = -2 \qquad \frac{y_2+30}{7} = 3$$
$$x_2 - 18 = -14 \qquad y_2 + 30 = 21$$
$$x_2 = 4 \qquad y_2 = -9$$

కావున, B నిరూపకములు $(4,-9)$

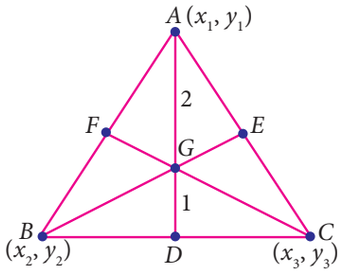
అభ్యాసము 5.4

1. $A(4,-3)$ మరియు $B(9,7)$ బిందువులను కలుపు రేఖాఖండమును 3:2 నిష్పత్తిలో అంతరముగా విభజించు బిందువు నిరూపకములను కనుగొనుము.
2. $A(-3,5)$ మరియు $B(4,-9)$ బిందువులను కలుపు రేఖాఖండమును బిందువు $P(2,-5)$ ఏ నిష్పత్తిలో విభజించును
3. $A(1,2)$ మరియు $B(6,7)$ బిందువులను కలుపు రేఖా ఖండమునందు $AP = \frac{2}{5}AB$. రూపంలో అమరిన బిందువు P నిరూపకములను కనుగొనుము.
4. $A(-5,6)$ మరియు $B(4,-3)$ బిందువులను కలుపు రేఖాఖండమును త్రిధాకరణ చేయు బిందువుల నిరూపకములను కనుగొనుము.
5. $A(6,3)$ మరియు $B(-1,-4)$ బిందువులను కలుపు రేఖాఖండమునకు AB పొడవులో సగ భాగమును రెండు చివరలలో కలిపి దాని పొడవును రెండింతలు చేయబడినది. అయిన కొత్త రేఖా ఖండపు చివరి బిందువుల నిరూపకములను కనుగొనుము.
6. విభజన సూత్రం ఉపయోగించి బిందువులు $A(7,-5)$, $B(9,-3)$మరియు $C(13,1)$ లను ఏక రేఖీయ బిందువులని నిరూపించుము.
7. ఒక రేఖాఖండం AB నందు B చివరి నుండి C వరకు దాని పొడవును 25% పెంచబడినది. బిందువులు A మరియుB ల నిరూపకములు క్రమముగా $(-2,-3)$ మరియు $(2,1)$ అయిన C యొక్క నిరూపకములను కనుగొనుము.

5-Coordinat_1.indd 228 30/08/2023 15:07:51

5.7 గురుత్వ కేంద్ర నిరూపకములు

$\varnothing ABC$ శీర్షములు $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ మరియు $C(x_3, y_3)$. లుగా తీసుకొనుము.



పటము. 5.37

AD, BE మరియు CF లను $\varnothing ABC$. మధ్యగత రేఖలు

అనుకొనుము. BC మధ్య బిందువు $D\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$

మధ్యగత రేఖ AD గురుత్వ కేంద్రం G అంతరంగా 2:1 నిష్పత్తిలో విభజించుచున్నది. విభజన సూత్రం ప్రకారం గురుత్వ కేంద్రం

$$G(x,y)\left(\frac{\frac{2(x_2+x_3)}{2}+1(x_1)}{2+1}, \frac{\frac{2(y_2+y_3)}{2}+1(y_1)}{2+1}\right)=\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ మరియు $C(x_3, y_3)$ శీర్షములుగా కలిగిన త్రిభుజపు గురుత్వ కేంద్రం (G)

$$G=\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

కృత్యము - 2

1. గ్రాఫ్ కాగితము నందు $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ మరియు $C(x_3, y_3)$ లను శీర్షములుగా గల $\varnothing ABC$ గీయుము.
2. $\varnothing ABC$ మధ్యగత రేఖలను గీచి గురుత్వకేంద్రంను గుర్తించుము.

గమనించుము

(i) $\varnothing ABC$ శీర్షముల నిరూపకములు ఇక్కడ. $A(x_1, y_1) =$ _____, $B(x_2, y_2) =$ _____ మరియు $C(x_3, y_3) =$ _____

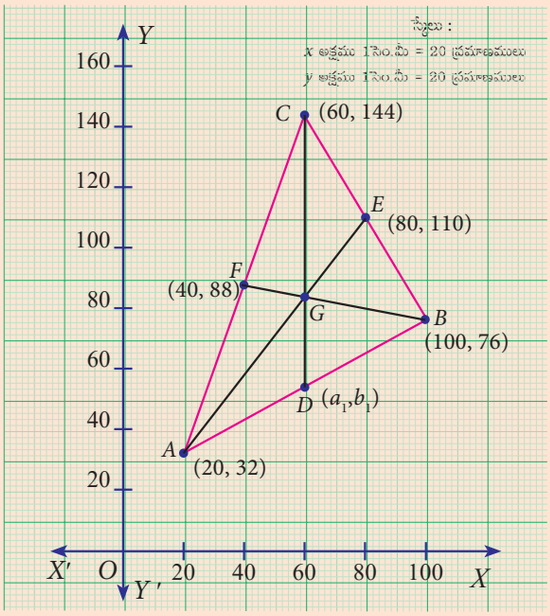
(ii) గురుత్వ కేంద్రం G నిరూపకములు = _____

(iii) గురుత్వ కేంద్రం సూత్రం ప్రకారం G యొక్క నిరూపకములు = _____.

(iv) AB మధ్య బిందువు _____.

(v) AB మధ్య బిందువు మరియు (x_3, y_3) లను కలుపు రేఖా ఖండమును 2:1 నిష్పత్తిలో అంతరంగా విభజించు బిందువు _____.

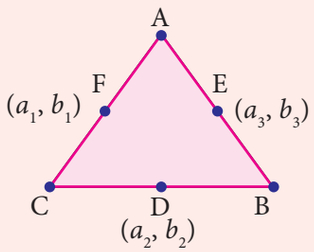
5-Coordinat_1.indd 229 30/08/2023 15:07:57



పటము. 5.38

సూచన

- ఒక త్రిభుజపు మధ్యగత రేఖలు ఒక బిందువు G వద్ద ఖండించుకొనును. ఆ బిందువైనది మధ్యగత రేఖకు పైనున్న శీర్షమునకు ఎదుటి భుజము నుండి మూడింటిలో ఒక భాగము దూరంలో ఉంటుంది.
- ఒక త్రిభుజపు గురుత్వ కేంద్రం, ఆ త్రిభుజపు భుజముల మధ్య బిందువులను కలుపగా ఏర్పడు త్రిభుజ గురుత్వ కేంద్రం రెండూ ఒక్కటే. వేర్వేరు కావు.
- (a_1, b_1), (a_2, b_2) మరియు (a_3, b_3) అనునవి ΔABC భుజముల మధ్య బిందువులు అయిన దాని గురుత్వ కేంద్రం
$G\left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3}, \frac{b_1+b_2+b_3}{3}\right)$



పటము. 5.39

ఉదాహరణ 5.20

$A(6,-1)$, $B(8,3)$ మరియు $C(10,-5)$.లను శీర్షములుగా కలిగిన త్రిభుజ గురుత్వ కేంద్రమును కనుగొనుము.

ITH6X

సాధన

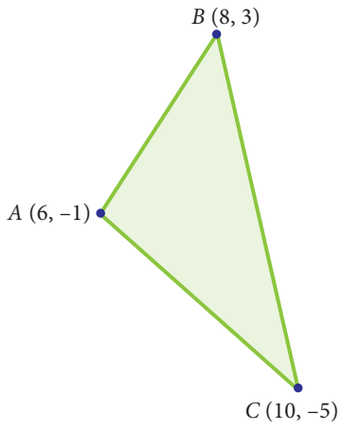
(x_1, y_1), (x_2, y_2) మరియు (x_3, y_3) అనునవి త్రిభుజ శీర్షములైన గురుత్వకేంద్రము $G(x, y)$

$$G(x, y) = G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

5-Coordinat_1.indd 230 30/08/2023 15:08:01

ఇవ్వబడినది $(x_1, y_1) = (6, -1);\ (x_2, y_2) = (8, 3);$

$(x_3, y_3) = (10, -5)$



పటము. 5.40

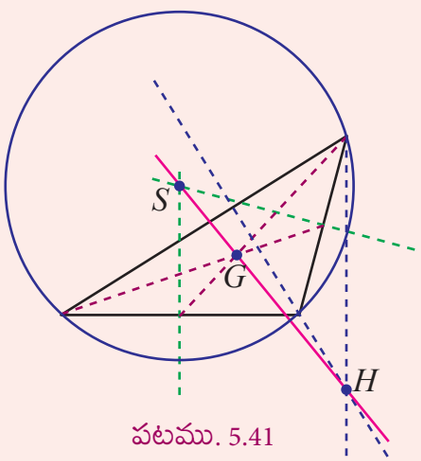
త్రిభుజ గురుత్వ కేంద్రం

$$G(x, y) = G\left(\frac{6+8+10}{3}, \frac{-1+3-5}{3}\right)$$

$$= G\left(\frac{24}{3}, \frac{-3}{3}\right) = G(8, -1)$$

సూచన:

1. ఒక త్రిభుజమునందు లంబకేంద్రం (H), గురుత్వకేంద్రం (G) మరియు పరివృత్త కేంద్రం (S) ల ద్వారా వెళ్ళు రేఖను ఆయిలర్ రేఖ అందురు. $\overline{HS}$ లను G అనునది 2 :1 నిష్పత్తిలో విభజించును. అనగా గురుత్వకేంద్రం అనునది లంబకేంద్రం మరియు పరివృత్త కేంద్రములను 2:1 నిష్పత్తిలో అంతరముగా విభజించును.
2. ఒక సమబాహు త్రిభుజములో లంబకేంద్రం, అంతరకేంద్రం, గురుత్వకేంద్రం మరియు పరివృత్త కేంద్రం అన్నియూ ఒకే బిందువు వద్ద అమరియుంటాయి.



పటము. 5.41

ఉదాహరణ 5.21 $(1, -6)$ మరియు $(-5, 2)$, అనునవి ఒక త్రిభుజపు రెండు శీర్షములు మరియు దాని గురుత్వకేంద్రం $(-2, 1)$ అయిన ఆ త్రిభుజపు మూడవ శీర్షమును కనుగొనుము.

సాధన

ఒక త్రిభుజపు మూడు శీర్షములు

$A(1, -6)$, $B(-5, 2)$ మరియు $C(x_3, y_3)$ అనుకొనుము

తిభుజపు గురుత్వకేంద్రం $(-2, 1)$ అని ఇవ్వబడినది,

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = -2 \qquad \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = 1$$

$$\frac{1 - 5 + x_3}{3} = -2 \qquad \frac{-6 + 2 + y_3}{3} = 1$$

$$-4 + x_3 = -6 \qquad -4 + y_3 = 3$$

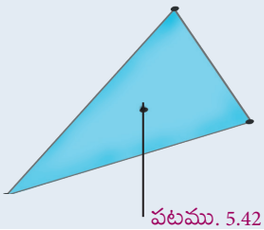
$$x_3 = -2 \qquad y_3 = 7$$

కావున త్రిభుజపు మూడవ శీర్షము $(-2, 7)$

5-Coordinat_1.indd 231 30/08/2023 15:08:07

మెదడుకి మేత

ఉపాధ్యాయుడు A(5, 8), B(2, 4), C(8, 3) శీర్షములుగా గల ఒక త్రిభుజాకార పలక మరియు ఒక పుల్లను విద్యార్థులకిచ్చి పలకను పుల్లపై నిలబెట్టమని చెప్పెను. పుల్లపై పలక నిలబడు బిందువును గుర్తించుటకు నీవు సహాయం చేయగలవా?



పటము. 5.42

అభ్యాసము 5.5

1. క్రింద ఇవ్వబడిన బిందువులను శీర్షములుగా కలిగిన త్రిభుజ గురుత్వకేంద్రమును కనుగొనుము
   (i) (2,–4), (–3,–7) మరియు (7,2) (ii) (–5,–5), (1,–4) మరియు (–4,–2)
2. ఒక త్రిభుజ గురుత్వకేంద్రం (4,–2) మరియు దాని రెండు శీర్షములు (3,–2) మరియు (5,2) అయిన మూడవ శీర్షమును కనుగొనుము.
3. $A(-1,3)$, $B(1,-1)$ మరియు $C(5,1)$ అనునవి ఒక త్రిభుజ శీర్షములు అయినA ద్వారా వెళ్ళు మధ్యగతరేఖ పొడవును కనుగొనుము.
4. $(1,2)$, $(h,-3)$ మరియు $(-4,k)$. అనునవి ఒక త్రిభుజపు శీర్షములు, ఆ త్రిభుజపు గురుత్వకేంద్రం $(5,-1)$ అయిన $\sqrt{(h+k)^2+(h+3k)^2}$ విలువను కనుగొనుము.
5. $A(-3,5)$ మరియు $B(3,3)$ అనునవి క్రమముగా ఒక త్రిభుజపు లంబకేంద్రం మరియు గురుత్వకేంద్రం. ఆ త్రిభుజపు పరివృత్తకేంద్రం C మరియు AC అనునది వృత్త వ్యాసం అయిన ఆ వృత్త వ్యాసార్ధంను కనుగొనుము
6. $A(-3,5)$ మరియు $B(3,3)$ అనునవి క్రమముగా ఒక త్రిభుజపు లంబకేంద్రం మరియు గురుత్వకేంద్రం. ఆ త్రిభుజపు పరివృత్తకేంద్రం C మరియు AC అనునది వృత్త వ్యాసం అయిన ఆ వృత్త వ్యాసార్ధంను కనుగొనుము
7. ఒక త్రిభుజ భుజముల మధ్య బిందువులు $\left(\frac{3}{2},5\right)$, $\left(7,\frac{-9}{2}\right)$ మరియు $\left(\frac{13}{2},\frac{-13}{2}\right)$ అయిన ఆ త్రిభుజ గురుత్వకేంద్రమును కనుగొనుము.

అభ్యాసము 5.6

A4VT9

బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు

1. ఒక బిందువు యొక్క y-అక్ష నిరూపకము శూన్యము అయిన అది ఎల్లప్పుడు _____ పై యుండును.
   (1) I వ పాదములో (2) II వ పాదములో (3) x-అక్షముపె (4) y-అక్షముపె
2. (–5, 2) మరియు (2, –5) అను బిందువులు _____ లో యుండును.
   (1) అదే పాదములో (2) II మరియు III పాదములో
   (3) II మరియు IV పాదములో (4) IV మరియు II పాదములో

5-Coordinat_1.indd 232 30/08/2023 15:08:08

3. $O(0,0)$, $A(3,-4)$, $B(3,4)$ మరియు $C(0,4)$ అను బిందువులను గుర్తించి వాటితో మరియు బిందువులను గుర్తించి వాటితో OA, AB, BC మరియు CO, లను కలుపుగా ఏర్పడు ఆకారము?

(1) చతురస్రము (2) దీర్ఘచతురస్రము (3) ట్రెపీజియం (4) రాంబస్

4. $P(-1,1)$, $Q(3,-4)$, $R(1,-1)$, $S(-2,-3)$ మరియు $T(-4,4)$ బిందువులు ఒక గ్రాపు కాగితములో గుర్తించినప్పుడు నాల్గవ పాదములో ఏర్పడు బిందువులు _____

(1) P మరియు T (2) Q మరియు R (3) S మాత్రమే (4) P మరియు Q

5. ఒక బిందువు యొక్క y- అక్ష నిరూపకము 4 మరియు ఆ బిందువు y- అక్షములో అమరిన ఆ బిందువు _____ అగును

(1)$(4,0)$ (2) $(0,4)$ (3) $(1,4)$ (4) $(4,2)$

6. $(2,3)$ మరియు $(1,4)$ అను బిందువుల మధ్య గలదూరము _____

(1) 2 (2) $\sqrt{56}$ (3) $\sqrt{10}$ (4) $\sqrt{2}$

7. $A(2,0)$, $B(-6,0)$, $C(3,a-3)$ అను బిందువులు x- అక్షముపై అమరి యున్నచో a యొక్క విలువ _____

(1) 0 (2) 2 (3) 3 (4) -6

8. $(x+2,4)=(5,y-2)$ అయిన, (x,y) యొక్క నిరూపకములు _____

(1) $(7,12)$ (2) $(6,3)$ (3) $(3,6)$ (4) $(2,1)$

9. Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 అనునవి కార్టీషియన్ తలములో నాలుగు బిందువులు అయిన $Q_2 \cap Q_3$ అనునది _____

(1) $Q_1 \cup Q_2$ (2) $Q_2 \cup Q_3$ (3) శూన్యసమితి (4) x-అక్షము యొక్క(ఋణ)భాగము

10. $(5,-1)$ అను బిందువుకు ఆది x- బిందువునకు మధ్యగల దూరము_____

(1) $\sqrt{24}$ (2) $\sqrt{37}$ (3) $\sqrt{26}$ (4) $\sqrt{17}$

11. $P(2,4)$ మరియు $Q(5,7)$ బిందువులను కలుపు రేఖా ఖండమును 2:1 నిష్పత్తిలో అంతరముగా విభజించు బిందువు C యొక్క నిరూపకములు

(1) $\left(\frac{7}{2},\frac{11}{2}\right)$ (2) $(3,5)$ (3) $(4,4)$ (4) $(4,6)$

12. $A(-4,3)$ మరియు $B(-2,4)$ బిందువులను కలుపు రేఖా ఖండము మధ్య బిందువు $P\left(\frac{a}{3},\frac{b}{2}\right)$ అయిన (a,b) విలువ

(1) $(-9,7)$ (2) $\left(-3,\frac{7}{2}\right)$ (3) $(9,-7)$ (4) $\left(3,-\frac{7}{2}\right)$

13. $P(2,7)$ మరియు $R(-2,3)$ బిందువులను కలుపు రేఖాఖండమును $Q(1,6)$ అను బిందువు ఏ నిష్పత్తిలో విభజించును

(1) 1:2 (2) 2:1 (3) 1:3 (4) 3:1

5-Coordinat_1.indd 233 30/08/2023 15:08:10

14. ఒక వృత్త కేంద్ర బిందు నిరూపకములు$(-3,2)$ మరియు ఆ వృత్త వ్యాసము ఒక చివరి బిందు నిరూపకములు$(3,4)$. అయిన మరొక చివరి బిందు నిరూపకములను కనుగొనుము

(1) $(0,-3)$ (2) $(0,9)$ (3) $(3,0)$ (4) $(-9,0)$

15. $A(a_1,b_1)$ మరియు $B(a_2,b_2)$ బిందువులను కలుపు రేఖా ఖండమును x- అక్షము ఏ నిష్పత్తిలో విభజించును

(1) $b_1 : b_2$ (2) $-b_1 : b_2$ (3) $a_1 : a_2$ (4) $-a_1 : a_2$

16. $(6,4)$ మరియు $(1, -7)$ బిందువులను కలుపు రేఖాఖండమును x-అక్షము ఏ నిష్పత్తిలో విభజించును?

(1) 2:3 (2) 3:4 (3) 4:7 (4) 4:3

17. ఒక త్రిభుజ భుజములు AB, BC మరియు CA ల మధ్య బిందువుల నిరూపకములు క్రమముగా$(3,4)$, $(1,1)$ మరియు $(2,-3)$ అయిన . A మరియు B. ల నిరూపకములు ఏవి?

(1) $(3,2), (2,4)$ (2) $(4,0), (2,8)$ (3) $(3,4), (2,0)$ (4) $(4,3), (2,4)$

18. $(-a,2b)$ మరియు $(-3a,-4b)$ బిందువులను కలుపు రేఖా ఖండము మధ్యబిందువు.

(1) $(2a,3b)$ (2) $(-2a, -b)$ (3) $(2a,b)$ (4) $(-2a, -3b)$

19. $(-5,1)$ మరియు$(2,3)$ బిందువులను కలుపు రేఖను y- అక్షము అంతరముగా ఏ నిష్పత్తిలో విభజించును

(1) 1:3 (2) 2:5 (3) 3:1 (4) 5:2

20. $(1,-2)$, $(3,6)$, $(x,10)$ మరియు $(3,2)$ అనునవి ఒక సమాంతర చతుర్భుజపు క్రమముగా ఇవ్వబడిన శీర్షములు అయిన x విలువ

(1) 6 (2) 5 (3) 4 (4) 3

గుర్తించుకోవలసిన విషయములు

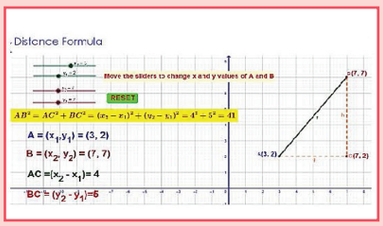
- x_1, x_2 అనునది x- అక్షముపై నున్న రెండు బిందువుల x-. నిరూపకాలు అయిన వాటికి మధ్య గల దూరము $x_2 > x_1$ అయిన $x_2 - x_1$ అగును.
- y_1, y_2 అనునవి y- అక్షముపై నున్న రెండు బిందువుల y- నిరూపకములు అయిన, వాటికి మధ్యగల దూరము $|y_1 - y_2|$ అగును.
- (x_1, y_1) మరియు(x_2, y_2) అనుబిందువుల మధ్య గల దూరము $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ అగును.
- (x_1, y_1)మరియు ఆది బిందువు$(0, 0)$ నకు మధ్యగల దూరము $\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ అగును.

5-Coordinat_1.indd 234 30/08/2023 15:08:12

- $A(x_1, y_1)$ మరియు $B(x_2, y_2)$ బిందువులను కలుపు రేఖా ఖండపు మధ్య బిందువు $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$
- $A(x_1, y_1)$ మరియు $B(x_2, y_2)$ బిందువులను కలుపు రేఖా ఖండమును అంతరముగా $m:n$ నిష్పత్తిలో విభజించు బిందువు $P\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$
- $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ మరియు $C(x_3, y_3)$ బిందువులను శీర్షములుగా కలిగిన త్రిభుజ గురుత్వకేంద్రం $G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$
- ఒక త్రిభుజపు గురుత్వకేంద్రం, ఆ త్రిభుజ భుజముల మధ్య బిందువులను కలుపగా ఏర్పడు త్రిభుజ గురుత్వకేంద్రం రెండూ ఒకటే, వేర్వేరు కావు.

అంతర్జాల కృత్యము-1

చివరన లభించు ఫలితమును చూపించు పటము



సోపానము – 1

Browser ను Open చేసి క్రింద యివ్వబడిన URL ను type చేయండి (లేదా) copy చేసి paste చేయండి లేదా QR Code .ను Scan చేయండి.

సోపానము - 2

"IX Analytical Geometry" అని GeoGebra భాగములో ప్రత్యక్షమగును. ఆ భాగములో అనేక worksheets ఉండును. అందులో మనకు కావలసిన దానిని ఎన్నుకొనుము ఉదాహరణము " Distance Formula" అను దాని ఎన్నుకొనుము.

సోపానము-3

A మరియుB ల co-ordinates (నిరూపకమును) మార్చి x_1, x_2, y_1, y_2 అను sliders లను డ్రాగ్ చేయవలెయును. ఇప్పుడు మీరు A మరియుB ల మధ్య దూరమును గణించవచ్చును.

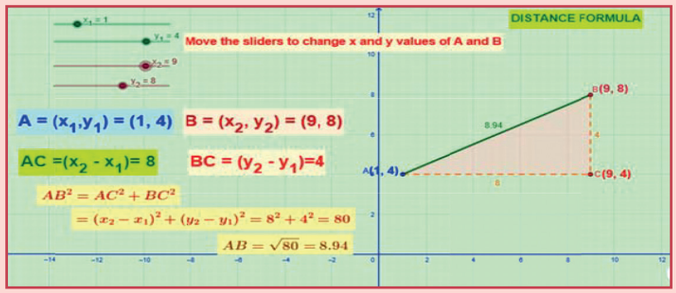
Browse in the link

Co-Ordinate Geometry: https://ggbm.at/V9HfY4v8

5-Coordinat_1.indd 235 30/08/2023 15:08:16

అంతర్జాల కృత్యము-2

చివరన లభించు ఫలితమును చూపించు పటము



మెట్టు- 1

క్రింద ఇవ్వబడిన URL ను టైపుచేసి లేదా QR కోడ్‌ను స్కాన్ చేసి బ్రౌజర్‌ను ఓపెన్ చేయుము. GeoGebra వర్క్‌షీట్ నందు "Co-ordinate Geometry" ఓపెన్ అగును. అక్కడ Distance Formula మరియు Section Formula అనబడు రెండు వర్క్‌షీట్‌లు ఉంటుంది.

మెట్టు - 2

బిందువులు మరియు నిష్పత్తులను మార్చుటకు, తగిన విలువలకు sliders ను జరుపుము. సమస్యలను సాధించి జవాబులను సరిచూడుము.

URL లింక్

నిరూపక జ్యామితి: https://ggbm.at/sfszfe24 or Scan the QR Code..

కృత్యము

$A(1, 0), B(-7, 2), C(-3, 7)$అను బిందువులను గ్రాపు కాగితములో గుర్తించి వాటిని కలిపి ఒక త్రిభుజమును ఏర్పరచుము.

$G(-3, 3)$అను బిందువును గుర్తించుము.

AG బిందువు నుండి BC ద్వారా ఒక రేఖను గీయుము. దానిని పొడిగించి D లో సందించునట్లు చేయండి.

BG బిందువు నుండి AC ద్వారా ఒక రేఖను గీయుము. దానిని పొడిగించి E లో సందించునట్లు చేయండి..

BD మరియు DC ,CE మరియు EA అను దూరములను లచి, వాటి మధ్య గల సంబంధము గూర్చి తెలుపుము?

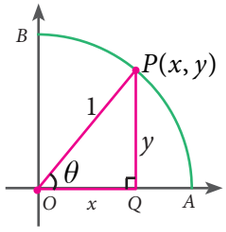
మధ్య దూర సూత్రమును ఉపయోగించి CG మరియు GF ల దూరమును కనుగొనుము. ఇచ్చట F అనునది AB లో అమరిన ఒక బిందువు

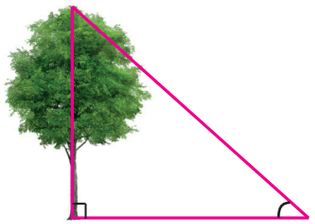
$AG: GD$, $BG: GE$ మరియు $CG: GF$. గూర్చి మీ అభిప్రాయమును తెలుపుము.

గమనిక : G అనునది త్రిభుజము యొక్క గురుత్వ కేంద్రమగును. మరియు త్రిభుజము యొక్క మధ్యగత రేఖలు.

5-Coordinat_1.indd 236 30/08/2023 15:08:16

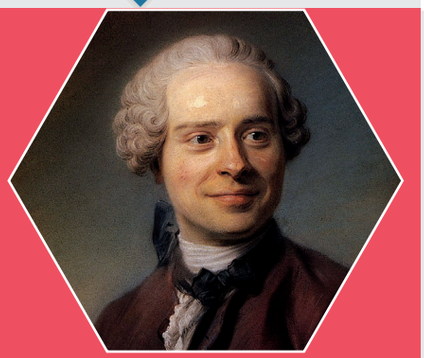
6





త్రికోణమితి

బహుశా త్రికోణమితిలాగా గణితశాస్త్రంలో ముఖ్యమైన స్థానము వహించునది వేరేది లేదు. - *J. F.* హెర్బర్ట్



లెనార్ యూలర్
క్రీ.శ (సా.శ.) 1707 - 1783

ఆయిలర్ న్యూటన్ వలె అతని తరము నందు ప్రసిద్ధి చెందిన గణిత శాస్త్రవేత్త. అతను గణిత శాస్త్రము నందు అన్ని విభాగములను నేర్చుకొనెను. మరియు అతను తన కంటి చూపును కోల్పోయిన తరువాత కూడా తన పనిని కష్టపడి కొనసాగించెను. గణితము నందు పలు విభాగములలో ముఖ్యముగా కలన గణితము మరియు త్రికోణమితి నందు ఆయిలర్ నూతన ఆవిష్కరణలు చేసెను. ఆయిలర్ రేఖాగణితము నందు అనేక సిద్ధాంతాలకు నిరూపణను కనుగొనిన వారిలో ముఖ్యుడు.

అభ్యసన ఫలితములు

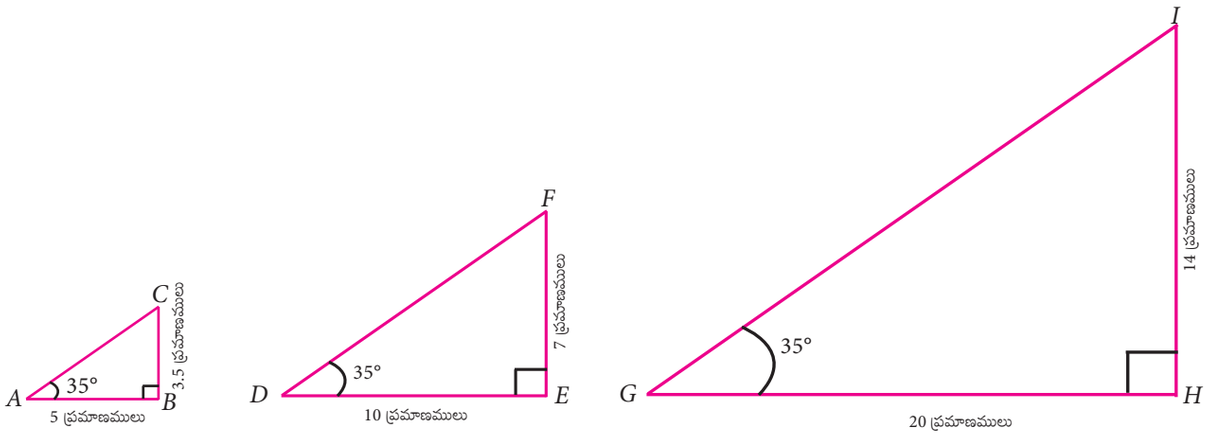
- త్రికోణమితి నిష్పత్తులను నేర్చుకొనుట.
- వివిధ త్రికోణమితి నిష్పత్తుల మధ్యగల సంబంధములను అర్థం చేసుకొనుట.
- త్రికోణమితి నిష్పత్తి మరియు వాటి విలోమముల విలువలు గుర్తించుట పూరక కొణముల భావనలను ఉపయోగించుట.
- త్రికోణమితి పట్టికలను ఉపయోగించుటను అర్థం చేసుకొనుట.

6.1 పరిచయం

త్రికోణమితి యొక్క ఆంగ్ల పదమైన **Trigonometry** అనేది గ్రీకు పదములైన trigonon నుండి గ్రహింపబడినది trigonon అనగా త్రిభుజము మరియు metron అనగా కొలతలు అని అర్థము. ఇది త్రిభుజ కోణముల కొలతలు మరియు వీటి భుజముల పొడవులకు మధ్య గల సంబంధమును గూర్చి వివరించు గణిత విభాగము అవుతుంది. ఇంజనీర్లు, శాస్త్రవేత్తలు మరియు భూములను సర్వే చేయువారికి ముఖ్యమైన పరికరంగా త్రికోణమితి ఉపయోగపడుచున్నది. ఇది సముద్ర ప్రయాణము మరియు భూకంపమునకు సంబంధించిన విభాగము నందు ఉపయోగించబడుచున్నది

క్రింద ఇవ్వబడిన మూడు లంబకోణ త్రిభుజములను గమనించుము. ప్రత్యేకించి వాటి కొలతలను పరిశీలించుము. మూడు త్రిభుజములయందు కోణముల కొలతలు ఒకే విధముగా ఉన్నవి. ఎదుటి భుజముల (ఇవ్వబడిన కోణమునకు ఎదురుగా ఉన్న భుజము) కొలతలను అసన్న భుజముల (ఇవ్వబడిన కోణమునకు పక్కనే ఉన్న భుజము) కొలతలను పరిశీలింపుము.

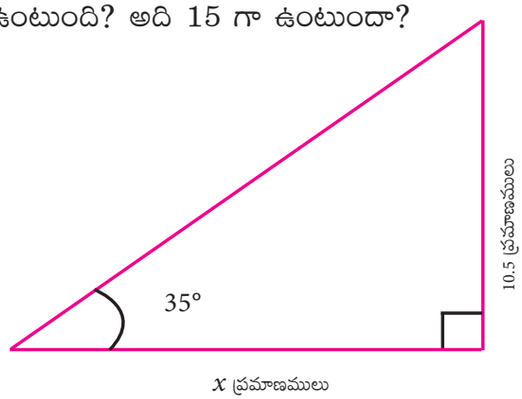
6 Trigonometry.indd 237 27-02-2023 20:17:06



పటం 6.1

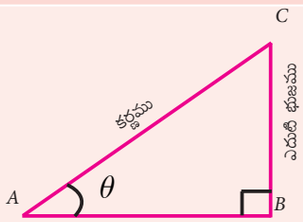
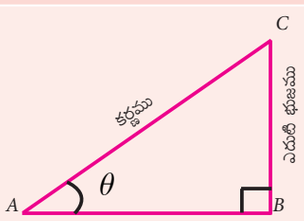
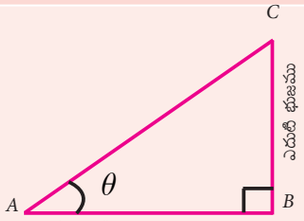
ఒక్కొక్క త్రిభుజములో ఎదుటి భుజాలు మరియు ఆసన్న భుజమునకు మధ్య గల నిష్పత్తి $\frac{\text{ఎదుటి భుజము}}{\text{ఆసన్న బుజము}}$ ఎంత అని చెప్పుటకు వీలగునా? ఇచ్చట ఇవ్వబడిన ఒక్కొక్క లంబకోణ త్రిభుజం నందు ఈ నిష్పత్తి 0.7, ఈ ఫలితము ఆధారంగా పటము 3.3 లో x విలువ ఏ విధంగా ఉంటుంది? అది 15 గా ఉంటుందా?

ఈ విధమైన నిష్పత్తులు ఆ కాల గణిత శాస్త్రవేత్తలను ఆశ్చర్యపరచుటయే గాక త్రికోణమితి అను కొత్త విభాగము ఏర్పడుటకు దారి తీసెను.



పటం 6.2

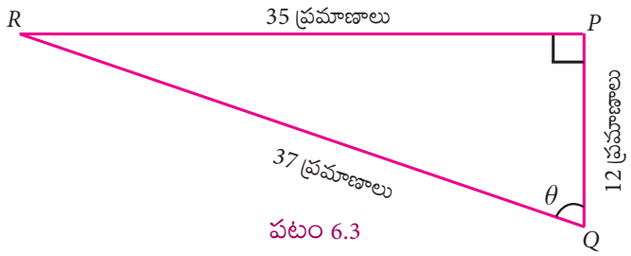
త్రికోణమితిలో మూడు ప్రాథమిక నిష్పత్తులు కలవు. ఆ మూడు నిష్పత్తులు లంబకోణ త్రిభుజములో ఒక భుజమును మరియొక భుజముతో భాగించగా వచ్చు నిష్పత్తులగును. అవి మూడు ప్రాథమిక నిష్పత్తులు

కోణంయెక్క పేరు	sine	cosine	tangent
సూక్ష్మ రూపం	sin	cos	tan
సంబంధమైన కొలతలు			
నిష్పత్తులు	$\sin\theta = \frac{\text{ఎదుటి భుజము}}{\text{కర్ణము}}$	$\cos\theta = \frac{\text{ఆసన్న భుజము}}{\text{కర్ణము}}$	$\tan\theta = \frac{\text{ఎదుటి భుజము}}{\text{ఆసన్న బుజము}}$

6 Trigonometry.indd 238 27-02-2023 20:17:07

ఉదాహరణ 6.1

క్రింద ఇవ్వబడిన పటములో గల కొలతలకు θ.ను అనుసరించి sine మరియు cosine నిష్పత్తులను కనుగొనుము.



పటం 6.3

సాధన:

ఇవ్వబడిన లంబకోణ త్రిభుజం PQR లో కోణము θ కు ఎదుటి భుజము PR ఆసన్న బుజము PQ అగును.

$$\sin\theta = \frac{\text{ఎదుటి భుజము}}{\text{కర్ణము}} = \frac{PR}{QR} = \frac{35}{37}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{ఆసన్న భుజము}}{\text{కర్ణము}} = \frac{PQ}{QR} = \frac{12}{37}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{ఎదుటి భుజము}}{\text{ఆసన్న బుజము}} = \frac{PR}{PQ} = \frac{35}{12}$$

త్రికోణమితి నిష్పత్తులను భిన్నరూపంలో సూచించవచ్చును. అవసరమైతే వీటిని సూక్ష్మీకరించి వ్రాయవచ్చును.

సూచన

- త్రికోణమితి నిష్పత్తులను సూచించినప్పుడు భుజ కొలతలను నిష్పత్తులుగా సూచించుట వలన అవి ప్రమాణము లేని సంఖ్యలగును.
- $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ వంటి నిష్పత్తులను $(\sin)\times(\theta)$, $(\cos)\times(\theta)$, $(\tan)\times(\theta)$ అని తప్పుగా తీసుకొనకూడదు.

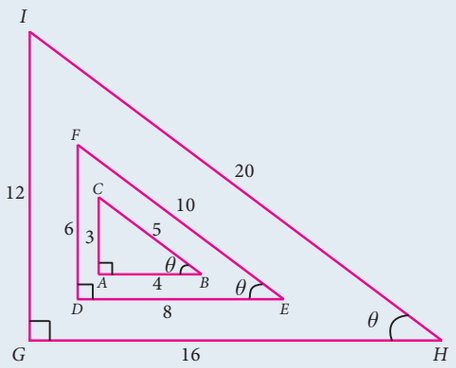
మెదడుకి మేత

ఇవ్వబడిన త్రిభుజములు ABC, DEF మరియు GHI యొక్క భుజముల కొలతలు 3-4-5, 6-8-10 మరియు 12-16-20

ఈ త్రిభుజములన్నియు లంబకోణ త్రిభుజములా? చర్చించుము.

శీర్షములు B, E మరియు H అమరు కోణముల కొలతలు సమానంగా ఉంటుంది. (ప్రతి కోణము θ కు సమానము).

పైన సూచింపబడిన వివరములతో క్రింద ఇవ్వబడిన పట్టికను పూరించి, లభించు నిష్పత్తులను గూర్చి అభిప్రాయాలను వ్యక్తము చేయుము.



పటం 6.4

6 Trigonometry.indd 239 27-02-2023 20:17:07

ΔABC లో	ΔDEF లో	ΔGHI లో
$\sin\theta = \frac{3}{5}$	$\sin\theta = \frac{6}{10} = ?$	$\sin\theta = \frac{12}{20} = ?$
$\cos\theta = ?$	$\cos\theta = ?$	$\cos\theta = ?$
$\tan\theta = \frac{3}{4}$	$\tan\theta = ?$	$\tan\theta = ?$

విలోమ నిష్పత్తులు:

మూడు త్రికోణమితి నిష్పత్తులను మనము. sine, cosine, tangent అని సూచించాము. ఈ త్రికోణమితి నిష్పత్తులు విలోమ నిష్పత్తులను లెక్కించుటలో చాలా ఉపయోగకరమైనదిగా ఉండును. వాటిని క్రింది విధంగా నిర్వచించవచ్చును.

త్రికోణమితి ప్రాథమిక నిష్పత్తులు	వాటి విలోమము	సూక్ష్మ రూపము
$\sin\theta = \frac{\text{ఎదుటి భుజము}}{\text{కర్ణము}}$	$\text{cosecant}\ \theta = \frac{\text{కర్ణము}}{\text{ఎదుటి భుజము}}$	$\text{cosec}\ \theta = \frac{\text{కర్ణము}}{\text{ఎదుటి భుజము}}$
$\cos\theta = \frac{\text{ఆసన్న భుజము}}{\text{కర్ణము}}$	$\text{secant}\ \theta = \frac{\text{కర్ణము}}{\text{ఆసన్న భుజము}}$	$\sec\theta = \frac{\text{కర్ణము}}{\text{ఆసన్న భుజము}}$
$\tan\theta = \frac{\text{ఎదుటి భుజము}}{\text{ఆసన్న బుజము}}$	$\text{cotangent}\ \theta = \frac{\text{ఆసన్న భుజము}}{\text{ఎదుటి భుజము}}$	$\cot\theta = \frac{\text{ఆసన్న భుజము}}{\text{ఎదుటి భుజము}}$

పై నిష్పత్తుల నుండి క్రింద చూపిన నిష్పత్తుల సంబంధములను మనము పరిశీలించవచ్చును.

$$\text{cosec}\ \theta = \frac{1}{\sin\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

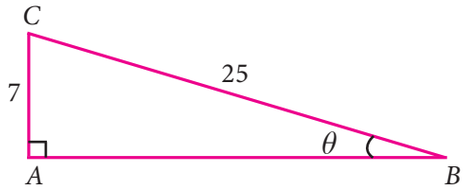
$$\sin\theta = \frac{1}{\text{cosec}\,\theta} \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} \qquad \tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$$

$(\sin\theta)\times(\text{cosec}\,\theta) = 1$. దీనిని మనము $\sin\theta\cdot\text{cosec}\,\theta = 1$ అని వ్రాయుదుము..

$(\cos\theta)\times(\sec\theta) = 1$. దీనిని మనము $\cos\theta.\sec\theta = 1$అని వ్రాయుదుము.

$(\tan\theta)\times(\cot\theta) = 1$. దీనిని మనము $\tan\theta\,.\,\cot\theta = 1$అని వ్రాయుదుము.

ఉదాహరణ 6.2 ఇవ్వబడిన పటమునందు θ ను అనుసరించి ఆరు త్రికోణమితి నిష్పత్తులను కనుగొనుము.



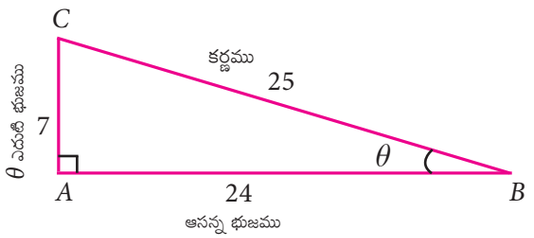
పటం 6.5

6 Trigonometry.indd 240 27-02-2023 20:17:13

సాధన:

పైథాగరస్ సిద్ధాంతము నుండి,

$$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2}$$
$$= \sqrt{(25)^2 - 7^2}$$
$$= \sqrt{625 - 49} = \sqrt{576} = 24$$



పటము 6.6

ఆరు త్రికోణమితి నిష్పత్తులను క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చును

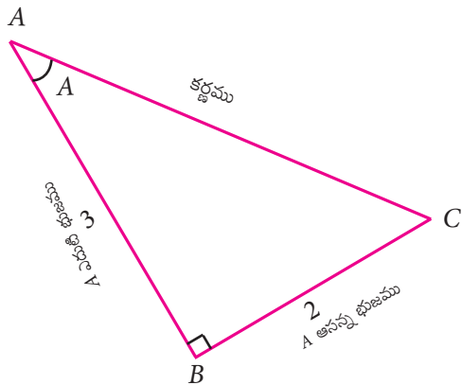
$$\sin\theta = \frac{\text{ఎదుటి భుజము}}{\text{కర్ణము}} = \frac{7}{25} \qquad \cos\theta \quad \frac{\text{ఆసన్న భుజము}}{\text{కర్ణము}} \quad \frac{24}{25}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{ఎదుటి భుజము}}{\text{ఆసన్న బుజము}} = \frac{7}{24} \qquad \text{cosec}\theta = \frac{\text{కర్ణము}}{\text{ఎదుటి భుజము}} = \frac{25}{7}$$

$$\sec\theta = \frac{\text{కర్ణము}}{\text{ఆసన్న భుజము}} = \frac{25}{24} \qquad \cot\theta = \frac{\text{ఆసన్న భుజము}}{\text{ఎదుటి భుజము}} = \frac{24}{7}$$

ఉదాహరణ 6.3 $\tan A = \frac{2}{3}$, అయిన మిగిలిన త్రికోణమితి నిష్పత్తులను కనుగొనుము.

సాధన:



పటము 6.7

$$\tan A = \frac{\text{ఎదుటి భుజము}}{\text{ఆసన్న బుజము}} = \frac{2}{3}$$

పైథాగరస్ సిద్ధాంతం నుండి

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$$
$$= \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$
$$AC = \sqrt{13}$$

$$\sin A = \frac{\text{ఎదుటి భుజము}}{\text{కర్ణము}} = \frac{2}{\sqrt{13}} \qquad \cos A = \frac{\text{ఆసన్న భుజము}}{\text{కర్ణము}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\text{cosec}A = \frac{\text{కర్ణము}}{\text{ఎదుటి భుజము}} = \frac{\sqrt{13}}{2} \qquad \sec A = \frac{\text{కర్ణము}}{\text{ఆసన్న భుజము}} = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

$$\cot A = \frac{\text{ఆసన్న భుజము}}{\text{ఎదుటి భుజము}} = \frac{3}{2}$$

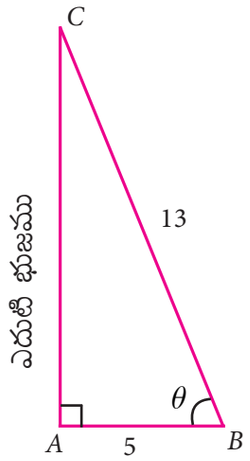
ఉదాహరణ 6.4 $\sec\theta = \frac{13}{5}$, అయిన $\frac{2\sin\theta - 3\cos\theta}{4\sin\theta - 9\cos\theta} = 3$ అని నిరూపించుము

6 Trigonometry.indd 241 27-02-2023 20:17:16

సాధన:

$BC = 13$ మరియు $AB = 5$ అనుకొనుము

$$\sec\theta = \frac{\text{కర్ణము}}{\text{ఆసన్న భుజము}} = \frac{BC}{AB} = \frac{13}{5}$$



పైథాగరస్ సిద్ధాంతం నుండి,

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2}$$

$$= \sqrt{13^2 - 5^2}$$

$$= \sqrt{169 - 25} \quad = \quad \sqrt{144} = 12$$

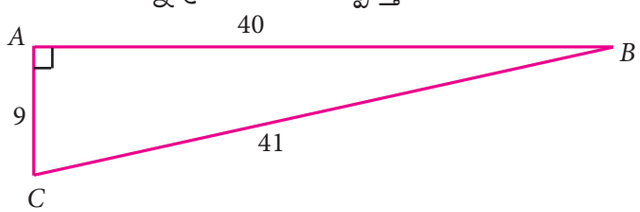
కావున, $\sin\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{12}{13}$; $\cos\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{13}$

$$LHS = \frac{2\sin\theta - 3\cos\theta}{4\sin\theta - 9\cos\theta} = \frac{2\times\frac{12}{13} - 3\times\frac{5}{13}}{4\times\frac{12}{13} - 9\times\frac{5}{13}} = \frac{\frac{24-15}{13}}{\frac{48-45}{13}} = \frac{9}{3} = 3 = RHS$$

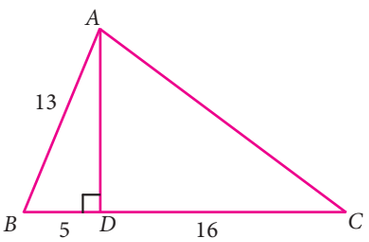
సూచన: శీర్ష బిందువు 'C' వద్ద కోణము 'θ' అమరునట్లు తీసుకొని పై లెక్కను ఇదే విధముగా సాధించవచ్చును

అభ్యాసము 6.1

1. కోణము B ను అనుసరించి అన్ని త్రికోణమితి నిష్పత్తులను కనుగొనుము.



2. ఇవ్వబడిన పటము నుండి క్రింద విలువలను కనుగొనుము



(i) $\sin B$ (ii) $\sec B$ (iii) $\cot B$

(iv) $\cos C$ (v) $\tan C$ (vi) $\operatorname{cosec} C$

3. $2\cos\theta = \sqrt{3}$, అయిన θ యొక్క అన్ని త్రికోణమితి నిష్పత్తులను కనుగొనుము.

4. $\cos A = \frac{3}{5}$ అయిన $\frac{\sin A - \cos A}{2\tan A}$. విలువను కనుగొనుము.

6 Trigonometry.indd 242 27-02-2023 20:17:21

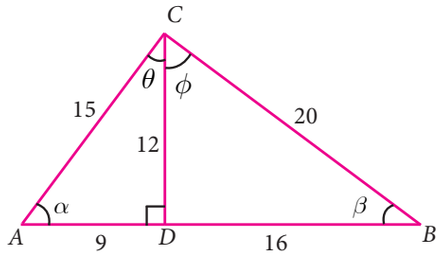
5. $\cos A = \frac{2x}{1+x^2}$, అయిన. $\sin A$ మరియు $\tan A$ యొక్క విలువలను x లో కనుగొనుము

6. $\sin\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ అయిన, $b\sin\theta = a\cos\theta$ అని నిరూపించుము.

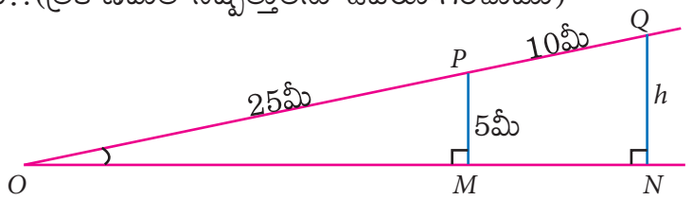
7. $3\cot A = 2$ అయిన, $\frac{4\sin A - 3\cos A}{2\sin A + 3\cos A}$. విలువను కనుగొనుము.

8. $\cos\theta : \sin\theta = 1:2$, అయిన $\frac{8\cos\theta - 2\sin\theta}{4\cos\theta + 2\sin\theta}$ విలువను కనుగొనుము.

9. ఇవ్వబడిన పటము నుండి $\theta + \phi = 90°$ అని నిరూపించుము. ఈ పటములో ఇంకా రెండు లంబకోణ త్రిభుజములు కలవు అని నిరూపించుము $\sin\alpha$, $\cos\beta$ మరియు $\tan\phi$ విలువలను కనుగొనుము.



10. ఒక విద్యార్థి భూమి మీద '0' అను బిందువు వద్ద నిలబడి 'P' అనే బిందువు వద్ద OP=25 మీ దూరము గల గాలి పటమును గమనించెను. గాలిపటము భూమి నుండి 5మీ ఎత్తులో కలదు. P నుండి 10మీ దూరం కదలి Q అనే బిందువు వద్ద గాలిపటము ఉన్నప్పుడు భూమి నుండి గాలిపటము ఎత్తు QN ను కనుగొనుము?. (త్రికోణమితి నిష్పత్తులను ఉపయోగించుము)

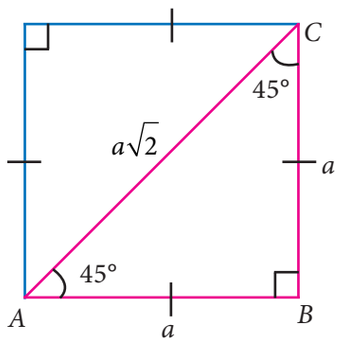


6.2 కొన్ని ప్రత్యేక కోణముల త్రికోణమితి నిష్పత్తులు

కొన్ని ప్రత్యేక త్రికోణమితి నిష్పత్తుల విలువలను రేఖా గణితము మూలముగా పొందవచ్చును. ఇక్కడ మనకు రెండు ప్రత్యేక త్రిభుజములు ఉపయోగపడుచున్నవి

6.2.1 కోణము 45^0 యొక్క త్రికోణమితి నిష్పత్తులు

45^0, 45^0 మరియు 90^0 కోణ కొలతలు గల త్రిభుజము ABC ను పటము 6.9 లో ఉన్నట్లు తీసుకొనిన



పటము. 6.8

ఇది ఒక చతురస్రం యొక్క వికర్ణము అనుసరించి కత్తిరించిన ఒక అర్ధ చతురస్రపు ఆకారము. ఇది సమద్విబాహు త్రిభుజం అని గ్రహించవచ్చును. (రెండు భుజములు సమ కొలత అనగా a ప్రమాణముగా ఉండును.)

పైథాగరస్ సిద్ధాంతమును ఉపయోగించి వికర్ణము యొక్క పొడవు $a\sqrt{2}$ అని సరిచూడవచ్చు.

6 Trigonometry.indd 243 27-02-2023 20:17:24

ABC, అనే లంబకోణ త్రిభుజము నుండి

$$\sin 45^o = \frac{\text{ఎదుటి భుజము}}{\text{కర్ణము}} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45^o = \frac{\text{ఆసన్న భుజము}}{\text{కర్ణము}} = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45^o = \frac{\text{ఎదుటి భుజము}}{\text{ఆసన్న భుజము}} = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a} = 1$$

వీటి నుండి మనము సులభముగా

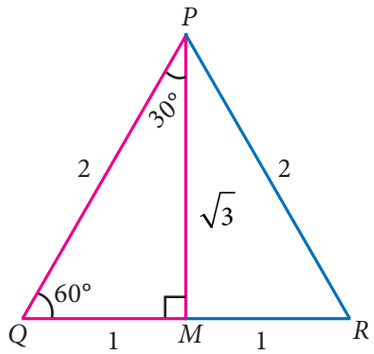
$\text{cosec}\, 45° = \sqrt{2}$;

$\sec 45° = \sqrt{2}$ మరియు

$\cot 45° = 1$ అని గ్రహించ వచ్చును

6.2.2 కోణములు 30° మరియు 60°ల త్రికోణమితి నిష్పత్తుల°

C భుజాల కొలత 2 ప్రమాణములు గల ఒక సమభుజ త్రిభుజము PQR ను తీసుకునెదము. $\angle P$ కు సమద్విఖండన రేఖను గీయుము. ఇది QR ను M వద్ద ఖండించునని అనుకొనుము



పటము. 6.9

$PQ = QR = RP = 2$ ప్రమాణములు

$QM = MR = 1$ ప్రమాణము (ఎందువలన?)

PQ మరియు QM ల విలువలు తెలియును. కావున PM యొక్క విలువను పైథాగరస్ సిద్ధాంతమును ఉపయోగించి తెలుసుకొనవచ్చును.

ఇచ్చట $PM = \sqrt{3}$ ప్రమాణములు అని పొందవచ్చును.

లంబకోణ త్రిభుజం PQM నుండి,

$$\sin 30^o = \frac{\text{ఎదుటి భుజము}}{\text{కర్ణము}} = \frac{QM}{PQ} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^o = \frac{\text{ఆసన్న భుజము}}{\text{కర్ణము}} = \frac{PM}{PQ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^o = \frac{\text{ఎదుటి భుజము}}{\text{ఆసన్న భుజము}} = \frac{QM}{PM} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

వీటి నుండి మనము సులభముగా

$\text{cosec}\, 30° = 2, \sec 30° = \frac{2}{\sqrt{3}}$

మరియు $\cot 30° = \sqrt{3}$ అని

గ్రహించవచ్చును.

అదే త్రిభుజము యొక్క మరియొక కోణము 60^0ను ఉపయోగించి త్రికోణమితి నిష్పత్తులను పొందవచ్చును.

$$\sin 60^o = \frac{\text{ఎదుటి భుజము}}{\text{కర్ణము}} = \frac{PM}{PQ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^o = \frac{\text{ఆసన్న భుజము}}{\text{కర్ణము}} = \frac{QM}{PQ} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^o = \frac{\text{ఎదుటి భుజము}}{\text{ఆసన్న భుజము}} = \frac{PM}{QM} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

వీటి నుండి మనము సులభముగా

$\text{cosec}\, 60° = \frac{2}{\sqrt{3}}$; $\sec 60° = 2$

మరియు $\cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ అని

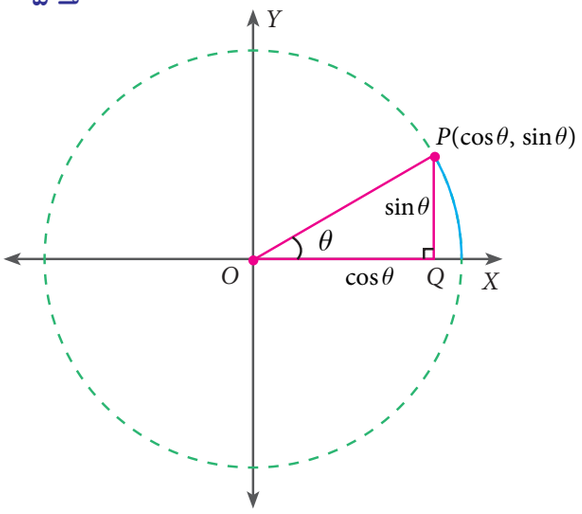
గ్రహించవచ్చును.

6 Trigonometry.indd 244 27-02-2023 20:17:26

6.2.3 కోణములు 0° మరియు 90° లకు త్రికోణమితి నిష్పత్తులు

కోణములు 0^0 మరియు 90^0లకు త్రికోణమితి నిష్పత్తులు కనుగొనుటకు మనము యూనిట్ వృత్తమును ఉపయోగించుకొనెదము.

యూనిట్ వృత్తమనగా ఆది బిందువును కేంద్రముగా మరియు వ్యాసార్ధం 1 ప్రమాణంగా గల వృత్తమగును.

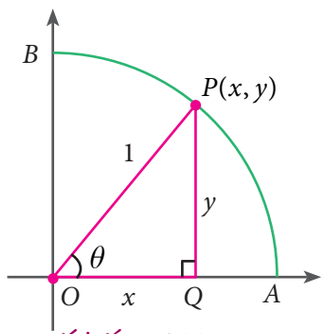


పటము. 6.10

ఇచ్చట 1 ప్రమాణము వ్యాసార్ధం గల వృత్తము గీయుదుము ఎందువలన?

ఈ వృత్తములో మనము తీసుకొనబోవు అన్ని త్రిభుజములకు కర్ణము యొక్క పొడవు 1 ప్రమాణంగా ఉండుట వలన కోణములు మరియు నిష్పత్తులను పోల్చుట చాలా సులభమగును.

మనము ధనాత్మక విలువలను మాత్రమే తీసుకోవడము ఎందువలననగా అవి భుజ పొడవులగును. కావున మొదటి పాదమును మాత్రము తీసుకొనవచ్చును.



పటము. 6.11

$P(x,y)$ అనునది మొదటి పాదములో యూనిట్ వృత్తం పై అమరిన ఏదైనా ఒక బిందువగును. మరియు $\angle POQ = \theta$

$$\sin\theta = \frac{PQ}{OP} = \frac{y}{1} = y \;;\quad \cos\theta = \frac{OQ}{OP} = \frac{x}{1} = x \;;\quad \tan\theta = \frac{PQ}{OQ} = \frac{y}{x}$$

$\theta = 0^\circ$, అయిన OP అనునది OA, పై అమరును. ఇచ్చట $A\ (1,0)$ అగుటవలన $x = 1,\ y = 0$.

వీటిని ఉపయోగించి మనము పొందునది

$$\sin 0^\circ = 0 \;;\quad \operatorname{cosec} 0^\circ = \text{నిర్వచించలేదు (ఎందువలన?)}$$

$$\cos 0^\circ = 1 \;;\quad \sec 0^\circ = 1$$

$$\tan 0^\circ = \frac{0}{1} = 0 \;;\quad \cot 0^\circ = \text{నిర్వచించలేదు (ఎందువలన?)}$$

$\theta = 90^\circ$, అయిన OP అనునది OB, పై అమరును. ఇచ్చట $B\ (0,1)$ అగుటవలన $x = 0,\ y = 1$.

వీటిని ఉపయోగించి మనము పొందునది

$$\sin 90^\circ = 1 \;;\quad \operatorname{cosec} 90^\circ = 1$$

6 Trigonometry.indd 245 27-02-2023 20:17:29

$\cos 90° = 0$; $\sec 90°$ = నిర్వచించలేదు

$\tan 90° = \frac{1}{0}$ = నిర్వచించలేదు; $\cot 90° = 0$

ఈ విధముగా పొందిన అన్ని ఫలితములను పట్టికలో పూరింపబడెను.

త్రికోణమితి నిష్పత్తులు / θ	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	నిర్వచింపలేదు
$\operatorname{cosec}\theta$	నిర్వచింపలేదు	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
$\sec\theta$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	నిర్వచింపలేదు
$\cot\theta$	నిర్వచింపలేదు	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

ఉదాహరణ 6.5 విలువలను కనుగొనుము: (i) $\sin 30° + \cos 30°$ (ii) $\tan 60° \cot 60°$

(iii) $\frac{\tan 45°}{\tan 30° + \tan 60°}$

(iv) $\sin^2 45° + \cos^2 45°$

సాధన

(i) $\sin 30° + \cos 30° = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

(ii) $\tan 60°.\cot 60° = \sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = 1$

సూచన

(i) $(\sin\theta)^2$ ను $\sin^2\theta = (\sin\theta) \times (\sin\theta)$ అని వ్రాయవచ్చును.

(ii) $(\sin\theta)^2$ ను $\sin\theta^2$, అని వ్రాయకూడదు ఎందుకనగా అది $\sin(\theta \times \theta)$. అని సూచించును.

6 Trigonometry.indd 246 27-02-2023 20:17:35

(iii) $\dfrac{\tan 45^\circ}{\tan 30^\circ + \tan 60^\circ} = \dfrac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{1}} = \dfrac{1}{\frac{1+\left(\sqrt{3}\right)^2}{\sqrt{3}}} = \dfrac{1}{\frac{1+3}{\sqrt{3}}} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

(iv) $\sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \dfrac{1^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} + \dfrac{1^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$



మెదడుకి మేత

క్రింద ఇవ్వబడిన ప్రతి వరుసలలో గల మూడు సంఖ్యలను పైథాగోరియస్ త్రిపాథి అని అందురు. అవి లంబ కోణ త్రిభుజము యొక్క భుజములగును.

(i) 3, 4, 5 (ii) 5, 12, 13 (iii) 7, 24, 25

పైథోగోరియన్ త్రిపాథిలో గల ప్రతిసంఖ్యను ఒక సున్నా కాని స్థిరాంకముతో గుణించుము. ఇప్పుడు పొందిన క్రొత్త మూడు సంఖ్యల వరుస కూడా పైథోగోరియన్ త్రిపాదిగా ఉండునా, అని పరీక్షించుము.

ఉదాహరణ 6.6

క్రింద ఇవ్వబడిన వాటి యొక్క విలువలను కనుగొనుము.

(i) $(\cos 0^\circ + \sin 45^\circ + \sin 30^\circ)(\sin 90^\circ - \cos 45^\circ + \cos 60^\circ)$

(ii) $\tan^2 60^\circ - 2\tan^2 45^\circ - \cot^2 30^\circ + 2\sin^2 30^\circ + \dfrac{3}{4}\operatorname{cosec}^2 45^\circ$

సాధన

(i) $(\cos 0^\circ + \sin 45^\circ + \sin 30^\circ)(\sin 90^\circ - \cos 45^\circ + \cos 60^\circ)$

$= \left[1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2}\right]\left[1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2}\right]$

$= \left[\dfrac{2\sqrt{2}+2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right]\left[\dfrac{2\sqrt{2}-2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right] = \left[\dfrac{3\sqrt{2}+2}{2\sqrt{2}}\right]\left[\dfrac{3\sqrt{2}-2}{2\sqrt{2}}\right]$

$= \dfrac{18-4}{4\left(\sqrt{2}\right)^2} = \dfrac{14}{4\times 2} = \dfrac{7}{4}$

(ii) $\tan^2 60^\circ - 2\tan^2 45^\circ - \cot^2 30^\circ + 2\sin^2 30^\circ + \dfrac{3}{4}\operatorname{cosec}^2 45^\circ$

$= \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2(1)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 + 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}\left(\sqrt{2}\right)^2$

6 Trigonometry.indd 247 27-02-2023 20:17:38

$$= 3 - 2 - 3 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}$$

$$= -2 + \frac{4}{2} = -2 + 2 = 0$$

సూచన

(i) ఒక లంబకోణ త్రిభుజములో కోణములు $45° : 45° : 90°$ అను నిష్పత్తిలో ఉండిన వాటి భుజములు $1 : 1 : \sqrt{2}$ అను నిష్పత్తిలో ఉండును.

(ii) ఇదే విధముగా కోణములు $30° : 60° : 90°$ అను నిష్పత్తిలో ఉండిన వాటి భుజములు $1 : \sqrt{3} : 2$ అను నిష్పత్తిలో ఉండును..

(జ్యామితి ఉపకరణపెట్టెలోగల రెండు మూలమట్టములు (set squares) పైన ఇవ్వబడిన రెండు త్రిభుజములకు మంచి ఉదాహరణములగును.

అభ్యాసము 6.2

1. క్రింద ఇవ్వబడిన సమీకరణాలను సరిచూడుము.

   (i) $\sin^2 60° + \cos^2 60° = 1$

   (ii) $1 + \tan^2 30° = \sec^2 30°$

   (iii) $\cos 90° = 1 - 2\sin^2 45° = 2\cos^2 45° - 1$

   (iv) $\sin 30° \cos 60° + \cos 30° \sin 60° = \sin 90°$

2. క్రింద ఇవ్వబడిన వాటి యొక్క విలువలను కనుగొనుము.

   (i) $\dfrac{\tan 45°}{\text{cosec}30°} + \dfrac{\sec 60°}{\cot 45°} - \dfrac{5\sin 90°}{2\cos 0°}$

   (ii) $(\sin 90° + \cos 60° + \cos 45°) \times (\sin 30° + \cos 0° - \cos 45°)$

   (iii) $\sin^2 30° - 2\cos^3 60° + 3\tan^4 45°$

3. $A = 30°$ అయిన $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$, ను సరిచూడుము.

4. $x = 15°$ అయిన $8\sin 2x \cos 4x \sin 6x$ యొక్క విలువను కనుగొనుము.

6.3 పూరక కోణముల త్రికోణమితి నిష్పత్తులు

రెండు లఘు కోణముల మొత్తము $90°$ అయిన అవి పూరక కోణములు అని గుర్తుకు తెచ్చుకొనుము

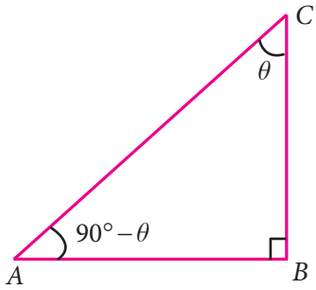
ఒక లంబకోణ త్రిభుజములో గల లఘు కోణములను గూర్చి ఏమి చెప్పగలము?

ఒక లంబకోణ త్రిభుజములో గల రెండు లఘు కోణముల మొత్తము $90°$ అయిన లంబకోణ త్రిభుజములో గల రెండు లఘుకోణములు ఒకదానికొకటి పూరక కోణములగును.

పైన ఇవ్వబడిన పటము 6.13 లో త్రిభుజము ABC అనునది B వద్ద లంబకోణమును కలిగియుండెను.

6 Trigonometry.indd 248 27-02-2023 20:17:40

కావున $\angle C = \theta$ అయిన $\angle A = 90° - \theta$ అగును.



పటము. 6.12

θ ను అనుసరించి

$$\left.\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{AB}{AC} & \operatorname{cosec}\theta &= \frac{AC}{AB} \\ \cos\theta &= \frac{BC}{AC} & \sec\theta &= \frac{AC}{BC} \\ \tan\theta &= \frac{AB}{BC} & \cot\theta &= \frac{BC}{AB} \end{aligned}\right\} \ldots.(1)$$

ఇదేవిధంగా కోణము $(90° - \theta)$ ను అనుసరించి

$$\left.\begin{aligned} \sin(90°-\theta) &= \frac{BC}{AC} & \operatorname{cosec}(90°-\theta) &= \frac{AC}{BC} \\ \cos(90°-\theta) &= \frac{AB}{AC} & \sec(90°-\theta) &= \frac{AC}{AB} \\ \tan(90°-\theta) &= \frac{BC}{AB} & \cot(90°-\theta) &= \frac{AB}{BC} \end{aligned}\right\} \ldots..(2)$$

సమీకరణం (1) మరియు (2) ను పోల్చిన

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \cos(90°-\theta) \\ \cos\theta &= \sin(90°-\theta) \\ \tan\theta &= \cot(90°-\theta) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \operatorname{cosec}\theta &= \sec(90°-\theta) \\ \sec\theta &= \operatorname{cosec}(90°-\theta) \\ \cot\theta &= \tan(90°-\theta) \end{aligned}$$

ఉదాహరణ 6.7 (i) $\sin 74°$ ను cosine రూపంలో (ii) $\tan 12°$ ను cotangent రూపంలో (iii) $\operatorname{cosec} 39°$ ను secant రూపంలో వ్యక్తపరచుము.

సాధన

(i) $\sin 74° = \sin(90° - 16°)$ (ఎందుకనగా, $90° - 16° = 74°$)

RHS $\sin(90° - \theta) = \cos\theta$ అను రూపంలో కలదు.

కావున $\sin 74° = \cos 16°$

(ii) $\tan 12° = \tan(90° - 78°)$ (ఎందుకనగా, $12° = 90° - 78°$)

RHS $\tan(90° - \theta) = \cot\theta$ అను రూపంలో కలదు.

కావున $\tan 12° = \cot 78°$

6 Trigonometry.indd 249 27-02-2023 20:17:46

(iii) $\text{cosec}\,39^\circ = \text{cosec}(90^\circ - 51^\circ)$ (ఎందుకనగా, $39^\circ = 90^\circ - 51^\circ$)

RHS $\text{cosec}(90^\circ - \theta) = \sec\theta$ అను రూపంలో కలదు.

కావున $\text{cosec}\,39^\circ = \sec 51^\circ$

ఉదాహరణ 6.8 విలువలను కనుగొనుము: (i) $\dfrac{\sin 49^\circ}{\cos 41^\circ}$ (ii) $\dfrac{\sec 63^\circ}{\text{cosec}\,27^\circ}$

సాధన

(i) $\dfrac{\sin 49^\circ}{\cos 41^\circ}$

$\sin 49^\circ = \sin(90^\circ - 41^\circ) = \cos 41^\circ$, ఎందుకనగా $49^\circ + 41^\circ = 90^\circ$ (పూరక కోణములు),

$\sin 49^\circ = \cos 41^\circ$ అని ప్రతిక్షేపించగా మనము పొందినది $\dfrac{\cos 41^\circ}{\cos 41^\circ} = 1$

(ii) $\dfrac{\sec 63^\circ}{\text{cosec}\,27^\circ}$

$\sec 63^\circ = \sec(90^\circ - 27^\circ) = \text{cosec}\,27^\circ$, ఇచ్చట, 63° మరియు 27° అనునవి పూరక కోణములు

కావున మనము పొందినది $\dfrac{\sec 63^\circ}{\text{cosec}\,27^\circ} = \dfrac{\text{cosec}\,27^\circ}{\text{cosec}\,27^\circ} = 1$

ఉదాహరణ 6.9 విలువలను కనుగొనుము (i) $\tan 7^\circ \tan 23^\circ \tan 60^\circ \tan 67^\circ \tan 83^\circ$

(ii) $\dfrac{\cos 35^\circ}{\sin 55^\circ} + \dfrac{\sin 12^\circ}{\cos 78^\circ} - \dfrac{\cos 18^\circ}{\sin 72^\circ}$

సాధన

(i) $\tan 7^\circ \tan 23^\circ \tan 60^\circ \tan 67^\circ \tan 83^\circ$

$= \tan 7^\circ \tan 83^\circ \tan 23^\circ \tan 67^\circ \tan 60^\circ$ (పూరక కోణములను క్రమముగా వ్రాసిన)

$= \tan 7^\circ \tan(90^\circ - 7^\circ) \tan 23^\circ \tan(90^\circ - 23^\circ) \tan 60^\circ$

$= (\tan 7^\circ . \cot 7^\circ)(\tan 23^\circ . \cot 23^\circ) \tan 60^\circ$

$= (1) \times (1) \times \tan 60^\circ$

$= \tan 60^\circ \quad = \sqrt{3}$

ఎందుకనగా
$\cos 35^\circ = \cos(90^\circ - 55^\circ)$
$\sin 12^\circ = \sin(90^\circ - 78^\circ)$
$\cos 18^\circ = \cos(90^\circ - 72^\circ)$

(ii) $\dfrac{\cos 35^\circ}{\sin 55^\circ} + \dfrac{\sin 12^\circ}{\cos 78^\circ} - \dfrac{\cos 18^\circ}{\sin 72^\circ}$

6 Trigonometry.indd 250 27-02-2023 20:17:51

$$= \frac{\cos(90^\circ - 55^\circ)}{\sin 55^\circ} + \frac{\sin(90^\circ - 78^\circ)}{\cos 78^\circ} - \frac{\cos(90^\circ - 72^\circ)}{\sin 72^\circ}$$

$$= \frac{\sin 55^\circ}{\sin 55^\circ} + \frac{\cos 78^\circ}{\cos 78^\circ} - \frac{\sin 72^\circ}{\sin 72^\circ}$$

$$= 1 + 1 - 1 = 1$$

ఉదాహరణ 6.10

(i) $\operatorname{cosec} A = \sec 34^\circ$, అయిన A యొక్క విలువను కనుగొనుము

(ii) $\tan B = \cot 47^\circ$, అయిన B యొక్క విలువను కనుగొనుము.

సాధన

(i) $\operatorname{cosec} A = \sec(90^\circ - A)$ అని మనకు తెలియును.

$$\sec(90^\circ - A) = \sec(34^\circ)$$

$$90^\circ - A = 34^\circ$$

$$A = 90^\circ - 34^\circ$$

$$A = 56^\circ$$

(ii) $\tan B = \cot(90^\circ - B)$ అని మనకు తెలియును.

$$\cot(90^\circ - B) = \cot 47^\circ$$

$$90^\circ - B = 47^\circ$$

$$B = 90^\circ - 47^\circ$$

$$B = 43^\circ$$

అభ్యాసము 6.3

కింద ఇవ్వబడిన వాటి యొక్క విలువలను కనుగొనుము.

(i) $\left(\frac{\cos 47^\circ}{\sin 43^\circ}\right)^2 + \left(\frac{\sin 72^\circ}{\cos 18^\circ}\right)^2 - 2\cos^2 45^\circ$ (ii) $\frac{\cos 70^\circ}{\sin 20^\circ} + \frac{\cos 59^\circ}{\sin 31^\circ} + \frac{\cos\theta}{\sin(90^\circ - \theta)} - 8\cos^2 60^\circ$

(iii) $\tan 15^\circ \tan 30^\circ \tan 45^\circ \tan 60^\circ \tan 75^\circ$

(iv) $\frac{\cot\theta}{\tan(90^\circ - \theta)} + \frac{\cos(90^\circ - \theta)\tan\theta\sec(90^\circ - \theta)}{\sin(90^\circ - \theta)\cot(90^\circ - \theta)\operatorname{cosec}(90^\circ - \theta)}$

మెదడుకి మేత

(i) $\sin\theta$ యొక్క కనిష్ఠ మరియు గరిష్ఠ విలువ ఎంత?

(ii) $\cos\theta$ యొక్క కనిష్ఠ మరియు గరిష్ఠ విలువ ఎంత?

6 Trigonometry.indd 251 27-02-2023 20:17:55

6.4 త్రికోణమితి పట్టికను ఉపయోగించు పద్ధతి

$0°, 30°, 45°, 60°$ మరియు $90°$ ల త్రికోణమితి నిష్పత్తులు విలువలు గణించుటను నేర్చుకొంటిమి. కానీ కొన్ని సందర్భములలో అన్ని లఘు కోణములకు త్రికోణమితి నిష్పత్తుల విలువలను మనము గణించవలసియున్నది. కావున మనము త్రికోణమితి నిష్పత్తుల పట్టికను ఉపయోగించు పద్ధతిని నేర్చుకొనవలయును.

ఒక డిగ్రీ (1^0)ను 60 నిమిషములుగాను $(60')$ మరియు ఒక నిమిషమును $(1')$ 60 సెకండ్లు గాను $(60'')$ విభజింపబడెను. కావున $1° = 60'$ మరియు $1' = 60''$

త్రికోణమితి నిష్పత్తుల పట్టిక నందు 0^0 నుండి 90^0 వరకు గల కోణములను $60'$ నిమిషములతో సమాన వ్యవధులుగా విభజించి, వీటి విలువలను నాలుగు దశాంశ స్థానములకు సవరించబడి యుండును. ఈ పట్టిక మూడు విభాగములను కలిగి ఉన్నది.

చివరి ఎడమ భాగములో 0 నుండి 90^0 కోణముల వరకు నిలువు వరుసలుండును. దీనిని అనుసరిస్తూ ప్రధాన నిలువ వరుసలో . $0', 6', 12', 18', 24', 30', 36', 42', 48'$ మరియు $54'$ గా ఉండును.

కుడి ప్రధాన నిలువ వరుసలో 1, 2. 3, 4,5 అనే సగటు వ్యత్యాసము ఉండును.

మిగిలిన నిమిషములలో ఇవ్వబడిన కోణముల విలువలను $0', 6', 12', 18', 24', 30', 36', 42', 48'$ మరియు $54'$), కనుగొనుటకు సగటు వ్యత్యాస పట్టికలో ఇవ్వబడిన విలువలను ఉపయోగించి కూడి లేక తీసివేసి కనుగొనవలెను.

ఇవ్వబడిన sine మరియు tangent పట్టికలో విలువలను కనుగొనునప్పుడు సగటు వ్యత్యాసం కూడవలెను. అదే సమయంలో cosine పట్టికలో తీసివేయవలెను.

క్రింద ఇవ్వబడిన ఉదాహరణముల నుండి త్రికోణమితి పట్టికను ఉపయోగించి త్రికోణమితి నిష్పత్తులను గణించు పద్ధతిని గ్రహించవచ్చును.

ఉదాహరణ 6.11 $\sin 64°34'$. విలువను కనుగొనుము.

సాధన

	$0'$	$6'$	$12'$	$18'$	$24'$	$30'$	$36'$	$42'$	$48'$	$54'$	సామాన్య వ్యత్యాసము				
	$0.0°$	$0.1°$	$0.2°$	$0.3°$	$0.4°$	$0.5°$	$0.6°$	$0.7°$	$0.8°$	$0.9°$	1	2	3	4	5
$64°$						0.9026								5	

$$64°34' = 64°30' + 4'$$

పట్టిక నుండి, $\sin 64°30' = 0.9026$

6 Trigonometry.indd 252 27-02-2023 20:18:00

సామాన్య వ్యత్యాసము $4' = 5$(sine కు సామాన్య వ్యత్యాసము కూడుము.)

$\sin 64°34' = 0.9031$

ఉదాహరణ 6.12 $\cos 19°59'$ విలువను కనుగొనుము.

సాధన

	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	సామాన్య వ్యత్యాసము				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
19°										0.9403					5

$19°59' = 19°54' + 5'$

పట్టిక నుండి $\cos 19°54' = 0.9403$

సామాన్య వ్యత్యాసము $5' = 5$ (cosine కు సామాన్య వ్యత్యాసమును తీసివేయవలెను.)

$\cos 19°59' = 0.9398$

ఉదాహరణ 6.13 $\tan 70°13'$ విలువను కనుగొనుము.

సాధన

	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	సామాన్య వ్యత్యాసము				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
70°			2.7776								26				

$70°13' = 70°12' + 1'$

పట్టిక నుండి $\tan 70°12' = 2.7776$

సామాన్య వ్యత్యాసము $1' = 26$ ($\tan$ కు సామాన్య వ్యత్యాసమును తీసివేయవలెను)

$\tan 70°13' = 2.7802$

ఉదాహరణ 6.14 విలువలను కనుగొనుము.

(i) $\sin 38°36' + \tan 12°12'$ (ii) $\tan 60°25' - \cos 49°20'$

సాధన

(i) $\sin 38°36' + \tan 12°12'$

$\sin 38°36' = 0.6239$

$\tan 12°12' = 0.2162$

$\sin 38°36' + \tan 12°12' = 0.8401$

(ii) $\tan 60°25' - \cos 49°20'$

$\tan 60°25' = 1.7603 + 0.0012 = 1.7615$

$\cos 49°20' = 0.6521 - 0.0004 = 0.6517$

$\tan 60°25' - \cos 49°20' = 1.1098$

6 Trigonometry.indd 253 27-02-2023 20:18:05

ఉదాహరణ 6.15

θ యొక్క విలువను కనుగొనుము.

(i) $\sin\theta = 0.9858$ (ii) $\cos\theta = 0.7656$

సాధన

(i) $\sin\theta = 0.9858 = 0.9857 + 0.0001$

పట్టిక నుండి $0.9857 = 80°18'$

సామాన్య వ్యత్యాసము $1 = 2'$ (సామాన్య వ్యత్యాసమును కూడుము)

$0.9858 = 80°20'$

$\sin\theta = 0.9858 = \sin 80°20'$

$\theta = 80°20'$

(iii) $\cos\theta = 0.7656 = 0.7660 - 0.0004$ cosine పట్టిక నుండి

$0.7660 = 40°0'$ సామాన్య వ్యత్యాసము

$4 = 2'$ (సామాన్య వ్యత్యాసమును తీసి వేయుము)

$0.7656 = 40°2'$

$\cos\theta = 0.7656$

$= \cos 40°2'$

$\theta = 40°2'$

ఉదాహరణ 6.16

కర్ణము 5 సెం.మీ మరియు లఘు కోణము $48°30'$ గల లంబకోణ త్రిభుజ వైశాల్యమును కనుగొనుము.

సాధన

పటము నుండి,

$$\sin\theta = \frac{AB}{AC}$$

$$\sin 48°30' = \frac{AB}{5}$$

$$0.7490 = \frac{AB}{5}$$

$$5 \times 0.7490 = AB$$

$AB = 3.7450$ సెం.మీ

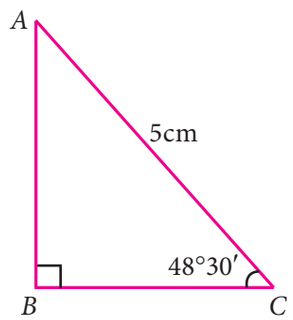
$$\cos\theta = \frac{BC}{AC}$$

$$\cos 48°30' = \frac{BC}{5}$$

$$0.6626 = \frac{BC}{5}$$

$$0.6626 \times 5 = BC$$

$BC = 3.313$ సెం.మీ



పటము. 6.13

లంబ కోణ త్రిభుజ వైశాల్యము $= \frac{1}{2}bh$

$= \frac{1}{2} \times BC \times AB$

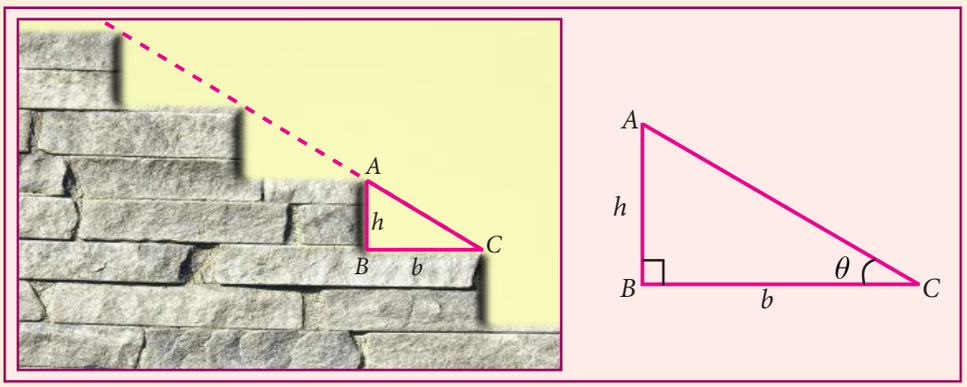
$= \frac{1}{2} \times 3.3130 \times 3.7450$

$= 1.6565 \times 3.7450 = 6.2035925$ సెం.మీ^{2}

6 Trigonometry.indd 254 27-02-2023 20:18:12

కృత్యము

మీ ఇంటి మెట్లను గమనించుము. వీటిలో ఒక మెట్టు యొక్క పొడవు వెడల్పు మరియు ఎత్తులను కొలువుము. వీటిని ఇవ్వబడిన పటములో గుర్తించి మెట్టు యొక్క ఊర్ధ్వకోణమును గణించుము.



(i) ఒకే ఎత్తు మరియు వెడల్పు గల వేర్వేరు మెట్ల యొక్క ఊర్ధ్వ కోణములను పోల్చుము. మరియు వాటిని పరిశీలించి చర్చించుము.

(ii) కొన్ని సందర్భములలో ఇంటి మెట్లు ఒకే ఎత్తును కలిగియుండక పోవచ్చును. ఒకే వెడల్పును మరియు వేర్వేరు ఎత్తును కలిగిన మెట్ల యొక్క ఊర్ధ్వ కోణమును గణించి పోల్చి చర్చించుము.

అభ్యాసము 6.4

1. క్రింద ఇవ్వబడిన వాటి విలువలను కనుగొనుము.

   (i) $\sin 49°$ (ii) $\cos 74°39'$

   (iii) $\tan 54°26'$ (iv) $\sin 21°21'$

   (v) $\cos 33°53'$ (vi) $\tan 70°17'$

2. θ విలువను కనుగొనుము.

   (i) $\sin\theta = 0.9975$ (ii) $\cos\theta = 0.6763$

   (iii) $\tan\theta = 0.0720$ (iv) $\cos\theta = 0.0410$

   (v) $\tan\theta = 7.5958$

3. క్రింద ఇవ్వబడిన వాటి విలువలను కనుగొనుము

   (i) $\sin 65°39' + \cos 24°57' + \tan 10°10'$

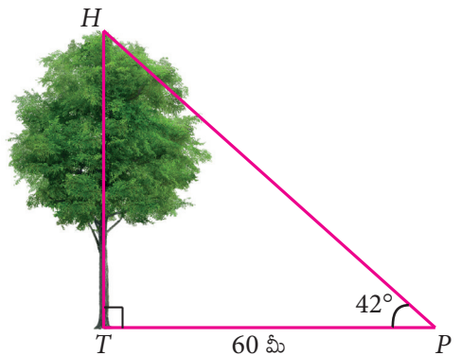
   (ii) $\tan 70°58' + \cos 15°26' - \sin 84°59'$

4. కర్ణము 10 సెం.మీ మరియు లఘు కోణము $24°24'$ గల ఒక లంబకోణ త్రిభుజ వైశాల్యమును కనుగొనుము.

6 Trigonometry.indd 255 27-02-2023 20:18:14

5. 5 మీ పొడవుగల నిచ్చెనను గోడనుండి 4 మీ దూరంలో అడుగు భాగము భూమిని త్రాకునట్లు గోడకు వాల్చబడియున్నది. నిచ్చెన భూభాగాన ఏర్పరచు కోణమును కనుగొనుము.

6. ఇవ్వబడిన పటములో HT అనునది నిటారైన చెట్టు యొక్క ఎత్తును సూచించును. చెట్టు యొక్క అడుగు భాగము నుండి 60 మీ దూరంలో గల P అను బిందువు నుండి చెట్టు యొక్క శీర్షమునకు గల ఊర్ధ్వ కోణము $\angle P = 42°$ అయిన చెట్టు యొక్క ఎత్తును కనుగొనుము.



అభ్యాసము 6.5

బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు

1. $\sin 30° = x$ మరియు $\cos 60° = y$, అయిన $x^2 + y^2$ విలువ

   1) $\frac{1}{2}$ 1) 2) 0 3) $\sin 90°$ 4) $\cos 90°$

2. $\tan\theta = \cot 37°$,అనిన θ విలువ

   1) 37° 2) 53° 3) 90° 4)1°

3. $\tan 72°.\tan 18°$ విలువ

   1) 0 2) 1 3) 18° 4)72°

4. $\frac{2\tan 30°}{1-\tan^2 30°}$ విలువ

   1) $\cos 60°$ 2) $\sin 60°$ 3) $\tan 60°$ 4) $\sin 30°$

5. $2\sin 2\theta = \sqrt{3}$, అయిన θ విలువ

   అ) 90° (2) 30° 3) 45° 4)60°

6. $3\sin 70°\sec 20° + 2\sin 49°\sec 51°$ విలువ

   1) 2 2) 3 3) 5 4)6

6 Trigonometry.indd 256 27-02-2023 20:18:18

7. $\frac{1-\tan^2 45°}{1+\tan^2 45°}$ విలువ

1) 2 2) 1 3) 0 4) $\frac{1}{2}$

8. $\text{cosec}(70°+\theta)-\sec(20°-\theta)+\tan(65°+\theta)-\cot(25°-\theta)$ విలువ

1) 0 2) 1 3) 2 4)3

9. $\tan 1°.\tan 2°.\tan 3°...\tan 89°$ విలువ

1) 0 2) 1 3) 2 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

10. $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ మరియు $\cos\beta=\frac{1}{2}$, అయిన $\alpha+\beta$ విలువ

1) 0° 2) 90° 3) 30° 4)60°

గుర్తించుకోవలసిన విషయములు

త్రికోణమితి నిష్పత్తులు

$\sin\theta = \frac{\text{ఎదుటి భుజము}}{\text{కర్ణము}}$	$\text{cosec}\,\theta = \frac{\text{కర్ణము}}{\text{ఎదుటి భుజము}}$
$\cos\theta = \frac{\text{ఆసన్న భుజము}}{\text{కర్ణము}}$	$\sec\theta = \frac{\text{కర్ణము}}{\text{ఆసన్న భుజము}}$
$\tan\theta = \frac{\text{ఎదుటి భుజము}}{\text{ఆసన్న భుజము}}$	$\cot\theta = \frac{\text{ఆసన్న భుజము}}{\text{ఎదుటి భుజము}}$

- త్రికోణమితి నిష్పత్తుల విలోమములు.

$\sin\theta = \frac{1}{\text{cosec}\,\theta}$ $\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$ $\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$

$\text{cosec}\,\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$

- పూరక కోణములకు త్రికోణమితి నిష్పత్తులు

$\sin\theta = \cos(90°-\theta)$ $\text{cosec}\,\theta = \sec(90°-\theta)$

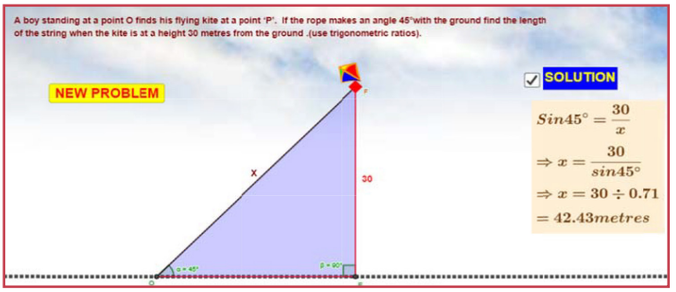
$\cos\theta = \sin(90°-\theta)$ $\sec\theta = \text{cosec}(90°-\theta)$

$\tan\theta = \cot(90°-\theta)$ $\cot\theta = \tan(90°-\theta)$

6 Trigonometry.indd 257 27-02-2023 20:18:21

అంతర్జాల కృత్యము

అశించినఫలితము చిత్రపటంలో చూపబడినది.



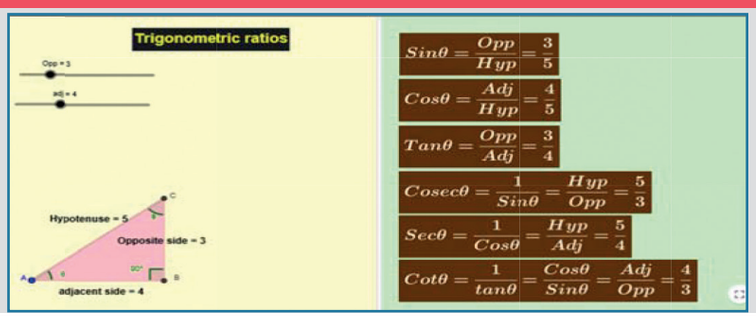
మెట్టు - 1

బ్రౌజర్‌ను ఓపెన్ చేసి క్రింద ఇవ్వబడిన URL లింకును టైప్ చేయము లేదా QR Code ను స్కాన్ చేయము GeoGebra వర్క్ షీట్ నందు "Trigonometry" ఓపెన్ అవుతుంది Trigonometric ratios and Complimentary angles and kite problem అను మూడు వర్క్ షీట్‌లు ఉండును..

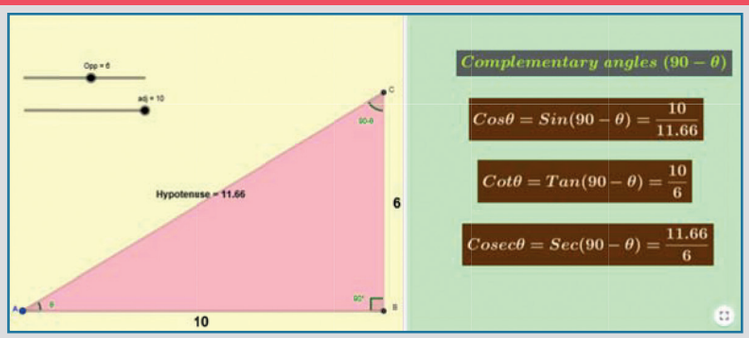
మెట్టు - 2

kite problem యొక్క ప్రశ్నను మార్చుటకు "NEW PROBLEM" .ను Click చేసి సాధనను గణించుము. జవాబు తెలుసుకొనుటకు check box for solution ను Click చేయుము.

మెట్టు 1



మెట్టు 2



Browse in the link

Trigonometry: https://ggbm.at/hkwnccr6 or Scan the QR Code.

P1NQA

6 Trigonometry.indd 258 27-02-2023 20:18:21

NATURAL SINES

Degree	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	Mean Difference				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
0	0.0000	0.0017	0.0035	0.0052	0.0070	0.0087	0.0105	0.0122	0.0140	0.0157	3	6	9	12	15
1	0.0175	0.0192	0.0209	0.0227	0.0244	0.0262	0.0279	0.0297	0.0314	0.0332	3	6	9	12	15
2	0.0349	0.0366	0.0384	0.0401	0.0419	0.0436	0.0454	0.0471	0.0488	0.0506	3	6	9	12	15
3	0.0523	0.0541	0.0558	0.0576	0.0593	0.0610	0.0628	0.0645	0.0663	0.0680	3	6	9	12	15
4	0.0698	0.0715	0.0732	0.0750	0.0767	0.0785	0.0802	0.0819	0.0837	0.0854	3	6	9	12	15
5	0.0872	0.0889	0.0906	0.0924	0.0941	0.0958	0.0976	0.0993	0.1011	0.1028	3	6	9	12	14
6	0.1045	0.1063	0.1080	0.1097	0.1115	0.1132	0.1149	0.1167	0.1184	0.1201	3	6	9	12	14
7	0.1219	0.1236	0.1253	0.1271	0.1288	0.1305	0.1323	0.1340	0.1357	0.1374	3	6	9	12	14
8	0.1392	0.1409	0.1426	0.1444	0.1461	0.1478	0.1495	0.1513	0.1530	0.1547	3	6	9	12	14
9	0.1564	0.1582	0.1599	0.1616	0.1633	0.1650	0.1668	0.1685	0.1702	0.1719	3	6	9	12	14
10	0.1736	0.1754	0.1771	0.1788	0.1805	0.1822	0.1840	0.1857	0.1874	0.1891	3	6	9	12	14
11	0.1908	0.1925	0.1942	0.1959	0.1977	0.1994	0.2011	0.2028	0.2045	0.2062	3	6	9	11	14
12	0.2079	0.2096	0.2113	0.2130	0.2147	0.2164	0.2181	0.2198	0.2215	0.2233	3	6	9	11	14
13	0.2250	0.2267	0.2284	0.2300	0.2317	0.2334	0.2351	0.2368	0.2385	0.2402	3	6	8	11	14
14	0.2419	0.2436	0.2453	0.2470	0.2487	0.2504	0.2521	0.2538	0.2554	0.2571	3	6	8	11	14
15	0.2588	0.2605	0.2622	0.2639	0.2656	0.2672	0.2689	0.2706	0.2723	0.2740	3	6	8	11	14
16	0.2756	0.2773	0.2790	0.2807	0.2823	0.2840	0.2857	0.2874	0.2890	0.2907	3	6	8	11	14
17	0.2924	0.2940	0.2957	0.2974	0.2990	0.3007	0.3024	0.3040	0.3057	0.3074	3	6	8	11	14
18	0.3090	0.3107	0.3123	0.3140	0.3156	0.3173	0.3190	0.3206	0.3223	0.3239	3	6	8	11	14
19	0.3256	0.3272	0.3289	0.3305	0.3322	0.3338	0.3355	0.3371	0.3387	0.3404	3	5	8	11	14
20	0.3420	0.3437	0.3453	0.3469	0.3486	0.3502	0.3518	0.3535	0.3551	0.3567	3	5	8	11	14
21	0.3584	0.3600	0.3616	0.3633	0.3649	0.3665	0.3681	0.3697	0.3714	0.3730	3	5	8	11	14
22	0.3746	0.3762	0.3778	0.3795	0.3811	0.3827	0.3843	0.3859	0.3875	0.3891	3	5	8	11	14
23	0.3907	0.3923	0.3939	0.3955	0.3971	0.3987	0.4003	0.4019	0.4035	0.4051	3	5	8	11	14
24	0.4067	0.4083	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4163	0.4179	0.4195	0.4210	3	5	8	11	13
25	0.4226	0.4242	0.4258	0.4274	0.4289	0.4305	0.4321	0.4337	0.4352	0.4368	3	5	8	11	13
26	0.4384	0.4399	0.4415	0.4431	0.4446	0.4462	0.4478	0.4493	0.4509	0.4524	3	5	8	10	13
27	0.4540	0.4555	0.4571	0.4586	0.4602	0.4617	0.4633	0.4648	0.4664	0.4679	3	5	8	10	13
28	0.4695	0.4710	0.4726	0.4741	0.4756	0.4772	0.4787	0.4802	0.4818	0.4833	3	5	8	10	13
29	0.4848	0.4863	0.4879	0.4894	0.4909	0.4924	0.4939	0.4955	0.4970	0.4985	3	5	8	10	13
30	0.5000	0.5015	0.5030	0.5045	0.5060	0.5075	0.5090	0.5105	0.5120	0.5135	3	5	8	10	13
31	0.5150	0.5165	0.5180	0.5195	0.5210	0.5225	0.5240	0.5255	0.5270	0.5284	2	5	7	10	12
32	0.5299	0.5314	0.5329	0.5344	0.5358	0.5373	0.5388	0.5402	0.5417	0.5432	2	5	7	10	12
33	0.5446	0.5461	0.5476	0.5490	0.5505	0.5519	0.5534	0.5548	0.5563	0.5577	2	5	7	10	12
34	0.5592	0.5606	0.5621	0.5635	0.5650	0.5664	0.5678	0.5693	0.5707	0.5721	2	5	7	10	12
35	0.5736	0.5750	0.5764	0.5779	0.5793	0.5807	0.5821	0.5835	0.5850	0.5864	2	5	7	10	12
36	0.5878	0.5892	0.5906	0.5920	0.5934	0.5948	0.5962	0.5976	0.5990	0.6004	2	5	7	9	12
37	0.6018	0.6032	0.6046	0.6060	0.6074	0.6088	0.6101	0.6115	0.6129	0.6143	2	5	7	9	12
38	0.6157	0.6170	0.6184	0.6198	0.6211	0.6225	0.6239	0.6252	0.6266	0.6280	2	5	7	9	11
39	0.6293	0.6307	0.6320	0.6334	0.6347	0.6361	0.6374	0.6388	0.6401	0.6414	2	4	7	9	11
40	0.6428	0.6441	0.6455	0.6468	0.6481	0.6494	0.6508	0.6521	0.6534	0.6547	2	4	7	9	11
41	0.6561	0.6574	0.6587	0.6600	0.6613	0.6626	0.6639	0.6652	0.6665	0.6678	2	4	7	9	11
42	0.6691	0.6704	0.6717	0.6730	0.6743	0.6756	0.6769	0.6782	0.6794	0.6807	2	4	6	9	11
43	0.6820	0.6833	0.6845	0.6858	0.6871	0.6884	0.6896	0.6909	0.6921	0.6934	2	4	6	8	11
44	0.6947	0.6959	0.6972	0.6984	0.6997	0.7009	0.7022	0.7034	0.7046	0.7059	2	4	6	8	10

6 Trigonometry.indd 259 27-02-2023 20:18:22

NATURAL SINES

Degree	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	Mean Difference				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
45	0.7071	0.7083	0.7096	0.7108	0.7120	0.7133	0.7145	0.7157	0.7169	0.7181	2	4	6	8	10
46	0.7193	0.7206	0.7218	0.7230	0.7242	0.7254	0.7266	0.7278	0.7290	0.7302	2	4	6	8	10
47	0.7314	0.7325	0.7337	0.7349	0.7361	0.7373	0.7385	0.7396	0.7408	0.7420	2	4	6	8	10
48	0.7431	0.7443	0.7455	0.7466	0.7478	0.7490	0.7501	0.7513	0.7524	0.7536	2	4	6	8	10
49	0.7547	0.7559	0.7570	0.7581	0.7593	0.7604	0.7615	0.7627	0.7638	0.7649	2	4	6	8	9
50	0.7660	0.7672	0.7683	0.7694	0.7705	0.7716	0.7727	0.7738	0.7749	0.7760	2	4	6	7	9
51	0.7771	0.7782	0.7793	0.7804	0.7815	0.7826	0.7837	0.7848	0.7859	0.7869	2	4	5	7	9
52	0.7880	0.7891	0.7902	0.7912	0.7923	0.7934	0.7944	0.7955	0.7965	0.7976	2	4	5	7	9
53	0.7986	0.7997	0.8007	0.8018	0.8028	0.8039	0.8049	0.8059	0.8070	0.8080	2	3	5	7	9
54	0.8090	0.8100	0.8111	0.8121	0.8131	0.8141	0.8151	0.8161	0.8171	0.8181	2	3	5	7	8
55	0.8192	0.8202	0.8211	0.8221	0.8231	0.8241	0.8251	0.8261	0.8271	0.8281	2	3	5	7	8
56	0.8290	0.8300	0.8310	0.8320	0.8329	0.8339	0.8348	0.8358	0.8368	0.8377	2	3	5	6	8
57	0.8387	0.8396	0.8406	0.8415	0.8425	0.8434	0.8443	0.8453	0.8462	0.8471	2	3	5	6	8
58	0.8480	0.8490	0.8499	0.8508	0.8517	0.8526	0.8536	0.8545	0.8554	0.8563	2	3	5	6	8
59	0.8572	0.8581	0.8590	0.8599	0.8607	0.8616	0.8625	0.8634	0.8643	0.8652	1	3	4	6	7
60	0.8660	0.8669	0.8678	0.8686	0.8695	0.8704	0.8712	0.8721	0.8729	0.8738	1	3	4	6	7
61	0.8746	0.8755	0.8763	0.8771	0.8780	0.8788	0.8796	0.8805	0.8813	0.8821	1	3	4	6	7
62	0.8829	0.8838	0.8846	0.8854	0.8862	0.8870	0.8878	0.8886	0.8894	0.8902	1	3	4	5	7
63	0.8910	0.8918	0.8926	0.8934	0.8942	0.8949	0.8957	0.8965	0.8973	0.8980	1	3	4	5	6
64	0.8988	0.8996	0.9003	0.9011	0.9018	0.9026	0.9033	0.9041	0.9048	0.9056	1	3	4	5	6
65	0.9063	0.9070	0.9078	0.9085	0.9092	0.9100	0.9107	0.9114	0.9121	0.9128	1	2	4	5	6
66	0.9135	0.9143	0.9150	0.9157	0.9164	0.9171	0.9178	0.9184	0.9191	0.9198	1	2	3	5	6
67	0.9205	0.9212	0.9219	0.9225	0.9232	0.9239	0.9245	0.9252	0.9259	0.9265	1	2	3	4	6
68	0.9272	0.9278	0.9285	0.9291	0.9298	0.9304	0.9311	0.9317	0.9323	0.9330	1	2	3	4	5
69	0.9336	0.9342	0.9348	0.9354	0.9361	0.9367	0.9373	0.9379	0.9385	0.9391	1	2	3	4	5
70	0.9397	0.9403	0.9409	0.9415	0.9421	0.9426	0.9432	0.9438	0.9444	0.9449	1	2	3	4	5
71	0.9455	0.9461	0.9466	0.9472	0.9478	0.9483	0.9489	0.9494	0.9500	0.9505	1	2	3	4	5
72	0.9511	0.9516	0.9521	0.9527	0.9532	0.9537	0.9542	0.9548	0.9553	0.9558	1	2	3	3	4
73	0.9563	0.9568	0.9573	0.9578	0.9583	0.9588	0.9593	0.9598	0.9603	0.9608	1	2	2	3	4
74	0.9613	0.9617	0.9622	0.9627	0.9632	0.9636	0.9641	0.9646	0.9650	0.9655	1	2	2	3	4
75	0.9659	0.9664	0.9668	0.9673	0.9677	0.9681	0.9686	0.9690	0.9694	0.9699	1	1	2	3	4
76	0.9703	0.9707	0.9711	0.9715	0.9720	0.9724	0.9728	0.9732	0.9736	0.9740	1	1	2	3	3
77	0.9744	0.9748	0.9751	0.9755	0.9759	0.9763	0.9767	0.9770	0.9774	0.9778	1	1	2	3	3
78	0.9781	0.9785	0.9789	0.9792	0.9796	0.9799	0.9803	0.9806	0.9810	0.9813	1	1	2	2	3
79	0.9816	0.9820	0.9823	0.9826	0.9829	0.9833	0.9836	0.9839	0.9842	0.9845	1	1	2	2	3
80	0.9848	0.9851	0.9854	0.9857	0.9860	0.9863	0.9866	0.9869	0.9871	0.9874	0	1	1	2	2
81	0.9877	0.9880	0.9882	0.9885	0.9888	0.9890	0.9893	0.9895	0.9898	0.9900	0	1	1	2	2
82	0.9903	0.9905	0.9907	0.9910	0.9912	0.9914	0.9917	0.9919	0.9921	0.9923	0	1	1	2	2
83	0.9925	0.9928	0.9930	0.9932	0.9934	0.9936	0.9938	0.9940	0.9942	0.9943	0	1	1	1	2
84	0.9945	0.9947	0.9949	0.9951	0.9952	0.9954	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0	1	1	1	2
85	0.9962	0.9963	0.9965	0.9966	0.9968	0.9969	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974	0	0	1	1	1
86	0.9976	0.9977	0.9978	0.9979	0.9980	0.9981	0.9982	0.9983	0.9984	0.9985	0	0	1	1	1
87	0.9986	0.9987	0.9988	0.9989	0.9990	0.9990	0.9991	0.9992	0.9993	0.9993	0	0	0	1	1
88	0.9994	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998	0.9998	0	0	0	0	0
89	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0	0	0	0	0

6 Trigonometry.indd 260 27-02-2023 20:18:23

NATURAL COSINES

(Numbers in mean difference columns to be subtracted, not added)

Degree	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	Mean Difference				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0	0	0	0	0
1	0.9998	0.9998	0.9998	0.9997	0.9997	0.9997	0.9996	0.9996	0.9995	0.9995	0	0	0	0	0
2	0.9994	0.9993	0.9993	0.9992	0.9991	0.9990	0.9990	0.9989	0.9988	0.9987	0	0	0	1	1
3	0.9986	0.9985	0.9984	0.9983	0.9982	0.9981	0.9980	0.9979	0.9978	0.9977	0	0	1	1	1
4	0.9976	0.9974	0.9973	0.9972	0.9971	0.9969	0.9968	0.9966	0.9965	0.9963	0	0	1	1	1
5	0.9962	0.9960	0.9959	0.9957	0.9956	0.9954	0.9952	0.9951	0.9949	0.9947	0	1	1	1	2
6	0.9945	0.9943	0.9942	0.9940	0.9938	0.9936	0.9934	0.9932	0.9930	0.9928	0	1	1	1	2
7	0.9925	0.9923	0.9921	0.9919	0.9917	0.9914	0.9912	0.9910	0.9907	0.9905	0	1	1	2	2
8	0.9903	0.9900	0.9898	0.9895	0.9893	0.9890	0.9888	0.9885	0.9882	0.9880	0	1	1	2	2
9	0.9877	0.9874	0.9871	0.9869	0.9866	0.9863	0.9860	0.9857	0.9854	0.9851	0	1	1	2	2
10	0.9848	0.9845	0.9842	0.9839	0.9836	0.9833	0.9829	0.9826	0.9823	0.9820	1	1	2	2	3
11	0.9816	0.9813	0.9810	0.9806	0.9803	0.9799	0.9796	0.9792	0.9789	0.9785	1	1	2	2	3
12	0.9781	0.9778	0.9774	0.9770	0.9767	0.9763	0.9759	0.9755	0.9751	0.9748	1	1	2	3	3
13	0.9744	0.9740	0.9736	0.9732	0.9728	0.9724	0.9720	0.9715	0.9711	0.9707	1	1	2	3	3
14	0.9703	0.9699	0.9694	0.9690	0.9686	0.9681	0.9677	0.9673	0.9668	0.9664	1	1	2	3	4
15	0.9659	0.9655	0.9650	0.9646	0.9641	0.9636	0.9632	0.9627	0.9622	0.9617	1	2	2	3	4
16	0.9613	0.9608	0.9603	0.9598	0.9593	0.9588	0.9583	0.9578	0.9573	0.9568	1	2	2	3	4
17	0.9563	0.9558	0.9553	0.9548	0.9542	0.9537	0.9532	0.9527	0.9521	0.9516	1	2	3	3	4
18	0.9511	0.9505	0.9500	0.9494	0.9489	0.9483	0.9478	0.9472	0.9466	0.9461	1	2	3	4	5
19	0.9455	0.9449	0.9444	0.9438	0.9432	0.9426	0.9421	0.9415	0.9409	0.9403	1	2	3	4	5
20	0.9397	0.9391	0.9385	0.9379	0.9373	0.9367	0.9361	0.9354	0.9348	0.9342	1	2	3	4	5
21	0.9336	0.9330	0.9323	0.9317	0.9311	0.9304	0.9298	0.9291	0.9285	0.9278	1	2	3	4	5
22	0.9272	0.9265	0.9259	0.9252	0.9245	0.9239	0.9232	0.9225	0.9219	0.9212	1	2	3	4	6
23	0.9205	0.9198	0.9191	0.9184	0.9178	0.9171	0.9164	0.9157	0.9150	0.9143	1	2	3	5	6
24	0.9135	0.9128	0.9121	0.9114	0.9107	0.9100	0.9092	0.9085	0.9078	0.9070	1	2	4	5	6
25	0.9063	0.9056	0.9048	0.9041	0.9033	0.9026	0.9018	0.9011	0.9003	0.8996	1	3	4	5	6
26	0.8988	0.8980	0.8973	0.8965	0.8957	0.8949	0.8942	0.8934	0.8926	0.8918	1	3	4	5	6
27	0.8910	0.8902	0.8894	0.8886	0.8878	0.8870	0.8862	0.8854	0.8846	0.8838	1	3	4	5	7
28	0.8829	0.8821	0.8813	0.8805	0.8796	0.8788	0.8780	0.8771	0.8763	0.8755	1	3	4	6	7
29	0.8746	0.8738	0.8729	0.8721	0.8712	0.8704	0.8695	0.8686	0.8678	0.8669	1	3	4	6	7
30	0.8660	0.8652	0.8643	0.8634	0.8625	0.8616	0.8607	0.8599	0.8590	0.8581	1	3	4	6	7
31	0.8572	0.8563	0.8554	0.8545	0.8536	0.8526	0.8517	0.8508	0.8499	0.8490	2	3	5	6	8
32	0.8480	0.8471	0.8462	0.8453	0.8443	0.8434	0.8425	0.8415	0.8406	0.8396	2	3	5	6	8
33	0.8387	0.8377	0.8368	0.8358	0.8348	0.8339	0.8329	0.8320	0.8310	0.8300	2	3	5	6	8
34	0.8290	0.8281	0.8271	0.8261	0.8251	0.8241	0.8231	0.8221	0.8211	0.8202	2	3	5	7	8
35	0.8192	0.8181	0.8171	0.8161	0.8151	0.8141	0.8131	0.8121	0.8111	0.8100	2	3	5	7	8
36	0.8090	0.8080	0.8070	0.8059	0.8049	0.8039	0.8028	0.8018	0.8007	0.7997	2	3	5	7	9
37	0.7986	0.7976	0.7965	0.7955	0.7944	0.7934	0.7923	0.7912	0.7902	0.7891	2	4	5	7	9
38	0.7880	0.7869	0.7859	0.7848	0.7837	0.7826	0.7815	0.7804	0.7793	0.7782	2	4	5	7	9
39	0.7771	0.7760	0.7749	0.7738	0.7727	0.7716	0.7705	0.7694	0.7683	0.7672	2	4	6	7	9
40	0.7660	0.7649	0.7638	0.7627	0.7615	0.7604	0.7593	0.7581	0.7570	0.7559	2	4	6	8	9
41	0.7547	0.7536	0.7524	0.7513	0.7501	0.7490	0.7478	0.7466	0.7455	0.7443	2	4	6	8	10
42	0.7431	0.7420	0.7408	0.7396	0.7385	0.7373	0.7361	0.7349	0.7337	0.7325	2	4	6	8	10
43	0.7314	0.7302	0.7290	0.7278	0.7266	0.7254	0.7242	0.7230	0.7218	0.7206	2	4	6	8	10
44	0.7193	0.7181	0.7169	0.7157	0.7145	0.7133	0.7120	0.7108	0.7096	0.7083	2	4	6	8	10

6 Trigonometry.indd 261 27-02-2023 20:18:24

NATURAL COSINES

(Numbers in mean difference columns to be subtracted, not added)

Degree	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	Mean Difference				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
45	0.7071	0.7059	0.7046	0.7034	0.7022	0.7009	0.6997	0.6984	0.6972	0.6959	2	4	6	8	10
46	0.6947	0.6934	0.6921	0.6909	0.6896	0.6884	0.6871	0.6858	0.6845	0.6833	2	4	6	8	11
47	0.6820	0.6807	0.6794	0.6782	0.6769	0.6756	0.6743	0.6730	0.6717	0.6704	2	4	6	9	11
48	0.6691	0.6678	0.6665	0.6652	0.6639	0.6626	0.6613	0.6600	0.6587	0.6574	2	4	7	9	11
49	0.6561	0.6547	0.6534	0.6521	0.6508	0.6494	0.6481	0.6468	0.6455	0.6441	2	4	7	9	11
50	0.6428	0.6414	0.6401	0.6388	0.6374	0.6361	0.6347	0.6334	0.6320	0.6307	2	4	7	9	11
51	0.6293	0.6280	0.6266	0.6252	0.6239	0.6225	0.6211	0.6198	0.6184	0.6170	2	5	7	9	11
52	0.6157	0.6143	0.6129	0.6115	0.6101	0.6088	0.6074	0.6060	0.6046	0.6032	2	5	7	9	12
53	0.6018	0.6004	0.5990	0.5976	0.5962	0.5948	0.5934	0.5920	0.5906	0.5892	2	5	7	9	12
54	0.5878	0.5864	0.5850	0.5835	0.5821	0.5807	0.5793	0.5779	0.5764	0.5750	2	5	7	9	12
55	0.5736	0.5721	0.5707	0.5693	0.5678	0.5664	0.5650	0.5635	0.5621	0.5606	2	5	7	10	12
56	0.5592	0.5577	0.5563	0.5548	0.5534	0.5519	0.5505	0.5490	0.5476	0.5461	2	5	7	10	12
57	0.5446	0.5432	0.5417	0.5402	0.5388	0.5373	0.5358	0.5344	0.5329	0.5314	2	5	7	10	12
58	0.5299	0.5284	0.5270	0.5255	0.5240	0.5225	0.5210	0.5195	0.5180	0.5165	2	5	7	10	12
59	0.5150	0.5135	0.5120	0.5105	0.5090	0.5075	0.5060	0.5045	0.5030	0.5015	3	5	8	10	13
60	0.5000	0.4985	0.4970	0.4955	0.4939	0.4924	0.4909	0.4894	0.4879	0.4863	3	5	8	10	13
61	0.4848	0.4833	0.4818	0.4802	0.4787	0.4772	0.4756	0.4741	0.4726	0.4710	3	5	8	10	13
62	0.4695	0.4679	0.4664	0.4648	0.4633	0.4617	0.4602	0.4586	0.4571	0.4555	3	5	8	10	13
63	0.4540	0.4524	0.4509	0.4493	0.4478	0.4462	0.4446	0.4431	0.4415	0.4399	3	5	8	10	13
64	0.4384	0.4368	0.4352	0.4337	0.4321	0.4305	0.4289	0.4274	0.4258	0.4242	3	5	8	11	13
65	0.4226	0.4210	0.4195	0.4179	0.4163	0.4147	0.4131	0.4115	0.4099	0.4083	3	5	8	11	13
66	0.4067	0.4051	0.4035	0.4019	0.4003	0.3987	0.3971	0.3955	0.3939	0.3923	3	5	8	11	14
67	0.3907	0.3891	0.3875	0.3859	0.3843	0.3827	0.3811	0.3795	0.3778	0.3762	3	5	8	11	14
68	0.3746	0.3730	0.3714	0.3697	0.3681	0.3665	0.3649	0.3633	0.3616	0.3600	3	5	8	11	14
69	0.3584	0.3567	0.3551	0.3535	0.3518	0.3502	0.3486	0.3469	0.3453	0.3437	3	5	8	11	14
70	0.3420	0.3404	0.3387	0.3371	0.3355	0.3338	0.3322	0.3305	0.3289	0.3272	3	5	8	11	14
71	0.3256	0.3239	0.3223	0.3206	0.3190	0.3173	0.3156	0.3140	0.3123	0.3107	3	6	8	11	14
72	0.3090	0.3074	0.3057	0.3040	0.3024	0.3007	0.2990	0.2974	0.2957	0.2940	3	6	8	11	14
73	0.2924	0.2907	0.2890	0.2874	0.2857	0.2840	0.2823	0.2807	0.2790	0.2773	3	6	8	11	14
74	0.2756	0.2740	0.2723	0.2706	0.2689	0.2672	0.2656	0.2639	0.2622	0.2605	3	6	8	11	14
75	0.2588	0.2571	0.2554	0.2538	0.2521	0.2504	0.2487	0.2470	0.2453	0.2436	3	6	8	11	14
76	0.2419	0.2402	0.2385	0.2368	0.2351	0.2334	0.2317	0.2300	0.2284	0.2267	3	6	8	11	14
77	0.2250	0.2233	0.2215	0.2198	0.2181	0.2164	0.2147	0.2130	0.2113	0.2096	3	6	9	11	14
78	0.2079	0.2062	0.2045	0.2028	0.2011	0.1994	0.1977	0.1959	0.1942	0.1925	3	6	9	11	14
79	0.1908	0.1891	0.1874	0.1857	0.1840	0.1822	0.1805	0.1788	0.1771	0.1754	3	6	9	11	14
80	0.1736	0.1719	0.1702	0.1685	0.1668	0.1650	0.1633	0.1616	0.1599	0.1582	3	6	9	12	14
81	0.1564	0.1547	0.1530	0.1513	0.1495	0.1478	0.1461	0.1444	0.1426	0.1409	3	6	9	12	14
82	0.1392	0.1374	0.1357	0.1340	0.1323	0.1305	0.1288	0.1271	0.1253	0.1236	3	6	9	12	14
83	0.1219	0.1201	0.1184	0.1167	0.1149	0.1132	0.1115	0.1097	0.1080	0.1063	3	6	9	12	14
84	0.1045	0.1028	0.1011	0.0993	0.0976	0.0958	0.0941	0.0924	0.0906	0.0889	3	6	9	12	14
85	0.0872	0.0854	0.0837	0.0819	0.0802	0.0785	0.0767	0.0750	0.0732	0.0715	3	6	9	12	15
86	0.0698	0.0680	0.0663	0.0645	0.0628	0.0610	0.0593	0.0576	0.0558	0.0541	3	6	9	12	15
87	0.0523	0.0506	0.0488	0.0471	0.0454	0.0436	0.0419	0.0401	0.0384	0.0366	3	6	9	12	15
88	0.0349	0.0332	0.0314	0.0297	0.0279	0.0262	0.0244	0.0227	0.0209	0.0192	3	6	9	12	15
89	0.0175	0.0157	0.0140	0.0122	0.0105	0.0087	0.0070	0.0052	0.0035	0.0017	3	6	9	12	15

6 Trigonometry.indd 262 27-02-2023 20:18:25

NATURAL TANGENTS

Degree	0´	6´	12´	18´	24´	30´	36´	42´	48´	54´	Mean Difference				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
0	0.0000	0.0017	0.0035	0.0052	0.0070	0.0087	0.0105	0.0122	0.0140	0.0157	3	6	9	12	15
1	0.0175	0.0192	0.0209	0.0227	0.0244	0.0262	0.0279	0.0297	0.0314	0.0332	3	6	9	12	15
2	0.0349	0.0367	0.0384	0.0402	0.0419	0.0437	0.0454	0.0472	0.0489	0.0507	3	6	9	12	15
3	0.0524	0.0542	0.0559	0.0577	0.0594	0.0612	0.0629	0.0647	0.0664	0.0682	3	6	9	12	15
4	0.0699	0.0717	0.0734	0.0752	0.0769	0.0787	0.0805	0.0822	0.0840	0.0857	3	6	9	12	15
5	0.0875	0.0892	0.0910	0.0928	0.0945	0.0963	0.0981	0.0998	0.1016	0.1033	3	6	9	12	15
6	0.1051	0.1069	0.1086	0.1104	0.1122	0.1139	0.1157	0.1175	0.1192	0.1210	3	6	9	12	15
7	0.1228	0.1246	0.1263	0.1281	0.1299	0.1317	0.1334	0.1352	0.1370	0.1388	3	6	9	12	15
8	0.1405	0.1423	0.1441	0.1459	0.1477	0.1495	0.1512	0.1530	0.1548	0.1566	3	6	9	12	15
9	0.1584	0.1602	0.1620	0.1638	0.1655	0.1673	0.1691	0.1709	0.1727	0.1745	3	6	9	12	15
10	0.1763	0.1781	0.1799	0.1817	0.1835	0.1853	0.1871	0.1890	0.1908	0.1926	3	6	9	12	15
11	0.1944	0.1962	0.1980	0.1998	0.2016	0.2035	0.2053	0.2071	0.2089	0.2107	3	6	9	12	15
12	0.2126	0.2144	0.2162	0.2180	0.2199	0.2217	0.2235	0.2254	0.2272	0.2290	3	6	9	12	15
13	0.2309	0.2327	0.2345	0.2364	0.2382	0.2401	0.2419	0.2438	0.2456	0.2475	3	6	9	12	15
14	0.2493	0.2512	0.2530	0.2549	0.2568	0.2586	0.2605	0.2623	0.2642	0.2661	3	6	9	12	16
15	0.2679	0.2698	0.2717	0.2736	0.2754	0.2773	0.2792	0.2811	0.2830	0.2849	3	6	9	13	16
16	0.2867	0.2886	0.2905	0.2924	0.2943	0.2962	0.2981	0.3000	0.3019	0.3038	3	6	9	13	16
17	0.3057	0.3076	0.3096	0.3115	0.3134	0.3153	0.3172	0.3191	0.3211	0.3230	3	6	10	13	16
18	0.3249	0.3269	0.3288	0.3307	0.3327	0.3346	0.3365	0.3385	0.3404	0.3424	3	6	10	13	16
19	0.3443	0.3463	0.3482	0.3502	0.3522	0.3541	0.3561	0.3581	0.3600	0.3620	3	7	10	13	16
20	0.3640	0.3659	0.3679	0.3699	0.3719	0.3739	0.3759	0.3779	0.3799	0.3819	3	7	10	13	17
21	0.3839	0.3859	0.3879	0.3899	0.3919	0.3939	0.3959	0.3979	0.4000	0.4020	3	7	10	13	17
22	0.4040	0.4061	0.4081	0.4101	0.4122	0.4142	0.4163	0.4183	0.4204	0.4224	3	7	10	14	17
23	0.4245	0.4265	0.4286	0.4307	0.4327	0.4348	0.4369	0.4390	0.4411	0.4431	3	7	10	14	17
24	0.4452	0.4473	0.4494	0.4515	0.4536	0.4557	0.4578	0.4599	0.4621	0.4642	4	7	11	14	18
25	0.4663	0.4684	0.4706	0.4727	0.4748	0.4770	0.4791	0.4813	0.4834	0.4856	4	7	11	14	18
26	0.4877	0.4899	0.4921	0.4942	0.4964	0.4986	0.5008	0.5029	0.5051	0.5073	4	7	11	15	18
27	0.5095	0.5117	0.5139	0.5161	0.5184	0.5206	0.5228	0.5250	0.5272	0.5295	4	7	11	15	18
28	0.5317	0.5340	0.5362	0.5384	0.5407	0.5430	0.5452	0.5475	0.5498	0.5520	4	8	11	15	19
29	0.5543	0.5566	0.5589	0.5612	0.5635	0.5658	0.5681	0.5704	0.5727	0.5750	4	8	12	15	19
30	0.5774	0.5797	0.5820	0.5844	0.5867	0.5890	0.5914	0.5938	0.5961	0.5985	4	8	12	16	20
31	0.6009	0.6032	0.6056	0.6080	0.6104	0.6128	0.6152	0.6176	0.6200	0.6224	4	8	12	16	20
32	0.6249	0.6273	0.6297	0.6322	0.6346	0.6371	0.6395	0.6420	0.6445	0.6469	4	8	12	16	20
33	0.6494	0.6519	0.6544	0.6569	0.6594	0.6619	0.6644	0.6669	0.6694	0.6720	4	8	13	17	21
34	0.6745	0.6771	0.6796	0.6822	0.6847	0.6873	0.6899	0.6924	0.6950	0.6976	4	9	13	17	21
35	0.7002	0.7028	0.7054	0.7080	0.7107	0.7133	0.7159	0.7186	0.7212	0.7239	4	9	13	18	22
36	0.7265	0.7292	0.7319	0.7346	0.7373	0.7400	0.7427	0.7454	0.7481	0.7508	5	9	14	18	23
37	0.7536	0.7563	0.7590	0.7618	0.7646	0.7673	0.7701	0.7729	0.7757	0.7785	5	9	14	18	23
38	0.7813	0.7841	0.7869	0.7898	0.7926	0.7954	0.7983	0.8012	0.8040	0.8069	5	9	14	19	24
39	0.8098	0.8127	0.8156	0.8185	0.8214	0.8243	0.8273	0.8302	0.8332	0.8361	5	10	15	20	24
40	0.8391	0.8421	0.8451	0.8481	0.8511	0.8541	0.8571	0.8601	0.8632	0.8662	5	10	15	20	25
41	0.8693	0.8724	0.8754	0.8785	0.8816	0.8847	0.8878	0.8910	0.8941	0.8972	5	10	16	21	26
42	0.9004	0.9036	0.9067	0.9099	0.9131	0.9163	0.9195	0.9228	0.9260	0.9293	5	11	16	21	27
43	0.9325	0.9358	0.9391	0.9424	0.9457	0.9490	0.9523	0.9556	0.9590	0.9623	6	11	17	22	28
44	0.9657	0.9691	0.9725	0.9759	0.9793	0.9827	0.9861	0.9896	0.9930	0.9965	6	11	17	23	29

6 Trigonometry.indd 263 27-02-2023 20:18:26

NATURAL TANGENTS

Degree	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	Mean Difference				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
45	1.0000	1.0035	1.0070	1.0105	1.0141	1.0176	1.0212	1.0247	1.0283	1.0319	6	12	18	24	30
46	1.0355	1.0392	1.0428	1.0464	1.0501	1.0538	1.0575	1.0612	1.0649	1.0686	6	12	18	25	31
47	1.0724	1.0761	1.0799	1.0837	1.0875	1.0913	1.0951	1.0990	1.1028	1.1067	6	13	19	25	32
48	1.1106	1.1145	1.1184	1.1224	1.1263	1.1303	1.1343	1.1383	1.1423	1.1463	7	13	20	27	33
49	1.1504	1.1544	1.1585	1.1626	1.1667	1.1708	1.1750	1.1792	1.1833	1.1875	7	14	21	28	34
50	1.1918	1.1960	1.2002	1.2045	1.2088	1.2131	1.2174	1.2218	1.2261	1.2305	7	14	22	29	36
51	1.2349	1.2393	1.2437	1.2482	1.2527	1.2572	1.2617	1.2662	1.2708	1.2753	8	15	23	30	38
52	1.2799	1.2846	1.2892	1.2938	1.2985	1.3032	1.3079	1.3127	1.3175	1.3222	8	16	24	31	39
53	1.3270	1.3319	1.3367	1.3416	1.3465	1.3514	1.3564	1.3613	1.3663	1.3713	8	16	25	33	41
54	1.3764	1.3814	1.3865	1.3916	1.3968	1.4019	1.4071	1.4124	1.4176	1.4229	9	17	26	34	43
55	1.4281	1.4335	1.4388	1.4442	1.4496	1.4550	1.4605	1.4659	1.4715	1.4770	9	18	27	36	45
56	1.4826	1.4882	1.4938	1.4994	1.5051	1.5108	1.5166	1.5224	1.5282	1.5340	10	19	29	38	48
57	1.5399	1.5458	1.5517	1.5577	1.5637	1.5697	1.5757	1.5818	1.5880	1.5941	10	20	30	40	50
58	1.6003	1.6066	1.6128	1.6191	1.6255	1.6319	1.6383	1.6447	1.6512	1.6577	11	21	32	43	53
59	1.6643	1.6709	1.6775	1.6842	1.6909	1.6977	1.7045	1.7113	1.7182	1.7251	11	23	34	45	56
60	1.7321	1.7391	1.7461	1.7532	1.7603	1.7675	1.7747	1.7820	1.7893	1.7966	12	24	36	48	60
61	1.8040	1.8115	1.8190	1.8265	1.8341	1.8418	1.8495	1.8572	1.8650	1.8728	13	26	38	51	64
62	1.8807	1.8887	1.8967	1.9047	1.9128	1.9210	1.9292	1.9375	1.9458	1.9542	14	27	41	55	68
63	1.9626	1.9711	1.9797	1.9883	1.9970	2.0057	2.0145	2.0233	2.0323	2.0413	15	29	44	58	73
64	2.0503	2.0594	2.0686	2.0778	2.0872	2.0965	2.1060	2.1155	2.1251	2.1348	16	31	47	63	78
65	2.1445	2.1543	2.1642	2.1742	2.1842	2.1943	2.2045	2.2148	2.2251	2.2355	17	34	51	68	85
66	2.2460	2.2566	2.2673	2.2781	2.2889	2.2998	2.3109	2.3220	2.3332	2.3445	18	37	55	73	92
67	2.3559	2.3673	2.3789	2.3906	2.4023	2.4142	2.4262	2.4383	2.4504	2.4627	20	40	60	79	99
68	2.4751	2.4876	2.5002	2.5129	2.5257	2.5386	2.5517	2.5649	2.5782	2.5916	22	43	65	87	108
69	2.6051	2.6187	2.6325	2.6464	2.6605	2.6746	2.6889	2.7034	2.7179	2.7326	24	47	71	95	119
70	2.7475	2.7625	2.7776	2.7929	2.8083	2.8239	2.8397	2.8556	2.8716	2.8878	26	52	78	104	131
71	2.9042	2.9208	2.9375	2.9544	2.9714	2.9887	3.0061	3.0237	3.0415	3.0595	29	58	87	116	145
72	3.0777	3.0961	3.1146	3.1334	3.1524	3.1716	3.1910	3.2106	3.2305	3.2506	32	64	96	129	161
73	3.2709	3.2914	3.3122	3.3332	3.3544	3.3759	3.3977	3.4197	3.4420	3.4646	36	72	108	144	180
74	3.4874	3.5105	3.5339	3.5576	3.5816	3.6059	3.6305	3.6554	3.6806	3.7062	41	81	122	163	204
75	3.7321	3.7583	3.7848	3.8118	3.8391	3.8667	3.8947	3.9232	3.9520	3.9812	46	93	139	186	232
76	4.0108	4.0408	4.0713	4.1022	4.1335	4.1653	4.1976	4.2303	4.2635	4.2972	53	107	160	213	267
77	4.3315	4.3662	4.4015	4.4373	4.4737	4.5107	4.5483	4.5864	4.6252	4.6646					
78	4.7046	4.7453	4.7867	4.8288	4.8716	4.9152	4.9594	5.0045	5.0504	5.0970					
79	5.1446	5.1929	5.2422	5.2924	5.3435	5.3955	5.4486	5.5026	5.5578	5.6140					
80	5.6713	5.7297	5.7894	5.8502	5.9124	5.9758	6.0405	6.1066	6.1742	6.2432					
81	6.3138	6.3859	6.4596	6.5350	6.6122	6.6912	6.7720	6.8548	6.9395	7.0264					
82	7.1154	7.2066	7.3002	7.3962	7.4947	7.5958	7.6996	7.8062	7.9158	8.0285					
83	8.1443	8.2636	8.3863	8.5126	8.6427	8.7769	8.9152	9.0579	9.2052	9.3572					
84	9.5144	9.6768	9.8448	10.0187	10.1988	10.3854	10.5789	10.7797	10.9882	11.2048					
85	11.4301	11.6645	11.9087	12.1632	12.4288	12.7062	12.9962	13.2996	13.6174	13.9507					
86	14.3007	14.6685	15.0557	15.4638	15.8945	16.3499	16.8319	17.3432	17.8863	18.4645					
87	19.0811	19.7403	20.4465	21.2049	22.0217	22.9038	23.8593	24.8978	26.0307	27.2715					
88	28.6363	30.1446	31.8205	33.6935	35.8006	38.1885	40.9174	44.0661	47.7395	52.0807					
89	57.2900	63.6567	71.6151	81.8470	95.4895	114.5887	143.2371	190.9842	286.4777	572.9572					

6 Trigonometry.indd 264 27-02-2023 20:18:27

7



క్షేత్ర గణితము

మిక్కిలి రమ్యమైన సమతలపటము వృత్తము, అదేవిధంగా మిక్కిలి అందమైన ఘనము గోళము. -- ఫ్రైథాగరస్



Heron
A.D (C.E) 10-75

అలెగ్జాండ్రియాకు చెందిన హీరోన్ ఒక గ్రీకు గణిత శాస్త్రవేత్త అతను గణితం, యంత్ర గతి శాస్త్రం, భౌతిక శాస్త్రంలో అనేక పుస్తకములు వ్రాశారు. అతని ప్రముఖ గ్రంథమైన 'మెట్రికా' లో మూడు సంపుటములు కలవు. ఈ గ్రంథంలో తలము మరియు ఘనాకారములో ఉన్న వాటి వైశాల్యం మరియు ఘనపరిమాణము లను కనుగొను విధానం గూర్చి వివరించబడియున్నది. ఒక త్రిభుజంలో మూడు భుజాలు ఇచ్చిన దాని వైశాల్యం కనుగొను సూత్రమును 'హీరోన్' వివరించియున్నారు.

అభ్యసన ఫలితములు

- త్రిభుజము మరియు చతుర్భుజముల వైశాల్యములను హీరోన్ సూత్రము ఉపయోగించి కనుగొనుట.
- దీర్ఘఘనము, ఘనముల యొక్క ప్రక్కతల వైశాల్యము, సంపూర్ణతల వైశాల్యం మరియు ఘనపరిమాణములను కనుగొనుట.

2AMOL

7.1 పరిచయం

పలు రకాలైన జ్యామితీయ ఆకారముల వైశాల్యము మరియు ఘనపరిమాణమును గూర్చి తెలుసుకొను గణిత శాఖ 'క్షేత్ర గణితము' అగును. దీనిని వివరంగా చెప్పాలంటే ఇది కొలతలలోని ఒక ప్రక్రియ అగును.

క్షేత్ర గణితము నిర్మాణ రంగంలోను, వాస్తు కళలలోను మరియు వైద్యరంగంలోను ఉపయోగపడుచున్నది. క్షేత్ర గణితమును నేర్చుకోవడం ద్వారా ద్విపరిమాణాకారం యొక్క చుట్టుకొలత మరియు వైశాల్యమును కనుగొను సూత్రములు గూర్చి తెలుసుకొనవచ్చును. అదేవిధంగా త్రిమితీయ ఆకారముల యొక్క ఉపరితల వైశాల్యము మరియు ఘనపరిమాణముల గూర్చి తెలుసుకొనవచ్చును. ఈ అధ్యాయంలో మనం 'హీరోన్' సూత్రమునుపయోగించి త్రిభుజ వైశాల్యమును, దీర్ఘఘనము, సమఘనముల యొక్క వైశాల్యము, ఘనపరిమాణముల గూర్చి తెలుసుకోబోవుచున్నాము.

గత తరగతులలో మనము ఇదివరకే నేర్చుకొన్న వివిధ తల ఆకారములను గుర్తు చేసుకొనెదమా? దీనికి

7 Mensuration.indd 265 11-03-2023 15:14:33

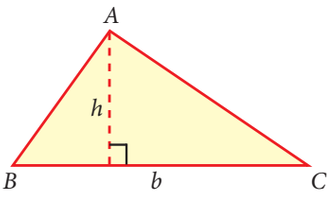
తరువాత వచ్చు పట్టిక దీనిని సులువుగా తెలుసుకొనుటకు ఉపయోగపడును

సాధారణముగా త్రిభుజం యొక్కవైశాల్యమును కింద వచ్చు సూత్రమును ఉపయోగించి కనుగొనుచున్నాము.

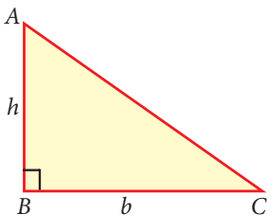
త్రిభుజ వైశాల్యము $= \frac{1}{2} \times$ భూమి $\times$ ఎత్తు చదరపు ప్రమాణములు

అనగా, $A = \frac{1}{2} \times b \times h$ చదరపు ప్రమాణములు

ఇక్కడ b మరియు h క్రమముగా త్రిభుజము యొక్క భూమి మరియు ఎత్తు అగును.



పటం. 7.1



పటం. 7.2

ఒక త్రిభుజము యొక్క భూమి మరియు ఎత్తు ఇచ్చిన దాని వైశాల్యమును ఏ విధంగా కనుగొనవచ్చని పైన ఇచ్చిన సూత్రము నుండి తెలుసుకొనవచ్చును..

7.2 హీరోన్ సూత్రము

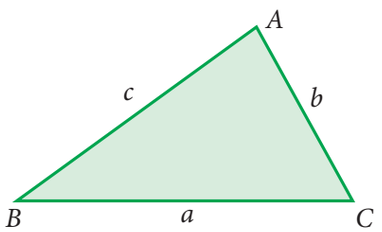


త్రిభుజంలో మూడు భుజాల కొలతలు ఇచ్చి దాని ఎత్తు ఇవ్వకపోయినచో త్రిభుజ వైశాల్యమును ఏ విధంగా కనుగొనవచ్చును.

ఇటువంటి సందర్భములలో త్రిభుజ వైశాల్యంను కనుగొనుటకు హీరోన్ సూత్రమును ఉపయోగించి కనుగొనవచ్చు.

a, b మరియు c అనేవి త్రిభుజము యొక్క భుజములు అయిన త్రిభుజ వైశాల్యము $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ చదరపు ప్రమాణములు.

ఇక్కడ $s = \frac{a+b+c}{2}$, 's' అనేది త్రిభుజం యొక్క అర్ధ చుట్టుకొలత (అనగా చుట్టుకొలతలలో సగముండును).



పటం. 7.3

సూచన

త్రిభుజములో భుజములు సమానమైన అనగా $a = b = c$, గా ఉంటే త్రిభుజ వైశాల్యం $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ చదరపు ప్రమాణము, ఇదియే సమభుజత్రిభుజ వైశాల్యమగును.

ఉదాహరణ 7.1 త్రిభుజాకారంలో ఉన్న పొలము యొక్క భుజముల పొడవులు వరుసగా 28 మీ, 15 మీ మరియు 41 మీ అయిన పొలము వైశాల్యమును కనుగొనుము. మరియు పొలమును చదును చేయుటకు 1 చ.మీ కు ₹ 20 ఖర్చు అయిన మొత్తం పొలము చదును చేయుటకు అయ్యే ఖర్చు ఎంత?

సాధన

$a = 28$ మీ, $b = 15$ మీ మరియు $c = 41$ మీ

7 Mensuration.indd 266 11-03-2023 15:14:36

అయిన, $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{28+15+41}{2} = \frac{84}{2} = 42$ మీ

త్రిభుజాకార పొలము వైశాల్యం $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ చదరపు ప్రమాణములు

$= \sqrt{42(42-28)(42-15)(42-41)}$

$= \sqrt{42 \times 14 \times 27 \times 1}$

$= \sqrt{2 \times 3 \times 7 \times 7 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 1}$

$= 2 \times 3 \times 7 \times 3 = 126$ మీ^{2}

1 మీ^{2} పొలమును చదునుచేయుటకు అయ్యే ఖర్చు = ₹ 20

126 మీ^{2} పొలమును చదును చేయుటకు అయ్యే ఖర్చు $= 20 \times 126 =$ ₹ 2520..

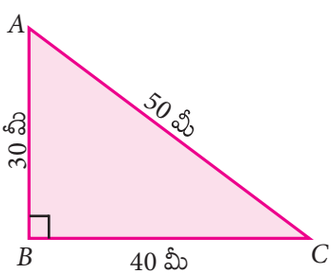
ఉదాహరణ 7.2 ఒక ప్రదేశంలో మూడు వేర్వేరు త్రిభుజాకారంలో ఉన్న ఇంటి స్థలములు అమ్ముటకు కలదు. ఒక్కొక్కటి 120 మీ చుట్టుకొలత గలవి. వాటిలో ఒక్కొక్క త్రిభుజ భుజముల కొలతలు ఇవ్వబడినవి

ఇంటి స్థల ఆకారములు	చుట్టుకొలత	భుజముల కొలతలు
లంబకోణ త్రిభుజం	120మీ	30మీ, 40మీ, 50మీ
అల్పకోణ త్రిభుజము	120మీ	35మీ, 40మీ, 45మీ
సమభుజ త్రిభుజము	120మీ	40మీ, 40మీ, 40మీ

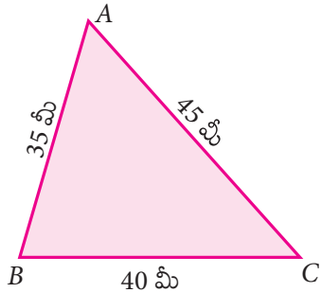
వీటిలోఎక్కువ స్థల వైశాల్యం గలది ఏది? అని స్థలము కొనే వారికి సహాయపడుము.

సాధన

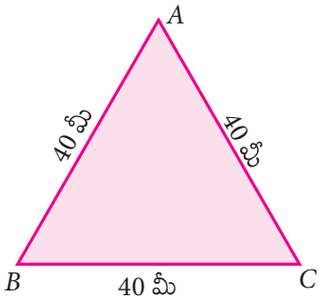
ఇచ్చిన కొలతలతో చిత్తు పటమును గీయుము



పటం. 7.4



పటం. 7.5



పటం. 7.6

(i) పటము 7.4, లో గల త్రిభుజము యొక్క అర్ధ చుట్టుకొలత $s = \frac{30+40+50}{2} = 60$ మీ

పటము 7.5, లో గల త్రిభుజం యొక్క అర్ధ చుట్టుకొలత $s = \frac{35+40+45}{2} = 60$ మీ

పటము.7.6 లో గల త్రిభుజం యొక్క అర్ధ చుట్టుకొలత $s = \frac{40+40+40}{2} = 60$ మీ

ఇక్కడ అన్ని త్రిభుజముల అర్ధ చుట్టుకొలతలు సమానంగా ఉన్నవని గమనించము.

7 Mensuration.indd 267 11-03-2023 15:14:40

(ii) హీరోన్ సూత్రమమును ఉపయోగించి త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యము

పటము 7.4, లో గల త్రిభుజము యొక్క వైశాల్యము $= \sqrt{60(60-30)(60-40)(60-50)}$

$= \sqrt{60\times30\times20\times10}$

$= \sqrt{30\times2\times30\times2\times10\times10}$

$= 600$ చ.మీ

పటము 7.5, లోగల త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యం $= \sqrt{60(60-35)(60-40)(60-45)}$

$= \sqrt{60\times25\times20\times15}$

$= \sqrt{20\times3\times5\times5\times20\times3\times5}$

$= 300\sqrt{5}$ (ఇక్కడ $\sqrt{5} = 2.236$)

$= 670.8$ చ.మీ

పటము 7.6 లో గల త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యం $= \sqrt{60(60-40)(60-40)(60-40)}$

$= \sqrt{60\times20\times20\times20}$

$= \sqrt{3\times20\times20\times20\times20}$

$= 400\sqrt{3}$ (ఇక్కడ $\sqrt{3} = 1.732$)

$= 692.8$ చ.మీ

ఇచ్చట మూడు త్రిభుజముల చుట్టుకొలతలు సమానంగా ఉన్నను, మూడు త్రిభుజాకారంలో ఉన్న ఇంటి స్థలముల వైశాల్యములు వేరు వేరుగా ఉన్నాయని గమనించవచ్చును. పటము 4.7 లోగల త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యం మిగిలిన వాటికంటే ఎక్కువగా కలదు. ఈ త్రిభుజాకారంలో ఉన్న స్థలము ఎక్కువ వైశాల్యం ఇచ్చట వలన కొనే వానికి దీనిని కొనవచ్చు అని సలహా ఇవ్వవచ్చు.

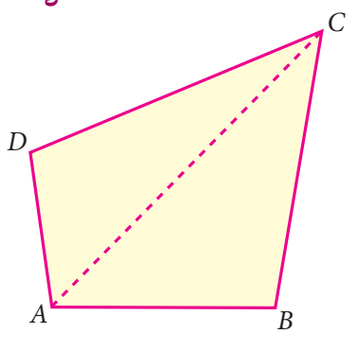
సూచన

ఇవ్వబడిన త్రిభుజములలో చుట్టుకొలతలు సమానంగా ఉన్నా, ఆ త్రిభుజాలలో సమభుజ త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యము ఎక్కువగా ఉండును. ఈ విషయాన్ని మనం పెద్ద తరగతులలో నేర్చుకొంటాము.

7.3 చతుర్భుజ వైశాల్యము కనుగొనుటలో హీరోన్ సూత్రం యొక్క ప్రాముఖ్యత:

నాలుగు రేఖాఖండములతో మూయబడు ఒక తలాకారమును చతుర్భుజము అని పిలుస్తాము.

$ABCD$ అనేది ఒక చతుర్భుజము అనుకొనుము. చతుర్భుజ వైశాల్యమును కనుగొనుటకు ఆ చతుర్భుజమును రెండు త్రిభుజములుగా విభజించి హీరోన్ సూత్రమును ఉపయోగించి ఆ త్రిభుజముల యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనవలెను.



పటం. 7.7

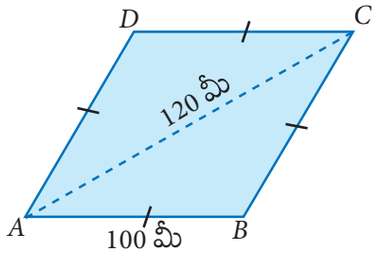
7 Mensuration.indd 268 11-03-2023 15:14:45

7.7 పటములో

$ABCD$ చతుర్భుజం వైశాల్యం = ABC త్రిభుజ వైశాల్యము + ACD త్రిభుజ వైశాల్యము

ఉదాహరణ 7.3 ఒక వ్యవసాయదారుని వద్ద రాంబస్ ఆకారంలో పొలము కలదు. పొలము చుట్టుకొలత 400 మీ. పొలము యొక్క కర్ణము 120 మీ. వ్యవసాయదారుడు పొలములో వివిధ రకాలైన కూరగాయలను పండించుట కొరకు పొలమును రెండు సమభాగాలుగా విభజించదలచెను. అయిన పొలము వైశాల్యము కనుగొనుము.

సాధన



పటం 7.8

రాంబస్ $ABCD$ అనుకొనుము

చుట్టుకొలత = 4 × భుజము = 400మీ.

రాంబస్ యొక్క ఒక్కొక్క భుజము = 100మీ.

ఇచ్చిన కర్ణము పొడవు AC = 120మీ.

$\varnothing ABC$ లో, a = 100 మీ, b =100 మీ, c =120 మీ

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{100+100+120}{2} = 160 \text{ మీ}$$

$$\varnothing ABC \text{ వైశాల్యము} = \sqrt{160(160-100)(160-100)(160-120)}$$

$$= \sqrt{160\times 60\times 60\times 40}$$

$$= \sqrt{40\times 2\times 2\times 60\times 60\times 40}$$

$$= 40\times 2\times 60 = 4800 \text{ మీ}^2$$

కావున, $ABCD$ పొలము వైశాల్యము $= 2\times \Delta ABC$ వైశాల్యం $= 2\times 4800 = 9600$ మీ^{2}

అభ్యాసము 7.1

1. హీరోన్ సూత్రమును ఉపయోగించి క్రింది భుజముల ఆధారంగా త్రిభుజ వైశాల్యమును కనుగొనుము

   (i) 10సెం.మీ, 24సెం.మీ, 26సెం.మీ (ii) 1.8మీ, 8మీ, 8.2మీ

2. ఒక త్రిభుజాకార పొలము యొక్క భుజములు వరుసగా 22మీ, 120మీ మరియు 122 మీ అయిన పొలము వైశాల్యమును కనుగొనుము. మరియు పొలమును చదును చేయుటకు ఒక చదరపు మీటరుకు ₹ 20 ఖర్చు అయిన మొత్తము పొలము చదును చేయుటకు అయ్యే ఖర్చును కనుగొనుము.

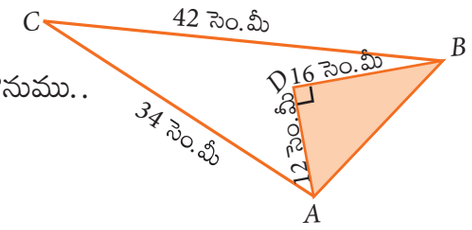
3. ఒక త్రిభుజాకార ఇంటి స్థలము చుట్టుకొలత 600మీ. వాటి భుజములు 5:12:13 అనే నిష్పత్తిలో కలవు. అయిన ఇంటి స్థలము వైశాల్యమును కనుగొనుము.

4. 180 సెం.మీ చుట్టు కొలత గల ఒక సమభుజ త్రిభుజము యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనుము.

7 Mensuration.indd 269 11-03-2023 15:14:49

5. సమద్విబాహు త్రిభుజాకారంలోగల ప్రకటన పలక చుట్టుకొలత 36 మీ మరియు దాని ఒక్కొక్క సమ భుజ పొడవు 13 మీ. దానికి రంగు వేయుటకు ఒక చదరపు మీటరుకు ₹ 17.50 ఖర్చు అయిన మొత్తం రంగు వేయుటకు అయ్యే ఖర్చు కనుగొనుము.

6. పటములో ఛాయ చేయబడని ప్రాంత వైశాల్యమును కనుగొనుము..



7. $AB = 13$ సెం.మీ $BC = 12$ సెం.మీ $CD = 9$ సెం.మీ $AD = 14$ సెం.మీలను భుజములుగాను, $BD = 15$ సెం.మీ కర్ణము గాను కలిగిన చతుర్భుజము $ABCD$ వైశాల్యము కనుగొనుము

8. ఒక ఉద్యానవనము చతుర్భుజాకారంలో కలదు. ఆ ఉద్యానవనము యొక్క భుజములు 15మీ, 20మీ, మరియు 17మీ మరియు రెండు భుజములకు మధ్యగల కోణము లంబకోణమయిన, ఉద్యానవనము వైశాల్యమును కనుగొనుము.

9. ఒక స్థలము రాంబస్ ఆకారంలో కలదు. స్థలము యొక్క చుట్టుకొలత 160మీ, కర్ణము పొడవు 48మీఅయిన ఆ స్థలము యొక్క వైశాల్యము కనుగొనుము.

10. సమాంతంచతుర్భుజం యొక్క ఆసన్న భుజములు 34మీ, 20మీ మరియు దాని కర్ణము పొడవు 42మీ అయిన సమాంతరచతుర్భుజ వైశాల్యమును కనుగొనుము.

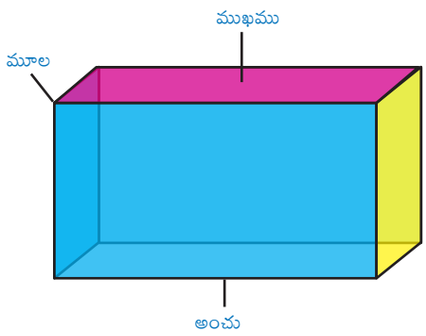
7.4 దీర్ఘఘనము మరియు సమఘనము యొక్క ఉపరితల వైశాల్యము.



త్రి పరిమాణాత్మక ఆకారములు గూర్చి మనము ముందు తరగతిలో నేర్చుకొనియున్నాము. త్రిపరిమాణాత్మక ఆకారములు పూర్తిగా తలముపై ఇమిడి యుండదు. త్రిపరిమాణాత్మక ఆకారముల యొక్క కొలతలు పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తు కల్గియుండును.

7.4.1 దీర్ఘ ఘనము మరియు దాని ఉపరితల వైశాల్యము:

దీర్ఘ ఘనము : దీర్ఘఘనము అనునది ఆరు దీర్ఘ చతురస్ర తలములు కలిగిన త్రి పరిమాణ ఆకారమగును. ఉదాహరణలు, పుస్తకము, అగ్గిపెట్టె, ఇటుక, సోపు.



పటం. 7.9

దీర్ఘ ఘనము 6 ముఖాలు 12 అంచులు మరియు 8 శీర్షములు కలిగి ఉంటాయి. సాధారణంగా దీర్ఘ ఘనము దీర్ఘచతురస్రాకార పెట్టె ఆకారంలో ఉండును.

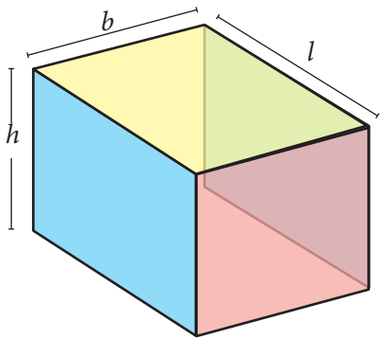
దీర్ఘఘనంలో సంపూర్ణతల వైశాల్యం (TSA) అనేది ఆ దీర్ఘ ఘనము యొక్క మూసి ఉన్న అన్ని ముఖముల వైశాల్యముల మొత్తము అవుతోంది. దీని నుండి దీర్ఘ ఘనం యొక్క పైభాగం మరియు అడుగుభాగం వైశాల్యములను తీసివేస్తే వచ్చేది ప్రక్కతల వైశాల్యము **(LSA)** అగును

7 Mensuration.indd 270 11-03-2023 15:14:51

పటము 7.10 లో l, b మరియు h అనునవి పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తును సూచిస్తుంది.

(i) దీర్ఘ ఘనము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము (TSA)

పైభాగము మరియు కింద భాగం వైశాల్యము	$2 \times lb$
ముందు భాగము మరియు వెనుక భాగం వైశాల్యము	$2 \times bh$
ఎడమ మరియు కుడి భుజముల వైశాల్యము	$2 \times lh$



పటం. 7.10

$= 2\,(lb + bh + lh)$ చదరపు ప్రమాణములు.

(ii) దీర్ఘ ఘనము యొక్క ప్రక్కతల వైశాల్యం (LSA)

ముందు మరియు వెనుక భాగము వైశాల్యము	$2 \times bh$
ఎడమ మరియు కుడి భాగము వైశాల్యము	$2 \times lh$

$= 2\,(l+b)h$ చదరపు ప్రమాణములు.

నిత్యజీవితంలో మనము సంపూర్ణతల వైశాల్యం (TSA) మరియు ప్రక్కతల వైశాల్యం (LSA) ఉపయోగిస్తుంటాము. వేర్వేరు పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తు గల దీర్ఘఘనాకారంలో ఉన్న ఒక గది తీసుకొందాము. ఆ గది యొక్క నేల భాగము మరియు పైకప్పు వదలి గోడల యొక్క వైశాల్యం మాత్రమే మనకు కావలెనన్న ప్రక్కతల వైశాల్యం కనుగొనవలెను. మనకు గది మొత్తం వైశాల్యం కావలెనన్న సంపూర్ణతల వైశాల్యంను కనుగొనవలెను.

ఒక దీర్ఘ ఘనము యొక్క పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తులు క్రమముగా l, b మరియు h అయిన

(i) సంపూర్ణతల వైశాల్యము $= 2\,(lb + bh + lh)$ చదరపు ప్రమాణములు.

(ii) పక్క తల వైశాల్యము $= 2\,(l+b)h$ చదరపు ప్రమాణములు.

సూచన

- ఒక దీర్ఘ ఘనంలో అడుగు భాగము మరియు పై భాగము ఎత్తుతో సంబంధం లేకుండా అడుగు భాగం మరియు పై భాగముల వైశాల్యం $2lb$ అవుతుంది. కావున సంపూర్ణతల వైశాల్యం $2(lb+bh+lh)$ నుండి $2lb$ తీసివేసిన మనకు ప్రక్కతల వైశాల్యం వచ్చును.
- ఒక దీర్ఘ ఘనము యొక్క ఉపరితల వైశాల్యమును లెక్కించేటప్పుడు ఇవ్వబడిన పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తు కొలతలు ఒకే ప్రమాణంలో ఉండవలెను.

ఉదాహరణ 7.4

ఒక దీర్ఘ ఘనము యొక్క పొడవు 7.5మీ, వెడల్పు 3మీ మరియు ఎత్తు 5మీ అయిన దాని సంపూర్ణతల వైశాల్యము, ప్రక్కతల వైశాల్యము కనుగొనుము.

సాధన

దీర్ఘ ఘనము పొడవు $(l) = 7.5$మీ, వెడల్పు $(b) = 3$మీ మరియు ఎత్తు $(h) = 5$మీ.

7 Mensuration.indd 271 11-03-2023 15:14:51

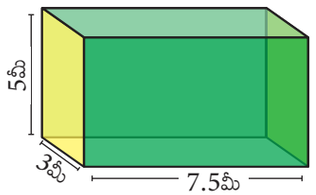
సంపూర్ణతల వైశాల్యము $= 2(lb + bh + lh)$

$= 2\left[(7.5 \times 3) + (3 \times 5) + (7.5 \times 5)\right]$

$= 2(22.5 + 15 + 37.5)$

$= 2 \times 75$

$= 150$ మీ^{2}



పటం 7.11

ప్రక్కతల వైశాల్యం $= 2(l + b) \times h$

$= 2(7.5 + 3) \times 5$

$= 2 \times 10.5 \times 5$

$= 105$ మీ^{2}

ఉదాహరణ 7.5 ఒక గది పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తు క్రమముగా 25మీ, 15మీ మరియు 5మీ అగును. గది యొక్క నేల భాగము మరియు నాలుగు గోడలను పునరుద్ధరించేందుకు 1.చ.మీ ₹ 80 ఖర్చు అయిన మొత్తం ఖర్చును కనుగొనుము.

సాధన

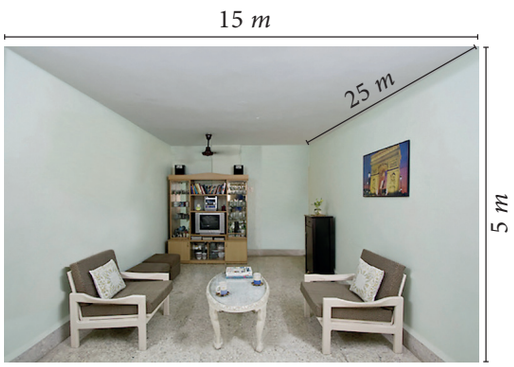
గది పొడవు (l) = 25మీ, వెడల్పు (b) = 15మీ మరియు ఎత్తు (h) = 5మీ అయిన.

నాలుగు గోడల వైశాల్యం = దీర్ఘ ఘనము ప్రక్కతల వైశాల్యం

$= 2(l + b) \times h$

$= 2(25 + 15) \times 5$

$= 80 \times 5 = 400$ చ.మీ



పటం. 7.12

గది నేల భాగము వైశాల్యము $= l \times b$

$= 25 \times 15$

$= 375$ చ.మీ

పునరుద్ధరించుటకు కావలసిన భాగము యొక్క వైశాల్యము = నాలుగు గోడల వైశాల్యము + గది నేల వైశాల్యము

$= (400 + 375)$ చ.మీ. $= 775$ చ.మీ.

1చ.మీ ₹80 ఖర్చు అయిన మొత్తం ఖర్చు $= 80 \times 775 =$ ₹62,000

7.4.2 సమఘనము (ఘనము) మరియు దాని ఉపరితల వైశాల్యము

సమఘనము: పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తులు అన్నీ సమానంగా ఉండు దీర్ఘఘనమే సమఘనము అవుతుంది. ఒక సమఘనమనేది ఆరు భుజములతో మూయబడిన ఒక ఘనము. సమఘనమునకు కొన్ని ఉదాహరణలు.

7 Mensuration.indd 272 11-03-2023 15:15:00



పాచికలు.



మంచు ఘనాలు

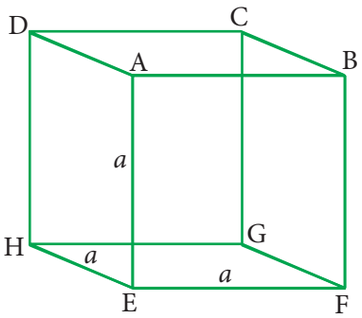


చక్కెర ఘనాలు

పటం. 7.13

దీర్ఘ ఘనము వలె సమఘనము కూడా 6 ముఖములు, 12 అంచులు 8 మూలలు కలిగియుండును.

పటము 7.14 లో చూపినట్లు సమఘనము యొక్క భుజములు 'a' యూనిట్లు అయిన



పటం. 7.14

(i) సమఘనము (ఘనము) సంపూర్ణతల వైశాల్యము

= 6 ముఖముల వైశాల్యముల మొత్తము

$(ABCD+EFGH+AEHD+BFGC+ABFE+CDHG)$

$=(a^2+a^2+a^2+a^2+a^2+a^2)$

$=6a^2$ చదరపు ప్రమాణములు

(ii) సమఘనము (ఘనము) ప్రక్కతల వైశాల్యము $= (AEHD+BFGC+ABFE+CDHG)$ అనే ముఖముల వైశాల్యముల మొత్తము

$=(a^2+a^2+a^2+a^2)$

$=4a^2$ చదరపు ప్రమాణములు.

సమఘనము యొక్క భుజము a యూనిట్లు అయిన

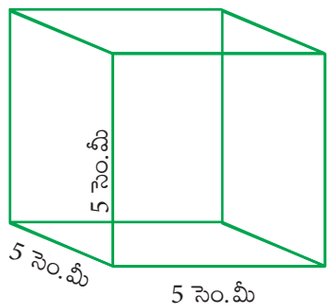
(i) సంపూర్ణతల వైశాల్యము = $6a^2$ చదరపు ప్రమాణములు

(ii) ప్రక్కతల వైశాల్యము = $4a^2$ చదరపు ప్రమాణములు

మెదడుకు మేత

దీనితో సంబంధం ఉన్న దీర్ఘ ఘన సూత్రముల నుండి ఘన సూత్రములను పొందగలమా?

ఉదాహరణ 7.6 5 సెం.మీ భుజము కలిగిన సమఘనము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యం మరియు ప్రక్కతల వైశాల్యం కనుగొనుము.



పటం. 7.15

సాధన

సమఘనము యొక్క భుజము (a) = 5సెం.మీ.

సంపూర్ణతల వైశాల్యము $= 6a^2 = 6(5^2) = 150$ చ.సెం.మీ.

ప్రక్కతల వైశాల్యము $= 4a^2 = 4(5^2) = 100$ చ.సెం.మీ.

7 Mensuration.indd 273 11-03-2023 15:15:04

ఉదాహరణ 7.7 ఒక సమఘనము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము 486 సెం.మీ^{2} అయిన దాని ప్రక్కతల వైశాల్యం కనుగొనుము.

సాధన

సమఘనము సంపూర్ణతల వైశాల్యం = 486 సెం.మీ^{2}

$6a^2 = 486 \implies a^2 = \frac{486}{6}$ $a^2 = 81 \implies a = 9.$

సమఘనము యొక్క భుజం కొలత = 9సెం.మీ

ప్రక్కతల వైశాల్యం $= 4a^2 = 4 \times 9^2 = 4 \times 81 = 324$ సెం.మీ^{2}

ఉదాహరణ 7.8 7 సెం.మీ భుజము గల ఒకే విధంగా గల రెండు సమఘనములను ఒకదానికొకటి కలిపిన అది దీర్ఘఘనమగును. అయితే దాని సంపూర్ణతల, ఉపరితల వైశాల్యములను కనుగొనుము.

సాధన

సమఘనము యొక్క భుజము = 7సెం.మీ

దీర్ఘఘనంగా మారిన తరువాత దాని పొడవు = 7+7 = 14సెం.మీ

వెడల్పు (b) = 7సెం.మీ, ఎత్తు (h) = 7సెం.మీ

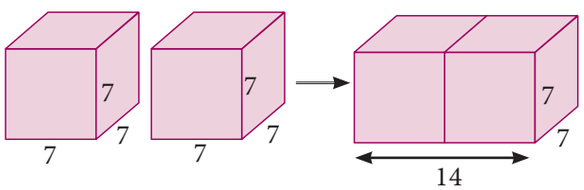
కావున సంపూర్ణతల వైశాల్యము $= 2(lb + bh + lh)$

$= 2\left[(14 \times 7) + (7 \times 7) + (14 \times 7)\right]$

$= 2(98 + 49 + 98)$

$= 2 \times 245$

$= 490$ సెం.మీ^{2}



పటం. 7.16

ఉపరితల వైశాల్యము $= 2(l + b) \times h$

$= 2(14 + 7) \times 7 = 2 \times 21 \times 7$

$= 294$ సెం.మీ^{2}

అభ్యాసము 7.2

1. దీర్ఘ ఘనము యొక్క కొలతలు క్రింద ఇవ్వబడి యున్నవి. వాటి సంపూర్ణతల వైశాల్యం, ప్రక్కతల వైశాల్యములను కనుగొనుము పొడవు = 20 సెం.మీ, వెడల్పు= 15సెం.మీ ఎత్తు.= 8సెం.మీ

2. దీర్ఘ ఘనాకార కొయ్య పెట్టె కొలతలు 6మీ×400సెం.మీ × 1.5మీ. ఆ కొయ్య పెట్టె బాహ్యం మొత్తం రంగు వేయుటకు ఒక చదరపు మీటరుకు ₹22 ఖర్చు అయిన మొత్తం అయ్యే ఖర్చును కనుగొనుము.

7 Mensuration.indd 274 11-03-2023 15:15:11

3. ఒక గది యొక్క కొలతలు 10 మీ × 9 మీ × 8 మీ గా ఉన్నవి. ఆ గది యొక్క గోడలకు మరియు పైకప్పుకు సున్నం కొట్టుటకు ఒక చదరపు మీటర్ కు₹8.50 ఖర్చు అయిన మొత్తం అయ్యే ఖర్చును కనుగొనుము

4. కింద ఇవ్వబడిన భుజాలు ఆధారంగా సమఘనము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యం, ప్రక్కతల వైశాల్యములను కనుగొనుము(i) 8మీ (ii) 21సెం.మీ (iii) 7.5సెం.మీ

5. ఒక సమఘనము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యం 2400 సెం.మీ^{2} అయిన దాని ప్రక్కతల వైశాల్యంను కనుగొనుము.

6. సమఘనాకారంలో ఉండే ఒక పెట్టె భుజము పొడవు 6.5 మీ ఆ పెట్టె బాహ్య మొత్తం వర్ణము పూయుటకు ఒక చ.మీటరుకు అయ్యే ఖర్చు ₹ 24 అయిన మొత్తం అయ్యే ఖర్చును కనుగొనుము.

7. 4 సెం.మీ భుజముగల ఒకే విధంగా గల రెండు ఘనములను ఒకదానితో ఒకటి కలిపిన అది దీర్ఘఘనమగును. అయిన ఆదీర్ఘ ఘనముయొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యం మరియు ప్రక్కతల వైశాల్యమును కనుగొనుము.

7.5 దీర్ఘ ఘనము మరియు సమఘనము యొక్క ఘనపరిమాణం



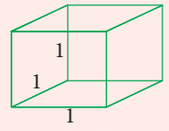
50 మి.లీ మరియు 100 మి.లీ కొలత గల ఐస్‌క్రీములను అందరూ రుచి చూసిన వాళ్ళమే. అటువంటి 100 మి.లీ ఐస్‌క్రీము కప్పు ఒకటి తీసుకొనుము. అంటే ఆ కప్పు యొక్క సామర్థ్యము లేక ఘనపరిమాణం 100 మి.లీ ఇటువంటి 100 మి.లీ కొలత గల కప్పులు ఎన్ని చేరి ఒక కూజాను నింపగలదు. అది 10 కప్పులు చేరి ఆకూజాను నింపగలదు అయితే ఆ కూజా సామర్థ్యం లేక ఘనపరిమాణం ఒక లీటరు అగును $\left(10\times100\text{మి.లీ}=1000\text{మి.లీ}=1\text{లీ}\right)$ మరియు ఇటువంటి కూజాలు ఎన్ని ఒక బకెట్‌ను నింపగలదు. ఇదియే ఆ బకెట్ ఈ యొక్క సామర్థ్యం లేక ఘనపరిమాణం. ఇదేవిధంగా మనము ఏ ఒక్క వస్తువు యొక్క సామర్థ్యం లేక ఘనపరిమాణమును కనుగొనవచ్చును.

ఒక త్రిపరిమాణ ఘనము ఎంత స్థలమును ఆక్రమిస్తుందో అదే ఆ ఘనము యొక్క ఘనపరిమాణం అగును. ఘన సెంటీమీటరు (సెం.మీ^{3}) మరియు ఘన మీటరు (మీ^{3}) అనేవి ఘనపరిమాణమును కొలుచుటకు ఉపయోగపడును.

సూచన

యూనిట్ ఘనం:

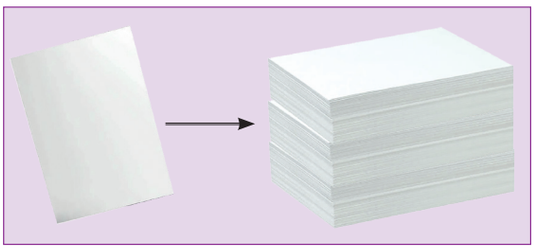
ఒక ఘనచతురస్ర భుజం 1 యూనిట్‌గా ఉన్న దానిని యూనిట్ ఘనము అందురు.



పటం 7.17

దీనిని నిత్య జీవితంలో ఏ విధంగా ఉపయోగిస్తామని ఒక ఉదాహరణ ద్వారా సులభంగా అర్థం చేసుకోవచ్చు. మీరు A4 కాగితపు కట్టను చూసి ఉంటారు. దానిలో ఒక్కొక్క కాగితము దీర్ఘచతురస్రాకారంలో ఉండును. మరియు $(=lb)$ వైశాల్యంతో దీనిని ఒక దాని మీద ఒకటి ఉంచినప్పుడు ఇది దీర్ఘఘనాకారంగా మారును. ఇక్కడ h రెట్లు lb అనేది దీర్ఘఘనమును ఏర్పరచును..

7 Mensuration.indd 275 11-03-2023 15:15:11



పటం. 7.18

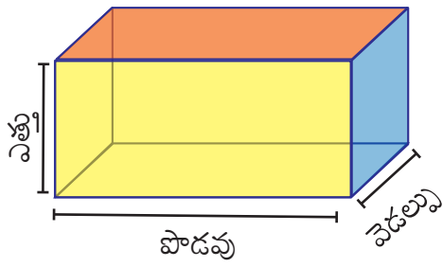
7.5.1 దీర్ఘ ఘనము యొక్క ఘనపరిమాణము

ఒక దీర్ఘ ఘనము యొక్క పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తు క్రమముగా l, b . మరియు h అయిన

దీర్ఘఘనఘన పరిమాణము

V = (దీర్ఘఘన భూవైశాల్యము) $\times$ ఎత్తు

$= (l \times b) \times h$ = ఘన ప్రమాణములు.



పటం. 7.19

సూచన

దీర్ఘఘనములోని ఘనపరిమాణంను కనుగొనుటకు పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తు కొలతలు ఒకే ప్రమాణములో ఉండాలి.

ఉదాహరణ 7.9 ఒక దీర్ఘ ఘనము యొక్క పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తుల క్రమముగా 120మి.మీ, 10సెం.మీ. మరియు 8సెం.మీ. ఇదే కొలతలు గల 10 దీర్ఘఘనముల ఘనపరిమాణం కనుగొనుము.

సాధన

ఇక్కడ వెడల్పు మరియు ఎత్తులు సెం.మీలలో ఇచ్చియున్నారు. అందువల్ల పొడవును కూడా సెం.మీ.లలో మార్చుకోవాలి.

$l = 120$ మి.మీ $= \frac{120}{10} = 12$ సెం.మీ మరియు $b = 10$ సెం.మీ, $h = 8$ సెం.మీ

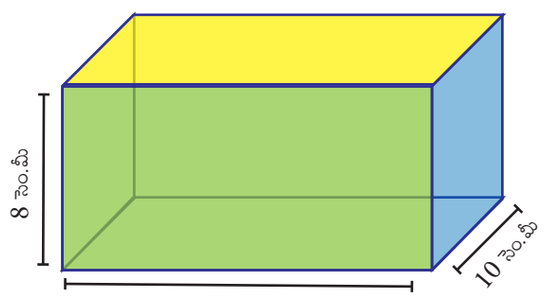
ఒక దీర్ఘఘన ఘనపరిమాణం $= = l \times b \times h$

$= 12 \times 10 \times 8$

$= 960$ సెం.మీ^{3}

10 దీర్ఘఘనముల ఘనపరిమాణం $= 10 \times 960$

$= 9600$ సెం.మీ^{3}



పటం. 7.20

7 Mensuration.indd 276 11-03-2023 15:15:14

ఉదాహరణ 7.10 ఒక దీర్ఘ ఘనము యొక్క పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తుల నిష్పత్తి 7:5:2 మరియు దాని ఘనపరిమాణం 35840 సెం.మీ^{3} అయిన దాని భుజముల కొలతలు కనుగొనుము.

సాధన

దీర్ఘ ఘనము భుజముల కొలతలు

$l = 7x,\ b = 5x$ మరియు $h = 2x.$

ఇక్కడ దీర్ఘఘన ఘనపరిమాణం= 35840 సెం.మీ^{3}

$$l \times b \times h = 35840$$

$$(7x)(5x)(2x) = 35840$$

$$70x^3 = 35840$$

$$x^3 = \frac{35840}{70}$$

$$x^3 = 512$$

$$x = \sqrt[3]{8 \times 8 \times 8}$$

$$x = 8 \text{ సెం.మీ,}$$

దీర్ఘ ఘనము పొడవు $= 7x = 7 \times 8 = 56$ సెం.మీ

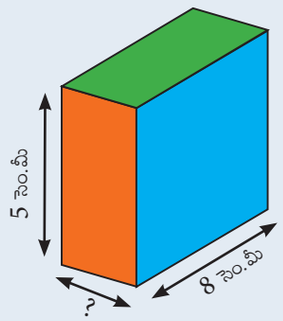
దీర్ఘ ఘనము వెడల్పు $= 5x = 5 \times 8 = 40$ సెం.మీ

దీర్ఘ ఘనము ఎత్తు $= 2x = 2 \times 8 = 16$ సెం.మీ

మెదడుకు మేత

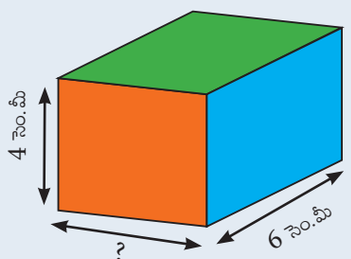
క్రింద ఇచ్చిన ప్రతి దీర్ఘఘన ఘనపరిమాణము 120 సెం.మీ^{3} వదిలివేయబడిన కొలతలను కనుగొనగలమా?

(i)



పటం. 7.21

(ii)



పటం. 7.22

ఉదాహరణ 7.11 3.8మీ × 2.5మీ × 1.6మీ కొలతలు గల చేపల తొట్టి యందు ఎన్ని లీటర్లు నీరు పట్టును?



పటం. 7.23

సాధన

చేపల తొట్టి పొడవు l =3.8 మీ

చేపల తొట్టి వెడల్పు b =2.5 మీ

చేపల తొట్టి ఎత్తు h =1.6 మీ

చేపల తొట్టి ఘనపరిమాణం $= l \times b \times h$

$= 3.8 \times 2.5 \times 1.6$

$= 15.2\ m^3$

$= 15.2 \times 1000$ లీ ||

$= 15200$ లీ ||

సూచన

1సెం.మీ^{3} =1 మి.లీ,

1000 సెం.మీ^{3} = 1 లీ,

1 మీ^{3} = 1000లీ

7 Mensuration.indd 277 11-03-2023 15:15:20

ఉదాహరణ 7.12 22సెం.మీ × 18సెం.మీ × 10సెం.మీ కొలతలు గల స్వీట్ బాక్స్‌లను 1మీ × 88సెం.మీ × 63సెం.మీ కొలతలు గల అట్టపెట్టెలో ఎన్ని నింపవచ్చును?

సాధన

స్వీట్ బాక్స్ కొలతలు పొడవు (l) = 22సెం.మీ, వెడల్పు (b) = 18సెం.మీ, ఎత్తు (h) = 18 సెం.మీ

స్వీట్ బాక్స్ ఘనపరిమాణం $= l \times b \times h$

$= 22 \times 18 \times 10$ సెం.మీ^{3}



పటం. 7.24

అట్టపెట్టె కొలతలు

పొడవు (l) = 1.మీ= 100 సెం.మీ,
వెడల్పు (b) = 88సెం.మీ,

ఎత్తు (h) = 63 సెం.మీ.

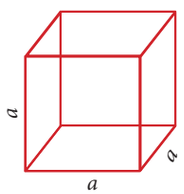
అట్టపెట్టె ఘనపరిమాణం $= l \times b \times h$

$= 100 \times 88 \times 63$ సెం.మీ^{3}

నింపబడిన స్వీట్ బాక్సుల సంఖ్య $= \frac{\text{అట్ట పెట్టె ఘనపరిమాణం}}{\text{స్వీట్ బాక్స్ ఘనపరిమాణం}}$

$= \frac{100 \times 88 \times 63}{22 \times 18 \times 10}$

$= 140$ పెట్టెలు



పటం. 7.25

7.5.2 సమఘనము యొక్క ఘనపరిమాణం

a అనేది సమఘనమ భుజము అయిన సమఘనము ఘనపరిమాణం కనుగొనుట చాలా సులభం. దీర్ఘ ఘనం యొక్క ఘనపరిమాణంలో $l = b = h = a$ అని ప్రతిక్షేపించిన సమఘనము ఘనపరిమాణం a^3 ఘన ప్రమాణాలు వచ్చును

ఒక సమఘనము భుజం 'a' ప్రమాణాలు అయిన దాని ఘనపరిమాణం $(V) = a^3$ ఘన ప్రమాణాలు

సూచన

ఏ రెండు సమఘనములకును కింద ఇచ్చిన ప్రవచనాలు సత్యమగును.

- తల వైశాల్యముల నిష్పత్తి = (భుజముల నిష్పత్తి)^2
- ఘనపరిమాణముల నిష్పత్తి = (భుజములు నిష్పత్తి)^3
- (తల వైశాల్యముల నిష్పత్తి)^3 = (ఘనపరిమాణాల నిష్పత్తి)^3

7 Mensuration.indd 278 11-03-2023 15:15:23

ఉదాహరణ 7.13 10 సెం.మీ భుజముగా గల ఘనము యొక్క ఘనపరిమాణం కనుగొనుము

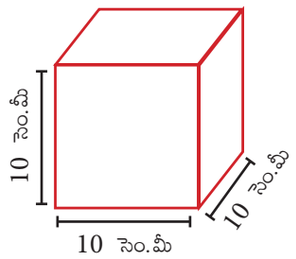
సాధన

ఇవ్వబడిన ఘన భుజము $(a) = 10$ సెం.మీ

ఘనము యొక్క ఘనపరిమాణం $= a^3$

$= 10 \times 10 \times 10$

$= 1000$ సెం.మీ^{3}



పటం. 7.26

ఉదాహరణ 7.14 ఒక సమఘనాకారంలో ఉన్న నీటి తొట్టెయందు 64,000 లీటర్ల నీరు పట్టును. అయితే ఆ తొట్టి యొక్క భుజము పొడవును మీటర్లలో తెలుపుము?

సాధన

'a' అనేది నీటి తొట్టె భుజము

నీటి తొట్టె ఘనపరిమాణం $= 64,000$ లీ

$$\text{i.e., } a^3 = 64,000 = \frac{64000}{1000} \quad [\text{since, } 1000 \text{ లీ} = 1 \text{ మీ}^3$$

$$a^3 = 64 \text{ మీ}^3$$

$$a = \sqrt[3]{64} \quad a = 4 \text{ మీ}$$

నీటి తొట్టె యొక్క భుజం పొడవు 4 మీటర్లు

ఉదాహరణ 7.15 లోహంతో తయారు చేయబడిన సమఘనము యొక్క భుజం 12 సెం.మీ దానిని కరిగించి 18 సెం.మీ పొడవు మరియు 16 సెం.మీ వెడల్పు గల ఒక దీర్ఘ ఘనంగా మార్చిన ఆ దీర్ఘఘనము ఎత్తును కనుగొనుము.

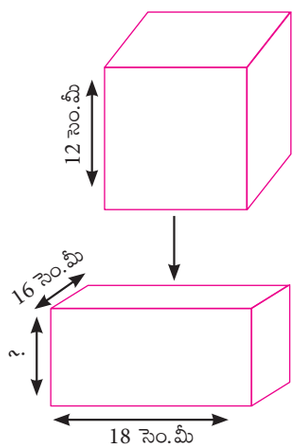
సాధన

సమఘనము	దీర్ఘ ఘనము
భుజము $(a) = 12$ సెం.మీ	పొడవు $(l) = 18$సెం.మీ
	వెడల్పు $(bv) = 16$సెం.మీ
	ఎత్తు $(h) = ?$

దీర్ఘఘన ఘనపరిమాణం = సమఘనము ఘన పరిమాణం

$$l \times b \times h = a^3$$

$$18 \times 16 \times h = 12 \times 12 \times 12$$



పటం. 7.27

7 Mensuration.indd 279 11-03-2023 15:15:29

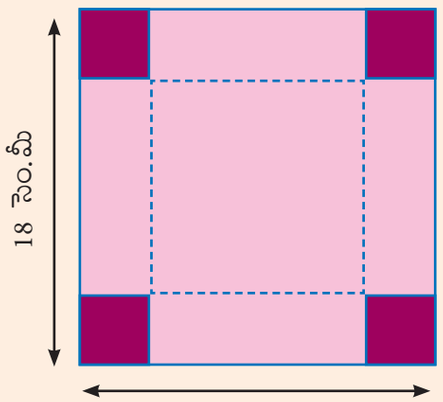
$$h = \frac{12 \times 12 \times 12}{18 \times 16}$$
$$h = 6 \text{ సెం.మీ.}$$

కావున దీర్ఘఘనము ఎత్తు =6 సెం.మీ.

కృత్యము

18సెం.మీ × 18సెం.మీ కొలతలు గల ఒక చతురస్రాకార చార్ట్ పేపరును తీసుకొనుము. దాని ఒక్కొక్కమూల యందు ఒకే కొలత గల చతురస్రాకారాలను కత్తిరించుము. తరువాత పేపర్‌లో ఉన్న మడత ద్వారా మడచి దీర్ఘఘనాకార పెట్టెను చేయుము. తరువాత ఒక్కొక్క దీర్ఘ ఘన పెట్టె కొలతలను ఇవ్వబడిన పట్టికలో గుర్తించుము. మరియు ఒక్కొక్క పెట్టె యొక్క ఘనపరిమాణములను కనుగొని పట్టికలో గుర్తించుము. ఒక్కొక్కసారి తొలగించవలసిన చతురస్ర భుజాల కొలతలు ఇవ్వబడియున్నది

మూలలో ఉన్న చతురస్రం యొక్క భుజం	పెట్టె కొలతలు			ఘనపరిమాణం
	l	b	h	V
2 సెం.మీ				
3 సెం.మీ				
4 సెం.మీ				
5 సెం.మీ				



పటం. 7.28

పైన ఇచ్చిన పట్టికను చూసి క్రింది వానికి జవాబులు ఇమ్ము?

(i) ఇక్కడ మనకు లభించే గరిష్ఠ ఘనపరిమాణం ఏది?

(ii) ఈ గరిష్ఠ ఘనపరిమాణము వచ్చు మూలయందు తొలగించవలసిన చతురస్రపు భుజము కొలత ఎంత??

అభ్యాసము 7.3

1. కింద ఇవ్వబడిన కొలతలతో దీర్ఘ ఘన ఘనపరిమాణమును కనుగొనుము?

   (i) పొడవు = 12 సెం.మీ, వెడల్పు = 8 సెం.మీ, ఎత్తు = 6 సెం.మీ

   (ii) పొడవు = 60 మీ, వెడల్పు = 25 మీ, ఎత్తు = 1.5 మీ

2. ఒక అగ్గిపెట్టె కొలతలు 6సెం.మీ×3.5సెం.మీ×2.5సెం.మీ గా కలదు. ఇదే కొలతలతో 12 అగ్గిపెట్టెలు కలిగిన ఒక ప్యాకెట్టు యొక్క ఘనపరిమాణమును కనుగొనుము?

3. చాక్లెట్ పెట్టె యొక్క పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తులు వరుసగా 5:4:3 అనే నిష్పత్తిలో కలదు. దాని ఘనపరిమాణం 7500సెం.మీ^{3} అయిన దాని పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తులను కొనుగొనుము?

7 Mensuration.indd 280 11-03-2023 15:15:29

4. ఒక కొలను యొక్క పొడవు, వెడల్పు మరియు లోతు వరుసగా 20.5మీ, 16మీ మరియు 8మీ అయిన ఆ కొలనులో పట్టు నీటి సామర్థ్యమును లీటర్లలలో కనుగొనుము?

5. ఒక ఇటుక యొక్క కొలతలు 24సెం.మీ×12సెం.మీ×8సెం.మీ అయిన 20మీ పొడవు, 48సెం.మీ వెడల్పు మరియు 6 మీ ఎత్తుగల గోడను కట్టుటకు కావలసిన ఇటుకలను కనుగొనుము?

6. ఒక పాత్ర యొక్క ఘనపరిమాణం 1440మీ^{3} అయిన ఆ పాత్ర యొక్క పొడవు మరియు వెడల్పులు వరుసగా 15 మీ మరియు 8 మీ గా ఉన్నచో పాత్ర ఎత్తును కనుగొనుము?

7. కింద ఇవ్వబడిన సమఘనము యొక్క భుజముల నుండి సమఘనము యొక్క ఘనపరిమాణములను కనుగొనుము? (i) 5 సెం.మీ (ii) 3.5 మీ (iii) 21 సెం.మీ.

8. ఒక సమఘనాకారంలో గల పాల ట్యాంకులో125000 లీటర్ల ఘనపరిమాణం గల పాలు పట్టును. అయితే ఆ ట్యాంకు యొక్క భుజమును మీటర్లలో కనుగొనుము.

9. 15 సెం.మీ భుజము గల ఒక లోహ ఘనమును కరిగించి దీర్ఘఘనముగా చేసెను. ఆ దీర్ఘఘనం యొక్క పొడవు, ఎత్తులు వరుసగా 25 సెం.మీ మరియు 9 సెం.మీ అయిన వెడల్పును కనుగొనుము

అభ్యాసము 7.4

బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు

FH14J

1. 15సెం.మీ, 20సెం.మీ మరియు 25సెం.మీ భుజములు గల త్రిభుజపు అర్ధ చుట్టుకొలత
(1) 60 సెం.మీ (2) 45 సెం.మీ (3) 30 సెం.మీ (4) 15 సెం.మీ

2. ఒక త్రిభుజము యొక్క భుజములు 3సెం.మీ, 4సెం.మీ మరియు 5సెం.మీ అయిన వైశాల్యము
(1) 3 సెం.మీ^{2} (2) 6 సెం.మీ^{2} (3) 9 సెం.మీ^{2} (4) 12 సెం.మీ^{2}

3. సమభుజ త్రిభుజం యొక్క చుట్టుకొలత 30 సెం.మీ అయిన దాని వైశాల్యము
(1) $10\sqrt{3}$ సెం.మీ^{2} (2) $12\sqrt{3}$ సెం.మీ^{2} (3) $15\sqrt{3}$ సెం.మీ^{2} (4) $25\sqrt{3}$ సెం.మీ^{2}

4. 12సెం.మీ భుజము గల సమఘనము యొక్క ప్రక్కతల వైశాల్యము
(1) 144 సెం.మీ^{2} (2) 196 సెం.మీ^{2} (3) 576 సెం.మీ^{2} (4) 664 సెం.మీ^{2}

5. సమఘనము యొక్క ప్రక్కతల వైశాల్యం 600సెం.మీ^{2} అయిన సంపూర్ణతల వైశాల్యం
(1) 150 సెం.మీ^{2} (2) 400 సెం.మీ^{2} (3) 900 సెం.మీ^{2} (4) 1350 సెం.మీ^{2}

6. దీర్ఘఘనము కొలతలు 10సెం.మీ × 6సెం.మీ × 5సెం.మీ అయిన దాని సంపూర్ణతల వైశాల్యం
(1) 280 సెం.మీ^{2} (2) 300సెం.మీ^{2} (3) 360 సెం.మీ^{2} (4) 600 సెం.మీ^{2}

7. రెండు సమఘన భుజముల నిష్పత్తి 2 :3 అయిన దాని ఉపరితల వైశాల్యముల నిష్పత్తి
(1) 4:6 (2) 4:9 (3) 6:9 (4) 16:36

7 Mensuration.indd 281 11-03-2023 15:15:31

8. దీర్ఘ ఘన ఘనపరిమాణం 660సెం.మీ^{3} మరియు ఆధార వైశాల్యం 33సెం.మీ^{2} అయిన దాని ఎత్తు
(1) 10 సెం.మీ (2) 12 సెం.మీ (3) 20 సెం.మీ (4) 22 సెం.మీ

9. 10 మీ×1.5మీ× కొలతలు గల ఒక నీటి తొట్టె సామర్థ్యము
(1) 75 లీ (2) 750 లీ (3) 7500 లీ (4) 75000 లీ

10. 5మీ×3మీ×2మీ కొలతలు గల ఒక గోడను నిర్మించుటకు 50సెం.మీ×30సెం.మీ×20సెం.మీ కొలతలు గల ఇటుకలు ఎన్ని అవసరం అగును.
(1) 1000 (2) 2000 (3) 3000 (4) 5000

గుర్తించుకోవలసిన విషయములు

- a, b మరియు c అనేవి త్రిభుజము యొక్క భుజములు అయిన ఆ త్రిభుజము యొక్క వైశాల్యము $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ చదరపు యూనిట్లు ఇక్కడ $s = \frac{a+b+c}{2}$.
- ఒక దీర్ఘ ఘనంలో పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తులు క్రమముగాl, b మరియు h అయిన

  (i) సంపూర్ణతల వైశాల్యము (TSA) $= 2(lb + bh + lh)$ చదరపు యూనిట్లు

  (ii) ప్రక్కతల వైశాల్యము(LSA) $= 2(l + b)h$ చదరపు యూనిట్లు

- ఒక సమఘనము యొక్క భుజము 'a' యూనిట్లు అయిన

  (i) సంపూర్ణతల వైశాల్యం(TSA) $= 6a^2$ చదరపు యూనిటు

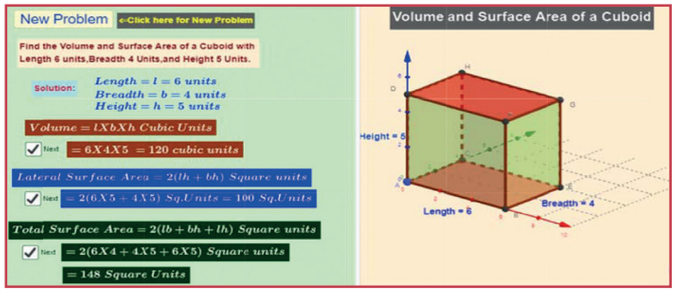
  (ii) ప్రక్కతల వైశాల్యం(LSA) $= 4a^2$ చదరపు యూనిటు

- ఒక దీర్ఘ ఘనంలో పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తులు క్రమముగా l, b మరియు h అయిన దీర్ఘ ఘన ఘనపరిమాణము $(V) = lbh$ ఘనపు యూనిట్లు
- ఒక సమఘనము యొక్క భుజము 'a' యూనిట్లు అయిన సమఘనము యొక్క ఘనపరిమాణం $(V) = a^3$ ఘనపు యూనిట్లు.

7 Mensuration.indd 282 11-03-2023 15:15:35

అంతర్జాల కృత్యము

పటం నుండి ఆశించు ఫలితాలు చూడవచ్చు.



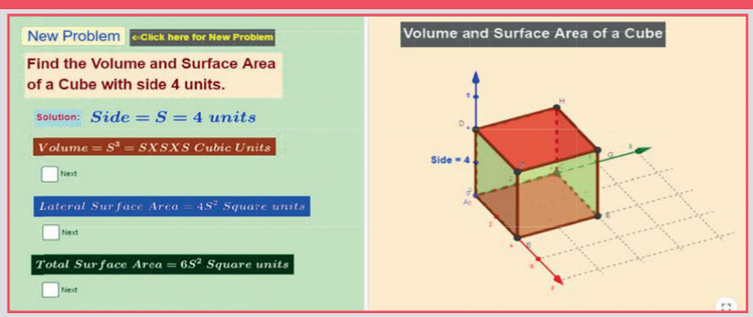
మెట్టు 1

బ్రౌజర్‌ను ఓపెన్ చేసి URL లింకును టైపు చేయము లేక QR కోడ్‌ను స్కాన్ చేసిన జియోజీబ్రా అనే వర్క్ షీట్లో "Mensuration" అని ఓపెన్ అగును. ఇక్కడ రెండు వర్క్‌షీట్లు ఉండను. మొదటిది CUBE.అని రెండవది CUBOID అని ఉండును.

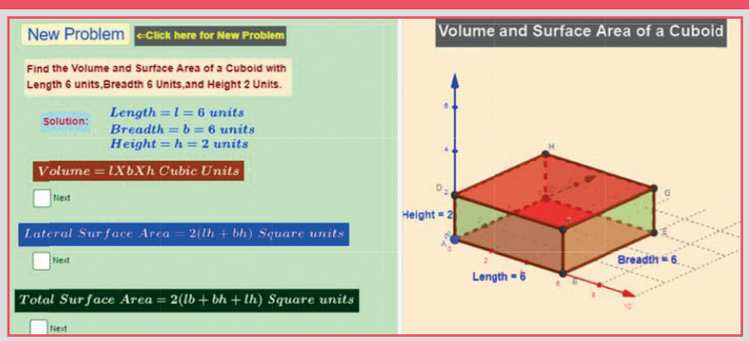
మెట్టు 2

"New Problem", వద్ద క్లిక్ చేసిన ఘనపరిమాణము, ఉపరితల వైశాల్యము, సంపూర్ణతల వైశాల్యము అని వచ్చిన Work out, వద్ద కిక్ చేసిన వచ్చిన జవాబును సరిచూసుకొనుము

మెట్టు 1



మెట్టు 2



Browse in the link

Mensuration: https://ggbm.at/czsby7ym or Scan the QR Code.

7 Mensuration.indd 283 11-03-2023 15:15:36

8

$$l+\frac{\left(\frac{N}{2}-m\right)}{f}\times c \qquad \bar{X}=\frac{\sum fx}{\sum f}$$



సాంఖ్యక శాస్త్రము

"సాంఖ్యక శాస్త్రమును సరిగ్గా అర్థము చేసుకోని యెడల అనుకూలంగా లేని యదార్థ విషయములు దాచి పెట్టబడియుండును." - Albert Bertilsson



Sir Ronald Aylmer Fisher
(1890 - 1962 A.D. (CE))

సర్ రొనాల్డ్ ఆయిల్మార్ ఫిషర్ ఒక ఆంగ్ల సాంఖ్యక శాస్త్రవేత్త మరియు జీవ శాస్త్రవేత్త. ఇతను ఆధునిక సాంఖ్యక శాస్త్రము మరియు ప్రయోగాత్మక ఆకృతి యొక్క తండ్రి అని పిలువబడెను. ఫిషర్ చేసిన ప్రయోగాత్మక వ్యవసాయ పరిశోధన మూలముగా వేల కొలది మందిని ఆకలి నుండి విముక్తి పొందిరి. ఆయనకు 1958లో లిన్నమన్ సంస్థచే ప్రధానము చేయబడు, లండన్ యొక్క గౌరవాత్మక డారివన్ వాలస్ పథకము ఇచ్చి గౌరవించిరి.

EPOUK

అభ్యసన ఫలితములు

- అంతకుముందే తెలిసిన సరాసరి యొక్క వేర్వేరు రకములను జ్ఞాప్తికి తెచ్చుకొనుట.
- అవర్గీకృత దత్తాంశము యొక్క సరాసరి, మధ్యగతము మరియు బాహుళకము కనుగొను పద్ధతులను జ్ఞాపకము చేసుకొనుట.
- వర్గీకృత దత్తాంశము యొక్క సరాసరి, మధ్యగతము మరియు బాహుళకమును కనుగొనుట.

8.1 పరిచయము:

సాంఖ్యక శాస్త్రమనునది దత్తాంశమును సేకరించి, విశ్లేశించి, పట్టిక పరచి పరిశోదించిన పిదప ఆ విషయాలకు వివరణ పొంది, తగిన నిర్ణయములను తీసుకొను విజ్ఞాన శాస్త్రమగును. మన దైనందిన జీవితములో మనం ఎన్నో పరిమాణాత్మక మరియు ప్రమాణాత్మక సమాచారమును ఎరుర్కొనెదుము. అవి మన జీవితముపై చాలా ప్రభావమును చూపును

"దత్తాంశము' అనేది సాంఖ్యక శాస్త్రము యొక్క ప్రాథమిక ఆధారమగును. దత్తాంశము అనునది సేకరించబడిన సంఖ్యాత్మక నిజ సమాచారమగును. మనం దత్తాంశమును కొన్ని నిర్ణయాలు తీసుకొనుటకు గాను విశ్లేషించెదము.

8-Stats.indd 284 04-03-2023 18:23:44

ఆ విదంగా నిర్ణయాలు తీసుకొనుటకు సాంఖ్యక శాస్త్ర పద్ధతులు మనకు ఒక పరికరముగా యుండును

క్రికెట్ సమాచారము

Team U19	ఆటలు	గెలిచినవి	ఓడినది	డ్రా
ఇండియా	71	52	18	0/1
ఆస్ట్రేలియా	67	50	15	0/2
పాకిస్థాన్	69	50	19	0/0
బంగ్లాదేశ్	64	45	17	1/1
వెస్టిండీస్	71	44	27	0/0
దక్షిణాఫ్రికా	61	43	17	0/1
ఇంగ్లాండ్	69	40	28	0/1
శ్రీలంకా	68	36	31	0/1
న్యూజిలాండ్	66	30	35	0/1
జింబాబ్వే	62	28	34	0/0
ఐర్లాండ్	49	16	32	1/0
ఆఫనిస్థాన్	24	11	13	0/0
నమీబియా	47	9	37	1/0
కెన్యా	17	5	12	0/0
కెనడా	29	4	23	1/1
PNG	41	3	38	0/0

వినియోగదారులు సంతృప్తి సర్వే

హోటల్ తమిళనాడు

మా సేవ మీకు ఎలాంటి తృప్తి నిచ్చినదని తెలపండి.

- చాలా తృప్తి
- తృప్తి
- తటస్థము
- తృప్తి లేదు
- ఘోరం

ఇండియా యొక్క **2018 GDP** అంచనా

UN	7.2%
IMF	7.4%
World Bank	7.3%
Morgan Stanley	7.5%
Moody's	7.6%
HSBC	7%
Bank of America	7.2%
Merill Lynch	7.5%
Goldman Sachs	8%

8.2 దత్తాంశ సేకరణ

ప్రాథమిక దత్తాంశము మనం స్వయంగా నేరుగా సేకరించు సమాచారమును. ప్రాథమిక దత్తాంశము అందురు. ప్రాథమిక దత్తాంశమును ముఖాముఖి ద్వారా గాని పోను ద్వారా, ఇమెయిల్ ద్వారా గాని, ప్రయోగములు జరిపి సేకరణ చేయవచ్చు.

గౌణ దత్తాంశము; వేరొకరు సేకరించిన దత్తాంశము నుండి తీసుకొను దత్తాంశమును ద్వితీయ దత్తాంశము అందురు. ఉదాహరణకు ప్రభుత్వము ప్రకటించిన సాంఖ్యక విలువలు, పరిశోదనా ఫలితముల నుండి పొందిన నివేదిక నుండి పొందవచ్చును.

పురోగమన తనిఖీ

ప్రాథమిక దత్తాంశమును గుర్తించండి.

(i) వినియోగదారుల సర్వే
(ii) వైద్య క్షేమ పరిశోదనలు
(iii) ఆర్థిక భవిష్య అంచనాలు
(iv) పాఠశాల ఫలితములు
(v) రాజకీయ ఎన్నికల వివరాలు
(vi) వ్యాపార వివరాలు
(vii) విక్రయల వివరాలు
(viii) ధర నిర్ణయ వివరాలు

8.2.1 వాస్తవ అంశాలను వరుసపరచుట

ప్రారంభ స్థితిలో మనం సేకరించు దత్తాంశము అనుకూల యోగ్యముగా యుండదు. దీనిని ముడి దత్తాంశము అందురు. మనచే విశ్లేషింపబడుటకు అవి అనుకూల యోగ్యముగా యుండవు.

కృత్యము - 1

దత్తాంశములను కలిగియున్న పటములు, పట్టికలు, సంఖ్యలు మొదలగు వానిని కలిగియున్న ఆల్బమ్‌ను తయారించి, అని దైనందిన జీవన సందర్భముతో ఎట్లు ముడిపడినచో వివాదంచెదము.

ఉదాహరణకు; ఒక పరీక్షలో విద్యార్థులు గణితములో పొందిన మార్కుల వివరములు క్రింది విదముగా ఇవ్వబడినది.

61 60 44 49 31 60 79 62 39 51 67 65 43 54 51 42
52 43 46 40 60 63 72 46 34 55 76 55 30 67 44 57
62 50 65 58 25 35 54 59 43 46 58 58 56 59 59 45
42 44

8-Stats.indd 285 04-03-2023 18:23:45

ఈ దత్తాంశము, నుండి మొదటి 5 గరిష్ఠ మార్కులను గుర్తించుట సులభమైన పనియా? వాటిని మీరు వెదుకవలెను. ఒక వేళ మీకు మూడవ గరిష్ఠ మార్కులు కనుగొనుట ఇంకను క్లిష్ట తరమగును. ఒక వేళ 56 మార్కుల కంటె తక్కువ ఎంత మంది పొందినారని తెలుసుకోవలెనన్న ఇంకను కొంత సమయము తీసుకొనును.

ఇవ్వబడిన మార్కులను వరుసపరచి వ్రాసినచో మన పని సులభతరమగును.

చిన్న చిన్న కష్టములకు తర్వాత గరిష్ఠ మార్కులు 79 అనియు కనిష్ఠ మార్కులు 25 అనియు మన తెలుసుకొన వీలగును. ఈ మార్కులను మనకు **అనుకూలముగా తరగతులుగా విభజించి,** ఒక్కొక్క మార్కును తగిన ఆ తరుగతిలో వ్రాయవచ్చును. వాటిని ఏవిధంగా వ్రాయవచ్చునని కింది మాదిరిని పరిశీలించుము.

తరుగతి అంతరము	మార్కులు
25-30	30, 25
31-35	31, 34, 35
36-40	39, 40
41-45	44, 43, 42, 43, 44, 43, 45, 42, 44
46-50	49, 46, 46, 50, 46
51-55	51, 54, 51, 52, 55, 55, 54
56-60	60, 60, 60, 57, 58, 59, 58, 58, 56, 59, 59
61-65	61, 62, 65, 63, 62, 65
66-70	67, 67
71-75	72
76-80	79, 76

ఈ పట్టిక నుండి పై ప్రశ్నలకు సులభముగా జవాబులివ్వ వీలగునా? 56 కంటె తక్కువ మార్కులు పొందిన వారెందరు? అను ప్రశ్నకు జవాబును కనుగొనుటకు మొత్తం మార్కులను పరిశీలించనవసరం లేదు. మీకు కావలసినది "ఎంత మంది?" అను దానికి జవాబు మాత్రమే కావాలి. ఇటువంటి ప్రశ్నలకు జవాబునిచ్చుటకు ఈ పట్టికలో ఒక్కొక్క తరగతిలోను ఉన్నవారు ఎంత మంది అని సూక్ష్మంగా గుర్తించిన చాలును. ఈ పట్టికను ఇంకను ఉపయోగకరంగా ప్రక్క కనబరచిన విధంగా సరళంగా వరుస పరుచవచ్చును.

తరుగతి అంతరము	పద ముల సంఖ్య
25-30	2
31-35	3
36-40	2
41-45	9
46-50	5
51-55	7
56-60	11
61-65	6
66-70	2
71-75	1
76-80	2

ఈ పట్టిక మనకు ఒక్కొక్క తరగతి అంతరములను ఎన్ని అంశములు ఉన్నవనుటను చూపుచున్నవి. ఒక్కొక్క తరగతికి ఎదురుగానున్న సంఖ్య ఆ తరగతిలో గల అంశముల సంఖ్యను సూచించును. ఈ సంఖ్యను ఆ తరగతి యొక్క పౌన:పున్యము అందురు. ఈ పట్టికను పౌన:పున్య పట్టిక అందురు.

పౌన:పున్య సంఖ్యను లెక్కించుటకు మనం నిలువు గీత గుర్తులను ఉపయోగించెదము. (ఈ నిలువ వరుసలో ఒక్కొక్క తరగతికి ఎదురుగా మార్కులను

8-Stats.indd 286 04-03-2023 18:23:45

వ్రాయడానికి బదులుగా ఒక నిలువు గీతను ఉంచెదము) ఉదాహరణకు 31–35 అను తరగతికి ఎదురుగా మార్కులైన 31,34,35 అని వ్రాయక 𝍸 అని గుర్తించెదము అట్లైనచో 56–60 అను తరుగతి 𝍸𝍸, అని వ్రాయవలెను కదా. ఈ అయోమయం నివారించుటకు ఒక్కొక్క ఐదవ నిలువ గీతను ఇంతకు ముందే ఉంచిన నాలుగు నిలువ గీతలకు అడ్డముగా 𝍸 ఉండునట్లు గుర్తించెదము. ఉదాహరణకు పదకొండు అను సంఖ్యను సూచించుటకు 𝍸 𝍸 । అని వ్రాయవలెను. ఈ విధంగా వ్రాసినచో పైనున్న వివరణ పటమునకు గల పౌన:పున్య పట్టికను క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చును.

తరగతి అంతరము	గణన చిహ్నాలు	పౌన:పున్యము
25-30	𝍸	2
31-35	𝍸	3
36-40	𝍸	2
41-45	𝍸 𝍸	9
46-50	𝍸	5
51-55	𝍸 𝍸	7
56-60	𝍸 𝍸 ।	11
61-65	𝍸 ।	6
66-70	𝍸	2
71-75	।	1
76-80	𝍸	2
	మొత్తం	**50**

సూచన

ఏదైన ఒక తరగతిని తీసుకొనుము 56–60 అని తీసుకున్నచో 56 అనునది తరగతి యొక్క దిగువ హద్దు, 60 అనునది ఎగువ హద్దు అని చెప్పబడును.

పురోగమన తనిఖీ

కింద ఇవ్వబడిన వాటికి పౌనఃపున్య పట్టికను తయారుచేయుము.

23	44	12	11	45	55	79	20
52	37	77	97	82	56	28	71
62	58	69	24	12	99	55	78
21	39	80	65	54	44	59	65
17	28	65	35	55	68	84	97
80	46	30	49	50	61	59	33
11	57						

8.3 కేంద్రీయ స్థాన విలువలు

నిత్య జీవితంలో మనకు ఇవ్వబడిన ఒక సమాచారమునకైన ప్రమాణమును గుర్తించుట చాలా ముఖ్య మగును. ఒక పరిశోధకుడు తన పరిశోధనలో ప్రజలు సరాసరి రోజుకు మూడు గంటల సమయం దూరదర్శిని ధారావాహినులను చూసెదరని చెప్పినచో, ఒక్కొక్కరూ మూడు గంటల కంటె ఎక్కువ కాలమును మరి కొంత మంది మూడు గంటల కంటె తక్కువ కాలము చూడవచ్చును. సరాసరి అనునది ఇవ్వబడిన సమాచారములో "దూరదర్శిని దారావాహిక చూచుట" అను దానిని అందరిచే ఆమోదించబడిన ఒక సూచిక (కొలత) అగును.

సరాసరి అనునది ఒక ఎక్కువ మొత్తములో గల దత్తాంశమును ఒక చిన్న ప్రత్యేవ విలువకు కుదించి చూపును.మరియు ఆ ప్రత్యేక విలువను ఆధారము చేసుకొని నిజ సమాచారములో కొన్ని వ్యత్యాసములుండును. సరాసరి అనే పదం యొక్క అర్థానికి సామాన్య ప్రజా దృష్టిలో, గణిత శాస్త్రవేత్తల దృష్టిలో వేర్వేరుగా ఉండును. సరాసరిని మూడు రకాలుగా వర్గీకరింపబడినవి అవి ఏమనగా అవి ఏవనగా, అంకమధ్యము, మధ్యగతము, బాహుళకము అనునవి అగును. ఇవి ఒక్కొక్కటిని వేర్వేరు పద్ధతి ద్వార పొందవచ్చును. ఈ మూడును వేర్వేరు సరాసరి విలువలనే ఇచ్చును. ఈ మూడు సరాసరి కొలతలు ఇవ్వబడిన సమాచారములో దేనిని సూచించును అనుటను, గణించుటలో ఏది మిక్కిలి సరియైనదిగా యుండును అనుటను వేరుపరిచి చూపుట మనకు చాలా అవసరమగును.

8-Stats.indd 287 04-03-2023 18:23:45

8.4 అంకమధ్యమము

8.4.1 అంకమధ్యమము - ముడి దత్తాంశము

అన్ని విధములైనా సరాసరిలలోను సామాన్యముగా ఇవ్వబడిన దత్తాంశము యొక్క అంకమధ్యమమే చాలా ఎక్కువగా ఉపయోగపడుచున్నది. ఇది దత్తాంశముల మొత్తము దత్తాంశముల సంఖ్యచే భాగించగా వచ్చును.

ఉదాహరణకు ఒక క్రికెట్టు ఆటగాడు ఆడిన ఎనిమిది ఆటలలో పొందిన పరుగులు 25, 32, 36, 38, 45, 41, 35, మరియు 36. అని తీసుకొన్నచో ఆయన సరాసరిని ఈవిధంగా గణిచవచ్చును.

$$\bar{X} = \frac{\sum x}{n} = \frac{25 + 32 + 36 + 38 + 45 + 41 + 35 + 36}{8} = \frac{288}{8} = 36$$

దీనినే $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ అను విలువలు అయిన వాటి అంకమధ్యమము ($\bar{X}$ అని చదువవలెను) క్రింద విధంగా మనము వ్రాయవచ్చును.

$$\bar{X} = \frac{\text{రాశుల మొత్తం}}{\text{రాశుల సంఖ్య}} \qquad \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

ఈ సూత్రమును మనం ఈ విధంగా కూడా వ్రాయవచ్చును:

$$\bar{X} = \frac{\sum x}{n}$$

కొన్ని సమయములలో మన లెక్కను సులువుగా చేయుటకు ఒక ఉజ్జాయింపు విలువను అంకమధ్యమముగా తీసుకొని లెక్కను చేసెదము. ఆ ఉజ్జాయింపు విలువను ఉజ్జాయింపు అంకమధ్యమము అందురు. ఉదాహరణకు ముందు ఉదాహరణలో గల క్రికెట్ ఆటగాడు తీసిన పరుగుల సంఖ్యలో 38 అను విలువను మనం ఉజ్జాయింపు అంకమధ్యమముగా తీసుకొనెదము. తర్వాత ఉజ్జాయింపు అంకమధ్యమము నుండి ఒక్కొక్క విలువ ఎంత దూరములో ఉన్నది అను దానిని పట్టీకరించెదము.

సూచన

ఉజ్జాయింపు సరాసరి మన లెక్కను సులభతరం చేయవలెను. ఉజ్జాయింపు అంకమధ్యమముగా ఎన్నుకొను సంఖ్య దత్తాంశములో అన్ని విలువలకు దగ్గరగా యుండవలెను పైగా ఆ సంఖ్య ఇవ్వబడిన పట్టికలో నుండనవసరము లేదు.

$25-38 = -13,\ \ 32-38 = -6,\ \ 36-38 = -2,\ \ 38-38 = 0,$

$45-38 = 7,\ \ 41-38 = 3,\ \ 35-38 = -3,\ \ 36-38 = -2$

$$\text{వ్యత్యాసముల సరాసరి} = \frac{-13-6-2+0+7+3-3-2}{8} = \frac{-16}{8} = -2$$

ఇప్పుడు ఉజ్జాయింపు అంకమధ్యమముతో వ్యత్యాసముల సరాసరిని కూడిన మనకు సరియైన సరాసరి (అంకమధ్యమము) లభించును.

కాబట్టి సరియైన అంకమధ్యమము=ఉజ్జాయింపు అంకమధ్యమము + వ్యత్యాస అంకమధ్యమము

$$= 38 - 2 = 36\ .$$

పెద్ద విలువలలో కూడిన సంఖ్యలకు అంకమధ్యమము కనుగొనుటలో ఈ ఉజ్జాయింపు అంకమధ్య పద్ధతి చాలా ఉపయోగకరంగా యుండును.

8-Stats.indd 288 04-03-2023 18:23:46

8.4.2 అవర్గీకృత పౌన:పున్య విభాజనమునకు - అంకగణిత మధ్యమం

పాఠశాల క్రీడలలో పాల్గొన్న 12 విద్యార్థుల ఎత్తులు (సెం.మీలో) తీసుకొనెదము.

140, 142, 150, 150, 140, 148, 140, 147, 145, 140, 147, 145.

ఈ దత్తాంశములో సరాసరి ఎత్తును ఎట్లు కనుగొనవలెను.

దీనికి ఎన్నో మార్గములు గలవు.

(i) అన్ని విలువలను కూడి దానిని రాశుల సంఖ్యతో భాగించి పొందవచ్చును.

$$\frac{140+142+150+150+140+148+140+147+145+140+147+145}{12}=\frac{1734}{12}=144.5$$

(ii) ఉజ్జాయింపు అంకమధ్యమ పద్ధతిని ఉపయోగించి పొందవచ్చును. ఇచ్చట 141 అను విలువను ఉజ్జాయింపు అంకమధ్యమముగా తీసికొని క్రింది విధముగా అంకమధ్యమమును కనుగొనవచ్చును.

$$= 141+\frac{(-1)+(1)+(9)+(9)+(-1)+(7)+(-1)+(6)+(4)+(-1)+(6)+(4)}{12}$$

$$= 141+\frac{-4+46}{12} = 141+\frac{42}{12} = 141+3.5 = 144.5$$

(iii) ఈ మూడవ పద్ధతి అనునది అవర్గీకృత పౌన:పున్య విభాజనమునకు అంకమధ్యమము కనుగొను పద్ధతిని వివరించును. ఇచ్చట 140 అను విలువ 4 సార్లు వచ్చినది కాబట్టి 140 యొక్క పౌన:పున్యము 4. 142 అను విలువ ఒక్కసారే వచ్చినది కాబట్టి 142 యొక్క పౌన:పున్యము ఇలాగే మిగతా విలువలకు చూసినపుడు మనకు పౌన:పున్య పట్టిక లభించును.

ఎత్తులు (సెం.మీ లలో)	140	142	150	148	145	147
విద్యార్థుల సంఖ్య	4	1	2	1	2	2

ఇచ్చట 4 సార్లు 140 ఉన్నందు వల్ల దాని మొత్తము $140 \times 4 = 560$

ఇచ్చట 1 సారి 142 ఉన్నందు వల్ల దాని మొత్తము $142 \times 1 = 142$

ఇచ్చట 2 సార్లు 150 ఉన్నందు వల్ల దాని మొత్తము $150 \times 2 = 300$.

ఇలాగే మిగితా విలువలను కనుగొనవలెను.

ఈ దత్తాంశమును పట్టిక రూపంలో చూపగా

ఎత్తు (x)	పౌన:పున్యము (f)	fx
140	4	560
142	1	142
150	2	300
148	1	148
145	2	290
147	2	294
	12	1734

$$\text{అంకమధ్యమము} = \frac{\text{రాశుల మొత్తం}}{\text{రాశుల సంఖ్య}}$$

$$=\frac{1734}{12}=144.5 \text{ సెం.మీ}$$

8-Stats.indd 289 04-03-2023 18:23:47

ఈ పద్ధతి అన్ని దత్తాంశములకు అన్వయపరుచవచ్చును. ఇది ఇక సూత్రముగా ఏర్పడును. $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ అను n విలువల పౌన:పున్యము వరుసగా $f_1, f_2, f_3, \ldots f_n$ అయిన అంకమధ్యమము క్రింది విధముగా లభించును.

$$\bar{X} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \ldots + f_n x_n}{f_1 + f_2 + \ldots f_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{\sum fx}{\sum f}$$

సూచన

ఒక్కొక్క సోపానములోను గల అన్ని చిహ్నములు దేనిని సూచించునని పూర్తిగా అర్థము చేసుకొని దానిని చదువవలెను.

పై పద్ధతిని ఉజ్జాయింపు అంకమధ్య పద్ధతిలో చేయుటకు సాధ్యమగునా? ఇదిగో ఇలా ఒక ప్రయత్నం చేద్దాము.

(iv) ఉజ్జాయింపు అంకమధ్యమము 145 అనుకొనుము. ఇప్పుడు క్రింది పట్టికను తయారుచేసెదము.

ఎత్తు(x)	d = ఉజ్జాయింపు అంకమధ్యమము నుండి విచలనము	పౌన:పున్యము (f)	fd
140	140 – 145 = – 5	4	–20
142	142– 145 = – 3	1	– 3
150	150 – 145 = + 5	2	+10
148	148 – 145 = + 3	1	+ 3
145 (ఉజ్జాయింపు అంకమధ్యమము)	145 – 145 = 0	2	0
147	147 – 145 = + 2	2	+ 4
మొత్తము		$\sum f = 12$	$\sum fd = -23 + 17 = -6$

అంకమధ్యమము = ఉజ్జాయింపు అంకమధ్యమము + విచలనముల మొత్తము సరాసరి

$$= A + \frac{\sum fd}{\sum f} = 145 + \left(\frac{-6}{12}\right) = 145.0 - 0.5 = 144.5$$

గరిష్ఠ విలువలు గల సంఖ్యలకు అంకమధ్యమము కనుగొనుటకు ఈ ఉజ్జాయింపు అంకమధ్యమపద్ధతి చాలా సహాయకారిగా యుండును.

8-Stats.indd 290 04-03-2023 18:23:48

8.4.3 వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనమునకు – అంకమధ్యమం

ఒక దత్తాంశము వర్గీకృత దత్తాంశముగా ఉండవలెనన్నా అవి తరగతి అంతరములనుపయోగించి ఒక పౌనఃపున్య పట్టికగా యుండవలెను.

వయసు (సం॥లలో)	10-20	20-30	30 – 40	40 – 50	50 - 60
వినియోగదారుల సంఖ్య	80	120	50	22	8

పై పట్టిక యందు వేర్వేరు వయస్సు గల వినియోగదారుల సంఖ్యను చూపుచున్నది ఉదాహరణకు 120 మంది వినియోగదారులు 20–30 వయస్సుకు లోబడిన వారుగాయున్నారు. (వర్గీకృత పౌనఃపున్య పట్టిక తయారించినపుడు వైయుక్తిక దత్తాంశములో అదృశ్యమగును). అపుడు ఒక్కొక్క తరగతి అంతరముల ప్రతినిధిగా ఒక విలువ అవసరమగును. ఇది తరగతి యొక్క మధ్య విలువ అగును. మధ్య బిందువు లేక తరగతి బిందువు అనునది క్రింది సూత్రము మూలంగా లెక్కించబడును.

తరగతి మధ్య బిందువు $= \frac{UCL + LCL}{2}$,

UCL – అనునది తరగతి యొక్క ఎగువ హద్దు,, LCL – అనునది తరగతి యొక్క దిగువ హద్దు

వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనము యొక్క సరాసరిని (అంకమధ్యమము) క్రింది పద్ధతులలో ఏదైనా ఒక పద్ధతినుపయోగించి కనుగొనవచ్చును.

(i) ప్రత్యక్ష పద్ధతి (ii) ఉజ్జాయింపు అంకమధ్య పద్ధతి (iii) సోపాన విచలన పద్ధతి

ప్రత్యక్ష పద్ధతి

ప్రత్యక్ష పద్ధతినుపయోగించునపుడు అంకమధ్యమమును కనుగొనుటకు సూత్రము

$$\bar{X} = \frac{\sum fx}{\sum f}$$

ఇచ్చట x అనునది తరగతి అంతరము యొక్క మధ్య బిందువు మరియు f. అనునది ఆ తరగతి యొక్క పౌన పున్యము అగును.

మెట్లు

(i) ఒక్కొక్క తరగతి అంతరము యొక్క మధ్యబిందువును కనుగొని దానిని x అని గుర్తించుము.

(ii) ఈ మధ్య బిందువును తగిన తరగతి అంతరమును పౌనఃపున్యముతో గుణించి లబ్ధము fx ను కనుగొనుము.

(iii) $\sum fx$ ను పౌనఃపున్యము $\sum f$ తో భాగించిన, అంకమధ్యము లభించును.

8-Stats.indd 291 04-03-2023 18:23:51

ఉదాహరణ 8.1 ఒక నివాస ప్రాంతములో నివసించు ప్రజల సంఖ్యను వారి వయస్సు ఆధారముగా ఇవ్వబడినది. ఆ ప్రాంతములో నివసించు ప్రజల సరాసరి వయస్సును కనుగొనుము.

వయస్సు	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
ప్రజల సంఖ్య	2	6	9	7	4	2

సాధన:

వయస్సు	ప్రజల సంఖ్య (f)	మధ్య విలువ (x)	fx
0-10	2	5	10
10-20	6	15	90
20-30	9	25	225
30-40	7	35	245
40-50	4	45	180
50-60	2	55	110
	$\sum f = 30$		$\sum fx = 860$

సరాసరి= $\bar{X} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{860}{30} = 28.67$

నివాస ప్రాంతములో నివసించు ప్రజల సరాసరి వయస్సు $= 28.67$.

ఉజ్జాయింపు అంకమధ్యమ పద్ధతి

వర్గీకరించబడిన దత్తాంశము యొక్క మొత్త సరాసరిని ప్రత్యక్ష పద్ధతి ద్వారా వేగముగా కనుగొనుటను చూసితిమి. ఇవ్వబడిన దత్తాంశము అధిక సంఖ్యలో మొత్తం దత్తాంశమును దాని పౌన:పున్యమును గుణించి మరియు వాటిని కూడి విలువలను కనుగొనుట కఠినముగా ఉండేది కాకుండా తప్పులు జరుగుట మరియు ఎక్కువ సమయము తీసుకొనునట్లు ఉన్నది. ఈ విధమైన వర్గీకరించబడిన దత్తాంశమునకు ఉజ్జాయింపు అంకమధ్య పద్ధతి నుపయోగించి సరాసరి మొత్తమును కనుగొనవచ్చును.

మెట్లు

1. దత్తాంశములో ఏదైనా ఒక విలువను ఉజ్జాయింను సరాసరి (A) అని తీసికొనుము. ఆ విలువ తరగతి యొక్క మధ్యలోవున్న విలువగా ఉండిన బాగుగా ఉండును.
2. ప్రతి తరగతికి విచలనము $d = x - A$ ను కనుగొనుము
3. ప్రతి విచలనమును వాటికి చెందిన పౌన:పున్యము f తో గుణించిన తరువాత వచ్చు మొత్తము Σfd ని కనుగొనుము.
3. సూత్రమునుపయోగించి $\bar{X} = A + \frac{\sum fd}{\sum f}$ ను కనుగొనుము

8-Stats.indd 292 04-03-2023 18:23:52

ఉదాహరణ 8.2 క్రింది ఇవ్వబడిన దత్తాంశమునకు సరాసరిని కనుగొనుము.

తరగతి అంతరము	100-120	120-140	140-160	160-180	180-200	200-220	220-240
పౌనఃపున్యము	10	8	4	4	3	1	2

సాధన:

ఉజ్జాయింపు సరాసరి $A = 170$

తరగతి అంతరము	పౌనఃపున్యము f	మధ్య విలువ x	$d = x - A$ $d = x - 170$	fd
100-120	10	110	–60	–600
120-140	8	130	–40	–320
140-160	4	150	–20	–80
160-180	4	170	0	0
180-200	3	190	20	60
200-220	1	210	40	40
220-240	2	230	60	120
	$\sum f = 32$			$\sum fd = -780$

సరాసరి $\bar{X} = A + \frac{\sum fd}{\sum f}$

$= 170 + \left(\frac{-780}{32}\right)$

ఇక్కడ , $\bar{X} = 170 - 24.375$

$= 145.625$

సోపాన విచలన పద్ధతి

ఈ పద్ధతిలో సులభముగా సాధించుటకు విచలనము $x - A$ ను తరగతి అంతర పొడవు c తో భాగించగా(అనగా $\frac{x-A}{c}$) తరువాత c తో గుణించి సరాసరి కనుగొను సూత్రమును క్రింది విధంగా ఇవ్వబడినది.

$$\bar{X} = A + \left[\frac{\sum fd}{\sum f} \times c\right], \text{ ఇక్కడ } d = \frac{x - A}{c}$$

ఉదాహరణ 8.3 క్రింది విభాజనమునకు సోపాన విచలన పద్ధతి ద్వారా సరాసరిని కనుగొనుము.

తరగతి అంతరము	0-8	8-16	16-24	24-32	32-40	40-48
పౌనఃపున్యము (f)	10	20	14	16	18	22

8-Stats.indd 293 04-03-2023 18:23:52

సాధన

ఉజ్జాయింపు సరాసరి $A = 28$, తరగతి వెడల్పు c =8

తరగతి అంతరము	మధ్య విలువ x	పౌనఃపున్యము f	$d = \frac{x - A}{c}$	fd
0-8	4	10	–3	–30
8-16	12	20	–2	–40
16-24	20	14	–1	–14
24-32	28	16	0	0
32-40	36	18	1	18
40-48	44	22	2	44
		$\sum f = 100$		$\sum fd = -22$

సరాసరి $\bar{X} = A + \frac{\sum fd}{\sum f} \times c$

$= 28 + \left(\frac{-22}{100}\right) \times 8$

$= 28 - 1.76 = 26.24$

సూచన

- x_i మరియు f_i చిన్న విలువలుగా ఉండినపుడు ప్రత్యక్ష పద్ధతియే మంచిది.
- x_i మరియు f_i పెద్ద సంఖ్యలుగా ఉండిననపుడు ఉజ్జాయింపు అంకమధ్యమము పద్ధతి లేక సోపాన విచలన పద్ధతిని ఉపయోగించుము
- తరగతి అంతరము సమముగా లేకుండిన మరియు విలువ పెద్ద సంఖ్యగా ఉండిన మనము సోపాన విచలన పద్ధతిని ఉపయోగించుము

8.4.4 అంకమధ్యమము యొక్క ప్రత్యేక ధర్మము

1. అంకమధ్యము నుండి తీసుకొనబడిన విచలనముల మొత్తము సున్నాయగును.

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ అనునది n పదములు గల దత్తాంశము దాని అంకమధ్యము $\bar{X}$ అయిన

$\left(x_1 - \bar{X}\right) + \left(x_2 - \bar{X}\right) + \left(x_3 - \bar{X}\right) + \ldots + \left(x_n - \bar{X}\right) = 0$.కావున $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{X}) = 0$

2. దత్తాంశములోని ప్రతి పదమును k అను స్థిరాంకముచే హెచ్చించిన (కూడిన) లేక తగ్గించిన తీసివేసిన లభించు కొత్త సరాసరి స్థిరాంకము k యొక్క విలువలకు పెరుగును లేక తగ్గును.

3. దత్తాంశములోని ప్రతి చలరాశిని k, చే గుణించిన లేక భాగించిన, $k \neq 0$, వచ్చు కొత్త చలరాశి కూడా అదే k చే గుణించబడును లేక భాగింపబడును.

ఉదాహరణ 8.4 క్రింది ఇవ్వబడిన దత్తాంశములకు అంకమధ్యమము నుండి విచలన మొత్తమును కనుగొనుము

21, 30, 22, 16, 24, 28, 18, 17

8-Stats.indd 294 04-03-2023 18:23:53

సాధన

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{8} x_i}{n} = \frac{21+30+22+16+24+28+18+17}{8} = \frac{176}{8} = 22$$

అంకమధ్యమము $\bar{X}$ నుండి x యొక్క విచలనము $x - \bar{X}$ అగును.

విచలనమొత్తము

$= (21-22)+(30-22)+(22-22)+(16-22)+(24-22)+(28-22)+(18-22)+(17-22)$

$= 16-16 = 0.$ లేక $\sum(x - \bar{X}) = 0$

కావున అంకమధ్యము నుండి అన్ని పదముల విచలనముల మొత్తము సున్న అగునని తెలుసుకొనవచ్చును.

ఉదాహరణ 8.5 6 విలువల అంకమధ్యమము 45 మరియు ఒక్కొక్క విలువకు 4 కూడగా వచ్చు క్రొత్త అంకమధ్యమమును కనుగొనుము.

సాధన

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ అనునవి ఇవ్వబడిన విలువలు అయిన $\frac{\sum_{i=1}^{6} x_i}{6} = 45$

ఒక్కొక్క విలువకు 4 ను కూడగా వచ్చు అంకమధ్యమము

$$\text{A.M. } \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{6}(x_i+4)}{6}$$

$$= \frac{(x_1+4)+(x_2+4)+(x_3+4)+(x_4+4)+(x_5+4)+(x_6+4)}{6}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i + 24}{6} = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i}{6} + 4$$

$$\bar{X} = 45 + 4 = 49.$$

పురోగమన తనిఖీ

10 దత్తాంశముల సరాసరి 48 మరియు ఒక్కొక్క దత్తాంశమునకు 7ను తీసివేయగా వచ్చు కొత్త సరాసరి _____

ఉదాహరణ 8.6 7 విలువల అంకమధ్యమము 30 అనిన మరియు ఒక్కొక్క విలువను 3చే భాగించగా వచ్చు కొలత అంకమధ్యమమును (సరాసరి) కనుగొనుము.

సాధన

X అనునది $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ అను ఏడు రాశుల కల్గిన సమితి అనుకొనిన

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{7} x_i}{7} = 30 \text{ లేక } \sum_{i=1}^{7} x_i = 210$$

ఒక్కొక్క సంఖ్యను 3చే భాగించగా వచ్చు కొలత అంకమధ్యమము

$$\frac{\sum_{i=1}^{7} \frac{x_i}{3}}{7} = \frac{\left(\frac{x_1}{3}+\frac{x_2}{3}+\frac{x_3}{3}+\frac{x_4}{3}+\frac{x_5}{3}+\frac{x_6}{3}+\frac{x_7}{3}\right)}{7}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{7} x_i}{21} = \frac{210}{21} = 10$$

పురోగమన తనిఖీ

1. 12 దత్తాంశముల సరాసరి 20 ఒక్కొక్క దత్తాంశమును 6 చే గుణించిగా వచ్చు క్రొత్త సరాసరి .....
2. 30 సంఖ్యల సరాసరి 16 ఒక్కొక్క సంఖ్యను 4 చే భాగించగా వచ్చు క్రొత్త సరాసరి.

8-Stats.indd 295 04-03-2023 18:23:55

మరియొక్క పద్ధతి

Y అనునది X యొక్క ఒక్కొక్క విలువను 3చే భాగించిన వచ్చు విలువ అనిన $\bar{Y} = \frac{\bar{X}}{3} = \frac{30}{3} = 10.$

ఉదాహరణ 8.7 25 విద్యార్థుల సరాసరి మార్కులు 78.4. ఇచ్చట 96 మార్కును 69 అని తప్పుగా చదివినారని తెలుసుకునిరి, అయిన సరియైన విలువకు తగిన సరాసరి కనుగొనుము.

సాధన:

విద్యార్థుల సంఖ్య మరియు సరాసరి వరుసగా $n = 25, \bar{X} = 78.4$

సరికాని $\sum x = \bar{X} \times n = 78.4 \times 25 = 1960$

సరియైన $\Sigma x =$ సరికాని $\sum x -$ సరికాని విలువ $+$ సరియైన విలువ

$= 1960 - 69 + 96 = 1987$

సరియైన $\bar{X} = \frac{correct \sum x}{n} = \frac{1987}{25} = 79.48$

పురోగమన తనిఖీ

నాల్గు సంఖ్యలు ఇవ్వబడినది వాటిలో ఒక సంఖ్యను వదిలివేసిన మిగిలిన మూడు సంఖ్యల సరాసరి 45, 60, 65, లేక 70. అయిన 4 సంఖ్యల సరాసరి ఎంత?

అభ్యాసము 8.1

1. ఒక ప్రదేశములో గల వాతావరణ శీతోష్ణస్థితి ఒక వారములో 26°C, 24°C, 28°C, 31°C, 30°C, 26°C, 24°C. గా ఉన్నది. ఆవారంలో గల సరాసరి వాతావరణ శీతోష్ణస్థితిని కనుగొనుము.
2. ఒక కుటుంబములో గల నాల్గు సభ్యుల బరువుల సరాసరి 60 కి.గ్రా వారిలో ముగ్గురి బరువులు వరసగా 56 కి.గ్రా, 68 కి.గ్రా మరియు 72 కి.గ్రా అయిన 4వ సభ్యుని బరువును కనుగొనుము.
3. ఒక తరగతిలో గణిత శాస్త్రము పరీక్షలో 10 మంది విద్యార్థులు 75 మార్కులు, 12 మంది విద్యార్థులు 60 మార్కులు, 8 మంది విద్యార్థులు 40 మార్కులు మరియు 3 విద్యార్థులు 30 మార్కులు పొందిరి. అయిన వారు పొందిన మొత్తం సరాసరి మార్కులు ఎంత?
4. ఒక విజ్ఞాన ప్రయోగశాల యందు 6 క్యాన్సర్ వ్యాధి సోకిన ఎలుకలకు ప్రకృతి మందులను 10 రోజులకు ఇచ్చి పరిశోధించిరి.తరువాత వాటి క్యాన్సర్ గడ్డల పరిమాణము క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడినది

ఎలుకల సంఖ్య	1	2	3	4	5	6
క్యాన్సర్ గడ్డల పరిమాణము (మి.మీ^{3})	145	148	142	141	139	140

అయిన సరాసరిని కనుగొనుము?

8-Stats.indd 296 04-03-2023 18:23:59

5. క్రింది పట్టిక సరాసరి 20.2 అయిన p యొక్క విలువను కనుగొనుము?

మార్కులు	10	15	20	25	30
విద్యార్థుల సంఖ్య	6	8	p	10	6

6. ఒక తరగతిలోని విద్యార్థుల బరువులు తరగతి హాజరు పట్టికలో పొందుపరుచుటకై. తీయబడినది ఆ తరగతి విద్యార్థుల యొక్క సరాసరి బరువును ప్రత్యక్ష పద్ధతి ద్వారా కనుగొనుము.

బరువు (కి.గ్రా)	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65	65-75
విద్యార్థుల సంఖ్య	4	11	19	14	0	2

7. క్రింది విభాజనమునకు ఉజ్జాయింపు అంకమధ్య పద్ధతి ద్వారా సరాసరిని కనుగొనుము.

తరగతి అంతరము	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
పౌన:పున్యము	5	7	15	28	8

8. క్రింది విభాజనము ను సోపాన విచలన పద్ధతి ద్వారా అంకమధ్యమమును కనుగొనుము.

వయస్సు	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44
మనుష్యుల సంఖ్య	4	20	38	24	10	9

8.5 మధ్యగతము

దత్తాంశములో గరిష్ఠ దత్తాంశము యొక్క విలువను తగ్గించి, కనిష్ఠ దత్తాంశము యొక్క విలువను హెచ్చించి రెండింటిని సరిసమానముగాతీయు ప్రత్యేకమైన కేంద్రీకృత విలువ అంకమధ్యము అగును.

ఒక కార్యాలయములో పనిచేయు నలుగురి యొక్క ఆదాయములు వరుసగా ₹5000, ₹6000, ₹7000 మరియు ₹8000 అని తీసుకొనిన వారి యొక్క సరాసరి ఆదాయము $\frac{5000+6000+7000+8000}{4}$ ₹6500 అగును. అయిన 5 వ వ్యక్తిగా ఒకరు ₹ 29000 నెల ఆదాయముతో ఈ గ్రూపు నందు చేరినట్లైతే ఈ ఐదుగురి సరాసరి ఆదాయము $\frac{5000+6000+7000+8000+29000}{5} = \frac{55000}{5}$ = ₹11000 అగును. ఈ దత్తాంశము నుండి గ్రూపులో ఉన్న ఒక్కొక్కరి సరాసరి ఆదాయము ₹11000 అని చెప్పుటకు వీలగునా? ఇది సరికానిది కదా? ఇక్కడ ఉన్న సమస్య ఏమిటంటే గరిష్ఠ విలువ సరాసరిని భాదించును. పైగా అది సరాసరిని సామాన్య కేంద్రీకృత విలువ నుండి దూరమగుచున్నది.

ఈ విధమైన సంఘటనలో మనము వేరైనా సరాసరి రకమును ఎంచుకోవలసిన ఆవశ్యకత ఉన్నది.

ఆరోహణ లేదా అవరోహణ క్రమములో వ్రాయబడిన విలువలను రెండు సమ భాగములుగా విభజించు కేంద్రీకృత విలువను మధ్యగత కొలత (మధ్యగతము) అందురు.

8-Stats.indd 297 04-03-2023 18:24:00

ఉదాహరణకు ఒక తరగతిలో ఉన్న 9 మంది విద్యార్థుల యొక్క ఎత్తులు వరుసగా 122 సెం.మీ, 138 సెం.మీ, 124 సెం.మీ, 125 సెం.మీ, 135 సెం.మీ, 138 సెం.మీ, 140 సెం.మీ, 141 సెం.మీ, 147 సెం.మీ మరియు 161 సెం.మీ లుగా తీసుకొనుము.

(i) సాదారణ పద్ధతి ద్వారా సరాసరి 137 సెం.మీ అగును.

(ii) వాటి ఎత్తులను ఆరోహణ క్రమములో 122 సెం.మీ, 125 సెం.మీ, 135 సెం.మీ, 138 సెం.మీ, 140 సెం.మీ, 141 సెం.మీ, 147 సెం.మీ, 161 సెం.మీ, అని వ్రాయునపుడు 138 సెం.మీ అనునది రెండు వైపులా సమమైన విలువను కల్గియున్నట్లు చూడవచ్చును. ఆ విలువను ఆ దత్తాంశము యొక్క మధ్యగత విలువగా చెప్పవచ్చును.



(iv) ఒక దత్తాంశ సమూహములో 11 వస్తువులు ఒక వరుసలో అమర్చబడి ఉన్నట్లయితే దాని 6 వ వస్తువు మధ్యగత విలువ అగును. ఎందుకనగా ఆ వస్తువు మాత్రమే మధ్యలో ఉన్నది. దత్తాంశములో 101 వస్తువులున్నట్లైతే 51 వస్తువు మధ్యగత వస్తువు అగును.

ఒక దత్తాంశములో బేసి సంఖ్యలలో వస్తువులున్నట్లేతే మధ్యగతమును సులభముగా కనుగొనవచ్చును. దత్తాంశములోని రాశుల సంఖ్య n బేసి సంఖ్య అయిన $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ వ రాశి విలువ మధ్యగతమగును.

(v) ఒక దత్తాంశములో 6 సంఖ్యలు ఉన్నట్లెయిన ఏ విధంగా మధ్యగతమును కనుగొనవచ్చును? ఈ దత్తాంశములో రెండు మధ్య విలువుల సరాసరి ఆ దత్తాంశము యొక్క మధ్యగతము అగును.(3.5 వపదము అని తెల్పవచ్చునా?) ఒక దత్తాంశములో 100 మూలకములు (సంఖ్యల) ఉన్నట్లెయితే 50.5 వ మూలకము మధ్యగతమగును.

ఒక దత్తాంశములోని రాశుల సంఖ్య n సరిసంఖ్యయైన $\left(\frac{n}{2}\right)$ వ మరియు $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ వ రాశుల సరాసరి మధ్యగతమగును.

ఉదాహరణ 8.8 ఒక క్రికెట్ ఆటలో 11 మంది వీరులు తీసిన పరుగులు వరుసగా 7,21,45,12,56, 35,25,0,58,66,29. అయిన వారి మధ్యగత పరుగులు ఎంత?

సాధన

ఇవ్వబడిన సంఖ్యలను ఆరోహణ క్రమములో క్రింది విధముగా వ్రాయుము.

0,7,12,21,25,29,35,45,56,58,66

8-Stats.indd 298 04-03-2023 18:24:01

పదముల సంఖ్య = 11 (ఇది ఒక బేసి సంఖ్య)

$$\text{మధ్యగతము} = \left(\frac{11+1}{2}\right) \text{ వ పదము}$$

$$= \left(\frac{12}{2}\right) \text{ వ పదము} = 6 \text{ వ పదము} = 29$$

ఉదాహరణ 8.9 10, 17, 16, 21, 13, 18, 12, 10, 19, 22. గా గల అవర్గీకృత దత్తాంశము యొక్క మధ్యగతమును కనుగొనుము.

సాధన:

ఇవ్వబడిన సంఖ్యలను ఆరోహణ క్రమములో వ్రాసిన

10, 10, 12, 13, 16, 17, 18, 19, 21, 22.

పదముల సంఖ్య = 10

$$\text{మధ్యగతము} = \left(\frac{10}{2}\right) \text{ వ పదము మరియు } \left(\frac{10}{2}+1\right) \text{ వ పదముల సరాసరి}$$

$$= 5 \text{ వ పదము మరియు } 6 \text{ పదముల సరాసరి} = \frac{16+17}{2} = \frac{33}{2} = 16.5$$

ఉదాహరణ 8.10 క్రింది ఇవ్వబడిన పట్టిక నుండి గణిత శాస్త్రము మరియు సామాన్య శాస్త్రము నందు జరిగిన ప్రమాణ పరీక్షలను వ్రాసిన 12 విద్యార్థుల మార్కులు

మార్కులు (గణిత శాస్త్రములో)	52	55	32	30	60	44	28	25	50	75	33	62
మార్కులు (సామాన్య శాస్త్రములో)	54	42	48	49	27	25	24	19	28	58	42	69

ఏ పాఠములో విద్యార్థులు ఎక్కువ మార్కులు పొందియున్నారు.

సాధన

ఇవ్వబడిన రెండు మార్కులను ఆరోహణ క్రమములో వ్రాసిన

మార్కులు (గణిత శాస్త్రములో)	25	28	30	32	33	44	50	52	55	60	62	75
మార్కులు (సామాన్య శాస్త్రములో)	19	24	25	27	28	42	42	48	49	54	58	69

విద్యార్థుల సంఖ్య 12 కావున 6వ మరియు 7వ మార్కులు పొందిన విద్యార్థులు మార్కుల సరాసరి మధ్యగత విలువ అగును.

8-Stats.indd 299 04-03-2023 18:24:01

గణిత శాస్త్రము యొక్క మధ్యగతము $= \frac{44+50}{2} = 47$

సామాన్య శాస్త్రము యొక్క మధ్యగతము $= \frac{42+42}{2} = 42$

కావున గణిత శాస్త్రము యొక్క మార్కులు సామాన్య శాస్త్రము పాఠము యొక్క మార్కుల కంటే ఎక్కువని చెప్పవచ్చును.

8.5.1 మధ్యగతము – అవర్గీకృత పౌన:పున్య విభాజనము

(i) ఇవ్వబడిన విలువలను ఆరోహణ (లేదా) అవరోహణ క్రమములో వ్రాయుము.

(ii) సంచిత పౌన:పున్యములను వ్రాయుము వాటి మొత్త పౌన:పున్యము N అగును.

(iii) N అనునది బేసి సంఖ్యగా ఉండిన మధ్యగతము $= \left(\frac{N+1}{2}\right)$ వ పదము

(vi) N అనునది సరిసంఖ్య అయిన మధ్యగతము $= \left(\frac{\left(\frac{N}{2}\right)^{\text{th}} \text{ వ పదము} + \left(\frac{N}{2}+1\right)^{\text{th}} \text{ వ పదము}}{2}\right)$

ఉదాహరణ 8.11 కింది పట్టికకు మధ్యగతమును కనుగొనుము

ఎత్తు (సెం.మీ)	160	150	152	161	156	154	155
విద్యార్థుల సంఖ్య	12	8	4	4	3	3	7

సాధన

ఇవ్వబడిన దత్తాంశమును ఆరోహణ క్రమంలో క్రింది విధంగా వ్రాయుము

ఎత్తు (సెం.మీ)	విద్యార్థుల సంఖ్య (f)	సంచిత పౌన:పున్యము (cf)
150	8	8
152	4	12
154	3	15
155	7	22
156	3	25
160	12	37
161	4	41

ఇచ్చట $\mathbf{N = 41}$

మధ్యగతము $= \left(\frac{N+1}{2}\right)$ వ పదము $= \left(\frac{41+1}{2}\right)$ వ పదము $= 21$వ పదము యొక్క విలువ

8-Stats.indd 300 04-03-2023 18:24:02

41 విద్యార్థుల ఎత్తులను ఆరోహణ క్రమంలో వ్రాసినపుడు 21వ విద్యార్థి యొక్క ఎత్తు మధ్యగతంగా ఉండును. ఇతనికి ఇరుప్రక్కల 20 మంది ఉన్నారు కావున మనము 21వ విద్యార్థి యొక్క ఎత్తును కనుగొనవలసిన ఆవశ్యకత అగును. 15 విద్యార్థుల (సంచిత పౌన:పున్యము) 154 సెం.మీ ల ఎత్తునకు సమానంగాను లేదా తక్కువ గాను ఉన్నారు. 22 విద్యార్థులు (సంచిత పౌనఃపున్యము) 155 సెం.మీ. పొడవుకు సమానముగాను లేదా ఎక్కువగాను ఉన్నారు. దీని నుండి 21వ విద్యార్థి ఎత్తు 155 సెం.మీ అని తెలుసుకొనవచ్చును.

మధ్యగతము = 155 సెం.మీ

8.5.2 మధ్యగతము – వర్గీకృత పౌన:పున్య విభాజనము

వర్గీకృత పౌన:పున్యము నందు మధ్యగతము విలువ కట్టుటకు క్రింది సోపానములు తోడ్పడుచున్నది.

సోపానములు

(i) సంచిత పౌన:పున్య విభాజనములను నిర్మించుము

(ii) $\left(\frac{N}{2}\right)$ వ పదమును కనుగొనుము

(iii) సంచిత పౌన:పున్యము $\frac{N}{2}$ పదముగా కల్గిన తరగతి అంతరము మధ్యగత తరగతి అంతరము అందురు.

(iv) మధ్యగతము $= l + \frac{\left(\frac{N}{2} - m\right)}{f} \times c$ అను సూత్రమునుపయోగించి కనుగొనుము.

ఇచ్చట l = మధ్యగత తరగతి దిగువ హద్దు, f = మధ్యగత తరగతి యొక్క పౌన:పున్యము

c = మధ్యగత తరగతి అంతర పొడవు, N = దత్తాంశములోని అంకెల మొత్తము $\left(\sum f\right)$

m = మధ్యగత తరగతికి ముందు తరగతి సంచిత పౌనఃపున్యము.

ఉదాహరణ 8.12 కింది ఇవ్వబడిన 200 కుటుంబముల వారాంతపు ఖర్చుల మధ్యగతమును కనుగొనుము.

వారాంతర ఖర్చు (₹)	0-1000	1000-2000	2000-3000	3000-4000	4000-5000
కుటుంబముల సంఖ్య	28	46	54	42	30

సాధన:ల

వారాంతర ఖర్చు	కుటుంబముల సంఖ్య (f)	సంచిత పౌన:పున్యము (cf)
0-1000	28	28
1000-2000	46	74
2000-3000	54	128
3000-4000	42	170
4000-5000	30	200
	N=200	

8-Stats.indd 301 04-03-2023 18:24:02

మధ్యగత విలువ = $\left(\frac{N}{2}\right)$ వ పదము = $\left(\frac{200}{2}\right)$ వ పదము

= 100 వ విలువ

మధ్యగత తరగతి = 2000 – 3000

$\frac{N}{2} = 100 \quad l = 2000$

$m = 74, \quad c = 1000, \quad f = 54$

మధ్యగతము $= l + \frac{\left(\frac{N}{2} - m\right)}{f} \times c$

$= 2000 + \left(\frac{100 - 74}{54}\right) \times 1000$

$= 2000 + \left(\frac{26}{54}\right) \times 1000 = 2000 + 481.5$

$= 2481.5$

పురోగమన తనిఖీ

1. మొదటి నాల్గు పూర్ణాంకముల మధ్యగతము_____.
2. మొదటి నాలుగు పూర్ణాంకములతో 4 ను చేర్చిన ఏర్పడు మధ్యగత విలువ _____.
3. రెండు మధ్యగత విలువలకు మధ్యనున్న బేదము.

ఉదాహరణ 8.13

క్రింది ఇవ్వబడిన దత్తాంశముల మధ్యగతము 24 అయిన x విలువను కనుగొనుము.

తరగతి అంతరము (CI)	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
పౌన:పున్యము (f)	6	24	x	16	9

సాధన

తరగతి అంతరము (CI)	పౌన:పున్యము (f)	సంచిత పౌన:పున్యము (cf)
0-10	6	6
10-20	24	30
20-30	x	$30 + x$
30-40	16	$46 + x$
40-50	9	$55 + x$
	$N = 55 + x$	

I9EJ7

8-Stats.indd 302 04-03-2023 18:24:06

మధ్యగతము 24 అయిన మధ్యగత తరగతి తరగతి అంతరము 20 – 30

$l = 20 \quad N = 55 + x, \; m = 30, \; c = 10, \; f = x$

$$\text{మధ్యగతము} = l + \frac{\left(\frac{N}{2} - m\right)}{f} \times c$$

$$24 = 20 + \frac{\left(\frac{55+x}{2} - 30\right)}{x} \times 10$$

$$4 = \frac{5x - 25}{x}$$

$$4x = 5x - 25$$

$$5x - 4x = 25$$

$$x = 25$$

అభ్యాసము 8.2

1. 47, 53, 62, 71, 83, 21, 43, 47, 41.దత్తాంశమునకు మధ్యగతమును కనుగొనుము.

2. 36, 44, 86, 31, 37, 44, 86, 35, 60, 51 దత్తాంశమునకు మధ్యగతమును కనుగొనుము.

3. ఆరోహణ క్రమములో వ్రాయబడిన 11, 12, 14, 18, x+2, x+4, 30, 32, 35, 41 అను దత్తాంశముల మధ్యగత విలువ 24 అయిన x విలువను కనుగొనుము.

4. ఒక పరిశోదకుడు 13 ఎలుకలను ఆహారము వెతుకు అలవాటులో మైదాను ఉంచి పరిశోధించెను అవి ఆహారము వెదకుటకు తీసుకొను కాలమును 31, 33, 63, 33, 28, 29, 33, 27, 27, 34, 35, 28, 32. గా పట్టీకరించెను. ఎలుకలు ఆహారము వెదకుటకు తీసుకొను కాలము యొక్క మధ్యగత సమయము ఎంత?

5. ఒక తరగతిలో సంగ్రహణాత్మక పరీక్షలో విద్యార్థులు పొందిన క్రింది మార్కులకు

తరగతి	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
విద్యార్థుల సంఖ్య	2	7	15	10	11	5

మధ్యగతమును కనుగొనుము

6. 5 ధన పూర్ణాంకముల సరాసరి అనునది దాని మధ్యగతమునకు 2 రెట్లు అగును. అందులో 4 ధనాత్మక విలువలు 3, 4, 6, 9 మరియు దాని మధ్యగత విలువ 6 అయిన 5వ సంఖ్యను కనుగొనుము.

8-Stats.indd 303 04-03-2023 18:24:08

8.6 బాహుళకము

(i) మగ్గురు అభ్యర్థులు ఎన్నికలలో పొందిన ఓట్లు దత్తాంశము క్రింద ఇవ్వబడినది

అభ్యర్థులు	పొందిన ఓట్లు
Mr. X	4, 12, 006
Mr. Y	9, 87, 991
Mr. Z	7, 11, 973
Total	21, 11, 970



ఏ అభ్యర్థి గెలుపొందినట్లు ప్రకటించగలరు? ఖచ్చితముగా చాలా ఎక్కువ సంఖ్యలో ఓట్లు పొందిన అభ్యర్థి Y అగును. కానీ అతనికి వ్యతిరేఖముగా వచ్చిన ఓట్లు మొత్తము ఎక్కువ అయిననూ ఇక్కడ అతనే గెలుపొందిన అభ్యర్థి అగును. ఎందుకనగా ఇచ్చట పోటీ అనునది Y అభ్యర్థి పొందిన అధిక ఓట్లు సంఖ్య బట్టియే అమరును.

(ii) ఒక సంస్థ ఒక పాఠశాల యొక్క 9 వ తరగతిలో ఉన్న విద్యార్థులకు క్రీడా బూట్లను ఇచ్చుటకు ఇష్టపడ్డారు. ఆ తరగతిలో ఉన్న విద్యార్థుల బూట్ల కొలతలు క్రింది ఇవ్వబడినది.

బూట్ల కొలతలు	5	6	7	8	9	10
విద్యార్థులు సంఖ్య	10	12	27	31	19	1

ఆ సంస్థ ఏ కొలత గల బూట్లను ఎక్కువ సంఖ్యలో కొనవలెను? పై న తెల్పిన రెండు ఉదాహరణముల నుండి సరాసరి మరియు మధ్యగతము కనుగొనుటకు ఈ సందర్భము సరికానిదగా ఉండునని తెలుసుకొనవచ్చును. కావున బాహుళకము గూర్చి చదువుట ఆవశ్యకతమగును.

ఎక్కువ సార్లు వచ్చు సంఖ్య విలువే బాహుళకమగును. You Tube నందు సరాసరిని గూర్చి తెలుసుకొనుటకు అనేక వీడియోలను చూసినపుడు ఎక్కువ సంఖ్యలో చూడబడిన ఒక వీడియోను గమనింపవచ్చును. ఈ సందర్భమున బాహుళకము అను భావన ఉపయోగింపబడును.

వర్గీకృత పౌన:పున్య పట్టికలో అధిక పౌన:పున్యము గల తరగతియే బాహుళక తరగతి అగును.

8.6.3 బాహుళకము – ముడిదత్తాంశము

అత్యధిక సార్లు వచ్చు సంఖ్య యొక్క విలువ బాహుళకము.

ఉదాహరణ 8.14 ఒక బియ్యపు శాలలో ఉన్న 7 కార్మికులు దిన కూలీ వరుసగా ₹500, ₹600, ₹600, ₹800, ₹800, ₹800 మరియు ₹1000, అయిన దిన కూలీ బాహుళకమెంత?

సాధన

ఈ దత్తాంశములో ₹800 మూడు సార్లు వచ్చుట వలన బాహుళకము ₹800 అగును.

8-Stats.indd 304 04-03-2023 18:24:08

ఉదాహరణ 8.15 17, 18, 20, 20, 21, 21, 22, 22 సంఖ్యలకు బాహుళకమును కనుగొనుము.

సాధన

ఇవ్వబడిన విలువలలో 20, 21, 22 రెండు సార్లు వచ్చుట వలన దీనికి 20, 21, 22 బాహుళకమగును.

సూచన

- ఒకే ఒక బాహుళకము కల్గియున్న విభాజనమును ఏక బాహుళక విభాజనము అందురు.
- రెండు బాహుళకములు కలిగి ఉన్న విభాజనమును ద్విబాహుళక విభాజనము అందురు.
- మూడు బాహుళకములు కలిగి ఉన్న విభాజనమును త్రిబాహుళక విభాజనము అందురు.
- మూడు అంతకంటే ఎక్కువగా బాహుళకములున్న విభాజనమును బహుబాహుళకము అని అందురు.

8.6.4 బాహుళకము – అవర్గీకృత పౌన:పున్య విభాజనము

అవర్గీకృత పౌన:పున్య విభాజన యందు అతి పెద్ద పౌన:పున్యము కల్గిన చలరాశి విలువను బాహుళకము అగును

ఉదాహరణ 8.16 ఒక సంఖ్యల సమూహంలో ఐదు 4లు, నాల్గు5లు, తొమ్మిది 6లు మరియు ఆరు 9లు కల్గియున్నది, అయిన బాహుళకము కనుగొనుము

సాధన

సంఖ్యల పరిమాణము	4	5	6	9
పౌన:పున్యము	5	4	9	6

ఇవ్వబడిన దత్తాంశములో అతి పెద్ద పౌన:పున్యము 9 కల్గిన సంఖ్య పరిమాణము 6 కావున బాహుళకము 6 అగును.

సూచన

సూచన: క్రమములేని తరగతి అంతరమును క్రమమైన తరగతి అంతరముగా మార్చుటకు ఒక్కొక్క తరగతి దిగువ హద్దుకు 0.5ను తీసివేయవలెను మరియు ఎగువ హద్దుకు 0.5ను కూడవలెను.

8.6.5 బాహుళకము – వర్గీకృత పౌన:పున్య విభాజనము

వర్గీకృత పౌన:పున్య విభాజనము నందు చలరాశుల యొక్క సరియైన విలువ తెలియనందు వలన దీని నిర్ధిష్ట బాహుళకము కనిపెట్టుట కష్టతరమగును. అందుచే తరగతి అంతరములు సమాన పరిమితులు నున్న బాహుళకము యొక్క రమారమి విలువను క్రింది సూత్రము ద్వారా కనుగొనవచ్చును.

$$\text{బాహుళకము} = l + \left(\frac{f - f_1}{2f - f_1 - f_2}\right) \times c$$

8-Stats.indd 305 04-03-2023 18:24:09

దీనిలో మిక్కిలి పెద్ద పౌన:పున్యమును కల్గిన తరగతిని బహుళక తరగతి అని చెప్పవచ్చును.

ఇక్కడ l - బాహుళ తరగతి యొక్క దిగువహద్దు; f - బాహుళక తరగతి యొక్క పౌన:పున్యము

f_1 - బాహుళక తరగతి పౌన:పున్యమునకు ముందుగల పౌన:పున్యము

f_2 - బాహుళక తరగతి పౌన:పున్యమునకు తర్వాతి పౌన:పున్యము

c - బాహుళక తరగతి అంతరము పొడవు.

ఉదాహరణ 8.17 క్రింది దత్తాంశమునకు బాహుళకమును కనుగొనుము

మార్కులు	1-5	6-10	11-15	16-20	21-25
విద్యార్థుల సంఖ్య	7	10	16	32	24

సాధన

మార్కులు	f
0.5-5.5	7
5.5-10.5	10
10.5-15.5	16
15.5-20.5	32
20.5-25.5	24

బాహుళక తరగతి 16 -20 (పెద్ద పౌన:పున్యము).

$l = 15.5, f = 32, f_1 = 16, f_2 = 24, c = 20.5 - 15.5 = 5$

బాహుళకము $= l + \left(\frac{f - f_1}{2f - f_1 - f_2}\right) \times c$

$= 15.5 + \left(\frac{32 - 16}{64 - 16 - 24}\right) \times 5$

$= 15.5 + \left(\frac{16}{24}\right) \times 5 = 15.5 + 3.33 = 18.83.$

8.6.6 అంకమధ్యమము, మధ్యగతము, బాహుళకముల అనుభావిక సంబంధం:

పౌన:పున్యములు క్రమముగా విస్తరించి యున్నపుడు, ముందు చూసిన మూడు రకములైన కొలతలకు ఒక రకమైన సంబంధము ఏర్పడును.

బాహుళకము = 3 మధ్యగతము − 2 అంకమధ్యమము

8-Stats.indd 306 04-03-2023 18:24:10

ఉదాహరణ 8.18 ఒక విస్తరణలో సరాసరి మరియు బాహుళకము వరుసగా 66 మరియు 60 అగును. మధ్యగతమును కనుగొనుము

సాధన

సరాసరి = 66 మరియు బాహుళకము = 60.

బాహుళకము ≈ 3 మధ్యగతము – 2 అంకమధ్యమము,

$60 \approx 3$ మధ్యగతము $- 2(66)$

3 మధ్యగతము $\approx 60 + 132$

మధ్యగతము $\approx \frac{192}{3} \approx 64$

అభ్యాసము 8.3

1. 10 కార్మికుల యొక్క నెలసరి ఆదాయము వరసగా ₹5000, ₹7000, ₹5000, ₹7000, ₹8000, ₹7000, ₹7000, ₹8000, ₹7000, ₹5000 అయిన అంకమధ్యమము, మధ్యగతము, బాహుళకములను కనుగొనుము.

2. 3.1, 3.2, 3.3, 2.1, 1.3, 3.3, 3.1 ఇవ్వబడిన దత్తాంశమునకు బాహుళకమును కనుగొనుము.

3. 11, 15, 17, x+1, 19, x–2, 3అను దత్తాంశముల సరాసరి 14 అయిన x యొక్క విలువను కనుగొనుము. మరియు x విలువను ఉపయోగించి దత్తాంశము యొక్క బాహుళకమును కనుగొనుము.

4. క్రీడా దుస్తులు కొలతల వారిగా కింద పట్టికలో ఇవ్వబడినది.

కొలత	38	39	40	41	42	43	44	45
మనుష్యుల సంఖ్య	36	15	37	13	26	8	6	2

అయితే ఏ కొలత క్రీడా దుస్తులు ఎక్కువగా అవసరమగునో కనుగొనుము.

5. కింది పట్టికకు బాహుళకము కనుగొనుము.

మార్కులు	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
విద్యార్థుల సంఖ్య	22	38	46	34	20

6. కింది ఇవ్వబడిన దత్తాంశమునకు అంకమధ్యమము, మధ్యగతము, బాహుళకము కనుగొనుము.

బరువు (కి.గ్రా లలో)	25-34	35-44	45-54	55-64	65-74	75-84
విద్యార్థుల సంఖ్య	4	8	10	14	8	6

8-Stats.indd 307 04-03-2023 18:24:10

కృత్యము

1. 20 వేర్వేరు భూమిపై నివసించు జంతువులలో అతి వేగంగా పోవు పౌన:పున్య పట్టికను తయారుచేయుము. వాటి యొక్క సరాసరి, మధ్యగతము, బాహుళకము కనుగొనుము. వాటి ఫలితములను పోల్చుము.

2. ఒక తరగతిలో గల విద్యార్థుల వివరములు ఉన్న పట్టిక నుండి,

   (i) సరాసరి వయస్సును కనుగొనుము (తరగతి అంతరమునుపయోగించి)

   (ii) సరాసరి ఎత్తును కనుగొనుము (తరగతి అంతరమునుపయోగించి)

అభ్యాసము 8.4

బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు

RYG4P

1. మధ్య బిందువు m క్రమమైన పౌన:పున్య విభాజనము యొక్క తరగతిఎగువ దాని దిగువ హద్దు

   (1) $2m - b$ (2) $2m+b$ (3) $m-b$ (4) $m-2b$.

2. 7 పంక్యుల సరాసరి 81 వాటి నుండి ఒక సంఖ్యను తొలగించినపుడు మిగిలిన సంఖ్యల సరాసరి 78 అగును. అయిన తొలగించబడిన సంఖ్య విలువ ఎంత?

   (1) 101 (2) 100 (3) 99 (4) 98.

3. ఈ క్రింది వాటిలో ఏది కేంద్రీకృత కొలత కాదు.

   (1) అంకమధ్యమము (2) వ్యాప్తి (3) మధ్యగతము (4) బాహుళకము..

4. క్రింది ఇవ్వబడిన సంఖ్యా తరగతిలో సరాసరి, మధ్యగతము, బాహుళకము ఒకే విలువ కల్గిన తరగతి ఏది??

   (1) 2,2,2,4 (2) 1,3,3,3,5 (3) 1,1,2,5,6 (4) 1,1,2,1,5.

5. సరాసరి నుండి n పదముల విచలన మొత్తము విలువ

   (1) 0 (2) n-1 (3) n (4) n+1.

6. a,b,c,d మరియు e యొక్క సరాసరి 28 మరియు a, c, e ల సరాసరి 24 అయిన b మరియు d ల సరాసరి

   (1) 24 (2) 36 (3) 26 (4) 34

7. $x, x+2, x+4, x+6, x+8$, అనే ఐదు దత్తాంశముల సరాసరి 11 అయిన మొదటి 3 దత్తాంశముల సరాసరి

   (1) 9 (2) 11 (3) 13 (4) 15.

8-Stats.indd 308 04-03-2023 18:24:10

8. 5, 9, x, 17, మరియు 21 ల సరాసరి 13 అయిన x విలువ.

(1) 9 (2) 13 (3) 17 (4) 21

9. మొదటి11 సహజ సంఖ్యల వర్గముల సరాసరి.

(1) 26 (2) 46 (3) 48 (4) 52.

10. ఒక సంఖ్యా తరగతి సరాసరి $\bar{X}$ సంఖ్యా తరగతి యొక్క ఒక్కొక్క విలువను z చే గుణించిన దాని సరాసరి.

(1) $\bar{X}+z$ (2) $\bar{X}-z$ (3) $z\ \bar{X}$ (4) $\bar{X}$

గుర్తించుకోవలసిన విషయములు

- ఒక ప్రత్యేక ఉద్దేశము కొరకు సేకరించబడిన విషయముల మరియు సంఖ్య విలువలను దత్తాంశములనబడును.
- దత్తాంశములోని రాశుల విలువలను మూలము నుండి నేరుగా సేకరించిన దానిని ప్రాథమిక దత్తాంశము అందురు. ముందుగానే సేకరించబడి ఉన్న దత్తాంశము లేక దత్తాంశము నుండి సేకరించు దత్తాంశమును గౌణ దత్తాంశము అందురు లేదా ద్వితీయ దత్తాంశము అందురు.
- ప్రాథమిక దశలో సేకరించబడిన దత్తాంశములను విడివిడిగా ప్రకటించు దత్తాంశమును ముడి దత్తాంశము అందురు.
- మధ్య విలువ $=\frac{UCL+LCL}{2}$ (UCL–తరగతి ఎగువ హద్దు, LCL–తరగతి దిగువ హద్దు.
- తరగతి అంతర పరిమాణము $=\ UCL-LCL$.
- వర్గీకృత దత్తాంశముల సరాసరి.

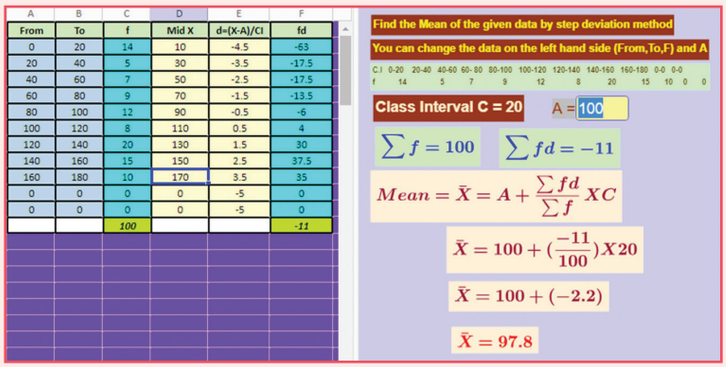
ప్రత్యక్ష పద్ధతి	ఉజ్జాయింపు పద్ధతి	సోపాన విచలన పద్ధతి
$\bar{X}=\frac{\sum fx}{\sum f}$	$\bar{X}=A+\frac{\sum fd}{\sum f}$	$\bar{X}=A+\left[\frac{\sum fd}{\sum f}\times c\right]$

- ఒక తరగతి సంచిత పౌన:పున్యము అనునది ఆ తరగతిలో ఉన్న అన్ని తరగతుల పౌన:పున్యముల మొత్తము అగును.
- వర్గీకృత దత్తాంశ మధ్యగతమునకు సూత్రము $=l+\frac{\left(\frac{N}{2}-m\right)}{f}\times c$.
- వర్గీకృత దత్తాంశ బాముళకము కనుగొను సూత్రము $=l+\left(\frac{f-f_1}{2f-f_1-f_2}\right)\times c$.

8-Stats.indd 309 04-03-2023 18:24:14

అంతర్జాల కృత్యము

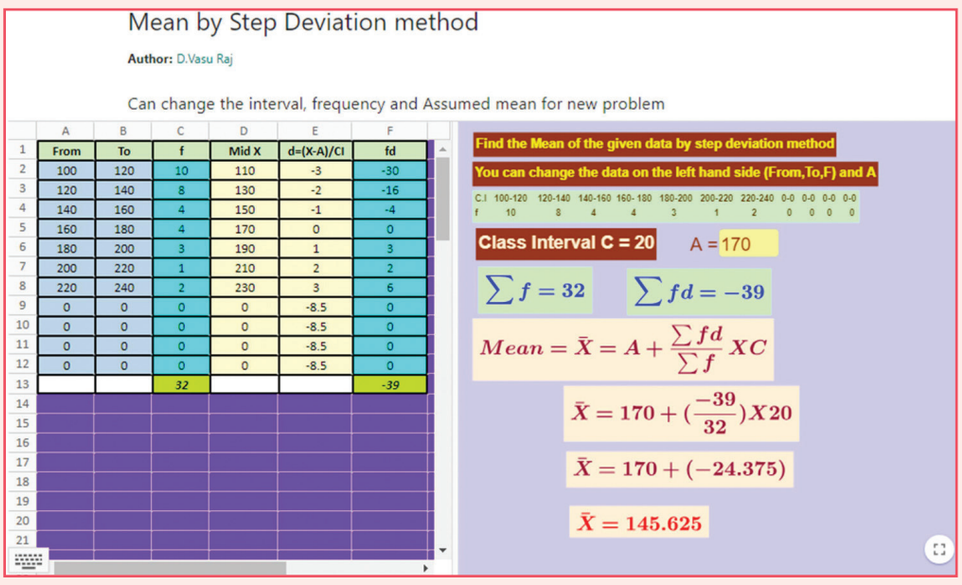
ఈ చిత్రపటములో ఎదురుచూచు (ఆశించు) ఫలితము కనబడును.



సోపానము

బౌసరును ఓపన్ చేసి జియోజీబ్రా భాగములో ప్రత్యక్షమగు "Mean by step deviation method" అను దానిని ఎన్నుకొనుము. ఆ ప్రత్యకమైన భాగములో ఉదాహరణ 5,5 ఇవ్వబడియుండును. అందలి సోపానములను జాగ్రత్తగా పరిశీలింపుము అచ్చట spread sheet భాగంలో నున్న "From", "To" మరియు "Frequency f" క్రొత్త దత్తాంశములను ముద్రించి వచ్చిన విలువలును సరిచూడవలెను.

Step 1



Browse in the link

Mean by step deviation method:
https://ggbm.at/NWcKTRtA or Scan the QR Code

TBZGC

8-Stats.indd 310 04-03-2023 18:24:14

9

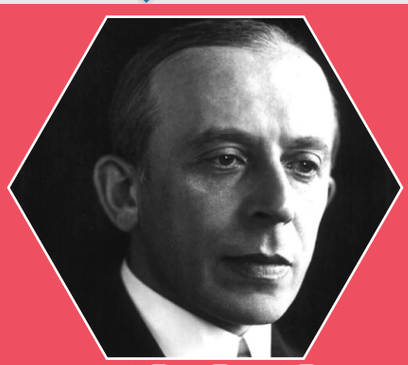






సంభావ్యత

సంభావ్యత సిద్ధాంతమనగా లోకజ్ఞానమును ఉద్దేశ ప్రణాళికగా మార్చుట ఇంకేమీ లేదు. - పియారిసైమన్ లప్లస్.



అరిచ్బర్ట్ వాన్ సైమన్
(AD (CE) 1883-1953)

సంభావ్యత స్వభావమును సాంఖ్యకశాస్త్ర లేక అనుభవనాధార వైఖరిలో ఆర్.ఎఫ్.ఫిషర్ మరియు ఆర్.వాన్‌మైసస్ అభివృద్ధి చేసినారు. ప్రతిరూప ఆవరణను ఆర్. వాన్‌మైసస్ పరిచయం చేసెను. ఈ భావన కొలత సిద్ధాంతమును ఆధారంగా తీసుకొని సంభావ్యత అను గణిత వాదన ఏర్పడుటకు కారణమయ్యెను. గత శతాబ్దంలో పలు గ్రంథకర్తల ప్రయత్నంచే మెల్లగా అభివృద్ధి చెందినది.

అభ్యాసన లక్ష్యాలు

- సంభావ్యత ప్రాథమిక భావనలను తెలుసుకొనెదము.
- సంభావ్యత యొక్క సాంప్రదాయకమైన పద్ధతి మరియు అనుభవనాధార పద్ధతిని తెలుసుకొనెదము.
- పలురకముల సంభావ్యత ఘటనలలోని రకాలను తెలుసుకొనెదము.

9.1 పరిచయము

సంభావ్యత గురించి తెలుసుకొనుటకు, మన నిజజీవితంలో ఎదుర్కొను విలక్షణ అనిశ్చయమైన సంఘటనలను తీసుకొనెదము. వైద్యశాలలో అనుమతింపబడిన రోగికి ప్రాణమును రక్షించు ఔషదము ఒక్కటి ఇవ్వబోతున్నారని అనుకొనెదము.



రోగి యొక్క బంధువులు ఆ ఔషదం ఎలా పనిచేస్తుందన్న సంభావ్యతను తెలుసుకొనదలచిరి. 100 రోగులకు ఇవ్వబడినప్పుడు వారిలో 80 మంది రోగులకు పైగా ఈ మందు బాగా పని చేసినదని వైద్యుడు చెప్పెన వారి బంధువులు సంతోషం చెందుతారు. ఈ విజయ శాతమే సంభావ్యతను వివరించు విధముగా ఉన్నది. అనిశ్చయ సందర్భములలో ఒక నిర్ణయమును తీసుకొనుటకు ఇది ఉపయోగపడుచున్నది. అనిశ్చయమైన వాటిని గణించు లేదా కొలుచు పద్ధతిని సంభావ్యత అందురు ఇది సంభవముల పౌనఃపున్యమును ఆధారంగా కలిగినది.

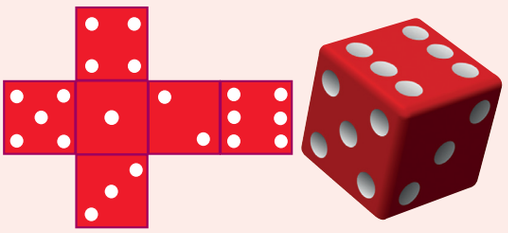
9 Probability.indd 311 04-03-2023 18:25:23

40 కార్డులలు కల్గిన ఒక కట్టలో నాలుగు రంగులలో (నీలం, పచ్చ, ఎరుపు మరియు పసుపు) ఒక్కొక్క రంగులలో 10 కార్డులలో 1 నుండి 10 వరకు సంఖ్యలు ఉన్నట్టు అనుకొనుము. దీనిలో ఏదైనా ఒక రంగు కార్డును ఎంపిక చేసిన, నీలం అని అనుకొనుము. వాటిని బాగుగా కలిపి దాని నుండి ఒక కార్డును తీసిన, అది 6 కల్గిన కార్డుగా ఉండుటకు గల అవకాశం ఏమి? మీరు 6 కల్గిన కార్డును బదులుగా 4 కల్గిన కార్డును తీయుటకు ఇష్టపడిన మీ అవకాశం మారునా? రెండు విధములుగా మీ అవకాశం 10లో 1 అని వెంటనే తెలియచున్నది (ఎందుకు?) వేరు ఏదైనా కార్డును తీసినచో ఈ అవకాశం మారదు. సంభావ్యత అనేది ఖచ్చితంగా మారని విలువ కల్గియుండును. 10 లో 1 అనుటకు బదులుగా $\frac{1}{10}$ అని భిన్న రూపంలో వ్రాయవచ్చును. (సంభావ్యతల కలయికను భిన్న రూపంలో వ్రాయుట సులభంగా ఉండును.) ఇది అనుకూల ఫలితమునకు సాధ్యమైన ఫలితములు గల నిష్పత్తి అగును.

మీరు పాచికలను చూసి ఉన్నారా? ఒక ప్రామాణిక పాచిక అనునది ఒక ఘన చతురస్రము. వాటి ఒక్కొక్క ప్రక్క 1 నుండి 6 వరకు వేర్వేరు అంకెల విలువలను చుక్కల రూపంలో నిర్దేశింపబడియుండును. వీటిని జూదము మరియు అవకాశములతో సంబంధం కలిగిన ఆటలలో ఉపయోగింతురు.

సూచన:

ఒక ప్రామాణిక పాచికలో వాటి ఎదురెదురు భుజములో ఉన్న సంఖ్యల మొత్తము 7గా ఉండవలయును.



ఒక పాచికను దొర్లించునప్పుడు 5 ను పొందుటకు సంభావ్యత ఎంత? అదేవిధంగా 2 మరియు 7ను పొందుటకు సంభావ్యత ఎంత?

పైన ఇవ్వబడిన అన్ని ప్రశ్నలకు పొందిన జవాబులో సంభావ్యత అని గ్రహించితివా? సంభావ్యతలో గరిష్ఠ విలువ మరియు కనిష్ఠ విలువలను సూచించగలమా? ఖచ్చితంగా ఏర్పడు ఒక ఘటనకు సంభావ్యత ఏదై ఉండవచ్చును. దీనిని స్పష్టంగా గ్రహించుటకు క్రింద ఇవ్వబడిన విషయాలను పరిశీలించెదము.

9.2 ప్రాథమిక అభిప్రాయాలు

విజ్ఞానశాస్త్రంలో ఒకే రకమైన పరిస్థితిలో మనము పదే పదే ప్రయోగములు చేసినప్పుడు దాదాపు ఒకే ఫలితమును పొందెదము. అట్టి ప్రయోగములు నిర్దేశింప తగిన ప్రయోగము అని మనకు తెలియును. ఆర్కిమిడియస్ ధర్మములు మరియు ఓమ్స్ నియమములను సరిచూచుట అనునవి ఒక నిర్దేశింప తగిన ప్రయోగము అనుటకు ఉదాహరణము అగును. ఇట్టి ప్రయోగముల ఫలితములను మనము ముందే తెలుసుకొనియున్నాము.

కాని ఒకే రకమైన పరిస్థితిలో జరపబడు ప్రయోగములు వేర్వేరు ఫలితములను ఇచ్చును. ఉదాహరణకు ఒక క్రమమైన పాచికను దొర్లించునప్పుడు , ఒక క్రమమైన నాణెము ఎగురవేసినప్పుడు లేదా ఒక పాత్ర నుండి బంతిని ఎన్నుకొనుట వంటి ఘటనలు తీసుకొనిన, వాటి ఫలితములను మనము ముందే గ్రహించలేము. అట్టి ప్రయోగములను యాధృచ్ఛిక ప్రయోగము *(random experiments)* అంటారు. ఒక యాదృచ్ఛిక

9 Probability.indd 312 04-03-2023 18:25:23

ప్రయోగములో ప్రతి ప్రదర్శనను ప్రయత్నం (*trial'*) అని అంటారు. ప్రయత్నం యొక్క పరిణామమును ఫలితము అని అందరు. (గమనిక: అనేక గణాంక శాస్త్ర వేత్తలు ప్రయోగము మరియు ప్రయత్నం అను పదములను ఒకే భావంతో ఉపయోగిస్తాము.)

మనము ఇప్పుడు సంభావ్యతకు సంబంధించిన కొన్ని ముఖ్యమైన పదములను తెలుసుకొందాము.

ప్రయత్నం (Trial) : ఒక పాచికను దొర్లించుట,నాణెమును ఎగురవేయుట అనునవి ప్రయత్నం అగును. ప్రయత్నం అనునది ఒకటి లేక అంతకంటే ఎక్కువ ఫలితములను ఇవ్వగల చర్య ప్రయత్నం అగును.

ఫలితము (Outcome) : ఒక నాణెమును ఎగురవేయునపుడు బొమ్మ లేక బొరుసు పొందెదము. బొమ్మ మరియు బొరుసు అనునవి ఫలితములగును. ఒక ప్రయత్నం యొక్క పరిణామం ఫలితము అనబడును.

ప్రతిరూప బిందువు (Sample point) : – నాణెమును ఎగురవేయునప్పుడు పొందు బొమ్మ మరియు బొరుసు అను ప్రతి ఒక ఫలితమును ప్రతిరూప బిందువు అనబడును. ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగములో ప్రతి ఫలితమును ప్రతిరూప బిందువు అని అందరు.

ప్రతిరూప ఆవరణము (Sample space) : – ఒక నాణెమును ఒకసారి ఎగురవేయునప్పుడు పొందు ప్రతిరూప బిందువుల సేకరణ $S = \{H,T\}$.

రెండు నాణెములను ఒకేసారి ఎగురవేయునప్పుడు పొందు ప్రతిరూప బిందువుల సేకరణ $S=\{(HH),(HT),(TH),(TT)\}$.

ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగంలో సాధ్యమైన ఫలితముల (లేదా ప్రతిరూప బిందువుల) సమితిని ఒక ప్రతిరూప ఆవరణము అనబడును. వీటిని ఆంగ్ల అక్షరము S తో సూచించుదురు. ఇందులో గల మూలకముల సంఖ్య $n(S)$ అగును.

ఘటన (Event) – ఒక పాచికను దొర్లించునప్పుడు 4 లభించును అని తీసుకొనెదము. దీనిని ఫలితం అనబడును. (ఎందుకనగా ఇది ఒక ప్రయత్నం యొక్క పరిణామం) అదే ప్రయోగంలో ఒక సరిసంఖ్య పొందు ఘటన $\{2,4,6\}$. ఒక ప్రతిరూప ఆవరణములో గల ఏ ఒక ఉపసమితి ఘటన అనబడును. కావున ఒక ఘటన అనునది ఒకటి లేక అంతకంటే ఎక్కువ ఫలితములను కలిగి ఉండును.

ఉదాహరణలు



(i) యాదృచ్ఛిక ప్రయోగము : నాణెమును ఎగురవేయుట

సాధ్యమైన ఫలితములు : బొమ్మ (H) లేదా బొరుసు (T)

ప్రతిరూప ఆవరణం : $S = \{H,T\}$

S యొక్క ఉపసమితి : $A=\{H\}$ లేదా $A=\{T\}$

కావున, ఈ ఉదాహరణలో A అనునది ఒక ఘటన

(ii) ఒక పాచికను దొర్లించినపుడు పొందు ప్రతిరూప ఆవరణం

$S = \{1,2,3,4,5,6\}$ ఒక వారంలో ఒక రోజును ఎన్నుకొను ఘటన యొక్క ప్రతిరూప ఆవరణం

S = {ఆదివారం, సోమవారం, మంగళవారం, బుధవారం, గురువారం, శుక్రవారం, శనివారం}

9 Probability.indd 313 04-03-2023 18:25:24

కృత్యము - 1

రెండు నాణెములు ఒకేసారి ఎగురవేయుట అను ప్రయోగమును నిర్వహించి వాటి నుండి క్రింది వాటిని జాబితా చేయుము	రెండు పాచికలను ఒకేసారి దొర్లించుట అను ప్రయోగమును నిర్వహించి వాటి నుండి క్రింది వాటిని జాబితా చేయుము
యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం : సాధ్యమైన ఫలితములు : ప్రతిరూప ఆవరణం : S యొక్క ఏదైనా మూడు ఉపసమితులు (ఏదైనా మూడు ఘటనలు) :	యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం : సాధ్యమైన ఫలితములు : ప్రతిరూప ఆవరణం : S యొక్క ఏదైనా మూడు ఉపసమితులు (ఏదైనా మూడు ఘటనలు) :

కృత్యము - 2

ఒక్కొక్క విద్యార్థిని ఒక నాణెమును 10 సార్లు ఎగురవేయమని చెప్పి దానినుండి పొందు బొమ్మ మరియు బొరుసుల సంఖ్యను క్రింద ఇవ్వబడిన పట్టిక రూపంలో తయారుచేయుము.

నాణెమును ఎగురవేసిన సంఖ్య	బొమ్మ పొందిన ఫలితముల సంఖ్య	బొరుసు పొందిన ఫలితముల సంఖ్య
⋮	⋮	⋮

(*i*) భిన్నము 1 : $\frac{\text{బొమ్మగా పొందిన ఫలితముల సంఖ్య}}{\text{నాణెమును ఎగురవేసిన మొతము సంఖ్య}}$

(*ii*) భిన్నము 2 : $\frac{\text{బొరుసుగా పొందిన ఫలితముల సంఖ్య}}{\text{నాణెమును ఎగురవేసిన మొత్తము సంఖ్య}}$

నాణెములను 20, 30, 40, 50 సార్లు ఎగురవేసి పైన ఇవ్వబడిన విధముగా భిన్నములను కనుగొనుము.

కృత్యము - 3

తరగతిలో గల విద్యార్థులను ఇరువురు గల బృందములుగా విడదీయుము. ఒక్కొక్క బృందంలో గల మొదటి విద్యార్థి నాణెమును 50 సార్లు ఎగుర వేయవలయును. రెండవ విద్యార్థి ఫలితములను నమోదు చేసుకొని క్రింద ఇవ్వబడిన పట్టికను తయారు చేయవలయును.

బృందము	బొమ్మ పొందిన ఫలితముల సంఖ్య	బొరుసు పొందిన ఫలితముల సంఖ్య	బొమ్మ పొందిన ఫలితములు సంఖ్య / మొత్తం నాణెమును ఎగురవేసిన సంఖ్య	బొరుసు పొందిన ఫలితముల సంఖ్య / మొత్తము నాణెమును ఎగురవేసిన సంఖ్య
1				
2				
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

ఒక ఘటన సంభవించుటకు గల అవకాశమును విలువల రూపంలో పేర్కొనుటను సంభావ్యత అనెదము.

9 Probability.indd 314 04-03-2023 18:25:24

9.3 సాంప్రదాయక పద్ధతి



ఒక సంభవము ఏర్పడుటకు గల అవకాశమును సంఖ్యావిలువతో గుర్తించుటనే సంభావ్యత అని అంటారు.

ఉదాహరణమునకు, ఒక పాత్రలో 4 ఎరుపు రంగు బంతులు మరియు 6 నీలిరంగు బంతులు కలవు. యాదృచ్ఛికంగా ఒక బంతిని ఎన్నుకొనిన అది ఎరుపు రంగు బంతిగా ఉండుటకు గల సంభావ్యత ఎంత?

యాదృచ్ఛికము అను పదము పాత్రలో గల 10 బంతులను ఎన్నుకొనుటకు గల సమాన అవకాశములను (అనగా సంభావ్యత) కలిగియున్నదని చూపుచున్నది. మీ కంటికి గంతలు కట్టబడి ఉండునట్లుగాను, బంతులు కలిపివేయబడినట్లుగాను తీసుకొనెదము. ఇది సమ సంభవ ఫలితమును పొందుటకు వీలగును.

ఎరుపు రంగు బంతిని ఎన్నుకొనుటకు గల సంభావ్యత $\frac{4}{10}$ అగును. (దీనిని $\frac{2}{5}$ లేదా 0.4 అని వ్రాయవచ్చును.) నీలిరంగు పొందుటకు సంభావ్యత ఎంత? అది $\frac{6}{10}$ అగును. ($\frac{3}{5}$ లేదా 0.6)

ఈ రెండు సంభావ్యతల యొక్క మొత్తం 1 అని గమనించవచ్చును. అనగా దీనికి అర్థం వేరు ఫలితమును పొందుటకు అవకాశము లేదు.

ఈ ఉదాహరణలో మనము ఉపయోగించిన పద్ధతి (*priori probability*) సాంప్రదాయక పద్ధతి అగును. ఇది ఒక ఊహాకల్పిత సంభావ్యత లెక్కింపు అగును. (లాటిన్ భాషలో (*priori*) అనగా అన్వేషణ లేదా ఇంద్రియ అనుభూతి లేకుండా అని అర్థం). ఫలితములు సమ అవకాశము కలిగినదిగా ఉన్నప్పుడు మాత్రమే పైన ఇవ్వబడినవి సాధ్యమగును.

మెదడుకు మేత

ఒక ప్రయోగం విజయం సాధించుటకు గల సంభావ్యత 0.4 అయిన ఓటమి పాలవుటకు గల సంభావ్యత ఎంత?

17 మరియు 18 వ శతాబ్దములలో గణిత శాస్త్రవేత్తలచే మొదటి రకపు సంభావ్యత అధ్యయనం చేయబడినది కావున దీనిని సాంప్రదాయక సంభావ్యత అందురు.

S అనునది యాదృచ్ఛిక ప్రయోగంలో పొందు సమ సంభవ ఫలితముల సమితి అగును. (S అనునది ప్రయోగం యొక్క ప్రతిరూప ఆవరణమునబడును.)

E అనునది ప్రత్యేక ఫలితము లేదా ఫలితముల కలయిక అగును. (E ఒక ఘటన అనబడును)

E అను ఘటన యొక్క సంభావ్యత $P(E)$ అని సూచించెదము.

$$P(E) = \frac{\text{అనుకూలమైన ఫలితముల సంఖ్య}}{\text{మొత్తం ఫలితముల సంఖ్య}} = \frac{n(E)}{n(S)}$$

NXK3E

ఒక ప్రయోగమును పదేపదే పలుసార్లు చేయునప్పుడు ఒక ప్రత్యేక ఫలితము ఒక ప్రత్యేక శాతములో ఏర్పడును అనిన అట్టా ప్రత్యేక శాతము ఆ ఫలితము యొక్క సంభావ్యతకు అతి దగ్గరలో ఉండును. అని ఆనుభావిక పద్ధతి సంభావ్యత సూచించుచున్నది.

9 Probability.indd 315 04-03-2023 18:25:25

9.4 అనుభావిత పద్ధతి

ఉదాహరణమునకు, ఒక ఉత్పత్తిదారుడు ప్రతి నెలా 10000 విద్యుత్ స్విచ్‌లను ఉత్పత్తి చేయును. వాటిలో 1000 విద్యుత్ స్విచ్‌లు లోపము కలిగియున్నదని కనుగొనబడెను. ఆ ఉత్పత్తిదారుడు ఒక లోపముగల విద్యుత్‌స్విచ్‌ను ప్రతినెలా తయారు చేయుటకు గల సంభావ్యత ఎంత?

సాపేక్ష పౌనఃపుణ్యం ప్రత్యయం అనుసరించి కావలసిన సంభావ్యత 10000లో 100 అనగా 0.1గా ఉండును.

సూచన

సంభావ్యతను తీర్మానించుటకు ప్రయత్నములు ఎక్కువగా ఉండవలెను. ప్రయత్నములు ఎక్కువయ్యే కొలది సంభావ్యతలో మంచి ఫలితం పొందవచ్చు.

మనము ఈ నిర్వచనం ధ్రువీకరించెదము. అధిక ప్రయత్నంల సంఖ్య n అని తీసుకొనిన E ఘటన r ఫలితములను పొందినదని తీసుకొనిన, ఘటన E యొక్క సంభావ్యత $P(E)$ అని సూచించినప్పటికి

$$P(E) = \frac{r}{n}.$$

ప్రయత్నంల సంఖ్య పెంచడం ద్వారా ఆ విలువ ఒక స్థిరాంక విలువను పొందును అని ఖచ్చితంగా చెప్పగలమా? చెప్పలేము. ఈ ప్రత్యయం ఒక ప్రయోగాత్మకము. ఒక ప్రయోగమును ఒక్కొక్కసారి చేయునప్పుడు విభిన్న సంబంధిత విలువను పొందు అవకాశం కలదు.

అయినను అచ్చట ఒక భద్రతా పరిధి కలదు. సంభావ్యత యొక్క కనిష్ట విలువ "0" మరియు గరిష్ఠ విలువ "1" గా ఉండును. గణితశాస్త్రములో క్రింది విధముగా సూచించవచ్చును

$$0 \text{ ″ } P(E) \text{″ } 1.$$

మెదడుకు మేత

సంభావ్యతకు సంబంధించిన ఒక ప్రశ్నకు విద్యార్థి ఇచ్చిన జవాబు $\frac{3}{2}$. కాని ఉపాధ్యాయుడు ఆ జవాబును తప్పని చెప్పెను. ఎందుకు?

వీటి వివరాలను పరిశీలించెదము.

మొదట r విలువ n కంటే ఎక్కువగా ఉండదని మనకు తెలియును.

కావున $\frac{r}{n} < 1$. అనగా $P(E) < 1$. ... (1)

తరవాత $r = 0$, అనిన దీని అర్థము ఈ ఘటన ఏర్పడుటకు అవకాశం లేదు లేదా ఎక్కువ ప్రయత్నంలో ఇది ఏర్పడుట లేదు.
(ఒక పాచికను దొర్లించునప్పుడు 7 అను సంఖ్యను పొందుటకు సాధ్యమగునా?

కావున, ఇచ్చట $\frac{r}{n} = \frac{0}{n} = 0.$ ... (2)

చివరగా $r = n$, అనిన, ఘటన ఖచ్చితముగా ఏర్పడును. (ప్రతి ప్రయత్నంలోనూ లేదా అధిక ప్రయత్నంలోనూ)

అట్టి సందర్భములో, $\frac{r}{n} = \frac{n}{n} = 1.$ ... (3)

(ఒక పాచికను దొర్లించినప్పుడు 1 నుండి 6 వరకు ఏదైనా ఒక సంఖ్యను పొందిన)

(1), (2) మరియు (3) నుండి $0 \text{ ″ } P(E) \text{″ } 1$. అని తెలుసుకొనవచ్చును.

9 Probability.indd 316 04-03-2023 18:25:28

పురోగమన తనిఖి

ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగము నిర్వహించబడెను. క్రింద ఇవ్వబడిన వాటిలో ఏవి ఒక ఫలితము యొక్క సంభావ్యతగా ఉండదు.

(i) 1/5 (ii) – 1/7 (iii) 0.40 (iv) – 0.52 (v) 0

(vi) 1.3 (vii) 1 (viii) 72% (ix) 107%

ఉదాహరణ 9.1 ఒక పాచికను దొర్లించినప్పుడు, 4 కంటే పెద్ద సంఖ్యను పొందుటకు సంభావ్యతను కనుగొనుము

సాధన

ఫలితములు $S = \{1,2,3,4,5,6\}$

E అనునది 4 కంటే పెద్ద సంఖ్యను పొందు ఘటన అనుకొనుము.

$E = \{5,6\}$

$$P(E) = \frac{\text{అనుకూలమైన ఫలితముల సంఖ్య}}{\text{మొత్తం ఫలితముల సంఖ్య}}$$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{2}{6} = 0.333...$$

ఉదాహరణ 9.2 42 మంది పని చేయు కార్యాలయములో 7 మంది ఉద్యోగులు కారును ఉపయోగించుచున్నారు. 20 మంది ఉద్యోగులు ద్విచక్ర వాహనాలు ఉపయోగించుచున్నారు. మిగిలిన 15 మంది ఉద్యోగులు సైకిల్ ఉపయోగించుచున్నారు. సాపేక్ష పౌనఃపున్యమును కనుగొనుము.

సాధన

మొత్తం ఉద్యోగులు = 42.

సాపేక్ష పౌనఃపున్యం:

కారు ఉపయోగించువారు $= \frac{7}{42} = \frac{1}{6}$

ద్విచక్ర వాహనాలు ఉపయోగించువారు $= \frac{20}{42} = \frac{10}{21}$

సైకిల్ ఉపయోగించువారు $= \frac{15}{42} = \frac{5}{14}$

ఈ ఉదాహరణలో సంభావ్యతల మొత్తం 1 కన్నా ఎక్కువగా ఉండదని గమనించుము.,

$$\frac{1}{6} + \frac{10}{21} + \frac{5}{14} = \frac{7}{42} + \frac{20}{42} + \frac{15}{42} = 1$$

ఉదాహరణ 9.3 జట్టు I మరియు జట్టు II 20 ఓవర్లు గల 10 క్రికెట్ మ్యాచ్‌లు ఆడెను. ప్రతి ఆటలోను వారు తీసిన పరుగులను క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడినది.

9 Probability.indd 317 04-03-2023 18:25:29

ఆట	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
జట్టు I	200	122	111	88	156	184	99	199	121	156
జట్టు II	143	123	156	92	164	72	100	201	98	157

జట్టు I గెలుచుటకు సాపేక్ష పౌనఃపున్యం కనుగొనుము.

సాధన

ఈ ప్రయోగంలో ప్రతి ప్రయత్నంలోను జట్టు I జట్టు II ను ఎదుర్కొనుచున్నది.

జట్టు I గెలుచుటకు గల అవకాశములను చూచెదము.

మొత్తం 10 ప్రయత్నములు కలవు. వాటిలో జట్టు I మొదటి, ఆరవ మరియు తొమ్మిదవ మ్యాచుల్లో గెలిచియున్నది.

జట్టు I గెలుచుటకు గల సాపేక్ష పౌనఃపున్యం= $\frac{3}{10}$ లేదా 0.3.

(గమనిక: సాపేక్ష పౌనఃపున్యం అనునది, మనము గమనించిన ప్రయోగములో వరుసగా వచ్చు ఫలితములపై ఆధారపడియుండును.)



అభ్యాసము 9.1

1. నీవు వీధి గుండా నడిచి వెళుతున్నావు. నీకు ఎదురుపడు వ్యక్తులలో ఒకరిని ఎన్నుకొని అతని జన్మదినం ఆదివారముగా ఉండుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.

2. 1 నుండి 13 వరకు గల సహజ సంఖ్యలలో, సంపూర్ణవర్గ సంఖ్య ఉండుటకు గల సంభావ్యత ఏమి?

3. ఒక ప్రామాణిక పాచికను దొర్లించునప్పుడు సరి సంఖ్యను పొందుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.?

4 ఒక కుండలో 24 బంతులు కలవు. వాటిలో 3 ఎరుపు రంగు, 5 నీలిరంగు మిగిలినవి పచ్చ రంగు అగును. వాటిలో ఒకదానిని ఎన్నుకొనిన అది (i) ఒక నీలిరంగు బంతి (ii) ఒక ఎరుపురంగు బంతి (iii) పచ్చరంగు బంతి గా ఉండుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.

5. రెండు నాణెములను ఒకేసారి ఎగుర వేయబడినప్పుడు, రెండు బొమ్మలు పొందుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.

6. రెండు పాచికలను దొర్లించునప్పుడు, వాటి ముఖ విలువల మొత్తము (i)1 కి సమానంగా (ii) 4 కు సమానంగా (iii) 13 కంటే తక్కువగా ఉండుటకు సంభావ్యతను కనుగొనుము.

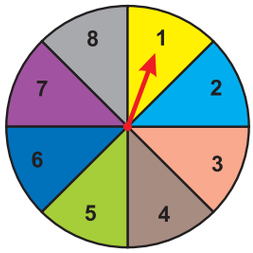


7. ఒక ఉత్పత్తిదారుడు 7000 LED విద్యుత్ దీపములను పరిశోధించగా వాటిలో 25 విద్యుత్ దీపములు లోపముతో ఉండెను. యాదృచ్ఛికముగా ఒక విద్యుత్ దీపమును ఎన్నుకొనిన అది లోపముతో ఉండుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.

9 Probability.indd 318 04-03-2023 18:25:29

8. ఒక కాలి బంతి ఆటలో ఒక జట్టు యొక్క గోల్కీపర్ 40లో 32 గోల్స్‌ను అడ్డుకొనుటకు సాధ్యమగును. ప్రత్యర్థి జట్టు ఒక ప్రయత్నమును గోల్‌గా మార్చుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.

9. స్పిన్నర్ యొక్క ముల్లు 3 యొక్క గుణిజములను చూపకుండుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.



10. ఇవ్వబడిన స్పిన్నర్‌ను ఆధారంగా తీసుకొని సంభావ్యతను గురించి రెండు ప్రశ్నలను సృష్టించుము

9.5 ఘటనలలో రకాలు

ఘటనల గూర్చి కొన్ని ముఖ్యమైన ప్రయత్నములను మనము ముందే చూసియున్నాము

రెండు ఘటనలు సంభవించుటకు సమాన అవకాశమును కలిగియుండిన, వాటిని సమ సంభావ్యత ఘటన అని పేర్కొనబడును.

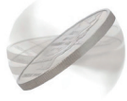
- ఒక నాణెమును ఎగరవేసినప్పుడు పొందు బొమ్మ లేదా బొరుసుగా పొందు ఘటనలను సమ సంభవ ఘటనలగును.
- ఒక పాచికను దొర్లించునప్పుడు బేసి సంఖ్య లేదా సరి సంఖ్యగా పొందు ఘటనలను సమసంభవ ఘటనలగును. కాని సరి సంఖ్య లేదా 1 అను సంఖ్యగా పొందు ఘటన సమ సంభవ ఘటన కాదు.

ఒక ఘటన యొక్క సంభావ్యత 1 అయిన అట్టి ఘటన ఖచ్చితముగా సంభవించును. అట్టి ఘటనను ఖచ్చిత లేక దృఢ ఘటన (sure or certain) అంటారు.

$P(E) = 1$ అనిన E అనునది ఖచ్చిత లేక దృఢ ఘటన Certain event or Sure event అగును.

$P(E) = 0$ అనిన E అనునది అసాధ్య ఘటన Impossible event అగును.

ఒక నాణెమును ఎగురవేయటను పరిగణించెదము. ఒక నాణెమును ఎగుర వేయునప్పుడు ఏకకాలంలో బొమ్మ మరియు బొరుసులను పొందలేము. (ఒక క్రమమైన నాణెముగా ఉండిన అట్టి నాణెములు రెండు వైపులా బొమ్మలు లేదా బొరుసులుగా ఉండే అవకాశం లేదు.) రెండు ఘటనలు ఏకకాలంలో సంభవించుటకు సాధ్యము కాని యెడల అట్టి ఘటనలను పరస్పర వర్జిత ఘటనలు అందురు. వర్షం కురియు ఘటన మరియు సూర్యరశ్మి పొందు ఘటనలు పరస్పర వర్జిత ఘటనలగునా?





ఒక పాచిక దొర్లింపబడెను. E అనునది "సరి సంఖ్య" పొందు ఘటన అనగా 2,4 లేదా 6 పొందుటగును. బేసి సంఖ్య పొందు ఘటన అనునది E ఘటన యొక్క పూరక ఘటనగును. దీనిని E' లేదా E^c అని సూచింపబడును. E ఘటన మరియు E' ఘటనలను పూరక ఘటనలు అందురు.

9 Probability.indd 319 04-03-2023 18:25:30

సూచన

(i) E మరియు E' అను ఘటనలు పరస్పర వర్జిత ఘటనలగును ఎందువలన?

(ii) E యొక్క సంభావ్యత $+E'$ యొక్క సంభావ్యత $=1$ అలాగేE మరియు E' అనునవి పరస్పర వర్జిత ఘటనలగును.

(iii) $P(E)+P(E')=1$, కావున ఏదైనా ఒక దాని విలువ తెలిసినచో మరియొక దాని విలువ కనుగొనుట సులభముగను.

పురోగమన తనిఖి

కింది ఇవ్వబడిన వాటిలో ఏది పరస్పర వర్చిత ఘటనలగును.

క్రమ సంఖ్య	ప్రయోగం	ఘటన 1	ఘటన 1
1.	ఒక పాచికను దొర్లించుట	5 ను పొందుటకు ఘటన	ఒక బేసి సంఖ్యను పొందుటకు ఘటన
2.	ఒక పాచికను దొర్లించుట	5 ను పొందుటకు ఘటన	ఒక సరి సంఖ్యను పొందుటకు ఘటన
3.	ఒక పాచికను దొర్లించుట	ప్రధాన సంఖ్య పొందు ఘటన	బేసి సంఖ్యపొందు ఘటన
4.	ఒక నాణెమును ఎగువేసిన	బొమ్మ ఏర్పడు ఘటన	బొరుసు ఏర్పడు ఘటన
5.	వారములో ఒక రోజును ఎంపిక చేసిన	ఆదివారం వచ్చుటకు	సెలవు వచ్చుటకు

ఉదాహరణ 9.4 రేపు వర్షం కురియుటకు గల సంభావ్యత $\frac{91}{100}$ అయిన వర్షము కురియకుండుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన

E అనునది రేపు వర్షం కురియుటకు గల ఘటన అనుకొనుము E' అనునది రేపు వర్షము కురియకుండుటకు గల ఘటన అగును.

$P(E) = 0.91$, అయిన $P(E')$ $= 1-0.91$ (ఎట్లు?)

$= 0.09$

కావున, వర్షం కురియకుండుటకు గల సంభావ్యత 0.09 అగును.

$= 0.09$

9 Probability.indd 320 04-03-2023 18:25:31

ఉదాహరణ 9.5 ఇటీవల జరిగిన పబ్లిక్ పరీక్షలో వివిధ పాఠ్యాంశాలలో నూటికి నూరు మార్కులు తీసిన 1184 విద్యార్థులలో 233 మంది గణిత శాస్త్రములోను 125 మంది సాంఘిక శాస్త్రములోను 106 మంది సామాన్య శాస్త్రములోను నూటికి నూరు మార్కులు పొందిరి. యాదృచ్ఛికంగా ఒక విద్యార్థిని ఎన్నుకున్నప్పుడు అట్టి విద్యార్థి

(i) గణిత శాస్త్రములో నూటికి నూరు మార్కులు పొంది ఉండుటకు.

(ii) సామాన్య శాస్త్రములో నూటికి నూరు మార్కులు పొందకుండుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన

నూటికి నూరు మార్కులు పొందిన విద్యార్థులు $=1184$

కావున $n = 1184$

(i) E_1అనునది గణితశాస్త్రంలో నూటికి నూరు మార్కులు తీసిన విద్యార్థులను పొందు ఘటన అనుకొనుము.

కావున $n(E_1) = 233$, అనగా, $r_1 = 233$

$$P(E_1) = \frac{r_1}{n} = \frac{233}{1184}$$

(ii) E_2 అనునది సామాన్య శాస్త్రములో నూటికి నూరు మార్కులు తీసిన విద్యార్థులను పొందు ఘటన అనుకొనుము.

కావున $n(E_2) = 106, \quad r_2 = 106$

$$P(E_2) = \frac{r_2}{n} = \frac{106}{1184}$$

$$P(E_2') = 1 - P(E_2)$$

$$= 1 - \frac{106}{1184}$$

$$= \frac{1078}{1184}0$$

అభ్యాసము 9.2

1. ఒక సంస్థ 6 నెలలలో 1000 ల్యాప్టాప్‌లను తయారుచేసెను.వాటిలో 25 ల్యాప్టాప్‌లు లోపము చెందినవిగా ఉండెను. తయారుచేయబడిన ల్యాప్టాప్‌ల నుండి ఒక ల్యాప్‌టాప్‌ను ఎన్నుకొనబడెను. అది లోపము లేనిదిగా ఉండుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.

2. 16-20 వయస్సుగల 400 యువకుల వద్ద జరుపబడిన ఒక సర్వేలో 191 మందికి ఓటరు గుర్తింపు కార్డు ఉన్నట్లు కనుగొనబడెను. యాదృచ్ఛికంగా ఒకరిని ఎన్నుకొనబడునప్పుడు, ఆ యువకుడు ఓటరు గుర్తింపు కార్డు లేకుండుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.

9 Probability.indd 321 04-03-2023 18:25:33

3. ఒక ప్రశ్నకు సరియైన సమాధానమును ఊహించుటకు గల సంభావ్యత $\frac{x}{3}$, ప్రశ్నకు సరియైన సమాధానమును ఊహించకుండుటకు గల సంభావ్యత $\frac{x}{5}$ అయిన x విలువను కనుగొనుము.

4. ఒక టెన్నిస్ క్రీడాకారుడు ఒక ప్రత్యేక పోటీలో గెలుచుటకు గల సంభావ్యత 0.72 అయిన ఆ క్రీడాకారుడు అదే పోటీలలో ఓడిపోవుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.

5. 1500 కుటుంబములను సర్వే చేయబడి వారి ఇంట్లో పని చేయు పనిమనుషుల వివరములను సేకరించి క్రింది విధముగా నమోదు చేయబడెను.

పని మనుషుల రకం	పాక్షిక సమయం మాత్రమే	పూర్తి సమయం మాత్రమే	రెండు రకములకు చెందినవారు
కుటుంబముల సంఖ్య	860	370	250

యాదృచ్ఛికంగా ఒక కుటుంబమును ఎన్నుకొనబడెను. ఆ కుటుంబము

(i) రెండు రకములకు చెందిన పని మనుషులు కలిగియుండుట.

(ii) పాక్షిక సమయం మాత్రమే పని చేయు పని మనుషులు కలిగియుండుట.

(iii)పని మనుషులు లేకుండా ఉండుటకు సంభావ్యత కనుగొనుము.





అభ్యాసం 9.3



బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు

1. '0' మరియు 1 కు మధ్యగల ఒక సంఖ్యతో అనిశ్చితమైన దానిని కొలుచుటను ఏమందురు.

   1) యాదృచ్ఛిక చలరాశి 2) ప్రయత్నం 3) సాధారణ ఘటన 4) సంభావ్యత

2. సంభావ్యత విలువ వీటి మధ్య ఉండును.

   1) -1 మరియు $+1$ 2) 0 మరియు 1 3) 0 మరియు n 4) 0 మరియు ∞

3. సాపేక్ష పౌనఃపున్య సిద్ధాంతంపై ఆధారపడిన సంభావ్యత

   1) అనుభావిత సంభావ్యత 2) సాంప్రదాయకరమైన సంభావ్యత

   3) అ మరియు ఆ 4) అ కాదు మరియు ఆ కాదు.

4. ఒక ఘటన యొక్క సంభావ్యత ఎలా ఉండకూడదు?

   1) సున్నకు సమానంగా 2) సున్న కంటే పెద్దది

   3) 1 కి సమానము 4) సున్న కంటె తక్కువ

5. ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగంలో అవకాశం గల అన్ని ఫలితముల సంభావ్యత ఎప్పుడు దీనికి సమానము.

   1) ఒకటి 2) సున్నా 3) అనంత 4) ఇవ్వబడినవన్నియు

6. A అనునది S యొక్క ఏదైనా ఒక ఘటన అనిన $P(A')$ విలువ

   1) 1 2) 0 3) $1-A$ 4) $1-P(A)$

9 Probability.indd 322 04-03-2023 18:25:34

7. క్రింది వానిలో ఏది ఒక ఘటన యొక్క సంభావ్యతగా ఉండుటకు వీలులేదు.

1) 0 2) 0.5 3) 1 4) -1

8. ఒక ప్రయోగంలో ప్రత్యేక పరిణామమును ఏమని అనబడును.

1) ప్రయత్నం 2) సాధారణ ఘటన 3) సమ్మేళన ఘటన 4) ఫలితము

9. ఒక ప్రయోగంలో ఒకటి లేక అంతకంటే ఎక్కువ ఫలితముల సేకరణను ఏమని పిలవబడును.

1) ఘటన 2) ఫలితము 3) సాధారణ బిందువు 4) వీటిలో ఏదీ లేదు.

10.. ఒక పాచిక _____ ఉన్నప్పుడు వాటి ఆరు ముఖములు సమసంభవము కలిగియున్నదనబడును.

1) చిన్నదిగా 2) క్రమముగా 3) ఆరు ముఖములు కలిగియున్నది 4) వృత్తాకారంలో

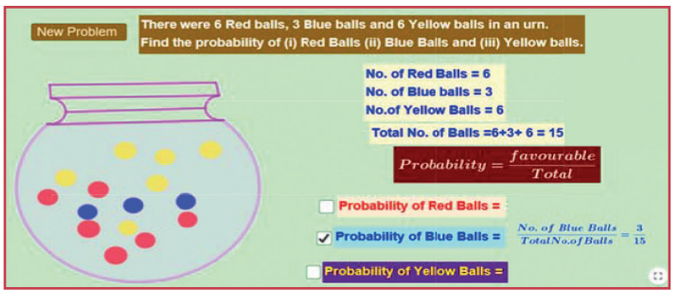
గుర్తించుకోవలసిన విషయములు

- ఒక ప్రయోగం యొక్క ఫలితములను మనము ఊహించగలిగితే అవి నిర్దేశింపదగిన ప్రయోగము అనబడును.
- ఒక ప్రయోగం యొక్క ఫలితములను మనం ఊహించలేకపోతే అవి యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం అనబడును.
- ఒక ప్రయోగంలో సాధ్యమైన అన్ని ఫలితముల సమితి ప్రతిరూప ఆవరణము S అనబడును.
- ఒక ప్రయోగంలో ఒక ప్రత్యేక ఫలితము లేదా ఫలితముల కలయికలను ఘటన అనబడును.
- ఒక ఫలితము యొక్క సంభావ్యత, సంభవించిన సంభావ్యత శాతానికి దగ్గరగా ఉండునని అనుభావిక సంభావ్యాత తెలియజేయును.
- రెండు ఘటనలు సంభవించుటకు అవకాశం ఒకే రకముగా ఉండిన, వాటిని సమ సంభవన ఘటనలందురు.
- రెండు ఘటనలు ఒకే ప్రయత్నంలో ఏకకాలంలో సంభవించుటకు సాధ్యము కాదు అయిన అట్టి వాటిని పరస్పర వర్జిత ఘటనలందరు.
- రెండు ఘటనలు E మరియు E' అనునవి పూరకమైన ఘటనలు అయిన $P(E)+P(E')=1$
- ఒక ఘటన ఖచ్చితముగా సంభవించుననిన అట్టి ఘటనలను ఖచ్చిత లేక దృఢ ఘటనలందురు. దృఢ ఘటన యొక్క సంభావ్యత 1 అగును.
- ఒక ఘటన ఎప్పటికీ సంభవించుటకు సాధ్యం కాదు అయిన అట్టి వాటిని అసాధ్య ఘటన అనబడును. అసాధ్య ఘటన సంభావ్యత సున్నా అగును.

9 Probability.indd 323 04-03-2023 18:25:35

అంతర్జాల కృత్యము

నిరీక్షించబడిన ఫలితమును చిత్రపటంలో చూపించబడెను.



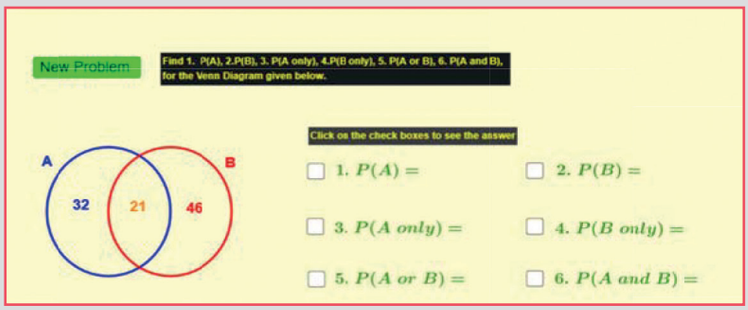
సోపానం - 1

బ్రౌజరును ఓపన్ చేసి క్రింద ఇవ్వబడిన లింక్ కాఫీ చేసి పేస్ట్ చేయండి లేదా ఇవ్వబడిన URL ను టైపు చేయండి లేదా QR కోడ్‌ను Scan చేయండి. GeoGebra work sheet లో "Probability" ఓపన్ అగును. Venn diagram మరియు Basic probability అను రెండు work sheet కనబడును.

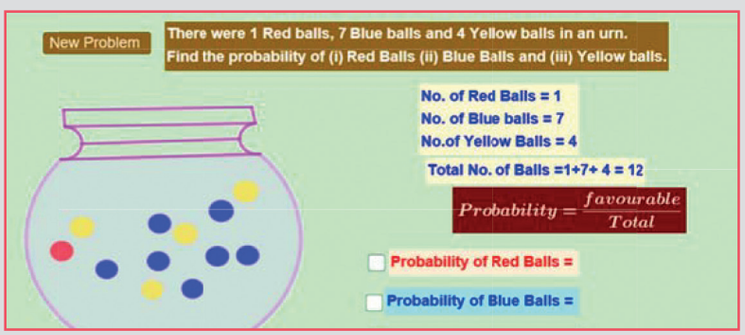
సోపానం - 2

"New Problem" ను క్లిక్ చేయుము. సాధనను గణించుము. సంబంధిత check box ను క్లిక్ చేసి జవాబును సరిచూడుము

సోపానం 1



సోపానం 2



Browse in the link

Probability: https://ggbm.at/mj887yua or Scan the QR Code.

9 Probability.indd 324 04-03-2023 18:25:35

జవాబులు

1 సమితి పరిభాష

అభ్యాసము 1.1

1. (i) సమితి (ii) సమితి కాదు (iii) సమితి (iv) సమితి కాదు

2. (i) {I, N, D, A} (ii) {P, A, R, L, E, O, G, M} (iii) {M, I, S, P}

   (iv) {C, Z, E, H, O, S, L, V, A, K, I}

3. (a) (i) సత్యము (ii) సత్యము (iii) అసత్యము (iv) సత్యము (v) అసత్యము (vi) అసత్యము

   (b) (i) A (ii) C (iii) $\notin$ (iv) $\in$

4. (i) $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$ (ii) $B = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}\right\}$

   (iii) $C = \{64, 125\}$ (iv) $D = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$

5. (i) $B = \{x : x$ అనునది అంతర్జాతీయ ఒక రోజు క్రికెట్ పోటీలో ద్విశతకము సాధించిన భారతీయ ఆటగాడు$\}$

   (ii) $C = \left\{x : x = \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$ (iii) $D = \{x : x$ అనునది సంవత్సరంలోని ఒక తమిళ నెల$\}$

   (iv) $E = \{x : x$ అనునది 9 కన్నా తక్కువ గల బేసి పూర్ణాంకము$\}$

6. (i) $P =$ 'J' తో ప్రారంభమయ్యే ఆంగ్ల సంవత్సరములోని నెలలు

   (ii) $Q = 5$ మరియు 31 మధ్య గల ప్రధాన సంఖ్యల సమితి.

   (iii) $R = 5$ కన్నా తక్కువ గల సహజ సంఖ్యల సమితి

   (iv) $S =$ ఆంగ్ల హల్లుల సమితి

అభ్యాసము 1.2

1. (i) $n(M) = 6$ (ii) $n(P) = 5$ (iii) $n(Q) = 3$ (iv) $n(R) = 10$ (v) $n(S) = 5$

2. (i) పరిమితము (ii) అపరిమితము (iii) అపరిమితము (iv) పరిమితము

3. (i) సమాన సమితులు (ii) అసమాన సమితులు (iii) సమ సమితులు (iv) సమాన సమితులు

Answers_Combine.indd 325 11-03-2023 15:15:40

4. (i) శూన్యసమితి (ii) శూన్య సమితి (iii) ఏకమూలక సమితి (iv) శూన్య సమితి

5. (i) పరస్పరం ఖండించు సమితులు (ii) వియుక్త సమితులు (iii) పరస్పరం ఖండించు సమితులు

6. (i) {చతురస్రము, రాంబస్} (ii) {వృత్తము} (iii) {త్రిభుజము} (iv) { }

7. { }, {a}, {a, b}, {a, {a, b}}

8. (i) {{ }, {a}, {b}, {a, b}}

(ii) {{ }, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3 }, {1, 2, 3}}

(iii) {{ }, {p}, {q} {r}, {s}, {p, q}, {p, r}, {p, s}, {q, r}, {q, s}, {r, s}, {p, q, r}, {p, q, s}, {p, r, s}, {q, r, s}, {p, q, r, s}} (iv) $P(E)$= {{ }}

9. (i) 8, 7 (ii) 1024, 1023

10. (i) 16 (ii) 1 (iii) 8

అభ్యాసము 1.3

1. (i) {2, 4, 7, 8, 10} (ii) {3, 4, 6, 7, 9, 11} (iii) {2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11}

(iv) {4, 7} (v) {2, 8, 10} (vi) {3, 6, 9, 11}

(vii) {1, 3, 6, 9, 11, 12} (viii) {1, 2, 8, 10, 12}

(ix) {1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

2. (i) {2, 5, 6, 10, 14, 16}, {2, 14}, {6, 10}, {5, 16}

(ii) {a, b, c, e, i, o, u}, {a, e, u}, {b, c}, {i, o}

(iii) {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, {1, 2, 3, 4, 5}, {6, 7, 8, 9, 10,}, {0}

(iv) {m, a, t, h, e, i, c, s, g, o, r, y}, {e, m, t,}, {a, h, i, c, s}, {g, o, r, y}

3. (i) {a, c, e, g} (ii) {b, c, f, g} (iii) {a, b, c, e, f, g} (iv) {c, g} (v) {c, g}

(vi) {a, b, c, e, f, g} (vii) {b, d, f, h} (viii) {a, d, e, h}

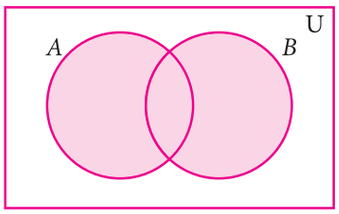
Answers_Combine.indd 326 11-03-2023 15:15:40

4. (i) {0, 2, 4, 6} (ii) {1, 4, 6} (iii) {0, 1, 2, 4, 6} (iv) {4, 6} (v) {4, 6}

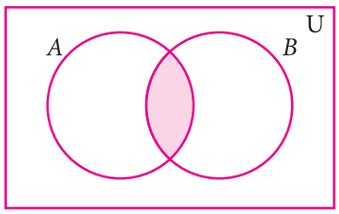
(vi) {0, 1, 2, 4, 6} (vii) {1, 3, 5, 7} (viii) {0, 2, 3, 5, 7}

5. (i) {1, 2, 7} (ii) {*m*, *o*, *p*, *q*, *j*} (iii) {6, 9, 10}

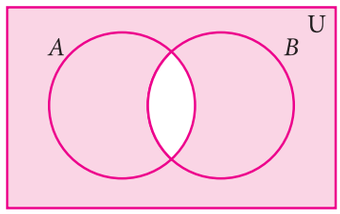
6. (i) $Y-X$ (ii) $(X \cup Y)'$ (iii) $(X - Y) \cup (Y - X)$

7. (i) 

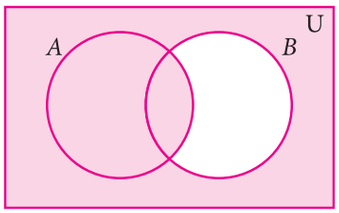
$A \cup B$

(ii) 

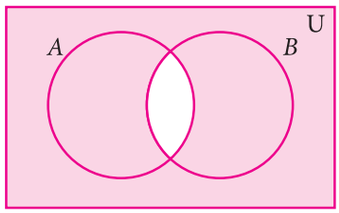
$A \cap B$

(iii) 

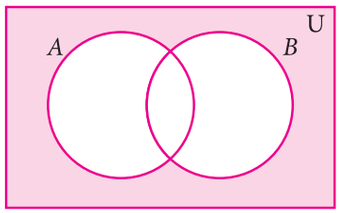
$(A \cap B)'$

(iv) 

$(B-A)'$

(v) 

$A' \cup B'$

(vi) 

$A' \cap B'$

(vii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

అభ్యాసము 1.4

1. (i) {1,2,3,4,5,7,9,11} (ii) {2,5} (iii) {3,5 }

అభ్యాసము 1.5

1. (i) $\{3,4,6\}$ (ii) $\{-1,5,7\}$ (iii) $\{-3,0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$

(iv) $\{-3,0,1,2\}$ (v) $\{1,2,4,6\}$ (vi) $\{4,6\}$ (vii) $\{-1,3,4,6\}$

2. (i) { a,b,c,d,e,f } (ii) $\{a,b,d\}$ (iii) { a,b,c,d,e,f } (iv) {a, b, d }

అభ్యాసము 1.6

1. (i) 15, 65 (ii) 250, 600 4. (1) 17 (ii) 22 (iii) 47

5. (i) 10 (ii) 10 (iii) 25 6. 1000 7. 8 8. సరియైనది కాదు

9. (i) 185 (ii) 141 (iii) 326 10. 70

11. $x = 20$, $y = 40$, $z = 30$ 12. (i) 5 (ii) 7 (iii)8

13. 5

Answers_Combine.indd 327 11-03-2023 15:15:46

అభ్యాసము 1.7

1. (2) 2. (1) 3. (3) 4. (2) 5. (4) 6. (1) 7. (2) 8. (4) 9. (3) 10. (4)

11. (2) 12. (1) 13. (1) 14. (3) 15. (4) 16. (1) 17. (4) 18. (3) 19. (3) 20. (1)

2 వాస్తవ సంఖ్యలు

అభ్యాసము 2.1

1. D 2. $-\frac{6}{11}, -\frac{5}{11}, -\frac{4}{11}, \ldots \frac{1}{11}$

3. (i) $\frac{9}{40}, \frac{19}{80}, \frac{39}{160}, \frac{79}{320}, \frac{159}{640}$;
ఇచ్చిన జవాబులలో ఇది ఒకటియగును. దీనికి అనేక జవాబులు కలవు.

(ii) 0.101, 0.102, ... 0.109
ఇచ్చిన జవాబులలో ఇది ఒకటియగును. దీనికి అనేక జవాబులు కలవు.

(iii) $-\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}, -\frac{9}{8}, -\frac{17}{16}, -\frac{33}{32}$
ఇచ్చిన జవాబులలో ఇది ఒకటియగును. దీనికి అనేక జవాబులు కలవు.

అభ్యాసము 2.2

1. (i) 0.2857142..., అంతమొందని మరియు ఆవర్తనం చెందునది (ii) $-5.\overline{27}$, అంతమొందని మరియు ఆవర్తనం చెందునది

(iii) $7.\overline{3}$, అంతమొందని మరియు ఆవర్తనం చెందునది (iv) 1.635, అంతమొందును

2. $0.\overline{076293}$, 6 3. $0.0\overline{303}$, $2.\overline{15}$

4. (i) $\frac{24}{99}$ (ii) $\frac{2325}{999}$ (iii) $-\frac{1283}{250}$ (iv) $\frac{143}{45}$ (v) $\frac{5681}{330}$ (vi) $-\frac{190924}{9000}$

5. (i) అంతమొందును (ii) అంతమొందును (iii) అంతమొందనిది (iv) అంతమొందనిది.

అభ్యాసము 2.3

2. (i) 0.301202200222..., 0.301303300333... (ii) 0.8616611666111 ..., 0.8717711777111 ...
(iii) 1.515511555..., 1.616611666...

3. 2.2362, 2.2363

అభ్యాసము 2.5

1.(i) 5^4 (ii) 5^{-1} (iii) $5^{\frac{1}{2}}$ (iv) $5^{\frac{3}{2}}$

2.(i) 4^2 (ii) $4^{\frac{3}{2}}$ (iii) $4^{\frac{5}{2}}$

Answers_Combine.indd 328 11-03-2023 15:15:52

3.(i) 7 (ii) 9 (iii) $\frac{1}{27}$ (iv) $\frac{25}{16}$

4.(i) $5^{\frac{1}{2}}$ (ii) $7^{\frac{1}{2}}$ (iii) $7^{\frac{10}{3}}$ (iv) $10^{\frac{-14}{3}}$

5.(i) 2 (ii) 3 (iii) 10 (iv) $\frac{4}{5}$

అభ్యాసము 2.6

1.(i) $21\sqrt{3}$ (ii) $3\sqrt[3]{5}$ (iii) $26\sqrt{3}$ (iv) $8\sqrt[3]{5}$

2. (i) $\sqrt{30}$ (ii) $\sqrt{5}$ (iii) 30 (iv) $49a - 25b$

(v) $\frac{5}{16}$ 3.(i) 1.852 (ii) 23.978

4. (i) $\sqrt[3]{5} > \sqrt[6]{3} > \sqrt[9]{4}$ (ii) $\sqrt{\sqrt{3}} > \sqrt[2]{\sqrt[3]{5}} > \sqrt[3]{\sqrt[4]{7}}$

5. (i) పొందవచ్చును (ii) పొందవచ్చును (iii) పొందవచ్చును (iv) పొందవచ్చును

6. (i) పొందవచ్చును (ii) పొందవచ్చును (iii) పొందవచ్చును (iv) పొందవచ్చును

అభ్యాసము 2.7

1.(i) $\frac{\sqrt{2}}{10}$ (ii) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (iii) $\frac{5\sqrt{6}}{6}$ (iv) $\frac{\sqrt{30}}{2}$

2. (i) $\frac{4}{3}(5 + 2\sqrt{6})$ (ii) $13 - 4\sqrt{6}$ (iii) $\frac{9 + 4\sqrt{30}}{21}$ (iv) $-2\sqrt{5}$

3. $a = \frac{-4}{3}, b = \frac{11}{3}$ 4. $x^2 + \frac{1}{x^2} = 18$ 5. 5.414

అభ్యాసము 2.8

1. (i) 5.6943×10^{11} (ii) 2.00057×10^{3} (iii) 6.0×10^{-7} (iv) 9.000002×10^{-4}

2. (i) 3459000 (ii) 56780 (iii) 0.0000100005 (iv) 0.0000002530009

3. (i) 1.44×10^{28} (ii) 8.0×10^{-60} (iii) 2.5×10^{-36}

4.(i) 7.0×10^{9} (ii) 9.4605284×10^{15} కి.మీ (iii) $9.1093822 \times 10^{-31}$ కి.గ్రా

5. (i) 1.505×10^{8} (ii) 1.5522×10^{17} (iii) 1.224×10^{7} (iv) 1.9558×10^{-1}

అభ్యాసము 2.9

1. (4) 2. (3) 3. (2) 4. (1) 5. (4) 6. (2) 7. (2) 8. (2) 9. (4) 10. (1)

11. (4) 12. (4) 13. (4) 14. (2) 15. (2) 16. (3) 17. (2) 18. (4) 19. (2) 20. (3)

Answers_Combine.indd 329 11-03-2023 15:16:06

3 బీజగణితము

అభ్యాసము 3.1

1. (i) బహుపద సమాసము కాదు. (ii) బహుపద సమాసము (iii) బహుపద సమాసము కాదు.
   (iv) బహుపద సమాసము (v) బహుపద సమాసము (vi) బహుహద సమాసము కాదు.

2.

	x^2 గుణకము	x గుణకము
(i)	$\frac{2}{5}$	-3
(ii)	-2	$-\sqrt{7}$
(iii)	π	-1
(iv)	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$
(v)	1	$-\frac{7}{2}$

3. (i) 7 (ii) 4 (iii) 5 (iv) 6 (v) 4

4.

	ఆరోహణ క్రమము	అవరోహణ క్రమము
(i)	$\sqrt{7}\,x^3 + 6x^2 + x - 9$	$-9 + x + 6x^2 + \sqrt{7}\,x^3$
(ii)	$-\frac{7}{2}x^4 - 5x^3 + \sqrt{2}\,x^2 + x$	$x + \sqrt{2}\,x^2 - 5x^3 - \frac{7}{2}x^4$
(iii)	$7x^3 - \frac{6}{5}x^2 + 4x - 1$	$-1 + 4x - \frac{6}{5}x^2 + 7x^3$
(iv)	$9y^4 + \sqrt{5}\,y^3 + y^2 - \frac{7}{3}y - 11$	$-11 - \frac{7}{3}y + y^2 + \sqrt{5}\,y^3 + 9y^4$

5. (i) $6x^3+6x^2-14x+17$, 3 (ii) $7x^3+7x^2+11x-8$, 3 (iii) $16x^4-6x^3-5x^2+7x-6$, 4

6. (i) $7x^2+8$, 2 (ii) $-y^3+6y^2-14y+2$, 3 (iii) $z^5-6z^4-6z^2-9z+7$, 5

7. $x^3-8x^2+11x+7$ 8. $2x^4-3x^3+5x^2-5x+6$

9. (i) $6x^4+7x^3-56x^2-63x+18$, 4 (ii) $105x^2-33x-18$, 2 (iii) $30x^3-77x^2+54x-7$, 3

10. x^2+y^2+2xy, ₹ 225 11. $9x^2-4$, 3596 sq. units

12. త్రిఘాత బహుపద సమాసము లేదా బహుపద సమాసము యొక్క అంతస్థు 3

అభ్యాసము 3.2

1. (i) 6 (ii) −6 (iii) 3 2. 1 3. (i) 3 (ii) $-\frac{5}{2}$ (iii) $\frac{3}{2}$ (iv) 0 (v) 0 (vi) $-\frac{b}{a}$

4. (i) $\frac{6}{5}$ (ii) −3 (iii) $-\frac{9}{10}$ (iv) $\frac{4}{9}$

6. (i) 2 (ii) 3 (iii) 0 (iv) 1 (v) 1

అభ్యాసము 3.3

1. $p(x)$ అనునది $g(x)$ యొక్క గుణిజము కాదు.

2. (i) శేషము : 0 (ii) శేషము : $\frac{3}{2}$ (iii) శేషము : 62

3. శేషము : −143 4. శేషము : 2019 5. $K = 8$

Answers_Combine.indd 330 11-03-2023 15:16:37

6. $a = -3$, శేషము : 27 7. (i) $(x-1)$ ఒక కారణాంకము (ii) $(x-1)$ ఒక కారణాంకము కాదు.
8. $p(x)$ కు కారణాంకము $(x-5)$ 9. $m = 10$ 11. $k = 3$ 12. అవును

అభ్యాసము 3.4

1. (i) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4xy + 12yz + 6xz$ (ii) $p^2 + 4q^2 + 9r^2 - 4pq + 12qr - 6pr$
(iii) $8p^3 - 24p^2 - 14p + 60$ (iv) $27a^3 + 27a^2 - 18a - 8$

2.(i) 18,107,210 (ii) −32, −6, +90

3. (i) 14 (ii) $\frac{59}{70}$ (iii) 78 (iv) $\frac{78}{70}$

4. (i) $27a^3 - 64b^3 - 108a^2b + 144ab^2$ (ii) $x^3 + \frac{1}{y^3} + \frac{3x^2}{y} + \frac{3x}{y^2}$

5.(i) 941192 (ii) 1003003001

6. 29 7. 280 8. 335 9. 198 10. $\pm 5, \pm 110$

11. 36 12.(i) $8a^3 + 27b^3 + 64c^3 - 72abc$ (ii) $x^3 - 8y^3 + 27z^3 + 18xyz$

13.(i) −630 (ii) $\frac{-9}{4}$

14. 72xyz

అభ్యాసము 3.5

1.(i) $2a^2(1 + 2b + 4c)$ (ii) $(a-m)(b-c)$

2.(i) $\left(x+2\right)^2$ (ii) $3(a-4b)^2$

(iii) $x(x+2)(x-2)(x^2+4)$ (iv) $\left(m + \frac{1}{m} + 5\right)\left(m + \frac{1}{m} - 5\right)$

(v) $6(1+6x)(1-6x)$ (vi) $\left(a - \frac{1}{a} + 4\right)\left(a - \frac{1}{a} - 4\right)$

3. (i) $(2x + 3y + 5z)^2$

(ii) $(-5x + 2y + 3z)^2$ (or) $(5x - 2y - 3z)^2$

4. (i) $(2x + 5y)(4x^2 - 10xy + 25y^2)$

(ii) $(3x - 2y)(9x^2 + 6xy + 4y^2)$

(iii) $(a+2)(a-2)(a^2 + 4 - 2a)(a^2 + 4 + 2a)$

5. (i) $(x + 2y - 1)(x^2 + 4y^2 + 1 - 2xy + 2y + x)$

(ii) $(l - 2m - 3n)(l^2 + 4m^2 + 9n^2 + 2lm - 6mn + 3ln)$

Answers_Combine.indd 331 11-03-2023 15:16:47

అభ్యాసము 3.6

1.(i) $(x+6)(x+4)$

(ii) $(z+6)(z-2)$

(iii) $(p-8)(p+2)$

(iv) $(t-9)(t-8)$

(v) $(y-20)(y+4)$

(vi) $(a+30)(a-20)$

2. (i) $(2a+5)(a+2)$

(ii) $(x-7y)(5x+6y)$ (iii) $(2x-3)(4x-3)$ (iv) $2(3x+2y)(x+2y)$

(v) $3x^2(3y+2)^2$ (vi) $(a+b+6)(a+b+3)$

3. (i) $(p-q-8)(p-q+2)$

(ii) $(m+6n)(m-4n)$ (iii) $\left(a+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}a-3\right)$ (iv) $(a+1)(a-1)(a^2-2)$

(v) $m(4m+5n)(2m-3n)$

(vi) $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2$

అభ్యాసము 3.7

1. (i) భాగఫలము : $4x^2-6x-5$, శేషము : 33 (ii) భాగఫలము : $4y^2-6y+5$, శేషము : -10

(iii) భాగఫలము : $4x^2+2x+1$, శేషము : 0 (iv) భాగఫలము : $8z^2-6z+2$, శేషము : 10

2. పొడవు : $x+4$ 3. ఎత్తు : $5x-4$ 4. సరాసరి : $x^2-5x+25$

5. (i) $x^2+4x+5,\ 12$ (ii) $(x^2-1),\ -2$

(iii) $3x^2-11x+40,\ -125$ (iv) $2x^3-\frac{x^2}{2}-\frac{3x}{8}+\frac{51}{32},\ \frac{109}{32}$

6. $4x^3-2x^2+3,\ p=-2,\ q=0,$ శేషము=-10

7. $a=20,\ b=94$ & శేషము=388

అభ్యాసము 3.8

1.(i) $(x-2)(x+3)(x-4)$ (ii) $(x+1)(x-2)(2x-1)$

(iii) $(x-1)(2x-1)(2x+3)$ (iv) $(x+2)(x+3)(x-4)$

Answers_Combine.indd 332 11-03-2023 15:17:02

(v) $(x-1)(x-2)(x+3)$ (vi) $(x-1)(x-10)(x+1)$

అభ్యాసము 3.9

1. (i) p^5 (ii) 1 (iii) $3a^2b^2c^3$ (iv) $16x^6$

(v) abc (vi) $7xyz^2$ (vii) 25ab (viii) 1

2. (i) 1 (ii) a^{m+1} (iii) $(2a+1)$ (iv) 1

(v) $\left(x+1\right)\left(x-1\right)$ (vi) $\left(a-3x\right)$

అభ్యాసము 3.10

2. (i) (5,2) (ii) అనంత సాధనాలు (iii) సాధన లేదు.

(iv) (−3, −3) (v) (1,3) (vi) (−3, 3)

3. 75కి.మీ/గం॥, 25కి.మీ/గం॥

అభ్యాసము 3.11

1.(i)(2, −1) (ii) (4,2) (iii) (40,100) (iv) $\left(\sqrt{8},\sqrt{3}\right)$

(2) 45 (3) 409

అభ్యాసము 3.12

1.(i) (2,1) (ii) (7,2) (iii) (80,30) (iv) $\left(1,\frac{3}{2}\right)$

(v) $\left(\frac{1}{3},-1\right)$ (vi) (2,4) (2) ₹30000, ₹40000 (3) 75, 15

అభ్యాసము 3.13

1.(i) (3,4) (ii) (3, −1) (iii) $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$

(2) '2' రూపాయల నాణెములు 60, '5' రూపాయల నాణెములు 20

(3) పెద్ద గొట్టము 40 గంటలు, చిన్న గొట్టము 60 గంటలు

అభ్యాసము 3.14

1. 64

2. $\frac{5}{7}$

3. $\angle A=120^\circ$, $\angle B=70^\circ$, $\angle C=60^\circ$, $\angle D=110^\circ$

4. దూరదర్శిని ధర = ₹20000; శీతలీకరణ పెట్టె ధర = ₹10000

Answers_Combine.indd 333 11-03-2023 15:17:08

5. 40, 48

6. ఒక భారతీయుడు 36 రోజులు, ఒక చైనీయుడు 18 రోజులు

అభ్యాసము 3.15

1. (4) 2. (3) 3. (4) 4. (4) 5. (2) 6. (1) 7. (4) 8. (4) 9. (4) 10. (3)

11. (2) 12. (3) 13. (3) 14. (2) 15. (3) 16. (3) 17. (4) 18. (2) 19. (3) 20. (2)

21. (4) 22. (3) 23. (2) 24. (1) 25. (2) 26. (3) 27. (1) 28. (3) 29. (2)

4 జ్యామితి

అభ్యాసము 4.1

1. (i) 70° (ii) 288° (iii) 89° 2. 30°, 60°, 90° 5. 80°, 85 °, 15 °

అభ్యాసము 4.2

1. (i) 40°, 80°, 100°, 140° 2. 62°, 114° , 66° 3. 44° 4. 10సెం.మీ.

7. (i) 30° (ii) 105° (iii) 75° (iv) 105° 8. 122° , 29°

9. నిష్పత్తులు సమానము 10. d = 7.6

అభ్యాసము 4.3

1. 24సెం.మీ. 2. 17సెం.మీ. 3. 8cm, 45°, 45°

4. 18సెం.మీ. 5. 14 సెం.మీ. 6. 6 సెం.మీ.

7. (i) 45° (ii) 10° (iii) 55° (iv) 120° (v) 60°

8. $\angle BDC = 25°, \angle DBA = 65°, \angle COB = 50°$

అభ్యాసము 4.4

1. 30° 2.(i) $\angle ACD = 55°$ (ii) $\angle ACB = 50°$ (iii) $\angle DAE = 25°$

3. $\angle A = 64°$; $\angle B = 80°$; $\angle C = 116°$; $\angle D = 100°$

4.(i) $\angle CAD = 40°$ (ii) $\angle BCD = 80°$ 5. వ్యాసార్ధము=5సెం.మీ. 6. 3.25 మీ.

7. $\angle OAC = 30°$ 8. 5.6మీ. 9. $\angle RPO = 60°$

Answers_Combine.indd 334 11-03-2023 15:17:13

అభ్యాసము 4.7

1. (2) 2. (3) 3. (1) 4. (4) 5. (4) 6. (3) 7. (2) 8. (2) 9. (4) 10. (2)

11. (3) 12. (3) 13. (1) 14. (1) 15. (4) 16. (2) 17. (2) 18. (3) 19. (2) 20. (4)

5 నిరూపక రేఖాగణితము

అభ్యాసము 5.1

1. $P(-7,6)$ = II వ పాదము; $Q(7,-2)$ = IV వ పాదము; $R(-6,-7)$ = III వ పాదము; $S(3,5)$ = I వ పాదము; మరియు $T(3,9)$ = I వ పాదము

2. (i) $P = (-4,4)$ (ii) $Q = (3,3)$ (iii) $R=(4,-2)$ (iv) $S = (-5,-3)$

3. (i) x -అక్షమునకు సమాంతరమైన సరళరేఖ (ii) y -అక్షముపై అమరిన సరళరేఖ.

4. (i) చతురస్రము (ii) సమలంబ చతుర్భుజము

అభ్యాసము 5.2

1. (i) $\sqrt{10}$ ప్రమాణములు (ii) $2\sqrt{26}$ ప్రమాణములు (iii) $c-a$ (iv)13 ప్రమాణములు

2. (i) ఏకరేఖీయము (ii) ఏకరేఖీయము 7. 5 లేక 1

8. A (9, 9) యొక్క అక్ష నిరూపకములు లేక $(-5,-5)$ 9. $y = 4x+9$

10. $P(2,0)$ యొక్క అక్ష నిరూపకములు

12. $30\sqrt{2}$

అభ్యాసము 5.3

1.(i) $(-4,-1)$ (ii) $(0,-1)$ (iii) $(a+b,a)$ (iv) $(1,-1)$

2. $(-5,-3)$ 3. $P = -15$ 4. $(9,3)(-5,5)$ మరియు $(1,1)$

5. $\left(\frac{9}{2},\frac{3}{2}\right)$ 6. $(1,8)$

అభ్యాసము 5.4

1. $(7,3)$ 2. 5:2 3. $(3,4)$

4. $(-2,3),(1,0)$ 5. $\left(\frac{19}{2},\frac{13}{2}\right),\left(\frac{-9}{2},\frac{-15}{2}\right)$ 7. $(3,2)$

అభ్యాసము 5.5

1.(i) $(2,-3)$ (ii) $\left(\frac{-8}{3},\frac{-11}{3}\right)$ 2. $(4,-6)$ 3. 5 ప్రమాణములు

Answers_Combine.indd 335 11-03-2023 15:17:21

4. 20 5. $3\sqrt{\frac{5}{2}}$ ప్రమాణములు 6. $(1,0)$ 7. $(5,-2)$

అభ్యాసము 5.6

1. (3) 2. (3) 3. (3) 4. (2) 5. (2) 6. (4) 7. (3) 8. (3) 9. (3) 10. (3)

11. (4) 12. (1) 13. (3) 14. (4) 15. (2) 16. (3) 17. (2) 18. (2) 19. (4) 20. (2)

6 త్రికోణమితి

అభ్యాసము 6.1

1. $\sin B=\frac{9}{41};\cos B=\frac{40}{41};\tan B=\frac{9}{40};\ \operatorname{cosec} B=\frac{41}{9};\sec B=\frac{41}{40};\cot B=\frac{40}{9}$

2. (i) $\sin B=\frac{12}{13}$ (ii) $\sec B=\frac{13}{5}$ (iii) $\cot B=\frac{5}{12}$ (iv) $\cos C=\frac{4}{5}$

(v) $\tan C=\frac{3}{4}$ (vi) $\operatorname{cosec} C=\frac{5}{3}$

3. $\sin\theta=\frac{1}{2};\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2};\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}};\ \operatorname{cosec}\theta=\frac{2}{1};\sec\theta=\frac{2}{\sqrt{3}};\cot\theta=\sqrt{3}$

4. $\frac{3}{40}$ 5. $\sin A=\frac{1-x^2}{1+x^2};\tan A=\frac{1-x^2}{2x}$ 7. $\frac{1}{2}$

8. $\frac{1}{2}$ 9. $\sin\alpha=\frac{4}{5};\cos\beta=\frac{4}{5};\tan\phi=\frac{4}{3}$ 10. 7m

అభ్యాసము 6.2

2.(i) 0 (ii) $\frac{7}{4}$ (iii) 3 4. 2

అభ్యాసము 6.3

1.(i) 1 (ii) 1 (iii) 1 (iv) 2

అభ్యాసము 6.4

1.(i) 0.7547 (ii) 0.2648 (iii) 1.3985 (iv) 0.3641

(v) 0.8302 (vi) 2.7907 2.(i) 85°57′ (or) 85°58′ (or) 85°59′

(ii) 47°27′ (iii) 4°7′ (iv) 87°39′ (v) 82°30′

3.(i) 1.9970 (ii) 2.8659 4. 18.81 సెం.మీ^{2} 5. 36°52′

6. 54.02 మీటర్లు

అభ్యాసము 6.5

1. (1) 2. (2) 3. (2) 4. (3) 5. (2) 6. (3) 7. (3) 8. (1) 9. (2) 10. (2)

Answers_Combine.indd 336 11-03-2023 15:17:27

7 క్షేత్రగణితము

అభ్యాసము 7.1

1.(i) 120 సెం.మీ^{2} (ii) 7.2 మీ^{2} 2. 1320 మీ^{2}, ₹26400 3. 12000 మీ^{2}

4. 1558.8 సెం.మీ^{2} 5. ₹ 1050 6. 240 సెం.మీ^{2} 7. 138 సెం.మీ^{2}

8. 354మీ^{2} 9. 1536 మీ^{2} 10. 672 మీ^{2}

అభ్యాసము 7.2

1. 1160 సెం.మీ^{2}, 560 సెం.మీ^{2} 2. ₹1716 3. ₹3349

4.(i) 384 మీ^{2}, 256 మీ^{2} (ii) 2646 సెం.మీ^{2}, 1764 సెం.మీ^{2} (iii) 337.5 సెం.మీ^{2}, 225 సెం.మీ^{2}

5. 1600 సెం.మీ^{2} 6. 253.50మీ^{2}, ₹6084 7. 224 సెం.మీ^{2}, 128 సెం.మీ^{2}

అభ్యాసము 7.3

1.(i) 576 సెం.మీ^{3} (ii) 2250 మీ^{3} 2. 630 సెం.మీ^{3}

3. 25 సెం.మీ, 20 సెం.మీ, 15 సెం.మీ 4. 2624000 లీటర్లు 5. 25000

6. 12 మీ 7.(i) 125 సెం.మీ^{3} (ii) 42.875 మీ^{3} (iii) 9261 సెం.మీ^{3}

8. 5 మీ 9. 15 సెం.మీ

అభ్యాసము 7.4

1. (3) 2. (2) 3. (4) 4. (3) 5. (3) 6. (1) 7. (2) 8. (3) 9. (4) 10. (1)

8 సాంఖ్యకశాస్త్రము

అభ్యాసము 8.1

1. $27°C$ 2. 44కి.గ్రా. 3. 56.96 (లేక) 57 (రమారమి)

4. 142.5 మి.మీ^{3} 5. $p = 20$ 6. 40.2 7. 29.29 8. 29.05

అభ్యాసము 8.2

1. 47 2. 44 3. 21 4. 32

5. 31 6. 38

అభ్యాసము 8.3

1. 6600, 7000, 7000 2. 3.1 మరియు 3.3 (ద్విబాహుళకము) 3. 15

4. 40 5. 24 6. 58.5

Answers_Combine.indd 337 11-03-2023 15:17:27

అభ్యాసము 8.4

1. (1) 2. (3) 3. (3) 4. (2) 5. (1) 6. (4) 7. (1) 8. (2) 9. (2) 10. (3)

9 సంభావ్యత

అభ్యాసము 9.1

1. $\frac{1}{7}$ 2. $\frac{3}{13}$ 3. $\frac{1}{2}$ 4.(i) $\frac{5}{24}$

(ii) $\frac{1}{8}$ (iii) $\frac{2}{3}$ 5. $\frac{1}{4}$ 6.(i) 0

(ii) $\frac{1}{12}$ (iii) 1 7. $\frac{1}{280}$ 8. $\frac{1}{5}$

9. $\frac{3}{4}$

అభ్యాసము 9.2

1. 0.9975 2. $\frac{209}{400}$ 3. $\frac{15}{8}$ 4. 0.28

5.(i) $\frac{1}{6}$ (ii) $\frac{43}{75}$ (iii) $\frac{1}{75}$

అభ్యాసము 9.3

1. (4) 2. (2) 3. (1) 4. (4) 5. (1) 6. (4) 7. (4) 8. (4) 9. (1) 10. (2)

Answers_Combine.indd 338 11-03-2023 15:17:30

గణిత సాంకేతిక పదాలు

Abscissa	X-అక్షం యొక్క దూరం
Acute triangle	అల్పకోణ త్రిభుజము
Adjacent angles	ఆసన్న కోణములు
Algebraic expression	బీజీయ సమాసము
Alternate angles	ఏకాంతర కోణాలు
Altitudes of a triangle	త్రిభుజ ఉన్నతులు
Angle	కోణము
Angle of elevation	ఊర్ధ్వ కోణము
Arithmetic mean	అంకగణిత మధ్యమము
Associative property	సహచర ధర్మము
Assumed mean	ఊహించిన అంకమధ్యమము
Binomial expression	ద్విపద సమాసము
Binomial surds	ద్విపద కరణులు
Cardinal number of a set	కార్డినల్ సంఖ్యల సమితి
Cartesian plane	కార్టేషియన్ తలము
Cartesian coordinate system	కార్టేషియన్ నిరూపక వ్యవస్థ
Centre	కేంద్రము
Chord	జ్యా
Circum radius	పరివృత్త వ్యాసార్ధము
Circumcentre of a triangle	త్రిభుజం యొక్క పరివృత్త కేంద్రము
Circumcircle	పరివృత్తము
Circumference	వృత్తపరిధి / వృత్త చుట్టుకొలత
Classical probability	సాంప్రదాయక సంభావ్యత
Ordinate	Y– అక్షము యొక్క దూరము
Co-efficient	గుణకము
Coinciding lines	ఏకీభవ రేఖలు
Collections	సేకరణలు
Commutative property	స్థిత్యంతర ధర్మము
Compound surds	సంయుక్త కరణులు
Complement of a set	పూరక సమితి
Complementary angles	పూరక కోణములు
Complementary events	పూరక ఘటనలు
Concentric circle	ఏక కేంద్రవృత్తాలు
Concurrent lines	అనుషక్తరేఖలు
Congruent circle	సర్వ సమాన వృత్తములు
Congruent triangles	సర్వ సమాన త్రిభుజాలు
Conjugate	సంయుగ్మము
Consistent	నిశ్చితి
Constant	స్థిరాంకము
Coordinate axes	నిరూపక అక్షములు
Corresponding angles	అనురూప కోణములు
Cube	ఘనము
Cubic polynomial	ఘణ బహుపది
Cuboid	దీర్ఘ ఘనము
Cyclic Quadrilateral	చక్రీయ చతుర్భుజం
Decimal expansion	దశాంశ సమాసము
Decimal representation	దశాంశ సూచిక
Degree of polynomial	బహుపది అంతస్తు
Denseness property	సాంద్ర ధర్మము
Descriptive form	విస్తరణ రూపము
Deterministic Experiment	ప్రయోగ నిర్ధారణ
Diagonal	కర్ణము
Diameter	వ్యాసము
Dice	పాచిక
Difference of two sets	రెండు సమితుల భేదము
Disjoint sets	వియుక్త సమితులు
Division algorithm	భాగహార శేష విధి
Division Algoritham of polynomial	బహుపదుల యొక్క భాగాహార శేష విధి
Edge	అంచు
Empirical probability	అనుభావిక సంభావ్యత

Glossary-Combine.indd 339 04-03-2023 18:28:35

Empty set/Null set	శూన్య సమితి
Equal sets	సమ సమితులు
Equally likely event	ఒకేరకమైన సమ ఘటనలు
Equiangular triangle	సమకోణ త్రిభుజము
Equilibrium	సమతుల్యత
Equivalent sets	సమాన సమితిలు
Event	ఘటన
Excentre	బాహ్య కేంద్రము
Externally	బాహ్యము
Face of a solid	ఘన ముఖము
Factor theorem	కారణాంక సిద్ధాంతము
Factorisation	కారణాంకము
Finite set	పరిమిత సమితి
Frequency table	పౌనఃపున్య పట్టిక
Greatest Common Divisor (G.C.D)	గరిష్ట సామాన్య భాజకము
Grouped data	వర్గీకృత దత్తాంశము
Hypotenuse	కర్ణము
Identities	సర్వ సమానత్వము
Impossible event	అసంభవ ఘటన
Incentre	అంతర కేంద్రము
Incircle	అంతర వృత్తము
Inconsistent	అనిశ్చిత
Indices	సూచీలు
Infinite set	అపరిమిత సమితి
Inradius	అంతర వ్యాసార్ధము
Interior angles	అంతర కోణములు
Internally	అంతరముగా
Intersecting lines	ఖండించు రేఖలు
Intersection of two sets	రెండు సమితుల ఛేదనము
Irrational numbers	కరణీయ సంఖ్యలు
Isosceles Trapezium	సమద్విభుజ ట్రెపీజియం

Isosceles triangles	సమద్విబాహు త్రిభుజము
Lateral surface area	ప్రక్కతల వైశాల్యం
Linear equations	రేఖీయ సమీకరణములు
Linear pair of angles	రేఖీయజత కోణములు
Linear polynomial expression	ఏకఘాత బహుపద సమాసము
Major sector	అధిక వృత్త ఖండము
Mean difference	సగటు భేదము
Measures of central tendency	కేంద్రీయ స్థాన విలువలు
Median	మధ్యగతము
Median of a triangle	త్రిభుజం యొక్క మధ్యగతరేఖ
Mid point	మధ్య బిందువు
Minor sector	అల్పవృత్తఖండము
Mixed surds	మిశ్రమ కరణలు
Mode	బాహుళకము
Monomial expression	ఏకపద సమాసము
Mutually exclusive events	పరస్పర వర్జిత ఘటనలు
Negative integers	ఋణపూర్ణ సంఖ్యలు
Non-terminating decimals	అంతము కాని దశాంశములు
Obtuse traingle	అధికకోణ త్రిభుజం
Opposite side	ఎధుటి భుజము
Ortho centre of a triangle	త్రిభుజం యొక్క లంబకేంద్రము
Outcome	పర్యవసానం
Overlapping sets	పరస్పరం వ్యాప్తి చెందు సమితులు
Parallel lines	సమాంతర రేఖలు
Period of decimals	దశాంశ ఆవర్తనము
Polygon	బహుభుజి
Positive integers	ధన పూర్ణ సంఖ్యలు
Power set	ఘాత సమితి

Glossary-Combine.indd 340 04-03-2023 18:28:35

Primary data	ప్రాథమిక దత్తాంశము
Probability	సంభావ్యత
Proper sub set	శుద్ధ ఉపసమితి / క్రమోప సమితి
Pure surds	శుద్ధ కరణి
Quadrant	వృత్త పాదము
Quadratic polynomial	వర్గ బహుపది
Quadrilateral	చతుర్భుజము
Radical	కరణి మూలము
Radicand	మూలాధారము
Random Experiment	యాదృచ్ఛిక ప్రయోగము
Rational numbers	అకరణీయ సంఖ్యలు
Rationalisation	అకరణీయం
Raw data	ముడి దత్తాంశము
Real number	వాస్తవ సంఖ్య
Recurring decimals	మరలా మరలా వచ్చు దశాంశములు
Remainder theroem	శేష సిద్ధాంతము
Right triangle	లంబ కోణ త్రిభుజము
Roots of a polynomial	బహుపద మూలములు
Sample point	ప్రతిరూప బిందువు
Sample space	ప్రతిరూప ఆవరణము
Scientific notation	వైజ్ఞానిక సంకేతము
Secondary data	ద్వితీయ దత్తాంశము
Section formula	విభజన సూత్రము
Sector	వృత్త ఖండము
Segment	భాగము
Semi-circle	అర్ధ వృత్తము
Set complementation	సమితి పూరకము
Set difference	సమితుల వ్యత్యాసము
Set operations	సమితి ప్రక్రియలు

Sets	సమితులు
Singular set/Singleton set	ఏకమూలక సమితి
Square root	వర్గ మూలము
Step-deviation method	సోపాన – విచలన పద్ధతి
Substitution method	ప్రతిక్షేపించు పద్ధతి
Subset	ఉపసమితి
Surds	కరణులు
Sure event	ఖచ్చిత ఘటన
Symmetric difference of sets	సమితులలోని సౌష్ఠవ వ్యత్యాసము
Synthetic division	సంయోజిత భాగహారము
Terminating Decimals	అంతమయ్యే దశాంశము
Total surface area	సంపూర్ణతల వైశాల్యము
Transversal	తిర్యగ్రేఖ
Trapezium	ట్రెపీజియం
Trial	ప్రయత్నము
Trigonometry	త్రికోణమితి
Trinomial expression	త్రిపద సమాసము
Uncertainty	అనిశ్చితము
Ungrouped data	సమూహంకాని దత్తాంశము
Union of sets	సమితుల సమ్మేళనము
Universal set	విశ్వ సమితి
Venn Diagram	వెన్ చిత్రము
Vertically opposite angles	శీర్షాభిముఖ కోణములు
Vertex	శీర్షము
Volume	ఘనపరిమాణము
Well defined	సునిర్వచిత
Zero / Factor	సున్న /కారణాంకము
Zeros of polynomial	బహుపది శూన్యవిలువ

Glossary-Combine.indd 341 04-03-2023 18:28:35

Secondary Mathematics - Class 9 (Telugu Medium)
Text Book Development Team

Academic Advisor

Dr. P. Kumar,
Joint Director (Syllabus)
SCERT, Chennai-6.

Co-ordinators

K. Chandrasekaran,
Lecturer, DIET,
Chennai.

Dr. M. Ethirajulu,
Asst. Professor, SCERT,
Chennai.

Art and Design Team

Illustration

- **Shanmugam B** Art Teacher, PUMS, Thirumalai Kuppam, Madhanur Block, Vellore Dt.
  Art Teachers, Government of Tamil Nadu.
  Students,
  Government College of Fine Arts,
  Chennai & Kumbakonam.

Layout Artist

- **Joy Graphics,** Chintadripet, Chennai - 02

In-House QC

- **Jerald wilson C,** Villupuram, Anilady - 605 651.
- **Mathan Raj R,** Anilady - 605 651.
- **Arun Kamaraj P,** Kanakkan Kuppam - 604 151.

Co-ordination

- **Ramesh Munisamy**

Typist

- **A. Palanivel,** Typist, SCERT, Chennai.
- **Kanimozhi T** Computer Teacher, GBHSS, SSA, Avadi.

Translators

- **R. Srinivasan,** Headmaster,
  G.H.S.S., Nallur, Hosur, Krishnagiri Dist.
- **C.K. Gopalappa,** Headmaster,
  G.H.S., Mornapalli, Hosur, Krishnagiri Dist.
- **V. Srinivasa Rao,** P.G. Asst.,
  G.B. Hr. Sec. School, Pallipat, Thiruvallur Dist.
- **P. Natarajan,** B.T. Asst.,
  G.B. Hr. Sec. School, Podaturpet, Thiruvallur Dist.
- **K. RameshKumar,** B.T. Asst.,
  GHS, Keechalam, Pallipat, Thiruvallur Dist.
- **Velam Nagaraju,** B.T. Asst.,
  G.H.S., Muthali, Hosur, Krishnagiri Dist.
- **Y.Narayanappa,** B.T. Asst.,
  G.H.S., Kothapalli, Hosur, Krishnagiri Dist.
- **B.R. Venkatesulu,** B.T. Asst.,
  G.H.S., Bukkasagaram, Hosur, Krishnagiri Dist.
- **Y.S. Venkatesamoorthy,** B.T. Asst.,
  G.G.H.S., Bagalur, Hosur,Krishnagiri Dist.
- **J. Krishnamoorthy,** B.T. Asst.,
  G.G.H.S., Deverapalli, Hosur, Krishnagiri Dist.
- **S. Sathyanarayana,** B.T. Asst.,
  Kesari Hr. Sec. School, Mylapore, Chennai Dist.

This book has been printed on 80 GSM
Elegant Maplitho paper
Printed by offset at :

Author-Page.indd 342 27-02-2023 20:04:38

Author-Page.indd 343 27-02-2023 20:04:38

Author-Page.indd 344 27-02-2023 20:04:38

Author-Page.indd 345 27-02-2023 20:04:39

Author-Page.indd 346 27-02-2023 20:04:39